Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Διδασκαλία και μάθηση εννοιών του Διαφορικού λογισμού με ιστορική προοπτική

Γεώργιος Φυτόπουλος

(Α.Μ. 147477)

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Κως, Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Διδασκαλία και μάθηση εννοιών του Διαφορικού λογισμού με ιστορική προοπτική

Γεώργιος Φυτόπουλος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων καθηγητής:

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Ευγένιος Αυγερινός

Καθηγητής,

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Κως, Σεπτέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους

- Κο Νικολαντωνάκη Κωνσταντίνο, επιβλέποντα καθηγητή μου, για την καθοδήγηση που μου παρείχε, την ενθάρρυνση για την επίτευξη του στόχου μου και το χρόνο που μου διέθεσε.
- Τον συνεπιβλέπωντα καθηγητή Κο Αυγερινό Ευγένιο, τον οποίο είχα και καθηγητή στο μάθημα Ιστορία και Διδακτική των Μαθηματικών, γεγονός που με βοήθησε τόσο στη συγγραφή της παρούσας εργασίας, όσο και στον τρόπο αναζήτησης πηγών.
- Τους καθηγητές μου, Κο Παπαδόπουλο Βασίλειο, Κα Καριώτου Φωτεινή και Κο Σωτηρόπουλο Δημήτριο, για την επιστημονική γνώση που μου προσέφεραν επιδεικνύοντας παραδειγματική συμπεριφορά εκπαιδευτικών λειτουργών – δασκάλων και πάνω απ' όλα ανθρώπων.

Θα ήμουν αγνώμων αν μέσα στις τόσες ευχαριστίες δε συμπεριλάμβανα τον φίλο, συνάδελφο και δάσκαλο Μουρατίδη Χριστόφορο, η συμβολή του οποίου ήταν καταλυτική τόσο σε επιστημονικό επίπεδο όσο και σε ψυχολογικό. «Ένα ΕΥΧΑΡΙΣΤΩ είναι λίγο δάσκαλε!».

Τέλος αμφιταλαντεύομαι αν πρέπει να ευχαριστήσω την οικογένειά μου ή να της ζητήσω συγγνώμη! Όπως και να 'χει τους υπερευχαριστώ για τη στήριξη που μου παρείχαν, την αμέριστη συμπαράσταση και την υπομονή που έδειξαν και τους ζητώ συγγνώμη για την απουσία μου.

Κως, 2022

Περίληψη

Ο Διαφορικός Λογισμός είναι ένα κομμάτι της Ανάλυσης, όπου στο υπάρχον εκπαιδευτικό σύστημα η πρώτη επαφή των μαθητών γίνεται στην τελευταία τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και μέσω των Πανελλήνιων εξετάσεων εισάγονται στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στο πλαίσιο των εξετάσεων οι μαθητές διαπραγματεύονται έννοιες όπως το όριο, η συνέχεια μιας συνάρτησης, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Στην παρούσα εργασία μέσω της έρευνας που διεξήχθη μελετάται αν η Ιστορία των Μαθηματικών θα βοηθούσε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και τις παρερμηνείες – παρανοήσεις όπως η παράγωγος ως κλίση της εξίσωσης της εφαπτομένης ευθείας σε μία συνάρτηση ή η παράγωγος συνάρτηση, η εύρεση μεγίστων και ελαχίστων τιμών. Η ιστορικοδιδακτική έρευνα έγινε σε δεκαοκτώ μαθητές της Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου με ομάδα προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής κατά το ακαδημαϊκό έτος 2021 – 2022.

Λέξεις Κλειδιά: Διαφορικός Λογισμός, Παράγωγος, Παρανοήσεις – Παρερμηνείες μαθητών, Ιστορία των Μαθηματικών, Πανελλήνιες εξετάσεις.

Abstract

Differential Calculus is a part of Analysis, where in the existing education system students' first contact is in the last grade of secondary education and through the Panhellenic exams they are introduced to higher education. As part of the exams, students deal with concepts such as limit, continuity of a function, derivative and integral. In the present paper through the research carried out it is studied whether the History of Mathematics would help students to overcome difficulties and misconceptions – misconceptions such as the derivative as the slope of the equation of the tangent line to a function or the derivative function, finding maxima and minima prices. The historical-pedagogical research was carried out on eighteen students of the 3rd grade of a General High School with an orientation group of Economics and Informatics during the academic year 2021-2022.

Keywords: Differential Calculus, Derivative, Misconceptions - Misinterpretations of students, History of Mathematics, Panhellenic exams.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

Ι.Ε.Π.	Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
Φ.Ε.Κ.	Φύλλα Εφημερίδας της Κυβέρνησης
HPM	History and Pedagogy of Mathematics
RME	Realistic Maths Education / Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

Εισαγωγή

Στον τομέα της εκπαίδευσης τα τελευταία χρόνια έχει δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα από εκπαιδευτικούς και ψυχολόγους η μάθηση μέσω κατανόησης εννοιών, για όλους τους μαθητές και σε όλα τα μαθήματα. Αυτό στον τομέα των Μαθηματικών έχει αρκετά προβλήματα σύμφωνα με τον Στυλιανίδη (2007). Όμως δημιουργείται το ερώτημα, μήπως η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στην ουσιαστική μάθηση;

Στην έρευνα που διεξήχθη το ζητούμενο είναι κατά πόσο συνέβαλε η Ιστορία των Μαθηματικών στην κατανόηση εννοιών μέσω μιας ιστορικοδιδακτικής προσέγγισης στον τομέα της Ανάλυσης και πιο συγκεκριμένα στο Διαφορικό Λογισμό. Η παράγωγος εξελίχθηκε στο πέρασμα του χρόνου και έχει πολυδιάστατες μορφές και χρήσεις, γεγονός που οδηγεί σε παρανοήσεις τους μαθητές. Αυτή είναι και η κύρια ιδέα της παρούσας διπλωματικής εργασίας, δηλαδή αν αυτές οι παρερμηνείες που δημιουργούνται μπορούν να εξαλειφθούν, αν στον τρόπο διδασκαλίας προστεθεί μια ιστορική προοπτική, που θα οδηγήσει τους μαθητές στην επανεφεύρεση εννοιών με σκοπό την πλήρη κατανόηση των εννοιών που διαπραγματεύονται.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται μια ιστορική αναδρομή του πότε εντάχθηκε η Ιστορία των Μαθηματικών και πως εξελίχθηκε στην πορεία του χρόνου και αναφέρονται οι βασικοί στόχοι. Ακόμη αναφέρονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της ένταξης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία, ποιος είναι ο σκοπός της και με ποια μορφή. Στο τέλος του κεφαλαίου γίνεται αναφορά της Ιστορίας των Μαθηματικών για την παρούσα εργασία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή της εξέλιξης του Διαφορικού Λογισμού, η οποία χωρίζεται σε τρεις σημαντικές περιόδους. Η πρώτη περίοδος, η αρχαία περίοδος, η οποία τοποθετείται από τον 6ο έως τον 3ο αιώνα προ Χριστού. Η δεύτερη περίοδος από τον 16ο αιώνα ως τον 17ο αιώνα, όπου ανακαλύπτεται ο Διαφορικός Λογισμός και η τρίτη περίοδος από τον 18ο ως την τρίτη δεκαετία του 19ου αιώνα, όπου γίνεται η αυστηρή θεμελίωσή του. Σε καθεμία από αυτές τις περιόδους αναφέρονται οι σημαντικότερες προσωπικότητες και η συμβολή τους. Πιο αναλυτικά δε θα μπορούσε να παραληφθεί η συμβολή των Ελλήνων στην αρχαία περίοδο, μετά την εποχή του Θαλή, όπως είναι οι Πυθαγόρειοι, ο Εύδοξος και φυσικά ο Αρχιμήδης. Επίσης γίνεται αναφορά και στο διάστημα πριν τον 16ο αιώνα, την περίοδο της «λήθης», που παρά τη στασιμότητα στην Ευρώπη, στην Ινδία έχουμε μια εξέλιξη. Τέλος γίνεται αναφορά στους Fermat, Newton, Leibniz και άλλων μεγάλων προσωπικοτήτων της σύγχρονης εποχής που συνέβαλαν στη σύγχρονη αντίληψη και μετέπειτα στην αυστηρή θεμελίωση.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά του Διαφορικού Λογισμού στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, πότε γίνεται η πρώτη επαφή του μαθητή με τις έννοιες του Διαφορικού Λογισμού και παρατίθενται η εξεταστέα ύλη στα μαθηματικά για τις πανελλήνιες εξετάσεις σύμφωνα με δημοσιευμένο Φ.Ε.Κ. από την κυβέρνηση και οι οδηγίες που σχετίζονται με τον τρόπο διδασκαλίας που προτείνει το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στους εκπαιδευτικούς όσον αφορά τις έννοιες που διαπραγματεύεται η παρούσα διπλωματική εργασία.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται λόγος από την υπάρχουσα διεθνή βιβλιογραφία των παρανοήσεων στα μαθηματικά από τους μαθητές. Πρώτα σε μια γενική μορφή στα μαθηματικά, στη συνέχεια στον Διαφορικό Λογισμό και πιο συγκεκριμένα στην έννοια της παραγώγου.

Στη συνέχεια στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ασκήσεις που επιλέχθηκαν από το σχολικό βιβλίο και διδάχθηκαν κατά τη διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης μέσω ιστορικών δραστηριοτήτων κάνοντας και μια αναφορά στη μέθοδο του Fermat για την εύρεση εφαπτομένης καθώς και την εύρεση μεγίστων και ελαχίστων.

Στο έκτο κεφάλαιο αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας, ποια ήταν η χρησιμότητά της, γίνεται μια αναφορά και στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME), ποιος ήταν ο σκοπός της έρευνας, οι συμμετέχοντες σε αυτήν. Επίσης αναλύεται ο σχεδιασμός της διδακτικής παρέμβασης, τα εργαλεία που χρειάστηκαν και τέλος αναλύεται ο τρόπος με τον οποίο εκτελέστηκε η διδακτική παρέμβαση στη σχολική αίθουσα καθ' όλη τη διάρκεια.

Στο έβδομο κεφάλαιο δίνονται τα αποτελέσματα της έρευνας από τα pre και post tests καθώς και του τελικού ερωτηματολογίου. Τα δεδομένα της έρευνας παρατίθενται μέσω πινάκων και γραφημάτων.

Στο όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας γύρω από τα προσδοκώμενα και τα πραγματικά τελικά αποτελέσματα και καταγράφονται προτάσεις για μελλοντικές έρευνες.

Τέλος στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι περιορισμοί και οι δυσκολίες που υπήρξαν κατά τη διάρκεια της υλοποίησης της έρευνας.

Κεφάλαιο 1ο

Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών

1.1 «Ιστορική αναδρομή» Πότε εμφανίστηκε και τι γίνεται σήμερα;

Η ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών ξεκινά με δειλά βήματα τον 19ο αιώνα, όπου σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως ο F. Klein και ο Poincare κάνουν κάποιες αναφορές στο έργο τους. Η συστηματικότερη όμως προσέγγιση γίνεται προς τα τέλη της δεκαετίας του 1960 με τον σχετικό τόμο που εκδίδει το NCTM (1969/1989), που παίρνει συγκεκριμένη μορφή με την ίδρυση της ομάδας HPM (The International Study Group of the Relations between History and Pedagogy of Mathematics) και αρχίζει να συνιστά μέσω αυτής μια νέα, ενεργό ερευνητική περιοχή της Μαθηματικής εκπαίδευσης, δημοσιεύοντας ερευνητικά άρθρα, διοργανώνοντας σχετικά συνέδρια και εκδίδοντας συλλογικούς τόμους.

Η HPM μορφοποιείται τη δεκαετία του 1970 και έχοντας ως κύριο στόχο την ανάδειξη των Μαθηματικών ως μια ζωντανή επιστήμη με μεγάλο παρελθόν, ζωντανό παρόν, αλλά όχι με προκαθορισμένο μέλλον. Στους κόλπους της εντάσσονται καθαροί Μαθηματικοί, Ιστορικοί, δάσκαλοι των Μαθηματικών και σχεδιαστές αναλυτικών προγραμμάτων.

Οι βασικοί στόχοι της ομάδας, επιγραμματικά είναι οι ακόλουθοι:

1. Ανάπτυξη διεθνών επαφών και ανταλλαγή πληροφοριών.
2. Προώθηση διεπιστημονικών διερευνήσεων.
3. Κατανόηση της διαδικασίας εξέλιξης των Μαθηματικών.
4. Συσχέτιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και της ιστορίας της διδασκαλίας τους, με την εξέλιξη των Μαθηματικών.
5. Παραγωγή διδακτικού υλικού.
6. Εύκολη πρόσβαση σε υλικό.
7. Βαθύτερη συνειδητοποίηση της σημασίας της ιστορίας στη διδασκαλία.
8. Συνεισφορά στη συνειδητοποίηση ότι η Ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί ουσιώδες μέρος εξέλιξης των διαφόρων πολιτισμικών παραδόσεων.

1.2 Υπέρ και κατά της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία

1.2.1 Υπέρ

Η διδασκαλία των Μαθηματικών και η μάθηση δεν μπορεί να είναι στείρα γνώση, δηλαδή παρουσίαση και εκμάθηση των τελικών προϊόντων της μαθηματικής κοινότητας, αλλά πρέπει να παρέχει στον διδασκόμενο την ανάλογη τριβή, βάσει του επιστημονικού του υπόβαθρου, ώστε να αποκτήσει την ικανότητα της δημιουργίας κάνοντας Μαθηματικά. Εδώ εμπλέκεται η Ιστορία των Μαθηματικών ως ένα φυσιολογικό πλαίσιο για να ιδωθούν τα μαθηματικά εν τω γεννάσθαι, οδηγώντας σε μια σφαιρικότερη αντίληψη γι' αυτά, τόσο ως νοητική κατασκευή, όσο και ως ανθρώπινη δραστηριότητα με όλες τις ατέλειες, αδυναμίες αλλά και την συναρπαστικότητα που αυτό συνεπάγεται.

Η ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία μπορεί να στηρίξει, να εμπλουτίσει, να βελτιώσει τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών από πολλές πλευρές και οι οποίες παρουσιάζονται επιγραμματικά παρακάτω. (Tzanakis, Arcavi et al 2000 §7.2)

Ένα από τα υπέρ είναι η εκμάθηση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Freudenthal, «καμία μαθηματική ιδέα δεν έχει ποτέ δημοσιευθεί με τον τρόπο που ανακαλύφθηκε» (Freudenthal 1983, p.ix). Το γεγονός αυτό συστηματικά παραλείπεται σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Αυτό έχει ως συνέπεια να χάνεται η ανθρώπινη διάσταση της μαθηματικής δημιουργίας. Εδώ έρχεται η ιστορία να καλύψει ένα κενό.

Ένα ακόμη θετικό της ιστορίας είναι εύρεση παραδειγμάτων, καταστάσεων και προβλημάτων που μπορούν να εμπλουτίσουν τη διαδικασία της μάθησης και να κινήσουν το ενδιαφέρον τόσο στον διδάσκοντα όσο και στον διδασκόμενο.

Και βέβαια μπορεί να αποτελέσει γέφυρα μεταξύ των Μαθηματικών και άλλων επιστημονικών πεδίων καθώς σήμερα τα σύνορα είναι δυσδιάκριτα, λόγω της αλληλεπίδρασης με άλλες επιστήμες. Τέλος μέσω της ενασχόλησης με εργασίες ιστορικού περιεχομένου, από τους διδασκόμενους, αναπτύσσονται γενικές δεξιότητες, όπως η αναζήτηση και συστηματικότερη διερεύνηση ιστορικών πηγών, λεκτική ανάπτυξη επιχειρηματολογίας και απόδοση σε άλλες γλώσσες κτλ.

Μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών και μέσα από συγκεκριμένες εφαρμογές ή παραδείγματα, μπορεί ο μαθητής να κατανοήσει πως οι ευρετικές διαδικασίες, τα λάθη, οι αμφιβολίες, οι παραλείψεις, τα αδιέξοδα αποτελούν συστατικό κομμάτι της μαθηματικής δημιουργίας και άρα αποτελούν αναπόσπαστο μέρος αυτού που είναι τα μαθηματικά.

Είναι φανερό πως αναφέροντας τον τρόπο με τον οποίο εξελίχθηκε μια θεωρία, μια έννοια, εμπεριέχει το κίνητρο πίσω από την εισαγωγή της νέας γνώσης, τα προβλήματα που οδήγησαν σ’ αυτήν.

Ο διδάσκων μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών είναι σε θέση να αντιληφθεί τις δυσκολίες και τα εμπόδια που υπάρχουν σε μια μαθηματική έννοια, Τα οποία ενδεχομένως μπορεί να επανεμφανιστούν στην τάξη. Επίσης μπορεί να εμπλουτίσει το διδακτικό ρεπερτόριο αντλώντας προβλήματα ιστορικού περιεχομένου και έτσι να κινητοποιήσει τους μαθητές του.

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η ιστορική διάσταση στην εκμάθηση των Μαθηματικών είναι ο κατ’ εξοχήν τρόπος να δει κανείς τα Μαθηματικά ως μια ανθρώπινη προσπάθεια και όχι ως ένα σύστημα άκαμπτων κανόνων. Επίσης βοηθάει τον μαθητή να κατανοήσει τον δημιουργικό ρόλο που μπορεί να βρίσκεται στο λάθος, την παρερμηνεία ή την αποτυχημένη προσπάθεια.

Τέλος θα ήταν λάθος να παραληφθεί ως προτέρημα η αναγνώριση των Μαθηματικών ως μιας πολιτιστικής – ανθρώπινης προσπάθειας, πράγμα που επιτυγχάνεται μέσω της ιστορίας. Τα Μαθηματικά έχουν ένα διεθνιστικό χαρακτήρα στενά συνυφασμένο με τον σύγχρονο δυτικό πολιτισμό. Όμως η εξέλιξη τους προέκυψε ως συνισταμένη πολλών τάσεων και παραδόσεων που αναπτύχθηκαν σε κάποια μορφή και υπάρχουν ακόμα. Μέσω της ιστορίας μπορεί να γίνει σαφές αυτό και να έρθει ο διδάσκων και ο διδασκόμενος σε επαφή με λιγότερο γνωστές όψεις των μαθηματικών, ή άλλες μορφές που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο διαφορετικών πολιτισμικών παραδόσεων. Πράγμα που είναι επίκαιρο, αφού οι τάξεις είναι πολύ – πολιτισμικές.

1.2.2 Κατά

Όπως είναι φυσικό, πάντα θα υπάρχει αντίλογος. Έτσι κι εδώ. Θα προσπαθήσω να ταξινομήσω τα αντεπιχειρήματα σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι οι ενστάσεις που εμφανίζονται για λόγους επιστημολογικούς και φιλοσοφικούς και η δεύτερη κατηγορία για πρακτικούς – διδακτικούς λόγους.

Η πρώτη κατηγορία χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες, η μία σχετίζεται με τη φύση των μαθηματικών και η άλλη με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος.

Όσον αφορά τη φύση, συνοπτικά παραθέτω τις παρακάτω ενστάσεις:

- Αρκετοί συνάδελφοι θεωρούν πως δεν είναι μαθηματικά αυτά! Δηλαδή πρώτα διδάσκετε το θέμα και μετά η ιστορία του.
- Τα δύσκολα προβλήματα πρέπει να γίνονται υπόθεση ρουτίνας, σύμφωνα με την πρόοδο των Μαθηματικών, επομένως για ποιον λόγο να ασχολούμαστε με το τι έγινε στο παρελθόν;
- Ότι συνέβη στο παρελθόν μπορεί να ήταν περίπλοκο. Συνεπώς η ενσωμάτωσή τους στο μάθημα ίσως προκαλεί σύγχυση, παρά αποσαφήνιση!

Η πρώτη από τις παραπάνω ενστάσεις παραπέμπει στην επιστημολογική θέση ότι τα μαθηματικά ταυτίζονται με το αποτέλεσμα, παραλείποντας τη διαδικασία που οδήγησαν σ' αυτό. Οι άλλες δύο θεωρούν εμμέσως ότι η ιστορική διάσταση στην Μαθηματική εκπαίδευση συνιστά κατ' ουσία την ενσωμάτωση της ιστορίας σε όλες της τις λεπτομέρειες και την περιπλοκότητα.

Τώρα για τη δεύτερη υποκατηγορία με τις ενδογενείς δυσκολίες του εγχειρήματος πιστεύει πως η ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων είναι δύσκολος στόχος και δεν βοηθά και καλλιεργεί πολιτισμικό σωβινισμό και στενόμυαλο εθνικισμό.

Η δεύτερη κατηγορία ενστάσεων πρακτικού και διδακτικού χαρακτήρα χωρίζεται σε τρεις υποκατηγορίες.

- Η στάση και το υπόβαθρο των καθηγητών.
    - Ο διδακτικός χρόνος είναι περιορισμένος!
    - Δεν είναι το αντικείμενό μου, ώστε να ξέρω ότι παρουσιάζω το θέμα σωστά.
    - Το διδακτικό υλικό είναι δυσεύρετο.
    - Δεν υπάρχει η κατάλληλη επιμόρφωση των εκπαιδευτικών.
- Διαδικασίες αξιολόγησης.
    - Πως μπορεί να ενσωματωθεί η ιστορική διάσταση σε test ή εξετάσεις;

- Υπάρχει πράγματι εμπειρική τεκμηρίωση ότι η ιστορική διάσταση στην Μαθηματική εκπαίδευση βελτιώνει την εκμάθηση των Μαθηματικών;

- Το υπόβαθρο και η στάση των μαθητών.
  - Δεν αρέσει στους μαθητές.
  - Οι μαθητές το θεωρούν μάθημα Ιστορίας και δεν αγαπούν την Ιστορία.
  - Οι μαθητές το βρίσκουν εξίσου βαρετό με τα Μαθηματικά τα ίδια!
  - Οι μαθητές δεν το εκτιμούν, διότι δεν έχουν ικανοποιητική ευρύτερη παιδεία.

1.3 Σκοπός της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών και η μορφή της

Σε διάφορα εκπαιδευτικά συστήματα και βαθμίδες της εκπαίδευσης, έχουν γίνει ανά καιρούς προσπάθειες ένταξης και εκμετάλλευσης της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αυτές οι προσπάθειες ταξινομούνται σε δύο ανεξάρτητους άξονες, ένας είναι ο σκοπός και ο άλλος είναι η μορφή που παίρνει (Tzanakis, Arcavi et al. 2000, §7.3, Jankvist 2009, §1.1).

1.3.1 Σκοπός

Είναι κοινός τόπος ότι η ιστορία είναι ένα βοηθητικό μέσον στην εκμάθηση του περιεχομένου των Μαθηματικών με διάφορους δρόμους, είτε δημιουργώντας κίνητρα μάθησης είτε διευκολύνοντας στην κατανόηση εννοιών, μεθόδων, θεωριών κτλ. Στο κομμάτι αυτό η Ιστορία των Μαθηματικών δρα ως εργαλείο.

Όπως αναφέραμε παραπάνω η ιστορία δεν αποτελεί βοήθημα για την εκμάθηση μαθηματικών θεμάτων, αλλά είναι ο δρόμος για στοχασμό και συζήτηση ερωτημάτων που σχετίζονται με την εξέλιξη των μαθηματικών, τις αλληλεπιδράσεις με άλλες πολιτισμικές δραστηριότητες και διεργασίες, με την διάκριση και κατανόηση των ενδογενών και εξωγενών παραγόντων που επηρεάζουν την εξέλιξη, δηλαδή η Ιστορία των Μαθηματικών υπεισέρχεται σε θέματα για τη φύση, το ρόλο και τη σημασία των Μαθηματικών. Εδώ μιλάμε για τον δεύτερο σκοπό της ιστορίας ως στόχος.

1.3.2 Μορφή

Οι μορφές αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών μπορεί να χωριστεί σε τρεις άξονες, οι οποίοι είναι συμπληρωματικοί μεταξύ τους και μπορούν να εμφανιστούν παράλληλα στα πλαίσια μιας δραστηριότητας.

Ο πρώτος άξονας είναι η εκμάθηση της ιστορίας μέσω της άμεσης ενσωμάτωσης ιστορικών πληροφοριών για την εμβάθυνση και κατανόηση της φύσης των μαθηματικών. Αυτό επιτυγχάνεται με τα ιστορικά σημειώματα των εγχειριδίων ή με αυτοτελή μαθήματα ιστορίας πάνω σε συγκεκριμένα θέματα ιστορικής εξέλιξης.

Ο δεύτερος άξονας είναι η εκμάθηση των Μαθηματικών με προσεγγίσεις από την ιστορία. Εδώ χρειάζονται βασικές ιστορικές γνώσεις, ώστε να μπορεί κανείς να εντοπίσει τα κρίσιμα στάδια της ιστορικής εξέλιξης, βάσει των οποίων θα σχεδιαστεί και οργανωθεί η διδασκαλία. Τέτοια παραδείγματα αρχικά εμφανίζονται με τον Toeplitz (Toeplitz 1963, Schubring 1978, 1988) και μεταγενέστερα σε άλλες μορφές (Tzanakis 1995, 1999, 2000, Πάσχος 2007, Farmaki και Paschos 2007), η «καθοδηγούμενη επανακάλυψη» του Freudenthal (1991), ο σχεδιασμός διδακτικών καταστάσεων βάσει του προσδιορισμού επιστημολογικών εμποδίων του Brousseau (1997) κ.α.

Ο τρίτος άξονας είναι η καλλιέργεια βαθύτερης συνείδησης για τα Μαθηματικά καθ' αυτά και το κοινωνικό πολιτιστικό τους πλαίσιο. Εδώ η ιστορία εμφανίζεται ως στόχος επιδιώκοντας τη συνειδητοποίηση των ενδογενών και εξωγενών χαρακτηριστικών της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι προαναφερθείσες γενικές μορφές ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία έχουν οδηγήσει σε ποικίλες εφαρμογές σε αρκετές χώρες σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Tzanakis, Arcavi et al. 2000, §7.4). Επιγραμματικά είναι οι ακόλουθες:

- Εφαρμογές με άμεση επαφή με ιστορικό υλικό και γεγονότα (Ιστορικά σημειώματα, αρχαιολογικοί χώροι films κτλ.).

- Εφαρμογές που οδηγούν σε λεπτομερώς δομημένες δραστηριότητες (ερευνητικά projects, πρωτότυπες πηγές κτλ.).
- Εφαρμογές πιο «πειραματικού» και εμπειρικού χαρακτήρα (επαφή και χρήση μηχανικών και άλλων εργαλείων, βιωματικού χαρακτήρα μαθηματικών δραστηριοτήτων, θεατροποίηση εμπνευσμένη από ιστορικά γεγονότα των μαθηματικών).
- Το διαδίκτυο ως πηγή πληροφόρησης και επικοινωνίας.

1.4 Η Ιστορία των Μαθηματικών στην παρούσα διδακτική παρέμβαση

Η εργασία καταπιάνεται με την έννοια της παραγώγου τόσο σε σημείο όσο και ως συνάρτηση, με την εξίσωση της εφαπτομένης και με την εύρεση μεγίστων – ελαχίστων μέσω μιας ιστορικοδιδακτικής προσέγγισης. Πιο αναλυτικά χρησιμοποιήθηκαν δύο εφαρμογές με ιστορική προοπτική. Η πρώτη εφαρμογή έχει να κάνει με την εύρεση της εφαπτομένης μέσω της μεθόδου του Fermat και η δεύτερη με την μέθοδο μεγίστων – ελαχίστων του Fermat.

Κεφάλαιο 2ο

Ιστορική εξέλιξη του Διαφορικού Λογισμού

Τα μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων βασίζονταν στη διαίσθησή τους, η αρχή του Απειροστικού Λογισμού ξεκινά απ’ τις δυσκολίες που είχαν οι αρχαίοι φιλόσοφοι και μαθηματικοί να εκφράσουν τις διαισθητικές ιδέες τους για λόγους ή αναλογίες γραμμών, αυτό το κατάφεραν εισάγοντας την έννοια του απείρως μικρού, του απειροστού. Το πρόβλημα της εφαπτομένης και του εμβαδού ήταν τα κύρια αίτια που ανάπτυξαν τους δύο κλάδους του Απειροστικού Λογισμού, οι οποίοι είναι ο Διαφορικός Λογισμός και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός, οι οποίοι συνδέονται με το θεμελιώδες θεώρημα. Η λύση των παραπάνω προβλημάτων εμπεριέχει την έννοια του απείρου και του απειροστού, είτε απείρως μεγάλου είτε απείρως μικρού. Με άλλα λόγια ο Απειροστικός Λογισμός μπορούμε να ισχυριστούμε ότι διαπραγματεύεται τα μαθηματικά του απείρου εν αντιθέσει των στοιχειωδών μαθηματικών, που διαπραγματεύονται πεπερασμένα μεγέθη.

Η ιστορική εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού χωρίζεται σε τρεις σημαντικές περιόδους. Η πρώτη περίοδος χρονικά τοποθετείται από τον 6ο έως τον 3ο π.Χ. αιώνα. Στην περίοδο αυτή μπορούμε να ισχυριστούμε πως ο Απειροστικός Λογισμός βρίσκεται σε «λανθάνουσα» μορφή και εμφανίζεται μεμονωμένα μέσω των επιτευγμάτων των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων και μαθηματικών, τα αποτελέσματα των οποίων μπορούν να χαρακτηριστούν ως η αφετηρία για την ανάπτυξή του. Στη συνέχεια ακολουθεί μια περίοδος λήθης από τον 3ο π.Χ. αιώνα ως τον Μεσαίωνα, όπου κύριο μέλημα ήταν η διαφύλαξη του υλικού που είχε συλλεχθεί κατά τους κλασικούς χρόνους. Το διάστημα από τον 16ο και τον 17ο αιώνα είναι η δεύτερη περίοδος, όπου ανακαλύπτεται ο Απειροστικός Λογισμός από τους Newton – Leibniz και αναπτύσσεται με γοργούς ρυθμούς. Τέλος η Τρίτη περίοδος χρονολογείται από τον 18ο αιώνα ως και την τρίτη δεκαετία του 19ου αιώνα όπου γίνεται η αυστηρή θεμελίωσή του, με την κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Αυτό ήταν το πρώτο βήμα για την αριθμοποίηση του Απειροστικού Λογισμού.

2.1 Αρχαία περίοδος

Οι ιστορικές αρχές των μαθηματικών ανιχνεύονται σε χώρες που θεωρούνται πηγές του πολιτισμού, όπως η Κίνα, η Ινδία, η Αίγυπτος και η Μεσοποταμία. Από κείμενα των αρχαίων Βαβυλωνίων και από τους αιγυπτιακούς πάπυρους πληροφορούμαστε πως οι άνθρωποι γνώριζαν πως να βρίσκουν εμβαδά τριγώνου, κύκλου και είχαν τύπους υπολογισμού όγκου κυλίνδρου και πυραμίδας. Βέβαια είναι γνωστό πως η γεωμετρία των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων ήταν υπολογιστική και ως επιστήμη δεν υπήρχε ακόμη. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να πει κανείς πως τα ανατολικά μαθηματικά ήταν εφαρμοσμένη αριθμητική και σίγουρα αποτέλεσε τη βάση των Ελληνικών Μαθηματικών.

Οι Έλληνες μαθηματικοί, μετά τον Θαλή, προσπάθησαν να θέσουν τα μαθηματικά τους σε μια λογική βάση. Οι δυσκολίες εμφανίστηκαν στην έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας, διότι ήταν συνδεδεμένη με την έννοια του απείρου. Τα παράδοξα του Ζήνωνα έπαιξαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των μαθηματικών, καθώς η έννοια του απείρου έγινε το κεντρικό θέμα των φιλοσόφων και των μαθηματικών.

Από τον 6^{ο} π.Χ. αιώνα ως τον 3^{ο} π.Χ. αιώνα, σημαντική προσφορά στην εξέλιξη των ελληνικών μαθηματικών έπαιξαν οι Πυθαγόρειοι, ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης. Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν ιδιότητες ιδανικών σχημάτων που δεν υπήρχαν στη φύση και μετέτρεψαν τη γεωμετρία σε μια αφηρημένη επιστήμη. όμως το μεγαλύτερο επίτευγμα των αρχαίων Ελλήνων ήταν η εισαγωγή των λογικών αποδείξεων και των αξιωμάτων, προτάσεων που γίνονταν δεκτές χωρίς απόδειξη. Έτσι εμφανίστηκε το επαγωγικό σύστημα. Αναμφίβολα η αξιωματική μέθοδος ήταν η σπουδαιότερη συμβολή της αρχαίας Ελλάδας στα μαθηματικά.

Οι λόγοι για τους οποίους αναπτύχθηκε η αξιωματική μέθοδος είναι διάφοροι είτε εσωτερικοί είτε εξωτερικοί των μαθηματικών κάποιοι από τους πιο σημαντικούς είναι η προδιάθεση των Ελλήνων στη φιλοσοφική έρευνα, η ανακάλυψη της ασυμμετρίας διαγωνίου και πλευράς του τετραγώνου από τους Πυθαγόρειους. Τέλος η φύση της ελληνικής κοινωνίας, διότι η δημοκρατία στην Ελλάδα απαιτούσε την τέχνη της πειθούς μέσω της επιχειρηματολογίας απ' όπου ξεπήδησε η λογική, η επαγωγική μέθοδος.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως τον 4^{ο} αιώνα π.Χ. σημαντικό ρόλο έπαιξε η μορφή του Ευδόξου, του δημιουργού της θεωρίας λόγων. Τον 3^{ο} αιώνα π.Χ. δεσπόζουν οι μορφές των

Ευκλείδη και Αρχιμήδη. Ο πρώτος καταγράφει στα Στοιχεία του όλα τα αρχαία μαθηματικά και η επαγωγική μέθοδος θα γίνει το πρότυπο για τη δημιουργία της μαθηματικής θεωρίας. Ο Αρχιμήδης θα επεξεργαστεί μεθόδους για την εύρεση εμβαδών, όγκων, εφαπτομένων, χρησιμοποιώντας και βελτιώνοντας τη μέθοδο της εξάντλησης στην αυστηρή απόδειξη των αποτελεσμάτων του.

2.2 Περίοδος της λήθης 3^{ος} π.Χ. – 14^{ος} μ.Χ.

Την ίδια περίοδο με τον Αρχιμήδη έζησε και ο Απολλώνιος, ο οποίος ολοκλήρωσε τη θεωρητική μελέτη των κωνικών τομών. Στα χρόνια που ακολούθησαν δεν υπήρξε πρόοδος στα ελληνικά μαθηματικά. Μέσω της Αστρονομίας αναπτύχθηκε ένας νέος κλάδος των μαθηματικών, η τριγωνομετρία. Κατά τη διάρκεια της Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας η επιστήμη άκμασε στο ανατολικό της τμήμα ως ένα κράμα ελληνιστικών και ανατολικών στοιχείων. Όμως εισέβαλαν οι βάρβαροι και κατέκτησαν τις επαρχίες αυτές και έτσι χάθηκε κάθε ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Στην Περσία, την Ινδία και στο Βυζάντιο θα διασωθούν σημαντικά χειρόγραφα.

Τα μαθηματικά των Ινδών παρουσίασαν σημαντική πρωτοτυπία, που ήταν εντυπωσιακή στα αριθμητικό – αλγεβρικά θέματα. Η επίτευξη λύσεων αριθμητικών προβλημάτων από τους Ινδούς χωρίς τη βοήθεια της γεωμετρίας συνετέλεσε στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού, βέβαια δεν ασχολήθηκαν σοβαρά με τον Απειροστικό Λογισμό, ωστόσο πέτυχαν ένα σημαντικό επίτευγμα, το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται ως τις μέρες μας. Μετά τον 4^{ο} μ.Χ. αιώνα άρχισε να καλλιεργείται η ελληνική παράδοση σε μια σχολή Αράβων επιστημόνων, οι οποίοι μετέφρασαν στα αραβικά τους Έλληνες κλασικούς, Απολλώνιο, Αρχιμήδη, Ευκλείδη και Αριστοτέλη. Παρ’ όλο που οι Άραβες δεν ασχολήθηκαν με τις βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού μέσω των μεταφράσεων εξοικειώθηκαν με την αρχαία ελληνική κληρονομιά και με τη γραπτή παράδοση των Βαβυλωνίων. Υπό την επίδραση των ανακαλύψεων των Ινδών προετοίμασαν το έδαφος για τη δημιουργία της άλγεβρας, που πρωτοεμφανίστηκε τον 9^{ο} μ.Χ. αιώνα ως τεχνική επίλυση εξισώσεων.

Το διάστημα αυτό στην Ευρώπη δεν είχαμε σημαντική πρόοδο στα μαθηματικά. Στα μέσα του 10^{ου} αιώνα άρχισαν να γίνονται μεταφράσεις από τα αραβικά στα λατινικά. Το ενδιαφέρον για μάθηση εντάθηκε κατά τη διάρκεια του 11ου και τις αρχές του 12ου αιώνα, όπου τα μαθηματικά διδάσκονταν, υπό τη μορφή πρακτικής επιστήμης, στις μοναστηριακές σχολές και στα κλειστά κολέγια της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ.

Οι έρευνες για το άπειρο και για προβλήματα που αφορούσαν την κίνηση θα θέσουν τις λογικές βάσεις του Απειροστικού Λογισμού. Τα περισσότερα έργα της ελληνικής επιστήμης μεταφράστηκαν στα λατινικά του 13ου αιώνα.

2.3 Ο 16ος και 17ος αιώνας

Ένας από τους πρώτους μαθηματικούς του 17ου αιώνα, που επιχείρησαν να αφήσουν την αποδεικτική μέθοδο των αρχαίων Ελλήνων και να εισάγουν την ελεύθερη χρήση των απειροστών για τον υπολογισμό όγκων και εμβαδών ήταν ο Johannes Kepler (1571 – 1630), ο οποίος ήταν επηρεασμένος από τη μελέτη των έργων των αρχαίων ελληνικών μαθηματικών και φιλοσόφων και περισσότερο από τους Πυθαγόρειους και τον Αρχιμήδη.

Στη συνέχεια ο Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) Ιταλός μαθηματικός και μαθητής του Γαλιλαίου (1564 – 1642) συνέχισε τις σκέψεις του Kepler αναπτύσσοντας μια γεωμετρική προσέγγιση, την οποία ονόμασε μέθοδο των αδιαιρέτων.

Οι αιώνες που ακολούθησαν ο 16ος και ο 17ος ήταν αιώνες επιστημονικής επανάστασης, όπου οι επιστήμονες άρχισαν να ενδιαφέρονται για φυσικά προβλήματα στατικής και δυναμικής. Σ' αυτό βοήθησε η ανακάλυψη της Αναλυτικής Γεωμετρίας από τους Καρτέσιο και Fermat, ανεξάρτητα ο ένας απ' τον άλλον τη δεκαετία του 1630. Οι Έλληνες και οι Μουσουλμάνοι ασχολήθηκαν με τις κωνικές τομές και την εύρεση εφαπτομένων και εμβαδών.

Τον 17ο αιώνα το πρόβλημα της εφαπτομένης ήταν σε εξέχουσα θέση στην έρευνα των μαθηματικών. Ένα άλλο πρόβλημα που ενέπλεκε την εφαπτομένη ήταν αυτό που προέκυψε από τη μελέτη της κίνησης. Η επίλυση προβλημάτων εφαπτομένης ανάπτυξαν δυο τάσεις τη γεωμετρική και την αλγεβρική.

Οι νέες καμπύλες που ανακαλύφθηκαν παρουσίασαν αρκετό ενδιαφέρον και μεγάλες δυσκολίες. Ένα από τα προβλήματα ήταν και η εύρεση μέγιστης και ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης. Η εύρεση μεθόδων για την επίλυση των προβλημάτων που αναφέραμε ήταν η κύρια προσπάθεια των μαθηματικών την περίοδο 1635 – 1665. Από τη Γαλλία το απειροστικό πνεύμα εξαπλώθηκε στο Βέλγιο, την Ολλανδία και γύρω στο 1650 και στην Αγγλία, όπου και θα προκύψουν αξιοσημείωτα αποτελέσματα από τους John Wallis, Isaac Barrow και James Gregory.

2.4.1 Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Εικόνα 1. Pierre de Fermat

Τον Αύγουστο του 1601 στην Beaumont de Lamagne της Γαλλίας γεννήθηκε ο Pierre de Fermat, μια δεσπόζουσα φυσιογνωμία των μαθηματικών, αν και ήταν ερασιτέχνης μαθηματικός, αφού σπούδασε νομικά στο πανεπιστήμιο της Τουλούζης και εργάστηκε για κάποια χρόνια ως δικαστής. Ο Fermat μελέτησε τα έργα των Αρχιμήδη, Απολλώνιου, Διόφαντου και Viète. Προσπάθησε να επαναφέρει τις χαμένες εργασίες του Απολλώνιου και να τις εκφράσει με τους αλγεβρικούς συμβολισμούς του Viète, με τη βοήθεια κάποιων σχολίων του Πάππου. Αυτή ήταν και η αφετηρία για την Αναλυτική Γεωμετρία, την οποία ανακάλυψε πριν τον Καρτέσιο το 1629, αλλά δημοσιεύθηκε μετά το θάνατό του, αυτό είχε ως αποτέλεσμα να πιστώνεται στον Καρτέσιο, αφού τη δημοσίευσε πρώτος το 1637. Η Αναλυτική Γεωμετρία βοήθησε στην κατανόηση της μεταβλητής το οποίο είναι βασικό συστατικό της συνάρτησης.

Με την εισαγωγή της Αναλυτικής Γεωμετρίας του το 1629 διατύπωσε κάποιες ιδέες που αποτέλεσαν την πρώτη αξιοσημείωτη νύξη διαφόρισης. Οι ιδέες του θα γίνουν γνωστές στη μαθηματική κοινότητα το 1638. Ο Fermat βασίστηκε στις παρατηρήσεις του Kepler και στα τέλη του 1629 θα τις μετατρέψει σε έναν αλγόριθμο εύρεσης ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης. Τότε παρατήρησε ότι στις ακραίες τιμές της συνάρτησης η εφαπτομένη ήταν παράλληλη στον άξονα x΄x. Έτσι οδηγήθηκε το 1636 να εφαρμόσει τη μέθοδό του και σε προβλήματα χάραξης εφαπτομένων. Ωστόσο δεν κατάφερε να αξιολογήσει τη μέθοδό του, ως μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης έννοιας όπως η «παράγωγος», ο ρυθμός μεταβολής, ή ακόμα και η κλίση της εφαπτομένης.

2.4.2 Η μέθοδος εύρεσης εφαπτομένης και ακροτάτων του Fermat

Ένα από τα μεγάλα ιστορικά προβλήματα, από την αρχαιότητα έως τις αρχές του 17^{ου} αιώνα, που απασχόλησαν τους μαθηματικούς και οδήγησαν στην ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού ήταν το πρόβλημα της εφαπτομένης, δηλαδή πως μπορούμε να την κατασκευάσουμε σε ένα σημείο της καμπύλης και σίγουρα πως να την ορίσουμε.

Η εμφάνιση του ορισμού της εφαπτομένης ευθείας σε κύκλο έγινε πολύ νωρίς. Περί το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης απέδειξε το γνωστό θεώρημα της γεωμετρίας πως η εφαπτομένη κύκλου είναι η ευθεία που έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο. Στηριζόμενοι σ' αυτόν τον ορισμό οι Αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί επινόησαν τρόπους κατασκευής της εφαπτομένης του κύκλου και των κωνικών τομών γενικότερα. Ορισμένες από τις μεθόδους περιέγραψε ο Απολλώνιος (262 – 190 π.Χ.).

Βέβαια στους Αρχαίους Έλληνες κυριαρχούσε η στατική αντίληψη της εφαπτομένης ως η ευθεία που εγγίζει την καμπύλη σε ένα σημείο της χωρίς να τη διαπερνά και αυτή δεν οδηγεί στο Διαφορικό Λογισμό σε αντίθεση με τη μεθοδολογία του Αρχιμήδη (287 – 212 π.Χ.) στην εργασία του περί Ελίκων, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί ως προάγγελος του Διαφορικού Λογισμού.

Η επανεμφάνιση του ενδιαφέροντος για τις εφαπτομένες απ' την επιστημονική κοινότητα έρχεται τον 17^{ο} αιώνα με την ανάπτυξη της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Ο Rene Descartes (1596 – 1650) είχε δηλώσει ότι η κατασκευή της εφαπτομένης σε μια καμπύλη ήταν το χρησιμότερο και γενικότερο πρόβλημα που θα ήθελε όσο τίποτε άλλο να λύσει, αφού η εφαπτομένη είναι χρήσιμη:

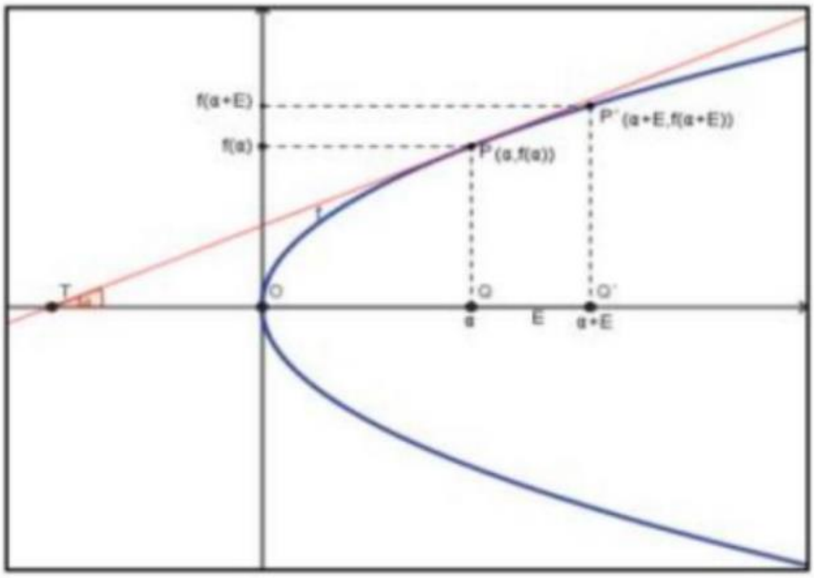
- Στην οπτική, όπου καθορίζει τη γωνία υπό την οποία μια φωτεινή ακτίνα εισέρχεται σε καμπύλο φακό.
- Στη μηχανική, καθορίζει την κατεύθυνση της κίνησης σωματιδίου σε κάθε σημείο της τροχιάς του.
- Στη γεωμετρία, οι εφαπτομένες δυο καμπυλών στο σημείο τομής τους, καθορίζουν τη γωνία που σχηματίζουν οι τεμνόμενες καμπύλες (Thomas – Finney, 2005).

Η χρήση εξισώσεων για την περιγραφή καμπύλων στην Αναλυτική Γεωμετρία, επέτρεψε τη συστηματική τους μελέτη πέραν των κωνικών τομών. Η μετάφραση της Αναλυτικής Γεωμετρίας στα λατινικά είχε ως αποτέλεσμα η χρησιμότητά της και οι αρχές της να γίνουν ευρέως γνωστές. Η εισαγωγή αλγεβρικών συμβόλων συνέβαλε στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού. Ακόμη, χρησιμοποιώντας την άλγεβρα, αντί του γεωμετρικού συλλογισμού μπορούσαν να οδηγηθούν ευκολότερα σε σωστά γεωμετρικά συμπεράσματα. Έτσι, οι κανόνες της λογικής αυστηρότητας των Αρχαίων Ελλήνων ατόνησαν σε πολλά προβλήματα του Λογισμού και αυτό οδήγησε σε έντονες διαμάχες.

Ο Fermat έλυσε το πρόβλημα της χάραξης της εφαπτομένης με τη βοήθεια των απειροστών και της μεθόδου του εύρεσης μέγιστων και ελάχιστων. Ο Fermat επινόησε μια διαδικασία για τον καθορισμό μέγιστου και ελάχιστου σημείου καμπύλης, την οποία ονόμασε «adequality». Από γεωμετρικής άποψης, εύρισκε το σημείο όπου η εφαπτομένη στην καμπύλη είχε κλίση μηδέν (Thomas – Finney, 2005).

Ωστόσο οι πρώτες ιδέες για την εφαπτομένη ευθεία, της κινηματικής θεώρησης, διατυπώνονται από τον Leibniz, ο οποίος ορίζει ως εφαπτομένη καμπύλης την ευθεία γραμμή που ενώνει δυο απείρως γειτονικά σημεία της καμπύλης. Για την κατασκευή της βασίστηκε στο διαφορικό τρίγωνο, που είχε ήδη χρησιμοποιήσει ο Barrow και στις απείρως μικρές μεταβολές dx και dy των x και y. Ο Leibniz λοιπόν ορίζει την εφαπτομένη μέσω μιας γεωμετρικής οριακής διαδικασίας.

Για την μετάβαση από την εφαπτομένη των κωνικών τομών στην εφαπτομένη καμπύλης πέρασαν αρκετά χρόνια και χρειάστηκε αναθεώρηση της σκέψης. Χρειάστηκε η εισαγωγή άπειρων διαδικασιών, η οποία αποτέλεσε επανάσταση στα Μαθηματικά (Artigue, 1991).



Εικόνα 2. Η μέθοδος του Fermat για την εύρεση της εφαπτομένης

Η μέθοδος του Fermat ήταν περίπου η ακόλουθη:

Έστω *P(a, f(a))* ένα σημείο μιας παραβολής και *P΄(a + E, f(a+E))* ένα γειτονικό του σημείο στην καμπύλη. Αφού το *P΄* βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στο *P* το *E* θα είναι πολύ μικρό και η εφαπτομένη στο *P* θα συμπίπτει σχεδόν με την τέμνουσα *PP΄* (βλέπε Εικόνα 2).

Έστω *Q, Q΄* οι προβολές των *P,P΄* στον άξονα x΄x αντίστοιχα και *T* η τομή της εφαπτομένης με τον άξονα x΄x. Τότε *PQ = f(a), P΄Q΄= f(a +E), OQ = a, QQ΄ =E* και έστω *TQ = c*. Τα τρίγωνα *TPQ* και *TP΄*Q΄ μπορούν να θεωρηθούν κατά προσέγγιση όμοια οπότε $\frac{PQ}{TQ}=\frac{P'Q'}{TQ'}$,

δηλαδή:

$$\frac{f(a)}{c}=\frac{f(a+E)}{c+E} \Leftrightarrow f(a)\cdot(c+E)=c\cdot f(a+E) \Leftrightarrow f(a)\cdot E=c\cdot f(a+E)-c\cdot f(a) \qquad (1).$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της (1) με *E* και παίρνουμε

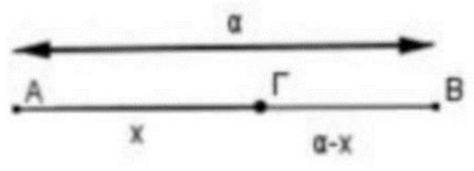
$$f(a)=c\cdot\frac{f(a+E)-f(a)}{E} \Leftrightarrow \frac{f(a)}{c}=\frac{f(a+E)-f(a)}{E} \qquad (2).$$

Αλλά $\frac{f(a)}{c}=\frac{PQ}{TQ}=\varepsilon\varphi\omega$, όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο *P* με τον οριζόντιο άξονα. Αφού το *P΄* είναι πολύ – πολύ κοντά στο *P* η απόσταση *E* είναι σχεδόν μηδενική. Έτσι ο Fermat έθεσε στη σχέση (2) *E = 0,* μετά την απλοποίηση του παρονομαστή και υπολόγισε την κλίση της εφαπτομένης στο *P:* $\varepsilon\varphi\omega = \frac{f(a)}{c}$, δηλαδή την κλίση της καμπύλης στο P.

Η διαδικασία του Fermat ισοδυναμεί με τη σύγχρονη ορολογία ως το όριο καθώς το *E* προσεγγίζει το μηδέν. Συνεπώς, προκειμένου να βρει την κλίση μιας καμπύλης στο σημείο *(x, f(x))* το μόνο που έπρεπε να κάνει ήταν να βρει το $\frac{f(x)}{c} = \frac{f(x+E)-f(x)}{E}$ και να θέσει *E = 0.*

Προτού παραθέσουμε τη μέθοδο εύρεσης ακροτάτων του Fermat, θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα μέσω του οποίου εξήγησε τη μέθοδό του.

Παράδειγμα: Να διαιρεθεί ευθύγραμμο τμήμα μήκους α (βλέπε Εικόνα 3) σε δύο ίσα μέρη, ώστε το γινόμενό τους να είναι μέγιστο.



Εικόνα 3. Ευθύγραμμο τμήμα AB

Λύση: Έστω x το ένα τμήμα, τότε το άλλο θα είναι α – x και το γινόμενό τους $x \cdot (\alpha - x) = x \cdot \alpha - x^2$.

Θεωρούμε $f(x) = \alpha x - x^2$ και ψάχνουμε το x που τη μεγιστοποιεί. O Fermat παρατήρησε ότι κοντά στο ακρότατο οι τιμές της συνάρτησης για δύο γειτονικές τιμές είναι σχεδόν ίσες. Συνεπώς αν για την τιμή *x* η *f* μεγιστοποιείται και *x* + *E* είναι μια γειτονική τιμή, τότε $f(x+E) \approx f(x)$ οπότε: $f(x+E) - f(x) \approx 0$. Έτσι έχουμε $f(x+E) - f(x) = (x+E)\alpha - (x+E)^2 - \alpha x + x^2 = E\alpha - 2xE - E^2$.

Εν συνεχεία ο Fermat διαιρεί με E και προκύπτει $\frac{f(x+E)-f(x)}{\mathrm{E}} = \alpha - 2x - E$.

Όμως $f(x+E) - f(x) \approx 0$, άρα προκύπτει $\alpha - 2x - E \approx 0 \Leftrightarrow \alpha \approx 2x + E$.

Αν στην τελευταία σχέση παραλείψουμε το πολύ μικρό Ε προκύπτει $x=\frac{\alpha}{2}$, η οποία είναι η τιμή που μεγιστοποιεί την f.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε πως η μέθοδος του Fermat έχει κενά, τα οποία αποκαθίστανται με τη σύγχρονη γνώση. Στην ουσία ο Fermat υπολόγισε το $\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{\text{E}}$, δηλαδή βρήκε την παράγωγο, που όπως γνωρίζουμε σήμερα ο μηδενισμός της παραγώγου είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ακροτάτου, ενώ ο Fermat θεωρούσε αυτονόητο ότι η τιμή που προέκυψε από τη μέθοδό του αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή (Σκούφη, 2013).

2.4.3 Επινόησε ο Fermat τον Απειροστικό Λογισμό;

Τη δεκαετία του 1640 ο Fermat κατάφερε να προσδιορίσει το εμβαδόν κάτω από κάθε καμπύλη της μορφής $y = x^k$, εκτός από την $y = x^{-1}$ καθώς σε αυτή την καμπύλη η μέθοδός του δεν εφαρμόζεται. Ακόμη κατάφερε να κατασκευάσει την εφαπτομένη στις καμπύλες που μελέτησε. Με άλλα λόγια ο Fermat έλυσε τα δυο σπουδαιότερα προβλήματα του Απειροστικού Λογισμού. Και εδώ γεννάται το ερώτημα, γιατί να μην θεωρούμε «πατέρα» του Απειροστικού Λογισμού τον Fermat;

Η απάντηση στο ερώτημά μας είναι η εξής, ο Fermat δεν αντιλαμβανόταν την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα δύο προβλήματα. Το πιο πιθανόν σε έναν φοιτητή του σήμερα, παρατηρώντας ότι η παράγωγος της συνάρτησης $y = x^k$ είναι η συνάρτηση $y'=kx^{k-1}$ και το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $y = x^k$ από το 0 έως το x είναι η συνάρτηση $x^{k+1}/k+1$ θα αναγνώριζε άμεσα την αντίστροφη ιδιότητα.

Για τον Fermat η κατασκευή μιας εφαπτομένης σήμαινε να υπολογίσει το μήκος της υφαπτομένης και στη συνέχεια να φέρει την ευθεία από το σημείο της καμπύλης στο κατάλληλο σημείο του άξονα. Γι' αυτό δεν θεώρησε την κλίση της εφαπτομένης, αυτό που ονομάζουμε παράγωγο. Μελετώντας την $y = x^k$ διαπίστωσε ότι η υφαπτομένη t ισούται με x/k και όχι ότι η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με $k\,x^{k-1}$.

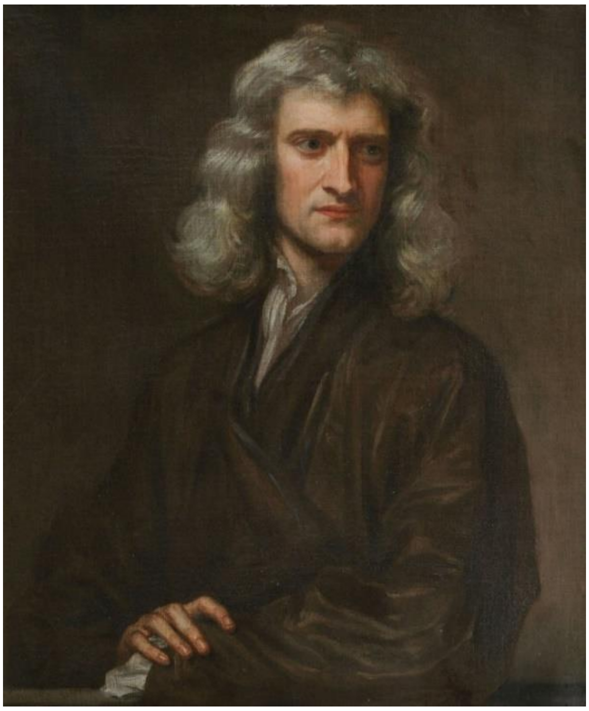
Όμοια για τον Fermat ο υπολογισμός εμβαδού κάτω από μια καμπύλη σήμαινε την εύρεση ενός κατάλληλου ισοδύναμου ορθογωνίου με την καμπυλόγραμμη περιοχή. Συνοψίζοντας ο Fermat κατάφερε να λύσει τα δύο βασικά ερωτήματα του Απειροστικού Λογισμού σε πολλές περιπτώσεις, αλλά δεν έθεσε τα «σωστά» ερωτήματα. Άλλοι ήταν εκείνοι που μπόρεσαν να δουν ότι δεν είδε ο Fermat (Katz,2019).

2.5 Η ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού

Το πρώτο μισό του 17^{ου} αιώνα, οι μαθηματικοί κλήθηκαν να απαντήσουν σε ένα σύνολο ερωτημάτων όπως η εύρεση μέγιστης και ελάχιστης τιμής, προβλήματα εφαπτομένης και εμβαδού. Γύρω στα 1660 τα παραπάνω προβλήματα είχαν κατανοηθεί με σαφήνεια, όμως έλειπε μια γενική τεχνική και δεν είχε δοθεί ένας ικανοποιητικός ορισμός. Έτσι η αναζήτηση στράφηκε προς τη δημιουργία ενός λογισμού, ενιαίου, λειτουργικού με κατάλληλη ορολογία, συμβολισμό και κανόνες οι οποίοι να προσφέρουν μια γενική τεχνική για τη λύση των προβλημάτων που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Φυσικά αυτό θα μπορούσε να γίνει από ανθρώπους, οι οποίοι θα γνώριζαν σε βάθος τη γεωμετρική μέθοδο των αρχαίων Ελλήνων και του Cavalieri καθώς και την αλγεβρική μέθοδο των Καρτέσιου, Fermat και Wallis. Αυτό δεν άργησε να συμβεί καθώς τη δεκαετία 1660 – 1670 οι Isaac Newton και Gottfried Wilhelm Leibniz θα ανακαλύψουν τον Απειροστικό Λογισμό. Εδώ αξίζει να τονίσουμε πως με τον όρο ανακάλυψη εννοούμε ότι πρώτον ενέταξαν όλες τις μέχρι τότε υπάρχουσες μεθόδους σε δύο γενικές έννοιες, την «παράγωγο» και το «ολοκλήρωμα». Δεύτερον επινόησαν συμβολισμούς που έκαναν πιο εύχρηστες τις έννοιες αυτές και τρίτον ανακάλυψαν και απέδειξαν το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, που μας δείχνει ότι η διαφόριση και η ολοκλήρωση είναι αμοιβαία αντίστροφες διαδικασίες.

Ο Newton ονόμασε ροή (fluxion) αυτό που σήμερα αποκαλούμε παράγωγο ή ρυθμό μεταβολής, ενώ ο Leibniz διαφορικό πηλίκο. (Γιαννακούλιας, 2007)

2.6 Isaac Newton (1642 – 1727)



Εικόνα 4. Ισαάκ Νεύτων

Ο Isaac Newton γεννήθηκε τα Χριστούγεννα του 1642 στο Woolsthorpe της Αγγλίας. Το 1660 εισήχθη στο κολέγιο Trinity του Cambridge. Το έτος της αποφοίτησής του (1665) το κολέγιο έκλεισε λόγω της επιδημίας πανούκλας και αναγκάστηκε να επιστρέψει στη γεννέτηρά του, πράγμα που τον βοήθησε στη μελέτη του, καθώς τότε έγιναν οι πρώτες επινοήσεις των ιδεών και των θεωριών του, τις οποίες επεξεργάστηκε και ανέπτυξε μεταγενέστερα. Μελέτησε τα έργα των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Γαλιλαίου, Kepler, Stevin, Cavalieri, Καρτέσιου, Fermat, Wallis και του δάσκαλού του Barrow. Αφού κατανόησε σε βάθος τα έργα των προαναφερθέντων έκανε τις περίφημες ανακαλύψεις του για τις άπειρες σειρές, τη βαρύτητα, την ανάλυση του φωτός και του Απειροστικού Λογισμού. Το 1667 επέστρεψε στο Cambridge και την επόμενη χρονιά τελείωσε τη διδακτορική του διατριβή. Ήταν η χρονιά που ο δάσκαλός του Isaac Barrow παραιτήθηκε από τη Λουκασιανή έδρα, για να τον διαδεχθεί ο μαθητής του ως ένδειξη θαυμασμού και εκτίμησης στο μεγάλο μαθηματικό ταλέντο του και τις μεγάλες ερευνητικές του δυνατότητες. Οι πρώτες ανακαλύψεις στο Λογισμό οφείλονταν από τη μελέτη του Arithmetica Infinitorum. Το 1666 επινόησε τη μέθοδο ροών (fluxions) για την επίλυση προβλημάτων φυσικής που είχαν κίνηση. Ο Newton είχε τη συνήθεια να μην δημοσιεύει τα έργα του την εποχή της ανακάλυψης, εν αντιθέσει με τον Leibniz, αλλά περιοριζόταν να τα γνωστοποιεί σε κάποιους φίλους του υπό μορφή επιστολών. Έτσι η πρώτη δημοσίευση του λογισμού του έγινε το 1687 στην εργασία του «Philosophiae naturalis Principa mathematica». Στο έργο αυτό έδωσε τη φορμαλιστική μορφή των νόμων που διατύπωσε στη γεωμετρική γλώσσα των αρχαίων Ελλήνων.

Ο λόγος που χρησιμοποίησε τη γεωμετρική γλώσσα οφειλόταν στο γεγονός πως ο Απειροστικός Λογισμός ήταν άγνωστος στην πλειονότητα των συγχρόνων του και επειδή τα αποτελέσματα του ήταν αντίθετα με τη φιλοσοφία της εποχής του, υπήρχε ο κίνδυνος της αμφισβήτησης.

Ο Newton στο Principa παρουσίασε τρεις μεθόδους ερμηνείας του νέου λογισμού. Η πρώτη έχει σχέση με τα απειροστά και τη χρησιμοποίησε στην πρώτη του εργασία «De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas» και επηρεάστηκε από τις μεθόδους των Fermat και Barrow και με χρήση του διωνυμικού θεωρήματος επέκτεινε το πεδίο εφαρμογής τους. Η δεύτερη μέθοδος έχει να κάνει με τις ροές (fluxions) και εμφανίστηκε στην εργασία του «Methodus fluxionum et serierum infinitarum» όπου παρουσίασε τις νέες έννοιες του ρέοντος (fluent) και της ροής (fluxion) και τέλος η τρίτη μέθοδος παρουσιάστηκε στην εργασία του «De quadrature curvarum» που σχετίζεται με τα όρια, τους πρώτους και εσχάτους λόγους. Αυτή η μέθοδος ήταν η πιο αυστηρή.

2.7 Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646 – 1716)

Εικόνα 5. Γκότφριντ Βίλεμ φον Λάιμπνιτς

Την ίδια εποχή με τον Newton και ανεξάρτητα από αυτόν ο Gottfried Wilhelm Von Leibniz θα ανακαλύψει και αυτός τον Απειροστικό Λογισμό. Ο Leibniz σπούδασε στα πανεπιστήμια της Λειψίας και της Νυρεμβέργης νομικά, θεολογία και φιλοσοφία. Στην προσπάθειά του να κατανοήσει τα έργα των Γαλιλαίου, Kepler και Καρτέσιου διαπίστωσε πως η νεότερη φιλοσοφία γινόταν κατανοητή από αυτούς που είχαν μαθηματική παιδεία. Έτσι παρακολούθησε στο πανεπιστήμιο της Ιένας μαθηματικές διαλέξεις και συμπέρανε πως οι νόμοι της σκέψης ήταν αποτέλεσμα συνδυαστικής ανάλυσης. Κάπως έτσι ξεκινάει η εμπλοκή του με τα μαθηματικά και το 1666 γράφει την εργασία του «De arte cabinatoria». Ένα από τα θέματα μελέτης του ήταν οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, η οποία και τον βοήθησε στην εξαγωγή αποτελεσμάτων του Διαφορικού Λογισμού του. Το 1672 θα βρεθεί στο Παρίσι με διπλωματική αποστολή και θα έρθει σε επαφή με τον πνευματικό κόσμο της Γαλλίας και συγκεκριμένα με τον Cristian Huygens, ο οποίος θα τον παροτρύνει να μελετήσει το Arithmetica Infinitorum του Wallis και το Opus Geometrica του Gregoire de Saint Vincent. Μέσα από τη μελέτη εργασιών του Pascal πληροφορήθηκε τη μέθοδο των αδιαιρέτων η οποία και θα τον βοηθήσει να αντιληφθεί τη χρησιμότητα του διαφορικού τριγώνου. Με την επίσκεψή του στο Λονδίνο το 1673 θα συναντήσει τους Henry Oldenburg, Collins, Hooke και Wallis και θα προμηθευτεί ένα αντίγραφο των Geometrical lectures του Barrow, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί εις βάρος του κατά τη διένεξη του με τον Newton, που αφορούσε την ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού. Το 1674 μέσω του Oldenburg θα έλθει σε επικοινωνία δια αλληλογραφίας με τον Newton, το περιεχόμενο της οποίας αφορούσε τη διαφόριση και τον τετραγωνισμό καμπυλών. Στη μεταξύ τους αλληλογραφία κανείς δεν εξηγεί τον τρόπο στον άλλο και η αλληλογραφία θα διακοπεί το 1677.

Όπως αναφέραμε ο Leibniz ασχολήθηκε με τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών έτσι το 1684 γράφει «*έχω την αίσθηση ότι αυτή η μέθοδος και άλλες που βρίσκονται σε χρήση ως τώρα, μπορούν όλες να προκύψουν από μια γενική αρχή, την οποία χρησιμοποιώ στη μέτρηση καμπυλόγραμμων σχημάτων. Σύμφωνα μ' αυτήν, ένα καμπυλόγραμμο σχήμα πρέπει να θεωρείται ως το ίδιο με ένα πολύγωνο με απείρως πολλές πλευρές*». (Math. Schr. V, σελ. 126)

Το 1697 θα γράψει στον Wallis *«Η μελέτη των διαφορών και των αθροισμάτων στις αριθμητικές ακολουθίες μου έδωσαν την πρώτη ενόραση, όταν συνειδητοποίησα ότι οι διαφορές αντιστοιχούσαν στις εφαπτομένες και τα αθροίσματα σε τετραγωνισμούς».*

Σύμφωνα με τον Bos «*στο Λογισμό του Leibniz, η αντίληψη μιας μεταβλητής και αυτή της ακολουθίας από απείρως κοντινές τιμές ταυτίζονται. Οι τελεστές Δ, Σ του σχηματισμού* *ακολουθιών διαφορών και αθροισμάτων της πεπερασμένης περίπτωσης δρουν σε ακολουθίες, αλλά στην επέκταση τους στο πραγματικό άπειρο μετασχηματίζονται στους τελεστές d και ∫ αντίστοιχα, που δρουν σε ακολουθίες απείρως κοντινών τιμών των μεταβλητών. Ο Leibniz συνέδεσε τις παρατηρήσεις του με το λογισμό του, θεωρώντας, την ακολουθία των αριθμών ως τις y – τιμές μιας συνάρτησης και τη διαφορά κάθε δύο, ως τη διαφορά δυο γειτονικών y – τιμών. Το x παριστάνει τη θέση του όρου στην ακολουθία και το y την τιμή αυτού του όρου».* Έτσι μια ακολουθία διαφορών μετασχηματίζεται με την επέκταση στο άπειρο, σε μια ακολουθία με άπειρο πλήθος όρων απείρως μικρών όρων. Αυτοί οι όροι είναι τα «διαφορικά».

Αν συγκρίνουμε το λογισμό του Leibniz με τον σημερινό Απειροστικό Λογισμό, ο Λογισμός του Leibniz αφορά μεταβλητές, οι οποίες διατρέχουν μια άπειρη ακολουθία απείρως κοντινών τιμών, ενώ ο Λογισμός του σήμερα διαπραγματεύεται με συναρτήσεις. Μια άλλη διαφορά είναι ότι ο Διαφορικός Λογισμός του Leibniz αντιστοιχεί σε μια νέα απειροστή μεταβλητή, το διαφορικό, ενώ ο Λογισμός του σήμερα αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση, την παράγωγό της. Ανάλογες διαφορές βλέπουμε και στον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Σύμφωνα με τον Boyer ο Leibniz συνέλαβε το Λογισμό του ως ένα εργαλείο, το οποίο θα αντικαθιστούσε τη μέθοδο της εξάντλησης και στηρίχθηκε σε ένα νόμο συνέχειας με τον οποίο όταν δύο δεδομένα προσεγγίζουν το ένα το άλλο συνεχώς και τα αποτελέσματά τους κάνουν το ίδιο. Με άλλα λόγια «η συνέχεια σέβεται τα όρια». Τέλος μπορούμε να ισχυριστούμε πως ο Leibniz κατάφερε να δημιουργήσει ένα ολοκληρωμένο, μεθοδικό και λειτουργικό λογισμό με νέα ορολογία και απλούστερο συμβολισμό. «*Δεν θα ήταν υπερβολή να πει κανείς ότι ο Λογισμός του Leibniz φέρνει, κοντά στο μαθητή, προβλήματα τα οποία απαιτούσαν κάποτε την ευφυΐα του Αρχιμήδη ή του Newton*» (C. Edwards).

2.8 Η αυστηρή θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού

Η ανάπτυξη και η εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού όπως ήταν λογικό συνεχίστηκε. Συνεχιστές ήταν οι αδερφοί Bernoulli, Euler και Lagrange. Με τη βοήθεια του Απειροστικού Λογισμού όπως θεμελιώθηκε από σημαντικούς μαθηματικούς του 17^{ου} αιώνα η επιστήμη κατάφερε να λύσει πληθώρα προβλημάτων όπως ο υπολογισμός της τροχιάς ενός βλήματος, την πρόβλεψη των κινήσεων πλανητών ωστόσο έλειπε η αυστηρή θεμελίωση των εννοιών μέσω των οποίων επιτεύχθηκαν αυτά τα αποτελέσματα. Στα τέλη του 18^{ου} αιώνα είχε δημιουργηθεί ένας τεράστιος όγκος από τύπους με αμφισβητούμενα θεωρήματα με ασαφές πεδίο εφαρμογής. Τότε άρχισε να δημιουργείται η ανάγκη αυστηρής κριτικής. Όμως πίσω από όλα αυτά υπόβοσκε η ανάγκη της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

Μεταξύ των μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα που ασχολήθηκαν με την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού συγκαταλέγεται και ο Τσέχος μαθηματικός Bernhard Bolzano (1781 – 1848), ο οποίος προσέγγιζε με ριζοσπαστικό τρόπο τα θεμελιώδη προβλήματα των μαθηματικών. Στις πρώτες του εργασίες μελετά συστηματικά τις ιδιότητες των συναρτήσεων. Η σημαντικότερη εργασία του Bolzano πάνω στην ανάλυση είναι η «Αναλυτική Απόδειξη» του 1817, όπου έδωσε τον καταλληλότερο ορισμό της συνεχούς συνάρτησης. Επίσης ήταν ο πρώτος που όρισε την παράγωγο της f, ως ποσότητα της οποίας ο λόγος $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ προσεγγίζει, όσο κοντά θέλουμε, καθώς το *Δx* προσεγγίζει το μηδέν και συμβόλισε με $\frac{dy}{dx}$ την παράγωγο της $y=f(x)$. Και τόνιζε ότι η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ δεν ήταν ένα πηλίκο του *dy* προς το *dx*, ούτε ένα πηλίκο από μηδενικά, ούτε ένας λόγος από εξαφανιζόμενες ποσότητες, αλλά ένας αριθμός που προσεγγίζεται από αυτόν το λόγο.

Ένας από τους πρωτεργάτες για την αυστηρή θεμελίωση των εννοιών του Απειροστικού Λογισμού ήταν ο Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), ο οποίος το 1821 στο έργο του «Cours d' Analyse» έθεσε τις βάσεις για την αυστηρή θεμελίωση. Όμως το μίγμα της αλγεβρικής διατύπωσης και της γεωμετρικής αιτιολόγησης δεν παρείχε πλήρη κατανόηση των αποτελεσμάτων της θεωρίας συναρτήσεων. Έτσι οι Dedekind και Weirstrass έθεσαν τον ίδιο στόχο με τον Bolzano, ο οποίος είχε καταλάβει πως ο Απειροστικός Λογισμός είχε υπερβεί το γεωμετρικό του ξεκίνημα και έπρεπε να συστηματοποιηθεί σε μια ενοποιημένη βάση μέσω της άλγεβρας. Οι Dedekind και Weirstrass υποστήριξαν πως κεντρικός στόχος του αναλύστα που επιθυμούσε την απόδειξη θεωρημάτων ύπαρξης ορίων ήταν στις αρχές της αριθμητικής και ότι υπήρχαν πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούσαν τις συνθήκες που καθορίζονταν στα θεωρήματα του Cauchy.

Έτσι στα τέλη του 19ου αιώνα ο Πυθαγόρας «δικαιώθηκε» με την αριθμοποίηση του Απειροστικού Λογισμού, αλλά όπως ήταν αναμενόμενο δημιουργήθηκαν αρκετές αντιδράσεις. Οι οποίες με την εισαγωγή των ε – δ διαδικασιών έπαψαν να υπάρχουν καθώς οι βασικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού διατυπώθηκαν με μεγαλύτερη προσοχή και σαφήνεια, βασισμένες στους πραγματικούς αριθμούς και τις θεμελιώδεις πράξεις που τους διέπουν.

Κεφάλαιο 3^{ο}

Διαφορικός Λογισμός και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Σύμφωνα με το υπάρχον εκπαιδευτικό σύστημα της χώρας μας, η πρώτη επαφή του μαθητή με τον Διαφορικό Λογισμό γίνεται στην τελευταία τάξη του Γενικού Λυκείου (ΓΕΛ) και συγκεκριμένα μόνο για τους μαθητές που έχουν επιλέξει τις ομάδες προσανατολισμού Θετικών Σπουδών ή Οικονομίας και Πληροφορικής, όπου στις προαναφερθείσες κατευθύνσεις τα Μαθηματικά είναι ένα από τα κύρια μαθήματα, στο οποίο εξετάζονται είτε σε τοπικό επίπεδο για τη λήψη του απολυτηρίου είτε σε πανελλήνιο επίπεδο για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Σε αντίθεση με τα Επαγγελματικά Λύκεια (ΕΠΑΛ) της χώρας όπου τα μαθηματικά είναι προαπαιτούμενο για όλους τους μαθητές. Βέβαια δεν έχουν την ίδια διδακτέα ύλη, αλλά ούτε και το ίδιο εγχειρίδιο.

Για τα μεν ΓΕΛ το σχολικό βιβλίο είναι «Μαθηματικά Β΄ μέρος» των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Μέτη Σ., Μπρουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ., Πολύζου Γ., το οποίο περιέχει τρία κεφάλαια, το 1^{ο} κεφάλαιο αναφέρεται στο Όριο – συνέχεια συνάρτησης, το 2^{ο} κεφάλαιο στον Διαφορικό Λογισμό και το 3^{ο} κεφάλαιο στον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για τα δε ΕΠΑΛ το σχολικό βιβλίο είναι «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» των Αδαμόπουλου Λ., Δαμιανού Χ., Σβέρκου Α., το οποίο περιέχει τρία κεφάλαια, το 1^{ο} αναφέρεται στον Διαφορικό Λογισμό, το 2^{ο} στη Στατιστική και το 3^{ο} στις Πιθανότητες. Επειδή η διδακτική παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε τμήμα προσανατολισμού Γενικού Λυκείου θα αναφέρουμε μόνο την διδακτέα – εξεταστέα ύλη και τις οδηγίες διδασκαλίας από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (ΙΕΠ) για τα Γενικά Λύκεια.

Παρακάτω παραθέτουμε την διδακτέα – εξεταστέα ύλη του σχολικού έτους 2021 – 2022 όπως αυτή ορίστηκε από το Φύλλο Εφημερίδας της Κυβέρνησης (ΦΕΚ ΤΕΥΧΟΣ Β΄ 3137/19.07.2021) και τις οδηγίες διδασκαλίας από το ΙΕΠ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΒΙΒΛΙΟ 2021 – 2022
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - Β΄ ΜΕΡΟΣ των Ανδρεαδάκη Σ., Κατσαργύρη Β., Μέτη Σ., Μπρουχούτα Κ., Παπασταυρίδη Σ., Πολύζου Γ.

Εικόνα 6. Πίνακας με τους συγγραφείς του σχολικού εγχειριδίου

Ύλη
Από το βιβλίο: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Β΄ ΜΕΡΟΣ
Κεφάλαιο 1: Όριο - Συνέχεια συνάρτησης Παρ. 1.1 Πραγματικοί αριθμοί Παρ. 1.2 Συναρτήσεις Παρ. 1.3 Μονότονες συναρτήσεις - Αντίστροφη συνάρτηση Παρ. 1.4 Όριο συνάρτησης στο x0 ∈R Παρ. 1.5 Ιδιότητες των ορίων, χωρίς τις αποδείξεις της υποπαραγράφου "Τριγωνομετρικά όρια" Παρ. 1.6 Μη πεπερασμένο όριο στο x_0 ∈R Παρ. 1.7 Όρια συνάρτησης στο άπειρο Παρ. 1.8 Συνέχεια συνάρτησης
Κεφάλαιο 2: Διαφορικός Λογισμός Παρ. 2.1 Η έννοια της παραγώγου, χωρίς την υποπαράγραφο "Κατακόρυφη εφαπτομένη" Παρ. 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις - Παράγωγος συνάρτηση, χωρίς τις αποδείξεις των τύπων (ημx)′ = συνx και (συνx)′ = −ημx

Παρ. 2.3 Κανόνες παραγώγισης, χωρίς την απόδειξη του θεωρήματος που αναφέρεται στην παράγωγο γινομένου συναρτήσεων Παρ. 2.4 Ρυθμός μεταβολής Παρ. 2.5 Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού Παρ. 2.6 Συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής Παρ. 2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης, χωρίς το τελευταίο θεώρημα (κριτήριο της 2ης παραγώγου) Παρ. 2.8 Κυρτότητα - Σημεία καμπής συνάρτησης (θα μελετηθούν μόνο οι συναρτήσεις που είναι δύο, τουλάχιστον, φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους) Παρ. 2.9 Ασύμπτωτες - Κανόνες De L' Hospital Παρ. 2.10 Μελέτη και χάραξη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης
Κεφάλαιο 3: Ολοκληρωτικός Λογισμός Παρ. 3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα (μόνο η υποπαράγραφος "Αρχική συνάρτηση" που θα συνοδεύεται από πίνακα παραγουσών συναρτήσεων ο οποίος θα περιλαμβάνεται στις διδακτικές οδηγίες) Παρ. 3.4 Ορισμένο ολοκλήρωμα Παρ. 3.5 Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ **<u>Υπόδειξη - οδηγία:</u>** Η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Για τον λόγο αυτό <u>δεν θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται στη συνάρτηση</u> $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ <u>και γενικότερα στη συνάρτηση</u> $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt$ Παρ. 3.7 Εμβαδόν επιπέδου χωρίου, χωρίς την εφαρμογή 3

Εικόνα 7. Πίνακας με την εξεταστέα ύλη

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο <u>**δεν**</u> διδάσκονται και <u>**δεν**</u> εξετάζονται.
- Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων <u>**δεν**</u> εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, δύνανται, ωστόσο, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.
- <u>**Εξαιρούνται**</u> από την εξεταστέα ύλη: **α)** οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του e και του 10 και **β)** οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

<u>Οδηγίες Διδασκαλίας</u>

Για το σχολικό έτος 2021 – 2022 η διδακτέα – εξεταστέα ύλη των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης περιλαμβάνει την θεματική της Ανάλυσης της οποίας η διδασκαλία καταλαμβάνει 6 ώρες την εβδομάδα.

Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίας επιτρέπουν την υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα: α) την σύνδεση της ανάλυσης με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα. β) την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά ανεξάρτητα από τη μέχρι τώρα μαθησιακή πορεία τους. Η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρει μια επιπλέον νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Για την εμπλοκή των μαθητών/τριών σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης και επίλυσης προβλήματος κρίνεται σκόπιμη καταρχάς η αξιοποίηση προβλημάτων από το υπάρχον διδακτικό υλικό (διδακτικό βιβλίο, υλικό και βιβλία αναρτημένα στο http://ebooks.edu.gr). Έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων να παρέχεται επαρκής χρόνος στους μαθητές/τριες και να αντιμετωπίζονται τυχόν γνωστικές ελλείψεις.

Η αντιμετώπιση γνωστικών ελλείψεων ορισμένων μαθητών/τριών μπορεί να γίνεται με την ανάδειξη ενδομαθηματικών συνδέσεων εννοιών και διαδικασιών καθώς και την ανάκληση προηγούμενων γνώσεων. Αυτά αποτελούν σημαντικές ευκαιρίες αφενός επανασύνδεσης μαθητών που κινδυνεύουν να χάσουν την επαφή με τα μαθηματικά και αφετέρου βαθύτερης κατανόησης για όλους. Τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται κατά την κρίση του διδάσκοντα, είτε ως θεωρητική συζήτηση (στις αρχικές παραγράφους συναρτήσεων, μονοτονίας, ακροτάτων κ.α.), είτε ως παρεμβολή των αναγκαίων θεωρητικών στοιχείων για μια άσκηση.

Ειδικά για την αντιμετώπιση ελλείψεων που οφείλονται στην αντικατάσταση της δια ζώσης αλληλεπίδρασης στην τάξη με την εξ αποστάσεως διδασκαλία λόγω πανδημίας τα σχολικά έτη 2019-20 και 2020–21, προτείνεται να δοθεί χρόνος για την αναγκαία συζήτηση κατά τη ροή της διδασκαλίας (πχ. στις παραγράφους 1.1, 1.2 και 1.3, και όποτε άλλοτε χρειαστεί). Μερικά ενδεικτικά σημεία που είναι πιθανόν να χρειάζονται μεγαλύτερη προσοχή είναι η δημιουργία τύπου συνάρτησης που αποτελεί μαθηματικό μοντέλο κάποιου προβλήματος ή ρεαλιστικής κατάστασης, τα χαρακτηριστικά (μονοτονία, ακρότατα, γραφικές παραστάσεις) των τριγωνομετρικών, εκθετικών, λογαριθμικών και απλών πολυωνυμικών συναρτήσεων, και οι εξισώσεις και ανισώσεις (ειδικότερα απλές μορφές εκθετικών και λογαριθμικών) σε σύνδεση με την αντίστοιχη συνάρτηση. Άλλες γνωστικές ανάγκες των μαθητών θα πρέπει να αντιμετωπίζονται όπου εμφανίζονται.

Τώρα όσον αφορά την παρούσα διδακτική παρέμβαση παραθέτουμε μόνο τα σημεία των οδηγιών του ΙΕΠ που έχουν άμεση σχέση με το ερευνητικό κομμάτι της εργασίας.

Κεφάλαιο 2ο

§2.1

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον μαθητή να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους μαθητές γραφικά:

i. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο O, ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\begin{cases} x^2, x \le 0 \\ 0, x>0 \end{cases}$ στο σημείο O, ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

§2.2

Χρειάζεται να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους μαθητές των ρόλων του h και του x στην έκφραση $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ που χρησιμοποιείται στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

§2.7

Τα προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων αποτελούν μία από τις σημαντικές εφαρμογές του διαφορικού λογισμού που δικαιολογούν και αποδίδουν αξία στη διδασκαλία του. Συγχρόνως, συγκεντρώνουν στοιχεία από τη διδασκαλία προηγούμενων ενοτήτων και έτσι αποτελούν μια καλή ευκαιρία επαναλήψεων και συμπληρώσεων. Κρίνεται σκόπιμο να συζητηθούν κατά το δυνατόν περισσότερα προβλήματα. Ειδικά κατά το σχολικό έτος 2021 – 2022 προτείνεται να αφιερωθεί επιπλέον χρόνος σε επαναλήψεις και συμπληρώσεις που χρειάζεται να γίνουν κατά την κρίση του εκπαιδευτικού. Μετά την εφαρμογή 2 να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 i) α) της Β΄ Ομάδας. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Κεφάλαιο 4ο

Παρανοήσεις στα Μαθηματικά

4.1 Γενικές δυσκολίες – παρανοήσεις στα Μαθηματικά

Κατά τη διδακτική διαδικασία οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, δηλαδή τα λάθη και οι παρανοήσεις τους σύμφωνα με τον Brousseau, οφείλονται σε τρεις τύπους «εμποδίων». Πρώτο εμπόδιο είναι το επιστημολογικό, το οποίο έχει να κάνει με την εξέλιξη της ίδιας της επιστήμης. Δεύτερο εμπόδιο είναι το ψυχολογικό – γενετικό, το οποίο σχετίζεται με τον ίδιο τον μαθητή και τρίτο εμπόδιο είναι ο τρόπος διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τους Tall και Vinner, η έλλειψη απεικονίσεων μπορεί να χαρακτηριστεί ακόμη ένα εμπόδιο, όπως αναφέρουν οι Areaya και Sidelil στο άρθρο τους (2012) με τον όρο «έννοια της εικόνας». Δηλαδή την κατασκευαστική γνώση που έχει κατακτήσει ένα άτομο στο πέρασμα του χρόνου, μέσω των ερεθισμάτων και των εμπειριών του. Με αυτόν τον τρόπο κάθε άτομο δημιουργεί στο μυαλό του μια εικόνα για τον εκάστοτε ορισμό, την οποία κατανοεί και μπορεί να τη χρησιμοποιήσει κατά την επίλυση μιας άσκησης ή κατά τη διατύπωση ενός ορισμού. Έτσι αν η εύρεση μιας εικόνας είναι μια δύσκολη διαδικασία, τότε δημιουργούνται παρανοήσεις αν το άτομο δεν μπορεί να ακολουθήσει άλλη φιλοσοφία για να αφομοιώσει τον ορισμό.

Εδώ αξίζει να αναφέρουμε πως η πλειοψηφία των μαθητών όλων των τάξεων αντιμετωπίζει ένα μεγάλο πρόβλημα όταν τους ζητηθεί να συσχετίσουν την αλγεβρική με τη γραφική επίλυση μιας άσκησης. Και όπως είναι φυσικό το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι όταν τους ζητείται η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Ο Polya ήταν Ούγγρος μαθηματικός και ήταν ο πρώτος που διατύπωσε τις στρατηγικές επίλυσης ενός προβλήματος, τις λεγόμενες «Ευρετικές», όπου μέσα σε αυτές βρίσκονται οι οπτικές αναπαραστάσεις όπως είπαμε και προηγουμένως, συλλογισμοί απλούστευσης κ.α.

4.2 Παρανοήσεις στον Διαφορικό Λογισμό

Οι μαθητές προκειμένου να πετύχουν τον στόχο τους, μαθαίνουν να λύνουν ασκήσεις χωρίζοντας την ύλη σε κατηγορίες, όπου χρησιμοποιούν διάφορες μεθόδους. Αυτό τους οδηγεί σε διάφορες παρερμηνείες. Σύμφωνα με τον Siyepu (2013) η μελέτη του Λογισμού με τις θεμελιώδεις έννοιες του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος απαιτούν μια ικανότητα απ' τον μαθητή να κατανοήσει τις αλγεβρικές μεταβλητές ως συναρτήσεις που λειτουργούν ως ποικίλες ποσότητες. Ακόμη αναφέρει σύμφωνα με τον Tarmizi πως οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες ως προς την κατανόηση βασικών εννοιών όπως η συνέχεια, η διαφόριση, η ολοκλήρωση. Τέλος αποδεικνύεται πως τα περισσότερα λάθη και οι πιο πολλές παρερμηνείες οφείλονται στα κενά που υπάρχουν στη βασική άλγεβρα και στην έλλειψη εννοιολογικών βάσεων (Luneta & Makonye 2010).

Έχοντας ως βάση τις ήδη υπάρχουσες έρευνες και τις εμπειρίες των μαθηματικών που ασχολούνται με την εκπαίδευση, είναι φανερό ότι η λανθάνουσα εννοιολογική βάση προέρχεται από τις παρανοήσεις στην έννοια του ορίου, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν παρουσιάζονται και άλλα εμπόδια. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές δυσκολεύονται στις συναρτήσεις έχοντας περιορισμένες εικόνες στο μυαλό τους, δεν κατανοούν τον συμβολισμό του Leibniz, δεν μπορούν να διαχειριστούν ποσοδείκτες (Tall, 1993) και το πιο σημαντικό κατά την άποψή μου είναι ότι διαθέτουν περιορισμένο χρόνο, για να αφομοιώσουν τις έννοιες του Λογισμού.

Τώρα όσον αφορά την παράγωγο, η πλειοψηφία των μαθητών δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι η παράγωγος σε ένα σημείο είναι αριθμός, από την παράγωγο συνάρτηση ως συνάρτηση. Επίσης παρατηρείται πως έχουν δυσκολία να ξεχωρίσουν ότι η παράγωγος σε ένα σημείο μιας καμπύλης είναι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό (Park, 2013). Σε γενικές γραμμές θεωρούν πως η τιμή της παραγώγου ή η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η συνάρτηση της παραγώγου ή ότι η παράγωγος σε ένα σημείο είναι η εξίσωση της εφαπτομένης (Ubuz, 2001).

Κεφάλαιο 5ο

Ιστορική προσέγγιση

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται δυο εφαρμογές του σχολικού βιβλίου, οι οποίες βρίσκονται στις παραγράφους 2.3 «Κανόνες παραγώγισης» και 2.7 «Τοπικά ακρότατα συνάρτησης». Οι παρακάτω ασκήσεις επιλέχθηκαν, διότι παρουσιάζουν αρκετές παρανοήσεις οι μαθητές, όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο έχοντας πάντα ως βάση τη διεθνή βιβλιογραφία.

<u>Εφαρμογή 1η</u>

9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^3-3x+5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+1$,

ii) κάθετη προς την ευθεία $y=-x$.

Η παραπάνω άσκηση βρίσκεται στην Α΄ ομάδα του σχολικού βιβλίου, επομένως θεωρείται άσκηση μέτριας δυσκολίας. Ωστόσο παρατηρούνται δυσκολίες, οι οποίες βασίζονται τόσο στην παράγωγο σε σημείο όσο και στη γνώση βασικής άλγεβρας.

Μια πρόταση, η οποία συνδυάζει την Ιστορία των Μαθηματικών με τη σύγχρονη διδασκαλία είναι η εύρεση εφαπτομένων με τη μέθοδο του Fermat. Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου του Fermat προτείνεται στον αναγνώστη να ξανά διαβάσει την ενότητα 2.4.2, όπου γίνεται αναφορά στις μεθόδους που ανέπτυξε ο Fermat.

Ακολουθώντας τα χνάρια του Fermat για την άσκηση του σχολικού βιβλίου έχουμε:

Έστω *A(a, f(a))* ένα σημείο της καμπύλης και *A΄(a + E, f(a + E))* ένα γειτονικό του σημείο. Αφού το *A΄* βρίσκεται πάρα πολύ κοντά στο *A,* το *E* θα είναι πολύ μικρό και η εφαπτομένη στο *A* θα συμπίπτει σχεδόν με την τέμνουσα *AA΄*. Σύμφωνα με τη μέθοδο του Fermat, η κλίση της εφαπτομένης στο *A* είναι:

$$\lambda=\varepsilon\varphi\omega=\frac{f\left(a\right)}{c}=\frac{f\left(a+E\right)-f\left(a\right)}{E}=\frac{\left(a+E\right)^3-3\left(a+E\right)+\cancel{5}-a^3+3a-\cancel{5}}{E}=$$

$$=\frac{a^3+3a^2E+3aE^2+E^3-3a-3E-a^3+3a}{E}=\frac{E\left(3a^2+3aE+E^2-3\right)}{E}=3a^2+3aE+E^2-3$$

Θέτοντας *E=0* έχουμε $\lambda=3a^2-3$.

Όμως στο ερώτημα (i) μας ζητάει η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=9x+1$. Από τη συνθήκη παραλληλίας πρέπει οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών να είναι ίσοι, δηλαδή $\lambda=9$. Επομένως $3a^2-3=9 \Leftrightarrow 3a^2=12 \Leftrightarrow a^2=4 \Leftrightarrow a=\pm 2$. Άρα το ζητούμενο σημείο *A* θα έχει συντεταγμένες (2, 7) ή (– 2, 3).

Για το δεύτερο ερώτημα εργαζόμαστε αναλόγως με τη διαφορά ότι τώρα ζητάει να βρούμε τα σημεία της καμπύλης στα οποία να είναι κάθετη η εφαπτομένη στην ευθεία $y=-x$, άρα εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη καθετότητας για την εύρεση των συντεταγμένων του σημείου. Δηλαδή $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1$ και μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι το σημείο Α έχει συντεταγμένες $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{-10\sqrt{3}+45}{9}\right)$ ή $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{10\sqrt{3}+45}{9}\right)$.

<u>Εφαρμογή 2η</u>

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

iii) $h(x)=2x^3-3x^2-1$

Τώρα όσον αφορά την εφαρμογή που επιλέχθηκε, δουλεύουμε ως εξής:

Υποθέτουμε ότι x είναι η τετμημένη που μεγιστοποιεί την *f(x)*. ένα γειτονικό σημείο θα έχει τετμημένη x + E και τεταγμένη *f(x + E),* η οποία θα είναι σχεδόν ίση με την *f(x).*

Υπολογίζουμε $f(x+E)=2(x+E)^3-3(x+E)^2-1$ και στη συνέχεια βρίσκουμε τη διαφορά $f(x+E)-f(x)=E\left(6x^2+6xE+2E^2-6x-3E\right)$. Έπειτα διαιρούμε με Ε και έχουμε: $\frac{f(x+E)-f(x)}{\mathrm{E}}=6x^2+6xE+2E^2-6x-3E$.

Όμως $f(x+E)-f(x)\approx 0$.

Άρα $6x^2+6xE+2E^2-6x-3E=0$.

Θέτοντας Ε = 0 έχουμε

$6x^2-6x=0 \Leftrightarrow 6x\left(x-1\right)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$.

Οπότε οι θέσεις των ακροτάτων της συνάρτησης είναι η $x = 0$ ή $x = 1$.

Κεφάλαιο 6ο

Μεθοδολογία της Έρευνας

6.1 Χρησιμότητα της έρευνας

Η εισαγωγή μιας έννοιας απ' ευθείας μέσω του ορισμού της, σύμφωνα με την ιστορία δεν είναι ό,τι καλύτερο, αν σκεφτούμε ότι έννοιες όπως το όριο, η παράγωγος και άλλες, οι μαθηματικοί τα χρησιμοποιούσαν με διαισθητικό τρόπο για πολλά χρόνια έχοντας ως βάση τη γεωμετρία, την κίνηση και την ταχύτητα. Αυτό προκύπτει και από την έρευνα (Zandieh, 1997, 2000), δηλαδή ότι ο τυπικός ορισμός δεν είναι το σημείο αναφοράς για την κατανόηση. Ο ορισμός μιας έννοιας πρέπει να δίνεται στον μαθητή όταν είναι ήδη κατανοητή, αφού προηγηθούν αρκετά παραδείγματα σε διαφορετικά πλαίσια. Τότε μπορούμε να ορίσουμε, να γενικεύσουμε και να αποδείξουμε, διότι ο ορισμός μιας έννοιας είναι μια πρόταση ακριβής και με συμβολική μορφή.

Σύμφωνα με την Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME) η χρήση πραγματικών πλαισίων κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών δείχνοντας ότι τα μαθηματικά είναι ένα σπουδαίο εργαλείο για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινότητας και όχι μια στείρα γνώση άσχετη με τον πραγματικό κόσμο (Van den Panhuizen, 2005). Σ' αυτό το σημείο αξίζει να τονίσουμε ότι η πλαισίωση των παραδειγμάτων με χρήση ιστορικών πηγών ή αναφορών γενικότερα βοηθά στην ανάδειξη του τρόπου ανάπτυξης κάποιων εννοιών και συμβάλει στην διαισθητική προσέγγιση μιας καθοδηγούμενης επαν – εφεύρεσης (de Lange, 1987). Σύμφωνα με την Sfard (1994) η εργασία των μαθητών, πριν την τυποποίηση, σε ένα άτυπο επίπεδο βοηθάει στην αντικειμενοποίηση των εννοιών. Αυτό εξάλλου είναι και μια από τις βασικές διδακτικές αρχές της RME μέχρι να αντιμετωπίσουν φορμαλιστικά κάποιο μαθηματικό θέμα.

Θα ήταν παράληψη να μην αναφέρουμε, τι είναι εργασία στο άτυπο επίπεδο. Όπως αναφέρει η Sfard είναι ο «απτός» κόσμος, δηλαδή ο κόσμος που είναι κοντά στην εμπειρία των μαθητών. Η θέση αυτή έρχεται σε απόλυτη σχεδόν ταύτιση με τις ιδέες του Freundenthal σχετικά με την αποτελεσματικότητα των προβλημάτων πλαισίου, δηλαδή τα προβλήματα που αναφέρονται σε μια βιωματική κατάσταση στον μαθητή, η οποία δίνει την ευκαιρία να προκύψουν τυπικά μαθηματικά. (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Μελετώντας ιστορικά τον Διαφορικό Λογισμό βλέπουμε τα πραγματικά προβλήματα που οδήγησαν στην ανάπτυξη του καθώς και τη δυσκολία των εννοιών. Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι μαθηματικές έννοιες, στα πρώτα βήματα του Διαφορικού Λογισμού έχουν τις ρίζες τους στον πραγματικό κόσμο. Το πρώτο βήμα για την κατασκευή της παραγώγου αποτέλεσε η εφαπτομένη ευθεία σε καμπύλη. Βέβαια ο Fermat εμπνεύστηκε από τη μέθοδό του για την εύρεση των ακροτάτων, τη μέθοδό του εύρεσης της εφαπτομένης καμπύλης (Σκουφή & Αυγερινός 2010).

Στόχος λοιπόν της παρούσας ιστορικοδιδακτικής παρέμβασης είναι να οδηγήσει τον μαθητή στην επανεφεύρεση και στη δημιουργία κριτικής σκέψης καθώς και τον «Δάσκαλο», για να ξεφύγει από την τυποποιημένη και τυπολατρική μέθοδο διδασκαλίας.

6.2 Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

Σύμφωνα με τον Freudenthal τα μαθηματικά είναι ανθρώπινο δημιούργημα και η διδασκαλία τους πρέπει να βασίζεται στον πραγματικό κόσμο, έτσι η βάση της RME αναπτύχθηκε σε τρεις βασικούς πυλώνες, τη θεωρία των επιπέδων Van Hiele, τη διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal και την προοδευτική μαθηματικοποίηση κατά Wiskobas.

Τα επίπεδα Van Hiele αποτελούνται από πέντε επίπεδα και πέντε φάσεις περάσματος, πρώτο επίπεδο είναι η πληροφόρηση, δεύτερο στάδιο είναι ο καθοδηγούμενος προσανατολισμός, τρίτο επίπεδο η επεξήγηση, τέταρτο επίπεδο ο ελεύθερος προσανατολισμός και τέλος η ολοκλήρωση.

Ποιος είναι ο στόχος στην καθοδηγούμενη επαν – εφεύρεση;

Στο αρχικό στάδιο οι μαθητές δημιουργούν μοντέλα της προβληματικής κατάστασης και δίνουν λύσεις βασιζόμενοι στη διαίσθησή τους και στα άτυπα μαθηματικά. Επόμενος στόχος είναι να βιώσουν οι μαθητές παρόμοιες καταστάσεις με αυτές που δημιούργησαν την ανάγκη να δημιουργηθεί εξ αρχής η έννοια μέσα από έλεγχο υποθέσεων, ανταλλαγή απόψεων, πειραματισμούς κ.α.

Η χρησιμοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών για άντληση ιδεών και για επιλογή δραστηριοτήτων και τέλος να φτάσουν στη μαθηματικοποίηση έπειτα από την επεξεργασία μαθηματικών ερωτημάτων.

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση έχει ως οδηγό τη μέθοδο του Fermat για την εύρεση εφαπτομένων καθώς και ακροτάτων τιμών και έχεις ως στόχο να απαντήσει στα ερευνητικά ερωτήματα, δηλαδή η ιστορική προσέγγιση με τον τρόπο που έγινε βοήθησε στην κατανόηση εννοιών και στο διαχωρισμό τους; Όπως η έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση, από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας; Η Ιστορία των Μαθηματικών ήταν βοηθητική κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και της επίλυσης προβλημάτων;

6.3 Σκοπός της έρευνας

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ο Διαφορικός Λογισμός διδάσκεται και εξετάζεται στην τελευταία τάξης της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, για την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτό έχει ως συνέπεια για την επίτευξη του στόχου να γίνεται τυποποιημένη εκμάθηση εννοιών μέσω των «συνταγών», γεγονός που γεννά παρανοήσεις, διότι οι μαθητές φτάνουν σε ένα σημείο να αντιμετωπίζουν και να απαντούν σε ζητήματα χωρίς να έχουν κατανοήσει τι είναι αυτό που κάνουν και γιατί το κάνουν και έτσι εύλογα γεννάται η κλασική ατάκα των μαθητών «ωραία όλα αυτά, αλλά που μου χρησιμεύουν;».

Με αφορμή την παραπάνω φράση, που έχει τεθεί σε ένα μεγάλο ποσοστό στους Μαθηματικούς της χώρας και όχι μόνο, για να εξαλειφθεί αυτή η ασάφεια τίθεται το εξής ερώτημα, ενδεχομένως και φιλοσοφικού χαρακτήρα, μπορεί η Ιστορία των Μαθηματικών να γίνει καταλύτης για την εμπέδωση εννοιών από τους μαθητές; Δηλαδή η Ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα όπλο στη φαρέτρα του εκπαιδευτικού, για να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν έννοιες καινούριες σ' αυτούς; Η μελέτη και ο σχολιασμός δραστηριοτήτων με ιστορική προέλευση θα μπορούσε να αντικαταστήσει τις «συνταγές» με στόχο οι μαθητές να καταλάβουν τι κάνουν και για ποιο λόγο;

6.4 Συμμετέχοντες στην έρευνα

Η παρούσα διδακτική παρέμβαση έγινε κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2021 – 2022, το μήνα Απρίλιο σε 18 μαθητές της Γ΄ Λυκείου, με ομάδα προσανατολισμού Οικονομίας και Πληροφορικής, οι οποίοι έχουν ως βασικό μάθημα τα Μαθηματικά και ήμουν ο διδάσκοντάς τους. Στο πλαίσιο των επαναλήψεων, αφού είχαμε ολοκληρώσει την ύλη. Χρειάστηκε μία εβδομάδα μαθημάτων, δηλαδή 6 διδακτικές ώρες για να ολοκληρωθεί η διαδικασία, η οποία περιγράφεται παρακάτω. Στο πλαίσιο του ωρολόγιου προγράμματος των μαθητών συνολικά έγιναν 3 διδακτικές ώρες μάθημα, 2 διδακτικές ώρες γραπτή δοκιμασία και 1 διδακτική ώρα για την απάντηση του ερωτηματολογίου σχετικά με την έρευνα.

Το επίπεδο των μαθητών δεν ήταν ομοιογενές και ήταν κάτω του μετρίου κάτι που ήταν αναμενόμενο από τις συνθήκες που επικρατούν στις σχολικές δομές τα δύο τελευταία χρόνια της πανδημίας καθώς και από τις υπάρχουσες αναφορές στη βιβλιογραφία, που έχουν σχέση με τις παρανοήσεις των μαθητών.

Η επίδοση των μαθητών βάσει της απόδοσής τους στα pre test, post test καθώς και από τη συμμετοχή τους κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ήταν κάτω του μετρίου πράγμα που φαίνεται από τα αποτελέσματα της έρευνας, τα οποία αναλύονται σε επόμενο κεφάλαιο. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι με βάση την παρούσα έρευνα δεν μπορούμε να εξάγουμε αντικειμενικά συμπεράσματα αφού το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό, διότι παίζουν πολλοί παράγοντες ρόλο και σίγουρα θα ήταν λάθος κρίνοντας ένα τμήμα ενός γενικού λυκείου σε ένα ακριτικό νησί της Ελλάδος να γενικεύσουμε για όλη την επικράτεια.

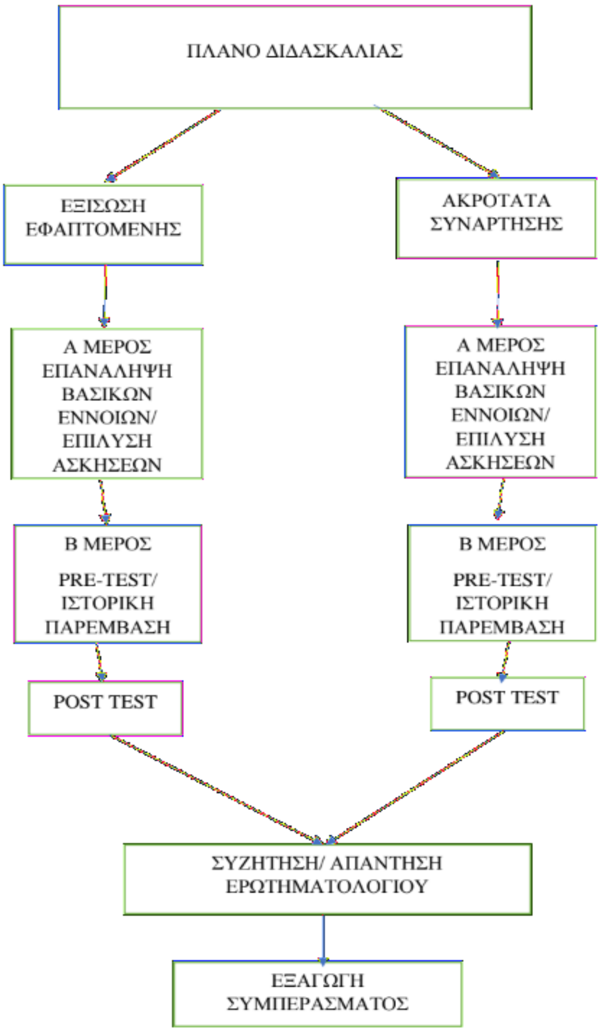
6.5 Σχεδιασμός διδακτικής παρέμβασης

Η τάξη χωρίστηκε σε έξι τριάδες, όπου σε κάθε μία από αυτές υπήρχε τουλάχιστον ένας καλός μαθητής, για να μπορούν να συνεργαστούν ως ομάδα κατά τη διάρκεια του μαθήματος, αλλά τις δοκιμασίες τις έκαναν μόνοι τους.

Η διδακτική ώρα χωρίστηκε σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος γινόταν μια μικρή επανάληψη κάποιων βασικών εννοιών απαραίτητο για την εκάστοτε ενότητα καθώς και επίλυση μιας σχετικής άσκησης στον πίνακα από εμένα, με τη συμμετοχή των παιδιών, με τις υπάρχουσες γνώσεις και τεχνικές. Στο δεύτερο μέρος, μέσω του βιντεοπροβολέα γινόταν η αντίστοιχη ιστορική προσέγγιση με χρήση του Power Point και ακολουθούσε συζήτηση στην τάξη.

Τέλος την επόμενη ημέρα οι μαθητές ως Post Test έλυσαν μια παρόμοια άσκηση έχοντας και το ιστορικό υπόβαθρο.

Η διαδικασία ήταν ίδια για όλη τη βδομάδα εκτός από την τελευταία μέρα, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν ένα ερωτηματολόγιο, για να έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα στα ερευνητικά μας ερωτήματα.



Εικόνα 8. Πλάνο διδασκαλίας

1η παρέμβαση: Άσκηση με εξίσωση εφαπτομένης

1η ημέρα

Α΄ μέρος:

Με τη συμμετοχή των μαθητών λύθηκε από εμένα η παρακάτω άσκηση από το βιβλίο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ1 των Χ. Στεργίου – Χ. Νάκη, εκδόσεις Σαββάλας, Ιούνιος 2015.

16.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+11$. *Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της* C_f *η οποία:*

α) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x,

β) είναι παράλληλη στην ευθεία $y=4x+2004$,

γ) είναι κάθετη στην ευθεία $x+8y+1=0$,

δ) διέρχεται από το σημείο Α (6, – 2).

Β΄ μέρος:

Δόθηκε η άσκηση 9 του σχολικού βιβλίου Μαθηματικά Β΄ μέρος των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Μέτη, Μπρουχούτα Παπασταυρίδη, Πολύζου, η οποία βρίσκεται στη σελίδα 121 και στην παράγραφο 2.3.

9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+5$ *στα οποία η εφαπτομένη είναι:*

i) παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+1$,

ii) κάθετη προς την ευθεία $y=-x$.

Έγινε η διδασκαλία με τη βοήθεια της αντίστοιχης Ιστορικής Δραστηριότητας, δηλαδή με την κατασκευή εφαπτομένων σε καμπύλη σύμφωνα με τον Fermat, η οποία παρουσιάστηκε με το πρόγραμμα Power Point.

2η ημέρα

Τη 2η μέρα τους δόθηκε η άσκηση 10 του σχολικού βιβλίου, η οποία βρίσκεται στη σελίδα 121 και στην παράγραφο 2.3.

10. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ *η οποία άγεται από το σημείο Α(0, –1).*

2η παρέμβαση: Άσκηση με τοπικά ακρότατα

3η ημέρα

Α΄ μέρος:

Με την ενεργή συμμετοχή των μαθητών λύθηκε από εμένα η παρακάτω άσκηση από το βιβλίο ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ2 των Χ. Στεργίου – Χ. Νάκη, εκδόσεις Σαββάλας, Δεκέμβριος 2015.

2.30 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις επόμενες συναρτήσεις:

β) $f(x)=x^3-3x$

γ) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$.

Β΄ μέρος:

Δόθηκε η άσκηση 2 του σχολικού βιβλίου Μαθηματικά Β΄ μέρος των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Μέτη, Μπρουχούτα Παπασταυρίδη, Πολύζου, η οποία βρίσκεται στη σελίδα 149 και στην παράγραφο 2.7.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

iii) $h(x)=2x^3-3x^2-1$

Έγινε η διδασκαλία με τη βοήθεια της αντίστοιχης Ιστορικής Δραστηριότητας, δηλαδή την εύρεση ακροτάτων σύμφωνα με τον Fermat, η οποία παρουσιάστηκε με το πρόγραμμα Power Point.

4η ημέρα

Τη 4η μέρα τους δόθηκε η άσκηση 2 του σχολικού βιβλίου, η οποία βρίσκεται στη σελίδα 149 και στην παράγραφο 2.7.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

ii) $g(x)=x^3-3x+2$.

6.6 Εργαλεία διδακτικής παρέμβασης

Για τη διαδικασία της διδακτικής παρέμβασης χρειάστηκαν:

- Τρία φύλλα εργασία με τις ασκήσεις που επιλέχθηκαν
    - Το πρώτο φύλλο εργασίας περιείχε ασκήσεις που λύθηκαν κατά το Α΄ μέρος με την καθοδήγησή μου.
    - Το δεύτερο φύλλο εργασία περιείχε ασκήσεις που δόθηκαν ως Pre Test, από το σχολικό βιβλίο.
    - Το τρίτο φύλλο εργασίας περιείχε ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο, οι οποίες δόθηκαν ως Post Test και οι οποίες ήταν παρόμοιες με τα προηγούμενα φύλλα εργασίας.
- Ένας βιντεοπροβολέας και ένας φορητός ηλεκτρονικός υπολογιστής, όπου έγινε η παρουσίαση μέσω του Power Point, οι ιστορικές Δραστηριότητες στο Β΄ μέρος.
- Ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε στο τέλος της παρέμβασης για τον έλεγχο και τη στάθμιση των αποτελεσμάτων για να αξιολογήσουμε κατά πόσο βοηθήθηκαν οι μαθητές από την επαφή τους με την Ιστορία των Μαθηματικών.

Όσον αφορά τα φύλλα εργασίας, δημιουργήθηκαν έχοντας ως βάση τις παρανοήσεις – παρερμηνείες των μαθητών, δηλαδή παράγωγο σε σημείο – εξίσωση εφαπτομένης, παράγωγος συνάρτησης, εύρεση μεγίστων ελαχίστων. Γι’ αυτόν τον λόγο έγινε αναζήτηση στο σχολικό βιβλίο κατάλληλων προβλημάτων, που πραγματεύονται τις παραπάνω έννοιες. Ακόμη πρέπει να τονίσουμε πως ο κεντρικός άξονας της έρευνας ήταν το δεύτερο φύλλο εργασίας.

Έτσι το πρώτο φύλλο εργασίας είχε ως στόχο να θυμηθούν κάποια κομμάτια της ύλης και να εξοικειωθούν με τη διαδικασία της έρευνας. Το τρίτο φύλλο εργασίας είχε ως στόχο να σταθμίσει την αποδοχή της συγκεκριμένης διδακτικής παρέμβασης.

Τέλος, το τελικό ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές κατά τη λήξη της παρέμβασης δημιουργήθηκε με σκοπό να δώσει απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα που είχαν τεθεί.

6.7 Ανάλυση της διδακτικής παρέμβασης

Την πρώτη ημέρα, στο Α΄ μέρος της διδακτικής παρέμβασης, όπως είπαμε και σε προηγούμενη ενότητα έγινε μια επανάληψη βασικών εννοιών. Με αφορμή την επανάληψη οι μαθητές ρωτήθηκαν τι είναι όριο, τι είναι παράγωγος σε σημείο, τι είναι παράγωγος συνάρτηση και τι εφαπτομένη καμπύλης σε σημείο.

Στην ερώτηση τι είναι όριο, η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε ότι είναι μια τιμή που παίρνει η συνάρτηση όταν πλησιάζει σε ένα σημείο. Η απάντηση αυτή έρχεται να επιβεβαιώσει τον Tall, δηλαδή ότι η καθομιλουμένη γλώσσα συγκρούεται με την θεμελιώδη έννοια (Tall, 1993). Το ίδιο συνέβη και στην ερώτηση τι είναι εφαπτομένη, όπου απάντησαν η κλίση, χωρίς να δώσουν περεταίρω διευκρινήσεις, γεγονός που επιβεβαιώνει τα λεγόμενα του Park (2013).

Για την παράγωγο έδωσαν τον ορισμό, που έχει και το σχολικό βιβλίο στη σελίδα 95, δηλαδή ότι:

*Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0** του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

*Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0** και συμβολίζεται με **$f'(x_0)$**.*

Δηλαδή:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Στη συνέχεια ρωτήθηκαν αν γνωρίζουν τι είναι το $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$. Και εδώ η απάντηση ήταν αναμενόμενη μιας και ο παραπάνω συμβολισμός είναι του Leibniz και όπως αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα είναι μέσα στις παρερμηνείες των μαθητών. Εδώ αξίζει να αναφέρω πως ένας μαθητής μου, με ρώτησε «αυτό δεν το χρησιμοποιούμε στα ολοκληρώματα;». Με βάση λοιπόν τις απαντήσεις τους, επιβεβαιώνεται ο Klyve (2017) όπου υποστηρίζει πως όλοι οι μαθητές μαθαίνουν τον ορισμό της παραγώγου μέσω του ορίου.

Έτσι οι παρανοήσεις – παρερμηνείες που αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο έρχονται να επιβεβαιωθούν. Μετά το τέλος της συζήτησης που έγινε στην τάξη λύθηκε στον πίνακα η παρακάτω άσκηση:

16.21 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:

α) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x,

β) είναι παράλληλη στην ευθεία $y=4x+2004$,

γ) είναι κάθετη στην ευθεία $x+8y+1=0$,

δ) διέρχεται από το σημείο Α (6, – 2).

Στο Β΄ μέρος οι μαθητές απάντησαν στην άσκηση του σχολικού βιβλίου 9. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι: i) παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+1$, ii) κάθετη προς την ευθεία $y=-x$. Και στη συνέχεια μέσω του βιντεοπροβολέα ξεκίνησε η παρουσίαση της ιστορικής δραστηριότητας σύμφωνα με το πως ο Fermat κατασκεύασε εφαπτομένη καμπύλης.

Την δεύτερη ημέρα δόθηκε στους μαθητές η άσκηση 10 του σχολικού βιβλίου, στη σελίδα 121. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ η οποία άγεται από το σημείο Α(0, –1). Στην οποία τους ζητήθηκε να τη λύσουν έχοντας όμως και την ιστορική προσέγγιση στο μυαλό τους.

Την Τρίτη ημέρα, στο Α΄ μέρος της παρέμβασης με τη συμμετοχή των μαθητών, η οποία ήταν πολύ ενεργή, λύθηκε στην τάξη η άσκηση 2.30 Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις επόμενες συναρτήσεις: β) $f(x)=x^3-3x$, γ) $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$. Κατά τη διάρκεια της επίλυσης ρωτήθηκαν οι μαθητές πως θα βρουν τη μονοτονία μιας συνάρτησης, η πλειοψηφία των μαθητών απάντησε « βρίσκω την παράγωγο, τη μηδενίζω και κάνω πίνακα προσήμων ». Στην ερώτηση για ποιον λόγο; Οι μαθητές απάντησαν έτσι μάθαμε, εκτός από έναν που είπε ότι είναι μια από τις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού. Αυτό λοιπόν αποδεικνύει για άλλη μια φορά τον φορμαλιστικό τρόπο, με τον οποίο δουλεύουν οι μαθητές.

Στο Β΄ μέρος οι μαθητές απάντησαν στην άσκηση 2 του σχολικού βιβλίου που βρίσκεται στη σελίδα 149. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις: i) $f\left(x\right)=x^3-3x^2+3x+1$ και στη συνέχεια μέσω του βιντεοπροβολέα ξεκίνησε η παρουσίαση της ιστορικής δραστηριότητας σύμφωνα με το πως ο Fermat εύρισκε ακρότατα συνάρτησης.

Την τέταρτη μέρα δόθηκε στους μαθητές η άσκηση 2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις: ii) $g\left(x\right)=x^3-3x+2$, του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 149 να τη λύσουν έχοντας όμως και την ιστορική προσέγγιση στο μυαλό τους.

Την πέμπτη ημέρα έγινε σχολιασμός της παρέμβασης γενικότερα και δόθηκε στους μαθητές το ερωτηματολόγιο, το οποίο διαμορφώθηκε σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα και οι ερωτήσεις που τέθηκαν ήταν οι εξής:

1. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να αποσαφηνίσετε την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση, από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας;
2. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας;
3. Θα σας βοηθούσε να ακολουθήσετε μια ιστορική προσέγγιση κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης;

Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να απαντήσουν κυκλώνοντας μια από τις παρακάτω πιθανές απαντήσεις: Ναι, Ίσως, Όχι ή αν ήθελαν να αναπτύξουν τις σκέψεις τους σε μια μικρή παράγραφο.

Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου αναλύονται σε επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 7ο

Αποτελέσματα της Έρευνας

7.1 Ανάλυση αποτελεσμάτων που αφορά το πρόβλημα της εφαπτομένης

Στο πρόβλημα της εφαπτομένης η διδασκαλία κύλησε ομαλά, οι μαθητές γνώριζαν τον τύπο της εξίσωσης της εφαπτομένης, ήταν σε θέση να αντιληφθούν ότι εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν, δυο ευθείες παράλληλες έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης και για να είναι κάθετες οι συντελεστές διεύθυνσης πρέπει να έχουν γινόμενο ίσο με – 1. Παρουσιάστηκε πρόβλημα στο τελευταίο ερώτημα διότι κάποιοι μπερδεύτηκαν και θεώρησαν το σημείο Α ως σημείο επαφής, ενώ κάποιοι άλλοι χάθηκαν στις πράξεις λόγω των κενών που έχουν στη βασική άλγεβρα.

Όταν τους ζητήθηκε να λύσουν μόνοι τους την άσκηση 9 του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 121, παράγραφος 2.3 δυσκολεύτηκαν στις πράξεις οι περισσότεροι. Πιο συγκεκριμένα τέσσερις από τους δεκαοκτώ έλυσαν την άσκηση σωστά, έξι στους δεκαοκτώ έκαναν λάθος στις πράξεις και οκτώ από τους δεκαοκτώ είχαν τελείως λάθος σκέψη. Σκόπιμα παραθέτω ορισμένες από τις απαντήσεις των μαθητών, που είχαν τελείως λάθος σκέψη, διότι σ’ αυτές εμφανίζονται και επιβεβαιώνονται το μεγαλύτερο μέρος των παρανοήσεων.

<u>Ο μαθητής Α έγραψε:</u>

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής.

Η εξίσωση εφαπτομένης δίνεται απ’ τον τύπο $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Για να είναι παράλληλες πρέπει $f'(x) = f'(x_0)$.

Το ίδιο έκανε και στο δεύτερο ερώτημα, δηλαδή απάντησε πως για να είναι κάθετες πρέπει $f'(x)\cdot f'(x_0) = -1$.

<u>Ο μαθητής Β έγραψε:</u>

ε // εφαπτομένη άρα $\lambda_\varepsilon = \lambda_f = 9$ και $f(x)=9$

<u>Ο μαθητής Γ έγραψε:</u>

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Όμως $f'(x_0) = 9x + 1$.

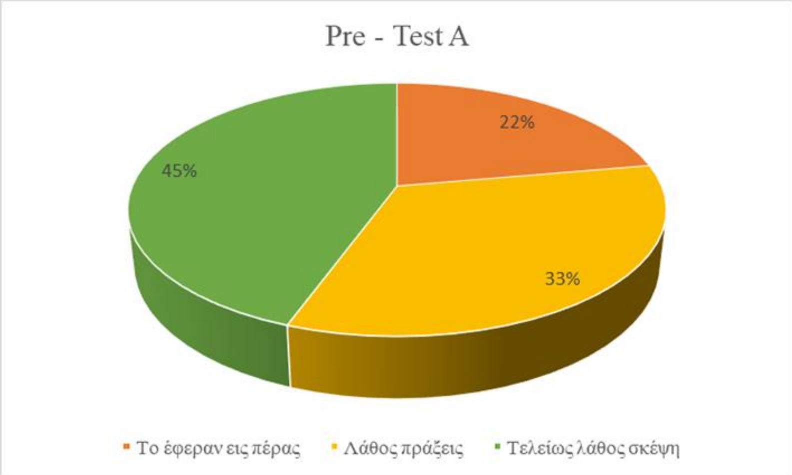
Τώρα όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα της άσκησης, εκεί εμφανίστηκαν τα περισσότερα αριθμητικά λάθη διότι οι τετμημένες του σημείου επαφής μας έδιναν αποτέλεσμα $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. το γεγονός αυτό έρχεται να επιβεβαιώσει την έλλειψη γνώσης βασικής άλγεβρας.

Συνοψίζοντας ως προς το Pre test στο πρόβλημα της εφαπτομένης και με βάση τις ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών Α, Β, Γ φαίνεται πως υπάρχει η παρανόηση μεταξύ παραγώγου σε σημείο, που είναι η κλίση της εφαπτομένης, με την παράγωγο συνάρτηση. Οι μαθητές Β και Γ είχαν τη μεγαλύτερη δυσκολία καθώς αυτά που έδωσαν ως απαντήσεις ήταν λάθος εννοιολογικά και αυτό σημαίνει πως δεν έχουν γνώσεις ανάλυσης.

Παρακάτω δίνεται μέσω πίνακα η γενική εικόνα που είχαν οι μαθητές στο Pre – test και ένα κυκλικό διάγραμμα, επίσης γενικό.

Pre-Test A	**Μαθητές**
Το έφεραν εις πέρας	4
Λάθος πράξεις	6
Τελείως λάθος σκέψη	8
Σύνολο	18

Εικόνα 9. Πίνακας αποτελεσμάτων Pre – test A



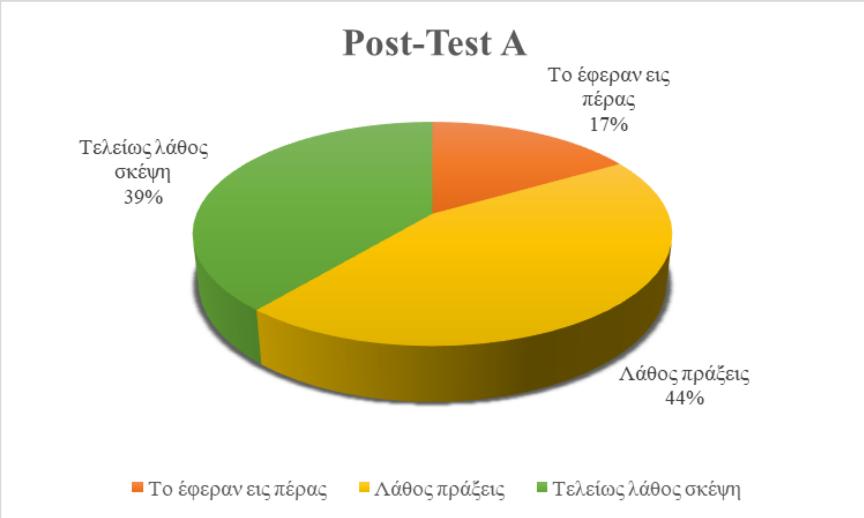
Εικόνα 10. Κυκλικό διάγραμμα Pre – test A

Στο Post Test της συγκεκριμένης δραστηριότητας οι μαθητές στην πλειοψηφία τους ακολούθησαν την πεπατημένη οδό απορρίπτοντας τον καινούριο τρόπο θεωρώντας τον χρονοβόρο και περίπλοκο. Ωστόσο κάποιοι από τους αδύναμους μαθητές προσπάθησαν να μιμηθούν τον τρόπο του Fermat. Επίσης είναι άξιο αναφοράς ότι κανένας δεν προσπάθησε να κάνει γραφική επίλυση. Τέλος η πλειοψηφία των μαθητών που είχαν τελείως λάθος σκέψη έρχεται για άλλη μια φορά να επιβεβαιώσει τη διεθνή βιβλιογραφία, όπου υποστηρίζει πως η πλειονότητα των μαθητών χρησιμοποιούν μεθόδους χωρίς να γνωρίζουν τι ακριβώς κάνουν και για ποιο λόγο το κάνουν. Δεν είναι καθόλου τυχαίο πως οι εφτά από τους δεκαοκτώ μαθητές και πιο συγκεκριμένα αυτοί που είχαν τελείως λάθος σκέψη, θεώρησαν το σημείο Α πως είναι το σημείο επαφής της καμπύλης με την εφαπτομένη και ακολούθησαν τη μεθοδολογία (τυφλοσούρτη) και όπως ήταν φυσικό οδηγήθηκαν σε λάθος.

Παρακάτω δίνεται μέσω πίνακα η γενική εικόνα που είχαν οι μαθητές στο Post – test και ένα κυκλικό διάγραμμα, επίσης γενικό.

Post-Test A	**Μαθητές**
Το έφεραν εις πέρας	3
Λάθος πράξεις	8
Τελείως λάθος σκέψη	7
Σύνολο	18

Εικόνα 11. Πίνακας αποτελεσμάτων Post – test A



Εικόνα 12. Κυκλικό διάγραμμα Post test A

7.2 Ανάλυση αποτελεσμάτων που αφορά το πρόβλημα των ακροτάτων

Στο πρόβλημα των ακροτάτων η διαδικασία κύλησε αρκετά καλά καθώς οι περισσότεροι μαθητές γνώριζαν τη διαδικασία που ακολουθούμε για τη μελέτη μιας συνάρτησης και την εύρεση τοπικών ακροτάτων. Και πάλι οι δυσκολίες ήταν σε επίπεδο πράξεων. Πιο αναλυτικά όταν τους ζητήθηκε να λύσουν την άσκηση 2 σελίδα 149 του σχολικού βιβλίου, στην παράγραφο 2.7.

Εδώ αξίζει να παραθέσουμε τις δύο από τις δεκαοκτώ απαντήσεις, όπου ήταν τελείως λάθος σκέψη και βασίζεται στην παντελή έλλειψη γνώσης ανάλυσης και βασικής άλγεβρας.

<u>Ο μαθητής Δ απάντησε:</u>

$$h(x)=2x^3-3x^2-1$$

Θα βρούμε την παράγωγο και θα τη μηδενίσουμε $\left(2x^3-3x^2-1\right)'=0$.

Εδώ ο μαθητής ενδεχομένως εκτός από τις παρανοήσεις που μελετάμε, να έχει και άλλες μαθησιακές δυσκολίες, διότι δεν προχώρησε παρακάτω.

<u>Ο μαθητής Ε απάντησε:</u>

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \ (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -3x_1^2 > -3x_2^2 \ (2)$$

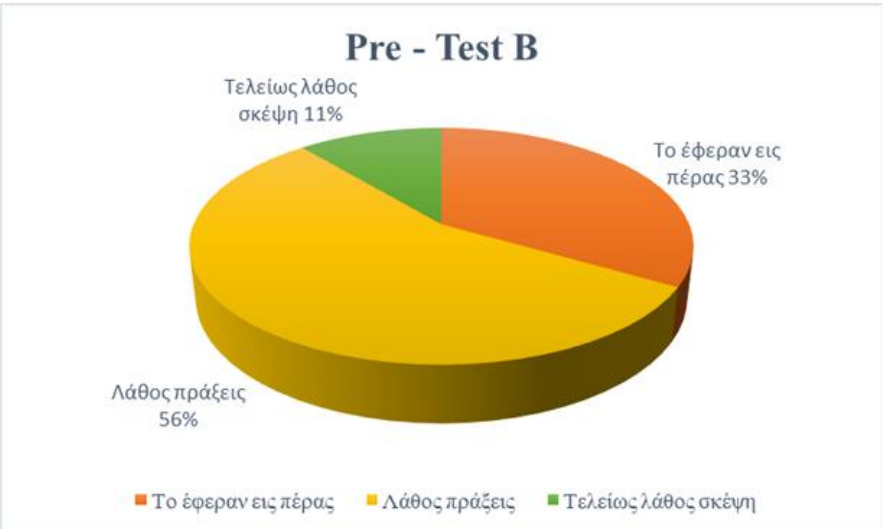
«κύριε, δεν μπορώ να βρω τη μονοτονία έχουν διαφορετική φορά».

Εδώ παρατηρούμε έλλειψη στην προϋπάρχουσα γνώση. Τέλος όσον αφορά τα λάθη στις πράξεις, από τους δέκα μαθητές, τέσσερις εξ αυτών έκαναν λάθος στον τύπο της παραγώγου, τρεις λάθος στις ρίζες της παραγώγου και οι υπόλοιποι τρεις λάθος στο πρόσημο της παραγώγου.

Παρακάτω δίνεται μέσω πίνακα η γενική εικόνα που είχαν οι μαθητές στο Pre – test B και ένα κυκλικό διάγραμμα, επίσης γενικό.

Pre-Test B	**Μαθητές**
Το έφεραν εις πέρας	6
Λάθος πράξεις	10
Τελείως λάθος σκέψη	2
Σύνολο	18

Εικόνα 13. Πίνακας αποτελεσμάτων Pre – test B



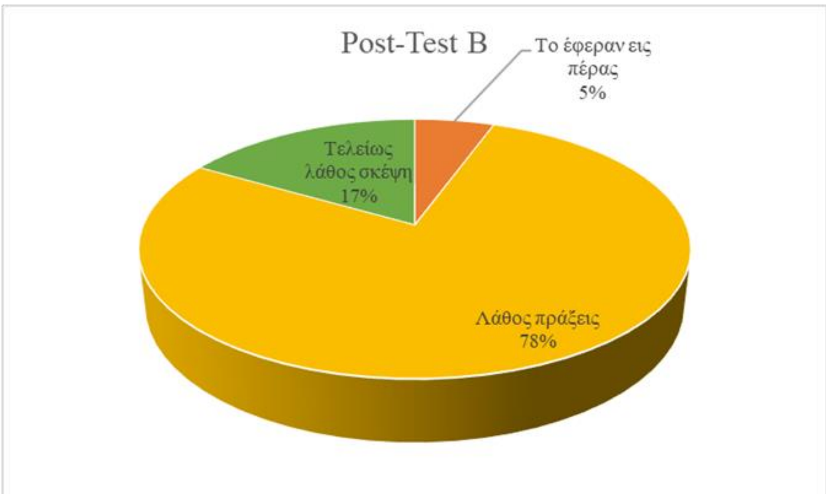
Εικόνα 14. Κυκλικό διάγραμμα Pre – test B

Στο Post Test του συγκεκριμένου προβλήματος οι μαθητές έπρεπε να μελετήσουν και να βρουν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 3x + 2$. Σε αυτήν την άσκηση έντεκα μαθητές προσπάθησαν να εφαρμόσουν τον τρόπο επίλυσης του Fermat, χωρίς όμως να καταφέρουν να φτάσουν στο τέλος, εκτός από μια μαθήτρια. Από τις απαντήσεις των μαθητών, διαπιστώνουμε ότι τους ενδιαφέρει μια διαφορετική προσέγγιση στις έννοιες που μελετούν, αλλά δυστυχώς λόγω των κενών που έχουν δυσκολεύονται στην υλοποίησή τους.

Παρακάτω δίνονται τα αποτελέσματα του Post – test σε έναν πίνακα, οι τρεις μαθητές που μπήκαν στην κατηγορία τελείως λάθος σκέψη, μπερδεύτηκαν με τη μέθοδο εύρεσης εφαπτομένης του Fermat.

Post-Test B	Μαθητές
Το έφεραν εις πέρας	1
Λάθος πράξεις	14
Τελείως λάθος σκέψη	3
Σύνολο	18

Εικόνα 15. Πίνακας αποτελεσμάτων Post – test B



Εικόνα 16. Κυκλικό διάγραμμα Post – test B

Οι απαντήσεις των μαθητών σκόπιμα παραλήφθηκαν λόγω αυξημένου όγκου και δόθηκαν μόνο όσες κρίθηκαν ότι είχαν να προσφέρουν κάτι στην έρευνα για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Ωστόσο οι απαντήσεις των μαθητών επιβεβαιώνουν όλες τις παρανοήσεις που έχουν αναφερθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο.

7.3 Ανάλυση και σύγκριση αποτελεσμάτων Pre – test A,B και Post – test A,B

Μετά τη συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων και για την καλύτερη κατανόηση τους, παρακάτω δίνονται πίνακες, που αποσαφηνίζουν τη συνολική εικόνα των μαθητών τόσα στα Pre – test όσο και στα Post – test χωρίζοντας τα σε τρεις κατηγορίες, σε αυτούς που απάντησαν σωστά, σε αυτούς που έκαναν λάθος πράξεις και τέλος σε αυτούς που λόγω των παρανοήσεων οδηγήθηκαν σε λάθος.

Συνοψίζοντας πριν την ιστορικοδιδακτική παρέμβαση το πρόβλημα της εφαπτομένης το έλυσαν σωστά τέσσερις στους δεκαοκτώ μαθητές, έξι στους δεκαοκτώ το άφησαν ημιτελές λόγω πράξεων και οκτώ στους δεκαοκτώ το άφησαν ημιτελές λόγω εννοιολογικών παρατηρήσεων. Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, η πλειοψηφία των μαθητών δεν προσπάθησε να ακολουθήσει τον τρόπο του Fermat, μόνο έξι στους δεκαοκτώ, εκ των οποίων τέσσερις στους έξι είχαν λάθος πράξεις και οι υπόλοιποι δύο απ' τους έξι είχαν οδηγηθεί σε λάθος από εννοιολογική παρανόηση.

Τέλος, όσον αφορά το πρόβλημα εύρεσης τοπικών ακροτάτων, πριν την παρέμβαση το έλυσαν σωστά έξι από τους δεκαοκτώ μαθητές, δέκα από τους δεκαοκτώ μαθητές το άφησαν ημιτελές λόγω πράξεων και δύο από τους δεκαοκτώ το άφησαν ημιτελές λόγω εννοιολογικής παρανόησης. Μετά την ιστορικοδιδακτική παρέμβαση μόνο ένας μαθητής από τους δεκαοκτώ μαθητές το έλυσε σωστά ακολουθώντας τον τρόπο του Fermat, εννιά στους δεκαοκτώ προσπάθησαν να μιμηθούν τον τρόπο του Fermat, αλλά δεν το έφεραν εις πέρας λόγω λαθεμένων πράξεων, πέντε στους δεκαοκτώ δεν ακολούθησαν την ιστορική προσέγγιση, ωστόσο οδηγήθηκαν σε λάθος λόγω πράξεων, ένας στους δεκαοκτώ το προσέγγισε ιστορικά, αλλά οδηγήθηκε σε λάθος λόγω παρανόησης εννοιολογικής και τέλος οι υπόλοιποι δύο μαθητές απλά μπέρδεψαν τις μεθόδους.

Pre – Test A και B		
Μαθητές	**Πρόβλημα εφαπτομένης**	**Πρόβλημα ακροτάτων**
1	Σωστά	Σωστά
2	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ημιτελής λόγω πράξεων
3	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Σωστά
4	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ημιτελής λόγω πράξεων
5	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης
6	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ημιτελής λόγω πράξεων
7	Σωστά	Σωστά
8	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ημιτελής λόγω πράξεων
9	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω πράξεων
10	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω πράξεων
11	Σωστά	Σωστά
12	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ημιτελής λόγω πράξεων
13	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Σωστά
14	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω πράξεων
15	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης
16	Ημιτελής λόγω εννοιολογικής παρανόησης	Ημιτελής λόγω πράξεων
17	Σωστά	Σωστά
18	Ημιτελής λόγω πράξεων	Ημιτελής λόγω πράξεων

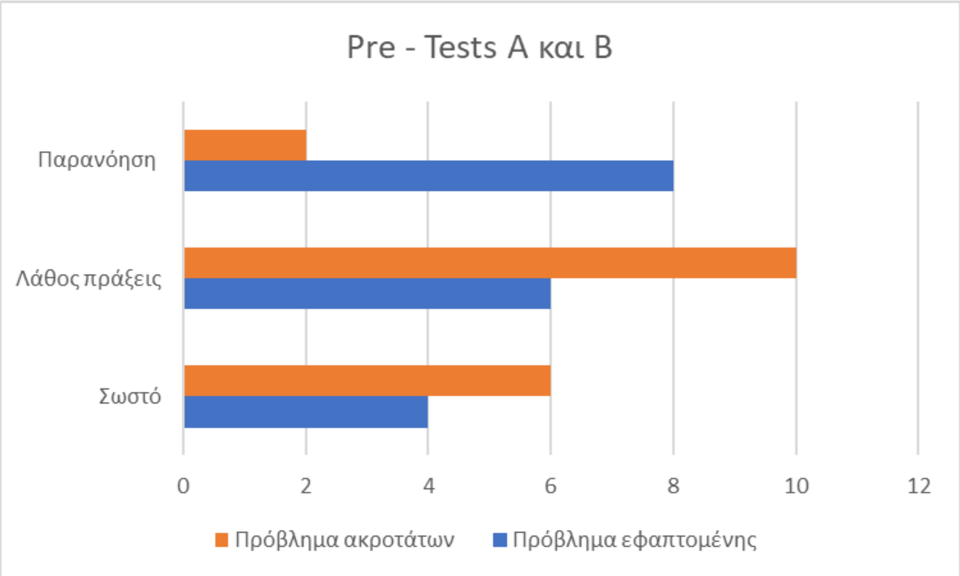
Εικόνα 17. Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων Pre – test A, B

Παρακάτω παραθέτουμε τα ίδια αποτελέσματα σε έναν συνοπτικό πίνακα της παρακάτω μορφής.

Pre – Test	**Πρόβλημα εφαπτομένης**	**Πρόβλημα ακροτάτων**
Σωστό	4	6
Λάθος πράξεις	6	10
Παρανόηση	8	2
Σύνολο	18	18

Εικόνα 18. Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων Pre – test A, B

Σε γράφημα τα παραπάνω αποτελέσματα των Pre – test A και B συνοψίζονται ως εξής



Εικόνα 19. Διάγραμμα αποτελεσμάτων Pre – test A, B

Post – Test A και B		
Μαθητές	**Πρόβλημα εφαπτομένης**	**Πρόβλημα ακροτάτων**
1	Σωστά	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
2	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
3	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
4	Λάθος λόγω πράξεων	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
5	Με ιστορική προσέγγιση, αλλά με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση, αλλά με ιστορική προσέγγιση
6	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
7	Σωστά	Λάθος λόγω πράξεων
8	Λάθος λόγω πράξεων	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
9	Με ιστορική προσέγγιση, αλλά με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος λόγω πράξεων
10	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
11	Σωστά	Λάθος λόγω πράξεων
12	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση
13	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση
14	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση
15	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος λόγω πράξεων
16	Λάθος με εννοιολογική παρανόηση	Λάθος λόγω πράξεων
17	Σωστά	Σωστά με ιστορική προσέγγιση
18	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση	Λάθος πράξεις με ιστορική προσέγγιση

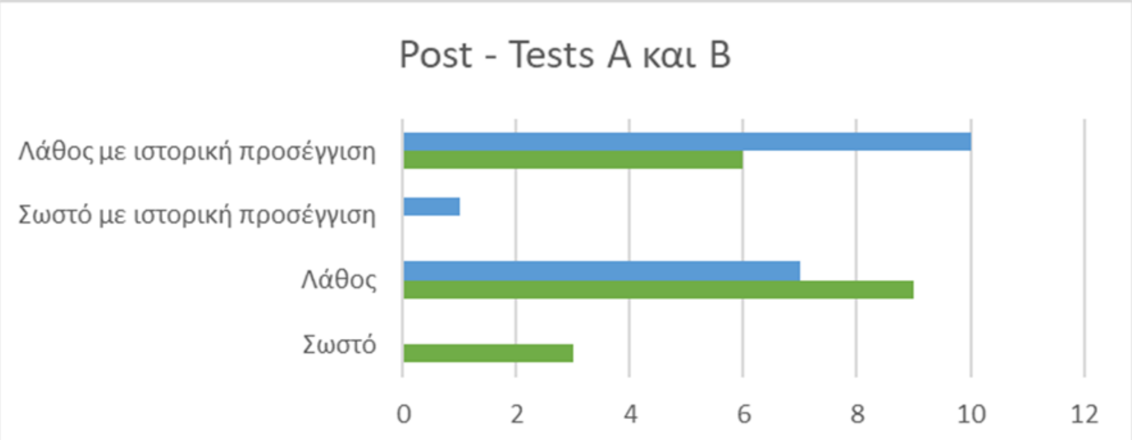
Εικόνα 20. Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων Post – test A, B

Παρακάτω παραθέτουμε τα ίδια αποτελέσματα σε έναν συνοπτικό πίνακα της παρακάτω μορφής.

Post – Test	**Πρόβλημα εφαπτομένης**	**Πρόβλημα ακροτάτων**
Σωστό	3	0
Λάθος	9	7
Σωστό με ιστορική προσέγγιση	0	1
Λάθος με ιστορική προσέγγιση	6	10
Σύνολο	18	18

Εικόνα 21. Συγκριτικός πίνακας αποτελεσμάτων Post – test Α, Β με ιστορική προσέγγιση των μαθητών

Σε γράφημα τα παραπάνω αποτελέσματα των Post – test A και B συνοψίζονται ως εξής



	Σωστό	Λάθος	Σωστό με ιστορική προσέγγιση	Λάθος με ιστορική προσέγγιση
Πρόβλημα ακροτάτων	0	7	1	10
Πρόβλημα εφαπτομένης	3	9	0	6

Εικόνα 22. Διάγραμμα αποτελεσμάτων Post – test Α, Β

7.4 Ανάλυση αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ξανά τις ερωτήσεις που τέθηκαν στο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές, οι οποίοι είχαν τη δυνατότητα να απαντήσουν κυκλώνοντας μια από τις παρακάτω πιθανές απαντήσεις: Ναι, Ίσως, Όχι ή αν ήθελαν να αναπτύξουν τις σκέψεις τους σε μια μικρή παράγραφο.

1. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να αποσαφηνίσετε την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση, από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας;

2. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας;

3. Θα σας βοηθούσε να ακολουθήσετε μια ιστορική προσέγγιση κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης;

Οι απαντήσεις των μαθητών παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα

Ερωτηματολόγιο	**Ερώτηση 1**	**Ερώτηση 2**	**Ερώτηση 3**
Ναι	12	14	6
Ίσως	4	3	7
Όχι	2	1	5
Σύνολο	18	18	18

Εικόνα 23. Πίνακας αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

Δηλαδή

Στην ερώτηση

Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να αποσαφηνίσετε την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση, από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας;

Οι δώδεκα από τους δεκαοκτώ απάντησαν ναι, οι τέσσερις από τους δεκαοκτώ απάντησαν ίσως και δύο από τους δεκαοκτώ πίστευαν πως δεν τους βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών στην αποσαφήνιση της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας.

Ενώ στην ερώτηση

Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας;

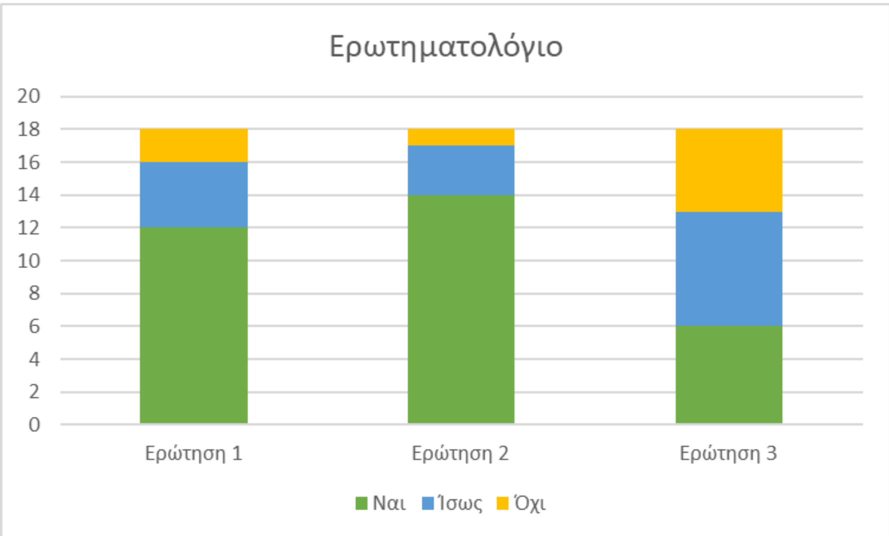
Δεκατέσσερις από τους δεκαοκτώ μαθητές είχαν καταφατική απάντηση, τρεις ήταν αμφιταλαντευόμενοι και μόνο ένας μαθητής είχε τελείως αρνητική στάση απέναντι στην ιστορικοδιδακτική προσέγγιση κατά την ώρα της διδασκαλίας.

Τέλος στην ερώτηση

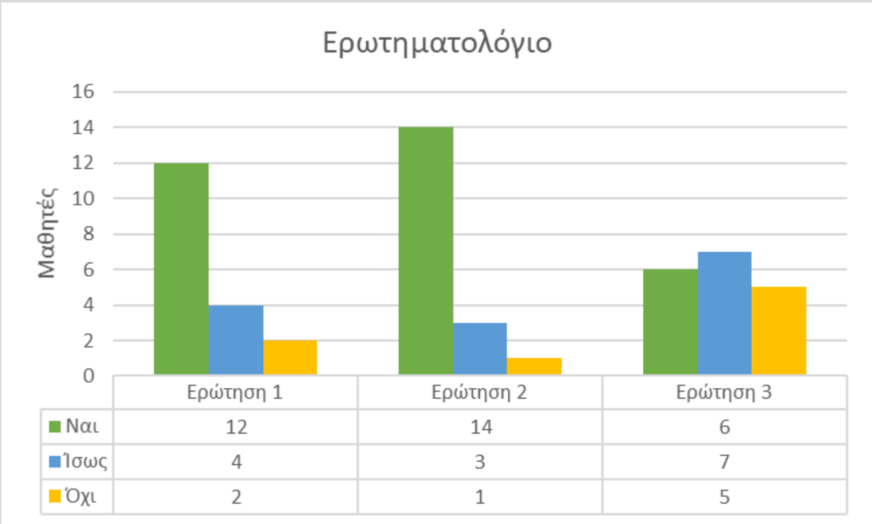
Θα σας βοηθούσε να ακολουθήσετε μια ιστορική προσέγγιση κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης;

Οι έξι από τους δεκαοκτώ είχαν απολύτως θετική στάση, οι πέντε από τους δεκαοκτώ απολύτως αρνητική στάση, ενώ επτά στους δεκαοκτώ ήταν στο μεταίχμιο, δηλαδή ούτε θετική αλλά και ούτε αρνητική στάση.

Παρακάτω δίνονται οι απαντήσεις του ερωτηματολογίου σε δύο συγκεντρωτικά γραφήματα



Εικόνα 24. Διάγραμμα αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

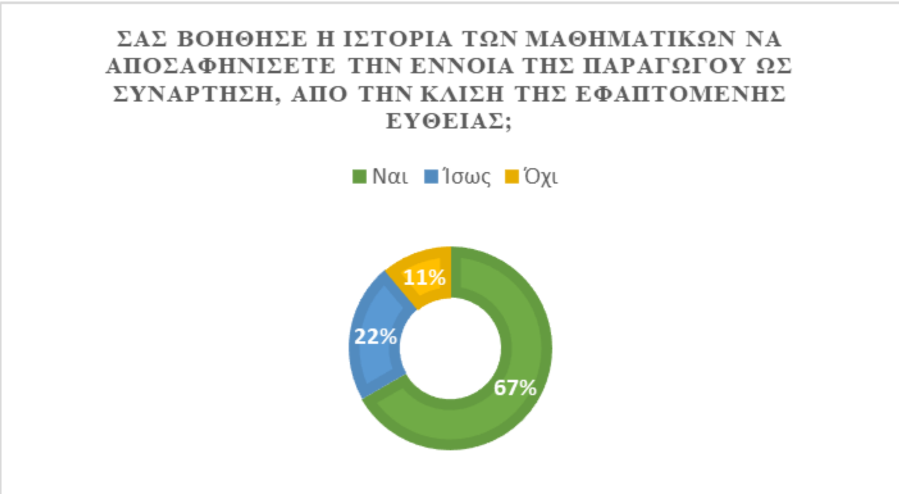


	Ερώτηση 1	Ερώτηση 2	Ερώτηση 3
Ναι	12	14	6
Ίσως	4	3	7
Όχι	2	1	5

Εικόνα 25. Διάγραμμα αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

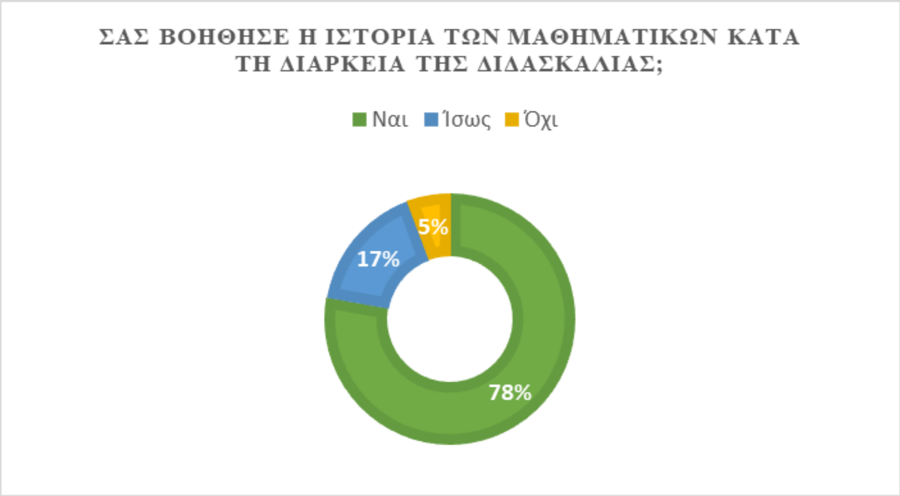
Επιπλέον για την καλύτερη κατανόηση των αποτελεσμάτων του ερωτηματολογίου παρουσιάζονται τρία γραφήματα που αφορούν την κάθε ερώτηση ξεχωριστά.

Για την πρώτη ερώτηση όπως θα δούμε και στο γράφημα της εικόνας 26 συμπεραίνουμε πως η Ιστορία των μαθηματικών βοήθησε παραπάνω από τους μισούς μαθητές να δουν τη διαφορά στις έννοιες αυτές.



Εικόνα 26. Κυκλικό διάγραμμα αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

Το ίδιο μπορούμε να συμπεράνουμε και στο δεύτερο ερώτημα αφού το 78% είχε θετική στάση όπως φαίνεται και στο κυκλικό διάγραμμα της εικόνας 27.



Εικόνα 27. Κυκλικό διάγραμμα αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

Με βάση τις απαντήσεις που δόθηκαν στα δύο πρώτα ερωτήματα βλέπουμε πως οι μαθητές έχουν μια θετική στάση απέναντι στην Ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας χρησιμοποιώντας την ως εργαλείο για την κατανόηση εννοιών, σε αντίθεση με τη χρήση της για την επίλυση προβλημάτων, όπου παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα είναι σε μια ισορροπία, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να εξάγουμε συμπέρασμα. Καθώς όπως φαίνεται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα, βλέπουμε πως το 33% έχει θετική άποψη για την ένταξη της Ιστορίας των Μαθηματικών ακόμη και στην επίλυση ασκήσεων, ενώ το 28% έχει αρνητική άποψη και το 39% μάλλον τους είναι αδιάφορο.

Εικόνα 28. Κυκλικό διάγραμμα αποτελεσμάτων ερωτηματολογίου

Κεφάλαιο 8ο

Συμπέρασμα – Προτάσεις της Έρευνας

8.1 Συμπέρασμα της έρευνας

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της έρευνας παρατηρούμε ότι, οι μαθητές δεν έδειξαν το ίδιο ενδιαφέρον στις ιστορικές προσεγγίσεις που έγιναν και αυτό φαίνεται από τα αποτελέσματα των post – tests, αφού στο πρώτο post – test ασχολήθηκαν έξι στους δεκαοκτώ, ενώ στο δεύτερο έντεκα στους δεκαοκτώ με την καινούρια μέθοδο που τους παρουσιάστηκε κατά το Β μέρος της εκάστοτε παρέμβασης. Αυτό ίσως να οφείλεται και στη Γεωμετρία, διότι η προσέγγιση του Fermat στην εύρεση εφαπτομένης έχει ένα κομμάτι γεωμετρίας, το οποίο δεν είναι δύσκολο κατά τη γνώμη μου, αλλά επειδή τα τελευταία χρόνια στη Β΄ Λυκείου έχει γίνει υποβάθμιση του μαθήματος μιας και μέχρι πέρσι (2021) δεν εξεταζόταν καν. Έχοντας όμως ως βάση τα αποτελέσματα που αναλύθηκαν από τους πίνακες, μπορούμε να ισχυριστούμε πως παρά το τελικό αποτέλεσμα αρκετοί μαθητές προσπάθησαν να χρησιμοποιήσουν όσα τους παρουσιάστηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης.

Έτσι λοιπόν επιβεβαιώνεται ότι η Ιστορία ως εργαλείο είναι ένα επιπλέον βοήθημα του εκπαιδευτικού, για να εξηγήσει με πιο κατανοητό τρόπο κάποιες έννοιες (Byers, 1982). Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, παρά τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές λόγω των γνωστικών ελλείψεων και των εννοιολογικών παρανοήσεων στα Post – test A,B έκαναν μία προσπάθεια ανεξάρτητα από το τελικό αποτέλεσμα.

Τώρα όσον αφορά τα ερευνητικά ερωτήματα και λαμβάνοντας υπόψη το ερωτηματολόγιο που δόθηκε την τελευταία ημέρα της παρέμβασης, μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα. Ότι οι μαθητές βλέπουν με θετική όψη την Ιστορία των Μαθηματικών για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι ότι τους βοηθά να αποσαφηνίσουν κάποιες έννοιες, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τα αποτελέσματα του πρώτου ερωτήματος του ερωτηματολογίου καθώς το 67% των μαθητών απάντησε θετικά. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι γίνεται πιο ευχάριστο και ενδιαφέρον το μάθημα και ξεφεύγει από το φορμαλιστικό ύφος, αφού το 78% των μαθητών απάντησε θετικά στο ερώτημα πως η Ιστορία των Μαθηματικών ήταν βοηθητική την ώρα της διδασκαλίας.

Όλα τα παραπάνω έρχονται να επιβεβαιώσουν τα λεγόμενα του Liu (2003), ο οποίος υποστηρίζει πως μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών το κίνητρο και η θετική στάση από τους μαθητές απέναντι στη μάθηση αυξάνεται, οι δυσκολίες και οι παρερμηνείες εξηγούνται καλύτερα, αναπτύσσεται η κριτική και η μαθηματική σκέψη, αλλά δίνεται και η ευκαιρία στους εκπαιδευτικούς να έχουν έναν μπούσουλα για τη διδασκαλία τους, διότι ο ιστορικός παραλληλισμός αφορά την παρατήρηση των δυσκολιών και των εμποδίων που εμφανίστηκαν στην ιστορία και επανεμφανίζονται μέσα στην τάξη (Jankvist, 2009). Καθώς η μάθηση άλλοτε πραγματοποιείται με μικρά συνεχή βήματα και άλλοτε με άλματα, τα οποία καλούνται οι μαθητές να κάνουν, όπως έγιναν και στην εξέλιξη των μαθηματικών (Παναγιώτου, 2002).

Συνοψίζοντας μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στην παρούσα έρευνα η Ιστορία των Μαθηματικών είχε θετικό πρόσημο, αλλά δυστυχώς επειδή το δείγμα μας είναι μικρό και δεν είναι αντιπροσωπευτικό δεν μπορούμε να γενικεύσουμε τα αποτελέσματά του και να απαιτήσουμε την εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα.

8.2 Προτάσεις της έρευνας

Θα ήταν καλό και χρήσιμο παρόμοιες προσεγγίσεις να γίνονται σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών, προκειμένου να ενισχυθούν ή να καταρριφθούν τα προαναφερθέντα συμπεράσματα. Για να συμβεί όμως αυτό, ο σχεδιασμός θα πρέπει να ανατεθεί στους ειδικούς, που έχουν το αντίστοιχο επιστημονικό υπόβαθρο και τη γνώση πως να διεξαχθεί μια τέτοια έρευνα, για να προκύψουν ασφαλή συμπεράσματα.

Επίσης για την υλοποίηση αντίστοιχων παρεμβάσεων θα ήταν φρόνιμο να πραγματοποιηθούν σε μαθητές Πειραματικών Σχολείων, διότι θα διασφαλίζονταν, ίσως, οι πλέον κατάλληλες συνθήκες διδασκαλίας – μάθησης. Ακόμη μια άλλη πρόταση θα ήταν να μπει πιλοτικά μια επιπλέον διδακτική ώρα στην οποία θα πραγματεύονται έννοιες που συνάντησαν οι μαθητές κατά τη διάρκεια του μαθήματος με καθαρά ιστορική προσέγγιση. Σημαντικό θα ήταν, να υπάρχει ένας δεύτερος καθηγητής για να αναλάβει εξ ολοκλήρου το κομμάτι της ιστορίας σε συνεργασία με τον κύριο καθηγητή.

Εφ' όσον επιβεβαιωθούν αντίστοιχα συμπεράσματα, τα οποία μιλούν για βελτιωτική επίδραση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική των μαθηματικών θα μπορούσε να συμπεριληφθούν στα σχολικά εγχειρίδια «Ιστορικές Δραστηριότητες» σε κάποιες ενότητες που αποδεδειγμένα γεννώνται παρανοήσεις και φυσικά το πιο σπουδαίο απ' όλα να γίνονται ουσιαστικές επιμορφώσεις των εκπαιδευτικών από τους ειδικούς.

Κεφάλαιο 9ο

Περιορισμοί – Δυσκολίες της Έρευνας

Η υλοποίηση μιας πειραματικής διδασκαλίας, στο πλαίσιο ενός προκαθορισμένου σχολικού προγράμματος, έχει αρκετές δυσκολίες και εμπόδια. Ένα από αυτά είναι οι απουσίες των μαθητών. Κάποιοι από τους μαθητές του δείγματος παρακολουθούσαν το ένα μάθημα απουσίαζαν στο επόμενο και ερχόντουσαν στο μεθεπόμενο. Αυτό είχε ως συνέπεια να μην υπάρχει μια συνοχή στη διδακτική παρέμβαση που δέχονταν.

Μια άλλη δυσκολία ήταν ο χρονικός περιορισμός. Τα 45 λεπτά της διδακτικής ώρας δεν ήταν αρκετά για τη σωστή καθοδήγηση όλων των μαθητών. Φυσικά αυτό δεν είναι μόνο περιορισμός της διδακτικής παρέμβασης, είναι γενικό πρόβλημα στα πολυπληθή τμήματα της χώρας μας. Επίσης, ο περιορισμένος χρόνος δεν βοήθησε να γίνουν μεμονωμένες συνεντεύξεις με τους μαθητές που παρακολούθησαν την παρέμβαση.

Τέλος ένας άλλος περιορισμός ήταν το δείγμα των μαθητών, όχι τόσο ο αριθμός τους που ήταν μικρός για την εξαγωγή συμπεράσματος, όσο του ότι ήμουν ο διδάσκοντάς τους, με αποτέλεσμα να χάνεται ο αυθορμητισμός των απαντήσεων και η αντικειμενικότητα ως έναν βαθμό.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Areaya, S., & Sidelil, A. (2012). Students' difficulties and misconceptions in learning concepts of limit, continuity and derivative. The Ethiopian Journal of Education, 32(2), 1-38.

Bachelard. G. (1938). La formation de Vesprit scientifique. Paris: Vrin.

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment? Bulletin AMQ, 37(1), 20-25.

Bell, E.T. (1992). Οι μαθηματικοί. Από τον Ζήνωνα έως τον Cauchy. Τόμ. Ι Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Boyer, C. B. (1959). The history of the calculus and its conceptual development:(The concepts of the calculus). Dover Bublications, ANC. Brousseau, G. (2006). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990 (Vol. 19). Springer Science & Business Media.

Buckley, S. (2013). Deconstructing maths anxiety: Helping students to develop a positive attitude towards learning maths. Australian Council for Educational Research. Ανακτήθηκε 10 Ιανουαρίου, 2020, από https://research.acer.edu.au/learning_processes/16/.

Brousseau, G., 1997, Theory of Didactical Situations in Mathematics, edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, &V. Warfield; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Byers, V. (1982). Why study the history of mathematics? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 13(1), 59-66.

Campbell· J. I. (2005). Math Anxiety and Its Cognitive Consequences: A Tutorial Review. In The Handbook of Mathematical Cognition (pp. 333-346). Psychology Press.

Downs, M., Mamona-Downs, J., (2000). "On Grafic Representation of Differentiation of Real Functions". Themes in Education, 1(2), 173-198.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 221-243). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. For the learning of mathematics, 11(2), 3-6.

Furinghetti, F. (2004). History and mathematics education: A look around the world with particular reference to Italy. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3(1-2), 1-20.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: Case studies linking different domains. For the learning of mathematics, 17, 55-61.

Gray, S. S., Loud, B. J. & Sokolowski, C.P. (2009). Calculus students' use and interpretation of variables; Algebraic vs. Arithmetic Thinking; Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(2), 59-72.

Hannover, B., & Kessels, U. (2004). Self-to-prototype matching as a strategy for making academic choices. Why high school students do not like math and science. Learning and instruction, 14(1), 51-67.

Hellman, H. (2010). Μεγάλες έριδες στην Ιστορία των Μαθηματικών. Αθήνα: Αλεξάνδρεια.

Hilton, P. (1980). Math anxiety: Some suggested causes and cures: Part 2. The Two-Year College Mathematics Journal, 11(4), 246-251.

J.L. Heiberg, "Archimedes. Opera Omnia, IV, 557-58.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. Educational studies in Mathematics, 71(3), 235- 261.

Willy, J. & Sons (1999). Real Anlaysis A historical Approach. Staul Stahl Katz , V. (2013). A History of Mathematics.

Katz, V. J. (2000). Using history to teach mathematics: An international perspective (Vol. 51). Cambridge University Press.

Klyve, D. (2017). The derivatives of the sine and cosine functions. Ανακτήθηκε 17 Ιουνίου, 2019, από https://www.maa.org/sites/default/files/images/upload_library/46/Barnett_TRIUM

PHS_MiniPSPs/MiniPSP_Derivatives_of_Sine_and_Cosine_2017.06.07.pdf Knorr,

W. R. (1978). Archimedes and the spirals: The heuristic background. Historia mathematica, 5(1), 43-75.

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching. Mathematics Teacher, 96(6), 416-421.

Loria, G. (1992). Η Ιστορία των Μαθηματικών. Τομ. Ι. Αθήνα: Παπαζήση. Loria, G. (1992). Η Ιστορία των Μαθηματικών. Τομ. ΙΙ.. Αθήνα: Παπαζήση.

Luneta, K. & Makonye, P. J. (2010). Learner Errors and Misconceptions in Elementary Analysis: A Case Study of a Grade 12 Class in South Africa. Acta Didactica Napocensia, 3(3), 35-46.

Kline, M. (1981). Τα μαθηματικά στον Δυτικό Πολιτισμό. Τομ. Β. Αθήνα: Κώδικας.

Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 624-640.

Ruch, D. (2019). An Introduction to a Rigorous Definition of Derivative. Ανακτήθηκε 20 Αυγούστου, 2019, από https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1005&context=triumphs_analysis

Siyepu, S. W. (2013). Students' interpretations in learning derivatives in a university mathematics classroom. In Proceedings of the 19th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa, (1), 183-193.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2007). Learning mathematics with understanding: A critical consideration of the learning principle in the principles and standards for school mathematics. The Mathematics Enthusiast, 4(1), 103- 114.

Swan, M. (2001). 10 Dealing with misconceptions in mathematics. Issues in mathematics teaching, 147. London.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In proceedings of working group, (3), 13-28.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2012). Classifying the arguments and methodological schemes for integrating history in mathematics education. Crossroads in the history of mathematics and mathematics education, 247-294

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. Journal of Computers in Mathematics and Science Teachnig, 20(1), 113-137

Freudenthal, H., 1983,Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Boston/Lancaster: Dordrecht

Freudenthal, H., 1991,Revisiting Mathematics Education – China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ελληνόγλωσση

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης. Σ. & Πολύζος, Γ.(2019). Μαθηματικά Β μέρος. Αθήνα: Διόφαντος Εξαρχάκος, Γ. (1995).

Το έργο του Αρχιμήδη και η συμβολή του στην εξέλιξη των μαθηματικών της μηχανικής και της τεχνολογίας (Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο (ΕΚΠΑ) Σχολή Επιστημών Αγωγής. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης, Αθήνα.

Θωμαΐδης, Γ. (1990). Ιστορικές Παρεκβάσεις στο Μάθημα της Γεωμετρίας. Ευκλείδης Γ, (25), 27-41.

Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν. & Τοκμακίδης, Τ. (1989). Οι σχέσεις Ιστορίας και Διδακτικής των Μαθηματικών. Ευκλείδης Γ, (23), 11-17.

Θωμαΐδης, Γ. & Καστάνης, Ν. (1987). Μια διαχρονική εξέταση της σχέσης της ιστορίας με τη διδακτική των Μαθηματικών'. Ευκλείδης Γ, 16, 61-92.

Κοτοπούλης, Β. Θ. (2007). Η διδακτική των μαθηματικών εννοιών στη βασική εκπαίδευση: Όψεις και προοπτικές. Επιστημονικό Βήμα, 42-156.

Παναγιώτου, Ε. (2002). Ο ρόλος της Ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, (19), 117-130.

Χ. Στεργίου – Χ. Νάκη. (2015). ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ1, Γ2. Αθήνα: Σαββάλας.

Στεργίου, Β. (2009). Ιστορική εξέλιξη, ερμηνείες και διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του απειροστού. Διδακτορική Διατριβή. Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών.

Σκούφη, Αλεξάνδρα του Ευάγγελου (2013) Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Η διδακτική των εννοιών της ανάλυσης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση: προσεγγίσεις με χρήση νέων τεχνολογιών υπό τη φιλοσοφία της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Διδακτορική Διατριβή. Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών. Τμήμα Παιδαγωγικό Δημοτικής Εκπαίδευσης

Γιαννακούλιας, Ευστάθιος (2007). ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Η ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΤΟΥ ΕΞΕΛΙΞΗ ΑΠΟ ΤΟΝ 5^{ο} π.Χ. ΕΩΣ ΚΑΙ ΤΟΝ 19^{ο} ΑΙΩΝΑ, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

syn2_120226_odigies_2021_22_g-gel-prosanatolismoy.pdf

ΕΦΗΜΕΡΙΔΑ ΤΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ, Τεύχος Β' 3137/19.07.2021

Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (2009), Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών, Ιωάννης Θωμαΐδης, Διονύσιος Λάππας, Τεύκρος Μιχαηλίδης, Στυλιανός Νεγρεπόντης, Θεόδωρος Πάσχος, Κωνσταντίνος Τζανάκης, Βασιλική Φαρμάκη, Δημήτριος Χασάπης, Ιωάννης Χριστιανίδης, Κωνσταντίνος Χρυσανθόπουλος, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

Victor J. Katz (2019). Ιστορία των Μαθηματικών Μια εισαγωγή, Μετάφραση Κώστας Χατζηκυριάκου, Επιστημονική επιμέλεια Γιάννης Χριστιανίδης, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.

Παράρτημα Ι

Φύλλο εργασίας 1

1. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-4x+11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:

α) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x,

β) είναι παράλληλη στην ευθεία $y=4x+2004$,

γ) είναι κάθετη στην ευθεία $x+8y+1=0$,

δ) διέρχεται από το σημείο Α (6, – 2).

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα τις επόμενες συναρτήσεις:

β) $f\left(x\right)=x^3-3x$

γ) $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+1$.

Φύλλο εργασίας 2

1. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f\left(x\right)=x^3-3x+5$ στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+1$,

ii) κάθετη προς την ευθεία $y=-x$.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $h\left(x\right)=2x^3-3x^2-1$

Φύλλο εργασίας 3

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ η οποία άγεται από το σημείο Α(0, –1).

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση: $g(x)=x^3-3x+2$.

Ερωτηματολόγιο

1. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών να αποσαφηνίσετε την έννοια της παραγώγου ως συνάρτηση, από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας;
2. Σας βοήθησε η Ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας;
3. Θα σας βοηθούσε να ακολουθήσετε μια ιστορική προσέγγιση κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας άσκησης;

Μπορείτε να απαντήσετε κυκλώνοντας μία από τις παρακάτω επιλογές

Ναι Ίσως Όχι

Αν θέλετε μπορείτε να αναπτύξετε τις σκέψεις σας σε μια μικρή παράγραφο απαντώντας είτε μεμονωμένα τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου είτε συνολικά για την παρέμβαση που σας έγινε.