

Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο



Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

«Διεπιστημονικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών:

Καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις»

Αναστασία Τσαμπαλάτη – Βακαλοπούλου

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Αρετή - Ρίτα Παναούρα

Αθήνα, 2026

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» (ΜΣΜ) της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας (ΣΘΕΤ) του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ).

Ευχαριστώ πολύ, την Επιβλέπουσα Καθηγήτριά μου κα Παναούρα Αρετή, για τη βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Τέλος, ευχαριστώ πολύ το σύζυγό μου Αλέξανδρο για την αμέριστη και διαρκή του στήριξη.

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή (α) («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία διερευνά τη συμβολή της διεπιστημονικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στις προσεγγίσεις STEM και STEAM, ως μέσα ενίσχυσης της μαθησιακής διαδικασίας. Σκοπός της εργασίας είναι η ανάδειξη του ρόλου των μαθηματικών ως συνδεδετικού κρίκου μεταξύ των διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων και η διερεύνηση των δυνατοτήτων που προσφέρουν οι διεπιστημονικές προσεγγίσεις για τη νοηματοδότηση της μαθηματικής γνώσης.

Η μελέτη βασίζεται σε βιβλιογραφική ανασκόπηση της διεθνούς βιβλιογραφίας σχετικά με τη διεπιστημονικότητα, τη μαθηματική εκπαίδευση, τη μαθηματική μοντελοποίηση και τις προσεγγίσεις STEM και STEAM. Αρχικά, παρουσιάζεται το εννοιολογικό και το ιστορικό πλαίσιο της διεπιστημονικότητας και εξετάζεται η εξέλιξή της στη σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα. Στη συνέχεια αναλύεται ο ρόλος των μαθηματικών σε διεπιστημονικά μαθησιακά περιβάλλοντα, με ιδιαίτερη έμφαση στα αυθεντικά προβλήματα και στη μαθηματική μοντελοποίηση ως εργαλεία σύνδεσης της σχολικής γνώσης με τον πραγματικό κόσμο. Παράλληλα, παρουσιάζονται οι παιδαγωγικές αρχές που υποστηρίζουν τις διεπιστημονικές και STEM και STEAM προσεγγίσεις, όπως ο οικοδομισμός, η διερευνητική μάθηση και η συνεργατική μάθηση. Επιπλέον, εξετάζονται ενδεικτικές διασυνδέσεις των μαθηματικών με τη μουσική, τη λογοτεχνία και την ιστορία, ενώ προτείνονται αντίστοιχες διδακτικές δραστηριότητες που αξιοποιούν αυθεντικά και δημιουργικά μαθησιακά πλαίσια.

Τα συμπεράσματα της εργασίας αναδεικνύουν ότι οι διεπιστημονικές προσεγγίσεις και η εκπαίδευση STEM και STEAM μπορούν να συμβάλουν ουσιαστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης, της κριτικής σκέψης, της δημιουργικότητας και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, ενισχύοντας παράλληλα τη σύνδεση των μαθηματικών με αυθεντικές καταστάσεις και εμπειρίες των μαθητών και των μαθητριών.

Λέξεις- Κλειδιά: διεπιστημονικότητα, μαθηματική εκπαίδευση, μαθηματική μοντελοποίηση, STEM, STEAM, αυθεντικά προβλήματα, διδακτικές προσεγγίσεις.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I: Εισαγωγή.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: Εννοιολογικό Πλαίσιο.....	8
Ορισμός Διεπιστημονικότητας	8
Διάκριση Παρεμφερών Όρων.....	9
Ιστορική Ανασκόπηση	11
<i>Ιστορική Εξέλιξη της Διεπιστημονικότητας.....</i>	<i>11</i>
<i>Ιστορική Εξέλιξη της Προσέγγισης STEM στην Εκπαίδευση</i>	<i>14</i>
Από την Ιστορική Εξέλιξη στη Σύγχρονη Εκπαιδευτική Πραγματικότητα	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ III: Διεπιστημονικότητα στη Διδασκαλία των Μαθηματικών.....	20
Ο Ρόλος των Μαθηματικών σε Διεπιστημονικά Μαθησιακά Περιβάλλοντα	20
Ο Ρόλος των Αυθεντικών και Λεκτικών Προβλημάτων στα Μαθηματικά	21
Μαθηματική Μοντελοποίηση και Αυθεντικά Προβλήματα	22
<i>Παράδειγμα Μαθηματικής Μοντελοποίησης</i>	<i>24</i>
ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Παιδαγωγικές Θεμελιώσεις της Διεπιστημονικής και STEM Προσέγγισης.....	26
Ενεργητική Μάθηση και Οικοδομισμός.....	27
Διερευνητική Μάθηση	29
Μεταφορά Γνώσης και Αυθεντικά Προβλήματα	30
Συνεργατική Μάθηση σε Περιβάλλοντα STEM	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: Διεπιστημονικές Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών.....	34
Μαθηματικά και Μουσική	35
Μαθηματική Λογοτεχνία.....	36
Μαθηματικά και Ιστορία	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: Διδακτικές Εισηγήσεις.....	41
Μαθηματικά και Μουσική	41
<i>Περιγραφή της Δραστηριότητας</i>	<i>42</i>
Μαθηματικά και Λογοτεχνία.....	47
<i>Περιγραφή της Δραστηριότητας</i>	<i>47</i>
Μαθηματικά και Ιστορία	49
<i>Περιγραφή της Δραστηριότητας</i>	<i>50</i>
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: Συμπεράσματα και εισηγήσεις για μελλοντική ερευνητική διερεύνηση	53
Σύνδεση Συμπερασμάτων και Θεωρητικού Πλαισίου	54
Εισηγήσεις για Μελλοντική Ερευνητική Διερεύνηση	55
Βιβλιογραφικές Αναφορές	57

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: Εισαγωγή

Η συνεχής και αυξανόμενη πολυπλοκότητα των κοινωνικών, επιστημονικών και τεχνολογικών ζητημάτων της σύγχρονης εποχής καθιστά αναγκαία την αναθεώρηση των παραδοσιακών διδακτικών προσεγγίσεων και πρακτικών, αλλά και τη συχνή αναθεώρηση των Αναλυτικών Προγραμμάτων για να ανταποκρίνονται στα νέα ζητούμενα. Η οποιαδήποτε αλλαγή στη διδακτική προσέγγιση ή στα προσδοκώμενα αποτελέσματα πρέπει να συνοδεύεται από αντίστοιχη επιμόρφωση και κατάρτιση των εκπαιδευτικών για να είναι σε θέση να εφαρμόσουν αποδοτικά την οποιαδήποτε καινοτομία. Η σημερινή εκπαιδευτική πραγματικότητα οφείλει να προετοιμάσει και να εφοδιάσει τους εκπαιδευόμενους με τις απαραίτητες δεξιότητες ώστε να κατορθώσουν να σταθούν αποτελεσματικά στο ύψος των νέων αυτών περιστάσεων, αλλά και τους εκπαιδευτικούς ώστε να μπορούν να ανταποκριθούν.

Η αντιμετώπιση αυθεντικών προβλημάτων, τα οποία δεν περιορίζονται στα στενά όρια ενός μεμονωμένου γνωστικού αντικειμένου, εντείνει την ανάγκη της συνδυαστικής σκέψης, της σύνθεσης γνώσεων και δεξιοτήτων από διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Τα ρεαλιστικά πλαίσια είναι πολυδιάστατα και απαιτούν τόσο την αναλυτική όσο και την προσθετική προσέγγιση. Η συνεργατική προσέγγιση διαφορετικών επιστημονικών κλάδων, προκειμένου να επιτευχθεί η ολοκληρωμένη μελέτη και η επίλυση των σύνθετων προβλημάτων, γνωστή με τον όρο της διεπιστημονικότητας αποτελεί πλέον αναγκαιότητα.

Στο πλαίσιο αυτό, η διεπιστημονικότητα αναδεικνύεται ως βασικός άξονας ανανέωσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας, εφόσον προσφέρει την παιδαγωγική κατεύθυνση που δύναται να ευνοήσει τη βαθύτερη κατανόηση και τη νοηματοδότηση της γνώσης. Στο επίκεντρο των μεταβολών που παρατηρούνται στην εκπαιδευτική διαδικασία, εξέχουσα θέση κατέχει η μαθηματική εκπαίδευση. Παραδοσιακά, πρόκειται για εκπαίδευση άρρηκτα συνδεδεμένη με αφηρημένες έννοιες και τυποποιημένες διαδικασίες, οι οποίες πρέπει να αποκτούν ρεαλιστικό περιεχόμενο και διερευνητικό χαρακτήρα. Παρά το γεγονός ότι τα μαθηματικά

αποτελούν θεμελιώδη γλώσσα των επιστημών και εργαλείο ερμηνείας του κόσμου, η διδασκαλία τους πολύ συχνά αποσυνδέεται από την πραγματική τους σημασία (Gutiérrez, 2023). Επομένως, προκύπτει η αναγκαιότητα της υπέρβασης αυτής της αποσπασματικότητας και η επανασύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο, ώστε να μη θεωρείται ένα επιστημονικό πεδίο αιθεροβάμον και πλήρως θεωρητικό, αποκομμένο από κάθε πρακτική χρήση. Για τους λόγους αυτούς, από εκπαιδευτική σκοπιά, τα μαθηματικά πρέπει να συνδεθούν με άλλα γνωστικά αντικείμενα, προκειμένου να προαχθεί η κατανόηση, η κριτική σκέψη και η μεταφορά της γνώσης σε νέες καταστάσεις. Στις μικρές ηλικίες είναι συνηθισμένη η αναφορά σε ρεαλιστικά πλαίσια της καθημερινότητας και την αξιοποίηση των μαθηματικών εννοιών. Στο ανώτερο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι εντονότερη η διεπιστημονική διάσταση διασύνδεσης των μαθηματικών εννοιών.

Μία από τις πιο διαδεδομένες προσεγγίσεις στη σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα που ενσωματώνει τη φιλοσοφία της διεπιστημονικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι το πλαίσιο STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics), καθώς και η μετέπειτα εξέλιξή του σε STEAM, με την ενσωμάτωση του κλάδου των τεχνών (Arts). Οι σύγχρονες αυτές διδακτικές προσεγγίσεις έχουν ως σκοπό να συνδέσουν τη μαθησιακή διαδικασία με αυθεντικά προβλήματα και εφαρμογές, αναδεικνύοντας το ρόλο των μαθηματικών τόσο ως εργαλείο ανάλυσης όσο και ως δομικό στοιχείο δημιουργικής σκέψης. Σε ό,τι αφορά το STEAM δίνεται η επιπλέον δυνατότητα διασύνδεσης των μαθηματικών με πεδία όπως η μουσική και η λογοτεχνία, διευρύνοντας τη μαθησιακή εμπειρία και ενισχύοντας τη διαθεματική κατανόηση.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της έννοιας της διεπιστημονικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών, δίνοντας έμφαση στην αξιοποίηση δράσεων STEM, ως παιδαγωγικού εργαλείου. Ειδικότερα, η εργασία επιδιώκει να αναδείξει το ρόλο των μαθηματικών σε διεπιστημονικά μαθησιακά περιβάλλοντα, να εξετάσει τις θεωρητικές βάσεις των προσεγγίσεων STEM και STEAM και να διερευνήσει τις δυνατότητες σύνδεσης των μαθηματικών με άλλα επιστημονικά πεδία και συγκεκριμένα της ιστορίας, της μουσικής και της μαθηματικής λογοτεχνίας. Η οργάνωση της εργασίας έχει την εξής δομή: στο

κεφάλαιο που ακολουθεί παρουσιάζεται το εννοιολογικό πλαίσιο της διεπιστημονικότητας, καθώς και η ιστορική της εξέλιξη και η ενσωμάτωσή της στην εκπαιδευτική διαδικασία, με ιδιαίτερη μνεία στην προσέγγιση STEM. Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η διεπιστημονικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών και αναλύεται ο ρόλος τους ως συνδεδετικού κρίκου μεταξύ διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων. Στόχος του εν λόγω κεφαλαίου είναι να αναδειχθεί ο ρόλος των μαθηματικών ως προνομιακό πεδίο διεπιστημονικής διδασκαλίας και ο τρόπος με τον οποίο αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διδακτικής προσέγγισης STEM. Στα επόμενα κεφάλαια διερευνάται η αξιοποίηση δράσεων STEM στη μαθηματική εκπαίδευση, μέσα από βιβλιογραφική ανασκόπηση, καθώς και οι δυνατότητες γεφύρωσης των μαθηματικών με τη μουσική και τη λογοτεχνία στο πλαίσιο διεπιστημονικών και δημιουργικών διδακτικών προσεγγίσεων. Κατατίθενται συγκεκριμένες διδακτικές εισηγήσεις οι οποίες πιστεύουμε ότι θα συμβάλουν στην κατανόηση της πρακτικής διάστασης του θέματος με στόχο την επίτευξη των στόχων που τίθενται στα σύγχρονα Αναλυτικά Προγράμματα ως προς την ανάπτυξη γνώσεων και δεξιοτήτων, οι οποίες μπορούν να αξιοποιούνται σε αυθεντικό και διεπιστημονικό πλαίσιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: Εννοιολογικό Πλαίσιο

Ορισμός Διεπιστημονικότητας

Η λέξη διεπιστημονικότητα προέρχεται από το συνδυασμό του προθέματος δι-, που δηλώνει τη σύνδεση και τη συνεργασία διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, της λέξης επιστήμη και του επιθήματος -ικότητα, που εξηγείται ως ιδιότητα ή κατάσταση. Η κύρια ρίζα της λέξης είναι η επιστήμη, που έχει τη σημασία του οργανωμένου συστήματος γνώσεων και η λέξη στο σύνολό της αποτελεί νεολογισμό που σχηματίστηκε στην ελληνική γλώσσα με βάση το διεθνή επιστημονικό όρο *interdisciplinarity*. Η διεπιστημονικότητα είναι η σύζευξη πολλών ακαδημαϊκών κλάδων σε μία δραστηριότητα, συνδυάζοντας στοιχεία, μεθόδους και σκοπούς από επιμέρους επιστήμες για να υποστηριχθεί η μάθηση με έναν πιο ολιστικό, συνδεδεμένο τρόπο. Η διεπιστημονικότητα υποδηλώνει το γεγονός, την ποιότητα ή την προϋπόθεση που αφορά δύο ή περισσότερα ακαδημαϊκά πεδία ή κλάδους μάθησης. Τα διεπιστημονικά έργα τείνουν να υπερβαίνουν τα παραδοσιακά όρια μεταξύ ακαδημαϊκών επιστημονικών κλάδων (Roth, 2020). Η προαναφερθείσα έννοια δεν συνίσταται απλώς στην παράθεση διαφορετικών επιστημονικών οπτικών, αλλά θέτει ως προϋπόθεση την ενσωμάτωση των εννοιών καθώς και των μεθοδολογιών στην ουσία τους. Με τον τρόπο αυτό, δημιουργείται ένα νέο πλαίσιο κατανόησης, ικανό να διασυνδέσει επιστήμες και να επιτρέψει τη βαθύτερη κατανόηση των εννοιών.

Όπως αναδεικνύεται, η διεπιστημονικότητα δεν αποτελεί παροδική τάση, αλλά δομικό στοιχείο της σύγχρονης επιστημονικής πρακτικής, αφού ενσωματώνεται τόσο στην ερευνητική διαδικασία όσο και στη διδασκαλία (Bijsterveld, 2023). Η λειτουργία της ως εργαλείο σύνδεσης των επιστημονικών πεδίων απορρέει άμεσα από την πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει τα σύγχρονα κοινωνικά και επιστημονικά προβλήματα. Συνεπώς, η διεπιστημονικότητα μπορεί να οριστεί ως μία δυναμική επιστημονική πρακτική που επιδιώκει τη σύνδεση και αλληλεπίδραση διαφορετικών γνωστικών πεδίων, με σκοπό την παραγωγή γνώσης,

η οποία, στα όρια ενός και μόνο επιστημονικού τομέα θα ήταν αδύνατον να παραχθεί.

Διάκριση Παρεμφερών Όρων

Συγγενείς όροι με αυτόν της διεπιστημονικότητας (interdisciplinarity) αποτελούν οι όροι της πολυεπιστημονικότητας (multidisciplinarity) και της διαεπιστημονικότητας (transdisciplinarity). Παρά το γεγονός ότι αποτελούν όρους διακριτούς, με διαφορετική έννοια ο ένας από τον άλλον, συχνά χρησιμοποιούνται με εναλλαξιμότητα εσφαλμένα. Για το λόγο αυτό, είναι άξια αναφοράς η διάκριση του καθενός από τον άλλο. Η πολυεπιστημονικότητα (multidisciplinarity) χαρακτηρίζεται από την παράλληλη συμμετοχή επιστημόνων διάφορων γνωστικών πεδίων, οι οποίοι αντιμετωπίζουν ένα κοινό πρόβλημα. Ωστόσο, στην περίπτωση αυτή κάθε επιστημονικό πεδίο διατηρεί την αυτονομία του, καθώς δεν επιδιώκεται σύνθεση των μεθοδολογιών που ακολουθούνται (Aboelela et al., 2007). Σε ό,τι αφορά τα αποτελέσματα, αυτά συνυπάρχουν αλλά δεν ενοποιούνται σε ένα κοινό ερμηνευτικό πλαίσιο. Πρόκειται για μία προσέγγιση, που, αν και ενισχύει την πολυπρισματικότητα, δεν αποτελεί εναρκτήρια οδό για τη δημιουργία νέας επιστημονικής γνώσης.

Η διεπιστημονική έρευνα (interdisciplinarity) αποτελεί μία διαδικασία σύμφωνα με την οποία οι ερευνητές προέρχονται από δύο ή περισσότερα επιστημονικά πεδία και η συνεργασία τους αποσκοπεί στην ενσωμάτωση θεωριών, εννοιών, δεδομένων και μεθόδων (Aboelela et al., 2007). Στην προσέγγιση αυτή, κύριο χαρακτηριστικό είναι η σύνθεση και όχι η συνεργασία των επιστημονικών κλάδων, που οδηγεί στη διαμόρφωση νέων ερμηνευτικών σχημάτων και ερευνητικών προσεγγίσεων, που δε θα ήταν δυνατόν να ανακύψουν μέσω μόνο ενός επιστημονικού πεδίου. Επιπλέον, η διεπιστημονικότητα περιγράφεται ως μία δυναμική διαδικασία συνεργασίας μέσα και πέρα από επιμέρους επιστημονικούς κλάδους, χωρίς να συνεπάγεται την κατάργησή τους, αλλά αναγνωρίζοντας τα όρια και τις δυνατότητες του καθενός (Klein, 2023).

Η διαεπιστημονικότητα (transdisciplinarity) συνιστά μία ακόμα πιο

διευρυμένη μορφή συνεργασίας των επιστημονικών πεδίων, υπερβαίνουσα τα όρια της θεωρητικής ακαδημαϊκής γνώσης. Συγκεκριμένα, στην προσέγγιση αυτή ενσωματώνονται μεταξύ άλλων, μη ακαδημαϊκοί δρώντες, όπως κοινωνικές ομάδες και επαγγελματίες (Aboelela et al., 2007). Στο πλαίσιο της κοινωνικής πρακτικής, η γνώση διαμορφώνεται με έμφαση στην αντιμετώπιση σύνθετων κοινωνικών προβλημάτων, χωρίς να παράγεται αποκλειστικά εντός μόνο ενός επιστημονικού περιορισμού. Στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών, η πολυεπιστημονική προσέγγιση (multidisciplinarity) μπορεί να εκδηλωθεί μέσω της παράλληλης αξιοποίησης γνώσεων από διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, όπως τα μαθηματικά, η φυσική και η τεχνολογία, χωρίς να επιδιώκεται η ουσιαστική ενοποίησή τους. Ενδεικτικά, οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορεί να μελετούν μαθηματικές έννοιες σχετικές με τη συνάρτησης και σε άλλο μάθημα να εξετάζουν φυσικά φαινόμενα σχετικά με την κίνηση, χωρίς οι προσεγγίσεις αυτές να συνδέονται σε ένα κοινό διδακτικό πλαίσιο.

Από μία άλλη σκοπιά, μια διεπιστημονική προσέγγιση (interdisciplinarity) στη διδασκαλία των μαθηματικών προϋποθέτει την αξιοποίηση συνδυαστικά των εννοιών και των μεθόδων από διαφορετικά επιστημονικά πεδία, αποσκοπώντας στην ενιαία κατανόηση ενός προβλήματος. Προβάλλοντας ως παράδειγμα ένα διδακτικό σενάριο, οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να διερευνήσουν την κίνηση ενός αντικειμένου χρησιμοποιώντας μαθηματικά μοντέλα, όπως συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις, τις φυσικές έννοιες της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, καθώς και τεχνολογικά εργαλεία, δημιουργώντας ένα πλαίσιο κοινό, ικανό να ενσωματώσει στοιχεία από όλα τα εμπλεκόμενα επιστημονικά πεδία.

Με αναφορά το ίδιο παράδειγμα, η διαεπιστημονική προσέγγιση (transdisciplinarity) ενσωματώνει αυθεντικά προβλήματα και εξωσχολικούς φορείς στη μαθησιακή διαδικασία, διευρύνοντας περαιτέρω το πεδίο. Ενδεικτικά, οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορεί να κληθούν να αξιοποιήσουν δεδομένα πέραν των σχολικών γνώσεων, δημιουργώντας μία κατασκευή που αντικατοπτρίζει την κίνηση ως φυσικό φαινόμενο, βασιζόμενοι στις μαθηματικές μελέτες των συναρτήσεων που έχουν προηγηθεί και σε συνεργασία με πεδία εκτός σχολικού πλαισίου.

Συνοψίζοντας, η εννοιολογική αποσαφήνιση της διεπιστημονικότητας και η διάκρισή της από συγγενείς όρους αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για τη μελέτη

και την εφαρμογή των διεπιστημονικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η σαφής κατανόηση των όρων της πολυεπιστημονικότητας, της διεπιστημονικότητας και της διαεπιστημονικότητας, καθώς και των εννοιολογικών τους ορίων επιτρέπει την ενσωμάτωση της διεπιστημονικότητας σε διδακτικά σενάρια STEM. Με τον τρόπο αυτό, διακρίνονται οι φαινομενικά λεπτές διαφορές στις έννοιες και ενισχύεται έτι περισσότερο την αντίληψη της ουσίας της διεπιστημονικότητας και η χρησιμότητά της στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Ιστορική Ανασκόπηση

Ιστορική Εξέλιξη της Διεπιστημονικότητας

Η διεπιστημονικότητα αποτελεί σήμερα βασικό χαρακτηριστικό της ακαδημαϊκής έρευνας, ωστόσο η ανάδυσή της συνδέεται με συγκεκριμένες ιστορικές εξελίξεις της οργάνωσης της επιστημονικής γνώσης.

Η διεπιστημονικότητα αποτελεί μία σχετικά πρόσφατη τάση, ενώ ιστορικά είναι στενά συνδεδεμένη με τις μεταβολές στην επιστημονική οργάνωση της γνώσης από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα, ειδικότερα λόγω της εντονότερης επιστημονικής εξειδίκευσης που χαρακτηρίζει τους δύο τελευταίους αιώνες και της διαίρεσης των επιστημών την εποχή εκείνη (Klein, 2023). Τόσο στην Ευρώπη, όσο και στην Αμερική, τα πανεπιστήμια δημιουργούν όλο και πιο εξειδικευμένα τμήματα και η επιστήμη κατακερματίζεται σε κλάδους και θέτει αυστηρά όρια. Αν και ο καταμερισμός αυτός αποτέλεσε βασική αιτία της προόδου των επιστημών, ταυτόχρονα δημιούργησε τέτοια οριοθέτηση μεταξύ τους που οδήγησε σε μονοεπίπεδη σκέψη. Έτσι, η εποχή εκείνη χαρακτηρίζεται από επιστήμες ξεχωρισμένες η μία από την άλλη, οχυρωμένες σε επιμέρους κλάδους και σε στεγανά σύνορα.

Λογικό επερχόμενο είναι να ανακύπτει το ερώτημα σχετικά με την αιτία που οδήγησε στην άνοδο της διεπιστημονικότητας. Αν και η διαχώριση των επιστημών είχε το θετικό αποτέλεσμα της σημαντικής ανάπτυξης των κλάδων, παρατηρήθηκε ότι η εξειδίκευση, εκτός από την επιθυμητή πρόοδο οδηγεί και σε ανεπιθύμητα αδιέξοδα. Ο περιορισμός της περιφερειακής ορατότητας αναμφίβολα ξετυλίζει

έναν απέραντο δρόμο μπροστά, εμποδίζει ωστόσο την επαφή και τη διάδραση με τον ευρύτερο κόσμο. Με την ίδια αναλογία, η άνοδος κάθε επιστήμης ξεχωριστά καταλήγει να είναι μονομερής, αν δε συνεργάζεται με τις υπόλοιπες και η προσφορά της στο κοινωνικό σύνολο είναι ακόμα λιγότερη.

Η άνοδος της διεπιστημονικότητας, επομένως, προέκυψε από την ανάγκη αυτή της συνεργασίας των επιστημών, με σκοπό την αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων και αναδύθηκε ως απάντηση στην πολυπλοκότητα των σύγχρονων κοινωνικών προβλημάτων. Η ίδια δομή των πανεπιστημίων, όπου τα τμήματα παρέμεναν θεσμικά και απομονωμένα, έκανε τη συνεργασία δύσκολη αλλά και αναγκαία (Klein, 2023). Άξιο αναφοράς είναι το γεγονός ότι ο όρος «διεπιστημονικότητα» χρονολογείται το 1920, οπότε και γινόταν προσπάθεια αναδιάρθρωσης και ένταξης στην εκπαίδευση εναλλακτικών μορφών του προγράμματος σπουδών. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, η ανάδειξη νέων επιστημών, όπως η οικολογία και οι κοινωνικές επιστήμες και η ανάγκη συνδυασμού θεωριών και μεθόδων έχει ως αποτέλεσμα την ιστορική ωρίμανση της ιδέας της διεπιστημονικότητας (Bijsterveld, 2023). Επιπρόσθετα, την εποχή αυτή, το πλαίσιο δύο παγκοσμίων πολέμων ανέδειξε προβλήματα μεγάλης κλίμακας, μερικά εκ των οποίων είναι η τεχνολογική καινοτομία, η ψυχολογία των μαζών, η οργάνωση της παραγωγής, τα οποία δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν εντός των στενών ορίων που είχαν θέσει οι μεμονωμένοι επιστημονικοί κλάδοι. Χωρίς να θεωρείται ότι οι πόλεμοι δημιούργησαν τη διεπιστημονικότητα, μπορούν να ιδωθούν ως οι καταλύτες που σε ορισμένο βαθμό προετοίμασαν το έδαφος για τα μεταπολεμικά μοντέλα θεσμικής και επιστημονικής συνεργασίας. Ο 21^{ος} αιώνας χαρακτηρίζεται από την ενεργό ένταξη της διεπιστημονικότητας στη νέα ακαδημαϊκή κουλτούρα, ως άμεση συνέπεια των ιστορικών εξελίξεων. Η θεσμική ενσωμάτωσή της στη νέα ακαδημαϊκή έρευνα αντανακλά τις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας, που βρίθει σύνθετων και πολυεπίπεδων προβλημάτων και είναι πλέον απολύτως αποδεκτή (Bijsterveld, 2023). Αναντίρρητα, η διεπιστημονικότητα δεν περιορίζεται πλέον στη σφαίρα της ερευνητικής δραστηριότητας, αλλά επεκτείνεται εμφανώς στο χώρο της εκπαίδευσης. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι η εκπαίδευση για πολλά έτη ακολούθησε πιστά τον κατακερματισμό των επιστημών, ορμώμενη από το διαχωρισμό που είχε προηγηθεί χρονικά και ακαδημαϊκά. Η άμεση συνέπεια του φαινομένου αυτού

υπήρξε η ανάδειξη μαθητών, οι οποίοι κατείχαν στείρα τη γνώση, ωστόσο δεν ήταν ικανοί να συνδέσουν τις έννοιες και να ερμηνεύσουν με κριτικό τρόπο την ουσία τους. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η σχολική γνώση που λαμβάνουν οι μαθητές και οι μαθήτριες να παρουσιάζεται αποκομμένη και αποσπασματική, χωρίς σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο. Ανά τα χρόνια, οι μαθησιακές διαδικασίες επικεντρώθηκαν κυρίως στην αναπαραγωγή πληροφοριών, στην τυποποιημένη επίλυση ασκήσεων και στην αξιολόγηση των μαθητών βάσει αυτών των αξόνων. Όπως αναφέρθηκε, το αποτέλεσμα ήταν να μη δίνεται έμφαση στην κατανόηση των σχέσεων που συνδέουν τις έννοιες και τα γνωστικά αντικείμενα. Με τον τρόπο αυτό, η εκπαίδευση διαφαίνεται να μην έχει κατορθώσει να επιτελέσει τον κύριο σκοπό της που αποτελεί η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης, η σύνθεση γνώσεων και η ανάπτυξη δεξιοτήτων ανώτερης τάξης.

Η συνειδητοποίηση βαθμιαία των περιορισμών που θέτει αυτή η προσέγγιση στην εκπαίδευση, οδήγησε στη αναζήτηση εναλλακτικών παιδαγωγικών μοντέλων, ικανών να ανταποκριθούν πληρέστερα στη σύνθετη φύση των πολύπλοκων επιστημονικών προβλημάτων. Με αυτό το κίνητρο, η διεπιστημονικότητα αναδύεται ως παιδαγωγική αναγκαιότητα και όχι ως μόδα ή απλή καινοτομία. Μέσω της διεπιστημονικής προσέγγισης, η γνώση παύει να αντιμετωπίζεται ως σύνολο απομονωμένων πληροφοριών και προάγεται η σύνδεση των ιδεών και των τρόπων σκέψης από διάφορα γνωστικά πεδία. Η μετάβαση από τον κατακερματισμό προς την ενοποίηση της γνώσης συνδέεται άμεσα με το ρόλο της εκπαίδευσης στη διαμόρφωση ενεργών και σκεπτόμενων μαθητών και μετέπειτα μελών της κοινωνίας, που είναι σε θέση να αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά πολυεπίπεδα προβλήματα. Υπό αυτό το πρίσμα, η διεπιστημονικότητα λειτουργεί ως καταλυτικός μηχανισμός στην ανανέωση των συχνά παρωχημένων και αναποτελεσματικών διδακτικών μεθόδων, θέτοντας στο επίκεντρο τη νοηματοδότηση της γνώσης και τη σύνδεσή της με πραγματικά φαινόμενα και προβλήματα. Ο ρόλος της στην εκπαίδευση είναι να επιδρά στον τρόπο με τον οποίο διδάσκεται η γνώση και αποτυπώνεται σαφώς και στην εκπαίδευση των μαθηματικών, όπου οι διεπιστημονικές προσεγγίσεις αναδεικνύουν την ανάγκη της σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης με σύνθετα προβλήματα πραγματικής και κοινωνικής φύσεως.

Ιστορική Εξέλιξη της Προσέγγισης STEM στην Εκπαίδευση

Η σταδιακή ενσωμάτωση της διεπιστημονικότητας στο χώρο της εκπαίδευσης οδήγησε στη διαμόρφωση νέων παιδαγωγικών προσεγγίσεων, οι οποίες επιδίωξαν να καταργήσουν τη διδασκαλία της γνώσης ως απομονωμένων γνωστικών αντικειμένων. Στο πλαίσιο αυτό, η προσέγγιση STEM, η οποία αποτελεί ακρωνύμιο των λέξεων Science, Technology, Engineering, Mathematics έκανε την εμφάνισή της. Η διδακτική προσέγγιση STEM αποτελεί μία από τις πιο χαρακτηριστικές και συστηματικές εκπαιδευτικές εκφάνσεις της διεπιστημονικότητας, αντανakλώντας ιστορικές, κοινωνικές και επιστημονικές ανάγκες των δύο τελευταίων αιώνων (Drake, 2004). Ιστορικά, το STEM δεν ξεκινάει αποτελώντας μία ενιαία εκπαιδευτική φιλοσοφία, αλλά αρχικά ικανοποιεί την ανάγκη της ενίσχυσης επιμέρους επιστημονικών πεδίων. Συγκεκριμένα, η εκτόξευση του πυραύλου Sputnik από τη Σοβιετική Ένωση, έδωσε την αφορμή στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής να στραφούν δυναμικά στην αναβάθμιση του εκπαιδευτικού τους συστήματος και, ειδικότερα, της διδασκαλίας των φυσικών επιστημών και των μαθηματικών. Ο βαθύτερος λόγος που έφερε στην επιφάνεια αυτή την ανάγκη ήταν ότι η Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής θεώρησαν ότι η επιστημονική εκπαίδευση έχει άμεση σύνδεση με την τεχνολογική πρόοδο, που την εποχή εκείνη ήταν ραγδαία, καθώς και με την εθνική ασφάλεια, που κατά τη διάρκεια των δεκαετιών αυτών κλονιζόταν έντονα. Άμεση συνέπεια της παραδοχής αυτής που ανέκυψε, ήταν μια σειρά από εκπαιδευτικές μεταρρυθμίσεις, που, αν και αρχικά επικεντρώνονταν σε μεμονωμένα γνωστικά αντικείμενα, προετοίμασαν το έδαφος για τη μετέπειτα διασύνδεσή τους (Catterall, 2017).

Στις δεκαετίες που ακολούθησαν, η εκρηκτική και ταχύτατη ανάπτυξη της τεχνολογίας και η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των κοινωνικών και επιστημονικών προβλημάτων κατέστησαν εμφανή την αδυναμία της αποσπασματικής διδασκαλίας. Δοθέντος αυτού του κινήτρου, αναδύθηκε η ανάγκη για τη δημιουργία μιας πιο ολοκληρωμένης εκπαιδευτικής προσέγγισης, η οποία να μπορεί να συνδυάζει τις φυσικές επιστήμες, την τεχνολογία, τη μηχανική και τα μαθηματικά. Αρχικά, ο όρος που χρησιμοποιήθηκε ήταν SMET, ωστόσο στις αρχές του 2000 καθιερώθηκε ο όρος

STEM, ο οποίος διαδόθηκε ως εννοιολογικά και γλωσσικά πιο εύχρηστος (STEM Handbook, 2024). Η καθιέρωση του όρου STEM σηματοδότησε και μία ουσιαστική μετατόπιση από την απλή συνύπαρξη γνωστικών αντικειμένων προς την επιδίωξη της ενσωμάτωσής τους. Σταδιακά, το STEM έπαψε να νοείται ως ένα σύνολο τεσσάρων αυτόνομων και ετερόκλητων πεδίων και άρχισε να προσεγγίζεται ως ένα ενιαίο εκπαιδευτικό πλαίσιο. Στο πλαίσιο αυτό, τα παιδιά καλούνται να αντιμετωπίσουν προβλήματα, μέσω αξιοποίησης εννοιών, μεθόδων και εργαλείων προερχόμενων από διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Η εξέλιξη αυτή έχει άμεση σχέση με τη διεπιστημονικότητα, καθώς η έμφαση μετατοπίζεται από τη συσσώρευση γνώσεων στη σύνθεσή τους και στη λειτουργική εφαρμογή τους σε πραγματικά δεδομένα.

Κατά τις τελευταίες δεκαετίες, η προσέγγιση STEM εξελίχθηκε περαιτέρω προς αυτό που συχνά αναφέρεται ως ολοκληρωμένο ή ενσωματωμένο STEM (integrated STEM) (Goos, 2023). Σε αυτή τη μορφή, τα γνωστικά αντικείμενα δε διδάσκονται απλώς παράλληλα, αλλά αλληλεπιδρούν δυναμικά μέσα από δραστηριότητες διερεύνησης, μοντελοποίησης και σχεδιασμού. Τα μαθηματικά σε αυτό το πλαίσιο, αποκτούν κεντρικό ρόλο, καθώς λειτουργούν ως γλώσσα περιγραφής, ανάλυσης και ερμηνείας των φαινομένων, συνδέοντας τις φυσικές επιστήμες, τη μηχανική και την τεχνολογία σε ένα κοινό εννοιολογικό υπόβαθρο (Makonye, 2023). Η σύγχρονη μορφή του STEM στην εκπαίδευση δεν περιορίζεται πλέον στην ανάπτυξη τεχνικών δεξιοτήτων, αλλά στοχεύει στην καλλιέργεια σύνθετων γνωστικών και μεταγνωστικών ικανοτήτων, όπως είναι η κριτική σκέψη, η επίλυση προβλημάτων, η γνωστική αυτορρύθμιση, η επικοινωνία και η συνεργασία.. Παράλληλα, αναγνωρίζεται ότι η αποτελεσματική εφαρμογή του STEM προϋποθέτει ουσιαστική διεπιστημονική σύνδεση και όχι επιφανειακή συνάθροιση δραστηριοτήτων.

Μία επιπλέον ένδειξη της ολοένα και εξελισσόμενης γνώσης και της ενεργού ένταξης της διεπιστημονικότητας στην εκπαίδευση αποτελεί η μετεξέλιξη του STEM σε STEAM. Σε πιο πρόσφατες εκπαιδευτικές προσεγγίσεις, το πλαίσιο του STEM επεκτάθηκε προς την κατεύθυνση του STEAM, εντάσσοντας τις Τέχνες (Arts) ως αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής διαδικασίας. Η προσθήκη αυτή καταδεικνύει την αναγνώριση ότι η αντιμετώπιση σύνθετων προβλημάτων απαιτεί

τόσο τεχνικές και επιστημονικές δεξιότητες όσο και δημιουργική σκέψη, φαντασία και πολιτισμική παιδεία. Η STEAM προσέγγιση έρχεται να προσθέσει στο διεπιστημονικό χαρακτήρα που έχει εκ φύσεως η προσέγγιση STEM τη σημασία της δημιουργικότητας και την αισθητική διάσταση της γνώσης. Η επιστήμη (Science) και η τεχνολογία (Technology) ερμηνεύονται μέσω της μηχανικής (Engineering) και των τεχνών (Arts) αποδιδόμενα στη γλώσσα των μαθηματικών (Mathematics) (Yakman, 2008). Η προσέγγιση STEAM αναπτύχθηκε ως εξέλιξη του STEM, με σκοπό την ενσωμάτωση των τεχνών και της δημιουργικής έκφρασης στη μαθησιακή διαδικασία. Η προσθήκη του στοιχείου των τεχνών (arts) αντανακλά την ανάγκη υπέρβασης μιας τεχνοκρατικής αντίληψης της εκπαίδευσης και την αναγνώριση της σημασίας της δημιουργικότητας, της αισθητικής και της φαντασίας στη διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης (Yakman, 2008). Στο πλαίσιο αυτό, η μάθηση προσεγγίζεται ως μία ολιστική διαδικασία, στην οποία οι επιστήμες και οι τέχνες αλληλεπιδρούν δυναμικά. Επιπροσθέτως, η προσέγγιση STEAM δίνει ιδιαίτερη έμφαση στη δημιουργική επίλυση προβλημάτων και στην ανάπτυξη πολλαπλών μορφών σκέψης. Μέσα από δραστηριότητες που συνδέουν τα μαθηματικά με τη μουσική, τη λογοτεχνία ή άλλες μορφές τέχνης, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν αφηρημένες έννοιες μέσω βιωματικών εμπειριών και εναλλακτικών μορφών αναπαράστασης. Η σύνδεση αυτή ενισχύει τη συμμετοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών, ενώ παράλληλα συμβάλλει στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας και της κριτικής σκέψης (Henriksen, 2014).

Επιπλέον, η ενσωμάτωση των τεχνών στη STEM εκπαίδευση αναδεικνύει τον πολυδιάστατο χαρακτήρα της γνώσης και υποστηρίζει τη διαμόρφωση περισσότερο ανοιχτών και συνεργατικών μαθησιακών περιβαλλόντων. Μέσω αυτής της προσέγγισης, οι επιτρέπεται στους διδασκόμενους να αναπτύσσουν τις μαθησιακές τους εμπειρίες, συνδυάζοντας την επιστημονική διερεύνηση με τη δημιουργική έκφραση, κατανοώντας ότι τα μαθηματικά μπορούν να συνδεθούν ουσιαστικά με πολιτισμικά και καλλιτεχνικά πεδία. Η διάσταση αυτή αποκτά ιδιαίτερη σημασία στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς ενισχύει τη νοηματοδότηση των εννοιών και τη σύνδεσή τους με αυθεντικά και δημιουργικά πλαίσια μάθησης (Land, 2013).

Η ιστορική εξέλιξη του STEM αντανακλά τη σταδιακή μετάβαση από τον κατακερματισμό της γνώσης προς την αναζήτηση ενοποιημένων εκπαιδευτικών

προσεγγίσεων, ικανών να ανταποκριθούν στις αυξημένες απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας και εκπαίδευσης.

Από την Ιστορική Εξέλιξη στη Σύγχρονη Εκπαιδευτική Πραγματικότητα

Η ιστορική εξέλιξη της διεπιστημονικότητας ανέδειξε σταδιακά τους περιορισμούς του κατακερματισμένου τρόπου οργάνωσης της γνώσης, που ακολουθούνταν ευλαβικά κατά τα προηγούμενα χρόνια. Η σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα χαρακτηρίζεται από τη μετάβαση από μία παραδοσιακή, επιμέρους διδασκαλία θεματικών αντικειμένων προς ένα ενιαίο αναλυτικό πρόγραμμα. Το γεγονός αυτό δείχνει να αποτελεί μια ισχυρή απάντηση τις σημερινές παιδαγωγικές ανάγκες. Συγκεκριμένα, η ανάγκη ανάπτυξης δεξιοτήτων όπως η κριτική σκέψη, η επίλυση σύνθετων προβλημάτων και η εφαρμογή της γνώσης σε αυτά, καθιστά πλέον αναγκαία τη υπέρβαση των παραδοσιακών διδακτικών διαχωρισμών. Η ανάπτυξη των εν λόγω δεξιοτήτων προϋποθέτει την ύπαρξη και τη διαμόρφωση ενός αναλυτικού προγράμματος, ικανό να συνδέσει τη γνώση με τη δράση, προσανατολίζοντας το ενδιαφέρον από την αποσπασματική κατάκτηση περιεχομένου στη νοηματοδοτημένη μάθηση (Drake, 2018).

Το πλέον οργανωμένο διεπιστημονικό πλαίσιο που αναδύθηκε και πληροί τις ανάγκες που εγείρονται στα σύγχρονα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα, αποτελεί η εκπαιδευτική προσέγγιση STEM. Η πρακτική και ουσιαστική ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην εκπαιδευτική διαδικασία δεν έχει απλώς ως σκοπό τη συνύπαρξη διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων, αλλά κυρίως στοχεύει στη δημιουργία μαθησιακών εμπειριών που ενισχύουν τη βαθύτερη κατανόηση (English, 2016). Κατ' επέκταση, η διδακτική προσέγγιση STEM λειτουργεί ως φυσική εξέλιξη της διεπιστημονικής σκέψης στην εκπαίδευση, αφού προετοιμάζει το έδαφος για την ουσιαστική αξιοποίηση των μαθηματικών ως κεντρικού συνδετικού κρίκου στη μαθησιακή διαδικασία. Από όσα ήδη αναφέρθηκαν, καθίσταται απόλυτα σαφές το γεγονός ότι η διεπιστημονικότητα και η διδακτική προσέγγιση STEM δεν αποτελούν θεωρητικές κατασκευές ούτε αποκυήματα μιας ουτοπικής εκπαιδευτικής πραγματικότητας. Αμφότερες οι έννοιες βρίσκουν εφαρμογή στη σημερινή

εκπαιδευτική πραγματικότητα, στην οποία τα μαθηματικά κατέχουν εξέχουσα θέση ως κομβικό γνωστικό αντικείμενο, ικανό να συνδυάσει στην ουσία του διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Η μετάβαση από την ιστορική εξέλιξη της διεπιστημονικότητας στη σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα δεν αποτελεί, επομένως, μόνο μία θεωρητική μετατόπιση. Αντιθέτως, διαφαίνεται ως χειροπιαστή αλλαγή στη λογική της οργάνωσης και της δομής του αναλυτικού προγράμματος και των μαθησιακών στόχων. Δεδομένου ότι η συσσώρευση γνώσης που χαρακτήρισε για συναπτά έτη τη σχολική πρακτική σε όλα τα γνωστικά αντικείμενα, αδυνατεί πλέον να ανταπεξέλθει στις σύγχρονες ανάγκες που εγείρονται στην κοινωνία, η διεπιστημονικότητα βρίσκει πρόσφορο έδαφος. Τα προαναφερθέντα σύνθετα προβλήματα, ως πολυπαραγοντικά και πολυεπίπεδα, απαιτούν συνδυασμό εργαλείων και συνδυαστικό τρόπο σκέψης ώστε να επιλυθούν. Στο πλαίσιο αυτό η ενοποίηση του αναλυτικού προγράμματος προβάλλει ως απάντηση που επιχειρεί να συγχρονίσει στόχους και δεξιότητες ανάμεσα σε διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα, έτσι ώστε η μάθηση να γίνει ουσιαστική, λειτουργική και περισσότερο νοηματοδοτημένη.

Η ολοκληρωμένη οργάνωση της διδασκαλίας μπορεί να γεφυρώσει αποτελεσματικά τα εκπαιδευτικά πρότυπα (standards) ή επιδιωκόμενα επίπεδα, με την έννοια των επίσημων μαθησιακών στόχων και τις κατευθυντήριες γραμμές που οφείλουν τα παιδιά να γνωρίζουν στην εκάστοτε βαθμίδα και τις μαθησιακές εμπειρίες. Η εν λόγω ενοποίηση δεν αποσκοπεί στην άρση της αυστηρότητας αλλά στην αναδιάταξη των στόχων και των περιεχομένων γύρω από σημαντικά ερωτήματα και πρακτικές εφαρμογές (Drake&Burns, 2004). Στη σύγχρονη διεθνή πραγματικότητα, η λογική αυτή εκφράζεται εντόνως μέσα από την ανάπτυξη των προσεγγίσεων STEM. Με ιδιαίτερη μνεία στην έννοια του integrated STEM, όπου επιμέρους πεδία όχι απλώς συνυπάρχουν, αλλά αλληλεπιδρούν γύρω από αυθεντικά προβλήματα, πρακτικές διερεύνησης, σχεδιασμό και μοντελοποίηση. Προκύπτει, λοιπόν, η ανάγκη οι μαθητές και οι μαθήτριες να αναπτύσσουν πρακτικές και διαθεματικές έννοιες που ευνοούν τη μεταφορά γνώσης και την αντιμετώπιση φαινομένων, πέρα από τα όρια των στεγανών μαθημάτων (NRC, 2012). Σε μία οπτική σαν αυτή, η διεπιστημονικότητα παύει να αποτελεί απλώς σύνδεση μαθημάτων και γίνεται προσανατολισμός της μάθησης προς την κατανόηση και επίλυση ζητημάτων, τα οποία είναι ταυτόχρονα επιστημονικά,

τεχνολογικά και κοινωνικά. Αντίστοιχα, όπως αναδεικνύεται μέσα από τη βιβλιογραφία, βασικοί πυλώνες στην υλοποίηση του αιτήματος της διεπιστημονικότητας μέσα στην τάξη είναι η πραγματική συνάφεια των προβλημάτων, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και ο σχεδιασμός, με την έννοια της συστηματικής διερεύνησης και ανάπτυξης λύσεων σε αυθεντικά προβλήματα (Nugraha, 2024).

Η σημασία του ρόλου των μαθηματικών σε αποτελεσματικά integrated STEM περιβάλλοντα είναι εξέχουσα. Τα μαθηματικά δεν λειτουργούν μόνο ως υποστηρικτικό εργαλείο για υπολογισμούς, αλλά ως γλώσσα αναπαράστασης, ανάλυσης και τεκμηρίωσης. Μέσω αυτού, είναι δυνατή η μοντελοποίηση και η ερμηνεία των δεδομένων και των αποτελεσμάτων, καθώς και η λήψη αποφάσεων. Σύγχρονες ανασκοπήσεις τονίζουν ότι η ερευνητική κοινότητα εξετάζει ολοένα και περισσότερο πώς διαμορφώνεται ο ρόλος των μαθηματικών στο STEM και ποιες πρακτικές ενισχύουν τη μαθηματική ορατότητα και ουσιαστικότητα μέσα σε τέτοιου είδους περιβάλλοντα (Goosetal., 2023). Επιπροσθέτως, εργασίες που εστιάζουν ειδικά στο ρόλο των μαθηματικών στο STEM αναδεικνύουν τη μαθηματική μοντελοποίηση ως έναν από τους βασικούς μηχανισμούς διασύνδεσης των πεδίων, επειδή επιτρέπει τη μεταφορά από τον πραγματικό κόσμο στη μαθηματικοποίηση και την επιστροφή στην ερμηνεία και επικύρωση των λύσεων, ενισχύοντας ταυτόχρονα δεξιότητες επίλυσης προβλήματος και επιχειρηματολογίας (Maassetal., 2019). Σε παρόμοιο ύφος, νεότερες μελέτες επιχειρούν να οργανώσουν αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται τα μαθηματικά σε STEM δραστηριότητες και ποια μορφή παίρνει η μαθηματική συμβολή σε διαφορετικού τύπου ολοκληρωμένες STEM πρακτικές (Kristensen, 2024).

Συνεπώς, η σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα μπορεί να ιδωθεί ως πεδίο όπου η ιστορική ανάγκη υπέρβασης του κατακερματισμού της γνώσης μεταφράζεται σε προσεγγίσεις ολοκλήρωσης του αναλυτικού προγράμματος και σε διεπιστημονικά πλαίσια STEM. Σε αυτά τα πλαίσια, τα μαθηματικά αποκτούν αυξημένη σημασία, καθώς λειτουργούν ως εργαλείο αναπαράστασης, ανάλυσης και τεκμηρίωσης, ιδίως μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης, που συμβάλλει σημαντικά στην κατανόηση σύνθετων προβλημάτων και στη λήψη τεκμηριωμένων

αποφάσεων μέσα σε αυθεντικά μαθησιακά περιβάλλοντα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III: Διεπιστημονικότητα στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Ο Ρόλος των Μαθηματικών σε Διεπιστημονικά Μαθησιακά Περιβάλλοντα

Τα μαθηματικά κατέχουν διαχρονικά κεντρική θέση στο εκπαιδευτικό σύστημα. Ωστόσο, υπάρχει η εντύπωση ότι η διδασκαλία τους περιορίζεται συχνά σε μία παρουσίαση των εννοιών αρκετά αποκομμένη από την πραγματικότητα. Παρά το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια υπάρχει η τάση εκσυγχρονισμού της εκπαιδευτικής διαδικασίας και μαζί με αυτή και της διδασκαλίας των μαθηματικών, στην πράξη τηρείται συχνά ο παραδοσιακός τρόπος εκμάθησης. Με την ανάδειξη της διεπιστημονικότητας και της ενσωμάτωσής της στην εκπαιδευτική διαδικασία, ο ρόλος των μαθηματικών επαναπροσδιορίζεται. Συγκεκριμένα, τα μαθηματικά παρουσιάζονται όχι μόνο ως αυτόνομο γνωστικό αντικείμενο, αλλά ως κοινή γλώσσα και εργαλείο κατανόησης πραγματικών φαινομένων. Η μαθηματική σκέψη και ωριμότητα ενθαρρύνονται και επιδιώκονται, αφού λειτουργούν ως γέφυρες μεταξύ των διάφορων επιστημών, της τεχνολογίας, καθώς και την καθημερινής εμπειρίας και δίνουν νόημα στη μάθηση.

Στα διεπιστημονικά μαθησιακά περιβάλλοντα, τα μαθηματικά αξιοποιούνται ως μέσο διερεύνησης και ανάλυσης ζητημάτων, τα οποία δεν ανήκουν σε ένα αποκλειστικά γνωστικό πεδίο. Όπως επισημαίνει ο English (2016), η ενσωμάτωση των μαθηματικών σε διεπιστημονικά και STEM πλαίσια διδασκαλίας ενισχύει τη βαθιά και ουσιαστική κατανόηση των εννοιών, που μέχρι πρότινος έμοιαζαν αρκετά αφηρημένες. Επιπλέον, αποτελεί αρωγό στην επιτυχημένη εφαρμογή των μαθηματικών σε χειροπιαστά και καθημερινά ζητήματα, αφού διευρύνει τον τρόπο σκέψης και εκπαιδεύει το νου στο να μπορεί να ανταπεξέλθει σε διάφορων φύσεων προβλήματα. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, τα μαθηματικά παύουν να αποτελούν απλώς ένα σύνολο κανόνων και τύπων, φορμαλιστικών και αφηρημένων, αλλά μετατρέπονται σε εργαλείο σκέψης και αντιμετώπισης σύνθετων και πολυεπίπεδων προβλημάτων. Παράλληλα, η έρευνα στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης

τονίζει περίτρανα τη σημασία της διεπιστημονικής προσέγγισης για την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης. Η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που συνδυάζουν τα μαθηματικά με άλλα γνωστικά πεδία, όπως οι φυσικές επιστήμες, αναδεικνύει τη χρησιμότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης και ενισχύει τη σύνδεση μεταξύ θεωρίας και πράξης (Stillman, 2017). Με τον τρόπο αυτό, τα μαθηματικά λειτουργούν ως δυναμικό εργαλείο που δύναται να αντικατοπτρίσει την πολυπλοκότητα που διέπει τη σύγχρονη πραγματικότητα.

Είναι άξιο αναφοράς το γεγονός ότι η διεπιστημονικότητα δεν θέτει επ' ουδενί στο περιθώριο την επιστημονική αυστηρότητα των μαθηματικών ούτε αποσκοπεί στη μείωσή της. Κύριος στόχος είναι η ουσιαστική αξιοποίηση των μαθηματικών σε άξονα σύνδεσης γνώσεων και δεξιοτήτων δια μέσω των επιστημών.

Ο Ρόλος των Αυθεντικών και Λεκτικών Προβλημάτων στα Μαθηματικά

Ως αυθεντικά προβλήματα (authentic real life problems) εννοούμε καταστάσεις που προέρχονται από ρεαλιστικά περιβάλλοντα και περιλαμβάνουν ερωτήματα που οι άνθρωποι ενδέχεται να θέσουν ή να αντιμετωπίσουν. Επομένως, δεν πρόκειται για τεχνητές μαθηματικές ερωτήσεις που εμφανίζονται σε κάποιες περιπτώσεις σε σχολικά μαθηματικά εγχειρίδια. Η έρευνα και η εμπειρία δείχνει ότι συχνά στην εκπαιδευτική διαδικασία απαντώνται προβλήματα που δεν ικανοποιούν τα κριτήρια αυθεντικότητας, καθώς είναι αποκομμένα από την πραγματικότητα και δεν αντικατοπτρίζουν τις πρακτικές ανάγκες της καθημερινής ζωής των μαθητών (Vos, 2018). Στη μαθηματική εκπαίδευση, ο όρος «λεκτικά προβλήματα» (wordproblems) αναφέρεται σε προβλήματα που παρουσιάζονται με τη μορφή σύντομων λεκτικών περιγραφών. Παρά το γεγονός ότι φαινομενικά διέπονται από ρεαλιστικό χαρακτήρα, πολλά από αυτά τα προβλήματα δεν ανταποκρίνονται σε πραγματικές ανάγκες ή πρακτικές χρήσεις των μαθηματικών. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι η έλλειψη της απαίτησης που έχουν αυτού του είδους τα ζητήματα από τα παιδιά να λάβουν αποφάσεις και να αξιολογήσουν ή να ερμηνεύσουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων τους, βάσει της λογικής (Vos, 2018). Συνοπτικά, αυθεντικό είναι ένα

πρόβλημα που προέρχεται από πραγματικό πλαίσιο αντί να είναι απλώς κατασκευασμένο για τις ανάγκες ενός εγχειριδίου. Η αξιοποίηση των αυθεντικών προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση θεωρείται κομβική για τη νοηματοδότηση της μαθηματικής γνώσης και τη σύνδεσή της με πραγματικές καταστάσεις. Η αυθεντικότητα δεν περιορίζεται στη χρήση ρεαλιστικού πλαισίου, αλλά συνδέεται με το κατά πόσο τα προβλήματα απαιτούν από τους μαθητές και τις μαθήτριες να λαμβάνουν αποφάσεις, να ερμηνεύουν δεδομένα και να αξιολογούν τα αποτελέσματά τους (Vos, 2018). Επιπροσθέτως, η αυξημένη αυθεντικότητα των προβλημάτων οδηγεί τους μαθητές και τις μαθήτριες σε βαθύτερη κατανόηση και σε ενεργοποίηση συλλογισμών που υπερβαίνουν τη μηχανική εφαρμογή αλγορίθμων (Palm, 2008). Στο πλαίσιο αυτό, τα αυθεντικά προβλήματα λειτουργούν ως γέφυρα προς τη μαθηματική μοντελοποίηση, καθώς απαιτούν τη μετάβαση από την πραγματική κατάσταση στη μαθηματικοποίηση και την επιστροφή στην ερμηνεία για την επικύρωση των λύσεων (Blum, 2009). Η διαδικασία αυτή προϋποθέτει τη συνδυαστική αξιοποίηση γνώσεων από διαφορετικά γνωστικά πεδία, γεγονός που καθιστά τα αυθεντικά προβλήματα τους κύριους φορείς διεπιστημονικής μάθησης. Σε διεπιστημονικά και STEM μαθησιακά περιβάλλοντα, η χρήση αυθεντικών προβλημάτων ενισχύει περαιτέρω το ρόλο των μαθηματικών ως εργαλείου ανάλυσης, μοντελοποίησης και λήψης αποφάσεων σε σύνθετα πλαίσια (English, 2016), συμβάλλοντας στη μετάβαση από την τυποποιημένη επίλυση ασκήσεων προς διερευνητικές και δημιουργικές μαθησιακές πρακτικές.

Μαθηματική Μοντελοποίηση και Αυθεντικά Προβλήματα

Η μαθηματική μοντελοποίηση συνιστά μία κυκλική διαδικασία, σύμφωνα με την οποία διατυπώνεται το πρόβλημα, δημιουργείται το μαθηματικό μοντέλο, ακολουθεί η επίλυσή του και καταλήγει στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων σε σχέση με την πραγματικότητα. Με άλλα λόγια, αποτελεί μία διαδικασία μετάφρασης μεταξύ του πραγματικού κόσμου και των μαθηματικών, η οποία πραγματοποιείται αμφίδρομα, από την πραγματικότητα προς τα μαθηματικά και αντιστρόφως (Blum, 2009). Επομένως, τα μαθηματικά λειτουργούν ως εργαλείο

κατανόησης και ανάλυσης φαινομένων που συχνά αντλούνται από διαφορετικά επιστημονικά πεδία, όπως οι φυσικές επιστήμες, η τεχνολογία, η οικονομία και τα κοινωνικά ζητήματα. Η μοντελοποίηση, επομένως, ενσωματώνει εγγενώς τη διεπιστημονικότητα, δεδομένου ότι απαιτεί τη σύνθεση γνώσεων και στοιχείων από πολλαπλά πεδία. Η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί μία από τις πλέον χαρακτηριστικές εκφάνσεις της διεπιστημονικής προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών, καθώς συνδέει άμεσα τη μαθηματική γνώση με πραγματικά και σύνθετα προβλήματα. Μέσω της διαδικασίας της μοντελοποίησης, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να μεταφράσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου σε μαθηματικές αναπαραστάσεις, να τις επεξεργαστούν και να ερμηνεύσουν τα αποτελέσματα στο αρχικό περιβάλλον τους. Πρόκειται, λοιπόν, για μία διαδικασία η οποία υπερβαίνει την παραδοσιακή επίλυση τυποποιημένων ασκήσεων και προϋποθέτει την ενεργό ενασχόληση των μαθητών σε διερευνητικές πρακτικές. Η έρευνα έχει δείξει ότι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες μαθηματικής μοντελοποίησης είναι ικανή να ενισχύσει την εις βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι διδασκόμενοι που εργάζονται σε αυθεντικά προβλήματα αναπτύσσουν, πέραν των μαθηματικών δεξιοτήτων, ικανότητες ανάλυσης, κριτικής σκέψης και λήψης αποφάσεων (Vos, 2018). Μέσα από τη διασύνδεση των μαθηματικών με πραγματικές καταστάσεις, η γνώση αποκτά λειτουργικό χαρακτήρα και εισάγεται σε μία διάσταση όπου έχει νόημα, ανταπόκριση στην πραγματικότητα και πρακτική εφαρμογή. Με τον τρόπο αυτό, παύει να αντιμετωπίζεται ως στείρο και απομονωμένο σχολικό αντικείμενο.

Στο πλαίσιο των διεπιστημονικών προσεγγίσεων και STEM, η μαθηματική μοντελοποίηση αποκτά ιδιαίτερη σημασία, καθώς συνδέεται άμεσα με τη διερεύνηση σύνθετων προβλημάτων και το σχεδιασμό λύσεων. Η English (2016) τονίζει ότι η αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων σε STEM περιβάλλοντα προσφέρει στους μαθητές και στις μαθήτριες τη δυνατότητα να εφαρμόσουν μαθηματικές έννοιες σε πραγματικές καταστάσεις, να συνεργαστούν και να αναστοχαστούν πάνω στη διαδικασία της επίλυσης. Άμεση συνέπεια αυτής της διαδικασίας είναι η μαθηματική μοντελοποίηση να λειτουργεί ως συνδετικός ιστός μεταξύ θεωρίας και πράξης, ενισχύοντας το διεπιστημονικό χαρακτήρα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ως εκ τούτου, η εισαγωγή της μαθηματικής

μοντελοποίησης στη διδασκαλία των μαθηματικών συνιστά βασικό άξονα της διεπιστημονικής προσέγγισης. Κυριότερος λόγος είναι το γεγονός ότι συμβάλλει στη νοηματοδότηση της γνώσης και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων απαραίτητων για την αντιμετώπιση των προκλήσεων που θέτει η σύγχρονη πραγματικότητα. Η προσέγγιση αυτή προετοιμάζει το έδαφος για τη συστηματική αξιοποίηση των δράσεων STEM, στις οποίες τα μαθηματικά διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο.

Παράδειγμα Μαθηματικής Μοντελοποίησης

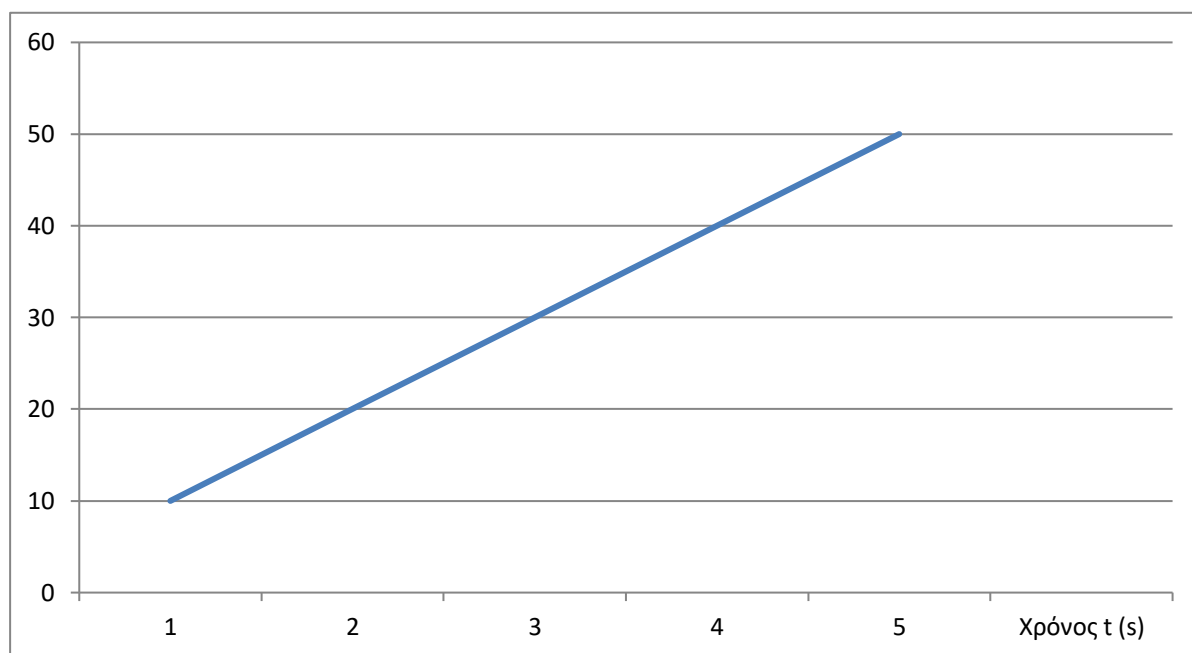
Η θεωρητική προσέγγιση της μαθηματικής μοντελοποίησης μπορεί να καταστεί περισσότερο κατανοητή μέσω εφαρμοσμένων παραδειγμάτων. Τα εν λόγω παραδείγματα αναδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες, μέσω παρατήρησης και διερεύνησης μεταβαίνουν από μία πραγματική κατάσταση σε ένα μαθηματικό μοντέλο. Ακόμα, διαφαίνεται αναλυτικά η διαδικασία ερμηνείας των αποτελεσμάτων και η σύνδεσή τους με το πραγματικό φαινόμενο που μελετάται.

Ως ένα παράδειγμα μαθηματικής μοντελοποίησης, μπορεί να αναφερθεί ένα πρόβλημα το οποίο διερευνά πώς η απόσταση ενός σώματος μεταβάλλεται με το χρόνο, δεδομένου ότι το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τα παιδιά στο πλαίσιο αυτού του προβλήματος καλούνται να διερευνήσουν τη σχέση που διέπει την απόσταση που διανύει ένα σώμα σε κάθε χρονική στιγμή που κινείται, όπως ένα δευτερόλεπτο. Στον Πίνακα 1 διακρίνεται η σχέση των μεγεθών που μελετούν και διερευνούν οι μαθητές και οι μαθήτριες προκειμένου να παρατηρήσουν την αναλογία των δύο μεγεθών και να δημιουργήσουν το μοντέλο απόσταση = ταχύτητα · χρόνος.

Χρόνος t σε δευτερόλεπτα	Απόσταση x σε μέτρα
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50

Πίνακας 1

Εν συνεχεία, τα παιδιά μπορούν να δημιουργήσουν ένα οπτικό αντικείμενο της μελέτης που προηγήθηκε, όπως το παρακάτω γράφημα. Σε αυτό το σχήμα (Εικόνα 1) μπορούν να παρατηρήσουν τη μορφή που έχουν τα ανάλογα ποσά, καθώς και να εισαχθούν στην έννοια της συνάρτησης, μέσω ενός προβλήματος πιο καθημερινού, το οποίο συνδέει την καθημερινότητα με τα μαθηματικά αλλά και τις φυσικές επιστήμες.



Εικόνα 1

Το παράδειγμα που προηγήθηκε μπορεί να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθηματικές έννοιες, όπως είναι η αναλογία και η συνάρτηση, μπορούν να προκύψουν μέσω της μελέτης ενός φαινομένου πραγματικής φύσεως, ενισχύοντας τη διασύνδεση των μαθηματικών με τις φυσικές επιστήμες και το πλαίσιο STEM.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: Παιδαγωγικές Θεμελιώσεις της Διεπιστημονικής και STEM Προσέγγισης

Η ανάπτυξη διεπιστημονικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών εν γένει, συνδέεται άμεσα με σύγχρονες θεωρίες μάθησης. Οι εν λόγω αυτές θεωρίες δίνουν έμφαση κυρίως στη διερευνητική μάθηση, στην ενεργητική συμμετοχή των μαθητών και τη σύνδεση της γνώσης με πραγματικά προβλήματα. Οι θεωρητικές αυτές προσεγγίσεις υποστηρίζουν ότι η μάθηση δεν αποτελεί παθητική διαδικασία μετάδοσης της γνώσης, αλλά ενεργή διαδικασία οικοδόμησης νοήματος μέσα από την εμπειρία και την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Στο πλαίσιο αυτό, οι σύγχρονες εκπαιδευτικές πολιτικές υπογραμμίζουν ότι το σχολείο και γενικά η εκπαιδευτική πρακτική, οφείλει να προετοιμάζει τους μαθητές και τις μαθήτριες για έναν κόσμο χαρακτηριζόμενο από την ταχεία επιστημονική και τεχνολογική εξέλιξη, αλλά και από σύνθετες κοινωνικές και περιβαλλοντικές προκλήσεις. Η εκπαίδευση πρέπει να συμβάλλει στην ανάπτυξη γνώσεων, δεξιοτήτων, στάσεων και αξιών που είναι ικανές να επιτρέψουν στα παιδιά να αντιμετωπίζουν πολυσύνθετα προβλήματα και να συμμετέχουν ενεργά στην κοινωνία (OECD, 2018). Η ανάγκη αυτή καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη μαθησιακών περιβαλλόντων που ενθαρρύνουν την κριτική σκέψη, τη δημιουργικότητα και τη συνεργασία. Σε τέτοια περιβάλλοντα, τα παιδιά καλούνται να διερευνήσουν φαινόμενα, να αναλύσουν δεδομένα και να προτείνουν λύσεις σε αυθεντικά προβλήματα.

Παράλληλα, η έρευνα στη γνωστική επιστήμη έχει δείξει ότι η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική όταν οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν ενεργό συμμετοχή στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης και συνδέουν τις νέες πληροφορίες με τις προϋπάρχουσες γνώσεις τους. Με άλλα λόγια, η μάθηση επηρεάζεται σημαντικά από το γνωστικό υπόβαθρό των μαθητών, καθώς και από τα κοινωνικά και πολιτισμικά περιβάλλοντα μέσα στα οποία συντελείται (Bransford, Brown & Cocking, 2000). Για το λόγο αυτό, τα μαθησιακά περιβάλλοντα οφείλουν να ενθαρρύνουν τη συνεργασία, το διάλογο και τη διάδραση των μαθητών.

Οι σύγχρονες προσεγγίσεις στη διδασκαλία των φυσικών επιστημών και ιδιαίτερα των μαθηματικών δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στη μάθηση μέσω διερεύνησης και στη συμμετοχή των μαθητών σε πρακτικές επιστημονικής έρευνας.

Ενεργητική Μάθηση και Οικοδομισμός

Μία από τις βασικότερες θεωρητικές προσεγγίσεις που θεμελιώνουν τη διεπιστημονική και τη διδακτική προσέγγιση STEM είναι ο Οικοδομισμός (κονστрукτιβισμός). Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, η μάθηση είναι μία διαδικασία ενεργούς οικοδόμησης νοήματος αντί για μια παθητική διαδικασία μετάδοσης γνώσης. Κατά τη διαδικασία αυτή, οι μαθητές και οι μαθήτριες κατασκευάζουν τη γνώση τους μέσω της εμπειρίας και της αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Το κάθε οικοδόμημα είναι προσωπικό και στηρίζεται στις προηγούμενες γνώσεις, εμπειρίες, δεξιότητες και ικανότητες. Η σύγχρονη επιστημονική έρευνα για τη μάθηση υπογραμμίζει ότι οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν προσεγγίζουν τη γνώση όντας απλώς παθητικοί δέκτες αλλά οι ήδη κεκτημένες γνώσεις και προϋπάρχουσες εμπειρίες επηρεάζουν τον τρόπο πρόσληψης και κατανόησης των νέων εννοιών (Bransford, Brown & Cocking, 2000). Υπό αυτό το πρίσμα, η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική όταν τα παιδιά συμμετέχουν ενεργά στη διαδικασία, προκειμένου να υπάρχει σύνδεση των νέων πληροφοριών με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους.

Αναντίρρητα, η μάθηση επηρεάζεται σημαντικά από το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο εντός του οποίου διεξάγεται, γεγονός που αναδεικνύει τη σημασία της αλληλεπίδρασης και της συνεργασίας. Σε αυτό το πλαίσιο, η ενεργητική μάθηση αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό των προσεγγίσεων του κονστрукτιβισμού. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να διερευνούν τα προβλήματα που τους δίνονται, να διατυπώνουν τις υποθέσεις τους και να αναπτύσσουν εξ αρχής τις λύσεις, χωρίς να αναπαράγουν έτοιμες και τυποποιημένες γνώσεις. Η προσέγγιση αυτή συνδέεται με τη σύγχρονη αντίληψη της επιστημονικής εκπαίδευσης, σύμφωνα με την οποία η μάθηση δεν περιορίζεται στην κατανόηση των εννοιών, αλλά περιλαμβάνει την ενεργό συμμετοχή των μαθητών σε πρακτικές διερεύνησης, όπως είναι η ανάλυση δεδομένων, η ανάπτυξη

μοντέλων και η επίλυση προβλημάτων (National Research Council, 2012). Επιπρόσθετα, η σύγχρονη εκπαίδευση δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην ανάπτυξη δεξιοτήτων όπως είναι η κριτική σκέψη, η δημιουργικότητα και η συνεργασία. Οι μαθητές και οι μαθήτριες εντάσσονται στη διαδικασία να καλλιεργήσουν την ικανότητα να αντιμετωπίζουν σύνθετα προβλήματα και να συνεργάζονται με άλλους σε διαφορετικά πλαίσια, προκειμένου να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας (OECD, 2018). Οι δεξιότητες αυτές αναπτύσσονται μέσω ενεργητικών μορφών μάθησης, οι οποίες ενθαρρύνουν τη συμμετοχή και την πρωτοβουλία των μαθητών. Παράλληλα, η επιστημονική εκπαίδευση οφείλει να συνδέεται με πραγματικά προβλήματα και κοινωνικά ζητήματα, ενισχύοντας τη δυνατότητα των μαθητών να συμμετέχουν ενεργά σε διαδικασίες λήψης αποφάσεων. Η προσέγγιση αυτή προάγει την κατανόηση της σχέσης μεταξύ επιστήμης, τεχνολογίας και κοινωνίας και συμβάλλει στην ανάπτυξη υπεύθυνων και ενεργών πολιτών (European Commission, 2015). Σχετικά με τη μαθηματική εκπαίδευση, οι κονστρουκτιβιστικές προσεγγίσεις συμβάλλουν στη μετατόπιση της διδασκαλίας από την απομνημόνευση διαδικασιών στην ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να οικοδομήσουν τη γνώση τους μέσα από τη διερεύνηση προβλημάτων και την αναζήτηση τρόπων επίλυσης, μέσω αναζήτησης και βασιζόμενοι στις γνώσεις που αποκτούν και κατέχουν ήδη. Στο πλαίσιο της STEM εκπαίδευσης, η προσέγγιση αυτή αποκτά ιδιαίτερη σημασία, καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να αξιοποιήσουν μαθηματικές έννοιες, προερχόμενες από την τεχνολογία και τις φυσικές επιστήμες. Με τον τρόπο αυτό, τα μαθηματικά λειτουργούν ως ένα εργαλείο ερμηνείας της πραγματικότητας και ανάλυσης φαινομένων.

Συνολικά, ο κονστρουκτιβισμός και η ενεργητική μάθηση αποτελούν βασικές θεωρητικές βάσεις για την ανάπτυξη διεπιστημονικών μαθησιακών περιβαλλόντων. Μέσα από τέτοιες προσεγγίσεις, οι μαθητές και οι μαθήτριες εμπλέκονται ενεργά στη διερεύνηση αυθεντικών προβλημάτων και στην οικοδόμηση γνώσης, γεγονός που συνδέεται άμεσα με τη φιλοσοφία του STEM και τη διδασκαλία των μαθηματικών σε πραγματικό πλαίσιο.

Διερευνητική Μάθηση

Η διερευνητική μάθηση αποτελεί μία από τις βασικές παιδαγωγικές προσεγγίσεις που συνδέονται άμεσα με τον κονστрукτιβισμό και την ενεργητική μάθηση. Στο πλαίσιο αυτό η μάθηση προκύπτει μέσα από τη διερεύνηση ερωτημάτων, την αναζήτηση πληροφοριών και την ενεργό ενασχόληση των μαθητών σε διαδικασίες κατανόησης και ανακάλυψης της γνώσης.

Η διερευνητική προσέγγιση δίνει έμφαση στο ρόλο του μαθητή ως ενεργού υποκειμένου της μάθησης, αφού ο ίδιος διατυπώνει ερωτήματα και εξετάζει τα δεδομένα που έχει στη διάθεσή του, προκειμένου να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα. Η διαδικασία αυτή ενισχύει την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, καθώς τα παιδιά καλούνται να αναλύσουν τις δεδομένες πληροφορίες, να αξιολογήσουν εναλλακτικές λύσεις και να καταλήξουν σε τεκμηριωμένα συμπεράσματα (Bransford, Brown&Cocking, 2000). Στη σύγχρονη επιστημονική εκπαίδευση, η διερευνητική μάθηση συνδέεται με τη συμμετοχή των μαθητών σε πρακτικές οι οποίες προσομοιάζουν τη λειτουργία της επιστημονικής έρευνας, όπως είναι η διατύπωση υποθέσεων, η συλλογή και η ανάλυση δεδομένων, αλλά και η ανάπτυξη και αξιολόγηση μοντέλων. Μέσα από αυτές τις διαδικασίες, οι μαθητές και οι μαθήτριες αποκτούν βαθύτερη και πιο ουσιαστική γνώση των μαθηματικών εννοιών και καλλιεργούν τις δεξιότητες που σχετίζονται με την επιστημονική σκέψη (Bransford, Brown&Cocking, 2000).

Η διερευνητική εκπαίδευση στη μαθηματική εκπαίδευση επιτρέπει στους διδασκόμενους να προσεγγίζουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα από καταστάσεις και προβλήματα που απαιτούν ανάλυση, ερμηνεία και λήψη αποφάσεων. Οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν περιορίζονται στην τυποποιημένη εφαρμογή διαδικασιών, αλλά ενθαρρύνονται να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης εξ αρχής, να αιτιολογήσουν και να συγκρίνουν αποτελέσματα. Στο πλαίσιο της διεπιστημονικής προσέγγισης και της εκπαίδευσης STEM, η διερευνητική μάθηση αποκτά ιδιαίτερη σημασία, αφού επιτρέπει τη σύνδεση διαφορετικών γνωστικών πεδίων μέσα από τη μελέτη των αυθεντικών προβλημάτων. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να αξιοποιήσουν γνώσεις από τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία, ώστε να προτείνουν έγκυρες λύσεις σε πραγματικής φύσεως ζητήματα.

Το γεγονός αυτό ενισχύει τη νοηματοδότηση της γνώσης και τη σύνδεσή της με αληθινά πλαίσια.

Συνολικά, η διερευνητική μάθηση αποτελεί βασικό στοιχείο της σύγχρονης παιδαγωγικής προσέγγισης, καθώς προάγει τη συμμετοχή των μαθητών/τριών ενεργά σε ένα πρόβλημα πραγματικής φύσεως. Επίσης, αναπτύσσει τις υψηλού επιπέδου δεξιότητες των μαθητών και συνδέει τη γνώση με τον πραγματικό κόσμο, απομακρύνοντας τη στεία και αποκομμένη γνώση που στερείται νοήματος. Οι αρχές αυτές εδράζουν στον πυρήνα της διεπιστημονικής προσέγγισης και των δράσεων STEM, συμβάλλοντας στη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων που ανταποκρίνονται στις ανάγκες της σύγχρονης κοινωνίας.

Μεταφορά Γνώσης και Αυθεντικά Προβλήματα

Η μεταφορά γνώσης (transfer of learning) αναφέρεται στην ικανότητα των μαθητών και των μαθητριών να εφαρμόζουν γνώσεις και δεξιότητες που έχουν ήδη αποκτήσει, σε νέα και διαφορετικά πλαίσια. Η διαδικασία αυτή αποτελεί έναν από τους βασικούς στόχους της εκπαίδευσης, καθώς η ουσιαστική μάθηση προϋποθέτει την ικανότητα αξιοποίησης της γνώσης σε πραγματικές καταστάσεις (Bransford, Brown&Cocking, 2000). Παράλληλα, η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής συνδέεται με τις σύγχρονες απαιτήσεις της εκπαίδευσης, οι οποίες δίνουν έμφαση στην προσαρμογή των μαθητών σε νέες συνθήκες και στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων, η αντιμετώπιση των οποίων δε συνίσταται σε προκαθορισμένες λύσεις (OECD, 2018).

Η έρευνα στη μάθηση έχει δείξει ότι η μεταφορά γνώσεις δεν πραγματοποιείται αυτόματα, αλλά απαιτεί τις κατάλληλες μαθησιακές εμπειρίες που ενθαρρύνουν τη σύνδεση της γνώσης με διάφορων ειδών πλαίσια εφαρμογής. Η αποτελεσματική μάθηση προϋποθέτει την εις βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, καθώς ακόμα και τη δυνατότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν ομοιότητες μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων και, αναλόγως, να προσαρμόζουν τις γνώσεις τους (Bransford, Brown&Cocking, 2000). Προκύπτει, λοιπόν, άμεσα ότι τα αυθεντικά προβλήματα διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο,

καθώς παρέχουν στα παιδιά τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τη γνώση που αποκτούν όχι σε ιδεατές καταστάσεις, αλλά σε προβλήματα που προσεγγίζουν την πραγματικότητα. Τα ζητήματα αυτά διέπονται από πολυπλοκότητα και πολλαπλές δυνατές λύσεις, γεγονός που απαιτεί από τους μαθητές και τις μαθήτριες να αναλύσουν δεδομένα, να λάβουν αποφάσεις, να διερευνήσουν και να αξιολογήσουν τις επιλογές τους. Μέσω αυτής της διαδικασίας, επομένως, ενισχύεται η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και η ικανότητα εφαρμογής τους σε νέα πλαίσια, πιθανώς συνθετότερα και με ακόμα μεγαλύτερη σύνδεση με την πραγματική ζωή.

Οι σύγχρονες εκπαιδευτικές κατευθύνσεις συνδέονται άμεσα με τα αυθεντικά προβλήματα, καθώς επικεντρώνονται στην ανάπτυξη δεξιοτήτων που επιτρέπουν στα παιδιά να ανταποκρίνονται με επιτυχία σε σύνθετες καταστάσεις. Η εκπαίδευση καλείται να προετοιμάσει τους μαθητές και τις μαθήτριες ώστε να έχουν την ικανότητα να λαμβάνουν εμπεριστατωμένες αποφάσεις και να διερευνούν εναλλακτικές λύσεις, δεξιότητες άμεσα συνδεδεμένες με τη μεταφορά γνώσεις (OECD, 2018). Παράλληλα, η σύνδεση της μάθησης με αληθινά ζητήματα ενισχύει τη σημασία της επιστημονικής γνώσης για την καθημερινή ζωή και την κοινωνία. Η επιστημονική εκπαίδευση δεν περιορίζεται στην απόκτηση θεωρητικών γνώσεων, αλλά έχει ως στόχο την ανάπτυξη πολιτών που δύνανται να συμμετέχουν ενεργά σε κοινωνικά ζητήματα, σχετικά με την επιστήμη και την τεχνολογία. Στο πλαίσιο αυτό, η εκπαίδευση οφείλει να ενσωματώνει προβλήματα που αντανakλούν πραγματικές κοινωνικές και περιβαλλοντικές προκλήσεις (European Commission, 2015).

Στην εκπαίδευση STEM, η μεταφορά γνώσης και τα αυθεντικά προβλήματα αποτελούν κεντρικά στοιχεία της μαθησιακής διαδικασίας. Αυτό συμβαίνει, καθώς τα παιδιά καλούνται να συνδυάσουν γνώσεις από διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα και να τις εφαρμόσουν σε πραγματικά πλαίσια. Η θεωρητική αυτή γραμμή που ακολουθείται στην εκπαίδευση STEM ενισχύει σημαντικά τη διασύνδεση της γνώσης και την καλλιέργεια και ανάπτυξη της διεπιστημονικής σκέψης. Ιδιαίτερα στη διδασκαλία των μαθηματικών, η χρήση αυθεντικών προβλημάτων συμβάλλει στη νοηματοδότηση των μαθηματικών εννοιών, ώστε να μη θεωρούνται αποξενωμένες από την πραγματικότητα και στη σύνδεσή τους με

τον κόσμο.

Συμπερασματικά, η μεταφορά γνώσης και η αξιοποίηση αυθεντικών προβλημάτων αποτελούν βασικές προϋποθέσεις για την ανάπτυξη ουσιαστικής μάθησης. Μέσα από τέτοιες προσεγγίσεις, οι διδασκόμενοι δεν περιορίζονται στη στείρα απομνημόνευση γνώσεων, αλλά αναπτύσσουν την ικανότητα να τις εφαρμόζουν δημιουργικά και αποτελεσματικά σε ποικίλα επίπεδα, ενσωματώνοντας τις γνώσεις σε διαφορετικά πλαίσια. Αναντίρρητα, αυτό αποτελεί το βασικό στόχο της σύγχρονης εκπαίδευσης και της διεπιστημονικής προσέγγισης.

Συνεργατική Μάθηση σε Περιβάλλοντα STEM

Η συνεργατική μάθηση αποτελεί βασικό στοιχείο των σύγχρονων παιδαγωγικών προσεγγίσεων και συνδέεται άμεσα με τη διεπιστημονική εκπαίδευση και τις δράσεις STEM. Ειδικότερα, η μάθηση υπό αυτό το πρίσμα, δεν αντιμετωπίζεται ως ατομική διαδικασία, αλλά ως κοινωνική δραστηριότητα που αναπτύσσεται μέσα από την αλληλεπίδραση των μαθητών.

Η συνεργατική μάθηση βασίζεται στην ενεργή συμμετοχή των μαθητών/τριών σε ομάδες, όπου καλούνται ανταλλάξουν ιδέες, να διαπραγματευτούν νοήματα, να επανεξετάσουν γνώσεις και προσεγγίσεις σε έννοιες υπό νέες οπτικές γωνίες και να επιλύσουν προβλήματα. Μέσω αυτής της διαδικασίας, οι μαθητές και οι μαθήτριες κατορθώνουν να αποκτήσουν τις επιθυμητές γνωστικές δεξιότητες αλλά ταυτόχρονα αναπτύσσουν κοινωνικές δεξιότητες όπως είναι η επικοινωνία και η ικανότητα συνεργασίας. Επιπλέον, σημαντικό προσόν της συνεργατικής μάθησης είναι η υπευθυνότητα σε σχέση με την επιστήμη και τη γνώση που καλλιεργείται με τους μαθητές και τις μαθήτριες.

Η σημασία που της συνεργασίας αναγνωρίζεται από τις σύγχρονες εκπαιδευτικές πολιτικές, οι οποίες τονίζουν ότι τα παιδιά πρέπει να είναι σε θέση να εργάζονται σε ομάδες. Όπως επίσης να έχουν την ικανότητα να κατανοούν τις διάφορες οπτικές που διέπουν μία έννοια, γεγονός που ενισχύεται μέσω της πολύπλευρης αντιμετώπισής της από διαφορετικά άτομα που ανταλλάσσουν απόψεις. Το σύνολο αυτών των δεξιοτήτων αποτελούν βασικό στοιχείο της

εκπαίδευσης του σήμερα και συνδέονται με την ανάπτυξη της μαθηματικής αυτενέργειας και της υπεύθυνης συμμετοχής στην κοινωνία (OECD, 2018). Σε ό,τι αφορά την επιστημονική εκπαίδευση, η συνεργατική μάθηση έχει εξέχουσα θέση, καθώς οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να ενασχοληθούν με δραστηριότητες που προσομοιάζουν πραγματικές και επιστημονικές και τεχνολογικές πρακτικές. Η αντιμετώπιση τέτοιας φύσεως σύνθετων προβλημάτων απαιτεί το συνδυασμό γνώσεων και δεξιοτήτων, γεγονός που καθιστά τη συνεργασία απαραίτητη. Επιπλέον, η συμμετοχή σε συλλογικές διαδικασίες μάθησης ενισχύει την κατανόηση της επιστήμης ως κοινωνικής δραστηριότητας (European Commission, 2015).

Η συνεργατική μάθηση συνδέεται άμεσα με τη διεπιστημονική προσέγγιση, καθώς η μελέτη σύνθετων προβλημάτων απαιτεί συνεισφορά διαφορετικών γνωστικών πεδίων και τη συνεργασία μεταξύ των μαθητών. Συγκεκριμένα, στην εκπαιδευτική προσέγγιση STEM, οι μαθητές και οι μαθήτριες εργάζονται συχνά σε ομάδες, προκειμένου να σχεδιάσουν, να αναπτύξουν και να αξιολογήσουν λύσεις σε σύνθετης μορφής προβλήματα από τα μαθηματικά, τις φυσικές επιστήμες και την τεχνολογία. Ιδιαίτερα, στη διδασκαλία των μαθηματικών, η συνεργατική μάθηση μπορεί να είναι καταλυτική στη βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών, οι οποίες μέσω της συζήτησης, τόσο με το διδάσκοντα, όσο και με άλλους μαθητές και μαθήτριες παρόμοιου γνωστικού επιπέδου εξηγούνται με πιο απλό τρόπο. Η ανταλλαγή ιδεών και η συζήτηση περί του νοήματος μπορούν να διαμορφώσουν μια πιο ουσιαστική σχέση με το εκάστοτε γνωστικό αντικείμενο.

Συμπερασματικά, η συνεργατική μάθηση αποτελεί βασική διάσταση της σύγχρονης εκπαίδευσης, αφού συνδέεται άμεσα με τη διεπιστημονική προσέγγιση και την εκπαιδευτική προσέγγιση STEM. Δια μέσου της συνεργασίας, οι μαθητές και οι μαθήτριες έρχονται συλλογικά σε επαφή με σύνθετα, πραγματικά προβλήματα μέσα από τεχνολογικές και επιστημονικές εφαρμογές, αποκτώντας την εμπειρία και τη δυνατότητα να τα αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά. Με τον τρόπο αυτό, η σύγχρονη μαθησιακή διαδικασία συμβάλλει στη διαμόρφωση ολοκληρωμένων και ενεργών πολιτών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: Διεπιστημονικές Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Μαθηματικών

Η διεπιστημονικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί βασικό στοιχείο των σύγχρονων εκπαιδευτικών προσεγγίσεων, καθώς επιδιώκει τη σύνδεση της μαθηματικής γνώσης με άλλα γνωστικά πεδία και με την καθημερινή εμπειρία των μαθητών/τριών. Στο πλαίσιο αυτό, τα μαθηματικά δεν αντιμετωπίζονται ως απομονωμένο και αποκομμένο αντικείμενο, αλλά ως ένα εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας φαινομένων που εκτείνονται σε διαφορετικά επιστημονικά και πολιτισμικά πεδία. Η ανάγκη για ανάπτυξη διεπιστημονικών προσεγγίσεων συνδέεται με τις σύγχρονες απαιτήσεις της εκπαίδευσης, οι οποίες δίνουν έμφαση στην καλλιέργεια δεξιοτήτων όπως η κριτική σκέψη, η δημιουργικότητα και η ικανότητα επίλυσης σύνθετων προβλημάτων (OECD, 2018). Η αξιοποίηση διαφορετικών γνωστικών πεδίων συμβάλλει σημαντικά στο να δοθεί πραγματικό νόημα στη γνώση και ενισχύει τη δυνατότητα των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά σε πραγματικά δεδομένα.

Στην παρούσα εργασία, η διεπιστημονική προσέγγιση εξετάζεται μέσα από τη σύνδεση των μαθηματικών με πεδία όπως η λογοτεχνία, η μουσική και η οικονομία, καθώς και μέσα από το ευρύτερο πλαίσιο της εκπαίδευσης STEM. Οι συνδέσεις αυτές αναδεικνύουν τον πολυδιάστατο χαρακτήρα των μαθηματικών και τη δυνατότητα που έχουν να λειτουργούν ως γλώσσα κοινή μεταξύ διαφορετικών επιστημονικών και καλλιτεχνικών πεδίων. Στο παρόν κεφάλαιο, παρουσιάζονται ενδεικτικές διεπιστημονικές προσεγγίσεις, προκειμένου να αναδειχθεί ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να αξιοποιηθούν στη διδασκαλία των μαθηματικών. Μέσα από την ανάλυση των επιμέρους περιπτώσεων, επιδιώκεται η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η διεπιστημονικότητα συμβάλλει στη δημιουργία πιο ουσιαστικών και προσοδοφόρων μαθησιακών εμπειριών.

Μαθηματικά και Μουσική

Η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και μουσικής αποτελεί ένα διαχρονικά αναγνωρισμένο πεδίο διεπιστημονικής προσέγγισης, βασιζόμενο σε ομοιότητες τόσο δομής όσο και εννοιών, μεταξύ των δύο γνωστικών αντικειμένων. Από αρχαιοτάτων χρόνων, φιλόσοφοι με άξιο αναφοράς αναντίρρητα τον Πυθαγόρα, ανέδειξαν τη σχέση που διέπει τους αριθμητικούς λόγους και τα μουσικά διαστήματα, περιγράφοντας και ερμηνεύοντας τη μουσική μέσω μαθηματικών σχέσεων και υποστηρίζοντας ότι η αρμονία μπορεί να περιγραφεί μέσω μαθηματικών σχέσεων (Benson, 2007). Στη σύγχρονη πραγματικότητα και ενώ έχει μεσολαβήσει τεράστια πρόοδος και εξέλιξη στα δύο επιστημονικά πεδία, η σχέση αυτή εξακολουθεί να αναγνωρίζεται. Αυτό βασίζεται κυρίως σε στοιχεία που είναι κυρίαρχα τόσο στα μαθηματικά όσο και στη μουσική, όπως η συμμετρία, οι αριθμητικές σχέσεις, τα μοτίβα και οι αναλογίες (Azaryahu et al., 2024).

Η μουσική και τα μαθηματικά μοιράζονται κοινά χαρακτηριστικά, που αφορούν στον τρόπο με τον οποίο αναπαρίσταται η γνώση. Συγκεκριμένα, αμφότερα τα πεδία βασίζονται σε συμβολικά συστήματα, που θα μπορούσαν να θεωρηθούν γλώσσα, καθώς και αφηρημένη σκέψη. Στη μουσική υπάρχουν δομικά της στοιχεία, όπως ο ρυθμός, η διάρκεια και η αρμονία, τα οποία συνδέονται άμεσα με τις αριθμητικές έννοιες, ενώ στη μαθηματική σκέψη αξιοποιούνται παρόμοιας φύσεως δομές για την κατανόηση σχέσεων και προτύπων. Η αντιστοιχία αυτή επιτρέπει τη μεταφορά γνώσης από το ένα πεδίο στο άλλο, καθιστώντας τη μουσική ένα αποτελεσματικό μέσο υποστήριξης της μαθηματικής μάθησης (Azaryahu et al., 2020). Σε ό,τι αφορά την εκπαιδευτική διαδικασία, η ενσωμάτωση της μουσικής στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει καταλυτικό ρόλο στη γνωστική ανάπτυξη και στη διαμόρφωση θετικών στάσεων απέναντι στο μάθημα. Σύμφωνα με έρευνες, η χρήση μουσικών δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών δημιουργεί ένα πιο ευχάριστο μαθησιακό περιβάλλον, αλλά και νοηματοδοτημένο, ενισχύοντας τη συμμετοχή, το ενδιαφέρον και την αυτοπεποίθηση των μαθητών/τριών (An et al., 2014). Παράλληλα, η ενσωμάτωση ρυθμικών και μελωδικών στοιχείων στη διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, όπως τα κλάσματα, μπορεί να διευκολύνει την κατανόηση αφηρημένων εννοιών μέσω απτών και βιωματικών εμπειριών

(Azaryahu et al., 2020). Η αξιοποίηση της μουσικής στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να προκαλέσει το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών, καθώς η παραδοσιακή διδασκαλία συχνά χαρακτηρίζεται από μειωμένα επίπεδα κινήτρου. Η χρήση καινοτόμων προσεγγίσεων, όπως είναι αυτή της ενσωμάτωσης μουσικών δραστηριοτήτων, μπορεί να υποστηρίξει την ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων και να βελτιώσει εν γένει το μαθησιακό περιβάλλον (Hudáková & Králová, 2016). Επιπλέον, η διεπιστημονική προσέγγιση που συνδυάζει μουσική και μαθηματικά εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της εκπαίδευσης STEM και STEAM, όπου η δημιουργικότητα και η καλλιτεχνική έκφραση αξιοποιούνται για την ενίσχυση της μάθησης. Η συνεργασία μεταξύ διαφορετικών γνωστικών πεδίων προάγει δεξιότητες όπως είναι η δημιουργική σκέψη, η επίλυση προβλημάτων και η συνεργασία, ενώ ταυτόχρονα καθιστά τη μαθησιακή διαδικασία πιο ελκυστική και ουσιαστική για τους ίδιους τους διδασκόμενους (Johnson & Moldavan, 2023).

Συμπερασματικά, η σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της μουσικής και των μαθηματικών δεν περιορίζεται σε θεωρητικές ομοιότητες, αλλά αποτελεί μια δυναμική παιδαγωγική προσέγγιση, ικανή να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία με πολύ αποτελεσματικό τρόπο. Μέσα από την ανάπτυξη μουσικών δραστηριοτήτων, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν τις μαθηματικές έννοιες με τρόπο τόσο πρακτικό και βιωματικό όσο και δημιουργικό, συμβάλλοντας στην κατανόηση αλλά και στη θετικότερη αντιμετώπιση του αντικειμένου των μαθηματικών.

Μαθηματική Λογοτεχνία

Η σύνδεση μεταξύ μαθηματικών και λογοτεχνίας αποτελεί μία πολύ σημαντική διεπιστημονική προσέγγιση, η οποία αξιοποιεί τη γλώσσα και τη φαντασία ως μέσο κατανόησης των μαθηματικών εννοιών. Η σχέση μεταξύ των πεδίων αυτών έχει ιστορικές ρίζες και απαριθμεί τεράστια βιβλιογραφία, καθώς ήδη από παλαιότερες περιόδους η μαθηματική σκέψη αποτυπωνόταν μέσα σε αφηγηματικά και φιλοσοφικά κείμενα (Sriraman, 2007). Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι και

μαθηματικοί, όπως ο Πλάτων και ο Ευκλείδης, αξιοποιούσαν τη γλώσσα και τη δομή του λόγου για την παρουσίαση των μαθηματικών ιδεών, ενώ η μαθηματική γνώση συνδεόταν συχνά με ευρύτερα φιλοσοφικά και κοσμολογικά ερωτήματα.

Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης, η σχέση αυτή συνεχίστηκε, με τα μαθηματικά να ενσωματώνονται σε θεολογικά και επιστημονικά κείμενα, όπου η αφηγηματική μορφή συνέβαλλε σημαντικά στην κατανόηση και τη διάδοση των ιδεών. Στη νεότερη εποχή, η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και λογοτεχνίας εκδηλώνεται μέσω της δημιουργίας λογοτεχνικών έργων με έντονο μαθηματικό περιεχόμενο, όπως και μέσω της αξιοποίησης αφηγηματικών δομών για τη διδασκαλία μαθηματικών ιδεών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν έργα της μαθηματικής λογοτεχνίας, όπως είναι το *Flatland*, τα οποία χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή σύνθετων μαθηματικών εννοιών με τρόπο τόσο δημιουργικό όσο και προσιτό. Η χρήση λογοτεχνικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών επιτρέπει την ανάδειξη τόσο της εννοιολογικής όσο και της φιλοσοφικής διάστασης της μαθηματικής γνώσης, ενισχύοντας ταυτόχρονα τη φαντασία και την κριτική σκέψη των μαθητών (Sriraman, 2007). Στη σύγχρονη εκπαιδευτική πραγματικότητα, η χρήση λογοτεχνικών κειμένων στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει αναδειχθεί ως μία αποτελεσματική παιδαγωγική πρακτική. Μέσα από ιστορίες, αφηγήσεις και λογοτεχνικά έργα, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν μαθηματικές έννοιες σε ένα πιο οικείο και νοηματοδοτημένο επίπεδο. Η αφήγηση λειτουργεί ως γέφυρα μεταξύ της καθημερινής εμπειρίας και της αφηρημένης μαθηματικής γνώσης, ενισχύοντας την κατανόηση και τη συμμετοχή των μαθητών (Hassinger-Das et al., 2015). Ιδιαίτερα σημαντική είναι η συμβολή της λογοτεχνίας στην ανάπτυξη της μαθηματικής γλώσσας. Οι μαθητές και οι μαθήτριες, μέσα από την επαφή με κείμενα που ενσωματώνουν μαθηματικούς όρους και έννοιες, εξοικειώνονται με τη χρήση λέξεων, καθώς και με έννοιες που σχετίζονται με αριθμούς και σχέσεις. Η κατανόηση της μαθηματικής ορολογίας αποτελεί καταλυτικό στοιχείο στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Hassinger-Das et al., 2015).

Παράλληλα, η ενσωμάτωση της λογοτεχνίας στη διδασκαλία των μαθηματικών συμβάλλει στην αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών. Ειδικότερα, σε ό,τι αφορά μαθητές και μαθήτριες που ανήκουν σε θεωρητικές κατευθύνσεις, η

σύνδεση των μαθηματικών και της αφήγησης καθιστά το μάθημα προσιτό και αρκετά πιο ελκυστικό. Έρευνες δείχνουν ότι η χρήση διαθεματικών προβλημάτων που βασίζονται σε λογοτεχνικά έργα είναι ικανή να ενισχύσει τόσο την κατανόηση από πλευράς των μαθητών, όσο και τη διάθεσή τους να ασχοληθούν βαθύτερα με το αντικείμενο (Vlasenkoetal., 2023). Επιπλέον, η λογοτεχνία μπορεί να λειτουργήσει ως αφετηρία για την ανάπτυξη μαθηματικών δραστηριοτήτων και προβλημάτων. Πολλά λογοτεχνικά έργα περιέχουν μαθηματικά στοιχεία, τα οποία μπορούν να αξιοποιηθούν για τη δημιουργία διδακτικών σεναρίων. Μέσα από την ανάλυση τέτοιων κειμένων, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να μετατρέψουν αφηγηματικές πληροφορίες σε μαθηματικές αναπαραστάσεις, ενισχύοντας με τον τρόπο αυτό τη δεξιότητα της μαθηματικής μοντελοποίησης (Sriraman, 2007).

Η λογοτεχνική αφήγηση μπορεί να λειτουργήσει ως ισχυρό εργαλείο ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης, καθώς επιτρέπει στους μαθητές και στις μαθήτριες να προσεγγίσουν μαθηματικές έννοιες μέσα από νοηματοδοτημένα και οικεία πλαίσια. Οι ιστορίες και τα αφηγηματικά σενάρια δημιουργούν ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν έρχονται αντιμέτωποι με αφηρημένα σύμβολα και διαδικασίες, αλλά με καταστάσεις που διαθέτουν νόημα και συναισθηματική διάσταση. Μέσω αυτής της διαδικασίας οι μαθητές και οι μαθήτριες ενθαρρύνονται να αναζητήσουν σχέσεις, μοτίβα και λογικές ακολουθίες, αναπτύσσοντας δεξιότητες συλλογισμού και επίλυσης προβλημάτων. Η λογοτεχνία μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην αντίληψη των μαθηματικών εννοιών, καθώς προσφέρει εναλλακτικούς τρόπους προσέγγισης της μαθηματικής γνώσης (Sriraman, 2007). Ταυτόχρονα, η αξιοποίηση των λογοτεχνικών κειμένων στη μαθηματική εκπαίδευση ενισχύει τη μαθηματική γλώσσα και την ικανότητα κατανόησης σύνθετων εννοιών. Η κατανόηση των μαθηματικών δεν περιορίζεται μόνο στην εκτέλεση πράξεων και την τήρηση μεθοδολογιών, αλλά συνδέεται στενά με τη δυνατότητα των μαθητών να ερμηνεύουν λεκτικές πληροφορίες, να οργανώνουν δεδομένα και να μετατρέπουν αφηγηματικές περιγραφές σε αφηγηματικές αναπαραστάσεις. Η διαδικασία αυτή αποκτά ιδιαίτερη σημασία στα λεκτικά προβλήματα και στη μαθηματική μοντελοποίηση, όπου οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να μεταβούν από το γλωσσικό επίπεδο στο μαθηματικό. Έρευνες δείχνουν ότι η σύνδεση λογοτεχνίας και μαθηματικών μπορεί να

συντελέσει στην ανάπτυξη της κατανόησης και στη μείωση του άγχους απέναντι στα μαθηματικά, ειδικά σε μαθητές που εμφανίζουν μεγαλύτερη εξοικείωση με γλωσσικά και αφηγηματικά περιβάλλοντα μάθησης (Hassinger-Das et al., 2015). Η σύνδεση μαθηματικών και λογοτεχνίας αποκτά ιδιαίτερη σημασία και στο πλαίσιο της προσέγγισης STEAM, όπου η δημιουργικότητα και η καλλιτεχνική έκφραση αντιμετωπίζονται ως βασικά στοιχεία της μαθησιακής διαδικασίας. Μέσα από δραστηριότητες που συνδυάζουν αφήγηση, φαντασία και μαθηματική διερεύνηση, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίσουν τα μαθηματικά ως ένα μέσο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου, αντί να το αντιμετωπίζουν ως ένα απομονωμένο και αυστηρά τυπικό γνωστικό αντικείμενο. Η προσέγγιση αυτή ενισχύει τη δημιουργική σκέψη, τη συνεργασία και την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία, ενώ ταυτόχρονα διαμορφώνει θετικότερη αντιμετώπιση των μαθηματικών και της σχολικής μάθησης γενικότερα (Henriksen, 2014). Συμπερασματικά, η σύνδεση των μαθηματικών και της λογοτεχνίας αποτελεί μία δημιουργική και αποτελεσματική διδακτική προσέγγιση, η οποία μπορεί να συμβάλλει σημαντικά και αποτελεσματικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη της θετικής και ευνοϊκής στάσης απέναντι στο μάθημα.

Μαθηματικά και Ιστορία

Η σχέση που συνδέει τα μαθηματικά με την ιστορία αποτελεί ένα σημαντικό πεδίο διεπιστημονικής προσέγγισης, καθώς αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώθηκαν και εξελίχθηκαν μέσα σε συγκεκριμένα κοινωνικά και πολιτισμικά πλαίσια. Τα μαθηματικά δεν αποτελούν ένα στατικό σύστημα γνώσης, αλλά ένα αποτέλεσμα της ανθρώπινης σκέψης και δραστηριότητας που μεταβάλλεται και εξελίσσεται. Δεδομένου ότι αναπτύχθηκε με σκοπό να καλύψει πρακτικές ανάγκες σε διάφορες κοινωνίες, είναι αναμενόμενο η ιστορική μελέτη της εξέλιξης των μαθηματικών να επιτρέπει στους διδασκόμενους να αντιληφθούν ότι οι μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται σήμερα προκύπτουν ως αποτέλεσμα μιας πολύχρονης διαδικασίας αναζήτησης της γνώσης. Επίσης, βοηθά τους μαθητές και τις μαθήτριες να δουν τα μαθητικά ως ένα

ανθρώπινο δημιούργημα, έτσι ώστε να θεωρηθούν εργαλείο πρακτικής βοήθειας και να γεφυρωθεί το απόσταση μεταξύ αφηρημένης σκέψης και εφαρμογής τους. Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική πράξη μπορεί να συμβάλει στην απόδοση νοήματος στις μαθηματικές έννοιες.

Μέσα από ιστορικά παραδείγματα, οι μαθητές και οι μαθήτριες αποκτούν τη δυνατότητα να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά συνδέονται άμεσα με τις ανάγκες της καθημερινότητας, ακόμα και ότι αναπτύχθηκαν εξ αρχής ώστε να εξυπηρετήσουν αυτές τις ανάγκες. Επιπλέον, η ιστορική προσέγγιση ενισχύει την κριτική σκέψη και επιτρέπει στα παιδιά να εξετάσουν διαφορετικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων που αναπτύχθηκαν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της σύνδεσης μαθηματικών και ιστορίας αποτελεί ο πολιτισμός της αρχαίας Αιγύπτου. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ανέπτυξαν μαθηματικές γνώσεις προκειμένου να αντιμετωπίσουν πρακτικά ζητήματα καθημερινής φύσεως, σχετικά με τη γεωργία, τις κατασκευές, το εμπόριο και τη διοίκηση. Ιδιαίτερη σημασία είχε η ανάπτυξη μεθόδων μέτρησης και υπολογισμού ποσοτήτων, γεγονός που οδήγησε στη χρήση ενός συστήματος κλασμάτων, το οποίο βασιζόταν ιδίως στα μοναδιαία κλάσματα. Τα κλάσματα αυτά, με αριθμητή τη μονάδα, χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση και τη διαχείριση ποσοτήτων (Clemente, 2021). Ένα από τα πιο γνωστά σύμβολα που συνδέεται με τα μοναδιαία κλάσματα αποτελεί το Μάτι του Ώρου. Τα επιμέρους μέρη του συμβόλου αντιστοιχούν σε μοναδιαία κλάσματα όπως είναι το $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ και $\frac{1}{64}$. Τα κλάσματα αυτά χρησιμοποιούνταν σε μετρήσεις και υπολογισμούς στο πλαίσιο του αιγυπτιακού συστήματος μέτρησης. Κάθε τμήμα του συμβόλου συνδεόταν συμβολικά με διαφορετικές ανθρώπινες αισθήσεις, αναδεικνύοντας τη στενή σχέση μαθηματικών, πολιτισμού και συμβολισμού στην αρχαία Αίγυπτο (Ritter, 2003). Η σύνδεση αυτή αναδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθηματικές έννοιες ενσωματώνονται σε πολιτισμικά και συμβολικά πλαίσια (Ritter, 2003).

Παράλληλα, η αξιοποίηση των αιγυπτιακών κλασμάτων στη μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης των κλασμάτων και των μαθηματικών αναπαραστάσεων. Η χρήση διαφορετικών μορφών αναπαράστασης ενισχύει την κατανόηση της έννοιας του κλάσματος και

διευκολύνει τη σύνδεση μεταξύ συμβολικών και οπτικών μαθηματικών μοντέλων (Clemente, 2021). Μέσα από δραστηριότητες που αξιοποιούν τα αιγυπτιακά κλάσματα, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να κατανοήσουν τα κλάσματα ως μέρη ενός συνόλου, αλλά και ως μαθηματικές σχέσεις που μπορούν να αναπαρασταθούν με πολλαπλούς τρόπους. Η σύνδεση μαθηματικών και πολιτισμού εντάσσεται ουσιαστικά στο πλαίσιο της προσέγγισης STEAM, καθώς συνδυάζει ιστορικά, πολιτισμικά και μαθηματικά στοιχεία σε ένα ενιαίο μαθησιακό πλαίσιο. Μέσα από τέτοιες δραστηριότητες, οι μαθητές και οι μαθήτριες προσεγγίζουν τα μαθηματικά δημιουργικά και διερευνητικά, αναπτύσσοντας τόσο γνωστικές όσο και πολιτισμικές δεξιότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: Διδακτικές Εισηγήσεις

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται συγκεκριμένα παραδείγματα που καταθέτουμε ως εισηγήσεις για την επεξήγηση της διδακτικής προσέγγισης που προτείνεται. Πολλές φορές οι εκπαιδευτικοί δηλώνουν την καλή του διάθεση για την υιοθέτηση και εφαρμογή καινοτόμων προσεγγίσεων, αδυνατούν όμως να τις εντάξουν σε συγκεκριμένο διδακτικό πλαίσιο βάσει του οποίου καλύπτουν την ύλη και υπηρετούν τους στόχους και τα επιδιωκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα.

Μαθηματικά και Μουσική

Η ενσωμάτωση της μουσικής στη διδασκαλία των μαθηματικών αποτελεί μία αποτελεσματική διεπιστημονική προσέγγιση, προκειμένου να επιτευχθεί η κατανόηση αφηρημένων εννοιών. Στην εισήγηση αυτή, παρουσιάζεται η σύνδεση των κλασμάτων που τα παιδιά διδάσκονται στο μάθημα των μαθηματικών με την έννοια του ρυθμού που συναντούν στο μάθημα της μουσικής. Μέσω μιας βιωματικής δραστηριότητας, οι έννοιες προσεγγίζονται με δημιουργικό τρόπο (Hudáková & Králová, 2016), με σκοπό η αφηρημένη τους διάσταση να αποκτήσει σώμα και να γίνει αντιληπτή με καθημερινά μέσα. Οι διδακτικοί στόχοι που θέτει η εν λόγω εισήγηση είναι για τους μαθητές και τις μαθήτριες πρωτίστως να

προσεγγίσουν την έννοια του κλάσματος με τρόπο διαφορετικό από αυτόν που προτείνεται στις παραδοσιακές διδακτικές πρακτικές. Ουσιαστικό μέρος της δραστηριότητας αποτελεί η κατανόηση σε βάθος του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν τα κλάσματα, δεδομένης μίας μονάδας που θεωρείται το ολόκληρο. Επιπλέον, μέσω αυτής της βιωματικής μελέτης των κλασμάτων, ένας στόχος που επιδιώκεται είναι η σύνδεση της διάρκειας των ήχων με τις μαθηματικές αξίες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά μπαίνουν στη διαδικασία να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν τη σχέση μεταξύ μουσικών αξιών, όπως είναι το τέταρτο και το όγδοο και των αντίστοιχων μαθηματικών κλασμάτων, κατανοώντας ότι οι διαφορετικές αξίες των ήχων αντιστοιχούν σε μέρη ενός συνόλου. Σημαντικό πλεονέκτημα αυτής της διαδικασίας αποτελεί η ενίσχυση της εμπειρίας και της εξοικείωσης που αποκτούν οι μαθητές και οι μαθήτριες με τη συμβολική αναπαράσταση που χρησιμοποιείται. Επιπρόσθετα, η μαθηματική σκέψη αναπτύσσεται, όπως και η ρυθμική, δεδομένου ότι τα παιδιά εξετάζουν τις έννοιες από μία νέα οπτική γωνία που συνήθως δεν προσεγγίζεται στις διδακτικές πρακτικές και παρατηρούν ότι η έννοια του κλάσματος δεν είναι αποξενωμένη από την πραγματική ζωή και από καθημερινά φαινόμενα. Ακόμα, οι διδασκόμενοι συνεργάζονται και συμμετέχουν ενεργά σε μία τέτοια διαδικασία, αφού μπορούν να βρουν σε αυτή στοιχεία πολύ οικεία με τις ψυχαγωγικές τους δραστηριότητες όπως είναι η μουσική. Η μεταξύ τους συνεργασία αποφέρει πολύπλευρη κατανόηση και επικοινωνία, με στόχο τη συλλογική, δημιουργική και, κυρίως, ουσιαστική εξοικείωση με την έννοια του κλάσματος, χρησιμοποιώντας το ρυθμό ως βασικό εργαλείο μάθησης.

Περιγραφή της Δραστηριότητας

Ο εκπαιδευτικός, συντονίζοντας τη δραστηριότητα, ορίζει αρχικά το «όλο», δηλαδή το ολόκληρο, θέτοντας ένα σταθερό ρυθμό, όπως είναι οι τέσσερις χτύποι. Η χρονική διάρκεια που μεσολαβεί μεταξύ των χτύπων είναι σταθερή και υπάρχει η σύμβαση με τους μαθητές και τις μαθήτριες ότι με το πέρας των τεσσάρων χτύπων, αρχίζει η μέτρηση από την αρχή, με την έννοια ότι κάθε τέσσερις χτύποι δημιουργούν ένα ολόκληρο και αντιστοιχούν στο σύνολο, δηλαδή στον αριθμό ένα.

Στη συνέχεια, είτε με τη βοήθεια ενός μουσικού οργάνου είτε απλώς με το χτύπημα των χεριών τους, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να παράγουν ήχο, όπως να χτυπήσουν παλαμάκια ή μία χορδή. Ο εκπαιδευτικός έχοντας ορίσει, αρχικά το σύνολο ως τη μονάδα, ζητά από τα παιδιά να παράγουν ήχο, μέσω του ίδιου μοτίβου, δηλαδή σε τέσσερεις ίσους χρόνους. Ως μία διαφορετική προσέγγιση, ο εκπαιδευτικός μπορεί επίσης, να διαχωρίσει τα παιδιά σε ομάδες με την ιδιότητα κάθε ομάδα να δίνει τον ήχο σε διαφορετικό τέταρτο, για παράδειγμα η πρώτη ομάδα να παράγει ήχο στον πρώτο χτύπο, η δεύτερη στο δεύτερο χτύπο, η τρίτη ομάδα να συμμετέχει στον τρίτο από τους χτύπους και η τέταρτη στον τελευταίο, ξεκινώντας κάθε φορά από την αρχή, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2. Στην οπτική αυτή αναπαράσταση, σημειώνεται με το αντίστοιχο χρώμα στο κελί της εκάστοτε ομάδας, ο χρόνος στον οποίο θα παράγει η κάθε μία το ηχητικό σήμα.

	1 ^η Ομάδα	2 ^η Ομάδα	3 ^η Ομάδα	4 ^η Ομάδα
1 ^{ος} χτύπος				
2 ^{ος} χτύπος				
3 ^{ος} χτύπος				
4 ^{ος} χτύπος				

Πίνακας 1

Μέσω αυτής της εμπλοκής, τα παιδιά βιωματικά έρχονται σε επαφή με το πλήρες χρονικό μέτρο, αντιλαμβανόμενοι πιο ενεργά την έννοια του όλου αλλά και του ισόχρονου χτύπου, που συνδέεται με το ρυθμό. Επιπροσθέτως, η ταυτόχρονη παραγωγή ήχου από το σύνολο των μαθητών, δημιουργεί μία ηχητική αρμονία κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, η οποία μπορεί να καταστήσει απόλυτα σαφή την έννοια του ρυθμού και να καταδείξει τη διαφορά που υπάρχει όταν, ειδικά στην αρχή της δραστηριότητας, οι μαθητές και οι μαθήτριες δεν ακολουθούν ακόμα πιστά το μοτίβο και παραστρατούν από την καθορισμένη από τον εκπαιδευτικό αλληλουχία ηχητικών σημάτων. Στη συνέχεια, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να επαναλάβουν τον ίδιο ρυθμό, ενώ ο εκπαιδευτικός σταδιακά τροποποιεί τη δομή του, αυξάνοντας ή μειώνοντας τη διάρκεια των

επιμέρους ήχων. Για παράδειγμα, τα παιδιά εκτελούν δύο χτύπους μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα ή τέσσερις ταχύτερους χτύπους, διατηρώντας σταθερή τη συνολική διάρκεια, δηλαδή το όλον. Μέσα από αυτή την παραλλαγμένη διαδικασία, οι μαθητές και οι μαθήτριες αρχίζουν να αντιλαμβάνονται ότι το ίδιο όλον είναι δυνατόν να χωριστεί σε ίσα μέρη, τα οποία όμως αντιστοιχούν σε διαφορετικές χρονικές αξίες. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 3, ο κάθε ένας από τους χτύπους που απαρτίζουν το σύνολο, είναι τώρα χωρισμένος σε δύο ίσα μέρη, δηλαδή στη μέση, απαιτώντας δύο ηχητικά σήματα, ισομοιρασμένα σε κάθε περίπτωση. Με τον ίδιο μοτίβο, ο κάθε χρόνος- χτύπος μπορεί να διαιρεθεί σε περισσότερα ίσα μέρη, κατά την οδηγία που δίνει κάθε φορά ο εκπαιδευτικός. Ακόμα, μπορεί να δώσει την οδηγία σε κάθε μία από τις ομάδες να διαχωρίσει τον κάθε χτύπο σε διαφορετικό αριθμό ίσων μερών. Για παράδειγμα, η πρώτη ομάδα μπορεί να διαιρέσει τον κάθε χτύπο σε δύο ίσα μέρη, η δεύτερη ομάδα σε τρία ίσα μέρη, η τρίτη ομάδα σε τέσσερα ίσα μέρη και η τέταρτη ομάδα σε πέντε ίσα μέρη, όπως σημειώνεται στον πίνακα 4.

1 ^{ος} χτύπος	
2 ^{ος} χτύπος	
3 ^{ος} χτύπος	
4 ^{ος} χτύπος	

Πίνακας 2

	1 ^η Ομάδα		2 ^η Ομάδα			3 ^η Ομάδα				4 ^η Ομάδα				
1 ^{ος} χτύπος														
2 ^{ος} χτύπος														
3 ^{ος} χτύπος														
4 ^{ος} χτύπος														

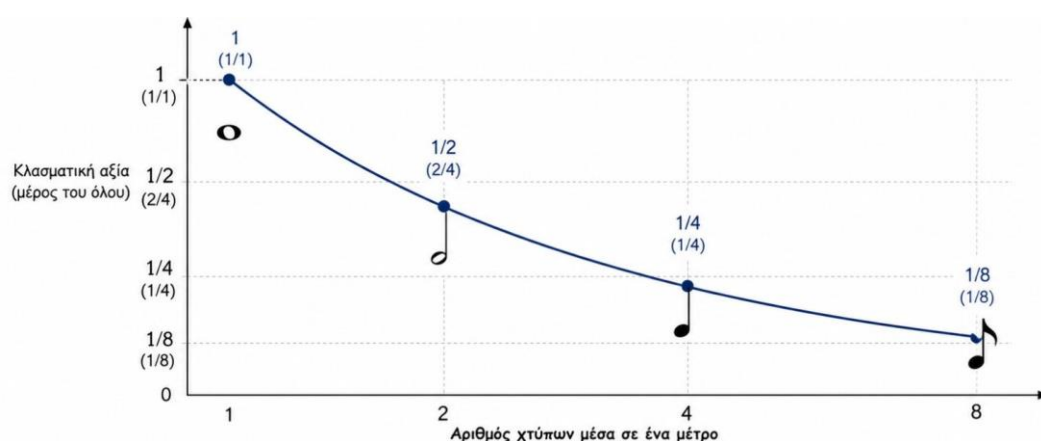
Πίνακας 3

Στο σημείο αυτό, ο εκπαιδευτικός εισάγει σταδιακά τις μαθηματικές έννοιες, καθοδηγώντας τα παιδιά να συνδέσουν τις χρονικές αξίες των ήχων με τα κλάσματα. Συγκεκριμένα, εξηγεί ότι όταν το χρονικό διάστημα χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη, το κάθε μέρος αντιστοιχεί στο $1/2$, ενώ όταν χωρίζεται σε τέσσερα ίσα μέρη, κάθε μέρος αντιστοιχεί στο $1/4$. Αντίστοιχα, η διαίρεση σε οκτώ ίσα μέρη οδηγεί στην έννοια του $1/8$. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να αναπαραστήσουν τους ρυθμούς αυτούς τόσο μέσω της εκτέλεσης όσο και μέσω των συμβολικών αναπαραστάσεων στον πίνακα. Ενδιαφέρον προκαλεί ακόμα, η βαθύτερη κατανόηση και αναπαράσταση του τρόπου με τον οποίο συμβολίζεται στην περίπτωση κάθε ομάδας το κλάσμα που δείχνει τον ένα χτύπο σε σχέση με το όλο. Στον πίνακα 5, το χρωματισμένο μέρος δείχνει ότι ο κάθε ένας από τους τέσσερις χτύπους διαιρεμένος ξανά σε περισσότερα ίσα μέρη, δημιουργεί άλλο μέρος του συνόλου και, επομένως, άλλο κλάσμα. Έτσι, η πρώτη ομάδα έχει το $1/2$ του $1/4$, η δεύτερη ομάδα έχει το $1/3$ του $1/4$, η τρίτη ομάδα έχει για κάθε χτύπο το $1/4$ του $1/4$ και τέλος, η τέταρτη ομάδα έχει το $1/5$ του $1/4$. Με τον τρόπο αυτό, τα παιδιά οδηγούνται στην κατανόηση της αντιστοιχίας μεταξύ της ρυθμικής μονάδας και του μέρους ενός συνόλου, δηλαδή στην κλασματική αναπαράσταση.

	1 ^η Ομάδα		2 ^η Ομάδα			3 ^η Ομάδα				4 ^η Ομάδα				
1 ^{ος} χτύπος														
2 ^{ος} χτύπος														
3 ^{ος} χτύπος														
4 ^{ος} χτύπος														

Πίνακας 4

Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, ο/η εκπαιδευτικός ενθαρρύνει τη συζήτηση και την ανταλλαγή ιδεών, θέτοντας ερωτήματα που προάγουν τη διερεύνηση. Μέσα από το διάλογο, τα παιδιά οδηγούνται στη σταδιακή οικοδόμηση της γνώσης, συνδέοντας τη βιωματική εμπειρία με τη μαθηματική έννοια. Ακόμα, η οπτικοποίηση αυτή βοηθάει τα παιδιά να κατανοήσουν τη σχέση μεταξύ του μέρους και του όλου, αλλά και την έννοια της αναλογίας. Σε υψηλότερη απαίτηση και με την αρωγή του εκπαιδευτικού, μπορεί να παρουσιαστεί ένα γράφημα το οποίο να οπτικοποιεί τη σχέση μεταξύ αριθμού των χτύπων μέσα σε ένα σταθερό χρονικό διάστημα και της τιμής του αντίστοιχου κλάσματος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2. Το γεγονός ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των χτύπων, τόσο μειώνεται η τιμή του αντίστοιχου κλάσματος, καταδεικνύει την αντίστροφη σχέση μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών.



Εικόνα 2

Στο τελικό στάδιο, μπορεί να ζητηθεί από τα παιδιά να περιγράψουν όσα αποκόμισαν από τη συγκεκριμένη δραστηριότητα και τον τρόπο με τον οποίο η μουσική και τα μαθηματικά συνδέονται μεταξύ τους. Ο εκπαιδευτικός συνοψίζει τα βασικότερα σημεία και επισημαίνει ότι οι χρονικές αξίες στη μουσική αποτελούν ένα παράδειγμα εφαρμογής των κλασμάτων σε πραγματικό πλαίσιο. Με τον τρόπο αυτό, ενισχύεται η κατανόηση και η δυνατότητα μεταφοράς της γνώσης σε άλλες μαθησιακές καταστάσεις. Συμπερασματικά, η δραστηριότητα αυτή, η οποία θα μπορούσε να ενσωματωθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών της Α γυμνασίου, επιδιώκει να καταστήσει τη μαθηματική έννοια των κλασμάτων πιο προσιτή και κατανοητή, αξιοποιώντας τη μουσική ως ένα οικείο και δημιουργικό πεδίο.

Αναμφίβολα συνδέεται με το πλαίσιο της προσέγγισης STEAM, καθώς ενώνει τα μαθηματικά με τη μουσική, προάγοντας έτσι τη δημιουργική και τη διεπιστημονική μάθηση. Μέσα από τη βιωματική ενασχόληση με τα αντικείμενα, τη συνεργασία και τη διερεύνηση, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να οικοδομήσουν τη γνώση με τρόπο ενεργό, ενισχύοντας τη μαθησιακή διαδικασία, όπως και τη θετικότερη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά.

Μαθηματικά και Λογοτεχνία

Η σύνδεση των μαθηματικών και της λογοτεχνίας μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στη δημιουργία ενός διαδραστικού και βιωματικού μαθησιακού περιβάλλοντος. Τα λογοτεχνικά κείμενα προσφέρουν τη δυνατότητα στους μαθητές και στις μαθήτριες να προσεγγίσουν τις μαθηματικές έννοιες σε ένα πιο οικείο πλαίσιο, όπου μπορούν να τις γνωρίσουν πιο ουσιαστικά και να τις κάνουν γνωστικό κτήμα τους. Για την παρούσα διδακτική εισήγηση, αξιοποιείται το λογοτεχνικό έργο Flatland του Edwin Abbott, στο οποίο συνδέονται οι έννοιες της γεωμετρίας με τη χωρική αντίληψη. Μέσα από την ακόλουθη δραστηριότητα, τα παιδιά καλούνται να διερευνήσουν τα γεωμετρικά σχήματα και την έννοια των διαστάσεων, προσεγγίζοντας τη μαθηματική αυτή γνώση μέσα σε ένα πλαίσιο τόσο διερευνητικό όσο και δημιουργικό.

Περιγραφή της Δραστηριότητας

Αρχικά, ο/η εκπαιδευτικός παρουσιάζει στα παιδιά ένα σύντομο απόσπασμα από το έργο Flatland, στο οποίο ο πρωταγωνιστής, ως κάτοικος του δισδιάστατου κόσμου, συναντά ένα τρισδιάστατο σχήμα. Η συζήτηση που έπεται αυτής της συνάντησης, δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονται το χώρο οι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας και τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν στην προσπάθειά τους να κατανοήσουν την ύπαρξη μιας επιπλέον διάστασης.

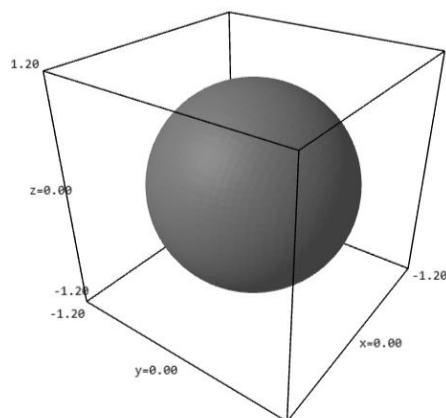
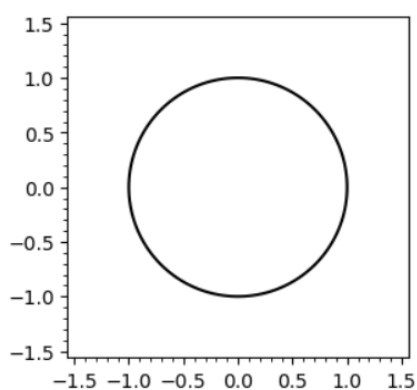
Στη συνέχεια, τα παιδιά καλούνται να αναγνωρίσουν τα βασικά επίπεδα

σχήματα που εμφανίζονται στο έργο, όπως το τρίγωνο, το τετράγωνο και ο κύκλος. Ο/Η εκπαιδευτικός παρουσιάζει αντίστοιχα στερεά σώματα και ζητά από τους μαθητές να συζητήσουν ποιο χαρακτηριστικό τα διαφοροποιεί από τα επίπεδα σχήματα. Για το σκοπό αυτής της συζήτησης, το φύλλο εργασίας που δίνεται στα παιδιά περιλαμβάνει τον πίνακα 6.

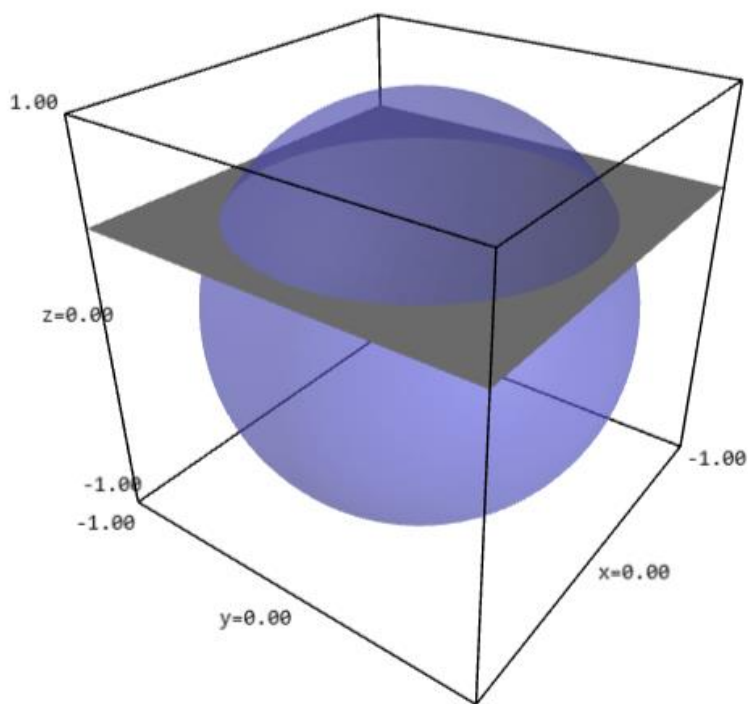
Επίπεδο Σχήμα	Στερεό Σώμα
Τετράγωνο	Κύβος
Ορθογώνιο	Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο
Κύκλος	Σφαίρα
Τρίγωνο	Πυραμίδα
Πολύγωνο	Πρίσμα

Πίνακας 6

Σε επόμενο στάδιο, τα παιδιά κατασκευάζουν αναπτύγματα των στερεών σωμάτων από χαρτόνι, όπως έναν κύβο, παρατηρώντας πώς τα επίπεδα σχήματα συνδυάζονται ώστε να δημιουργήσουν ένα τρισδιάστατο αντικείμενο. Η δραστηριότητα αυτή βοηθά τα παιδιά να αντιληφθούν βιωματικά τη σχέση μεταξύ επίπεδης και στερεάς γεωμετρίας. Προκειμένου να εμβαθύνουν περισσότερο τα παιδιά, στο φύλλο εργασίας προτείνονται ερωτήματα σχετικά με τα πώς θα μπορούσε ένας κάτοικος της Επιπεδοχώρας να αντιληφθεί έναν κύβο και αν θα μπορούσε να δει όλες τις πλευρές του. Επιπλέον, τα παιδιά καλούνται να σχεδιάσουν τις τομές μιας σφαίρας με ένα επίπεδο, για να κατανοήσουν πώς θα εμφανιζόταν στους κατοίκους της Επιπεδοχώρας, συζητώντας πώς η αλλαγή της διάστασης επηρεάζει την αντίληψη του χώρου. Για την αξιοποίηση της δραστηριότητας, ο διδάσκων μπορεί να παρουσιάσει δυναμικές αναπαραστάσεις που δημιουργήθηκαν στο περιβάλλον του SageMath, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3. Οι αναπαραστάσεις αυτές επιτρέπουν στα παιδιά να παρατηρήσουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των επιπέδων σχημάτων και των στερεών σωμάτων, ώστε να διευκολυνθεί η κατανόηση της έννοιας της διάστασης και της χωρικής οπτικοποίησης. Ακόμα, στην Εικόνα 4 φαίνονται οι τομές μιας σφαίρας με το επίπεδο, οπτικοποιώντας την αντίληψη που έχουν οι δισδιάστατοι κάτοικοι της Επιπεδοχώρας ως προς τη τρισδιάστατη σφαίρα.



Εικόνα 3



Εικόνα 4

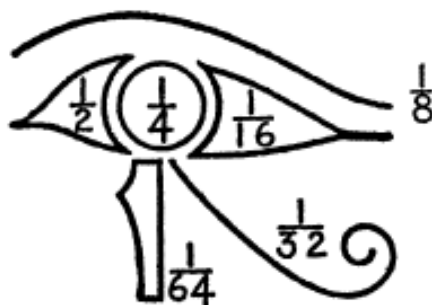
Μαθηματικά και Ιστορία

Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να αποτελέσει ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό εργαλείο για την ενίσχυση τόσο της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών όσο και του ενδιαφέροντος για το μάθημα. Μέσα από την παρουσίαση και την αξιοποίηση ιστορικών και πολιτισμικών στοιχείων, τα παιδιά έχουν τη δυνατότητα να

προσεγγίσουν τα μαθηματικά ως ανθρώπινη εφεύρεση και όχι ως ένα σύνολο κανόνων. Η σύνδεση της διδασκαλίας των μαθηματικών με ιστορικά παραδείγματα συμβάλλει στην κατανόηση της εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών και στη δημιουργία μιας πιο ολοκληρωμένης εικόνας για τη φύση της μαθηματικής γνώσης. Η παρούσα διδακτική εισήγηση αποσκοπεί στη διδασκαλία της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων μέσω της αξιοποίησης ενός από τα σημαντικότερα σύμβολα της αρχαίας Αιγύπτου, το Μάτι του Ώρου. Με την ολοκλήρωση αυτής της δραστηριότητας οι μαθητές και οι μαθήτριες αναμένεται να έχουν επιτύχει την αναγνώριση ετερώνυμων κλασμάτων, τη σύγκρισή τους και τη μετατροπή τους σε ισοδύναμα ομώνυμα κλάσματα. Επιπροσθέτως, ένας διδακτικός στόχος που τίθεται είναι η πρόσθεση και η αφαίρεση ετερώνυμων κλασμάτων, αφού έχουν μετατραπεί σε ομώνυμα κλάσματα, καθώς και η σύγκριση ενός κλάσματος με τη μονάδα.

Περιγραφή της Δραστηριότητας

Η παρουσίαση του αιγυπτιακού συμβόλου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 5 αποτελεί την αρχή της δραστηριότητας, προκειμένου να γνωστοποιηθεί στα παιδιά το Μάτι του Ώρου. Ο διδάσκων εξηγεί ότι το σύμβολο αυτό συνδέθηκε με το σύστημα αναπαράστασης κλασμάτων, εισάγοντας τα παιδιά στον πολιτισμό της αρχαίας Αιγύπτου.



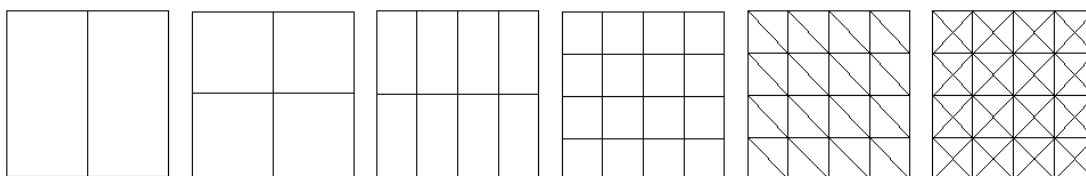
Εικόνα 5(Ritter, 2003)

Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο πίνακας με τα κλάσματα, δείχνοντας σε ποιο από τα επιμέρους στοιχεία του συμβόλου αντιστοιχεί το κάθε ένα από αυτά, όπως φαίνεται στον πίνακα 7.

Τμήμα Ματιού	Μοναδιαίο Κλάσμα
Δεξιά πλευρά του ματιού	$\frac{1}{2}$
Κόρη του ματιού	$\frac{1}{4}$
Φρύδι	$\frac{1}{8}$
Αριστερή πλευρά του ματιού	$\frac{1}{16}$
Καμπύλη γραμμή	$\frac{1}{32}$
Δάκρυ	$\frac{1}{64}$

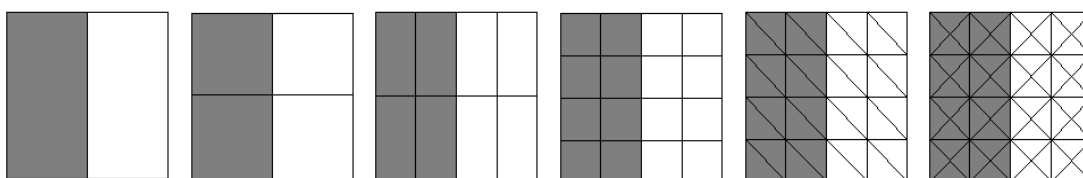
Πίνακας 7

Από την παρατήρηση της εικόνας και του πίνακα, τα παιδιά μπορούν να ερωτηθούν για τα σχετικά μεγέθη αυτών των αριθμών, δηλαδή ποιο από αυτά τα κλάσματα εκφράζει μεγαλύτερο μέρος. Επιπλέον, μπορούν να οδηγηθούν στο να αντιληφθούν ότι κάθε κλάσμα αποτελεί το μισό του προηγούμενου, καλλιεργώντας έτσι τη γνώση της σύγκρισης μεταξύ κλασματικών αριθμών που δεν έχουν ίδιους παρονομαστές. Στη συνέχεια, τα παιδιά χωρίζονται σε ομάδες και λαμβάνουν ένα φύλλο εργασίας στο οποίο εμφανίζεται το Μάτι του Ώρου. Στο φύλλο αυτό, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να χρωματίσουν αρχικά μόνο δύο διαφορετικά τμήματα της επιλογής τους και να υπολογίσουν ποιο μέρος του συνόλου αντιπροσωπεύουν τα δύο αυτά τμήματα μαζί. Για παράδειγμα, τα παιδιά έρχονται αντιμέτωποι με τις προσθέσεις $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ είτε $\frac{1}{2} + \frac{1}{64}$. Σε αυτό το σημείο, ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τη διαδικασία μετατροπής των κλασμάτων σε ισοδύναμα κλάσματα, με τον ίδιο παρονομαστή, ώστε να πραγματοποιηθεί η πρόσθεση. Προκειμένου να αντιληφθούν τα παιδιά εποπτικά τη μετατροπή των κλασμάτων σε ισοδύναμα, στο φύλλο εργασίας παρουσιάζεται ένα πλαίσιο, σε μορφή πίνακα, διαχωρισμένο σε 2, 4, 8, 16, 32 και 64 ίσα μέρη, όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.



Εικόνα 6

Με τη χρήση αυτών των πλαισίων, τα παιδιά καθοδηγούνται να συγκρίνουν το μέρος της εικόνας που καλύπτει το $\frac{1}{2}$, αν αυτό εκφραστεί ως ισοδύναμο κλάσμα με κάθε έναν από τους υπόλοιπους παρονομαστές, όπως φαίνεται στο χρωματισμένο μέρος της Εικόνας 7.



Εικόνα 7

Με τον τρόπο αυτό, αντιλαμβάνονται ότι το $\frac{1}{2}$ μπορεί να πάρει την ισοδύναμη κλασματική μορφή $\frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \frac{16}{32}, \frac{32}{64}$ εκφράζοντας το ίδιο μέρος της εικόνας, άρα δηλώνοντας τον ίδιο αριθμό. Έπειτα, η πρόσθεση των ετερόνυμων κλασμάτων είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί, αφού πλέον τα κλάσματα έχουν μετατραπεί σε ομώνυμα, οπότε είναι εφικτή και η πρόσθεση μεταξύ τριών και περισσότερων ετερόνυμων κλασμάτων. Στο τελευταίο μέρος της δραστηριότητας, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να υπολογίσουν και να σχολιάσουν το άθροισμα όλων των κλασμάτων που αποτελούν το Μάτι του Ώρου. Έπειτα από την κατάλληλη διαδικασία, το άθροισμα που προκύπτει είναι $\frac{63}{64}$, γεγονός που λειτουργεί ως αφετηρία της συζήτησης σχετικά με το λόγο για τον οποίο αυτό το κλάσμα δεν ισούται με τη μονάδα, δηλαδή με το όλον. Σε αυτό το σημείο οι μαθητές και οι μαθήτριες μπορούν να αναρωτηθούν πώς εκφράζεται η μονάδα ως ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 64 καθώς και πόσο υπολείπεται από το άθροισμα ώστε να ολοκληρωθεί η μονάδα. Το αξιοσημείωτο αυτό γεγονός, δηλαδή η έλλειψη του κλάσματος του $\frac{1}{64}$, μπορεί να ερμηνευθεί από το διδάσκοντα ως το χαμένο τμήμα

του ματιού που συμβολίζει την ατελή φύση της γνώσης, με σκοπό να εγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών (Ritter, 2003).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII: Συμπεράσματα και εισηγήσεις για μελλοντική ερευνητική διερεύνηση

Η παρούσα εργασία διερεύνησε και συζήτησε τη σημασία της διεπιστημονικότητας στη διδασκαλία των μαθηματικών με στόχο να αναδείξει το ρόλο που μπορούν να διαδραματίσουν οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις STEM και STEAM στη διαμόρφωση ουσιαστικών μαθησιακών εμπειριών. Η μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας κατέδειξε ότι η παραδοσιακή αντιμετώπιση της γνώσης ως συνόλου απομονωμένων γνωστικών αντικειμένων δεν ανταποκρίνεται πλέον στις απαιτήσεις της σύγχρονης εκπαιδευτικής πραγματικότητας. Αντιθέτως, η κατανόηση σύνθετων φαινομένων και η αντιμετώπιση αυθεντικών προβλημάτων προϋποθέτουν τη σύνθεση γνώσεων, δεξιοτήτων και τρόπων σκέψης που προέρχονται από διαφορετικά επιστημονικά πεδία. Η διεπιστημονικότητα αναδεικνύεται, επομένως, ως μία παιδαγωγική προσέγγιση που συμβάλλει στη νοηματοδότηση της γνώσης και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων απαραίτητων στη σύγχρονη κοινωνία.

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στο ρόλο των μαθηματικών ως συνδετικού κρίκου μεταξύ διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων. Όπως αναδείχθηκε, τα μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο ένα αυτόνομο επιστημονικό πεδίο, αλλά λειτουργούν ως γλώσσα περιγραφής, ερμηνείας και ανάλυσης φαινομένων. Μέσω της μαθηματικής μοντελοποίησης, της διερεύνησης αυθεντικών προβλημάτων και της αξιοποίησης δραστηριοτήτων STEM, οι μαθητές και οι μαθήτριες έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν τη χρησιμότητα των μαθηματικών και να συνδέσουν τη σχολική γνώση με πραγματικές καταστάσεις. Η προσέγγιση αυτή συμβάλλει στην υπέρβαση της αποσπασματικής διδασκαλίας και ενισχύει την κριτική σκέψη, τη δημιουργικότητα και την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων.

Παράλληλα, η μετεξέλιξη του STEM σε STEAM ανέδειξε τη σημασία της δημιουργικότητας και της καλλιτεχνικής έκφρασης στη μαθησιακή διαδικασία. Η ενσωμάτωση των τεχνών επιτρέπει τη σύνδεση των μαθηματικών με πολιτισμικά

επίπεδα, προσφέροντας εναλλακτικούς και δημιουργικούς τρόπους προσέγγισης των αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Η μουσική, η λογοτεχνία και η ιστορία αποτελούν χαρακτηριστικά παραδείγματα γνωστικών περιοχών που μπορούν να λειτουργήσουν συμπληρωματικά στη μαθηματική εκπαίδευση, ενισχύοντας το ενδιαφέρον των μαθητών και διευρύνοντας τις δυνατότητες κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Οι διδακτικές εισηγήσεις που παρουσιάστηκαν στην εργασία επιχείρησαν να μεταφέρουν στην εκπαιδευτική πράξη τις θεωρητικές αρχές που αναπτύχθηκαν. Η σύνδεση των μαθηματικών με τη μουσική μέσω των λόγων και των κλασμάτων, η αξιοποίηση του λογοτεχνικού έργου Flatland, με σκοπό τη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ επίπεδης γεωμετρίας και στερεομετρίας, καθώς και η προσέγγιση των αιγυπτιακών κλασμάτων μέσα από το Μάτι του Ώρου, αποτελούν ενδεικτικά παραδείγματα διεπιστημονικών δραστηριοτήτων που μπορούν να συμβάλουν στη βαθύτερη και εκτενέστερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Ταυτόχρονα, αναδεικνύουν τη δυνατότητα σύνδεσης της μαθηματικής γνώσης με πολιτισμικά, ιστορικά και καλλιτεχνικά στοιχεία, προσδίδοντας στη μάθηση περισσότερο αυθεντικό και βιωματικό χαρακτήρα.

Συμπερασματικά, η διεπιστημονικότητα στη διδασκαλία των μαθηματικών δε συνιστά απλώς μια εναλλακτική διδακτική επιλογή. Αποτελεί μία αναγκαιότητα που απορρέει τις απαιτήσεις που τίθενται στη σύγχρονη εκπαίδευση και κοινωνία. Η αξιοποίηση των προσεγγίσεων STEM και STEAM μπορεί να συμβάλλει ουσιαστικά στη δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων που προάγουν τη διασύνδεση της γνώσης, την ενεργό συμμετοχή των μαθητών και την ανάπτυξη δεξιοτήτων του 21^{ου} αιώνα. Μελλοντικές έρευνες μπορούν να επικεντρωθούν στην εμπειρική εφαρμογή και αξιολόγηση αντίστοιχων διδακτικών παρεμβάσεων, με στόχο να διερευνηθεί περαιτέρω η επίδρασή τους στη μαθηματική μάθηση και στη διαμόρφωση θετικής στάσης απέναντι στο μάθημα των μαθηματικών.

Σύνδεση Συμπερασμάτων και Θεωρητικού Πλαισίου

Τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας επιβεβαιώνουν τις θεωρητικές προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, σχετικά με τη

σημασία της διεπιστημονικότητας στη σύγχρονη εκπαίδευση. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση ανέδειξε ότι η σύνδεση διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων μπορεί να συμβάλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, της δημιουργικότητας και της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων, επιβεβαιώνοντας τις θεωρητικές θέσεις που υποστηρίζουν τη σημασία της ολιστικής προσέγγισης της γνώσης.

Παράλληλα, η μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας για το STEM και το STEAM κατέδειξε ότι τα μαθηματικά διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη σύνδεση των επιμέρους γνωστικών αντικειμένων. Η θέση αυτή συμφωνεί με τις θεωρητικές προσεγγίσεις που παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας, σύμφωνα με τις οποίες η μαθηματική σκέψη αποτελεί βασικό εργαλείο ανάλυσης, μοντελοποίησης και ερμηνείας φαινομένων του πραγματικού κόσμου.

Επιπλέον, η έμφαση που δόθηκε στη μαθηματική μοντελοποίηση και στα αυθεντικά προβλήματα επιβεβαιώνει τη σημασία των διερευνητικών και μαθητοκεντρικών προσεγγίσεων μάθησης. Τα ευρήματα της βιβλιογραφίας υποστηρίζουν ότι η εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες που συνδέονται με πραγματικές καταστάσεις συμβάλλει στην πιο ουσιαστική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στην ανάπτυξη δεξιοτήτων που είναι απαραίτητες στον 21^ο αιώνα.

Τέλος, οι διδακτικές προτάσεις που παρουσιάστηκαν στην εργασία καταδεικνύουν ότι η σύνδεση των μαθηματικών με τη μουσική, τη λογοτεχνία και την ιστορία μπορεί να λειτουργήσει ως μέσο απόδοσης ουσιαστικού νοήματος στη μαθηματική γνώση. Οι προσεγγίσεις αυτές είναι συμβατές με τη φιλοσοφία του STEAM και ενισχύουν τη θεωρητική θέση ότι η μάθηση καθίσταται αποτελεσματικότερη όταν οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να προσεγγίζουν τις μαθηματικές έννοιες μέσα από πολλαπλά πλαίσια και αναπαραστάσεις.

Εισηγήσεις για Μελλοντική Ερευνητική Διερεύνηση

Η παρούσα μελέτη βασίστηκε σε βιβλιογραφική ανασκόπηση και δεν περιέλαβε εμπειρική εφαρμογή των προτεινόμενων διδακτικών δραστηριοτήτων. Ως εκ τούτου, προκύπτουν σημαντικές προοπτικές για μελλοντική διερεύνηση του θέματος.

Αρχικά, θα μπορούσε να σχεδιαστεί και να υλοποιηθεί μία διδακτική παρέμβαση σε σχολικές τάξεις με στόχο την εφαρμογή των δραστηριοτήτων που προτάθηκαν στην παρούσα εργασία. Η αποτελεσματικότητα των παρεμβάσεων αυτών θα μπορούσε να διερευνηθεί με πρακτικό έλεγχο, ώστε να καταγραφεί η προγενέστερη και μεταγενέστερη των δραστηριοτήτων μαθηματική κατανόηση στις επιδόσεις των μαθητών.

Παράλληλα, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η διερεύνηση των στάσεων και των αντιλήψεων των μαθητών απέναντι στις διεπιστημονικές και STEM/STEAM δραστηριότητες. Η αξιοποίηση ερωτηματολογίων θα μπορούσε να προσφέρει πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές βιώνουν τέτοιες μαθησιακές εμπειρίες και αντιλαμβάνονται τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Επιπλέον, θα μπορούσε να μελετηθεί η συμβολή συγκεκριμένων διεπιστημονικών δραστηριοτήτων, όπως η αξιοποίηση του Ματιού του Ώρου στη διδασκαλία κλασμάτων, η χρήση του Flatland στη διδασκαλία γεωμετρικών εννοιών, καθώς και η σύνδεση μαθηματικών και μουσικής για την κατανόηση των λόγων. Μία τέτοιας φύσεως έρευνα θα επέτρεπε την αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας κάθε προσέγγισης ξεχωριστά.

Τέλος, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση των απόψεων και των πρακτικών των εκπαιδευτικών σχετικά με την εφαρμογή διεπιστημονικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών. Η καταγραφή των δυσχερειών, των αναγκών επιμόρφωσης και των παραγόντων που διευκολύνουν την εφαρμογή τέτοιων πρακτικών θα μπορούσε να συμβάλει στη βελτίωση του σχεδιασμού και της υλοποίησης αντίστοιχων εκπαιδευτικών παρεμβάσεων στο μέλλον.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

- Abbott, E. A. (1992). *Flatland: A romance of many dimensions*. Dover Publications.
- Aboelela, S. W., Larson, E., Bakken, S., Carrasquillo, O., Formicola, A., Glied, S. A., Haas, J., & Gebbie, K. M. (2007). Defining interdisciplinary research: Conclusions from a critical review of the literature. *Health Services Research*, 42(1 Pt 1), 329-346. <https://doi.org/10.1111/j.1475-6773.2006.00621.x>
- An, S., Tillman, D., Boren, R., & Wang, J. (2014). Fostering elementary students' mathematics disposition through music-mathematics integrated lessons. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 5(2). 1-19.
- Azaryahu, L., Courey, S.J., Elkoshi, R., & Adi-Japha, E. (2020). MusiMath and Academic Music: Two music-based intervention programs for fraction learning in fourth-grade students. *Development Science* 23(1), e12882. <https://doi.org/10.1111.desc.12882>
- Azaryahu, L., Ariel, I., & Leikin, R. (2024). Interplay between music and mathematics in the eyes of the beholder: Focusing on differing types of expertise. *Humanities and Social Sciences Communications*, 11, 1153. <https://doi.org/10.1057/s41599-024-03631-z>
- Benson, D. J. (2007). *Music: A mathematical offering*. Cambridge University Press.
- Bijsterveld, K., & Swinnen, A. (Eds.). (2023). *Interdisciplinarity in the scholarly life cycle: Learning by example in humanities and social science research*. Palgrave Macmillan. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11108-2>
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). *Mathematical modeling: Can it be taught and learnt?* *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Bransford, J.D., Brown A.L., & Cocking, R.R. (Eds.). (2000). *How people learn: Brain, mind, experience and school: Expanded edition*. Washington, DC: National Academy Press
- Catterall, L. G. (2017). A brief of STEM and STEAM from an inadvertent insider. *The STEAM Journal*, 3(1), Article 5. <https://doi.org/10.5642/steam.20170301.05>
- Clemente, F., & Fortuny, J. M. (2021). Egyptian fractions and representation registers in the construction of the fraction concept. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17 (7), em1984. <https://doi.org/10.29333/ejmste/10992>
- Drake, S. M., & Burns, R. C. (2004). *Meeting standards through integrated curriculum*. Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Drake, S. M., & Reid, J. L. (2018). Integrated curriculum as an effective way to teach 21st century capabilities. *Asia Pacific Journal of Educational Research*, 1(1), 31-50.

English, L. D. (2016). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(3), 1-8. <https://doi.org/10.1186/s40594-016-0036-1>

European Commission. (2015). *Science education for responsible citizenship: Report to the European Commission of the Expert Group on Science Education*. Publications Office of the European Union. <https://doi.org/10.2777/12626>

Goos, M., Carreira, S., & Namukasa, I. K. (2023). *Mathematics and interdisciplinary STEM education: Recent developments and future directions*. ZDM- Mathematics Education. Advance online publication. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z>

Gutiérrez, R., Myers, M., & Kokka, K. (2023). The stories we tell: Why unpacking narratives of mathematics is important for teacher conocimiento. *Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101025. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101025>

Hassinger-Das, B., Jordan, N.C., Glutting, J., Dyson, N. (2015). Reading stories to learn math: Mathematics vocabulary instruction for children with early numeracy difficulties. *The Elementary School Journal*, 116(2), 242-264. <https://doi.org/10.1086/683986>

Henriksen, D. (2014). Full STEAM ahead: Creativity in excellent STEM teaching practices. *The STEAM Journal*, 1(2), Article 15. <https://doi.org/10.5642/steam.20140102.15>

Hudáková, J., & Králová, E. (2016). Creative interdisciplinary math lessons by means of music activities. *Review of Artistic Education*, 11-12, 290-296. <https://doi.org/10.1515/rae-2016-0035>

Johnson, G., & Moldavan, A. (2023). Creative learning with music and mathematics: Reflections on interdisciplinary collaborations. *The STEAM Journal*, 5(1), Article 4. <https://doi.org/10.5642/steam.MJYS8444>

Kristensen, M. A., Larsen, D. M., Seidelin, L., & Svabo, C. (2024). The role of mathematics in STEM activities: Syntheses and a framework from a literature review. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 12(2), 418-431. <https://doi.org/10.46328/ijemst.3357>

Klein, J. T., & Philipp, T. (2023). Interdisciplinary. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of educational innovation*. Springer.

Land, M. H. (2013). Full STEAM ahead: The benefits of integrating the arts into STEM. *Procedia Computer Science*, 20, 547-552. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2013.09.317>

Maass, K., Geiger, V., Romero Ariza, M., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM- Mathematics Education*, 51(6), 869-884. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5>

Makonye, J. P., & Moodley, N. P. (2023). Connecting mathematics to STEM education: Interdisciplinary teaching and learning facilitation. *ZDM- Mathematics Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01522-2>

National Research Council. (2012). *A framework for K-12 science education: Practices, crosscutting concepts and core ideas*. The National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/13165>

Nugraha, M. G., Kidman, G., & Tan, H. (2024). *Interdisciplinary STEM education foundational concepts: Implementation for knowledge creation*. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(10), em2523. <https://doi.org/10.29333/ejmste/15471>

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2018). *The future of education and skills: Education 2030*. OECD Publishing.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 67(1), 37-58. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9083-3>

Ritter, J. (2003). *Closing the Eye of the Horus: The rise and fall of "Horus-eye fractions"*. In J.M. Steele & A. Imhausen (Eds.), *Under One Sky: Astronomy and Mathematics in the Ancient Near East* (pp.297-320). Ugarit- Verlag.

Sriraman, B., & Beckman, A. (2007). Mathematics and literature: Perspectives for interdisciplinary classroom pedagogy. *Proceeding of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*. European Society for Research in Mathematics Education.

Yakman, G. (2008). *STΣ@M education: An overview of creating a model of integrative education*. Virginia Polytechnic Institute and State University.

Vlasenko, K. V., Lovianova I. V., Achkan, V. V., Armash, T.S., & Chumak, O. O. (2023). *Interdisciplinary connections of mathematics and literature in the preparation for external independent assessment of humanities students*. *Journal of Physics: Conference Series*, 2611(1), 012002. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2611/1/012002>

Vos, P. (2018). "How real people really need mathematics in the real world": Authenticity in mathematics education. *Education Sciences*, 8(4), 195. <https://doi.org/10.3390/educsci8040195>