



Πρόγραμμα σπουδών
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Μια εισαγωγή στις πολλαπλότητες και εφαρμογή τους στις μεθόδους βελτιστοποίησης

Μούχου-Μουτζουρίδου Παναγιώτα

Επιβλέπων Καθηγητής: Α.Αρβανιτογεώργος

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για τις πολύτιμες υποδείξεις του κατά τη διάρκεια αυτής της εργασίας και τη διάθεσή του να βοηθήσει σε ό,τι χρειαστεί.

Περίληψη

Στο πρώτο κεφάλαιο αναλύουμε την έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας ως έναν τοπικά Ευκλείδειο χώρο και παραθέτουμε το παράδειγμα της σφαίρας το οποίο είναι ιδιαίτερα βοηθητικό στο να αναπτύξει κάποιος διαίσθηση στο συγκεκριμένο ζήτημα. Στο δεύτερο κεφάλαιο μας απασχολούν οι συναρτήσεις που μπορούν να οριστούν πάνω σε πολλαπλότητες ή και μεταξύ αυτών και δίνουμε έμφαση στο να είναι αυτές οι συναρτήσεις λείες. Στο κεφάλαιο τρία αναφερόμαστε σε μια ιδιαίτερη ομάδα πολλαπλοτήτων, τις πολλαπλότητες πηλίκια δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στον πραγματικό προβολικό χώρο. Στο κεφάλαιο τέσσερα μας ενδιαφέρει ο εφαπτόμενος χώρος που προκύπτει φυσικά σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας, απλώς από το γεγονός ότι έχουμε ορίσει τοπικά συντεταγμένες. Επίσης ορίζουμε την έννοια της παραγώγου μιας απεικόνισης ορισμένης σε πολλαπλότητα. Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται σε πολλαπλότητες οι οποίες ταυτόχρονα αποτελούν τμήματα μεγαλύτερων πολλαπλοτήτων, τις λεγόμενες υποπολλαπλότητες. Στο κεφάλαιο έξι παρουσιάζουμε την εφαπτόμενη δέσμη, που αποτελεί το σύνολο όλων των εφαπτόμενων χώρων μιας πολλαπλότητας. Στο τελευταίο κεφάλαιο εκθέτουμε κάποιους βασικούς αλγόριθμους βελτιστοποίησης προσαρμοσμένους στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης είναι πολλαπλότητα. Η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για τα πρώτα έξι κεφάλαια είναι τα βιβλία [2], [3] και [4], ενώ το έβδομο κεφάλαιο βασίστηκε στο [1]. Σε περίπτωση που υπάρχει αναφορά σε κάποια άλλη πηγή θα αναφέρεται.

Abstract

In the first chapter we analyze the concept of a differential manifold as a locally Euclidean space and we provide an example, that of the sphere, which really helps to develop the relevant intuition. In the second chapter we are interested in functions with a manifold domain, or functions between manifolds, and we want both of them to be smooth. In chapter three a special type of manifold is mentioned, that of a quotient manifold, with the real projective space playing an important role. In chapter four we turn our attention to the tangent space which occurs naturally at every point of a manifold, as a consequence of introducing local coordinates around the point. We also give some definitions of the differential of a function between manifolds. Chapter five refers to submanifolds, meaning manifolds which are also parts of a bigger manifold. Chapter six is about the tangent bundle, which is the cluster of all tangent spaces of a manifold. In the last chapter we give some basic optimization algorithms tailored for the case when the objective function is defined on a manifold. The bibliography used for the first six chapters is books [2], [3] and [4], while chapter seven is based on [1]. If there is a reference at another source, that source is strictly mentioned.

Περιεχόμενα

1 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες	7
1.1 Τοπολογικές Πολλαπλότητες	7
1.2 Συμβατοί Χάρτες και Άτλας	8
1.3 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες	9
1.4 Η σφαίρα	9
2 Λείες Απεικονίσεις σε Πολλαπλότητες	13
2.1 Πραγματικές Συναρτήσεις σε Πολλαπλότητες	13
2.2 Συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων	14
2.3 Μερικές Παράγωγοι	15
2.4 Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης	15
3 Πολλαπλότητες Πηλίκο και Ο Πραγματικός Προβολικός Χώρος	17
3.1 Ο χώρος πηλίκο	17
3.2 Συναρτήσεις σε χώρους πηλίκα	18
3.3 Πότε ένα σύνολο πηλίκο είναι Hausdorff κι έχει αριθμίσιμη βάση	18
3.4 Πραγματικός Προβολικός Χώρος	20
3.5 Ο Κανονικός C^∞ Άτλας σ' έναν Πραγματικό Προβολικό Χώρο	22
3.6 Ένας Άτλας για την Πολλαπλότητα Grassmann	23
4 Εφαπτόμενος Χώρος και Παράγωγος	27
4.1 Εφαπτόμενα Διανύσματα κι Εφαπτόμενος Χώρος	27
4.2 Η Παράγωγος μιας Λείας Απεικόνισης	29
4.2.1 Το Διαφορικό μέσω των Παραγωγίσεων σε Σημείο	29
4.2.2 Το Διαφορικό μέσω Χαρτών	31
4.2.3 Το Διαφορικό μέσω Καμπυλών	31
4.3 Εμφυτεύσεις κι Εμβάπτισης	33
4.4 Βαθμίδα, Κρίσιμα και Κανονικά Σημεία	33
5 Υποπολλαπλότητες	35
5.1 Υποπολλαπλότητες	35
5.1.1 Κανονικές Υποπολλαπλότητες	35
5.1.2 Σύνολα Σταθμής και το Θεώρημα Κανονικού Συνόλου Σταθμής	36
5.2 Βαθμίδα μιας Λείας Απεικόνισης	38
5.2.1 Το Θεώρημα Σταθερής Βαθμίδας	39
5.2.2 Τα Θεωρήματα Εμβάπτισης και Υπεμβάπτισης	40
5.2.3 Εικόνες μιας Λείας Απεικόνισης	41
5.2.4 Λείες Απεικονίσεις σε Υποπολλαπλότητες	43
5.3 Κατηγορίες και Συναρτητές	43

6	Η Εφαπτόμενη Δέσμη	45
6.1	Ορισμός	45
6.2	Η Εφαπτόμενη Δέσμη ως Πολλαπλότητα	46
6.2.1	Η Διαφορίσιμη Δομή της Εφαπτόμενης Δέσμης	47
6.3	Διανυσματικές Δέσμες	48
6.4	Λείες Τομές	49
6.5	Λεία Πλαίσια	50
7	Μέθοδοι Βελτιστοποίησης σε Πολλαπλότητες	51
7.1	Γενικές Αρχές των Μεθόδων Βελτιστοποίησης	51
7.2	Προβλήματα Βελτιστοποίησης ορισμένα σε Πολλαπλότητες	53
7.3	Σημαντικές Πολλαπλότητες στα προβλήματα Βελτιστοποίησης	55
7.4	Η Μέθοδος της Ταχύτερης Αλλαγής	57
7.5	Η μέθοδος Newton στις πολλαπλότητες	63

Εισαγωγή

Αν θέλουμε να δώσουμε έναν αρκετά διαισθητικό ορισμό των πολλαπλοτήτων θα μπορούσαμε να πούμε πως αποτελούν τη γενίκευση της έννοιας των καμπυλών και των επιφανειών σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ένα τέτοιο αντικείμενο, ενώ τοπικά μπορεί να μοιάζει επίπεδο και ίσιο, αν το δούμε συνολικά και απομακρυσμένα μπορεί να έχει μια τελείως διαφορετική εικόνα. Ωστόσο έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε στα επιμέρους επίπεδα συντεταγμένες γεγονός που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη θέση μας πάνω σε αυτά, να εκτελέσουμε υπολογισμούς και να ορίσουμε διαφορισμότητα.

Ο πρώτος ο οποίος φαντάστηκε μια αναλογία των επιφανειών σε περισσότερες διαστάσεις ήταν ο σπουδαίος μαθηματικός Bernhard Riemann ο οποίος μάλιστα εισήγαγε τον όρο πολλαπλότητα (Mannigfaltigkeit στα γερμανικά) αποκαλώντας με αυτό τον τρόπο τα αντικείμενα της μελέτης του. Ωστόσο η έννοια της πολλαπλότητας έχει τις ρίζες της στην ανάπτυξη της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας, η οποία αναφέρεται σε χώρους στους οποίους δε βρίσκει εφαρμογή το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη. Στα πλαίσια αυτής της έρευνας και αναλογιζόμενος την έννοια της καμπυλότητας μιας επιφάνειας χωρίς να υπολογίζει τον περιβάλλοντα χώρο, ο Carl Friedrich Gauss φαίνεται να ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε τις επιφάνειες ως αυτόνομους χώρους, αδέσμευτους από τον Ευκλείδειο χώρο στον οποίο ενυπάρχουν. Αυτό αργότερα οδήγησε στη διατύπωση του λεγόμενου Θαυμαστού Θεωρήματος του Gauss , ένα θεώρημα-ορόσημο στα μαθηματικά του 19ου αιώνα.

Μιλώντας για μεγάλες ιδέες, δε θα μπορούσαμε να μην αναφερθούμε στη σημασία της θεωρίας των πολλαπλοτήτων στη διατύπωση μιας από τις μεγαλύτερες ανακαλύψεις των τελευταίων 100 χρόνων και πλέον διαδεδομένες στο ευρύ κοινό, της θεωρίας της σχετικότητας του Albert Einstein . Σήμερα οι πολλαπλότητες αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι των θεωρητικών κι εφαρμοσμένων μαθηματικών και είναι καίριας σημασίας η μελέτη τους. Πολλά γεωμετρικά αντικείμενα που απαιτούν την προσοχή μας ή κεντρίζουν το ενδιαφέρον μας είναι πολύ δύσκολο να μελετηθούν λόγω της πολυπλοκότητάς τους. Ωστόσο η μελέτη αυτή και η χρήση διαφορικού λογισμού διευκολύνονται αισθητά αν θέσουμε ως προϋπόθεση τα αντικείμενα να είναι τοπικά επίπεδα. Ένας άλλος τομέας που διαδραματίζει όλο και πιο σημαντικό ρόλο στη σύγχρονη επιστήμη είναι αυτός της στατιστικής ανάλυσης δεδομένων. Και εκεί η σημασία της θεωρίας των πολλαπλοτήτων δεν μπορεί να παραβλεφθεί καθώς συμβαίνει συχνά τα σύνολα δεδομένων να σχηματίζουν μια πολλαπλότητα και αν αντιμετωπιστούν ως τέτοια έχουν σαν συνέπεια διάφορα πλεονεκτήματα όπως για παράδειγμα τη μείωση των βαθμών ελευθερίας του συστήματος.

Οι πολλαπλότητες ακόμα, τα τελευταία 50 χρόνια περίπου, έχουν γίνει ευρέως διαδεδομένες στις μεθόδους βελτιστοποίησης, καθώς πολλές φορές η προς βελτιστοποίηση συνάρτηση ορίζεται σε μια πολλαπλότητα. Όταν λοιπόν έγινε αντιληπτό ότι οι έννοιες της κλίσης (gradient) και της Εσσιανής μπορούν να βρουν αντίστοιχες στις πολλαπλότητες έγινε φανερό ότι ήταν δυνατό να κατασκευαστούν αλγόριθμοι πάνω σε αυτές οι οποίοι βρήκαν επιτυχή εφαρμογή σε διάφορους τομείς όπως η μηχανική μάθηση, μηχανική οπτική ή η ρομποτική.

Κεφάλαιο 1

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Η έννοια των πολλαπλοτήτων έχει πολλές υποκατηγορίες, στα πλαίσια αυτής της εργασίας όμως θα μας απασχολήσουν κυρίως οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες, τις οποίες θα ορίσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

1.1 Τοπολογικές Πολλαπλότητες

Στη θεωρία που ακολουθεί έχουμε ως βάση τοπολογικούς χώρους, χώρους δηλαδή στους οποίους μπορεί να οριστεί κάποια έννοια ανοιχτού συνόλου. Το ευρύτερο σύνολο των ανοιχτών συνόλων καλείται τότε τοπολογία. Για τον ορισμό των τοπολογικών, και στη συνέχεια των διαφορίσιμων, πολλαπλοτήτων θέλουμε η τοπολογία αυτή να έχει μια αριθμήσιμη βάση. Επιπλέον, θέλουμε για οποιαδήποτε δύο σημεία του χώρου να μπορούμε να βρούμε ολόκληρες περιοχές γύρω από αυτά που να είναι ξένες μεταξύ τους (τότε λέμε ότι ο χώρος είναι Hausdorff).

Ακόμα ένα κρίσιμο χαρακτηριστικό μιας τοπολογικής πολλαπλότητας είναι η ιδιότητα του τοπικά Ευκλείδειου χώρου. Δίνουμε τον ορισμό:

Ορισμός 1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται τοπικά Ευκλείδειος διάστασης n αν για κάθε σημείο του x υπάρχουν ένα ανοιχτό σύνολο U γύρω από αυτό κι ένας ομοιομορφισμός ϕ , από το U προς κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Τότε το ζεύγος $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ καλείται χάρτης, ενώ μεμονωμένα τα U και ϕ ονομάζονται συντεταγμένη περιοχή και συντεταγμένη απεικόνιση αντίστοιχα. Λέμε ότι ο χάρτης έχει κέντρο το $p \in U$ αν $\phi(p) = 0$.

Τα παραπάνω συνδυαστικά οδηγούν στον ορισμό της τοπολογικής πολλαπλότητας.

Ορισμός 2. Μια τοπολογική πολλαπλότητα είναι ένας (τοπολογικός) χώρος με αριθμήσιμη βάση, Hausdorff, και τοπικά Ευκλείδειος. Έχει διάσταση n αν είναι τοπικά Ευκλείδειος διάστασης n .

Παράδειγμα 1. Η πραγματική ευθεία αποτελεί μια τοπολογική πολλαπλότητα. Μάλιστα, με ένα μόνο χάρτη μπορούμε να καλύψουμε ολόκληρη την ευθεία αν επιλέξουμε (\mathbb{R}, id) , όπου $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η ταυτοτική απεικόνιση.

1.2 Συμβατοί Χάρτες και Άτλας

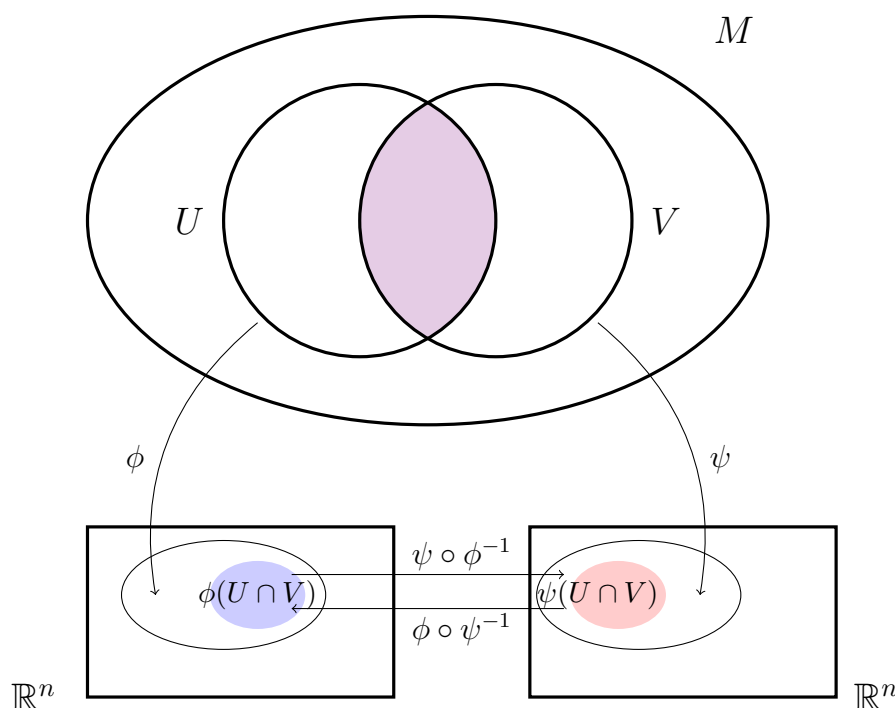
Αν σε μια τοπολογική πολλαπλότητα επιλέξουμε δύο ή περισσότερους χάρτες, αυτοί θα συμπίπτουν πιθανώς σε κάποια περιοχή. Τότε, μέσω των διαφορετικών συντεταγμένων συναρτήσεων προκύπτουν δύο διαφορετικές απεικονίσεις της περιοχής αυτής. Προκειμένου να μην υπάρχουν προβλήματα 'συνεννόησης' θέλουμε να μπορούμε να μεταβούμε από τον ένα χάρτη στον άλλο με λείο τρόπο. Αυτό επιτυγχάνεται με τη συμβατότητα χαρτών.

Ορισμός 3. Δύο χάρτες $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ και $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ μιας τοπολογικής πολλαπλότητας ονομάζονται C^∞ -συμβατοί αν οι απεικονίσεις

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V)$$

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

είναι C^∞ . Οι δύο αυτές συνθέσεις ονομάζονται συναρτήσεις μετάβασης μεταξύ των χαρτών. Αν συμβαίνει η τομή $U \cap V$ να είναι το κενό σύνολο, τότε οι χάρτες θεωρούνται αυτομάτως συμβατοί.



Σχόλιο 1. Η συμβατότητα των χαρτών δεν αποτελεί σχέση ισοδυναμίας, καθώς δεν πληρεί τη μεταβατική ιδιότητα. Πράγματι αν ο χάρτης $X_1 = (U_1, \phi_1)$ είναι συμβατός με τον $X_2 = (U_2, \phi_2)$ και ο τελευταίος είναι συμβατός με τον $X_3 = (U_3, \phi_3)$, τότε δε συμβαίνει απαραίτητα ότι οι X_1 και X_3 είναι συμβατοί μεταξύ τους. Η συνάρτηση μετάβασης

$$\phi_3 \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})$$

είναι μεν λεία, όμως μόνο στην τομή U_{123} , όχι απαραίτητα και στο U_{13} .

Ορισμός 4. Σ'έναν τοπικά Ευκλείδειο χώρο M ονομάζουμε (C^∞) άτλα ένα σύνολο $\mathfrak{A} = \{(U_a, \phi_a)\}$ συμβατών ανά δύο χαρτών, οι οποίοι καλύπτουν το M , δηλαδή $M = \cup_a U_a$.

Λήμμα 1. Ένας χάρτης (V, ψ) είναι συμβατός με κάποιο άτλα (U_a, ϕ_a) ενός τοπικά Ευκλείδειου χώρου αν είναι συμβατός με όλους τους χάρτες του άτλα αυτού. Αν δύο χάρτες (V, ψ) και (W, σ) είναι συμβατοί με τον άτλα θα είναι συμβατοί και μεταξύ τους.

Ορισμός 5. Σ'έναν τοπικά Ευκλείδειο χώρο ονομάζουμε *μεγιστικό άτλα*, τον άτλα που δεν περιέχεται σε κανέναν άλλο.

1.3 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων.

Ορισμός 6. Μια λεία ή C^∞ πολλαπλότητα είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα M , εφοδιασμένη μ' ένα μεγιστικό άτλα. Ο μεγιστικός αυτός άτλας καλείται επίσης και διαφορίσιμη δομή του M . Η πολλαπλότητα λέμε ότι έχει διάσταση n αν όλα τα επιμέρους τμήματα αυτής έχουν διάσταση n . Είναι σύνηθες ν' αναφερόμαστε στις μονοδιάστατες πολλαπλότητες ως καμπύλες και στις διδιάστατες πολλαπλότητες ως επιφάνειες.

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Σ'έναν τοπικά Ευκλείδειο χώρο κάθε άτλας $\mathfrak{A} = \{(U_a, \phi_a)\}$ περιέχεται σ' ένα μοναδικό μεγιστικό άτλα.

Εξαιτίας αυτού στην πράξη, αρκεί να εφοδιάσουμε μια τοπολογική πολλαπλότητα μ' έναν οποιοδήποτε άτλαντα, και όχι κατ' ανάγκη το μεγιστικό, προκειμένου να την μετατρέψουμε σε λεία πολλαπλότητα.

Έτσι, για να αποφανθούμε ότι ένας τοπολογικός χώρος M συνιστά C^∞ πολλαπλότητα, αρκεί τελικά να ελέγξουμε τα εξής:

- ο M είναι Hausdorff και η τοπολογία του έχει μια αριθμήσιμη βάση.
- ο M έχει έναν (οποιοδήποτε) λείο άτλα.

Σχόλιο 2. Στη συνέχεια, και καθόλη την έκταση αυτής της εργασίας, όταν αναφέρουμε τον όρο πολλαπλότητα θα εννοούμε μια λεία πολλαπλότητα.

Παράδειγμα 2. Ο Ευκλείδειος χώρος \mathbb{R}^n είναι μια λεία πολλαπλότητα της οποίας ο άτλας αποτελείται από έναν μόνο χάρτη, τον $(\mathbb{R}^n, Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$.

1.4 Η σφαίρα

Μια περίπτωση πολλαπλότητας την οποία οι περισσότεροι έχουμε συναντήσει κάποια στιγμή είναι αυτή της σφαίρας S^2 . Ειδικότερα, όταν η σφαίρα αυτή είναι η υδρόγειος, η απεικόνιση της κατά τόπους σε επίπεδους συντεταγμένους χάρτες, βασίζεται ακριβώς στην ιδιότητα της μαθηματικής σφαίρας να αποτελεί λεία πολλαπλότητα. Σημειώνουμε επίσης το γεγονός ότι οι χάρτες αυτοί πρέπει να συμφωνούν μεταξύ τους στις κοινές περιοχές, ενώ το σύνολο των χαρτών που περιγράφουν την υδρόγειο ονομάζεται άτλας. Στη συνέχεια παραθέτουμε μια

απόδειξη για το ότι η μαθηματική σφαίρα αποτελεί πολλαπλότητα.

Θα ασχοληθούμε αρχικά με τη 2-διάστατη μοναδιαία σφαίρα

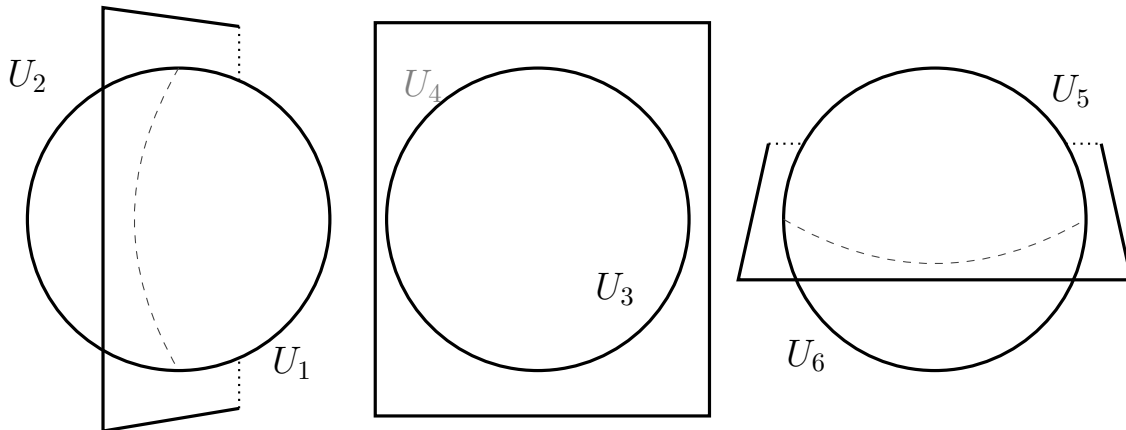
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Ως υπόχωρος του \mathbb{R}^3 ο χώρος αυτός είναι Hausdorff και η τοπολογία του έχει μια αριθμήσιμη βάση.

Μένει να εφοδιάσουμε την S^2 μ' έναν άτλα. Θα χρησιμοποιήσουμε τους εξής έξι χάρτες:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x > 0\}, & \phi_1(x, y, z) &= (y, z) \\ U_2 &= \{(x, y, z) \in S^2 : x < 0\}, & \phi_2(x, y, z) &= (y, z) \\ U_3 &= \{(x, y, z) \in S^2 : y > 0\}, & \phi_3(x, y, z) &= (x, z) \\ U_4 &= \{(x, y, z) \in S^2 : y < 0\}, & \phi_4(x, y, z) &= (x, z) \\ U_5 &= \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\}, & \phi_5(x, y, z) &= (x, y) \\ U_6 &= \{(x, y, z) \in S^2 : z < 0\}, & \phi_6(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

Δηλαδή το αριστερά και δεξιά ημισφαίριο, το μπροστά και πίσω ημισφαίριο και τα πάνω και κάτω, μαζί με τις προβολές αυτών στο ενδιάμεσο κάθε φορά επίπεδο. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\phi_1(x, y, z) = (y, z)$ είναι συνεχής και αντιστρέψιμη στο πεδίο ορισμού της με αντίστροφη την $\phi_1^{-1}(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$. Η τελευταία είναι επίσης συνεχής. Με άλλα λόγια, η ϕ_1 είναι ομοιομορφισμός όπως ομοιομορφισμοί είναι και οι υπόλοιπες πέντε συναρτήσεις.



Για να βεβαιωθούμε ότι οι χάρτες αυτοί αποτελούν έναν άτλα μένει να δείξουμε ότι είναι συμβατοί μεταξύ τους. Θα ελέγξουμε πρώτα την περίπτωση (U_1, ϕ_1) και (U_4, ϕ_4) . Ισχύουν τα αντίστοιχα και για τους άλλους συνδυασμούς. Οι χάρτες αυτοί συμπίπτουν στην περιοχή $U_{14} := U_1 \cap U_4$. Θέλουμε οι συνθέσεις

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1}, \quad \phi_4 \circ \phi_1^{-1}$$

στα χωρία $\phi_4(U_{14}) = \{(x, z) : x^2 + z^2 < 1, x > 0\}$ και $\phi_1(U_{14}) = \{(y, z) : y^2 + z^2 < 1, y < 0\}$ αντίστοιχα να είναι C^∞ .

Έχουμε

$$\phi_1 \circ \phi_4^{-1}(x, z) = (-\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$$

Για την πρώτη συντεταγμένη παραγωγίζοντας ως προς x μια φορά παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{1 - x^2 - z^2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - z^2}} (-2x)$$

η οποία δεν απειρίζεται πουθενά στο $\phi_4(U_{14})$, αφού $x^2 + z^2 < 1$. Ως εκ τούτου και οι επόμενες παράγωγοι θα είναι πάλι λείες. Παρόμοια και για την παραγωγή ως προς z . Η δεύτερη συντεταγμένη της $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση κι επομένως είναι πάντα λεία. Αφού έχει και τις δύο συντεταγμένες της να είναι λείες, η $\phi_1 \circ \phi_4^{-1}$ είναι και η ίδια μια λεία συνάρτηση. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η $\phi_4 \circ \phi_1^{-1}$ είναι C^∞ .

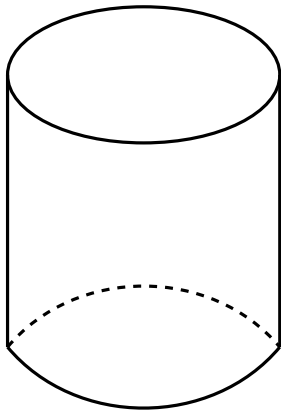
Κάποια ακόμα παραδείγματα πολλαπλοτήτων είναι τα παρακάτω:

Παράδειγμα 3. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ένα ανοιχτό υποσύνολο μιας πολλαπλότητας είναι και το ίδιο πολλαπλότητα. Βασίζόμενοι σ' αυτό, μπορούμε ν' αποδείξουμε και ότι το σύνολο $GL(n, \mathbb{R})$ όλων των τετράγωνων πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{R} που έχουν μη μηδενική ορίζουσα αποτελεί πολλαπλότητα. Θεωρούμε αρχικά το χώρο $\mathbb{R}^{m \times n}$ όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Ο χώρος αυτός είναι ισόμορφος με το \mathbb{R}^{mn} κι επομένως κληρονομεί την τοπολογία του. Για το $GL(n, \mathbb{R})$ έχουμε:

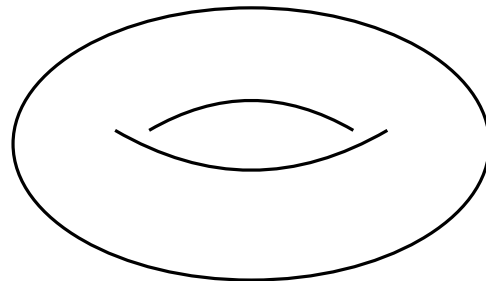
$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$$

Όμως η διακρίνουσα \det είναι συνεχής συνάρτηση, επομένως το $GL(n, \mathbb{R})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n \times n}$ και άρα πολλαπλότητα.

Παράδειγμα 4. Συμβαίνει ακόμα το εξωτερικό γινόμενο δύο πολλαπλοτήτων να είναι πολλαπλότητα. Έτσι έχουμε ότι ο άπειρος κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ είναι πολλαπλότητα, όπως επίσης και ο τόρος $S^1 \times S^1$.



$S^1 \times \mathbb{R}$



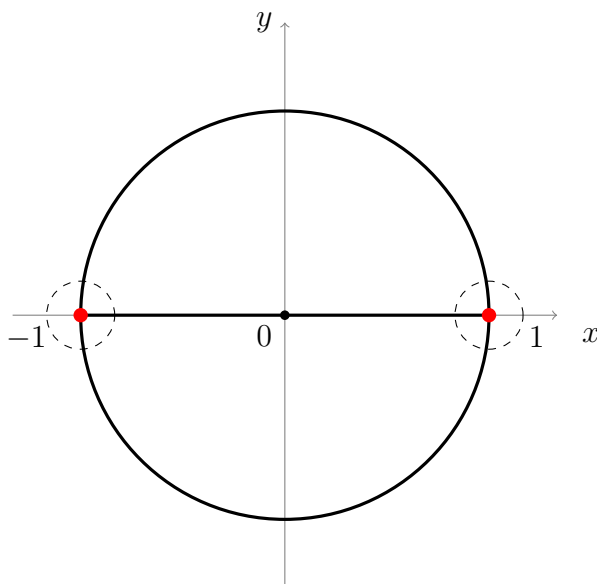
$S^1 \times S^1$

Παράδειγμα 5. Για να γίνει πιο ξεκάθαρος ο χαρακτήρας μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας, παρουσιάζουμε και το παράδειγμα ενός χώρου που δεν είναι τέτοια.

Το σύνολο

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$$

δεν αποτελεί πολλαπλότητα καθώς δεν είναι χώρος τοπικά Ευκλείδειος.



Πράγματι, για τα σημεία $(-1, 0)$ και $(1, 0)$ σύμφωνα με την επαγόμενη τοπολογία του \mathbb{R}^2 , οποιαδήποτε ανοιχτή περιοχή γύρω από αυτά αποτελείται ένα κυκλικό τμήμα, υποσύνολο του κύκλου, κι ένα ευθύγραμμο τμήμα, υποσύνολο του τμήματος $-1 \leq x \leq 1, y = 0$. Γίνεται έτσι φανερό ότι μια τέτοια περιοχή δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη με ανοιχτή περιοχή του \mathbb{R}^n .

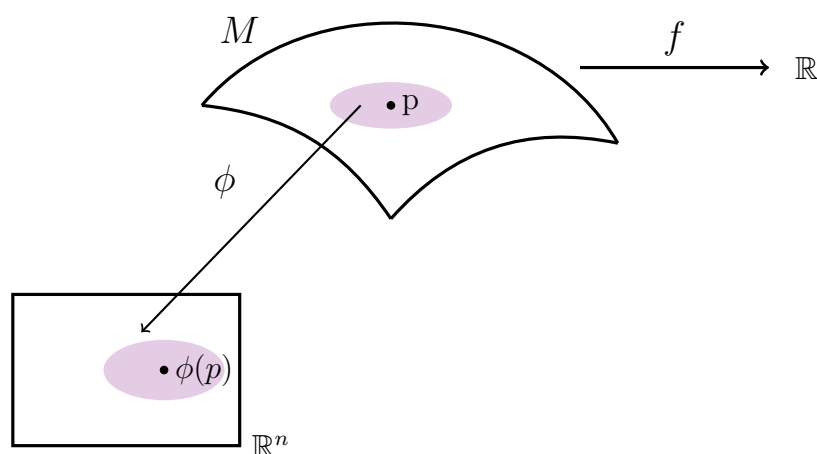
Κεφάλαιο 2

Λείες Απεικονίσεις σε Πολλαπλότητες

Το επόμενο που μας ενδιαφέρει είναι να εισάγουμε συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σε πολλαπλότητες. Μάλιστα μέσω των χαρτών μπορούμε να μεταφέρουμε την έννοια της λείας απεικόνισης από τους Ευκλείδειους χώρους στις πολλαπλότητες.

2.1 Πραγματικές Συναρτήσεις σε Πολλαπλότητες

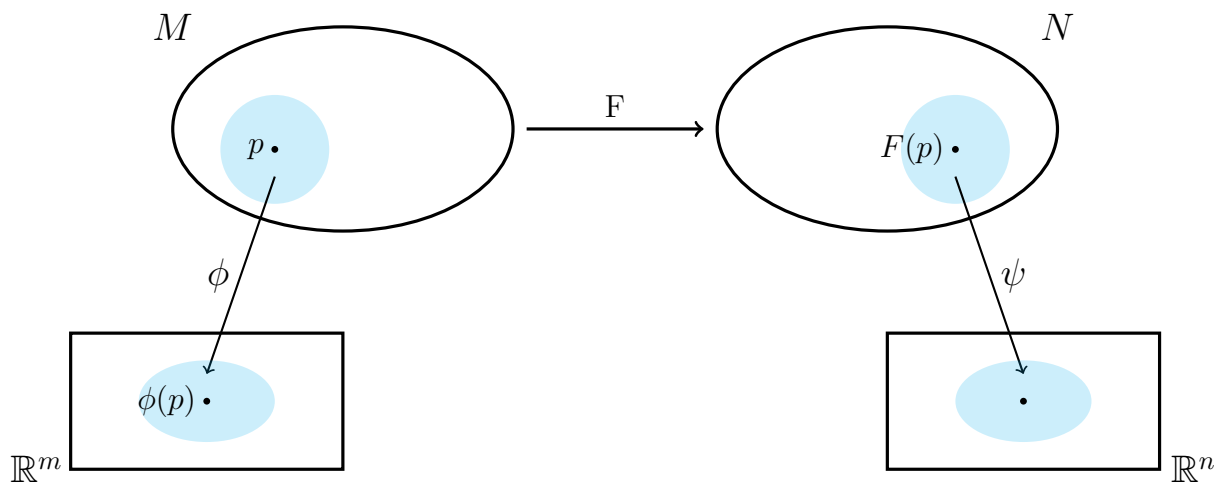
Ορισμός 7. Μια πραγματική απεικόνιση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη πάνω σε μια πολλαπλότητα M διάστασης n ονομάζεται λεία ή C^∞ σε κάποιο σημείο $p \in M$ αν για κάποιο χάρτη (U, ϕ) γύρω από το p η σύνθεσή της $f \circ \phi^{-1}$ με τη συντεταγμένη συνάρτηση ϕ , η οποία ορίζεται στο $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, είναι λεία στο $\phi(p)$. Η f λέμε ότι είναι C^∞ στο M αν είναι C^∞ σε κάθε σημείο του M .



Σχόλιο 3. Το αν μια συνάρτηση f είναι λεία σε κάποιο σημείο είναι ανεξάρτητο της επιλογής των χαρτών.

2.2 Συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων

Ορισμός 8. Μια συνεχής απεικόνιση $F : M \rightarrow N$ από μια πολλαπλότητα M διάστασης m σε μια πολλαπλότητα N διάστασης n ονομάζεται λεία ή C^∞ σε κάποιο σημείο p του M , αν υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) γύρω από το p και (V, ψ) γύρω από το $F(p)$ έτσι ώστε η σύνθεση $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ να είναι C^∞ στο $\phi(p)$. Η απεικόνιση $F : M \rightarrow N$ λέμε ότι είναι C^∞ στο M αν είναι C^∞ σε κάθε σημείο του M .



Παρατηρήσεις

Έχοντας αυτά υπόψιν προκύπτει ότι η απεικόνιση συντεταγμένων ενός χάρτη σε μία πολλαπλότητα είναι κάτι περισσότερο από απλό ομοιομορφισμό και αποτελεί αμφιδιαφορία. Αυτό σημαίνει ότι αν (U, ϕ) κάποιος χάρτης μιας πολλαπλότητας M διάστασης n , η συνάρτηση $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ καθώς και η αντίστροφή της δεν είναι μόνο συνεχείς, αλλά είναι επιπλέον άπειρες φορές παραγωγίσιμες.

Πράγματι, αν αντιμετωπίσουμε την περιοχή U ως ανεξάρτητη πολλαπλότητα με άτλα το χάρτη (U, ϕ) , η εικόνα της $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ είναι επίσης πολλαπλότητα που μπορεί να καλυφθεί από τον $\{(\phi(U), Id)\}$. Με απλή εφαρμογή στον τελευταίο ορισμό έχουμε ότι η ϕ είναι λεία σε κάποιο σημείο αν η $Id \circ \phi \circ \phi^{-1}$ είναι C^∞ στο σημείο αυτό. Όμως η τελευταία είναι η ταυτοτική απεικόνιση και επομένως είναι C^∞ σε κάθε σημείο. Αντίστοιχα προκύπτει το συμπέρασμα και για την ϕ^{-1} .

Στην ανάποδη κατεύθυνση αν U ένα ανοιχτό υποσύνολο μιας πολλαπλότητας M διάστασης n και $F : U \rightarrow F(U) \subset \mathbb{R}^n$ αμφιδιαφορία, τότε το ζεύγος (U, F) συνιστά χάρτη στη διαφορίσιμη δομή του M . Αυτό γίνεται ξεκάθαρο αν παρατηρήσουμε ότι αν (U_a, ϕ_a) ο μεγιστικός άτλας, ο χάρτης (U, F) είναι συμβατός με τον άτλα αφού οι F, ϕ_a είναι αμφιδιαφορίσιμες.

2.3 Μερικές Παράγωγοι

Δοσμένης μιας λείας συνάρτησης f σε μια πολλαπλότητα M μπορούμε να ορίσουμε τις μερικές παραγώγους της χρησιμοποιώντας τους χάρτες. Συγκεκριμένα, αν (U, ϕ) χάρτης της M παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ θα έχει τη μορφή $\phi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Η μερική παράγωγος λοιπόν θα εκφράζει πόσο μεταβάλλεται η f ως προς κάθε μία από τις επιβαλλόμενες συντεταγμένες. Αν τώρα στο \mathbb{R}^n συμβολίσουμε τις συνήθεις συντεταγμένες ως r^1, r^2, \dots, r^n , ορίζουμε τη μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ σε κάποιο σημείο $p \in U$ ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f := \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)) := \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1})$$

Η συνάρτηση $f \circ \phi^{-1}$ είναι τώρα ορισμένη στο \mathbb{R}^n και μπορούμε να εκλάβουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)}$ με τη συνήθη έννοια.

Έχουμε ακόμα την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2. Αν $(U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ ένα σύστημα συντεταγμένων σε μια πολλαπλότητα, ισχύει $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$.
(Ακριβώς όπως και στους Ευκλείδειους χώρους)

Απόδειξη. Από τον ορισμό των μερικών παραγώγων έχουμε:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial (x^i \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial (r^i \circ \phi \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\phi(p)) = \delta_j^i$$

□

Ορισμός 9. Ας είναι $F : N \rightarrow M$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων και $(U, \phi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$, $(V, \psi) = (V, y^1, y^2, \dots, y^n)$ δύο συστήματα συντεταγμένων στα N και M αντίστοιχα, με $F(U) \subset V$. Συμβολίζουμε

$$F^i := y^i \circ F = r^i \circ \psi \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}$$

την i -συντεταγμένη της F στο χάρτη (V, ψ) . Τότε ο πίνακας $[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}]$ καλείται Ιακωβανός πίνακας της F ως προς τους χάρτες (U, ϕ) και (V, ψ) . Στην περίπτωση που οι N και M έχουν την ίδια διάσταση, η ορίζουσα $\det[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}]$ καλείται Ιακωβιανή ορίζουσα της F ως προς αυτούς τους χάρτες. Η Ιακωβιανή ορίζουσα συναντάται επίσης και στη μορφή $\frac{\partial (F^1, \dots, F^n)}{\partial (x^1, \dots, x^n)}$.

2.4 Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης

Και πάλι από την αντίστοιχη ιδιότητα για τους Ευκλείδειους χώρους προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1. Έστω $F : N \rightarrow M$ λεία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων ίδιας διάστασης και p σημείο του N . Υποθέτουμε ότι υπάρχουν συστήματα συντεταγμένων $(U, \phi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ γύρω από το p και $(V, \psi) = (V, y^1, y^2, \dots, y^n)$ γύρω από το $F(p)$ τέτοια ώστε $F(U) \subset V$. Θέτουμε $F^i = y^i \circ F$. Η $F(p)$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη στο p αν και μόνο αν η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}]$ είναι μη μηδενική στο p .

Συνήθως χρησιμοποιούμε το θεώρημα στην παρακάτω μορφή:

Πόρισμα 1. *Ας είναι N μία πολλαπλότητα διάστασης n . Ένα σύνολο από n C^∞ - απεικονίσεις F^1, \dots, F^n ορισμένες σ'ένα χάρτη (U, x^1, \dots, x^n) ενός σημείου $p \in N$ αποτελούν σύστημα συντεταγμένων στο p αν και μόνο αν η Ιακωβιανή ορίζουσα $\det\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$ είναι μη μηδενική.*

Παράδειγμα 6. Έστω η συνάρτηση $F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1, y)$, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η F μπορεί να χρησιμεύσει ως απεικόνιση συντεταγμένων σε κάποια περιοχή του p , αν και μόνο αν είναι μια τοπική αμφιδιαφόριση στο p . Η Ιακωβιανή ορίζουσα της F είναι

$$\frac{\partial(F^1, F^2)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2x$$

Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης, η F είναι τοπική αμφιδιαφόριση στο p αν και μόνο αν η ορίζουσα αυτή είναι μη μηδενική, δηλαδή $x \neq 0$. Τελικά η F μπορεί να λειτουργήσει ως σύστημα συντεταγμένων για οποιοδήποτε σημείο δεν ανήκει στον άξονα των y .

Κεφάλαιο 3

Πολλαπλότητες Πηλίκο και Ο Πραγματικός Προβολικός Χώρος

3.1 Ο χώρος πηλίκο

Ως σχέση ισοδυναμίας πάνω σε ένα σύνολο S ορίζουμε μια διμερή σχέση η οποία έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- $x \sim x$
- Αν $x \sim y$, τότε και $y \sim x$
- Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε και $x \sim z$

όπου $x, y, z \in S$.

Ορισμένης μιας τέτοιας σχέσης το σύνολο S διασπάται σε ξένα μεταξύ τους τμήματα, καθένα από τα οποία περιέχει ισοδύναμα στοιχεία. Τα τμήματα αυτά ονομάζονται κλάσεις ισοδυναμίας. Μια κλάση ισοδυναμίας ενός σημείου $x \in S$ συμβολίζεται $[x]$. Όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας μαζί φτιάχνουν ένα καινούργιο σύνολο το οποίο ονομάζουμε σύνολο πηλίκο και συμβολίζουμε S/\sim . Είναι εύκολο τώρα να ορίσουμε και μια απεικόνιση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$ από το αρχικό σύνολο S στο σύνολο πηλίκο S/\sim , η οποία στέλνει ένα σημείο x του S στην αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας $[x]$.

Αν επιπλέον συμβαίνει ο S να είναι τοπολογικός χώρος, μπορούμε να δώσουμε και στο σύνολο πηλίκο S/\sim μια τοπολογία με τον εξής τρόπο: ένα σύνολο U του S/\sim θα θεωρείται ανοιχτό αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα του μέσω της συνάρτησης προβολής, $\pi^{-1}(U)$, είναι ανοιχτό σύνολο στο S . Το κενό σύνολο \emptyset και ολόκληρο το σύνολο πηλίκο S/\sim είναι πάντα ανοιχτά. Επίσης, εφόσον

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_a U_a\right) = \bigcup_a \pi^{-1}(U_a)$$

$$\pi^{-1}\left(\bigcap_i U_i\right) = \bigcap_i \pi^{-1}(U_i)$$

η άπειρη ένωση ανοιχτών συνόλων στο S/\sim θα είναι κλειστό σύνολο, όπως κλειστό είναι και κάθε πεπερασμένη τομή αυτών. Άρα η συλλογή όλων των ανοιχτών συνόλων συνιστά μια τοπολογία, η οποία ονομάζεται τοπολογία πηλίκο στο S/\sim . Ο S/\sim είναι τώρα τοπολογικός χώρος και ονομάζεται χώρος πηλίκο του S από τη σχέση ισοδυναμίας \sim . Άμεση συνέπεια είναι επίσης ότι η απεικόνιση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$ θα είναι συνεχής, καθώς για κάθε ανοιχτό σύνολο στο S/\sim αντίστροφη εικόνα του είναι εξορισμού ανοιχτό σύνολο στο S .

3.2 Συναρτήσεις σε χώρους πηλίκια

Έστω λοιπόν μια σχέση ισοδυναμίας \sim ορισμένη σε έναν τοπολογικό χώρο S . Ο S/\sim μπορεί να εφοδιαστεί με την τοπολογία πηλίκιο. Αν $f : S \rightarrow Y$ μια συνάρτηση μεταξύ τοπολογικών χώρων με την ιδιότητα να είναι συνεχής σε κάθε κλάση ισοδυναμίας, τότε ορίζεται και μια απεικόνιση $\bar{f} : S/\sim \rightarrow Y$, τέτοια ώστε

$$\bar{f}([p]) = f(p), \quad \text{για } p \in S.$$

Η σύνδεση αυτών των συναρτήσεων μπορεί να φανεί και από το παρακάτω σχήμα:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ S/\sim & & \end{array}$$

Πρόταση 3. Η επαγόμενη απεικόνιση $\bar{f} : S/\sim \rightarrow Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η απεικόνιση $f : S \rightarrow Y$ είναι συνεχής.

Η τελευταία πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη προκειμένου να ελέγχουμε πότε μια απεικόνιση \bar{f} ορισμένη σ' ένα χώρο πηλίκιο S/\sim είναι συνεχής: αρκεί να ελέγξουμε τη συνέχεια της $f = \bar{f} \circ \pi$ στο S .

3.3 Πότε ένα σύνολο πηλίκιο είναι Hausdorff κι έχει αριθμήσιμη βάση

Αναγκαία συνθήκη για ένα Hausdorff σύνολο πηλίκιο

Οι ιδιότητες της αριθμήσιμης βάσης και του χώρου Hausdorff εν γένει δεν διατηρούνται στους χώρους πηλίκια. Αν υποθέσουμε ότι ο χώρος πηλίκιο είναι όντως Hausdorff, τότε αφού κάθε μονοσύνολο στους χώρους Hausdorff είναι κλειστό σύνολο, για κάθε $p \in S$ θα πρέπει η κλάση ισοδυναμίας $[p]$ να είναι κλειστό σύνολο στο S/\sim . Αν $\pi : S \rightarrow S/\sim$ η συνάρτηση προβολής, επειδή αυτή είναι συνεχής, η αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}([p]) = [p]$ είναι επίσης κλειστό σύνολο στο S . Το γεγονός αυτό προσφέρει μια αναγκαία συνθήκη για να είναι Hausdorff ένας χώρος πηλίκιο.

Πρόταση 4. Αν ο χώρος πηλίκιο S/\sim είναι Hausdorff, τότε η κλάση ισοδυναμίας $[p]$ κάθε σημείου p στο S είναι κλειστό σύνολο στο S .

Επαρκείς συνθήκες για ένα Hausdorff σύνολο πηλίκιο με αριθμήσιμη βάση

Σημαντικό ρόλο στα επόμενα έχει η ιδιότητα της συνάρτησης προβολής να είναι ανοικτή ή όχι. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση τοπολογικών χώρων $f : X \rightarrow Y$ θεωρείται ανοικτή αν μεταφέρει ανοικτά σύνολα του X σε ανοικτά σύνολα στο Y .

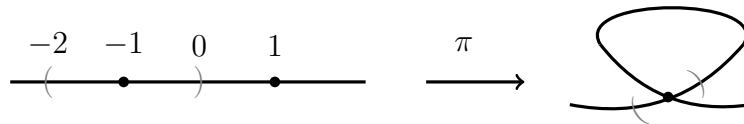
Ορισμός 10. Μια σχέση ισοδυναμίας \sim σ' έναν τοπολογικό χώρο S είναι ανοιχτή σχέση ισοδυναμίας αν η αντίστοιχη συνάρτηση προβολής $\pi : S \rightarrow S/\sim$ είναι ανοιχτή.

Με άλλα λόγια, αν U ένα ανοιχτό σύνολο του S θα πρέπει η εικόνα του $\pi(U)$ να είναι ανοιχτό σύνολο στο S/\sim . Σύμφωνα με τον ορισμό της τοπολογίας του χώρου πηλίκου αυτό συμβαίνει όταν το σύνολο

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{x \in U} [x]$$

είναι ανοιχτό.

Παράδειγμα 7. Η συνάρτηση προβολής σε έναν χώρο πηλίκου δεν είναι πάντα ανοιχτή συνάρτηση. Για παράδειγμα, στην πραγματική ευθεία θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας \sim που ταυτοποιεί τα σημεία -1 και 1 με $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ τη συνάρτηση προβολής



Για να είναι η απεικόνιση π ανοιχτή πρέπει για κάθε ανοιχτό σύνολο V του \mathbb{R} , η εικόνα $\pi(V)$ να είναι επίσης ανοιχτό σύνολο στο \mathbb{R}/\sim . Δηλαδή πρέπει $\pi^{-1}(\pi(V))$ να είναι ανοιχτό στο \mathbb{R} . Αν είναι V το ανοιχτό διάστημα $(-2, 0)$, τότε

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = (-2, 0) \cup \{1\},$$

που όμως δεν είναι ανοιχτό στο \mathbb{R} . Έπεται ότι η συνάρτηση προβολής $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ δεν είναι μια ανοιχτή απεικόνιση.

Δοθείσας μιας σχέσης ισοδυναμίας \sim στο S , μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα το σύνολο R που περιγράφεται από την παρακάτω σχέση:

$$R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \sim y\}.$$

Ονομάζουμε το R γράφημα της σχέσης ισοδυναμίας \sim .

Θεώρημα 2. Υποθέτουμε ότι \sim είναι μια ανοιχτή σχέση ισοδυναμίας σε έναν τοπολογικό χώρο S . Τότε ο χώρος πηλίκου S/\sim είναι Hausdorff αν και μόνο αν το γράφημα R της \sim είναι κλειστό στο $S \times S$.

Θεώρημα 3. Αν \sim είναι μια ανοιχτή σχέση ισοδυναμίας σε ένα χώρο S που έχει μια αριθμήσιμη βάση, τότε ο χώρος πηλίκου S/\sim έχει και αυτός αριθμήσιμη βάση.

3.4 Πραγματικός Προβολικός Χώρος

Στο $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim y \iff \exists t \neq 0 \text{ τέτοιο ώστε } y = tx \text{ για κάποιο μη μηδενικό πραγματικό αριθμό } t,$$

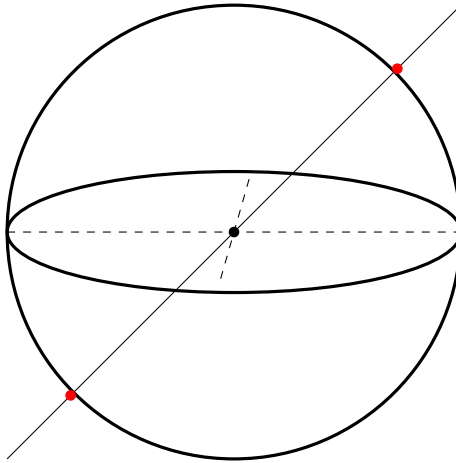
όπου $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

Δηλαδή δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ θα είναι ισοδύναμα όταν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Ο χώρος πηλίκου $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ που προκύπτει από αυτή τη σχέση ισοδυναμίας είναι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$. Αν (a^0, \dots, a^n) ένα σημείο του $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του με $[a^0, \dots, a^n]$ και έχουμε $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ τη συνάρτηση προβολής. Ονομάζουμε τις κλάσεις $[a^0, \dots, a^n]$ ομογενείς συντεταγμένες στο $\mathbb{R}P^n$.

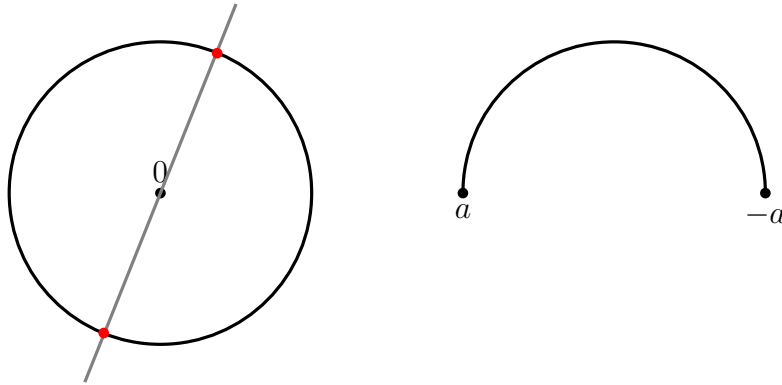
Από γεωμετρικής άποψης, σύμφωνα με τα παραπάνω δύο μη μηδενικά σημεία του \mathbb{R}^{n+1} είναι ισοδύναμα όταν και μόνον όταν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, η οποία πρέπει να είναι τέτοια ώστε να περνάει από την αρχή 0. Έτσι ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ μπορεί να ερμηνευτεί ως το σύνολο, του οποίου τα στοιχεία είναι όλες οι ευθείες που περνάνε από την αρχή του \mathbb{R}^{n+1} . Παρατηρούμε ότι κάθε τέτοια ευθεία τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα S^n σε δύο σημεία αντιδιαμετρικά μεταξύ τους, και αντίστροφα, κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων στην S^n ορίζει μια μοναδική ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αυτό μας δίνει την αφορμή να ορίσουμε ως ισοδύναμα δύο σημεία της S^n που είναι αντιδιαμετρικά:

$$x \sim y \iff x = \pm y, \quad x, y \in S^n.$$

Προκύπτει έτσι μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση $\mathbb{R}P^n \leftrightarrow S^n / \sim$.



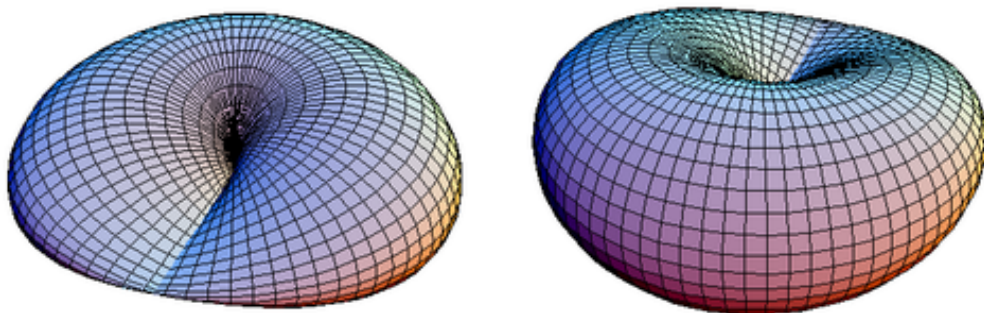
Παράδειγμα 8 (Η πραγματική προβολική ευθεία). Στην περίπτωση που $n = 1$ ο χώρος που προκύπτει από την πιο πάνω σχέση ισοδυναμίας είναι η πραγματική προβολική ευθεία. Όμοια με τη γενική περίπτωση, κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή στο \mathbb{R}^2 θα τέμνει το μοναδιαίο κύκλο σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία του και ο $\mathbb{R}P^1$ είναι ομοιόμορφος με το χώρο πηλίκου S^1 / \sim . Στη συγκεκριμένη περίπτωση της μιας διάστασης όμως ο χώρος πηλίκου S^1 / \sim , ο οποίος είναι ο μοναδιαίος κύκλος με ταυτοποιημένα τα σημεία που είναι αντιδιαμετρικά, είναι ομοιόμορφος με το κλειστό άνω ημισφαίριο του οποίου έχουμε 'κολλήσει' τα δύο άκρα καθώς αυτά είναι ισοδύναμα. Με άλλα λόγια ο S^1 / \sim είναι ομοιόμορφος με την ίδια τη σφαίρα S^1 . Τελικά, ο $\mathbb{R}P^1$ είναι ομοιόμορφος με το S^1 .



Παράδειγμα 9 (Το πραγματικό προβολικό επίπεδο). Στην περίπτωση που $n = 2$ ο χώρος πηλίκου $\mathbb{R}P^2$ που προκύπτει από την ισοδυναμία σημείων που βρίσκονται στην ίδια διερχόμενη από την αρχή ευθεία, ονομάζεται πραγματικό προβολικό επίπεδο. Προσπαθώντας να οπτικοποιήσουμε το χώρο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής: Ισχύει ότι

$$\mathbb{R}P^2 \cong S^2 / \{\text{αντιδιαμετρικά σημεία}\} = S^2 / \sim .$$

κι επομένως ο $\mathbb{R}P^2$ είναι ο ομοιόμορφος με τη διδιάστατη σφαίρα στην οποία ορίστηκε τα αντιδιαμετρικά σημεία να είναι μεταξύ τους ισοδύναμα. Αυτό σημαίνει ότι για τα σημεία της σφαίρας που δε βρίσκονται πάνω στον ισημερινό, κάθε ζεύγος τέτοιων σημείων έχει ένα από τα σημεία του στο πάνω ημισφαίριο. Έτσι υπάρχει μια αμφιμονότιμη και επί συνάρτηση μεταξύ του S^2 / \sim και του χώρου πηλίκου που προκύπτει αν στο κλειστό άνω ημισφαίριο θεωρήσουμε ταυτόσημα δύο αντιδιαμετρικά σημεία του ισημερινού. Η συνάρτηση αυτή συμβαίνει να είναι ομοιομορφισμός και τελικά το άνω ημισφαίριο με ταυτοποιημένα τα σημεία του ισημερινού είναι ομοιόμορφο με το $\mathbb{R}P^2$.



Η σχέση ισοδυναμίας \sim στο $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ όπως αυτή ορίστηκε πιο πάνω είναι μια ανοιχτή σχέση ισοδυναμίας κι αυτό μας βοηθάει να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πόρισμα 2. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ έχει μια αριθμήσιμη βάση.

Πόρισμα 3. Ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ είναι Hausdorff .

3.5 Ο Κανονικός C^∞ Άτλας σ' έναν Πραγματικό Προβολικό Χώρο

Ο πραγματικός προβολικός χώρος αποτελεί πολλαπλότητα κι έχοντας στη διάθεσή μας τα τελευταία δύο πορίσματα για να το αποδείξουμε χρειάζεται ακόμα μόνο να βρούμε έναν άτλα.

Ας είναι $[a^0, \dots, a^n]$ οι ομογενείς συντεταγμένες στον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^n$. Μπορούμε να ορίσουμε μια συνθήκη $a^0 \neq 0$, η οποία δεν επηρεάζεται από τους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας που επιλέγουμε κάθε φορά, και να σχηματίσουμε έτσι το σύνολο

$$U_0 := \{[a^0, \dots, a^n] \in \mathbb{R}P^n \mid a^0 \neq 0\}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, για κάθε $i = 1, \dots, n$, σχηματίζουμε τα

$$U_i := \{[a^0, \dots, a^n] \in \mathbb{R}P^n \mid a^i \neq 0\}.$$

Στο σύνολο U_0 μπορούμε ακόμα να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ [a^0, \dots, a^n] &\mapsto \left(\frac{a^1}{a^0}, \dots, \frac{a^n}{a^0}\right). \end{aligned}$$

Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής και αντιστρέψιμη, με αντίστροφη την

$$(b^1, \dots, b^n) \mapsto [1, b^1, \dots, b^n]$$

που είναι επίσης συνεχής. Επομένως η ϕ_0 αποτελεί ισομορφισμό. Όμοια, ορίζονται ομοιομορφισμοί για κάθε $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \phi_i : U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ [a^0, \dots, a^n] &\mapsto \left(\frac{a^0}{a^i}, \dots, \frac{\hat{a}^i}{a^i}, \dots, \frac{a^n}{a^i}\right), \end{aligned}$$

με το σύμβολο $\hat{}$ να υποδεικνύει ότι αυτός ο όρος παραλείπεται. Έχουμε λοιπόν ότι τα ζεύγη (U_i, ϕ_i) είναι χάρτες για το $\mathbb{R}P^n$.

Πρέπει επιπλέον αυτοί οι χάρτες να είναι συμβατοί μεταξύ τους. Στην τομή $U_0 \cap U_1$, θα ισχύει $a^0 \neq 0$ και $a^1 \neq 0$, κι έτσι υπάρχουν δύο συστήματα συντεταγμένων

$$\begin{array}{ccc} & [a^0, a^1, a^2, \dots, a^n] & \\ \phi_0 \swarrow & & \searrow \phi_1 \\ \left(\frac{a^0}{a^1}, \frac{a^2}{a^1}, \dots, \frac{a^n}{a^1}\right) & & \left(\frac{a^1}{a^0}, \frac{a^2}{a^0}, \dots, \frac{a^n}{a^0}\right) \end{array}$$

Για ευκολία αναφερόμαστε στις συντεταγμένες συναρτήσεις του U_0 ως x^1, \dots, x^n και σε αυτές του U_1 ως y^1, \dots, y^n . Έχουμε ότι στο U_0 ,

$$x^i = \frac{a^i}{a^0}, \quad i = 1, \dots, n$$

και στο U_1

$$y^1 = \frac{a^0}{a^1}, y^2 = \frac{a^2}{a^1}, \dots, y^n = \frac{a^n}{a^1}.$$

Τότε στο $U_0 \cap U_1$,

$$y^1 = \frac{1}{x^1}, y^2 = \frac{x^2}{x^1}, y^3 = \frac{x^3}{x^1}, \dots, y^n = \frac{x^n}{x^1},$$

ώστε

$$(\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(x) = \left(\frac{1}{x^1}, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \dots, \frac{x^n}{x^1} \right).$$

Η τελευταία είναι μια λεία απεικόνιση καθώς $x^1 \neq 0$ στο $\phi_0(U_0 \cap U_1)$. Στα υπόλοιπα σύνολα $U_i \cap U_j$ ισχύουν τα αντίστοιχα. Τελικά, η συλλογή $\{(U_i, \phi_i)\}_{i=1, \dots, n}$ είναι όντως ένας C^∞ άτλας για το $\mathbb{R}P^n$, ο οποίος ονομάζεται κανονικός άτλας.

3.6 Ένας Άτλας για την Πολλαπλότητα Grassmann

Θα δούμε αναλυτικά ένα ακόμα παράδειγμα πολλαπλότητας, αυτό της πολλαπλότητας Grassmann η οποία εμφανίζεται συχνά στις εφαρμογές όπως για παράδειγμα σε προβλήματα μηχανικής οπτικής όπου στόχος είναι να μπορέσει ένας υπολογιστής ν' αναγνωρίσει και να ξεχωρίσει διάφορα οπτικά ερεθίσματα. Ο πραγματικός προβολικός χώρος που αναφέρθηκε προηγούμενως αποτελεί ειδική περίπτωση της πολλαπλότητας Grassmann, με $\mathbb{R}P^n = G(1, n)$.

Η πολλαπλότητα Grassmann $G(k, n)$ είναι το σύνολο με στοιχεία του όλους τους υπόχωρους διάστασης k που περιέχουν την αρχή 0 του \mathbb{R}^n . Οι υπόχωροι αυτοί είναι διανυσματικοί υπόχωροι του \mathbb{R}^n κι επομένως καθένας παράγεται από μια βάση που αποτελείται από k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{R}^n , ας τα συμβολίσουμε με a_1, \dots, a_k . Υπάρχει έτσι κάθε φορά ένας $n \times k$ πίνακας $A = [a_1 \cdots a_k]$ βαθμίδας k , αφού τα a_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ο οποίος να περιγράφει πλήρως τον εκάστοτε υπόχωρο. Ο πίνακας αυτός καλείται πίνακας αναπαράστασης του k -επιπέδου, όπου το k -επίπεδο είναι ο διανυσματικός υπόχωρος διάστασης k .

Μπορούμε ωστόσο να βρούμε δύο διαφορετικές βάσεις που να ορίζουν τον ίδιο υπόχωρο, όπου όμως θα επιτρέπεται να μεταβούμε από τη μία βάση στην άλλη. Πιο συγκεκριμένα, αν a_1, \dots, a_k και b_1, \dots, b_k δύο διαφορετικές βάσεις για κάποιο k -επίπεδο πρέπει να υπάρχει ένας πίνακας $g = [g_{ij}] \in GL(k, \mathbb{R})$, ο οποίος καλείται πίνακας αλλαγής βάσης, τέτοιος ώστε

$$b_j = \sum_i a_i g_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Η σε μορφή πινάκων $B = Ag$.

Συμβολίζουμε με $F(k, n)$ το σύνολο όλων των $n \times k$ πινάκων βαθμίδας k , εφοδιασμένο με την επαγόμενη τοπολογία του $\mathbb{R}^{n \times k}$, και \sim τη σχέση ισοδυναμίας που θεωρεί ταυτόσημους δύο πίνακες που παράγουν το ίδιο k -επίπεδο:

$$A \sim B \iff \text{υπάρχει ένας πίνακας } g \in GL(k, \mathbb{R}) \text{ τέτοιος ώστε } B = Ag.$$

Ο χώρος πηλίκου $F(k, n)/\sim$ που προκύπτει σχετίζεται με το σύνολο Grassmann $G(k, n)$ με μια 1-1 και επί συνάρτηση και επομένως μπορούμε να εφοδιάσουμε το τελευταίο με την τοπολογία πηλίκου του $F(k, n)/\sim$. Αποδεικνύεται ακόμα ότι το σύνολο Grassmann $G(k, n)$ ως τοπολογικός χώρος είναι Hausdorff και έχει μια αριθμήσιμη βάση. Αν μπορέσουμε να βρούμε και έναν λείο άτλα αυτό θα σημαίνει ότι ο χώρος $G(k, n)$ είναι μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Για ευκολία θα δούμε την ειδική περίπτωση $G(2, 4)$.

Αν A ένας 4×2 πίνακας, συμβολίζουμε με A_{ij} τον 2×2 υποπίνακα που αποτελείται από τις γραμμές i, j . Θα μας φανεί χρήσιμο το παρακάτω σύνολο:

$$V_{ij} = \{A \in F(2, 4) \mid A_{ij} \text{ έχει μη μηδενική ορίζουσα}\}.$$

Το συμπλήρωμα αυτού του συνόλου στο $F(2, 4)$ είναι το $V_{ij}^c = \{A \in F(2, 4) \mid \det A_{ij} = 0\}$ το οποίο είναι ένα κλειστό σύνολο, επομένως το ίδιο το V_{ij} είναι ανοιχτό υποσύνολο του $F(2, 4)$.

Βήμα 1ο: Θα δείξουμε ότι αν $A \in V_{ij}$, τότε $Ag \in V_{ij}$ για κάθε πίνακα $g \in GL(2, \mathbb{R})$ με μη μηδενική ορίζουσα.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $A \in V_{12}$, επομένως $\det(A_{12}) \neq 0$. Ο πίνακας Ag θα έχει τη μορφή

$$Ag = \begin{bmatrix} A_{12}g \\ A_{34}g \end{bmatrix}$$

δηλαδή $(Ag)_{12} = A_{12}g$.

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας έχουμε

$$\det(A_{12}g) = \det(A_{12}) \cdot \det(g) \neq 0$$

επομένως $Ag \in V_{12}$. Τα αντίστοιχα ισχύουν για τη γενική περίπτωση όπου $A \in V_{ij}$.

Ορίζουμε U_{ij} το σύνολο πηλίκου του V_{ij} , δηλαδή $U_{ij} = V_{ij}/\sim$. Η \sim συμβαίνει να είναι μια ανοιχτή σχέση ισοδυναμίας, επομένως το $U_{ij} = V_{ij}/\sim$, ως η εικόνα του V_{ij} μέσω της συνάρτησης προβολής, είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $G(2, 4)$.

Αν $A \in V_{12}$, ισχύει $\det A_{12} \neq 0 \implies \det A_{12}^{-1} \neq 0$ και άρα από το 1ο βήμα προκύπτει

$$A \sim AA_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ A_{34}A_{12}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή ο πίνακας αναπαράστασης ενός 2-διάστατου επιπέδου στο U_{12} έχει μια κανονική μορφή B στην οποία ο B_{12} είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Βήμα 2ο: Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\tilde{\phi}_{12}(A) = A_{34}A_{12}^{-1}$$

επάγει έναν ομοιομορφισμό $\phi_{12} : U_{12} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Ας είναι A, B στοιχεία του V_{12} με $A \sim B$, δηλαδή τα A, B ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας του V_{12}/\sim . Τότε για κάποιο πίνακα $g \in GL(k, \mathbb{R})$ θα συμβαίνει $B = Ag$ και άρα

$$Ag = \begin{bmatrix} A_{12}g \\ A_{34}g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{34} \end{bmatrix}$$

οπότε η $\tilde{\phi}_{12}$ στο σημείο B ορίζεται ως

$$\tilde{\phi}_{12}(B) = B_{34}B_{12}^{-1} = (A_{34}g)(A_{12}g)^{-1} = A_{34}gg^{-1}A_{12} = A_{34}A_{12} = \tilde{\phi}_{12}(A)$$

Επομένως η $\tilde{\phi}_{12}$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε κλάση ισοδυναμίας. Σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση ορίζεται μια συνεχής συνάρτηση $\phi_{12} : U_{12} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ με $\phi_{12}([A]) = A_{34}A_{12}^{-1}$. Επιπλέον, υπάρχει συνάρτηση $\psi_{12} : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow U_{12}$, η οποία σε κάθε $g \in GL(2, \mathbb{R})$ αντιστοιχεί την κλάση ισοδυναμίας $\begin{bmatrix} I \\ g \end{bmatrix}$.

Με λίγους υπολογισμούς μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η ψ_{12} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της ϕ_{12} και το ανάποδο:

$$\phi_{12} \circ \psi_{12}(g) = \phi_{12}\left(\begin{bmatrix} I \\ g \end{bmatrix}\right) = g \cdot I^{-1} = g$$

Για κάθε κλάση ισοδυναμίας του συνόλου U_{12} υπάρχει ένας αντιπρόσωπος στη μορφή $\begin{bmatrix} I \\ g \end{bmatrix}$ επομένως

$$\psi_{12} \circ \phi_{12}\left(\begin{bmatrix} I \\ g \end{bmatrix}\right) = \psi_{12}(g \cdot I^{-1}) = \psi_{12}(g) = \begin{bmatrix} I \\ g \end{bmatrix}$$

Δηλαδή οι $\phi_{12} \circ \psi_{12}$ και $\psi_{12} \circ \phi_{12}$ είναι ταυτοτικές συναρτήσεις και τελικά η $\phi_{12} : U_{12} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι ένας ομοιομορφισμός.

Βήμα 3ο: Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε ομοιομορφισμούς $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\phi_{ij} = A_{kl}A_{ij}^{-1}$ με $i, j, k, l = \{1, 2, 3, 4\}$. Θα υπολογίσουμε την $\phi_{12} \circ \phi_{23}^{-1}$ και θα δείξουμε ότι είναι λεία.

Ας είναι $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\phi_{12} \circ \phi_{23}^{-1}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \phi_{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \\ c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{b-a} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{b-a} \cdot \begin{bmatrix} cb - da & d \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

η οποία ορίζεται για κάθε πίνακα A με $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}^{-1} \neq 0 \implies b - a \neq 0$

Η συνάρτηση αυτή είναι μια λεία συνάρτηση καθώς αποτελείται από πολυωνυμικές συναρτήσεις των στοιχείων του A .

Βήμα 4ο: Θα δείξουμε ότι τα σύνολα $\{U_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ αποτελούν ανοιχτή κάλυψη για το $G(2, 4)$ για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι το $G(2, 4)$ είναι μια λεία πολλαπλότητα.

Ας είναι A ένας πίνακας από το σύνολο $G(2, 4) = F(2, 4) / \sim$. Το σύνολο αυτό αποτελείται από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας των 4×2 πινάκων με γραμμικά ανεξάρτητες στήλες και άρα βαθμίδα 2. Επομένως αν A ένας τυχαίος πίνακας από μια από τις κλάσεις ισοδυναμίας θα πρέπει $\det A_{ij} \neq 0$ για κάποιον 2×2 υποπίνακα του A_{ij} . Δηλαδή $A_{ij} \in U_{ij}$ για κάποια $1 \leq i, j \leq 4$. Επομένως τα $\{U_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ είναι όντως μια ανοιχτή κάλυψη για

το $G(2, 4)$. Μάλιστα, γενικεύοντας τη διαδικασία από το προηγούμενο βήμα, έχουμε ότι οι ομοιομορφισμοί ϕ_{ij} είναι C^∞ συμβατοί και άρα τα (U_{ij}, ϕ_{ij}) αποτελούν χάρτες για το $G(2, 4)$. Έχουμε τελικά ότι το $G(2, 4)$ είναι όντως μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Κεφάλαιο 4

Εφαπτόμενος Χώρος και Παράγωγος

Έχοντας μιλήσει για λείες συναρτήσεις σε πολλαπλότητες μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε πως θα ήταν η παράγωγος μιας τέτοιας συνάρτησης. Θα αναφέρουμε τρεις τρόπους υπολογισμού της, όπου πρώτα θα χρειαστούμε την έννοια του εφαπτόμενου χώρου μιας πολλαπλότητας M σε κάποιο σημείο. Σημαντικό είναι ότι ο εφαπτόμενος χώρος αποτελεί τη βέλτιστη προσέγγιση μιας πολλαπλότητας σε ένα σημείο της και το διαφορικό τη βέλτιστη προσέγγιση μιας λείας συνάρτησης σε ένα σημείο.

4.1 Εφαπτόμενα Διανύσματα κι Εφαπτόμενος Χώρος

Ο εφαπτόμενος χώρος σ' ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας N είναι το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο αυτό. Ως εφαπτόμενα διανύσματα εννοούμε γραμμικές συναρτήσεις με κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά, οι οποίες συνθέτουν ένα διανυσματικό χώρο που άπτεται στο σημείο p .

Θα αναλύσουμε τα παραπάνω λίγο περισσότερο εξετάζοντας ένα παράδειγμα στο \mathbb{R}^n .

Σ' έναν πραγματικό χώρο διάστασης n μια ευθεία που διέρχεται από το σημείο $p = (p^1, \dots, p^n)$ με κλίση $v = \langle v^1, \dots, v^n \rangle$ παραμετροποιείται ως εξής:

$$c(t) = (p^1 + tv^1, \dots, p^n + tv^n)$$

Αν f είναι μια C^∞ απεικόνιση σε μια περιοχή του $p \in \mathbb{R}^n$ και v είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο p , η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στη διεύθυνση του v στο p ορίζεται να είναι η

$$D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c(t)) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$D_v f = \sum_{i=1}^n \frac{dc^i}{dt}(0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

Πιο γενικά η

$$D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

είναι μια απεικόνιση που στέλνει μια λεία συνάρτηση f στον αριθμό $D_v f$. Με αφορμή τα παραπάνω, θεωρούμε την απεικόνιση $v \rightarrow D_v$ που αντιστοιχεί ένα διάνυσμα v στην κατά κατεύθυνση παράγωγο συνάρτησης στη διεύθυνση του v . Κατά αυτό τον τρόπο, μπορούμε να κατανοήσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα ως τελεστές που δρουν σε συναρτήσεις.

Αν δύο συναρτήσεις ταυτίζονται σε κάποια περιοχή του p , έχουν την ίδια κατά κατεύθυνση παράγωγο στο p . Σε αυτή την περίπτωση, οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν ισοδύναμες και κάθε κλάση ισοδυναμίας, με αντιπρόσωπο τη συνάρτηση f , καλείται σπόρος της f στο p . Συμβολίζουμε με $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο όλων των σπόρων συναρτήσεων του \mathbb{R}^n στο p . Το $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ θα είναι μία άλγεβρα πάνω απ' το \mathbb{R} .

Ανακεφαλαιώνοντας, για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα v σε σημείο p του \mathbb{R}^n υπάρχει μια απεικόνιση πραγματικών διανυσματικών χώρων

$$D_v : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η D_v είναι γραμμική κι επιπλέον ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz

$$D_v(fg) = D_v(f)g(p) + f(p)D_v(g)$$

Η συνάρτηση

$$h : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow D_p(\mathbb{R}^n),$$

$$v \rightarrow D_v = \sum v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

είναι ένας ισομορφισμός και γι αυτό το λόγο μπορούμε να ταυτοποιήσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα στο p με τις παραγωγίσεις στο p . Στην πραγματικότητα οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση $D : C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz αποτελεί μια παραγωγή στο p . Το σύνολο όλων των παραγωγίσεων στο p το συμβολίζουμε με $D_p(\mathbb{R}^n)$ και αποτελεί διανυσματικό χώρο.

Γενικεύοντας την παραγωγή σε σημείο του \mathbb{R}^n , ορίζουμε μια παραγωγή σε σημείο μιας πολλαπλότητας M , ή αλλιώς μια σημειακή παραγωγή του $C_p^\infty(M)$, ως μια συνάρτηση $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$1. D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g) \text{ (η συνάρτηση είναι γραμμική)}$$

$$2. D(fg) = (Df)g(p) + f(p)Dg. \text{ (κανόνας του Leibniz)}$$

για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $f, g \in C_p^\infty(M)$.

Ορισμός 11. Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε σημείο p μιας πολλαπλότητας M είναι μία παραγωγή στο p .

Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο p συνθέτουν το διανυσματικό χώρο $T_p(M)$ (ή $T_p M$), ο οποίος ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος στο p .

Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων (U, x^1, \dots, x^n) στο σημείο p μιας πολλαπλότητας M , είναι μια περίπτωση εφαπτόμενων διανυσμάτων σε σημείο.

Ο καλύτερος τρόπος να οπτικοποιήσουμε τον εφαπτόμενο χώρο σε σημείο p μιας πολλαπλότητας M είναι ως ένα 'επίπεδο' που άπτεται του σημείου p .

4.2 Η Παράγωγος μιας Λείας Απεικόνισης

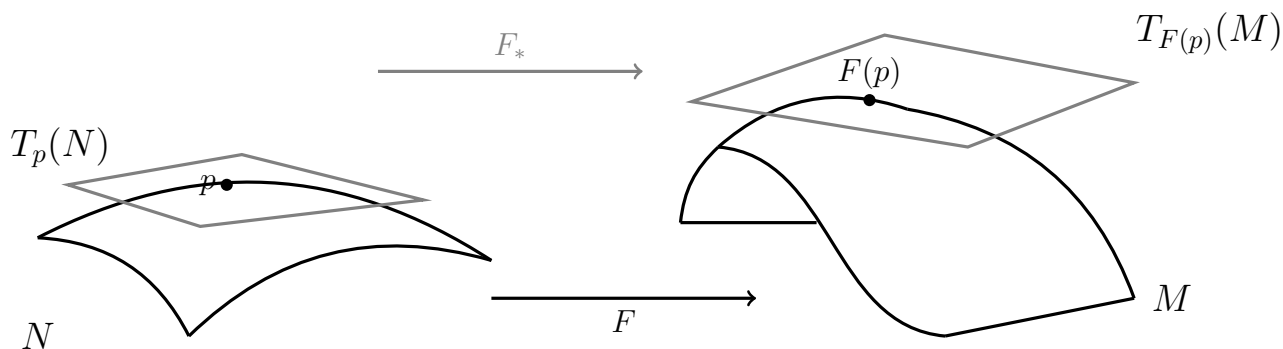
4.2.1 Το Διαφορικό μέσω των Παραγωγίσεων σε Σημείο

Αν $F : N \rightarrow M$ μια C^∞ απεικόνιση μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων, σε κάθε σημείο $p \in N$ αυτή παράγει μια γραμμική απεικόνιση για τους εφαπτόμενους χώρους $T_p N$ και $T_{F(p)} M$, το διαφορικό (ή παράγωγο) της F στο p .

$$F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

Αν X_p ένα διάνυσμα του διανυσματικού χώρου $T_p N$, τότε η εικόνα $F_*(X_p)$ είναι διάνυσμα του χώρου $T_{F(p)} M$ και ορίζεται ως εξής:

$$(F_*(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R} \text{ για } f \in C_{F(p)}^\infty(M)$$



Θα εξετάσουμε τον ορισμό αυτό σε πραγματικούς χώρους.

Παράδειγμα 10. Για $N = \mathbb{R}^n$ και $M = \mathbb{R}^m$ ας είναι $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λεία με $p \in \mathbb{R}^n$. Αν x^1, \dots, x^n και y^1, \dots, y^m οι συντεταγμένες του \mathbb{R}^n και \mathbb{R}^m αντίστοιχα, οι μερικές παράγωγοι (διανύσματα) $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ και $\frac{\partial}{\partial y^1}|_{F(p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m}|_{F(p)}$ είναι βάσεις για τους διανυσματικούς χώρους $T_p(\mathbb{R}^n)$ και $T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$. Η γραμμική απεικόνιση $F_* : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$ πρέπει να χαρακτηρίζεται από ένα πίνακα $[a_j^i]$ σύμφωνα με τις βάσεις αυτές:

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_k a_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)}, \quad a_j^k \in \mathbb{R}$$

Συμβολίζουμε με $F^i = y^i \circ F$ την i -στη συντεταγμένη της F . Θα υπολογίσουμε τα a_j^k αφήνοντας το αριστερό και δεξί μέλος της πιο πάνω ισότητας να δράσουν στο y^i .

$$AM = \sum_k a_j^k \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{F(p)} y^i = \sum_k a_j^k \delta_k^i = a_j^i,$$

$$DM = F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p y^i = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (y^i \circ F) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)$$

Καταλήγουμε λοιπόν πως ο πίνακας που αντιπροσωπεύει τη γραμμική συνάρτηση F_* ως προς τις βάσεις $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ και $\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)}$ είναι ο $[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)]$, δηλαδή ο Ιακωβιανός πίνακας της παραγωγού της F στο p . Το διαφορικό μιας απεικόνισης λοιπόν, γενικεύει την έννοια της παραγωγού μιας συνάρτησης μεταξύ Ευκλειδείων χώρων.

Ο Κανόνας της Αλυσίδας

Ας είναι $F : N \rightarrow M$ και $G : M \rightarrow P$ λείες συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$. Τα διαφορικά των F στο p και G στο $F(p)$ είναι γραμμικές συναρτήσεις

$$T_p N \xrightarrow{F_{*,p}} T_{F(p)} M \xrightarrow{G_{*,F(p)}} T_{G(F(p))} P$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4 (Ο κανόνας της αλυσίδας). *Αν $F : N \rightarrow M$ και $G : M \rightarrow P$ είναι λείες συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων και $p \in N$, τότε*

$$((G \circ F)_* X_p) f = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}$$

Σχόλιο 4. Η παράγωγος της ταυτοτικής απεικόνισης $Id_M : M \rightarrow M$ σε κάθε σημείο $p \in M$ είναι και πάλι η ταυτοτική απεικόνιση $Id_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M$.

Πόρισμα 4. *Αν $F : N \rightarrow M$ είναι μια αμφιδιαφόριση πολλαπλοτήτων και $p \in N$, τότε $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.*

Πόρισμα 5. *Αν δύο σύνολα $U \subset \mathbb{R}^n$ και $V \subset \mathbb{R}^m$ είναι αμφιδιαφορικά, τότε είναι και ίσης διάστασης $n = m$.*

Μία Βάση για τον Εφαπτόμενο Χώρο σε Σημείο

Η απεικόνιση συντεταγμένων $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ενός χάρτη (U, ϕ) μιας πολλαπλότητας M διάστασης n είναι κι αυτή μια αμφιδιαφόριση. Ως τέτοια λοιπόν παράγει τον ισομορφισμό

$$\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$$

σε κάθε σημείο $p \in N$. Μάλιστα εφόσον $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ η M και ο εφαπτόμενος χώρος της σε κάθε σημείο θα έχουν την ίδια διάσταση.

Ακόμα, η παράγωγος της ϕ απεικονίζει τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ως προς τις συντεταγμένες ενός χάρτη στις μερικές παραγώγους $\frac{\partial}{\partial r^i}$ ως προς τη συνήθη βάση του \mathbb{R}^n . Οι τελευταίες μάλιστα αποτελούν βάση του $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n$ κι επειδή η ϕ_* είναι ισομορφισμός, βάση θα είναι και οι $\frac{\partial}{\partial x^i}$ για το χώρο $T_p M$.

Πρόταση 5. *Αν $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ ένας χάρτης στο σημείο p μιας πολλαπλότητας M , τότε*

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)}$$

Πρόταση 6. *Αν $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ είναι ένας χάρτης στο σημείο p , τότε ο εφαπτόμενος χώρος $T_p M$ έχει βάση*

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$$

Στην περίπτωση που δύο χάρτες (U, x^1, \dots, x^n) , (U, y^1, \dots, y^n) αλληλοκαλύπτονται σε μια περιοχή, ο εφαπτόμενος χώρος σε κάποιο σημείο της τομής έχει δύο διαφορετικές βάσεις τις οποίες μπορούμε να εναλλάσουμε μέσω του πίνακα αλλαγής βάσης $\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right]$

Πρόταση 7. Αν $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ και $(V, \psi) = (U, y^1, \dots, y^n)$ είναι δύο συστήματα συντεταγμένων για κάποια περιοχή μιας πολλαπλότητας M , τότε

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

στην τομή $U \cap V$.

4.2.2 Το Διαφορικό μέσω Χαρτών

Πρόταση 8. Αν $F : N \rightarrow M$ λεία απεικόνιση με N, M πολλαπλότητες και p ένα σημείο της N , θεωρούμε $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ και $(V, \psi) = (U, y^1, \dots, y^n)$ δύο χάρτες γύρω από αυτό τα p και $F(p) \in M$ αντίστοιχα. Ως προς τις βάσεις $\frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ για το $T_p N$ και $\frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(p)}$ για το $T_{F(p)} M$, η παράγωγος $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ αναπαρίσταται από τον πίνακα $[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)]$, όπου $F^i = y^i \circ F$ είναι η συνάρτηση της F στην i -στη θέση.

Σχόλιο 5 (Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης). Δίνουμε μια δεύτερη έκφραση του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης, η οποία δεν εξαρτάται από τα συστήματα συντεταγμένων: μια C^∞ απεικόνιση $F : N \rightarrow M$ μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων ίδιας διάστασης n , είναι τοπικά αντιστρέψιμη σ' ένα σημείο p του N αν και μόνο αν το διαφορικό $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ είναι ισομορφισμός στο σημείο p .

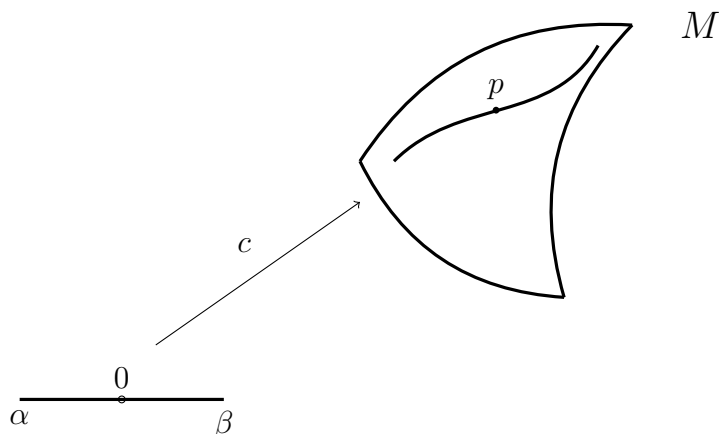
4.2.3 Το Διαφορικό μέσω Καμπυλών

Μια λεία καμπύλη σε μια πολλαπλότητα M είναι μια λεία απεικόνιση $c : (a, b) \rightarrow M$ από ένα ανοιχτό διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών στο M . Λέμε ότι η καμπύλη ξεκινάει στο σημείο p αν $c(0) = p$. Ακόμα, το διάνυσμα ταχύτητας $c'(t_0)$ της καμπύλης c τη στιγμή $t_0 \in (a, b)$ ορίζεται να είναι

$$c'(t_0) := c_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)} M.$$

Για την ταχύτητα σε δοσμένη χρονική στιγμή χρησιμοποιούνται επίσης οι συμβολισμοί

$$\frac{dc}{dt}(t_0) \text{ και } \frac{d}{dt} \Big|_{t_0}.$$



Σημειώνουμε ότι $c'(t)$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της $c(t)$. Αν θέλουμε ν' αναφερθούμε στην παράγωγο της c ως πραγματική συνάρτηση θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\dot{c}(t)$.

Πρόταση 9. Έστω $c : (a, b) \rightarrow M$ μια λεία καμπύλη και (U, x^1, \dots, x^n) ένα σύστημα συντεταμένων περί του $c(t)$. Γράφουμε $c^i = x^i \circ c$ για την i -στη συνάρτηση της c στο χάρτη. Τότε η $c'(t)$ δίνεται από

$$c'(t) = \sum_{i=1}^n \dot{c}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} |_{c(t)}.$$

Έτσι, ως προς τη βάση $\frac{\partial}{\partial x^i} |_p$ του $T_{c(t)}M$, η ταχύτητα $c'(t)$ αναπαρίσταται από το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} \dot{c}^1(t) \\ \vdots \\ \dot{c}^n(t) \end{bmatrix}.$$

Έχουμε λοιπόν ότι κάθε λεία καμπύλη που διέρχεται από ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M , παράγει σε αυτό ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $c'(0) \in T_pM$. Από την άλλη μεριά όμως, και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_pM$ θα είναι το διάνυσμα ταχύτητας στο p κάποιας καμπύλης που διέρχεται από αυτό.

Πρόταση 10. Για κάθε σημείο p μιας πολλαπλότητας M και κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα $X_p \in T_pM$, υπάρχει $\epsilon > 0$ και μια λεία καμπύλη $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ τέτοια ώστε $c(0) = p$ και $c'(0) = X_p$.

Πρόταση 11. Ας είναι X_p ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p μιας πολλαπλότητας M και $f \in C_p^\infty(M)$. Αν $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ μια λεία καμπύλη με $c(p) = 0$ και $c'(0) = X_p$, τότε

$$X_p f = \frac{d}{dt} |_0 (f \circ c).$$

Απόδειξη. Από τους ορισμούς των $c'(0)$ και c_* ,

$$X_p f = c'(0) f = c_* \left(\frac{d}{dt} |_0 \right) f = \frac{d}{dt} |_0 (f \circ c).$$

□

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τον τρίτο και τελευταίο τρόπο υπολογισμού του διαφορικού μιας λείας συνάρτησης, αυτή τη φορά κάνοντας χρήση των καμπυλών.

Πρόταση 12. Έστω $F : N \rightarrow M$ μια λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων, $p \in N$ και $X_p \in T_pN$. Αν c είναι μια λεία καμπύλη με αρχή το p και ταχύτητα X_p στο σημείο αυτό, τότε

$$F_{*,p}(X_p) = \frac{d}{dt} |_0 (F \circ c)(t).$$

Με άλλα λόγια $F_{*,p}(X_p)$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης c μέσω της F , $F \circ c$ στο $F(p)$.

4.3 Εμφυτεύσεις κι Εμβάπτισης

Υπάρχουν δύο κατηγορίες παραγώγου μιας λείας απεικόνισης που μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα.

Ορισμός 12. Έστω $F : N \rightarrow M$ μια λεία απεικόνιση, με N, M πολλαπλότητες.

Αν το διαφορικό της $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ είναι συνάρτηση 1-1, η F καλείται εμβάπτιση στο $p \in N$.

Αν το διαφορικό της $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ είναι συνάρτηση επί, η F καλείται υπεμβάπτιση στο $p \in N$.

Ορισμός 13. Έστω $F : N \rightarrow M$ μια λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων.

Λέμε ότι η F είναι εμφύτευση αν είναι εμβάπτιση κι επιπλέον η ίδια η F είναι συνάρτηση 1-1.

Σχόλιο 6. Αν στα παραπάνω η N έχει διάσταση n και η M διάσταση m , τότε και για τους αντίστοιχους εφαπτόμενους χώρους θα ισχύει $\dim T_p N = n, \dim T_{F(p)} M = m$. Αν η $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ είναι 1-1 στο p προκύπτει άμεσα ότι $n \leq m$, ενώ αν είναι επί $n \geq m$. Με άλλα λόγια, αν $F : N \rightarrow M$ είναι εμβάπτιση σε κάποιο σημείο του N , τότε $n \leq m$ ενώ αν είναι υπεμβάπτιση τότε $n \geq m$.

4.4 Βαθμίδα, Κρίσιμα και Κανονικά Σημεία

Βαθμίδα

Με τον όρο βαθμίδα ενός γραμμικού μετασχηματισμού $L : V \rightarrow W$ δύο διανυσματικών χώρων V, W πεπερασμένης διάστασης εννοούμε τη βαθμίδα του πίνακα A που τον αναπαριστά.

Στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων, αν $F : N \rightarrow M$ μια λεία απεικόνιση μεταξύ τέτοιων, η βαθμίδα σε κάποιο σημείο $p \in N$ ορίζεται να είναι η βαθμίδα του διαφορικού $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ στο σημείο αυτό. Τη συμβολίζουμε $rkF(p)$.

Δηλαδή ως προς δύο συστήματα συντεταγμένων (U, x^1, \dots, x^n) στο p και (V, y^1, \dots, y^m) στο $F(p)$, θα ισχύει

$$rkF(p) = rk \left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right].$$

Εφόσον το διαφορικό μιας απεικόνισης είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των χαρτών, το ίδιο ισχύει και για τη βαθμίδα του Ιακωβιανού πίνακα.

Κρίσιμα σημεία και Κανονικά σημεία

Ορισμός 14. Ένα σημείο p του N ονομάζεται κρίσιμο σημείο της λείας συνάρτησης πολλαπλοτήτων $F : N \rightarrow M$ αν το διαφορικό

$$F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$$

αποτυγχάνει να είναι υπεμβάπτιση στο σημείο αυτό. Αντίθετα, είναι ένα κανονικό σημείο αν η $F_{*,p}$ είναι υπεμβάπτιση. Απ' την άλλη, ένα σημείο στο M ονομάζεται κρίσιμη τιμή αν είναι η εικόνα ενός κρίσιμου σημείου. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι μία κανονική τιμή.

Εφιστούμε την προσοχή στα εξής δύο:

- Δεν ορίζουμε μια κανονική τιμή να είναι η εικόνα ενός κανονικού σημείου. Μια κανονική τιμή δε χρειάζεται καν να περιέχεται στην εικόνα της F . Κανονική είναι μια τιμή που δεν είναι κρίσιμη.
- Ένα σημείο c στο M είναι κρίσιμη τιμή αν και μόνο αν ένα οποιοδήποτε σημείο στην προεικόνα $F^{-1}(c)$ είναι κρίσιμο. Ένα σημείο c στην εικόνα της F είναι κανονικό αν και μόνο αν κάθε σημείο στην προεικόνα $F^{-1}(c)$ είναι κανονικό.

Πρόταση 13. Για μία πραγματική συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο p στο M είναι κρίσιμο αν και μόνο αν για κάποιο χάρτη (U, x^1, \dots, x^n) που περιέχει το p , όλες οι μερικές παράγωγοι ικανοποιούν

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Κεφάλαιο 5

Υποπολλαπλότητες

5.1 Υποπολλαπλότητες

5.1.1 Κανονικές Υποπολλαπλότητες

Οι υποπολλαπλότητες είναι υποσύνολα των πολλαπλοτήτων που αποτελούν αυτόνομες πολλαπλότητες. Οι λεγόμενες κανονικές υποπολλαπλότητες που θα μας απασχολήσουν εδώ προκύπτουν από το μηδενισμό σε κάθε χάρτη μίας ή περισσότερων συντεταγμένων της μητρικής πολλαπλότητας. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, μπορούμε να έχουμε ως πρότυπο το επίπεδο των x, y στο \mathbb{R}^3 , το οποίο προκύπτει από το μηδενισμό της συντεταγμένης του 'ύψους', z . Το ίδιο επίπεδο θα προκύψει και από το μηδενισμό της γωνίας ϕ στις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) του \mathbb{R}^3 .

Ορισμός 15. *Ας είναι S υποσύνολο μιας πολλαπλότητας N διάστασης n , $S \subset N$, με την επαγόμενη τοπολογία. Το S ονομάζεται κανονική υποπολλαπλότητα διάστασης k αν για κάθε σημείο του υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ στο μεγιστικό άτλα της N τέτοιο ώστε η τομή του S με το σύστημα αυτό, $U \cap S$, να καθορίζεται από το μηδενισμό $n - k$ συντεταγμένων. Ονομάζοντας με διαφορετικό τρόπο τις συντεταγμένες του συστήματος αυτού μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συντεταγμένες μηδενισμού είναι οι x^{k+1}, \dots, x^n .*

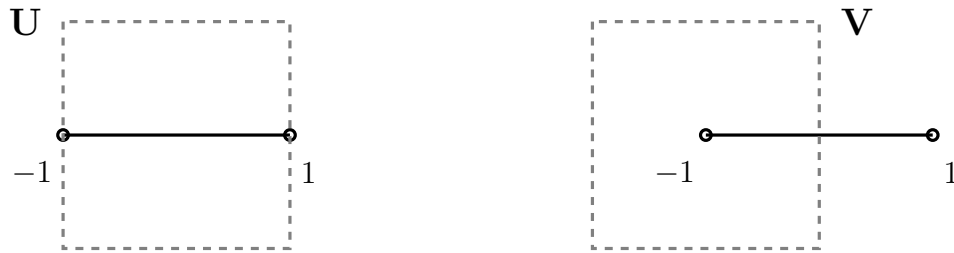
Ο χάρτης (U, ϕ) στο N καλείται προσαρτημένος χάρτης ως προς S . Στην τομή $U \cap S$, η ϕ έχει τη μορφή $\phi = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$. Συμβολίζουμε

$$\phi_S : U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k$$

τον περιορισμό στις πρώτες k συντεταγμένες της ϕ στην $U \cap S$, δηλαδή $\phi_S = (x^1, \dots, x^k)$. Το ζεύγος $(U \cap S, \phi_S)$ είναι χάρτης για το S .

Σχόλιο 7. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατηγοριοποίησης των υποπολλαπλοτήτων όμως στο εξής όταν θα αναφερόμαστε σε υποπολλαπλότητες εννοούμε κανονικές υποπολλαπλότητες.

Παράδειγμα 11. Το διάστημα $S := (-1, 1)$ στον άξονα των x είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 . Ως προσαρτημένο χάρτη μπορούμε να επιλέξουμε το ανοιχτό τετράγωνο $U = (-1, 1) \times (-1, 1)$ με συντεταγμένες x, y . Τότε η τομή $U \cap S$ είναι ακριβώς το σύνολο μηδενισμού της y συντεταγμένης στο U .



Σημειώνουμε ότι αν επιλέγαμε το τετράγωνο $V = (-2, 0) \times (-1, 1)$, τότε το (V, x, y) δεν αποτελεί προσαρτημένο χάρτη ως προς S , αφού η $V \cap S$ είναι το ανοιχτό διάστημα $(-1, 0)$ στον άξονα των x , ενώ αντίθετα το σύνολο μηδενισμού της y στο V είναι το ανοιχτό διάστημα $(-2, 0)$ στον άξονα x .

Πρόταση 14. Έστω S μια κανονική υποπολλαπλότητα του N και $\mathfrak{U} = \{U, \phi\}$ μια συλλογή χαρτών από τη διαφορική δομή του N που καλύπτει το S . Τότε $\{(U \cap S, \phi_S)\}$ είναι ένας άτλας για το S . Έτσι μια κανονική υποπολλαπλότητα είναι και η ίδια πολλαπλότητα. Αν η διάσταση της N είναι n και η S προσδιορίζεται τοπικά από το μηδενισμό $n - k$ συντεταγμένων, τότε $\dim S = k$.

Στα επόμενα θα δούμε ένα θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει να αποφασίσουμε για ένα σύνολο ότι είναι υποπολλαπλότητα μ' έναν πιο πρακτικό τρόπο, ωστόσο για να το διατυπώσουμε χρειαζόμαστε την έννοια του συνόλου στάθμης. Σημαντικό είναι ότι πολλές φορές μια πολλαπλότητα περιγράφεται από μια συνάρτηση που παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή.

5.1.2 Σύνολα Στάθμης και το Θεώρημα Κανονικού Συνόλου Στάθμης

Ένα σύνολο στάθμης μιας απεικόνισης $F : N \rightarrow M$ είναι το υποσύνολο

$$F^{-1}(\{c\}) = \{p \in N \mid F(p) = c\}$$

για κάποιο $c \in M$. Είναι δηλαδή το υποσύνολο του N που περιέχει τα στοιχεία που απεικονίζονται στην τιμή $c \in M$ μέσω της F . Συνήθως το συμβολίζουμε με $F(c)$. Η τιμή $c \in M$ καλείται στάθμη του συνόλου στάθμης $F^{-1}(c)$. Αν $F : N \rightarrow \mathbb{R}^m$, τότε $Z(F) := F^{-1}(0)$ ονομάζεται σύνολο μηδενισμού της F .

Αν η τιμή c συμβαίνει να είναι μια κανονική τιμή του M , τότε το σύνολο στάθμης $F^{-1}(c)$, καλείται επίσης κανονικό. Όμοια, αν το σύνολο μηδενισμού $F^{-1}(0)$ είναι ένα κανονικό σύνολο στάθμης της $F : N \rightarrow \mathbb{R}^m$, καλείται κανονικό σύνολο μηδενισμού.

Σχόλιο 8. Αν ένα κανονικό σύνολο στάθμης $F^{-1}(c)$ είναι μη κενό, έστω $p \in F^{-1}(c)$, τότε η απεικόνιση $F : N \rightarrow M$ είναι μια υπεμβάπτιση στο p . Έπεται ότι $\dim N \geq \dim M$.

Το επόμενο παράδειγμα είναι ενδεικτικό του πως τα σύνολα στάθμης και ιδιαίτερα τα σύνολα μηδενισμού, μπορούν να χρησιμεύσουν για ν' αποδείξουμε ότι ένα τυχαίο σύνολο είναι υποπολλαπλότητα (και άρα πολλαπλότητα).

Παράδειγμα 12. Η σφαίρα

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

είναι το σύνολο στάθμης $g^{-1}(1)$ στάθμης 1 της συνάρτησης $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Εκφράζουμε την S^2 ως σύνολο μηδενισμού καθώς αυτό θα κάνει την απόδειξη πιο εύκολη:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Τότε $S^2 = f^{-1}(0)$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο αυτό είναι ένα κανονικό σύνολο στάθμης. Πράγματι,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$

και το μόνο κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0, 0)$ που όμως δεν ανήκει στη σφαίρα. Μέσω του θεωρήματος αντίστροφης συνάρτησης θα ελέγξουμε αν μπορούμε στα σημεία της σφαίρας να χρησιμοποιήσουμε την f ως συντεταγμένη του \mathbb{R}^3 . Θα πρέπει ο Ιακωβιανός πίνακας στο εκάστοτε σημείο να έχει μη μηδενική ορίζουσα.

Ας είναι λοιπόν p ένα σημείο της S^2 για το οποίο $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 2x(p) \neq 0$. Ο Ιακωβιανός πίνακας της απεικόνισης $(f, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και η ορίζουσά του είναι ίση με $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 2x(p) \neq 0$. Από το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης, υπάρχει περιοχή U_p του p στο \mathbb{R}^3 τέτοια ώστε (U, f, y, z) να είναι χάρτης στον άτλα του \mathbb{R}^3 . Στο χάρτη αυτό, το σύνολο $U_p \cap S^2$ προκύπτει από το μηδενισμό της πρώτης συντεταγμένης f . Έτσι, ο (U, f, y, z) είναι ένας προσαρτημένος χάρτης ως προς S^2 και $(U_p \cap S^2, y, z)$ είναι χάρτης για το S^2 .

Όμοια, αν $\frac{\partial f}{\partial y}(p) \neq 0$, τότε υπάρχει ένας προσαρτημένος χάρτης (V_p, x, f, z) που περιέχει το p στον οποίο το σύνολο $V_p \cap S^2$ είναι το σύνολο μηδενισμού της δεύτερης συντεταγμένης f . Αντίστοιχα για το $\frac{\partial f}{\partial z}(p)$. Εφόσον για κάθε $p \in S^2$ τουλάχιστον μία από τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(p)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(p)$ είναι μη μηδενική, καθώς το p μεταβάλλεται πάνω στη σφαίρα, παίρνουμε μια συλλογή προσαρτημένων χαρτών του \mathbb{R}^3 που καλύπτουν το S^2 . Επομένως, το S^2 είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^3 και κατά συνέπεια είναι και η ίδια πολλαπλότητα, με διάσταση 2.

Η παραπάνω μέθοδος γενικεύεται για οποιοδήποτε σύνολο μηδενισμού συνάρτησης $f : N \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων. Η κεντρική ιδέα είναι ότι σε ένα σύστημα συντεταγμένων (U, x^1, \dots, x^n) αν μια μερική παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ είναι μη μηδενική, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη συντεταγμένη x^i με την f .

Θεώρημα 5 (Θεώρημα του κανονικού συνόλου στάθμης). Έστω $F : N \rightarrow M$, όπου $\dim N = n$ και $\dim M = m$, μια λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων. Ένα μη κενό κανονικό σύνολο στάθμης $F^{-1}(c)$, όπου $c \in M$, είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του N διάστασης $n - m$.

Σχόλιο 9. Το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης δίνει μια επαρκή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύνολο στάθμης κανονική υποπολλαπλότητα. Για παράδειγμα, ας είναι $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x, y) = y^2$, τότε το σύνολο μηδενισμού $Z(f) = Z(y^2)$ είναι ο άξονας των x , που είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 . Από την άλλη οι μερικές

παράγωγοι μηδενίζονται στο σύνολο αυτό: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ και $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$ στον άξονα των x . Έτσι όλα τα σημεία στο $Z(f)$ είναι κρίσιμα σημεία της f . Τελικά, παρότι το $Z(f)$ είναι κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^2 , δεν αποτελεί κανονικό σύνολο στάθμης της f .

Παράδειγμα 13 (Υπερεπιφάνεια). Το σύνολο λύσεων S της $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ στο \mathbb{R}^3 είναι μια πολλαπλότητα διάστασης 2. Αν $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ τότε $S = f^{-1}(1)$. Εφόσον $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$ και $\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2$, το μόνο κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0, 0, 0)$, το οποίο δεν ανήκει στο S . Έτσι, το 1 είναι μια κανονική τιμή της $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Από το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης, η S είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^3 διάστασης 2. Οπότε η S είναι πολλαπλότητα.

Παράδειγμα 14. Είναι το σύνολο λύσεων των εξισώσεων $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, $x + y + z = 0$ στο \mathbb{R}^3 μια πολλαπλότητα. Έστω $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ και $v(x, y, z) = x + y + z$. Ορίζουμε την $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z))$. Τώρα ας είναι $S \subset \mathbb{R}^3$ το σύνολο λύσεων της $f(x, y, z) = (1, 0)$, δηλαδή $S = f^{-1}(1, 0)$. Παρατηρήστε ότι $(1, -1, 0) \in f^{-1}(1, 0)$, οπότε $S \neq \emptyset$. Για ν' απαντήσουμε το αρχικό ερώτημα θα κατασκευάσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα της απεικόνισης:

$$J(f) = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν η βαθμίδα του $J(f) < 2$ για κάποιο (x, y, z) , τότε το (x, y, z) είναι κρίσιμο σημείο της f . Η βαθμίδα του $J(f)$ θα είναι μικρότερη από 2 αν και μόνο αν όλες οι 2×2 ελάσσονες ορίζουσες του $J(f)$ είναι μηδέν. Θέτοντας τις ορίζουσες αυτές ίσες με 0 παίρνουμε το σύστημα:

$$x^2 - y^2 = 0, \quad y^2 - z^2 = 0, \quad \text{και} \quad y^2 - z^2 = 0$$

Λύνοντας παίρνουμε $y = \pm x, z = \pm x$. Αφού $x + y + z = 0$ στο S έπεται ότι $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Εφόσον όμως το $(0, 0, 0)$ δεν ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση $x^3 + y^3 + z^3 = 1$, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο S . Επομένως το S είναι ένα κανονικό σύνολο στάθμης. Από το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης, το S είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^3 διάστασης 1.

5.2 Βαθμίδα μιας Λείας Απεικόνισης

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως αν $f : N \rightarrow M$ είναι μια λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων, κοντά σ' ένα σημείο $p \in N$ αυτή προσεγγίζεται με μεγάλη ακρίβεια από την παράγωγο της στο σημείο αυτό, $f_{*,p} : T_p N \rightarrow T_p M$, η οποία μάλιστα είναι μια γραμμική απεικόνιση. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μιας γραμμικής απεικόνισης είναι η βαθμίδα της, η οποία ορίζεται να είναι η διάσταση της εικόνας της (ή αλλιώς η βαθμίδα του πίνακα της γραμμικής απεικόνισης). Στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων η βαθμίδα μιας λείας απεικόνισης f σ' ένα σημείο $p \in N$ ορίζεται να είναι η βαθμίδα της παραγώγου f_* στο σημείο αυτό. Σε κάποιες περιπτώσεις λοιπόν, μπορούμε ν' ανατρέξουμε στη βαθμίδα της f στο p ή κοντά στο p για να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά της ίδιας της f στην περιοχή αυτή. Άλλωστε και το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης στηρίζεται στη βαθμίδα αφού απαιτεί αυτή να είναι η μέγιστη σε κάθε σημείο. Η βασική ιδέα είναι ότι η f κοντά στο p συμπεριφέρεται πολύ σαν την $f_{*,p}$.

5.2.1 Το Θεώρημα Σταθερής Βαθμίδας

Έχουμε $f : N \rightarrow M$ μία C^∞ απεικόνιση πολλαπλοτήτων. Πολλές φορές είναι χρήσιμο να δείξουμε ένα σύνολο στάθμης $f^{-1}(c)$ με $c \in M$ είναι πολλαπλότητα. Το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης υποδεικνύει ότι το σύνολο αυτό πρέπει να είναι κανονικό κι επομένως η f_* να είναι επί σε κάθε σημείο. Με άλλα λόγια, η παράγωγος f_* έχει τη μέγιστη βαθμίδα σε κάθε σημείο του $f^{-1}(c)$. Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντα ή μπορεί να είναι δύσκολο ν' αποδειχθεί. Τότε το θεώρημα σταθερής βαθμίδας παρουσιάζει μια εναλλακτική. Συνοπτικά, μας λέει ότι δεν είναι απαραίτητο να ξέρουμε ακριβώς τη βαθμίδα της f , αρκεί αυτή να είναι σταθερή.

Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Θεώρημα 6 (Θεώρημα Σταθερής Βαθμίδας). *Ας είναι N και M πολλαπλότητες διάστασης n και m αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η $f : N \rightarrow M$ έχει σταθερή βαθμίδα k σε μια περιοχή ενός σημείου p στο N . Τότε υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) περί του p στο N και (V, ψ) στο $f(p)$ στο M τέτοιοι ώστε για (r^1, \dots, r^n) στο $\phi(U)$,*

$$(\phi \circ f \circ \psi^{-1})(r^1, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^k, 0, \dots, 0)$$

Στην πιο πάνω μορφή είναι δυνατόν να μην υπάρχουν καθόλου μηδενικά: αν η βαθμίδα k ισούται με m , τότε

$$(\phi \circ f \circ \psi^{-1})(r^1, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^m)$$

Με άλλα λόγια σ' αυτή την περιοχή η εικόνα της f μέσα από τη σύνθεσή της με τις απεικονίσεις συντεταγμένων προσδιορίζεται με τη χρήση των k από τις συντεταγμένες του συστήματος (V, ψ) , όπου το k το πολύ πολύ να είναι ίσο με m .

Με χρήση αυτού το θεώρημα σταθερής βαθμίδας συνόλου στάθμης προκύπτει εύκολα.

Θεώρημα 7 (Θεώρημα Σταθερής Βαθμίδας Συνόλου Στάθμης). *Ας είναι $f : N \rightarrow M$ μια C^∞ απεικόνιση πολλαπλοτήτων και $c \in M$. Αν η f έχει σταθερή βαθμίδα k σε μια περιοχή του συνόλου στάθμης $f^{-1}(c)$ στο N , τότε $f^{-1}(c)$ είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του N και η διαφορά διάστασης είναι k .*

Παράδειγμα 15 (Η Ορθογώνια Ομάδα). Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σταθερής βαθμίδας συνόλου στάθμης θα αποδείξουμε ότι η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα. Αν $GL(n, \mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων τετράγωνων πινάκων, η ορθογώνια ομάδα είναι το υποσύνολο αυτού που περιέχει όλους τους πίνακες A των οποίων οι γραμμές είναι ορθοκανονικά διανύσματα. Δηλαδή $A^T A = I$, όπου I ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. Ορίζουμε συνάρτηση $f : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ως $f(A) = A^T A$. Τότε το $O(n)$ ταυτίζεται με το σύνολο στάθμης $f^{-1}(I)$. Για δύο τυχαίους πίνακες $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικός πίνακας $C \in GL(n, \mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $B = AC$. Συμβολίζουμε ως l_C και $r_C : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ τον αριστερά και αντίστοιχα δεξιά πολλαπλασιασμό με C . Εφόσον

$$f(AC) = (AC)^T AC = C^T A^T AC = C^T f(A)C,$$

έχουμε

$$(f \circ r_C)(A) = (l_{C^T \circ r_C \circ f})(A).$$

Που ισχύει για κάθε $A \in GL(n, \mathbb{R})$ και έτσι γενικεύοντας

$$f \circ r_C = l_{C^T} \circ r_C \circ f,$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$f_{*,AC} \circ (r_C)_{*,A} = (l_{C^T})_{*,A^T A C} \circ (r_C)_{*,A^T A} \circ f_{*,A}.$$

Ο πολλαπλασιασμός είτε από αριστερά είτε από δεξιά είναι μία αμφιδιαφόριση και κατά συνέπεια η παράγωγος του καθενός αποτελεί έναν ισομορφισμό. Μετά από σύνθεση μ' ένα ισομορφισμό η βαθμίδα μιας γραμμικής απεικόνισης παραμένει σταθερή. Επομένως

$$rk f_{*,AC} = rk f_{*,A}.$$

Εφόσον τα AC και A είναι τυχαία σημεία του $GL(n, \mathbb{R})$ μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι η παράγωγος της f θα έχει σταθερή βαθμίδα στο $GL(n, \mathbb{R})$. Από το θεώρημα σταθερής βαθμίδας συνόλου στάθμης η ορθογώνια ομάδα $O(n) = f^{-1}(I)$ είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του $GL(n, \mathbb{R})$.

5.2.2 Τα Θεωρήματα Εμβάπτισης και Υπεμβάπτισης

Στην παράγραφο αυτή δείχνουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι εμβάπτιση ή υπεμβάπτιση τότε αυτόματα θα έχει σταθερή βαθμίδα.

Θεωρούμε $f : N \rightarrow M$ μια C^∞ απεικόνιση. Παίρνουμε δύο χάρτες $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ γύρω από το $p \in N$ και $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$ στο $f(p)$ στο M και συμβολίζουμε με $f^i = y^i \circ f$ την i συντεταγμένη της f στο χάρτη (V, y^1, \dots, y^m) . Ο πίνακας $[\partial f^i / \partial x^j(p)]$ είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $f_{*,p}$ ως προς τους χάρτες αυτούς. Έτσι, από το θεώρημα της διάστασης, έχουμε

$$f_{*,p} \text{ είναι 1-1} \iff n \leq m \text{ και } rk[\partial f^i / \partial x^j(p)] = n$$

$$f_{*,p} \text{ είναι επί} \iff n \geq m \text{ και } rk[\partial f^i / \partial x^j(p)] = m$$

Η βαθμίδα ενός πίνακα είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων γραμμών του. Απ' την άλλη, είναι επίσης και ο αριθμός των ανεξάρτητων στηλών. Κατά συνέπεια η μέγιστη δυνατή βαθμίδα ενός πίνακα $n \times m$ είναι το ελάχιστο των n και m . Έπεται ότι το να είναι μια συνάρτηση 1-1 ή επί σ' ένα σημείο p είναι ισοδύναμο με το να έχει ο πίνακας $[\partial f^i / \partial x^j(p)]$ τη μέγιστη βαθμίδα.

Με κάποιους ακόμα υπολογισμούς προκύπτει ότι όταν η f έχει τη μέγιστη βαθμίδα σ' ένα σημείο p (όπως στην περίπτωση που εξετάζουμε) τότε θα έχει σταθερή βαθμίδα σε μια ολόκληρη περιοχή του σημείου.

Πρόταση 15. *Ας είναι N και M πολλαπλότητες διάστασης n και m αντίστοιχα. Αν μια C^∞ απεικόνιση $f : N \rightarrow M$ είναι εμβάπτιση σ' ένα σημείο p στο N , τότε έχει σταθερή βαθμίδα n σε μια περιοχή του p . Αν μια C^∞ απεικόνιση $f : N \rightarrow M$ είναι υπεμβάπτιση σ' ένα σημείο p στο N , τότε έχει σταθερή βαθμίδα m σε μια περιοχή του p .*

Παράδειγμα 16. Ενώ η μέγιστη βαθμίδα σε κάποιο σημείο έχει σαν αποτέλεσμα η βαθμίδα να είναι σταθερή σε μια περιοχή του σημείου, το αντίθετο δε συμβαίνει. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, 0, 0)$, έχει σταθερή βαθμίδα 1, όμως δεν έχει μέγιστη βαθμίδα σε κανένα σημείο.

Λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη πρόταση προκύπτουν οι εξής ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος σταθερής βαθμίδας:

Θεώρημα 8. *Ας είναι N και M πολλαπλότητες διάστασης n και m αντίστοιχα.*

1. **(Θεώρημα Εμβάτισης)** *Υποθέτουμε ότι $f : N \rightarrow M$ είναι μια εμβάπτιση στο $p \in N$. Τότε υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) περί του p στο N και (V, ψ) στο $f(p)$ στο M τέτοιοι ώστε σε μια περιοχή του $\phi(p)$,*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^n, 0, \dots, 0)$$

2. **(Θεώρημα Υπεμβάτισης)** *Υποθέτουμε ότι $f : N \rightarrow M$ είναι μια υπεμβάπτιση στο $p \in N$. ότε υπάρχουν χάρτες (U, ϕ) περί του p στο N και (V, ψ) στο $f(p)$ στο M τέτοιοι ώστε σε μια περιοχή του $\phi(p)$,*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \dots, r^m, r^{m+1}, \dots, r^n) = (r^1, \dots, r^m)$$

Δηλαδή όταν η f είναι εμβάπτιση σ' ένα σημείο p , τότε η έκφρασή της μέσα από τις σχετικές απεικονίσεις συντεταγμένων λειτουργεί σαν ένθεση για μια περιοχή του σημείου, ενώ αν είναι υπεμβάπτιση στο p η έκφραση αυτή λειτουργεί τοπικά ως προβολή.

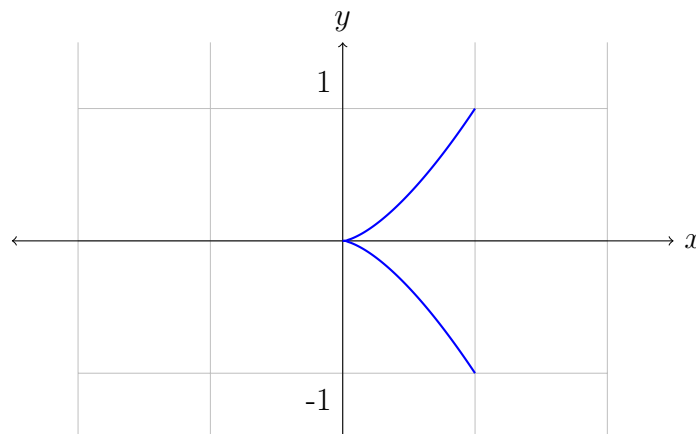
Σημειώνουμε επίσης, ότι το θεώρημα κανονικού συνόλου στάθμης παράγεται εύκολα από το θεώρημα υπεμβάπτισης. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για $f \in C^\infty$ το σύνολο στάθμης $f^{-1}(c)$ είναι κανονικό αν και μόνο αν η f είναι υπεμβάπτιση σε κάθε σημείο $p \in f^{-1}(c)$.

5.2.3 Εικόνες μιας Λείας Απεικόνισης

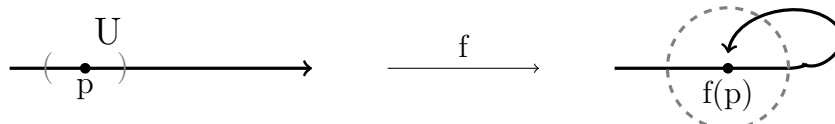
Έχουμε ένα ακόμα θεώρημα το οποίο μας βοηθάει να εντοπίσουμε κανονικές υποπολλαπλότητες και αναφέρεται στις εμφυτεύσεις, τις οποίες θα ορίσουμε παρακάτω. Γενικά όταν μια απεικόνιση $f : N \rightarrow M$ είναι εμφύτευση, η εικόνα της είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του M .

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα C^∞ απεικονίσεων $f : N \rightarrow M$ με $N = \mathbb{R}$ και $M = \mathbb{R}^2$.

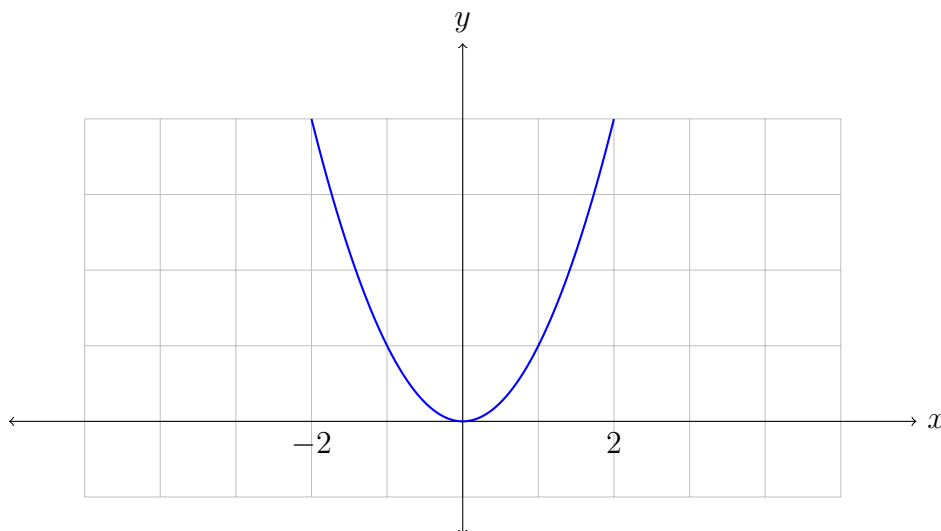
Παράδειγμα 17. Η $f(t) = (t^2, t^3)$ είναι 1-1 επειδή $t \mapsto t^3$. Στο σημείο 0 ισχύει $f'(0) = (0, 0)$ κι επομένως η παράγωγος $f_{*,0} : T_0\mathbb{R} \rightarrow T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ είναι η μηδενική απεικόνιση, η οποία δεν μπορεί να είναι 1-1. Έπεται ότι η f δεν είναι εμβάπτιση στο 0. Η εικόνα της συνάρτησης είναι η οδοντοτή κυβική $y^2 = x^3$.



Παράδειγμα 18. Η απεικόνιση f στο γράφημα από κάτω είναι μια 1-1 εμβάπτιση όμως η εικόνα της με την επαγόμενη τοπολογία, δεν είναι ομοιόμορφη με το πεδίο ορισμού \mathbb{R} . Παρατηρούμε ότι υπάρχουν σημεία κοντά στο $f(p)$ στην εικόνα που προέρχονται από σημεία στο \mathbb{R} μακριά από το p . Πιο συγκεκριμένα, αν U είναι ένα διάστημα γύρω από το p όπως υποδεικνύει το σχήμα, δεν υπάρχει περιοχή V στο $f(p)$ του $f(N)$ τέτοια ώστε $f^{-1}(V) \subset U$. Αυτό σημαίνει ότι η f^{-1} δεν είναι συνεχής.



Παράδειγμα 19. Η απεικόνιση $f(t) = (t, t^2)$ είναι μια 1-1 εμβάπτιση. Η εικόνα της είναι η $y = x^2$ και είναι ομοιόμορφη με το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή την πραγματική ευθεία.



Ορισμός 16. Λέμε ότι η C^∞ απεικόνιση f είναι εμφύτευση αν

1. Η f είναι 1-1 εμβάπτιση
2. η εικόνα $f(N)$ με την τοπολογία του υποχώρου είναι ομοιόμορφη με το N υπό την f .
(Σημειώνουμε ότι η προϋπόθεση να είναι η f 1-1 είναι περιττή καθώς ένας ομοιομορφισμός είναι αναγκαστικά 1-1)

Θεώρημα 9. Αν η απεικόνιση $f : N \rightarrow M$ είναι εμφύτευση, τότε η εικόνα της $f(N)$ είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του M .

Θεώρημα 10. Αν N είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του M , τότε η ένθεση $i : N \rightarrow M, i(p) = p$ είναι μια εμφύτευση.

Ωστόσο υπάρχουν αρκετές αντιφωνίες σχετικά με το ποιος είναι ο καταλληλότερος ορισμός μιας υποπολλαπλότητας και μια άποψη είναι ότι αυτές θα μπορούσαν να είναι οι εικόνες ορισμένων 'αρκετά καλών' λείων συναρτήσεων. Στον ορισμό της εμφύτευσης, θα μπορούσαμε να δώσουμε στην εικόνα $f(N)$ όχι την τοπολογία του υποχώρου αλλά αυτή που της δίνει η f : ένα υποσύνολο $f(U)$ του $f(N)$ θα θεωρείται ανοιχτό αν και μόνο αν το U είναι ανοιχτό στο N . Χρησιμοποιώντας αυτή την τοπολογία, το $f(N)$ είναι εξ ορισμού ομοιόμορφο με το N . Κατ' αυτόν τον τρόπο, υποπολλαπλότητα θεωρείται να είναι η εικόνα οποιασδήποτε 1-1 εμφύτευσης. Ένα τέτοιο σύνολο συχνά καλείται και εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα του M . Όμοια, η εικόνα μιας εμφύτευσης αναφέρεται ως εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα. Τα τελευταία δύο θεωρήματα δείχνουν ότι μια εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα και μια κανονική υποπολλαπλότητα είναι έννοιες αδιαχώριστες.

5.2.4 Λείες Απεικονίσεις σε Υποπολλαπλότητες

Υποθέτουμε ότι $f : N \rightarrow M$ είναι μια λεία απεικόνιση της οποίας η εικόνα $f(N)$ βρίσκεται σ' ένα υποσύνολο $S \subset M$. Μας ενδιαφέρει να μάθουμε αν η επαγόμενη συνάρτηση $f : N \rightarrow S$ εξακολουθεί να είναι λεία στην περίπτωση που το S είναι πολλαπλότητα. Αυτό εξαρτάται από το αν το S είναι κανονική ή εμβαπτισμένη υποπολλαπλότητα του M .

Θεώρημα 11. *Ας είναι $f : N \rightarrow M$ μια C^∞ απεικόνιση και η εικόνα της εμπίπτει σ' ένα υποσύνολο S του M . Αν το S είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του M , τότε η επαγόμενη απεικόνιση $f : N \rightarrow S$ είναι επίσης C^∞ .*

5.3 Κατηγορίες και Συναρτητές

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με μια μικρή αναφορά στην έννοια των κατηγοριών. Πολλές φορές προβλήματα από διαφορετικά πεδία των μαθηματικών παρουσιάζουν ομοιότητες, γεγονός που αποτέλεσε την αρχή για να αναπτυχθεί η θεωρία των κατηγοριών και των συναρτητών, η οποία προσπαθεί να εντοπίσει ακριβώς αυτές τις δομικές ομοιότητες στα διάφορα μαθηματικά πεδία. Μπορούμε να φανταστούμε μια κατηγορία ως μια συλλογή από αντικείμενα και από βέλη-συσχετίσεις μεταξύ τους.

Μια κατηγορία λοιπόν, αποτελείται από μια συλλογή στοιχείων, τα ονομαζόμενα αντικείμενα, και για κάθε δύο τέτοια αντικείμενα A, B , υπάρχει ένα διαφορετικό σύνολο στοιχείων $Mor(A, B)$, οι μορφισμοί από το A στο B , όπου αν $f \in Mor(A, B)$ και $g \in Mor(B, C)$ δύο τέτοιοι μορφισμοί θέλουμε η σύνθεση $g \circ f \in Mor(A, C)$ να είναι καλώς ορισμένη. Επιπλέον η σύνθεση αυτή πρέπει να παρουσιάζει τις εξής ιδιότητες:

1. για κάθε αντικείμενο A , υπάρχει ένας ταυτοτικός μορφισμός $Id_A \in Mor(A, A)$ τέτοιος ώστε για κάθε $f \in Mor(A, B)$ και $g \in Mor(B, A)$

$$f \circ Id_A = f \text{ και } Id_A \circ g = g$$

2. για $f \in Mor(A, B)$, $g \in Mor(B, C)$ και $h \in Mor(C, D)$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Για $f \in Mor(A, B)$, γράφουμε επίσης $f : A \rightarrow B$

Παράδειγμα 20. Η συλλογή όλων των τοπολογικών χώρων μαζί με τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τους αποτελούν τη συνεχή κατηγορία

Παράδειγμα 21. Η συλλογή όλων των λείων πολλαπλοτήτων μαζί με τις λείες απεικονίσεις μεταξύ τους αποτελούν τη λεία κατηγορία

Θα δώσουμε και τους ορισμούς για τους συναλλοίωτους και ανταλλοίωτους συναρτητές, οι οποίοι παίζουν το ρόλο απεικονίσεων μεταξύ των κατηγοριών και αντιστοιχούν τα αντικείμενα της μιας κατηγορίας με αυτά της άλλης και τους μορφοισμούς της μιας κατηγορίας με τους μορφοισμούς της άλλης.

Ορισμός 17. Ένας (συναλλοίωτος) συναρτητής \mathcal{F} από μια κατηγορία \mathcal{C} σε μια άλλη κατηγορία \mathcal{D} είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο A στο \mathcal{C} ένα αντικείμενο $\mathcal{F}(A)$ στο \mathcal{D} και σε κάθε μορφοισμό $f : A \rightarrow B$ ένα μορφοισμό $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ τέτοιο ώστε

1. $\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$,

2. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

Ορισμός 18. Ένας ανταλλοίωτος συναρτητής \mathcal{F} από μια κατηγορία \mathcal{C} σε μια άλλη κατηγορία \mathcal{D} είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε αντικείμενο A στο \mathcal{C} ένα αντικείμενο $\mathcal{F}(A)$ στο \mathcal{D} και σε κάθε μορφοισμό $f : A \rightarrow B$ ένα μορφοισμό $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ τέτοιο ώστε

1. $\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$,

2. $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$. (δηλαδή με την αντίθετη από πριν σειρά)

Κεφάλαιο 6

Η Εφαπτόμενη Δέσμη

6.1 Ορισμός

Αν M είναι μια λεία πολλαπλότητα, τότε σε κάθε σημείο $p \in M$, υπάρχει ένας εφαπτόμενος χώρος $T_p M$ ο οποίος είναι ο διανυσματικός χώρος του οποίου αντιλαμβανόμαστε τα διανύσματα ως παραγωγίσεις σε σημείο, συναρτήσεων από το $C_p^\infty(M)$. Η εφαπτόμενη δέσμη του M είναι απλά η ένωση όλων αυτών των εφαπτόμενων χώρων του M :

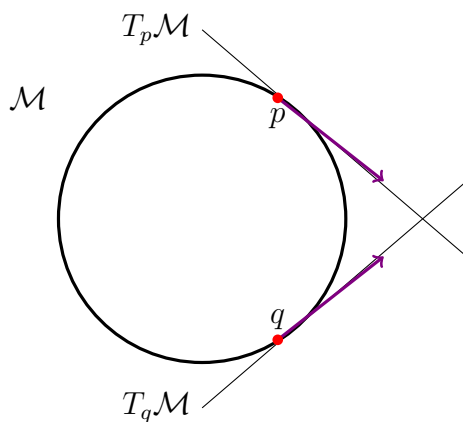
$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Αν έχουμε S ένα σύνολο και $\{A_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του, τότε το σύνολο:

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i).$$

αποτελεί την διακεκριμένη ένωση των υποσυνόλων αυτών. Τα A_i μπορεί αρχικά να επικαλύπτονται, ωστόσο όταν κατασκευάζουμε την διακεκριμένη ένωση τη θέση τους παίρνουν μη επικαλυπτόμενα αντίγραφα.

Επανερχόμενοι στον ορισμό της εφαπτόμενης δέσμης, η ένωση $\bigcup_{p \in M} T_p M$ αποτελεί στην πραγματικότητα τη διακεκριμένη ένωση $\bigsqcup_{p \in M} T_p M$, εφόσον αν p και q δύο διακριτά σημεία στο M , οι εφαπτόμενοι χώροι $T_p M$ και $T_q M$ είναι επίσης εξαρχής διακριτοί.



Αυτό μπορεί να μην είναι πάντα απόλυτα ξεκάθαρο, αφού σε περιπτώσεις όπως η παραπάνω με μια βιαστική ματιά μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε ότι οι χώροι $T_p M$ και $T_q M$ τέμνονται. Κοιτώντας πιο προσεκτικά ωστόσο γίνεται φανερό ότι το φαινομενικό "σημείο τομής"

αντιπροσωπεύει στην πραγματικότητα δύο διαφορετικά εφαπτόμενα διανύσματα, από διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους.

Ορίζεται ακόμα μια φυσική απεικόνιση $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(v) = p$ η οποία προβάλλει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $v \in T_pM$ στην αρχή του συγκεκριμένου εφαπτόμενου χώρου, p . Ο όρος φυσική σημαίνει ότι η απεικόνιση δεν εξαρτάται από κάποια επιλογή, όπως την ιδιαίτερη επιλογή των χαρτών για παράδειγμα. Καμιά φορά το εφαπτόμενο διάνυσμα $v \in T_pM$ εμφανίζεται και ως (p, v) συμβολισμός ο οποίος δηλώνει ξεκάθαρα το σημείο στο οποίο είναι εφαπτόμενο το v .

6.2 Η Εφαπτόμενη Δέσμη ως Πολλαπλότητα

Τοπολογία

Μέχρι τώρα, σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν για το TM , αυτό αποτελεί απλώς ένα σύνολο, δεν έχει δηλαδή κάποια τοπολογία ή διαφορίσιμη δομή. Στην παράγραφο αυτή θα το μετατρέψουμε σε μια λεία πολλαπλότητα. Σαν πρώτο βήμα πρέπει να το εφοδιάσουμε με μια τοπολογία.

Έστω $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ ένας από τους χάρτες του M . Τότε

$$TU = \bigcup_{p \in U} T_pU = \bigcup_{p \in U} T_pM$$

δηλαδή συμβολίζουμε TU το σύνολο των εφαπτόμενων χώρων που προκύπτουν από τα σημεία του U . Σ' ένα τέτοιο σημείο $p \in U$, μια βάση για τον σχετικό εφαπτόμενο χώρο T_pM είναι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$. Αν λοιπόν $v \in T_pM$ ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου, αυτό έχει μια μοναδική περιγραφή ως γραμμικός συνδυασμός των μερικών παραγώγων:

$$v = \sum_i^n c^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p.$$

Παρατηρούμε ότι τα c^i είναι διαφορετικά για κάθε διάνυσμα v και άρα εξαρτώνται από το εκάστοτε v . Με άλλα λόγια, τα $c^i = c^i(v)$ είναι συναρτήσεις στο TU . Θέτουμε $\bar{x}^i = x^i \circ \pi$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\tilde{\phi} : TU \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$ η οποία αποδομεί το v στα συστατικά του στοιχεία:

$$v \mapsto (x^1(p), \dots, x^n(p), c^1(v), \dots, c^n(v)) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n, c^1, \dots, c^n)(v).$$

Μπορεί επίσης να οριστεί και η αντίστροφη διαδικασία

$$(\phi(p), c^1, \dots, c^n) \mapsto \sum c^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

και επομένως η $\tilde{\phi}$ είναι αντιστρέψιμη (αμφιμονότιμη και επί) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσουμε στο TU την τοπολογία του $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$: ένα σύνολο A στο TU θα θεωρείται ανοιχτό όταν και μόνον όταν το $\tilde{\phi}(A)$ είναι ανοιχτό στο $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$, όπου το $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$ έχει τη συνήθη τοπολογία υποχώρου, ως υποχώρος του \mathbb{R}^{2n} . Όπως ορίσαμε ένα ανοιχτό σύνολο στο TU , προκύπτει άμεσα ότι η $\tilde{\phi}$ είναι ομοιομορφισμός και συνεπώς ο TU με την τοπολογία που κληρονομεί από την $\tilde{\phi}$, είναι χώρος ομοιόμορφος με τον $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$. Τώρα

αν V είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του U , τότε και $\phi(V) \times \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\phi(U) \times \mathbb{R}^n$. Έτσι, η σχετική τοπολογία στο TV ως υποσύνολο του TU είναι η ίδια με την τοπολογία που προκύπτει από την απεικόνιση $\tilde{\phi}|_{TV} : TV \rightarrow \phi(V) \times \mathbb{R}^n$.

6.2.1 Η Διαφορίσιμη Δομή της Εφαπτόμενης Δέσμης

Θα δείξουμε ακόμα ότι αν $\tilde{\phi}$ η απεικόνιση που ορίστηκε προηγουμένως και $\{(U_a, \phi_a)\}$ ένας λείος άτλας για το M , ο $\{(TU_a, \tilde{\phi}_a)\}$ είναι ένας λείος άτλας για την εφαπτόμενη δέσμη TM . Τα U_a καλύπτουν το M οπότε συμπεραίνουμε εύκολα ότι $TM = \bigcup_a TU_a$. Μένει να βεβαιώσουμε ότι οι απεικονίσεις συντεταγμένων ϕ_a και ϕ_b είναι C^∞ συμβατές στο $(TU_a) \cap (TU_b)$. Έστω (U, x^1, \dots, x^n) και (V, y^1, \dots, y^n) χάρτες του M . Για κάθε σημείο $p \in U \cap V$ στην κοινή περιοχή των χαρτών αυτών, ο εφαπτόμενος χώρος $T_p M$ έχει δύο διαφορετικές βάσεις: $\{\frac{\partial}{\partial x^j}|_p\}_{j=1}^n$ και $\{\frac{\partial}{\partial y^i}|_p\}_{i=1}^n$. Οπότε αν $v \in T_p M$ το διάνυσμα αυτό θα έχει δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις:

$$v = \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p = \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial y^i}|_p.$$

Εφαρμόζοντάς καθεμία από αυτές τις μορφές στο x^k προκύπτει

$$a^k = \left(\sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) x^k = \left(\sum_i b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right) x^k = \sum_i b^i \frac{\partial x^k}{\partial y^i}.$$

Ενώ εφαρμόζοντας για y^k έχουμε αντίστοιχα

$$b^k = \sum_j a^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}.$$

Ως προς τον άτλα $\{(U_a, \phi_a)\}$, συμβολίζουμε την τομή δύο χαρτών $U_a \cap U_b = U_{ab}$ και τις αντίστοιχες απεικονίσεις συντεταγμένων $\phi_a = (x^1, \dots, x^n)$ και $\phi_b = (y^1, \dots, y^n)$. Τότε η

$$\tilde{\phi}_b \circ \tilde{\phi}_a^{-1} : \phi_a(U_{ab}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_b(U_{ab}) \times \mathbb{R}^n$$

ορίζεται ως εξής:

$$(\phi_a(p), a^1, \dots, a^n) \mapsto \left(p, \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_p \right) \mapsto ((\phi_b \circ \phi_a^{-1})(\phi_a(p)), b^1, \dots, b^n),$$

με

$$b^j = \sum_i a^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p)$$

Εφόσον οι ϕ_a και ϕ_b είναι απεικονίσεις συντεταγμένων στον άτλα $\{(U_a, \phi_a)\}$, η σύνθεσή τους $\phi_b \circ \phi_a^{-1}$ είναι C^∞ . Άρα από την πιο πάνω μορφή έχουμε ότι και η $\tilde{\phi}_b \circ \tilde{\phi}_a^{-1}$ είναι C^∞ . Τελικά, η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι μια C^∞ πολλαπλότητα και το σύνολο $\{(TU_a, \tilde{\phi}_a)\}$ αποτελεί έναν λείο άτλα αυτής.

6.3 Διανυσματικές Δέσμες

Η εφαπτόμενη δέσμη μιας πολλαπλότητας εντάσσεται στη γενικότερη κατηγορία των διανυσματικών δεσμών, για τις οποίες θα μιλήσουμε σε αυτή την παράγραφο.

Αν $\pi : E \rightarrow M$ μια συνάρτηση, θα ονομάσουμε νήμα στο p , $p \in M$, την αντίστροφη εικόνα $\pi^{-1}(p) := \pi^{-1}(\{p\})$ του σημείου αυτού. Για το νήμα στο p χρησιμοποιούμε το συμβολισμό E_p .

Επίσης αν $\pi : E \rightarrow M$ και $\pi' : E' \rightarrow M$ δύο απεικονίσεις με το ίδιο σύνολο αφίξεως M , μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η απεικόνιση $\phi : E \rightarrow E'$ να έχει την ιδιότητα $\phi(E_p) \subset E'_p$ για κάθε $p \in M$.

Μια C^∞ διανυσματική δέσμη (βαθμίδας r) είναι μια τριάδα (E, M, π) όπου τα E και M είναι πολλαπλότητες και η απεικόνιση $\pi : E \rightarrow M$ έχει την ιδιότητα να είναι τοπικά τετριμμένη βαθμίδας r . Η ιδιότητα αυτή περιγράφεται στα επόμενα:

Μια επί και λεία απεικόνιση $\pi : E \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι τοπικά τετριμμένη βαθμίδας r αν

1. κάθε νήμα $\pi^{-1}(p)$ αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο διάστασης r
2. για κάθε $p \in M$, υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U του p και μια αμφιδιαφόριση $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ τέτοια ώστε για κάθε $q \in U$ ο περιορισμός

$$\phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

να είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Το ανοιχτό σύνολο U ονομάζεται τετριμμένο ανοιχτό σύνολο και η απεικόνιση ϕ τετριμμένη απεικόνιση του E επί του U .

Η πολλαπλότητα E καλείται ολικός χώρος της διανυσματικής δέσμης και η M χώρος βάσης.

Αν S μια κανονική υποπολλαπλότητα του M , η τριάδα $(\pi^{-1}S, S, \pi|_{\pi^{-1}S})$ συνιστά μια αυτόνομη C^∞ διανυσματική δέσμη επί του S , η οποία ονομάζεται περιορισμός του E στο S . Συνήθως τη συμβολίζουμε $E|_S$ αντί για $\pi^{-1}S$.

Παράδειγμα 22. Θεωρούμε $\pi : M \times \mathbb{R}^r \rightarrow M$ και M πολλαπλότητα. Η συνάρτηση αυτή προβάλλει κάθε σημείο στον πρώτο παράγοντα. Η $(M \times \mathbb{R}^r, M, \pi)$ ονομάζεται δέσμη γινομένου και είναι μια διανυσματική δέσμη βαθμίδας r επί του M . Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός ορίζονται στο νήμα $\pi^{-1}(p) = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^r\}$ με τον παρακάτω τρόπο:

$$(p, u) + (p, v) = (p, u + v), \quad b \cdot (p, v) = (p, bv) \quad \text{για } b \in \mathbb{R}$$

Μια τετριμμένη απεικόνιση του $M \times \mathbb{R}$ θα μπορούσε να είναι η ταυτοτική απεικόνιση $Id_{M \times \mathbb{R}} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$. Επίσης, αν $M = S^1$ και $r = 1$ ο ολικός χώρος $M \times \mathbb{R}^r$ είναι ο άπειρος κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$, ο οποίος επομένως είναι μια δέσμη γινόμενο βαθμίδας 1 επί του κύκλου.

Έστω $\pi_E : E \rightarrow M$, $\pi_F : F \rightarrow N$ δύο διαφορετικές διανυσματικές δέσμες, όχι απαραίτητα ίσης βαθμίδας. Με τον όρο δέσμη απεικονίσεων αναφερόμαστε στο ζεύγος (f, \tilde{f}) , $f : M \rightarrow$

N και $\tilde{f} : E \rightarrow F$, των απεικονίσεων που συνδέουν τα πεδία ορισμού και πεδία αρίξεως των π_E, π_F και από τις οποίες θέλουμε:

1. $\pi_F \circ \tilde{f} = f \circ \pi_E$ όπως δηλώνει το πιο κάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

2. η $\tilde{f} : E_p \rightarrow F_{f(p)}$ να είναι μια γραμμική απεικόνιση διανυσματικών χώρων για κάθε $p \in M$, όπου E_p το νήμα στο p

Όλες οι διανυσματικές δέσμες μαζί, εφοδιασμένες με τις αντίστοιχες δέσμες απεικονίσεων συνιστούν μια κατηγορία.

Παράδειγμα 23. Από μια λεία απεικόνιση $f : N \rightarrow M$ μεταξύ πολλαπλοτήτων μπορεί να προκύψει μια δέσμη απεικονίσεων (f, \tilde{f}) , όπου η $\tilde{f} : TN \rightarrow TM$ είναι η:

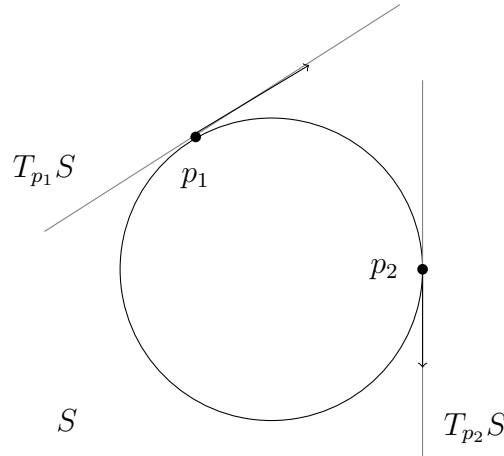
$$\tilde{f}(p, v) = (f(p), f_*(v)) \in \{f(p)\} \times T_{f(p)}M \subset TM$$

για κάθε $v \in T_pN$. Έτσι ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής T μεταξύ των κατηγοριών των λείων πολλαπλοτήτων με τις αντίστοιχες λείες απεικονίσεις από τη μία και των διανυσματικών δεσμών με τις σχετικές δέσμες απεικονίσεων από την άλλη. Συγκεκριμένα, σε κάθε πολλαπλότητα M αντιστοιχούμε την εφαπτόμενη δέσμη της TM , ενώ σε κάθε λεία απεικόνιση πολλαπλοτήτων $f : N \rightarrow M$ αντιστοιχούμε τη δέσμη απεικονίσεων (f, \tilde{f}) όπως αυτή ορίστηκε πιο πάνω.

6.4 Λείες Τομές

Μια τομή μιας διανυσματικής δέσμης $\pi : E \rightarrow M$ είναι μια απεικόνιση $s : M \rightarrow E$ τέτοια ώστε $\pi \circ s = Id_M$. Η s αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $p \in M$ ένα διάνυσμα από το νήμα E_p . Η τομή s είναι λεία αν είναι λεία ως απεικόνιση από το M στο E .

Παράδειγμα 24. Όπως έχουμε ξαναφέρει ο μοναδιαίος κύκλος αποτελεί μια πολλαπλότητα. Θεωρώντας σε κάθε σημείο του κύκλου τον σχετικό εφαπτόμενο χώρο παίρνουμε μια διανυσματική δέσμη, την εφαπτόμενη δέσμη $\pi : TS^1 \rightarrow S^1$. Μια τομή μπορεί να οριστεί αν σε κάθε σημείο $p \in S^1$ αναθέσουμε ένα διάνυσμα από τον εφαπτόμενο χώρο T_pS^1 . Το αποτέλεσμα είναι ένα διανυσματικό πεδίο.



Πρόταση 16. *Ας είναι s και t δύο C^∞ τομές μιας C^∞ διανυσματικής δέσμης $\pi : E \rightarrow M$ και f μια C^∞ πραγματική συνάρτηση στο M . Τότε*

1. το άθροισμα $s + t : M \rightarrow E$ που ορίζεται από

$$(s + t)(p) = s(p) + t(p) \in E_p, \quad p \in M$$

είναι μια C^∞ τομή του E .

2. το γινόμενο $fs : M \rightarrow E$ που ορίζεται από

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \in E_p, \quad p \in M$$

είναι μια C^∞ τομή του E .

6.5 Λεία Πλαίσια

Ένα πλαίσιο για μια διανυσματική δέσμη $\pi : E \rightarrow M$ επί κάποιου ανοιχτού συνόλου U είναι μια συλλογή s_1, \dots, s_r η οποία για κάθε σημείο $p \in U$, αποτελεί βάση για το νήμα $E_p := \pi^{-1}(p)$. Δηλαδή τα στοιχεία $s_1(p), \dots, s_r(p)$ είναι κάθε φορά βάση για το E_p ασχέτως του σημείου $p \in U$ στο οποίο δρουν. Ένα πλαίσιο s_1, \dots, s_r θεωρείται λείο ή C^∞ αν οι επιμέρους s_1, \dots, s_r είναι λείες ως τομές του E επί του U . Στην ειδική περίπτωση της εφαπτόμενης δέσμης $TM \rightarrow M$ ένα πλαίσιο επί του ανοιχτού συνόλου U καλείται απλά πλαίσιο στο U .

Παράδειγμα 25. Η συλλογή των διανυσματικών πεδίων $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ είναι ένα λείο πλαίσιο στο \mathbb{R}^3 .

Κεφάλαιο 7

Μέθοδοι Βελτιστοποίησης σε Πολλαπλότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις μεθόδους βελτιστοποίησης και συγκεκριμένα με την ειδική περίπτωση όπου μας ενδιαφέρει να βελτιστοποιήσουμε μια συνάρτηση που ορίζεται σε μια πολλαπλότητα. Πολλές φορές σε διάφορους τομείς, αλλά και στην καθημερινή μας ζωή, ερχόμαστε αντιμέτωποι με προβλήματα για τα οποία αναζητάμε μια βέλτιστη λύση. Τέτοια θα μπορούσαν να είναι η μεγιστοποίηση των κερδών μιας επιχείρησης ή η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής ενός προϊόντος. Αν είμασταν γιατροί ή φαρμακοποιοί θα μπορούσε ίσως να μας ενδιαφέρει η χρονική στιγμή στην οποία η συγκέντρωση μιας ουσίας στο αίμα ενός ασθενή γίνεται μέγιστη. Με μαθηματικούς όρους, τα προβλήματα αυτά εκφράζονται από μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται από κάποιες μεταβλητές. Θέλουμε λοιπόν να βρούμε σε ποια σημεία η συνάρτηση αυτή, την οποία ονομάζουμε αντικειμενική, παίρνει τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της. Τέτοιες συναρτήσεις όμως μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκες και οι συνήθεις αναλυτικές μέθοδοι δεν επαρκούν. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι που μετά από πεπερασμένου πλήθους βήματα οδηγούν στη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης. Επιπλέον, το πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης συμβαίνει συχνά να είναι πολλαπλότητα. Γι αυτό το λόγο μας ενδιαφέρει οι αλγόριθμοι να λειτουργούν ορισμένοι και σε πολλαπλότητες.

7.1 Γενικές Αρχές των Μεθόδων Βελτιστοποίησης

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης είναι ένα σημαντικό κομμάτι των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Όπως αναφέρεται και στο βιβλίο [;], ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης αφορά την εύρεση ελάχιστου ή μέγιστου για μια συνάρτηση $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, την οποία ονομάζουμε αντικειμενική, και η οποία ορίζεται σε ένα σύνολο S και αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του μια πραγματική τιμή. Υπολογισμένη στα διάφορα σημεία του S η f θα πάρει όλες τις πιθανές τιμές της. Στο S λοιπόν θα αναζητήσουμε τα σημεία τα οποία ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) την τιμή της f κατά το δυνατόν περισσότερο. Στόχος άλλωστε είναι να βρούμε ακριβώς αυτά τα σημεία. Γράφουμε:

$$\min_{x \in S} f(x)$$

για να δηλώσουμε ταυτόχρονα το πρόβλημα βελτιστοποίησης αλλά και την ελάχιστη τιμή της f (όταν υπάρχει). Έτσι, για να αναφερθούμε στα σημεία του S όπου η f γίνεται ελάχιστη

χρησιμοποιούμε το όρισμα της συνάρτησης ελαχίστου για την f :

$$\arg \min_{x \in S} f(x),$$

έχοντας υπόψη ότι το σύνολο αυτό ενδέχεται να είναι κενό.

Είναι κοινώς αποδεκτό ότι τα προβλήματα βελτιστοποίησης στις περισσότερες των περιπτώσεων δεν έχουν αναλυτικές λύσεις. Συνήθως, χρειάζονται αριθμητικοί αλγόριθμοι για κινηθεί κάποιος προς κάποια λύση, χωρίς και πάλι να υπάρχει βεβαιότητα ότι θα καταφέρει να την εντοπίσει. Συχνά, οι αλγόριθμοι αυτοί βασίζονται στη μαθηματική δομή του συνόλου S και της αντικειμενικής συνάρτησης f για να γίνουν πιο αποδοτικοί.

Μια ειδική περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι όταν ο S είναι ένας γραμμικός χώρος, για παράδειγμα αν ο S είναι ο \mathbb{R}^n . Η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης f στο \mathbb{R}^n αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς, επειδή η μεταβλητή x έχει τη δυνατότητα να πάρει τιμές από όλο το \mathbb{R}^n , χωρίς κάποια οριοθέτηση.

Αν η f είναι επαρκώς διαφορίσιμη και το \mathbb{R}^n είναι εφοδιασμένο με ένα εσωτερικό γινόμενο (κι επομένως αποτελεί Ευκλείδειο χώρο) τότε μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα κλίσης και ίσως και την Εσσιανή για την f . Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό καθώς τα μαθηματικά αυτά αντικείμενα προσφέρουν μια στέρεα βάση για να μας βοηθήσουν να καταλάβουμε πως η f συμπεριφέρεται τοπικά, γύρω από ένα τυχαίο σημείο. Σημαντικοί αλγόριθμοι όπως η μέθοδος της ταχύτερης αλλαγής και η μέθοδος Newton εκμεταλλεύονται το διάνυσμα κλίσης και την Εσσιανή για να μετακινήθουν στο \mathbb{R}^n με τέτοιο τρόπο, ώστε να οδηγήσουν τελικά στην επιθυμητή βέλτιστη λύση.

Στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων μια πολύ χρήσιμη δομή την οποία θα εκμεταλλευτούμε για να χτίσουμε κατάλληλους αλγόριθμους είναι αυτή της λείας πολλαπλότητας και λείας συνάρτησης: υποθέτουμε ότι το σύνολο S είναι μια λεία πολλαπλότητα και η συνάρτηση f είναι επίσης λεία στο S .

Μια διαδικασία βελτιστοποίησης σε τέτοιες επιφάνειες είναι μια διαδικασία με περιορισμούς, δεδομένου ότι το x δεν έχει την ελευθερία να κινηθεί σε ολόκληρο το \mathbb{R}^n αλλά περιορίζεται πάνω σε κάποια επιφάνεια. Ταυτόχρονα όμως αυτά τα προβλήματα μπορούμε να τα αντιλαμβανόμαστε και ως προβλήματα χωρίς περιορισμούς, θεωρώντας ότι οι λείες επιφάνειες είναι το μόνο πράγμα που υπάρχει και αγνοώντας το γύρω χώρο: με τον ίδιο τρόπο που ένα μυρμήγκι που κινείται πάνω σε μια μεγάλη μπάλα μπορεί να μην νιώθει περιορισμένο στις κινήσεις του εφόσον δεν έχει επίγνωση του κόσμου πέρα από τη μπάλα.

Ένα ερώτημα που προκύπτει λοιπόν είναι αυτό: μπορούμε να γενικεύσουμε τους αλγόριθμους από την Ευκλείδεια περίπτωση (βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς) για να αντιμετωπίσουμε προβλήματα βελτιστοποίησης σε λείες πολλαπλότητες;

Για να πετύχουμε τη γενίκευση αλγορίθμων όπως είναι η μέθοδος της μεγαλύτερης αλλαγής ή η μέθοδος Newton στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων χρειαζόμαστε να κατασκευάσουμε μια κατάλληλη έννοια του διανύσματος της κλίσης και της Εσσιανής που να έχει νόημα στις πολλαπλότητες. Στην περίπτωση γραμμικών χώρων, αυτό γινόταν με χρήση εσωτερικού γινομένου: μια Ευκλείδεια δομή. Στη γενικότερη περίπτωση εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι κάθε λεία πολλαπλότητα έχει μια γραμμική προσέγγιση σε κάθε σημείο. Τη γραμμική αυτή προσέγγιση σε ένα σημείο p αποτελεί ο εφαπτόμενος χώρος που ορίζεται στο σημείο. Εφοδιάζοντας κάθε εφαπτόμενο χώρο με το δικό του εσωτερικό γινόμενο (το οποίο επομένως εξαρτάται από το p και θέλουμε να μεταβάλλεται με λείο τρόπο με αυτό) μετατρέπουμε την πολλαπλότητα σε μια πολλαπλότητα Riemann .

Η δομή Riemann αρκεί για να ορίσουμε το διάνυσμα της κλίσης και την Εσσιανή σε μια πολλαπλότητα, βάζοντας έτσι τα απαραίτητα θεμέλια για τις μεθόδους βελτιστοποίησης. Αξίζει ωστόσο να σημειώσουμε ότι μπορούν να οριστούν διάφορες δομές Riemann σε μια

πολλαπλότητα και η επιλογή που κάνουμε κάθε φορά μεταβάλλει θετικά ή αρνητικά την απόδοση του αλγορίθμου. Υπό αυτή την έννοια το να εντοπίσουμε μια κατάλληλη δομή αποτελεί μέρος της σωστής σχεδίασης του αλγορίθμου.

7.2 Προβλήματα Βελτιστοποίησης ορισμένα σε Πολλαπλότητες

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα ασχοληθούμε με τους αλγόριθμους της ταχύτερης αλλαγής και τον αλγόριθμο Newton. Πριν γίνει αυτό όμως παρουσιάζουμε ως παράδειγμα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης από επιστημονικούς ή τεχνολογικούς τομείς στα οποία αυτόματα προκύπτει ότι ορίζονται σε ένα σύνολο που αποτελεί πολλαπλότητα. Τα παραδείγματα αυτά εξυπηρετούν ακριβώς το σκοπό του να δείξουμε πως οι πολλαπλότητες προκύπτουν φυσικά σε διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης και μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο [3].

Το Πρόβλημα της Ελάχιστης Ιδιοτιμής

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε $A = A^T$, δηλαδή ο A είναι συμμετρικός. Τότε ο A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ στις οποίες αντιστοιχούν n πραγματικά ιδιοδιανύσματα $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ορθοκανονικά μεταξύ τους σύμφωνα με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{R}^n : $\langle u, v \rangle = u^T v$.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε ένα από τα εξής ζευγάρια ιδιοτιμής-ιδιοδιανύματος: είτε το (λ_1, v_1) που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή είτε το (λ_n, v_n) της μεγαλύτερης ιδιοτιμής. Συμβολίζουμε \mathbb{R}_*^n το σύνολο όλων των διανυσμάτων του \mathbb{R}^n πλην του μηδενικού. Η συνάρτηση

$$r : \mathbb{R}_*^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto r(x) = \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

(πηλίκιο Rayleigh) έχει ως μέγιστη κι ελάχιστη τιμή της τις ιδιοτιμές λ_1 (ελάχιστο) και λ_n (μέγιστο) και αυτό συμβαίνει όταν $x = \pm v_1$ ή $x = \pm v_n$. Θα αποδείξουμε ξανά αυτές τις ιδιότητες αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα ως πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αντικαθιστώντας μπορούμε να βεβαιώσουμε ότι $r(v_i) = \lambda_i$.

Αν μας ενδιαφέρει να βρούμε τη μικρότερη ιδιοτιμή λ_1 , τότε το πρόβλημα βελτιστοποίησης που προκύπτει είναι το:

$$\min_{x \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Το σύνολο \mathbb{R}_*^n είναι ανοιχτό στο \mathbb{R}^n , μια γνωστή πολλαπλότητα. Άρα το \mathbb{R}_*^n είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^n και κατά συνέπεια πολλαπλότητα και το ίδιο.

Μια ιδιότητα του πηλίκου Rayleigh είναι ότι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, δηλαδή $r(ax) = r(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq 0$. Έτσι δε θα ήταν πρόβλημα να σταθεροποιήσουμε το a σ' ένα τυχαίο σημείο. Ένας βολικός τρόπος, δεδομένου ότι ο παρονομαστής του πηλίκου είναι η νόρμα (στο τετράγωνο) του ορίσματος x , θα ήταν να περιοριστούμε σε μοναδιαία διανύσματα: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 1$. Τα διανύσματα αυτά συνιστούν τη μοναδιαία σφαίρα του \mathbb{R}^n :

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

η οποία είναι μια κανονική υποπολλαπλότητα του \mathbb{R}^n . Το πρόβλημα τότε παίρνει τη μορφή:

$$\min_{x \in S^{n-1}} \langle x, Ax \rangle.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή ενός πίνακα $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ καθώς και τα σχετικά ιδιάζοντα διάνυσματα (αριστερό και δεξί) λύνοντας το πρόβλημα:

$$\max_{x \in S^{m-1}, y \in S^{n-1}} \langle x, My \rangle.$$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος στον οποίο ορίζεται το πρόβλημα είναι το καρτεσιανό γινόμενο δύο σφαιρών. Το γινόμενο σφαιρών είναι και αυτό μια πολλαπλότητα ως γινόμενο πολλαπλοτήτων.

Το πρόγραμμα JPEG

Το πρόγραμμα JPEG είναι από τους πιο κοινούς αλγόριθμους για τη συμπίεση εικόνων και φωτογραφιών. Κατά κύριο λόγο ο αλγόριθμος βασίζεται στην έκφραση των φωτογραφιών ως συνδυασμό κάποιων προκαθορισμένων εικόνων-βάσεων. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια συγκεκριμένη συλλογή εικόνων οι οποίες αποτελούν δομικά στοιχεία για όλες τις υπόλοιπες κι έτσι όταν θέλουμε να αποθηκεύσουμε μια φωτογραφία (ή γενικότερα εικόνα) την αποθηκεύουμε ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της συλλογής αυτής. Έστω για παράδειγμα ότι μια εικόνα αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^d$ (το οποίο μπορεί να γίνει δεδομένου ότι μια εικόνα είναι ένας πίνακας από pixel τον οποίο μπορούμε να ξεδιπλώσουμε σε ένα μοναδικό μακρύ διάνυσμα) και οι εικόνες $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^d$ (όλες διανύσματα με νόρμα 1) συνιστούν μια βάση. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^d$ με στοιχεία c_i τέτοια ώστε:

$$y = c_1 b_1 + \dots + c_d b_d.$$

Επειδή κάθε φορά οι εικόνες που θα χρησιμοποιηθούν ως βάση είναι σταθερές, και είναι επιπλέον γνωστές σε αυτούς που είτε κατασκευάζουν είτε διαβάζουν εικόνες σε αυτή τη μορφή, μπορούμε αντί να αποθηκεύσουμε ολόκληρο το διάνυσμα y να αποθηκεύσουμε μόνο τους συντελεστές c .

Η βάση $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}^d$ έχει σχεδιαστεί ώστε να εξυπηρετεί δύο διαφορετικούς σκοπούς. Αρχικά, η εναλλαγή μεταξύ του y και του c πρέπει να μπορεί να γίνει γρήγορα (μια ορθοκανονική βάση για παράδειγμα θα εξυπηρετούσε πολύ καλά αυτό το σκοπό). Έπειτα, για τις εικόνες που προσπαθούμε να συμπίεσουμε θα πρέπει πολλοί από τους συντελεστές c_i να καταλήγουν να είναι 0 ή πολύ κοντά στο 0. Με αυτό τον τρόπο, για να ανακατασκευάσουμε το y αρκεί να καταγράψουμε μόνο τους μη μηδενικούς συντελεστές. Επιπρόσθετα, για να συμπίεσουμε το αρχείο ακόμα περισσότερο, μπορούμε να μην αποθηκεύσουμε ούτε τους πολύ μικρούς συντελεστές, δηλαδή εκείνους που είναι σχεδόν 0. Σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατό να ανακατασκευάσουμε το y μόνο προσεγγιστικά, η απώλεια πληροφορίας όμως είναι πολύ μικρή για να γίνει αντιληπτή από το ανθρώπινο μάτι.

Σε αυτό το παράδειγμα, όπου θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα εύρεσης μιας τέτοιας βάσης, μας ενδιαφέρει κυρίως ο δεύτερος στόχος. Έτσι, μπορούμε να επιτρέψουμε περισσότερες από d εικόνες ως βάση για την ανάλυση των φωτογραφιών μας. Οι εικόνες αυτές $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^d$ λέμε ότι αποτελούν ένα λεξικό, του οποίου τα στοιχεία ονομάζουμε άτομα και είναι υπεραρκετά για να καλύψουν το \mathbb{R}^d , στο οποίο ανήκουν οι εικόνες y . Δηλαδή μια οποιαδήποτε εικόνα $y \in \mathbb{R}^d$ είναι δυνατόν να αναλυθεί ως γραμμικός συνδυασμός των ατόμων χρησιμοποιώντας πολλούς διαφορετικούς συνδυασμούς. Η ιδέα είναι ότι ανάμεσα σε αυτούς τους διαφορετικούς συνδυασμούς θα υπάρχει μια τουλάχιστον ανάλυση που θα έχει πολλά μηδενικά ή πολλούς αμελητέους συντελεστές. Επιπλέον, για να έχουν νόημα τα μεγέθη των συντελεστών ορίζουμε όλα τα στοιχεία της βάσης να έχουν την ίδια νόρμα και συγκεκριμένα $\|b_i\| = 1, \forall i$.

Τελικά, δοθείσας μιας ομάδας από k εικόνες $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^d$ προσπαθούμε να βρούμε διανύσματα $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε κάθε μια από τις y_i να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών, έχοντας κατά το δυνατόν στην ανάλυσή της πολλά μηδενικά (ή μικρούς συντελεστές). Τοποθετούμε τις εικόνες ως στήλες σε έναν πίνακα δεδομένων $Y \in \mathbb{R}^{d \times k}$, και τα διανύσματα της βάσης σε ένα δεύτερο πίνακα $D \in \mathbb{R}^{d \times n}$ (που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια). Οι συντελεστές κάθε ανάλυσης για τις εικόνες χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο λεξικό αποτελούν τις στήλες ενός πίνακα $C \in \mathbb{R}^{n \times k}$ τέτοιου ώστε:

$$Y = DC.$$

Γενικά, μπορούμε να βρούμε πολλά διαφορετικά C που να ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη. Μας ενδιαφέρει ωστόσο να διαλέξουμε κατάλληλα ένα D ώστε να υπάρχει μια αντίστοιχη επιλογή για το C με πολλά μηδενικά. Έστω $\|C\|_0$ το πλήθος των θέσεων του πίνακα C που δεν είναι μηδέν. Τότε, το πρόβλημα του να βρεθεί ένα λεξικό που να ικανοποιεί τους στόχους που αναφέρθηκαν παραπάνω, μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια μιας παραμέτρου λ με τον εξής τρόπο:

$$\min_{D \in \mathbb{R}^{d \times n}, C \in \mathbb{R}^{n \times k}} \|Y - DC\|^2 + \lambda \|C\|_0$$

$$\text{για } \|b_1\| = \dots = \|b_n\| = 1,$$

και αποτελεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης.

7.3 Σημαντικές Πολλαπλότητες στα προβλήματα Βελτιστοποίησης

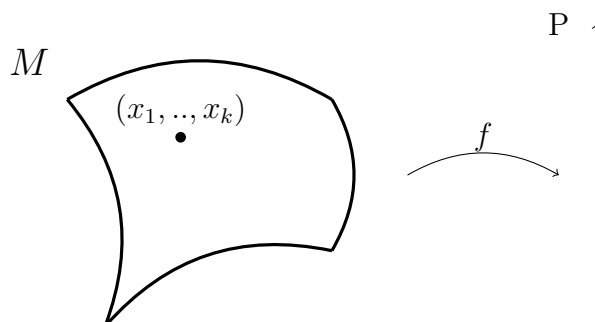
Παρουσιάζουμε αρχικά κάποια παραδείγματα πολλαπλοτήτων που προκύπτουν συχνά σε προβλήματα βελτιστοποίησης στις επιστήμες και τη μηχανική.

Πολλαπλότητα Stiefel

Η πολλαπλότητα Stiefel $St(k, n)$ περιέχει όλες τις συλλογές (x_1, \dots, x_k) , από k ορθοκανονικά στοιχεία του \mathbb{R}^n . Αναπτύσσοντας τα διανύσματα x^i μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα $[x_1, \dots, x_k]$ και η πολλαπλότητα αυτή γράφεται ως

$$St(k, n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times k} : X^T X = I\}.$$

Για να μπορέσουμε να την οπτικοποιήσουμε μπορούμε να φανταστούμε ότι κάθε σημείο της M στην εικόνα από κάτω αναπαριστά μια ορθοκανονική συλλογή (x_1, \dots, x_k) και ότι η αντικειμενική συνάρτηση f αναθέτει μια πραγματική τιμή σε κάθε τέτοια συλλογή.



Μερικοί τομείς εφαρμογών για μεθόδους βελτιστοποίησης στην πολλαπλότητα Stiefel είναι εφαρμογές που σχετίζονται με τη μηχανική μάθηση, το πρόβλημα του προκρούστη και την μηχανική οπτική.

Η Σφαίρα

Όταν $k = 1$ η πολλαπλότητα Stiefel $St(k, n)$ είναι η μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} .

Η Ορθογώνια Ομάδα

Όταν $k = n$ η πολλαπλότητα Stiefel $St(k, n)$ εφοδιασμένη με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων αποτελεί ομάδα, την αποκαλούμενη ορθογώνια ομάδα. Συμβολίζεται συνήθως με $O(n)$ ή O_n .

Η Πολλαπλότητα Grassman

Η πολλαπλότητα Grassman $Gr(k, n)$ είναι το σύνολο όλων των υποχώρων του \mathbb{R}^n διάστασης k . Για παράδειγμα, η $Gr(2, 3)$ αποτελείται από όλα τα επίπεδα του \mathbb{R}^3 . Αυτή η πολλαπλότητα έχει φανερί ιδιαίτερα αποτελεσματική στις εφαρμογές στο να μας βοηθήσει να μειώσουμε την πολυπλοκότητα ενός προβλήματος με το να μειώσουμε τις διαστάσεις με τις οποίες δουλεύουμε.

$OB(n, m)$ και Γινόμενα Σφαιρών

Η πολλαπλότητα $OB(n, m) = \{Y \in \mathbb{R}_*^{n \times k} : \text{diag}(YY^T) = I_k\}$, η οποία αποτελείται από τους πίνακες $n \times m$ με στήλες μοναδιαία διανύσματα, αλλά και τα διάφορα Καρτεσιανά γινόμενα σφαιρών έχουν βρει εφαρμογή σε προβλήματα όπως η ταυτοποίηση δυναμικών συστημάτων που εξαρτώνται από το χρόνο

Διάφορα Γινόμενα Πολλαπλοτήτων

Εκτός από τις σφαίρες, στις εφαρμογές προκύπτουν και πολλά άλλα Καρτεσιανά γινόμενα πολλαπλοτήτων. Για παράδειγμα ένα γινόμενο 16 αντιγράφων της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $SO(3) = \{X \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : XX^T = I\}$ έχει χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί η θέση της σπονδυλικής στήλης του ανθρώπου. Η σχετική εργασία είναι η "Μέθοδος Newton στις πολλαπλότητες Riemann κι ένα γεωμετρικό μοντέλο για την ανθρώπινη σπονδυλική στήλη" των Roy L. Adler, Jean-Pierre Dedieu, Joseph Y. Margulies, Marco Martens Mike Shub

Πολλαπλότητες Πηλίκο

Οι πολλαπλότητες πηλίκο εμφανίζονται σε ποικίλες εφαρμογές όταν η αντικειμενική συνάρτηση έχει την ιδιότητα να μη μεταβάλεται σε κάποια σύνολα και η ιδιότητα αυτή ορίζει αυτόματα μια κανονική σχέση ισοδυναμίας.

7.4 Η Μέθοδος της Ταχύτερης Αλλαγής

Μεταξύ των αλγόριθμων βελτιστοποίησης που αφορούν μια λεία αντικειμενική συνάρτηση, η μέθοδος της ταχύτερης αλλαγής είναι η πιο θεμελιώδης.

Η βασική ιδέα πίσω από τη μέθοδο όταν δουλεύουμε σε πραγματικούς χώρους είναι ότι το διάνυσμα κλίσης $\nabla f(x)$ υποδεικνύει κάθε φορά την κατεύθυνση στην οποία η f αυξάνει γρηγορότερα, και κατά συνέπεια το αντίθετο αυτού του διανύσματος,

$$-\nabla f(x)$$

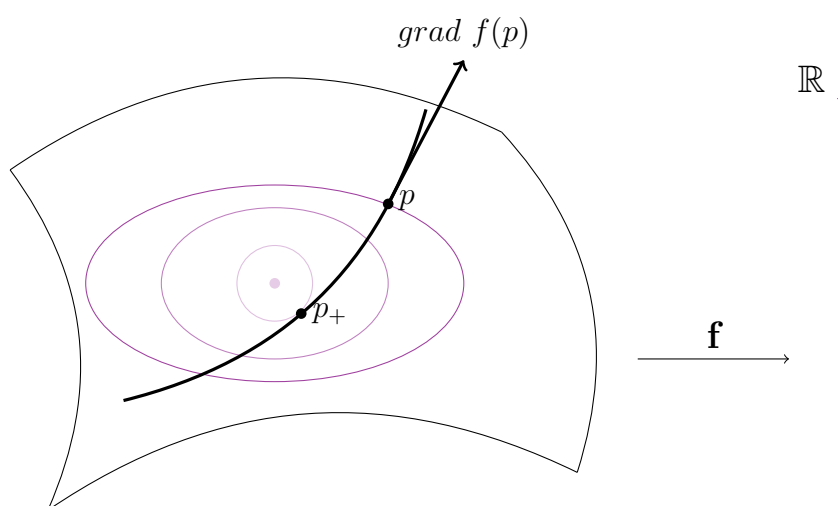
την κατεύθυνση που η τιμή της f μειώνεται γρηγορότερα. Βασιζόμενοι σ' αυτό το γεγονός μπορούμε να κατασκευάσουμε μια επαναληπτική μέθοδο για να ελαχιστοποιήσουμε την f απλώς ακολουθώντας κάθε φορά την κατεύθυνση που υποδεικνύει το διάνυσμα

$$-\nabla f(x),$$

με βήμα που εξαρτάται από την εκάστοτε περίπτωση.

Παραθέτουμε από κάτω ένα πίνακα στον οποίο συγκρίνουμε τη μέθοδο της ταχύτερης αλλαγής στο \mathbb{R}^n με την αντίστοιχη αυτής στις πολλαπλότητες. Το διάνυσμα $\nabla f(x) = [\partial_1 f(x) \cdots \partial_n f(x)]^T$ συμβολίζει το σύννητες διάνυσμα της κλίσης των Ευκλείδειων χώρων. Χρήσιμη επίσης είναι η απεικόνιση της μεθόδου στο σχήμα, όπου οι κλειστές καμπύλες αποτελούν καμπύλες στάθμης.

	\mathbb{R}^n	Πολλαπλότητα
Κατεύθυνση αναζήτησης	διάνυσμα στο p	Εφαπτόμενο διάνυσμα στο p
Διεύθυνση ταχύτερης αλλαγής	$-\nabla f(p)$	$-\text{grad } f(p)$
Καμπύλη αναζήτησης	$c : t \mapsto p - t\nabla f(p)$	c τέτοιο ώστε $c(0) = p$ και $\dot{c}(0) = -\text{grad } f(p)$



Η εικόνα αυτή εμφανίζει μια υποπολλαπλότητα ενός Ευκλείδειου χώρου. Ωστόσο μας ενδιαφέρει ένας αλγόριθμος που να λειτουργεί για όλα τα είδη πολλαπλότητας. Θα χρειαστεί λοιπόν να δώσουμε ορισμούς για τις σχετικές έννοιες των εφαπτόμενων διανυσμάτων και του διανύσματος της κλίσης που είναι αρκετά αφηρημένοι. Παρόλα αυτά, το εικονιζόμενο

σχήμα είναι αρκετά χρήσιμο προκειμένου ν' αναπτύξει κάποιος διαίσθηση.

Στο εξής, ένα εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο p μιας πολλαπλότητας M το συμβολίζουμε ξ_p .

Ορίζοντας την Κατεύθυνση Καθόδου

Έχοντας υπόψη τον ορισμό που δώσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια για το εφαπτόμενο διάνυσμα σε μια πολλαπλότητα, και σε συμφωνία με αυτά που ισχύουν στο διαφορικό λογισμό, μπορούμε να ορίσουμε τη διεύθυνση καθόδου μιας αντικειμενικής συνάρτησης f ως εξής: αν η f ορίζεται στο σημείο p μιας πολλαπλότητας M , τότε η διεύθυνση καθόδου της f στο p είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα ξ_p τέτοιο ώστε $Df(p)[\xi_p] < 0$. Με άλλα λόγια, αν c μια οποιαδήποτε καμπύλη που πραγματοποιεί το ξ_p , θα συμβαίνει $\frac{d}{dt}f(c(t))|_{t=0} < 0$. Έτσι, για κάθε t θετικό και αρκετά μικρό, $f(c(t)) < f(p)$.

Η Κατεύθυνση της Μεγαλύτερης Μείωσης και το Διάνυσμα της Κλίσης

Προκειμένου όμως να αποφανθούμε σε ποια κατεύθυνση μια συνάρτηση f παρουσιάζει την πιο απότομη αύξηση ή μείωση χρειαζόμαστε έναν τρόπο για να υπολογίσουμε τα μήκη των εφαπτόμενων διανυσμάτων, καθώς η κατεύθυνση αυτή ορίζεται μοναδιαία. Πιο συγκεκριμένα, η κατεύθυνση της μεγαλύτερης αλλαγής είναι το όρισμα ξ_p που μεγιστοποιεί την ποσότητα $Df(p)[\xi_p]$ ή αλλιώς:

$$\arg \max_{\substack{\xi_p \in T_p M \\ \|\xi_p\|=1}} Df(p)[\xi_p].$$

Επειδή το $T_p M$ είναι γραμμικός χώρος για κάθε p , μπορούμε να κάνουμε χρήση εσωτερικού γινομένου για να υπολογίσουμε τα μήκη αυτά. Αν g_p ένα εσωτερικό γινόμενο στο $T_p M$ ορίζεται εύκολα και μια νόρμα σε αυτό ως εξής:

$$\|\xi_p\| := \sqrt{g_p(\xi_p, \xi_p)}.$$

Όταν το g_p είναι λεία συνάρτηση του p , το (M, g) ονομάζεται πολλαπλότητα Riemann ενώ το ίδιο το g_p ονομάζεται μετρική Riemann. Όπως και με τον άτλαντα, στην πράξη συχνά αναφερόμαστε σε μια πολλαπλότητα Riemann χρησιμοποιώντας μόνο το M και αφήνοντας τη μετρική να εννοηθεί, εφόσον οι συνθήκες το επιτρέπουν.

Ορισμένης τώρα μιας μετρικής Riemann, υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο στο $T_p M$ που καλείται κλίση της f στο p και συμβολίζεται με $grad f(p)$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} grad f(p) &\in T_p M \\ g_p(grad f(p), \xi_p) &= Df(p)[\xi_p], \quad \text{για κάθε } \xi_p \in T_p M \end{aligned}$$

Δηλαδή, η κατά το $\xi_p \in T_p M$ μεταβολή της f στο σημείο p , δίνεται κάθε φορά από το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος της κλίσης με το εν λόγω εφαπτόμενο διάνυσμα. Μια συνέπεια αυτού είναι ότι, κατ' αναλογία με ό,τι ίσχυε στους Ευκλείδειους χώρους, το διάνυσμα κλίσης της f στο p βρίσκεται στην κατεύθυνση προς την οποία αυξάνει περισσότερο η f ξεκινώντας από το σημείο p . Πράγματι, αν στον ορισμό πάρουμε ως κατεύθυνση την ίδια

την κλίση $\text{grad } f(p)$ και επιχειρήσουμε να μεγιστοποιήσουμε αυτή την ποσότητα προκύπτει άμεσα ότι:

$$\frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|} = \underset{\substack{\xi_p \in T_p M \\ \|\xi_p\|=1}}{\text{arg max}} Df(p)[\xi_p]$$

Συνεπώς, και η διεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσης θα βρίσκεται στην κατεύθυνση του $-\text{grad } f(p)$.

Παρατηρούμε ότι οι ορισμοί τόσο του διανύσματος της κλίσης, όσο και της διεύθυνσης της ταχύτερης αλλαγής της f εξαρτώνται από τη μετρική Riemann. Επιπλέον, αξιοποιώντας τον ορισμό $Df(p)[\xi_p] = \left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0}$ προκύπτει ότι η νόρμα της διανυσματικής κλίσης της f στο p είναι ίση με την κλίση (slope) της $t \mapsto f(c(t))$ στο $t = 0$, όπου η c είναι οποιαδήποτε καμπύλη πραγματοποιεί το $\frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|}$:

$$\|\text{grad } f(p)\| = Df(p) \left[\frac{\text{grad } f(p)}{\|\text{grad } f(p)\|} \right].$$

Το διάνυσμα Κλίσης σε Υποπολλαπλότητες

Αν (\bar{M}, \bar{g}) είναι μια πολλαπλότητα Riemann και M μια υποπολλαπλότητα αυτής, τότε ορίζεται εύκολα ένα εσωτερικό γινόμενο στη M περιορίζοντας το \bar{g} στο M :

$$g_p(\xi_p, \zeta_p) := \bar{g}_p(\xi_p, \zeta_p), \quad \forall \xi_p, \zeta_p \in T_p M.$$

Εφοδιασμένο με την παραπάνω μετρική Riemann, το M χαρακτηρίζεται ως υποπολλαπλότητα Riemann του \bar{M} . Αν τώρα $T_p M$ ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο p , έχουμε $T_p^\perp M$ το ορθογώνιο συμπλήρωμά του στο $T_p \bar{M}$, όπως αυτό προκύπτει να είναι μέσω της \bar{g} . Συνεπώς, κάθε $z \in T_p \bar{M}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = P_p z + P_p^\perp z$, όπου $P_p z$ ανήκει στο $T_p M$ και $P_p^\perp z$ ανήκει στο $T_p^\perp \bar{M}$. Αν $\bar{f} : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση στην πολλαπλότητα \bar{M} και $f = \bar{f}|_M$ ο περιορισμός της \bar{f} στην υποπολλαπλότητα, τότε

$$\text{grad } f(x) = P_p \text{grad } \bar{f}(x).$$

Δηλαδή το διάνυσμα της κλίσης του περιορισμού της f στην υποπολλαπλότητα Riemann (M, g) ορίζεται να είναι η προβολή της αρχικής κλίσης στον εφαπτόμενο χώρο του x .

Επιλογή Καμπύλης Διερεύνησης

Δοθέντος ενός σημείου $p \in M$ κι ενός εφαπτόμενου διανύσματος $\xi_p \in T_p M$, αν κινηθούμε μακριά από το p στην κατεύθυνση του ξ_p κατά πάσα πιθανότητα σχετικά σύντομα δε θα βρισκόμαστε πια πάνω στην πολλαπλότητα M . Για να ακολουθήσουμε λοιπόν την κατεύθυνση που μας υποδεικνύει κάθε φορά το διάνυσμα της κλίσης χρειαζόμαστε μια καμπύλη στη M όπου θα μπορούμε να κινηθούμε χωρίς να 'ξεκολλήσουμε' από την πολλαπλότητα. Αυτή είναι η βασική διαδικασία στον αλγόριθμο της μεγαλύτερης αλλαγής, αλλά και των περισσότερων αλγόριθμων βελτιστοποίησης στις πολλαπλότητες. Για να το καταφέρουμε αυτό μπορούμε να αξιοποιήσουμε την πληροφορία που μας δίνει το διάνυσμα της κλίσης για την κατεύθυνση στην οποία οι τιμές της f μειώνονται κατακόρυφα, και να φτιάξουμε μια καμπύλη c η οποία να περνάει από το p για $t = 0$ και επιπλέον

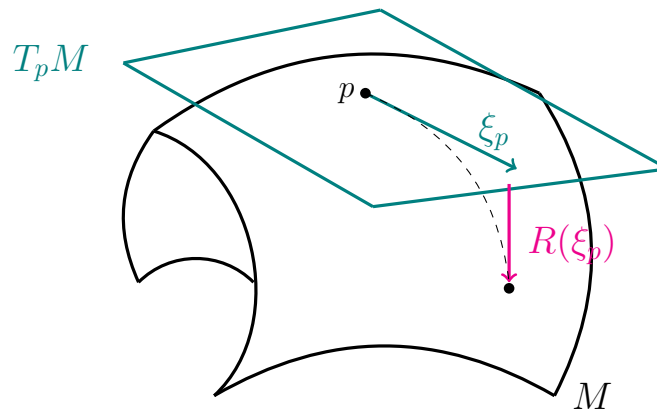
$$\dot{c}(0) = -\text{grad } f(p).$$

Για να επιλέξουμε μια συγκεκριμένη τέτοια καμπύλη, από τις πολλές που μπορούν να κατασκευαστούν, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη βοήθεια μιας συνάρτησης που ονομάζουμε συστολή. Μια συστολή στο M είναι μια λεία απεικόνιση $R : TM \rightarrow M$ τέτοια ώστε, για κάθε $p \in M$ και $\xi_p \in T_pM$,

1. $R(0_p) = p$, όπου 0_p συμβολίζει την αρχή του T_pM
2. $\frac{d}{dt}R(t\xi_p)|_{t=0} = \xi_p$

Δοθείσας μιας τέτοιας συνάρτησης, η καμπύλη $c : t \mapsto R(-t \operatorname{grad} f(p))$ είναι μια καμπύλη καθόδου στο $t = 0$, υπό την προϋπόθεση ότι $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$.

Για παράδειγμα εάν M μια επιφάνεια στο \mathbb{R}^3 μια συστολή θα μπορούσε να είναι η προβολή του εφαπτόμενου διανύσματος στο M .



Πιο συγκεκριμένα, αν M ήταν η μοναδιαία σφαίρα S^1 η συνάρτηση συστολής $R(\xi_p)$ θα μπορούσε να είναι η $R(\xi_p) = \frac{p+\xi_p}{\|p+\xi_p\|}$ η οποία στέλνει κάθε διάνυσμα $p + \xi_p$ στο αντίστοιχο μοναδιαίο, το οποίο κατ' ανάγκη θα βρίσκεται πάνω στη σφαίρα S^1 .

Αν η πολλαπλότητα M είναι ένας γραμμικός χώρος η συνάρτηση συστολής θα μπορούσε να είναι απλώς η $R(\xi_p) = p + \xi_p$, αφού το $p + \xi_p$ θα ανήκει στη M για κάθε p και κάθε ξ_p .

Αναζήτηση Ελαχίστου πάνω στην Καμπύλη

Μένει να βρούμε ένα t_* τέτοιο ώστε $f(c(t_*))$ να είναι αρκετά μικρότερο από το $f(c(0))$. Εφόσον $t \mapsto f(c(t))$ είναι απλά μια συνάρτηση από το \mathbb{R} στο \mathbb{R} , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές βήματος του αλγόριθμου στην Ευκλείδεια περίπτωση.

Η επόμενη προσέγγιση της μεθόδου μεγαλύτερης αλλαγής ορίζεται να είναι $p_+ = c(t_*)$. Η μέθοδος μπορεί γενικά να προσαρμοστεί αλλάζοντας τη μετρική Riemann και τη συνάρτηση συστολής.

Μερικά Παραδείγματα της Μεθόδου της Μεγαλύτερης Αλλαγής

Στα παραδείγματα που ακολουθούν, τα δύο πρώτα μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο [;] και το τελευταίο στο [1].

Οι Ευκλείδειοι Χώροι ως Πολλαπλότητες

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης σε πολλαπλότητες δεν είναι παρά μια γενίκευση των μεθόδων βελτιστοποίησης που μας είναι ήδη γνωστοί. Τα εργαλεία και οι διαδικασίες που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους μπορούν το ίδιο εύκολα να χρησιμοποιηθούν και σε προβλήματα βελτιστοποίησης σε γραμμικούς χώρους. Το παράδειγμα που ακολουθεί αποσκοπεί στο να αναδείξει τον παραπάνω ισχυρισμό.

Έστω \mathcal{E} ένας πραγματικός γραμμικός χώρος, για παράδειγμα ο \mathbb{R}^n ή ο $\mathbb{R}^{n \times m}$. Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τον \mathcal{E} ως μια πολλαπλότητα, που διατηρεί ωστόσο το γραμμικό της χαρακτήρα. Από αυτή τη σκοπιά, η διάσταση του \mathcal{E} παραμένει η ίδια με τη διάστασή του ως γραμμικού χώρου. Στο \mathcal{E} όλοι οι εφαπτόμενοι χώροι θα είναι τελικά το ίδιο το \mathcal{E} : για $p \in \mathcal{E}$, $T_p \mathcal{E} = \mathcal{E}$. Κατά συνέπεια, μια εύκολη και καλή επιλογή για τη συνάρτηση συστολής θα μπορούσε να είναι η $R(\xi_p) = p + \xi_p$. Εφοδιάζοντας επίσης τον \mathcal{E} με ένα εσωτερικό γινόμενο αυτός συνιστά ταυτόχρονα Ευκλείδειο χώρο και πολλαπλότητα Riemann. Το διάνυσμα κλίσης στην πολλαπλότητα \mathcal{E} από τη μετρική Riemann θα είναι το ίδιο με το διάνυσμα της κλίσης στον Ευκλείδειο χώρο \mathcal{E} .

Μπορούμε ακόμα να θεωρήσουμε M μια υποπολλαπλότητα του Ευκλείδειου χώρου \mathcal{E} , τέτοια ώστε η M να είναι ταυτόχρονα γραμμικός υπόχωρος του \mathcal{E} . Για παράδειγμα, ένα τέτοιο M θα μπορούσε να είναι το $Sym(n)$ - το σύνολο όλων των συμμετρικών πινάκων μεγέθους n - που το μελετάμε ως υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n \times n}$. Εξακολουθεί να ισχύει ότι $T_p M = M$ για όλα τα $p \in M$ και μπορούμε και πάλι να επιλέξουμε την $R(\xi_p) = p + \xi_p$ ως συνάρτηση συστολής. Η προβολή $Proj_p$, την οποία χρειαζόμαστε για να κατασκευάσουμε το διάνυσμα της κλίσης στη M , θα είναι η ορθογώνια προβολή από το \mathcal{E} στο $T_p M = M$. Εφόσον μάλιστα η συνάρτηση αυτή δεν εξαρτάται από το p μπορούμε να αναφερόμαστε σε αυτή ως $Proj_M$. Αν μετατρέψουμε το M σε μια υποπολλαπλότητα Riemann του \mathcal{E} , περιορίζοντας το εσωτερικό γινόμενο στο M , τότε σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν για το διάνυσμα της κλίσης στις υποπολλαπλότητες θα πρέπει για $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση για την οποία υφίσταται μια λεία επέκταση \bar{f} :

$$\text{grad } f(x) = Proj_M(\text{grad } \bar{f}(x)).$$

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, αν $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{n \times n}$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και $M = Sym(n)$ υποπολλαπλότητα Riemann του \mathcal{E} , τότε $Proj_M(Z) = \frac{Z+Z^T}{2}$ που θα πει ότι το διάνυσμα της κλίσης μιας συνάρτησης στον υποχώρο $Sym(n)$ θα είναι απλά το συμμετρικό κομμάτι της κλίσης όπως αυτή ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Η μοναδιαία σφαίρα σ' έναν Ευκλείδειο χώρο

Έστω \mathcal{E} Ευκλείδειος χώρος εφοδιασμένος μ' ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και τη νόρμα $\| \cdot \|$ που παράγεται από αυτό. Ένας τέτοιος χώρος θα μπορούσε να είναι ο \mathbb{R}^d τον οποίο έχουμε εφοδιάσει με το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v \rangle = u^T v$, ή ακόμα το $\mathbb{R}^{n \times k}$ με το γινόμενο $\langle U, V \rangle = Tr(U^T V)$. Συμβολίζοντας με d τη διάσταση του \mathcal{E} , ορίζουμε τη μοναδιαία σφαίρα στο \mathcal{E} ως

$$S^{d-1} = \{x \in \mathcal{E} : \|x\| = 1\}$$

Ο εφαπτόμενος χώρος σε ένα σημείο p θα αποτελείται από όλα τα διανύσματα ξ_p τα κάθετα στο p κι επομένως

$$T_p S^{d-1} = \{\xi_p \in \mathcal{E} : \langle p, \xi_p \rangle = 0\}$$

με $\dim S^{d-1} = \dim \mathcal{E} - 1 = d - 1$. Ως συνάρτηση συστολής μπορούμε να επιλέξουμε την

$$R(\xi_p) = \frac{p + \xi_p}{\|p + \xi_p\|} = \frac{p + \xi_p}{\sqrt{1 + \|\xi_p\|^2}},$$

δηλαδή τη συνάρτηση που στέλνει κάθε διάνυσμα στο αντίστοιχό του μοναδιαίο. Η ορθογώνια προβολή στον εφαπτόμενο χώρο στο p παίρνει τη μορφή

$$Proj_p : \mathcal{E} \rightarrow T_p S^{d-1} : u \mapsto Proj_p(u) = u - \langle p, u \rangle p$$

δηλαδή από το διάνυσμα u αφαιρούμε το κομμάτι που είναι παράλληλο στο p . Πρέπει τώρα να εφοδιάσουμε την S^{d-1} με την επαγόμενη μετρική Riemann έτσι ώστε να αποτελεί πλέον μια υποπολλαπλότητα Riemann. Έχουμε έτσι ότι το διάνυσμα της κλίσης για μια $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση για την οποία υφίσταται μια λεία επέκταση \bar{f} θα δίνεται από

$$grad f(p) = Proj_p(grad \bar{f}(p)) = grad f(p) - \langle p, grad f(p) \rangle p.$$

Το Πρόβλημα των s μεγαλύτερων Ιδιοτιμών

Ας είναι $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με ιδιοτιμές τις $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, οι οποίες όμως μας είναι άγνωστες. Από αυτές θέλουμε να βρούμε τις s μεγαλύτερες ιδιοτιμές του A , δηλαδή τις $\lambda_1 \dots \lambda_s$ οι οποίες μάλιστα είναι διακριτές όταν $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$. Ορίζοντας $N = diag(s, s-1, \dots, 1)$ το πρόβλημα αυτό μπορεί να εκφραστεί με τον παρακάτω τρόπο

$$\max_{X^T X = I_s} trace(X^T A X N).$$

Στον πίνακα X που αποτελεί τη λύση του προβλήματος οι στήλες θα είναι τα s ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 \dots \lambda_s$.

Θα περιγράψουμε περιληπτικά τη μέθοδο της μεγαλύτερης αλλαγής στο σύνολο $St(s, n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times s} : X^T X = I\}$ όπου ορίζεται το πρόβλημά μας. Θέτουμε $\bar{f} : \mathbb{R}^{n \times s} \rightarrow \mathbb{R} : X \mapsto trace(X^T A X N)$ η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε και $f = \bar{f}|_{St(s, n)}$ ο περιορισμός της στο σύνολο που μας ενδιαφέρει. Για το διάνυσμα της κλίσης στο $\mathbb{R}^{n \times n}$ σε ένα σημείο $P \in St(s, n)$ έχουμε $\frac{1}{2} grad \bar{f}(P) = APN$. Έτσι,

$$\frac{1}{2} grad f(P) = Proj_{T_P St(s, n)}(APN) = APN - P sym(P^T APN)$$

όπου και πάλι $sym(Z) := (Z + Z^T)/2$ είναι το συμμετρικό τμήμα του ορίσματος Z . Αυτό προκύπτει από την εμφύτευση της $St(s, n)$ στο $\mathbb{R}^{n \times s}$ απ' όπου κληρονομεί επίσης τη σχετική μετρική Riemann. Τέλος, για συνάρτηση συστολής μπορούμε να επιλέξουμε την

$$R(\xi_p) = qf(P + \xi_p)$$

όπου η qf επιστρέφει τον Q παράγοντα από την QR ανάλυση του A , στην οποία ο Q είναι ένας ορθογώνιος πίνακας και ο R άνω τριγωνικός.

Ένα χρήσιμο χαρακτηριστικό της μεθόδου της μεγαλύτερης αλλαγής είναι ότι μας εγγυάται ότι θα βρίσκουμε ολοένα και καλύτερες προσεγγίσεις του ελαχίστου σε κάθε επόμενο βήμα. Ο ρυθμός σύγκλισης ωστόσο είναι γραμμικός και η μέθοδος αυτή μπορεί να καταλήξει να συγχλίνει πολύ αργά.

7.5 Η μέθοδος Newton στις πολλαπλότητες

Η μέθοδος Newton στις γενικές πολλαπλότητες

Δουλεύοντας στο \mathbb{R}^n μια μέθοδος που συγκλίνει ταχύτερα είναι η μέθοδος Newton η οποία εκμεταλλεύεται και την Εσσιανή παράγωγο, η οποία περιέχει πολύτιμες πληροφορίες για την καμπυλότητα της συνάρτησης. Εξάλλου, από το πολυώνυμο Taylor έχουμε για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x + \delta) \approx f(x) + \nabla f(x)^T \delta + \frac{1}{2} \delta^T H_f(x) \delta \equiv q(\delta),$$

όπου τα $x, \delta \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε έτσι μια τετραγωνική προσέγγιση της f την οποία άμα παραγωγίσουμε μπορούμε να βρούμε τα ελάχιστα και μέγιστα της, τα οποία φυσικά αποτελούν προσέγγιση αυτών της f .

Καταλήγουμε στην εξίσωση

$$H_f(x) \delta = -\nabla f(x)$$

Η αλλιώς:

$$D(\text{grad} f)(x)[\eta_x] = -\text{grad} f(x),$$

μια γραμμική εξίσωση στο διάνυσμα η_x . Θα γενικεύσουμε αυτή τη μέθοδο για την περίπτωση των πολλαπλοτήτων κατασκευάζοντας τους αντίστοιχους ορισμούς. Μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι στην περίπτωση που η αντικειμενική συνάρτηση f είναι ορισμένη σε μια πολλαπλότητα Riemann, τη θέση του διανύσματος η_x παίρνει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του χώρου $T_p M$ και η $\text{grad} f(x)$ γίνεται το διανυσματικό πεδίο της κλίσης (δηλαδή σε κάθε σημείο p της πολλαπλότητας παίρνουμε το διάνυσμα κλίσης $\text{grad} f(p)$). Μένει να ορίσουμε την κατά κατεύθυνση παράγωγο του πεδίου αυτού. Χρειαζόμαστε μια νέα έννοια παραγώγου, η οποία να μας δίνει κάθε φορά τη μεταβολή ενός διανυσματικού πεδίου στην κατεύθυνση ενός συγκεκριμένου διανύσματος. Το να προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε την $Df(p)[\xi_p] = \frac{d}{dt} f(c(t))|_{t=0}$ θα φέρει τον τύπο $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{grad} f(c(t)) - \text{grad} f(p)}{t}$, ο οποίος όμως είναι προβληματικός αφού τα $\text{grad} f(c(t))$ και $\text{grad} f(p)$ προέρχονται από διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους, τους $T_{c(t)} M$ και $T_p M$. Η νέα παράγωγος θα μπορέσει να οριστεί με τη βοήθεια ενός αντικειμένου που ονομάζεται "ομοπαράλληλη συνοχή" και η οποία έχει τη δυνατότητα να συνδέει διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους με τον τρόπο του ότι μπορεί να μεταφέρει παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης ένα ή περισσότερα εφαπτόμενα διανύσματα από τον ένα εφαπτόμενο χώρο στον άλλο. Με αυτό τον τρόπο μας βοηθάει να εκτελέσουμε πράξεις όπως η παραγωγή, εφόσον είναι πλέον δυνατό να υπολογίσουμε τη διαφορά δύο διανυσμάτων που προηγουμένως δεν ήταν συγκρίσιμα. Συμβολίζεται με ∇ . Η ομοπαράλληλη συνοχή $(u, V) \mapsto \nabla_u V$ παίρνει ως είσοδο ένα διανυσματικό πεδίο V και ένα διάνυσμα u και επιστρέφει την συναλλοίωτη παράγωγο του διανυσματικού πεδίου στην κατεύθυνση του διανύσματος. Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον αλγόριθμο της μεθόδου Newton για πολλαπλότητες Riemann.

Μια προσέγγιση $p_k \in M \mapsto p_{k+1} \in M$ ορίζεται από τα βήματα:

1. Λύνουμε την εξίσωση Newton

$$\text{Hess} f(p_k) \eta_k = -\text{grad} f(p_k)$$

με άγνωστο το $\eta_k \in T_{p_k} M$, όπου

$$\text{Hess} f(p_k) \eta_k := \nabla_{\eta_k} \text{grad} f.$$

2. Θέτουμε

$$p_{k+1} := R_{p_k}(\eta_k).$$

Ο αλγόριθμος έχει ιδιότητες σύγκλισης ανάλογες με εκείνες της μεθόδου Newton στο \mathbb{R}^n .

Η μέθοδος Newton σε υποπολλαπλότητες του \mathbb{R}^n

Αν M είναι μια υποπολλαπλοτητα του \mathbb{R}^n ο περιορισμός του συνήθους εσωτερικού γινομένου του \mathbb{R}^n θα μας δώσει μια μετρική Riemann για το M . Χρησιμοποιώντας ακόμα τη συνοχή Levi-Civita, για την οποία ισχύουν:

$$\nabla_{\vec{w}} \vec{v} = \nabla_{\vec{v}} \vec{w} \quad \text{και}$$

$$\nabla_{\vec{w}} (\vec{v} \cdot \vec{u}) = (\nabla_{\vec{w}} \vec{v}) \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{w}} \vec{u}$$

για κάθε $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$ του εκάστοτε διανυσματικού πεδίου, τότε προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος:

Η προσέγγιση $p_k \in M \mapsto p_{k+1} \in M$ ορίζεται από

1. Λύνουμε την εξίσωση Newton

$$\text{Hess } f(p_k)\eta_k = -\text{grad } f(p_k)$$

με άγνωστο το $\eta_k \in T_{p_k}M$, όπου

$$\text{Hess } f(p_k)\eta_k := P_{T_{p_k}} D\text{grad } f(p_k)[\eta_k].$$

2. Θέτουμε

$$p_{k+1} := R_{p_k}(\eta_k).$$

Όπου $P_{T_{p_k}} \text{grad } f(p_k)$, είναι το διάνυσμα κλίσης της υποπολλαπλότητας.

Η μέθοδος Newton στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}

Ο προηγούμενος αλγόριθμος μπορεί να εφαρμοστεί στη συγκεκριμένη περίπτωση όπου M είναι η μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} , την οποία αντιμετωπίζουμε ως υποπολλαπλοτητα Riemann του \mathbb{R}^n με μια πολύ συγκεκριμένη επιλογή για τη συνάρτηση συστολής.

Η προσέγγιση $p_k \in M \mapsto p_{k+1} \in M$ ορίζεται από

1. Λύνουμε την εξίσωση Newton

$$\begin{aligned} P_{p_k} D(\text{grad } f)(p_k)[h_k] &= -\text{grad } f(p_k) \\ p^T \eta_k &= 0 \end{aligned}$$

με άγνωστο το $\eta_k \in \mathbb{R}^n$, όπου $P_{p_k} = (I - p_k p_k^T)$.

2. Θέτουμε

$$p_{k+1} := \frac{p_k + \eta_k}{\|p_k + \eta_k\|}$$

Στον παραπάνω αλγόριθμο, $\text{grad } f(p) = (I - pp^T)\text{grad } \bar{f}(p)$, όπου \bar{f} είναι μια οποιαδήποτε επέκταση της f .

Βιβλιογραφία

- [1] P-A Absil, Robert Mahony, and Rodolphe Sepulchre. *Optimization on manifolds: Methods and applications*. In *Recent advances in optimization and its applications in engineering*, pages 125–144. Springer, 2010.
- [2] Martin Guest. *Introduction to manifolds*. Tokyo Metropolitan University, 2007.
- [3] L.W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer New York, 2010.
- [4] Α. Αρβανιτογεώργος. *Γεωμετρία Πολλαπλοτήτων*. Ελληνικά Ακαδημαϊκά Συγγράμματα και Βοηθήματα (Κάλλιπος), 2015.