ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ : ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΣΜ)

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
«Σύγχρονες Τάσεις στη μελέτη της θεωρίας επίλυσης και θέσης Μαθηματικού Προβλήματος υπό την θέαση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME)»

ΥΠΟΤΙΤΛΟΣ: Επίδραση και επιρροή στην Ελληνική σχολική Μαθηματική πραγματικότητα σε σχέση με Διεθνή Πρότυπα Μαθηματικής Αξιολόγησης.

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ: Πατερουλάκη Σωτηρία Μαρία
Α.Μ.:150398

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ Α΄ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Αυγερινός Ευγένιος
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ Β΄ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Χατζηνικολάου Μαρία

ΠΑΤΡΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ , 2023

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

«Σύγχρονες Τάσεις στη μελέτη της θεωρίας επίλυσης και θέσης Μαθηματικού Προβλήματος υπό την θέαση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (RME)»

ΥΠΟΤΙΤΛΟΣ: Επίδραση και επιρροή στην Ελληνική σχολική Μαθηματική πραγματικότητα σε σχέση με Διεθνή Πρότυπα Μαθηματικής Αξιολόγησης.

Σωτηρία Μαρία Πατερουλάκη

Επιβλέπων Ά Καθηγητής
Αυγερινός Ευγένιος

Επιβλέπων ΄Β Καθηγητής
Χατζηνικολάου Μαρία

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κι επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας κ. Ευγένιο Αυγερινό για όλη την υποστήριξη, την καθοδήγηση και τις χρήσιμες συμβουλές που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Ως καθηγητής και ως επιβλέπων της μελέτης μου ήταν πραγματικά πολύτιμος και εκτιμώ ιδιαίτερα την ευκαιρία που μου δόθηκε.

Ευχαριστώ επίσης θερμά την κ. Ρόζα Βλάχου , Μέλος του Εργαστηριακού Διδακτικού Προσωπικού (Ε.ΔΙ.Π.) του Παιδαγωγικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αιγαίου, για την πολύτιμη βοήθειά της στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας. Οι συμβουλές και η υποστήριξή της συνέβαλαν σημαντικά στην επίτευξη των στόχων μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την Β΄ Επιβλέπουσα Χατζηνικολάου Μαρία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για όλη τη στήριξη και την υπομονή που υπέδειξαν καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας.

Περίληψη

Στη σημερινή εποχή, οι ερευνητές έχουν επικεντρωθεί σε μια έντονη τάση που αφορά την επίλυση και τη δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων. Έχουν υιοθετήσει και υποστηρίξει τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω ρεαλιστικών προβλημάτων που προέρχονται από την καθημερινή ζωή γνωστή ως Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (ΡΜΕ). Η παρούσα διπλωματική επικεντρώνεται σε αυτήν την ιδέα μελετώντας τη θέση και επίλυση μαθηματικού προβλήματος υπό τη θέαση διεθνών προτύπων μαθηματικής αξιολόγησης τόσο στην Ευρώπη όσο και στην Ελλάδα.

Αποτελείται από δύο βασικές ενότητες. Η πρώτη ενότητα αφορά το θεωρητικό μέρος της εργασίας, αποτελείται από πέντε κεφάλαια και αποσκοπεί στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων μέσω της ανάλυσης της σχετικής βιβλιογραφίας. Η δεύτερη ενότητα αποτελεί το ερευνητικό μέρος της εργασίας και έχει ως στόχο να επιβεβαιώσει ή να αμφισβητήσει τις υποθέσεις που προτάθηκαν.

Ειδικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται οι ορισμοί του προβλήματος και του μαθηματικού προβλήματος σύμφωνα με τους Schoenfeld , Mayer κ.α.. Έπειτα γίνεται αξιοσημείωτη αναφορά στις κατηγορίες προβλημάτων ανάλογα με τη λύση τους καθώς και προβλήματα του διδακτικού συμβολαίου. Τέλος αναλύεται η χρησιμότητα της θεωρίας αναπαραστάσεων κατά τη σχολική διαδικασία στην επίλυση προβλημάτων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται η ανάλυση της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης, υλοποιείται ιστορική αναδρομή και η γνωριμία με τον ιδρυτή της ιδέας Hans Freudenthal. Συνεχίζοντας στο τρίτο κεφάλαιο με την έννοια της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος και κύριο σημείο τις ευρετικές στρατηγικές σύμφωνα με τον G. Polya και το έργο του « How to solve it » .

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για την κατασκευή - θέση Μαθηματικού Προβλήματος και την συσχέτιση του με την επίλυση προβλήματος καθώς και τον ρόλο που έχει στην εκπαιδευτική διαδικασία. Στο τελευταίο πέμπτο κεφάλαιο του πρώτου μέρους αναλύονται οι τρόποι διεξαγωγής και όλη η διαδικασία των Διεθνών διαγωνισμών Pisa, Ελληνική Pisa καθώς και του Timss.

Στο δεύτερο μέρος της διπλωματικής εργασίας παρατίθενται όλα τα στοιχεία της έρευνας, έπειτα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και τέλος συνάγονται τα σχετικά

συμπεράσματα. Η άντληση των αποτελεσμάτων διεξήχθη μέσω του λογισμικού CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996) καθώς και το πρόγραμμα Microsoft Excel.

Λέξεις-Κλειδιά

Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση, επίλυση προβλήματος, κατασκευή - θέση μαθηματικού προβλήματος, Pisa, Ελληνική Pisa, TIMSS

Abstract

In today's era, researchers have focused on a strong trend regarding the solving and creation of mathematical problems. They have adopted and supported the teaching of mathematics through realistic problems derived from everyday life, known as Realistic Mathematics Education (RME). This thesis focuses on this idea, studying the position and solving of a mathematical problem under the perspective of international standards of mathematical assessment, both in Europe and Greece.

It consists of two main sections. The first section pertains to the theoretical part of the work, consisting of five chapters, and aims to draw useful conclusions through the analysis of relevant literature. The second section constitutes the research part of the work, aiming to confirm or challenge the proposed hypotheses.

Specifically, the first chapter provides the definitions of the problem and mathematical problem according to Schoenfeld, Mayer, and others. It also makes notable references to problem categories based on their solutions and teaching contract issues. Finally, the usefulness of representation theory in the school process for problem-solving is analyzed.

In the second chapter, the analysis of realistic mathematics education is conducted, including a historical review and introduction to the founder of the idea, Hans Freudenthal. Continuing to the third chapter, the concept of mathematical problem solving is explored, particularly focusing on heuristic strategies according to G. Polya and his work "How to solve it".

The fourth chapter discusses the construction and positioning of a mathematical problem and its correlation with problem solving, as well as its role in the educational process. In the final fifth chapter of the first part, the methods of conducting and the entire process of PISA, Greek PISA and TIMSS are analyzed.

In the second part of the thesis, all the research elements are presented, followed by the presentation of the results, and finally drawing relevant conclusions. The extraction of results was conducted using the CHIC software (Cohesive Hierarchical Implicative Classification) (Gras, 1996) as well as Microsoft Excel program.

Keywords
Realistic Mathematic Education, problem-solving, problem posing, Pisa , Greek Pisa, TIMSS

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Κατάλογος Γραφημάτων

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Κατάλογος Πινάκων

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1º ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1.1 Ορισμοί του Προβλήματος και του Μαθηματικού Προβλήματος

Στην σημερινή εποχή τα προβλήματα των ανθρώπων είναι ένα καθημερινό φαινόμενο. Ένα πρόβλημα αναφέρεται στην περιγραφή ή τον καθορισμό μιας κατάστασης που απαιτεί λύση ή απάντηση. Ένα πρόβλημα μπορεί να είναι μια δυσκολία, μια πρόκληση, ένα εμπόδιο, ή μια ανάγκη για αντιμετώπιση ή επίλυση. Τα προβλήματα μπορεί να προκύπτουν σε πολλούς διάφορους τομείς, όπως η κοινωνία, η οικονομία, η επιστήμη, η τεχνολογία, η υγεία, η παιδεία, και άλλοι. Ο ορισμός του προβλήματος συνήθως περιλαμβάνει την αναγνώριση της κατάστασης που απαιτεί λύση, την περιγραφή των ζητημάτων, και την ανάδειξη της ανάγκης για αντιμετώπιση ή επίλυση της κατάστασης αυτής. Ο ορισμός του προβλήματος είναι σημαντικός για την κατανόηση της φύσης του προβλήματος και την ανάπτυξη αποτελεσματικών λύσεων.

Ο Schoenfeld το 1985 ως ορισμό του προβλήματος στο Oxford English Dictionary παραθέτει τον εξής: Μια αμφίβολη ή δύσκολη ερώτηση, ένα ζήτημα διερεύνησης, συζήτησης ή σκέψης, μια ερώτηση που ασκεί το μυαλό σας (όπως αναφέρεται στην πτυχιακή Νταχμίρη , Ε. Α. , 2020). Για τον Mayer το 1985, πρόβλημα εμφανίζεται όταν κάποιος αντιμετωπίζει μια δεδομένη κατάσταση, θέλει να φθάσει σε μια άλλη ζητούμενη, αλλά δεν γνωρίζει άμεσο τρόπο πρόσβασης ή επίτευξης του σκοπού αυτού. (Καραλή, 2009)

Σύμφωνα με το Centre for the Greek Language (2006-2008) :

Ορισμός 1 : Πρόβλημα είναι ένα ερώτημα ή ζήτημα, στο οποίο επιζητείται και επιχειρείται να δοθεί απάντηση με επιστημονικό τρόπο.

Ορισμός 2 : Πρόβλημα είναι μια δύσκολη ή περίπλοκη κατάσταση ή υπόθεση ή θέμα που πρέπει να αντιμετωπιστεί που επιζητεί λύση ή διευθέτηση.

Ορισμός 3 : Πρόβλημα είναι η δυσκολία που δημιουργεί αρνητικές καταστάσεις ή δυσλειτουργίες.

Ορισμός 4 : Μαθηματικό Πρόβλημα είναι ένα ερώτημα ή ζήτημα που ορισμένα στοιχεία του είναι γνωστά, και με βάση αυτά ζητείται η εύρεση άλλων άγνωστων με μαθηματικές ή με άλλες επιστημονικές μεθόδους.

Σύμφωνα με τον ορισμό του προβλήματος στο σχολικό βιβλίο μαθηματικών Ά γυμνασίου, Πρόβλημα ονομάζουμε την κατάσταση, που δημιουργείται, όταν αντιμετωπίζουμε εμπόδια και δυσκολίες στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σε ένα συγκεκριμένο στόχο.

Η ενημερωμένη εκδοχή από την Βικιπαίδεια, 2023 ορίζει ως Πρόβλημα κάποιο εμπόδιο, δυσκολία, πρόκληση που δυσκολεύει την έκβαση ενός στόχου ή αποτελέσματος που επιδέχεται αντιμετώπισης και ενδεχομένως λύσης. Με άλλα λόγια, πρόβλημα είναι μια κατάσταση η οποία χρήζει αντιμετώπισης, απαιτεί λύση, η δε λύση της δεν είναι γνωστή, ούτε προφανής. Τα προβλήματα που απαντώνται στην καθημερινότητα και στις επιστήμες ποικίλουν. Ένα πρόβλημα μπορεί να είναι προσωπικό, κοινωνικό, μαθηματικό.

Στα μαθηματικά, το μαθηματικό πρόβλημα αναφέρεται σε μια δοσμένη κατάσταση ή ερώτηση που απαιτεί τη χρήση μαθηματικών αρχών, μεθόδων και τεχνικών για να βρεθεί μια λύση ή να απαντηθεί με ακρίβεια και απόδειξη. Τα μαθηματικά προβλήματα μπορεί να είναι διάφορα είδη και να αναφέρονται σε διάφορες αριθμητικές, γεωμετρικές, αλγεβρικές, πιθανοτικές, θεωρητικές ή άλλες μαθηματικές έννοιες. Ο όρος «μαθηματικό πρόβλημα» σύμφωνα με τον Μπαμπινιώτη το 2002 μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα ερώτημα ή ζήτημα με το οποίο δίνονται συγκεκριμένα δεδομένα και με βάση αυτά ζητείται η εύρεση άλλων, άγνωστων με μαθηματικές μεθόδους. Μαθηματικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που μπορεί να αναπαρασταθεί, να αναλυθεί και πιθανόν να λυθεί με μαθηματικές μεθόδους. Τα μαθηματικά προβλήματα διακρίνονται σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου, λεκτικά αριθμητικά προβλήματα, αφηρημένα όπως τα προβλήματα του Hilbert και παράδοξα όπως τα προβλήματα του Russell (Τελευταία Ενημέρωση Βικιπαίδεια,2021).

Ο M. Kantowski έχει σημαντική συνεισφορά στη μελέτη των μαθηματικών προβλημάτων, και στην κατανόηση της διαδικασίας επίλυσής τους. Σύμφωνα με τη θεωρία του, το να αντιμετωπίζει κάποιος ένα μαθηματικό πρόβλημα σημαίνει ότι βρίσκεται σε μια κατάσταση όπου δεν μπορεί να επιλύσει κάποια ερώτηση ή να αντιμετωπίσει κάποια πρόκληση με τις γνώσεις που ήδη διαθέτει. Ο Kantowski το 1981 αναφέρει ότι, ένα πρόβλημα είναι μια κατάσταση που διαφέρει από μια άσκηση στο ότι οι λύτες δεν έχουν μια μέθοδο ή έναν αλγόριθμο με τον οποίο θα οδηγηθούν με βεβαιότητα στη λύση.

1.2 Κατηγορίες προβλημάτων ανάλογα με τη λύση τους

Η λύση ενός προβλήματος εξαρτάται από το είδος του μαθηματικού προβλήματος που έχει διατυπωθεί. Τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να διακριθούν σε τρεις κατηγορίες, τα επιλύσιμα, μη επιλύσιμα και ανοικτά. Τα επιλύσιμα προβλήματα είναι εκείνα για τα οποία υπάρχει γνωστή λύση. Τα μη επιλύσιμα προβλήματα είναι εκείνα για τα οποία έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει λύση. Τα ανοικτά προβλήματα είναι εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει ακόμα γνωστή λύση, αλλά δεν έχει αποδειχθεί ότι είναι μη επιλύσιμα. Η επίλυση των ανοικτών προβλημάτων είναι συχνά ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα στη μαθηματική έρευνα.

- Κατηγορίες προβλημάτων σύμφωνα με τον Schoenfeld

Ο Schoenfeld το 1992 ορίζει ως προβλήματα τα μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας, για εξάσκηση και για μέτρηση του επιπέδου ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων. Ο Schoenfeld, διακρίνει τα προβλήματα σε "προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις" και σε "προβληματικές καταστάσεις ή πρωτότυπα προβλήματα".

- Προβλήματα ρουτίνας ή ασκήσεις: Αυτά τα προβλήματα είναι συνήθως καλά ορισμένα και οδηγούν σε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα. Συνήθως οι μαθητές έχουν ήδη συναντήσει ανάλογου τύπου προβλήματα και τους έχουν δοθεί οδηγίες για το πώς να τα λύσουν. Είναι συνήθως στραμμένα στην εξάσκηση και την κατάκτηση βασικών δεξιοτήτων και αλγορίθμων.
- Προβληματικές καταστάσεις ή πρωτότυπα προβλήματα: Αυτά τα προβλήματα είναι πιο ανοιχτά και απαιτούν από τους μαθητές να εφαρμόσουν τη δημιουργικότητά τους, τη σκέψη τους και την ανάλυσή τους για να βρουν λύσεις. Δεν υπάρχει μία μόνο σωστή απάντηση, μπορούν να έχουν πολλαπλές προσεγγίσεις ή λύσεις, και ενθαρρύνουν τον μαθητή να εξερευνήσει διάφορες πιθανότητες. Σχετίζονται με το πραγματικό κόσμο, έχουν συνάφεια με το περιβάλλον ή τις εμπειρίες του μαθητή, και τον καλούν να εφαρμόσει τις μαθηματικές γνώσεις του σε πρακτικές καταστάσεις. Τέλος, είναι ανανεώσιμα αφού μπορούν να προσαρμοστούν ή να παραλλάξουν ανάλογα με το επίπεδο ή τα ενδιαφέροντα των μαθητών.
- Κατηγοριοποίηση προβλημάτων σύμφωνα με τον George Polya

Σύμφωνα με τον George Polya, ο οποίος ήταν ένας Ουγγρικής καταγωγής μαθηματικός και εκπαιδευτικός, κατέθεσε την προσέγγισή του σχετικά με τις κατηγορίες των προβλημάτων στο βιβλίο του "How to Solve It" (Πώς να το Λύσεις), το 1945. Τα μαθηματικά προβλήματα μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρείς βασικές κατηγορίες:

- Προβλήματα Εύρεσης της λύσης (Problems of finding the solution) :

Σε αυτή την κατηγορία, το πρόβλημα είναι να βρεθεί μια συγκεκριμένη λύση για μια δεδομένη κατάσταση. Ο μαθητής πρέπει να αναζητήσει τη σωστή απάντηση ή τη σωστή διαδικασία για να βρει τη λύση. Ζητείται να βρεθεί μια απάντηση ή μια λύση σε ένα πρόβλημα που δεν είναι αμέσως προφανές. Συνήθως απαιτούν παρατηρητικότητα, ανάλυση, σύνθεση και οργάνωση των πληροφοριών.

- Προβλήματα Απόδειξης (Proof Problems) :

Στα προβλήματα απόδειξης, ο στόχος είναι να δοθεί μια απόδειξη για κάποια σχέση, θεώρημα ή πρόταση. Συνήθως, αυτά τα προβλήματα είναι πιο αφηρημένα από τα προβλήματα εύρεσης, και απαιτούν μεγαλύτερη σκέψη και καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών αρχών και των λογικών δομών που βρίσκονται στη βάση τους. Για την απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης διατυπώνουμε σαφώς την πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε και ξεκινάμε με τα βασικά αξιώματα και ορισμούς που απαιτούνται για την απόδειξη της πρότασης. Χρησιμοποιούμε λογικούς συλλογισμούς και μαθηματικά εργαλεία για να φτάσουμε σε νέες πληροφορίες και αποτελέσματα. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε σε μια σειρά από προτάσεις και αξιώματα που αποδεικνύουν την αρχική πρόταση. Τελικά, συνοψίζουμε την απόδειξη και ελέγχουμε ότι όλα τα βήματα είναι συνεπή μεταξύ τους και προκύπτει η απόδειξη της αρχικής πρότασης. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η διαδικασία απόδειξης μπορεί να είναι πολύπλοκη και να απαιτεί πολλά βήματα και εργαλεία, ανάλογα με τη φύση της αρχικής πρότασης και το πεδίο των μαθηματικών στο οποίο ανήκει. Είναι σημαντικό να ανακαλύψουμε τον σύνδεσμο ανάμεσα στην υπόθεση και το συμπέρασμα. Για την απόρριψη ενός ισχυρισμού μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα αντιπαράδειγμα ώστε να δειχθεί ότι από την υπόθεση δεν προκύπτει κατ’ ανάγκην το συμπέρασμα. Τα προβλήματα απόδειξης συνηθίζονται σε ανώτερα μαθηματικά επίπεδα.

- Προβλήματα Ρουτίνας :

Τα προβλήματα ρουτίνας σύμφωνα με τον G. Polya είναι τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν με μια σειρά συνήθων ενεργειών ή με ένα αλγόριθμο που απαιτεί λίγη ή καθόλου σκέψη. Αυτά τα προβλήματα είναι συνήθως πολύ κοινά και απλά, και στην πλειονότητα τους δεν απαιτείται κάποια εξειδικευμένη μαθηματική γνώση. Σε αυτά τα προβλήματα, η λύση είναι συνήθως προφανής και μπορεί να βρεθεί με μια σειρά από καθορισμένες ενέργειες. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα ρουτίνας θα μπορούσε να είναι η επίλυση μιας απλής εξίσωσης ή ο υπολογισμός του αθροίσματος των πρώτων 10 φυσικών αριθμών.

Σε αντίθεση με τα προβλήματα εύρεσης και απόδειξης, τα προβλήματα ρουτίνας δεν απαιτούν συνήθως τη χρήση δημιουργικής σκέψης ή την ανάπτυξη μιας στρατηγικής λύσης. Στην πραγματικότητα, η λύση τους συνήθως απαιτεί μόνο την εφαρμογή ενός συγκεκριμένου τύπου λύσης.

1.3 Κατηγορίες προβλημάτων σύμφωνα με το Διδακτικό Συμβόλαιο

Το διδακτικό συμβόλαιο αποτελεί ένα συνειδητό ή άτυπο συμβόλαιο ανάμεσα στο δάσκαλο και τον μαθητή σχετικά με τις προσδοκίες τους, τους ρόλους τους και τους στόχους της μάθησης. Η ιδέα είναι ότι μέσα από αυτό το συμβόλαιο, δημιουργείται μια συνεργατική σχέση ανάμεσα στο δάσκαλο και τον μαθητή, που στοχεύει στην επίτευξη των στόχων της μάθησης. Συμφώνα με τον Brousseau (1986), διδακτικό συμβόλαιο καλούμε το σύνολο των συμπεριφορών του διδάσκοντος που αναμένονται από το μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από τον διδάσκοντα. Ο Γαγάτσης το 2006 ορίζει το διδακτικό συμβόλαιο ως μια σιωπηρή και άτυπη συμφωνία ανάμεσα στον μαθητή και τον εκπαιδευτικό γύρω από ένα γνωστικό αντικείμενο.

Η πρώτη αναφορά του διδακτικού συμβολαίου έγινε από τον Brousseau το 1984. Δημιουργήθηκε η ανάγκη να γίνει μια καλή συμφωνία ρητή στους μαθητές όπως ο καθορισμός του τι είναι αποδεκτό όσον αφορά τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις τους, ένα είδος μόνιμης ανάληψης όσων έχουν συμφωνηθεί. Ο Brousseau το 1984 ανέφερε πως η μάθηση επιτυγχάνεται με τη ρήξη του διδακτικού συμβολαίου και όχι με τη σωστή χρήση του (Γαγάτσης (2006)). Η άποψη του Brousseau ότι η μάθηση επιτυγχάνεται με τη ρήξη του διδακτικού συμβολαίου, αναφέρεται στην ανάγκη διαταραχής των συνήθων μοτίβων της μάθησης προκειμένου να δημιουργηθούν νέες συνθήκες μάθησης και να αναπτυχθούν νέες ιδέες και γνώσεις. Αυτό μπορεί να σημαίνει την ανατροπή των συνηθισμένων διδακτικών πρακτικών και την χρήση νέων διδακτικών μεθόδων και προσεγγίσεων. Σε κάθε περίπτωση, η έννοια του διδακτικού συμβολαίου υπογραμμίζει τη σημασία της συνεργατικής σχέσης μεταξύ του δασκάλου και του μαθητή στη διαμόρφωση της διαδικασίας της μάθησης.

Η ύπαρξη όμως ενός διδακτικού συμβολαίου που προσδιορίζει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των προβλημάτων μπορεί να δημιουργήσει παρανοήσεις στους μαθητές. Για παράδειγμα, μπορεί να υπάρχουν μαθητές που θα ερμηνεύσουν τα χαρακτηριστικά του προβλήματος με διαφορετικό τρόπο από αυτόν που είχε στο μυαλό του ο δάσκαλος κατά την σύνταξη του συμβολαίου. Επιπλέον, η ύπαρξη ενός διδακτικού συμβολαίου μπορεί να οδηγήσει σε μια μηχανική προσέγγιση της μάθησης, καθώς οι μαθητές μπορεί να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα ως μια φορμαλιστική άσκηση που πρέπει να λυθεί με συγκεκριμένο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση, η επιτυχής επίλυση του προβλήματος δεν αποτελεί απαραίτητα την απόδειξη κατανόησης της έννοιας που αναζητείται, αλλά μια απόδειξη της ικανότητας των μαθητών να ακολουθήσουν τις οδηγίες του διδάσκοντα.

Μη συνηθισμένα προβλήματα

1. Μη πραγματικά προβλήματα είναι αυτά που δεν ανταποκρίνονται στις πραγματικές ανάγκες και δυνατότητες των μαθητών. Μπορεί να είναι προβλήματα που είναι πολύ απλά ή πολύ δύσκολα για τους μαθητές, προβλήματα που αφορούν θέματα που δεν είναι σχετικά με τα ενδιαφέροντά τους ή που δεν έχουν καμία σχέση με το περιβάλλον τους. Επιπλέον, ένα μη πραγματικό πρόβλημα μπορεί να είναι αόριστο ή να μην έχει σαφώς καθορισμένους στόχους και κριτήρια αξιολόγησης, κάτι που μπορεί να καταστήσει δύσκολη τη διαδικασία της μάθησης για τους μαθητές. Για παράδειγμα : « Μια νοικοκυρά αγόρασε 500kg πορτοκάλια για να φτιάξει πορτοκαλόπιτα κάθε κιλό στοίχιζε 10€. Πόσα χρήματα πλήρωσε;» Το παράδειγμα αυτό είναι ένα παράδειγμα μη πραγματικό καθώς δεν ανταποκρίνεται σε μια πραγματική κατάσταση. Αν και εύκολο να επιλυθεί, δίνοντας μια ακριβή απάντηση, δεν παρέχει στους μαθητές πρακτικές εμπειρίες που σχετίζονται με την πραγματική ζωή.
2. Αντιφατικό πρόβλημα : Ένα αντιφατικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα που περιέχει δύο ή περισσότερες δηλώσεις που αντιτίθενται μεταξύ τους και δεν μπορούν να είναι και οι δύο σωστές ταυτόχρονα. Έτσι, αν επιχειρήσουμε να βρούμε μια λύση στο πρόβλημα, θα βρεθούμε αντιμέτωποι με μια αντίφαση. Για παράδειγμα, όλα τα μήλα ενός αγρότη είναι κόκκινα. Αν όλα τα μήλα είναι 500 kg και τα πράσινα είναι 100 kg, πόσα κιλά είναι τα κόκκινα;

- Πρόταση 1: Όλα τα μήλα είναι κόκκινα.
- Πρόταση 2: Υπάρχουν μήλα που δεν είναι κόκκινα.

Αυτές οι δύο προτάσεις είναι αντιφατικές, καθώς δεν μπορούν να είναι και οι δύο αληθείς ταυτόχρονα. Επομένως, ένα πρόβλημα που βασίζεται σε αυτές τις δύο προτάσεις θα ήταν αντιφατικό. Οι μαθητές πιθανόν να διορθώσουν την αντίφαση μόνοι τους ή να αγνοήσουν την αντίφαση και να προσπαθήσουν να το λύσουν.

1. Απροσδόκητα προβλήματα : Τα μαθητικά προβλήματα μπορεί να είναι απροσδόκητα όταν ζητούν από τους μαθητές να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε μια καινούρια και μη συνηθισμένη κατάσταση. Αυτό μπορεί να απαιτεί την ενεργοποίηση κριτικής σκέψης και την αναζήτηση διαφορετικών προσεγγίσεων για την επίλυση του προβλήματος. Ένα παράδειγμα απροσδόκητου προβλήματος μπορεί να είναι: "Μια επιχείρηση παράγει μαρμελάδα σε βάζα των 250 γραμμαρίων και 500 γραμμαρίων. Πόσα βάζα από κάθε είδος θα πρέπει να παραχθούν για να έχουμε συνολικά 3 κιλά μαρμελάδας; "Αυτό το πρόβλημα μπορεί να είναι απροσδόκητο για τους μαθητές επειδή πρέπει να σκεφτούν πώς να συνδυάσουν διαφορετικά μεγέθη βάζων για να φτάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.
2. Αδύνατα προβλήματα: 1) Αδύνατα με τη λογική, με ελλιπή δεδομένα , χωρίς στρατηγικές. Για παράδειγμα, «Πάνω σε ένα καράβι υπήρχαν 26 πρόβατα και 10 κατσίκια. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου; » Δεν υπάρχει καμία συσχέτιση μεταξύ του αριθμού των ζώων και της ηλικίας του καπετάνιου, οπότε δεν μπορούμε να βρούμε μια λογική απάντηση στην ερώτηση. 2) Άλυτα από τη φύση τους «Βρείτε 3 διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων το άθροισμα δεν είναι αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί με το 3». Δεν υπάρχει κανένας τρόπος να βρούμε τρεις διαδοχικούς αριθμούς των οποίων το άθροισμα δεν είναι αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί με το 3. Επομένως το πρόβλημα είναι άλυτο από τη φύση του. 3) Αδύνατα λόγω υψηλού επιπέδου «Ποιο είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυκλικού πρίσματος με ακτίνα 5cm;» (σε μαθητή ΣΤ' δημοτικού). Το πρόβλημα απαιτεί υπολογιστικές ικανότητες που δεν έχουν διδαχθεί σε αυτήν την ηλικία οι μαθητές.

Η πρόοδος της επιστήμης και των μαθηματικών βασίζονται στην καλά διατυπωμένη τοποθέτηση προβλημάτων. Η καλή διατύπωση προβλημάτων είναι ουσιαστική για την εξέλιξη της επιστημονικής και μαθηματικής κοινότητας, και επιτρέπει στους ερευνητές να επικεντρώνονται στην αναζήτηση και ανάπτυξη καλύτερων λύσεων σε πραγματικά προβλήματα.

1.4 Θεωρία της Αναπαράστασης

Στο πλαίσιο της μαθηματικής εκπαίδευσης, ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο αναπαρίστανται μαθηματικές έννοιες και αντικείμενα, όπως αριθμοί, γραφήματα, εξισώσεις και γεωμετρικά σχήματα. Οι αναπαραστάσεις αυτές μπορούν να είναι γλωσσικές, γραφικές, συμβολικές ή ακόμη και φυσικές, όπως για παράδειγμα μαθηματικά εργαλεία όπως ράβδοι ή κύβοι. Στο πλαίσιο της ψυχολογίας, οι αναπαραστάσεις αναφέρονται στις διαδικασίες με τις οποίες οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται και κατανοούν τον κόσμο γύρω τους, όπως και στις δομές του μυαλού που επιτρέπουν την αναπαράσταση των πληροφοριών. Σε γενικότερο πλαίσιο, ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται στη διαδικασία με την οποία η πραγματικότητα ή η ιδέα απεικονίζεται ή περιγράφεται με έναν τρόπο που επιτρέπει την κατανόηση ή την αλληλεπίδραση με αυτήν.

Ο όρος αναπαράσταση είναι ασαφής και ως εκ τούτου επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996: Kaput, 1985: Roth & McGinn, 1998: Seeger, 1998: Von Glasersfeld 1987b). Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα, προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin & Kaput, 1996: Kaput, 1998). Τα συστήματα αυτά έχουν ονομαστεί σχήματα συμβόλων (Kaput, 1987a: Kaput, 1987b) ή συστήματα αναπαράστασης (Goldin, 1987) (όπως αναφέρεται στο Γαγάτσης & Σπύρου, 2000).

Μια αναπαράσταση είναι ένα σύστημα συμβόλων ή σημάτων που αναπαριστούν κάτι άλλο, όπως μια ιδέα, ένα αντικείμενο, μια διαδικασία ή μια σχέση. Η αναπαράσταση μπορεί να είναι είτε εσωτερική/νοητική, όπου η αναπαράσταση υπάρχει μόνο στο μυαλό μας, είτε εξωτερική/σημειωτική, όπου η αναπαράσταση υπάρχει στον πραγματικό κόσμο, όπως ένα γράμμα ή ένα διάγραμμα. Οι αναπαραστάσεις μπορούν να είναι πολύπλοκες δομές συμβόλων και συστημάτων, που επιτρέπουν τη μεταφορά και ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ ανθρώπων. Η θεωρία της αναπαράστασης αναφέρεται στη μελέτη των δομών και των λειτουργιών αυτών των συστημάτων αναπαράστασης.

Η διάκριση ανάμεσα σε εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελεί αντικείμενο συζήτησης στην επιστημονική κοινότητα της Ψυχολογίας και της Μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι Goldin και Kaput υποστηρίζουν ότι η διάκριση αυτή είναι σημαντική, διότι τα εσωτερικά συστήματα αναπαράστασης αφορούν τις αναπαραστάσεις που δημιουργούνται στο μυαλό του ατόμου, ενώ τα εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης αφορούν τις αναπαραστάσεις που εκφράζονται μέσω εξωτερικών σημάτων, όπως σύμβολα ή γλώσσα. Από την άλλη πλευρά, οι

Lesh, Post και Behr (1987) θεωρούν ότι η διχοτόμηση αυτή είναι τεχνητή και ότι οι αναπαραστάσεις δεν μπορούν να διαχωριστούν αυστηρά σε εσωτερικές και εξωτερικές, αλλά αλληλοεπιδρούν στενά μεταξύ τους.

Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αναφέρονται στις νοητικές αναπαραστάσεις που δημιουργούνται στο μυαλό μας για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα και να επεξεργάζονται τις πληροφορίες που λαμβάνουμε από το περιβάλλον μας. Αυτές οι αναπαραστάσεις είναι εσωτερικές επειδή δημιουργούνται μέσα στο μυαλό μας και δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες από άλλους. Η δημιουργία εσωτερικών αναπαραστάσεων συμβάλλει στην κατανόηση και επεξεργασία πληροφοριών και αποτελεί σημαντική διαδικασία στη μάθηση και την αντιμετώπιση προβλημάτων.

Σύμφωνα με τους Lesh, Post & Behr το 1987, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν τις παρατηρήσιμες ενσωματώσεις των εσωτερικών εννοιολογικών δομών των μαθητών και αναφέρονται στις εκδηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει τις έννοιες. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της μάθησης των μαθηματικών και της επίλυσης προβλημάτων, και μπορούν να χωριστούν σε πέντε διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων:

1. Κείμενα: Τα κείμενα περιλαμβάνουν γνώση που έχει οργανωθεί βάσει γεγονότων της καθημερινής ζωής και αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση προβλημάτων.
2. Χειριστικά αντικείμενα / μοντέλα: Τα χειριστικά αντικείμενα ή μοντέλα είναι φυσικά ή ηλεκτρονικά αντικείμενα που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν μαθηματικές έννοιες, όπως οι κύβοι αριθμητικής, οι ράβδοι κλασμάτων και η αριθμητική γραμμή.
3. Γλώσσα: Η γλώσσα περιλαμβάνει τις λεκτικές εκφράσεις που χρησιμοποιούν οι μαθητές για να περιγράψουν και να αναπαραστήσουν μαθηματικές έννοιες και δομές. Όπως οι προφορικές επεξηγήσεις των μαθητών για τη λειτουργία και τη σχέση ενός αντικειμένου / συστήματος, που αντικατοπτρίζουν τις δομές και τις σχέσεις των μαθηματικών εννοιών.
4. Γραφικές αναπαραστάσεις – όπως είναι γραφήματα, διαγράμματα και διανύσματα, όπου οι σχέσεις και οι αλληλεπιδράσεις των στοιχείων αντικατοπτρίζουν και αναπαριστούν μαθηματικές σχέσεις και έννοιες.

5. Συμβολικές αναπαραστάσεις – όπως είναι οι αριθμητικές εκφράσεις, οι εξισώσεις και οι αλγεβρικές διαδικασίες, όπου τα σύμβολα αντιπροσωπεύουν μαθηματικές σχέσεις και εννοιολογικές δομές.

Όλα αυτά τα συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων συνεισφέρουν στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, αλλά και στην επικοινωνία του δασκάλου με τους μαθητές. Όμως η ομαδοποίηση των εξωτερικών αναπαραστάσεων με βάση τον τρόπο παραγωγής τους μπορεί να μην είναι η πλέον κατάλληλη για μαθηματικά προβλήματα. Η λειτουργία τους σε ένα μαθηματικό πρόβλημα εξαρτάται από το πώς χρησιμοποιούνται και ερμηνεύονται από τον αναλυτή του προβλήματος. Έτσι, μια εικόνα μπορεί να χρησιμεύει ως βοηθητική αναπαράσταση για να εξηγήσει μια μαθηματική έννοια, ενώ μια γλώσσα μπορεί να χρησιμεύει ως πλήρης αναπαράσταση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι εξωτερικές αναπαραστάσεις μπορούν να λειτουργήσουν σε συνδυασμό μεταξύ τους, για να παρέχουν μια πλήρη και κατανοητή αναπαράσταση ενός μαθηματικού προβλήματος. Για παράδειγμα, μια εικόνα μπορεί να συνοδεύεται από μια περιγραφή σε κείμενο, που παρέχει περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με το μαθηματικό πρόβλημα που απεικονίζεται στην εικόνα. Συνολικά, η καλύτερη εκδοχή είναι να χρησιμοποιούμε την κατάλληλη εξωτερική αναπαράσταση για κάθε μαθηματικό πρόβλημα, λαμβάνοντας υπόψη τις απαιτήσεις του προβλήματος και τη δυνατότητα του αναλυτή να ερμηνεύσει την αναπαράσταση. Η συνδυαστική χρήση πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων μπορεί να βοηθήσει στη δημιουργία μιας πλήρους και κατανοητής αναπαράστασης ενός μαθηματικού προβλήματος.

Επίσης σύμφωνα με τους Goldin & Kaput, 1996 η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο έχουν διαμορφωθεί οι εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που τις αντιλαμβάνονται. Αυτό σημαίνει ότι δύο διαφορετικοί άνθρωποι μπορεί να ερμηνεύσουν μια εξωτερική αναπαράσταση διαφορετικά, καθώς έχουν διαμορφώσει διαφορετικές εσωτερικές αναπαραστάσεις και σχέσεις αναπαράστασης στο μυαλό τους. Αυτό είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη κατά την ανάπτυξη και τη χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων σε μαθηματικά προβλήματα. Ο σχεδιασμός και η χρήση αυτών των αναπαραστάσεων θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη τις διαφορετικές εσωτερικές αναπαραστάσεις που μπορεί να έχουν οι διάφοροι χρήστες και να προσπαθεί να παρέχει ποικίλες εξωτερικές αναπαραστάσεις που θα είναι πιο κατανοητές και προσιτές σε όλους τους χρήστες.

Τόσο οι εσωτερικές όσο και οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους διττά. Οι Goldin και Kaput το 1996 υποστηρίζουν την άποψη αυτή και συγκεκριμένα σε κάποιες περιπτώσεις οι εσωτερικές αναπαραστάσεις μετατρέπονται σε φυσικές πράξεις, ενώ σε άλλες περιπτώσεις οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αναπαριστούν συμβολικά συστήματα και διευκολύνουν την ανάγνωση και την ερμηνεία των λέξεων και των προτάσεων, καθώς και την κατανόηση των εξισώσεων και των γραφικών παραστάσεων. Συχνά, οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε εσωτερικές και εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα και είναι πολύ σημαντικές για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων.

Οι αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλούς τομείς εκτός από τα μαθηματικά και την επιστήμη των υπολογιστών, όπως για παράδειγμα στη γλωσσολογία, τη φιλοσοφία, την ψυχολογία και την ανθρωπολογία. Τέλος, οι αναπαραστάσεις μπορούν να συνεργάζονται μεταξύ τους, αλλά μπορούν να είναι και δυνητικά επικίνδυνες αν δεν χρησιμοποιούνται σωστά. Η επιλογή της κατάλληλης αναπαράστασης για ένα πρόβλημα είναι συχνά αντικείμενο συζήτησης και απαιτεί την κατανόηση των διαφορετικών τρόπων αναπαράστασης.

2º ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΤΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΟΛΛΑΝΔΩΝ

2.1 Η ιστορία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Τα πρώτα βήματα για την Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση ξεκίνησαν στην Ολλανδία στις αρχές της δεκαετίας του 70. Ο κύριος λόγος της δημιουργίας της ήταν ότι κάποια νέα προγράμματα σπουδών στην εκπαίδευση των μαθηματικών αναπτύσσονταν εκείνη την εποχή στην Ευρώπη και στις Ηνωμένες Πολιτείες, όμως η ολλανδική μαθηματική κοινότητα ήθελε μια εναλλακτική πρόταση. Το κύριο έναυσμα δόθηκε μόλις εισήλθε υλικό και μεταφρασμένα εγχειρίδια από το αμερικανικό μεταρρυθμιστικό κίνημα «Νέα Μαθηματικά» το οποίο χαρακτηριζόταν από τους Αμερικανούς ως «Μηχανιστική Εκπαίδευση Μαθηματικών». Στην πραγματικότητα η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση προήλθε από την εναντίωση αυτού του μηχανιστικού κινήματος αλλά και της επικρατούσας μέχρι τότε ολλανδικής φιλοσοφίας.

Τα ρεαλιστικά μαθηματικά (RME) είναι ένα ειδικό πεδίο θεωρητικής προσέγγισης της διδασκαλίας για τα μαθηματικά. Η αρχή έγινε το 1968 με το έργο Wiskobas της CMLW (Επιτροπή Εκσυγχρονισμού του Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών) που ιδρύθηκε από την κυβέρνηση το 1961 με θεμελιωτές τους Wijdeveld και Goffree. Ο σκοπός ήταν ο εκσυγχρονισμός της μαθηματικής εκπαίδευσης στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Μετά την έναρξη του έργου η προσέγγιση αυτή επεκτάθηκε και στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Το 1971 ιδρύθηκε το Ινστιτούτο Ανάπτυξης της Μαθηματικής Εκπαίδευσης IOWO με διευθυντή τον Hans Freudenthal ο οποίος ήταν ο ιδρυτής αυτού του μεταρρυθμιστικού κινήματος. Η εναντίωσή του στο κίνημα των Νέων Μαθηματικών, οι απόψεις του για μια νέα ματιά στην εκπαίδευση καθώς και οι ιδέες του για την αξιολόγηση έδωσαν την αρχική ώθηση για την ανάπτυξη της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Το IOWO αποτελούνταν από δύο τμήματα τα οποία συνεργάζονταν, το Wiskobas για ηλικίες από 2 έως 12 ετών και το Wiskivon για ηλικίες 12 έως 16 ετών.

Χαρακτηριστικό της RME είναι ότι προτείνονται « ρεαλιστικές καταστάσεις » στη διαδικασία της μάθησης. Η έννοια "ρεαλιστικές" καταστάσεις είναι διφορούμενη, η μία έννοια είναι ότι συνδέεται με τον πραγματικό κόσμο ενώ η άλλη έννοια είναι ότι προσφέρονται στους μαθητές προβλήματα από τη σφαίρα της φαντασίας. Αυτή η ερμηνεία προέρχεται από την ολλανδική έκφραση « zich Realiseren » η οποία σημαίνει " να φανταστεί κανείς ".

2.2 Οι κατευθυντήριες ιδέες του Freudenthal

Ο Hans Freudenthal πίστευε ότι τα μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με συνθήκες της πραγματικότητας. Να είναι κοντά στις καθημερινές εμπειρίες των μαθητών αλλά και στην κοινωνία γενικότερα. Ο μαθητής πρέπει να συνδέει την μαθηματική γνώση με καταστάσεις της καθημερινής ζωής ώστε η μάθηση να γίνεται βιωματική. Ο Freudenthal δεν αντιμετώπιζε τα μαθηματικά ως ένα περιεχόμενο που πρέπει απλώς να μεταλαμπαδευθεί, αντιθέτως τόνισε την ανθρώπινη δραστηριότητα τους. Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι η πορεία που θα πρέπει να ακολουθήσει ο μαθητής για τη μάθηση είναι παρεμφερείς με την πορεία που ακολούθησε το ανθρώπινο είδος. Αυτό δεν σημαίνει ότι θα πρέπει να αναπαραχθεί κατά βήμα η εξέλιξη μιας μαθηματικής έννοιας, αλλά ότι οι διαδικασίες μέσω των οποίων αποκτούν περιεχόμενο οι μαθηματικές έννοιες θα πρέπει να αποτελούν τη θεμελιώδη βάση για τη διδασκαλία και τη μάθηση ώστε να κατακτηθούν αυτές οι έννοιες. Αυτή ήταν η βασική αρχή του, τονίζοντας ότι « τα μαθηματικά που μαθαίνονται με έναν μη συσχετισμένο τρόπο, αποκομμένα από την πραγματικότητα, θα ξεχαστούν σύντομα » (Freudenthal, 1973) .

- Μαθηματικοποίηση

Μέσα από τον συνυφασμό των μαθηματικών ως ανθρώπινη δραστηριότητα προκύπτει η έννοια της μαθηματικοποίησης . Η έννοια της μαθηματικοποίησης συνδέεται με την επιλυσιμότητα μαθηματικών προβλημάτων αλλά και με την οργάνωση - δομή ενός οποιουδήποτε θέματος που μπορεί να κατανοηθεί και να επιλυθεί ευκολότερα εάν δομηθεί με μαθηματικό τρόπο. Με τη λέξη δραστηριότητα καταλαβαίνουμε μια διαδικασία που υλοποιείται στην πράξη. Έτσι ο μαθητής μπορεί να αντιλαμβάνεται ευκολότερα ένα πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό δεν είναι απαραίτητο να έχει μαθηματικό περιεχόμενο, στόχος είναι ο μαθητής να μπορεί να μαθηματικοποιεί και τα μη μαθηματικά προβλήματα στη ζωή του ώστε να μπορεί να οργανώσει, να δομήσει, να βελτιώσει ή τελικά να λύσει ένα ενδεχόμενο πρόβλημα που θα του προκύψει στην καθημερινή του δραστηριότητα.

Ο Treffers (1987) στην προσπάθειά του να επεξηγήσει την έννοια της μαθηματικοποίησης την διέκρινε σε δύο κατηγορίες:

- Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση, όπου οι μαθητές βρίσκουν τα μαθηματικά εργαλεία για να οργανώσουν το πλαίσιο του προβλήματος με καταστάσεις της πραγματικότητας δίνοντάς του μαθηματικό χαρακτήρα. Στο πλαίσιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης θα εντοπίσουμε αναπαραστάσεις και διατυπώσεις ενός προβλήματος με διάφορους τρόπους, τη μοντελοποίηση του προβλήματος αυτού καθώς και εφαρμογή εργαλείων, συμβόλων κ.α. .
- Στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση οι μαθητές εργάζονται πάνω στο μοντελοποιημένο πρόβλημα που έχουν επινοήσει στο προηγούμενο στάδιο. Χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά εργαλεία που έχουν εφεύρει για την βελτίωση του μαθηματικού μοντέλου και τελικά τη διαμόρφωση του τελικού σχεδίου λύσης, με σκοπό την απόδειξη σχέσεων ή διεξαγωγή αποτελεσμάτων αλλά και τη γενίκευση του.

Ο Freudenthal το 1991 αποδέχτηκε τη διάκριση αυτή του Treffers, ωστόσο διευκρίνισε ότι οι διαφορές ανάμεσα στους δύο κόσμους δεν είναι τόσο ευδιάκριτες. Θεωρεί ισάξιες τις δύο μορφές μαθηματικοποίησης, αφού τόσο η χρήση των εργαλείων και των συμβόλων, όσο και η εφεύρεση των εννοιών έχουν να κάνουν με το επίπεδο του κάθε μαθητή αλλά και με τη δραστηριότητα του ανθρώπου στη μαθηματική πραγματικότητα.

Η μαθηματικοποίηση κατέχει κεντρικό ρόλο στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, Ο Freudenthal παρουσιάζει και άλλες κατευθυντήριες θεωρητικές προσεγγίσεις όπως την «καθοδηγούμενη επανεφεύρεση» , τα «επίπεδα στη διαδικασία μάθησης» και τη «διδακτική φαινομενολογία» .

- Καθοδηγούμενη Επανεφεύρεση

Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, ο δάσκαλος προσπαθεί να καθοδηγήσει τους μαθητές να ανακαλύψουν τα μαθηματικά από τον εαυτό τους, αντί να τους δώσει έτοιμες λύσεις και αλγόριθμους. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω καθοδηγούμενων ερωτήσεων που έχουν ως στόχο συγκεκριμένες απαντήσεις. Μέσω αυτής της προσέγγισης, οι μαθητές μπορούν να επανασχεδιάσουν και να ανακαλύψουν μαθηματικά σχήματα και ιδέες. Με αυτόν τον τρόπο, η καθοδήγηση επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και να αυξήσουν τη δημιουργικότητά τους. Αυτή η προσέγγιση αντιμετωπίζει την εκπαίδευση σαν ένα επαναλαμβανόμενο κύκλο ανακαλύψεων και επανεφευρέσεων, που επιτρέπει στους μαθητές να αναπτύξουν μια ισχυρή γνώση για τα μαθηματικά.

- Τα Επίπεδα στη Διαδικασία Μάθησης

Μια άλλη προσέγγιση στα ρεαλιστικά μαθηματικά που συνδέεται με τη μαθηματικοποίηση είναι τα επίπεδα στη διαδικασία της μάθησης. Η θεωρία των επιπέδων του Freudenthal είναι εμπνευσμένη από την θεωρία των επιπέδων Van Hiele. Η θεωρία των επιπέδων του Van Hiele είναι μια θεωρία αναπτυξιακής ψυχολογίας που προτάθηκε από τους δίδυμους παιδαγωγούς Dina van Hiele-Geldof και Pierre van Hiele τη δεκαετία του 1950. Η θεωρία περιγράφει πώς οι μαθητές αναπτύσσουν τη γεωμετρική τους κατανόηση και πώς περνούν από διαφορετικά επίπεδα κατανόησης. Σύμφωνα με τη θεωρία, οι μαθητές περνούν από πέντε διαφορετικά επίπεδα κατανόησης της γεωμετρίας :

- Επίπεδο αντίληψης: Ο μαθητής αντιλαμβάνεται τις διάφορες γεωμετρικές μορφές αλλά δεν έχει ακόμα ένα οργανωμένο σύστημα γνώσης για να τις κατανοήσει.
- Επίπεδο ανάλυσης: Ο μαθητής αναλύει τις γεωμετρικές μορφές σε στοιχεία και συνιστώσες και κατανοεί τα στοιχεία αυτά.
- Επίπεδο σύνθεσης: Ο μαθητής συνθέτει τα στοιχεία αυτά για να δημιουργήσει μια νέα γεωμετρική ιδέα. Αρχίζει να συλλαμβάνει το ρόλο και τη σημασία ενός ορισμού. Αποκτά τη δυνατότητα να κάνει απλούς παραγωγικούς συλλογισμούς αλλά δεν μπορεί να κατανοήσει ή να συνθέσει πλήρεις αποδείξεις των ισχυρισμών του.
- Επίπεδο απόδειξης: Ο μαθητής Σε αυτό το στάδιο μπορεί να αναπτύξει συλλογισμό για την απόδειξη μιας πρότασης χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και τους ορισμούς που έχει κατανοήσει. Δεν αναγνωρίζει όμως την ανάγκη για αυστηρή απόδειξη και δεν κατανοεί τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων αξιωματικών συστημάτων.
- Επίπεδο αυστηρότητας ή αξιωματικοποίησης: Ο μαθητής μπορεί να αναλύσει τα διάφορα αξιωματικά συστήματα με αυστηρότητα. Μπορεί να κατανοήσει τη σημασία των αξιωμάτων και ότι η κατάλληλη αλλαγή των αξιωμάτων μπορεί να οδηγήσει στις μη Ευκλείδειες γεωμετρίες. Αυτοί που μπορούν να προσεγγίζουν το επίπεδο αυτό είναι ένα πολύ μικρό ποσοστό των μαθητών.

Εικόνα 1 Επίπεδα Κατανόησης των μαθητών ,στηριγμένα στα επίπεδα Van Hiele, αναρτημένο από εργασία μου στην ενότητα ΜΣΜ81

Σε αυτά τα επίπεδα στηρίχθηκαν τα επίπεδα διδασκαλίας της μάθησης στη βάση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης τα οποία διακρίνονται στα εξής τρία :

1. Πρώτο επίπεδο σκέψης, ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει γνωστά χαρακτηριστικά ενός πλαισίου που είναι οικείο στα μάτια του.
2. Δεύτερο επίπεδο μαθαίνει να χειρίζεται τις σχέσεις και τα χαρακτηριστικά τους.
3. Τρίτο επίπεδο σκέψεις, ο μαθητής αρχίζει να χειρίζεται τα εσωτερικά χαρακτηριστικά των σχέσεων. (De Lange,1996 όπως αναφέρεται στο Σκούφη, 2013)

Σε κάθε επίπεδο η σκέψη του παιδιού οργανώνεται διαφορετικά και τα αντικείμενα της μαθηματικής σκέψης αναπαριστούν διαφορετικά πράγματα. (Treffers 1987, Κολέζα 2000).

Τα σύνορα μεταξύ των επιπέδων αλληλοδιαπλέκονται και για να επιτευχθεί μάθηση σε ένα επίπεδο θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί η μαθησιακή διαδικασία στο προηγούμενο επίπεδο (Αρσένης, 2004). Στη ΡΜΕ όμως δεν υπάρχουν αυστηρά κριτήρια για την οριοθέτηση των επιπέδων ανεξάρτητα από το περιεχόμενο και γι' αυτό το λόγο δεν μπορεί κανείς να διαγνώσει με βεβαιότητα σε ποιο επίπεδο πραγματικά συμβαίνει μία διδακτική-μαθησιακή διαδικασία (Ματθαίου, 2005).

- Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal

Ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι ένα "νοούμενο" ενώ η εμπειρία από ένα μαθηματικό αντικείμενο είναι ένα "φαινόμενο". Για παράδειγμα οι αριθμοί είναι το νοούμενο ενώ η εργασία και η πρακτική με τους αριθμούς είναι το φαινόμενο (Freudenthal, 1983 όπως αναφέρεται στο Ματθαίου, 2005). Η διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal αναφέρεται στη διδακτική μέθοδο που βασίζεται στη φαινομενολογική προσέγγιση, η οποία επικεντρώνεται στην αντίληψη του μαθητή για τον κόσμο και προσπαθεί να κατανοήσει πώς ο μαθητής κατανοεί τον κόσμο. Στη διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal, η διδασκαλία επικεντρώνεται στο να βοηθήσει τον μαθητή να κατανοήσει πραγματικά έννοιες και κυρίως έννοιες της μαθηματικής ανάπτυξης, αντί απλώς να μάθει τυπικούς κανόνες και διαδικασίες. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω ενός εμπλουτισμένου και διαδραστικού διαλόγου μεταξύ του διδάσκοντα και του μαθητή, στον οποίο ο μαθητής κατανοεί πώς αναπτύσσονται οι έννοιες και οι αλγόριθμοι και πώς αυτές οι έννοιες συσχετίζονται μεταξύ τους.

Η διδακτική φαινομενολογία ονομάζεται διαφορετικά και «μαθηματικό-διδακτικές αναλύσεις». Ορίζεται ως η μελέτη της σχέσης μεταξύ των φαινομένων που η μαθηματική έννοια αντιπροσωπεύει και της ίδιας της έννοιας(Freudenthal, 1973). Ο σκοπός είναι να καθοριστούν ποια πραγματικά φαινόμενα στο παρελθόν συνέβαλαν στη διαμόρφωση των μαθηματικών εννοιών, πως μπορούν οι μαθητές να έρθουν σε επαφή με αυτά τα φαινόμενα και πως οι μαθηματικές έννοιες φαίνονται στους μαθητές (Freudenthal 1978, 1983 όπως αναφέρεται στο Σκούφη, 2013). Ο Freudenthal το 1953 πρότεινε τα φαινομενολογικά πλαίσια καταστάσεων, δηλαδή την οργάνωση καταστάσεων. Οι καταστάσεις αυτές περιγράφονται από τα φαινόμενα που εμπλέκονται σε αυτές και από τα πιθανά ερωτήματα που μπορούν να τεθούν σχετικά με αυτά τα φαινόμενα. Μελετώντας τις διάφορες καταστάσεις στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί μια μαθηματική έννοια, ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει τα κοινά στοιχεία ανάμεσα στις διαφορετικές καταστάσεις και να κατανοήσει καλύτερα τον βασικό τρόπο λειτουργίας της μαθηματικής έννοιας.

2.3 Οι βασικές αρχές της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης

Όπως έχει ήδη αναφερθεί τα ρεαλιστικά μαθηματικά είναι μια προσέγγιση στη διδασκαλία των μαθηματικών που έχει στόχο την κατανόηση των μαθηματικών από τους μαθητές μέσα από την πραγματικότητα που τους περιβάλλει . Η προσέγγιση αυτή εστιάζει στην εφαρμογή των μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην καθημερινότητα. Η μαθηματικοποίηση αυτής της πραγματικότητας υλοποιείται με βάση τις παρακάτω διδακτικές αρχές:

1. Η Αρχή της δραστηριότητας
2. Η Αρχή της πραγματικότητας
3. Η Αρχή των επιπέδων κατανόησης
4. Η Αρχή της αλληλεπίδρασης
5. Η Αρχή της συνύφανσης
6. Η Αρχή της καθοδήγησης

Η Αρχή της δραστηριότητας

Η αρχή της δραστηριότητας υποστηρίζει την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στη διδακτική διαδικασία. Ο στόχος είναι η εξερεύνηση του μαθηματικού αντικειμένου μέσω μαθηματικών εργαλείων και διαισθητικών αντιλήψεων των μαθητών, καθώς και η αντιμετώπιση προβλημάτων που πρέπει να δομηθούν και να μαθηματικοποιηθούν. «Η επιστήμη στο αποκορύφωμά της είναι πάντα δημιουργική εφεύρεση» (Freudenthal,1973,σελ.118) . Ο

Freudenthal αντικρούει τις απόψεις περί τυποποιημένης γνώσης αποκαλώντας το φαινόμενο αυτό διδακτική αντιστροφή. Η αντί-διδακτική αντιστροφή παροτρύνει τους μαθητές να ανακαλύψουν τα μαθηματικά στοιχεία μέσω της δικής τους αναζήτησης και παρατήρησης. Ο ρόλος του δασκάλου είναι να δημιουργήσει ένα κλίμα ανοιχτό στη σκέψη και τη συζήτηση, και να παρακινήσει τους μαθητές να αναλύσουν τις ιδέες τους και να τις παρουσιάσουν στην τάξη. Η αντί-διδακτική αντιστροφή του Freudenthal θεωρεί ότι η μάθηση των μαθηματικών δεν πρέπει να είναι απλά μια διαδικασία επανάληψης και μνημόνευσης αλλά μια διαδικασία ανακάλυψης και κατανόησης. Ο Freudenthal πιστεύει ότι η μαθηματική γνώση πρέπει να αποκαλυφθεί από τους ίδιους τους μαθητές και όχι να τους δοθεί από τον δάσκαλο. Θεωρώ ότι η αρχή της δραστηριότητας στηρίζεται στη διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal η οποία στηρίζει την φαινομενολογική εξερεύνηση κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ενός νέου ζητήματος.

Η Αρχή της πραγματικότητας

Η αρχή της πραγματικότητας είναι μια φιλοσοφική αρχή που εφαρμόζεται στη διδασκαλία των μαθηματικών και αναφέρει ότι οι μαθηματικοί όροι και οι έννοιες πρέπει να αντανακλούν στην πραγματικότητα, δηλαδή στη φυσική και κοινωνική πραγματικότητα του κόσμου που μας περιβάλλει.

Σύμφωνα με τον Freudenthal, οι μαθηματικές έννοιες και ορισμοί πρέπει να βασίζονται στην πραγματικότητα και να έχουν ένα σαφή συνδετικό κρίκο με τις φυσικές ή κοινωνικές διαδικασίες που αντιπροσωπεύουν. Ο Freudenthal έκανε εμφανή τη σημασία της συνδετικής σχέσης μεταξύ των μαθηματικών και της πραγματικότητας, και πρότεινε τη χρήση πραγματικών παραδειγμάτων για να βοηθήσει τους μαθητές να συνδέσουν τις μαθηματικές έννοιες με την πραγματική ζωή. Με την αρχή της πραγματικότητας, ο Freudenthal επιδίωξε να δώσει στους μαθητές μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των μαθηματικών σχέσεων, ενισχύοντας την χρησιμότητα των μαθηματικών στην απλή καθημερινότητα.

Η Αρχή των επιπέδων κατανόησης

Η αρχή αυτή εστιάζει στη διαδικασία όπου ο μαθητής πέρνα μέσα από τα επίπεδα κατανόησης τα οποία απαιτούνται για την μαθηματικοποίηση ενός προβλήματος. Ξεκινά από την αισθητηριακή κατανόηση - αντίληψη των ιδεών του μαθηματικού προβλήματος, συνεχίζει με την κατανόηση στην πρακτική διαδικασία που έχει ως στόχο τη δομή των μαθηματικών εννοιών και πως αυτές σχετίζονται μεταξύ τους, ώστε να μπορέσει να το αποδομήσει (αφαιρετική διαδικασία) και τέλος να το γενικεύσει σε άλλα παρόμοια μαθηματικά πλαίσια. Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο προϋποθέτει τη δυνατότητα αναστοχασμού πάνω στις διαδικασίες που διεξάγονται και αυτό επιτυγχάνεται με τα κατάλληλα μοντέλα και αλληλεπίδραση (Σκούφη, 2013). Από πρώιμη κιόλας μαθησιακή διαδικασία, όταν ακόμη ο μαθητής βρίσκεται στο στάδιο της οριζόντιας μαθηματικοποίησης, πρέπει να έχει στη διάθεσή του εργαλεία κατακόρυφης μαθηματικοποίησης όπως μοντέλα, πρότυπες καταστάσεις, διαγράμματα, σχήματα και σύμβολα. Η χρήση αυτών των εργαλείων θα του επιτρέψει να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ συγκεκριμένου και αφηρημένου και να περάσει από την άτυπη και διαισθητική γνώση του πρώτου επιπέδου (Ματθαίου,2005).

Η Αρχή της αλληλεπίδρασης - διαδραστικότητας

Σύμφωνα με την ΡΜΕ η μάθηση είναι μια κοινωνική διάδραση που επηρεάζεται και καθοδηγείται από το περιβάλλον που διαδραματίζεται. Η αρχή της αλληλεπίδρασης αναφέρεται στην αλληλεπίδραση μεταξύ ενός μαθητή και του μαθηματικού περιβάλλοντος, και στον τρόπο με τον οποίο ο μαθητής εξελίσσεται στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Συγκεκριμένα, ο Freudenthal πίστευε ότι η αλληλεπίδραση αυτή συμβαίνει όταν ένας μαθητής συναντά μια νέα μαθηματική έννοια και προσπαθεί να την κατανοήσει μέσω της αλληλεπίδρασης με το μαθηματικό περιβάλλον. Κατά τη διάρκεια αυτής της διάδρασης, ο μαθητής αντιλαμβάνεται τον τρόπο με τον οποίο το μαθηματικό περιβάλλον είναι δομημένο και προσαρμόζει τις δικές του σκέψεις και ιδέες σε αυτό το περιβάλλον. Στη συνέχεια, ο Freudenthal υποστήριζε ότι ο μαθητής αναπτύσσει την κατανόησή του για τη μαθηματική έννοια μέσω της εσωτερικής αναπαράστασης και αναδιοργάνωσης των προηγούμενων γνώσεων του στο πλαίσιο του νέου μαθηματικού περιβάλλοντος.

Η ελευθερία της έκφρασης και της σκέψης των μαθητών βοηθά στη διαμόρφωση και τον διαμοιρασμό των ιδεών και στρατηγικών ώστε να εφευρεθούν γρηγορότερα οι έννοιες. Οι "αδύναμοι" μαθητές βελτιώνουν τις στρατηγικές τους αφού καθοδηγούνται από τους συμμαθητές τους και από το δάσκαλο. Ο αντίλογος που μπορεί να υπάρξει δημιουργεί προβληματισμούς και αναστοχασμούς έτσι ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να ανακαλύψουν το υψηλότερο επίπεδο κατανόησης. Από τη μεριά του καθοδηγητή - δασκάλου, η μετάβαση από ένα δασκαλοκεντρικό σε ένα καθοδηγούμενο στυλ διδασκαλίας δεν μειώνει τη σημασία του, αντίθετα ο δάσκαλος γίνεται σημαντικότερος και διευκολύνει τη μετάβαση από το «μοντέλο του» στο «μοντέλο για».

Η Αρχή της συνύφανσης

«Τα μαθηματικά είναι μια αλυσίδα.» Αυτή την έκφραση την έχουμε ακούσει από μικρή κιόλας ηλικία από όλους τους δασκάλους μας σε κάθε βαθμίδα διδασκαλίας και συνδέεται άμεσα με την αρχή της συνύφανσης. Αυτό σημαίνει ότι τα διάφορα μαθηματικά πεδία δεν είναι διακριτά αλλά συνδέονται μεταξύ τους. Για την κατανόηση μιας καινούργιας έννοιας είναι πιθανόν να χρειάζονται άλλες που έχουν διδαχθεί προγενέστερα. Για την επίλυση ενός προβλήματος μπορεί να χρειαστεί η σύνδεση πολλών εννοιών και εργαλείων. Η σωστή μετάβαση από τη μία έννοια στην επόμενη προϋποθέτει βαθιά κατανόηση όχι μόνο των εννοιών αλλά και της σύνδεσης μεταξύ τους. Η συνοχή αυτή καταστρέφεται όταν η διδασκαλία πραγματοποιείται κάθετα, δηλαδή όταν οι διάφορες περιοχές διδάσκονται ξεχωριστά χωρίς να εμφανίζεται η μεταξύ τους σύνδεση.

Η Αρχή της καθοδήγησης

Η καθοδηγούμενη επανεφεύρεση είναι μία από τις σημαντικότερες αρχές στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Η αρχή της καθοδήγησης αναφέρεται στην ανάγκη να καθοδηγείται ο μαθητής στην ανάπτυξη της κατανόησής του για μια μαθηματική έννοια. Δίνεται μια ρεαλιστική κατάσταση όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν μοντέλα και προβλήματα καταστάσεων δίνοντας λύσεις που βασίζονται σε διαισθήσεις και άτυπες μαθηματικές δραστηριότητες. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγώντας με ερωτήσεις, προτάσεις, σύμβολα , λέξεις κλειδιά, εικόνες , η επίδειξη παραδειγμάτων καθώς και ο διάλογος που αναπτύσσεται βοηθά τους μαθητές να φτάσουν σε τυπικές μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των μαθηματικών. Η καθοδήγηση επίσης μπορεί να προωθήσει την ενεργό συμμετοχή του μαθητή στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Έτσι οι μαθητές επανεφεύρουν τις έννοιες και νιώθουν τη χαρά της ανακάλυψης των μαθηματικών. Το συναίσθημα αυτό κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών ώστε να προσπαθήσουν περισσότερο και να φτάσουν στα υψηλότερα επίπεδα κατανόησης. Ο Freudenthal πίστευε ότι η καθοδήγηση είναι απαραίτητη για να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητά τους να σκέφτονται μαθηματικά. Κατά τη διάρκεια της καθοδήγησης, ο μαθητής δέχεται υποστήριξη από τον δάσκαλο στην ανάπτυξη της κατανόησής του για την μαθηματική έννοια και ενθαρρύνεται από το περιβάλλον του. Τα εκπαιδευτικά προγράμματα θα πρέπει να προάγουν την επανεφεύρεση μέσα από τον ειδικό σχεδιασμό των εγχειριδίων των καθηγητών

- δασκάλων, καθώς και να δίνονται ποικίλες ιδέες και συμβουλές για την κατάκτηση κάθε έννοιας από οποιονδήποτε μαθητή.

2.4 Τα μαθηματικά προβλήματα πλαισίου

Το πλαίσιο μέσα στο οποίο διατυπώνεται ένα μαθηματικό πρόβλημα έχει εξέχουσα θέση στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Τα μαθηματικά προβλήματα πλαισίου είναι προβλήματα που παρουσιάζονται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ή κατάσταση και αποτελεί τον λόγο δημιουργίας του μαθηματικού προβλήματος. Το κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι περιγράφουν καταστάσεις οικείες με αυτές που υπάρχουν στο περιβάλλον των μαθητών, έτσι μπορούν να γίνουν ευκολότερα αντιληπτά. Το θέμα για την πλαισίωση του προβλήματος μπορεί να είναι από τη φυσική, βιολογική και κοινωνική πραγματικότητα αλλά μπορεί να είναι ένα παιχνίδι, ένα παραμύθι, μια μυθοπλασία και οποιαδήποτε άλλη δημιουργία που ανήκει στη «φανταστική» πραγματικότητα (Treffers, 1987, όπως αναφέρεται στο Ματθαίου,2005) . Η αναπαράσταση του πλαισίου μπορεί να υλοποιηθεί είτε λεκτικά, είτε με εικόνες, γραφήματα, σχήματα κ.α. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα μαθηματικών που αναφέρεται στον υπολογισμό της επιφάνειας ενός δαπέδου μπορεί να παρουσιαστεί στο πλαίσιο μιας διακόσμησης ενός δωματίου, σε αυτήν την περίπτωση μπορούν να χρησιμοποιηθούν εικονικά μοντέλα που να απεικονίζουν την κάτοψη του χώρου για μεγαλύτερη ακρίβεια αλλά και κατανόηση του προβλήματος. Επίσης, το πλαίσιο σε ένα μαθηματικό πρόβλημα αναφέρεται στις προϋποθέσεις και τους περιορισμούς που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διαδικασία επίλυσής του. Στην ουσία, το πλαίσιο περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διατύπωση του προβλήματος και κατά την εύρεση της λύσης του.

Ο Treffers είναι ένας Ολλανδός εκπαιδευτικός και επιστήμονας των μαθηματικών που ανέπτυξε μια προσέγγιση για τη διδασκαλία των μαθηματικών που βασίζεται σε μαθηματικά προβλήματα πλαισίου (contextual problems).

Σύμφωνα με τον Treffers, τα μαθηματικά προβλήματα πλαισίου πρέπει να πληρούν τις εξής προδιαγραφές:

- Πρέπει να περιλαμβάνουν μαθηματικό περιεχόμενο που ανταποκρίνεται στους στόχους της διδασκαλίας και να προσφέρουν πολλαπλούς τρόπους επίλυσης και αντιμετώπισης.

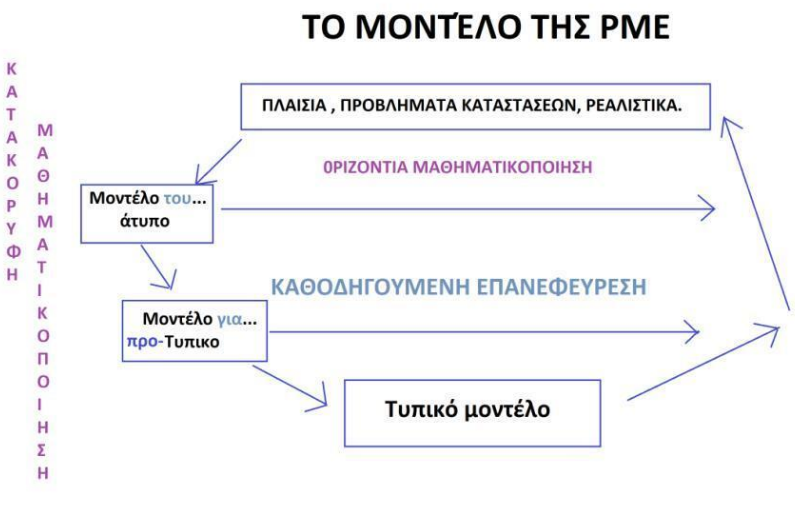
- Να είναι αντιπροσωπευτικά των προβλημάτων που συναντώνται στον πραγματικό κόσμο, ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν σε πρακτικές καταστάσεις.
- Τέλος, να είναι δομημένα έτσι ώστε οι μαθητές να μπορούν να τα λύσουν με τη χρήση μαθηματικών εργαλείων και μεθόδων καθώς και να αναδεικνύουν τη δομή και τη λογική των μαθηματικών σχέσεων, αναπτύσσοντας έτσι την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων σε πιο γενικό επίπεδο.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν κατά την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση στην αρχική φάση της διδασκαλίας μιας καινούργιας έννοιας θα πρέπει οι καθηγητές να χρησιμοποιούν «πραγματικά» προβλήματα και όχι τυπικά διαμορφωμένα. Οι μαθητές να έχουν ενεργή συμμετοχή σε όλη αυτή τη διαδικασία, ώστε να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό πλαίσιο σύμφωνα με το οποίο θα μπορεί να εξαχθεί η καινούργια διδακτική έννοια, η διαδικασία αυτή ονομάζεται «εννοιολογική μαθηματικοποίηση» . Τα μαθηματικά πλαίσια που δημιουργούνται να συμφωνούν με τις εμπειρίες και τις γνώσεις των μαθητών έτσι ώστε να τα αντιλαμβάνονται και να μπορούν να συμμετέχουν ενεργά στον τρόπο επίλυσης. Αυτή η διαδικασία ανοίγει τον δρόμο για την επανεφεύρεση των μαθηματικών από τους μαθητές και συγχρόνως γεφυρώνει το χάσμα που επικρατεί μεταξύ της άτυπης και της τυπικής γνώσης των μαθηματικών. Μέσα από την πορεία όλης της διαδικασίας οι μαθητές δημιουργούν κατάλληλο μοντέλο που οδηγεί στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας, η γενίκευση του μοντέλου θα ολοκληρώσει επιτυχώς την κατανόηση της έννοιας αυτής. Η διαδικασία που παρουσιάστηκε ονομάζεται «εφαρμοσμένη μαθηματικοποίηση» (De Lange,1996, σύμφωνα με Σκούφη ,2013).

2.5 Η διδακτική χρήση των μοντέλων στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση

Ένα μοντέλο συνδέεται ή αναδύεται από ένα πλαίσιο. Η χρήση μοντέλων αποτελεί σημαντικό εργαλείο στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τη σχέση μεταξύ της θεωρίας και της εφαρμογής. Η παρουσίαση μιας νέας διδακτικής έννοιας από τον καθηγητή εκτός από το να είναι οικεία με την εμπειρία των μαθητών, στην PME χρησιμοποιούνται προβλήματα που έχουν μοντελοποιημένα χαρακτηριστικά, δηλαδή προβλήματα που μπορούν να γίνουν τα πρότυπα ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να προχωρήσουν στα επίπεδα μάθησης και κατανόησης. Αυτό πραγματοποιείται με το "μοντέλο της" συγκεκριμένης γνώσης το οποίο γενικεύεται σε ένα "μοντέλο για" όλα τα είδη παρόμοιων καταστάσεων ακόμα και πιο αφηρημένων. Έτσι επιτυγχάνεται η γεφύρωση του χάσματος μεταξύ του άτυπου και του τυπικού, βοηθώντας τους εκπαιδευτικούς στην αντικατάσταση της ανεπίσημης γνώσης των μαθητών τους με τυπικές μαθηματικές έννοιες. Η διδακτική χρήση των μοντέλων έχει πολλά οφέλη για τους μαθητές. Τα μοντέλα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθήματα και να διευκολύνουν τη μάθηση. Από την οπτική του μαθητή είναι σημαντική η αναγνώριση ότι το ίδιο μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί από άλλες πανομοιότυπες καταστάσεις και να εφεύρει τη λύση σε πολλά είδη προβλημάτων. Ανάλογα με το επίπεδο που μπορεί να φτάσει ο κάθε μαθητής δίνεται η δυνατότητα της αφαιρετικής μεθόδου για την προσαρμογή του μοντέλου στο πρόβλημα που τους δίνεται.

Επομένως έχουμε το μοντέλο της πραγματικότητας, το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με πραγματικές εμπειρίες της καθημερινότητας, και το μοντέλο για τη μαθηματική έννοια το οποίο αντανακλά σε γενίκευση των καταστάσεων. Τελικά τα μαθηματικά μοντέλα βοηθούν στην οργάνωση των καταστάσεων του πραγματικού κόσμου αλλά και του μαθηματικού κόσμου, πηγαίνοντας από την οριζόντια στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση. Η επιτυχία των μαθηματικών μοντέλων στηρίζεται στην διαδικασία της μάθησης, η οποία πρέπει να περιλαμβάνει δύο βασικά χαρακτηριστικά. Να έχει βαθιές ρίζες σε πραγματικά προβλήματα πλαισίου και να είναι ευέλικτο ώστε να προσαρμόζεται σε οποιοδήποτε πρόβλημα.



Διάγραμμα 1 Το μοντέλο της ΡΜΕ

Η RME συνδέεται ιδιαίτερα με τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό, στον οποίο οι μαθηματικές εργασίες με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές θα πρέπει να καθοδηγούν τους μαθητές από την άτυπη στην επίσημη μαθηματική γνώση. Οι Cobb, Zhao και Vianovska (2008) αναφέρουν τρεις κεντρικές αρχές της θεωρίας σχεδιασμού στο ΡΜΕ. Η πρώτη αρχή είναι ότι μια ακολουθία διδασκαλίας ή ένας σχεδιασμός εργασιών πρέπει να είναι πειραματικά πραγματικός για τους μαθητές, έτσι ώστε να μπορούν να συμμετέχουν αμέσως σε προσωπικά ουσιαστική μαθηματική δραστηριότητα. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, οι μαθητές χρησιμοποιούν τα μαθηματικά ως εργαλείο για να οργανώσουν προβλήματα σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο, μια διαδικασία που ονομάζεται οριζόντια μαθηματοποίηση (Van Den Heavel-Panturzen, 2003).

Η δεύτερη κεντρική αρχή είναι ότι οι άτυποι τρόποι ομιλίας, συμβολισμού και συλλογισμού που καθιερώθηκαν κατά την αρχική φάση της εργασίας θα πρέπει να αποτελούν τη βάση για την προοδευτική διαδικασία της κάθετης μαθηματοποίησης, υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών. Είναι στη διαδικασία της προοδευτικής μαθηματοποίησης η οποία περιλαμβάνει τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη συνιστώσα που οι μαθητές κατασκευάζουν (νέα) μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999, σελ. 117)

Η τρίτη αρχή αφορά την υποστήριξη της διαδικασίας της κάθετης μαθηματοποίησης. Ένα από τα κύρια μέσα υποστήριξης περιλαμβάνει δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές δημιουργούν και επεξεργάζονται συμβολικά μοντέλα της άτυπης μαθηματικής δραστηριότητάς τους. Ένα κεντρικό μέρος αυτής της διαδικασίας είναι η καθοδήγηση του δασκάλου, όπου το «μοντέλο των» μαθητών μιας κατάστασης με βάση τα συμφραζόμενα γίνεται «μοντέλο για» γενικότερα μαθηματικούς συλλογισμούς (Gravemeyer & Doorman, 1999). Αυτή η διαδικασία αναφέρεται συχνά ως καθοδηγούμενη από τους μαθητές αφαίρεση των μαθηματικών.

2.6 Ο Κονστρουκτιβισμός και η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση

Ο Κονστρουκτιβισμός είναι μια φιλοσοφία της μάθησης που επικεντρώνεται στην ανάπτυξη των γνωστικών δεξιοτήτων του μαθητή μέσω της κατασκευής δικών του αντιλήψεων και γνώσεων αντί για την απλή απομνημόνευση και εφαρμογή προκαθορισμένων γνώσεων. Σύμφωνα με τον Κονστρουκτιβισμό, η μάθηση δεν είναι απλά ένας παθητικός διαδικαστικός μηχανισμός, αλλά μια ενεργητική διαδικασία στην οποία ο μαθητής πρέπει να συμμετέχει ενεργά στη διαμόρφωση των δικών του γνώσεων και αντιλήψεων. Συγκεκριμένα, οι θεωρητικοί του Κονστρουκτιβισμού πιστεύουν ότι η μάθηση είναι ένα ενεργητικό και δημιουργικό εγχείρημα όπου ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση του μέσα από τη συνεργασία με άλλους, την ανταλλαγή ιδεών και την επίλυση προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν τη δυνατότητα να ανακαλύψουν, να αναζητήσουν και να κατανοήσουν τις γνώσεις τους μέσω της δραστηριότητας και της συνεργασίας με τους συμμαθητές τους. Οι εκπαιδευτικοί προσφέρουν στους μαθητές δραστηριότητες και υλικά που προκαλούν το ενδιαφέρον τους και τους επιτρέπουν να εξερευνήσουν και να κατασκευάσουν τη δική τους γνώση.

Η λέξη Κονστρουκτιβισμός έχει γεννηθεί από την αγγλική constructive που σημαίνει εποικοδομητικός. Η βάση της φιλοσοφικής του προσέγγισης είναι ότι οι μαθητές χτίζουν μόνοι τους τη γνώση, αυτό συνεπάγεται ότι θα υπάρξουν πολλές διαφορετικές οπτικές αφού ο κάθε μαθητής έχει διαφορετική αντίληψη σε σχέση με τις εμπειρίες του αλλά και την πραγματικότητα την οποία βιώνει. Πολλές φορές δημιουργούνται ασάφειες ή "παρανοήσεις" οι οποίες δεν δέχονται διόρθωση, όλες οι αντιλήψεις και τα συμπεράσματα γίνονται κοινώς αποδεκτά. Οι κονστρουκτιβιστές θεωρούν ότι οι απόψεις των μαθητών είναι ισάξιες με αυτές των καθηγητών - δασκάλων, επίσης πιστεύουν στην ελευθερία της σκέψης αλλά και στην ελευθερία της επιλογής μίας θεωρίας ή στρατηγικής. Ο δάσκαλος ακολουθεί τους μαθητές καθώς δομούν τις θεωρίες τους. Αυτή είναι η κύρια διαφορά με τη ρεαλιστική εκπαίδευση. Στην ΡΜΕ ο δάσκαλος καθοδηγεί τους μαθητές με συγκεκριμένες ερωτήσεις, προσανατολίζοντας και οδηγώντας τους μαθητές στα σωστά μονοπάτια ώστε να ανακαλύψουν τη γνώση. Μέσα από τις ερωτήσεις του δημιουργεί το βασικό πλαίσιο και έτσι ο μαθητής δύσκολα μπορεί να παρεκκλίνει από αυτό. Παρόλα αυτά οι δύο αυτές διδακτικές προσεγγίσεις έχουν ένα κοινό στοιχείο, την επανεφεύρεση της γνώσης από τους μαθητές.

3º ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 Ιστορική αναδρομή

Η επίλυση προβλημάτων είναι μια διαδικασία που απασχολεί τους ανθρώπους από την αρχαιότητα. Αναφορές σε αυτήν τη διαδικασία μπορούν να βρεθούν σε αρχαία κείμενα από διάφορες πολιτισμικές περιοχές του κόσμου. Στην αρχαία Αίγυπτο, το πρόβλημα της επίλυσης ήταν συνήθως συνδεδεμένο με την ανάγκη να επιλυθούν προβλήματα που σχετίζονταν με τη διαχείριση των υδάτων. Στην αρχαία Ελλάδα, οι φιλόσοφοι όπως ο Αριστοτέλης και ο Πλάτωνας αντιμετώπιζαν προβλήματα σχετικά με τον τρόπο μιας καλύτερης διαβίωσης. Αυτά τα προβλήματα συνήθως αντιμετωπίζονταν με φιλοσοφικές συζητήσεις. Στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, από την αρχαιότητα είχαν γίνει σημαντικά βήματα, οι αρχαίοι Έλληνες, όπως ο Πυθαγόρας και ο Ευκλείδης, ανέπτυξαν μεθόδους για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, κυρίως στη Γεωμετρία.

Στη συνέχεια, κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων συνέβαλε στην ανάπτυξη της αλγεβρικής γεωμετρίας από τον P. Fermat όπου εξακολουθεί να αποτελεί θεμέλιο λίθο της σύγχρονης μαθηματικής επιστήμης. Στον 17ο αιώνα, οι μεθοδολογίες που αναπτύχθηκαν για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων επεκτάθηκαν στον τομέα της φυσικής. Οι επιστήμονες της εποχής, όπως ο Isaac Newton και ο Gottfried Leibniz, ανέπτυξαν μεθόδους για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων, των οποίων η επίλυση αποτέλεσε βασικό στοιχείο για την κατανόηση των νόμων της φυσικής.

Στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα, οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι των μαθηματικών ανέπτυξαν νέες ιδέες και θεωρίες που έφεραν αλλαγές στην επιστήμη των μαθηματικών. Αυτές οι αλλαγές έκαναν τα μαθηματικά πιο αφηρημένα και πιο ακατανόητα για τον μέσο άνθρωπο. Μετά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, η εκπαίδευση στα μαθηματικά άρχισε να εστιάζει περισσότερο στη θεωρία συνόλων και στις αλγεβρικές δομές. Αυτή η νέα προσέγγιση των μαθηματικών ονομάζεται "Μοντέρνα Μαθηματικά". Ωστόσο, η εισαγωγή των Μοντέρνων Μαθηματικών δεν λειτούργησε ικανοποιητικά στην εκπαίδευση των μαθητών. Οι μαθητές δυσκολευόντουσαν να κατανοήσουν τις νέες αφηρημένες έννοιες και δομές, ενώ παράλληλα αδυνατούσαν να αποκτήσουν τις βασικές δεξιότητες που χρειάζονται για να λύσουν προβλήματα στα μαθηματικά. Έτσι η φιλοσοφία της διδασκαλίας άλλαξε και πάλι εστιάζοντας στις βασικές έννοιες. Η εκπαίδευση στα μαθηματικά επέστρεψε σε πιο παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, επικεντρώθηκε στην εκμάθηση των βασικών αριθμητικών δεξιοτήτων και την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων. Αυτό οδήγησε σε μεγαλύτερη επιτυχία στην εκπαίδευση των μαθητών στα μαθηματικά και αύξησε το ενδιαφέρον τους για το μάθημα. Σε βάθος χρόνων όμως, η υπέρμετρη έμφαση σε μηχανικές δεξιότητες έχει οδηγήσει σε απουσία κατανόησης και αποδοτικής χρήσης των μαθηματικών εννοιών στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων. Παρατηρήθηκε δηλαδή ότι οι μαθητές εν τέλει , υπολείπονταν και σε βασικές έννοιες μαθηματικών αλλά και σε δημιουργική σκέψη. Έτσι, κρίθηκε σημαντικό να δοθεί ισορροπημένη έμφαση στην κατανόηση των βασικών εννοιών και την ανάπτυξη των μηχανικών δεξιοτήτων, ώστε οι μαθητές να αποκτήσουν ολοκληρωμένη κατανόηση των μαθηματικών και να μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν την επίλυση προβλημάτων στην καθημερινή ζωή και σε πιο προχωρημένα επίπεδα σκέψης. Αυτή η μεταρρυθμιστική ιδέα ήρθε στο προσκήνιο την δεκαετία του 80 ως Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση.

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί ένα από τα βασικά στοιχεία των μαθηματικών και αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής κατανόησης. Σε κάθε επίπεδο και σε κάθε είδος μαθηματικής δραστηριότητας, η επίλυση προβλημάτων αποτελεί ένα κλειδί για την επίτευξη καλύτερης κατανόησης και εφαρμογής της μαθηματικής σκέψης. Από την επίλυση απλών μαθηματικών προβλημάτων στην επίλυση πιο πολύπλοκων προβλημάτων που απαιτούν πολυπλοκότερες μαθηματικές δεξιότητες, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την αντίληψή τους και τη σκέψη τους, καθώς και να αυξήσουν την αυτοπεποίθησή τους και τη δημιουργικότητά τους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξερευνήσουμε τις βασικές αρχές και τις τεχνικές για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και πώς μπορούν να εφαρμοστούν σε διάφορες μαθηματικές περιοχές.

3.2 Η έννοια της επίλυσης Μαθηματικού Προβλήματος

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί τον τρόπο με τον οποίο κατανοούνται και λύνονται διάφορα προβλήματα στο πεδίο των μαθηματικών. Στην γενικότερη έννοια, μιλώντας για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, εννοούμε τη διαδικασία της εύρεσης λύσης για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Η έννοια της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων για πολλούς ήταν δύσκολο να διατυπωθεί για πολλά χρόνια. Η έννοια της επίλυσης κάνει την εμφάνισή της στη δεκαετία του 80, εκείνη την εποχή αξιοποιείται και το πολύ γνωστό έργο του G. Polya (1945) , How to solve it.

ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΩ
Διάγραμμα της Μεθόδου

ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Πρώτο
Πρέπει να *κατανοήσετε* το πρόβλημα.

- *Ποιο είναι το ζητούμενο; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι η συνθήκη;*
- Είναι δυνατό να ικανοποιηθεί η συνθήκη; Είναι η συνθήκη επαρκής για τον προσδιορισμό του ζητουμένου; Μήπως είναι ανεπαρκής; Ή πλεοναστική; Ή αντιφατική;
- Χαράξτε ένα σχήμα. Χρησιμοποιήστε κατάλληλο συμβολισμό.
- Χωρίστε τα διάφορα μέρη της συνθήκης. Μπορείτε να τα γράψετε;

ΕΠΙΝΟΗΣΗ ΕΝΟΣ ΣΧΕΔΙΟΥ

Δεύτερο
Βρείτε τη σχέση μεταξύ των δεδομένων και του ζητουμένου. Αν δεν μπορεί να βρεθεί άμεση συσχέτιση, ίσως να αναγκαστείτε να εξετάσετε βοηθητικά προβλήματα
Πρέπει τελικά να αποκτήσετε ένα σχέδιο της λύσης.

- Το έχετε συναντήσει άλλοτε; Μήπως έχετε δει το ίδιο πρόβλημα με λίγο διαφορετική μορφή;
- *Γνωρίζετε κανένα σχετικό πρόβλημα;* Γνωρίζετε κανένα θεώρημα που θα μπορούσε να είναι χρήσιμο;
- *Αναλογιστείτε το ζητούμενο.* Και προσπαθήστε να σκεφτείτε γνωστό πρόβλημα με το ίδιο ή παρόμοιο ζητούμενο.
- *Να ένα πρόβλημα σχετικό με το δικό σας, που το έχετε λύσει άλλοτε. Θα μπορούσατε να το χρησιμοποιήσετε;* Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμά του; Θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδό του; Μήπως πρέπει να εισαγάγετε κανένα βοηθητικό στοιχείο, για να γίνει δυνατή η χρησιμοποίησή του;
- Θα μπορούσατε να διατυπώσετε πάλι το πρόβλημα; Θα μπορούσατε να το διατυπώσετε διαφορετικά; Ανατρέξτε σε ορισμούς.
- Αν δεν μπορείτε να λύσετε το πρόβλημά σας, προσπαθήστε να λύσετε πρώτα ένα άλλο σχετικό πρόβλημα. Θα μπορούσατε να σκεφτείτε ένα προσιτότερο σχετικό πρόβλημα; Ένα γενικότερο πρόβλημα; Ένα ειδικότερο πρόβλημα; Ένα ανάλογο πρόβλημα; Θα μπορούσατε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος; Κρατήστε μόνο ένα μέρος της συνθήκης και αγνοήστε το άλλο μέρος· κατά πόσο έχει έτσι προσδιοριστεί το ζητούμενο και κατά ποιο τρόπο μπορεί αυτό να μεταβάλλεται;
- Θα μπορούσατε να εξαγάγετε κάτι χρήσιμο από τα δεδομένα; Θα μπορούσατε να σκεφτείτε άλλα δεδομένα, κατάλληλα για τον προσδιορισμό του ζητουμένου; Θα μπορούσατε να αλλάξετε το ζητούμενο ή τα δεδομένα, ή στην ανάγκη και τα δύο, έτσι ώστε το νέο ζητούμενο και τα νέα δεδομένα να βρίσκονται πιο κοντά μεταξύ τους;
- Χρησιμοποιήσατε όλα τα δεδομένα; Χρησιμοποιήσατε ολόκληρη τη συνθήκη; Λάβατε υπόψη σας όλες τις ουσιώδεις έννοιες που περιέχονται στο πρόβλημα;

ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΤΟΥ ΣΧΕΔΙΟΥ

Τρίτο
Εκτελέστε το σχέδιο σας.

Όταν εκτελείτε το σχέδιο της λύσης, *να ελέγχετε κάθε βήμα.* Μπορείτε να αντιληφθείτε καθαρά ότι το βήμα είναι ορθό; Μπορείτε να αποδείξετε ότι είναι ορθό;

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Τέταρτο
Εξετάστε τη λύση που βρήκατε.

- *Μπορείτε να ελέγξετε το αποτέσμα;* Μπορείτε να ελέγξετε την αιτιολόγηση;
- Μπορείτε να βρείτε το αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο; Μπορείτε να το δείτε μεμιάς;
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα ή τη μέθοδο, για κάποιο άλλο πρόβλημα;

Εικόνα 2 Σελίδα από το Διάγραμμα της Μεθόδου από το βιβλίο του G. Polya (1945), How to solve it:

Σύμφωνα λοιπόν με τον G. Polya (1945), « Η επίλυση προβλήματος θεωρείται θεμελιώδης ικανότητα για τον άνθρωπο καθώς το μεγαλύτερο μέρος της συνειδητής μας σκέψης αφορά προβλήματα.» . Ο Polya θεωρεί ότι η επίλυση προβλημάτων είναι μια βασική ικανότητα που απαιτείται σε διάφορους τομείς της ζωής, από την καθημερινή ζωή μέχρι την επιστημονική έρευνα και την τεχνολογία. Για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ο Polya έχει διατυπώσει τέσσερα βασικά στάδια :

1. Κατανόηση του προβλήματος (Understanding the problem): Πρέπει να κατανοήσουμε το πρόβλημα και να διασαφηνίσουμε τι μας ζητείται να βρούμε. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει την ανάλυση των δεδομένων και των συνθηκών που αναφέρονται στο πρόβλημα.
2. Κατάστρωση σχεδίου επίλυσης (Devising a plan): Πρέπει να σκεφτούμε ποιες στρατηγικές θα ακολουθήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα, διαγράμματα, σχέδια ή άλλα εργαλεία για να βοηθήσουμε στον σχεδιασμό του σχεδίου επίλυσης.
3. Εφαρμογή του σχεδίου (Carrying out the plan): Πρέπει να ακολουθήσουμε το σχέδιο που κατασκευάσαμε και να εκτελέσουμε τις αναγκαίες πράξεις ή ενέργειες. Κατά τη διάρκεια αυτού του σταδίου μπορεί να χρειαστεί να διορθώσουμε ή να τροποποιήσουμε το σχέδιο αναλόγως.
4. Έλεγχος των αποτελεσμάτων (Checking the results) ή Κοιτάζω πίσω (looking back) : Πρέπει να ελέγξουμε τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του σχεδίου, προκειμένου να βεβαιωθούμε ότι είναι σωστά και ανταποκρίνονται στο αρχικό πρόβλημα που θέσαμε.

Στο βιβλίο του ο George Polya , "How to solve it", ορίζει τα παραπάνω στάδια επίλυσης και παρέχει μια σειρά από ευρετικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων. Οι στρατηγικές αυτές περιλαμβάνουν τη διάκριση του προβλήματος σε μικρότερα υποπροβλήματα, τη χρήση σχεδίων και διαγραμμάτων, τη χρήση αναλογιών και παραλλαγών, και την εξαγωγή συμπερασμάτων από παραδείγματα. Αυτά αποτέλεσαν το θεμέλιο λίθο για τον επιστημονικό κόσμο και έτσι ακολουθήσαν κι άλλοι επιστήμονες που έδωσαν την δική τους οπτική γύρω από την επίλυση μαθηματικού προβλήματος.

Ο Alan Schoenfeld, γνωστός μαθηματικός και εκπαιδευτικός το 1985, έχει διατυπώσει τον ορισμό της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ως μια διαδικασία που περιλαμβάνει πέντε βήματα , την κατανόηση του προβλήματος, την αναγνώριση των στοιχείων που είναι σχετικά με την επίλυση του προβλήματος, τον καθορισμό μιας στρατηγικής επίλυσης, την εφαρμογή της στρατηγικής και τέλος την αξιολόγηση της λύσης. Ο Schoenfeld επισημαίνει επίσης ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων απαιτεί την ανάπτυξη και χρήση διαφόρων μαθηματικών δεξιοτήτων, όπως η αναπαράσταση, η διαίρεση του προβλήματος σε μικρότερα υποπροβλήματα, η εύρεση παραδειγμάτων και η παραγωγή αποδείξεων.

Ο Ορισμός το 1985: Η «λύση προβλήματος» στην πιο γενική της μορφή ορίστηκε ως η προσπάθεια επίτευξης κάποιου αποτελέσματος, όταν δεν υπήρχε γνωστή μέθοδος (για το άτομο που προσπαθεί να επιτύχει αυτό το αποτέλεσμα) για να το επιτύχει. (Schoenfeld, 2013).

Συνεπώς, η επίλυση προβλήματος σύμφωνα με τον Schoenfeld αποτελεί μια διαδικασία που απαιτεί ενεργό συμμετοχή και σκέψη από τον λύτη. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, ο λύτης εξετάζει το πρόβλημα, δημιουργεί υποθέσεις και δοκιμάζει διάφορες στρατηγικές για να βρει μια λύση. Στη συνέχεια, επαληθεύει τη λύση και αναθεωρεί τις υποθέσεις του αν χρειαστεί. Η διαδικασία αυτή απαιτεί επίσης την ανάπτυξη δεξιοτήτων και τη χρήση εργαλείων για την ανάλυση και επίλυση προβλημάτων, όπως η δημιουργικότητα, η κριτική σκέψη και η αυτοαξιολόγηση.

Το βασικό θεωρητικό επιχείρημα στην ΕΜΠ, που αναπτύχθηκε από τον Schoenfeld (1992), ήταν ότι οι ακόλουθες τέσσερις κατηγορίες δραστηριότητας επίλυσης προβλημάτων είναι απαραίτητες και επαρκείς για την ανάλυση της επιτυχίας ή της αποτυχίας της προσπάθειας επίλυσης προβλημάτων κάποιου:

1. Η γνώση του ατόμου
2. Η χρήση από το άτομο στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, γνωστών ως ευρετικές στρατηγικές,
3. Η παρακολούθηση και η αυτορρύθμιση του ατόμου και
4. Τα συστήματα πεποιθήσεων του ατόμου (για τον εαυτό του, για τα μαθηματικά, για την επίλυση προβλημάτων) και η προέλευσή τους στα μαθηματικά από τις εμπειρίες των μαθητών.

Τέλος ο Schoenfeld, μέσα από την έρευνά του το 2013 επεδίωκε να μυήσει στους μαθητές του τη σημασία των μαθηματικών. Ότι δεν είναι μόνο η κατάκτηση γεγονότων και διαδικασιών αλλά έχουν να κάνουν με ερωτήσεις (θέτοντας προβλήματα) και στη συνέχεια η επιδίωξη της απάντησης με αιτιολογημένους τρόπους. Οι στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων είναι εργαλεία για την τακτοποίηση των εννοιών ώστε να συνδεθούν τα μαθηματικά αντικείμενα με τις σχέσεις. Για αυτό το λόγο θεώρησε εξαιρετικά σημαντική την παρακολούθηση των πεποιθήσεων των μαθητών, ως μέρος του μαθήματος. Συνήθως οι μαθητές έχουν εκπαιδευτεί να κατανοούν τα μαθηματικά ως εξής :

1. Κατανοώ τα μαθηματικά σημαίνει κατέχω το περιεχόμενο που έχει επιλεγεί και οργανωθεί από τον δάσκαλο,

2. ότι όλα τα προβλήματα μπορούν να λυθούν σύντομα συνήθως με τεχνικές που παρουσιάζει ο δάσκαλος και
3. ότι οι αποδείξεις δεν έχουν καμία σχέση με την ανακάλυψη μιας έννοιας.

Οπότε θα πρέπει να επανεκπαιδευτούν. Να τους δίνεται η δυνατότητα ευκαιριών να κάνουν παρατηρήσεις και εικασίες καθώς και η δυνατότητα να βιώσουν την άσκηση των μαθηματικών ως δραστηριότητα δημιουργίας νοημάτων. Ο Schoenfeld πιστεύει ότι μπορούν να προσεγγιστούν τα μαθηματικά με αυτό τον τρόπο λέγοντας « Πιστεύω ακράδαντα ότι η επίλυση προβλημάτων με μια ευρετική αντίληψη των μαθηματικών ως δημιουργία νοήματος, μπορεί ακόμα να υλοποιηθεί και ελπίζω να δούμε να πραγματοποιείται και να προοδεύουμε προς αυτήν την κατεύθυνση.»

Ο David Tall, γνωστός μαθηματικός και εκπαιδευτικός, έχει διατυπώσει τον ορισμό της επίλυσης προβλημάτων το 1981 στο άρθρο του "Heuristic strategies: A case for flexible thinking", ως μια διαδικασία που περιλαμβάνει τρεις βασικές διαδοχικές δραστηριότητες: την κατανόηση του προβλήματος, την εύρεση μιας στρατηγικής για την επίλυσή του και την αξιολόγηση της λύσης. Ο David Tall έχει προτείνει έναν ορισμό της επίλυσης προβλημάτων ως μια διαδικασία ανακάλυψης ή δημιουργίας συμβόλων και σχέσεων, η οποία συνδέει αντικείμενα και ιδέες μεταξύ τους και ανακαλύπτει νέα μαθηματικά φαινόμενα.

Ο David Tall έχει εξετάσει τη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και έχει προβάλει διάφορες ιδέες και παρατηρήσεις σχετικά με αυτό. Ορισμένες από τις προσεγγίσεις και τις ιδέες του περιλαμβάνουν τα εξής:

- Η Εμπειρική προσέγγιση, ο Tall υποστηρίζει ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων απαιτεί πρακτική και εμπειρική προσέγγιση. Οι μαθητές πρέπει να ασχολούνται με προβλήματα, να αντιμετωπίζουν δυσκολίες και να πειραματίζονται για να αναπτύξουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων.
- Σύμφωνα με τον Tall, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων απαιτεί την ανάπτυξη της μαθηματικής και κριτικής σκέψης. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν και να αξιολογούν τις πληροφορίες, να συλλογίζονται λογικά και να επιχειρηματολογούν.
- Ο Tall έχει επίσης επισημάνει τη σημασία της εστίασης στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων αντί του αποτελέσματος. Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, οι μαθητές πρέπει να επικεντρώνονται στα βήματα που ακολουθούν

κατά την επίλυση ενός προβλήματος, αναλύοντας τη διαδικασία και κατανοώντας τη λογική πίσω από αυτήν.

Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει στους μαθητές να κατανοήσουν τα μαθηματικά συνδεδεμένα μεταξύ τους και να ανακαλύψουν τα μοτίβα, τις σχέσεις και τις δομές που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων. Έτσι, οι μαθητές αναπτύσσουν μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών αρχών και της δομής των μαθηματικών συστημάτων. Η εστίαση στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ενθαρρύνει τη δημιουργικότητα, την αυτονομία και την εξερεύνηση εναλλακτικών προσεγγίσεων. Παράλληλα, βοηθάει τους μαθητές να αναπτύξουν τις δεξιότητες τους στον προβληματισμό, την ανάλυση και την αποτίμηση των λύσεων.

Σύμφωνα με το Διεθνές Πρόγραμμα Αξιολόγησης Μαθητών PISA (Programme for International Student Assessment) 2003 η επίλυση μαθηματικού προβλήματος ορίζεται ως, «Η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν τις γνωστικές διαδικασίες, να αντιμετωπίζουν και να επιλύουν πραγματικές καταστάσεις με αλληλοεξαρτώμενους περιορισμούς, όπου η πορεία της λύσης δεν είναι άμεσα ορατή και όπου οι εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος δεν κατατάσσονται σε μια και μοναδική περιοχή των μαθηματικών.» OECD (2003). Συγκεκριμένα, η επίλυση προβλημάτων αναφέρεται στην ικανότητα των ατόμων να αντιμετωπίζουν πραγματικές καταστάσεις που περιλαμβάνουν περιορισμούς και διασυνδέσεις μεταξύ των πληροφοριών, και να επιλύουν αυτά τα προβλήματα με επιτυχία.

Τέλος, ο Richard Mayer στη δεκαετία του 80 έχει διατυπώσει τον ορισμό της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων ως μια διαδικασία που περιλαμβάνει τέσσερα βήματα: επίλυση προβλήματος, μεταφορά της λύσης σε μια κατάλληλη αναπαράσταση, αξιολόγηση της λύσης και αυτοαξιολόγηση του επιλυθέντος προβλήματος. Αργότερα, το 2012 οι Mayer & Wittrock ορίζουν την επίλυση προβλήματος ως τη γνωστική διαδικασία που στοχεύει στην επίτευξη ενός στόχου όταν καμία μέθοδος επίλυσης δεν είναι εμφανής στο λύτη του προβλήματος. Ο ορισμός αυτός συνδέεται άμεσα με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Γνωστική διαδικασία: Η επίλυση προβλήματος είναι μια γνωστική διαδικασία που λαμβάνει χώρα στο εσωτερικό του γνωστικού συστήματος του ατόμου. Η εσωτερική φύση της διαδικασίας μπορεί να ανιχνευθεί έμμεσα μέσω της συμπεριφοράς του ατόμου.

2. Αναπαράσταση και χειρισμός των γνώσεων: Η επίλυση προβλήματος περιλαμβάνει την αναπαράσταση και τον χειρισμό των γνώσεων που υπάρχουν στο γνωστικό σύστημα του ατόμου. Αυτό σημαίνει ότι το άτομο χρησιμοποιεί τις υπάρχουσες γνώσεις του για να προχωρήσει στην επίλυση του προβλήματος.
3. Κατευθυνόμενη διαδικασία: Η επίλυση προβλήματος είναι μια κατευθυνόμενη διαδικασία, που σημαίνει ότι οι γνωστικές διαδικασίες του ατόμου καθοδηγούνται από τους επιδιωκόμενους στόχους του. Ο μαθητής προσπαθεί να επιλύσει το πρόβλημα με βάση τους επιθυμητούς στόχους που έχει θέσει. Αυτό σημαίνει ότι κατευθύνει τις γνωστικές διαδικασίες του, όπως τον σχεδιασμό στρατηγικών, την ανάπτυξη εναλλακτικών λύσεων και την εκτέλεση των βημάτων, προς την επίτευξη του επιθυμητού αποτελέσματος.
4. Προσωπική επίλυση προβλήματος: Η επίλυση προβλήματος είναι μια προσωπική διαδικασία, που εξαρτάται από τις ατομικές γνώσεις, δεξιότητες και ικανότητες του λύτη. Κάθε άτομο έχει τη δική του προσωπική προσέγγιση και τρόπο αντιμετώπισης των προβλημάτων, καθώς εφαρμόζει τις δικές του γνώσεις και στρατηγικές για να τα επιλύσει.

Αυτά τα χαρακτηριστικά καθορίζουν τη φύση της επίλυσης προβλημάτων και επισημαίνουν ότι πρόκειται για μια διαδικασία που είναι ενσωματωμένη στην ανθρώπινη γνωστική δραστηριότητα και εξαρτάται από τις ατομικές γνωστικές διαδικασίες και ικανότητες.

3.3 Θεωρία Gestalt

Η θεωρία του Gestalt δόθηκε από τους Karl Duncker το 1945 και Max Wertheimer το 1959 και αποτυπώνει την έννοια της ενόρασης (insight) στην επίλυση προβλημάτων. Η θεωρία του Gestalt υποστηρίζει ότι το μυαλό μας δημιουργεί ενιαίες εικόνες ή δομές από τα δεδομένα που λαμβάνουμε, με βάση τη συνολική τους σημασία και τις σχέσεις μεταξύ τους. Αυτή η αναδιοργάνωση της πληροφορίας μας επιτρέπει να αντιληφθούμε και να κατανοήσουμε τα προβλήματα και τις καταστάσεις με μια ολοκληρωμένη και πιο συνεκτική προοπτική.

Σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία, η ενόραση είναι η αιφνίδια αντίληψη ή κατανόηση μιας νέας και ολοκληρωμένης λύσης για ένα πρόβλημα. Αντί να επιλύουμε ένα πρόβλημα με σταδιακή πρόοδο ή δοκιμάζοντας διάφορες πιθανότητες, η ενόραση συμβαίνει όταν ξαφνικά αναγνωρίζουμε τη σωστή λύση ή το σωστό βήμα για την επίλυση του προβλήματος.

Αυτή η επίλυση μέσω ενόρασης συνήθως συνοδεύεται από αναδιοργάνωση της πληροφορίας και την αντίληψη νέων διασυνδέσεων μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος. Είναι σαν να "διαφαίνεται" μια νέα δομή ή εικόνα που παρέχει μια λύση στο πρόβλημα. Συνολικά, η θεωρία του Gestalt υποστηρίζει ότι η ενόραση είναι μια σημαντική διαδικασία στην επίλυση προβλημάτων. Αυτή η διαδικασία απαιτεί την αντίληψη των σχέσεων και την αναδιοργάνωση της πληροφορίας για τη δημιουργία μιας νέας κατανόησης ή εικόνας του προβλήματος. Σε αντίθεση με την παραδοσιακή προσέγγιση που θεωρεί την επίλυση προβλημάτων ως μια σειρά σταδίων και λογικών πράξεων, η θεωρία του Gestalt εστιάζει στην αντίληψη των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων και στην αναδιοργάνωση της πληροφορίας για να δημιουργηθεί μια νέα κατανόηση. Αυτή η αναδιοργάνωση μπορεί να προκύψει από αναγνώριση παρόμοιων προτύπων, εντοπισμό των δομικών σχέσεων μεταξύ των στοιχείων ή την ανακάλυψη νέων πληροφοριών που είναι απαραίτητες για την επίλυση του προβλήματος. Σύμφωνα με τη θεωρία του Gestalt, η ενόραση συμβαίνει όταν αναγνωρίζουμε μοτίβα, σχήματα ή δομές που αποτελούν ολόκληρη ενότητα και έχουν ένα νόημα. Η αντίληψη των μερών του προβλήματος δεν είναι αρκετή, αλλά η αντίληψη της συνολικής εικόνας και των σχέσεων μεταξύ των στοιχείων είναι κρίσιμη για την επίλυση.

3.4 Ευρετικές στρατηγικές

Οι ευρετικές στρατηγικές στα μαθηματικά αναφέρονται σε συγκεκριμένες προσεγγίσεις και τεχνικές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί για την επίλυση προβλημάτων. Παρέχουν μια κατεύθυνση και μια συστηματική προσέγγιση για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Διάφοροι μαθηματικοί και επιστήμονες έχουν αναπτύξει διάφορες ευρετικές στρατηγικές μέσα από την ιστορία.

Ο Πάππος Αλεξανδρεύς (3ος - 4ος αιώνας μ.Χ.) ήταν ένας από τους πρώτους μαθηματικούς που ασχολήθηκαν με θέματα που σχετίζονται με ευρετικές στρατηγικές. Το έργο του "Συναγωγή" περιλαμβάνει αναλυτικές περιγραφές των μεθόδων ανάλυσης και σύνθεσης στα μαθηματικά.

Επίσης, άλλοι σημαντικοί επιστήμονες όπως ο René Descartes, ο Gottfried Wilhelm Leibniz και ο Bernard Bolzano ασχολήθηκαν με την ευρετική. Όμως ανεξίτηλο έμεινε το έργο του George Polya "How to solve it" (1945). Σε αυτό το έργο, ο Polya προτείνει μια σειρά από ερωτήματα και στρατηγικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αντιμετώπιση μαθηματικών προβλημάτων. Οι βασικές αρχές που προωθεί είναι η κατανόηση του προβλήματος, η ανάλυση των δεδομένων, η επιλογή μιας κατάλληλης στρατηγικής, η εφαρμογή της στρατηγικής και η εξέταση του αποτελέσματος. Ο Polya έδωσε έμφαση στη σημασία της δημιουργικής σκέψης, της πειραματικής δοκιμής και της προσπάθειας να προσεγγίσουμε ένα πρόβλημα από διάφορες γωνίες. Το έργο του έχει επηρεάσει πολλούς εκπαιδευτικούς και μαθητές, και έχει γίνει ένα βασικό εργαλείο για την εκμάθηση της μαθηματικής και την ανάπτυξη ευρετικών δεξιοτήτων.

Η ευρετική στρατηγική δεν είναι ένα στατικό σύνολο κανόνων ή μεθόδων, αλλά αντιπροσωπεύει μια διαδικασία σκέψης και προσέγγισης προβλημάτων. Αντί να παρέχει συγκεκριμένες απαντήσεις, η ευρετική στρατηγική προάγει την ευελιξία, την κριτική σκέψη και την προσαρμοστικότητα. Οι ευρετικές στρατηγικές προωθούν την ανάλυση ενός προβλήματος, την αναγνώριση μοτίβων, τη διατύπωση υποθέσεων, τη δοκιμή διάφορων προσεγγίσεων και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος, μπορεί να απαιτηθεί η προσαρμογή της στρατηγικής, η αναθεώρηση των υποθέσεων και η αναζήτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων.

Μερικές από τις πιο γνωστές ευρετικές στρατηγικές για την επίλυση μαθηματικού προβλήματος σύμφωνα με τον George Polya στο βιβλίο του "How to Solve It" :

- Κατανοήστε πλήρως το πρόβλημα και τις πληροφορίες που παρέχονται.
- Κάντε ερωτήσεις για να διασαφηνίσετε τα στοιχεία του προβλήματος.
- Προσπαθήστε να οπτικοποιήσετε το πρόβλημα με γραφικές αναπαραστάσεις ή διαγράμματα.
- Σκεφτείτε μια στρατηγική ή ένα σχέδιο για την επίλυση του προβλήματος.
- Σκεφτείτε παρόμοια προβλήματα που έχετε λύσει προηγουμένως και εφαρμόστε ανάλογες μεθόδους.
- Εφαρμόστε το σχέδιο σας για την επίλυση του προβλήματος. Παρατηρήστε τα αποτελέσματα και καταγράψτε τα.
- Εξετάστε το αποτέλεσμα και αξιολογήστε την επιτυχία της λύσης σας.
- Σκεφτείτε αν το αποτέλεσμα είναι λογικό και συμβαδίζει με τις προσδοκίες σας.
- Αν το αποτέλεσμα δεν είναι σωστό, επανεξετάστε το σχέδιο σας και προσπαθήστε ξανά.
- Ψάξτε για μοτίβα ή συστηματικότητες στο πρόβλημα.

- Αναζητήστε σχέσεις μεταξύ των δεδομένων και προσπαθήστε να εντοπίσετε μια γενική μέθοδο επίλυσης.
- Δούλεψε αντίστροφα:

1. Υποθέστε ότι το πρόβλημα έχει λυθεί και αναρωτηθείτε ποια βήματα ακολουθήθηκαν.
2. Σκεφτείτε πώς μπορείτε να φτάσετε από την λύση πίσω στο αρχικό πρόβλημα.

- Ξαναξεκίνα τη λύση με άλλο τρόπο:

1. Αν μια συγκεκριμένη προσέγγιση δεν οδηγεί σε αποτέλεσμα, δοκιμάστε να αλλάξετε την προσέγγισή σας.
2. Σκεφτείτε εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος και προσπαθήστε να εφαρμόσετε νέες ιδέες ή τεχνικές.

- Λύσε ένα απλούστερο πρόβλημα:

1. Αν το αρχικό πρόβλημα φαίνεται υπερβολικά πολύπλοκο, επιλύστε ένα απλούστερο πρόβλημα που έχει κάποιες ομοιότητες με αυτό.
2. Η επίλυση ενός απλούστερου προβλήματος μπορεί να σας δώσει κατευθύνσεις ή ιδέες για την επίλυση του πιο πολύπλοκου προβλήματος.

Πιο συγκεκριμένα στο βιβλίο αναφέρονται 67 διαφορετικές ευρετικές :

1. Analogy
2. Auxiliary elements
3. Auxiliary problem
4. Bolzano
5. Bright idea
6. Can you check the result?
7. Can you derive the result differently?
8. Can you use the result?
9. Carrying out
10. Condition
11. Contradictory
12. Corollary
13. Could you derive something useful from the data?
14. Could you restate the problem?t
15. Decomposing and recombining
16. Definition
17. Descartes
18. Determination, hope, success
19. Diagnosis
20. Did you use all the data?
21. Do you know a related problem?
22. Draw a figuret
23. Examine your guess
24. Figures
25. Generalization
26. Have you seen it before?
27. Here is a problem related to yours and solved before
28. Heuristic
29. Heuristic reasoning
30. I you cannot solve the proposed problem
31. Induction and mathematical induction
32. Inventor's paradox
33. Is it possible to satisfy the condition?
34. Leibnitz
35. Lemma
36. Look at the unknown
37. Modern heuristic
38. Notation
39. Pappus
40. Pedantry and mastery
41. Practical problems
42. Problems to find, problems to prove
43. Progress and achievement
44. Puzzles
45. Reductio ad absurdum and indirect proof
46. Redundantt
47. Routine problem
48. Rules of discovery
49. Rules of style
50. Rules of teaching
51. Separate the various parts of the condition
52. Setting up equations
53. Signs of progress
54. Specialization
55. Subconscious work
56. Symmetry
57. Terms, old and new
58. Test by dimension
59. The future mathematician
60. The intelligent problem-solver
61. The intelligent reader
62. The traditional mathematics professor
63. Variation of the problem
64. What is the unknown?
65. Why proofs?
66. Wisdom of proverbs
67. Working backwards

Πίνακας 1 Συγκεντρωτικός πίνακας ευρετικών όπως περιγράφονται στα περιεχόμενα του βιβλίου του Polya "How to solve it"

4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΘΕΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

4.1 Κατασκευή Μαθηματικού Προβλήματος

Για να βοηθήσουν τους μαθητές να εμπλακούν ενεργά στην μαθηματική μάθηση, πολλοί ερευνητές έχουν προτείνει την ενσωμάτωση της κατασκευής προβλημάτων ως συμπλήρωμα των εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Έχει διαπιστωθεί ότι οι δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων μπορούν να ενισχύσουν τη σκέψη των μαθητών και να δημιουργήσουν περισσότερες ευκαιρίες μάθησης για μαθητές σε διάφορα επίπεδα (Baxter, 2005, Silver & Cai, 2005, Whitin, 2004). Ο Tsubota (1987) παρατήρησε ότι οι μαθητές που συνήθως εμφανίζονται αδρανείς στα μαθήματα γίνονται ενεργοί κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων κατασκευής προβλημάτων και υιοθετούν θετική στάση έναντι του προγράμματος σπουδών. Οι μαθητές επίσης επεκτείνονται σε άλλους ακαδημαϊκούς τομείς κατά τη δημιουργία προβλημάτων. Ο Tsubota πιστεύει ότι η κατασκευή προβλημάτων είναι μια γνωστική και μεταγνωστική στρατηγική. Οι μαθητές που καλούνται να επικεντρωθούν σε σημαντικές έννοιες των εκπαιδευτικών υλικών κατά τη διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων, βελτιώνοντας έτσι την κατανόησή των υλικών και επιτρέποντάς τους να παρακολουθούν την κατανόησή τους.

Μεταγενέστεροι ορισμοί θέσης μαθηματικού προβλήματος.

Ο Cai αναφέρει τις εργασίες που θέτουν προβλήματα ως εκείνες που απαιτούν από τους δασκάλους ή τους μαθητές να δημιουργήσουν νέα προβλήματα και ερωτήσεις που βασίζονται είτε σε δεδομένες καταστάσεις είτε σε μαθηματικές εκφράσεις ή διαγράμματα. Ορίζει την "θέση προβλημάτων" ως αποτελούμενη από τρεις συγκεκριμένες πνευματικές δραστηριότητες: (α) Οι ίδιοι οι δάσκαλοι θέτουν μαθηματικά προβλήματα με βάση δεδομένες καταστάσεις ή σε μαθηματικές εκφράσεις ή διαγράμματα, (β) οι δάσκαλοι προβλέπουν τα είδη προβλημάτων που μπορούν να θέσουν οι μαθητές με βάση δεδομένες καταστάσεις ή σε μαθηματικές εκφράσεις ή διαγράμματα και (γ) οι δάσκαλοι σχεδιάζουν μαθηματικές εργασίες τοποθέτησης προβλημάτων για να θέτουν προβλήματα οι μαθητές.

Οι Chen και Cai ορίζουν ως Θέση προβλήματος τη δημιουργία προβλημάτων που βασίζονται σε μια δεδομένη μαθηματική έκφραση.

Ο Koichu ονομάζει θέση μαθηματικού προβλήματος ως την αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα: τα νέα προβλήματα δεν τίθενται απλώς ως ασκήσεις για την θέση προβλημάτων αλλά για πραγματικές μαθηματικές ή παιδαγωγικές ανάγκες. Ή θέση προβλήματος στους όρους ως προς το σχεδιασμό προβλημάτων/ εργασιών για τους μαθητές και τόσο ως αναδιατύπωση όσο και ως δημιουργία «νέων» εργασιών.

Για τους Leikin & Elgrably η Θέση Προβλήματος μέσω Διερεύνησης (PPI) είναι μια σύνθετη μαθηματική δραστηριότητα που περιλαμβάνει: (α) Διερεύνηση ενός γεωμετρικού σχήματος (από ένα πρόβλημα απόδειξης) σε ένα DGE (Πειραματισμός, Εικασία και Δομή) για την εύρεση πολλών (τουλάχιστον 2) μη τετριμμένων ιδιοτήτων του δεδομένου σχήματος και των σχετικών μεγεθών που λαμβάνονται από βοηθητικές κατασκευές. Μη τετριμμένη ιδιότητα είναι αυτή για την οποία η απόδειξη περιλαμβάνει τουλάχιστον 3 στάδια. (β) Διατύπωση πολλών (τουλάχιστον 2) νέων αποδεικτικών προβλημάτων με βάση τις έρευνες που πραγματοποιήθηκαν και επίλυση (απόδειξή τους).

Πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ της κατασκευής προβλημάτων και της επίλυσης προβλημάτων (Crespo, 2003, English, 1998, Kar, Özdemir, Ipek & Albayrak, 2010, Keil, 1965, Leung & Silver, 1997, Nicolaou & Philippou, 2004, Silver & Cai, 1996). Έρευνες απέδειξαν ότι όσον αφορά τη μαθηματική επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές που δημιουργούν προβλήματα μόνοι τους και έπειτα τα επιλύουν έχουν καλύτερη επίδοση από τους μαθητές που απλώς εκδηλώνουν ένα πρόβλημα.

Η κατασκευή προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση αναφέρεται στη δημιουργία νέων προβλημάτων ή την επαναδιαμόρφωση υπαρχόντων προβλημάτων σε ένα μαθηματικό πλαίσιο (Silver, 1994). Η διαδικασία αυτή συνδέεται στενά με την επίλυση προβλημάτων. Από τη μια πλευρά, η κατασκευή ενός προβλήματος βασίζεται στις διαδικασίες επίλυσης ενός προβλήματος, όπως η αναγνώριση των βασικών στοιχείων του προβλήματος και ο τρόπος που σχετίζονται μεταξύ τους και με τον στόχο του προβλήματος. Από την άλλη πλευρά, η κατασκευή προβλήματος οδηγεί τους μαθητές πέρα από τις διαδικασίες επίλυσης. Μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να διερευνήσουν την προέλευση των ιδεών που δημιούργησαν το πρόβλημα ή να αναζητήσουν άλλα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν με τροποποίηση ή επέκταση των στοιχείων του αρχικού προβλήματος. Η επίλυση ενός προβλήματος αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της διαδικασίας κατασκευής προβλήματος. Έτσι, η κατασκευή προβλήματος δεν απλώς ένα μέσο για τη δημιουργία περισσότερων προβλημάτων, αλλά συνδέεται οργανικά με τις πολύπλοκες δραστηριότητες που περιλαμβάνουν την επίλυση προβλημάτων (Pinter, 2012).

Η συσχέτιση ανάμεσα στην κατασκευή προβλημάτων και την επίλυση προβλημάτων υποδηλώνει ότι η ικανότητα να δημιουργήσουμε νέα προβλήματα μπορεί να ενισχύσει την ικανότητά μας να επιλύσουμε προβλήματα. Κατά τη διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων, οι μαθητές πρέπει να αναγνωρίσουν τα βασικά στοιχεία ενός προβλήματος και να κατανοήσουν πώς αυτά συσχετίζονται μεταξύ τους και με τον σκοπό του προβλήματος. Αυτή η διαδικασία ενισχύει τις δεξιότητες ανάλυσης, συνθετικής σκέψης και προβληματισμού, οι οποίες είναι ουσιώδεις για την επίλυση προβλημάτων. Επιπλέον, η κατασκευή προβλημάτων ενθαρρύνει τους μαθητές να αναζητήσουν καινοτόμες ιδέες και να εξερευνήσουν το πεδίο των πιθανών προβλημάτων που μπορεί να προκύψουν από την τροποποίηση ή επέκταση των στοιχείων ενός προβλήματος. Αυτό διευρύνει τη σκέψη τους και την ικανότητά τους να προσεγγίζουν τα προβλήματα από διάφορες προοπτικές. Οι μαθητές αναγκάζονται να σκεφτούν δημιουργικά, να εφαρμόσουν προηγούμενες γνώσεις και να ανακαλύψουν νέες προσεγγίσεις και στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων.

Ένας θετικός παράγοντας για την κατασκευή προβλημάτων μπορεί να είναι η ενίσχυσή της αυτοπεποίθησης των μαθητών στο μαθηματικό πεδίο. Όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι μπορούν να δημιουργήσουν και να επιλύσουν προβλήματα με επιτυχία, αυξάνεται η αίσθηση της επιτυχίας και της ικανότητάς τους να αντιμετωπίσουν προκλήσεις στο μαθηματικό πεδίο. Ο Leung (1993) προσάρμοσε τις τέσσερις φάσεις της επίλυσης προβλημάτων, που εισήγαγε ο Polya (1945), στις τέσσερις φάσεις της κατασκευής προβλημάτων: κατασκευή προβλήματος, σχεδιασμός, επίλυση προβλήματος και ανασκόπηση. Ανακάλυψε ότι οι δραστηριότητες κατασκευής προβλημάτων βοήθησαν τους μαθητές να επιλύσουν προβλήματα που δημιούργησαν μόνοι τους. Κατά την επίλυση των ίδιων κατασκευασμένων προβλημάτων, πραγματοποίησαν υπολογισμούς και ανασκόπησαν τη διαδικασία. Στη συνέχεια, διόρθωσαν τα προβλήματα που κατασκεύασαν και δημιούργησαν νέα. Μέσω της διαδικασίας της κατασκευής προβλημάτων, οι μαθητές μπορούσαν να διευκρινίσουν και να ενισχύσουν την κατανόησή τους για την έννοια του αντικειμένου μάθησης.

Η κατασκευή προβλημάτων ενισχύει την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων, ενώ η επίλυση προβλημάτων παρέχει έμπνευση για την κατασκευή νέων προβλημάτων. Και οι δύο διαδικασίες αποτελούν σημαντικές δεξιότητες στη μαθηματική εκπαίδευση και συμβάλλουν στην ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

4.2 Πλαίσια Κατασκευής Μαθηματικού Προβλήματος

Οι Stoyanova & Ellerton (1996) πρότειναν τρεις κατηγορίες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναγνωριστούν διάφορες καταστάσεις στην κατασκευή προβλημάτων:

1. Κατασκευή προβλήματος μέσα από ελεύθερες καταστάσεις (free situations): Σε αυτήν την περίπτωση, οι μαθητές έχουν την ελευθερία να επιλέξουν την εκφραστική μορφή του προβλήματος και να κατασκευάσουν τις συνθήκες του με διάφορους τρόπους.
2. Κατασκευή προβλήματος μέσα από ημι-δομημένες καταστάσεις (semi-structured situations): Εδώ, οι μαθητές έχουν μια πιο περιορισμένη ελευθερία στην κατασκευή του προβλήματος, αφού δίνονται κάποιες οδηγίες ή περιορισμοί σχετικά με τις συνθήκες του προβλήματος.
3. Κατασκευή προβλήματος μέσα από δομημένες καταστάσεις (structured situations): Σε αυτήν την περίπτωση, οι μαθητές πρέπει να ακολουθήσουν αυστηρές οδηγίες και κανόνες για την κατασκευή του προβλήματος, και οι συνθήκες του προβλήματος είναι προκαθορισμένες.

Αυτές οι κατηγορίες βοηθούν στην κατανόηση διαφόρων πτυχών της κατασκευής προβλημάτων. Η χρήση ελεύθερων καταστάσεων επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν διάφορες προσεγγίσεις και εκφράσεις στην κατασκευή του προβλήματος. Οι ημι-δομημένες καταστάσεις παρέχουν ένα πλαίσιο ή κατευθυντήριες γραμμές που βοηθούν τους μαθητές να εστιάσουν σε συγκεκριμένα στοιχεία ή πτυχές του προβλήματος. Τέλος, οι δομημένες καταστάσεις παρέχουν μια αυστηρή δομή και κανόνες για την κατασκευή του προβλήματος, περιορίζοντας τις επιλογές των μαθητών.

Με τη χρήση αυτών των κατηγοριών, οι εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να μελετήσουν τις διάφορες προσεγγίσεις και στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές στην κατασκευή προβλημάτων.

4.3 Στρατηγικές Κατασκευής Προβλήματος

Οι στρατηγικές κατασκευής προβλήματος αποτελούν τεχνικές και προσεγγίσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία νέων μαθηματικών προβλημάτων. Αυτές οι στρατηγικές ενθαρρύνουν τους μαθητές να σκέφτονται δημιουργικά, να εξερευνούν διάφορες πτυχές των μαθηματικών και να αναπτύσσουν τις δεξιότητές τους στο προβληματισμό. Ορισμένες από τις στρατηγικές κατασκευής προβλήματος περιλαμβάνουν:

1. Αντιστροφή του προβλήματος: Οι μαθητές προσπαθούν να ανατρέξουν την εκφώνηση ενός προβλήματος και να δημιουργήσουν μια αντίθετη ερώτηση ή κατάσταση. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε νέες προοπτικές και ανακαλύψεις.
2. Επέκταση και συμπίεση: Οι μαθητές προσπαθούν να επεκτείνουν ή να συμπιέσουν ένα υπάρχον πρόβλημα, αλλάζοντας τις παραμέτρους ή τις συνθήκες του.
3. Τροποποίηση των στοιχείων: Οι μαθητές αλλάζουν ένα ή περισσότερα στοιχεία ενός προβλήματος, όπως τα δεδομένα ή τους περιορισμούς, προκειμένου να δημιουργήσουν ένα νέο πρόβλημα με διαφορετική προοπτική.
4. Ανάπτυξη σχετικών προβλημάτων: Οι μαθητές δημιουργούν προβλήματα που σχετίζονται με ή επεκτείνονται από ένα υπάρχον πρόβλημα. Αυτό μπορεί να γίνει με την αλλαγή των παραμέτρων, την προσθήκη νέων συνθηκών ή τη δημιουργία παραλλαγών του αρχικού προβλήματος.
5. Συνδυασμός προβλημάτων: Οι μαθητές συνδυάζουν δύο ή περισσότερα προβλήματα για να δημιουργήσουν ένα νέο πρόβλημα με περισσότερες πτυχές ή περίπλοκη δομή.

Οι στρατηγικές κατασκευής προβλήματος έχουν αναπτυχθεί από πολλούς εκπαιδευτικούς και ερευνητές στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αν και διάφοροι ερευνητές έχουν συνεισφέρει στην ανάπτυξη αυτών των στρατηγικών, οι Brown και Walter είναι δύο από τους πρωτοπόρους σε αυτόν τον τομέα. Στα βιβλία τους "The Art of Problem Posing" που δημοσιεύτηκε το 1985 και "Problem Posing" που δημοσιεύτηκε το 1992, αναλύουν λεπτομερώς τη μέθοδο της στρατηγικής "Τι θα συμβεί αν δεν;" ("What if not?") και παρέχουν οδηγίες για την εφαρμογή της στην εκπαίδευση και την έρευνα στα μαθηματικά.

Η στρατηγική του "Τι θα συμβεί αν δεν;" ("What if not?") προσφέρει στους μαθητές ένα πλαίσιο για τη δημιουργία νέων μαθηματικών προβλημάτων. Ακολουθώντας τα πέντε επίπεδα που αναφέρθηκαν:

1. Επιλογή ενός σημείου εκκίνησης: Οι μαθητές επιλέγουν ένα υπάρχον μαθηματικό πρόβλημα ως αφετηρία.
2. Δημιουργία λίστας με τα χαρακτηριστικά του προβλήματος: Οι μαθητές αναλύουν τα χαρακτηριστικά του εκκινητικού προβλήματος και τα καταγράφουν.
3. Διατύπωση της ερώτησης "Τι θα συμβεί εάν δεν;" ("What if not?") και παρουσίαση εναλλακτικών προτάσεων: Οι μαθητές αναρωτιούνται τι θα συμβεί αν τροποποιήσουν

τα χαρακτηριστικά του προβλήματος και παρουσιάζουν εναλλακτικές προτάσεις για αυτά τα χαρακτηριστικά.

4. Δημιουργία νέων ερωτήσεων ή κατασκευή νέων προβλημάτων εμπνευσμένων από τις εναλλακτικές: Οι μαθητές δημιουργούν νέα προβλήματα ή διατυπώνουν νέες ερωτήσεις με βάση τις εναλλακτικές προτάσεις που τους δίνονται, εξερευνώντας έτσι νέες πτυχές και πιθανές προκλήσεις.
5. Ανάλυση του προβλήματος: Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές εξετάζουν το νέο πρόβλημα που δημιούργησαν και αναλύουν τη λύση που βρήκαν.

Αυτό το τελευταίο στάδιο συνδέεται στενά με το στάδιο του George Pólya που ενθαρρύνει τον μαθητή να ανατρέξει στην αρχική λύση και να την εξετάσει

Ο σκοπός της στρατηγικής μαθηματικού προβλήματος είναι να ενθαρρύνει τους μαθητές να αναπτύξουν δεξιότητες προβληματισμού, κριτικής σκέψης και δημιουργικότητας στο πεδίο των μαθηματικών. Η στρατηγική τροποποίησης των δεδομένων που πρότεινε ο Bairac (2005) αποτελείται από πέντε τρόπους προσέγγισης: Παράφραση, Αλλαγή των δεδομένων των δηλώσεων, Αναλογία, Γενίκευση και Συνδυασμό. Αυτοί οι τρόποι χρησιμοποιούνται για να τροποποιήσουν τα δεδομένα ενός μαθηματικού προβλήματος και να δημιουργήσουν νέες προοπτικές και ερωτήσεις.

Συγκεκριμένα, οι τρόποι τροποποίησης των δεδομένων είναι οι εξής:

- Παράφραση (Paraphrasing): Αλλαγή της διατύπωσης των δεδομένων με τρόπο που να δημιουργεί νέες προοπτικές και ερωτήσεις. Μπορεί να γίνει με τη χρήση διαφορετικών λέξεων, φράσεων ή δομής προτάσεων.
- Αλλαγή των δεδομένων των δηλώσεων (Change of the data in the statement): Τροποποίηση των αριθμητικών τιμών, των μονάδων μέτρησης ή των παραμέτρων που περιγράφουν το πρόβλημα. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε νέες σχέσεις ή προκλήσεις για τους μαθητές.
- Αναλογία (Analogy): Επιλογή ενός προβλήματος που μοιάζει με το αρχικό αλλά διαφέρει σε κάποια σημαντικά χαρακτηριστικά. Αυτή η στρατηγική επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν παρόμοιες καταστάσεις ή προβλήματα και να ανακαλύψουν κοινά μοτίβα ή σχέσεις μεταξύ τους. Από αυτή την αναλογία μπορεί να προκύψουν νέες προσεγγίσεις ή ιδέες για την επίλυση του αρχικού προβλήματος.
- Γενίκευση (Generalization): Από το αρχικό πρόβλημα, εξάγονται γενικότερες αρχές ή κανόνες που μπορούν να εφαρμοστούν σε παρόμοιες καταστάσεις. Αυτή η

στρατηγική προωθεί την σκέψη των μαθητών προς τον περαιτέρω γενικευτικό προβληματισμό.

- Συνδυασμός (Combination): Συνδυασμός διαφορετικών προβλημάτων ή στοιχείων από προβλήματα που έχουν ήδη επιλυθεί. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε νέες συνδυασμένες καταστάσεις ή προκλήσεις για την επίλυση προβλημάτων.

Οι παραπάνω στρατηγικές τροποποίησης των δεδομένων παρέχουν στους μαθητές την δυνατότητα να εξερευνήσουν διαφορετικές πτυχές των μαθηματικών προβλημάτων, να ανακαλύψουν νέα ερωτήματα και να αναπτύξουν δημιουργική σκέψη. Η εφαρμογή αυτών των στρατηγικών στη μαθηματική εκπαίδευση προωθεί την ανάπτυξη των δεξιοτήτων προβληματισμού και αυξάνει το ενδιαφέρον και την εμπλοκή των μαθητών στη μάθηση των μαθηματικών.

5º ΚΕΦΑΛΑΙΟ
PISA, ΕΛΛΗΝΙΚΗ PISA, TIMSS

5.1 Pisa

Το PISA είναι ένα διεθνές πρόγραμμα για την αξιολόγηση των Μαθητών

(Programme for International Student Assessment). Αυτό το εκπαιδευτικό πρόγραμμα αποσκοπεί στην καταγραφή του γνωστικού επιπέδου μαθητών 3ης γυμνασίου (15 χρονών) στα μαθηματικά, φυσική και γλώσσα. Το πρόγραμμα PISA αποσκοπεί αφενός στην απάντηση ερωτημάτων, όπως “Η βασική εκπαίδευση παρέχει όλα όσα χρειάζεται ένα άτομο για να προοδεύσει;”, “οι μαθητές είναι ικανοί να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε προβλήματα - καταστάσεις της καθημερινότητας;” και αφετέρου για να υπάρχουν στοιχεία γνωστικής σύγκρισης μεταξύ των κρατών, που μπορεί να αποτελέσει κίνητρο για βελτίωση των εκπαιδευτικών συστημάτων σε κράτη που έχουν χαμηλή επίδοση στο PISA σχετικά με άλλα κράτη.

Αυτή η γραπτή δοκιμασία διεξήχθη πρώτη φορά το 2000 και επαναλαμβάνεται ανά 3 χρόνια σε κάθε χώρα. Ο αριθμός κρατών/περιοχών που το 2000 συμμετείχαν στο PISA είναι 32, ενώ μέχρι το 2021 αυξήθηκαν βαθμιαία σε 88. Οι μαθητές που συμμετέχουν στο PISA ξεπερνούν τα τρία εκατομμύρια παγκοσμίως. Προκειμένου να ικανοποιηθούν οι απαραίτητες προϋποθέσεις του οργανισμού OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) οι χώρες που συμμετέχουν στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα οφείλουν να συλλέξουν ένα δείγμα από τουλάχιστον 5.000 γραπτά (ο αριθμός μεταβάλλεται ανάλογα με τον πληθυσμό της χώρας).

Ο τρόπος διεξαγωγής θα μπορούσε να χαρακτηριστεί αρκετά απλός και κατάλληλος για τους μαθητές αφού αποτελείται από μερικά κατανοητά βήματα. Η δοκιμασία διαρκεί 120 λεπτά - 2 ώρες και διεξάγεται μέσω υπολογιστή. Οι απαντήσεις έχουν μορφή πολλαπλής επιλογής και μερικές απαιτούν πλήρη ανάπτυξη, σκέψη και επίλυση προβλημάτων, προκειμένου να υπάρχει μία πιο καθαρή εικόνα του επιπέδου των μαθητών και να αποφευχθούν τα λανθασμένα αποτελέσματα. Οι μαθητές δεν εξετάζονται μόνο σε διδαγμένη ύλη, αλλά πρέπει να είναι σε θέση να αξιοποιήσουν την διδαγμένη ύλη - γνώση, με σκοπό την εφαρμογή σε άγνωστα ερωτήματα, που απαιτούν συνδυασμό ελεύθερης σκέψης με αρκετά υψηλό γνωστικό επίπεδο. Μόνο το 2003 και 2012 προστέθηκαν στη δοκιμασία σύνθετα προβλήματα που ήταν απαραίτητη η ικανότητα των μαθητών να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους για την επίλυση πραγματικών διεπιστημονικών προβλημάτων, η “διαδρομή” για την λύση δεν ήταν προφανής. Μετά τη δοκιμασία ακολουθεί ένα ερωτηματολόγιο, στο οποίο οι μαθητές αφιερώνουν σχεδόν μια ώρα απαντώντας σε προσωπικές ερωτήσεις, που περιλαμβάνουν μαθησιακές τους συνήθειες, ασχολίες, οικογενειακό περιβάλλον, πηγές κινήτρου, το σχολικό τους περιβάλλον κ.α..

Τα αποτελέσματα του PISA καταγράφονται ανά χώρα, υπάρχουν όμως και ξεχωριστά επαρχιακά - περιφερειακά αποτελέσματα για ορισμένες χώρες. Το PISA δεν περιπλέκει ποτέ τις βαθμολογίες των μαθημάτων προκειμένου να προκύψει μέσος όρος, αντιθέτως τα αποτελέσματα ανακοινώνονται ανά μάθημα , χωρίς να υπάρχει συνολική βαθμολογία μιας χώρας. Ταυτόχρονα μέσω των αποτελεσμάτων ασκείται έντονη εκπαιδευτική πολιτική επιρροή, καθώς με αυτόν τον τρόπο κρίνεται η αποτελεσματικότητα των εκπαιδευτικών προγραμμάτων των χωρών. Η χαμηλή επίδοση μιας χώρας στο PISA συνεπάγεται την ανάγκη για μεταρρυθμίσεις στο εκπαιδευτικό πρόγραμμα της χώρας, αφού οι μαθητές δεν είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε ερωτήματα διαβαθμισμένης δυσκολίας βασισμένα στις διδαγμένες γνώσεις.

ΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΤΟΥ PISA

Το πρόγραμμα PISA αξιολογεί τους μαθητές με τα ίδια θέματα και μεθοδολογία στους τρεις προαναφερόμενους τομείς (Θετικές Επιστήμες Φυσική-Μαθηματικά και Κατανόηση Κειμένου, όπου κάθε τρία χρόνια το πρόγραμμα επικεντρώνεται σε ένα από αυτά τα πεδία, “παραγκωνίζοντας” τα υπόλοιπα. Το πεδίο που έχει επιλεχθεί, αξιολογείται διεξοδικά, ενώ στα άλλα αποδίδεται λιγότερη βαρύτητα. Όταν ολοκληρωθούν - και τα τρία πεδία (δηλαδή δοθεί σημασία σε όλα τα πεδία τουλάχιστον μία φορά), συμπληρώνεται ένας κύκλος.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται περιληπτικά οι κύκλοι της Έρευνας PISA, καθώς και τα κύρια αντικείμενά της από το 2000 ως το 2025.

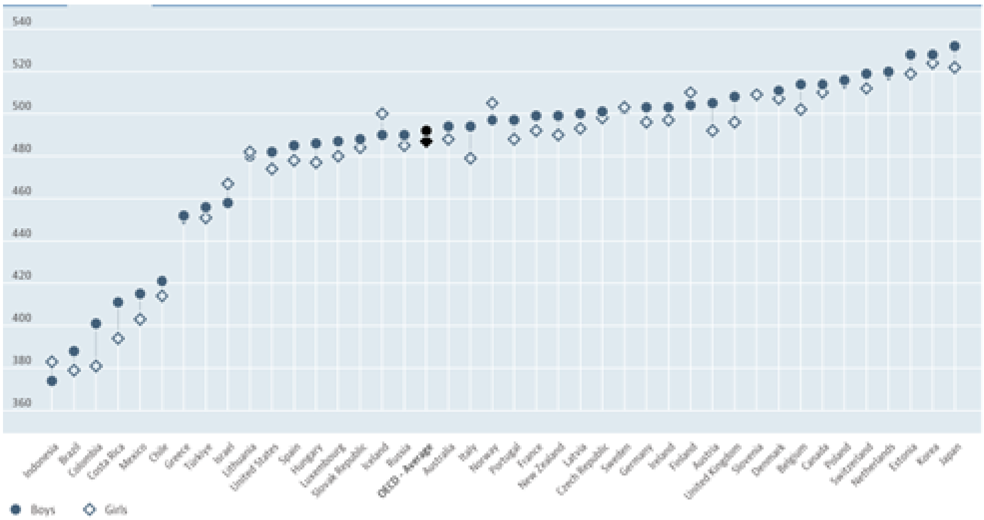
PISA 2000	**Κατανόηση Κειμένου**	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες		
PISA 2003	Κατανόηση Κειμένου	**Μαθηματικά**	Φυσικές Επιστήμες	Επίλυση προβλήματος	
PISA 2006	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	**Φυσικές Επιστήμες**		
PISA 2009	**Κατανόηση Κειμένου**	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες		
PISA 2012	Κατανόηση Κειμένου	**Μαθηματικά**	Φυσικές Επιστήμες	Επίλυση προβλήματος	
PISA 2015	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	**Φυσικές Επιστήμες**		
PISA 2018	**Κατανόηση Κειμένου**	Μαθηματικά	Φυσικές Επιστήμες		
PISA 2022	Κατανόηση Κειμένου	**Μαθηματικά**	Φυσικές Επιστήμες		
PISA 2025	Κατανόηση Κειμένου	Μαθηματικά	**Φυσικές Επιστήμες**		Αξιολόγηση ξένων γλωσσών

Πίνακας 2 Οι κύκλοι της Έρευνας PISA, καθώς και τα κύρια αντικείμενά της από το 2000 ως το 2025.

Μαθηματική αξιολόγηση στο PISA

Η μαθηματική αξιολόγηση στο PISA, μετρά τη μαθηματική παιδεία ενός 15χρονου να διατυπώνει, χρησιμοποιεί και ερμηνεύει μαθηματικά σε ποικίλα πλαίσια για να περιγράφει, να προβλέπει και να εξηγεί φαινόμενα, αναγνωρίζοντας τον ρόλο που παίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο. Ένας μαθητής που μπορεί και ανταποκρίνεται με επιτυχία στην μαθηματική αξιολόγηση του PISA μπορεί και αναγνωρίζει το ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στον κόσμο, προκειμένου να λάβει τεκμηριωμένες κρίσεις και αποφάσεις που χρειάζονται οι εποικοδομητικοί, αφοσιωμένοι και στοχαστικοί πολίτες.

Πίνακας αποτελεσμάτων στην αξιολόγηση μαθηματικών του PISA 2018



Γράφημα 1 Αποτελέσματα από την αξιολόγηση μαθηματικών του PISA 2018. Από την επίσημη ιστοσελίδα του PISA (https://www.oecd.org/pisa/)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤΟ PISA 2022

Το πλαίσιο για τα μαθηματικά PISA 2022 ορίζει τις θεωρητικές βάσεις της μαθηματικής αξιολόγησης PISA σύμφωνα με τη θεμελιώδη έννοια του μαθηματικού γραμματισμού, που συσχετίζει τη μαθηματική λογική και τρεις διαδικασίες του κύκλου επίλυσης προβλημάτων (μαθηματική μοντελοποίηση). Ο μαθηματικός γραμματισμός είναι η ικανότητα ενός ατόμου να συλλογίζεται μαθηματικά να χρησιμοποιεί και να ερμηνεύει μαθηματικά για την επίλυση προβλημάτων. Περιλαμβάνει έννοιες, διαδικασίες, γεγονότα και εργαλεία για την περιγραφή και την εξήγηση φαινομένων. Βοηθά τα άτομα να κατανοήσουν την σημασία των μαθηματικών στην κοινωνία και να κάνουν τις βάσιμες κρίσεις και αποφάσεις που χρειάζονται οι εποικοδομητικοί, αφοσιωμένοι και ενεργοί πολίτες του 21ου αιώνα. Το PISA 2022 αποσκοπεί στην εξέταση των μαθηματικών σε έναν ταχέως μεταβαλλόμενο κόσμο στον οποίο επικρατούν οι νέες τεχνολογίες και τάσεις. Αυτό φέρνει στο επίκεντρο την ικανότητα μαθηματικής λογικής, η οποία ήταν πάντα προτεραιότητα του PISA στα μαθηματικά.

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ PISA

Εικόνα 3 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ PISA . Από την επίσημη ιστοσελίδα του PISA (https://www.oecd.org/pisa/)

1.ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ :

Η λέξη διατύπωση στον ορισμό του μαθηματικού γραμματισμού ορίζεται ως η ικανότητα των ατόμων να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν ευκαιρίες να αξιοποιούν τα μαθηματικά και έπειτα να παρέχουν μαθηματική δομή σε ένα πρόβλημα. Στη διαδικασία της μαθηματικής διαμόρφωσης καταστάσεων, τα άτομα καθορίζουν πού μπορούν να χρησιμοποιήσουν τα βασικά μαθηματικά για να αναλύσουν, να κατανοήσουν και να επιλύσουν το πρόβλημα . Ακόμα ,είναι ικανοί να αντιλαμβάνονται τους περιορισμούς και τις υποθέσεις στο πρόβλημα που πρέπει να επιλύσουν . Συγκεκριμένα, αυτή η διαδικασία διαμόρφωσης καθημερινών καταστάσεων σε καταστάσεις με μαθηματική δομή περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως:

- Προσδιορισμός των μαθηματικών πτυχών ενός προβλήματος υπό συνθήκες πραγματικής ζωής.
- Αναγνώριση της μαθηματικής δομής (συμπεριλαμβανομένων κανονικοτήτων, σχέσεων και προτύπων) σε προβλήματα ή καταστάσεις.
- Απλοποίηση μιας κατάστασης ή ενός προβλήματος προκειμένου να γίνει σύμφωνο με μία μαθηματική ανάλυση.

2. Αξιοποίηση:

Η λέξη αξιοποίηση στον ορισμό του μαθηματικού αλφαβητισμού αναφέρεται ως η ικανότητα των ατόμων να χρησιμοποιούν και να εφαρμόζουν μαθηματικές αρχές και έννοιες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, με σκοπό την εύρεση διαφόρων συμπερασμάτων. Κατά τη διαδικασία χρήσης μαθηματικών αρχών και εννοιών για την επίλυση προβλημάτων, τα άτομα εκτελούν κάποιες συγκεκριμένες διαδικασίες που απαιτούνται για την εύρεση αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων. Κάποιες από αυτές τις διαδικασίες είναι:

- Εκτέλεση μιας απλής πράξης.
- Αξιοποίηση της υπόθεσης και των ζητουμένων σε ένα πρόβλημα.
- Δημιουργία συμπερασμάτων.
- Επινόηση και εφαρμογή στρατηγικών για εύρεση μαθηματικών λύσεων.

3.Ερμηνεία:

Η λέξη ερμηνεία που χρησιμοποιείται στον ορισμό του μαθηματικού αλφαβητισμού επικεντρώνεται στην ικανότητα των ατόμων να κατανοούν μαθηματικές λύσεις, αποτελέσματα ή συμπεράσματα και να μπορούν να τα ερμηνεύουν στο πλαίσιο ενός πραγματικού προβλήματος. Επιπλέον γίνεται εστίαση στην ικανότητα των ατόμων να αντιλαμβάνονται αν τα αποτελέσματα είναι λογικά και αν έχουν νόημα στο πλαίσιο του προβλήματος. Συγκεκριμένα, αυτή η διαδικασία ερμηνείας περιλαμβάνει δραστηριότητες όπως οι ακόλουθες:

- Ερμηνεία πληροφοριών που παρουσιάζονται σε γραφική μορφή ή/και διαγράμματα.
- Κατανόηση του τρόπου με τον οποίο ο πραγματικός κόσμος επηρεάζει τα αποτελέσματα και τους υπολογισμούς μιας μαθηματικής διαδικασίας ή μοντέλου.
- Την κριτική και τον προσδιορισμό των ορίων του μοντέλου που χρησιμοποιείται για την επίλυση ενός προβλήματος, χρησιμοποιώντας τη μαθηματική σκέψη και την υπολογιστική σκέψη.

Εικόνα 4 ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ PISA Από την επίσημη ιστοσελίδα του PISA (https://www.oecd.org/pisa/)

Τα ερωτήματα στη μαθηματική αξιολόγηση στο πρόγραμμα PISA χαρακτηρίζονται από ποικιλομορφία. Οι μορφές των ερωτημάτων είναι οι εξής:

1. Ασκήσεις πολλαπλής επιλογής - “κλειστής” απάντησης : οι μαθητές πρέπει να εντοπίσουν και να επιλέξουν την σωστή απάντηση από ένα μικρό εύρος πιθανών απαντήσεων .
2. Ασκήσεις Σωστού ή Λάθους: οι μαθητές πρέπει να επιλέξουν αν η πρόταση - θέση που τους δίνεται είναι ορθή ή λανθασμένη (και σε κάποιες περιπτώσεις) αν είναι ορθή και όχι πάντα .
3. Ασκήσεις ανάπτυξης - σύντομης απάντησης - “ανοιχτής” απάντησης: οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν την απάντηση σε μία παράγραφο εξηγώντας τον τρόπο που οδηγήθηκαν στο συμπεράσματά τους και τεκμηριώνοντας τις θέσεις τους .

Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ PISA

Γράφημα 2 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ PISA Από την ιστοσελίδα του ΙΕΠ (http://www.iep.edu.gr/pisa/)

Στο γράφημα 2 παρουσιάζεται η πορεία της Ελλάδας τα 23 χρόνια που συμμετέχει στο πρόγραμμα PISA στην αξιολόγηση μαθηματικών ικανοτήτων. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα η Ελλάδα το 2009 είχε την καλύτερη απόδοση σχετικά με τις υπόλοιπες χρονιές και συγκέντρωσε 466 βαθμούς. Για εκείνη τη χρονιά η βαθμολογία αυτή θεωρήθηκε μέτρια, αφού το Χονγκ -Κονγκ (Κίνα) συγκέντρωσε στα μαθηματικά σχεδόν 550 βαθμούς ,ενώ την χαμηλότερη επίδοση είχε η Ινδονησία και η Τυνησία που συγκέντρωσαν περίπου 360 βαθμούς. Το 2003 όμως, σημειώθηκε η χαμηλότερη βαθμολογία που έχει συγκεντρώσει η χώρα μας στο πρόγραμμα με μόνο 445 βαθμούς. Το 2003 καλύτερη βαθμολογία συγκέντρωσε η Φινλανδία με 544 βαθμούς ,ενώ το Μεξικό είχε την χειρότερη επίδοση εκείνη την χρονιά, αφού συγκέντρωσε μόνο 385 βαθμούς .

ΤΑ ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΠΕΔΟ 6	Από 668-1000 μονάδες. Στο Επίπεδο 6 οι μαθητές είναι ικανοί να αντιληφθούν , να γενικεύσουν και να αξιοποιήσουν δεδομένα με βάση τις έρευνές τους και τη μοντελοποίηση πολύπλοκων μαθηματικών καταστάσεων. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο έχουν προχωρημένη μαθηματική σκέψη. Αυτοί οι μαθητές είναι διορατικοί και κατανοούν μαζί με μια γνώση βασικών - απλών μαθηματικών πράξεων
ΕΠΙΠΕΔΟ 5	Από 606 -667 μονάδες. Στο Επίπεδο 5 οι μαθητές μπορούν να επιλύσουν σύνθετα προβλήματα, εντοπίζοντας τους

	περιορισμούς και τις υποθέσεις. Μπορούν επιπλέον να διαλέξουν, να συγκρίνουν και να εφαρμόσουν κατάλληλες στρατηγικές και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων για την αντιμετώπιση σύνθετων και περιπλοκών προβλημάτων.
ΕΠΙΠΕΔΟ 4	Από 544-605 μονάδες. Στο Επίπεδο 4 οι μαθητές μπορούν να εργαστούν αποτελεσματικά και να εκτελέσουν τις κατάλληλες διαδικασίες προκειμένου να λύσουν σύνθετα προβλήματα. Επιπλέον μπορούν να χρησιμοποιούν περιορισμούς και να κατανοούν τις υποθέσεις. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να αξιοποιήσουν ανεπτυγμένες δεξιότητες και να σκεφτούν ευέλικτα, με μερική διορατικότητα.
ΕΠΙΠΕΔΟ 3	Από 482-543 μονάδες. Στο Επίπεδο 3 οι μαθητές μπορούν να εκτελέσουν διαδικασίες που εξηγούνται με σαφήνεια. Μπορούν να επιλέξουν και να εφαρμόσουν απλές στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να ερμηνεύσουν και να αξιοποιήσουν αναπαραστάσεις βασισμένες σε απλές πηγές πληροφοριών.
ΕΠΙΠΕΔΟ 2	Από 420-481 μονάδες .Στο Επίπεδο 2 οι μαθητές είναι ικανοί να εξηγήσουν και να αναγνωρίσουν καταστάσεις σε περιβάλλοντα που απαιτούν μόνο ένα απλό συμπέρασμα. Μπορούν να αντλούν σχετικές πληροφορίες από μία μόνο πηγή. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να χρησιμοποιήσουν βασικούς αλγόριθμους, τύπους, διαδικασίες ή στρατηγικές επίλυσης προβλήματος.
ΕΠΙΠΕΔΟ 1	Από 0-419 μονάδες. Οι μαθητές του επιπέδου 1 μπορούν να ανταποκριθούν σε ερωτήσεις όπου υπάρχουν όλες οι απαραίτητες πληροφορίες και οι ερωτήσεις είναι διατυπωμένες με σαφήνεια. Είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται πληροφορίες και να πραγματοποιούν συνήθεις διαδικασίες

	σύμφωνα με απλές οδηγίες.

Πίνακας 3 ΤΑ ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σύμφωνα με τον πίνακα 3 η Ελλάδα βρίσκεται στο δεύτερο Επίπεδο στην αξιολόγηση μαθηματικών στο PISA.

5.2 Ελληνική Pisa

Η ελληνική PISA είναι μία εξέταση διαγνωστικού χαρακτήρα για μαθητές/τριες της ΣΤ’ τάξης του Δημοτικού και της Γ’ τάξης Γυμνασίου. Η εξέταση αυτή βασίζεται σε 3 γνωστικά αντικείμενα. Την Νεοελληνική Γλώσσα (Ν.Γ.) και τα Μαθηματικά. Γενικά η εξέταση στοχεύει στην εξαγωγή πορισμάτων σχετικά με το γνωστικό επίπεδο των μαθηματικών όταν οι μαθητές αποφοιτούν από το Δημοτικό (Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση) και το γυμνάσιο (Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση) .

Η ελληνική PISA διεξήχθη για πρώτη φορά στις 18 Μαΐου του 2022, όπου συμμετείχαν 6.000 μαθητές από 600 σχολεία της χώρας μας (300 δημοτικά και 300 γυμνασίου). Η επιλογή των σχολείων που συμμετέχουν στη δοκιμασία γίνεται από την Επιστημονική Επιτροπή στρωματοποιημένη δειγματοληψία. Στόχος είναι τα αποτελέσματα να βγουν από διαφορετικά σχολεία με διαφορετικό εκπαιδευτικό περιβάλλον το καθένα ώστε τα αποτελέσματα να είναι όσο πιο αντικειμενικά γίνεται. Επιπλέον μέσω της ελληνικής PISA αξιολογείται το εκπαιδευτικό πρόγραμμα - σύστημα σε εθνικό επίπεδο.

Η εξέταση διαρκεί συνολικά 190 λεπτά (3 ώρες και 10 λεπτά) . Τα πρώτα 75 λεπτά οι μαθητές εξετάζονται στην Νεοελληνική Λογοτεχνία και μετά ακολουθεί τριαντάλεπτο διάλειμμα. Έπειτα οι μαθητές εξετάζονται για άλλα 75 λεπτά στα Μαθηματικά και στα τελευταία δέκα λεπτά καλούνται να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο με κοινωνικό-δημογραφικά στοιχεία. Την ημέρα των εξετάσεων οι μαθητές λύνουν τα θέματα πάνω στο χαρτί με τις εκφωνήσεις και μετά μοιράζονται απαντητικά δελτία που είναι ανώνυμα.

Τα θέματα κληρώνονται από την Επιστημονική Επιτροπή το πρωί της εξέτασης και γίνονται προσβάσιμα στα σχολεία στην ανάλογη πλατφόρμα. Πάντα λίγες εβδομάδες πριν αναρτώνται ενδεικτικά θέματα επομένως κάθε μαθητής μπορεί να λύσει τα θέματα και να εξοικειωθεί σε αυτή την μορφή εξετάσεων. Σύμφωνα με τις αναρτήσεις του υπουργείου παιδείας οι συγκεκριμένες εξετάσεις δεν χρειάζονται κάποια ιδιαίτερη προετοιμασία, καθώς δεν βαθμολογούνται οι ίδιοι και δεν είναι εξέταση αριστείας. Τα θέματα είναι οικεία στους μαθητές, αφού στα θέματα υιοθετείται το ύφος των σχολικών βιβλίων και των σχολικών διαγωνισμάτων.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ PISA

Το αντικείμενο των μαθηματικών στο ελληνικό PISA εξετάζεται από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Οι ερωτήσεις είναι 20 πολλαπλής επιλογής (κάποιες φορές έχει και 2 ερωτήσεις ανάπτυξης) με 4 απαντήσεις η κάθε μία και διαβαθμισμένης δυσκολίας. Τα επίπεδα δυσκολίας είναι 3 στο γυμνάσιο και 3 στο δημοτικό .

Στο δημοτικό καλύπτονται 7 θεματικά πεδία του προγράμματος σπουδών της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης τα οποία είναι τα εξής :

1. Αριθμοί και Πράξεις
2. Μετρήσεις
3. Λόγοι και Αναλογίες
4. Γεωμετρία
5. Συλλογή και Επεξεργασία δεδομένων
6. Επίλυση Προβλημάτων
7. Εισαγωγή στην επίλυση εξισώσεων

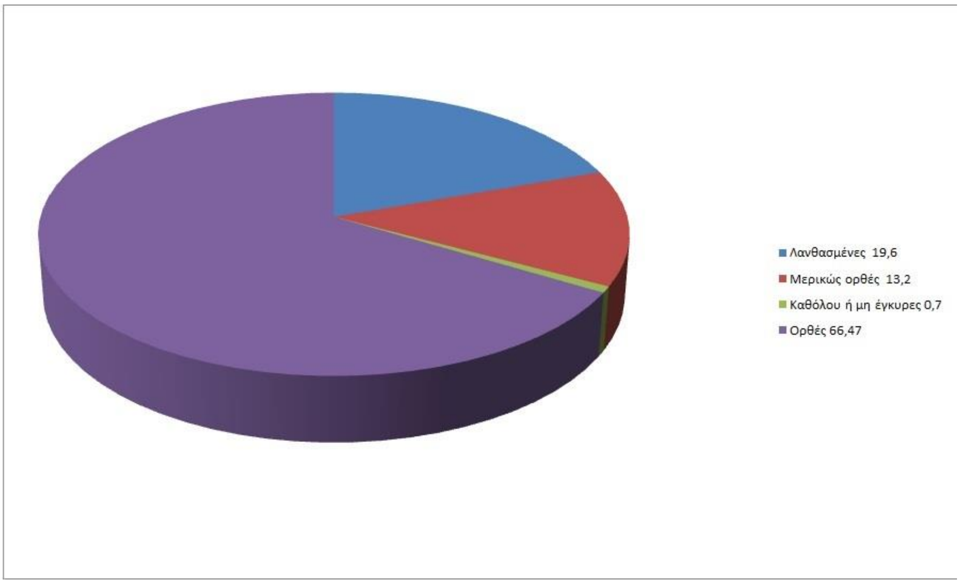
Στο Γυμνάσιο οι ερωτήσεις καλύπτουν 9 θεματικά επίπεδα τα οποία είναι τα εξής :

1. Αριθμοί -Έννοιες και Πράξεις
2. Μονώνυμα -Πολυώνυμα -Παραγοντοποίηση
3. Εξισώσεις - Ανισώσεις -Προβλήματα
4. Τετραγωνική Ρίζα - Δυνάμεις
5. Τρίγωνα -Τετράπλευρα - σχέσεις και ιδιότητες
6. Περίμετρος και Εμβαδόν
7. Πυθαγόρειο Θεώρημα
8. Τριγωνομετρία
9. Στατιστική

Σε κάθε ερώτηση αντιστοιχεί μία σωστή απάντηση, μία μερικώς αποδεκτή και δύο λανθασμένες. Κάθε σωστή απάντηση επιβραβεύεται με 2 μονάδες, οι μερικώς αποδεκτές απαντήσεις με 1 μονάδα, ενώ 0 μονάδες για κάθε λανθασμένη. Επομένως ο βαθμός που αντιστοιχεί σε κάθε απαντητικό δελτίο ανταποκρίνεται από 0 έως 40 μονάδες.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2022 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ PISA ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ

Όπως φαίνεται και στην εικόνα που ακολουθεί, το 2022 το δημοτικό και συγκεκριμένα οι μαθητές της ΣΤ' δημοτικού ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στο αντικείμενο των μαθηματικών, αφού οι σωστές απαντήσεις απαντήθηκαν σε ποσοστό 65,5 % και οι μερικώς ορθές σε ποσοστό 79,7 % . Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές/τριες που αποφοίτησαν το 2022 από το δημοτικό είχαν κατακτήσει σε ικανοποιητικό βαθμό τους στόχους του Δ.Ε.Π.Π.Σ. και του Α.Π.Σ. των μαθηματικών του δημοτικού



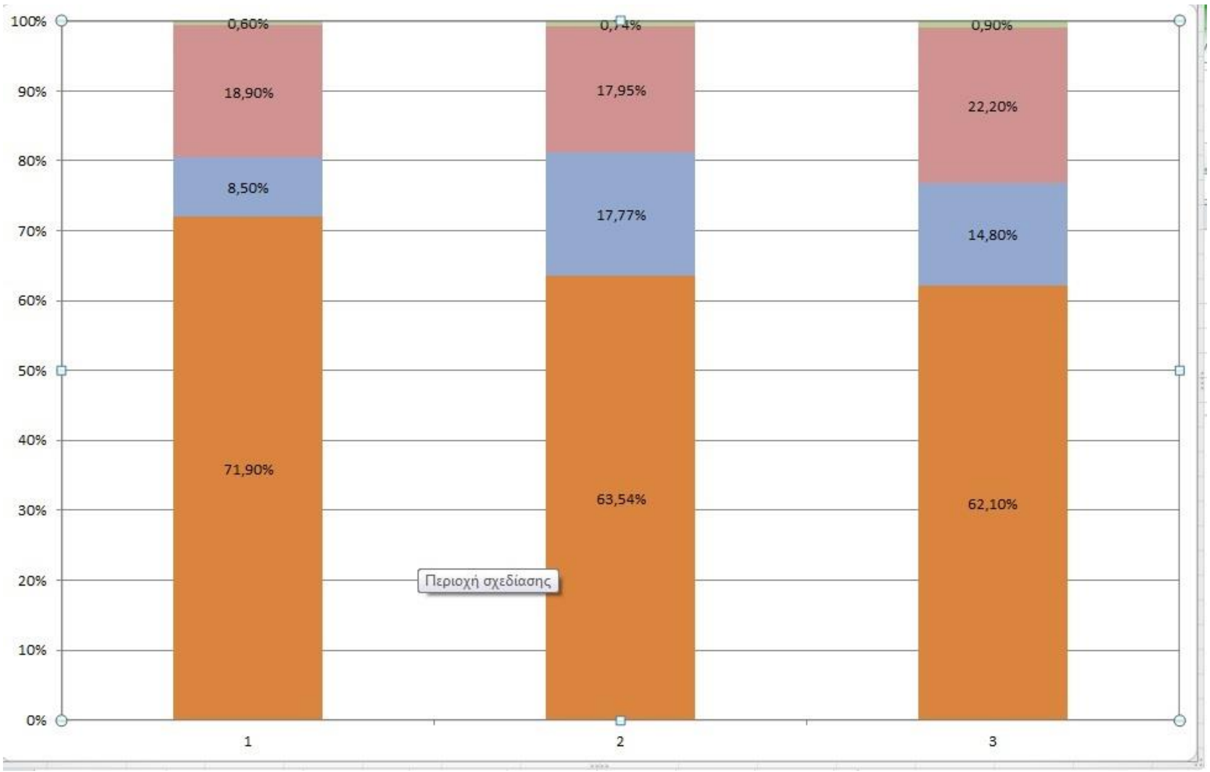
Γράφημα 3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2022 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ PISA ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ (http://iep.edu.gr/el/apotelesmata-eedx/1699-2021-2022)

Όπως προαναφέρθηκε η μαθηματική δοκιμασία στο δημοτικό χωρίστηκε σε 3 επίπεδα δυσκολίας .Στις ερωτήσεις 1ου επιπέδου δυσκολίας ανταποκρίθηκε το 71,94% ,στις ερωτήσεις 2ου επιπέδου δυσκολίας το 63,54% ,ενώ στις ερωτήσεις 3ου επιπέδου δυσκολίας το 62,1%. Από αυτά τα δεδομένα προκύπτει ότι οι απόφοιτοι του Δημοτικού είναι σε θέση να εκτελέσουν απλές μαθηματικές πράξεις και να λύσουν απλά προβλήματα με την εφαρμογή απλών διαδικασιών.

Πίνακας 2. Ποσοστά Αποτελεσμάτων για τα Μαθηματικά Δημοτικού ανά Επίπεδο Δυσκολίας

Επίπεδα Δυσκολίας	Ορθές Απαντήσεις	Μερικώς Ορθές Απαντήσεις	Λάθος Απαντήσεις	Καθόλου ή μη έγκυρες
1ο επίπεδο	71,9%	8,5%	18,9%	0,6%
2ο επίπεδο	63,54%	17,77%	17,95%	0,74%
3ο επίπεδο	62,1%	14,8%	22,2%	0,9%

Πίνακας 4 Ποσοστό αποτελεσμάτων για τα Μαθηματικά Δημοτικού ανά Επίπεδο Δυσκολίας (http://iep.edu.gr/el/apotelesmata-eedx/1699-2021-2022)



Γράφημα 4 Συμπεράσματα για τα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου (http://iep.edu.gr/el/apotelesmata-eedx/1699-2021-2022)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα παραπάνω στατιστικά - δεδομένα είναι τα εξής :

- Οι μαθητές που συμμετείχαν στο πρόγραμμα ελληνική PISA ανταποκρίθηκαν ικανοποιητικά στις ασκήσεις 1ου και 2ου επιπέδου δυσκολίας, που συμπεριλαμβάνουν δεξιότητες όπως εκτέλεση βασικών πράξεων, λύση βασικών προβλημάτων απλής αριθμητικής και πράξεις με δεκαδικούς και κλάσματα.

- Στις ερωτήσεις 3ου επιπέδου δυσκολίας ανταποκρίνονται 6 στους 10 μαθητές. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές αυτοί είναι σε θέση να αναγνωρίζουν γεωμετρικές έννοιες ,να επιλύσουν πιο πολύπλοκα προβλήματα και να επιλέγουν μεταξύ διαφορετικών στρατηγικών για την επίλυση προβλημάτων.

Θεματικά Πεδία	Αριθμός Ερωτήσεων*	Ορθές	Μερικώς Ορθές	Λάθος	Καθόλου ή μη έγκυρες
Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων	1	83,4%	10,2%	6,2%	0,2%
Εισαγωγή στην επίλυση εξισώσεων	1	82,4%	5,8%	11,1%	0,7%
Μετρήσεις	1	72,4%	7,3%	19,6%	0,7%
Λόγοι και αναλογίες	3	66,4%	8,8%	24,1%	0,8%
Αριθμοί και Πράξεις	12	64,5%	14,7%	20,0%	0,8%
Γεωμετρία	2	59,0%	18,7%	21,4%	0,9%
Επίλυση προβλημάτων	6	58,5%	15,9%	24,7%	0,9%

** Κάποιες από τις ερωτήσεις εντάσσονται σε περισσότερο του ενός θεματικά πεδία*

Πίνακας 5 Ποσοστά ορθών απαντήσεων ανά θεματικό πεδίο

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

Από τα προαναφερόμενα συμπεράσματα προκύπτει ότι υπάρχει ανάγκη για :

- Εμβάθυνση στις μαθηματικές έννοιες, προκειμένου οι μαθητές να έχουν την άνεση να εκτελούν μαθηματικές πράξεις.
- Υποστήριξη όλων των μαθητών προκειμένου να αναπτύξουν οι μαθητές μαθηματική σκέψη και να μπορούν να λύνουν βασικά αριθμητικά προβλήματα.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ PISA

Προκειμένου να βελτιωθεί ο τρόπος αξιολόγησης των μαθηματικών στο ελληνικό PISA προτείνεται :

- Να προστεθούν περισσότερες ερωτήσεις “ανοιχτού” τύπου, ώστε οι μαθητές να δείχνουν τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων και να υπάρχει καλύτερη εικόνα των ικανοτήτων που έχουν οι μαθητές στα μαθηματικά και να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν σύνθετα μαθηματικά προβλήματα που απαιτούν μαθηματική σκέψη και διαλογισμό.
- Να αυξηθεί ο αριθμός ερωτήσεων στα θεματικά πεδία που οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο ,όπως ποσοστά ,κλάσματα και γεωμετρία .

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 2022 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΕΛΛΗΝΙΚΟΥ PISA ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Το 2022 το γυμνάσιο και συγκεκριμένα οι μαθητές της Γ' γυμνασίου ανταποκρίθηκαν επαρκώς στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα των προγραμμάτων σπουδών, παρόλα αυτά υπάρχει ένας σημαντικός πληθυσμός μαθητών που έχει περιορισμένες γνώσεις και δεξιότητες στο αντικείμενο των μαθηματικών. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών, των μερικώς ορθών και των λανθασμένων απαντήσεων ανά επίπεδο.

	σωστές	μερικώς αποδεκτές	λανθασμένες
1ο επίπεδο	53 %	15 %	31 %
2ο επίπεδο	42 %	26 %	31 %
3ο επίπεδο	38 %	22 %	39 %

Πίνακας 6 Ποσοστά των σωστών , των μερικώς ορθών και των λανθασμένων απαντήσεων ανά επίπεδο (http://iep.edu.gr/el/apotelesmata-eedx/1699-2021-2022)

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- Ένας στους τέσσερις μαθητές βρίσκεται κάτω από το οριακά επαρκές επίπεδο γνώσεων και δεξιοτήτων. Τα παιδιά αυτά φαίνεται να έχουν σοβαρές δυσκολίες στο μάθημα των μαθηματικών και κινδυνεύουν να αντιμετωπίσουν μεγάλες δυσκολίες και στις υπόλοιπες τάξεις .
- Καλύτερα ανταποκρίθηκαν οι μαθητές στις εξής θεματικές ενότητες:
  1. Τρίγωνα - Τετράπλευρα -Σχέσεις και Ιδιότητες
  2. Περίμετρος και Εμβαδόν
- Χειρότερα ανταποκρίθηκαν στις εξής θεματικές ενότητες:
  1. Μονώνυμα - Πολυώνυμα -Παραγοντοποίηση
  2. Τετραγωνικές Ρίζες - Δυνάμεις
- Μέτρια έως σχεδόν καλά ανταποκρίθηκαν στις εξής θεματικές ενότητες
  1. Αριθμοί: Έννοιες και Πράξεις
  2. Εξισώσεις -Ανισώσεις - Προβλήματα
  3. Πυθαγόρειο Θεώρημα
  4. Τριγωνομετρία
  5. Στατιστική

Η επίδοση σε αυτά τα πεδία είναι κοντά στον μέσο όρο και εμφανίζονται μερικές δυσκολίες κυρίως στην κατανόηση εννοιών και στην ανάγνωση γραφημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΗΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗ PISA

- Να προστεθούν περισσότερες ερωτήσεις "ανοιχτού" τύπου, ώστε οι μαθητές να δείχνουν τον τρόπο επίλυσης προβλημάτων και να υπάρχει καλύτερη εικόνα των ικανοτήτων που έχουν οι μαθητές στα μαθηματικά και να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αντιμετωπίζουν σύνθετα μαθηματικά προβλήματα που απαιτούν μαθηματική σκέψη και διαλογισμό .
- Να αυξηθεί ο αριθμός ερωτήσεων στα θεματικά πεδία που οι μαθητές δυσκολεύονται περισσότερο ,όπως Μονώνυμα - Πολυώνυμα - Παραγοντοποίηση και Τετραγωνική Ρίζα -Δυνάμεις .
- Να προστεθούν ερωτήσεις που δεν βασίζονται μόνο στην διδακτέα ύλη αλλά απαιτούν μαθηματική σκέψη και την ικανότητα να επινοήσουν δικές τους στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.

ΜΙΑ ΜΑΤΙΑ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021-22 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ PISA

17. Η παράσταση $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ είναι ίση με:

Α. $\frac{2}{5}$

Β. $\frac{5}{12}$

Γ. $\frac{5}{6}$

Δ. $\frac{1}{6}$

18. Η παράσταση $A = 3(x+2)+4(x-1)-6\ -3x$ είναι ίση με:

Α. $4x-4$

Β. $x=1$

Γ. $10x-4$

Δ. $4x-6$

19. Ποια είναι η λύση (ή οι λύσεις) της εξίσωσης $x(x-1)=0$;

Α. $x=1$

Β. $x=-1$

Γ. $x=1$ και $x=0$

Δ. $x=-1$ και $x=0$

20. Δίνεται η ευθεία $4x+y=16$. Ένα σημείο Κ της ευθείας έχει τετμημένη -1. Η τεταγμένη του είναι ίση με:

Α. 20

Β. 12

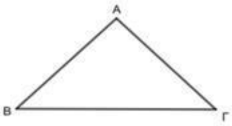
Γ. 4

Δ. -4

1

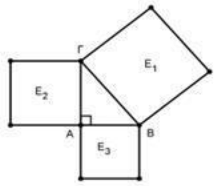
Εικόνα 5 ΘΕΜΑΤΑ 2021-22 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ PISA

25. **Οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή για τη γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου;**



Α. Είναι ίση με τη $\hat{\Gamma}$, αλλά δε έχουμε επαρκή στοιχεία για να την υπολογίσουμε.
Β. Δεν είναι ίση με κάποια από τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
Γ. Είναι ίση με 60^o, όσο και η $\hat{\Gamma}$.
Δ. Είναι ίση με 45^o.

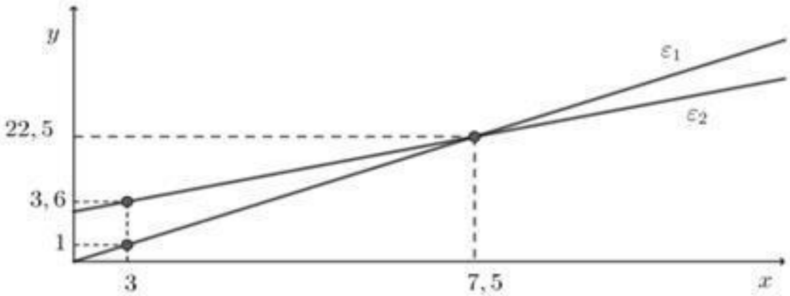
26. **Στο σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$. Εξωτερικά αυτού υπάρχει τετράγωνο με πλευρά ΒΓ και εμβαδόν $E_1 = 61$ cm², τετράγωνο με πλευρά ΑΓ και εμβαδόν $E_2 = 36$ cm² και τετράγωνο με πλευρά ΑΒ και εμβαδόν E_3. Τότε το E_3 είναι ίσο με:**



Α. 25 cm²
Β. 5 cm²
Γ. 97 cm²
Δ. $(\sqrt{61} - 6)$ cm²

Εικόνα 6 ΘΕΜΑΤΑ 2021-22 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ PISA

36. **Δύο εταιρείες κινητής τηλεφωνίας έχουν διαφορετικές χρεώσεις, ως προς τον μηνιαίο χρόνο ομιλίας του πελάτη (συνδρομητή). Με τη βοήθεια της ευθείας ε_1 μπορεί κανείς να υπολογίσει τις χρεώσεις της εταιρείας Α, ενώ με τη βοήθεια της ε_2 μπορεί να υπολογίσει τις χρεώσεις της εταιρείας Β. Ο οριζόντιος άξονας (των x) αντιστοιχεί στον χρόνο ομιλίας, ενώ ο κατακόρυφος άξονας (των y) αντιστοιχεί στην χρέωση σε ευρώ. Για παράδειγμα, για 3 ώρες ομιλίας το μήνα, η εταιρεία Α χρεώνει 1 ευρώ, ενώ η εταιρεία Β χρεώνει 3, 6 ευρώ (για τον ίδιο χρόνο ομιλίας).**



Ο Κώστας κάθε μήνα μιλάει περισσότερο από 8 ώρες στο κινητό του τηλέφωνο. Σε ποια εταιρεία τον συμφέρει να γίνει συνδρομητής;
Να εξηγήσεις σύντομα την απάντησή σου.

Εικόνα 7 ΘΕΜΑΤΑ 2021-22 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ PISA

5.3 Timss

To Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) είναι μια αξιολόγηση των γνώσεων των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών μαθητών τετάρτης (ή πέμπτης) και όγδοης (ή ένατης) τάξης, στην Ελλάδα οι αντίστοιχες τάξεις είναι η Τετάρτη Δημοτικού και η

Δευτέρα Γυμνασίου σε διάφορες χώρες σε όλο τον κόσμο, ενώ συμμετοχή έχει και η Γ΄ Λυκείου σε μικρότερο βαθμό. Οι συγκεκριμένες τάξεις που συμμετέχουν στο TIMSS μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με το εκπαιδευτικό σύστημα και την ηλικιακή διάρθρωση της χώρας. Για παράδειγμα, σε ορισμένες χώρες, η Γ΄ Λυκείου μπορεί να αντιστοιχεί σε μια ηλικιακή ομάδα που είναι ενδεδειγμένη για το TIMSS, ενώ σε άλλες χώρες οι μαθητές αυτής της τάξης μπορεί να μην συμμετέχουν.

Το TIMSS δημιουργήθηκε από τη International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) για να επιτρέπει στα συμμετέχοντα έθνη να παρακολουθούν τα εκπαιδευτικά τους επιτεύγματα και να παρατηρούν τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν τα επιτεύγματά τους με την πάροδο του χρόνου, καθώς και να συγκρίνουν εκπαιδευτικά προγράμματα άλλων χωρών στα βασικά μαθήματα των μαθηματικών και της φυσικής επιστήμης. Ξεκίνησε το 1995 από την IEA και από τότε διεξάγεται κάθε τέσσερα χρόνια. Εκτός από τα δεδομένα επιτεύγματα, το TIMSS συλλέγει πληροφορίες σχετικά με το σπίτι, την τάξη, τον προγραμματισμό του σχεδίου μαθήματος και την διδακτική εφαρμογή αυτού, όπως επίσης για το σχολικό περιβάλλον, τους πόρους και τις δομές. Για αυτό το λόγο τα ερωτηματολόγια της έρευνας διανέμονται σε μαθητές, γονείς/ κηδεμόνες, καθώς και εκπαιδευτικούς.

Η αξιολόγηση των μαθητών επικεντρώνεται σε διάφορα θέματα περιεχομένου, όπως Αριθμητική, Γεωμετρία, Άλγεβρα, Μέτρηση και Στατιστική στα Μαθηματικά, καθώς και Βιολογία, Φυσική, Χημεία και Γεωγραφία στις Φυσικές Επιστήμες. Επιπλέον, η αξιολόγηση εστιάζει σε γνωστικές περιοχές, όπως Γνώση, Εφαρμογή και Αιτιολόγηση.

Οι κύριοι στόχοι του TIMSS περιλαμβάνουν:

1. Την αξιολόγηση της ακαδημαϊκής απόδοσης των μαθητών στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες.
   Τη σύγκριση των επιδόσεων μεταξύ διαφορετικών χωρών.
2. Την ανίχνευση των τάσεων στις επιδόσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια διαφόρων χρονικών περιόδων.

Για τη συλλογή δεδομένων στην έρευνα TIMSS χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι, συμπεριλαμβανομένων:

1. Δοκιμίου Αξιολόγησης στα Μαθηματικά για να αξιολογηθεί η μαθησιακή απόδοση των μαθητών στα Μαθηματικά.

2. Δοκιμίου Αξιολόγησης στις Φυσικές Επιστήμες για να αξιολογηθεί η μαθησιακή απόδοση των μαθητών στις Φυσικές Επιστήμες.
3. Ερωτηματολογίου Μαθητή που συλλέγει πληροφορίες σχετικά με τον ίδιο τον/την μαθητή/τρια, την οικογένειά του/της, καθώς και στάσεις και προσδοκίες του απέναντι στη μάθηση και στο συγκεκριμένο μάθημα που είναι υπό έμφαση.
4. Ερωτηματολογίου Εκπαιδευτικού για τη συλλογή απόψεων και πληροφοριών από τους εκπαιδευτικούς.
5. Ερωτηματολογίου Σχολείου που μπορεί να περιλαμβάνει πληροφορίες σχετικά με το σχολείο, το περιβάλλον του, και τους εκπαιδευτικούς πόρους.
6. Ερωτηματολογίου Γονέων/Κηδεμόνων για τη συλλογή πληροφοριών από τους γονείς ή τους κηδεμόνες των μαθητών.

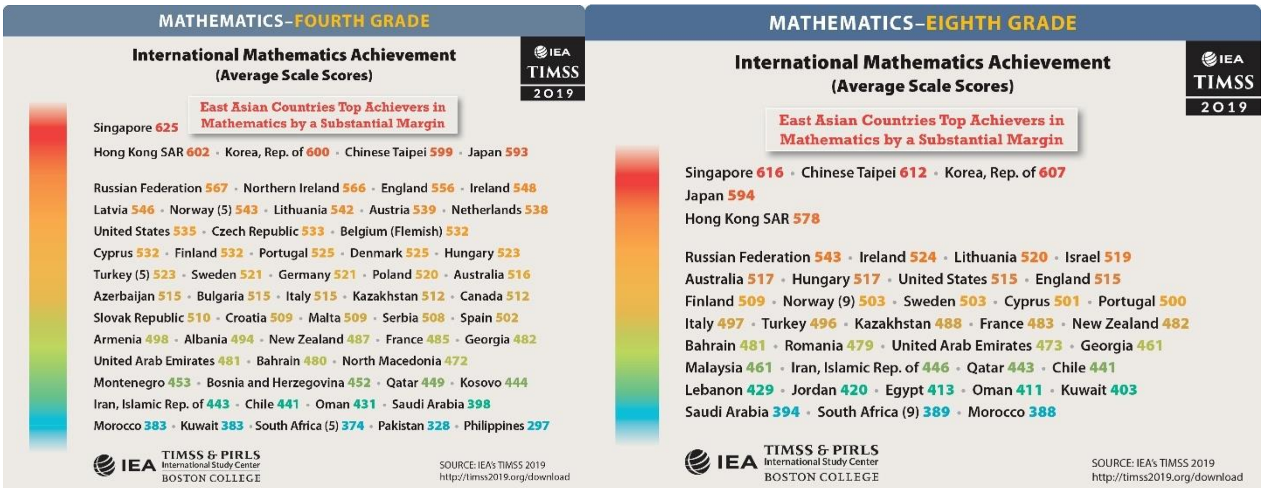
Οι πληροφορίες αυτές χρησιμοποιούνται κατά την ανάλυση των δεδομένων για να εξεταστεί η σχέση της επίδοσης των μαθητών με ατομικά ή οικογενειακά χαρακτηριστικά και άλλους κοινωνικοοικονομικούς παράγοντες (όπως φύλο, μετανάστευση, επίπεδο εκπαίδευσης των γονέων, περιβάλλον του σχολείου, κ.ά.).

Η Ελλάδα καθώς και η Κύπρος συμμετείχαν από την πρώτη χρονιά διεξαγωγής του TIMSS, παρόλα αυτά η Ελλάδα δεν ξαναέλαβε μέρος στον διαγωνισμό τις επόμενες χρονιές, σε αντίθεση με την Κύπρο που συμμετέχει μέχρι και σήμερα στην δοκιμασία (εκτός του 2011). Στον διαγωνισμός TIMSS που έλαβε χώρα το 2015 συμμετείχαν 57 χώρες και 7 συστήματα συγκριτικής αξιολόγησης. Το 2015 η Κύπρος έλαβε μέρος μόνο με τους μαθητές της τετάρτης δημοτικού όπου κατέλαβε την 23η θέση από τις 49 στα μαθηματικά της με 523 βαθμούς ενώ στις φυσικές επιστήμες κατέλαβε την 36η θέση από τις 47 με 481 βαθμούς. Το χάσμα στα αποτελέσματα των μαθηματικών μεταξύ των χωρών της Ανατολικής Ασίας και της επόμενης υψηλότερης χώρας ήταν 23 το 2015, αμετάβλητο από το 2011. Στις φυσικές επιστήμες δεν υπήρχε χάσμα.

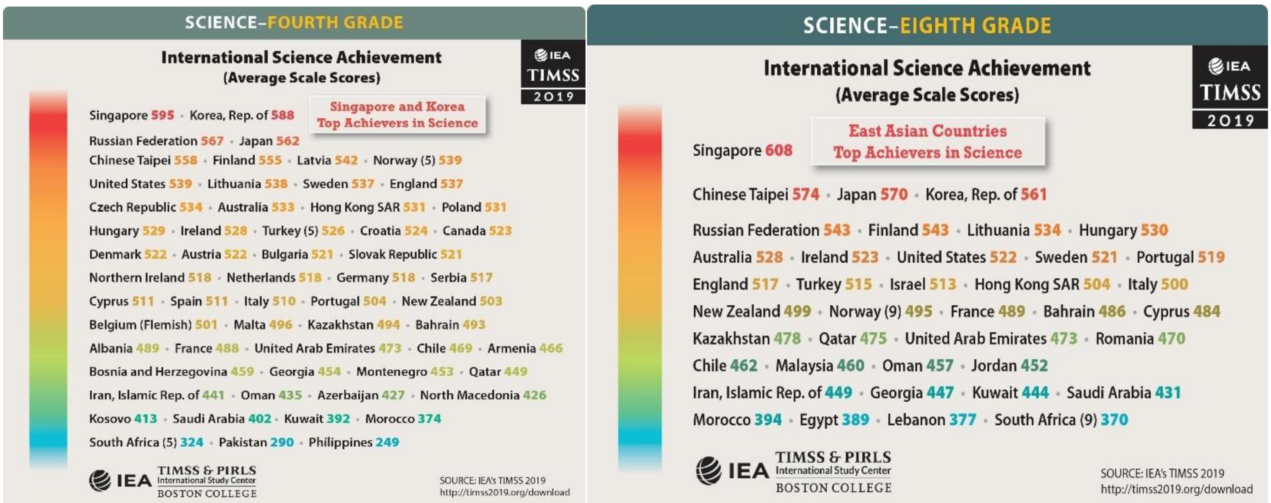
Εικόνα 8 International Mathematics Achievement 2015

Στον επόμενο κύκλο του 2019 έλαβαν μέρος 64 χώρες και 8 συστήματα συγκριτικής αξιολόγησης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της επίσημης ιστοσελίδας IEA TIMSS & PIRLS οι Κύπριοι μαθητές της τετάρτης τάξης συγκέντρωσαν στα μαθηματικά 532 μονάδες, ενώ στις φυσικές επιστήμες 511 μονάδες. Από την άλλη, οι μαθητές της όγδοης τάξης (Β΄ Γυμνασίου) συγκέντρωσαν στα μαθηματικά 501 μονάδες και στις φυσικές επιστήμες 484 μονάδες. Με βάσει τους Διεθνείς Δείκτες Αναφοράς, οι μαθητές της τέταρτης τάξης στα μαθηματικά βρίσκονται σε επίπεδο μεταξύ του High Benchmark(550) και του Advanced Benchmark(625), ενώ στη φυσική μεταξύ του Intermediate Benchmark(475) και του High Benchmark(550). Ακόμα, οι μαθητές της όγδοης τάξης στα μαθηματικά βρίσκονται σε επίπεδο μεταξύ του Intermediate Benchmark(475) και του High Benchmark(550) και στο ίδιο επίπεδο βρίσκονται και στις φυσικές επιστήμες.

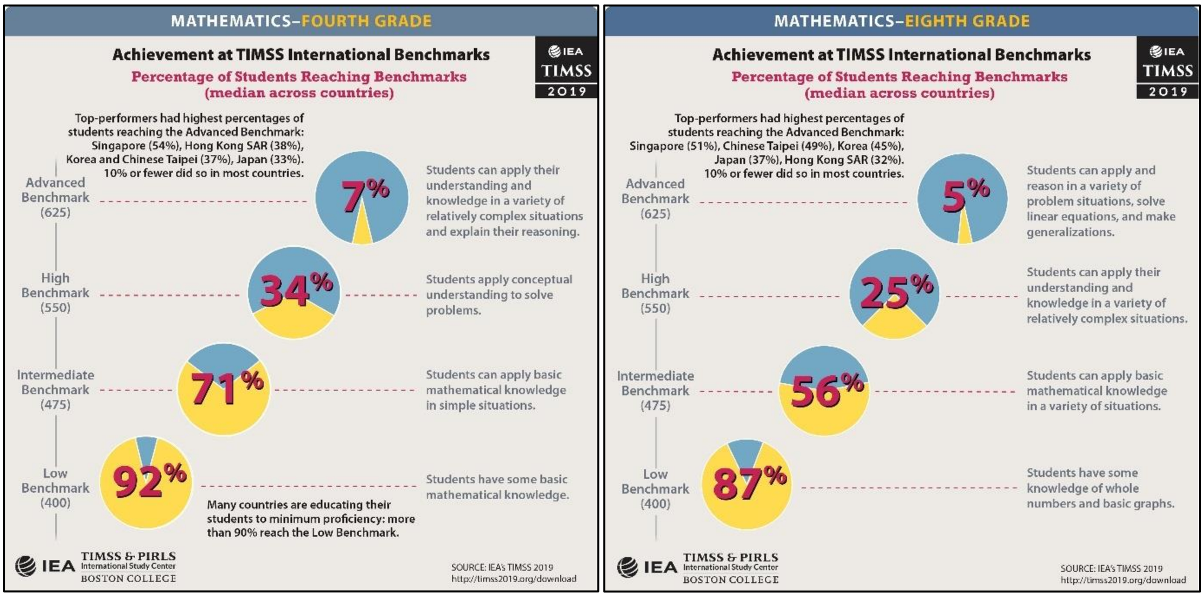
Σύμφωνα με τα διαγράμματα των επιτευγμάτων κατά φύλο στην τετάρτη τάξη στα μαθηματικά, σε 27 χώρες τα αγόρια ξεπερνούν βαθμολογικά τα κορίτσια, σε 4 χώρες τα κορίτσια ξεπερνούν τα αγόρια ενώ σε 27 χώρες υπάρχει ισότητα μεταξύ των 2 φύλων. Ακόμα στην όγδοη τάξη, σε 6 χώρες τα αγόρια ξεπερνούν τα κορίτσια, σε 7 χώρες τα κορίτσια ξεπερνούν τα αγόρια ενώ σε 26 χώρες παρατηρείται ισότητα. Εντούτοις, στην τετάρτη τάξη στις φυσικές επιστήμες, σε 7 χώρες τα αγόρια ξεπερνούν τα κορίτσια, σε 18 χώρες τα κορίτσια ξεπερνούν τα αγόρια ενώ σε 33 υπάρχει ισότητα στις βαθμολογίες. Επίσης στην Β γυμνασίου σε 6 χώρες τα αγόρια ξεπερνούν τα κορίτσια, σε 15 χώρες τα κορίτσια υπερτερούν ενώ σε 18 χώρες υπάρχει ουδετερότητα μεταξύ των 2 φύλων. Συμπερασματικά, σχεδόν οι μισές χώρες είχαν ισότητα μεταξύ των φύλων στο μέσο επίπεδο επίδοσης στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Ωστόσο, στα μαθηματικά, τα αγόρια ξεπέρασαν τα κορίτσια της τετάρτης δημοτικού σε 27 χώρες, τα κορίτσια υπερτέρησαν μόνο σε 4, ενώ υπήρξε συμφωνία μεταξύ των 2 φύλων σε 27 χώρες . Στις φύσικές επιστήμες, τα κορίτσια ξεπέρασαν τα αγόρια σε 18 χώρες στην τετάρτη δημοτικού ενώ τα αγόρια υπερτερούσαν μόνο σε 7 χώρες ενώ δεν υπήρχαν ιδιαίτερες διαφορές σε 33 χώρες. Στη β γυμνασίου τα κορίτσια υπερτερούσαν σε 15 χώρες τα αγόρια σε 6 χώρες ενώ ουδετερότητα υπήρξε σε 18 χώρες.



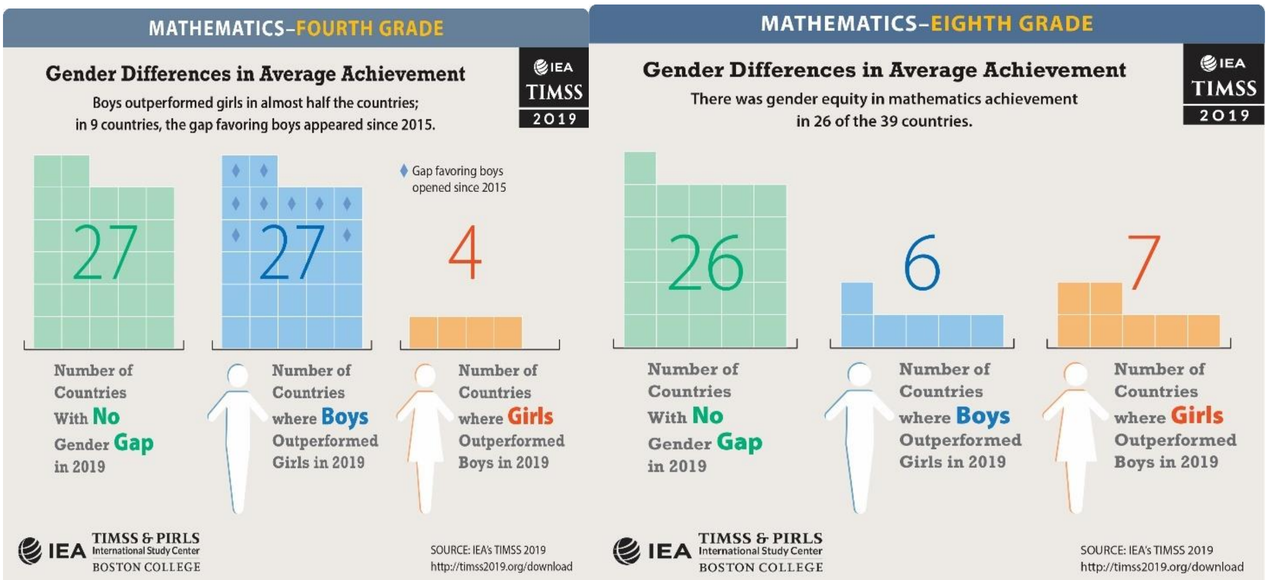
Εικόνα 9 International Mathematics Achievements (Average Scale Scores)



Εικόνα 10 International Science Achievement (Average Scale Scores)



Εικόνα 11 International Benchmarks



Εικόνα 12 Achievement by Gender

Το 2023, η IEA και το Διεθνές Κέντρο Σπουδών TIMSS θα πραγματοποιήσουν τον όγδοο κύκλο του TIMSS στην τέταρτη και όγδοη τάξη, παρέχοντας σχεδόν 30 χρόνια δεδομένων τάσεων σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά και τις επιστήμες. Το TIMSS 2023 θα ολοκληρώσει τη μετάβαση του TIMSS στην ψηφιακή αξιολόγηση, η οποία ξεκίνησε με το TIMSS 2019, αντικατοπτρίζοντας την ευρεία χρήση της τεχνολογίας στα σχολεία και την κοινωνία. Οι αξιολογήσεις TIMSS 2023 θα περιλαμβάνουν νέες και ελκυστικές μορφές αντικειμένων, διαδραστικές λειτουργίες και εργασίες επίλυσης προβλημάτων και έρευνας βάσει σεναρίων που παρακινούν τους μαθητές και αξιοποιούν το ψηφιακό περιβάλλον.

Το TIMSS παρέχει σημαντικά δεδομένα για τις επιδόσεις των μαθητών με την πάροδο του χρόνου. Από το 1995, τα δεδομένα TIMSS είναι ένα ανεκτίμητο εργαλείο για τις χώρες ώστε να λαμβάνουν αποφάσεις βάσει στοιχείων σχετικά με τα εκπαιδευτικά συστήματα και τις πολιτικές τους. Οι χώρες μπορούν να συγκρίνουν τα πρόσφατα αποτελέσματά τους με αυτά προηγούμενων ετών για να μετρήσουν την ανάπτυξη, να αξιολογήσουν τον αντίκτυπο των εκπαιδευτικών πολιτικών και προγραμμάτων σπουδών και να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με εκείνα άλλων χωρών. Εβδομήντα χώρες σχεδιάζουν να συμμετάσχουν στο TIMSS 2023.

TIMSS 2023 Schedule Highlights

2021	2022	2023	2024
Feburary — ***Combined 1st/2nd National Research Coordinators' Meeting***	**March-April —** ***Field Test***	***Data Collection***	**December —** ***Results Released***

Πίνακας 7 Χρονοδιάγραμμα TIMSS 2023 Source: https://timssandpirls.bc.edu/timss2023/

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

6ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ
Η ΕΡΕΥΝΑ

6.1 Στόχος και Ερωτήματα

Οι στόχοι - σκοποί της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να διαπιστώσουμε πως η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση μέσα από το χειρισμό επίλυσης μαθηματικού προβλήματος επίδραση στο μαθηματικό αλφαβητισμό των παιδιών στη σχολική πραγματικότητα στην Ελλάδα από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε σχέση με τα διεθνή Πρότυπα Μαθηματικής Αξιολόγησης TIMSS και PISA.

Συγκεκριμένα εξετάζονται τα εξής ερωτήματα:

- Ποιες είναι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση μαθηματικού προβλήματος από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση;
- Η καταγραφή των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος.
- Διερεύνηση του γνωστικού υπόβαθρου που έχουν οι μαθητές με την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.
- Έχουν εντοπίσει οι μαθητές την έννοια της Μοντελοποίησης από φυσικά ή πραγματικά προβλήματα;

6.2 Οι συμμετέχοντες στην έρευνα

Στην έρευνα συμμετείχαν μαθητές της ΣΤ’ Δημοτικού και όλων των τάξεων του Γυμνασίου. Συνολικά συμμετείχαν 306 μαθητές από διάφορα σχολεία. Τα σχολεία που θέλησαν να λάβουν μέρος και να βοηθήσουν στην έρευνά μου είναι:

- Το 1ο Γυμνάσιο Βάρης
- Το Γυμνάσιο Βουλιαγμένης
- Το 2ο Γυμνάσιο Καλυβίων - Λαγονησίου
- Το 3ο Γυμνάσιο Κηφισιάς
- Το Δημοτικό σχολείο Βουλιαγμένης
- Το Δημοτικό σχολείο Βάρκιζας
- Το 2ο Δημοτικό Σχολείο Βάρης

- Το φροντιστήριο πουκαμισάς Βάρης

Συγκεκριμένα το δείγμα των μαθητών είναι 160 κορίτσια και 146 αγόρια.

6.3 Ερωτηματολόγιο Έρευνας και Έργα

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται από 22 ερωτήσεις δημογραφικών στοιχείων και πεποιθήσεων σχετικά με τις ανησυχίες και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά. Οι ερωτήσεις παθήσεων στηρίζονται στο έργο του Kloosterman “Measuring Beliefs About Mathematical Problem Solving” (1992).

Στην έρευνα του Kloosterman, χρησιμοποιήθηκαν έξι κλίμακες και για κάθε κλίμακα προτάθηκαν έξι ερωτήσεις, με συνολικό αριθμό 36 ερωτήσεων. Οι κλίμακες που χρησιμοποιήθηκαν ήταν: δύσκολα προβλήματα, βήματα, κατανόηση, λεκτικά προβλήματα, προσπάθεια και χρησιμότητα.

Ωστόσο, για να αποφευχθεί ένα ερωτηματολόγιο μεγάλου μεγέθους, επιλέχθηκαν λιγότερες ερωτήσεις από κάθε κλίμακα (από 1 έως 4). Επιπλέον, προστέθηκε μια νέα κλίμακα που αφορά τη σημασία της κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων από τους μαθητές. Συγκεκριμένα οι ερωτήσεις κατανεμήθηκαν ως εξής:

Δύο σχετίζονται με τις προτιμήσεις (π.χ. είμαι καλός στα μαθηματικά;)

Τρεις σχετίζονται με την κατανόηση των μαθηματικών.

Τέσσερις σχετίζονται με την επίλυση δύσκολων προβλημάτων

Δύο ερωτήσεις έχουν σχέση με την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος

Τέσσερις ερωτήσεις σχετίζονται με τα λεκτικά προβλήματα

Τέσσερις ερωτήσεις είναι σχετικές με την ορθότητα των βημάτων και την κατανόησή τους

Μία ερώτηση σχετίζεται με την προσπάθεια που πιστεύουν ότι πρέπει να διαθέσουν οι μαθητές και Τέλος,

Δύο ερωτήσεις σχετίζονται με τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε αποτελείται από ερωτήσεις τύπου Likert με 4 βαθμούς: "Διαφωνώ ", "Διαφωνώ λίγο", "Συμφωνώ λίγο" και "Συμφωνώ". Απορρίφθηκε μια πέμπτη επιλογή με τη μορφή "Ούτε συμφωνώ άλλα ούτε διαφωνώ" με σκοπό να αποφευχθεί η ουδέτερη στάση των μαθητών. Με άλλα λόγια, οι εξεταζόμενοι κλήθηκαν να απαντήσουν σε κάθε ερώτηση με βάση την προσωπική τους άποψη, επιλέγοντας μία από τις τέσσερις διαθέσιμες απαντήσεις που αντιπροσωπεύουν τον βαθμό συμφωνίας ή διαφωνίας τους. Η προσθήκη μιας πέμπτης επιλογής που θα δίνετε η δυνατότητα ουδετερότητας απορρίφθηκε, έτσι ώστε οι μαθητές να υποχρεωθούν να εκφράσουν μια σαφή άποψη.

6.4 Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο Ανάλυσης CHIC

Η Αναλυτική Στατιστική Ανάλυση ιδρύθηκε από τη διδακτορική διατριβή του R. Gras σχετικά με τους στόχους της Διδακτικής των Μαθηματικών (Gras, 1979). Αυτή η μέθοδος ακολουθήθηκε από ερευνητές σε πολλούς επιστημονικούς τομείς ως αξιόπιστη και έγκυρη μέθοδος, χάρη στην εκτεταμένη έρευνα του Gras σε συνεργασία με τους φοιτητές του και τους συναδέλφους του (Gras, Couturier, Blanchard, Briand, Kuntz, & Peter, 2004; Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008; Gras, Regnier, & Guillet, 2009; Gras, Régnier, Marinica, & Guillet, 2013; Gras, & Couturier, 2013). Η εφαρμογή της μέσω του λογισμικού CHIC έχει διεκπεραιώσει την παραγωγή πολλών ερευνητικών έργων παγκοσμίως (Couturier, 2008).

Το πρόγραμμα CHIC βασίζεται στην Συνεπαγωγική Στατιστική Ανάλυση, η οποία αναπτύχθηκε από τον R. Gras το 1995. Αυτή η μέθοδος ανάλυσης δεδομένων επιτρέπει τη σύγκριση της συσχέτισης μεταξύ δύο γεγονότων και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Η κύρια ιδιαιτερότητά της είναι ότι δεν βασίζεται στη συμμετρία των δεδομένων, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους. Με αυτήν τη μέθοδο, μπορεί να μετρηθεί η ένταση μιας συνεπαγωγής και να ληφθούν υπόψιν εξαιρέσεις. Η παραπάνω μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική στον τομέα της χρήσης αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών και ιδιαίτερα στην αναπαραστατική ευελιξία (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2010; Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011; Christodoulou, & Gagatsis, 2014) και στο φαινόμενο της διαμερισματοποίησης των αναπαραστάσεων (Gagatsis, Shiakalli, & Panaoura, 2003; Elia, Gagatsis, & Gras, 2005; Gagatsis, Elia, & Mousoulides, 2006; Gagatsis, & Deliyianni, 2015; Panaoura, Michael-Chrysanthou, Gagatsis, Elia, & Philippou, 2017).

Η Συνεπαγωγική Στατιστική Ανάλυση επιτρέπει σε έναν ερευνητή να προβλέψει τη συμπεριφορά ενός γεγονότος, λαμβάνοντας υπόψιν την απάντηση σε ένα προηγούμενο γεγονός. Συνολικά, πρόκειται για μια ισχυρή μέθοδο ανάλυσης δεδομένων που αποσκοπεί στην ανακάλυψη και αξιολόγηση κανόνων μεταξύ των γεγονότων, καθώς και στην ανίχνευση ιεραρχικών ταξινομήσεων και συνεπαγωγών μεταξύ των μεταβλητών. Το πρόγραμμα CHIC εκμεταλλεύεται αυτήν τη μέθοδο για να παράγει κανόνες συσχέτισης μεταξύ διάφορων γεγονότων. Συνολικά, αυτό το πρόγραμμα αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση δεδομένων και την ανίχνευση σχέσεων μεταξύ διάφορων παρατηρήσεων.

6.5 Οι μεταβλητές της έρευνας

Ονομασία ερωτήσεων

Q1 ,Q2,Q3 ,Q4....Q22

Ονομασία Έργων

ΈΡΓΟ 1: Mathematical Powers and Compare Numbers (MPCNa/MPCNb): Μαθηματικές Δυνάμεις και Σύγκριση Αριθμών

ΈΡΓΟ 2: Definition Understanding Problem (DPrUa/DPrUb): Πρόβλημα Κατανόησης Ορισμού

ΈΡΓΟ 2c i) : Problem Posing with specific data (PrPs): Διατύπωση Προβλήματος με Συγκεκριμένα Δεδομένα

ΈΡΓΟ 2c ii) : Problem Solving of the posed (PrSl): Επίλυση του Διατυπωμένου Προβλήματος

ΈΡΓΟ 3 : Problem Solving Using Modelling (PrSlUMd): Επίλυση Προβλήματος με Χρήση Μοντελοποίησης

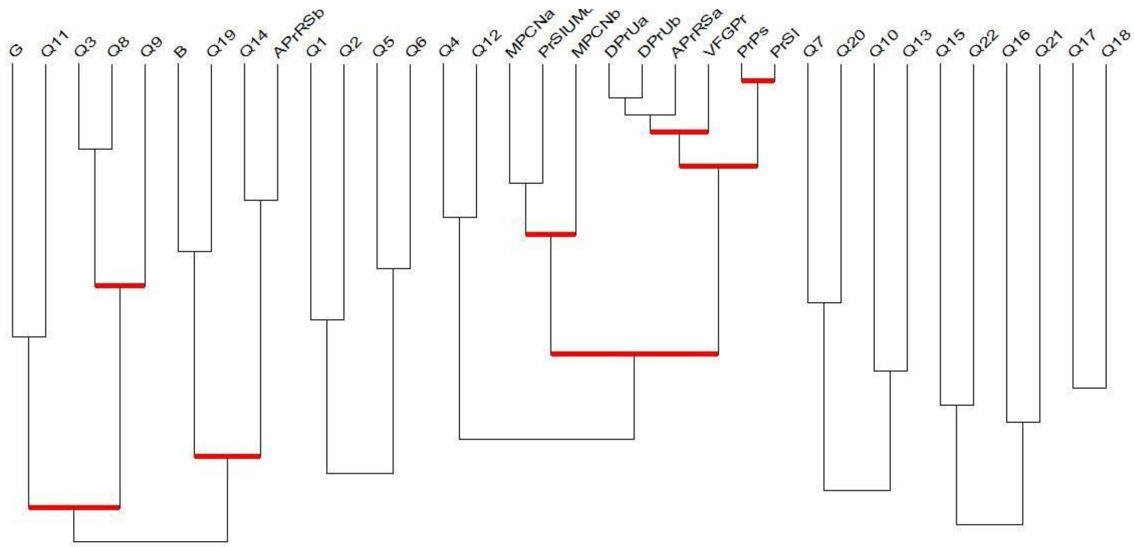
ΈΡΓΟ 4 : Verbal Form of Geometric Problem (VFGPr): Λεκτική Μορφή Γεωμετρικού Προβλήματος

ΈΡΓΟ 5 : Arithmetical Problem of a Realistic Situation (APrRSa/APrRSb): Αριθμητικό Πρόβλημα Ρεαλιστικής Κατάστασης

7ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

7.1 Αποτελέσματα ΣΤ’ Δημοτικού

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-ΣΤ΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



Διάγραμμα 2 ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-ΣΤ΄ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Το Διάγραμμα 2 παρουσιάζει το Δενδροδιάγραμμα Ομοιότητας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Επίσης στο Διάγραμμα Ομοιότητας, οι μεταβλητές ή τα στοιχεία που έχουν παρόμοιες ιδιότητες ή χαρακτηριστικά ομαδοποιούνται και απεικονίζονται κοντά μεταξύ τους. Η απόσταση ή η ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών είναι αντιπροσωπευτική της σχέσης μεταξύ τους. Ένα τέτοιο διάγραμμα μπορεί να προσφέρει εικόνα των δομών και των σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών, βοηθώντας τους αναλυτές να εντοπίσουν μοτίβα, ομάδες ή συσχετίσεις μεταξύ των δεδομένων.

Το συγκεκριμένο διάγραμμα χωρίζεται σε 6 ομάδες ομοιότητας, κάποιες με πιο ισχυρές σχέσεις μεταξύ τους και κάποιες άλλες πιο αδύναμες. Η πρώτη και η τρίτη ομάδα φαίνεται να έχουν τις πιο ισχυρές σχέσεις. Στην πρώτη ομάδα, ισχυρή σύνδεση ομοιότητας με επίπεδο σημαντικότητας 5 έχουν οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου Q3 και Q8 με ποσοστό ομοιότητας 0,94656 , η σύνδεση τους έπεται από το γεγονός ότι αν ένας μαθητής χρειάζεται βοηθητικά βιβλία για το διάβασμά του, είναι πιθανόν να μην μπορεί να λύσει εύκολα μαθηματικά προβλήματα. Στην τρίτη ομάδα παρατηρείται η ισχυρότερη ομάδα ομοιότητας με ποσοστό ομοιότητας να πλησιάζει το 1 μεταξύ των μεταβλητών των έργων σε 4 επίπεδα ομοιότητας. Στην ομάδα αυτή οι σχέσεις αφορούν τις μεταβλητές των έργων, όπου θα είναι και αυτή που θα μελετήσουμε εκτενέστερα. Η πιο ισχυρή σύνδεση εντοπίζεται ανάμεσα στις μεταβλητές PrPs και PrSl, η σύνδεση αυτή υποδηλώνει ότι όσοι δημιούργησαν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ελεύθερες πρακτικές παρέχοντάς τους κάποια δεδομένα, πιθανόν να είχαν την ικανότητα να προσφέρουν τη δική τους λύση. Η σχέση αυτή ανήκει στο πρώτο επίπεδο σημαντικότητας με ποσοστό ομοιότητας 0.999992. Σε δεύτερο επίπεδο έχουμε τη σύνδεση των μεταβλητών DPrUa με την DPrUb που αφορά την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού μιας επιφάνειας καθώς και την αντίληψη από τον μαθητή του λάθους στην εκφώνηση της ερώτησης από τον διδάσκοντα, αποδίδοντας τον σωστό ορισμού της. Στη συνέχεια έχουμε τη σύνδεση των μεταβλητών αυτών με την APrRSa η οποία αφορά την εφαρμογή της έννοιας σε ένα πραγματικό πρόβλημα καθημερινότητας, όπου το επίπεδο ομοιότητας είναι 0,999834. Επιτυγχάνεται η σύνδεση των τριών παραπάνω μεταβλητών με την μεταβλητή VFGPr , κατανοώντας τη σύνδεση που προκύπτει από την κατανόηση μιας έννοιας στην πρακτική εφαρμογή της αλλά και στην αντίληψη και κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων. Το ποσοστό ομοιότητας μεταξύ των (((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) είναι 0.98795. Συνοψίζοντας γίνεται απολύτως διακριτή η σύνδεση μεταξύ των Έργων 2, 4 και 5 με ποσοστό ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών ((((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) (PrPs PrSl)) να είναι 0.928676 μια πολύ ισχυρή σύνδεση ομοιότητας διαφορετικών μεταξύ τους έργων.

Μια εξίσου σημαντική σύνδεση ομοιότητας στο έβδομο επίπεδο σημαντικότητας είναι μεταξύ των μεταβλητών MPCNa και PrSlUMd με ποσοστό σημαντικότητας 0.923103. Η σύνδεση αυτή υποδηλώνει την εξάρτηση μεταξύ μιας αριθμητικής μοντελοποίησης όπως αυτής των δυνάμεων σε σχέση με την μοντελοποίηση ενός ρεαλιστικού προβλήματος που παρουσιάζεται στο Έργο 3. Τέλος μια όχι τόσο ισχυρή σχέση έχουν όλα τα έργα μεταξύ τους στο δέκατο έβδομο επίπεδο σημαντικότητας (((MPCNa PrSlUMd) MPCNb) ((((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) (PrPs PrSl))) με ποσοστό ομοιότητας 0.604226.

Το γεγονός ότι περισσότερα από 10 επίπεδα έχουν ποσοστό ομοιότητας που πλησιάζει το 1, καθιστά την έρευνα ιδιαίτερα αξιόπιστη.

<u>Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα</u>

Classification at level : 1 : (PrPs, PrSl) similarity : 0.999992

Classification at level : 2 : (DPrUa DPrUb) similarity : 0.999982

Classification at level : 3 : ((DPrUa DPrUb) APrRSa) similarity : 0.999834

Classification at level : 4 : (((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) similarity : 0.98795

Classification at level : 5 : (Q3 Q8) similarity : 0.946569

Classification at level : 6 : ((((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) (PrPs PrSl)) similarity : 0.928676

Classification at level : 7 : (MPCNa PrSlUMd) similarity : 0.923103

Classification at level : 8 : (Q14 APrRSb) similarity : 0.876159

Classification at level : 9 : (Q4 Q12) similarity : 0.873938

Classification at level : 10 : ((MPCNa PrSlUMd) MPCNb) similarity : 0.843575

Classification at level : 11 : (B Q19) similarity : 0.805316

Classification at level : 12 : (Q5 Q6) similarity : 0.77974

Classification at level : 13 : ((Q3 Q8) Q9) similarity : 0.74779

Classification at level : 14 : (Q7 Q20) similarity : 0.691012

Classification at level : 15 : (Q1 Q2) similarity : 0.68726

Classification at level : 16 : (G Q11) similarity : 0.634473

Classification at level : 17 : (((MPCNa PrSlUMd) MPCNb) ((((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) (PrPs PrSl))) similarity : 0.604226

Classification at level : 18 : (Q10 Q13) similarity : 0.584303

Classification at level : 19 : (Q17 Q18) similarity : 0.570768

Classification at level : 20 : (Q15 Q22) similarity : 0.561512

Classification at level : 21 : (Q16 Q21) similarity : 0.475029

Classification at level : 22 : ((Q4 Q12) (((MPCNa PrSlUMd) MPCNb) ((((DPrUa DPrUb) APrRSa) VFGPr) (PrPs PrSl)))) similarity : 0.451031

Classification at level : 23 : ((B Q19) (Q14 APrRSb)) similarity : 0.420077

Classification at level : 24 : ((Q1 Q2) (Q5 Q6)) similarity : 0.269344

Classification at level : 25 : ((Q7 Q20) (Q10 Q13)) similarity : 0.175666

Classification at level : 26 : ((G Q11) ((Q3 Q8) Q9)) similarity : 0.12694

Classification at level : 27 : ((Q15 Q22) (Q16 Q21)) similarity : 0.0917282

Classification at level : 28 : (((G Q11) ((Q3 Q8) Q9)) ((B Q19) (Q14 APrRSb))) similarity : 0.020191

The most significant node is at level :17

Significant nodes

at level: 1

at level: 4

at level: 6

at level: 10

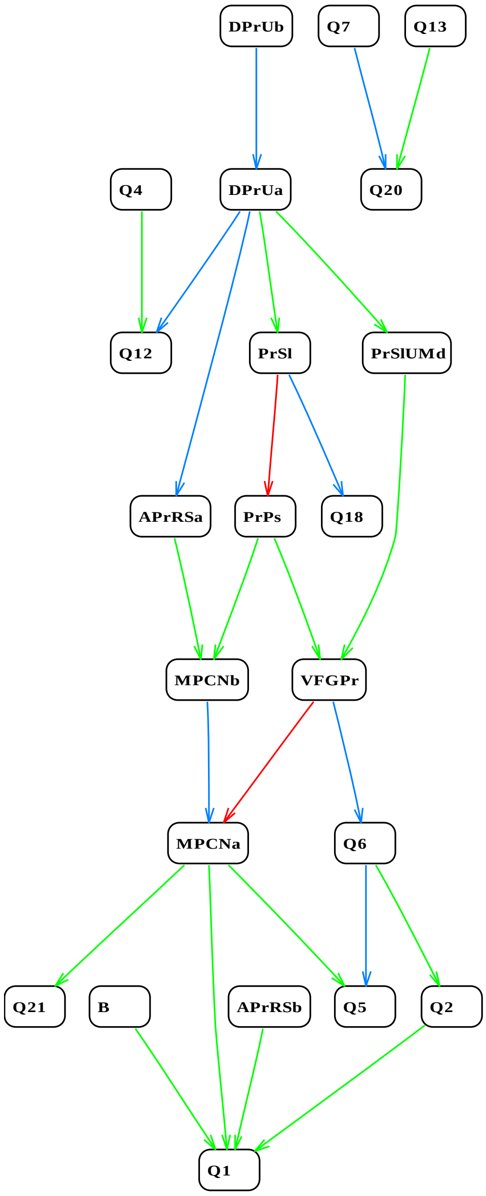
at level: 13

at level: 17

at level: 23

at level: 26

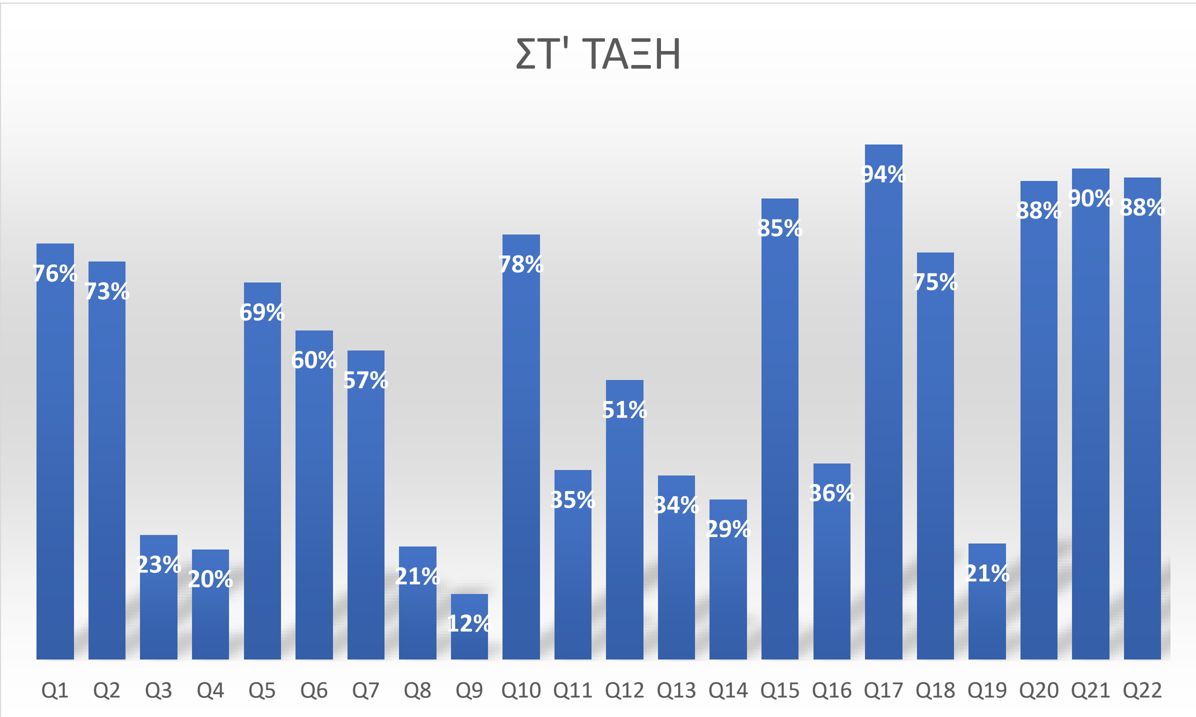
ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)-ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ



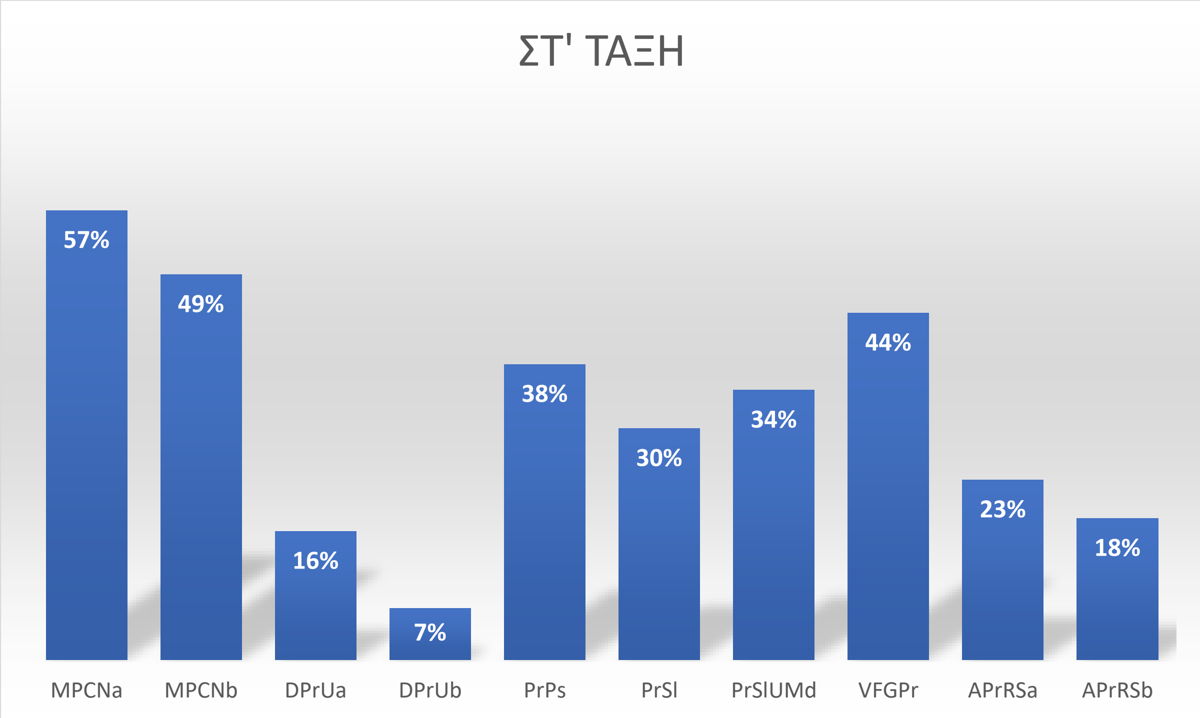
Διάγραμμα 3 ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)- ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Το Διάγραμμα 3 παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, με το μπλε βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 95% και με το πράσινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 90%. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1→Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.

Στην κορυφή του συνεπαγωγικού διαγράμματος βρίσκονται τα έργα που δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές και όσο κατεβαίνουμε στη συνεπαγωγική αλυσίδα τα έργα φαίνονται πιο εύκολα στους μαθητές. Πιο συγκεκριμένα με επίπεδο σημαντικότητας 95% (μπλε βέλος) που αποδίδεται από τη μεταβλητή DPrUb στην DPrUa, αν ένας μαθητής έχει αποδώσει σωστά τον ορισμό του εμβαδού μιας επιφάνειας, θα έχει κατανοήσει και το λάθος που βρίσκεται στην εκφώνηση της ερώτησης που προηγείται. Σε συνέχεια αυτής της συνεπαγωγής, έχουμε και τη ρεαλιστική εφαρμογή της έννοιας που κατανοήθηκε, εφαρμόζοντας την κεκτημένη γνώση σε πρακτική εφαρμογή στο (έργο 5) APrRSa. Σε επίπεδο σημαντικότητας 99% έχουμε την μεταβλητή PrSl που συνεπάγεται την PrPs , που σημαίνει ότι αν ένας μαθητής έχει επιλύσει το πρόβλημα που ο ίδιος δημιούργησε, σίγουρα έχει προηγηθεί η κατασκευή του. Η μεταβλητή PrSl συνεπάγεται επίσης την Q18 σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, η συνεπαγωγή αυτή επιβεβαιώνει ότι μια σωστή λύση σε ένα Μαθηματικό πρόβλημα χωρίς την κατανόησή της δεν σημαίνει την πραγματική λύση του προβλήματος.



Γράφημα 5 Μέσος όρος συμφωνίας πεποιθήσεων μαθητών ΣΤ' Τάξης



Γράφημα 6 Ποσοστό επιτυχίας επίλυσης έργων ΣΤ' Τάξης

Σύμφωνα με τα Γραφήματα 5 και 6 φαίνεται πως οι μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στο πρώτο έργο και υπάρχει ομοιομορφία στα δύο πρώτα ερωτήματα του πρώτου έργου (MPCNa, MPCNb).

Στο έργο δύο, στο πρώτο ερώτημα, μόνο το 16% κατάφερε να διαπιστώσει ότι η ερώτηση ήταν λανθασμένη (DPrUa). Και μόλις το 7% κατάφερε να δώσει τον ακριβή ορισμό του εμβαδού μίας επιφάνειας (DPrUb). Να σημειωθεί ότι λόγω της ηλικιακής βαθμίδας υπήρχε επιείκεια στην διόρθωση (π.χ. Η απάντηση «Εμβαδόν ενός σχήματος» ή «Το μέσα ενός σχήματος» θεωρούνται εξίσου αποδεκτές απαντήσεις). Συνεχίζοντας στο τρίτο ερώτημα του έργου 2, απαρτίζετε από δύο μέρη, την κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος με συγκεκριμένα δεδομένα, με ποσοστό επιτυχίας 38% (PrPs) και την επίλυση του προβλήματος που τέθηκε με ποσοστό επιτυχίας 30% (PrSl).

Στο τρίτο έργο το 34% (PrSlUMd) κατάφερε να επιλύσει το πρόβλημα με διάφορους τρόπους όπως σχεδιαστικά ή με δοκιμές καθώς και με τυπικούς μαθηματικούς τρόπους όπως με χρήση εξίσωσης ή με τις απλές μαθηματικές πράξεις.

Στο τέταρτο έργο, το 44% (VFGPr) κατανόησε και απεικόνισε το λεκτικό πρόβλημα σχηματικά.

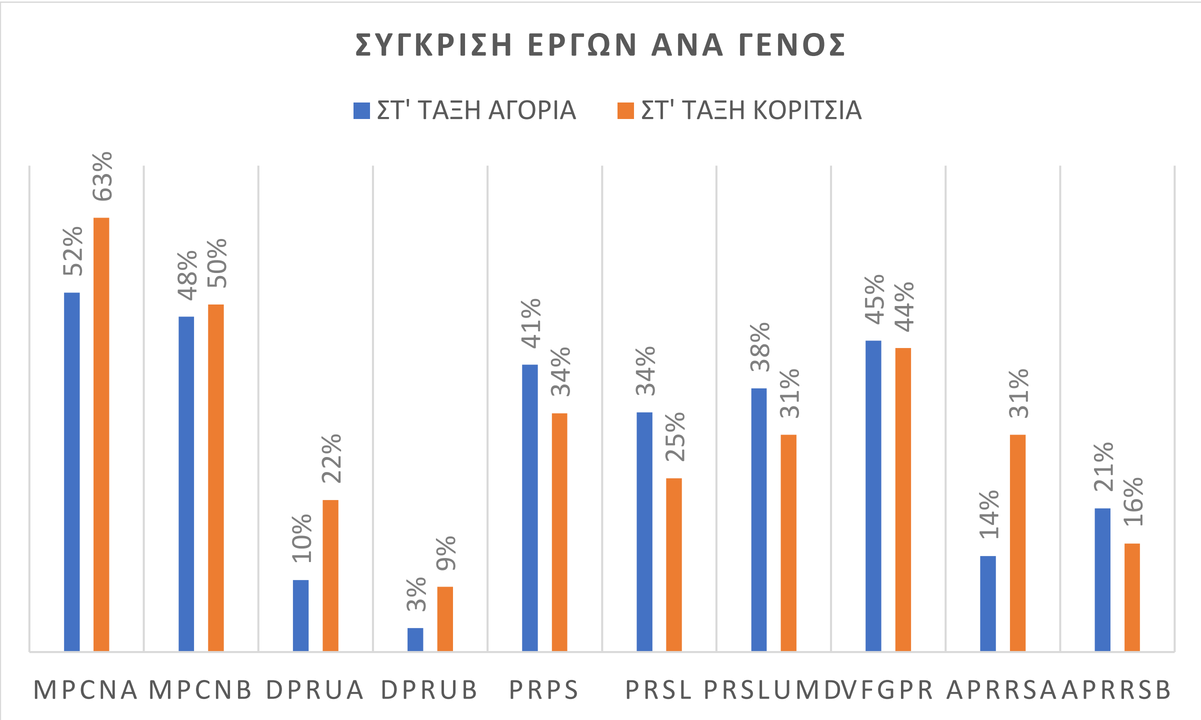
Στο πέμπτο έργο διαπιστώθηκε η δυσκολία κατανόησης καθώς υπήρχαν δύο ερωτήματα στο πρόβλημα χωρίς αρίθμηση. Σχεδόν όλοι οι μαθητές απάντησαν ένα από τα δύο. Το 23% (APrRSa) απάντησε με επιτυχία στο πρώτο ερώτημα, ενώ το 18% (APrRSb) στο δεύτερο.

Σύμφωνα με το Γράφημα, το αναμενόμενο αποτέλεσμα επιτυχίας επίλυσης ενός προβλήματος που χρειάζεται αρκετό χρόνο για την ολοκλήρωση του είναι 57% με 60% (Q6,Q7), το έργο τρία είναι ένα τέτοιο παράδειγμα αλλά σύμφωνα με το Γράφημα το ποσοστό επιτυχίας είναι μόλις 34%. Επομένως καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει η θέληση για την επίτευξη του στόχου, αλλά γίνετε υπερεκτίμηση των ικανοτήτων.

Αντίστοιχα, σύμφωνα με το Γράφημα, το ποσοστό επιτυχίας στο έργο 3 ερώτημα PrPs είναι μόνο 38% ενώ η εκτίμηση στις ερωτήσεις (Q10) ήταν στο 78%.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω δύο αποτελέσματα, βλέπουμε απόλυτη συμφωνία μεταξύ θεωρητικής εκτίμηση (Q13) και έργου 3 (PrSlUMd).

Επίσης, στο έργο 5 (APrRSa, APrRSb), παρατηρήθηκαν εσφαλμένες δοκιμές επίλυσης με σωστές αριθμητικές πράξεις το οποίο συνδέετε άμεσα με το ερώτημα Q16, που αναφέρει ότι οι υπολογιστικές δεξιότητες δεν ωφελούν αν δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε ρεαλιστικές καταστάσεις. Συνεπώς ενώ το 18% - 23% έλυσαν το πρόβλημα, ενώ η τάξη εκτίμησε κατά 36% την συνάφεια μεταξύ αριθμητικής επίλυσης και κατανόησης ρεαλιστικών προβλημάτων.

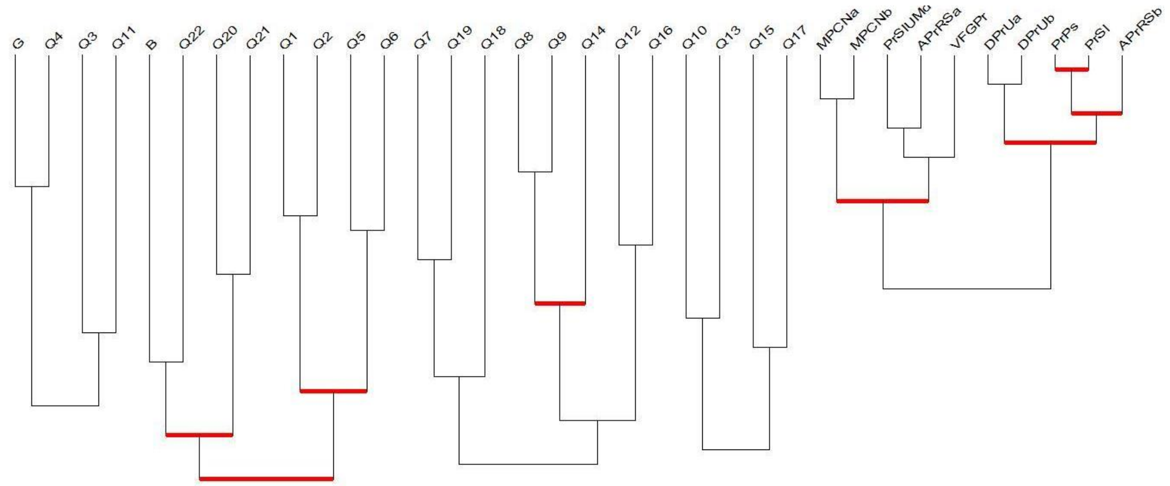


Γράφημα 7 Σύγκριση έργων ανά Γένος (ΣΤ')

Το δεγμα των μαθητών της ΣΤ' αποτελείτε από 29 αγόρια και 32 κορίτσια. Όπως παρατηρούμε στο Γράφημα 7, τα κορίτσια έχουν πιο υψηλά ποσοστά επιτυχίας σε έργα που πραγματεύονται διδαγμένες έννοιες, ενώ τα αγόρια έχουν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε μαθηματικά προβλήματα και έργα που χρειάζονται σύνθετη σκέψη και κριτικές ικανότητες. Πιο συγκεκριμένα, οι τέσσερις πρώτες μεταβλητές απευθύνονται στις έννοιες των δυνάμεων και του εμβαδού, όπου και παρατηρείτε πως οι απαντήσεις των κοριτσιών υπερέχουν.

7.2 Αποτελέσματα Α’ Γυμνασίου

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Διάγραμμα 4 ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Διάγραμμα 4 παρουσιάζει το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί. Είναι φανερό ότι στο παρόν διάγραμμα σχηματίζονται 5 ομάδες, η τελευταία περιέχει τις μεταβλητές των έργων - ασκήσεων. Η πέμπτη ομάδα χωρίζεται σε 2 υποομάδες με πολύ ισχυρές συνδέσεις που προσεγγίζουν το 1. Η πρώτη εκ των δύο ξεκινά με τη σύνδεση των μεταβλητών MPCNa και MPCNb που υποδηλώνει ότι όσοι μαθητές έχουν κατανοήσει την λογική και την εφαρμογή των δυνάμεων είναι πιο πιθανόν να αντιλήφθηκαν το λάθος που υπάρχει στο δεύτερο ερώτημα. Στη συνέχεια, με παρόμοιο τρόπο φαίνεται να συμπεριφέρονται οι μαθητές σε προβλήματα μοντελοποίησης (λεκτικών, γεωμετρικών) μέσω της σύνδεσης ομοιότητας των μεταβλητών PrSlUMd με την APrRSa και την VFGPr με ποσοστό ομοιότητας 0.978504 σε διαφορετικά μεταξύ τους προβλήματα - έργο 3, 4 και 5.

Στην δεύτερη υποομάδα, εντοπίζεται η πιο ισχυρή σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές PrPs και PrSl. Η σύνδεση αυτή υποδηλώνει ότι όσοι δημιούργησαν ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας ελεύθερες πρακτικές παρέχοντάς τους συγκεκριμένα δεδομένα, είχαν την ικανότητα να προσφέρουν τη δική τους λύση. Η σύνδεση αυτή ανήκει στο πρώτο επίπεδο σημαντικότητας με ποσοστό ομοιότητας 100% . Στη συνέχεια έχουμε τη σύνδεση των μεταβλητών αυτών με την APrRSb η οποία αφορά την εφαρμογή της έννοιας του εμβαδού σε ένα πραγματικό πρόβλημα καθημερινότητας. Στο δεύτερο επίπεδο ομοιότητας με ποσοστό 0.99992 έχουμε τη σύνδεση των μεταβλητών DPrUa με την DPrUb που αφορά την κατανόηση της έννοιας του εμβαδού μιας επιφάνειας καθώς και την αντίληψη του λάθους στην εκφώνηση της ερώτησης από τον μαθητή, αποδίδοντας τον σωστό ορισμό της. Όλες οι μεταβλητές αυτής της υποομάδας ((DPrUa, DPrUb) ((PrPs PrSl) APrRSb)) συνδέονται μεταξύ τους και αποτελούν την πιο ισχυρή σύνδεση μεταξύ διαφορετικών προβλημάτων με ποσοστό ομοιότητας 0.99271.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί στο όγδοο επίπεδο ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών, οι οποίες σχετίζονται με τις πεποιθήσεις των μαθητών, Q8 και Q9 παρουσιάζεται ποσοστό ομοιότητας 0.969124. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές της Ά γυμνασίου ανταποκρίνονται όμοια σε δύσκολα προβλήματα καθώς αν δεν καταφέρουν τη λύση σε λίγα λεπτά, σταματούν την προσπάθεια τους. Οι δύο μεταβλητές αναφέρουν το ίδιο πράγμα με παρόμοιο τρόπο και έτσι επιβεβαιώνεται η αξιοπιστία των απαντήσεων των μαθητών.

<u>Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα</u>

Classification at level : 1 : (PrPs PrSl) similarity : 1

Classification at level : 2 : (DPrUa DPrUb) similarity : 0.99992

Classification at level : 3 : (MPCNa MPCNb) similarity : 0.99804

Classification at level : 4 : ((PrPs PrSl) APrRSb) similarity : 0.997302

Classification at level : 5 : (PrSlUMd APrRSa) similarity : 0.994351

Classification at level : 6 : ((DPrUa DPrUb) ((PrPs PrSl) APrRSb)) similarity : 0.99271

Classification at level : 7 : ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr) similarity : 0.978504

Classification at level : 8 : (Q8 Q9) similarity : 0.969124

Classification at level : 9 : (G Q4) similarity : 0.93433

Classification at level : 10 : ((MPCNa MPCNb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr)) similarity : 0.854399

Classification at level : 11 : (Q1 Q2) similarity : 0.821531

Classification at level : 12 : (Q5 Q6) similarity : 0.759277

Classification at level : 13 : (Q12 Q16) similarity : 0.755966

Classification at level : 14 : (Q7 Q19) similarity : 0.739151

Classification at level : 15 : (Q20 Q21) similarity : 0.698615

Classification at level : 16 : (((MPCNa MPCNb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr)) ((DPrUa DPrUb) ((PrPs PrSl) APrRSb))) similarity : 0.675071

Classification at level : 17 : ((Q8 Q9) Q14) similarity : 0.674076

Classification at level : 18 : (Q10 Q13) similarity : 0.667202

Classification at level : 19 : (Q3 Q11) similarity : 0.648105

Classification at level : 20 : (Q15 Q17) similarity : 0.578469

Classification at level : 21 : (B Q22) similarity : 0.576395

Classification at level : 22 : ((Q7 Q19) Q18) similarity : 0.474562

Classification at level : 23 : ((Q1 Q2) (Q5 Q6)) similarity : 0.438948

Classification at level : 24 : ((G Q4) (Q3 Q11)) similarity : 0.334313

Classification at level : 25 : (((Q8 Q9) Q14) (Q12 Q16)) similarity : 0.213916

Classification at level : 26 : ((B Q22) (Q20 Q21)) similarity : 0.201871

Classification at level : 27 : ((Q10 Q13) (Q15 Q17)) similarity : 0.148682

Classification at level : 28 : (((Q7 Q19) Q18) (((Q8 Q9) Q14) (Q12 Q16))) similarity : 0.0728951

Classification at level : 29 : (((B Q22) (Q20 Q21)) ((Q1 Q2) (Q5 Q6))) similarity : 0.0110888

The most significant node is at level :1

Significant nodes

at level: 1

at level: 4

at level: 6

at level: 10

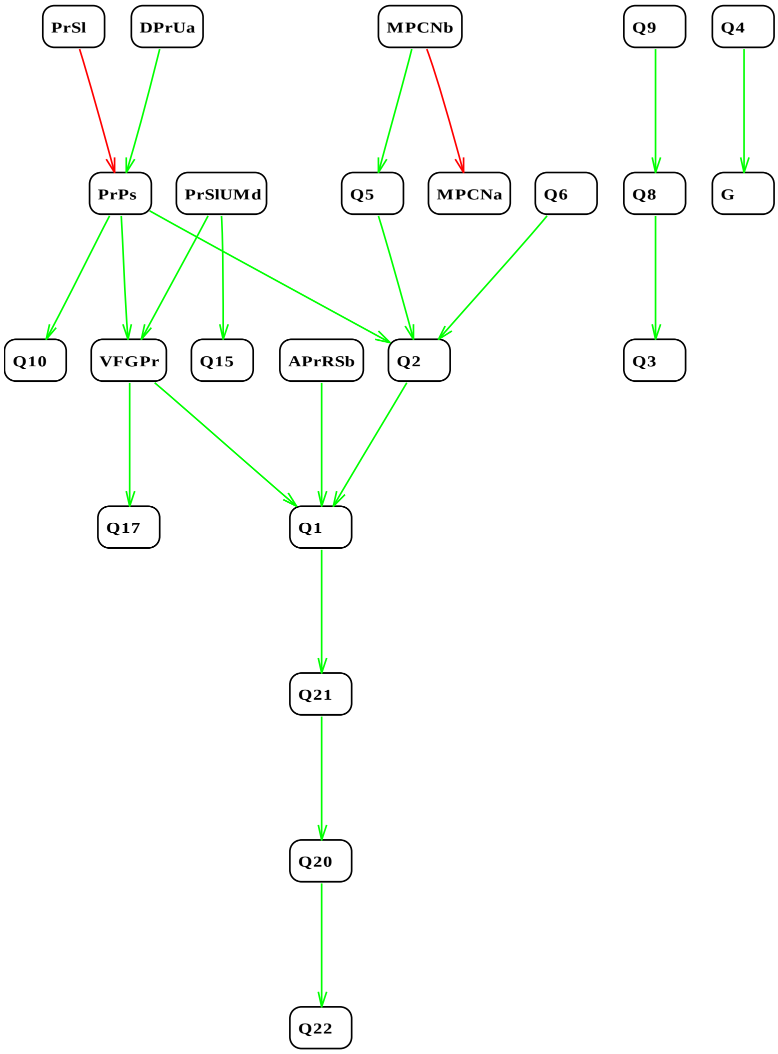
at level: 17

at level: 23

at level: 26

at level: 29

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)- Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



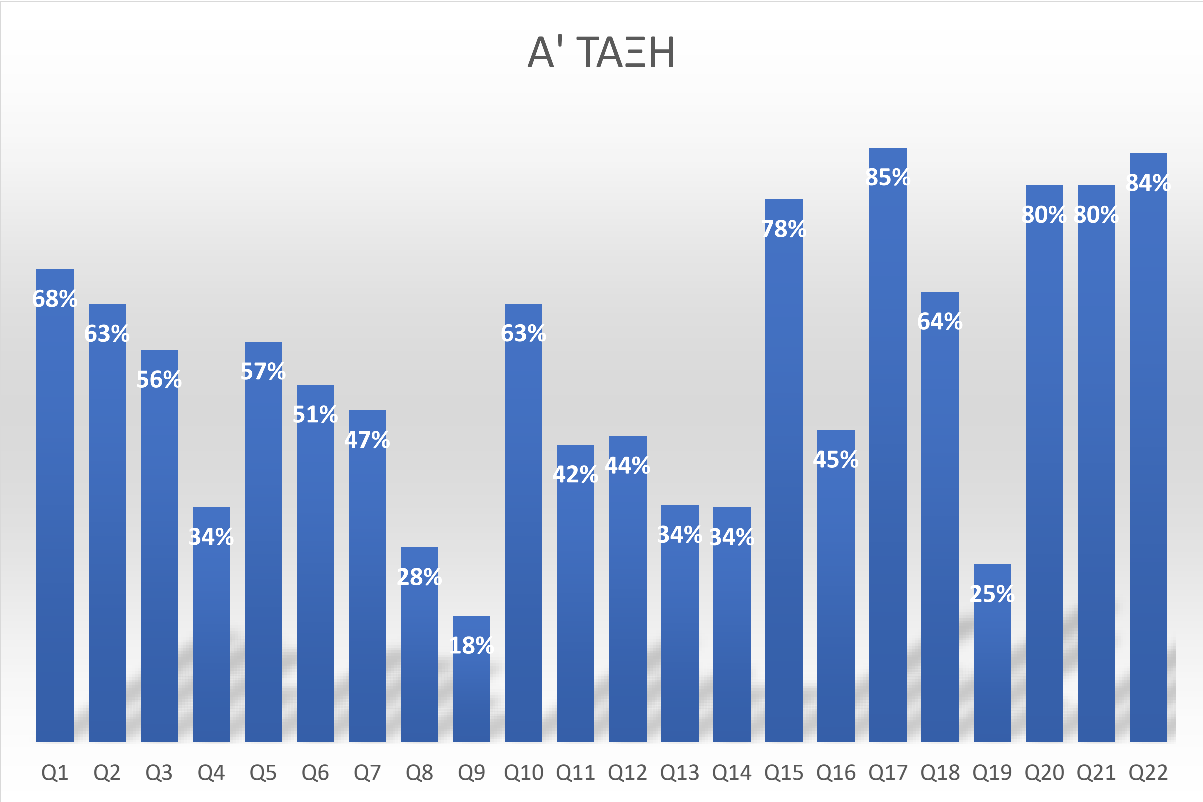
Διάγραμμα 5 ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)- Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Διάγραμμα 5 παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα, φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, και με το πράσινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 90%. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1→Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.

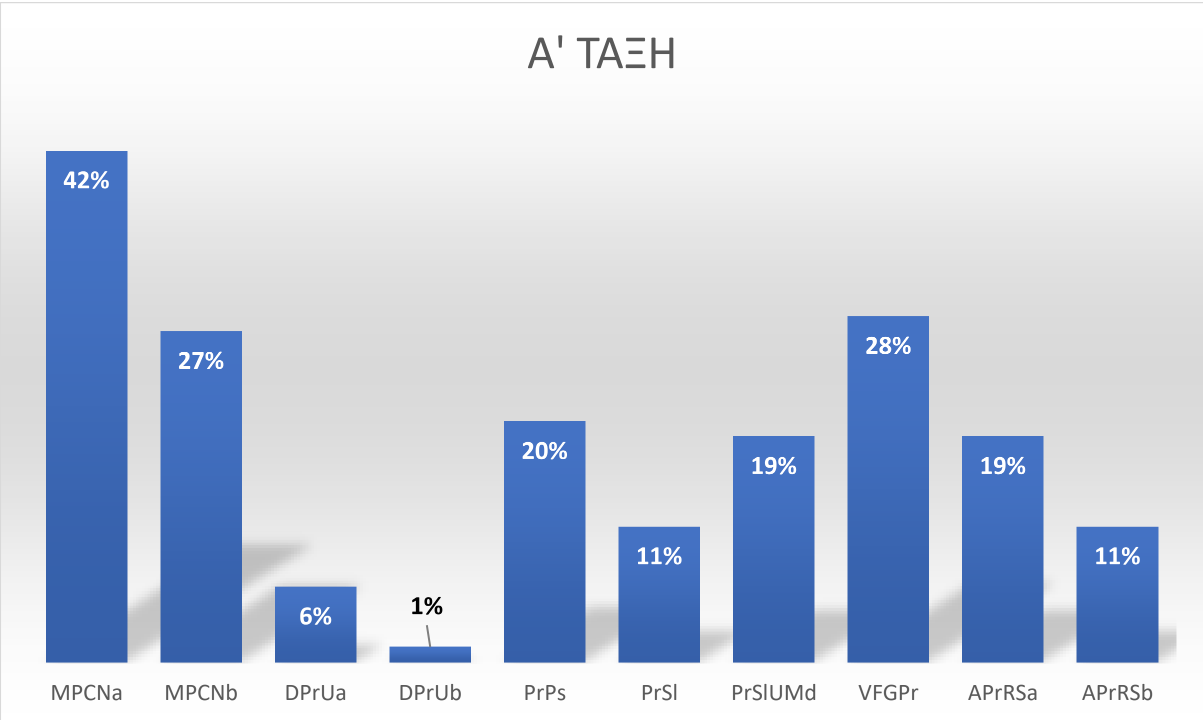
Αναφορικά με το Διάγραμμα 5, η συνεπαγωγή από την MPCNa στην MPCNb, υποδηλώνει ότι υπάρχει εξαιρετικά σημαντική συσχέτιση των δύο μεταβλητών σε επίπεδο σημαντικότητας

99%. Αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία ή η αποτυχία στο MPCNa επηρεάζει σημαντικά την επιτυχία ή την αποτυχία στο MPCNb. Αυτή η σχέση μπορεί να υπονοεί ότι τα δύο έργα έχουν συναφή θέματα ή δεξιότητες που συνδέονται στενά, και η απόδοση στο πρώτο έργο επηρεάζει την απόδοση στο δεύτερο. Αυτό το αποτέλεσμα είναι απολύτως λογικό αφού ένας μαθητής που έχει κατανοήσει τις δυνάμεις και έχει απαντήσει στο πρώτο ερώτημα είναι πιο πιθανόν να βρει το λάθος που υπάρχει στο δεύτερο ερώτημα, το αντίθετο είναι σχεδόν απίθανο να συμβεί.

Επιπλέον, η συνεπαγωγή Q2→ Q1→ Q21→ Q20 → Q22 αντικατοπτρίζει πώς η αγάπη και η επιτυχία στα μαθηματικά μπορούν να οδηγήσουν σε μια θετική στάση απέναντι στην μάθηση και τη χρησιμοποίηση των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και στον επαγγελματικό χώρο. Συγκεκριμένα, η μεταβλητή Q2 "Είμαι καλός στα μαθηματικά" συνεπάγεται την Q1 "Μου αρέσουν τα μαθηματικά". Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα και η επιτυχία στα μαθηματικά κάνουν τα μαθηματικά ευχάριστα. Η Q1 "Μου αρέσουν τα μαθηματικά" συνεπάγεται την Q21 "Η γνώση των μαθηματικών θα με βοηθήσει στην καθημερινή μου ζωή και στη μελλοντική μου εργασία". Αυτό σημαίνει ότι η αγάπη για τα μαθηματικά οδηγεί στην αντίληψη ότι οι μαθηματικές γνώσεις είναι χρήσιμες στην καθημερινή ζωή και στον επαγγελματικό χώρο. Η Q21 "Η γνώση των μαθηματικών θα με βοηθήσει στην καθημερινή μου ζωή και στη μελλοντική μου εργασία" συνεπάγεται την Q20 "Η ικανότητα στα μαθηματικά αυξάνεται όταν κάποιος μελετά σκληρά", που δηλώνει ότι η αναγνώριση της σημασίας των μαθηματικών οδηγεί στην προσπάθεια μελέτης και βελτίωσης των μαθηματικών δεξιοτήτων. Η Q20 "Η ικανότητα στα μαθηματικά αυξάνεται όταν κάποιος μελετά σκληρά" καταλήγει στην Q22 "Τα μαθηματικά είναι ένα αξιόλογο και απαραίτητο μάθημα", που σημαίνει ότι η προσπάθεια στα μαθηματικά οδηγεί στην αναγνώριση της σημασίας και της αξίας του μαθήματος.



Γράφημα 8 Μέσος όρος συμφωνίας πεποιθήσεων μαθητών Α' Τάξης



Γράφημα 9 Ποσοστό επιτυχίας επίλυσης έργων Α' Τάξης

Όπως φαίνεται στο Γραφήματα 9 οι μαθητές της Α' Τάξης στο πρώτο έργο δείχνουν να τα κατάφεραν καλύτερα στο πρώτο ερώτημα (MPCNa) σε σχέση με το δεύτερο (MPCNb).

Στο πρώτο ερώτημα (DPrUa) του δεύτερου έργου, μόνο το 6% φαίνεται να μπορεί να αντιληφθεί ότι η λέξη «εμβαδόν» πρέπει να απευθύνεται σε μία επιφάνια ή έστω σε ένα «σχήμα» όπως έλεγαν οι περισσότεροι, απάντηση η οποία ήταν αποδεκτή. Στο δεύτερο ερώτημα (DPrUb), στην απόδοση του ακριβή ορισμού, μόνο το 1% μπόρεσε να ανταποκριθεί. Μία καλύτερη προσέγγιση υπήρχε στο τρίτο ερώτημα (PrPs, PrSl) για την κατασκευή ενός προβλήματος (20%), η επίλυση αυτού όμως δεν επετεύχθη στον ίδιο βαθμό (11%). Δεδομένης της μη κατανοημένης γνώσης του εμβαδού μίας επιφάνειας(DPrUa, DPrUb), παρατηρείται, αυξημένη επίδοση στην κατασκευή και επίλυση του προβλήματος.

Σχετικά ικανοποιητική ήταν η απόδοση των μαθητών στο τρίτο έργο (PrSlUMd), δεδομένης της δυσκολίας του, με ποσοστό επιτυχίας 19%.

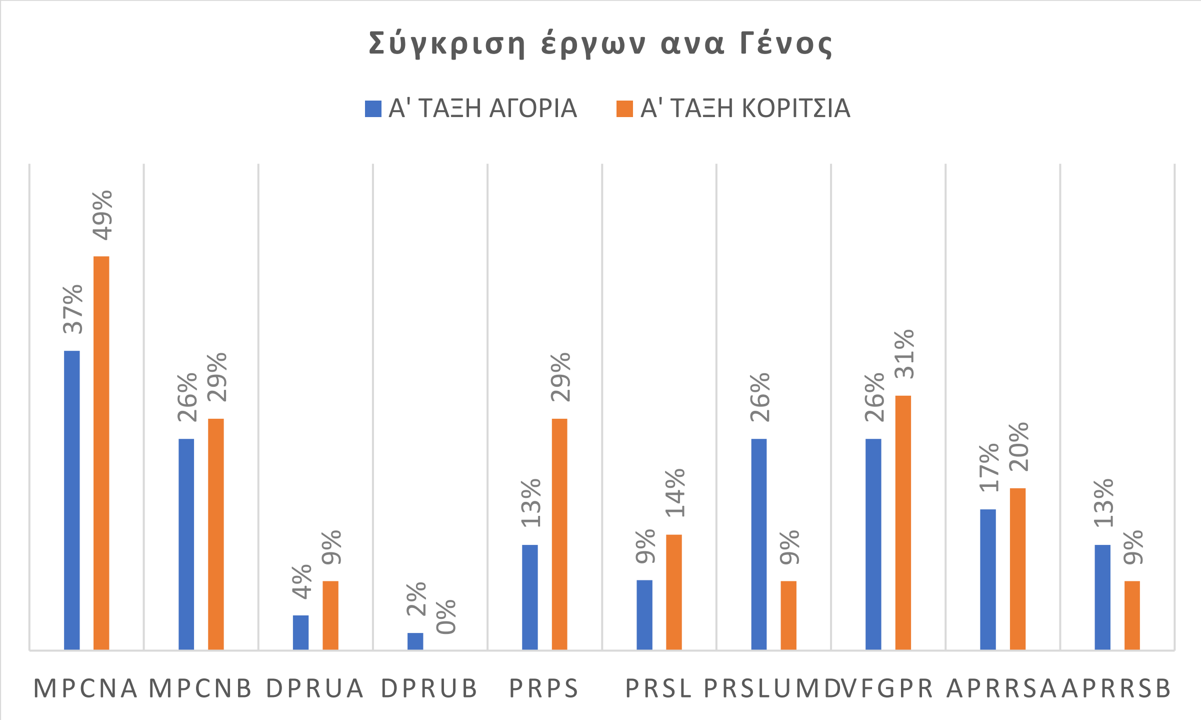
Η λεκτική περιγραφή γεωμετρικού σχήματος φαίνεται να μην έχει κατακτηθεί επαρκώς σύμφωνα με το τέταρτο έργο (VFGPr), και με ποσοστό επιτυχίας 28%.

Όσον αφορά το πέμπτο έργο (APrRSa, APrRSb) το αποτέλεσμα δεν είναι ενθαρρυντικό δεδομένου του ηλικιακού επιπέδου, σύμφωνα με το οποίο περιμέναμε καλύτερα αποτελέσματα. Όπως και στη ΣΤ' Τάξη, διαπιστώθηκε η δυσκολία κατανόησης των ερωτήσεων, με τους περισσότερους να δίνουν σωστή απάντηση στο πρώτο ερώτημα 19% (APrRSa), ενώ το δεύτερο ανέρχεται στο 11% (APrRSb).

Σύμφωνα με το Γράφημα 8, το αναμενόμενο αποτέλεσμα επιτυχίας για το έργο τρία είναι 51% με 47% (Q6,Q7). Η εκτίμηση αυτή των μαθητών όπως βλέπουμε στο Γράφημα δεν ήταν ρεαλιστική καθώς το ποσοστό επιτυχίας είναι μόλις 19% (PrSlUMd).

Παρατηρώντας την ασυμφωνία μεταξύ θεωρητικής εκτίμηση (Q13) και έργου 3 (PrSlUMd) καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει διάθεση για την επίλυση των προβλημάτων, χωρίς αυτή όμως να είναι ικανοποιητική.

Επιπλέον, στο πλαίσιο του έργου 5 (APrRSa, APrRSb), παρατηρήθηκαν λανθασμένοι τρόποι επίλυσης που όμως περιείχαν σωστή εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων. Αυτό το φαινόμενο συνδέεται με το ερώτημα Q16, όπου αναφέρεται ότι οι υπολογιστικές δεξιότητες, παρόλο που μπορεί να εκτελούνται σωστά οι αριθμητικές πράξεις, δεν είναι απαραίτητα εφαρμόσιμες σε πραγματικές καταστάσεις. Αν και το ποσοστό των ατόμων που έλυσαν το πρόβλημα ήταν μεταξύ 19% και 11%, η αναλογία αυτή αξιολογήθηκε από τους μαθητές με εκτίμηση 45%.

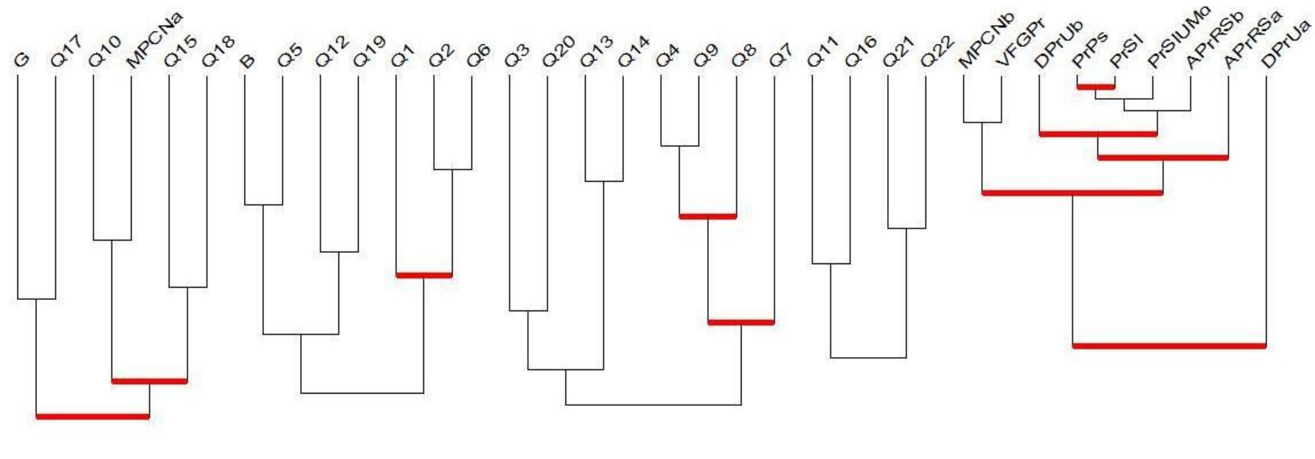


Γράφημα 10 Σύγκριση έργων ανά Γένος

Το δείγμα των μαθητών της Α’ τάξης είναι 46 αγόρια και 35 κορίτσια.

7.3 Αποτελέσματα Β’ Γυμνασίου

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Διάγραμμα 6 ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Διάγραμμα 6 παρουσιάζει το Δενδροδιάγραμμα ομοιότητας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Στην τρίτη ομάδα ομοιότητας στο επίπεδο 12 υπάρχει μια σημαντική σύνδεση μεταξύ των ερωτήσεων Q4, Q9 και Q8, με ποσοστό ομοιότητας ίσο με 0.77103. Αυτό το ποσοστό ομοιότητας υποδεικνύει πόσο παρόμοιες είναι αυτές οι ερωτήσεις μεταξύ τους στον τρόπο που απαντώνται από τον ίδιο τον μαθητή. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι υπάρχει μεγάλη ομοιότητα στις απαντήσεις των ατόμων σε αυτές τις ερωτήσεις. Οι ερωτήσεις αναφέρονται στον τρόπο που οι υποκείμενοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα μαθηματικά και στο πώς αντιδρούν όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα που δεν μπορούν να λύσουν εύκολα, σταματούν την προσπάθειά τους και για αυτό το λόγο νιώθουν ότι δεν μπορούν να τα καταφέρουν χωρίς την φροντιστηριακή βοήθεια.

Η πέμπτη ομάδα ομοιότητας συνδέει, όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα, όλες τις μεταβλητές των έργων με τις πιο ισχυρές συνδέσεις του διαγράμματος προσεγγίζοντας τη μονάδα. Συγκεκριμένα, η σύνδεση μεταξύ των Έργων ((MPCNb VFGPr) ((DPrUb (((PrPs PrSl) PrSlUMd) APrRSb)) APrRSa)) με ποσοστό ομοιότητας 0.838907 δείχνει ότι αυτά τα έργα έχουν ομοιότητες στον τρόπο που προσεγγίζουν και αντιμετωπίζουν διάφορες πτυχές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτή η σύνδεση αντικατοπτρίζει τον τρόπο που αυτά τα έργα συνδυάζουν διάφορες πτυχές της μαθηματικής εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένων των αριθμητικών σχέσεων, της γεωμετρίας, της κατανόησης ορισμών και της επίλυσης προβλημάτων. Το ποσοστό ομοιότητας υποδηλώνει ότι αυτές οι ομοιότητες είναι πολύ σημαντικές και αντικατοπτρίζουν κοινές πτυχές στην προσέγγιση των μαθηματικών.

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα

Classification at level : 1 : (PrPs PrSl) similarity : 0.999933

Classification at level : 2 : ((PrPs PrSl) PrSlUMd) similarity : 0.990501

Classification at level : 3 : (((PrPs PrSl) PrSlUMd) APrRSb) similarity : 0.975635

Classification at level : 4 : (MPCNb VFGPr) similarity : 0.95221

Classification at level : 5 : (DPrUb (((PrPs PrSl) PrSlUMd) APrRSb)) similarity : 0.92535

Classification at level : 6 : (Q4 Q9) similarity : 0.920788

Classification at level : 7 : ((DPrUb (((PrPs PrSl) PrSlUMd) APrRSb)) APrRSa) similarity : 0.907583

Classification at level : 8 : (Q2 Q6) similarity : 0.893629

Classification at level : 9 : (Q13 Q14) similarity : 0.86667

Classification at level : 10 : ((MPCNb VFGPr) ((DPrUb (((PrPs PrSl) PrSlUMd) APrRSb)) APrRSa)) similarity : 0.838907

Classification at level : 11 : (B Q5) similarity : 0.793948

Classification at level : 12 : ((Q4 Q9) Q8) similarity : 0.77103

Classification at level : 13 : (Q21 Q22) similarity : 0.763224

Classification at level : 14 : (Q10 MPCNa) similarity : 0.734895

Classification at level : 15 : (Q12 Q19) similarity : 0.718081

Classification at level : 16 : (Q11 Q16) similarity : 0.70768

Classification at level : 17 : (Q1 (Q2 Q6)) similarity : 0.696109

Classification at level : 18 : (Q15 Q18) similarity : 0.671638

Classification at level : 19 : (G Q17) similarity : 0.620396

Classification at level : 20 : (Q3 Q20) similarity : 0.586064

Classification at level : 21 : (((Q4 Q9) Q8) Q7) similarity : 0.456005

Classification at level : 22 : ((B Q5) (Q12 Q19)) similarity : 0.37432

Classification at level : 23 : (((MPCNb VFGPr) ((DPrUb (((PrPs PrSl) PrSlUMd) APrRSb)) APrRSa)) DPrUa) similarity : 0.274268

Classification at level : 24 : ((Q11 Q16) (Q21 Q22)) similarity : 0.24775

Classification at level : 25 : ((Q3 Q20) (Q13 Q14)) similarity : 0.242045

Classification at level : 26 : ((Q10 MPCNa) (Q15 Q18)) similarity : 0.215613

Classification at level : 27 : (((B Q5) (Q12 Q19)) (Q1 (Q2 Q6))) similarity : 0.121203

Classification at level : 28 : (((Q3 Q20) (Q13 Q14)) (((Q4 Q9) Q8) Q7)) similarity : 0.0447733

Classification at level : 29 : ((G Q17) ((Q10 MPCNa) (Q15 Q18))) similarity : 0.0413997

The most significant node is at level :1

Significant nodes

at level: 1

at level: 5

at level: 7

at level: 10

at level: 12

at level: 17

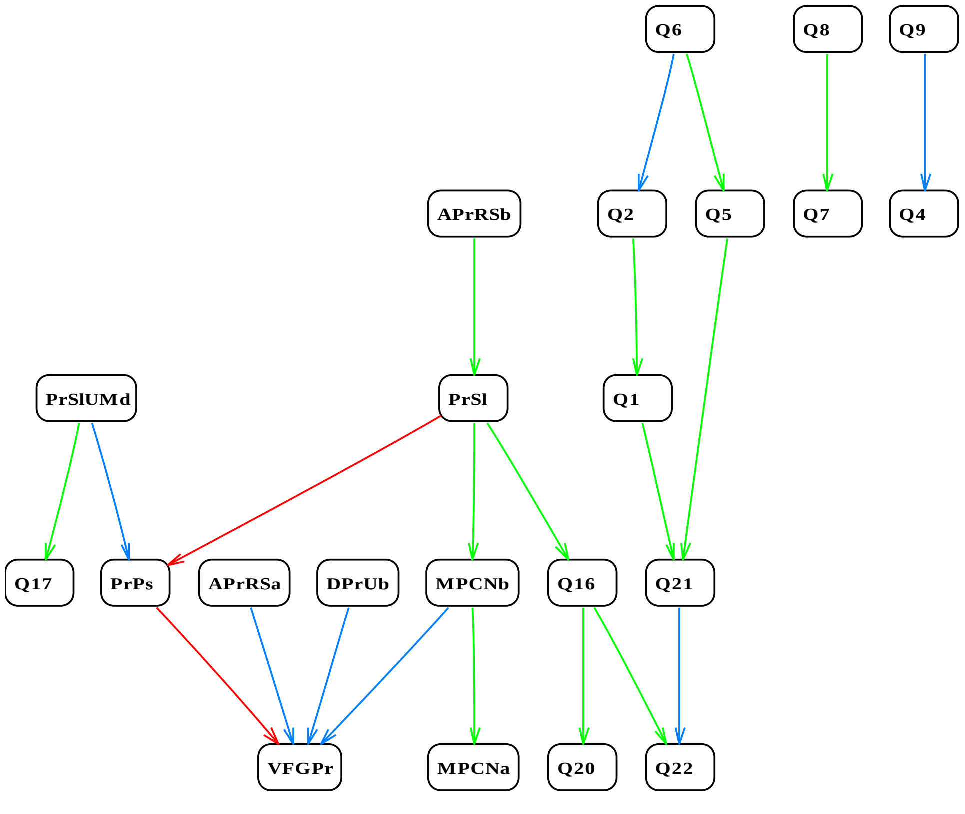
at level: 21

at level: 23

at level: 26

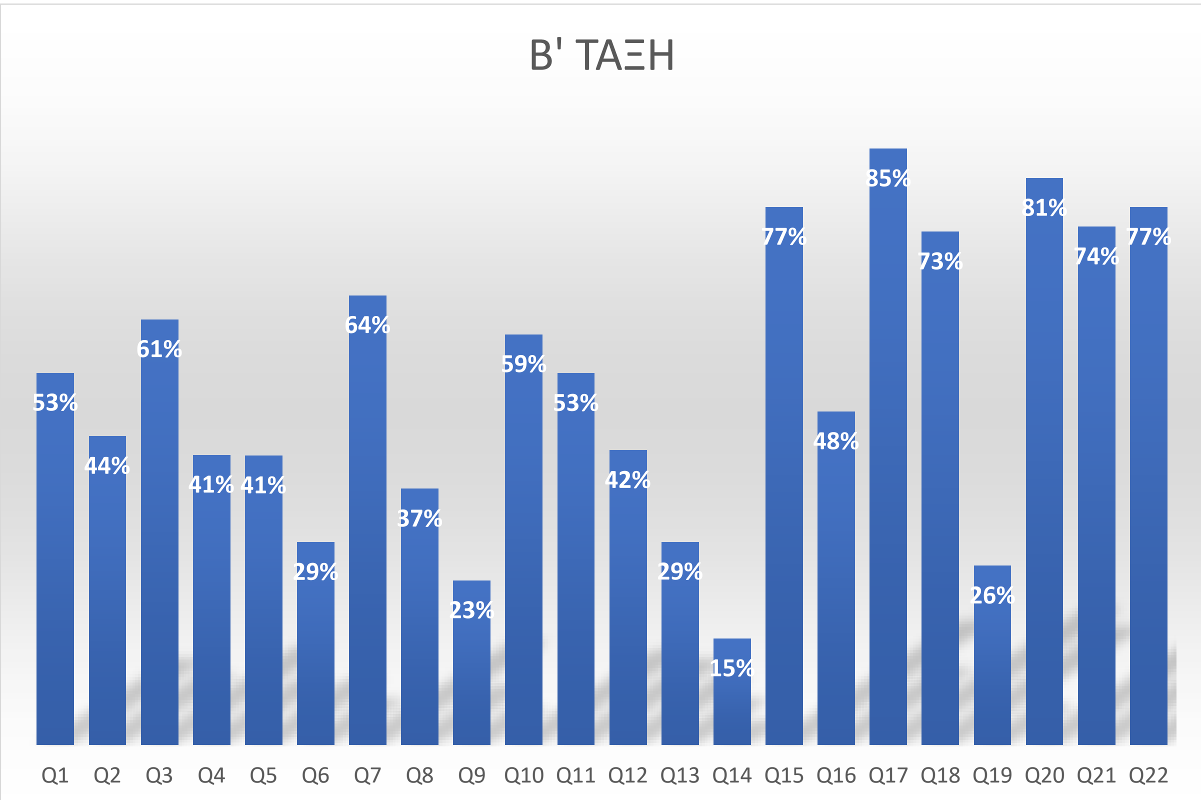
at level: 29

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)- Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

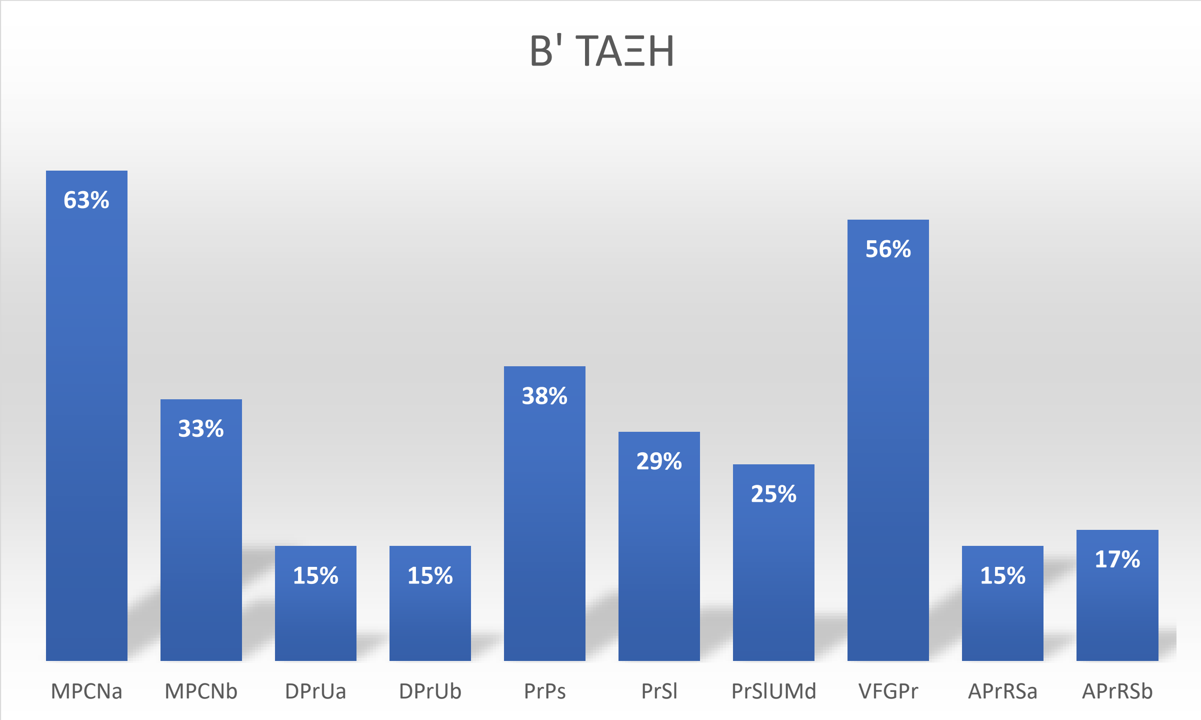


Διάγραμμα 7 ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)- Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Διάγραμμα 7 παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, με το μπλε βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 95% και με το πράσινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 90%. Η μεταβλητή APrRSb είναι συνεπαγόμενη με την PrSl με πράσινο βέλος σε επίπεδο σημαντικότητας 90%, αυτό υποδηλώνει ότι η ικανότητα επίλυσης αριθμητικών προβλημάτων στο πλαίσιο των ρεαλιστικών καταστάσεων συνδέεται με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων γενικότερα. Στη συνέχεια η μεταβλητή PrSl συνεπάγεται την PrPs σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Αυτό δηλώνει λογική συνέπεια αφού όταν ένας μαθητής μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα που δημιούργησε (PrSl), αυτό υπονοεί ότι προηγουμένως ήταν σε θέση να το διατυπώσει αυτό το πρόβλημα (PrPs). Δηλαδή, η ικανότητα να λύσει το πρόβλημα προϋποθέτει ότι πρώτα είχε τη δυνατότητα να το δημιουργήσει. Ταυτόχρονα η μεταβλητή PrSl συνεπάγεται την Ερώτηση Q16 , αυτό υποδηλώνει ότι η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος προϋποθέτει υπολογιστικές δεξιότητες, τις οποίες μπορεί ένας μαθητής να κατέχει αλλά να μην μπορεί να τις εφαρμόσει σε πραγματικά προβλήματα. Άρα ένας μαθητής που έχει καταφέρει τη λύση ενός μαθηματικού προβλήματος έχει και υπολογιστικές δεξιότητες σε επίπεδο σημαντικότητας 90%.



Γράφημα 11 Μέσος όρος συμφωνίας πεποιθήσεων μαθητών Β' Τάξης



Γράφημα 12 Ποσοστό επιτυχίας επίλυσης έργων Β' Τάξης

Όπως φαίνεται στο Γράφημα 12 οι μαθητές της Β' Τάξης στο πρώτο έργο διαφέρουν αρκετά στην απάντηση τους στο πρώτο ερώτημα (MPCNa, 63%) σε σχέση με το δεύτερο (MPCNb, 33%). Αυτό δείχνει ότι ενώ έχουν κατανοήσει την δομή και την λειτουργία των δυνάμεων, δεν έχουν αντιληφθεί πλήρως την ακριβή έννοια.

Υπάρχει συμφωνία στα αποτελέσματα του πρώτου (DPrUa) και του δεύτερου (DPrUb) ερωτήματος, στο δεύτερο έργο, ικανοποιητικό ποσοστό, δεδομένης της δυσκολίας που αντιμετώπισαν οι υπόλοιπες τάξεις. Πιθανή αιτιολογία αυτού είναι η διδασκαλία την έννοιας του εμβαδού στη Β' Τάξη. Ικανοποιητικά συμφωνούν και τα δύο επόμενα αποτελέσματα της κατασκευής ενός προβλήματος PrPs (38%) και της επίλυσης του PrSl (29%). Δεδομένου του ανεπαρκώς κατανοημένου υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας (DPrUa, DPrUb), παρατηρείται αυξημένη απόδοση στην διαδικασία κατασκευής και επίλυσης του προβλήματος. Ταυτόχρονα, σύμφωνα με την άποψη τους στην ερώτηση Q10 (59%) επικρατεί απόλυτος ρεαλισμός.

Μέτρια ήταν η απόδοση των μαθητών στο τρίτο έργο (PrSlUMd) με ποσοστό 23%.

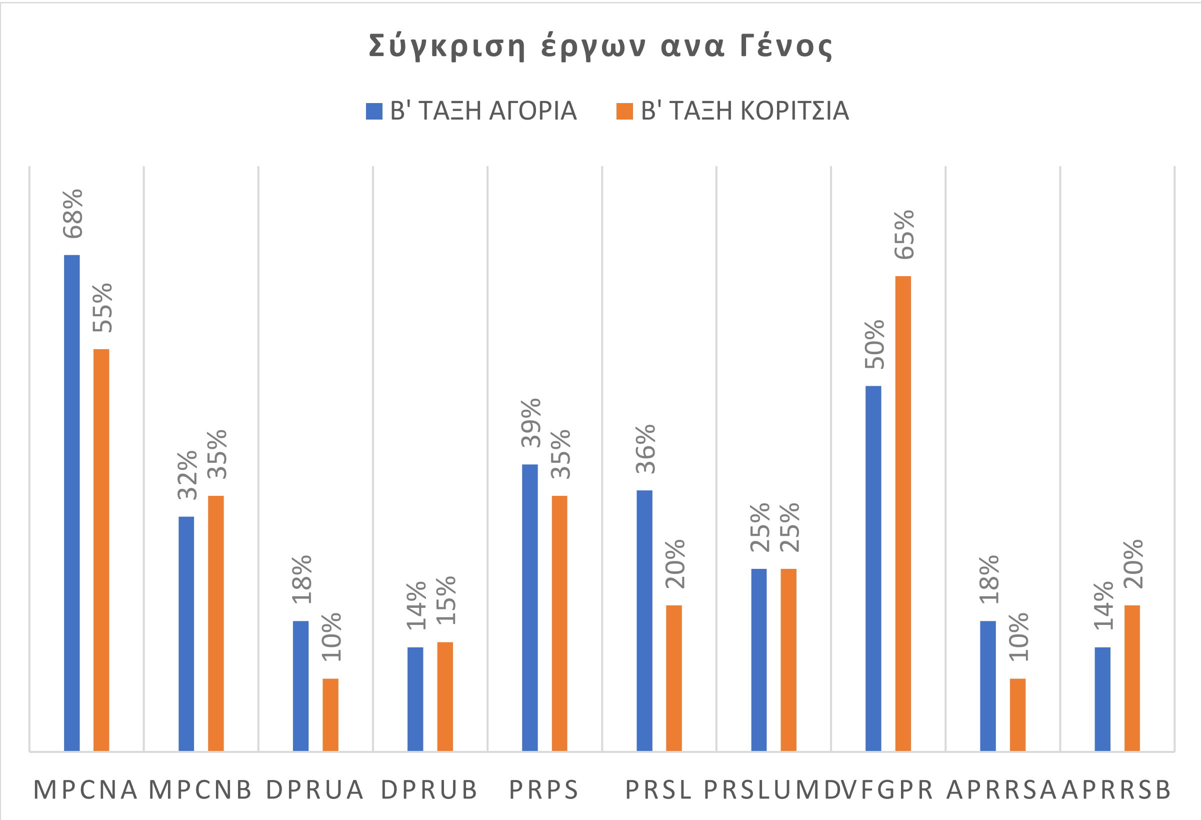
Φαίνεται ότι η αναλυτική περιγραφή του γεωμετρικού σχήματος έχει επιτευχθεί σε επαρκή βαθμό, σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο τέταρτο έργο (VFGPr), με ποσοστό επιτυχίας που φτάνει το 56%.

Σχετικά με το πέμπτο έργο (APrRSa, APrRSb), τα αποτελέσματα δεν εμπνέουν αισιοδοξία, λαμβάνοντας υπόψη το επίπεδο ηλικίας, σύμφωνα με το οποίο αναμενόταν καλύτερη απόδοση. Παρόμοια με την περίπτωση της ΣΤ' Τάξης, εντοπίστηκε η δυσκολία στην κατανόηση και διάκριση των δύο ερωτημάτων. Ο μεγαλύτερος αριθμός ατόμων δίνει σωστή απάντηση στο δεύτερο ερώτημα, κατά 17% (APrRSb), ενώ στο πρώτο ερώτημα φθάνει το 15% (APrRSa).

Η σύνδεση των ερωτήσεων Q6(29%) και Q7 (64%) με το έργο 3 PrSlUMd(25%) δείχνει μία αληθοφάνεια και γνώση των δυνατοτήτων του κάθε μαθητή, η οποία αποτυπώνετε τελικά στο αποτέλεσμα.

Επίσης δείχνουν να συμφωνεί η άποψη των μαθητών στην ερώτηση Q13 (29%) σε σχέση με το τελικό αποτέλεσμα επιτυχίας στο έργο 3 PrSlUMd (25%).

Σε γενικό πλαίσιο, η επίδοση των μαθητών της Β' Τάξης ήταν καλύτερη συγκριτικά με τις προηγούμενες.

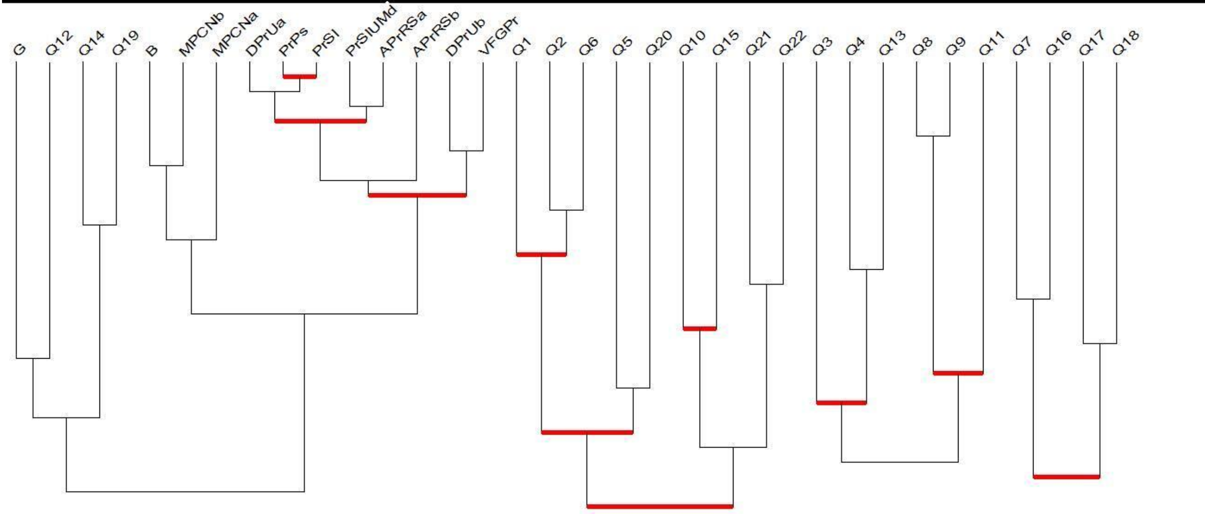


Γράφημα 13 Σύγκριση έργων ανά Γένος

Το δείγμα των μαθητών της Β' Τάξης είναι 28 αγόρια και 20 κορίτσια.

7.4 Αποτελέσματα Γ’ γυμνασίου

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ



Διάγραμμα 8 ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Διάγραμμα 8 παρουσιάζει το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα

Classification at level : 1 : (PrPs PrSl) similarity : 1

Classification at level : 2 : (DPrUa (PrPs PrSl)) similarity : 0.999852

Classification at level : 3 : (PrSlUMd APrRSa) similarity : 0.998958

Classification at level : 4 : ((DPrUa (PrPs PrSl)) (PrSlUMd APrRSa)) similarity : 0.997232

Classification at level : 5 : (Q8 Q9) similarity : 0.973429

Classification at level : 6 : (DPrUb VFGPr) similarity : 0.960649

Classification at level : 7 : (B MPCNb) similarity : 0.929417

Classification at level : 8 : (((DPrUa (PrPs PrSl)) (PrSlUMd APrRSa)) APrRSb) similarity : 0.925036

Classification at level : 9 : ((((DPrUa (PrPs PrSl)) (PrSlUMd APrRSa)) APrRSb) (DPrUb VFGPr)) similarity : 0.90772

Classification at level : 10 : (Q2 Q6) similarity : 0.889464

Classification at level : 11 : (Q14 Q19) similarity : 0.882425

Classification at level : 12 : ((B MPCNb) MPCNa) similarity : 0.840903

Classification at level : 13 : (Q1 (Q2 Q6)) similarity : 0.768524

Classification at level : 14 : (Q4 Q13) similarity : 0.751963

Classification at level : 15 : (Q21 Q22) similarity : 0.748602

Classification at level : 16 : (Q7 Q16) similarity : 0.69611

Classification at level : 17 : (((B MPCNb) MPCNa) ((((DPrUa (PrPs PrSl)) (PrSlUMd APrRSa)) APrRSb) (DPrUb VFGPr))) similarity : 0.684777

Classification at level : 18 : (Q10 Q15) similarity : 0.665531

Classification at level : 19 : (Q17 Q18) similarity : 0.661398

Classification at level : 20 : (G Q12) similarity : 0.660772

Classification at level : 21 : ((Q8 Q9) Q11) similarity : 0.622343

Classification at level : 22 : (Q5 Q20) similarity : 0.564507

Classification at level : 23 : (Q3 (Q4 Q13)) similarity : 0.465183

Classification at level : 24 : ((G Q12) (Q14 Q19)) similarity : 0.38406

Classification at level : 25 : ((Q1 (Q2 Q6)) (Q5 Q20)) similarity : 0.308794

Classification at level : 26 : ((Q10 Q15) (Q21 Q22)) similarity : 0.240962

Classification at level : 27 : ((Q3 (Q4 Q13)) ((Q8 Q9) Q11)) similarity : 0.206748

Classification at level : 28 : ((Q7 Q16) (Q17 Q18)) similarity : 0.113988

Classification at level : 29 : (((G Q12) (Q14 Q19)) (((B MPCNb) MPCNa) ((((DPrUa (PrPs PrSl)) (PrSlUMd APrRSa)) APrRSb) (DPrUb VFGPr)))) similarity : 0.0158241

Classification at level : 30 : (((Q1 (Q2 Q6)) (Q5 Q20)) ((Q10 Q15) (Q21 Q22))) similarity : 0.011085

The most significant node is at level : 4

Significant nodes

at level: 1

at level: 4

at level: 9

at level: 13

at level: 18

at level: 21

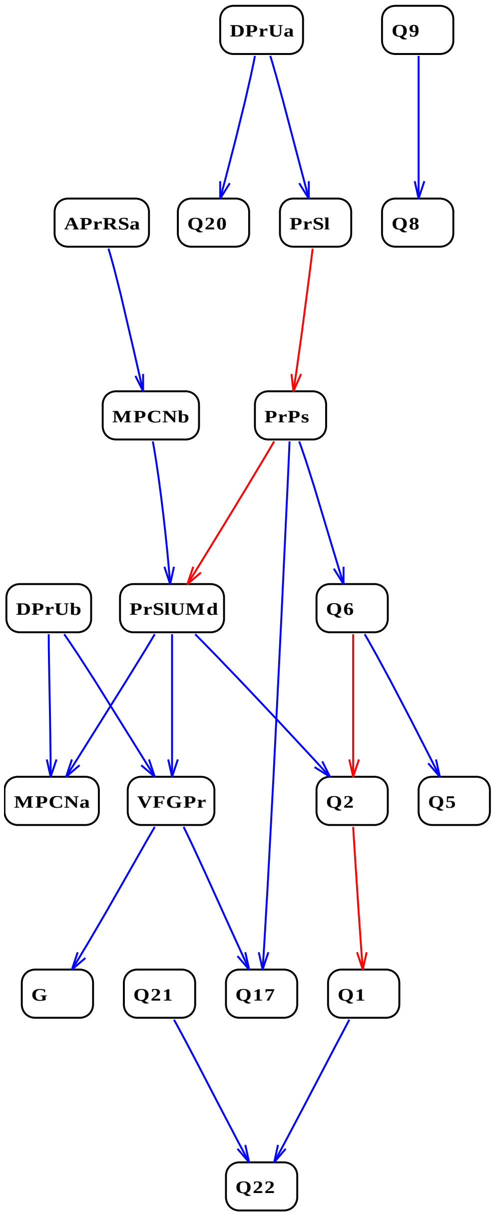
at level: 23

at level: 25

at level: 28

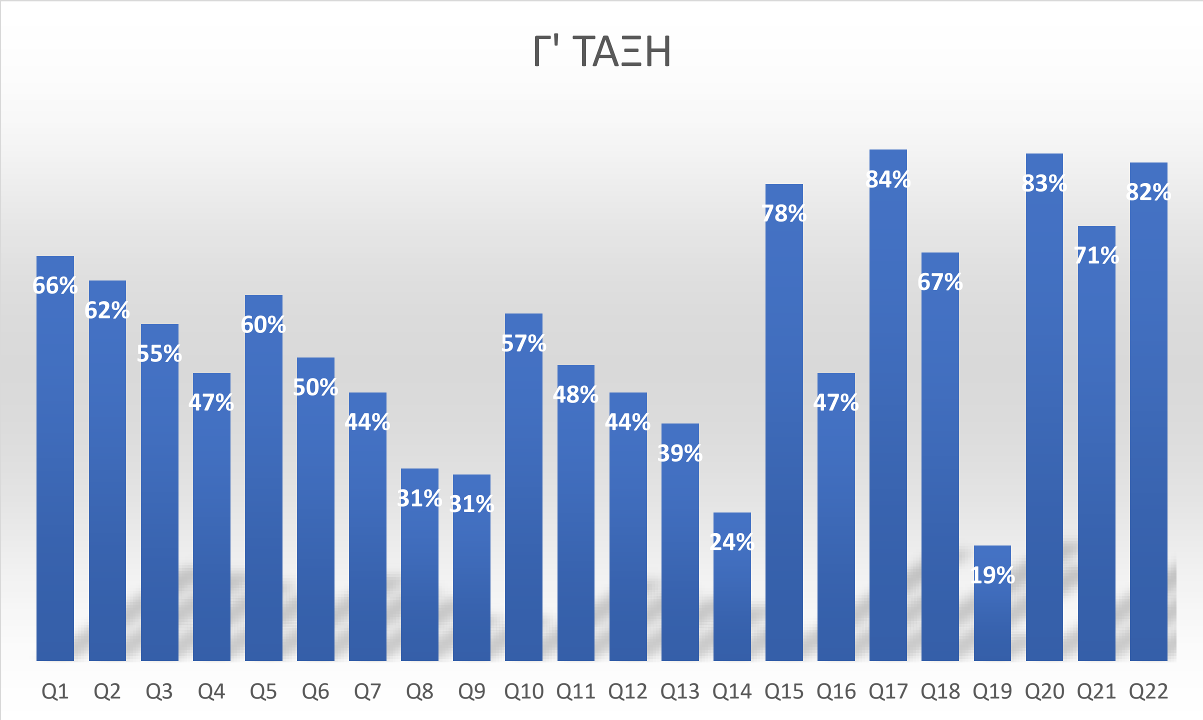
at level: 30

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)-Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

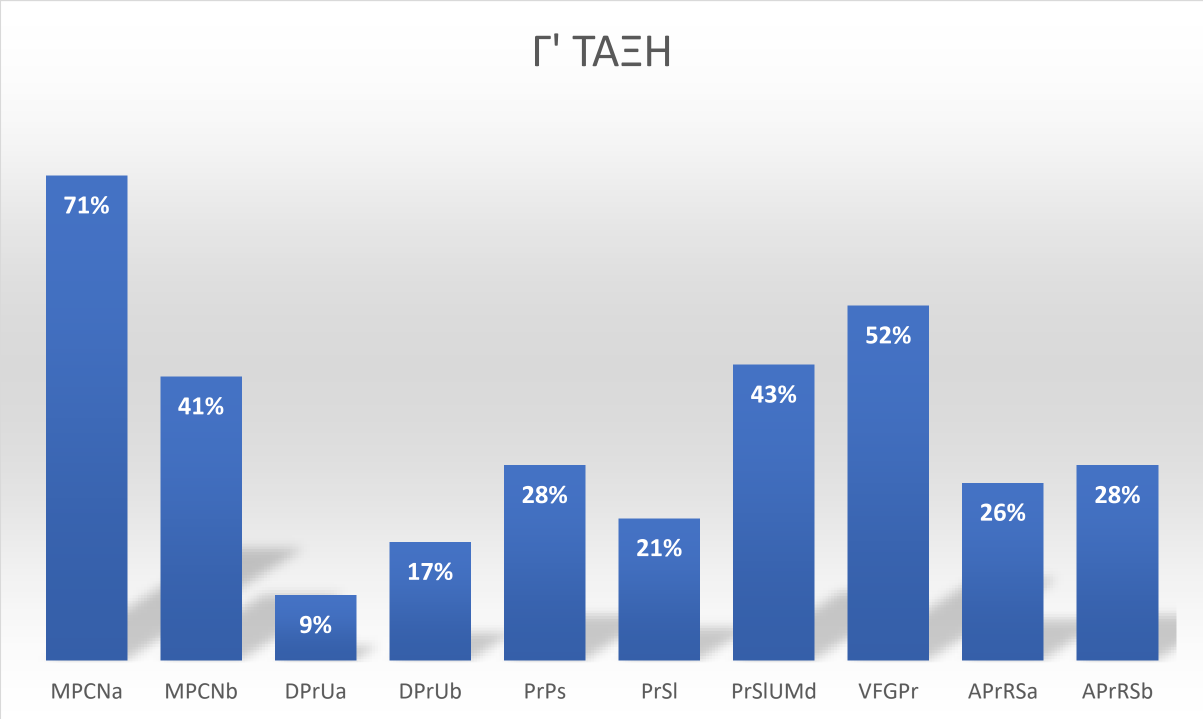


Διάγραμμα 9 ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)- Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Το Διάγραμμα 9 παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, με το μπλε βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 95% και με το πράσινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 90%.



Γράφημα 14 Μέσος όρος συμφωνίας πεποιθήσεων μαθητών Γ' Τάξης



Γράφημα 15 Ποσοστό επιτυχίας επίλυσης έργων Γ' Τάξης

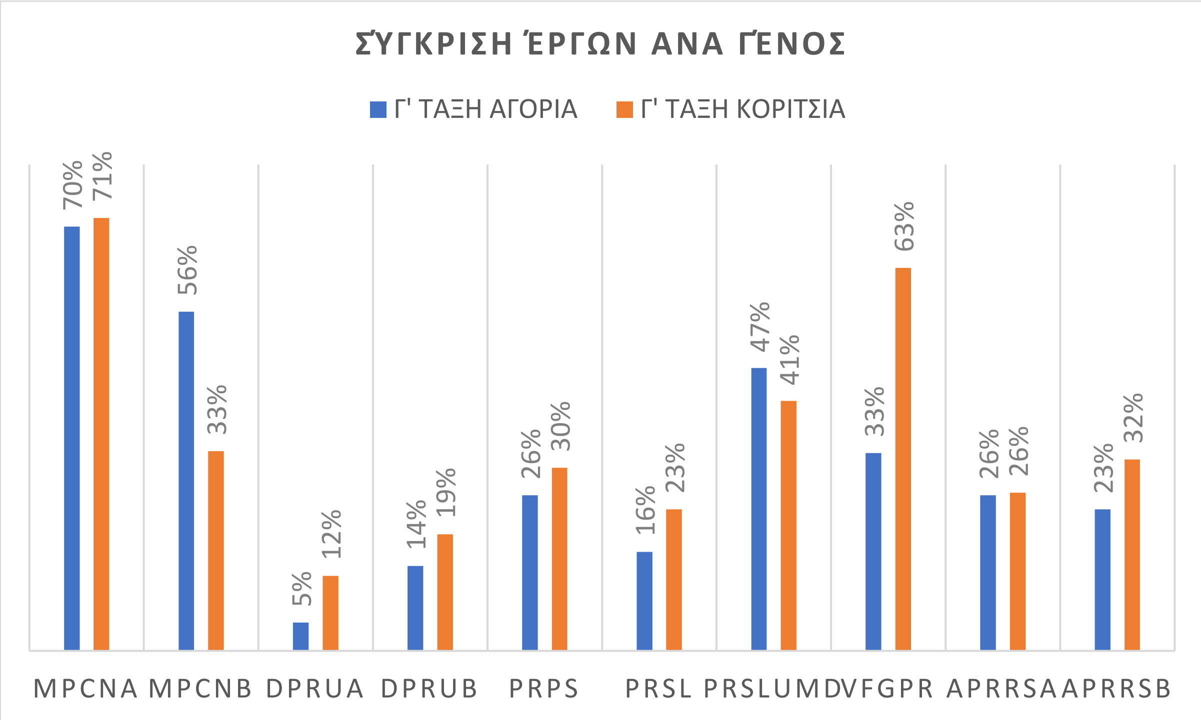
Όπως φαίνεται στο Γράφημα οι μαθητές της Γ’ Τάξης στο πρώτο έργο και πρώτο ερώτημα MPCNa έχουνε ποσοστό επιτυχίας 71% ενώ στο δεύτερο ερώτημα MPCNb ποσοστό επιτυχίας 41%. Αυτό δείχνει ότι ενώ έχουν κατανοήσει την δομή και την λειτουργία των δυνάμεων, φαίνεται να υπάρχουν κενά από προηγούμενες τάξεις αφού δεν έχουν αντιληφθεί σε βάθος την ακριβή έννοια.

Στο δεύτερο έργο DPrUa μόνο το 9% αντιλαμβάνεται ότι η έννοια του εμβαδού απευθύνεται σε μία επιφάνεια, παρόλα αυτά, στο δεύτερο ερώτημα DPrUb δίνετε από μεγαλύτερο ποσοστό 17%, ο ακριβής ορισμός. Αυτό μας δείχνει ότι ίσως θυμούνται αυτολεξεί μία έννοια χωρίς να κατανοούν το περιεχόμενο της. Στην κατασκευή PrPs (28%) και επίλυση PrSl (21%)ενός προβλήματος που έθεταν οι ίδιοι, το αποτέλεσμα δεν ήταν ενθαρρυντικό δεδομένου του ηλικιακού επιπέδου. Η άποψη τους στην ερώτηση Q10 (59%) επιβεβαιώνει ότι όταν μία έννοια δεν έχει κατανοηθεί, οι μαθητές δεν ανταποκρίνονται στην κατασκευή και επίλυση του προβλήματος.

Θετική ήταν η απόδοση των μαθητών στο τρίτο έργο (PrSlUMd) με ποσοστό 43%. Σε συμφωνία έρχεται η άποψη των μαθητών στην ερώτηση Q6 με ποσοστό 50% και Q7 με ποσοστό 44% καθώς και η ερώτηση Q13 (39%). Συγχρόνως να σημειωθεί ότι παρατηρήθηκε μία ακόμα μέθοδος επίλυσης του τρίτου προβλήματος με την μέθοδο συστήματος με δύο αγνώστους.

Αρκετά ενθαρρυντική η επίδοση στο τέταρτο έργο (VFGPr) με ποσοστό επιτυχίας 52%.

Η θετικότερη επίδοση στο πέμπτο έργο (APrRSa, APrRSb), δόθηκε από τους μαθητές της Γ’ Γυμνασίου με ποσοστό επιτυχίας 26%, ενώ στο δεύτερο 28%. Παρατηρήθηκε και εδώ ότι ελάχιστοι ήταν οι μαθητές που αντιλήφθηκαν και απάντησαν και στα δύο ερωτήματα του προβλήματος. Ο μεγαλύτερος αριθμός ατόμων δίνει σωστή απάντηση στο δεύτερο ερώτημα, κατά 28% (APrRSb), ενώ στο πρώτο ερώτημα φθάνει το 26% (APrRSa).

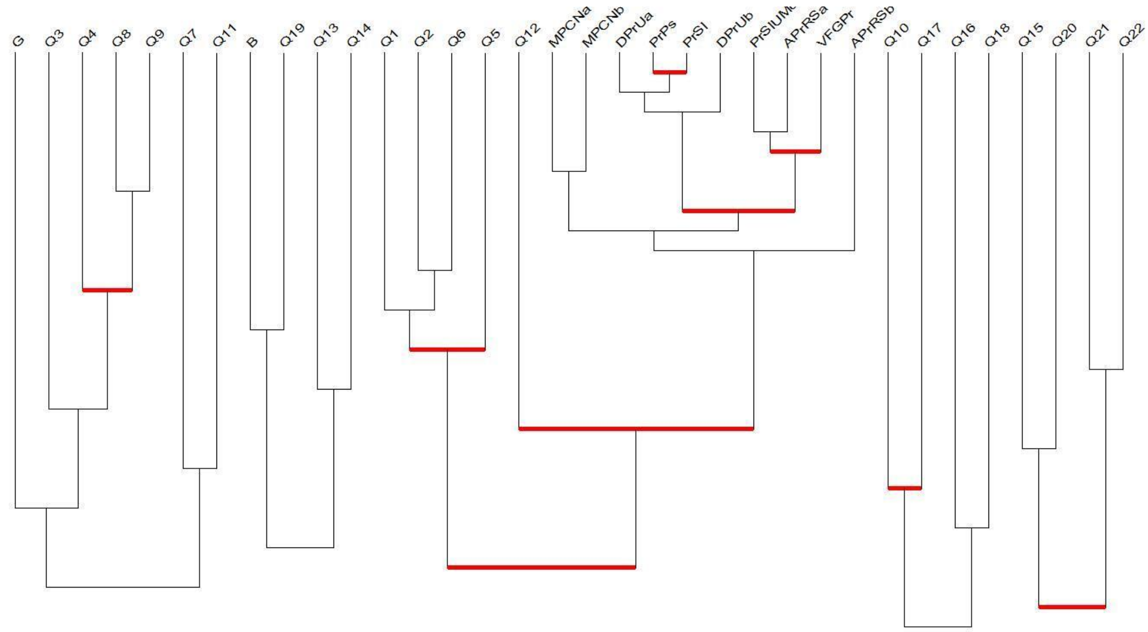


Γράφημα 16 Σύγκριση έργων ανά Γένος

Το δείγμα των μαθητών της Γ' Τάξης είναι 43 αγόρια και 73 κορίτσια.

7.5 Συνολικά Αποτελέσματα όλων των τάξεων

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-ΣΥΝΟΛΙΚΟ



Διάγραμμα 10 ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ (SIMILARITY TREE)-ΣΥΝΟΛΙΚΟ

Το Διάγραμμα 10 παρουσιάζει το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Οι συνδέσεις που παρατηρούμε στο διάγραμμα 10 είναι αρκετά παρεμφερείς με αυτές των επιμέρους ηλικιακών επιπέδων. Η τρίτη ομάδα είναι αυτή που περιέχει τις βασικότερες και πιο ισχυρές συνδέσεις. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι μέχρι και το δέκατο πέμπτο επίπεδο ομοιότητας το ποσοστό ομοιότητας πλησιάζει το ένα, αυτό καθιστά την έρευνα ιδιαίτερα αξιόπιστη. Η ομαδοποίησης έργων όπως έχει αναφερθεί γίνονται με βάση τη συμπεριφορά των υποκειμένων κατά την επίλυση τους. Η πιο ισχυρή σχέση ομοιότητας παρατηρείται ανάμεσα στις μεταβλητές PrPs και PrSl , η σύνδεση αυτή υποδηλώνει ότι όσοι μαθητές κατασκεύασαν ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που τους δόθηκαν είχαν την ικανότητα να προσφέρουν τη δική τους λύση. Οι δύο αυτές μεταβλητές συνδέονται με την DPrUa και αυτή με τη σειρά της με την DPrUb, αυτό δηλώνει ότι οι μαθητές που κατάφεραν να κατασκευάσουν και να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα που στηρίζεται στην έννοια του εμβαδού, προσέγγισαν και τη λύση στα ερωτήματα της έννοιας του ορισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας. Στην ίδια ομάδα ισχυρή σχέση ομοιότητας παρατηρείται ανάμεσα στις μεταβλητές και στις μεταβλητές PrSlUMd , APrRSa που σημαίνει ότι οι μαθητές συμπεριφέρονται όμοια σε προβλήματα μοντελοποίησης από φυσικές ή πραγματικές καταστάσεις.

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα

Classification at level : 1 : (PrPs PrSl) similarity : 1

Classification at level : 2 : (DPrUa (PrPs PrSl)) similarity : 0.999999

Classification at level : 3 : ((DPrUa (PrPs PrSl)) DPrUb) similarity : 0.999994

Classification at level : 4 : (PrSlUMd APrRSa) similarity : 0.99998

Classification at level : 5 : ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr) similarity : 0.999851

Classification at level : 6 : (MPCNa MPCNb) similarity : 0.999695

Classification at level : 7 : (Q8 Q9) similarity : 0.999529

Classification at level : 8 : (((DPrUa (PrPs PrSl)) DPrUb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr)) similarity : 0.999358

Classification at level : 9 : ((MPCNa MPCNb) (((DPrUa (PrPs PrSl)) DPrUb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr))) similarity : 0.997641

Classification at level : 10 : (((MPCNa MPCNb) (((DPrUa (PrPs PrSl)) DPrUb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr))) APrRSb) similarity : 0.990817

Classification at level : 11 : (Q2 Q6) similarity : 0.983479

Classification at level : 12 : (Q4 (Q8 Q9)) similarity : 0.965048

Classification at level : 13 : (Q1 (Q2 Q6)) similarity : 0.943672

Classification at level : 14 : (B Q19) similarity : 0.938065

Classification at level : 15 : ((Q1 (Q2 Q6)) Q5) similarity : 0.91152

Classification at level : 16 : (Q21 Q22) similarity : 0.840806

Classification at level : 17 : (Q13 Q14) similarity : 0.779226

Classification at level : 18 : (Q3 (Q4 (Q8 Q9))) similarity : 0.755363

Classification at level : 19 : (Q12 (((MPCNa MPCNb) (((DPrUa (PrPs PrSl)) DPrUb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr))) APrRSb)) similarity : 0.753898

Classification at level : 20 : (Q15 Q20) similarity : 0.72686

Classification at level : 21 : (Q7 Q11) similarity : 0.717715

Classification at level : 22 : (Q10 Q17) similarity : 0.716939

Classification at level : 23 : (G (Q3 (Q4 (Q8 Q9)))) similarity : 0.643275

Classification at level : 24 : (Q16 Q18) similarity : 0.620742

Classification at level : 25 : ((B Q19) (Q13 Q14)) similarity : 0.571201

Classification at level : 26 : (((Q1 (Q2 Q6)) Q5) (Q12 (((MPCNa MPCNb) (((DPrUa (PrPs PrSl)) DPrUb) ((PrSlUMd APrRSa) VFGPr))) APrRSb))) similarity : 0.366476

Classification at level : 27 : ((G (Q3 (Q4 (Q8 Q9)))) (Q7 Q11)) similarity : 0.319196

Classification at level : 28 : ((Q15 Q20) (Q21 Q22)) similarity : 0.311561

Classification at level : 29 : ((Q10 Q17) (Q16 Q18)) similarity : 0.250341

The most significant node is at level : 8

Significant nodes

at level: 1

at level: 5

at level: 8

at level: 12

at level: 15

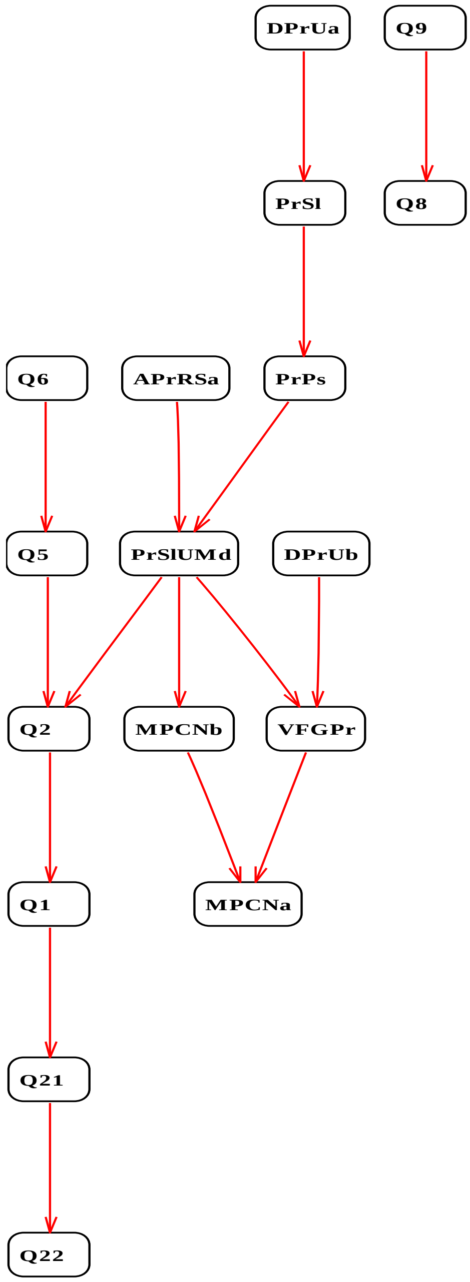
at level: 19

at level: 22

at level: 26

at level: 28

ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)

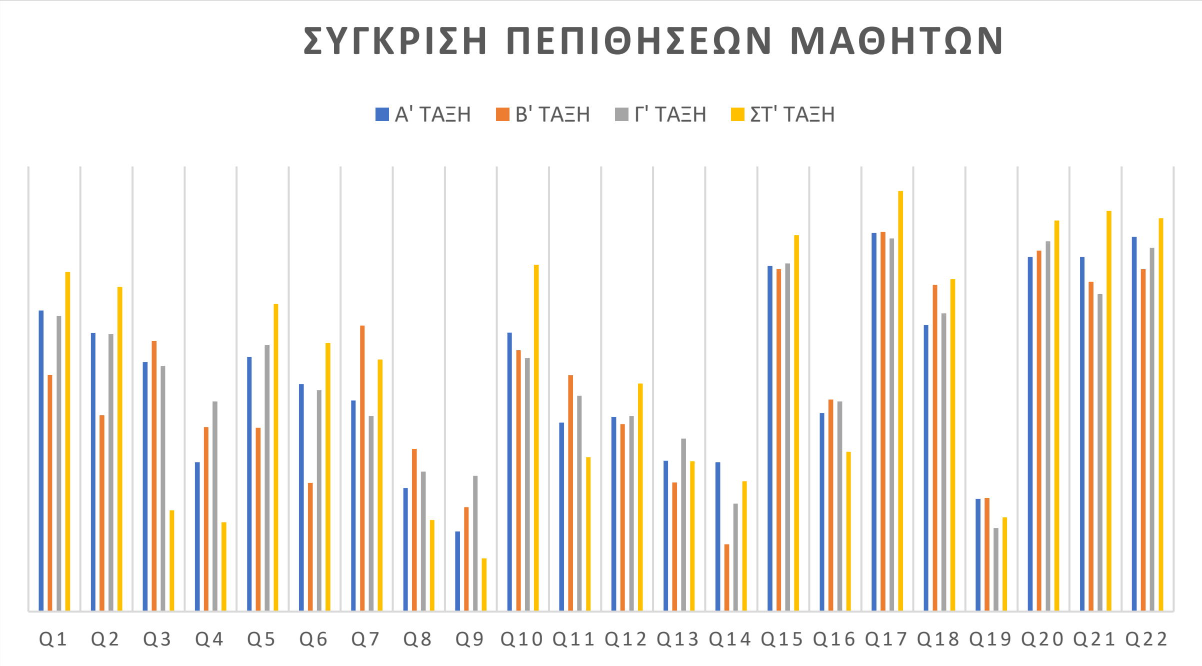


Διάγραμμα 11 ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ (IMPLICATIVE GRAPH)

Το Διάγραμμα 11 παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, με το μπλε βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 95% και με το πράσινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 90%.

Το Συνεπαγωγικό διάγραμμα προσφέρει μια αναπαράσταση της συμπεριφοράς των μαθητών ανάλογα με το βαθμό δυσκολίας των διάφορων εκπαιδευτικών εργασιών. Όλες οι συνεπαγωγές στο Συνολικό Συνεπαγωγικό Διάγραμμα εμφανίζονται με κόκκινα βέλη, αυτό υποδηλώνει ότι οι συνεπαγωγές μεταξύ των μεταβλητών είναι πολύ ισχυρές και σημαντικές. Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία ή αποτυχία σε μια μεταβλητή έχει πολύ υψηλό ποσοστό επιρροής στην επιτυχία ή αποτυχία στην μεταβλητή που συνεπάγεται. Αυτό συνήθως υποδηλώνει μια πολύ στενή σχέση μεταξύ των δύο μεταβλητών, όπου η αλλαγή σε μία επηρεάζει σημαντικά την άλλη.

Στην κορυφή της Συνεπαγωγικής αλυσίδας βρίσκεται το έργο που δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές και ελάχιστοι κατάφεραν να το επιλύσουν. Ένας μαθητής που κατάφερε να επιλύσει με επιτυχία αυτό το πρώτο έργο συνέχισε στην επίλυση των επόμενων ακολουθώντας την σειρά σύμφωνα με τα συνεπαγωγικά βέλη. Δυσκολότερο φάνηκε στους μαθητές το έργο 2 και συγκεκριμένα η μεταβλητή DPrUa , φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν την έννοια του εμβαδού και απλώς μαθαίνουν να εφαρμόζουν τον όρο χωρίς να έχουν βαθύτερη κατανόηση του σκοπού του ή της ουσίας του. Αυτό μπορεί να οριστεί ως έλλειψη κατανόησης της έννοιας του εμβαδού μιας επιφάνειας και ανεπαρκής γνώση των βασικών αρχών που το διαμορφώνουν. Η μεταβλητή αυτή κατέκτησε τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών. Αντίθετα στις καταλήξεις της συνεπαγωγικής αλυσίδας βρίσκεται η μεταβλητή MPCNa με τον μικρότερο βαθμό δυσκολίας σε σχέση με τα υπόλοιπα έργα. Στην εφαρμογή των Μαθηματικών Δυνάμεων οι μαθητές συγκέντρωσαν τα υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Το γεγονός ότι το ερώτημα MPCNb που αποσκοπεί στη βαθύτερη έννοια και κατανόηση των μαθηματικών δυνάμεων είναι σε προηγούμενο επίπεδο, δηλαδή δυσκόλεψε περισσότερο τους μαθητές, επιβεβαιώνει και πάλι ότι η εφαρμογή τυποποιημένων διαδικασιών υπερτερούν των προβλημάτων κρίσεως και αντιληπτικότητας.



Γράφημα 17 ΓΕΝΙΚΗ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΕΠΙΘΗΣΕΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ

Σύγκριση πεποιθήσεων μαθητών

Με γνώμονα το συγκεντρωτικό γράφημα των πεποιθήσεων των μαθητών είναι ξεκάθαρο ότι οι μαθητές της Στ΄ δημοτικού έχουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον προς το μάθημα των μαθηματικών αφού κατά 76% συμφωνούν ότι τους αρέσουν τα μαθηματικά. Ακολουθούν οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου, έπειτα της Γ΄ και τέλος της Β΄ γυμνασίου.

Σε γενικότερο πλαίσιο μέσα από τα μάτια των μαθητών της Στ΄ δημοτικού φαίνεται να έχουν αυτοπεποίθηση για τις ικανότητές τους στα μαθηματικά ενώ δεν χρησιμοποιούν βοηθητικά βιβλία (βοηθήματα) για το διάβασμά τους καθώς επίσης δεν χρησιμοποιούν φροντιστηριακή βοήθεια κατά ένα μεγάλο ποσοστό. Υπάρχει συμφωνία μόνο κατά 20% ότι χρειάζεται η φροντιστηριακή βοήθεια. Ίσως λόγω του ηλικιακού επιπέδου να δέχονται περισσότερο την οικογενειακή και τη σχολική βοήθεια. Θεωρούν ότι μπορούν να κατανοήσουν σε βάθος μια μαθηματική έννοια με ποσοστό συμφωνίας 69% και θεωρούν ότι ανταποκρίνονται ικανοποιητικά στο να λύσουν δύσκολα προβλήματα που χρειάζονται αρκετό χρόνο για να ολοκληρωθούν. Υποστηρίζουν ότι μπορούν να τα καταφέρουν λύνοντας μαθηματικά προβλήματα χωρίς να εγκαταλείψουν την προσπάθεια. Παρόμοια είναι η πεποίθησή τους και για την κατασκευή μαθηματικού προβλήματος. Πιστεύουν ότι μπορούν να τα καταφέρουν δεδομένου ότι έχουν κατανοήσει σε βάθος μια μαθηματική έννοια. Επιπλέον οι μαθητές της ΣΤ΄ δημοτικού φαίνεται να έχουν μάθει να δουλεύουν ακολουθώντας μια σειρά βημάτων νιώθοντας μεγαλύτερη σιγουριά για την επίλυση των λεκτικών προβλημάτων. Ένα σημαντικό ποσοστό βεβαιότητας περίπου 20% υποστηρίζει ότι δεν είναι σημαντικός ο λόγος να κατανοηθεί η χρήση μιας διαδικασίας που χρησιμοποιείται από τη στιγμή που δίνει σωστή απάντηση - αποτέλεσμα.

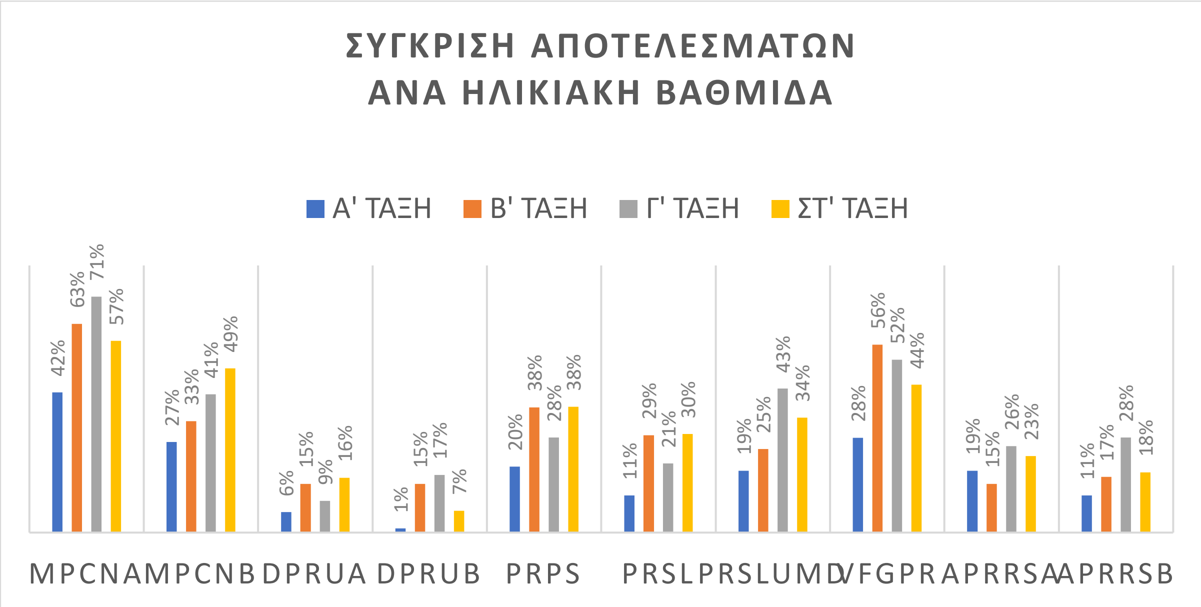
Παρόμοια είναι και η πεποίθηση των μαθητών της Α΄ τάξης γυμνασίου ότι μπορούν να ανταπεξέλθουν χρησιμοποιώντας κατά μεγαλύτερο ποσοστό βοηθητικά βιβλία καθώς και φροντιστηριακή υποστήριξη από ότι οι μαθητές της ΣΤ΄. Νιώθουν ότι μπορούν να λύσουν μαθηματικά προβλήματα που χρειάζονται αρκετό χρόνο για να ολοκληρωθούν χωρίς να σταματήσουν γρήγορα την προσπάθεια τους. Επίσης νιώθουν σε ικανοποιητικό επίπεδο ότι μπορούν να κατασκευάσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα εφόσον έχουν κατανοήσει τις έννοιες. Σε σύγκριση με τα υπόλοιπα ηλικιακά επίπεδα έχουν μεγαλύτερο ποσοστό βεβαιότητας στο ότι η απομνημόνευση βημάτων δεν είναι χρήσιμη για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων, με ποσοστό 34%. Καθώς επίσης συμφωνούν κατά 25% ότι δεν είναι σημαντικό να κατανοούμε την λειτουργία μιας μαθηματικής διαδικασίας από τη στιγμή που καταλήγει σε σωστό αποτέλεσμα. Παρόλες της ενθαρρυντικές πεποιθήσεις τους η πραγματική εικόνα των αποτελεσμάτων στα έργα που τους δόθηκαν δεν ήταν το ίδιο θετική. Γενικότερα η Α΄ τάξη είχε τη χαμηλότερη επίδοση σε όλα τα έργα του ερωτηματολογίου.

Χαμηλότερα είναι τα ποσοστά τόσο της αρέσκειας όσο και των ικανοτήτων των πεποιθήσεων των μαθητών της Β΄ γυμνασίου σε σχέση με τα υπόλοιπα ηλικιακά επίπεδα. Κάνουν περισσότερη χρήση βοηθητικών βιβλίων και πιστεύουν περισσότερο από ότι οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου και της ΣΤ΄ δημοτικού ότι χρειάζονται την φροντιστηριακή εκπαίδευση για να ανταπεξέλθουν στις ανάγκες των σχολικών μαθημάτων. Οι μαθητές της β γυμνασίου έχουν πολύ χαμηλότερα ποσοστά συμφωνίας στο κατά πόσο εύκολα μπορούν να επιλύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα, καθώς φαίνεται να τους είναι μια δύσκολη διαδικασία. Θεωρούν την χρήση βημάτων ιδιαίτερα σημαντική Παρόλο που πιστεύουν ότι η αυτοματοποίηση των διαδικασιών χωρίς την κατανόηση τους δεν ωφελούν στη γνώση τους. Η Β΄ γυμνασίου κινήθηκε σε χαμηλότερα επίπεδα συμφωνίας των πεποιθήσεων σε σχέση με τις υπόλοιπες ηλικιακές βαθμίδες παρόλο που σε αρκετά έργα είχαν καλύτερη επίδοση από μαθητές που ένιωθαν περισσότερη σιγουριά και εμπιστοσύνη στον εαυτό τους. Η σύνεση που έδειξαν ως προς τη βεβαιότητα για τις ικανότητές τους αποτυπώθηκε με αντικειμενικότητα στα αποτελέσματα των έργων τους.

Για την Γ΄ γυμνασίου γίνεται όλο και περισσότερο προϋπόθεση η φροντιστηριακή βοήθεια με ποσοστό συμφωνίας των μαθητών 47% σε σχέση με τις μικρότερες τάξεις. Σύμφωνα με το

Γράφημα 12 η Γ΄ τάξη φαίνεται να συμφωνεί με τις πεποιθήσεις που έχουν οι μαθητές της Ά τάξης, διαφέροντας μόνο στην πεποίθηση του κατά πόσο προσπαθούν και επιμένουν για ώρα προκειμένου την επίλυση προβλημάτων αφού σύμφωνα με τους ίδιους σταματούν πιο γρήγορα την προσπάθεια τους σε σύγκριση με τους υπόλοιπους μαθητές μικρότερων τάξεων.

Τέλος, από όλα τα ηλικιακά επίπεδα παρατηρούμε την απόλυτη συμφωνία με την πεποίθηση ότι τα μαθηματικά είναι ένα σημαντικό μάθημα και ότι θα τους είναι χρήσιμα στην ενήλικη ζωή τους.



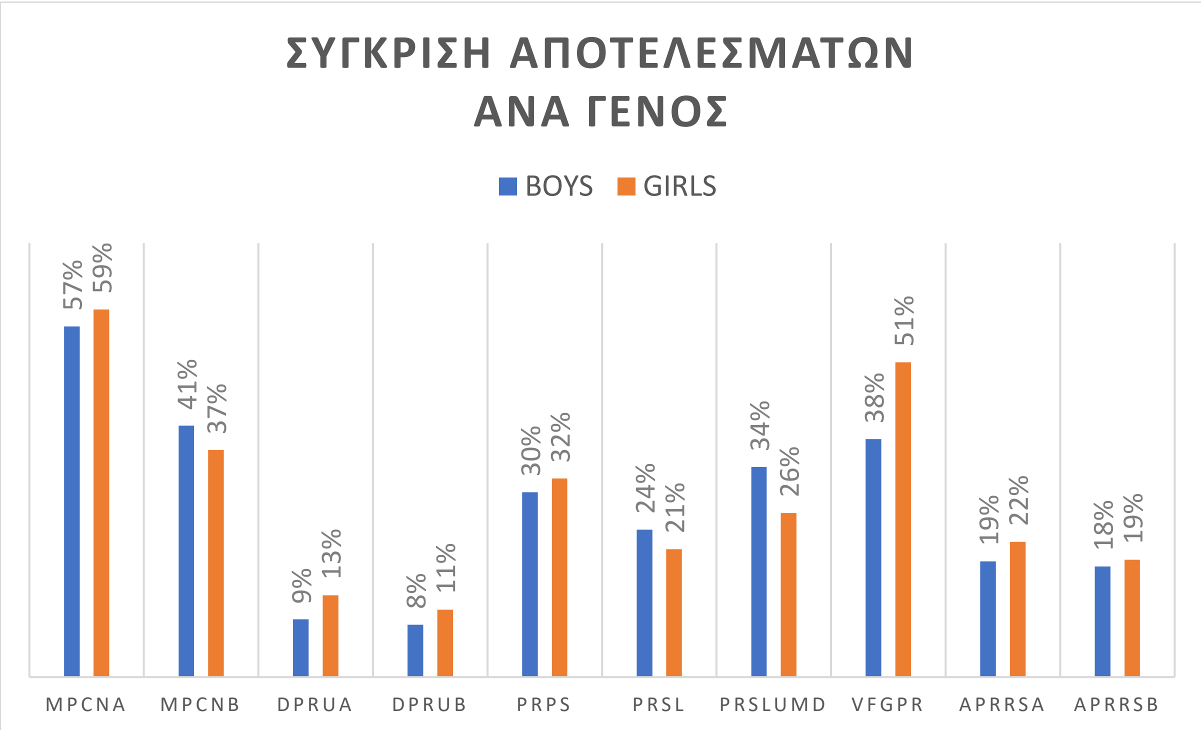
Γράφημα 18 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΑΝΑ ΗΛΙΚΙΑΚΗ ΒΑΘΜΙΔΑ

Σύγκριση αποτελεσμάτων αλλά ηλικιακή βαθμίδα

Τα αποτελέσματα των μαθητών φαίνεται να διαφέρουν ανάλογα με το επίπεδο της εκπαίδευσης, όπως φαίνεται στο παραπάνω γράφημα. Ακολουθεί ο συγκριτικός σχολιασμός των αποτελεσμάτων για τα διάφορα έργα.

Τις χαμηλότερες επιδόσεις φαίνεται να έχει η Ά γυμνασίου όπου σχεδόν σε όλα τα έργα έχει τα χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας. Η επίδοση των μαθητών της Ά γυμνασίου είναι χαμηλότερη και από αυτήν των παιδιών του δημοτικού, υποδηλώνοντας ότι πιθανόν χρειάζεται επιπλέον υποστήριξη ή ενίσχυση των μαθηματικών δεξιοτήτων των μαθητών σε αυτό το επίπεδο. Η μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο φαίνεται να τους έχει δυσκολέψει, ιδιαίτερα μετά τη μεγάλη χρονική αποχή από το σχολικό περιβάλλον λόγω της πανδημίας COVID-19.

Η ΣΤ’ Δημοτικού, η Β’ Γυμνασίου και η Γ’ γυμνασίου κυμαίνονται σε παρόμοια επίπεδα ποσοστών επιτυχίας ανά έργο, σε γενικότερο πλαίσιο φαίνεται ότι τις βασικές γνώσεις του πρώτου επιπέδου (αριθμητικές και γεωμετρικές) κατέχουν περίπου το 25% των μαθητών, ενώ μόνο το 10-20% μπορούν να ανταπεξέλθουν σε απλά προβλήματα μαθηματικής σκέψης. Ακόμα χαμηλότερα είναι τα ποσοστά επιτυχίας στα σύνθετα προβλήματα, ενώ απογοητευτικό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές δεν μπορούν να διατυπώσουν έννοιες που έχουν διδαχθεί. Οι μαθητές φαίνεται να εμφανίζουν ανεπαρκή διάθεση χρόνου για την εκπαίδευση τους στον τομέα των μαθηματικών. Γενικότερα, τα αποτελέσματα δείχνουν μια σημαντική αδυναμία στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά χωρίς να πληρούν τα αναμενόμενα επίπεδα ανάλογα με την ηλικιακή τους βαθμίδα.



Γράφημα 19 Ποσοστό επιτυχίας επίλυσης έργων, συνολικό ανά γένος

Παρατηρούμε ότι τα κορίτσια έχουν καλύτερες επιδόσεις στα έργα που αφορούν την εφαρμογή τυπικών διαδικασιών ή αλγορίθμων, ενώ τα αγόρια ανταποκρίνονται καλύτερα σε έργα που απαιτούν την κρίση και την δημιουργικότητα (μη τυπικών προβλημάτων). Παρόλα αυτά, οι μαθητές ανταποκρίθηκαν παρόμοια ανεξαρτήτως γένους.

7.6 Μερικές συνεντεύξεις μαθητών

Μαθητής 1

Πέτρος

Φύλο: Αγόρι

Τάξη : ΣΤ΄ Δημοτικού (Δημοτικό σχολείο Βουλιαγμένης)

Βαθμός στο τελευταίο τρίμηνο στα μαθηματικά: 10/10

Ερωτήθηκαν αρχικά όλες οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου για να διαπιστωθεί η εγγύτητα των απαντήσεων. Υπήρξε μια διαφορά στην ερώτηση 3, όπου αντί για το 1 (Διαφωνώ) απάντησε τελικά το 4 (Συμφωνώ). Διαπιστώθηκε ότι είχε κατανοηθεί λανθασμένα από τον μαθητή η συγκεκριμένη πρόταση. Η πρόταση: Η χρήση βοηθήματος με βοηθάει στο διάβασμά μου.

Τα έργα 1, 2 και 4 δεν είχαν απαντηθεί καθόλου από το μαθητή, στο έργο 3 υπήρξε μια προσπάθεια για λύση αλλά αποτυχημένη ενώ στο έργο 5 απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο μέρος του προβλήματος.

Διάλογος γνωριμίας με τον μαθητή. :

Πόσες ώρες διαβάζεις την ημέρα;
Μαθ. : 3 ώρες περίπου.

Έχεις κάποια βοήθεια ή στήριξη από την οικογένειά σου, στο διάβασμά σου;
Μαθ. : Ναι, με βοηθάει η μητέρα μου στο σπίτι και κάνω και 2 ώρες μελέτη σε φροντιστήριο.

Σε ποιο μάθημα είσαι πιο καλός;
Μαθ. : Γλώσσα και Μαθηματικά.

Όσον αφορά τα μαθηματικά υπήρξε κάποια έννοια που σε δυσκόλεψε φέτος;
Μαθ. : Ναι η έννοια του εμβαδού.

Είχες τον απαιτούμενο χρόνο για να συμπληρώσεις όλες τις απαντήσεις του ερωτηματολογίου καθώς και τα έργα;
Μαθ. : Ναι είχα περίπου μια ώρα.

Ποιο από τα έργα σου φάνηκε πιο απαιτητικό;

Μαθ. : Το έργο 3 και 5.

Διάλογος όσον αφορά τα Έργα:

Έργο 1 :

Θυμάσαι να υπολογίζεις δυνάμεις;

Μαθ. : Ναι αν και αυτή την έννοια δεν τη διδαχτήκαμε αρκετά στο σχολείο.

Πως γράφουμε σαν δύναμη το 2 * 2 * 2 * 2;

Μαθ. : 2 εις την τετάρτη.

Πόσο απέχει το 2 εις την τρίτη από το 2 εις την τετάρτη;

Μαθ. : ένα 2άρι.

Ωραία! Άρα στην πρώτη ερώτηση ο αριθμός 8 εις την 16 είναι 8 φορές μεγαλύτερος από τον 8 εις την 15;

Μαθ. : Μμμ.. Όχι; Ή μάλλον ναι απέχει ένα οχτάρι.

Ωραία! πάμε στο δεύτερο ερώτημα, ο αριθμός 8 εις την δεκάτη είναι 10 φορές μεγαλύτερος από τον αριθμό 8;

Μαθ. : Δεν καταλαβαίνω αυτή την ερώτηση.

Σε ρωτάει αν 8 φορές το 10 είναι το ίδιο με το 8 εις την δεκάτη.

Μαθ. : Ναι είναι το ίδιο

Δηλαδή 2 φορές το 3 είναι το ίδιο με το 2 εις την τρίτη;

Μαθ. : Ααα.. Όχι δεν είναι το ίδιο. Άρα η δεύτερη ερώτηση είναι λάθος.

Έργο 2 :

Αν σε ρωτήσω τι ονομάζουμε εμβαδόν, διατυπώνω σωστά την ερώτησή μου;

Μαθ. : Παύση

Σε τι απευθύνεται η έννοια του εμβαδού;

Μαθ. : Σ’ ένα σχήμα.

Και τι μετράει από το σχήμα;

Μαθ. : Το μέσα .

Πολύ ωραία το εσωτερικό του σχήματος λοιπόν, το οποίο λέγεται επιφάνεια. Τώρα μπορείς να μου δώσεις έναν ορισμό για την έννοια του εμβαδού μιας επιφάνειας;

Μαθ. : Ναι το εμβαδόν μετράει την επιφάνεια ενός σχήματος. Για παράδειγμα αν έχουμε ένα τετράγωνο που η κάθε πλευρά είναι 4 cm η επιφάνεια του είναι $4 \times 4 = 16$.

Και ποια είναι η μονάδα μέτρησης των επιφανειών;

Μαθ. : Τα τετραγωνικά μέτρα.

Άρα το αποτέλεσμα στο παράδειγμα που μου έδωσες είναι 16 τετραγωνικά εκατοστά.

Έπειτα ζητήθηκε από το μαθητή να απαντήσει στο έργο 2 γ), να κατασκευάσει ένα πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη λέξη εμβαδόν και τον αριθμό 128. Αυτό προκάλεσε σύγχυση στο μαθητή και δεν μπορούσε να σκεφτεί κάποιο πρόβλημα παρόλο που όταν του ζητήθηκε μόνο ο ορισμός έδωσε από μόνος του ένα παράδειγμα. Προσπαθώντας να κατασκευάσει το πρόβλημα του εκτός από αυτά που του ζητούνταν ήθελε να χρησιμοποιήσει και την περίμετρο, για κάποιο λόγο είχε συνδέσει στο μυαλό του την περίμετρο με το εμβαδόν, χωρίς όμως να μπορεί το να υλοποιήσει σωστά.

Το πρόβλημα που τελικά διατύπωσε ο μαθητής είναι το εξής:

Ένα τετράγωνο έχει επιφάνεια 128 τετραγωνικά εκατοστά. Ποια είναι η περίμετρος του;

Έργο 5 :

Πόσα ερωτήματα βλέπεις σε αυτό το πρόβλημα;

Μαθ. : Δύο

Παρατήρησα ότι έχεις λύσει μόνο το δεύτερο ερώτημα το πρώτο το ξέχασες ή δεν μπορούσες να το λύσεις;

Μαθ. : Δεν μπορούσα.

Παρατήρηση:

Έπειτα από μια απλή ανάγνωση μου στο πρόβλημα ο μαθητής έλυσε κανονικά και το πρώτο ερώτημα.

Μαθητής 2

Εβελίνα

Φύλο: Κορίτσι

Τάξη : Γ΄ Γυμνασίου (Γυμνάσιο Βούλας)

Βαθμός στο τελευταίο τετράμηνο στα μαθηματικά: 16/20

Βαθμός στο τελευταίο διαγώνισμα: 13/20

Ερωτήθηκαν αρχικά όλες οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου για να διαπιστωθεί αν υπάρχει διαφορά στις απαντήσεις. Δεν υπήρξε κάποια διαφορά.

Στο συγκεκριμένο γραπτό τα έργα ήταν όλα αναπάντητα.

Διάλογος γνωριμίας:

Πόσες ώρες διαβάζεις την ημέρα;

Μαθ. : Περίπου 2.

Ποιο είναι το αγαπημένο σου μάθημα;

Μαθ. : Τα αρχαία.

Είχες τον απαιτούμενο χρόνο για να συμπληρώσεις το ερωτηματολόγιο;

Μαθ. : Ναι αλλά δεν τα προσπάθησα.

Γύρισες τη σελίδα του ερωτηματολογίου;

Μαθ. : Ναι

Όταν διάβασες τα έργα δεν κατανόησες κανένα;

Μαθ. : Τα 2 τελευταία δεν τα διάβασα. Αν είχα διαβάσει το τέταρτο πιστεύω θα το έλυνα.

Μέσα από το διάλογο μας κατάφερε να λύσει σχετικά εύκολα τα έργα 1 και 4, ενώ δεν κατάφερε καθόλου το έργο 3.

Διάλογος όσον αφορά το έργο 2:

Αν σε ρωτήσω τι είναι εμβαδόν, διατυπώνω σωστά την ερώτησή μου;

Μαθ. : Παύση

Πρέπει να αναφερθώ σε κάτι πιο συγκεκριμένο;

Μαθ. : Ναι, σε ένα σχήμα;

Τι μετράμε δηλαδή σε αυτό το σχήμα;

Μαθ. : το εσωτερικό του.

Επομένως τώρα μπορείς να μου διατυπώσεις καλύτερα τον ορισμό του εμβαδού μιας επιφάνειας;

Μαθ. : Εμμ.. (Δυσκολία διατύπωσης)

Το εμβαδόν είναι το μέγεθος μέτρησης των επιφανειών. Όπως για το μήκος μετράμε την απόσταση σε μέτρα ή χιλιόμετρα, έτσι για το εμβαδόν μετράμε την έκταση της επιφάνειας σε τετραγωνικά μέτρα.

Μαθ. : Δεν το είχα σκεφτεί ποτέ αυτό.

Θα μπορούσες τώρα να μου κατασκευάσεις ένα πρόβλημα με τη λέξη εμβαδόν και τον αριθμό 128; Πιστεύω αυτό θα σου ήταν πιο εύκολο.

Μαθ. : Ναι, ας πούμε στο σχολείο έχουμε 2 θρανία που είναι μεγαλύτερα από τα παραπάνω...

Δεν χρειάζεται να δυσκολεύεσαι βάζοντάς σου ένα πρόβλημα ρεαλιστικό πήγαινε σε κάτι πιο απλό, όπως για παράδειγμα έχουμε ένα ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο.. με πλευρά τόσο.. ποιο είναι το εμβαδόν τους;

Μαθ. : Να ρωτήσω κάτι; το 128 πρέπει να βρίσκεται στην εκφώνηση του προβλήματος ή να βγαίνει σαν αποτέλεσμα στη λύση;

Είναι δεδομένο της άσκησης άρα θα πρέπει να βρίσκεται στην εκφώνηση.

Μαθ. : Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 128, ποιο είναι το εμβαδόν του; (δεν έβαλε τη μονάδα μέτρησης του εμβαδού)

Ωραία, και πώς θα το λύσεις αυτό; Πώς υπολογίζουμε το εμβαδόν ενός τετραγώνου;

Μαθ. : Θα πολλαπλασιάσω όλες τις πλευρές; ή θα τις προσθέσω;

Όχι, σκέψου λίγο καλύτερα, τι χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επιφάνειας;

Μαθ. : Τη Βάση επί το ύψος.

Πολύ ωραία, όταν έχεις τετράγωνο ποια είναι η βάση και ποιο είναι το ύψος;

Μαθ. : Όλες οι πλευρές είναι ίσες οπότε η βάση και το ύψος θα είναι το ίδιο νούμερο.

Εν τέλει Έλυσε το πρόβλημα που έθεσε.

Παρατήρηση: Παρόλο που ο βαθμός τριμήνου της ήταν μέτριος προς καλό, οι απαντήσεις στα ερωτήματα ήταν χαμηλότερου επιπέδου. Φάνηκε να έχει δυσκολία στα απλά και κάθε ερώτηση της έπαιρνε αρκετό χρόνο να την σκεφτεί.

Μαθητής 3

Αργυρώ

Φύλο: Κορίτσι

Τάξη : Γ΄ Γυμνασίου (Γυμνάσιο Κηφισιάς)

Βαθμός στο τελευταίο τετράμηνο στα μαθηματικά: 20/20

Βαθμός στο τελευταίο διαγώνισμα: 19,5/20

Ήταν ένα άριστο γραπτό, το μοναδικό που είχε όλα τα έργα σωστά.

Διάλογος γνωριμίας:

Πόσες ώρες διαβάζεις την ημέρα;

Μαθ.: Ο προσωπικός μου χρόνος διαβάσματος είναι περίπου 4-5 ώρες ημερησίως.

Πηγαίνεις σε φροντιστήριο ή κάνεις ιδιαίτερα;

Μαθ.: Κάνω φροντιστήριο και ιδιαίτερα. Οι περισσότερες ώρες διαβάσματος αφορούν το φροντιστήριο και τα ιδιαίτερα. Έκανα σκληρή προετοιμασία για να καταφέρω την εισαγωγή σε πρότυπο Λύκειο.

Έχεις την ανάλογη στήριξη από την οικογένειά σου;

Μαθ.: Φυσικά με βοηθάνε σε ό,τι κι αν χρειαστώ, είτε με την αγορά βιβλίων, εξελιγμένων τεχνολογικών μέσων, καθηγητές, φροντιστήρια ή και οι ίδιοι πολλές φορές μου κρατάνε το βιβλίο. Ό,τι χρειάζομαι τους απευθύνομαι και εκείνοι με βοηθάνε και με στηρίζουν.

Είσαι καλή μόνο στα θετικά μαθήματα ή και στα θεωρητικά;

Μαθ.: Είμαι σε όλα καλή αλλά έχω μια προτίμηση στα θετικά μαθήματα, τα βλέπω πιο ενδιαφέροντα.

Στα μαθηματικά πόσες ώρες αφιερώνεις ημερησίως;

Μαθ.: Περίπου τις 2,5 από τις 5 ώρες. Θεωρώ ότι είναι το πιο απαιτητικό από τα μαθήματα. Επιπλέον, επειδή έκανα και φροντιστήριο και ιδιαίτερα είχα πολύ παραπάνω ασκησιολόγιο για το σπίτι.

Αν κάποια μέρα δεν έχεις τόσες πολλές ασκήσεις μπορεί να ασχοληθείς και μόνη σου ψάχνοντας άλλες ασκήσεις;

Μαθ.: Ναι, εκτός από τα βοηθήματα που χρησιμοποιώ για παραπάνω ασκήσεις, υπάρχουν φορές που ψάχνω στο διαδίκτυο ασκήσεις μεγαλύτερων τάξεων, ή μπαίνω σε πανεπιστήμια και βλέπω τις θεωρίες των μαθημάτων, αυτό το κάνω κυρίως στο μάθημα της Βιολογίας και των Μαθηματικών.

Έχεις κάποιο συγκεκριμένο στόχο για το μέλλον; ή απλώς σε ενδιαφέρουν τα συγκεκριμένα μαθήματα;

Μαθ.: Και τα 2, ο στόχος μου είναι να τα καταφέρω στις Πανελλήνιες Εξετάσεις στις οποίες θα διαλέξω τις θετικές επιστήμες, παρ' όλα αυτά μου αρέσει να έχω γνώσεις ανεξάρτητα από το στόχο μου.

Διάλογος ερωτήσεων και έργων:

Βρίσκεις ένα δύσκολο πρόβλημα που χρειάζεται αρκετό χρόνο για να ολοκληρωθεί. Πώς το αντιμετωπίζεις;

Μαθ.: Αρχικά με το που διαβάσω ένα πρόβλημα συνήθως θα μου έρθει η λύση κατευθείαν στο μυαλό. Θα καταλάβω από λέξεις ή φράσεις τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να κατευθυνθώ. Αν δεν συμβεί αυτό καταλαβαίνω ότι το πρόβλημα θα είναι δύσκολο, αρχικά κυκλώνω τα δεδομένα μου και προσπαθώ να καταλάβω τα ζητούμενα. Πολλές φορές χρησιμοποιώ ανορθόδοξους τρόπους όχι και τόσο τυπικά σωστούς ώστε να μπορέσω να βγω σε κάποιο αποτέλεσμα, έπειτα κρίνω αν αυτό που βγήκε είναι λογικό ή όχι. Μια άλλη τακτική είναι να ξεκινήσω ανάποδα και να προσπαθήσω να καταλήξω στα δεδομένα του προβλήματος. Γενικά πειραματίζομαι.

Πολύ ωραία θα ήθελα να σε ρωτήσω όσον αφορά το έργο 2 γ) το πρόβλημα που έθεσες ήταν αρκετά ενδιαφέρον και περίπλοκο γιατί δεν διάλεξες κάτι πιο εύκολο;

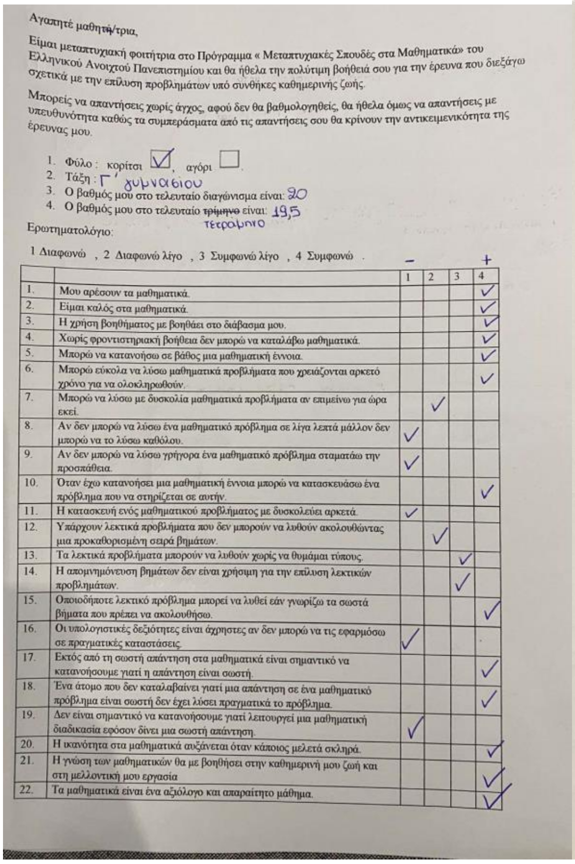
Μαθ.: Εκείνη την περίοδο προετοιμαζόμουν όπως προ είπα για το πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων, οπότε είδα το σχετικό ερωτηματολόγιο ως μια ευκαιρία και για το προσωπικό μου διάβασμα. Επίσης δεν θα ήθελα να βάλω κάτι βαρετό όπως ένα ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο.

Παρ’ όλα αυτά παρατήρησα ότι τον αριθμό 128 τον έχεις χρησιμοποιήσει στη λύση του προβλήματος και όχι στην εκφώνηση.

Μαθ.: Ναι τώρα που το ξαναβλέπω είναι ξεκάθαρο ότι έπρεπε να το είχα βάλει στην εκφώνηση, δεν τη διάβασα με τόση προσοχή.

Στο έργο 3 η μαθήτρια είχε δώσει λύση με ένα σύστημα εξισώσεων. Της ζητήθηκε να βρει επιπλέον τρόπους λύσεις, και σκέφτηκε ως λύση την εξίσωση με έναν άγνωστο. Δεν μπορούσε να σκεφτεί κάτι εκτός της μοντελοποιημένης λύσης όπως αυτής με μεταβλητές x και y. Επίσης ζητήθηκε από την μαθήτρια να επιλύσει το πρόβλημα με πιο απλό τρόπο με τις γνωστές πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό και διαίρεση. Είχε δυσκολία στην απλοποιημένη σκέψη. Γενικότερα σε όλα τα προβλήματα σκεφτόταν πιο περίπλοκα απ’ ότι χρειαζόταν.

Παρακάτω παρατίθενται οι απαντήσεις του γραπτού:



Αγαπητέ μαθητή/τρια,

Είμαι μεταπτυχιακή φοιτήτρια στο Πρόγραμμα « Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του Ελληνικού Ανοιχτού Πανεπιστημίου και θα ήθελα την πολύτιμη βοήθειά σου για την έρευνα που διεξάγω σχετικά με την επίλυση προβλημάτων υπό συνθήκες καθημερινής ζωής.

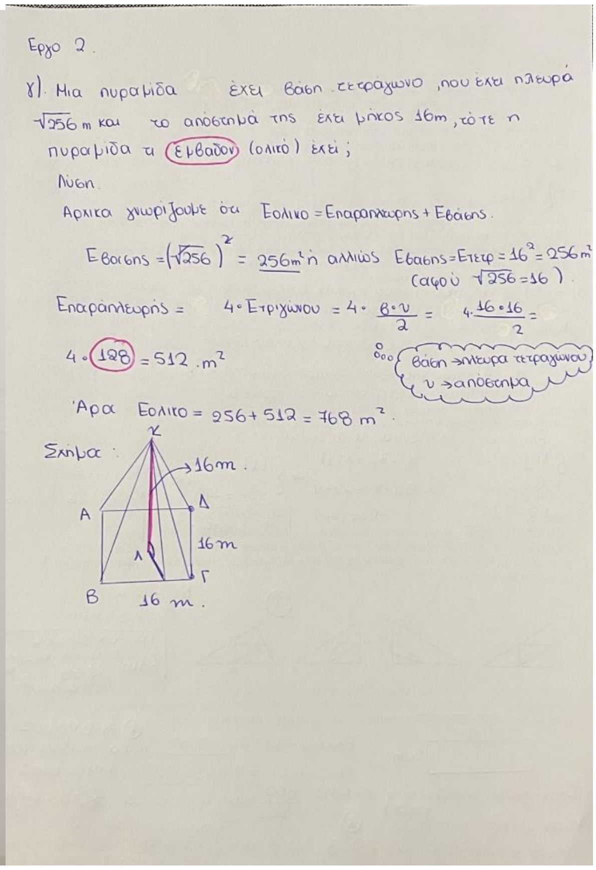
Μπορείς να απαντήσεις χωρίς άγχος, αφού δεν θα βαθμολογηθείς, θα ήθελα όμως να απαντήσεις με υπευθυνότητα καθώς τα συμπεράσματα από τις απαντήσεις σου θα κρίνουν την αντικειμενικότητα της έρευνας μου.

1. Φύλο : κορίτσι ☑, αγόρι ☐.
2. Τάξη : Γ΄ γυμνασίου
3. Ο βαθμός μου στο τελευταίο διαγώνισμα είναι: 20
4. Ο βαθμός μου στο τελευταίο ~~τρίμηνο~~ τετράμηνο είναι: 19,5

Ερωτηματολόγιο:

1 Διαφωνώ , 2 Διαφωνώ λίγο , 3 Συμφωνώ λίγο , 4 Συμφωνώ .

		1 (−)	2	3	4 (+)
1.	Μου αρέσουν τα μαθηματικά.				✓
2.	Είμαι καλός στα μαθηματικά.				✓
3.	Η χρήση βοηθήματος με βοηθάει στο διάβασμα μου.				✓
4.	Χωρίς φροντιστηριακή βοήθεια δεν μπορώ να καταλάβω μαθηματικά.				✓
5.	Μπορώ να κατανοήσω σε βάθος μια μαθηματική έννοια.				✓
6.	Μπορώ εύκολα να λύσω μαθηματικά προβλήματα που χρειάζονται αρκετό χρόνο για να ολοκληρωθούν.				✓
7.	Μπορώ να λύσω με δυσκολία μαθηματικά προβλήματα αν επιμείνω για ώρα εκεί.		✓		
8.	Αν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα σε λίγα λεπτά μάλλον δεν μπορώ να το λύσω καθόλου.	✓			
9.	Αν δεν μπορώ να λύσω γρήγορα ένα μαθηματικό πρόβλημα σταματάω την προσπάθεια.	✓			
10.	Όταν έχω κατανοήσει μια μαθηματική έννοια μπορώ να κατασκευάσω ένα πρόβλημα που να στηρίζεται σε αυτήν.				✓
11.	Η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος με δυσκολεύει αρκετά.	✓			
12.	Υπάρχουν λεκτικά προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν ακολουθώντας μια προκαθορισμένη σειρά βημάτων.		✓		
13.	Τα λεκτικά προβλήματα μπορούν να λυθούν χωρίς να θυμάμαι τύπους.			✓	
14.	Η απομνημόνευση βημάτων δεν είναι χρήσιμη για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων.			✓	
15.	Οποιοδήποτε λεκτικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί εάν γνωρίζω τα σωστά βήματα που πρέπει να ακολουθήσω.				✓
16.	Οι υπολογιστικές δεξιότητες είναι άχρηστες αν δεν μπορώ να τις εφαρμόσω σε πραγματικές καταστάσεις.	✓			
17.	Εκτός από τη σωστή απάντηση στα μαθηματικά είναι σημαντικό να κατανοήσουμε γιατί η απάντηση είναι σωστή.				✓
18.	Ένα άτομο που δεν καταλαβαίνει γιατί μια απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι σωστή δεν έχει λύσει πραγματικά το πρόβλημα.				✓
19.	Δεν είναι σημαντικό να κατανοήσουμε γιατί λειτουργεί μια μαθηματική διαδικασία εφόσον δίνει μια σωστή απάντηση.	✓			
20.	Η ικανότητα στα μαθηματικά αυξάνεται όταν κάποιος μελετά σκληρά.				✓
21.	Η γνώση των μαθηματικών θα με βοηθήσει στην καθημερινή μου ζωή και στη μελλοντική μου εργασία				✓
22.	Τα μαθηματικά είναι ένα αξιόλογο και απαραίτητο μάθημα.				✓



Εργο 2.

γ). Μια πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο, που έχει πλευρά $\sqrt{256}$ m και το απόστημά της έχει μήκος 16m, τότε η πυραμίδα τι εμβαδόν (ολικό) έχει;

Λύση.

Αρχικά γνωρίζουμε ότι $E_{ολικο} = E_{παραπλευρης} + E_{βάσης}$.

$E_{βασης} = (\sqrt{256})^2 = \underline{256 m^2}$ ή αλλιώς $E_{βασης} = E_{τετρ} = 16^2 = 256 m^2$ (αφού $\sqrt{256} = 16$).

$E_{παράπλευρης} = 4 \cdot E_{τριγώνου} = 4 \cdot \frac{β \cdot υ}{2} = 4 \cdot \frac{16 \cdot 16}{2} =$

$4 \cdot 128 = 512 . m^2$

βάση → πλευρά τετραγώνου
υ → απόστημα

Άρα $E_{ολικο} = 256 + 512 = 768 m^2$.

Σχήμα:

ΕΡΓΑ

Έργο 1: Όταν εκτελείτε επαναλαμβανόμενους πολλαπλασιασμούς με τον ίδιο αριθμό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό των δυνάμεων για να συνοψίσετε. Για παράδειγμα: $7\times7\times7\times7\times7\times7=7^6$

Είναι αλήθεια ότι;

Α) Ο αριθμός 8^{16} είναι 8 φορές μεγαλύτερος από τον 8^{15}. Γιατί;

Β) Ο αριθμός 8^{10} είναι 10 φορές μεγαλύτερος από τον αριθμό 8. Γιατί;

Α) Σωστό, καθώς $8^{15}\cdot8=8^{16}$ (8^{15+1}), επομένως το 8^{15} είναι 8 φορές μεγαλύτερο από το 8^{16}.

Β) Λάθος, το 8^{10} είναι 8^9 φορές μεγαλύτερο από το 8.

Έργο 2: Μια καθηγήτρια μαθηματικών έθεσε στους μαθητές της την εξής ερώτηση: Τι είναι «εμβαδόν»;

α) Αν θεωρείτε ότι η ερώτηση είναι καλώς διατυπωμένη δώστε τον ορισμό.

β) Σε περίπτωση που χρειάζεται κάποια διόρθωση τότε επαναδιατυπώσετε την ορθά και δώστε τον ορισμό.

γ) Να κατασκευάσετε ένα μαθηματικό πρόβλημα που να περιέχει οπωσδήποτε την έννοια του «εμβαδού» και τον αριθμό «128», στη συνέχεια να το επιλύσετε.

β) + α) Το ερώτημα μπορεί να είναι σύντομο, αλλά ένας μαθητής που έχει κατανοήσει την έννοια του εμβαδού, δεν θα δυσκολευτεί να απαντήσει. Ίσως, κατά την γνώμη μου καλύτερη διατυπωμένη ερώτηση είναι:

«Τι είναι το εμβαδόν μιας επιφάνειας;»

απάντηση:

Το εμβαδόν είναι ένας θετικός αριθμός που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει ένα σχήμα - επιφάνεια.

Έργο 3 : Μια φάρμα έχει πάπιες και άλογα. Όλα τα ζώα μαζί είναι 52. Το πλήθος των αλόγων είναι διπλάσιο από τις πάπιες και αυξημένο κατά 4. Πόσες είναι οι πάπιες και πόσα τα άλογα;

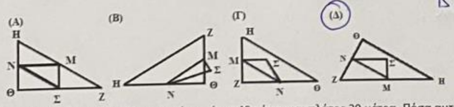
Έστω x οι πάπιες και y τα άλογα

$$\begin{cases} x+y=52 \\ y=2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=52-x \;(1) \\ 52-x=2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ -3x=-48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \\ x=\frac{48}{3}=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=52-16 \\ x=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=36 \\ x=16 \end{cases}$$

$(x,y)=(16,36)$ $\boxed{\text{16 πάπιες, 36 άλογα}}$

Έργο 4: Κυκλώστε το ένα από τα παρακάτω σχήματα που ανταποκρίνεται στην ακόλουθη περιγραφή.

Το τρίγωνο ΗΖΘ είναι ορθογώνιο και έχει τη γωνία Θ ορθή. Η πλευρά ΖΘ είναι μικρότερη από την ΗΘ. Το Μ είναι μέσον της ΗΖ και το Ν είναι μέσον της ΖΘ. Το Σ είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Το τμήμα ΜΝ είναι μεγαλύτερο από το ΜΣ.



Δ είναι το σωστό σχήμα.

Έργο 5: Ένας χώρος στάθμευσης έχει μήκος 40 μέτρα και πλάτος 20 μέτρα. Πόσα αυτοκίνητα μπορούν να χωρέσουν στον χώρο στάθμευσης αυτόν, αν κάθε αυτοκίνητο απαιτεί έναν χώρο στάθμευσης που είναι 5 μέτρα μήκος και 2,5 μέτρα πλάτος; Πόσα αυτοκίνητα χωράνε κατά μήκος και πόσα κατά πλάτος;

40m

20m

$E_{parking}=20\cdot40=\underline{800\ m^2}$

$E_{αυτοκινήτου}=5\cdot2{,}5=\underline{12{,}5\ m^2}$

- Στον χώρο στάθμευσης χωράνε (όλα) $\frac{800}{12{,}5}=64$ αυτοκίνητα.
- Κατά μήκος χωράνε: (✱) $\frac{40}{5}=8$ αυτοκίνητα επί $\frac{20}{2{,}5}=8 \Rightarrow 8^2=64$
- Κατά πλάτος: $\frac{20}{2{,}5}=8$ επί $\frac{40}{5}=8 \Rightarrow 8^2=64$

ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ καθώς στο εμβαδόν δεν παίζει ρόλο αν θα τοποθετηθούν κατά μήκος ή κατά πλάτος.

(✱) Αν βάλαμε 1 σειρά αμαξιών κατά μήκος είναι: $\frac{40}{5}=8$ αμάξια

και αν βάλαμε 1 σειρά αυτών κατά πλάτος είναι: $\frac{20}{2{,}5}=8$ αυτού.

8ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

8.1 Δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την μετάβαση τους από την Πρωτοβάθμια στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα μαθηματικά.

Η μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στα μαθηματικά μπορεί να συνοδεύεται από διάφορες δυσκολίες για τους μαθητές. Ορισμένες από αυτές τις δυσκολίες που παρατηρήθηκαν μετά από την έρευνα και τις συνεντεύξεις μαθητών παρατίθενται στη συνέχεια.

Κατά τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές αντιμετωπίζουν αυξημένο αριθμό μαθημάτων, κάποια από τα οποία μπορεί να είναι προηγμένα ή να απαιτούν νέες δεξιότητες. Αυτό μπορεί να φαίνεται απαιτητικό και χρονοβόρο. Οι μαθητές εισέρχονται σε πιο προχωρημένες μαθηματικές έννοιες καθώς και σε περισσότερα πεδία των μαθηματικών όπως η άλγεβρα, η γεωμετρία και αργότερα η στατιστική. Αυτές οι νέες έννοιες μπορεί να είναι αφηρημένες και δύσκολες να κατανοηθούν. Οι μαθητές πρέπει να αναπτύξουν δεξιότητες ανάλυσης και επίλυσης προβλημάτων, οι οποίες απαιτούν συχνά λογική σκέψη και δημιουργικότητα. Συχνό είναι το φαινόμενο οι μαθητές να μην διακατέχονται από αυτήν τη λογική σκέψη. Επιπλέον αντιμετωπίζουν φόβο ή άγχος σχετικά με τα μαθηματικά, καθώς οι προκλήσεις αυξάνονται. Αυτό μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την απόδοσή τους. Η υποβολή εργασιών σε συγκεκριμένα χρονικά περιθώρια και την προετοιμασία για εξετάσεις είναι κάτι πρωτόγνωρο για τους μαθητές που μπορεί να τους προκαλέσει πίεση. Η αλήθεια είναι ότι την περίοδο του δημοτικού σχολείου το οικογενειακό περιβάλλον βοηθάει στη διεκπεραίωση των σχολικών εργασιών του μαθητή και έτσι οι μαθητές νιώθουν μεγαλύτερη ασφάλεια. Η διαδικασία αυτή συνήθως σταματά με τη μετάβαση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση διότι κατά πλειοψηφία η οικογένεια δεν μπορεί πλέον να ανταπεξέλθει στις σχολικές απαιτήσεις και έτσι ξεκινάει η φροντιστηριακή βοήθεια. Ιδανικά οι μαθητές θα πρέπει να λειτουργούν αυτοβούλως στις σχολικές τους υποχρεώσεις από μικρότερη ηλικία ώστε να μάθουν το σωστό τρόπο διαβάσματος. Κατά τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι μαθητές πρέπει να αναλάβουν μεγαλύτερη αυτονομία στην οργάνωση του χρόνου τους και την προετοιμασία για τα μαθήματα. Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στην ενθάρρυνση της ανάπτυξης των μαθηματικών δεξιοτήτων και της αυτοπεποίθησης των μαθητών στα μαθηματικά.

Το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών που εισέρχονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση φαίνεται να είναι αρκετά περιορισμένο. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας μας σε συνδυασμό με τη δύσκολη διαχείριση της σχολικής διαδικασίας την περίοδο της πανδημίας που διήρκησε δύο σχολικά έτη. Μεγάλο πλήγμα για τους μαθητές φαίνεται να είναι η κατανόηση και η λύση μαθηματικών προβλημάτων, όπως προκύπτει από τα αντίστοιχα έργα δείχνουν αρκετά χαμηλά τα ποσοστά στην επίλυση προβλημάτω. Συγκεκριμένα, τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τα συνολικά αποτελέσματα των μαθητών στο έργο 5 δείχνουν ότι δεν έχουν εντοπίσει την έννοια της μοντελοποίησης από φυσικά ή πραγματικά προβλήματα το μεγαλύτερο μέρος του ποσοστού των μαθητών.

8.2 Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων.

Η σημαντικότερη δυσκολία που έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές είναι η πλήρης κατανόηση της μαθηματικής έννοιας που θέλουν να περιγράψουν με το πρόβλημά τους. Αυτό απαιτεί καλή κατανόηση των μαθηματικών αρχών και των σχέσεων. Συχνά, οι μαθητές χρειάζεται να κατανοήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες που δεν βασίζονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Αυτό μπορεί να απαιτεί μεγαλύτερη συναισθηματική νοημοσύνη και αφαιρετική σκέψη, για το λόγο αυτό θα πρέπει η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος να ζητείται σε απλές μαθηματικές έννοιες μέχρις ότου έρθει η εξοικείωση και η ευχέρεια. Ακόμη, οι μαθητές πρέπει να έχουν κατανοήσει τα αναλυτικά βήματα που απαιτούνται για να λυθεί ένα παρόμοιο πρόβλημα και να είναι σε θέση να τα περιγράφουν στην ακολουθία σκέψης τους. Μια άλλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η επιλογή των κατάλληλων αριθμών και μεγεθών για το πρόβλημά τους, δυσκολεύονται να επιλέξουν αριθμούς και κατάλληλα μεγέθη.

Τέλος, ο τρόπος διατύπωσης του προβλήματος είναι αποτρεπτικός στην κατασκευή του μαθηματικού προβλήματος που τους ζητείται να θέσουν. Οι μαθητές πρέπει να είναι σαφείς και προσεκτικοί στη γραφή του προβλήματος για να μην προκαλούν παρερμηνείες όμως τις περισσότερες φορές αυτό δεν επιτυγχάνεται. Συχνά οι μαθητές άλλο σκέφτονται, άλλο εννοούν και άλλο διατυπώνουν. Η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος απαιτεί λογική δομή και σειρά σκέψης. Οι μαθητές πρέπει να μπορούν να συνδυάζουν μαθηματικές έννοιες και πληροφορίες σε μια συνεκτική μορφή. Η δυσκολία να αφαιρέσουν τα περιττά στοιχεία και να επικεντρωθούν στην ουσία του προβλήματος μπορεί να είναι πρόκληση για ορισμένους μαθητές και θέλει χρόνο για να φτάσουν σε αυτό το επίπεδο.

8.3 Τρόποι αντιμετώπισης

Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να συνομιλήσουν ατομικά με τους μαθητές για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Μπορούν να ρωτήσουν για τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν, τις ανησυχίες τους και τις δυσκολίες στην επιλογή των αριθμητικών και των λογικών συνδέσεων. Οι εκπαιδευτικοί μπορούν να ζητήσουν από τους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματικά προβλήματα και να τα υποβάλουν για αξιολόγηση. Αυτό μπορεί να αποκαλύψει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά την κατασκευή των προβλημάτων. Επίσης οι εκπαιδευτικοί μπορούν να αναλύσουν τα λάθη που κάνουν οι μαθητές κατά την κατασκευή των προβλημάτων. Μπορεί να πρόκειται για λάθη στην ακρίβεια των πληροφοριών, την κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, ή την επιλογή των κατάλληλων μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον οι εκπαιδευτικοί μπορεί να χρησιμοποιήσουν εργαλεία και τεχνικές όπως τα ερωτηματολόγια, οι αναλύσεις περιπτώσεων ή η παρατήρηση για να καταγράψουν τις δυσκολίες των μαθητών. Στη συνέχεια υποστηρίζοντας τους με ψηφιακές εφαρμογές, λογισμικό και διαδικτυακούς πόρους γίνεται κατανοητό στους μαθητές πώς μπορούν να εφαρμόσουν τα μαθηματικά στην πραγματική ζωή.

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο το οποίο αναλύθηκε στην παρούσα εργασία είναι η εφαρμογή ρεαλιστικών μεθόδων, που αποτελεί σημαντικό στοιχείο της μαθησιακής διαδικασίας και στοχεύει στο να καταστήσει τα μαθηματικά πιο συναφή και εφαρμόσιμα στην πραγματική ζωή. Αυτό βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και να αναπτύξουν δεξιότητες που μπορούν να χρησιμοποιήσουν εκτός του μαθηματικού τάξης. Ένας από τους πιο αποτελεσματικούς τρόπους για την ενσωμάτωση της ρεαλιστικής προσέγγισης είναι να χρησιμοποιούνται πραγματικά προβλήματα από την καθημερινή ζωή ή από διάφορους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας ως πηγές άσκησης και εφαρμογής των μαθηματικών. Πολύ σημαντικός παράγοντας είναι η συνεργατική μάθηση η οποία προάγει την ανταλλαγή ιδεών και την ανάπτυξη δεξιοτήτων συνεργασίας, που είναι σημαντικές στην πραγματική ζωή. Κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, ένα σημαντικό βήμα που βοηθά την κριτική σκέψη και τη δημιουργικότητα των μαθητών είναι να τους ζητηθούν να λύσουν προβλήματα που δεν έχουν μοναδική λύση, η διαδικασία αύτη μπορεί να ενσωματώσει την ερευνητική πτυχή και την εξερεύνηση.

8.4 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση επικεντρώνεται στην εφαρμογή των μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα. Αυτό μπορεί να βελτιώσει την κατανόηση και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά. Με βάση αυτή τη θεωρητική προσέγγιση θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί η συγκριτική ανάλυση σε σχέση με άλλες προσεγγίσεις όπως η παραδοσιακή διδασκαλία. Θα είχε ενδιαφέρον σε δείγμα δύο σχολικών τάξεων του ίδιου επιπέδου να εφαρμοστεί διαφορετική προσέγγιση με σκοπό την καταγραφή των αποτελεσμάτων όσον αφορά την κατανόηση, το ενδιαφέρον των μαθητών καθώς και πως επηρεάζει τη μαθηματική αποτελεσματικότητα και την κατανόηση της μαθηματικής θεωρίας. Έτσι θα διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης στην Ελληνική σχολική πραγματικότητα. Η έρευνα αυτή θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί σε ποικίλα επίπεδα εκπαίδευσης και σε διάφορες χώρες του κόσμου.

Τέλος, με βάση τα δεδομένα που προαναφέρθηκαν από την έρευνα που πραγματοποιήσαμε φαίνεται ότι η ΣΤ΄ Δημοτικού έχει πιο ενθαρρυντικά αποτελέσματα έναντι των υπολοίπων ηλικιακών επιπέδων. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα αυτό να οφείλεται στην αξιολόγηση της Ελληνικής PISA που πραγματοποιείται εδώ και 2 χρόνια στη χώρα μας. Φαίνεται να έχει βοηθήσει στη βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας και για τον λόγο αυτό θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να μελετηθεί εκ νέου η ίδια έρευνα σε 2 με 3 περίπου χρόνια ώστε να διαπιστωθεί η επιβεβαίωση ή η απόρριψη της παρούσας υπόθεσης.

Βιβλιογραφία

Beckers, D. (2019). Why to publish on mathematics education so as to be useful? Educational Studies in Mathematics and its founder Hans Freudenthal. Educational Studies in Mathematics, 101(1), 7-17.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. The Journal of mathematical behavior, 21(4), 401-421.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research, 102, 101391.

Chang, K. E., Wu, L. J., Weng, S. E., & Sung, Y. T. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. Computers & Education, 58(2), 775-786.

Chua, V. C. (2021). Improving learners' productive disposition through realistic mathematics education, a teacher's critical reflection of personal pedagogy. Reflective Practice, 22(6), 809-823.

English, L. D. (2020). Teaching and learning through mathematical problem posing: Commentary. International Journal of Educational Research, 102, 101451.

Fredriksen, H. (2021). Exploring realistic mathematics education in a flipped classroom context at the tertiary level. International Journal of Science and Mathematics Education, 19(2), 377-396.

Freudenthal , H. (1983), Didactical Phenomenology of Mathematical Structure, Dordrecht, Th Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal Institute. The Netherlands. Amesa Conference.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics So as to Be Useful. Educational Studies in Mathematics, 1(1/2), 3–8. http://www.jstor.org/stable/3481973

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 133–150. http://www.jstor.org/stable/3482361

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. The roles of representation in school mathematics, 2001, 1-23.

Hickendorff, M. (2013). The effects of presenting multidigit mathematics problems in a realistic context on sixth graders' problem solving. Cognition and Instruction, 31(3), 314-344.

IEA TIMSS & PIRLS. Boston College Lynch School of Education and Human Development. Available at: https://timssandpirls.bc.edu/ [Προσπελάστηκε στις 24-08-2023]

Land, T. J., Tyminski, A. M., & Drake, C. (2019). Examining aspects of teachers’ posing of problems in response to children’s mathematical thinking. Journal of Mathematics Teacher Education, 22, 331-353.

Oldham, E., Valk, T. V. D., Broekman, H., & Berenson, S. (1999). Beginning Pre-service Teachers’ Approaches to Teaching the Area Concept: identifying tendencies towards realistic, structuralist, mechanist or empiricist mathematics education. European journal of teacher education, 22(1), 23-43.

Olsson, J., & Granberg, C. (2022). Teacher-student interaction supporting students’ creative mathematical reasoning during problem solving using Scratch. Mathematical Thinking and Learning, 1-28.

Pisa Available at: http://www.iep.edu.gr/pisa/ [Προσπελάστηκε στις 24-08-2023]

Pisa Available at: https://www.oecd.org/pisa/ [Προσπελάστηκε στις 24-08-2023]

Program for International Student Assessment (PISA) Available at: https://nces.ed.gov/surveys/pisa/ [Προσπελάστηκε στις 24-08-2023]

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. The Mathematics Enthusiast, 10(1), 9-34.

Sitorus, J. (2016). Students’ creative thinking process stages: Implementation of realistic mathematics education. Thinking Skills and Creativity, 22, 111-120.

Stage, F. K., & Kloosterman, P. (1992). Measuring beliefs about mathematical problem solving. School science and mathematics, 92(3), 109-115.

Stemn, B. S. (2017). Rethinking mathematics teaching in Liberia: Realistic mathematics education. Childhood Education, 93(5), 388-393.

TIMSS and Pirls International Study Center. TIMSS and PIRLS Home. (n.d.). https://timssandpirls.bc.edu/

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational studies in Mathematics, 54, 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (1996). Assessment and realistic mathematics education (Vol. 19). Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. Zdm, 37, 287-307.

Wathne, U., & Carlsen, M. (2022). Third grade students' multimodal mathematical reasoning when collaboratively solving combinatorial problems in small groups. Mathematical Thinking and Learning, 1-20.

Yee, L. P., de Lange, J., & Schmidt, W. (2006, August). What are PISA and TIMSS? What do they tell us. In Proceedings of the international congress of mathematicians, Madrid (pp. 1663-1672).

Γαγάτσης, Α., Σπύρου, Π., & Ευαγγελίδου, Α. (2004). Πολλαπλές αναπαραστάσεις, ανθρώπινη νοημοσύνη και μάθηση. Στο Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Φτιάκα, Ε., Κυριακίδης, Λ., Τσαγγαρίδου, Ν. & Κουτσούλης, Μ., Σύγχρονες Τάσεις στην Εκπαιδευτική Έρευνα και Πρακτική, 8, 427-434.

Εξαρχάκος, Γ. (2014). Οι νέες τεχνολογίες και η εφαρμογή τους στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση: οπτικοποίηση των πληροφοριών: η σημασία της για την υποστήριξη διδασκαλίας γεωμετρικών σχημάτων (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης. Τομέας Μαθηματικών και Πληροφορικής).

Ζωιτσάκος, Σ. (2019). Μαθηματική γνώση των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των ανώτερων μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

ΚΑΡΑΛΗ, Ο. (2009). Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗΣ ΖΩΗΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ [ΔΙπλωματική μελέτη Η ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΗΣ ΖΩΗΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ].

Καραλιάς Θ. ,κ.α.(2022). Θέμα Εργασίας: Διδασκαλία με βάση την επίλυση προβλήματος. ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

Κλαουδάτος Ν. (2011). Σημειώσεις του Μαθήματος Δ7: 1.Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. 2.Εισαγωγή στη Θεωρία της Διδασκαλίας. Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Μεθοδολογίας και Διδακτικής των Μαθηματικών. Τμήμα Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Ματθαίου Σ. ,(2005). Διδασκαλία των θετικών και αρνητικών αριθμών βασισμένη στις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευση. Μεταπτυχιακό Τμήμα Διδακτικής Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μποζίκης, Δ. (2020). Η Ευρωπαϊκή Διάσταση στην Εκπαίδευση, το Διεθνές Πρόγραμμα Αξιολόγησης των μαθητών PISA και τα Ελληνικά δεδομένα.

Νταχμίρη, Ε. (2020). Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.

Πετροπούλου, Γ. (2018). Η διδασκαλία των μαθηματικών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Doctoral dissertation, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΚΠΑ). Σχολή Θετικών Επιστημών. Τμήμα Μαθηματικών).

Πιπίνος, Γ. (2006). Διδακτική Αξιοποίηση της θεωρίας van Hiele. Επιστημονικό Βήμα, 5, 66-83

ΠΛΑΤΗΣ, Κ. (2015). Σύγχρονες τάσεις για την Επίλυση και τη Θέση-Κατασκευή Μαθηματικών Προβλημάτων. Οι επιρροές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Ρεμούνδου, Δ. (2021). Θεωρίες και πρακτικές για την εννοιολόγηση και τη διδακτική εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης με χρήση τεχνολογιών πληροφορίας και επικοινωνιών: η έννοια της" μεταβολής" και η δυνατότητα επιρροής της στη διδασκαλία βασικών εννοιών της ανάλυσης από την πρωτοβάθμια μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Σκούφη, Α. (2013). Η διδακτική εννοιών της ανάλυσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση: προσεγγίσεις με χρήση νέων τεχνολογιών υπό τη φιλοσοφία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης).

Τσατσάνης, Δ. Μέθοδοι Επίλυσης και Διερεύνησης Μαθηματικών Προβλημάτων στην Δευτεροβάθμια και στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση.

Χρόνη, Α. (2022). Διεθνείς διαγωνισμοί αξιολόγησης στα μαθηματικά: PISA και TIMSS: μια διερεύνηση για τον ρόλο και την επιρροή τους στα ΑΠΣ, καθώς και την εμπλοκή των μαθηματικών εκπαιδευτικών λογισμικών στις νέες συνθήκες που έχουν δημιουργηθεί γενικότερα στη μαθηματική πραγματικότητα του ελληνικού σχολείου.

Ερωτηματολόγιο

Αγαπητέ μαθητή/τρια,
Είμαι μεταπτυχιακή φοιτήτρια στο Πρόγραμμα « Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του Ελληνικού Ανοιχτού Πανεπιστημίου και θα ήθελα την πολύτιμη βοήθειά σου για την έρευνα που διεξάγω σχετικά με την επίλυση προβλημάτων υπό συνθήκες καθημερινής ζωής. Μπορείς να απαντήσεις χωρίς άγχος, αφού δεν θα βαθμολογηθείς, θα ήθελα όμως να απαντήσεις με υπευθυνότητα καθώς τα συμπεράσματα από τις απαντήσεις σου θα κρίνουν την αντικειμενικότητα της έρευνας μου.

1. Φύλο : κορίτσι ☐, αγόρι ☐.
2. Τάξη :
3. Ο βαθμός μου στο τελευταίο διαγώνισμα είναι:
4. Ο βαθμός μου στο τελευταίο τρίμηνο είναι:

Ερωτηματολόγιο:
1 Διαφωνώ , 2 Διαφωνώ λίγο , 3 Συμφωνώ λίγο , 4 Συμφωνώ .

		1	2	3	4
1.	Μου αρέσουν τα μαθηματικά.				
2.	Είμαι καλός στα μαθηματικά.				
3.	Η χρήση βοηθήματος με βοηθάει στο διάβασμα μου.				
4.	Χωρίς φροντιστηριακή βοήθεια δεν μπορώ να καταλάβω μαθηματικά.				
5.	Μπορώ να κατανοήσω σε βάθος μια μαθηματική έννοια.				
6.	Μπορώ εύκολα να λύσω μαθηματικά προβλήματα που χρειάζονται αρκετό χρόνο για να ολοκληρωθούν.				
7.	Μπορώ να λύσω με δυσκολία μαθηματικά προβλήματα αν επιμείνω για ώρα εκεί.				
8.	Αν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα σε λίγα λεπτά μάλλον δεν μπορώ να το λύσω καθόλου.				
9.	Αν δεν μπορώ να λύσω γρήγορα ένα μαθηματικό πρόβλημα σταματάω την προσπάθεια.				
10.	Όταν έχω κατανοήσει μια μαθηματική έννοια μπορώ να κατασκευάσω ένα πρόβλημα που να στηρίζεται σε αυτήν.				
11.	Η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος με δυσκολεύει αρκετά.				
12.	Υπάρχουν λεκτικά προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν ακολουθώντας μια προκαθορισμένη σειρά βημάτων.				
13.	Τα λεκτικά προβλήματα μπορούν να λυθούν χωρίς να θυμάμαι τύπους.				
14.	Η απομνημόνευση βημάτων δεν είναι χρήσιμη για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων.				
15.	Οποιοδήποτε λεκτικό πρόβλημα μπορεί να λυθεί εάν γνωρίζω τα σωστά βήματα που πρέπει να ακολουθήσω.				
16.	Οι υπολογιστικές δεξιότητες είναι άχρηστες αν δεν μπορώ να τις εφαρμόσω σε πραγματικές καταστάσεις.				

17.	Εκτός από τη σωστή απάντηση στα μαθηματικά είναι σημαντικό να κατανοήσουμε γιατί η απάντηση είναι σωστή.				
18.	Ένα άτομο που δεν καταλαβαίνει γιατί μια απάντηση σε ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι σωστή δεν έχει λύσει πραγματικά το πρόβλημα.				
19.	Δεν είναι σημαντικό να κατανοήσουμε γιατί λειτουργεί μια μαθηματική διαδικασία εφόσον δίνει μια σωστή απάντηση.				
20.	Η ικανότητα στα μαθηματικά αυξάνεται όταν κάποιος μελετά σκληρά.				
21.	Η γνώση των μαθηματικών θα με βοηθήσει στην καθημερινή μου ζωή και στη μελλοντική μου εργασία				
22.	Τα μαθηματικά είναι ένα αξιόλογο και απαραίτητο μάθημα.				

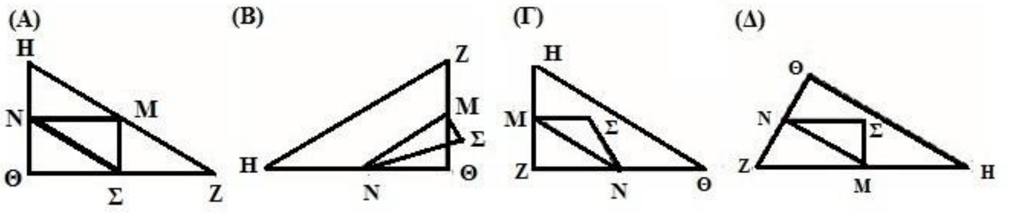
ΈΡΓΑ

Έργο 1: Όταν εκτελείτε επαναλαμβανόμενους πολλαπλασιασμούς με τον ίδιο αριθμό μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό των δυνάμεων για να συνοψίσετε. Για παράδειγμα:
$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^6$
Είναι αλήθεια ότι;
A) Ο αριθμός 8^{16} είναι 8 φορές μεγαλύτερος από τον 8^{15}. Γιατί;
B) Ο αριθμός 8^{10} είναι 10 φορές μεγαλύτερος από τον αριθμό 8. Γιατί;

Έργο 2: Μια καθηγήτρια μαθηματικών έθεσε στους μαθητές της την εξής ερώτηση: Τι είναι «εμβαδόν»;
α) Αν θεωρείτε ότι η ερώτηση είναι καλώς διατυπωμένη δώστε τον ορισμό.
β) Σε περίπτωση που χρειάζεται κάποια διόρθωση τότε επαναδιατυπώσετε την ορθά και δώστε τον ορισμό.
γ) Να κατασκευάσετε ένα μαθηματικό πρόβλημα που να περιέχει οπωσδήποτε την έννοια του «εμβαδού» και τον αριθμό «128», στη συνέχεια να το επιλύσετε.

Έργο 3 : Μια φάρμα έχει πάπιες και άλογα. Όλα τα ζώα μαζί είναι 52. Το πλήθος των αλόγων είναι διπλάσιο από τις πάπιες και αυξημένο κατά 4. Πόσες είναι οι πάπιες και πόσα τα άλογα;

Έργο 4: Κυκλώστε το ένα από τα παρακάτω σχήματα που ανταποκρίνεται στην ακόλουθη περιγραφή.
Το τρίγωνο ΗΖΘ είναι ορθογώνιο και έχει τη γωνία Θ ορθή. Η πλευρά ΖΘ είναι μικρότερη από την ΗΘ. Το Μ είναι μέσον της ΗΖ και το Ν είναι μέσον της ΖΘ. Το Σ είναι ένα σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Το τμήμα ΜΝ είναι μεγαλύτερο από το ΜΣ.



Έργο 5: Ένας χώρος στάθμευσης έχει μήκος 40 μέτρα και πλάτος 20 μέτρα. Πόσα αυτοκίνητα μπορούν να χωρέσουν στον χώρο στάθμευσης αυτόν, αν κάθε αυτοκίνητο απαιτεί έναν χώρο στάθμευσης που είναι 5 μέτρα μήκος και 2,5 μέτρα πλάτος; Πόσα αυτοκίνητα χωράνε κατά μήκος και πόσα κατά πλάτος;

Επίλογος

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.