



ΣΧΟΛΗ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

« Η Ισορροπία Nash στη Θεωρία Παιγνίων: Μαθηματική
Ανάλυση και Μεθοδολογικές Προσεγγίσεις »

ΔΙΟΝΥΣΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

A.M: 168148

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Α: ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΟΥΣΗΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Β: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΠΟΥΛΑΚΗΣ

ΠΑΤΡΑ, 2025-2026

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στη μελέτη και ανάλυση της θεωρίας παιγνίων, με στόχο την κατανόηση των θεμελιωδών αρχών που διέπουν τη λήψη αποφάσεων σε παίγνια στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Αρχικά, παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη και η θεωρητική θεμελίωση της θεωρίας, από τις πρώτες συνεισφορές του Émile Borel (1921) έως το θεμελιώδες έργο των John von Neumann και Oskar Morgenstern (1944), και τη διαμόρφωση της έννοιας της ισορροπίας από τον John F. Nash (1950). Παράλληλα, αναλύονται οι βασικές έννοιες και τα κλασικά παραδείγματα που αποτέλεσαν τη βάση της θεωρίας, όπως το Δίλημμα του Φυλακισμένου (*Prisoner's Dilemma*), το Κυνήγι του Ελαφιού (*Stag Hunt*), η Μάχη των Φύλων (*Battle of the Sexes*), το παίγνιο Αντιστοίχισης Κερμάτων (*Matching Pennies*) και το παίγνιο Δειλίας (*Chicken Game*). Μέσα από αυτά τα παραδείγματα αναδεικνύεται η σημασία της ορθολογικής σκέψης, της αλληλεξάρτησης των στρατηγικών επιλογών και των κινήτρων που οδηγούν σε διαφορετικές μορφές συνεργασίας ή ανταγωνισμού.

Στη συνέχεια, η εργασία επικεντρώνεται στην έννοια της Ισορροπίας Nash, παρουσιάζοντας τον τυπικό μαθηματικό της ορισμό, τις συνθήκες ύπαρξης και τις μορφές της, τόσο σε αμιγείς όσο και σε μικτές στρατηγικές. Η θεωρητική ανάλυση συνοδεύεται από ενδεικτικά παραδείγματα, τα οποία συμβάλλουν στην κατανόηση της σταθερότητας, της πολλαπλότητας και της αποτελεσματικότητας των ισορροπιών σε διαφορετικά παίγνια.

Σε επόμενο στάδιο, εξετάζονται οι υπολογιστικές μέθοδοι εντοπισμού ισορροπιών, όπως η *Best Response Dynamics* και η Εξάλειψη Κυριαρχούμενων Στρατηγικών, καθώς και οι σύγχρονες στοχαστικές και προσεγγιστικές μέθοδοι, όπως οι αλγόριθμοι *Lemke - Howson*, *Regret Minimization* και *Quantal Response Equilibrium (QRE)*. Οι μέθοδοι αυτές επιτρέπουν την πρακτική εφαρμογή των θεωρητικών εννοιών σε πολύπλοκα παίγνια.

Η εργασία επιδιώκει να συνθέσει τη θεωρητική, μαθηματική και υπολογιστική διάσταση της θεωρίας παιγνίων, προσφέροντας μια ολοκληρωμένη εικόνα της λειτουργίας και των εφαρμογών της σε στρατηγικά παίγνια και σε παίγνια λήψης αποφάσεων με στρατηγική αλληλεπίδραση.

Λέξεις - κλειδιά: αμιγείς στρατηγικές, *Best Response Dynamics*, Εξάλειψη Κυριαρχούμενων Στρατηγικών, Ισορροπία Nash, μικτές στρατηγικές, θεωρία παιγνίων, υπολογιστικές μέθοδοι.

Abstract

The present dissertation focuses on the study and analysis of game theory, aiming to understand the fundamental principles that govern decision - making in strategic interaction games. It begins with the historical evolution and theoretical foundations of the field, from the early contributions of Émile Borel (1921) to the seminal work of John von Neumann and Oskar Morgenstern (1944), and the formulation of the equilibrium concept by John F. Nash (1950). The discussion includes key concepts and classical examples that shaped the development of game theory, such as the Prisoner's Dilemma, the Stag Hunt, the Battle of the Sexes, Matching Pennies, and the Chicken Game. Through these examples, the study highlights the importance of rational reasoning, the interdependence of strategic choices, and the incentives that give rise to different forms of cooperation or competition.

The dissertation then focuses on the concept of Nash Equilibrium, presenting its formal mathematical definition, the conditions for its existence, and its manifestations in both pure and mixed strategies. The theoretical analysis is supported by representative examples that illustrate the notions of stability, multiplicity, and efficiency of equilibria across various strategic contexts.

Subsequently, the study examines computational methods for identifying equilibria, including Best Response Dynamics and the Elimination of Dominated Strategies, as well as modern stochastic and approximative approaches such as the Lemke - Howson algorithm, Regret Minimization techniques, and the Quantal Response Equilibrium (QRE). These methods enable the practical application of theoretical principles to complex strategic systems.

Overall, the dissertation aims to integrate the theoretical, mathematical, and computational dimensions of game theory, providing a comprehensive account of its mechanisms and applications in strategic decision - making games.

Keywords: Best Response Dynamics, computational methods, Elimination of Dominated Strategies, game theory, mixed strategies, Nash Equilibrium, pure strategies.

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Κατάλογος Πινάκων	4
Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή και παραδείγματα.....	5
1.1 Εισαγωγή	5
1.2 Ιστορική αναδρομή.....	6
1.3 Βασικές έννοιες	8
1.4 Κλασικά παραδείγματα	12
1.4.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου (Prisoner's Dilemma)	12
1.4.2 Το Κυνήγι του Ελαφιού (Stag Hunt)	13
1.4.3 Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων (Matching Pennies)	14
1.4.4 Η Μάχη των Φύλων (Battle of the Sexes)	14
1.4.5 Το παίγνιο Δειλίας (Chicken Game)	15
1.5 Συμπεράσματα.....	16
Κεφάλαιο 2: Η Ισορροπία Nash	18
2.1 Εισαγωγή.....	18
2.2 Τυπικός ορισμός της Ισορροπίας Nash.....	19
2.3 Παραδείγματα Ισορροπίας Nash	20
2.3.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου (Prisoner's Dilemma)	21
2.3.2 Το Κυνήγι του Ελαφιού (Stag Hunt)	23
2.3.3 Η Μάχη των Φύλων (Battle of the Sexes)	26
2.3.4 Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων (Matching Pennies)	28

2.3.5 Το παίγνιο Δειλίας (Chicken Game)	31
2.4 Ερμηνεία και σημασία της Ισορροπίας Nash.....	33
2.4.1 Η Ισορροπία Nash ως σημείο σταθερότητας	33
2.4.2 Διαφορά από το κοινωνικά βέλτιστο	33
2.4.3 Περιορισμοί της έννοιας	34
2.4.4 Η σημασία της Ισορροπίας Nash στην σύγχρονη θεωρία	35
2.5 Ύπαρξη Ισορροπίας Nash	35
2.5.1 Θεώρημα Nash (1950).....	35
2.5.2 Ιδέα της απόδειξης (χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες).....	36
2.5.3 Εννοιολογική σημασία του αποτελέσματος	36
2.5.4 Συμπεράσματα	37
2.6 Ενδεικτικά πεδία εφαρμογής της Ισορροπίας Nash	37
2.7 Ανακεφαλαίωση βασικών ιδεών	38
Κεφάλαιο 3: Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές	39
3.1 Εισαγωγή	40
3.2 Ορισμός μικτής στρατηγικής και Ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές	40
3.3 Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων (Matching Pennies)	42
3.3.1 Περιγραφή του παιγνίου	42
3.3.2 Ανάλυση σε αμιγείς στρατηγικές	43
3.3.3 Ισορροπία σε μικτές στρατηγικές	43
3.3.4 Ερμηνεία και συμπεράσματα	44
3.4 Μαθηματική ερμηνεία και Θεώρημα Minimax.....	44
3.4.1 Διατύπωση του Θεωρήματος Minimax.....	45
3.4.2 Ερμηνεία και μαθηματική σημασία	46
3.4.3 Σχέση με το παίγνιο Matching Pennies	46
3.4.4 Συμπεράσματα	47
3.5 Εφαρμογές μικτών στρατηγικών	47
3.5.1 Το παίγνιο Πέτρα - Ψαλίδι - Χαρτί (Rock - Paper - Scissors).....	47

3.5.2 Το παίγνιο Bach - Stravinsky	50
3.5.3 Το παίγνιο Γεράκι - Περιστέρι (Hawk - Dove Game)	52
3.5.4 Ανταγωνισμός Πληροφορίας (Information Competition Game)	54
3.6 Συμπεράσματα	57
Κεφάλαιο 4: Υπολογιστικές τεχνικές	58
4.1 Εισαγωγή στις υπολογιστικές μεθόδους	58
4.2 Κατηγορίες υπολογιστικών μεθόδων	60
4.2.1 Διακριτές και συνεχείς στρατηγικές	60
4.2.2 Ντετερμινιστικές και στοχαστικές προσεγγίσεις	60
4.3 Κλασικές και επαναληπτικές μέθοδοι	61
4.3.1 Μέθοδος Best Response Dynamics	61
4.3.2 Μέθοδος Εξάλειψης Κυριαρχούμενων Στρατηγικών	63
4.3.3 Μέθοδος Fictitious Play	66
4.3.4 Μέθοδος Lemke - Howson	68
4.4 Σύγχρονες προσεγγίσεις	71
4.4.1 Μέθοδος Regret Minimization / Machine Regret	72
4.4.2 Μέθοδος Quantal Response Equilibrium (QRE)	74
4.4.3 Μέθοδοι Γενετικών Αλγορίθμων και Εξελικτικών Υπολογισμών	77
4.4.4 Μέθοδοι Homotopy και Continuation Procedures	79
4.5 Πρακτικός οδηγός επιλογής υπολογιστικής μεθόδου	84
4.5.1 Κατηγοριοποίηση με βάση το μέγεθος του παιγνίου	85
4.5.2 Κατηγοριοποίηση ανά στόχο και είδος λύσης	86
4.5.3 Ανάλυση υπολογιστικής πολυπλοκότητας και αποδοτικότητας	87
4.5.4 Οδηγός επιλογής υπολογιστικής μεθόδου	90
4.6 Συμπεράσματα	92
Βιβλιογραφικές Αναφορές	93

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1.3.1: παράδειγμα πίνακα αποδόσεων γενικής μορφής	13
Πίνακας 1.4.1: πίνακας αποδόσεων στο Δίλημμα του Φυλακισμένου (Prisoner's dilemma) ..	15
Πίνακας 1.4.2: πίνακας αποδόσεων στο Κυνήγι του Ελαφιού (Stag Hunt)	16
Πίνακας 1.4.3: πίνακας αποδόσεων στο Matching Pennies	16
Πίνακας 1.4.4: πίνακας αποδόσεων στη Μάχη των Φύλων (Battle of the Sexes)	17
Πίνακας 1.4.5: πίνακας αποδόσεων στο Chicken Game	18
Πίνακας 2.3.1: πίνακας αποδόσεων στο Δίλημμα του Φυλακισμένου (επανάληψη του Πίνακα 1.4.1)	24
Πίνακας 2.3.2: πίνακας αποδόσεων στο Κυνήγι του Ελαφιού (επανάληψη Πίνακα 1.4.2)	26
Πίνακας 2.3.3: πίνακας αποδόσεων στη Μάχη των Φύλων (Battle of the Sexes)	28
Πίνακας 2.3.4: πίνακας αποδόσεων στο Matching Pennies (επανάληψη του Πίνακα 1.4.3)	31
Πίνακας 2.3.5: πίνακας αποδόσεων του Chicken Game	34
Πίνακας 3.3.1: πίνακας αποδόσεων στο Matching Pennies (επανάληψη του Πίνακα 1.4.3)	44
Πίνακας 3.5.1: πίνακας αποδόσεων στο Πέτρα - Ψαλίδι - Χαρτί (Rock - Paper - Scissors)	50
Πίνακας 3.5.2: πίνακας αποδόσεων του Bach - Stravinsky	52
Πίνακας 3.5.3: πίνακας αποδόσεων στο Hawk - Dove	54
Πίνακας 3.5.4: πίνακας αποδόσεων στον Ανταγωνισμό Πληροφορίας (Information Competition Game)	57
Πίνακας 4.3.1: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2×2	64
Πίνακας 4.3.2: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2×2	67
Πίνακας 4.3.3: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2×2	69
Πίνακας 4.3.4: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2×2	73
Πίνακας 4.4.1: πίνακας αποδόσεων στο Matching Pennies (επανάληψη Πίνακα 1.4.3)	75
Πίνακας 4.4.2: πίνακας αποδόσεων στη Μάχη των Φύλων (Battle of the Sexes)	77
Πίνακας 4.4.3: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2×2	80
Πίνακας 4.4.4: παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου Homotopy	83
Πίνακας 4.4.5: συνοπτικός πίνακας υπολογιστικών και θεωρητικών μεθόδων	84

Πίνακας 4.5.1: πίνακας κατηγοριοποίησης με βάση το μέγεθος του παιγνίου	87
Πίνακας 4.5.2: κατηγοριοποίηση υπολογιστικών μεθόδων ανά τύπο παιγνίου	88
Πίνακας 4.5.3: συγκριτική εκτίμηση υπολογιστικής πολυπλοκότητας και αποδοτικότητας	90
Πίνακας 4.5.4: πρακτικός οδηγός επιλογής υπολογιστικής μεθόδου για την εύρεση Ισορροπίας Nash	92

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή και παραδείγματα

1.1 Εισαγωγή

Η θεωρία παιγνίων αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της σύγχρονης μαθηματικής και οικονομικής ανάλυσης, καθώς εξετάζει καταστάσεις όπου το αποτέλεσμα προσδιορίζεται από τις αλληλεπιδράσεις των αποφάσεων των παικτών. Σε τέτοιες στρατηγικές συνθήκες, η απόδοση κάθε επιλογής εξαρτάται από τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών, συνεπώς καμία στρατηγική δεν μπορεί να αξιολογηθεί ανεξάρτητα, ενώ η βέλτιστη συμπεριφορά λαμβάνει υπόψη τις προσδοκίες για τις αποφάσεις των άλλων (Osborne, 2000). Η θεωρία παιγνίων επιδιώκει να περιγράψει και να αναλύσει τη συμπεριφορά ορθολογικών και στρατηγικά σκεπτόμενων παικτών, προκειμένου να κατανοηθούν οι μηχανισμοί συνεργασίας, ανταγωνισμού και στρατηγικής ισορροπίας.

Παρά την ονομασία της, η θεωρία παιγνίων δεν αφορά «παιχνίδια» με την καθημερινή έννοια του όρου. Αντίθετα, συνιστά μια αυστηρή μαθηματική μεθοδολογία μοντελοποίησης στρατηγικών αλληλεπιδράσεων, με ισχυρή θεωρητική βάση και σημαντική προβλεπτική δύναμη. Στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων, τα μοντέλα δεν επιχειρούν να αναπαραστήσουν πλήρως την πολυπλοκότητα της πραγματικότητας. Αντιθέτως, εστιάζουν στην απομόνωση εκείνων των θεμελιωδών δομικών στοιχείων που είναι καθοριστικά για τη συμπεριφορά των παικτών και για την ανάλυση των στρατηγικών τους αλληλεπιδράσεων (Tadelis, 2013).

Η ευρύτητα της θεωρίας παιγνίων αντικατοπτρίζεται στο μεγάλο εύρος των εφαρμογών της. Ενδεικτικά:

- **Οικονομία:** ανάλυση ανταγωνισμού επιχειρήσεων, στρατηγικές τιμολόγησης, διαμόρφωση αγορών και θεωρία δημοπρασιών.

- **Πολιτική επιστήμη:** εκλογική στρατηγική, διαπραγματεύσεις και τη συμπεριφορά κομμάτων.
- **Βιολογία:** εξελικτικές στρατηγικές, συνεργασία / ανταγωνισμός μεταξύ οργανισμών και έννοιες όπως η *Evolutionarily Stable Strategy* (Maynard Smith, 1982).
- **Διεθνείς σχέσεις:** αλληλεπίδραση κρατών σε ζητήματα ασφάλειας, πολέμου και ειρήνης.
- **Πληροφορική και πολυπαικτικά / πολυπρακτορικά παίγνια:** βελτιστοποίηση και αλγοριθμικά παίγνια.

Η ιδιαίτερη αξία της θεωρίας παιγνίων έγκειται στο ότι προσφέρει ένα ενιαίο, μαθηματικά αυστηρό πλαίσιο για τη μελέτη στρατηγικών καταστάσεων. Μέσα από τη χρήση απλουστευμένων αλλά εννοιολογικά ισχυρών μοντέλων, αποκαλύπτει θεμελιώδεις αρχές που διέπουν τη συμπεριφορά ορθολογικών παικτών σε καταστάσεις αλληλεξάρτησης. Ως εκ τούτου, η θεωρία παιγνίων αποτελεί πλέον έναν από τους βασικούς πυλώνες της σύγχρονης ανάλυσης σε μαθηματικά, οικονομικές επιστήμες, κοινωνικές επιστήμες, βιολογία και υπολογιστικά συστήματα.

1.2 Ιστορική αναδρομή

Η θεωρία παιγνίων, παρότι σήμερα αποτελεί θεμελιώδη κλάδο της σύγχρονης οικονομικής, μαθηματικής και κοινωνικής ανάλυσης, έχει σχετικά πρόσφατη ιστορική αφετηρία. Η συστηματική απόπειρα μοντελοποίησης στρατηγικής αλληλεπίδρασης εμφανίζεται στις αρχές του 20ού αιώνα με το έργο του Émile Borel (1921), *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*, το οποίο ανέλυσε στρατηγικές επιλογές σε τυχερά παίγνια και εισήγαγε την ιδέα ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ παικτών μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικούς όρους. Αν και οι προσεγγίσεις του δεν συγκροτούσαν πλήρη θεωρία, παρείχαν το πρώτο εννοιολογικό υπόβαθρο για την ανάπτυξη ενός ενιαίου πλαισίου στρατηγικής ανάλυσης.

Η θεμελίωση του κλάδου πραγματοποιήθηκε το 1944 με το έργο *Theory of Games and Economic Behavior* των John von Neumann και Oskar Morgenstern. Οι συγγραφείς διαμόρφωσαν ένα ολοκληρωμένο μαθηματικό μοντέλο στρατηγικών αλληλεπιδράσεων και ανέδειξαν τη σημασία των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, στα οποία το κέρδος ενός παίκτη αντιστοιχεί σε ισόποση

απώλεια του αντιπάλου. Το έργο αυτό καθιέρωσε τη θεωρία παιγνίων ως αυτόνομο επιστημονικό πεδίο, αποδεικνύοντας ότι πολλές οικονομικές και κοινωνικές διαδικασίες μπορούν να αναλυθούν μέσω τυπικών στρατηγικών μοντέλων (von Neumann & Morgenstern, 1944).

Η επόμενη ουσιαστική πρόοδος σημειώθηκε με τις εργασίες του John Nash (1950), ο οποίος εισήγαγε την έννοια της Ισορροπίας Nash. Η συμβολή του ήταν καθοριστική, καθώς επέκτεινε την ανάλυση πέρα από τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος και απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία ισορροπία σε μικτές στρατηγικές. Με τον τρόπο αυτό προσέδωσε στη θεωρία παιγνίων μαθηματική πληρότητα και τη δυνατότητα εφαρμογής σε ένα πολύ ευρύτερο σύνολο στρατηγικών προβλημάτων.

Στις δεκαετίες που ακολούθησαν, η θεωρία παιγνίων εξελίχθηκε σε έναν κατεξοχήν διεπιστημονικό κλάδο:

- **Στην πολιτική επιστήμη**, αξιοποιήθηκε για την ανάλυση εκλογικών συστημάτων, διαπραγματεύσεων και του στρατηγικού σχηματισμού κυβερνητικών συμμαχιών (*coalition formation*).
- **Στη βιολογία**, η εξελικτική θεωρία παιγνίων (Maynard Smith, 1982) παρείχε ερμηνευτικά εργαλεία για τη σταθερότητα συμπεριφορικών στρατηγικών στα οικοσυστήματα.
- **Στη διεθνή πολιτική**, όπου η θεωρία παιγνίων συνέβαλε στην ανάλυση στρατηγικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ κρατών, ιδιαίτερα σε ζητήματα αποτροπής και διλημάτων ασφάλειας.
- **Στην πληροφορική και στα υπολογιστικά συστήματα**, όπου η θεωρία παιγνίων συνδέθηκε με αλγοριθμικές μεθόδους βελτιστοποίησης, πολυπρακτορικά / πολυπαικτικά παίγνια και υπολογισμό ισορροπιών.

Σήμερα, η θεωρία παιγνίων αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την ανάλυση στρατηγικής συμπεριφοράς σε πολύπλοκα παίγνια. Η δύναμή της έγκειται στον συνδυασμό μαθηματικής αυστηρότητας και πρακτικής εφαρμοσιμότητας, επιτρέποντας τη μελέτη φαινομένων που εκτείνονται από την οικονομική θεωρία και τη διοίκηση επιχειρήσεων έως τη βιολογία, την πολιτική και την τεχνητή νοημοσύνη (Osborne, 2000).

1.3 Βασικές έννοιες

Η θεωρία παιγνίων βασίζεται σε ένα σύνολο θεμελιωδών εννοιών που επιτρέπουν την τυπική μοντελοποίηση στρατηγικών καταστάσεων και την ανάλυση της συμπεριφοράς λογικών, αλληλεπιδρώντων παικτών. Οι ακόλουθοι ορισμοί αποτελούν το αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο της παρούσας εργασίας και χρησιμοποιούνται συστηματικά στα επόμενα κεφάλαια.

Παίγνιο (*game*): ένα παίγνιο είναι μια τυποποιημένη αναπαράσταση μιας στρατηγικής κατάστασης, στην οποία δύο ή περισσότεροι παίκτες λαμβάνουν αποφάσεις που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και διαμορφώνουν από κοινού το τελικό αποτέλεσμα. Κάθε παίγνιο περιγράφεται από:

1. Το σύνολο των παικτών,
2. Το σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών κάθε παίκτη, και
3. Τις αποδόσεις που προκύπτουν από κάθε συνδυασμό στρατηγικών.

Παίκτης (*player / agent*): παίκτης είναι κάθε οντότητα που λαμβάνει στρατηγικές αποφάσεις και επιδιώκει τη μεγιστοποίηση της ωφέλειάς της. Μπορεί να είναι άτομο, επιχείρηση, κράτος, οργανισμός ή ακόμη και βιολογικός παράγοντας. Το βασικό χαρακτηριστικό του παίκτη είναι η ύπαρξη προτιμήσεων, στόχων και δυνατότητας επιλογής.

Ορθολογικότητα (*rationality*): η ορθολογικότητα αποτελεί βασική υπόθεση της θεωρίας παιγνίων και δηλώνει ότι κάθε παίκτης επιλέγει στρατηγικές που μεγιστοποιούν την ωφελιμότητά του, σύμφωνα με τις προτιμήσεις και τις πληροφορίες που διαθέτει. Η υπόθεση αυτή είναι προϋπόθεση για την ύπαρξη και την ερμηνεία της Ισορροπίας Nash.

Στρατηγική (*strategy*): στρατηγική είναι ένα πλήρες σχέδιο δράσης, το οποίο καθορίζει εκ των προτέρων την ενέργεια που θα επιλέξει ο παίκτης σε κάθε πιθανή κατάσταση του παιγνίου. Δεν αποτελεί μία απλή κίνηση, αλλά έναν πλήρη κανόνα λήψης αποφάσεων.

Προφίλ στρατηγικών (*strategy profile*): το προφίλ στρατηγικών είναι ο συνδυασμός των στρατηγικών που επιλέγουν όλοι οι παίκτες σε ένα παίγνιο. Αν ο παίκτης i επιλέγει στρατηγική s_i

τότε το προφίλ γράφεται ως $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$. Το προφίλ καθορίζει πλήρως την έκβαση του παιγνίου και αποτελεί τον πυρήνα των εννοιών της βέλτιστης απόκρισης και της Ισορροπίας Nash.

Αμιγής στρατηγική (*pure strategy*): η αμιγής στρατηγική συνίσταται στην πάγια επιλογή μιας συγκεκριμένης ενέργειας από το σύνολο των διαθέσιμων. Ο παίκτης που την υιοθετεί ενεργεί με απόλυτη συνέπεια χωρίς καμία τυχαιότητα.

Μικτή στρατηγική (*mixed strategy*): η μικτή στρατηγική ορίζεται ως κατανομή πιθανοτήτων πάνω στις διαθέσιμες αμιγείς στρατηγικές. Η χρήση τυχαιότητας επιτρέπει στον παίκτη να παραμένει απρόβλεπτος και επιτρέπει την ύπαρξη ισορροπίας ακόμη και σε παίγνια που δεν διαθέτουν ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές (Nash, 1950). Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί το παίγνιο *Matching Pennies*, όπου η βέλτιστη στρατηγική είναι η επιλογή των δύο ενεργειών με πιθανότητα 0,5.

Κυριαρχούμενη στρατηγική (*dominated strategy*): μια στρατηγική λέγεται κυριαρχούμενη όταν αποδίδει πάντα μικρότερη ή ίση ωφέλεια από κάποια άλλη διαθέσιμη στρατηγική, ανεξάρτητα από τις επιλογές των αντιπάλων. Οι κυριαρχούμενες στρατηγικές μπορούν να αποκλειστούν χωρίς βλάβη της γενικότητας, γεγονός που απλοποιεί σημαντικά την ανάλυση πολλών παιγνίων.

Αποδόσεις (*payoffs*): οι αποδόσεις εκφράζουν το όφελος ή το κόστος που αποκομίζει κάθε παίκτης από το αποτέλεσμα ενός παιγνίου. Αποτελούν αριθμητικές τιμές που αντανακλούν τις προτιμήσεις, τα κέρδη, τις ζημίες ή άλλες μορφές ωφέλειας.

Παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (*zero - sum game*): ένα παίγνιο είναι μηδενικού αθροίσματος όταν το άθροισμα των αποδόσεων όλων των παικτών ισούται με μηδέν σε κάθε δυνατό αποτέλεσμα. Το κέρδος του ενός παίκτη αποτελεί ακριβώς τη ζημία του άλλου. Πρόκειται για τυπική μορφή καθαρού ανταγωνισμού.

Συμμετρικά και ασύμμετρα παίγνια (*symmetric and asymmetric games*): ένα παίγνιο είναι συμμετρικό όταν όλοι οι παίκτες διαθέτουν τα ίδια σύνολα στρατηγικών και οι αποδόσεις εξαρτώνται μόνο από τις επιλεγμένες ενέργειες και όχι από την ταυτότητα του παίκτη. Αντίθετα,

στα ασύμμετρα παίγνια οι παίκτες διαφέρουν είτε ως προς τις διαθέσιμες στρατηγικές είτε ως προς τις αποδόσεις.

Συνεργατικά και μη συνεργατικά παίγνια (*cooperative and non - cooperative games*): στα συνεργατικά παίγνια, οι παίκτες μπορούν να συνάψουν δεσμευτικές συμφωνίες και να σχηματίσουν ομάδες συνεργασίας. Αντίθετα στα μη συνεργατικά παίγνια, η λήψη αποφάσεων είναι ατομική και οι συμφωνίες δεν θεωρούνται δεσμευτικές. Η θεωρία παιγνίων που αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία ανήκει κυρίως στην ανάλυση μη συνεργατικών παιγνίων.

***Bimatrix* παίγνια (*bimatrix games*):** ένα *bimatrix* παίγνιο είναι ένα στρατηγικό παίγνιο δύο παικτών στο οποίο οι αποδόσεις κάθε παίκτη αναπαρίστανται μέσω δύο πινάκων ίδιας διάστασης. Ο πρώτος πίνακας αντιστοιχεί στις αποδόσεις του παίκτη 1 και ο δεύτερος πίνακας στις αποδόσεις του παίκτη 2. Κάθε κελί, για έναν συνδυασμό στρατηγικών, περιέχει ένα ζεύγος αριθμών που εκφράζουν τις αντίστοιχες αποδόσεις των παικτών. Τα *bimatrix* παίγνια αποτελούν τη βασική κατηγορία παιγνίων δύο παικτών με γενικές (όχι απαραίτητα αντίθετες) αποδόσεις και αποτελούν το θεμέλιο για αλγοριθμικές μεθόδους υπολογισμού Ισορροπιών Nash, όπως ο αλγόριθμος *Lemke - Howson*.

Πολυπρακτορικά / πολυπαικτικά παίγνια: ως πολυπαικτικά (ή πολυπρακτορικά) παίγνια ορίζονται τα στρατηγικά παίγνια στα οποία συμμετέχουν περισσότεροι από δύο παίκτες. Κάθε παίκτης επιλέγει στρατηγική λαμβάνοντας υπόψη ότι η τελική έκβαση εξαρτάται από τις στρατηγικές όλων των υπολοίπων. Η ανάλυση πολυπαικτικών παιγνίων παρουσιάζει αυξημένη μαθηματική και υπολογιστική δυσκολία, καθώς ο αριθμός των στρατηγικών και η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνονται εκθετικά. Για τον λόγο αυτό, ο προσδιορισμός ισορροπιών και η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς σε τέτοια παίγνια συχνά απαιτούν αλγοριθμικές μεθόδους και υπολογιστικές προσεγγίσεις.

Παράσταση με πίνακα αποδόσεων (*payoff matrix*): τα παίγνια δύο παικτών παρουσιάζονται συνήθως με πίνακα αποδόσεων. Οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του πρώτου παίκτη και οι στήλες σε εκείνες του δεύτερου. Σε κάθε κελί του πίνακα εμφανίζονται οι αντίστοιχες αποδόσεις.

Πίνακας 1.3.1: παράδειγμα πίνακα αποδόσεων γενικής μορφής.

Παίκτης 1 / Παίκτης 2	Παίκτης 2 (X)	Παίκτης 2 (Y)
Παίκτης 1 (A)	(α, β)	(γ, δ)
Παίκτης 1 (B)	(ε, ζ)	(η, θ)

Ο πρώτος αριθμός κάθε ζεύγους αφορά την απόδοση του παίκτη 1 και ο δεύτερος την απόδοση του παίκτη 2. Παρότι πρόκειται για απλουστευμένη μορφή αναπαράστασης, ο πίνακας αποδόσεων αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της ανάλυσης στρατηγικών παιγνίων και τη βάση για τη μαθηματική διατύπωση εννοιών όπως η Ισορροπία Nash ή η κυριαρχία στρατηγικών (Osborne, 2000).

Ισορροπία Nash (*Nash Equilibrium*): η Ισορροπία Nash είναι ένα προφίλ στρατηγικών στο οποίο κανένας παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του αλλάζοντας μονομερώς τη στρατηγική του. Αποτελεί τη βασικότερη έννοια σταθερότητας της θεωρίας παιγνίων και θεμελιώνει την ορθολογική αλληλεπίδραση μεταξύ στρατηγικών παραγόντων.

Καλύτερη απόκριση (*best response*): η καλύτερη απόκριση ενός παίκτη είναι η στρατηγική που μεγιστοποιεί την απόδοσή του, δεδομένων των στρατηγικών που έχουν επιλέξει οι υπόλοιποι παίκτες. Η έννοια αυτή βρίσκεται στο θεμέλιο της Ισορροπίας Nash και αποτελεί το βασικό εργαλείο στον αλγοριθμικό υπολογισμό ισορροπιών.

Αποδοτικότητα κατά Pareto (*Pareto - efficiency*) και αναποτελεσματικότητα κατά Pareto: στη θεωρία παιγνίων, ένα προφίλ στρατηγικών είναι αποδοτικό κατά Pareto (*Pareto - efficient*) όταν δεν υπάρχει άλλη έκβαση που να βελτιώνει την απόδοση ενός παίκτη χωρίς να ζημιώνει κάποιον άλλον. Αντίθετα, είναι αναποτελεσματικό κατά Pareto όταν υπάρχει εναλλακτική λύση που προσφέρει μεγαλύτερο όφελος σε όλους.

Η βασική διαφορά με την **Ισορροπία Nash** έγκειται στο κίνητρο:

- **Ισορροπία Nash (ατομική σταθερότητα):** εξετάζει αν ένας παίκτης έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική μονομερώς. Περιγράφει μια σταθερή κατάσταση, ανεξάρτητα από το αν είναι καλή για το σύνολο.
- **Αποδοτικότητα Pareto (συλλογική ευημερία):** εξετάζει τη συνολική βελτιστοποίηση μέσω συντονισμένης δράσης όλων των παικτών.

Συνεπώς, μια Ισορροπία Nash δεν είναι απαραίτητα Pareto αποδοτική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το Δίλημμα του Φυλακισμένου, όπου η ισορροπία (Προδοσία, Προδοσία) είναι Pareto αναποτελεσματική, καθώς η αμοιβαία συνεργασία θα ωφελούσε και τους δύο, αλλά δεν επιλέγεται λόγω του ατομικού κινήτρου για προδοσία. Αντίστοιχα, μια Pareto αποδοτική έκβαση δεν αποτελεί πάντα ισορροπία, καθώς οι παίκτες συχνά έχουν κίνητρο να αποκλίνουν μονομερώς.

1.4 Κλασικά παραδείγματα

1.4.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου (*Prisoner's Dilemma*)

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου αποτελεί ίσως το πιο γνωστό παράδειγμα της θεωρίας παιγνίων και χρησιμοποιείται ευρέως για να αναδείξει την ένταση μεταξύ ατομικού και συλλογικού συμφέροντος.

Το δίλημμα ορίζεται ως εξής: δύο ύποπτοι για συμμετοχή σε έγκλημα συλλαμβάνονται και ανακρίνονται χωριστά. Οι αρχές δεν διαθέτουν επαρκή αποδεικτικά στοιχεία για βαριά καταδίκη και τους προσφέρουν μια συμφωνία:

1. Αν και οι δύο σιωπήσουν, καταδικάζονται μόνο για ένα μικρότερο αδίκημα και εκτίουν μια ήπια ποινή (π.χ. 1 έτος φυλάκιση).
2. Αν ο ένας ομολογήσει και ο άλλος σιωπήσει, τότε ο πρώτος απελευθερώνεται, ενώ ο δεύτερος τιμωρείται με τη μέγιστη ποινή (10 έτη).
3. Αν και οι δύο ομολογήσουν, τότε υπάρχουν επαρκή στοιχεία ώστε να καταδικαστούν με ποινή μέτριας βαρύτητας (5 έτη).

Πίνακας 1.4.1: πίνακας αποδόσεων στο Δίλημμα του Φυλακισμένου.

Παίκτης Α / Παίκτης Β	Παίκτης Β: Σιωπή	Παίκτης Β: Ομολογία
Παίκτης Α: Σιωπή	(-1, -1)	(-10, 0)
Παίκτης Α: Ομολογία	(0, -10)	(-5, -5)

Η ανάλυση του παιγνίου δείχνει ότι η ορθολογική στρατηγική για κάθε παίκτη είναι να ομολογήσει, καθώς αυτή η επιλογή τον προστατεύει από τη χειρότερη δυνατή κατάληξη (τη μέγιστη ποινή). Το αποτέλεσμα (Ομολογία, Ομολογία) αποτελεί Ισορροπία Nash, καθώς κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να μεταβάλλει μονομερώς τη στρατηγική του (Rapoport & Chammah, 1965).

Ωστόσο, το αποτέλεσμα αυτό είναι κοινωνικά αναποτελεσματικό, καθώς οδηγεί σε χειρότερη έκβαση για όλους συγκριτικά με τη σιωπή και των δύο. Το Δίλημμα του Φυλακισμένου αποτυπώνει με χαρακτηριστικό τρόπο τη σύγκρουση μεταξύ ατομικού ορθολογισμού και συλλογικού οφέλους, και αποτελεί θεμελιώδες υπόδειγμα για την κατανόηση της δυναμικής συνεργασίας και ανταγωνισμού (Osborne, 2000).

1.4.2 Το Κυνήγι του Ελαφιού (*Stag Hunt*)

Το Κυνήγι του Ελαφιού αποτελεί κλασικό παράδειγμα στη θεωρία παιγνίων που αναδεικνύει τη σημασία της συνεργασίας και του συντονισμού μεταξύ των παικτών.

Το σενάριο περιγράφει: δύο κυνηγούς που μπορούν είτε να συνεργαστούν για να κυνηγήσουν ένα ελάφι είτε να ενεργήσουν ανεξάρτητα κυνηγώντας λαγούς.

Το Κυνήγι του Ελαφιού αποφέρει μεγαλύτερο όφελος, αλλά απαιτεί απόλυτη συνεργασία, αν ένας εγκαταλείψει, η προσπάθεια αποτυγχάνει. Το κυνήγι του λαγού είναι λιγότερο αποδοτικό, αλλά ασφαλέστερο, καθώς μπορεί να πραγματοποιηθεί ατομικά.

Πίνακας 1.4.2: πίνακας αποδόσεων στο Κυνήγι του Ελαφιού (*Stag Hunt*).

Παίκτης Α / Παίκτης Β	Παίκτης Β: Ελάφι	Παίκτης Β: Λαγός
Παίκτης Α: Ελάφι	(10, 10)	(0, 3)

Παίκτης Α: Λαγός	(3, 0)	(3, 3)
-------------------------	--------	--------

Το παίγνιο διαθέτει δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές: (Ελάφι, Ελάφι) και (Λαγός, Λαγός). Η πρώτη είναι κοινωνικά πιο αποδοτική, αλλά απαιτεί εμπιστοσύνη και συντονισμό. Αντίθετα, η δεύτερη είναι σταθερή σε συνθήκες αβεβαιότητας ή έλλειψης συνεργασίας.

Το παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται ευρέως για να δείξει πώς η έλλειψη εμπιστοσύνης μπορεί να οδηγήσει σε λιγότερο αποτελεσματικές εκβάσεις, ακόμη και όταν η συνεργασία είναι εμφανώς πιο επωφελής (Osborne, 2000).

1.4.3 Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων (*Matching Pennies*)

Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα παιγνίου μηδενικού αθροίσματος, όπου το κέρδος του ενός παίκτη ισούται ακριβώς με τη ζημία του άλλου.

Το σενάριο ορίζεται ως εξής: δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα ανάμεσα στις δύο πλευρές ενός νομίσματος, «Κορώνα» ή «Γράμματα».

1. Αν οι επιλογές ταιριάζουν, κερδίζει ο παίκτης Α.
2. Αν διαφέρουν, κερδίζει ο παίκτης Β.

Πίνακας 1.4.3: πίνακας αποδόσεων στο *Matching Pennies*.

Παίκτης Α / Παίκτης Β	Παίκτης Β: Κορώνα	Παίκτης Β: Γράμματα
Παίκτης Α: Κορώνα	(1, -1)	(-1, 1)
Παίκτης Α: Γράμματα	(-1, 1)	(1, -1)

Το παίγνιο αυτό δεν διαθέτει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές. Αν ο παίκτης Α επιλέγει πάντα «Κορώνα», τότε ο παίκτης Β έχει κίνητρο να επιλέγει πάντα «Γράμματα». Αν όμως ο Β υιοθετήσει αυτή τη στρατηγική, ο Α θα στραφεί στα «Γράμματα» για να κερδίσει, και η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον.

Η ισορροπία επιτυγχάνεται μόνο μέσω μικτών στρατηγικών, όταν κάθε παίκτης επιλέγει «Κορώνα» ή «Γράμματα» με πιθανότητα 50%. Σε αυτή την περίπτωση, κανένας παίκτης δεν έχει

κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική του, καθώς το αποτέλεσμα είναι πλήρως απρόβλεπτο και οι αναμενόμενες αποδόσεις μηδενικές.

Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων αποτελεί τη θεμελιώδη απεικόνιση στρατηγικού ανταγωνισμού σε καταστάσεις απόλυτης σύγκρουσης συμφερόντων (Osborne, 2000).

1.4.4 Η Μάχη των Φύλων (*Battle of the Sexes*)

Η Μάχη των Φύλων αποτελεί ένα κλασικό παράδειγμα προβλήματος συντονισμού με αντικρουόμενες προτιμήσεις. Παρουσιάζει καταστάσεις όπου οι παίκτες επιθυμούν να συνεργαστούν, αλλά διαφωνούν σχετικά με τον τρόπο ή το πλαίσιο της συνεργασίας.

Το σενάριο περιγράφεται ως εξής: ένα ζευγάρι θέλει να περάσει την έξοδό του μαζί, αλλά διαφωνεί ως προς τη δραστηριότητα. Ο ένας προτιμά να πάει στο γήπεδο, ενώ ο άλλος στην όπερα. Παρά τη διαφωνία τους, και οι δύο προτιμούν να βρεθούν μαζί, ακόμη κι αν αυτό σημαίνει ότι θα κάνουν κάτι που δεν είναι η πρώτη τους επιλογή.

Πίνακας 1.4.4: πίνακας αποδόσεων στην Μάχη των Φύλων (*Battle of the Sexes*).

Παίκτης A / Παίκτης B	Παίκτης B: Γήπεδο	Παίκτης B: Όπερα
Παίκτης A: Γήπεδο	(2, 1)	(0, 0)
Παίκτης A: Όπερα	(0, 0)	(1, 2)

Το παίγνιο διαθέτει δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές:

- (Γήπεδο, Γήπεδο) και
- (Όπερα, Όπερα).

Επιπλέον, υπάρχει και μία ισορροπία σε μικτές στρατηγικές, όπου κάθε παίκτης επιλέγει με ορισμένη πιθανότητα τη δική του προτίμηση. Το βασικό πρόβλημα εδώ είναι ο συντονισμός: και οι δύο παίκτες επιθυμούν να βρεθούν στο ίδιο μέρος, αλλά έχουν διαφορετικές προτιμήσεις ως προς το ποιο θα είναι αυτό.

Η λύση επομένως δεν είναι προφανής και απαιτεί επικοινωνία ή κάποιο μηχανισμό συντονισμού για να αποφευχθεί η αναποτελεσματικότητα (Osborne, 2000).

1.4.5 Το παίγνιο Δειλίας (*Chicken Game*)

Το παίγνιο Δειλίας (ή παίγνιο του Κοτόπουλου) αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα στρατηγικής σύγκρουσης με αμοιβαίο ρίσκο. Χρησιμοποιείται για να περιγράψει καταστάσεις όπου δύο παίκτες έρχονται αντιμέτωποι και η αποφυγή της σύγκρουσης απαιτεί υποχώρηση τουλάχιστον από τον έναν (Rapoport & Chammah, 1966).

Το σενάριο περιγράφεται ως εξής: δύο οδηγοί κινούνται ο ένας προς τον άλλον στην ίδια λωρίδα. Αν κανείς δεν υποχωρήσει, συγκρούονται με καταστροφικά αποτελέσματα. Αν ένας από τους δύο στρίψει, αποφεύγεται η σύγκρουση, αλλά εκείνος που υποχώρησε θεωρείται «κοτόπουλο» και υφίσταται κοινωνικό ή συμβολικό κόστος. Αν και οι δύο στρίψουν, αποφεύγεται μεν η σύγκρουση, αλλά το αποτέλεσμα είναι μέτριο και για τους δύο.

Πίνακας 1.4.5: πίνακας αποδόσεων στο *Chicken Game*.

Παίκτης A / Παίκτης B	Παίκτης B: Συνεχίζει	Παίκτης B: Υποχωρεί
Παίκτης A: Συνεχίζει	(-10, -10)	(5, -5)
Παίκτης A: Υποχωρεί	(-5, 5)	(0, 0)

Το παίγνιο διαθέτει δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές:

- (Συνεχίζει, Υποχωρεί) και
- (Υποχωρεί, Συνεχίζει).

Οι δύο ισορροπίες εκφράζουν την ασυμμετρία του αποτελέσματος, ένας «κερδίζει» τη σύγκρουση, ενώ ο άλλος υποχωρεί. Παράλληλα, υπάρχει και μία ισορροπία σε μικτές στρατηγικές, που αντιπροσωπεύει την αβεβαιότητα και το ρίσκο που λαμβάνουν οι παίκτες όταν επιλέγουν στο όριο μεταξύ επιθετικότητας και υποχώρησης.

Το παίγνιο Δειλίας, χρησιμοποιείται συχνά ως μοντέλο για πολιτικές διαπραγματεύσεις, στρατιωτικές κρίσεις ή ανταγωνιστικές συμπεριφορές όπου η αποφασιστικότητα ενός μέρους μπορεί να εξαναγκάσει τον άλλο σε συμβιβασμό (Osborne, 2000).

1.5 Συμπεράσματα

Το πρώτο κεφάλαιο είχε ως στόχο να εισαγάγει τη λογική, το αντικείμενο και τη μεθοδολογία της θεωρίας παιγνίων. Μέσα από την ιστορική αναδρομή, αναδείχθηκε ο τρόπος με τον οποίο ένας σχετικά νέος επιστημονικός κλάδος εξελίχθηκε ραγδαία, μετατρέπόμενος σε βασικό εργαλείο ανάλυσης κοινωνικών, οικονομικών, πολιτικών και βιολογικών φαινομένων.

Η παρουσίαση των βασικών εννοιών, όπως το τι συνιστά ένα παίγνιο, ποιοι είναι οι παίκτες, πώς ορίζονται οι στρατηγικές (αμιγείς και μικτές) και με ποιον τρόπο αποτυπώνονται οι αποδόσεις, παρείχε το απαραίτητο εννοιολογικό υπόβαθρο για την κατανόηση της θεωρίας. Με τον τρόπο αυτό, διαμορφώθηκε το πλαίσιο ώστε ο αναγνώστης, ακόμη και χωρίς ιδιαίτερη μαθηματική εξοικείωση, να μπορεί να παρακολουθήσει με ευχέρεια την ανάλυση που ακολουθεί στα επόμενα κεφάλαια.

Τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν: το Δίλημμα του Φυλακισμένου, το Κυνήγι του Ελαφιού, το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων, η Μάχη των Φύλων και το παίγνιο Δειλίας ανέδειξαν τον πλούτο και την ποικιλία των στρατηγικών καταστάσεων που μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω της θεωρίας παιγνίων. Κάθε παράδειγμα ανέδειξε διαφορετική διάσταση της στρατηγικής αλληλεπίδρασης:

- Το Δίλημμα του Φυλακισμένου τη σύγκρουση μεταξύ ατομικού και συλλογικού συμφέροντος,
- Το Κυνήγι του Ελαφιού τη σημασία της εμπιστοσύνης και του συντονισμού,
- Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων τον καθαρό ανταγωνισμό και τη σταθερότητα των μικτών στρατηγικών,
- Η Μάχη των Φύλων τα προβλήματα συνεννόησης υπό διαφορετικές προτιμήσεις,
- Και το παίγνιο Δειλίας, την ένταση ανάμεσα στο ρίσκο και στη συμβιβαστική στρατηγική.

Συνοψίζοντας, το κεφάλαιο αυτό ανέδειξε ότι η θεωρία παιγνίων συνιστά ένα τυποποιημένο και ισχυρό αναλυτικό πλαίσιο για τη μελέτη στρατηγικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ ορθολογικών παικτών. Παρουσιάστηκαν οι θεμελιώδεις έννοιες που διέπουν τη λήψη αποφάσεων σε παίγνια αμοιβαίας εξάρτησης, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο οι δομές των παιγνίων διαμορφώνουν τα

κίνητρα και τις προβλεπόμενες επιλογές των συμμετεχόντων. Η συστηματική αυτή εισαγωγή θέτει το αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο για το δεύτερο κεφάλαιο όπου εξετάζεται διεξοδικά η έννοια της Ισορροπίας Nash, η οποία αποτελεί το κεντρικό κριτήριο σταθερότητας και προβλεψιμότητας στις στρατηγικές καταστάσεις.

Κεφάλαιο 2: Η Ισορροπία Nash

2.1 Εισαγωγή

Η έννοια της Ισορροπίας Nash αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις πυλώνες της θεωρίας παιγνίων και της μαθηματικής ανάλυσης στρατηγικών αλληλεπιδράσεων. Σύμφωνα με τον Osborne (2000) «Η Ισορροπία Nash περιγράφει μια κατάσταση στην οποία κάθε παίκτης επιλέγει τη βέλτιστη στρατηγική του, λαμβάνοντας υπόψη τις επιλογές των υπολοίπων». Με άλλα λόγια, κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από τη στρατηγική του, δεδομένων των στρατηγικών των άλλων.

Η έννοια αυτή, που εισήχθη από τον John Nash (1950), προσέφερε ένα γενικευμένο μαθηματικό πλαίσιο για την ανάλυση στρατηγικής συμπεριφοράς σε παίγνια όπου οι αποδόσεις των παικτών αλληλεξαρτώνται. Στο πλαίσιο της Ισορροπίας Nash, κάθε παίκτης επιλέγει στρατηγική η οποία μεγιστοποιεί την απόδοσή του δεδομένων των επιλογών των υπολοίπων, χωρίς να απαιτείται καμία μορφή συνεννόησης ή επικοινωνίας μεταξύ των παικτών. Η σταθερότητα της ισορροπίας προκύπτει από το γεγονός ότι, δεδομένων των στρατηγικών των υπολοίπων, καμία εναλλακτική στρατηγική δεν προσφέρει σε κανέναν παίκτη μεγαλύτερη απόδοση (Osborne, 2000).

Η συμβολή του Nash υπήρξε καθοριστική, καθώς διεύρυνε τη μελέτη πέρα από τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, καθιστώντας δυνατή την ανάλυση στρατηγικών αλληλεπιδράσεων όπου τα συμφέροντα των παικτών δεν είναι πλήρως αντικρουόμενα. Έκτοτε, η έννοια της Ισορροπίας Nash κατέχει κεντρική θέση στη σύγχρονη θεωρητική και εφαρμοσμένη έρευνα, με πλήθος επεκτάσεων σε επιστημονικά πεδία όπως η οικονομία, η πολιτική, η βιολογία και η πληροφορική.

Αξίζει ωστόσο να υπογραμμιστεί ότι η Ισορροπία Nash δεν ταυτίζεται με το κοινωνικά βέλτιστο αποτέλεσμα. Συχνά, η σταθερότητα που εξασφαλίζει οδηγεί σε αναποτελεσματικές εκβάσεις για

το σύνολο των παικτών, χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το Δίλημμα του Φυλακισμένου, όπου οι ορθολογικές επιλογές οδηγούν σε συνολικά υποδεέστερη έκβαση. Η διάκριση αυτή ανάμεσα στη σταθερότητα και τη συλλογική αποτελεσματικότητα βρίσκεται στο επίκεντρο της θεωρητικής ανάλυσης της Ισορροπίας Nash (Osborne, 2000).

Συνολικά, η Ισορροπία Nash προσφέρει ένα συνεκτικό και αυστηρό μαθηματικό πλαίσιο για την κατανόηση της στρατηγικής συμπεριφοράς ορθολογικών παικτών σε καταστάσεις όπου οι αποδόσεις τους αλληλεξαρτώνται. Η κατανόηση αυτής της έννοιας αποτελεί το θεμέλιο για τη μελέτη των επόμενων ενοτήτων, όπου θα παρουσιαστεί η θεωρητική διατύπωση, οι βασικές ιδιότητες και οι εφαρμογές της σε σύνθετα στρατηγικά παίγνια.

2.2 Τυπικός ορισμός της Ισορροπίας Nash

Για να οριστεί με ακρίβεια η έννοια της Ισορροπίας Nash, ξεκινάμε με τη γενική δομή ενός στρατηγικού παιγνίου.

Ένα παίγνιο με n παίκτες περιγράφεται από την τριάδα: $G = (N, (S_i) : i \in N, (u_i) : i \in N)$,
(2.1)

όπου:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ είναι το σύνολο των παικτών,
- S_i είναι το σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών του παίκτη i , με $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ να αποτελεί τον χώρο όλων των δυνατών προφίλ στρατηγικών,
- $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση απόδοσης (*payoff function*) του παίκτη i , η οποία αποδίδει σε κάθε συνδυασμό στρατηγικών έναν πραγματικό αριθμό που αντιπροσωπεύει την ωφέλειά του.
- Συμβολισμός S_{-i} : Για κάθε παίκτη i , συμβολίζουμε με $S_{-i} = (S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n)$ το προφίλ στρατηγικών όλων των υπόλοιπων παικτών εκτός του i , το οποίο ανήκει στον χώρο $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$. Έτσι, ένα πλήρες προφίλ στρατηγικών $s \in S$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως $s = (s_i, s_{-i})$.

Ορισμός (Ισορροπία Nash): ένα προφίλ στρατηγικών $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*) = (s_i^*, s_{-i}^*)$ αποτελεί Ισορροπία Nash εάν, για κάθε παίκτη $i \in N$ ισχύει:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i \quad (2.2)$$

όπου s_{-i}^* είναι το προφίλ στρατηγικών ισορροπίας των υπόλοιπων $n-1$ παικτών. Δηλαδή, δεδομένων των στρατηγικών των υπολοίπων παικτών s_{-i}^* , ο παίκτης i δεν μπορεί να επιτύχει μεγαλύτερη απόδοση μεταβάλλοντας μονομερώς τη δική του στρατηγική s_i . Η Ισορροπία Nash, επομένως, εκφράζει ένα σημείο αμοιβαίας σταθερότητας, όπου η στρατηγική s_i^* κάθε παίκτη αποτελεί ταυτόχρονα βέλτιστη απόκριση (*best response*) στις επιλογές s_{-i}^* των αντιπάλων του (Osborne, 2000).

Ερμηνεία και σημασία της Ισορροπίας Nash: η Ισορροπία Nash εκφράζει μια κατάσταση αμοιβαίας συνέπειας και σταθερότητας. Κάθε παίκτης ενεργεί ορθολογικά, επιλέγοντας τη στρατηγική s_i^* που μεγιστοποιεί τη δική του απόδοση, με δεδομένες τις επιλογές s_{-i}^* των υπολοίπων. Σε αυτό το σημείο, καμία μονομερής αλλαγή δεν μπορεί να βελτιώσει την ωφέλεια κανενός παίκτη.

Η υπόθεση της ορθολογικότητας: η ύπαρξη Ισορροπίας Nash προϋποθέτει ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και ότι αυτή η ορθολογικότητα είναι κοινή γνώση. Κάθε παίκτης γνωρίζει ότι οι υπόλοιποι επιδιώκουν τη μεγιστοποίηση της απόδοσής τους, γνωρίζει ότι εκείνοι γνωρίζουν το ίδιο, και αυτό το γεγονός είναι κοινή γνώση μεταξύ τους. Η αμοιβαία αυτή επίγνωση θεμελιώνει τη σταθερότητα των προσδοκιών και επιτρέπει τη συγκρότηση σημείων ισορροπίας.

Η έννοια της βέλτιστης απόκρισης: Η Ισορροπία Nash μπορεί επίσης να διατυπωθεί μέσω της έννοιας της βέλτιστης απόκρισης (*best response*). Η στρατηγική s_i^* ενός παίκτη i είναι βέλτιστη απόκριση στις στρατηγικές των υπολοίπων παικτών, οι οποίες συμβολίζονται με το διάνυσμα $s_{-i}^* = (s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$, αν:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \forall s_i \in S_i. \quad (2.3)$$

Τότε, ένα σημείο $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ είναι Ισορροπία Nash εάν κάθε στρατηγική s_i^* είναι βέλτιστη απόκριση στις στρατηγικές των άλλων παικτών s_{-i}^* . Η μορφή αυτή του ορισμού καθιστά πιο διαφανή τη λογική της ισορροπίας ως σημείο αμοιβαίων βέλτιστων αποκρίσεων.

Παρατήρηση: παρότι ο ορισμός της Ισορροπίας Nash αναφέρεται εδώ σε αμιγείς στρατηγικές, υπάρχουν παίγνια στα οποία δεν υφίσταται τέτοιο σημείο ισορροπίας. Για τον λόγο αυτό, ο John Nash (1950) εισήγαγε τη γενίκευση της έννοιας σε μικτές στρατηγικές, δηλαδή σε κατανομές πιθανοτήτων πάνω στις διαθέσιμες αμιγείς στρατηγικές. Η προέκταση αυτή εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον μίας Ισορροπίας Nash σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο, όπως θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

2.3 Παραδείγματα Ισορροπίας Nash

2.3.1 Το Δίλημμα του Φυλακισμένου (*Prisoner's Dilemma*)

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου αποτελεί ένα από τα πιο εμβληματικά και θεμελιώδη παραδείγματα της θεωρίας παιγνίων. Αναδεικνύει με απλό τρόπο τη σύγκρουση ανάμεσα στον ατομικό ορθολογισμό και το συλλογικό συμφέρον και έχει καθιερωθεί ως σημείο αναφοράς στη σχετική βιβλιογραφία. Χρησιμοποιείται εκτενώς για την κατανόηση της στρατηγικής αλληλεπίδρασης σε μη συνεργατικά παίγνια, ιδίως σε παίγνια δύο παικτών. Η ανάλυσή του δείχνει πώς η επιδίωξη του προσωπικού οφέλους μπορεί να οδηγήσει σε μια σταθερή, αλλά συνολικά υποδεέστερη έκβαση για όλους (Rapoport & Chammah, 1965).

2.3.1.1 Περιγραφή του παιγνίου: δύο ύποπτοι, οι Α και Β, συλλαμβάνονται και ανακρίνονται χωριστά για ένα σοβαρό αδίκημα. Οι αρχές, χωρίς επαρκή αποδεικτικά στοιχεία για την καταδίκη τους, προσφέρουν σε καθέναν από αυτούς μια συμφωνία:

1. Αν και οι δύο σιωπήσουν (Σ), καταδικάζονται για ένα μικρότερο αδίκημα (1 έτος φυλάκιση).
2. Αν ο ένας ομολογήσει (Ο) και ο άλλος σιωπήσει (Σ), ο ομολογών απαλλάσσεται, ενώ ο άλλος λαμβάνει τη μέγιστη ποινή (10 έτη).

3. Αν και οι δύο ομολογήσουν (Ο), καταδικάζονται σε ποινή μέτριας βαρύτητας (5 έτη).

Οι στρατηγικές επιλογές των παικτών είναι επομένως δύο:

- Ομολογία (Ο)
- Σιωπή (Σ)

Οι αποδόσεις εκφράζονται σε “μονάδες ωφέλειας” (όσο μικρότερη η ποινή, τόσο υψηλότερη η ωφέλεια).

Πίνακας 2.3.1: πίνακας αποδόσεων στο Δίλημμα του Φυλακισμένου (επανάληψη του πίνακα 1.4.1).

Παίκτης Α / Παίκτης Β	Σιωπή (Σ)	Ομολογία (Ο)
Σιωπή (Σ)	(-1, -1)	(-10, 0)
Ομολογία (Ο)	(0, -10)	(-5, -5)

Οι τιμές είναι ενδεικτικές, αλλά αποτυπώνουν τη σχετική προτίμηση κάθε παίκτη: μικρότερη αρνητική τιμή σημαίνει καλύτερο αποτέλεσμα (λιγότερη ποινή).

2.3.1.2 Ανάλυση της ισορροπίας: για να εντοπιστεί η Ισορροπία Nash, εξετάζουμε τις βέλτιστες αποκρίσεις κάθε παίκτη.

1. Αν ο παίκτης Β επιλέξει Σιωπή (Σ):

Ο παίκτης Α συγκρίνει τις αποδόσεις του:

- a. Αν επιλέξει Σ $\rightarrow -1$
- b. Αν επιλέξει Ο $\rightarrow 0$

Επομένως, η βέλτιστη απόκριση του Α είναι η Ομολογία (Ο).

2. Αν ο παίκτης Β επιλέξει Ομολογία (Ο):

Ο παίκτης Α συγκρίνει:

- a. Αν επιλέξει Σ $\rightarrow -10$
- b. Αν επιλέξει Ο $\rightarrow -5$

Και πάλι, η βέλτιστη απόκριση είναι η Ομολογία (Ο).

Η ίδια λογική ισχύει συμμετρικά και για τον παίκτη Β.

Συνεπώς, το ζεύγος στρατηγικών (Ομολογία, Ομολογία) αποτελεί Ισορροπία Nash, καθώς κανείς από τους δύο παίκτες δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από αυτή τη στρατηγική.

2.3.1.3 Ερμηνευτική προσέγγιση: η Ισορροπία Nash του παιγνίου, δηλαδή η επιλογή «ομολογία» και από τους δύο είναι σταθερή, αλλά όχι κοινωνικά βέλτιστη. Παρότι κάθε παίκτης ενεργεί ορθολογικά, επιδιώκοντας τη μέγιστη ατομική του ωφέλεια, το αποτέλεσμα είναι χειρότερο για όλους σε σύγκριση με την αμοιβαία συνεργασία (Σιωπή, Σιωπή).

Το παίγνιο αυτό καταδεικνύει ένα θεμελιώδες συμπέρασμα της θεωρίας παιγνίων: η Ισορροπία Nash στο Δίλημμα του Φυλακισμένου είναι *Pareto* - αναποτελεσματική. Ο ατομικός ορθολογισμός οδηγεί τους παίκτες σε μια ισορροπία όπου κανείς δεν έχει κίνητρο να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του, ωστόσο το αποτέλεσμα είναι υποδεέστερο για αμφοτέρους σε σχέση με μια *Pareto* - βελτιωμένη επιλογή. Γι' αυτό το Δίλημμα του Φυλακισμένου αποτελεί κεντρικό μοντέλο για την κατανόηση της δυναμικής των μη συνεργατικών παιγνίων της Ισορροπίας Nash.

Παρατήρηση: το Δίλημμα του Φυλακισμένου χρησιμοποιείται εκτεταμένα ως πρότυπο μοντέλο κοινωνικών και οικονομικών αλληλεπιδράσεων, στις οποίες η έλλειψη εμπιστοσύνης και επικοινωνίας οδηγεί σε μη συνεργατικές λύσεις. Ενδεικτικά, το παράδειγμα αυτό εμφανίζεται σε περιπτώσεις όπως:

- Ο ανταγωνισμός επιχειρήσεων μέσω τιμών ή διαφημίσεων,
- Τα στρατηγικά διλήμματα εξοπλισμών μεταξύ κρατών,
- Και τα περιβαλλοντικά ζητήματα, όπως η υπερεκμετάλλευση κοινών πόρων.

Παρότι το αποτέλεσμα του παιγνίου είναι σταθερό, καθώς κανείς από τους παίκτες δεν έχει κίνητρο να αλλάξει μονομερώς τη στρατηγική του, η ανάλυση δείχνει ότι η Ισορροπία Nash μπορεί να είναι αναποτελεσματική από άποψη συλλογικής ωφέλειας. Ακριβώς αυτή η ασυμφωνία ανάμεσα στην ατομική σταθερότητα και τη συλλογική αποτελεσματικότητα καθιστά το Δίλημμα του Φυλακισμένου θεμελιώδες παράδειγμα στη θεωρία παιγνίων.

Συνοψίζοντας: το Δίλημμα του Φυλακισμένου αποτελεί το πιο χαρακτηριστικό παίγνιο όπου η Ισορροπία Nash είναι σταθερή αλλά κοινωνικά αναποτελεσματική. Αποτυπώνει την ουσία των μη συνεργατικών παιγνίων και θέτει το θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη μηχανισμών συνεργασίας, όπως η επαναληπτική αλληλεπίδραση και η εξελικτική σταθερότητα, που αναπτύσσονται σε επόμενα κεφάλαια.

2.3.2 Το Κυνήγι του Ελαφιού (*Stag Hunt*)

Το Κυνήγι του Ελαφιού, γνωστό και ως παίγνιο συντονισμού, αποτελεί ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά παραδείγματα παιγνίων όπου η επιτυχία εξαρτάται από τον βαθμό συντονισμού και εμπιστοσύνης μεταξύ των παικτών. Το παράδειγμα αποδίδεται αρχικά στον Jean - Jacques Rousseau στο έργο του *Discourse on the Origin and Basis of Inequality Among Men* (1755), όπου χρησιμοποιήθηκε ως μεταφορά για τη μετάβαση από την ατομική στη συλλογική δράση. Στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων, το μοντέλο αυτό αναδεικνύει τη σημασία των κοινών προσδοκιών και της αμοιβαίας εξάρτησης στη λήψη στρατηγικών αποφάσεων (Osborne, 2000).

2.3.2.1 Περιγραφή του παιγνίου: δύο κυνηγοί, ο Α και ο Β, μπορούν είτε να συνεργαστούν για να κυνηγήσουν ένα ελάφι (Ε) είτε να ενεργήσουν ανεξάρτητα κυνηγώντας έναν λαγό (Λ). Το ελάφι αποδίδει υψηλή ωφέλεια, αλλά η σύλληψή του απαιτεί συνεργασία και από τους δύο. Αν ένας εγκαταλείψει για να κυνηγήσει λαγό, εξασφαλίζει μια μικρότερη, αλλά σίγουρη, ατομική απόδοση, ενώ στερεί από τον άλλον τη δυνατότητα επιτυχίας.

Οι στρατηγικές κάθε παίκτη είναι επομένως:

- Ελάφι (Ε) - συνεργατική στρατηγική,
- Λαγός (Λ) - ατομική στρατηγική.

Πίνακας 2.3.2: πίνακας αποδόσεων στο Κυνήγι του Ελαφιού (επανάληψη πίνακα 1.4.2).

Παίκτης Α / Παίκτης Β	Ελάφι (Ε)	Λαγός (Λ)
Ελάφι (Ε)	(4, 4)	(0, 3)
Λαγός (Λ)	(3, 0)	(3, 3)

Οι τιμές είναι ενδεικτικές και εκφράζουν το επίπεδο ωφέλειας κάθε παίκτη: η τιμή 4 αντιστοιχεί στο μέγιστο συλλογικό όφελος μέσω συνεργασίας, ενώ η 3 στην ασφαλή, ατομική επιλογή.

2.3.2.2 Ανάλυση των Ισορροπιών Nash: για να εντοπιστούν τα σημεία Ισορροπίας Nash, εξετάζονται οι βέλτιστες αποκρίσεις κάθε παίκτη:

1. Αν ο παίκτης B επιλέξει Ελάφι (E):

Ο παίκτης A συγκρίνει τις αποδόσεις του:

a. Αν επιλέξει E $\rightarrow 4$

b. Αν επιλέξει Λ $\rightarrow 3$

Επομένως, η βέλτιστη απόκριση του A είναι Ελάφι (E).

2. Αν ο παίκτης B επιλέξει Λαγό (Λ):

Ο παίκτης A συγκρίνει:

a. Αν επιλέξει E $\rightarrow 0$

b. Αν επιλέξει Λ $\rightarrow 3$

Τότε η βέλτιστη απόκριση του A είναι Λαγός (Λ).

Η συμμετρική ανάλυση για τον παίκτη B οδηγεί στο ίδιο συμπέρασμα. Συνεπώς, υπάρχουν δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές: (Ελάφι, Ελάφι), (Λαγός, Λαγός).

2.3.2.3 Ερμηνευτική προσέγγιση: η ύπαρξη δύο Ισορροπιών Nash αποκαλύπτει τη διττή φύση του παιγνίου: η στρατηγική (Λαγός, Λαγός) είναι ασφαλής αλλά λιγότερο αποδοτική, ενώ η (Ελάφι, Ελάφι) είναι κοινωνικά βέλτιστη αλλά απαιτεί εμπιστοσύνη και αμοιβαία δέσμευση. Από μαθηματική άποψη, και οι δύο ισορροπίες είναι σταθερές έναντι μονομερών αποκλίσεων. Ωστόσο, από κοινωνική σκοπιά, το (E, E) είναι *Pareto* - βέλτιστο, δηλαδή καμία πλευρά δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή της χωρίς να ζημιώσει την άλλη.

Αντίθετα, το (Λ, Λ) εξασφαλίζει μεγαλύτερη στρατηγική ασφάλεια, αφού αποφεύγει τον κίνδυνο αποτυχίας λόγω έλλειψης συνεργασίας.

2.3.2.4 Θεωρητική σημασία και εφαρμογές: το παίγνιο συντονισμού εκφράζει καταστάσεις όπου η επιτυχία δεν εξαρτάται από την επιθετικότητα ή την υπεροχή, αλλά από τη συμβατότητα των στρατηγικών. Τυπικές εφαρμογές του περιλαμβάνουν:

- **Οικονομικά πρότυπα συντονισμού**, όπως η επιλογή κοινών τεχνολογικών προτύπων ή πλατφορμών.
- **Κοινωνικά δίκτυα**, όπου η αξία ενός συστήματος εξαρτάται από τον αριθμό των συμμετεχόντων.
- **Πολιτικά και θεσμικά συστήματα**, στα οποία η σταθερότητα βασίζεται στην κοινή συμμόρφωση σε κανόνες.

Σε αντίθεση με το Δίλημμα του Φυλακισμένου, εδώ η συνεργασία είναι εφικτή και ωφέλιμη, ωστόσο η επίτευξή της προϋποθέτει συντονισμό και αμοιβαία εμπιστοσύνη.

Συνοψίζοντας: το παίγνιο συντονισμού δείχνει ότι η Ισορροπία Nash μπορεί να εκφράζει είτε ασφαλή είτε αποδοτική σταθερότητα, ανάλογα με τις προσδοκίες των παικτών. Η επιλογή μεταξύ αυτών των ισορροπιών αποτελεί αντικείμενο μελέτης σε επόμενα κεφάλαια.

2.3.3 Η Μάχη των Φύλων (*Battle of the Sexes*)

Η Μάχη των Φύλων αποτελεί ένα από τα πλέον χαρακτηριστικά παραδείγματα στη θεωρία παιγνίων, καθώς καταδεικνύει την ένταση μεταξύ σύγκρουσης προτιμήσεων και ανάγκης συντονισμού. Ανήκει στην κατηγορία των παιγνίων συντονισμού με αντικρουόμενες προτιμήσεις (*coordination games with conflicting interests*), όπου οι παίκτες επιδιώκουν να επιλέξουν την ίδια ενέργεια, αλλά διαφωνούν ως προς το ποια κοινή επιλογή είναι προτιμότερη.

Το παράδειγμα παρουσιάζεται εκτενώς στο σύγγραμμα του Martin J. Osborne: *An Introduction to Game Theory* (2000), ως κλασική περίπτωση παιγνίου δύο παικτών με πολλαπλές Ισορροπίες Nash. Η ανάλυσή του τονίζει τη σημασία της επικοινωνίας, των προσδοκιών και των θεσμικών μηχανισμών στη διαμόρφωση σταθερών στρατηγικών συμπεριφορών.

2.3.3.1 Περιγραφή του παιγνίου: ένα ζευγάρι προσπαθεί να αποφασίσει πού θα περάσει το βράδυ του. Η παίκτρια Α προτιμά να πάει στην Όπερα (Ο), ενώ ο παίκτης Β προτιμά να παρακολουθήσει Ποδόσφαιρο (Π). Παρά τις διαφορετικές προτιμήσεις, και οι δύο προτιμούν να είναι μαζί παρά χωριστά.

Οι στρατηγικές επιλογές για κάθε παίκτη είναι:

- $O \rightarrow \text{Όπερα}$
- $\Pi \rightarrow \text{Ποδόσφαιρο}$

Πίνακας 2.3.3: πίνακας αποδόσεων στην Μάχη των Φύλων (*Battle of the Sexes*).

Παίκτης A / Παίκτης B	Όπερα (O)	Ποδόσφαιρο (Π)
Όπερα (O)	(3, 2)	(0, 0)
Ποδόσφαιρο (Π)	(0, 0)	(2, 3)

Οι αποδόσεις αντικατοπτρίζουν ότι: κάθε παίκτης απολαμβάνει περισσότερο να είναι μαζί με τον άλλον (π.χ. 3 ή 2) παρά να είναι μόνος (0). Αλλά έχει προτίμηση για τη δική του επιλογή (3 για τον αγαπημένο του χώρο διασκέδασης, 2 για τη λιγότερο αγαπητή).

2.3.3.2 Ανάλυση Ισορροπίας Nash: για να εντοπιστούν οι Ισορροπίες Nash, εξετάζουμε τις βέλτιστες αποκρίσεις:

1. Αν ο παίκτης B επιλέξει Όπερα (O):
Ο παίκτης A συγκρίνει τις αποδόσεις του:
 - a. Όπερα (O) $\rightarrow 3$
 - b. Ποδόσφαιρο (Π) $\rightarrow 0$

$\rightarrow$ Βέλτιστη απόκριση: Όπερα (O).
2. Αν ο παίκτης B επιλέξει Ποδόσφαιρο (Π):
Ο παίκτης A συγκρίνει:
 - a. Όπερα (O) $\rightarrow 0$
 - b. Ποδόσφαιρο (Π) $\rightarrow 2$

$\rightarrow$ Βέλτιστη απόκριση: Ποδόσφαιρο (Π).

Η ανάλυση για τον παίκτη B είναι συμμετρική:

- Αν ο A επιλέξει Όπερα $\rightarrow$ βέλτιστη απόκριση του B είναι Όπερα ($2 > 0$),
- Αν ο A επιλέξει Ποδόσφαιρο $\rightarrow$ βέλτιστη απόκριση του B είναι Ποδόσφαιρο ($3 > 0$).

Έτσι, προκύπτουν δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές: (Όπερα, Όπερα) , (Ποδόσφαιρο, Ποδόσφαιρο).

2.3.3.3 Ερμηνεία των αποτελεσμάτων: το παίγνιο αυτό χαρακτηρίζεται από πολλαπλές σταθερές καταστάσεις, στις οποίες κανείς από τους παίκτες δεν έχει λόγο να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του. Ωστόσο, επειδή οι παίκτες διαφωνούν ως προς το ποιο αποτέλεσμα προτιμούν, προκύπτει πρόβλημα συντονισμού. Και οι δύο θέλουν να συναντηθούν στο ίδιο σημείο, αλλά το ποιο σημείο θα επιλεγεί εξαρτάται από το ποιος επηρεάζει τις προσδοκίες του άλλου.

Αν υπάρχει επικοινωνία, η συνεργασία επιτυγχάνεται εύκολα. Αν όμως οι παίκτες ενεργούν χωρίς συνεννόηση, η πιθανότητα μη συντονισμού και κατά συνέπεια μηδενικής ωφέλειας αυξάνεται σημαντικά.

2.3.3.4 Θεωρητική σημασία: η Μάχη των Φύλων είναι θεμελιώδης, γιατί εισάγει το πρόβλημα επιλογής μεταξύ πολλαπλών Ισορροπιών Nash. Σε αντίθεση με το Δίλημμα του Φυλακισμένου, όπου υπάρχει μία αλλά υποβέλτιστη ισορροπία, εδώ υπάρχουν δύο ισορροπίες, καθεμία βέλτιστη για διαφορετικό παίκτη. Η θεωρητική πρόκληση δεν είναι η ύπαρξη ισορροπίας, αλλά η επιλογή ανάμεσά τους.

Συνοψίζοντας: η Μάχη των Φύλων αποκαλύπτει ότι η Ισορροπία Nash δεν είναι πάντα μοναδική. Όταν οι παίκτες έχουν κοινό συμφέρον για συντονισμό, αλλά αντικρουόμενες προτιμήσεις για το αποτέλεσμα, η θεωρία παιγνίων δείχνει ότι η σταθερότητα από μόνη της δεν επαρκεί. Απαιτείται μηχανισμός επιλογής ισορροπίας, ικανός να εξασφαλίσει τον συντονισμό των παικτών. Το παίγνιο αυτό λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στα απλά παίγνια στρατηγικής αλληλεπίδρασης και στα πιο σύνθετα μοντέλα συντονισμού και συνεννόησης που αναλύονται στα επόμενα κεφάλαια.

2.3.4 Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων (*Matching Pennies*)

Το *Matching Pennies* (ή παίγνιο Αντιστοίχισης Κερμάτων) αποτελεί το κλασικότερο παράδειγμα καθαρά ανταγωνιστικού παιγνίου στη θεωρία παιγνίων. Πρόκειται για ένα μη συνεργατικό παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος, όπου το κέρδος του ενός συνεπάγεται ισόποση απώλεια για τον άλλον.

Η ανάλυσή του είναι θεμελιώδης, καθώς δείχνει ότι σε ορισμένες περιπτώσεις δεν υφίσταται Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, και ότι η σταθερότητα επιτυγχάνεται μόνο μέσω μικτών στρατηγικών.

2.3.4.1 Περιγραφή του παίγνιου: δύο παίκτες, ο A και ο B, έχουν από ένα νόμισμα και καλούνται να επιλέξουν ταυτόχρονα αν θα το δείξουν με την όψη του Κορώνα (Κ) ή του Γράμματα (Γ).

Οι κανόνες είναι οι εξής:

1. Αν τα νομίσματα ταιριάζουν (και οι δύο δείχνουν Κ ή και οι δύο δείχνουν Γ), ο παίκτης Α κερδίζει και ο Β χάνει.
2. Αν τα νομίσματα διαφέρουν, ο παίκτης Β κερδίζει και ο Α χάνει.

Το παίγνιο είναι πλήρως ανταγωνιστικό: το όφελος του ενός είναι ακριβώς η ζημία του άλλου.

Πίνακας 2.3.4: πίνακας αποδόσεων στο *Matching Pennies* (επανάληψη του πίνακα 1.4.3).

Παίκτης A / Παίκτης B	Κορώνα (Κ)	Γράμματα (Γ)
Κορώνα (Κ)	(1, -1)	(-1, 1)
Γράμματα (Γ)	(-1, 1)	(1, -1)

Οι αποδόσεις εκφράζουν τη φύση του παιγνίου: το άθροισμα των κερδών είναι πάντα μηδενικό, δηλαδή $u_1 + u_2 = 0$. **(2.4)**

2.3.4.2 Ανάλυση των στρατηγικών αποκρίσεων: ας εξετάσουμε τις βέλτιστες αποκρίσεις κάθε παίκτη:

- Αν ο παίκτης Β επιλέξει Κορώνα (Κ), τότε ο παίκτης Α προτιμά επίσης Κορώνα (Κ) (κερδίζει 1 αντί για -1).
- Αν ο παίκτης Β επιλέξει Γράμματα (Γ), τότε ο παίκτης Α προτιμά Γράμματα (Γ).

Άρα, ο Α επιδιώκει να αντιγράψει τη στρατηγική του Β.

Αντίστροφα:

- Αν ο παίκτης A επιλέξει Κορώνα (Κ), τότε ο παίκτης B προτιμά Γράμματα (Γ) (κερδίζει 1 αντί για -1).
- Αν ο παίκτης A επιλέξει Γράμματα (Γ), τότε ο B προτιμά Κορώνα (Κ).

Έτσι, ο B επιδιώκει να αντικρούσει τη στρατηγική του A. Συνεπώς, το αποτέλεσμα είναι ένας κύκλος αποκρίσεων χωρίς σταθερό σημείο.

2.3.4.3 Απουσία Ισορροπίας Nash σε αμιγείς στρατηγικές: κανένα από τα τέσσερα προφίλ στρατηγικών δεν παραμένει σταθερό: όταν ένας παίκτης επιλέγει μια ενέργεια, ο άλλος έχει πάντοτε κίνητρο να την αλλάξει. Συνεπώς, δεν υπάρχει σημείο (s_1, s_2) τέτοιο ώστε κανείς να μην μπορεί να βελτιώσει τη θέση του με μονομερή απόκλιση. Το παίγνιο δεν διαθέτει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές.

2.3.4.4 Ερμηνευτική προσέγγιση: το *Matching Pennies* εκφράζει την καθαρή μορφή ανταγωνισμού, όπου οι στόχοι των παικτών είναι πλήρως αντικρουόμενοι. Η στρατηγική ασυμβατότητα σημαίνει ότι δεν μπορεί να υπάρξει σταθερότητα εάν οι παίκτες ακολουθούν αμιγείς στρατηγικές. Κάθε προσπάθεια προβλεψιμότητας οδηγεί τον αντίπαλο να την εκμεταλλευτεί. Αυτό το είδος παιγνίου αποτελεί τον πυρήνα των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, τα οποία μελετήθηκαν για πρώτη φορά συστηματικά από τους von Neumann και Morgenstern (1944), ως μοντέλα καθαρού ανταγωνισμού.

Παρόμοιες καταστάσεις εμφανίζονται σε:

- Στρατιωτικές ή διπλωματικές αντιπαραθέσεις,
- Ανταγωνιστικές αγορές όπου δύο εταιρείες επιδιώκουν αντίθετους στόχους,
- Και αλγοριθμικά μοντέλα τεχνητής νοημοσύνης, όπου δύο “παίκτες” έχουν αντίπαλες επιδιώξεις.

2.3.4.5 Προέκταση ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές: παρότι δεν υπάρχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές, ο Nash (1950) απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές. Στο *Matching Pennies* η ισορροπία αυτή είναι μοναδική: κάθε παίκτης επιλέγει Κορώνα ή Γράμματα με πιθανότητα $1/2$. Η τυχαιότητα εξισορροπεί την

προβλεψιμότητα, δημιουργώντας ένα σημείο Ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές, στο οποίο κανείς δεν μπορεί να βελτιώσει το προσδοκώμενο κέρδος του μεταβάλλοντας μονομερώς τη στρατηγική του, η έννοια θα παρουσιαστεί εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Συνοψίζοντας: το *Matching Pennies* αναδεικνύει τη βασική διάκριση μεταξύ συντονιστικών και ανταγωνιστικών παιγνίων. Ενώ στα πρώτα η σταθερότητα επιτυγχάνεται μέσω αμοιβαίας προσαρμογής, εδώ απαιτείται τυχαιότητα για να επιτευχθεί ισορροπία. Η απουσία ισορροπίας σε αμειβείς στρατηγικές καθιστά το παράδειγμα αυτό θεμελιώδες για την κατανόηση των μικτών στρατηγικών και της θεωρίας των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, το οποίο αποτελεί και το επόμενο βήμα στη μελέτη της Ισορροπίας Nash.

2.3.5 Το παίγνιο Δειλίας (*Chicken Game*)

Το παίγνιο Δειλίας (γνωστό και ως παίγνιο του Κοτόπουλου), αποτελεί ένα από τα πιο διάσημα παραδείγματα στη θεωρία παιγνίων και ανήκει στην κατηγορία των παιγνίων αντικρουόμενης στρατηγικής (*anti - coordination games*) με στοιχεία ρίσκου και ανταγωνισμού. Το όνομά του προέρχεται από το γνωστό πείραμα ριψοκίνδυνης συμπεριφοράς, όπου δύο οδηγοί κατευθύνονται με ταχύτητα ο ένας προς τον άλλον, όποιος αλλάξει πορεία πρώτος θεωρείται “δειλός” (*chicken*), ενώ αν κανείς δεν υποχωρήσει, η σύγκρουση έχει καταστροφικά αποτελέσματα (Osborne, 2000). Το παίγνιο αυτό αναδεικνύει την ένταση μεταξύ θάρρους και σύνεσης, κινδύνου και λογικής, και χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει καταστάσεις στρατηγικής αποτροπής από πολιτικές διαπραγματεύσεις έως διεθνείς κρίσεις.

2.3.5.1 Περιγραφή του παιγνίου: δύο παίκτες, A και B, έχουν να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο στρατηγικές:

- Υποχώρηση (Υ)
- Σύγκρουση (Σ)

Οι κανόνες είναι οι εξής:

1. Αν και οι δύο υποχωρήσουν, κανείς δεν “κερδίζει” σε κύρος, αλλά αποφεύγεται η ζημιά.
2. Αν ο ένας υποχωρήσει και ο άλλος όχι, ο θαρραλέος κερδίζει το μέγιστο όφελος.

3. Αν όμως και οι δύο επιλέξουν τη σύγκρουση, το αποτέλεσμα είναι καταστροφικό και για τους δύο.

Πίνακας 2.3.5: πίνακας αποδόσεων του *Chicken Game*.

Παίκτης A / Παίκτης B	Υποχώρηση (Υ)	Σύγκρουση (Σ)
Υποχώρηση (Υ)	(2, 2)	(1, 3)
Σύγκρουση (Σ)	(3, 1)	(0, 0)

2.3.5.2 Ανάλυση των Ισορροπιών Nash:

- Αν ο παίκτης B επιλέξει υποχώρηση (Υ), τότε ο παίκτης A προτιμά σύγκρουση (Σ) ($3 > 2$).
- Αν ο παίκτης B επιλέξει σύγκρουση (Σ), τότε ο παίκτης A προτιμά υποχώρηση (Υ) ($1 > 0$).

Η ίδια λογική ισχύει συμμετρικά και για τον B. Άρα, υπάρχουν δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές:

- (Σύγκρουση, Υποχώρηση)
- (Υποχώρηση, Σύγκρουση)

Καμία από τις δύο δεν είναι συμμετρική, κάθε παίκτης προτιμά την ισορροπία όπου εκείνος δεν υποχωρεί.

2.3.5.3 Ερμηνευτική προσέγγιση: το *Chicken Game* εκφράζει μια κατάσταση στρατηγικής αβεβαιότητας: η καλύτερη ενέργεια για κάθε παίκτη εξαρτάται από το αν ο άλλος θα υποχωρήσει. Αν και υπάρχουν δύο σταθερές ισορροπίες, καμία δεν είναι δίκαιη ή κοινωνικά βέλτιστη. Κάθε παίκτης θέλει να αποφύγει τη σύγκρουση, αλλά χωρίς να είναι ο μόνος που υποχωρεί, γεγονός που δημιουργεί στρατηγική αβεβαιότητα και ενθαρρύνει συμπεριφορές ρίσκου, μπλόφας και αποτροπής. Αυτό οδηγεί σε συμπεριφορές ρίσκου, αποτροπής ή μπλόφας, που έχουν αναλογίες σε:

- Διεθνείς κρίσεις και διαπραγματεύσεις,
- Ανταγωνισμό εταιρειών που απειλούν με “πόλεμο τιμών”,
- Ή ακόμη και κοινωνικές συγκρούσεις όπου κανείς δεν θέλει να φανεί αδύναμος.

2.3.5.4 Θεωρητική σημασία: σε αντίθεση με το Δίλημμα του Φυλακισμένου, εδώ η συνεργασία είναι εφικτή, αλλά η έλλειψη εμπιστοσύνης και η προτίμηση για υπεροχή καθιστούν την επίτευξή της αβέβαιη.

Το παίγνιο αυτό εισάγει την έννοια του στρατηγικού ρίσκου και αποτελεί τη βάση για την ανάλυση παιγνίων αποτροπής και εκβιασμού (*deterrence games*). Συχνά, εξετάζεται και σε μικτές στρατηγικές, όπου κάθε παίκτης επιλέγει να υποχωρήσει με κάποια πιθανότητα, εξισορροπώντας την επιθετικότητα του άλλου.

Συνοψίζοντας: το *Chicken Game* δείχνει ότι η Ισορροπία Nash μπορεί να προκύψει σε καταστάσεις σύγκρουσης και ρίσκου, όπου η σταθερότητα βασίζεται περισσότερο στον φόβο της αποτυχίας παρά στη συνεργασία.

2.4 Ερμηνεία και σημασία της Ισορροπίας Nash

Η έννοια της Ισορροπίας Nash αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις πυλώνες της σύγχρονης θεωρίας παιγνίων. Εισήχθη από τον John F. Nash (1950) με στόχο να προσφέρει έναν γενικό μηχανισμό πρόβλεψης της συμπεριφοράς σε στρατηγικά παίγνια, όπου κάθε παίκτης λαμβάνει αποφάσεις γνωρίζοντας ότι τα αποτελέσματα εξαρτώνται από τις επιλογές των υπολοίπων.

Η βασική ιδέα πίσω από την Ισορροπία Nash είναι η στρατηγική σταθερότητα: ένα προφίλ στρατηγικών βρίσκεται σε ισορροπία όταν κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς. Κάθε παίκτης επιλέγει τη βέλτιστη στρατηγική δεδομένων των επιλογών των υπολοίπων. Η ισορροπία αυτή δεν απαιτεί ρητή συνεργασία, αλλά προκύπτει ενδογενώς από τη λογική συνέπεια των αποφάσεων όλων των παικτών.

2.4.1 Η Ισορροπία Nash ως σημείο σταθερότητας

Από μαθηματική σκοπιά, η Ισορροπία Nash μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος στρατηγικού σημείου σταθερότητας. Σύμφωνα με τον Osborne (2000), «σε μια τέτοια ισορροπία κανένας

παίκτης δεν μπορεί να βελτιώσει την απόδοσή του με μονομερή απόκλιση από τη στρατηγική του, υπό την υπόθεση ότι οι υπόλοιποι παίκτες διατηρούν αμετάβλητες τις δικές τους επιλογές». Αν κάποιος παίκτης μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του, το αναμενόμενο αποτέλεσμα για τον ίδιο δεν θα βελτιωθεί, επομένως, το σύστημα παραμένει στρατηγικά σταθερό ως προς τις επιλογές των παικτών. Για τον λόγο αυτό, η Ισορροπία Nash συχνά ερμηνεύεται ως προβλέψιμο σημείο ισορροπίας στη συμπεριφορά ορθολογικών παικτών, καθώς δεν υπάρχει κίνητρο μονομερούς απόκλισης όταν το σύστημα βρίσκεται σε αυτό το σημείο.

2.4.2 Διαφορά από το κοινωνικά βέλτιστο

Παρότι η Ισορροπία Nash περιγράφει μια σταθερή κατάσταση, δεν ταυτίζεται κατ' ανάγκη με το κοινωνικά βέλτιστο αποτέλεσμα. Η σταθερότητα αφορά την ατομική βελτιστοποίηση, όχι τη συλλογική ευημερία. Για παράδειγμα, στο Δίλημμα του Φυλακισμένου, η στρατηγική (Ομολογία, Ομολογία) αποτελεί Ισορροπία Nash, καθώς κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να την αλλάξει μονομερώς, ωστόσο το αποτέλεσμα είναι κοινωνικά υποβέλτιστο, καθώς και οι δύο θα ωφελούνταν περισσότερο αν επέλεγαν να συνεργαστούν (Σιωπή, Σιωπή).

Το γεγονός αυτό υπογραμμίζει ότι η Ισορροπία Nash δεν εγγυάται την αποδοτικότητα ή τη δικαιοσύνη ενός αποτελέσματος. Μπορεί να είναι σταθερή, αλλά όχι απαραίτητα συμφέρουσα για όλους. Η διάκριση αυτή είναι κρίσιμη στις εφαρμογές της θεωρίας παιγνίων σε τομείς όπως η οικονομία, η πολιτική επιστήμη και η κοινωνιολογία.

2.4.3 Περιορισμοί της έννοιας

Παρά τη θεωρητική της ισχύ, η Ισορροπία Nash δεν είναι απαλλαγμένη από περιορισμούς τόσο εννοιολογικούς όσο και πρακτικούς:

- **Πολλαπλές ισορροπίες:** σε πολλά παίγνια, όπως η Μάχη των Φύλων ή το παίγνιο συντονισμού, υπάρχουν περισσότερες από μία Ισορροπίες Nash. Αυτό δημιουργεί ασάφεια προβλεψιμότητας, καθώς η θεωρία δεν προσδιορίζει ποια ισορροπία θα επιλεγεί τελικά. Παράγοντες όπως οι κοινωνικοί κανόνες, η επικοινωνία ή η ιστορική εμπειρία επηρεάζουν την τελική έκβαση.

- **Απουσία ισορροπίας σε αμιγείς στρατηγικές:** ορισμένα παίγνια, όπως το *Matching Pennies*, δεν διαθέτουν Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές. Σε αυτές τις περιπτώσεις απαιτείται η έννοια των μικτών στρατηγικών, όπου οι παίκτες επιλέγουν μεταξύ των διαθέσιμων ενεργειών με συγκεκριμένες πιθανότητες.
- **Μη συνεργατικός χαρακτήρας:** η Ισορροπία Nash περιγράφει παίγνια όπου κάθε παίκτης επιδιώκει τη δική του βέλτιστη απόδοση χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τη συλλογική ευημερία. Αυτό περιορίζει την εφαρμογή της σε καταστάσεις όπου η συνεργασία και η εμπιστοσύνη αποτελούν κρίσιμους παράγοντες.
- **Υπόθεση πλήρους ορθολογικότητας:** η θεωρία προϋποθέτει ότι όλοι οι παίκτες είναι πλήρως ενημερωμένοι και ορθολογικοί. Στην πραγματικότητα, οι αποφάσεις συχνά επηρεάζονται από περιορισμένη πληροφόρηση, γνωστικές προκαταλήψεις και συναισθηματικούς παράγοντες.

2.4.4 Η σημασία της Ισορροπίας Nash στην σύγχρονη θεωρία

Παρά τους περιορισμούς της, η Ισορροπία Nash παραμένει η πλέον διαδεδομένη και ισχυρή έννοια ισορροπίας στη θεωρία παιγνίων. Αποτελεί τη βάση για τη διατύπωση, ανάλυση και επίλυση χιλιάδων μοντέλων, από την οικονομική πολιτική και τη στρατηγική των επιχειρήσεων έως τη βιολογία των πληθυσμών και τα συστήματα τεχνητής νοημοσύνης. η αξία της έγκειται στο ότι παρέχει ένα ενιαίο μαθηματικό πλαίσιο κατανόησης της στρατηγικής αλληλεπίδρασης, επιτρέποντας την πρόβλεψη συμπεριφορών που είναι συνεπείς με την ορθολογικότητα όλων των συμμετεχόντων, ακόμη και σε ιδιαίτερα πολύπλοκα ή πολυπαικτικά στρατηγικά παίγνια. Σύμφωνα με τον Osborne (2000), «η Ισορροπία Nash συνιστά τη μαθηματική έκφραση της λογικής συνέπειας». Δεν αποσκοπεί στην πλήρη περιγραφή της πραγματικής ανθρώπινης συμπεριφοράς, αλλά στην παροχή ενός εννοιολογικού εργαλείου που επιτρέπει την ερμηνεία και την πρόβλεψη στρατηγικών αποφάσεων.

2.5 Ύπαρξη Ισορροπίας Nash

Η έννοια της Ισορροπίας Nash αποκτά πλήρη θεωρητική σημασία μόνο όταν συνοδεύεται από το θεμελιώδες αποτέλεσμα της ύπαρξής της. Το 1950, ο John F. Nash δημοσίευσε το άρθρο *Equilibrium Points in n - Person Games* (*Proceedings of the National Academy of Sciences*), όπου

απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash, εφόσον επιτρέψουμε στους παίκτες να επιλέγουν μικτές στρατηγικές.

Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι απλώς τεχνικό, αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της σύγχρονης θεωρίας παιγνίων, καθώς εγγυάται ότι κάθε στρατηγικό παίγνιο έχει τουλάχιστον ένα σημείο ισορροπίας.

2.5.1 Θεώρημα Nash (1950)

Κάθε πεπερασμένο παίγνιο στο οποίο κάθε παίκτης διαθέτει πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών και συνεχείς συναρτήσεις απόδοσης, διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές. Με άλλα λόγια, ακόμη κι αν ένα παίγνιο δεν έχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές, όπως το *Matching Pennies*, εξακολουθεί να έχει μια ισορροπία όταν οι παίκτες επιλέγουν πιθανότητες για τις στρατηγικές τους.

2.5.2 Ιδέα της απόδειξης (χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες)

Αν κάθε παίκτης επιλέγει μια πιθανότητα για κάθε διαθέσιμη αμιγή στρατηγική του, τότε οι μικτές στρατηγικές κάθε παίκτη σχηματίζουν ένα σύνολο πιθανοτήτων. Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων αυτών για όλους τους παίκτες αποτελεί τον χώρο όλων των προφίλ μικτών στρατηγικών, ο οποίος αποτελεί μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Στη συνέχεια ο Nash ορίζει μια απεικόνιση βέλτιστων αποκρίσεων (*best response correspondence*), η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε προφίλ στρατηγικών το σύνολο των βέλτιστων στρατηγικών κάθε παίκτη έναντι των στρατηγικών των υπολοίπων. Η απεικόνιση αυτή είναι πολύτιμη και διαθέτει μη κενές, συμπαγείς και κυρτές τιμές, ενώ είναι άνω ημισυνεχής.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani, το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer για πολύτιμες απεικονίσεις, προκύπτει ότι η απεικόνιση αυτή διαθέτει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Το σταθερό αυτό σημείο αντιστοιχεί σε ένα προφίλ μικτών στρατηγικών στο οποίο κάθε παίκτης επιλέγει μια βέλτιστη απόκριση στις στρατηγικές των άλλων παικτών. Επομένως, το σημείο αυτό αποτελεί μια Ισορροπία Nash (Glicksberg, 1952).

2.5.3 Εννοιολογική σημασία του αποτελέσματος

Το θεώρημα Nash δεν είναι μόνο μαθηματικό εύρημα, έχει βαθιά φιλοσοφική και πρακτική σημασία. Αποδεικνύει ότι, ακόμη και σε περίπλοκα, μη συνεργατικά παίγνια, υπάρχει πάντοτε κάποια μορφή ισορροπίας. Η σημασία του συνοψίζεται στα εξής:

- **Εξασφαλίζει τη συνέπεια της θεωρίας παιγνίων:** κανένα παίγνιο δεν μένει «χωρίς λύση».
- **Επιτρέπει την ανάλυση καταστάσεων αβεβαιότητας:** οι παίκτες μπορούν να κατανέμουν τις επιλογές τους με πιθανότητες, επιτυγχάνοντας έτσι προβλέψιμα και σταθερά αποτελέσματα.
- **Θεμελιώνει τις σύγχρονες εφαρμογές:** από τη μικροοικονομική και τη θεωρία αγορών έως τη βιολογία των πληθυσμών και την τεχνητή νοημοσύνη.

Επιπλέον, το αποτέλεσμα του Nash γενικεύει την προγενέστερη εργασία των von Neumann και Morgenstern, όπως παρουσιάστηκε στο κλασικό έργο τους *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), στο οποίο αποδείχθηκε η ύπαρξη ισορροπίας μόνο για παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Ο Nash γενίκευσε ριζικά το αποτέλεσμα, αποδεικνύοντας την ύπαρξη ισορροπίας για όλα τα πεπερασμένα στρατηγικά παίγνια, ανεξαρτήτως δομής ανταγωνισμού, καθιστώντας την έννοια της ισορροπίας καθολική.

2.5.4 Συμπεράσματα

Το θεώρημα ύπαρξης Nash θεμελιώνει τη θεωρία παιγνίων ως πλήρες και συνεπές επιστημονικό πλαίσιο. Διασφαλίζει ότι κάθε στρατηγική αλληλεπίδραση διαθέτει τουλάχιστον μία μορφή ισορροπίας, προσφέροντας σημείο αναφοράς για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς. Η συμβολή του Nash είναι τόσο μαθηματική όσο και εννοιολογική, καθώς θεμελιώνει τη σταθερότητα ως κεντρικό άξονα της ανάλυσης στρατηγικών αλληλεπιδράσεων και ανοίγει τον δρόμο για τη μελέτη πιο σύνθετων μορφών ισορροπίας, όπως αυτές που προκύπτουν στις μικτές στρατηγικές και αναλύονται στο επόμενο κεφάλαιο

2.6 Ενδεικτικά πεδία εφαρμογής της Ισορροπίας Nash

Η έννοια της Ισορροπίας Nash βρίσκει εφαρμογή σε πληθώρα θεωρητικών και πρακτικών πεδίων. Μέσα από αυτήν, μπορούμε να περιγράψουμε σταθερές καταστάσεις στρατηγικής

αλληλεπίδρασης, στις οποίες κάθε συμμετέχων επιλέγει τη βέλτιστη στρατηγική του δεδομένων των επιλογών των υπολοίπων. Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογών:

1. **Οικονομικά μοντέλα ανταγωνισμού:** στα υποδείγματα *Cournot* και *Bertrand*, κάθε επιχείρηση καθορίζει την ποσότητα ή την τιμή του προϊόντος της με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους, λαμβάνοντας υπόψη τις επιλογές των ανταγωνιστών της. Οι λύσεις αυτών των υποδειγμάτων αντιστοιχούν σε Ισορροπίες Nash, περιγράφοντας τη σταθερότητα των αγορών υπό συνθήκες ορθολογικής συμπεριφοράς (Osborne, 2000).
2. **Πολιτικά και κοινωνικά παίγνια:** στα πολιτικά και κοινωνικά παίγνια, η Ισορροπία Nash χρησιμοποιείται για την ανάλυση σταθερών καταστάσεων που προκύπτουν από τις στρατηγικές επιλογές των παικτών. Καμία πλευρά δεν έχει κίνητρο να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική της, εφόσον οι υπόλοιποι διατηρούν τις δικές τους επιλογές. Το πλαίσιο αυτό αξιοποιείται στην πολιτική ανάλυση και στη μελέτη κοινωνικών διαδικασιών συντονισμού και συλλογικής δράσης.
3. **Εξελικτικά και βιολογικά μοντέλα:** στη βιολογία, η Ισορροπία Nash συνδέεται με την έννοια της εξελικτικά σταθερής στρατηγικής (*Evolutionarily Stable Strategy - ESS*). Μια στρατηγική θεωρείται εξελικτικά σταθερή όταν, αν επικρατήσει σε έναν πληθυσμό, καμία εναλλακτική στρατηγική δεν μπορεί να την εκτοπίσει (Maynard Smith, 1982). Η ESS αποτελεί ειδική μορφή Ισορροπίας Nash, με πρόσθετο δυναμικό κριτήριο σταθερότητας.

2.7 Ανακεφαλαίωση βασικών ιδεών

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάστηκε η έννοια της Ισορροπίας Nash, η οποία αποτελεί τον θεμέλιο λίθο της θεωρίας παιγνίων και το βασικό εργαλείο περιγραφής στρατηγικής σταθερότητας σε συστήματα αλληλεπίδρασης. Αρχικά, δόθηκε ο τυπικός ορισμός της ισορροπίας σε παίγνια στρατηγικής μορφής, όπου κάθε παίκτης επιλέγει τη βέλτιστη στρατηγική του δεδομένων των επιλογών των υπολοίπων, ενώ εξετάστηκε η μαθηματική διατύπωση και η ερμηνευτική της σημασία.

Ακολούθησε η ανάλυση χαρακτηριστικών παραδειγμάτων που ανέδειξαν τη διαφορετική φύση των ισορροπιών και τα ποικίλα φαινόμενα που μπορεί να προκύψουν:

- Το Δίλημμα του Φυλακισμένου ανέδειξε τη σύγκρουση ανάμεσα στον ατομικό ορθολογισμό και το συλλογικό συμφέρον, δείχνοντας πως μια σταθερή ισορροπία μπορεί να είναι κοινωνικά υποβέλτιστη.
- Το Κυνήγι του Ελαφιού (*Stag Hunt*) κατέδειξε τον ρόλο της εμπιστοσύνης και της αμοιβαίας προσδοκίας στη διαμόρφωση συνεργατικών ισορροπιών.
- Η Μάχη των Φύλων (*Battle of the Sexes*) έδειξε ότι η Ισορροπία Nash δεν είναι πάντοτε μοναδική, καθώς μπορεί να υπάρχουν πολλαπλές σταθερές λύσεις με διαφορετικές προτιμήσεις παικτών.
- Το παίγνιο Αντιστοίχισης Κερμάτων (*Matching Pennies*) παρουσίασε την περίπτωση όπου δεν υπάρχει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, προαναγγέλλοντας την ανάγκη εισαγωγής μικτών στρατηγικών.
- Το παίγνιο Δειλίας (*Chicken Game*) τόνισε τη δυναμική της σύγκρουσης και της αποφυγής ρίσκου, όπου οι παίκτες προσπαθούν να επιτύχουν συμβιβασμό χωρίς να υποχωρήσουν πλήρως, χαρακτηριστικό παράδειγμα ισορροπίας που συνοδεύεται από στρατηγική αβεβαιότητα και υψηλό ρίσκο (Rapoport & Chammah, 1966).

Η Ισορροπία Nash ερμηνεύθηκε ως σημείο αμοιβαίας συνέπειας και σταθερότητας, όπου κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του. Ωστόσο, επισημάνθηκε ότι η σταθερότητα αυτή δεν συνεπάγεται κοινωνική βελτιστότητα, η ατομική ορθολογικότητα μπορεί να οδηγήσει σε συλλογικά αναποτελεσματικά αποτελέσματα.

Το θεώρημα ύπαρξης του Nash (1950), βασισμένο στο θεώρημα σταθερού σημείου του Kakutani, διασφάλισε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash, εφόσον επιτρέπονται μικτές στρατηγικές (Glicksberg, 1952). Η θεμελίωση αυτή καθιστά τη θεωρία παιγνίων πλήρες και συνεπές μαθηματικό πλαίσιο, στο οποίο κάθε στρατηγική αλληλεπίδραση διαθέτει τουλάχιστον ένα σημείο Ισορροπίας Nash (σε μικτές στρατηγικές).

Τέλος, επισημάνθηκε ότι η Ισορροπία Nash δεν περιορίζεται σε ένα μόνο πεδίο, αλλά αποτελεί ευρεία μαθηματική έννοια που εφαρμόζεται σε ποικίλα στρατηγικά παίγνια. Ανεξάρτητα από το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται, αποτυπώνει τη σταθερότητα των επιλογών ορθολογικών

παικτών και παρέχει ένα ενιαίο θεωρητικό υπόβαθρο για την ανάλυση στρατηγικής συμπεριφοράς. Η εφαρμογή της εκτείνεται σε οικονομικά, πολιτικά, κοινωνικά και βιολογικά μοντέλα, όπου αναδεικνύεται η σημασία της στη μελέτη στρατηγικής αλληλεπίδρασης. Η εννοιολογική αυτή προσέγγιση δημιουργεί το υπόβαθρο για τη μετάβαση στο επόμενο κεφάλαιο, όπου αναλύεται η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

Κεφάλαιο 3: Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε η έννοια της Ισορροπίας Nash σε αμιγείς στρατηγικές, όπου κάθε παίκτης επιλέγει μία και μόνο ενέργεια ως βέλτιστη απόκριση στις επιλογές των υπολοίπων. Ωστόσο, σε πολλά στρατηγικά παίγνια δεν υφίσταται τέτοια ισορροπία, δηλαδή δεν υπάρχει συνδυασμός αμιγών στρατηγικών που να καθιστά κανέναν παίκτη ικανό να βελτιώσει μονομερώς την απόδοσή του. Το ζήτημα αυτό ανέδειξε την ανάγκη διεύρυνσης της έννοιας της ισορροπίας, ώστε οι παίκτες να μπορούν να κατανέμουν πιθανότητες στις διαθέσιμες αμιγείς στρατηγικές τους. Η ιδέα, που εισήγαγε ο Nash (1950), οδηγεί στην έννοια της ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές (*mixed strategy equilibrium*).

Σε αυτό το πλαίσιο, κάθε παίκτης δεν δεσμεύεται σε μία μόνο στρατηγική, αλλά καθορίζει μια κατανομή πιθανοτήτων επί του συνόλου των διαθέσιμων ενεργειών του. Η αναμενόμενη απόδοση καθεμιάς καθοδηγεί την επιλογή του, επιτρέποντας την ανάλυση παιγνίων όπου η τυχαιότητα ενσωματώνεται ρητά στο μοντέλο στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

Η συμβολή του Nash υπήρξε καθοριστική: απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash, ενδεχομένως σε μικτές στρατηγικές (Nash, 1950). Η γενίκευση αυτή ενοποιεί την ανάλυση στρατηγικής συμπεριφοράς και προσφέρει σταθερό θεωρητικό υπόβαθρο για εφαρμογές από την οικονομία και την πολιτική έως τη βιολογία και την πληροφορική.

Συνεπώς, οι μικτές στρατηγικές δεν αποτελούν απλώς τεχνική λύση στην απουσία αμιγούς ισορροπίας, αλλά ουσιώδη επέκταση του ορθολογικού υποδείγματος που επιτρέπει συστηματική μελέτη καταστάσεων αβεβαιότητας και αλληλεξάρτησης.

3.2 Ορισμός μικτής στρατηγικής και Ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές

Έστω ένα πεπερασμένο παίγνιο $G = \langle N, (A_i) : i \in N, (U_i) : i \in N \rangle$, (3.1)

όπου:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ είναι το σύνολο των παικτών,
- A_i είναι το πεπερασμένο σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών του παίκτη i ,
- $U_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση απόδοσης (*payoff function*) του παίκτη i .

Μικτή στρατηγική: για κάθε παίκτη $i \in N$, μία μικτή στρατηγική είναι μία κατανομή πιθανοτήτων $\sigma_i \in \Delta(A_i)$, όπου το $\Delta(A_i)$ δηλώνει το σύνολο όλων των κατανομών πιθανοτήτων επί του A_i :

$$\Delta(A_i) = \{ \sigma_i : A_i \rightarrow [0,1] \mid \sum \sigma_i(a_i) = 1, a_i \in A_i \}$$
 (3.2)

Η μικτή στρατηγική σ_i καθορίζει την πιθανότητα με την οποία ο παίκτης i επιλέγει κάθε αμιγή στρατηγική $a_i \in A_i$. Το προφίλ μικτών στρατηγικών ορίζεται ως: $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, και περιγράφει τη συλλογική στρατηγική κατάσταση του παιγνίου.

Ορισμός 3.1 (Nash, 1950): ένα προφίλ μικτών στρατηγικών: $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ αποτελεί Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές εάν για κάθε παίκτη $i \in N$ ισχύει:

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*), \forall \sigma_i \in \Delta(A_i).$$
 (3.3)

όπου σ_i^* είναι η μικτή στρατηγική ισορροπίας του παίκτη i , και σ_{-i}^* είναι το προφίλ μικτών στρατηγικών ισορροπίας όλων των υπόλοιπων παικτών εκτός του i . Δηλαδή, καμία μονομερής απόκλιση του παίκτη i από τη στρατηγική σ_i^* δεν αυξάνει την αναμενόμενη απόδοσή του, όταν οι υπόλοιποι παίκτες παραμένουν στις στρατηγικές τους σ_{-i}^* .

Ερμηνεία: η έννοια της μικτής στρατηγικής επιτρέπει τη γενίκευση της έννοιας της ισορροπίας σε περιπτώσεις όπου δεν υφίσταται ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές. Μαθηματικά, η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές μπορεί να εκφραστεί ως σταθερό σημείο (*fixed point*) μιας απεικόνισης βέλτιστης απόκρισης: $\sigma^* \in B(\sigma^*)$, όπου $B(\sigma^*)$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των αντιδράσεων βέλτιστης απόκρισης κάθε παίκτη.

Η συνθήκη ισορροπίας σημαίνει ότι, δεδομένων των πιθανοτήτων που χρησιμοποιούν οι υπόλοιποι παίκτες, η κατανομή σ_i^* του παίκτη i εξισορροπεί τις αναμενόμενες αποδόσεις όλων των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται με θετική πιθανότητα. Επομένως, αν a_i και a_i' ανήκουν στον φορέα (*support*) της σ_i^* , τότε:

$$U_i(a_i, \sigma_{-i}^*) = U_i(a_i', \sigma_{-i}^*). \quad (3.4)$$

Παρατήρηση: η θεμελιώδης συμβολή του Nash (1950) έγκειται στο ότι απέδειξε (κάνοντας χρήση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Kakutani) πως κάθε πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές (Glicksberg, 1952). Το αποτέλεσμα αυτό εξασφαλίζει ότι η έννοια της ισορροπίας παραμένει γενικά εφαρμόσιμη, ακόμη και όταν δεν υπάρχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές.

3.3 Το παίγνιο της Αντιστοίχισης Κερμάτων (*Matching Pennies*)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε το παίγνιο *Matching Pennies* ως ένα κλασικό παράδειγμα στρατηγικής αλληλεπίδρασης στο οποίο δεν υπάρχει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές.

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται εκ νέου το ίδιο παίγνιο, αυτή τη φορά υπό το πρίσμα των μικτών στρατηγικών, προκειμένου να αναδειχθεί πώς η τυχαιοποίηση των επιλογών των παικτών οδηγεί σε σταθερό σημείο ισορροπίας.

Το *Matching Pennies* αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα παιγνίου μηδενικού αθροίσματος, όπου το συνολικό άθροισμα των αποδόσεων είναι πάντοτε ίσο με μηδέν. Συνεπώς, κάθε κέρδος του ενός παίκτη αντιστοιχεί σε ισόποση απώλεια του άλλου. Τέτοια παίγνια αναπαριστούν

καταστάσεις καθαρού ανταγωνισμού, χωρίς δυνατότητα συνεργασίας ή αμοιβαίας ωφέλειας (Osborne, 2000).

3.3.1 Περιγραφή του παιγνίου

Δύο παίκτες, Α και Β, παίζουν ταυτόχρονα και επιλέγουν μεταξύ δύο πιθανών ενεργειών:

Κορώνα (Κ) ή Γράμματα (Γ).

Αν οι επιλογές τους συμπίπτουν, κερδίζει ο παίκτης Α, ενώ αν διαφέρουν κερδίζει ο παίκτης Β.

Πίνακας 3.3.1: πίνακας αποδόσεων στο *Matching Pennies*.

Παίκτης Α / Παίκτης Β	Παίκτης Β: Κορώνα	Παίκτης Β: Γράμματα
Παίκτης Α: Κορώνα	(1, -1)	(-1, 1)
Παίκτης Α: Γράμματα	(-1, 1)	(1, -1)

3.3.2 Ανάλυση σε αμιγείς στρατηγικές

Αν ο παίκτης Α επιλέξει πάντα Κ, τότε ο παίκτης Β θα προτιμήσει πάντα Γ, ώστε να κερδίζει. Αντίθετα, αν ο παίκτης Α επιλέξει Γ, ο παίκτης Β θα στραφεί στο Κ. Καμία σταθερή ισορροπία δεν προκύπτει, καθώς κάθε παίκτης έχει πάντοτε κίνητρο να αποκλίνει. Επομένως, δεν υπάρχει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές. Αυτό, όπως επισημάνθηκε στο κεφάλαιο 2, είναι χαρακτηριστικό των παιγνίων πλήρους ανταγωνισμού: οι αμιγείς στρατηγικές αποτυγχάνουν να περιγράψουν σταθερά αποτελέσματα. Η λύση είναι να επιτραπεί στους παίκτες να τυχαιοποιούν τις αποφάσεις τους, οδηγώντας στην έννοια των μικτών στρατηγικών.

3.3.3 Ισορροπία σε μικτές στρατηγικές

Έστω ότι ο παίκτης Α επιλέγει Κ με πιθανότητα p και Γ με πιθανότητα $1-p$. Αντίστοιχα, ο παίκτης Β επιλέγει Κ με πιθανότητα q και Γ με πιθανότητα $1-q$, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη Α είναι:

$$U_a(p, q) = p \cdot q \cdot (1) + p \cdot (1-q) \cdot (-1) + (1-p) \cdot q \cdot (-1) + (1-p) \cdot (1-q) \cdot (1) = 4pq - 2p - 2q + 1, \quad (3.5a)$$

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη B (παίγνιο μηδενικού αθροίσματος, $U_B = -U_A$) είναι:

$$\begin{aligned} U_B(p, q) &= p \cdot q \cdot (-1) + p \cdot (1-q) \cdot (1) + (1-p) \cdot q \cdot (1) + (1-p) \cdot (1-q) \cdot (-1) \\ &= -4pq + 2p + 2q - 1, \quad \textbf{(3.5b)} \end{aligned}$$

Για να βρει τη βέλτιστη στρατηγική του, κάθε παίκτης εξετάζει τις αναμενόμενες αποδόσεις των αμιγών επιλογών του ως προς την πιθανότητα που επιλέγει ο αντίπαλος:

Για τον παίκτη A:

- Αν παίζει K, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι : $U_A(K, q) = q \cdot (1) + (1-q) \cdot (-1)$
 $= 2q - 1, \quad \textbf{(3.6)}$
- Αν παίζει Γ, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι : $U_A(\Gamma, q) = q \cdot (-1) + (1-q) \cdot (1) = 1 - 2q,$
 $\textbf{(3.7)}$
- Ο A θα είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών όταν: $2q - 1 = 1 - 2q \Rightarrow 4q = 2 \Rightarrow$
 $q^* = 1/2, \quad \textbf{(3.8)}$

Αντίστοιχα, για τον παίκτη B:

- Αν παίζει K, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι : $U_B(p, K) = p \cdot (-1) + (1-p) \cdot (1)$
 $= 1 - 2p, \quad \textbf{(3.9a)}$
- Αν παίζει Γ, η αναμενόμενη απόδοσή του είναι : $U_B(p, \Gamma) = p \cdot (1) + (1-p) \cdot (-1) =$
 $2p - 1, \quad \textbf{(3.9b)}$
- Ο B (ως αντίπαλος) θα είναι αδιάφορος όταν: $1 - 2p = 2p - 1 \Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p^* = 1/2,$
 $\textbf{(3.9c)}$

Άρα, η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές είναι το ζεύγος:

$$(p^*, q^*) = (1/2, 1/2), \quad (3.10)$$

με αναμενόμενες αποδόσεις ισορροπίας

$$U_a(p^*, q^*) = 0 \text{ και } U_b(p^*, q^*) = 0 \quad (3.11)$$

3.3.4 Ερμηνεία και συμπεράσματα

Η ισορροπία που προκύπτει δείχνει ότι κάθε παίκτης τυχαioποιεί πλήρως τις επιλογές του, επιλέγοντας «Κορώνα» ή «Γράμματα» με ίση πιθανότητα. Σε αυτή την κατάσταση, κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να μεταβάλει τη στρατηγική του, καθώς οποιαδήποτε προβλέψιμη συμπεριφορά θα μπορούσε να αξιοποιηθεί από τον αντίπαλο.

Η Ισορροπία Nash στο παίγνιο *Matching Pennies* δεν αποτελεί παράδειγμα σταθερότητας, αντίθετα αναδεικνύει τη δομική αβεβαιότητα των ανταγωνιστικών παιγνίων, όπου οι επιλογές των παικτών να μεταβάλλονται τυχαία από γύρο σε γύρο, χωρίς δυνατότητα σταθεροποίησης σε αμειβίς στρατηγικές.

Η σημασία του παιγνίου είναι θεμελιώδης:

- Δείχνει γιατί η έννοια της Ισορροπίας Nash χρειάζεται γενίκευση μέσω μικτών στρατηγικών.
- Συνδέει την ιδέα αυτή με το θεώρημα Minimax του von Neumann (1928), το οποίο θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα, παρέχοντας τη μαθηματική θεμελίωση της ισορροπίας στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος.

3.4 Μαθηματική ερμηνεία και Θεώρημα Minimax

Το παίγνιο *Matching Pennies*, το οποίο εξετάστηκε στην προηγούμενη ενότητα, αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα παίγνιου μηδενικού αθροίσματος. Σε τέτοια παίγνια, τα συμφέροντα των παικτών είναι πλήρως αντικρουόμενα: το κέρδος του ενός ισούται ακριβώς με τη ζημία του άλλου. Μαθηματικά, για κάθε προφίλ στρατηγικών $a = (a_1, a_2)$ ισχύει:

$$U_1(a) + U_2(a) = 0. \quad (3.12)$$

Αυτή η κατηγορία παιγνίων αποτέλεσε το πρώτο πεδίο μελέτης της θεωρίας παιγνίων, όπως θεμελιώθηκε από τον John von Neumann, στο έργο του *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* (1928). Η θεμελιώδης συμβολή του ήταν η διατύπωση του θεωρήματος Minimax, το οποίο απέδειξε, για πρώτη φορά, ότι τα παίγνια μηδενικού αθροίσματος διαθέτουν λύση ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές, καθιερώνοντας έτσι αυστηρή μαθηματική θεμελίωση για τη στρατηγική λήψη αποφάσεων.

3.4.1 Διατύπωση του Θεωρήματος Minimax

Έστω ένα παίγνιο δύο παικτών με σύνολα στρατηγικών A_1 και A_2 , και συνάρτηση απόδοσης $u_1 : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία εκφράζει το κέρδος του παίκτη 1 (και αντίστοιχα τη ζημία του παίκτη 2). Αν οι παίκτες μπορούν να επιλέγουν μικτές στρατηγικές, δηλαδή κατανομές πιθανοτήτων $p \in \Delta(A_1)$ και $q \in \Delta(A_2)$, τότε η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη 1 δίνεται από:

$$U_1(p, q) = \sum \sum p(a_1) \cdot q(a_2) \cdot u_1(a_1, a_2), \quad \text{όπου } a_1 \in A_1 \text{ και } a_2 \in A_2. \quad (3.13)$$

Ο παίκτης 1 επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοσή του, ενώ ο παίκτης 2 να ελαχιστοποιήσει αυτήν την τιμή (καθώς για εκείνον αποτελεί κόστος). Το στρατηγικό πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \max_p \min_q U_1(p, q), \quad \text{όπου } p \in \Delta(A_1), q \in \Delta(A_2), \\ \text{και} \\ \min_q \max_p U_1(p, q), \quad \text{όπου } q \in \Delta(A_2), p \in \Delta(A_1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Θεώρημα Minimax (von Neumann, 1928): για κάθε πεπερασμένο παίγνιο δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος ισχύει ότι :

$$\max_p \min_q U_1(p, q) = \min_q \max_p U_1(p, q). \quad (3.15)$$

Δηλαδή, υπάρχει ζεύγος μικτών στρατηγικών (p^*, q^*) που ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$U_1(p, q^*) \leq U_1(p^*, q^*) \leq U_1(p^*, q), \quad \forall p, q. \quad (3.16)$$

Το ζεύγος (p^*, q^*) αποτελεί ισορροπία σε μικτές στρατηγικές και προσδιορίζει την λύση του παιγνίου.

3.4.2 Ερμηνεία και μαθηματική σημασία

Η ισότητα (3.15) δηλώνει ότι η μέγιστη εγγυημένη απόδοση του ενός παίκτη ισούται με τη μικρότερη εγγυημένη απώλεια του άλλου, δηλαδή υπάρχει ένα σημείο στο οποίο οι προσδοκίες των δύο παικτών εξισορροπούνται. Ο παίκτης 1 επιλέγει τη στρατηγική που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη δυνατή ζημία του, ενώ ο παίκτης 2 κάνει το αντίστοιχο.

Το αποτέλεσμα αυτό διασφαλίζει την ύπαρξη σταθερού σημείου αμοιβαίας βέλτιστης απόκρισης, η ουσία της έννοιας της Ισορροπίας Nash. Κάθε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική του με βάση τη βέλτιστη αντίδραση στις επιλογές του αντιπάλου, οδηγώντας σε σημείο όπου καμία πλευρά δεν έχει κίνητρο να μεταβάλλει μονομερώς τη συμπεριφορά της.

Παρατήρηση: η απόδειξη του θεωρήματος Minimax βασίζεται στη θεωρία κυρτών συνόλων και σε θεωρήματα σταθερού σημείου (όπως του Brouwer, και μεταγενέστερα του Kakutani). Η ύπαρξη σταθερού σημείου εξασφαλίζει ότι οι βέλτιστες αποκρίσεις των παικτών τέμνονται, γεγονός που καθιστά δυνατή την ύπαρξη ισορροπίας. Η μαθηματική αυτή προσέγγιση αποτέλεσε το πρότυπο για τη μεταγενέστερη εργασία του John F. Nash (1950), όπου το αποτέλεσμα γενικεύεται για παίγνια με αυθαίρετες συναρτήσεις απόδοσης και περισσότερους από δύο παίκτες.

3.4.3 Σχέση με το παίγνιο *Matching Pennies*

Το *Matching Pennies* είναι ίσως το απλούστερο παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος Minimax. Οι μικτές στρατηγικές $(p^*, q^*) = (1/2, 1/2)$ ικανοποιούν ακριβώς τη συνθήκη, με αναμενόμενο αποτέλεσμα: $U(p^*, q^*) = 0$. (3.17)

Η ισορροπία αυτή αποτυπώνει τη λογική του Minimax: κάθε παίκτης ενεργεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει τη μέγιστη δυνατή απώλειά του, επιλέγοντας δηλαδή μια στρατηγική “άμυνας” έναντι του χειρότερου πιθανού σεναρίου.

Η μαθηματική αρχή του Minimax επομένως προεικονίζει τη μεταγενέστερη έννοια της Ισορροπίας Nash, η οποία επεκτείνει τη λογική αυτή σε γενικά παίγνια, πέρα από τα μηδενικού αθροίσματος.

3.4.4 Συμπεράσματα

Το θεώρημα Minimax του von Neumann (1928) αποτέλεσε το πρώτο αυστηρό μαθηματικό θεμέλιο της θεωρίας παιγνίων, αποδεικνύοντας ότι η σταθερότητα σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού μπορεί να επιτευχθεί μέσω πιθανοτικής τυχαιοποίησης. Η συνεισφορά του John F. Nash (1950) βασίστηκε στην ίδια λογική, επεκτείνοντας την έννοια της σταθερότητας σε όλα τα πεπερασμένα στρατηγικά παίγνια, ανεξαρτήτως αν είναι συνεργατικά ή ανταγωνιστικά.

3.5 Εφαρμογές μικτών στρατηγικών

3.5.1 Το παίγνιο Πέτρα - Ψαλίδι - Χαρτί (*Rock - Paper - Scissors*)

3.5.1.1 Περιγραφή του παιγνίου: το παίγνιο Πέτρα - Ψαλίδι - Χαρτί (*Rock - Paper - Scissors*) αποτελεί ένα από τα κλασικότερα παραδείγματα παιγνίων μηδενικού αθροίσματος, στα οποία τα συμφέροντα των δύο παικτών είναι πλήρως αντικρουόμενα. Η φύση του παιγνίου το καθιστά εξαιρετικό εργαλείο για τη μελέτη της Ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές, καθώς σε αυτό δεν υφίσταται καμία ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές.

Κάθε παίκτης επιλέγει μία από τρεις διαθέσιμες στρατηγικές:

- R (*rock* - πέτρα)
- P (*paper* - χαρτί)
- S (*scissors* - ψαλίδι)

Οι κανόνες είναι συμμετρικοί:

- Η πέτρα νικά το ψαλίδι.
- Το ψαλίδι νικά το χαρτί.
- Το χαρτί νικά την πέτρα.
- Ίδιες επιλογές οδηγούν σε ισοπαλία.

Πίνακας 3.5.1: πίνακας αποδόσεων στο Πέτρα - Χαρτί - Ψαλίδι (*Rock - Paper - Scissors*).

Παίκτης Α / Παίκτης Β	<i>Rock (R)</i>	<i>Paper (P)</i>	<i>Scissors (S)</i>
<i>Rock (R)</i>	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)

<i>Paper (P)</i>	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
<i>Scissors (S)</i>	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Ο πρώτος αριθμός σε κάθε κελί εκφράζει την απόδοση του παίκτη Α και ο δεύτερος του παίκτη Β.

Παρατηρείται ότι για κάθε συνδυασμό στρατηγικών ισχύει:

$U_1(a_1, a_2) + U_2(a_1, a_2) = 0$, γεγονός που επιβεβαιώνει τη φύση του παιγνίου ως *zero - sum* (Osborne, 2000).

3.5.1.2 Ανάλυση σε αμιγείς στρατηγικές:

- Αν ο παίκτης Α επιλέξει πέτρα, τότε ο παίκτης Β επιλέγει χαρτί για να μεγιστοποιήσει την απόδοσή του.
- Αν ο Α επιλέξει χαρτί, ο Β θα στραφεί στο ψαλίδι.
- Αν ο Α επιλέξει ψαλίδι, ο Β θα στραφεί στην πέτρα.

Η κυκλική αυτή εξάρτηση των βέλτιστων αποκρίσεων οδηγεί σε έλλειψη σταθερού σημείου. Καμία στρατηγική δεν παραμένει βέλτιστη έναντι όλων των επιλογών του αντιπάλου. Συνεπώς, δεν υπάρχει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές.

3.5.1.3 Ανάλυση σε μικτές στρατηγικές: έστω ότι κάθε παίκτης επιλέγει μία από τις τρεις ενέργειες με πιθανότητες:

$$p(R), p(P), p(S) \geq 0, \text{ με } p(R) + p(P) + p(S) = 1. \quad (3.18)$$

$$\text{Αντίστοιχα, για τον δεύτερο παίκτη ισχύει: } q(R) + q(P) + q(S) = 1. \quad (3.19)$$

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη Α είναι:

$$U_1(p, q) = \sum p(a_1) q(a_2) u_1(a_1, a_2), \text{ όπου } (a_1 \in A_1) (a_2 \in A_2) \quad (3.20)$$

Λόγω συμμετρίας, η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές ικανοποιεί:

$$p(R) = p(P) = p(S) = 1/3, \quad (3.21)$$

$$q(R) = q(P) = q(S) = 1/3. \quad (3.22)$$

3.5.1.4 Ερμηνεία και συμπεράσματα: η ισορροπία αυτή υποδηλώνει ότι οι παίκτες πρέπει να τυχαιοποιούν τις επιλογές τους, ώστε να διατηρείται η σταθερότητα της Ισορροπίας Nash και να μην έχει κανένας παίκτης κίνητρο μονομερούς απόκλισης. Αν κάποιος παίκτης αποκλίνει από την τυχαία επιλογή, ο αντίπαλος μπορεί να προβλέψει τη συμπεριφορά του και να εκμεταλλευτεί το μοτίβο του.

Η μικτή Ισορροπία Nash στο παίγνιο *Rock - Paper - Scissors* αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα στρατηγικής σταθερότητας: οι παίκτες μπορεί να μεταβάλλουν τις επιλογές τους τυχαία από γύρο σε γύρο, αλλά η κατανομή πιθανοτήτων παραμένει σταθερή. Σε παίγνια καθαρού ανταγωνισμού, η τυχαιοποίηση αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επίτευξη της Ισορροπίας Nash.

Το συγκεκριμένο παίγνιο εξετάζεται εκτενώς στη σχετική βιβλιογραφία, ιδίως στα έργα των Osborne (2000) και Tadelis (2013), ως πρότυπο μοντέλο για τη μαθηματική θεμελίωση των μικτών στρατηγικών. Η εφαρμογή του συνδέεται άμεσα με τη λογική του θεωρήματος Minimax του von Neumann (1928), το οποίο προβλέπει ότι κάθε παίγνιο μηδενικού αθροίσματος διαθέτει σταθερή λύση σε μικτές στρατηγικές.

Σε αυτή την περίπτωση, οι αναμενόμενες αποδόσεις όλων των ενεργειών είναι ίσες και μηδενικές:

$$U_1(p^*, q^*) = 0, U_2(p^*, q^*) = 0. \quad (3.23)$$

Κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο μονομερούς απόκλισης, επομένως το προφίλ

$$\sigma^* = (p^*, q^*) = ((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)), \quad (3.24)$$

αποτελεί Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές.

3.5.2 Το παίγνιο *Bach - Stravinsky*

3.5.2.1 Περιγραφή του παιγνίου: το παίγνιο *Bach - Stravinsky* αποτελεί ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα παιγνίων συντονισμού με αντικρουόμενες προτιμήσεις. Δύο παίκτες επιθυμούν να συντονιστούν στην ίδια επιλογή, αλλά διαφωνούν ως προς το ποια επιλογή

είναι προτιμότερη. Το παίγνιο χρησιμοποιείται εκτεταμένα στη βιβλιογραφία για να αναδειχθεί η ανάγκη ύπαρξης μικτών στρατηγικών σε περιπτώσεις όπου οι αμιγείς Ισορροπίες Nash δεν καθορίζουν μοναδική λύση συντονισμού (Osborne, 2000).

Το όνομα "*Bach - Stravinsky*" προέρχεται από το παράδειγμα ενός ζευγαριού που επιλέγει ποια συναυλία να παρακολουθήσει: ο παίκτης A προτιμά τον *Bach*, ενώ ο παίκτης B προτιμά τον *Stravinsky*. Και οι δύο όμως προτιμούν να πάνε μαζί, παρά να βρεθούν σε διαφορετικές συναυλίες.

Πίνακας 3.5.2: πίνακας αποδόσεων του *Bach - Stravinsky* .

Παίκτης A / Παίκτης B	<i>Bach</i>	<i>Stravinsky</i>
<i>Bach</i>	(2, 1)	(0, 0)
<i>Stravinsky</i>	(0, 0)	(1, 2)

Οι αποδόσεις δείχνουν ότι κάθε παίκτης επιθυμεί τον συντονισμό (οι μη διαγώνιες τιμές είναι 0), αλλά έχει διαφορετική προτίμηση για το ποια δραστηριότητα είναι προτιμότερη.

3.5.2.3 Ανάλυση σε αμιγείς στρατηγικές: το παίγνιο διαθέτει δύο Ισορροπίες Nash σε αμιγείς στρατηγικές:

- (*Bach* , *Bach*) και
- (*Stravinsky* , *Stravinsky*).

Κανείς παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από αυτές τις επιλογές. Ωστόσο, το πρόβλημα συντονισμού παραμένει: **ποια από τις δύο ισορροπίες θα επιλέξουν οι παίκτες;** Εφόσον η επικοινωνία ή η εμπιστοσύνη απουσιάζουν, οι παίκτες ενδέχεται να οδηγηθούν σε ασυντόνιστες επιλογές (0, 0). Αυτό το αδιέξοδο καθιστά το παίγνιο κατάλληλο για ανάλυση με μικτές στρατηγικές, όπου οι παίκτες επιλέγουν τυχαία ανάμεσα στις διαθέσιμες στρατηγικές με συγκεκριμένες πιθανότητες.

3.5.2.4 Ισορροπία σε μικτές στρατηγικές: έστω ότι ο παίκτης A επιλέγει *Bach* με πιθανότητα p και *Stravinsky* με πιθανότητα $(1 - p)$.

Αντίστοιχα, ο παίκτης B επιλέγει *Bach* με πιθανότητα q και *Stravinsky* με πιθανότητα $(1 - q)$.

Η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη A είναι: $U_a(p, q) = 2pq + (1 - p)(1 - q)$ **(3.25)**

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη B είναι: $U_b(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q)$ **(3.26)**

Για να βρεθεί η μικτή ισορροπία, αναζητούμε τις τιμές p και q για τις οποίες κάθε παίκτης είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών του.

Για τον παίκτη A:

- Απόδοση αν επιλέξει *Bach*: $2q$
- Απόδοση αν επιλέξει *Stravinsky*: $1 - q$
- Αδιαφορία $\Rightarrow 2q = 1 - q \Rightarrow q = 1/3$ **(3.27)**

Για τον παίκτη B:

- Απόδοση αν επιλέξει *Bach*: p
- Απόδοση αν επιλέξει *Stravinsky*: $2(1 - p)$
- Αδιαφορία $\Rightarrow p = 2(1 - p) \Rightarrow p = 2/3$ **(3.28)**

Άρα, η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές είναι:

$$(p^*, q^*) = (2/3, 1/3) \quad \textbf{(3.29)}$$

3.5.2.5 Ερμηνεία και συμπεράσματα: η ισορροπία αυτή δηλώνει ότι:

- Ο παίκτης A (που προτιμά τον *Bach*) επιλέγει *Bach* με πιθανότητα $2/3$ και *Stravinsky* με πιθανότητα $1/3$.

- Ο παίκτης B (που προτιμά τον *Stravinsky*) επιλέγει *Bach* με πιθανότητα $1/3$ και *Stravinsky* με πιθανότητα $2/3$.

Η μικτή Ισορροπία Nash στο παίγνιο *Bach - Stravinsky* προσφέρει μια ρεαλιστική λύση σε καταστάσεις όπου οι αμιγείς ισορροπίες δεν επαρκούν για να εξηγήσουν τη συμπεριφορά των παικτών. Αντί της στατικής επιλογής, η τυχαιοποίηση οδηγεί σε μια στατιστικά σταθερή ισορροπία των στρατηγικών στο παίγνιο.

3.5.3 Το παίγνιο Γεράκι - Περιστέρι (*Hawk - Dove Game*)

3.5.3.1 Περιγραφή του παιγνίου: το παίγνιο *Hawk - Dove* αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα στη θεωρία παιγνίων και την εξελικτική θεωρία. Εισήχθη αρχικά από τον Maynard Smith (1976) ως μοντέλο ανάλυσης ανταγωνιστικής συμπεριφοράς σε ζωικούς πληθυσμούς, αλλά χρησιμοποιείται ευρέως και σε κοινωνικά ή οικονομικά παίγνια για να περιγράψει συγκρούσεις συμφερόντων με δυνατότητα αποφυγής.

Στο παίγνιο αυτό, δύο άτομα (ή παίκτες) ανταγωνίζονται για έναν κοινό πόρο αξίας V , με δύο πιθανές στρατηγικές:

- H (*Hawk* - Γεράκι): επιθετική συμπεριφορά (σύγκρουση).
- D (*Dove* - Περιστέρι): ειρηνική συμπεριφορά (υποχώρηση).

Αν και η στρατηγική *Hawk* μπορεί να αποφέρει το μέγιστο όφελος, ενέχει και κόστος σύγκρουσης C όταν συναντά άλλο "γεράκι".

Πίνακας 3.5.3.2: πίνακας αποδόσεων στο *Hawk - Dove*.

Παίκτης H / Παίκτης D	<i>Hawk (H)</i>	<i>Dove (D)</i>
<i>Hawk (H)</i>	$((V - C)/2, (V - C)/2)$	$(V, 0)$
<i>Dove (D)</i>	$(0, V)$	$(V/2, V/2)$

Ο πίνακας δείχνει ότι:

- Όταν δύο “γεράκια” συναντηθούν, συγκρούονται και μοιράζονται τη λεία, υφιστάμενοι και οι δύο το κόστος C .
- Όταν ένα “γεράκι” αντιμετωπίζει ένα “περιστέρι”, το γεράκι παίρνει όλη τη λεία (V), ενώ το περιστέρι υποχωρεί (0).
- Όταν δύο “περιστέρια” συναντηθούν, μοιράζονται ειρηνικά τη λεία ($V/2$ έκαστο).

3.5.3.3 Ανάλυση σε αμιγείς στρατηγικές: υπάρχουν δύο πιθανά σενάρια ανάλογα με τη σχέση του V (οφέλους) και του C (κόστους):

- Αν $V > C$, τότε η επιθετική στρατηγική “*Hawk*” κυριαρχεί, καθώς αποδίδει υψηλότερη αναμενόμενη ωφέλεια.
- Αν $V < C$, καμία στρατηγική δεν είναι αυστηρά κυρίαρχη: οι παίκτες έχουν κίνητρο να αναμειγνύουν τις στρατηγικές τους ώστε να ελαχιστοποιούν το κόστος σύγκρουσης.

Σε αυτή τη δεύτερη περίπτωση, το παίγνιο δεν διαθέτει Ισορροπία Nash σε αμιγείς στρατηγικές, αλλά έχει Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές, η οποία υπολογίζεται ως το σημείο όπου οι παίκτες είναι αδιάφοροι ανάμεσα στις δύο επιλογές.

3.5.3.4 Ισορροπία σε μικτές στρατηγικές: έστω ότι κάθε παίκτης παίζει τη στρατηγική “*Hawk*” με πιθανότητα p και τη στρατηγική “*Dove*” με πιθανότητα $(1 - p)$.

Η αναμενόμενη απόδοση ενός παίκτη που επιλέγει *Hawk* είναι:

$$U(H) = p \cdot ((V - C)/2) + (1 - p) \cdot V \quad (3.30)$$

Αντίστοιχα, η αναμενόμενη απόδοση ενός παίκτη που επιλέγει *Dove* είναι:

$$U(D) = p \cdot 0 + (1 - p) \cdot (V/2) = (1 - p) \cdot (V/2) \quad (3.31)$$

Στην ισορροπία, ο παίκτης είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο στρατηγικών, επομένως:

$$U(H) = U(D) \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας (3.30) και (3.31):

$$p \cdot ((V - C)/2) + (1 - p) \cdot V = (1 - p) \cdot (V/2), \quad (3.33)$$

Μετά από πράξεις προκύπτει:

$$p = V / C \quad (3.34)$$

Άρα η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές είναι:

$$P^* = V / C, \quad (1 - p^*) = (C - V) / C \quad (3.35)$$

3.5.3.5 Ερμηνεία και συμπεράσματα: η σχέση $p^* = V / C$, (3.35) δείχνει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η αξία του πόρου V σε σχέση με το κόστος σύγκρουσης C , τόσο συχνότερα οι παίκτες επιλέγουν τη στρατηγική “Hawk”. Αντίθετα, όταν το κόστος υπερβαίνει την αξία ($C > V$), η πιθανότητα σύγκρουσης μειώνεται, η στρατηγική “Dove” καθίσταται πιο συχνή.

Αυτό το αποτέλεσμα συνδέεται άμεσα με την εξελικτική σταθερότητα: όταν $V < C$, η μικτή στρατηγική $p^* = V / C$, (3.35) αντιστοιχεί σε εξελικτικά σταθερή στρατηγική (ESS), δηλαδή σε κατάσταση όπου καμία εναλλακτική στρατηγική δεν μπορεί να επικρατήσει.

Σε κοινωνικό ή πολιτικό πλαίσιο, το παίγνιο Hawk - Dove περιγράφει καταστάσεις σύγκρουσης και συμβιβασμού, όπως διαπραγματεύσεις, πολιτική αντιπαράθεση ή στρατηγική αποτροπή. Αποτελεί επομένως ένα από τα σημαντικότερα παίγνια για την κατανόηση της ισορροπίας ανάμεσα στον ανταγωνισμό και τη συνεργασία.

3.5.4 Ανταγωνισμός Πληροφορίας (Information Competition Game)

Η ανάλυση των μικτών στρατηγικών δεν περιορίζεται σε παίγνια καθαρού ανταγωνισμού ή συντονισμού, αλλά επεκτείνεται και σε καταστάσεις όπου οι παίκτες δρουν υπό συνθήκες αβεβαιότητας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το παίγνιο Ανταγωνισμού Πληροφορίας, στο οποίο δύο παίκτες αποφασίζουν αν θα επενδύσουν ή όχι στην απόκτηση πληροφορίας που ενδέχεται να τους προσφέρει στρατηγικό πλεονέκτημα έναντι του αντιπάλου.

Η περίπτωση αυτή αναδεικνύει τη σημασία των μικτών στρατηγικών ως μηχανισμού ισορροπίας σε παίγνια όπου η ορθολογική συμπεριφορά δεν υπαγορεύει μοναδική αμιγή στρατηγική.

3.5.4.1 Μαθηματική διατύπωση του παιγνίου: θεωρούμε δύο παίκτες, A και B, οι οποίοι καλούνται να επιλέξουν ανάμεσα σε δύο δυνατές στρατηγικές:

I : επενδύω για να αποκτήσω πληροφορία.

N : δεν επενδύω (παραμένω με την υπάρχουσα γνώση).

Η απόκτηση πληροφορίας έχει κόστος $c > 0$, ενώ η πληροφορία αυτή αυξάνει την πιθανότητα επιτυχίας του παίκτη σε ένα μελλοντικό γεγονός που του αποφέρει κέρδος $v > 0$. Αν και οι δύο επενδύσουν, αποκτούν συμμετρική γνώση και, συνεπώς, κανείς δεν έχει καθαρό πλεονέκτημα. Ωστόσο, και οι δύο επιβαρύνονται με το κόστος. Αν μόνο ένας επενδύσει, απολαμβάνει το πλήρες όφελος v , ενώ ο άλλος λαμβάνει απόδοση 0.

Πίνακας 3.5.4 : πίνακας αποδόσεων στον Ανταγωνισμό Πληροφορίας (*Information Competition Game*).

Παίκτης A / Παίκτης B	<i>I</i> (επενδύει)	<i>N</i> (δεν επενδύει)
<i>I</i> (επενδύει)	$(v/2 - c, v/2 - c)$	$(v - c, 0)$
<i>N</i> (δεν επενδύει)	$(0, v - c)$	$(v/2, v/2)$

Το παίγνιο αυτό είναι συμμετρικό, καθώς και οι δύο παίκτες διαθέτουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών και ίδιες συναρτήσεις απόδοσης.

3.5.4.2 Ανάλυση και υπολογισμός της μικτής Ισορροπίας Nash: καμία από τις αμιγείς στρατηγικές δεν αποτελεί, γενικά, Ισορροπία Nash.

1. Αν και οι δύο επενδύσουν, το καθαρό τους όφελος είναι $v/2 - c$.
2. Αν μόνο ένας επενδύσει, ο επενδυτής αποκομίζει $v - c$, ενώ ο άλλος 0.
3. Αν κανείς από τους δύο παίκτες δεν επενδύσει (*N, N*), τότε κανείς δεν αποκτά πληροφοριακό πλεονέκτημα. Συνεπώς, το αποτέλεσμα του μελλοντικού γεγονότος θεωρείται συμμετρικό, και το κέρδος μοιράζεται ισομερώς ($v/2, v/2$).

Η απόφαση επένδυσης εξαρτάται από τη σχέση του κόστους c προς το δυνητικό κέρδος v .

Αν το κόστος είναι μικρό, η στρατηγική “επενδύω” είναι ελκυστική, αν είναι μεγάλο, η στρατηγική “δεν επενδύω” καθίσταται συμφέρουσα.

Για ενδιάμεσες τιμές, καμία αμιγής στρατηγική δεν εξασφαλίζει σταθερό αποτέλεσμα συνεπώς, η ισορροπία προκύπτει σε μικτές στρατηγικές, όπου κάθε παίκτης τυχαioποιεί την επιλογή του.

Έστω ότι ο παίκτης A επενδύει με πιθανότητα p , και ο παίκτης B επενδύει με πιθανότητα q .

Οι αναμενόμενες αποδόσεις του παίκτη A για καθεμία από τις στρατηγικές του είναι:

$$U_a(I) = q \cdot (v/2 - c) + (1 - q) \cdot (v - c) \quad (3.36)$$

$$U_a(N) = (1 - q) \cdot (v/2) \quad (3.37)$$

Στην Ισορροπία Nash, ο παίκτης πρέπει να είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επιλογών του:

$$q \cdot (v/2 - c) + (1 - q) \cdot (v - c) = (1 - q) \cdot (v/2) \Rightarrow q = (v - 2c) / (v - c) \quad (3.38)$$

Λόγω συμμετρίας, το ίδιο ισχύει και για τον παίκτη B:

$$p = (v - 2c) / (v - c) \quad (3.39)$$

Η παραπάνω τιμή είναι έγκυρη μόνο όταν $0 < c \leq v/2$, δηλαδή όταν το κόστος της πληροφορίας δεν υπερβαίνει το ήμισυ του δυνητικού κέρδους.

3.5.4.3 Ανάλυση της πιθανότητας επένδυσης: ορίζουμε τον λόγο κόστους - οφέλους $r = c / v$, με $0 < r < 1/2$. Επομένως, η εξίσωση (3.32) γράφεται ως:

$$p(r) = (1 - 2r) / (1 - r) \quad (3.40)$$

Η συνάρτηση $p(r)$ εκφράζει τη συσχέτιση ανάμεσα στο σχετικό κόστος πληροφορίας και την πιθανότητα επένδυσης στη μικτή ισορροπία. Όσο αυξάνεται ο λόγος r , δηλαδή όσο το κόστος πληροφορίας γίνεται σχετικά μεγαλύτερο, τόσο μειώνεται η πιθανότητα επένδυσης.

3.5.4.4 Ερμηνεία και συμπεράσματα: το παίγνιο Ανταγωνισμού Πληροφορίας καταδεικνύει ότι οι παίκτες χρησιμοποιούν τυχαιοποίηση όχι ως ένδειξη αβεβαιότητας ή έλλειψης ορθολογικότητας, αλλά ως μηχανισμό εξισορρόπησης κινδύνου και στρατηγικής αλληλεπίδρασης.

Η πιθανότητα επένδυσης προσαρμόζεται ορθολογικά στο σχετικό κόστος πληροφορίας:

- Όταν η πληροφορία είναι φθηνή ($r \rightarrow 0$), οι παίκτες επενδύουν σχεδόν πάντοτε ($p \rightarrow 1$).
- Όταν η πληροφορία είναι δαπανηρή ($r \rightarrow 1/2$), αποφεύγουν την επένδυση ($p \rightarrow 0$).

Η μικτή στρατηγική που προκύπτει εκφράζει στατιστική ισορροπία, όπου κάθε παίκτης επιλέγει την πιθανότητα επένδυσης έτσι ώστε να καθιστά τον αντίπαλο αδιάφορο.

Το αποτέλεσμα αυτό συνδέεται άμεσα με τη θεμελιώδη θέση του Nash (1950) περί ύπαρξης ισορροπίας σε μικτές στρατηγικές, επιβεβαιώνοντας ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία τέτοια ισορροπία.

3.6 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο μελετήθηκε η έννοια της Ισορροπίας Nash σε μικτές στρατηγικές, ως αναγκαία γενίκευση της ισορροπίας σε αμιγείς στρατηγικές σε περιπτώσεις όπου η σταθερότητα δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω αμιγών στρατηγικών. Η τυπική θεμελίωση της έννοιας στηρίζεται στο κλασικό άρθρο του John F. Nash (1950), *Equilibrium points in n - person games*, στο οποίο αποδείχθηκε ότι κάθε πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μία Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές, ακόμη και όταν δεν υπάρχει ισορροπία σε αμιγείς στρατηγικές.

Η ανάλυση ξεκίνησε με τον τυπικό ορισμό της μικτής στρατηγικής και της αντίστοιχης Ισορροπίας Nash, ερμηνεύοντας τη μαθηματική τους σημασία ως σημεία σταθερότητας των βέλτιστων αποκρίσεων των παικτών. Μέσα από το παράδειγμα του *Matching Pennies*, καταδείχθηκε ότι σε παίγνια καθαρού ανταγωνισμού, όπου οι στόχοι των παικτών είναι αντικρουόμενοι, η ισορροπία επιτυγχάνεται μόνο μέσω τυχαιοποίησης των επιλογών.

Στη συνέχεια, παρουσιάστηκε το θεώρημα Minimax του von Neumann (1928), το οποίο αποτέλεσε την πρώτη μαθηματική διατύπωση ύπαρξης λύσης σε παίγνια μηδενικού αθροίσματος και προεικόνισε τη γενικότερη θεμελίωση του Nash. Το θεώρημα αυτό αποδεικνύει ότι η

στρατηγική σταθερότητα προκύπτει όταν κάθε παίκτης επιλέγει τη στρατηγική που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη δυνατή απώλειά του, οδηγώντας σε αμοιβαία ισορροπία.

Η μελέτη ολοκληρώθηκε με τις εφαρμογές των μικτών στρατηγικών, όπως τα παίγνια *Rock - Paper - Scissors* και *Information Competition Game*, όπου η αβεβαιότητα και το στρατηγικό ρίσκο καθιστούν τη μικτή Ισορροπία Nash την κατάλληλη μορφή ισορροπίας. Μέσα από αυτά τα παραδείγματα αναδείχθηκε ότι η τυχαιοποίηση δεν υποδηλώνει έλλειψη ορθολογικότητας, αλλά αποτελεί μηχανισμό εξισορρόπησης συμφερόντων και στρατηγικής αστάθειας.

Συνοψίζοντας, η Ισορροπία Nash σε μικτές στρατηγικές αποτελεί τη μαθηματική και εννοιολογική βάση για την ανάλυση παιγνίων, όπου δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας σε αμιγείς στρατηγικές. Η έννοια αυτή εισάγει έναν πιο ρεαλιστικό τρόπο κατανόησης της στρατηγικής αλληλεπίδρασης, επιτρέποντας τη μοντελοποίηση περίπλοκων καταστάσεων στην οικονομία, την πολιτική, τη βιολογία και την τεχνητή νοημοσύνη.

Κεφάλαιο 4: Υπολογιστικές τεχνικές

4.1 Εισαγωγή στις υπολογιστικές μεθόδους

Η αναλυτική εύρεση Ισορροπιών Nash σε στρατηγικά παίγνια καθίσταται συχνά ιδιαίτερα απαιτητική, ιδίως όταν το πλήθος των παικτών ή των διαθέσιμων στρατηγικών είναι μεγάλο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η εκθετική αύξηση του χώρου στρατηγικών και η πολυπλοκότητα των αλληλεπιδράσεων καθιστούν τον ακριβή υπολογισμό υπολογιστικά δυσεπίλυτο (*computational intractability*; Papadimitriou, 1994). Η ανάγκη υπέρβασης των περιορισμών αυτών οδήγησε στην ανάπτυξη υπολογιστικών μεθόδων, οι οποίες λειτουργούν συμπληρωματικά προς την κλασική μαθηματική ανάλυση και επιτρέπουν τον εντοπισμό, την προσεγγιστική μελέτη ή και τη σύγκλιση προς Ισορροπίες Nash.

Οι υπολογιστικές τεχνικές έχουν διαδραματίσει καθοριστικό ρόλο στη διεύρυνση των εφαρμογών της θεωρίας παιγνίων, παρέχοντας μεθόδους υπολογισμού και προσομοίωσης που δεν είναι διαθέσιμες με κλασικά αναλυτικά μέσα. Σημαντική συμβολή αποτελεί η αλγοριθμική εργασία των McKelvey και McLennan (1996) για τον υπολογισμό ισορροπιών σε πεπερασμένα παίγνια, καθώς

και ο αλγόριθμος *Lemke - Howson*, ο οποίος παραμένει το κλασικό εργαλείο εύρεσης μικτών ισορροπιών σε παίγνια δύο παικτών. Παράλληλα, επαναληπτικές διαδικασίες όπως το *Fictitious Play* (Brown, 1951; Robinson, 1951) και οι *Best Response Dynamics* επιτρέπουν την προσέγγιση σημείων ισορροπίας μέσω διαδοχικών αλγοριθμικών προσαρμογών.

Οι μέθοδοι αυτές εξυπηρετούν τρεις βασικούς στόχους:

1. Εντοπισμό αμιγών και μικτών Ισορροπιών Nash ακόμη και όταν η αλγεβρική επίλυση δεν είναι εφικτή.
2. Προσομοίωση της δυναμικής των στρατηγικών επιλογών, αποκαλύπτοντας μοτίβα σύγκλισης ή περιοδικής συμπεριφοράς.
3. Ανάλυση παιγνίων μεγάλης κλίμακας, όπως πληθυσμιακά ή δικτυακά μοντέλα, όπου η θεωρητική προσέγγιση είναι περιορισμένη.

Η χρήση υπολογιστικών εργαλείων έχει πλέον επεκταθεί σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, όπως:

- **Οικονομική θεωρία:** ανάλυση δημοπρασιών και στρατηγικών τιμολόγησης.
- **Δίκτυα και επικοινωνίες:** μελέτη παιγνίων συμφόρησης ή επιλογής διαδρομής.
- **Πολυπαικτικά παίγνια και τεχνητή νοημοσύνη:** προσομοίωση στρατηγικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ πολλών αυτόνομων παικτών.

Επιπλέον, η ανάπτυξη εξειδικευμένων υπολογιστικών πλατφορμών, όπως το *Gambit*, και η αξιοποίηση γλωσσών προγραμματισμού και υπολογιστικών εργαλείων, όπως το *MATLAB* και η *Python*, έχουν καταστήσει δυνατή την πρακτική υλοποίηση και αξιολόγηση των υπολογιστικών μεθόδων σε σύνθετα πραγματικά στρατηγικά παίγνια.

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι να αναδείξει τη σημασία των υπολογιστικών τεχνικών στην ανάλυση στρατηγικών παιγνίων και να θέσει το θεωρητικό υπόβαθρο για τις επόμενες υποενότητες, όπου εξετάζονται αναλυτικότερα μέθοδοι όπως ο αλγόριθμος *Lemke - Howson* και οι επαναληπτικές δυναμικές τύπου *Fictitious Play*. Η ενότητα αυτή λειτουργεί ως γέφυρα από τη θεωρητική διατύπωση της Ισορροπίας Nash στην υπολογιστική της εφαρμογή, υπογραμμίζοντας

την ανάγκη συνδυασμού μαθηματικής και αλγοριθμικής προσέγγισης για την κατανόηση πολύπλοκων παιγνίων.

4.2 Κατηγορίες υπολογιστικών μεθόδων

Η μεγάλη ποικιλία αλγοριθμικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό Ισορροπιών Nash καθιστά αναγκαία μια συστηματική ταξινόμηση των μεθόδων, ώστε να είναι εφικτή η επιλογή της καταλληλότερης προσέγγισης για κάθε πρόβλημα. Η επιλογή μεθόδου εξαρτάται από χαρακτηριστικά όπως το μέγεθος του παιγνίου, το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας και οι διαθέσιμοι υπολογιστικοί πόροι (Fudenberg & Tirole, 1991).

Στην παρούσα ενότητα υιοθετούνται δύο θεμελιώδεις άξονες ταξινόμησης:

1. Διακριτές έναντι συνεχών στρατηγικών, και
2. Ντετερμινιστικές έναντι στοχαστικών προσεγγίσεων.

4.2.1 Διακριτές και συνεχείς στρατηγικές

Διακριτές στρατηγικές: σε παίγνια όπου κάθε παίκτης διαθέτει πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών, εφαρμόζονται κλασικές αλγοριθμικές μέθοδοι, όπως ο αλγόριθμος *Lemke - Howson* για παίγνια δύο παικτών, καθώς και η εξάλειψη κυριαρχούμενων στρατηγικών για τη μείωση του στρατηγικού χώρου. Οι μέθοδοι αυτές εκμεταλλεύονται τον διακριτό χαρακτήρα του προβλήματος και μπορούν να αποδώσουν ακριβείς λύσεις σε παίγνια μικρού ή μεσαίου μεγέθους. Ωστόσο, η εκθετική αύξηση του χώρου στρατηγικών οδηγεί σε σημαντική υπολογιστική επιβάρυνση σε μεγαλύτερα παίγνια (Osborne & Rubinstein, 1994).

Συνεχείς στρατηγικές: σε παίγνια όπου οι στρατηγικές ανήκουν σε συνεχή σύνολα (π.χ. διαστήματα πραγματικών αριθμών), απαιτούνται αριθμητικές τεχνικές βελτιστοποίησης και υπολογισμού σταθερών σημείων. Στις μεθόδους αυτές περιλαμβάνονται οι μέθοδοι συνέχειας (*Homotopy / Continuation Methods*), οι προσεγγίσεις τύπου *Quantal Response* και τεχνικές δειγματοληψίας τύπου *Monte Carlo*. Η επιλογή κατάλληλων αριθμητικών μεθόδων (όπως μέθοδοι τύπου *Newton* ή αλγόριθμοι εύρεσης ριζών) επηρεάζει καθοριστικά την ακρίβεια και τη σταθερότητα των αποτελεσμάτων (Allgower & Georg, 1990).

4.2.2 Ντετερμινιστικές και στοχαστικές προσεγγίσεις

Ντετερμινιστικές μέθοδοι: οι ντετερμινιστικές μέθοδοι στοχεύουν στον υπολογισμό ακριβών λύσεων με πλήρως προβλέψιμο τρόπο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι *pivoting algorithms* (όπως ο *Lemke - Howson*), οι μέθοδοι πλήρους διερεύνησης του χώρου λύσεων και οι αριθμητικές μέθοδοι τύπου *Newton* ή *Continuation*. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι κατάλληλοι όταν απαιτείται υψηλή ακρίβεια και πλήρης αναπαράσταση της δομής του παιγνίου (Govindan & Wilson, 2003).

Στοχαστικές μέθοδοι: οι στοχαστικές προσεγγίσεις αξιοποιούν τυχειότητα για την εξερεύνηση του χώρου λύσεων και παρουσιάζουν ιδιαίτερη χρησιμότητα σε μεγάλα ή σύνθετα παίγνια. Περιλαμβάνουν εξελικτικούς αλγορίθμους (Holland, 1975 ; Goldberg, 1989), στοχαστικές μεθόδους όπως η *Regret Minimization* και η *Fictitious Play*, καθώς και τεχνικές προσεγγιστικής βελτιστοποίησης και δειγματοληψίας όπως το *Monte Carlo sampling*. Αν και εισάγουν αβεβαιότητα, επιτρέπουν την ανακάλυψη προσεγγιστικών ισορροπιών σε προβλήματα όπου οι ντετερμινιστικές μέθοδοι καθίστανται ανεφάρμοστες.

Ορθολογικό πλαίσιο επιλογής μεταξύ ντετερμινιστικής και στοχαστικής: η επιλογή μεταξύ ντετερμινιστικών και στοχαστικών προσεγγίσεων εξαρτάται από:

- Την ανάγκη για ακριβή ή προσεγγιστική λύση,
- Τους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους,
- Την ανοχή σε στοχαστικά αποτελέσματα,
- Την πολυπλοκότητα και το μέγεθος του παιγνίου.

4.3 Κλασικές και επαναληπτικές μέθοδοι

4.3.1 Μέθοδος *Best Response Dynamics*

Η μέθοδος *Best Response Dynamics (BRD)* αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις επαναληπτικές προσεγγίσεις για την εύρεση ή προσέγγιση Ισορροπίας Nash σε πεπερασμένα στρατηγικά παίγνια. Η βασική ιδέα στηρίζεται στη διαδοχική προσαρμογή των στρατηγικών των παικτών: κάθε παίκτης, γνωρίζοντας τις επιλογές των υπολοίπων, επιλέγει τη βέλτιστη απόκρισή του (*best response*) σύμφωνα με τη δική του συνάρτηση αποδόσεων. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται

επαναληπτικά έως ότου επιτευχθεί προφίλ στρατηγικών στο οποίο κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική του, δηλαδή μία Ισορροπία Nash (Fudenberg & Tirole, 1991).

Σε μαθηματικούς όρους, αν κάθε παίκτης i διαθέτει ένα σύνολο στρατηγικών S_i και μία συνάρτηση αποδόσεων $u_i(s_i, s_{-i})$, η βέλτιστη απόκριση του παίκτη i ορίζεται ως:

$$BR_i(s_{-i}) = \arg \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}), s_i \in S_i \quad (4.1)$$

όπου ο τελεστής $\arg \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}), s_i \in S_i$ δηλώνει το σύνολο των στρατηγικών $s_i \in S_i$ που μεγιστοποιούν την απόδοση u_i του παίκτη i , δεδομένου του προφίλ s_{-i} των υπολοίπων παικτών, δηλαδή:

$$\arg \max_{s_i} u_i(s_i, s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \forall s_i' \in S_i\}$$

Η διαδικασία *Best Response Dynamics* βασίζεται στην επαναληπτική εφαρμογή του τελεστή BR για όλους τους παίκτες, με κυκλική ή ταυτόχρονη ενημέρωση των στρατηγικών τους, έως ότου το προφίλ στρατηγικών συγκλίνει. Όπως επισημαίνουν οι Fudenberg και Levine (1998), η μέθοδος αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως επαναληπτική διαδικασία βελτιστοποίησης στρατηγικής, μέσω της οποίας οι παίκτες προσεγγίζουν τις βέλτιστες αποκρίσεις τους.

Πλεονεκτήματα:

- Απλότητα και εννοιολογική καθαρότητα: η μέθοδος συνδέεται άμεσα με τον ορισμό της Ισορροπίας Nash, καθώς η ισορροπία επιτυγχάνεται όταν κάθε στρατηγική αποτελεί βέλτιστη απόκριση στις υπόλοιπες.
- Ευκολία υλοποίησης: είναι κατάλληλη για παίγνια μικρού ή μεσαίου μεγέθους και εφαρμόζεται τόσο σε συμμετρικά όσο και σε ασύμμετρα παίγνια.
- Ερμηνευτική αξία: παρέχει διαφάνεια στη διαδικασία σύγκλισης, διευκολύνοντας την ανάλυση και διδασκαλία της στρατηγικής συμπεριφοράς (Fudenberg & Levine, 1998).

Μειονεκτήματα:

- Έλλειψη γενικής εγγύησης σύγκλισης: σε πολλά παίγνια, ιδίως μηδενικού αθροίσματος, η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε κυκλικές ή ταλαντωτικές δυναμικές.
- Εξάρτηση από το σημείο εκκίνησης: σε παίγνια με πολλαπλές ισορροπίες, το τελικό σημείο σύγκλισης εξαρτάται από το αρχικό προφίλ στρατηγικών.
- Υπολογιστική επιβάρυνση σε μεγάλα παίγνια: η εφαρμογή της μεθόδου δυσχεραίνεται σημαντικά σε παίγνια με μεγάλο αριθμό στρατηγικών ή παικτών.

Ενδεικτικό παράδειγμα: πίνακας 4.3.1: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2×2 .

Παίκτης A / Παίκτης B	Παίκτης 2: A	Παίκτης 2: B
Παίκτης 1: A	(2, 2)	(0, 3)
Παίκτης 1: B	(3, 0)	(1, 1)

1. Αρχικό βήμα: έστω ότι οι παίκτες ξεκινούν τυχαία με στρατηγικές (A, A).
2. Ο παίκτης 1, δεδομένου ότι ο παίκτης 2 παίζει A, έχει μέγιστο κέρδος επιλέγοντας B ($3 > 2$).
3. Ο παίκτης 2, δεδομένου ότι ο παίκτης 1 παίζει B, έχει μέγιστο κέρδος επιλέγοντας B ($1 > 0$).
4. Το προφίλ (B, B) αποτελεί σημείο ισορροπίας, καθώς κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει τη στρατηγική του μονομερώς.

Άρα, το (B, B) είναι η Ισορροπία Nash που εντοπίζεται μέσω της διαδικασίας *Best Response Dynamics*.

Συμπέρασμα: η μέθοδος *Best Response Dynamics* αποτελεί μια από τις πιο διαδεδομένες και εύχρηστες επαναληπτικές διαδικασίες προσέγγισης της Ισορροπίας Nash. Είναι κατάλληλη για μικρά παίγνια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρώτο στάδιο ανάλυσης πριν από την εφαρμογή πιο προχωρημένων τεχνικών. Ωστόσο, σε μεγάλης κλίμακας παίγνια ή σε περιπτώσεις όπου οι επαναληπτικές καλύτερες αποκρίσεις δεν συγκλίνουν σε Ισορροπία Nash αλλά οδηγούν σε

κυκλικές ή ταλαντωτικές δυναμικές, απαιτείται συνδυασμός με πιο εξελιγμένες μεθόδους, όπως η *Regret Minimization* ή οι *Homotopy Methods*.

4.3.2 Μέθοδος Εξάλειψης Κυριαρχούμενων Στρατηγικών

Η μέθοδος Εξάλειψης Κυριαρχούμενων Στρατηγικών (*Iterated Elimination of Dominated Strategies - IEDS*) αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις τεχνικές ανάλυσης στη θεωρία παιγνίων, καθώς επιτρέπει τη συστηματική μείωση του συνόλου των διαθέσιμων στρατηγικών μέσω της απομάκρυνσης στρατηγικών που δεν είναι ορθολογικές επιλογές για τους παίκτες. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι κάθε παίκτης μπορεί να αποκλείσει εκ των προτέρων στρατηγικές που αποφέρουν χαμηλότερη απόδοση από κάποια άλλη, ανεξάρτητα από τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών (Osborne & Rubinstein, 1994).

Η εξάλειψη αυτών των στρατηγικών, που ονομάζονται κυριαρχούμενες, απλοποιεί το παίγνιο χωρίς να μεταβάλλει τη λογική του, οδηγώντας σε ένα μικρότερο σύνολο στρατηγικών όπου κάθε παίκτης επιλέγει μέσα από το σύνολο των μη κυριαρχούμενων στρατηγικών. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται διαδοχικά έως ότου δεν παραμένουν στρατηγικές που κυριαρχούνται (Pearce, 1984).

4.3.2.1 Θεωρητικό υπόβαθρο: μια στρατηγική $s_i' \in S_i$ ενός παίκτη i λέγεται ότι κυριαρχείται αυστηρά από μια άλλη στρατηγική s_i όταν για κάθε προφίλ στρατηγικών των υπολοίπων παικτών s_{-i} ισχύει: $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$. Αντίστοιχα, η ασθενής κυριαρχία ορίζεται όταν

$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$, για όλα τα s_{-i} και η ανισότητα είναι αυστηρή για τουλάχιστον ένα s_{-i} .

Όπου: $s_i \in S_i$ δηλώνει τη στρατηγική του παίκτη i , u_i η συνάρτηση αποδόσεων του και $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in S_{-i}$ το κοινό προφίλ των στρατηγικών επιλογών όλων των υπόλοιπων παικτών εκτός του i .

Η διαδικασία *IEDS* εφαρμόζεται επανειλημμένα, απομακρύνοντας σε κάθε βήμα τις στρατηγικές που είναι αυστηρά ή ασθενώς κυριαρχούμενες. Το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι είτε:

- Ένα μοναδικό προφίλ στρατηγικών, που ισοδυναμεί με αμιγής Ισορροπία Nash, είτε

- Ένα υποσύνολο στρατηγικών που περιλαμβάνει όλες τις ορθολογικές επιλογές των παικτών.

Η θεωρητική βάση της μεθόδου στηρίζεται στην έννοια της κοινής γνώσης ορθολογικότητας: κάθε παίκτης γνωρίζει ότι όλοι οι παίκτες είναι ορθολογικοί και γνωρίζει ότι όλοι γνωρίζουν αυτό το γεγονός, και ούτω καθεξής (Pearce, 1984).

Πλεονεκτήματα:

- Λογική και διαφανής διαδικασία: η μέθοδος στηρίζεται αποκλειστικά σε καθαρά ορθολογικά κριτήρια και είναι εύκολα ερμηνεύσιμη.
- Απλοποιεί σημαντικά το παίγνιο: μειώνει το μέγεθος του στρατηγικού χώρου χωρίς να αλλοιώνει τη δομή του παιγνίου.
- Ιδιαίτερα χρήσιμη σε μικρά ή μεσαία παίγνια: είναι από τις πρώτες τεχνικές που εφαρμόζονται στα παίγνια.
- Μοναδικό αποτέλεσμα σε αυστηρή κυριαρχία: όταν αφαιρούνται μόνο αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές, η σειρά εξάλειψης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα (Osborne & Rubinstein, 1994).

Μειονεκτήματα:

- Εξάρτηση από τη σειρά εξάλειψης στην ασθενή κυριαρχία: σε στρατηγικές που κυριαρχούνται ασθενώς, διαφορετική σειρά εξάλειψης μπορεί να δώσει διαφορετικά σύνολα στρατηγικών (Rasmusen, 2006).
- Δεν εξασφαλίζει Ισορροπία Nash στα μικτά παίγνια: μπορεί να αφαιρεθούν στρατηγικές που συμμετέχουν σε μικτές ισορροπίες, άρα το αποτέλεσμα δεν αντικατοπτρίζει πάντα τη συνολική λύση του παιγνίου.
- Περιορισμένη αποτελεσματικότητα σε μεγάλα παίγνια: ο αριθμός στρατηγικών μπορεί να αυξάνεται εκθετικά, καθιστώντας τη διαδικασία χρονοβόρα, με μεγάλο υπολογιστικό φόρτο.

Ενδεικτικό παράδειγμα: πίνακας 4.3.2: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2x2.

Παίκτης A / Παίκτης B	Παίκτης 2: A	Παίκτης 2: B
Παίκτης 1: A	(3, 2)	(1, 1)
Παίκτης 1: B	(2, 0)	(0, 0)

- Για τον παίκτη 1, η στρατηγική A αποφέρει πάντοτε μεγαλύτερη απόδοση από B ($3 > 2$ και $1 > 0$). Άρα η B κυριαρχείται αυστηρά από A και εξαλείφεται.
- Για τον παίκτη 2, η στρατηγική A είναι προτιμότερη από B ($2 > 1$ όταν ο παίκτης 1 παίζει A). Η B επομένως μπορεί να απορριφθεί.

Το προφίλ (A, A) αποτελεί μοναδική στρατηγική επιλογή, δηλαδή αμιγής Ισορροπία Nash.

Συμπέρασμα: η μέθοδος *IEDS* αποτελεί απαραίτητο εργαλείο πρώτου επιπέδου στην ανάλυση στρατηγικών παιγνίων. Συνδυάζει λογική αυστηρότητα και εύκολη εφαρμογή προσφέροντας σαφή εικόνα της ορθολογικής συμπεριφοράς των παικτών. Παρά τους περιορισμούς της σε ασθενή κυριαρχία και μεγάλα παίγνια, παραμένει θεμελιώδες βήμα πριν την εφαρμογή πιο προχωρημένων μεθόδων, όπως *Best Response Dynamics* και *Fictitious Play*.

4.3.3 Μέθοδος *Fictitious Play*

Η μέθοδος *Fictitious Play (FP)* αποτελεί μία από τις κλασικές επαναληπτικές διαδικασίες στη θεωρία παιγνίων. Εισήχθη από τον Brown (1951) και αναλύθηκε περαιτέρω από τη Robinson (1951). Η βασική ιδέα είναι ότι, σε κάθε επανάληψη του παιγνίου, κάθε παίκτης παρατηρεί τις προηγούμενες κινήσεις των αντιπάλων του και, καθώς το ίδιο παίγνιο επαναλαμβάνεται, εκτιμά τις στρατηγικές που αυτοί ακολουθούν με βάση τη συχνότητα των προηγούμενων επιλογών τους. Στη συνέχεια, ο παίκτης επιλέγει τη βέλτιστη απόκρισή του έναντι αυτών των εκτιμήσεων.

Με την πάροδο του χρόνου, οι εκτιμήσεις αυτές αναθεωρούνται σταδιακά και οι στρατηγικές επιλογές των παικτών μπορούν, υπό κατάλληλες συνθήκες, να συγκλίνουν σε σημείο Ισορροπίας Nash (Fudenberg & Levine, 1998).

4.3.3.1 Θεωρητικό υπόβαθρο: έστω ότι το παίγνιο επαναλαμβάνεται διαδοχικά. Αν στο χρόνο t ο παίκτης i πιστεύει ότι ο παίκτης j παίζει τη στρατηγική s_j με πιθανότητα $P_j(t)$, τότε ο i επιλέγει τη βέλτιστη απάντηση:

$$s_i(t+1) \in \arg \max u_i (s_i, P_{-i}(t)), s_i \in S_i \quad (4.2)$$

Όπου ο τελεστής $\arg \max u_i (s_i, P_{-i}(t))$, δηλώνει το σύνολο των στρατηγικών $s_i \in S_i$ που μεγιστοποιούν την αναμενόμενη απόδοση του παίκτη i έναντι της εκτιμώμενης μικτής στρατηγικής $P_{-i}(t)$ των αντιπάλων, δηλαδή:

$$\arg \max u_i (s_i, P_{-i}(t)) = \{s_i \in S_i : u_i (s_i, P_{-i}(t)) \geq u_i (s_i', P_{-i}(t)) \quad \forall s_i' \in S_i\}$$

Στη συνέχεια, ο παίκτης i ενημερώνει τις εκτιμήσεις του με βάση τη σχετική συχνότητα των προηγούμενων επιλογών των αντιπάλων:

$$P_j(t+1) = (t P_j(t) + I[s_j(t)]) / (t + 1), \quad (4.3)$$

όπου $I[s_j(t)]$ είναι δείκτηρια συνάρτηση που λαμβάνει τιμή 1 αν ο παίκτης j έπαιξε την στρατηγική $s_j(t)$ στο βήμα t και 0 διαφορετικά.

Η ακολουθία $\{s_i(t)\}$ συγκλίνει σε Ισορροπία Nash σε παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος και σε ορισμένες κατηγορίες συμμετρικών παιγνίων (όπως παίγνια δυναμικού¹), ενώ σε γενικότερα παίγνια μπορεί να οδηγήσει σε κυκλική συμπεριφορά ή περιοδικές ταλαντώσεις (Robinson, 1951).

Πλεονεκτήματα:

¹Ως παίγνιο δυναμικού (*exact potential game*) ορίζεται το παίγνιο όπου υπάρχει μία κοινή συνάρτηση $P: S \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η μεταβολή στην απόδοση ενός παίκτη από μονομερή αλλαγή στρατηγικής να ισούται με τη μεταβολή του δυναμικού: $u_i(s_i', s_{-i}) - u_i(s_i, s_{-i}) = P(s_i', s_{-i}) - P(s_i, s_{-i})$. Τα τοπικά μέγιστα της P αποτελούν αμιγείς Ισορροπίες Nash, διασφαλίζοντας έτσι τη σύγκλιση μεθόδων όπως το Fictitious Play.

- Απλή και διαισθητική επαναληπτική διαδικασία: προσομοιώνει τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες προσαρμόζουν τις στρατηγικές τους με βάση την εμπειρία (Brown, 1951).
- Σύγκλιση σε πολλές σημαντικές κατηγορίες παιγνίων: ιδίως σε παίγνια δύο παικτών μηδενικού αθροίσματος.
- Υψηλή υπολογιστική χρησιμότητα: εφαρμόζεται εύκολα σε προσομοιώσεις, εργαστηριακά πειράματα και αλγοριθμικές επαναληπτικές διαδικασίες.
- Θεμέλιο για πιο σύγχρονες μεθόδους: πολλές επαναληπτικές διαδικασίες όπως *Regret Minimization* και *Evolutionary Dynamics* βασίζονται στη λογική του *Fictitious Play*.

Μειονεκτήματα:

- Έλλειψη εγγύησης σύγκλισης: σε πολλά παίγνια η διαδικασία μπορεί να ταλαντεύεται επ' άπειρον.
- Αργή σύγκλιση σε πολύπλοκα παίγνια: τα παίγνια με μεγάλο πλήθος στρατηγικών απαιτούν πολλές επαναλήψεις για σταθεροποίηση.
- Εξάρτηση από τις αρχικές εκτιμήσεις: διαφορετικά αρχικά $p_j(0)$ μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετικές διαδρομές ή ακόμη και σε μη σύγκλιση.
- Δεν εξασφαλίζει επαλήθευση μικτών ισορροπιών: μπορεί να συγκλίνει μόνο σε αμιγείς στρατηγικές ή να παραμείνει σε κυκλική συμπεριφορά.

Ενδεικτικό παράδειγμα: πίνακας 4.3.3: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2x2.

Παίκτης A / Παίκτης B	Παίκτης 2: A	Παίκτης 2: B
Παίκτης 1: A	(2, 2)	(0, 3)
Παίκτης 1: B	(3, 0)	(1, 1)

- Στην αρχή, ο παίκτης 1 υποθέτει ότι ο παίκτης 2 επιλέγει εξίσου πιθανές τις στρατηγικές A και B.
- Βάσει αυτού, η βέλτιστη απάντηση του παίκτη 1 είναι να παίξει B (καθώς η αναμενόμενη απόδοση είναι μεγαλύτερη).

- Ο παίκτης 2, παρατηρώντας αυτή τη συμπεριφορά, ενημερώνει τις εκτιμήσεις του και επιλέγει B ως βέλτιστη απάντηση.
- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται ώσπου οι στρατηγικές σταθεροποιούνται στο (B, B), το οποίο αντιστοιχεί σε Ισορροπία Nash.

Συμπέρασμα: η μέθοδος *Fictitious Play* είναι κομβικό μοντέλο επαναληπτικής διαδικασίας παρέχοντας έναν σαφή, διαφανή και πρακτικό τρόπο μελέτης της δυναμικής σύγκλισης σε στρατηγικά παίγνια. Παρά τους περιορισμούς της (πιθανή μη σύγκλιση, ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες), παραμένει θεμελιώδης τεχνική με ιδιαίτερη σημασία τόσο θεωρητικά όσο και υπολογιστικά, και αποτελεί βάση για πλήθος σύγχρονων αλγοριθμικών και εξελικτικών προσεγγίσεων.

4.3.4 Μέθοδος *Lemke - Howson*

Η μέθοδος *Lemke - Howson (LH)* αποτελεί τον κλασικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό (τουλάχιστον) μίας Ισορροπίας Nash σε πεπερασμένα παίγνια δύο παικτών σε κανονική μορφή (*bimatrix games*). Εισήχθη από τους Lemke και Howson (1964) και βασίζεται στη διατύπωση των συνθηκών ισορροπίας ως Προβλήματος Γραμμικής Συμπληρωματικότητας (*Linear Complementarity Problem - LCP*), το οποίο επιλύεται μέσω συμπληρωματικού *pivoting* (*complementary pivoting*) πάνω σε πολυεδρικές δομές (Cottle, Pang, & Stone, 1992; von Stengel, 2002).

Μαθηματικό πλαίσιο και σύνδεση με *LCP*:

Θεωρούμε ένα παίγνιο δύο παικτών όπου ο Παίκτης 1 διαθέτει n αμιγείς στρατηγικές και ο Παίκτης 2 διαθέτει m αμιγείς στρατηγικές. Το παίγνιο περιγράφεται πλήρως από δύο πίνακες αποδόσεων (*payoff matrices*) $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

- Ο πίνακας A περιέχει τις αποδόσεις του Παίκτη 1, όπου το στοιχείο A_{ij} (γραμμή i , στήλη j) δηλώνει την πληρωμή του όταν επιλέγει τη στρατηγική i και ο Παίκτης 2 τη στρατηγική j .

- Ο πίνακας B περιέχει τις αποδόσεις του Παίκτη 2, όπου το αντίστοιχο στοιχείο B_{ij} δηλώνει την πληρωμή του για τον ίδιο συνδυασμό επιλογών (i, j) .

Έστω $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \Delta_n$ το διάνυσμα κατανομής πιθανοτήτων (μικτή στρατηγική) του Παίκτη 1 και $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \Delta_m$ του Παίκτη 2, όπου με:

$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ και $\Delta_m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_j \geq 0, \sum_{j=1}^m y_j = 1\}$ συμβολίζονται τα απλοπλέγματα πιθανοτήτων (τα σύνολα όλων των δυνατών μικτών στρατηγικών). Οι αναμενόμενες αποδόσεις τους ορίζονται αντίστοιχα ως $u_1(x, y) = x^T A y$ και $u_2(x, y) = x^T B y$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι όλα τα στοιχεία των πινάκων A και B είναι αυστηρά θετικά ($A_{ij} > 0, B_{ij} > 0$). Αυτό επιτυγχάνεται προσθέτοντας μία κατάλληλη θετική σταθερά σε όλα τα στοιχεία τους, διαδικασία που διατηρεί αναλλοίωτες τις Ισορροπίες Nash του παιγνίου.

Οι συνθήκες βέλτιστης απόκρισης μετασχηματίζονται στο ακόλουθο σύστημα LCP:

$$w = Mz + q, w^T z = 0, w \geq 0, z \geq 0$$

όπου:

- $z = [\tilde{x}, \tilde{y}]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$: το διάνυσμα των μη κανονικοποιημένων μεταβλητών στρατηγικής των δύο παικτών.
- $w = [u, v]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$: το διάνυσμα των μεταβλητών χαλάρωσης (*slack variables*), οι οποίες εκφράζουν την απόκλιση της απόδοσης κάθε αμιγούς στρατηγικής από τη μέγιστη δυνατή απόδοση.
- $q = [-1, \dots, -1]^T \in \mathbb{R}^{n+m}$: το διάνυσμα σταθερών όρων.
- $M \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$: ο σύνθετος (*block*) πίνακας του συστήματος, ο οποίος κατασκευάζεται άμεσα από τους πίνακες αποδόσεων:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

(όπου $0_{n \times n}$ και $0_{m \times m}$ είναι μηδενικοί πίνακες διαστάσεων $n \times n$ και $m \times m$ αντίστοιχα, και B^T ο ανάστροφος πίνακας του B διαστάσεων $m \times n$)

Ερμηνεία της Συμπληρωματικότητας:

Η συνθήκη $w^T z = 0$ (δηλαδή $w_k \cdot z_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n+m$) εκφράζει μαθηματικά τις συνθήκες ισορροπίας:

- Αν μία στρατηγική επιλέγεται με θετική πιθανότητα ($z_k > 0$), τότε η αντίστοιχη μεταβλητή χαλάρωσης είναι μηδενική ($w_k = 0$), δηλαδή η στρατηγική προσφέρει τη μέγιστη δυνατή απόδοση.
- Αν μία στρατηγική αποφέρει υποδεέστερη απόδοση ($w_k > 0$), τότε δεν επιλέγεται ποτέ ($z_k = 0$).

Κάθε μη τετριμμένη λύση (z, w) του συστήματος LCP οδηγεί, μετά από ανεξάρτητη κανονικοποίηση των υποδιανυσμάτων (*subvectors*) $\tilde{x}$ και $\tilde{y}$ (ώστε $\sum \tilde{x}_i = 1$ και $\sum \tilde{y}_j = 1$), ακριβώς σε μία Ισορροπία Nash (x, y) του αρχικού *bimatrix* παιγνίου (Cottle et al., 1992).

4.3.4.1 Περιγραφή αλγορίθμου (συνοπτικά):

Τα βασικά βήματα της μεθόδου συνοψίζονται ως εξής:

1. **Κανονικοποίηση αποδόσεων:** οι πίνακες A και B μετασχηματίζονται μέσω προσθήκης κατάλληλης σταθεράς ώστε όλα τα στοιχεία τους να είναι αυστηρά θετικά ($A_{ij} > 0$, $B_{ij} > 0$), διατηρώντας αναλλοίωτο το σύνολο των Ισορροπιών Nash.
2. **Εφικτή εκκίνηση και επιλογή αρχικής ετικέτας:** ο αλγόριθμος ξεκινά από την τετριμμένη κορυφή ($z = 0$, $w = -q \geq 0$). Εισάγεται μία «τεχνητή ετικέτα» (επιλογή

μίας αρχικής μεταβλητής προς είσοδο στη βάση), διαταράσσοντας προσωρινά τη συνθήκη πλήρους συμπληρωματικότητας.

3. **Συμπληρωματικό *Pivoting* (*Complementary Pivoting*):** εκτελούνται διαδοχικά βήματα *pivot* κατά μήκος των ακμών του πολυέδρου. Κάθε φορά που μία μεταβλητή εξέρχεται από τη βάση, εισέρχεται υποχρεωτικά η συμπληρωματική της (*label following*).
4. **Τερματισμός:** ο αλγόριθμος τερματίζει μόλις η αρχική ετικέτα (τεχνητή μεταβλητή) απομακρυνθεί πλήρως από τη βάση. Η τελική βασική εφικτή λύση ικανοποιεί όλες τις συνθήκες συμπληρωματικότητας και, μετά από κανονικοποίηση, αποδίδει μία Ισορροπία Nash (x^*, y^*) .
5. **Αντιμετώπιση Εκφυλισμού:** σε μη εκφυλισμένα παίγνια ο αλγόριθμος εγγυάται πεπερασμένο τερματισμό χωρίς βρόχους. Σε εκφυλισμένες περιπτώσεις εφαρμόζονται λεξικογραφικοί κανόνες *pivot* ή μικρές διαταραχές των αποδόσεων (von Stengel, 2002).

Πλεονεκτήματα:

- Θεωρητική αρτιότητα: αποτελεί κατασκευαστική απόδειξη ύπαρξης ισορροπίας σε *bimatrix* παίγνια.
- Γεωμετρική εποπτεία: προσφέρει σαφή γεωμετρική ερμηνεία διαδρομής πάνω στα πολύεδρα των βέλτιστων αποκρίσεων.
- Αλγοριθμική συγγένεια: συνδέεται στενά με τον αλγόριθμο *simplex* και τη γραμμική συμπληρωματικότητα, διαθέτοντας αποδοτικές υπολογιστικές υλοποιήσεις.

Μειονεκτήματα:

- Εντοπισμός μίας μόνο ισορροπίας: κάθε εκτέλεση καταλήγει σε μία συγκεκριμένη ισορροπία. Για την εύρεση άλλων ισορροπιών απαιτείται εκκίνηση με διαφορετική αρχική ετικέτα.
- Υπολογιστική πολυπλοκότητα στη χειρότερη περίπτωση: υπάρχουν ειδικά κατασκευασμένα παίγνια όπου ο αριθμός των *pivots* αυξάνεται εκθετικά ως προς τη διάσταση του παιγνίου.

- Ευαισθησία στον εκφυλισμό: απαιτεί ειδικούς κανόνες αποφυγής ατέρμονων βρόχων όταν υπάρχουν πολλαπλές ισοδύναμες αποκρίσεις.

Πίνακας 4.3.4: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2x2.

Παίκτης 1 / Παίκτης 2	Παίκτης 2: A	Παίκτης 2: B
Παίκτης 1: A	(2, 1)	(0, 0)
Παίκτης 1: B	(1, 0)	(3, 2)

Οι αντίστοιχοι πίνακες αποδόσεων είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. **Μετασχηματισμός σε θετικές αποδόσεις:** προσθέτουμε τη σταθερά +1 σε όλα τα στοιχεία των πινάκων ώστε να ισχύει $A_{ij} > 0$ και $B_{ij} > 0$. Οι νέοι πίνακες αποδόσεων είναι:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (B')^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **Κατασκευή του συστήματος LCP:** ο σύνθετος πίνακας M διαστάσεων 4×4 και το διάνυσμα σταθερών q διαμορφώνονται ως:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Το σύστημα ορίζεται από τις εξισώσεις $w = Mz + q$, με $w \geq 0$, $z \geq 0$ και $w^T z = 0$, όπου

$$z = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2]^T \text{ και } w = [u_1, u_2, v_1, v_2]^T.$$

3. Εκτέλεση complementary pivoting:

- Εκκίνηση: ο αλγόριθμος ξεκινά από την τετριμμένη κορυφή $z = (0, 0, 0, 0)^T$.
- Επιλογή αρχικής ετικέτας: επιλέγεται μία μεταβλητή για είσοδο στη βάση (π.χ. η $\tilde{x}_1$). Αυτό αφαιρεί την αντίστοιχη ετικέτα χαλάρωσης και ξεκινά τη διαδρομή *pivoting*.
- Διαδοχικά pivots: σε κάθε βήμα, η μεταβλητή που εγκαταλείπει τη βάση υποδεικνύει ποια συμπληρωματική μεταβλητή πρέπει να εισέλθει στο επόμενο *pivot (label following)*.
- Τερματισμός: η διαδικασία ολοκληρώνεται όταν αποκατασταθεί πλήρως η συμπληρωματικότητα και η αρχική τεχνητή ετικέτα εξέλθει από τη βάση, αποδίδοντας τη λύση:

$$\tilde{x} = \left(0, \frac{1}{3}\right)^T, \quad \tilde{y} = \left(0, \frac{1}{4}\right)^T$$

4. Κανονικοποίηση και Τελική Ισορροπία Nash: διαιρώντας κάθε υποδιάνυσμα (subvector) με το άθροισμα των στοιχείων του:

- Για τον Παίκτη 1: $x^* = (0, 1)^T$ (επιλογή της Στρατηγικής 2 με βεβαιότητα).
- Για τον Παίκτη 2: $y^* = (0, 1)^T$ (επιλογή της Στρατηγικής 2 με βεβαιότητα).

Το προφίλ (x^*, y^*) αντιστοιχεί στην αμιγή Ισορροπία Nash (B, B) με αρχικές αποδόσεις (3, 2)

Συμπέρασμα: Η μέθοδος *Lemke - Howson* αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους αλγορίθμους υπολογισμού Ισορροπιών Nash σε παίγνια δύο παικτών σε κανονική μορφή (*bimatrix games*). Η θεμελίωσή της στο πρόβλημα γραμμικής συμπληρωματικότητας (*LCP*) εξασφαλίζει ισχυρή μαθηματική συνοχή, ενώ ο μηχανισμός του *complementary pivoting* προσφέρει μία κατασκευαστική και γεωμετρικά ερμηνεύσιμη διαδρομή προς τη λύση ισορροπίας.

Η μέθοδος αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποδοτική σε μικρού και μεσαίου μεγέθους παίγνια, παρόλο που η υπολογιστική της πολυπλοκότητα μπορεί να αυξηθεί σημαντικά σε εκφυλισμένες

περιπτώσεις ή σε παιχνίδια μεγάλης κλίμακας. Συνολικά, παραμένει θεμελιώδες σημείο αναφοράς στην υπολογιστική θεωρία παιγνίων και βασικό εργαλείο για την πρακτική επίλυση *bimatrix* παιγνίων, γεφυρώνοντας τη θεωρία στρατηγικής με τις σύγχρονες τεχνικές μαθηματικής βελτιστοποίησης.

4.4 Σύγχρονες προσεγγίσεις

4.4.1 Μέθοδος *Regret Minimization / Machine Regret*

Η μέθοδος *Regret Minimization*, γνωστή και ως *Machine Regret*, ανήκει στις σύγχρονες στοχαστικές τεχνικές υπολογισμού Ισορροπιών Nash και χρησιμοποιείται εκτενώς σε δυναμικά ή επαναλαμβανόμενα παίγνια. Η βασική της ιδέα είναι ότι οι παίκτες προσαρμόζουν σταδιακά τις στρατηγικές τους με στόχο να ελαχιστοποιήσουν την απώλεια απόδοσης (*regret*), δηλαδή τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής απόδοσης και της μέγιστης δυνατής απόδοσης που θα μπορούσαν να είχαν επιτύχει αν είχαν επιλέξει διαφορετική στρατηγική σε προηγούμενους γύρους (Hart & Mas - Colell, 2000).

Η μεθοδολογία αυτή εντάσσεται στις προσαρμοστικές επαναληπτικές διαδικασίες, οι οποίες αξιοποιούν έννοιες από τη θεωρία παιγνίων, τη βελτιστοποίηση και αλγοριθμικές προσεγγίσεις. Στο πλαίσιο αυτό, οι παίκτες προσαρμόζουν σταδιακά τις στρατηγικές τους με βάση την παρατηρούμενη απόδοση των διαθέσιμων επιλογών, χωρίς πλήρη γνώση των στρατηγικών των αντιπάλων, κάθε παίκτης ενημερώνει την πιθανότητα επιλογής κάθε στρατηγικής ανάλογα με τις αποδόσεις που έχει παρατηρήσει σε προηγούμενους γύρους.

4.4.1.1 Θεωρητικό υπόβαθρο: έστω ότι κάθε παίκτης i παίζει στρατηγική $s_i(t)$ στον γύρο t και λαμβάνει απόδοση $u_i(s_i(t), s_{-i}(t))$ ανάλογα με τις επιλογές των υπολοίπων παικτών. Η απώλεια απόδοσης (*regret*) της στρατηγικής s_i μετά από T γύρους ορίζεται ως:

$$R_i(s_i, T) = \sum_{t=1}^T [u_i(s_i, s_{-i}(t)) - u_i(s_i(t), s_{-i}(t))] \quad (4.5)$$

Η ποσότητα αυτή εκφράζει τη διαφορά ανάμεσα στην απόδοση που θα είχε ο παίκτης i αν είχε επιλέξει σταθερά τη στρατηγική s_i σε όλους τους γύρους και στην πραγματική του απόδοση.

Η ενημέρωση της πιθανότητας επιλογής κάθε στρατηγικής πραγματοποιείται μέσω του κανόνα *Regret Matching*, ως εξής:

$$p_i(s_i, t+1) = \max \{R_i(s_i, t), 0\} / \sum \max \{R_i(s', t), 0\}, \text{ όπου } s' \in S_i \quad (4.6),$$

όπου:

- $p_i(s_i, t+1)$: είναι η πιθανότητα να επιλεγεί η στρατηγική S_i στον επόμενο γύρο $t+1$,
- $R_i(s_i, t)$: είναι η συσσωρευμένη απώλεια απόδοσης (*regret*) της στρατηγικής s_i μέχρι τον γύρο t ,
- S_i : είναι το σύνολο όλων των διαθέσιμων στρατηγικών του παίκτη i ,
- $s_i(t) \in S_i$: είναι η στρατηγική που επιλέγει ο παίκτης i στον γύρο t ,
- $s_{-i}(t) = (s_1(t), \dots, s_{i-1}(t), s_{i+1}(t), \dots, s_n(t))$: είναι το προφίλ των κοινών στρατηγικών που επιλέγουν όλοι οι υπόλοιποι παίκτες εκτός του i ,
- $u_i(s_i, s_{-i})$: είναι η συνάρτηση απόδοσης (κέρδους) του παίκτη i .

Η διαδικασία αυτή οδηγεί, υπό γενικές συνθήκες, σε σύγκλιση κατά μέσο όρο προς Ισορροπία Nash ή προς ισορροπία συσχετισμένων στρατηγικών (*Correlated Equilibrium*), (Hart & Mas - Colell, 2000).

Πλεονεκτήματα:

- Κάθε παίκτης βελτιώνει τις αποφάσεις του με βάση τη δική του εμπειρία, χωρίς πλήρη γνώση των στρατηγικών των αντιπάλων.
- Εξασφαλίζει στατιστική σύγκλιση προς καταστάσεις ισορροπίας, ακόμη και σε πολύπλοκα ή στοχαστικά παίγνια.
- Έχει ισχυρή θεωρητική θεμελίωση, με ρυθμό μείωσης της μέσης απώλειας $O(1/\sqrt{n})$ (Ο συμβολισμός αυτός προέρχεται από την ασυμπτωτική ανάλυση αλγορίθμων και δηλώνει τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται το μέσο *regret* καθώς αυξάνεται ο αριθμός επαναλήψεων n . Συγκεκριμένα, ο μέσος όρος της απώλειας συρρικνώνεται αναλογικά με

το $1/\sqrt{n}$, γεγονός που εξασφαλίζει ότι ο παίκτης μαθαίνει σταθερά και οι στρατηγικές επιλογές του συγκλίνουν προς ορθολογική συμπεριφορά.

- Προσφέρει ευρεία εφαρμοσιμότητα: χρησιμοποιείται σε αλγοριθμικά πλαίσια λήψης αποφάσεων, στα αλγοριθμικά παίγνια και στην οικονομική θεωρία.

Μειονεκτήματα:

- Η σύγκλιση είναι κατά μέσο όρο και όχι ακριβής και δεν οδηγεί πάντοτε σε μοναδική ή αμιγή Ισορροπία Nash.
- Η υπολογιστική πολυπλοκότητα αυξάνεται με τον αριθμό στρατηγικών και τη διάρκεια επανάληψης.
- Οι τιμές των παραμέτρων του αλγορίθμου επηρεάζουν κρίσιμα τη σταθερότητα και την ταχύτητα σύγκλισης.

Ενδεικτικό παράδειγμα: θεωρούμε ένα παίγνιο δύο παικτών τύπου *Matching Pennies*, στο οποίο κάθε παίκτης επιλέγει *Head (H)* ή *Tail (T)*.

Πίνακας 4.4.1: πίνακας αποδόσεων στο *Matching Pennies* (επανάληψη πίνακα 1.4.3).

Παίκτης 1 / Παίκτης 2	Παίκτης 2: <i>H</i>	Παίκτης 2: <i>T</i>
Παίκτης 1: <i>H</i>	(1, -1)	(-1, 1)
Παίκτης 1: <i>T</i>	(-1, 1)	(1, -1)

Αρχικά και οι δύο παίκτες επιλέγουν κάθε στρατηγική με πιθανότητα 0.5. Μετά από κάθε γύρο, ενημερώνουν τις πιθανότητες επιλογής με βάση την απώλεια απόδοσης κάθε στρατηγικής. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου οι πιθανότητες συγκλίνουν στην Ισορροπία Nash του παιγνίου, όπου και οι δύο παίκτες παίζουν (*H, T*) με πιθανότητες (0.5, 0.5). Η μέθοδος *Regret Minimization* επιτρέπει έτσι την αυτόνομη προσαρμογή των στρατηγικών χωρίς άμεση γνώση των αποδόσεων του αντιπάλου.

Συμπέρασμα: η μέθοδος *Regret Minimization* παρέχει ένα θεμελιώδες πλαίσιο ανάλυσης της στρατηγικής προσαρμογής σε επαναλαμβανόμενα παίγνια, καθώς επιτρέπει στους παίκτες να

αναθεωρούν τις επιλογές τους με βάση τη συσσωρευμένη απώλεια απόδοσης σε σχέση με εναλλακτικές στρατηγικές. Αν και δεν διασφαλίζει σύγκλιση σε αμιγείς Ισορροπίες Nash, παράγει σταθερές προσεγγιστικές συμπεριφορές και κατανομές στρατηγικών που συνδέονται με μορφές σχεδόν - ορθολογικών λύσεων. Η ευελιξία και η υπολογιστική της απλότητα καθιστούν τη μέθοδο θεμελιώδες υπόβαθρο για προχωρημένες προσεγγίσεις, όπως *Fictitious Play*, *Quantal Response Equilibrium (QRE)* και εξελικτικούς αλγόριθμους.

4.4.2 Μέθοδος *Quantal Response Equilibrium (QRE)*

Η μέθοδος *Quantal Response Equilibrium (QRE)* αποτελεί μία από τις πλέον σύγχρονες και ρεαλιστικές προσεγγίσεις στη θεωρία παιγνίων, εισάγοντας την έννοια της στοχαστικής ορθολογικότητας. Σε αντίθεση με την κλασική Ισορροπία Nash, όπου οι παίκτες θεωρείται ότι επιλέγουν πάντοτε τη βέλτιστη στρατηγική, το *QRE* επιτρέπει πιθανότητες σφάλματος ή περιορισμένης λογικής (*bounded rationality*), προσεγγίζοντας ρεαλιστικότερα τη συμπεριφορά των παικτών σε πραγματικά παίγνια (McKelvey & Palfrey, 1995).

Η βασική ιδέα είναι ότι οι παίκτες δεν αντιδρούν ντετερμινιστικά, αλλά στοχαστικά (πιθανοκρατικά), επιλέγοντας στρατηγικές με πιθανότητα που αυξάνεται συναρτήσει της αναμενόμενης απόδοσής τους (Goeree, Holt, & Palfrey, 2016). Η πιθανότητα επιλογής κάθε στρατηγικής εξαρτάται από τη χρησιμότητα της και από μία παράμετρο ευαισθησίας λ (*Lambda*), η οποία ελέγχει τον βαθμό ορθολογικότητας:

- Όταν $\lambda \rightarrow 0$, οι παίκτες συμπεριφέρονται τυχαία (πλήρως στοχαστικά),
- Ενώ όταν $\lambda \rightarrow \infty$, η *QRE* συγκλίνει στην κλασική Ισορροπία Nash.

4.4.2.1 Θεωρητικό υπόβαθρο: έστω παίγνιο με παίκτες $i = 1, \dots, N$ και στρατηγικές S_i . Η πιθανότητα $P_i(s_i)$ ότι ο παίκτης i θα επιλέξει τη στρατηγική S_i δίνεται από τη λογιστική (*logit*) συνάρτηση:

$$P_i(s_i) = \exp [\lambda \cdot E_i (u_i (s_i, s_{-i}))] / \sum \exp [\lambda \cdot E_i (u_i (s', s_{-i}))], \text{ όπου } s' \in S_i \quad (4.7)$$

όπου:

- $E_i (u_i (s_i , s_{-i}))$ είναι η αναμενόμενη απόδοση του παίκτη i για τη στρατηγική s_i ,
- $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$: είναι το διάνυσμα στρατηγικών όλων των υπόλοιπων παικτών εκτός του i ,
- λ είναι η παράμετρος ευαισθησίας (*rationality parameter*) που ρυθμίζει τον βαθμό στοχαστικής συμπεριφοράς, και
- S_i είναι το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη i .

Η Ισορροπία QRE ορίζεται ως σταθερό σημείο του συστήματος πιθανοτήτων (4.6): κάθε παίκτης επιλέγει στρατηγική σύμφωνα με την παραπάνω κατανομή, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι αντίπαλοι ενεργούν αντίστοιχα πιθανοκρατικά (McKelvey & Palfrey, 1995). Με άλλα λόγια, η QRE είναι ένα πιθανοκρατικό ανάλογο της Ισορροπίας Nash, στο οποίο η λογική των παικτών είναι “θορυβώδης” αλλά συστηματικά προσανατολισμένη προς τη βελτιστοποίηση.

Ενδεικτικό παράδειγμα: πίνακας 4.4.2: πίνακας αποδόσεων της Μάχης των Φύλων (*Battle of the Sexes*).

Παίκτης 1 / Παίκτης 2	Παίκτης 2: Όπερα (Ο)	Παίκτης 2: Ποδόσφαιρο (Π)
Παίκτης 1: Όπερα (Ο)	(3, 2)	(0, 0)
Παίκτης 1: Ποδόσφαιρο (Π)	(0, 0)	(2, 3)

Στην κλασική θεωρία παιγνίων, το παίγνιο αυτό διαθέτει δύο αμιγείς Ισορροπίες Nash: (Ο, Ο) και (Π, Π).

Στην ισορροπία QRE , οι παίκτες δεν επιλέγουν στρατηγική με απόλυτη βεβαιότητα, αλλά αποδίδουν πιθανότητες ανάλογες με τις προσδοκώμενες αποδόσεις τους. Για μια μέση τιμή λ (π.χ. $\lambda = 1$), οι παίκτες αποδίδουν υψηλότερη πιθανότητα στη στρατηγική που τους ωφελεί περισσότερο, χωρίς να αποκλείουν πλήρως τις υπόλοιπες.

Ένα τυπικό αποτέλεσμα θα μπορούσε να είναι:

παίκτης 1: (Ο = 0.65, Π = 0.35), παίκτης 2: (Ο = 0.60, Π = 0.40). Καθώς αυξάνεται η λ , το προφίλ αυτό συγκλίνει προς μία από τις αμιγείς Ισορροπίες Nash.

Πλεονεκτήματα:

- Αντικατοπτρίζει ρεαλιστική ανθρώπινη συμπεριφορά, επιτρέποντας αποκλίσεις από την πλήρη ορθολογικότητα.
- Παρέχει συνεχή συνάρτηση ισορροπίας, που καθιστά τη μέθοδο αριθμητικά σταθερή και κατάλληλη για εμπειρική εκτίμηση.
- Μπορεί να εφαρμοστεί σε πειραματικά δεδομένα και σε παίγνια με αβεβαιότητα ή πληροφοριακό περιορισμό.

Μειονεκτήματα:

- Η ερμηνεία της παραμέτρου λ επηρεάζεται από ιδιαιτερότητες της εφαρμογής (είδος παιγνίου, πληροφόρηση, συμπεριφορά παικτών), οπότε δεν υπάρχει καθολική μέθοδος εκτίμησης.
- Δεν εγγυάται μοναδικότητα ισορροπίας, ενδέχεται να προκύψουν πολλαπλές λύσεις *QRE* για συγκεκριμένα σύνολα αποδόσεων.
- Σε πολύπλοκα παίγνια, η υπολογιστική επίλυση του σταθερού σημείου μπορεί να είναι απαιτητική (McKelvey & Palfrey, 1995).

Συμπέρασμα: Η μέθοδος *Quantal Response Equilibrium (QRE)* παρέχει μια στοχαστική γενίκευση της Ισορροπίας Nash, συνδυάζοντας τη μαθηματική αυστηρότητα με τη μοντελοποίηση στρατηγικής συμπεριφοράς βασισμένης σε εμπειρικά δεδομένα. Αντί της υπόθεσης τέλει ορθολογικότητας, η *QRE* επιτρέπει στους παίκτες να λαμβάνουν αποφάσεις με πιθανότητα σφάλματος, προσομοιώνοντας πιο ρεαλιστική συμπεριφορά υπό αβεβαιότητα. Αποτελεί βασικό εργαλείο στην πειραματική και συμπεριφορική θεωρία παιγνίων, καθώς επιτρέπει την ανάλυση στρατηγικών αποκλίσεων που δεν εξηγούνται από την κλασική Ισορροπία Nash (Goeree et al., 2016).

4.4.3 Μέθοδοι Γενετικών Αλγορίθμων και Εξελικτικών Υπολογισμών

Οι γενετικοί αλγόριθμοι (*Genetic Algorithms - GA*) και οι ευρύτερες μέθοδοι εξελικτικών υπολογισμών (*Evolutionary Computation*) αποτελούν στοχαστικές τεχνικές βελτιστοποίησης που εμπνέονται από τις αρχές της φυσικής επιλογής και της εξέλιξης των ειδών (Holland, 1975).

Στη θεωρία παιγνίων, οι μέθοδοι αυτές χρησιμοποιούνται για την προσεγγιστική εύρεση Ισορροπιών Nash σε πολύπλοκα ή μη αναλυτικά παίγνια, όπου οι κλασικοί αλγόριθμοι, όπως ο *Lemke - Howson*, καθίστανται υπολογιστικά ανεπαρκείς.

Η κεντρική ιδέα είναι ότι οι στρατηγικές των παικτών αντιμετωπίζονται ως γονότυποι (*chromosomes*) μέσα σε έναν πληθυσμό πιθανών λύσεων. Ο πληθυσμός εξελίσσεται διαδοχικά μέσω μηχανισμών επιλογής, διασταύρωσης (*crossover*) και μετάλλαξης (*mutation*), με στόχο τη βελτίωση των αποδόσεων σύμφωνα με έναν μηχανισμό φυσικής προσαρμογής (*fitness function*).

4.4.3.1 Θεωρητικό υπόβαθρο: η διαδικασία ενός γενετικού αλγορίθμου περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1. **Αρχικοποίηση πληθυσμού:** δημιουργείται ένας αρχικός τυχαίος πληθυσμός προφίλ στρατηγικών $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
2. **Αξιολόγηση (*evaluation*):** για κάθε στρατηγική x_i υπολογίζεται η τιμή επίδοσης $f(x_i)$, η οποία αποτυπώνει τη χρησιμότητα ή την αναμενόμενη απόδοση του παίκτη στο παίγνιο.
3. **Επιλογή (*selection*):** οι πιο αποδοτικές στρατηγικές επιλέγονται με πιθανότητα ανάλογη της επίδοσής τους, ώστε να παράγουν την επόμενη γενιά στρατηγικών.
4. **Διασταύρωση (*crossover*):** συνδυασμός επιλεγμένων στρατηγικών για τη δημιουργία νέων υποψηφίων λύσεων μέσω ανασυνδυασμού των στοιχείων τους.
5. **Μετάλλαξη (*mutation*):** εισαγωγή μικρών στοχαστικών αλλαγών στις στρατηγικές, με σκοπό να αποφεύγεται η πρόωρη σύγκλιση του αλγόριθμου σε ανεπιθύμητες τοπικές λύσεις.
6. **Αντικατάσταση και επανάληψη:** ο νέος πληθυσμός αντικαθιστά τον προηγούμενο και η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου επιτευχθεί σταθεροποίηση ή ικανοποιηθεί το προκαθορισμένο κριτήριο τερματισμού.

Η εξέλιξη συνεχίζεται έως ότου οι στρατηγικές συγκλίνουν σε ένα σταθερό σύνολο προφίλ που προσεγγίζει Ισορροπία Nash ή εξελικτικά σταθερή στρατηγική (*Evolutionarily Stable Strategy - ESS*).

Ενδεικτικό παράδειγμα: πίνακας 4.4.3: πίνακας αποδόσεων τυχαίου παιγνίου 2x2.

Παίκτης 1 / Παίκτης 2	Παίκτης 2: A	Παίκτης 2: B
Παίκτης 1: A	(2, 1)	(0, 0)
Παίκτης 1: B	(1, 0)	(3, 2)

Οι στρατηγικές των παικτών κωδικοποιούνται ως δυαδικές συμβολοσειρές μήκους δύο (π.χ. 00 = A, 11 = B).

Ο αλγόριθμος ξεκινά με τυχαίο πληθυσμό, υπολογίζει την καταλληλότητα κάθε στρατηγικής με βάση τις αποδόσεις και εφαρμόζει διαδοχικά βήματα επιλογής, διασταύρωσης και μετάλλαξης. Μετά από αρκετές επαναλήψεις, ο πληθυσμός συγκλίνει σε λύση που αντιστοιχεί στο προφίλ (B, B), το οποίο αποτελεί Ισορροπία Nash.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει πώς οι γενετικοί αλγόριθμοι μπορούν να προσεγγίσουν την ισορροπία με πιθανοκρατικό και μη γραμμικό τρόπο, χωρίς ανάγκη για πλήρη αναλυτική επίλυση.

Πλεονεκτήματα:

- Επιτρέπουν εξερεύνηση μη γραμμικών και μη κυρτών χώρων στρατηγικών, όπου αποτυγχάνουν οι κλασικοί αλγοριθμικοί μέθοδοι.
- Δεν απαιτούν γνώση παραγώγων ή συνεχών συναρτήσεων, άρα είναι κατάλληλοι και για διακριτά ή μη διαφορίσιμα παίγνια.
- Μπορούν να εφαρμοστούν σε πολυπαικτικά / πολυπρακτορικά παίγνια και σε προβλήματα με πολλαπλές τοπικές ισορροπίες.

Μειονεκτήματα:

- Δεν παρέχουν απόδειξη σύγκλισης σε ακριβή Ισορροπία Nash, αλλά προσεγγιστικές λύσεις.
- Η απόδοση εξαρτάται από την επιλογή παραμέτρων (μέγεθος πληθυσμού, ποσοστό διασταύρωσης, μετάλλαξης κ.λπ.).

- Ενδέχεται να “παγιδευτούν” σε τοπικά άκρα, απαιτώντας επιπλέον πρόσθετες στοχαστικές τεχνικές, όπως το *simulated annealing*, για την βελτίωση της εξερεύνησης του χώρου στρατηγικών.

Συμπέρασμα: οι μέθοδοι εξελικτικών υπολογισμών αποτελούν ισχυρό και ευέλικτο εργαλείο για την προσεγγιστική επίλυση Ισορροπιών Nash σε πολυδιάστατα ή μη αναλυτικά παίγνια. Παρά την απουσία θεωρητικών εγγυήσεων για μοναδικότητα ή πλήρη σύγκλιση, μειώνουν την πιθανότητα παγίδευσης σε τοπικά άκρα και προσεγγίζουν στρατηγικές επιλογές των παικτών μέσω πληθυσμιακής αναζήτησης. Η χρήση τους έχει επεκταθεί σημαντικά σε τομείς όπως η οικονομική προσομοίωση και η τεχνητή νοημοσύνη, όπου η αναλυτική ακρίβεια είναι συχνά δυσπρόσιτη ή λιγότερο κρίσιμη.

4.4.4 Μέθοδοι *Homotopy* και *Continuation Procedures*

Οι μέθοδοι *Homotopy / Continuation Procedures* αποτελούν ισχυρές αριθμητικές τεχνικές για την εύρεση σημείων Ισορροπίας Nash σε παίγνια αμιγών ή μικτών στρατηγικών. Η βασική τους ιδέα είναι η κατασκευή μιας συνεχούς παραμόρφωσης (*homotopy*), μέσω της οποίας ένα δύσκολο πρόβλημα ισορροπίας συνδέεται με ένα απλούστερο πρόβλημα, του οποίου η λύση είναι γνωστή. Η διαδικασία συνέχειας παρακολουθεί το μονοπάτι λύσεων που προκύπτει καθώς η παράμετρος παραμόρφωσης μεταβάλλεται, οδηγώντας στη ζητούμενη ισορροπία του αρχικού προβλήματος (Govindan & Wilson, 2003).

Οι μέθοδοι αυτές συνδυάζουν την ιδέα της μονοτονικής συνέχειας με υπολογιστική σταθερότητα και μπορούν να αντιμετωπίσουν περιπτώσεις μη γραμμικών συστημάτων, πολλαπλών ισορροπιών και γενικευμένων παιγνίων. Η εφαρμογή τους εκτείνεται τόσο σε κλασικά στρατηγικά παίγνια (π.χ. *Cournot*, *Bertrand*) όσο και σε πολυπρακτορικά / πολυπαικτικά παίγνια.

4.4.4.1 Θεωρητικό υπόβαθρο: έστω ότι η Ισορροπία Nash προκύπτει ως λύση ενός συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων: $F(x) = 0$, όπου $x = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ είναι το διάνυσμα στρατηγικών όλων των παικτών. Η μέθοδος *Homotopy* εισάγει μία βοηθητική παράμετρο $t \in [0, 1]$ και ορίζει τη συνάρτηση ομοτοπίας (*homotopy function*):

$$H(x, t) = (1 - t) \cdot G(x) + t \cdot F(x) = 0 \quad (4.8)$$

όπου:

- $G(x)$: είναι ένα απλοποιημένο βοηθητικό σύστημα με μοναδική και γνωστή αρχική λύση x_0 (ώστε $G(x_0) = 0$).
- $x(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))$: είναι το διάνυσμα στρατηγικών των παικτών για κάθε ενδιαμέση τιμή $t \in [0, 1]$, το οποίο ορίζει τη συνεχή διαδρομή λύσεων (*homotopy path*) που ικανοποιεί τη συνθήκη $H(x(t), t) = 0$.

Για $t = 0$, έχουμε $H(x(0), 0) = G(x(0)) = 0$, με αφετηρία τη γνωστή λύση $x(0) = x_0$. Καθώς το t αυξάνεται σταδιακά προς το 1, η λύση $x(t)$ ακολουθεί μια συνεχή καμπύλη (*path*), η οποία προσεγγίζεται αριθμητικά μέσω διαδοχικών προβλέψεων και διορθώσεων (*predictor - corrector steps*). Όταν $t = 1$, έχουμε $H(x(1), 1) = F(x(1)) = 0$, συνεπώς η τελική λύση $x(1) = x^*$ αντιστοιχεί στο ζητούμενο σημείο Ισορροπίας Nash του αρχικού προβλήματος $F(x) = 0$. Η διαδικασία αυτή εξασφαλίζει αριθμητική σταθερότητα, καθώς προσεγγίζει τη δύσκολη ισορροπία σταδιακά και ελεγχόμενα, αποτρέποντας την απόκλιση ή τα σφάλματα που εμφανίζονται όταν προσπαθούμε να λύσουμε το σύστημα απευθείας με κλασικές μεθόδους.

Ενδεικτικό παράδειγμα (παίγνιο τύπου Cournot): Έστω δύο επιχειρήσεις που επιλέγουν ποσότητες q_1 και q_2 , με διάνυσμα στρατηγικών $x = (q_1, q_2)$. Οι συναρτήσεις κέρδους τους δίνονται από:

$$\text{παίκτης 1: } \pi_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2)) \cdot q_1 - c \cdot q_1, \quad (4.9)$$

$$\text{παίκτης 2: } \pi_2(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2)) \cdot q_2 - c \cdot q_2, \quad (4.10)$$

Η Ισορροπία Nash ικανοποιεί το μη γραμμικό σύστημα πρώτων παραγώγων $F(x) = 0$:

$$F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \cdot q_1 - b \cdot q_2 - c \\ a - b \cdot q_1 - 2b \cdot q_2 - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4.11)

Εφαρμογή της μεθόδου *Homotopy*: Επιλέγοντας ένα αυθαίρετο αρχικό σημείο εκκίνησης $x_0 = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$ και βοηθητική συνάρτηση $G(x) = x - x_0$, κατασκευάζεται η συνάρτηση ομοτοπίας:

$$H(x, t) = (1 - t) \cdot (x - x_0) + t \cdot F(x) = 0, t \in [0, 1] \quad (4.12)$$

- Για $t = 0$, η διαδικασία ξεκινά από το γνωστό σημείο $x(0) = x_0$.
- Καθώς το t αυξάνεται σταδιακά προς το 1, η διαδρομή $x(t) = (q_1(t), q_2(t))$ παρακολουθείται αριθμητικά (*predictor - corrector steps*).
- Για $t = 1$, προκύπτει $F(x(1)) = 0$, οδηγώντας στην αναλυτική λύση ισορροπίας:

$$q_1^* = q_2^* = (a - c) / (3b) \quad (4.13)$$

Για παράδειγμα, αν $a = 100$, $b = 2$, $c = 10$, προκύπτει:

$$q_1^* = q_2^* = (100 - 10) / (3 \cdot 2) = 90 / 6 = 15, \quad (4.14)$$

$$\text{Άρα η ισορροπία Cournot είναι: } (q_1^*, q_2^*) = (15, 15) \quad (4.15)$$

Πίνακας 4.4.4: παράδειγμα εφαρμογής μεθόδου *Homotopy*.

Παράμετρος	Περιγραφή	Παράδειγμα τιμών
a	μέγιστη τιμή αγοράς	100
b	συντελεστής κλίσης ζήτησης	2
c	σταθερό κόστος	10

Πλεονεκτήματα:

- Επιτρέπουν τον εντοπισμό πολλαπλών λύσεων ισορροπίας, ακολουθώντας το συνεχές μονοπάτι των λύσεων καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του παιγνίου.
- Παρέχουν υπολογιστική σταθερότητα ακόμη και σε έντονα μη γραμμικά συστήματα.
- Είναι κατάλληλες για παίγνια υψηλής διάστασης και για παίγνια με συνεχείς στρατηγικές, όπου άλλες μέθοδοι δυσκολεύονται να συγκλίνουν.
- Συμβατές με λογισμικά πακέτα όπως *PATH*, *Gambit* και *GAMS*, διευκολύνοντας την πρακτική υλοποίηση.

Μειονεκτήματα:

- Απαιτούν καλή αρχική προσέγγιση ή γνωστή λύση αναφοράς, διαφορετικά μπορεί να αποτύχουν να εντοπίσουν το σωστό κλάδο λύσεων.
- Ο υπολογιστικός φόρτος αυξάνεται σημαντικά με τη διάσταση του προβλήματος.
- Η αριθμητική ακρίβεια εξαρτάται από την επιλογή του βήματος συνέχειας (*step size*) και από τον *predictor - corrector* μηχανισμό που χρησιμοποιείται.

Συμπέρασμα: οι μέθοδοι *Homotopy* και *Continuation Procedures* αποτελούν θεμελιώδη πυλώνα των σύγχρονων υπολογιστικών τεχνικών στη θεωρία παιγνίων. Προσφέρουν ομαλή και σταθερή διαδικασία εύρεσης ισορροπίας, με δυνατότητα ανίχνευσης πολλαπλών λύσεων και ευελιξία σε μη γραμμικά ή συνεχούς τύπου παίγνια. Ο συνδυασμός τους με *Newton - based* ή *Evolutionary* μεθόδους οδηγεί σε ταχύτερη σύγκλιση και σε πιο αποδοτική εξερεύνηση του χώρου λύσεων (Govindan & Wilson, 2003). Συνολικά, οι μέθοδοι αυτές γεφυρώνουν τη μαθηματική αυστηρότητα με την αριθμητική πρακτικότητα, καθιστώντας τες αναπόσπαστο μέρος της υπολογιστικής θεωρίας παιγνίων.

Πίνακας 4.4.5: συνοπτικός πίνακας υπολογιστικών και θεωρητικών μεθόδων.

Κεφάλαιο	Μέθοδος	Τύπος Μεθόδου	Κύρια Ιδέα / Περιγραφή	Κατηγορία στρατηγικών	Είδος λύσης
----------	---------	---------------	------------------------	-----------------------	-------------

4.3.1	<i>Best Response Dynamics</i>	Επαναληπτική	Σταδιακή προσαρμογή στρατηγικών βάσει της βέλτιστης απόκρισης.	Διακριτές ή συνεχείς	Προσεγγιστική
4.3.2	Εξάλειψη κυριαρχούμενων στρατηγικών (<i>IEDS</i>)	Επαναληπτική	Διαδοχική αφαίρεση στρατηγικών που κυριαρχούνται αυστηρά ή ασθενώς.	Διακριτές	Ακριβής ή προσεγγιστική
4.3.3	<i>Fictitious Play</i>	Επαναληπτική ή στοχαστική	Οι παίκτες ενημερώνουν τις εκτιμήσεις τους με βάση τις συχνότητες και επιλέγουν βέλτιστες αποκρίσεις.	Διακριτές	Προσεγγιστική
4.3.4	<i>Lemke - Howson</i>	Ντετερμινιστική	<i>Pivot - based</i> μέθοδος επίλυσης <i>LCP</i> για <i>bimatrix</i> παίγνια.	Διακριτές	Ακριβής

4.4.1	<i>Regret Minimization</i>	Στοχαστική	Ελαχιστοποίηση απώλειας απόδοσης μέσω ενημέρωσης πιθανοτήτων επιλογής.	Διακριτές	Προσεγγιστική
4.4.2	<i>Quantal Response Equilibrium (QRE)</i>	Στοχαστική	Πιθανότητα επιλογής στρατηγικής αυξάνεται με την αναμενόμενη απόδοση (<i>logit response</i>).	Συνεχείς	Προσεγγιστική
4.4.3	<i>Genetic / Evolutionary Algorithms</i>	Στοχαστική	Προσέγγιση ισορροπίας μέσω εξέλιξης πληθυσμού στρατηγικών.	Διακριτές ή συνεχείς	Προσεγγιστική
4.4.4	<i>Homotopy / Continuation Methods</i>	Ντετερμινιστική	Μετασχηματισμός γνωστού προβλήματος σε σύνθετο μέσω παραμόρφωσης <i>Homotopy</i> .	Συνεχείς	Ακριβής ή προσεγγιστική

4.5 Πρακτικός οδηγός επιλογής υπολογιστικής μεθόδου

Η επιλογή της κατάλληλης υπολογιστικής μεθόδου για τον προσδιορισμό της Ισορροπίας Nash εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος και τον τύπο του παιγνίου, τον επιθυμητό βαθμό ακρίβειας και τη διαθέσιμη υπολογιστική ισχύ.

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ένας συνοπτικός οδηγός που οργανώνει τις μεθόδους των ενοτήτων 4.3 και 4.4 σε λειτουργικές κατηγορίες και διευκολύνει την πρακτική επιλογή της κατάλληλης τεχνικής. Η ταξινόμηση βασίζεται σε τέσσερις διαστάσεις: **(α)** Μέγεθος παιγνίου, **(β)** Τύπος στρατηγικών και αριθμός παικτών, **(γ)** Στόχος και είδος λύσης, **(δ)** Υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Στη συνέχεια ακολουθούν οι πίνακες κατηγοριοποίησης.

4.5.1 Κατηγοριοποίηση με βάση το μέγεθος του παιγνίου

Πίνακας 4.5.1: πίνακας κατηγοριοποίησης με βάση το μέγεθος του παιγνίου.

Μέγεθος παιγνίου	Ενδεικτικές μέθοδοι	Χαρακτηριστικά και εφαρμογή
Μικρά παίγνια (2×2, 3×3)	• <i>Lemke - Howson</i> • <i>Best Response Dynamics</i>	• Παρέχουν ακριβείς λύσεις σε περιορισμένο χώρο στρατηγικών. • Χαμηλός υπολογιστικός φόρτος. • Ιδανικές για συμμετρικά παίγνια δύο παικτών.
Μεσαία παίγνια ($3 \times n$, $4 \times n$)	• <i>Fictitious Play</i> • <i>Regret Minimization</i>	• Επαναληπτικές και προσεγγιστικές διαδικασίες. • Εξασφαλίζουν στατιστική ισορροπία και γρήγορη σύγκλιση. • Κατάλληλες για δυναμικά ή επαναλαμβανόμενα παίγνια.
Μεγάλα παίγνια	• <i>Quantal Response Equilibrium (QRE)</i> • <i>Genetic / Evolutionary Algorithms</i>	• Εφαρμόζονται σε πολυπαικτικά και μη γραμμικά παίγνια.

	• <i>Homotopy & Continuation Procedures</i>	• Απαιτούν υψηλή υπολογιστική ισχύ και δίνουν προσεγγιστικές λύσεις. • Επιτρέπουν ευέλικτη προσαρμογή σε στοχαστικά ή πολυδιάστατα δεδομένα.
--	---	---

4.5.2 Κατηγοριοποίηση ανά στόχο και είδος λύσης

Πίνακας 4.5.2: κατηγοριοποίηση υπολογιστικών μεθόδων ανά τύπο παιγνίου.

Τύπος παιγνίου	Ενδεικτικές μέθοδοι	Χαρακτηριστικά και εφαρμογές
Παίγνια δύο παικτών (Bimatrix Games)	• <i>Lemke - Howson</i> • <i>Best Response Dynamics</i> • <i>Fictitious Play</i>	• Κατάλληλες για πεπερασμένα παίγνια. • Παρέχουν ακριβείς ή επαναληπτικές λύσεις. • Εφαρμόζονται κυρίως σε θεωρητικές αναλύσεις και σε παίγνια δύο παικτών με μικρούς πίνακες στρατηγικών (2×2, 3×3 κ.λπ.)
Πολυπαικτικά παίγνια ($N > 2$)	• <i>Regret Minimization</i> • <i>Evolutionary Algorithms</i> • <i>Quantal Response Equilibrium (QRE)</i>	• Σχεδιασμένες για μεγάλες διαστάσεις στρατηγικών και πολλαπλούς παίκτες. • Παρέχουν στοχαστικές ή προσεγγιστικές ισορροπίες. • Ιδανικές για πολυπρακτορικά / πολυπαικτικά παίγνια και πειραματικές προσομοιώσεις.

Συνεχούς στρατηγικής (Continuous Strategy Games)	• <i>Homotopy / Continuation Methods</i> • <i>Newton - based Solvers</i>	• Εφαρμόζονται σε παίγνια <i>Cournot</i>, <i>Bertrand</i> ή γενικά μη γραμμικά συστήματα. • Προσφέρουν υψηλή ακρίβεια και δυνατότητα εντοπισμού πολλαπλών ισορροπιών. • Απαιτούν καλή αρχικοποίηση και αριθμητική σταθερότητα.
Επαναλαμβανόμενα παίγνια	• <i>Regret Minimization</i> • <i>Fictitious Play</i>	• Εξετάζουν πως οι παίκτες μαθαίνουν και προσαρμόζουν τις στρατηγικές τους με την πάροδο του χρόνου. • Αναλύουν επαναληπτικές διαδικασίες στρατηγικών αποκρίσεων σε διαδοχικούς γύρους. • Ιδανικές για πειραματικά ή προσομοιωμένα επαναλαμβανόμενα παίγνια.

4.5.3 Ανάλυση υπολογιστικής πολυπλοκότητας και αποδοτικότητας

Η επιλογή μιας υπολογιστικής μεθόδου για τον προσδιορισμό της Ισορροπίας Nash δεν εξαρτάται μόνο από τη θεωρητική ορθότητα του αλγορίθμου, αλλά και από την υπολογιστική πολυπλοκότητα, την ταχύτητα σύγκλισης και τη συγκριτική αποδοτικότητα έναντι εναλλακτικών προσεγγίσεων.

Η υπολογιστική πολυπλοκότητα εκφράζει τον ρυθμό αύξησης των υπολογιστικών απαιτήσεων (χρόνος - μνήμη) καθώς το παίγνιο μεγαλώνει ως προς το πλήθος παικτών ή στρατηγικών. Στο πλαίσιο της θεωρίας παιγνίων, η πολυπλοκότητα επηρεάζεται κυρίως από: **(α)** Το μέγεθος του πίνακα αποδόσεων, **(β)** Το πλήθος των πιθανών στρατηγικών προφίλ, **(γ)** Τον αριθμό

επαναλήψεων που απαιτούνται έως τη σύγκλιση, και **(δ)** Τον τύπο της προσέγγισης (Ντετερμινιστική, Επαναληπτική, Στοχαστική).

Ο Πίνακας 4.5.3 συνοψίζει τα βασικά χαρακτηριστικά των μεθόδων ως προς:

(1) Τον τύπο προσέγγισης, **(2)** Την υπολογιστική πολυπλοκότητα, **(3)** Την ταχύτητα σύγκλισης, **(4)** Την ακρίβεια της λύσης, και **(5)** Την καταλληλότητα ανά τύπο προβλήματος.

Πίνακας 4.5.3: συγκριτική εκτίμηση υπολογιστικής πολυπλοκότητας και αποδοτικότητας.

Μέθοδος /Αλγόριθμος	Είδος προσέγγισης	Υπολογιστική πολυπλοκότητα	Ταχύτητα σύγκλισης	Ακρίβεια λύσης	Καταλληλότητα / Σχόλια
Lemke - Howson	Ντετερμινιστική	Υψηλή (εκθετική σε μεγάλα παίγνια)	Γρήγορη για μικρά παίγνια	Πολύ υψηλή	Ιδανική για ακριβή λύση σε μικρά ή μεσαία <i>bimatrix</i> παίγνια. Δίνει κατασκευαστική λύση.
Best Response Dynamics	Επαναληπτική	Μέτρια	Μεσαία	Υψηλή (αν συγκλίνει)	Κατάλληλη για θεωρητικά παραδείγματα, συμμετρικά παίγνια και μικρά στρατηγικά παίγνια.
Fictitious Play	Επαναληπτική ή στοχαστική	Μέτρια	Μεσαία έως καλή	Προσεγγιστική	Καλή για ανάλυση και προσαρμογής στρατηγικών σε επαναλαμβανόμενα παίγνια. Απαιτεί σημα-

					ντικό χρόνο σύγκλισης.
<i>Regret Minimization</i>	Στοχαστική	Χαμηλή έως μέτρια (ανάλογα με στρατηγικές)	Πολύ καλή	Προσεγγιστική	Ιδιαίτερα αποτελεσματική σε επαναλαμβανόμενα παίγνια, παρέχει προσεγγιστικές αλλά αξιόπιστες λύσεις.
<i>Quantal Response Equilibrium (QRE)</i>	Στοχαστική	Υψηλή	Καλή	Προσεγγιστική με θεωρητική συνέπεια	Παρέχει προσεγγιστικές αλλά σταθερές λύσεις. Κατάλληλη για προσομοιώσεις στρατηγικής συμπεριφοράς.
<i>Genetic / Evolutionary Algorithms</i>	Στοχαστική	Μέτρια έως υψηλή	Εξαρτάται από παραμέτρους	Προσεγγιστική	Εξαιρετική για μεγάλα ή σύνθετα παίγνια, υψηλή ευελιξία.
<i>Homotopy / Continuation</i>	Αριθμητική ή αναλυτική	Υψηλή	Πολύ καλή (αν αρχικοποιηθεί σωστά)	Πολύ υψηλή	Κατάλληλες για συνεχείς στρατηγικές, επιτρέπουν εύρεση πολλαπλών ισορροπιών.

Ερμηνεία:

- Οι ντετερμινιστικές μέθοδοι (*Lemke - Howson, Homotopy*) προσφέρουν υψηλή ακρίβεια, αλλά η πολυπλοκότητά τους αυξάνεται σημαντικά με τη διάσταση του παιγνίου.
- Οι επαναληπτικές και στοχαστικές μέθοδοι (*Fictitious Play, Regret Minimization, QRE*) παρουσιάζουν καλύτερη κλιμάκωση και υψηλή ευελιξία σε μεγάλα παίγνια, παρέχοντας ρεαλιστικές προσεγγίσεις της Ισορροπίας Nash.
- Οι εξελικτικές μέθοδοι (*Genetic Algorithms*) είναι ιδανικές για μεγάλα, μη αναλυτικά παίγνια, όπου η προσεγγιστική εξισορρόπηση είναι πιο χρήσιμη από την ακριβή λύση.

Συνολικά, η πολυπλοκότητα κάθε μεθόδου πρέπει να εκτιμάται όχι μόνο θεωρητικά, αλλά και σε σχέση με τους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους και τον στόχο της ανάλυσης (απόδειξη, προσέγγιση ή προσομοίωση).

4.5.4 Οδηγός επιλογής υπολογιστικής μεθόδου

Η επιλογή της κατάλληλης υπολογιστικής μεθόδου για τον προσδιορισμό της Ισορροπίας Nash εξαρτάται από συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του παιγνίου, όπως το μέγεθος, ο αριθμός παικτών, ο τύπος στρατηγικών, το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας και οι διαθέσιμοι υπολογιστικοί πόροι. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει πρακτικές κατευθύνσεις επιλογής με βάση τις παραμέτρους αυτές.

Πίνακας 4.5.4: πρακτικός οδηγός επιλογής υπολογιστικής μεθόδου για την εύρεση Ισορροπίας Nash.

Κριτήριο	Προτεινόμενες μέθοδοι	Αιτιολόγηση / Παρατηρήσεις
Μέγεθος παιχνίιου	• Μικρά: <i>Lemke - Howson, Best Response Dynamics</i>. • Μεσαία: <i>Fictitious Play, Regret Minimization</i>. • Μεγάλα ή συνεχούς χώρου: <i>Homotopy, QRE, Genetic Algorithms</i>.	• Μικρά παίγνια απαιτούν ακριβείς και χαμηλού κόστους αλγορίθμους. • Τα μεσαία / μεγάλα παίγνια χρειάζονται προσεγγιστικές ή αριθμητικές τεχνικές.

Αριθμός παικτών	• Δύο παίκτες: <i>Lemke - Howson, Best Response Dynamics</i>. • Πολλοί παίκτες ($N > 2$): <i>Regret Minimization, QRE, Evolutionary Algorithms</i>.	• Οι ντετερμινιστικές μέθοδοι εφαρμόζονται εύκολα σε <i>bimatrix</i> παίγνια, • Ενώ οι πολυπαικτικές δομές απαιτούν στοχαστικές ή εξελικτικές προσεγγίσεις.
Τύπος στρατηγικών	• Διακριτές: <i>Best Response, Fictitious Play, Regret Minimization</i>. • Συνεχείς: <i>Homotopy / Continuation, Newton - based</i>.	• Οι διακριτοί χώροι στρατηγικών ευνοούν επαναληπτικούς αλγόριθμους, • Αντίθετα οι συνεχείς χώροι στρατηγικών απαιτούν σταθερές αριθμητικές μεθόδους επίλυσης.
Επιθυμητή ακρίβεια	• Ακριβής λύση: <i>Lemke - Howson, Homotopy</i>. • Προσεγγιστική λύση: <i>Regret Minimization, Fictitious Play</i>. • Πειραματική / προσομοιωτική: <i>Genetic Algorithms, QRE</i>.	Η επιλογή εξαρτάται από το ερευνητικό ζητούμενο: θεωρητική μελέτη $\Rightarrow$ ακριβής λύση, εμπειρική ανάλυση $\Rightarrow$ προσεγγιστική ή στοχαστική λύση.
Υπολογιστικοί πόροι	• Χαμηλοί: <i>Fictitious Play, Regret Minimization</i>. • Μεσαίοι - υψηλοί πόροι: <i>Homotopy, QRE, Genetic Algorithms</i>. • Υψηλοί πόροι για ακριβείς λύσεις: <i>Lemke - Howson</i>.	Με περιορισμένη υπολογιστική ισχύ προτιμώνται μέθοδοι μικρού κόστους. Με ισχυρούς πόρους εφαρμόζονται ακριβείς αριθμητικές τεχνικές.
Σκοπός ανάλυσης	• Θεωρητική ανάλυση για ακριβείς ισορροπίες: <i>Lemke - Howson, Homotopy</i>. • Εμπειρική προσομοίωση: <i>Fictitious Play, Regret Minimization</i>.	Οι θεωρητικές μελέτες απαιτούν ακριβείς ισορροπίες, οι εμπειρικές / πειραματικές αναλύσεις απαιτούν ευέλικτα, προσεγγιστικά σχήματα.

	• Αναλυτική / πειραματική για ακριβείς ισορροπίες: <i>QRE</i>.	
--	--	--

Ερμηνευτικό σχόλιο: ο πίνακας 4.5.4 συνοψίζει πρακτικές κατευθύνσεις για την επιλογή μεθόδου υπολογισμού Ισορροπίας Nash με βάση τα χαρακτηριστικά του παιγνίου και τον στόχο της ανάλυσης.

Η διαδικασία επιλογής ακολουθεί τρία βασικά βήματα:

1. Προσδιορίζεται ο τύπος του παιγνίου (διακριτό ή συνεχές).
2. Εκτιμάται το μέγεθος και η υπολογιστική πολυπλοκότητα.
3. Ορίζεται το απαιτούμενο επίπεδο ακρίβειας (θεωρητική έναντι προσεγγιστικής λύσης).

Συνοψίζοντας: οι ντετερμινιστικές μέθοδοι είναι κατάλληλες για θεωρητική τεκμηρίωση, ενώ οι στοχαστικές και εξελικτικές προσφέρουν ευελιξία και ρεαλισμό σε εφαρμοστικά ή μεγάλης κλίμακας παίγνια.

4.6 Συμπεράσματα

Το παρόν κεφάλαιο ανέλυσε συστηματικά τις υπολογιστικές τεχνικές για την εύρεση Ισορροπίας Nash, συνδυάζοντας τη θεωρητική θεμελίωση με την πρακτική εφαρμοσιμότητα. Αρχικά παρουσιάστηκε η γενική ταξινόμηση των μεθόδων βάσει δύο βασικών διαστάσεων:

1. Φύση του στρατηγικού χώρου (διακριτές - συνεχείς στρατηγικές) και
2. Χαρακτηρισμός της προσέγγισης (ντετερμινιστική - στοχαστική).

Ακολούθησε η ανάλυση των κλασικών ντετερμινιστικών τεχνικών (ενότητα 4.3), όπως η *Lemke - Howson*, η *Best Response Dynamics* και η Εξάλειψη Κυριαρχούμενων Στρατηγικών, οι οποίες προσφέρουν σαφή θεωρητική ερμηνεία και κατασκευαστικές λύσεις σε παίγνια μικρού ή μεσαίου μεγέθους. Στη συνέχεια εξετάστηκαν οι σύγχρονες στοχαστικές και εξελικτικές προσεγγίσεις (ενότητα 4.4), όπως η *Regret Minimization*, η *Fictitious Play*, το *Quantal Response Equilibrium*

και οι *Genetic Algorithms*, που προσφέρουν ευελιξία, ικανότητα χειρισμού μεγάλων συστημάτων και ρεαλιστική προσομοίωση της συμπεριφοράς παικτών.

Η συγκριτική αξιολόγηση έδειξε ότι καμία μέθοδος δεν είναι καθολικά υπερέχουσα: η επιλογή εξαρτάται από το μέγεθος του παιγνίου, το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας, τη φύση των στρατηγικών και τους διαθέσιμους υπολογιστικούς πόρους. Οι ντετερμινιστικές μέθοδοι εξασφαλίζουν υψηλή ακρίβεια αλλά περιορίζονται σε μικρές διαστάσεις, ενώ οι στοχαστικές και εξελικτικές προσεγγίσεις προσφέρουν ταχύτερη σύγκλιση και υπολογιστική ευελιξία σε μεγάλης κλίμακας ή αβέβαια παίγνια.

Η ανάλυση της πολυπλοκότητας και ο πρακτικός οδηγός της ενότητας 4.5 έδειξαν ότι ο ορθός σχεδιασμός εξαρτάται από την ισορροπία ανάμεσα στην ακρίβεια και την υπολογιστική αποδοτικότητα, συνδέοντας τη θεωρητική τεκμηρίωση με την πρακτική σκοπιμότητα.

Συνολικά, το κεφάλαιο ανέδειξε τη διαχρονική εξέλιξη των τεχνικών υπολογισμού της Ισορροπίας Nash, από τις κλασικές αλγοριθμικές μεθόδους έως τις σύγχρονες στοχαστικές και εξελικτικές προσεγγίσεις, παρέχοντας ενιαίο πλαίσιο κατανόησης και επιλογής κατάλληλης μεθόδου για εφαρμογή σε στρατηγικά και πολυπρακτορικά / πολυπαικτικά παίγνια.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Allgower, E. L., & Georg, K. (1990). *Numerical continuation methods: An introduction*. Berlin, Germany: Springer - Verlag.

Borel, É. (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 173, 1304 - 1308. [Engl. transl. 1953 The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels, *Econometrica*, 21, 97 - 100].
<https://home.uchicago.edu/~rmyerson/research/boreltalk.pdf>.

Brown, G. W. (1951). *Iterative solution of games by fictitious play*. In T. C. Koopmans (Ed.), *Activity analysis of production and allocation* (pp. 374 - 376). New York, NY: John Wiley & Sons.
https://www.researchgate.net/publication/4975577_Brown%27s_original_fictitious_play.

- Cottle, R. W., Pang, J.- S., & Stone, R. E. (1992). *The linear complementarity problem*. San Diego, CA: Academic Press.
- Fudenberg, D., & Levine, D. K. (1998). *The theory of learning in games*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). *Game theory*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Gibbons, R. (1992). *A primer in game theory*. Harlow, England: Pearson Education Limited.
- Glicksberg, I. L. (1952). A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(1), 170 - 174. <https://doi.org/10.2307/2032478>.
- Goeree, J. K., Holt, C. A., & Palfrey, T. R. (2016). *Quantal response equilibria: A computational approach*. London, UK: Palgrave Macmillan.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. Reading, MA: Addison - Wesley.
- Govindan, S., & Wilson, R. (2003). A global Newton method to compute Nash equilibria. *Journal of Economic Theory*, 110(1), 65 - 86. [https://doi.org/10.1016/S0022-0531\(03\)00005-X](https://doi.org/10.1016/S0022-0531(03)00005-X).
- Hart, S., & Mas - Colell, A. (2000). A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium. *Econometrica*, 68(5), 1127 - 1150. <https://www.jstor.org/stable/2999445>.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.
- Lemke, C. E., & Howson, J. T. (1964). Equilibrium points of bimatrix games. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 12(2), 413 - 423. <https://doi.org/10.1137/0112033>
- McKelvey, R. D., & McLennan, A. (1996). Computation of equilibria in finite games. In H. M. Amman, D. A. Kendrick, & J. Rust (Eds.), *Handbook of computational economics* (Vol. 1, p. 87 - 142). Amsterdam, Netherlands: Elsevier.

https://www.researchgate.net/publication/247317689_Chapter_2_Computation_of_equilibria_in_finite_games

McKelvey, R. D., & Palfrey, T. R. (1995). Quantal response equilibria for normal form games. *Games and Economic Behavior*, 10(1), 6 - 38. <https://doi.org/10.1006/game.1995.1023>

Myerson, R. B. (1997). *Game theory: Analysis of conflict*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in n - person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1), 48 - 49. Washington, DC: National Academy of Sciences. <https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48>

Nash, J. F. (1950). Non - cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2), 286 - 295. Princeton, NJ: Princeton University Press. <https://doi.org/10.2307/1969529>

Osborne, M. J. (2000). *An introduction to game theory*. Oxford: Oxford University Press.

Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). *A course in game theory*. Cambridge, MA: MIT Press.

Papadimitriou, C. H. (1994). *Complexity and economics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Pearce, D. A. (1984). Rationalizable strategic behavior and the iterated elimination of dominated strategies. *Economics Letters*, 16(1 - 2), 123 - 127.

Rapoport, A., & Chammah, A. M. (1965). *Prisoner's Dilemma*. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.

Rapoport, A., & Chammah, A. M. (1966). The game of chicken. *American Behavioral Scientist*, 10(3), 10 - 14, 23 - 28. <https://doi.org/10.1177/000276426601000303> .

Rasmusen, E. (2006). *Games and Information: An introduction to game theory* (4th ed.). Malden, MA: Blackwell Publishing.

Robinson, J. (1951). An iterative method of solving a game. *Annals of Mathematics*, 54(2), 296 - 301. <https://doi.org/10.2307/1969530>.

Rousseau, J.- J. (1755). *Discourse on the origin and basis of inequality among men*. Amsterdam, Netherlands: Marc - Michel Rey.

Savani, R., & von Stengel, B. (2006). Hard - to - solve bimatrix games. *Journal of Economic Theory*, 129(1), 127 - 155. <https://doi.org/10.1016/j.jet.2005.01.007>.

Shapley, L. S. (1964). *Some topics in two - person games*. In M. Dresher, L. S. Shapley, & A. W. Tucker (Eds.), *Advances in Game Theory* (pp. 1 - 29). Princeton, NJ: Princeton University Press. <https://apps.dtic.mil/sti/tr/pdf/AD0407345.pdf>.

Smith, J. M. (1982). *Evolution and the theory of games*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Tadelis, S. (2013). *Game theory: An introduction*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

von Neumann, J. (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele. *Mathematische Annalen*, 100(1), 295 - 320. <https://doi.org/10.1007/BF01448847>.

von Neumann, J., & Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

von Stengel, B. (2002). *Computing equilibria for two - person games*. In R. J. Aumann & S. Hart (Eds.), *Handbook of game theory with economic applications* (Vol. 3, pp. 1723 - 1759). Amsterdam, Netherlands: Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S1574-0005\(02\)03008-4](https://doi.org/10.1016/S1574-0005(02)03008-4).

