

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

*Κυβικά Πολυώνυμα, Ελλείψεις και το
Θεώρημα Gauss-Lucas*

Φοιτητής:

ΜΑΝΟΣ ΜΙΧΕΛΑΚΗΣ

Επιβλέπων:

Καθηγητής Ανδρέας

ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ



Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
2	Βασικές έννοιες μιγαδικών αριθμών	7
2.1	Οι μιγαδικοί αριθμοί	7
2.2	Κυβικά πολυώνυμα	10
2.3	Γραμμικές και αφινικές απεικονίσεις του επιπέδου	15
2.4	Γεωμετρικά Σύνολα του επιπέδου	21
2.4.1	Ευθεία και ημιεπίπεδο	21
2.4.2	Κύκλος και έλλειψη	22
3	Το θεώρημα Gauss-Lucas	29
3.1	Κέντρα βάρους	29
3.2	Ρίζες της παραγώγου πολυωνύμου	30
4	Οι εγγεγραμμένες ελλείψεις Steiner	37
5	Χαρακτηρισμός της έλλειψης Steiner	43
6	Η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής	49
7	Εφαρμογές	57

7.1	Ελλειπτικές τροχιές ουρανίων σωμάτων	57
7.2	Προσδιορισμός θέσης πάνω στη Γη	60

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία παρουσιάζει δύο σημαντικά θεωρήματα της γεωμετρίας του Ευκλείδειου επιπέδου με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών. Συγκεκριμένα μας απασχόλησε η εγγεγραμμένη σε τρίγωνο έλλειψη *Steiner* και η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής που εκτιμά το σχήμα ενός νέφους σημείων του επιπέδου. Τα δύο αυτά θέματα συναντώνται σε έννοιες όπως το κέντρο βάρους ή κεντροειδές σημείων του επιπέδου, κυρίως όμως η χρήση των μιγαδικών αριθμών στους υπολογισμούς. Ωστόσο εδώ συνδυάζουμε τη χρήση των μιγαδικών αριθμών με τη γραμμική άλγεβρα και συγκεκριμένα με τις τετραγωνικές μορφές σε δύο μεταβλητές. Η εργασία στηρίχτηκε στο άρθρο *MINDA D., PHELPS S Triangles, Ellipses and Cubic Polynomials*, *American Math. Monthly*, **115** (2008), 679-689 με τροποποιήσεις σε κάποια σημεία αλλά και δύο προσθήκες.

Ξεκινάμε συνοψίζοντας τις απαραίτητες γνώσεις για την έκφραση ευθειών, ημιεπιπέδων, ελλείψεων μέσω μιγαδικών αριθμών. Επίσης παρουσιάζουμε την έκφραση των αφινικών μετασχηματισμών με χρήση μιγαδικών αριθμών αλλά και διάφορες χρήσιμες ταυτότητες για πολύωνυμα. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το θεώρημα Gauss-Lucas όπως και κάποια άλλα σχετικά αποτελέσματα. Το θεώ-

ρημα Gauss-Lucas είναι μία γενίκευση στα μιγαδικά πολυώνυμα του θεωρήματος Rolle για τα πραγματικά πολυώνυμα. Στο επόμενο κεφάλαιο αποδεικνύεται το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της εγγεγραμμένης έλλειψης Steiner όπως και το πόρισμα Siebeck. Δίνουμε επίσης μία εκδοχή αντίστροφου προβλήματος: δοθείσης έλλειψης ποιό είναι το τρίγωνο που την δέχεται ως εγγεγραμμένη έλλειψη Steiner Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο χαρακτηρισμός της εγγεγραμμένης έλλειψης Steiner ως της έλλειψης με το μέγιστο εμβαδόν μεταξύ των ελλείψεων που περιέχονται σε δοσμένο τρίγωνο. Το έκτο κεφάλαιο περιλαμβάνει το θεώρημα Coolidge που ερμηνεύει την ευθεία που ενώνει τις εστίες της έλλειψης Steiner σε δοσμένο τρίγωνο ως την ευθεία βέλτιστης προσαρμογής για τα τρία μη συνευθειακά σημεία που αντιστοιχούν στις κορυφές του τριγώνου. Γίνεται και αντιπαραβολή με την ευρύτερα γνωστή ευθεία ελαχίστων τετραγώνων. Δεν ακολουθείται η αποδείξη στην εργασία που αναφέραμε παραπάνω αλλά δίνουμε πάλι μια απόδειξη με γραμμική άλγεβρα και ποσότητες που έχουν ενδιαφέρον στην Στατιστική. Τελικά κλείνουμε με μία εφαρμογή της εγγεγραμμένης έλλειψης Steiner σε ένα πρόβλημα ναυσιπλοίας, στον προσδιορισμό της θέσης στη Γη από δεδομένα ουρανίων σωμάτων.

Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες μιγαδικών αριθμών

2.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί

Γνωρίζουμε από την άλγεβρα Λυκείου ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} είναι ένα διατεταγμένο σώμα δηλαδή η διάταξη του είναι συμβατή με τις πράξεις ενός σώματος. Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x^2 \geq 0$$

με αποτέλεσμα το πολυώνυμο $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ να μην διαθέτει ρίζα στους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι προέκυψε η ιδέα της κατασκευής ενός σώματος στο οποίο το πολυώνυμο $x^2 + 1$ διαθέτει ρίζα. Έτσι εάν θερήσουμε το δακτύλιο των πολυνύμων με πραγματικούς συντελεστές $\mathbb{R}[x]$ και λάβουμε το πηλίκο με το ιδεώδες που

παράγει το πολυώνυμο $x^2 + 1$ που συμβολίζεται ως $\langle x^2 + 1 \rangle$ τότε το σύνολο

$$\mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle$$

θα είναι σώμα καθώς το πολυώνυμο $x^2 + 1$ είναι ανάγωγο και ο δακτύλιος $\mathbb{R}[x]$ είναι δακτύλιος κυρίων ιδεωδών τότε το ιδεώδες $\langle x^2 + 1 \rangle$ είναι μεγιστικό και άρα το σύνολο

$$\mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle$$

είναι σώμα. Μάλιστα το σύνολο των παραγματικών

$$\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle$$

και άρα το σώμα

$$\mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle$$

είναι μία επέκταση του \mathbb{R} . Εάν συμβολίσουμε με $\sqrt{-1}$ τη ρίζα του $x^2 + 1$ τότε γράφουμε

$$\mathbb{R}[\sqrt{-1}] = \mathbb{R}[x] / \langle x^2 + 1 \rangle$$

Επιπλέον το σώμα των μιγαδικών αριθμών που ορίστηκε παραπάνω ως πηλίκιο δακτυλίου γράφεται στη μορφή

$$\mathbb{C} = \{a_1 + ia_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Οι πράξεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, θεωρούμενων ως επέκταση σώματος προέρχονται από τον ορισμό των πράξεων στον δακτύλιο πηλίκιο, δηλαδή αντικαθιστώντας $i^2 = -1$. Συγκεκριμένα έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 =$

$a_1 + ia_2, z_2 = b_1 + ib_2$, τότε ορίζουμε

$$z_1 + z_2 := (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2) \quad z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

Συμβολίζουμε για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του

$$\operatorname{Re}(a_1 + ia_2) = a_1 \quad \operatorname{Im}(a_1 + ia_2) = a_2$$

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών καθίσταται πραγματικός διανυσματικός χώρος διάστασης ίσης με το βαθμό της επέκτασης δηλαδή 2. Μπορούμε να ταυτίσουμε το σώμα \mathbb{C} με το επίπεδο \mathbb{R}^2 εφόσον και τα δύο σύνολα θεωρηθούν πραγματικοί διανυσματικοί χώροι.

Η ταύτιση του πραγματικού επιπέδου με το σώμα των μιγαδικών αριθμών δίνει τη δυνατότητα εκτέλεσης υπολογισμών με πολύ πιο απλό τρόπο.

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών ως επέκταση σώματος διαθέτει την απεικόνιση της συζυγίας:

$$z = a_1 + ia_2 \mapsto \bar{z} = a_1 - ia_2$$

αλλά και της στάθμης - νόρμας:

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

Ισχύουν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} & |\overline{z_1}| &= |z_1| \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} & |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\ |\operatorname{Re}(z)| &\leq |z| & |\operatorname{Re}(z_1 z_2)| &\leq |z_1| |z_2| \\ |\operatorname{Im}(z)| &\leq |z| & |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \end{aligned}$$

Η μεγάλη σημασία των μιγαδικών αριθμών εκφράζεται με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεbras που αποδείχτηκε απο τον Gauss και το οποίο εγγυάται ότι το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι αλγεβρικά κλειστό, δηλαδή:

Θεώρημα 2.1. Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ έχει ρίζα στο \mathbb{C} , δηλαδή υπάρχει $\rho \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε:

$$P(\rho) = 0$$

Η απόδειξη του θεωρήματος απαιτεί το θεμελιώδες θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης του Liouville σύμφωνα με το οποίο δεν υπάρχουν ακέραιες και φραγμένες συναρτήσεις εκτός των σταθερών συναρτήσεων.

2.2 Κυβικά πολυώνυμα

Θα θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστές στο \mathbb{C} , $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$:

$$Q(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Όταν $a_3 = \pm 1$ τότε είναι μονικά πολυώνυμο:

$$Q(z) = \pm z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

και θα διαλέξουμε $a_3 = +1$. Το θεμελιώδες θεμελιώδες της άλγεβρας εξασφαλίζει την ύπαρξη τριών όχι απαραίτητα διαφορετικών ριζών $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ και έτσι το πολυώνυμο παραγοντοποιείται με βάση την ταυτότητα του Ευκλείδη

$$Q(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)$$

Αναπτύσσοντας την έκφραση αυτή παίρνουμε τους τύπους του Vietá:

$$a_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$a_1 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$$

$$a_0 = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

Εάν θεωρήσουμε το κέντρο βάρους ή κεντροειδές τριών σημείων του επιπέδου

$$g_3 = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

τότε βλέπουμε ότι ο συντελεστής a_2 ενός μονικού κυβικού πολυώνυμου γράφεται ως

$$a_2 = -3g_3$$

Μια ειδική περίπτωση κυβικών πολυώνυμων είναι το κυκλοτομικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού:

$$z^3 - 1$$

Οι ρίζες του είναι οι τρίτες ρίζες της μονάδας:

$$1, \quad \omega = e^{\frac{2\pi}{3}}, \quad \omega^2 = e^{\frac{4\pi}{3}}$$

Μπορούμε να συμπληρώσουμε τον κύβο λαμβάνοντας για ένα κυβικό πολυώνυμο με g_3 το κέντρο βάρους των ριζών του:

$$z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = z^3 - 3g_3z^2 + 3g_3^2z - g_3^3 + (a_1 - 3g_3^2)z + a_0 + g_3^3,$$

ώστε

$$Q(z) = (z + g_3)^3 + (a_1 - 3g_3^2)z + a_0 + g_3^3$$

Θα συμβολίσουμε το κέντρο βάρους των ριζών ως g

$$g = \frac{1}{3}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

και έτσι το μονικό κυβικό πολυώνυμο θα γραφτεί ως

$$Q(z) = z^3 - 3gz^2 + a_1z + a_0$$

και επομένως

$$Q'(z) = 3z^2 - 6gz + a_1,$$

με διακρίνουσα

$$\Delta = 36g^2 - 12a_1 = 36\left(g^2 - \frac{1}{3}a_1\right)$$

και ρίζες

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}a_1}.$$

Θα δείξουμε τώρα την στοιχειώδη πρόταση:

Λήμμα 2.1. *Εστω κυβικό πουώνυμο $Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ με τρεις διαφορετικές ρίζες ενώ η παράγωγος του $Q'(z)$ έχει διπλή ρίζα. Τότε οι ρίζες του Q αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.*

Απόδειξη. Η παράγωγος $Q'(z)$ έχει διπλή ρίζα όταν $\Delta = 0$ δηλαδή όταν

$$g^2 = \frac{1}{3}a_1 \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$$

Εάν αναπτύξουμε την ταυτοότητα

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$$

λαμβάνω

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$

Το κυβικό πολυώνυμο έχει τρεις διαφορετικές ρίζες οπότε τουλάχιστον δύο ρίζες είναι διαφορετικές απο το μηδεν. Εστω ότι μία από τις μη μηδενικές ρίζες είναι η $\lambda_3 \neq 0$ (ενδεχομένως τις ξαναριθμώ) οπότε θέτω

$$\eta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad \eta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$$

και έχω ότι η προηγούμενη ταυτότητα γράφεται

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + 1 = \eta_1\eta_2 + \eta_1 + \eta_2.$$

Τότε παρατηρούμε ότι

$$\eta_1^2 - 2\eta_1 + 1 = -\eta_1 + \eta_1\eta_2 + \eta_2 - \eta_2^2$$

και άρα

$$(\eta_1 - 1)^2 = (\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - 1)$$

και ομοίως

$$(\eta_1 - 1)^2 = (\eta_2 - 1)(\eta_1 - \eta_2)$$

$$(\eta_2 - 1)^2 = (\eta_1 - 1)(\eta_2 - \eta_1)$$

$$(\eta_1 - \eta_2)^2 = (\eta_1 - 1)(1 - \eta_2)$$

που οδηγεί στις

$$|\eta_1 - 1|^2 = |\eta_2 - 1||\eta_1 - \eta_2|$$

$$|\eta_2 - 1|^2 = |\eta_1 - 1||\eta_2 - \eta_1|$$

$$|\eta_1 - \eta_2|^2 = |\eta_1 - 1||1 - \eta_2|$$

Διαιρούμε τις δύο πρώτες καταλήγουμε στην

$$|\eta_1 - 1| = |\eta_2 - 1|$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην τρίτη και λαμβάνουμε

$$|\eta_1 - \eta_2| = |\eta_1 - 1|$$

Τελικά επιστρέφουμε στις αρχικές ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ και καταλήγουμε στις

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = |\lambda_2 - \lambda_3| = |\lambda_3 - \lambda_1|$$

Αυτές οι σχέσεις εξασφαλίζουν ότι οι ρίζες του Q ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

□

2.3 Γραμμικές και αφινικές απεικονίσεις του επιπέδου

Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (u, v) = f(x, y)$$

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Εφόσον γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ως πραγματικοί διανυσματικοί χώροι θα προσπαθήσουμε να βρούμε την έκφραση της ως απεικόνιση:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ως πραγματικοί διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ μέσω της $(x, y) \mapsto z, (u, v) \mapsto w$:

$$w = u + iv \quad z = x + iy$$

Τώρα αντιστρέφουμε τις προηγούμενες με τη χρήση του συζυγούς μιγαδικού αριθμού:

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$$

ώστε

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Εάν

$$w = (ax + by) + i(cd + dy)$$

τότε με τη χρήση της εκφραση των x, y συνρτήσει των z, \bar{z} :

$$w = \frac{\kappa + \bar{\lambda}}{2}z + \frac{\kappa - \bar{\lambda}}{2}\bar{z}$$

όπου

$$\kappa = a + ib \quad \lambda = d + ic$$

και πιο απλά

$$w = f(z) = Az + B\bar{z}, \quad \kappa = \bar{A} + B, \lambda = A - \bar{B}$$

Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι αντιστρέψιμη εάν και μόνον εάν η ορίζουσα του

$$\det(f) = ad - bc \neq 0$$

Με βάση τις προηγούμενες ταυτότητες

$$\begin{aligned} ad - bc &= \operatorname{Re}(\kappa \cdot \lambda) = \operatorname{Re}((\bar{A} + B)(A - \bar{B})) = \\ &= \operatorname{Re}(|A|^2 - |B|^2 + (AB - \bar{A}\bar{B})) = |A|^2 - |B|^2 \end{aligned}$$

έχοντας λάβει υπόψη ότι

$$\operatorname{Re}(AB - \bar{A}\bar{B}) = \operatorname{Re}(AB) - \operatorname{Re}(\bar{A}\bar{B}) = \operatorname{Re}(AB) - \operatorname{Re}(AB) = 0$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός f είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν

$$|A|^2 - |B|^2 \neq 0$$

Βρήκαμε ότι στις μεταβλητές A, B η ορίζουσα εκφράζεται ως:

$$\det(f) = |A|^2 - |B|^2$$

Εάν $B = 0$ ο μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό αφού η ορίζουσα του είναι θετική $\det(f) = |A|^2 > 0$ εάν $A = 0$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό αφού είναι αρνητική: $\det(f) = -|B|^2 < 0$

Ο μετασχηματισμός της μορφής για $C \neq 0$

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C$$

δεν είναι γραμμικός αφού

$$f(0) = C \neq 0$$

ωστόσο έχει ιδιαίτερη αξία και αποτελεί την σύνθεση ενός γραμμικού με μία μετατόπιση! Η σημασία της έκφρασης ενός γραμμικού μετασχηματισμού του επιπέδου στη μορφή αυτή είναι η δυνατότητα που προσφέρει ώστε να μετασχηματίσουμε το ισόπλευρο τρίγωνο που ορίζουν οι κυβικές ρίζες της μονάδας στο τυχαίο τρίγωνο. Συγκεκριμένα

Πόρισμα 2.1. Έστω $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Ο μετασχηματισμός $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{3}(z_1 + \omega^2 z_1 + \omega z_3)z + \frac{1}{3}(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)\bar{z} + \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

απεικονίζει τους $1, \omega, \omega^2$ ως εξής

$$f(1) = z_1 \quad f(\omega) = z_2 \quad f(\omega^2) = z_3$$

Απόδειξη. Έστω ότι η απεικόνιση γράφεται ως

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C$$

για τις τρίτες ρίζες της μονάδας

$$\{1, \omega, \omega^2\}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

και οι μιγαδικοί αριθμοί

$$\{z_1, z_2, z_3\}$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B, C της αφινικής απεικόνισης f που επι-
τυγχάνει το μετασχηματισμό του ισόπλευρου τριγώνου στο τυχαίο τρίγωνο

$$f(1) = z_1$$

$$f(\omega) = z_2$$

$$f(\omega^2) = z_3$$

Μάλιστα έχουμε το σύστημα καθώς $\omega^2 = \bar{\omega}$

$$f(1) = z_1 \Leftrightarrow A + B + C = z_1$$

$$f(\omega) = z_2 \Leftrightarrow A\omega + B\omega + C = z_2$$

$$f(\omega^2) = z_3 \Leftrightarrow A\omega^2 + B\omega + C = z_3$$

έχει ως λύση που προκύπτει με αναγωγή Gauss

$$A + B + C = z_1$$

$$(\omega - 1)A + (\omega^2 - 1)B = z_2 - z_1$$

$$3\omega B = \omega z_1 + \omega z_2 + z_3$$

και άρα οι λύσεις του είναι καθώς $(1 - \omega)(1 - \omega^2) = 3$

$$A = \frac{1}{3}(z_1 + \omega^2 z_1 + \omega z_3) \quad B = \frac{1}{3}(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \quad C = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

□

Οι αφινικές απεικονίσεις διατηρούν την επαφή καμπυλών:

Πόρισμα 2.2. Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ μία αφινική απεικόνιση. Τότε εάν c_1, c_2 είναι δύο καμπύλες που εφάπτονται σε κάποιο σημείο τους τότε και οι $f \circ c_1, f \circ c_2$ εφάπτονται σε κάποιο σημείο τους.

Απόδειξη. Έστω δυο καμπύλες $z_1, z_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ που εφάπτονται στο σημείο z_0 δηλαδή

$$z_0 = z_1(t_1) = z_2(t_2), \quad z_1'(t_1) = z_2'(t_2)$$

Μέσω της f απεικονίζονται ως εξής

$$f(z_0) = Az_0 + B\bar{z}_0 + C = Az_1(t_1) + B\bar{z}_1(t_1) + C = f(z_1(t_1))$$

$$f(z_0) = Az_0 + B\bar{z}_0 + C = Az_2(t_2) + B\bar{z}_2(t_2) + C = f(z_2(t_2))$$

και απομένως

$$f(z_0) = f(z_1(t_1)) = f(z_2(t_2))$$

Οι κλίσεις των εφαπτόμενων στις καμπύλες υπολογίζονται απλά ως εξής

$$w_1(t) = f(z_1(t)) \Rightarrow w_1'(t) = Az_1'(t) + B\bar{z}_1'(t)$$

$$w_2(t) = f(z_2(t)) \Rightarrow w_2'(t) = Az_2'(t) + B\bar{z}_2'(t)$$

και άρα διαπιστώνουμε ότι

$$w_1(t_1) = w_2(t_2) \quad w_1'(t_1) = w_2'(t_2)$$

□

2.4 Γεωμετρικά Σύνολα του επιπέδου

Στο μιγαδικό επίπεδο θα μας απασχολήσουν τα γεωμετρικά σύνολα της Ευκλείδειας Επιπεδομετρίας: η ευθεία, το ημιεπίπεδο, ο κύκλος και η έλλειψη.

2.4.1 Ευθεία και ημιεπίπεδο

Η καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας

$$\alpha x + \beta y = 1$$

γράφεται με τη χρήση των μιγαδικών αριθμών

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

ως

$$\bar{A}z + A\bar{z} = 2 \quad A = \alpha + i\beta = |A|e^{i\theta}$$

Σημειωνουμε ότι η ευθεία δεν είναι κενό σύνολο όταν $|A| \neq 0$ Συνεπώς εκτελώντας τη στροφή $w = e^{i\theta}z$ καταλήγουμε στην

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{|A|}$$

Ισοδύναμα με στροφή $w = -ie^{i\theta}z$ και βάσει της $\operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Im}(z)$ καταλήγω στην

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{1}{|A|}$$

Το ημιεπίπεδο ορίζεται ως το σύνολο

$$H_{\alpha,\beta,\gamma} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y \geq \gamma\}$$

που στη μιγαδική μορφή γράφεται για $A = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$:

$$H_{A,\gamma} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\bar{A}z) \geq \frac{\gamma}{2}\}$$

2.4.2 Κύκλος και έλλειψη

Ο κύκλος με κέντρο το a και ακτίνα r έχει την απλή έκφραση $|z - a| = r$ ενώ η έλλειψη με εστίες στα σημεία $a, b \in \mathbb{C}$:

$$|z - a| + |z - b| = \eta$$

Τώρα θα εξετάσουμε την εικόνα του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο 0 που δίνεται παραμετρικά ως $z = e^{it}$ μέσω της

$$f(z) = Az + B\bar{z}$$

οταν $|A|^2 - |B|^2 \neq 0$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 2.2. *Εστω ο μοναδιαίος κύκλος $C = \{z = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ με κέντρο το 0 και η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = Az + B\bar{z}$$

Τότε η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου μέσω της f , $f(C)$ είναι έλλειψη με εστίες

στα σημεία $\pm\sqrt{AB}$ και μήκη αξόνων $\|A\| \pm \|B\|$.

Απόδειξη. Κατ' αρχήν θυμόμαστε ότι μία γραμμική απεικόνιση είναι συνεχής και εφόσον είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη της είναι επίσης γραμμική και άρα συνεχής. Συνεπώς η εικόνα της είναι ομοιομορφική με τον κύκλο, δηλαδή θα πρέπει να είναι απλή κλειστή καμπυλή. Έτσι αρκεί να δείξω ότι η εικόνα της περιέχεται σε μία έλλειψη.

Εάν $A = |A|e^{i\theta}$, $B = |B|e^{i\phi}$ τότε για $w \in f(C)$ δηλαδή

$$w = f(e^{it})$$

και θέτοντας $w = \xi + i\eta$:

$$\xi + i\eta = Ae^{it} + Be^{-it} = |A|e^{i(t+\theta)} + |B|e^{i(\phi-t)} =$$

Υπολογίζουμε

$$\xi = \alpha \cos t + \beta \sin t \quad \eta = \gamma \cos t + \delta \sin t$$

μέσω των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων:

$$\cos(t \pm \phi) = \cos t \cos \phi \mp \sin t \sin \phi, \quad \sin(t \pm \phi) = \sin t \cos \phi \pm \cos t \sin \phi,$$

λαμβάνοντας

$$\alpha = |A| \cos \theta + |B| \cos \phi, \quad \beta = -|A| \sin \theta + |B| \sin \phi,$$

$$\gamma = |A| \sin \theta + |B| \sin \phi, \quad \delta = |A| \cos \theta - |B| \cos \phi$$

Με απαλοιφή καταλήγουμε στην τετραγωνική μορφή

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} [(\gamma^2 + \delta^2)\xi^2 - 2(\alpha\gamma + \beta\delta)\xi\eta + (\alpha^2 + \beta^2)\eta^2]$$

που γράφεται ως

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} \hat{Q}(\xi, \eta)$$

Εάν θεωρήσουμε το σταθμικό σνόλο της τετραγωνικής μορφής:

$$V = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \hat{Q}(\xi, \eta) = 1\}$$

τοτε η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου περιέχεται σε αυτό:

$$f(C) \subseteq V$$

και με βάση το σχόλιο στην αρχή της απόδειξης ταυτίζεται με αυτό:

$$f(C) = V$$

Υπολογίζουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2|A||B| \cos(\theta + \phi) \quad \gamma^2 + \delta^2 = |A|^2 + |B|^2 - 2|A||B| \cos(\theta + \phi)$$

και

$$\alpha\gamma + \beta\delta = 2|A||B| \sin(\theta + \phi)$$

Τα διανύσματα $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα καθώς απο την υπόθεση

$$\alpha\delta - \beta\gamma = |A|^2 - |B|^2 = (|A| - |B|)(|A| + |B|) \neq 0$$

για συνεπώς εφόσον γνωρίζουμε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz καθίσταται ισότητα όταν τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα και άρα στην περίπτωση μας η ανισότητα Cauchy-Schwarz είναι *αυστηρή ανισότητα*:

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 < (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

και κατά συνέπεια η ορίζουσα της \hat{Q} :

$$\det(\hat{Q}) = (\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) - (\alpha\gamma + \beta\delta)^2 > 0$$

είναι αυστηρά θετική και σε συνδυασμό με τη θετικότητα του ίχνους

$$\text{tr}(\hat{Q}) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 > 0$$

καταλήγουμε ότι η τετραγωνικές μορφές \hat{Q}, Q είναι θετικά ορισμένες και άρα έχουν δυο θετικές ιδιοτιμές!. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της \hat{Q} :

$$\chi_{\hat{Q}}(x) = x^2 - \text{tr}(Q)x + \det(Q)$$

με τους συντελεστές του εκφρασμένους ως

$$\text{tr}(\hat{Q}) = 2(|A|^2 + |B|^2) \quad \det(\hat{Q}) = (|A|^2 - |B|^2)^2$$

Συνεπώς το σύνολο

$$Q(\xi, \eta) = 1$$

είναι έλλειψη. Θα υπολογίσουμε τώρα τις εστίες της και τα μήκη των αξόνων της.

Τα μήκη των αξόνων μ_{\pm} της έλλειψης ικανοποιούν την

$$\mu_{\pm} = \frac{||A|^2 - |B|^2|}{\sqrt{\lambda_{\mp}}}$$

όπου $\lambda_{\pm} > 0$ είναι οι ιδιοτιμές της \hat{Q} δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της τετραγωνικής μορφής \hat{Q} : Οι ιδιοτιμές είναι λοιπόν

$$\lambda_{\pm} = (|A| \pm |B|)^2$$

και συνεπώς τα μήκη αξόνων

$$\mu_{\pm} = ||A| \pm |B||$$

Η εκκεντρότητα είναι

$$e = \frac{2\sqrt{|A||B|}}{|A| + |B|} < 1$$

ενώ η απόσταση των εστιών από το κέντρο c είναι

$$c = e\mu_{+} = 2\sqrt{|A||B|}$$

Οι διευθύνσεις των αξόνων, μικρός και μεγάλος ορίζονται από τα σημεία αντίστοιχα

$$m = \left(\sin \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right), \cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \right) \quad M = \left(\cos \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right), \sin \left(\frac{\theta + \phi}{2} \right) \right)$$

Αυτά τα σημεία αντιστοιχούν στους μιγαδικούς

$$m = ie^{-i\frac{\theta+\phi}{2}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{|AB|}} \quad , \quad M = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{|AB|}}$$

και άρα οι εστίες της είναι τα σημεία

$$\pm cM = \pm 2\sqrt{AB}$$

□

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα Gauss-Lucas

3.1 Κέντρα βάρους

Θα ξεκινήσουμε απο μια απλή πρόταση για τα κέντρα βάρους σημείων του επιπέδου.

Ε:στω τα σημεία $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ τότε ορίζουμε το κέντρο βάρους τους ως το σημείο:

$$q = \frac{1}{n} (z_1 + \dots + z_n)$$

Θα δείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Λήμμα 3.1. *Ετσω πολυώνυμο $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ και $P'(z)$ η παραγωγος του. Τότε τα κέντρα βάρους των συνόλων ριζών των P, P' συμπίπτουν*

Απόδειξη. Από τους τύπους του Vietá έχουμε οτι για τις ρίζες ενός μονικού πολυονύμου $P(z)$ βαθμού n :

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

και ρίζες ρ_1, \dots, ρ_n ισχύει ότι:

$$\rho_1 + \dots + \rho_n = -a_{n-1}$$

Συνεπώς, το κέντρο βάρους του είναι

$$g = -\frac{a_{n-1}}{n}$$

Τώρα η παράγωγος $P'(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n - 1$:

$$P'(z) = nz^{n-1} + (n-1)a_n z^{n-2} + \dots + a_1$$

με ρίζες $\rho'_1, \dots, \rho'_{n-1}$ θα έχω πάλι απο τους τύπους του Viet'a:

$$\rho'_1 + \dots + \rho'_{n-1} = -\frac{(n-1)a_{n-1}}{n}$$

ή

$$g' = \frac{1}{n-1} (\rho'_1 + \dots + \rho'_{n-1}) = -\frac{a_n}{n} = g$$

και άρα $g' = g$.

□

3.2 Ρίζες της παραγώγου πολυωνύμου

Το θεώρημα Rolle της πραγματικής ανάλυσης εντοπίζει τις ρίζες της παραγώγου ενός πραγματικού πολυωνύμου ως προς τις ρίζες αυτού. Οι ρίζες της παραγώγου βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες του πολυωνύμου ή ταυτίζονται με αυτές. Το

θεώρημα Gauss-Lucas δίνει μία γενίκευση του θεωρήματος Rolle για τα μιγαδικά πολυώνυμα. Φυσικά εδώ τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα και απαιτείται η έννοια της *κυρτής θήκης* ενός συνόλου για να αντικαταστήσει την έννοια *ανάμεσα* στις ρίζες που δίνει το θεώρημα Rolle.

Έστω ένα υποσύνολο του επιπέδου $S \subset \mathbb{C}$. Ονομάζουμε *κυρτή θήκη* του S , $H(S)$ το μικρότερο κυρτό σύνολο που το περιέχει. Εάν $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ τότε

$$H(S) = \{t_1\alpha_1 + \dots + t_n\alpha_n, 0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1, t_1 + \dots + t_n = 1\}$$

Θεώρημα 3.1. *Εστω πολυώνυμο $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ βαθμού n και σύνολο ριζών $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Τότε οι ρίζες της παραγώγου P' βρίσκονται στην κυρτή θήκη του $H(S)$.*

Απόδειξη. Θα θεωρήσουμε την περίπτωση που το S περιλαμβάνει ρίζες του πολυωνύμου βαθμού n , $P(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ και έστω ρ μία ρίζα της παραγώγου του. Τότε θα δείξουμε ότι εάν $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ τότε

$$\rho \in H(S)$$

Ξεκινώντας από τον τύπο

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{z - \alpha_n}$$

βλέπουμε ότι

$$\frac{P'(\rho)}{P(\rho)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{\rho - \alpha_n} = 0$$

και άρα

$$\frac{\bar{\rho} - \bar{\alpha}_1}{|\rho - \alpha_1|^2} + \cdots + \frac{\bar{\rho} - \bar{\alpha}_n}{|\rho - \alpha_n|^2} = 0$$

Θέτοντας

$$t_1 = \frac{1}{|\rho - \alpha_1|^2}, \quad \dots, \quad t_n = \frac{1}{|\rho - \alpha_n|^2}$$

έχουμε ότι

$$(t_1 + \cdots + t_n)\bar{\rho} = t_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + t_n\bar{\alpha}_n$$

και παίρνοντας το συζυγή έχουμε ότι

$$(t_1 + \cdots + t_n)\rho = t_1\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n$$

και άρα

$$\rho = \frac{t_1}{t_1 + \cdots + t_n}a_1 + \cdots + \frac{t_n}{t_1 + \cdots + t_n}a_n$$

και συνεπώς $\rho \in H(S)$.

□

Στην περίπτωση κυβικού πολυωνύμου με διακεκριμένες ρίζες z_1, z_2, z_3

$$Q(z) = z^3 - 3gz^2 + sz - q,$$

όπου

$$3g = z_1 + z_2 + z_3 \quad s = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 \quad q = z_1z_2z_3$$

Τότε οι ρίζες της παράγωγου του είναι

$$3g \pm 3\sqrt{g^2 - \frac{s}{3}}$$

Τώρα βλέπουμε ότι εάν δοθούν οι αριθμοί $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$ τότε έχουμε την απεικόνιση $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$F(g, s, f) = \frac{s}{3} - 2fg + f^2$$

Εάν θεωρήσουμε τώρα την αναλυτική -ως πολυωνυμική- απεικόνιση $u : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ με

$$u(g, s) = (u_1(g, s), u_2(g, s))$$

και

$$u_1(g, s) = F(g, s, f_1) \quad u_2(g, s) = F(g, s, f_2)$$

και εάν υπολογίσουμε την Ιακωβιανή της, βρίσκουμε ότι

$$J_u(g, s) = \begin{vmatrix} -2f_1 & \frac{1}{3} \\ -2f_2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2f_1 & \frac{1}{3} \\ 2f_2 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}(f_2 - f_1)$$

Συνεπώς έχω $f_1 \neq f_2 \Leftrightarrow J(g, s) \neq 0$ και συνεπώς έχω ότι η απεικόνιση είναι τοπικά αντιστρέψιμη με βάση το θεώρημα της τοπικής αντιστροφής για αναλυτικές συναρτήσεις.

Εάν θεωρήσουμε επιπλέον την απεικόνιση που ορίζουν οι σχέσεις Vietá:

$$B : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$$B(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + z_2 + z_3, z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, z_1z_2z_3) = (3g, s, q)$$

τοτε η Ιακωβιανή της είναι η ορίζουσα Vandermode:

$$\begin{aligned}
 J_B(z_1, z_2, z_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 + z_3 & z_1 + z_3 & z_1 + z_2 \\ z_2 z_3 & z_1 z_3 & z_1 z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_2 + z_3 & z_1 - z_2 & z_1 - z_3 \\ z_2 z_3 & z_3(z_1 - z_2) & z_2(z_1 - z_3) \end{vmatrix} = \\
 &= (z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_2 + z_3 & 1 & 1 \\ z_2 z_3 & z_3 & z_2 \end{vmatrix} = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) = \\
 &= -(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)
 \end{aligned}$$

Συνεπώς εάν z_1, z_2, z_3 είναι διαφορετικοί, τότε η απεικόνιση είναι τοπικά αντιστρέψιμη πάλι από το θεώρημα τοπικής αντιστροφής. Εάν θεωρήσουμε τους γραμμικούς υπόχωρους σύμπτωσης του \mathbb{C}^3

$$S_{ij} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_i = z_j\}$$

τότε έχουμε την απλό συμπέρασμα:

Πόρισμα 3.1. *Ο περιορισμός της $r_C = B|_C : C \rightarrow \mathbb{C}^3$ στο ανοιχτό σύνολο*

$$C = \mathbb{C}^3 \setminus \bigcup_{i < j} S_{ij}$$

είναι τοπικός αναλυτικός ισομορφισμός.

Τώρα εάν θεωρήσουμε την προβολή που είναι επί και αναλυτική

$$\pi_{12} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \pi_{12}(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2)$$

και μέσω αυτής ορίσουμε την σύνθεση $R_C = \pi_{12} \circ r_C : C \rightarrow \mathbb{C}^2$. Τότε με βάση το θεώρημα της απεικόνισης σταθερής τάξης και για δοσμένο $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ έχουμε ότι το σύνολο

$$R_C^{-1}(z_1, z_2)$$

είναι μια λεία μιγαδική πολλαπλότητα μιγαδικής διάστασης 1. Αυτό το αποτέλεσμα θα το χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 4

Οι εγγεγραμμένες ελλείψεις Steiner

Ο Steiner εισήγαγε την εγγεγραμμένη έλλειψη σε ένα τρίγωνο που εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου στα μέσα τους. Ωστόσο δεν είναι διόλου προφανές ότι αυτή υπάρχει. Γνωρίζουμε ότι σε κάθε τρίγωνο υπάρχει εγγεγραμμένος κύκλος που έχει ως κέντρο το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του. Ωστόσο στο ισόπλευρο τρίγωνο διχοτόμοι, ύψη και διάμεσοι ταυτίζονται και συνεπώς ο εγγεγραμμένος κύκλος θα εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του!

Ορισμός 4.1. *Εστω τυχόν τρίγωνο T στο επίπεδο. Ονομάζουμε εγγεγραμμένη έλλειψη Steiner $\varepsilon_S(T)$ στο τρίγωνο την έλλειψη που περιέχεται σε αυτό και εφάπτεται στις πλευρές του τριγώνου στα μέσα τους.*

Είδαμε προηγουμένως ότι για κάθε τριάδα σημείων του επιπέδου υπάρχει αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τις τρίτες ρίζες της μονάδας στη δοσμένη τριάδα. Με βάση αυτή την παρατήρηση θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1. Για δοσμένο τρίγωνο T υπάρχει μοναδική εγγεγραμμένη έλλειψη Steiner $\varepsilon_S(T)$. Εάν z_1, z_2, z_3 είναι οι κορυφές του τριγώνου και

$$g = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

το κέντρο βάρους τους τότε οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία

$$g \pm \sqrt{g^2 - \frac{1}{3}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)}$$

Απόδειξη. Θεωρώντας τώρα την απεικόνιση

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C$$

που στέλνει τις τρίτες ρίζες της μονάδας στις κορυφές ως

$$f(1) = z_1 \quad f(\omega) = z_2 \quad f(\omega^2) = z_3$$

τότε όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο:

$$A = \frac{1}{3}(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)$$

$$B = \frac{1}{3}(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)$$

$$C = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

Το τρίγωνο που ορίζουν οι τρίτες ρίζες της μονάδας είναι ισόπλευρο με μήκος

πλευράς

$$\left|1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right|^2 = 1 + 1 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + 1 = 3$$

Συνεπώς η ακτίνα του κύκλου θα έχει μήκος όπως βρίσκουμε από τη στοιχειώδη τριγωνομετρία και εφόσον οι διάμεσοι, ύψη και διχοτόμοι στα ισόπλευρα ταυτίζονται

$$R = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

Υπολογίζουμε τώρα για τις εστίες της έλλειψης:

$$AB = \frac{1}{3} (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) \cdot \frac{1}{3} (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)$$

και βάσει της $\omega + \omega^2 = -1$:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1}{9} (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)) = \\ &= \frac{1}{9} ((z_1 + z_2 + z_3)^2 - 3(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)) \end{aligned}$$

και άρα

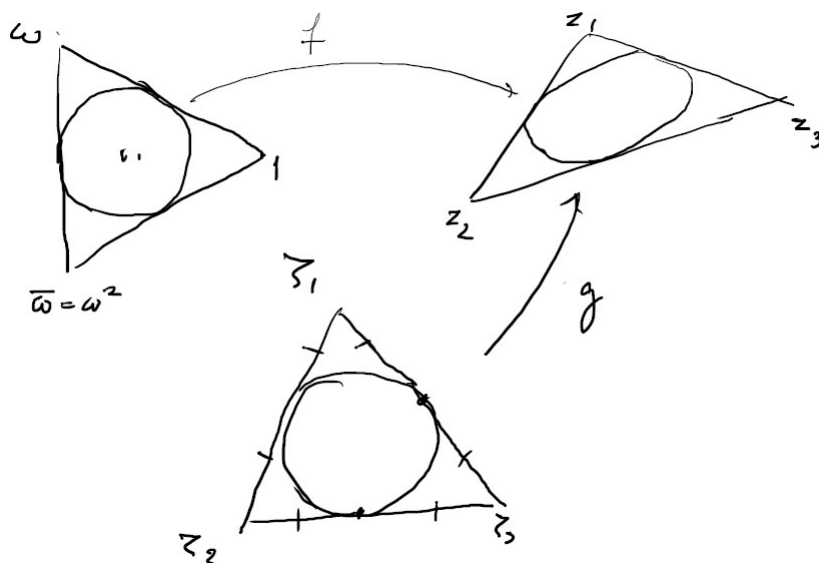
$$AB = g^2 - \frac{1}{3} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$$

Συνεπώς οι εστίες είναι όπως είδαμε προηγούμενως τα σημεία

$$\pm 2\sqrt{AB}$$

Όπως είδαμε οι αφινικές απωικονίσεις απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες διατηρώντας τους λόγους σημείων πάνω σε αυτές. Επίσης στέλνουν κύκλους σε ελλείψεις.

Επίσης διατηρούν την ιδιότητα της επαφής! Επομένως η συγκεκριμένη απεικόνιση απεικονίζει τον κύκλο ακτίνας $\frac{1}{2}$ που εγγράφεται στο ισόπλευρο τρίγωνο που ορίζουν οι τρίτες ρίζες της μονάδας και διέρχεται από τα μέσα των πλευρών του στην έλλειψη που εγγράφεται στο τρίγωνο με κορυφές z_1, z_2, z_3 και εφάπτεται στις πλευρές τους στα μέσα τους.



Σχήμα 4.1: Οι ελλείψεις στην απόδειξη

Η μοναδικότητα της έλλειψης Steiner $e_S(T)$ προκύπτει ως εξής. Έστω E η έλλειψη που μόλις κατασκευάσαμε. Έστω μία έλλειψη E' με τις ίδιες ιδιότητες: εγγράφεται στο τρίγωνο με κορυφές τα δοσμένα σημεία και εφάπτεται στα μέσα των πλευρών του. Έστω τότε g η αφινική απεικόνιση που απεικονίζει τον κύκλο ακτίνας $\frac{1}{2}$ στην έλλειψη E' . Έστω

$$g(\zeta_1) = z_1, g(\zeta_2) = z_2, g(\zeta_3) = z_3$$

Η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη και συνεπώς τα σημεία $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ είναι μη συνευθειακά και συνεπώς ορίζουν ένα τρίγωνο. Ο κύκλος είναι εφαπτόμενος στα μέσα των πλευρών του και εφόσον οι ευθείες που εφάπτονται σε κύκλο ορίζουν ίσα

τμήματα. Επιπλέον ο κύκλος διέρχεται από τα μέσα των πλευρών και άρα το τρίγωνο θα είναι ισόπλευρο αφού ανά δύο τα τμήματα που ορίζουν οι εφαπτόμενες είναι ίσα. Συνεπώς τώρα πάλι από την τριγωνομετρία τα μήκη των πλευρών του θα είναι $\sqrt{3}$ και συνεπώς από το πυθαγόρειο θεώρημα έχω ότι τα σημεία $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το $0 \in \mathbb{C}$. Συνεπώς εάν $\zeta_1 = e^{i\theta}$ τότε θεωρώντας μία στροφή $R(z) = e^{i\theta}z$ ότι $\zeta_1 = R(1)$ και άρα τότε με ενδεχόμενη εναλλαγή των ζ_2, ζ_3 έχω ότι

$$\zeta_2 = R(w), \quad \zeta_3 = R(w^2)$$

Άρα

$$z_1 = g \circ R(1) \quad z_2 = g \circ R(w) \quad z_3 = g \circ R(w^2)$$

□

Σχόλιο Είναι εύλογο να εξετάσουμε το αντίστροφο ερώτημα:

Δοθείσης μίας έλλειψης, δηλαδή των εστιών της f_1, f_2 πως μπορούμε να βρούμε ένα τρίγωνο που διαθέτει τη δοσμένη έλλειψη ως έλλειψη Steiner

Πράγματι εάν f_1, f_2 είναι οι δύο εστίες της έλλειψης τότε με βάση το σχόλιο στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου προσδιορίζουμε τα w, s μέσω της F . Στη συνέχεια έχουμε την το σύνολο μέσω της R_C

$$R_C^{-1}(w, s)$$

Αυτό μας ορίζει μονοπαραμετρική μιγαδική οικογένεια τριγώνων με κορυφές $(z_1, z_2, z_3) \in R_C^{-1}(w, s)$ που ορίζει μοναδικό τρίγωνο εάν με διαλέξουμε μία δοθείσα κορυφή.

Κεφάλαιο 5

Χαρακτηρισμός της έλλειψης Steiner

Στο σημείο αυτό εγείρεται το ερώτημα για τη σημασία της εγγεγραμμένης έλλειψης Steiner ενός τριγώνου. Η σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι η εγγεγραμμένη έλλειψη Steiner είναι ότι ανάμεσα σε όλες τις ελλειψεις που εγγράφονται στο τρίγωνο η συγκεκριμένη διαθέτει το μέγιστο εμβαδόν.

Ξεκινούμε λαμβάνοντας μία σχέση για το εμβαδόν τριγώνου μέσω των κορυφών που το ορίζουν. Αρχικά έρουμε ότι η ορίζουσα μίας αφινικής απεικόνισης f δίνει το συντελεστή μετατροπής των εμβαδών των τριγώνων που ορίζουν τα σημεία που συνδεούνται μέσω αυτής:

$$|\det(f)| = \frac{E(z_1, z_2, z_3)}{E(1, \omega, \omega^2)}$$

όπου $E(z_1, z_2, z_3)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζουν οι z_1, z_2, z_3 και $f(1) = z_1, f(\omega) = z_2, f(\omega^2) = z_3$. Επίσης υπολογίσαμε ότι όταν $f(z) = Az +$

$B\bar{z} + C$:

$$|\det(f)| = ||A|^2 - |B|^2|$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$E(z_1, z_2, z_3) = ||A|^2 - |B|^2| \cdot E(1, \omega, \omega^2)$$

Με βάση τον τύπο για το εμβαδόν τριγώνου μέσω της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου R και της περιμέτρου τ έχουμε ότι

$$E = \frac{1}{2}R\tau$$

και άρα εδώ $\tau = 3\sqrt{3}$, $R = \frac{1}{2}$

$$E(1, \omega, \omega^2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned} |A|^2 &= \frac{1}{3} (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) \cdot \frac{1}{3} \overline{(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)} = \\ &= \frac{1}{9} (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) \cdot (\bar{z}_1 + \omega \bar{z}_2 + \omega^2 \bar{z}_3) = \\ &= \frac{1}{9} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \omega z_1 \bar{z}_2 + \omega^2 z_1 \bar{z}_3 + \omega^2 z_2 \bar{z}_1 + \omega z_2 \bar{z}_3 + \omega z_3 \bar{z}_1 + \omega^2 z_3 \bar{z}_2) \end{aligned}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned} |B|^2 &= \frac{1}{3} (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \cdot \frac{1}{3} \overline{(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)} = \\ &= \frac{1}{9} (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3) \cdot (\bar{z}_1 + \omega^2 \bar{z}_2 + \omega \bar{z}_3) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \omega^2 z_1 \bar{z}_2 + \omega z_1 \bar{z}_3 + \omega z_2 \bar{z}_1 + \omega^2 z_2 \bar{z}_3 + \omega^2 z_3 \bar{z}_1 + \omega z_3 \bar{z}_2)$$

Συνεπώς

$$|A|^2 - |B|^2 = \frac{2i(\omega - \omega^2)}{9} (\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2) + \operatorname{Im}(z_2 \bar{z}_3) + \operatorname{Im}(z_3 \bar{z}_1))$$

και άρα αφού $|\omega - \omega^2| = |1 - \omega| = \sqrt{3}$:

$$||A|^2 - |B|^2| = \frac{2}{3\sqrt{3}} |\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1)|$$

Επομένως απο την σχέση των εμβαδών

$$E(z_1, z_2, z_3) = ||A|^2 - |B|^2| \cdot E(1, \omega, \omega^2) = ||A|^2 - |B|^2| \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

με αντικατάσταση καταλήγω στην

$$E(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1)|$$

Προχωρούμε τώρα στο σκοπό του κεφαλαίου που είναι ο ενδιαφέρων χαρακτηρισμός της έλλειψης Steiner ως της έλλειψης με μέγιστο εμβαδόν ανάμεσα σε όλες τις ελλείψεις που περιέχονται σε δοσμένο τρίγωνο! Θα ξεκινήσουμε με ένα πιο απλό θεώρημα για του εγγεγραμμένους κύκλους

Θεώρημα 5.1. *Εστω κύκλος C εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που ορίζουν οι z_1, z_2, z_3 τότε το εμβαδόν του $E(C)$ ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\frac{E(C)}{E(z_1, z_2, z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Η ισότητα ισχύει όταν το τρίγωνο που ορίζουν οι z_1, z_2, z_3 είναι ισόπλευρο και ο C είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος.

Απόδειξη. Εστω r η ακτίνα του C και a, b, c τα μήκη των πλευρών του τριγώνου με ημιπερίμετρο $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Επίσης όπως είδαμε πιο πάνω

$$E(z_1, z_2, z_3) = rs$$

Η ανισότητα αριθμητικού -γεωμετρικού μέσου δίνει ότι:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} = \frac{3s - 2s}{3} = \frac{s}{3}$$

με ισότητα εάν και μόνον εάν $s-a = s-b = s-c \Leftrightarrow s = b = c$ δηλαδή όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Επομένως

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s}{3} &\Leftrightarrow (s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^3}{27} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

και άρα από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε ότι

$$rs = E(z_1, z_2, z_3) \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

και άρα:

$$r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}}$$

Επομένως

$$\frac{E(C)}{E(z_1, z_2, z_3)} = \frac{\pi r^2}{rs} = \frac{\pi r}{s} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

□

Πόρισμα 5.1. Από όλες τις ελλείψεις που εγγράφονται σε δοσμένο τρίγωνο η έλλειψη Steiner έχει το μέγιστο εμβαδόν. Εάν η έλλειψη ε έχει εγγραφεί στο τρίγωνο που ορίζουν οι $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και το εμβαδόν της είναι $E(\varepsilon)$ τότε:

$$\frac{E(\varepsilon)}{E(z_1, z_2, z_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

και η ισότητα ισχύει όταν η ε είναι η έλλειψη Steiner $\varepsilon_S(T)$.

Απόδειξη. Έστω ο αφινικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ που απεικονίζει τις τρίτες ρίζες της μονάδας στους z_1, z_2, z_3 $f(1) = z_1, f(\omega) = z_2, f(\omega^2) = z_3$. Τότε η εικόνα του κύκλου ακτίνας $\frac{1}{2}$, $C_{1/2}$ που εγγράφεται στο τρίγωνο των $1, \omega, \omega^2$ είναι η έλλειψη Steiner, ε_0 . Η αφινική απεικόνιση διατηρεί τους λόγους των εμβαδών -αφου τα πολλαπλασιάζει με την ορίζουσα του

$$\frac{E(\varepsilon_0)}{E(z_1, z_2, z_3)} = \frac{E(C_{1/2})}{E(1, \omega, \omega^2)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Εστω τώρα μία άλλη εγγεγραμμένη έλλειψη ε στο τρίγωνο των z_1, z_2, z_3 . Υπάρχει αφινικός μετασχηματισμός από τον $C_{1/2}$ στην έλλειψη ε . Η προεικόνα μέσω αυτής του τριγώνου των z_1, z_2, z_3 είναι τρίγωνο που ορίζουν κάποια $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \mathbb{C}$ που όμως δεν είναι απαραίτητα ισόπλευρο -η έλλειψη δεν περνά από τα μέσα των πλευρών του αρχικού τριγώνου και περιέχει τον $C_{1/2}$. Τότε από το προηγούμενο θεώρημα:

$$\frac{E(\varepsilon)}{E(z_1, z_2, z_3)} = \frac{E(C_{1/2})}{E(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

και η ισότητα ισχύει όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο και έρα η έλλειψη είναι η έλλειψη Steiner □

Κεφάλαιο 6

Η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής

Στο κεφαλαίο αυτό θα ασχοληθούμε με το θεώρημα του Coolidge: για την ευθεία βέλτιστης προσαρμογής σημείων του επιπέδου $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Στην ειδική περίπτωση $n = 3$ λαμβάνουμε μία ακόμη ενδιαφέρουσα συσχέτιση των ριζών ενός κυβικού πολυωνύμου και των ριζών της παραγώγου του. Η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής σε αντίθεση διαφέρει από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που χρησιμοποιείται στη γραμμική παλινδρόμηση για την προβλεψη των τιμών κάποιας μεταβλητής από τις τιμές μίας μεταβλητής που μπορούμε να ελέγξουμε. Ωστόσο η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής μας δίνει πληροφορίες για τη μορφή ενός νέφους σημείων του επιπέδου. Η μορφή του νέφους μπορεί να καθορίζει την επιτυχία ενός μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης το οποίο μας παρέχει η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

Εστω το σύνολο σημείων του επιπέδου

$$C = \{z_1, \dots, z_n\} \quad z_j = x_j + iy_j, \quad x_j, y_j \in \mathbb{R}$$

Τότε η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η ευθεία

$$y = \alpha x + \beta$$

τέτοια ώστε

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n (y_j - \alpha x_j - \beta)^2$$

είναι ελάχιστο. Το πρόβλημα αυτό γράφεται αναπτύσσοντας το τετράγωνο ως

$$Q(\alpha, \beta) = \sum_{j=1}^n y_j^2 + \alpha^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 + n\beta^2 - 2\alpha \sum_{j=1}^n x_j y_j - 2\alpha\beta \sum_{j=1}^n x_j - 2\beta \sum_{j=1}^n y_j$$

Σε αυτό σημείο στη Στατιστική ορίζονται οι ποσότητες

$$n\mu_x = \sum_{j=1}^n x_j, \quad n\mu_y = \sum_{j=1}^n y_j, \quad g = \mu_x + i\mu_y$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 - n\mu_x^2, \quad \sigma_y^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 - n\mu_y^2, \quad \sigma_{xy} = \sum_{j=1}^n x_j y_j - n\mu_x \mu_y$$

που μας επιτρέπουν να γράψουμε:

$$Q(\alpha, \beta) = \xi^T \Sigma \xi - 2\xi^T \lambda + \rho$$

όπου

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & n\mu_x \\ n\mu_x & n \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} + n\mu_x \mu_y \\ n\mu_y \end{pmatrix}$$

και

$$\rho = \sigma_y^2 + n\mu_y^2$$

Καθώς

$$\det(\Sigma) = n\sigma_x^2 > 0$$

η Q είναι κυρτή και άρα διαθέτει μοναδικό ελάχιστο για

$$\alpha = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}, \quad \beta = \mu_y - \alpha\mu_x$$

Η ευθεία ℓ αποτελεί την ευθεία βέτιστης προσαρμογής για τα σημεία z_1, \dots, z_n όταν είναι η ευθεία για την οποία ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των σημείων από αυτήν, δηλαδή ο ελαχιστοποιητής που επιτυγχάνει το

$$\inf_{\ell \in L} \sum_{j=1}^n d(z_j, \ell)^2 = \min_{\ell \in L} \sum_{j=1}^n d(z_j, \ell)^2$$

όπου L το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου και $d(z_j, \ell)$ η απόσταση του σημείου z_j από την ευθεία ℓ . Συγκεκριμένα αφού

$$F(\ell) = \sum_{j=1}^n d(z_j, \ell)^2 \geq 0$$

το $\inf F$ υπάρχει. Τώρα εάν δοθεί ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων του επιπέδου τότε αυτό περιέχεται σε έναν κλειστό δίσκο \bar{D} του επιπέδου. Προφανώς η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής θα διέρχεται από κάποιο σημείο του δίσκου αυτού \bar{D} . Συνεπώς μπορούμε να περιοριστούμε στις ευθείες που διέρχονται από το δίσκο \bar{D} , $L(D)$ που θα ικανοποιεί

$$L(D) \subset \bar{D} \times S^1$$

όπου S^1 ο μοναδιαίος κύκλος που περιγράφει τις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο!. Τώρα το σύνολο $L(D)$ είναι κλειστό και φραγμένο και άρα συμπαγές. Η συνάρτηση

$$F(\ell) = \sum_{j=1}^n d(z_j, \ell) \geq 0$$

είναι μη αρνητική, συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο και άρα διαθέτει μη αρνητικό ελάχιστο, που θα υπολογίσουμε.

Θεώρημα 6.1. *Εστω $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ με κέντρο βάρους*

$$g = \frac{1}{n} (z_1 + \dots + z_n)$$

και

$$\zeta = \sum_{j=1}^n (z_j - g)^2 = \sum_{j=1}^n z_j^2 - ng^2$$

Τότε εάν

- εάν $\zeta = 0$ τότε κάθε ευθεία στο επίπεδο είναι μία ευθεία βέλτιστης προσαρμογής
- εάν $\zeta \neq 0$ τότε η ευθεία βέλτιστης προσαρμογής είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση που ορίζει το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο μιγαδικό $\sqrt{\zeta}$

Θα δώσουμε μια απόδειξη διαφορετική από αυτή στο άρθρο ακολουθώντας τις στατιστικές ποσότητες που εισάγαμε για την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Απόδειξη. Ορίζουμε την ευθεία προσαρμογής του συνόλου σημείων $\xi = \{z_1, \dots, z_n\}$ ως την ευθεία ℓ για την οποία το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των

σημειων του S είναι ελάχιστη. Συγκεκριμένα έστω ότι η ευθεία έχει εξίσωση

$$x \cos \theta + y \sin \theta = c$$

Θα πρέπει να καθορίσω τις τιμές των παραμέτρων θ, c Υπολογίζω τις σποδτάσεις για το σημείο $z_k = x_k + iy_k, k = 1, \dots, n$ και έχω

$$D(\theta, c) = \sum_{k=1}^n (x_k \cos \theta + y_k \sin \theta - c)^2$$

Υπολογίζω αναπτύσσοντας και συμπληρώνοντας το τετράγωνο

$$D(\theta, c) = \sigma_x^2 \cos^2 \theta + 2\sigma_{xy} \cos \theta \sin \theta + \sigma_y^2 \sin^2 \theta + n(c - \mu_x \cos \theta - \mu_y \sin \theta)^2$$

Το ελάχιστο θα βρεθεί με τη διαγωνιοποίηση της τετραγωνικής μορφής

$$Q(\xi, \eta) = \sigma_x^2 \xi^2 + 2\sigma_{xy} \xi \eta + \sigma_y^2 \eta^2$$

Παρατηρούμε ότι η ορίζουσα της τετραγωνικής μορφής

$$\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2$$

είναι μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwarz:

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

μη αρνητική. Μηδενίζεται όμως όταν υπάρχει τ :

$$y_k - \mu_y = \tau(x_k - \mu_x)$$

δηλαδή όταν όλα τα σημεία είναι συνευθειακά.

Οι ιδιοτιμές της είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\chi_Q(x) = x^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)x + (\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)$$

και είναι θετικές με μικρότερη την

$$\epsilon = \frac{4\kappa^2}{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4\kappa^2}},$$

όπου

$$\kappa = \sigma_{xy} \quad \delta = \sigma_x^2 - \sigma_y^2.$$

Επιπλέον υπολογίζουμε

$$\delta^2 + 4\kappa^2 = |\delta + 2i\kappa|^2 = |\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + 2i\sigma_{xy}|^2.$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 - \sigma_y^2 + 2i\sigma_{xy} &= \sum_{k=1}^n ((x_k - \mu_x)^2 - (y_k - \mu_y)^2 - 2ik(x_k - \mu_x)(y_k - \mu_y)) = \\ &= \sum_{k=1}^n ((x_k - \mu_x) + i(y_k - \mu_y))^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς θέτοντας

$$w_k = z_k - g$$

και άρα

$$\delta^2 + 4\kappa^2 = \left| \sum_{k=1}^n w_k^2 \right|^2$$

Έστω

$$\zeta = \sum_{j=1}^n w_j^2$$

τότε εφόσον $\zeta \neq 0$ το ιδιοδιάνυσμα θα είναι συνεπώς το

$$v = |\zeta| + \zeta$$

Θετοντας για $-\pi \leq \chi \leq \pi$

$$\zeta = |\zeta|e^{i\chi}$$

καταλήγω στην

$$v = |\zeta| (e^{i\chi} + 1) = 2\zeta e^{\frac{i\chi}{2}} \cos\left(\frac{\chi}{2}\right)$$

και αρα εφόσον $-\frac{\pi}{2} < \frac{\chi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\chi}{2}\right) > 0$ και επομένως θα έχω ότι

$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\chi}{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\chi}{2}$$

Επομένως

$$\sqrt{\zeta} = \sqrt{|\zeta|}e^{\frac{i\chi}{2}}$$

και έτσι

$$c = \operatorname{Re}\left(e^{-\frac{i\chi}{2}}g\right)$$

Επομένως εάν $\zeta \neq 0$ τότε η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα που ορίζει ο μιγαδικός αριθμός $\sqrt{\zeta}$. Στην περίπτωση $\zeta = 0$ τότε η ευθεία προσαρμογής είναι η τυχούσα ευθεία. □

Όταν $n = 3$ τότε

$$\begin{aligned}\zeta &= (z_1 - g)^2 + (z_2 - g)^2 + (z_3 - g)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 6g^2 + 3g^2 = \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) - 3g^2\end{aligned}$$

και τελικά

$$\zeta = 6 \left(g^2 - \frac{1}{3}(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) \right)$$

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογές

Εδω θα παπρουσιάσουμε μία εφαρμογή της εγγεγραμμένης έλλειψης Steiner στον προσδιορισμό της θέσης πάνω στη Γη μέσω της θέσης ουρανών σωμάτων -φυσικών και τεχνητών. Θα ξεκινήσουμε ανακαλώντας την το γεγονός ότι οι τροχιες σε βαρυτικό πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου είναι κωνικές τομές και όταν πρόκειται για κλειστές τροχιές αυτές είναι ελλείψεις. Στην πραγματικότητα εάν σώμα δε βρίσκεται σε πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου αλλά πιο περίπλοκο. Ωστόσο για τον προσδιορισμό της θέσης με ακρίβεια κάποιων χιλιομέτρων αυτή είναι μία κλή προσέγγιση όταν πρόκειται για ναυσιπλοία.

7.1 Ελλειπτικές τροχιές ουρανίων σωμάτων

Η κίνηση των πλανητών του ηλιακού συστήματος σε πρώτη προσέγγιση περιγράφεται από το πρόβλημα των δύο σωμάτων. Στο πρόβλημα των δύο σωμάτων που ανάγεται στην κίνηση του κέντρου μάζης (που σε καλή προσέγγιση συμπίπτει με τον Ήλιο) και στη σχετική κίνηση του πλανήτη ως προς τον Ήλιο. Η σχετική κίνηση αποτελεί κίνηση σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων και επομένως η στοφορμή

που αντιστοιχεί διατηρείται και επομένως η κίνηση είναι επίπεδη. Συνεπώς εάν $z \in \mathbb{C}$ είναι συντεταγμένη στο επίπεδο της κίνησης στο οποίο το κέντρο των κεντρικών δυνάμεων (εν προκειμένω ο Ήλιος) βρίσκεται στην αρχή των αξόνων τότε ο δεύτερος νόμος του Newton γράφεται ως

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{\kappa z}{|z|^3} \quad \kappa = GM_{\text{Ήλιος}}$$

Θέτοντας

$$z = r e^{i\theta}$$

λαμβάνουμε με τον κανόνα του Leibniz

$$\ddot{z} = (\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + i(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})) e^{i\theta}$$

καταλήγοντας στο σύστημα

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\kappa}{r^2} \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Η δεύτερη εξίσωση δίνει ότι

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$$

που οδηγεί στην

$$r^2 \dot{\theta} = L$$

και άρα η πρώτη γράφεται ως

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} = -\frac{\kappa}{r^2}$$

Τώρα εισάγοντας την ενέργεια

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{L^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r}$$

καταλήγουμα στη διατήρηση της

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

Συνεπώς

$$\dot{r} = \sqrt{E + \frac{2\kappa}{r} - \frac{L^2}{r^2}}$$

οπότε μέσω της

$$\dot{r} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} = \frac{L}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

και θέτοντας

$$\eta = \frac{1}{r}$$

καταλήγω στην

$$\frac{d\eta}{d\theta} = -\frac{1}{L} \cdot \sqrt{E + 2\kappa\eta - L^2\eta^2}$$

Θέτουμε πάλι

$$\epsilon^2 = E + \delta^2 \quad \delta = \frac{\kappa}{L^2} \quad \epsilon \cos \psi = \eta - \delta$$

και άρα έχουμε

$$-\sin \psi \frac{d\psi}{d\theta} = \sin \psi$$

και άρα

$$\psi = \theta - \theta_0$$

και επομένως

$$\eta = \delta + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)$$

και τελικά

$$r = \frac{1}{\delta + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

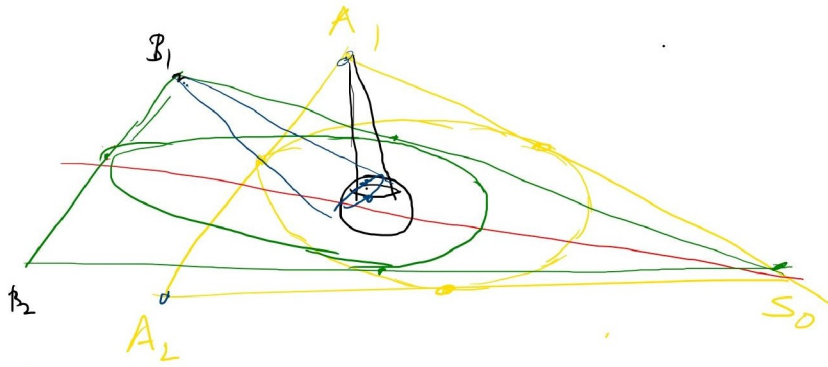
Αυτή είναι η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς ενός πλανήτη γύρω από τον ήλιο!

7.2 Προσδιορισμός θέσης πάνω στη Γη

Σχεδιάζουμε την πορεία πάνω στη Γη από το σημείο A στο σημείο B . Θα θέλαμε σε κάθε στιγμή την επιβεβαίωση της θέσης πάνω στη σχεδιασμένη πορεία. Θεωρούμε δύο ελλειπτικές τροχιές δορυφόρων -στην πραγματικότητα δεν είναι ακριβείς ελλείψεις, ωστόσο τις προσεγγίζουμε με ελλείψεις $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ που βρίσκονται σε επίπεδα π_A, π_B που διέρχονται από το κέντρο της Γής. Τα δύο αυτά επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία ℓ_{AB} που επίσης διέρχεται από το κέντρο της Γής. Πάνω στην ευθεία αυτή θα θεωρήσουμε κάποιο ουράνιο σώμα S_0 και με βάση αυτό θεωρούμε τα τρίγωνα T_A, T_B στα οποία οι ελλείψεις $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ είναι οι εγγεγραμμένες ελλείψεις Steiner. Έστω

$$T_A = S_0 \overset{\Delta}{A_1} A_2, \quad T_B = S_0 \overset{\Delta}{B_1} B_2$$

Επίσης έστω τώρα το σημείο P της τροχιάς πάνω στη Γη και ο ορίζοντας $H(P)$ στο σημείο αυτό, δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο στη Γη στο σημείο αυτό. Διαλέγοντας στο σημείο S_0 βλέπουμε ότι πάντα κατά μήκος της τροχιάς υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο από κάθε ζεύγος $s(A) \in \{A_1, A_2\}$ και $s(B) \in \{B_1, B_2\}$ ορατά από το σημείο P δηλαδή πάνω από τον ορίζοντα $H(P)$. Με βάση το ύψος



κάθε σημείου από τον ορίζοντα

u_A, u_B μπορώ να ορίσω τη θέση του P πάνω στη Γ_η . Συγκεκριμένα θεωρούμε τις ευθείες από τα σημεία που σχηματίζουν δοσμένη γωνία με τον ορίζοντα του σημείου, έστω $\alpha(P), \beta(P)$ αυτές οι γωνίες. Κάθε ζεύγος τέτοιων γωνιών ορίζει μοναδικό σημείο πάνω στη Γ_η . Θεωρούμε τους κώνους με κορυφές τα σημεία $s(A), s(B)$. Οι κώνοι αυτοί τέμνονται με την επιφάνεια της γης σε απλές κλειστές καμπύλες $C(A), C(B)$. Οι καμπύλες αυτές τέμνονται γενικά σε δύο σημεία που βρίσκονται ανάμεσα στα επίπεδα π_A, π_B . Έστω P_1, P_2 τα δύο αυτά σημεία. Θεωρώ τις ευθείες ℓ_{A1}, ℓ_{B2} . Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που ορίζει το ζητούμενο σημείο θα είναι ελάχιστη για αυτά σημεία του επιπέδου.

Βιβλιογραφία

- [AH] AHLFORS L. V. *Complex Analysis*, 3rd Edition McGraw Hill, 1979
- [C] COOLIDGE J. L., *Two geometrical applications of the method of least squares*, American Math. Monthly, **20** (1913), 187-190
- [MP] MINDA D., PHELPS S *Triangles, Ellipses and Cubic Polynomials*, American Math. Monthly, **115** (2008), 679-689