



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Προχωρημένες Σπουδές στη Φυσική**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Μοναδικά Κβαντικά Συστήματα: Θεωρία, Πειραματικές Τεχνικές και
Προσομοίωση με Python**

ΚΟΥΜΟΥΛΙΔΟΥ ΣΟΦΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΝΔΡΕΑΣ ΖΟΥΠΑΣ

ΜΑΪΟΣ, 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

**Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Προχωρημένες Σπουδές στη Φυσική**

**Μοναδικά Κβαντικά Συστήματα: Θεωρία, Πειραματικές Τεχνικές και
Προσομοίωση με Python**

ΚΟΥΜΟΥΛΙΔΟΥ ΣΟΦΙΑ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΕΠΙΒΛΕΨΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Επιβλέπων Καθηγητής:

**Ανδρέας Ζούπας
ΣΕΠ της ΣΘΕΤ στο Ελληνικό
Ανοιχτό Πανεπιστήμιο**

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

**Κωνσταντίνος Παπαδόπουλος
Διευθυντής Ερευνών ΕΚΕΦΕ
Δημόκριτος**

ΜΑΪΟΣ, 2026

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου κ. Ανδρέα Ζούπα για την στήριξη και καθοδήγηση και την οικογένεια μου για την υπομονή και την υποστήριξη.

Στην μητέρα μου

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται τη φυσική και τη δυναμική των μοναδικών κβαντικών συστημάτων, με έμφαση στη θεωρητική περιγραφή, τους μηχανισμούς ελέγχου και αποσυντοχής, καθώς και στην αριθμητική προσομοίωση της συμπεριφοράς τους μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Python. Ως βασικό θεωρητικό πρότυπο χρησιμοποιείται το διεπίπεδο κβαντικό σύστημα, το οποίο αποτελεί θεμελιώδες μοντέλο για την περιγραφή των qubits και της αλληλεπίδρασής τους με ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

Αρχικά εξετάζονται σύγχρονες πειραματικές πλατφόρμες υλοποίησης μοναδικών κβαντικών συστημάτων, όπως τα παγιδευμένα ιόντα, τα ουδέτερα άτομα σε οπτικές παγίδες και οι κβαντικές κουκκίδες, ενώ γίνεται σύντομη αναφορά και σε άλλες σημαντικές τεχνολογίες, όπως τα υπεραγώγιμα qubits και τα κέντρα NV σε διαμάντι. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι βασικές φυσικές αρχές της κβαντικής μηχανικής που σχετίζονται με τα διεπίπεδα συστήματα, τις ταλαντώσεις Rabi, τη σφαίρα Bloch και την αλληλεπίδραση φωτός-ύλης.

Έμφαση δίνεται στη θεωρία των ανοιχτών κβαντικών συστημάτων και στο φαινόμενο της αποσυντοχής (decoherence), το οποίο αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους περιοριστικούς παράγοντες για τις κβαντικές τεχνολογίες. Παρουσιάζονται το μητρώο πυκνότητας, το ανηγμένο μητρώο πυκνότητας και η εξίσωση Lindblad ως βασικά εργαλεία περιγραφής της μη μοναδιαίας δυναμικής και της αλληλεπίδρασης ενός κβαντικού συστήματος με το περιβάλλον του.

Στο υπολογιστικό μέρος της εργασίας πραγματοποιείται αριθμητική προσομοίωση της δυναμικής κλειστών και ανοιχτών κβαντικών συστημάτων με χρήση της βιβλιοθήκης QuTiP (Quantum Toolbox in Python). Μελετώνται οι Rabi ταλαντώσεις, η επίδραση του αποσυντονισμού, η αυθόρμητη εκπομπή και η απώλεια φάσης, ενώ η αναπαράσταση στη σφαίρα Bloch χρησιμοποιείται για τη γεωμετρική απεικόνιση της κβαντικής εξέλιξης και της αποσυντοχής. Τέλος, παρουσιάζεται ένα απλοποιημένο μοντέλο παγιδευμένου ιόντος, στο οποίο εξετάζονται η σύζευξη εσωτερικών και κινητικών βαθμών ελευθερίας, οι μεταβάσεις πλευρικών ζωνών και η διαδικασία ψύξης πλευρικής ζώνης (sideband cooling).

Η εργασία αναδεικνύει τη σημασία της συνδυαστικής προσέγγισης θεωρίας και αριθμητικής προσομοίωσης για τη μελέτη ρεαλιστικών κβαντικών συστημάτων και τη βαθύτερη κατανόηση των μηχανισμών που διέπουν τις σύγχρονες κβαντικές τεχνολογίες.

Abstract

This thesis deals with the physics and dynamics of single quantum systems, with an emphasis on their theoretical description, control and decoherence mechanisms, as well as the numerical simulation of their behavior using the Python programming language. The two-level quantum system is used as the basic theoretical model, which serves as a fundamental model for describing qubits and their interaction with electromagnetic fields.

First, we examine modern experimental platforms for realizing unique quantum systems, such as trapped ions, neutral atoms in optical traps, and quantum dots, while briefly mentioning other important technologies, such as superconducting qubits and NV centers in diamond. Next, the basic physical principles of quantum mechanics related to two-level systems, Rabi oscillations, the Bloch sphere, and light-matter interaction are presented.

Emphasis is placed on the theory of open quantum systems and the phenomenon of decoherence, which is one of the most significant limiting factors for quantum technologies. The density matrix, the reduced density matrix, and the Lindblad equation are presented as fundamental tools for describing the non-unitary dynamics and the interaction of a quantum system with its environment. The computational part of the thesis involves numerical simulations of the dynamics of closed and open quantum systems using the QuTiP (Quantum Toolbox in Python) library. Rabi oscillations, the effect of decoherence, spontaneous emission, and phase loss are studied, while the Bloch sphere representation is used for the geometric visualization of quantum evolution and decoherence.

Finally, a simplified trapped-ion model is presented, in which the coupling of internal and kinetic degrees of freedom, sideband transitions, and the sideband cooling process are examined.

The work highlights the importance of a combined theoretical and numerical simulation approach for studying realistic quantum systems and gaining a deeper understanding of the mechanisms underlying modern quantum technologies.

Πίνακας περιεχομένων

Κατάλογος Σχημάτων.....	9
Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή.....	13
1.1 Τι είναι τα κβαντικά συστήματα.....	14
1.2 Μοναδικά κβαντικά συστήματα (Single Quantum Systems).....	14
1.3 Απομόνωση και χειρισμός κβαντικών καταστάσεων.....	16
1.4 Σκοπός και Δομή της Εργασίας.....	16
Κεφάλαιο 2 – Δημιουργία Μοναδικών Κβαντικών Συστημάτων.....	18
2.1 Εισαγωγή στην τεχνολογία των μοναδικών συστημάτων.....	19
2.2 Παγιδευμένα Ιόντα (Trapped Ions).....	20
2.2.1 Απομόνωση ιόντος σε παγίδα ραδιοσυχνότητας -παγίδα Paul.....	21
Παγίδευση φορτισμένων σωματιδίων σε δισδιάστατα τετραπολικά πεδία.....	22
Παγίδευση φορτισμένων σωματιδίων σε τρισδιάστατα τετραπολικά πεδία.....	24
2.2.2 Από την παγίδευση στον έλεγχο κβαντικών καταστάσεων.....	26
2.2.3 Υλοποίηση qubit σε παγιδευμένα ιόντα.....	27
2.2.4 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και προκλήσεις των παγιδευμένων ιόντων.....	29
2.3 Ουδέτερα Άτομα (Neutral Atoms).....	31
2.3.1 Μαγνητο-οπτικές παγίδες (MOT – Magneto-Optical Traps).....	31
2.3.2 Οπτικές σιμπίδες και οπτικά πλέγματα.....	34
2.3.3 Υλοποίηση qubit σε ουδέτερα άτομα.....	37
2.3.4 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και προκλήσεις των ουδέτερων ατόμων.....	38
2.4 Κβαντικές Κουκκίδες (Quantum Dots).....	39
2.4.1 Μέθοδοι δημιουργίας Κβαντικών κουκκίδων.....	40
2.4.2 Εξιτόνια σε κβαντικές κουκκίδες.....	41
2.4.3 Κβαντικές κουκκίδες – πηγές μονήρους φωτονίου.....	43
2.4.4 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και προκλήσεις.....	44
2.5 Άλλες Πλατφόρμες Μοναδικών Κβαντικών Συστημάτων (Σύντομη Αναφορά).....	45
2.5.1 Κέντρα NV στο Διαμάντι (NV Centers in Diamond).....	46
2.5.2 Υπεραγωγή Qubits.....	50
2.6 Συγκριτική Ανάλυση Πλατφορμών.....	52
Κεφάλαιο 3 – Απομόνωση και Χειρισμός Μοναδικών Κβαντικών Συστημάτων.....	54
3.1 Αλληλεπίδραση Φωτός-Ύλης.....	54
3.1.1 Δύο-Επιπέδων Σύστημα (Two-Level System).....	54
3.1.2 Η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης με το φως.....	57
3.1.3 Οι Rabi ταλαντώσεις.....	60
Αποσυντονισμός (Detuning).....	61
Απόσβεση των ταλαντώσεων Rabi.....	62
3.1.4 Η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδραση ενός παγιδευμένου ιόντος (ατόμου) με το φως.....	64
3.2 Οπτικές Εξισώσεις Bloch (Optical Bloch Equations).....	66
3.2.1 Μητρώο Πυκνότητας (Density Matrix).....	67
3.2.2 Οπτικές εξισώσεις Bloch -Φυσική Ερμηνεία των Εξισώσεων.....	68
3.2.3 Bloch Sphere – Οπτικοποίηση.....	70
3.3 Παγίδευση μέσω φωτός – Δυνάμεις Δίπολου (Optical Dipole Traps).....	73
3.3.1 Η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας.....	74
3.3.2 Η οπτική δύναμη διπόλου.....	77
3.3.3 Μετατόπιση ενεργειακών σταθμών και οπτικά δυναμικά.....	80
3.4 Laser Cooling – Τεχνικές Ψύξης με Φως.....	82

3.4.1 Ψυχρά Άτομα.....	82
3.4.2 Ψύξη μέσω μετατόπισης Doppler (Doppler Cooling).....	83
3.4.3 Ψύξη σε Παγιδευμένα Συστήματα.....	85
Ψύξη στο καθεστώς διακριτών πλευρικών ζωνών (Resolved-sideband cooling).....	86
3.4.4 Σύγκριση των μηχανισμών ψύξης.....	89
Κεφάλαιο 4 – Decoherence και Ανοιχτά Κβαντικά Συστήματα.....	90
4.1 Φυσικές Πηγές Κβαντικής Αποσυννοχής (Decoherence).....	90
4.1.1 Πηγές αποσυννοχής στα παγιδευμένα ιόντα.....	90
Αποσυννοχή της εσωτερική κατάσταση του παγιδευμένου ιόντος.....	91
4.1.2 Πηγές αποσυννοχής στα παγιδευμένα ουδέτερα άτομα.....	93
4.1.3 Πηγές αποσυννοχής στις κβαντικές κουκκίδες.....	94
4.2 Μητρώο πυκνότητας (Density Matrix) και απώλεια πληροφορίας.....	95
4.3 Ανοιχτά Κβαντικά Συστήματα και Εξίσωση Master – Lindblad Formalism.....	96
4.4 Ποσοτικά Μεγέθη Decoherence.....	99
4.4.1 Χρόνος Χαλάρωσης T_1 – Χρόνος Συνοχής T_2	99
4.4.2. Καθαρότητα (Purity) και εντροπία von Neumann.....	100
Κεφάλαιο 5: Θεωρητική Μοντελοποίηση και Προσομοιώσεις με Python.....	103
5.1 Εισαγωγή στην Προσομοίωση Κβαντικών Συστημάτων.....	103
5.2 Το Περιβάλλον QuTiP: Γρήγορη Επισκόπηση.....	104
5.3 Μοντελοποίηση Διεπίπεδου Συστήματος (Two-Level System).....	106
5.3.1 Η Χαμιλτονιανή ενός διεπίπεδου συστήματος σε αλληλεπίδραση με το φως.....	106
5.3.2 Υλοποίηση της Χαμιλτονιανής στο QuTiP και Χρονική εξέλιξη.....	107
5.3.3 Υπολογισμός Πληθυσμών και Rabi Ταλαντώσεις για αποσυντονισμό $\Delta=0$	108
5.3.4 Υπολογισμός Πληθυσμών και Rabi Ταλαντώσεις για αποσυντονισμό.....	109
5.4 Οπτικές εξισώσεις Bloch και Απόσβεση.....	110
5.4.1 Η εξίσωση Lindblad και η Αυθόρμητη εκπομπή.....	110
5.4.2 Η εξίσωση Lindblad και η απώλεια φάσης.....	113
5.5 Αναπαράσταση της Δυναμικής στη Σφαίρα Bloch.....	115
5.5.1 Υπολογισμός Συνιστωσών του διανύσματος Bloch στο QuTiP.....	116
5.5.2 Οπτικοποίηση στη Σφαίρα Bloch.....	116
5.5.3 Κλειστό Σύστημα.....	117
5.5.4 Ανοιχτό Σύστημα.....	117
5.5.5 Σχεδίαση παλμών και έλεγχος της κβαντικής κατάστασης.....	119
5.6 Απλοποιημένο Μοντέλο Παγιδευμένου Ιόντος.....	121
5.6.1 Η Χαμιλτονιανή Παγιδευμένου ιόντος χωρίς αλληλεπίδραση με λείζερ.....	122
5.6.2 Αλληλεπίδραση με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία– Σύζευξη ερυθράς πλευρικής ζώνης.....	123
5.6.3 Ψύξη παγιδευμένου ιόντος- Sideband Cooling.....	125
Κεφάλαιο 6 – Συμπεράσματα.....	128

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ευστάθειας της εξίσωσης Mathieu για τη γραμμική παγίδα RF. Αριστερά: μόνο οι επικαλυπτόμενες περιοχές αντιστοιχούν σε ευσταθείς λύσεις. Δεξιά: η πρώτη περιοχή ευστάθειας.

Σχήμα 2.2: (α) Σχηματική απεικόνιση της παγίδας ιόντων. (β) Διατομή της πρώτης παγίδας (1995) (Paul, 1990)

Σχήμα 2.3: Μηχανικό αναλογικό μοντέλο για την παγίδα ιόντων με χαλύβδινη σφαίρα ως «σωματίδιο» (Paul, 1990)

Σχήμα 2.4: Ενεργειακή δομή και ζεύγη ενεργειακών σταθμών που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση qubits σε μονοσθενή ιόντα (οι ενεργειακοί διαχωρισμοί δεν απεικονίζονται σε πραγματική κλίμακα). (α) Βασική ηλεκτρονιακή δομή των ιόντων που χρησιμοποιούνται στον κβαντικό υπολογισμό. Όλα τα ιόντα διαθέτουν στάθμες S και P. Όταν υπάρχουν χαμηλά κείμενες στάθμες D (όπως στο Ca^+ και σε παρόμοια ιόντα) ή στάθμες F (όπως στο Yb^+), οι μεταβάσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση προς αυτές απαιτούν ηλεκτρικές τετραπολικές (quadrupole) ή οκταπολικές (octupole) μεταβάσεις αντίστοιχα. (b) Δομή ιόντων μηδενικού πυρηνικού spin ($I = 0$) σε μικρό μαγνητικό πεδίο. Απεικονίζονται παραδείγματα Zeeman, οπτικών και λεπτής υφής qubit (c) Δομή ενεργειακών σταθμών ιόντων με μη μηδενικό πυρηνικό spin, συνήθως παρουσία ασθενούς μαγνητικού πεδίου. Παρουσιάζεται η περίπτωση ($I=1/2$), ενώ οι στάθμες D και F έχουν παραλειφθεί για λόγους σαφήνειας. Οι υπερλεπτές στάθμες (hyperfine levels) σημειώνονται μόνο για τη θεμελιώδη κατάσταση. Απεικονίζεται ένα hyperfine qubit (Bruzewicz et al., 2019).

Σχήμα 2.5: Η μαγνητο-οπτική παγίδα (MOT) (Foot, 2005)

Σχήμα 2.6: Ο μηχανισμός μιας μαγνητο-οπτικής παγίδας, όπως απεικονίζεται για την περίπτωση ενός ατόμου με μετάβαση από $J = 0$ σε $J = 1$. Στην κλίση του μαγνητικού πεδίου η διάσπαση Zeeman των υποεπιπέδων εξαρτάται από τη θέση του ατόμου. Δύο αντίθετα διαδιδόμενες δέσμες κυκλικά πολωμένου φωτός φωτίζουν το άτομο και οι κανόνες επιλογής για μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων Zeeman οδηγούν σε ανισορροπία στην ακτινοβολιακή δύναμη από τις δέσμες λέιζερ που ωθεί το άτομο πίσω προς το κέντρο της παγίδας. (Δεν είναι σε κλίμακα) (Foot, 2005).

Σχήμα 2.7: Μια μεμονωμένη εστιασμένη ακτίνα λέιζερ δημιουργεί τον απλούστερο τύπο οπτικής παγίδας (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Σχήμα 2.8: Εστιασμένες ακτίνες λέιζερ της απλής παγίδας φωτός (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Σχήμα 2.9: Το δυναμικό «κλουβιού αυγών» ενός οπτικού πλέγματος, όπως απεικονίζεται σε δύο διαστάσεις. Οι κοιλότητες δυναμικού απέχουν μεταξύ τους κατά $\lambda/2$ (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Σχήμα 2.10: Μια αυτοσυναρμολογούμενη κβαντική κουκκίδα. Κλίμακα: 0,5 nm (Ladd et al., 2010)

Σχήμα 2.11: Η δομή των ενεργειακών επιπέδων μιας αυτοσυναρμολογούμενης κβαντικής κουκκίδας. Υπάρχουν διακριτά επίπεδα αγωγιμότητας και σθένους, παρόμοια με αυτά των ατόμων. Μια ισχυρή οπτική διπολική μετάβαση συνδέει το επίπεδο σθένους υψηλότερης ενέργειας με το επίπεδο αγωγιμότητας χαμηλότερης ενέργειας (Warburton, 2013).

Σχήμα 2.12: Η κατάσταση κενού $|0\rangle$ και η οπτικά διεγερμένη κατάσταση $|X^0\rangle$ αναπαρίστανται ως η βασική και η διεγερμένη κατάσταση ενός ατόμου δύο επιπέδων (το κόκκινο βέλος αντιπροσωπεύει την οπτική σύζευξη, το μπλε βέλος την αυθόρμητη εκπομπή). Η κατάσταση $|X^0\rangle$ είναι ένα εξιτόνιο, ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-οπής (Warburton, 2013).

Σχήμα 2.13: Δομή NV στο πλέγμα του διαμαντιού. Το άτομο αζώτου απεικονίζεται με μαύρο χρώμα, τα άτομα άνθρακα με γκρι και η κενή θέση με λευκό χρώμα, χωρίς δεσμούς (μαύρα ραβδιά) (Roberts, 2014)

Σχήμα 2.14: Σχήμα της ηλεκτρονικής δομής του NV^- . Η βασική κατάσταση $3A$ και η διεγερμένη κατάσταση $3E$ είναι τριπλέτες και έχουν ενεργειακή διαφορά 1,945 eV [82]. Η μετάβαση στη μονή κατάσταση έχει ενεργειακή διαφορά 1,190 eV και μπορεί να επιτευχθεί οπτικά μόνο όταν το κέντρο διεγείρεται στα 1,945 eV. Η διάσπαση μηδενικού πεδίου της βασικής κατάστασης είναι $D_{gs} = 2,88$ GHz. Τα υποεπίπεδα της βασικής κατάστασης $m_s = \pm 1$ είναι εκφυλισμένα ενεργειακά για λόγους συμμετρίας, αλλά μια τοπική αλλαγή στη συμμετρία μπορεί να διαχωρίσει τον εκφυλισμό, καθιστώντας τα διακριτά. Σημειώστε ότι οι σχετικές ενέργειες των τριπλών και των μονών καταστάσεων είναι προς το παρόν άγνωστες. (Roberts, 2014).

Σχήμα 3.1: Η πιθανότητα το άτομο να βρεθεί στην θεμελιώδη ή διεγερμένη κατάσταση του $[fox]$. Το ηλεκτρόνιο ταλαντώνεται μεταξύ των δύο επιπέδων με τη γωνιακή συχνότητα $Rabi, \Omega_R$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται “Ράμπι ταλαντώσεις” (Fox, 2006)

Σχήμα 3.2 Η σφαίρα Bloch (Akkermans, 2017)

Σχήμα 3.3: Διαδικασίες απόσβεσης στην αναπαράσταση Bloch: (α) εγκάρσια (T2) και (β) διαμήκης (T1) χαλάρωση (Fox, 2006)

Σχήμα 3.4: Κατά την απορρόφηση ενός φωτονίου, ένα άτομο που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία δέχεται μια ώθηση (Courteille, 2018)

Σχήμα 3.5: Μετατοπίσεις φωτός για ένα άτομο με δύο ενεργειακά επίπεδα. Στην αριστερή πλευρά, το φως με αρνητική απόκλιση ($\Delta < 0$) μετατοπίζει την βασική κατάσταση προς τα κάτω και την διεγερμένη κατάσταση προς τα πάνω κατά το ίδιο μέγεθος. Στη δεξιά πλευρά, ένα χωρικά ανομοιογενές πεδίο, όπως μια ακτίνα λέιζερ Γκάους, δημιουργεί ένα δυναμικό φρεάτιο στη βασική κατάσταση, στο οποίο μπορεί να παγιδευτεί ένα άτομο. (Grimm et al., 2000)

Σχήμα 5.1: Χρονική εξέλιξη των πληθυσμών για μηδενικό αποσυντονισμό

Σχήμα 5.2: Χρονική εξέλιξη των πληθυσμών για μη μηδενικό αποσυντονισμό

Σχήμα 5.3: Απόσβεση του πληθυσμού της διεγερμένης κατάστασης

Σχήμα 5.4: Η μείωση με τον χρόνο της καθαρότητας της κατάστασης του συστήματος

Σχήμα 5.5: Η χρονική εξέλιξη των μέσων τιμών $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ σε ένα σύστημα με απώλεια φάσης

Σχήμα 5.6: (α) Περιστροφή του διανύσματος Bloch γύρω από τον άξονα x σε κλειστό σύστημα χωρίς αποσυντονισμό (β) Περιστροφή του διανύσματος Bloch γύρω από κεκλιμένο άξονα στο επίπεδο x-z σε κλειστό σύστημα με αποσυντονισμό Δ

Σχήμα 5.7: Χρονική εξέλιξη του διανύσματος Bloch στη σφαίρα Bloch υπό την επίδραση αυθόρμητης εκπομπής (σύγκλιση σε steady state)

Σχήμα 5.8: Χρονική εξέλιξη του διανύσματος Bloch στη σφαίρα Bloch υπό καθαρή αποσυννοχή φάσης

Σχήμα 5.9: Δυναμική ελέγχου του qubit μέσω παλμού π: πλήρης αντιστροφή πληθυσμού στη σφαίρα Bloch

Σχήμα 5.10: Περιστροφή του διανύσματος Bloch κατά γωνία $\pi/2$ ($\pi/2$ -pulse), που οδηγεί το σύστημα σε υπέρθεση καταστάσεων

Σχήμα 5.11: Ταλαντώσεις Rabi- περιοδική εναλλαγή μεταξύ των καταστάσεων των καταστάσεων $|g, 2\rangle$ και $|e, 1\rangle$ σε ένα σύστημα παγιδευμένου ιόντος

Σχήμα 5.12: Μεταβολή της συχνότητας Rabi λόγω μεταβολής του αριθμού των φωνονίων του συστήματος

Σχήμα 5.13: Φθίνουσα συμπεριφορά της αναμενόμενης τιμής του κινητικού βαθμού ελευθερίας n του παγιδευμένου ιόντος

Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή

1.1 Τι είναι τα κβαντικά συστήματα

Τα κβαντικά συστήματα αποτελούν φυσικά συστήματα των οποίων η συμπεριφορά περιγράφεται από τους νόμους της κβαντομηχανικής. Σε αντίθεση με την κλασική φυσική, η οποία βασίζεται σε ντετερμινιστικές περιγραφές, η κβαντική θεωρία εισάγει εγγενώς πιθανοκρατικά χαρακτηριστικά και νέα φαινόμενα, όπως η αρχή της υπέρθεσης και η κβαντική διεμπλοκή.

Η σύγχρονη κατανόηση των κβαντικών συστημάτων διαμορφώθηκε στις αρχές του 20ού αιώνα, όταν οι αδυναμίες της κλασικής φυσικής — όπως η λεγόμενη «υπεριώδης καταστροφή» και η αστάθεια του ατόμου — οδήγησαν στη διαμόρφωση της κβαντικής μηχανικής. Η θεωρία αυτή δεν αποτελεί απλώς μια συγκεκριμένη φυσική θεωρία, αλλά δημιουργεί ένα γενικό μαθηματικό πλαίσιο για την περιγραφή φυσικών συστημάτων, μέσα στο οποίο οικοδομούνται επιμέρους θεωρίες όπως π.χ. η κβαντική ηλεκτροδυναμική (Nielsen & Chuang, 2010).

Ένα κβαντικό σύστημα ορίζεται γενικά ως ένα φυσικό σύστημα του οποίου η κατάσταση περιγράφεται από ένα διάνυσμα κατάστασης (state vector) $|\psi\rangle$ σε έναν αφηρημένο χώρο Hilbert. Αυτή η κατάσταση μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός (υπέρθεση) άλλων καταστάσεων, φαινόμενο που δεν έχει αντίστοιχο στην κλασική φυσική.

Η εξέλιξη ενός κλειστού κβαντικού συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (1.1)$$

όπου $\hat{H}$ είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος ενώ κάποια τυπικά παραδείγματα κβαντικών συστημάτων είναι τα άτομα, τα μόρια, τα φωτόνια και τα στοιχειώδη σωματίδια (Griffiths & Schroeter, 2018).

1.2 Μοναδικά κβαντικά συστήματα (Single Quantum Systems)

Για μεγάλο χρονικό διάστημα, οι εφαρμογές της κβαντικής μηχανικής αφορούσαν κυρίως μακροσκοπικά συστήματα που περιέχουν τεράστιο αριθμό σωματιδίων, όπου οι ιδιότητες που παρατηρούνται είναι αποτέλεσμα στατιστικής συμπεριφοράς. Ωστόσο, από τη δεκαετία του 1970

και έπειτα, η ανάπτυξη νέων πειραματικών τεχνικών επέτρεψε τον άμεσο έλεγχο και την παρατήρηση μεμονωμένων κβαντικών συστημάτων.

Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται η έννοια των μοναδικών κβαντικών συστημάτων (single quantum systems), δηλαδή συστημάτων στα οποία είναι δυνατός ο πλήρης και ατομικός έλεγχος της κβαντικής κατάστασης. Τέτοια συστήματα μπορεί να είναι ένα άτομο, ένα ιόν, ένα φωτόνιο ή μια τεχνητή δομή όπως μια κβαντική κουκκίδα. Σε αντίθεση με τα πολυσωματιδιακά συστήματα, όπου η περιγραφή βασίζεται σε μέσες τιμές, στα μοναδικά συστήματα είναι δυνατή η άμεση πρόσβαση στην κβαντική δυναμική και η εκτέλεση μεμονωμένων μετρήσεων (Nielsen & Chuang, 2010).

Η έννοια του μοναδικού κβαντικού συστήματος δεν ορίζεται μέσω ενός αυστηρού και μοναδικού μαθηματικού ορισμού στη βιβλιογραφία, αλλά χρησιμοποιείται λειτουργικά για να περιγράψει συστήματα στα οποία είναι δυνατός ο πλήρης έλεγχος, η απομόνωση από το περιβάλλον και η υψηλής πιστότητας μέτρηση της κβαντικής κατάστασης.

Στην απλούστερη αλλά ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση, ένα μοναδικό κβαντικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί ως διεπίπεδο σύστημα (two-level system), δηλαδή ένα σύστημα του οποίου η δυναμική περιορίζεται σε δύο διακριτές κβαντικές καταστάσεις (Fox, 2006). Παραδείγματα αποτελούν δύο ενεργειακές στάθμες ενός ατόμου ή ιόντος καθώς και οι εξιτονικές καταστάσεις μιας κβαντικής κουκκίδας.

Η μαθηματική περιγραφή ενός διεπίπεδου συστήματος είναι ισοδύναμη με αυτή ενός κβαντικού δυαδικού ψηφίου, γνωστού ως qubit. Το qubit αποτελεί τη βασική μονάδα πληροφορίας στον κβαντικό υπολογισμό και γενικεύει την έννοια του κλασικού bit, επιτρέποντας υπέρθεση καταστάσεων (Nielsen & Chuang, 2010).

Στην παρούσα εργασία, τα διεπίπεδα συστήματα θα χρησιμοποιηθούν ως βασικό μοντέλο για την περιγραφή μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων. Η πλήρης ανάλυση της δυναμικής τους και της αλληλεπίδρασής τους με εξωτερικά πεδία θα παρουσιαστεί σε επόμενα κεφάλαια.

Τέλος, η μελέτη μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων δεν έχει μόνο θεμελιώδη σημασία, αλλά αποτελεί και τη βάση για σύγχρονες τεχνολογικές εφαρμογές. Ειδικότερα, τέτοια συστήματα χρησιμοποιούνται ως qubits στην κβαντική υπολογιστική, ενώ αξιοποιούνται επίσης στην ανάπτυξη κβαντικών αισθητήρων υψηλής ακρίβειας (Rondin et al., 2014). Επιπλέον, στην κβαντική μετρολογία η χρήση μοναδικών κβαντικών συστημάτων επιτρέπει την ακριβέστερη δυνατή μέτρηση χρονικών διαστημάτων (ατομικά ρολόγια) (Kaufman & Ni, 2021), ενώ η δυνατότητα

απομόνωσης και ακριβούς ελέγχου τους τα καθιστά ιδανικές πλατφόρμες για την υλοποίηση και τη μελέτη φαινομένων κβαντικής πληροφορίας. (Nielsen and Chuang, 2010) (Bruzewicz et al., 2019))

1.3 Απομόνωση και χειρισμός κβαντικών καταστάσεων

Ακόμη και ασθενείς αλληλεπιδράσεις ενός κβαντικού συστήματος με το περιβάλλον του οδηγούν σε αποσυννοχή (decoherence), δηλαδή σε απώλεια της κβαντικής συνοχής και μετατροπή της κατάστασης σε μικτή (Schlosshauer, 2019) Το φαινόμενο αυτό αποτελεί έναν από τους βασικότερους περιοριστικούς παράγοντες στη μελέτη και την αξιοποίηση των μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων, καθώς οδηγεί στην απώλεια της υπέρθεσης και της κβαντικής πληροφορίας.

Για τον λόγο αυτό, η μελέτη μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων απαιτεί:

- αποτελεσματική απομόνωση (π.χ. υπερυψηλό κενό, χαμηλές θερμοκρασίες),
- ακριβή χειρισμό μέσω εξωτερικών πεδίων (laser, μικροκύματα),
- ελεγχόμενη αλληλεπίδραση με το περιβάλλον.

Η επίτευξη αυτών των συνθηκών καθιστά δυνατή την παρατήρηση της κβαντικής δυναμικής σε μεμονωμένα συστήματα και την υλοποίηση ελεγχόμενων διεργασιών. Τέτοιες τεχνικές υλοποιούνται σε πειραματικές πλατφόρμες όπως οι παγίδες Paul για ιόντα και οι οπτικές παγίδες για ουδέτερα άτομα (Grimm et al., 2000).

1.4 Σκοπός και Δομή της Εργασίας

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο τη μελέτη των μοναδικών κβαντικών συστημάτων, με έμφαση τόσο στη θεωρητική τους περιγραφή όσο και στην αριθμητική προσομοίωση της δυναμικής τους. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η φυσική των διεπίπεδων συστημάτων ως θεμελιώδες μοντέλο για την κατανόηση της κβαντικής συμπεριφοράς, καθώς και η επίδραση του περιβάλλοντος μέσω φαινομένων αποσυννοχής.

Στο πλαίσιο αυτό, αναλύονται βασικά φαινόμενα όπως οι ταλαντώσεις Rabi και η αναπαράσταση στη σφαίρα Bloch, καθώς και μηχανισμοί φυσικού χειρισμού των κβαντικών συστημάτων, όπως η

παγίδευση μέσω δυνάμεων διπόλου και η ψύξη με λέιζερ. Οι διαδικασίες αυτές αποτελούν τη βάση για την πειραματική υλοποίηση και τον έλεγχο μοναδικών κβαντικών συστημάτων.

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στη μετάβαση από την ιδανική περιγραφή κλειστών κβαντικών συστημάτων προς τη ρεαλιστική περιγραφή ανοιχτών συστημάτων, όπου λαμβάνονται υπόψη μη μοναδιαίες διεργασίες όπως η χαλάρωση και η απώλεια φάσης. Η περιγραφή αυτή πραγματοποιείται μέσω της εξίσωσης master στη μορφή Lindblad, η οποία αποτελεί βασικό εργαλείο για τη μελέτη της δυναμικής σε περιβάλλον με θόρυβο.

Παράλληλα, η εργασία στοχεύει στη σύνδεση της θεωρητικής ανάλυσης με την υπολογιστική προσομοίωση, αξιοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού Python και τη βιβλιοθήκη QuTiP (Quantum Toolbox in Python). Μέσω αυτής της προσέγγισης, καθίσταται δυνατή η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Schrödinger και της εξίσωσης Lindblad, καθώς και η οπτικοποίηση φυσικών φαινομένων όπως οι ταλαντώσεις Rabi, η αποσυνοχή και η δυναμική στη σφαίρα Bloch.

Η εργασία οργανώνεται ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι βασικές φυσικές πλατφόρμες υλοποίησης μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων, όπως τα παγιδευμένα ιόντα, τα ουδέτερα άτομα και οι κβαντικές κουκκίδες.
- Στο Κεφάλαιο 3 αναλύεται η αλληλεπίδραση των διεπίπεδων συστημάτων με ηλεκτρομαγνητικά πεδία και παρουσιάζονται βασικοί μηχανισμοί ελέγχου, όπως οι ταλαντώσεις Rabi, η δυναμική στη σφαίρα Bloch, καθώς και φαινόμενα παγίδευσης και ψύξης με λέιζερ.
- Στο Κεφάλαιο 4 εξετάζεται η έννοια της αποσυνοχής και η θεωρία των ανοιχτών κβαντικών συστημάτων, με έμφαση στη διατύπωση της εξίσωσης Lindblad και στα ποσοτικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν την απώλεια συνοχής.
- Στο Κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται αριθμητική προσομοίωση των παραπάνω φαινομένων με χρήση της Python και του QuTiP, περιλαμβάνοντας τόσο κλειστά όσο και ανοιχτά κβαντικά συστήματα, καθώς και ένα απλοποιημένο μοντέλο παγιδευμένου ιόντος.
- Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται τα βασικά συμπεράσματα της εργασίας και συζητούνται πιθανές επεκτάσεις και ανοιχτά προβλήματα στον τομέα των μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων.

Με τη δομή αυτή, η εργασία επιχειρεί να γεφυρώσει τη θεωρητική κατανόηση των κβαντικών συστημάτων με την πρακτική υπολογιστική τους μελέτη, αναδεικνύοντας τη σημασία της αριθμητικής προσομοίωσης στη σύγχρονη κβαντική φυσική.

Κεφάλαιο 2 – Δημιουργία Μοναδικών Κβαντικών Συστημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό της εργασίας γίνεται η παρουσίαση των βασικών φυσικών συστημάτων που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση μοναδικών κβαντικών συστημάτων, και των τεχνολογιών που επιτρέπουν την απομόνωση και τον έλεγχο τους σε πειραματικό επίπεδο.

2.1 Εισαγωγή στην τεχνολογία των μοναδικών συστημάτων

Η ικανότητα απομόνωσης, ελέγχου και μελέτης ενός και μόνο κβαντικού συστήματος αποτελεί μία από τις σημαντικότερες κατακτήσεις της σύγχρονης πειραματικής φυσικής. Αν και η κβαντομηχανική θεωρία αναπτύχθηκε για να περιγράψει τη συμπεριφορά μεμονωμένων ατόμων και σωματιδίων, για πολλές δεκαετίες οι πειραματικές επιβεβαιώσεις στηρίζονταν σε μετρήσεις *ensembles* – δηλαδή συλλογών πολλών πανομοιότυπων σωματιδίων, των οποίων οι ιδιότητες μετρούνταν στατιστικά.

Ωστόσο, στα τέλη του 20ού αιώνα και στις αρχές του 21ου, η τεχνολογική πρόοδος στους τομείς της οπτικής, της νανοτεχνολογίας και της ελεγχόμενης παγίδευσης φορτισμένων και ουδέτερων σωματιδίων, κατέστησε δυνατή την πειραματική πρόσβαση σε μοναδικά κβαντικά συστήματα – δηλαδή σε ένα και μόνο άτομο, ιόν ή κβαντική κουκκίδα, το οποίο μπορεί να μετρηθεί, να χειραγωγηθεί και να παρακολουθηθεί.

Η σημασία αυτής της δυνατότητας είναι θεμελιώδης. Με τον έλεγχο ενός μεμονωμένου κβαντικού συστήματος:

- μπορούμε να μελετήσουμε απευθείας τα θεμελιώδη φαινόμενα της κβαντομηχανικής, χωρίς την ανάγκη στατιστικής προσέγγισης·
- μπορούμε να δημιουργήσουμε κβαντικά bits (qubits) για χρήση σε κβαντικούς υπολογιστές·
- μπορούμε να κατασκευάσουμε αισθητήρες εξαιρετικής ευαισθησίας, οι οποίοι βασίζονται στην ευαισθησία της κβαντικής κατάστασης σε εξωτερικά πεδία.

Η τεχνολογία των μοναδικών συστημάτων περιλαμβάνει ένα σύνολο φυσικών και τεχνικών προσεγγίσεων για την παραγωγή, απομόνωση και έλεγχο αυτών των συστημάτων. Ανάλογα με τη φύση του σωματιδίου (φορτισμένο ή ουδέτερο, ατομικό ή στερεάς κατάστασης), χρησιμοποιούνται διαφορετικές μέθοδοι: παγίδες Paul για ιόντα, μαγνητο-οπτικές παγίδες και οπτικές τσιμπήδες για ουδέτερα άτομα, και κβαντικές κουκκίδες για ημιαγώγιμες εφαρμογές.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν αναλυτικά τρεις από τις πιο διαδεδομένες και ώριμες πλατφόρμες:

- τα παγιδευμένα ιόντα, που χρησιμοποιούνται εκτενώς στην κβαντική πληροφορική,
- τα ουδέτερα άτομα, τα οποία προσφέρουν φυσική κλιμακωσιμότητα μέσω των οπτικών τιμπών
- οι κβαντικές κουκκίδες, στερεάς κατάστασης νανοδομές με δυνατότητα ενσωμάτωσης σε οπτοηλεκτρονικά κυκλώματα.

Στις ενότητες που ακολουθούν, θα αναλυθούν οι βασικές αρχές λειτουργίας τους, οι πειραματικές τεχνικές παγίδευσης και ελέγχου, καθώς και τα πλεονεκτήματα και οι περιορισμοί κάθε προσέγγισης.

2.2 Παγιδευμένα Ιόντα (Trapped Ions)

Η τεχνολογία των παγιδευμένων ιόντων αποτελεί μία από τις πλέον ώριμες και επιτυχημένες πλατφόρμες για την δημιουργία μοναδικών κβαντικών συστημάτων. Η παγίδευση και ο έλεγχος ενός ιόντος – δηλαδή ενός ατόμου που έχει χάσει ή κερδίσει ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια και διαθέτει ηλεκτρικό φορτίο- μπορεί να επιτευχθεί μέσω κατάλληλα διαμορφωμένων ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.

Η ανάγκη παρατήρησης μεμονωμένων σωματιδίων, ακόμη και ενός και μόνο σωματιδίου, για μακρά χρονικά διαστήματα οδήγησε στην δημιουργία παγίδων για ελεύθερα φορτισμένα και ουδέτερα σωματίδια. Αυτές οι παγίδες μας έδωσαν την δυνατότητα παρατήρησης μεμονωμένων παγιδευμένων σωματιδίων παρέχοντας μια νέα διάσταση στις ατομικές μετρήσεις. Μέχρι πρόσφατα, οι πειραματικές μετρήσεις πραγματοποιούνταν πάνω σε σύνολα σωματιδίων και τα αποτελέσματα ήταν στατιστικοί μέσοι όροι. Υποθέταμε σιωπηρά ότι όλα τα άτομα συμπεριφέρονται στατιστικά το ίδιο. Αντίθετα, η παγίδευση ενός μεμονωμένου σωματιδίου επιτρέπει τη μελέτη της αλληλεπίδρασής του με εξωτερικά πεδία σε επίπεδο μεμονωμένου κβαντικού συστήματος.

Για την παγίδευση των ιόντων, σύμφωνα με τον Paul απαιτείται η δράση δύναμης της μορφής

$$\vec{F} = -c\vec{r} \quad (2.1)$$

(όπου r η απόσταση από το κέντρο καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων) ή αλλιώς η παρουσία παραβολικού δυναμικού της μορφής $\Phi \sim \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ -δηλαδή ενός δυναμικού παγίδευσης που

περιορίζει την κίνησή τους στον χώρο. Τα κατάλληλα εργαλεία για να παραχθούν τέτοια πεδία είναι ηλεκτρικά ή μαγνητικά πολυπολικά πεδία. Ένας από τους πιο διαδεδομένους τύπους είναι οι παγίδες ραδιοσυχνοτήτων ή παγίδες Paul.

2.2.1 Απομόνωση ιόντος σε παγίδα ραδιοσυχνότητας -παγίδα Paul

Οι πολυπολικές διατάξεις είναι γεωμετρικές διατάξεις ηλεκτροδίων ή μαγνητών που παράγουν πεδία με συγκεκριμένη συμμετρία. Ανάλογα με το πλήθος των φορτίων ή ρευμάτων ("πόλων"), δημιουργούν διαφορετικό τύπο πεδίου. Μια παγίδα Paul αποτελείται από τέσσερα ηλεκτρόδια (τετράπολο) και στο εσωτερικό της δημιουργείται ένα τετραπολικό ηλεκτρικό πεδίο. Το ηλεκτρικό τετραπολικό πεδίο αυτό έχει δυναμικό που είναι τετραγωνική συνάρτηση των Καρτεσιανών συντεταγμένων (Paul, 1990):

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (ax^2 + by^2 + cz^2) \quad (2.2)$$

όπου Φ_0 το δυναμικό που εφαρμόζεται στα ηλεκτρόδια και r_0 η χαρακτηριστική απόσταση ηλεκτροδίων

Η εφαρμογή της εξίσωσης Laplace $\nabla^2\Phi=0$ στο δυναμικό της σχέσης (2.2) όμως επιβάλλει την συνθήκη, $a+b+c=0$, η οποία μπορεί να ικανοποιηθεί με δύο απλούς τρόπους

(α) Για $a=1, c=-1, b=0$, δημιουργείται ένα δισδιάστατο τετραπολικό πεδίο με δυναμικό (Paul, 1990):

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (x^2 - z^2) \quad (2.3)$$

Στην περίπτωση αυτήν δεν υπάρχει όρος y^2 στο δυναμικό, άρα δεν υπάρχει καμπυλότητα του δυναμικού στη διεύθυνση y — κατά συνέπεια, δεν υπάρχει δύναμη που να δρα στην κατεύθυνση y . Τα σωματίδια κινούνται ελεύθερα κατά μήκος του y -άξονα (συνήθως είναι η διεύθυνση "εισαγωγής" των ιόντων) και η παγίδευση/εστίαση επιτυγχάνεται μόνο στο επίπεδο $x-z$.

(β) Για $a=b=1, c=-2$, δημιουργείται ένα τρισδιάστατο πεδίο με δυναμικό σε κυλινδρικές συντεταγμένες (Paul, 1990):

$$\Phi = \frac{\Phi_0(x^2 - 2z^2)}{r_0^2 + 2z_0^2} \quad (2.4)$$

όπου $2Z_0^2 = r_0^2$

Τώρα και οι τρεις διαστάσεις συμβάλλουν στη σταθεροποίηση της τροχιάς, το σωματίδιο παγιδεύεται στο κέντρο του πεδίου και ταλαντώνεται σε όλες τις κατευθύνσεις με ελεγχόμενο πλάτος.

Παγίδευση φορτισμένων σωματιδίων σε δισδιάστατα τετραπολικά πεδία

Η δισδιάστατη τετραπολική διάταξη, ή αλλιώς φίλτρο μάζας, διαμόρφωση (α), δημιουργείται από τέσσερα ηλεκτρόδια με υπερβολικό σχήμα τα οποία εκτείνονται γραμμικά κατά την κατεύθυνση y. Το δυναμικό στα ηλεκτρόδια είναι $+V_0/2$ όταν εφαρμόζεται τάση $\pm V_0$ μεταξύ των ζευγών ηλεκτροδίων και η ένταση του πεδίου δίνεται από τις σχέσεις (Paul, 1990):

$$E_x = \frac{-V_0}{r_0^2} x \quad (2.5)$$

$$E_y = 0 \quad (2.6)$$

$$E_z = \frac{V_0}{r_0^2} z \quad (2.7)$$

Εάν εισαχθούν ιόντα κατά την κατεύθυνση y, προκύπτει ότι για μια σταθερή τάση V_0 , τα ιόντα θα εκτελέσουν στο επίπεδο x-y μια αρμονική κίνηση· όμως, λόγω του αντίθετου προσήμου της έντασης του πεδίου E_z , το πλάτος των ταλαντώσεων στην κατεύθυνση z θα αυξάνεται εκθετικά. Αυτό συνεπάγεται αποεστίαση των σωματιδίων που τελικά χάνονται χτυπώντας στα ηλεκτρόδια.

Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να αποφευχθεί αν η εφαρμοζόμενη εξωτερική τάση στα ηλεκτρόδια είναι περιοδική. Η επιλογή μιας τάσης της μορφής

$$V_0 = U + V \cos(\omega t) \quad (2.8)$$

η οποία είναι το άθροισμα ενός συνεχούς (DC) δυναμικού U και ενός εναλλασσόμενου (RF) δυναμικού $V \cos(\omega t)$ οδηγεί στην περιοδική εναλλαγή του προσήμου της ηλεκτρικής δύναμης, με αποτέλεσμα την εστίαση και αποεστίαση και στις δύο κατευθύνσεις x και z, εναλλάξ στο χρόνο.

Έτσι σύμφωνα με την σχέση $\vec{F} = q\vec{E}$ και τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης για το παγιδευμένο ιόν (Paul, 1990):

$$\ddot{x} + \frac{e}{m r_0^2} (U + V \cos \omega t) x = 0 \quad (2.9)$$

$$\ddot{z} - \frac{e}{mr_0^2} (U + V \cos \omega t) z = 0 \quad (2.10)$$

Η παρατήρηση των παραπάνω σχέσεων θα μπορούσε να μας οδηγήσει στο αρχικό συμπέρασμα ότι ο χρονικά εξαρτώμενος όρος της δύναμης ακυρώνεται κατά μέσο όρο στο χρόνο. Αυτό θα ήταν αληθές σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Σε περιοδικό, ανομοιογενές πεδίο, όπως είναι το τετραπολικό, παραμένει μια μικρή μέση δύναμη η οποία κατευθύνεται πάντα προς την περιοχή του ασθενέστερου πεδίου, δηλαδή προς το κέντρο. Συνεπώς, υπό συγκεκριμένες συνθήκες, τα ιόντα μπορούν να διαπερνούν το τετραπολικό πεδίο χωρίς να συγκρούονται με τα ηλεκτρόδια· δηλαδή, η κίνησή τους γύρω από τον άξονα y είναι σταθερή με περιορισμένα πλάτη στις x και z κατευθύνσεις. Η κίνηση του ιόντος σε ένα τέτοιο δυναμικό που εμφανίζει μια χαρακτηριστική ψευδοαρμονική παγίδευση περιγράφεται από τις εξισώσεις Mathieu οι οποίες σε αδιάστατους όρους, γράφονται ως (Paul, 1990):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + (\alpha + 2q \cos 2\tau) x = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \tau^2} - (\alpha + 2q \cos 2\tau) z = 0 \quad (2.12)$$

Αυτές αν συγκριθούν με τις σχέσεις (2.9) και (2.10) μας οδηγούν στις σχέσεις

$$a = \frac{4eU}{mr_0^2 \omega^2}, q = \frac{2eV}{mr_0^2 \omega^2}, \tau = \frac{\omega t}{2} \quad (2.13)$$

Με την επίλυση μίας εξίσωσης Mathieu παίρνουμε δύο τύπους λύσεων (Paul, 1990)

1. Σταθερές λύσεις: λύσεις περιοδικές και φραγμένες οπότε το ιόν παραμένει παγιδευμένο

2. Ασταθείς λύσεις : τα πλάτη των ταλαντώσεων αυξάνονται εκθετικά και τα ιόντα τελικά χάνονται.

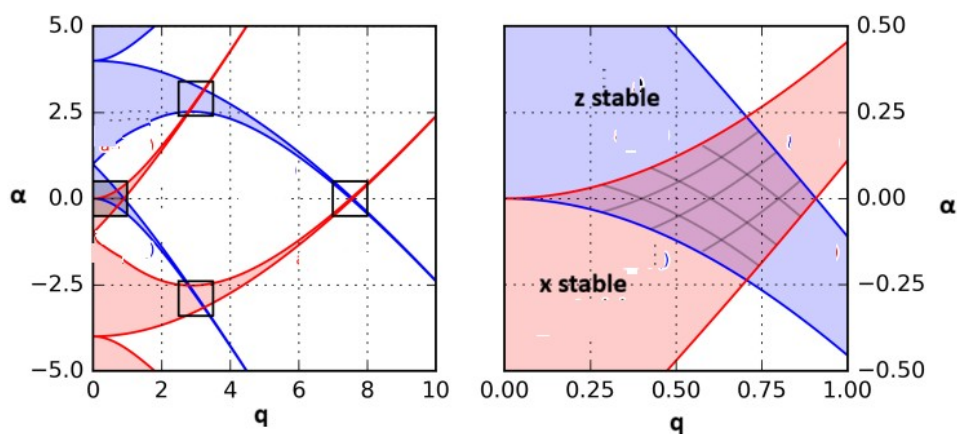
Η σταθερότητα των λύσεων αυτών εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων a και q , και όχι από τις αρχικές συνθήκες (Paul, 1990). Η επίλυση πραγματοποιείται αριθμητικά, εξετάζοντας διαφορετικά ζεύγη τιμών (a , q) και καταγράφοντας τις περιοχές σταθερότητας σε ένα διάγραμμα Mathieu. Το διάγραμμα Mathieu είναι ένας χάρτης των λύσεων της εξίσωσης με οριζόντιο άξονα την παράμετρο, a , και κατακόρυφο την q (Σχήμα 2.1). Για κάθε ζεύγος (a , q), παρατηρούμε αν η λύση είναι περιοδική ή εκθετική. Έτσι "σκανάρουμε" τον χώρο τιμών a, q και χαρτογραφούμε τις

περιοχές σταθερότητας. Το αποτέλεσμα είναι να γνωρίζουμε την περιοχή τιμών a, q μέσα στην οποία τα ιόντα παραμένουν παγιδευμένα.

Στο σημείο αυτό αν πάρουμε τον λόγο a/q από τις σχέσεις (2.13) προκύπτει

$$a/q = 2U/V \quad (2.14)$$

Συνεπώς αν κρατήσουμε σταθερή την αναλογία DC/AC τάσης (U/V), τότε το πηλίκο a/q είναι σταθερό και έχουμε μια ευθεία γραμμή στο διάγραμμα Mathieu η οποία πρέπει απαραίτητως να τέμνει τη σταθερή περιοχή, ώστε το ιόν να παγιδευθεί αλλιώς, θα δραπετεύσει.



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ευστάθειας της εξίσωσης Mathieu για τη γραμμική παγίδα RF. Αριστερά: μόνο οι επικαλυπτόμενες περιοχές αντιστοιχούν σε ευσταθείς λύσεις. Δεξιά: η πρώτη περιοχή ευστάθειας (Heinrich, 2018).

Παγίδευση φορτισμένων σωματιδίων σε τρισδιάστατα τετραπολικά πεδία

Στην περίπτωση του τρισδιάστατου τετραπολικού πεδίου, η διαμόρφωση του δυναμικού στην παγίδα ιόντων έχει δοθεί από την εξίσωση (2.4). Αυτή δημιουργείται από έναν υπερβολικά σχηματισμένο δακτύλιο και δύο υπερβολικά καπάκια συμμετρικά εκ περιστροφής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2(α) (Paul, 1990). Το Σχήμα 2.2(β) μας δείχνει την πρώτη παγίδα που κατασκευάστηκε το 1954 (Paul, 1990).

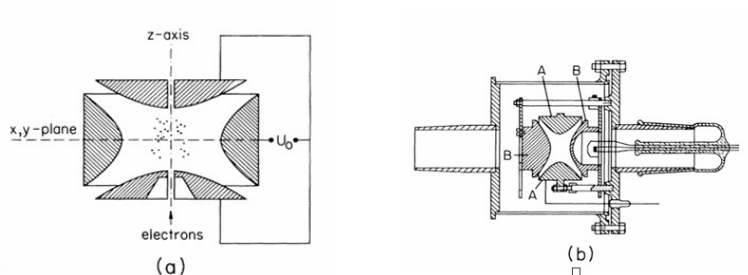
Αν εισαχθούν ιόντα μέσα στην παγίδα — κάτι που επιτυγχάνεται εύκολα με ιονισμό αέριου χαμηλής πίεσης — τότε αυτά εκτελούν τις ίδιες εξαναγκασμένες κινήσεις όπως και στη δισδιάστατη περίπτωση. Η μόνη διαφορά είναι ότι το πεδίο στην κατεύθυνση z είναι ισχυρότερο κατά έναν παράγοντα 2. Και πάλι, απαιτείται περιοδικό πεδίο για τη σταθεροποίηση των τροχιών. Αν εφαρμοστεί τάση $V(t) = U + V \cos(\omega t)$ μεταξύ των καπακιών και του δακτυλίου, τότε οι εξισώσεις κίνησης περιγράφονται από της ίδιας μορφής εξισώσεις Mathieu σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) .

Εδώ η περιοχή σταθερότητας στο διάγραμμα $a-q$ έχει διαφορετικό σχήμα από το δισδιάστατο φίλτρο (Paul, 1990). Οι τροχιές των ιόντων είναι σταθερές όταν οι παράμετροι a και q βρίσκονται εντός της περιοχής σταθερότητας. Τα παγιδευμένα ιόντα σε μία παγίδα Paul εκτελούν μια αργή ταλάντωση (secular motion) η οποία είναι μια αρμονική κίνηση με σχετικά χαμηλή συχνότητα $-\omega_r$ (ακτινικά) και ω_z (κατακόρυφα)- η οποία οφείλεται στην περιοδική συνολική επίδραση του RF πεδίου και μια γρήγορη ταλάντωση (micromotion) υψηλής συχνότητας ίσης με τη συχνότητα του RF πεδίου και η οποία επιβάλλεται πάνω στην αργή (secular) κίνηση του ιόντος.

Μαθηματικά γνωρίζουμε ότι η κίνηση του ιόντος σε μία διάσταση $u(t)$ (με $u=r$ ή z) σε προσέγγιση 1ης τάξης και για $|a|, q^2 \ll 1$, δίνεται από την σχέση (Leibfried et al., 2003):

$$u(t) \approx A \cos \omega_{\text{sec}} t (1 + \epsilon \cos \omega t) \quad (2.15)$$

όπου ω_{sec} η βασική (secular) συχνότητα, ω η συχνότητα της μικροκίνησης και ϵ το πλάτος της μικροταλάντωσης. Η συχνότητα ω_{sec} της αργής ταλάντωσης είναι κατά πολύ μικρότερη της συχνότητα ω του RF πεδίου και προσεγγίζεται από την σχέση $\omega_{\text{sec}} = \beta \cdot \omega / 2$ με β τον συντελεστή σταθερότητας (frequency determining factor), που εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους Mathieu, a και q (Paul, 1990). Συνεπώς η συχνότητα ταλάντωσης εξαρτάται από την m (μάζα ιόντος) τις U , V (τάσεις) και την r_0 (γεωμετρία παγίδας). Επιπλέον αγνοώντας την μικροκίνηση το ιόν συμπεριφέρεται ως αρμονικός ταλαντωτής με συχνότητα ν (προσέγγιση ψευδοδυναμικού) (Leibfried et al., 2003)

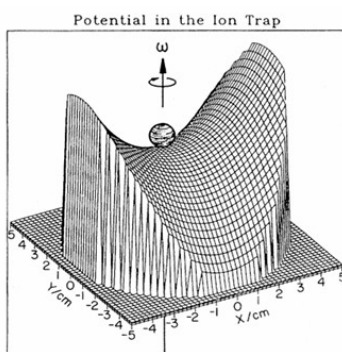


Σχήμα 2.2: (α) Σχηματική απεικόνιση της παγίδας ιόντων (Paul, 1990). (β) Διατομή της πρώτης παγίδας (1955) (Paul, 1990)

Επιπλέον η δυναμική σταθεροποίηση στην παγίδα μπορεί εύκολα να παρουσιαστεί με μια μηχανική ανάλογη διάταξη. Στην παγίδα, οι ισοδυναμικές επιφάνειες σχηματίζουν μια επιφάνεια τύπου «σέλας», όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3 (Paul, 1990). Μπορούμε να δημιουργήσουμε μια τέτοια επιφάνεια στο κέντρο ενός δίσκου. Αν τοποθετήσουμε μια μικρή χαλύβδινη σφαίρα πάνω της, αυτή θα κυλήσει προς τα κάτω· η θέση της είναι ασταθής. Αλλά αν ο δίσκος αρχίσει να περιστρέφεται με τη κατάλληλη συχνότητα η οποία καθορίζεται από τις παραμέτρους του δυναμικού και τη μάζα της

σφαίρας (στην περίπτωση μας λίγες στροφές ανά δευτερόλεπτο), η σφαίρα σταθεροποιείται, εκτελεί μικρές ταλαντώσεις και διατηρείται στη θέση της για μεγάλο χρονικό διάστημα. Ακόμη κι αν προσθέσουμε δεύτερη ή τρίτη σφαίρα, αυτές παραμένουν κοντά στο κέντρο του δίσκου. Η μόνη προϋπόθεση είναι η σχετική παράμετρος Mathieu q να βρίσκεται εντός της επιτρεπόμενης περιοχής.

Τέλος, η παγίδευση και η δυναμική σταθεροποίηση του ιόντος αποτελούν μόνο το πρώτο βήμα για την αξιοποίησή του ως κβαντικού συστήματος. Για τον έλεγχο των εσωτερικών ενεργειακών του καταστάσεων απαιτείται η αλληλεπίδρασή του με κατάλληλα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, θέμα που εξετάζεται στην επόμενη ενότητα (Cohen-Tannoudji, 1999).



Σχήμα 2.3: Μηχανικό αναλογικό μοντέλο για την παγίδα ιόντων με χαλύβδινη σφαίρα ως «σωματίδιο» (Paul, 1990)

2.2.2 Από την παγίδευση στον έλεγχο κβαντικών καταστάσεων

Το ιόν όπως και κάθε μοναδικό κβαντικό σύστημα της εργασίας αυτής προσεγγίζεται ως ένα διεπίπεδο κβαντικό σύστημα, δηλαδή ως ένα σύστημα με δύο διακριτές εσωτερικές ενεργειακές καταστάσεις. Η παγίδευση επιτρέπει τον χωρικό περιορισμό του σωματιδίου (έλεγχο των εξωτερικών βαθμών ελευθερίας), δεν επαρκεί όμως για τον πλήρη έλεγχο της εσωτερικής του κβαντικής κατάστασης (Cohen-Tannoudji, 1999). Για τον σκοπό αυτό απαιτείται η αλληλεπίδραση του ιόντος με εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία (Cohen-Tannoudji, 1999), τα οποία μπορούν να είναι είτε στην οπτική είτε στη μικροκυματική περιοχή του φάσματος, ανάλογα με το είδος των ενεργειακών μεταβάσεων που αξιοποιούνται (βλ. ενότητα 2.2.3). Μέσω αυτής της αλληλεπίδρασης καθίσταται δυνατός ο χειρισμός και η ανίχνευση των εσωτερικών ενεργειακών καταστάσεων του ιόντος.

Στην πράξη, η χρήση ακτινοβολίας λέιζερ αποτελεί την πιο διαδεδομένη τεχνική, ιδιαίτερα για οπτικές μεταβάσεις και διαδικασίες όπως η ψύξη, η διέγερση και η ανίχνευση φθορισμού (Cohen-Tannoudji, 1999). Πιο συγκεκριμένα, η αλληλεπίδραση με λέιζερ επιτελεί τέσσερις βασικές λειτουργίες. Αρχικά, μέσω της ψύξης με λέιζερ (laser cooling), μειώνεται η κινητική ενέργεια του ιόντος, οδηγώντας την κίνησή του κοντά στη θεμελιώδη κατάσταση. Επιπλέον, παρέχεται η δυνατότητα ελεγχόμενης διέγερσης μεταξύ εσωτερικών ενεργειακών καταστάσεων ενώ η χρήση κατάλληλων παλμών ακτινοβολίας επιτρέπει την αρχικοποίηση (initialization) του συστήματος σε μια συγκεκριμένη εσωτερική κατάσταση.

Τέλος, η ανίχνευση της κατάστασης του ιόντος πραγματοποιείται συνήθως μέσω της φθορίζουσας εκπομπής φωτονίων εξαρτώμενης από την κατάσταση (state-dependent fluorescence) (Bruzewicz et al., 2019). Κατά τη διαδικασία μέτρησης, το ιόν οδηγείται είτε σε μια «φωτεινή» κατάσταση (bright state), η οποία διασπείρει μεγάλο αριθμό φωτονίων όταν φωτιστεί με κατάλληλο λέιζερ, είτε σε μια «σκοτεινή» κατάσταση (dark state), η οποία δεν παρουσιάζει σημαντική εκπομπή. Τα εκπεμπόμενα φωτόνια συλλέγονται και ανιχνεύονται, επιτρέποντας τη διάκριση των δύο καταστάσεων με υψηλή αξιοπιστία. Με επαρκή χρόνο ανίχνευσης, μπορεί να οριστεί ένα κατώφλι στον αριθμό των καταγεγραμμένων φωτονίων, το οποίο επιτρέπει τον διαχωρισμό των δύο περιπτώσεων με μεγάλη ακρίβεια (Bruzewicz et al., 2019).

Συνεπώς το λέιζερ, ως πηγή συνεκτικής ακτινοβολίας, επιτρέπει ακριβή έλεγχο της αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης ενώ οι βασικοί μηχανισμοί αυτής της αλληλεπίδρασης θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα παρουσιαστεί η θεωρία αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης σε διεπίπεδα κβαντικά συστήματα.

2.2.3 Υλοποίηση qubit σε παγιδευμένα ιόντα

Για την υλοποίηση κβαντικής πληροφορίας απαιτείται ο ορισμός ενός διεπίπεδου κβαντικού συστήματος, στο οποίο η πληροφορία κωδικοποιείται σε δύο διακριτές ενεργειακές καταστάσεις, συμβατικά σημειούμενες ως $|g\rangle$ και $|e\rangle$.

Στα παγιδευμένα ιόντα, το πλούσιο φάσμα εσωτερικών ενεργειακών καταστάσεων επιτρέπει πολλαπλές επιλογές για την υλοποίηση ενός τέτοιου διεπίπεδου συστήματος με άλλα λόγια επιτρέπει πολλές επιλογές για τη δημιουργία των κβαντικών bits (qubits) (Bruzewicz et al., 2019). Τα qubits αυτά ταξινομούνται σε τέσσερις μεγάλες κατηγορίες τα Zeeman qubits, τα qubits υπέρλεπτης υφής, τα οπτικά qubits και τα qubits λεπτής υφής.

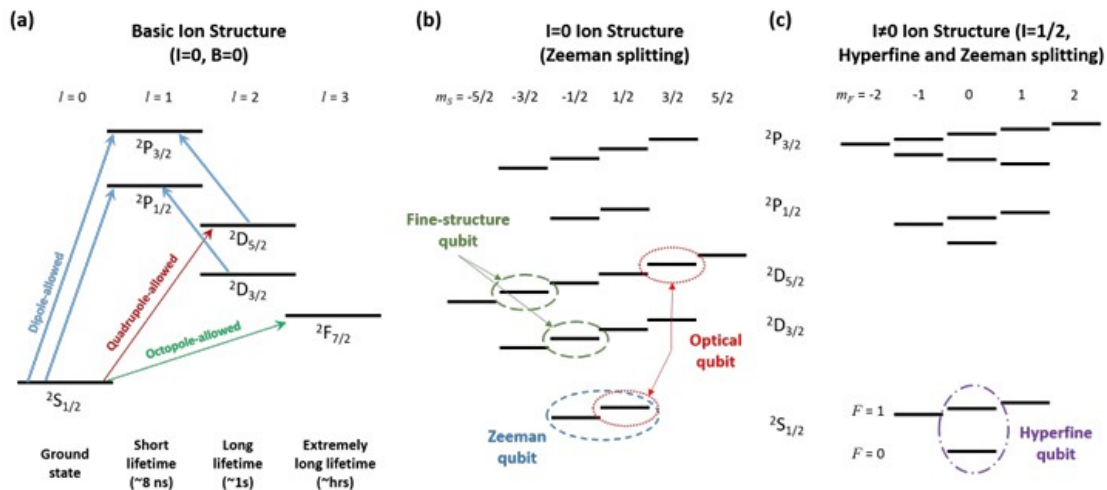
Τα Zeeman qubits ορίζονται μεταξύ υποσταθμών Zeeman της ίδιας ενεργειακής στάθμης (π.χ. της θεμελιώδους), οι οποίες διαχωρίζονται με την εφαρμογή ενός στατικού μαγνητικού πεδίου και απέχουν ενεργειακά στην τάξη των MHz. Παρότι είναι πειραματικά απλά στην υλοποίηση είναι εξαιρετικά ευαίσθητα στον μαγνητικό θόρυβο (Bruzewicz et al., 2019) (Σχήμα 2.4 (b)). Ο χειρισμός ενός Zeeman Qubit συνήθως γίνεται με την βοήθεια Raman δεσμών λέιζερ λόγω του ενεργειακού χάσματος στην τάξη των MHz. Οι διεγερμένες μεταβάσεις Raman (stimulated Raman transitions) αποτελούν μια έμμεση μέθοδο σύζευξης δύο καταστάσεων ενός qubit μέσω μιας ενδιάμεσης διεγερμένης κατάστασης. Η διαδικασία πραγματοποιείται με τη χρήση δύο δεσμών laser των οποίων η διαφορά συχνοτήτων ισούται με τον ενεργειακό διαχωρισμό των καταστάσεων του qubit. Τα laser είναι αποσυντονισμένα από την πραγματική διεγερμένη κατάσταση, με αποτέλεσμα αυτή να μην καταλαμβάνεται ουσιαστικά κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, περιορίζοντας έτσι τις απώλειες λόγω αυθόρμητης εκπομπής (Bruzewicz et al., 2019).

Τα qubits υπέρλεπτης υφής χρησιμοποιούν στάθμες της υπέρλεπτης υφής στην θεμελιώδη κατάσταση των ιόντων με ενεργειακό χάσμα της τάξης των GHz. Οι στάθμες αυτές προκύπτουν από την αλληλεπίδραση του πυρηνικού spin με τη συνολική ηλεκτρονική στροφορμή πχ σε ένα ιόν $^{171}\text{Yb}^+$ που διασπά την θεμελιώδη στάθμη σε πολλαπλές υπερλεπτες στάθμες (Bruzewicz et al., 2019) (Σχήμα 2.4 (c)). Αυτά προσφέρουν μεγάλους χρόνους συνοχής (Bruzewicz et al., 2019) αν ο χρόνος συνοχής ενός qubit είναι το χρονικό διάστημα που παραμένει «καθαρή» η κβαντική του κατάσταση, χωρίς να «διαταραχθεί» από το περιβάλλον (βλ. Κεφάλαια 3 και 4). Επίσης ο χειρισμός των υπέρλεπτης υφής qubits γίνεται με μεταβάσεις Raman ή με την χρήση μικροκυματικής ακτινοβολίας λόγω του ενεργειακού χάσματος της τάξης των GHz (Bruzewicz et al., 2019).

Τα οπτικά qubits υλοποιούνται μεταξύ της θεμελιώδους κατάστασης και μιας μετασταθούς διεγερμένης κατάστασης (συνήθως τύπου D), με χρόνο ζωής της τάξης του δευτερολέπτου και έχουν ενεργειακό χάσμα της τάξης των εκατοντάδων THz. Έτσι αυτά επιτρέπουν άμεσο και υψηλής ακρίβειας έλεγχο μέσω λέιζερ στο ορατό ή στο εγγύς υπέρυθρο φάσμα ενώ το θεμελιώδες όριο του χρόνου συνοχής καθορίζεται τελικά από τον χρόνο ζωής της μετασταθούς διεγερμένης κατάστασης, ο οποίος είναι συνήθως της τάξης από μερικά έως αρκετές δεκάδες δευτερόλεπτα (Bruzewicz et al., 2019).

Τέλος για τα qubits λεπτής υφής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα ζεύγος καταστάσεων που ανήκουν στην πολλαπλότητα D, μία από την στάθμη λεπτής δομής $D_{3/2}$ και μία από την $D_{5/2}$, για τον σχηματισμό ενός qubit με ενεργειακό διαχωρισμό στην περιοχή των THz (Bruzewicz et al., 2019)

(Σχήμα 2.4(a),(b)). Τα qubits λεπτής υφής παρουσιάζουν μεγάλους χρόνους ζωής παρόμοιους με εκείνους των οπτικών qubits και ο έλεγχος τους στηρίζεται επίσης στις Raman μεταβάσεις.



Σχήμα 2.4: Ενεργειακή δομή και ζεύγη ενεργειακών σταθμών που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση qubits σε μονοσθενή ιόντα (οι ενεργειακοί διαχωρισμοί δεν απεικονίζονται σε πραγματική κλίμακα). (α) Βασική ηλεκτρονιακή δομή των ιόντων που χρησιμοποιούνται στον κβαντικό υπολογισμό. Όλα τα ιόντα διαθέτουν στάθμες S και P. Όταν υπάρχουν χαμηλά κείμενες στάθμες D (όπως στο Ca^+ και σε παρόμοια ιόντα) ή στάθμες F (όπως στο Yb^+), οι μεταβάσεις από τη θεμελιώδη κατάσταση προς αυτές απαιτούν ηλεκτρικές τετραπολικές (quadrupole) ή οκταπολικές (octupole) μεταβάσεις αντίστοιχα. (b) Δομή ιόντων μηδενικού πυρηνικού σπιν ($I = 0$) σε μικρό μαγνητικό πεδίο. Απεικονίζονται παραδείγματα Zeeman, οπτικών και λεπτής υφής qubit (c) Δομή ενεργειακών σταθμών ιόντων με μη μηδενικό πυρηνικό spin, συνήθως παρουσία ασθενούς μαγνητικού πεδίου. Παρουσιάζεται η περίπτωση ($I=1/2$), ενώ οι στάθμες D και F έχουν παραλειφθεί για λόγους σαφήνειας. Οι υπερλεπτές στάθμες (hyperfine levels) σημειώνονται μόνο για τη θεμελιώδη κατάσταση. Απεικονίζεται ένα hyperfine qubit (Bruzewicz et al., 2019).

2.2.4 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και προκλήσεις των παγιδευμένων ιόντων

Τα παγιδευμένα ιόντα παρουσιάζουν εξαιρετικές ιδιότητες ως κβαντικά συστήματα αφού χαρακτηρίζονται από μεγάλους χρόνους συνοχής (βλ. Κεφάλαιο 3). Για τα παγιδευμένα ιόντα, αυτοί οι χρόνοι είναι πολύ μεγάλοι, ακόμη και δεκάδες ή εκατοντάδες δευτερόλεπτα. Αυτό επιτρέπει τη διατήρηση της κβαντικής πληροφορίας για μεγάλα χρονικά διαστήματα, καθιστώντας τα ιδιαίτερα κατάλληλα για εφαρμογές κβαντικού υπολογισμού (Bruzewicz et al., 2019).

Ένα ακόμη πλεονέκτημα είναι ότι τόσο οι μονήρεις (single-qubit) όσο και οι δύο-qubit πύλες μπορούν να υλοποιηθούν με πολύ υψηλή πιστότητα (fidelity) χρησιμοποιώντας παγιδευμένα ιόντα. Η χρήση παλμών λέιζερ επιτρέπει την εκτέλεση λογικών πυλών (quantum gates) με μεγάλη ακρίβεια ($>99.9\%$). Περιστροφές ενός qubit, με ακρίβεια που φτάνει έως και 99.9999% , έχουν

επιτευχθεί, ξεπερνώντας την απόδοση οποιασδήποτε άλλης τεχνολογίας qubit (Bruzewicz et al., 2019).

Επιπλέον η προετοιμασία (initialization) και η ανάγνωση (read out) της κατάστασης είναι επίσης απλές στην περίπτωση των παγιδευμένων ιόντων. Ο καθορισμός της κατάστασης του ιόντος πρέπει να είναι ακριβής, γρήγορος και, ιδανικά, επεκτάσιμος σε πολλά ιόντα. Η χρήση λέιζερ για τη μέτρηση επέτρεψε ακρίβεια ανάγνωσης μεγαλύτερη από 99.99% μέσα σε χρόνο ανίχνευσης μικρότερο των 200 μs και 99.93% μέσα σε 11 μs (Bruzewicz et al., 2019). Οι επιτευχθείσες πιστότητες στην αρχικοποίηση και την ανάγνωση είναι καλύτερες από οποιαδήποτε άλλη τεχνολογία qubit μέχρι σήμερα.

Τέλος τα παγιδευμένα ιόντα επωφελούνται επίσης από το γεγονός ότι όλα τα ιόντα ενός δεδομένου είδους και ισοτόπου είναι θεμελιωδώς πανομοιότυπα. Συνεπώς, η συχνότητα μικροκυμάτων ή λέιζερ που απαιτείται για τον έλεγχο τους θα είναι η ίδια για κάθε ιόν στο σύστημα, και κάθε ιόν θα έχει τον ίδιο χρόνο συνοχής αρκεί να ελαχιστοποιηθούν οι εξωτερικές διαταραχές που ποικίλλουν στον χώρο (όπως ανομοιογένειες μαγνητικών πεδίων ή θόρυβος που προκαλεί αποσυνοχή) (Bruzewicz et al., 2019).

Παρά τα παραπάνω πλεονεκτήματα, η πλατφόρμα των παγιδευμένων ιόντων αντιμετωπίζει αρκετές τεχνικές δυσκολίες.

Ένα από τα σημαντικότερα μειονεκτήματα των παγιδευμένων ιόντων είναι ότι οι πύλες τους είναι σχετικά αργές σε σχέση με άλλες τεχνολογίες qubit. Η ταχύτητα των πυλών περιορίζεται από τη δύναμη σύζευξης (coupling strength) του πεδίου ελέγχου με το ιόν και από τη μάζα του ιόντος (Bruzewicz et al., 2019).

Επιπλέον σε πολλές πειραματικές διατάξεις, η πιστότητα (fidelity) των πυλών πολλαπλών qubit περιορίζεται από τη θέρμανση λόγω της συλλογικής κίνησης των ιόντων (motional heating). Στο μέλλον η ανώμαλη αυτή θέρμανση ενδέχεται να αποτελέσει το κυρίαρχο πρόβλημα, αν δεν μετριαστεί. Κρίσιμη είναι η κατανόηση της πηγής του ηλεκτρικού θορύβου στις παγίδες ιόντων, καθώς και η ανάπτυξη κατάλληλων υλικών και τεχνικών για τη μείωση του (Bruzewicz et al., 2019).

Επίσης η κλιμάκωση (scaling) σε μεγάλα συστήματα αποτελεί μια σημαντική πρόκληση. Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ιόντων, η συλλογική τους κίνηση γίνεται πιο πολύπλοκη, η ψύξη με λέιζερ λιγότερο αποτελεσματική και τα συστήματα πιο ευάλωτα σε αποσυνοχή και θόρυβο (Ladd et al., 2010).

Παράλληλα, αν και τα ιόντα μπορούν να παραμείνουν παγιδευμένα για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα (από ώρες έως και μήνες), η απώλεια ιόντων δεν μπορεί να αποκλειστεί πλήρως. Η ανάγκη επαναφόρτωσης και διόρθωσης σφαλμάτων που προκύπτουν από τέτοια γεγονότα αποτελεί σημαντική τεχνική πρόκληση για μεγάλης κλίμακας συστήματα (Bruzewicz et al., 2019).

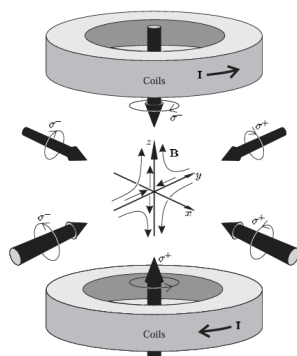
Τέλος αν και κάθε ιόν περιλαμβάνει επιπλέον εσωτερικές στάθμες πέρα από την απλουστευμένη δομή δύο καταστάσεων, ο αριθμός των πρόσθετων ενεργειακών επιπέδων που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την εκτέλεση κβαντικών λειτουργιών είναι μικρός, σε σύγκριση με το συνεχές φάσμα των καταστάσεων που υπάρχουν στα qubits στερεάς κατάστασης. Αυτή η πρόσθετη εσωτερική δομή του ιόντος πρέπει να συνυπολογίζεται κατά την κβαντική επεξεργασία αφού υπάρχει συχνά η πιθανότητα το ιόν να «παγιδευτεί» σε μια ανεπιθύμητη εσωτερική κατάσταση, δηλαδή να προκύψει σφάλμα διαρροής (*leakage error*). Γεγονός που απαιτεί τη χρήση πρόσθετων λείζερ επαναδιέγερσης (repumping) και αυξάνει την πολυπλοκότητα της πειραματικής διάταξης (Bruzewicz et al., 2019).

2.3 Ουδέτερα Άτομα (Neutral Atoms)

Η χρήση ουδέτερων ατόμων ως μοναδικά κβαντικών συστημάτων αποτελεί μία από τις πιο ραγδαία αναπτυσσόμενες τεχνολογικές πλατφόρμες στον χώρο της κβαντικής πληροφορίας και των κβαντικών αισθητήρων. Αν και δεν διαθέτουν φορτίο (σε αντίθεση με τα ιόντα), τα ουδέτερα άτομα μπορούν να παγιδευτούν και να χειριστούν μέσω οπτικών και μαγνητικών πεδίων, καθιστώντας τα ιδανικά για την υλοποίηση μεγάλης κλίμακας διατάξεων (scalable architectures).

2.3.1 Μαγνητο-οπτικές παγίδες (MOT – Magneto-Optical Traps)

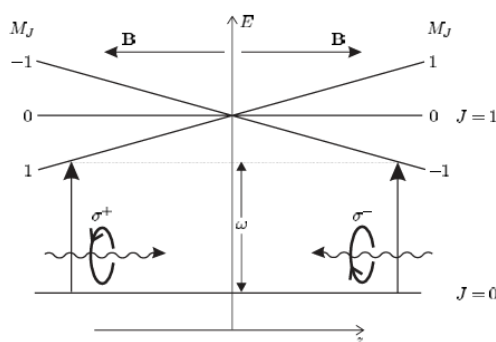
Για πρώτη φορά το 1987 παρουσιάστηκε μια υβριδική διάταξη, που χρησιμοποιεί τόσο οπτικά όσο και μαγνητικά πεδία, ώστε να δημιουργηθεί μια μαγνητο-οπτική παγίδα (MOT) η οποία και κατέληξε να είναι η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη παγίδα ουδέτερων ατόμων (Metcalf & Van der Straten, 1999). Η λειτουργία της βασίζεται στο φαινόμενο Zeeman, μέσω του οποίου οι ατομικές ενεργειακές στάθμες μετατοπίζονται παρουσία ενός χωρικά μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου. Έτσι, η συχνότητα συντονισμού του ατόμου εξαρτάται από τη θέση του, με αποτέλεσμα η δύναμη ακτινοβολίας να αποκτά χωρική εξάρτηση.



Σχήμα 2.5: Η μαγνητο-οπτική παγίδα (MOT) (Foot, 2005)

Η διάταξη της MOT αποτελείται από δύο πηνία με αντίθετα ρεύματα (διάταξη anti-Helmholtz) και τρία ζεύγη αντιδιαδιδόμενων δεσμών λέιζερ με κατάλληλη κυκλική πόλωση, που τέμνονται στο κέντρο της παγίδας (Σχήμα 2.5). Τα πηνία δημιουργούν τετραπολικό μαγνητικό πεδίο μηδενικό στο κέντρο και γραμμικά αυξανόμενο προς όλες τις κατευθύνσεις.

Η αρχή λειτουργίας της MOT στηρίζεται στην ομοιόμορφη κλίση πεδίου που διαταράσσει τα ατομικά ενεργειακά επίπεδα. Στο Σχήμα 2.6 (Foot, 2005) φαίνεται η αρχή λειτουργίας της MOT για την απλή μετάβαση του ατόμου από την κατάσταση συνολική στροφορμή $J=0$ σε κατάσταση συνολικής στροφορμής $J=1$. Η ενεργειακή στάθμη του ατόμου με $J=0$ και $M_J=0$ δεν επηρεάζεται από την παρουσία ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ενώ η ενεργειακή στάθμη με $J=1$ και M_J με τιμές $(-1,0,1)$ βγαίνει από την κατάσταση εκφυλισμού (Φαινόμενο Zeeman).



Σχήμα 2.6: Ο μηχανισμός μιας μαγνητο-οπτικής παγίδας, όπως απεικονίζεται για την περίπτωση ενός ατόμου με μετάβαση από $J=0$ σε $J=1$. Στην κλίση του μαγνητικού πεδίου η διάσπαση Zeeman των υποεπιπέδων εξαρτάται από τη θέση του ατόμου. Δύο αντίθετα διαδιδόμενες δέσμες κυκλικά πολωμένου φωτός φωτίζουν το άτομο και οι κανόνες επιλογής για μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων Zeeman οδηγούν σε ανισορροπία στην ακτινοβολιακή δύναμη από τις δέσμες λέιζερ που ωθεί το άτομο πίσω προς το κέντρο της παγίδας. (Δεν είναι σε κλίμακα) (Foot, 2005)

Η παρουσία του τετραπολικού μαγνητικού πεδίου οδηγεί στην γραμμική μεταβολή της ενέργειας των τριών υποεπιπέδων της στάθμης $J=1$ με τη θέση του ατόμου στον άξονα z (Foot, 2005). Οπότε μια μετατόπιση του ατόμου στα θετικά του άξονα z οδηγεί σε μείωσή της ενεργειακή απόστασης μεταξύ της στάθμης $J=0$ και της υποστάθμης $M_J=-1$ ενώ μια μετατόπιση του ατόμου στα αρνητικά του z προκαλεί μείωση της ενεργειακή απόστασης μεταξύ της στάθμης $J=0$ και της υποστάθμης $J=1, M_J=1$ (Σχήμα 2.6) αυξάνοντας την πιθανότητα διέγερσης του ατόμου λόγω ακτινοβολίας.

Στο σημείο αυτό δύο κυκλικά πολώμενες δέσμες laser που διαδίδονται αντίθετα με συχνότητα ελαφρώς μικρότερη από τη συχνότητα συντονισμού του ατόμου (ερυθρός αποσυντονισμός- red detuning) μπορούν να διεγείρουν το άτομο. Η πόλωση του φωτός καθορίζει ποια ατομική μετάπτωση θα διεγερθεί. Στη γραμμική πόλωση το φωτόνιο δεν φέρει γωνιακή ορμή και συνεπώς δεν μπορεί να μεταβάλει το M_J του ατόμου, ενώ στις κυκλικές πολώσεις σ^+ και σ^- το φωτόνιο φέρει γωνιακή ορμή $\pm\hbar$ και, λόγω διατήρησης της στροφορμής, προκαλεί μεταπτώσεις $\Delta M_J=\pm 1$. Για μετατόπιση του ατόμου στα θετικά του άξονα z , οι κανόνες επιλογής οδηγούν στην απορρόφηση φωτονίων από τη δέσμη που διεγείρει τη μετάπτωση $\sigma^-(\Delta M_J=-1)$, δίνοντας μια δύναμη σκέδασης που ωθεί το άτομο πίσω προς το κέντρο της παγίδας. Παρόμοια διαδικασία συμβαίνει για μετατόπιση στην αντίθετη κατεύθυνση ($z<0$): σε αυτή την περίπτωση, η μετατόπιση Zeeman της συχνότητας μετάβασης και οι κανόνες επιλογής ευνοούν την απορρόφηση από τη δέσμη που κινείται στην θετική κατεύθυνση του z , ωθώντας το άτομο ξανά προς τη θέση $z=0$.

Τα άτομα που εισέρχονται στην περιοχή τομής των δεσμών λέιζερ της MOT λόγω του ερυθρού αποσυντονισμού δέχονται μια δύναμη πίεσης ακτινοβολίας για μικρές αποκλίσεις από το κέντρο και χαμηλές ταχύτητες (βλ. Κεφάλαιο 3) της μορφής $F_{\text{MOT}} \approx -\alpha v - kz$ (Foot, 2005) έτσι ώστε ταυτόχρονα να επιβραδύνονται και να ωθούνται προς το κέντρο της παγίδας. Αυτός ο συνδυασμός ισχυρής απόσβεσης και παγίδευσης καθιστά τη μαγνητο-οπτική παγίδα εύκολη στη φόρτωση.

Τέλος η MOT είναι πολύ ανθεκτική παγίδα, εύκολη στην κατασκευή, γιατί μπορεί να λειτουργήσει με κύτταρο (γυάλινο δοχείο κενού) σε θερμοκρασία δωματίου, όπου τα άτομα αλκαλίων συλλαμβάνονται ενώ βρίσκονται σε κατάσταση ατμού. Επιπλέον, μπορούν να χρησιμοποιηθούν χαμηλού κόστους διοδικά λέιζερ για την παραγωγή φωτός κατάλληλου για όλα τα άλατα αλκαλίων εκτός από το νάτριο. Ως αποτέλεσμα, η MOT έχει γίνει μία από τις οικονομικότερες μεθόδους για ψύξη ατόμων σε θερμοκρασίες κάτω από 1 mK.

2.3.2 Οπτικές τσιμπίδες και οπτικά πλέγματα

Σε αντίθεση με τις μαγνητο-οπτικές παγίδες, όπου κυριαρχεί η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας, στις διπολικές οπτικές παγίδες όπως οι οπτικές τσιμπίδες η παγίδευση βασίζεται στην οπτική διπολική δύναμη, η οποία είναι συντηρητική και προκύπτει από τη χωρική μεταβολή της έντασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Η συμμετρία αντιστροφής (parity) των ατομικών καταστάσεων εμποδίζει τα άτομα να έχουν μόνιμες ηλεκτρικές ροπές· επομένως, η οπτική παγίδευση ουδέτερων ατόμων μέσω ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης πρέπει να πραγματοποιηθεί μέσω επαγωγής ενός ηλεκτρικού διπόλου. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί είτε με ηλεκτροστατικά πεδία είτε με ισχυρά αποσυντονισμένα ηλεκτρομαγνητικά πεδία συχνότητας οπτικού φάσματος. Η επαγωγή κατάλληλων διπόλων με στατικά ηλεκτρικά πεδία είναι δυνατή σε άτομα που διαθέτουν αρκετά κοντινές ενεργειακές στάθμες αντίθετης συμμετρίας (κάτι που αποκλείει τα περισσότερα ατομικά θεμελιώδη επίπεδα, αλλά ευνοεί τις καταστάσεις Rydberg-καταστάσεις μεγάλου κύριου κβαντικού αριθμού). Αντίθετα, υπάρχουν διάφοροι τύποι οπτικών παγίδων που χρησιμοποιούν διαφορετικές διατάξεις ακτίνων λέιζερ οι οποίες όχι μόνο προκαλούν την ανάμειξη ατομικών καταστάσεων αντίθετης συμμετρίας — απαραίτητη για την εμφάνιση διπόλων που αλληλεπιδρούν με το πεδίο — αλλά δημιουργούν και ισχυρές χωρικές βαθμίδες πεδίου που είναι κατάλληλες για παγίδευση (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Στις διπολικές οπτικές παγίδες, το ταλαντούμενο ηλεκτρικό πεδίο ενός λέιζερ επάγει ένα ταλαντούμενο ατομικό ηλεκτρικό δίπολο, το οποίο αλληλεπιδρά με το πεδίο του λέιζερ. Αν το πεδίο του λέιζερ είναι χωρικά ανομοιογενές, η αλληλεπίδραση και η αντίστοιχη μετατόπιση ενεργειακών σταθμών των ατόμων μεταβάλλεται στο χώρο και συνεπώς δημιουργεί ένα δυναμικό και μια διπολική δύναμη (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Η πιο απλή παγίδα που μπορούμε να φανταστούμε αποτελείται από μια μόνο, ισχυρά εστιασμένη δέσμη λέιζερ (Σχήμα 2.7) με εγκάρσια κατανομή έντασης να ακολουθεί την συνάρτηση Γκάους (Metcalf & Van der Straten, 1999), παρουσιάζοντας μέγιστο της έντασης στο εστιακό σημείο και εκθετική μείωση με την απόσταση r ως:

$$I(r) = I_0 e^{-2r^2/w_0^2} \quad (2.16)$$

όπου w_0 είναι η ακτίνα της δέσμης (beam waist).

Μια τέτοια παγίδα έχει ένα πολύ καλά μελετημένο και σημαντικό μακροσκοπικό κλασικό ανάλογο στο φαινόμενο που ονομάζεται οπτικές λαβίδες ή οπτικές τσιμπίδες (optical tweezers).

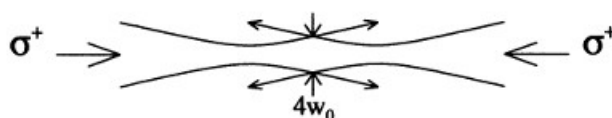
Αν η ακτινοβολία του λέιζερ είναι χαμηλότερης συχνότητας από την συχνότητα ατομικής μετάβασης του ατόμου στην διεγερμένη κατάσταση τότε τα άτομα στη θεμελιώδη κατάσταση υφίστανται μια δύναμη που τα ελκύει προς το κέντρο, όπου η ένταση είναι μεγαλύτερη. Για τη Γκαουσιανή δέσμη του λέιζερ, αυτή η εγκάρσια δύναμη στο εστιακό σημείο είναι αρμονική (Metcalf & Van der Straten, 1999) και παγιδεύει το άτομο στις τρεις διαστάσεις.



Σχήμα 2.7: Μια μεμονωμένη εστιασμένη ακτίνα λέιζερ δημιουργεί τον απλούστερο τύπο οπτικής παγίδας (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Επιπλέον επιλέγουμε μια αποσυντονισμένη ακτινοβολία λέιζερ δηλαδή με συχνότητα σημαντικά διαφορετική από τη συχνότητα συντονισμού της ατομικής μετάβασης (βλ. Κεφάλαιο 3), ώστε να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα πραγματικής διέγερσης του ατόμου η οποία θα δημιουργήσει ακτινοβολιακή πίεση που θα οδηγήσει το άτομο εκτός της παγίδας.

Μια παραλλαγή της διπολικής παγίδας είναι η υβριδική παγίδα που συνδυάζει τη διπολική δύναμη με τη δύναμη πίεσης ακτινοβολίας. Σε αυτόν τον σχεδιασμό, που φαίνεται σχηματικά στο Σχήμα 2.8, δύο λιγότερο ισχυρά εστιασμένες δέσμες laser με Γκαουσιανά εγκάρσια προφίλ έντασης κατευθύνονται ομοαξονικά και αντίθετα, με τις εστίες τους ελαφρώς μετατοπισμένες μεταξύ τους (δεν δημιουργούν στάσιμα κύματα όπως στα οπτικά πλέγματα) (Metcalf & Van der Straten, 1999). Και πάλι, η συχνότητα του φωτός είναι ρυθμισμένη κάτω από τη συχνότητα συντονισμού (red detuning), έτσι ώστε η διπολική δύναμη να παράγει εγκάρσιο περιορισμό των ατόμων. Η δύναμη σκέδασης (πίεση ακτινοβολίας) παράγει αξονικό περιορισμό, διότι άτομα που μετατοπίζονται αξονικά από το σημείο ισορροπίας (το μέσο ανάμεσα στις δύο εστίες) δέχονται μεγαλύτερη ένταση από τη μία δέσμη και μικρότερη από την άλλη. Αυτή η ανισορροπία οδηγεί σε συνισταμένη δύναμη σκέδασης που ωθεί τα άτομα πίσω προς το σημείο ισορροπίας.



Σχήμα 2.8: Εστιασμένες ακτίνες λέιζερ της απλής παγίδας φωτός (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Τέλος η τεχνολογία των οπτικών λαβίδων επέτρεψε την δημιουργία μιας κανονικής διάταξης μικροσκοπικών διπολικών παγίδων που ονομάζεται οπτικό πλέγμα (optical lattice). Η δημιουργία του οπτικού πλέγματος βασίζεται στο φαινόμενο της συμβολής, δηλαδή στο σχηματισμό στάσιμου κύματος. Σε ένα στάσιμο κύμα, η ένταση του φωτός μεταβάλλεται από ένα μέγιστο (στις κοιλίες) σε μηδέν (στους κόμβους) μέσα σε απόσταση $\lambda/2$, δημιουργώντας έτσι πολύ μεγάλη χωρική μεταβολή (χωρική βαθμίδα έντασης) της έντασης και συνεπώς μια μεγάλη διπολική δύναμη αφού (Foot, 2005)

$$F_{grad} \propto \nabla I(r) \quad (2.17)$$

Δύο γραμμικά πολωμένες αντίθετης κατεύθυνσης δέσμες λέιζερ παράγουν ηλεκτρικό πεδίο της μορφής:

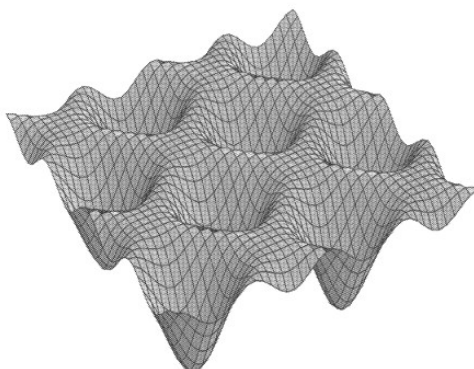
$$E = E_0 \{ \cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz) \} \hat{x} = 2E_0 \cos(kz) \cos(\omega t) \hat{x} \quad (2.18) \quad (\text{Foot, 2005})$$

Αυτό το στάσιμο κύμα δημιουργεί διπολικό δυναμικό της μορφής:

$$U_{dip} = U_0 \cos^2(kz) \quad (2.19)$$

όπου U_0 είναι το βάθος του διπολικού δυναμικού. Το δυναμικό αυτό δημιουργεί περιοδικά πηγάδια δυναμικού στο χώρο με περιοδικότητα $\lambda/2$. Για ερυθρό αποσυντονισμό συχνότητας (red detuning), ένα στάσιμο κύμα φωτός παγιδεύει τα άτομα στις κοιλίες που το δυναμικό είναι μέγιστο αρνητικό και η ένταση του φωτός είναι μέγιστη. Οι κόμβοι αντιστοιχούν σε υψηλότερη δυναμική ενέργεια και είναι ασταθείς θέσεις ισορροπίας. Στον μπλε αποσυντονισμό η παγίδευση γίνεται στους κόμβους. Περισσότερες λεπτομέρειες για την διπολική δύναμη θα δούμε στο κεφάλαιο 3 της εργασίας.

Με τη χρήση πολλαπλών δεσμών λέιζερ μπορεί να δημιουργηθεί μια κανονική διάταξη δυναμικών φρεάτων σε δύο και τρεις διαστάσεις (Σχήμα 2.9). Για παράδειγμα, η γεωμετρία έξι δεσμών που χρησιμοποιείται στην τεχνική των οπτικών μελασσών μπορεί, για κατάλληλες πολώσεις και αποσυντονισμό, να δημιουργήσει ένα κανονικό κυβικό οπτικό πλέγμα φρεάτων δυναμικού. Τα δυναμικά φρέατα σε αυτό το οπτικό πλέγμα έχουν απόσταση $\lambda/2$, και επομένως η τοποθέτηση ενός ατόμου ανά θέση πλέγματος αντιστοιχεί σε πυκνότητα $8/\lambda^3$ (για ένα απλό κυβικό πλέγμα) (Foot, 2005).



Σχήμα 2.9: Το δυναμικό «κλουβιού αυγών» ενός οπτικού πλέγματος, όπως απεικονίζεται σε δύο διαστάσεις. Οι κοιλότητες δυναμικού απέχουν μεταξύ τους κατά $\lambda/2$ (Metcalf & Van der Straten, 1999).

2.3.3 Υλοποίηση qubit σε ουδέτερα άτομα

Τα μοντέλα κβαντικής επεξεργασίας πληροφορίας προϋποθέτουν qubits με μεγάλο χρόνο συνοχής, δυνατότητα ακριβούς ελέγχου και αξιόπιστης ανάγνωσης, καθώς και την υλοποίηση πυλών δύο ή πολλαπλών qubits. Ένα qubit κωδικοποιημένο σε υπερλεπτές (hyperfine) στάθμες του θεμελιώδους επιπέδου ενός παγιδευμένου αλκαλικού ατόμου (π.χ. άτομο καυσίου) παρουσιάζει μεγάλους χρόνους συνοχής (Kaufman & Ni, 2021). Οι υπερλεπτές στάθμες διαφέρουν μόνο ως προς τον σχετικό προσανατολισμό του ηλεκτρονικού και του πυρηνικού σπιν, έχουν ίδια ηλεκτρονική κατανομή φορτίου και είναι χαμηλής ενέργειας (θεμελιώδες επίπεδο). Αυτό τις κάνει να είναι ελάχιστα ευαίσθητες σε διακυμάνσεις ηλεκτρικών πεδίων οι οποίες θα επιδρούσαν ισχυρά στην περίπτωση μεταβάσεων μεταξύ διαφορετικών τροχιακών του ατόμου αλλά και στην επίδραση του ισχυρού λέιζερ της παγίδας που πολώνει το άτομο και προκαλεί AC Stark μετατοπίσεις δηλαδή μεταβολές των ατομικών ενεργειακών σταθμών που προκαλούνται από την αλληλεπίδραση του ατόμου με ένα ταλαντούμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (βλ. ενότητα 3.3.3). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η σχετική φάση του qubit να χάνεται πολύ αργά. Επιπλέον με την χρήση μικροκυματικής ακτινοβολίας ή Raman φασματοσκοπίας πραγματοποιούνται περιστροφές υψηλής πιστότητας στο υπέρλεπτης υφής qubit, ενώ οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ουδετέρων ατόμων οδηγούν σε ασθενή αλληλεπίδραση μεταξύ γειτονικών qubits (Kaufman & Ni, 2021). Τέλος, η ανάγνωση της κατάστασης του qubit πραγματοποιείται με state-dependent fluorescence (βλ.υποενότητα 2.2.2), αξιοποιώντας φθορίζουσες μεταπτώσεις που είναι επιτρεπτές μόνο για μία από τις δύο λογικές καταστάσεις του κβαντικού bit (Kaufman & Ni, 2021).

Επίσης οι αλκαλικές γαίες προσφέρουν εναλλακτικές και ιδιαίτερα ελκυστικές υλοποιήσεις qubits, χάρη στη δομή δύο ηλεκτρονίων σθένους. Τα άτομα αυτά διαθέτουν ένα μεγάλο εύρος οπτικών μεταβάσεων (π.χ. μια οπτική μετάβαση είναι από την θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου 1S_0 στη διεγερμένη 1P_1 ή στην 3P_0). Οι διεγερμένες αυτές καταστάσεις χαρακτηρίζονται από διαφορετικούς χρόνους ζωής. Ως αποτέλεσμα, οι αντίστοιχες οπτικές μεταβάσεις, παρότι όλες βρίσκονται στην οπτική περιοχή του φάσματος (συχνότητες της τάξης των εκατοντάδων THz), παρουσιάζουν φυσικά εύρη γραμμής που εκτείνονται από δεκάδες MHz έως λίγα kHz ή ακόμη και mHz (Kaufman & Ni, 2021). Συνεπώς μια μετάβαση με εύρος στην περιοχή των MHz μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παραδοσιακή ψύξη λέιζερ και την ανίχνευση φθορισμού ενώ οι μεταβάσεις εύρους kHz αποτέλεσαν τη βάση νέων σχημάτων ψύξης όπως η ψύξη πλευρικής ζώνης (resolved-sideband cooling) την οποία θα δούμε αναλυτικά στο 3ο κεφάλαιο της εργασίας (Kaufman & Ni, 2021). Ιδιαίτερο όμως ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι υπερστενές μεταβάσεις εύρους mHz, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν άμεσα ως qubits (Οπτικά Qubits Ρολογιού) και ορίζονται μεταξύ της θεμελιώδους κατάστασης 1S_0 -singlet κατασταση- και της μετασταθούς τριπλής κατάστασης 3P_0 του ατόμου (Kaufman & Ni, 2021). Ο χειρισμός των qubits αυτών πραγματοποιείται με την χρήση δεσμών λέιζερ συντονισμένων με τη μετάβαση $^1S_0 \rightarrow ^3P_0$. Η μετάβαση αυτή είναι “απαγορευμένη” σύμφωνα με τους κανόνες επιλογής (Courteille, 2018) παρόλानτα υπάρχει πιθανότητα να συμβεί λόγω σύζευξη σπιν-τροχιακής στροφορμής (spin-orbit coupling) (Kaufman & Ni, 2021). Έτσι λόγω του εξαιρετικά στενού εύρους, το qubit αυτό μπορεί να διατηρήσει την κβαντική του πληροφορία (συνοχή) για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα (ελάχιστος ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής). Είναι το ίδιο σύστημα που χρησιμοποιείται στα ακριβέστερα ατομικά ρολόγια του κόσμου (Kaufman & Ni, 2021).

2.3.4 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και προκλήσεις των ουδέτερων ατόμων

Η παγίδευση ουδέτερων ατόμων παρουσιάζει πολλά πλεονεκτήματα. Η μαγνητο-οπτική παγίδα είναι σχετικά εύκολη στην κατασκευή, συλλαμβάνει άτομα με ευκολία, και είναι αρκετά ανθεκτική σε ρεαλιστικές πειραματικές ατέλειες όπως αστοχίες ευθυγράμμισης, αστάθειες συχνότητας laser, ατέλειες μαγνητικών πεδίων και πολλά άλλα (Metcalf & Van der Straten, 1999). Επιπλέον τα οπτικά πλέγματα μπορούν να κατασκευαστούν σχεδόν χωρίς ελαττώματα ενώ οι παράμετροι του λέιζερ (ένταση και αποσυντονισμός) μπορούν να μεταβληθούν ώστε να αλλάξει το βάθος των φρεάτων δυναμικού χωρίς να μεταβληθεί η γεωμετρία του πλέγματος, η οποία καθορίζεται από τη

διάταξη των δεσμών λέιζερ (Metcalf & Van der Straten, 1999). Επίσης η ταυτόχρονη παγίδευση 10^3 - 10^6 ατόμων στα οπτικά πλέγματα τα κάνει ιδανικά για κλιμάκωση σε μεγάλα κβαντικά συστήματα ενώ ταυτόχρονα τα παγιδευμένα άτομα χαρακτηρίζονται από πολύ μεγάλους χρόνους συνοχής της τάξης των μερικών δευτερολέπτων (Ladd et al., 2010).

Παρά τα πλεονεκτήματα, η τεχνολογία αυτή παρουσιάζει και ορισμένους περιορισμούς. Η υλοποίηση τέτοιων συστημάτων απαιτεί μεγάλο αριθμό λέιζερ για τον ταυτόχρονο έλεγχο πολλών παγίδων, ενώ βασική πρόκληση αποτελεί η διατήρηση υψηλής πιστότητας ελέγχου καθώς αυξάνεται το μέγεθος του συστήματος. Είναι απαραίτητος ο ακριβής έλεγχος πολλών qubits χωρίς να αυξάνονται τα σφάλματα, να μειώνεται η συνοχή ή να εμφανίζονται ανεπιθύμητες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των qubits (Ladd et al., 2010).

2.4 Κβαντικές Κουκκίδες (Quantum Dots)

Οι κβαντικές κουκκίδες (Quantum Dots, QDs) ορίζονται ως ημιαγώγιμες νανοδομές, οι οποίες εμφανίζουν οπτικές και ηλεκτρονικές ιδιότητες διαφορετικές από εκείνες των μακροσκοπικών υλικών, λόγω του φαινομένου του κβαντικού περιορισμού (Osypiw et al., 2022). Στα μακροσκοπικά υλικά, οι επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες των ηλεκτρονίων σχηματίζουν ενεργειακές ζώνες που αποτελούνται από πολύ πυκνά κατανεμημένες στάθμες. Καθώς όμως οι διαστάσεις του υλικού μειώνονται, η διακριτή φύση των ενεργειακών καταστάσεων γίνεται ολοένα και πιο εμφανής. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως κβαντικός περιορισμός.

Στις κβαντικές κουκκίδες ο περιορισμός πραγματοποιείται και στις τρεις χωρικές διαστάσεις, σε αντίθεση με τα κβαντικά φρέατα και τα κβαντικά σύρματα όπου ο περιορισμός συμβαίνει σε μία ή δύο διαστάσεις αντίστοιχα. Για τον λόγο αυτό οι κβαντικές κουκκίδες χαρακτηρίζονται ως δομές μηδενικής διάστασης (0D).

Τα ηλεκτρόνια και οι οπές περιορίζονται σε έναν πολύ μικρό όγκο και μπορούν να κινηθούν μόνο στο εσωτερικό της κβαντικής κουκκίδας, χωρίς να διαφύγουν από αυτήν. Η κατάσταση αυτή προσομοιάζεται συχνά με το κβαντομηχανικό πρόβλημα του «σωματιδίου σε κουτί» (particle in a box). Ο χωρικός περιορισμός γίνεται σημαντικός όταν οι διαστάσεις της κβαντικής κουκκίδας γίνουν συγκρίσιμες με το μήκος κύματος de Broglie των φορέων φορτίου, συνήθως στην περιοχή 1–10 nm (Osypiw et al., 2022).

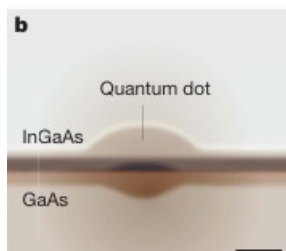
Η συμπεριφορά αυτή του «σωματιδίου σε κουτί» (particle in a box) μπορεί να κατανοηθεί μέσω της αρχής αβεβαιότητας του Heisenberg σύμφωνα με την οποία όσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια με την οποία γνωρίζουμε τη θέση ενός σωματιδίου, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα στην ορμή του και αντίστροφα. Επομένως, όσο περισσότερο περιορίζεται χωρικά ένα σωματίδιο, τόσο μεγαλύτερο γίνεται το εύρος των δυνατών τιμών της ορμής και της ενέργειάς του. Όσο μικρότερη είναι η διάσταση του υλικού, τόσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια περιορισμού των φορέων φορτίου και το ενεργειακό χάσμα γίνεται μεγαλύτερο.

Η εξάρτηση του ενεργειακού χάσματος από το μέγεθος επιτρέπει τον έλεγχο των οπτικών ιδιοτήτων των κβαντικών κουκκίδων μέσω της διαμέτρου τους. Συγκεκριμένα, μικρότερες κβαντικές κουκκίδες εμφανίζουν μεγαλύτερο ενεργειακό χάσμα και εκπέμπουν φωτόνια υψηλότερης ενέργειας (μικρότερου μήκους κύματος), ενώ μεγαλύτερες κβαντικές κουκκίδες εμφανίζουν μικρότερο ενεργειακό χάσμα και εκπέμπουν φωτόνια χαμηλότερης ενέργειας.

Οι κβαντικές κουκκίδες μπορούν να θεωρηθούν ως «τεχνητά άτομα», καθώς ο τρισδιάστατος χωρικός περιορισμός οδηγεί στην εμφάνιση διακριτών ενεργειακών επιπέδων, ανάλογων με εκείνα των φυσικών ατόμων. Αυτές αποτελούν επομένως μια σημαντική πλατφόρμα για τη μελέτη και αξιοποίηση μοναδικών κβαντικών συστημάτων στο πλαίσιο της κβαντικής οπτικής, της κβαντικής πληροφορίας και της νανοτεχνολογίας, με το ιδιαίτερο πλεονέκτημα ότι είναι πλήρως στερεάς κατάστασης, άρα κατάλληλες για ενσωμάτωση σε κυκλώματα.

2.4.1 Μέθοδοι δημιουργίας Κβαντικών κουκκίδων

Οι κβαντικές κουκκίδες σχηματίζονται σε ημιαγωγούς, όπως το GaAs, InAs, CdSe ή ZnS. Για την κατασκευή, χρησιμοποιούνται πολύ ακριβείς τεχνικές ανάπτυξης υλικών. Μια από τις πιο προηγμένες τεχνικές είναι η επιταξία με δέσμη μορίων (Molecular Beam Epitaxy – MBE) (Lodahl et al., 2015). Πρόκειται για τεχνική όπου το νέο υλικό αναπτύσσεται στρώση προς στρώση επάνω σε ένα ήδη κρυσταλλικό υπόστρωμα (π.χ. GaAs) σε συνθήκες υπερυψηλού κενού. Δέσμες ατόμων ή μορίων κατευθύνονται προς το υπόστρωμα και τα άτομα εναποτίθενται με κρυσταλλογραφική ευθυγράμμιση, ακολουθώντας τη δομή του υποστρώματος. Η διαδικασία πραγματοποιείται με ακρίβεια σε ατομική κλίμακα, επιτρέποντας τον ακριβή έλεγχο της δομής. Κατά την επιταξία, διαφορετικά υλικά μπορούν να εναποτεθούν διαδοχικά, σχηματίζοντας ετεροδομές (π.χ. InAs πάνω σε GaAs), οι οποίες επιτρέπουν τον εγκλωβισμό ηλεκτρονίων ή οπών και, συνεπώς, τον σχηματισμό κβαντικών κουκκίδων (Lodahl et al., 2015).



Σχήμα 2.10: Μια αυτοσυναρμολογούμενη κβαντική κουκκίδα. Κλίμακα: 0,5 nm (Ladd et al., 2010)

Η πιο διαδεδομένη μέθοδος δημιουργίας κβαντικών κουκκίδων InGaAs είναι η μέθοδος Stranski–Krastanov, η οποία βασίζεται στον αυτοοργανωμένο σχηματισμό νησίδων InAs ή InGaAs επάνω σε υπόστρωμα GaAs. Η διαδικασία οφείλεται στην ασυμφωνία σταθεράς πλέγματος (~7%) μεταξύ των δύο υλικών. Αρχικά σχηματίζεται ένα λεπτό στρώμα, το οποίο καθώς αυξάνεται το πάχος του καθίσταται ενεργειακά ασταθές. Η χαλάρωση της ελαστικής τάσης οδηγεί στον σχηματισμό τρισδιάστατων νησίδων, δηλαδή κβαντικών κουκκίδων, με τυχαία χωρική κατανομή (Σχήμα 2.10) (Lodahl et al., 2015).

Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι η κατασκευή κβαντικών κουκκίδων μέσω ηλεκτρονικής λιθογραφίας δέσμης, ακολουθούμενης από εγχάραξη νανοδομών στο υπόστρωμα. Με τη μέθοδο αυτή καθορίζονται προκαθορισμένες θέσεις εγκλωβισμού φορέων, επιτρέποντας τη δημιουργία περιοδικών διατάξεων κβαντικών κουκκίδων (Lodahl et al., 2015). Ωστόσο, η διαδικασία αυτή εισάγει προσμείξεις και δομικά ελαττώματα στο υλικό, με αποτέλεσμα μεγαλύτερο εύρος γραμμής εκπομπής (linewidth) και χαμηλότερη κβαντική απόδοση σε σύγκριση με τις αυτοοργανωμένες κβαντικές κουκκίδες τύπου Stranski–Krastanov (Lodahl et al., 2015).

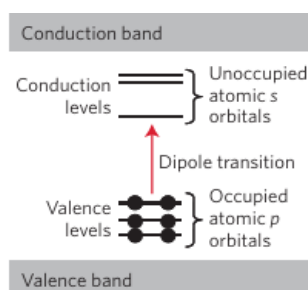
2.4.2 Εξιτόνια σε κβαντικές κουκκίδες

Ένα εξιτόνιο είναι ένα δεσμευμένο σύστημα ενός ηλεκτρονίου και μιας οπής σε έναν ημιαγωγό, τα οποία αλληλεπιδρούν μέσω της ηλεκτροστατικής δύναμης Coulomb. Στις κβαντικές κουκκίδες, οι φορείς αυτοί είναι χωρικά περιορισμένοι στον ίδιο μικρό όγκο, με αποτέλεσμα η μεταξύ τους αλληλεπίδραση να είναι ιδιαίτερα ισχυρή (Lodahl et al., 2015). Το εξιτόνιο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο και, κατ' αναλογία με το άτομο του υδρογόνου, χαρακτηρίζεται από μια χαρακτηριστική ακτίνα Bohr, η οποία αποτελεί βασική παράμετρο για την εκτίμηση του καθεστώτος κβαντικού περιορισμού.

Ανάλογα με τη σχέση μεταξύ του μεγέθους της κβαντικής κουκκίδας και της ακτίνας Bohr του εξιτονίου, διακρίνονται διαφορετικά καθεστάτα περιορισμού. Όταν το μέγεθος της κουκκίδας είναι αρκετά μεγαλύτερο από την ακτίνα Bohr, το σύστημα βρίσκεται στο καθεστώς ασθενούς

περιορισμού (weak confinement), όπου η Coulomb αλληλεπίδραση κυριαρχεί και το εξιτόνιο διατηρεί τον δεσμευμένο του χαρακτήρα (Osyriw et al., 2022). Αντίθετα, όταν το μέγεθος της κουκκίδας είναι συγκρίσιμο ή μικρότερο από την ακτίνα Bohr, το σύστημα βρίσκεται στο καθεστώς ισχυρού περιορισμού (strong confinement), όπου η ενέργεια κβαντικού περιορισμού κυριαρχεί έναντι της αλληλεπίδρασης Coulomb. Στο καθεστώς ισχυρού περιορισμού, η έννοια του εξιτονίου ως δεσμευμένου ζεύγους καθίσταται λιγότερο κατάλληλη, και τα ηλεκτρόνια και οι οπές μπορούν να περιγραφούν, σε πρώτη προσέγγιση, ως ανεξάρτητα σωματίδια (Osyriw et al., 2022). Η μελέτη μας περιορίζεται κυρίως σε κβαντικές κουκκίδες τέτοιου μεγέθους ώστε να θεωρούμε προσεγγιστικά ανεξάρτητη την κίνηση των φορέων στη ζώνη αγωγιμότητας και στη ζώνη σθένους, ενώ οι αλληλεπιδράσεις Coulomb μπορούν να συμπεριληφθούν με τη θεωρία διαταραχών (Lodahl et al., 2015).

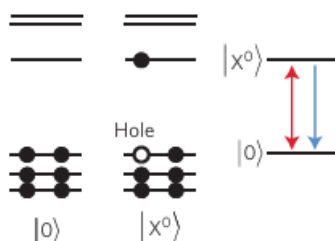
Σε μία κβαντική κουκκίδα τα διακριτά ενεργειακά επίπεδα προέρχονται από τη ζώνη αγωγιμότητας και τη ζώνη σθένους και καθορίζουν το ενεργειακό χάσμα της δομής (Σχήμα 2.11). Η μετάβαση μεταξύ του υψηλότερου επιπέδου της ζώνης σθένους και του χαμηλότερου επιπέδου της ζώνης αγωγιμότητας αντιστοιχεί σε μια ισχυρή οπτική διπολική μετάβαση, γεγονός που καθιστά τις κβαντικές κουκκίδες ιδιαίτερα κατάλληλες για εφαρμογές στην κβαντική οπτική και την κβαντική πληροφορία (Warburton, 2013).



Σχήμα 2.11: Η δομή των ενεργειακών επιπέδων μιας αυτοσυναρμολογούμενης κβαντικής κουκκίδας. Υπάρχουν διακριτά επίπεδα αγωγιμότητας και σθένους, παρόμοια με αυτά των ατόμων. Μια ισχυρή οπτική διπολική μετάβαση συνδέει το επίπεδο σθένους υψηλότερης ενέργειας με το επίπεδο αγωγιμότητας χαμηλότερης ενέργειας (Warburton, 2013)

Η κβαντική κουκκίδα ως μοναδικό κβαντικό σύστημα χαρακτηρίζεται από δύο καταστάσεις $|g\rangle$ και $|e\rangle$, την θεμελιώδη κατάσταση (άδειο κβαντικό κουκκίδιο) και την κατάσταση εξιτονίου X^0 (σύμπλοκο ηλεκτρονίου–οπής)- εξιτονικό κβαντικό bit (qubit) (Σχήμα 2.12). Η οπτική σύζευξη με λέιζερ συμβάλλει στην αρχικοποίηση, στον χειρισμό και στην ανάγνωση του εξιτονικού qubit. Αξιοσημείωτο είναι ότι τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος δύο επιπέδων, γνωστά από την

ατομική φυσική, έχουν παρατηρηθεί σε ένα μεμονωμένο κβαντικό κουκκίδιο (λορετζιανό προφίλ απορρόφησης, ταλαντώσεις Rabi κ.α) (Warburton, 2013)



Σχήμα 2.12: Η κατάσταση κενού $|0\rangle$ και η οπτικά διεγερμένη κατάσταση $|X^0\rangle$ αναπαρίστανται ως η βασική και η διεγερμένη κατάσταση ενός ατόμου δύο επιπέδων (το κόκκινο βέλος αντιπροσωπεύει την οπτική σύζευξη, το μπλε βέλος την αυθόρμητη εκπομπή). Η κατάσταση $|X^0\rangle$ είναι ένα εξιτόνιο, ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-οπής. (Warburton, 2013)

Ωστόσο, η αυθόρμητη εκπομπή από την κατάσταση X^0 προς τη θεμελιώδη κατάσταση αποτελεί έναν ταχύ μηχανισμό αποσυννοχής. Κατά συνέπεια, τα πειράματα που εκμεταλλεύονται την κβαντική συνοχή του εξιτονικού qubit περιορίζονται στον τομέα της υπερταχείας οπτικής (Warburton, 2013).

Η διατήρηση της κβαντικής συνοχής για πολύ μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες αποτελεί βασικό κίνητρο για την ανάπτυξη ενός qubit spin σε μία οπτικά ενεργή κβαντική κουκκίδα. Όμως ο έλεγχος του spin δεν πραγματοποιείται μέσω άμεσης οπτικής διέγερσης τύπου δύο επιπέδων, αλλά βασίζεται σε spin-επιλεκτικές οπτικές μεταβάσεις, μαγνητικά πεδία ή έμμεσες Raman διεργασίες (Warburton, 2013). Συνεπώς στην παρούσα εργασία, η ανάλυση επικεντρώνεται στις εξιτονικές μεταβάσεις των κβαντικών κουκκίδων και στη συνεκτική οπτική τους διέγερση, καθώς αυτές συνδέονται άμεσα με τη φυσική του διεπίπεδου συστήματος και την αλληλεπίδραση φωτός-ύλης που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3.

2.4.3 Κβαντικές κουκκίδες – πηγές μονήρους φωτονίου

Παρότι η παρούσα εργασία δεν εστιάζει στη χρήση των κβαντικών κουκκίδων ως πηγές μονήρους φωτονίου, θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση της σημαντικής ιδιότητα αυτής, καθώς προκύπτει άμεσα από τη διεπίπεδη φύση των εξιτονικών μεταβάσεων.

Η οπτική συμπεριφορά των κβαντικών κουκκίδων, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, περιγράφεται ικανοποιητικά από ένα διεπίπεδο σύστημα αποτελούμενο από τη θεμελιώδη κατάσταση $|g\rangle$ και την εξιτονική κατάσταση $|X\rangle = |e\rangle$. Η διέγερση με παλμό λέιζερ οδηγεί στην πλήρωση της εξιτονικής

κατάστασης, η οποία στη συνέχεια αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα μοναδικό φωτόνιο, χαρακτηριστικό της μονοφωτονικής εκπομπής. Για να εκπέμψει δεύτερο φωτόνιο πρέπει πρώτα να ξαναδιεγερθεί συνεπώς η πιθανότητα ταυτόχρονης εκπομπής δύο φωτονίων είναι πρακτικά μηδενική (Lodahl et al., 2015).

Επιπλέον η κατάσταση $|X\rangle$ χαρακτηρίζεται από έναν καλά ορισμένο μέσο χρόνο ζωής οπότε έχουμε μια χρονικά εντοπισμένη εκπομπή. Η κατάσταση φωτεινού εξιτονίου αποδιεγείρεται με καλά ορισμένο ρυθμό Γ και η πιθανότητα να μείνει στην διεγερμένη κατάσταση μετά από χρόνο t έχει εκθετική συμπεριφορά $\rho(t) \sim e^{-\Gamma t}$. Η διαδικασία είναι στοχαστική, με χαρακτηριστικό χρόνο ζωής $\tau = 1/\Gamma$, ο οποίος καθορίζει τη χρονική κλίμακα εκπομπής των φωτονίων (Lodahl et al., 2015). Επίσης ο κβαντικός περιορισμός του ηλεκτρονίου και της οπής στην κβαντική κουκκίδα οδηγεί σε καλά καθορισμένη στάθμη εξιτονίου και συνεπώς μια ιδανικά στενή φασματική γραμμή.

Συνεπώς ο συνδυασμός διακριτού ενεργειακού φάσματος, χρονικά καθορισμένης εκπομπής και δυνατότητας οπτικού ελέγχου καθιστά τις κβαντικές κουκκίδες ιδιαίτερα ελκυστικές ως πηγές μονήρων φωτονίων για εφαρμογές κβαντικής επικοινωνίας και κβαντικής οπτικής.

2.4.4 Πλεονεκτήματα, περιορισμοί και προκλήσεις

Οι κβαντικές κουκκίδες παρουσιάζουν ορισμένα κρίσιμα πλεονεκτήματα. Η στερεάς κατάστασης υλοποίηση τους κάνει εύκολη την ενσωμάτωσή τους σε ηλεκτρονικά και οπτοηλεκτρονικά κυκλώματα. Μεγάλες συστοιχίες από κβαντικά bits ίσως είναι ευκολότερο να συναρμολογηθούν και να ψυχθούν αν τα "τεχνητά άτομα" είναι ενσωματωμένα σε ένα στερεό υπόστρωμα, γεγονός που ενισχύει τη χρήση των κβαντικών κουκκίδων (Ladd et al., 2010). Επίσης οι κβαντικές κουκκίδες ενσωματώνονται σε υπάρχουσες τεχνολογίες συμπληρωματικού ημιαγωγού μετάλλου-οξειδίου (Complementary Metal–Oxide–Semiconductor, CMOS), οπότε μπορούν να κατασκευαστούν με τις ίδιες τεχνικές που χρησιμοποιούνται για παραγωγή σημερινών μικροτσίπ (π.χ. photolithography, etching, deposition) (Zwerver et al., 2022), δηλαδή είναι συμβατές με το υλικό (π.χ. πυρίτιο, SiO_2) και τη δομή των σημερινών τρανζίστορ.

Παρά τα πλεονεκτήματα, υπάρχουν σημαντικά εμπόδια στη χρήση των κβαντικών κουκκίδων ως εξιτονικά διεπίπεδα συστήματα όπως τα περιγράψαμε στην εργασία αυτή. Συγκεκριμένα, φωνόνια, διακυμάνσεις φορτίου που σχετίζονται με ατέλειες του κρυσταλλικού πλέγματος ή προσμίξεις, καθώς και διακυμάνσεις σπιν στο σύνολο των πυρήνων προκαλούν απώλεια της συνοχής της φάσης του εξιτονίου (Ladd et al., 2010). Επιπλέον ένας βασικός μηχανισμός αποσυνοχής είναι η

αυθόρμητη εκπομπή από την εξιτονική κατάσταση προς τη θεμελιώδη, η οποία αποτελεί εγγενή διαδικασία και περιορίζει δραστικά τον χρόνο συνοχής του συστήματος. Ως αποτέλεσμα, τα εξιτονικά qubits είναι κατάλληλα κυρίως για εφαρμογές υπερταχείας οπτικής και όχι για μακροχρόνια αποθήκευση κβαντικής πληροφορίας (Warburton, 2013).

Ένας ακόμη σημαντικός περιορισμός είναι η ανάγκη λειτουργίας σε κρυογενείς θερμοκρασίες (τυπικά της τάξης των 4 K), ώστε να περιοριστούν οι θερμικές διεγέρσεις φορέων και η σύζευξη με φωνόνια. Σε υψηλότερες θερμοκρασίες, η θερμική ενέργεια μπορεί να προκαλέσει διεγέρσεις σε ανώτερες ενεργειακές καταστάσεις, οδηγώντας σε διεύρυνση της φασματικής γραμμής και απώλεια της συνοχής της μετάβασης.

Τέλος, σε αντίθεση με τα φυσικά άτομα, οι κβαντικές κουκκίδες δεν είναι απολύτως πανομοιότυπες μεταξύ τους. Μικρές διαφορές στη γεωμετρία, τη σύσταση ή το τοπικό περιβάλλον οδηγούν σε διασπορά των ενεργειακών επιπέδων και σε μεταβολές της συχνότητας εκπομπής από κουκκίδα σε κουκκίδα. Η ιδιότητα αυτή, γνωστή ως φασματική ανομοιογένεια (inhomogeneous broadening), αποτελεί σημαντική πρόκληση για την υλοποίηση μεγάλων, ομοιογενών κβαντικών συστημάτων (Ladd et al., 2010).

Κλείνοντας τονίζουμε ξανά ότι στην παρούσα εργασία, οι κβαντικές κουκκίδες αντιμετωπίζονται πρωτίστως ως πρότυπα διεπίπεδα κβαντικά συστήματα για τη μελέτη της συνεκτικής αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης και όχι ως πλήρεις πλατφόρμες κβαντικού υπολογισμού.

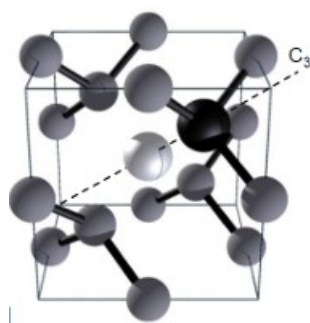
2.5 Άλλες Πλατφόρμες Μοναδικών Κβαντικών Συστημάτων (Σύντομη Αναφορά)

Πέρα από τις πλατφόρμες που αναλύθηκαν στις προηγούμενες ενότητες, έχουν αναπτυχθεί και άλλες φυσικές υλοποιήσεις μοναδικών κβαντικών συστημάτων, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και έχουν εφαρμογές τόσο στην κβαντική πληροφορία όσο και στην κβαντική επικοινωνία. Στην παρούσα εργασία γίνεται συνοπτική αναφορά σε αυτές, με στόχο την πληρότητα της παρουσίασης και όχι την εκτενή ανάλυσή τους, καθώς η φυσική λειτουργίας και οι τεχνικές χειρισμού τους διαφέρουν από το θεωρητικό πλαίσιο που θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3.

2.5.1 Κέντρα NV στο Διαμάντι (NV Centers in Diamond)

Τα κέντρα αζώτου-κενής θέσης (nitrogen–vacancy centers, NV centers) στο διαμάντι αποτελούν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μοναδικού κβαντικού συστήματος στερεάς κατάστασης.

Το διαμάντι είναι μια αλλοτροπική μορφή του άνθρακα, στο οποίο κάθε άτομο βρίσκεται σε μια περιοδική δομή και σχηματίζει ισχυρούς ομοιοπολικούς δεσμούς με τους τέσσερις πλησιέστερους γείτονές του, οι οποίοι είναι διατεταγμένοι στις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου. Το καθαρό διαμάντι παρουσιάζει υψηλή διαφάνεια από το εγγύς υπεριώδες έως και το απώτερο υπέρυθρο φάσμα, σε αντίθεση με τα διαμάντια που απαντώνται στη φύση, τα οποία περιέχουν πολλές προσμίξεις και ελαττώματα (Roberts, 2014). Τα ελαττώματα αυτά οδηγούν σε πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον να παρουσιάζουν οι οπτικές ιδιότητες. Τα ελαττώματα στο διαμάντι μπορεί να προκληθούν από εσωτερικές ανωμαλίες στη δομή του κρυσταλλικού πλέγματος του διαμαντιού ή από την είσοδο ξένων ατόμων στη μήτρα του διαμαντιού (Roberts, 2014). Τα πιο σημαντικά ελαττώματα στο διαμάντι προκύπτουν από ελαττώματα που σχετίζονται με το άζωτο, καθώς το άζωτο αποτελεί την πιο συχνή πρόσμιξη στο διαμάντι, λόγω της αφθονίας του στην ατμόσφαιρα. Από όλες τις δομές που μπορεί να σχηματίσει το άζωτο μέσα στο διαμάντι, η περισσότερο μελετημένη είναι το κέντρο αζώτου-κενής θέσης (nitrogen vacancy centre), ή απλά κέντρο NV (Roberts, 2014). Το κέντρο NV είναι ένα εξωγενές κρυσταλλογραφικό ελάττωμα του διαμαντιού, ενσωματωμένο στην τετραεδρική δομή του διαμαντιού όπου ένα άτομο άνθρακα αντικαθίσταται από ένα άτομο αζώτου, ενώ το άλλο αντικαθίσταται από μια κενή θέση (vacancy) όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.13 (Roberts, 2014).



Σχήμα 2.13: Δομή NV στο πλέγμα του διαμαντιού. Το άτομο αζώτου απεικονίζεται με μαύρο χρώμα, τα άτομα άνθρακα με γκρι και η κενή θέση με λευκό χρώμα, χωρίς δεσμούς (μαύρα ραβδιά) (Roberts, 2014)

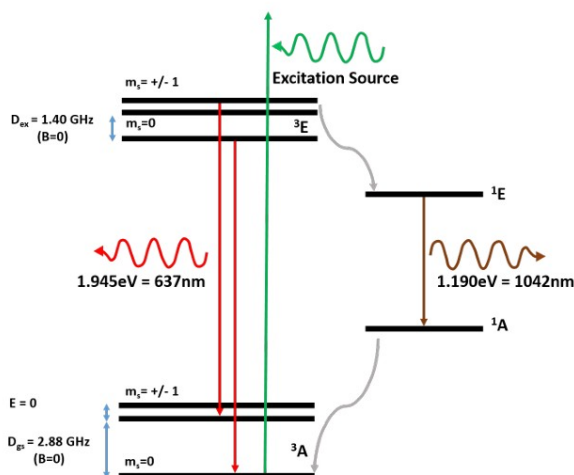
Το κέντρο NV μπορεί να υπάρξει σε δύο διαφορετικές καταστάσεις φορτίου. Η παρουσία γειτονικών προσμίξεων που λειτουργούν ως δότες ή αποδέκτες ηλεκτρονίων οδηγεί το κέντρο NV είτε στη ουδέτερη κατάσταση NV^0 είτε στη αρνητικά φορτισμένη κατάσταση NV^- (Roberts, 2014).

Το αρνητικά φορτισμένο κέντρο NV^- παρουσιάζει πιο πλούσια φυσική συμπεριφορά όσον αφορά τις ιδιότητες σπιν, τις μαγνητικές και τις οπτικές του ιδιότητες ενώ λεπτομερής περιγραφή του ενεργειακού σχήματος του, βασισμένη τόσο σε θεωρητικές μελέτες όσο και σε πειραματικά δεδομένα, έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία (Roberts, 2014).

Για την παρουσίαση των ιδιοτήτων σπιν και των οπτικών ιδιοτήτων του κέντρου NV στο διαμάντι, υιοθετείται ένα απλοποιημένο ενεργειακό διάγραμμα, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2.14 (Roberts, 2014), αυτό προσεγγίζεται αποτελεσματικά ως σύστημα τεσσάρων ενεργειακών επιπέδων, που περιλαμβάνει δύο τριπλές καταστάσεις, τις 3A και 3E , και δύο μονές καταστάσεις, τις 1A και 1E . Η ενεργειακή διαφορά μεταξύ της θεμελιώδους τριπλής κατάστασης και της οπτικά διεγερμένης τριπλής κατάστασης 3E είναι 1,945 eV (στα 637 nm, εκπομπή χωρίς φωνόνια- γραμμή μηδενικού φωνονίου, (zero-phonon line, ZPL) (Roberts, 2014). Και οι δύο αυτές ενεργειακές καταστάσεις διαχωρίζονται σε υποεπίπεδα σπιν που αντιστοιχούν στους κβαντικούς αριθμούς σπιν $m_s = 0$ και $m_s = \pm 1$. Επίσης η βραχύβια κατάσταση 1E και η μακροβιότερη μετασταθής κατάσταση 1A έχουν παρατηρηθεί πειραματικά αλλά δεν έχουν ακόμη πλήρως χαρακτηριστεί (Roberts, 2014). Εκτός όμως από τις μεταβάσεις στα 637nm υπάρχουν ηλεκτρονικές μεταβάσεις από το υποεπίπεδο $m_s = \pm 1$ της διεγερμένης τριπλής κατάστασης προς τη διεγερμένη μονή κατάσταση 1E , και στη συνέχεια —είτε μέσω μη ακτινοβολούσας αποδιέγερσης είτε μέσω αποδιέγερσης στο υπερυθρό— προς τη μετασταθή θεμελιώδη μονή κατάσταση 1A . Αυτές οδηγούν τελικά σε μεταβάσεις που καταλήγουν κυρίως στην κατάσταση $m_s = 0$ της θεμελιώδους τριπλής κατάστασης (Roberts, 2014). Κατά τη διαδικασία αυτή παρατηρείται πειραματικά ένα πέρασμα του ηλεκτρονικού σπιν, από $m_s = \pm 1$ σε $m_s = 0$.

Παρόλο που αυτή η συμπεριφορά είναι θεωρητικά ασθενής, είναι ακριβώς αυτή η διαδικασία που προσδίδει στο κέντρο NV^- την ικανότητα έντονης οπτικής πόλωσης του σπιν (Roberts, 2014). Αρχικά, το σύστημα είναι μη πολωμένο και τα ηλεκτρόνια κατανέμονται στα επίπεδα $m_s = 0$ και $m_s = \pm 1$. Με οπτική άντληση της μετάβασης μέσω λέιζερ διέγερσης, ο πληθυσμός διεγείρεται από τη θεμελιώδη κατάσταση $m_s = 0$ και $m_s = \pm 1$ προς τη διεγερμένη κατάσταση. Το σύστημα αποδιεγείρεται κυρίως ακτινοβολικά μέσω της σπιν-διατηρούμενης οπτικά ενεργής μετάβασης στα 637 nm· ωστόσο, ένα μέρος του διεγερμένου πληθυσμού στην $m_s = \pm 1$ αποδιεγείρεται μέσω των μετασταθών καταστάσεων και καταλήγει στη θεμελιώδη κατάσταση $m_s = 0$ (Roberts, 2014). Μετά από μερικούς κύκλους, ο πληθυσμός του NV^- καταλήγει να πολώνεται στο υποεπίπεδο $m_s = 0$ της θεμελιώδους κατάστασης. Με αυτόν τον τρόπο, η αρχική κατάσταση του συστήματος μπορεί να τεθεί ή να αρχικοποιηθεί (να πολωθεί) εύκολα και αξιόπιστα σε μια συγκεκριμένη κατάσταση σπιν,

απαραίτητη για περαιτέρω χειρισμό. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί κρίσιμο στοιχείο για τη χρήση του κέντρου NV^- τόσο ως κβαντικού bit σπιν (spin qubit) όσο και ως ανιχνευτή υψηλής ανάλυσης για μαγνητομετρία (Roberts, 2014; (Rondin et al., 2014)).



Σχήμα 2.14: Σχήμα της ηλεκτρονικής δομής του NV^- . Η βασική κατάσταση 3A και η διεγερμένη κατάσταση 3E είναι τριπλέτες και έχουν ενεργειακή διαφορά 1,945 eV. Η μετάβαση στη μονή κατάσταση έχει ενεργειακή διαφορά 1,190 eV και μπορεί να επιτευχθεί οπτικά μόνο όταν το κέντρο διεγείρεται στα 1,945 eV. Η διάσπαση μηδενικού πεδίου της βασικής κατάστασης είναι $D_{gs} = 2,88$ GHz. Τα υποεπίπεδα της βασικής κατάστασης $m_s = \pm 1$ είναι εκφυλισμένα ενεργειακά για λόγους συμμετρίας, αλλά μια τοπική αλλαγή στη συμμετρία μπορεί να διαχωρίσει τον εκφυλισμό, καθιστώντας τα διακριτά. Σημειώστε ότι οι σχετικές ενέργειες των τριπλών και των μονών καταστάσεων είναι προς το παρόν άγνωστες. (Roberts, 2014)

Επίσης η κατάσταση σπιν του NV^- μπορεί να αναγνωσθεί οπτικά μέσω μετρήσεων του φθορισμού στα 637nm. Όταν υπάρχει πληθυσμός στο επίπεδο με $m_s = 0$ της θεμελιώδους τριπλής κατάστασης 3A αν αυτός διεγερθεί στην διεγερμένη τριπλή κατάσταση 3E θα επιστρέψει σε αυτή κυρίως με εκπομπή ακτινοβολίας ενώ όταν υπάρχει πληθυσμός στις καταστάσεις $m_s = \pm 1$, ένα μέρος του πληθυσμού αποδιεγείρεται μέσω των μονών καταστάσεων, 1A και 1E (όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο) με συνέπεια μια ανιχνεύσιμη μείωση (περίπου 30%) στον φθορισμό στα 637 nm του κέντρου NV^- . (Roberts, 2014).

Επιπλέον στη θεμελιώδη κατάσταση του κέντρου NV^- , οι καταστάσεις spin, $m_s=0$ και $m_s=\pm 1$, διαχωρίζονται ενεργειακά κατά ποσότητα που αντιστοιχεί σε συχνότητα 2,88 GHz, ακόμη και όταν δεν εφαρμόζεται εξωτερικό μαγνητικό πεδίο (zero-field splitting, $D_{gs} = 2,88$ GHz) γεγονός που καθιστά αυτή τη μετάβαση προσβάσιμη μέσω μικροκυματικής διέγερσης (Roberts, 2014). Με την εφαρμογή μικροκυματικής ακτινοβολίας στα 2,87 GHz, ο πληθυσμός των καταστάσεων σπιν του ηλεκτρονίου υφίσταται ταλάντωση μεταξύ των υποεπιπέδων $m_s = 0$ και $m_s = \pm 1$ της θεμελιώδους

κατάστασης,³A, λόγω της συνεκτικής αλληλεπίδρασης του σπιν με το μικροκυματικό πεδίο (Roberts, 2014). Οι ταλαντώσεις αυτές είναι γνωστές ως ταλαντώσεις Rabi και αποτελούν τη βάση του χειρισμού του qubit (βλ. Κεφάλαιο 3).

Τα κέντρα NV⁻ στο διαμάντι παρουσιάζουν ένα σύνολο ιδιοτήτων που τα καθιστούν εξαιρετικά ελκυστικά για εφαρμογές στην κβαντική τεχνολογία. Πρωτίστως, εμφανίζουν ιδιαίτερα μεγάλους χρόνους συνοχής του ηλεκτρονικού spin σε θερμοκρασία δωματίου, επιτρέποντας συνεκτικό χειρισμό και αλληλεπίδραση με γειτονικά spins (Doherty et al., 2013). Επιπλέον, το spin μπορεί να αρχικοποιηθεί και να αναγνωσθεί οπτικά μέσω φθορισμού, γεγονός που παρέχει έναν πλήρη κύκλο ελέγχου (προετοιμασία–χειρισμός–ανάγνωση) (Doherty et al., 2013). Η ισχυρή και φωτοσταθερή οπτική εκπομπή των κέντρων επιτρέπει τη λειτουργία τους ως πηγές μεμονωμένων φωτονίων (Doherty et al., 2013). Τέλος, η ευελιξία στην κατασκευή και η ανθεκτικότητα των ιδιοτήτων τους καθιστούν τα NV⁻ κέντρα κατάλληλα για υλοποίηση σε ποικιλία διατάξεων και εφαρμογών (Doherty et al., 2013).

Παρά τη σημαντική πρόοδο, η περαιτέρω ανάπτυξη των κέντρων NV εξακολουθεί να περιορίζεται από προκλήσεις που σχετίζονται με την προετοιμασία των υλικών, καθώς η απόδοσή τους εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ποιότητα του διαμαντιού, την ακρίβεια της προσμίξεως (doping) και τη σταθερότητα του σχηματισμού των κέντρων NV. Η βελτιστοποίηση της ανάπτυξης του διαμαντιού και των διαδικασιών σχηματισμού των κέντρων NV, με στόχο τη βελτίωση της ομοιομορφίας του υλικού, την αύξηση των χρόνων συνοχής και την ενσωμάτωση σε συσκευές, παραμένει βασικό πεδίο έρευνας (Li et al., 2025).

Τέλος, τα κέντρα NV και οι κβαντικές κουκκίδες ανήκουν στην ευρύτερη κατηγορία των μοναδικών κβαντικών συστημάτων στερεάς κατάστασης και αποτελούν σημαντικές πλατφόρμες για εφαρμογές κβαντικής τεχνολογίας. Ωστόσο, στην παρούσα εργασία το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στις εξιτονικές μεταβάσεις και στη δυναμική οπτικών διεγέρσεων, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν αποτελεσματικά μέσω του μοντέλου διεπίπεδου συστήματος και των Optical Bloch Equations. Οι κβαντικές κουκκίδες προσφέρουν ένα φυσικό παράδειγμα τέτοιων εξιτονικών συστημάτων, ενώ τα κέντρα NV βασίζονται κυρίως σε spin βαθμούς ελευθερίας και απαιτούν μια διαφορετική περιγραφή που περιλαμβάνει επιπλέον ηλεκτρονικές και spin καταστάσεις. Για τον λόγο αυτό, η παρούσα μελέτη εστιάζει στις κβαντικές κουκκίδες ως πρότυπα συστήματα για τη μελέτη της οπτικής δυναμικής μεμονωμένων κβαντικών εκπομπών.

2.5.2 Υπεραγωγήμα Qubits

Μία ακόμη σημαντική κατηγορία μοναδικών κβαντικών συστημάτων και ιδιαίτερα δημοφιλής τις τελευταίες δεκαετίες είναι τα υπεραγωγήμα μοναδικά κβαντικά συστήματα. Αυτά ανήκουν στην κατηγορία των κβαντικών συστημάτων στερεάς κατάστασης που χαρακτηρίζονται από υψηλή κλιμακωσιμότητα, κατασκευάζονται πάνω σε υποστρώματα πυριτίου ή ζαφειριού, αξιοποιώντας τεχνικές και υλικά συμβατά με τη βιομηχανία CMOS πυριτίου (Kjaergaard et al., 2020).

Οι υπεραγωγοί είναι εκείνα τα υλικά που δεν παρουσιάζουν ηλεκτρική αντίσταση όταν η θερμοκρασία τους πέσει κάτω από μια κρίσιμη τιμή (Naeij, 2025). Το αλουμίνιο, το οξείδιο του χαλκού, το διβoreϊούχο μαγνήσιο, το υτριοβάριο και το νιόβιο είναι γνωστά παραδείγματα υπεραγωγών (Naeij, 2025). Αυτοί επιτρέπουν την παρατήρηση φαινομένων ατομικής κλίμακας σε μακροσκοπικό επίπεδο, ο λόγος, όπως εξηγείται από τη θεωρία των Bardeen, Cooper και Schrieffer, είναι ότι σε έναν δεδομένο υπεραγωγό όλα τα ζεύγη Cooper των ηλεκτρονίων (τα οποία έχουν φορτίο $2e$, μάζα $2m_e$ και μηδενικό spin, και είναι υπεύθυνα για τη μεταφορά του υπεραγωγίμου ρεύματος) συμπυκνώνονται σε μία ενιαία μακροσκοπική κατάσταση που περιγράφεται από μια κυματοσυνάρτηση $\Psi(r, t)$ (όπου r είναι η χωρική μεταβλητή και t ο χρόνος). Όπως όλες οι κβαντομηχανικές κυματοσυναρτήσεις, η $\Psi(r, t)$ μπορεί να γραφεί ως $|\Psi(r, t)|e^{i\varphi(r, t)}$, με καλά ορισμένο πλάτος και φάση σε όλο το υλικό. Η ύπαρξη αυτής της συλλογικής φάσης αποτελεί το θεμελιώδες χαρακτηριστικό των υπεραγωγών και επιτρέπει την εμφάνιση συνεκτικών κβαντικών φαινομένων σε μακροσκοπική κλίμακα (Clarke & Wilhelm, 2008).

Για τον σχεδιασμό υπεραγωγίμων μοναδικών κβαντικών συστημάτων, πέρα από την ίδια την υπεραγωγιμότητα, απαιτείται ένα δυναμικό περιορισμού, ώστε να προκύπτουν διακριτές ιδιοκαταστάσεις ενέργειας. Επιπλέον, για να είναι δυνατός ο επιλεκτικός έλεγχος των δύο χαμηλότερων ενεργειακών καταστάσεων, το δυναμικό πρέπει να είναι αναρμονικό, έτσι ώστε να υπάρχει σαφής ενεργειακός διαχωρισμός μεταξύ των καταστάσεων. Η αναρμονικότητα αυτή δημιουργείται μέσω της επαφής Josephson. Μια επαφή Josephson είναι ένα μονωτικό φράγμα πάχους νανομέτρων ανάμεσα σε δύο υπεραγωγήμα μέταλλα, το οποίο σχηματίζει μια επαφή σήραγγας (κβαντομηχανική σήραγγα των ζεύγων Cooper) (Naeij, 2025). Το βασικό χαρακτηριστικό της επαφής είναι ότι το υπεραγωγίμο ρεύμα που τη διαρρέει εξαρτάται από τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο υπεραγωγών, ενώ η χρονική μεταβολή αυτής της φάσης συνδέεται άμεσα με την τάση στα άκρα της επαφής. Η επαφή Josephson -επαφή σήραγγας (tunnel junction) συμπεριφέρεται ως ένα μη γραμμικό, χωρίς απώλειες στοιχείο, το οποίο συνδυάζει ιδιότητες χωρητικότητας και επαγωγής, με επαγωγή που εξαρτάται από τη φάση. Χάρη σε αυτά τα χαρακτηριστικά, οι επαφές

Josephson αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία υπεραγώγιμων κυκλωμάτων, επιτρέποντας τη δημιουργία τεχνητών κβαντικών συστημάτων, τα οποία δεν υπάρχουν στη φύση ως στοιχειώδη σωματίδια. Το μέγεθος των υπεραγώγιμων κυκλωμάτων είναι μακροσκοπικής κλίμακας σε αντίθεση με άλλες τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται στους κβαντικούς υπολογιστές, όπως οι κβαντικές κουκκίδες και τα παγιδευμένα ιόντα, όπου η κβαντική πληροφορία κωδικοποιείται σε μικροσκοπικά συστήματα όπως ηλεκτρόνια και φωτόνια (Clarke & Wilhelm, 2008).

Τα υπεραγώγιμα κυκλώματα διαθέτουν δύο διακριτές, χαμηλής ενέργειας κβαντικές καταστάσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως καταστάσεις $|g\rangle$ και $|e\rangle$ δηλαδή τα συστήματα αυτά μπορούν να περιγραφούν αποτελεσματικά ως διεπίπεδα συστήματα που επιτρέπουν τον ακριβή έλεγχο της κβαντικής τους κατάστασης (Kjaergaard et al., 2020). Ο σχεδιασμός των υπεραγώγιμων κυκλωμάτων μπορεί να ορίσει ποια φυσική μεταβλητή (φορτίο, μαγνητική ροή κτλ.) καθορίζει τις δυο αυτές κβαντικές καταστάσεις οπότε προκύπτουν διαφορετικά είδη υπεραγώγιμων qubits, όπως τα charge qubits, τα flux qubits και τα phase qubits, καθώς και υβριδικές υλοποιήσεις όπως το transmon. Η δυνατότητα ελέγχου και σύζευξης αυτών των qubits με ηλεκτρομαγνητικά πεδία καθιστά τα υπεραγώγιμα κυκλώματα μία από τις πιο ισχυρές και ευέλικτες πλατφόρμες για την υλοποίηση της κβαντικής πληροφορίας. Ο χειρισμός των υπεραγώγιμων qubits πραγματοποιείται κυρίως μέσω μικροκυματικών πεδίων αφού οι ενεργειακές μεταβάσεις μεταξύ των δύο ενεργειακών σταθμών είναι στην περιοχή των GHz (Clarke & Wilhelm, 2008; Kjaergaard et al., 2020).

Σήμερα, τα υπεραγώγιμα μοναδικά κβαντικά συστήματα συγκαταλέγονται στις σημαντικότερες τεχνολογίες για την υλοποίηση ενός καθολικού κβαντικού υπολογιστή. Ωστόσο, οι σχετικά μικροί χρόνοι συνοχής, που οφείλονται σε διάφορους θορύβους και στην αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, μειώνουν την πιστότητα της κβαντικής υπολογιστικής και θέτουν σημαντικές προκλήσεις στον σχεδιασμό υπεραγώγιμων κυκλωμάτων, όπως συμβαίνει και με άλλες προσεγγίσεις στη σημερινή τεχνολογική αιχμή της κβαντικής υπολογιστικής (Naeij, 2025).

Τέλος παρότι τα υπεραγώγιμα qubits περιγράφονται αποτελεσματικά ως διεπίπεδα κβαντικά συστήματα και παρουσιάζουν δυναμική παρόμοια με αυτήν ατομικών συστημάτων, το κβαντικό τους bit αντιστοιχεί σε μακροσκοπικούς βαθμούς ελευθερίας υπεραγώγιμων κυκλωμάτων (όπως φάση ή το φορτίο), και όχι σε εσωτερικές ενεργειακές στάθμες ατόμων ή στερεάς ύλης. Για τον λόγο αυτό, η φυσική τους περιγραφή βασίζεται στην κυκλωματική κβαντική ηλεκτροδυναμική και δεν εντάσσεται στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης, η οποία επικεντρώνεται σε συστήματα με ατομικού τύπου εσωτερικές στάθμες και αλληλεπίδραση φωτός-ύλης.

2.6 Συγκριτική Ανάλυση Πλατφορμών

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικές τεχνολογικές πλατφόρμες για τη δημιουργία και τον έλεγχο μοναδικών κβαντικών συστημάτων: τα παγιδευμένα ιόντα, τα ουδέτερα άτομα και οι κβαντικές κουκκίδες. Κάθε μία από αυτές τις πλατφόρμες προσφέρει διαφορετικά πλεονεκτήματα και περιορισμούς, ανάλογα με την εφαρμογή στην οποία προορίζεται (υπολογιστική, μετρολογία, αισθητήρες, εκπομπή φωτονίων κ.λπ.).

Για τη σύγκριση των τριών αυτών μοναδικών κβαντικών συστημάτων θα χρησιμοποιήσουμε τέσσερα βασικά κριτήρια. Αυτά είναι ο τύπος παγίδευσης, ο χρόνος συνοχής, η δυνατότητα κλιμάκωσης και η πειραματική πολυπλοκότητα.

Τα παγιδευμένα ιόντα προσφέρουν το καλύτερο περιβάλλον για υψηλής ακρίβειας πειράματα και μεγάλο χρόνο συνοχής της τάξης του δευτερολέπτου (Ladd et al., 2010), αλλά παρουσιάζουν περιορισμούς στην κλιμάκωση, καθώς απαιτούν πολύπλοκες διατάξεις και ακριβή συγχρονισμό πολλών λέιζερ. Τα ουδέτερα άτομα, χάρη στις οπτικές τσιμπίδες, επιτρέπουν ευέλικτη τοποθέτηση και ταυτόχρονο χειρισμό πολλών ατόμων με σχετική σταθερότητα. Ωστόσο, η ανάγκη για σταθεροποίηση λέιζερ συστημάτων υψηλής έντασης και η σχετικά μικρότερη συνοχή, περιορίζουν την απόδοσή τους σε εφαρμογές υψηλής ακριβείας. Οι κβαντικές κουκκίδες υπερέχουν στη συμβατότητα με υπάρχουσα τεχνολογία μικροηλεκτρονικών, και μπορούν να παραχθούν μαζικά. Παρουσιάζουν όμως πολύ μικρούς χρόνους συνοχής της τάξης των ms (Ladd et al., 2010) και ανάγκη για ψύξη σε κρυογενείς θερμοκρασίες, κάτι που περιορίζει τις δυνατότητές τους για ακριβείς υπολογισμούς αλλά τις καθιστά ιδανικές για κβαντικά φωτονικά κυκλώματα και τηλεπικοινωνία.

Κάθε μία από αυτές τις τεχνολογίες έχει αναπτυχθεί με στόχο να επιλύσει το θεμελιώδες πρόβλημα της κβαντικής απομόνωσης: πώς μπορούμε να παρατηρήσουμε και να χειριζόμαστε ένα κβαντικό σύστημα, διατηρώντας ταυτόχρονα την κβαντική συνοχή και την αξιοπιστία στην ανάγνωση της κατάστασής του.

Η επιλογή της κατάλληλης πλατφόρμας εξαρτάται, τελικά, από την εφαρμογή και τις τεχνικές απαιτήσεις του εκάστοτε συστήματος: υπολογιστική ακρίβεια, ταχύτητα, κλιμακωσιμότητα, σταθερότητα, ή φωτονική ολοκλήρωση.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα εξεταστούν οι φυσικές αρχές και οι πειραματικές τεχνικές που επιτρέπουν τον ακριβή χειρισμό των μοναδικών συστημάτων: αλληλεπιδράσεις με φως, φαινόμενα

όπως οι Rabi ταλαντώσεις και οι οπτικές εξισώσεις Bloch, καθώς και η επίδραση των εξωτερικών πεδίων και την απόκλιση συχνότητας του λέιζερ στη δυναμική των κβαντικών καταστάσεων.

Κεφάλαιο 3 – Απομόνωση και Χειρισμός Μοναδικών Κβαντικών Συστημάτων

3.1 Αλληλεπίδραση Φωτός–Ύλης

Η κατανόηση της αλληλεπίδρασης ενός κβαντικού συστήματος με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο για τον έλεγχο και τον χειρισμό της κβαντικής του κατάστασης. Στα συστήματα που εξετάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο η αλληλεπίδραση αυτή υλοποιείται κυρίως μέσω οπτικής ή μικροκυματικής ακτινοβολίας. Στην παρούσα εργασία, για λόγους απλότητας, η θεωρητική περιγραφή της αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας–ύλης αναπτύσσεται στο πλαίσιο της ηλεκτρικής διπολικής αλληλεπίδρασης η οποία προκαλείται από ακτινοβολία λέιζερ. Η προσέγγιση αυτή αποδίδει τη βασική φυσική των μηχανισμών συνεκτικού ελέγχου, παρότι σε ορισμένες υλοποιήσεις qubits χρησιμοποιούνται και μικροκυματικά πεδία ή μη διπολικές μεταβάσεις.

Σε πολλές περιπτώσεις, η δυναμική του συστήματος μπορεί να περιγραφεί αποτελεσματικά ως ένα διεπίπεδο κβαντικό σύστημα, στο οποίο η ακτινοβολία προκαλεί μεταβάσεις μεταξύ δύο ενεργειακών καταστάσεων. Στην απλούστερη περίπτωση, η αλληλεπίδρασης περιγράφεται από τη σύζευξη του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας με την ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος, οδηγώντας σε ηλεκτρικές διπολικές μεταβάσεις μεταξύ ενεργειακών σταθμών.

Υπό κατάλληλες συνθήκες, η συνεκτική αυτή αλληλεπίδραση οδηγεί σε χαρακτηριστικά φαινόμενα, όπως οι ταλαντώσεις Rabi, οι οποίες περιγράφουν την περιοδική ανταλλαγή πληθυσμού μεταξύ των δύο ενεργειακών καταστάσεων. Τα φαινόμενα αυτά αποτελούν τη βάση για τον ακριβή έλεγχο της κβαντικής κατάστασης και θα αναλυθούν εκτενώς στις επόμενες ενότητες.

3.1.1 Δύο-Επιπέδων Σύστημα (Two-Level System)

Η κβαντική αντιμετώπιση της αλληλεπίδρασης φωτός–ύλης αναπτύσσεται συνήθως μέσω της προσέγγισης του ατόμου δύο επιπέδων. Το άτομο έχει πολλά κβαντικά επίπεδα και υπάρχουν πολλές πιθανές οπτικές μεταβάσεις μεταξύ τους. Ωστόσο, στην προσέγγιση του ατόμου δύο επιπέδων, λαμβάνεται υπόψη μόνο μια συγκεκριμένη μετάβαση, ενώ αγνοούνται όλα τα υπόλοιπα επίπεδα. Έτσι θεωρούμε ότι το σύστημα (π.χ. ένα άτομο) έχει δύο μόνο ενεργειακές καταστάσεις:

- Μια θεμελιώδη κατάσταση $|g\rangle$ (ground state) με ενέργεια E_g

- Μια διεγερμένη κατάσταση $|e\rangle$ (excited state) με ενέργεια E_e

Η προσέγγιση αυτή είναι εφαρμόσιμη όταν η συχνότητα του φωτός που αλληλεπιδρά με την ύλη συμπίπτει με μία από τις οπτικές μεταβάσεις του κβαντικού μας συστήματος. Όταν προσπίπτει ακτινοβολία (λείζερ) με συχνότητα κοντά στη συχνότητα της μετάβασης μεταξύ $|g\rangle$ και $|e\rangle$, μπορεί να προκαλέσει απορρόφηση φωτονίου και μετάβαση του συστήματος από $|g\rangle$ σε $|e\rangle$. Αντίστοιχα, όταν το σύστημα βρίσκεται στην $|e\rangle$, μπορεί να επαναφέρει την $|g\rangle$ εκπέμποντας ένα φωτόνιο – αυθόρμητα ή με εξαναγκασμό παρουσία εξωτερικής ακτινοβολίας.

Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως "δύο-επιπέδων σύστημα", και χρησιμοποιείται ευρέως στη μελέτη των μοναδιαίων συστημάτων, αφού περιγράφει καλά τις βασικές μεταβάσεις που ελέγχονται από το φως.

Απουσία αλληλεπίδρασης με κάποιο εξωτερικό πεδίο, η Χαμιλτονιανή που περιγράφει ένα διεπίπεδο σύστημα δίνεται από την σχέση (Kärtner, 2005)

$$H_A = E_e |e\rangle\langle e| + E_g |g\rangle\langle g| = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z \quad (3.1)$$

με συχνότητα μετάβασης $\omega_0 = \frac{1}{\hbar} (E_e - E_g)$ και κατάλληλη ενεργειακή μετατόπιση.

Στον δισδιάστατο αυτόν χώρο καταστάσεων είναι δυνατοί μόνο 4 γραμμικά ανεξάρτητοι γραμμικοί τελεστές. Μια δυνατή επιλογή βάσης τελεστών σε αυτόν τον χώρο είναι (Kärtner, 2005) :

$$I = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| \quad (3.2)$$

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (3.3)$$

$$\sigma^+ = |e\rangle\langle g| \quad (3.4)$$

$$\sigma^- = |g\rangle\langle e| \quad (3.5)$$

Οι μη-Ερμιτιανοί τελεστές σ^+, σ^- μπορούν να αντικατασταθούν από τους Ερμιτιανούς τελεστές σ_x, σ_y :

$$\sigma_x = \sigma^- + \sigma^+ \quad (3.6)$$

$$\sigma_y = -i(\sigma^+ - \sigma^-) \quad (3.7)$$

όπου $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ οι γνωστοί πίνακες Pauli.

Το φυσικό νόημα των τελεστών, σ^+, σ^- , γίνεται προφανές αν εξετάσουμε τη δράση τους σε μια αυθαίρετη κατάσταση του συστήματος (Kärtner, 2005)

$$|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle \quad (3.8)$$

Τότε προκύπτει ότι ο τελεστής σ^+ προκαλεί μια μετάβαση από τη θεμελιώδη στην διεγερμένη κατάσταση-τελεστής αναβίβασης, ενώ ο σ^- προκαλεί την αντίστροφη μετάβαση-τελεστής

καταβίβασης. Αντίθετα ο σ_z είναι Ερμιτιανός τελεστής και η αναμενόμενη τιμή του αποτελεί μετρήσιμη φυσική ποσότητα με αναμενόμενη τιμή:

$$\langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle = |c_e|^2 - |c_g|^2 \quad (3.9)$$

όπου $|c_e|^2$ και $|c_g|^2$ είναι οι πιθανότητες εύρεσης του ατόμου στις καταστάσεις ($|e\rangle$) και ($|g\rangle$) αντίστοιχα, κατά τη διάρκεια μιας μέτρησης. Επιπλέον οι τελεστές (3.3)–(3.5) ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μεταθετών (Kärtner, 2005) :

$$[\sigma^+, \sigma^-] = \sigma_z \quad (3.10)$$

$$[\sigma^+, \sigma_z] = -2\sigma^+ \quad (3.11)$$

$$[\sigma^-, \sigma_z] = 2\sigma^- \quad (3.12)$$

καθώς και τις αντίστοιχες σχέσεις αντιμεταθετών (Kärtner, 2005):

$$\{\sigma^+, \sigma^-\} = 1 \quad (3.13)$$

$$\{\sigma^+, \sigma_z\} = 0 \quad (3.14)$$

$$\{\sigma^-, \sigma_z\} = 0 \quad (3.15)$$

Οι τελεστές $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ικανοποιούν τις σχέσεις μεταθετών της στροφορμής:

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad (3.16)$$

$$[\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x \quad (3.17)$$

$$[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \quad (3.18)$$

Ο δισδιάστατος χώρος καταστάσεων μπορεί να αναπαρασταθεί ως διανύσματα στο C^2 σύμφωνα με τον κανόνα:

$$|\psi\rangle = c_g|g\rangle + c_e|e\rangle = c_g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_e \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c_e \\ c_g \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

και οι τελεστές αναπαρίστανται από πίνακες

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Ωστόσο, η περιγραφή αυτή αποτελεί προσέγγιση, καθώς πραγματικά φυσικά συστήματα διαθέτουν περισσότερες ενεργειακές στάθμες. Η απομόνωση δύο μόνο επιπέδων προϋποθέτει κατάλληλη επιλογή συχνοτήτων και συνθηκών διέγερσης. Σε αντίθετη περίπτωση, εμφανίζονται ανεπιθύμητες μεταβάσεις (off-resonant couplings), οι οποίες περιορίζουν την ακρίβεια του ελέγχου.

3.1.2 Η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης με το φώς

Για την μελέτη της αλληλεπίδρασης φωτός ύλης, η ανάλυση μας θα στηριχθεί σε δύο βασικούς άξονες. Αρχικά θεωρούμε ότι το σύστημα είναι διεπίπεδο όπως το ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, υπό την επίδραση φωτός με συχνότητα, ω , πολύ κοντά στη συχνότητα συντονισμού της μετάβασης, δηλαδή: $\omega = \omega_0 + \Delta$ όπου $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$ και $\Delta \ll \omega_0$. Ο ακριβής συντονισμός αντιστοιχεί σε $\Delta = 0$.

Στην συνέχεια διαχωρίζουμε την ολική Χαμιλτονιανή, $\mathbf{H}_T$ σε δύο μέρη:

$$\hat{H}_T = \hat{H}_A + \hat{H}_I \quad (3.21)$$

με $\mathbf{H}_A$, την ανεξάρτητη από το χρόνο που περιγράφει το σύστημα χωρίς την επίδραση από την φωτεινή ακτινοβολία και $\mathbf{H}_I$ ο χρονικά εξαρτώμενος όρος που περιγράφει την αλληλεπίδραση φωτός-συστήματος (Διαταραχή).

Για το σύστημα χωρίς την διαταραχή από την ακτινοβολία υπάρχουν δύο λύσεις:

$$H_A \psi_i(r) = E_i \psi_i(r), \quad i=e, g \quad (3.22)$$

και οι χρονικά εξαρτώμενες καταστάσεις του είναι:

$$\Psi_i(r, t) = \psi_i(r) e^{-iE_i t/\hbar} \quad (3.23)$$

οπότε η γενική λύση της χρονικά εξαρτώμενης εξίσωσης Schrödinger

$$\hat{H}_A \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.24)$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των ιδιοκαταστάσεων:

$$\Psi(r, t) = c_e(t) \psi_e(r) e^{-iE_e t/\hbar} + c_g(t) \psi_g(r) e^{-iE_g t/\hbar} \quad (3.25)$$

Αντικαθιστούμε την παραπάνω λύση στην εξίσωση του Schrödinger,

$$\hat{H}_T \Psi = i\hbar \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.26)$$

εφαρμόζουμε την ορθοκανονικότητα των ιδιοκαταστάσεων, και καταλήγουμε σε δύο διαφορικές εξισώσεις για τους συντελεστές $c_e(t)$, $c_g(t)$ (Fox, 2006):

$$\frac{d c_e(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [c_e(t) H_{ee}(t) + c_g(t) H_{eg}(t) e^{i\omega_0 t}] \quad (3.27)$$

$$\frac{d c_g(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [c_e(t) H_{ge}(t) e^{-i\omega_0 t} + c_g(t) H_{gg}(t)] \quad (3.28)$$

όπου οι όροι $H_{ij}(t)$ είναι τα στοιχεία πίνακα της διαταραχής στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του διεπίπεδου κβαντικού συστήματος (Fox, 2006):

$$H_{ij}(t) = \langle i | \hat{H}_I(t) | j \rangle = \int \psi_i^*(r) \hat{H}_I(t) \psi_j(r) d^3r \quad (3.29)$$

Από την ημι-κλασική προσέγγιση, για την αλληλεπίδραση διπόλου-πεδίου στην οποία το άτομο περιγράφεται κβαντομηχανικά ενώ το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο αντιμετωπίζεται ως κλασικό εξωτερικό πεδίο, έχουμε (Fox, 2006):

$$\hat{H}_I(t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (3.30)$$

όπου $\mathbf{E}(t)$ το ηλεκτρικό πεδίο το οποίο θεωρούμε γραμμικά πολωμένο στον άξονα x και $\mathbf{d}$, η διπολική ροπή η οποία εκφράζει την αλληλεπίδραση του ηλεκτρικού πεδίου με την κατανομή φορτίου του συστήματος και η οποία δίνεται από την σχέση $\mathbf{d} = -e\mathbf{x}$. Συνεπώς για $\mathbf{E}(t) = (E_0 \cos \omega t, 0, 0)$ η σχέση (3.30) γίνεται

$$\hat{H}_I(t) = exE_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \hat{H}_I(t) = \frac{exE_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (3.31)$$

και με βάση την σχέση (3.29) προκύπτει

$$H_{ij}(t) = \frac{eE_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \int \psi_i^*(r) x \psi_j(r) d^3r \Rightarrow H_{ij}(t) = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \mu_{ij} \quad (3.32)$$

με $\mu_{ij} = e \int \psi_i^*(r) x \psi_j(r) d^3r$ το ηλεκτρικό στοιχείο διπόλου μεταξύ των καταστάσεων $|i\rangle$ και $|j\rangle$.

Το x έχει περιττή συμμετρία (parity) οπότε $\mu_{ee} = \mu_{gg} = 0$ και $H_{ee}(t) = H_{gg}(t) = 0$ ενώ τα $\mu_{ge} = \mu_{eg}$ επιλέγονται πραγματικά. Έτσι η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης της ύλης με το φως είναι

$$\hat{H}_I(t) = \begin{bmatrix} 0 & H_{eg} \\ H_{ge} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Και αυτή παίρνει με βάση τις σχέσεις (3.32) την μορφή

$$\hat{H}_I(t) = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \mu_{eg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\hat{H}_I(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

όπου Ω η συχνότητα της ταλάντωσης Rabi, η οποία καθορίζει τον ρυθμό με τον οποίο το σύστημα ταλαντώνεται μεταξύ των καταστάσεων $|g\rangle$ και $|e\rangle$ όπως θα δούμε στην συνέχεια..

$$\Omega = |\mu_{ge} E_0| / \hbar \quad (3.36)$$

Έτσι η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης στην εικόνα Schrodinger, με βάση τις σχέσεις (3.20) της ενότητας 3.1.1, γίνεται

$$\hat{H}_I(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) (\sigma^- + \sigma^+) \quad (3.37)$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας την σχέση (3.35), στην εικόνα αλληλεπίδρασης (interaction picture), οι σχέσεις (3.27),(3.28) παίρνουν την μορφή

$$\frac{d c_e(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar \Omega}{2} [c_g(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{i\omega_0 t}] \quad (3.38)$$

$$\frac{d c_g(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar \Omega}{2} [c_e(t)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-i\omega_0 t}] \quad (3.39)$$

Από τις σχέσεις αυτές με την βοήθεια της μεθόδου Προσέγγισης Περιστρεφόμενου Κύματος (Rotating Wave Approximation-RWA) η οποία αγνοεί τους ταχέως ταλαντούμενους όρους, $e^{i(\omega+\omega_0)t}$, καθώς η μέση συμβολή τους είναι μηδενική σε μεγάλους χρόνους, παίρνουμε την Χαμιλτονιανή για φως συντονισμένο στην συχνότητα ω_0

$$\hat{H}_I(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} (\sigma^- + \sigma^+) \quad (3.40)$$

Η μορφή αυτή δείχνει ότι η αλληλεπίδραση φωτός-ύλης δρα ως μηχανισμός σύζευξης μεταξύ των δύο καταστάσεων του συστήματος, προκαλώντας συνεκτικές μεταβάσεις μεταξύ τους.

Στην περίπτωση όπου το λείζερ συχνότητας ω χαρακτηρίζεται από αποσυντονισμό $\Delta = \omega - \omega_0$, η Χαμιλτονιανή είναι

$$\hat{H}_I(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} (e^{-i\Delta t} \sigma^+ + e^{i\Delta t} \sigma^-) \quad (3.41)$$

Για να βρούμε μία χρονικά ανεξάρτητη Χαμιλτονιανή (στατική) H_i μετασχηματίζουμε το σύστημα σε περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς ώστε οι εκθετικοί $e^{\pm i\Delta t}$ να εξαφανιστούν. Ο τύπος που χρησιμοποιούμε για τέτοιο μετασχηματισμό είναι

$$R(t) = e^{-i(\Delta \sigma_z/2)t} \quad (3.42)$$

και από την εξίσωση Σρέντινγκερ

$$\hat{H}_I \Psi = i \hbar \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.43)$$

με αλλαγή σε νέα κατάσταση στο περιστρεφόμενο πλαίσιο $|\psi'(t)\rangle = R(t)|\psi(t)\rangle$ η εξίσωση Σρέντινγκερ είναι

$$\hat{H}_i \Psi' = i \hbar \frac{d\Psi'}{dt} \quad (3.44)$$

και η Χαμιλτονιανή H_i παίρνει την μορφή

$$\hat{H}_i = R H_I R^\dagger + i \hbar \dot{R} R^\dagger \quad (3.45)$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i\Delta t} R\sigma^- R^\dagger + e^{-i\Delta t} R\sigma^+ R^\dagger) - \hbar\frac{\Delta}{2} R\sigma_z R^\dagger \quad (3.46)$$

η οποία με την βοήθεια της ταυτότητα Baker–Campbell–Hausdorff και των σχέσεων (3.10) και (3.11) γίνεται

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar\Omega}{2}(\sigma^- + \sigma^+) + \hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_z \quad (3.47)$$

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Στη Χαμιλτονιανή της σχέσης (3.48), τα διαγώνια στοιχεία προέρχονται από τη Χαμιλτονιανή του ελεύθερου διεπιπέδου συστήματος, H_A , και εκφράζουν τον αποσυντονισμό (Δ) μεταξύ της συχνότητας του λέιζερ και της συχνότητας της ατομικής μετάβασης. Αντίθετα, τα μη διαγώνια στοιχεία προέρχονται από τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης H_i και περιγράφουν τη σύζευξη των δύο καταστάσεων μέσω της ηλεκτρικής διπολικής αλληλεπίδρασης με το πεδίο του λέιζερ.

Στο σημείο αυτό είναι κάλο να τονίσουμε ξανά ότι η παραπάνω ανάπτυξη αφορά μια επιτρεπτή ηλεκτρική διπολική μετάβαση και χρησιμοποιείται ως πρότυπο μοντέλο για την περιγραφή της αλληλεπίδρασης φωτός–ύλης. Παρότι ορισμένα qubits που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 βασίζονται σε τετραπολικές ή άλλες ασθενέστερες μεταβάσεις, η μαθηματική περιγραφή τους ως αποτελεσματικών διεπίπεδων συστημάτων παραμένει ανάλογη.

3.1.3 Οι Rabi ταλαντώσεις

Στα μη διαγώνια στοιχεία της σχέσης (3.48) εμφανίζεται μια συχνότητα Ω την οποία ονομάσαμε συχνότητα Rabi. Η φυσική σημασία της συχνότητας αυτής μπορεί να γίνει κατανοητή απλοποιώντας τις σχέσεις (3.38), (3.39) με την βοήθεια της Rotating Wave Approximation (RWA) και θεωρώντας ότι $\Delta=0$ (μηδενικός αποσυντονισμός (detuning) του λέιζερ).

$$\frac{d c_e(t)}{dt} = -i\frac{\Omega}{2} c_g(t) \quad (3.49)$$

$$\frac{d c_g(t)}{dt} = -i\frac{\Omega}{2} c_e(t) \quad (3.50)$$

οι οποίες οδηγούν στην διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{c}_e + \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 c_e = 0 \quad (3.51)$$

με λύση:

$$c_e(t) = \cos(\Omega t/2) \quad (3.52)$$

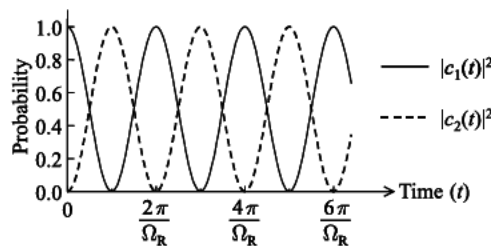
$$c_g(t) = i \sin(\Omega t/2) \quad (3.53)$$

για αρχικές συνθήκες $c_e(0)=1$, $c_g(0)=0$.

Έτσι οι πιθανότητες να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στην υψηλότερη ή χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη δίνονται από τις σχέσεις:

$$|c_e(t)|^2 = \cos^2(\Omega t/2), \quad |c_g(t)|^2 = \sin^2(\Omega t/2) \quad (3.54)$$

Η χρονική εξάρτηση αυτών των πιθανοτήτων φαίνεται στο Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.1: Η πιθανότητα το άτομο να βρεθεί στην θεμελιώδη ή διεγερμένη κατάσταση του. Η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα σε ένα εκ των δύο επιπέδων ταλαντώνεται μεταξύ των δύο επιπέδων με τη γωνιακή συχνότητα Rabi, Ω . Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται “Ταλαντώσεις Rabi” (Fox, 2006)

Συνεπώς όταν ένα δύο επιπέδων σύστημα αλληλεπιδρά με συνεχές ή παλμικό πεδίο (π.χ. λέιζερ), το σύστημα ταλαντώνεται περιοδικά μεταξύ των δύο καταστάσεων $|g\rangle$ στην $|e\rangle$. Αυτό το φαινόμενο λέγεται ταλάντωση Rabi, και χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα Rabi (Ω). Η συχνότητα Rabi (Ω) είναι ο ρυθμός με τον οποίο ένα κβαντικό σύστημα ανταλλάσσει ενέργεια με το εξωτερικό πεδίο. Όσο πιο ισχυρό το πεδίο, τόσο πιο γρήγορη η ταλάντωση (Fox, 2006).

Αποσυντονισμός (Detuning)

Στην πράξη, η συχνότητα του laser δεν είναι πάντα ακριβώς ίδια με τη συχνότητα της μετάβασης. Η διαφορά ονομάζεται όπως ήδη την έχουμε ορίσει:

$$\text{Αποσυντονισμός } (\Delta) = (\text{συχνότητα λέιζερ}) - (\text{συχνότητα μετάβασης})$$

Ανάλογα με το πρόσημο του αποσυντονισμού έχουμε τον Ερυθρό αποσυντονισμό- red detuning ($\Delta < 0$) με λέιζερ μικρότερης συχνότητας από τη μετάβαση και τον Μπλέ αποσυντονισμό- blue detuning ($\Delta > 0$) με λέιζερ μεγαλύτερης συχνότητας

Έτσι μπορεί να αποδειχθεί ότι (Fox, 2006)

$$|c_e(t)|^2 = \frac{\Omega^2}{\Omega_R^2} \sin^2(\Omega_R t/2) \quad (3.55)$$

όπου Ω_R η γενικευμένη συχνότητα Rabi η οποία δίνεται από την σχέση

$$\Omega_R^2 = \Omega^2 + \Delta^2 \quad (3.56)$$

Αυτό δείχνει ότι η συχνότητα των ταλαντώσεων Rabi αυξάνεται όσο απομακρυνόμαστε από τον συντονισμό, αλλά το πλάτος τους (δηλαδή η μέγιστη πιθανότητα διέγερσης) μειώνεται.

Επιπλέον για την πρόκληση ταλαντώσεων Rabi χρησιμοποιούνται παλμικά λέιζερ τα οποία έχουν υψηλή στιγμιαία ένταση, καθώς η ενέργεια του παλμού συγκεντρώνεται σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα σε αντίθεση με το συνεχές λέιζερ ίδιας χρονικής διάρκειας. Το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου E_0 ενός παλμικού λέιζερ μεταβάλλεται με τον χρόνο - έχει μορφή καμπύλης (π.χ. Gaussian) με συνέπεια την χρονική μεταβολή της συχνότητας Rabi. Συνεπώς είναι χρήσιμο να ορίσουμε τη "επιφάνεια παλμού" (pulse area) Θ (Fox, 2006) ως:

$$\Theta(t) = \left| \frac{\mu_{eg}}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) dt \right| \quad (3.57)$$

Η επιφάνεια παλμού είναι μια αδιάστατη ποσότητα που καθορίζεται από την ενέργεια του παλμού και παίζει τον ίδιο ρόλο με το γινόμενο $\Omega_R t$ στην προηγούμενη ανάλυση. Ένας παλμός με επιφάνεια ίση με π ονομάζεται π -παλμός (π -pulse). Ένα άτομο που βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση με $c_g=1$ τη χρονική στιγμή $t=0$, θα διεγερθεί στην ανώτερη κατάσταση με $c_e=1$ μετά την αλληλεπίδραση με έναν π -παλμό. Αν όμως αλληλεπιδράσει με έναν 2π -παλμό, τότε θα επιστρέψει πίσω στη θεμελιώδη κατάσταση.

Απόσβεση των ταλαντώσεων Rabi

Ένας βασικός μηχανισμός απόσβεσης των ταλαντώσεων Rabi είναι αυθόρμητη εκπομπή. Όταν ένα άτομο βρίσκεται σε διεγερμένη κατάσταση, έχει φυσική τάση να αποδιεγείρεται. Αυτή η αποδιέγερση γίνεται στοχαστικά (με πιθανότητα) και καταστρέφει τη συνοχή της κυματοσυνάρτησης, δηλαδή αποσβένει τις ταλαντώσεις Rabi. Η ταχύτητα αυτού του φαινομένου δίνεται από τον χρόνο ζωής τ της διεγερμένης κατάστασης, ο οποίος περιλαμβάνει τόσο ακτινοβολούσες όσο και μη ακτινοβολούσες μεταπτώσεις:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_R} + \frac{1}{\tau_{NR}} \quad (3.58)$$

όπου τ_R , χρόνος ζωής λόγω ακτινοβολούμενης εκπομπής και τ_{NR} , χρόνος ζωής λόγω μη-ακτινοβολούμενων (π.χ. θερμικών) μεταπτώσεων. Αυτή χαρακτηρίζεται από την χρονική σταθερά T_1 λεγόμενη και επιμήκης αποδιέγερση (Fox, 2006).

Ένας άλλος μηχανισμός απόσβεσης είναι η απώλεια φάσης (pure dephasing), κατά την οποία δεν μεταβάλλεται η ενέργεια του συστήματος αλλά η σχετική φάση της κυματοσυνάρτησης (Fox, 2006). Στα μοναδικά κβαντικά συστήματα η αποσυνοχή αυτή οφείλεται κυρίως σε περιβαλλοντικό θόρυβο, όπως διακυμάνσεις του μαγνητικού πεδίου, θόρυβο φάσης ή έντασης του λέιζερ και ηλεκτρικό θόρυβο της παγίδας. Σε συστήματα ατομικών αερίων μπορούν επίσης να συμβάλλουν ελαστικές ή σχεδόν ελαστικές συγκρούσεις, οι οποίες μεταβάλλουν τη φάση χωρίς να αλλάζουν την εσωτερική ενέργεια του ατόμου. Ο χαρακτηριστικός χρόνος αυτής της διαδικασίας είναι ο T_2^* . Η φυσική προέλευση των μηχανισμών αποσυνοχής και η περιγραφή τους στο πλαίσιο των ανοικτών κβαντικών συστημάτων παρουσιάζονται αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 4.

Ο συνολικός χρόνος απόσβεση ή χρόνος εγκάρσιας χαλάρωσης, T_2 , δίνεται από την σχέση (Fox, 2006)

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{2T_1} + \frac{1}{T_2^*} \quad (3.59)$$

Αν $T_2^* \ll T_1$, δηλαδή υπάρχει έντονη αποσυνοχή φάσης χωρίς αποδιέγερση, η διάρκεια συνοχής κυριαρχείται από συγκρούσεις. Αντίθετα, αν $T_2^* \gg T_1$ τότε ο περιοριστικός παράγοντας είναι η αποδιέγερση.

Οι ταλαντώσεις Rabi υφίστανται έντονη απόσβεση, εκτός αν ισχύει (Fox, 2006):

$$\Omega_R \equiv |\mu_{ge} E_0 / \hbar| \gg \gamma_{\perp} \sim \frac{1}{T_2} \quad (3.60)$$

όπου $\gamma_{\perp}$ ο ρυθμός απόσβεσης/εγκάρσιας χαλάρωσης. Στα αέρια, ο ρυθμός απόσβεσης εξαρτάται από τον ρυθμό συγκρούσεων και τη διάρκεια ζωής της διεγερμένης κατάστασης με τυπικές τιμές του $\gamma_{\perp}$ για μεταβάσεις στην περιοχή του οπτικού φάσματος γύρω στα $10^7 - 10^9 \text{ s}^{-1}$ ενώ στα στερεά, οι χρόνοι αποσυνοχής (dephasing times) είναι συχνά ακόμα μικρότεροι λόγω της σκέδασης με φωνονία (ταλαντώσεις πλέγματος) και σκέδασης με ελεύθερους φορείς φορτίου, με τιμές του $\gamma_{\perp}$ της τάξης των 10^{12} s^{-1} . Αυτοί οι υψηλοί ρυθμοί απόσβεσης κάνουν την παρατήρηση των ταλαντώσεων Rabi εξαιρετικά δύσκολη, κάτι που εξηγεί γιατί δεν παρατηρούνται εύκολα στην πράξη. Για να παρατηρηθούν οι ταλαντώσεις απαιτείται η περίοδος Rabi να είναι μικρότερη από $\gamma_{\perp}^{-1}$, άρα και μεγάλα πλάτη ηλεκτρικού πεδίου όπως φαίνεται από την σχέση $\Omega_R \equiv |\mu_{ge} E_0 / \hbar| \gg \gamma_{\perp}$. Αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται συνήθως με τη χρήση ισχυρών παλμικών λέιζερ, με διάρκεια παλμού μικρότερη από $\gamma_{\perp}^{-1}$ (Fox, 2006).

3.1.4 Η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδραση ενός παγιδευμένου ιόντος (ατόμου) με το φως

Στην παράγραφο 3.1.3 μελετήσαμε την αλληλεπίδραση ενός μοναδικού κβαντικού συστήματος θεωρώντας ότι αυτό είναι ακίνητο στο σύστημα αναφορά του εργαστηρίου. Στην περίπτωση όμως των παγιδευμένων ατόμων ή ιόντων, η κίνηση επηρεάζει καθοριστικά την αλληλεπίδραση αυτή και πρέπει να ληφθεί υπόψιν.

Ξεκινάμε πάλι διαχωρίζοντας την ολική Hamiltonian, $\mathbf{H}_T$ σε τρία τώρα μέρη:

$$\hat{H}_T = \hat{H}_A + \hat{H}_I + \hat{H}_m \quad (3.61)$$

με $\mathbf{H}_A$, την ανεξάρτητη από το χρόνο Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σύστημα χωρίς την επίδραση από την φωτεινή ακτινοβολία, $\mathbf{H}_I$ το χρονικά εξαρτώμενος όρος που περιγράφει την αλληλεπίδραση φωτός-συστήματος και $\mathbf{H}_m$ την Χαμιλτονιανή της κίνησης του σωματίου.

Χρησιμοποιούμε ξανά την ημι-κλασική προσέγγιση της αλληλεπίδρασης διπόλου-πεδίου, οπότε έχουμε:

$$\hat{H}_I(t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.62)$$

όπου $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ το ηλεκτρικό πεδίο φωτός το οποίο θα θεωρήσουμε για απλότητα ότι διαδίδεται στον άξονα x και έτσι δίνεται από την σχέση $E(t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την παράγραφο 3.1.3 η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδραση γίνεται

$$\hat{H}_I(t) = \frac{\hbar \Omega}{2} (e^{-i(kx(t) - \Delta t + \phi)} \sigma^- + e^{i(kx(t) - \Delta t + \phi)} \sigma^+) \quad (3.63)$$

ενώ η Χαμιλτονιανή της κίνησης, $\mathbf{H}_m$ του παγιδευμένου ιόντος μπορεί να προσεγγιστεί από την Χαμιλτονιανή του Κβαντικού ταλαντωτή (Griffiths & Schroeter, 2018)

$$\hat{H}_m = \hbar \nu \left(a^+ a^- + \frac{1}{2} \right) \quad (3.64)$$

με $\hbar \nu$ την ενεργειακή απόσταση δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών και a^+/a^- τους τελεστές αναβίβασης/καταβίβασης του κβαντικού ταλαντωτή. Στο σημείο αυτό είναι καλό να τονίσουμε ότι η μικροκίνηση του ιόντος όπως την περιγράψαμε στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας είναι υψηλής συχνότητας και μπορούμε να την αγνοήσουμε αρχικά.

Επιπλέον ο τελεστής θέσης x στην εικόνα του Schrodinger δίνεται από την σχέση (Griffiths & Schroeter, 2018)

$$\hat{x}_s = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} (a^- + a^+) \quad (3.65)$$

και μετατρέπεται στην εικόνα του Heisenderg (Courteille, 2018) στην σχέση

$$\hat{x}_H(t) = U^\dagger \hat{x}_S U = e^{\frac{iH_m t}{\hbar}} \hat{x}_S e^{-\frac{iH_m t}{\hbar}} \quad (3.66)$$

η οποία από τις σχέσεις (3.64), (3.65), την ιδιότητα Χάνταμαρ και την ιδιότητα $[\alpha^-, \alpha^+] = 1$ των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης γίνεται

$$\hat{x}_H(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} (\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) = x_0 (\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) \quad (3.67)$$

με x_0 την τυπική απόκλιση της θέσης του μοναδικού κβαντικού μας συστήματος στο x άξονα στην θεμελιώδη κατάσταση ($n=0$) του ταλαντωτή (Leibfried et al., 2003)

Συνεπώς με βάση την σχέση (3.67), η σχέση (3.63) παίρνει την μορφή

$$\widehat{H}_I(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} [\exp(-i(kx_0(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) - \Delta t + \varphi)) \sigma^- + \exp(i(kx_0(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) - \Delta t + \varphi)) \sigma^+]$$

$$\widehat{H}_I(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} [\exp(-i(\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) - \Delta t + \varphi)) \sigma^- + \exp(i(\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) - \Delta t + \varphi)) \sigma^+]$$

$$\widehat{H}_I(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} [e^{-i(\varphi - \Delta t)} \exp(-i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t})) \sigma^- + e^{i(\varphi - \Delta t)} \exp(i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t})) \sigma^+] \quad (3.68)$$

όπου η η παράμετρος Lamb-Dicke (Leibfried et al., 2003), $\eta = 2\pi x_0 / \lambda = kx_0$, η οποία εκφράζει τον λόγο της χαρακτηριστικής χωρικής έκτασης της κυματοσυνάρτησης του παγιδευμένου ιόντος στη θεμελιώδη κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή προς το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, λ . Στην περιοχή Lamb-Dicke η χωρική έκταση της κυματοσυνάρτησης του παγιδευμένου ιόντος είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας λέιζερ. Πιο συγκεκριμένα, η περιοχή αυτή χαρακτηρίζεται από τη συνθήκη $\eta \sqrt{\langle (\alpha^- + \alpha^+)^2 \rangle} \ll 1 \rightarrow \eta^2(2n+1) \ll 1$ (Leibfried et al., 2003) όπου n ο αριθμός φωνονίων της ταλαντωτικής κατάστασης. Ως αποτέλεσμα, η αλληλεπίδραση με το λέιζερ μεταβάλλει κυρίως την εσωτερική του κατάσταση του συστήματος, ενώ η πιθανότητα ταυτόχρονης μεταβολής της ταλαντωτικής του κατάστασης (δηλαδή του αριθμού των φωνονίων) είναι πολύ μικρή.

Επιπλέον σύμφωνα με τον Leibfried ο όρος $\exp(i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}))$ της σχέσης (3.68) μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά

$$\exp(i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t})) \approx 1 + i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t}) \quad (3.69)$$

απορρίπτοντας τους όρους υψηλής τάξης ως προς η και έτσι η σχέση (3.68) γίνεται

$$\widehat{H}_I(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} [e^{-i(\varphi - \Delta t)} (1 - i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t})) \sigma^- + e^{i(\varphi - \Delta t)} (1 + i\eta(\alpha^- e^{-i\nu t} + \alpha^+ e^{i\nu t})) \sigma^+] \quad (3.70)$$

και η οποία οδηγεί σε τρεις διαφορετικούς συντονισμούς (Leibfried et al., 2003).

Συνεπώς για $\Delta=0$ έχουμε τον πρώτο συντονισμό (carrier resonance) με μορφή

$$\widehat{H}_{car}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} [e^{-i\varphi}\sigma^- + e^{i\varphi}\sigma^+] \quad (3.71)$$

Αυτή η Χαμιλτονιανή δίνει μεταβάσεις με συχνότητα Ω του τύπου $|n,g\rangle \rightarrow |n,e\rangle$ όπου n η κινητική κατάσταση (αριθμός φωνονίων) του κβαντικού συστήματος το οποίο προσεγγίσαμε ως ταλαντωτή και η οποία δεν αλλάζει.

Για $\Delta=-\nu$ έχουμε τον συντονισμό κόκκινης πλευρικής ζώνης (red sideband resonance) με μορφή

$$\widehat{H}_{rsd}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} \eta [e^{-i\varphi}\alpha^+\sigma^- + e^{i\varphi}\alpha^-\sigma^+] \quad (3.72)$$

Αυτή η Χαμιλτονιανή δίνει μεταβάσεις του τύπου $|n,g\rangle \rightarrow |n-1,e\rangle$ με συχνότητα (Leibfried et al., 2003)

$$\Omega_{n,n-1} = \Omega\eta\sqrt{n} \quad (3.73)$$

κατά τις οποίες μειώνεται ο αριθμός των φωνονίων n του ταλαντωτή ενώ για $\Delta=\nu$ έχουμε τον συντονισμό μπλέ πλευρικής ζώνης (blue sideband resonance) με μορφή

$$\widehat{H}_{bsd}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} \eta [e^{-i\varphi}\alpha^-\sigma^- + e^{i\varphi}\alpha^+\sigma^+] \quad (3.74)$$

Αυτή η Χαμιλτονιανή δίνει μεταβάσεις του τύπου $|n,g\rangle \rightarrow |n+1,e\rangle$ με συχνότητα

$$\Omega_{n,n+1} = \Omega\eta\sqrt{n+1} \quad (3.75)$$

κατά τις οποίες αυξάνεται ο αριθμός των φωνονίων n .

Η δυνατότητα επιλεκτικής διέγερσης του carrier και των πλευρικών ζωνών αποτελεί τη βάση τόσο της ψύξης πλευρικής ζώνης όσο και της υλοποίησης πολυσωματιδιακών κβαντικών πυλών στα παγιδευμένα ιόντα. Για τον λόγο αυτό, οι πλευρικές ζώνες διαδραματίζουν θεμελιώδη ρόλο τόσο στην προετοιμασία όσο και στον κβαντικό έλεγχο των παγιδευμένων ιόντων (Bruzewicz et al., 2019).

3.2 Οπτικές Εξισώσεις Bloch (Optical Bloch Equations)

Η δυναμική ενός διέπιπέδου κβαντικού συστήματος που αλληλεπιδρά με φως περιγράφεται από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων, γνωστών ως Οπτικές Εξισώσεις Bloch. Οι εξισώσεις αυτές

προκύπτουν από τη γενική εξίσωση Schrödinger, με την εισαγωγή αποσβεστικών όρων για την απώλεια συνοχής (decoherence) και την αυθόρμητη εκπομπή (spontaneous emission).

Αντί να περιγράψουμε το διεπίπεδό μας σύστημα με μια κυματοσυνάρτηση (wavefunction), χρησιμοποιούμε την μήτρα πυκνότητας καταστάσεων (density matrix), η οποία επιτρέπει την περιγραφή και μη καθαρών καταστάσεων (mixed states) και κάνει πιο εύκολη την ενσωμάτωση περιβαλλοντικών επιδράσεων στο φορμαλισμό.

3.2.1 Μητρώο Πυκνότητας (Density Matrix)

Ένα κβαντικό διάνυσμα κατάστασης $|\psi\rangle$ μεταφέρει τη μέγιστη ποσότητα πληροφορίας που επιτρέπεται για ένα σύστημα από τους νόμους της κβαντομηχανικής. Αυτό για ένα σύστημα δύο καταστάσεων μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$|\psi\rangle = c_g |g\rangle + c_e |e\rangle, \quad (3.76)$$

όπου τα c_g και c_e περιγράφουν τους συντελεστές πλάτους της κυματοσυνάρτησης για τις δύο καταστάσεις του κβαντικού συστήματος. Έτσι αν πραγματοποιήσουμε μια μέτρηση, θα πάρουμε το αποτέλεσμα που αντιστοιχεί στο επίπεδο g με πιθανότητα $|c_g|^2$, και εκείνο που αντιστοιχεί στο επίπεδο e με πιθανότητα $|c_e|^2$. Οι κβαντικές καταστάσεις αυτές που περιγράφονται από διανύσματα κατάστασης λέγονται καθαρές καταστάσεις (pure states) και εναλλακτικά μπορούν να περιγραφούν από τον τελεστή πυκνότητας ο οποίος ορίζεται ως $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ και το 2×2 μητρώο πυκνότητας για το διεπίπεδο μας σύστημα

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = (c_g |g\rangle + c_e |e\rangle)(c_g^* \langle g| + c_e^* \langle e|) \quad (3.77)$$

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} |c_e|^2 & c_e c_g^* \\ c_g c_e^* & |c_g|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

όπου:

- ρ_{gg}, ρ_{ee} : οι πιθανότητες το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|g\rangle$ ή $|e\rangle$ (πληθυσμοί)
- ρ_{ge}, ρ_{eg} : οι όροι συνοχής μεταξύ των δύο καταστάσεων

Η περιγραφή μέσω του τελεστή πυκνότητας είναι απολύτως ισοδύναμη με την περιγραφή μέσω της κυματοσυνάρτησης όταν το σύστημα βρίσκεται σε καθαρή κατάσταση. Ωστόσο, ο τελεστής πυκνότητας εισήχθη ιστορικά για την περιγραφή στατιστικών συνόλων (ensembles) καθαρών καταστάσεων. Στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα κατάστασης που να περιγράφει ολόκληρο το στατιστικό σύνολο και η κατάστασή του περιγράφεται από τον τελεστή πυκνότητας (Metcalf & Van der Straten, 1999):

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (3.79)$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω σε ένα στατιστικό σύνολο καθαρών καταστάσεων $|\psi_i\rangle$ και p_i είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην i -οστή κατάσταση $|\psi_i\rangle$ με $0 \leq p_i \leq 1$ (Metcalf & Van der Straten, 1999).

Ο τελεστής πυκνότητας επιτρέπει τον υπολογισμό των μέσων τιμών όλων των παρατηρήσιμων φυσικών μεγεθών μέσω της σχέσης $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$ αφού αυτός τώρα περιέχει όλη την πληροφορία που απαιτείται για την πρόβλεψη των αποτελεσμάτων των μετρήσεων.

Το βασικό πλεονέκτημα της χρήσης τελεστών πυκνότητας είναι ότι μπορούν να περιγράψουν τόσο καθαρές όσο και μεικτές καταστάσεις. Παρότι εισήχθησαν αρχικά για την περιγραφή στατιστικών συνόλων καθαρών καταστάσεων, σήμερα αποτελούν το βασικό εργαλείο για τη μελέτη μοναδικών κβαντικών συστημάτων που αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον και υφίστανται αποσυννοχή (decoherence), θέμα που θα αναπτυχθεί στο Κεφάλαιο 4.

3.2.2 Οπτικές εξισώσεις Bloch -Φυσική Ερμηνεία των Εξισώσεων

Η χρονική εξέλιξη του τελεστή πυκνότητας ρ στην ιδανική περίπτωση απουσίας περιβαλλοντικών αλληλεπιδράσεων με το σύστημα δίνεται από την Schrödinger–von Neumann σχέση (Akkermans, 2017)

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_i, \hat{\rho}] \quad (3.80)$$

Αν η Χαμιλτονιανή ενός δυο-επιπέδων κβαντικού συστήματος στην διπολική αλληλεπίδραση και με την προσέγγιση RWA (παράγραφος 3.1.2) δίνεται από την σχέση (3.48), η χρονική εξέλιξη των στοιχείων του μητρώου πυκνότητας είναι

$$\frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} = i \frac{\Omega}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = -i \frac{\Omega}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \rho_{ge}}{\partial t} = -i \frac{\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) + i \Delta \rho_{ge} \quad (3.83)$$

$$\frac{\partial \rho_{eg}}{\partial t} = i \frac{\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) - i \Delta \rho_{eg} \quad (3.84)$$

και αυτές είναι οι οπτικές εξισώσεις Bloch που περιγράφουν πώς εξελίσσονται στον χρόνο, οι πληθυσμοί του συστήματος και η συνοχή μεταξύ τους.

Επιπλέον στο σύστημα μας μπορεί να υπάρξει απώλεια ενέργειας λόγω αυθόρμητης εκπομπής με συνεπεία να μειώνεται ο πληθυσμός της διεγερμένης ενώ να αυξάνεται ο πληθυσμός της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος. Αυτό μεταφράζεται στις σχέσεις (Akkermans, 2017)

$$\frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} = -\Gamma \rho_{ee} \quad (3.85)$$

$$\frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = \Gamma \rho_{ee} \quad (3.86)$$

όπου Γ τον ρυθμό διαμήκους αποδιέγερσης, και $\Gamma^{-1} = T_1$

Επίσης η συνοχή του κβαντικού μας συστήματος (ρ_{ge}, ρ_{eg} όροι που δίνουν την κβαντική υπέρθεση) μπορεί να χαθεί λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον (θόρυβος φάσης, τυχαίες διακυμάνσεις πεδίου) οπότε έχουμε μια πρόσθετη χαλάρωση των συνεκτικών όρων, η οποία δεν έχει κλασικό ανάλογο (Akkermans, 2017) και

$$\frac{\partial \rho_{ge}}{\partial t} = -\gamma_{\perp} \rho_{ge} \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial \rho_{eg}}{\partial t} = -\gamma_{\perp} \rho_{eg} \quad (3.88)$$

με $\gamma_{\perp}$ το ρυθμό εγκάρσιας χαλάρωσης και $\gamma_{\perp}^{-1} = T_2$

Έτσι καταλήγουμε στις πλήρεις εξισώσεις Bloch

$$\frac{\partial \rho_{ee}}{\partial t} = i \frac{\Omega}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) - \Gamma \rho_{ee} \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \rho_{gg}}{\partial t} = -i \frac{\Omega}{2} (\rho_{eg} - \rho_{ge}) + \Gamma \rho_{ee} \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \rho_{ge}}{\partial t} = -i \frac{\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) + i \Delta \rho_{ge} - \gamma_{\perp} \rho_{ge} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \rho_{eg}}{\partial t} = i \frac{\Omega}{2} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) - i \Delta \rho_{eg} - \gamma_{\perp} \rho_{eg} \quad (3.92)$$

Αφού τώρα έχουμε απόσβεση (damping) στις εξισώσεις κίνησης, υπάρχουν λύσεις σταθερής κατάστασης, $\partial_t \rho = 0$, στις οπτικές εξισώσεις Bloch δηλαδή οι πληθυσμοί και οι όροι συνοχής δεν αλλάζουν με τον χρόνο άρα υπάρχει ισορροπία ανάμεσα στην διέγερση από το λέιζερ και στην απώλεια λόγω απόσβεσης (Steck, 2007). Χωρίς απόσβεση οι πληθυσμοί ταλαντώνονται ενώ με

απόσβεση οδηγούνται σε σταθερές καταστάσεις. Η εγκάρσια αυτή απόσβεση $\gamma_{\perp}$ στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν εξωτερικές αιτίες απώλειας συνοχής του συστήματος πχ κρούσεις, θόρυβος λείζερ ή μαγνητικές διακυμάνσεις εξαρτάται από τον χρόνο ζωής, T_1 , της διεγερμένης κατάστασης και ισούται με $\gamma_{\perp} = \Gamma/2$ σύμφωνα με την σχέση $1/T_2 = 1/2T_1 + 1/T_2^* \Rightarrow \gamma_{\perp} = \Gamma/2 + 1/T_2^*$. Έτσι οι λύσεις σταθερής κατάστασης των εξισώσεων Bloch είναι (Steck, 2007)

$$\rho_{ee} = \frac{\Omega^2/\Gamma^2}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2 + 2\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}} \quad (3.93)$$

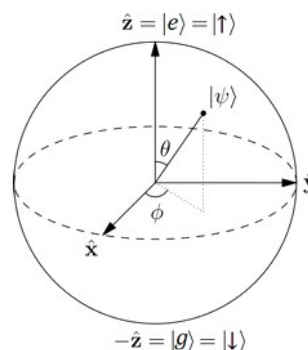
για τους πληθυσμούς και

$$\rho_{eg} = -\frac{i\Omega}{\Gamma} \frac{1 - \frac{i2\Delta}{\Gamma}}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2 + 2\frac{\Omega^2}{\Gamma^2}} \quad (3.94)$$

και τους όρους συνοχής.

3.2.3 Bloch Sphere – Οπτικοποίηση

Αν εξετάσουμε το μητρώο πυκνότητας ρ θα δούμε ότι υπάρχουν $4 \times 2 = 8$ πραγματικές παράμετροι. Αυτές υφίστανται αρκετούς περιορισμούς όπως ότι οι πληθυσμοί, ρ_{ee} και ρ_{gg} , είναι πραγματικοί αριθμοί (-2 παράμετροι) με άθροισμα την μονάδα, $\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1$ (-1 παράμετρος) και ότι $\rho_{eg} = \rho_{ge}^*$ (-2 παράμετροι). Συνεπώς έχουμε συνολικά 3 ανεξάρτητες ποσότητες οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μοναδικό διάνυσμα στον R^3 για να αναπαραστήσουμε την ατομική κατάσταση.



Σχήμα 3.2 Η σφαίρα Bloch (Akkermans, 2017)

Αυτή η γεωμετρική αναπαράσταση των συνεκτικών καταστάσεων υπέρθεσης ονομάζεται αναπαράσταση Bloch. Το διάνυσμα που περιγράφει την κατάσταση ονομάζεται διάνυσμα Bloch και η σφαίρα που αυτό ορίζει είναι η σφαίρα Bloch. Έτσι η σφαίρα Bloch είναι μια γεωμετρική αναπαράσταση της κατάστασης ενός qubit (ή γενικότερα ενός διεπιπέδου συστήματος). Κάθε σημείο πάνω ή μέσα στη σφαίρα αντιστοιχεί σε μια πιθανή κβαντική κατάσταση, με Βόρειο πόλο την διεγερμένη κατάσταση $|e\rangle$ και Νότιο πόλο την θεμελιώδη κατάσταση $|g\rangle$ (Fox, 2006).

Έτσι αντί να περιγράψουμε το σύστημα με τον πίνακα πυκνότητας $\hat{\rho}$, το αναπαριστούμε με ένα διάνυσμα τριών συνιστωσών-διάνυσμα Bloch, οι οποίες είναι οι μέσες τιμές των τελεστών Παουλι ($\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle$) (Akkermans, 2017). Η μέση τιμή ενός οποιουδήποτε τελεστή A υπολογίζεται από την σχέση $\langle\psi|A|\psi\rangle = \text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \langle A \rangle$ οπότε

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle = \text{Tr}(\hat{\sigma}_x\hat{\rho}) = \rho_{eg} + \rho_{ge} \quad (3.95)$$

$$\langle\hat{\sigma}_y\rangle = \text{Tr}(\hat{\sigma}_y\hat{\rho}) = i(\rho_{eg} - \rho_{ge}) \quad (3.96)$$

$$\langle\hat{\sigma}_z\rangle = \text{Tr}(\hat{\sigma}_z\hat{\rho}) = \rho_{ee} - \rho_{gg} \quad (3.97)$$

όπου η κατακόρυφη z συνιστώσα $\langle\hat{\sigma}_z\rangle$ του διανύσματος Bloch αντιπροσωπεύει τον βαθμό ατομικής διέγερσης (πληθυσμιακή αναστροφή). Το διάνυσμα Bloch δείχνει ευθεία προς τα κάτω όταν το άτομο βρίσκεται στην κατάσταση $|g\rangle$ και ευθεία προς τα πάνω όταν βρίσκεται στην κατάσταση $|e\rangle$. Οι εγκάρσιες συνιστώσες $\langle\hat{\sigma}_x\rangle$ και $\langle\hat{\sigma}_y\rangle$ του διανύσματος Bloch αντιστοιχούν στη συνοχή μεταξύ των καταστάσεων $|g\rangle$ και $|e\rangle$. Η αζιμουθιακή γωνία του διανύσματος στο επίπεδο $x-y$ αναπαριστά τη σχετική φάση μεταξύ των καταστάσεων $|g\rangle$ και $|e\rangle$, όταν το άτομο βρίσκεται σε υπέρθεση αυτών (Steck, 2007).

Επιπλέον η χρονική εξέλιξη ενός διανύσματος Bloch με βάση τις σχέσεις (3.81)-(3.84) δίνεται από τις σχέσεις

$$\partial_t \langle\hat{\sigma}_x\rangle = -\Delta \langle\hat{\sigma}_y\rangle \quad (3.98)$$

$$\partial_t \langle\hat{\sigma}_y\rangle = \Delta \langle\hat{\sigma}_x\rangle - \Omega \langle\hat{\sigma}_z\rangle \quad (3.99)$$

$$\partial_t \langle\hat{\sigma}_z\rangle = \Omega \langle\hat{\sigma}_y\rangle \quad (3.100)$$

που είναι και οι Οπτικές εξισώσεις Bloch στην γλώσσα των διανυσμάτων Bloch. Επιπλέον το μέτρο ενός διανύσματος Bloch είναι σταθερό σε μια καθαρή κατάσταση

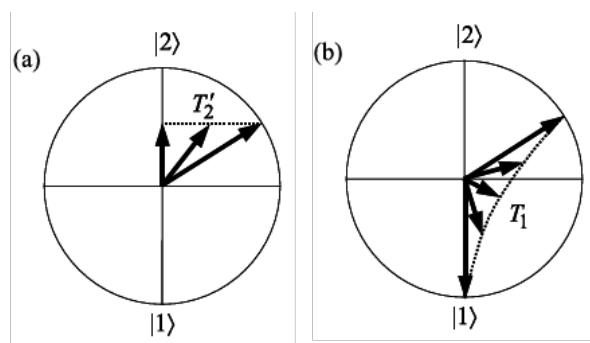
$$|\langle\sigma\rangle|^2 = \langle\hat{\sigma}_x\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_y\rangle^2 + \langle\hat{\sigma}_z\rangle^2 = 1 \quad (3.101)$$

Τέλος είναι προφανές ότι το μοντέλο Bloch μπορεί να εφαρμοστεί σε μεμονωμένα άτομα στην περίπτωση των καταστάσεων υπέρθεσης, αλλά όχι στην περίπτωση των στατιστικών μιγμάτων. Στη

δεύτερη περίπτωση, τα επιμέρους άτομα βρίσκονται είτε στο επίπεδο $|g\rangle$ είτε στο επίπεδο $|e\rangle$, και έχει νόημα να υπολογίζεται το διάνυσμα Bloch μόνο για ολόκληρο το σύνολο (ensemble). Επιπλέον, σε ένα στατιστικό μίγμα ισχύει $\rho_{eg}=\rho_{ge}=0$, γεγονός που συνεπάγεται, ότι $\langle\hat{\sigma}_x\rangle=\langle\hat{\sigma}_y\rangle=0$. Τα στατιστικά μίγματα αντιστοιχούν επομένως σε σημεία στο εσωτερικό της σφαίρας Bloch πάνω στον άξονα z (Fox, 2006).

Εκτός από την περίπτωση της θεμελιώδους κατάστασης, τα στατιστικά μίγματα έχουν μέτρο διανύσματος $r<1$, σε αντίθεση με τις καθαρές καταστάσεις, οι οποίες βρίσκονται πάντοτε στην επιφάνεια της σφαίρας με $r=1$ (Fox, 2006).

Οι διαδικασίες απόσβεσης καταστρέφουν τη συνεκτικότητα και μετατρέπουν τις καταστάσεις υπέρθεσης σε στατιστικά μίγματα. Τα στατιστικά μίγματα έχουν $r<1$, όποτε οι διαδικασίες απόσβεσης δεν διατηρούν το μέτρο του διανύσματος Bloch. Στο Σχήμα 3.3(a) έχουμε απόσβεση μέσω καθαρού αποσυγχρονισμού φάσης (pure dephasing, T_2^*). Αυτές οι διαδικασίες καταστρέφουν τη συνεκτικότητα χωρίς να αλλάζουν την πιθανότητα το σύστημα να είναι στη μία ή στην άλλη κατάσταση, και έτσι αντιστοιχούν σε μετακίνηση από την επιφάνεια της σφαίρας προς το κέντρο με σταθερό z -εγκάρσια χαλάρωση (Fox, 2006). Ενώ στο Σχήμα 3.3(b) δίνεται η απόσβεση μέσω μείωσης πληθυσμού (population decay, T_1 -αλλαγή των πιθανοτήτων). Αυτές οι διαδικασίες επηρεάζουν τους σχετικούς πληθυσμούς, και άρα μεταβάλλουν τη z συνιστώσα (επιμήκης χαλάρωση). Ωστόσο, το Σχήμα 3.3(b) δείχνει καθαρά ότι η επιμήκης χαλάρωση παράγει ταυτόχρονα και εγκάρσια χαλάρωση, ακόμη και απουσία καθαρού αποσυγχρονισμού φάσης. Αυτός είναι ο λόγος που ο συνολικός ρυθμός αποσυγχρονισμού στην εξίσωση (3.59) περιέχει συνεισφορές τόσο από την καθαρή αποσυμφωνία όσο και από τη μείωση πληθυσμού.



Σχήμα 3.3: Διαδικασίες απόσβεσης στην αναπαράσταση Bloch: (α) εγκάρσια (T_2^*) και (β) διαμήκης (T_1) χαλάρωση (Fox, 2006)

Η δράση ενός παλμού λέιζερ μετακινεί το διάνυσμα κατάστασης πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, δημιουργώντας Rabi ταλαντώσεις ή πιο πολύπλοκες τροχιές, αναλόγως του αποσυντονισμού (detuning) και της διάρκειας του παλμού. Η εφαρμογή ενός σύντομου συντονισμένου παλμού ($\Delta=0$) μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεκτική πράξη πάνω στο διάνυσμα Bloch. Αν η διάρκεια του παλμού είναι μικρότερη από τον χρόνο απόσβεσης, η συνεκτικότητα της κυματοσυνάρτησης διατηρείται και το μέτρο του διανύσματος Bloch παραμένει σταθερό. Ο παλμός θα αλλάξει μόνο την κατεύθυνση του διανύσματος και όχι το μήκος του, δρα ως τελεστής περιστροφής (Fox, 2006).

Ένας π-παλμός (π-pulse) μπορεί να μετατρέψει ένα σύστημα από τη θεμελιώδη κατάσταση $|g\rangle$ στην διεγερμένη κατάσταση $|e\rangle$ και το αντίστροφο. Έτσι, ένας $\pi/2$ -παλμός προκαλεί περιστροφή κατά $\pi/2$ ακτίνια, ενώ ένας 2π -παλμός προκαλεί περιστροφή κατά 2π αφήνοντας το σύστημα αμετάβλητο. Συνεπώς συνδυασμοί παλμών με κατάλληλη επιφάνεια και φάση μπορούν να μετακινήσουν το διάνυσμα Bloch σε οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας Bloch (Fox, 2006).

3.3 Παγίδευση μέσω φωτός – Δυνάμεις Δίπολου (Optical Dipole Traps)

Μέχρι τώρα εξετάστηκε η χρήση του φωτός για τον έλεγχο των εσωτερικών βαθμών ελευθερίας ενός διεπίπεδου συστήματος. Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται ένας διαφορετικός ρόλος του φωτός, δηλαδή η χρήση του για τον χωρικό περιορισμό και την παγίδευση ουδέτερων ατόμων.

Οι μέθοδοι αποθήκευσης και παγίδευσης φορτισμένων και ουδέτερων σωματιδίων έχουν πολύ συχνά αποτελέσει το πειραματικό κλειδί για μεγάλες επιστημονικές προόδους, καλύπτοντας τη φυσική σε ένα ευρύ φάσμα ενεργειών — από τα στοιχειώδη σωματίδια έως την υπερψυχρή ατομική κβαντική ύλη (Grimm et al., 2000). Για τα φορτισμένα σωματίδια, η ισχυρή ηλεκτροστατική (Coulomb) αλληλεπίδραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παγίδευση σε ηλεκτρικά ή ηλεκτρομαγνητικά πεδία (Grimm et al., 2000) ενώ τα ουδέτερα άτομα είναι δυνατό να παγιδευθούν με πολύ ασθενέστερους μηχανισμούς σε σύγκριση με την αλληλεπίδραση Coulomb. Η οπτική παγίδευση για ουδέτερα άτομα μπορεί να υλοποιηθεί με βάση δύο διαφορετικούς τύπους αλληλεπιδράσεων, τη δύναμη πίεσης ακτινοβολίας και την οπτική δύναμη δίπολου, καθεμιά από τις οποίες έχει ιδιαίτερες ιδιότητες και προσφέρει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα.

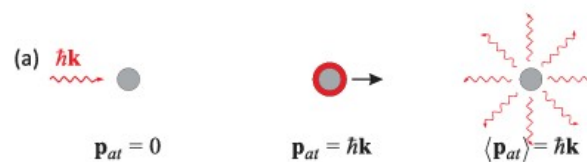
Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας αποτελεί τη βασική αρχή λειτουργίας των μαγνητο-οπτικών παγίδων (MOT), ενώ η οπτική διπολική δύναμη είναι υπεύθυνη για τη λειτουργία των οπτικών τσιμπίδων και των οπτικών πλεγμάτων.

3.3.1 Η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας

Η ιδέα ότι η ακτινοβολία διαθέτει ορμή (και ενέργεια) ανάγεται στον James Clerk Maxwell τον 19ο αιώνα. Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει ότι όταν ένα αντικείμενο απορροφά ακτινοβολία, η ορμή του μεταβάλλεται (Foot, 2005). Η δύναμη που ασκείται στο αντικείμενο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής. Κατά την αλληλεπίδραση ενός ατόμου με μία καλά ευθυγραμμισμένη, μονοχρωματική δέσμη φωτός, που διαδίδεται αντίθετα προς την κατεύθυνση κίνησης του ατόμου ασκείται σε αυτό μια δύναμη η οποία μπορεί να επιβραδύνει το άτομο (Foot, 2005). Κάθε απορροφούμενο φωτόνιο δίνει στο άτομο μια «ώθηση» με κατεύθυνση αντίθετη της κίνησής του, ενώ τα φωτόνια που εκπέμπονται αυθόρμητα εκπέμπονται κατά μέσο όρο προς όλες τις κατευθύνσεις (Σχήμα 3.4) και δεν μεταβάλλουν την ορμή του ατόμου, έτσι ώστε η σκέδαση πολλών φωτονίων να οδηγεί σε μια μέση δύναμη που ισούται με τον ρυθμό με τον οποίο τα απορροφούμενα φωτόνια μεταφέρουν ορμή στο άτομο:

$$F_{\text{rp}} = (\text{ορμή φωτονίου}) \times (\text{ρυθμός σκέδασης}) = \hbar \vec{k} \Gamma_{\text{sc}} \quad (3.102)$$

όπου $\hbar \vec{k}$ η ορμή του φωτονίου και Γ_{sc} ο ρυθμός σκέδασης της ακτινοβολία από το άτομο (Courteille, 2018)



Σχήμα 3.4: Κατά την απορρόφηση ενός φωτονίου, ένα άτομο που αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία δέχεται μια ώθηση ορμής $\hbar k$. Καθώς η εκπομπή είναι ισοτροπική, κατά μέσο όρο σε πολλούς κύκλους απορρόφησης-εκπομπής, η καθαρή δύναμη καθορίζεται αποκλειστικά από τη διαδικασία απορρόφησης (Courteille, 2018).

Η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας για διέγερση κοντά στον συντονισμό

Στην περίπτωση ισχυρής διέγερσης κοντά στο συντονισμό ($|\Delta| \ll \Gamma$), η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας που προκύπτει από απορρόφηση φωτονίων ακολουθούμενη από αυθόρμητη εκπομπή μπορεί να γραφεί (Metcalf & Van der Straten, 1999)

$$F_{\text{rp}} = \hbar \vec{k} \Gamma \rho_{\text{ee}} \quad (3.103)$$

όπου ο πρώτος παράγοντας, $\hbar \vec{k}$, είναι η ορμή που μεταφέρει κάθε φωτόνιο, ο δεύτερος είναι ο ρυθμός της αυθόρμητης εκπομπής, Γ , και ο τελευταίος παράγοντας, ρ_{ee} , είναι η πιθανότητα το άτομο να βρίσκεται στη διεγερμένη κατάσταση.

Η πιθανότητα το άτομο να βρίσκεται στην διεγερμένη κατάσταση δίνεται από τη σχέση (3.93) και γράφεται (Metcalf & Van der Straten, 1999)

$$\rho_{ee} = \frac{s/2}{1+s} \quad (3.104)$$

όπου s είναι η παράμετρος κορεσμού η οποία αποτελεί μέτρο της ισχύος της αλληλεπίδραση ατόμου-λείζερ και δίνεται από την σχέση

$$s = \frac{\Omega^2/2}{\Delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.105)$$

Αν αυτή η παράμετρος κορεσμού είναι $s \ll 1$ τότε το σύστημα μας είναι κυρίως στην θεμελιώδη κατάσταση του ενώ για $s \gg 1$ (δηλαδή σε συνθήκες ισχυρής έντασης ακτινοβολίας αφού $\Omega^2 \propto E_0^2 \propto I$ με βάση την ενότητα 3.1.2 της εργασίας μας) οι πληθυσμοί της θεμελιώδους και της διεγερμένης στάθμης εξισώνονται δηλαδή σε υψηλές εντάσεις οι δύο καταστάσεις έχουν περίπου ίσους πληθυσμούς με $\rho_{ee} \sim 1/2$ (Metcalf & Van der Straten, 1999). Συνεπώς, η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας που δίνεται από την σχέση (3.103) γίνεται (Metcalf & Van der Straten, 1999)

$$F_{\text{π}} = \hbar \vec{k} \Gamma \frac{s/2}{1+s} = \hbar \vec{k} \Gamma \frac{s_0/2}{1+s_0 + (2\Delta/\Gamma)^2} \quad (3.106)$$

με $s_0 = 2\Omega^2/\Gamma^2$ την παράμετρο κορεσμού για συντονισμένο λείζερ ($\Delta=0$).

Η δύναμη αυτή για $s \gg 1$, τείνει σε μια οριακή τιμή $F_{\text{max}} = \hbar k \Gamma / 2$ αφού σε υψηλές εντάσεις ακτινοβολίας του λείζερ (Ω -πολύ μεγάλο) η πιθανότητα εξαναγκασμένης εκπομπής γίνεται συγκρίσιμη με την πιθανότητα απορρόφησης, με αποτέλεσμα ο πληθυσμός της διεγερμένης στάθμης να μην μπορεί να υπερβεί το $1/2$. Κατά την εξαναγκασμένη εκπομπή εκπέμπεται φωτόνιο κατά την διεύθυνση διάδοσης του λείζερ με συνεπεία λόγω της αρχής διατήρησης της ορμής η μεταφορά ορμής στο άτομο να πραγματοποιείται προς την αντίθετη κατεύθυνση σε σχέση με την μεταφορά ορμής που πραγματοποιείται κατά την απορρόφηση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την οριακή τιμή της δύναμης πίεσης ακτινοβολία, $F_{\text{max}} = \hbar k \Gamma / 2$.

Η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας για διέγερση μακριά από τον συντονισμό

Από την άλλη σε διεγέρσεις μακριά από τον συντονισμό, η πιθανότητα διέγερσης του ατόμου είναι πολύ μικρή και, κατά συνέπεια, ο ρυθμός σκέδασης φωτονίων παραμένει χαμηλός. Η ισχύς που απορροφά ο ταλαντωτής από το πεδίο διέγερσης δίνεται από (Grimm et al., 2000):

$$P_{abs} = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I \quad (3.107)$$

με ω την συχνότητα της ακτινοβολίας, c την ταχύτητα του φωτός στο κενό, ϵ_0 την διηλεκτρική σταθερά του κενού, α η πολωσιμότητα και I η ένταση της ακτινοβολίας. Αν θεωρήσουμε το φως ως ροή φωτονίων ενέργειας $\hbar\omega$, τότε η απορρόφηση μπορεί να ερμηνευθεί με όρους σκέδασης φωτονίων σε κύκλους απορρόφησης και επακόλουθης αυθόρμητης εκπομπής και ο αντίστοιχος ρυθμός σκέδασης είναι (Grimm et al., 2000):

$$\Gamma_{sc} = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I \quad (3.108)$$

Για να υπολογίσουμε την πολωσιμότητα α , θεωρούμε πρώτα το άτομο σύμφωνα με το μοντέλο του κλασικού ταλαντωτή του Lorentz. Σε αυτή την απλή αλλά πολύ χρήσιμη προσέγγιση, ένα ηλεκτρόνιο (μάζας m_e και φορτίου e) θεωρείται ότι είναι δεσμευμένο ελαστικά στον πυρήνα και μπορεί να ταλαντώνεται με ιδιοσυχνότητα ω_0 η οποία αντιστοιχεί στη συχνότητα της οπτικής μετάβασης του ατόμου. Η απόσβεση της ταλάντωσης οφείλεται στην ακτινοβολία διπόλου του ταλαντούμενου ηλεκτρονίου, σύμφωνα με τον γνωστό τύπο του Larmor (βλ. π.χ. Jackson, 1962) για την ισχύ που ακτινοβολείται από ένα επιταχυνόμενο φορτίο. Από την εξίσωση κίνησης της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του ηλεκτρονίου οδηγούμαστε στην πολωσιμότητα, α , η οποία δίνεται από την σχέση (Grimm et al., 2000)

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} \quad \text{με} \quad \Gamma_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \quad (3.109)$$

το ρυθμό απόσβεσης λόγω απώλειας ενέργειας με ακτινοβολία (δηλαδή, ο ρυθμός με τον οποίο ο ταλαντωτής εκπέμπει ενέργεια). Αν αντικαταστήσουμε το $e^2/m_e = 6\pi\epsilon_0 c^3 \Gamma_\omega / \omega^2$ και εισαγάγουμε τον ρυθμό απόσβεσης στη συχνότητα συντονισμού $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_\omega$ τότε η Εξίσωση (3.109) γράφεται:

$$\alpha = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\left(\frac{\omega^3}{\omega_0^2}\right)\Gamma} \quad (3.110)$$

Σε μια ημι-κλασική προσέγγιση, η πολωσιμότητα του ατόμου μπορεί να υπολογιστεί θεωρώντας το άτομο ως σύστημα δύο ενεργειακών σταθμών που αλληλεπιδρά με ένα κλασικό ηλεκτρομαγνητικό

πεδίο. Όταν η παράμετρος κορεσμού είναι $s \ll 1$, δηλαδή η αλληλεπίδραση του μοναδικού κβαντικού συστήματος με το λέιζερ είναι αρκετά ασθενής ώστε αυτό να παραμένει κυρίως στην θεμελιώδη κατάσταση, η ημι-κλασική ανάλυση οδηγεί ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με τον κλασικό ταλαντωτή. Η βασική διαφορά είναι ότι ο ρυθμός απόσβεσης Γ που αντιστοιχεί στο ρυθμό αυθόρμητης εκπομπής του διεγερμένου επιπέδου δεν υπολογίζεται πλέον από τον τύπο του Larmor, αλλά καθορίζεται από το ηλεκτρικό διπολικό στοιχείο μήτρας μεταξύ της θεμελιώδους και της διεγερμένης κατάστασης μ_{eg} (Grimm et al., 2000):

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\mu_{eg}|^2 \quad (3.111)$$

Μια σημαντική διαφορά μεταξύ του κβαντικού και του κλασικού ταλαντωτή είναι η πιθανότητα εμφάνισης κορεσμού (saturation). Σε πολύ υψηλές εντάσεις του πεδίου διέγερσης, το διεγερμένο επίπεδο μπορεί να κατοικείται σημαντικά, και επομένως η προηγούμενη σχέση (3.111) παύει να ισχύει. Ωστόσο, για οπτικές παγίδες διπόλου, ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση μεγάλης αποσύζευξης (far-detuned light), όπου η διέγερση είναι πολύ μικρή και ο ρυθμός σκέδασης φωτονίων $\Gamma_{sc} \ll \Gamma$. Σε αυτή την περίπτωση, η Εξίσωση (3.111) παραμένει εξαιρετικά καλή προσέγγιση και για τον κβαντομηχανικό ταλαντωτή.

Έτσι ο ρυθμός σκέδασης, στην περίπτωση που έχουμε μεγάλη απομάκρυνση από τη συντονισμένη συχνότητα (large detuning) και αμελητέο κορεσμό (negligible saturation) είναι:

$$\Gamma_{sc} = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(r) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega - \omega_0} + \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0}\right)^2 I(r) \quad (3.112)$$

Στα περισσότερα πειράματα, το λέιζερ ρυθμίζεται σχετικά κοντά στη συχνότητα συντονισμού ω_0 έτσι ώστε η απομάκρυνση (detuning) $\Delta \equiv \omega - \omega_0$ να ικανοποιεί τον περιορισμό, $|\Delta| \ll \omega_0$, με αποτέλεσμα ο δεύτερος όρος της σχέσης (3.112) να μπορεί να αγνοηθεί — Προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος (Rotating Wave Approximation, RWA) — και επίσης να μπορούμε να θέσουμε $\omega/\omega_0 = 1$. Συνεπώς η σχέση απλοποιείται στην μορφή

$$\Gamma_{sc} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(r) \quad (3.113)$$

3.3.2 Η οπτική δύναμη διπόλου

Η οπτική δύναμη δίπολου προκύπτει από τη συχνοεξαρτώμενη αλληλεπίδραση της επαγόμενης ατομικής διπολικής ροπής με τη βαθμίδα έντασης του φωτεινού πεδίου (Grimm et al., 2000). Λόγω

του συντηρητικού χαρακτήρα της, η δύναμη αυτή μπορεί να παραχθεί από ένα δυναμικό, του οποίου τα ελάχιστα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παγίδευση ατόμων. Η βασική εξίσωση για το δυναμικό διπόλου θα προκύψει θεωρώντας το άτομο ως έναν απλό ταλαντωτή που υπόκειται σε ένα κλασικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Κατά την αλληλεπίδραση του ηλεκτρικού πεδίου

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} E_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$ με το άτομο αυτό αποκτά διπολική ροπή $\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}} p_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$ όπου $\hat{\mathbf{e}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης. Το πλάτος $p_0(\mathbf{r})$ της διπολικής ροπής συνδέεται άμεσα με το πλάτος του πεδίου $E_0(\mathbf{r})$ μέσω της σχέσης

$$p_0(\mathbf{r}) = \alpha E_0(\mathbf{r}) \quad (3.114)$$

με α την μιγαδική πολωσιμότητα όπως είδαμε στην παράγραφο 3.3.1

Το δυναμικό αλληλεπίδρασης της επαγόμενης διπολικής ροπής $\mathbf{p}$ με το πεδίο διέγερσης $\mathbf{E}$ δίνεται από τη σχέση (Grimm et al., 2000).:

$$U_{\text{dip}} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \mathbf{E} \rangle = -\frac{1}{2 \epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I, \quad (3.115)$$

όπου η γωνιώδης παρένθεση υποδηλώνει χρονικό μέσο όρο πάνω στους ταχέως ταλαντούμενους όρους, η ένταση του πεδίου είναι $I = \epsilon_0 c |E_0|^2 / 2$ και ο παράγοντας $1/2$ λαμβάνει υπόψη ότι η διπολική ροπή είναι επαγόμενη και όχι μόνιμη.

Η δυναμική ενέργεια του ατόμου στο πεδίο είναι, συνεπώς, ανάλογη της έντασης I και του πραγματικού μέρους της πολωσιμότητας $\text{Re}(\alpha)$ — υπεύθυνο για τις συχνοεξαρτώμενες ιδιότητες της αλληλεπίδρασης.

Η δύναμη διπόλου προκύπτει από τη βαθμίδα του δυναμικού αλληλεπίδρασης:

$$\mathbf{F}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2 \epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \nabla I(\mathbf{r}) \quad (3.116)$$

και πρόκειται, επομένως, για μια συντηρητική δύναμη, η οποία είναι ανάλογη της χωρικής βαθμίδας της έντασης του φωτεινού πεδίου. Η δύναμη αυτή αναγκάζει το άτομο να κινηθεί σε σημεία του χώρου με τέτοιο τρόπο ώστε να μειωθεί η ενέργεια του.

Από την σχέση (3.110) για αμελητέο κορεσμό και μεγάλη απομάκρυνση από τη συντονισμένη συχνότητα, το δυναμικό διπόλου και η δύναμη διπόλου παίρνουν την μορφή (Grimm et al., 2000)

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3 \pi c^2}{2 \omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right) I(\mathbf{r}) \quad (3.117)$$

$$\mathbf{F}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3 \pi c^2}{2 \omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega + \omega_0} \right) \nabla I(\mathbf{r}) \quad (3.118)$$

οι οποίες με την προσέγγιση του περιστρεφόμενου κύματος (Rotating Wave Approximation, RWA) καταλήγουν στην τελική μορφή

$$U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right) I(\mathbf{r}) \quad (3.119)$$

$$\mathbf{F}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\nabla U_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right) \nabla I(\mathbf{r}) \quad (3.120)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι το πρόσημο του αποσυντονισμού (Δ) μεταξύ της συχνότητας του λέιζερ και της συχνότητας μετάβασης του ατόμου καθορίζει αν το δυναμικό είναι ελκτικό ή απωστικό. Για αρνητικό αποσυντονισμό ($\Delta < 0$) -κόκκινος αποσυντονισμός- η αλληλεπίδραση έλκει τα άτομα μέσα στο πεδίο φωτός, σε περιοχές μέγιστης έντασης. Τα ελάχιστα του δυναμικού αντιστοιχούν σε μέγιστες εντάσεις φωτός. Αντίθετα για θετικό αποσυντονισμό ($\Delta > 0$) -μπλε αποσυντονισμός- η αλληλεπίδραση απωθεί τα άτομα μέσα από το πεδίο φωτός, σε περιοχές ελάχιστης έντασης.

Τέλος συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.113) και (3.119) παρατηρούμε ότι το διπολικό δυναμικό U_{dip} κλιμακώνεται ως I/Δ και ο ρυθμός σκέδασης Γ_{sc} κλιμακώνεται ως I/Δ^2 . Επομένως, στις οπτικές παγίδες διπόλου, χρησιμοποιούμε μεγάλο αποσυντονισμό Δ (δηλαδή φως πολύ εκτός συντονισμού) και υψηλές εντάσεις, ώστε να κρατήσουμε τον ρυθμό σκέδασης όσο το δυνατόν μικρότερο, για δεδομένο βάθος δυναμικού παγίδευσης (Grimm et al., 2000).

Συνοψίζοντας, η δύναμη βαθμίδας διπόλου (και το αντίστοιχο δυναμικό) χρησιμοποιείται συχνά για τη χωρική παγίδευση ατόμων, ενώ η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας χρησιμοποιείται συχνά για την ψύξη τους (Grimm et al., 2000). Οι δυνάμεις διπόλου μπορούν να γίνουν πολύ μεγάλες με τη χρήση φωτός υψηλής έντασης, επειδή δεν περιορίζονται από φαινόμενα κορεσμού όπως η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας. Αυτές είναι συντηρητικές, δεν προκαλούν απώλεια μηχανικής ενέργειας από το κβαντικό μας σύστημα και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ψύξη ατόμων. Παρ' όλα αυτά, μπορούν να συνδυαστούν με τη δύναμη πίεσης ακτινοβολίας, η οποία είναι αποσβεστική, ώστε να ενισχυθεί η ψύξη. Αντίθετα, οι δυνάμεις σκέδασης περιορίζονται πάντοτε από τον ρυθμό αυθόρμητης εκπομπής Γ και δεν μπορούν να γίνουν αυθαίρετα ισχυρές· όμως είναι αποσβεστικές και απαραίτητες για την επίτευξη ψύξης (Grimm et al., 2000).

Οι παγίδες πίεσης ακτινοβολίας λειτουργούν με σχεδόν συντονισμένο φως και έχουν συνήθως βάθος λίγων kelvin. Σε αυτές τις παγίδες, το άτομο μπορεί να ψυχθεί σε θερμοκρασίες της τάξης μερικών δεκάδων μικροkelvin. Ωστόσο, η απόδοση της παγίδας περιορίζεται από τη μεγάλη οπτική

διέγερση: η ελάχιστη δυνατή θερμοκρασία περιορίζεται από την ανάκρουση του φωτονίου ενώ η εσωτερική δυναμική του ατόμου διαταράσσεται έντονα από συντονισμένες διεργασίες σε χρονική κλίμακα της τάξης του μικροδευτερολέπτου (Grimm et al., 2000). Από την άλλη οι οπτικές παγίδες διπόλου βασίζονται στην ηλεκτρική διπολική αλληλεπίδραση με φως που είναι σημαντικά απομακρυσμένο από τη συχνότητα συντονισμού, και η οποία είναι πολύ ασθενέστερη σε σχέση με την δύναμη πίεσης ακτινοβολίας. Τα τυπικά βάθη παγίδευσης είναι μικρότερα από ένα millikelvin. Η οπτική διέγερση μπορεί να παραμείνει εξαιρετικά χαμηλή, ώστε τέτοιες παγίδες να μην περιορίζονται από τα φαινόμενα που προκύπτουν στις παγίδες πίεσης ακτινοβολίας (Grimm et al., 2000).

3.3.3 Μετατόπιση ενεργειακών σταθμών και οπτικά δυναμικά

Στην περίπτωση του διεπίπεδου κβαντικού συστήματος σε αλληλεπίδραση με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (βλ. υποενότητα 3.1.2) η Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης δίνεται από την σχέση

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \Delta & \Omega \\ \Omega & -\Delta \end{bmatrix} \quad (3.121)$$

και η οποία δεν έχει τις ίδιες ιδιοτιμές ενέργειας (E_g, E_e) με την Χαμιλτονιανή H_A του ελεύθερου διεπίπεδου συστήματος. Οι νέες ιδιοτιμές αυτές προκύπτουν επιλύοντας την διαφορική εξίσωση $H_i \psi = E_i \psi$. Ο μηδενισμός της ορίζοντας

$$\frac{\hbar}{2} \begin{vmatrix} \Delta - E_{\pm} & \Omega \\ \Omega & -\Delta - E_{\pm} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.122)$$

μας οδηγεί στις δύο νέες ιδιοτιμές της ενέργειας της Χαμιλτονιανής $\hat{H}_i$

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} \quad (3.123)$$

Αν αναπτύξουμε την τετραγωνική ρίζα χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Taylor για μεγάλο αποσυντονισμό ($\Delta \gg \Omega$), παίρνουμε

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} |\Delta| \left(1 + \frac{\Omega^2}{2\Delta^2} \right) \quad (3.124)$$

Χωρίς αλληλεπίδραση με το φως ($\Omega=0$) οι δύο ενεργειακές στάθμες, διεγερμένη E_+ , και θεμελιώδης E_- , στο περιστρεφόμενο πλαίσιο είναι

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} |\Delta| \quad (3.125)$$

ενώ λόγω της αλληλεπίδρασης μετατοπίζονται κατά

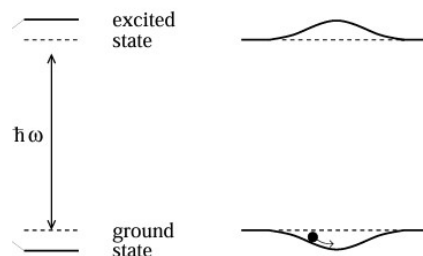
$$\Delta E_{\pm} = \pm \hbar |\Delta| \frac{\Omega^2}{4\Delta^2} \quad (3.126)$$

Επίσης από τις σχέσεις $\Omega = |\mu_{ge} E_0|/\hbar$ και $\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\mu_{eg}|^2$ η οπτικά επαγόμενη μετατόπιση (γνωστή ως *light shift* ή *AC Stark shift*) της θεμελιώδους στάθμης είναι ίση με το δυναμικό παγίδευσης του ατόμου δύο σταθμών.

$$\Delta E_g = \hbar \frac{\Omega^2}{4\Delta} = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I \quad (3.127)$$

Όταν ο κορεσμός (saturation) είναι αμελητέος, το άτομο παραμένει σχεδόν πάντα στη θεμελιώδη στάθμη, οπότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τη μετατοπισμένη θεμελιώδη στάθμη ως το δυναμικό παγίδευσης των ατόμων.

Όπως φαίνεται στο δεξί μέρος του σχήματος 3.5 για $\Delta < 0$ έχουμε μια μετατόπιση της θεμελιώδους ενεργειακής κατάστασης προς χαμηλότερες ενέργειες και στο αριστερό ένα μη ομογενές χωρικά πεδίο όπως αυτό μιας γκαουσιανής δέσμης λέιζερ που δημιουργεί ένα πηγάδι δυναμικού στην θεμελιώδη κατάσταση στο οποίο παγιδεύεται το άτομο (Grimm et al., 2000).



Σχήμα 3.5: Μετατοπίσεις φωτός για ένα άτομο με δύο ενεργειακά επίπεδα. Στην αριστερή πλευρά, το φως με αρνητική απόκλιση ($\Delta < 0$) μετατοπίζει την βασική κατάσταση προς τα κάτω και την διεγερμένη κατάσταση προς τα πάνω κατά το ίδιο μέγεθος. Στη δεξιά πλευρά, ένα χωρικά ανομοιογενές πεδίο, όπως μια ακτίνα λέιζερ Γκάους, δημιουργεί ένα δυναμικό φρεάτιο στη βασική κατάσταση, στο οποίο μπορεί να παγιδευτεί ένα άτομο (Grimm et al., 2000)

Η ερμηνεία αυτή συνδέει άμεσα την κβαντική περιγραφή της αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης με τη δημιουργία οπτικών παγίδων, καθώς το δυναμικό διπόλου προκύπτει ως αποτέλεσμα της μετατόπισης AC Stark των ενεργειακών σταθμών του ατόμου.

3.4 Laser Cooling – Τεχνικές Ψύξης με Φως

Για τον ακριβή έλεγχο ενός μοναδικού κβαντικού συστήματος είναι απαραίτητο να ελαχιστοποιηθεί η κινητική του ενέργεια. Η θερμική κίνηση ενός ατόμου ή ιόντος μπορεί να προκαλέσει απώλεια παγίδευσης, αποσυννοχή (decoherence) ή σφάλματα χειρισμού. Η τεχνική ψύξης με λέιζερ (laser cooling) επιτρέπει την επιβράδυνση της κίνησης των σωματιδίων μέσω της απορρόφησης και εκπομπής φωτονίων — μια από τις πιο καινοτόμες τεχνικές στην πειραματική κβαντική φυσική.

3.4.1 Ψυχρά Άτομα

Η κλασική αρχή της ισοκατανομής της ενέργειας δηλώνει ότι η θερμική ενέργεια ανά σωματίδιο ανά βαθμό ελευθερίας σε θερμοκρασία T δίνεται από:

$$E = \frac{1}{2} k_B T \quad (3.128)$$

όπου k_B η σταθερά Boltzmann.

Σε ένα αέριο μη αλληλεπιδρώντων ατόμων, οι μόνοι βαθμοί ελευθερίας που πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι εκείνοι της ελεύθερης μεταφορικής κίνησης. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε την κινητική ενέργεια για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας ίση με $k_B T/2$, και στη συνέχεια να υπολογίσουμε τη θερμική r.m.s. ταχύτητα από (Fox, 2006):

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} k_B T \quad (3.129)$$

που συνεπάγεται:

$$v_{x,\text{rms}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (3.130)$$

Στις τρεις διαστάσεις αυτό γενικεύεται σε:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} \quad (3.131)$$

Οι εξισώσεις (3.130) και (3.131) δείχνουν ότι υπάρχει μονοσήμαντη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας ενός αερίου και της r.m.s. ταχύτητας των σωματιδίων που το αποτελούν. Αυτή αποτελεί τη βάση της ψύξης με λέιζερ, η οποία χρησιμοποιεί τη μηχανική δύναμη μεταξύ μιας δέσμης λέιζερ και των κινούμενων ατόμων για να τα επιβραδύνει, και επομένως να επιτευχθούν πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Οι θερμοκρασίες που επιτυγχάνονται σήμερα με την ψύξη με λέιζερ

βρίσκονται στη μικροκελβινική περιοχή (Fox, 2006), που αντιστοιχεί σε ατομικές ταχύτητες τέσσερις τάξεις μεγέθους μικρότερες από αυτές σε θερμοκρασία δωματίου.

Η ιδέα της χρήσης ενός λέιζερ για να ψύξουμε ένα αέριο ατόμων είναι, με την πρώτη ματιά, αρκετά παράξενη: συνήθως θα περιμέναμε ότι ένα ισχυρό λέιζερ θα προκαλούσε θέρμανση και όχι ψύξη. Στην πραγματικότητα, η τεχνική λειτουργεί μόνο σε ένα πολύ περιορισμένο εύρος συνθηκών, με τη συχνότητα του λέιζερ να βρίσκεται κοντά σε συντονισμό με μια ατομική μετάβαση. Στα επόμενα υποκεφάλαια, θα μελετήσουμε τις βασικές αρχές της ψύξης με λέιζερ και τους παράγοντες που καθορίζουν τις θερμοκρασίες που επιτυγχάνονται.

3.4.2 Ψύξη μέσω μετατόπισης Doppler (Doppler Cooling)

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην ενότητα 3.3 η δύναμη πίεσης ακτινοβολίας χρησιμοποιείται συχνά για την ψύξη μοναδικών κβαντικών συστημάτων (ατόμων και ιόντων).

Ας θεωρήσουμε πρώτα μια δέσμη λέιζερ έντασης I με αποσυντονισμό $\Delta < 0$, που αλληλεπιδρά με άτομο το οποίο έχει ταχύτητα $+v_x$ κινούμενο αντίθετα από την κατεύθυνση διάδοσης της δέσμης. Ένα κινούμενο άτομο αντιλαμβάνεται διαφορετική τη συχνότητα του φωτός από εκείνη που εκπέμπει το λέιζερ λόγω του φαινομένου Doppler και η δύναμη F_x που ασκείται σε αυτό δίνεται από την σχέση (Metcalf & Van der Straten, 1999)

$$F_x = -\hbar k \Gamma \frac{s_0/2}{1 + s_0 + (2\Delta'/\Gamma)^2} \quad (3.132)$$

με $\Delta' = \Delta + kv_x$ να είναι ο Doppler - μετατοπισμένος αποσυντονισμός στο σύστημα αναφοράς του ατόμου. Η δύναμη αυτή επιβραδύνει τα άτομα που κινούνται με ταχύτητα $+v_x$ λόγω ισχυρής απορρόφησης φωτονίων.

Επιπλέον ένα υψηλής έντασης λέιζερ οδηγεί στην αύξηση της πιθανότητας εξαναγκασμένης εκπομπής με συνέπεια την μείωση της δύναμης F_x η οποία τείνει στην τιμή, $F_x = -\hbar k \Gamma / 2$. Από την άλλη με ένα χαμηλής έντασης λέιζερ η παράμετρος κορεσμού στον συντονισμό s_0 η οποία ισούται με το πηλίκο της έντασης του λέιζερ I προς την ένταση κορεσμού I_s μπορεί να αγνοηθεί από τον παρονομαστή της σχέσης (3.132). Αυτό έχει ως συνέπεια ο ρυθμός σκέδασης να είναι ανάλογος της έντασης I και να παρουσιάζει Λορεντζιανή εξάρτηση από τον αποσυντονισμό Δ' . Έτσι ο ρυθμός απορρόφησης είναι μέγιστος όταν $\Delta' = 0$, ενώ μειώνεται γρήγορα όσο αυξάνεται το $|\Delta'|$ και η χαρακτηριστική περιοχή στην οποία η απορρόφηση παραμένει σημαντική έχει εύρος της τάξης του

φυσικού εύρους της μετάβασης, Γ . Επομένως, η απορρόφηση μένει σημαντική μόνο όταν ο Doppler-μετατοπισμένος αποσυντονισμός Δ' ικανοποιεί την συνθήκη $|\Delta'| \lesssim \Gamma \rightarrow |-\Delta| + kv_x| \lesssim \Gamma \rightarrow -\Gamma + |\Delta| < kv_x < \Gamma + |\Delta|$ επιτρέποντας έτσι την επιλεκτική διέγερση ατόμων συγκεκριμένων ταχυτήτων.

Η διάταξη με μία μόνο δέσμη λέιζερ λειτουργεί αποτελεσματικά όταν ο αποσυντονισμός είναι μεγάλος ($|\Delta| \gg \Gamma$), επιτρέποντας την επιλεκτική επιβράδυνση ατόμων με μεγάλες ταχύτητες. Ωστόσο, καθώς τα άτομα επιβραδύνονται, η Doppler μετατόπιση μειώνεται και η συνθήκη συντονισμού δεν ικανοποιείται πλέον. Αν τώρα $|\Delta| \sim \Gamma$, η επιλεκτικότητα ως προς την ταχύτητα μειώνεται και άτομα που κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις μπορούν να απορροφούν φωτόνια. Σε αυτές τις συνθήκες τα άτομα που κινούνται με $-u_x$ μπορεί να επιταχύνονται, προκαλώντας μέσω συγκρούσεων αναθέρμανση των ατόμων που κινούνται με ταχύτητα $+u_x$.

Συνεπώς για την επίτευξη πολύ χαμηλών θερμοκρασιών χρειαζόμαστε δύο αντίθετες δέσμες λέιζερ με αποσυντονισμό $\Delta < 0$. Θεωρούμε ότι η ένταση του φωτός είναι αρκετά χαμηλή ώστε η εξαναγκασμένη εκπομπή να μην είναι σημαντική. Αυτό μας επιτρέπει να αγνοήσουμε διεργασίες κατά τις οποίες ένα άτομο διεγείρεται από το φως της μίας δέσμης και στη συνέχεια υφίσταται εξαναγκασμένη εκπομπή από το φως της άλλης δέσμης — μια ακολουθία που μπορεί να οδηγήσει σε πολύ μεγάλες, ανεξάρτητες από την ταχύτητα, μεταβολές της ταχύτητας του ατόμου. Έτσι στην περίπτωση αυτή χαμηλής έντασης, οι δυνάμεις από τις δύο φωτεινές δέσμες απλώς αθροίζονται, ώστε η συνολική δύναμη να είναι:

$$F = F_+ + F_- \quad (3.133)$$

με

$$F_- = -\hbar k \Gamma \frac{s_0/2}{1 + s_0 + (2(\Delta + ku_x)/\Gamma)^2} \quad \text{και} \quad F_+ = \hbar k \Gamma \frac{s_0/2}{1 + s_0 + (2(\Delta - ku_x)/\Gamma)^2} \quad (3.134)$$

Το άθροισμα των δύο δυνάμεων δίνει για μικρές ταχύτητες του ατόμου (Metcalf & Van der Straten, 1999):

$$F = \frac{8\hbar k^2 s_0 \Delta u_x}{\gamma(1 + s_0 + (2\Delta/\Gamma)^2)^2} = -a u_x \quad (3.135)$$

και η δύναμη αυτή για $\Delta < 0$ αποσβένει την κίνηση των ατόμων.

Αν δεν υπήρχε καμία άλλη επίδραση στην ατομική κίνηση, όλα τα άτομα θα επιβραδύνονταν γρήγορα έως $v=0$ και το σύστημα θα έφτανε στη θερμοκρασία $T=0$, κάτι που είναι προφανώς μη φυσικό. Υπάρχει όμως και θέρμανση που προκαλείται από τις φωτεινές δέσμες και πρέπει να ληφθεί υπόψη. Κάθε απορρόφηση φωτονίου δίνει στο άτομο ένα βήμα ορμής $\hbar k$ προς την

κατεύθυνση του φωτονίου και κάθε αυθόρμητη εκπομπή φωτονίου δίνει ένα τυχαίο βήμα ορμής (momentum diffusion- μικρές τυχαίες μεταβολές της ορμής του ατόμου). Αυτές οι δύο διαδικασίες ανταγωνίζονται, η επιλεκτική απορρόφηση επιβραδύνει τα άτομα προκαλώντας ψύξη ενώ οι τυχαίες ανακρούσεις από εκπομπή φωτονίων αυξάνουν την κινητική ενέργεια και οδηγούν σε θέρμανση. Στην κατάσταση ισορροπίας, οι ρυθμοί θέρμανσης και ψύξης εξισορροπούνται. Αυτό οδηγεί σε ένα θεμελιώδες όριο θερμοκρασίας, το όριο Doppler (Metcalf & Van der Straten, 1999):

$$T_D = \hbar\Gamma/2k_B \quad (3.136)$$

Συχνά το όριο Doppler είναι της τάξης 100–300 μK για αλκαλικά άτομα (Metcalf & Van der Straten, 1999).

3.4.3 Ψύξη σε Παγιδευμένα Συστήματα

Σε μια παγίδα ιόντων ή ατόμων τα σωματίδια εκτελούν κβαντισμένη αρμονική κίνηση όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 3.1.4 της εργασίας αυτής. Τα παγιδευμένα ιόντα σε μία παγίδα Pauli μπορούν έχουν ενέργειες ίσες με το 1/10 του βάθους της παγίδας $\sim 1\text{eV}$ (αντίστοιχη θερμοκρασία γύρω στα 10.000K) (Leibfried et al., 2003). Οι τιμές αυτές της κινητικής ενέργειας είναι πολύ υψηλές και ο αριθμός φωνονίων n της κβαντικής ταλάντωσης πολύ μεγάλος. Η ανάγκη λοιπόν ψύξης απαιτεί υψηλό ρυθμό σκέδασης του φωτός ψύξης. Ο ρυθμός αυτός όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην παράγραφο 3.3.1 εξαρτάται από τον ρυθμό της αυθόρμητης εκπομπής Γ , και την πιθανότητα ρ_{ee} το άτομο να είναι στη διεγερμένη κατάσταση. Συνεπώς η επιλογή μιας βραχύβιας διεγερμένης στάθμης ($\Gamma \rightarrow$ μεγάλο) είναι απαραίτητη.

Ο μεγάλος όμως αριθμός φωνονίων, n , βγάζει το σύστημα από το καθεστώς Lamb-Dicke και πλέον δεν εμφανίζονται μόνο οι τρεις κυρίαρχοι συντονισμοί στο μοναδικό μας κβαντικό σύστημα, (βλ. παράγραφο 3.1.4).

Επίσης ένας μεγάλος ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής Γ προκαλεί μεγάλη διεύρυνση συχνότητας όλων των συντονισμών της Χαμιλτονιανής παγιδευμένου ιόντος (βλ. παράγραφος 3.1.4) με συνέπεια το σύστημα να είναι σε καθεστώς μη διακριτών πλευρικών ζωνών. Η επίδραση του μεγάλου ρυθμού αυθόρμητης εκπομπής μπορεί να γίνει ποσοτικά κατανοητή εξετάζοντας τη φασματική απόκριση του συστήματος, η οποία προκύπτει από τη λύση των οπτικών εξισώσεων Bloch στη μόνιμη κατάσταση. Η πιθανότητα διέγερσης ρ_{ee} ως συνάρτηση του αποσυντονισμού Δ δίνεται από την σχέση

$$\rho_{ee} = \frac{\Omega_{n,m}^2 / \Gamma^2}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\Gamma}\right)^2 + 2\frac{\Omega_{n,m}^2}{\Gamma^2}} \Rightarrow \rho_{ee} = \frac{\Omega^2 / (\Gamma^2 + 2\Omega_{n,m}^2)}{1 + \left(\frac{2\Delta}{\sqrt{\Gamma^2 + 2\Omega_{n,m}^2}}\right)^2} \quad (3.137)$$

με $\Delta=0$ και $\Omega_{n,n}=\Omega$, την συχνότητα Rabi για το συντονισμό φορέα του συστήματος και $\Delta=\pm\nu$ με $\Omega_{n,m}$ την συχνότητα Rabi για τους συντονισμούς πλευρικών ζωνών. Η σχέση αυτή έχει την μορφή Λορεντζιανής ως προς τον αποσυντονισμό και από την οποία προκύπτει ότι το αποτελεσματικό φασματικό εύρος των συντονισμών είναι $\sqrt{\Gamma^2 + 2\Omega_{n,m}^2}$. Το εύρος αυτό περιλαμβάνει τόσο τη φυσική διεύρυνση λόγω αυθόρμητης εκπομπής όσο και τη διεύρυνση ισχύος (power broadening) λόγω της σύζευξης με το λέιζερ. Έτσι επειδή η συχνοτική απόσταση του συντονισμού φορέα από τους πλευρικής ζώνης συντονισμούς είναι ίσος με ν , το εύρος $\sqrt{\Gamma^2 + 2\Omega_{n,m}^2}$ μας επιβάλλει την επιλογή $\Gamma \ll \nu$ και $\Omega \ll \nu$ ώστε να είμαστε στην περιοχή διακριτών πλευρικών ζωνών (Leibfried et al., 2003). Συνεπώς για μεγάλες τιμές του ρυθμού αυθόρμητης εκπομπής Γ , στις περισσότερες παγίδες και ιόντα που χρησιμοποιούνται, το πρώτο στάδιο ψύξης πραγματοποιείται στο καθεστώς μη διαχωρισμένων πλευρικών ζωνών (unresolved sideband regime). Σε αυτή την περίπτωση, η ψύξη ενός ιόντος σε παγίδα ή η ψύξη ελεύθερων ατόμων είναι ουσιαστικά το ίδιο και η ελάχιστη κινητική ενέργεια που επιτυγχάνεται με αυτού του τύπου την ψύξη αποδεικνύεται ότι είναι η ίδια με το όριο της ψύξης Doppler για ελεύθερα άτομα. Για να επιτευχθεί όμως με μεγάλη πιθανότητα η ψύξη στη θεμελιώδη κινητική κατάσταση, απαιτείται ένα δεύτερο στάδιο ψύξης, συνήθως με χαμηλότερο ρυθμό σκέδασης, αλλά αυτή τη φορά στο καθεστώς των διαχωρισμένων πλευρικών ζωνών (resolved sideband regime) (Leibfried et al., 2003).

Ψύξη στο καθεστώς διακριτών πλευρικών ζωνών (Resolved-sideband cooling)

Σε ένα καθεστώς όπου το αποτελεσματικό πλάτος γραμμής (effective linewidth) λόγω της αποδιέγερσης από τη διεγερμένη κατάσταση, το οποίο καθορίζεται από ένα αποτελεσματικό ρυθμό αποδιέγερσης Γ' , είναι μικρότερο από τη συχνότητα κίνησης ν , τότε οι επιμέρους πλευρικές ζώνες λόγω της ταλαντωτικής κίνησης γίνονται διακριτές. Το αποτελεσματικό πλάτος γραμμής με ρυθμό Γ' οφείλεται σε όλους εκείνους τους παράγοντες που μπορεί να προκαλέσουν αποσυννοχή του κβαντικού συστήματος και όχι μόνο στο φυσικό εύρος των γραμμών και στην διεύρυνση λόγω σύζευξης με το λέιζερ όπως αναφέραμε στην παράγραφο 3.4.3 της εργασίας. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί κανείς να ρυθμίσει το λέιζερ ψύξης στην πρώτη κόκκινη πλευρική ζώνη και να ψύξει το ιόν πολύ κοντά στη θεμελιώδη κινητική κατάσταση, εφόσον δεν υπάρχουν

άλλοι μηχανισμοί θέρμανσης πέρα από τις αναπηδήσεις λόγω ανακρούσεων (recoils) της μετάβασης ψύξης. Για να φτάσει κανείς σε αυτό το καθεστώς σε μία επιτρεπτή (dipole allowed) μετάβαση, μπορεί είτε να χρησιμοποιήσει μια παγίδα με μεγάλες συχνότητες ταλάντωσης, ν , είτε να χρησιμοποιήσει μία ασθενώς επιτρεπτή διπολική μετάβαση (μικρός ρυθμός αυθόρμητης εκπομπής, Γ) (Leibfried et al., 2003). Και οι δύο προσεγγίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί, αλλά μέχρι σήμερα η ψύξη μέχρι τη θεμελιώδη κινητική κατάσταση —με την έννοια ότι η κατάσταση $|g, n=0\rangle$ παράγεται με υψηλή πιθανότητα— έχει επιτευχθεί είτε μέσω διπολικά απαγορευμένων μεταβάσεων είτε μέσω Raman μεταβάσεων (Leibfried et al., 2003).

Συνεπώς αφού ρυθμίσουμε τον αποτελεσματικό ρυθμό αποδιέγερσης, Γ' , πολύ μικρότερο της συχνότητας ν της κίνησης ώστε να έχουμε καλά διαχωρισμένες πλευρικές ζώνες είναι σημαντικό να επιλέξουμε $\Gamma' \approx \Omega_{n,n-1}$ με $\Omega_{n,n-1}$ την συχνότητα της ταλάντωσης Rabi της κόκκινης πλευρικής ζώνης. Αυτό είναι απαραίτητο για πετύχουμε ψύξη και να αποφευχθούν οι ταλαντώσεις Rabi. Πριν ολοκληρωθεί μια ταλάντωση Rabi, το ιόν αποδιεγείρεται αυθόρμητα.

Έτσι στην περιοχή Lamb–Dicke και απουσία άλλων μηχανισμών θέρμανσης, το laser ψύξης ρυθμίζεται με $\Delta = -\nu$, δηλαδή στην πρώτη κόκκινη πλευρική ζώνη. Κάθε κύκλος ψύξης (απορρόφηση ακολουθούμενη από αυθόρμητη εκπομπή) περιλαμβάνει μετάβαση από τη θεμελιώδη κατάσταση ($|g\rangle$) στη διεγερμένη κατάσταση ($|e\rangle$), και μετέπειτα αποδιέγερση στο φορέα (Leibfried et al., 2003). Έστω το ιόν ξεκινά στη θεμελιώδη εσωτερική κατάσταση με κινητική στάθμη n (δηλαδή $|g, n\rangle$). Η απορρόφηση ενός φωτονίου μειώνει το κινητικό επίπεδο του κατά ένα κβάντο ώστε να βρεθεί στην κατάσταση $|e, n-1\rangle$ (δηλαδή κάθε κύκλος ψύξης μειώνει την κινητική ενέργεια του κατά ένα κβάντο). Μετά την απορρόφηση το ιόν που βρίσκεται στη διεγερμένη κατάσταση $|e, n-1\rangle$ αποδιεγείρεται αυθόρμητα με ρυθμό Γ' σε κατάσταση $|g, n-1\rangle$. Έτσι η αυθόρμητη εκπομπή δεν αναιρεί τη μείωση της κινητικής ενέργειας που προκάλεσε η απορρόφηση στην περιοχή κόκκινης πλευρικής ζώνης. Αυτοί οι επαναλαμβανόμενοι κύκλοι ψύξης οδηγούν το σύστημα σχεδόν στην θεμελιώδη κινητική του κατάσταση.

Επίσης ο παραπάνω ρυθμός ψύξης δίνεται από το γινόμενο της πιθανότητας κατοίκησης της διεγερμένης κατάστασης $p_e(n)$ για μια κινητική κατάσταση $|n\rangle$ και του ρυθμού αποδιέγερσης Γ' . Η πιθανότητα διέγερσης της μετάβασης της κόκκινης πλευρικής ζώνης ακολουθεί Λορεντζιανή φασματική κατανομή ως προς τον αποσυντονισμό, με μέγιστο για $\Delta = -\nu$ (Leibfried et al., 2003):

$$R_n = \Gamma' p_e(n) = \Gamma' \frac{(\eta \sqrt{n} \Omega)^2}{2(\eta \sqrt{n} \Omega)^2 + \Gamma'^2} \quad (3.138)$$

Αυτός ο ρυθμός εξαρτάται από τον αριθμό κβάντων n και μηδενίζεται μόλις επιτευχθεί η θεμελιώδης κατάσταση. Η θεμελιώδης κατάσταση είναι επομένως μια σκοτεινή κατάσταση (dark state) για τη διέγερση της κόκκινης πλευρικής ζώνης, και το ιόν θα οδηγηθεί σε αυτήν την κατάσταση και θα παραμείνει εκεί ελλείψει ανταγωνιστικών μηχανισμών.

Ελλείψει οποιωνδήποτε άλλων πηγών θέρμανσης, το κυρίαρχο κανάλι διαφυγής από τη θεμελιώδη κατάσταση είναι η εκτός συντονισμού διέγερση του φορέα (carrier) και της πρώτης μπλε πλευρικής ζώνης. Στην πραγματικότητα, και οι δύο αυτές διεργασίες συμβάλλουν στη θέρμανση της ίδιας τάξης μεγέθους (Leibfried et al., 2003). Η διέγερση στον συντονισμό του φορέα έχει πιθανότητα

$$p_{ee} = \frac{\Omega^2 / \Gamma'^2}{1 + (2\Omega^2 / \Gamma'^2) + (2\Delta / \Gamma')^2} \approx \left[\frac{\Omega}{2\nu} \right]^2 \text{ με } \Delta = \nu \text{ και } \Omega \ll \nu \quad (3.139)$$

αλλά στη συνέχεια αποδιεγείρεται κυρίως πίσω μέσω της μετάβασης του φορέα και δεν προκαλεί θέρμανση (αλλαγή του n της κινητικής κατάστασης). Η αποδιέγερση στην μπλε πλευρική ζώνη μετά από διέγερση του φορέα, η οποία οδηγεί σε θέρμανση, συμβαίνει μόνο με ρυθμό

$$\cdot \left[\frac{\Omega}{2\nu} \right]^2 \tilde{\eta} \Gamma' \quad (3.140)$$

Σημειώνεται ότι ο παράγοντας Lamb–Dicke $\tilde{\eta}$ για αυτήν την αποδιέγερση δεν είναι ίσος με εκείνον της διέγερσης, διότι το εκπεμπόμενο φωτόνιο μπορεί να εκπέμπεται προς οποιαδήποτε κατεύθυνση και όχι μόνο κατά μήκος του διανύσματος κύματος της δέσμης ψύξης. Επιπλέον, σε ορισμένες πειραματικές διατάξεις χρησιμοποιείται ένα σύστημα τριών επιπέδων, στο οποίο το εκπεμπόμενο φωτόνιο δεν έχει το ίδιο μήκος κύματος με το φως ψύξης (Leibfried et al., 2003). Η δεύτερη κυρίαρχη διεργασία θέρμανσης είναι η διέγερση στην πρώτη μπλε πλευρική ζώνη με πιθανότητα

$$\left[\frac{\eta\Omega}{4\nu} \right]^2 \quad (3.141)$$

(βλ. παραπάνω, αλλά τώρα με $\Delta = 2\nu$), ακολουθούμενη από αποδιέγερση στον φορέα με ρυθμό

$$\left[\frac{\eta\Omega}{4\nu} \right]^2 \Gamma' \quad (3.142)$$

Για το τελικό στάδιο της ψύξης, το πρόβλημα μπορεί να περιοριστεί στη θεμελιώδη κατάσταση και στην πρώτη διεγερμένη κινητική κατάσταση και να περιγραφεί με εξισώσεις ρυθμών (Leibfried et al., 2003).

$$\dot{p}_0 = p_1 \frac{(\eta\Omega)^2}{\Gamma'} - p_0 \left[\left(\frac{\Omega}{2\nu} \right)^2 \tilde{\eta}^2 \Gamma' + \left(\frac{\eta\Omega}{4\nu} \right)^2 \Gamma' \right] \quad (3.143)$$

$$\dot{p}_0 = -\dot{p}_1 \quad (3.144)$$

όπου p_0, p_1 είναι οι πιθανότητες το σύστημα να βρίσκεται αντίστοιχα στη θεμελιώδη ($n=0$) και στην πρώτη διεγερμένη ($n=1$) κινητική κατάσταση. Στην σταθερή κατάσταση $\dot{p}_0=0$ και $p_0+p_1=1$ οπότε προκύπτει

$$p_0 \approx 1 - [\Gamma' / 2\nu]^2 \quad (3.145)$$

το οποίο για $\Gamma \ll \nu$ όπως θεωρήσαμε αρχικά προσεγγίζει την μονάδα.

3.4.4 Σύγκριση των μηχανισμών ψύξης

Οι δύο βασικές τεχνικές ψύξης που παρουσιάστηκαν —η ψύξη Doppler και η ψύξη πλευρικών ζωνών— διαφέρουν ουσιαστικά ως προς το φυσικό καθεστώς στο οποίο λειτουργούν και τα όρια που επιβάλλονται από τη δυναμική του συστήματος.

Η ψύξη Doppler βασίζεται στη δύναμη πίεσης ακτινοβολίας και λειτουργεί αποτελεσματικά στο καθεστώς μη διαχωρισμένων πλευρικών ζωνών (unresolved sideband regime), όπου το φυσικό εύρος γραμμής Γ είναι συγκρίσιμο ή μεγαλύτερο από τη συχνότητα ταλάντωσης ν . Στο καθεστώς αυτό δεν είναι δυνατή η επιλεκτική διέγερση των πλευρικών ζωνών και η ψύξη περιορίζεται από το όριο Doppler, $T_D = \hbar\Gamma / 2k_B$.

Αντίθετα, η ψύξη πλευρικών ζωνών απαιτεί το καθεστώς διακριτών πλευρικών ζωνών (resolved sideband regime), δηλαδή $\Gamma' \ll \nu$, ώστε να είναι δυνατή η φασματική επίλυση των μεταβάσεων. Σε αυτή την περίπτωση, η επιλεκτική διέγερση της κόκκινης πλευρικής ζώνης επιτρέπει τη μείωση του αριθμού φωνονίων και την επίτευξη της θεμελιώδους κινητικής κατάστασης.

Συνοπτικά, η ψύξη Doppler αποτελεί ένα πρώτο στάδιο ψύξης που μειώνει την κινητική ενέργεια έως το όριο Doppler, ενώ η ψύξη πλευρικών ζωνών χρησιμοποιείται ως δεύτερο στάδιο για την επίτευξη κβαντικού καθεστώτος με $n \approx 0$.

Κεφάλαιο 4 – Decoherence και Ανοιχτά Κβαντικά Συστήματα

4.1 Φυσικές Πηγές Κβαντικής Αποσυνοχής (Decoherence)

Ένα από τα κύρια εμπόδια στην εφαρμογή κβαντικής τεχνολογίας είναι η αδυναμία πλήρους απομόνωσης ενός κβαντικού συστήματος από το περιβάλλον του. Η αλληλεπίδραση αυτή οδηγεί στην απώλεια κβαντικής συνοχής – ένα φαινόμενο γνωστό ως κβαντική αποσυνοχή (decoherence).

Η αποσυνοχή δεν συνεπάγεται απλώς απώλεια πληροφορίας, αλλά κυρίως τη μεταφορά της στο περιβάλλον μέσω της σύζευξης συστήματος-περιβάλλοντος. Αυτή μετατρέπει μια καθαρή (pure) κβαντική κατάσταση σε μεικτή (mixed), καταστρέφοντας τις κβαντικές ιδιότητες που είναι απαραίτητες για εφαρμογές όπως η υπέρθεση, η κβαντική διεμπλοκή και ο έλεγχος του qubit.

Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα κρίσιμο για μοναδικά κβαντικά συστήματα, όπως παγιδευμένα ιόντα, ουδέτερα άτομα και κβαντικές κουκκίδες, όπου ακόμη και ασθενείς αλληλεπιδράσεις με το περιβάλλον μπορούν να οδηγήσουν σε σημαντική υποβάθμιση της κβαντικής συμπεριφοράς.

Στις επόμενες ενότητες ακολουθούν οι σημαντικότερες φυσικές πηγές αποσυνοχής, ειδικά για μοναδικά κβαντικά συστήματα (π.χ. trapped ions, ουδέτερα άτομα, quantum dots).

4.1.1 Πηγές αποσυνοχής στα παγιδευμένα ιόντα

Στα παγιδευμένα ιόντα, η συνεκτική εξέλιξη των κβαντικών καταστάσεων βασίζεται στην ακριβή απομόνωση και στον ελεγχόμενο χειρισμό τόσο των εσωτερικών (ηλεκτρονικών) βαθμών ελευθερίας όσο και της κινητικής κίνησης του ιόντος μέσα στην παγίδα. Στην πράξη, ωστόσο, υπάρχουν μηχανισμοί που περιορίζουν την πιστότητα (fidelity) των κβαντικών καταστάσεων και των λογικών πράξεων. Όλοι αυτοί οι μηχανισμοί μπορούν να ενταχθούν γενικά στον όρο decoherence, με την ευρεία έννοια της απώλειας κβαντικής πληροφορίας (Wineland et al., 1998).

Ακολουθώντας μια καθιερωμένη και λειτουργική ταξινόμηση, η αποσυνοχή στα παγιδευμένα ιόντα μπορεί να διακριθεί σε δυο βασικές κατηγορίες:

Αποσυνοχή της κινητικής κατάστασης του παγιδευμένου ιόντος

Εκτός από τις εσωτερικές ηλεκτρονικές καταστάσεις, τα παγιδευμένα ιόντα διαθέτουν και κβαντισμένους κινητικούς βαθμούς ελευθερίας λόγω της αρμονικής παγίδευσης. Η συνοχή αυτών

των κινητικών καταστάσεων μπορεί να επηρεαστεί από διακυμάνσεις στις παραμέτρους της παγίδας, όπως το εφαρμοζόμενο δυναμικό ή η γεωμετρία των ηλεκτροδίων. Συνήθως οι διακυμάνσεις αυτές είναι αργές σε σύγκριση με τη χαρακτηριστική χρονική κλίμακα της κίνησης οπότε οδηγούν σε αδιαβατικές μεταβολές της συχνότητας ταλάντωσης. Έτσι στις περιπτώσεις που το ιόν βρίσκεται σε υπέρθεση κινητικών ιδιοκαταστάσεων, η στοχαστική εξέλιξη της σχετικής φάσης οδηγεί σε αποσυνοχή φάσης της κινητικής κατάστασης. Αν και αυτή επηρεάζει έμμεσα την υπέρθεση των εσωτερικών επιπέδων (qubit) του μοναδικού κβαντικού μας συστήματος, η τυχαιότητα στη φάση των κινητικών καταστάσεων μπορεί να μειώσει την πιστότητα ελέγχου του qubit, αφού η αλληλεπίδραση με το λέιζερ εξαρτάται από την κινητική κατάσταση του ιόντος (Wineland et al., 1998). Παρόλα αυτά όλες αυτές οι παράμετροι της παγίδας ιόντων μπορούν να ελεγχθούν με επαρκή ακρίβεια, μειώνοντας την επίδραση τους ως πηγή αποσυνοχής.

Αποσυνοχή της εσωτερικής κατάστασης του παγιδευμένου ιόντος

Για πολλά χρόνια η τεχνική παγίδευσης ιόντων μας παρείχε την δυνατότητα υψηλής ανάλυσης και ακρίβειας μελέτη των εσωτερικών καταστάσεων του ιόντος (Wineland et al., 1998). Η υψηλή ανάλυση και ακρίβεια επιτυγχάνονται επειδή τα ιόντα μπορούν συνήθως να αποθηκευτούν για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα (πολλές ώρες ή και ημέρες), με ελάχιστες διαταραχές της εσωτερικής τους δομής από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Παρ' όλα αυτά, οι μεγάλοι χρόνοι συνοχής που επιτυγχάνονται σε φασματοσκοπικά πειράματα επιτυγχάνονται υπό ειδικές συνθήκες, οι οποίες ενδέχεται να μην είναι πάντα συμβατές με τη χρήση τους σε κβαντική λογική (Wineland et al., 1998).

Η ακτινοβολιακή αποδιέγερση αποτελεί θεμελιώδη πηγή αποσυνοχής των εσωτερικών καταστάσεων, καθώς αντιστοιχεί σε μη αναστρέψιμη απώλεια πληροφορίας από το διεπίπεδο σύστημα προς το περιβάλλον μέσω εκπομπής φωτονίων. Σε ένα qubit που ορίζεται από υπέρθεση δύο εσωτερικών ενεργειακών επιπέδων, η αυθόρμητη αποδιέγερση του ανώτερου επιπέδου οδηγεί σε καταστροφή της υπέρθεσης και συνεπώς σε πεπερασμένο χρόνο συνοχής, ακόμη και στην απουσία εξωτερικού θορύβου. Για τον λόγο αυτό, ο ρυθμός ακτινοβολιακής αποδιέγερσης θέτει ένα σημαντικό, αναπόφευκτο όριο στη συνοχή του qubit, το οποίο δεν μπορεί να εξαλειφθεί με τεχνικές σταθεροποίησης πεδίων ή λέιζερ. Η επιλογή μετασταθών οπτικών επιπέδων ή υπέρλεπτων μεταβάσεων με εξαιρετικά μικρούς ρυθμούς αποδιέγερσης είναι επομένως κρίσιμη για την επίτευξη μεγάλων χρόνων συνοχής στα συστήματα παγιδευμένων ιόντων (Wineland et al., 1998).

Επίσης οι ανεξέλεγκτες διακυμάνσεις εξωτερικών μαγνητικών πεδίων μπορεί να συνεισφέρουν στην αποσυννοχή των εσωτερικών καταστάσεων. Η αποσυννοχή προκύπτει από το γεγονός ότι ο ενεργειακός διαχωρισμός μεταξύ των δύο ενεργειακών επιπέδων ενδιαφέροντος εξαρτάται από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο B (Wineland et al., 1998). Αυτή η αλλαγή στην ενεργειακή διαφορά έχει άμεση συνέπεια στην αλλαγή της συχνότητας της μετάβασης του qubit. Αν το B αλλάζει αργά με τον χρόνο τότε σε κάθε πείραμα έχουμε λίγο διαφορετική συχνότητα, η σχετική φάση μεταξύ των δύο καταστάσεων $|e\rangle$ και $|g\rangle$ εξελίσσεται διαφορετικά κάθε φορά με αποτέλεσμα να χάνεται η συνοχή φάσης και να μειώνεται ουσιαστικά ο χρόνος απώλειας φάσης. Για τον λόγο αυτό, στην πράξη επιλέγονται μεταβάσεις των οποίων η συχνότητα δεν επηρεάζεται σημαντικά από το μαγνητικό πεδίο, ώστε να ελαχιστοποιείται η επίδραση του μαγνητικού θορύβου (Wineland et al., 1998).

Επιπλέον οι μετατοπίσεις ενεργειακών σταθμών λόγω ηλεκτρικών πεδίων αναμένεται να αποτελούν λιγότερο σημαντική πηγή αποσυννοχής των εσωτερικών καταστάσεων σε σύγκριση με τις μετατοπίσεις που προκαλούνται από εξωτερικά μαγνητικά πεδία. Αυτό οφείλεται σε δύο βασικούς λόγους: πρώτον, οι μετατοπίσεις από ηλεκτρικά πεδία είναι συνήθως δεύτερης τάξης ως προς το πεδίο, εκτός από εξαιρετικές περιπτώσεις που αφορούν σχεδόν εκφυλισμένες στάθμες αντίθετης συμμετρίας· δεύτερον, τα ηλεκτρικά πεδία στο σημείο όπου βρίσκεται το ιόν είναι σχετικά μικρά (Wineland et al., 1998). Η μέση τιμή του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα παγιδευμένο ιόν πρέπει και είναι μηδενική γιατί αν δεν ήταν, το ιόν θα υφίστατο μέση επιτάχυνση και δεν θα ήταν χωρικά εντοπισμένο. Βεβαίως, το ιόν πρέπει να βιώνει ένα μέσο ηλεκτρικό πεδίο ώστε να αντισταθμίζεται η δύναμη της βαρύτητας, αλλά το πεδίο αυτό είναι εξαιρετικά μικρό.

Σε μια ιδανική RF παγίδα, όπως εκείνη όπου το RF δυναμικό περιγράφεται στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας και απουσιάζουν παρασιτικά (stray) στατικά ηλεκτρικά πεδία (πχ πεδία από τα ηλεκτρόδια (patch potentials), θερμικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία μέλανος σώματος κτλ), τα ιόντα έλκονται προς τη γραμμή κατά μήκος της οποίας το RF ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό. Σε αυτή την περίπτωση, οι μέσες τετραγωνικές τιμές των ηλεκτρικών πεδίων λόγω της παγίδευσης που βιώνουν τα ψυχόμενα ιόντα είναι πολύ μικρές. Αν όμως υπάρχουν παρασιτικά ηλεκτρικά πεδία, η μέση τετραγωνική τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο του ιόντος γίνεται μη μηδενική και μπορεί να είναι σημαντικά μεγαλύτερη. Τα πεδία αυτά μπορούν να μειωθούν με την εφαρμογή κατάλληλων δυναμικών σε ηλεκτρόδια αντιστάθμισης· σε κάποιο βαθμό αυτό είναι απαραίτητο ούτως ή άλλως για την αποδοτική ψύξη με λείζερ (Wineland et al., 1998).

Επίσης, η αποσυννοχή των εσωτερικών καταστάσεων ιόντων λόγω διακυμάνσεων ηλεκτρικών πεδίων που προκαλούνται από τη δεξαμενή των ταλαντωτικών τρόπων μιας αλυσίδας παγιδευμένων ιόντων υπάρχει ακόμη και όταν οι τρόποι βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση, λόγω της μηδενικής κίνησης. Ωστόσο, σε κάποιες περιπτώσεις βρέθηκε αμελητέα πχ για μια αλυσίδα 1000 ιόντων, ο χρόνος αποσυννοχής εκτιμήθηκε ότι είναι 10^4 - 10^8 φορές μεγαλύτερος από τον φυσικό χρόνο ζωής της διεγερμένης κατάστασης, ο οποίος είναι περίπου 35s (Wineland et al., 1998).

Τέλος εφαρμογή των δεσμών λέιζερ για τον έλεγχο των παγιδευμένων ιόντων μπορεί να εισάγει πρόσθετες πηγές αποσυννοχής των εσωτερικών καταστάσεων, οι οποίες οφείλονται σε διακυμάνσεις της έντασης και της φάσης των laser καθώς και σε μικρές αλλαγές στη θέση της δέσμης σε σχέση με το ιόν (Wineland et al., 1998). Οι διακυμάνσεις αυτές προκαλούν αλλαγές στη συχνότητα μετάβασης των qubits (AC Stark effect) και αποσυννοχή φάσης. Η ακρίβεια και σταθερότητα των Rabi παλμών εξαρτάται από αυτές τις παραμέτρους, γι' αυτό σε πειράματα χρησιμοποιούνται μέθοδοι μείωσης των διακυμάνσεων αυτών ώστε να ελαχιστοποιείται η αποσυννοχή. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι το ίδιο το λέιζερ ακόμα και αν χαρακτηρίζεται από συχνότητα που αποκλίνει από την συχνότητα συντονισμού του συστήματος μπορεί να προκαλέσει σκέδαση φωτονίων και να οδηγήσει σε αποσυννοχή.

4.1.2 Πηγές αποσυννοχής στα παγιδευμένα ουδέτερα άτομα

Στα ουδέτερα άτομα, η απουσία ηλεκτρικού φορτίου τα καθιστά εξαιρετικά ανθεκτικά σε θορύβους ηλεκτρικών πεδίων, γεγονός που επιτρέπει τους μεγάλους χρόνους συνοχής όπως αναφέρθηκαν στην ενότητα 2.3.3 της εργασίας. Επίσης, η αυθόρμητη εκπομπή αποτελεί έναν μηχανισμό αποσυννοχής η οποία κυριαρχεί στην περίπτωση των οπτικών qubits και όχι σ'αυτά που κωδικοποιούνται σε υπερλεπτές στάθμες του θεμελιώδους επιπέδου. Ωστόσο, η ίδια η φύση της οπτικής παγίδευσης εισάγει συγκεκριμένους μηχανισμούς αποσυννοχής. Έτσι ενώ το λέιζερ της παγίδας είναι συνήθως πολύ μακριά από τον συντονισμό (far-detuned), υπάρχει πάντα μια πεπερασμένη πιθανότητα το άτομο να απορροφήσει και να επανεκπέμψει ένα φωτόνιο από τη δέσμη της παγίδας. Ο ρυθμός σκέδασης, που συνοδεύει αναγκαστικά την οπτική παγίδευση, θέτει ένα θεμελιώδες όριο στο χρόνο ζωής της συνοχής, καθώς κάθε γεγονός σκέδασης οδηγεί σε απώλεια φάσης ((Grimm et al., 2000), ενότητα 3.3).

Επιπλέον η σκέδαση των φωτονίων της παγίδας, λόγω της τυχαίας φύσης της, προκαλεί διακυμάνσεις στη δύναμη ακτινοβολίας η οποία προκαλεί μεταβολές στην τροχιά του ατόμου, με αποτέλεσμα αυτό να δειγματοληπτεί διαφορετικές περιοχές του χωρικά μεταβαλλόμενου οπτικού δυναμικού. Η κίνηση αυτή οδηγεί σε χρονικά μεταβαλλόμενες AC Stark μετατοπίσεις των υπερλεπτών καταστάσεων και συνεπώς σε αποσυννοχή φάσης. Επίσης η θέρμανση που προκαλείται από πολλά γεγονότα αυθόρμητης σκέδασης είναι μια άλλη πηγή αποσυννοχής ενώ οι τεχνικές και θεμελιώδεις διακυμάνσεις της έντασης και της θέσης της δέσμης του λέιζερ οδηγούν σε χρονικά μεταβαλλόμενες διαφορικές μετατοπίσεις των υπερλεπτών σταθμών, οι οποίες αποτελούν κύρια πηγή μη αναστρέψιμης αποσυννοχής (Kuhr et al., 2005).

Τέλος όπως και στα παγιδευμένα ιόντα, οι διακυμάνσεις εξωτερικών μαγνητικών πεδίων μπορούν να προκαλέσουν αποσυννοχή φάσης στα qubits ουδετέρων ατόμων, καθώς ο ενεργειακός διαχωρισμός των δύο υπερλεπτών καταστάσεων εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο μέσω του φαινομένου Zeeman. Τυχαίες χρονικές διακυμάνσεις του πεδίου οδηγούν σε αντίστοιχες διακυμάνσεις της συχνότητας μετάβασης του qubit και συνεπώς σε απώλεια συνοχής (dephasing) (Kuhr et al., 2005).

4.1.3 Πηγές αποσυννοχής στις κβαντικές κουκκίδες

Στις εξιτονικές κβαντικές κουκκίδες, ο κυρίαρχος μηχανισμός αποσυννοχής είναι η σύζευξη του εξιτονίου με τα ακουστικά φωνόνια του κρυσταλλικού πλέγματος. Η απότομη (μη-αδιαβατική) δημιουργία του εξιτονίου από υπερβραχύ παλμό λέιζερ μεταβάλλει στιγμιαία το τοπικό ηλεκτροστατικό δυναμικό και οδηγεί στη διαμόρφωση μιας εκτός ισορροπίας κατανομής φωνονίων (παραμόρφωση του πλέγματος). Η διεργασία αυτή προκαλεί καθαρή αποσυννοχή (pure dephasing), χωρίς μεταβολή του πληθυσμού της εξιτονικής στάθμης. Η χρονική εξέλιξη της οπτικής πόλωσης χαρακτηρίζεται από έντονα μη εκθετική αποσύνθεση σε χρονικές κλίμακες των pico- ή υπο-pico- δευτερολέπτων, που σχετίζεται με τον σχηματισμό πολαρονίου (εξιτόνιο και τοπική παραμόρφωση του πλέγματος) και την εκπομπή φωνονικού πακέτου κύματος. Σε μεγαλύτερους χρόνους, η αλληλεπίδραση με θερμικά φωνόνια οδηγεί σε πιο συμβατική, εκθετική αποσυννοχή. Η ισχύς του μηχανισμού εξαρτάται έντονα από το υλικό, τη γεωμετρία της κουκκίδας και τη θερμοκρασία (Krummheuer et al., 2005).

Πέραν της σύζευξης με τα φωνόνια, σημαντική πηγή αποσυννοχής αποτελεί η ακτινοβολιακή επανασύνδεση του εξιτονίου, η οποία καθορίζει τον χρόνο ζωής T_1 και θέτει άνω φράγμα στον

χρόνο συνοχής $T_2 \leq 2T_1$. Αυτός ο μηχανισμός κυριαρχεί ιδιαιτέρως στις χαμηλές θερμοκρασίες, όπου λόγω του διακριτού ενεργειακού φάσματος σε μια κβαντική κουκκίδα, η αλληλεπίδραση των φορέων με ακουστικά φωνόνια μειώνεται σημαντικά (phonon bottleneck), (Langbein et al., 2004). Τέλος σε πραγματικές ημιαγωγικές δομές, οι διακυμάνσεις φορτίου στο περιβάλλον (charge noise) οδηγούν σε χρονικά μεταβαλλόμενα τοπικά ηλεκτρικά πεδία. Μέσω του dc Stark effect, οι διακυμάνσεις αυτές προκαλούν τυχαίες μετατοπίσεις της ενεργειακής μετάβασης του εξιτονίου (spectral diffusion), οδηγώντας σε αποσυνοχή σε μεγαλύτερες χρονικές κλίμακες (Kuhlmann et al., 2013). Οι μηχανισμοί αυτοί σχετίζονται με παγιδευμένα φορτία, επιφανειακές καταστάσεις και ατέλειες του υλικού και αποτελούν κρίσιμο περιοριστικό παράγοντα για εφαρμογές κβαντικής πληροφορίας και συνεκτικού ελέγχου.

4.2 Μητρώο πυκνότητας (Density Matrix) και απώλεια πληροφορίας

Η παραδοσιακή περιγραφή ενός κβαντικού συστήματος γίνεται μέσω διανυσμάτων κατάστασης (wavefunctions), όπως το $|\psi(t)\rangle$, τα οποία υπακούουν στην εξίσωση Schrödinger. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση δεν επαρκεί όταν το σύστημα αλληλεπιδρά με περιβάλλον. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται η πιο γενική έννοια του μητρώου πυκνότητας (ενότητα 3.2.1).

Οι πυκνότητες κατάστασης διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στην τυπική περιγραφή του φαινομένου της αποσυνοχής (decoherence). Ο κύριος λόγος για τη σημασία τους έγκειται στο γεγονός ότι η διεμπλοκή (entanglement) μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος καθιστά αδύνατη την απόδοση ενός μεμονωμένου κβαντικού διανύσματος κατάστασης στο σύστημα. Κατά συνέπεια, δεν μπορούμε να περιγράψουμε το υπό μελέτη σύστημα μας με όρους καθαρών κβαντικών καταστάσεων και έτσι επιβάλλεται η χρήση μικτών καταστάσεων για την πλήρη περιγραφή του. (Schlosshauer, 2019).

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην ενότητα 3.2.1 της εργασίας αυτής τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του μητρώου πυκνότητας αντιστοιχούν στη κβαντική συνοχή. Η διαγωνιοποίηση του μητρώου αυτού μπορεί να προκύψει είτε από κλασική στατιστική άγνοια είτε από δυναμική αποσυνοχή του συστήματος λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Περιβαλλοντικές αλληλεπιδράσεις οδηγούν στη σταδιακή μείωση των όρων που περιγράφουν την συνοχή του συστήματος (dephasing-απώλεια της σχετικής φάσης μεταξύ των συνιστωσών μιας υπέρθεσης, χωρίς απαραίτητα να μεταβάλλονται

οι πληθυσμοί). Έτσι η διαδικασία αυτή μετατρέπει υπερθέσεις σε κλασικές στατιστικές κατανομές-μικτές καταστάσεις (Schlosshauer, 2019).

Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ δύο συστημάτων, δηλαδή του «συστήματος ενδιαφέροντος» και του περιβάλλοντός του οδηγούν σε μια εμπλεγμένη κατάσταση για το σύστημα-περιβάλλον ως σύνολο. Συνήθως, ο παρατηρητής πραγματοποιεί μετρήσεις μόνο στο σύστημα ενδιαφέροντος, ενώ το περιβάλλον είναι είτε μη προσβάσιμο, είτε δεν μπορεί να μετρηθεί πλήρως, είτε απλώς δεν παρουσιάζει άμεσο ενδιαφέρον. Ο καλύτερός τρόπος μαθηματικής περιγραφής του κβαντικού συσχετισμού μεταξύ δύο συστημάτων A (μοναδικό κβαντικό σύστημα) και B (περιβάλλον) είναι το ανηγμένο μητρώο πυκνότητας το οποίο δίνεται από την σχέση (Schlosshauer, 2019)

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B \hat{\rho}_{AB} \quad (4.1)$$

όπου ρ_{AB} η πυκνότητα κατάστασης του εμπλεκόμενου συστήματος AB και Tr_B η πράξη μερικό ίχνος ως προς το B που μπορεί να ερμηνευθεί ως μια άθροιση πάνω στους βαθμούς ελευθερίας του μη παρατηρούμενου συστήματος B.

Γενικά το ίχνος ενός μητρώου ρ είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του μητρώου

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i \langle i | \rho | i \rangle \quad (4.2)$$

ενώ το μερικό ίχνος ως προς το B του μητρώου ρ_{AB} υπολογίζεται αν διαλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{|b_k\rangle\}$ του χώρου Hilbert του B και αθροίσουμε μόνο πάνω σε αυτήν. Δηλαδή

$$\hat{\rho}_A = \sum_k \langle b_k | \rho_{AB} | b_k \rangle \quad (4.3) \quad (\text{Schlosshauer, 2019})$$

Το μητρώο πυκνότητας ρ_{AB} του εμπλεκόμενου συστήματος AB περιγράφει την ενδεχομένως ακόμα και καθαρή κατάσταση του συστήματος. Μετρήσεις μπορούν να γίνουν μόνο στο A ενώ αυτό είναι ταυτόχρονα εμπλεγμένο με το B το οποίο δεν μπορούμε να ελέγξουμε ή να μετρήσουμε. Έτσι το μητρώο πυκνότητας ρ_A αντιστοιχεί σε μικτή κατάσταση, η πληροφορία για το A είναι αποθηκευμένη στις συσχετίσεις με το B, και το σύστημα είναι σε αποσυνοχή.

4.3 Ανοιχτά Κβαντικά Συστήματα και Εξίσωση Master – Lindblad Formalism

Όπως αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η αλληλεπίδραση ενός κβαντικού συστήματος με το περιβάλλον του οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας και αποσυνοχή, καθιστώντας ανεπαρκή την περιγραφή του συστήματος μέσω ενός μεμονωμένου διανύσματος κατάστασης. Η κατάλληλη

περιγραφή βασίζεται πλέον στο ανηγμένο μητρώο πυκνότητας του συστήματος ενώ το επόμενο φυσικό ερώτημα αφορά τη χρονική εξέλιξη αυτού του μητρώου πυκνότητας.

Σε αντίθεση με τα ιδανικά, κλειστά κβαντικά συστήματα, τα οποία εξελίσσονται με βάση την εξίσωση Schrödinger, τα πραγματικά συστήματα είναι σχεδόν πάντα ανοιχτά – δηλαδή αλληλεπιδρούν με το περιβάλλον τους. Για την περιγραφή αυτής της δυναμικής απαιτείται η χρήση εξισώσεων master, οι οποίες γενικεύουν την εξίσωση Schrödinger ώστε να περιλαμβάνουν φαινόμενα απώλειας συνοχής και ενέργειας. Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η εξίσωση Lindblad ως το βασικό εργαλείο περιγραφής ανοιχτών κβαντικών συστημάτων.

Για την ανάλυση της δυναμικής ενός διεπίπεδου κβαντικού συστήματος που αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, θεωρούμε το συνολικό κβαντικό σύστημα (qubit + περιβάλλον) ως κλειστό, με τη χρονική του εξέλιξη να περιγράφεται από την εξίσωση Liouville–von Neumann :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (4.4)$$

η οποία αποτελεί τη μορφή της εξίσωσης Schrödinger σε όρους μητρώου πυκνότητας. Στην εξίσωση αυτή, ρ και H συμβολίζουν αντίστοιχα το μητρώο πυκνότητας και την Hamiltonian του συνολικού συστήματος ($\rho = \rho_{AB}$ όπως την ορίσαμε στην ενότητα 4.2). Η συνολική Hamiltonian γράφεται ως:

$$H = H_q + H_\varepsilon + H_{\text{int}}, \quad (4.5)$$

όπου H_q είναι ο Hamiltonian του qubit, H_ε , η Hamiltonian του περιβάλλοντος και H_{int} η Hamiltonian αλληλεπίδρασης μεταξύ του qubit και του περιβάλλοντος.

Τη διατύπωση της εξίσωσης κίνησης ενός qubit που αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, θα την στηρίξουμε σε τρεις βασικές προσεγγίσεις. Θεωρούμε αρχικά ότι την χρονική στιγμή $t=0$ δεν υπάρχουν συσχετίσεις μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος. Οπότε το συνολικό μητρώο πυκνότητας ορίζεται ως τανυστικό γινόμενο μητρώων πυκνότητας, $\rho(0) = \rho_q(0) \otimes \rho_\varepsilon(0)$. Επίσης η αλληλεπίδραση μεταξύ του qubit και του περιβάλλοντος είναι ασθενής (Προσέγγιση Born). Το περιβάλλον είναι πολύ μεγαλύτερο από το σύστημα, με αποτέλεσμα οι μεταβολές στο μητρώο πυκνότητάς του να είναι αμελητέες. Συνεπώς σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει προσεγγιστικά η σχέση $\rho(t) \approx \rho_q(t) \otimes \rho_\varepsilon(t)$ (Schlosshauer, 2019). Επιπλέον τα φαινόμενα μνήμης του περιβάλλοντος θεωρούνται αμελητέα (Προσέγγιση Markov). Δηλαδή, ο χαρακτηριστικός χρόνος αποσβέσεως των συσχετίσεων του περιβάλλοντος είναι πολύ μικρότερος από τον χαρακτηριστικό χρόνο δυναμικής του qubit. Το περιβάλλον δεν “θυμάται” τις προηγούμενες αλληλεπιδράσεις του με το σύστημα,

επηρεάζεται στιγμιαία και αυτή η επίδραση σβήνει πάρα πολύ γρήγορα πριν προλάβει να επηρεάσει τη μελλοντική δυναμική του συστήματος (Schlosshauer, 2019).

Για την εξαγωγή της δυναμικής του qubit, χρησιμοποιούμε το ανηγμένο μητρώο πυκνότητας, ρ_q , και από την εξίσωση (4.4), προκύπτει μια εξίσωση master για τη δυναμική του qubit, η οποία επιτρέπει τη μελέτη της επίδρασης του θορύβου στη συμπεριφορά του. Υπό τις παραπάνω προσεγγίσεις, η μη μοναδιαία εξέλιξη του qubit —δηλαδή η εξέλιξη που περιλαμβάνει περιβαλλοντικές επιδράσεις όπως χαλάρωση και αποσυνοχή φάσης— περιγράφεται από μια Born-Markov εξίσωση master (Schlosshauer, 2019).

Η εξίσωση Lindblad αποτελεί μια γενική Markovian μορφή εξέλιξης του μειωμένου μητρώου πυκνότητας ρ_q που διατηρεί το ίχνος (δηλαδή τη συνολική πιθανότητα) και εξασφαλίζει τη θετικότητα του μητρώου πυκνότητας για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή $\langle \psi | \rho_q | \psi \rangle \geq 0$. Η εξίσωση Lindblad γράφεται ως (Schlosshauer, 2019):

$$\frac{d\rho_q(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_q, \rho_q(t)] + \sum_i (L_i \rho_q L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho_q\}) \quad (4.6)$$

όπου $\{A, B\} = AB + BA$ είναι ο αντιμεταθετικός τελεστής. Οι τελεστές L_i είναι οι τελεστές Lindblad (ή γεννήτορες Lindblad) και περιγράφουν την αλληλεπίδραση του qubit με το περιβάλλον. Οι συντελεστές Γ_i που τους συνοδεύουν ενσωματώνουν όλες τις φυσικές παραμέτρους της διαδικασίας αποσυνοχής. Στην εξίσωση αυτή, ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στη μοναδιαία εξέλιξη του qubit, η εξέλιξη αυτή ονομάζεται μοναδιαία από μοναδιαίο τελεστή εξέλιξης και αντιστοιχεί στην ιδανική εξέλιξη ενός κλειστού κβαντικού συστήματος, χωρίς αλληλεπίδραση με το περιβάλλον ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει τη μη μοναδιαία εξέλιξη λόγω περιβαλλοντικών επιδράσεων, με άλλα λόγια εισάγει την αποσυνοχή, την μετατροπή από καθαρές σε μεικτές καταστάσεις.

Για την περιγραφή της δυναμικής ενός qubit σε αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του, οι τελεστές Lindblad επιλέγονται ανάλογα με το υπό μελέτη φυσικό μοντέλο. Η επίδραση του θορύβου σε ένα μεμονωμένο διεπίπεδο σύστημα μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσω των τελεστών Lindblad (Nielsen & Chuang, 2010):

$$L_1 = \sqrt{\Gamma} \sigma^- \quad (4.7)$$

$$L_2 = \sqrt{\gamma/2} \sigma_z \quad (4.8)$$

όπου ο τελεστής L_1 περιγράφει τη διαδικασία χαλάρωσης (μετάβαση από την κατάσταση $|e\rangle$ στην $|g\rangle$), ενώ ο L_2 αντιστοιχεί στη διαδικασία απώλειας φάσης (dephasing). Έτσι, η εξίσωση Lindblad για το qubit γράφεται :

$$\frac{d\rho_q(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_q, \rho_q(t)] + \Gamma(\sigma^- \rho_q \sigma^+ - \frac{1}{2}\{\sigma^+ \sigma^-, \rho_q\}) + \frac{\gamma}{2}(\sigma_z \rho_q \sigma_z - \rho_q) \quad (4.9)$$

όπου γ και Γ οι ρυθμοί εγκάρσιας χαλάρωσης και καθαρής απώλειας φάσης αντίστοιχα (κεφάλαιο 3).

Πιο εξειδικευμένες μορφές της εξίσωσης Lindblad μπορούν να εξαχθούν για συγκεκριμένες φυσικές διατάξεις, όπως ένα qubit συζευγμένο με κοιλότητα, η οποία με τη σειρά της αλληλεπιδρά με ένα θερμικό λουτρό.

Η εξίσωση Lindblad της μορφής (4.9) μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά με τη χρήση της βιβλιοθήκης Quantum Toolbox in Python (QuTiP), η οποία αποτελεί ένα ανοικτού κώδικα υπολογιστικό εργαλείο για την προσομοίωση ανοιχτών κβαντικών συστημάτων

Τέλος η εξίσωση Lindblad βασίζεται στο ότι το σύστημα δεν διατηρεί μνήμη της αλληλεπίδρασής του με το περιβάλλον. Ωστόσο, σε πολλές ρεαλιστικές περιπτώσεις εμφανίζονται μη-Μαρκοβιανές επιδράσεις, όπου η δυναμική εξαρτάται από την ιστορία του συστήματος. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η περιγραφή μέσω Lindblad καθίσταται ανεπαρκής.

4.4 Ποσοτικά Μεγέθη Decoherence

Η ύπαρξη decoherence, δηλαδή η απώλεια συνοχής σε ένα κβαντικό σύστημα, απαιτεί ποσοτικοποίηση για να μπορεί να ελεγχθεί, να συγκριθεί και να περιοριστεί πειραματικά. Η ποιότητα του συστήματος εξαρτάται άμεσα από μεγέθη όπως ο χρόνος συνοχής, η καθαρότητα της κατάστασης, και η εντροπία Von Neumann σε σχέση με την ιδανική εξέλιξη. Ακολουθούν τα βασικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται για να μετρήσουμε την «ποιότητα» και την ανθεκτικότητα ενός κβαντικού συστήματος έναντι της αποσυννοχής (decoherence).

4.4.1 Χρόνος Χαλάρωσης T_1 – Χρόνος Συνοχής T_2

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο 3ο κεφάλαιο της εργασίας ο χρόνος T_1 μετρά το χρονικό διάστημα στο οποίο ένα σύστημα επιστρέφει στην θεμελιώδη κατάσταση μέσω ενεργειακών απωλειών π.χ. μέσω αυθόρμητης εκπομπής ενώ ο χρόνος T_2 μετρά το χρονικό διάστημα στο οποίο χάνεται η φάση (coherence) μεταξύ δύο καταστάσεων, δηλαδή η ικανότητα του συστήματος να διατηρεί την υπέρθεση.

Για διεπίπεδο σύστημα χρησιμοποιούμε την εξίσωση Lindblad

$$\frac{d\rho_q(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H_q, \rho_q(t)] + \Gamma(\sigma^- \rho_q \sigma^+ - \frac{1}{2}\{\sigma^+ \sigma^-, \rho_q\}) + \frac{\gamma}{2}(\sigma_z \rho_q \sigma_z - \rho_q) \quad (4.10)$$

με $H_q = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$ οπότε προκύπτει

$$\frac{d\rho_q}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -i\omega\rho_{eg} \\ i\omega\rho_{ge} & 0 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} -\rho_{ee} & -\rho_{eg}/2 \\ -\rho_{ge}/2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\gamma}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2\rho_{eg} \\ -2\rho_{ge} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

με τελικές διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d\rho_{ee}}{dt} = -\Gamma\rho_{ee} \quad (4.12)$$

$$\frac{d\rho_{gg}}{dt} = \Gamma\rho_{ee} \quad (4.13)$$

$$\frac{d\rho_{eg}}{dt} = -i\omega\rho_{eg} - \Gamma\rho_{eg}/2 - \gamma\rho_{eg} \quad (4.14)$$

$$\frac{d\rho_{ge}}{dt} = i\omega\rho_{ge} - \Gamma\rho_{ge}/2 - \gamma\rho_{ge} \quad (4.15)$$

οπότε η εξέλιξη του πληθυσμού δίνεται από την σχέση

$$\rho_{ee}(t) = \rho_{ee}(0)e^{-\Gamma t} = \rho_{ee}(0)e^{-t/T_1} \quad (4.16)$$

και η απόσβεση των όρων συνοχής

$$\rho_{eg}(t) = \rho_{eg}(0)e^{-i\omega t} e^{-(\frac{\Gamma}{2} + \gamma)t} = \rho_{eg}(0)e^{-t/T_2} \quad (4.17)$$

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται οι τιμές των χρόνων T_2 σε διάφορες περιπτώσεις μοναδικών κβαντικών συστημάτων

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1: Τιμές των χρόνων T_2 για τα μοναδικά κβαντικά συστήματα

Σύστημα	T_2 (s)	Αναφορές
Παγιδευμένο ιόν	15	(Ladd et al., 2010)
Παγιδευμένο ουδέτερο άτομο	3	(Ladd et al., 2010)
Κβαντική κουκκίδα	10^{-9}	(Fox, 2006)

4.4.2. Καθαρότητα (Purity) και εντροπία von Neumann

Ας εισάγουμε τώρα δύο μετρήσιμα μεγέθη που ποσοτικοποιούν τον βαθμό της “μικτής κατάστασης” (mixedness) με έναν πιο γενικό τρόπο. Ένα απλό και ευρέως χρησιμοποιούμενο

μέτρο είναι η λεγόμενη καθαρότητα (purity) του μητρώου πυκνότητας, η οποία ορίζεται ως (Schlosshauer, 2019)

$$\text{purity} \equiv \text{Tr}(\rho^2) \quad (4.18)$$

Αν το ρ αναπαριστά ένα μητρώο πυκνότητας καθαρής κατάστασης (pure-state), τότε από τις σχέσεις $\text{Tr} \hat{\rho} = 1$ και $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ προκύπτει ότι η καθαρότητα είναι $\text{purity} = 1$. Από την άλλη, σε μια μικτή κατάσταση το τετράγωνο του μητρώου πυκνότητας είναι

$$\hat{\rho}^2 = \sum_{i,j} p_i p_j |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \langle \psi_i| \psi_j\rangle \quad (4.19)$$

και υποθέτοντας ότι οι καταστάσεις $\{|\psi_i\rangle\}$ σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση ενός N -διαστατικού χώρου Hilbert, το μητρώο πυκνότητας μιας μικτής κατάστασης (mixed-state) έχει καθαρότητα (Schlosshauer, 2019)

$$\text{purity} = \sum_{i=1}^N p_i^2 \quad (4.20)$$

Το άθροισμα αυτό έχει κατώτερο όριο την τιμή $1/N$, η οποία επιτυγχάνεται ακριβώς αν το μητρώο πυκνότητας είναι μέγιστα μικτό (maximally mixed), δηλαδή αν $p_i = 1/N$ για όλα τα $i=1, \dots, N$. Για ένα διεπίπεδο σύστημα ισχύει $N=2$ και η ελάχιστη τιμή της καθαρότητας είναι $1/2$.

Ένα άλλο συχνά χρησιμοποιούμενο μέτρο για την ποσοτικοποίηση της (μη) καθαρότητας του μητρώου πυκνότητας είναι η λεγόμενη εντροπία von Neumann. Αυτό το μέτρο εισήχθη για πρώτη φορά το 1927 από τον μαθηματικό John von Neumann, ο οποίος το ανέπτυξε περαιτέρω στο κλασικό του έργο για την κβαντομηχανική. Η εντροπία von Neumann μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση της έννοιας της εντροπίας στην κλασική στατιστική μηχανική στην περίπτωση κβαντικών μητρώων πυκνότητας. Δίνεται από τον τύπο (Schlosshauer, 2019)

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) \equiv -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i, \quad (4.21)$$

όπου οι λ_i είναι οι ιδιοτιμές του μητρώου πυκνότητας $\hat{\rho}$. Με τη συνήθη σύμβαση, η περίπτωση $\lambda_i = 0$ αντιμετωπίζεται ορίζοντας $0 \log_2(0) \equiv 0$, έτσι ώστε καταστάσεις που απουσιάζουν από το μίγμα να μην συνεισφέρουν στην τιμή της εντροπίας, όπως πρέπει να συμβαίνει.

Αν τώρα το $\hat{\rho}$ είναι καθαρή κατάσταση (pure), τότε όλες οι $\lambda_i = 0$ εκτός από μία (η οποία παίρνει την τιμή 1), και επομένως $S(\hat{\rho}) = 0$. Άρα μια καθαρή κατάσταση χαρακτηρίζεται από εντροπία ίση με μηδέν.

Από την άλλη, για μια μέγιστα μικτή κατάσταση, που αντιστοιχεί σε πλήρη άγνοια για το ποια από τις αμοιβαία αποκλειόμενες (και συνεπώς ορθογώνιες) καταστάσεις $|\psi_i\rangle, i=1, \dots, N$ έχει προετοιμαστεί, έχουμε $\lambda_i = p_i = 1/N$ και συνεπώς (Schlosshauer, 2019)

$$S(\hat{\rho}) = \log_2(N), \quad (4.22)$$

η οποία είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η εντροπία $S(\hat{\rho})$. Για το διεπίπεδο σύστημα η μέγιστη τιμή της εντροπίας είναι 1.

Κεφάλαιο 5: Θεωρητική Μοντελοποίηση και Προσομοιώσεις με Python

5.1 Εισαγωγή στην Προσομοίωση Κβαντικών Συστημάτων

Η μελέτη των μοναδικών κβαντικών συστημάτων (όπως παγιδευμένα ιόντα, κβαντικές κουκκίδες ή άτομα σε οπτικές παγίδες) βασίζεται σε θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν την αλληλεπίδραση του συστήματος με πεδία, παγίδες και περιβάλλοντα. Ωστόσο, καθώς αυτά τα μοντέλα περιέχουν μη αναλυτικά επιλύσιμες διαφορικές εξισώσεις (όπως η εξίσωση master στην μορφή Lindblad), είναι συχνά αναγκαία η αριθμητική προσομοίωση για να προβλέψουμε τη συμπεριφορά τους σε ρεαλιστικές συνθήκες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναδείξουμε πώς μπορούμε να μεταφράσουμε την κβαντική δυναμική ενός συστήματος σε υπολογίσιμο μοντέλο και θα επιλύσουμε την εξίσωση Schrödinger καθώς και την Lindblad master equation για κλειστά και ανοιχτά συστήματα αντίστοιχα εφαρμόζοντας αριθμητικές τεχνικές. Η χρήση εργαλείων της γλώσσας προγραμματισμού Python, με έμφαση στο πακέτο QuTiP (Quantum Toolbox in Python), θα μας βοηθήσει στην υλοποίηση και ανάλυση αυτών των μοντέλων.

Ακόμη και στα πιο απλά συστήματα, όπως ένα διεπίπεδο άτομο υπό ακτινοβολία, η αριθμητική επίλυση μπορεί να αποκαλύψει τις Rabi ταλαντώσεις και την απόσβεση τους, τον ρυθμό απώλειας φάσης ή ενέργειας από το σύστημα και την δυναμική τεχνικών ψύξης.

Η γλώσσα προγραμματισμού Python συνδυάζει υψηλή αναγνωσιμότητα με πληθώρα αριθμητικών βιβλιοθηκών. Το QuTiP (Quantum Toolbox in Python) ξεχωρίζει από άλλες διαθέσιμες λύσεις λογισμικού προσφέροντας τα εξής πλεονεκτήματα:

- Βασίζεται εξ ολοκλήρου σε λογισμικό ανοικτού κώδικα
- Εύκολη και γρήγορη ανάπτυξη κώδικα μέσω της γλώσσας προγραμματισμού Python.
- Υποστήριξη αυθαίρετων, χρονικά εξαρτώμενων Χαμιλτονιανών.
- Αξιοποίηση των πολλαπλών πυρήνων επεξεργασίας των σύγχρονων υπολογιστών.
- Υποδομή βασισμένη στην κοινότητα, που επιτρέπει συνεισφορές χρηστών στη βάση κώδικα. (Johansson et al., 2012)

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι παρά τη μεγάλη χρησιμότητα των αριθμητικών προσομοιώσεων, τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται βασίζονται συνήθως σε ιδανικοποιημένες

παραδοχές και συγκεκριμένους μηχανισμούς αποσυννοχής. Στην πράξη, η ακριβής περιγραφή ενός φυσικού κβαντικού συστήματος απαιτεί λεπτομερή γνώση των πηγών θορύβου, των περιβαλλοντικών αλληλεπιδράσεων και των πειραματικών ατελειών. Συνεπώς, οι προσομοιώσεις δεν αποσκοπούν στην πλήρη αναπαραγωγή της πραγματικότητας, αλλά στην κατανόηση των βασικών φυσικών μηχανισμών που διέπουν τη δυναμική των κβαντικών συστημάτων.

5.2 Το Περιβάλλον QuTiP: Γρήγορη Επισκόπηση

Η αριθμητική μοντελοποίηση κβαντικών συστημάτων απαιτεί ένα περιβάλλον που να χειρίζεται διανύσματα κατάστασης, τελεστές, εξίσώσεις εξέλιξης και ανοικτά συστήματα με φυσικό και μαθηματικό συμβατό τρόπο. Το QuTiP (Quantum Toolbox in Python) έχει σχεδιαστεί ακριβώς γι' αυτόν τον σκοπό.

Το QuTiP είναι ένα ανοικτού κώδικα πλαίσιο σε Python για την προσομοίωση της δυναμικής κβαντικών συστημάτων. Βασίζεται στις αριθμητικές βιβλιοθήκες NumPy και SciPy, ενώ για τη γραφική απεικόνιση χρησιμοποιεί το Matplotlib. Το QuTiP χρησιμοποιείται ευρέως σε εφαρμογές κβαντικής φυσικής, όπως η κβαντική οπτική, τα παγιδευμένα ιόντα, τα υπεραγώγιμα κυκλώματα και οι κβαντικοί νανομηχανικοί συντονιστές.

Το QuTiP παρέχει εργαλεία για την αναπαράσταση και επεξεργασία κβαντικών αντικειμένων, όπως διανύσματα κατάστασης (kets), δυαδικά διανύσματα (bras), πίνακες πυκνότητας και τελεστές απλών ή σύνθετων συστημάτων. Επιπλέον, περιλαμβάνει αριθμητικούς επιλυτές για τη χρονική εξέλιξη μέσω της εξίσωσης Schrödinger και της εξίσωσης master στη μορφή Lindblad.

Μια ενοποιημένη αναπαράσταση των κβαντικών τελεστών και των διανυσμάτων κατάστασης υλοποιείται στο QuTiP μέσω της κλάσης κβαντικών αντικειμένων (Qobj). Αυτή διατηρεί ένα αρχείο των κύριων χαρακτηριστικών του κβαντικού αντικειμένου όπως τον τύπο του (δηλ. ket, bra, operator κ.α), αν το υποκείμενο αντικείμενο είναι Ερμιτιανό αλλά και τη διάσταση ενός σύνθετου αντικειμένου που σχηματίζεται μέσω του τανυστικού γινομένου. Επιπλέον η κλάση Qobj είναι επίσης ένα υπολογιστικό αντικείμενο, που υλοποιεί τις συνήθεις δυαδικές αριθμητικές πράξεις και μια ποικιλία μεθόδων κλάσης για την εκτέλεση κοινών χειρισμών αντικειμένων, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1 Λίστα μεθόδων ενσωματωμένων στην κλάση Qobj (Johansson et al., 2012)

ΜΕΘΟΔΟΙ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ
dag()	Ερμητιανός συζυγής
diag()	Διαγώνια στοιχεία ενός αντικειμένου
eigenstates()	Ιδιοκαταστάσεις και ιδιοδιανύσματα
expm()	Εκθετικός πίνακας
tr()	Τρχος κβαντικού αντικειμένου
sqrtm()	Τετραγωνική ρίζα πίνακα
unit()	Κανονικοποίηση κβαντικού αντικειμένου
expect(A, psi)	Υπολογισμός μέσης τιμής τελεστή A στην κατασταση psi

Επίσης το Qutip έχει ένα σύνολο από σημαντικές συναρτήσεις που δρουν σε πολλαπλές καταστάσεις και τελεστές, κάποιες από τις οποίες περιέχονται στον Πίνακα 5.2 και θα μας βοηθήσουν στην συνέχεια του κεφαλαίου 5.

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.2 Λίστα συναρτήσεων στο Qutip(Johansson et al., 2012)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ
basis(d, n)	Δημιουργεί βάση στον χώρο Hilbert
sigmax(), sigmay(), sigmaz()	Παράγει Pauli τελεστές
destroy (N)	Τελεστής καταστροφής
qeye(d)	Μοναδιαίος τελεστής διάστασης d
ket2dm	Μετατρέπει ένα ket διάνυσμα σε πίνακα πυκνότητας
tensor(a,b)	Τανυστικό γινόμενο
mesolve()	Επίλυση Lindblad εξίσωσης
sesolve()	Επίλυση Schrödinger εξίσωσης
Bloch	Κλάση για την απεικόνιση καταστάσεων στη σφαίρα Bloch
Qobj	Κλάση για την δημιουργία κβαντικών αντικειμένων από τον χρήστη

Στις επόμενες ενότητες θα χρησιμοποιήσουμε τα εργαλεία του QuTiP για να προσομοιώσουμε:

- το διεπίπεδο κβαντικό σύστημα ως κλειστό και ανοικτό σύστημα σε αλληλεπίδραση με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (5.3 και 5.4)
- τη δυναμική του κβαντικού συστήματος στην Σφαίρα του Bloch (5.5)
- το μοντέλο και την ψύξη συστημάτων παγιδευμένων ιόντων (5.6)

Στις προσομοιώσεις που ακολουθούν τίθεται $\hbar=1$, όπως συνηθίζεται στις αριθμητικές προσομοιώσεις κβαντικών συστημάτων. Η επιλογή αυτή απλοποιεί τη μορφή των εξισώσεων χωρίς να μεταβάλλει τη φυσική του προβλήματος.

Επιπλέον, οι αριθμητικές προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στο παρόν κεφάλαιο έχουν εκπαιδευτικό και ενδεικτικό χαρακτήρα. Σκοπός τους είναι η ποιοτική κατανόηση των βασικών φυσικών μηχανισμών και όχι η ακριβής αναπαραγωγή συγκεκριμένου πειραματικού συστήματος. Για τον λόγο αυτό, οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων (όπως οι συχνότητες Rabi, οι ρυθμοί αποσυντοχής και χαλάρωσης, η παράμετρος Lamb-Dicke, οι χρόνοι εξέλιξης και η διάσταση του χώρου Hilbert) επιλέγονται έτσι ώστε να αναδεικνύεται με σαφήνεια η φυσική συμπεριφορά του συστήματος και να διευκολύνεται η αριθμητική προσομοίωση. Κατά συνέπεια, τα γραφήματα που προκύπτουν αποτυπώνουν τη χαρακτηριστική ποιοτική συμπεριφορά των συστημάτων και δεν αποσκοπούν στην ποσοτική σύγκριση με συγκεκριμένα πειραματικά δεδομένα

5.3 Μοντελοποίηση Διεπίπεδου Συστήματος (Two-Level System)

Η όλη μελέτη μας στα κεφάλαια 3 και 4 της εργασίας αυτής κατέδειξε ότι η απλούστερη αλλά εξαιρετικά θεμελιώδης προσέγγιση για την περιγραφή ενός μοναδικού κβαντικού συστήματος είναι το διεπίπεδο (two-level atom). Το μοντέλο αυτό περιγράφει αποτελεσματικά τη δυναμική δύο ενεργειακών καταστάσεων που συνδέονται μέσω εξωτερικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

5.3.1 Η Χαμιλτονιανή ενός διεπίπεδου συστήματος σε αλληλεπίδραση με το φως

Στην παράγραφο 3.2.1 της εργασίας αυτής καταλήξαμε στην σχέση (3.48) η οποία μας δίνει την μορφή της Χαμιλτονιανής ενός διεπίπεδου συστήματος κατά την αλληλεπίδραση του με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Με την βοήθεια των πινάκων του Pauli αυτή παίρνει την μορφή

$$\hat{H}_i = \frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x + \hbar\frac{\Delta}{2}\sigma_z \quad (5.1)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι

- $\Delta = \omega - \omega_0$, ο αποσυντονισμός της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε σχέση με την ιδιοσυχνότητα του διεπίπεδου συστήματος
- Ω , η συχνότητα των Rabi ταλαντώσεων και σ_x, σ_z οι μήτρες του Pauli

Έτσι ο πρώτος όρος της σχέσης (5.1) μας δίνει την σύζευξη του συστήματος με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και ο δεύτερος περιγράφει την επίδραση του αποσυντονισμού (Δ) και καθορίζει τη σχετική ενεργειακή και φασική εξέλιξη των δύο καταστάσεων.

5.3.2 Υλοποίηση της Χαμιλτονιανής στο QuTiP και Χρονική εξέλιξη

Στο QuTiP, οι τελεστές Pauli παρέχονται έτοιμοι `sigmax()`, `sigmay()` και `sigmaz()` και η Χαμιλτονιανή υλοποιείται ως:

```
# Αρχικά γίνεται εισαγωγή απαραίτητων βιβλιοθηκών
from qutip import *          # Βασικά αντικείμενα του QuTiP
import numpy as np          # η βιβλιοθήκη numpy→Πίνακες, αριθμητικά
                              # εργαλεία
import matplotlib.pyplot as plt # η βιβλιοθήκη matplotlib→ γραφήματα

%matplotlib inline # για χρήση σε Jupyter Notebook-ανοίγει τα γραφήματα μέσα
                    # στο Notebook

# Παράμετροι
Delta = 0.0              #  $\Delta = \omega - \omega_0$ , εδώ επιλέξαμε  $\Delta = 0$ 
Omega = 2*np.pi*1       # η συχνότητα Rabi,
                          # στη βιβλιοθήκη NumPy είναι αποθηκευμένη η τιμή του π μέσω
                          # της προκαθορισμένης αριθμητικής σταθεράς np.pi

# Τελεστές Pauli
sx = sigmax()            # Τελεστής  $\sigma_x$  δημιουργεί ταλαντώσεις μεταξύ  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 
sz = sigmaz()            # Τελεστής  $\sigma_z$  δημιουργεί αλλαγή της σχετικής φάσης

# Χαμιλτονιανή
H = 0.5 * Delta * sz + 0.5 * Omega * sx # ( $\hbar = 1$ )
```

Κώδικας 5.1: Υλοποίηση Χαμιλτονιανής διεπίπεδου συστήματος σε αλληλεπίδραση με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία

Για κλειστό κβαντικό σύστημα, η δυναμική περιγράφεται από την εξίσωση Schrödinger:

$i\hbar \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H}\Psi$ η οποία στο QuTiP, επιλύεται με τη συνάρτηση `sesolve()`. Θεωρούμε αρχική

κατάσταση τη θεμελιώδη $|g\rangle = |1\rangle$ και αυτό υλοποιείται στην γλώσσα προγραμματισμού Python ως εξής:

```
# Αρχική κατάσταση  $|1\rangle =$  θεμελιώδης κατάσταση  $|g\rangle$ 
psig = basis(2, 1) # Ξεκινάμε από το  $|1\rangle$  που την όρισα ως θεμελιώδη

# Χρονικό διάστημα
tlist = np.linspace(0, 5, 200) # 0 έως 5 sec, 200 σημεία, η βιβλιοθήκη NumPy
                                # με το np.linspace δημιουργεί πίνακα χρονικών στιγμών

# Επίλυση εξίσωσης Schrödinger
result = sesolve(H, psig, tlist) # επίλυση της εξίσωσης του Schrödinger για όλες
                                # τις χρονικές στιγμές του πίνακα tlist
```

result.states #Το αντικείμενο result.states περιέχει την κατάσταση του
#συστήματος για κάθε χρονική στιγμή.

Κώδικας 5.2: Επίλυση εξίσωσης Schrödinger

5.3.3 Υπολογισμός Πληθυσμών και Rabi Ταλαντώσεις για αποσυντονισμό $\Delta=0$

Ο πληθυσμός της διεγερμένης κατάστασης υπολογίζεται μέσω της μέσης τιμής του προβολικού τελεστή $p_e=|e\rangle\langle e|$ δηλαδή ισούται με

$$\langle p_e \rangle = \langle \Psi(t) | e \rangle \langle e | \Psi(t) \rangle = |\langle \Psi(t) | e \rangle|^2 \quad (5.2)$$

Στο QuTiP:

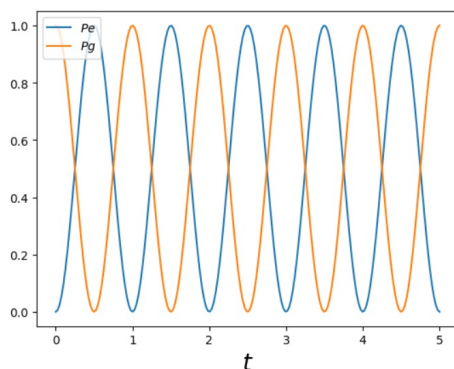
```
# Τελεστής προβολής στην  $|0\rangle=|e\rangle$  που ορίστηκε ως διεγερμένη
proj_e = basis(2,0) * basis(2,0).dag() # με την μέθοδο dag() παράγεται ο  $\langle e|$ 
# Πληθυσμός διεγερμένης κατάστασης
Pe = expect(proj_e, result.states) # η συνάρτηση expect υπολογίζει την μέση τιμή
του προβολικού τελεστή για κάθε μια κατάσταση που αποθηκεύτηκε στο result.states

#ο πληθυσμός της θεμελιώδους κατάστασης είναι:
proj_g = basis(2,1) * basis(2,1).dag()
Pg = expect(proj_g, result.states)

# Σχεδίαση γραφήματος χρονικής εξέλιξης του πληθυσμού
fig, axes = plt.subplots(1, 1)
axes.plot(tlist, Pe, label=r"$P_e$") # σχεδίαση γραφήματος με άξονα x τον χρόνο
# που παίρνει τιμές από τον πίνακα tlist και
# άξονας y τον πληθυσμό Pe με ετικέτα Pe
axes.plot(tlist, Pg, label=r"$P_g$")
axes.set_xlabel(r"$t$", fontsize=20) # δώσε στον άξονα x την ετικέτα t με
# γραμματοσειράς 20
axes.legend(loc=2) # βάλε υπόμνημα στο γράφημα πάνω αριστερά
```

Κώδικας 5.3: Σχεδίαση γραφήματος μεταβολής του πληθυσμού της διεγερμένης και θεμελιώδους κατάστασης με τον χρόνο (Ταλαντώσεις Rabi)

οπότε προκύπτει το Σχήμα 5.1 στο οποίο φαίνεται ότι ο πληθυσμός της διεγερμένης και της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο όπως ήδη έχουμε αποδείξει θεωρητικά στην ενότητα 3.1.3.



Σχήμα 5.1: Χρονική εξέλιξη των πληθυσμών για μηδενικό αποσυντονισμό

5.3.4 Υπολογισμός Πληθυσμών και Rabi Ταλαντώσεις για αποσυντονισμό $\Delta \neq 0$

Αν τώρα θέλουμε να εισάγουμε μη μηδενικό αποσυντονισμό Δ στο σύστημα μας, η μόνη αλλαγή που πραγματοποιούμε στον κώδικα είναι η εξής

```
# Παράμετροι
Delta = 1.0          #  $\Delta = \omega - \omega_0$ , εδώ επιλέξαμε  $\Delta = 1$ 
Omega = 2*np.pi*1   # η συχνότητα Rad/s,
                    # στη βιβλιοθήκη NumPy είναι αποθηκευμένη η τιμή του π μέσω
# της προκαθορισμένης αριθμητικής σταθεράς np.pi
```

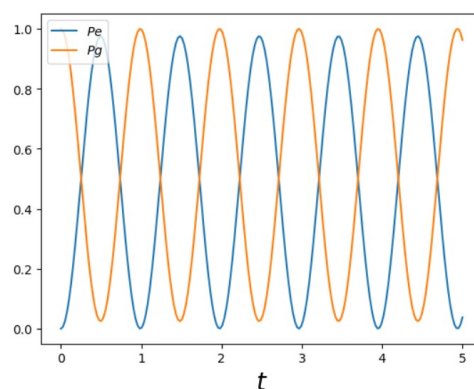
Κώδικας 5.4: Εισαγωγή αποσυντονισμού Δ

οπότε προκύπτει το Σχήμα 2 στο οποίο φαίνεται ότι ο πληθυσμός της διεγερμένης και της θεμελιώδους κατάστασης του συστήματος μεταβάλλονται ξανά αρμονικά με τον χρόνο όπως ήδη έχουμε αποδείξει θεωρητικά στην ενότητα 3.1.3. Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι η μέγιστη τιμή του πληθυσμού της διεγερμένης κατάστασης είναι μικρότερη από της μονάδας και μια αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης όπως ήταν ήδη γνωστό από την θεωρία

$$\Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \Delta^2} \quad (5.3)$$

η οποία ονομάζεται γενικευμένη συχνότητα Rabi.

Η παρουσία αποσυντονισμού σημαίνει ότι το σύστημα δεν βρίσκεται πλέον σε συντονισμό με το εξωτερικό πεδίο. Ως αποτέλεσμα, η μεταφορά πληθυσμού μεταξύ των δύο καταστάσεων δεν είναι πλήρης, γεγονός που οδηγεί στη μείωση του μέγιστου πλάτους των ταλαντώσεων.



Σχήμα 5.2: Χρονική εξέλιξη των πληθυσμών για μη μηδενικό αποσυντονισμό

5.4 Οπτικές εξισώσεις Bloch και Απόσβεση

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε ένα μοναδικό διεπίπεδο σύστημα ως ιδανικά απομονωμένο (κλειστό) κβαντικό σύστημα. Στην πράξη, όμως, κανένα φυσικό σύστημα δεν είναι πλήρως απομονωμένο. Η αλληλεπίδραση με το περιβάλλον οδηγεί σε απώλεια ενέργειας και συνοχής, φαινόμενα που αναλύθηκαν θεωρητικά στο Κεφάλαιο 4.

Στην ενότητα αυτή θα ενσωματώσουμε τις επιδράσεις του περιβάλλοντος μέσω της εξίσωσης master Lindblad και θα αναπαράγουμε αριθμητικά τις Οπτικές εξισώσεις Bloch χρησιμοποιώντας το πακέτο QuTiP.

5.4.1 Η εξίσωση Lindblad και η Αυθόρμητη εκπομπή

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει στο 4ο κεφάλαιο της εργασίας αυτής η περιγραφή ενός ανοιχτού κβαντικού συστήματος με ένα διάνυσμα κατάστασης είναι πλέον ανεπαρκής οπότε η χρήση του μητρώου πυκνότητας, ρ , είναι αναγκαία. Επιπλέον η μη μοναδιαία εξέλιξη ενός διεπίπεδου κβαντικού συστήματος δίνεται από μία εξίσωση master στην μορφή Lindblad η οποία στην περίπτωση της χαλάρωσης πληθυσμών λόγω αυθόρμητης αποδιέγερσης είναι

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] + (L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2}\{L_i^\dagger L_i, \rho\}) \quad (5.4)$$

όπου H , η Χαμιλτονιανή του συστήματος και L_i , ο τελεστή Lindblad που περιγράφει τη διαδικασία χαλάρωσης του κβαντικού συστήματος λόγω αυθόρμητης εκπομπής από τη διεγερμένη κατάσταση $|e\rangle$ προς τη θεμελιώδη $|g\rangle$. Ο τελεστής αυτός δίνεται από την σχέση

$$L_i = \sqrt{\Gamma} \sigma^- \quad (5.5)$$

με σ^- τον γνωστό τελεστή καταβίβασης του 3ου κεφαλαίου της εργασίας.

Στο QuTiP:

```
from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# %matplotlib inline

# Παράμετροι
Delta = 0.0
Omega = 2*np.pi
gamma = 0.5

# Τελεστές
sx = sigmax()
sz = sigmaz()
sm = destroy(2) # εδώ δημιουργούμε τον τελεστή καταβίβασης σ-
```

```
# Χαμιλτονιανή  
H = 0.5*Delta*sz + 0.5*Omega*sx  
# τελεστής Lindblad  $L_i$   
c_ops = [np.sqrt(gamma) * sm]
```

Κώδικας 5.5: Υλοποίηση τελεστή Lindblad που περιγράφει τη διαδικασία χαλάρωσης του κβαντικού συστήματος λόγω αυθόρμητης εκπομπής

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι η προσομοίωση δεν αποσκοπεί στην αναπαραγωγή συγκεκριμένου πειράματος αλλά στην ανάδειξη της φυσικής συμπεριφοράς του συστήματος. Οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων επιλέγονται ώστε να αναδεικνύεται καθαρά η φυσική συμπεριφορά του συστήματος και δεν αντιστοιχούν σε συγκεκριμένο πειραματικό σύστημα. Η τιμή του ρυθμού διαμήκους αποδιέγερσης, $\Gamma=0.5$, επιλέχθηκε ώστε η απόσβεση των ταλαντώσεων Rabi να είναι αρκετά έντονη ώστε να παρατηρείται καθαρά στο διάγραμμα, χωρίς όμως να εξαφανίζονται πλήρως οι ταλαντώσεις.

Στην συνέχεια αφού επιλέξουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος $|0\rangle$ και την μετατρέψουμε σε μητρώο πυκνότητας $\rho=|0\rangle\langle 0|$ χρησιμοποιούμε την συνάρτηση `mesolve()` για την επίλυση της εξίσωσης Lindblad. Αυτό υλοποιείται στην γλώσσα προγραμματισμού Python

ως εξής:

```
# Αρχική κατάσταση  $|g\rangle$   
psig = basis(2, 1)  
  
# Μετατροπή σε πίνακα πυκνότητας  
rhog = ket2dm(psig)  
  
# Χρονικό διάστημα  
tlist = np.linspace(0, 5, 200)  
  
# Επίλυση master equation  
result = mesolve(H, rhog, tlist, c_ops)
```

Κώδικας 5.6: Επίλυση της εξίσωσης Lindblad

Το αντικείμενο `result.states` περιέχει τώρα πίνακες πυκνότητας κατάστασης για κάθε χρονική στιγμή.

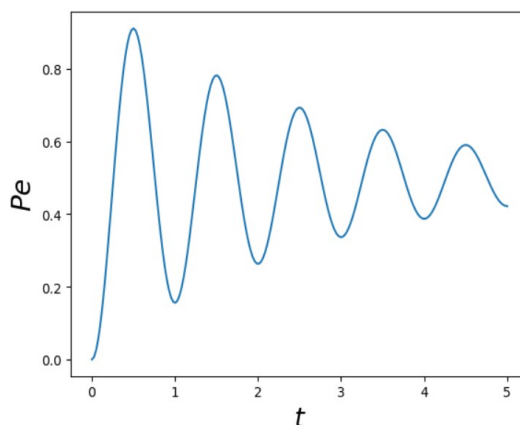
Υπολογίζουμε ξανά τον πληθυσμό της διεγερμένης κατάστασης και σχεδιάζουμε το γράφημα της μεταβολής της σε Qutip :

```
proj_e = basis(2,0) * basis(2,0).dag()  
Pe = expect(proj_e, result.states)  
  
# Σχεδίαση γραφήματος χρονικής εξέλιξης του πληθυσμού  
fig, axes = plt.subplots(1, 1) # Σχεδίαση ενός γραφήματος
```

```
axes.plot(tlist,Pe) # σχεδίαση γραφήματος με άξονα x τον χρόνο που
                    # παίρνει τιμές από τον πίνακα tlist και άξονα y
                    # τον πληθυσμό Pe
axes.set_xlabel(r"$t$", fontsize=20) # δώσε στον άξονα x την ετικέτα t με
                                     # μέγεθος γραμματοσειρά 20
axes.set_ylabel(r"$Pe$", fontsize=20) # δώσε στον άξονα y την ετικέτα Pe με
                                     # μέγεθος γραμματοσειρά 20
```

Κώδικας 5.7: Υπολογισμός του πληθυσμού της διεγερμένης κατάστασης και σχεδιασμός γραφήματος της χρονικής του εξέλιξης

Έτσι προκύπτει το Σχήμα 5.3 στο οποίο φαίνεται η απόσβεση της Rabi ταλάντωσης. Ο πληθυσμός της διεγερμένης κατάστασης του συστήματος σε αντίθεση με ένα κλειστό σύστημα μειώνεται λόγω αυθόρμητης εκπομπής και αυτό οδηγείται σε μία σταθερή κατάσταση με το πέρασμα του χρόνου. Αυτή είναι αποτέλεσμα της ισορροπίας μεταξύ της οδήγησης από το εξωτερικό πεδίο και της αποδιέγερσης.



Σχήμα 5.3: Απόσβεση του πληθυσμού της διεγερμένης κατάστασης

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Qutip για να δούμε πως μεταβάλλεται η καθαρότητα της κατάστασης με τον χρόνο

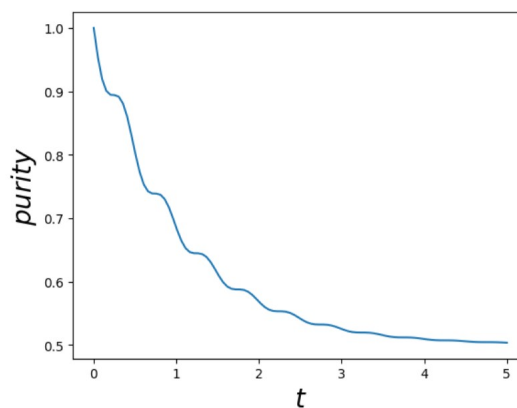
```
# Υπολογισμός καθαρότητας
purity = [(rho*rho).tr() for rho in result.states] # purity=Tr(ρ²) για κάθε μια
                                                    # από τις result.states

#Σχεδίαση γραφήματος χρονικής εξέλιξης της καθαρότητας της κατάστασης
fig, axes = plt.subplots(1, 1) # Σχεδίαση ενός γραφήματος
axes.plot(tlist,purity) # σχεδίαση γραφήματος με άξονα x τον χρόνο που
                        # παίρνει τιμές από τον πίνακα tlist και άξονα y
                        # την purity
axes.set_xlabel(r"$t$", fontsize=20) # δώσε στον άξονα x την ετικέτα t με
                                     # μέγεθος γραμματοσειρά 20
axes.set_ylabel(r"$purity$", fontsize=20) # δώσε στον άξονα y την ετικέτα purity
                                     # με μέγεθος γραμματοσειρά 20
```

Κώδικας 5.8: Μεταβολή της καθαρότητας της κατάστασης του συστήματος με τον χρόνο

Στο Σχήμα 5.4 παρατηρείται ότι η καθαρότητα ξεκινά από την τιμή 1, που αντιστοιχεί σε καθαρή κατάσταση, και μειώνεται με τον χρόνο, υποδεικνύοντας τη μετάβαση σε μικτές καταστάσεις λόγω αποσυννοχής.

Επιπλέον, η καθαρότητα παρουσιάζει μικρές ταλαντώσεις, οι οποίες οφείλονται στη συνύπαρξη της μοναδιαίας δυναμικής (Rabi ταλαντώσεις) και της μη μοναδιαίας εξέλιξης λόγω αυθόρμητης εκπομπής.



Σχήμα 5.4: Η μείωση με τον χρόνο της καθαρότητας της κατάστασης του συστήματος

5.4.2 Η εξίσωση Lindblad και η απώλεια φάσης

Εκτός από απώλεια ενέργειας σε ένα μοναδικό κβαντικό σύστημα, μπορεί να υπάρχει απώλεια φάσης χωρίς μεταβολή πληθυσμών. Ο αντίστοιχος τελεστής Lindblad είναι:

$$L_i = \sqrt{\gamma/2} \sigma_z \quad (5.6)$$

με σ_z τον γνωστό πίνακα Pauli.

Στο QuTiP :

```
from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# %matplotlib inline

# Παράμετροι
Delta = 0.0
Omega = 2*np.pi
gamma = 1

# Τελεστές
sx = sigmax()
sy = sigmay()
sz = sigmaz()
```

```
# Χαμιλτονιανή
H = 0.5*Delta*sz + 0.5*Omega*sx

# τελεστής Lindblad  $L_i$ 
c_ops = np.sqrt(gamma/2) * sz

# τυχαίος phasor
theta = np.random.uniform(0, np.pi)          # πολική γωνία από 0 έως  $\pi$ 
phi    = np.random.uniform(0, 2*np.pi)        # αζιμουθιακή γωνία από 0 έως  $2\pi$ 

# κατασκευή του ket
psi0 = (np.cos(theta/2) * basis(2,1) + np.exp(1j*phi) * np.sin(theta/2) *
basis(2,0)).unit()

# Μετατροπή σε πίνακα πυκνότητας
rho0 = ket2dm(psi0)

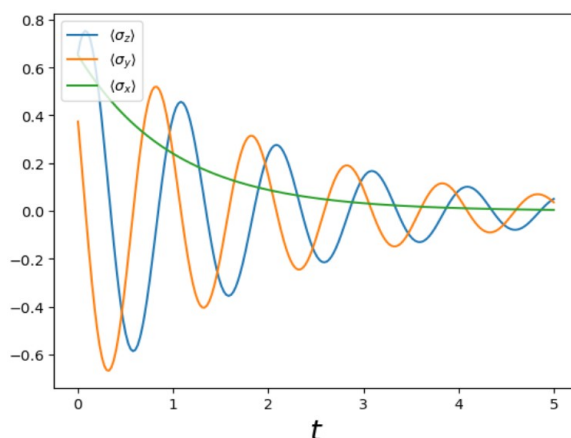
# Χρονικό διάστημα
tlist = np.linspace(0, 5, 200)

# Επίλυση master equation
result = mesolve(H, rho0, tlist, c_ops, e_ops=[sigmax(), sigmay(), sigmaz()])
# υπολογίζω τις μέσες τιμές των πινάκων Pauli σε κάθε χρονική στιγμή tlist

# Σχεδίαση διαγράμματος με την χρονική εξέλιξη των μέσων τιμών των πινάκων Pauli
fig, axes = plt.subplots(1, 1)
axes.plot(tlist, result.expect[2], label=r"$\left<\sigma_z\right>$")
axes.plot(tlist, result.expect[1], label=r"$\left<\sigma_y\right>$")
axes.plot(tlist, result.expect[0], label=r"$\left<\sigma_x\right>$")
axes.set_xlabel(r"$t$", fontsize=20)
axes.legend(loc=2);

Κώδικας 5.9: Επίλυση εξίσωσης Lindblad για μοναδικό σύστημα με απώλεια φάσης και σχεδίαση γραφήματος
μεταβολής των μέσων τιμών των πινάκων του Pauli με τον χρόνο
```

Έτσι προκύπτει το διάγραμμα του Σχήματος 5.5 στο οποίο φαίνεται η εκθετική μείωση της μέσης τιμής $\langle \sigma_x \rangle$. Αυτό συνεπάγεται μείωση των εκτός διαγωνίου στοιχείων του μητρώου της πυκνότητας (βλ. κεφάλαιο 3) με συνεπεία την αποσυννοχή του συστήματος το οποίο οδηγείται σε μικτές καταστάσεις. Επίσης η μέση τιμή $\langle \sigma_z \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$ παρουσιάζει φθίνουσες ταλαντώσεις λόγω της απώλειας συνοχής. Ο όρος αποσυννοχής δεν μεταβάλλει άμεσα τους πληθυσμούς, αλλά αποσβένει τις ταλαντώσεις μέσω της καταστροφής της κβαντικής συνοχής.



Σχήμα 5.5: Η χρονική εξέλιξη των μέσων τιμών $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ σε ένα σύστημα με απώλεια φάσης

Τελικά η συμπερίληψη αποσβέσεων είναι θεμελιώδης για τα μοναδικά κβαντικά συστήματα όπως τα παγιδευμένα ιόντα, οι κβαντικές κουκκίδες και τα παγιδευμένα σε οπτικές παγίδες ουδέτερα άτομα. Η αριθμητική επίλυση της Lindblad master equation μέσω του QuTiP καθιστά δυνατή την προσομοίωση ρεαλιστικών κβαντικών συστημάτων. Οι Οπτικές εξισώσεις Bloch προκύπτουν φυσικά ως ειδική περίπτωση της γενικής θεωρίας ανοιχτών κβαντικών συστημάτων.

Με τον τρόπο αυτό η θεωρία του Κεφαλαίου 4 αποκτά υπολογιστική υλοποίηση και αναδεικνύεται η φυσική σημασία του κβαντικού θορύβου. Επίσης δημιουργείται το απαραίτητο υπόβαθρο για πιο σύνθετα μοντέλα, όπως τα παγιδευμένα ιόντα με κινητικούς βαθμούς ελευθερίας, τα οποία θα εξεταστούν στη συνέχεια.

5.5 Αναπαράσταση της Δυναμικής στη Σφαίρα Bloch

Ως γνωστόν η μαθηματική περιγραφή της δυναμικής ενός διεπίπεδου συστήματος μέσω της εξίσωσης Schrödinger ή της εξίσωσης Lindblad παρέχει πλήρη πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος. Ωστόσο, για συστήματα δύο επιπέδων, υπάρχει μια εξαιρετικά ισχυρή γεωμετρική αναπαράσταση, η σφαίρα Bloch (Bloch Sphere) ή το διάνυσμα Bloch στο οποίο αναφερθήκαμε αναλυτικά στην ενότητα 3.2.3 αυτής της εργασίας.

Στην αναπαράσταση αυτή, κάθε καθαρή κατάσταση αντιστοιχεί σε σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας, ενώ οι μικτές καταστάσεις αντιστοιχούν σε σημεία στο εσωτερικό της. Η δυναμική του συστήματος απεικονίζεται ως τροχιά του διανύσματος Bloch, επιτρέποντας άμεση οπτική

κατανόηση φαινομένων όπως οι Rabi ταλαντώσεις, η επίδραση του αποσυντονισμού, καθώς και η αποσυννοχή λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον.

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις δυνατότητες οπτικοποίησης του QuTiP για να μελετήσουμε γεωμετρικά τη δυναμική του κβαντικού μας συστήματος και να συνδέσουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα με τη φυσική τους ερμηνεία.

5.5.1 Υπολογισμός Συνιστωσών του διανύσματος Bloch στο QuTiP

Στην ενότητα 3.2.3 της εργασίας αυτή αναφερθήκαμε αναλυτικά στο διάνυσμα Bloch που περιγράφει την κατάσταση ενός διεπίπεδου κβαντικού συστήματος ισοδύναμα με το μητρώο πυκνότητας, ρ . Οι συνιστώσες του διανύσματος αυτού είναι οι μέσες τιμές των πινάκων του Pauli οι οποίες εξάγονται, έχοντας λύσει τη δυναμική του συστήματος με `sesolve()` ή `mesolve()` με τις παρακάτω εντολές:

```
# Μέσες τιμές Pauli τελεστών
sx_exp = expect(sigmax(), result.states)
sy_exp = expect(sigmay(), result.states)
sz_exp = expect(sigmaz(), result.states)
```

Κώδικας 5.10: Μέσες τιμές των πινάκων του Pauli

Οι τρεις αυτές ποσότητες αποτελούν τις συντεταγμένες του διανύσματος Bloch για κάθε χρονική στιγμή.

5.5.2 Οπτικοποίηση στη Σφαίρα Bloch

Το QuTiP παρέχει την κλάση Bloch για απευθείας οπτικοποίηση.

```
from qutip import Bloch
b = Bloch()

# Αλλαγή labels πόλων
b.zlabel = [r'$|1\rangle \equiv |e\rangle$',
r'$|0\rangle \equiv |g\rangle$']

# Προσθήκη τροχιάς
b.add_points([sx_exp, sy_exp, sz_exp])
b.show()
```

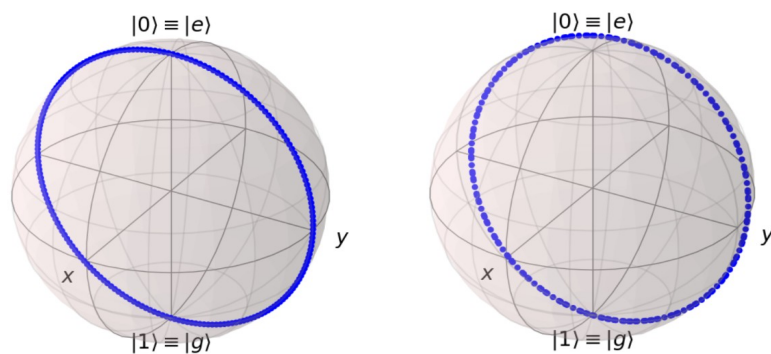
Κώδικας 5.11: Οπτικοποίηση στην σφαίρα του Bloch του διανύσματος Bloch

Η γραφική απεικόνιση που προκύπτει παρουσιάζει μια σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας, στην οποία απεικονίζεται η τροχιά του διανύσματος Bloch κατά τη χρονική εξέλιξη του συστήματος, καθώς και οι άξονες αναφοράς x , y και z .

Η θέση του διανύσματος Bloch σε κάθε χρονική στιγμή αντιστοιχεί πλήρως στην κατάσταση του συστήματος, ενώ το μήκος του σχετίζεται με την καθαρότητα της κατάστασης: για καθαρές καταστάσεις το διάνυσμα βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας, ενώ για μικτές καταστάσεις μετακινείται προς το εσωτερικό της.

5.5.3 Κλειστό Σύστημα

Για την περίπτωση του κλειστού συστήματος της ενότητας 5.3 χωρίς αποσυντονισμό προκύπτει το σχήμα 6(α) στο οποίο φαίνεται η σφαίρα και το διάνυσμα Bloch. Αυτό έχει σταθερό μήκος και η δυναμική αντιστοιχεί σε καθαρή περιστροφή γύρω από τον άξονα x . Στο σχήμα 6(β) φαίνεται η περιστροφή του διανύσματος Bloch γύρω από κεκλιμένο άξονα στο επίπεδο x - z όταν υπάρχει αποσυντονισμός Δ .

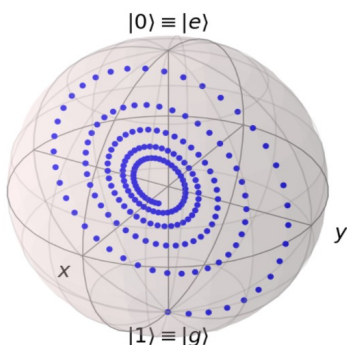


Σχήμα 5.6: (α) Περιστροφή του διανύσματος Bloch γύρω από τον άξονα x σε κλειστό σύστημα χωρίς αποσυντονισμό
(β) Περιστροφή του διανύσματος Bloch γύρω από κεκλιμένο άξονα στο επίπεδο x - z σε κλειστό σύστημα με αποσυντονισμό Δ

5.5.4 Ανοιχτό Σύστημα

Σε ένα ανοιχτό κβαντικό σύστημα χωρίς αποσυντονισμό, όταν συμπεριλαμβάνεται αυθόρμητη εκπομπή (ενότητα 5.4), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.7, το μήκος του διανύσματος Bloch μειώνεται με τον χρόνο, γεγονός που υποδηλώνει τη μετάβαση από καθαρές σε μικτές καταστάσεις. Η τροχιά του αποκτά σπειροειδή μορφή και το σύστημα συγκλίνει σε μία σταθερή κατάσταση (steady state). Στη σφαίρα Bloch, η κατάσταση αυτή αντιστοιχεί σε σημείο στο εσωτερικό της σφαίρας, καθώς η αποσυννοχή μειώνει την καθαρότητα του συστήματος. Η τελική κατάσταση προκύπτει από την ισορροπία μεταξύ της συνεχιζόμενης διέγερσης από το εξωτερικό πεδίο και της χαλάρωσης λόγω αυθόρμητης εκπομπής. Σε αντίθεση με το κλειστό σύστημα, όπου η δυναμική αντιστοιχεί σε καθαρή περιστροφή του διανύσματος Bloch πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, στο ανοιχτό

σύστημα το διάνυσμα Bloch δεν διατηρεί σταθερό μέτρο, αλλά ακολουθεί αποσβεννύμενη σπειροειδή τροχιά προς μία σταθερή μικτή κατάσταση στο εσωτερικό της σφαίρας Bloch.

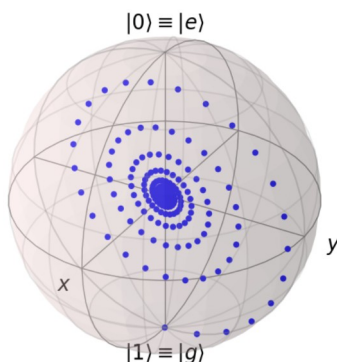


Σχήμα 5.7: Χρονική εξέλιξη του διανύσματος Bloch στη σφαίρα Bloch υπό την επίδραση αυθόρμητης εκπομπής (σύγκλιση σε steady state)

Αν τώρα έχω ανοιχτό κβαντικό σύστημα χωρίς αποσυντονισμό και με καθαρή αποσυννοχή παρατηρούμε ότι το μήκος του διανύσματος Bloch μειώνεται με τον χρόνο, η τροχιά αποκτά σπειροειδή μορφή (Σχήμα 5.8).

Η δυναμική του συστήματος προκύπτει από τον συνδυασμό της μοναδιαίας εξέλιξης (περιστροφή γύρω από τον άξονα x λόγω της Χαμιλτονιανής) και της αποσυννοχής φάσης, η οποία αποσβένει τη συνοχή χωρίς να επηρεάζει άμεσα τους πληθυσμούς. Ως αποτέλεσμα, το σύστημα οδηγείται σε μικτή κατάσταση. Η αρχική κατάσταση επιλέχθηκε η θεμελιώδης.

Για γενική αρχική υπέρθεση, η τροχιά του διανύσματος Bloch δεν περιορίζεται πλέον στο επίπεδο yz , αλλά αποκτά πλήρως τρισδιάστατη σπειροειδή μορφή λόγω της παρουσίας μη μηδενικής αρχικής συνιστώσας $\langle \sigma_x \rangle$.



Σχήμα 5.8: Χρονική εξέλιξη του διανύσματος Bloch στη σφαίρα Bloch υπό καθαρή αποσυννοχή φάσης

5.5.5 Σχεδίαση παλμών και έλεγχος της κβαντικής κατάστασης

Η αναπαράσταση Bloch δεν είναι απλώς μαθηματικό εργαλείο. Στα παγιδευμένα ιόντα όσο και στα υπόλοιπα μοναδικά κβαντικά συστήματα, η γεωμετρική αυτή εικόνα καθοδηγεί τον σχεδιασμό παλμών και τον έλεγχο της κατάστασης τους.

α) Παλμός- π

Ένας παλμός χρονικής διάρκειας $t=\pi/\Omega$ ονομάζεται παλμός- π και στρέφει το διάνυσμα Bloch κατά γωνία π (Σχήμα 5.9). Η εφαρμογή ενός τέτοιου παλμού στο διεπίπεδο κβαντικό σύστημα το οδηγεί στην διεγερμένη κατάσταση του αν αυτό αρχικά βρίσκεται στην θεμελιώδη.

Στο Qutip:

```
from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Παράμετροι
Omega = 2*np.pi
Delta = 0

# Hamiltonian
H = 0.5 * Omega * sigmax() + 0.5 * Delta * sigmaz()

# Αρχική κατάσταση  $|g\rangle=|0\rangle$ 
psi0 = basis(2,1)

# Χρονική διάρκεια παλμού
t_pi = np.pi / Omega
tlist = np.linspace(0, t_pi, 200)

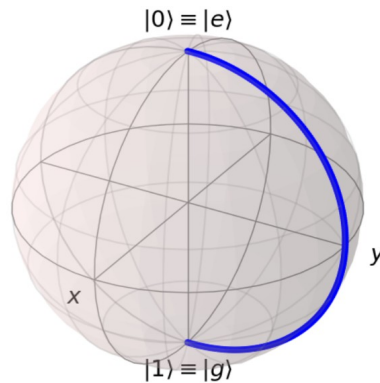
# Χρονική εξέλιξη
result = sesolve(H, psi0, tlist)

# Μέσες τιμές Pauli τελεστών
sx_exp = expect(sigmax(), result.states)
sy_exp = expect(sigmay(), result.states)
sz_exp = expect(sigmaz(), result.states)

# Σχεδίαση διανύσματος στην σφαίρα Bloch
from qutip import Bloch
b = Bloch()

# Αλλαγή labels πόλων
b.zlabel = [r'$|0\rangle \equiv |e\rangle$',
            r'$|1\rangle \equiv |g\rangle$']
# Προσθήκη τροχιάς
b.add_points([sx_exp, sy_exp, sz_exp])
b.show()
```

Κώδικας 5.12: Υλοποίηση της περιστροφής του διανύσματος Bloch κατά γωνία π



Σχήμα 5.9: Δυναμική ελέγχου του qubit μέσω παλμού π : πλήρης αντιστροφή πληθυσμού στη σφαίρα Bloch

β) Παλμός- $\pi/2$

Επίσης αν επιλέξουμε έναν παλμό χρονικής διάρκειας $t=\pi/(2\Omega)$, παλμός- $\pi/2$, αυτός θα στρέψει το διάνυσμα Bloch κατά γωνία $\pi/2$ (Σχήμα 10), οδηγώντας το διεπίπεδο κβαντικό μας σύστημα από την θεμελιώδη αρχική του κατάσταση σε υπέρθεση καταστάσεων.

Στην περίπτωση μηδενικού αποσυντονισμού ($\Delta=0$), η τελική κατάσταση αντιστοιχεί σε ισοπίθανη υπέρθεση των δύο καταστάσεων, και το διάνυσμα Bloch μετακινείται από τον πόλο της σφαίρας προς τον ισημερινό της.

Στο Qutip:

```
from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Παράμετροι
Omega = 2*np.pi
Delta = 0

# Hamiltonian
H = 0.5 * Omega * sigmax() + 0.5 * Delta * sigmaz()

# Αρχική κατάσταση |g>
psi0 = basis(2,1)

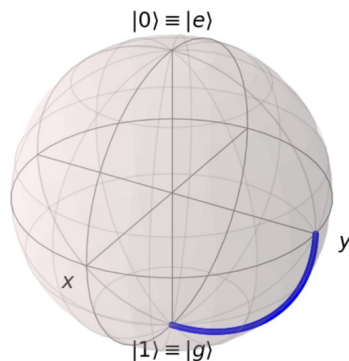
# Χρονική διάρκεια παλμού
t_pi = np.pi / (2* Omega)
tlist = np.linspace(0, t_pi, 200)

# Χρονική εξέλιξη
result = sesolve(H, psi0, tlist)

# Μέσες τιμές Pauli τελεστών
sx_exp = expect(sigmax(), result.states)
sy_exp = expect(sigmay(), result.states)
sz_exp = expect(sigmaz(), result.states)
```

```
# Σχεδίαση διανύσματος στην σφαίρα Bloch
from qutip import Bloch
b = Bloch()

# Αλλαγή labels πόλων
b.zlabel = [r'$|0\rangle \equiv |e\rangle$',
            r'$|1\rangle \equiv |g\rangle$']
# Προσθήκη τροχιάς
b.add_points([sx_exp, sy_exp, sz_exp])
b.show()
Κώδικας 5.13: Υλοποίηση της περιστροφής του διανύσματος Bloch κατά γωνία  $\pi/2$ 
```



Σχήμα 5.10: Περιστροφή του διανύσματος Bloch κατά γωνία $\pi/2$ ($\pi/2$ -pulse), που οδηγεί το σύστημα σε υπέρθεση καταστάσεων

Τέλος ολοκληρώνοντας την ενότητα αυτή ολοκληρώνουμε την μελέτη του διεπίπεδου κβαντικού συστήματος και αντιλαμβανόμαστε ότι η σφαίρα Bloch προσφέρει μια πλήρη και διαισθητική γεωμετρική περιγραφή της δυναμικής του. Μέσω του QuTiP καθίσταται δυνατή η εξαγωγή των συνιστωσών του διανύσματος Bloch, η οπτικοποίηση της τροχιάς και η άμεση κατανόηση της αποσυνοχής. Η γεωμετρική αυτή προσέγγιση ενισχύει τη φυσική ερμηνεία των αριθμητικών αποτελεσμάτων και αποτελεί ουσιώδες εργαλείο για την ανάλυση και τον έλεγχο μοναδικών κβαντικών συστημάτων.

5.6 Απλοποιημένο Μοντέλο Παγιδευμένου Ιόντος

Στις προηγούμενες ενότητες του κεφαλαίου ολοκληρώθηκε η μελέτη του διεπίπεδου κβαντικού συστήματος ως εσωτερικός βαθμός ελευθερίας. Ωστόσο, στα πραγματικά συστήματα παγιδευμένων ιόντων (trapped ions) το κβαντικό σύστημα δεν περιορίζεται μόνο στις εσωτερικές καταστάσεις $|g\rangle$ και $|e\rangle$, αλλά περιλαμβάνει και έναν κινητικό (ταλαντωτικό) βαθμό ελευθερίας που αντιστοιχεί στην κβαντισμένη ταλάντωση του ιόντος μέσα στην παγίδα. Ο βαθμός αυτός περιγράφεται ως κβαντικός

αρμονικός ταλαντωτής με ιδιοκαταστάσεις $|n\rangle$, $n=0,1,2,\dots$, οι οποίες σχηματίζουν έναν άπειρης διάστασης χώρο Hilbert.

Στο Κεφάλαιο 2 αναλύθηκε η φυσική της παγίδευσης ιόντων σε παγίδες Paul. Εδώ θα κατασκευάσουμε ένα απλοποιημένο υπολογιστικό μοντέλο ενός παγιδευμένου ιόντος, συνδυάζοντας το εσωτερικό διεπίπεδο σύστημα (qubit) και τον κβαντικό ταλαντωτή (κινητικός βαθμός ελευθερίας). Η αριθμητική υλοποίηση θα πραγματοποιηθεί με το πακέτο QuTiP

5.6.1 Η Χαμιλτονιανή Παγιδευμένου ιόντος χωρίς αλληλεπίδραση με λείζερ

Ένα ιόν σε γραμμική παγίδα μπορεί να προσεγγιστεί ως κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής συχνότητας ν με συνολική Χαμιλτονιανή

$$H = H_A + H_m = \frac{\hbar \omega_0}{2} \sigma_z + \hbar \nu (a^\dagger a^-) + \frac{\hbar \nu}{2} \quad (5.7)$$

όπου

$a^\dagger, a^-$: η τελεστής αναβίβασης και καταβίβασης του κβαντικού ταλαντωτή αντίστοιχα

$\hbar \omega_0$: η ενεργειακή απόσταση των δύο ενεργειακών επιπέδων του διεπίπεδου συστήματος και

$\hbar \nu$: η ενεργειακή απόσταση δύο διαδοχικών ενεργειακών επιπέδων του ταλαντωτή

με τον πρώτο όρο να αντιστοιχεί στην εσωτερική δομή του ιόντος και τον δεύτερο στην κινητική ενέργεια του.

Έτσι ο χώρος Hilbert, H , του μοναδικού κβαντικού μας συστήματος είναι πλέον το τανυστικό γινόμενο δύο χώρων, ενός δισδιάστατου, H_{internal} , και ενός απείρων διαστάσεων, H_{motional} .

$$H = H_{\text{internal}} \otimes H_{\text{motional}} \quad (5.8)$$

Συνεπώς στο QuTiP ο τανυστικός αυτός χώρος δημιουργείται με τη συνάρτηση `tensor()`.

```
from qutip import *
import numpy as np

# Διαστάσεις
N = 10 # αριθμός κινητικών καταστάσεων (Fock states), αριθμητική προσέγγιση,
# απαραίτητη για υπολογιστική διαχείριση

# Τελεστές εσωτερικού βαθμού
sz = sigmaz()
sp = sigma_p()
sm = sigma_m()
I2 = qeye(2)

# Τελεστές κινητικού βαθμού
a = destroy(N)
adag = a.dag()
```

```
IN = qeye(N)

# Τανυστικά αντικείμενα
sz_tot = tensor(sz, IN)
a_tot = tensor(I2, a)

# η Χαμιλτονιανή του παγιδευμένου ιόντος
v = 2*np.pi*1.0
omega_0 = 2*np.pi*0.5
H0 = v * adag_tot * a_tot + 0.5*v*tensor(I2, IN) + 0.5 * omega_0 * sz_tot
Κώδικας 5.14: Υλοποίηση της Χαμιλτονιανής του παγιδευμένου ιόντος όταν δεν αλληλεπιδρά με το λέιζερ
```

5.6.2 Αλληλεπίδραση με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία– Σύζευξη ερυθράς πλευρικής ζώνης

Όταν εφαρμόζεται laser, εμφανίζεται ένας όρος αλληλεπίδρασης στην Χαμιλτονιανή του μοναδικού κβαντικού μας συστήματος. Στο όριο Lamb–Dicke η αποτελεσματική (effective) Χαμιλτονιανή του κβαντικού μας συστήματος για τον συντονισμό κόκκινης πλευρικής ζώνης όπως αποδείξαμε στην ενότητα 3.1.4 προσεγγίζεται ως:

$$H = \frac{\hbar\Omega}{2} \eta (\alpha^+ \sigma^- + \alpha^- \sigma^+) \quad (5.9)$$

Στο QuTiP:

```
from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Διαστάσεις
N = 10

# Τελεστές εσωτερικού βαθμού ελευθερίας
sm = sigmam() # |g><e| σ-
sp = sigmap() # |e><g| σ+

# Τελεστές κινητικού βαθμού ελευθερίας
a = destroy(N)
adag = a.dag()
IN = qeye(N)

# Συντονισμός στην κόκκινη πλευρική ζώνη
ld = 0.2 # Η παράμετρος Lamb–Dicke επιλέγεται ίση με η=0.2, τιμή που ικανοποιεί
# την προσέγγιση Lamb–Dicke (η≪1), ώστε η αυθόρμητη εκπομπή να μην # μεταβάλλει
# σημαντικά τον κινητικό βαθμό ελευθερίας.
omega=2* np.pi
Hint = 0.5* omega* ld * (tensor(sp, a) + tensor(sm, adag))

# Αρχική κατάσταση |g,2>
psi_internal = basis(2, 1)
psi_motional = basis(N, 2)
psi0 = tensor(psi_internal, psi_motional)
```

```
# Εξέλιξη χρόνου
tlist = np.linspace(0, 20, 200)
result = sesolve(Hint, psi0, tlist)

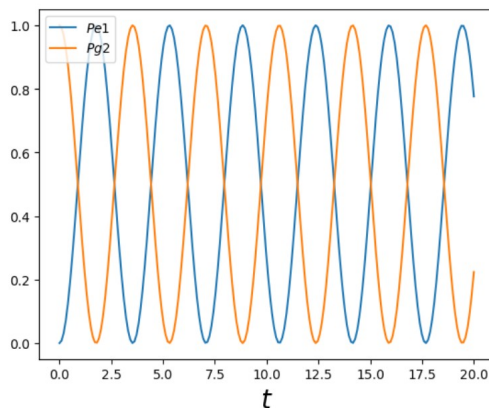
# Projectors στις καταστάσεις  $|g,2\rangle$  και  $|e,1\rangle$ 
proj_g2 = tensor(basis(2,1)*basis(2,1).dag(), basis(N,2)*basis(N,2).dag())
proj_e1 = tensor(basis(2,0)*basis(2,0).dag(), basis(N,1)*basis(N,1).dag())

# Πιθανότητες
Pg2 = expect(proj_g2, result.states)
Pe1 = expect(proj_e1, result.states)

# Σχεδίαση
fig, axes = plt.subplots(1,1) # Σχεδίαση ενός γραφήματος
axes.plot(tlist, Pe1, label=r"$Pe1$")
axes.plot(tlist, Pg2, label=r"$Pg2$")
axes.set_xlabel(r"$t$", fontsize=20)
axes.legend(loc=2) #
```

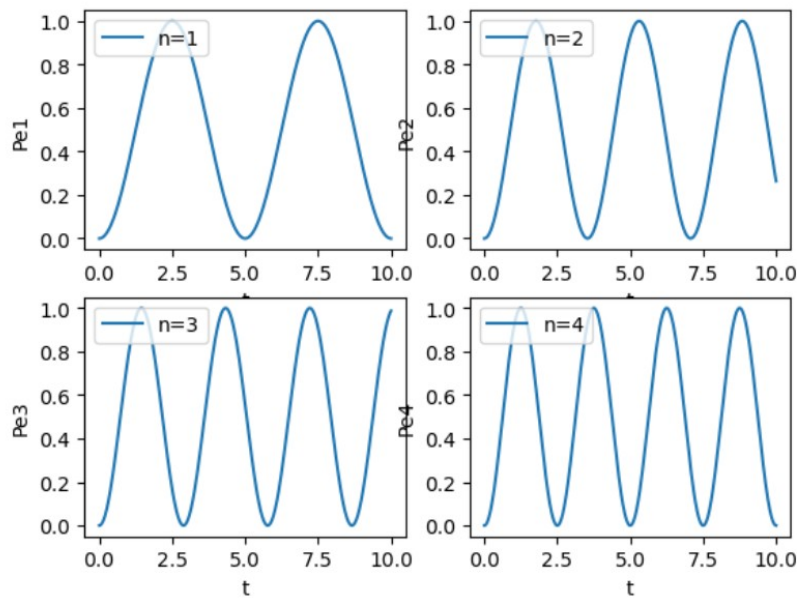
Κώδικας 5.15: Υλοποίηση της Χαμιλτονιανής του παγιδευμένου ιόντος όταν αλληλεπιδρά με το λέιζερ- Σύζευξη ερυθράς πλευρικής ζώνης. Σχεδίαση γραφήματος περιοδικής εναλλαγής μεταξύ των καταστάσεων των καταστάσεων $|g,2\rangle$ και $|e,1\rangle$

μας οδήγησε στο σχήμα 5.11 όπου βλέπουμε τις ταλαντώσεις Rabi του συστήματος. Παρατηρούμε την περιοδική εναλλαγή μεταξύ των καταστάσεων $|g,2\rangle$ και $|e,1\rangle$ και έτσι γίνεται διακριτή η σύζευξη εσωτερικού και κινητικού βαθμού ελευθερίας του συστήματος.



Σχήμα 5.11: Ταλαντώσεις Rabi- περιοδική εναλλαγή μεταξύ των καταστάσεων των καταστάσεων $|g,2\rangle$ και $|e,1\rangle$ σε ένα σύστημα παγιδευμένου ιόντος

Επίσης μεταβάλλοντας των αριθμό των φωνονίων n του συστήματος παρατηρούμε μεταβολή στην συχνότητα Rabi των ταλαντώσεων (Σχήμα 5.12) όπως ήταν αναμενόμενο από την θεωρητική μελέτη της ενότητας 3.1.4.



Σχήμα 5.12: Μεταβολή της συχνότητας Rabi λόγω μεταβολής του αριθμού των φωνονίων του συστήματος

5.6.3 Ψύξη παγιδευμένου ιόντος- Sideband Cooling

Όπως παρατηρήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο το μοναδικό μας σύστημα ταλαντώνεται ανάμεσα σε δύο καταστάσεις με κινητικό βαθμό ελευθερίας $n=1$ και $n=2$ αντίστοιχα. Στις περισσότερες περιπτώσεις το παγιδευμένο ιόν μας μετά από doppler ψύξη είναι συνήθως σε μια κατάσταση με μεγάλο κινητικό βαθμό ελευθερίας, πάντα βέβαια στην περιοχή Lamb-Dicke, οπότε χρησιμοποιούμε την ψύξη πλευρικής ζώνης για να οδηγηθεί κοντά στην θεμελιώδη κινητική του κατάσταση. Έτσι επιλέγουμε τον συντονισμό στην κόκκινη πλευρική ζώνη που μειώνει τον αριθμό των φωνονίων του συστήματος. Στο σημείο αυτό η αυθόρμητη εκπομπή η οποία εισάγεται μέσω του τελεστή Lindblad είναι η απαραίτητη διαδικασία η οποία επαναφέρει το σύστημα στην θεμελιώδη κατάσταση του $|g\rangle$ χωρίς να αυξάνει τον κινητικό βαθμό ελευθερία n . Έτσι μετά από έναν αριθμό κύκλων ψύξης το παγιδευμένο ιόν οδηγείται στην θεμελιώδη κινητική κατάσταση του.

Στο Qutip περιγράφεται η διαδικασία αυτή ως εξής

```
from qutip import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Διαστάσεις
N = 10

# Τελεστές εσωτερικού βαθμού ελευθερίας
sp = sigmap()#  $|e\rangle\langle g|$   $\sigma^+$ 
sm = sigmam()#  $|g\rangle\langle e|$   $\sigma^-$ 
```

```
# Τελεστές κινητικού βαθμού ελευθερίας
a = destroy(N)
adag = a.dag()
IN = qeye(N)

# Τανυστικοί τελεστές
a_tot = tensor(qeye(2), a)
adag_tot = tensor(qeye(2), adag)
sp_tot = tensor(sp, qeye(N))
sm_tot = tensor(sm, qeye(N))

# Red sideband Hamiltonian (effective)
ld = 0.2
omega=2* np.pi
H = 0.5 * omega * ld * (a_tot * sp_tot + adag_tot * sm_tot)

# Αρχική κατάσταση |g,N>
psi_internal = basis(2, 1)
psi_motional = basis(N, 6) # Η προσομοίωση ξεκινά από κινητική κατάσταση με έξι
                           # φωνόνια, ώστε να είναι εμφανής η διαδικασία ψύξης.
psi0 = tensor(psi_internal, psi_motional)

# Τελεστής Lindblad αυθορμητη εκπομπή
gamma = 10
c_ops = [np.sqrt(gamma) * sm_tot]

# Εξέλιξη χρόνου
tlist = np.linspace(0, 100, 300)
result = mesolve(H, psi0, tlist, c_ops)

# Η μέση τιμή φωνονίων:
n_op = adag_tot * a_tot
n_expect = expect(n_op, result.states)

plt.subplot(2,2,1)
plt.plot(tlist, n_expect)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("<n>")
```

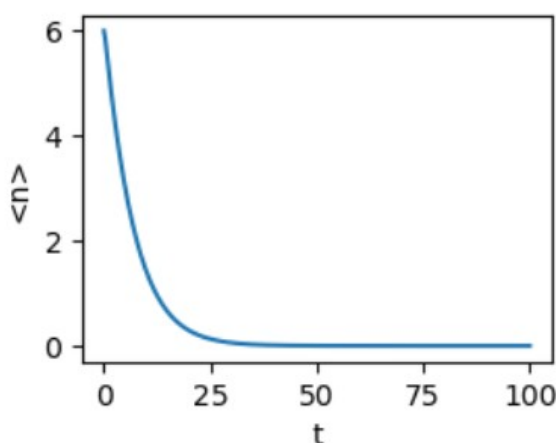
Κώδικας 5.16: Σχεδίαση γραφήματος της χρονικής εξέλιξης της αναμενόμενης μέσης τιμής του κινητικού βαθμού ελευθερίας του παγιδευμένου ιόντος με τον χρόνο

και έτσι προκύπτει το σχήμα 5.13 στο οποίο φαίνεται η φθίνουσα συμπεριφορά της αναμενόμενης τιμής του κινητικού βαθμού ελευθερίας που αποτελεί ένδειξη ψύξης.

Τέλος το μοντέλο παγιδευμένου ιόντος αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα μοναδιαίων κβαντικών συστημάτων. Η αριθμητική προσομοίωση του δείχνει ότι:

- Ο εσωτερικός και κινητικός βαθμός ελευθερίας του ιόντος είναι αλληλένδετοι.
- Οι μεταβάσεις πλευρικής ζώνης επιτρέπουν τον έλεγχο της κινητικής κατάστασης του.
- Η προσθήκη αποσβέσεων οδηγεί σε ρεαλιστική περιγραφή της ψύξης

Η προσέγγιση αυτή αποτελεί γέφυρα προς πιο σύνθετες εφαρμογές, όπως συστήματα πολλών ιόντων και υλοποίηση κβαντικών πυλών, που βασίζονται ακριβώς στην ελεγχόμενη σύζευξη εσωτερικών και κινητικών βαθμών ελευθερίας.



Σχήμα 5.13: Φθίνουσα συμπεριφορά της αναμενόμενης τιμής του κινητικού βαθμού ελευθερίας n του παγιδευμένου ιόντος

Το κεφάλαιο αυτό έδειξε ότι τα θεωρητικά εργαλεία που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια μπορούν να μετατραπούν σε αριθμητικά μοντέλα. Μέσω του QuTiP είναι δυνατή η προσομοίωση τόσο της μοναδιαίας όσο και της μη μοναδιαίας δυναμικής ενός διεπίπεδου κβαντικού συστήματος, η μελέτη της αποσυνοχής, η οπτικοποίηση της δυναμικής στη σφαίρα Bloch, καθώς και η προσομοίωση φυσικών συστημάτων, όπως τα παγιδευμένα ιόντα. Με τον τρόπο αυτό αναδεικνύεται η σύνδεση μεταξύ της θεωρητικής περιγραφής, της φυσικής ερμηνείας και της υπολογιστικής μοντελοποίησης των μοναδικών κβαντικών συστημάτων.

Κεφάλαιο 6 – Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε στη μελέτη των μοναδικών κβαντικών συστημάτων, εξετάζοντας τόσο τη θεμελιώδη θεωρητική τους περιγραφή όσο και την αριθμητική προσομοίωση της δυναμικής τους. Ως βασικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε το διεπίπεδο σύστημα, το οποίο αποτελεί το απλούστερο αλλά ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο για την κατανόηση της κβαντικής συμπεριφοράς και του ελέγχου της κβαντικής πληροφορίας.

Στο θεωρητικό μέρος της εργασίας αναλύθηκε αρχικά η αλληλεπίδραση των διεπίπεδων συστημάτων με ηλεκτρομαγνητικά πεδία, όπου αναδείχθηκαν φαινόμενα όπως οι ταλαντώσεις Rabi και η δυναμική στη σφαίρα Bloch. Παράλληλα, εξετάστηκαν μηχανισμοί φυσικού ελέγχου των κβαντικών συστημάτων, όπως η παγίδευση μέσω δυνάμεων διπόλου και η ψύξη με λέιζερ, οι οποίοι αποτελούν τη βάση για την πειραματική υλοποίηση και τον χειρισμό μεμονωμένων κβαντικών συστημάτων.

Στη συνέχεια, η ανάλυση επεκτάθηκε σε ρεαλιστικές συνθήκες μέσω της θεωρίας των ανοιχτών κβαντικών συστημάτων. Η εισαγωγή του μητρώου πυκνότητας και η χρήση της εξίσωσης Lindblad κατέστησαν δυνατή την περιγραφή της αποσυνοχής, δηλαδή της απώλειας κβαντικής συνοχής λόγω αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Αναδείχθηκε ότι φαινόμενα όπως η χαλάρωση και η απώλεια φάσης οδηγούν στη μετάβαση από καθαρές σε μικτές καταστάσεις, περιορίζοντας τη δυνατότητα ελέγχου της κβαντικής δυναμικής.

Στο υπολογιστικό μέρος της εργασίας υλοποιήθηκε η αριθμητική προσομοίωση των παραπάνω φαινομένων με τη χρήση της γλώσσας Python και της βιβλιοθήκης QuTiP. Μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Schrödinger και της εξίσωσης Lindblad, κατέστη δυνατή η μελέτη τόσο ιδανικών (κλειστών) όσο και ρεαλιστικών (ανοιχτών) κβαντικών συστημάτων. Οι προσομοιώσεις ανέδειξαν τη χρονική εξέλιξη των πληθυσμών, την απόσβεση των Rabi ταλαντώσεων, καθώς και τη μείωση της καθαρότητας της κατάστασης λόγω αποσυνοχής.

Επιπλέον, η αναπαράσταση της δυναμικής στη σφαίρα Bloch παρείχε μια άμεση γεωμετρική ερμηνεία της κβαντικής εξέλιξης, καθιστώντας εμφανή τη διάκριση μεταξύ καθαρών και μικτών καταστάσεων, καθώς και την επίδραση των περιβαλλοντικών διεργασιών. Η γεωμετρική αυτή προσέγγιση αποδείχθηκε ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση των μηχανισμών ελέγχου της κβαντικής κατάστασης μέσω παλμών.

Τέλος, εξετάστηκε ένα απλοποιημένο μοντέλο παγιδευμένου ιόντος, στο οποίο συνδυάζονται ο εσωτερικός και ο κινητικός βαθμός ελευθερίας. Μέσω της σύζευξης πλευρικών ζωνών και της συμπερίληψης αποσβέσεων, καταδείχθηκε η δυνατότητα ελέγχου της κινητικής κατάστασης του συστήματος και η υλοποίηση διαδικασιών ψύξης, όπως η sideband cooling. Το παράδειγμα αυτό ανέδειξε τη σημασία της αλληλεπίδρασης μεταξύ διαφορετικών βαθμών ελευθερίας και τη σύνδεση της θεωρίας με ρεαλιστικά πειραματικά συστήματα.

Στο πλαίσιο της εργασίας αυτής παρουσιάστηκαν επίσης βασικές πειραματικές πλατφόρμες υλοποίησης μοναδικών κβαντικών συστημάτων, όπως τα παγιδευμένα ιόντα, τα ουδέτερα άτομα σε οπτικές παγίδες και οι κβαντικές κουκκίδες. Οι πλατφόρμες αυτές αποτελούν θεμελιώδη παραδείγματα φυσικών συστημάτων στα οποία είναι δυνατός ο ακριβής έλεγχος της κβαντικής κατάστασης. Επιπλέον, έγινε σύντομη αναφορά και σε άλλες σύγχρονες υλοποιήσεις, όπως τα υπεραγώγιμα qubits και τα κέντρα NV σε διαμάντι, τα οποία διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των κβαντικών τεχνολογιών. Η σύγκριση αυτών των πλατφορμών αναδεικνύει τα πλεονεκτήματα και τους περιορισμούς κάθε προσέγγισης, καθώς και τη σημασία τους στη σύγχρονη έρευνα.

Συνολικά, η εργασία κατέδειξε ότι τα μοναδικά κβαντικά συστήματα αποτελούν κατάλληλες πλατφόρμες για τη μελέτη της κβαντικής δυναμικής και τον έλεγχο της κβαντικής πληροφορίας. Παρά τις σημαντικές διαφορές μεταξύ των φυσικών αυτών πλατφορμών (παγιδευμένα ιόντα, ουδέτερα άτομα και κβαντικές κουκκίδες), η περιγραφή τους μπορεί σε μεγάλο βαθμό να ενοποιηθεί μέσω του μοντέλου του διεπίπεδου κβαντικού συστήματος. Η κοινή αυτή θεωρητική βάση επιτρέπει την κατανόηση των βασικών μηχανισμών αλληλεπίδρασης φωτός-ύλης, του ελέγχου της κβαντικής κατάστασης και της επίδρασης της αποσυννοχής, καθώς και την αποτελεσματική αριθμητική προσομοίωσή τους.

Η συνδυαστική προσέγγιση θεωρίας και αριθμητικής προσομοίωσης αναδεικνύει τη σημασία των υπολογιστικών εργαλείων στη σύγχρονη κβαντική φυσική.

Παρά τα σημαντικά αποτελέσματα, παραμένουν ανοιχτά ζητήματα στην περιοχή αυτή. Η βελτίωση των χρόνων συνοχής, η μείωση του περιβαλλοντικού θορύβου και η κλιμάκωση σε συστήματα πολλών σωματιδίων αποτελούν βασικές προκλήσεις για την περαιτέρω ανάπτυξη των κβαντικών τεχνολογιών. Μελλοντικές επεκτάσεις της παρούσας εργασίας θα μπορούσαν να περιλαμβάνουν τη μελέτη πολυσωματιδιακών συστημάτων, την υλοποίηση κβαντικών πυλών και την προσομοίωση πιο σύνθετων μοντέλων αλληλεπίδρασης

Βιβλιογραφία

- Akkermans, E. (2017). *Atom-photon interactions*. Lecture.
- Bruzewicz, C. D., Chiaverini, J., McConnell, R., & Sage, J. M. (2019). Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges. *Applied Physics Reviews*, 6(2).
- Clarke, J., & Wilhelm, F. K. (2008). Superconducting quantum bits. *Nature*, 453(7198), 1031–1042.
- Cohen-Tannoudji, C. N. (1999). Manipulating atoms with photons. *USPEKHI FIZICHESKIKH NAUK*, 169(3), 292–304.
- Courteille, P. W. (2018). Mecânica Quântica. *Accesso Em*, 28, 160.
- Doherty, M. W., Manson, N. B., Delaney, P., Jelezko, F., Wrachtrup, J., & Hollenberg, L. C. L. (2013). The nitrogen-vacancy colour centre in diamond. *Physics Reports*, 528(1), 1–45.
- Foot, C. J. (2005). *Atomic physics* (Vol. 7). Oxford university press.
- Fox, A. M. (2006). *Quantum optics: an introduction* (Vol. 15). Oxford university press.
- Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press.
- Grimm, R., Weidemüller, M., & Ovchinnikov, Y. B. (2000). Optical dipole traps for neutral atoms. In *Advances in atomic, molecular, and optical physics* (Vol. 42, pp. 95–170). Elsevier.
- Heinrich, J. (2018). *A Be⁺ ion trap for H₂⁺ spectroscopy*. Sorbonne Université.
- Johansson, J. R., Nation, P. D., & Nori, F. (2012). QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, 183(8), 1760–1772.
- Kaufman, A. M., & Ni, K.-K. (2021). Quantum science with optical tweezer arrays of ultracold atoms and molecules. *Nature Physics*, 17(12), 1324–1333.
- Kjaergaard, M., Schwartz, M. E., Braumüller, J., Krantz, P., Wang, J. I.-J., Gustavsson, S., & Oliver, W. D. (2020). Superconducting qubits: Current state of play. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 11(1), 369–395.
- Krummheuer, B., Axt, V. M., Kuhn, T., D’Amico, I., & Rossi, F. (2005). Pure dephasing and phonon dynamics in GaAs- and GaN-based quantum dot structures: Interplay between material parameters and geometry. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 71(23), 235329.

- Kuhlmann, A. V, Houel, J., Ludwig, A., Greuter, L., Reuter, D., Wieck, A. D., Poggio, M., & Warburton, R. J. (2013). Charge noise and spin noise in a semiconductor quantum device. *Nature Physics*, 9(9), 570–575.
- Kuhr, S., Alt, W., Schrader, D., Dotsenko, I., Miroshnychenko, Y., Rauschenbeutel, A., & Meschede, D. (2005). Analysis of dephasing mechanisms in a standing-wave dipole trap. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 72(2), 23406.
- Ladd, T. D., Jelezko, F., Laflamme, R., Nakamura, Y., Monroe, C., & O’Brien, J. L. (2010). Quantum computers. *Nature*, 464(7285), 45–53.
- Langbein, W., Borri, P., Woggon, U., Stavarache, V., Reuter, D., & Wieck, A. D. (2004). Radiatively limited dephasing in InAs quantum dots. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 70(3), 33301.
- Leibfried, D., Blatt, R., Monroe, C., & Wineland, D. (2003). Quantum dynamics of single trapped ions. *Reviews of Modern Physics*, 75(1), 281.
- Li, Y., Li, H., Yi, T., Li, C., & Wei, J. (2025). A review of the study of diamond NV color centers: fabrication, application and challenge. *Functional Diamond*, 5(1), 2567286.
- Lodahl, P., Mahmoodian, S., & Stobbe, S. (2015). Interfacing single photons and single quantum dots with photonic nanostructures. *Reviews of Modern Physics*, 87(2), 347–400.
- Metcalf, H. J., & Van der Straten, P. (1999). *Laser cooling and trapping*. Springer Science & Business Media.
- Naeij, H. R. (2025). Open quantum system approaches to superconducting qubits: HR Naeij. *Quantum Information Processing*, 24(7), 220.
- Nielsen, M. A., & Chuang, I. L. (2010). *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press.
- Osypiw, A. R. C., Lee, S., Jung, S.-M., Leoni, S., Smowton, P. M., Hou, B., Kim, J. M., & Amaratunga, G. A. J. (2022). Solution-processed colloidal quantum dots for light emission. *Materials Advances*, 3(17), 6773–6790.
- Paul, W. (1990). Electromagnetic traps for charged and neutral particles. *Reviews of Modern Physics*, 62(3), 531.
- Roberts, R. P. (2014). *Quantum-optical trapping of nanodiamonds containing NV centres*. Macquarie University.
- Rondin, L., Tetienne, J.-P., Hingant, T., Roch, J.-F., Maletinsky, P., & Jacques, V. (2014). Magnetometry with nitrogen-vacancy defects in diamond. *Reports on Progress in Physics*, 77(5), 56503.
- Schlosshauer, M. (2019). Quantum decoherence. *Physics Reports*, 831, 1–57.

Steck, D. A. (2007). *Quantum and atom optics*.

Warburton, R. J. (2013). Single spins in self-assembled quantum dots. *Nature Materials*, 12(6), 483–493.

Wineland, D. J., Monroe, C., Meekhof, D. M., King, B. E., Leibfried, D., Itano, W. M., Bergquist, J. C., Berkeland, D., Bollinger, J. J., & Miller, J. (1998). Quantum state manipulation of trapped atomic ions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1969), 411–429.

Zwerver, A.-M. J., Krähenmann, T., Watson, T. F., Lampert, L., George, H. C., Pillarisetty, R., Bojarski, S. A., Amin, P., Amitonov, S. V., & Boter, J. M. (2022). Qubits made by advanced semiconductor manufacturing. *Nature Electronics*, 5(3), 184–190.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα / εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών / δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.