Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική εργασία

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΤΟ MATHEMATICA

Ντάβαρη Παναγιώτα

Επιβλέπων καθηγητής

Καραχάλιος Νικόλαος

Πύργος

Ιούνιος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Παναγιώτας Ντάβαρη που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης η Παναγιώτα Ντάβαρη εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας της Παναγιώτας Ντάβαρη ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Η Παναγιώτα Ντάβαρη διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΕ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΤΟ MATHEMATICA

ΝΤΑΒΑΡΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων καθηγητής

Νικόλαος Καραχάλιος

Τμήμα μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Συνεπιβλέπων καθηγητής

Νικόλαος Τσίτσας

Τμήμα Πληροφορικής
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Πύργος Ιούνιος 2026

Στα παιδιά μου

Μαρία

και

Παναγιώτη,

το φως της ζωής μου.

“**A very small cause which escapes us determines a considerable effect which we cannot fail to notice, and then we say that the effect is due to chance.**”

“*Μια πολύ μικρή αιτία που μας διαφεύγει, προκαλεί ένα σημαντικό αποτέλεσμα που δεν μπορούμε να αγνοήσουμε, και τότε λέμε ότι το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στην τύχη.*”

Henri Poincaré

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» (ΜΣΜ), της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας (ΣΘΕΤ), του Ελληνικού Ανοιχτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ).

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες προς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικόλαο Καραχάλιο, για την πολύτιμη καθοδήγηση, την επιστημονική του υποστήριξη και τις ουσιαστικές παρατηρήσεις του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Επιπλέον, ευχαριστώ θερμά τον συνεπιβλέποντα καθηγητή μου κ. Νικόλαο Τσίτσα, όπως επίσης και όλους τους διδάσκοντες των θεματικών ενοτήτων που προηγήθηκαν της διπλωματικής εργασίας.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον σύζυγό μου Νίκο και στα παιδιά μου, Μαρία και Παναγιώτη, για την αγάπη, την υπομονή, την κατανόηση και τη συνεχή στήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Η παρουσία τους δίπλα μου και η αμέριστη συμπαράστασή τους στις απαιτήσεις και τις δυσκολίες αυτής της προσπάθειας υπήρξαν καθοριστικές και για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Περίληψη

Τα περισσότερα προβλήματα του φυσικού κόσμου οδηγούν σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες συνήθως δεν διαθέτουν ακριβείς λύσεις. Για τον λόγο αυτό καταφεύγουμε στον προσδιορισμό προσεγγιστικών λύσεων, είτε με αριθμητικές είτε με αναλυτικές μεθόδους, ή με συνδυασμό των δύο. Οι σημαντικότερες αναλυτικές προσεγγίσεις είναι οι μέθοδοι διαταραχών, οι οποίες βασίζονται στην ύπαρξη μιας μικρής παραμέτρου στο πρόβλημα, το οποίο καθίσταται επιλύσιμο όταν η παράμετρος αυτή μηδενιστεί.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται μέθοδοι διαταραχών για μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, με έμφαση σε εξισώσεις δεύτερης τάξης που περιγράφουν ταλαντωτικά συστήματα. Στο εισαγωγικό πρώτο κεφάλαιο εισάγονται οι βασικές έννοιες των μεθόδων διαταραχών. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η μέθοδος των κανονικών διαταραχών και εφαρμόζεται σε γραμμικά και μη γραμμικά, αυτόνομα και εξαναγκασμένα συστήματα. Εξετάζεται ειδικότερα το πρόβλημα του απλού εκκρεμούς και η προσέγγισή του μέσω της εξίσωσης Duffing, ενώ αναλύονται και φαινόμενα συντονισμού. Επιπλέον, για τον προσδιορισμό περιοδικών λύσεων παρουσιάζονται τεχνικές όπως η μέθοδος πλάτους–φάσης και οι αναπτύξεις σε σειρές Fourier. Τέλος, στο πλαίσιο της θεωρίας των δυναμικών συστημάτων, η μέθοδος εφαρμόζεται στην προσέγγιση ομοκλινικών διακλαδώσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μέθοδοι ιδιόμορφων διαταραχών για την κατασκευή ομοιόμορφων προσεγγιστικών λύσεων. Συγκεκριμένα, εξετάζονται η μέθοδος Poincaré–Lindstedt, η μέθοδος ανακανονικοποίησης, οι μέθοδοι Lighthill και Temple, η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων, η μέθοδος μεσοστάθμισης, η μέθοδος Krylov–Bogoliubov–Mitropolski, καθώς και η μέθοδος οριακού στρώματος. Η τελευταία εφαρμόζεται τόσο σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων όσο και στην προσέγγιση τροχιών που καταλήγουν σε κόμβο. Στο τέταρτο κεφάλαιο, εφαρμόζοντας μεθόδους διαταραχών, αναζητάμε δευτερεύοντες συντονισμούς στην εξίσωση Duffing με και χωρίς απόσβεση, και στο πέμπτο κεφάλαιο μελετάται η εξίσωση van der Pol. Αρχικά εξετάζεται η αυτόνομη μορφή της και η προσέγγιση του οριακού κύκλου, ενώ στη συνέχεια αναλύεται η εξαναγκασμένη μορφή της, όπου προσεγγίζονται περιοδικές λύσεις κοντά στον κύριο συντονισμό. Τέλος, στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμένες σύγχρονες εφαρμογές των εξισώσεων Duffing και van der Pol. Σε όλα τα προβλήματα που εξετάζονται, οι προσεγγιστικές λύσεις υλοποιούνται και επαληθεύονται με τη χρήση του Mathematica. Παράλληλα, πραγματοποιείται αριθμητική επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων, ώστε να καταστεί δυνατή η σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τις προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις. Ενδεικτικοί κώδικες Mathematica παρατίθενται στο Παράρτημα, όπου παρουσιάζεται επίσης μελέτη γραμμικής ταλάντωσης ως σημείο αναφοράς για τη σύγκριση με τα μη γραμμικά αποτελέσματα.

Λέξεις-κλειδιά

Μέθοδοι διαταραχών, μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, κανονικές διαταραχές, ιδιόμορφες διαταραχές, εξίσωση Duffing, εξίσωση van der Pol, Mathematica.

Abstract

Most problems arising in the physical world lead to nonlinear differential equations, which generally do not admit exact solutions. For this reason, one resorts to the determination of approximate solutions, either through numerical or analytical methods, or a combination of both. The most important analytical approximations are perturbation methods, which rely on the existence of a small parameter in the problem, rendering it solvable in the limiting case where this parameter vanishes.

This thesis presents perturbation methods for nonlinear ordinary differential equations, with emphasis on second-order equations describing oscillatory systems. In the introductory first chapter, the basic concepts of perturbation methods are introduced. The second chapter develops the method of regular perturbations and applies it to linear and nonlinear autonomous and forced systems. Special attention is given to the simple pendulum problem and its approximation via the Duffing equation, where resonance phenomena are analyzed. Furthermore, in order to determine periodic solutions, specialized techniques such as the amplitude–phase method and Fourier series expansions are presented. Finally, within the framework of dynamical systems theory, the method is applied to the approximation of homoclinic bifurcations. The third chapter presents singular perturbation methods for constructing uniformly valid approximate solutions. In particular, the Poincaré–Lindstedt method, the renormalization method, the Lighthill and Temple methods, the multiple scales method, the averaging method, the Krylov–Bogoliubov–Mitropolski method, and the boundary layer method are examined. The latter is applied both to systems of differential equations and to the approximation of trajectories approaching a node. In the fourth chapter, perturbation methods are used to investigate secondary resonances in the Duffing equation, both with and without damping. The fifth chapter studies the van der Pol equation. Initially, its autonomous form and the approximation of the limit cycle are examined, followed by the forced case, where periodic solutions near the primary resonance are analyzed. Finally, the sixth chapter presents selected modern applications of the Duffing and van der Pol equations. In all problems considered, the approximate solutions are implemented and validated using Mathematica. In parallel, numerical solutions are obtained in order to compare the numerical results with the corresponding analytical approximations. Representative Mathematica codes are included in the Appendix, where a study of linear oscillations is also presented as a reference for comparison with the nonlinear results.

Keywords

Perturbation methods, nonlinear ordinary differential equations, regular perturbations, singular perturbations, Duffing equation, van der Pol equation, Mathematica.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1

1.1 Ιστορική αναδρομή στη θεωρία διαταραχών ... 1

1.2 Η θεωρία διαταραχών για τις διαφορικές εξισώσεις ... 2

1.2.1 Σύγκριση με αριθμητικές μεθόδους ... 3

1.2.2 Περιορισμοί της ποιοτικής ανάλυσης ... 3

1.3 Στοιχεία ασυμπτωτικής ανάλυσης ... 4

1.3.1 Σύμβολα τάξης και συναρτήσεις μέτρου ... 4

1.4 Παράμετροι διαταραχών-Διαταραχές παραμέτρου ... 6

1.5 Διαταραχές συντεταγμένων ... 7

1.6 Σειρές διαταραχών-Βασική μεθοδολογία ... 8

1.7 Ομοιομορφία ... 11

1.7.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου διαταραχών ... 13

1.8 Κανονικά και ιδιόμορφα προβλήματα διαταραχών ... 17

1.9 Εφαρμογή κανονικών διαταραχών: κατακόρυφη βολή ... 17

2. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 29

2.1 Μέθοδος κανονικών διαταραχών στην αρμονική αποσβεννύμενη ταλάντωση ... 29

2.2 Μη γραμμικές ταλαντώσεις ... 37

2.2.1 Η εξίσωση Duffing ... 37

2.2.2 Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων ... 38

2.2.3 Το απλό εκκρεμές ... 40

2.2.4 Εξαναγκασμένες μη αποσβεννύμενες ταλαντώσεις εκτός συντονισμού ... 43

2.2.5 Εξαναγκασμένες μη αποσβεννύμενες ταλαντώσεις κοντά στον συντονισμό με ασθενή διέγερση ... 49

2.2.5.1 Η εξίσωση του πλάτους ... 53

2.2.5.2 Καμπύλες του πλάτους της απόκρισης ... 60

2.2.5.3 Παροδική απόκριση μέσω των αργών μεταβλητών ... 67

2.2.6 Εξαναγκασμένες αποσβεννύμενες ταλαντώσεις, κοντά στο συντονισμό με ασθενή διέγερση ... 69

2.2.6.1 Η εξίσωση του πλάτους ... 72

2.2.6.2 Καμπύλες του πλάτους της απόκρισης ... 78

2.2.7 Μέθοδος διαταραχών πλάτους-φάσης ... 88

2.2.8 Μαλακά και σκληρά ελατήρια ... 92

2.2.9 Μέθοδος κανονικών διαταραχών και σειρές Fourier ... 100

2.2.10 Μέθοδος κανονικών διαταραχών για την εύρεση ομοκλινικής διακλάδωσης .. 104

2.2.10.1 Συντηρητικά συστήματα ... 104

2.2.10.2 Ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές ... 106

2.2.10.3 Διακλαδώσεις ... 110

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 125

3.1 Εισαγωγή ... 125

3.2 Μέθοδος Poincaré-Lindstedt ... 128

3.3 Μέθοδος ανακανονικοποίησης (Renormalisation) ... 140

3.4 Μέθοδος Lighthill ... 145

3.5 Μέθοδος Temple ... 159

3.6 Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων ... 163

3.6.1 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην αρμονική αποσβεννύμενη ταλάντωση 164

3.6.1.1 Εισαγωγή δύο χρονικών κλιμάκων ... 168

3.6.1.2 Εισαγωγή τριών χρονικών κλιμάκων 171

3.6.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην εξίσωση Rayleigh 174

3.6.3 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην αυτόνομη εξίσωση Duffing 181

3.6.4 Εφαρμογή πολλαπλών κλιμάκων σε σαγματικά σημεία και κόμβους 184

3.6.4.1 Προσεγγιστική λύση σε σαγματικό σημείο γραμμικού συστήματος 184

3.6.4.2 Προσεγγιστική λύση σε σαγματικό σημείο μη γραμμικού συστήματος 189

3.6.4.3 Προσεγγιστική λύση σε κόμβο 195

3.7 Μέθοδος Μεσοστάθμισης (Averaging) 200

3.8 Μέθοδος Krylov–Bogoliubov–Mitropolski (KBM) 205

3.9 Μέθοδος της συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων 209

3.9.1 Το οριακό στρώμα 209

3.9.2 Κανόνες συναρμογής 221

3.9.2.1 Κανόνας συναρμογής Van Dyke 221

3.9.2.2 Κανόνας συναρμογής του Prandtl 225

3.9.3 Η θέση του οριακού στρώματος 230

3.9.3.1 Οριακό στρώμα στο δεξί άκρο 231

3.9.3.2 Οριακό στρώμα στο εσωτερικό του διαστήματος 236

3.9.3.3 Πολλαπλό οριακό στρώμα 242

3.9.4 Εφαρμογή της θεωρίας οριακού στρώματος σε πρόβλημα με κόμβο 249

3.9.5 Εφαρμογή της θεωρίας οριακού στρώματος σε συστήματα 254

4. ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ DUFFING 261

4.1 Υποαρμονικές και υπεραρμονικές ταλαντώσεις 261

4.2 Δευτερεύοντες συντονισμοί της μη αποσβεννύμενης εξίσωσης Duffing 263

4.2.1 Υποαρμονικές αποκρίσεις 264

4.2.1.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης 268
4.2.1.2 Ανάλυση ευστάθειας υποαρμονικών αποκρίσεων 271
4.2.2 Υπεραρμονικές αποκρίσεις 275
4.2.2.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης 278
4.2.2.2 Ανάλυση ευστάθειας υπεραρμονικών αποκρίσεων 280
4.3 Δευτερεύοντες συντονισμοί της αποσβεννύμενης εξίσωσης Duffing 283
4.3.1 Υποαρμονικές αποκρίσεις 285
4.3.1.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης 288
4.3.1.2 Ανάλυση ευστάθειας υποαρμονικών αποκρίσεων 291
4.3.2 Υπεραρμονικές αποκρίσεις 296
4.3.2.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης 299
4.3.2.2 Ανάλυση ευστάθειας υπεραρμονικών αποκρίσεων 302
4.3.2.3 Σημεία αναδίπλωσης και φαινόμενο άλματος 306

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ VAN DER POL 309

5.1 Εισαγωγή 309
5.2 Αυτοδιεγειρόμενοι ταλαντωτές - Οριακός κύκλος 309
5.3 Η αυτόνομη εξίσωση van der Pol 310
5.3.1 Το πλάτος του οριακού κύκλου 314
5.3.2 Η ευστάθεια του οριακού κύκλου 315
5.3.3 Η περίοδος του οριακού κύκλου με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης 315
5.3.4 Εφαρμογή μεθόδου Poincaré–Lindstedt 318
5.3.5 Εφαρμογή μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων 325
5.4 Η εξαναγκασμένη εξίσωση van der Pol 330
5.4.1 Ισχυρή διέγερση εκτός συντονισμού 331
5.4.2 Ασθενής διέγερση εκτός συντονισμού 333

5.4.3 Ασθενής διέγερση κοντά στον συντονισμό 335

5.4.3.1 Η εξίσωση του πλάτους 337

5.4.3.2 Καμπύλες του πλάτους απόκρισης 342

6. ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 349

6.1 Εφαρμογές του ταλαντωτή Duffing 349

6.1.1 Εφαρμογές του ταλαντωτή Duffing σε συστήματα MEMS 349

6.2 Εφαρμογές του ταλαντωτή van der Pol 353

6.2.1 Ο βηματοδότης van der Pol και ο συγχρονισμός με το φως 353

Παράρτημα Α. Γραμμικές Ταλαντώσεις 357

Α.1 Απλή αρμονική ταλάντωση 358

Α.2 Αρμονική ταλάντωση με απόσβεση 359

Α.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση 362

Α.4 Εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη ταλάντωση 366

Παράρτημα Β. Κώδικες Mathematica 370

Β.1 Μέθοδος κανονικών διαταραχών 370

Β.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων 371

Β.3 Μέθοδος Poincaré–Lindstedt 374

Βιβλιογραφία 377

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η **θεωρία των διαταραχών** είναι ένα σημαντικό εργαλείο για τους φυσικούς, μηχανικούς και μαθηματικούς, για την οποία όμως οι απόψεις διίστανται. Οι περισσότεροι την εφαρμόζουν με επιτυχία, αλλά υπάρχουν κι εκείνοι που αρνούνται να τη χρησιμοποιήσουν λόγω της υποτιθέμενης έλλειψης μαθηματικής αυστηρότητας. Αρκεί όμως να θυμηθεί κανείς ότι τον ορισμό των ασυμπτωτικών σειρών τον έδωσε ο *Henri Poincaré*, για να συνειδητοποιήσει ότι ο διαχωρισμός των μεθόδων διαταραχών από άλλες προσεγγίσεις (όπως η γεωμετρική ανάλυση των τροχιών των λύσεων), αποτελεί προδοσία της αληθινής φύσης του αντικειμένου.

Για να κατανοηθεί καλύτερα η εξέλιξη και η σημασία της θεωρίας διαταραχών, αξίζει να εξετάσουμε πώς αναπτύχθηκε ιστορικά, ξεκινώντας από τις πρώτες εφαρμογές της στην ουράνια μηχανική και φτάνοντας μέχρι τις σύγχρονες αναλύσεις της δυναμικής.

1.1 Ιστορική αναδρομή στη θεωρία διαταραχών

Η **θεωρία διαταραχών** έχει τις ρίζες της στον *Νεύτωνα***,** ο οποίος έδειξε ότι το πρόβλημα των δύο σωμάτων είναι ολοκληρώσιμο, οδηγώντας στις ελλειπτικές τροχιές του *Kepler*, ενώ παρατήρησε ότι η παρουσία ενός τρίτου σώματος, όπως η Σελήνη, προκαλεί αποκλίσεις από αυτές τις τροχιές. Σύμφωνα με τη Νευτώνεια μηχανική, η Γη θα περιστρεφόταν γύρω από τον Ήλιο σε τέλεια έλλειψη αν δεν υπήρχαν η Σελήνη και οι υπόλοιποι πλανήτες· η παρουσία τους προκαλεί μικρές διαταραχές, με τη Γη να «τρεμοπαίζει» ελαφρώς κατά την περιφορά της. Παρόμοια, η τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη διαταράσσεται από την παρουσία του Ήλιου, ενώ και άλλοι πλανήτες επηρεάζουν ελάχιστα την κίνηση της Γης.

Ο *Laplace* υπολόγισε αυτές τις διαταραχές χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους και διαπίστωσε ότι είναι περιοδικές, καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι το ηλιακό σύστημα είναι «σταθερό» κατά την έννοια του *Laplace*. Οι υπολογισμοί του ήταν επίπονοι και μπορούν σήμερα να απλοποιηθούν μέσω της Χαμιλτονιανής μηχανικής. Παράλληλα, δεν απέδειξε πλήρως τη σταθερότητα του ηλιακού συστήματος, καθώς η μέθοδός του σε υψηλότερες τάξεις δε συγκλίνει πάντα, αλλά αποτέλεσε σημαντική βάση για τη σύγχρονη θεωρία διαταραχών.

Τον *18ο* αιώνα, οι *Euler*, *Lagrange* και *Laplace* μελέτησαν το γενικό πρόβλημα πολλών σωμάτων στο ηλιακό σύστημα. Ο *Lagrange* εισήγαγε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, μετατρέποντας τις σταθερές του προβλήματος του *Kepler* σε χρονικά μεταβαλλόμενες ποσότητες και οδηγώντας στις πλανητικές εξισώσεις του. Η ουράνια μηχανική υπήρξε καθοριστικός μοχλός για την πρόοδο

της θεωρίας διαταραχών, όπως αποδεικνύεται και από την πρόβλεψη της θέσης του Ποσειδώνα από τους *John Adams* και *Jean Urbain Leverrier*, με βάση διαταρακτικούς υπολογισμούς, και την τελική ανακάλυψή του στις *23 Σεπτεμβρίου 1846* από τον αστρονόμο *Johann Gottfried Galle*.

Ο *Laplace* και ο *Poisson* ανέπτυξαν περαιτέρω την ανάλυση με σειρές, εισάγοντας αιώνιους, περιοδικούς και όρους *Poisson* για την περιγραφή της εξέλιξης των τροχιών. Επιπλέον, ο *Laplace* μελέτησε τη σταθερότητα του ηλιακού συστήματος και επανέφερε στο προσκήνιο το διάνυσμα *Laplace–Runge–Lenz*, που είχε εντοπιστεί αρχικά από τον *Hermann* το *1710*.

Κατά τον *19ο* και *20ό* αιώνα, η θεωρία διαταραχών εμπλουτίστηκε με νέες μεθόδους για το πρόβλημα των *n* σωμάτων και τη σταθερότητα των πλανητικών συστημάτων, με αποκορύφωμα τη θεωρία *Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM)* που προσέφερε σημαντική κατανόηση για τους μικρούς διαιρετές και τα χαοτικά φαινόμενα.

Έτσι, από τα πρώτα βήματα του *Νεύτωνα* μέχρι τις σύγχρονες αναλύσεις της δυναμικής, η θεωρία διαταραχών αποτέλεσε θεμέλιο λίθο για την κατανόηση της κίνησης στον φυσικό κόσμο.

1.2 Η θεωρία διαταραχών για τις διαφορικές εξισώσεις

Τα περισσότερα φυσικά φαινόμενα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες είναι κατά κανόνα μη γραμμικές. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτές μπορούν να θεωρηθούν ως συνδυασμός ενός κυρίαρχου γραμμικού μέρους και ενός μικρότερου μη γραμμικού μέρους. Τα μη γραμμικά αυτά στοιχεία, που συνήθως θεωρούνται μικρές διορθώσεις στη βασική δυναμική, αναφέρονται ως **διαταραχές**. Έτσι, ενώ τα γραμμικά συστήματα έχουν ακριβή λύση, τα μη γραμμικά δεν μπορούν κατά κύριο λόγο να επιλυθούν με ακρίβεια, οπότε αναγκαζόμαστε να καταφύγουμε σε κάποια μορφή προσέγγισης, σε αριθμητική λύση (που υλοποιείται σε ψηφιακούς υπολογιστές), ή σε έναν συνδυασμό και των δύο.

Πρωταρχικό ρόλο ανάμεσα στις προσεγγιστικές μεθόδους αποτελεί η θεωρία των διαταραχών. Βέβαια, από τη στιγμή που οι **μέθοδοι διαταραχών** παράγουν μόνο προσεγγιστικές λύσεις, μπορεί να τεθεί το ερώτημα γιατί να μην χρησιμοποιούμε μόνο αριθμητικές μεθόδους. Μία απάντηση είναι ότι οι μέθοδοι διαταραχών παρέχουν αναλυτικές προσεγγίσεις, οι οποίες συχνά αποκαλύπτουν την ουσιαστική εξάρτηση της ακριβούς λύσης από τις παραμέτρους με πιο ικανοποιητικό τρόπο από ό,τι μία αριθμητική λύση.

Μία δεύτερη απάντηση είναι ότι ορισμένα προβλήματα που δύσκολα επιλύονται αριθμητικά, ενδέχεται να υποχωρήσουν σε μεθόδους διαταραχών. Αυτός είναι ο λόγος που στην

πραγματικότητα, οι αριθμητικές και οι διαταρακτικές μέθοδοι θα πρέπει να συνδυάζονται με συμπληρωματικό τρόπο.

Η **θεωρία διαταραχών**, λοιπόν, είναι η συλλογή μεθόδων που χρησιμοποιούνται για να βρεθεί προσεγγιστική λύση σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, που η ακριβής λύση δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή.

Σύμφωνα με αυτές τις μεθόδους, οι μη γραμμικοί όροι θεωρούνται ως μικρή διαταραχή της αντίστοιχης γραμμικής απλούστερης περίπτωσης, αφού η διαταραχή εξαρτάται από μια μικρή παράμετρο, που συνήθως συμβολίζεται με ε.

Με την προϋπόθεση ότι η λύση του αδιατάρακτου προβλήματος ($\varepsilon = 0$) είναι γνωστή, επιχειρείται να εκτιμηθεί ποσοτικά η λύση του προβλήματος μετά την προσθήκη της διαταραχής, με μια σειρά όρων αυξανόμενης τάξης του ε.

Η θεωρία διαταραχών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν τα πρώτα βήματα αποκαλύπτουν τα ουσιώδη χαρακτηριστικά της λύσης και οι επόμενοι όροι προσφέρουν μικρές διορθώσεις.

1.2.1 Σύγκριση με αριθμητικές μεθόδους

Οι **αριθμητικές μέθοδοι**, όπως οι μέθοδοι *Runge–Kutta*, ή *Euler*, παρέχουν λύσεις ακόμα και σε προβλήματα που δεν προσεγγίζονται εύκολα μέσω απλών αναλυτικών μεθόδων. Ωστόσο, τα αποτελέσματά τους συνήθως περιορίζονται σε πίνακες αριθμών ή γραφήματα, χωρίς να αποκαλύπτονται σαφώς οι σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων και της λύσης. Αντίθετα, οι **μέθοδοι διαταραχών** παρέχουν αναλυτικές εκφράσεις που δείχνουν πώς κάθε παράμετρος επηρεάζει τη δυναμική του συστήματος. Για τον λόγο αυτό, οι δύο προσεγγίσεις χρησιμοποιούνται συχνά συμπληρωματικά: οι αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να επαληθεύσουν ή να βελτιώσουν τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις διαταρακτικές αναλύσεις, ειδικά όταν η εκτίμηση του σφάλματος δεν είναι άμεσα διαθέσιμη.

1.2.2 Περιορισμοί της ποιοτικής ανάλυσης

Στη μελέτη μη γραμμικών συστημάτων, η **ποιοτική ανάλυση** μέσω πορτραίτων φάσης αποτελεί σημαντικό εργαλείο. Ωστόσο, η χρησιμότητά της είναι περιορισμένη. Για τα **αυτόνομα συστήματα**, οι τροχιές στο χώρο φάσης είναι μοναδικές και δίνουν μια καθαρή εικόνα της δυναμικής. Αντίθετα, στα **μη αυτόνομα συστήματα**, όπου ο χρόνος εμφανίζεται ρητά στις εξισώσεις, το ίδιο σημείο του χώρου φάσης αντιστοιχεί σε άπειρες δυνατές τροχιές, ανάλογα με την

αρχική χρονική στιγμή. Έτσι, το πορτραίτο φάσης παύει να αποτελεί ένα απλό και διαισθητικό εργαλείο απεικόνισης της συμπεριφοράς του συστήματος, και η ανάγκη για πιο ισχυρές μεθόδους – όπως η θεωρία διαταραχών – γίνεται εμφανής.

1.3 Στοιχεία ασυμπτωτικής ανάλυσης

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση προσεγγιστικών λύσεων, είναι σκόπιμο να εισαγάγουμε ορισμένους βασικούς συμβολισμούς και έννοιες, που επιτρέπουν τη σύγκριση δύο συναρτήσεων όταν μια κοινή ανεξάρτητη μεταβλητή τείνει σε μια συγκεκριμένη τιμή. Οι συγκρίσεις αυτές ονομάζονται **«σχέσεις τάξης μεγέθους»** και αποτελούν θεμελιώδες εργαλείο στην ασυμπτωτική ανάλυση. Με τη βοήθειά τους μπορούμε να εκφράσουμε με συνοπτικό και ακριβή τρόπο τον ρυθμό με τον οποίο μία συνάρτηση προσεγγίζει ένα όριο, ή την κυριαρχία ενός όρου σε σχέση με άλλους, στοιχείο κρίσιμο για την κατανόηση και την εφαρμογή των μεθόδων διαταραχών.

1.3.1 Σύμβολα τάξης και συναρτήσεις μέτρου

Τα σύμβολα τάξης ***O*** και ***o*** είναι μέλη μιας μεγαλύτερης οικογένειας συμβολισμών που καλούνται **συμβολισμοί Landau.**

Ορισμοί 1-Συμβολισμοί Landau

Έστω $f(\varepsilon)$ και $g(\varepsilon)$ συναρτήσεις ορισμένες σε μια περιοχή του $\varepsilon=0$ (η οποία μπορεί να μην περιέχει το *0*).

Γράφουμε τότε

(i) $f(\varepsilon)=o(g(\varepsilon))$ καθώς $\varepsilon\to 0$**,** αν $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left|\dfrac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|=0$

(ii) $f(\varepsilon)=O(g(\varepsilon))$ καθώς $\varepsilon\to 0$, αν υπάρχει θετική σταθερά $M>0$ τέτοια ώστε

$$|f(\varepsilon)|\le M|g(\varepsilon)| \quad \text{για όλα τα } \varepsilon, \text{ σε μια περιοχή του } 0.$$

Η συνάρτηση g λέγεται **συνάρτηση μέτρου**, ή **εκτίμησης** ή **σύγκρισης (gauge function).**

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Με κατάλληλο ορισμό του πεδίου ορισμού των f, g, το $\varepsilon\to 0$ μπορεί να αντικατασταθεί από ένα μονόπλευρο όριο ή από το $\varepsilon\to\varepsilon_0$, όπου ε_0 είναι ένας πεπερασμένος αριθμός ή το άπειρο.
2. Αν $f=o(1)$, τότε $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon)=0$.

Αν $f=O(1)$, τότε η f είναι φραγμένη στη γειτονιά του $\varepsilon=0$**.**

3. Αν $f=o(g)$, τότε η f τείνει στο *0* γρηγορότερα από την g**,** καθώς το ε τείνει στο *0***.**

4. Μια συνηθισμένη συνάρτηση μέτρου είναι η $g(\varepsilon)=\varepsilon^n$, που είναι και η απλούστερη, αλλά σε πιο σύνθετα προβλήματα χρησιμοποιούνται και πιο σύνθετες συναρτήσεις**.**

Οι ***Ορισμοί 1*** μπορούν να επεκταθούν και σε συναρτήσεις των ε, $t\in I$**,** αλλά πριν προχωρήσουμε σε αυτό θα δώσουμε τον ορισμό της **ομοιόμορφης** σύγκλισης.

Ορισμός 2-Ομοιόμορφη σύγκλιση

Έστω $h(t,\varepsilon)$, ορισμένη για $t\in I$ (διάστημα) και για ε σε μια περιοχή του $\varepsilon=0$.
Ισχύει ότι το όριο :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(t,\varepsilon)=0, \text{ **ομοιόμορφα** στο } I,$$

όταν η σύγκλιση προς το *0* γίνεται με τον ίδιο ρυθμό για κάθε $t\in I$, δηλαδή:
για κάθε $\eta>0$ υπάρχει $\varepsilon_0>0$, ανεξάρτητο του t, τέτοιο ώστε :

$$\text{όταν } |\varepsilon|<\varepsilon_0, \text{ να ισχύει } |h(t,\varepsilon)|<\eta|, \text{ για κάθε } t\in I.$$

Δηλαδή, με άλλα λόγια, η σύγκλιση είναι **ομοιόμορφη**, όταν η $h(t,\varepsilon)$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε, πάνω σε όλο το διάστημα I, με κατάλληλη επιλογή του ε.

<u>Σημείωση:</u> Αν απλώς ισχύει $\lim_{\varepsilon\to 0} h(t,\varepsilon)=0$ για κάθε σταθερό $t_0\in I$, τότε λέμε ότι η σύγκλιση είναι **σημειακή ή κατά σημείο** στο ***I***.

Ορισμός 3-Επέκταση συμβολισμών Landau

Έστω οι συναρτήσεις $f(t,\varepsilon)$ και $g(t,\varepsilon)$ ορισμένες για κάθε $t\in I$, και για τα ε που βρίσκονται σε μια περιοχή του $\varepsilon=0$.

Γράφουμε τότε

(i) $f(t,\varepsilon)=o(g(t,\varepsilon))$, καθώς $\varepsilon\to 0$ αν

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(t,\varepsilon)}{g(t,\varepsilon)}\right|=0 \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα στο } I.$$

(ii) $f(t,\varepsilon)=O(g(t,\varepsilon))$, καθώς $\varepsilon\to 0$ ομοιόμορφα στο I**,**
αν υπάρχει μια φραγμένη συνάρτηση $M(t)>0$ στο I, τέτοια ώστε

$$|f(t,\varepsilon)|\le M(t)\ |g(t,\varepsilon)|$$

για όλα τα $t\in I$**,** και ε που ανήκουν σε μια περιοχή του $\varepsilon=0$.

Ο ***ορισμός 3*** είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την εκτίμηση του σφάλματος στις προσεγγιστικές λύσεις.

Ορισμός 4-Ασυμπτωτική προσέγγιση

Μια συνάρτηση $y_\alpha(t,\varepsilon)$ είναι ομοιόμορφα **ασυμπτωτική προσέγγιση** μιας συνάρτησης $y(t,\varepsilon)$ σε ένα διάστημα I, καθώς το $\varepsilon \to 0$, αν το σφάλμα

$$E(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)-y_\alpha(t,\varepsilon)$$

συγκλίνει στο *0*, καθώς $\varepsilon \to 0$**, ομοιόμορφα** για $t \in I$**.**

Ορισμός 5-Ασυμπτωτική ακολουθία

Μια ακολουθία συναρτήσεων $\{g_n(t,\varepsilon)\}$(gauge συναρτήσεις), είναι **ασυμπτωτική ακολουθία**, καθώς $\varepsilon \to 0$, με $t \in I$, αν

$$g_{n+1}(t,\varepsilon)=o(g_n(t,\varepsilon)),\ \text{με } \varepsilon \to 0 \text{ και } n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή, κάθε όρος συγκλίνει στο *0* γρηγορότερα από τον προηγούμενο.

Ορισμός 6-Ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

Για δεδομένη συνάρτηση $y(t,\varepsilon)$, και δεδομένη ασυμπτωτική ακολουθία $\{g_n(t,\varepsilon)\}$, καθώς $\varepsilon \to 0$, η (όχι αναγκαστικά συγκλίνουσα σειρά) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n g_n(t,\varepsilon)$, με α_n σταθερές, λέγεται **ασυμπτωτικό ανάπτυγμα** της $y(t,\varepsilon)$, καθώς $\varepsilon \to 0$, αν

$$y(t,\varepsilon)-\sum_{n=0}^{N} \alpha_n g_n(t,\varepsilon)=o(g_N(t,\varepsilon)),\ \text{καθώς } \varepsilon \to 0, \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N}$$

Αν μια συνάρτηση διαθέτει μια ασυμπτωτική προσέγγιση ως προς μια ασυμπτωτική ακολουθία, δηλαδή ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, τότε αυτή είναι μοναδική για τη δεδομένη ασυμπτωτική ακολουθία. Επιπλέον, με ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, το σφάλμα της προσέγγισης μπορεί να γίνει κατανοητό, και κυρίως να ελεγχθεί.

Σημείωση: Αν $g_n(t,\varepsilon)=\varepsilon^n$ τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται **ασυμπτωτική δυναμοσειρά**. Κάθε σειρά Taylor ως προς το ε, γύρω από το σημείο $\varepsilon=0$, είναι επίσης μια ασυμπτωτική δυναμοσειρά.

1.4 Παράμετροι διαταραχών-Διαταραχές παραμέτρου

Τα μαθηματικά μοντέλα φυσικών φαινομένων περιλαμβάνουν συνήθως αρκετές μεταβλητές, οι οποίες χωρίζονται σε **συντεταγμένες** χώρου και χρόνου καθώς και σε **παραμέτρους**.

Για παράδειγμα, ένα σύστημα ελατηρίου–μάζας με κυβική μη γραμμικότητα, περιλαμβάνει συντεταγμένες για τη θέση και τον χρόνο, καθώς και παραμέτρους για τη μάζα και για τους συντελεστές του γραμμικού και του κυβικού όρου στη δύναμη επαναφοράς.

Το πρώτο βήμα για την προετοιμασία ενός τέτοιου συστήματος προς εφαρμογή μεθόδων διαταραχών είναι η **κανονικοποίηση**, δηλαδή η αδιαστατοποίηση των μεταβλητών. Το δεύτερο βήμα είναι η αναζήτηση ειδικών περιπτώσεων που επιλύονται ακριβώς και μπορούν να χρησιμεύσουν ως αφετηρία για την προσέγγιση λύσεων σε «γειτονικές» περιπτώσεις. Συνήθως, αυτές οι επιλύσιμες μορφές προκύπτουν αν ορισμένες παράμετροι τεθούν ίσες με μηδέν.
Για παράδειγμα, ο εξαναγκασμένος και αποσβεννύμενος μη γραμμικός ταλαντωτής

$$\ddot{x}+C\dot{x}+k^2x+Ax^3=B\cos(\omega t)$$

είναι εύκολα επιλύσιμος αν $A=B=C=0$**,** ενώ παραμένει επιλύσιμος -αν και πιο δύσκολα- όταν $A=0$, και όταν $B=C=0$ λύνεται με ελλειπτικές συναρτήσεις.

Στο πλαίσιο αυτό, η θεωρία διαταραχών εφαρμόζεται όταν οι παράμετροι A,B,C είναι μικρές. Αν επιλέξουμε αυτή την περίπτωση, ιδανικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε τις τρεις παραμέτρους ως ανεξάρτητες μικρές ποσότητες. Ωστόσο, οι περισσότερες κλασικές μέθοδοι διαταραχών εφαρμόζονται σε προβλήματα με μία μόνο μικρή παράμετρο.
Για να μειώσουμε, λοιπόν, το πρόβλημα σε μία παράμετρο, θέτουμε:

$$A=\alpha\varepsilon,\ \ B=b\varepsilon,\ \ C=c\varepsilon$$

και το σύστημα γίνεται

$$\ddot{x}+\varepsilon c\dot{x}+k^2x+\varepsilon\alpha x^3=\varepsilon b\cos(\omega t)$$

όπου α,b,c θεωρούνται σταθερές και ε είναι μια μικρή μεταβλητή παράμετρος.

Είναι φανερό ότι και άλλοι συνδυασμοί παραμέτρων μπορούν να επιλεγούν, κάτι που θα εξεταστεί εκτενέστερα στα επόμενα κεφάλαια.

Όταν η προσέγγιση βασίζεται στην εισαγωγή μιας μικρής παραμέτρου ε στους όρους του συστήματος, λέμε ότι εφαρμόζουμε **διαταραχές παραμέτρου**.

1.5 Διαταραχές συντεταγμένων

Υπάρχουν και προβλήματα χωρίς παράμετρο διαταραχής, τα οποία μπορούν παρόλα αυτά να αντιμετωπιστούν με μεθόδους διαταραχών. Για παράδειγμα, ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων μπορεί να έχει μια ακριβή λύση (ισορροπία ή περιοδική τροχιά), και μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις λύσεις που βρίσκονται κοντά σε αυτήν. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται οι λεγόμενες **διαταραχές συντεταγμένων**, όπου μικρές (διαταραγμένες) θεωρούνται οι ίδιες οι αποκλίσεις των λύσεων από τη γνωστή λύση, αντί για κάποια εξωτερική παράμετρο.

1.6 Σειρές διαταραχών-Βασική μεθοδολογία

Έχοντας τα απαραίτητα εργαλεία από τις προηγούμενες ενότητες, μπορούμε πλέον να αναλύσουμε την **θεμελιώδη τεχνική της θεωρίας διαταραχών**, όταν αυτή εφαρμόζεται σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα διαταραχών που μοντελοποιείται από τη διαφορική εξίσωση

$$F(t,x,\dot{x},\ddot{x},\varepsilon)=0, \quad t\in I$$

με κάποιες αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, και ότι η ακριβής λύση (την οποία θέλουμε να προσεγγίσουμε) συμβολίζεται με $x(t,\varepsilon)$. Εδώ, ε $(0<\varepsilon\ll 1)$ είναι η παράμετρος διαταραχής, t είναι ο χρόνος σε ένα διάστημα I, και x είναι η συνάρτηση που αναζητούμε.

(Η τάξη της διαφορικής εξίσωσης μπορεί, γενικά, να διαφέρει (να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη), ανάλογα με το υπό εξέταση πρόβλημα).

Αν το **αδιατάρακτο πρόβλημα**

$$F(t,x,\dot{x},\ddot{x},0)=0$$

είναι επιλύσιμο, θεωρούμε ότι η λύση για το διαταραγμένο έχει την απλούστερη μορφή, με την οποία μπορεί να αναζητηθεί μία προσεγγιστική λύση:

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots+\varepsilon^k x_k(t)+\ldots \qquad (1.6.1)$$

Οι συναρτήσεις μέτρου εδώ είναι οι ε^i, οι οποίες είναι οι πιο εύχρηστες. Αν αυτές επαρκούν, τότε η σειρά που προκύπτει για τη λύση x, η οποία ονομάζεται **σειρά διαταραχών**, είναι μοναδική.

Ο όρος $x_0(t)$ λέγεται **πρωτεύων** ή **κυρίαρχος όρος** και ταυτίζεται με τη λύση του **αδιατάρακτου** προβλήματος, ενώ οι επόμενοι $\varepsilon x_1(t)$, $\varepsilon^2 x_2(t)$, ... ονομάζονται **διορθωτικοί όροι** (πρώτος διορθωτικός, δεύτερος διορθωτικός κ.ο.κ.), επειδή εκφράζουν τις διαδοχικές διορθώσεις που επιφέρει η παρουσία της διαταραχής στη βασική (γραμμική ή απλούστερη) λύση.

Με άλλα λόγια, κάθε διορθωτικός όρος λαμβάνει υπόψη του την επίδραση της μικρής παραμέτρου ε σε υψηλότερη τάξη, βελτιώνοντας προοδευτικά την προσέγγιση της πραγματικής λύσης.

Η προσεγγιστική λύση *(1.6.1)* λέγεται **λύση διαταραχής,** και ειδικά, αν κρατήσουμε μόνο τον πρώτο διορθωτικό όρο, ονομάζεται **πρώτης τάξης ανάπτυγμα**, το δεύτερο διορθωτικό, **δεύτερης τάξης ανάπτυγμα**, κ.ο.κ.

Αντικαθιστούμε την *(1.6.1)* στην διαφορική εξίσωση και στις αρχικές / συνοριακές συνθήκες, και αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του ε. Στο ανάπτυγμα που προκύπτει, όσο μικρότερης τάξης του ε είναι

ένας όρος, τόσο μεγαλύτερη «βαρύτητα» έχει η συμμετοχή του στη λύση (αφού $\varepsilon \ll 1$), επομένως μετά τον υπολογισμό κάποιων αρχικών όρων, οι υπόλοιποι μπορούν να παραλειφθούν, χωρίς σημαντική απώλεια ακρίβειας. Συνήθως αρκούν οι δύο ή τρεις πρώτοι όροι, για να δώσουν μια καλή εικόνα της λύσης.

Έτσι, το ανάπτυγμα της εξίσωσης παίρνει τη μορφή ενός πολυωνύμου ως προς ε. Για να ισχύει η ταυτότητα αυτή για κάθε αρκετά μικρή τιμή του ε, πρέπει οι συντελεστές κάθε δύναμης του ε να μηδενίζονται ανεξάρτητα. Το γεγονός αυτό συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας διαταραχών

Αν

$$A_0 + A_1\varepsilon + \ldots A_N\varepsilon^N + O\left(\varepsilon^{N+1}\right) \equiv 0$$

για ε ικανοποιητικά μικρό και αν οι συντελεστές $A_0, A_1, \ldots$ είναι ανεξάρτητοι του ε, τότε

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_N = 0$$

Το θεώρημα αυτό λέει με απλά λόγια πως η ακολουθία $\{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία, άρα όλοι οι συντελεστές των ε^i πρέπει να είναι ίσοι με το *0*.

Η συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η αρχική μη γραμμική διαφορική εξίσωση διασπάται σε μια ιεραρχία εξισώσεων κατά τάξη ως προς την παράμετρο ε.

Με τη μέθοδο αυτή, λοιπόν, δημιουργείται μια ακολουθία προβλημάτων αρχικών ή συνοριακών τιμών, των οποίων η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική. Για τον **πρωτεύοντα όρο** είναι ομογενής, ενώ για τους **διορθωτικούς όρους** είναι μη ομογενής.

Παρατηρούμε ότι η θεωρία διαταραχών έχει αντικαταστήσει τη δυσεπίλυτη διαφορική εξίσωση με μία ακολουθία μη ομογενών εξισώσεων. Γενικά, οποιαδήποτε μη ομογενής εξίσωση μπορεί να λυθεί τυπικά με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, εφόσον είναι γνωστή η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Εδώ, η ομογενής εξίσωση είναι ακριβώς η αδιατάρακτη εξίσωση. Έτσι, γίνεται σαφές γιατί είναι τόσο κρίσιμο η **αδιατάρακτη εξίσωση** να είναι **επιλύσιμη**.

Η εφαρμογή των **τεχνικών διαταραχών** μπορεί να συνοψιστεί λοιπόν, σε τρία βασικά βήματα:

1) Μετατροπή της αρχικής μη γραμμικής εξίσωσης σε πρόβλημα διαταραχών με την εισαγωγή της μικρής παραμέτρου ε.

2) Υπόθεση μιας μορφής για τη λύση υπό τη μορφή σειράς διαταραχών και υπολογισμός των συντελεστών της σειράς.

3) Ανακατασκευή της λύσης της αρχικής εξίσωσης μέσω της άθροισης της σειράς διαταραχών για την κατάλληλη τιμή του ε.

Υπάρχουν ωστόσο ορισμένοι περιορισμοί και σημαντικές παρατηρήσεις:

- Αν το αρχικό πρόβλημα περιέχει ήδη έναν συντελεστή διαταραχής στους μη γραμμικούς όρους, προχωρούμε απευθείας στο δεύτερο βήμα. Ωστόσο, δεν περιέχουν όλες οι μη γραμμικές εξισώσεις έναν τέτοιο συντελεστή. Σε αυτές τις περιπτώσεις εισάγουμε τεχνητά την παράμετρο ε, την οποία στο τέλος θέτουμε ίση με *1* (*Lyapunov, 1892*). Η μέθοδος αυτή μπορεί να είναι η μοναδική για την εύρεση προσεγγιστικής λύσης, αν και συχνά είναι ασαφής, καθώς υπάρχουν πολλοί τρόποι εισαγωγής της παραμέτρου. Συνήθως, επιλέγουμε την εισαγωγή ώστε η λύση μηδενικής τάξης ($\varepsilon=0$) να αντιστοιχεί σε μια γραμμική εξίσωση με γνωστή, αναλυτική λύση. Η τελική λύση της αρχικής μη γραμμικής εξίσωσης εκφράζεται έτσι ως μια ελαφρώς τροποποιημένη μορφή αυτής της βασικής λύσης.
- Η σειρά διαταραχών μπορεί να είναι συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα. Ακόμα και όταν είναι αποκλίνουσα, θέλουμε να είναι ασυμπτωτική, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα. Ακόμα και για **μη μικρές** τιμές του ε, μπορεί να προκύψουν χρήσιμες προσεγγίσεις από αργά συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες σειρές.
- Ο αριθμός των όρων που απαιτούνται για την καλύτερη δυνατή προσέγγιση είναι θεωρητικά «όσοι περισσότεροι γίνεται». Ωστόσο, λόγω της ταχύτατης αύξησης της πολυπλοκότητας των υπολογισμών, στην πράξη συνήθως σταματάμε στον όρο του ε^2. Αυτό είναι ένας πρακτικός κανόνας, αν και σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να μην αρκεί.
- Υπάρχουν προβλήματα, που η σειρά *(1.6.1)* είναι ανεπαρκής, δηλαδή η λύση δεν είναι αναλυτική στο $\varepsilon=0$, οπότε απαιτείται η αναζήτηση προσεγγιστικής λύσης στη γενικότερη μορφή **σειράς Poincaré** (σε μια σειρά *Poincaré* οι συναρτήσεις x_i είναι ανεξάρτητες του ε):

$$x(t,\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0(t)+\delta_1(\varepsilon)x_1(t)+\delta_2(\varepsilon)x_2(t)+\ldots+\delta_k(\varepsilon)x_k(t)+\ldots \qquad (1.6.2)$$

  όπου οι $\delta_i(\varepsilon)$ είναι, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, οι συναρτήσεις μέτρου (gauges).

  Στη συνέχεια προσδιορίζονται οι $\{\delta_i(\varepsilon)\}$ που συχνά έχουν τη μορφή $\{\varepsilon^n \log^m(\varepsilon)\}$.

  Όροι με $m\neq 0$ ονομάζονται **όροι επανόδου (switchback terms)**.
- Τέλος, υπάρχουν προβλήματα που ούτε η σειρά *Poincaré* είναι επαρκής και απαιτείται μια **γενικευμένη σειρά**:

$$x(t,\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0(t,\varepsilon)+\delta_1(\varepsilon)x_1(t,\varepsilon)+\delta_2(\varepsilon)x_2(t,\varepsilon)+\ldots+\delta_k(\varepsilon)x_k(t,\varepsilon)+\ldots \qquad (1.6.3)$$

Με μια τέτοια σειρά, ίσως φαίνεται ότι θα μπορούσαμε να παραλείψουμε τις συναρτήσεις μέτρου, ή καλύτερα να τις απορροφήσουμε στα x_i, αφού αυτά τώρα επιτρέπεται να εξαρτώνται από το ε. Ωστόσο, η πρόθεση είναι η εξάρτηση του x_i από το ε να μην επηρεάζει την *τάξη μεγέθους* του.

- Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα γενικευμένης σειράς δύο όρων είναι το εξής:

$$x(t,\varepsilon)\approx\sin((1+\varepsilon)t)+\varepsilon\cos((1+\varepsilon)t)$$

Η εξάρτηση των συντελεστών $\sin((1+\varepsilon)t)$ *και* $\cos((1+\varepsilon)t)$ από το ε τροποποιεί την περίοδό τους αλλά όχι το πλάτος τους, και ο δεύτερος όρος εξακολουθεί να έχει τάξη μεγέθους της συνάρτησης μέτρου του, δηλαδή ε.

1.7 Ομοιομορφία

Η γενικευμένη σειρά *(1.6.3)* που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορεί να γραφεί ως

$$x(t,\varepsilon)=\delta_0(\varepsilon)x_0(t,\varepsilon)+\delta_1(\varepsilon)x_1(t,\varepsilon)+\delta_2(\varepsilon)x_2(t,\varepsilon)+\ldots+\delta_k(\varepsilon)x_k(t,\varepsilon)+R(t,\varepsilon)$$

ή

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\delta_k(\varepsilon)x_k(t,\varepsilon)+R_N(t,\varepsilon),\quad t\in I$$

Το μέγεθος $R_N(t,\varepsilon)$ λέγεται **υπόλοιπο** ή **σφάλμα υπολοίπου** και είναι ομοιόμορφα τάξης δ^{k+1} αν υπάρχει σταθερά c**,** ώστε να ισχύει

$$|R_N(t,\varepsilon)|\le c\,\delta_{k+1}(\varepsilon)$$

Τότε λέμε πως $|R_N(t,\varepsilon)|=O(\delta_{k+1}(\varepsilon))$ **ομοιόμορφα** ως προς το t για κάθε $t\in I$**.**

Αν κάθε μερικό άθροισμα μιας σειράς διαταραχών έχει υπόλοιπο που είναι ομοιόμορφα τάξης ίσης με τον πρώτο gauge όρο που παραλείπεται, τότε λέμε ότι η σειρά είναι ομοιόμορφα έγκυρη.

Αν

$$|R_N(t,\varepsilon)|\le c(t)\,\delta_{k+1}(\varepsilon)$$

δηλαδή η c αλλάζει όταν αλλάζει ο χρόνος, λέμε ότι το σφάλμα είναι κατά σημείο τάξης δ^{k+1}**,** άρα η σειρά είναι **κατά σημείο έγκυρη**.

Με άλλα λόγια, λέμε ότι η ανάπτυξη παύει να ισχύει αν υπάρχει κάποια τιμή του $t \in I$, για την οποία δύο διαδοχικοί όροι στην ασυμπτωτική ανάπτυξη έχουν το ίδιο μέγεθος. Από την άλλη πλευρά, η ανάπτυξη είναι ομοιόμορφα έγκυρη αν η ασυμπτωτική διάταξη των όρων, όπως αυτή εκφράζεται από την ασυμπτωτική ακολουθία, διατηρείται για όλα τα $t \in I$. Προφανώς, η ομοιόμορφη ασυμπτωτική εγκυρότητα είναι ισχυρότερη από την κατά σημείο εγκυρότητα, και αυτός είναι ο λόγος που οι μέθοδοι διαταραχών τροποποιούνται ώστε να προσεγγίζουν τη λύση με ομοιόμορφα έγκυρες σειρές.

Μια απλή **αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη** για να είναι μια σειρά ομοιόμορφα έγκυρη, είναι κάθε συντελεστής $x_k(t,\varepsilon), k \geq 1$ να είναι φραγμένος για κάθε $t \in I$.

Τότε λέμε ότι η σειρά *(1.6.3)* είναι **ομοιόμορφα διατεταγμένη**.

Μια ομοιόμορφα διατεταγμένη σειρά είναι εκείνη στην οποία κάθε όρος μετά τον πρώτο δεν είναι μεγαλύτερης τάξης από αυτήν που υποδεικνύει ο δείκτης του. Είναι εύκολο να εξετάσει κανείς μια σειρά διαταραχών, μόλις αυτή κατασκευαστεί, και να καθορίσει αν είναι ομοιόμορφα διατεταγμένη. Αν όχι, η σειρά λέγεται **αταξινόμητη (disordered)** και δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα έγκυρη. Από την άλλη, αν είναι ομοιόμορφα διατεταγμένη, δεν συνεπάγεται αυτόματα ότι είναι και ομοιόμορφα έγκυρη, διότι δεν έχει γίνει καμία εκτίμηση του σφάλματος.

Οι **σειρές Poincaré**, όταν το διάστημα I είναι κλειστό και οι $x_k(t,\varepsilon)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, είναι **ομοιόμορφα διατεταγμένες**.

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Αν το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα είναι συγκλίνουσα σειρά, τότε το σφάλμα
$$R_N(t,\varepsilon) \to 0, \text{ καθώς το } N \to \infty$$
- Δεν είναι ασυνήθιστο να περιμένει κανείς ότι, για να βελτιωθεί η ακρίβεια μιας ασυμπτωτικής ανάπτυξης, αρκεί απλώς να συμπεριλάβει περισσότερους όρους. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει απαραίτητα. Ο λόγος είναι ότι μια ασυμπτωτική ανάπτυξη λέει κάτι μόνο για τη συμπεριφορά της σειράς στο όριο $\varepsilon \to 0$, ενώ η αύξηση του αριθμού των όρων αναφέρεται στη συμπεριφορά της σειράς καθώς $N \to \infty$. Στην πραγματικότητα, μια ασυμπτωτική ανάπτυξη μπορεί να μην συγκλίνει καθόλου! Επιπλέον, ακόμη κι αν συγκλίνει, δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει προς τη συνάρτηση που αναπτύχθηκε!
- Όμως, η ασυμπτωτική σειρά δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει για να είναι χρήσιμη, καθώς η προσέγγιση βελτιώνεται όσο η παράμετρος ε τείνει στο μηδέν. Η αξία τέτοιων αναπτύξεων, ακόμη κι αν είναι αποκλίνουσες, έγκειται στο ότι συχνά αρκούν μόνο λίγοι όροι για να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια, ενώ μια συγκλίνουσα σειρά μπορεί να

απαιτεί τον υπολογισμό πολλών όρων για συγκρίσιμο αποτέλεσμα. Επιπλέον, οι **αποκλίνουσες ασυμπτωτικές σειρές** δεν παρέχουν μόνο αριθμητικές προσεγγίσεις, αλλά και πολύτιμες ποιοτικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά της λύσης, αποκαλύπτοντας τη δομή και τα χαρακτηριστικά της εξίσωσης.

1.7.1 Παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου διαταραχών

Στην παρούσα υποενότητα θα εφαρμόσουμε στην πράξη τη μεθοδολογία των σειρών διαταραχών και θα εξετάσουμε τη σύγκλισή τους, όπως παρουσιάστηκαν στις Ενότητες *1.6* και *1.7*, μέσα από τη μελέτη ενός συγκεκριμένου προβλήματος αρχικών τιμών. Στόχος είναι να καταδειχθεί με σαφήνεια, η διαδικασία και η χρησιμότητα της προσέγγισης.

Παράδειγμα

Δίνεται το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$u'(t)+u(t)=\frac{1}{1+\varepsilon u(t)},\quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.7.1}$$

$$u(0)=0 \tag{1.7.2}$$

Θα βρούμε μια προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο των διαταραχών.

Εφαρμογή μεθόδου διαταραχών

Από την *(1.7.1)* έχουμε

$$(u'(t)+u(t))(1+\varepsilon u(t))=1 \Rightarrow$$

$$u'(t)+u(t)+\varepsilon\left[u^2(t)+u(t)u'(t)\right]=1 \tag{1.7.3}$$

Το ΠΑΤ αυτό, επειδή η (*1.7.3*) είναι Σ.Δ.Ε. 1ης τάξης μη γραμμική, δεν μπορεί να λυθεί ακριβώς με αναλυτικές μεθόδους. Έτσι προσπαθούμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση.

Σύμφωνα με τις μεθόδους της θεωρίας διαταραχών, οι μη γραμμικοί όροι

$$\varepsilon u^2(t)+\varepsilon u(t)u'(t)$$

που αυξάνουν την πολυπλοκότητα του προβλήματος, θεωρούνται ως μικρή διαταραχή της αντίστοιχης γραμμικής απλούστερης περίπτωσης

$$u'(t)+u(t)=1 \tag{1.7.4}$$

$$u(0)=0 \tag{1.7.5}$$

Με την προϋπόθεση ότι η λύση του αδιατάρακτου προβλήματος *(1.7.4)*, *(1.7.5)* είναι γνωστή $(1-e^{-t})$, θα επιχειρήσουμε να βρούμε τη λύση του διαταραγμένου προβλήματος με μια προσέγγιση τριών όρων.

Αρχικά, αναπτύσσουμε το δεξί μέλος της *(1.7.1)* σε σειρά *Taylor*, για να έχει η ΣΔΕ απλούστερη μορφή. Έτσι

$$\frac{1}{1+\varepsilon u(t)}=1-\varepsilon u(t)+\varepsilon^2 u^2(t)-\varepsilon^3 u^3(t)+\ldots$$

και το πρόβλημα *(1.7.1)*, *(1.7.2)* γίνεται

$$u'(t)+u(t)=1-\varepsilon u(t)+\varepsilon^2 u^2(t)-\varepsilon^3 u^3(t)+\ldots,\quad \varepsilon \ll 1 \qquad (1.7.1^*)$$

$$u(0)=0 \qquad (1.7.2^*)$$

Για να βρούμε μια προσεγγιστική λύση, θεωρούμε ότι έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$u(t,\varepsilon)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots \qquad (1.7.6)$$

Αντικαθιστούμε την *(1.7.6)* στην *(1.7.1*)* και έχουμε:

$$\left(u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots\right)'+\left(u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots\right)=$$

$$1-\varepsilon\left(u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots\right)+\varepsilon^2\left(u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots\right)^2+\ldots\Rightarrow$$

$$u_0'(t)+\varepsilon u_1'(t)+\varepsilon^2 u_2'(t)+u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\varepsilon^2 u_2(t)+\ldots=$$

$$1-\varepsilon u_0(t)-\varepsilon^2 u_1(t)+\varepsilon^2 u_0^2(t)+\ldots$$

Γράφουμε την εξίσωση σε μορφή πολυωνύμου ως προς ε:

$$u_0'(t)+u_0(t)-1+\varepsilon\left[u_0(t)+u_1(t)+u_1'(t)\right]+\varepsilon^2\left[u_1(t)-u_0^2(t)+u_2(t)+u_2'(t)\right]+\ldots=0$$

Κάθε συντελεστής είναι ίσος με το *0*, άρα

$$u_0'(t)+u_0(t)=1$$

$$u_1'(t)+u_1(t)=-u_0(t)$$

$$u_2'(t)+u_2(t)=u_0^2(t)-u_1(t)$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Εφαρμόζουμε τώρα την *(1.7.6)* για $t=0$ στην αρχική συνθήκη *(1.7.2*)* και έχουμε:

$$u(0)=0\Rightarrow u_0(0)+\varepsilon u_1(0)+\varepsilon^2 u_2(0)+\ldots=0$$

Δηλαδή

$$u_0(0)=0,\ \ u_1(0)=0,\ \ u_2(0)=0$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Προέκυψε λοιπόν μια ακολουθία άπειρων προβλημάτων αρχικών τιμών, με γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Θα λύσουμε τα πρώτα τρία, για να υπολογίσουμε τον πρωτεύοντα όρο ($u_0(t)$), τον πρώτο $(\varepsilon u_1(t))$ και τον δεύτερο διορθωτικό όρο $(\varepsilon^2 u_2(t))$.

<u>Πρόβλημα τάξης Ο(1)</u>

$$u_0'(t)+u_0(t)=1 \tag{1.7.7}$$

$$u_0(0)=0 \tag{1.7.8}$$

Η (*1.7.7*) είναι μια γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης που θα λύσουμε με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού παράγοντα

$$\mu(t)=\mathrm{e}^t$$

Πολλαπλασιάζουμε την (*1.7.7*) με $\mu(t)$ ολοκληρώνουμε και έχουμε:

$$u_0(t)=C\,\mathrm{e}^{-t}+1$$

Από την αρχική συνθήκη *(1.7.8)*: $u_0(0)=0 \Rightarrow C+1=0 \Rightarrow C=-1$

Η λύση, λοιπόν, του πρώτου ΠΑΤ που δίνει τον **πρωτεύοντα όρο** είναι:

$$u_0(t)=1-\mathrm{e}^{-t}$$

Παρατηρούμε ότι ο πρωτεύων όρος ταυτίζεται με τη λύση του αδιατάρακτου προβλήματος, γεγονός που υποδεικνύει ότι η μέθοδος των διαταραχών εφαρμόζεται επιτυχώς.

<u>Πρόβλημα τάξης Ο(ε)</u>

$$u_1'(t)+u_1(t)=-u_0(t)\Rightarrow$$

$$u_1'(t)+u_1(t)=\mathrm{e}^{-\tau}-1 \tag{1.7.9}$$

$$u_1(0)=0 \tag{1.7.10}$$

Η εξίσωση (*1.7.9*) είναι γραμμική ΣΔΕ. Η λύση του προβλήματος πρώτης τάξης, που αντιστοιχεί στον πρώτο διορθωτικό όρο, προκύπτει με ανάλογη διαδικασία με αυτήν που εφαρμόστηκε για τον πρωτεύοντα όρο και δίνεται από

$$u_1(t)=t\,\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}-1$$

<u>Πρόβλημα τάξης Ο(ε²)</u>

$$u_2'(t)+u_2(t)=u_0^2(t)-u_1(t)$$

Αντικαθιστούμε τα $u_0(t)$ και $u_1(t)$ με τις λύσεις που βρήκαμε και έχουμε

$$u_2'(t)+u_2(t)=\mathrm{e}^{-2t}-3\,\mathrm{e}^{-t}-t\,\mathrm{e}^{-t}+2 \tag{1.7.11}$$

$$u_2(0)=0 \tag{1.7.12}$$

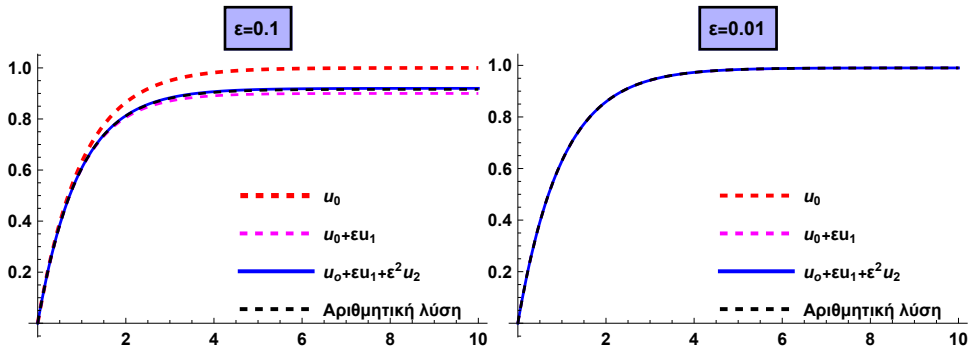
Αντίστοιχα, το πρόβλημα δεύτερης τάξης οδηγεί σε γραμμική ΣΔΕ για τον δεύτερο διορθωτικό όρο. Η επίλυσή του ακολουθεί την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα προβλήματα και η λύση δίνεται από

$$u_2(t)=2-\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t^2}{2}+3t\right)$$

Και τελικά η προσεγγιστική λύση του προβλήματος, με προσέγγιση 3 όρων είναι:

$$u(t,\varepsilon)\approx 1-\mathrm{e}^{-t}+\varepsilon\left(t\,\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-t}-1\right)+\varepsilon^2\left[2-\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t^2}{2}+3t\right)\right]$$

Στο επόμενο στάδιο, εφαρμόζουμε υπολογιστικά τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών με τη βοήθεια του *Mathematica*, προκειμένου να ελέγξουμε την ακρίβεια των θεωρητικών αποτελεσμάτων. Παράλληλα, θα επιλύσουμε το ίδιο πρόβλημα με αριθμητικές μεθόδους, ώστε να πραγματοποιηθεί άμεση σύγκριση των δύο προσεγγίσεων.



Σχήμα 1.7.1:Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης

Από το *Σχήμα 1.7.1* μπορούμε να κάνουμε πολύ σημαντικές παρατηρήσεις.

Η προσεγγιστική λύση είναι εξαιρετικά ακριβής με τρεις όρους**,** μάλιστα όταν $\varepsilon=0.01$ αρκεί ο πρωτεύων όρος για να προσεγγίσει ικανοποιητικά την αριθμητική λύση.

Όταν το ε γίνει μεγαλύτερο, όπως $\varepsilon=0.1$ για παράδειγμα, ο πρωτεύων και ο πρώτος διορθωτικός όρος είναι επαρκείς.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην *Ενότητα 1.7*, επειδή οι συναρτησιακοί συντελεστές των όρων της προσεγγιστικής μας λύσης είναι φραγμένοι στο [0,∞), η σειρά είναι **ομοιόμορφα διατεταγμένη.**

Για να αποδείξουμε πλήρως **ομοιόμορφη εγκυρότητα** θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο $R_2(t,\varepsilon)$ και να δείξουμε ότι $|R_2(t,\varepsilon)|\leq C\,\varepsilon^3$**,** κάτι που προφανώς δεν είναι δυνατό να γίνει.

Ωστόσο, ο αριθμητικός έλεγχος παρέχει ισχυρή ένδειξη ότι η σειρά διαταραχών έχει κατασκευαστεί ορθά για το πρόβλημα και, δεδομένης της **ομοιόμορφης διάταξης** των όρων, η σειρά φαίνεται να είναι **ομοιόμορφα έγκυρη** στο πρακτικό πλαίσιο που εξετάζουμε.

1.8 Κανονικά και ιδιόμορφα προβλήματα διαταραχών

Στην *Ενότητα 1.6* θεωρήσαμε πως η προσεγγιστική λύση του προβλήματος έχει τη μορφή μιας σειράς *Poincaré* και δείξαμε αναλυτικά πώς αυτή εφαρμόζεται.

Αυτή η μέθοδος ονομάζεται **κανονική μέθοδος διαταραχών** ή **μέθοδος ευθέως αναπτύγματος** (**straightforward expansion**), και ανήκει στην κατηγορία των **διαταραχών παραμέτρου.**

Αν η προσεγγιστική λύση που προκύπτει είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα που μελετάμε, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως **κανονικό πρόβλημα διαταραχών**. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των κανονικών προβλημάτων διαταραχών (που αποτελεί ισχυρό κριτήριο για την αναγνώρισή τους, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα) είναι ότι η ακριβής λύση για μικρή αλλά μη μηδενική ε προσεγγίζει ομαλά την λύση του αδιατάρακτου προβλήματος, καθώς $\varepsilon \to 0$.

Αντίθετα, το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως **ιδιόμορφο πρόβλημα διαταραχών**, αν σε κάποιο διάστημα καταρρέει η ομοιομορφία. Το διάστημα αυτό ονομάζεται **μη ομοιόμορφη περιοχή**. Σε τέτοια προβλήματα, η λύση παρουσιάζει ιδιομορφίες που δεν εμφανίζονται στην κανονική περίπτωση. Για παράδειγμα, όταν η παράμετρος ε πολλαπλασιάζει την υψηλότερης τάξης παράγωγο, αυτό επηρεάζει άμεσα το διάστημα στο οποίο η λύση είναι κανονική, όπως στο πρόβλημα $\varepsilon\ddot{x}+(t^2+1)\dot{x}+x=0$ που είναι κανονικό μόνο στο διάστημα [0,ε], αλλά ιδιόμορφο σε ένα σταθερό διάστημα. Ή, σε άλλη περίπτωση, το πρόβλημα $\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0$ είναι κανονικό σε κάθε διάστημα [0,T], αλλά είναι ιδιόμορφο στο $[0,\frac{1}{\varepsilon}]$.

Επιπλέον, σε ιδιόμορφα προβλήματα μπορεί να συμβεί το αδιατάρακτο πρόβλημα ($\varepsilon=0$) να μην έχει λύση, αλλά ακόμα κι αν έχει, η συμπεριφορά της λύσης για πολύ μικρή αλλά θετική ε να είναι ριζικά διαφορετική από τη λύση στο $\varepsilon=0$. Δηλαδή, η λύση να “αλλάζει χαρακτήρα” όταν $\varepsilon \to 0$.

Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για να αντιμετωπιστούν τα ιδιόμορφα προβλήματα διαταραχών, χρησιμοποιώντας κάποια **γενικευμένη σειρά**, ώστε η προσεγγιστική λύση να είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα ενδιαφέροντος κάθε φορά.

Οι μέθοδοι αυτές, που θα παρουσιαστούν αναλυτικά στο *Κεφάλαιο 3*, ανήκουν κατά κύριο λόγο στις **διαταραχές συντεταγμένων**.

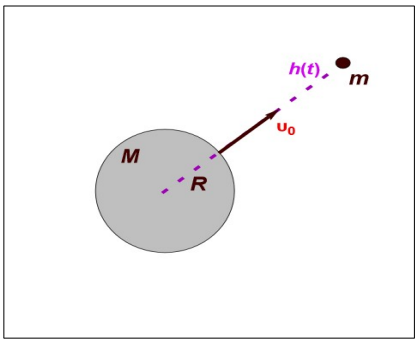
1.9 Εφαρμογή κανονικών διαταραχών: κατακόρυφη βολή

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της κατακόρυφης βολής, το οποίο αποτελεί μια απλή αλλά χαρακτηριστική περίπτωση για την εφαρμογή της μεθόδου των **κανονικών**

διαταραχών. Θα δείξουμε πρώτα πώς γίνεται η **κανονικοποίηση** των εξισώσεων, και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο ώστε να συγκρίνουμε την προσεγγιστική με την αριθμητική λύση.

Παράδειγμα: Κατακόρυφη βολή

Θα μελετήσουμε την κίνηση ενός βλήματος που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της γης, ακτινικά προς τα πάνω.



Σχήμα 1.9.1:Κατακόρυφη βολή

Έστω ότι ένα βλήμα μάζας m, βάλλεται από την επιφάνεια της Γης προς τα πάνω, με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0>0$. Το ύψος του τη χρονική στιγμή t, είναι $h(t)$, η μάζα και η ακτίνα της Γης είναι M και R αντίστοιχα (*Σχήμα 1.9.1*).

Από τον δεύτερο νόμο του *Νεύτωνα*

$$F=m\alpha=m\frac{d^2h}{dt^2}$$

Σε συνδυασμό με τον νόμο της παγκόσμιας έλξης

$$F=-G\frac{Mm}{(h+R)^2}$$

προκύπτει η εξίσωση κίνησης για το βλήμα:

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=-G\frac{Mm}{(h+R)^2} \quad \mu\varepsilon \quad h(0)=0$$

Στην περίπτωση όπου $h=0$, το βλήμα βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης, επομένως η μόνη δύναμη που δρα πάνω του είναι το βάρος, το οποίο έχει μέτρο mg, όπου g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, και φορά προς το κέντρο της Γης, δηλαδή

$$F=-mg$$

Έτσι,

$$-mg=-G\frac{Mm}{(0+R)^2}=-G\frac{Mm}{R^2}\Rightarrow G=\frac{gR^2}{M}$$

Άρα

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=-\frac{gR^2}{M}\frac{Mm}{(h+R)^2}$$

και προκύπτει τελικά το Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

$$\frac{d^2h}{dt^2}=-\frac{R^2g}{(h+R)^2} \qquad (1.9.1)$$

$$h(0)=0,\ h'(0)=\upsilon_0 \qquad (1.9.2)$$

Η εξίσωση *(1.9.1)* είναι μη γραμμική και δεν μπορούμε να βρούμε τη λύση του ΠΑΤ σε κλειστή μορφή, γι' αυτό θα αναζητήσουμε μια προσεγγιστική λύση.

Όπως ήδη αναφέραμε στην *Ενότητα 1.4*, το πρώτο βήμα είναι η κανονικοποίηση του προβλήματος, δηλαδή η αδιαστατοποίηση των μεταβλητών.

Η διαδικασία της αδιαστατοποίησης περιλαμβάνει την επιλογή της χαρακτηριστικής κλίμακας για το χρόνο, που είναι το μικρότερο διάστημα που απαιτείται για να παρατηρηθούν αναγνωρίσιμες μεταβολές στα φυσικά μεγέθη του προβλήματος, και την αναζήτηση χαρακτηριστικής κλίμακας για το ύψος. Με αυτόν τον τρόπο, όλες οι μεταβλητές θα γίνουν χωρίς διαστάσεις, κι έτσι θα αναδείξουμε τις βασικές σχέσεις, και θα κατανοήσουμε καλύτερα ποιοι όροι είναι σημαντικοί και ποιοι μικρής τάξης μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχές.

Αυτό, γενικά απαιτεί **διαστατική ανάλυση**, χρήση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης για να συμπεράνουμε κάποια χρήσιμα στοιχεία, και τέλος αδιαστατοποίηση (ανακλιμάκωση) του προβλήματος ώστε να προκύψει ένα μειωμένο πρόβλημα.

Όμως, η φύση του προβλήματος της κατακόρυφης βολής μας επιτρέπει να κάνουμε κάποιες φυσικές υποθέσεις, ώστε να αποφύγουμε τη χρονοβόρα διαδικασία.

Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το R είναι σημαντικά μεγαλύτερο ακόμα και από τη μεγαλύτερη τιμή του h. Αν αυτό ισχύει, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $h+R$ απλώς με R, και το πρόβλημα γίνεται:

$$\frac{d^2h_0}{dt^2}=-g,\quad t>0 \qquad (1.9.3)$$

$$h_0(0)=0,\ h_0'(0)=\upsilon_0 \tag{1.9.4}$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, βρίσκουμε τη λύση του *(1.9.3)*, *(1.9.4)*:

$$h_0(t)=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}g t^2 \tag{1.9.5}$$

Η έκφραση αυτή, αν και απλή, αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης του αντίστοιχου μη γραμμικού προβλήματος.

Το μέγιστο ύψος για την *(1.9.1)* συμβαίνει όταν

$$\frac{dh_0}{dt}=0 \tag{1.9.6}$$

Λύνοντας την *(1.9.6)* παίρνουμε

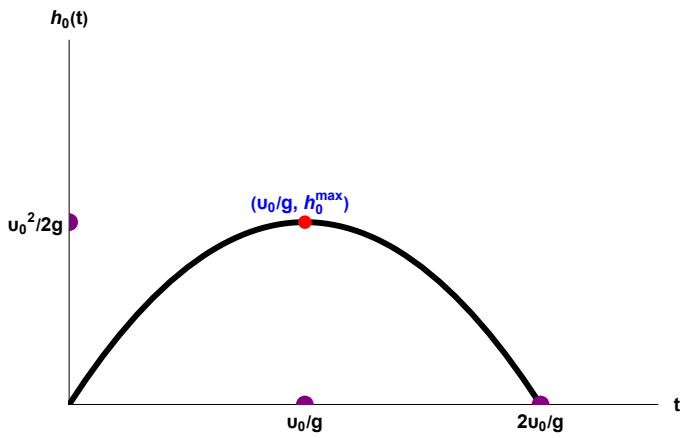
$$\frac{dh_0}{dt}=0\ \ (\text{αφού } h_0(t)=\upsilon_0 t-\frac{1}{2}g t^2) \Rightarrow \upsilon_0-g t=0 \Rightarrow$$

$$t=\frac{\upsilon_0}{g}$$

και από αυτό έπεται πως το μέγιστο ύψος του βλήματος από την επιφάνεια της Γης είναι

$$h_0^{max}(t)=\frac{\upsilon_0^2}{2g}$$

όπως φαίνεται στο *Σχήμα 1.9.2*.



Σχήμα 1.9.2: Αναπαράσταση της λύσης $h_0(t)$ που αντιστοιχεί στην κίνηση σε ομογενές βαρυτικό πεδίο

Παρατηρούμε επίσης ότι ο χρόνος ανόδου μέχρι το μέγιστο ύψος είναι ίσος με τον χρόνο καθόδου μέχρι την επιστροφή του βλήματος στην επιφάνεια της Γης.

Για να είμαστε συνεπείς με την αρχική μας υπόθεση, πρέπει το μέγιστο ύψος να είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα της Γης, δηλαδή

$$h_0^{max}(t) \ll R \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon_0^2}{2g} \ll R$$

Συνοψίζοντας, από την απλοποιημένη λύση της κίνησης σε ομογενές πεδίο βαρύτητας προκύπτει ο χρόνος t που αντιστοιχεί στη στιγμή κατά την οποία το βλήμα φτάνει στο μέγιστο ύψος $h_0^{max}(t)$ από την επιφάνεια της Γης.

Τα δύο αυτά μεγέθη αποτελούν φυσικές κλίμακες του προβλήματος. Ο χρόνος $t=\frac{\upsilon_0}{g}$ εκφράζει τη χαρακτηριστική χρονική διάρκεια της κίνησης (άνοδος-κάθοδος), ενώ το ύψος $h_0^{max}(t)=\frac{\upsilon_0^2}{2g}$ δίνει μια αντιπροσωπευτική κλίμακα μήκους, δηλαδή τη μέγιστη απόσταση που διανύει το βλήμα πριν αντιστραφεί η κίνηση του. Για τον λόγο αυτό, είναι εύλογο να υιοθετήσουμε τα μεγέθη αυτά ως χαρακτηριστικές κλίμακες για την κανονικοποίηση του διαταραγμένου προβλήματος *(1.9.1)*, *(1.9.2)*.

Κανονικοποίηση του προβλήματος

Για να κανονικοποιήσουμε το πρόβλημα, θα εισαγάγουμε νέες **αδιάστατες μεταβλητές** και θα επαναδιατυπώσουμε την εξίσωση με βάση αυτές. Με τον τρόπο αυτό αλλάζουμε την κλίμακα των μεταβλητών του προβλήματος, δηλαδή του χρόνου και του ύψους.

Έστω

$$t_c=\frac{\upsilon_0}{g} : \text{ χαρακτηριστικός χρόνος}$$

$$h_c=\frac{\upsilon_0^2}{g} : \text{ χαρακτηριστικό ύψος}$$

(Επειδή μας ενδιαφέρει η τάξη μεγέθους παραλείψαμε τον συντελεστή 2 από τον παρανομαστή).

Ορίζουμε τις αδιάστατες μεταβλητές για το χρόνο και ύψος αντίστοιχα:

$$\tau=\frac{t}{t_c}=\frac{gt}{\upsilon_0} \quad \text{και} \quad x(\tau)=\frac{h}{h_c}=\frac{gh}{\upsilon_0^2}$$

Εφαρμογή κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dh}{dt}=\frac{dh}{dx}\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=h_c\frac{dx}{d\tau}\frac{1}{t_c}=\frac{\upsilon_0^2}{g}\frac{dx}{d\tau}\frac{g}{\upsilon_0}=\upsilon_0\frac{dx}{d\tau}, \text{ αφού } \frac{dh}{dx}=h_c, \frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{t_c}$$

$$\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\upsilon_0\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=\upsilon_0\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}=\frac{\upsilon_0}{t_c}\frac{d^2x}{d\tau^2}=g\frac{d^2x}{d\tau^2}$$

Άρα η εξίσωση $\frac{d^2h}{dt^2}=-\frac{R^2g}{(h+R)^2}$ γίνεται

$$g\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\frac{R^2g}{\left(\frac{\upsilon_0^2x}{g}+R\right)^2}\Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\frac{1}{\left(1+\frac{\upsilon_0^2}{gR}x\right)^2} \qquad (1.9.7)$$

Κανονικοποίηση αρχικών συνθηκών

Όταν $t=0\Rightarrow t_c\tau=0\Rightarrow\tau=0$

Άρα

$h(0)=h_c x(0)=\frac{\upsilon_0^2}{g}x(0)$ και αφού $h(0)=0\Rightarrow\frac{\upsilon_0^2}{g}x(0)=0\Rightarrow$

$$x(0)=0$$

Επίσης

$h'(0)=\upsilon_0\Rightarrow\upsilon_0 x'(0)=\upsilon_0\Rightarrow$

$$x'(0)=1$$

Ορισμός της παραμέτρου διαταραχής

Είδαμε παραπάνω πως

$$h_0^{max}(t)=\frac{\upsilon_0^2}{2g}\ll R\Rightarrow h_c=\frac{\upsilon_0^2}{g}\ll R\Rightarrow\frac{\upsilon_0^2}{gR}\ll 1$$

Εισάγουμε, λοιπόν, την παράμετρο

$$\varepsilon=\frac{\upsilon_0^2}{gR}\ll 1$$

που είναι αδιάστατη και η τιμή της είναι σημαντική, γιατί μας δίνει ένα μέτρο του πόσο ψηλά φτάνει το βλήμα σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης.

Σημείωση:

Από τη συνάρτηση $h_0(t)$, όπως φαίνεται και στο *Σχήμα 1.9.2*, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το $\frac{\varepsilon}{2}$ είναι ο λόγος του μέγιστου ύψους του βλήματος προς την ακτίνα, αφού

$$h_0^{max}(t)=\frac{\upsilon_0^2}{2g} \Rightarrow \frac{h_0^{max}(t)}{R}=\frac{\upsilon_0^2}{2gR}=\frac{\varepsilon}{2}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τιμές σε μονάδες *S.I.*, δηλαδή

$$R\approx 6.371\,x\,10^3 m \;\; \kappa\alpha\iota \;\; g=9.81\,m/s^2$$

προκύπτει

$$\varepsilon=1.6\,x\,10^{-8}\upsilon_0^2 \;\; s^2/m^2$$

όπου υ_0 εκφράζεται σε m/s (παρατηρούμε πως η παράμετρος ε δεν έχει διάσταση).

Για χαρακτηριστικές ταχύτητες εκτόξευσης μικρότερες από $10^3 m/s$, η τιμή της ε είναι της τάξης του 10^{-2}**,** γεγονός που σημαίνει ότι το μέγιστο ύψος της τροχιάς είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα της Γης.

Επομένως, όταν $0<\varepsilon\ll 1$ η απλοποιημένη λύση που προκύπτει από την υπόθεση ομοιόμορφου βαρυτικού πεδίου (παραδοχή σταθερής επιτάχυνσης βαρύτητας), αποτελεί πολύ καλή προσέγγιση. Έτσι, καταλήξαμε στο πρόβλημα διαταραχών

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-\frac{1}{(1+\varepsilon x)^2}, \;\; \tau>0 \qquad (1.9.8)$$

$$x(0)=0 \qquad (1.9.9)$$

$$x'(0)=1 \qquad (1.9.10)$$

Η διαφορική εξίσωση *(1.9.8)* είναι **ασθενώς μη γραμμική (weakly nonlinear)**, επειδή η μη γραμμικότητα εισάγεται μέσω της μικρής παραμέτρου ε, και όταν $\varepsilon=0$, καθίσταται γραμμική, και το αδιατάρακτο πρόβλημα είναι τότε

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}=-1, \;\; \tau>0$$

$$x(0)=0$$

$$x'(0)=1$$

που έχει λύση

$$x(\tau)=\tau-\frac{1}{2}\tau^2$$

Άρα, θα αναζητήσουμε μια προσεγγιστική λύση του διαταραγμένου προβλήματος, με την μέθοδο των **κανονικών διαταραχών**.

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots \tag{1.9.11}$$

Αντικαθιστούμε την *(1.9.11)* στην *(1.9.8)* και έχουμε

$$\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)''=-\frac{1}{\left[1+\varepsilon\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)\right]^2} \tag{1.9.12}$$

Θα προσεγγίσουμε το δεξί μέλος της *(1.9.12)* με τη **διωνυμική σειρά**.

Σημείωση

Η **σειρά Maclaurin** που παράγει η συνάρτηση $f(x)=(1+x)^m$ είναι η **διωνυμική σειρά**

$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$, που συγκλίνει απόλυτα όταν $|x|<1$.

Όταν είναι εφικτό, προτιμούμε να χρησιμοποιούμε τη διωνυμική σειρά αντί της σειράς Taylor, γιατί δίνει άμεσα τους συντελεστές χωρίς να απαιτείται ο υπολογισμός παραγώγων και προσφέρει πιο απλή και γρήγορη διαδικασία, ειδικά όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ή μη ακέραιος.

Έτσι,

$$\left[1+\varepsilon\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)\right]^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}\varepsilon^k\left[x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right]^k=$$

$$1-2\varepsilon\left[x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right]+3\varepsilon^2\left[x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right]^2+\ldots \tag{1.9.13}$$

Η σειρά *(1.9.13)* συγκλίνει απόλυτα, αφού $\left|\varepsilon\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)\right|<1$.

Εφαρμόζουμε την *(1.9.13)* στην *(1.9.12)* και έχουμε:

$$\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)''=-\left[1+\varepsilon\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)\right]^{-2}=$$

$$-1+2\varepsilon\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)-3\varepsilon^2\left(x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots\right)^2+\ldots\Rightarrow$$

$$x_0''(\tau)+\varepsilon x_1''(\tau)+\varepsilon^2 x_2''(\tau)+\ldots=-1+2\left(\varepsilon x_0(\tau)+\varepsilon^2 x_1(\tau)+\ldots\right)-3\left(\varepsilon^2 x_0^2(\tau)+\varepsilon^4 x_1^2(\tau)+\ldots\right)+\ldots$$

Επειδή θα προσεγγίσουμε τη λύση με τρεις όρους, κρατάμε τους όρους μέχρι $O(\varepsilon^2)$:

$$x_0''(\tau)+\varepsilon x_1''(\tau)+\varepsilon^2 x_2''(\tau)+\ldots=-1+2\varepsilon x_0(\tau)+2\varepsilon^2 x_1(\tau)-3\varepsilon^2 x_0^2(\tau)+\ldots\Rightarrow$$

$$x_0''(\tau)+\varepsilon x_1''(\tau)+\varepsilon^2 x_2''(\tau)+\ldots=-1+2\varepsilon x_0(\tau)+\varepsilon^2\left(2x_1(\tau)-3x_0^2(\tau)\right)+\ldots$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ε, και έχουμε

$$x_0''(\tau)=-1$$

$$x_1''(\tau)=2x_0(\tau)$$

$$x_2''(\tau)=2x_1(\tau)-3x_0^2(\tau)$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Από τις αρχικές συνθήκες *(1.9.9), (1.9.10)* :

$$x(0)=0 \Rightarrow x_0(0)+\varepsilon x_1(0)+\varepsilon^2 x_2(0)+\ldots=0$$

$$x'(0)=1 \Rightarrow x_0'(0)+\varepsilon x_1'(0)+\varepsilon^2 x_2'(0)+\ldots=1$$

από όπου παίρνουμε:

$$x_0(0)=0 \qquad x_0'(0)=1$$
$$x_1(0)=0 \qquad x_1'(0)=0$$
$$x_2(0)=0 \qquad x_2'(0)=0$$
$$\bullet\bullet\bullet \qquad \bullet\bullet\bullet$$

Προέκυψε, λοιπόν, μια ακολουθία άπειρων προβλημάτων αρχικών τιμών.

$$O(1):\quad \begin{cases} x_0''(\tau)=-1 \\ x_0(0)=0 \\ x_0'(0)=1 \end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\quad \begin{cases} x_1''(\tau)=2x_0(\tau) \\ x_1(0)=0 \\ x_1'(0)=0 \end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\quad \begin{cases} x_2''(\tau)=2x_1(\tau)-3x_0^2(\tau) \\ x_1(0)=0 \\ x_1'(0)=0 \end{cases}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Θα λύσουμε τα πρώτα τρία, για να υπολογίσουμε τον πρωτεύοντα όρο, τον πρώτο διορθωτικό, και τον δεύτερο διορθωτικό όρο.

Η λύση του *O(1)* είναι

$$x_0(\tau)=\tau-\frac{1}{2}\tau^2$$

Αυτός είναι ο **κυρίαρχος ή πρωτεύων όρος**, που ταυτίζεται με τη λύση του αδιατάρακτου προβλήματος.

Αντικαθιστούμε, την $x_0(\tau)$ στην $x_1''(\tau)=2x_0(\tau)$ και η λύση του *O(ε)* είναι:

$$x_1(\tau)=\frac{1}{3}\tau^3-\frac{1}{12}\tau^4$$

Αυτός είναι ο **πρώτος διορθωτικός όρος** της προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος.

Αντικαθιστούμε,τώρα, την $x_0(\tau)$ και $x_1(\tau)$ που υπολογίσαμε**,** στην $x_2''(\tau)=2x_1(\tau)-3x_0^2(\tau)$ και η λύση του $O(\varepsilon^2)$ είναι:

$$x_2(\tau)=-\frac{1}{4}\tau^4+\frac{11}{60}\tau^5-\frac{11}{360}\tau^6$$

Αυτός είναι ο **δεύτερος διορθωτικός όρος** της προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος.

Υποθέσαμε πως $x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+O(\varepsilon^3)$ **,** δηλαδή

$$x(\tau,\varepsilon)\approx x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)$$

Επομένως η **προσεγγιστική λύση** του προβλήματος με **προσέγγιση 3 όρων** είναι:

$$x(\tau,\varepsilon)\approx\tau-\frac{1}{2}\tau^2+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\tau^3-\frac{1}{12}\tau^4\right)+\varepsilon^2\left(-\frac{1}{4}\tau^4+\frac{11}{60}\tau^5-\frac{11}{360}\tau^6\right)$$

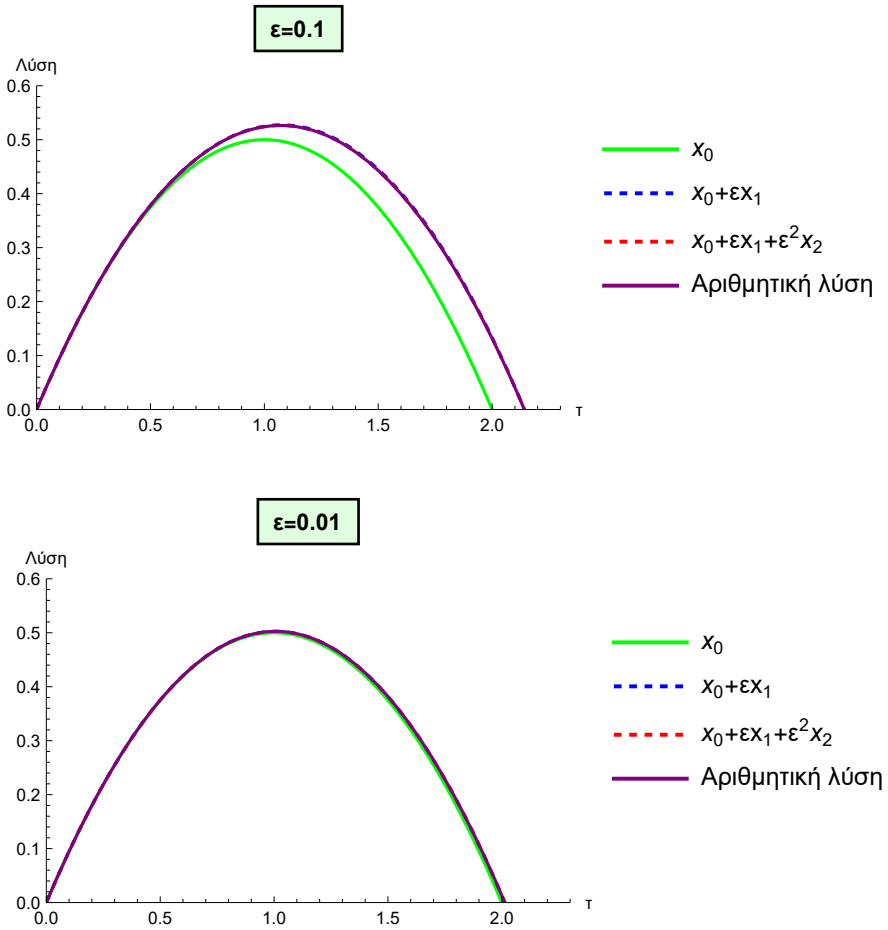
Η προσεγγιστική λύση που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου των κανονικών διαταραχών είναι **ομοιόμορφα έγκυρη** στο χρονικό διάστημα $0<\tau<\tau_h$, όπου τ_h είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα επιστρέφει στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή $x(\tau_h)=0$. Πέρα από αυτό το σημείο, η λύση δεν έχει φυσική σημασία, καθώς το μαθηματικό μοντέλο παύει να περιγράφει την πραγματική κίνηση.

Η ομοιομορφία της προσέγγισης προκύπτει από το γεγονός ότι οι συναρτησιακοί συντελεστές των όρων της ασυμπτωτικής λύσης είναι φραγμένοι στο διάστημα $0<\tau<\tau_h$. Συνεπώς, η ασυμπτωτική σειρά είναι ομοιόμορφα διατεταγμένη, γεγονός που αποτελεί ισχυρή ένδειξη ότι η προσέγγιση είναι και ομοιόμορφα έγκυρη. Η σταθερότητα αυτή εξασφαλίζει ότι η ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης παραμένει ουσιαστικά αμετάβλητη σε όλο το πεδίο τιμών του τ, χωρίς απώλεια εγκυρότητας κοντά στο τ_h. Έτσι, η λύση περιγράφει με συνέπεια τόσο την άνοδο όσο και την κάθοδο του σώματος.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο πρώτος διορθωτικός όρος της σειράς, ο οποίος είναι θετικός στο διάστημα $0<\tau<\tau_h$.

Ο όρος αυτός εκφράζει τη συνεισφορά της μη γραμμικότητας του βαρυτικού πεδίου και οδηγεί σε αύξηση του μέγιστου ύψους και του χρόνου πτήσης του σώματος σε σχέση με τη γραμμική

προσέγγιση, όπου το πεδίο θεωρείται ομογενές. Η φυσική ερμηνεία είναι ότι η βαρυτική δύναμη εξασθενεί με το ύψος, επιτρέποντας στο σώμα να παραμείνει περισσότερο χρόνο σε κίνηση και να φτάσει ψηλότερα.



Σχήμα 1.9.3: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης για διαφορετικές τιμές της ε

Από τη σύγκριση των γραφημάτων του *Σχήματος 1.9.3* για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ε, παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική λύση παρουσιάζει εξαιρετική συμφωνία με την αριθμητική λύση. Για $\varepsilon=0.01$, ο πρωτεύων όρος της ασυμπτωτικής σειράς επαρκεί για να περιγράψει ικανοποιητικά ολόκληρη την κίνηση, γεγονός που υποδηλώνει ότι η διαταραχή είναι πράγματι μικρή, και η επίδρασή της αμελητέα.

Αντίθετα για $\varepsilon=0.1$, η απόκλιση του πρωτεύοντος όρου από την αριθμητική λύση γίνεται εμφανής, και η προσθήκη του πρώτου διορθωτικού όρου κρίνεται απαραίτητη για την αποκατάσταση της ακρίβειας της προσέγγισης. Η βελτίωση αυτή αποδεικνύει τη συνέπεια και τη σταθερότητα της μεθόδου, καθώς η εισαγωγή ανώτερης τάξης όρων επαναφέρει τη σύμπτωση με το αριθμητικό αποτέλεσμα, ακόμα και για σχετικά μεγαλύτερες τιμές της ε.

Συνοψίζοντας, η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης τεκμηριώνεται τόσο θεωρητικά όσο και οπτικά. Θεωρητικά, απορρέει από τη φραγμένη μορφή των συναρτησιακών όρων και την ομοιόμορφη διάταξη της σειράς, ενώ οπτικά επιβεβαιώνεται από τη σταθερή συμφωνία της προσεγγιστικής με την αριθμητική λύση στα αντίστοιχα γραφήματα. Η διπλή αυτή επιβεβαίωση αποδεικνύει ότι η μέθοδος των κανονικών διαταραχών αποδίδει μια αξιόπιστη και φυσικά συνεπή περιγραφή του φαινομένου.

2. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο είδαμε ότι τα περισσότερα φυσικά συστήματα μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω διαφορικών εξισώσεων. Μεταξύ αυτών, οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές αποτελούν την πιο σημαντική κατηγορία, καθώς περιγράφουν τα περισσότερα προβλήματα ταλαντώσεων.

Οι ταλαντωτές αντιπροσωπεύουν μια ευρεία κλάση συστημάτων, με κοινό χαρακτηριστικό την περιοδική ή σχεδόν περιοδική συμπεριφορά.

Στην πράξη, οι περισσότερες ταλαντώσεις είναι μη γραμμικές, ακόμη και αν η μη γραμμικότητα είναι ασθενής. Επειδή όμως το θεμελιώδες και πιο απλό πρότυπο είναι ο αρμονικός ταλαντωτής, στο *Παράρτημα Α* παραθέτουμε τη μελέτη γραμμικής ταλάντωσης, ώστε να γίνει σαφές πώς μεταβάλλεται η συμπεριφορά του συστήματος όταν προστεθεί μια μικρή διαταραχή.

Οι μέθοδοι διαταραχών επιτρέπουν την ανάδειξη αυτών των μεταβολών, όπως θα φανεί στα κανονικά προβλήματα διαταραχών που εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο.

2.1 Μέθοδος κανονικών διαταραχών στην αρμονική αποσβεννύμενη ταλάντωση

Δεδομένου ότι διαθέτουμε ακριβείς λύσεις στη γραμμική ταλάντωση, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά της με την γνωστή λύση. Με αυτόν τον τρόπο εκτιμούμε την ακρίβεια της μεθόδου σε σχέση με τον χρόνο, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη γνώση ως ασφαλή βάση για την αξιολόγηση της προσέγγισης στις μη γραμμικές περιπτώσεις, όπου οι ακριβείς λύσεις δεν είναι διαθέσιμες.

- ***Μέθοδος κανονικών διαταραχών***

Έστω η εξίσωση της αρμονικής αποσβεννύμενης ταλάντωσης,

$$\ddot{x}+k\,\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad (2.1.1)$$

όπου ο **συντελεστής απόσβεσης** $k=\frac{b}{m}$ και η **κυκλική ιδιοσυχνότητα** $\omega_0=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ είναι σταθερές που δεν εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Αρχικά, κανονικοποιούμε την εξίσωση ώστε να αποκτήσει **αδιάστατη μορφή** και να εξαρτάται από μία μόνο μικρή παράμετρο.

Με τον τρόπο αυτό απομονώνεται η επίδραση της διαταραχής από τις φυσικές μονάδες του προβλήματος και η ανάλυση γίνεται ανεξάρτητη από τις απόλυτες τιμές των μεγεθών. Έτσι, θέτουμε

$$\varepsilon=\frac{k}{2\omega_0}$$

οπότε η *(2.1.1)* γίνεται

$$\ddot{x}+2\varepsilon\omega_0\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad (2.1.2)$$

Ορίζουμε τον αδιάστατο χρόνο $\tau=\omega_0 t$, εκφράζουμε τη μετατόπιση ως $x(t)=y(\tau)$

κι επειδή

$$\frac{dx}{dt}=\omega_0\frac{dy}{d\tau} \text{ και } \frac{d^2x}{dt^2}=\omega_0^2\frac{d^2y}{d\tau^2}$$

η *(2.1.2)* γίνεται

$$\omega_0^2 y''+2\varepsilon\omega_0^2 y'+\omega_0^2 y=0 \qquad (2.1.3)$$

Διαιρούμε με ω_0^2 την *(2.1.3)* κι έχουμε τελικά

$$y''+2\varepsilon y'+y=0 \qquad (2.1.4)$$

Τώρα εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας πως η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$y(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau)+\varepsilon y_1(\tau)+\varepsilon^2 y_2(\tau)+\ldots \qquad (2.1.5)$$

Εφαρμόζουμε την *(2.1.5)* στην *(2.1.4)* και έχουμε

$$(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots)''+2\varepsilon(y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots)'+y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots=0\Rightarrow$$

$$y_0''+\varepsilon y_1''+\varepsilon^2 y_2''+\ldots+2\varepsilon(y_0'+\varepsilon y_1'+\varepsilon^2 y_2'+\ldots)+y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\ldots=0$$

Γράφουμε την εξίσωση σε μορφή πολυωνύμου ως προς ε:

$$y_0''+y_0+\varepsilon(y_1''+y_1+2y_0')+\varepsilon^2(y_2''+y_2+2y_1')+\ldots=0$$

Κάθε συντελεστής είναι ίσος με το *0*, άρα

$$y_0''+y_0=0 \qquad (2.1.6)$$

$$y_1''+y_1=-2y_0' \qquad (2.1.7)$$

$$y_2''+y_2=-2y_1' \qquad (2.1.8)$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Η λύση της *(2.1.6)*, που δίνει τον πρωτεύοντα όρο, είναι σε πολικές συντεταγμένες,

$$y_0=A_0\cos(\tau-\varphi_0) \qquad (2.1.9)$$

όπου A_0 και φ_0 είναι σταθερές.

Τότε η (2.1.7) γίνεται

$$y_1'' + y_1 = 2A_0 \sin(\tau - \varphi_0) \qquad (2.1.10)$$

Η (2.1.10) είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, άρα, η λύση της είναι

$$y_1 = y_{1_{ομ}} + y_{1_{μερ}}$$

Η λύση της ομογενούς είναι

$$y_{1_{ομ}} = A_1 \cos(\tau - \varphi_1)$$

Ο μη ομογενής όρος της (2.1.10) γράφεται

$$2A_0 \sin(\tau - \varphi_0) = 2A_0(sin\tau\, cos\varphi_0 - sin\varphi_0\, cos\tau) \qquad (2.1.11)$$

Για να υπολογίσουμε τη μερική λύση της (2.1.10) υποθέτουμε πως έχει τη μορφή

$$y_{1_{μερ}} = \tau(C\, cos\tau + D\, sin\tau) \qquad (2.1.12)$$

επειδή οι όροι $cos\tau$, $sin\tau$ της (2.1.11) ανήκουν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς.

Παραγωγίζουμε δύο φορές την (2.1.12)

$$y_{1_{μερ}}'' = -2C\, sin\tau + 2D\, cos\tau - \tau C\, cos\tau - \tau D\, sin\tau$$

Εφαρμόζουμε στην (2.1.10), κι έχουμε

$$-2C\, sin\tau + 2D\, cos\tau - \tau C\, cos\tau - \tau D\, sin\tau + \tau(C\, cos\tau + D\, sin\tau) = 2A_0(sin\tau\, cos\varphi_0 - sin\varphi_0\, cos\tau) \qquad (2.1.13)$$

Από την (2.1.13) έπεται πως

$$C = -A_0\, cos\varphi_0$$

$$D = -A_0\, sin\varphi_0$$

Άρα

$$y_{1_{μερ}} = \tau(-A_0\, cos\varphi_0\, cos\tau - A_0\, sin\varphi_0\, sin\tau) = -A_0 \tau \cos(\tau - \varphi_0)$$

Και τελικά

$$y_1 = A_1 \cos(\tau - \varphi_1) - A_0 \tau \cos(\tau - \varphi_0) \qquad (2.1.14)$$

Άρα το ανάπτυγμα πρώτης τάξης είναι

$$y(\tau, \varepsilon) \approx y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) = A_0 \cos(\tau - \varphi_0) + \varepsilon\left[A_1 \cos(\tau - \varphi_1) - A_0 \tau \cos(\tau - \varphi_0)\right] \qquad (2.1.15)$$

όπου $A_0, \varphi_0, A_1, \varphi_1$ είναι αυθαίρετες σταθερές, που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Σε αυτό το σημείο, θα δείξουμε πως μπορούμε να παραβλέψουμε τη λύση της ομογενούς για τον πρώτο διορθωτικό όρο.

Από τους δύο πρώτους όρους του δεξιού μέλους της (2.1.15) έχουμε

$$A_0 \cos(\tau - \varphi_0) + \varepsilon A_1 \cos(\tau - \varphi_1) =$$

$$= A_0\, cos\tau\, cos\varphi_0 + A_0\, sin\tau\, sin\varphi_0 + \varepsilon A_1\, cos\tau\, cos\varphi_1 + \varepsilon A_1\, sin\tau\, sin\varphi_1 =$$

$$= (A_0\, cos\varphi_0 + \varepsilon A_1\, cos\varphi_1)\, cos\tau + (A_0\, sin\varphi_0 + \varepsilon A_1\, sin\varphi_1)\, sin\tau =$$

$$= A\, cos\tau\, cos\varphi + A\, sin\tau\, sin\varphi =$$

$$= A\cos(\tau-\varphi) \qquad (2.1.16)$$

όπου

$$A\,cos\varphi = A_0\,cos\varphi_0 + \varepsilon A_1\,cos\varphi_1 \qquad (2.1.17)$$

$$A\,sin\varphi = A_0\,sin\varphi_0 + \varepsilon A_1\,sin\varphi_1 \qquad (2.1.18)$$

Από τις *(2.1.17)*, *(2.1.18)* και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varepsilon \ll 1$, προκύπτει ότι στο όριο $\varepsilon \to 0$ ισχύει πως $A_0 = A, \varphi_0 = \varphi$. Επομένως για μικρές τιμές του ε, οι ποσότητες αυτές διαφέρουν από A και φ κατά όρους τάξης $O(\varepsilon)$, δηλαδή

$$A_0 = A + O(\varepsilon) \text{ και } \varphi_0 = \varphi + O(\varepsilon) \qquad (2.1.19)$$

Εφαρμόζουμε τις *(2.1.16)* και *(2.1.19)* στην *(2.1.15)*

$$y(\tau,\varepsilon) \approx A\cos(\tau-\varphi) + \varepsilon(-A-O(\varepsilon))\tau\cos(\tau-\varphi-O(\varepsilon))$$

$$= A\cos(\tau-\varphi) - \varepsilon A\tau\cos(\tau-\varphi)$$

όπου βλέπουμε πως

$$y_0 = A\cos(\tau-\varphi) \qquad (2.1.20)$$

Το ίδιο συμβαίνει με τις σταθερές, αν προσθέσουμε τον δεύτερο διορθωτικό όρο.

Αν θεωρήσουμε,λοιπόν, ότι οι αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή το πλάτος και η φάση, εξαρτώνται από τη μικρή παράμετρο ε, μπορούμε να παραλείψουμε την ομογενή λύση σε όλους τους διορθωτικούς όρους. Έτσι, μειώνεται ο αριθμός των σταθερών και απλουστεύονται οι υπολογισμοί.

Φυσικά, αυτό σημαίνει ότι η διαταραχή εκδηλώνεται ως αργή μεταβολή του πλάτους και της φάσης της κύριας ταλάντωσης, χωρίς να εισάγει νέα μορφή κίνησης.

Έτσι, ο πρώτος διορθωτικός όρος είναι

$$y_1 = -A\tau\cos(\tau-\varphi) \qquad (2.1.21)$$

Παραγωγίζουμε την *(2.1.21)* και την εφαρμόζουμε στην *(2.1.8)*, οπότε έχουμε

$$y_2'' + y_2 = 2A\cos(\tau-\varphi) - 2A\tau\sin(t-\varphi) \qquad (2.1.22)$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών, όπως για τον πρώτο διορθωτικό όρο, και η λύση της *(2.1.22)*, παραλείποντας τη λύση της ομογενούς, είναι

$$y_2 = \frac{1}{2}A\tau^2\cos(\tau-\varphi) + \frac{1}{2}A\tau\sin(\tau-\varphi) \qquad (2.1.23)$$

Αντικαθιστούμε στην *(2.1.5)* τις y_0, y_1, y_2 και τελικά η προσεγγιστική λύση είναι

$$y(\tau,\varepsilon) \approx A\cos(\tau-\varphi) - \varepsilon A\tau\cos(\tau-\varphi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A[\tau^2\cos(\tau-\varphi) + \tau\sin(\tau-\varphi)] \qquad (2.1.24)$$

- ***Αιώνιοι όροι***

Σε αυτό το σημείο θα μιλήσουμε για τους αιώνιους όρους, που θα συναντήσουμε πολλές φορές παρακάτω.

Αιώνιος όρος (secular term από το λατινικό *saeculum)*, ονομάζεται κάθε όρος που εμφανίζεται σε μια ασυμπτωτική λύση και αυξάνεται χωρίς φραγμό με τον χρόνο, προκαλώντας απώλεια εγκυρότητας της ασυμπτωτικής ανάπτυξης για μεγάλες τιμές της μεταβλητής αυτής. Η έννοια προέρχεται από αστρονομικές και μηχανικές αναλύσεις του *18ου–19ου* αιώνα, όπου σε σειρές ανάπτυξης πλανητικών κινήσεων εμφανίζονταν όροι που αυξάνονταν σταδιακά με τον χρόνο, σε αντίθεση με περιοδικές ταλαντώσεις**.**

Συνήθως οι αιώνιοι όροι προκύπτουν όταν η εξαναγκασμένη λύση περιέχει όρους σε συντονισμό με την ομογενή λύση. Η παρουσία τους οδηγεί σε τεχνητή αύξηση του πλάτους της λύσης, γεγονός που υποδεικνύει ότι η μέθοδος κανονικών διαταραχών δεν περιγράφει σωστά τη συμπεριφορά του συστήματος σε μεγάλους χρόνους.

Εξετάζοντας την προσεγγιστική λύση που βρήκαμε με τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, παρατηρούμε πως περιλαμβάνει αιώνιους όρους, οι οποίοι γίνονται όλο και πιο πολύπλοκοι σε υψηλότερες τάξεις.

Η πρώτη προσέγγιση περιέχει έναν γραμμικό αιώνιο όρο $A\tau\cos(\tau-\varphi)$, ενώ η δεύτερη περιέχει έναν τετραγωνικό αιώνιο όρο $\frac{1}{2}A\tau^2\cos(\tau-\varphi)$ αλλά και έναν μικτό $\frac{1}{2}A\tau\sin(\tau-\varphi)$ (χαρακτηρίζεται ως μικτός αιώνιος, καθώς εκφράζει την αιώνια αύξηση σε συνδυασμό με μεταβολή της φάσης της κύριας ταλάντωσης και όχι απλώς την ενίσχυση του πλάτους).

Αν συνεχίσουμε την ανάπτυξη μέχρι την *n*-οστή τάξη, διαπιστώνουμε ότι η *n*-οστή προσέγγιση περιλαμβάνει έναν αιώνιο όρο της μορφής τ^n. Αυτοί οι όροι μεγαλώνουν απεριόριστα, καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Συγκεκριμένα, αν ο χρόνος τ είναι $O(\frac{1}{\varepsilon})$ ή μεγαλύτερος (καθώς $\varepsilon\rightarrow 0$), ο όρος $A\tau\cos(\tau-\varphi)$ παραμένει μεγάλος και μάλιστα είναι ίδιας τάξης μεγέθους με τον πρωτεύοντα όρο, γεγονός που αντιβαίνει στον ορισμό του ασυμπτωτικού αναπτύγματος. Δηλαδή, ο διορθωτικός όρος δεν μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρός για $\tau\in[0,\infty]$ επιλέγοντας απλώς πολύ μικρό ε. Επιπλέον, προσθέτοντας τον δεύτερο διορθωτικό όρο, εισάγουμε νέους αιώνιους όρους, άρα δεν βελτιώνουμε το πρόβλημα.

Έτσι, η μέθοδος κανονικών διαταραχών δεν είναι ομοιόμορφα έγκυρη για χρόνο στο διάστημα $[0,\infty]$, αλλά είναι εξαιρετικά ακριβής στο [0,T], όπου $T\ll\frac{1}{A\varepsilon}$.

Στη γραμμική περίπτωση, που μελετάμε, έχουμε το πλεονέκτημα να συγκρίνουμε την προσεγγιστική λύση με την ακριβή λύση, ώστε να κατανοήσουμε την πηγή των αιώνιων όρων και τον τρόπο με τον οποίο η προσεγγιστική λύση “αναγκάζει” τη συχνότητα να παραμένει ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, αγνοώντας την απόσβεση.

◆ *Σύγκριση με την ακριβή λύση*

Η ακριβής λύση για την αρμονική ταλάντωση με ασθενή απόσβεση (*Παράρτημα Α*), είναι

$$x(t)=A\,\mathrm{e}^{\frac{-k}{2}t}\cos(\omega_d t-\varphi)$$

όπου $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\frac{k^2}{4}}$

Επειδή $\varepsilon=\frac{k}{2\omega_0}\Rightarrow k=2\varepsilon\omega_0$. Άρα

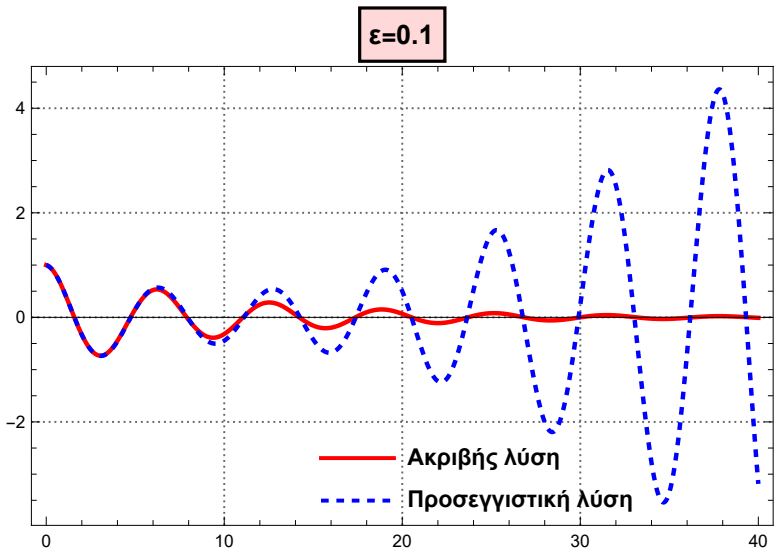
$$\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}t}=\mathrm{e}^{-\frac{k}{2\omega_0}\tau}=\mathrm{e}^{-\varepsilon\tau}$$

Αφού $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\frac{k^2}{4}}\Rightarrow\frac{\omega_d}{\omega_0}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$ και αφού $\tau=\omega_0 t$, έχουμε

$$\frac{\omega_d}{\omega_0}t\Rightarrow\omega_d t=\omega_0\sqrt{1-\varepsilon^2}\,t=\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau$$

Έτσι τελικά, για την κανονικοποιημένη εξίσωση, η αντίστοιχη λύση είναι

$$y(\tau)=A\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\tau}\cos(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau-\varphi) \qquad (2.1.25)$$



Σχήμα 2.1.1: Σύγκριση ακριβούς και προσεγγιστικής λύσης όταν A=1,φ=0

Στο *Σχήμα 2.1.1* απεικονίζονται τα φαινόμενα που αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με την επίδραση των αιώνιων όρων: για χρόνο στο διάστημα $[0,\frac{1}{\varepsilon}]$ (με $\frac{1}{\varepsilon}=10$, όταν $\varepsilon=0.1$), η ακριβής και η προσεγγιστική λύση συμπίπτουν, ενώ για μεγαλύτερους χρόνους η προσεγγιστική λύση παρουσιάζει μη φραγμένη αύξηση λόγω των αιώνιων όρων. Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε την προέλευση αυτών των αιώνιων όρων. Αναπτύσσουμε την ακριβή λύση της εξίσωσης σε σειρά

Taylor ως προς $\varepsilon\tau$, (η οποία, σε επίπεδο ασυμπτωτικής ανάλυσης, ισοδυναμεί με ανάπτυξη ως προς την παράμετρο ε), με χρήση του *Mathematica*, ώστε να αποφευχθούν οι επίπονες αλγεβρικές πράξεις.

Για λόγους πληρότητας, παραθέτουμε αρχικά τους πρώτους όρους της σειράς *Taylor* του εκθετικού παράγοντα $e^{-\varepsilon\tau}$ (*Σχήμα 2.1.2*),

```
In[•]:= s1 = Series[e^(-ε τ), {ε, 0, 2}];
        δημιουργία σειράς
        Style[Row[{"e^(-ε τ)=", s1}], Bold, 14, Blue]
        στυλ  γραμμή                  έντονοι χ···  μπλε
Out[•]= e^(-ε τ)=1 - τ ε + (τ^2 ε^2)/2 + O[ε]^3
```

Σχήμα 2.1.2: Η σειρά Taylor της $e^{-\varepsilon\tau}$

καθώς και τη σειρά *Taylor* του συνημιτόνου μεταβαλλόμενης φάσης $\cos\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau-\varphi\right)$ (*Σχήμα 2.1.3*).

```
In[•]:= s2 = Series[Cos[Sqrt[1 - ε^2] τ - ϕ], {ε, 0, 2}];
        δημιου···  συνημίτονο
        Style[Row[{"Cos(Sqrt[1 - ε^2] τ-ϕ)=", s2}], Bold, 14, Blue]
        στυλ  γραμμή                              έντονοι χ···  μπλε
Out[•]= Cos(Sqrt[1 - ε^2] τ-ϕ)=Cos[τ - ϕ] + 1/2 τ Sin[τ - ϕ] ε^2 + O[ε]^3
```

Σχήμα 2.1.3: Η σειρά Taylor της $\cos\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\tau-\varphi\right)$

Δεδομένου ότι η ακριβής λύση γράφεται ως το γινόμενο των δύο αυτών συναρτήσεων, ο πολλαπλασιασμός των αντίστοιχων αναπτύξεων οδηγεί στη σειρά *Taylor* της ακριβούς λύσης, η οποία παρουσιάζεται στο *Σχήμα 2.1.4*.

```
In[•]:= s3 = Series[A e^(-ε τ) Cos[Sqrt[1 - ε^2] τ - ϕ], {ε, 0, 2}];
        δημιουργία σει···  συνημίτονο
        Style[Row[{"Ae^(-ε τ)Cos(Sqrt[1 - ε^2] τ-ϕ)=", s3}], Bold, 14, Red]
        στυλ  γραμμή                                      έντονοι χ···  κόκκιν
Out[•]= Ae^(-ε τ)Cos(Sqrt[1 - ε^2] τ-ϕ)=A Cos[τ - ϕ] - A τ Cos[τ - ϕ] ε + 1/2 A (τ^2 Cos[τ - ϕ] + τ Sin[τ - ϕ]) ε^2 + O[ε]^3
```

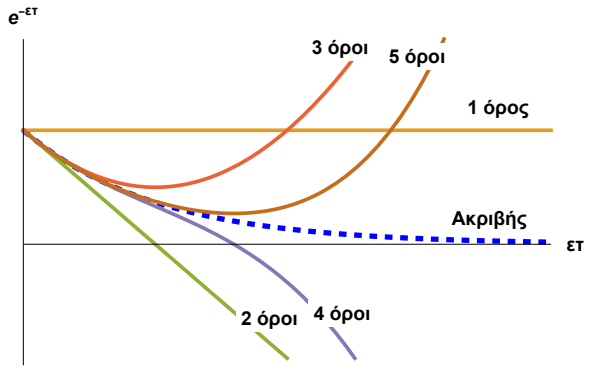
Σχήμα 2.1.4: Η σειρά Taylor της ακριβούς λύσης

Παρατηρούμε πως προκύπτει ακριβώς η ίδια μορφή με αυτή που δίνει η μέθοδος των κανονικών διαταραχών, στην (*2.1.25*).

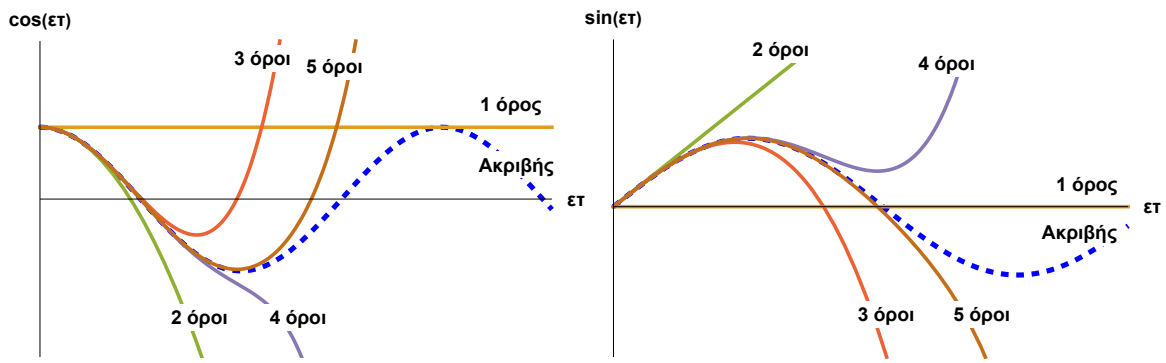
Άρα, το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα που παίρνουμε με τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, βασίζεται στην προσέγγιση των συναρτήσεων *cosine*, *sine*, και $e^{-\varepsilon\tau}$, με πεπερασμένο αριθμό όρων της σειράς *Taylor* ως προς $\varepsilon\tau$.

Είναι γνωστό πως οι σειρές *Taylor* των παραπάνω συναρτήσεων συγκλίνουν για κάθε τιμή των $\varepsilon\tau$. Ωστόσο, τα *Σχήματα 2.1.5*, *2.1.6* δείχνουν ότι και οι τρεις συναρτήσεις αυτές δεν μπορούν να

προσεγγιστούν ομοιόμορφα από πεπερασμένο αριθμό όρων της σειράς για όλες τις τιμές του $\varepsilon\tau$. Συνεπώς, οποιαδήποτε διαδικασία ανάπτυξης βασίζεται στην προσέγγισή τους με πεπερασμένο αριθμό όρων ενός αναπτύγματος ως προς $\varepsilon\tau$, είναι καταδικασμένη να αποτύχει για μεγάλες τιμές του τ.



Σχήμα 2.1.5: Προσέγγιση της συνάρτησης $e^{-\varepsilon\tau}$*, από πεπερασμένο αριθμό όρων της σειράς Taylor*



Σχήμα 2.1.6: Προσέγγιση των συναρτήσεων, $\cos(\varepsilon\tau)$ *και* $\sin(\varepsilon\tau)$ *από πεπερασμένο αριθμό όρων της σειράς Taylor*

Συνοψίζοντας, η αποτυχία της μεθόδου διαταραχών για μεγάλες τιμές του τ, οφείλεται στην ανάπτυξη των $e^{-\varepsilon\tau}$ και $\cos\left(\sqrt{1-\varepsilon^2}\tau-\varphi\right)$ σε δυνάμεις του ε. Η διαδικασία αυτή επιβάλλει τεχνητά τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης να παραμένει ίση με τη μονάδα, ανεξάρτητα από την παρουσία της απόσβεσης, ενώ στην πραγματικότητα η συχνότητα μεταβάλλεται από 1 σε $\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Ως αποτέλεσμα, η επίδραση της απόσβεσης δεν ενσωματώνεται στη φάση της ταλάντωσης, αλλά εμφανίζεται μέσω διορθωτικών όρων που αυξάνονται με τον χρόνο, οδηγώντας στην εμφάνιση αιώνιων όρων. Επομένως, οποιαδήποτε διαδικασία ασυμπτωτικής ανάπτυξης που δεν λαμβάνει υπόψη την εξάρτηση της συχνότητας από την παράμετρο ε, δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα έγκυρη για μεγάλους χρόνους.

2.2 Μη γραμμικές ταλαντώσεις

2.2.1 Η εξίσωση Duffing

Μελετώντας τις γραμμικές ταλαντώσεις, εισάγονται οι έννοιες της υπέρθεσης των λύσεων, του συντονισμού και των αιώνιων όρων. Αν όμως, προστεθεί ένας μη γραμμικός όρος στη γραμμική εξίσωση, έστω και πολύ μικρός, η εικόνα αλλάζει δραματικά. Η αρχή της υπέρθεσης δεν μπορεί πλέον να χρησιμοποιηθεί για να υπολογιστεί η εξαναγκασμένη απόκριση του συστήματος, όπως γίνεται στο γραμμικό σύστημα. Επιπλέον, η μόνιμη απόκριση εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, σε αντίθεση με το γραμμικό σύστημα, όπου η τελική απόκριση είναι ανεξάρτητη από αυτές.

Επίσης, η μέγιστη απόκριση, δεν εμφανίζεται κατ' ανάγκην κοντά στη φυσική συχνότητα του συστήματος, όπως συμβαίνει στο γραμμικό σύστημα, ή μπορεί να παρουσιαστεί συντονισμός ακόμα και όταν η συχνότητα διέγερσης απέχει από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Αυτά και πολλά άλλα φαινόμενα που είναι αποτελέσματα της μη γραμμικότητας, θα τα μελετήσουμε με τη μέθοδο κανονικών διαταραχών στο παρόν κεφάλαιο και με άλλες μεθόδους στα επόμενα κεφάλαια, ξεκινώντας αυτή τη μελέτη με την μη γραμμική **εξίσωση *Duffing***, που περιγράφει έναν ταλαντωτή με κυβική μη γραμμικότητα.

Η εξίσωση αυτή εισήχθη από τον Γερμανό μηχανικό *Georg Duffing* (*1861-1944*), ο οποίος το *1918* δημοσίευσε ένα εκτενές έργο αφιερωμένο στη μελέτη της. Έκτοτε, έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης έρευνας, τόσο για την ανάπτυξη αναλυτικών και προσεγγιστικών μεθόδων επίλυσης, όσο και για τη διερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς φυσικών συστημάτων.

Αν και τα περισσότερα φυσικά συστήματα δεν μπορούν να περιγραφούν με ακρίβεια από την εξίσωση *Duffing* σε όλο το φάσμα των παραμέτρων τους, αυτή αποτελεί ένα εξαιρετικό πρότυπο τόσο για ποιοτική ανάλυση όσο και για την εξαγωγή αναλυτικών προσεγγιστικών λύσεων.

Συχνά, η εξίσωση *Duffing* αποτελεί το πρώτο βήμα στη μετάβαση από ένα γραμμικό σε ένα μη γραμμικό σύστημα, και η γενική μορφή της είναι:

$$\ddot{x}+k_1\dot{x}+k_2x\pm k_3x^3=F(t) \qquad (2.2.1)$$

όπου k_1, k_2, k_3 θετικές σταθερές.

Στη συνέχεια θα εξεταστεί η εφαρμογή της σε φυσικά συστήματα, όπου η μη γραμμικότητα οφείλεται είτε σε **μηχανικά**, είτε σε **γεωμετρικά** αίτια.

Στα ελατήρια, για παράδειγμα, η μη γραμμικότητα προκύπτει από τη μηχανική συμπεριφορά του υλικού (μη γραμμική σχέση δύναμης-παραμόρφωσης), ενώ στο εκκρεμές η μη γραμμικότητα είναι γεωμετρική, καθώς απορρέει από τη μη γραμμική σχέση μεταξύ της γωνίας εκτροπής και της αποκαθιστάμενης ροπής.

2.2.2 Η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε τη **μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων**, η οποία δεν χρησιμοποιείται συνήθως αυτόνομα στις μεθόδους διαταραχών, αλλά σε συνδυασμό με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης που θα αναπτύξουμε στο κεφάλαιο των ιδιόμορφων διαταραχών.

Η μέθοδος βασίζεται στη λύση του μη διαταραγμένου προβλήματος, η οποία περιέχει αυθαίρετες σταθερές (παραμέτρους). Η βασική ιδέα είναι να αναζητήσουμε λύση της διαταραγμένης εξίσωσης με την ίδια μορφή όπως και στη μη διαταραγμένη περίπτωση, αλλά να επιτρέψουμε στις σταθερές αυτές να γίνουν αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου. Με άλλα λόγια, οι παράμετροι «μεταβάλλονται», γεγονός που δίνει και το όνομα της μεθόδου. Οι νέες αυτές συναρτήσεις καθορίζονται, επιβάλλοντας κατάλληλες συνθήκες, ώστε η ζητούμενη λύση να παραμένει όσο το δυνατόν πιο «κοντά» στη μορφή της λύσης του μη διαταραγμένου προβλήματος και παράλληλα να ικανοποιεί την αρχική διαφορική εξίσωση.

Για να εισαγάγουμε τη μέθοδο με τον πιο απλό και διαφανή τρόπο, την εφαρμόζουμε πρώτα στην αυτόνομη εξίσωση *Duffing* χωρίς απόσβεση

$$\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0 \tag{2.2.2}$$

που, για $\varepsilon=0$, έχει λύση

$$x(t)=\alpha\cos(t-\beta) \tag{2.2.3}$$

όπου α και β είναι σταθερές, οι οποίες συχνά αναφέρονται και ως παράμετροι.

Από την (2.2.3) προκύπτει ότι

$$\dot{x}(t)=-\alpha\sin(t-\beta) \tag{2.2.4}$$

Όταν $\varepsilon\neq 0$ υποθέτουμε ότι η λύση της *(2.2.2)* εξακολουθεί να δίνεται από την *(2.2.3)*, αλλά τώρα οι α, β είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή

$$x(t)=\alpha(t)\cos[t-\beta(t)] \tag{2.2.5}$$

Έτσι, έχουμε δύο εξισώσεις, τις *(2.2.2)* και *(2.2.5)*, με τρεις αγνώστους: $x(t),\alpha(t),\beta(t)$.

Επομένως, έχουμε την ελευθερία να επιβάλουμε μια τρίτη συνθήκη (τρίτη εξίσωση). Αυτή η συνθήκη είναι αυθαίρετη, αλλά πρέπει να είναι ανεξάρτητη των *(2.2.2)* και *(2.2.5)*. Προκειμένου να την βρούμε σκεφτόμαστε πως θα θέλαμε η *(2.2.5)* να "μοιάζει" όσο το δυνατό περισσότερο με την *(2.2.3)*. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει και οι αντίστοιχες παράγωγοι να έχουν παρόμοιες μορφές.

Παραγωγίζουμε την *(2.2.5)* ως προς t και παίρνουμε

$$\dot{x}(t)=-\alpha(t)\sin[t-\beta(t)]+\dot{\alpha}(t)\cos[t-\beta(t)]+\alpha(t)\dot{\beta}(t)\sin[t-\beta(t)] \tag{2.2.6}$$

Συγκρίνοντας την *(2.2.6)* με την *(2.2.4)*, πρέπει

$$\dot{\alpha}(t)\cos[t-\beta(t)]+\alpha(t)\dot{\beta}(t)\sin[t-\beta(t)]=0 \tag{2.2.7}$$

Παραγωγίζουμε πάλι την *(2.2.6)*, εφαρμόζοντας την απαίτηση *(2.2.7)*, και έχουμε

$$\ddot{x}(t)=-\alpha(t)\cos[t-\beta(t)]-\dot{\alpha}(t)\sin[t-\beta(t)]+\alpha(t)\dot{\beta}(t)\cos[t-\beta(t)] \qquad (2.2.8)$$

Αντικαθιστούμε τις *(2.2.5)* και *(2.2.8)* στην εξίσωση *(2.2.2)* και παίρνουμε

$$\dot{\alpha}(t)\sin[t-\beta(t)]-\alpha(t)\dot{\beta}(t)\cos[t-\beta(t)]=\varepsilon\alpha^3(t)\cos^3[t-\beta(t)] \qquad (2.2.9)$$

Παρατηρούμε πως οι *(2.2.7)* και *(2.2.9)* αποτελούν ένα σύστημα εξισώσεων ως προς $\dot{\alpha}(t)$ και $\dot{\beta}(t)$.

Πολλαπλασιάζουμε την *(2.2.7)* με $\cos[t-\beta(t)]$ και την *(2.2.9)* με $\sin(t-\beta(t))$, προσθέτουμε κατά μέλη τις προκύπτουσες εξισώσεις και βρίσκουμε

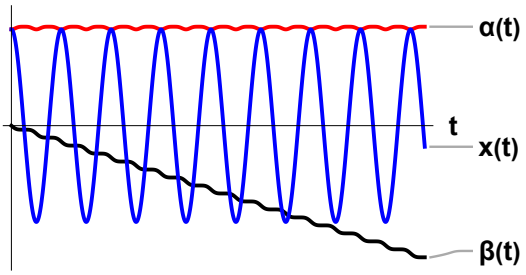
$$\dot{\alpha}(t)=\varepsilon\alpha^3(t)\cos^3[t-\beta(t)]\sin[t-\beta(t)] \qquad (2.2.10)$$

Αντικαθιστούμε την *(2.2.10)* στην *(2.2.7)*, λύνουμε ως προς $\dot{\beta}(t)$, και προκύπτει

$$\dot{\beta}(t)=-\varepsilon\alpha^2(t)\cos^4[t-\beta(t)] \qquad (2.2.11)$$

αν $\alpha(t)\neq 0$.

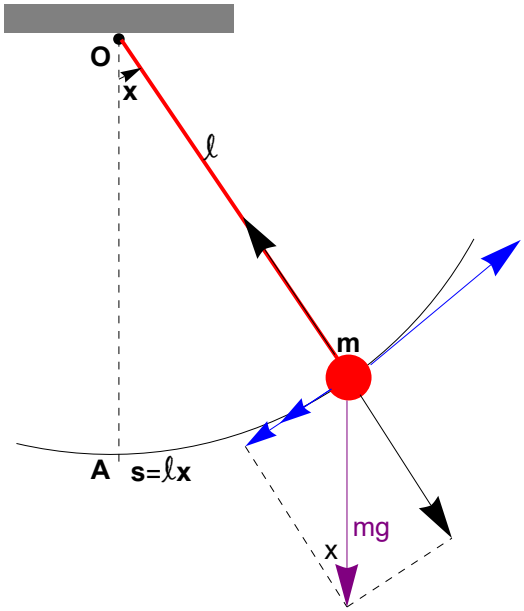
Έτσι, η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση *(2.2.2)*, ως προς *t*, έχει αντικατασταθεί από τις δύο εξισώσεις πρώτης τάξης *(2.2.10)* και *(2.2.11)*, ως προς $\alpha(t)$ και $\beta(t)$. Φυσικά, βλέπουμε πως οι εξισώσεις αυτές είναι πιο έντονα μη γραμμικές από την αρχική εξίσωση. Όμως, όταν το ε είναι πολύ μικρό, τα βασικά μέρη των $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ μεταβάλλονται πολύ πιο αργά από την $x(t)$, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.1*.



Σχήμα 2.2.1: Η μεταβολή των $\alpha(t),\beta(t),x(t)$ *ως προς τον χρόνο με* $\alpha(0)=1.5$, $\beta(0)=0$ *και* $\varepsilon=0.05$

Το γεγονός αυτό αξιοποιείται τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά. Αναλυτικά, χρησιμοποιείται στη μέθοδο της μεσοστάθμισης. Αριθμητικά, προτιμάται η επίλυση των μετασχηματισμένων εξισώσεων αντί της αρχικής, καθώς επιτρέπει τη χρήση μεγαλύτερου βήματος ολοκλήρωσης. Για τον λόγο αυτό, στην αστρονομία εφαρμόζεται η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων για τον προσδιορισμό των εξισώσεων των τροχιακών παραμέτρων, οι οποίες στη συνέχεια λύνονται αριθμητικά. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως «**ειδική μέθοδος διαταραχών**».

2.2.3 Το απλό εκκρεμές



Σχήμα 2.2.2: Το απλό εκκρεμές

Το απλό εκκρεμές αποτελεί το αρχέτυπο δυναμικό σύστημα που μελετάται στη μη γραμμική δυναμική. Οι μη γραμμικές του ιδιότητες μελετήθηκαν από τον *Rayleigh*, ενώ σχεδόν ολόκληρο το βιβλίο του *Duffing* ήταν αφιερωμένο σε αυτό. Αποτελείται, *Σχήμα 2.2.2*, από μια σημειακή μάζα, προσαρτημένη στο ένα άκρο αβαρούς άκαμπτης ράβδου, της οποίας το άλλο άκρο παραμένει σταθερό, έτσι ώστε το σύστημα να εκτελεί ταλάντωση.

Έστω m η μάζα, ℓ το μήκος της ράβδου, και x η γωνιακή απομάκρυνση της μάζας από τη θέση ισορροπίας (0A), η οποία μετριέται σε ακτίνια. Η μάζα διαγράφει τόξο $\boldsymbol{s=\ell x}$ πάνω σε κυκλική τροχιά ακτίνας ℓ, η οποία βρίσκεται σε κατακόρυφο επίπεδο. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα είναι:

◆ η **βαρυτική δύναμη** mg η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

μία κάθετη στην τροχιά (ή στην κατεύθυνση της κίνησης), που είναι αντίθετη προς την **τάση** $\boldsymbol{T}$ της ράβδου, και μία εφαπτομενική συνιστώσα, αντίθετη προς την κίνηση**,** ίση με $-mg\,sinx$.

◆ η **δύναμη τριβής** $-v\dfrac{ds}{dt}$, επίσης αντίθετη προς τη φορά της κίνησης, και

◆ η **διεγείρουσα (εξωτερική) δύναμη** $f\,cos\omega t$, η οποία έχει τη φορά της κίνησης.

Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του *Νεύτωνα*

$$\Sigma F = m\alpha$$

όπου μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στον εφαπτομενικό άξονα. Αυτό συμβαίνει επειδή μόνο οι αλλαγές στην ταχύτητα είναι σημαντικές και η μάζα αναγκάζεται να παραμείνει σε κυκλική τροχιά. Έτσι,

$$m\frac{d^2 s}{dt^2}=-mg\,sinx-v\frac{ds}{dt}+f\cos\omega t\Rightarrow m\ell\frac{d^2 x}{dt^2}=-mg\,sinx-v\ell\frac{dx}{dt}+f\cos\omega t$$

Διαιρούμε με το $m\ell$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}=-\frac{g}{\ell}sinx-\frac{v}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{f}{m\ell}\cos\omega t$$

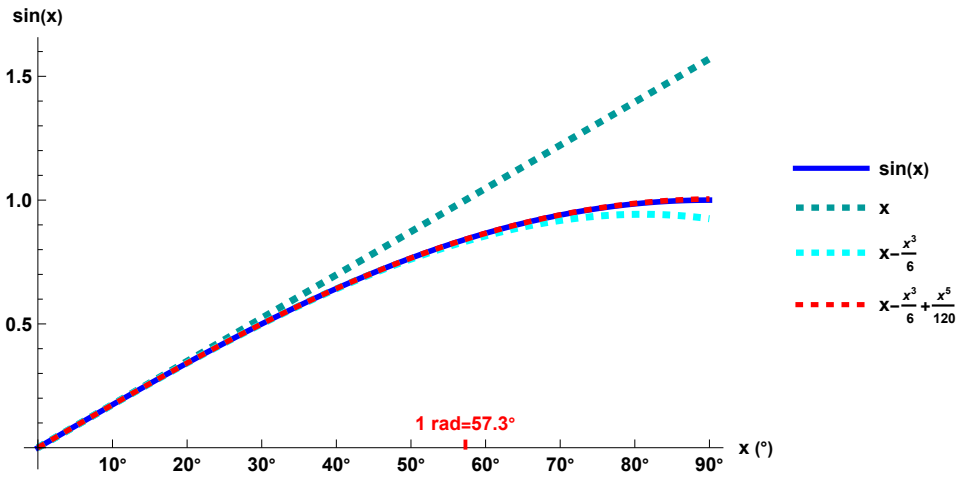
Θέτουμε $k=\frac{v}{m}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ και $F=\frac{f}{m\ell}$ και έχουμε τελικά

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega_0^2 sinx=F\cos\omega t \qquad (2.2.12)$$

Η εξίσωση *(2.2.12)* δεν μπορεί να λυθεί εύκολα, γι' αυτό παίρνουμε περιορισμό για το πλάτος x της ταλάντωσης, να είναι πολύ μικρό.

Το ανάπτυγμα του $\sin x$ σε σειρά *Taylor*, γύρω από το σημείο $x=0$, είναι:

$$sinx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\ldots$$



Σχήμα 2.2.3: Προσέγγιση του sinx με τους 3 πρώτους όρους της σειράς Taylor

Αν πάρουμε τον πρώτο όρο του παραπάνω αναπτύγματος, δηλαδή θεωρήσουμε $sinx\approx x$, για τιμές της γωνιακής απομάκρυνσης $|x|<0.35\,rad$ (περίπου 20°), η εξίσωση *(2.2.12)* γίνεται

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega_0^2 x=F\cos\omega t$$

η οποία παρατηρούμε πως είναι η γραμμική εξίσωση για την εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση.

Όμως, αν θέλουμε να προσεγγίσουμε το $\sin x$ για κάπως μεγαλύτερη γωνία απομάκρυνσης, δηλαδή για $|x|<1\,rad$ (περίπου 57°), όπως βλέπουμε στο *Σχήμα 2.2.3* , θα πάρουμε τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος *Taylor*, δηλαδή

$$sinx \approx x - \frac{x^3}{6}$$

και η *(2.2.12)* γίνεται:

$$\ddot{x} + k\,\dot{x} + \omega_0^2 x - \frac{1}{6}\omega_0^2 x^3 = F\cos\omega t \qquad (2.2.13)$$

όπου οι αριθμοί ω και F θεωρούμε πως είναι θετικοί, χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Η διέγερση είναι αρμονική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Παρατηρούμε πως η εξίσωση *(2.2.13)* είναι η εξίσωση *Duffing (2.2.1)*,

$$\ddot{x} + k_1\dot{x} + k_2 x - k_3 x^3 = F(t)$$

όπου η παράμετρος $k_3 = \frac{1}{6}\omega_0^2$.

Η εξίσωση *(2.2.13)* βλέπουμε πως διαφέρει από την γραμμική, μόνο στον όρο $-\frac{1}{6}\omega_0^2 x^3$, ο οποίος, της προσθέτει μια κυβική μη γραμμικότητα.

Θα δούμε, παρακάτω, πως αν και η εξίσωση βρίσκεται πολύ κοντά στη γραμμική, θεωρώντας τον μη γραμμικό όρο μικρό, τα φαινόμενα που παράγονται είναι διαφορετικά και ποικίλα.

Σημείωση

Στην περίπτωση του μη γραμμικού εκκρεμούς, δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση έχει περιοδικές λύσεις με την περίοδο T της διεγείρουσας δύναμης.

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων εξασφαλίζεται γενικά, μόνο η ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, για δεδομένες αρχικές συνθήκες, χωρίς να μπορεί να προβλεφθεί η περιοδικότητα της κίνησης.

Όμως, σε κάποιες περιπτώσεις, η ύπαρξη τέτοιων περιοδικών λύσεων μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά, με τη βοήθεια του θεωρήματος σταθερού σημείου του *Brouwer*.

Το θεώρημα αυτό, το οποίο γενικεύει την έννοια του μηδενισμού μιας συνεχούς συνάρτησης σε ανώτερες διαστάσεις, διατυπώνει ότι κάθε συνεχής απεικόνιση μιας πεπερασμένης, απλώς συνεκτικής περιοχής του Ευκλείδειου χώρου στον εαυτό της, διαθέτει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Εφαρμόζοντας την αρχή αυτή στο εκκρεμές, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η κατάσταση του συστήματος μετά από κάθε περίοδο T της διέγερσης, ορίζεται από μια απεικόνιση *Poincaré*. Ένα

σταθερό σημείο της απεικόνισης αυτής, αντιστοιχεί σε μια περιοδική λύση της εξίσωσης κίνησης, με περίοδο ίση με την περίοδο της διέγερσης.

Φυσικά, όπως θα δούμε παρακάτω αναλυτικά, έχουμε κι άλλες περιοδικές λύσεις, υποαρμονικές, ή υπεραρμονικές, αλλά στο παρόν κεφάλαιο, που θα εφαρμόσουμε κανονικές διαταραχές, θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις περιπτώσεις όπου η απόκριση και η διέγερση έχουν την ίδια περίοδο *T*.

2.2.4 Εξαναγκασμένες μη αποσβεννύμενες ταλαντώσεις εκτός συντονισμού

Για να κατανοήσουμε τον ρόλο της μη γραμμικότητας στη συμπεριφορά του συστήματος, θα εξετάσουμε αρχικά την εξίσωση του εκκρεμούς **χωρίς απόσβεση** και **εκτός συντονισμού**, με ασθενή μη γραμμικότητα. Ο όρος «συντονισμός» αναφέρεται στην περίπτωση κατά την οποία η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης προσεγγίζει ή συμπίπτει με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, οδηγώντας σε σημαντική αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης. Στην παρούσα ανάλυση, η διέγερση δεν βρίσκεται κοντά στην ιδιοσυχνότητα· συνεπώς, βρισκόμαστε στην περιοχή εκτός συντονισμού, όπου τα φαινόμενα της μη γραμμικότητας μπορούν να μελετηθούν χωρίς την εμφάνιση έντονα ενισχυμένων ταλαντώσεων.

Έτσι, στην εξίσωση *(2.2.13)*, θέτουμε $k=0$ και γίνεται

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x-\frac{1}{6}\omega_0^2 x^3=F\cos\omega t \qquad (2.2.14)$$

Επειδή η περίοδος της διεγείρουσας δύναμης είναι $\frac{2\pi}{\omega}$, για να κανονικοποιήσουμε την εξίσωση *(2.2.14)* θεωρούμε χαρακτηριστικό χρόνο $t_c=\frac{1}{\omega}$, οπότε η αδιάστατη μεταβλητή του χρόνου είναι

$$\tau=\frac{t}{t_c}=\frac{t}{\frac{1}{\omega}}=\omega t$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\omega\frac{dx}{d\tau}=\omega x'$$

$$\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\omega\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)=\omega\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)=\omega^2 x''$$

Αντικαθιστούμε στην *(2.2.14)*

$$\omega^2 x''+\omega_0^2 x-\frac{1}{6}\omega_0^2 x^3=F\cos\tau$$

Διαιρούμε με ω^2, και θέτοντας $\Omega=\frac{\omega_0}{\omega}$ και $\Gamma=\frac{F}{\omega^2}$ έχουμε τελικά

$$x''+\Omega^2 x-\frac{1}{6}\Omega^2 x^3=\Gamma\cos\tau \qquad (2.2.15)$$

Για $\frac{1}{6}\Omega^2=\varepsilon$, όπου $0<\varepsilon\ll 1$, η *(2.2.15)* γίνεται

$$x''+\Omega^2 x-\varepsilon x^3=\Gamma\cos\tau \qquad (2.2.16)$$

Η εξίσωση *(2.2.16)* παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με τη γραμμική εξίσωση της εξαναγκασμένης μη αποσβεννύμενης ταλάντωσης, με μια μικρή μη γραμμική διαταραχή. Η ανάλυση των γραμμικών ταλαντωτών (*Παράρτημα Α*), μας επιτρέπει να προβλέψουμε ότι η λύση της *(2.2.16)* θα αποτελείται από έναν παροδικό και έναν μόνιμο όρο.

Επειδή, όπως αναφέραμε στη *Σημείωση* της προηγούμενης ενότητας, το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην περιοδική λύση που έχει ίδια περίοδο με τη διεγείρουσα δύναμη, θα αγνοήσουμε τον παροδικό όρο και θα υποθέσουμε ότι η μόνιμη λύση της εξίσωσης *(2.2.16)* είναι περιοδική με περίοδο *2π*, της διεγείρουσας δύναμης $\Gamma\cos\tau$. Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τη **μέθοδο των κανονικών διαταραχών**, προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτή την περιοδική λύση, και να μελετήσουμε πώς η μικρή μη γραμμικότητα επηρεάζει το πλάτος και τη φάση της ταλάντωσης.

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots \qquad (2.2.17)$$

Επίσης, επειδή όπως είπαμε, ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με περίοδο *2π*, θα ισχύει

$$x(\tau+2\pi,\varepsilon)=x(\tau,\varepsilon)$$

Άρα, από την *(2.2.17)* έπεται πως

$$x_n(\tau+2\pi,\varepsilon)=x_n(\tau,\varepsilon),\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (2.2.18)$$

Αντικαθιστούμε την *(2.2.17)* στην *(2.2.16)*, και έχουμε

$$(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)''+\Omega^2(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)-\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)^3=\Gamma\cos\tau\Rightarrow$$

$$(x_0''+\varepsilon x_1''+\varepsilon^2 x_2''+\ldots)+\Omega^2(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)-\varepsilon(x_0^3+3\varepsilon x_0^2 x_1+\ldots)=\Gamma\cos\tau\Rightarrow$$

$$x_0''+\Omega^2 x_0+\varepsilon(x_1''+\Omega^2 x_1-x_0^3)+\varepsilon^2(x_2''+\Omega^2 x_2-3x_0^2 x_1)+\ldots=\Gamma\cos\tau$$

Εξισώνουμε τους όρους ίδιας τάξης του *ε*, και χρησιμοποιώντας την *(2.2.18)*, προκύπτει μια άπειρη ακολουθία προβλημάτων αρχικών τιμών

$$O(1):\begin{cases} x_0''+\Omega^2 x_0=\Gamma\cos\tau, & \tau>0 \\ x_0(\tau+2\pi)=x_0(\tau) \end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\ \begin{cases} x_1'' + \Omega^2 x_1 = x_0^3, & \tau > 0 \\ x_1(\tau + 2\pi) = x_1(\tau) \end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \begin{cases} x_2'' + \Omega^2 x_2 = 3 x_0^2 x_1, & \tau > 0 \\ x_2(\tau + 2\pi) = x_2(\tau) \end{cases}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Θα λύσουμε τα πρώτα τρία, για να υπολογίσουμε τον πρωτεύοντα όρο, τον πρώτο διορθωτικό, και τον δεύτερο διορθωτικό όρο.

Υποθέτουμε πως ο ***Ω* δεν είναι ακέραιος.**

- ***Λύση του O(1)***

Η εξίσωση είναι μια γραμμική ΣΔΕ 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενής, με λύση

$$x_0(\tau) = x_{0_{ομ}}(\tau) + x_{0_{μερ}}(\tau)$$

όπου $x_{0_{ομ}}(\tau)$ η λύση της ομογενούς εξίσωσης και $x_{0_{μερ}}(\tau)$ μια μερική λύση της μη ομογενούς.

Η λύση της ομογενούς, είναι

$$x_{0_{ομ}} = \alpha_0 \cos \Omega\tau + b_0 \sin \Omega\tau$$

Θα βρούμε μια μερική λύση της μη ομογενούς, με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Επειδή θεωρήσαμε πως ο *Ω* δεν είναι ακέραιος, ο όρος διέγερσης της εξίσωσης δεν ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς, άρα αναζητάμε μια μερική λύση στη μορφή

$$x_{0_{μερ}}(\tau) = C \cos \tau + D \sin \tau$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές, εφαρμόζουμε στην εξίσωση και έχουμε

$$-C \cos \tau - D \sin \tau + \Omega^2 C \cos \tau + \Omega^2 D \sin \tau = \Gamma \cos \tau$$

από όπου προκύπτει πως

$$\text{D=0 και } C = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$x_{0_{μερ}}(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos \tau$$

και για τη λύση του *O(1)* έχουμε

$$x_0(\tau) = \alpha_0 \cos \Omega\tau + b_0 \sin \Omega\tau + \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \cos \tau \qquad (2.2.19)$$

με

$$x_0(\tau + 2\pi) = x_0(\tau)$$

Η ομογενής λύση ταλαντώνεται με τη φυσική συχνότητα Ω, ενώ η εξαναγκασμένη με τη συχνότητα *1* της διέγερσης. Για να υπάρξει μόνιμη περιοδική λύση που να έχει την ίδια περίοδο (2π) με τη διέγερση, οι όροι της ομογενούς πρέπει να μηδενιστούν, δηλαδή,

$$\alpha_0 = b_0 = 0$$

Άρα, ο πρωτεύων όρος είναι τελικά

$$x_0(\tau) = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1}\cos\tau \qquad (2.2.20)$$

Λύση του O(ε)

Αντικαθιστούμε τον πρωτεύοντα όρο και η εξίσωση του προβλήματος $O(\varepsilon)$ γίνεται

$$x_1'' + \Omega^2 x_1 = x_0^3 \Rightarrow x_1'' + \Omega^2 x_1 = \frac{\Gamma^3}{(\Omega^2 - 1)^3}\cos^3\tau$$

Θα εφαρμόσουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos^3\tau = \frac{1}{4}\cos 3\tau + \frac{3}{4}\cos\tau$$

και η εξίσωση για τον πρώτο διορθωτικό όρο γίνεται

$$x_1'' + \Omega^2 x_1 = \frac{\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^3}(3\cos\tau + \cos 3\tau)$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών, όπως κάναμε παραπάνω, και η λύση της είναι

$$x_1(\tau) = \alpha_1\cos\Omega\tau + b_1\sin\Omega\tau + \frac{3\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^4}\cos\tau + \frac{\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^3(\Omega^2 - 9)}\cos 3\tau \qquad (2.2.21)$$

με

$$x_1(\tau + 2\pi) = x_1(\tau)$$

Για τον ίδιο λόγο με τον πρωτεύοντα όρο, οι συντελεστές της ομογενούς λύσης μηδενίζονται, δηλαδή

$$\alpha_1 = b_1 = 0$$

Έτσι, τελικά

$$x_1(\tau) = \frac{3\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^4}\cos\tau + \frac{\Gamma^3}{4(\Omega^2 - 1)^3(\Omega^2 - 9)}\cos 3\tau \qquad (2.2.22)$$

Λύση του O(ε²)

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, βρίσκουμε τη λύση του $O(\varepsilon^2)$

$$x_2(\tau) = \frac{3\Gamma^5(5\Omega^2 - 41)}{8(\Omega^2 - 1)^7(\Omega^2 - 9)}\cos\tau + \frac{3\Gamma^5(5\Omega^2 - 29)}{16(\Omega^2 - 1)^6(\Omega^2 - 9)^2}\cos 3\tau + \frac{3\Gamma^5}{16(\Omega^2 - 1)^5(\Omega^2 - 9)(\Omega^2 - 25)}\cos 5\tau$$

(2.2.23)

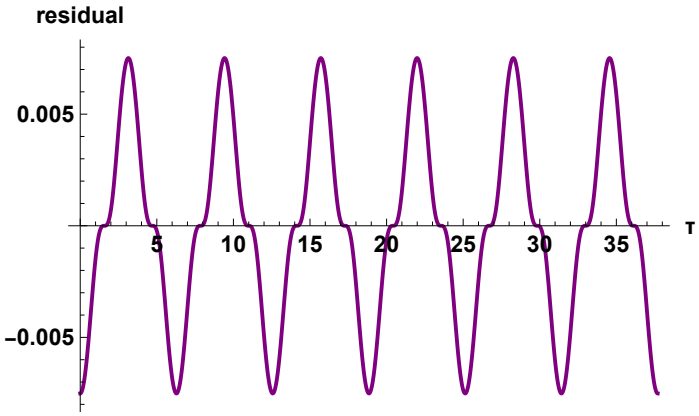
Επομένως η προσεγγιστική λύση είναι

$$x(\tau)=\frac{\Gamma}{\Omega^2-1}\cos\tau+\varepsilon\left(\frac{3\Gamma^3}{4(\Omega^2-1)^4}\cos\tau+\frac{\Gamma^3}{4(\Omega^2-1)^3(\Omega^2-9)}\cos 3\tau\right)$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{3\Gamma^5(5\Omega^2-41)}{8(\Omega^2-1)^7(\Omega^2-9)}\cos\tau+\frac{3\Gamma^5(5\Omega^2-29)}{16(\Omega^2-1)^6(\Omega^2-9)^2}\cos 3\tau+\frac{3\Gamma^5}{16(\Omega^2-1)^5(\Omega^2-9)(\Omega^2-25)}\cos 5\tau\right)$$

$$+O(\varepsilon^3) \qquad (2.2.24)$$

με $\varepsilon=\frac{1}{6}\Omega^2$. Αν υπολογίσουμε τους επόμενους διορθωτικούς όρους, αυτοί θα είναι τάξης $O(\varepsilon^3)$, $O(\varepsilon^4)$,…, και παρατηρώντας τη σειρά *(2.2.24)*, καταλαβαίνουμε πως θα περιέχουν τις αρμονικές $\cos 7\tau, \cos 9\tau, \ldots$



Σχήμα 2.2.4: Το υπόλοιπο όταν Ω=1.5, ε=0.2

- ***Επιτυχία της μεθόδου***

Το **υπόλοιπο (residual)** προκύπτει αντικαθιστώντας την προσεγγιστική λύση στην αρχική διαφορική εξίσωση. Εκφράζει το κατά πόσο η λύση ικανοποιεί την εξίσωση, δηλαδή το «σφάλμα εξίσωσης». Όσο μικρότερο είναι το υπόλοιπο, τόσο ακριβέστερη θεωρείται η προσέγγιση.

Βλέπουμε στο *Σχήμα 2.2.4* πως το υπόλοιπο παραμένει μικρό και περιοδικό, γεγονός που δείχνει ότι η προσεγγιστική λύση ικανοποιεί πολύ καλά τη διαφορική εξίσωση και ότι η μέθοδος των κανονικών διαταραχών είναι επιτυχής εκτός συντονισμού.

- ***Αποτυχία της μεθόδου***

Για $\Omega\notin\mathbb{Z}$, υπολογίσαμε με επιτυχία την μόνιμη περιοδική λύση με περίοδο 2π της διεγείρουσας δύναμης.

Όμως, όταν το Ω είναι **θετικός ακέραιος**, η μέθοδος των κανονικών διαταραχών αποτυγχάνει, για τους εξής λόγους:

Στο ανάπτυγμα *(2.2.24)* της προσεγγιστικής λύσης βλέπουμε πως όλοι οι όροι έχουν παρονομαστές που μπορεί να γίνουν πολύ μικροί. Αυτοί οι όροι λέγονται **μικροί διαιρέτες (small divisors)**, και προκύπτουν όταν $\boldsymbol{\Omega \approx 1,3,5,\ldots}$.

Αν το $\boldsymbol{\Omega = 1,3,5,\ldots}$ οι όροι της λύσης απειρίζονται, άρα δεν μπορούμε να έχουμε περιοδική λύση, και λέμε ότι έχουμε **συνθήκες συντονισμού**. Με άλλα λόγια, για $\Omega = 1$, ο x_0 περιέχει τον αιώνιο όρο $\tau \cos \tau$, για $\Omega = 3$, ο x_1 περιέχει τον $\tau \cos 3\tau$, για $\Omega = 5$, ο x_2 περιέχει τον $\tau \cos 5\tau$ κ.ο.κ.

Αλλά ακόμα κι αν το Ω βρίσκεται κοντά σε αυτές τις περιττές ακέραιες τιμές, δηλαδή έχουμε **συνθήκες κοντά στον συντονισμό**, η προσεγγιστική λύση δεν συγκλίνει ικανοποιητικά στην ακριβή λύση, γιατί κάποιοι όροι γίνονται πολύ μεγάλοι, λόγω των μικρών διαιρετών.
Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να κρατήσουμε μόνο λίγους όρους από το ανάπτυγμα *(2.2.24)*, οπότε η ακρίβεια μειώνεται.

Η προέλευση των παραπάνω συνθηκών συντονισμού και των μικρών διαιρετών μπορεί να κατανοηθεί από τη δομή της μη γραμμικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα, στην εξίσωση *(2.2.16)*, η διεγείρουσα δύναμη έχει συχνότητα *1*, οπότε θα έχουμε συνθήκες κοντά στον συντονισμό της γραμμικής εξίσωσης όταν $\boldsymbol{\Omega \approx 1}$. Ωστόσο, ο μη γραμμικός όρος x^3 δημιουργεί πρόσθετες αρμονικές συνιστώσες με συχνότητες *3,5,…* που επανεμφανίζονται στην εξίσωση της επόμενης τάξης ως όροι διέγερσης. Με τον τρόπο αυτό, η μη γραμμικότητα λειτουργεί ως μηχανισμός εσωτερικής ανατροφοδότησης, οδηγώντας στην εμφάνιση μη γραμμικών συντονισμών, όταν η ιδιοσυχνότητα Ω του συστήματος συμπίπτει ή βρίσκεται κοντά σε κάποια από τις αρμονικές συχνότητες που παράγονται από τη μη γραμμικότητα.

Αν, τέλος, $\boldsymbol{\Omega = 2,4,6,\ldots}$, η μέθοδος κανονικών διαταραχών αποτυγχάνει, επίσης, αφού όλες οι λύσεις *(2.2.19)*, *(2.2.21)*, και λοιπά για τους $x_0, x_1, \ldots$, έχουν περίοδο 2π για όλους τους συντελεστές $\alpha_0, b_0, \alpha_1, b_1, \ldots$. Έτσι, δεν έχουμε τη δυνατότητα να τους υπολογίσουμε και καταφεύγουμε σε άλλες μεθόδους, όπως θα δούμε παρακάτω.

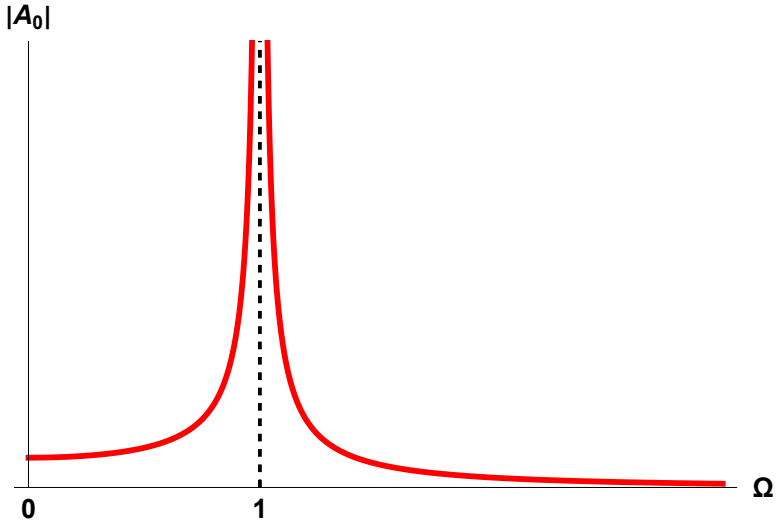
Για να συνοψίσουμε όλα τα παραπάνω, σχεδιάζουμε ένα διάγραμμα απόκρισης στο *Σχήμα 2.2.5*.

Είναι ιδιαίτερα διαφωτιστικό να παραστήσουμε γραφικά το πλάτος της απόκρισης

$$A_0 = \frac{\Gamma}{\Omega^2 - 1} \qquad (2.2.25)$$

ως συνάρτηση της φυσικής συχνότητας Ω των ελεύθερων ταλαντώσεων.

Ωστόσο, η αλλαγή πρόσημου του A_0 αντιστοιχεί απλώς σε μετατόπιση φάσης κατά π στον χρόνο τ, οπότε το απόλυτο μέγεθος του A_0 είναι καλύτερο μέτρο της απόκρισης του συστήματος στη διέγερση με περίοδο $T = 2\pi$ από ό,τι το ίδιο το A_0.



Σχήμα 2.2.5: Διάγραμμα απόκρισης στο επίπεδο $(\Omega,|A_0|)$, με $\Gamma=0.2$

Όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.5*, μακριά από τον συντονισμό (Ω επαρκώς διαφορετικό από *1*), το πλάτος της προσεγγιστικής λύσης παραμένει πεπερασμένο και ομαλό. Αυτό επιβεβαιώνει ότι οι αιώνιοι όροι έχουν εξαλειφθεί και ότι η λύση που προκύπτει με τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών είναι περιοδική και αξιόπιστη.

Αντίθετα, όταν η συχνότητα διέγερσης πλησιάζει τη φυσική συχνότητα του συστήματος ($\boldsymbol{\Omega\approx 1}$), το πλάτος αυξάνεται απότομα. Η συμπεριφορά αυτή συνδέεται με την εμφάνιση μικρών διαιρετών, όπως ο όρος Ω^2-1 στο ανάπτυγμα της λύσης *(2.2.24)*, γεγονός που σηματοδοτεί την απώλεια εγκυρότητας της περιοδικής προσεγγιστικής λύσης. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί στον **κύριο συντονισμό (primary resonance)**, καθώς συμπίπτει με τη συνθήκη συντονισμού του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος, ο οποίος θα αποτελέσει το αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

2.2.5 Εξαναγκασμένες μη αποσβεννύμενες ταλαντώσεις κοντά στον συντονισμό με ασθενή διέγερση

Στην περιοχή του κύριου συντονισμού, η μέθοδος των κανονικών διαταραχών δεν είναι η πλέον κατάλληλη για την κατασκευή μιας απλής περιοδικής λύσης, καθώς εμφανίζονται αιώνιοι όροι που αυξάνονται με τον χρόνο. Ωστόσο, η παρουσία αυτών των όρων παρέχει πολύτιμη πληροφορία για τη δυναμική του συστήματος.

Συγκεκριμένα, μέσω της ανάλυσης των αιώνιων όρων και της επιβολής συνθηκών περιοδικότητας, μπορούμε να πραγματοποιήσουμε **ποιοτική και ποσοτική ανάλυση της εξέλιξης του πλάτους** της ταλάντωσης, αποκαλύπτοντας τον μηχανισμό μέσω του οποίου η ασθενής μη γραμμικότητα περιορίζει την αύξηση του πλάτους σε σύγκριση με τη γραμμική περίπτωση.

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, πως η εξίσωση *(2.2.14)* χωρίς απόσβεση με διεγείρουσα δύναμη για το εκκρεμές,

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x-\frac{1}{6}\omega_0^2 x^3=F\cos\omega t$$

γίνεται η γραμμικοποιημένη εξίσωση *(2.2.16)*

$$x''+\Omega^2 x-\varepsilon x^3=\Gamma\cos\tau$$

όπου $\tau=\omega t$, $\Omega=\frac{\omega_0}{\omega}$, $\Gamma=\frac{F}{\omega^2}$ και $\varepsilon=\frac{1}{6}\Omega^2$, με $0<\varepsilon\ll 1$.

Τώρα, ενδιαφερόμαστε για ασθενή διέγερση, κοντά στον κύριο συντονισμό ($\Omega\approx 1$). Άρα, θέτουμε $\Gamma=\varepsilon\gamma$, με $\gamma>0$, και $\Omega^2=1+\varepsilon\beta$, για να είναι η ιδιοσυχνότητα του συστήματος κοντά στην συχνότητα του διεγέρτη.

Η β λέγεται **παράμετρος αποσυντονισμού** (**detuning parameter**), και μετρά πόσο κοντά βρίσκεται η εξωτερική συχνότητα στη φυσική συχνότητα του συστήματος.

Επιλέγουμε τις παραμέτρους με βάση τον **διακεκριμένο περιορισμό (distinguished limit),** ώστε η μη γραμμικότητα και η εγγύτητα στο συντονισμό να είναι συγκρίσιμες σε μέγεθος για μικρές τιμές του ε. Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζουμε ότι και τα δύο φαινόμενα επηρεάζουν τη λύση στην ίδια τάξη προσέγγισης.

Έτσι, η *(2.2.16)* γίνεται

$$x''+(1+\varepsilon\beta)x-\varepsilon x^3=\varepsilon\gamma\cos\tau\Rightarrow$$

$$x''+x=\varepsilon(\gamma\cos\tau-\beta x+x^3) \qquad (2.2.26)$$

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots \qquad (2.2.27)$$

Επίσης, επειδή όπως είπαμε, ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με περίοδο 2π, θα ισχύει

$$x(\tau+2\pi,\varepsilon)=x(\tau,\varepsilon)$$

Άρα, από την *(2.2.27)* έπεται πως

$$x_n(\tau+2\pi,\varepsilon)=x_n(\tau,\varepsilon),\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (2.2.28)$$

Αντικαθιστούμε την *(2.2.27)* στην *(2.2.26)*, και έχουμε

$$(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)''+(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)=\varepsilon\left[\gamma\, cos\tau-\beta(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)+(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)^3\right]\Rightarrow$$

$$(x_0''+\varepsilon x_1''+\varepsilon^2 x_2''+\ldots)+(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)=\varepsilon\left[\gamma\, cos\tau-\beta(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots)+(x_0^3+3\varepsilon x_0^2 x_1+\ldots)\right]\Rightarrow$$

$$x_0''+x_0+\varepsilon(x_1''+x_1)+\varepsilon^2(x_2''+x_2)=\varepsilon(\gamma\, cos\tau-\beta x_0+x_0^3)+\varepsilon^2(3x_0^2 x_1-\beta x_1)$$

Εξισώνουμε τους όρους ίδιας τάξης του ε, και χρησιμοποιώντας την *(2.2.28)*, προκύπτει μια άπειρη ακολουθία προβλημάτων αρχικών τιμών

$$O(1):\ \begin{cases} x_0''+x_0=0, & \tau>0 \\ x_0(\tau+2\pi)=x_0(\tau) \end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\ \begin{cases} x_1''+x_1=\gamma\cos\tau-\beta x_0+x_0^3, & \tau>0 \\ x_1(\tau+2\pi)=x_1(\tau) \end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \begin{cases} x_2''+x_2=3x_0^2x_1-\beta x_1, & \tau>0 \\ x_2(\tau+2\pi)=x_2(\tau) \end{cases}$$

$$\cdots$$

Από το $O(1)$, έχουμε τον πρωτεύοντα όρο

$$x_0=\alpha_0\cos\tau+b_0\sin\tau \tag{2.2.29}$$

για κάποιες σταθερές α_0, b_0.

Η λύση *(2.2.29)* ικανοποιεί την περιοδική συνθήκη $x_0(\tau+2\pi)=x_0(\tau)$ για κάθε α_0, b_0.

Αντικαθιστούμε την *(2.2.29)* στο $O(\varepsilon)$, εφαρμόζοντας ταυτόχρονα τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos^3\tau=\frac{3}{4}\cos\tau+\frac{1}{4}\cos 3\tau \quad \textit{και} \quad \sin^3\tau=\frac{3}{4}\sin\tau-\frac{1}{4}\sin 3\tau$$

$$\cos^2\tau\sin\tau=\frac{1}{4}(\sin\tau+\sin 3\tau) \quad \text{και} \quad \sin^2\tau\cos\tau=\frac{1}{4}(\cos\tau-\cos 3\tau)$$

και έχουμε

$$x_1''+x_1=\gamma\cos\tau-\beta(\alpha_0\cos\tau+b_0\sin\tau)+(\alpha_0\cos\tau+b_0\sin\tau)^3$$

$$=\gamma\cos\tau-\beta\alpha_0\cos\tau-\beta b_0\sin\tau+\alpha_0^3\cos^3\tau+b_0^3\sin^3\tau+3\alpha_0^2\cos^2\tau\, b_0\sin\tau+3\alpha_0\cos\tau\, b_0^2\sin^2\tau$$

$$=\gamma\cos\tau-\beta\alpha_0\cos\tau-\beta b_0\sin\tau+\frac{1}{4}\alpha_0^3(3\cos\tau+\cos 3\tau)+\frac{1}{4}b_0^3(3\sin\tau-\sin 3\tau)$$

$$+\frac{3}{4}\alpha_0^2 b_0(\sin\tau+\sin 3\tau)+\frac{3}{4}\alpha_0 b_0^2(\cos\tau-\cos 3\tau)$$

$$=\left(\gamma-\beta\alpha_0+\frac{3}{4}\alpha_0^3+\frac{3}{4}\alpha_0 b_0^2\right)\cos\tau+\left(-\beta b_0+\frac{3}{4}b_0^3+\frac{3}{4}\alpha_0^2 b_0\right)\sin\tau$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\cos 3\tau+\frac{1}{4}b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\sin 3\tau$$

$$=\left\{\gamma+\alpha_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}\cos\tau+b_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\sin\tau$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\cos 3\tau+\frac{1}{4}b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\sin 3\tau$$

Έτσι το $O(\varepsilon)$ είναι

$$x_1''+x_1=\left\{\gamma+\alpha_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}\cos\tau+b_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\sin\tau$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\cos 3\tau+\frac{1}{4}b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\sin 3\tau$$

$$x_1(\tau+2\pi)=x_1(\tau)$$

Από τη μορφή της εξίσωσης του πρώτου διορθωτικού όρου φαίνεται ότι το μέλος του εξαναγκασμού περιέχει τους όρους

$$\left\{\gamma+\alpha_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}\cos\tau \quad \text{και } b_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\sin\tau$$

που έχουν την ίδια συχνότητα με τη θεμελιώδη λύση της ομογενούς εξίσωσης. Επομένως, θα προκύψει συντονισμός και η λύση $x_1(\tau)$ θα περιέχει τους αιώνιους όρους, $\tau\sin\tau$ και $\tau\cos\tau$, άρα δεν θα είναι περιοδική, όπως απαιτεί η συνθήκη που έχουμε θέσει.

Για τον λόγο αυτό, οι συντελεστές των $\sin\tau$ και $\cos\tau$ πρέπει να μηδενιστούν.

Επομένως, πρέπει

$$\begin{cases}\gamma+\alpha_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=0\\ b_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=0\end{cases}$$

ή

$$\begin{cases}\alpha_0\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=\gamma\\ b_0\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=0\end{cases} \qquad (2.2.30)$$

Από το σύστημα *(2.2.30)* παίρνουμε

$$b_0=0 \;\; \text{και } \alpha_0(\beta-\frac{3}{4}\alpha_0^2)=\gamma$$

Έτσι, ο πρωτεύων όρος *(2.2.19)* γίνεται

$$x_0=\alpha_0\cos\tau$$

και η εξίσωση του $O(\varepsilon)$ είναι

$$x_1''+x_1=\frac{1}{4}\alpha_0^3\cos 3\tau$$

που έχει λύση με την μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών

$$x_1(\tau)=\alpha_1\cos\tau+b_1\sin\tau-\frac{1}{32}\alpha_0^3\cos 3\tau$$

όπου α_1, b_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αντικαθιστώντας την $x_1(\tau)$ στο $O(\varepsilon^2)$, και για να ικανοποιείται η απαίτηση, η $x_2(\tau)$ να είναι *2π*-περιοδική, δηλαδή να μην υπάρχουν αιώνιοι όροι, προκύπτουν εξισώσεις για τον προσδιορισμό των α_1, b_1. Σε αυτό το στάδιο, όπως και στα επόμενα, οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμικές, και η διαδικασία γίνεται απλούστερη.

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών στον κύριο συντονισμό, προκύπτει η ακόλουθη προσεγγιστική λύση

$$x(\tau)=\alpha_0\cos\tau+\varepsilon\left(\alpha_1 cos\tau+b_1\sin\tau-\frac{1}{32}\alpha_0^3\cos 3\tau\right)+O(\varepsilon^2)$$

Ένα πρώτο σχόλιο που μπορούμε να κάνουμε, είναι πως ο πρωτεύων όρος x_0 της απόκρισης, είναι στην ίδια φάση με τη διεγείρουσα δύναμη, αν το πλάτος α_0 έχει ίδιο πρόσημο με τη δύναμη ή σε αντίθετη φάση (διαφορά φάσης 180º), αν το πλάτος α_0 έχει αντίθετο πρόσημο από τη δύναμη, επειδή $b_0=0$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο μη γραμμικός όρος της εξίσωσης είναι μια περιττή συνάρτηση του *x*.

2.2.5.1 Η εξίσωση του πλάτους

Στη συνέχεια, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του **πλάτους** της ταλάντωσης **κοντά στον κύριο συντονισμό**, επειδή το βασικό χαρακτηριστικό της μη γραμμικής ταλάντωσης είναι ότι το πλάτος δεν αυξάνεται απεριόριστα, αλλά ρυθμίζεται από τη μη γραμμικότητα. Για τον σκοπό αυτό, μελετάμε την αλγεβρική εξίσωση που προέκυψε από τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, η οποία συνδέει το πλάτος της περιοδικής λύσης με τις παραμέτρους του συστήματος:

$$\alpha_0\left(\beta-\frac{3}{4}\alpha_0^2\right)=\gamma \qquad (2.2.31)$$

όπου οι παράμετροι *β* και *γ* εκφράζουν την απόκλιση από τη συχνότητα συντονισμού και το μέτρο της εξωτερικής διέγερσης, αντίστοιχα.

Επειδή θέσαμε $\varepsilon=\frac{1}{6}\Omega^2$, $\Omega=\frac{\omega_0}{\omega}$, έπεται πως $\varepsilon=\frac{\omega_0^2}{6\omega^2}$. Επίσης, $\Omega^2=1+\varepsilon\beta\Rightarrow\frac{\omega_0^2}{\omega^2}=1+\frac{\omega_0^2}{6\omega^2}\beta$

Έτσι,

$$\beta=\frac{6(\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2} \qquad (2.2.32)$$

και επειδή $\Gamma=\varepsilon\gamma\Rightarrow\Gamma=\frac{\omega_0^2}{6\omega^2}\gamma\Rightarrow\frac{F}{\omega^2}=\frac{\omega_0^2}{6\omega^2}\gamma\Rightarrow$

$$\gamma=\frac{6F}{\omega_0^2} \tag{2.2.33}$$

και η εξίσωση (2.2.31) του πλάτους γίνεται στις αρχικές παραμέτρους

$$\alpha_0\left[\frac{6(\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}-\frac{3}{4}\alpha_0^2\right]=\frac{6F}{\omega_0^2}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{8}\omega_0^2\alpha_0^3+(\omega^2-\omega_0^2)\alpha_0=-F \tag{2.2.34}$$

όπου

$$f(\alpha_0)=\frac{1}{8}\omega_0^2\alpha_0^3+(\omega^2-\omega_0^2)\alpha_0 \tag{2.2.35}$$

με

$$\frac{df(\alpha_0)}{d\alpha_0}=\frac{3}{8}\omega_0^2\alpha_0^2+(\omega^2-\omega_0^2) \tag{2.2.36}$$

Μέσω ανάλυσης της εξίσωσης (2.2.34), μπορούμε να περιγράψουμε τη μεταβολή του πλάτους, την εμφάνιση πολλαπλών λύσεων και τη φύση των μόνιμων ταλαντώσεων.

Οι λύσεις της, μπορούν να προσδιοριστούν γραφικά, ως η τομή των γραφημάτων των συναρτήσεων

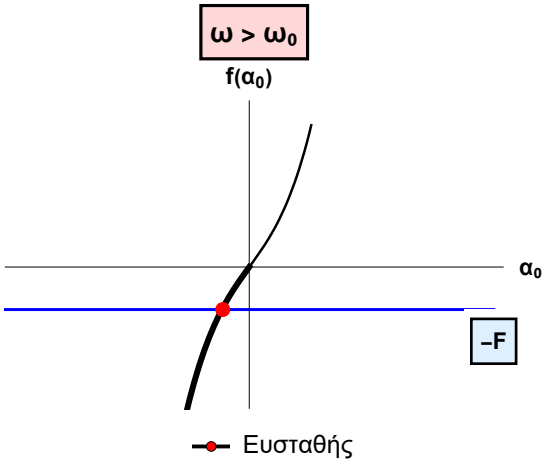
$$f(\alpha_0)=\frac{1}{8}\omega_0^2\alpha_0^3+(\omega^2-\omega_0^2)\alpha_0 \text{ και } y=-F.$$

Η συνάρτηση $f(\alpha_0)$ είναι κυβική ως προς το πλάτος και, για κατάλληλες τιμές της παραμέτρου ω, παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο, τα οποία προσδιορίζονται από τη συνθήκη $\frac{df(\alpha_0)}{d\alpha_0}=0$. Ως συνέπεια, η εξίσωση (2.2.34) μπορεί να διαθέτει μία, δύο, ή τρεις πραγματικές λύσεις, ανάλογα με τη θέση της ευθείας $y=-F$ ως προς τα ακρότατα της καμπύλης $f(\alpha_0)$.

Η μετάβαση μεταξύ των διαφορετικών αυτών περιπτώσεων αντιστοιχεί γεωμετρικά στην εμφάνιση **σημείων αναδίπλωσης (fold points)** της καμπύλης $f(\alpha_0)$, τα οποία συνδέονται με την ύπαρξη πολλαπλών μόνιμων περιοδικών λύσεων του συστήματος.

Ανάλογα με τη σχέση της συχνότητας διέγερσης ω με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του συστήματος, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- $\omega>\omega_0$



Σχήμα 2.2.6: Γραφική παράσταση των f(a0) και -F

Η παράγωγος *(2.2.36)* της $f(\alpha_0)$, όταν $\omega > \omega_0$, είναι πάντα θετική, άρα η $f(\alpha_0)$ είναι γνησίως αύξουσα, και συνεπώς η ευθεία $y = -F$ την τέμνει σε ένα μόνο σημείο. Επομένως, η εξίσωση *(2.2.34)* έχει μία μόνο λύση. Άρα, για οποιοδήποτε $F > 0$, υπάρχει μία και μοναδική περιοδική απόκριση, με διαφορά φάσης 180° με την διεγείρουσα δύναμη (το α_0 έχει αντίθετο πρόσημο από το F, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.6*). Όταν το F είναι μικρό, η λύση αυτή αντιστοιχεί στη λύση *(2.2.24)*, δηλαδή στην ταλάντωση μακριά από τον συντονισμό.

Το ερώτημα είναι αν αυτή η ταλάντωση διατηρείται στην πράξη. Αυτό εξαρτάται από την ευστάθειά της, για την οποία μπορούμε στο παρόν σημείο να έχουμε ένδειξη· η πλήρης απόδειξη θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

Συγκεκριμένα, η ευστάθεια της περιοδικής απόκρισης μπορεί να εκτιμηθεί από την τοπική κλίση της σχέσης μεταξύ του απαιτούμενου πλάτους διέγερσης F και του πλάτους της απόκρισης α_0. Αν στη γειτονιά του α_0 ισχύει $\frac{dF}{d\alpha_0} > 0$, τότε αύξηση (ή μείωση) του πλάτους απαιτεί αντίστοιχη αύξηση (ή μείωση) της διέγερσης, και συνεπώς μια μικρή διαταραχή δεν μπορεί να διατηρηθεί. Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε ευσταθή περιοδική λύση.

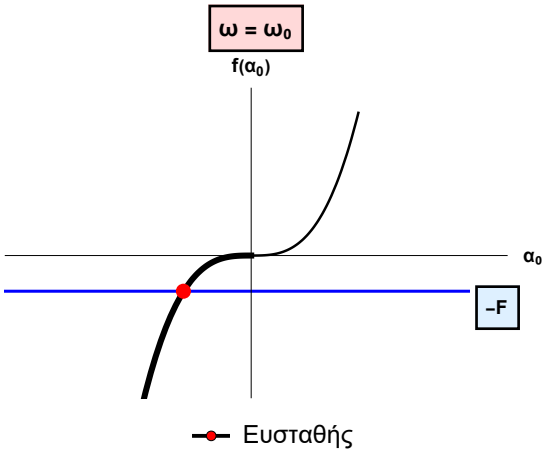
Αντίθετα, όταν $\frac{dF}{d\alpha_0} < 0$ μια μικρή αύξηση του πλάτους συνοδεύεται από μείωση της απαιτούμενης διέγερσης, γεγονός που ευνοεί την ανάπτυξη της διαταραχής, και η ταλάντωση καθίσταται ασταθής.

Στο *Σχήμα 2.2.6* φαίνεται πως ισχύει $\frac{dF}{d\alpha_0} > 0$, επομένως η μοναδική περιοδική απόκριση όταν $\omega > \omega_0$, αναμένεται να είναι ευσταθής.

- $\omega \approx \omega_0$

Είμαστε πολύ κοντά στο συντονισμό, και αυτή η περίπτωση είναι αρκετά διαφορετική όπως θα δούμε παρακάτω, αφού η μοναδική λύση παραμένει ευσταθής (*Σχήμα 2.2.7*), αλλά η εξάρτηση του πλάτους από τη δύναμη γίνεται ιδιαίτερα ευαίσθητη. Αυτή η περίπτωση αποτελεί το όριο πέρα από το οποίο αρχίζει η πολυπλοκότητα.

- $\omega = \omega_0$



Σχήμα 2.2.7: Γραφική παράσταση των f(a₀) και -F

Το σύστημα διεγείρεται ακριβώς στη συχνότητα συντονισμού (*Σχήμα 2.2.7*). Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση πλάτους απλοποιείται σημαντικά και το πλάτος δίνεται από

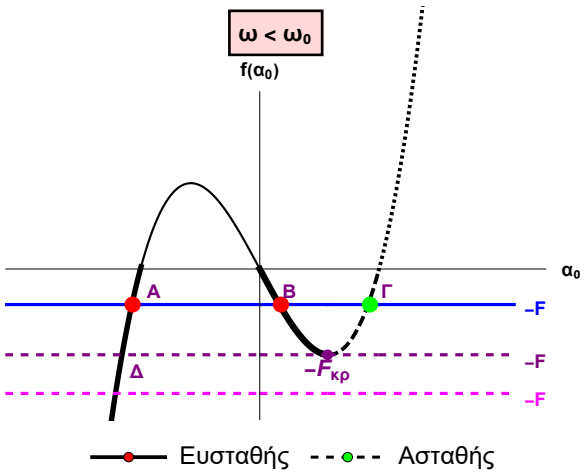
$$\alpha_0 = -\left(\frac{8F}{\omega_0^2}\right)^{1/3}$$

Η απόκριση είναι πάλι περιοδική, ευσταθής, σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, με διαφορά φάσης 180° με την διεγείρουσα δύναμη (το α_0 έχει αντίθετο πρόσημο από το F).

Σε αντίθεση με τον γραμμικό ταλαντωτή χωρίς απόσβεση, όπου το πλάτος αυξάνεται απεριόριστα στον συντονισμό, εδώ η μη γραμμικότητα επιβάλλει έναν φυσικό μηχανισμό περιορισμού. Η συχνότητα της φυσικής ταλάντωσης εξαρτάται από το πλάτος: καθώς το πλάτος μεγαλώνει, η μη γραμμικότητα μεταβάλλει τη συχνότητα ταλάντωσης, η οποία παύει να είναι σε ακριβή βηματισμό με τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης. Επομένως, η συνεχής ενίσχυση της κίνησης —που στη γραμμική περίπτωση οδηγεί σε άπειρη αύξηση του πλάτους— δεν μπορεί να συνεχιστεί. Το σύστημα «απομακρύνεται» από την κατάσταση τέλειου συντονισμού και το πλάτος σταθεροποιείται σε μια πεπερασμένη τιμή. Το σταθεροποιημένο αυτό καθεστώς αποτελεί μια αυτορυθμιζόμενη περιοδική λύση (*locking*), όπου η απόκριση αποκτά σταθερή φάση ως προς τη διεγείρουσα δύναμη και ταλαντώνεται στη συχνότητά της, χωρίς δυνατότητα φυγής σε μεγαλύτερο πλάτος. Συνεπώς, στο σημείο συντονισμού το σύστημα είναι μονοσταθές, δηλαδή διαθέτει μία

μοναδική περιοδική ευσταθή λύση που καθορίζεται πλήρως από τη μη γραμμικότητα, η οποία δρα ως εσωτερικός μηχανισμός ελέγχου του πλάτους.

- $\omega<\omega_0$



Σχήμα 2.2.8: Γραφική παράσταση των $f(\alpha_0)$ και -F

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην περίπτωση όπου $\omega<\omega_0$, (*Σχήμα 2.2.8*), επειδή παρατηρούμε πως μπορεί να υπάρχουν *1*, ή *2*, ή *3* σημεία τομής, κι αυτό εξαρτάται από την τιμή του *F*. Η κρίσιμη μετάβαση, συμβαίνει όταν η ευθεία $y=-F$ είναι εφαπτόμενη στην $f(\alpha_0)$, δηλαδή όταν η εξίσωση (*2.2.34*) έχει διπλή ρίζα. Αυτό γίνεται όταν ισχύουν ταυτόχρονα

$$f(\alpha_0)=-F \text{ και } \frac{df(\alpha_0)}{d\alpha_0}=0$$

Από την (*2.2.36*), και με δεδομένο πως $\omega<\omega_0$ έχουμε

$$\frac{df(\alpha_0)}{\alpha_0}=0 \Rightarrow \alpha_0=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Για να αποφασίσουμε ποιο σημείο είναι το τοπικό ελάχιστο, εξετάζουμε τη δεύτερη παράγωγο

$$f''(\alpha_0)=\frac{3}{4}\omega_0^2\alpha_0$$

οπότε το θετικό α_0, αντιστοιχεί στο σημείο τοπικού ελαχίστου, δηλαδή

$$\alpha_0^{min}=2\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

ενώ το αρνητικό στο σημείο τοπικού μεγίστου.

Αντικαθιστώντας το α_0^{min} στην $f(\alpha_0)$ παίρνουμε την τιμή της *f* στο ελάχιστο

$$f_{min}=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^3}$$

Επομένως, επειδή η σχέση μεταξύ f και F είναι $f=-F$, η κρίσιμη τιμή του F (όπου η ευθεία γίνεται εφαπτόμενη) είναι

$$F_{\kappa\rho}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^3} \qquad (2.2.37)$$

Αυτή η κρίσιμη τιμή, λέγεται **κρίσιμο σημείο**, ή **σημείο αναδίπλωσης (fold point)**, αφού η $f(\alpha_0)$ χάνει τη μονοτονία της και όπως βλέπουμε στο *Σχήμα 2.2.8* για $F>F_{\kappa\rho}$ υπάρχει μόνο ένα σημείο τομής, για $F=F_{\kappa\rho}$ υπάρχουν δύο σημεία τομής, και για $F<F_{\kappa\rho}$ υπάρχουν τρία σημεία τομής.

Αναλυτικότερα:

- Αν $F>F_{\kappa\rho}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^3}$

υπάρχει μια λύση για την εξίσωση *(2.2.34)*, δηλαδή με απλά λόγια, αν το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης είναι σχετικά μεγάλο, και η συχνότητά της είναι μικρότερη της φυσικής συχνότητας, τότε υπάρχει μια μόνο περιοδική απόκριση, με διαφορά φάσης 180° από τη διεγείρουσα (το α_0 έχει αντίθετο πρόσημο από το F, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.8*), και επειδή $\frac{dF}{d\alpha_0}>0$, αναμένουμε να είναι ευσταθής.

- Αν $F=F_{\kappa\rho}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^3}$

υπάρχει μια περιοδική ευσταθής λύση (για τον ίδιο λόγο με πριν), με διαφορά φάσης 180° από τη διεγείρουσα, και στο οριακό σημείο $(-F_{\kappa\rho})$ στο *Σχήμα 2.2.8*), μια ευσταθής και μια ασταθής λύση συγχωνεύονται.

- Αν $F<F_{\kappa\rho}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0^2\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^3}$

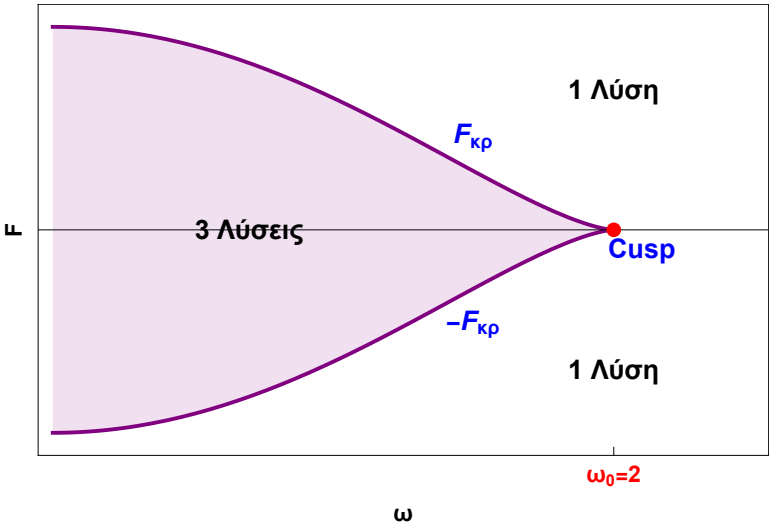
εμφανίζονται τρεις λύσεις: δύο ευσταθείς και μία ασταθής, δηλαδή **δισταθερό (bistable) σύστημα**. Το σύστημα μπορεί να ταλαντώνεται σε δύο διαφορετικά σταθερά πλάτη ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες.

Συγκεκριμένα:

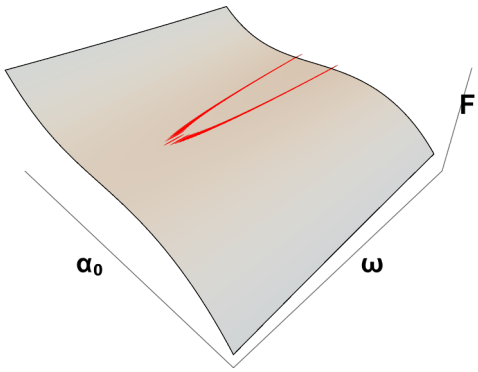
- Η αρνητική λύση (σημείο A στο *Σχήμα 2.2.8*), αντιστοιχεί στην ασθενή απόκριση μακριά από τον συντονισμό, δηλαδή στη λύση *(2.2.14)*. Η απόκριση αυτή έχει μικρό πλάτος και διαφορά φάσης 180° με τη διεγείρουσα δύναμη, δηλαδή κινείται εκτός φάσης και δεν ενισχύεται σημαντικά από τη διέγερση. Από το *Σχήμα 2.2.8* προκύπτει ότι στη γειτονιά του Α ισχύει $\frac{dF}{d\alpha_0}>0$ και συνεπώς, το σημείο αυτό αντιστοιχεί σε ευσταθή περιοδική λύση.

- Η μεσαία λύση (σημείο *B* στο *Σχήμα* 2.2.8) βρίσκεται στον ανερχόμενο κλάδο της κυβικής, όπου το πλάτος είναι σημαντικά μικρότερο κατά απόλυτη τιμή από αυτό του σημείου *A*, και επειδή είναι θετικό, είναι σε φάση με την διεγείρουσα δύναμη. Για τους ίδιους λόγους με πριν, το σημείο *B* είναι επίσης ευσταθής, περιοδική λύση.
- Η μεγάλη θετική λύση (σημείο *Γ* στο *Σχήμα* 2.2.8) αντιστοιχεί στην απόκριση κοντά στον συντονισμό, σε φάση με τη διεγείρουσα δύναμη, με σχετικά μεγάλο πλάτος. Στη γειτονιά αυτού του σημείου, η κλίση $\frac{dF}{d\alpha_0}<0$ είναι αρνητική, και σύμφωνα με όσα είπαμε για την ευστάθεια, αυτό σημαίνει ότι μια μικρή διαταραχή στο πλάτος θα τείνει να αυξηθεί, επομένως το σημείο *Γ* αντιστοιχεί σε ασταθή λύση.

Μέχρι στιγμής, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για σταθερή τιμή της συχνότητας διέγερσης *ω*, και διερευνήθηκε η εξάρτηση του αριθμού και της ευστάθειας των περιοδικών λύσεων από το πλάτος της δύναμης *F*. Με τον τρόπο αυτό, προσδιορίστηκε η κρίσιμη τιμή του *F*, στην οποία η εξίσωση πλάτους αποκτά διπλή ρίζα και εμφανίζεται σημείο αναδίπλωσης.



Σχήμα 2.2.9: Διάγραμμα στο επίπεδο (ω, F)



Σχήμα 2.2.10: Τρισδιάστατο γράφημα (ω, α_0, F)

Για να αποκτηθεί όμως μια συνολική εικόνα της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, είναι απαραίτητο να εξεταστεί η συνδυασμένη επίδραση των παραμέτρων ω και F. Ειδικότερα, καταγράφοντας τις κρίσιμες τιμές $F_{\kappa\rho}(\omega)$ για όλες τις συχνότητες $\omega<\omega_0$ προκύπτει στο επίπεδο (ω, F) η καμπύλη των σημείων αναδίπλωσης, που καλείται **καμπύλη αναδίπλωσης** (**fold curve**), η οποία οριοθετεί τις περιοχές μοναδικής και δισταθερής απόκρισης. Η καμπύλη αυτή καταλήγει στο σημείο $(\omega_0, 0)$, όπου η δισταθερότητα εξαφανίζεται και εμφανίζεται σημείο **αιχμής (cusp)**.

Στα *Σχήματα* 2.2.9 και 2.2.10, τα αντίστοιχα διαγράμματα στο επίπεδο (ω, F) και στον τρισδιάστατο χώρο (ω, α_0, F) συνοψίζουν με γεωμετρικό τρόπο τη δομή των λύσεων και τη μετάβαση από μοναδική σε δισταθερή συμπεριφορά.

(Στο παρόν πρόβλημα, λόγω της σχέσης $f(\alpha_0)=-F$ και του γεγονότος ότι το πλάτος της διέγερσης λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, η φυσικά αποδεκτή καμπύλη στο επίπεδο (ω, F) είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $-F_{\kappa\rho}(\omega)$. Ο συμμετρικός κλάδος $F_{\kappa\rho}(\omega)$ δεν έχει φυσική σημασία για το συγκεκριμένο σύστημα και παρατίθεται μόνο για πληρότητα της γεωμετρικής εικόνας).

2.2.5.2 Καμπύλες του πλάτους της απόκρισης

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε την αλγεβρική εξίσωση που συνδέει το πλάτος α_0 με τα φυσικά μεγέθη ω και F. Σε αυτή την ενότητα περνάμε από την αλγεβρική περιγραφή σε μια πλήρη δυναμική ανάλυση, χρησιμοποιώντας το σύστημα αργής ροής που προκύπτει από τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων (*Ενότητα* 2.2.2). Στο επίπεδο (α, b) —γνωστό ως *van der Pol* επίπεδο— τα σημεία ισορροπίας του συστήματος αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις της αρχικής εξίσωσης και η ευστάθειά τους μπορεί τώρα να εξεταστεί με τα εργαλεία ενός **αυτόνομου** δυναμικού συστήματος (δηλαδή ενός συστήματος στο οποίο οι εξισώσεις δεν εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο).

Για τον σκοπό αυτό, η τοπική συμπεριφορά του συστήματος κοντά σε κάθε σημείο ισορροπίας μελετάται μέσω της γραμμικοποίησης του συστήματος αργής ροής.

Γραμμικοποίηση

Έστω το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{x}=F(x, y)$$
$$\dot{y}=G(x, y)$$

Τα σημεία ισορροπίας προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$F(x, y)=0 \text{ και } G(x, y)=0$$

Αν (x_0, y_0) είναι σημείο ισορροπίας, η τοπική συμπεριφορά του συστήματος κοντά στο (x_0, y_0), προσεγγίζεται από το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\dot{\xi} = F_x(x_0, y_0)\xi + F_y(x_0, y_0)\eta$$
$$\dot{\eta} = G_x(x_0, y_0)\xi + G_y(x_0, y_0)\eta$$

όπου $\xi = x - x_0$ και $\eta = y - y_0$

και ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος δίνεται από

$$\boldsymbol{J}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται **υπερβολικό** ή **μη εκφυλισμένο**, αν το πραγματικό μέρος όλων των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού πίνακα είναι μη μηδενικό. Αν έστω και μια ιδιοτιμή έχει μηδενικό πραγματικό μέρος, το σημείο καλείται **μη υπερβολικό** ή **εκφυλισμένο**.

Η χρήση του γραμμικοποιημένου συστήματος για τη μελέτη της τοπικής δυναμικής, δικαιολογείται από το *Θεώρημα Hartman–Grobman*, σύμφωνα με το οποίο, σε γειτονιά ενός υπερβολικού σημείου ισορροπίας, το μη γραμμικό αυτόνομο σύστημα είναι τοπολογικά ισοδύναμο (δηλαδή υπάρχει συνεχής αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση με συνεχή αντίστροφη, η οποία μεταφέρει τροχιές σε τροχιές και διατηρεί τον προσανατολισμό του χρόνου) με το γραμμικό του προσεγγιστικό σύστημα. Συνεπώς, η ευστάθεια και ο ποιοτικός τύπος των τροχιών καθορίζονται με βάση τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα, από τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, στη μορφή $P(\lambda) = |J(x_0, y_0) - \lambda I| = 0$, ή με βάση το ίχνος του p και την ορίζουσά του q, από την $\lambda^2 - p\lambda + q = 0$, με διακρίνουσα $\Delta = p^2 - 4q$.

Έχουμε λοιπόν τις παρακάτω περιπτώσεις **γραμμικής ευστάθειας**, για το κρίσιμο σημείο (x_0, y_0):

	Κρίσιμο σημείο	Ιδιοτιμές (λ_1,λ_2)	Ίχνος	Ορίζουσα	Διακρίνουσα
1	Σάγμα	$\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1 < 0 < \lambda_2$	–	$q<0$	$\Delta>0$
2	Ευσταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	$p<0$	$q>0$	$\Delta>0$
3	Ασταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	$p>0$	$q>0$	$\Delta>0$
4	Ευσταθής σπείρα	$\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \Re\lambda < 0$	$p<0$	$q>0$	$\Delta<0$
5	Ασταθής σπείρα	$\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \Re\lambda > 0$	$p>0$	$q>0$	$\Delta<0$
6	Κέντρο	$\lambda, \lambda^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \Re\lambda = 0$	$p=0$	$q>0$	$\Delta<0$
7	Ιδιάζων ευσταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 < 0$	$p<0$	$q>0$	$\Delta=0$
8	Ιδιάζων ασταθής κόμβος	$\lambda_i \in \mathbb{R},\ \lambda_1 = \lambda_2 > 0$	$p>0$	$q>0$	$\Delta=0$

Πίνακας 2.2.1: Ταξινόμηση των σημείων ισορροπίας

Ανάλυση ευστάθειας περιοδικών λύσεων

Η εξίσωση (2.2.14)

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x-\frac{1}{6}\omega_0^2 x^3=F\,cos\omega t$$

με ασθενή διέγερση και κοντά στον συντονισμό, είδαμε πως με εφαρμογή κανονικών διαταραχών έχει λύση για τον πρωτεύοντα όρο

$$x(t)=\alpha\cos\omega t+b\sin\omega t \qquad (2.2.38)$$

Θεωρούμε πως α και b είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου (*Ενότητα* 2.2.2), και η (2.2.38) γίνεται

$$x(t)=\alpha(t)\cos\omega t+b(t)\sin\omega t \qquad (2.2.39)$$

Τότε

$$\dot{x}(t)=(\dot{\alpha}+\omega b)\cos\omega t+(-\omega\alpha+\dot{b})\sin\omega t \qquad (2.2.40)$$

και αγνοώντας τους $\ddot{\alpha}$, $\ddot{b}$, επειδή υποθέτουμε πως είναι πολύ μικροί,

$$\ddot{x}(t)\approx(-\omega^2\alpha+2\omega\dot{b})\cos\omega t+(-2\omega\dot{\alpha}-\omega^2 b)\sin\omega t \qquad (2.2.41)$$

και

$$x^3(t)=\alpha^3\cos^3\omega t+3\alpha^2 b\cos^2\omega t\sin\omega t+3\alpha b^2\cos\omega t\sin^2\omega t+b^3\sin^3\omega t$$

$$=\frac{3}{4}\alpha(\alpha^2+b^2)\cos\omega t+\frac{3}{4}b(\alpha^2+b^2)\sin\omega t+\frac{1}{4}\alpha(\alpha^2-3b^2)\cos 3\omega t+\frac{1}{4}b(3\alpha^2-b^2)\sin 3\omega t \qquad (2.2.42)$$

όπου εφαρμόσαμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos^3 t=\frac{3}{4}cost+\frac{1}{4}\cos 3t \quad \text{και} \quad \sin^3 t=\frac{3}{4}sint-\frac{1}{4}\sin 3t$$

$$\cos^2 t\,sint=\frac{1}{4}(sint+\sin 3t) \quad \text{και} \quad \sin^2 t\,cost=\frac{1}{4}(cost-\cos 3t)$$

Από την (2.2.40) αγνοούμε τους όρους με $\cos 3\omega t$ και $\sin 3\omega t$, γιατί η επίδρασή τους στη λύση θα είναι πολύ μικρότερη από τους όρους με την βασική συχνότητα, κι έτσι

$$x^3(t)\approx\frac{3}{4}\alpha(\alpha^2+b^2)\cos\omega t+\frac{3}{4}b(\alpha^2+b^2)\sin\omega t \qquad (2.2.42\alpha)$$

Αντικαθιστούμε τις (2.2.39), (2.2.41) και (2.2.42α) στην (2.2.14) και αναδιατάσσοντας τους όρους, έχουμε

$$\left\{2\omega\dot{b}-\alpha\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha^2+b^2)\right]\right\}\cos\omega t$$

$$+\left\{-2\omega\dot{\alpha}-b\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha^2+b^2)\right]\right\}\sin\omega t=F\cos\omega t \qquad (2.2.43)$$

Με την προϋπόθεση ότι τα α, b μεταβάλλονται αργά, μπορούμε περίπου να ισοσταθμίσουμε τους συντελεστές του $\cos\omega t$ και του $\sin\omega t$, παίρνοντας έτσι το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{\alpha}=-\frac{b}{2\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha^2+b^2)\right]=A(\alpha,b) \qquad (2.2.44)$$

$$\dot{b}=\frac{\alpha}{2\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha^2+b^2)\right]+\frac{F}{2\omega}=B(\alpha,b) \qquad (2.2.45)$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος δίνονται από

$$A(\alpha,b)=B(\alpha,b)=0$$

και είναι οι μόνιμες περιοδικές λύσεις που αναλύσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Συγκεκριμένα

- αν $\omega<\omega_0$

τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(\alpha_1,0),(\alpha_2,0),(\alpha_3,0)$, με α_1 την τετμημένη του σημείου *A*, α_2 την τετμημένη του σημείου *B*, και α_3 την τετμημένη του *Γ*, του *Σχήματος 2.2.8*.

Για να διερευνήσουμε την ευστάθεια αυτών των σημείων, θα προχωρήσουμε σε γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος *(2.2.44)*, *(2.2.45)*.

Αρχικά, για $\alpha_*=\alpha_1,\alpha_2,\acute{\eta}\,\alpha_3$ και $b_*=0$ θέτουμε

$$\tilde{\alpha}=\alpha-\alpha_*$$

$$\tilde{b}=b-b_*=b$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\tilde{\alpha}}=A_1(\alpha_*,0)(\alpha-\alpha_*)+A_2(\alpha_*,0)b$$

$$\dot{b}=B_1(\alpha_*,0)(\alpha-\alpha_*)+B_2(\alpha_*,0)b$$

όπου

$$A_1(\alpha_*,0)=\partial_\alpha A(\alpha_*,0),A_2(\alpha_*,0)=\partial_b A(\alpha_*,0),B_1(\alpha_*,0)=\partial_\alpha B(\alpha_*,0),B_2(\alpha_*,0)=\partial_b B(\alpha_*,0)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(\alpha_*,0)=\begin{bmatrix} A_1(\alpha_*,0) & A_2(\alpha_*,0) \\ B_1(\alpha_*,0) & B_2(\alpha_*,0) \end{bmatrix}$$

με

$$A_1(\alpha_*,0)=0 \text{ και } A_2(\alpha_*,0)=-\frac{1}{2\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\alpha_*^2\omega_0^2\right]$$

Από τον τύπο *(2.2.35)*, έπεται πως

$$A_2(\alpha_*,0)=-\frac{1}{2\omega\alpha_*}f(\alpha_*)$$

όπου $f(a_*)$ είναι η τεταγμένη του κάθε σημείου.

Επίσης

$$B_2(\alpha_*,0)=0 \text{ και } B_1(\alpha_*,0)=\frac{1}{2\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{3}{8}\alpha_*^2\omega_0^2\right]$$

Από τον τύπο *(2.2.36)*, έπεται πως

$$B_1(\alpha_*,0)=\frac{1}{2\omega}\frac{df(\alpha_*)}{d\alpha_*}$$

όπου $\frac{df(\alpha_*)}{d\alpha_*}$ είναι η κλίση της καμπύλης στο α_* *(Σχήμα 2.2.8)*. Αντικαθιστώντας τα παραπάνω, ο Ιακωβιανός πίνακας γίνεται

$$\boldsymbol{J}(\alpha_*,0)=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2\omega\alpha_*}f(\alpha_*) \\ \frac{1}{2\omega}\frac{df(\alpha_*)}{d\alpha_*} & 0 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσά του είναι διάφορη από το *0*, άρα εφαρμόζεται η αρχή της γραμμικοποίησης.

Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών, λύνουμε την εξίσωση $P(\lambda)=0$, όπου $P(\lambda)=|J(\alpha_*,0)-\lambda I|$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του Ιακωβιανού πίνακα.

Έτσι, $P(\lambda)=|J(\alpha_*,0)-\lambda I| =\lambda^2+\frac{1}{4\omega^2\alpha_*}f(\alpha_*)\frac{df(\alpha_*)}{d\alpha_*}=0\Rightarrow\lambda^2=-\kappa$, με $\kappa=\frac{1}{4\omega^2\alpha_*}f(\alpha_*)\frac{df(\alpha_*)}{d\alpha_*}$

Για κάθε σημείο ισορροπίας, υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα ώστε να προσδιορίσουμε το είδος και την ευστάθειά του.

- $\alpha_*=\alpha_1$

Αυτή η περίπτωση είναι το σημείο *A* στο *Σχήμα 2.2.8*, όπου το πρόσημο του α_1 είναι αρνητικό, η τεταγμένη του είναι αρνητική, και η κλίση στο σημείο της καμπύλης, είναι θετική. Άρα $\kappa>0$, και τότε $\lambda=\pm\kappa i$. Επειδή οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με μηδενικό πραγματικό μέρος, το $(\alpha_1,0)$ είναι **κέντρο** (*Πίνακας 2.2.1*)

- $\alpha_*=\alpha_2$

Αυτή η περίπτωση είναι το σημείο *B* στο *Σχήμα 2.2.8*, όπου το πρόσημο του α_2 είναι θετικό, η τεταγμένη του είναι θετική, και η κλίση στο σημείο της καμπύλης, είναι θετική. Άρα $\kappa>0$, και τότε $\lambda=\pm\kappa i$. Άρα, το $(\alpha_2,0)$ είναι επίσης **κέντρο**.

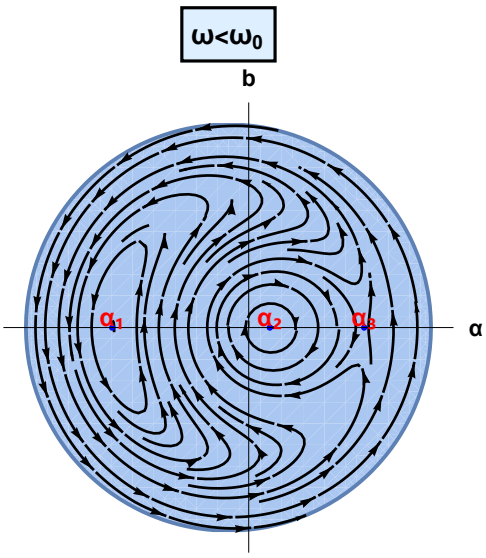
- $\alpha_*=\alpha_3$

Αυτή η περίπτωση είναι το σημείο *Γ* στο *Σχήμα 2.2.8*, όπου το πρόσημο του α_3 είναι θετικό, η τεταγμένη του είναι θετική, και η κλίση στο σημείο της καμπύλης, είναι αρνητική.

Άρα $\kappa<0$, και τότε $\lambda=\pm\sqrt{\kappa}$, και το $(\alpha_3,0)$ είναι **ασταθές σαγματικό σημείο** (*Πίνακας 2.2.1*) .

Αυτό το σημείο δεν μπορεί να επιτευχθεί ακριβώς.

Ωστόσο, εάν η αρχική κατάσταση του συστήματος βρεθεί αρκετά κοντά σε αυτό, οι μεταβολές των *α* και *b* είναι πολύ μικρές, με αποτέλεσμα το σύστημα να εμφανίζει σχεδόν περιοδική ταλάντωση στη συχνότητα του διεγέρτη για αρκετό χρονικό διάστημα πριν να αποκλίνει.

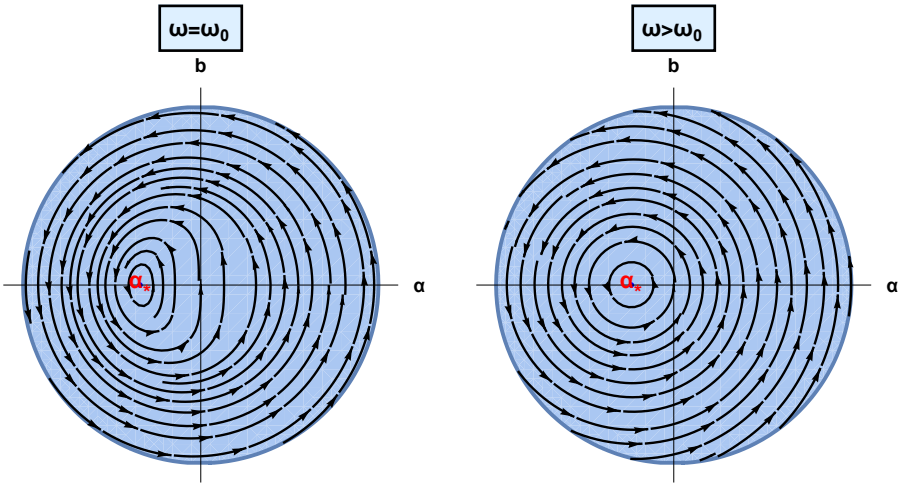


Σχήμα 2.2.11: Πορτραίτο φάσης του συστήματος, με ω_0=1, ω=0.975, F=0.005

Όλα τα παραπάνω φαίνονται στο πορτραίτο φάσης του *Σχήματος 2.2.11*, όπου οι τροχιές συγκεντρώνονται γύρω από τα δύο ευσταθή σημεία και απομακρύνονται από το ασταθές.

- αν $\omega \geq \omega_0$

το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το $(a_*,0)$, με a_* την τετμημένη του μοναδικού σημείου τομής των $f(\alpha_0)$ και $y=-F$ (*Σχήματα 2.2.6 και 2.2.7*), και αντίστοιχα με την προηγούμενη ανάλυση, το σημείο είναι **κέντρο,** όπως βλέπουμε στο *Σχήμα 2.2.12*.

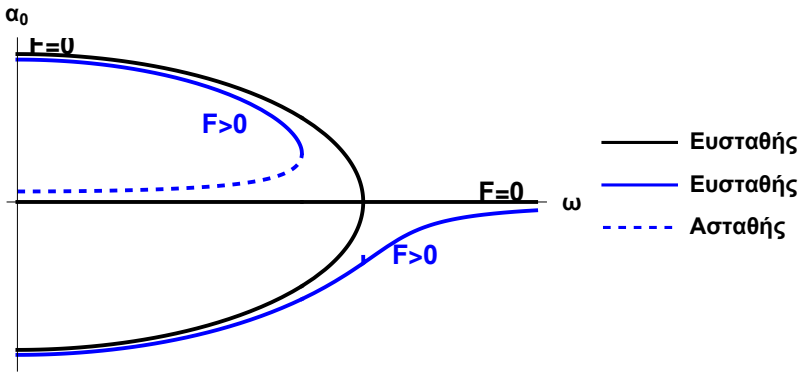


Σχήμα 2.2.12: Πορτραίτα φάσης όταν (α) ω=ω_0=1, F=0.005,
(β) ω=1.5, ω_0=1, F=0.3

Στο *Σχήμα* 2.2.13, το διάγραμμα διακλάδωσης του α_0 ως προς την συχνότητα ω, για σταθερή τιμή του $F \geq 0$, οργανώνει συνοπτικά τις προηγούμενες περιπτώσεις και δείχνει πώς εξελίσσονται οι λύσεις καθώς η συχνότητα διέγερσης «περνά» μέσα από τον συντονισμό.

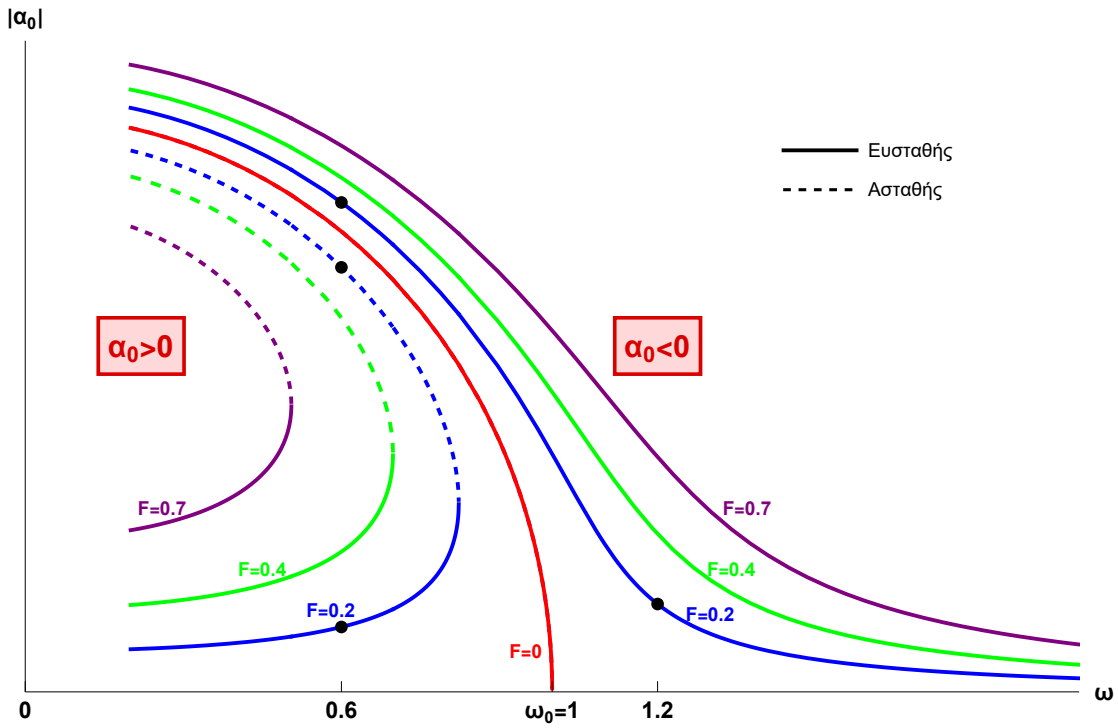
Όταν $F=0$, τότε

$$\alpha_0=0 \text{ ή } \alpha_0=\pm 2\sqrt{2}\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2})}$$



Σχήμα 2.2.13: Διάγραμμα διακλάδωσης στο επίπεδο (ω,α_0)

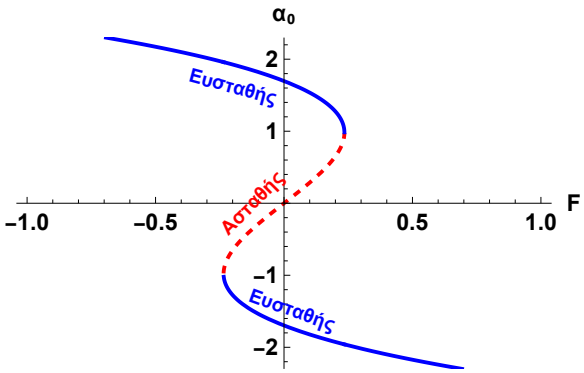
ενώ για $F>0$, η συμμετρία σπάει, ο ένας κλάδος παραμένει ευσταθής, αλλά ο άλλος δημιουργεί μια ασταθή ενδιάμεση λύση και περιοχή δισταθερότητας για $\omega<\omega_0$. Η περιοχή αυτή συρρικνώνεται όσο $\omega \rightarrow \omega_0$, οδηγώντας τελικά σε μοναδική ευσταθή περιοδική απόκριση.



Σχήμα 2.2.14: Καμπύλες πλάτους-συχνότητας για το μη αποσβεννύμενο εκκρεμές

Το *Σχήμα 2.2.14* παριστάνει τις καμπύλες του πλάτους απόκρισης $|\alpha_0|$ σε σχέση με την συχνότητα διέγερσης ω. Επιλέξαμε $\omega_0=1$ και $F=0, F=0.2, F=0.4, F=0.7$. Για κάθε μη μηδενική τιμή της F, υπάρχουν δυο κλάδοι λύσεων, ένας για $\alpha_0>0$ και ένας για $\alpha_0<0$. Ο πρώτος αντιστοιχεί σε λύση που έχει την ίδια φάση με την εξωτερική διέγερση, ενώ ο δεύτερος σε ταλάντωση με διαφορά φάσης 180° με την εξωτερική διέγερση.

Είναι φανερή η πολυπλοκότητα των λύσεων σε σχέση με τη γραμμική περίπτωση (*Παράρτημα Α*). Παρατηρούμε, για παράδειγμα, ότι για $\omega=1.2$, και $F=0.2$, υπάρχει μια τιμή για το $|\alpha_0|$ $(\alpha_0=-0.44)$, ενώ για $\omega=0.6$, και $F=0.2$ υπάρχουν τρεις τιμές για το $|\alpha_0|$ $(\alpha_0=0.32, 2.09, -2.41)$ όπου όπως ήδη δείξαμε οι $(\alpha_0=0.32)$ και $(\alpha_0=-2.41)$ αντιστοιχούν σε ευσταθείς ταλαντώσεις ενώ η $(\alpha_0=2.09)$ σε ασταθή. Η χαρακτηριστική αυτή δομή σχηματίζει την κλασική **S-καμπύλη** *(Σχήμα 2.2.15)*, που παραπέμπει στο φαινόμενο της υστέρησης, που θα δούμε στην επόμενη ενότητα.



Σχήμα 2.2.15: Διάγραμμα (F,α0)

Στο σχήμα απεικονίζεται ολόκληρη η γεωμετρική *S*-καμπύλη, η οποία εκτείνεται και σε αρνητικές τιμές της *F*. Ωστόσο, επειδή στη φυσική μας περίπτωση η *F* παριστάνει το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης και συνεπώς είναι μη αρνητική, το σύστημα αξιοποιεί μόνο το δεξιό τμήμα της καμπύλης $(F\geq 0)$.

2.2.5.3 Παροδική απόκριση μέσω των αργών μεταβλητών

Η περιγραφή του συστήματος με τις αργά μεταβαλλόμενες μεταβλητές $\alpha(t)$ και $b(t)$ επιτρέπει να κατανοηθεί και η παροδική απόκριση του μη αποσβεννύμενου εξαναγκασμένου εκκρεμούς.

Στο επίπεδο (α, b), είδαμε πως τα σημεία ισορροπίας αντιστοιχούν σε μόνιμες περιοδικές λύσεις της μετατόπισης $x(t)$.

Όμως, όλες οι κλειστές τροχιές του συστήματος αργής ροής δεν αντιστοιχούν σε αυστηρά περιοδικές αποκρίσεις της $x(t)$. Πράγματι, αφού

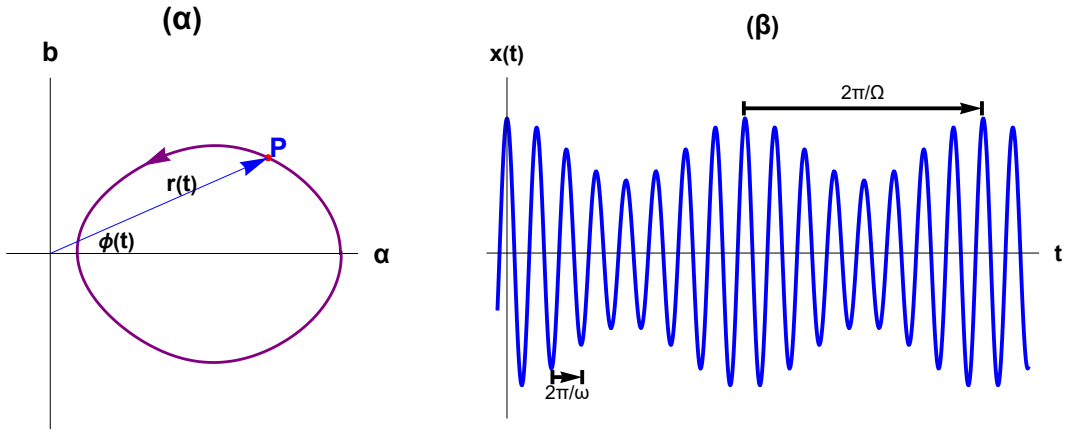
$$x(t)=\alpha(t)\cos\omega t+b(t)\sin\omega t=r(t)\cos(\omega t-\varphi(t))$$

η κίνηση είναι πραγματικά περιοδική μόνο όταν η περίοδος των αργών μεταβλητών $\alpha(t), b(t)$, —ή ισοδύναμα των $r(t), \varphi(t)$ — είναι **ρητό πολλαπλάσιο** της βασικής περιόδου $2\pi/\omega$. Επειδή όμως οι α και b μεταβάλλονται αργά, η περίοδος $2\pi/\Omega$ των αργών μεταβολών ικανοποιεί $\Omega \ll \omega$, και έτσι τα περισσότερα κλειστά μονοπάτια δεν αντιστοιχούν σε αυστηρά περιοδική, αλλά σε «σχεδόν περιοδική» παροδική κίνηση.

Για να διευκρινιστεί η παραπάνω συμπεριφορά, έστω πως *P*, είναι ένα αντιπροσωπευτικό σημείο μιας κλειστής τροχιάς, με πολικές συντεταγμένες $r(t), \varphi(t)$.

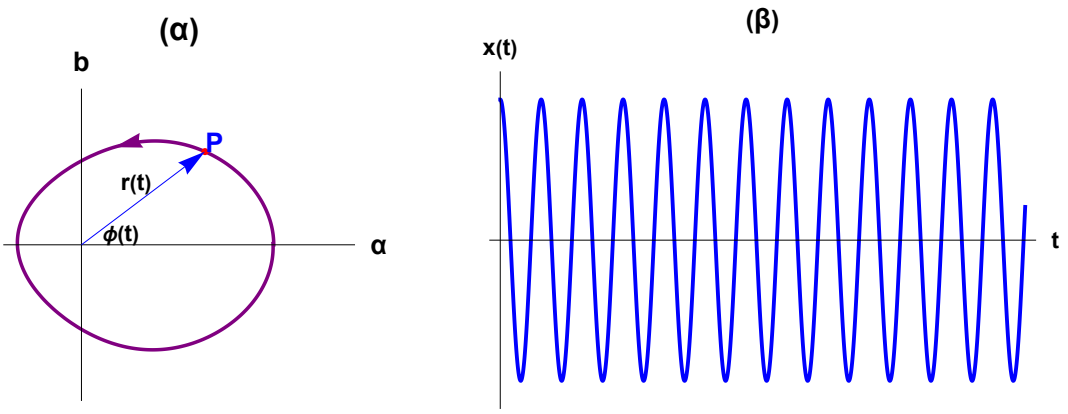
Αν η τροχιά των (α, b) **δεν περικλείει την αρχή** (*Σχήμα 2.2.16 (α)*), τότε η φάση $\varphi(t)$ επανέρχεται μετά από κάθε κύκλο, με αποτέλεσμα μια ταλάντωση συχνότητας ω, με αργά και περιοδικά μεταβαλλόμενο πλάτος.

Στην περίπτωση αυτή εμφανίζεται το φαινόμενο των **κτύπων (beats)** (*Σχήμα 2.2.16(β)*), όπου το πλάτος της ταλάντωσης αυξομειώνεται αργά λόγω της αλληλεπίδρασης των δύο χρόνων κλίμακας.



Σχήμα 2.2.16: Παροδική τροχιά που δεν περικλείει την αρχή- Φαινόμενο των κτύπων

Αντίθετα, όταν η τροχιά **περικλείει την αρχή** (*Σχήμα 2.2.17(α)*), η φάση αυξάνεται κατά *2π* σε κάθε κύκλο, οδηγώντας σε μια αργή μετατόπιση της στιγμιαίας συχνότητας από ω σε $\omega+\Omega$, φαινόμενο που ονομάζεται **παράσυρση (entrainment)**. Στην περιοχή αυτή το σύστημα δεν εμφανίζει beats, αλλά αντίθετα παρουσιάζει μια σχεδόν σταθερή ταλάντωση (*Σχήμα 2.2.17(β)*) με ελαφρώς μετατοπισμένη συχνότητα, η οποία ακολουθεί («παρασύρεται από») τη διεγείρουσα συχνότητα.



Σχήμα 2.2.17: Παροδική τροχιά που περικλείει την αρχή-Περιοδική ταλάντωση

Η συμπεριφορά αυτή —είτε με τη μορφή beats, είτε με αργή μεταβολή της φάσης— αποτελεί την **παροδική** απόκριση του μη αποσβεννύμενου εκκρεμούς, όπως αυτή αποτυπώνεται από τις εξισώσεις των αργών μεταβλητών, πριν το σύστημα εγκατασταθεί σε κάποια από τις μόνιμες περιοδικές λύσεις του.

2.2.6 Εξαναγκασμένες αποσβεννύμενες ταλαντώσεις, κοντά στο συντονισμό με ασθενή διέγερση

Στην παρούσα ενότητα θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο κανονικών διαταραχών στην εξίσωση του εκκρεμούς, αφού πρώτα προσθέσουμε έναν μικρό όρο απόσβεσης, ο οποίος περιγράφει τις τριβές που αφαιρούν ενέργεια από το σύστημα. Η απόσβεση μειώνει σταδιακά το πλάτος της ταλάντωσης και επηρεάζει καθοριστικά την τελική, μόνιμη απόκριση του εξαναγκασμένου συστήματος.

Όπως είδαμε, για τις μη αποσβεννύμενες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, η γωνία φάσης μεταξύ της διέγερσης και της περιοδικής απόκρισης παίρνει μόνο τις τιμές *0* ή *π*. Με την εισαγωγή ενός γραμμικού όρου απόσβεσης αναμένονται ενδιάμεσες τιμές της γωνίας φάσης, όπως συμβαίνει και στον γραμμικό ταλαντωτή.

Στην ανάλυση που ακολουθεί θα επικεντρωθούμε στη μόνιμη περιοδική απόκριση κοντά στον κύριο συντονισμό ($\Omega \approx 1$), αγνοώντας τις μεταβατικές ταλαντώσεις, όπως πράξαμε και στην *Ενότητα 2.2.5* για τις μη αποσβεννύμενες ταλαντώσεις του εκκρεμούς. Η προσθήκη μικρής απόσβεσης και η ύπαρξη εξαναγκασμού καθιστούν κατάλληλη τη χρήση της μεθόδου κανονικών διαταραχών για την εξαγωγή μιας προσεγγιστικής λύσης σε κλειστή μορφή.

Η εξίσωση *(2.2.13)*

$$\ddot{x} + k\,\dot{x} + \omega_0^2 x - \frac{1}{6}\omega_0^2 x^3 = F\cos\omega t$$

μετά από γραμμικοποίηση, γίνεται

$$x''+K\,x'+\Omega^2 x-\varepsilon\,x^3=\Gamma\,cos\tau \qquad (2.2.46)$$

που δεν είναι άλλη από την *(2.2.16)*, με τον πρόσθετο όρο της απόσβεσης,

όπου $\tau=\omega t$, $\Omega=\dfrac{\omega_0}{\omega}$, $\Gamma=\dfrac{F}{\omega^2}$, $K=\dfrac{k}{\omega}$ και $\varepsilon=\dfrac{1}{6}\Omega^2$, με $0<\varepsilon\ll 1$.

Ενδιαφερόμαστε για ασθενή διέγερση, κοντά στον κύριο συντονισμό ($\Omega\approx 1$), και για μικρή απόσβεση. Γι' αυτό θέτουμε

$$\Gamma=\varepsilon\gamma,\quad \Omega^2=1+\varepsilon\beta,\quad K=\varepsilon\,\delta$$

με $\gamma,\delta>0$, ώστε η ιδιοσυχνότητα του συστήματος να παραμένει κοντά στη συχνότητα *1* της διέγερσης και η απόσβεση να είναι ασθενής.

Η παράμετρος β είναι η παράμετρος αποσυντονισμού, όπως ήδη έχει αναφερθεί, και η δ είναι ο αδιάστατος συντελεστής απόσβεσης.

Έτσι, η *(2.2.46)* γίνεται

$$x''+x=\varepsilon\left(\gamma\,cos\tau-\delta x'-\beta x+x^3\right) \qquad (2.2.47)$$

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots \qquad (2.2.48)$$

Επίσης, επειδή όπως είπαμε, ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με περίοδο *2π*, θα ισχύει

$$x(\tau+2\pi,\varepsilon)=x(\tau,\varepsilon)$$

Άρα, από την *(2.2.48)* έπεται πως

$$x_n(\tau+2\pi,\varepsilon)=x_n(\tau,\varepsilon),\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (2.2.49)$$

Αντικαθιστούμε την *(2.2.48)* στην *(2.2.47)*, και έχουμε

$$x_0''+x_0+\varepsilon\left(x_1''+x_1\right)+\varepsilon^2\left(x_2''+x_2\right)=\varepsilon\left(\gamma\,cos\tau-\delta x_0'-\beta x_0+x_0^3\right)+\varepsilon^2\left(3x_0^2x_1-\delta x_1'-\beta x_1\right)$$

Εξισώνουμε τους όρους ίδιας τάξης του ε, και χρησιμοποιώντας την *(2.2.49)*, προκύπτει μια άπειρη ακολουθία προβλημάτων αρχικών τιμών

$$O(1):\ \begin{cases} x_0''+x_0=0,\ \ \tau>0 \\ x_0(\tau+2\pi)=x_0(\tau)\end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\ \begin{cases} x_1''+x_1=\gamma\,cos\tau-\delta x_0'-\beta x_0+x_0^3,\ \ \tau>0 \\ x_1(\tau+2\pi)=x_1(\tau)\end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \begin{cases} x_2''+x_2=3x_0^2x_1-\delta x_1'-\beta x_1,\ \ \tau>0 \\ x_2(\tau+2\pi)=x_2(\tau)\end{cases}$$

• • •

Από το $O(1)$, έχουμε τον πρωτεύοντα όρο

$$x_0=\alpha_0 cos\tau+b_0 sin\tau \tag{2.2.50}$$

για κάποιες σταθερές α_0, b_0.

Η λύση *(2.2.50)* ικανοποιεί την περιοδική συνθήκη $x_0(\tau+2\pi)=x_0(\tau)$ για κάθε α_0, b_0.

Αντικαθιστούμε την (2.2.50) στην εξίσωση του $O(\varepsilon)$ και χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες και την ίδια διαδικασία ανάλυσης με αυτήν της *Ενότητας* 2.2.5, λαμβάνουμε μετά από απλές πράξεις

$$x_1''+x_1=\left\{\gamma-\delta b_0+\alpha_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}cos\tau+\left\{\delta\alpha_0+b_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}sin\tau$$

$$+\frac{1}{4}\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\cos 3\tau+\frac{1}{4}b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\sin 3\tau$$

$$x_1(\tau+2\pi)=x_1(\tau)$$

Από τη μορφή της εξίσωσης του πρώτου διορθωτικού όρου φαίνεται ότι το μέλος του εξαναγκασμού περιέχει τους όρους

$$\left\{\gamma-\delta b_0+\alpha_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}cos\tau \quad \text{και} \quad \left\{\delta\alpha_0+b_0\left[-\beta+\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]\right\}sin\tau$$

που έχουν την ίδια συχνότητα με τη θεμελιώδη λύση της ομογενούς εξίσωσης. Επομένως, θα προκύψει συντονισμός και συνεπώς η λύση $x_1(t)$ θα περιέχει τους αιώνιους όρους, $\tau\, sin\tau$ και $\tau\, cos\tau$, και δεν θα είναι περιοδική, όπως απαιτεί η συνθήκη που έχουμε θέσει.

Για τον λόγο αυτό, οι συντελεστές των $sin\tau$ και $cos\tau$ πρέπει να μηδενιστούν.

Επομένως, πρέπει

$$\begin{cases}\delta b_0+\alpha_0\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=\gamma\\ \delta\alpha_0-b_0\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=0\end{cases} \tag{2.2.51}$$

Έτσι, με γνωστά πλέον τα α_0 και b_0, το $O(\varepsilon)$ γίνεται

$$x_1''+x_1=\frac{1}{4}\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\cos 3\tau+\frac{1}{4}b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\sin 3\tau$$

$$x_1(\tau+2\pi)=x_1(\tau)$$

το οποίο, έχει λύση

$$x_1(\tau)=\alpha_1 cos\tau+b_1 sin\tau-\frac{1}{32}\left[\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\cos 3\tau+b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\sin 3\tau\right]$$

όπου α_1, b_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αντικαθιστώντας την $x_1(\tau)$ στο $O(\varepsilon^2)$, και για να ικανοποιείται η απαίτηση, η $x_2(\tau)$ να είναι *2π*-περιοδική, δηλαδή να μην υπάρχουν αιώνιοι όροι, προκύπτουν εξισώσεις για τον προσδιορισμό των α_1, b_1.

Σε αυτό το στάδιο, όπως και στα επόμενα, οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμικές, και η διαδικασία γίνεται απλούστερη.

2.2.6.1 Η εξίσωση του πλάτους

Στη συνέχεια, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του **πλάτους** της ταλάντωσης **κοντά στον κύριο συντονισμό.** Για τον σκοπό αυτό, μελετάμε τις αλγεβρικές εξισώσεις *(2.2.51)* που προέκυψαν από τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, και οι οποίες δίνουν τις τιμές των α_0 και b_0.

Για να τις λύσουμε, θεωρούμε r_0 το πλάτος του πρωτεύοντα όρου, δηλαδή

$$r_0=\sqrt{\alpha_0^2+b_0^2}\ >0 \qquad (2.2.52)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις εξισώσεις *(2.2.51)*

$$\begin{cases} \delta^2 b_0^2+\alpha_0^2\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]^2+2\delta b_0\alpha_0\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=\gamma^2 \\ \delta^2\alpha_0^2+b_0^2\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]^2-2\delta\alpha_0 b_0\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]=0 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$(\alpha_0^2+b_0^2)\left\{\delta^2+\left[\beta-\frac{3}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)\right]^2\right\}=\gamma^2$$

και με αντικατάσταση της *(2.2.52)*, έχουμε

$$r_0^2\left[\delta^2+\left(\beta-\frac{3}{4}r_0^2\right)^2\right]=\gamma^2 \qquad (2.2.53)$$

Η **εξίσωση του πλάτους** *(2.2.53)* έχει προκύψει μετά την κανονικοποίηση της εξίσωσης του εκκρεμούς και την εισαγωγή των παραμέτρων *β*, *γ* και *δ*, οι οποίες όμως δεν συμπίπτουν με τις φυσικές παραμέτρους του αρχικού προβλήματος.

Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις *(2.2.32)*, *(2.2.33)*

$$\beta=\frac{6(\omega_0^2-\omega^2)}{\omega_0^2}, \qquad \gamma=\frac{6F}{\omega_0^2}$$

που συνδέουν την παράμετρο αποσυντονισμού *β* και το πλάτος διέγερσης *γ*, με τη διαφορά συχνοτήτων (ω_0,ω), και το πλάτος *F* της δύναμης διέγερσης του αρχικού συστήματος.

Επιπλέον, επειδή η απόσβεση έχει εισαχθεί ως $K=\varepsilon\delta$, *με*

$$\varepsilon=\frac{\omega_0^2}{6\omega^2} \text{ και } K=\frac{k}{\omega}$$

προκύπτει ότι

$$\delta=\frac{6\omega k}{\omega_0^2}$$

και η *(2.2.53)* γίνεται στις φυσικές παραμέτρους, η εξίσωση πλάτους

$$r_0^2\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2+\tfrac{1}{8}\omega_0^2 r_0^2\right)^2\right]=F^2 \qquad (2.2.54)$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για το πλάτος των ταλαντώσεων, κατά την μεταβολή του πλάτους F και της συχνότητας ω, της διεγείρουσας δύναμης $F\cos\omega t$, θα υποθέσουμε πως k και ω_0 είναι σταθερά. Έτσι, θέτοντας $\rho=\omega_0^2 r_0^2$ και $f=F^2\omega_0^2$, η *(2.2.54)* γίνεται

$$G(\rho)=\rho\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2+\tfrac{1}{8}\rho\right)^2\right]=f \qquad (2.2.55)$$

Για να μελετήσουμε τις περιοδικές λύσεις της εξαναγκασμένης αποσβεννύμενης ταλάντωσης του εκκρεμούς, λοιπόν, εξετάζουμε την κυβική συνάρτηση

$$G(\rho)=\frac{1}{64}\rho^3+\frac{1}{4}(\omega^2-\omega_0^2)\rho^2+\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right]\rho \ , \ \rho\geq 0 \qquad (2.2.56)$$

η οποία προκύπτει από την εξίσωση του πλάτους, και έχει παράγωγο

$$G'(\rho)=\frac{3}{64}\rho^2+\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2)\rho+\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right] \qquad (2.2.57)$$

Οι μόνιμες περιοδικές αποκρίσεις του συστήματος προκύπτουν από τις θετικές ρίζες της εξίσωσης

$$G(\rho)=f$$

καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα επιτρεπτό πλάτος ταλάντωσης.

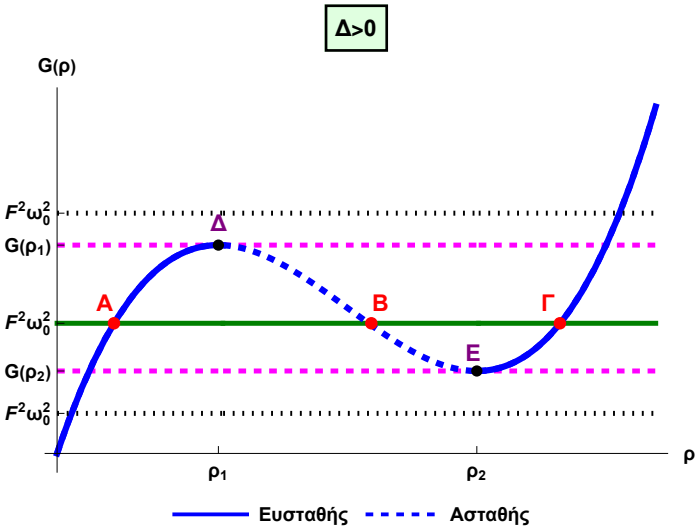
Θεωρητικά, γνωρίζουμε πως επειδή $G(0)=0$ και $\lim_{\rho\to+\infty} G(\rho)=+\infty$, η εξίσωση $G(\rho)=F^2\omega_0^2$ έχει πάντα, τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

Αυτό επιβεβαιώνεται στο Σχήμα *2.2.18*, όπου οι λύσεις μπορούν να προσδιοριστούν γραφικά από την τομή των συναρτήσεων $G(\rho)$ και $f=F^2\omega_0^2$, και παρατηρούμε πως μπορεί να υπάρχουν *1*, *2*, ή *3* σημεία τομής, κι αυτό εξαρτάται από την τιμή της $f=F^2\omega_0^2$.

Για να υπάρξουν, λοιπόν, περισσότερες από μια, θετικές ρίζες, η $G(\rho)$ πρέπει να έχει τοπικά ακρότατα, δηλαδή η παράγωγος $G'(\rho)$ να έχει δύο διακριτές πραγματικές ρίζες. Αν η παράγωγος δεν έχει πραγματικές ρίζες, η $G(\rho)$ είναι μονότονη και υπάρχει μόνο μία θετική ρίζα.

Η κρίσιμη μετάβαση, συμβαίνει όταν η ευθεία $y=f$ είναι εφαπτόμενη στην $G(\rho)$, δηλαδή όταν η εξίσωση *(2.2.55)* έχει διπλή ρίζα. Αυτό γίνεται όταν ισχύουν ταυτόχρονα

$$G(\rho)=F^2\omega_0^2 \text{ και } \frac{dG(\rho)}{d\rho}=0$$



Σχήμα 2.2.18: Διάγραμμα $(\rho, G(\rho))$, όταν $\Delta>0$

Συνεπώς, από την *(2.2.57)*, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$G'(\rho)=\frac{3}{64}\rho^2+\frac{1}{2}(\omega^2-\omega_0^2)\rho+\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right]=0 \qquad (2.2.58)$$

Η *(2.2.58)* είναι δευτεροβάθμια, με διακρίνουσα

$$\Delta=\frac{1}{4}(\omega^2-\omega_0^2)^2-\frac{3}{16}\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right]\Rightarrow$$

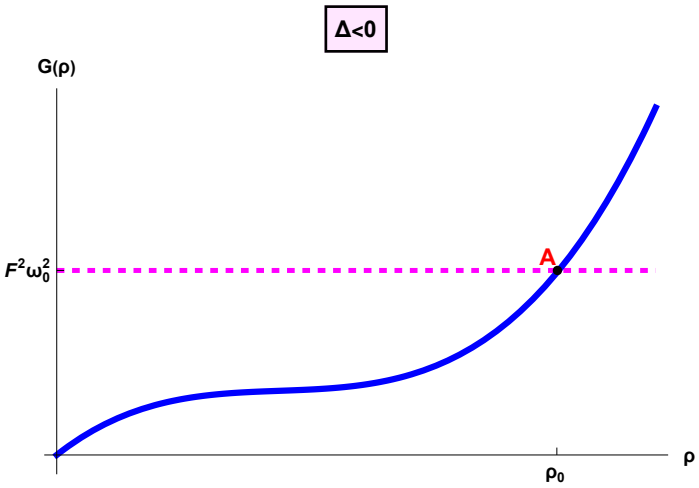
$$\Delta=\frac{1}{16}(\omega^2-\omega_0^2)^2-\frac{3}{16}k^2\omega^2 \qquad (2.2.59)$$

Εξετάζουμε τη διακρίνουσα:

- Όταν η $\Delta<0$, δηλαδή $\left|\omega^2-\omega_0^2\right|<\sqrt{3}k\omega$

η $G'(\rho)=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες, και η $G'(\rho)>0$ για κάθε $\rho>0$, άρα η $G(\rho)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, και αφού $G(0)=0$ και $\lim_{\rho\to+\infty} G(\rho)=+\infty$, η εξίσωση $G(\rho)=F^2\omega_0^2$ έχει πάντα, μια θετική ρίζα, δηλαδή θα έχουμε μια μόνο περιοδική απόκριση (*Σχήμα 2.2.19*).

Επειδή η παράγωγος $G'(\rho)>0$ γύρω από τη μοναδική θετική ρίζα, η συνάρτηση $G(\rho)$ αυξάνεται με το ρ. Αυτό σημαίνει ότι μια μικρή αύξηση στο πλάτος απαιτεί μεγαλύτερη δύναμη για να διατηρηθεί η ταλάντωση. Συνεπώς, η περιοδική λύση είναι ευσταθής, με τρόπο αντίστοιχο της μη αποσβεννύμενης ταλάντωσης που αναλύθηκε προηγουμένως.



Σχήμα 2.2.19: Διάγραμμα $(\rho, G(\rho))$, *όταν* $\Delta<0$.

▶ Όταν η $\Delta>0$, δηλαδή $|\omega^2-\omega_0^2|>\sqrt{3}k\omega$

η εξίσωση $G'(\rho)=0$ έχει δύο διακριτές πραγματικές ρίζες, ρ_1, και ρ_2, οι οποίες είναι θετικές, αφού

$$\rho=\omega_0^2 r_0^2>0$$

Από τους τύπους του *Vieta*, έχουμε για το γινόμενο των ριζών

$$\rho_1\rho_2=\frac{64}{3}\left[k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2\right]>0$$

άρα οι ρίζες είναι ομόσημες.

Επίσης

$$\rho_1+\rho_2=\frac{32}{3}(\omega_0^2-\omega^2)$$

Για να είναι το άθροισμα θετικό, ώστε και οι δύο ρίζες να είναι θετικές, απαιτείται

$$0<\omega<\omega_0$$

Στο διάστημα αυτό, η σχέση $\Delta>0$, γράφεται

$$\Delta>0\Leftrightarrow|\omega^2-\omega_0^2|>\sqrt{3}k\omega\Leftrightarrow\omega^2+\sqrt{3}k\omega-\omega_0^2<0$$

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta_1=3k^2+4\omega_0^2>0$$

άρα για να είναι το τριώνυμο αρνητικό, πρέπει η ω να βρίσκεται ανάμεσα στις ρίζες, που είναι

$$\omega_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}k\pm\sqrt{3k^2+4\omega_0^2}\right)$$

Επειδή $\omega>0$, κρατάμε τη θετική ρίζα, και τελικά πρέπει

$$0<\omega<\frac{1}{2}\left(\sqrt{3k^2+4\omega_0^2}-k\sqrt{3}\right)$$

και οι ρίζες της $G'(\rho)=0$ είναι

$$\rho_{1,2}=\frac{16}{3}(\omega_0^2-\omega^2)\mp\frac{8}{3}\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2-3k^2\omega^2}$$

με $\rho_1<\rho_2$

Η κυβική συνάρτηση $G(\rho)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ρ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ρ_2.

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- Αν $F^2\omega_0^2>G(\rho_1)$ ή $F^2\omega_0^2<G(\rho_2)$

δηλαδή αν η ευθεία $y=F^2\omega_0^2$ βρίσκεται πάνω από το τοπικό μέγιστο ή κάτω από το τοπικό ελάχιστο, τότε, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.18*, υπάρχει ένα σημείο τομής, άρα μια περιοδική λύση, που σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αναφέρει, έχουμε την ισχυρή ένδειξη πως είναι ευσταθής.

- Αν $G(\rho_2)<F^2\omega_0^2<G(\rho_1)$

δηλαδή αν η ευθεία $y=F^2\omega_0^2$ βρίσκεται ανάμεσα στα ακρότατα, τότε, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.18*, υπάρχουν τρία σημεία τομής, άρα τρεις αποκρίσεις. Οι ταλαντώσεις με το ελάχιστο πλάτος (σημείο *A* στο *Σχήμα 2.2.18*) και με το μέγιστο πλάτος (σημείο *Γ* στο *Σχήμα 2.2.18*) έχουμε ένδειξη πως είναι ευσταθείς, ενώ αυτή με το ενδιάμεσο πλάτος (σημείο *B* στο Σχήμα *2.2.18*) είναι ασταθής.

- Αν $F^2\omega_0^2=G(\rho_1)$ (εφαπτομένη στο τοπικό μέγιστο), ή $F^2\omega_0^2=G(\rho_2)$ (εφαπτομένη στο τοπικό ελάχιστο)

τότε υπάρχει διπλή ρίζα στο ρ_1 ή αντίστοιχα στο ρ_2 και μία τρίτη απλή ρίζα σε άλλη θέση — συνολικά δύο διακριτά σημεία τομής, αλλά μία εξ αυτών είναι διπλή.

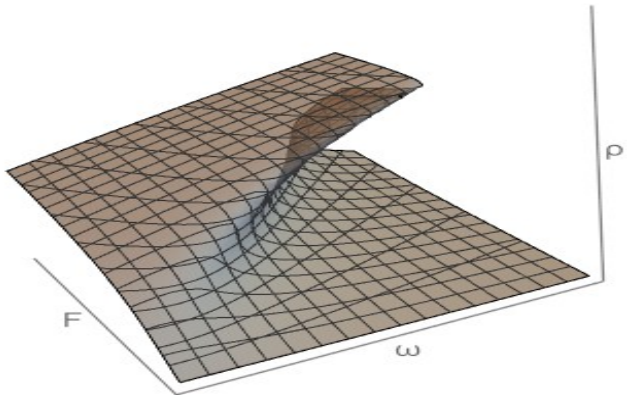
Τα σημεία που η $F^2\omega_0^2$ εφάπτεται στην κυβική συνάρτηση είναι τα **κρίσιμα σημεία ή σημεία αναδίπλωσης (fold points)** και οι δύο λύσεις συγχωνεύονται και εξαφανίζονται ή δημιουργούνται καθώς η $F^2\omega_0^2$ διασχίζει τις τιμές αυτές.

▶ Όταν $\Delta=0$, δηλαδή $|\omega^2-\omega_0^2|=\sqrt{3}k\omega\Rightarrow\omega=\frac{1}{2}\sqrt{3k^2+4\omega_0^2}-\sqrt{3}k$

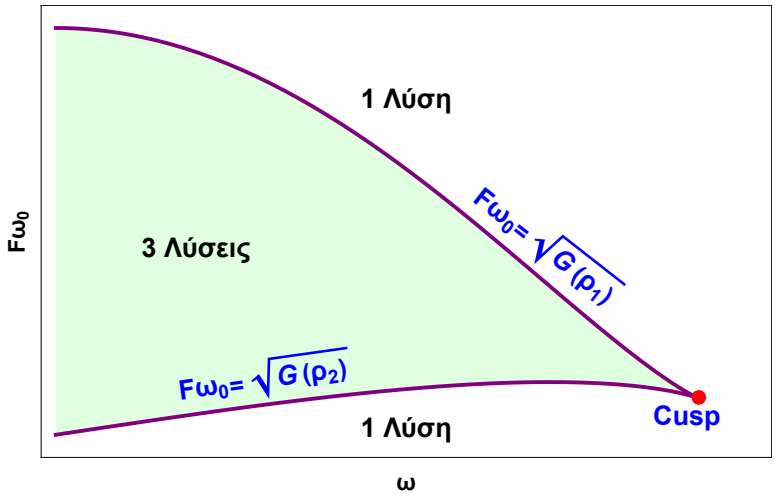
τότε η $G'(\rho)$ έχει διπλή ρίζα, τη

$$\rho_0=\frac{16}{3}(\omega_0^2-\omega^2)$$

και αν η $F^2\omega_0^2=G(\rho_0)$, η εξίσωση $G(\rho)=F^2\omega_0^2$ έχει μια τριπλή ρίζα, που είναι το **σημείο αιχμής (cusp)**. Αυτή είναι η εκφυλισμένη περίπτωση, όπου οι δύο καμπύλες $G(\rho_1)=F^2\omega_0^2$ και $G(\rho_2)=F^2\omega_0^2$ συναντιούνται. Αν $F^2\omega_0^2\neq G(\rho_0)$, τότε η εξίσωση $G(\rho)=F^2\omega_0^2$ έχει μια μόνο ρίζα, άρα υπάρχει μόνο μια περιοδική ταλάντωση.



Σχήμα 2.2.20: Τρισδιάστατο γράφημα (ρ, ω, F)



Σχήμα 2.2.21: Διάγραμμα $(\omega, F\omega_0)$

Μέχρι στιγμής, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για σταθερή τιμή της συχνότητας διέγερσης ω, και διερευνήθηκε η εξάρτηση του αριθμού και της ευστάθειας των περιοδικών λύσεων από το πλάτος της δύναμης F. Με αυτόν τον τρόπο εντοπίστηκαν τα κρίσιμα σημεία και το σημείο αιχμής, δηλαδή οι τιμές των παραμέτρων για τις οποίες η εξίσωση πλάτους αποκτά διπλή ή τριπλή ρίζα (*fold points* και *cusp*).

Για να αποκτηθεί όμως μια συνολική εικόνα της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, είναι απαραίτητο να εξεταστεί η συνδυασμένη επίδραση των παραμέτρων ω και F. Καταγράφοντας τις κρίσιμες τιμές F για τις τιμές της ω στις οποίες εμφανίζονται *fold points*, προκύπτει στο επίπεδο $(\omega, F\omega_0)$ το σύνολο των σημείων αναδίπλωσης, τα οποία σχηματίζουν δύο συνεχείς **καμπύλες αναδίπλωσης (fold curves).** Οι καμπύλες αυτές οριοθετούν τις περιοχές μοναδικής και δισταθερής απόκρισης και καταλήγουν σε ένα μοναδικό **σημείο αιχμής (cusp)**, όπου συγχωνεύονται όλες οι λύσεις. Η συγκεκριμένη γεωμετρία αποτελεί το τυπικό παράδειγμα της **καταστροφής αιχμής (cusp catastrophe)** της θεωρίας καταστροφών, η οποία περιγράφει συστήματα με έναν βαθμό ελευθερίας και δύο παραμέτρους ελέγχου, και θα γίνει παρακάτω εκτενέστερη περιγραφή.

Στα *Σχήματα* 2.2.20 και 2.2.21, τα αντίστοιχα διαγράμματα στον τρισδιάστατο χώρο (ρ, ω, F) και στο επίπεδο $(\omega, F\omega_0)$ συνοψίζουν με γεωμετρικό τρόπο τη δομή των λύσεων και τη μετάβαση από μοναδική σε δισταθερή συμπεριφορά.

2.2.6.2 Καμπύλες του πλάτους της απόκρισης

Στην προηγούμενη ενότητα εντοπίσαμε, μέσω της αλγεβρικής και γεωμετρικής μελέτης της εξίσωσης του πλάτους, ισχυρές ενδείξεις για την ευστάθεια ή αστάθεια των μόνιμων περιοδικών λύσεων του αποσβεννύμενου συστήματος. Στην παρούσα ενότητα, η ανάλυση αυτή ολοκληρώνεται, καθώς η ευστάθεια εξετάζεται πλέον αυστηρά, μέσω της γραμμικοποίησης του συστήματος αργής ροής που προκύπτει από τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων.

- ***Ανάλυση ευστάθειας των μόνιμων περιοδικών αποκρίσεων***

Ξεκινάμε από την εξίσωση (2.2.13)

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega_0^2 x-\frac{1}{6}\omega_0^2 x^3=F\,cos\omega t$$

και εφαρμόζουμε τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων, όπως έχει αναπτυχθεί στην *Ενότητα* 2.2.5.2, ώστε να εξαχθεί το αντίστοιχο σύστημα αργής εξέλιξης για το πλάτος και τη φάση. Το σύστημα αυτό περιγράφει την δυναμική των μεταβαλλόμενων παραμέτρων σε χρονική κλίμακα πολύ μεγαλύτερη από την περίοδο της ταλάντωσης και μας επιτρέπει να μελετήσουμε με ακρίβεια τη σταθερότητα των περιοδικών λύσεων.

Έτσι, αντικαθιστούμε τις (2.2.39), (2.2.40), (2.2.41), (2.2.42α) στην (2.2.13), κι έχουμε

$$(-\omega^2\alpha+2\omega\dot{b})\cos\omega t+(-2\omega\dot{\alpha}-\omega^2 b)\sin\omega t+k[(\dot{\alpha}+\omega b)\cos\omega t+(-\omega\alpha+\dot{b})\sin\omega t]$$
$$+\omega_0^2(\alpha\cos\omega t+b\sin\omega t)-\frac{1}{6}\omega_0^2\left[\frac{3}{4}\alpha(\alpha^2+b^2)\cos\omega t+\frac{3}{4}b(\alpha^2+b^2)\sin\omega t\right]=F\cos\omega t$$

Αγνοούμε τους $k\dot{\alpha}, k\dot{b}$, επειδή είναι πολύ μικρού μεγέθους, και αναδιατάσσοντας τους όρους, για ομαδοποίηση ως προς $\sin\omega t, \cos\omega t$, προκύπτει

$$\left\{2\omega\dot{b}+k\omega b-\alpha\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha^2+b^2)\right]\right\}\cos\omega t$$
$$+\left\{-2\omega\dot{\alpha}-k\omega\alpha-b\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha^2+b^2)\right]\right\}\sin\omega t=F\cos\omega t$$

Επειδή από τη (2.2.52)

$$r=\sqrt{\alpha^2+b^2} \qquad (2.2.52^*)$$

τελικά

$$\left\{2\omega\dot{b}+k\omega b-\alpha\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right]\right\}\cos\omega t$$

$$+\left\{-2\omega\dot{\alpha}-k\omega\alpha-b\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right]\right\}\sin\omega t=F\cos\omega t$$

από όπου έπεται το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{\alpha}=-\frac{b}{2\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right]-\frac{1}{2}k\alpha$$

$$\dot{b}=\frac{\alpha}{2\omega}\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right]-\frac{1}{2}kb+\frac{F}{2\omega}$$

Τα σημεία ισορροπίας δίνονται από

$$A(\alpha,b)=-b\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right]-k\alpha\omega=0 \qquad (2.2.60)$$

$$B(\alpha,b)=\alpha\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right]-kb\omega+F=0 \qquad (2.2.61)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος αργής ροής δεν αποτελούν νέο περιορισμό· η δομή των λύσεών τους είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν της εξίσωσης πλάτους που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα. Πράγματι, αν υψώσουμε στο τετράγωνο τις δύο εξισώσεις ισορροπίας και τις προσθέσουμε, ανακτούμε ακριβώς την αλγεβρική εξίσωση πλάτους. Επομένως, οι συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύστημα διαθέτει μία ή τρεις πραγματικές λύσεις παραμένουν αμετάβλητες.
Η διαφορά δεν βρίσκεται στον αριθμό των λύσεων, αλλά στην ερμηνεία τους: στο επίπεδο (α,b), κάθε λύση αντιστοιχεί σε ένα σημείο ισορροπίας του αυτόνομου συστήματος, του οποίου η ευστάθεια μπορεί πλέον να εξεταστεί πλήρως με τα εργαλεία των δυναμικών συστημάτων, που αναλύσαμε παραπάνω. Με άλλα λόγια, το σύστημα αργής ροής “κωδικοποιεί” τις ίδιες περιοδικές λύσεις που περιγράψαμε αλγεβρικά, αλλά τώρα μας επιτρέπει να αναλύσουμε ποιοτικά την ευστάθειά τους .
Συγκεκριμένα για να διερευνήσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, θα προχωρήσουμε σε γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος *(2.2.60)-(2.2.61)*.
Αρχικά, αν (α_0,b_0) σημείο ισορροπίας, θέτουμε

$$\tilde{\alpha}=\alpha-\alpha_0$$

$$\tilde{b}=b-b_0$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\tilde{\alpha}}=A_1(\alpha_0,b_0)(\alpha-\alpha_0)+A_2(\alpha_0,b_0)(b-b_0)$$

$$\dot{\tilde{b}}=B_1(\alpha_0,b_0)(\alpha-\alpha_0)+B_2(\alpha_0,b_0)(b-b_0)$$

όπου

$A_1(\alpha_0,b_0)=\partial_\alpha A(\alpha_0,b_0), A_2(\alpha_0,b_0)=\partial_b A(\alpha_0,b_0), B_1(\alpha_0,b_0)=\partial_\alpha B(\alpha_0,b_0), B_2(\alpha_0,b_0)=\partial_b B(\alpha_0,b_0)$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(\alpha_0,b_0)=\begin{bmatrix} A_1(\alpha_0,b_0) & A_2(\alpha_0,b_0) \\ B_1(\alpha_0,b_0) & B_2(\alpha_0,b_0) \end{bmatrix}=$$

$$\boldsymbol{J}(\alpha_0,b_0)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha_0 b_0\omega_0^2-k\omega & -(\omega^2-\omega_0^2)-\frac{1}{8}\omega_0^2(\alpha_0^2+3b_0^2) \\ (\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2(3\alpha_0^2+b_0^2) & \frac{1}{4}\omega_0^2\alpha_0 b_0-k\omega \end{bmatrix}$$

και αντικαθιστώντας την (2.2.52*), τελικά είναι

$$\boldsymbol{J}(\alpha_0,b_0)=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\alpha_0 b_0\omega_0^2-k\omega & -\left[(\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2+\frac{1}{4}\omega_0^2 b_0^2\right] \\ (\omega^2-\omega_0^2)+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2+\frac{1}{4}\omega_0^2\alpha_0^2 & \frac{1}{4}\omega_0^2\alpha_0 b_0-k\omega \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα δίνονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, στη μορφή

$$\lambda^2-p\lambda+q=0 \qquad (2.2.62)$$

όπου το ίχνος είναι

$$p=-2k\omega<0$$

και η ορίζουσα

$$q=k^2\omega^2+\left(\omega^2-\omega_0^2+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right)^2+\frac{1}{4}\omega_0^2 r^2\left(\omega^2-\omega_0^2+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2\right)$$

Θέτουμε

$$X=\omega^2-\omega_0^2+\frac{1}{8}\omega_0^2 r^2 \qquad (2.2.63)$$

οπότε η εξίσωση πλάτους (2.2.54), γράφεται

$$r^2k^2\omega^2+r^2X^2=F^2$$

ή μπορούμε να εκφράσουμε τη δύναμη F ως συνάρτηση του πλάτους r:

$$F^2(r)=r^2k^2\omega^2+r^2X^2 \qquad (2.2.64)$$

και η ορίζουσα τότε γράφεται ως

$$q = X^2 + \frac{1}{4}\omega_0^2 r^2 X + k^2\omega^2 \qquad (2.2.65)$$

Παραγωγίζουμε την (2.2.64), και επειδή $X'(r) = \frac{1}{4}\omega_0^2 r$, έχουμε

$$\frac{d}{dr}(F^2) = 2F\frac{dF}{dr} = 2r\left(X^2 + \frac{1}{4}\omega_0^2 r^2 X + k^2\omega^2\right) \Rightarrow$$

$$F\frac{dF}{dr} = r\left(X^2 + \frac{1}{4}\omega_0^2 r^2 X + k^2\omega^2\right)$$

Επομένως, για $F>0$, $r>0$, (φυσικές λύσεις), η (2.2.65) γράφεται

$$q = \frac{F}{r}\frac{dF}{dr} \qquad (2.2.66)$$

Με δεδομένο ότι $\frac{F}{r}>0$, έπεται ότι το πρόσημο της ορίζουσας του Ιακωβιανού πίνακα σε κάθε σημείο ισορροπίας καθορίζεται αποκλειστικά από το πρόσημο της παραγώγου $\frac{dF}{dr}$. Επομένως, η ευστάθεια των μόνιμων περιοδικών αποκρίσεων συνδέεται άμεσα με την κλίση της καμπύλης δύναμης–πλάτους $F(r)$. Επιπλέον, λόγω των σχέσεων $\rho = \omega_0^2 r^2$ και $F^2 = \frac{1}{\omega_0^2}G(\rho)$, προκύπτει ότι οι κλίσεις των συναρτήσεων $F(r)$ και $G(\rho)$ έχουν το ίδιο πρόσημο, καθώς διαφέρουν μόνο κατά θετικούς πολλαπλασιαστικούς παράγοντες. Συνεπώς, στα *Σχήματα* 2.2.18 και 2.2.19, το πρόσημο της $\frac{dF}{dr}$ μπορεί να προσδιοριστεί άμεσα από την τοπική κλίση της καμπύλης $G(\rho)$.

Η παρατήρηση αυτή δείχνει τη σύνδεση μεταξύ της αλγεβρικής μορφής της εξίσωσης πλάτους και των ποιοτικών χαρακτηριστικών της καμπύλης $G(\rho)$.

Αφού προσδιορίστηκαν το ίχνος και η ορίζουσα, εισάγουμε τώρα τη διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

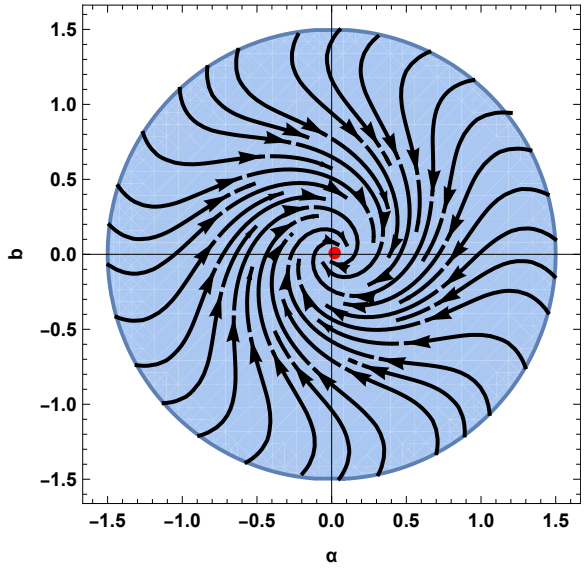
$$\Delta = p^2 - 4q$$

Με την ανάλυση της *Ενότητας* 2.2.5.2, είμαστε σε θέση να αποφανθούμε για το είδος ευστάθειας όλων των περιοδικών αποκρίσεων που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Έτσι,

- Περιοχή όπου υπάρχει μία μόνο λύση:

  Όπως φαίνεται στα Σχήματα 2.2.18 και 2.2.19, στο σημείο τομής που αντιστοιχεί στην περιοδική λύση, η καμπύλη έχει τοπική θετική κλίση ($\frac{dF}{dr}>0$), άρα $q>0$, και λόγω μικρής απόσβεσης ($k^2\omega^2 \ll \frac{F}{r}\frac{dF}{dr}$), η $\Delta<0$. Αφού $p<0$, η περιοδική λύση είναι **ευσταθής σπείρα** (*Πίνακας* 2.2.1), όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο πορτραίτο φάσης του *Σχήματος* 2.2.22.



Σχήμα 2.2.22: *Πορτραίτο φάσης του συστήματος, με ω_0=1, ω=0.89, F=0.005, k=0.1*

➔ Περιοχή όπου υπάρχουν τρεις λύσεις:

Στο *Σχήμα 2.2.18*, η τομή δίνει τρία σημεία:

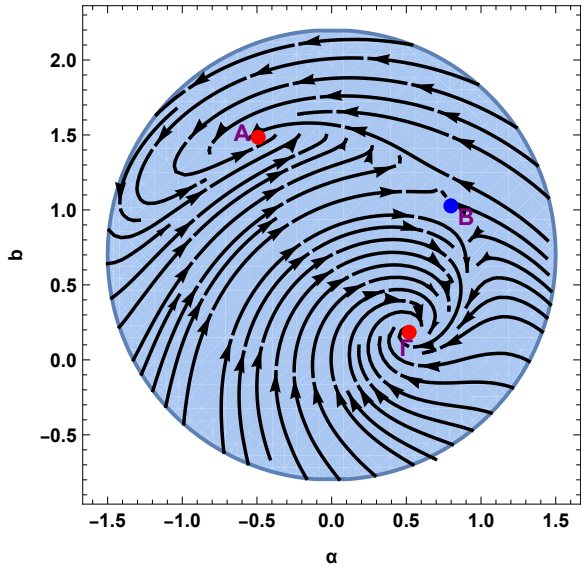
1. Σημεία *A* και *Γ* (μικρό και μεγάλο πλάτος απόκρισης)

   Η καμπύλη έχει τοπική θετική κλίση, οπότε $q>0$ και η διακρίνουσα παραμένει αρνητική. Επομένως, αφού $p<0$ (*Πίνακας 2.2.1*) οι δύο λύσεις είναι **ευσταθείς σπείρες**.

2. Σημείο *B* (μεσαίο πλάτος απόκρισης)

   Η τοπική κλίση είναι αρνητική άρα $q<0$, και η λύση είναι **ασταθές σάγμα**.

Στο *Σχήμα 2.2.23*, φαίνονται τα 3 κρίσιμα σημεία και η αντίστοιχη ευστάθειά τους.

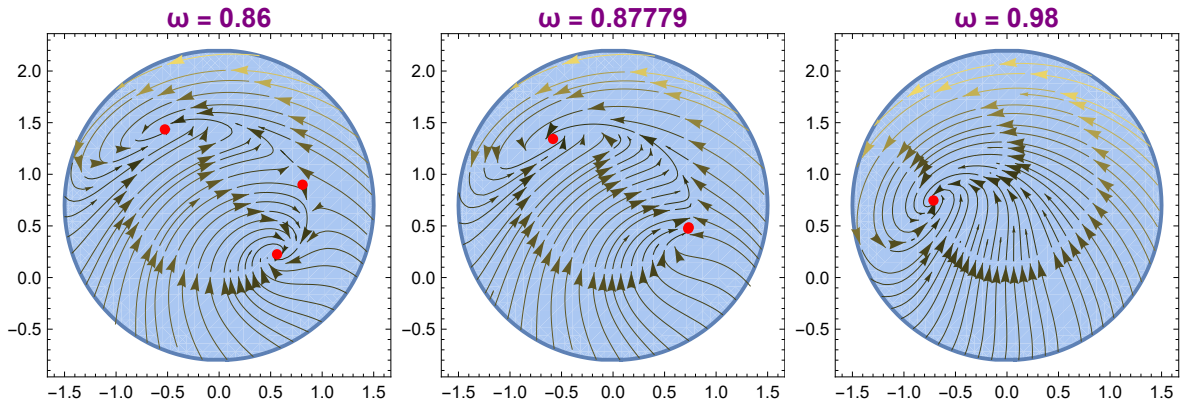


Σχήμα 2.2.23: Πορτραίτο φάσης του συστήματος, με ω_0=1, ω=0.85, F=0.14, k=0.1

➔ Σημεία όπου $\frac{dF}{dr}=0$

Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στα σημεία *Δ* και *E*, όπου η καμπύλη στο Σχήμα 2.2.18 έχει οριζόντια εφαπτομένη. Τότε $q=0$ και το σύστημα έχει μία μηδενική ιδιοτιμή, άρα τα σημεία είναι εκφυλισμένα.

Πρόκειται για τα σημεία αναδίπλωσης (κρίσιμα σημεία) της εξίσωσης πλάτους — τα σημεία όπου αλλάζει η ευστάθεια και συμβαίνει η μετάβαση από μία σε τρεις λύσεις ή αντίστροφα, όπως φαίνεται καθαρά στο *Σχήμα* 2.2.24.



Σχήμα 2.2.24: Πορτραίτα φάσης του συστήματος, για διαφορετικές συχνότητες ω, με ω_0=1, F=0.14, k=0.1, όπου στο (α) 3 λύσεις, (β) 2 λύσεις, (γ) 1 λύση

Μετά την ανάλυση της ευστάθειας των περιοδικών λύσεων, γίνεται φανερό ότι η ύπαρξη πολλαπλών λύσεων οργανώνει τα πεδία έλξης του συστήματος. Όταν υπάρχουν τρεις λύσεις, τα δύο ευσταθή σημεία αντιστοιχούν στο μικρό και στο μεγάλο πλάτος απόκρισης, ενώ το μεσαίο σημείο είναι ασταθές. Το ασταθές σημείο συνδέεται με δύο χαρακτηριστικές κατευθύνσεις: η μια ορίζει την **ευσταθή πολλαπλότητα**, κατά μήκος της οποίας οι τροχιές προσεγγίζουν το ασταθές σημείο, και η άλλη την **ασταθή πολλαπλότητα**, κατά μήκος της οποίας οι τροχιές απομακρύνονται.

Η παρουσία της ευσταθούς πολλαπλότητας είναι καθοριστική για τη δομή του πορτραίτου φάσης: η καμπύλη αυτή χωρίζει το επίπεδο (α, b) σε δύο διακεκριμένες περιοχές, καθεμία από τις οποίες αποτελεί πεδίο έλξης ενός από τα ευσταθή σημεία. Έτσι, ανάλογα με το πού τοποθετείται μια αρχική συνθήκη σε σχέση με την ευσταθή πολλαπλότητα, η αντίστοιχη τροχιά θα καταλήξει είτε στο ένα είτε στο άλλο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Η δομή αυτή είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα συστημάτων με **δισταθερότητα (bistability).**

Το πρώτο πορτραίτο φάσης του *Σχήματος* 2.2.24 αποτυπώνει ξεκάθαρα αυτή τη γεωμετρία: τα δύο ευσταθή σημεία *A* και *Γ*, εμφανίζονται ως ελκυστικές σπείρες, ενώ το ασταθές σάγμα στο σημείο *B*, συνοδεύεται από τις χαρακτηριστικές κατευθύνσεις των πολλαπλοτήτων του. Στα επόμενα δύο

πορτραίτα, φαίνεται ότι μια μικρή μεταβολή της διεγείρουσας συχνότητας μετατοπίζει τα σημεία ισορροπίας και συρρικνώνει την απόσταση μεταξύ τους, έως ότου τα σημεία συγκλίνουν και τελικά εξαφανίζονται μέσω αναδίπλωσης. Η μετάβαση αυτή εξηγεί πώς το σύστημα περνά από καθεστώς με πολλαπλές λύσεις σε καθεστώς με μοναδική λύση, και ταυτόχρονα πώς μεταβάλλονται τα αντίστοιχα πεδία έλξης.

Παρατηρούμε επίσης, συγκρίνοντας με το *Σχήμα 2.2.11*, ότι η προσθήκη απόσβεσης καταστρέφει τις κλειστές τροχιές του μη αποσβεννύμενου συστήματος και αυτές μετασχηματίζονται σε ελκυστικές σπείρες, όπως είναι χαρακτηριστικό για έναν αποσβεννύμενο ταλαντωτή.

◉ *Εξέλιξη του πλάτους της απόκρισης με τη συχνότητα*

Αφού εξετάστηκε η ευστάθεια των περιοδικών λύσεων, μελετάμε τώρα τις καμπύλες του πλάτους της μόνιμης περιοδικής απόκρισης καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης. Επειδή στα μη γραμμικά συστήματα, η απόκριση μπορεί να παρουσιάζει πολλαπλές τιμές πλάτους για την ίδια συχνότητα διέγερσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η καμπύλη που ενώνει τα σημεία μέγιστου πλάτους των καμπυλών απόκρισης, γνωστή ως **backbone curve**.

Η καμπύλη αυτή εκφράζει την εγγενή σχέση συχνότητας–πλάτους του συστήματος και, στο όριο της ασθενούς διέγερσης, είναι ανεξάρτητη από το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης *F*. Για τον προσδιορισμό της, επιβάλλουμε τη συνθήκη μέγιστου πλάτους

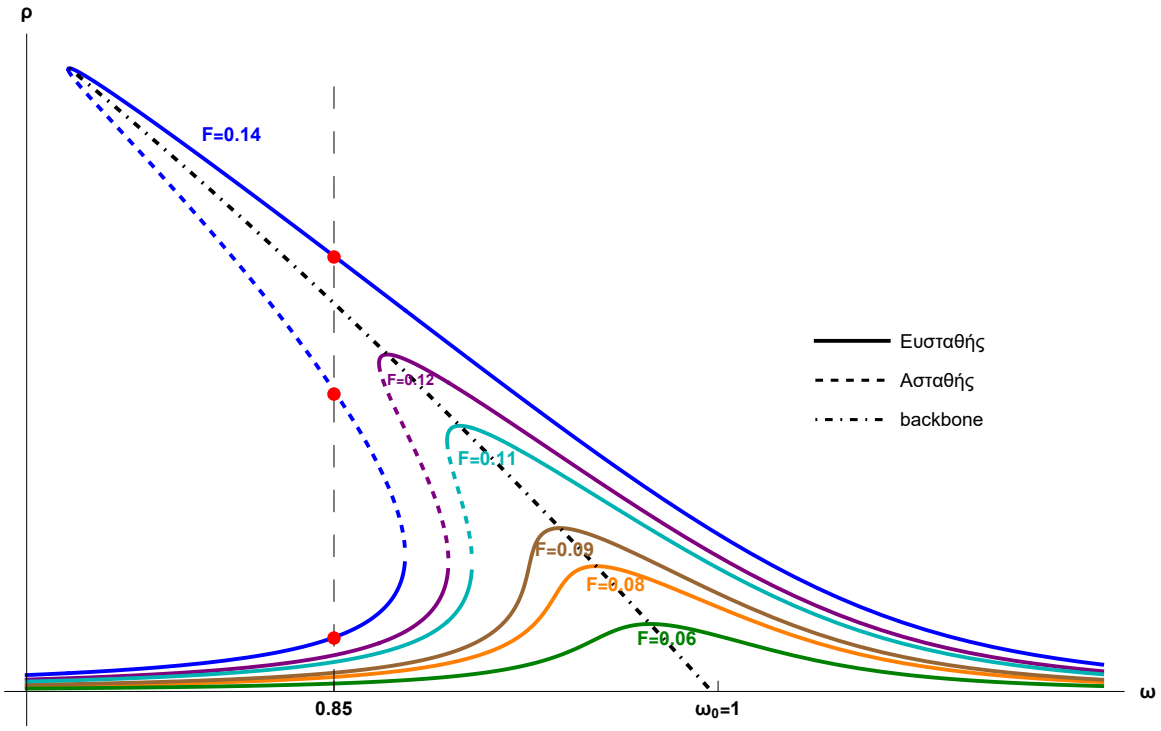
$$\frac{d\rho}{d\omega}=0$$

Θεωρώντας το *F* σταθερό και διαφορίζοντας ως προς *ω*, προκύπτει τελικά η σχέση

$$\rho(\omega)=8(\omega_0^2-\omega^2)-4k^2$$

η οποία αποτελεί την *backbone curve* του αποσβεννύμενου συστήματος, και περιγράφει τη μετατόπιση της φυσικής συχνότητας λόγω της μη γραμμικότητας, καθορίζοντας τη θέση των κορυφών των καμπυλών πλάτους–συχνότητας.

Για πεπερασμένες τιμές της δύναμης *F*, οι κορυφές των πραγματικών καμπυλών πλάτους δεν συμπίπτουν ακριβώς με την *backbone curve*, αλλά συγκλίνουν σε αυτήν καθώς $F\to 0$. Το φαινόμενο αυτό αποτυπώνεται στο *Σχήμα 2.2.25*, όπου παρουσιάζονται οι καμπύλες πλάτους της απόκρισης συναρτήσει της συχνότητας, για διάφορες τιμές του πλάτους της διεγείρουσας δύναμης *F*, με σταθερό $k=0.1$ και $\omega_0=1$.



Σχήμα 2.2.25: Καμπύλες πλάτους-συχνότητας για το αποσβεννύμενο εκκρεμές

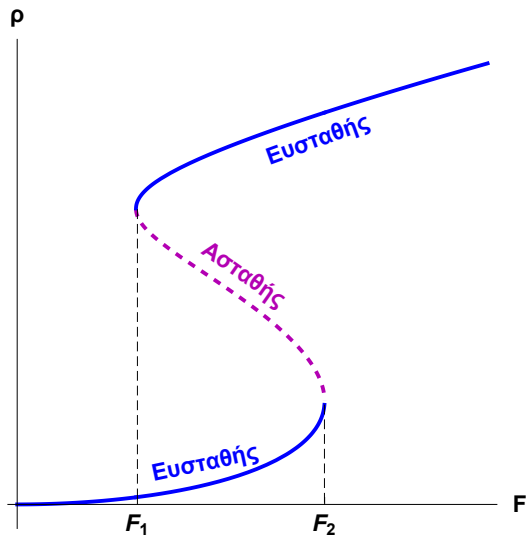
Το k επιλέγεται μικρό, ώστε να είναι εφικτή η άμεση σύγκριση με τη μη αποσβεννύμενη περίπτωση του *Σχήματος* 2.2.14. Αν και το νέο διάγραμμα διατηρεί τη γενική μορφή του προηγούμενου, εμφανίζει ουσιώδεις διαφοροποιήσεις λόγω της παρουσίας απόσβεσης.

Πρώτον, οι δύο διακριτοί κλάδοι που εμφανίζονται στη μη αποσβεννύμενη περίπτωση δεν παραμένουν πλέον απομονωμένοι. Η απόσβεση «στρογγυλεύει» τη δομή της απόκρισης και οδηγεί στη σύνδεση των κλάδων, σχηματίζοντας μία ενιαία και συνεχόμενη καμπύλη πλάτους–συχνότητας.

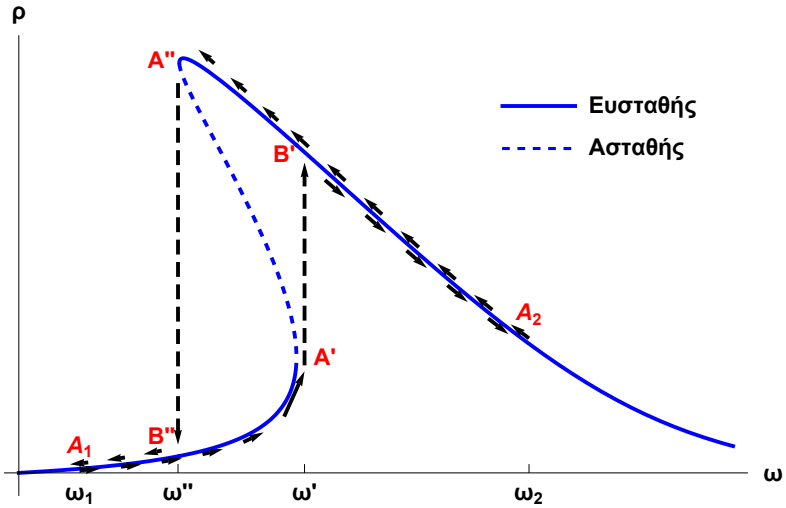
Δεύτερον, ενώ στο μη αποσβεννύμενο σύστημα η καμπύλη πλάτους–συχνότητας είναι τρίτιμη για κατάλληλες τιμές της συχνότητας, η απόσβεση εισάγει ένα κατώφλι στη δύναμη διέγερσης. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη τριών λύσεων (δύο ευσταθών και μίας ασταθούς) απαιτεί μια ελάχιστη τιμή της δύναμης F. Για τιμές μικρότερες από αυτό το όριο, η απόκριση του συστήματος καθίσταται μονοσήμαντη.

Τέλος, για σταθερές τιμές του ρ, η μορφή της καμπύλης δείχνει ότι κάτω από το σημείο μέγιστου πλάτους αντιστοιχούν δύο διαφορετικές τιμές της συχνότητας ω, ενώ στο μέγιστο αντιστοιχεί μοναδική τιμή. Η συμπεριφορά αυτή είναι χαρακτηριστική της αναδίπλωσης που προκαλείται από τη μη γραμμικότητα του συστήματος. Ωστόσο, η παρουσία της απόσβεσης περιορίζει την ένταση του φαινομένου, μειώνοντας τη «διάχυση» των κλάδων σε σύγκριση με το μη αποσβεννύμενο σύστημα.

Καμπύλες δύναμης-απόκρισης και συχνότητας-απόκρισης



Σχήμα 2.2.26: Καμπύλη δύναμης-απόκρισης



Σχήμα 2.2.27: Καμπύλη συχνότητας-απόκρισης-Το φαινόμενο του άλματος

Η δυναμική του αποσβεννύμενου εκκρεμούς, μετά από όσα αναλύσαμε, μπορεί να απεικονιστεί είτε μέσω της καμπύλης δύναμης–απόκρισης είτε μέσω της καμπύλης συχνότητας–απόκρισης. Στο *Σχήμα* 2.2.26 παρουσιάζεται η καμπύλη δύναμης–απόκρισης, η οποία έχει *σχήμα-S* και περιλαμβάνει περιοχή δισταθερότητας, όπου συνυπάρχουν δύο ευσταθείς λύσεις (συνεχής καμπύλη) και μία ασταθής (διακεκομμένη). Για τιμές της δύναμης F εντός του διαστήματος $[F_1, F_2]$, το σύστημα εμφανίζει τρεις δυνατές περιοδικές αποκρίσεις, ενώ εκτός αυτού του διαστήματος, η απόκριση είναι μονοσήμαντη.

Υστέρηση

Όταν η δύναμη μεταβάλλεται αργά (*quasi-static sweep*), εμφανίζεται το φαινόμενο της **υστέρησης**. Το σύστημα τείνει να παραμένει στην ευσταθή λύση στην οποία βρίσκεται αρχικά, ακόμη κι αν υπάρχει και δεύτερη διαθέσιμη ευσταθής λύση. Όσο η δύναμη αυξάνεται, το σύστημα ακολουθεί τον αντίστοιχο ευσταθή κλάδο μέχρι το σημείο στο οποίο αυτός χάνει τη σταθερότητά του, δηλαδή το άνω σημείο αναδίπλωσης F_2. Εκεί δεν υπάρχει πλέον διαθέσιμη συνέχεια της λύσης και η απόκριση «πηδά» απότομα στον άλλο ευσταθή κλάδο.

Αν στη συνέχεια η δύναμη μειωθεί, η διαδρομή δεν είναι η ίδια: το σύστημα παραμένει στον νέο ευσταθή κλάδο μέχρι να φτάσει το δεύτερο κρίσιμο σημείο F_1, όπου κι αυτός χάνει τη σταθερότητά του. Μόνο τότε εμφανίζεται νέο άλμα προς τον αρχικό κλάδο. Η διαφορά των δύο διαδρομών (κατά την αύξηση και μείωση της δύναμης) σχηματίζει έναν κλειστό **υστερητικό βρόχο** (**hysteresis loop**). Η υστέρηση αντανακλά το γεγονός ότι η απόκριση του συστήματος δεν προσαρμόζεται άμεσα στις μικρές αλλαγές της εξωτερικής διέγερσης. Αντίθετα, απαιτείται η δύναμη να ξεπεράσει συγκεκριμένες κρίσιμες τιμές για να προκληθεί μετάβαση από τη μία ευσταθή κατάσταση στην άλλη. Αυτές οι απότομες αλλαγές, οι οποίες ονομάζονται καταστροφές (*catastrophes*), αντιστοιχούν στις αναδιπλώσεις της καμπύλης και χαρακτηρίζονται μαθηματικά από γεωμετρία τύπου *cusp* — τυπικό γνώρισμα συστημάτων όπως ο ταλαντωτής *Duffing*.

Φαινόμενο άλματος

Ανάλογα, το φαινόμενο της απότομης μετάβασης, παρατηρείται και στις καμπύλες συχνότητας–απόκρισης *(Σχήμα 2.2.27)*, όταν η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης μεταβάλλεται αργά, και η πραγματική απόκριση του συστήματος δεν ακολουθεί την γεωμετρική καμπύλη συνεχόμενα. Αντίθετα, παρουσιάζει απότομα άλματα κάθε φορά που ο τοπικός ευσταθής κλάδος παύει να υφίσταται. Αυτό είναι το **φαινόμενο άλματος** (**jump phenomenon)**, το οποίο αποτελεί άμεση συνέπεια της αναδίπλωσης της καμπύλης.

Αναλυτικά, το φαινόμενο περιγράφεται ως εξής (*Σχήμα 2.2.27*):

Ξεκινώντας από χαμηλές συχνότητες, η απόκριση βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{A_1}$, επάνω στον κατώτερο ευσταθή κλάδο. Καθώς η συχνότητα αυξάνεται, το πλάτος ακολουθεί ομαλά τον κλάδο μέχρι το σημείο $\boldsymbol{A'}$.

Μόλις η συχνότητα υπερβεί την κρίσιμη τιμή του πρώτου σημείου αναδίπλωσης, ο κλάδος χάνει την ευστάθειά του και δεν υπάρχει διαθέσιμη συνέχεια. Η απόκριση κάνει τότε ένα απότομο **άλμα προς τον ανώτερο κλάδο**, στο σημείο $\boldsymbol{B'}$. Από εκεί, συνεχίζοντας την αύξηση της συχνότητας, η απόκριση μετακινείται ομαλά κατά μήκος του ανώτερου ευσταθούς κλάδου, μέχρι το σημείο $\boldsymbol{A_2}$.

Αν τώρα η συχνότητα μειωθεί:

Το σύστημα παραμένει στον ανώτερο ευσταθή κλάδο και ακολουθεί την πορεία προς το σημείο $\boldsymbol{A}''$. Όταν φτάσει στη δεύτερη αναδίπλωση, ο κλάδος καθίσταται ασταθής. Τότε η απόκριση δεν μπορεί να συνεχίσει, και πραγματοποιεί ένα δεύτερο απότομο **άλμα**, αυτή τη φορά προς τα κάτω, στο σημείο $\boldsymbol{B}''$, πάνω στον κατώτερο κλάδο. Από το $\boldsymbol{B}''$ η απόκριση καταλήγει πάλι στο σημείο $\boldsymbol{A}_1$, ολοκληρώνοντας την πορεία.

Τα δύο αυτά άλματα —από το $\boldsymbol{A}'$ στο $\boldsymbol{B}'$ και από το $\boldsymbol{A}''$ στο $\boldsymbol{B}''$ — αποτελούν τα χαρακτηριστικά «jump points» του συστήματος και προκύπτουν υποχρεωτικά από τη γεωμετρία της καμπύλης συχνότητας–απόκρισης. Η εμφάνισή τους είναι άμεσο αποτέλεσμα της μη γραμμικότητας, η οποία επιτρέπει την ύπαρξη πολλαπλών περιοδικών λύσεων για την ίδια τιμή της συχνότητας.

2.2.7 Μέθοδος διαταραχών πλάτους-φάσης

Στην *Ενότητα 2.2.6* εφαρμόσαμε μέθοδο κανονικών διαταραχών και σταματήσαμε στον πρώτο διορθωτικό όρο, λόγω πολυπλοκότητας των αλγεβρικών πράξεων.

Μια μέθοδος που επιτρέπει να ληφθεί μια υψηλότερη προσέγγιση αρκετά πιο αποτελεσματικά, είναι η μέθοδος **διαταραχών πλάτους-φάσης**.

Θεωρούμε πάλι την εξίσωση (*2.2.47*)

$$x''+x=\varepsilon\left(\gamma\, cos\tau-\delta x''-\beta x+x^3\right)\,,\ \ \tau>0 \qquad (2.2.67)$$

Εφαρμόζοντας μέθοδο κανονικών διαταραχών, η λύση έχει τη μορφή

$$x(\tau,\varepsilon)=(\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\ldots)\cos\tau+(b_0+\varepsilon b_1+\ldots)\,sin\tau+\text{ υψηλότερες αρμονικές}$$

Αν και αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά ακριβής, η παρουσία δύο ξεχωριστών ακολουθιών συντελεστών (α_n και b_n) καθιστά τις παραγώγους και τους υπολογισμούς αλγεβρικά περίπλοκους, ιδιαίτερα όταν επιδιώκεται υψηλότερης τάξης προσέγγιση.

Για το λόγο αυτό, είναι πιο βολικό να εκφράσουμε τη λύση σε μορφή πλάτους–φάσης

$$x(\tau,\varepsilon)=(r_0+\varepsilon r_1+\ldots)\cos(\tau+\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\ldots)\text{ + υψηλότερες αρμονικές}$$

όπου

$$r=r_0+\varepsilon r_1+\varepsilon^2 r_2+\ldots$$

είναι το πλάτος της ταλάντωσης, και

$$\alpha=\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\ldots$$

η φάση σε σχέση με τον εξαναγκασμό. Στην προσέγγιση αυτή η φάση α_0 αντιστοιχεί στη φάση του πρωτεύοντα όρου, και r_0 στο πλάτος του.

Ωστόσο, η παρουσία της άγνωστης φάσης α μέσα στο όρισμα του συνημιτόνου, δυσχεραίνει τη διαδικασία διαφορισμού και την αλγεβρική διαχείριση της εξίσωσης. Για να απλοποιηθεί η ανάλυση, εισάγεται μια νέα μεταβλητή χρόνου

$$s=\tau+\alpha$$

οπότε η λύση γράφεται

$$X(s,\varepsilon)=x(\tau,\varepsilon)=x(s-\alpha,\varepsilon)$$

Με αυτή τη μεταβλητή, η φάση α εμφανίζεται πλέον μόνο στον όρο εξαναγκασμού, καθώς $\cos\tau=\cos(s-\alpha)$, κι έτσι η εξίσωση (2.2.67) μετασχηματίζεται σε

$$X''+X=\varepsilon(\gamma\cos(s-\alpha)-\delta X'-\beta X+X^3),\ \ s>0 \qquad (2.2.68)$$

Υποθέτουμε πως

$$X(s,\varepsilon)=X_0(s)+\varepsilon X_1(s)+\varepsilon^2 X_2(s)+\ldots,$$

$$\alpha=\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\ldots \qquad (2.2.69)$$

Όπως, έχουμε ήδη αναλύσει, ζητάμε μόνιμη περιοδική λύση, με την περίοδο 2π της διεγείρουσας δύναμης, έτσι

$$X(s+2\pi,\varepsilon)=X(s,\varepsilon)\Rightarrow X_i(s+2\pi)=X_i(s),\ \ i=0,1,2,\ldots$$

Τέλος, επιβάλλουμε την πρόσθετη συνθήκη $X'(0,\varepsilon)=0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού απλώς μετακινούμε κατάλληλα την αρχή του χρόνου, και άρα τη φάση, ώστε να ισχύει

$$X_i'(0)=0,\ \ i=0,1,2,\ldots \qquad (2.2.70)$$

Αντικαθιστούμε τις (2.2.69) στην (2.2.68), και χρησιμοποιώντας τη σειρά *Taylor*

$$\cos(s-\alpha)=\cos\left[s-\alpha_0-\varepsilon(\alpha_1+\varepsilon\alpha_2+\ldots)\right]=\cos(s-\alpha_0)+\varepsilon\alpha_1\sin(s-\alpha_0)+\ldots$$

έχουμε

$$\left(X_0''+\varepsilon X_1''+\varepsilon^2 X_2''+\ldots\right)+\left(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots\right)=\left(\varepsilon\gamma\cos(s-\alpha_0)+\varepsilon^2\gamma\alpha_1\sin(s-\alpha_0)+\ldots\right)$$

$$-\left(\varepsilon\delta X_0'+\varepsilon^2\delta X_1'+\ldots\right)-\left(\varepsilon\beta X_0+\varepsilon^2\beta X_1+\ldots\right)+\left(\varepsilon X_0^3+3\varepsilon^2 X_0^2 X_1+\ldots\right)$$

Εξισώνουμε τους όρους ίδιας τάξης του ε, και χρησιμοποιώντας την (2.2.70), καθώς και την απαίτηση περιοδικότητας των λύσεων, προκύπτει μια άπειρη ακολουθία προβλημάτων αρχικών τιμών

$$O(1):\quad \begin{cases} X_0''+X_0=0,\, s>0 \\ X_0(s+2\pi)=X_0(s) \\ X_0'(0)=0,\, i=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\quad \begin{cases} X_1''+X_1=\gamma\cos(s-\alpha_0)-\delta X_0'-\beta X_0+X_0^3,\, s>0 \\ X_1(s+2\pi)=X_1(s) \\ X_1'(0)=0,\, i=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\quad \begin{cases} X_2''+X_2=\gamma\alpha_1\sin(s-\alpha_0)-\delta X_1'-\beta X_1+3X_0^2X_1,\, s>0 \\ X_2(s+2\pi)=X_2(s) \\ X_2'(0)=0,\, i=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Από το $O(1)$ έχουμε τον πρωτεύοντα όρο

$$X_0(s)=r_0\cos s,\quad r_0>0$$

Θεωρούμε $r_0>0$, αφού αρνητική τιμή μπορεί πάντα να απορροφηθεί με κατάλληλη μετατόπιση της φάσης α_0.

Αντικαθιστούμε στον όρο τάξης $O(\varepsilon)$ και, χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες $\cos^3 s=\frac{3}{4}\cos s+\frac{1}{4}\cos 3s$, και $\cos(s-\alpha_0)=\cos s\cos\alpha_0+\sin s\sin\alpha_0$ λαμβάνουμε

$$X_1''+X_1=\gamma\cos(s-\alpha_0)+\delta r_0\sin s-\beta r_0\cos s+r_0^3\left(\frac{3}{4}\cos s+\frac{1}{4}\cos 3s\right)$$

$$=\gamma(\cos s\cos\alpha_0+\sin s\sin\alpha_0)+\delta r_0\sin s-\beta r_0\cos s+r_0^3\left(\frac{3}{4}\cos s+\frac{1}{4}\cos 3s\right)\Rightarrow$$

$$X_1''+X_1=\left(\gamma\cos\alpha_0-\beta r_0+\frac{3}{4}r_0^3\right)\cos s+(\gamma\sin a_0+\delta r_0)\sin s+\frac{1}{4}r_0^3\cos 3s \qquad (2.2.71)$$

Οι όροι της (2.2.71) $\left(\gamma\cos\alpha_0-\beta r_0+\frac{3}{4}r_0^3\right)\cos s,(\gamma\sin a_0+\delta r_0)\sin s$, επειδή ανήκουν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, οδηγούν σε αιώνιους όρους· συνεπώς, η απαιτούμενη περιοδικότητα επιβάλλει τον μηδενισμό των αντίστοιχων συντελεστών, οπότε

$$\beta r_0-\frac{3}{4}r_0^3=\gamma\cos\alpha_0 \qquad (2.2.72\alpha)$$

$$\delta r_0=-\gamma\sin a_0 \qquad (2.2.72\beta)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις εξισώσεις (2.2.72) και προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε πάλι την εξίσωση (2.2.53)

$$r_0^2\left[\delta^2+\left(\beta-\tfrac{3}{4}r_0^2\right)^2\right]=\gamma^2$$

από όπου είναι πλέον γνωστό το πλάτος r_0. Η φάση α_0 καθορίζεται στη συνέχεια από μια από τις εξισώσεις (2.2.72), έστω από την (2.2.72β),

$$\alpha_0 = -\sin^{-1}\left(\frac{\delta r_0}{\gamma}\right)$$

όπου θεωρούμε $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_0 \le \frac{\pi}{2}$, για να έχουμε μοναδική φάση και συνεπή αναπαράσταση της περιοδικής λύσης, αφού η $\sin^{-1}$ είναι μονοσήμαντη σε αυτό το διάστημα.

Επανερχόμαστε στην (2.2.71) και έχουμε τώρα

$$X_1'' + X_1 = \frac{1}{4} r_0^3 \cos 3s$$

και το $O(\varepsilon)$ έχει λύση τελικά

$$X_1(s) = r_1 \cos s - \frac{1}{32} r_0^3 \cos 3s, r_1 > 0 \qquad (2.2.73)$$

Αντικαθιστούμε την (2.2.73) στην εξίσωση του $O(\varepsilon^2)$

$$X_2'' + X_2 = \gamma \alpha_1 \sin(s - \alpha_0) - \delta\left(-r_1 \sin s + \frac{3}{32} r_0^3 \sin 3s\right) - \beta\left(r_1 \cos s - \frac{1}{32} r_0^3 \cos 3s\right)$$

$$+ 3 r_0^2 r_1 \cos^3 s - \frac{3}{32} r_0^5 \cos^2 s \cos 3s$$

Εφαρμόζουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos^2 s \ \cos 3s = \frac{1}{4}\cos s + \frac{1}{2}\cos 3s + \frac{1}{4}\cos 5s \text{ και } \sin(s - \alpha_0) = \sin s \ \cos\alpha_0 - \cos s \ \sin\alpha_0$$

και έχουμε

$$X_2'' + X_2 = \left(-\gamma \alpha_1 \sin\alpha_0 - \beta r_1 + \frac{9}{4} r_0^2 r_1 - \frac{3}{128} r_0^5\right) \cos s + \left(\gamma \alpha_1 \cos\alpha_0 + \delta r_1\right) \sin s$$

$$+ \left(\frac{3}{4} r_0^2 r_1 - \frac{3}{64} r_0^5 + \frac{1}{32} \beta r_0^3\right) \cos 3s - \frac{3}{32} \delta r_0^3 \sin 3s - \frac{3}{128} r_0^5 \cos 5s$$

Η περιοδικότητα απαιτεί τον μηδενισμό των συντελεστών των $\cos s$ και $\sin s$, ώστε να αποφευχθούν αιώνιοι όροι στη λύση, έτσι

$$-\gamma \alpha_1 \sin\alpha_0 + \left(\frac{9}{4} r_0^2 - \beta\right) r_1 = \frac{3}{128} r_0^5$$

$$\gamma \alpha_1 \cos\alpha_0 + \delta r_1 = 0$$

Αυτό το γραμμικό 2x2 σύστημα, αφού είναι πλέον γνωστά τα α_0, r_0, μας δίνει το πλάτος και τη φάση του πρώτου διορθωτικού όρου

$$\alpha_1 = \frac{-3 \delta r_0^5}{128 \gamma \left(\frac{9}{4} r_0^2 - \beta + \delta \tan\alpha_0\right) \cos\alpha_0}$$

$$r_1 = \frac{3 r_0^5}{128\left(\frac{9}{4} r_0^2 - \beta + \delta \tan \alpha_0\right)}$$

και η λύση της (2.2.68), με προσέγγιση δύο όρων, είναι

$$X(s,\varepsilon) \approx X_0(s) + \varepsilon X_1(s) = r_0 \cos s + \varepsilon\left(r_1 \cos s - \frac{1}{32} r_0^3 \cos 3s\right)$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές, η λύση τελικά της (2.2.67) είναι

$$x(\tau,\varepsilon) \approx (r_0 + \varepsilon r_1)\cos(\tau + \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1) - \frac{1}{32}\varepsilon r_0^3 \cos 3(\tau + \alpha_0 + \varepsilon \alpha_1)$$

Είναι πλέον φανερό το πλεονέκτημα της μεθόδου διαταραχών πλάτους-φάσης, αφού υπολογίσαμε δύο όρους της προσεγγιστικής λύσης, με σχετικά απλές πράξεις, ενώ στην *Ενότητα* 2.2.6, περιοριστήκαμε στην ουσία στον κυρίαρχο όρο, μια και οι άγνωστες σταθερές του πρώτου διορθωτικού όρου απαιτούσαν επίπονες αλγεβρικές πράξεις για να υπολογιστούν.

2.2.8 Μαλακά και σκληρά ελατήρια

Στις προηγούμενες ενότητες, μέσω της μεθόδου κανονικών διαταραχών, αναλύσαμε το εκκρεμές ως χαρακτηριστικό παράδειγμα **γεωμετρικής** μη γραμμικότητας, που περιγράφεται από την εξίσωση *Duffing*, με εξαναγκασμένο όρο

$$\ddot{x} + k\dot{x} + c x + \varepsilon x^3 = F \cos \omega t \qquad (2.2.74)$$

Περνάμε τώρα στη δεύτερη σημαντική κατηγορία φυσικών συστημάτων που περιγράφονται από την εξίσωση *Duffing*: **τα μη-γραμμικά ελατήρια.**

Σε αντίθεση με το εκκρεμές, το οποίο είναι γραμμικό μόνο για πολύ μικρές γωνίες, η μη-γραμμικότητα στα ελατήρια δεν οφείλεται στη γεωμετρία της κίνησης αλλά στη **μηχανική** συμπεριφορά του ίδιου του ελαστικού στοιχείου. Για ένα τέτοιο σύστημα, μπορούμε, στη γενική περίπτωση, να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή

$$\ddot{x} + k\dot{x} + c x + \varepsilon g(x) = F \cos \omega t \qquad (2.2.75)$$

όπου $k>0$ είναι ο συντελεστής απόσβεσης, $c>0$ είναι η παράμετρος γραμμικής ακαμψίας, και $|\varepsilon| \ll 1$ είναι η μικρή παράμετρος μη γραμμικής ακαμψίας, που περιγράφει την απόκλιση από την ιδανική γραμμικότητα.

Η μορφή (2.2.75) μπορεί να ερμηνευθεί ως η εξίσωση κίνησης ενός σώματος πάνω σε ένα ελατήριο, το οποίο παρέχει δύναμη επαναφοράς $cx + \varepsilon g(x)$, η οποία είναι μη γραμμική όταν $\varepsilon \neq 0$, αλλά με μικρό μη γραμμικό όρο. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί ιδιαίτερα χρήσιμο φυσικό μοντέλο,

επειδή μας επιτρέπει να περιμένουμε ότι πολλές από τις ιδιότητες της γραμμικής ταλάντωσης θα συνεχίσουν να ισχύουν. Για παράδειγμα, όταν $k=0$ και $F=0$, μικρές ταλαντώσεις αναμένονται να είναι ακόμα περίπου αρμονικές, ενώ η ύπαρξη μικρής απόσβεσης οδηγεί σε βαθμιαία μείωση του πλάτους μέχρι τη στάση.

Ωστόσο, ακόμη και η ασθενής αυτή μη γραμμικότητα μπορεί να αλλάξει ριζικά τη δυναμική του συστήματος, οδηγώντας σε φαινόμενα όπως μετατόπιση της συχνότητας με το πλάτος, εμφάνιση πολλαπλών σταθερών λύσεων, απότομες μεταβολές στην απόκριση (*jump phenomena*) και, υπό κατάλληλη διέγερση, έντονα μη γραμμικές ή ακόμη και χαοτικές συμπεριφορές.

Είναι φανερό πως η εξίσωση (2.2.75) για $g(x)=x^3$ είναι η εξίσωση *Duffing*, που για $\varepsilon=-\frac{1}{6}\omega_0^2$, περιγράφει την κίνηση του εκκρεμούς.

Όπως ήδη είπαμε, από μηχανική άποψη η εξίσωση *Duffing* θεωρείται ως μη γραμμικό αποσβεννύμενο ελατήριο με εξωτερική διέγερση, και με δύναμη επαναφοράς

$$F_s=c\,x+\varepsilon\,x^3 \tag{2.2.76}$$

Συγκεκριμένα, η πηγή της μη γραμμικότητας στο μηχανικό σύστημα του ελατηρίου που οδηγεί στο να περιγράφεται η δυναμική του συμπεριφορά από την εξίσωση *Duffing* είναι η **ακαμψία** (**stiffness**), η οποία είναι, στις περισσότερες περιπτώσεις, συνάρτηση της θέσης. Αυτό σημαίνει πως η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο και η αντίστοιχη μετατόπιση x έχουν μια μη γραμμική σχέση. Αν το σύστημα είναι συμμετρικό, δηλαδή η χαρακτηριστική ακαμψίας είναι ίδια όταν το ελατήριο βρίσκεται σε θλίψη ή εφελκυσμό, τότε η δύναμη επαναφοράς μπορεί να προσεγγιστεί ως σειρά του x, όπου οι εκθέτες του x είναι περιττοί ακέραιοι. Αν αυτή η σειρά περικοπεί μετά από τους δύο πρώτους όρους, τότε η σχέση δύναμης–παραμόρφωσης δίνεται από την (2.2.76).

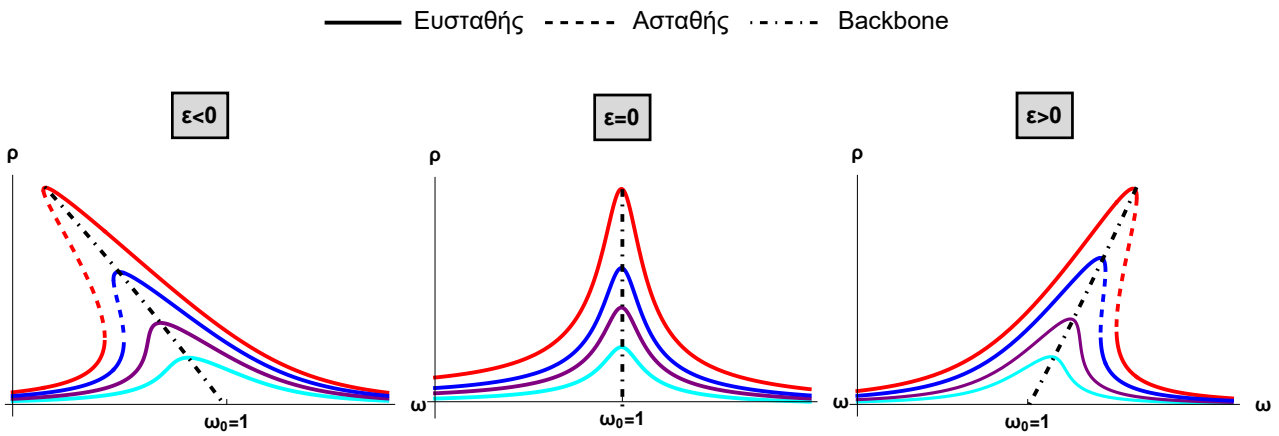
Αν $\varepsilon=0$, το σύστημα του ελατηρίου είναι γραμμικό, δηλαδή η δύναμη επαναφοράς υπακούει στο νόμο του *Hooke*.

Αν $\varepsilon<0$, η δύναμη επαναφοράς μειώνεται με την αύξηση της μετατόπισης σε σχέση με τη γραμμική δύναμη επαναφοράς. Δηλαδή ο κυβικός όρος μειώνει την αποτελεσματική ακαμψία καθώς αυξάνεται η παραμόρφωση, και η δύναμη επαναφοράς γίνεται ολοένα πιο αδύναμη σε μεγάλες μετατοπίσεις. Ένα τέτοιο ελατήριο λέγεται **μαλακό** (**soft**), και παράδειγμα είναι το φυσικό εκκρεμές.

Αν $\varepsilon>0$, η δύναμη επαναφοράς αυξάνεται με την αύξηση της μετατόπισης σε σχέση με τη γραμμική δύναμη επαναφοράς. Δηλαδή ο κυβικός όρος ενισχύει την ακαμψία καθώς αυξάνεται η

παραμόρφωση. Το ελατήριο γίνεται προοδευτικά πιο άκαμπτο, όσο απομακρυνόμαστε από τη θέση ισορροπίας. Ένα τέτοιο ελατήριο λέγεται **σκληρό** (**hard**).

Το *Σχήμα* 2.2.28 δείχνει τα διαγράμματα απόκρισης για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις της εξίσωσης *Duffing* (2.2.74), με $k>0$, $c>0$, όταν το ελατήριο είναι μαλακό $(\varepsilon<0)$, γραμμικό $(\varepsilon=0)$ και σκληρό $(\varepsilon>0)$.



Σχήμα 2.2.28: Καμπύλες πλάτους-συχνότητας για την εξίσωση Duffing

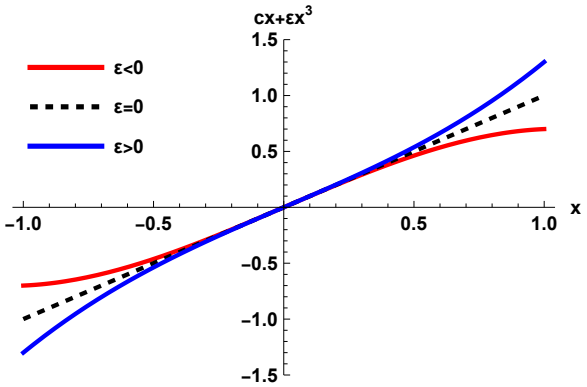
Συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Η ακαμψία του συστήματος δίνεται αν παραγωγίσουμε την (2.2.76)

$$\frac{dF_s}{dx}=c+3\varepsilon x^2$$

Παρατηρούμε πως ο γραμμικός όρος c είναι ανεξάρτητος της θέσης, ενώ ο μη γραμμικός όρος εξαρτάται από τη μετατόπιση. Επειδή περιέχει το x^2, η ακαμψία είναι συμμετρική ως προς το $x=0$, δηλαδή το ελατήριο παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά τόσο σε θλίψη όσο και σε εφελκυσμό.

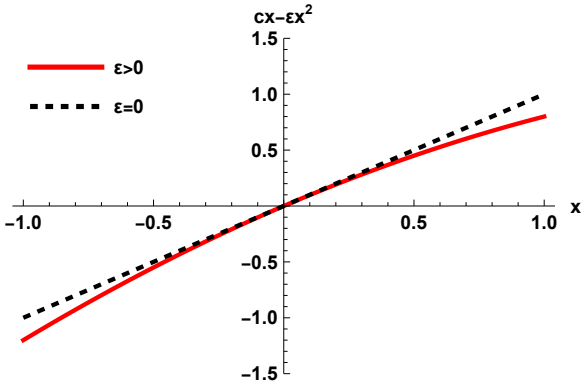
Για μικρές μετατοπίσεις ο κυβικός όρος είναι σχετικά μικρός και η απόκριση παραμένει σχεδόν γραμμική. Καθώς η μετατόπιση αυξάνεται, η επίδρασή του γίνεται πιο έντονη, με αποτέλεσμα η συνολική δύναμη να αποκλίνει βαθμιαία από τη γραμμική σχέση. Αυτό αποτυπώνεται και στη μορφή της καμπύλης στο *Σχήμα* 2.2.29, όπου για $c=1$, $\varepsilon=0.3$ ο κυβικός όρος γίνεται σημαντικός περίπου για $x>0.4$. Επίσης, στο ίδιο σχήμα φαίνεται καθαρά η διαφορά μεταξύ γραμμικού, μαλακού και σκληρού ελατηρίου.



Σχήμα 2.2.29: Συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Μη συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Αν η ακαμψία δεν είναι συμμετρική ως προς το $x=0$, τότε η χαρακτηριστική δύναμη–παραμόρφωση απαιτεί όρους όπου οι εκθέτες του x είναι ζυγοί ακέραιοι, όπως για παράδειγμα, όταν στην (2.2.75) η $g(x)=-x^2$ με $\varepsilon>0$. Τότε, το ελατήριο είναι μαλακό για $x>0$ και σκληρό για $x<0$, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 2.2.30*.



Σχήμα 2.2.30: Μη συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Η επίπτωση της μη συμμετρικής δύναμης επαναφοράς στο σύστημα θα γίνει σαφέστερη με το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα
Εξαναγκασμένη χωρίς απόσβεση ταλάντωση με μη συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Θα βρούμε τις προσεγγιστικές μόνιμες περιοδικές λύσεις, περιόδου 2π της εξίσωσης

$$\ddot{x}+\Omega^2 x-\varepsilon x^2=\Gamma\cos t,\ \ \varepsilon>0 \tag{2.2.77}$$

A. Εκτός συντονισμού

Υποθέτουμε πως το Ω δεν είναι κοντά σε ακέραιο.

Επειδή, το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην περιοδική λύση που έχει ίδια περίοδο με τη διεγείρουσα δύναμη, θα αγνοήσουμε τον παροδικό όρο και θα υποθέσουμε ότι η μόνιμη λύση της εξίσωσης *(2.2.77)* είναι περιοδική με περίοδο *2π*, της διεγείρουσας δύναμης $\Gamma \cos t$. Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, προκειμένου να προσδιορίσουμε αυτή την περιοδική λύση.

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

Επίσης, επειδή όπως είπαμε, ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με περίοδο *2π*, θα ισχύει

$$x_n(t+2\pi,\varepsilon)=x_n(t,\varepsilon),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Αντικαθιστούμε στην *(2.2.77)*, και εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης του *ε*, προκύπτει μια άπειρη ακολουθία προβλημάτων αρχικών τιμών

$$O(1):\begin{cases}\ddot{x}_0+\Omega^2 x_0=\Gamma\cos t, & t>0\\ x_0(t+2\pi)=x_0(t)\end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\begin{cases}\ddot{x}_1+\Omega^2 x_1=x_0^2, & t>0\\ x_1(t+2\pi)=x_1(t)\end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\begin{cases}\ddot{x}_2+\Omega^2 x_2=2x_0x_1, & t>0\\ x_2(t+2\pi)=x_2(t)\end{cases}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Η λύση του $O(1)$ είναι

$$x_0(t)=\alpha_0\cos\Omega t+b_0\sin\Omega t+\frac{\Gamma}{\Omega^2-1}\cos t$$

με

$$x_0(t+2\pi)=x_0(t)$$

Η ομογενής λύση ταλαντώνεται με τη φυσική συχνότητα *Ω*, ενώ η εξαναγκασμένη με τη συχνότητα *1* της διέγερσης.

Για να υπάρξει μόνιμη περιοδική λύση που να έχει την ίδια περίοδο με τη διέγερση (*2π*), οι όροι της ομογενούς πρέπει να μηδενιστούν, δηλαδή,

$$\alpha_0=b_0=0$$

Άρα, ο πρωτεύων όρος είναι τελικά

$$x_0(t)=\frac{\Gamma}{\Omega^2-1}\cos t$$

Για τη λύση του $O(\varepsilon)$ αντικαθιστούμε τον πρωτεύοντα όρο και η εξίσωση γίνεται

$$\ddot{x}_1+\Omega^2 x_1=x_0^2 \Rightarrow \ddot{x}_1+\Omega^2 x_1=\frac{\Gamma^2}{(\Omega^2-1)^2}\cos^2 t$$

Εφαρμόζουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$$

και η εξίσωση για τον πρώτο διορθωτικό όρο είναι

$$\ddot{x}_1+\Omega^2 x_1=\frac{\Gamma^2}{2(\Omega^2-1)^2}(1+\cos 2t)$$

που έχει λύση

$$x_1(t)=\alpha_1\cos\Omega t+b_1\sin\Omega t+\frac{\Gamma^2}{2\Omega^2(\Omega^2-1)^2}+\frac{\Gamma^2}{2(\Omega^2-1)^2(\Omega^2-4)}\cos 2t$$

με

$$x_1(t+2\pi)=x_1(t)$$

Για τον ίδιο λόγο με τον πρωτεύοντα όρο, οι συντελεστές της ομογενούς λύσης μηδενίζονται, δηλαδή

$$\alpha_1=b_1=0$$

Έτσι, τελικά

$$x_1(t)=\frac{\Gamma^2}{2\Omega^2(\Omega^2-1)^2}+\frac{\Gamma^2}{2(\Omega^2-1)^2(\Omega^2-4)}\cos 2t$$

Επομένως η προσεγγιστική λύση είναι

$$x(\tau)=\frac{\Gamma}{\Omega^2-1}\cos t+\varepsilon\left(\frac{\Gamma^2}{2\Omega^2(\Omega^2-1)^2}+\frac{\Gamma^2}{2(\Omega^2-1)^2(\Omega^2-4)}\cos 2t\right)+O(\varepsilon^2)$$

B. Κοντά στον συντονισμό

Υποθέτουμε πως το $\Omega\approx 1$ και το Γ είναι μικρό.

Θέτουμε $\Gamma=\varepsilon\gamma$, με $\gamma>0$, και $\Omega^2=1+\varepsilon\beta$ και η *(2.2.77)* γίνεται

$$\ddot{x}+(1+\varepsilon\beta)x-\varepsilon x^2=\varepsilon\gamma\cos t$$

δηλαδή

$$\ddot{x}+x=\varepsilon(\gamma\cos t-\beta x+x^2) \qquad (2.2.78)$$

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

Επίσης, επειδή όπως είπαμε, ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με περίοδο 2π, θα ισχύει

$$x_n(t+2\pi,\varepsilon)=x_n(t,\varepsilon),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Αντικαθιστούμε στην *(2.2.78)*, εξισώνουμε τους όρους ίδιας τάξης του ε, και προκύπτει μια άπειρη ακολουθία προβλημάτων αρχικών τιμών

$$O(1):\ \begin{cases}\ddot{x}_0+x_0=0,\quad t>0\\ x_0(t+2\pi)=x_0(t)\end{cases}$$

$$O(\varepsilon):\ \begin{cases}\ddot{x}_1+x_1=\gamma\, cost-\beta x_0+x_0^2,\quad t>0\\ x_1(t+2\pi)=x_1(t)\end{cases}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \begin{cases}\ddot{x}_2+x_2=2x_0x_1-\beta x_1,\quad t>0\\ x_2(t+2\pi)=x_2(t)\end{cases}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

Από το $O(1)$, έχουμε τον πρωτεύοντα όρο

$$x_0=\alpha_0\cos t+b_0\sin t$$

που ικανοποιεί την περιοδική συνθήκη $x_0(t+2\pi)=x_0(t)$ για κάθε α_0,b_0.

Αντικαθιστούμε στο $O(\varepsilon)$, και έχουμε

$$\ddot{x}_1+x_1=(\gamma-\beta\alpha_0)\cos t-\beta b_0\sin t+\alpha_0 b_0\sin 2t+\frac{1}{2}(\alpha_0^2-b_0^2)\cos 2t+\frac{\alpha_0^2}{2}+\frac{b_0^2}{2}$$

$$x_1(t+2\pi)=x_1(t)$$

Για να έχει η λύση της εξίσωσης περιοδικές λύσεις, πρέπει να αποφευχθούν οι αιώνιοι όροι, άρα θα μηδενίσουμε τους συντελεστές των $\cos t$ και $\sin t$. Έτσι,

$$b_0=0\ \ \textit{και}\ \alpha_0=\frac{\gamma}{\beta}$$

Ο πρωτεύων όρος γίνεται τότε

$$x_0=\alpha_0\cos t$$

και η λύση του $O(\varepsilon)$

$$x_1(t)=\alpha_1\cos t+b_1\sin t+\frac{\gamma^2}{2\beta^2}-\frac{\gamma^2}{6\beta^2}\cos 2t$$

όπου α_1,b_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αντικαθιστώντας την $x_1(t)$ στο $O(\varepsilon^2)$, και για να ικανοποιείται η απαίτηση η $x_2(t)$ να είναι 2π-περιοδική, δηλαδή να μην υπάρχουν αιώνιοι όροι, προκύπτουν εξισώσεις για τον προσδιορισμό των α_1,b_1.

Εφαρμόζοντας, λοιπόν, τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών στον κύριο συντονισμό, προκύπτει η ακόλουθη προσεγγιστική λύση

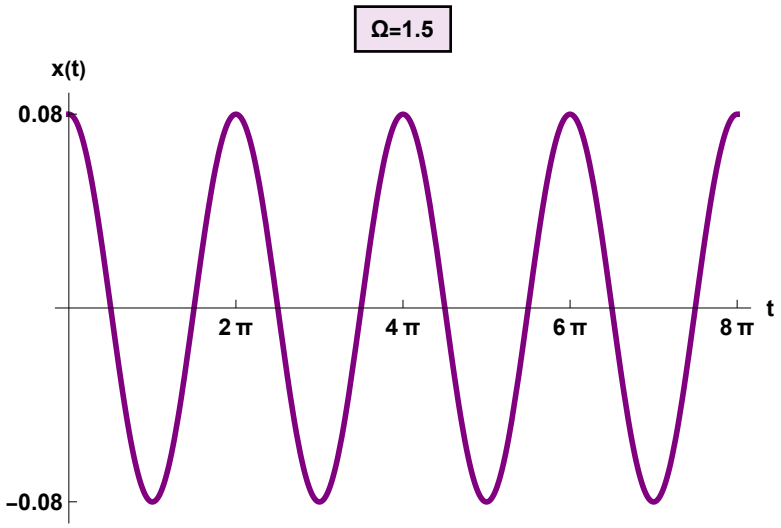
$$x(t)=\frac{\gamma}{\beta}\cos t+\varepsilon\left(\alpha_1\cos t+b_1\sin t+\frac{\gamma^2}{2\beta^2}-\frac{\gamma^2}{6\beta^2}\cos 2t\right)+O(\varepsilon^2)$$

Παρατηρούμε πως οι προσεγγιστικές λύσεις και στις δύο περιπτώσεις, μακριά και κοντά στον συντονισμό περιέχουν σταθερούς όρους. Η εμφάνιση αυτών των όρων σχετίζεται με το γεγονός ότι η παρουσία του τετραγωνικού όρου εισάγει μια θεμελιώδη ασυμμετρία: το σύστημα δεν συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο για θετικές και αρνητικές μετατοπίσεις.

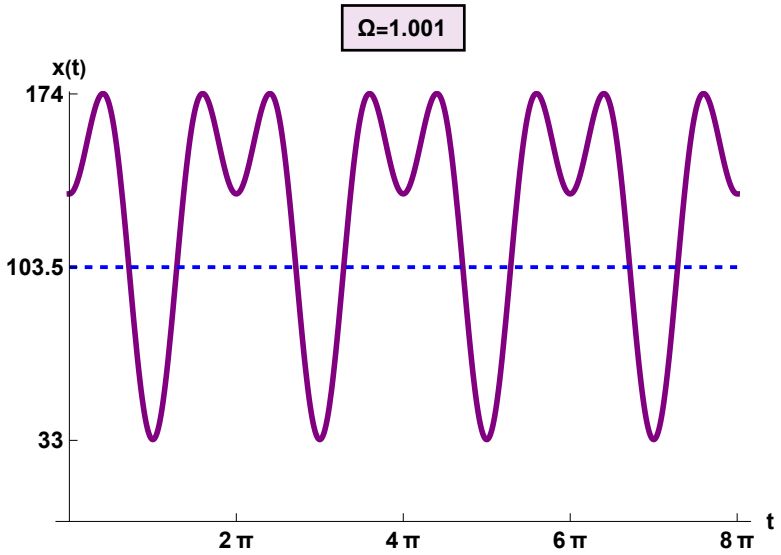
Για $x<0$ ο τετραγωνικός όρος είναι θετικός και αυξάνει τη δύναμη επαναφοράς, με αποτέλεσμα η «ακαμψία» του συστήματος να είναι μεγαλύτερη. Αντίθετα, για $x>0$ ο όρος εx^2 δρα προς την αντίθετη κατεύθυνση από τον γραμμικό όρο $\Omega^2 x$ μειώνοντας αποτελεσματικά τη δύναμη επαναφοράς. Έτσι το σύστημα είναι «σκληρό» για αρνητικές μετατοπίσεις και «μαλακό» για θετικές, γεγονός που σπάει τη συμμετρία της ταλάντωσης και αλλάζει τη θέση γύρω από την οποία εκτελείται η περιοδική κίνηση.

Η ασυμμετρία γίνεται ιδιαίτερα εμφανής σε ταλαντώσεις μεγάλης έντασης, όπου ο τετραγωνικός όρος αποκτά σημαντική επίδραση. Στο *Σχήμα 2.2.31*, όπου η συχνότητα της διέγερσης είναι μακριά από τον συντονισμό $(\Omega=1.5)$, το πλάτος παραμένει μικρό και η επίδραση του μη γραμμικού όρου είναι περιορισμένη. Η λύση είναι σχεδόν συμμετρική γύρω από το $x=0$, και η μέση τιμή της ταλάντωσης ουσιαστικά συμπίπτει με τη γραμμική θέση ισορροπίας. Το σύστημα σε αυτήν την περίπτωση συμπεριφέρεται περίπου γραμμικά, και η ασυμμετρία της δύναμης δεν εκδηλώνεται με τρόπο ορατό στο διάγραμμα.

Αντίθετα, στο *Σχήμα 2.2.32*, όπου η διέγερση βρίσκεται πολύ κοντά στη φυσική συχνότητα $(\Omega=1.001)$, το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται σημαντικά και ο τετραγωνικός όρος κυριαρχεί. Η ασύμμετρη φύση της μη γραμμικότητας κάνει το σύστημα «μαλακό» για θετικές μετατοπίσεις και πολύ «σκληρό» για αρνητικές, με αποτέλεσμα η κίνηση προς τα αριστερά να περιορίζεται έντονα. Έτσι η λύση δεν λαμβάνει αρνητικές τιμές και η ταλάντωση μετατοπίζεται συνολικά προς τα δεξιά. Η ασυμμετρία αυτή οδηγεί στη μετατόπιση του κέντρου της ταλάντωσης σε θετικές τιμές, όπως φαίνεται και από τη διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα. Η νέα αυτή μέση τιμή δεν αποτελεί σημείο στατικής ισορροπίας, αλλά το χρονικό μέσο της περιοδικής λύσης: το σύστημα απλώς περνά περισσότερο χρόνο στη θετική περιοχή, όπου η ακαμψία είναι μικρότερη και η κίνηση «απλώνεται» περισσότερο.



Σχήμα 2.2.31: Περιοδική λύση εκτός συντονισμού



Σχήμα 2.2.32: Περιοδική λύση κοντά στον συντονισμό

2.2.9 Μέθοδος κανονικών διαταραχών και σειρές Fourier

Στις *Ενότητες* 2.2.5 και 2.2.6, οι προσεγγιστικές λύσεις που υπολογίσαμε παρουσιάζονταν ως σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων, με συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας διέγερσης. Αυτό προέκυπτε άμεσα από τη μη γραμμικότητα της μορφής x^3, η οποία μέσω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων γεννά ανώτερες αρμονικές. Ωστόσο, η ανάλυση *Fourier* δείχνει ότι η εμφάνιση ανώτερων αρμονικών αποτελεί γενικό χαρακτηριστικό των περιοδικών λύσεων εξαναγκασμένων μη γραμμικών συστημάτων, ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη μορφή της μη γραμμικότητας.

Για να το κατανοήσουμε καλύτερα, θεωρούμε την εξίσωση

$$x''+\Omega^2 x+\varepsilon h(x,x')=F(\tau) \qquad (2.2.79)$$

όπου ε είναι μια μικρή παράμετρος, Ω είναι η φυσική συχνότητα του συστήματος, η οποία βρίσκεται κοντά σε θετικό ακέραιο, και η εξαναγκασμένη δύναμη $F(\tau)$ έχει κανονικοποιηθεί, ώστε να είναι περιοδική με περίοδο 2π. Στο πλαίσιο αυτό, αναζητούμε περιοδικές λύσεις με περίοδο 2π, εφαρμόζοντας τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, δηλαδή τις μη γραμμικές περιοδικές λύσεις που προκύπτουν από τις περιοδικές λύσεις της αντίστοιχης γραμμικής εξίσωσης, οι οποίες χρησιμεύουν ως “γεννήτρια” για την κατασκευή της μη γραμμικής λύσης.

Αρχικά, θέτουμε $\Omega^2=N^2+\varepsilon\beta$, όπου N θετικός ακέραιος.

Η $F(\tau)$ έχει ανάπτυγμα *Fourier*

$$F(\tau)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)$$

με

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)\cos n\tau\, d\tau \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)\sin n\tau\, d\tau \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

Υποθέτουμε ότι η μέση τιμή της εξαναγκασμένης δύναμης σε μία περίοδο είναι μηδενική, δηλαδή

$$\langle \boldsymbol{F}\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\tau)d\tau=0$$

Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη δεν έχει σταθερό τμήμα που θα προκαλούσε μόνιμη μετατόπιση του συστήματος από τη θέση ισορροπίας, δηλαδή ταλαντώνεται συμμετρικά γύρω από το μηδέν.

Στη σειρά *Fourier*, αυτή η συνθήκη αντιστοιχεί στο να είναι μηδενικός ο σταθερός όρος A_0, έτσι:

$$F(\tau)=A_N\cos N\tau+B_N\sin N\tau+\sum_{n\neq N}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)\Rightarrow$$

$$F(\tau)=A_N\cos N\tau+B_N\sin N\tau+f(\tau)$$

όπου

$$f(\tau)=\sum_{n\neq N}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)$$

Εφαρμόζουμε στην (2.2.79) και έχουμε

$$x''+N^2x+\varepsilon\beta x+\varepsilon h(x,x')=A_N\cos N\tau+B_N\sin N\tau+f(\tau) \qquad (2.2.80)$$

Για να εφαρμοστεί η μέθοδος των κανονικών διαταραχών, απαιτείται η ύπαρξη περιοδικής λύσης της γραμμικής εξίσωσης που προκύπτει στην τάξη ε^0. Θέτοντας $\varepsilon=0$, η (2.2.80) οδηγεί στην γραμμική εξίσωση

$$x''+N^2x=A_N\cos N\tau+B_N\sin N\tau+f(\tau)$$

Ωστόσο, οι όροι $A_N\cos N\tau$ και $B_N\sin N\tau$ είναι συντονισμένοι με τη φυσική συχνότητα του γραμμικού συστήματος και συνεπώς η παραπάνω εξίσωση δεν διαθέτει περιοδική λύση. Η παρουσία τέτοιων όρων οδηγεί σε αιώνιους όρους, δηλαδή σε μη περιοδικές αποκρίσεις και καθιστά αδύνατη την εφαρμογή της μεθόδου διαταραχών.

Για να αποφευχθεί το πρόβλημα αυτό και να εξασφαλιστεί η ύπαρξη περιοδικής γεννήτριας λύσης, υποθέτουμε ότι οι συντελεστές της βασικής αρμονικής είναι τάξης ε, δηλαδή

$$A_N=\varepsilon A \quad \text{και} \quad B_N=\varepsilon B$$

και η (2.2.80) γίνεται

$$x''+N^2x=f(\tau)+\varepsilon\left[-h(x,x')-\beta x+A\cos N\tau+B\sin N\tau\right] \tag{2.2.81}$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε **μέθοδο κανονικών διαταραχών**, θεωρώντας κατά τα γνωστά, πως η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2x_2(\tau)+\ldots \tag{2.2.82}$$

και αντίστοιχα η παράγωγός της

$$x'(\tau,\varepsilon)=x_0'(\tau)+\varepsilon x_1'(\tau)+\varepsilon^2x_2'(\tau)+\ldots$$

με τη συνθήκη 2π-περιοδικότητας για κάθε όρο

$$x_n(\tau+2\pi,\varepsilon)=x_n(\tau,\varepsilon),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Η μη γραμμική συνάρτηση $h(x,x')$ αναπτύσσεται σε σειρά *Taylor* ως προς ε γύρω από τη λύση μηδενικής τάξης x_0

$$h(x,x')=h(x_0,x_0')+\varepsilon h_1(x_0,x_0',x_1,x_1')+\ldots \tag{2.2.83}$$

όπου h_1 είναι συνάρτηση που υπολογίζεται, αφού

$$h_1(x_0,x_0',x_1,x_1')=\frac{\partial h(x_0,x_0')}{\partial x}x_1+\frac{\partial h(x_0,x_0')}{\partial x'}x_1'$$

Εφαρμόζουμε τις (2.2.82) και (2.2.83) στην (2.2.81), και παίρνουμε

$$x_0''+N^2x_0=\sum_{n\neq N}\left(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau\right) \tag{2.2.84}$$

$$x_1''+N^2x_1=-h(x_0,x_0')-\beta x_0+A\cos N\tau+B\sin N\tau \tag{2.2.85}$$

$$x_2''+N^2x_2=-h_1(x_0,x_0',x_1,x_1')-\beta x_1 \tag{2.2.86}$$

Η λύση της (2.2.84) είναι

$$x_0(\tau)=\alpha_0\cos N\tau+b_0\sin N\tau+\sum_{n\neq N}\frac{1}{N^2-n^2}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)\Rightarrow$$

$$x_0(\tau)=\alpha_0\cos N\tau+b_0\sin N\tau+\varphi(\tau) \qquad (2.2.87)$$

όπου

$$\varphi(\tau)=\sum_{n\neq N}\frac{1}{N^2-n^2}(A_n\cos n\tau+B_n\sin n\tau)$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές α_0 και b_0, θα αντικαταστήσουμε την (2.2.87) στην εξίσωση (2.2.85), απαιτώντας να έχει 2π-περιοδικές λύσεις.

Το δεξί μέλος αναπτύσσεται σε σειρά *Fourier*, ώστε να ελεγχθεί η παρουσία αρμονικών με συχνότητα ίση με τη φυσική συχνότητα του γραμμικού συστήματος, οι οποίες θα οδηγούσαν σε συντονισμό και απώλεια της περιοδικότητας της λύσης.

Έστω

$$h_0(\tau)=h(x_0,x_0')=h\left(\alpha_0\cos N\tau+b_0\sin N\tau+\varphi(\tau),-\alpha_0 N\sin N\tau+b_0 N\cos N\tau+\varphi'(\tau)\right)$$

με ανάπτυγμα *Fourier*

$$h_0(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_0(\tau)d\tau$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h_0(\tau)\cos n\tau\, d\tau\right)\cos n\tau+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h_0(\tau)\sin n\tau\, d\tau\right)\sin n\tau\right]$$

Το δεύτερο μέλος της (2.2.85) γίνεται τότε

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_0(\tau)d\tau-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h_0(\tau)\cos n\tau\, d\tau\right)\cos n\tau+\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h_0(\tau)\sin n\tau\, d\tau\right)\sin n\tau\right]$$

$$+(A-\beta\alpha_0)\cos N\tau+(B-\beta b_0)\sin N\tau-\beta\varphi(\tau)$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξί μέλος της (2.2.85) εμφανίζονται όροι ανάλογοι των $\cos N\tau$ και $\sin N\tau$, οι οποίοι οδηγούν σε αιώνιους όρους στη λύση της x_1 και συνεπώς σε απώλεια της περιοδικότητας. Για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη 2π-περιοδικών λύσεων, απαιτείται ο μηδενισμός των συντελεστών των όρων αυτών. Έτσι προκύπτουν οι συνθήκες

$$\begin{cases}\beta\alpha_0+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}h_0(\tau)\cos N\tau\, d\tau=A\\[2ex] \beta b_0+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}h_0(\tau)\sin N\tau\, d\tau=B\end{cases} \qquad (2.2.88)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προσδιορίζουν τις σταθερές α_0 και b_0 και αποτελούν τις συνθήκες συμβατότητας της μεθόδου.

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία για να υπολογίσουμε την x_1, βρίσκουμε γραμμικές εξισώσεις για τις α_1, b_1, αφού αντικαταστήσουμε στην (2.2.86).

Παρά τη γενικότητα της παραπάνω μεθόδου, αξίζει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση του πρωτεύοντος συντονισμού $(N=1)$, οι εξισώσεις που προκύπτουν από την εξάλειψη των αιώνιων όρων για τον προσδιορισμό των σταθερών α_0 και b_0, έχουν την ίδια δομή με τις (2.2.51), που είχαν προκύψει στην ανάλυση του εξαναγκασμένου εκκρεμούς. Συνεπώς, οι εξισώσεις πλάτους–φάσης κοντά στον συντονισμό δεν εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη μορφή της μη γραμμικότητας, αλλά αποτελούν γενικό χαρακτηριστικό εξαναγκασμένων μη γραμμικών συστημάτων με μία κυρίαρχη αρμονική. Το αποτέλεσμα αυτό υπογραμμίζει τον καθολικό χαρακτήρα της μεθόδου των κανονικών διαταραχών σε συνδυασμό με ανάλυση *Fourier.*

2.2.10 Μέθοδος κανονικών διαταραχών για την εύρεση ομοκλινικής διακλάδωσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την εμφάνιση ομοκλινικής διακλάδωσης με τη χρήση της μεθόδου κανονικών διαταραχών. Η ανάλυση βασίζεται στη γεωμετρική δομή των φασικών τροχιών του αντίστοιχου συντηρητικού συστήματος και στον τρόπο με τον οποίο αυτή μεταβάλλεται υπό την επίδραση μικρών μη συντηρητικών όρων.

Για τον λόγο αυτό, πριν εφαρμοστεί η μέθοδος διαταραχών, εισάγονται βασικές έννοιες που αφορούν στα συντηρητικά συστήματα, τη συνάρτηση δυναμικού, καθώς και τις ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές.

Οι έννοιες αυτές είναι απαραίτητες για την κατανόηση της γεωμετρίας του φασικού χώρου και της φύσης της διακλάδωσης που θα εξεταστεί στη συνέχεια, αλλά και στη μελέτη των ιδιόμορφων διαταραχών του επόμενου κεφαλαίου.

2.2.10.1 Συντηρητικά συστήματα

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο επίπεδο, ονομάζεται **Χαμιλτονιανό** με ένα βαθμό ελευθερίας εάν μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}$$

$$\dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

όπου η $H(x,y)$ είναι μια συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς x και y, και λέγεται **Χαμιλτονιανή**.

Η συνάρτηση $H(x,y)$ διατηρείται σταθερή κατά μήκος των τροχιών (ή λύσεων) του συστήματος για όλα τα t, ισχύει δηλαδή

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}=0\Rightarrow H(x,y)=E=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

Η ποσότητα E εκφράζει την ολική ενέργεια του συστήματος.

Μια σημαντική κατηγορία Χαμιλτονιανού συστήματος ενός βαθμού ελευθερίας είναι το **Νευτώνειο** ή **συντηρητικό** σύστημα $\ddot{x}=f(x)$, ή

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=f(x)\end{cases} \tag{2.2.89}$$

Από την πρώτη εξίσωση του (2.2.89) είναι

$$\frac{\partial H}{\partial y}=y\Rightarrow H(x,y)=\frac{1}{2}y^2+U(x)$$

και από την δεύτερη εξίσωση

$$-\frac{\partial H}{\partial x}=f(x)\Rightarrow-\frac{dU}{dx}=f(x)\Rightarrow U(x)=-\int_{x_0}^{x}f(s)ds \tag{2.2.90}$$

Η ολική ενέργεια του συστήματος (2.2.89) τότε είναι $H(x,y)=T(y)+U(x)=\frac{1}{2}y^2+U(x)$, όπου $T(y)=\frac{1}{2}y^2$ η κινητική ενέργεια και $U(x)$ η δυναμική ενέργεια.

Επειδή η ολική ενέργεια διατηρείται σταθερή κατά μήκος των τροχιών, ισχύει πως

$$H(x,y)=E\Rightarrow\frac{1}{2}y^2+U(x)=E\Rightarrow y=\pm\sqrt{2E-2U(x)} \tag{2.2.91}$$

Άρα, δίνοντας τιμές στην E που είναι σταθερή, σχεδιάζουμε τις καμπύλες στο επίπεδο φάσης του συστήματος.

Αποδεικνύεται πως τα κρίσιμα σημεία ενός Νευτώνειου συστήματος κείνται όλα πάνω στον άξονα των x. Ένα σημείο $(x_0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο του (2.2.89), αν και μόνον αν είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $U(x)$. Επίσης, η εικόνα των τροχιών ενός Νευτώνειου συστήματος στο χώρο των φάσεων είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των x.

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος κοντά σε ένα κρίσιμο σημείο $(x_0,0)$, είναι

$$\boldsymbol{J}(x_0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x) & 0 \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2+U''(x_0)=0$. Εφόσον το $(x_0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο του συστήματος, ισχύει $\dot{y}=f(x_0)=0$, και από τη σχέση $f(x)=-U'(x)$ προκύπτει $U'(x_0)=0$.

Επομένως έχουμε:

Αν $U''(x_0)<0$, το $(x_0,0)$ είναι τοπικό μέγιστο για την $U(x)$ και συνεπώς σάγμα για το (2.2.89).

Αν $U''(x_0)>0$, το $(x_0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο για την $U(x)$ και συνεπώς κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα του (2.2.89). Άρα για το μη γραμμικό (2.2.89) θα είναι κέντρο ή σπείρα. Ωστόσο, επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό και διαθέτει διατηρούμενη ποσότητα (ενέργεια), αποκλείεται η ύπαρξη σπειροειδούς συμπεριφοράς. Επιπλέον, η συμμετρία του φασικού διαγράμματος ως προς τον x-άξονα συνεπάγεται ότι οι τροχιές είναι κλειστές γύρω από το σημείο ισορροπίας. Επομένως, το κρίσιμο σημείο είναι κέντρο και για το μη γραμμικό σύστημα.

Η παραπάνω ανάλυση δείχνει ότι στα συντηρητικά συστήματα η τοπική μορφή των κρίσιμων σημείων καθορίζεται άμεσα από τη γεωμετρία της συνάρτησης δυναμικού, ενώ η ύπαρξη διατηρούμενης ενέργειας συνεπάγεται κλειστές φασικές τροχιές γύρω από τα ευσταθή σημεία ισορροπίας. Ωστόσο, η συνολική δομή του φασικού πορτραίτου δεν περιορίζεται μόνο σε περιοδικές λύσεις. Σε συστήματα με σαγματικά σημεία εμφανίζονται ειδικές τροχιές που διαχωρίζουν περιοχές διαφορετικής δυναμικής συμπεριφοράς. Οι τροχιές αυτές, γνωστές ως **ομοκλινικές** και **ετεροκλινικές**, θα αποτελέσουν το αντικείμενο της επόμενης ενότητας.

2.2.10.2 Ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές

Οι κλειστές τροχιές που βλέπουμε σε ένα πορτραίτο φάσης δεν αντιστοιχούν πάντα σε περιοδικές λύσεις. Υπάρχουν κλειστές τροχιές που ενώνουν ένα κρίσιμο σημείο με τον εαυτό του και λέγονται ομοκλινικές, και άλλες που ενώνουν δυο διαφορετικά κρίσιμα σημεία και καλούνται ετεροκλινικές. Πιο συγκεκριμένα, μια τροχιά λέγεται **ομοκλινική** στο σημείο ισορροπίας (x_0, y_0) αν πλησιάζει το σημείο αυτό όταν $t\to\pm\infty$, δηλαδή αν ξεκινά και καταλήγει στο ίδιο σημείο ισορροπίας.

Αντίστοιχα, μια τροχιά λέγεται **ετεροκλινική** στα σημεία ισορροπίας (x_1, y_1) και (x_2, y_2), αν πλησιάζει το (x_1, y_1) όταν $t\to-\infty$ και το (x_2, y_2) όταν $t\to+\infty$.

Οι ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές δεν είναι περιοδικές, καθώς απαιτείται άπειρος χρόνος για να προσεγγίσουν τα σημεία ισορροπίας. Εμφανίζονται συχνά στα συντηρητικά συστήματα αλλά σπανίως σε άλλα συστήματα. Στα επίπεδα αυτόνομα συστήματα, οι ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές συνδέουν μόνο υπερβολικά σημεία ισορροπίας. Ειδικότερα, οι ομοκλινικές τροχιές συνδέουν κατ' ανάγκην σαγματικά σημεία, καθώς απαιτείται το σημείο ισορροπίας να διαθέτει τόσο ευσταθή όσο και ασταθή πολλαπλότητα. Αντίθετα οι ετεροκλινικές τροχιές συνδέουν δυο υπερβολικά σημεία ισορροπίας, όπως σπείρες, κόμβους, ή σαγματικά σημεία, διαφορετικού ή και ίδιου τύπου.

Μια τροχιά, η οποία χωρίζει το διάγραμμα φάσης σε δύο διαφορετικά είδη ποιοτικής συμπεριφοράς, για παράδειγμα, τις φραγμένες από τις μη φραγμένες τροχιές, λέγεται **διαχωριστική τροχιά** (**separatrix**), και η κίνηση σε αυτή χρειάζεται άπειρο χρόνο.

Η ομοκλινική και η ετεροκλινική τροχιά είναι παραδείγματα διαχωριστικών τροχιών, και μάλιστα όταν συνδέουν σαγματικά σημεία λέγονται **συνδέσεις σάγματος**.

Παράδειγμα ομοκλινικής τροχιάς

Θεωρούμε το συντηρητικό σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-x^3 \end{cases}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού είναι

$$U(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}$$

με

$$U'(x)=-x+x^3,\ U''(x)=-1+3x^2$$

Από την (2.2.91) υπολογίζουμε τις εξισώσεις των τροχιών για διάφορες τιμές της E

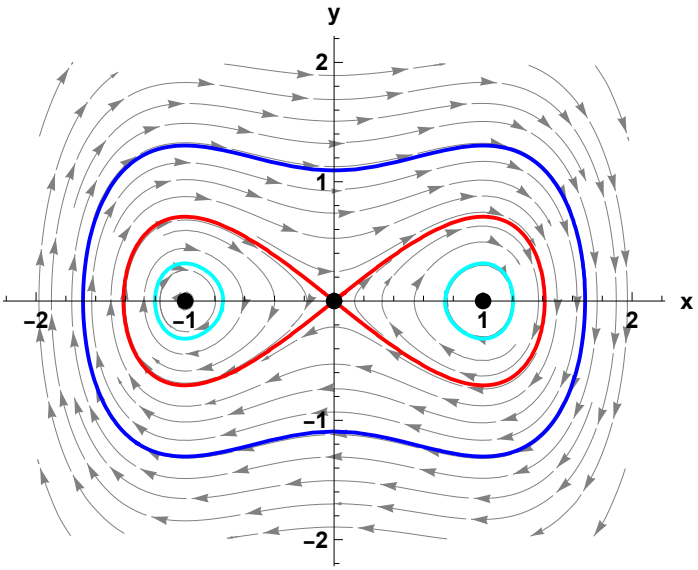
$$y=\pm\sqrt{2E-2U(x)}=\sqrt{2E-2(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})}$$

Από την εξίσωση $U'(x)=0$ είναι $x=0$ ή $x=\pm 1$.

Έτσι, τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(0,0),(-1,0)$ και $(1,0)$.

Επειδή $U''(0)=-1<0$, το σημείο $(0,0)$ είναι ασταθές σάγμα, και επειδή $U''(-1)=U''(1)=2>0$, τα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ είναι ευσταθή κέντρα.

Στο πορτραίτο φάσης του *Σχήματος 2.2.33* βλέπουμε τις τροχιές για διάφορες τιμές της E.



Σχήμα 2.2.33: Ομοκλινική τροχιά

Όπως περιμέναμε, τα δύο κέντρα περικλείονται από μικρές κλειστές τροχιές (γαλάζιο χρώμα), που αντιστοιχούν σε μικρές ταλαντώσεις γύρω από τα σημεία αυτά. Για $E=0$, η τροχιά είναι ομοκλινική ή σύνδεση σάγματος (κόκκινο χρώμα). Για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας, $E>0$, εμφανίζονται μεγάλες κλειστές τροχιές (μπλε χρώμα), οι οποίες περικλείουν και τα τρία σημεία ισορροπίας. Οι τροχιές αυτές αντιστοιχούν σε ταλαντώσεις μεγαλύτερης ενέργειας, κατά τις οποίες το σύστημα υπερβαίνει το μέγιστο του δυναμικού και κινείται εναλλάξ αριστερά και δεξιά του σαγματικού σημείου. Η ομοκλινική τροχιά αποτελεί το όριο που διαχωρίζει τις μικρές τοπικές ταλαντώσεις γύρω από τα κέντρα από τις ταλαντώσεις μεγάλης ενέργειας.

Παράδειγμα ετεροκλινικής τροχιάς

Θεωρούμε το συντηρητικό σύστημα του εκκρεμούς χωρίς απόσβεση

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\sin x \end{cases}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση δυναμικού είναι

$$U(x)=\int_0^x \sin s\, ds=1-\cos x$$

με

$$U'(x)=\sin x \text{ και } U''(x)=\cos x$$

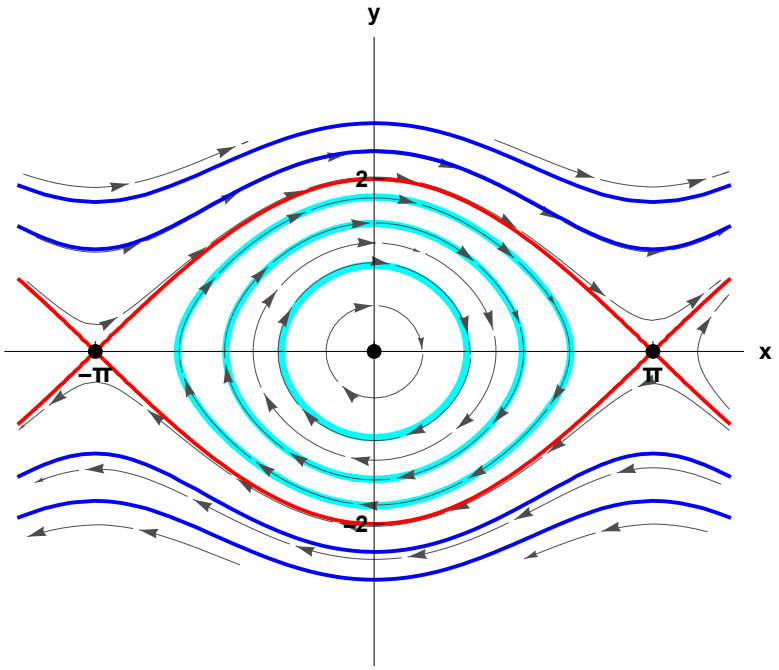
Από την (2.2.91) υπολογίζουμε τις εξισώσεις των τροχιών για διάφορες τιμές της E

$$y=\pm\sqrt{2E-2U(x)}=\sqrt{2E-2(1-\cos x)}$$

Από την εξίσωση $U'(x)=\sin x=0$ είναι $x=2k\pi$ ή $x=(2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z}$

Έτσι, τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(2k\pi,0), k\in\mathbb{Z}$ και $((2k+1)\pi,0), k\in\mathbb{Z}$.

Επειδή $U''(2k\pi)=1>0$, τα σημεία $(2k\pi,0), k\in\mathbb{Z}$ είναι κέντρα, και επειδή $U''((2k+1)\pi)=-1<0$ τα σημεία $((2k+1)\pi,0), k\in\mathbb{Z}$ είναι σαγματικά σημεία.



Σχήμα 2.2.34: Οι ετεροκλινικές τροχιές του εκκρεμούς χωρίς απόσβεση

Στο *Σχήμα 2.2.34* παρατηρούμε ότι η αρχή $(0,0)$ στο φασικό πορτραίτο αντιστοιχεί στην ευσταθή θέση ισορροπίας του εκκρεμούς, δηλαδή όταν το εκκρεμές βρίσκεται στην κάτω κατακόρυφη θέση. Τα κρίσιμα σημεία $(\pm\pi,0)$ αντιστοιχούν στην ασταθή θέση ισορροπίας, δηλαδή όταν το εκκρεμές βρίσκεται ακριβώς στην άνω κατακόρυφη θέση. Τροχιές κοντά στην αρχή είναι σχεδόν κύκλοι (γαλάζιο χρώμα), οι οποίοι προσεγγίζονται από τις λύσεις του γραμμικού εκκρεμούς, που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση: $\ddot{x}+x=0$. Οι κλειστές τροχιές που περιέχουν την αρχή αντιστοιχούν στις συνήθεις **περιοδικές κινήσεις** του εκκρεμούς, κατά τις οποίες αυτό ταλαντώνεται αριστερά και δεξιά γύρω από τη θέση ισορροπίας. Η μορφή αυτή της κίνησης είναι γνωστή ως **λίκνιση (libration).** Οι διαχωριστικές τροχιές (*separatrices*), οι οποίες συνδέουν τα σαγματικά σημεία $(\pm\pi,0)$ (κόκκινο χρώμα), αντιστοιχούν σε κινήσεις με ολική ενέργεια $E=2$. Κατά μήκος αυτών των δύο ετεροκλινικών τροχιών, το εκκρεμές πλησιάζει την ασταθή άνω κατακόρυφη θέση ασυμπτωτικά, απαιτώντας άπειρο χρόνο για να τη φθάσει. Τέλος, οι τροχιές που βρίσκονται εκτός των περιοχών που ορίζονται από τις διαχωριστικές τροχιές (μπλε χρώμα)

αντιστοιχούν σε **περιστροφικές κινήσεις**, **(rotation)** κατά τις οποίες το εκκρεμές πραγματοποιεί πλήρεις περιστροφές γύρω από τον άξονά του.

2.2.10.3 Διακλαδώσεις

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα στο επίπεδο, το οποίο περιέχει μια πραγματική παράμετρο ελέγχου μ. Λέμε ότι το σύστημα παρουσιάζει **διακλάδωση** στην κρίσιμη τιμή μ_0, όταν για τιμές της παραμέτρου εκατέρωθεν της μ_0 το αντίστοιχο πορτραίτο φάσης μεταβάλλεται ποιοτικά, με την έννοια ότι τα συστήματα για $\mu<\mu_0$ και $\mu>\mu_0$ δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμα. Η ποιοτική αυτή μεταβολή μπορεί να εκδηλώνεται ως αλλαγή στον αριθμό ή στον τύπο ευστάθειας των σημείων ισορροπίας, ως εμφάνιση ή εξαφάνιση περιοδικών λύσεων, ή γενικότερα ως μεταβολή της τοπολογικής δομής των φασικών τροχιών. Η εμφάνιση διακλάδωσης συνδέεται με την απώλεια της δομικής ευστάθειας του συστήματος, ενώ η κρίσιμη τιμή μ_0 ονομάζεται **τιμή διακλάδωσης**.

Για λόγους κατανόησης, οι διακλαδώσεις διακρίνονται σε δύο κύριες κατηγορίες:

◆ **Τοπικές διακλαδώσεις**, που συνδέονται με αλλαγές στην τοπική ευστάθεια σημείων ισορροπίας, περιοδικών τροχιών ή άλλων αμετάβλητων συνόλων καθώς η παράμετρος περνά την τιμή διακλάδωσης.

Παραδείγματα: διακλάδωση σάγματος-κόμβου, μετακρίσιμη διακλάδωση, διακλάδωση διχάλας, διακλάδωση αναδίπλωσης, διακλάδωση *Hopf*.

◆ **Καθολικές διακλαδώσεις**, που προκύπτουν από αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερων αμετάβλητων συνόλων ή με ισορροπίες και δεν μπορούν να εντοπιστούν μόνο μέσω της τοπικής ανάλυσης των σημείων ισορροπίας.

Παραδείγματα: ομοκλινική διακλάδωση, ετεροκλινική διακλάδωση, διακλάδωση άπειρης περιόδου.

Παράδειγμα διακλάδωσης αναδίπλωσης

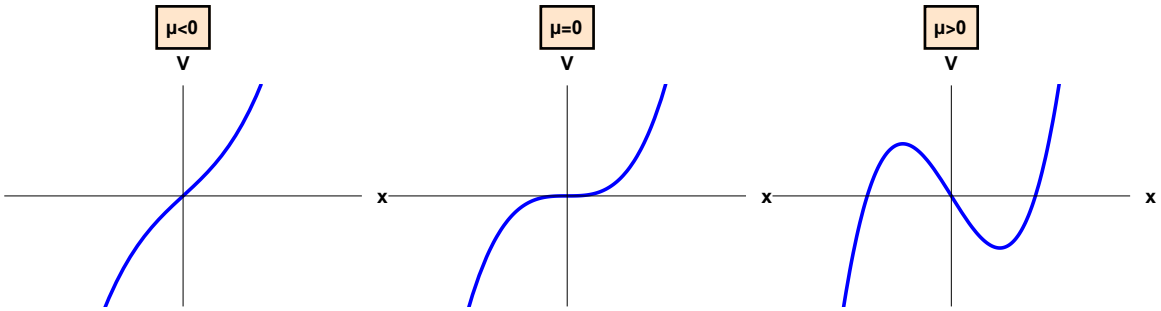
Στα συντηρητικά συστήματα, όπου τα σημεία ισορροπίας είναι τα ακρότατα της συνάρτησης δυναμικού, μπορούμε να μελετήσουμε τις διακλαδώσεις παρακολουθώντας τις μεταβολές των ακρότατων καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος ελέγχου.

Ένα τυπικό παράδειγμα τέτοιας τοπικής διακλάδωσης είναι η **διακλάδωση αναδίπλωσης** (**fold bifurcation**).

Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^2 + \mu \end{cases}$$

με συνάρτηση δυναμικού $U(x)=\frac{x^3}{3}-\mu x$, που έχει τη μορφή που παρουσιάζεται στο *Σχήμα 2.2.35*.



Σχήμα 2.2.35: Το δυναμικό και η διακλάδωση αναδίπλωσης

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- $\mu<0$

Δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία, αφού $-x^2+\mu<0$ για κάθε x. Αφού $\dot{y}<0$ η ροή των τροχιών είναι από πάνω προς τα κάτω, και αφού $\dot{x}=y$ η ροή είναι προς τα δεξιά για $y>0$, δηλαδή στο *1ο* και *2ο* τεταρτημόριο, ενώ η ροή είναι προς τα αριστερά για $y<0$, δηλαδή στο *3ο* και *4ο* τεταρτημόριο.

- $\mu=0$

Τότε $U'(x)=x^2$ και $U''(x)=2x$

Από την εξίσωση $U'(x)=0$ είναι $x=0$, άρα το σημείο ισορροπίας είναι το $(0,0)$. Επειδή $U''(0)=0$, έχουμε σημείο καμπής για το δυναμικό και κρίσιμη ευστάθεια για το σημείο ισορροπίας $(0,0)$.

- $\mu>0$

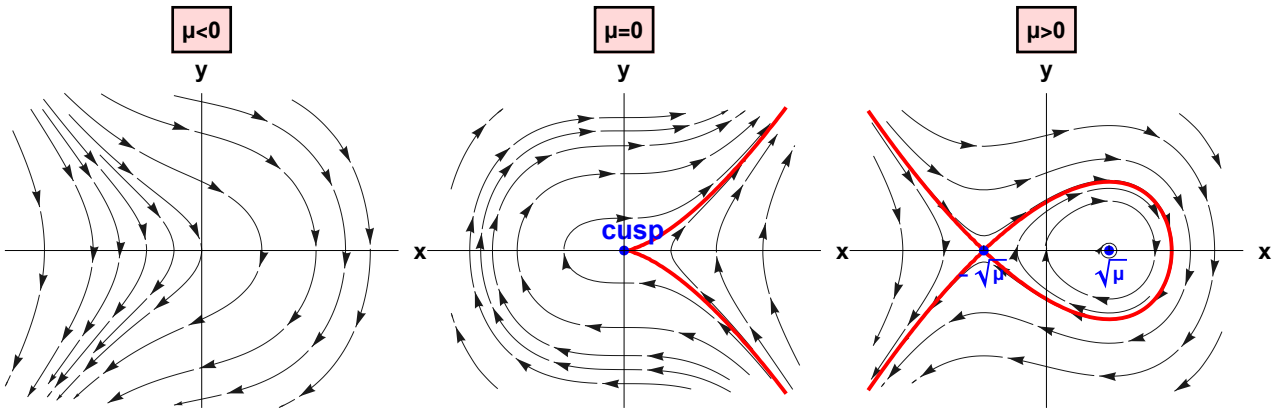
Από την εξίσωση $U'(x)=0$ είναι $x=-\sqrt{\mu}$ και $x=\sqrt{\mu}$. Έτσι, τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(-\sqrt{\mu},0)$ *και* $(\sqrt{\mu},0)$.

Επειδή $U''(-\sqrt{\mu})=-2\sqrt{\mu}<0$, το σημείο $(-\sqrt{\mu},0)$ είναι ασταθές σάγμα, ενώ επειδή $U''(\sqrt{\mu})=2\sqrt{\mu}>0$, το σημείο $(\sqrt{\mu},0)$ είναι ευσταθές κέντρο.

Συμπεραίνουμε, πως καθώς το μ ελαττώνεται από θετικό σε αρνητικό, τα δύο σημεία ισορροπίας $(-\sqrt{\mu},0)$ και $(\sqrt{\mu},0)$ πλησιάζουν, συγχωνεύονται στο $(0,0)$, και μετά καταστρέφονται.

Συνεπώς, έχουμε μια διακλάδωση αναδίπλωσης που συμβαίνει για τιμή διακλάδωσης $\mu=0$.

Τα αντίστοιχα φασικά διαγράμματα παρουσιάζονται στο *Σχήμα 2.2.36*. Κατά την διακλάδωση, η φασική καμπύλη που αντιστοιχεί στην ενέργεια του κρίσιμου σημείου $(E=0)$ παρουσιάζει αιχμή (cusp), που αντανακλά την εκφυλισμένη φύση του σημείου ισορροπίας κατά την διακλάδωση αναδίπλωσης.



Σχήμα 2.2.36: Τα φασικά διαγράμματα για διάφορες τιμές του μ

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ίδια τοπολογική δομή εμφανίζεται και στην εξίσωση του πλάτους της *Ενότητας* 2.2.5.1, όπως προκύπτει από τη σύγκριση των *Σχημάτων* 2.2.6−2.2.8, με το *Σχήμα* 2.2.35.

Και στις δύο περιπτώσεις οι καμπύλες λύσεων ως προς την παράμετρο ελέγχου παρουσιάζουν τη χαρακτηριστική γεωμετρία αναδίπλωσης. Στην εξίσωση πλάτους εμφανίζονται τρεις λύσεις μετά το κρίσιμο σημείο, αλλά τα δύο συμμετρικά μη μηδενικά πλάτη αντιστοιχούν στην ίδια φυσική κατάσταση λόγω συμμετρίας φάσης. Συνεπώς, δεν εισάγεται νέος τύπος διακλάδωσης, αλλά αναπαράγεται η διακλάδωση του συντηρητικού συστήματος.

Θα συνεχίσουμε με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συστήματος που παρουσιάζει ομοκλινική διακλάδωση. Η ανάλυση βασίζεται στη γεωμετρία των σταθερών και ασταθών πολλαπλοτήτων του υπερβολικού σημείου ισορροπίας στο επίπεδο φάσεων και αναδεικνύει τον καθολικό χαρακτήρα του φαινομένου.

Παράδειγμα ομοκλινικής διακλάδωσης

Έστω η αυτόνομη εξίσωση *Duffing* $\ddot{x}+\varepsilon\,\dot{x}-x+x^3=0$, με $|\varepsilon|\ll 1$, που γράφεται ως σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-x^3-\varepsilon\, y \end{cases}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- $\varepsilon=0$

Το σύστημα είναι τότε

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-x^3 \end{cases}$$

και είναι συντηρητικό, με συνάρτηση δυναμικού $U(x)=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}$.

Έτσι, $U'(x)=-x+x^3$ και $U''(x)=3x^2-1$.

Από την εξίσωση $U'(x)=0$ είναι $x=0$ και $x=\pm 1$, άρα το σύστημα έχει τρία σημεία ισορροπίας, τα $(0,0),(-1,0),(1,0)$. Επειδή $U''(0)=-1<0$, το σημείο $(0,0)$ είναι ασταθές σάγμα, και επειδή $U''(\pm 1)=2>0$, τα σημεία $(-1,0)$ και $(1,0)$ είναι κέντρα (ευσταθή).

Από την (2.2.91) υπολογίζουμε τις εξισώσεις των τροχιών για διάφορες τιμές της E,

$$y=\pm\sqrt{2E-2U(x)}=\pm\sqrt{2E-\frac{x^4}{2}+x^2}$$

Για $E=0$ οι καμπύλες σταθερής ενέργειας διέρχονται από το υπερβολικό σημείο ισορροπίας $(0,0)$ και, καθώς το σύστημα είναι συντηρητικό και το σημείο αυτό είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο στο ενεργειακό επίπεδο $E=0$, οι αντίστοιχες τροχιές συγκλίνουν στο $(0,0)$ καθώς $t\to\pm\infty$. Συνεπώς, προκύπτουν δύο συμμετρικές ομοκλινικές τροχιές με εξισώσεις

$$y=\pm\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}}\ ,\ |x|\le\sqrt{2}$$

Δηλαδή, η μια ομοκλινική τροχιά βρίσκεται στο διάστημα $-\sqrt{2}\le x\le 0$, και η άλλη στο $0\le x\le\sqrt{2}$.

Για να προσδιορίσουμε τη χρονική παραμετροποίηση των ομοκλινικών τροχιών, χρησιμοποιούμε τη σχέση μεταξύ x και $y=\dot{x}$ που προκύπτει από την εξίσωση των τροχιών στο επίπεδο φάσεων. Συγκεκριμένα, θα ολοκληρώσουμε τη σχέση

$$\frac{dx}{dt}=\pm x\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}$$

ως προς t. Προκύπτουν τέσσερις περιπτώσεις, που αντιστοιχούν στα τέσσερα τμήματα της ίδιας ομοκλινικής τροχιάς στο επίπεδο φάσεων (ένα σε κάθε τεταρτημόριο).

Θέτουμε $x=\pm\, sech\ u$

Για την υπερβολική τέμνουσα $sech\,u=\dfrac{1}{\cosh u}=\dfrac{2}{e^u+e^{-u}}$ ισχύουν

$$sech^2 u+\tanh^2 u=1$$

$$sech(-u)=sech\,u$$

$$\frac{d}{du}(sech\,u)=-\tanh u\, sech\,u$$

Έτσι έχουμε

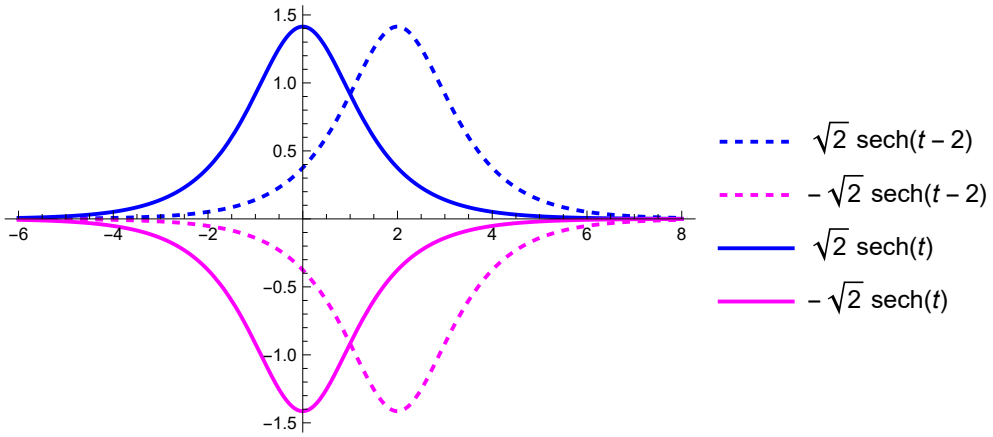
$$\frac{-\sqrt{2}\tanh u\, sech\,u\, du}{dt}=\pm\sqrt{2}\, sech\,u\tanh u\Rightarrow$$

$$du=\pm dt\Rightarrow u=\pm(t-t_0)\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\, sech(t-t_0)$$

όπου t_0 σταθερά.

Άρα, οι ομοκλινικές λύσεις είναι $x=\pm\sqrt{2}\, sech(t-t_0)$ για κάθε t_0, αφού $x\to 0$ καθώς $t\to\pm\infty$.

Στο *Σχήμα* 2.2.37 που απεικονίζονται αυτές οι λύσεις για $t_0=0, t_0=2$ γίνεται φανερό πως κάθε επιλογή του t_0, παράγει μετατόπιση των λύσεων κατά μήκος του άξονα του χρόνου.



Σχήμα 2.2.37: Ομοκλινικές λύσεις της $\ddot{x}-x+x^3=0$

◆ $\varepsilon>0$

Τα κρίσιμα σημεία, που είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y=0 \\ x-x^3-\varepsilon\, y=0 \end{cases}$$

είναι πάλι τα $(0,0),(-1,0),(1,0)$. Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

- Στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$, έχουμε:

$$\boldsymbol{J}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\lambda^2+\varepsilon\lambda-1=0$.

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2}=-\frac{\varepsilon}{2}\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}+1}$, οι οποίες είναι πραγματικές, ετερόσημες.

Άρα, η αρχή είναι σάγμα (ασταθές) (*Πίνακας* 2.2.1).

- Στα σημεία ισορροπίας $(\pm 1,0)$, έχουμε

$$\boldsymbol{J}(\pm 1,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

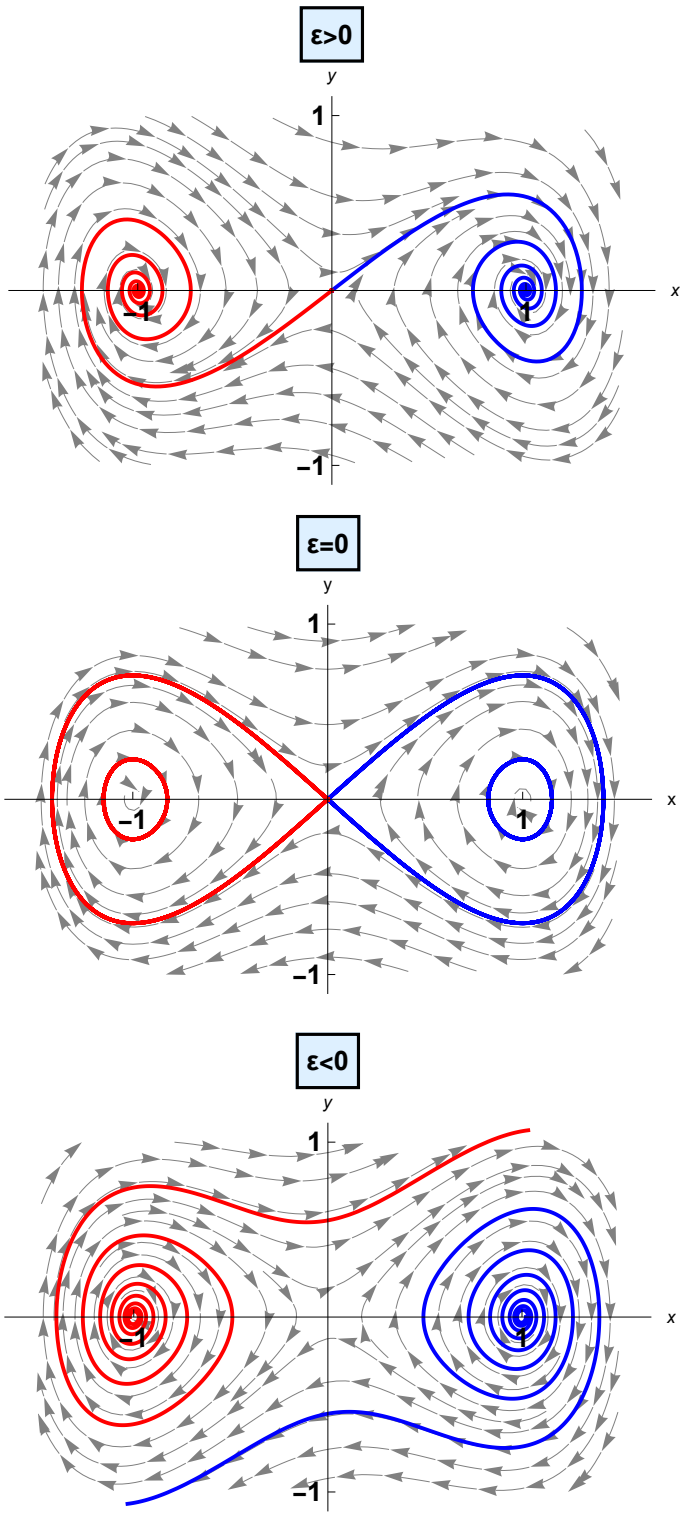
με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\lambda^2+\varepsilon\lambda+2=0$.

Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2}=-\frac{\varepsilon}{2}\pm i\sqrt{2-\frac{\varepsilon^2}{4}}$, οι οποίες είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Άρα, τα σημεία ισορροπίας $(\pm 1,0)$ είναι ευσταθείς σπείρες (*Πίνακας* 2.2.1).

◆ $\varepsilon<0$

Τα κρίσιμα σημεία παραμένουν τα ίδια. Η αλλαγή του προσήμου της παραμέτρου ε δεν επηρεάζει τη φύση του σημείου ισορροπίας $(0,0)$, το οποίο εξακολουθεί να είναι σάγμα. Ωστόσο, στα σημεία $(\pm 1,0)$, το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών γίνεται θετικό, με αποτέλεσμα τα σημεία αυτά να μετατρέπονται σε ασταθείς σπείρες.



Σχήμα 2.2.38: Ομοκλινική διακλάδωση στο ε=0

Το παραπάνω παράδειγμα παρέχει μία πλήρη απεικόνιση του μηχανισμού της ομοκλινικής διακλάδωσης. Συγκεκριμένα, όπως βλέπουμε και στο *Σχήμα 2.2.38*, για $\varepsilon>0$, το σύστημα παρουσιάζει ετεροκλινικές συνδέσεις μεταξύ του υπερβολικού σημείου ισορροπίας $(0,0)$ και των μη μηδενικών σημείων ισορροπίας (σύνδεση σάγμα-σπείρας), οι οποίες οφείλονται στη γεωμετρική διάταξη των σταθερών και ασταθών πολλαπλοτήτων στο επίπεδο φάσεων. Καθώς η παράμετρος ε αυξάνεται και προσεγγίζει την κρίσιμη τιμή $\varepsilon=0$ οι ετεροκλινικές συνδέσεις συγχωνεύονται και, στην τιμή $\varepsilon=0$, οι σταθερές και ασταθείς πολλαπλότητες του υπερβολικού σημείου ισορροπίας $(0,0)$ συμπίπτουν, σχηματίζοντας μία ομοκλινική σύνδεση σάγματος. Για $\varepsilon<0$ η σύνδεση αυτή καταργείται και η ομοκλινική τροχιά καταστρέφεται, με αποτέλεσμα να μην υφίσταται πλέον καμία σύνδεση. Η παραπάνω μετάβαση αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα ομοκλινικής διακλάδωσης, με κρίσιμη τιμή διακλάδωσης την $\varepsilon=0$.

Παράδειγμα εύρεσης ομοκλινικής διακλάδωσης με μέθοδο κανονικών διαταραχών

Έστω η εξίσωση

$$\ddot{x}+\varepsilon(\alpha x^2-\beta)\dot{x}-x+x^3=0 \qquad (2.2.92)$$

με $0<\varepsilon\ll 1$ και $\alpha>\beta>0$.

Με τη μέθοδο κανονικών διαταραχών, θα διερευνήσουμε αν υπάρχουν τιμές των α, β για τις οποίες συμβαίνει ομοκλινική διακλάδωση.

Η (*2.2.92*) γράφεται ως σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-x^3-\varepsilon(\alpha x^2-\beta)y \end{cases}$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, είναι οι λύσεις του

$$\begin{cases} y=0 \\ x-x^3-\varepsilon(\alpha x^2-\beta)y=0 \end{cases}$$

και είναι τα $(0,0),(\pm 1,0)$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2-2\varepsilon\alpha x y & -\varepsilon\alpha x^2+\varepsilon\beta \end{bmatrix}$$

- Στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$, έχουμε:

$$\boldsymbol{J}(0,0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & \varepsilon\beta\end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\lambda^2-\varepsilon\beta\lambda-1=0$. Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2}=\frac{\varepsilon\beta}{2}\pm\sqrt{\frac{\varepsilon^2\beta^2}{4}+1}$, οι οποίες για $\beta>0$ είναι πραγματικές, ετερόσημες, άρα η αρχή είναι σάγμα (ασταθές) (*Πίνακας 2.2.1*).

- Στα σημεία ισορροπίας $(\pm 1,0)$, έχουμε

$$\boldsymbol{J}(\pm 1,0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & \varepsilon(\beta-\alpha)\end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\lambda^2+\varepsilon(\alpha-\beta)\lambda+2=0$. Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2}=-\frac{\varepsilon(\alpha-\beta)}{2}\pm i\sqrt{2-\frac{\varepsilon^2(\alpha-\beta)^2}{4}}$, οι οποίες για $\alpha>\beta>0$ είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος, άρα τα σημεία ισορροπίας $(\pm 1,0)$ είναι ευσταθείς σπείρες (*Πίνακας 2.2.1*).

Το αδιατάρακτο συντηρητικό σύστημα $(\varepsilon=0)$

$$\ddot{x}-x+x^3=0$$

είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα πως διαθέτει μία ομοκλινική τροχιά που αποτελείται από δύο συμμετρικούς κλάδους, οι οποίοι αντιστοιχούν στις σταθερές και ασταθείς πολλαπλότητες του υπερβολικού σημείου ισορροπίας και μάλιστα για $x>0$, η ομοκλινική λύση είναι $x=\sqrt{2}\,sech\,t$, με $-\infty<t<+\infty$. Όταν εισάγεται η μικρή διαταραχή, $\varepsilon\neq 0$, η ομοκλινική αυτή τροχιά γενικά καταστρέφεται λόγω της απώλειας της συντηρητικότητας. Ωστόσο, στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο όρος απόσβεσης $\varepsilon(\alpha x^2-\beta)\dot{x}$ αλλάζει πρόσημο: είναι αρνητικός για μικρές τιμές του x, οδηγώντας σε εισροή ενέργειας κοντά στο υπερβολικό σημείο ισορροπίας, και θετικός για μεγαλύτερες τιμές του x, προκαλώντας απώλεια ενέργειας μακριά από αυτό. Η ιδιότητα αυτή δημιουργεί τη δυνατότητα μιας ισορροπίας μεταξύ εισροής και απώλειας ενέργειας κατά μήκος της τροχιάς, γεγονός που καθιστά εύλογη την υπόθεση ότι, για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων α και β, η ομοκλινική τροχιά μπορεί να διατηρείται και για μικρές αλλά μη μηδενικές τιμές της παραμέτρου ε.

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Έστω πως η ομοκλινική λύση της (*2.2.92*) που υποθέτουμε πως υπάρχει, έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots\quad,\ -\infty<t<+\infty$$

Επειδή η τροχιά πρέπει να πλησιάζει το σαγματικό σημείο $(0,0)$, καθώς $t\to\pm\infty$, οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες είναι $\lim_{t\to\pm\infty} x=0$ και $\lim_{t\to\pm\infty}\dot{x}=0$. Άρα έπεται πως

$$\lim_{t\to\pm\infty} x_n=0,\ \lim_{t\to\pm\infty} \dot{x}_n=0,\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Αντικαθιστούμε στην *(2.2.92)*, και εξισώνουμε τους όρους ίδιας τάξης του ε. Οι δύο πρώτες εξισώσεις που παίρνουμε είναι

$$\ddot{x}_0-x_0+x_0^3=0 \qquad (2.2.93)$$

$$\ddot{x}_1+(3x_0^2-1)x_1=(\beta-\alpha x_0^2)\dot{x}_0 \qquad (2.2.94)$$

Η λύση της (2.2.93) για $x_0>0$, είναι η $x_0(t)=\sqrt{2}\,sech\,t$ που είδαμε ήδη, και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες $\lim_{t\to\pm\infty} x_0=0,\ \lim_{t\to\pm\infty} \dot{x}_0=0.$

Η εξίσωση (2.2.94) είναι μια **γραμμική, εξαναγκασμένη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης** για το $x_1(t)$με συντελεστές που εξαρτώνται από τη γνωστή συνάρτηση $x_0(t)$.

Αν και η εξίσωση αυτή μπορεί, κατ' αρχήν, να λυθεί ρητά (τουλάχιστον υπό μορφή ολοκληρώματος), ο σκοπός της παρούσας ανάλυσης δεν είναι η εύρεση της πλήρους λύσης του $x_1(t)$. Αντίθετα, μας ενδιαφέρει να εξαχθεί η αναγκαία συνθήκη υπό την οποία η τροχιά φάσης μέχρι τον πρώτο διορθωτικό όρο παραμένει ομοκλινική.

Για το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (2.2.94) με $\dot{x}_0$, οπότε λαμβάνουμε

$$\ddot{x}_1\dot{x}_0+(3x_0^2-1)x_1\dot{x}_0=(\beta-\alpha x_0^2)\dot{x}_0^2 \qquad (2.2.95)$$

Το βήμα αυτό αποσκοπεί στη μετατροπή του αριστερού μέλους σε ολική παράγωγο ως προς τον χρόνο, ώστε να μπορεί να ολοκληρωθεί στο χρονικό διάστημα $(-\infty,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dt}(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)\dot{x}_0$$

οπότε η (2.2.95) μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1\dot{x}_0)-\dot{x}_1\ddot{x}_0+x_1\frac{d}{dt}(x_0^3-x_0)=(\beta-\alpha x_0^2)\dot{x}_0^2$$

Αντικαθιστώντας το $\ddot{x}_0=x_0-x_0^3$, καταλήγουμε

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1\dot{x}_0)-\dot{x}_1(x_0-x_0^3)+x_1\frac{d}{dt}(x_0^3-x_0)=(\beta-\alpha x_0^2)\dot{x}_0^2\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}[\dot{x}_1\dot{x}_0+x_1(x_0^3-x_0)]=(\beta-\alpha x_0^2)\dot{x}_0^2 \qquad (2.2.96)$$

Ολοκληρώνουμε την (2.2.96) στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και θέτοντας

$$I(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt \qquad (2.2.97)$$

έχουμε

$$\left[\dot{x}_1\dot{x}_0+x_1(x_0^3-x_0)\right]_{-\infty}^{+\infty}=I(\alpha,\beta)$$

Αν η λύση είναι ομοκλινική τότε ισχύει ότι $\lim_{t\to\pm\infty} x_1=0$, $\lim_{t\to\pm\infty} \dot{x}_1=0$, οπότε το αριστερό μέλος μηδενίζεται. Συνεπώς, για να υπάρχει ομοκλινική λύση μέχρι τάξης $O(\varepsilon)$, είναι αναγκαίο να ισχύει

$$I(\alpha,\beta)=0$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ομοκλινικής τροχιάς. Στη συνέχεια, διερευνούμε αν και υπό ποιες προϋποθέσεις η συνθήκη αυτή είναι και ικανή για την ύπαρξη ομοκλινικής λύσης μέχρι τάξης ε.

Υποθέτουμε λοιπόν πως $I(\alpha,\beta)=0$ και ολοκληρώνουμε τώρα την (2.2.96) από $t=-\infty$ έως $t=\tau$ και έχουμε

$$\left[\dot{x}_1(t)\dot{x}_0(t)+x_1(t)(x_0^3(t)-x_0(t))\right]_{-\infty}^{\tau}=\int_{-\infty}^{\tau}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt$$

Οι συνθήκες $\lim_{t\to\pm\infty} x_0=0$, $\lim_{t\to\pm\infty} \dot{x}_0=0$ μηδενίζουν το όριο στο $-\infty$ του αριστερού μέλους, οπότε

$$\dot{x}_1(\tau)\dot{x}_0(\tau)+x_1(\tau)(x_0^3(\tau)-x_0(\tau))=\int_{-\infty}^{+\infty}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt-\int_{\tau}^{+\infty}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt\Rightarrow$$

$$\dot{x}_1(\tau)\dot{x}_0(\tau)+x_1(\tau)(x_0^3(\tau)-x_0(\tau))=I(\alpha,\beta)-\int_{\tau}^{+\infty}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt\Rightarrow$$

$$\dot{x}_1(\tau)\dot{x}_0(\tau)+x_1(\tau)(x_0^3(\tau)-x_0(\tau))=I(\alpha,\beta)-M(\alpha,\beta) \qquad (2.2.98)$$

όπου

$$M(\alpha,\beta)=\int_{\tau}^{+\infty}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt$$

Για να υπολογίσουμε το $I(\alpha,\beta)$, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\frac{d}{dt}\tanh t=sech^2 t=1-\tanh^2 t$ και αφού αντικαταστήσουμε την $x_0(t)=\sqrt{2}\,sech\,t$, και $\dot{x}_0=-\sqrt{2}\tanh t\,sech\,t$ θα έχουμε

$$\int[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)\,dt=\int(\beta-2\alpha\,sech^2 t)(-\sqrt{2}\tanh t\,sech\,t)^2\,dt$$

$$=2\beta\int sech^2 t\tanh^2 t\,dt-4\alpha\int sech^4 t\tanh^2 t\,dt$$

$$=2\beta\int\tanh^2 t(\tanh t)'\,dt-4\alpha\int(1-\tanh^2 t)\tanh^2 t(\tanh t)'\,dt$$

$$=(2\beta-4\alpha)\int\tanh^2 t(\tanh t)'\,dt+4\alpha\int\tanh^4 t(\tanh t)'\,dt$$

$$=\frac{2}{3}(\beta-2\alpha)\tanh^3 t+\frac{4}{5}\alpha\tanh^5 t+c \qquad (2.2.99)$$

Επειδή $\lim_{t\to+\infty}\tanh t=1$, $\lim_{t\to-\infty}\tanh t=-1$, έχουμε από τις (2.2.97) και (2.2.99)

$$I(\alpha,\beta)=\frac{4}{15}(5\beta-4\alpha) \qquad (2.2.100)$$

και από την (2.2.99)

$$M(\alpha,\beta)=\frac{2}{3}(\beta-2\alpha)(1-\tanh^3\tau)+\frac{4}{5}\alpha(1-\tanh^5\tau)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του όρου $M(\alpha,\beta)$ για $\tau\to+\infty$, καθώς ο όρος αυτός καθορίζει τη συμπεριφορά του δεξιού μέλους της (2.2.98) και είναι κρίσιμος για τη μελέτη της διατήρησης της ομοκλινικής τροχιάς.

Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την ασυμπτωτική ανάπτυξη της υπερβολικής εφαπτομένης. Παρατηρούμε ότι

$$\tanh\tau=\frac{1-e^{-2\tau}}{1+e^{-2\tau}},\ \text{με } e^{-2\tau}\to 0 \text{ όταν } \tau\to+\infty.$$

Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα

$$\frac{1-z}{1+z}=1-2z+2z^2+\ldots,|z|<1$$

λαμβάνουμε για $z=e^{-2\tau}$

$$\tanh\tau=1-2e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau}),\tau\to+\infty$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ασυμπτωτικές εκτιμήσεις:

$$\tanh^3\tau=(1-2e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau}))^3=1-6e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})\Rightarrow$$

$$1-\tanh^3\tau=6e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})$$

$$\tanh^5\tau=(1-2e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau}))^5=1-10e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})\Rightarrow$$

$$1-\tanh^5\tau=10e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στον τύπο του $M(\alpha,\beta)$, προκύπτει

$$M(\alpha,\beta)=\frac{2}{3}(\beta-2\alpha)6e^{-2\tau}+\frac{4}{5}\alpha\,10e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})$$

$$=4(\beta-2\alpha)e^{-2\tau}+8\alpha e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})=4\beta e^{-2\tau}+O(e^{-4\tau})\Rightarrow$$

$$M(\alpha,\beta)=O(e^{-2\tau}),\ \text{όταν } \tau\to+\infty \qquad (2.2.101)$$

Για την ολοκλήρωση της ασυμπτωτικής ανάλυσης, εξετάζουμε στη συνέχεια τη συμπεριφορά της ομοκλινικής λύσης και της παραγώγου της.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$sech\,\tau=\frac{2}{e^{\tau}+e^{-\tau}}=\frac{2e^{-\tau}}{1+e^{-2\tau}}$$

Εφόσον $e^{-2\tau}\to 0$ όταν $\tau\to+\infty$, μπορούμε να αναπτύξουμε τον παρονομαστή σε σειρά ως προς τη μικρή ποσότητα $e^{-2\tau}$, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1+z}=1-z+O(z^2),\ z\to 0$$

Θέτοντας $z=\mathrm{e}^{-2\tau}$ καταλήγουμε

$$sech\,\tau=\frac{2\mathrm{e}^{-\tau}}{1+\mathrm{e}^{-2\tau}}=2\mathrm{e}^{-\tau}(1-\mathrm{e}^{-2\tau}+O(\mathrm{e}^{-4\tau}))=2\mathrm{e}^{-\tau}+O(\mathrm{e}^{-3\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to+\infty$$

Έτσι, προκύπτει ότι

$$x_0(\tau)=\sqrt{2}\,sech\,\tau=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\tau}+O(\mathrm{e}^{-3\tau})\Rightarrow$$

$$x_0(\tau)=O(\mathrm{e}^{-\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to+\infty \tag{2.2.102}$$

$$\dot{x}_0(\tau)=-\sqrt{2}\tanh\tau\,sech\,\tau\Rightarrow$$

$$\dot{x}_0(\tau)=-\sqrt{2}(1+O(e^{-2\tau}))(2\mathrm{e}^{-\tau})=-2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\tau}+O(\mathrm{e}^{-3\tau})\Rightarrow$$

$$\dot{x}_0(\tau)=O(\mathrm{e}^{-\tau},\ \ \text{όταν}\ \tau\to+\infty \tag{2.2.103}$$

καθώς και

$$x_0^3(\tau)=(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\tau})^3+O(\mathrm{e}^{-5\tau})=16\sqrt{2}e^{-3\tau}+O(\mathrm{e}^{-5\tau})\Rightarrow$$

$$x_0^3(\tau)-x_0(\tau)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\tau}+O(\mathrm{e}^{-3\tau})\Rightarrow$$

$$x_0^3(\tau)-x_0(\tau)=O(\mathrm{e}^{-\tau}),\ \ \text{όταν}\ \tau\to+\infty \tag{2.2.104}$$

Υπό την υπόθεση ότι $I(\alpha,\beta)=0$, και λαμβάνοντας υπόψιν τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις (2.2.101), (2.2.103) και (2.2.104), η εξίσωση (2.2.98) γράφεται ασυμπτωτικά ως

$$\dot{x}_1(\tau)O(\mathrm{e}^{-\tau})+x_1(\tau)O(\mathrm{e}^{-\tau})=O(\mathrm{e}^{-2\tau})$$

Χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες $O(f)\cdot O(g)=O(f\cdot g)$ και $O(f)+O(g)=O(|f|+|g|)$, προκύπτει τελικά

$$x_1(\tau)=\dot{x}_1(\tau)=O(\mathrm{e}^{-\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to+\infty,$$

συνεπώς ικανοποιούνται οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες στο $+\infty$, δηλαδή

$$\lim_{t\to+\infty}x_1=0,\ \lim_{t\to+\infty}\dot{x}_1=0$$

Ανάλογα, ολοκληρώνοντας την (2.2.96) από $t=\tau$ έως $t=+\infty$ έχουμε

$$\dot{x}_1(\tau)\dot{x}_0(\tau)+x_1(\tau)(x_0^3(\tau)-x_0(\tau))=N(\alpha,\beta)-I(\alpha,\beta) \tag{2.2.105}$$

όπου

$$N(\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{\tau}[\beta-\alpha x_0^2(t)]\dot{x}_0^2(t)dt=\frac{2}{3}(\beta-2\alpha)(1+\tanh^3\tau)+\frac{4}{5}\alpha(1+\tanh^5\tau)$$

Επειδή

$$\tanh\tau=\frac{\mathrm{e}^{2\tau}-1}{\mathrm{e}^{2\tau}+1},\ \text{με}\ \mathrm{e}^{2\tau}\to 0\ \text{όταν}\ \tau\to-\infty.$$

εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα

$$\frac{z-1}{z+1}=-\frac{1-z}{1+z}=-(1-2z+2z^2+\ldots),|z|<1$$

λαμβάνουμε για $z=\mathrm{e}^{2\tau}$

$$\tanh\tau=-1+2\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau}),\tau\to-\infty$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες ασυμπτωτικές εκτιμήσεις:

$$\tanh^3\tau=(-1+2\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau}))^3=-1+6\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})\Rightarrow$$

$$1+\tanh^3\tau=6\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})$$

$$\tanh^5\tau=(-1+2\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau}))^5=-1+10\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})\Rightarrow$$

$$1+\tanh^5\tau=10\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στον τύπο του $N(\alpha,\beta)$, προκύπτει

$$N(\alpha,\beta)=\frac{2}{3}(\beta-2\alpha)6\mathrm{e}^{2\tau}+\frac{4}{5}\alpha\,10\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})$$

$$=4(\beta-2\alpha)\mathrm{e}^{2\tau}+8\alpha\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})=4\beta\mathrm{e}^{2\tau}+O(\mathrm{e}^{4\tau})\Rightarrow$$

$$N(\alpha,\beta)=O(\mathrm{e}^{2\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to-\infty \qquad (2.2.106)$$

Χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική ανάπτυξη

$$sech\,\tau=\frac{2}{\mathrm{e}^{\tau}+\mathrm{e}^{-\tau}}=\frac{2\mathrm{e}^{\tau}}{1+\mathrm{e}^{2\tau}}=2\mathrm{e}^{\tau}+O(\mathrm{e}^{3\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to-\infty$$

προκύπτει ότι

$$x_0(\tau)=\sqrt{2}\,sech\,\tau=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\tau}+O(\mathrm{e}^{3\tau})\Rightarrow$$

$$x_0(\tau)=O(\mathrm{e}^{\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to-\infty \qquad (2.2.107)$$

$$\dot{x}_0=-\sqrt{2}\tanh\tau\,sech\,\tau\Rightarrow$$

$$\dot{x}_0(\tau)=-\sqrt{2}(-1+O(e^{2\tau}))(2\mathrm{e}^{\tau})=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\tau}+O(\mathrm{e}^{3\tau})\Rightarrow$$

$$\dot{x}_0(\tau)=O(\mathrm{e}^{\tau}),\ \ \text{όταν}\ \tau\to-\infty \qquad (2.2.108)$$

καθώς και

$$x_0^3(\tau)=(2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\tau})^3+O(\mathrm{e}^{5\tau})=16\sqrt{2}e^{3\tau}+O(\mathrm{e}^{5\tau})\Rightarrow$$

$$x_0^3(\tau)-x_0(\tau)=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\tau}+O(\mathrm{e}^{3\tau})\Rightarrow$$

$$x_0^3(\tau)-x_0(\tau)=O(\mathrm{e}^{\tau}),\ \ \text{όταν}\ \tau\to-\infty \qquad (2.2.109)$$

Υπό την υπόθεση ότι $I(\alpha,\beta)=0$, και λαμβάνοντας υπόψιν τις ασυμπτωτικές εκτιμήσεις (2.2.106), (2.2.108) και (2.2.109), η εξίσωση (2.2.105) γράφεται ασυμπτωτικά ως

$$\dot{x}_1(\tau)O(\mathrm{e}^{\tau})+x_1(\tau)O(\mathrm{e}^{\tau})=O(\mathrm{e}^{2\tau})$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$x_1(\tau)=\dot{x}_1(\tau)=O(e^{\tau}),\ \text{όταν}\ \tau\to-\infty$$

συνεπώς ικανοποιούνται οι απαιτούμενες συνοριακές συνθήκες στο $-\infty$, δηλαδή

$$\lim_{t\to-\infty} x_1=0,\ \lim_{t\to-\infty} \dot{x}_1=0.$$

Συνοψίζοντας, από την προηγούμενη ασυμπτωτική ανάλυση προκύπτει ότι, υπό τη συνθήκη $I(\alpha,\beta)=0$, η λύση $x_1(t)$ καθώς και η παράγωγός της τείνουν εκθετικά στο μηδέν για $t\to\pm\infty$.

Συνεπώς, η διαταραγμένη λύση

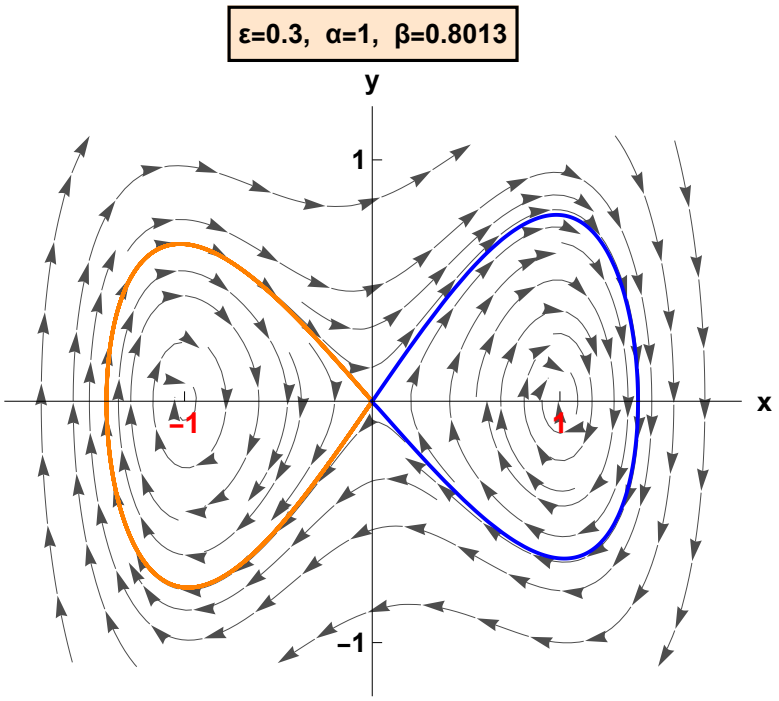
$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots\ ,\ -\infty<t<+\infty$$

ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες ομοκλινικής τροχιάς μέχρι τάξης *O(ε)*. Άρα η συνθήκη

$$I(\alpha,\beta)=\frac{4}{15}(5\beta-4\alpha)=0\Rightarrow$$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{4}{5}$$

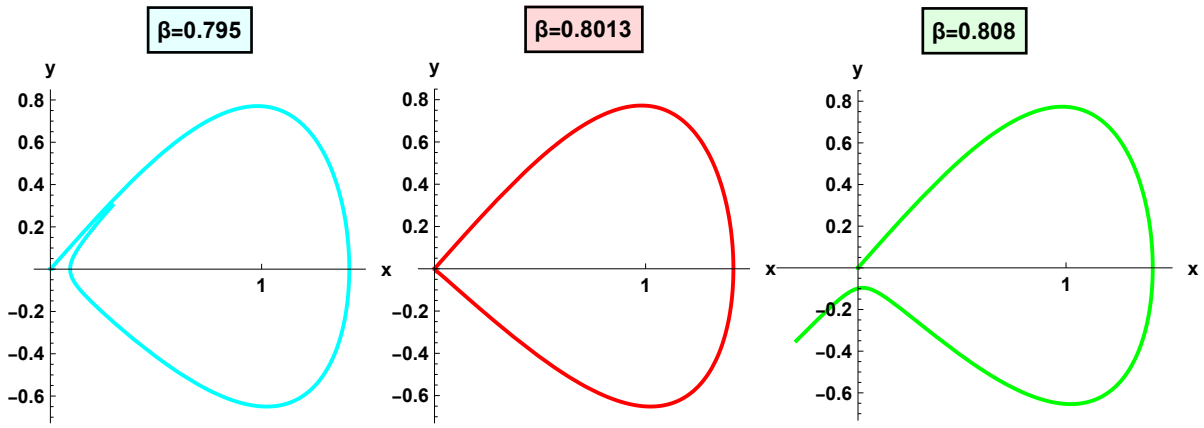
αποτελεί όχι μόνο αναγκαία αλλά και ικανή συνθήκη για την διατήρηση της ομοκλινικής τροχιάς. Αποδεικνύεται επίσης, πως υπάρχει ομοκλινική τροχιά για $x<0$, για τον ίδιο λόγο των παραμέτρων *α,β* (*Σχήμα 2.2.39*).



Σχήμα 2.2.39: Ομοκλινικές τροχιές της $\ddot{x}+\varepsilon(\alpha x^2-\beta)\dot{x}-x+x^3=0$

Συνεπώς, κρατώντας την παράμετρο *α* σταθερή και μεταβάλλοντας τη *β*, το σύστημα υφίσταται ομοκλινική διακλάδωση καθώς η *β* διέρχεται από την κρίσιμη τιμή $\beta_c=\frac{4}{5}\alpha$.

Συγκεκριμένα, για $\beta=\beta_c$ η ομοκλινική τροχιά του αδιατάρακτου συστήματος διατηρείται στο διαταραγμένο σύστημα και συνδέει το σαγματικό σημείο με τον εαυτό του. Αντίθετα, για $\beta\neq\beta_c$ η ισορροπία μεταξύ ενίσχυσης και απόσβεσης κατά μήκος της τροχιάς διαταράσσεται, με αποτέλεσμα τη διάσπαση της ομοκλινικής σύνδεσης.



Σχήμα 2.2.40: Η ομοκλινική διακλάδωση της $\ddot{x}+\varepsilon\left(\alpha x^2-\beta\right)\dot{x}-x+x^3=0$, *για* $x>0$

Στο *Σχήμα 2.2.40*, παρουσιάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης για $x>0$ και για τρεις χαρακτηριστικές τιμές της παραμέτρου β, με σταθερό $\alpha=1$, όταν $\varepsilon=0.3$. Παρατηρείται ότι η ομοκλινική τροχιά εμφανίζεται μόνο για την τιμή $\beta=0.8013$, σε συμφωνία με τη θεωρητική πρόβλεψη της ανάλυσης κανονικών διαταραχών. Για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου ε, η μέθοδος κανονικών διαταραχών καθίσταται λιγότερο ακριβής, καθώς οι όροι ανώτερης τάξης δεν μπορούν πλέον να αγνοηθούν.

Σημείωση

Η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στη μέθοδο κανονικών διαταραχών και οδήγησε, σε πρώτη τάξη ως προς τη μικρή παράμετρο ε, σε μια αναγκαία συνθήκη για την διατήρηση της ομοκλινικής τροχιάς. Η συνθήκη αυτή εκφράζεται με τον μηδενισμό ενός ολοκληρώματος κατά μήκος της αδιατάρακτης ομοκλινικής λύσης. Το ολοκλήρωμα αυτό ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα *Melnikov* και μετρά, σε πρώτη τάξη ως προς ε, την απόσταση μεταξύ της σταθερής και της ασταθούς πολλαπλότητας του σαγματικού σημείου. Συνεπώς, η μέθοδος κανονικών διαταραχών οδηγεί στο ίδιο κριτήριο με τη μέθοδο *Melnikov*, προσφέροντας μια αναλυτική προσέγγιση της γεωμετρικής ερμηνείας της ομοκλινικής διακλάδωσης.

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΤΙΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 Εισαγωγή

Στην *Ενότητα 1.8* έγινε η διάκριση μεταξύ κανονικών και ιδιόμορφων προβλημάτων διαταραχών, με βάση την ομοιόμορφη εγκυρότητα της προσεγγιστικής λύσης ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή.

Για να καταδειχθεί στην πράξη η έννοια της μη ομοιόμορφης εγκυρότητας, εξετάζουμε ως χαρακτηριστικό παράδειγμα την αυτόνομη εξίσωση *Duffing*.

Παράδειγμα μη γραμμικού ελατηρίου με συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Έστω το μη γραμμικό ελατήριο

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x-\varepsilon x^3=0,\ \ 0<t+\infty \tag{3.1.1}$$

με παράμετρο $|\varepsilon|\ll 1$,

Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, έχουμε για τη συνάρτηση δυναμικού

$$U(x)=\omega_0^2\frac{x^2}{2}-\varepsilon\frac{x^4}{4},\ \ U'(x)=\omega_0^2 x-\varepsilon x^3,\ \ U''(x)=\omega_0^2-3\varepsilon x^2$$

Από την (*2.2.84*) υπολογίζουμε τις εξισώσεις των τροχιών για διάφορες τιμές της E

$$y=\pm\sqrt{2E-2U(x)}=\pm\sqrt{2E-\omega_0^2 x^2+\varepsilon\frac{x^4}{2}}$$

Από την εξίσωση $U'(x)=0$ είναι $x=0$ ή $x^2=\frac{\omega_0^2}{\varepsilon}$

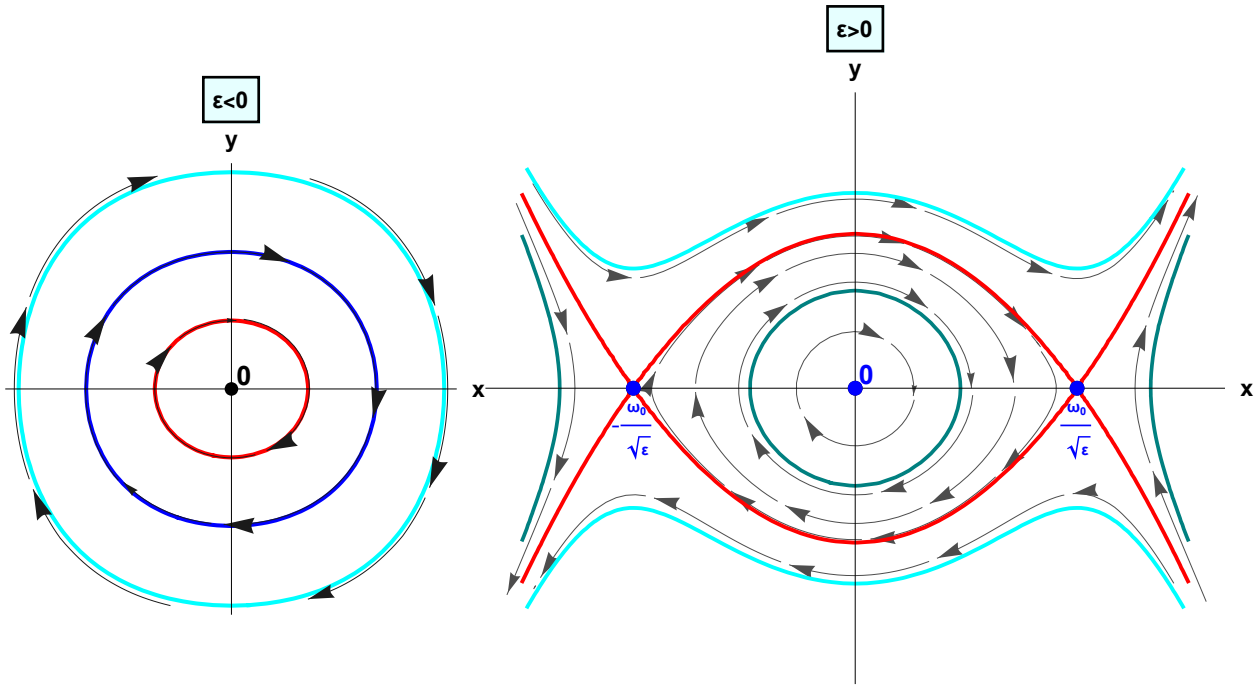
- $\varepsilon<0$

Αν το ελατήριο είναι σκληρό, δηλαδή $\varepsilon<0$, τότε υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας, το $(0,0)$, που είναι **ευσταθές κέντρο**, επειδή $U''(0)=\omega_0^2>0$.

- $\varepsilon>0$

Αν το ελατήριο είναι μαλακό, δηλαδή $\varepsilon>0$, τότε υπάρχουν 3 σημεία ισορροπίας, τα $(0,0),(\pm\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}},0)$.

Το $(0,0)$ είναι, πάλι ευσταθές κέντρο, και επειδή $U''(\pm\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}})=-2\omega_0^2<0$, τα $(\pm\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}},0)$ είναι **σαγματικά σημεία** (ασταθή).



Σχήμα 3.1.1: Πορτραίτα φάσης για (α) σκληρό και (β) μαλακό ελατήριο με συμμετρική δύναμη επαναφοράς

Στο *Σχήμα 3.1.1* βλέπουμε τα πορτραίτα φάσης για το σκληρό ελατήριο ($\varepsilon<0$), και για το μαλακό ελατήριο ($\varepsilon>0$). Παρατηρούμε ότι, για μικρές ενέργειες, οι τροχιές είναι κλειστές και αντιστοιχούν σε περιοδικές ταλαντώσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση του μαλακού ελατηρίου όπου εμφανίζονται επιπλέον σημεία ισορροπίας, προκύπτει διακλάδωση διχάλας που οδηγεί στη δημιουργία διαχωριστικών καμπυλών στο επίπεδο φάσης. Παρότι η περιοδικότητα διατηρείται για μικρά πλάτη, η περίοδος των ταλαντώσεων εξαρτάται γενικά τόσο από το πλάτος όσο και από την παράμετρο ε, ως αποτέλεσμα της μη γραμμικότητας του συστήματος. Η μη γραμμικότητα αυτή καθιστά αδύνατη την εύρεση ρητής αναλυτικής λύσης σε κλειστή μορφή· για τον λόγο αυτό, προσεγγίζουμε τις περιοδικές λύσεις με τη μέθοδο κανονικών διαταραχών, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η παράμετρος ε είναι μικρή.

Έτσι, θεωρούμε πως η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

Στη συνέχεια, επιλέγουμε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες

$$x(0,\varepsilon)=A,\quad \dot{x}(0,\varepsilon)=0 \tag{3.1.2}$$

οι οποίες καθορίζουν μια αντιπροσωπευτική περιοδική τροχιά. Η επιλογή αυτή γίνεται χωρίς απώλεια της γενικότητας, λόγω της αυτονομίας και της συντηρητικής φύσης του συστήματος,

Εφαρμόζουμε στην (3.1.1), αναπτύσσουμε σε μορφή πολυωνύμου ως προς ε, εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, και παίρνουμε

$$\ddot{x}_0+\omega_0^2 x_0=0\,,\quad x_0(0)=A\,,\quad \dot{x}_0(0)=0$$

$$\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=x_0^3\,,\quad x_1(0)=0\,,\quad \dot{x}_1(0)=0$$

$$\cdots$$

από όπου έχουμε τον πρωτεύοντα και πρώτο διορθωτικό όρο αντίστοιχα

$$x_0(t)=A\cos\omega_0 t$$

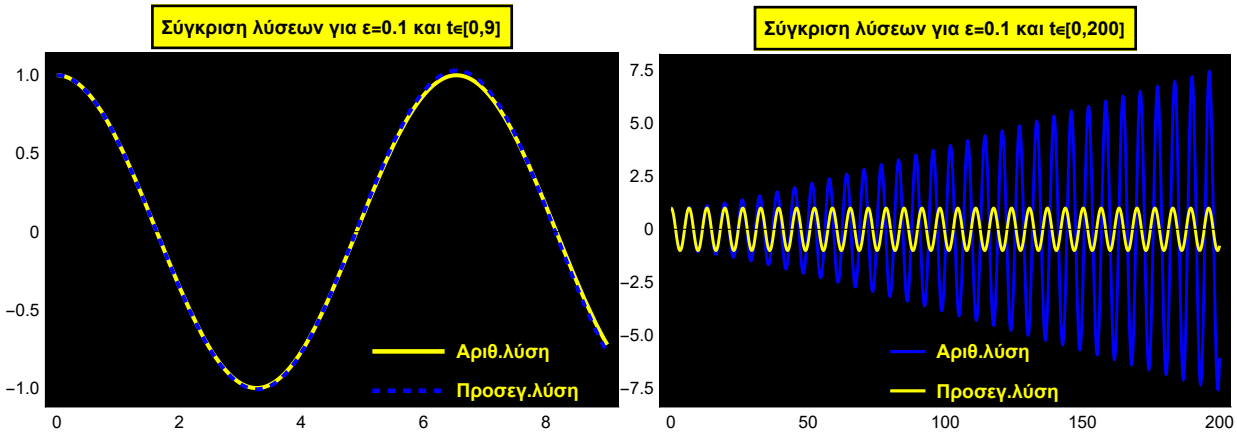
$$x_1(t)=\frac{A^3}{32\,\omega_0^2}\left(\cos\omega_0 t-\cos 3\,\omega_0 t+12\,t\,\omega_0\sin\omega_0 t\right)$$

Έτσι, η προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο κανονικών διαταραχών είναι

$$x(t,\varepsilon)=A\cos\omega_0 t+\varepsilon\left[\frac{A^3}{32\,\omega_0^2}\left(\cos\omega_0 t-\cos 3\,\omega_0 t\right)+\frac{3\,A^3}{8\,\omega_0}t\sin\omega_0 t\right]+O(\varepsilon^2)$$

Παρατηρούμε την εμφάνιση του αιώνιου όρου $\frac{3\,A^3}{8\,\omega_0}t\sin\omega_0 t$, για τον οποίο μιλήσαμε εκτενώς στην *Ενότητα 2.1*, και οδηγεί σε αποτυχία τη μέθοδο κανονικών διαταραχών στο διάστημα $[0,+\infty]$. Συγκεκριμένα, αν ο t είναι της τάξης του $\frac{1}{\varepsilon}$ ή μεγαλύτερος, καθώς $\varepsilon\to 0$, βλέπουμε πως ο αιώνιος όρος παραμένει μεγάλος, και μάλιστα ίδιας τάξης μεγέθους με τον πρωτεύοντα όρο, γεγονός που κάνει το πλάτος της ταλάντωσης να αυξάνεται απεριόριστα με το χρόνο.

Έτσι, η μέθοδος κανονικών διαταραχών είναι επιτυχής όταν ο χρόνος βρίσκεται στο διάστημα $[0,T]$, με $T\ll\frac{8\,\omega_0}{3\,A^3\varepsilon}$, αλλά αποτυγχάνει για μεγαλύτερους χρόνους.



Σχήμα 3.1.2 : Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης

Στο *Σχήμα 3.1.2* παρουσιάζεται η σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης με την αριθμητική λύση της εξίσωσης (*3.1.1*), για μικρή τιμή της παραμέτρου *ε*. Παρατηρείται ότι, ενώ αρχικά οι δύο λύσεις συμφωνούν, για μεγαλύτερους χρόνους η προσεγγιστική λύση αποκλίνει σημαντικά, παρουσιάζοντας μη φυσική αύξηση του πλάτους.

Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι σε ιδιόμορφα προβλήματα, η άμεση εφαρμογή της μεθόδου κανονικών διαταραχών οδηγεί σε προσεγγιστικές λύσεις που αποτυγχάνουν να περιγράψουν σωστά τη συμπεριφορά του συστήματος στο σύνολο του διαστήματος ενδιαφέροντος, δηλαδή δεν είναι ομοιόμορφα έγκυρες.

Το *Κεφάλαιο 3* είναι αφιερωμένο στην ανάπτυξη και εφαρμογή μεθόδων που έχουν σχεδιαστεί ειδικά για την αντιμετώπιση τέτοιων ιδιόμορφων προβλημάτων. Οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στην εισαγωγή κατάλληλων μεταβολών κλίμακας, είτε στον χρόνο είτε στις μεταβλητές του προβλήματος, ώστε να αποκατασταθεί η ομοιόμορφη εγκυρότητα της προσεγγιστικής λύσης.

3.2 Μέθοδος Poincaré-Lindstedt

Η βασική αιτία της αποτυχίας των ευθέων αναπτύξεων στα προβλήματα μη γραμμικών ταλαντώσεων δεν έγκειται στην ίδια τη μορφή της λύσης, αλλά στην επιλογή της χρονικής κλίμακας.

Είδαμε στην Ενότητα *2.1* εφαρμόζοντας κανονικές διαταραχές στη γραμμική $y''+2\varepsilon y'+y=0$, ότι η προσεγγιστική λύση επιβάλλει η συχνότητα να είναι μονάδα, ενώ η ακριβής λύση, έχει συχνότητα $\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Επομένως, οποιαδήποτε διαδικασία ανάπτυξης δεν λαμβάνει υπόψη την εξάρτηση της συχνότητας από το *ε*, θα αποτύχει για μεγάλες τιμές του χρόνου. Δηλαδή, στις κανονικές διαταραχές ο χρόνος θεωρείται ανεξάρτητος της παραμέτρου *ε*, ενώ στην πραγματικότητα η περίοδος της ταλάντωσης εξαρτάται από αυτήν. Για τον λόγο αυτό, απαιτείται η εισαγωγή μιας τροποποιημένης χρονικής μεταβλητής, η οποία ενσωματώνει τη διόρθωση της συχνότητας και επιτρέπει την κατασκευή ομοιόμορφα έγκυρων ασυμπτωτικών προσεγγίσεων.

Η μέθοδος ***Poincaré–Lindstedt*** αποτελεί επέκταση της κλασικής μεθόδου διαταραχών και αποσκοπεί στην εξάλειψη των αιώνιων όρων, οι οποίοι οδηγούν σε μη έγκυρες προσεγγιστικές λύσεις για μεγάλους χρόνους. Η βασική ιδέα της μεθόδου συνίσταται στην αντικατάσταση της συχνότητας ταλάντωσης από ένα ανάπτυγμα σε δυνάμεις της μικρής παραμέτρου διαταραχής *ε*. Οι συντελεστές του αναπτύγματος αυτού προσδιορίζονται κατάλληλα ώστε να εξαλείφονται οι αιώνιοι όροι σε κάθε τάξη της προσέγγισης, εξασφαλίζοντας έτσι περιοδικές λύσεις. Η μέθοδος

εφαρμόζεται σε συστήματα που παρουσιάζουν δυνατότητα περιοδικής απόκρισης και χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της μόνιμης κατάστασης μη γραμμικών ταλαντωτών.

Μια τέτοια περίπτωση είναι η ταλάντωση του μη γραμμικού ελατηρίου της προηγούμενης ενότητας, για την οποία δεν είναι γνωστή η συχνότητα ω του διαταραγμένου συστήματος, ενώ είναι γνωστή η συχνότητα ω_0 του αδιατάρακτου συστήματος $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*, εκφράζουμε την ω με ανάπτυγμα διαταραχών ως προς την ω_0

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \tag{3.2.1}$$

Εισάγουμε τη νέα ανεξάρτητη χρονική μεταβλητή

$$\tau=\omega t \tag{3.2.2}$$

ώστε να ενσωματωθεί η διόρθωση της συχνότητας και να επιβληθεί 2π-περιοδικότητα στη λύση ως προς τον νέο χρόνο.

Έτσι, θεωρούμε τη λύση ως συνάρτηση του τ και της παραμέτρου ε

$$x(t,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

με

$$X(\tau+2\pi,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\omega\frac{dX}{d\tau} \quad \text{και} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2\frac{d^2X}{d\tau^2}$$

και οι *(3.1.1)*, *(3.1.2)* γίνονται

$$\omega^2 X''+\omega_0^2 X-\varepsilon X^3=0 \tag{3.2.3}$$

$$X(0,\varepsilon)=A,\quad X'(0,\varepsilon)=0 \tag{3.2.4}$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας πως η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$X(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)+\varepsilon^2 X_2(\tau)+\ldots \tag{3.2.5}$$

και η (3.2.3) γίνεται με εφαρμογή των (3.2.1) και (3.2.5)

$$(\omega_0+\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots)^2(X_0''+\varepsilon X_1''+\varepsilon^2 X_2''+\ldots)+\omega_0^2(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots)-\varepsilon(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots)^3=0$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του ε με το μηδέν και επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες σε κάθε τάξη, προκύπτουν τα ακόλουθα προβλήματα.

$$X_0''+X_0=0,\quad X_0(0)=A,\quad X_0'(0)=0 \tag{3.2.6}$$

$$X_1''+X_1=-\frac{2\omega_1 X_0''}{\omega_0}+\frac{X_0^3}{\omega_0^2},\quad X_1(0)=0,\quad X_1'(0)=0 \tag{3.2.7}$$

$$X_2''+X_2=-\frac{2\omega_1}{\omega_0}X_1''-\left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}+\frac{2\omega_2}{\omega_0}\right)X_0''+\frac{3X_0^2}{\omega_0^2}X_1,\quad X_2(0)=0,\quad X_2'(0)=0 \tag{3.2.8}$$

$$\cdots$$

με

$$X_i(\tau+2\pi)=X_i(\tau)$$

Η λύση του προβλήματος (3.2.6) δίνει τον πρωτεύοντα όρο

$$X_0=A\cos\tau \tag{3.2.9}$$

Αντικαθιστώντας την (3.2.9) στην εξίσωση του προβλήματος (3.2.7), και εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^3\tau=\frac{1}{4}\cos 3\tau+\frac{3}{4}\cos\tau$ παίρνουμε

$$X_1''+X_1=\left(\frac{2A\omega_1}{\omega_0}+\frac{3A^3}{4\omega_0^2}\right)\cos\tau+\frac{A^3}{4\omega_0^2}\cos 3\tau \tag{3.2.10}$$

Ο όρος του $\cos\tau$ ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, και ως εκ τούτου οδηγεί στην εμφάνιση ενός αιώνιου όρου στη λύση της X_1. Επειδή θέλουμε η λύση να είναι περιοδική, είναι απαραίτητο να εξαλείψουμε αυτόν τον όρο, μηδενίζοντας τον συντελεστή του. Έτσι,

$$\frac{2A\omega_1}{\omega_0}+\frac{3A^3}{4\omega_0^2}=0\Rightarrow\omega_1=-\frac{3A^2}{8\omega_0} \tag{3.2.11}$$

Τότε, το πρόβλημα (3.2.7) γίνεται

$$X_1''+X_1=\frac{A^3}{4\omega_0^2}\cos 3\tau,\quad X_1(0)=0,\quad X_1'(0)=0$$

που έχει λύση

$$X_1=\frac{A^3}{32\omega_0^2}(\cos\tau-\cos 3\tau) \tag{3.2.12}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις (3.2.9) και (3.2.12) στην εξίσωση του προβλήματος (3.2.8) και γίνεται

$$X_2''+X_2=\frac{21A^5+256A\omega_0^3\omega_2}{128\omega_0^4}\cos\tau+\frac{24A^5}{128\omega_0^4}\cos 3\tau-\frac{3A^5}{128\omega_0^4}\cos 5\tau$$

Όπως πριν, η παραπάνω εξίσωση για να έχει περιοδικές λύσεις πρέπει

$$\frac{21A^5+256A\omega_0^3\omega_2}{128\omega_0^4}=0\Rightarrow\omega_2=-\frac{21A^4}{256\omega_0^3} \tag{3.2.13}$$

Έτσι, το πρόβλημα (3.2.8) γίνεται τελικά

$$X_2''+X_2=\frac{24A^5}{128\omega_0^4}\cos 3\tau-\frac{3A^5}{128\omega_0^4}\cos 5\tau,\quad X_2(0)=0,\quad X_2'(0)=0$$

και έχει λύση

$$X_2=\frac{A^5}{1024\omega_0^4}(23\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau) \tag{3.2.14}$$

Αντικαθιστούμε στην (3.2.5) τις (3.2.9), (3.2.12) και (3.2.14) και έχουμε την προσεγγιστική λύση δεύτερης τάξης

$$X(\tau,\varepsilon)=A\cos\tau+\varepsilon\frac{A^3}{32\omega_0^2}(\cos\tau-\cos 3\tau)+\varepsilon^2\frac{A^5}{1024\omega_0^4}(23\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau)+O(\varepsilon^3)$$

και στον πραγματικό χρόνο t

$$x(t,\varepsilon)\approx A\cos\omega t+\varepsilon\frac{A^3}{32\omega_0^2}(\cos\omega t-\cos 3\omega t)+\varepsilon^2\frac{A^5}{1024\omega_0^4}(23\cos\omega t-24\cos 3\omega t+\cos 5\omega t)$$

όπου αντικαθιστώντας στην (3.2.1) τις (3.2.11) και (3.2.13), έχουμε τη σχέση συχνότητας-πλάτους

$$\omega=\omega_0-\varepsilon\frac{3A^2}{8\omega_0}-\varepsilon^2\frac{21A^4}{256\omega_0^3}+O(\varepsilon^3) \tag{3.2.15}$$

Η περίοδος τότε υπολογίζεται, αναπτύσσοντας τη σχέση $T=\frac{2\pi}{\omega}$, σε σειρά ως προς ε

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0-\varepsilon\frac{3A^2}{8\omega_0}-\varepsilon^2\frac{21A^4}{256\omega_0^3}+O(\varepsilon^3)}=\frac{2\pi}{\omega_0}\left[1+\varepsilon\frac{3A^2}{8\omega_0^2}+\varepsilon^2\frac{57A^4}{256\omega_0^4}+O(\varepsilon^3)\right] \tag{3.2.16}$$

Αν προχωρήσουμε και στους επόμενους διορθωτικούς όρους με ανάλογο τρόπο, θα πάρουμε

$$\omega_3=-\frac{81A^6}{2048\omega_0^5}$$

$$X_3=\frac{A^7}{32768\omega_0^6}(547\cos\tau-594\cos 3\tau+48\cos 5\tau-\cos 7\tau)$$

$$\omega_4=-\frac{6549A^8}{262144\omega_0^7}$$

$$X_4=\frac{A^9}{1048576\omega_0^8}(13426\cos\tau-15121\cos 3\tau+1766\cos 5\tau-72\cos 7\tau+\cos 9\tau)$$

και η προσεγγιστική λύση τάξης $O(\varepsilon^4)$ είναι

$$X(\tau,\varepsilon)\approx A\cos\tau+\varepsilon\frac{A^3}{32\omega_0^2}(\cos\tau-\cos 3\tau)+\varepsilon^2\frac{A^5}{1024\omega_0^4}(23\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau)$$

$$+\varepsilon^3\frac{A^7}{32768\omega_0^6}(547\cos\tau-594\cos 3\tau+48\cos 5\tau-\cos 7\tau)$$

$$+\varepsilon^4\frac{A^9}{1048576\omega_0^8}(13426\cos\tau-15121\cos 3\tau+1766\cos 5\tau-72\cos 7\tau+\cos 9\tau)$$

και επιστρέφοντας στον πραγματικό χρόνο t, η λύση είναι

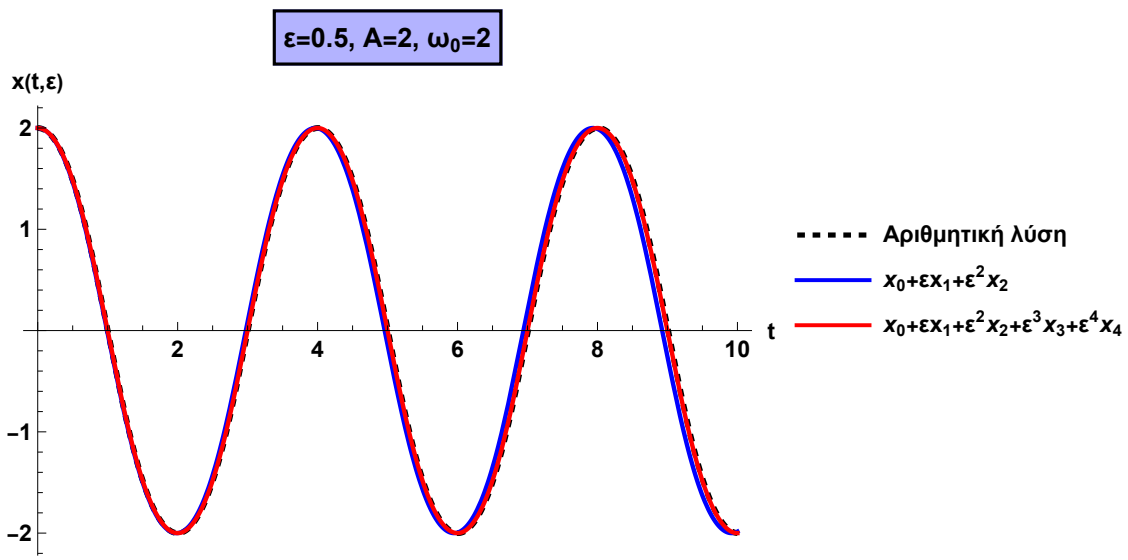
$$x(t,\varepsilon)\approx A\cos\omega t+\varepsilon\frac{A^3}{32\omega_0^2}(\cos\omega t-\cos 3\omega t)+\varepsilon^2\frac{A^5}{1024\omega_0^4}(23\cos\omega t-24\cos 3\omega t+\cos 5\omega t)$$
$$+\varepsilon^3\frac{A^7}{32768\omega_0^6}(547\cos\omega t-594\cos 3\omega t+48\cos 5\omega t-\cos 7\omega t)$$
$$+\varepsilon^4\frac{A^9}{1048576\omega_0^8}(13426\cos\omega t-15121\cos 3\omega t+1766\cos 5\omega t-72\cos 7\omega t+\cos 9\omega t) \tag{3.2.17}$$

με

$$\omega\approx\omega_0-\varepsilon\frac{3A^2}{8\omega_0}-\varepsilon^2\frac{21A^4}{256\omega_0^3}-\varepsilon^3\frac{81A^6}{2048\omega_0^5}-\varepsilon^4\frac{6549A^8}{262144\omega_0^7} \tag{3.2.18}$$

και περίοδο, αναπτύσσοντας όπως πριν τη σχέση $T=\frac{2\pi}{\omega}$, σε σειρά ως προς ε,

$$T\approx\frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\varepsilon\frac{3A^2}{8\omega_0^2}+\varepsilon^2\frac{57A^4}{256\omega_0^4}+\varepsilon^3\frac{315A^6}{2048\omega_0^6}+\varepsilon^4\frac{30345A^8}{262144\omega_0^8}\right)$$



Σχήμα 3.2.1: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης

Στο *Σχήμα 3.2.1* συγκρίνεται η αριθμητική λύση της εξίσωσης *Duffing* με τις προσεγγιστικές λύσεις που προκύπτουν από τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt* μέχρι όρους τάξης $O(\varepsilon^2)$ και $O(\varepsilon^4)$. Παρατηρείται ότι η προσεγγιστική λύση δεύτερης τάξης αναπαράγει με ικανοποιητική ακρίβεια τη συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης, ενώ η προσθήκη όρων υψηλότερης τάξης βελτιώνει περαιτέρω την προσέγγιση. Ωστόσο η διαφορά μεταξύ των λύσεων παραμένει μικρή για τις εξεταζόμενες τιμές των παραμέτρων. Συνεπώς, για πρακτικούς σκοπούς, η λύση μέχρι δεύτερης τάξης ως προς ε θεωρείται επαρκής για την αξιόπιστη περιγραφή της δυναμικής του συστήματος.

$x_{\pi\rho}=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2$ $\varepsilon=0.1$

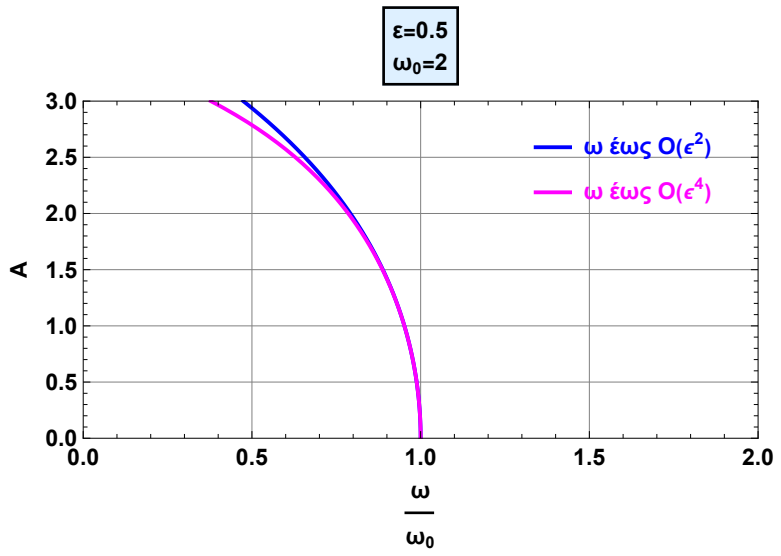
t	$x_{\pi\rho}$	$x_{\alpha\rho}$	Σφάλμα
0	1.	1.	0.
$\frac{\pi}{2}$	0.0609648	0.0610371	0.0000722864
π	-0.992953	-0.992938	0.0000147103
$\frac{3\pi}{2}$	-0.181942	-0.182155	0.000213057
2π	0.97189	0.971831	0.000058421
$\frac{5\pi}{2}$	0.300084	0.300427	0.000342625
3π	-0.937046	-0.936915	0.000130457
$\frac{7\pi}{2}$	-0.413577	-0.414032	0.000454406
4π	0.888818	0.888589	0.000229262

$x_{\pi\rho}=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon^3 x_3+\varepsilon^4 x_4$ $\varepsilon=0.1$

t	$x_{\pi\rho}$	$x_{\alpha\rho}$	Σφάλμα
0	1.	1.	0.
$\frac{\pi}{2}$	0.0610367	0.0610371	3.75949×10^{-7}
π	-0.992938	-0.992938	1.10295×10^{-7}
$\frac{3\pi}{2}$	-0.182154	-0.182155	1.1104×10^{-6}
2π	0.971832	0.971831	2.94977×10^{-7}
$\frac{5\pi}{2}$	0.300425	0.300427	1.744×10^{-6}
3π	-0.936916	-0.936915	7.03283×10^{-7}
$\frac{7\pi}{2}$	-0.414029	-0.414032	2.29849×10^{-6}
4π	0.88859	0.888589	1.16841×10^{-6}

Σχήμα 3.2.2: Πίνακας απόλυτου σφάλματος προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης

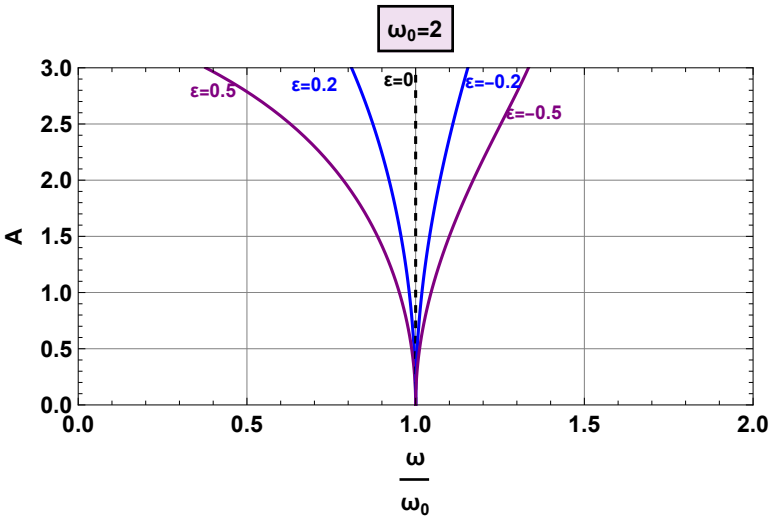
Πρέπει να σημειώσουμε πως το $\varepsilon=0.5$ είναι αρκετά μεγάλο, που κάναμε τη σύγκριση των λύσεων, οπότε είναι προφανές πως για μικρότερες τιμές της παραμέτρου ε, η ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης είναι ακόμα μεγαλύτερη, όπως φαίνεται στον πίνακα του απόλυτου σφάλματος ανάμεσα στην προσεγγιστική και την αριθμητική λύση του Σχήματος 3.2.2, όταν $\varepsilon=0.1$.



Σχήμα 3.2.3: Εξάρτηση της συχνότητας από το πλάτος για προσεγγίσεις $O(\varepsilon^2)$ και $O(\varepsilon^4)$

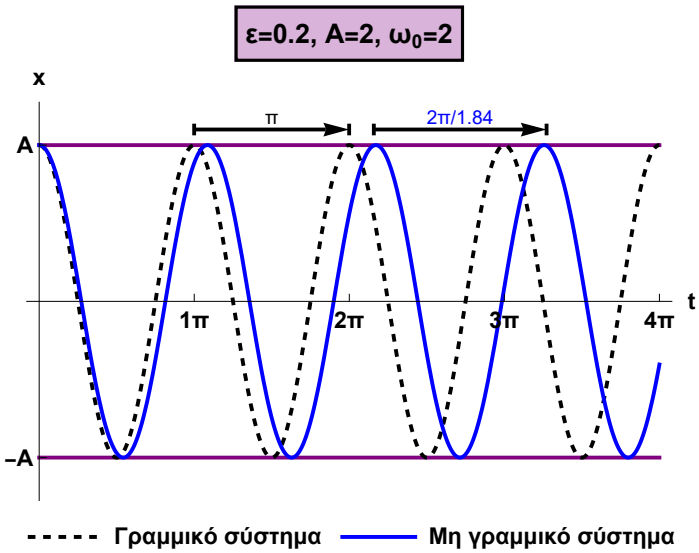
Αφού επιβεβαιώθηκε η ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης στο χρονικό πεδίο, εξετάζουμε πλέον τη βασική ποιοτική πρόβλεψη της μεθόδου *Poincaré–Lindstedt*, δηλαδή τη σχέση συχνότητας–πλάτους. Στο *Σχήμα* 3.2.3 απεικονίζεται αυτή η σχέση, όπως προκύπτει από τη σύγκριση των αναπτυγμάτων (3.2.15) και (3.2.18) που αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις τάξης $O(\varepsilon^2)$ και $O(\varepsilon^4)$, αντίστοιχα. Το σχήμα επιβεβαιώνει ότι η προσέγγιση δεύτερης τάξης αποδίδει με ικανοποιητική

ακρίβεια τη μεταβολή της συχνότητας ως προς το πλάτος, ενώ οι όροι υψηλότερης τάξης επιφέρουν μόνο μικρές διορθώσεις.



Σχήμα 3.2.4: Σχέση συχνότητας–πλάτους για γραμμικό και μη γραμμικό (μαλακό και σκληρό) ελατήριο

Στο *Σχήμα 3.2.4* απεικονίζεται η εξάρτηση της συχνότητας από το πλάτος, για μαλακό ($\varepsilon>0$), γραμμικό ($\varepsilon=0$) και σκληρό ελατήριο ($\varepsilon<0$). Παρατηρούμε ότι, όσο αυξάνεται το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης, το σύστημα με μαλακό ελατήριο ταλαντώνεται γρηγορότερα, ενώ το σύστημα με σκληρό ελατήριο επιβραδύνεται, και το γραμμικό ελατήριο παραμένει ανεξάρτητο από το πλάτος. Η καμπύλη συχνότητας–πλάτους επιβεβαιώνει τη θεωρητική πρόβλεψη της μεθόδου *Poincaré–Lindstedt*, αναδεικνύοντας τη διαφορετική επίδραση της μη γραμμικότητας στη συχνότητα ταλάντωσης.



Σχήμα 3.2.5: Σύγκριση γραμμικής-μη γραμμικής ταλάντωσης

Τέλος, στο *Σχήμα 3.2.5* παρουσιάζεται σύγκριση των λύσεων του γραμμικού προβλήματος $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$, $x(0)=A$, $x'(0)=0$ και του μη γραμμικού $\ddot{x}+\omega_0^2 x-\varepsilon x^3=0$, $x(0)=A$, $x'(0)=0$ για τις τιμές $A=2, \omega_0=2, \varepsilon=0.2$.

Για τις συγκεκριμένες παραμέτρους η μέθοδος *Poincaré–Lindstedt* προβλέπει συχνότητα ταλάντωσης $\omega\approx 1.84$, μικρότερη από τη γραμμική συχνότητα $\omega_0=2$. Η αντίστοιχη περίοδος της μη γραμμικής ταλάντωσης είναι $T\approx 3.41T$, μεγαλύτερη από τη γραμμική περίοδο $T_0=\pi$. Η διαφορά αυτή αποτυπώνεται καθαρά στο σχήμα, μέσω της σταδιακής απόκλισης στη φάση μεταξύ της γραμμικής και της μη γραμμικής λύσης, επιβεβαιώνοντας τη μεταβολή της περιόδου λόγω της μη γραμμικότητας, σε συμφωνία με τη σχέση συχνότητας–πλάτους (*3.2.18*).

Παράδειγμα μη γραμμικού ελατηρίου με ασύμμετρη δύναμη επαναφοράς

Έστω το μη γραμμικό ελατήριο

$$\ddot{x}+x+\varepsilon x^2=0,\quad 0<t+\infty \tag{3.2.19}$$

με μη συμμετρική δύναμη επαναφοράς $f(x)=-x-\varepsilon x^2$

Επειδή το σύστημα είναι συντηρητικό, έχουμε για τη συνάρτηση δυναμικού

$$U(x)=\frac{x^2}{2}+\varepsilon\frac{x^3}{3},\quad U'(x)=x+\varepsilon x^2,\quad U''(x)=1+2\varepsilon x$$

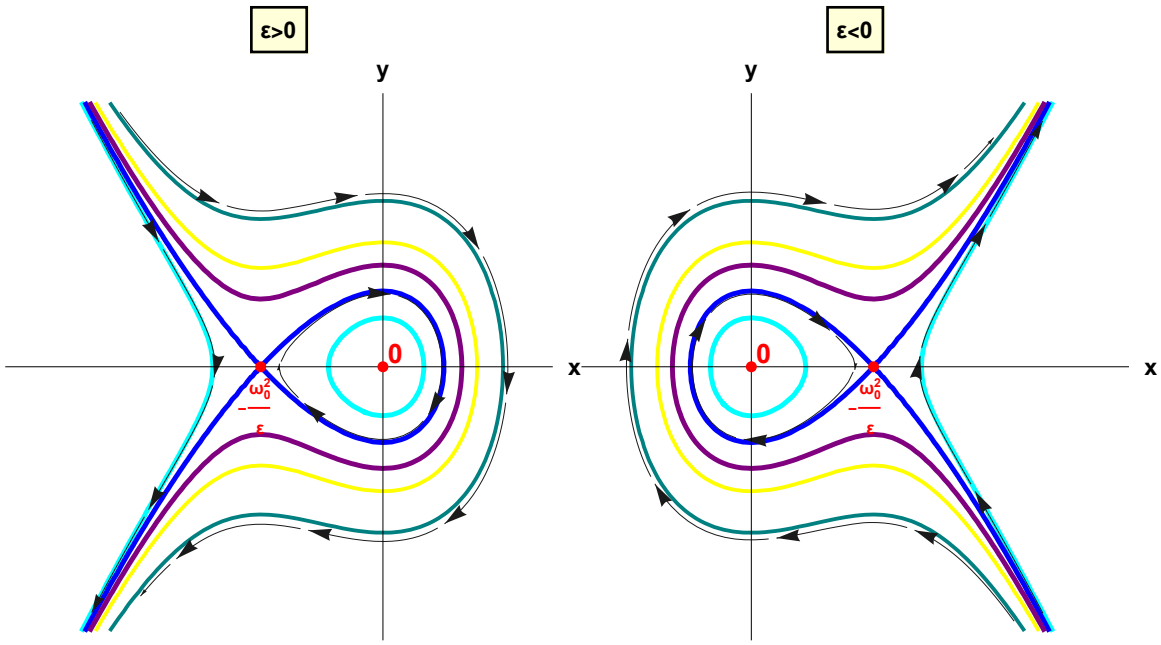
Από την (*2.2.84*) υπολογίζουμε τις εξισώσεις των τροχιών για διάφορες τιμές της E

$$y=\pm\sqrt{2E-2U(x)}=\pm\sqrt{2E-x^2-\frac{2}{3}\varepsilon x^3}$$

Από την εξίσωση $U'(x)=0$ είναι $x=0$ ή $x=-\frac{1}{\varepsilon}$, άρα τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(0,0),(-\frac{1}{\varepsilon},0)$.

Το σημείο $(0,0)$ είναι **κέντρο**, αφού $U''(0)=1>0$, και το σημείο $(-\frac{1}{\varepsilon},0)$ είναι **σάγμα**, αφού $U''(-\frac{1}{\varepsilon})=-1<0$.

Τα πορτραίτα φάσης του *Σχήματος 3.2.6* δείχνουν την ύπαρξη περιοδικών τροχιών γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας και ομοκλινικής διαχωριστικής καμπύλης που ορίζεται από το σαγματικό σημείο. Για τον προσδιορισμό των περιοδικών λύσεων, εφαρμόζουμε τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*.



Σχήμα 3.2.6: Πορτραίτα φάσης της $\ddot{x}+x+\varepsilon x^2=0$

Η συχνότητα των περιοδικών λύσεων του αδιατάρακτου συστήματος $\ddot{x}+x=0$, είναι *1*, άρα, εκφράζουμε την ω με ανάπτυγμα διαταραχών

$$\omega=1+\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \qquad (3.2.20)$$

Εισάγουμε τη νέα ανεξάρτητη χρονική μεταβλητή

$$\tau=\omega t \qquad (3.2.21)$$

ώστε να ενσωματωθεί η διόρθωση της συχνότητας και να επιβληθεί *2π*-περιοδικότητα στη λύση ως προς τον νέο χρόνο.

Έτσι, θεωρούμε τη λύση ως συνάρτηση του τ και της παραμέτρου ε

$$x(t,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

με

$$X(\tau+2\pi,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\omega\frac{dX}{d\tau} \quad \text{και} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2\frac{d^2X}{d\tau^2}$$

και η (3.2.19), γίνεται

$$\omega^2 X''+X-\varepsilon X^3=0 \qquad (3.2.22)$$

Επειδή η εξίσωση είναι αυτόνομη, μπορούμε να θεωρήσουμε τις αρχικές συνθήκες

$$X(0,\varepsilon)=A,\quad X'(0,\varepsilon)=0 \qquad (3.2.23)$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας πως η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$X(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)+\varepsilon^2 X_2(\tau)+\ldots \qquad (3.2.24)$$

και η (3.2.22) γίνεται με εφαρμογή των (3.2.20) και (3.2.24)

$$(1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots)^2(X_0''+\varepsilon X_1''+\varepsilon^2 X_2''+\ldots)+(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots)+\varepsilon(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2 X_2+\ldots)^2=0$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του ε με το μηδέν και επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες σε κάθε τάξη, προκύπτουν τα ακόλουθα προβλήματα.

$$X_0''+X_0=0,\quad X_0(0)=A,\ X_0'(0)=0 \tag{3.2.25}$$

$$X_1''+X_1=-2\omega_1 X_0''-X_0^2,\quad X_1(0)=0,\ X_1'(0)=0 \tag{3.2.26}$$

$$X_2''+X_2=-2\omega_1 X_1''-(\omega_1^2+2\omega_2)X_0''-2X_0X_1,\quad X_2(0)=0,\ X_2'(0)=0 \tag{3.2.27}$$

$$\bullet\bullet\bullet$$

με

$$X_i(\tau+2\pi,\varepsilon)=X_i(\tau,\varepsilon)$$

Η λύση του προβλήματος (3.2.25) δίνει τον πρωτεύοντα όρο

$$X_0=A\cos\tau \tag{3.2.28}$$

Αντικαθιστώντας την (3.2.28) στην εξίσωση του προβλήματος (3.2.26), και εφαρμόζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2\tau=\frac{1+\cos 2\tau}{2}$ παίρνουμε

$$X_1''+X_1=2A\omega_1\cos\tau-\frac{A^2}{2}(1+\cos 2\tau) \tag{3.2.29}$$

Ο όρος του $\cos\tau$ ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, και ως εκ τούτου οδηγεί στην εμφάνιση ενός αιώνιου όρου στη λύση της X_1. Επειδή θέλουμε η λύση να είναι περιοδική, είναι απαραίτητο να εξαλείψουμε αυτόν τον όρο, μηδενίζοντας τον συντελεστή του.

Έτσι,

$$\omega_1=0 \tag{3.2.30}$$

και η (3.2.29) γίνεται

$$X_1''+X_1=-\frac{A^2}{4}(1+\cos 2\tau)$$

που έχει λύση

$$X_1=\frac{A^2}{6}(-3+2\cos\tau+\cos 2\tau) \tag{3.2.31}$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις (3.2.28) και (3.2.31) στην εξίσωση του προβλήματος (3.2.27) και γίνεται

$$X_2''+X_2=\left(\frac{5A^3}{6}+2A\omega_2\right)\cos\tau-\frac{A^3}{6}(2+2\cos 2\tau+\cos 3\tau)$$

Όπως πριν, η παραπάνω εξίσωση για να έχει περιοδικές λύσεις πρέπει

$$\frac{5A^3}{6}+2A\omega_2=0\Rightarrow\omega_2=-\frac{5A^2}{12} \tag{3.2.32}$$

Έτσι, το πρόβλημα (3.2.27) γίνεται τελικά

$$X_2''+X_2=-\frac{A^3}{6}(2+2\cos 2\tau+\cos 3\tau),\quad X_2(0)=0,\quad X_2'(0)=0$$

και έχει λύση

$$X_2=\frac{A^3}{144}(-48+29\cos\tau+16\cos 2\tau+3\cos 3\tau) \tag{3.2.33}$$

Αντικαθιστούμε στην (3.2.24) τις (3.2.28), (3.2.31) και (3.2.33) και έχουμε την προσεγγιστική λύση τάξης $O(\varepsilon^2)$

$$X(\tau,\varepsilon)=A\cos\tau+\varepsilon\frac{A^2}{6}(-3+2\cos\tau+\cos 2\tau)+\varepsilon^2\frac{A^3}{144}(-48+29\cos\tau+16\cos 2\tau+3\cos 3\tau)+O(\varepsilon^3)$$

και στον πραγματικό χρόνο t, είναι

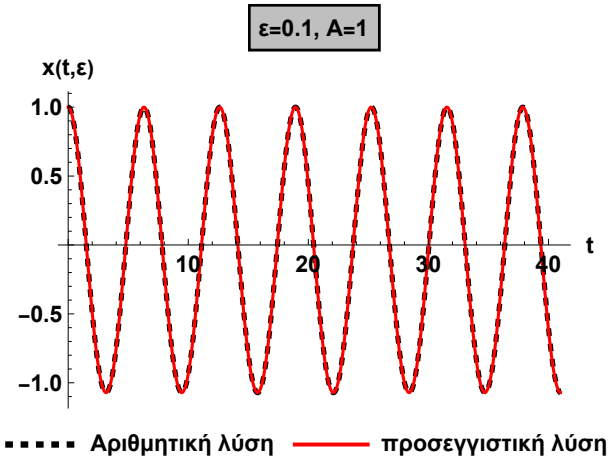
$$x(t,\varepsilon)=-\left(\frac{\varepsilon A^2}{2}+\frac{\varepsilon^2 A^3}{3}\right)+A\cos\omega t+\frac{\varepsilon A^2}{6}(2\cos\omega t+\cos 2\omega t)$$
$$+\frac{\varepsilon^2 A^3}{144}(29\cos\omega t+16\cos 2\omega t+3\cos 3\omega t)+O(\varepsilon^3)$$

Επίσης, αντικαθιστώντας στην (3.2.20) τις (3.2.30) και (3.2.32), έχουμε τη σχέση συχνότητας-πλάτους

$$\omega=1-\varepsilon^2\frac{5A^2}{12}+O(\varepsilon^3) \tag{3.2.34}$$

Η περίοδος τότε υπολογίζεται, αναπτύσσοντας τη σχέση $T=\frac{2\pi}{\omega}$, σε σειρά ως προς ε

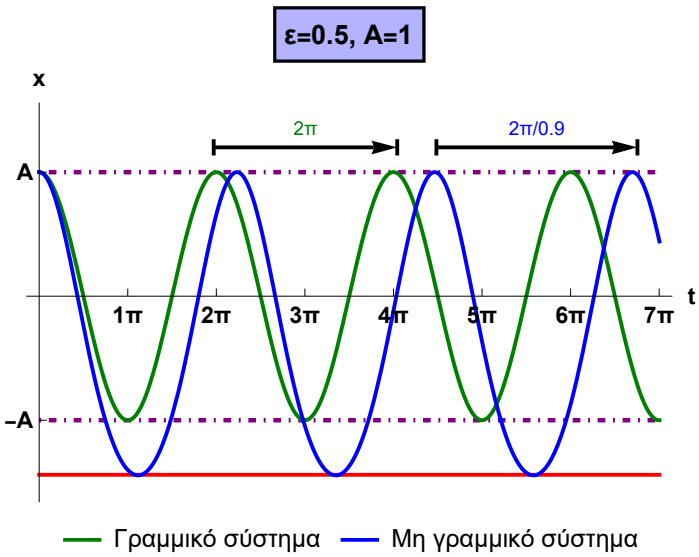
$$T=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2\frac{5A^2}{12}+O(\varepsilon^3)}=2\pi\left(1+\varepsilon^2\frac{5A^2}{12}+O(\varepsilon^3)\right) \tag{3.2.35}$$



Σχήμα 3.2.7 : Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης

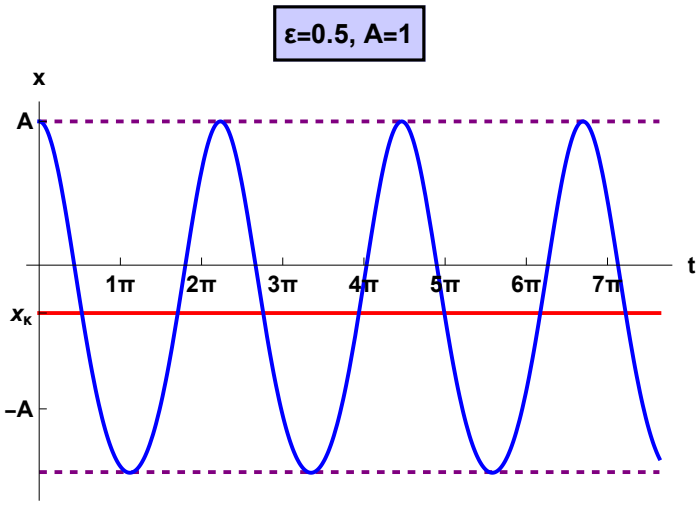
Στο *Σχήμα* 3.2.7 παρουσιάζεται η σύγκριση της αριθμητικής λύσης της μη γραμμικής εξίσωσης με την προσεγγιστική λύση που προκύπτει από τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία ως προς τη μορφή και την περιοδικότητα της λύσης, γεγονός που επιβεβαιώνει ότι η μέθοδος αποδίδει με ικανοποιητική ακρίβεια τη δυναμική του συστήματος για τις εξεταζόμενες τιμές των παραμέτρων.

Πέραν της καλής ποσοτικής συμφωνίας, ωστόσο, η μορφή της προσεγγιστικής λύσης αποκαλύπτει την παρουσία του σταθερού όρου $-(\frac{\varepsilon A^2}{2}+\frac{\varepsilon^2 A^3}{3})$, ο οποίος δεν εμφανίζεται στην περίπτωση συμμετρικής δύναμης επαναφοράς. Η ύπαρξη του όρου αυτού υποδηλώνει μια ποιοτική διαφοροποίηση της ταλάντωσης, η οποία αναλύεται στη συνέχεια.



Σχήμα 3.2.8: Προσεγγιστική λύση γραμμικού και μη γραμμικού συστήματος

Στο *Σχήμα* 3.2.8 απεικονίζεται η προσεγγιστική λύση του μη γραμμικού συστήματος σε σύγκριση με τη λύση του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος $(\varepsilon=0)$ για τις ίδιες αρχικές συνθήκες, και $\varepsilon=0.5$. Από τη σύγκριση αυτή καθίσταται εμφανής η επίδραση της μη γραμμικότητας στη χρονική εξέλιξη της κίνησης: η περίοδος της μη γραμμικής ταλάντωσης $(T\approx 6.98)$ διαφέρει από αυτή της γραμμικής $(T_0=2\pi)$, γεγονός που οδηγεί σε σταδιακή απόκλιση στη φάση των δύο λύσεων. Παράλληλα, η ταλάντωση του μη γραμμικού συστήματος δεν είναι πλέον συμμετρική ως προς το μηδέν, με αποτέλεσμα το πλάτος να μεταβάλλεται, και τα ακραία σημεία της κίνησης να μην είναι ίσα κατά μέτρο.



Σχήμα 3.2.9: Η προσεγγιστική λύση και το κέντρο της ταλάντωσης

Η ασυμμετρία αυτή ερμηνεύεται πληρέστερα στο *Σχήμα 3.2.9*, όπου απεικονίζεται αποκλειστικά η προσεγγιστική λύση του μη γραμμικού συστήματος μαζί με το σημείο του νέου κέντρου ταλάντωσης $x_\kappa = -\left(\frac{\varepsilon A^2}{2} + \frac{\varepsilon^2 A^3}{3}\right)$, που ορίζεται από τον σταθερό όρο της προσεγγιστικής λύσης. Η παρουσία, δηλαδή, σταθερού όρου στην αναπτυγμένη λύση οδηγεί σε μετατόπιση του σημείου γύρω από το οποίο πραγματοποιείται η περιοδική κίνηση, επιβεβαιώνοντας ότι η ταλάντωση λαμβάνει χώρα γύρω από ένα μη μηδενικό σημείο ισορροπίας.

Συνολικά, σε αντίθεση με τη συμμετρική μη γραμμική δύναμη επαναφοράς, όπου η μη γραμμικότητα επιφέρει αποκλειστικά μεταβολή της περιόδου χωρίς αλλαγή του πλάτους ή του κέντρου ταλάντωσης, η ασυμμετρία της δύναμης επαναφοράς στην παρούσα περίπτωση προκαλεί ταυτόχρονα μεταβολή της συχνότητας, αλλαγή του πλάτους, και μετατόπιση του κέντρου ταλάντωσης. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν πλήρως με τη θεωρητική πρόβλεψη της μεθόδου Poincaré–Lindstedt και αποτυπώνονται με σαφήνεια στα αντίστοιχα σχήματα.

3.3 Μέθοδος ανακανονικοποίησης (Renormalisation)

Στην *Ενότητα 3.1*, στην εξίσωση *Duffing* (εδώ θέτουμε για απλούστευση $\omega_0 = 1, A = 1$.Η παραδοχή $A = 1$ δεν περιορίζει τη γενικότητα του προβλήματος, αλλά αντιστοιχεί σε κανονικοποίηση του αρχικού πλάτους μέσω της κλιμάκωσης $x(t) = A\, y(t)$. Με την επιλογή αυτή, η εξίσωση *Duffing* διατηρεί τη μορφή της, ενώ η ένταση της μη γραμμικότητας εκφράζεται μέσω της αποτελεσματικής

παραμέτρου εA^2. Για λόγους απλότητας της ανάλυσης, η κλιμάκωση αυτή απορροφάται στη μικρή παράμετρο, και η γενίκευση για αυθαίρετο αρχικό πλάτος προκύπτει άμεσα με επαναφορά της κατάλληλης κλίμακας.)

$$\ddot{x}+x-\varepsilon x^3=0,\ \ 0<t+\infty,\ \text{με } \varepsilon \ll 1$$

και αρχικές συνθήκες

$$x(0,\varepsilon)=1,\ \ \dot{x}(0,\varepsilon)=0$$

εφαρμόσαμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, μέσω του αναπτύγματος

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots \qquad (3.3.1)$$

και προέκυψαν οι όροι

$$x_0(t)=\cos t \qquad (3.3.2)$$

$$x_1(t)=\frac{1}{32}(\cos t-\cos 3t+12t\sin t) \qquad (3.3.3)$$

Η παρουσία του όρου $t\sin t$ στον $x_1(t)$ οδηγεί στην εμφάνιση αιώνιου όρου και, συνεπώς, σε μη ομοιόμορφη εγκυρότητα της προσεγγιστικής λύσης για μεγάλους χρόνους.

Για πληρότητα, μπορεί να υπολογιστεί και ο δεύτερος διορθωτικός όρος της κανονικής ανάπτυξης, ο οποίος δίνεται από

$$x_2(t)=\frac{1}{1024}(23\cos t-72t^2\cos t-24\cos 3t+\cos 5t+96t\sin t-36t\sin 3t) \qquad (3.3.4)$$

και επιβεβαιώνει ότι οι αιώνιοι όροι όχι μόνο δεν εξαλείφονται, αλλά επιδεινώνονται σε ανώτερες τάξεις.

Στη συνέχεια, με σκοπό την κατασκευή περιοδικών και ομοιόμορφα έγκυρων προσεγγιστικών λύσεων, εφαρμόστηκε η μέθοδος *Poincaré–Lindstedt*. Η άγνωστη συχνότητα ταλάντωσης του διαταραγμένου συστήματος εκφράστηκε ως ανάπτυγμα ως προς τη γνωστή συχνότητα του αδιατάρακτου συστήματος $\omega_0=1$,

$$\omega=1+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \qquad (3.3.5)$$

και εισήχθη νέα χρονική μεταβλητή

$$\tau=\omega t \qquad (3.3.6)$$

ώστε να ενσωματωθεί η διόρθωση της συχνότητας και να επιβληθεί περιοδικότητα στη λύση ως προς τον νέο χρόνο. Οι συντελεστές $\omega_i, i=0,1,2,\ldots$ από την (3.3.5), επιλέχθηκαν κατάλληλα ώστε να εξαλειφθούν οι αιώνιοι όροι σε κάθε τάξη της προσέγγισης, οδηγώντας σε ομοιόμορφα έγκυρη ασυμπτωτική λύση.

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε μια άλλη τεχνική για την αντιμετώπιση ασθενώς μη γραμμικών ταλαντώσεων, που είναι γνωστή ως **μέθοδος ανακανονικοποίησης (Renormalization)** ή **μέθοδος διαταραχών των συντεταγμένων**, και αποτελεί ουσιαστικά βελτίωση της μεθόδου *Poincaré–Lindstedt*, επειδή σε ορισμένες περιπτώσεις, ένα ανάπτυγμα διαταραχών μπορεί να καταστεί ομοιόμορφα έγκυρο αν η τροποποίηση της ανεξάρτητης μεταβλητής εισαχθεί απευθείας στη λύση και όχι στη διαφορική εξίσωση (*Pritulo, 1962*).

Πιο συγκεκριμένα, ο *Pritulo* έδειξε ότι, για τον προσδιορισμό ενός ομοιόμορφα έγκυρου αναπτύγματος διαταραχών για ένα δεδομένο πρόβλημα, δεν είναι απαραίτητο να εισαχθεί ο μετασχηματισμός (*3.3.6*) απευθείας στις διαφορικές εξισώσεις και να προσδιοριστούν οι συντελεστές $\omega_i, i=0,1,2,\ldots$. Αντίθετα, μπορούμε πρώτα να πραγματοποιήσουμε το ευθύ ανάπτυγμα διαταραχών (*3.3.1*) ως προς τις αρχικές μεταβλητές και στη συνέχεια να εισαγάγουμε τον μετασχηματισμό (*3.3.6*) στο ίδιο το ανάπτυγμα.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε αναλυτικά τη διαδικασία αυτή, ώστε να καταστεί σαφής η εφαρμογή και τα πλεονεκτήματα της μεθόδου ανακανονικοποίησης.

Από τις (*3.3.5*) και (*3.3.6*), έχουμε

$$t=\frac{\tau}{\omega}=\frac{\tau}{1+\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots}$$

Αναπτύσσουμε το $\frac{1}{\omega}$ σε σειρά *Taylor*, χρησιμοποιώντας την

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+O(x^3),\quad |x|\ll 1,\ \text{όπου}\ x=\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots,$$

οπότε

$$\frac{1}{\omega}=1-\varepsilon\,\omega_1-\varepsilon^2\omega_2+\varepsilon^2\omega_1^2+\ldots=1-\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2(\omega_1^2-\omega_2)+\ldots$$

και συνεπώς

$$t=(1-\varepsilon\,\omega_1+\varepsilon^2(\omega_1^2-\omega_2)+\ldots)\tau=(1+\varepsilon\,\tau_1+\varepsilon^2\tau_2+\ldots)\tau$$

όπου $\tau_i,\ \ i=1,2,\ldots$ άγνωστοι σταθεροί συντελεστές.

Η παραπάνω μορφή αντιστοιχεί σε διόρθωση της χρονικής μεταβλητής μέσω σταθερών συντελεστών, όπως στη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*. Στη μέθοδο ανακανονικοποίησης, όμως, επιτρέπεται μια γενικότερη τροποποίηση της ανεξάρτητης μεταβλητής, θεωρώντας ότι η διόρθωση του χρόνου μπορεί να εξαρτάται από τη φάση της ταλάντωσης. Για τον λόγο αυτό, υιοθετούμε τη γενικότερη παραδοχή

$$t=\tau+\varepsilon\,T_1(\tau)+\varepsilon^2T_2(\tau)+\ldots \qquad (3.3.7)$$

όπου $T_i(\tau)$, $i=1,2,..$ είναι άγνωστες συναρτήσεις του τ.

Ο κυρίαρχος όρος στο ανάπτυγμα (3.3.7) της ανεξάρτητης μεταβλητής t ταυτίζεται με τη μεταβλητή τ γεγονός που εξασφαλίζει τη σωστή συμπεριφορά της λύσης στο όριο $\varepsilon \to 0$. Η μεταβλητή τ αναφέρεται ως **παραμορφωμένη** (**strained**) ή **διαταραγμένη** χρονική συντεταγμένη, και η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **μέθοδος παραμορφωμένων συντεταγμένων** του *Poincaré*. Στο πλαίσιο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές, όπως η μέθοδος του *Lighthill*, οι οποίες επιτρέπουν την κατάλληλη επιλογή των διορθωτικών όρων ώστε να αποφεύγεται η εμφάνιση μη ομοιόμορφων όρων· οι τεχνικές αυτές θα παρουσιαστούν αναλυτικότερα στη συνέχεια.

Τώρα, αντικαθιστούμε την (3.3.7) στις (3.3.2)-(3.3.4). Δεδομένου ότι προκύπτουν σύνθετες συναρτήσεις ως προς τη μικρή παράμετρο ε, εφαρμόζουμε ανάπτυγμα *Taylor* ως προς ε με σταθερό τον νέο χρόνο τ, και αφού θεωρήσουμε τη λύση ως συνάρτηση του τ και της παραμέτρου ε

$$x(t,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

έχουμε

$$X_0(\tau)=\cos[\tau+\varepsilon T_1(\tau)+\varepsilon^2 T_2(\tau)+...]$$

$$=\cos\tau-\varepsilon T_1\sin\tau-\varepsilon^2\left[\frac{1}{2}T_1^2(\tau)\cos\tau+T_2(\tau)\sin\tau\right]+O(\varepsilon^3)$$

$$X_1(\tau)=\frac{1}{32}\cos(\tau+\varepsilon T_1(\tau)+...)-\frac{1}{32}\cos 3(\tau+\varepsilon T_1(\tau)+...)$$

$$+\frac{3}{8}(\tau+\varepsilon T_1(\tau)+...)\sin(\tau+\varepsilon T_1(\tau)+...)$$

$$=\frac{1}{32}(\cos\tau-\varepsilon T_1(\tau)\sin\tau)-\frac{1}{32}(\cos 3\tau-3\varepsilon T_1(\tau)\sin 3\tau)$$

$$+\frac{3}{8}[\tau\sin\tau+\varepsilon T_1(\tau)(\sin\tau+\tau\cos\tau)]+O(\varepsilon^2)$$

$$=\frac{1}{32}(\cos\tau-\cos 3\tau+12\tau\sin\tau)+\frac{1}{32}\varepsilon T_1(\tau)(11\sin\tau+12\tau\cos t+3\sin 3\tau)+O(\varepsilon^2)$$

$$X_2(\tau)=\frac{1}{1024}(23\cos\tau-72\tau^2\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau+96\tau\sin\tau-36\tau\sin 3\tau)+O(\varepsilon)$$

Η (3.3.1) γίνεται με αντικατάσταση των παραπάνω

$$X(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)+\varepsilon^2 X_2(\tau)+...\Rightarrow$$

$$X(\tau,\varepsilon)=\cos\tau+\varepsilon\left[-T_1(\tau)\sin\tau+\frac{1}{32}(\cos\tau+12\tau\sin\tau-\cos 3\tau)\right]$$

$$+\varepsilon^2\left\{-\frac{1}{2}T_1^2(\tau)\cos\tau-T_2(\tau)\sin\tau+\frac{1}{32}T_1(\tau)[11\sin\tau+12\tau\cos t+3\sin 3\tau]\right.$$

$$+\frac{1}{1024}\left(23\cos\tau-72\tau^2\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau+96\tau\sin\tau-36\tau\sin 3\tau\right)\Big\}$$
$$+O(\varepsilon^3)$$

Παρατηρούμε ότι στους όρους $O(\varepsilon)$ της προσεγγιστικής λύσης, εμφανίζεται αιώνιος όρος, ο οποίος καθιστά την ανάπτυξη μη ομοιόμορφα έγκυρη, και πρέπει να εξαλειφθεί.

Έτσι, θέτουμε

$$-T_1(\tau)\sin\tau+\frac{3}{8}\tau\sin\tau=0$$

Άρα

$$T_1(\tau)=\frac{3}{8}\tau$$

Με την αντικατάσταση του $T_1(\tau)$, οι όροι $O(\varepsilon^2)$ απλοποιούνται και λαμβάνουν τη μορφή

$$-\frac{9}{128}\tau^2\cos\tau-T_2(\tau)\sin\tau+\frac{3}{256}\tau\left(11\sin\tau+12\tau\cos t+3\sin 3\tau\right)$$
$$+\frac{1}{1024}\left(23\cos\tau-72\tau^2\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau+96\tau\sin\tau-36\tau\sin 3\tau\right)$$
$$=\frac{57}{256}\tau\sin\tau-T_2(\tau)\sin\tau+\frac{1}{1024}\left(23\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau\right)$$

Όπως πριν, πρέπει να εξαλείψουμε τον αιώνιο όρο, άρα

$$\frac{57}{256}\tau\sin\tau-T_2(\tau)\sin\tau=0$$

και έτσι

$$T_2(\tau)=\frac{57}{256}\tau$$

Αντικαθιστούμε στην (3.3.7) και έχουμε

$$t=\tau+\varepsilon\frac{3}{8}\tau+\varepsilon^2\frac{57}{256}\tau+\ldots=\tau\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{57}{256}\varepsilon^2\right)+O(\varepsilon^3)$$

δηλαδή

$$\tau=\frac{t}{1+\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{57}{256}\varepsilon^2}+O(\varepsilon^3)$$

και αναπτύσσοντας σε σειρά *Taylor*

$$\tau=t\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)+O(\varepsilon^3)$$

Στη μεταβλητή τ η λύση είναι περιοδική με περίοδο 2π. Η περίοδος T στον πραγματικό χρόνο t είναι

$$T=2\pi\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{57}{256}\varepsilon^2\right)+O\left(\varepsilon^3\right)$$

Η προσεγγιστική λύση είναι

$$X(\tau,\varepsilon)=\cos\tau+\frac{1}{32}\varepsilon(\cos\tau-\cos 3\tau)+\frac{1}{1024}\varepsilon^2(23\cos\tau-24\cos 3\tau+\cos 5\tau)+O\left(\varepsilon^3\right)$$

και στον πραγματικό χρόνο t

$$x(t,\varepsilon)=\cos\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)t+\frac{1}{32}\varepsilon\left[\cos\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)t-\cos 3\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)t\right]$$

$$+\frac{1}{1024}\varepsilon^2\left[23\cos\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)t-24\cos 3\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)t+\cos 5\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon-\frac{21}{256}\varepsilon^2\right)t\right]+O\left(\varepsilon^3\right)$$

(3.3.8)

Είναι φανερό πως η λύση που προκύπτει μέσω της μεθόδου ανακανονικοποίησης, ταυτίζεται, μέχρι τη δεδομένη τάξη προσέγγισης, με τη λύση που υπολογίσαμε με τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*, γεγονός που επιβεβαιώνει τη μεταξύ τους ισοδυναμία ως προς την εξάλειψη των αιώνιων όρων. Η μέθοδος αυτή παρέχει ένα εναλλακτικό και πιο ευέλικτο πλαίσιο, καθώς εισάγει τις χρονικές διορθώσεις απευθείας στη λύση, καθιστώντας την ιδιαίτερα χρήσιμη σε πιο σύνθετα προβλήματα ταλαντώσεων.

3.4 Μέθοδος Lighthill

Σε πολλά προβλήματα διαταραχών, η λύση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ως προς μια μικρή παράμετρο $\varepsilon\ll 1$. Στα κλασικά προβλήματα, όπως η εξίσωση *Duffing*, η αδιατάρακτη εξίσωση είναι ομαλή και περιοδική, και οι μέθοδοι *Poincaré–Lindstedt* και ανακανονικοποίησης επιτρέπουν την αποφυγή των αιώνιων όρων, και την κατασκευή ομοιόμορφων ασυμπτωτικών προσεγγίσεων σε όλο το πεδίο ενδιαφέροντος.

Υπάρχουν όμως προβλήματα όπου η εξίσωση όταν $\varepsilon=0$, παρουσιάζει τοπικές ιδιομορφίες, ενώ η διαταραγμένη εξίσωση $(\varepsilon>0)$ παραμένει ομαλή, και η λύση της φραγμένη στο διάστημα ενδιαφέροντος. Στην περίπτωση αυτή, η κανονική διαταρακτική ανάπτυξη ως προς ε δεν είναι ομοιόμορφη κοντά στο σημείο της ιδιομορφίας της εξίσωσης μηδενικής τάξης, καθώς οι όροι διόρθωσης υψηλότερης τάξης εμφανίζουν όλο και πιο έντονη ιδιομορφία. Με άλλα λόγια, οι προσεγγίσεις διατηρούν το σωστό σχήμα της λύσης, αλλά εμφανίζονται σε λανθασμένη **χρονική θέση**.

Τυπικό παράδειγμα τέτοιων προβλημάτων αποτελεί η διαφορική εξίσωση

$$(t+\varepsilon x)\dot{x}+q(t)x=r(t),\ \ 0\le t\le 1$$

με συνοριακή συνθήκη

$$x(1)=b$$

όπου q,r ομαλές συναρτήσεις, με $q(0)\neq 0$ και $0\leq\varepsilon\ll 1$.

Στην εξίσωση αυτή, που πρότεινε ο *Lighthill* (*1949*), και αναφέρεται ως **διαφορική εξίσωση 1ης τάξης του Lighthill**, η ανάλυση της συμπεριφοράς της λύσης στο διάστημα [0,1], δείχνει ότι η πλήρης λύση είναι φραγμένη και ομαλή, ενώ η εξίσωση όταν $\varepsilon=0$, εμφανίζει ασυμπτωτική ιδιομορφία στο αριστερό άκρο.

Παράδειγμα 1ο

Έστω το πρόβλημα

$$(t+\varepsilon x)\dot{x}+x=0,\quad 0\leq t\leq 1 \tag{3.4.1}$$

$$x(1)=1 \tag{3.4.2}$$

- ***Ακριβής λύση***

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως παράγωγο:

$$(t+\varepsilon x)\dot{x}+x=0\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(t x+\frac{\varepsilon}{2}x^2\right)=0\Rightarrow t x+\frac{\varepsilon}{2}x^2=C$$

Χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη $x(1)=1$, προκύπτει

$$1+\frac{\varepsilon}{2}=C\Rightarrow t x+\frac{\varepsilon}{2}x^2=1+\frac{\varepsilon}{2}$$

Έτσι, η ακριβής λύση είναι

$$x_{exact}=\frac{-t+\sqrt{t^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \tag{3.4.3}$$

- ***Το πρόβλημα όταν $\varepsilon=0$***

Θέτοντας $\varepsilon=0$, η εξίσωση γίνεται

$$t\dot{x}+x=0$$

και το πρόβλημα έχει λύση

$$x_0(t)=\frac{1}{t} \tag{3.4.4}$$

- ***Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών***

Αναζητάμε προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα *(3.3.9)*, *(3.3.10)*, και ως εκ τούτου θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή της κανονικής σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

Αντικαθιστούμε στις *(3.3.9)*, *(3.3.10)*, εξισώνουμε τους όρους ως δεύτερης τάξης του ε με το μηδέν, και παίρνουμε

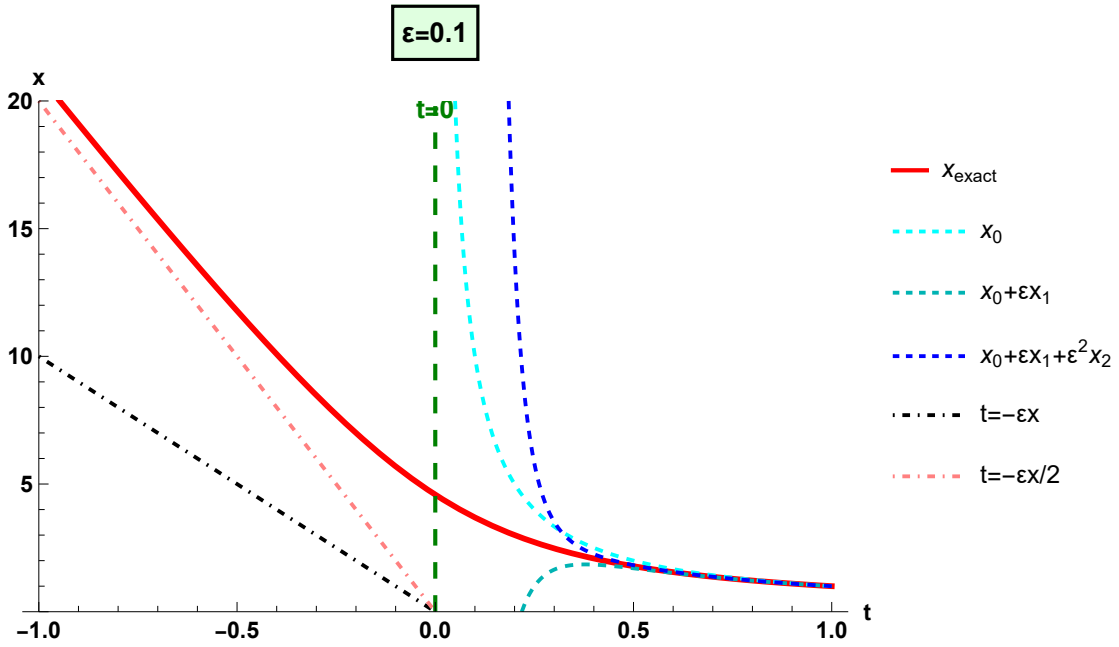
$$O(1):\quad \begin{cases} t\,\dot{x}_0+x_0=0 \\ x_0(1)=1 \end{cases} \text{ με λύση } x_0(t)=\frac{1}{t}$$

$$O(\varepsilon):\quad \begin{cases} t\,\dot{x}_1+x_1=-x_0\dot{x}_0 \\ x_1(1)=0 \end{cases} \text{ με λύση } x_1(t)=\frac{t^2-1}{2t^3}$$

$$O(\varepsilon^2):\quad \begin{cases} t\,\dot{x}_2+x_2=-x_1\dot{x}_0-x_0\dot{x}_1 \\ x_2(1)=0 \end{cases} \text{ με λύση } x_2(t)=-\frac{t^2-1}{2t^5}$$

Άρα, η προσεγγιστική λύση είναι

$$x_{\text{approx}}=\frac{1}{t}+\varepsilon\frac{t^2-1}{2t^3}-\varepsilon^2\frac{t^2-1}{2t^5}+O(\varepsilon^3) \tag{3.4.5}$$



Σχήμα 3.4.1: Ακριβής λύση και προσεγγιστικές λύσεις με κανονικές διαταραχές

Παρατηρήσεις

Από τη μορφή της εξίσωσης *(3.3.9)*, η παράγωγος

$$\dot{x}=-\frac{x}{t+\varepsilon x}$$

γίνεται άπειρη όταν $t+\varepsilon x=0\Rightarrow t=-\varepsilon x$. Αυτή η σχέση ορίζει μια ευθεία στο επίπεδο (t,x) πάνω στην οποία εμφανίζεται η ιδιομορφία της λύσης. Όμως, για κάθε $\varepsilon>0$, η ευθεία αυτή δεν τέμνει το διάστημα ενδιαφέροντος $0\le t\le 1$, με αποτέλεσμα η ακριβής λύση να παραμένει **φραγμένη και ομαλή** σε όλο το πεδίο ενδιαφέροντος. Στο σημείο $t=0$, δεν παρουσιάζει ιδιομορφία, αφού

$$x(0)=\frac{\sqrt{2\varepsilon+\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

Για μεγάλες αρνητικές τιμές του t, η ακριβής λύση συμπεριφέρεται ως

$$x_{exact}=\frac{-t+|t|\sqrt{1+(2\varepsilon+\varepsilon^2)/t^2}}{\varepsilon}=\frac{-t-t[1+(2\varepsilon+\varepsilon^2)/2t^2+...]}{\varepsilon}=-\frac{2t}{\varepsilon}-\frac{2+\varepsilon}{2t}$$

Επομένως, ασυμπτωτικά προσεγγίζει την ευθεία

$$x=-\frac{2t}{\varepsilon}$$

Όταν $\varepsilon=0$, είδαμε πως η λύση της αδιατάρακτης εξίσωσης είναι $x_0(t)=\frac{1}{t}$, η οποία παρουσιάζει ιδιομορφία στο $t=0$, καθώς ο συντελεστής της παραγώγου μηδενίζεται, δηλαδή γίνεται άπειρη στο αριστερό άκρο του διαστήματος. Σε σύγκριση με την ακριβή λύση, η γραμμή ιδιομορφίας της αδιατάρακτης εξίσωσης εκφυλίζεται από την ευθεία $t=-\varepsilon x$, στο όριο $\varepsilon\to 0$, σε μια κατακόρυφη ευθεία $t=0$, χάνεται δηλαδή η γεωμετρική πληροφορία της θέσης της πραγματικής ιδιομορφίας.

Η προσεγγιστική λύση (3.3.13), από την άλλη, είναι ομοιόμορφη για σταθερό t, και μικρό ε, αλλά δεν παραμένει ομοιόμορφη για $t=O(\sqrt{\varepsilon})$, δηλαδή σε μια περιοχή που συρρικνώνεται καθώς $\varepsilon\to 0$. Έτσι, η προσέγγιση με κανονικές διαταραχές κληρονομεί την ιδιομορφία του x_0, καθιστώντας την μη ομοιόμορφα έγκυρη κοντά στο $t=0$. Επιπλέον, οι διορθωτικοί όροι $x_i(t)$ εμφανίζουν ιδιομορφίες μεγαλύτερης έντασης από τους προηγούμενους $x_{i-1}(t)$, $i=1,2,\ldots$, δηλαδή αυξάνονται ταχύτερα, καθώς $t\to 0$.

Συνεπώς, με άλλα λόγια, η κανονική σειρά διαταραχών δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα [0,1], παρόλο που αναπαράγει σωστά το γενικό σχήμα της λύσης για t μακριά από το *0*. Η ασυμφωνία αυτή δείχνει ότι η αποτυχία των κανονικών διαταραχών δεν οφείλεται σε πραγματική ανωμαλία της λύσης, αλλά σε λανθασμένη χρονική τοποθέτηση της ιδιομορφίας από την αδιατάρακτη εξίσωση.

Η παραπάνω συμπεριφορά αποτυπώνεται σχηματικά στο *Σχήμα 3.4.1*, όπου φαίνεται καθαρά η απόκλιση των κανονικών διαταρακτικών προσεγγίσεων κοντά στο $t=0$, καθώς και η διαφορετική γεωμετρική τοποθέτηση της ιδιομορφίας της ακριβούς λύσης.

Για την αποκατάσταση της ομοιομορφίας της ασυμπτωτικής ανάπτυξης απαιτείται μια τροποποίηση της ανεξάρτητης μεταβλητής, ικανή να μετατοπίσει σωστά τη θέση της ιδιομορφίας. Η ιδέα αυτή υλοποιείται με τη μέθοδο *Lighthill*, που στην ουσία επεκτείνει τη μέθοδο ανακανονικοποίησης.

Εφαρμογή μεθόδου Lighthill

Αντί να αναζητείται διόρθωση μόνο στη μορφή της λύσης, η μέθοδος *Lighthill* επιτρέπει τη διόρθωση και της ίδιας της ανεξάρτητης μεταβλητής, έτσι ώστε η ασυμπτωτική ανάπτυξη να ευθυγραμμιστεί με τη γεωμετρία της πραγματικής ιδιομορφίας του προβλήματος.

Συγκεκριμένα, εισάγεται ένας σχεδόν ταυτοτικός μετασχηματισμός (διαφέρει από την ταυτότητα $t=\tau$ μόνο κατά όρους τάξης ε) της μεταβλητής t

$$t=\tau+\varepsilon T(\tau,\varepsilon)=\tau+\varepsilon T_1(\tau)+\varepsilon^2 T_2(\tau)+\ldots \tag{3.4.6}$$

όπου οι **συναρτήσεις παραμόρφωσης (strained functions)** $T_i(\tau)\in\mathbb{C}^\infty$, $i=0,1,2,\ldots$, επιλέγονται κατάλληλα ώστε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (3.4.6) και το αντίστοιχο ανάπτυγμα

$$x=X(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)+\varepsilon^2 X_2(\tau)+\ldots \tag{3.4.7}$$

να είναι ομοιόμορφα έγκυρα στο διάστημα ενδιαφέροντος, $0\le t\le 1$. Αυτό εξασφαλίζεται, απαιτώντας οι συναρτήσεις $\dfrac{T_i(\tau)}{T_{i-1}(\tau)}$ και $\dfrac{X_i(\tau)}{X_{i-1}(\tau)}$, $i=1,2,\ldots$, να είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα των τιμών της τ, που αντιστοιχεί στο $0\le t\le 1$, δηλαδή οι διορθωτικοί όροι υψηλότερης τάξης, δεν θα είναι περισσότερο ιδιόμορφοι από αυτούς της προηγούμενης τάξης.

Για να αντικαταστήσουμε τα παραπάνω αναπτύγματα στην αρχική διαφορική εξίσωση, είναι απαραίτητο να εκφράσουμε την παράγωγο ως προς τη νέα μεταβλητή τ. Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας, προκύπτει

$$1=\frac{dt}{dt}=\frac{d(\tau+\varepsilon T)}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\left(1+\varepsilon\frac{dT}{d\tau}\right)\frac{d\tau}{dt}\Rightarrow\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{1+\varepsilon\dfrac{dT}{d\tau}}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{dX}{d\tau}\frac{1}{1+\varepsilon\dfrac{dT}{d\tau}}$$

Έτσι, η εξίσωση (3.4.1), μετασχηματίζεται

$$\left(\tau+\varepsilon T(\tau,\varepsilon)+\varepsilon X(\tau,\varepsilon)\right)\frac{dX}{d\tau}+\left(1+\varepsilon\frac{dT}{d\tau}\right)X(\tau,\varepsilon)=0\Rightarrow$$

$$(\tau+\varepsilon T_1+\varepsilon X_0+\ldots)(X_0'+\varepsilon X_1'+\ldots)$$

$$+(1+\varepsilon T_1'+\ldots)(X_0+\varepsilon X_1+\ldots)=0$$

από όπου προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις για τα X_0, X_1

$$\tau X_0'+X_0=0 \tag{3.4.8}$$

$$\tau X_1' + X_1 = -T_1 X_0' - X_0 T_1' - X_0 X_0' \qquad (3.4.9)$$

Για τον προσδιορισμό της μετασχηματισμένης συνοριακής συνθήκης *(3.4.2)*, πρέπει στην *(3.4.6)* να αντικαταστήσουμε το χρόνο *t* με το *1*, έτσι ώστε

$$1 = \tau^* + \varepsilon T_1(\tau^*) + \varepsilon^2 T_2(\tau^*) + \ldots \qquad (3.4.10)$$

όπου τ^* είναι η τιμή της νέας μεταβλητής που αντιστοιχεί στο $t=1$.

Υποθέτουμε ότι η τ^* μπορεί να εκφραστεί ως σειρά σε δυνάμεις του ε:

$$\tau^* = 1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots \qquad (3.4.11)$$

όπου τα $b_1, b_2, \ldots$ είναι άγνωστοι συντελεστές που πρέπει να προσδιοριστούν. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την ανάπτυξη *Taylor* γύρω από το $\tau=1$

$$f(1+h) = f(1) + hf'(1) + \frac{1}{2}h^2 f''(1) + O(h^3)$$

με $h = \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots$, ώστε να εκφράσουμε τους όρους $T_1(\tau^*), T_2(\tau^*)$ ως σειρές ως προς *ε*.

Έτσι, η (*3.4.10*) γίνεται

$$\begin{aligned}
1 = {} & [1 + \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots] + \varepsilon[T_1(1) + T_1'(1)(\varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots) + \ldots] \\
& + \varepsilon^2[T_2(1) + T_2'(1)(\varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots) + \ldots] + \ldots \Rightarrow \\
& [\varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots] + \varepsilon[T_1(1) + T_1'(1)(\varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots) + \ldots] \\
& \qquad + \varepsilon^2[T_2(1) + T_2'(1)(\varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2 + \ldots) + \ldots] \\
& \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0
\end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του *ε*, και έχουμε

$$b_1 = -T_1(1)$$

$$b_2 = -b_1 T_1'(1) - T_2(1) = T_1(1) T_1'(1) - T_2(1)$$

$$\ldots$$

και η (*3.4.11*)

$$\tau^* = 1 - \varepsilon T_1(1) + \varepsilon^2[T_1(1) T_1'(1) - T_2(1)] + \ldots \qquad (3.4.12)$$

Η συνοριακή συνθήκη $x(1)=1$ γίνεται τότε

$$X(\tau^*)=1 \Rightarrow X_0(\tau^*)+\varepsilon X_1(\tau^*)+\varepsilon^2 X_2(\tau^*)+\ldots=1 \tag{3.4.13}$$

Αναπτύσσουμε τις συναρτήσεις $X_i(\tau^*)$ σε σειρά *Taylor* γύρω από το $\tau=1$, δεδομένου ότι $\tau^*-1=O(\varepsilon)$. Συγκεκριμένα, για κάθε $i=0,1,2\ldots$ ισχύει

$$X_i(\tau^*)=X_i(1)+(\tau^*-1)X_i'(1)+\frac{1}{2}(\tau^*-1)^2 X_i''(1)+O(\varepsilon^3)$$

Έτσι, η (3.4.13) γράφεται:

$$\begin{aligned}
&X_0(1)+X_0'(1)\left[-\varepsilon T_1(1)+\varepsilon^2[T_1(1)T_1'(1)-T_2(1)]+\ldots\right]\\
&+\frac{1}{2}X_0''(1)\left[-\varepsilon T_1(1)+\varepsilon^2[T_1(1)T_1'(1)-T_2(1)]+\ldots\right]^2\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\varepsilon\left\{X_1(1)+X_1'(1)\left[-\varepsilon T_1(1)+\varepsilon^2[T_1(1)T_1'(1)-T_2(1)]+\ldots\right]\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}X_1''(1)\left[-\varepsilon T_1(1)+\varepsilon^2[T_1(1)T_1'(1)-T_2(1)]+\ldots\right]^2+\ldots\right\}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\varepsilon^2\left\{X_2(1)+X_2'(1)\left[-\varepsilon T_1(1)+\varepsilon^2[T_1(1)T_1'(1)-T_2(1)]+\ldots\right]\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}X_2''(1)\left[-\varepsilon T_1(1)+\varepsilon^2[T_1(1)T_1'(1)-T_2(1)]+\ldots\right]^2+\ldots\right\}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=1
\end{aligned}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του ε, και έχουμε τις αναδρομικές σχέσεις των συνοριακών συνθηκών

$$X_0(1)=1 \tag{3.4.14}$$

$$X_1(1)=X_0'(1)T_1(1) \tag{3.4.15}$$

$$\ldots.$$

Η εξίσωση (3.4.8) με τη συνοριακή συνθήκη (3.4.14) έχει λύση

$$X_0(\tau)=\frac{1}{\tau} \tag{3.4.16}$$

Αντικαθιστούμε την (3.4.16) στις (3.4.9), (3.4.15) και έχουμε το πρόβλημα

$$\tau X_1' + X_1 = \frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} T_1(\tau) - \frac{1}{\tau} T_1'(\tau) \tag{3.4.17}$$

$$X_1(1) = -T_1(1) \tag{3.4.18}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.4.8) με X_1, την (3.4.17) με X_0, και αφαιρούμε κατά μέλη

$$\tau(X_1' X_0 - X_0' X_1) = \left(\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} T_1(\tau) - \frac{1}{\tau} T_1'(\tau)\right) X_0$$

Επειδή $X_0(\tau) = \frac{1}{\tau}$, έχουμε τελικά

$$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)' = \frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} T_1(\tau) - \frac{1}{\tau} T_1'(\tau)$$

Για να εξασφαλιστεί ότι $\frac{T_i(\tau)}{T_{i-1}(\tau)}$, $i = 1, 2, \ldots$, θα είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα των τιμών της τ, που αντιστοιχεί στο $0 \le t \le 1$, σύμφωνα με τη μέθοδο *Lighthill*, επιβάλλουμε τον μηδενισμό του δεξιού μέλους.

$\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} T_1(\tau) - \frac{1}{\tau} T_1'(\tau) = 0$ και συνεπώς $\left(\frac{X_1}{X_0}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{X_1}{X_0} = c$, όπου c σταθερά. Επομένως, το πηλίκο $\frac{X_1}{X_0}$ παραμένει φραγμένο σε όλο το διάστημα ενδιαφέροντος, γεγονός που εξασφαλίζει ότι η διόρθωση πρώτης τάξης δεν υπερισχύει του κύριου όρου. Αφού $X_0(\tau) = \frac{1}{\tau}$, έπεται πως

$$X_1(\tau) = \frac{c}{\tau}$$

Επιλέγουμε $c = 0$, άρα

$$X_1(\tau) = 0 \tag{3.4.19}$$

Από

$$\frac{1}{\tau^3} + \frac{1}{\tau^2} T_1(\tau) - \frac{1}{\tau} T_1'(\tau) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\tau} T_1(\tau) + \frac{1}{2\tau^2}\right)' = 0 \Rightarrow T_1(\tau) = c_1 \tau - \frac{1}{2\tau}$$

Επειδή $X_1(1) = -T_1(1) \overset{\text{από}(3.4.19)}{\Rightarrow} T_1(1) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$

Έτσι,

$$T_1(\tau) = \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{1}{\tau}\right) \tag{3.4.20}$$

Παρατηρούμε ότι, μετά την επιλογή της $T_1(\tau)$ σύμφωνα με την απαίτηση της μεθόδου *Lighthill*, η εξίσωση πρώτης τάξης οδηγεί στην ταυτόσημη μηδενικότητα της διόρθωσης $X_1(\tau)$. Στις εξισώσεις

ανώτερης τάξης, οι αντίστοιχοι όροι που θα μπορούσαν να προκαλέσουν ιδιομορφίες εξαρτώνται αποκλειστικά από τις συναρτήσεις X_1 και T_1. Δεδομένου ότι $X_1(\tau)=0$ και ότι δεν εμφανίζονται νέοι ιδιόμορφοι όροι, οι εξισώσεις για τις διορθώσεις $X_i(\tau), i\geq 2$, ανάγονται σε ομογενείς εξισώσεις της μορφής

$$\left(\frac{X_i}{X_0}\right)'=0$$

οι οποίες, σε συνδυασμό με τις μετασχηματισμένες συνοριακές συνθήκες, συνεπάγονται ότι $X_i(\tau)=0$, για κάθε $i\geq 2$. Αντίστοιχα, δεν απαιτούνται περαιτέρω διορθώσεις στον μετασχηματισμό της ανεξάρτητης μεταβλητής, και συνεπώς μπορούμε να θέσουμε $T_i(\tau)=0$, για $i\geq 2$. Έτσι, η ασυμπτωτική ανάπτυξη κλείνει ήδη στην πρώτη τάξη ως προς τη μικρή παράμετρο ε.

Οι (3.4.6), (3.4.7) γίνονται με αντικατάσταση των (3.4.16), (3.4.19), (3.4.20)

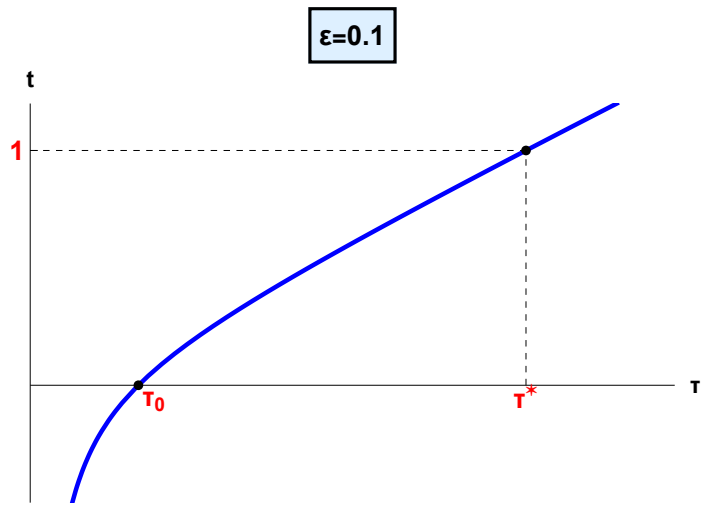
$$t=\tau+\frac{1}{2}\varepsilon\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)+O(\varepsilon^2) \tag{3.4.21}$$

$$X(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\tau}+O(\varepsilon^2) \tag{3.4.22}$$

Λύνουμε την (3.4.21) ως προς τ, παραλείποντας τους όρους $O(\varepsilon^2)$, και παίρνουμε

$$\tau=\frac{t+\sqrt{t^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}}{2+\varepsilon} \tag{3.4.23}$$

Η θετική ρίζα επιλέγεται ώστε να διατηρείται η αντιστοιχία των οριακών σημείων. Πράγματι, για $t=1$ προκύπτει $\tau^*=1+O(\varepsilon^2)$, γεγονός που είναι συμβατό με τη μετασχηματισμένη συνοριακή συνθήκη. Η επιλογή της αρνητικής ρίζας θα οδηγούσε σε μη φυσική αντιστοιχία και απορρίπτεται.



Σχήμα 3.4.2: Γεωμετρική ερμηνεία μετασχηματισμού του χρόνου

Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζει μια μονοσήμαντη (1–1) απεικόνιση της μεταβλητής t στη στρεβλωμένη μεταβλητή τ. Ειδικότερα, το διάστημα $0 \le t \le 1$ απεικονίζεται στο διάστημα $\tau_0 \le \tau \le \tau^*$ όπου

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}$$

Η μονοσήμαντη αυτή απεικόνιση εξασφαλίζει ότι η αλλαγή μεταβλητής δεν αλλοιώνει τη δομή του προβλήματος και καθιστά την ομοιόμορφη ασυμπτωτική λύση μαθηματικά συνεπή. Η γεωμετρική ερμηνεία του μετασχηματισμού παρουσιάζεται στο *Σχήμα 3.4.2*.

Αντικαθιστούμε στην (3.4.22) την (3.4.23) και έχουμε

$$X(\tau,\varepsilon) = \frac{1}{\tau} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow$$

$$x(t,\varepsilon) = \frac{2+\varepsilon}{t+\sqrt{t^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}} + O(\varepsilon^2) = \frac{-t+\sqrt{t^2+2\varepsilon+\varepsilon^2}}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2)$$

Παρατηρούμε ότι η προκύπτουσα λύση συμπίπτει με την ακριβή λύση (3.4.3). Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η πλήρης αυτή συμφωνία προκύπτει ήδη από ανάπτυγμα πρώτης τάξης ως προς τη μικρή παράμετρο ε.

Παράδειγμα 2ο

Έστω το πρόβλημα

$$(t+\varepsilon x)\dot{x} + (2+t)x = 0, \quad 0 \le t \le 1 \tag{3.4.24}$$

$$x(1) = \frac{1}{e} \tag{3.4.25}$$

- ***Το πρόβλημα όταν $\varepsilon = 0$***

Θέτοντας $\varepsilon = 0$, η εξίσωση γίνεται

$$t\dot{x} + (2+t)x = 0$$

και το πρόβλημα έχει λύση

$$x_0(t) = \frac{e^{-t}}{t^2} \tag{3.4.26}$$

- ***Το πρόβλημα όταν $\varepsilon > 0$***

Όταν $\varepsilon > 0$, η εξίσωση *(3.4.24)* μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{(2+t)x}{t+\varepsilon x}$$

από την οποία προκύπτει ότι για $t=1$ ισχύει $x>0$ και $\dot{x}<0$. Επομένως, η λύση είναι θετική και φθίνουσα σε γειτονιά του $t=1$.

Η πιθανή εμφάνιση ιδιομορφίας στη λύση συνδέεται με τον μηδενισμό του παρονομαστή $t+\varepsilon x$. Πράγματι, άπειρη κλίση μπορεί να προκύψει μόνο όταν $t+\varepsilon x=0$, δηλαδή κατά μήκος της καμπύλης $t=-\varepsilon x$. Για να εξετάσουμε αν μια τέτοια ιδιομορφία εμφανίζεται στο διάστημα ενδιαφέροντος, κινούμαστε από το $t=1$ προς τα αριστερά και έστω ότι t_0 είναι το πρώτο σημείο στο οποίο η λύση μηδενίζεται και καθίσταται αρνητική. Ωστόσο, στο διάστημα $t_0 \le t \le 1$ η συνάρτηση $x(t)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, θετική και μη αύξουσα, αφού η πρώτη αλλαγή μονοτονίας θα συνέβαινε στο σημείο όπου $\dot{x}=0$, δηλαδή στο $t=-2$, το οποίο βρίσκεται εκτός του διαστήματος [0,1]. Συνεπώς, το σημείο t_0 δεν ανήκει στο διάστημα ενδιαφέροντος και η λύση παραμένει θετική και φραγμένη για $0 \le t \le 1$.

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Αναζητάμε προσεγγιστική λύση για το πρόβλημα (3.4.24)-(3.4.25), και ως εκ τούτου θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή μιας σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots$$

Αντικαθιστούμε στις (3.4.24), (3.4.25), εξισώνουμε τους όρους ως πρώτης τάξης του ε με το μηδέν, και παίρνουμε

$$O(1):\quad \begin{cases} t\dot{x}_0+(2+t)x_0=0 \\ x_0(1)=\dfrac{1}{e} \end{cases} \quad \text{με λύση } x_0(t)=\frac{e^{-t}}{t^2}$$

$$O(\varepsilon):\quad \begin{cases} t\dot{x}_1+x_1=-x_0\dot{x}_0 \\ x_1(1)=0 \end{cases} \text{ με λύση } x_1(t)=\frac{e^{-t}}{t^2}\int_1^t e^{-u}\left(\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^4}\right)du$$

Παρατηρήσεις

Είδαμε πως η ακριβής λύση παραμένει θετική, φραγμένη και ομαλή σε όλο το διάστημα ενδιαφέροντος [0,1]. Ειδικότερα, στο σημείο $t=0$, η λύση δεν παρουσιάζει ιδιομορφία.

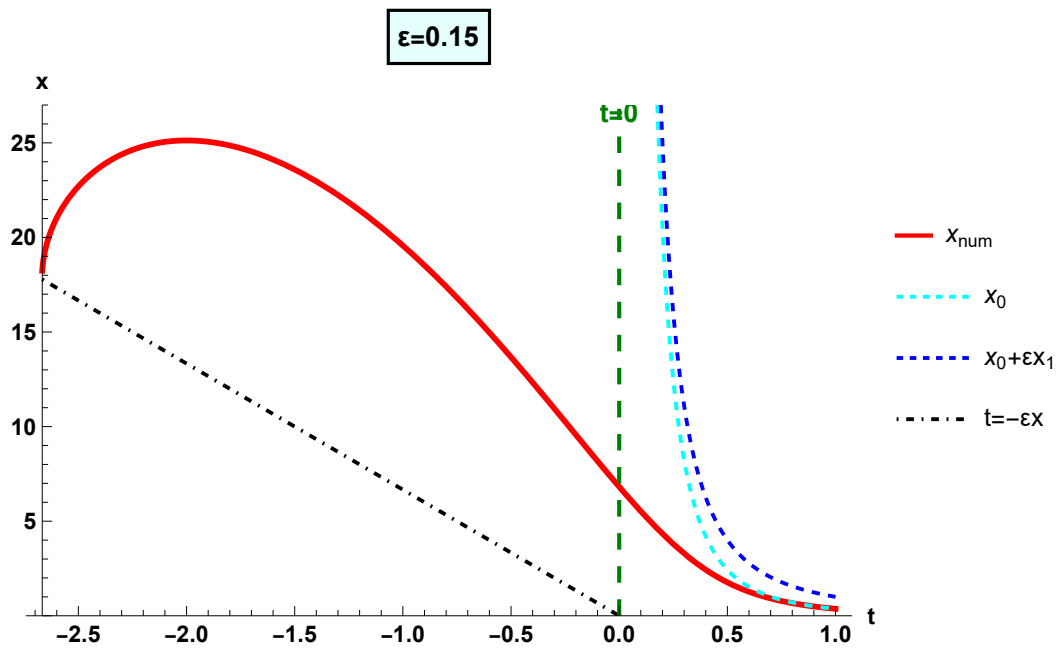
Όταν θέσουμε $\varepsilon=0$, η λύση της αδιατάρακτης εξίσωσης είναι $x_0(t)=\dfrac{e^{-t}}{t^2}$, η οποία παρουσιάζει ιδιομορφία στο $t=0$. Σε σύγκριση με την ακριβή λύση, η γραμμή ιδιομορφίας της αδιατάρακτης εξίσωσης εκφυλίζεται, από την ευθεία $t=-\varepsilon x$, στο όριο $\varepsilon \to 0$, σε μια κατακόρυφη ευθεία $t=0$, χάνεται δηλαδή η γεωμετρική πληροφορία της θέσης της πραγματικής ιδιομορφίας.

Από τις εκφράσεις των όρων της προσεγγιστικής λύσης, από την άλλη, προκύπτει πως καθώς $t \to 0$, $x_0(t)=O(t^{-2})$, και $x_1(t)=O(t^{-5})$. Επομένως, ο διορθωτικός όρος πρώτης τάξης είναι της τάξης

$\varepsilon x_1(t)=O(\frac{\varepsilon}{t^5})$. Η ασυμπτωτική ιεράρχηση της ανάπτυξης απαιτεί την ανισότητα $\varepsilon x_1(t)\ll x_0(t)$, η οποία ισοδυναμεί με τη συνθήκη $t\gg\varepsilon^{1/3}$. Συνεπώς, η κανονική ασυμπτωτική ανάπτυξη δεν είναι ομοιόμορφα έγκυρη σε μια περιοχή μεγέθους $O(\varepsilon^{1/3})$ γύρω από το $t=0$, η οποία συρρικνώνεται καθώς $\varepsilon\to 0$. Στην περιοχή αυτή, οι διορθωτικοί όροι αυξάνονται ταχύτερα από τον κυρίαρχο όρο, οδηγώντας σε απώλεια της εγκυρότητας της κανονικής διαταρακτικής προσέγγισης.

Συνεπώς, με άλλα λόγια, οι διαδοχικοί όροι της διαταρακτικής ανάπτυξης εμφανίζουν ολοένα και εντονότερες ιδιομορφίες στο αριστερό άκρο του διαστήματος και η κανονική σειρά διαταραχών δεν είναι ομοιόμορφη στο διάστημα [0,1], παρόλο που αναπαράγει σωστά το γενικό σχήμα της λύσης για *t* μακριά από το *0*. Η ασυμφωνία αυτή δείχνει ότι η αποτυχία των κανονικών διαταραχών δεν οφείλεται σε πραγματική ανωμαλία της λύσης, αλλά σε λανθασμένη χρονική τοποθέτηση της ιδιομορφίας από την αδιατάρακτη εξίσωση.

Η παραπάνω συμπεριφορά αποτυπώνεται σχηματικά στο *Σχήμα 3.4.3*, όπου φαίνεται καθαρά η απόκλιση των κανονικών διαταρακτικών προσεγγίσεων κοντά στο $t=0$, καθώς και η διαφορετική γεωμετρική τοποθέτηση της ιδιομορφίας της ακριβούς λύσης.



Σχήμα 3.4.3: Ακριβής λύση και προσεγγιστικές λύσεις με κανονικές διαταραχές

Από τα παραπάνω, φαίνεται η αναγκαιότητα εφαρμογής μιας μεθόδου ιδιόμορφων διαταραχών, όπως η μέθοδος *Lighthill*, η οποία επιτρέπει την ομοιόμορφη προσέγγιση της λύσης σε όλο το διάστημα [0,1].

Εφαρμογή μεθόδου Lighthill

Εφαρμόζουμε όπως στο *1ο παράδειγμα* τους μετασχηματισμούς (3.4.6) και (3.4.7) στην εξίσωση (3.4.24) και παίρνουμε τις διαφορικές εξισώσεις για τα X_0, X_1

$$\tau X_0' + (2+\tau) X_0 = 0 \tag{3.4.27}$$

$$\tau X_1' + (2+\tau) X_1 = -T_1 (X_0' + X_0) + \tau X_0' T_1' - X_0 X_0' \tag{3.4.28}$$

Η συνοριακή συνθήκη (3.4.25), μετασχηματίζεται στην $X(\tau^*) = \frac{1}{e}$, όπου η τ^* δίνεται από την (3.4.12), και παρόμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, παίρνουμε

$$X_0(1) = \frac{1}{e} \tag{3.4.29}$$

$$X_1(1) = X_0'(1) T_1(1) \tag{3.4.30}$$

Το πρόβλημα (3.4.27), (3.4.29) έχει λύση

$$X_0(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} \tag{3.4.31}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.4.27) με X_1, την (3.4.28) με X_0, αφαιρούμε κατά μέλη και επειδή $X_0(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}$, έχουμε

$$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)' = -\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) T_1'(\tau) + \frac{2}{\tau^2} T_1(\tau) + e^{-\tau}\left(\frac{2}{\tau^4} + \frac{1}{\tau^3}\right) \tag{3.4.32}$$

Τώρα είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε κατάλληλα το T_1. Αν θεωρήσουμε $T_1 = 0$, η (3.4.32) θα μας οδηγήσει ακριβώς στο ίδιο πρόβλημα που προκύπτει από τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών και, συνεπώς, δεν βελτιώνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης κοντά στο $\tau = 0$. Σύμφωνα με τη μέθοδο *Lighthill*, η επιλογή του T_1 γίνεται έτσι ώστε να εξαλειφθεί ο κυρίαρχος ιδιόμορφος όρος στο δεξί μέλος της (3.4.32), ο οποίος είναι ο όρος μέγιστης τάξης ως προς τ^{-1} όταν $\tau \to 0$. Για τον σκοπό αυτό, εξετάζουμε το δεξί μέλος της (3.4.32) στην ασυμπτωτική περιοχή $\tau \ll 1$, κρατώντας μόνο τον πιο ιδιόμορφο όρο και τους όρους που περιέχουν το T_1 ή τις παραγώγους του, αφού μόνο αυτοί μπορούν να ρυθμιστούν. Υπό αυτή την προσέγγιση, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{-\tau} \approx 1$ καθώς $\tau \to 0$ προκύπτει η εξίσωση

$$-\frac{2}{\tau} T_1' + \frac{2}{\tau^2} T_1 + \frac{2}{\tau^4} = 0 \Rightarrow T_1' - \frac{1}{\tau} T_1 = \frac{1}{\tau^3} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{\tau}\right)' = \frac{1}{\tau^4} \Rightarrow$$

$$T_1(\tau)=-\frac{1}{3\tau^2} \tag{3.4.33}$$

Αντικαθιστούμε την (3.4.33) στην (3.4.32) κι έχουμε

$$\frac{X_1}{X_0}=\frac{1}{3\tau^2}+\frac{2}{3\tau^3}+\int_1^\tau e^{-u}\left(\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^4}\right)du+c \tag{3.4.34}$$

$$X_0'(\tau)=-\frac{e^{-\tau}}{\tau^2}-\frac{2e^{-\tau}}{\tau^3}\Rightarrow X_0'(1)=-3e^{-\tau} \text{ και } T_1(1)=-\frac{1}{3}$$

$$X_1(1)=X_0'(1)T_1(1)=\frac{1}{e}=X_0(1)$$

Άρα από την (3.4.34) έπεται πως $\frac{X_1(1)}{X_0(1)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+c=1\Rightarrow c=0$, και τελικά

$$X_1(\tau)=\frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\left(\frac{1}{3\tau^2}+\frac{2}{3\tau^3}+\int_1^\tau e^{-u}\left(\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^4}\right)du\right) \tag{3.4.35}$$

Η προσεγγιστική λύση με την τεχνική *Lighthill* είναι τελικά, αντικαθιστώντας τις (3.4.31) και (3.4.35) στην (3.4.7)

$$X(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)=\frac{e^{-\tau}}{\tau^2}\left[1+\varepsilon\left(\frac{1}{3\tau^2}+\frac{2}{3\tau^3}+\int_1^\tau e^{-u}\left(\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u^4}\right)du\right)\right]+O(\varepsilon^2) \tag{3.4.36}$$

με τη σχέση μεταξύ των χρονικών μεταβλητών

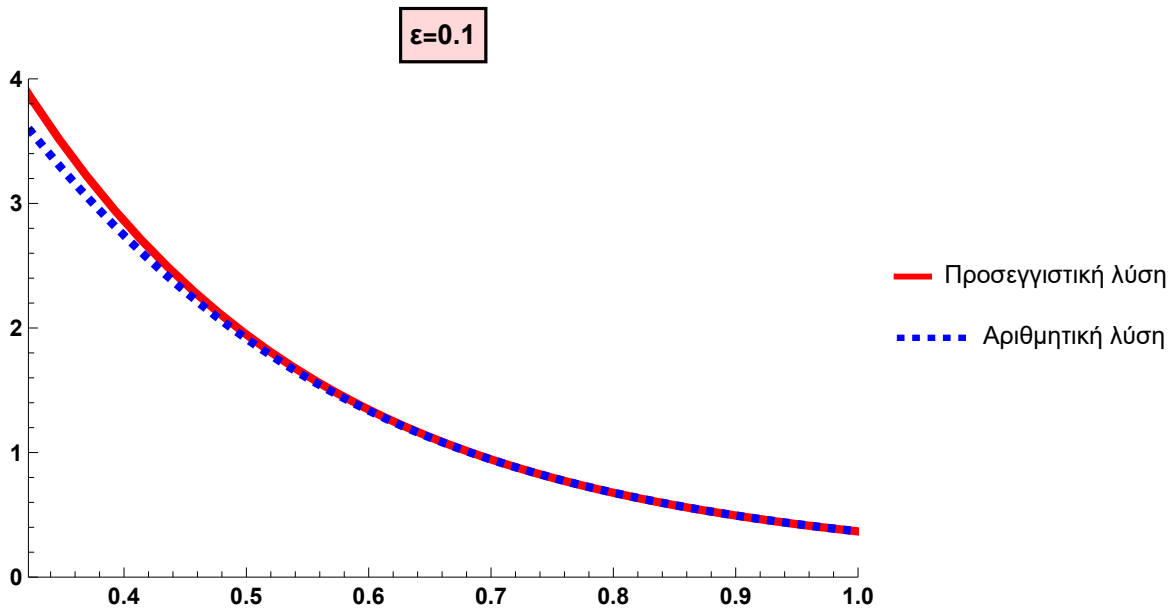
$$t=\tau-\frac{\varepsilon}{3\tau^2}+O(\varepsilon^2) \tag{3.4.37}$$

Η επιλογή της νέας χρονικής κλίμακας τ μετατοπίζει την «ψευδή» ιδιομορφία που προέκυπτε για $t=0$ στην αδιατάρακτη σειρά διαταραχών σε μια μικρή περιοχή $\tau\approx\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, οπότε η τιμή της λύσης είναι

$$x(0)\approx X\left(\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\approx\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

Με άλλα λόγια, η χρήση της μεταβλητής τ εξαλείφει την απειρία στο $t=0$, αντικαθιστώντας την με μια μεγάλη αλλά πεπερασμένη τιμή που εξαρτάται από το ε.

Το σφάλμα των προσεγγίσεων (3.4.36), (3.4.37) είναι της τάξης $O(\varepsilon^2)$ για σταθερή τ, ενώ για σταθερό t είναι μόνο $O(\varepsilon^{1/3})$. Με αυτόν τον τρόπο, η λύση παρέχει μια ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση σε όλο το διάστημα $0 \le t \le 1$, η οποία αναπαριστά σωστά την συμπεριφορά της πραγματικής λύσης και κοντά στο $t=0$, χωρίς την ψευδή ιδιομορφία που εμφανίζεται στις κανονικές διαταραχές.



Σχήμα 3.4.4: Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης με τη μέθοδο Lighthill

Στο *Σχήμα* 3.4.4 βλέπουμε πως η προσεγγιστική λύση με τη μέθοδο *Lighthill* παραμένει φραγμένη στο $t=0$ και αποδίδει σωστά την ποιοτική συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης στο διάστημα $0 \le t \le 1$. Η περιορισμένη ποσοτική συμφωνία κοντά στο $t=0$ για $\varepsilon=0.1$ είναι αναμενόμενη, καθώς η μέθοδος είναι ασυμπτωτικά έγκυρη στο όριο $\varepsilon \to 0$.

3.5 Μέθοδος Temple

Η **μέθοδος Temple** αποτελεί μια προσέγγιση ανάλογη με τη μέθοδο *Lighthill*, και στοχεύει στην κατασκευή ομοιόμορφων ασυμπτωτικών λύσεων για προβλήματα διαταραχών που παρουσιάζουν ψευδείς ιδιομορφίες, όπως

$$f(t,x,\varepsilon)\frac{dx}{dt}=g(t,x,\varepsilon),\quad t \le t_1,\quad x(t_1)=b,\quad 0<\varepsilon \ll 1$$

Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος βασίζεται στην εισαγωγή μιας παραμετρικής μεταβλητής ξ, έτσι ώστε η αρχική διαφορική εξίσωση να μπορεί να γραφεί ως σύστημα:

$$\frac{dt}{d\xi}=T(t,x,\varepsilon),\quad \frac{dx}{d\xi}=X(t,x,\varepsilon)$$

όπου οι συναρτήσεις T και X έχουν ομοιόμορφες ασυμπτωτικές αναπτύξεις σε δυνάμεις του ε.

Η λύση $x(\xi)$ και η σχέση $t(\xi)$ αναπτύσσονται σε σειρά διαταραχών, και έτσι εμφανίζονται οι συναρτήσεις $x_i(\xi)$ και $t_i(\xi)$.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο, συνοπτικά, στο *2ο παράδειγμα* της προηγούμενης ενότητας, για να γίνει σαφής η τεχνική και η ομοιότητά της με την προηγούμενη μέθοδο.

Έστω, λοιπόν, το πρόβλημα (3.4.24), (3.4.25)

$$(t+\varepsilon x)\dot{x}+(2+t)x=0,\quad 0\le t\le 1$$

$$x(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

που δείξαμε πως δεν έχει ιδιομορφία στο διάστημα $0\le t\le 1$, και είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\xi\frac{dt}{d\xi}=t+\varepsilon x,\quad \xi\frac{dx}{d\xi}=-(2+t)x,\quad x(1)=\frac{1}{\mathrm{e}},\quad \xi\neq 0 \tag{3.5.1}$$

Εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς

$$t=\xi+\varepsilon t_1(\xi)+O(\varepsilon^2) \tag{3.5.2}$$

$$x=x_0(\xi)+\varepsilon x_1(\xi)+O(\varepsilon^2) \tag{3.5.3}$$

παίρνουμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$\xi t_1'=t_1+x_0 \tag{3.5.4}$$

$$\xi x_0'=-(2+\xi)x_0 \tag{3.5.5}$$

$$\xi x_1'=-(2+\xi)x_1-t_1x_0 \tag{3.5.6}$$

Η λύση της (3.5.5) με τη συνοριακή συνθήκη $x_0(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$ είναι

$$x_0(\xi)=\frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi^2} \tag{3.5.7}$$

Αντικαθιστούμε την (3.5.7) στην (3.5.4) και παίρνουμε

$$t_1(\xi)=\xi\int_1^{\xi}\frac{x_0(s)}{s^2}ds=\xi\int_1^{\xi}\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s^4}ds \tag{3.5.8}$$

με τη συνοριακή συνθήκη

$$\varepsilon x_1(\xi^*)=\frac{1}{\mathrm{e}}-x_0(\xi^*) \tag{3.5.9}$$

όπου η ξ^* ικανοποιεί την εξίσωση

$$1=\xi^*+\varepsilon t_1(\xi^*)+\varepsilon^2 t_2(\xi^*)+\ldots \tag{3.5.10}$$

Αντικαθιστούμε τις (3.5.7), (3.5.8) στην (3.5.6) και εφαρμόζοντας την (3.5.9) παίρνουμε τη λύση

$$x_1(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}e^{-\xi}\int_{\xi^*}^{\xi}\frac{t_1(s)}{s}ds+\frac{e^{-1}-x_0(\xi^*)}{\varepsilon} \tag{3.5.11}$$

Από την (3.5.7) έχουμε για τον αριθμητή του τελευταίου όρου

$$\frac{1}{e}-x_0(\xi^*)=x_0(1)-x_0(\xi^*) \tag{3.5.12}$$

Επειδή $1=\xi^*+\varepsilon t_1(\xi^*)+O(\varepsilon^2)\Rightarrow\xi^*=1-\varepsilon t_1(\xi^*)+O(\varepsilon^2)$, δηλαδή το ξ^* είναι πολύ κοντά στο *1*, αναπτύσσουμε το $x_0(\xi^*)$ σε σειρά *Taylor* γύρω από το $\xi-1$

$$x_0(\xi^*)\approx x_0(1)+x_0'(1)(\xi^*-1)$$

Εφαρμόζοντας στην (3.5.12)

$$x_0(1)-x_0(\xi^*)\approx-x_0'(1)(\xi^*-1) \tag{3.5.13}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο

$$x_0(\xi)=\frac{e^{-\xi}}{\xi^2}\Rightarrow x_0'(\xi)=-2\frac{e^{-\xi}}{\xi^3}-\frac{e^{-\xi}}{\xi^2}\Rightarrow x_0'(1)=-\frac{3}{e}$$

Και η (3.5.13) γίνεται

$$\frac{1}{e}-x_0(\xi^*)\approx\frac{3}{e}(\xi^*-1)$$

Επειδή $\xi^*-1\approx-\varepsilon t_1(\xi^*)$, τελικά

$$\frac{1}{e}-x_0(\xi^*)\approx-\frac{3}{e}\varepsilon t_1(\xi^*)$$

Άρα ο τελευταίος όρος της (3.5.11) είναι τάξης *O(1)*.

Επειδή $\xi^*=1+O(\varepsilon)$

$$x_1(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}e^{-\xi}\left(\int_1^{\xi}\frac{t_1(s)}{s}ds-\int_1^{\xi^*}\frac{t_1(s)}{s}ds\right)+O(1)$$

Εφόσον το μήκος του διαστήματος $[1,\xi^*]$ είναι τάξης $O(\varepsilon)$, και ο όρος $\frac{t_1(s)}{s}$ είναι φραγμένος, έπεται πως

$$\int_1^{\xi^*} \frac{t_1(s)}{s} ds = O(\varepsilon)$$

άρα η (3.5.11) γράφεται

$$x_1(\xi) = -\frac{1}{\xi^2} e^{-\xi} \int_1^{\xi} \frac{t_1(s)}{s} ds + O(\varepsilon) \tag{3.5.14}$$

Τελικά

$$t = \xi + \varepsilon t_1(\xi) + O(\varepsilon^2)$$

$$x = \frac{e^{-\xi}}{\xi^2} \left(1 - \varepsilon \int_1^{\xi} \frac{t_1(s)}{s} ds \right) + O(\varepsilon^2)$$

με

$$t_1(\xi) = \xi \int_1^{\xi} \frac{e^{-s}}{s^4} ds$$

ή

$$t = \xi(1 + \varepsilon \theta(\xi)) + O(\varepsilon^2) \tag{3.5.15}$$

$$x = \frac{e^{-\xi}}{\xi^2} \left(1 - \varepsilon \int_1^{\xi} \theta(s) ds \right) + O(\varepsilon^2) \tag{3.5.16}$$

με

$$\theta(\xi) = \int_1^{\xi} \frac{e^{-s}}{s^4} ds$$

Οι (3.5.15), (3.5.16) δίνουν μια παραμετρική αναπαράσταση της λύσης $x(t)$ του προβλήματος, για όλες τις τιμές $\xi \geq \delta > 0$, για δ αυθαίρετα μικρό αλλά ανεξάρτητο του ε. Οι όροι $\varepsilon \theta(\xi)$ και $\varepsilon \int_1^{\xi} \theta(s) ds$ που περιέχονται στην προσεγγιστική λύση είναι αιώνιοι όροι, αλλά με την μέθοδο *Temple*, όταν $\xi \to 0$, αυτοί οι όροι μετατρέπονται σε σταθερές κι έτσι αποφεύγεται η έκρηξη της λύσης.

Όταν $\xi \to 0$,

$$t = \xi - \frac{1}{3} \varepsilon \xi^{-2} + O(\varepsilon^2 \xi^{-4})$$

$$x=\xi^{-2}-\frac{1}{6}\varepsilon\xi^{-4}+O\left(\varepsilon^2\xi^{-6}\right)$$

Έτσι, για $t=0$

$$x=\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}}+O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}}\right)$$

Παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτό που υπολογίσαμε με τη μέθοδο *Lighthill*.

3.6 Μέθοδος Πολλαπλών Κλιμάκων

Ο *Julian Cole* (*1925–1999*) επιδίωξε να κατανοήσει βαθύτερα τις ιδιόμορφες διαταραχές και να εφαρμόσει τη σχετική μεθοδολογία, η οποία βρισκόταν σε συνεχή ανάπτυξη. Στο πλαίσιο αυτής της προσπάθειας, μαζί με τον φοιτητή του *Jerry Kevorkian*, ανέπτυξαν και εφάρμοσαν στις αρχές της δεκαετίας του *1960*, ασυμπτωτικές μεθόδους που περιελάμβαναν δύο ή περισσότερους χρόνους, ή αλλιώς πολλαπλές κλίμακες.

Η **μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων**, που γενικεύει και επεκτείνει την κλασική μέθοδο *Poincaré–Lindsted*, εφαρμόζεται σε συστήματα, στα οποία δύο ή περισσότερα δυναμικά φαινόμενα εξελίσσονται ταυτόχρονα, αλλά με διαφορετικούς ρυθμούς. Για το σκοπό αυτό, εισάγονται διαφορετικές χρονικές κλίμακες που αντιστοιχούν στις επιμέρους δυναμικές διεργασίες του συστήματος και θεωρούνται μεταξύ τους ανεξάρτητες μεταβλητές. Η λύση του προβλήματος αναζητείται τότε με τη μορφή μιας γενικευμένης ασυμπτωτικής ανάπτυξης ως προς τη μικρή παράμετρο, της οποίας οι όροι εξαρτώνται από αυτές τις χρονικές κλίμακες. Με τον τρόπο αυτό καθίσταται δυνατή η ταυτόχρονη περιγραφή των γρήγορων και αργών μεταβολών της δυναμικής του συστήματος.

Αυτή η διαδικασία μετατρέπει αναγκαστικά όλες τις διαφορικές εξισώσεις σε μερικές διαφορικές εξισώσεις — ακόμη και τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αλλά το υποκείμενο μαθηματικό πρόβλημα δεν γίνεται πιο δύσκολο να λυθεί. Έτσι, για παράδειγμα, μια συνήθης διαφορική εξίσωση, όταν υποβληθεί σε αυτή τη διαδικασία, επιλύεται με μια μέθοδο ολοκλήρωσης που ουσιαστικά παραμένει η ίδια. Η βασική διαφορά είναι ότι οι αυθαίρετες σταθερές της λύσης μετατρέπονται σε αυθαίρετες συναρτήσεις όλων των άλλων μεταβλητών.

Η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων δεν απαιτεί περιοδικότητα στη λύση σε αντίθεση με τη μέθοδο *Poincaré–Lindsted*, και μπορεί να εφαρμοστεί σε πιο γενικές περιπτώσεις, όπως και σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Ωστόσο, ένα από τα μειονεκτήματά της είναι η δυσκολία στην επιλογή των σωστών χρονικών μεταβλητών, καθώς αυτή η επιλογή δεν είναι πάντα προφανής εκ των προτέρων, για τα περισσότερα προβλήματα.

Δεδομένου ότι η μέθοδος αποδεικνύεται ιδιαίτερα αποτελεσματική στη μελέτη ασθενώς μη γραμμικών ταλαντωτών, όπου η μη γραμμικότητα δρα ως μικρή διαταραχή, στη συνέχεια θα την εφαρμόσουμε σε χαρακτηριστικά παραδείγματα ταλαντώσεων, ξεκινώντας από την απλούστερη γραμμική ταλάντωση.

3.6.1 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην αρμονική αποσβεννύμενη ταλάντωση

Στην *Ενότητα 2.1* εξετάστηκε η αποσβεννύμενη αρμονική ταλάντωση με σκοπό να αναδειχθεί η προέλευση των αιώνιων όρων που εμφανίζονται στη μέθοδο των κανονικών διαταραχών. Διαπιστώθηκε ότι η δυσκολία αυτή σχετίζεται με το γεγονός ότι η ανάπτυξη δεν λαμβάνει υπόψη την εξάρτηση της συχνότητας από τη μικρή παράμετρο ε, με αποτέλεσμα η προσέγγιση να μην είναι ομοιόμορφα έγκυρη για μεγάλους χρόνους.
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε το ίδιο πρόβλημα λαμβάνοντας πλέον υπόψη και τις αρχικές συνθήκες της ταλάντωσης, με στόχο να μελετήσουμε τη χρονική συμπεριφορά της λύσης.

Αρμονική αποσβεννύμενη ταλάντωση

Έστω ο γραμμικός ταλαντωτής με απόσβεση

$$\ddot{x}+2\varepsilon\dot{x}+x=0,\quad t>0,\quad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{3.6.1}$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1 \tag{3.6.2}$$

Ακριβής λύση

Η ακριβής λύση του συστήματος είναι

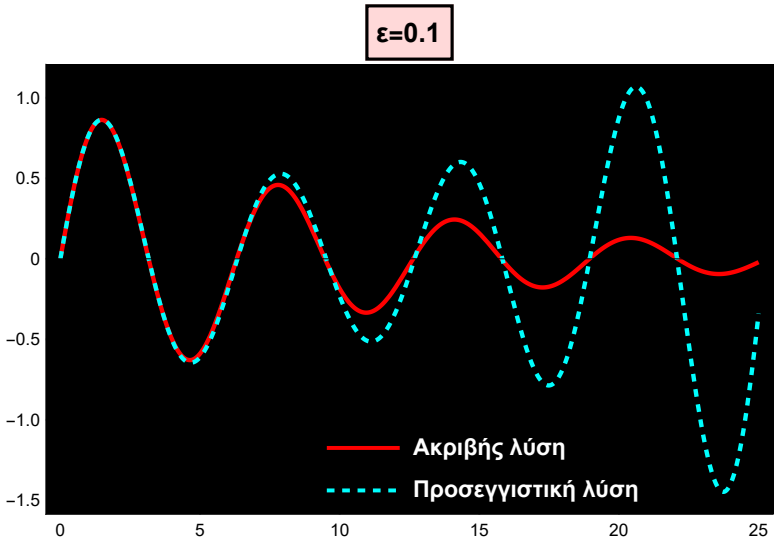
$$x_{exact}(t,\varepsilon)=\frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\left(t\sqrt{1-\varepsilon^2}\right) \tag{3.6.3}$$

Ανάπτυγμα με μέθοδο κανονικών διαταραχών

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών όπως στην *Ενότητα 2.1*, και παίρνουμε την προσεγγιστική λύση

$$x(t,\varepsilon)=\sin t-\varepsilon t\sin t+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(-t\cos t+\sin t+t^2\sin t\right)+O(\varepsilon^3) \tag{3.6.4}$$

Το φαινόμενο των αιώνιων όρων που εμφανίζονται στην προσεγγιστική λύση και ήδη αναλύσαμε, μπορεί να ερμηνευθεί και από τη φυσική δομή της λύσης του προβλήματος. Στη μέθοδο των κανονικών διαταραχών ο πρωτεύων όρος της λύσης παραμένει καθαρά ταλαντωτικός, με σταθερό πλάτος και γωνιακή συχνότητα ίση με τη μονάδα. Αντίθετα, η ακριβής λύση της αποσβεννύμενης ταλάντωσης περιλαμβάνει έναν εκθετικό παράγοντα που οδηγεί σε βαθμιαία μείωση του πλάτους λόγω της απόσβεσης. Η ασυμφωνία αυτή έχει ως αποτέλεσμα η επίδραση της απόσβεσης να μην ενσωματώνεται στον κύριο όρο της λύσης, αλλά να εμφανίζεται μέσω διορθωτικών όρων που αυξάνονται με τον χρόνο, όπως βλέπουμε και στο *Σχήμα 3.6.1*.



Σχήμα 3.6.1: Σύγκριση ακριβούς-προσεγγιστικής λύσης με κανονικές διαταραχές

Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι η δυναμική του συστήματος χαρακτηρίζεται από την ταυτόχρονη παρουσία δύο διαφορετικών χρονικών κλιμάκων: μιας γρήγορης κλίμακας, που σχετίζεται με την ταλαντωτική κίνηση και μιας αργής κλίμακας, που περιγράφει τη σταδιακή μεταβολή του πλάτους λόγω της απόσβεσης. Πράγματι, η ταλάντωση πραγματοποιείται σε χρονική κλίμακα τάξης $O(1)$ με περίοδο πολύ κοντά στην περίοδο 2π της δύναμης επαναφοράς. Αντίθετα, η μεταβολή του πλάτους που προκαλείται από τον εκθετικό παράγοντα $e^{-\varepsilon t}$ γίνεται αισθητή μόνο για χρόνους τάξης $O(\frac{1}{\varepsilon})$, δηλαδή σε πολύ μεγαλύτερη χρονική κλίμακα, όπου η επίδραση της απόσβεσης συσσωρεύεται.

Η συνύπαρξη αυτών των διαφορετικών χρονικών συμπεριφορών υποδηλώνει ότι η λύση δεν εξαρτάται ουσιαστικά από μία μόνο χρονική μεταβλητή, αλλά από δύο χρονικές κλίμακες που δρουν ταυτόχρονα: μια γρήγορη, η οποία περιγράφει την περιοδική ταλάντωση, και μια αργή, η οποία καθορίζει τη βαθμιαία μεταβολή του πλάτους.

Η ενέργεια του συστήματος

Ένας άλλος τρόπος για να δούμε τις χρονικές κλίμακες του συστήματος, είναι μέσω της ενέργειάς του, που δίνεται από

$$E(t)=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}x^2 \quad \text{με} \quad E(0)=\frac{1}{2}(\dot{x}(0))^2+\frac{1}{2}(x(0))^2=\frac{1}{2}$$

Έτσι,

$$\frac{dE}{dt}=\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{x}\,x=\dot{x}(-2\varepsilon\,\dot{x}-x)+\dot{x}\,x=-2\varepsilon\,\dot{x}^2<0$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε

$$E(t)-E(0)=-2\varepsilon\int_0^t \dot{x}^2(s)\,ds \Rightarrow E(t)=\frac{1}{2}-2\varepsilon\int_0^t \dot{x}^2(s)\,ds$$

Επομένως, η ενέργεια ισούται με την ποσότητα που υπήρχε αρχικά μείον την ποσότητα που χάνεται λόγω απόσβεσης. Εφόσον $\frac{dE}{dt}<0$ το σύστημα είναι δυναμικά αποσβεστικό, καθώς χάνει συνεχώς ενέργεια. Ωστόσο, στη μέθοδο κανονικών διαταραχών ο πρωτεύων όρος $x_0(t)=\sin t$ της ανάπτυξης προκύπτει αγνοώντας τους όρους τάξης ε, με αποτέλεσμα να περιγράφεται από την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, η οποία είναι συντηρητική. Συνεπώς, ο πρωτεύων όρος αποτελεί μια συντηρητική προσέγγιση ενός ασθενώς μη συντηρητικού (ασθενώς αποσβεστικού) συστήματος.

Εκτίμηση της μεταβολής της ενέργειας

Για μικρή απόσβεση $(\varepsilon \ll 1)$, με σφάλμα τάξης $O(\varepsilon)$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση με

$$x(t,\varepsilon)\approx \sin t$$

Έτσι $\dot{x}(t,\varepsilon)\approx \cos t$ και εκτιμούμε τη μεταβολή της ενέργειας σε μία περίοδο, ολοκληρώνοντας την εξίσωση της ενέργειας στο διάστημα $0\le t\le 2\pi$.

Η μέση μεταβολή της ενέργειας ανά μονάδα χρόνου είναι

$$\frac{E(2\pi)-E(0)}{2\pi}\approx\frac{-2\varepsilon\int_0^{2\pi}\cos^2 s\,ds}{2\pi}=-\varepsilon$$

Επειδή $E\approx\frac{1}{2}$, μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}\approx -2\varepsilon E$$

Λύνοντας, προκύπτει

$$E(t)\approx\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}$$

Χαρακτηριστικός χρόνος αποσβέσεως

Βλέπουμε πως η ενέργεια μειώνεται εκθετικά. Ως χαρακτηριστικό χρόνο αποσβέσεως λαμβάνουμε τον χρόνο για τον οποίο

$$E(t)=\frac{E(0)}{e}$$

Από τη σχέση προκύπτει , $t=\frac{1}{2\varepsilon}$, άρα

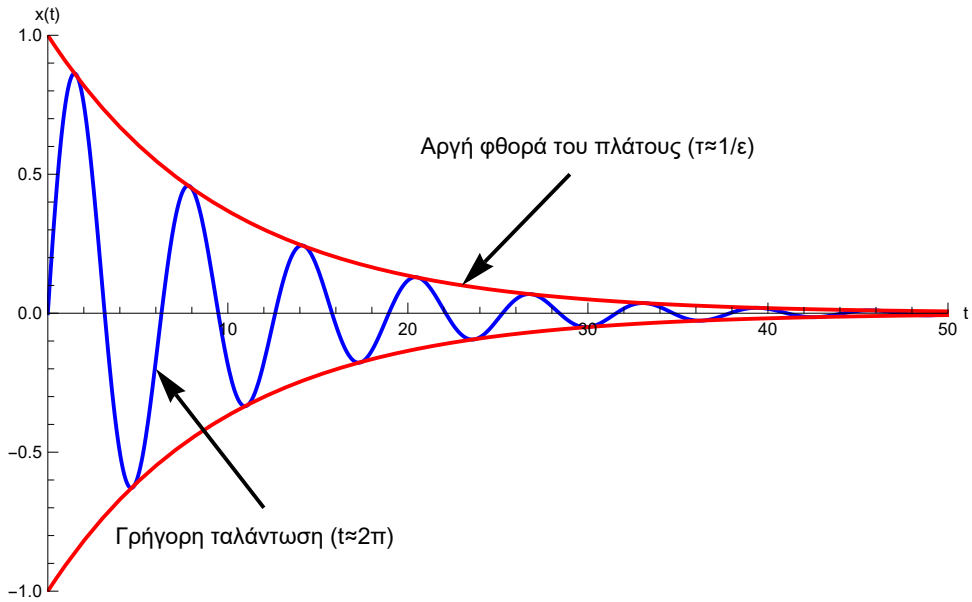
$$E(\frac{1}{2\varepsilon})\approx\frac{1}{2e}=\frac{1}{e}E(0)$$

Συνεπώς, η ενέργεια μειώνεται περίπου στο $\frac{1}{e}$ της αρχικής της τιμής σε χρόνο $t=\frac{1}{2\varepsilon}$.

Χρονικές κλίμακες

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε πως η λύση περιλαμβάνει δύο χρονικές κλίμακες (*Σχήμα 3.6.2*):

1. Την περίοδο της ταλάντωσης $t\approx 2\pi=O(1)$, που αντιστοιχεί στην **γρήγορη κίνηση**
2. Τον χαρακτηριστικό χρόνο αποσβέσεως της ενέργειας ή χρόνο «ημιζωής» της ενέργειας $\tau\approx\frac{1}{2\varepsilon}=O(\frac{1}{\varepsilon})$, που αντιστοιχεί στην **αργή μείωση του πλάτους** λόγω απόσβεσης.



Σχήμα 3.6.2: Οι χρονικές κλίμακες του πλάτους και της ταλάντωσης

3.6.1.1 Εισαγωγή δύο χρονικών κλιμάκων

Είδαμε πως η λύση του προβλήματος (3.6.1-3.6.2) αποτελείται από δύο διακριτές συνιστώσες: Μια περιοδική ταλάντωση που πραγματοποιείται σε γρήγορη χρονική κλίμακα τάξης $O(1)$, και μια αργή μεταβολή του πλάτους που εξελίσσεται σε χρονική κλίμακα τάξης $O(\frac{1}{\varepsilon})$.

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες επιλογές χρονικών κλιμάκων για την εφαρμογή της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων. Ειδικότερα, οι *Kevorkian–Cole* εισάγουν δύο χρονικές μεταβλητές της μορφής

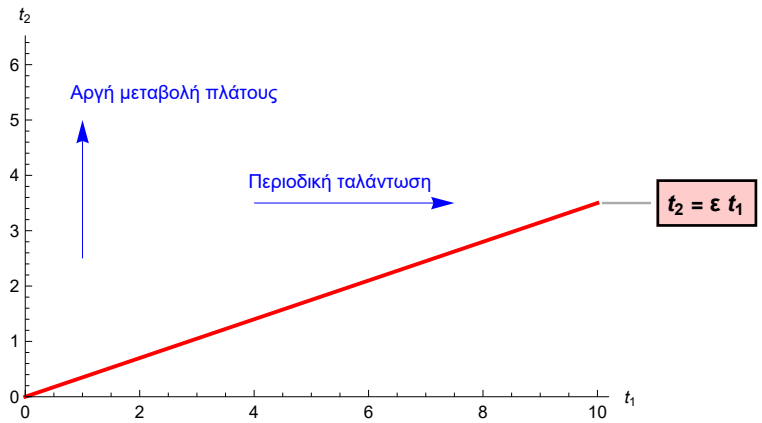
$$T_1 = t\sqrt{1-\varepsilon^2} \quad \text{και} \quad T_2 = \varepsilon t$$

ώστε να λαμβάνεται υπόψη και η επίδραση της διαταραχής στη συχνότητα της ταλάντωσης.

Στην παρούσα ανάλυση, για λόγους απλότητας, υιοθετούμε την προσέγγιση του *Reiss*, εισάγοντας τις χρονικές μεταβλητές

1. $t_1 = t$ (γρήγορος χρόνος)
2. $t_2 = \varepsilon t$ (αργός χρόνος)

Για $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$, η μεταβλητή t_2 παραμένει τάξης $O(1)$, με αποτέλεσμα η προσεγγιστική λύση να αναπτύσσεται ως προς ε με φραγμένους συντελεστές και να είναι ομοιόμορφα έγκυρη σε μεγάλα χρονικά διαστήματα.



Σχήμα 3.6.3: Γεωμετρική αναπαράσταση των δύο χρονικών κλιμάκων

Η γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου απεικονίζεται στο *Σχήμα 3.6.3*, όπου η λύση θεωρείται ορισμένη σε έναν δισδιάστατο χώρο (t_1, t_2), ενώ η φυσική λύση αντιστοιχεί στην καμπύλη $t_2 = \varepsilon t_1$.

Θεωρούμε, λοιπόν, τη λύση εξαρτημένη από τις μεταβλητές t_1, t_2 και την αναζητούμε στη μορφή

$$x(t,\varepsilon) = X(t_1,t_2,\varepsilon) = X_0(t_1,t_2) + \varepsilon X_1(t_1,t_2) + \varepsilon^2 X_2(t_1,t_2) + O(\varepsilon^3) \qquad (3.6.5)$$

όπου $X_i(t_1,t_2)=O(1)\ \ ,i=0,1,2,\ldots$, αφού $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Η (3.6.5) αποτελεί γενικευμένη σειρά, καθώς οι συντελεστές $X_i(t_1,t_2)$ εξαρτώνται έμμεσα από την παράμετρο ε μέσω της t_2, χωρίς όμως να μεταβάλλεται η τάξη μεγέθους τους.

Αν και στο αρχικό πρόβλημα η μεταβλητή t_2 εξαρτάται από την t_1, στη διαδικασία της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων, οι μεταβλητές t_1 και t_2 θεωρούνται ανεξάρτητες, καθώς η $X(t_1,t_2,\varepsilon)$ προκύπτει ως ειδική λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Για να αντικαταστήσουμε την ανάπτυξη (3.6.5) στην αρχική εξίσωση, απαιτείται ο υπολογισμός των χρονικών παραγώγων ως προς τη μεταβλητή t, οι οποίες εκφράζονται συναρτήσει των t_1 και t_2 μέσω του κανόνα της αλυσίδας.

Για την πρώτη παράγωγο έχουμε

$$\frac{d}{dt}=\frac{dt_1}{dt}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_2}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}=\partial_{t_1}+\varepsilon\,\partial_{t_2}$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\partial_{t_1}+\varepsilon\,\partial_{t_2}\right)^2=\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\,\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_2}^2 \qquad (3.6.6)$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.6.1) κι έχουμε

$$(\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\,\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_2}^2)(X_0+\varepsilon X_1+\ldots)+2\varepsilon(\partial_{t_1}+\varepsilon\,\partial_{t_2})(X_0+\varepsilon X_1+\ldots)+X_0+\varepsilon X_1+\ldots=0$$

Εφαρμόζουμε τώρα και στις αρχικές συνθήκες (3.6.2)

$$X_0(0,0)+\varepsilon X_1(0,0)+\ldots=0$$

$$(\partial_{t_1}+\varepsilon\,\partial_{t_2})(X_0(0,0)+\varepsilon X_1(0,0)+\ldots)=1$$

Έτσι έχουμε τα προβλήματα

$$\partial_{t_1}^2X_0+X_0=0,\ \ X_0(0,0)=0,\ \ \partial_{t_1}X_0(0,0)=1 \qquad (3.6.7)$$

$$\partial_{t_1}^2X_1+X_1=-2\partial_{t_1}X_0-2\partial_{t_1t_2}X_0,\ \ X_1(0,0)=0,\ \ \partial_{t_1}X_1(0,0)=-\partial_{t_2}X_0(0,0) \qquad (3.6.8)$$

Τα προβλήματα (3.6.7), (3.6.8) δεν έχουν μοναδική λύση, καθώς οι σταθερές ολοκλήρωσης εξαρτώνται από την αργή χρονική μεταβλητή t_2, άρα απαιτείται η επιβολή επιπλέον συνθηκών για την εξασφάλιση μοναδικότητας. Η ελευθερία αυτή αντανακλά τη δυνατότητα περιγραφής της αργής εξέλιξης του πλάτους της ταλάντωσης, και μας επιτρέπει την αποφυγή των αιώνιων όρων στο ανάπτυγμα της λύσης. Ο όρος με τη μικτή παράγωγο $-2\partial_{t_1t_2}X_0$, περιλαμβάνει αυτήν την εξάρτηση και καθορίζει την αργή μεταβολή των συντελεστών, εξασφαλίζοντας την ομοιόμορφη εγκυρότητα της προσεγγιστικής λύσης.

Η γενική λύση του προβλήματος (3.6.7) είναι

$$X_0(t_1,t_2)=A_0(t_2)\cos t_1+B_0(t_2)\sin t_1$$

όπου $A_0(t_2)$ και $B_0(t_2)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις της μεταβλητής t_2, με $A_0(0)=0$ και $B_0(0)=1$.

Αντικαθιστούμε στο πρόβλημα (3.6.8) και παίρνουμε

$$\partial_{t_1}^2 X_1+X_1=2(A_0+A_0')\sin t_1-2(B_0+B_0')\cos t_1$$

Οι όροι στο δεξί μέλος της εξίσωσης, έχουν την ίδια συχνότητα με τη λύση του ομογενούς προβλήματος, άρα θα οδηγήσουν σε αιώνιους όρους της μορφής $C_0(t_2)t_1\cos t_1$ και $D_0(t_2)t_1\sin t_1$, οι οποίοι δεν παραμένουν τάξης $O(1)$, όταν $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ καθώς $\varepsilon\to 0$. Για την αποφυγή των αιώνιων όρων, επιβάλλουμε την εξαφάνιση των συντελεστών $C_0(t_2)$ και $D_0(t_2)$, γεγονός που οδηγεί σε εξισώσεις για τις αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις $A_0(t_2)$ και $B_0(t_2)$. Οι εξισώσεις αυτές συνοδεύονται από τις αντίστοιχες αρχικές τιμές, που προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, κι έτσι έχουμε

$$A_0+A_0'=0 \quad \text{με} \quad A_0(0)=0 \tag{3.6.9}$$

$$B_0+B_0'=0 \quad \text{με} \quad B_0(0)=1 \tag{3.6.10}$$

Οι λύσεις των (3.6.9), (3.6.10) είναι

$$A_0(t_2)=0 \quad \text{και} \quad B_0(t_2)=\mathrm{e}^{-t_2}$$

Έτσι, ο πρωτεύων όρος γίνεται

$$X_0(t_1,t_2)=\mathrm{e}^{-t_2}\sin t_1$$

και η προσεγγιστική λύση με έναν όρο είναι

$$x(t,\varepsilon)\approx \mathrm{e}^{-\varepsilon t}\sin t \tag{3.6.11}$$

Μπορούμε να συγκρίνουμε την λύση (3.6.11) με την ακριβή (3.6.3)

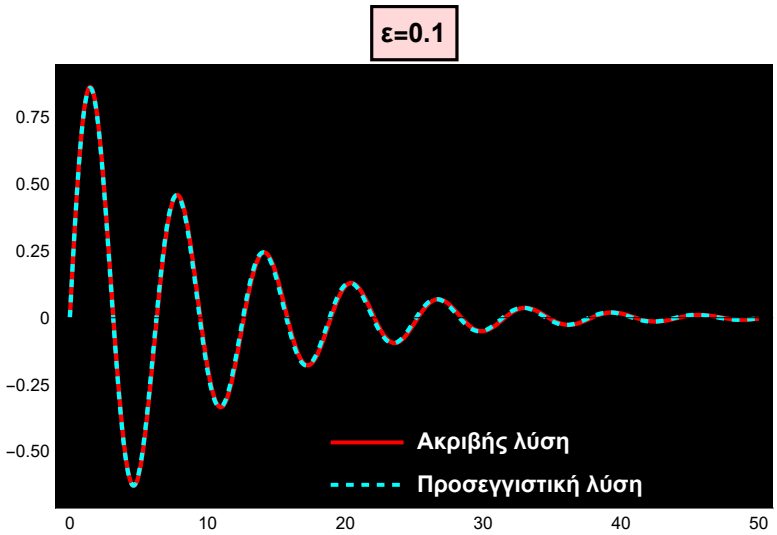
$$x_{exact}(t,\varepsilon)=\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon t}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin(t\sqrt{1-\varepsilon^2})$$

Αναπτύσσοντας τη συχνότητα ως προς ε

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}=1-\frac{\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon^4)$$

προκύπτει ότι η διαφορά μεταξύ της ακριβούς και της προσεγγιστικής λύσης είναι τάξης $O(\varepsilon^2 t)$. Για χρονικά διαστήματα $0\le t\le\frac{M}{\varepsilon}$, όπου M είναι σταθερά ανεξάρτητη του ε, το σφάλμα παραμένει φραγμένο $O(\varepsilon)$, εξασφαλίζοντας έτσι την ομοιόμορφη εγκυρότητα της προσέγγισης σε όλο το διάστημα. Με αυτόν τον τρόπο, η προσεγγιστική λύση περιγράφει αξιόπιστα τόσο την ταχεία

ταλάντωση όσο και την αργή μείωση του πλάτους λόγω απόσβεσης, και φαίνεται στο *Σχήμα 3.6.4*, όπου ταυτίζεται με την ακριβή λύση, όταν $\varepsilon=0.1$.



Σχήμα 3.6.4: Σύγκριση ακριβούς λύσης με τη λύση διπλής κλίμακας

3.6.1.2 Εισαγωγή τριών χρονικών κλιμάκων

Η προσεγγιστική λύση (*3.6.11*) ισχύει ως $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$, αφού είδαμε πως είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα $0\leq t\leq\frac{M}{\varepsilon}$, με M σταθερά. Αν θέλουμε μια προσέγγιση που να ισχύει για μεγαλύτερο διάστημα, ως $t=O(\frac{1}{\varepsilon^2})$, τότε εισάγουμε τρεις χρονικές κλίμακες

$$t_1=t\,,\quad t_2=\varepsilon t\,,\quad t_3=\varepsilon^2 t$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη λύση εξαρτημένη από τις μεταβλητές t_1,t_2,t_3 και την αναζητούμε στη μορφή

$$x(t,\varepsilon)=X(t_1,t_2,t_3,\varepsilon)=X_0(t_1,t_2,t_3)+\varepsilon X_1(t_1,t_2,t_3)+\varepsilon^2 X_2(t_1,t_2,t_3)+O(\varepsilon^3)$$

όπου $X_i(t_1,t_2,t_3)=O(1)\quad ,i=0,1,2,\ldots$, αφού $t=O(\frac{1}{\varepsilon^2})$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt}=\frac{dt_1}{dt}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{dt_3}{dt}\frac{\partial}{\partial t_3}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_3}=\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}$$

και η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\partial_{t_1}+\varepsilon\,\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}\right)^2=\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\,\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2\left(\partial_{t_2}^2+2\,\partial_{t_1t_3}\right)+2\varepsilon^3\partial_{t_2t_3}+\varepsilon^4\partial_{t_3}^2$$

Αντικαθιστούμε στο πρόβλημα (3.6.1), (3.6.2) και παίρνουμε τα εξής προβλήματα:

$$\partial_{t_1}^2X_0+X_0=0,\quad X_0(0,0,0)=0,\quad \partial_{t_1}X_0(0,0,0)=1 \tag{3.6.12}$$

$$\partial_{t_1}^2X_1+X_1=-2\partial_{t_1}X_0-2\partial_{t_1t_2}X_0,\quad X_1(0,0,0)=0,\quad \partial_{t_1}X_1(0,0,0)=-\partial_{t_2}X_0(0,0,0) \tag{3.6.13}$$

$$\partial_{t_1}^2X_2+X_2=-2\partial_{t_1t_2}X_1-\left(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3}-2\partial_{t_2}\right)X_0-2\partial_{t_1}X_1$$

$$X_2(0,0,0)=0,\quad \partial_{t_1}X_2(0,0,0)=-\partial_{t_2}X_1(0,0,0)-\partial_{t_3}X_0(0,0,0) \tag{3.6.14}$$

Η γενική λύση του προβλήματος (3.6.12) είναι

$$X_0(t_1,t_2,t_3)=A_0(t_2,t_3)\cos t_1+B_0(t_2,t_3)\sin t_1 \tag{3.6.15}$$

όπου $A_0(t_2,t_3)$ και $B_0(t_2,t_3)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των μεταβλητών t_2, t_3 με $A_0(0,0)=0$ και $B_0(0,0)=1$.

Αντικαθιστούμε στο πρόβλημα (3.6.13) και παίρνουμε

$$\partial_{t_1}^2X_1+X_1=2\left(A_0+\partial_{t_2}A_0\right)\sin t_1-2\left(B_0+\partial_{t_2}B_0\right)\cos t_1$$

Για να μην προκύψουν αιώνιοι όροι στην μερική λύση της X_1 πρέπει

$$\partial_{t_2}A_0=-A_0 \text{ και } \partial_{t_2}B_0=-B_0$$

από όπου παίρνουμε

$$A_0(t_2,t_3)=a_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_2},\ \text{με } a_0(0)=0 \text{ και}$$

$$B_0(t_2,t_3)=b_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_2},\ \text{με } b_0(0)=1$$

Τότε η (3.6.15) γίνεται

$$X_0(t_1,t_2,t_3)=a_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_2}\cos t_1+b_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_2}\sin t_1 \tag{3.6.16}$$

με $a_0(0)=0$ και $b_0(0)=1$

Από το πρόβλημα (3.6.13) προκύπτει

$$X_1(t_1,t_2,t_3)=A_1(t_2,t_3)\cos t_1+B_1(t_2,t_3)\sin t_1 \tag{3.6.17}$$

με $A_1(0,0)=0$ και $B_1(0,0)=0$

Για να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $a_0(t_3),b_0(t_3)$, αντικαθιστούμε τις (3.6.16) και (3.6.17) στην εξίσωση του προβλήματος (3.6.14), η οποία γίνεται

$$\partial_{t_1}^2 X_2 + X_2 = \left[2\partial_{t_2} A_1 + 2A_1 + 2e^{-t_2} a_0'(t_3) - 3e^{-t_2} b_0(t_3)\right]\sin t_1$$
$$-\left[2\partial_{t_2} B_1 + 2B_1 + 3e^{-t_2} a_0(t_3) + 2e^{-t_2} b_0'(t_3)\right]\cos t_1$$

Για να αποφύγουμε τους αιώνιους όρους στην λύση της X_2, οι συντελεστές των $\sin t_1, \cos t_1$ πρέπει να μηδενιστούν, άρα

$$2\partial_{t_2} A_1 + 2A_1 + 2e^{-t_2} a_0'(t_3) - 3e^{-t_2} b_0(t_3) = 0$$
$$2\partial_{t_2} B_1 + 2B_1 + 3e^{-t_2} a_0(t_3) + 2e^{-t_2} b_0'(t_3) = 0$$

από όπου παίρνουμε

$$A_1(t_2,t_3) = a_1(t_3)e^{-t_2} + t_2 e^{-t_2}[-a_0'(t_3) + \frac{3}{2} b_0(t_3)] \qquad (3.6.18)$$

$$B_1(t_2,t_3) = b_1(t_3)e^{-t_2} + t_2 e^{-t_2}[b_0'(t_3) + \frac{3}{2} a_0(t_3)] \qquad (3.6.19)$$

Η προσεγγιστική λύση με αντικατάσταση των (3.6.16), (3.6.17), (3.6.18), (3.6.19), γίνεται τελικά

$$x(t,\varepsilon) = X(t_1,t_2,t_3,\varepsilon) = X_0(t_1,t_2,t_3) + \varepsilon X_1(t_1,t_2,t_3) + \ldots$$
$$= \{a_0(t_3) + \varepsilon[a_1(t_3) + t_2(-a_0'(t_3) + \frac{3}{2} b_0(t_3))]\} e^{-t_2}\cos t_1$$
$$+ \{b_0(t_3) + \varepsilon[b_1(t_3) - t_2(b_0'(t_3) + \frac{3}{2} a_0(t_3))]\} e^{-t_2}\sin t_1 + \ldots$$

Παρατηρούμε πως παρόλο που έχουμε εξαλείψει τους αιώνιους όρους, δεν έχουμε προσδιορίσει ακόμα τις συναρτήσεις $a_0(t_3), b_0(t_3)$. Για να το πετύχουμε αυτό, χρησιμοποιούμε το κριτήριο της βελτίωσης της ασυμπτωτικής προσέγγισης, δηλαδή την ελαχιστοποίηση του σφάλματος.

Με άλλα λόγια, θα βελτιώσουμε την ακρίβεια του πρωτεύοντα όρου X_0, μειώνοντας τη συνεισφορά του πρώτου διορθωτικού όρου X_1, άρα μειώνοντας τη συνεισφορά των $A_1(t_2,t_3), B_1(t_2,t_3)$.

Έτσι θέτουμε

$$-a_0'(t_3) + \frac{3}{2} b_0(t_3) = 0 \text{ και } b_0'(t_3) + \frac{3}{2} a_0(t_3) = 0$$

επομένως

$$a_0(t_3) = -\frac{2}{3} b_0'(t_3) \Rightarrow a_0'(t_3) = -\frac{2}{3} b_0''(t_3) \text{ και}$$

$$a_0'(t_3) = \frac{3}{2} b_0(t_3) \text{ άρα}$$

$$b_0''(t_3) = -\frac{9}{4} b_0(t_3)$$

Αφού $a_0(0) = 0$ και $b_0(0) = 1$, τελικά έχουμε

$$a_0(t_3) = \sin\frac{3t_3}{2} \quad \text{και} \quad b_0(t_3) = \cos\frac{3t_3}{2}$$

Η προσεγγιστική λύση, λοιπόν, με προσέγγιση ενός όρου, που ισχύει ως $t=O(\frac{1}{\varepsilon^2})$, είναι

$$x(t,\varepsilon)=\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\sin\frac{3\varepsilon^2 t}{2}\cos t+\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\cos\frac{3\varepsilon^2 t}{2}\sin t$$

ή ισοδύναμα

$$x(t,\varepsilon)=\mathrm{e}^{-\varepsilon t}\sin(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2)t$$

Συνοψίζοντας, η εισαγωγή δύο χρονικών κλιμάκων οδηγεί σε μια προσεγγιστική λύση που είναι ομοιόμορφα έγκυρη για χρονικά διαστήματα $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$, αποτυπώνοντας ικανοποιητικά τη βασική δυναμική του συστήματος. Η εισαγωγή τρίτης χρονικής κλίμακας επεκτείνει το πεδίο εγκυρότητας της λύσης σε ακόμη μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα $t=O(\frac{1}{\varepsilon^2})$, επιτρέποντας την περιγραφή πιο μακροχρόνιων φαινομένων.

Ωστόσο, η αύξηση του αριθμού των χρονικών κλιμάκων δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη βελτίωση της ακρίβειας στο κοινό χρονικό διάστημα ισχύος των προσεγγίσεων, αλλά κυρίως επέκταση της χρονικής περιοχής στην οποία αυτές παραμένουν έγκυρες. Επομένως, η επιλογή του αριθμού των χρονικών κλιμάκων εξαρτάται από το χρονικό εύρος που μας ενδιαφέρει και την επιθυμητή ισορροπία μεταξύ ακρίβειας και υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

3.6.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην εξίσωση Rayleigh

Ο *John William Strutt, Lord Rayleigh* εισήγαγε μοντέλα μη γραμμικών ταλαντώσεων στο πλαίσιο της θεωρίας του ήχου, με σκοπό την περιγραφή φαινομένων αυτοδιεγειρόμενων ταλαντώσεων, όπως οι ταλαντώσεις της γλωττίδας του κλαρινέτου. Στο πλαίσιο αυτό προκύπτει η εξίσωση που σήμερα είναι γνωστή ως εξίσωση *Rayleigh*

$$\ddot{x}+\varepsilon(\frac{1}{3}\dot{x}^3-\dot{x})+x=0,\ \ t\geq 0$$

η οποία αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μη γραμμικού ταλαντωτή, με εξαρτώμενη από την ταχύτητα απόσβεση.

Η εξίσωση αυτή συνδέεται άμεσα με την εξίσωση *van der Pol*, αφού αν η x ικανοποιεί την *Rayleigh*, τότε παραγωγίζοντας παίρνουμε την

$$\dddot{x}+\varepsilon(\dot{x}^2-1)\ddot{x}+\dot{x}=0$$

δηλαδή η $\dot{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση *van der Pol*, που θα μελετηθεί εκτενώς στο *5ο Κεφάλαιο*, όπου θα αναλυθούν συστηματικά τα φαινόμενα αυτοδιεγειρόμενων ταλαντώσεων.

Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων, είναι χρήσιμο να επισημανθεί μια βασική ιδιότητα της εξίσωσης *Rayleigh*. Σε αντίθεση με τον γραμμικό αποσβεννύμενο ταλαντωτή, το σύστημα δεν διαθέτει γενικά άπειρο πλήθος περιοδικών λύσεων. Αντίθετα, παρουσιάζει έναν μοναδικό οριακό κύκλο, δηλαδή μια σταθερή περιοδική ταλάντωση που περιγράφει τη μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος.

Η εμφάνιση του οριακού κύκλου μπορεί να ερμηνευθεί μέσω της μη γραμμικής απόσβεσης. Ο όρος

$$\varepsilon\left(\frac{1}{3}\dot{x}^3-\dot{x}\right)$$

δρα με δύο αντίθετους τρόπους:

- Για μικρές τιμές της ταχύτητας $\dot{x}$, ο όρος $-\varepsilon\dot{x}$ κυριαρχεί και λειτουργεί ως αρνητική απόσβεση, ενισχύοντας την ταλάντωση
- Για μεγάλες τιμές της $\dot{x}$, ο όρος $\frac{\varepsilon}{3}\dot{x}^3$ επικρατεί και οδηγεί σε απόσβεση, περιορίζοντας την αύξηση του πλάτους.

Η αλληλεπίδραση αυτών των δύο μηχανισμών οδηγεί στη δημιουργία μιας σταθερής κλειστής τροχιάς στο πορτραίτο φάσης, η οποία αντιστοιχεί στον **οριακό κύκλο**. Αυτή η τροχιά είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες (εντός της περιοχής έλξης του κύκλου), χαρακτηρίζεται από σταθερό πλάτος και συχνότητα και περιγράφει τη μόνιμη κατάσταση στην οποία συγκλίνει το σύστημα.

Η συμπεριφορά αυτή υποδηλώνει την ύπαρξη διαφορετικών χρονικών κλιμάκων: μιας γρήγορης, που σχετίζεται με την ταλαντωτική κίνηση, και μιας αργής, που περιγράφει την εξέλιξη του πλάτους μέχρι την εγκαθίδρυση της περιοδικής κατάστασης. Για τον λόγο αυτό, η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων αποτελεί κατάλληλο εργαλείο για την ανάλυση της εξίσωσης.

Ταλαντωτής Rayleigh
Να προσδιοριστεί ως $t=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ και με σφάλμα $O(\varepsilon)$, η λύση της εξίσωσης *Rayleigh* $$\ddot{x}+\varepsilon\left(\frac{1}{3}\dot{x}^3-\dot{x}\right)+x=0,\quad t\geq 0 \qquad (3.6.20)$$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $$x(0,\varepsilon)=1 \text{ και } \dot{x}(0,\varepsilon)=0 \qquad (3.6.21)$$

Θεωρούμε πως η λύση της εξίσωσης εξαρτάται από δύο χρονικές μεταβλητές: τον γρήγορο χρόνο t, και τον αργό χρόνο $\tau=\varepsilon t$, και υποθέτουμε πως έχει τη μορφή της γενικευμένης σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon)=X_0(t,\tau)+\varepsilon X_1(t,\tau)+O(\varepsilon^2) \tag{3.6.22}$$

για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ και $\tau=O(1)$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Για την πρώτη παράγωγο έχουμε

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\tau}{dt}\frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}=\partial_t+\varepsilon\,\partial_\tau \tag{3.6.23}$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}=(\partial_t+\varepsilon\,\partial_\tau)^2=\partial_t^2+2\varepsilon\,\partial_{t\tau}+\varepsilon^2\partial_\tau^2 \tag{3.6.24}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.6.20) την (3.6.22) και εφαρμόζοντας τις (3.6.23), (3.6.24) έχουμε

$$\partial_t^2 X_0+X_0=0 \tag{3.6.25}$$

$$\partial_t^2 X_1+X_1=\partial_t X_0-\frac{1}{3}(\partial_t X_0)^3-2\partial_{t\tau}X_0 \tag{3.6.26}$$

Από τις αρχικές συνθήκες (3.6.21), έπεται πως

$$X_0(0,0)=1 \text{ και } \partial_t X_0(0,0)=0 \tag{3.6.27}$$

Η εξίσωση (3.6.25) αντιστοιχεί στον απλό αρμονικό ταλαντωτή, και έχει γενική λύση

$$X_0(t,\tau)=A(\tau)\cos t+B(\tau)\sin t$$

όπου $A(\tau),B(\tau)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις του τ.

Εισάγουμε πολική αναπαράσταση θέτοντας το πλάτος

$$\alpha(\tau)=\sqrt{A^2(\tau)+B^2(\tau)}$$

και ορίζοντας τη φάση $\beta(\tau)$ μέσω των σχέσεων

$$\cos(\beta(\tau))=\frac{A(\tau)}{\alpha(\tau)} \text{ και } \sin(\beta(\tau))=\frac{-B(\tau)}{\alpha(\tau)}$$

Με τον τρόπο αυτό η λύση γράφεται στη μορφή

$$X_0(t,\tau)=\alpha(\tau)\cos(t+\beta(\tau)) \tag{3.6.28}$$

- Υπολογισμός των $\alpha(0),\beta(0)$

Από την αρχική συνθήκη $X_0(0,0)=1$, έχουμε

$X_0(0,0)=\alpha(0)\cos(0+\beta(0))=1$, κι έστω $\alpha(0)=\alpha_0, \beta(0)=\beta_0$, οπότε

$$\alpha_0\cos(\beta_0)=1$$

Από την αρχική συνθήκη $\partial_t X_0(0,0)=0$, και αφού $\partial_t X_0(t,\tau)=-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))$, έχουμε

$$-\alpha_0\sin(\beta_0)=0$$

Έτσι,

$$\begin{cases}\alpha_0\cos(\beta_0)=1\\ -\alpha_0\sin(\beta_0)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_0=1\\ \beta_0=0\end{cases} \tag{3.6.29}$$

- Υπολογισμός των $\alpha(\tau), \beta(\tau)$

Οι μερικές παράγωγοι του πρωτεύοντα όρου είναι

$$\partial_t X_0=-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))$$

$$\partial_{t\tau} X_0=\partial_\tau\left[-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))\right]=-\alpha'(\tau)\sin(t+\beta(\tau))-\alpha(\tau)\beta'(\tau)\cos(t+\beta(\tau))$$

Εφαρμόζουμε στην (3.6.26) και γίνεται

$$\partial_t^2 X_1+X_1=-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))+2\alpha'(\tau)\sin(t+\beta(\tau))+2\alpha(\tau)\beta'(\tau)\cos(t+\beta(\tau))+\frac{1}{3}\alpha^3(\tau)\sin^3(t+\beta(\tau)) \tag{3.6.30}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\sin^3(t)=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin(3t)$$

και η (3.6.30) θα γίνει τελικά

$$\partial_t^2 X_1+X_1=\left[2\alpha'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)\right]\sin(t+\beta(\tau))+2\alpha(\tau)\beta'(\tau)\cos(t+\beta(\tau))$$

$$-\frac{1}{12}\alpha^3(\tau)\sin(3t+3\beta(\tau))$$

Παρατηρούμε στο δεξί μέλος πως έχουμε όρους $\sin(t+\beta(\tau))$ και $\cos(t+\beta(\tau))$, που ανήκουν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, άρα θα οδηγήσουν σε αιώνιους όρους.

Για την αποφυγή τους, θα μηδενίσουμε τους συντελεστές των $\sin(t+\beta(\tau))$ και $\cos(t+\beta(\tau))$, και θα έχουμε

$$2\alpha'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)=0 \tag{3.6.31}$$

$$2\alpha(\tau)\beta'(\tau)=0 \tag{3.6.32}$$

Από την (3.6.32), επειδή $\alpha(\tau)\neq 0$, έπεται πως $\beta'(\tau)=0$, άρα $\beta(\tau)$ είναι κάποια σταθερά, επομένως από την (3.6.29)

$$\beta(\tau)=\beta(0)=\beta_0=0 \tag{3.6.33}$$

Η εξίσωση (3.6.31) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση *Bernoulli*

$$2\alpha'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)=0\Rightarrow\alpha'(\tau)-\frac{1}{2}\alpha(\tau)+\frac{1}{8}\alpha^3(\tau)=0$$

Θέτουμε $y(\tau)=\alpha^{1-3}(\tau)=\alpha^{-2}(\tau)$, οπότε

$$y'(\tau)=-2\alpha^{-3}(\tau)\alpha'(\tau)\Rightarrow\alpha'(\tau)=-\frac{1}{2}\alpha^3(\tau)y'(\tau)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.6.31) κι έχουμε

$$-\alpha^3(\tau)y'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)=0$$

Διαιρούμε με $\alpha^3(\tau)$

$$-y'(\tau)-\alpha^{-2}(\tau)+\frac{1}{4}=0$$

Επειδή $y(\tau)=\alpha^{-2}(\tau)$, έχουμε

$$y'(\tau)+y(\tau)=\frac{1}{4}$$

με λύση

$$y(\tau)=\frac{1}{4}+c\,\mathrm{e}^{-\tau}$$

Άρα

$$\alpha^{-2}(\tau)=\frac{1}{4}+c\,\mathrm{e}^{-\tau}$$

και τελικά

$$\alpha(\tau)=\pm\frac{2}{\sqrt{1+4c\,\mathrm{e}^{-\tau}}}$$

Η $\alpha(\tau)=\sqrt{A^2(\tau)+B^2(\tau)}$ άρα είναι θετική, κι έτσι

$$\alpha(\tau)=\frac{2}{\sqrt{1+4c\,\mathrm{e}^{-\tau}}}$$

για κάποια σταθερά c, που την προσδιορίζουμε από την $\alpha_0=1$.

$$\alpha(0)=\frac{2}{\sqrt{1+4c}}\Rightarrow 1=\frac{2}{\sqrt{1+4c}}\Rightarrow c=\frac{3}{4}$$

Έτσι,

$$\alpha(\tau)=\frac{2}{\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-\tau}}},\quad \beta(\tau)=0$$

- Προσεγγιστική λύση μηδενικής τάξης

Άρα ο πρωτεύων όρος είναι

$$X_0(t,\tau)=\frac{2}{\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-\tau}}}\cos t$$

και η προσεγγιστική λύση μηδενικής τάξης για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ είναι

$$x(t,\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-\varepsilon t}}}\cos t+O(\varepsilon) \tag{3.6.34}$$

Ανάλυση της προσεγγιστικής λύσης για τον ταλαντωτή Rayleigh

Η μέθοδος δύο κλιμάκων επιτρέπει την περιγραφή της μακροχρόνιας συμπεριφοράς του ταλαντωτή *Rayleigh* και αποκαλύπτει τη σταδιακή σύγκλιση του συστήματος στον οριακό κύκλο.

Αναλυτικότερα:

Στην προσεγγιστική λύση (*3.6.34*) το πλάτος δίνεται από

$$\alpha(\varepsilon t)=\frac{2}{\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-\varepsilon t}}}$$

το οποίο αυξάνεται εκθετικά με τον χρόνο και τείνει στην τιμή *2*, καθώς $t\rightarrow\infty$.

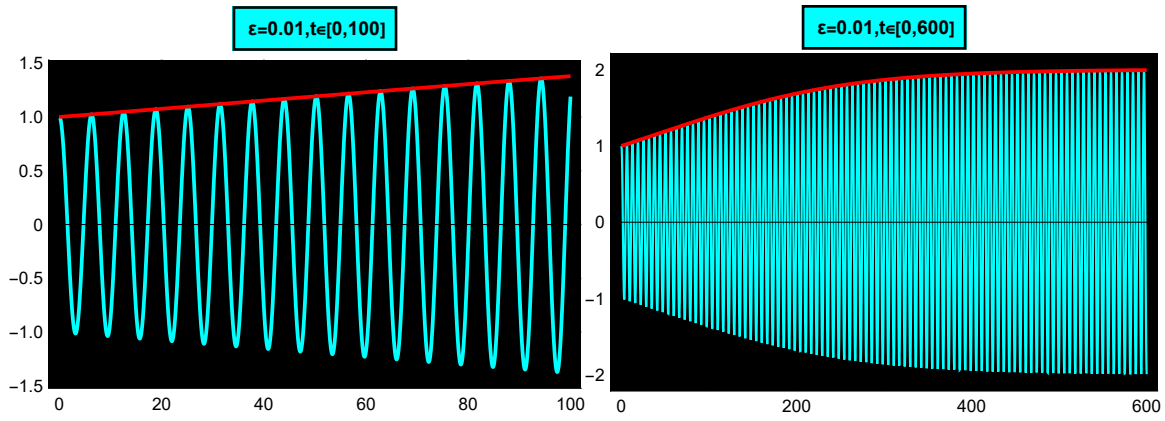
Έτσι, η λύση συγκλίνει στην περιοδική κατάσταση

$$x(t,\varepsilon)=2\cos t$$

η οποία αντιστοιχεί στον οριακό κύκλο με ακτίνα *2* και συχνότητα *1*. Ο χρόνος σύγκλισης στον οριακό κύκλο εξαρτάται από την παράμετρο ε. Μικρότερες τιμές του ε σημαίνουν πιο αργή προσέγγιση, αφού ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $\frac{1}{\varepsilon}$. Στην πράξη, το σύστημα χρειάζεται περίπου έξι φορές αυτή τη χρονική κλίμακα για να προσεγγίσει ουσιαστικά τον οριακό κύκλο.

Αυτό φαίνεται στο *Σχήμα 3.6.5*, όπου για $\varepsilon=0.01$ η ταλάντωση παραμένει σχεδόν γραμμική για μικρούς χρόνους, ενώ για $t\geq 600$ το πλάτος σταθεροποιείται στο *2*. Τα δύο διαγράμματα δείχνουν

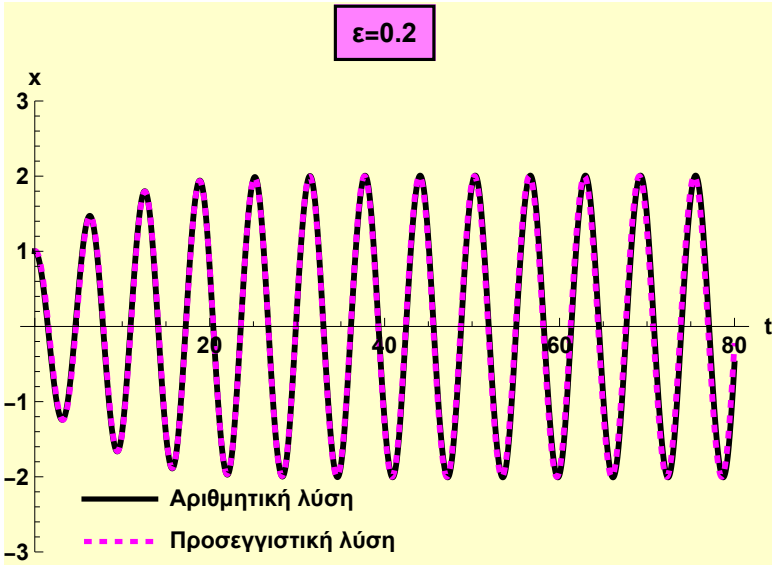
την εξέλιξη του πλάτους από την αρχική φάση έως τη σταθερή περιοδική κατάσταση, αναδεικνύοντας τη μεταβατική συμπεριφορά πριν τον οριακό κύκλο.



Σχήμα 3.6.5: Εξέλιξη του πλάτους του ταλαντωτή Rayleigh σε δύο χρονικά διαστήματα

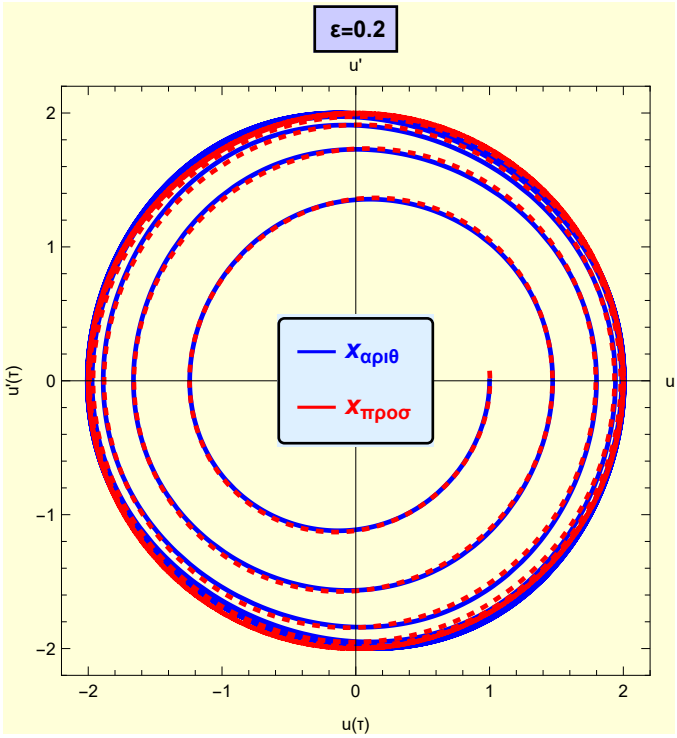
Σύγκριση με την αριθμητική λύση

Στο χρονικό διάγραμμα (*Σχήμα 3.6.6*), η προσεγγιστική λύση ακολουθεί με ακρίβεια την αριθμητική, ακόμη και κατά τη διάρκεια της μετάβασης στον οριακό κύκλο.



Σχήμα 3.6.6: Σύγκριση αριθμητικής και προσεγγιστικής λύσης

Στο πορτραίτο φάσης (*Σχήμα 3.6.7*) η τροχιά ξεκινά σχεδόν γραμμική και συγκλίνει στον σταθερό οριακό κύκλο, επιβεβαιώνοντας την ανεξαρτησία από τις αρχικές συνθήκες και την ομοιομορφία της περιοδικής συμπεριφοράς.



Σχήμα 3.6.7: Πορτραίτο φάσης αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης

Η σύγκριση δείχνει ότι η μέθοδος δύο κλιμάκων περιγράφει αξιόπιστα τόσο την ταλάντωση όσο και την αργή εξέλιξη του πλάτους προς τον οριακό κύκλο.

3.6.3 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων στην αυτόνομη εξίσωση Duffing

Στην *Ενότητα 3.2* εφαρμόσαμε τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt* στην εξίσωση *Duffing*, αποφεύγοντας αιώνιους όρους μέσω διόρθωσης της συχνότητας. Για να μελετήσουμε όμως τη μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος, και να παρακολουθήσουμε ταυτόχρονα τις γρήγορες και αργές κλίμακες της ταλάντωσης, επεκτείνουμε την προσέγγιση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων, η οποία γενικεύει την *Poincaré–Lindstedt*.

Αυτόνομη εξίσωση Duffing
Έστω η αυτόνομη εξίσωση *Duffing* χωρίς απόσβεση $$\ddot{x}+\omega^2 x+\varepsilon x^3=0, \quad t\geq 0 \qquad (3.6.35)$$

Θεωρούμε πως η λύση της εξίσωσης εξαρτάται από δύο χρονικές μεταβλητές: τον γρήγορο χρόνο t, και τον αργό χρόνο $\tau=\varepsilon t$, και υποθέτουμε πως έχει τη μορφή της γενικευμένης σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon)=X_0(t,\tau)+\varepsilon X_1(t,\tau)+O(\varepsilon^2) \tag{3.6.36}$$

για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ και $\tau=O(1)$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Για την πρώτη παράγωγο έχουμε

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\tau}{dt}\frac{\partial}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}=\partial_t+\varepsilon\,\partial_\tau \tag{3.6.37}$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}=(\partial_t+\varepsilon\,\partial_\tau)^2=\partial_t^2+2\varepsilon\,\partial_{t\tau}+\varepsilon^2\partial_\tau^2 \tag{3.6.38}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.6.35) την (3.6.36) και εφαρμόζοντας τις (3.6.37), (3.6.38) έχουμε

$$\partial_t^2 X_0+\omega^2 X_0=0 \tag{3.6.39}$$

$$\partial_t^2 X_1+\omega^2 X_1=-2\partial_{t\tau}X_0-X_0^3 \tag{3.6.40}$$

Στην εξίσωση *Rayleigh* χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες για τη λύση του πρωτεύοντα όρου, ενώ στην *Duffing* υιοθετούμε μιγαδική μορφή της λύσης, αναδεικνύοντας εναλλακτικό αλλά ισοδύναμο τρόπο εφαρμογής της μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων.

Έτσι, η γενική λύση της (3.6.39) $X_0(t,\tau)=A(\tau)\cos\omega t+B(\tau)\sin\omega t$ γράφεται

$$X_0(t,\tau)=[\frac{1}{2}A(\tau)-\frac{1}{2}iB(\tau)]e^{i\omega t}+[\frac{1}{2}A(\tau)+\frac{1}{2}iB(\tau)]e^{-i\omega t}\Rightarrow$$

$$X_0(t,\tau)=a(\tau)e^{i\omega t}+\overline{a(\tau)}e^{-i\omega t} \tag{3.6.41}$$

όπου $\alpha(\tau)=\frac{1}{2}A(\tau)-\frac{1}{2}iB(\tau)$ κάποια αυθαίρετη μιγαδική συνάρτηση.

Αντικαθιστούμε την (3.6.41) στην (3.6.40) κι έχουμε

$$\partial_t^2 X_1+\omega^2 X_1=-2i\omega a'e^{i\omega t}+2i\omega\bar{a}'e^{-i\omega t}-\alpha^3 e^{3i\omega t}-\bar{\alpha}^3 e^{-3i\omega t}-3a^2\bar{\alpha}e^{i\omega t}-3a\bar{\alpha}^2 e^{-i\omega t}$$

$$=-[2i\omega a'+3a^2\bar{\alpha}]e^{i\omega t}+[2i\omega\bar{a}'-3a\bar{\alpha}^2]e^{-i\omega t} \tag{3.6.42}$$

Παρατηρούμε πως υπάρχουν όροι της μορφής $e^{i\omega t}$ και $e^{-i\omega t}$, άρα θα εμφανίσουν αιώνιους όρους στην μερική λύση της X_1. Για να έχουμε ομοιόμορφα έγκυρη προσέγγιση, πρέπει να μηδενίσουμε τους συντελεστές τους

$$2i\omega a'+3a^2\bar{\alpha}=0 \tag{3.6.43}$$

$$2i\omega\bar{a}'-3a\bar{\alpha}^2=0 \tag{3.6.44}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.6.43) και (3.6.44), βλέπουμε πως δεν είναι ανεξάρτητες, αφού η συζυγής της (3.6.43) μας οδηγεί στην (3.6.44). Επομένως, αν ικανοποιείται η μια, αυτόματα ικανοποιείται και η άλλη.

Θεωρούμε πως η μιγαδική συνάρτηση $\alpha(\tau)$ έχει τη μορφή

$$\alpha(\tau)=f(\tau)\mathrm{e}^{ig(\tau)} \tag{3.6.45}$$

όπου *f*, *g* πραγματικές συναρτήσεις.

Την αντικαθιστούμε στην (3.6.43), οπότε παίρνουμε

$$2i\omega(f'+ifg')\mathrm{e}^{ig}+3f^3\mathrm{e}^{ig}=0\Rightarrow$$

$$2i\omega f'-2\omega fg'+3f^3=0$$

Άρα

$$2\omega f'=0 \quad \text{και} \quad -2\omega fg'+3f^3=0$$

από όπου έπεται πως

$$f=\frac{\alpha_0}{2} \quad \text{και} \quad g'=\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\Rightarrow g(\tau)=\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\tau+\beta_0 \tag{3.6.46}$$

όπου α_0, β_0 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Η (3.6.45) είναι με αντικατάσταση της (3.6.46)

$$\alpha(\tau)=\frac{\alpha_0}{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\tau+\beta_0\right)}$$

και η (3.6.41) γίνεται τότε

$$X_0(t,\tau)=\frac{\alpha_0}{2}\mathrm{e}^{i\left(\omega t+\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\tau+\beta_0\right)}+\frac{\alpha_0}{2}\mathrm{e}^{-i\left(\omega t+\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\tau+\beta_0\right)}$$

ή

$$X_0(t,\tau)=a_0\cos\left(\omega t+\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\tau+\beta_0\right)$$

Τελικά η προσεγγιστική λύση είναι

$$x(t,\varepsilon)=a_0\cos\left[\left(\omega+\frac{3\alpha_0^2}{8\omega}\varepsilon\right)t+\beta_0\right]+O(\varepsilon) \tag{3.6.47}$$

Η παραπάνω ασυμπτωτική λύση θα αξιολογηθεί στην Ενότητα της μεθόδου της μεσοστάθμισης, όπου παρουσιάζεται η σύγκρισή της με την αριθμητική λύση.

3.6.4 Εφαρμογή πολλαπλών κλιμάκων σε σαγματικά σημεία και κόμβους

3.6.4.1 Προσεγγιστική λύση σε σαγματικό σημείο γραμμικού συστήματος

Παράδειγμα γραμμικού συστήματος

Έστω η γραμμική εξίσωση

$$\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}-x=0, \quad 0\le t<\infty, \quad 0\le\varepsilon\ll 1 \tag{3.6.48}$$

Θα προσδιορίσουμε την ακριβή λύση του συστήματος και θα κατασκευάσουμε προσεγγιστική λύση κατά μήκος των εισερχόμενων τροχιών προς το σαγματικό σημείο.

Ακριβής λύση

Η εξίσωση (3.6.48) γράφεται ως σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-\varepsilon y \end{cases}$$

που έχει σημείο ισορροπίας το $(0,0)$.

Το σύστημα είναι γραμμικό και μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\,\boldsymbol{x}, \text{ όπου } A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι

$$det(A-\lambda\mathrm{I})=0\Rightarrow\lambda^2+\varepsilon\lambda-1=0$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_1=-\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+1}<0 \text{ και } \lambda_2=-\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+1}>0$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες, το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από:

$$(A-\lambda_i\mathrm{I})u_i=0$$

Επομένως λύνοντας το σύστημα, τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ και } u_2=\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

και η γενική λύση του συστήματος δίνεται από την

$$\bar{x}(t)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή αναλυτικά

$$x(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t)=c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

- Θέτουμε $c_2=0$, δηλαδή κρατάμε τον όρο της αρνητικής ιδιοτιμής

$$x(t)=c_1 e^{\lambda_1 t},\ y(t)=c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$

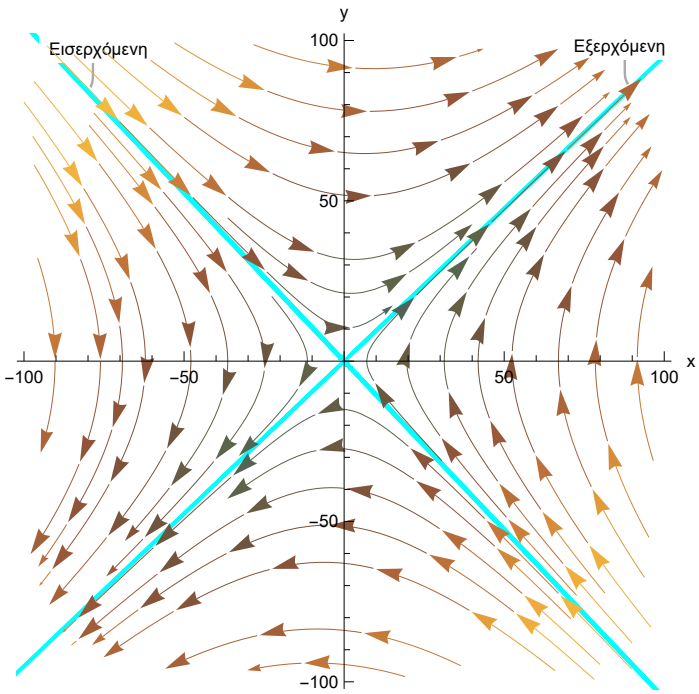
Από εδώ προκύπτει η ευθεία $y=\lambda_1 x$. Οι τροχιές που ξεκινούν κοντά σε αυτήν την ευθεία, στο φασικό επίπεδο, τείνουν προς το σαγματικό σημείο, καθώς $t \to \infty$,

- Θέτουμε $c_1=0$, δηλαδή κρατάμε τον όρο της θετικής ιδιοτιμής

$$x(t)=c_2 e^{\lambda_2 t},\ \ y(t)=c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

Από εδώ προκύπτει η ευθεία $y=\lambda_2 x$. Οι τροχιές που ξεκινούν κοντά σε αυτήν, απομακρύνονται από το σαγματικό σημείο, καθώς $t \to \infty$.

Οι ευθείες αυτές αποτελούν τις **διαχωριστικές τροχιές (separatrices)** του συστήματος και χωρίζουν τον φασικό χώρο σε περιοχές με διαφορετική δυναμική συμπεριφορά.



Σχήμα 3.6.8: Εισερχόμενες στο $(0,0)$ *και εξερχόμενες διαχωριστικές της* $\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}-x=0$

Συγκεκριμένα, όπως βλέπουμε στο *Σχήμα 3.6.8*

- Οι αντικείμενες ημιευθείες $y=\lambda_1 x$, με αρχή το $(0,0)$ που εισέρχονται στο σαγματικό σημείο, καθώς $t\to\infty$, ονομάζονται **εισερχόμενες (ευσταθείς) διαχωριστικές**, και
- Οι αντικείμενες ημιευθείες $y=\lambda_2 x$, με αρχή το $(0,0)$ που εξέρχονται από το σαγματικό σημείο, καθώς $t\to\infty$, ονομάζονται **εξερχόμενες (ασταθείς) διαχωριστικές**.

Κάθε τροχιά που δεν βρίσκεται ακριβώς πάνω σε κάποια διαχωριστική μπορεί να θεωρηθεί ως συνδυασμός της εισερχόμενης και της εξερχόμενης συνιστώσας και τελικά απομακρύνεται από το σαγματικό σημείο σύμφωνα με την κυρίαρχη θετική ιδιοτιμή.

Οι χρονικές λύσεις κατά μήκος των εισερχόμενων τροχιών είναι

$$x(t)=c\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$$

όπου c κάποια αυθαίρετη σταθερά.

Η σειρά *Taylor* για την ιδιοτιμή λ_1 είναι

$$\lambda_1=-1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+O(\varepsilon^4)$$

Αντικαθιστούμε στην λύση κι έχουμε

$$x(t)=c\,\mathrm{e}^{[-1-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+O(\varepsilon^4)]t}=c\,\mathrm{e}^{-t-\frac{\varepsilon t}{2}-\frac{\varepsilon^2 t}{8}}\mathrm{e}^{O(\varepsilon^4 t)}=$$

$$c\,\mathrm{e}^{-t-\frac{\varepsilon t}{2}-\frac{\varepsilon^2 t}{8}}(1+O(\varepsilon^4 t))\Rightarrow$$

$$x(t)=c\,\mathrm{e}^{-t-\frac{\varepsilon t}{2}-\frac{\varepsilon^2 t}{8}}+O(\varepsilon^4 t) \qquad (3.6.49)$$

Προσεγγιστική λύση

Με τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων, θα αναζητήσουμε προσεγγιστικές λύσεις που αντιστοιχούν στις δύο εισερχόμενες διαχωριστικές τροχιές. Θέλουμε η προσέγγιση να ισχύει για $t\geq 0$ και $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$, καθώς $\varepsilon\to 0$, δηλαδή για $0\leq t<\frac{M}{\varepsilon}$ για κάποια σταθερά M.

Με την παρατήρηση των εκθετικών όρων στην λύση (3.6.49) πάνω στις εισερχόμενες διαχωριστικές, βλέπουμε ότι αυτή περιλαμβάνει όρους που εξελίσσονται με διαφορετικούς ρυθμούς. Έτσι, εισάγουμε τις χρονικές κλίμακες

$t_1=t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ (γρήγορη), $t_2=\varepsilon t=O(1)$ (αργή) και $t_3=\varepsilon^2 t=O(\varepsilon)$ (πολύ αργή), καθώς $\varepsilon\to 0$.

Θεωρούμε, τη λύση εξαρτημένη από τις μεταβλητές t_1,t_2,t_3 και την αναζητούμε στη μορφή

$$x(t,\varepsilon)=X(t_1,t_2,t_3,\varepsilon)=X_0(t_1,t_2,t_3)+\varepsilon X_1(t_1,t_2,t_3)+\varepsilon^2 X_2(t_1,t_2,t_3)+O(\varepsilon^3) \qquad (3.6.50)$$

όπου $X_i(t_1,t_2,t_3)=O(1)\ \ ,i=0,1,2,\ldots$, αφού $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt}=\frac{dt_1}{dt}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{dt_3}{dt}\frac{\partial}{\partial t_3}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_3}=\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}$$

Αντίστοιχα η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}\right)^2=\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3})+2\varepsilon^3\partial_{t_2t_3}+\varepsilon^4\partial_{t_3}^2$$

Αντικαθιστούμε την (3.6.50) στην (3.6.48) και εφαρμόζοντας τους παραπάνω διαφορικούς τελεστές, παίρνουμε

$$[\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3})+2\varepsilon^3\partial_{t_2t_3}+\ldots](X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\varepsilon^3X_3+\ldots)$$

$$+\varepsilon[\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}](X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)-(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\varepsilon^3X_3+\ldots)=0$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\partial_{t_1}^2X_0-X_0=0 \tag{3.6.51}$$

$$\partial_{t_1}^2X_1-X_1=-(2\partial_{t_1t_2}X_0+\partial_{t_1}X_0) \tag{3.6.52}$$

$$\partial_{t_1}^2X_2-X_2=-(2\partial_{t_1t_2}X_1+\partial_{t_1}X_1)-(2\partial_{t_1t_3}X_0+\partial_{t_2}^2X_0+\partial_{t_2}X_0) \tag{3.6.53}$$

$$\partial_{t_1}^2X_3-X_3=-(2\partial_{t_1t_2}X_2+\partial_{t_1}X_2)-(2\partial_{t_1t_3}X_1+\partial_{t_2}^2X_1+\partial_{t_2}X_1)-(2\partial_{t_2t_3}X_0+\partial_{t_3}X_0) \tag{3.6.54}$$

Προτού επιλύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις σε όλα τα επίπεδα της ανάπτυξης, παρατηρούμε ότι οι εισερχόμενες διαχωριστικές τροχιές αντιστοιχούν στην αρνητική ιδιοτιμή του συστήματος. Οι λύσεις που σχετίζονται με αυτήν έχουν εκθετικό φθίνοντα χαρακτήρα, εξασφαλίζοντας ότι οι τροχιές πλησιάζουν το σαγματικό σημείο καθώς $t_i\to\infty, i=1,2,3$. Αντιθέτως, οι λύσεις με θετικό εκθέτη αυξάνονται εκθετικά και αντιστοιχούν στις εξερχόμενες διαχωριστικές, τις οποίες δεν εξετάζουμε σε αυτό το στάδιο. Για τον λόγο αυτό, στην κατασκευή των προσεγγιστικών λύσεων διατηρούμε μόνο τους αρνητικούς εκθετικούς όρους, ώστε οι λύσεις να παραμένουν φραγμένες για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ και να περιγράφουν σωστά τη δυναμική προσέγγισης προς το σημείο ισορροπίας.

Έτσι, η λύση της (3.6.51) είναι

$$X_0=A_0(t_2,t_3)\mathrm{e}^{-t_1} \tag{3.6.55}$$

Αντικαθιστούμε στην (3.6.52), και παίρνουμε

$$\partial_{t_1}^2X_1-X_1=(2\partial_{t_2}A_0+A_0)\mathrm{e}^{-t_1} \tag{3.6.56}$$

Ο όρος e^{-t_1} στο δεξί μέλος της εξίσωσης, ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης. Η παρουσία του οδηγεί στην εμφάνιση αιώνιων όρων της μορφής $t_1\mathrm{e}^{-t_1}$, οι

οποίοι καθιστούν την προσέγγιση μη έγκυρη για μεγάλους χρόνους. Για τον λόγο αυτό επιβάλλεται η συνθήκη μηδενισμού του συντελεστή του, δηλαδή

$$2\partial_{t_2} A_0 + A_0 = 0 \Rightarrow A_0(t_2, t_3) = B_0(t_3)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}}$$

Έτσι, η (3.6.55) γίνεται

$$X_0 = B_0(t_3)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}-t_1} \tag{3.6.57}$$

και η εξίσωση (3.6.56) ως ομογενής πλέον, έχει λύση

$$X_1 = A_1(t_2, t_3)\mathrm{e}^{-t_1} \tag{3.6.58}$$

Η (3.6.53) τότε γίνεται

$$\partial_{t_1}^2 X_2 - X_2 = (2\partial_{t_2} A_1 + A_1)\mathrm{e}^{-t_1} + \left(2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4}B_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}-t_1} = \left[2\partial_{t_2} A_1 + A_1 + \left(2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4}B_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}}\right]\mathrm{e}^{-t_1}$$

Για τον ίδιο λόγο με τον πρώτο διορθωτικό όρο, επιβάλλουμε τη συνθήκη μηδενισμού του συντελεστή του όρου που ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, δηλαδή

$$2\partial_{t_2} A_1 + A_1 + \left(2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4}B_0\right)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}} = 0$$

Επειδή η A_1 είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και η B_0 είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, για να ισχύει η εξίσωση, πρέπει

$$2\partial_{t_2} A_1 + A_1 = 0 \tag{3.6.59}$$

$$2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4}B_0 = 0 \tag{3.6.60}$$

Η λύση της (3.6.59) είναι

$$A_1(t_2, t_3) = B_1(t_3)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}}$$

και η λύση της (3.6.60) είναι

$$B_0(t_3) = C_0\mathrm{e}^{-\frac{t_3}{8}}$$

Έτσι, η (3.6.57) γίνεται

$$X_0 = C_0\mathrm{e}^{-t_1-\frac{t_2}{2}-\frac{t_3}{8}} \tag{3.6.61}$$

και η (3.6.58)

$$X_1 = B_1(t_3)\mathrm{e}^{-t_1-\frac{t_2}{2}} \tag{3.6.62}$$

Τώρα, με την ίδια διαδικασία θα προσδιορίσουμε την $B_1(t_3)$. Η εξίσωση (3.6.53), ως ομογενής πλέον, έχει λύση

$$X_2 = A_2(t_2, t_3)\mathrm{e}^{-t_1}$$

Αντικαθιστούμε στην (3.6.54) τις X_0, X_1, X_2 και έχουμε

$$\partial_{t_1}^2 X_3 - X_3 = (2\partial_{t_2} A_2 + A_2)\mathrm{e}^{-t_1} + \left(2\partial_{t_3} B_1 + \frac{1}{4} B_1\right)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}-t_1}$$

Αντίστοιχα με τον δεύτερο διορθωτικό όρο, πρέπει

$$2\partial_{t_3} B_1 + \frac{1}{4} B_1 = 0 \Rightarrow B_1(t_3) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{t_3}{8}}$$

και η (3.6.62) γίνεται

$$X_1 = C_1 \mathrm{e}^{-t_1 - \frac{t_2}{2} - \frac{t_3}{8}} \tag{3.6.63}$$

Η προσεγγιστική λύση (3.6.50) με αντικατάσταση των (3.6.61), (3.6.63) έχει τότε τη μορφή

$$x(t,\varepsilon) = C_0 \mathrm{e}^{-t_1 - \frac{t_2}{2} - \frac{t_3}{8}} + \varepsilon C_1 \mathrm{e}^{-t_1 - \frac{t_2}{2} - \frac{t_3}{8}} + O(\varepsilon^2) = (C_0 + \varepsilon C_1)\mathrm{e}^{-t_1 - \frac{t_2}{2} - \frac{t_3}{8}} + O(\varepsilon^2)$$

και παρατηρούμε πως οι σταθερές C_0, C_1 δεν προσδιορίζονται.

Θέτουμε $C = C_0 + \varepsilon C_1$ και τελικά για $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$, έχουμε την προσεγγιστική λύση

$$x(t,\varepsilon) = C\,\mathrm{e}^{-t_1 - \frac{t_2}{2} - \frac{t_3}{8}} + O(\varepsilon^2) \tag{3.6.64}$$

Για τη βελτίωση της ακρίβειας της προσεγγιστικής λύσης, ώστε αυτή να παραμένει έγκυρη για $t = O(\frac{1}{\varepsilon^2})$, επεκτείνουμε τη μέθοδο, εισάγοντας μία επιπλέον αργή χρονική κλίμακα $t_4 = \varepsilon^3 t$.

Συγκρίνοντας την (3.6.64) με την (3.6.49), παρατηρούμε πως η προσεγγιστική λύση που προέκυψε με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων, ταυτίζεται με το ανάπτυγμα *Taylor* της ακριβούς λύσης. Συνεπώς, η μέθοδος αναπαράγει με επιτυχία τη συμπεριφορά της ακριβούς λύσης στις εισερχόμενες διαχωριστικές, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητά της.

3.6.4.2 Προσεγγιστική λύση σε σαγματικό σημείο μη γραμμικού συστήματος

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων σε ένα μη γραμμικό σύστημα για να εντοπίσουμε την εισερχόμενη διαχωριστική τροχιά που οδηγείται προς το σαγματικό σημείο στο φασικό επίπεδο. Η ανάλυση αυτή επιτρέπει τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσης κοντά στο σαγματικό σημείο, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε για αριθμητικό υπολογισμό είτε για την απεικόνιση της διαχωριστικής τροχιάς.

Παράδειγμα μη γραμμικού συστήματος

Έστω η εξίσωση

$$\ddot{x}+\varepsilon(1-x^2)\dot{x}-x=0, \qquad 0\le\varepsilon\ll 1 \tag{3.6.65}$$

α. Θα βρούμε τη γενική χρονική λύση για τις δύο εισερχόμενες τροχιές στο σαγματικό σημείο, με σφάλμα $O(\varepsilon^2)$, όταν $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$.

β. Στο $t=0$, για δεδομένη τετμημένη $x(0,\varepsilon)=x_0$, θα προσδιορίσουμε το σημείο που ανήκει σε μια από τις εισερχόμενες τροχιές, καθώς και την αντίστοιχη χρονική λύση.

α. Η εξίσωση (3.6.65) γράφεται ως σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-\varepsilon(1-x^2)y \end{cases}$$

που έχει σημείο ισορροπίας το $(0,0)$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας δίνεται από

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+2\varepsilon xy & -\varepsilon(1-x^2) \end{bmatrix}$$

Στο $(0,0)$ προκύπτει

$$\boldsymbol{J}(0,0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\varepsilon \end{bmatrix}$$

οπότε το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=x-\varepsilon y \end{cases}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του Ιακωβιανού πίνακα είναι

$$det(\boldsymbol{J}-\lambda \mathrm{I})=0 \Rightarrow \lambda^2+\varepsilon\lambda-1=0$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_1=-\frac{\varepsilon}{2}-\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+1}<0 \quad \text{και} \quad \lambda_2=-\frac{\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+1}>0$$

Αφού οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες, το σημείο $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο, του μη γραμμικού συστήματος.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων, εισάγοντας τις χρονικές κλίμακες

$t_1=t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ (γρήγορη), $t_2=\varepsilon t=O(1)$ (αργή) και $t_3=\varepsilon^2 t=O(\varepsilon)$ (πολύ αργή), καθώς $\varepsilon\to 0$.

Θεωρούμε, τη λύση εξαρτημένη από τις μεταβλητές t_1,t_2,t_3 και την αναζητούμε στη μορφή

$$x(t,\varepsilon)=X(t_1,t_2,t_3,\varepsilon)=X_0(t_1,t_2,t_3)+\varepsilon X_1(t_1,t_2,t_3)+O(\varepsilon^2) \tag{3.6.66}$$

όπου $X_i(t_1,t_2,t_3)=O(1)\ \ ,i=0,1,2,\ldots$, αφού $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt}=\frac{dt_1}{dt}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{dt_3}{dt}\frac{\partial}{\partial t_3}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_3}=\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}$$

Αντίστοιχα η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}\right)^2=\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3})+2\varepsilon^3\partial_{t_2t_3}+\varepsilon^4\partial_{t_3}^2$$

Αντικαθιστούμε την (3.6.66) στην (3.6.65) και εφαρμόζοντας τους παραπάνω διαφορικούς τελεστές, παίρνουμε

$$[\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3})+\ldots](X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)$$
$$+\varepsilon(1-X_0^2-2\varepsilon X_0X_1-\ldots)[\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\ldots](X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)-(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)=0$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\partial_{t_1}^2X_0-X_0=0 \tag{3.6.67}$$

$$\partial_{t_1}^2X_1-X_1=-(2\partial_{t_1t_2}X_0+\partial_{t_1}X_0)+X_0^2\partial_{t_1}X_0 \tag{3.6.68}$$

$$\partial_{t_1}^2X_2-X_2=-(2\partial_{t_1t_2}X_1+\partial_{t_1}X_1)-(2\partial_{t_1t_3}X_0+\partial_{t_2}^2X_0+\partial_{t_2}X_0)+(X_0^2\partial_{t_1}X_0+2X_0X_1\partial_{t_1}X_0+X_0^2\partial_{t_2}X_0) \tag{3.6.69}$$

Όπως στο γραμμικό σύστημα κρατάμε μόνο τους φθίνοντες εκθετικούς όρους στις $X_i, i=0,1,\ldots$, ώστε όλες οι εισερχόμενες τροχιές να παραμένουν φραγμένες για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ και να προσεγγίζουν σωστά το σημείο ισορροπίας. Έτσι, η λύση της (3.6.67) είναι

$$X_0=A_0(t_2,t_3)\mathrm{e}^{-t_1} \tag{3.6.70}$$

Αντικαθιστούμε στην (3.6.68), και παίρνουμε

$$\partial_{t_1}^2X_1-X_1=(2\partial_{t_2}A_0+A_0)\mathrm{e}^{-t_1}-A_0^3\mathrm{e}^{-3t_1} \tag{3.6.71}$$

Ο όρος e^{-t_1} στο δεξί μέλος της εξίσωσης, ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης, και θα οδηγήσει σε αιώνιους όρους, οπότε πρέπει να μηδενιστεί ο συντελεστής του

$$2\partial_{t_2}A_0+A_0=0\Rightarrow A_0(t_2,t_3)=B_0(t_3)\mathrm{e}^{-\frac{t_2}{2}}$$

Έτσι, η (3.6.70) γίνεται

$$X_0=B_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_1-\frac{t_2}{2}} \tag{3.6.72}$$

και η εξίσωση (3.6.71)

$$\partial_{t_1}^2 X_1 - X_1 = -B_0^3 e^{-3t_1 - \frac{3t_2}{2}}$$

με λύση

$$X_1 = A_1(t_2, t_3) e^{-t_1} - \frac{1}{8} B_0^3 e^{-3t_1 - \frac{3t_2}{2}} \tag{3.6.73}$$

Αντικαθιστούμε τις (3.6.72), (3.6.73) στην (3.6.69) και γίνεται

$$\partial_{t_1}^2 X_2 - X_2 = \left[2\partial_{t_2} A_1 + A_1 + \left(2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4} B_0 \right) e^{-\frac{t_2}{2}} \right] e^{-t_1} - 2B_0^2 A_1 e^{-3t_1 - t_2} - \frac{3}{4} B_0^3 e^{-3t_1 - \frac{3t_2}{2}} + \frac{1}{4} B_0^5 e^{-5t_1 - \frac{5t_2}{2}} \tag{3.6.74}$$

Για τον ίδιο λόγο με τον πρώτο διορθωτικό όρο, επιβάλλουμε τη συνθήκη μηδενισμού του συντελεστή του όρου που ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, δηλαδή

$$2\partial_{t_2} A_1 + A_1 + \left(2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4} B_0 \right) e^{-\frac{t_2}{2}} = 0$$

Επειδή η A_1 είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών και η B_0 είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, για να ισχύει η εξίσωση, πρέπει

$$2\partial_{t_2} A_1 + A_1 = 0 \tag{3.6.75}$$

$$2\partial_{t_3} B_0 + \frac{1}{4} B_0 = 0 \tag{3.6.76}$$

Η λύση της (3.6.75) είναι

$$A_1(t_2, t_3) = B_1(t_3) e^{-\frac{t_2}{2}}$$

και η λύση της (3.6.76) είναι

$$B_0(t_3) = C_0 e^{-\frac{t_3}{8}}$$

όπου C_0 κάποια σταθερά.

Έτσι, η (3.6.72) γίνεται

$$X_0 = C_0 e^{-t_1 - \frac{t_2}{2} - \frac{t_3}{8}} \tag{3.6.77}$$

και η (3.6.73)

$$X_1 = B_1(t_3) e^{-t_1 - \frac{t_2}{2}} - \frac{1}{8} C_0^3 e^{-3t_1 - \frac{3t_2}{2} - \frac{3t_3}{8}} \tag{3.6.78}$$

Η γενική προσεγγιστική λύση (3.6.66) με αντικατάσταση των (3.6.77), (3.6.78) είναι

$$x(t, \varepsilon) = C_0 e^{-t - \frac{\varepsilon t}{2} - \frac{\varepsilon^2 t}{8}} + \varepsilon \left[B_1(\varepsilon^2 t) e^{-t - \frac{\varepsilon t}{2}} - \frac{1}{8} C_0^3 e^{-3t - \frac{3\varepsilon t}{2} - \frac{3\varepsilon^2 t}{8}} \right] + O(\varepsilon^2) \tag{3.6.79}$$

όταν $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$, καθώς $\varepsilon \to 0$.

β. Στη συνέχεια, με σφάλμα $O(\varepsilon^2)$, θα εφαρμόσουμε τις αρχικές συνθήκες, που είναι οποιοδήποτε σημείο (x_0, y_0) που ανήκει σε εισερχόμενη διαχωριστική για $t=0$. Θεωρούμε ότι το $x_0=x(0,\varepsilon)$ είναι δεδομένο, ενώ το $y_0=y(0,\varepsilon)=\dot{x}(0,\varepsilon)$ θα το προσδιορίσουμε συναρτήσει του x_0.

Από την (3.6.79) έχουμε με σφάλμα $O(\varepsilon^2)$, για $t=0$

$$x(0,\varepsilon)=C_0+\varepsilon[B_1(0)-\frac{1}{8}C_0^3]=x_0$$

από όπου προκύπτει

$$C_0=x_0 \text{ και } B_1(0)=\frac{1}{8}x_0^3 \tag{3.6.80}$$

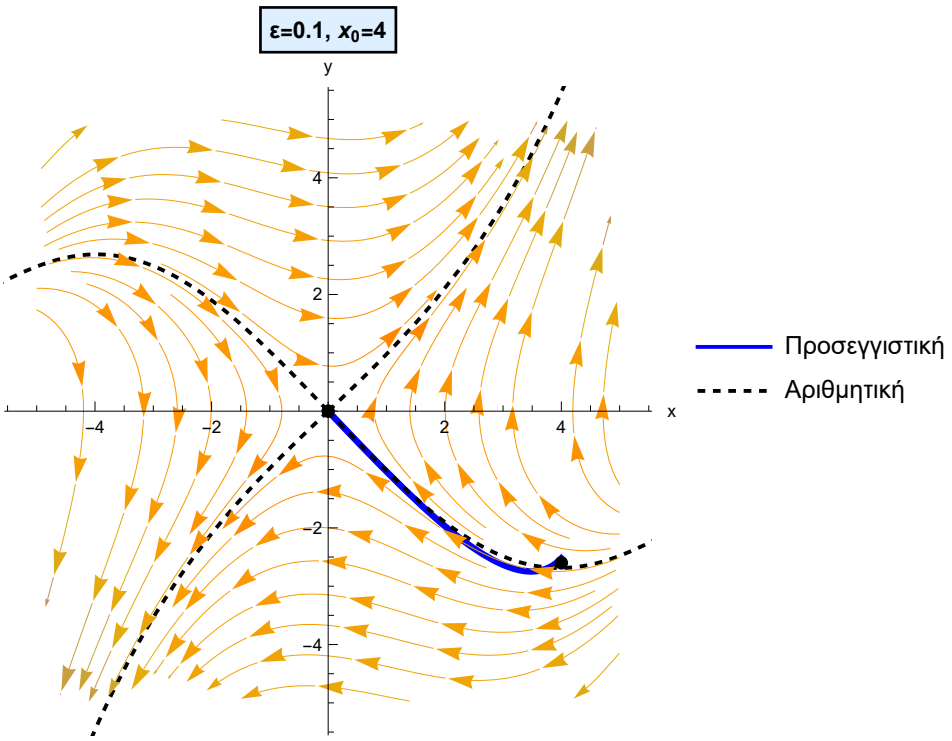
Από την παράγωγο της (3.6.79) παίρνουμε στο $t=0$, με σφάλμα $O(\varepsilon^2)$

$$y(0,\varepsilon)=\dot{x}(0,\varepsilon)=y_0=C_0(-1-\frac{1}{2}\varepsilon)+\varepsilon(-B_1(0)+\frac{3}{8}C_0^3)$$

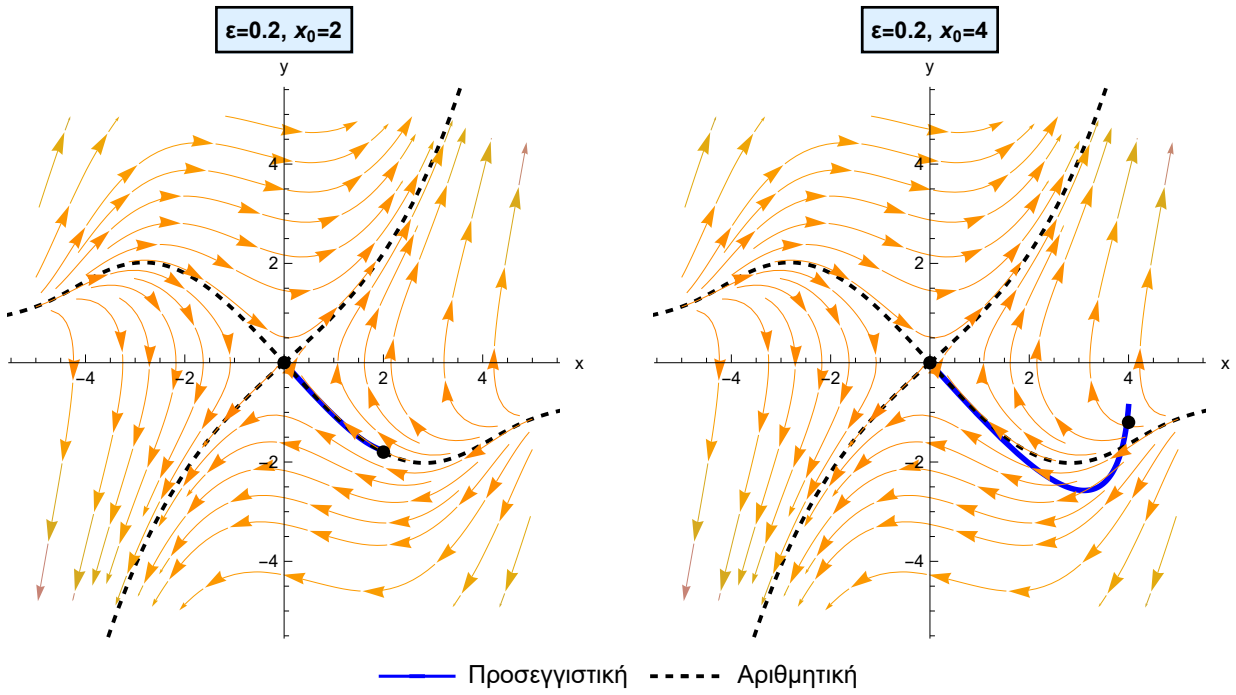
από όπου με εφαρμογή της (3.6.80) έχουμε

$$y_0=-x_0+\varepsilon(-\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{4}x_0^3) \tag{3.6.81}$$

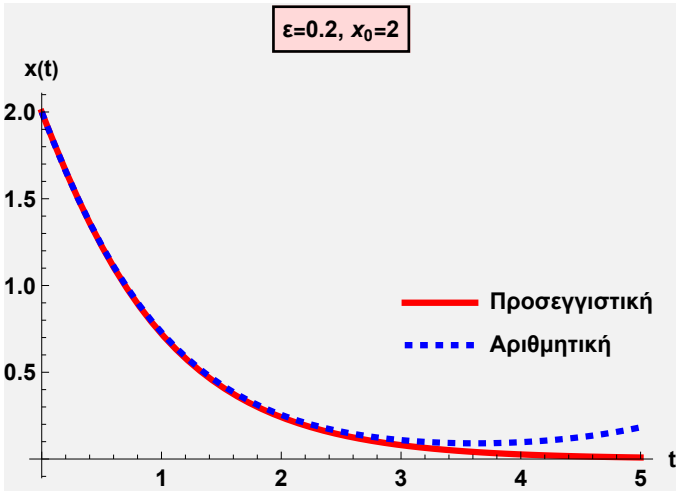
Με βάση τη σχέση (3.6.81), επιλέγοντας ένα σημείο (x_0, y_0) μπορούμε να κατασκευάσουμε την εισερχόμενη τροχιά προς το σαγματικό σημείο στο φασικό πορτραίτο, καθώς και να την υπολογίσουμε αριθμητικά χρησιμοποιώντας το ίδιο σημείο ως αρχική συνθήκη.



Σχήμα 3.6.9: Η αριθμητική λύση και η προσεγγιστική λύση για $x>0$, $y<0$ στο πορτραίτο φάσης



Σχήμα 3.6.10: Η αριθμητική λύση και η προσεγγιστική λύση για $x>0$, $y<0$ στο πορτραίτο φάσης



Σχήμα 3.6.11: Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης

Στα φασικά πορτραίτα (*Σχήματα 3.6.9-3.6.10*), παρατηρούμε ότι για μικρή τιμή της παραμέτρου $\varepsilon=0.1$ και αρχική συνθήκη $x_0=4$, η εισερχόμενη τροχιά για $x>0, y<0$ που προκύπτει από τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων ταυτίζεται σχεδόν πλήρως με την αντίστοιχη αριθμητική λύση, επιβεβαιώνοντας την υψηλή ακρίβεια της προσεγγιστικής μεθόδου.

Αυξάνοντας το ε σε *0.2*, η ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης εξαρτάται πλέον εντονότερα από την αρχική συνθήκη. Συγκεκριμένα, για $x_0=2$ η προσεγγιστική και η αριθμητική λύση παραμένουν σε

πολύ καλή συμφωνία, ενώ για $x_0=4$ η απόκλιση γίνεται σημαντική, κάτι που οφείλεται στην αύξηση της μη γραμμικότητας με την παράμετρο ε και στη μεγαλύτερη απόσταση από το σημείο ισορροπίας. Αντίστοιχα, στις χρονικές λύσεις για $\varepsilon=0.2, x_0=2$ (*Σχήμα 3.6.11*), η προσεγγιστική και η αριθμητική λύση παραμένουν αρκετά κοντά, επιβεβαιώνοντας πως η ακρίβεια της προσεγγιστικής λύσης εξαρτάται καθοριστικά από την τιμή της παραμέτρου ε αλλά και από την αρχική συνθήκη.

Συνοψίζοντας, η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων παρέχει αξιόπιστη περιγραφή της δυναμικής του μη γραμμικού συστήματος, υπό την προϋπόθεση ότι η παράμετρος ε παραμένει μικρή και οι αρχικές συνθήκες βρίσκονται σε επαρκώς μικρή γειτονία του σημείου ισορροπίας.

3.6.4.3 Προσεγγιστική λύση σε κόμβο

Παράδειγμα γραμμικού συστήματος

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{x}+\dot{x}+\varepsilon x=0, \quad 0\le t<\infty, \quad 0\le\varepsilon\ll 1 \tag{3.6.82}$$

$$x(0,\varepsilon)=x_0, \quad \dot{x}(0,\varepsilon)=0 \tag{3.6.83}$$

Ακριβής λύση

Η εξίσωση (*3.6.82*) γράφεται ως σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-y-\varepsilon x \end{cases}$$

που έχει σημείο ισορροπίας το $(0,0)$.

Το σύστημα είναι γραμμικό και μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}, \text{ όπου } A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon & -1 \end{bmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι

$$det(A-\lambda \mathrm{I})=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda+\varepsilon=0$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1-4\varepsilon}\right) \text{ και } \lambda_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{1-4\varepsilon}\right)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά *Taylor* ως προς ε, προκύπτει ότι

$$\lambda_1=-\varepsilon-\varepsilon^2+O(\varepsilon^3) \text{ και } \lambda_2=-1+\varepsilon+\varepsilon^2+O(\varepsilon^3)$$

Οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές πραγματικές, άρα το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι **ευσταθής κόμβος**.

Επιπλέον, επειδή όλες οι τροχιές του συστήματος στην περιοχή του σημείου ισορροπίας συγκλίνουν προς το $(0,0)$ καθώς $t \to \infty$, το σημείο ισορροπίας αποτελεί **καταβόθρα** (**sink**).

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα προκύπτει από:

$$(A-\lambda_i \mathrm{I})u_i=0$$

επομένως λύνοντας το σύστημα, τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\end{bmatrix} \text{ και } u_2=\begin{bmatrix}1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα ιδιοδιανύσματα, μπορούμε να προσδιορίσουμε στο φασικό επίπεδο, τις **αναλλοίωτες,** που είναι οι ευθείες που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, περνάνε από το σημείο ισορροπίας $(0,0)$, και έχουν κλίση ίση με τις ιδιοτιμές:

$$y=\lambda_1 x, \qquad y=\lambda_2 x$$

Αυτές οι ευθείες δείχνουν τις κατευθύνσεις κατά μήκος των οποίων οι τροχιές προσεγγίζουν μονοτονικά τον ευσταθή κόμβο.

Η γενική λύση του συστήματος δίνεται από την

$$\bar{x}(t)=A\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_1\end{bmatrix}+B\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix}1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

δηλαδή η ακριβής λύση της εξίσωσης (3.6.82) είναι

$$x_{exact}(t)=A\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+B\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

και αντίστοιχα η παράγωγος

$$\dot{x}_{exact}(t)=A\,\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}+B\,\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες (3.6.83) και έχουμε

$$x_{exact}(0)=A+B=x_0 \text{ και } \dot{x}_{exact}(0)=A\,\lambda_1+B\,\lambda_2=0$$

Επομένως

$$A=\frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_2-\lambda_1} \text{ και } B=-\frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2-\lambda_1}$$

οπότε η ακριβής λύση για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ είναι

$$x_{exact}(t)=\frac{x_0}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}-\lambda_1\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t})$$

$$=x_0\left[\frac{-1+\varepsilon+\varepsilon^2}{-1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}+\frac{\varepsilon+\varepsilon^2}{-1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}\mathrm{e}^{-t+\varepsilon t+\varepsilon^2 t}\right]$$

Επειδή

$$\frac{-1+\varepsilon+\varepsilon^2}{-1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}=\frac{-1+\varepsilon}{-1+2\varepsilon}+O(\varepsilon^2)=\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}+O(\varepsilon^2)=\frac{1}{1-2\varepsilon}(1-\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$$

το ανάπτυγμα *Taylor* για μικρά ε, είναι

$$\frac{1}{1-2\varepsilon}=1+2\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

άρα

$$\frac{1}{1-2\varepsilon}(1-\varepsilon)=(1+2\varepsilon)(1-\varepsilon)+O(\varepsilon^2)=1+\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

Αντίστοιχα

$$\frac{\varepsilon+\varepsilon^2}{-1+2\varepsilon+2\varepsilon^2}=-\varepsilon+O(\varepsilon^2)$$

και τότε έχουμε

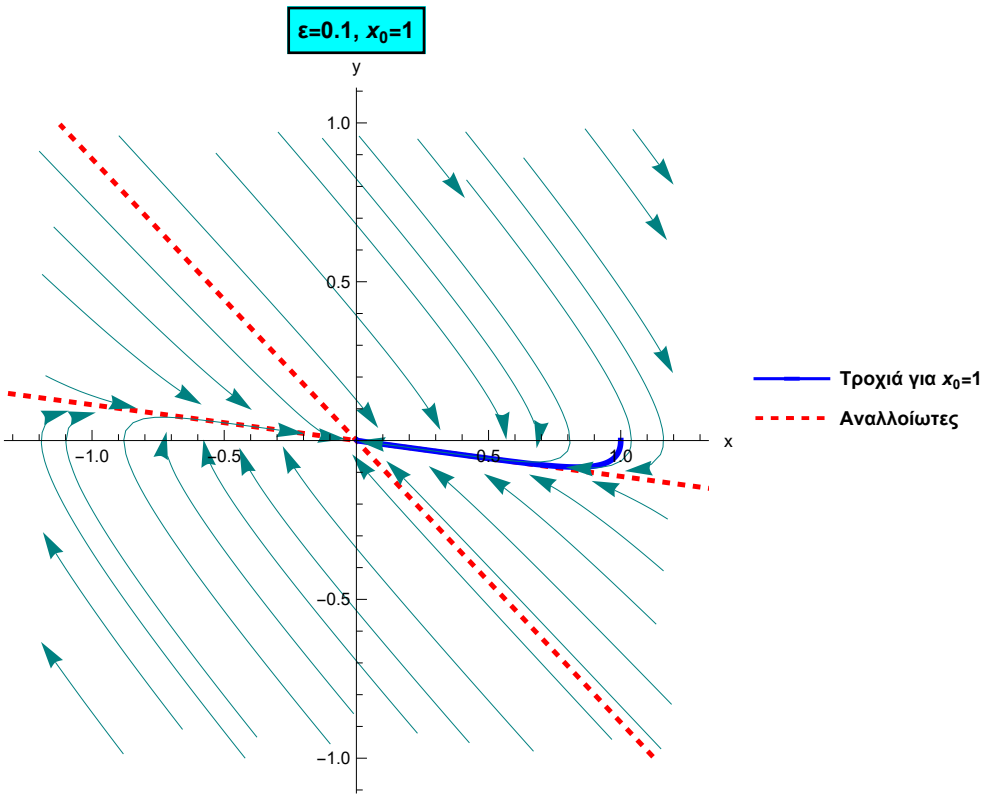
$$x_{exact}(t)=x_0[(1+\varepsilon+O(\varepsilon^2))\mathrm{e}^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}+(-\varepsilon+O(\varepsilon^2))\mathrm{e}^{-t+\varepsilon t+\varepsilon^2 t}]$$
$$=x_0[\mathrm{e}^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}-\varepsilon\,\mathrm{e}^{-t+\varepsilon t+\varepsilon^2 t}+O(\varepsilon^2)]$$

Επειδή $t=O(\frac{1}{\varepsilon})\Rightarrow\varepsilon^2 t=O(\varepsilon)\Rightarrow\mathrm{e}^{-\varepsilon^2 t}=1+O(\varepsilon)$, έπεται πως

$$x_{exact}(t)=x_0[\mathrm{e}^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t}(1+O(\varepsilon))-\varepsilon\,\mathrm{e}^{-t+\varepsilon t}(1+O(\varepsilon))+O(\varepsilon^2)]$$

Συνεπώς

$$x_{exact}(t)=x_0[\mathrm{e}^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}+\varepsilon(\mathrm{e}^{-\varepsilon t}-\mathrm{e}^{-t+\varepsilon t})+O(\varepsilon^2)] \qquad (3.6.84)$$



Σχήμα 3.6.12: Το πορτραίτο φάσης με την τροχιά του συστήματος, για $x_0=1$

Στο *Σχήμα* 3.6.12 φαίνεται ότι η τροχιά ξεκινώντας από τις αρχικές συνθήκες $x(0,\varepsilon)=1, \dot{x}(0,\varepsilon)=0$ ευθυγραμμίζεται πολύ γρήγορα με μία από τις αναλλοίωτες ευθείες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σύστημα έχει δύο διαφορετικές αρνητικές ιδιοτιμές: μία γρήγορη ($\lambda_2 \approx -1$) και μία αργή $(\lambda_2 \approx -\varepsilon)$. Ο γρήγορος όρος της λύσης φθίνει σχεδόν αμέσως, αφήνοντας την τροχιά να κινείται κατά μήκος του αργού ιδιοδιανύσματος μέχρι το ευσταθές σημείο ισορροπίας $(0,0)$. Με άλλα λόγια, η τροχιά «πέφτει» πάνω στην αναλλοίωτη γραμμή που αντιστοιχεί στον αργό άξονα, και ακολουθεί αυτήν μέχρι να φτάσει στον κόμβο.

Η συμπεριφορά αυτή φανερώνει την ύπαρξη διακριτών χρονικών βαθμίδων, όπως προκύπτει και από τη μορφή της λύσης, γεγονός που οδηγεί φυσικά στην εφαρμογή της μεθόδου των πολλαπλών κλιμάκων.

Προσεγγιστική λύση

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο στο πρόβλημα (3.6.82-3.6.83), έτσι ώστε η προσεγγιστική λύση να ισχύει για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Γι' αυτό εισάγουμε τις χρονικές κλίμακες

$t_1=t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ (γρήγορη), $t_2=\varepsilon t=O(1)$ (αργή) και $t_3=\varepsilon^2 t=O(\varepsilon)$ (πολύ αργή), καθώς $\varepsilon \to 0$.

Θεωρούμε τη λύση εξαρτημένη από τις μεταβλητές t_1, t_2, t_3 και την αναζητούμε στη μορφή

$$x(t,\varepsilon)=X(t_1,t_2,t_3,\varepsilon)=X_0(t_1,t_2,t_3)+\varepsilon X_1(t_1,t_2,t_3)+O(\varepsilon^2) \qquad (3.6.85)$$

όπου $X_i(t_1,t_2,t_3)=O(1)$ $, i=0,1,2,\ldots$, αφού $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ καθώς $\varepsilon \to 0$.

Η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{d}{dt}=\frac{dt_1}{dt}\frac{\partial}{\partial t_1}+\frac{dt_2}{dt}\frac{\partial}{\partial t_2}+\frac{dt_3}{dt}\frac{\partial}{\partial t_3}=\frac{\partial}{\partial t_1}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t_2}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t_3}=\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}$$

Αντίστοιχα η δεύτερη παράγωγος

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}\right)^2=\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3})+2\varepsilon^3\partial_{t_2t_3}+\varepsilon^4\partial_{t_3}^2$$

Αντικαθιστούμε την (3.6.85) στην (3.6.82) και εφαρμόζοντας τους παραπάνω διαφορικούς τελεστές, παίρνουμε

$$[\partial_{t_1}^2+2\varepsilon\partial_{t_1t_2}+\varepsilon^2(\partial_{t_2}^2+2\partial_{t_1t_3})+\ldots](X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)$$
$$+[\partial_{t_1}+\varepsilon\partial_{t_2}+\varepsilon^2\partial_{t_3}](X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)+\varepsilon(X_0+\varepsilon X_1+\varepsilon^2X_2+\ldots)=0$$

από όπου προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων:

$$\partial_{t_1}^2X_0+X_0=0 \qquad (3.6.86)$$

$$\partial_{t_1}^2X_1+X_1=-(2\partial_{t_1t_2}X_0+\partial_{t_2}X_0+X_0) \qquad (3.6.87)$$

$$\partial_{t_1}^2 X_2 + X_2 = -(2\partial_{t_1 t_2} X_1 + \partial_{t_2} X_1 + X_1) - (2\partial_{t_1 t_3} X_0 + \partial_{t_2}^2 X_0 + \partial_{t_3} X_0) \qquad (3.6.88)$$

Η εξίσωση (3.6.86) έχει λύση

$$X_0 = A_0(t_2, t_3) + B_0(t_2, t_3)\mathrm{e}^{-t_1}$$

και η (3.6.87) τότε γίνεται

$$\partial_{t_1}^2 X_1 + X_1 = -(\partial_{t_2} A_0 + A_0) + (\partial_{t_2} B_0 - B_0)\mathrm{e}^{-t_1}$$

όπου βλέπουμε πως η X_1 θα περιέχει όρους t_1 και $t_1 \mathrm{e}^{-t_1}$, άρα δεν θα είναι φραγμένη για $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$.

Για να αποφευχθεί αυτό, θα πρέπει

$$\partial_{t_2} A_0 + A_0 = 0 \Rightarrow A_0(t_2, t_3) = C_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_2} \text{ και}$$

$$\partial_{t_2} B_0 - B_0 = 0 \Rightarrow B_0(t_2, t_3) = D_0(t_3)\mathrm{e}^{t_2}$$

Έτσι, ο X_0 γίνεται

$$X_0 = C_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_2} + D_0(t_3)\mathrm{e}^{-t_1+t_2} \qquad (3.6.89)$$

και η διαφορική εξίσωση (3.6.87) είναι πλέον ομογενής, με λύση

$$X_1 = A_1(t_2, t_3) + B_1(t_2, t_3)\mathrm{e}^{-t_1} \qquad (3.6.90)$$

Αντικαθιστούμε τις (3.6.89), (3.6.90) στην (3.6.88) και παίρνουμε

$$\partial_{t_1}^2 X_2 + X_2 = -(\partial_{t_2} A_1 + A_1) + (\partial_{t_2} B_1 - B_1)\mathrm{e}^{-t_1} - (\partial_{t_3} C_0 + C_0)\mathrm{e}^{-t_2} + (\partial_{t_3} D_0 - D_0)\mathrm{e}^{-t_1+t_2}$$

Όπως για τον πρώτο διορθωτικό όρο, για να μην περιέχει ο X_2 τους όρους t_1 και $t_1 \mathrm{e}^{-t_1}$, θα πρέπει να μηδενίσουμε τις παρενθέσεις

$$\begin{cases} \partial_{t_2} A_1 + A_1 = 0 \Rightarrow A_1(t_2, t_3) = \alpha(t_3)\mathrm{e}^{-t_2} \\ \partial_{t_2} B_1 - B_1 = 0 \Rightarrow B_1(t_2, t_3) = \beta(t_3)\mathrm{e}^{t_2} \\ \partial_{t_3} C_0 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0(t_3) = \gamma\,\mathrm{e}^{-t_3} \\ \partial_{t_3} D_0 - D_0 = 0 \Rightarrow D_0(t_3) = \delta\,\mathrm{e}^{t_3} \end{cases} \qquad (3.6.91)$$

Αντικαθιστούμε τις (3.6.91) στις (3.6.89), (3.6.90) και η (3.6.85) γίνεται

$$x(t, \varepsilon) = \gamma\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t - \varepsilon^2 t} + \delta\,\mathrm{e}^{-t + \varepsilon t + \varepsilon^2 t} + \varepsilon[\alpha(t_3)\mathrm{e}^{-\varepsilon t} + \beta(t_3)\mathrm{e}^{-t+\varepsilon t}] + O(\varepsilon^2)$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες (3.6.83)

$$\dot{x}(0, \varepsilon) = -\delta + \varepsilon[\delta - \gamma - \beta(0)] = 0 \Rightarrow \delta = 0, \;\; \beta(0) = -\gamma$$

$$x(0, \varepsilon) = \gamma + \delta + \varepsilon[\alpha(0) + \beta(0)] = x_0 \Rightarrow \gamma = x_0, \;\; \alpha(0) = -\beta(0) = \gamma = x_0$$

Για $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$ η αργή χρονική μεταβλητή είναι $t_3 = \varepsilon^2 t = O(\varepsilon)$, δηλαδή πολύ μικρή. Επομένως, οι συναρτήσεις $\alpha(\varepsilon^2 t), \beta(\varepsilon^2 t)$ μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά *Taylor* γύρω από το μηδέν.

$$\alpha(\varepsilon^2 t) = \alpha(0) + (\varepsilon^2 t)\alpha'(0) + O((\varepsilon^2 t)^2) \quad \text{και} \quad \beta(\varepsilon^2 t) = \beta(0) + (\varepsilon^2 t)\beta'(0) + O((\varepsilon^2 t)^2)$$

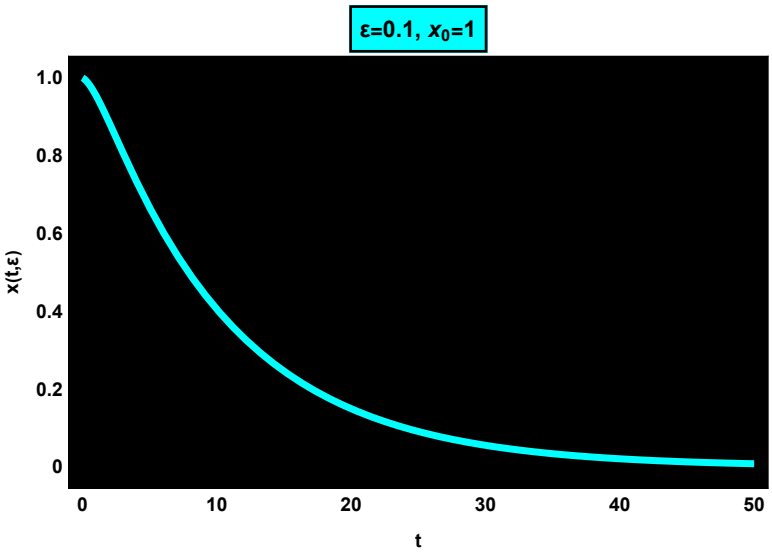
Επειδή $\varepsilon^2 t = O(\varepsilon)$ έπεται πως

$$\alpha(\varepsilon^2 t)=\alpha(0)+O(\varepsilon)=x_0+O(\varepsilon) \quad \text{και} \quad \beta(\varepsilon^2 t)=\beta(0)+O(\varepsilon)=-x_0+O(\varepsilon)$$

Έτσι, η προσεγγιστική λύση είναι τελικά

$$x(t,\varepsilon)=x_0 e^{-\varepsilon t-\varepsilon^2 t}+\varepsilon x_0[e^{-\varepsilon t}-e^{-t+\varepsilon t}]+O(\varepsilon^2)$$

η οποία παρατηρούμε πως ταυτίζεται με την (3.6.84), και την βλέπουμε στο *Σχήμα* 3.6.13.



Σχήμα 3.6.13: Η προσεγγιστική χρονική λύση του συστήματος

3.7 Μέθοδος Μεσοστάθμισης (Averaging)

Μετά την ανάπτυξη της μεθόδου των πολλαπλών χρονικών κλιμάκων, η οποία αποτελεί μία συστηματική τεχνική ιδιόμορφων διαταραχών για την αποφυγή εμφάνισης αιώνιων όρων, είναι χρήσιμο να παρουσιαστεί μία στενά συγγενής προσέγγιση που λειτουργεί ως φυσική συνέχεια της ανάλυσης: η μέθοδος **μεσοστάθμισης (averaging),** γνωστή και ως μέθοδος *Krylov–Bogolyubov* (*KB*). Η μέθοδος αυτή πρωτοδημοσιεύθηκε το *1937* και επεκτάθηκε μαθηματικά από τους *Bogolyubov* και *Mitropolski (KBM)*, προσφέροντας τη δυνατότητα όχι μόνο για τον υπολογισμό περιοδικών λύσεων σε σταθερή κατάσταση, αλλά και για την περιγραφή της μεταβατικής συμπεριφοράς του συστήματος προς αυτές τις λύσεις. Σε αυτόν τον τομέα, η μέθοδος υπερτερεί της κλασικής μεθόδου *Lindstedt–Poincaré*, η οποία παρέχει μόνο τις περιοδικές λύσεις χωρίς πληροφορίες για τη σταθερότητα ή τις λύσεις οριακού κύκλου.

Στην *Ενότητα* 2.2.2, η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων εφαρμόστηκε στην εξίσωση *Duffing*, οδηγώντας σε δύο διαφορικές εξισώσεις για το πλάτος $(\alpha(t))$ και τη φάση $(\beta(t))$. Οι εξισώσεις αυτές περιέχουν όρους που μεταβάλλονται ταχέως με τον χρόνο λόγω της βασικής συχνότητας του συστήματος και παρέχουν μία περιγραφή της αργής δυναμικής.

Η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων βασίζεται στην εισαγωγή ανεξάρτητων χρονικών μεταβλητών και στην ανάπτυξη της λύσης σε σειρά ως προς τη μικρή παράμετρο. Αντίθετα, η μέθοδος μεσοστάθμισης δεν απαιτεί ρητή ανάπτυξη της λύσης σε σειρά διαταραχής. Αντ' αυτού, εκμεταλλεύεται τον διαχωρισμό των χρονικών κλιμάκων που χαρακτηρίζει τα ασθενώς μη γραμμικά συστήματα και εστιάζει στην περιγραφή της αργής εξέλιξης των χαρακτηριστικών της ταλάντωσης, όπως το πλάτος και η φάση, ξεκινώντας από τις εξισώσεις που προέκυψαν με τη μεταβολή των παραμέτρων. Η βασική ιδέα είναι ότι οι γρήγορα μεταβαλλόμενοι όροι αντικαθίστανται από τη μέση τιμή τους σε μία περίοδο, οδηγώντας σε ένα απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων για την αργή δυναμική, ευκολότερο στην ανάλυση.

Αν και η μεσοστάθμιση δεν βασίζεται σε ανάπτυγμα σειράς, εντάσσεται στο πλαίσιο των ιδιομόρφων διαταραχών, καθώς η εγκυρότητά της στηρίζεται στην ύπαρξη διακριτών χρονικών κλιμάκων και στην ανάγκη ομοιόμορφης προσέγγισης της λύσης για μεγάλους χρόνους.

Για να γίνει πιο κατανοητή η διαδικασία, θα την εφαρμόσουμε στην εξίσωση *Duffing*, ξεκινώντας από τις εξισώσεις για το πλάτος και τη φάση που προέκυψαν με τη μεταβολή των παραμέτρων.

Εφαρμογή της μεσοστάθμισης στην αυτόνομη εξίσωση Duffing
Θεωρούμε την αυτόνομη εξίσωση *Duffing* χωρίς απόσβεση $$\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0 \qquad (3.7.1)$$

Η (3.7.1) για $\varepsilon=0$, έχει λύση

$$x(t)=\alpha\cos(t+\beta) \qquad (3.7.2)$$

όπου α και β είναι σταθερές.

Όταν $\varepsilon\neq 0$ υποθέτουμε ότι η λύση της εξακολουθεί να δίνεται από την (3.7.2), αλλά τώρα οι α,β είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή

$$x(t)=\alpha(t)\cos[t+\beta(t)] \qquad (3.7.3)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της *Ενότητας* 2.2.2 καταλήγουμε στο σύστημα

$$\dot{\alpha}(t)=\varepsilon\alpha^3(t)\cos^3[t+\beta(t)]\sin[t+\beta(t)] \qquad (3.7.4)$$

$$\dot{\beta}(t)=\varepsilon\alpha^2(t)\cos^4[t+\beta(t)] \qquad (3.7.5)$$

Χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$sin\theta\cos^3\theta=\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta$$

$$\cos^4\theta=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta$$

και οι (3.7.4), (3.7.5) γίνονται

$$\dot{\alpha}=\frac{1}{8}\varepsilon\alpha^3(2\sin 2\theta+\sin 4\theta) \tag{3.7.6}$$

$$\dot{\beta}=\frac{1}{8}\varepsilon\alpha^2(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta) \tag{3.7.7}$$

όπου $\theta=t+\beta$. Επειδή $-1\leq\sin n\theta\leq 1$ και $-1\leq\cos n\theta\leq 1$, αν το α είναι φραγμένο, έπεται πως $\dot{\alpha}=O(\varepsilon)$ και $\dot{\beta}=O(\varepsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ αλλάζουν πολύ αργά στον χρόνο, αν το ε είναι μικρό, σε σύγκριση με τους γρήγορους τριγωνομετρικούς όρους. Συνεπώς, τα αντίστοιχα τμήματα της λύσης που περιγράφουν αυτή την αργή εξέλιξη, και τα οποία ονομάζονται κύρια μέρη (*major parts*) των α και β, μεταβάλλονται ελάχιστα κατά τη διάρκεια μίας περιόδου π των παραπάνω τριγωνομετρικών όρων.

Συνεπώς, στο διάστημα [0,π], μπορούμε στην πρώτη προσέγγιση της μεσοστάθμισης να θεωρήσουμε ότι το πλάτος και η φάση παραμένουν ουσιαστικά σταθερά.

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τον μέσο όρο των σχέσεων (3.7.6) και (3.7.7), ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη τους ως προς t, στο [0,π], και ταυτόχρονα διαιρώντας με το μήκος του διαστήματος ολοκλήρωσης, δηλαδή με π. Έτσι, παίρνουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\dot{\alpha}\,dt=\frac{1}{8\pi}\varepsilon\int_0^{\pi}\alpha^3(2\sin 2\theta+\sin 4\theta)\,dt \tag{3.7.8}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\dot{\beta}\,dt=\frac{1}{8\pi}\varepsilon\int_0^{\pi}\alpha^2(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,dt \tag{3.7.9}$$

Εφόσον θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ παραμένουν σταθερές στο διάστημα [0,π], οι παράγωγοι $\dot{\alpha},\dot{\beta}$ θεωρούνται ανεξάρτητες του χρόνου t μέσα σε αυτό το διάστημα. Κατά συνέπεια οι όροι $\alpha,\dot{\alpha},\dot{\beta}$ βγαίνουν έξω από το ολοκλήρωμα, και οι σχέσεις (3.7.8), (3.7.9) γίνονται

$$\dot{\alpha}=\frac{1}{8\pi}\varepsilon\alpha^3\int_0^{\pi}(2\sin 2\theta+\sin 4\theta)\,dt \tag{3.7.10}$$

$$\dot{\beta}=\frac{3}{8}\varepsilon\alpha^2+\frac{1}{8\pi}\varepsilon\alpha^2\int_0^{\pi}(4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,dt \tag{3.7.11}$$

Τώρα, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από t σε $\theta=t+\beta$, οπότε $dt=d\theta$, αφού η συνάρτηση β θεωρείται σταθερή στο [0,π], και οι σχέσεις (3.7.10), (3.7.11) γίνονται τελικά

$$\dot{\alpha}=\frac{1}{8\pi}\varepsilon\alpha^3\int_{\beta}^{\pi+\beta}(2\sin 2\theta+\sin 4\theta)\,d\theta=-\frac{1}{8\pi}\varepsilon\alpha^3\left[\left(\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos 4\theta\right)\right]_{\beta}^{\pi+\beta}=0 \tag{3.7.12}$$

$$\dot{\beta}=\frac{1}{8}\varepsilon\alpha^2+\frac{1}{8\pi}\varepsilon\alpha^2\int_{\beta}^{\pi+\beta}(4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,d\theta=$$

$$\frac{3}{8}\varepsilon\alpha^2+\frac{1}{8\pi}\varepsilon\alpha^2\left[\left(2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right]_{\beta}^{\pi+\beta}=\frac{3}{8}\varepsilon\alpha^2 \qquad (3.7.13)$$

Από την (3.7.12) έπεται πως

$$\alpha=\alpha_0=\text{σταθερά} \qquad (3.7.14)$$

και από την (3.7.13) με εφαρμογή της (3.7.14) έχουμε

$$\beta=\frac{3}{8}\varepsilon\alpha_0^2\,t+\beta_0 \qquad (3.7.15)$$

όπου β_0 κάποια σταθερά.

Αντικαθιστούμε τις (3.7.14) και (3.7.15) στην (3.7.3) και έχουμε την προσεγγιστική λύση

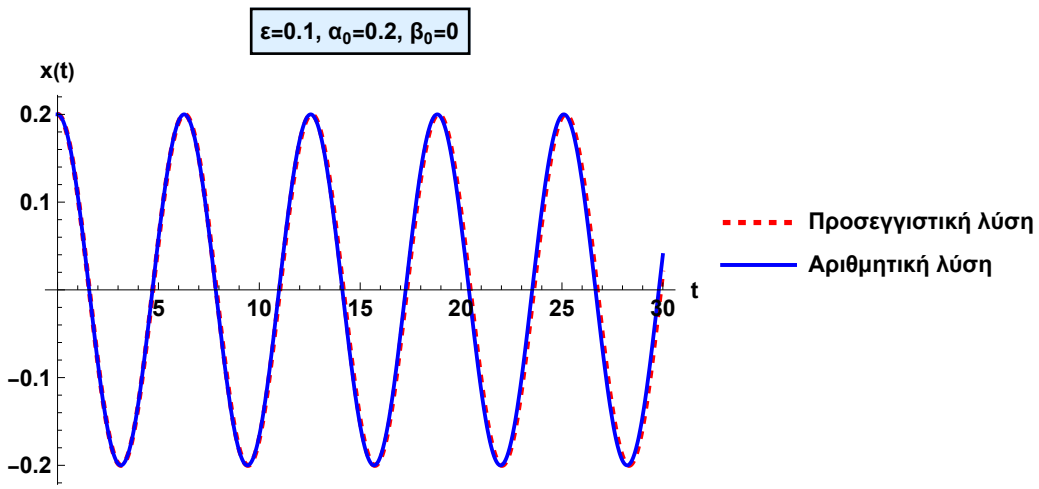
$$x(t)=\alpha_0\cos\left[\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\alpha_0^2\right)t+\beta_0\right] \qquad (3.7.16)$$

Αν θεωρήσουμε αρχικές συνθήκες $x(0)=\alpha_0$ και $\dot{x}(0)=0$, τότε

$$x_0=\alpha_0\cos\beta_0 \text{ και } 0=\alpha_0\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon\alpha_0^2\right)\sin\beta_0, \text{ άρα}$$

$$x_0=\alpha_0 \quad \text{και} \quad \beta_0=0$$

Στο *Σχήμα 3.7.1* παρατηρούμε σε σύγκριση με την αριθμητική λύση της εξίσωσης *Duffing*, πως η προσέγγιση (3.7.16) με την μέθοδο της μεσοστάθμισης είναι εξαιρετικά ακριβής.



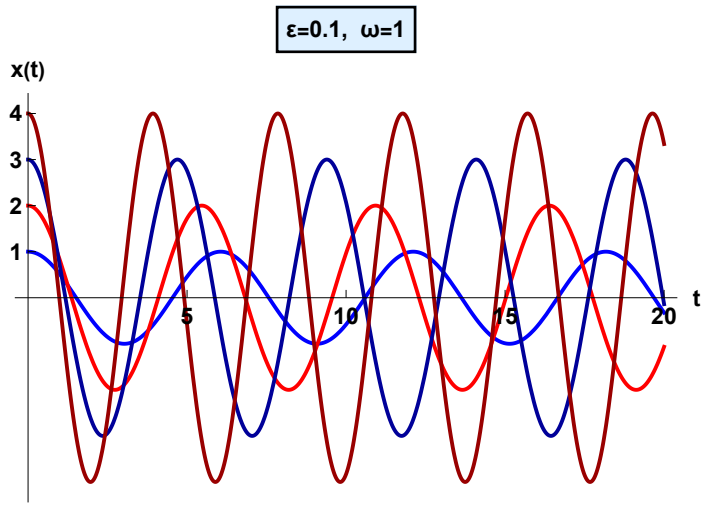
Σχήμα 3.7.1: Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης

Αν αντί για την εξίσωση $\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0$, είχαμε την γενικότερη μορφή $\ddot{x}+\omega^2 x+\varepsilon x^3=0$, θα προέκυπτε η προσεγγιστική λύση

$$x(t)=\alpha_0\cos[(\omega+\frac{3}{8\omega}\varepsilon\alpha_0^2)\,t+\beta_0] \tag{3.7.17}$$

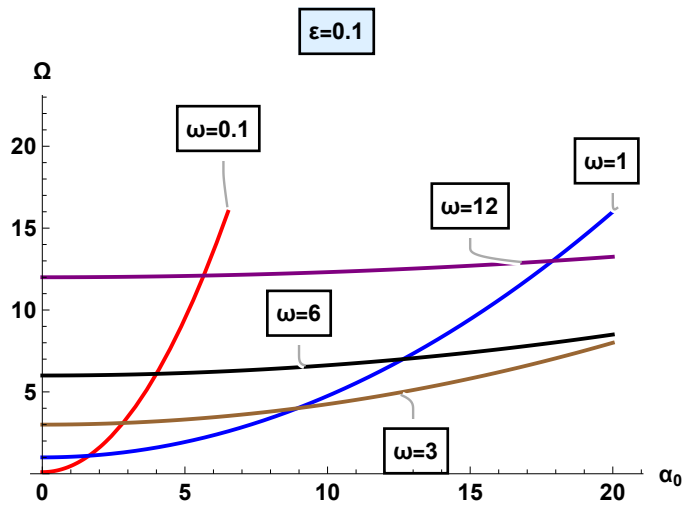
και παρατηρούμε πως ταυτίζεται με τη λύση (3.6.47) που βρήκαμε με τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων. Αν Ω είναι γενικά η συχνότητα της ταλάντωσης του μη γραμμικού συστήματος, βλέπουμε πως η Ω είναι συνάρτηση του πλάτους α_0 και της ιδιοσυχνότητας ω του αδιατάρακτου προβλήματος

$$\Omega=\omega+\frac{3}{8\omega}\varepsilon\alpha_0^2 \tag{3.7.18}$$



Σχήμα 3.7.2: Περιοδική απόκριση για διαφορετικές τιμές του πλάτους

Στο *Σχήμα* 3.7.2 παρουσιάζεται η μόνιμη περιοδική απόκριση της εξίσωσης *Duffing* για διαφορετικές τιμές του πλάτους, και βλέπουμε πως η αύξηση του πλάτους συνεπάγεται αύξηση της συχνότητας Ω, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από την εξίσωση (3.7.18), αλλά και από το *Σχήμα* 3.7.3. Επιπλέον, παρατηρούμε πως η ευαισθησία της Ω ως προς το πλάτος α_0 μειώνεται με την αύξηση της ω.



Σχήμα 3.7.3: Η συχνότητα Ω συναρτήσει του α_0, για διαφορετικές τιμές της ω

Το πρόβλημα που εξετάσαμε αποτελεί πρόβλημα αρχικών τιμών, αλλά η μέθοδος της μεσοστάθμισης δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή της μεταβατικής απόκρισης του συστήματος, δηλαδή της συμπεριφοράς του πριν αυτό καταλήξει στη μόνιμη περιοδική του κατάσταση. Συνεπώς, η προσέγγιση αυτή επιτρέπει τον προσδιορισμό μόνο της μόνιμης απόκρισης των διαφορικών εξισώσεων.

3.8 Μέθοδος Krylov–Bogoliubov–Mitropolski (KBM)

Στην προσπάθεια βελτίωσης της πρώτης προσέγγισης που προέκυψε με τη μέθοδο μεσοστάθμισης, οι *Krylov* και *Bogoliubov* (*1947*) ανέπτυξαν μια συστηματική τεχνική για τον προσδιορισμό της λύσης σε οποιαδήποτε τάξη προσέγγισης. Η μέθοδος αυτή, γνωστή πλέον ως ***Krylov–Bogoliubov–Mitropolski (KBM)*** μέθοδος**,** επεκτάθηκε και τεκμηριώθηκε περαιτέρω από τους *Bogoliubov* και *Mitropolski* (*1961*) και εφαρμόστηκε σε μη σταθερές ταλαντώσεις από τον *Mitropolski* (*1965*). Η βασική ιδέα είναι να υποτεθεί μια ασυμπτωτική ανάπτυξη της λύσης, στην οποία οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μεγέθυνση και τη φάση της ταλάντωσης γίνονται συναρτήσεις του χρόνου, επιτρέποντας έτσι την ταυτόχρονη παρακολούθηση των γρήγορων και των αργών κλιμάκων της κίνησης. Με αυτόν τον τρόπο η *KBM* μέθοδος παρέχει ομοιόμορφα έγκυρες λύσεις σε μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα σε σχέση με την μεσοστάθμιση, υπερβαίνοντας τους περιορισμούς που προκύπτουν όταν θεωρούμε τις αργές μεταβλητές σταθερές σε κάθε κύκλο.

Έστω η μη γραμμική εξίσωση

$$\ddot{x}+\omega^2 x+\varepsilon f(x,\dot{x})=0 \qquad (3.8.1)$$

Για την εφαρμογή της *KBM* μεθόδου, υποθέτουμε ότι η κυρίως ταλάντωση διατηρεί τη μορφή της λύσης $x(t)=\alpha\cos\theta$ του γραμμικού προβλήματος ($\varepsilon=0$), με $\theta=\omega t+\beta$, έτσι η λύση της (3.8.1) μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή του γενικευμένου αναπτύγματος (οι συναρτήσεις $x_i(\alpha,\theta)$ εξαρτώνται έμμεσα από την παράμετρο ε μέσω των αργά μεταβαλλόμενων μεγεθών $\alpha(t),\theta(t)$)

$$x=\alpha\cos\theta+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i x_i(\alpha,\theta)+O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (3.8.2)$$

όπου κάθε x_i είναι μια περιοδική συνάρτηση του θ με περίοδο 2π, και θεωρούμε ότι οι παράμετροι α και θ είναι συναρτήσεις που μεταβάλλονται με τον χρόνο, οι οποίες ικανοποιούν διαφορικές εξισώσεις με χωριζόμενες μεταβλητές

$$\dot{\alpha}=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i A_i(\alpha)+O(\varepsilon^{m+1}) \qquad (3.8.3)$$

$$\dot{\theta}=\omega+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{i}\Theta_{i}(\alpha)+O(\varepsilon^{m+1}) \tag{3.8.4}$$

Αρχικά επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις, x_i, A_i, Θ_i για $i=1,2,\ldots$ έτσι ώστε η εξίσωση (3.8.1) να ικανοποιείται με σφάλμα τάξης $O(\varepsilon^{i+1})$. Ο αναδρομικός προσδιορισμός των συναρτήσεων αυτών δεν παρουσιάζει θεωρητικές δυσκολίες, ωστόσο, στην πράξη οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται συνήθως μόνο για $i=1$ ή για $i=2$ καθώς τα αποτελέσματα για υψηλότερες τάξεις καθίστανται ιδιαίτερα πολύπλοκα.

Για να είναι το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (3.8.2) ομοιόμορφα έγκυρο για μεγάλους χρόνους, και να καθοριστούν μοναδικά οι A_i, και Θ_i, απαιτούμε καμιά από τις x_i να μην περιέχει όρο $\cos\theta$, ώστε να αποφευχθούν αιώνιοι όροι.

Αφού μετασχηματίσουμε τις παραγώγους σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\alpha}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{d\theta}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta}=\dot{\alpha}\,\partial_{\alpha}+\dot{\theta}\,\partial_{\theta} \tag{3.8.5}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\dot{\alpha}\,\partial_{\alpha}+\dot{\theta}\,\partial_{\theta})=\ddot{\alpha}\,\partial_{\alpha}+\ddot{\theta}\,\partial_{\theta}+\dot{\alpha}^2\partial_{\alpha}^2+2\dot{\alpha}\,\dot{\theta}\,\partial_{\alpha\theta}+\dot{\theta}^2\partial_{\theta}^2 \tag{3.8.6}$$

όπου μέχρι $O(\varepsilon^2)$ έχουμε

$$\ddot{\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)=\frac{d\alpha}{dt}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)=\frac{d\alpha}{dt}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{i}\frac{dA_i}{d\alpha}=\varepsilon^2 A_1\frac{dA_1}{d\alpha}+O(\varepsilon^3) \tag{3.8.7}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d\alpha}{dt}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d\alpha}{dt}\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^{i}\frac{d\Theta_i}{d\alpha}=\varepsilon^2 A_1\frac{d\Theta_1}{d\alpha}+O(\varepsilon^3) \tag{3.8.8}$$

αντικαθιστούμε το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα (3.8.2) στην εξίσωση (3.8.1), ομαδοποιούμε όρους κατά τάξη του ε και επιλέγουμε $\dot{\alpha},\dot{\theta}$ ώστε να αποφευχθούν οι αιώνιοι όροι. Η λύση προκύπτει με την ολοκλήρωση των εξισώσεων για $\alpha(t)$ και $\theta(t)$, δίνοντας ομοιόμορφα έγκυρη προσέγγιση της ταλάντωσης.

Για να γίνουν κατανοητά όλα τα βήματα της μεθόδου *KBM*, θα την εφαρμόσουμε στην εξίσωση *Duffing*, όπου εφαρμόσαμε και τη μέθοδο μεσοστάθμισης, ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα σε μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Εφαρμογή της μεθόδου KBM στην αυτόνομη εξίσωση Duffing

Θεωρούμε την αυτόνομη εξίσωση *Duffing* χωρίς απόσβεση

$$\ddot{x}+x+\varepsilon x^3=0 \tag{3.8.9}$$

Αναζητούμε λύση με τη μορφή ασυμπτωτικού αναπτύγματος μέχρι όρους $O(\varepsilon^2)$, δηλαδή

$$x=\alpha\cos\theta+\varepsilon x_1(\alpha,\theta)+\varepsilon^2 x_2(\alpha,\theta)+O(\varepsilon^3) \tag{3.8.10}$$

με

$$\dot{\alpha}=\varepsilon A_1(\alpha)+\varepsilon^2 A_2(\alpha)+O(\varepsilon^3) \tag{3.8.11}$$

$$\dot{\theta}=1+\varepsilon\Theta_1(\alpha)+\varepsilon^2\Theta_2(\alpha)+O(\varepsilon^3) \tag{3.8.12}$$

Εφαρμόζουμε τις (3.8.10), (3.8.11) και (3.8.12), στην (3.8.9), λαμβάνοντας υπόψιν και τις σχέσεις (3.8.7), (3.8.8), για τις δεύτερες παραγώγους των α,θ. Στη συνέχεια εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του ε, προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\partial_\theta^2 x_1+x_1=2\Theta_1\alpha\cos\theta+2A_1\sin\theta-\alpha^3\cos^3\theta \tag{3.8.13}$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta^2 x_2+x_2=&\left[(2\Theta_2+\Theta_1^2)\alpha-A_1\frac{dA_1}{d\alpha}\right]\cos\theta\\&+\left[2(A_2+A_1\Theta_1)+\alpha A_1\frac{d\Theta_1}{d\alpha}\right]\sin\theta\\&-3x_1\alpha^2\cos^2\theta-2\Theta_1\partial_\theta^2 x_1-2A_1\partial_{\alpha\theta}x_1\end{aligned} \tag{3.8.14}$$

Εφαρμόζουμε στην (3.8.13) την ταυτότητα

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

και γίνεται

$$\begin{aligned}\partial_\theta^2 x_1+x_1&=2\Theta_1\alpha\cos\theta+2A_1\sin\theta-\alpha^3\left(\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta\right)\\&=\left(2\Theta_1\alpha-\frac{3}{4}\alpha^3\right)\cos\theta+2A_1\sin\theta-\frac{1}{4}\alpha^3\cos 3\theta\end{aligned}$$

Για να αποφευχθούν οι αιώνιοι όροι πρέπει να μηδενιστούν οι συντελεστές των $cos\theta$, $\sin\theta$, έτσι

$$A_1=0 \quad \text{και} \quad \Theta_1=\frac{3}{8}\alpha^2 \tag{3.8.15}$$

και η λύση της (3.8.13) είναι τότε

$$x_1=\frac{\alpha^3}{32}\cos 3\theta \tag{3.8.16}$$

Αντικαθιστούμε τις (3.8.15) και (3.8.16) στην (3.8.14) και γίνεται

$$\partial_\theta^2 x_2+x_2=\left(2\Theta_2+\frac{15\alpha^4}{128}\right)\alpha\cos\theta-2A_2\sin\theta+\frac{\alpha^5}{128}(21\cos 3\theta-3\cos 5\theta) \tag{3.8.17}$$

Για να αποφευχθούν οι αιώνιοι όροι, όπως πριν, πρέπει

$$A_2=0 \quad \text{και} \quad \Theta_2=-\frac{15}{256}\alpha^4 \tag{3.8.18}$$

και η λύση της (3.8.17) είναι

$$x_2 = -\frac{\alpha^5}{1024}\left(21\cos 3\theta - \cos 5\theta\right) \tag{3.8.19}$$

Τελικά το ανάπτυγμα πρώτης τάξης (3.8.10) γίνεται

$$x = \alpha\cos\theta + \varepsilon\frac{\alpha^3}{32}\cos 3\theta - \varepsilon^2\frac{\alpha^5}{1024}\left(21\cos 3\theta - \cos 5\theta\right) + O\left(\varepsilon^3\right) \tag{3.8.20}$$

όπου από τις (3.8.15) και (3.8.18)

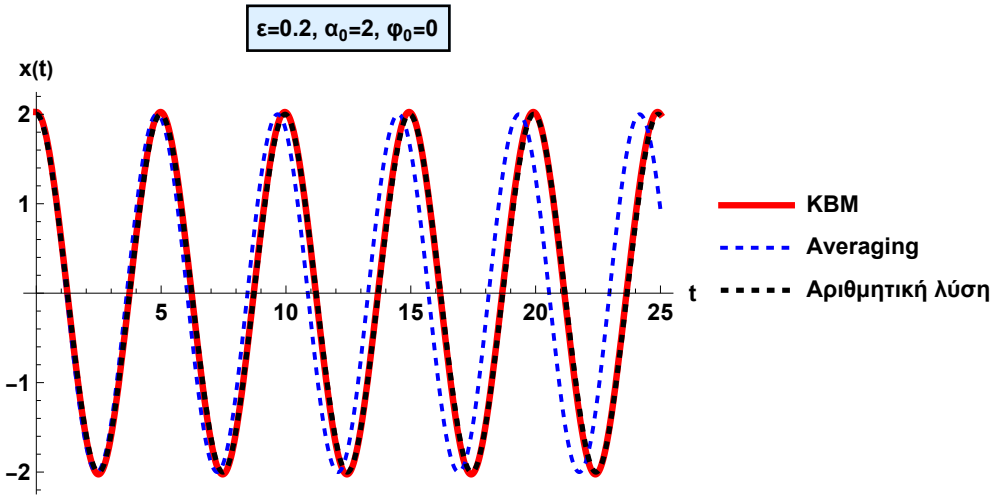
$$\dot{\alpha} = 0, \text{ από όπου έπεται πως } \alpha = \alpha_0 = \text{σταθερά}$$

$$\dot{\theta} = 1 + \varepsilon\frac{3}{8}\alpha^2 - \varepsilon^2\frac{15}{256}\alpha^4 + O\left(\varepsilon^3\right) \text{ από όπου έπεται πως}$$

$$\theta = \left(1 + \varepsilon\frac{3}{8}\alpha^2 - \varepsilon^2\frac{15}{256}\alpha^4\right)t + \theta_0 + O\left(\varepsilon^3\right)$$

με θ_0 κάποια σταθερά.

Παρατηρούμε πως η πρώτη προσέγγιση της (3.8.20) ταυτίζεται με το ανάπτυγμα (3.7.16) που βρήκαμε με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης.



Σχήμα 3.8.1: Σύγκριση της αριθμητικής λύσης της $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$ με τις προσεγγιστικές λύσεις με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης και την KBM

Βλέπουμε στο *Σχήμα* 3.8.1 ότι η λύση της μεσοστάθμισης αποκλίνει για μεγαλύτερους χρόνους, ενώ η *KBM* παραμένει ομοιόμορφα έγκυρη για σημαντικά μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Το γεγονός αυτό αναδεικνύει την ανάγκη επέκτασης της μεσοστάθμισης, ώστε να ληφθούν υπόψη ανώτερης τάξης διορθώσεις και να περιγραφεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος.

3.9 Μέθοδος της συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων

Στις προηγούμενες ενότητες εξετάστηκαν προβλήματα διαταραχών τα οποία, για χρονικά διαστήματα της μορφής $0 \le t \le T$ με T σταθερό, συμπεριφέρονται ως κανονικά, αλλά όταν το χρονικό διάστημα επεκτείνεται σε $0 \le t \le \frac{1}{\varepsilon}$ με $\varepsilon \to 0$, τα ίδια προβλήματα εμφανίζουν ιδιόμορφη συμπεριφορά. Στην παρούσα ενότητα επικεντρωνόμαστε σε ιδιόμορφα προβλήματα που ορίζονται σε σταθερό διάστημα, τα οποία αντιμετωπίζονται με τη μέθοδο της συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων.

Κύριο χαρακτηριστικό των προβλημάτων αυτών είναι ότι η παράγωγος υψηλότερης τάξης πολλαπλασιάζεται από μια μικρή παράμετρο. Η παρουσία αυτού του μικρού παράγοντα οδηγεί σε έντονες μεταβολές της λύσης σε πολύ στενές περιοχές του πεδίου ορισμού, ενώ στο υπόλοιπο διάστημα η λύση μεταβάλλεται ομαλά. Οι περιοχές αυτές μπορεί να εντοπίζονται είτε κοντά στο αρχικό σημείο (**αρχικό στρώμα**), είτε στα όρια του πεδίου (**συνοριακό στρώμα**), είτε στο εσωτερικό του (**εσωτερικό στρώμα**). Κοινό γνώρισμα των προβλημάτων αυτών είναι ότι το αδιατάρακτο πρόβλημα που προκύπτει για $\varepsilon = 0$ δεν είναι γενικά καλά ορισμένο, καθώς δεν ικανοποιεί όλες τις αρχικές ή συνοριακές συνθήκες Για τον λόγο αυτό, η άμεση εφαρμογή κλασικών ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων αποτυγχάνει να δώσει ομοιόμορφα έγκυρες προσεγγίσεις. Επιπλέον, για μικρές τιμές του ε, τα προβλήματα αυτά ανήκουν στην κατηγορία των δύσκαμπτων (*stiff*) προβλημάτων, γεγονός που καθιστά την αριθμητική τους επίλυση ιδιαίτερα απαιτητική.

3.9.1 Το οριακό στρώμα

Η θεωρία του οριακού στρώματος θεμελιώθηκε επίσημα στη Χαϊδελβέργη της Γερμανίας το *1904*, όταν ο *Ludwig Prandtl* (*1875–1953*), καθηγητής και πρόεδρος της Μηχανικής στο Πολυτεχνείο του Ανόβερου, έδωσε μια δεκάλεπτη ομιλία στο Τρίτο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών με τίτλο «*Για την κίνηση ρευστού με πολύ μικρή τριβή*». Στη θεωρία αυτή, ο *Prandtl* έδειξε ότι, παρόλο που το ιξώδες των συνηθισμένων ρευστών είναι πολύ μικρό, οι επιδράσεις του δεν μπορούν να αγνοηθούν κοντά σε στερεά όρια. Ενώ οι εξισώσεις της ιδανικής ροής περιγράφουν ικανοποιητικά τη συμπεριφορά του ρευστού μακριά από τα όρια, αποτυγχάνουν να αποδώσουν σωστά τη ροή στην περιοχή επαφής με το στερεό, όπου επιβάλλεται μηδενική εφαπτομενική ταχύτητα. Ο *Prandtl* εισήγαγε έτσι την έννοια του οριακού στρώματος ως μιας λεπτής περιοχής κοντά στο όριο, μέσα στην οποία η ταχύτητα μεταβάλλεται απότομα. Με τον διαχωρισμό του πεδίου ροής σε μια εξωτερική περιοχή (όπου το ιξώδες είναι αμελητέο) και μια εσωτερική περιοχή (όπου κυριαρχούν

οι ιξώδεις επιδράσεις), κατέστη δυνατή η σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης των εξισώσεων ροής. Αν και η αρχική προσέγγιση του *Prandtl* βασιζόταν σε έντονη φυσική διαίσθηση, η συστηματική θεμελίωση της μεθόδου πραγματοποιήθηκε αργότερα με τη συμβολή του *Friedrichs* (*1941*), ο οποίος εισήγαγε κατάλληλους μετασχηματισμούς για τη σύνδεση των εσωτερικών και εξωτερικών λύσεων. Η μέθοδος αυτή εξελίχθηκε περαιτέρω και καθιερώθηκε τη δεκαετία του *1950* ως η **μέθοδος της συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων ή θεωρία του οριακού στρώματος**, η οποία αποτελεί σήμερα βασικό εργαλείο των εφαρμοσμένων μαθηματικών για την αντιμετώπιση προβλημάτων με στενά στρώματα ταχείας μεταβολής και ιδιόμορφες διαταραχές.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την έννοια και εφαρμογή της θεωρίας οριακού στρώματος, μέσω ενός υποδειγματικού προβλήματος, το οποίο είναι επιλύσιμο.

Εφαρμογή θεωρίας οριακού στρώματος

Θεωρούμε το γραμμικό πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\varepsilon y''+2y'+2y=0, \quad 0<x<1, \quad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{3.9.1}$$

$$y(0)=0, \quad y(1)=1 \tag{3.9.2}$$

Παρατηρούμε πως αν $\varepsilon=0$, η εξίσωση (3.9.1) γίνεται

$$2y'+2y=0 \Rightarrow y'+y=0$$

δηλαδή ανάγεται σε εξίσωση πρώτης τάξης, η οποία δεν μπορεί να ικανοποιήσει και τις δύο συνοριακές συνθήκες ταυτόχρονα. Αυτό δείχνει ότι το αδιατάρακτο πρόβλημα παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά σε σχέση με το αρχικό διαταραγμένο πρόβλημα.

Εφαρμογή μεθόδου κανονικών διαταραχών

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots \tag{3.9.3}$$

Εφαρμόζουμε στην (3.9.1) και έχουμε

$$\varepsilon(y_0''+\varepsilon y_1''+\ldots)+2(y_0'+\varepsilon y_1'+\ldots)+2(y_0+\varepsilon y_1+\ldots)=0$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, και έχουμε την εξίσωση του πρωτεύοντα όρου

$$y_0'+y_0=0 \tag{3.9.4}$$

Εφαρμόζοντας την (3.9.3) στις συνοριακές συνθήκες (3.9.2) παίρνουμε

$$y_0(0)=0 \tag{3.9.5}$$

$$y_0(1)=1 \tag{3.9.6}$$

Η γενική λύση της (3.9.4) είναι

$$y_0(x)=c\,\mathrm{e}^{-x} \tag{3.9.7}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Παρατηρούμε πως η (3.9.4) συνοδεύεται από δύο συνοριακές συνθήκες, τις (3.9.5) και (3.9.6), ενώ η λύση (3.9.7) έχει μια σταθερά. Επομένως, η y_0 δεν μπορεί να ικανοποιήσει και τις δύο συνοριακές συνθήκες. Πράγματι, έστω ότι ικανοποιεί την (3.9.5). Τότε

$$y_0(0)=0 \Rightarrow c=0 \Rightarrow y_0(x)=0 \Rightarrow y_0(1)=0 \neq 1$$

Δηλαδή η συνοριακή συνθήκη στο $x=1$ δεν ικανοποιείται.

Αν ικανοποιεί την (3.9.6), τότε

$$y_0(1)=1 \Rightarrow c=\mathrm{e} \Rightarrow y_0(x)=\mathrm{e}^{1-x} \Rightarrow y_0(0)=\mathrm{e} \neq 0$$

Δηλαδή η συνοριακή συνθήκη στο $x=0$ δεν ικανοποιείται.

Η γενική λύση για τον πρωτεύοντα όρο, λοιπόν, δεν μπορεί να ικανοποιήσει ταυτόχρονα και τις δύο συνοριακές συνθήκες, γεγονός που υποδηλώνει ότι η κανονική μέθοδος διαταραχών αποτυγχάνει από το πρώτο βήμα. Με άλλα λόγια, το ανάπτυγμα (3.9.3) δεν ισχύει στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$.

Αυτό, όμως, θέτει το ερώτημα ποια από τις δύο συνοριακές συνθήκες πρέπει να παραληφθεί, το οποίο μπορεί να απαντηθεί είτε με φυσικά είτε με μαθηματικά επιχειρήματα. Στο παρόν παράδειγμα, που διαθέτει ακριβή λύση, μπορούμε να προσδιορίσουμε άμεσα τη σωστή συμπεριφορά της λύσης. Η εξέταση της ακριβούς λύσης θα μας επιτρέψει να κατανοήσουμε πώς η λύση διαμορφώνεται στο σύνολο του διαστήματος, να εντοπίσουμε την περιοχή όπου η μεταβολή είναι ταχεία (το οριακό στρώμα) και να κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες εξωτερικές και εσωτερικές προσεγγίσεις που θα οδηγήσουν σε μια ομοιόμορφα έγκυρη λύση.

Ακριβής λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (3.9.1) είναι

$$\varepsilon\lambda^2+2\lambda+2=0$$

με ρίζες

$$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{1-2\varepsilon}}{\varepsilon}=-1+O(\varepsilon) \quad \text{και} \quad \lambda_2=\frac{-1-\sqrt{1-2\varepsilon}}{\varepsilon}=-\frac{2}{\varepsilon}+1+O(\varepsilon)$$

Η γενική λύση της (3.9.1) είναι τότε

$$y(x,\varepsilon)=C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες (3.9.2)

$$C_1+C_2=0 \text{ και } C_1 e^{\lambda_1}+C_2 e^{\lambda_2}=1, \text{ άρα } C_1=-C_2=\frac{1}{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}}, \text{ οπότε}$$

$$y(x,\varepsilon)=\frac{e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2}} \tag{3.9.8}$$

Με βάση την (3.9.8), εξετάζουμε τη συμπεριφορά της λύσης όταν $\varepsilon \to 0$, προκειμένου να κατανοήσουμε τη δομή της και την επίδραση της μικρής παραμέτρου.

Έτσι, για $\varepsilon \to 0$, είναι $\lambda_1 \to -1$ και $\lambda_2 \to -\infty$, άρα στο διάστημα $0 \le x \le 1$ η ακριβής λύση (3.9.8) προσεγγίζεται από την

$$y(x,\varepsilon)=e^{1-x}-e^{1+x-\frac{2x}{\varepsilon}} \tag{3.9.9}$$

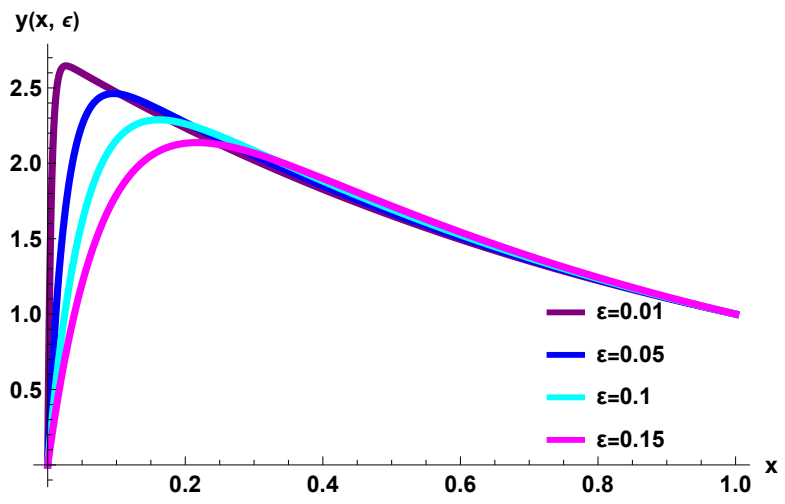
Ωστόσο, η παραπάνω προσέγγιση δεν είναι έγκυρη σε ολόκληρο το διάστημα. Πράγματι, από τη συνοριακή συνθήκη έχουμε $y(0,\varepsilon)=0$, αλλά επειδή $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2x}{\varepsilon}=0$, τότε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x,\varepsilon)=e^{1-x}$$

που για $x \to 0$ δίνει $e \neq 0$, δηλαδή

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\lim_{x \to 0} y(x,\varepsilon)\right)=0 \neq \lim_{x \to 0}\left(\lim_{\varepsilon \to 0} y(x,\varepsilon)\right)=e$$

Η ασυμφωνία αυτή δείχνει ότι η ακριβής λύση $y(x,\varepsilon)$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $0 \le x \le 1$, όταν $\varepsilon \to 0$. Ειδικότερα, η αποτυχία ικανοποίησης της συνοριακής συνθήκης στο $x=0$ υποδηλώνει την ύπαρξη μιας στενής περιοχής κοντά στο σημείο αυτό, μέσα στην οποία η λύση μεταβάλλεται απότομα, ώστε να προσαρμοστεί στη συνοριακή συνθήκη. Η περιοχή αυτή λέγεται **οριακό στρώμα**. Το υπόλοιπο διάστημα, όπου η λύση μεταβάλλεται αργά, ονομάζεται **εξωτερικό χωρίο**. Η συμπεριφορά αυτή απεικονίζεται στο *Σχήμα 3.9.1*, όπου παρουσιάζεται η ακριβής λύση για διάφορες τιμές της παραμέτρου ε.



Σχήμα 3.9.1: Η ακριβής λύση $y(x,\varepsilon)$ για διαφορετικές τιμές του ε

Στη συνέχεια επιδιώκουμε την κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων της ακριβούς λύσης στο εξωτερικό χωρίο και στο οριακό στρώμα. Όπως προέκυψε από την προηγούμενη ανάλυση, η λύση παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά στις δύο αυτές περιοχές, γεγονός που καθιστά αναγκαία την ξεχωριστή μελέτη τους.

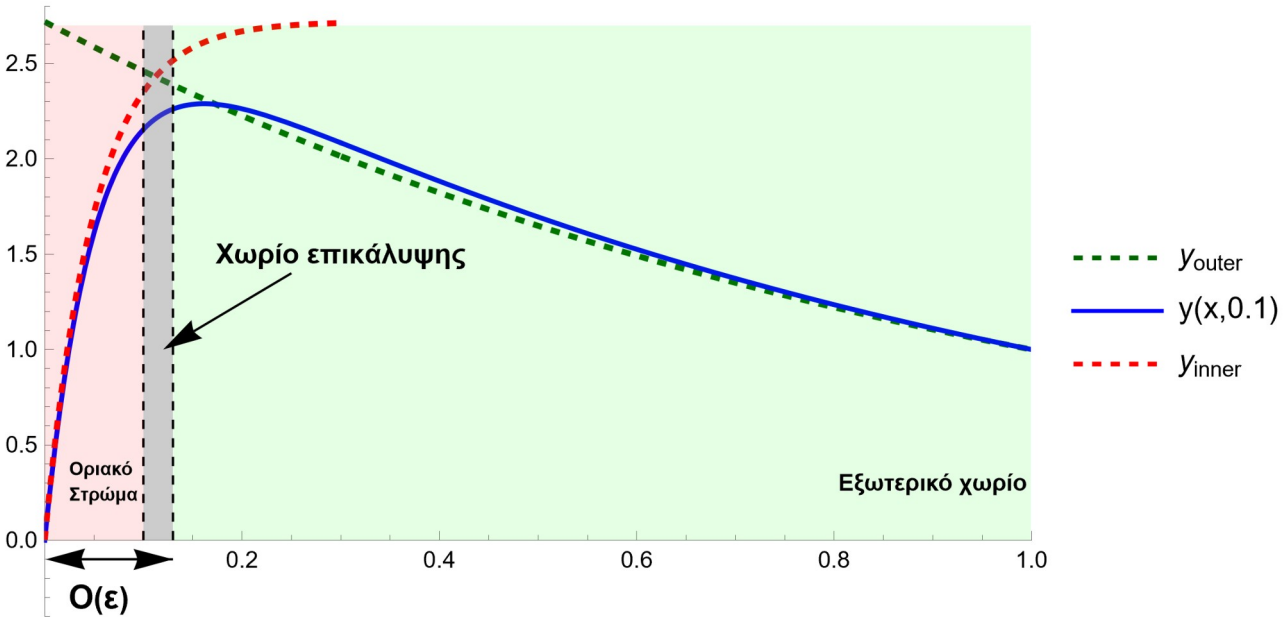
Στο εξωτερικό χωρίο είναι $x=O(1)$, οπότε $e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}\approx 0$ όταν $\varepsilon\to 0$, άρα η (3.9.9) γίνεται

$$y_{outer}(x,\varepsilon)=e^{1-x} \tag{3.9.10}$$

Στο οριακό στρώμα, ο όρος $e^{-\frac{2x}{\varepsilon}}$ δεν είναι μικρός, άρα δεν μπορεί να αγνοηθεί. Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε το $x\approx 0$, αφού η περιοχή είναι στενή, κι έτσι η (3.9.9) γίνεται

$$y_{inner}(x,\varepsilon)=e-e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}} \tag{3.9.11}$$

Τις (3.9.10) και (3.9.11) τις ονομάζουμε **εξωτερική** και **εσωτερική προσέγγιση** αντίστοιχα, ενώ, όπως θα δούμε παρακάτω, την περιοχή στην οποία και οι δύο προσεγγίσεις είναι ταυτόχρονα έγκυρες, την ονομάζουμε **χωρίο επικάλυψης** (*Σχήμα 3.9.2*).



Σχήμα 3.9.2: Η ακριβής λύση, η εξωτερική και εσωτερική προσέγγιση για $\varepsilon=0.1$, και το χωρίο επικάλυψης

Εκτίμηση μεγέθους των όρων της εξίσωσης

Αφού προσδιορίστηκε η εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση, επόμενο βήμα είναι η εκτίμηση του μεγέθους των όρων της διαφορικής εξίσωσης (3.9.1) σε κάθε περιοχή. Έτσι από την (3.9.9) έχουμε

$$\frac{d\,y(x,\varepsilon)}{dx}=-e^{1-x}-e^{1+x-\frac{2x}{\varepsilon}}\left(1-\frac{2}{\varepsilon}\right) \quad \text{και} \tag{3.9.12}$$

$$\frac{d^2 y(x,\varepsilon)}{dx^2}=e^{1-x}-e^{1+x-\frac{2x}{\varepsilon}}\left(1-\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 \tag{3.9.13}$$

- ***Στο εξωτερικό χωρίο***

Αν το x βρίσκεται στο εξωτερικό χωρίο, έστω $x=m=O(1)$, από την (3.9.13) παίρνουμε

$$\frac{d^2 y(x,\varepsilon)}{dx^2}\Big|_{x=m}=e^{1-m}-e^{1+m}(2-\varepsilon)^2\ \frac{e^{\frac{-2m}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2}=O(1)$$

επειδή αν $s=\frac{1}{\varepsilon}$, τότε

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{\frac{-2m}{\varepsilon}}}{\varepsilon^2}=\lim_{s\to+\infty}\frac{s^2}{e^{2ms}}=0 \tag{3.9.14}$$

Από την (3.9.12) έχουμε, χρησιμοποιώντας το όριο (3.9.14)

$$\frac{d\,y(x,\varepsilon)}{dx}\Big|_{x=m}=-e^{1-m}+e^{1+m}(2-\varepsilon)\frac{e^{\frac{-2m}{\varepsilon}}}{\varepsilon}=O(1)\Rightarrow 2\,y'=O(1)$$

Επίσης από την (3.9.9) έπεται πως $2\,y=O(1)$.

Έτσι, στην εξίσωση (3.9.1), ο όρος $\varepsilon\,y''=O(\varepsilon)$, άρα είναι πράγματι μικρός σε σύγκριση με τους άλλους δύο όρους και μπορεί να παραληφθεί. Συνεπώς, στο εξωτερικό χωρίο το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στο αδιατάρακτο πρόβλημα

$$y'+y=0,\ \text{με συνοριακή συνθήκη την}\ y(1)=1$$

Το γεγονός αυτό δείχνει ότι στο χωρίο αυτό η λύση μπορεί να προσεγγιστεί μέσω κανονικής διαταραχής, αφού η εξίσωση για τον πρωτεύοντα όρο, δηλαδή

$$y_0'+y_0=0\ \ \text{με συνοριακή συνθήκη την}\ y_0(1)=1$$

συμπίπτει με το αδιατάρακτο πρόβλημα και έχει λύση

$$y_0=e^{1-x}$$

η οποία ταυτίζεται με την εξωτερική προσέγγιση (3.9.10) που προέκυψε από την ακριβή λύση.

- ***Στο οριακό στρώμα***

Αν το x βρίσκεται στο οριακό στρώμα, έστω $x=\varepsilon$, από την (3.9.13) παίρνουμε

$$\frac{d^2 y(x,\varepsilon)}{dx^2}\Big|_{x=\varepsilon}=e^{1-\varepsilon}-e^{\varepsilon-1}\left(1-\frac{2}{\varepsilon}\right)^2=O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

αφού

$$\left(1-\frac{2}{\varepsilon}\right)^2=\frac{4}{\varepsilon^2}-\frac{4}{\varepsilon}+1\approx\frac{4}{\varepsilon^2}$$

Έτσι ο όρος $\varepsilon y''=O(\frac{1}{\varepsilon})$, και ανάλογα οι όροι $2y'=O(\frac{1}{\varepsilon})$ και $2y=O(1)$. Επομένως οι όροι των παραγώγων είναι μεγάλοι σε σχέση με τον τρίτο όρο, με αποτέλεσμα στο οριακό στρώμα, να μην μπορεί να αγνοηθεί ο όρος $\varepsilon y''$ από την εξίσωση (3.9.1).

Κανονικοποίηση στο οριακό στρώμα

Στο οριακό στρώμα η λύση μεταβάλλεται πολύ γρήγορα σε μια στενή περιοχή κοντά στο όριο $x=0$, με πάχος πολύ μικρό σε σχέση με το συνολικό μήκος του διαστήματος. Επειδή η κλίμακα που χαρακτηρίζει την ταχεία μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής στο οριακό στρώμα είναι πολύ μικρότερη σε σχέση με την κλίμακα της εξωτερικής περιοχής, μεγενθύνουμε το στρώμα, εισάγοντας μια **χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς *δ(ε)***, η οποία αντιπροσωπεύει το πάχος του οριακού στρώματος.

Χρησιμοποιώντας αυτή την κλίμακα, κανονικοποιούμε τις μεταβλητές ώστε η περιοχή του οριακού στρώματος να επεκταθεί σε τάξη $O(1)$ και όλοι οι όροι της διαφορικής εξίσωσης να γίνουν συγκρίσιμης τάξης μεγέθους, επιτρέποντας την ανάπτυξη της εσωτερικής προσέγγισης.

Οι νέες μεταβλητές είναι:

$$\xi=\frac{x}{\delta(\varepsilon)} \text{ και } Y=y:\ Y(\xi,\varepsilon)=Y(\frac{x}{\delta(\varepsilon)},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\delta(\varepsilon),\varepsilon),\ \text{ όπου } \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$$

Το πάχος του οριακού στρώματος, $\delta(\varepsilon)$, θα το προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Η συνήθης μορφή του είναι $\delta(\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}$.

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\frac{dY}{d\xi} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.1) και γίνεται

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}Y''+\frac{2}{\delta(\varepsilon)}Y'+2Y=0 \qquad (3.9.15)$$

Χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη $y(0,\varepsilon)=0$, αφού αναζητάμε τη λύση στο οριακό στρώμα, κοντά στο $x=0$, κι έτσι

$$y(0,\varepsilon)=0\Rightarrow Y(0,\varepsilon)=0 \qquad (3.9.16)$$

<u>Συνθήκες εξισορρόπησης</u>

Η **κυρίαρχη ισορροπία (dominant balance)** αναφέρεται στη διαδικασία εντοπισμού των κυρίαρχων όρων στη διαφορική εξίσωση, όταν η μικρή παράμετρος ε, τείνει στο μηδέν. Στόχος είναι να βρεθούν οι όροι που συνεισφέρουν περισσότερο στην περιγραφή της λύσης, ενώ οι υπόλοιποι όροι θεωρούνται αμελητέοι.

Με άλλα λόγια, η κυρίαρχη ισορροπία είναι η μαθηματική ανάλυση που αποκαλύπτει ποιοι όροι της εξίσωσης ισορροπούν μεταξύ τους, και καθορίζουν τη συμπεριφορά της λύσης στο οριακό στρώμα. Αυτό βοηθά να απλοποιηθεί η εξίσωση, χωρίς να χαθεί η ουσία της φυσικής ή μαθηματικής της περιγραφής, κρατώντας, δηλαδή, τη δεύτερη παράγωγο μέσα στους κυρίαρχους όρους.

Στην εξίσωση (3.9.15) έχουμε τρεις όρους με συντελεστές

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}, \quad \frac{2}{\delta(\varepsilon)}, \quad 2$$

Για σωστή διαδικασία, πρέπει κάθε συντελεστής να παριστάνει την τάξη μεγέθους του αντίστοιχου όρου, αφού η εξαρτημένη μεταβλητή είναι $O(1)$.

Για να εξασφαλίσουμε την εξισορρόπηση του μεγέθους των όρων αυτών, εξετάζουμε τον συντελεστή της δεύτερης παραγώγου, που αγνοήσαμε στο εξωτερικό χωρίο, με καθέναν από τους άλλους δύο, κι έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

1. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{2}{\delta(\varepsilon)}$. Τότε πρέπει $\delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$, και οι δύο πρώτοι συντελεστές είναι $O(\frac{1}{\varepsilon})$, που είναι μεγάλοι σε σχέση με το $2=O(1)$. Άρα ο τρίτος συντελεστής μπορεί να παραληφθεί, στο αδιατάρακτο πρόβλημα.
2. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim 2$. Τότε πρέπει $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}=O(1) \Rightarrow \delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$ και ο συντελεστής $\frac{2}{\delta(\varepsilon)}=O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, δηλαδή δεν είναι μικρός σε σχέση με τους άλλους δύο, άρα δεν μπορεί να αγνοηθεί.

Επομένως το πρώτο ενδεχόμενο $\delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ εξασφαλίζει την εξισορρόπηση των όρων, και επιλέγοντας την κλίμακα $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, δηλαδή το πάχος του οριακού στρώματος να είναι ε, οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon} \quad \text{και} \quad Y=y: \quad Y(\xi,\varepsilon)=Y(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\varepsilon,\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.15) κι έχουμε

$$Y''+2Y'+2\varepsilon Y=0$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$Y(\xi,\varepsilon)=Y_0(\xi)+\varepsilon Y_1(\xi)+\ldots$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση και εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς ε, διατηρούμε τον πρωτεύοντα όρο, που συμπίπτει με την αδιατάρακτη εξίσωση

$$Y_0''+2Y_0'=0$$

με συνοριακή συνθήκη, από την (3.9.16),

$$Y_0(0)=0$$

απ' όπου παίρνουμε την εσωτερική προσέγγιση

$$Y_0(\xi)=c(1-\mathrm{e}^{-2\xi})$$

ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$y(x,\varepsilon)=c\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-2x}{\varepsilon}}\right) \tag{3.9.17}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Σύνοψη εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Με την προηγούμενη ανάλυση καταλήξαμε σε δύο ασυμπτωτικές προσεγγίσεις της λύσης: την εξωτερική, που ισχύει στο μεγαλύτερο μέρος του διαστήματος, και προέκυψε από την εξίσωση (3.9.4) με τη συνοριακή συνθήκη $y_0(1)=1$, με εφαρμογή κανονικών διαταραχών στην εξίσωση (3.9.1), και την εσωτερική (3.9.17), που περιγράφει τη συμπεριφορά στο οριακό στρώμα, και προέκυψε με εφαρμογή της ίδιας μεθόδου μετά από κατάλληλη κανονικοποίηση.

Συνοψίζοντας λοιπόν, έχουμε

$$y_{out}(x,\varepsilon)\sim \mathrm{e}^{1-x}, \qquad x=O(1) \tag{3.9.18}$$

$$y_{\mathrm{in}}(x,\varepsilon)\sim c\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-2x}{\varepsilon}}\right), \qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.19}$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Η **συναρμογή (matching)** είναι η διαδικασία κατά την οποία συνδυάζουμε την εξωτερική προσέγγιση που ισχύει μακριά από το οριακό στρώμα, και την εσωτερική προσέγγιση που ισχύει μέσα στο οριακό στρώμα, δηλαδή κοντά στο $x=0$.

Ο στόχος είναι να εξασφαλιστεί ότι η συνδυασμένη λύση περιγράφει με συνέπεια τη συμπεριφορά του συστήματος σε ολόκληρο το διάστημα ενδιαφέροντος, δηλαδή το [0,1]. Με άλλα λόγια, η συναρμογή χρειάζεται για να εξασφαλιστεί ότι η προσεγγιστική λύση ισχύει ομοιόμορφα στο [0,1], και στηρίζεται στην υπόθεση ότι υπάρχει μια μικρή περιοχή μεταξύ του οριακού στρώματος και του εξωτερικού χωρίου, που την ονομάζουμε **χωρίο επικάλυψης** (*Σχήμα 3.9.2*).

Εισάγουμε σε αυτό μια ενδιάμεση ανεξάρτητη μεταβλητή

$$\eta=\frac{x}{\theta(\varepsilon)}$$

με $\delta(\varepsilon)\ll\theta(\varepsilon)\ll 1$, ενώ $0<\varepsilon\ll 1$.

Επειδή

$$\varepsilon\ll\sqrt{\varepsilon}\ll 1 \text{ καθώς } \varepsilon\to 0$$

εισάγουμε την

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{3.9.20}$$

Η συναρμογή της εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης προκύπτει από την απαίτηση αυτές οι δύο εκφρασμένες σε όρους της ενδιάμεσης μεταβλητής η, να συμφωνούν μέσα στο χωρίο επικάλυψης, όταν $\varepsilon \to 0$. Με άλλα λόγια, η συνθήκη συναρμογής απαιτεί για σταθερή τιμή της η, να ισχύει η ταυτόχρονη ασυμπτωτική συμφωνία των δύο προσεγγίσεων, δηλαδή:

<u>Συνθήκη συναρμογής</u>

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_{out}(\eta\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} y_{\text{in}}(\eta\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) \tag{3.9.21}$$

για σταθεροποιημένο η.

Αντικαθιστούμε στην (3.9.18) και (3.9.19) την (3.9.20) και έχουμε αντίστοιχα

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_{out}(\eta\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\mathrm{e}^{1-\eta\sqrt{\varepsilon}}\right) = \mathrm{e} \tag{3.9.22}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y_{\text{in}}(\eta\sqrt{\varepsilon}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[c\left(1 - \mathrm{e}^{\frac{-2\eta}{\sqrt{\varepsilon}}}\right)\right] = c \tag{3.9.23}$$

Από τις (3.9.22), (3.9.23) με εφαρμογή της συνθήκης (3.9.21) έπεται πως

$$c = \mathrm{e}$$

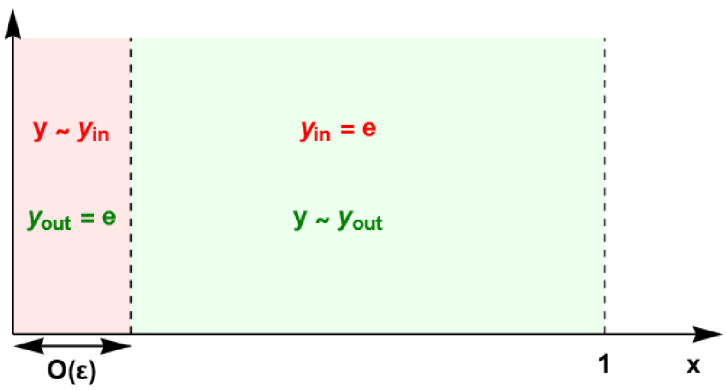
και η εσωτερική προσέγγιση (3.9.19) γίνεται

$$y_{\text{in}}(x, \varepsilon) \sim \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}, \qquad x = O(\varepsilon) \tag{3.9.24}$$

που παρατηρούμε πως ταυτίζεται με την (3.9.11) που προέκυψε από την ακριβή λύση.

Ομοιόμορφη προσέγγιση

Η εσωτερική προσέγγιση που μόλις προσδιορίσαμε ισχύει κοντά στο $x = 0$, ενώ η εξωτερική σε όλο το υπόλοιπο διάστημα. Επειδή καμιά από αυτές δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ολόκληρο το [0,1], οι προσεγγίσεις αυτές δεν είναι ομοιόμορφα έγκυρες.



Σχήμα 3.9.3: Εσωτερική και εξωτερική περιοχή και οι τιμές των προσεγγίσεων σε αυτές τις περιοχές

Αναλυτικότερα, όπως βλέπουμε στο *Σχήμα 3.9.3*, η εσωτερική και εξωτερική λύση είναι σταθερές εκτός των περιοχών εφαρμογής τους, και η σταθερά αυτή είναι η ίδια και για τις δύο λύσεις .Η τιμή της σταθεράς μπορεί να γραφεί είτε ως $y_{out}(0)$ είτε ως $y_{\text{in}}(\infty)$, και το γεγονός ότι είναι ίσες αποτελεί συνέπεια της συνθήκης συναρμογής.

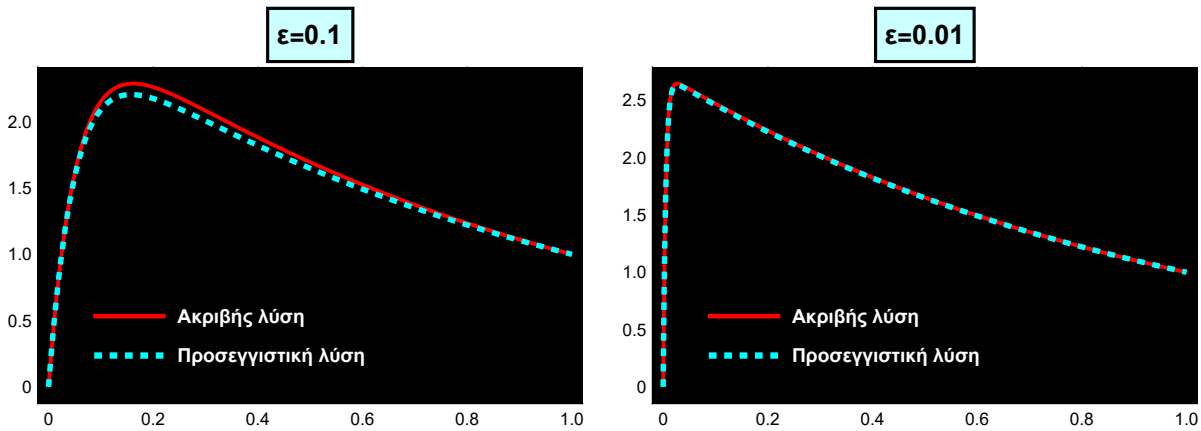
Στο χωρίο επικάλυψης όμως, αυτή η σταθερά υπάρχει δυο φορές, αφού συνυπάρχουν οι δύο προσεγγίσεις, και αυτό φαίνεται ξεκάθαρα αν τις προσθέσουμε

$$y_{out}(x,\varepsilon)+y_{\text{in}}(x,\varepsilon)=\mathrm{e}^{1-x}+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}\approx\begin{cases}\mathrm{e}^{1-x}+\mathrm{e}, & x=O(1)\\ 2\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}, & x=O(\varepsilon)\end{cases}$$

Άρα για να έχουμε ενιαία (composite) προσέγγιση (y_u) που να είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα [0,1], πρέπει να προσθέσουμε τις δύο λύσεις και να αφαιρέσουμε το κοινό τους όριο

$$y_u(x,\varepsilon)\sim\mathrm{e}^{1-x}+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{1-x}-\mathrm{e}^{1-\frac{2x}{\varepsilon}} \tag{3.9.25}$$

Στο *Σχήμα 3.9.4* παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της ακριβούς λύσης και της προσεγγιστικής λύσης που προκύπτει από τη θεωρία του οριακού στρώματος, για $\varepsilon=0.1$ και $\varepsilon=0.01$. Παρατηρείται ότι η ενιαία ομοιόμορφη ανάπτυξη προσεγγίζει εξαιρετικά καλά την ακριβή λύση, και η συμφωνία βελτιώνεται σημαντικά καθώς το ε μειώνεται. Αυτό αναδεικνύει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου στην περιγραφή της συμπεριφοράς του συστήματος για μικρές τιμές του παραμέτρου. Στη συνέχεια, θα εκτιμηθεί ποσοτικά το σφάλμα της προσέγγισης, προκειμένου να αξιολογηθεί περαιτέρω η ακρίβεια της μεθόδου σε σχέση με την ακριβή λύση.



Σχήμα 3.9.4: Σύγκριση προσεγγιστικής-ακριβούς λύσης

Προσεγγιστικό σφάλμα

Η προσεγγιστική λύση $y_u(x,\varepsilon)$ ικανοποιεί ακριβώς τη συνοριακή συνθήκη στο $x=0$, αφού

$$y_u(0,\varepsilon)=0$$

αλλά στο $x=1$, την ικανοποιεί ασυμπτωτικά, αφού

$$y_u(1,\varepsilon)=1-e^{1-\frac{2}{\varepsilon}}\to 1,\ \text{καθώς}\ \varepsilon\to 0$$

Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα της μεθόδου, εφόσον η προσεγγιστική λύση ικανοποιεί ασυμπτωτικά και την διαφορική εξίσωση (3.9.1).

Πράγματι, αν το **υπόλοιπο (residual)** που προκύπτει αντικαθιστώντας την προσεγγιστική λύση στην αρχική διαφορική εξίσωση, εκφράζοντας το κατά πόσο την ικανοποιεί, δηλαδή το «σφάλμα εξίσωσης», είναι

$$R(x,\varepsilon)=y_u''+2y_u'+2y_u=\varepsilon e^{1-x}-2e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}$$

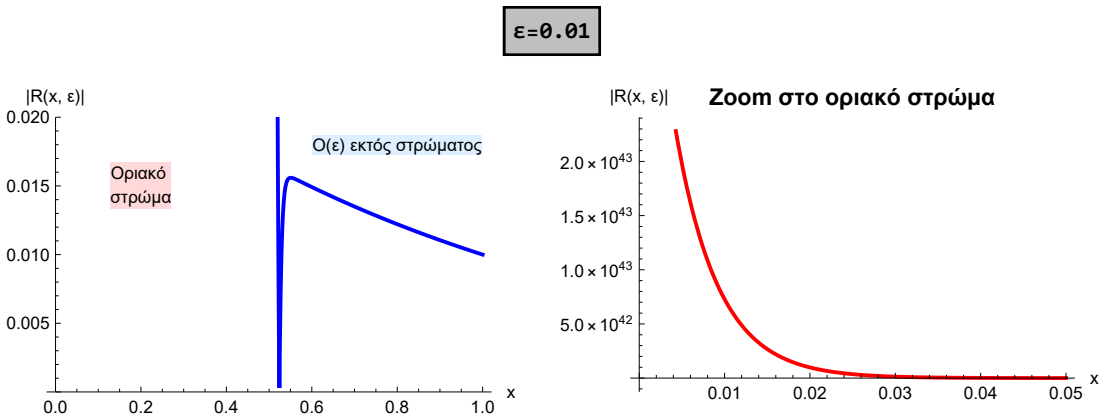
τότε για κάθε x στο διάστημα $(0,1)$ ισχύει

$$|R(x,\varepsilon)|=\varepsilon e^{1-x}-2e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}<\varepsilon e^{1-x}<e\varepsilon$$

Οπότε

$$R(x,\varepsilon)=O(\varepsilon),\ \text{καθώς}\ \varepsilon\to 0,\ \text{ομοιόμορφα στο διάστημα}\ [0,1].$$

Επομένως, η προσεγγιστική λύση ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση με σφάλμα τάξης $O(\varepsilon)$ σε όλο το διάστημα [0,1], γεγονός που δείχνει ότι αποτελεί **ομοιόμορφα έγκυρη προσεγγιστική λύση.**



Σχήμα 3.9.5: Το $|R(x,\varepsilon)|$ στο [0,1], και η μεγέθυνση κοντά στο $x=0$

Η απεικόνιση του απολύτου σφάλματος $|R(x,\varepsilon)|$ στο *Σχήμα 3.9.5*, επιβεβαιώνει ότι το residual είναι τάξης $O(\varepsilon)$ σε όλο το διάστημα [0,1]. Παρόλο που στο οριακό στρώμα κοντά στο $x=0$ (zoom) εμφανίζεται ταχεία μεταβολή λόγω του εκθετικού όρου, το μέγεθος του σφάλματος παραμένει της ίδιας τάξης.

3.9.2 Κανόνες συναρμογής

Υπάρχουν πολλοί κανόνες συναρμογής της εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης προβλημάτων οριακού στρώματος, που εισήχθησαν ανάλογα με τις ανάγκες του εκάστοτε προβλήματος. Ωστόσο, κανένας από αυτούς δεν αποδεικνύεται αυστηρά παρά μόνο σε συγκεκριμένα προβλήματα.

Η χρήση της ενδιάμεσης μεταβλητής που υιοθετήσαμε στο προηγούμενο γραμμικό παράδειγμα, αποτελεί μία από τις πιο αξιόπιστες μεθόδους, καθώς εξασφαλίζει την ύπαρξη περιοχής επικάλυψης μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής λύσης και επιτρέπει τη συστηματική συναρμογή όχι μόνο στον πρωτεύοντα όρο, αλλά και σε ανώτερες τάξεις των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων.
Στη συνέχεια θα δούμε δύο ακόμα πολύ εύχρηστες μεθόδους συναρμογής, οι οποίες εφαρμόζονται συχνά επειδή είναι πολύ απλές στην εφαρμογή τους.

3.9.2.1 Κανόνας συναρμογής Van Dyke

Ο *Milton Denman Van Dyke* (*1922–2010*) ήταν καθηγητής του Τμήματος Αεροναυτικής και Αστροναυτικής στο Πανεπιστήμιο του Στάνφορντ. Το βιβλίο του, *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, αποτέλεσε ένα από τα πρώτα και πιο επιδραστικά έργα στη θεωρία των ιδιόμορφων διαταραχών. Σε αυτό, ο *Van Dyke* συγκέντρωσε και συστηματοποίησε μεγάλο μέρος της αεροναυτικής και υδροδυναμικής βιβλιογραφίας, προωθώντας τη μέθοδο της συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτύξεων. Αν και αναγνώρισε ότι η θεωρία οριακών στρωμάτων του *Prandtl* αποτελεί το πρότυπο πρόβλημα της μεθόδου, εισήγαγε το αντικείμενο, παρουσιάζοντας τη ροή ασυμπίεστου ρευστού γύρω από ένα λεπτό πτερύγιο.
Κεντρικό στοιχείο της προσέγγισής του, αποτελεί ο λεγόμενος «*μαγικός κανόνας του Van Dyke*», σύμφωνα με τον οποίο το m-όρων ανάπτυγμα της εσωτερικής λύσης, υπολογισμένο στο εξωτερικό όριο, ισούται με το n-όρων ανάπτυγμα της εξωτερικής λύσης, υπολογισμένο στο εσωτερικό όριο. Παρά την απλοποιημένη μορφή του, ο κανόνας αυτός παρέχει ένα ισχυρό και πρακτικό εργαλείο για τη συναρμογή ασυμπτωτικών αναπτύξεων, συμβάλλοντας καθοριστικά στην επίλυση πλήθους εφαρμοσμένων προβλημάτων. Ωστόσο, δεν οδηγεί πάντα σε ακριβή αποτελέσματα, όπως συμβαίνει σε περιπτώσεις που εμφανίζονται λογαριθμικές συναρτήσεις μέτρου.

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τον κανόνα συναρμογής του *Van Dyke* σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα που ανήκει στα προβλήματα **αρχικού στρώματος (initial layer problems)**, τα οποία αποτελούν μια μορφή προβλημάτων οριακού στρώματος, όπου η λύση παρουσιάζει απότομη

μεταβολή αμέσως μετά το σημείο εκκίνησης και στη συνέχεια εξελίσσεται ομαλά με διαφορετικό χαρακτήρα.

Πρόβλημα αρχικού στρώματος με εφαρμογή του κανόνα Van Dyke

Έστω ένα σώμα πολύ μικρής μάζας που είναι προσαρτημένο σε γραμμικό ελατήριο και υπόκειται σε δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητάς του. Στη χρονική στιγμή $t=0$, που η θέση και η ταχύτητά του είναι μηδέν, το σώμα δέχεται μια στιγμιαία ώθηση, η οποία του προσδίδει πεπερασμένη ορμή και συνεπώς οδηγεί σε πολύ μεγάλη αρχική ταχύτητα λόγω της μικρής μάζας.

Μετά από κατάλληλη αδιαστατοποίηση των μεταβλητών, η κίνηση του συστήματος περιγράφεται από το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\varepsilon y''+y'+y=0, \quad 0\le t\le T \tag{3.9.26}$$

$$y(0)=0, \quad y'(0)=\frac{1}{\varepsilon} \tag{3.9.27}$$

όπου T σταθερός πεπερασμένος χρόνος, και $0<\varepsilon\ll 1$ είναι αδιάστατη παράμετρος που εκφράζει τη μικρή μάζα του συστήματος. Η πολύ μεγάλη αρχική ταχύτητα $\frac{1}{\varepsilon}$, υποδηλώνει την ύπαρξη **αρχικού (οριακού) στρώματος** κοντά στο $t=0$.

Θα αναζητήσουμε μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τη θεωρία του οριακού στρώματος, με εφαρμογή του κανόνα συναρμογής του *Van Dyke*.

- ***Εξωτερική προσέγγιση***

Θεωρούμε ότι η λύση στο εξωτερικό χωρίο έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$y_{out}(t,\varepsilon)=y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\ldots$$

Εφαρμόζουμε στην (3.9.26) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, έχουμε τις εξισώσεις

$$y_0'+y_0=0$$

$$y_1'+y_1=-y_0''$$

με λύσεις

$$y_0(t)=A\,\mathrm{e}^{-t}$$

$$y_1(t)=(B-At)\,\mathrm{e}^{-t}$$

όπου A, B αυθαίρετες σταθερές.

Συνεπώς

$$y_{out}(t,\varepsilon)=A\,\mathrm{e}^{-t}+\varepsilon(B-At)\mathrm{e}^{-t}+\ldots \qquad (3.9.28)$$

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την ε, και οι νέες μεταβλητές είναι

$$\tau=\frac{t}{\varepsilon} \text{ και } Y=y:\ Y(\tau,\varepsilon)=Y(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)=y(t,\varepsilon)=y(\tau\varepsilon,\varepsilon)$$

Εφαρμόζουμε στο πρόβλημα (3.9.26), (3.9.27), και παίρνουμε

$$Y''+Y'+\varepsilon Y=0,\ \ \tau\geq 0$$

$$Y(0)=0,\qquad Y'(0)=1$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$Y(\tau,\varepsilon)=Y_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)=Y_0(\tau)+\varepsilon Y_1(\tau)+\ldots$$

και παίρνουμε τα προβλήματα

$$Y_0''+Y_0'=0,\qquad Y_0(0)=0,\quad Y_0'(0)=1$$

$$Y_1''+Y_1'=-Y_0,\qquad Y_1(0)=0,\quad Y_1'(0)=1$$

με λύσεις

$$Y_0(\tau)=1-\mathrm{e}^{-\tau}$$

$$Y_1(\tau)=2-\tau-(2+\tau)\mathrm{e}^{-\tau}$$

Επομένως η εσωτερική προσέγγιση είναι

$$Y_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)=1-\mathrm{e}^{-\tau}+\varepsilon\left[2-\tau-(2+\tau)\mathrm{e}^{-\tau}\right]+\ldots \qquad (3.9.29)$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές που προκύπτουν, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Van Dyke*. Συγκεκριμένα, η συναρμογή της εξωτερικής $y_{out}(t,\varepsilon)$ και της εσωτερικής προσέγγισης $Y_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)$, όταν αυτές είναι ανεπτυγμένες μέχρι τάξης $O(\varepsilon^n)$, πραγματοποιείται ως εξής:

1. **Εξωτερικό ανάπτυγμα της εσωτερικής προσέγγισης**

Εκφράζουμε την $Y_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)$ ως προς την εξωτερική μεταβλητή t, θέτοντας $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$ και αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του ε ως την τάξη $O(\varepsilon^m)$ για $\varepsilon\to 0$, με t σταθερό. Αυτό το ανάπτυγμα το συμβολίζουμε $(Y_{\text{in}})_{out}^{(m)}$ και το ονομάζουμε εξωτερικό ανάπτυγμα της εσωτερικής προσέγγισης.

2. **Εσωτερικό ανάπτυγμα της εξωτερικής προσέγγισης**

Εκφράζουμε την $y_{out}(t,\varepsilon)$ ως προς την εσωτερική μεταβλητή τ, θέτοντας $t=\varepsilon\tau$ και αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του ε ως την τάξη $O(\varepsilon^n)$ για $\varepsilon\to 0$, με τ σταθερό. Αυτό το ανάπτυγμα το συμβολίζουμε $(y_{out})_{\text{in}}^{(n)}$ και το ονομάζουμε εσωτερικό ανάπτυγμα της εξωτερικής προσέγγισης.

3. Εκφράζουμε τα $(Y_{\text{in}})_{out}$ και $(y_{out})_{\text{in}}$ στην ίδια μεταβλητή τ ή t, και προσδιορίζουμε τις άγνωστες σταθερές από τη συνθήκη

$$(Y_{\text{in}})_{out}^{(m)}=(y_{out})_{\text{in}}^{(n)}$$

4. Η ενιαία προσεγγιστική λύση προκύπτει από το άθροισμα του εσωτερικού και εξωτερικού αναπτύγματος, με αφαίρεση του κοινού μέρους τους

$$y_u=Y_{\text{in}}+y_{out}-(y_{out})_{\text{in}}^{(n)} \tag{3.9.30}$$

Στο πρόβλημά μας, σύμφωνα με τα παραπάνω, και παίρνοντας όρους ως $O(\varepsilon)$, δηλαδή $m=n=1$, έχουμε:

1. Η (3.9.28) γίνεται $y_{out}(\varepsilon\tau,\varepsilon)=A\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\tau}+\varepsilon(B-\varepsilon\tau A)\mathrm{e}^{-\varepsilon\tau}+\ldots$ και χρησιμοποιώντας τη σειρά *Maclaurin* της $\mathrm{e}^{-\varepsilon\tau}$, παίρνουμε

$$(y_{out})_{\text{in}}=A(1-\varepsilon\tau+\ldots)+\varepsilon(B-\varepsilon\tau A)(1-\varepsilon\tau+\ldots)=A+\varepsilon(B-A\tau)+\ldots$$

2. Η (3.9.29) γίνεται $Y_{\text{in}}(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\varepsilon\left[2-\frac{t}{\varepsilon}-(2+\frac{t}{\varepsilon})\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right]+\ldots$ και παίρνοντας το όριο όταν $\tau=\frac{t}{\varepsilon}\to+\infty$, έχουμε

$$(Y_{\text{in}})_{out}=1-t+2\varepsilon+\ldots$$

3. Εκφράζοντας στην ίδια μεταβλητή t, από την συνθήκη συναρμογής $(Y_{\text{in}})_{out}=(y_{out})_{\text{in}}$ έπεται

$$(Y_{\text{in}})_{out}=1-t+2\varepsilon+\ldots=A-At+\varepsilon B+\ldots=(y_{out})_{\text{in}}$$

Συνεπώς

$$A=1 \text{ και } B=2$$

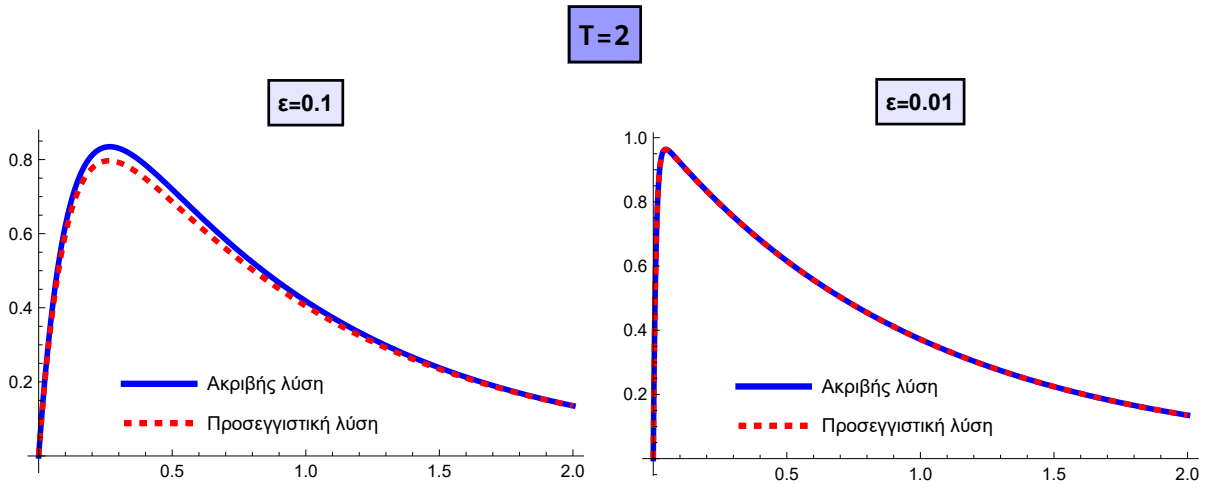
και η y_{out} είναι

$$y_{out}(t,\varepsilon)=\mathrm{e}^{-t}+\varepsilon(2-t)\mathrm{e}^{-t}+\ldots$$

4. Η (3.9.30) γίνεται

$$y_u(t,\varepsilon)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\varepsilon\left[2-\frac{t}{\varepsilon}-(2+\frac{t}{\varepsilon})\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right]+\ldots)+[\mathrm{e}^{-t}+\varepsilon(2-t)\mathrm{e}^{-t}+\ldots]-(1-t+2\varepsilon+\ldots)$$

$$=\left[\mathrm{e}^{-t}-(1+t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right]+\varepsilon\left[(2-t)\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right]+\ldots \tag{3.9.31}$$



Σχήμα 3.9.6: Σύγκριση προσεγγιστικής-ακριβούς λύσης για διαφορετικές τιμές της ε

Η προσεγγιστική λύση (3.9.31) είναι ομοιόμορφα έγκυρη για $0 \le t \le T$ καθώς $\varepsilon \to 0$, δηλαδή στις περιοχές όπου η εσωτερική ανάπτυξη, η εξωτερική ανάπτυξη και το κοινό τους μέρος ορίζονται ταυτόχρονα. Η εγκυρότητά της επιβεβαιώνεται και γραφικά στο *Σχήμα 3.9.6*, αφού παρουσιάζει πολύ καλή συμφωνία με την ακριβή λύση που υπολογίστηκε μέσω της *DSolve* του *Mathematica*.

3.9.2.2 Κανόνας συναρμογής του Prandtl

Ο πιο διαδεδομένος και εύχρηστος κανόνας συναρμογής, είναι η κλασική συνθήκη συναρμογής του *Prandtl*, γνωστή και ως αρχή της ασυμπτωτικής συναρμογής.

$$\lim_{x \to x_0} y_{outer}(x) = \lim_{X \to \infty} Y_{inner}(X)$$

η οποία επιτρέπει την ταύτιση των εσωτερικών και εξωτερικών αναπτύξεων μέσω οριακών διαδικασιών. Ωστόσο, η συνθήκη αυτή δεν επιτρέπει, γενικά, τον προσδιορισμό ανώτερων όρων της ασυμπτωτικής ανάπτυξης και μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση της πιο γενικής συνθήκης συναρμογής του *Van Dyke*.

Για την κατανόηση της συνθήκης αυτής, θα την εφαρμόσουμε πρώτα σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα με οριακό στρώμα κοντά στο μηδέν, ενώ στη συνέχεια, θα τη χρησιμοποιούμε καθολικά σε όλα τα παραδείγματα.

Πρόβλημα οριακού στρώματος με εφαρμογή του κανόνα του Prandtl

Δίνεται το πρόβλημα

$$\varepsilon\, y''(x)+2\, y'(x)+e^{y(x)}=0, \qquad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{3.9.32}$$

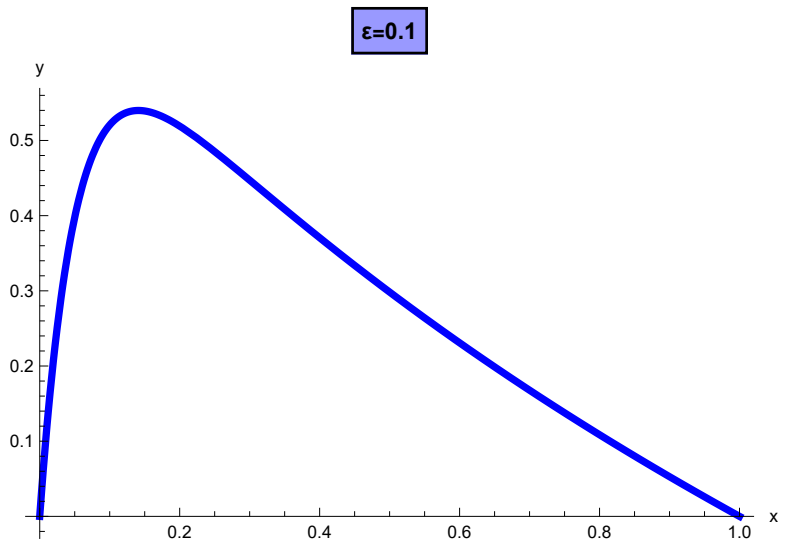
$$y(0)=0 \tag{3.9.33}$$

$$y(1)=0 \tag{3.9.34}$$

Θα αναζητήσουμε προσεγγιστική λύση ενός όρου με τη μέθοδο συναρμογής ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων.

Η παρουσία του πολλαπλασιαστικού παράγοντα ε στον δευτεροτάξιο όρο της εξίσωσης (3.9.32) υποδεικνύει την ύπαρξη οριακού στρώματος, του οποίου η θέση δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, καθώς η εξίσωση είναι μη γραμμική και δεν διαθέτει ακριβή λύση. Στο *Σχήμα 3.9.7*, όμως, που παρουσιάζεται η αριθμητική λύση του προβλήματος, παρατηρείται απότομη μεταβολή κοντά στο $x=0$, γεγονός που επιβεβαιώνει την ύπαρξη οριακού στρώματος στην περιοχή αυτή.

Για τον λόγο αυτό, θα αναζητήσουμε προσεγγιστική λύση του προβλήματος στο πλαίσιο της θεωρίας οριακού στρώματος, εφαρμόζοντας τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*.



Σχήμα 3.9.7: Γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης

Εξωτερική προσέγγιση

Για να βρούμε προσεγγιστική λύση στο εξωτερικό χωρίο, θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$y_{out}(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots$$

Εφαρμόζουμε στην (3.9.32) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, έχουμε την εξίσωση για τον πρωτεύοντα όρο

$$2y_0' + e^{y_0} = 0 \qquad (3.9.35)$$

ενώ παράλληλα, επιβάλλεται η συνοριακή συνθήκη (3.9.34) στο εξωτερικό πρόβλημα, και έχουμε

$$y_0(1) = 0 \qquad (3.9.36)$$

Η λύση των (3.9.35), (3.9.36) δίνει την εξωτερική προσέγγιση με έναν όρο

$$y_{out}(x,\varepsilon) \sim \ln\left(\frac{2}{x+1}\right), \qquad x = O(1) \qquad (3.9.37)$$

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την $\delta(\varepsilon)$, και οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi = \frac{x}{\delta(\varepsilon)} \text{ και } Y = y: \; Y(\xi,\varepsilon) = Y\left(\frac{x}{\delta(\varepsilon)},\varepsilon\right) = y(x,\varepsilon) = y(\xi\,\delta(\varepsilon),\varepsilon), \text{ όπου } \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon) = 0$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)}\frac{dY}{d\xi} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.32) και γίνεται

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}Y'' + \frac{2}{\delta(\varepsilon)}Y' + e^Y = 0 \qquad (3.9.38)$$

Χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη $y(0,\varepsilon) = 0$, αφού αναζητάμε τη λύση στο οριακό στρώμα, κοντά στο $x = 0$, έτσι

$$y(0,\varepsilon) = 0 \Rightarrow Y(0,\varepsilon) = 0 \qquad (3.9.39)$$

<u>*Συνθήκες εξισορρόπησης*</u>

Στην εξίσωση (3.9.38) έχουμε τρεις όρους με συντελεστές

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}, \quad \frac{2}{\delta(\varepsilon)}, \quad 1$$

Για να εξασφαλίσουμε την εξισορρόπηση του μεγέθους των όρων αυτών, εξετάζουμε τον συντελεστή της δεύτερης παραγώγου, που αγνοήσαμε στο εξωτερικό χωρίο, με καθέναν από τους άλλους δύο, κι έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

1. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{2}{\delta(\varepsilon)}$. Τότε πρέπει $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, και οι δύο πρώτοι συντελεστές είναι $O(\frac{1}{\varepsilon})$, που είναι μεγάλοι σε σχέση με το $1 = O(1)$. Άρα ο τρίτος συντελεστής μπορεί να παραληφθεί, στο αδιατάρακτο πρόβλημα.

2. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}\sim 1$. Τότε πρέπει $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}=O(1)\Rightarrow\delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$ και ο συντελεστής $\frac{2}{\delta(\varepsilon)}=O(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$, δηλαδή δεν είναι μικρός σε σχέση με τους άλλους δύο, άρα δεν μπορεί να αγνοηθεί.

Επομένως το πρώτο ενδεχόμενο $\delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ εξασφαλίζει την εξισορρόπηση των όρων, και επιλέγοντας την κλίμακα $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, δηλαδή το πάχος του οριακού στρώματος να είναι ε, οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon}\quad\text{και}\quad Y=y:\ Y(\xi,\varepsilon)=Y(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\varepsilon,\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.38) κι έχουμε

$$Y''+2Y'+\varepsilon e^{Y}=0$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$Y(\xi,\varepsilon)=Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)=Y_0(\xi)+\varepsilon Y_1(\xi)+\ldots$$

και ο πρωτεύων όρος προκύπτει από την αδιατάρακτη εξίσωση

$$Y_0''+2Y_0'=0$$

με συνοριακή συνθήκη, από την (3.9.39),

$$Y_0(0)=0$$

απ' όπου παίρνουμε

$$Y_0(\xi)=c(1-e^{-2\xi})$$

και η εσωτερική προσέγγιση με έναν όρο είναι

$$Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)\sim c(1-e^{-2\xi}) \tag{3.9.40}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά, ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\text{in}}(x,\varepsilon)\sim c\left(1-e^{\frac{-2x}{\varepsilon}}\right),\qquad x=O(\varepsilon)$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά που προέκυψε, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*. Συγκεκριμένα, στο χωρίο επικάλυψης, η εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση πρέπει να συμφωνούν ασυμπτωτικά.

Η εξωτερική λύση επεκτείνεται για $x\to 0$, σε περιοχή όπου $x\gg\varepsilon$, χωρίς όμως να εισέρχεται στο οριακό στρώμα.

Η εσωτερική λύση επεκτείνεται για $\xi\to\infty$, όπου $x=\varepsilon\xi$ δηλαδή εκτός του οριακού στρώματος αλλά κοντά στο $x=0$.

Στο χωρίο επικάλυψης επιβάλλεται λοιπόν

$$\lim_{x\to 0} y_{out}(x,\varepsilon)=\lim_{\xi\to\infty} Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon) \tag{3.9.41}$$

Άρα, αφού

$$\lim_{x\to 0} y_{out}(x,\varepsilon)=\lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{2}{x+1}\right)=\ln 2$$

$$\lim_{\xi\to\infty} Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)=\lim_{\xi\to\infty} c\left(1-\mathrm{e}^{-2\xi}\right)=c$$

Από την (3.9.41) έπεται πως

$$c=\ln 2$$

και η εσωτερική προσέγγιση είναι τελικά

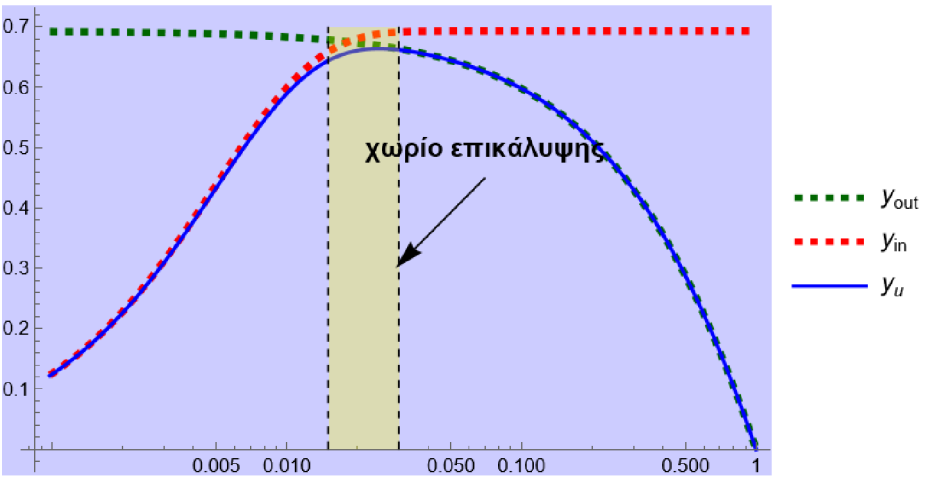
$$y_{\text{in}}(x,\varepsilon)\sim \ln 2\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-2x}{\varepsilon}}\right), \qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.42}$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση

Για να έχουμε ενιαία (*composite*) προσέγγιση (y_u) που να είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα [0,1], πρέπει να προσθέσουμε τις δύο λύσεις και να αφαιρέσουμε το κοινό τους όριο

$$y_u(x,\varepsilon)\sim \ln\left(\frac{2}{x+1}\right)+\ln 2\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-2x}{\varepsilon}}\right)-\ln 2=\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)-\ln 2\ \mathrm{e}^{\frac{-2x}{\varepsilon}} \tag{3.9.43}$$

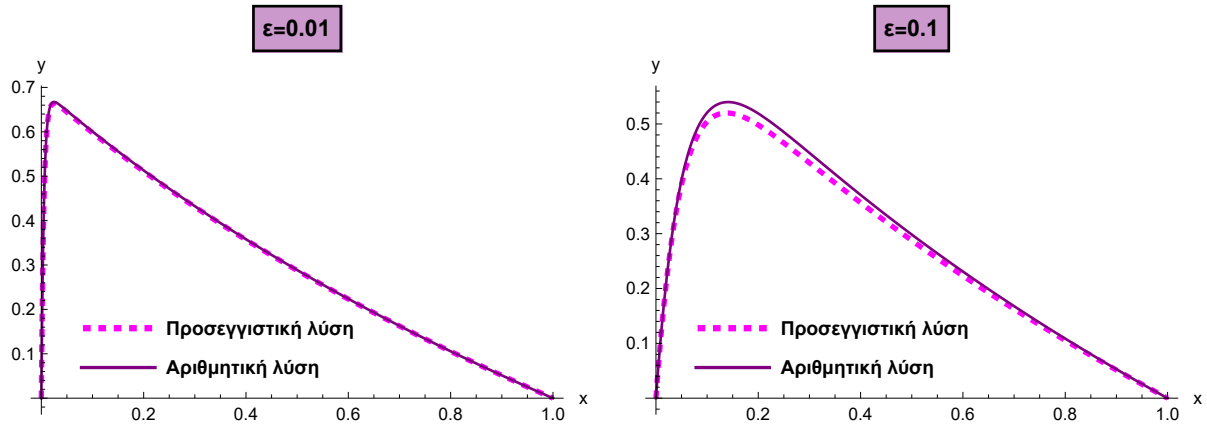
Στο *Σχήμα* 3.9.8 παρουσιάζονται η εσωτερική και η εξωτερική προσέγγιση, καθώς και η ομοιόμορφη λύση του προβλήματος. Η λογαριθμική κλίμακα στον *x*-άξονα χρησιμοποιείται λόγω του μικρού πάχους του οριακού στρώματος, ώστε να αναδειχθεί καλύτερα η συμπεριφορά της λύσης στην περιοχή επικάλυψης.



Σχήμα 3.9.8: Εσωτερική-εξωτερική προσέγγιση και ομοιόμορφη λύση σε λογαριθμική κλίμακα στον x-άξονα

Στο *Σχήμα* 3.9.9 παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις της αριθμητικής λύσης και της προσεγγιστικής λύσης που προκύπτει από τη θεωρία του οριακού στρώματος, για $\varepsilon=0.1$ και

$\varepsilon = 0.01$. Παρατηρείται ότι η ενιαία ομοιόμορφη ανάπτυξη προσεγγίζει εξαιρετικά καλά την αριθμητική λύση, ακόμα κι όταν η τιμή της μικρής παραμέτρου ε αυξάνεται.



Σχήμα 3.9.9: Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης

3.9.3 Η θέση του οριακού στρώματος

Στα παραδείγματα που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες, το οριακό στρώμα εμφανιζόταν στο $x = 0$, δηλαδή στο αριστερό άκρο του διαστήματος που μελετούσαμε.

Ωστόσο, οριακά στρώματα μπορεί να εμφανιστούν είτε στο αριστερό είτε στο δεξιό άκρο, ή ακόμη και σε εσωτερικό σημείο του διαστήματος ενδιαφέροντος. Στην τελευταία περίπτωση ονομάζονται **στρώματα κρούσης (shock layers)**. Επιπλέον, είναι δυνατόν να υπάρχουν πολλαπλά οριακά στρώματα στο ίδιο πρόβλημα.

Αν ένα οριακό στρώμα εντοπίζεται στο $x = x_0$, τότε εισάγουμε την εσωτερική μεταβλητή

$$\xi = \frac{x - x_0}{\delta(\varepsilon)}$$

Συνήθως, η θέση του οριακού στρώματος δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων. Για τον λόγο αυτό, αρχικά υποθέτουμε ότι βρίσκεται στο $x = 0$ (αριστερό άκρο). Αν η υπόθεση αυτή είναι λανθασμένη, τότε η διαδικασία αποτυγχάνει κατά τη συναρμογή της εσωτερικής και της εξωτερικής προσέγγισης. Στην περίπτωση αυτή, επαναλαμβάνουμε την ανάλυση, υποθέτοντας ότι το οριακό στρώμα βρίσκεται στο δεξί άκρο. Αν όμως η εξίσωση του προβλήματος είναι γραμμική, με μεταβλητούς συντελεστές, τότε το οριακό στρώμα μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα, που θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα

Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\varepsilon y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0, \quad 0<\varepsilon\ll 1, \quad x_1<x<x_2$$

$$y(x_1)=\alpha, \quad y(x_2)=\beta$$

όπου $p\in C[x_1,x_2]$, $q\in C[x_1,x_2]$

1. Αν $p(x)>0$ για $x\in[x_1,x_2]$, τότε υπάρχει οριακό στρώμα στο $x=x_1$
2. Αν $p(x)<0$ για $x\in[x_1,x_2]$, τότε υπάρχει οριακό στρώμα στο $x=x_2$
3. Δεν υπάρχει οριακό στρώμα σε εσωτερικό σημείο του $[x_1,x_2]$

Πολύ λιγότερα είναι γνωστά για τη συμπεριφορά των μη γραμμικών εξισώσεων. Ωστόσο, είναι εύλογο να αναμένουμε ότι τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν και όταν οι συντελεστές p και q είναι συναρτήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής y.

Απαιτείται όμως προσοχή όταν οι συντελεστές εξαρτώνται από την y', διότι τα βασικά χαρακτηριστικά των οριακών στρωμάτων συνδέονται με την ταχεία μεταβολή των παραγώγων μέσα στο οριακό στρώμα.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά παραδείγματα που αναδεικνύουν διαφορετικές θέσεις οριακών στρωμάτων.

3.9.3.1 Οριακό στρώμα στο δεξί άκρο

Παράδειγμα προβλήματος συνοριακών τιμών με οριακό στρώμα στο δεξί άκρο

Δίνεται το πρόβλημα

$$\varepsilon y''(x)+2\frac{\varepsilon}{x}y'(x)-y(x)=0, \quad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{3.9.44}$$

$$y(0)=0 \tag{3.9.45}$$

$$y'(1)=1 \tag{3.9.46}$$

Θα αναζητήσουμε προσεγγιστική λύση ενός όρου με τη θεωρία οριακού στρώματος.

Εξωτερική προσέγγιση

Για να βρούμε προσεγγιστική λύση στο εξωτερικό χωρίο, θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$y_{out}(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.44) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, προκύπτει η εξίσωση για τον πρωτεύοντα όρο, η οποία δίνει την εξωτερική προσέγγιση με έναν όρο

$$y_{out}(x,\varepsilon)\sim y_0(x)=0, \qquad x=O(1) \tag{3.9.47}$$

Εφαρμόζοντας την ανάπτυξη και στις συνοριακές συνθήκες (3.9.45), (3.9.46) παίρνουμε

$$y_0(0)=0 \text{ και } y_0'(1)=1$$

Παρατηρούμε πως η $y_0(x)=0$ ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $y_0(0)=0$, αλλά αποτυγχάνει να ικανοποιήσει την $y_0'(1)=1$.

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει οριακό στρώμα κοντά στο $x=1$, δηλαδή στο δεξί άκρο του διαστήματος.

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την δ(ε), και οι νέες μεταβλητές είναι:

$$\xi=\frac{1-x}{\delta(\varepsilon)}\Rightarrow x=1-\xi\,\delta(\varepsilon) \text{ και } Y=y:\ \ Y(\xi,\varepsilon)=Y\left(\frac{1-x}{\delta(\varepsilon)},\varepsilon\right)=y(x,\varepsilon)=y(1-\xi\,\delta(\varepsilon),\varepsilon)$$

όπου $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=-\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\frac{dY}{d\xi} \quad \text{και} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.44) και γίνεται

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}Y''-\frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\frac{1}{1-\xi\,\delta(\varepsilon)}Y'-Y=0 \tag{3.9.48}$$

<u>Συνθήκες εξισορρόπησης</u>

Στην εξίσωση (3.9.48) έχουμε τρεις όρους με συντελεστές

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}, \qquad \frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\frac{1}{1-\xi\,\delta(\varepsilon)}, \qquad 1$$

Ο συντελεστής $\frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}\frac{1}{1-\xi\,\delta(\varepsilon)}\sim\frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$ αφού $\frac{1}{1-\xi\,\delta(\varepsilon)}\sim 1$ με ξ σταθεροποιημένο και $\delta(\varepsilon)\ll 1$.

Για να εξασφαλίσουμε την εξισορρόπηση του μεγέθους των όρων αυτών, εξετάζουμε τον συντελεστή της δεύτερης παραγώγου, που αγνοήσαμε στο εξωτερικό χωρίο, με καθέναν από τους άλλους δύο, κι έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

1. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}$. Τότε πρέπει $\delta(\varepsilon)=O(1)$, και οδηγούμαστε στην εξωτερική προσέγγιση. Άρα απορρίπτεται αυτό το ενδεχόμενο.
2. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim 1$. Τότε πρέπει $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}=O(1) \Rightarrow \delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$ και ο συντελεστής $\frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}=O(\sqrt{\varepsilon})$, είναι πολύ μικρός σε σχέση με τους άλλους δύο, άρα μπορεί να αγνοηθεί.

Επομένως το δεύτερο ενδεχόμενο $\delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$ εξασφαλίζει την εξισορρόπηση των όρων, και επιλέγοντας την κλίμακα $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$, δηλαδή το πάχος του οριακού στρώματος να είναι $\sqrt{\varepsilon}$, οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow x=1-\xi\sqrt{\varepsilon} \text{ και } Y=y: \quad Y(\xi,\varepsilon)=Y\left(\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}},\varepsilon\right)=y(x,\varepsilon)=y(1-\xi\sqrt{\varepsilon},\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.48) κι έχουμε

$$Y''+\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\xi\sqrt{\varepsilon}-1}Y'-Y=0$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$Y(\xi,\varepsilon)=Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)=Y_0(\xi)+\varepsilon Y_1(\xi)+\ldots$$

και ο πρωτεύων όρος προκύπτει από την αδιατάρακτη εξίσωση

$$Y_0''-Y_0=0 \tag{3.9.49}$$

Χρησιμοποιούμε τη συνοριακή συνθήκη (3.9.46), αφού θέλουμε τη λύση στο οριακό στρώμα κοντά στο $x=1$, και επειδή $y'(x)=-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}Y'(\xi,\varepsilon) \Rightarrow Y'(\xi,\varepsilon)=-\sqrt{\varepsilon}\,y'(x)$ παίρνουμε

$$y'(1)=1 \Rightarrow Y'\left(\frac{1-1}{\sqrt{\varepsilon}},\varepsilon\right)=-\sqrt{\varepsilon}\,y'(1) \Rightarrow Y'(0,\varepsilon)=-\sqrt{\varepsilon}$$

Άρα

$$Y_0'(0)=-\sqrt{\varepsilon} \tag{3.9.50}$$

Το πρόβλημα (3.9.49), (3.9.50) έχει λύση

$$Y_0(\xi)=c\,\mathrm{e}^{-\xi}+(c-\sqrt{\varepsilon})\mathrm{e}^{\xi}$$

και η εσωτερική προσέγγιση με έναν όρο είναι

$$Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)\sim c\,\mathrm{e}^{-\xi}+(c-\sqrt{\varepsilon})\mathrm{e}^{\xi} \tag{3.9.51}$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά, ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\text{in}}(x,\varepsilon)\sim c\,\mathrm{e}^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}+(c-\sqrt{\varepsilon})\mathrm{e}^{\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}}, \qquad x=O(\sqrt{\varepsilon})$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά που προέκυψε, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*. Στο χωρίο επικάλυψης επιβάλλεται

$$\lim_{x\to 1} y_{out}(x,\varepsilon)=\lim_{\xi\to\infty} Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon) \tag{3.9.52}$$

Άρα αφού

$$\lim_{x\to 1} y_{out}(x,\varepsilon)=0$$

$$\lim_{\xi\to\infty} Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)=\lim_{\xi\to\infty}\left[c\,\mathrm{e}^{-\xi}+(c-\sqrt{\varepsilon})\mathrm{e}^{\xi}\right]$$

από την (3.9.52) έπεται πως

$$\lim_{\xi\to\infty}\left[c\,\mathrm{e}^{-\xi}+(c-\sqrt{\varepsilon})\mathrm{e}^{\xi}\right]=0$$

Ο όρος $(c-\sqrt{\varepsilon})\mathrm{e}^{\xi}$ περιέχει την εκθετική συνάρτηση e^{ξ}, η οποία τείνει στο άπειρο καθώς $\xi\to\infty$. Για να μείνει φραγμένος πρέπει ο συντελεστής του να μηδενιστεί, δηλαδή

$$c-\sqrt{\varepsilon}=0\Rightarrow c=\sqrt{\varepsilon}$$

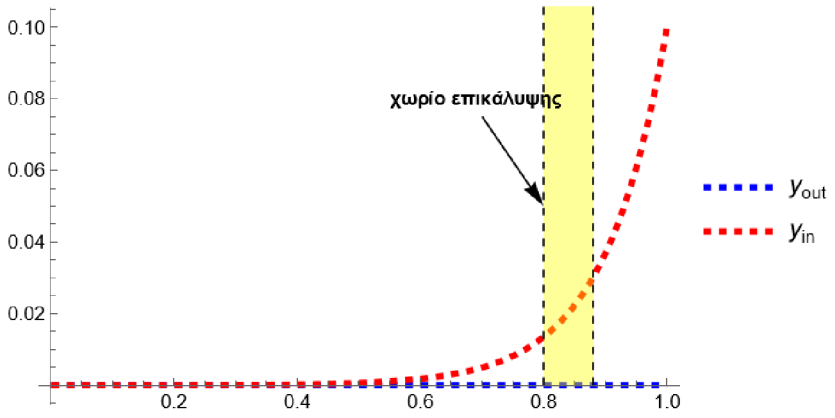
Συνεπώς, η εσωτερική προσέγγιση, που ικανοποιεί την (3.9.52) είναι

$$Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)\sim\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{-\xi}$$

ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\text{in}}(x,\varepsilon)\sim\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{e}^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}},\qquad x=O(\sqrt{\varepsilon})$$

Στο *Σχήμα* 3.9.10 παρουσιάζεται η ομαλή σύνδεση της εσωτερικής και εξωτερικής προσέγγισης μέσα στο χωρίο επικάλυψης.



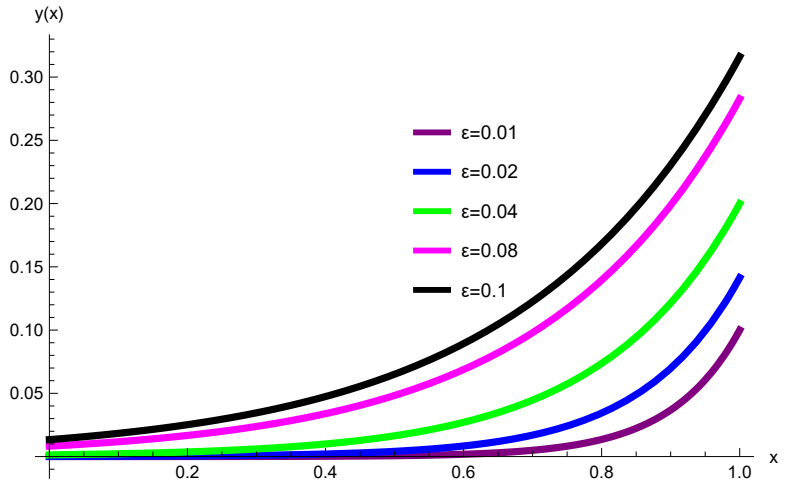
Σχήμα 3.9.10: Εξωτερική-εσωτερική προσέγγιση

Ομοιόμορφη προσέγγιση

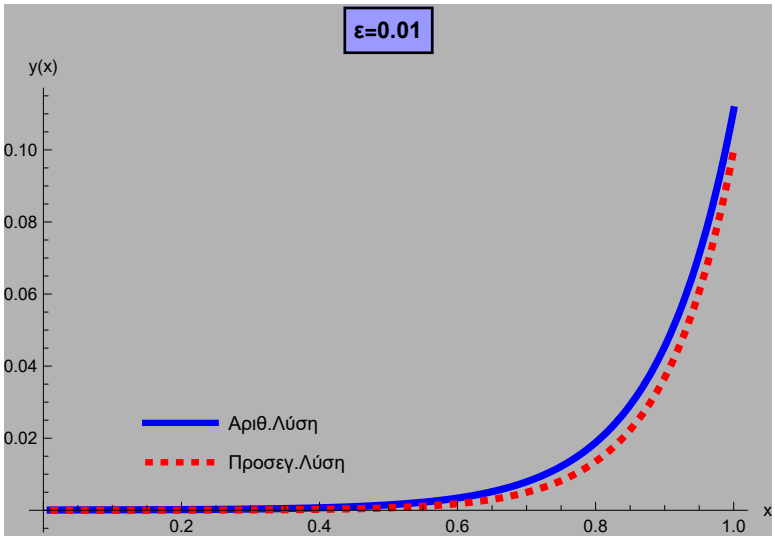
Για να έχουμε ενιαία προσέγγιση (y_u) που να είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα [0,1], προσθέτουμε τις δύο λύσεις και αφαιρούμε το κοινό τους όριο

$$y_u(x,\varepsilon) \sim 0 + \sqrt{\varepsilon}\, e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}} - 0 = \sqrt{\varepsilon}\, e^{\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

Στο *Σχήμα 3.9.11* βλέπουμε πόσο μειώνεται το πάχος του οριακού στρώματος, καθώς μειώνεται η τιμή της παραμέτρου ε, και στο *Σχήμα 3.9.12* παρατηρούμε πως η προσεγγιστική λύση με έναν όρο είναι αρκετά ακριβής, συγκριτικά με την αριθμητική λύση του προβλήματος, όταν η παράμετρος ε είναι πολύ μικρή.



Σχήμα 3.9.11: Η ομοιόμορφη προσέγγιση για διαφορετικές τιμές της ε



Σχήμα 3.9.12: Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης

3.9.3.2 Οριακό στρώμα στο εσωτερικό του διαστήματος

Παράδειγμα προβλήματος συνοριακών τιμών με εσωτερικό οριακό στρώμα

Δίνεται το πρόβλημα

$$\varepsilon y''(x)+x y'(x)+x y(x)=0, \quad 0<\varepsilon \ll 1 \tag{3.9.53}$$

$$y(-1)=\frac{e}{2} \tag{3.9.54}$$

$$y(1)=\frac{2}{e} \tag{3.9.55}$$

Θα αναζητήσουμε προσεγγιστική λύση ενός όρου με τη θεωρία οριακού στρώματος.

Εξωτερική προσέγγιση

Για να βρούμε προσεγγιστική λύση στο εξωτερικό χωρίο, θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$y_{out}(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.53) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, προκύπτει η εξίσωση για τον πρωτεύοντα όρο

$$x y_0'(x)+x y_0(x)=0 \tag{3.9.56}$$

Εφαρμόζοντας την ανάπτυξη και στις συνοριακές συνθήκες (3.9.54), (3.9.55) παίρνουμε

$$y_0(-1)=\frac{e}{2} \quad \text{και } y_0(1)=\frac{2}{e}$$

Η λύση της (3.9.56) είναι η εξωτερική προσέγγιση με έναν όρο

$$y_{out}(x,\varepsilon)\sim c\,e^{-x}$$

η οποία δεν μπορεί να ικανοποιήσει ταυτόχρονα και τις δύο συνοριακές συνθήκες, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη οριακού στρώματος.

Το σχετικό θεώρημα της *Ενότητας* 3.9.3 δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλο το διάστημα, διότι οι προϋποθέσεις του δεν ικανοποιούνται σε περιοχές που περιέχουν το σημείο $x=0$. Αντίθετα, σε υποδιαστήματα που δεν περιέχουν το μηδέν, το θεώρημα αποκλείει την εμφάνιση οριακού στρώματος κοντά στα άκρα.

Επομένως, το μοναδικό σημείο στο οποίο μπορεί να εμφανιστεί οριακό στρώμα είναι στο εσωτερικό του διαστήματος, και συγκεκριμένα κοντά στο $x=0$. Άρα, το πρόβλημα παρουσιάζει **εσωτερικό οριακό στρώμα (internal boundary layer),** και έχουμε δύο εξωτερικές λύσεις.

Η αριστερή εξωτερική λύση $y_{out}^{L}(x,\varepsilon)=c_1 \mathrm{e}^{-x}$ ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $y_{out}^{L}(-1,\varepsilon)=\frac{\mathrm{e}}{2}$, άρα $c_1=\frac{1}{2}$, κι έτσι

$$y_{out}^{L}(x,\varepsilon)\sim\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} \tag{3.9.57}$$

Η δεξιά εξωτερική λύση $y_{out}^{R}(x,\varepsilon)=c_2 \mathrm{e}^{-x}$ ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $y_{out}^{R}(1,\varepsilon)=\frac{2}{\mathrm{e}}$, άρα $c_2=2$, κι έτσι

$$y_{out}^{R}(x,\varepsilon)\sim 2\,\mathrm{e}^{-x} \tag{3.9.58}$$

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την $\delta(\varepsilon)$, και οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{x}{\delta(\varepsilon)} \text{ και } Y=y:\ \ Y(\xi,\varepsilon)=Y\left(\frac{x}{\delta(\varepsilon)},\varepsilon\right)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\,\delta(\varepsilon),\varepsilon),\ \text{ όπου } \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\frac{dY}{d\xi} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\frac{d^2Y}{d\xi^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.53) και γίνεται

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}Y''+\xi Y'+\delta(\varepsilon)\xi Y=0 \tag{3.9.59}$$

<u>*Συνθήκες εξισορρόπησης*</u>

Στην εξίσωση (3.9.59) έχουμε τρεις όρους με συντελεστές

$$\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2},\quad 1,\quad \delta(\varepsilon)$$

Για να εξασφαλίσουμε την εξισορρόπηση του μεγέθους των όρων αυτών, εξετάζουμε τον συντελεστή της δεύτερης παραγώγου, που αγνοήσαμε στο εξωτερικό χωρίο, με καθέναν από τους άλλους δύο, κι έχουμε τα εξής ενδεχόμενα:

1. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2}\sim 1$. Τότε πρέπει $\delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$, και οι δύο πρώτοι συντελεστές είναι $O(1)$, που είναι μεγάλοι σε σχέση με το $\delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$. Άρα ο τρίτος συντελεστής μπορεί να παραληφθεί, στο αδιατάρακτο πρόβλημα.

2. $\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)^2} \sim \delta(\varepsilon)$. Τότε πρέπει $\delta(\varepsilon)=O(\sqrt[3]{\varepsilon})$ και ο συντελεστής $1=O(1)$, δεν είναι μικρός σε σχέση με τους άλλους δύο, άρα δεν μπορεί να αγνοηθεί.

Επομένως το πρώτο ενδεχόμενο $\delta(\varepsilon)=O(\sqrt{\varepsilon})$ εξασφαλίζει την εξισορρόπηση των όρων, και επιλέγοντας την κλίμακα $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}$, δηλαδή το πάχος του οριακού στρώματος να είναι $\sqrt{\varepsilon}$, οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{και} \quad Y=y: \; Y(\xi,\varepsilon)=Y(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\sqrt{\varepsilon},\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.59) κι έχουμε

$$Y''+\xi Y'+\sqrt{\varepsilon}\xi Y=0$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$Y(\xi,\varepsilon)=Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)=Y_0(\xi)+\varepsilon Y_1(\xi)+\ldots$$

και ο πρωτεύων όρος προκύπτει από την αδιατάρακτη εξίσωση

$$Y_0''+\xi Y_0'=0 \tag{3.9.60}$$

από όπου έχουμε

$$Y_0'(\xi)=D\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

με D αυθαίρετη σταθερά. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$Y_0(\xi)=D_1+D\int \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \tag{3.9.61}$$

Θέτουμε $u=\frac{\xi}{\sqrt{2}} \Rightarrow d\xi=\sqrt{2}\,du$ οπότε $\int \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi=\sqrt{2}\int \mathrm{e}^{-u^2}du=\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}erf(u)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}erf(u)$, όπου erf η συνάρτηση σφάλματος, και η (3.9.61) γίνεται

$$Y_0(\xi)=D_1+D_2 erf(\frac{\xi}{\sqrt{2}})$$

Άρα η εσωτερική προσέγγιση με έναν όρο είναι

$$Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)\sim D_1+D_2 erf(\frac{\xi}{\sqrt{2}})$$

ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$y(x,\varepsilon)\sim D_1+D_2 erf(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}})$$

όπου D_1, D_2 σταθερές, και μέσα στην D_2 έχει ενσωματωθεί και το $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Συνοψίζοντας, έχουμε

$$\begin{cases} y_{out}^{L}(x,\varepsilon)\sim\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x<0 \\ y_{out}^{R}(x,\varepsilon)\sim 2\mathrm{e}^{-x}, & x>0 \end{cases}, \qquad x=O(1)$$

$$y_{\mathrm{in}}(x,\varepsilon)\sim D_1+D_2 erf\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right), \quad x=O(\sqrt{\varepsilon})$$

Συναρμογή της εσωτερικής με τις εξωτερικές προσεγγίσεις

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές που προέκυψαν στην εσωτερική προσέγγιση, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*, αλλά σε δύο περιοχές, ανάλογα με το πρόσημο της x (*Σχήμα 3.9.13*).

Για $x>0$ στο χωρίο επικάλυψης επιβάλλεται

$$\lim_{x\to 0^+} y_{out}^{R}(x,\varepsilon)=\lim_{\xi\to+\infty} Y_{\mathrm{in}}(\xi,\varepsilon) \tag{3.9.62}$$

Άρα αφού

$$\lim_{x\to 0^+} y_{out}^{R}(x,\varepsilon)=\lim_{x\to 0^+}[2\mathrm{e}^{-x}]=2$$

και επειδή $\lim_{\xi\to+\infty} erf(\xi)=1$

$$\lim_{\xi\to+\infty} Y_{\mathrm{in}}(\xi,\varepsilon)=\lim_{\xi\to+\infty}\left[D_1+D_2 erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right]=D_1+D_2$$

από την (*3.9.62*) έπεται πως

$$D_1+D_2=2 \tag{3.9.63}$$

Για $x<0$ στο χωρίο επικάλυψης επιβάλλεται

$$\lim_{x\to 0^-} y_{out}^{L}(x,\varepsilon)=\lim_{\xi\to-\infty} Y_{\mathrm{In}}(\xi,\varepsilon) \tag{3.9.64}$$

Άρα αφού

$$\lim_{x\to 0^-} y_{out}^{L}(x,\varepsilon)=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]=\frac{1}{2}$$

και επειδή $\lim_{\xi\to-\infty} erf(\xi)=-1$

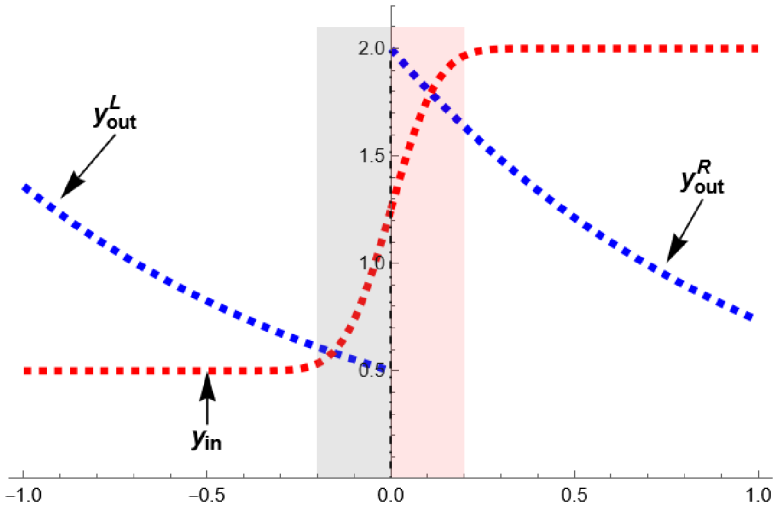
$$\lim_{\xi\to-\infty} Y_{\mathrm{in}}(\xi,\varepsilon)=\lim_{\xi\to-\infty}\left[D_1+D_2 erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)\right]=D_1-D_2$$

από την (*3.9.64*) έπεται πως

$$D_1-D_2=\frac{1}{2} \tag{3.9.65}$$

Από τις (*3.9.63*) και (*3.9.65*) έχουμε τις σταθερές

$$D_1=\frac{5}{4}, \qquad D_2=\frac{3}{4}$$



Σχήμα 3.9.13: Εξωτερικές και εσωτερική λύση με τα χωρία επικάλυψης γύρω από το $x=0$

Συνεπώς η εσωτερική προσέγγιση είναι

$$Y_{\text{in}}(\xi,\varepsilon)\sim\frac{5}{4}+\frac{3}{4}erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)$$

ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\text{in}}(x,\varepsilon)\sim\frac{5+3\,erf\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)}{4},\quad x=O(\sqrt{\varepsilon}) \tag{3.9.66}$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση

Στην παρούσα περίπτωση προκύπτουν δύο διαφορετικές εξωτερικές λύσεις, η (3.9.57) και (3.9.58), οι οποίες αντιστοιχούν στις περιοχές $x<0$ και $x>0$ αντίστοιχα. Παρατηρείται ότι και οι δύο εξωτερικές προσεγγίσεις έχουν την ίδια εκθετική δομή και διαφέρουν μόνο ως προς έναν πολλαπλασιαστικό συντελεστή. Αυτό υποδηλώνει ότι η βασική ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης διατηρείται σε όλο το διάστημα, ενώ η εσωτερική περιοχή είναι υπεύθυνη για τη μετάβαση μεταξύ των δύο διαφορετικών τιμών του συντελεστή.

Η εσωτερική προσέγγιση (3.9.66) παρέχει μια ομαλή μετάβαση μεταξύ των δύο εξωτερικών, καθώς η συνάρτηση σφάλματος ικανοποιεί

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} erf(\xi)=\pm 1$$

Λόγω της ύπαρξης δύο διαφορετικών εξωτερικών κλάδων, η κλασική διαδικασία κατασκευής ομοιόμορφης προσέγγισης μέσω άθροισης εξωτερικής και εσωτερικής λύσης με αφαίρεση του όρου επικάλυψης δεν εφαρμόζεται άμεσα. Αντί αυτού, αξιοποιείται το γεγονός ότι οι εξωτερικές προσεγγίσεις διαφέρουν μόνο ως προς έναν σταθερό παράγοντα, ο οποίος μεταβάλλεται εντός του οριακού στρώματος. Συνεπώς, αναζητούμε ομοιόμορφη προσέγγιση της μορφής

$$y_u(x,\varepsilon)=\mathrm{e}^{-x}F\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

όπου η συνάρτηση μετάβασης F πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες

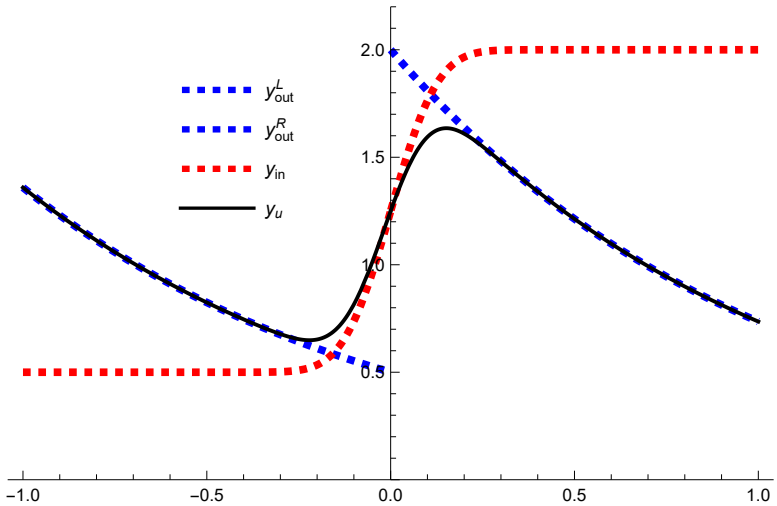
$$\lim_{\xi\to-\infty}F(\xi)=\frac{1}{2} \text{ και } \lim_{\xi\to+\infty}F(\xi)=2$$

εξασφαλίζοντας έτσι την ομοιόμορφη συμφωνία της λύσης με τις δύο εξωτερικές προσεγγίσεις και την εσωτερική συμπεριφορά στο οριακό στρώμα. Με βάση τη μορφή της εσωτερικής λύσης, προκύπτει ότι η κατάλληλη επιλογή είναι

$$F(\xi)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}erf\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)$$

και επομένως η ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση στις αρχικές μεταβλητές, δίνεται από τη σχέση

$$y_u(x,\varepsilon)\sim\mathrm{e}^{-x}\frac{5+3erf\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)}{4}$$

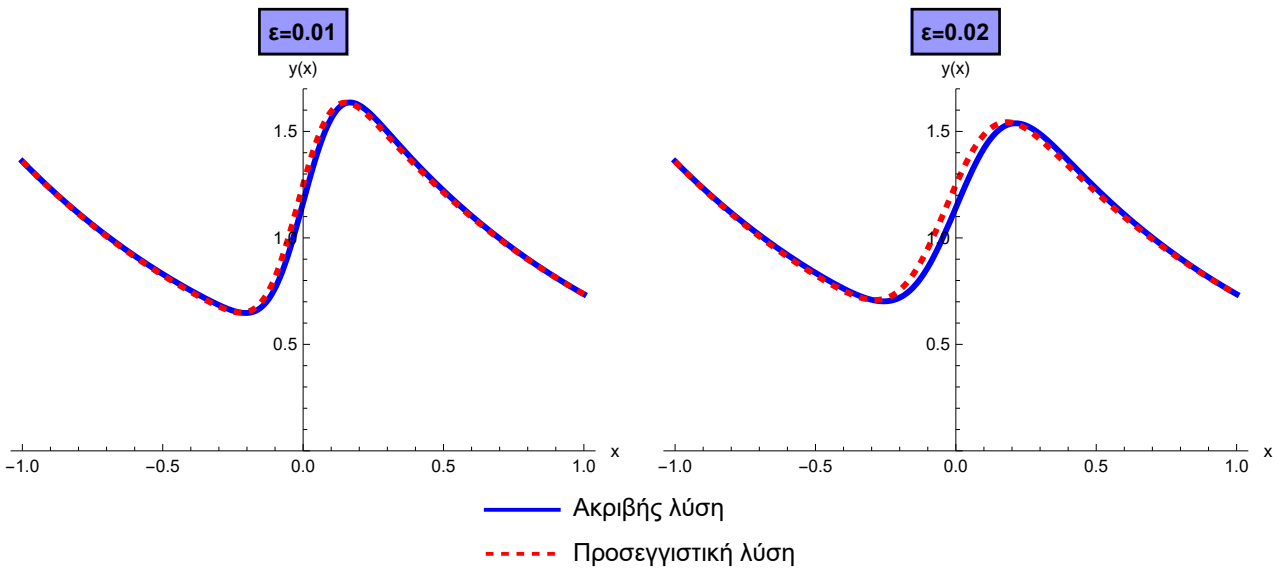


Σχήμα 3.9.14: Η εσωτερική και οι εξωτερικές λύσεις μαζί με την ομοιόμορφη προσέγγιση

Η παραπάνω έκφραση είναι έγκυρη σε όλο το διάστημα [−1,1] (*Σχήμα 3.9.14*) καθώς:

- για $x<0$ ανακτάται η αριστερή εξωτερική λύση,
- για $x>0$ η δεξιά εξωτερική λύση,
- ενώ στην περιοχή $x=O(\sqrt{\varepsilon})$ αποδίδεται σωστά η εσωτερική συμπεριφορά.

Στο *Σχήμα 3.9.15* βλέπουμε πως η ομοιόμορφη ασυμπτωτική προσέγγιση πρώτης τάξης προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια την ακριβή λύση. Επιπλέον, καθώς η παράμετρος ε τείνει στο μηδέν, η κλίση της λύσης στο σημείο $x=0$ αυξάνεται απεριόριστα, γεγονός που αντανακλά τη σταδιακή λέπτυνση του εσωτερικού οριακού στρώματος.



Σχήμα 3.9.15: Σύγκριση προσεγγιστικής-ακριβούς λύσης

3.9.3.3 Πολλαπλό οριακό στρώμα

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε ορισμένα προβλήματα συνοριακών τιμών είναι δυνατό να εμφανιστούν περισσότερα από ένα οριακά στρώματα εντός του πεδίου ορισμού της λύσης. Στην περίπτωση αυτή, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης δεν μεταβάλλεται μόνο σε ένα σημείο, αλλά σε περισσότερες από μία περιοχές του διαστήματος.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εξετάζεται μια χαρακτηριστική περίπτωση στην οποία εμφανίζονται οριακά στρώματα και στα δύο άκρα του διαστήματος, γεγονός που οδηγεί σε πιο σύνθετη δομή της ασυμπτωτικής προσέγγισης.

Παράδειγμα προβλήματος με οριακό στρώμα και στα δύο άκρα του διαστήματος

Δίνεται το πρόβλημα

$$\varepsilon^2 y''(x)+\varepsilon x y'(x)-y(x)=-\mathrm{e}^x, \qquad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{3.9.67}$$

$$y(0)=2 \tag{3.9.68}$$

$$y(1)=1 \tag{3.9.69}$$

Θα αναζητήσουμε προσεγγιστική λύση ενός όρου στο $0\le x\le 1$ με τη θεωρία οριακού στρώματος.

Εξωτερική προσέγγιση

Για να βρούμε προσεγγιστική λύση στο εξωτερικό χωρίο, θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$y_{out}(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\ldots$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.67) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, προκύπτει η εξίσωση για τον πρωτεύοντα όρο

$$y_0(x)=\mathrm{e}^x \tag{3.9.70}$$

Εφαρμόζοντας την ανάπτυξη και στις συνοριακές συνθήκες (3.9.68), (3.9.69) παίρνουμε

$$y_0(0)=2 \quad \text{και } y_0(1)=1$$

Η (3.9.70) παρατηρούμε πως δεν ικανοποιεί καμιά συνοριακή συνθήκη, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως υπάρχουν οριακά στρώματα και στα δύο άκρα του διαστήματος.

Έτσι, η εξωτερική προσέγγιση με έναν όρο είναι

$$y_{out}(x,\varepsilon)\sim \mathrm{e}^x \tag{3.9.71}$$

Οριακό στρώμα στο $x=0$

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την $\delta(\varepsilon)$, και οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{x}{\delta(\varepsilon)} \text{ και } Y_L=y:\ Y_L(\xi,\varepsilon)=Y_L\left(\frac{x}{\delta(\varepsilon)},\varepsilon\right)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\,\delta(\varepsilon),\varepsilon),\ \text{ όπου } \lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY_L}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\frac{dY_L}{d\xi} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\frac{d^2Y_L}{d\xi^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.67) και γίνεται

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta(\varepsilon)^2}Y_L''+\varepsilon\,\xi\,Y_L'-Y_L=-\mathrm{e}^{\xi\,\delta(\varepsilon)} \tag{3.9.72}$$

<u>Συνθήκες εξισορρόπησης</u>

Στην εξίσωση (3.9.72) έχουμε τέσσερις όρους με συντελεστές

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta(\varepsilon)^2},\quad \varepsilon,\quad -1,\quad -1$$

επειδή $\mathrm{e}^{\xi\,\delta(\varepsilon)}\sim 1+\xi\,\delta(\varepsilon)=1+O(\delta(\varepsilon))$

Είναι φανερό πως για $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, όλοι οι συντελεστές είναι $O(1)$, και μόνο ο συντελεστής της Y_L' είναι $O(\varepsilon)$, άρα μικρός σε σχέση με τους άλλους, και μπορεί να παραληφθεί.

Επομένως εξασφαλίζεται η εξισορρόπηση των όρων, και επιλέγοντας την κλίμακα $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, δηλαδή το πάχος του οριακού στρώματος να είναι ε, οι νέες μεταβλητές είναι

$$\xi=\frac{x}{\varepsilon} \text{ και } Y=y:\ Y_L(\xi,\varepsilon)=Y_L(\frac{x}{\varepsilon},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(\xi\varepsilon,\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.72) κι έχουμε

$$Y_L''+\varepsilon\xi Y_L'-Y_L=-\mathrm{e}^{\varepsilon\xi}$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$Y_L(\xi,\varepsilon)=Y_{L,0}(\xi)+\varepsilon Y_{L,1}(\xi)+\ldots$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση και εξισώνοντας τους όρους ίδιας τάξης ως προς ε, για τον πρωτεύοντα όρο προκύπτει η αδιατάρακτη εξίσωση

$$Y_{L,0}''-Y_{L,0}=-1. \qquad 0<\xi<\infty \tag{3.9.73}$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (3.9.68), επειδή αναζητάμε τη λύση στο οριακό στρώμα κοντά στο $x=0$, έχουμε

$$y(0)=2\Rightarrow Y_{L,0}(\frac{0}{\varepsilon})=Y_{L,0}(0)=2 \tag{3.9.74}$$

Η λύση του προβλήματος (3.9.73), (3.9.74) δίνει την εσωτερική προσέγγιση κοντά στο $x=0$

$$Y_L(\xi,\varepsilon)\sim 1+A\,\mathrm{e}^{-\xi}+(1-A)\mathrm{e}^{\xi}$$

ή στις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\mathrm{in}}^{L}(x,\varepsilon)\sim 1+A\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{\varepsilon}}+(1-A)\mathrm{e}^{\frac{x}{\varepsilon}}, \qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.75}$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης κοντά στο $x=0$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά A, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*. Στο χωρίο επικάλυψης κοντά στο $x=0$ επιβάλλεται λοιπόν

$$\lim_{x\to 0} y_{out}(x,\varepsilon)=\lim_{\xi\to\infty} Y_L(\xi,\varepsilon) \tag{3.9.76}$$

Άρα αφού

$$\lim_{x\to 0} y_{out}(x,\varepsilon)=\mathrm{e}^0=1$$

$$\lim_{\xi\to\infty} Y_L(\xi,\varepsilon)=\lim_{\xi\to\infty}\left[1+A\,\mathrm{e}^{-\xi}+(1-A)\mathrm{e}^{\xi}\right]$$

από την (3.9.76) έπεται πως

$$\lim_{\xi\to\infty}\left[1+A\,\mathrm{e}^{-\xi}+(1-A)\mathrm{e}^{\xi}\right]=1 \tag{3.9.77}$$

Ο όρος $(1-A)\mathrm{e}^{\xi}$ περιέχει την εκθετική συνάρτηση e^{ξ}, η οποία τείνει στο άπειρο καθώς $\xi\to\infty$. Για να μείνει φραγμένος πρέπει ο συντελεστής του να μηδενιστεί, δηλαδή

$$1-A=0 \Rightarrow A=1$$

Συνεπώς, η εσωτερική προσέγγιση κοντά στο $x=0$, που ικανοποιεί την (3.9.76) είναι

$$Y_{L,}(\xi,\varepsilon)\sim 1+\mathrm{e}^{-\xi}$$

ή στις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\mathrm{in}}^{L}(x,\varepsilon)\sim 1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.78}$$

Οριακό στρώμα στο $x=1$

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την δ(ε), και οι νέες μεταβλητές είναι

$$z=\frac{1-x}{\delta(\varepsilon)} \text{ και } Y_R=y: \; Y_R(z,\varepsilon)=Y_R(\frac{1-x}{\delta(\varepsilon)},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(1-z\,\delta(\varepsilon),\varepsilon),$$

όπου $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY_R}{dz}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\delta(\varepsilon)}\frac{dY_R}{dz} \text{ και } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\delta(\varepsilon)^2}\frac{d^2Y_R}{dz^2}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.67) και γίνεται

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta(\varepsilon)^2}Y_R''+(\varepsilon z-\frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)})Y_R'-Y_R=-\mathrm{e}^{1-z\delta(\varepsilon)} \tag{3.9.79}$$

<u>Συνθήκες εξισορρόπησης</u>

Στην εξίσωση (3.9.79) έχουμε πέντε όρους με συντελεστές

$$\frac{\varepsilon^2}{\delta(\varepsilon)^2}, \quad \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)}, \quad -1, \quad -1$$

επειδή για σταθερό z, ισχύει $\mathrm{e}^{1-z\delta(\varepsilon)}\sim \mathrm{e}(1-z\,\delta(\varepsilon)+O(\delta^2(\varepsilon)))=O(1)$.

Είναι πάλι φανερό πως για $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, όλοι οι συντελεστές είναι $O(1)$, και μόνο ο όρος $\varepsilon z Y_R'$ είναι $O(\varepsilon)$, άρα μικρός σε σχέση με τους άλλους, και μπορεί να παραληφθεί.

Επομένως εξασφαλίζεται η εξισορρόπηση των όρων, και επιλέγοντας την κλίμακα $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$, δηλαδή το πάχος του οριακού στρώματος να είναι ε, οι νέες μεταβλητές είναι

$$z=\frac{1-x}{\varepsilon} \quad \text{και} \quad Y_R=y: \; Y_R(z,\varepsilon)=Y_R(\frac{1-x}{\varepsilon},\varepsilon)=y(x,\varepsilon)=y(1-z\,\varepsilon,\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε στην (3.9.79) κι έχουμε

$$Y_R''+(\varepsilon z-1)Y_R'-Y_R=-\mathrm{e}^{1-z\varepsilon}$$

Με εφαρμογή της μεθόδου κανονικών διαταραχών, ο πρωτεύων όρος προκύπτει από την αδιατάρακτη εξίσωση

$$Y_{R,0}''-Y_{R,0}'-Y_{R,0}=-\mathrm{e}. \qquad 0<z<+\infty \tag{3.9.80}$$

Από τη συνοριακή συνθήκη (3.9.69), επειδή αναζητάμε τη λύση στο οριακό στρώμα κοντά στο $x=1$, έχουμε

$$y(1)=1\Rightarrow Y_{R,0}\left(\frac{1-1}{\varepsilon}\right)=Y_{R,0}(0)=1 \tag{3.9.81}$$

Η λύση του προβλήματος (3.9.80), (3.9.81) δίνει την εσωτερική προσέγγιση με έναν όρο κοντά στο $x=1$

$$Y_R(z,\varepsilon)\sim\mathrm{e}+C\,\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}+(1-\mathrm{e}-C)\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}$$

ή στις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\mathrm{in}}^{R}(x,\varepsilon)\sim\mathrm{e}+C\,\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{1-x}{\varepsilon}}+(1-\mathrm{e}-C)\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{1-x}{\varepsilon}}, \qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.82}$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης κοντά στο $x=1$

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά C, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*. Στο χωρίο επικάλυψης κοντά στο $x=1$ επιβάλλεται

$$\lim_{x\to 1} y_{out}(x,\varepsilon)=\lim_{z\to\infty} Y_R(z,\varepsilon) \tag{3.9.83}$$

Άρα αφού

$$\lim_{x\to 1} y_{out}(x,\varepsilon)=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$$

$$\lim_{z\to\infty} Y_R(z,\varepsilon)=\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{e}+C\,\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}+(1-\mathrm{e}-C)\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}\right]$$

από την (3.9.83) έπεται πως

$$\lim_{z\to\infty}\left[\mathrm{e}+C\,\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}+(1-\mathrm{e}-C)\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}\right]=\mathrm{e} \tag{3.9.84}$$

Ο όρος $(1-\mathrm{e}-C)\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}$ περιέχει την εκθετική συνάρτηση $\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}$, η οποία τείνει στο άπειρο καθώς $z\to\infty$. Για να μείνει φραγμένος πρέπει ο συντελεστής του να μηδενιστεί, δηλαδή

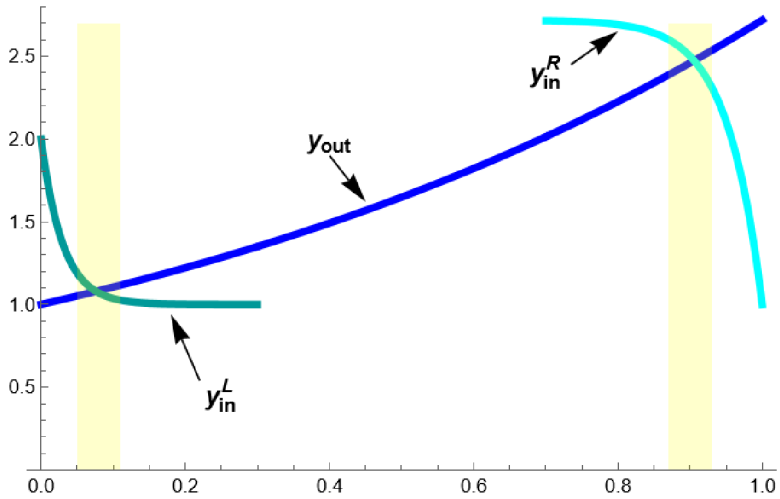
$$1-\mathrm{e}-C=0\Rightarrow C=1-\mathrm{e}$$

Συνεπώς, η εσωτερική προσέγγιση κοντά στο $x=1$, που ικανοποιεί την (3.9.83) είναι

$$Y_R(z,\varepsilon)\sim \mathrm{e}+(1-\mathrm{e})\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}z}$$

ή στις αρχικές μεταβλητές

$$y_{\mathrm{in}}^R(x,\varepsilon)\sim \mathrm{e}+(1-\mathrm{e})\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\frac{1-x}{\varepsilon}}, \qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.85}$$



Σχήμα 3.9.16: Εξωτερική-εσωτερικές λύσεις και χωρία επικάλυψης

Στο *Σχήμα* 3.9.16 απεικονίζονται η εξωτερική και οι εσωτερικές ασυμπτωτικές προσεγγίσεις, ενώ τα σκιασμένα ορθογώνια στις περιοχές γύρω από τα σημεία $x=0$ και $x=1$ υποδεικνύουν τα χωρία επικάλυψης. Στις περιοχές αυτές οι επιμέρους προσεγγίσεις συγκλίνουν, γεγονός που επιτρέπει τη συναρμογή τους και οδηγεί στη διαμόρφωση μίας ομοιόμορφα έγκυρης λύσης.

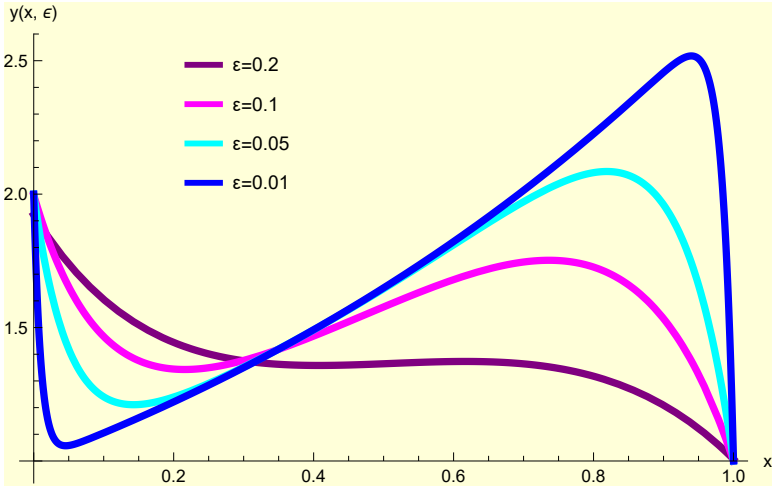
Ομοιόμορφη προσέγγιση στο [0,1]

Για να έχουμε ενιαία προσέγγιση (y_u) που να είναι ομοιόμορφα έγκυρη στο διάστημα [0,1], προσθέτουμε τις τρεις προσεγγίσεις (3.9.71), (3.9.78), (3.9.85) και αφαιρούμε από το άθροισμα αυτό, τα κοινά τους όρια (3.9.77), (3.9.84). Έτσι έχουμε

$$y_u(x,\varepsilon)=y_{out}(x,\varepsilon)+y_{\mathrm{in}}^L(x,\varepsilon)+y_{\mathrm{in}}^R(x,\varepsilon)-1-\mathrm{e}\Rightarrow$$

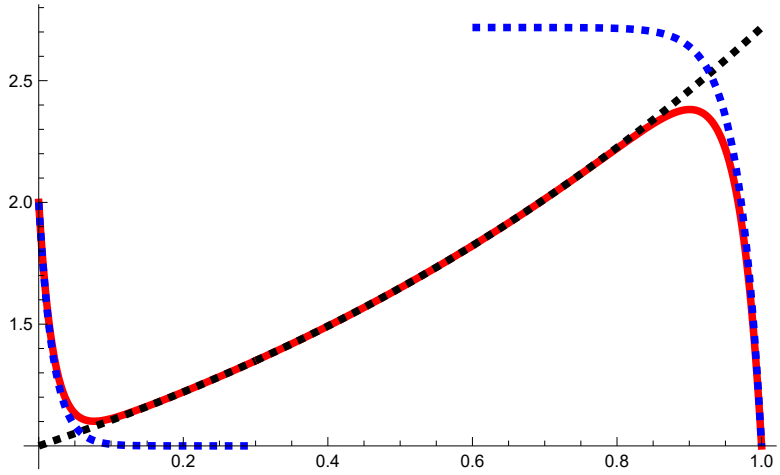
$$y_u(x,\varepsilon)\sim \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{\varepsilon}}+(1-\mathrm{e})\mathrm{e}^{\frac{(1-\sqrt{5})(1-x)}{2\varepsilon}}$$

Στο *Σχήμα* 3.9.17 παρουσιάζεται η προσεγγιστική λύση για διάφορες τιμές της παραμέτρου ε. Παρατηρείται ότι, καθώς το ε μειώνεται, η μετάβαση της λύσης γίνεται ολοένα και πιο απότομη σε περιοχές κοντά στα άκρα του διαστήματος. Το γεγονός αυτό αντανακλά τη σταδιακή λέπτυνση των οριακών στρωμάτων, των οποίων το πάχος είναι τάξης $O(\varepsilon)$.



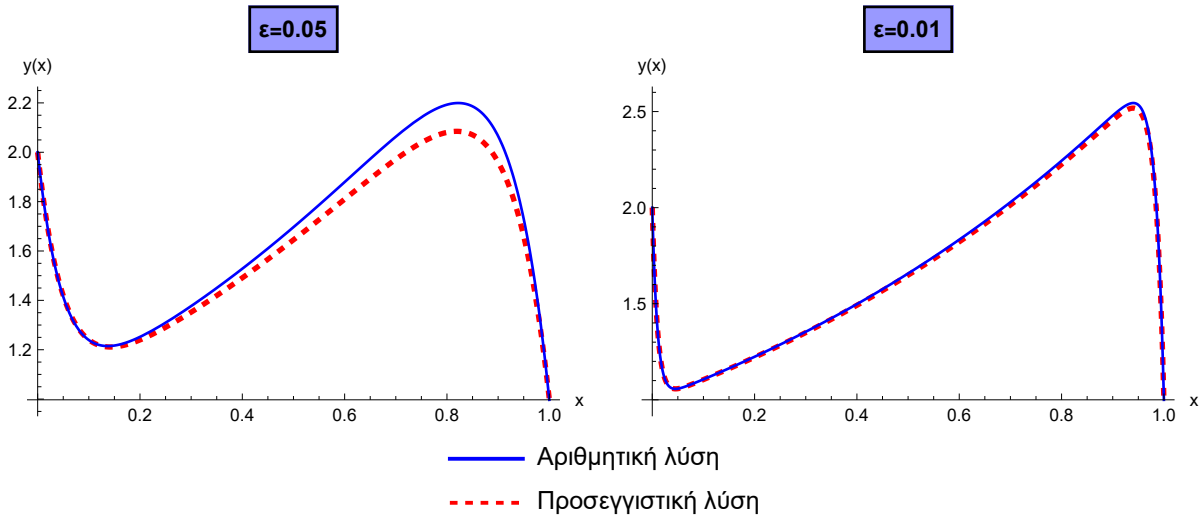
Σχήμα 3.9.17: Η ομοιόμορφη προσέγγιση για διαφορετικές τιμές της ε

Στο *Σχήμα 3.9.18* φαίνονται η εξωτερική και εσωτερικές προσεγγίσεις μαζί με την ομοιόμορφη ασυμπτωτική λύση. Διαπιστώνεται ότι η εξωτερική λύση (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) περιγράφει ικανοποιητικά τη συμπεριφορά της λύσης μακριά από τα οριακά στρώματα, ενώ οι εσωτερικές προσεγγίσεις (μπλε διακεκομμένες γραμμές), αποδίδουν τη μετάβαση εντός αυτών. Η ομοιόμορφη προσέγγιση (κόκκινη γραμμή), συνδυάζει αποτελεσματικά τις επιμέρους προσεγγίσεις και παρέχει μία ενιαία περιγραφή της λύσης σε όλο το διάστημα.



Σχήμα 3.9.18: Εξωτερική-εσωτερικές λύσεις και ομοιόμορφη προσέγγιση

Στο *Σχήμα 3.9.19* παρουσιάζεται η σύγκριση μεταξύ της ομοιόμορφης ασυμπτωτικής προσέγγισης και της αριθμητικής λύσης του προβλήματος. Παρατηρείται ότι, καθώς η παράμετρος ε μειώνεται, η συμφωνία μεταξύ των δύο λύσεων βελτιώνεται σημαντικά, επιβεβαιώνοντας την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης στο όριο $\varepsilon \to 0$.



Σχήμα 3.9.19: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης

3.9.4 Εφαρμογή της θεωρίας οριακού στρώματος σε πρόβλημα με κόμβο

Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, στο οποίο η ύπαρξη και η δομή του οριακού στρώματος συνδέεται άμεσα με τη δυναμική του συστήματος.

Πρόβλημα αρχικών τιμών

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\varepsilon\ddot{x}+k\dot{x}-x+x^2=0, \quad 0\le t<\infty, \quad 0<\varepsilon\ll 1, \quad k>2\sqrt{\varepsilon} \tag{3.9.86}$$

$$x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=\frac{\alpha}{\varepsilon}, \quad 0<\alpha\le\frac{1}{2} \tag{3.9.87}$$

Θα αναζητήσουμε ομοιόμορφη προσεγγιστική λύση στο διάστημα $0\le t<\infty$, και στη συνέχεια θα σχεδιάσουμε την τροχιά στο πορτραίτο φάσης, η οποία διέρχεται από το σημείο $(0,\frac{\alpha}{\varepsilon})$.

Το πρόβλημα περιγράφει την κίνηση σώματος μικρής μάζας ε, υπό την επίδραση επαναφέρουσας και αποσβεστικής δύναμης. Η εφαρμογή στιγμιαίας ώθησης α στη χρονική στιγμή $t=0$, προκαλεί μεγάλη αρχική ταχύτητα $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, η οποία δεν είναι συμβατή με τη μακροχρόνια εξέλιξη της λύσης, με αποτέλεσμα την εμφάνιση αρχικού οριακού στρώματος κοντά στην αρχή του χρόνου.

Ποιοτική ανάλυση του προβλήματος

Η (3.9.86) γράφεται ως σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=\dfrac{-ky+x-x^2}{\varepsilon} \end{cases}$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, είναι οι λύσεις του

$$\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{-ky+x-x^2}{\varepsilon}=0 \end{cases}$$

και είναι τα $(0,0),(1,0)$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι

$$\boldsymbol{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1-2x}{\varepsilon} & \dfrac{-k}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

- Στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$, έχουμε:

$$\boldsymbol{J}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & \dfrac{-k}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\varepsilon\lambda^2+k\lambda-1=0$. Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2+4\varepsilon}}{2\varepsilon}$, οι οποίες είναι πραγματικές, ετερόσημες, άρα, η αρχή είναι σάγμα (ασταθές) (*Πίνακας 2.2.1*).

- Στο σημείο ισορροπίας $(1,0)$, έχουμε

$$\boldsymbol{J}(1,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{\varepsilon} & \dfrac{-k}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\varepsilon\lambda^2+k\lambda+1=0$. Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-4\varepsilon}}{2\varepsilon}$, οι οποίες είναι πραγματικές αρνητικές, άρα το σημείο ισορροπίας $(1,0)$ είναι ευσταθής κόμβος (*Πίνακας 2.2.1*).

Εφαρμογή θεωρίας οριακού στρώματος

Εξωτερική προσέγγιση

Για να βρούμε προσεγγιστική λύση στο εξωτερικό χωρίο, θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$x_{out}(t,\varepsilon)=x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\ldots$$

Εφαρμόζουμε στην (3.9.86) και εξισώνοντας τους συντελεστές των δυνάμεων του ε με το μηδέν, έχουμε για τον πρωτεύοντα όρο

$$kx_0'-x_0+x_0^2=0\Rightarrow k\int\frac{x_0'}{x_0(1-x_0)}dt=\int dt\Rightarrow\ln\left|\frac{x_0}{1-x_0}\right|=\frac{t+C}{k}\Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{1-x_0}{x_0}\right|=-\frac{t+C}{k}\Rightarrow\frac{1}{x_0}-1=\mathrm{e}^{-\frac{t+C}{k}}\Rightarrow x_0=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t+C}{k}}}$$

όπου C αυθαίρετη σταθερά.

Έτσι, η εξωτερική προσέγγιση με έναν όρο είναι

$$x_{out}(t,\varepsilon)\sim\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t+C}{k}}},\qquad x=O(1) \tag{3.9.88}$$

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε την εξίσωση στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την ε, και οι νέες μεταβλητές είναι

$$\tau=\frac{t}{\varepsilon}\ \text{ και } X=x:\ \ X(\tau,\varepsilon)=X(\frac{t}{\varepsilon},\varepsilon)=x(t,\varepsilon)=x(\tau\varepsilon,\varepsilon)$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας, αντικαθιστούμε στην εξίσωση (3.9.86) και γίνεται

$$X''+kX'-\varepsilon(X-X^2)=0 \tag{3.9.89}$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας τη λύση στη μορφή της σειράς διαταραχής

$$X_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)+\ldots$$

και προκύπτει η εξίσωση για τον πρωτεύοντα όρο

$$X_0''+kX_0'=0$$

με γενική λύση

$$X_0=A+B\mathrm{e}^{-k\tau}$$

όπου A, B αυθαίρετες σταθερές.

Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες (3.9.87) που για τον πρωτεύοντα όρο είναι

$$X_0(0)=0,\qquad X_0'(0)=\alpha$$

και παίρνουμε

$$A=-B=\frac{\alpha}{k}$$

Τελικά η εσωτερική προσέγγιση με έναν όρο είναι

$$X_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)\sim\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{k}\mathrm{e}^{-k\tau}$$

ή ως προς τις αρχικές μεταβλητές

$$x_{\text{in}}(t,\varepsilon)\sim\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{k}\mathrm{e}^{-k\frac{t}{\varepsilon}},\qquad x=O(\varepsilon) \tag{3.9.90}$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά *C*, εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*.

Στο χωρίο επικάλυψης επιβάλλεται

$$\lim_{t\to 0} x_{out}(t,\varepsilon)=\lim_{\tau\to\infty} X_{\text{in}}(\tau,\varepsilon) \tag{3.9.91}$$

Άρα, αφού

$$\lim_{t\to 0} x_{out}(t,\varepsilon)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t+C}{k}}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{C}{k}}}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} Y_{\text{in}}(\tau,\varepsilon)=\lim_{\tau\to\infty}\left[\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{k}\mathrm{e}^{-k\frac{t}{\varepsilon}}\right]=\frac{\alpha}{k}$$

Από την (3.9.91) έπεται πως

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{C}{k}}}=\frac{\alpha}{k}$$

άρα

$$\mathrm{e}^{-\frac{C}{k}}=\frac{k-\alpha}{\alpha}$$

και η (3.9.88) γίνεται τελικά

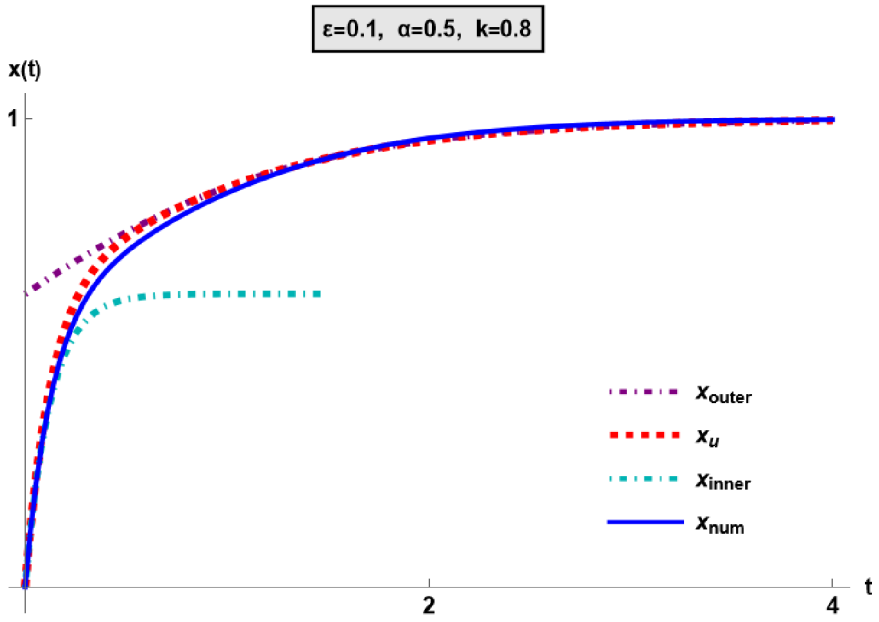
$$x_{out}(t,\varepsilon)\sim\frac{\alpha}{\alpha+(k-\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{t}{k}}},\qquad x=O(1) \tag{3.9.92}$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση

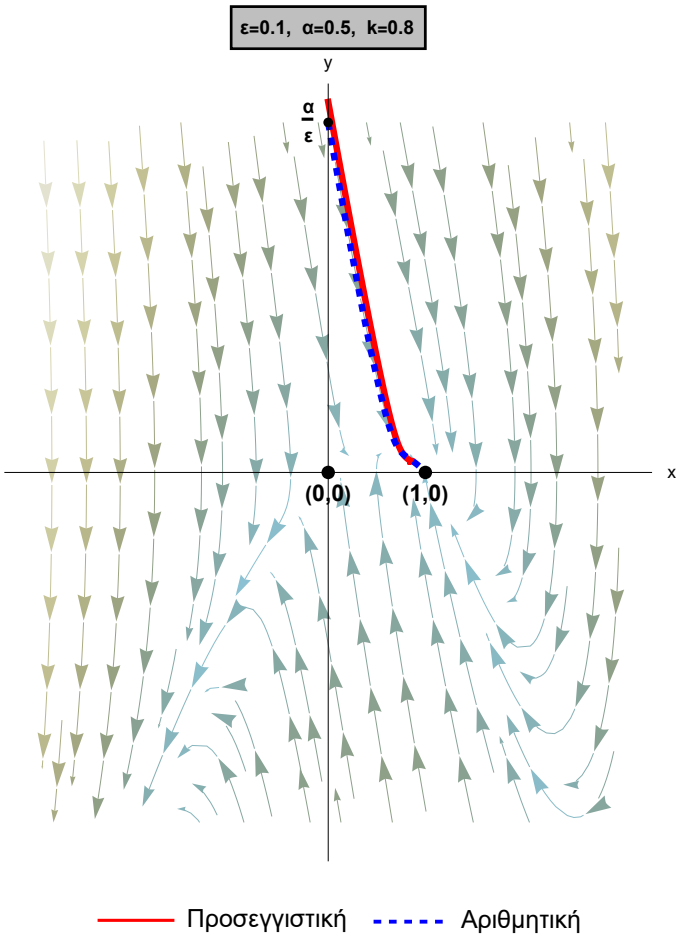
Για να έχουμε ενιαία προσέγγιση (x_u) που να είναι ομοιόμορφα έγκυρη για κάθε $0\le t<\infty$ πρέπει να προσθέσουμε τις δύο προσεγγίσεις (3.9.90), (3.9.92), και να αφαιρέσουμε το κοινό τους όριο

$$x_u(t,\varepsilon)\sim\frac{\alpha}{\alpha+(k-\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{t}{k}}}+\frac{\alpha}{k}-\frac{\alpha}{k}\mathrm{e}^{-k\frac{t}{\varepsilon}}-\frac{\alpha}{k}\Rightarrow$$

$$x_u(t,\varepsilon)\sim\frac{\alpha}{\alpha+(k-\alpha)\mathrm{e}^{-\frac{t}{k}}}-\frac{\alpha}{k}\mathrm{e}^{-k\frac{t}{\varepsilon}} \tag{3.9.93}$$



Σχήμα 3.9.20:Αριθμητική λύση και ασυμπτωτικές προσεγγίσεις (εξωτερική, εσωτερική και ομοιόμορφη)



Σχήμα 3.9.21: Πορτραίτο φάσης με αριθμητική και ασυμπτωτική τροχιά

Στο *Σχήμα 3.9.20* παρουσιάζονται η αριθμητική λύση του προβλήματος μαζί με τις ασυμπτωτικές προσεγγίσεις (εσωτερική, εξωτερική και ομοιόμορφη). Παρατηρείται ότι η προσεγγιστική λύση, η οποία βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με την αριθμητική, περιγράφει με ακρίβεια τη συμπεριφορά του συστήματος σε όλο το χρονικό διάστημα, συνδυάζοντας τη γρήγορη αρχική προσαρμογή με την αργή εξέλιξη.

Στο *Σχήμα 3.9.21* απεικονίζεται το πορτραίτο φάσης του συστήματος. Βλέπουμε τα σημεία ισορροπίας, και την τροχιά που διέρχεται από το σημείο $\left(0,\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)$, εμφανίζοντας έντονο αρχικό οριακό στρώμα, κατά το οποίο πραγματοποιείται ταχεία μεταβατική δυναμική. Στη συνέχεια συγκλίνει προς τον κόμβο, ακολουθώντας τη δομή του πεδίου ροής. Η ασυμπτωτική τροχιά παρουσιάζει πολύ καλή συμφωνία με αυτήν που υπολογίστηκε αριθμητικά, επιβεβαιώνοντας για άλλη μια φορά την εγκυρότητα της θεωρίας οριακού στρώματος.

3.9.5 Εφαρμογή της θεωρίας οριακού στρώματος σε συστήματα

Η μέθοδος των οριακών στρωμάτων δεν περιορίζεται σε προβλήματα αρχικών ή συνοριακών τιμών αλλά βρίσκει εφαρμογή και σε δυναμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Η παρουσία μικρής παραμέτρου οδηγεί στη συνύπαρξη διαφορετικών χρονικών κλιμάκων και στην εμφάνιση φαινομένων ταχείας και αργής δυναμικής. Στην ενότητα αυτή εξετάζεται η εφαρμογή της μεθόδου σε ένα τέτοιο σύστημα και αναλύεται η συμπεριφορά των λύσεων στο επίπεδο φάσης.

Μη γραμμικό δυναμικό σύστημα με οριακό στρώμα	
Δίνεται το σύστημα	
$$\dot{u}=-u^2+u^2 v$$	*(3.9.94)*
$$\varepsilon\dot{v}=u-(u+1)v$$	*(3.9.95)*
$$u(0)=1$$	*(3.9.96)*
$$v(0)=0$$	*(3.9.97)*

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, είναι οι λύσεις του

$$\begin{cases} -u^2+u^2 v=0 \\ \dfrac{u-(u+1)v}{\varepsilon}=0 \end{cases}$$

και είναι το $(0,0)$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι

$$\boldsymbol{J}(u,v)=\begin{bmatrix} -2u+2uv & u^2 \\ \dfrac{1-v}{\varepsilon} & \dfrac{-(u+1)}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$, έχουμε:

$$\boldsymbol{J}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon} & \dfrac{-1}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\lambda^2+\dfrac{\lambda}{\varepsilon}=0$. Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1=0, \lambda_2=-\dfrac{1}{\varepsilon}$. Επομένως, το σημείο ισορροπίας είναι μη υπερβολικό, καθώς μία από τις ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι μηδενική. Η παρουσία μηδενικής ιδιοτιμής υποδεικνύει την ύπαρξη κεντρικής διεύθυνσης, κατά την οποία η τοπική συμπεριφορά του συστήματος δεν καθορίζεται από τη γραμμική προσέγγιση. Συνεπώς, το κλασικό θεώρημα γραμμικοποίησης δεν επαρκεί για την ανάλυση της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας.

Επιπλέον, λόγω της παρουσίας της μικρής παραμέτρου ε, το σύστημα παρουσιάζει δύο διακριτές χρονικές κλίμακες. Συγκεκριμένα, η μεταβλητή u εξελίσσεται σε αργή χρονική κλίμακα, ενώ η μεταβλητή v αποτελεί τη γρήγορη δυναμική του συστήματος, που οδηγεί σε ταχεία προσαρμογή της λύσης σε μία αργή (κρίσιμη) πολλαπλότητα, η οποία δίνεται από τη συνθήκη ισορροπίας του ταχέος υποσυστήματος

$$u-(u+1)v=0 \Rightarrow v=\frac{u}{u+1}$$

ενώ η εξέλιξη κατά μήκος αυτής της πολλαπλότητας καθορίζει τη μακροχρόνια συμπεριφορά του συστήματος. Για τον λόγο αυτό, η ανάλυση της δυναμικής πραγματοποιείται στο πλαίσιο της θεωρίας οριακού στρώματος, μέσω διαχωρισμού της λύσης σε εσωτερική, η οποία περιγράφει την ταχεία μεταβατική συμπεριφορά σε γειτονιά της αρχικής συνθήκης $t=0$, και εξωτερική προσέγγιση. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγεται η ανάγκη άμεσης εφαρμογής του θεωρήματος κεντρικής πολλαπλότητας, καθώς η γρήγορη–αργή δομή του συστήματος παρέχει φυσική γεωμετρική αποσύνθεση της δυναμικής. Η ασυμπτωτική κατασκευή της λύσης θα επιτρέψει τη μελέτη της συμπεριφοράς των τροχιών κοντά στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$ και την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την ευστάθειά του.

Εφαρμογή θεωρίας οριακού στρώματος

Εξωτερική προσέγγιση

Στο εξωτερικό χωρίο θεωρούμε πως οι u,v έχουν αντίστοιχα τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$u(t)=u_0(t)+\varepsilon u_1(t)+\ldots$$

$$v(t)=v_0(t)+\varepsilon v_1(t)+\ldots$$

Αντικαθιστούμε στις (3.9.94), (3.9.95) και εξισώνοντας τους συντελεστές ίδιων δυνάμεων του ε, έχουμε τις εξισώσεις για τον πρωτεύοντα όρο

$$\dot{u}_0=-u_0^2+u_0^2 v_0 \tag{3.9.98}$$

$$0=u_0-(u_0+1)v_0 \Rightarrow v_0=\frac{u_0}{u_0+1} \tag{3.9.99}$$

Η λύση της εξίσωσης (3.9.98) μετά από αντικατάσταση της (3.9.99) είναι σε πεπλεγμένη μορφή

$$\ln|u_0|-\frac{1}{u_0}=-t+c$$

Έτσι, συνοψίζοντας, η εξωτερική προσέγγιση με έναν όρο των μεταβλητών του συστήματος είναι

$$\ln|u_{out}|-\frac{1}{u_{out}}=-t+c \tag{3.9.100}$$

$$v_{out}=\frac{u_{out}}{u_{out}+1} \tag{3.9.101}$$

όπου c σταθερά που θα προσδιορίσουμε με τη συναρμογή στη συνέχεια.

Εσωτερική προσέγγιση

Κανονικοποιούμε το σύστημα στο οριακό στρώμα, χρησιμοποιώντας χαρακτηριστική κλίμακα αναφοράς την ε, και η νέα μεταβλητή του χρόνου είναι

$$\tau=\frac{t}{\varepsilon}$$

και οι εξαρτημένες μεταβλητές

$$U(\tau)=U(\frac{t}{\varepsilon})=u(t) \text{ και } V(\tau)=V(\frac{t}{\varepsilon})=v(t)$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{du}{dt}=\frac{dU}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{dU}{d\tau} \text{ και } \frac{dv}{dt}=\frac{dV}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{1}{\varepsilon}\frac{dV}{d\tau}$$

Αντικαθιστούμε στις (3.9.94), (3.9.95) και παίρνουμε

$$\frac{1}{\varepsilon}U'=-U^2+U^2 V \tag{3.9.102}$$

$$V'=U-(U+1)V \tag{3.9.103}$$

Θεωρούμε πως οι U,V έχουν αντίστοιχα τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$U(\tau)=U_0(\tau)+\varepsilon U_1(\tau)+\ldots$$

$$V(\tau)=V_0(\tau)+\varepsilon V_1(\tau)+\ldots$$

Εφαρμόζουμε στις (3.9.102), (3.9.103) καθώς και στις αρχικές συνθήκες (3.9.96), (3.9.97) και παίρνουμε τα προβλήματα για τον πρωτεύοντα όρο

$$U_0'=0 \quad \text{με} \quad U_0(0)=1 \tag{3.9.104}$$

$$V_0'=U_0-V_0(U_0+1) \quad \text{με} \quad V_0(0)=0 \tag{3.9.105}$$

Από την εξίσωση του (3.9.104) έπεται πως $U_0(\tau)=const$ και επειδή $U_0(0)=1$, τελικά

$$U_0(\tau)=1$$

Τότε η εξίσωση του (3.9.105) γίνεται $V_0'=1-2V_0$ που έχει λύση $V_0(\tau)=C\,\mathrm{e}^{-2\tau}+\frac{1}{2}$, και εφαρμόζοντας την $V_0(0)=0$, τελικά

$$V_0(\tau)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\tau}+\frac{1}{2}$$

Έτσι η εσωτερική προσέγγιση με έναν όρο των μεταβλητών του συστήματος είναι

$$u_{\text{in}}(t)\sim 1 \tag{3.9.106}$$

$$v_{\text{in}}(t)\sim\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2\frac{t}{\varepsilon}}\right) \tag{3.9.107}$$

Συναρμογή εξωτερικής και εσωτερικής προσέγγισης

Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά c στην (3.9.100), εφαρμόζουμε τον κανόνα συναρμογής του *Prandtl*.

Στο χωρίο επικάλυψης επιβάλλεται

$$\lim_{t\to 0} u_{out}(t)=\lim_{\tau\to\infty} U_0(\tau) \tag{3.9.108}$$

και αφού $\lim_{\tau\to\infty} U_0(\tau)=1$, έπεται πως $\lim_{t\to 0} u_{out}(t)=1$.

Από την (3.9.100) τότε έχουμε

$$\lim_{t\to 0}\left[\ln|u_{out}|-\frac{1}{u_{out}}\right]=\lim_{t\to 0}(-t+c)\Rightarrow \ln 1-1=c\Rightarrow c=-1$$

Έτσι

$$\ln|u_{out}|-\frac{1}{u_{out}}=-t-1 \tag{3.9.109}$$

Παρατηρούμε πως ισχύει η συνθήκη συναρμογής και για την μεταβλητή v

$$\lim_{t\to 0} v_{out}(t)=\lim_{\tau\to\infty} V_0(\tau)$$

αφού

$$\lim_{t\to 0} v_{out} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{u_{out}}{u_{out}+1}\right] = \frac{1}{2} \quad \text{και}$$

$$\lim_{\tau\to\infty} V_0(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-2\tau}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

Ομοιόμορφη προσέγγιση

Για να έχουμε ενιαία προσέγγιση που να είναι ομοιόμορφα έγκυρη για κάθε $0 \le t < \infty$ πρέπει να προσθέσουμε την εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση και για τις δύο μεταβλητές, και να αφαιρέσουμε το κοινό τους όριο

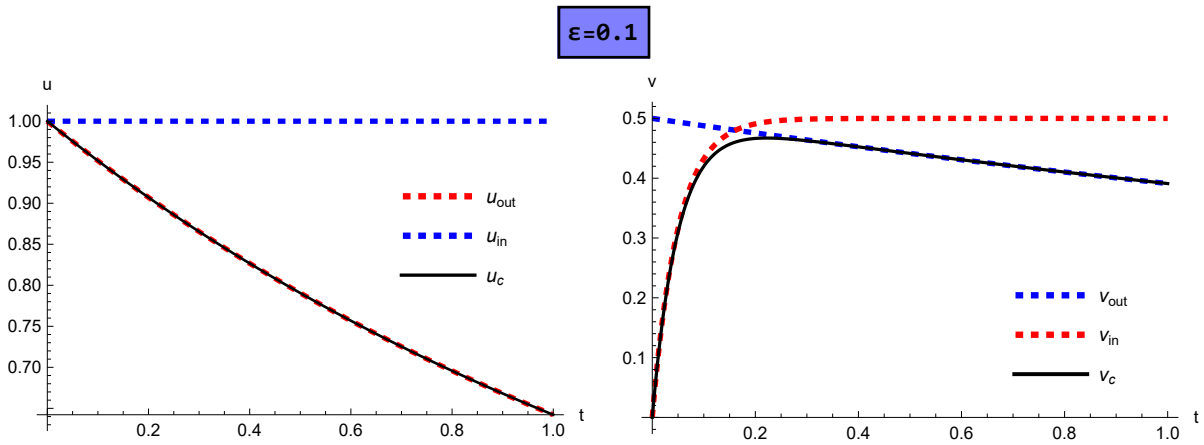
$$u_c(t) = u_{out}(t) + u_{in}(t) - \lim_{t\to 0} u_{out}(t) = u_{out}(t) + 1 - 1 \Rightarrow$$

$$u_c(t) \sim u_{out}(t) \ \text{ με } \ \ln|u_{out}(t)| - \frac{1}{u_{out}(t)} = -t-1 \qquad (3.9.110)$$

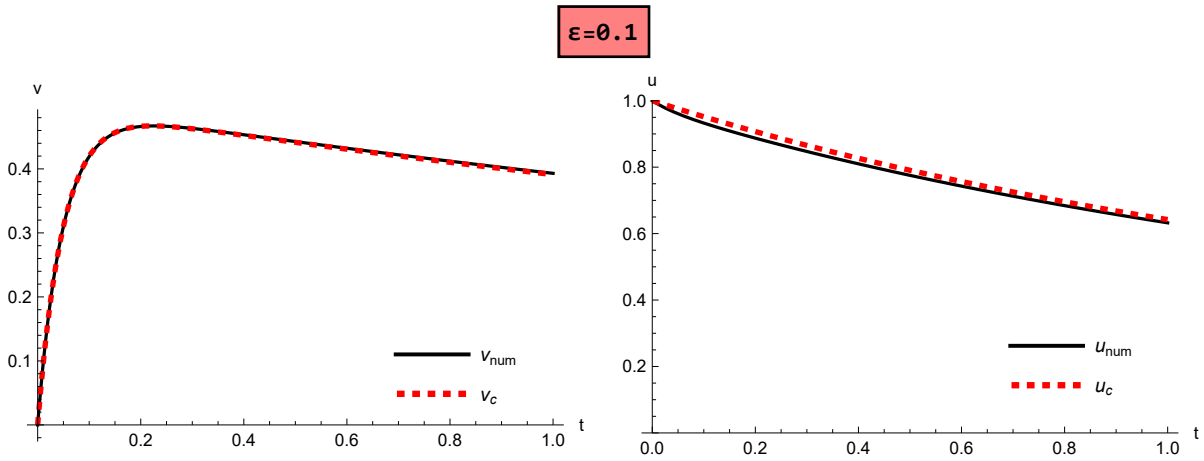
$$v_c(t) = v_{out}(t) + v_{in}(t) - \lim_{t\to 0} v_{out}(t) = \frac{u_{out}}{u_{out}+1} + \frac{1}{2}\left(1-e^{-2\frac{t}{\varepsilon}}\right) - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$v_c(t) \sim \frac{u_{out}}{u_{out}+1} - \frac{1}{2}e^{-2\frac{t}{\varepsilon}} \qquad (3.9.111)$$

Στο *Σχήμα 3.9.22* βλέπουμε την ομοιόμορφη προσέγγιση των μεταβλητών του συστήματος μαζί με την εξωτερική και εσωτερική τους προσέγγιση, ενώ στο *Σχήμα 3.9.23* παρατηρούμε την ακρίβεια της θεωρίας οριακού στρώματος, συγκρίνοντας την προσεγγιστική λύση του συστήματος με την αριθμητική.

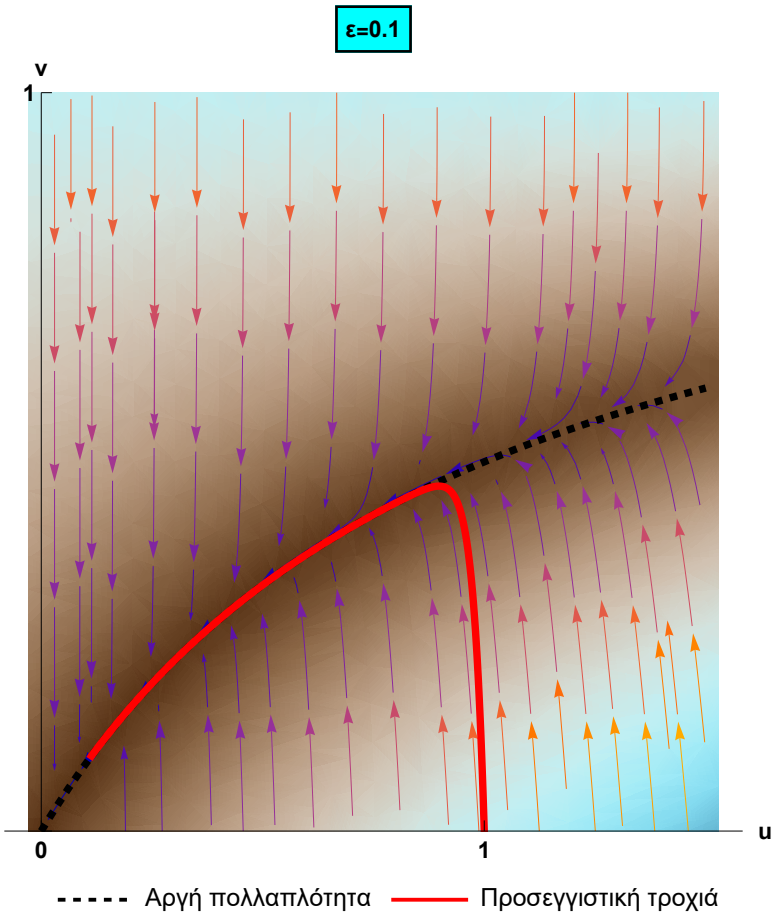


Σχήμα 3.9.22: Εξωτερική-εσωτερική και ομοιόμορφη προσέγγιση των u,v



Σχήμα 3.9.23: Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης

Ευστάθεια του σημείου ισορροπίας



Σχήμα 3.9.24: Πορτραίτο φάσης και τροχιά της προσεγγιστικής λύσης

Από τη μορφή της εξίσωσης (3.9.109) για την εξωτερική προσέγγιση, προκύπτει πως για $t \to \infty$, ισχύει $\ln|u_{out}| - \frac{1}{u_{out}} \to -\infty$, γεγονός που συνεπάγεται πως $u_{out} = u_c \to 0$. Κατά συνέπεια, από την (3.9.111), προκύπτει ότι και η $v_c \to 0$. Επομένως, η ομοιόμορφη προσεγγιστική λύση συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας $(0,0)$, γεγονός που επιβεβαιώνει την ασυμπτωτική ευστάθειά του. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τη συμπεριφορά της τροχιάς (κόκκινη γραμμή) στο φασικό επίπεδο του *Σχήματος* 3.9.24, όπου παρατηρείται ταχεία προσέγγιση προς την αργή πολλαπλότητα (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και στη συνέχεια σύγκλιση προς το σημείο ισορροπίας.

4. ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΕΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ DUFFING

4.1 Υποαρμονικές και υπεραρμονικές ταλαντώσεις

Στη μελέτη των γραμμικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων, η μόνιμη απόκριση ενός συστήματος χαρακτηρίζεται συνήθως από συχνότητες ίσες με εκείνες της διέγερσης. Ωστόσο, υπό ειδικές συνθήκες συντονισμού, μπορούν να εμφανιστούν λύσεις με διαφορετική θεμελιώδη περίοδο.

Ειδικότερα, για ένα γραμμικό σύστημα της μορφής

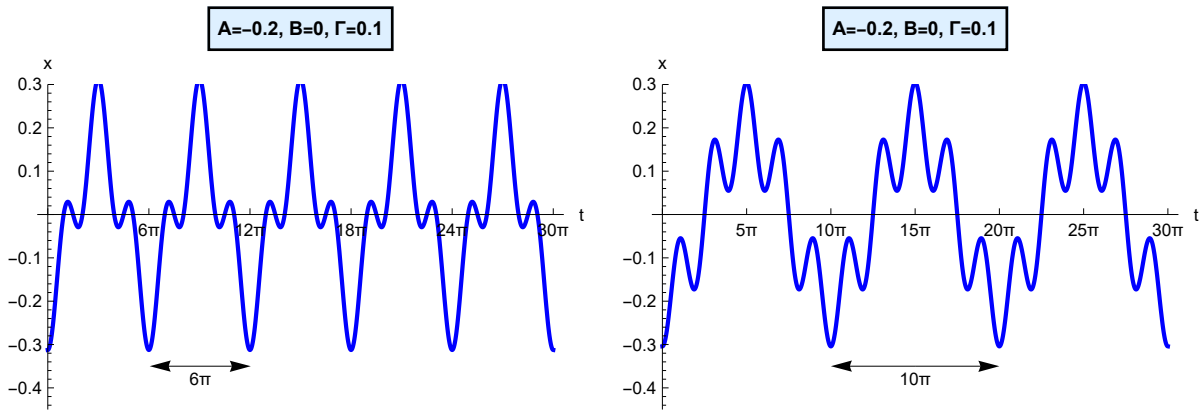
$$\ddot{x}+\frac{1}{n^2}x=\Gamma\cos t$$

οι λύσεις είναι της μορφής (*Παράρτημα A*)

$$x(t)=A\cos\left(\frac{1}{n}t\right)+B\sin\left(\frac{1}{n}t\right)-\frac{\Gamma}{1-\frac{1}{n^2}}\cos t$$

Αν ο n είναι ακέραιος, μεγαλύτερος του 1, η περίοδος είναι $2\pi n$ και όχι 2π της διεγείρουσας δύναμης. Στην περίπτωση αυτή η απόκριση λέγεται **υποαρμονική τάξης $\frac{1}{n}$,** και η αντίστοιχη συχνότητα δίνεται από $\omega_n=\frac{1}{n}$, όπου $n=2,3,4,\ldots$

Στο *Σχήμα 4.1.1* βλέπουμε υποαρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{5}$



Σχήμα 4.1.1: Υποαρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$ και $\frac{1}{5}$

Αντίστοιχα για το σύστημα

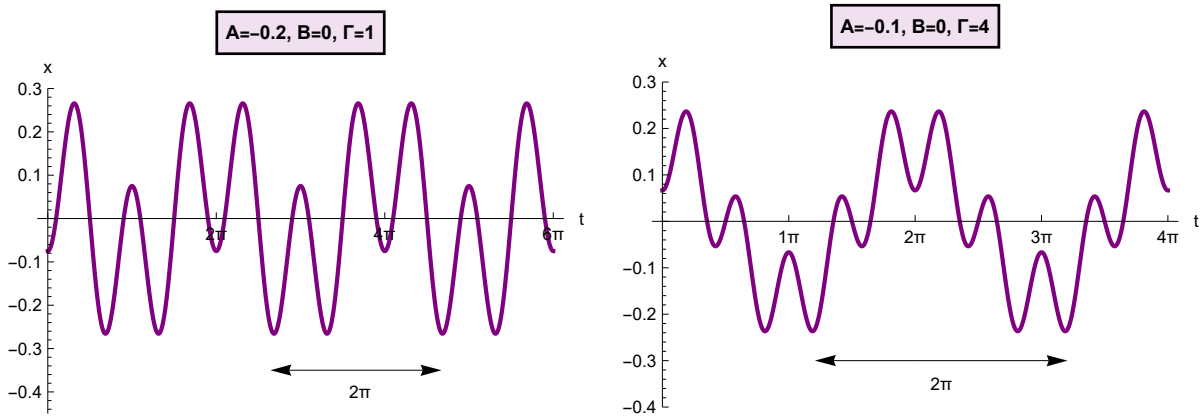
$$\ddot{x}+n^2x=\Gamma\cos t$$

οι λύσεις είναι

$$x(t)=A\cos(nt)+B\sin(nt)-\frac{\Gamma}{1-n^2}\cos t$$

Η περίοδος της απόκρισης είναι ίση με 2π, δηλαδή με την περίοδο της διεγείρουσας δύναμης. Η απόκριση αυτή ονομάζεται **υπεραρμονική τάξης n**, καθώς περιλαμβάνει συνιστώσα συχνότητας $\omega_n=n$, όπου $n=2,3,4,\ldots$, δηλαδή πολλαπλάσιας της διεγείρουσας συχνότητας.

Στο *Σχήμα 4.1.2* βλέπουμε υπεραρμονικές τάξης *3* και *5*.



Σχήμα 4.1.2: Υπεραρμονικές τάξης 3 και 5

Συνοψίζοντας, στην υποαρμονική απόκριση η θεμελιώδης περίοδος της κίνησης καθορίζεται από την υποαρμονική συνιστώσα, η οποία έχει μικρότερη συχνότητα από τη διεγείρουσα δύναμη. Αντίθετα, στην υπεραρμονική απόκριση η συνολική περίοδος παραμένει ίση με την περίοδο της διέγερσης, καθώς η υπεραρμονική συνιστώσα αποτελεί ανώτερη αρμονική της διεγείρουσας συχνότητας.

Παρά ταύτα, στα γραμμικά συστήματα η εμφάνιση τέτοιων ταλαντώσεων είναι εξαιρετικά περιορισμένη και απαιτεί αυστηρές συνθήκες συντονισμού. Επιπλέον, η παρουσία απόσβεσης οδηγεί στην εξαφάνισή τους, με αποτέλεσμα η μόνιμη απόκριση να περιορίζεται αποκλειστικά στη συχνότητα της διέγερσης.

Αντίθετα, στα μη γραμμικά συστήματα, η παρουσία μη γραμμικών όρων οδηγεί στη δημιουργία νέων συχνοτήτων μέσω αλληλεπιδράσεων μεταξύ των συνιστωσών της ταλάντωσης. Ως αποτέλεσμα, μπορούν να εμφανιστούν τόσο υπεραρμονικές όσο και υποαρμονικές αποκρίσεις σε ευρύτερα διαστήματα παραμέτρων, ακόμη και παρουσία απόσβεσης.

Η μελέτη των φαινομένων αυτών συνδέεται άμεσα με το πρόβλημα της ύπαρξης και της ευστάθειας των αντίστοιχων περιοδικών λύσεων. Στο παρόν κεφάλαιο, η ανάλυση αυτή εφαρμόζεται στην εξίσωση *Duffing*, όπου η μη γραμμικότητα επιτρέπει την εμφάνιση ευσταθών υποαρμονικών και υπεραρμονικών αποκρίσεων για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων.

4.2 Δευτερεύοντες συντονισμοί της μη αποσβεννύμενης εξίσωσης Duffing

Όπως είδαμε στην *Ενότητα 2.2.4*, η εφαρμογή της μεθόδου κανονικών διαταραχών στην εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη εξίσωση *Duffing*, οδηγεί στην εμφάνιση όρων με μικρούς διαιρέτες, όταν η ιδιοσυχνότητα του συστήματος βρίσκεται κοντά σε περιττά ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας διέγερσης.

Γενικά, αν δεν κανονικοποιήσουμε την εξίσωση, και την θεωρήσουμε στη μορφή

$$\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3=\Gamma\cos\omega t$$

εφαρμόζοντας κανονικές διαταραχές, στο ανάπτυγμα τάξης $O(\varepsilon)$ θα δούμε να εμφανίζονται όροι με μικρούς διαιρέτες όταν $\omega\approx 1, \omega\approx 3, \omega\approx\frac{1}{3}$. Οι ειδικές αυτές τιμές της συχνότητας ονομάζονται **συντονιστικές συχνότητες**. Συνεπώς, η απλή ανάπτυξη αποτυγχάνει λόγω της παρουσίας τόσο των μικρών διαιρετών όσο και των αιώνιων όρων.

Όταν $\omega\approx 1$, οι μικροί διαιρέτες εμφανίζονται ήδη στον πρώτο όρο της ανάπτυξης. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για κύριο ή πρωτεύοντα συντονισμό, τον οποίο μελετήσαμε διεξοδικά. Αντίθετα, όταν $\omega\approx 3$ ή $\omega\approx\frac{1}{3}$, οι μικροί διαιρέτες εμφανίζονται για πρώτη φορά στον δεύτερο όρο της ανάπτυξης. Για τον λόγο αυτό, οι αντίστοιχοι συντονισμοί χαρακτηρίζονται ως **δευτερεύοντες συντονισμοί**.

Σε υψηλότερες τάξεις της ανάπτυξης εμφανίζονται και άλλοι συντονισμοί, που αντιστοιχούν σε $\omega\approx n$ ή $\omega\approx\frac{1}{n}$, με $n=5,7,9,\ldots$. Οι συντονισμοί αυτοί οφείλονται στη μη γραμμικότητα της εξίσωσης Duffing, η οποία δημιουργεί ανώτερες αρμονικές και επιτρέπει τόσο **υπεραρμονικές** όσο και **υποαρμονικές** αποκρίσεις.

Οι παραπάνω συντονιστικές καταστάσεις μπορούν να ερμηνευθούν φυσικά ως εκδηλώσεις του φαινομένου της **παράσυρσης συχνότητας** (**frequency entrainment**), κατά το οποίο η απόκριση του μη γραμμικού συστήματος συγχρονίζεται με την εξωτερική διέγερση ή με ακέραια πολλαπλάσια και υποπολλαπλάσιά της. Στο πλαίσιο αυτό, ο πρωτεύων συντονισμός αντιστοιχεί σε **αρμονική παράσυρση**, ενώ οι δευτερεύοντες και ανώτεροι συντονισμοί αντιστοιχούν σε **υποαρμονική** και **υπεραρμονική παράσυρση** αντίστοιχα.

Για τη συστηματική μελέτη των περιπτώσεων αυτών απαιτούνται μέθοδοι ιδιόμορφων διαταραχών, καθώς η κλασική μέθοδος κανονικών διαταραχών αποτυγχάνει.

4.2.1 Υποαρμονικές αποκρίσεις

Θεωρούμε την εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη εξίσωση *Duffing*

$$\ddot{x}+\alpha x+\beta x^3=\Gamma\cos\omega t,\ \ \alpha>0,\Gamma>0,\omega>0 \tag{4.2.1}$$

όπου $|\beta|\ll 1$, είναι η μικρή παράμετρος διαταραχής.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*, για την αναζήτηση υποαρμονικών αποκρίσεων τάξης $\frac{1}{3}$. Εισάγουμε τη νέα ανεξάρτητη χρονική μεταβλητή

$$\tau=\omega t$$

και θεωρούμε τη λύση ως συνάρτηση του τ και της παραμέτρου β

$$x(t,\beta)=X(\tau,\beta) \tag{4.2.2}$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\omega\frac{dX}{d\tau}\ \ \text{και}\ \ \frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2\frac{d^2X}{d\tau^2}$$

και η (4.2.1) γίνεται

$$\omega^2X''+\alpha X+\beta X^3=\Gamma\cos\tau \tag{4.2.3}$$

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$X(\tau,\beta)=X_0(\tau)+\beta X_1(\tau)+\ldots \tag{4.2.4}$$

Επειδή αναζητάμε υποαρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$, ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$, άρα θα ισχύει

$$X(\tau+6\pi,\beta)=X(\tau,\beta) \tag{4.2.5}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*, εκφράζουμε την ω με ανάπτυγμα διαταραχών ως προς την ω_0

$$\omega=\omega_0+\beta\omega_1+\ldots \tag{4.2.6}$$

Εφαρμόζουμε τις (4.2.4) και (4.2.6) στην εξίσωση (4.2.3) και παίρνουμε

$$(\omega_0+\beta\omega_1+\ldots)^2(X_0''+\beta X_1''+\ldots)+\alpha(X_0+\beta X_1+\ldots)+\beta(X_0+\beta X_1+\ldots)^3=\Gamma\cos\tau$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές ίσων δυνάμεων του β και επιβάλλοντας τη συνθήκη περιοδικότητας σε κάθε τάξη, προκύπτουν τα ακόλουθα προβλήματα.

$$O(1):\ \begin{cases}\omega_0^2X_0''+\alpha X_0=\Gamma\cos\tau,\ \ \tau>0\\ X_0(\tau+6\pi)=X_0(\tau)\end{cases} \tag{4.2.7}$$

$$O(\beta):\ \begin{cases}\omega_0^2X_1''+\alpha X_1=-2\omega_0\omega_1X_0''-X_0^3,\ \ \tau>0\\ X_1(\tau+6\pi)=X_1(\tau)\end{cases} \tag{4.2.8}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (4.2.7) είναι

$$X_0(\tau)=A\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha}\,\tau}{\omega_0}\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt{\alpha}\,\tau}{\omega_0}\right)+\frac{\Gamma}{\alpha-\omega_0^2}\cos\tau \tag{4.2.9}$$

αν $\omega_0^2\neq\alpha$, και η συνθήκη περιοδικότητας δίνει $\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0}=\frac{1}{3}$, ή

$$\omega_0=3\sqrt{\alpha} \tag{4.2.10}$$

Συνεπώς, από την (4.2.6) συμπεραίνουμε πως η υποαρμονική απόκριση τάξης $\frac{1}{3}$ εμφανίζεται όταν η συχνότητα διέγερσης βρίσκεται κοντά σε τριπλάσια τιμή της ιδιοσυχνότητας του γραμμικοποιημένου συστήματος $(\beta=0)$, οπότε το σύστημα αποκρίνεται με ταλάντωση της οποίας η περίοδος είναι τριπλάσια της περιόδου της διέγερσης.

Αντικαθιστούμε την (4.2.10) στην (4.2.9) και γίνεται

$$X_0(\tau)=A\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right)+B\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\tau \tag{4.2.11}$$

όπου A, B σταθερές και

$$X_0''(\tau)=-\frac{1}{9}A\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right)-\frac{1}{9}B\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)+\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\tau$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του πρώτου διορθωτικού όρου, και χρησιμοποιώντας κατάλληλες ταυτότητες, όπως μεταξύ άλλων τις

$$\cos^3\left(\frac{1}{3}\tau\right)=\frac{1}{4}\cos\tau+\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right),\ \text{και}\ \sin^3\left(\frac{1}{3}\tau\right)=\frac{3}{4}\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)-\frac{1}{4}\sin\tau$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_0^2X_1''+\alpha X_1=&-2\omega_0\omega_1\left[-\frac{1}{9}A\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right)-\frac{1}{9}B\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)+\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\tau\right]\\&-\frac{3}{4}\left\{A\left[A^2+B^2+2\left(\frac{\Gamma}{8\alpha}\right)^2\right]-\frac{\Gamma}{8\alpha}(A^2-B^2)\right\}\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right)\\&-\frac{3}{4}\left\{B\left[A^2+B^2+2\left(\frac{\Gamma}{8\alpha}\right)^2\right]+\frac{\Gamma}{4\alpha}AB\right\}\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)\\&+\text{ όροι με }\cos\tau,\ sin\tau\ +\text{ όροι με υψηλότερες αρμονικές}\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Για να ικανοποιείται η περιοδική συνθήκη πρέπει να μηδενιστούν οι συντελεστές των $\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)$ και $\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right)$, που οδηγούν σε αιώνιους όρους, έτσι

$$A\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{8}{27}\omega_0\omega_1\right)-\frac{\Gamma}{8\alpha}(A^2-B^2)=0 \tag{4.2.13}$$

$$B\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{8}{27}\omega_0\omega_1\right)+\frac{\Gamma}{4\alpha}AB=0 \tag{4.2.14}$$

Παρατηρούμε πως προκύπτουν δύο εξισώσεις με τρεις αγνώστους A,B,ω_1. Το σύστημα είναι επομένως υποκαθορισμένο, γεγονός που αντανακλά τη μη μοναδικότητα της διόρθωσης συχνότητας στην υποαρμονική $\frac{1}{3}$ στη συγκεκριμένη τάξη του *Poincaré–Lindstedt*. Για τον λόγο αυτό, η συνολική συχνότητα ω αντιμετωπίζεται ως ελεύθερη παράμετρος κοντά στο ω_0, ενώ οι δύο συνθήκες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των A,B. Πιο συγκεκριμένα, καθώς δεν προκύπτει επιπλέον συνθήκη για τον προσδιορισμό του ω_1, το μέγεθος αυτό θεωρείται αυθαίρετο και οι σταθερές A και B εκφράζονται συναρτήσει των ω_0 και ω_1, και κατ' επέκταση (μέχρι τάξης β^2) συναρτήσει της συνολικής συχνότητας ω.

Για λόγους ευκολίας εισάγεται η προσέγγιση

$$2\omega_0\omega_1\approx\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta} \tag{4.2.15}$$

η οποία είναι ακριβής μέχρι σφάλμα τάξης β και καθιστά σαφή τη σύνδεση μεταξύ της διόρθωσης συχνότητας και της απόκλισης της διεγείρουσας συχνότητας από την τιμή συντονισμού. Σημειώνεται ότι η συχνότητα ω πρέπει να παραμένει κοντά στο $3\sqrt{\alpha}$, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη υποαρμονικού συντονισμού τάξης $\frac{1}{3}$.

Έτσι οι (4.2.13), (4.2.14) γράφονται

$$A\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)-\frac{\Gamma}{8\alpha}(A^2-B^2)=0 \tag{4.2.16}$$

$$B\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{\Gamma}{4\alpha}AB=0 \tag{4.2.17}$$

και η προσεγγιστική λύση (4.2.4) με έναν όρο είναι

$$X(\tau,\beta)=A\cos\left(\frac{1}{3}\tau\right)+B\sin\left(\frac{1}{3}\tau\right)-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\tau$$

ή στον φυσικό χρόνο t

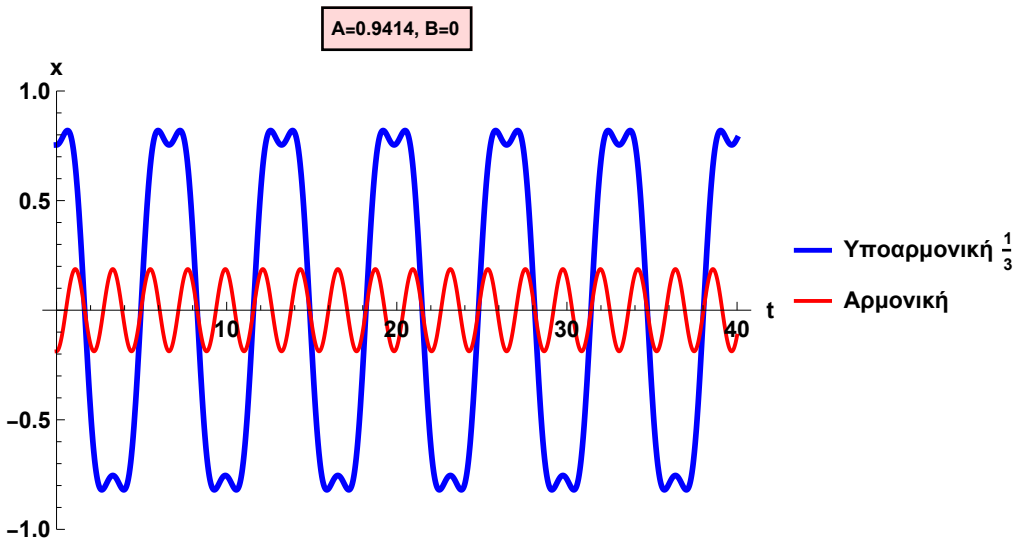
$$x(t,\beta)=A\cos\left(\frac{1}{3}\omega t\right)+B\sin\left(\frac{1}{3}\omega t\right)-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos(\omega t) \tag{4.2.18}$$

όπου

$$\omega=3\sqrt{\alpha}+\beta\omega_1+\ldots$$

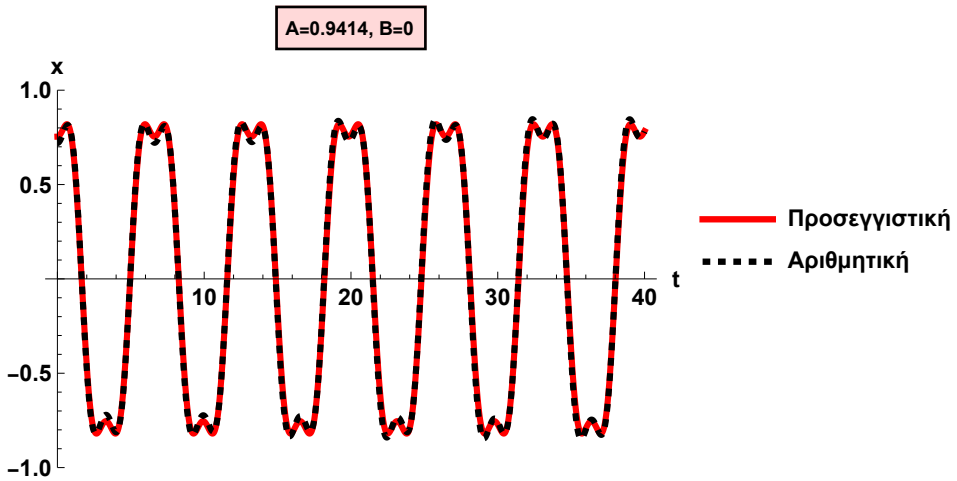
και οι σταθερές A, B προσδιορίζονται από τις (4.2.16) και (4.2.17).

Στο *Σχήμα 4.2.1* παρουσιάζεται η προσεγγιστική λύση (*4.2.18*) για την υποαρμονική απόκριση τάξης $\frac{1}{3}$, της εξίσωσης *Duffing* $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=1.5\cos(2.85t)$, όπου επιλέξαμε τις σταθερές $A=0.9414$, $B=0$. Στο ίδιο σχήμα απεικονίζεται και η αρμονική απόκριση, η οποία αντιστοιχεί στον όρο διέγερσης της μορφής $-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t$.



Σχήμα 4.2.1: Υποαρμονική απόκριση τάξης $\frac{1}{3}$ *και αρμονική λύση για την εξίσωση Duffing* $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=1.5\cos(2.85t)$

Παρατηρούμε ότι η υποαρμονική λύση περιλαμβάνει συνιστώσα χαμηλότερης συχνότητας $\frac{\omega}{3}$, η οποία κυριαρχεί στη συμπεριφορά της απόκρισης και οδηγεί σε σημαντική απόκλιση από τη γραμμική ταλάντωση.



Σχήμα 4.2.2: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης για την εξίσωση Duffing

Στο *Σχήμα* 4.2.2 παρουσιάζεται η σύγκριση της προσεγγιστικής υποαρμονικής λύσης με την αριθμητική λύση της εξίσωσης *Duffing*. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των δύο προσεγγίσεων, γεγονός που επιβεβαιώνει την εγκυρότητα της μεθόδου *Lindstedt–Poincaré* στην περιοχή υποαρμονικού συντονισμού.

4.2.1.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά του πλάτους και της φάσης της υποαρμονικής ταλάντωσης μέσω των εξισώσεων (4.2.16) και (4.2.17).

Από την εξίσωση (4.2.17) προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις για τη φάση B:

- $B=0$

Μια προφανής ρίζα της (4.2.17) είναι η $B=0$. Στην περίπτωση αυτή από την (4.2.16) προκύπτει είτε η λύση $A=0$, οπότε λαμβάνεται το σημείο $(A,B)=(0,0)$ που αντιστοιχεί στην αρμονική απόκριση της γραμμικής εξίσωσης $\ddot{x}+\alpha x=\Gamma\cos\omega t$, που είναι η

$$x(t)=-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t$$

με περίοδο ίση με εκείνη του διεγείροντος όρου, είτε μη μηδενικές λύσεις για το A, οι οποίες αντιστοιχούν σε υποαρμονικές ταλαντώσεις, μέσω της εξίσωσης

$$A^2-\frac{\Gamma}{8\alpha}A+\left(\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)=0 \qquad (4.2.19)$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση (4.2.19) έχει διακρίνουσα

$$\Delta=-\frac{7\Gamma^2}{64\alpha^2}+\frac{16}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}$$

- Για $\Delta>0$

Η (4.2.19) έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες όταν η διακρίνουσα είναι θετική, δηλαδή όταν

$$\Gamma^2<\frac{1026\alpha^2}{189}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}$$

Σύμφωνα με τους τύπους του *Vieta*, το πρόσημο των ριζών εξαρτάται από το πρόσημο των συντελεστών: οι ρίζες είναι ετερόσημες, όταν

$$\Gamma^2<\frac{128\alpha^2}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}$$

ενώ είναι και οι δύο θετικές όταν

$$\frac{128\alpha^2}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}<\Gamma^2<\frac{1026\alpha^2}{189}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}$$

- Για $\Delta=0$

Η εξίσωση (4.2.19) έχει μια διπλή πραγματική ρίζα όταν η διακρίνουσα είναι θετική, δηλαδή όταν

$$\Gamma^2 = \frac{1026\,\alpha^2}{189}\,\frac{\omega^2 - 9\,\alpha}{\beta}$$

- Για $\Delta < 0$

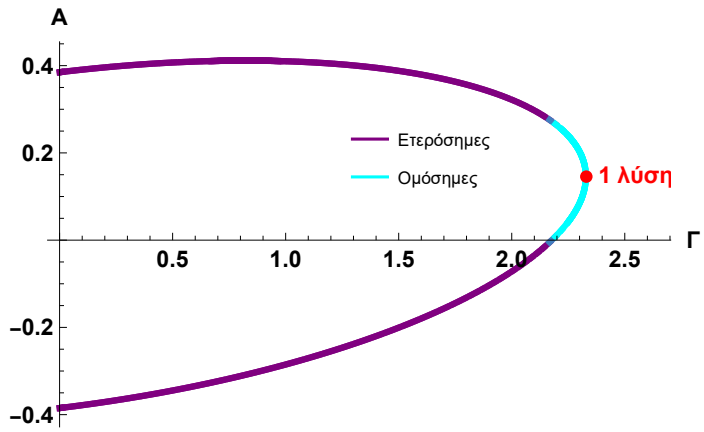
Η (4.2.19) δεν έχει καμία πραγματική ρίζα όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, δηλαδή όταν

$$\Gamma^2 > \frac{1026\,\alpha^2}{189}\,\frac{\omega^2 - 9\,\alpha}{\beta}$$

Για τις παραπάνω ανισότητες υποθέσαμε πως $\frac{\omega^2 - 9\,\alpha}{\beta} > 0$.

Στο *Σχήμα* 4.2.3 βλέπουμε τη γραφική παράσταση του πλάτους A ως συνάρτηση του πλάτους της διέγερσης Γ για την περίπτωση όπου $B = 0$. Η καμπύλη που προκύπτει αποτελεί τμήμα έλλειψης στο επίπεδο (Γ, A) και εμφανίζει δύο κλάδους, οι οποίοι αντιστοιχούν στις δύο λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης για το πλάτος. Για κάθε τιμή του Γ εντός της επιτρεπτής περιοχής υπάρχουν δύο δυνατές τιμές του A, γεγονός που υποδηλώνει μη μοναδικότητα της απόκρισης.

Καθώς το Γ αυξάνεται, οι δύο λύσεις πλησιάζουν μεταξύ τους, και τελικά συμπίπτουν σε ένα οριακό σημείο, όπου η διακρίνουσα της εξίσωσης μηδενίζεται. Στο σημείο αυτό η εξίσωση έχει διπλή ρίζα και η καμπύλη εφάπτεται της κατακόρυφης ευθείας, ενώ πέρα από αυτό δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις για το πλάτος. Η συμπεριφορά αυτή αντανακλά τη μη γραμμική φύση του συστήματος και την ύπαρξη πολλαπλών καταστάσεων ταλάντωσης για την ίδια διέγερση.



Σχήμα 4.2.3: Καμπύλη πλάτους-διέγερσης

- $B \neq 0$

Αν το B είναι διάφορο του μηδενός, λύνοντας την (4.2.17) ως προς B^2 και αντικαθιστώντας στην (4.2.16) παίρνουμε

$$B = \pm\sqrt{3}\,A$$

και τότε η (4.2.17) γίνεται

$$4A^2+\frac{\Gamma}{4\alpha}A+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}=0 \text{ ή}$$

$$(-2A)^2-\frac{\Gamma}{8\alpha}(-2A)+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}=0 \qquad (4.2.20)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.2.20) έχει την ίδια μορφή με την (4.2.19), με τη διαφορά ότι το πλάτος εμφανίζεται μέσω του όρου $-2A$. Επομένως, οι λύσεις της (4.2.20) προκύπτουν από εκείνες της (4.2.19) μέσω του μετασχηματισμού $A \rightarrow -2A$.

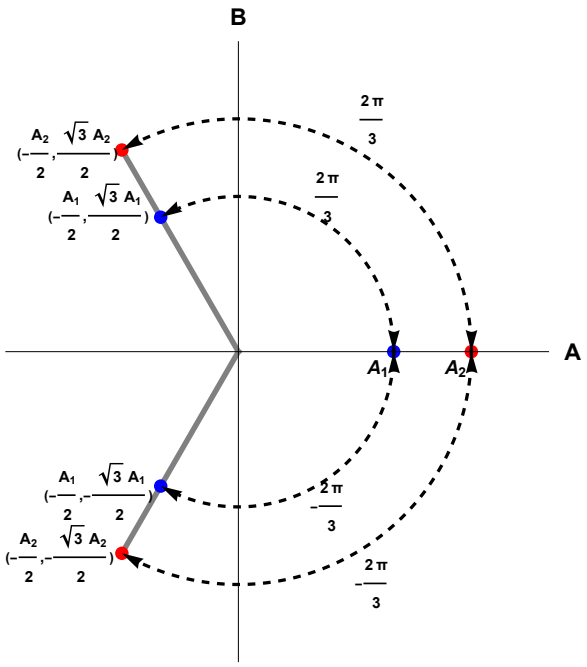
Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι, εκτός από τις λύσεις με $B=0$ υπάρχουν και επιπλέον λύσεις που ικανοποιούν τη σχέση $B=\pm\sqrt{3}A$, και τα αντίστοιχα σημεία στο επίπεδο (*A*,*B*) είναι της μορφής

$$\left(-\frac{A}{2},\pm\frac{\sqrt{3}A}{2}\right)$$

Τα σημεία αυτά προκύπτουν από το σημείο $(A,0)$, μέσω περιστροφής κατά γωνίες $\pm\frac{2\pi}{3}$.

Καταλήγουμε έτσι ότι κάθε λύση με $B=0$ συνοδεύεται από δύο ακόμη λύσεις ίδιου πλάτους, οι οποίες διαφέρουν μόνο ως προς τη φάση.

Η παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία απεικονίζεται στο *Σχήμα* 4.2.4, όπου φαίνεται ότι κάθε λύση στον άξονα *A*, συνοδεύεται από δύο ακόμη λύσεις ίδιου μέτρου, οι οποίες προκύπτουν μέσω περιστροφής κατά $\pm\frac{2\pi}{3}$. Οι υποαρμονικές λύσεις εμφανίζονται επομένως σε τριάδες, με ίδιες ιδιότητες αλλά διαφορετική φασική μετατόπιση.



Σχήμα 4.2.4: Γεωμετρική αναπαράσταση των θετικών ριζών στο επίπεδο (A,B)

4.2.1.2 Ανάλυση ευστάθειας υποαρμονικών αποκρίσεων

Στην προηγούμενη ανάλυση προέκυψαν οι εξισώσεις πλάτους και φάσης που περιγράφουν τις υποαρμονικές αποκρίσεις του συστήματος. Ωστόσο, η ύπαρξη μιας περιοδικής λύσης δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη και την ευστάθειά της. Ορισμένες από τις υποαρμονικές λύσεις μπορεί να είναι ασταθείς και, συνεπώς, να μην παρατηρούνται στην πράξη. Επιπλέον, όταν συνυπάρχουν πολλαπλές δυνατές καταστάσεις ταλάντωσης (θεμελιώδεις και υποαρμονικές), η τελική κατάσταση στην οποία οδηγείται το σύστημα εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες.

Για τον λόγο αυτό, καθίσταται αναγκαία η μελέτη της ευστάθειας των υποαρμονικών αποκρίσεων, καθώς και ο προσδιορισμός των περιοχών αρχικών συνθηκών που οδηγούν σε καθεμία από αυτές. Στην παρούσα ενότητα, η ανάλυση ευστάθειας θα πραγματοποιηθεί με βάση τις εξισώσεις πλάτους –φάσης, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

Είδαμε πως η εξίσωση (4.2.1) έχει υποαρμονική λύση τάξης $O(1)$

$$x(t,\beta)=A\cos(\frac{1}{3}\omega t)+B\sin(\frac{1}{3}\omega t)-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t$$

Θεωρούμε πως A και B είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου (*Ενότητα 2.2.2*)

$$x(t,\beta)=A(t)\cos(\frac{1}{3}\omega t)+B(t)\sin(\frac{1}{3}\omega t)-\frac{\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t \qquad (4.2.21)$$

Τότε

$$\dot{x}(t,\beta)=(\dot{A}+\frac{1}{3}\omega B)\cos(\frac{1}{3}\omega t)+(-\frac{1}{3}\omega A+\dot{B})\sin(\frac{1}{3}\omega t)+\frac{\omega\Gamma}{8\alpha}\sin\omega t$$

και αγνοώντας τους $\ddot{A},\ddot{B}$, επειδή υποθέτουμε πως είναι πολύ μικροί,

$$\ddot{x}(t,\beta)\approx(-\frac{1}{9}\omega^2 A+\frac{2}{3}\omega\dot{B})\cos(\frac{1}{3}\omega t)+(-\frac{2}{3}\omega\dot{A}-\frac{1}{9}\omega^2 B)\sin(\frac{1}{3}\omega t)+\frac{\omega^2\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t \qquad (4.2.22)$$

Αντικαθιστούμε τις (4.2.21) και (4.2.22) στην εξίσωση (4.2.1), αναδιατάσσουμε τους όρους αγνοώντας τις αρμονικές υψηλότερης τάξης από $\frac{1}{3}$, και ισοσταθμίζοντας τους συντελεστές των $\cos(\frac{1}{3}\omega t)$ και $\sin(\frac{1}{3}\omega t)$, παίρνουμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{A}=\frac{9\beta}{8\omega}\left\{B\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{\Gamma}{4\alpha}AB\right\}=F(A,B) \qquad (4.2.23)$$

$$\dot{B}=\frac{9\beta}{8\omega}\left\{-A\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{\Gamma}{8\alpha}(A^2-B^2)\right\}=G(A,B) \qquad (4.2.24)$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθορίζονται από τις εξισώσεις

$$F(A,B)=G(A,B)=0$$

και αντιστοιχούν σε καταστάσεις όπου το πλάτος και η φάση παραμένουν σταθερά στο χρόνο. Επομένως, τα σημεία αυτά περιγράφουν μόνιμες υποαρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$ της εξίσωσης (4.2.1).

Παρατηρούμε πως οι καταστάσεις αυτές ταυτίζονται με τις σταθερές λύσεις του συστήματος πλάτους–φάσης που προέκυψε προηγουμένως μέσω της μεθόδου διαταραχών, και συνεπώς αντιστοιχούν στις ίδιες μόνιμες υποαρμονικές αποκρίσεις του αρχικού συστήματος.

Το σημείο $(A,B)=(0,0)$, αποτελεί σημείο ισορροπίας του συστήματος και όπως έχει ήδη αναφερθεί, αντιστοιχεί στην αρμονική απόκριση της εξίσωσης, δηλαδή σε λύση με την περίοδο του διεγείροντος όρου.

Η ύπαρξη του σημείου αυτού υποδηλώνει ότι, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, το σύστημα μπορεί να καταλήξει είτε σε υποαρμονική απόκριση τάξης $\frac{1}{3}$, είτε στην αντίστοιχη αρμονική λύση.

Συνεπώς, η μελέτη της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας είναι καθοριστική για τον προσδιορισμό της τελικής κατάστασης ταλάντωσης του συστήματος.

Εφόσον έχει αποδειχθεί ότι η περίπτωση $B\neq 0$ αντιστοιχεί σε απλή περιστροφή του συστήματος πλάτους–φάσης, χωρίς μεταβολή της ουσιώδους δυναμικής, λόγω της συμμετρίας του συστήματος ως προς μετασχηματισμούς φάσης, μπορούμε χωρίς απώλεια γενικότητας να θεωρήσουμε $B=0$, και να προχωρήσουμε σε γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος (4.2.23), (4.2.24).

Αρχικά, αν τα σημεία ισορροπίας είναι A_* και $B_*=0$ θέτουμε

$$\widetilde{A}=A-A_*$$

$$\widetilde{B}=B-B_*=B$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\widetilde{A}}=F_1(A_*,0)(A-A_*)+F_2(A_*,0)B$$

$$\dot{B}=G_1(A_*,0)(A-A_*)+G_2(A_*,0)B$$

όπου

$$F_1(A_*,0)=\partial_A F(A_*,0),F_2(A_*,0)=\partial_B F(A_*,0),G_1(A_*,0)=\partial_A G(A_*,0),G_2(A_*,0)=\partial_B G(A_*,0)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(A_*,0)=\begin{bmatrix} F_1(A_*,0) & F_2(A_*,0) \\ G_1(A_*,0) & G_2(A_*,0) \end{bmatrix}$$

με

$$F_1(A_*,0)=0$$

$$F_2(A_*,0)=\frac{9\beta}{8\omega}\left\{\left(A_*^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{\Gamma}{4\alpha}A_*\right\}$$

Από την (4.2.19) έχουμε πως

$$A_*^2-\frac{\Gamma}{8\alpha}A_*+\left(\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)=0\Rightarrow A_*^2+\left(\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)=\frac{\Gamma}{8\alpha}A_*$$

έτσι

$$F_2(A_*,0)=\frac{9\beta}{8\omega}\left(\frac{3\Gamma}{8\alpha}A_*\right)$$

Επίσης

$$G_1(A_*,0)=\frac{9\beta}{8\omega}\left\{-\left(3A_*^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{2\Gamma}{8\alpha}A_*\right\}=\frac{9\beta}{8\omega}\left[-\frac{\Gamma}{8\alpha}A_*+2\left(\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)\right]$$

$$G_2(A_*,0)=0$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω, ο Ιακωβιανός πίνακας γίνεται

$$\boldsymbol{J}(A_*,0)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{9\beta}{8\omega}\left(\frac{3\Gamma}{8\alpha}A_*\right) \\ \frac{9\beta}{8\omega}\left[-\frac{\Gamma}{8\alpha}A_*+2\left(\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)\right] & 0 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσά του είναι διάφορη από το *0*, άρα εφαρμόζεται η αρχή της γραμμικοποίησης.

Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα δίνονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, στη μορφή

$$\lambda^2-p\lambda+q=0$$

όπου το ίχνος είναι

$$p=0$$

και η ορίζουσα

$$q=-J_{12}J_{21}$$

όπου

$$J_{12}=\frac{9\beta}{8\omega}\left(\frac{3\Gamma}{8\alpha}A_*\right) \text{ και } J_{21}=\frac{9\beta}{8\omega}\left[-\frac{\Gamma}{8\alpha}A_*+2\left(\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)\right]$$

Άρα οι ιδιοτιμές του δίνονται από

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{J_{12}J_{21}}$$

Επομένως, η φύση των ιδιοτιμών καθορίζεται από το πρόσημο του γινομένου $J_{12}J_{21}$.

- Αν $J_{12}J_{21}<0$, οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές, και το σημείο ισορροπίας είναι **ευσταθές κέντρο**. Εύκολα αποδεικνύεται πως και το σημείο $(A,B)=(0,0)$ είναι **κέντρο**.
- Αν $J_{12}J_{21}>0$, οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες πραγματικές, και το σημείο είναι **ασταθές σαγματικό**.

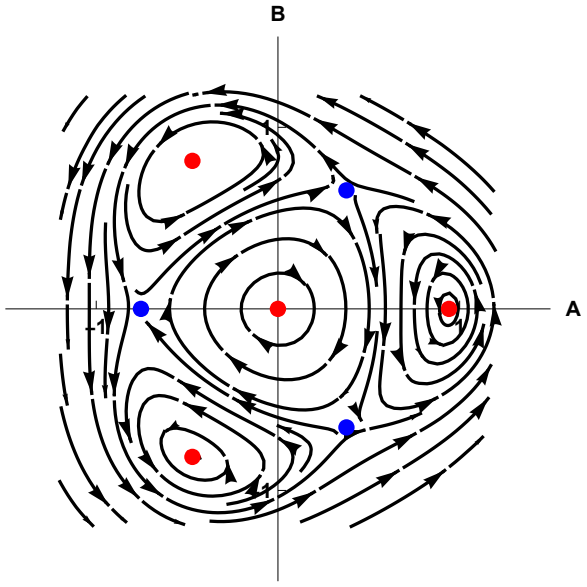
Τα σημεία ισορροπίας που αντιστοιχούν σε $B\neq 0$, προκύπτουν μέσω περιστροφής στο επίπεδο πλάτους–φάσης, όπως αποδείξαμε παραπάνω. Ο αντίστοιχος Ιακωβιανός πίνακας συνδέεται με τον προηγούμενο μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας, και συνεπώς οι ιδιοτιμές παραμένουν αναλλοίωτες. Επομένως, η ευστάθεια των λύσεων αυτών είναι ίδια με εκείνη των λύσεων για $B=0$. Με άλλα λόγια, κάθε σημείο ισορροπίας για $B=0$, αντιστοιχεί σε δύο ακόμη σημεία για $B\neq 0$, με το ίδιο είδος ευστάθειας.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται στο παράδειγμα της εξίσωσης *Duffing*

$$\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=1.5\cos(2.85t)$$

όπου τα σημεία ισορροπίας για $B=0$ είναι εκτός από το $(0,0)$, τα $(-0.75388,0)$ και $(0.94138,0)$.

Παρατηρούμε στο *Σχήμα 4.2.5* πως το $(0.94138,0)$ καθώς και τα δύο αντίστοιχα σημεία που προκύπτουν μέσω περιστροφής κατά $\pm\frac{2\pi}{3}$ είναι κέντρα, όπως και το $(0,0)$ (κόκκινα σημεία). Αντίθετα, το σημείο $(-0.75388,0)$ και τα αντίστοιχα εκ περιστροφής σημεία (μπλε σημεία) αποτελούν σαγματικά σημεία.



Σχήμα 4.2.5: Πορτραίτο φάσης για υποαρμονικές αποκρίσεις της $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=1.5\cos(2.85t)$

4.2.2 Υπεραρμονικές αποκρίσεις

Θεωρούμε και πάλι την εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη εξίσωση *Duffing* (4.2.1) και εφαρμόζουμε τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*, για την αναζήτηση **υπεραρμονικών αποκρίσεων τάξης *3***. Εισάγουμε τη νέα ανεξάρτητη χρονική μεταβλητή

$$\tau = \omega t$$

και θεωρούμε τη λύση ως συνάρτηση του τ και της παραμέτρου β

$$x(t,\beta) = X(\tau,\beta) \tag{4.2.25}$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας, και η (4.2.1) γίνεται

$$\omega^2 X'' + \alpha X + \beta X^3 = \Gamma \cos\tau \tag{4.2.26}$$

Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή κανονικής σειράς διαταραχής, δηλαδή ότι

$$X(\tau,\beta) = X_0(\tau) + \beta X_1(\tau) + \ldots \tag{4.2.27}$$

Τώρα ενδιαφερόμαστε για περιοδικές λύσεις με θεμελιώδη περίοδο $T = \frac{2\pi}{3}$, άρα θα ισχύει

$$X(\tau + \frac{2\pi}{3}, \beta) = X(\tau,\beta) \tag{4.2.28}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο *Poincaré–Lindstedt*, εκφράζουμε την ω με ανάπτυγμα διαταραχών ως προς την ω_0

$$\omega = \omega_0 + \beta\omega_1 + \ldots \tag{4.2.29}$$

Εφαρμόζουμε τις (4.2.27) και (4.2.29) στην (4.2.26), και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην περίπτωση των υποαρμονικών αποκρίσεων, προκύπτουν τα ακόλουθα προβλήματα

$$O(1): \begin{cases} \omega_0^2 X_0'' + \alpha X_0 = \Gamma \cos\tau, \quad \tau > 0 \\ X_0(\tau + \frac{2\pi}{3}) = X_0(\tau) \end{cases} \tag{4.2.30}$$

$$O(\beta): \begin{cases} \omega_0^2 X_1'' + \alpha X_1 = -2\omega_0\omega_1 X_0'' - X_0^3, \quad \tau > 0 \\ X_1(\tau + \frac{2\pi}{3}) = X_1(\tau) \end{cases} \tag{4.2.31}$$

Η γενική λύση της εξίσωσης (4.2.30) είναι

$$X_0(\tau) = A\cos(\frac{\sqrt{\alpha}\,\tau}{\omega_0}) + B\sin(\frac{\sqrt{\alpha}\,\tau}{\omega_0}) + \frac{\Gamma}{\alpha - \omega_0^2}\cos\tau \tag{4.2.32}$$

αν $\omega_0^2 \neq \alpha$, και η συνθήκη περιοδικότητας δίνει $\frac{\sqrt{\alpha}}{\omega_0} = 3$, ή

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{\alpha}}{3} \tag{4.2.33}$$

Συνεπώς, από την (4.2.29) συμπεραίνουμε πως η υπεραρμονική απόκριση τάξης *3* εμφανίζεται όταν η συχνότητα διέγερσης βρίσκεται κοντά στο $\frac{1}{3}$ της τιμής της ιδιοσυχνότητας του γραμμικοποιημένου συστήματος $(\beta=0)$. Στην περίπτωση αυτή, λόγω της μη γραμμικότητας, η απόκριση περιέχει θεμελιώδη συνιστώσα στη φυσική συχνότητα του συστήματος.

Αντικαθιστούμε την (4.2.33) στην (4.2.32) και γίνεται

$$X_0(\tau)=A\cos 3\tau+B\sin 3\tau+\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\tau \tag{4.2.34}$$

όπου *A*, *B* σταθερές και

$$X_0''(\tau)=-9A\cos(3\tau)-9B\sin(3\tau)-\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\tau$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του πρώτου διορθωτικού όρου, χρησιμοποιώντας κατάλληλες ταυτότητες και έχουμε

$$\begin{aligned}\omega_0^2 X_1''+\alpha X_1=&-2\omega_0\omega_1\left[-9A\cos(3\tau)-9B\sin(3\tau)-\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\tau\right]\\&-\frac{3}{4}\left\{A\left[A^2+B^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}\right]+\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}\right\}\cos(3\tau)\\&-\frac{3}{4}B\left[A^2+B^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}\right]\sin(3\tau)\\&+\text{ όροι με }\cos\tau\,,\sin\tau\text{ + όροι με υψηλότερες αρμονικές}\end{aligned}$$

Για την αποφυγή εμφάνισης αιώνιων όρων επιβάλλεται ο μηδενισμός των συντελεστών των $\sin(3\tau)$ και $\cos(3\tau)$.

Άρα

$$A\left(A^2+B^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-24\omega_0\omega_1\right)+\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}=0 \tag{4.2.35}$$

$$B\left(A^2+B^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-24\omega_0\omega_1\right)=0 \tag{4.2.36}$$

Θέτουμε, για λόγους απλοποίησης

$$2\omega_0\omega_1\approx\frac{9\omega^2-\alpha}{9\beta} \tag{4.2.37}$$

που είναι ακριβής μέχρι όρους τάξης *β*, και συνδέει τη διόρθωση της συχνότητας με την απόκλιση της διεγείρουσας συχνότητας από τη συνθήκη συντονισμού. Η διεγείρουσα συχνότητα *ω* θεωρείται κοντά στην τιμή $\frac{\sqrt{\alpha}}{3}$, ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη υπεραρμονικού συντονισμού τρίτης τάξης.

Έτσι, οι (4.2.35) και (4.2.36) γίνονται

$$A\left(A^2+B^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}\right)+\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}=0 \tag{4.2.38}$$

$$B\left(A^2+B^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}\right)=0 \tag{4.2.39}$$

και η προσεγγιστική λύση (4.2.27) με έναν όρο είναι

$$X(\tau,\beta)=A\cos 3\tau+B\sin 3\tau+\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\tau$$

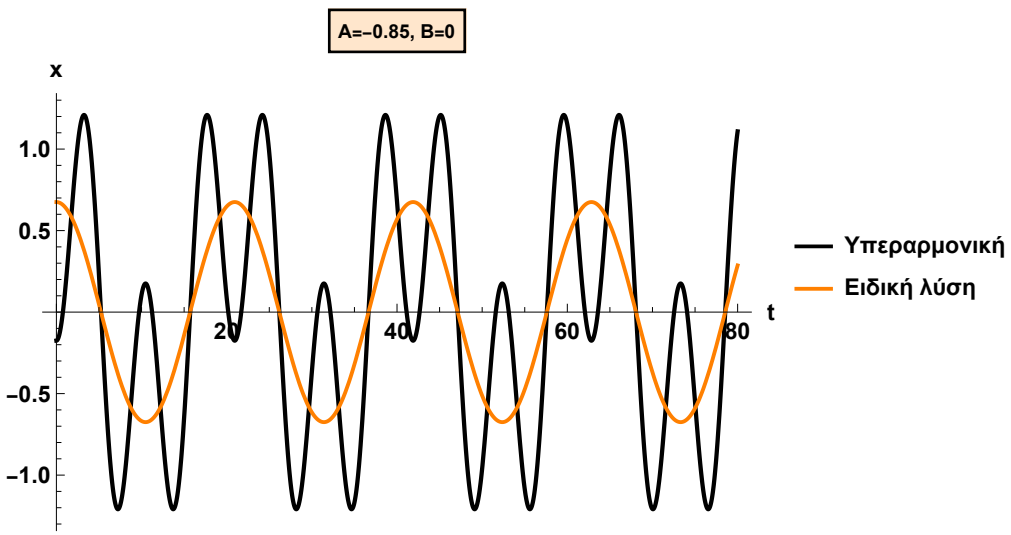
ή στον φυσικό χρόνο t

$$x(t,\beta)=A\cos(3\omega t)+B\sin(3\omega t)+\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos(\omega t) \tag{4.2.40}$$

όπου

$$\omega=\frac{\sqrt{\alpha}}{3}+\beta\omega_1+\ldots$$

και οι σταθερές A, B προσδιορίζονται από τις (4.2.38) και (4.2.39).

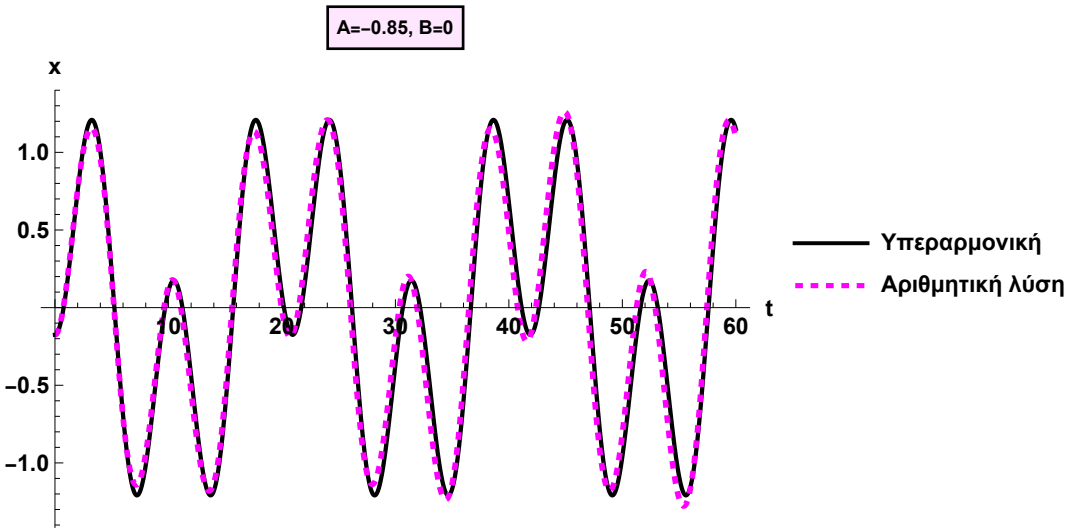


Σχήμα 4.2.6: Υπεραρμονική απόκριση τάξης 3 και ειδική λύση για την εξίσωση Duffing $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=0.6\cos(0.3t)$

Στο *Σχήμα* 4.2.6 παρουσιάζεται η προσεγγιστική λύση (4.2.40) για την υπεραρμονική απόκριση τάξης 3 της εξίσωσης *Duffing* $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=0.6\cos(0.3t)$, όπου επιλέξαμε τις σταθερές $A=-0.85, B=0$. Παράλληλα απεικονίζεται η ειδική λύση που αντιστοιχεί στον όρο διέγερσης της μορφής $\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t$.

Παρατηρούμε ότι η συνολική απόκριση παραμένει περιοδική με την περίοδο της διέγερσης. Ωστόσο, λόγω της παρουσίας του όρου $\cos(3\omega t)$, η λύση εμφανίζει υπεραρμονική συνιστώσα *3ης* τάξης, η οποία προκαλεί ταχύτερες ταλαντώσεις μέσα σε μία περίοδο του εξαναγκασμού.

Στο *Σχήμα 4.2.7* παρουσιάζεται η σύγκριση της προσεγγιστικής υπεραρμονικής λύσης με την αριθμητική λύση της εξίσωσης *Duffing*. Παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των δύο προσεγγίσεων, γεγονός που επιβεβαιώνει την εγκυρότητα της μεθόδου *Lindstedt–Poincaré* και στην περιοχή υπεραρμονικού συντονισμού.



Σχήμα 4.2.7: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης για την εξίσωση Duffing

4.2.2.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης

Από τις εξισώσεις (*4.2.38*), (*4.2.39*) προκύπτει ότι, για μη μηδενική διέγερση, ισχύει $B=0$ και το πλάτος της υπεραρμονικής ταλάντωσης καθορίζεται από την κυβική εξίσωση:

$$A\left(A^2+\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}\right)+\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}=0 \qquad (4.2.41)$$

Η (*4.2.41*) είναι σε μορφή ανηγμένης κυβικής εξίσωσης

$$A^3+p(\Gamma)A+q(\Gamma)=0$$

όπου

$$p(\Gamma)=\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta} \quad \text{και} \quad q(\Gamma)=\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}$$

Η μορφή αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, διότι επιτρέπει τη μελέτη του πλήθους των πραγματικών λύσεων μέσω της διακρίνουσας.

Σύμφωνα με τον τύπο του *Cardano*, η λύση της είναι

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Θεωρούμε τη διακρίνουσα

$$\Delta=-4p^3-27q^2$$

Η τιμή της καθορίζει το πλήθος των πραγματικών λύσεων ως εξής:

- Αν $\Delta>0$ η εξίσωση έχει 3 πραγματικές διακεκριμένες ρίζες
- Αν $\Delta=0$ η εξίσωση έχει μία απλή και μία διπλή πραγματική ρίζα.
- Αν $\Delta<0$ υπάρχει μόνο μια πραγματική λύση

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση (*4.2.41*) έχει μια πραγματική λύση αν

$$\{-4[\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}]^3-27[\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}]^2\}<0$$

έχει μια απλή και μία διπλή πραγματική λύση αν

$$\{-4[\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}]^3-27[\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}]^2\}=0\Rightarrow$$

$$4[\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}]^3=27[\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}]^2$$

και έχει 3 πραγματικές λύσεις αν

$$\{-4[\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}]^3-27[\frac{243}{512}\frac{\Gamma^3}{\alpha^3}]^2\}>0$$

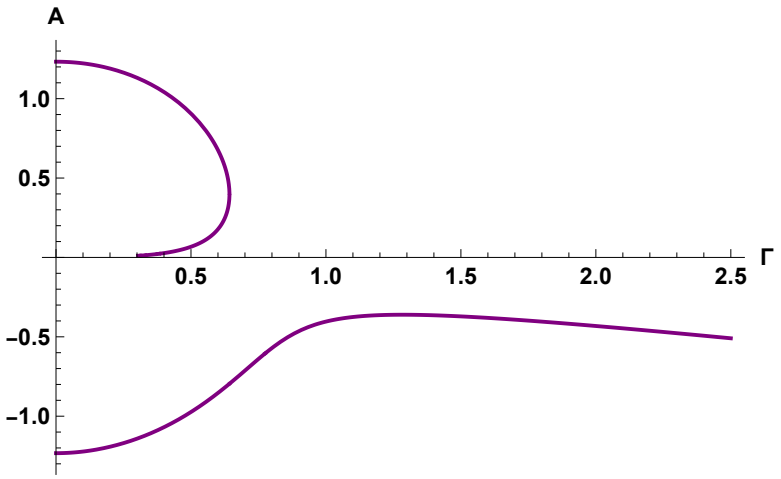
Για να ισχύει αυτό πρέπει

$$\frac{81}{32}\frac{\Gamma^2}{\alpha^2}-\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}<0$$

δηλαδή η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη 3 πραγματικών λύσεων είναι

$$\Gamma^2<\frac{32\alpha^2}{81}\frac{36\omega^2-4\alpha}{3\beta}$$

Επομένως, το πλάτος της απόκρισης μπορεί, για ορισμένες τιμές του πλάτους διέγερσης *Γ*, να λαμβάνει περισσότερες από μία δυνατές τιμές. Το φαινόμενο αυτό αποτυπώνεται στο διάγραμμα (*Γ,Α*) του *Σχήματος 4.2.8* όπου παρατηρούνται περιοχές με μία ή περισσότερες λύσεις για το πλάτος. Η πολλαπλότητα αυτή υποδηλώνει τη μη μοναδικότητα της απόκρισης του συστήματος για τις ίδιες τιμές διέγερσης.



Σχήμα 4.2.8: Διάγραμμα (Γ,A)

4.2.2.2 Ανάλυση ευστάθειας υπεραρμονικών αποκρίσεων

Η δυνατότητα συνύπαρξης πολλαπλών υπεραρμονικών περιοδικών αποκρίσεων για τις ίδιες τιμές της διέγερσης, η οποία προέκυψε από την προηγούμενη ανάλυση, δεν συνεπάγεται ότι όλες οι αντίστοιχες λύσεις είναι δυναμικά ευσταθείς. Ορισμένες από αυτές μπορεί να είναι ασταθείς και, συνεπώς, να μην εμφανίζονται στη φυσική απόκριση του συστήματος. Επιπλέον, όταν συνυπάρχουν περισσότερες από μία ευσταθείς καταστάσεις ταλάντωσης, η τελική απόκριση του συστήματος εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Για τον λόγο αυτό, καθίσταται απαραίτητη η μελέτη της ευστάθειας των υπεραρμονικών αποκρίσεων, καθώς και η διερεύνηση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος κοντά στις περιοχές πολλαπλότητας λύσεων.

Στην παρούσα ενότητα, η ανάλυση ευστάθειας πραγματοποιείται με βάση τις εξισώσεις πλάτους–φάσης, μέσω της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων και της μελέτης των αντίστοιχων αργών μεταβλητών, κατά ανάλογο τρόπο με την περίπτωση των υποαρμονικών αποκρίσεων

Είδαμε πως η εξίσωση (4.2.1) έχει υπεραρμονική λύση τάξης $O(1)$

$$x(t,\beta)=A\cos(3\omega t)+B\sin(3\omega t)+\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t$$

Θεωρούμε πως A και B είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου

$$x(t,\beta)=A(t)\cos(3\omega t)+B(t)\sin(3\omega t)+\frac{9\Gamma}{8\alpha}\cos\omega t \tag{4.2.42}$$

Τότε

$$\dot{x}(t,\beta)=(\dot{A}+3\omega B)\cos(3\omega t)+(-3\omega A+\dot{B})\sin(3\omega t)-\frac{9\omega\Gamma}{8\alpha}\sin\omega t$$

και αγνοώντας τους $\ddot{A}, \ddot{B}$, επειδή υποθέτουμε πως είναι πολύ μικροί,

$$\ddot{x}(t,\beta) \approx (-9\omega^2 A + 6\omega \dot{B})\cos(3\omega t) + (-6\omega \dot{A} - 9\omega^2 B)\sin(3\omega t) - \frac{9\omega^2 \Gamma}{8\alpha}\cos\omega t \qquad (4.2.43)$$

Αντικαθιστούμε τις (4.2.42) και (4.2.43) στην εξίσωση (4.2.1), αναδιατάσσουμε τους όρους αγνοώντας τις αρμονικές υψηλότερης τάξης από *3*, και ισοσταθμίζοντας τους συντελεστές των $\cos(3\omega t)$ και $\sin(3\omega t)$, παίρνουμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{A} = \frac{\beta}{8\omega}\left[B\left(A^2 + B^2 + 2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2 - \frac{4}{3}\frac{9\omega^2 - \alpha}{\beta}\right)\right] = F(A,B) \qquad (4.2.44)$$

$$\dot{B} = -\frac{\beta}{8\omega}\left[A\left(A^2 + B^2 + 2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2 - \frac{4}{3}\frac{9\omega^2 - \alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^3\right] = G(A,B) \qquad (4.2.45)$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθορίζονται από τις εξισώσεις

$$F(A,B) = G(A,B) = 0 \qquad (4.2.46)$$

και αντιστοιχούν σε καταστάσεις όπου το πλάτος και η φάση παραμένουν σταθερά στο χρόνο. Επομένως, τα σημεία αυτά περιγράφουν μόνιμες υπεραρμονικές τάξης *3* της εξίσωσης (4.2.1). Παρατηρούμε πως οι καταστάσεις αυτές ταυτίζονται με τις σταθερές λύσεις του συστήματος πλάτους–φάσης που προέκυψε προηγουμένως μέσω της μεθόδου διαταραχών, και συνεπώς αντιστοιχούν στις ίδιες μόνιμες υπεραρμονικές αποκρίσεις του αρχικού συστήματος.

Από την $F(A,B)=0$ προκύπτει είτε $B=0$, είτε $A^2 + B^2 + 2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2 - \frac{4}{3}\frac{9\omega^2 - \alpha}{\beta} = 0$. Η αντικατάσταση της δεύτερης περίπτωσης στην εξίσωση $G(A,B)=0$ οδηγεί σε συνθήκη $\Gamma = 0$, η οποία αντιφάσκει με την υπόθεση μη μηδενικής διέγερσης. Συνεπώς για $\Gamma \neq 0$ τα σημεία ισορροπίας του συστήματος ικανοποιούν αναγκαστικά τη συνθήκη $B=0$.

Αρχικά, αν τα σημεία ισορροπίας είναι A_* και $B_* = 0$ θέτουμε

$$\tilde{A} = A - A_*$$

$$\tilde{B} = B - B_* = B$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\tilde{A}} = F_1(A_*,0)(A - A_*) + F_2(A_*,0)B$$

$$\dot{B} = G_1(A_*,0)(A - A_*) + G_2(A_*,0)B$$

όπου

$$F_1(A_*,0) = \partial_A F(A_*,0), F_2(A_*,0) = \partial_B F(A_*,0), G_1(A_*,0) = \partial_A G(A_*,0), G_2(A_*,0) = \partial_B G(A_*,0)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(A_*,0)=\begin{bmatrix} F_1(A_*,0) & F_2(A_*,0) \\ G_1(A_*,0) & G_2(A_*,0) \end{bmatrix}$$

με

$$F_1(A_*,0)=0$$

$$F_2(A_*,0)=\frac{\beta}{8\omega}\left(A_*^2+2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{9\omega^2-\alpha}{\beta}\right)$$

$$G_1(A_*,0)=-\frac{\beta}{8\omega}\left(3A_*^2+2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{9\omega^2-\alpha}{\beta}\right)$$

$$G_2(A_*,0)=0$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω, ο Ιακωβιανός πίνακας γίνεται

$$\boldsymbol{J}(A_*,0)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{8\omega}\left(A_*^2+2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{9\omega^2-\alpha}{\beta}\right) \\ -\frac{\beta}{8\omega}\left(3A_*^2+2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{9\omega^2-\alpha}{\beta}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσά του είναι διάφορη από το *0*, άρα εφαρμόζεται η αρχή της γραμμικοποίησης.

Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα δίνονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, στη μορφή

$$\lambda^2-p\lambda+q=0$$

όπου το ίχνος είναι

$$p=0$$

και η ορίζουσα

$$q=-J_{12}J_{21}$$

όπου

$$J_{12}=\frac{\beta}{8\omega}\left(A_*^2+2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{9\omega^2-\alpha}{\beta}\right) \text{ και } J_{21}=-\frac{\beta}{8\omega}\left(3A_*^2+2\left(\frac{9\Gamma}{8\alpha}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{9\omega^2-\alpha}{\beta}\right)$$

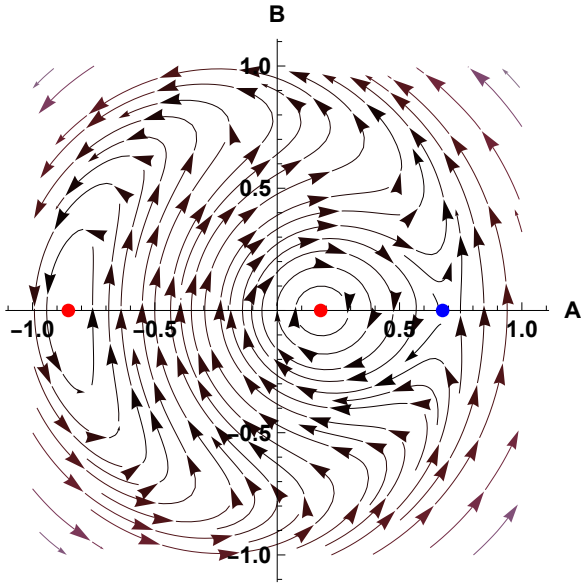
Άρα οι ιδιοτιμές του δίνονται από

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{J_{12}J_{21}}$$

Επομένως, η φύση των ιδιοτιμών καθορίζεται από το πρόσημο του γινομένου $J_{12}J_{21}$.

- Αν $J_{12}J_{21}<0$, οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές, και το σημείο ισορροπίας είναι **ευσταθές κέντρο**.
- Αν $J_{12}J_{21}>0$, οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες πραγματικές, και το σημείο είναι **ασταθές σαγματικό**.

Τα παραπάνω αποτελέσματα επαληθεύονται για την υπεραρμονική απόκριση της εξίσωσης *Duffing* $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=0.6\cos(0.299t)$ όπου τα σημεία ισορροπίας είναι τα $(-0.8537,0)$, $(0.6761,0)$ και $(0.1776,0)$. Παρατηρούμε στο *Σχήμα 4.2.9* πως τα $(-0.8537,0)$ και $(0.1776,0)$ είναι κέντρα, (κόκκινα σημεία), ενώ το $(0.6761,0)$ (μπλε σημείο) αποτελεί σαγματικό σημείο.



Σχήμα 4.2.9: Πορτραίτο φάσης για υπεραρμονικές αποκρίσεις της $\ddot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=0.6\cos(0.299t)$

4.3 Δευτερεύοντες συντονισμοί της αποσβεννύμενης εξίσωσης Duffing

Προσθέτουμε τώρα στην εξίσωση *Duffing* (*4.2.1*) έναν όρο απόσβεσης, και τη γράφουμε σε ασθενώς μη γραμμική μορφή, εισάγοντας μικρή παράμετρο ε, ώστε οι όροι απόσβεσης και μη γραμμικότητας να είναι τάξης $O(\varepsilon)$. Επιπλέον, για ευκολία στη φυσική ερμηνεία του προβλήματος, ο γραμμικός όρος λαμβάνεται με συντελεστή ω_0^2, όπου ω_0 είναι η φυσική συχνότητα του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος. Έτσι η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x+2\varepsilon\mu\dot{x}+\varepsilon\beta x^3=\Gamma\cos\omega t,\quad t>0,\quad \mu>0,\quad \Gamma>0,\quad 0<\varepsilon\ll 1 \qquad (4.3.1)$$

όπου όπως πριν, η παράμετρος β είναι ή θετική (σκληρό ελατήριο), ή αρνητική (μαλακό ελατήριο).

Στην *Ενότητα 2.2.6* με τη μέθοδο κανονικών διαταραχών μελετήσαμε την μόνιμη περιοδική απόκριση κοντά στον κύριο συντονισμό, παρουσία μικρής απόσβεσης.

Τώρα θα αναζητήσουμε μόνιμες περιοδικές αποκρίσεις κοντά σε δευτερεύοντες συντονισμούς, εφαρμόζοντας μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων.

Θεωρούμε πως η λύση της εξίσωσης (4.3.1) εξαρτάται από δύο χρονικές μεταβλητές: τον γρήγορο χρόνο t, και τον αργό χρόνο $\tau=\varepsilon t$, και υποθέτουμε πως έχει τη μορφή της γενικευμένης σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon)=X_0(t,\tau)+\varepsilon X_1(t,\tau)+O(\varepsilon^2) \tag{4.3.2}$$

για $t=O(\frac{1}{\varepsilon})$ και $\tau=O(1)$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Για την πρώτη παράγωγο έχουμε

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\tau}{dt}\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}=\partial_t+\varepsilon\partial_\tau \tag{4.3.3}$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}=(\partial_t+\varepsilon\partial_\tau)^2=\partial_t^2+2\varepsilon\partial_{t\tau}+\varepsilon^2\partial_\tau^2 \tag{4.3.4}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση *(4.3.1)* την *(4.3.2)* και εφαρμόζοντας τις *(4.3.3)*, *(4.3.4)* έχουμε

$$\partial_t^2 X_0+\omega_0^2 X_0=\Gamma\cos\omega t \tag{4.3.5}$$

$$\partial_t^2 X_1+\omega_0^2 X_1=-2\partial_{t\tau}X_0-2\mu\partial_t X_0-\beta X_0^3 \tag{4.3.6}$$

Η γενική λύση της (4.3.5) εκφράζεται σε πολική μορφή

$$X_0(t,\tau)=\alpha(\tau)\cos(\omega_0 t+b(\tau))+2\Lambda\cos\omega t \quad \text{ή} \tag{4.3.7}$$

$$X_0(t,\tau)=A(\tau)e^{i\omega_0 t}+\overline{A(\tau)}e^{-i\omega_0 t}+\Lambda(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}) \tag{4.3.8}$$

όπου

$$A(\tau)=\frac{1}{2}\alpha(\tau)e^{ib(\tau)} \tag{4.3.9}$$

κάποια αυθαίρετη μιγαδική συνάρτηση, και

$$\Lambda=\frac{\Gamma}{2(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{4.3.10}$$

Αντικαθιστούμε την (4.3.8) στην (4.3.6) και γίνεται

$$\begin{aligned}\partial_t^2 X_1+\omega_0^2 X_1=&-2i\omega_0(A'+\mu A)e^{i\omega_0 t}+2i\omega_0(\overline{A}'+\mu\overline{A})e^{-i\omega_0 t}-2i\mu\omega\Lambda e^{i\omega t}+2i\mu\omega\Lambda e^{-i\omega t}\\&-\beta[Ae^{i\omega_0 t}+\Lambda e^{i\omega t}+\overline{A}e^{-i\omega_0 t}+\Lambda e^{-i\omega t}]^3\Rightarrow\\ \partial_t^2 X_1+\omega_0^2 X_1=&-[2i\omega_0(A'+\mu A)+3\beta(A\overline{A}+2\Lambda^2)A]e^{i\omega_0 t}-(2i\mu\omega+6\beta A\overline{A}+3\beta\Lambda^2)\Lambda e^{i\omega t}\\&-\beta[A^3e^{3i\omega_0 t}+\Lambda^3e^{3i\omega t}+3A^2\Lambda e^{i(2\omega_0+\omega)t}+3\overline{A}^2\Lambda e^{i(\omega-2\omega_0)t}+3A\Lambda^2e^{i(\omega_0+2\omega)t}+3A\Lambda^2e^{i(\omega_0-2\omega)t}]\\&+\text{συζυγείς μιγαδικοί}\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Η εξίσωση (4.3.11) περιέχει αιώνιους όρους και όρους με μικρούς διαιρέτες. Ειδικότερα όταν η συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης βρίσκεται κοντά στην ω_0 εμφανίζεται ο γνωστός πρωτεύων

ή κύριος συντονισμός, ενώ όταν $\omega \approx 3\omega_0, \frac{\omega_0}{3}$ προκύπτουν υποαρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$ και υπεραρμονικές τάξης *3*, αντίστοιχα, που θα αναλύσουμε παρακάτω.

4.3.1 Υποαρμονικές αποκρίσεις

Για να μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία η συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης βρίσκεται κοντά στην τιμή $3\omega_0$, εισάγουμε την παράμετρο αποσυντονισμού $\sigma = O(1)$, έτσι ώστε

$$\omega = 3\omega_0 + \varepsilon\sigma \tag{4.3.12}$$

Αντικαθιστούμε την (4.3.12) στην (4.3.11) κι έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_t^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = &-[2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\beta A^2 \overline{A} + 6\beta A \Lambda^2]\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \\ &-(2i\mu\omega + 6\beta A\overline{A} + 3\beta\Lambda^2)\Lambda\,\mathrm{e}^{3i\omega_0 t + i\sigma\varepsilon t} \\ &-\beta A^3 \mathrm{e}^{3i\omega_0 t} - \beta\Lambda^3 \mathrm{e}^{9i\omega_0 t + 3i\sigma\varepsilon t} - 3\beta A^2 \Lambda\,\mathrm{e}^{5i\omega_0 t + i\sigma\varepsilon t} - 3\beta\overline{A}^2\Lambda\,\mathrm{e}^{i\omega_0 t + i\sigma\varepsilon t} \\ &-\beta A\Lambda^2 \mathrm{e}^{7i\omega_0 t + 2i\sigma\varepsilon t} - 3\beta A\Lambda^2 \mathrm{e}^{-5i\omega_0 t - 2i\sigma\varepsilon t} + \text{συζυγείς μιγαδικοί}\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Επειδή $\tau = \varepsilon t$, η (4.3.13) γίνεται

$$\begin{aligned}\partial_t^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = &-[2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\beta A^2 \overline{A} + 6\beta A \Lambda^2]\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \\ &-[\beta A^3 + (2i\mu\omega + 6\beta A\overline{A} + 3\beta\Lambda^2)\Lambda\,\mathrm{e}^{i\sigma\tau}]\mathrm{e}^{3i\omega_0 t} \\ &-\beta\Lambda^3 \mathrm{e}^{3i\sigma\tau}\mathrm{e}^{9i\omega_0 t} - 3\beta A^2\Lambda\,\mathrm{e}^{i\sigma\tau}\mathrm{e}^{5i\omega_0 t} - 3\beta\overline{A}^2\Lambda\,\mathrm{e}^{i\sigma\tau}\mathrm{e}^{i\omega_0 t} \\ &-\beta A\Lambda^2 \mathrm{e}^{2i\sigma\tau}\mathrm{e}^{7i\omega_0 t} - 3\beta A\Lambda^2 \mathrm{e}^{-2i\sigma\tau}\mathrm{e}^{-5i\omega_0 t} + \text{συζυγείς μιγαδικοί}\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Παρατηρούμε ότι η εισαγωγή της παραμέτρου αποσυντονισμού μετατρέπει όρους που, στην απλή διαταρακτική ανάπτυξη, θα οδηγούσαν σε μικρούς διαιρέτες, σε όρους που παράγουν αιώνιους όρους. Συγκεκριμένα, ο όρος

$$-3\beta\overline{A}^2\Lambda\,\mathrm{e}^{i(\omega - 2\omega_0)t}$$

με τη χρήση της σχέσης αποσυντονισμού μετασχηματίζεται σε όρο της μορφής

$$-3\beta\overline{A}^2\Lambda\,\mathrm{e}^{i\sigma\tau}\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$$

ο οποίος είναι συντονισμένος με τη λύση του ομογενούς προβλήματος ως προς την ταχεία χρονική κλίμακα *t*. Με τον τρόπο αυτό, το πρόβλημα των μικρών διαιρετών μεταφέρεται στην εμφάνιση αιώνιων όρων. Για να παραμείνει, λοιπόν, έγκυρη η ασυμπτωτική ανάπτυξη, απαιτείται η εξάλειψη όλων των αιώνιων όρων από την εξίσωση του X_1. Για τον λόγο αυτό, επιβάλλεται ο μηδενισμός των συντελεστών του $\mathrm{e}^{i\omega_0 t}$. Έτσι

$$2i\omega_0 A' + 2i\omega_0 \mu A + 3\beta A^2 \overline{A} + 6\beta A \Lambda^2 + 3\beta \overline{A}^2 \Lambda e^{i\sigma\tau} = 0 \qquad (4.3.15)$$

Εισάγουμε την πολική μορφή (4.3.9) στην (4.3.15) και γίνεται

$$i\omega_0 \alpha' e^{ib} - \omega_0 \alpha b' e^{ib} + i\omega_0 \mu \alpha e^{ib} + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 e^{ib} + 3\beta\alpha\Lambda^2 e^{ib} + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\Lambda e^{i(\sigma\tau - 2b)} = 0 \qquad (4.3.16)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.3.16) με e^{-ib}

$$i\omega_0 \alpha' - \omega_0 \alpha b' + i\omega_0 \mu \alpha + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 + 3\beta\alpha\Lambda^2 + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\Lambda e^{i(\sigma\tau - 3b)} = 0 \qquad (4.3.17)$$

Από τον τύπο του *Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,sin\theta$$

η (4.3.17) γράφεται

$$i\omega_0 \alpha' - \omega_0 \alpha b' + i\omega_0 \mu \alpha + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 + 3\beta\alpha\Lambda^2 + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\Lambda[\cos(\sigma\tau - 3b) + i\sin(\sigma\tau - 3b)] = 0 \Rightarrow$$

$$i[\omega_0 \alpha' + \omega_0 \mu \alpha + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\Lambda\sin(\sigma\tau - 3b)] - \omega_0 \alpha b' + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 + 3\beta\alpha\Lambda^2 + \frac{3}{4}\beta\alpha^2\Lambda\cos(\sigma\tau - 3b) = 0$$

(4.3.18)

Από την ισότητα μιγαδικού αριθμού με το μηδέν, προκύπτει ότι τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του πρέπει να μηδενίζονται ανεξάρτητα, άρα από την (4.3.18) παίρνουμε

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{3}{4\omega_0}\beta\alpha^2\Lambda\sin(\sigma\tau - 3b) \qquad (4.3.19)$$

$$\alpha b' = \frac{3\beta}{\omega_0}\alpha\Lambda^2 + \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha^3 + \frac{3\beta}{4\omega_0}\alpha^2\Lambda\cos(\sigma\tau - 3b) \qquad (4.3.20)$$

Οι εξισώσεις (4.3.19) και (4.3.20) περιγράφουν τη βραδεία μεταβολή του πλάτους α και της φάσης b του όρου της ελεύθερης ταλάντωσης, δηλαδή της συνιστώσας της απόκρισης που σχετίζεται με την ιδιοσυχνότητα του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Θέτουμε

$$\varphi(\tau) = \sigma\tau - 3b(\tau) \qquad (4.3.21)$$

οπότε

$$\varphi'(\tau) = \sigma - 3b'(\tau) \Rightarrow b'(\tau) = \frac{1}{3}\sigma - \frac{1}{3}\varphi'(\tau) \qquad (4.3.22)$$

Αντικαθιστούμε την (4.3.21) στην (4.3.19) και τις (4.3.21), (4.3.22) στην (4.3.20), κι έχουμε

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{3}{4\omega_0}\beta\alpha^2\Lambda\sin\varphi \qquad (4.3.23)$$

$$\alpha\varphi' = (\sigma - \frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0})\alpha - \frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha^3 - \frac{9\beta\Lambda}{4\omega_0}\alpha^2\cos\varphi \qquad (4.3.24)$$

Από την (4.3.21) έπεται πως

$$b(\tau)=\frac{1}{3}\sigma\tau-\frac{1}{3}\varphi(\tau)=\frac{1}{3}\varepsilon\sigma t-\frac{1}{3}\varphi(\tau) \tag{4.3.25}$$

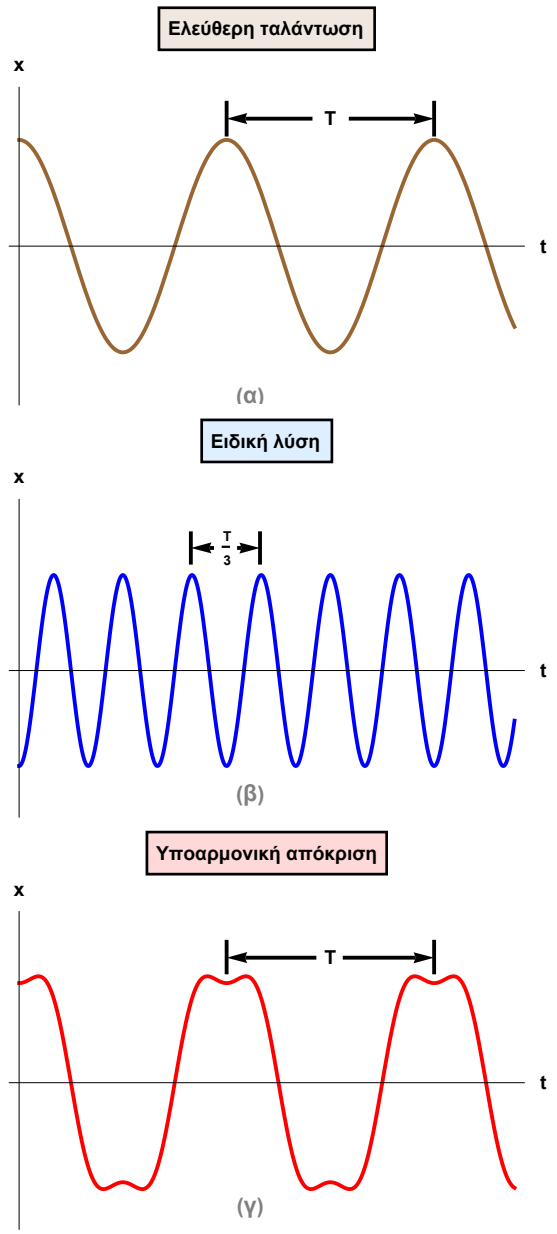
και η λύση (4.3.2) με εφαρμογή της (4.3.7) είναι

$$x(t,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon)=\alpha(\tau)\cos(\omega_0 t+b(\tau))+2\Lambda\cos\omega t+O(\varepsilon)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.25), και (4.3.12) έχουμε τελικά την προσεγγιστική λύση με έναν όρο

$$x(t,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon)=\alpha(\tau)\cos(\frac{1}{3}\omega t-\frac{1}{3}\varphi(\tau))+\frac{\Gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t+O(\varepsilon) \tag{4.3.26}$$

όπου $\alpha(\tau),\varphi(\tau)$ δίνονται από τις (4.3.23) και (4.3.24).



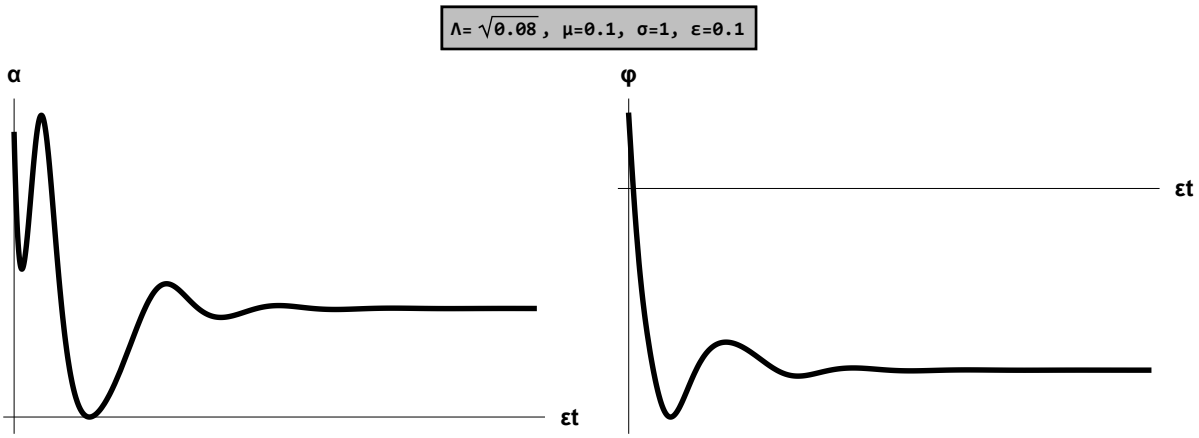
Σχήμα 4.3.1: Σύνθεση της υποαρμονικής απόκρισης της εξίσωσης Duffing

Από την προσεγγιστική λύση (4.3.26) προκύπτει ότι ο όρος της ελεύθερης ταλάντωσης, εμφανίζεται με συχνότητα ίση με $\frac{\omega}{3}$, δηλαδή με συχνότητα ίση με το ένα τρίτο της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης. Η μη γραμμικότητα του συστήματος επιτρέπει επομένως τη διατήρηση μιας ταλάντωσης χαμηλότερης συχνότητας στη μόνιμη κατάσταση, παρά την παρουσία απόσβεσης. Συνεπώς, η περιοδική απόκριση του συστήματος αντιστοιχεί σε υποαρμονική απόκριση τάξης $\frac{1}{3}$.

Στο *Σχήμα 4.3.1* απεικονίζονται: (α) ο όρος της ελεύθερης ταλάντωσης χαμηλής συχνότητας, (β) η εξαναγκασμένη συνιστώσα που οφείλεται στη διεγείρουσα δύναμη και ταλαντώνεται με τη συχνότητα ω, και (γ) η σύνθεση των δύο συνιστωσών, η οποία αποτελεί τη συνολική υποαρμονική περιοδική απόκριση του συστήματος. Παρατηρείται ότι, παρόλο που η διέγερση πραγματοποιείται σε συχνότητα περίπου τριπλάσια της φυσικής συχνότητας του συστήματος, η μη γραμμικότητα οδηγεί στην εμφάνιση έντονης απόκρισης σε υποπολλαπλάσια συχνότητα.

4.3.1.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης

Στην παρούσα υποενότητα εξετάζεται η δυναμική του συστήματος στο επίπεδο των εξισώσεων πλάτους–φάσης, οι οποίες προέκυψαν από τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων και περιγράφουν τη βραδεία εξέλιξη της ελεύθερης ταλαντωτικής συνιστώσας της απόκρισης.



Σχήμα 4.3.2: Διαγράμματα πλάτους και φάσης ως προς τον χρόνο τ

Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων πλάτους *α* και φάσης *φ* ως προς τον αργό χρόνο *τ* (*Σχήμα 4.3.2*), τα οποία προέκυψαν από αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (4.3.23) και (4.3.24), παρατηρούμε ότι, μετά από ένα αρχικό μεταβατικό στάδιο, οι μεταβλητές τείνουν σε σταθερές τιμές. Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι το σύστημα καταλήγει σε μόνιμη κατάσταση.

Υπάρχουν δύο δυνατές περιπτώσεις: είτε η μόνιμη τιμή του α είναι μηδενική, είτε μη μηδενική. Στη δεύτερη περίπτωση, η ελεύθερη ταλαντωτική συνιστώσα διατηρεί σταθερό πλάτος και παραμένει περιοδική, με αποτέλεσμα και η συνολική απόκριση να είναι περιοδική. Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην εγκατάσταση μόνιμης υποαρμονικής ταλάντωσης του συστήματος.

Αφού λοιπόν στην μόνιμη περιοδική κατάσταση τα α και φ είναι σταθερά, θέτουμε

$$\alpha'=0 \text{ και } \varphi'=0$$

οπότε οι (4.3.23) και (4.3.24) γίνονται

$$-\mu\alpha=\frac{3\beta\Lambda}{4\omega_0}\alpha^2\sin\varphi \tag{4.3.27}$$

$$\left(\sigma-\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right)\alpha-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha^3=\frac{9\beta\Lambda}{4\omega_0}\alpha^2\cos\varphi \tag{4.3.28}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις (4.3.27), (4.3.28), τις προσθέτουμε και επειδή $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, προκύπτει

$$\left[9\mu^2+\left(\sigma-\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0}-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha^2\right)^2\right]\alpha^2=\frac{81\beta^2\Lambda^2}{16\omega_0^2}\alpha^4 \tag{4.3.29}$$

Από την (4.3.29) έπεται πως $\alpha=0$ ή

$$9\mu^2+\left(\sigma-\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0}-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha^2\right)^2=\frac{81\beta^2\Lambda^2}{16\omega_0^2}\alpha^2 \tag{4.3.30}$$

Η (4.3.30) είναι διτετράγωνη εξίσωση για το πλάτος α, με λύσεις

$$\alpha^2=P\pm\sqrt{P^2-Q} \tag{4.3.31}$$

όπου

$$P=\frac{8\omega_0\sigma}{9\beta}-6\Lambda^2 \text{ και } Q=\frac{64\omega_0^2}{81\beta^2}\left[9\mu^2+\left(\sigma-\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right)^2\right] \tag{4.3.32}$$

Η (4.3.31) είναι η **εξίσωση συχνότητας-απόκρισης** και για να υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις, δηλαδή $\alpha\neq0$, επειδή $Q>0$, πρέπει $P>0$ και $P^2\geq Q$, άρα

$$\Lambda^2<\frac{4\omega_0\sigma}{27\beta} \text{ και } \frac{\beta\Lambda^2}{\omega_0}\left(\sigma-\frac{63\beta\Lambda^2}{8\omega_0}\right)\geq2\mu^2 \tag{4.3.33}$$

και οι β και σ πρέπει να έχουν το ίδιο πρόσημο.

Από την (4.3.33) έπεται πως για δεδομένο Λ, η (4.3.31) έχει μη τετριμμένες λύσεις, μόνο αν

$$\beta\sigma\geq\frac{2\mu^2\omega_0}{\Lambda^2}+\frac{63\beta^2\Lambda^2}{8\omega_0} \tag{4.3.34}$$

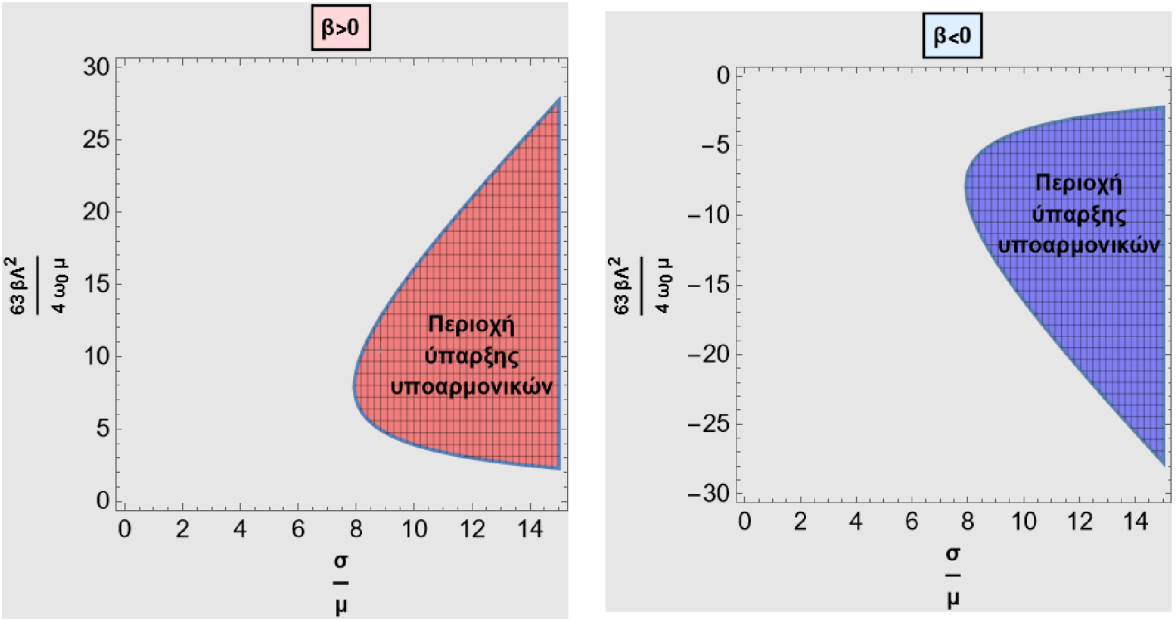
ενώ για δεδομένο σ, η (4.3.31) έχει μη τετριμμένες λύσεις, μόνο αν

$$\frac{\sigma}{\mu}-\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}-63}\leq\frac{63\,\beta\,\Lambda^2}{4\,\omega_0\,\mu}\leq\frac{\sigma}{\mu}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}-63} \tag{4.3.35}$$

Η σχέση αυτή καθορίζει την περιοχή ύπαρξης των υποαρμονικών αποκρίσεων στο επίπεδο των παραμέτρων $(\frac{\sigma}{\mu},\frac{63\,\beta\,\Lambda^2}{4\,\omega_0\,\mu})$. Τα όρια της περιοχής αυτής προκύπτουν όταν η ανισότητα μετατρέπεται σε ισότητα, δηλαδή όταν

$$\frac{63\,\beta\,\Lambda^2}{4\,\omega_0\,\mu}=\frac{\sigma}{\mu}\pm\sqrt{\frac{\sigma^2}{\mu^2}-63}$$

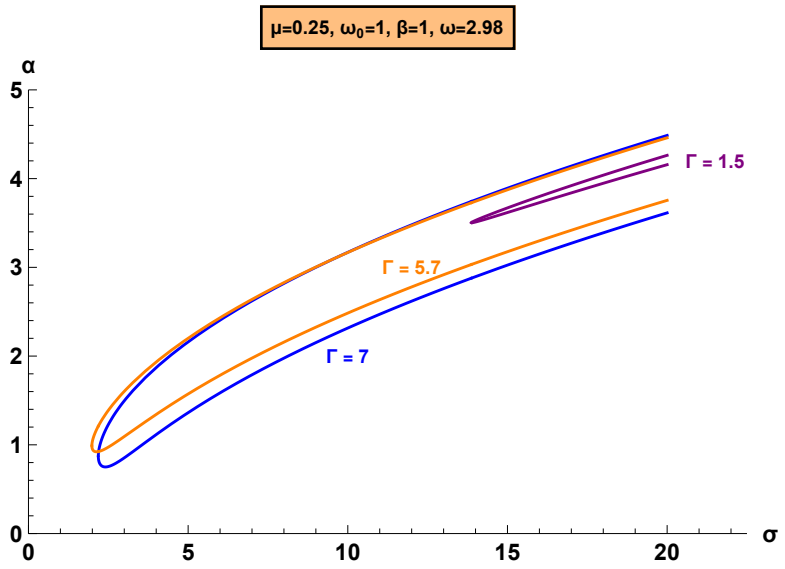
Όταν ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες, είναι δυνατό το σύστημα να αποκρίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο όρος της ελεύθερης ταλάντωσης να μην αποσβένεται στο μηδέν, παρά την παρουσία απόσβεσης και σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στη γραμμική περίπτωση. Επιπλέον, στη μόνιμη κατάσταση, η μη γραμμικότητα προσαρμόζει τη συχνότητα του όρου της ελεύθερης ταλάντωσης στο ένα τρίτο της συχνότητας της διέγερσης, έτσι ώστε η απόκριση να είναι περιοδική.



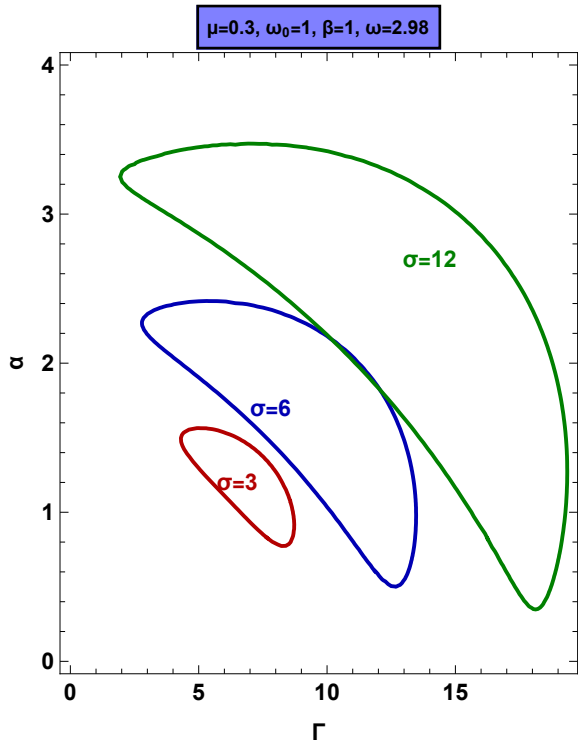
Σχήμα 4.3.3: Περιοχή ύπαρξης υποαρμονικών αποκρίσεων τάξης $\frac{1}{3}$

Στο *Σχήμα 4.3.3* απεικονίζεται η αντίστοιχη περιοχή ύπαρξης των υποαρμονικών αποκρίσεων τάξης $\frac{1}{3}$.

Στα *Σχήματα 4.3.4* και *4.3.5* παρουσιάζονται αντίστοιχα οι καμπύλες μεταβολής του πλάτους της υποαρμονικής απόκρισης ως προς την παράμετρο αποσυντονισμού *σ* και ως προς το πλάτος της διέγερσης *Γ*. Οι καμπύλες αυτές επιβεβαιώνουν ότι ακόμη και όταν η διέγερση πραγματοποιείται σε συχνότητα περίπου τριπλάσια της φυσικής συχνότητας του συστήματος, είναι δυνατό να εμφανιστούν αποκρίσεις σημαντικού πλάτους.



Σχήμα 4.3.4: Καμπύλες πλάτους-αποσυντονισμού για διάφορες τιμές του Γ



Σχήμα 4.3.5: Καμπύλες πλάτους-διέγερσης για διάφορες τιμές του σ

4.3.1.2 Ανάλυση ευστάθειας υποαρμονικών αποκρίσεων

Σε αντιστοιχία με τη μη αποσβεννύμενη περίπτωση, η ύπαρξη υποαρμονικών λύσεων δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την παρατηρούμενη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Η εμφάνιση

ή μη των αντίστοιχων αποκρίσεων καθορίζεται από την ευστάθεια των λύσεων, καθώς και από τις αρχικές συνθήκες.

Κατά συνέπεια, η μελέτη της ευστάθειας των μόνιμων υποαρμονικών λύσεων είναι απαραίτητη, αφού προσδιορίζει ποιες από αυτές είναι δυναμικά εφικτές και ποιες δεν εμφανίζονται ποτέ.

Στην παρούσα ενότητα, η ανάλυση ευστάθειας θα πραγματοποιηθεί με βάση τις εξισώσεις πλάτους –φάσης (4.3.23) και (4.3.24) που προέκυψαν με την μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων.

Διαιρώντας την (4.3.24) με το $\alpha \neq 0$, έχουμε

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{3\beta\Lambda}{4\omega_0}\alpha^2 \sin\varphi = F(\alpha,\varphi) \tag{4.3.36}$$

$$\varphi' = \left(\sigma - \frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right) - \frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha^2 - \frac{9\beta\Lambda}{4\omega_0}\alpha\cos\varphi = G(\alpha,\varphi) \tag{4.3.37}$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθορίζονται από τις εξισώσεις

$$F(\alpha,\varphi) = G(\alpha,\varphi) = 0 \tag{4.3.38}$$

και αντιστοιχούν σε καταστάσεις όπου το πλάτος και η φάση παραμένουν σταθερά.

Επομένως, τα σημεία αυτά περιγράφουν μόνιμες υποαρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$ της εξίσωσης (4.3.1).

Αρχικά λύνουμε τις (4.3.38) ως προς $\sin\varphi, \cos\varphi$ και παίρνουμε

$$\sin\varphi = -\frac{4\omega_0\mu}{3\alpha\beta\Lambda} \quad \text{και} \quad \cos\varphi = \frac{4\omega_0\sigma}{9\alpha\beta\Lambda} - \frac{4\Lambda}{\alpha} - \frac{\alpha}{2\Lambda}$$

Θα γραμμικοποιήσουμε τώρα το μη γραμμικό σύστημα (4.3.36), (4.3.37), θεωρώντας πως τα σημεία ισορροπίας είναι α_* και φ_*. Έτσι θέτουμε

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_*$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_*$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\tilde{\alpha}} = F_1(\alpha_*,\varphi_*)(\alpha-\alpha_*) + F_2(\alpha_*,\varphi_*)(\varphi-\varphi_*)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = G_1(\alpha_*,\varphi_*)(\alpha-\alpha_*) + G_2(\alpha_*,\varphi_*)(\varphi-\varphi_*)$$

όπου

$$F_1(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\alpha F(\alpha_*,\varphi_*), F_2(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\varphi F(\alpha_*,\varphi_*), G_1(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\alpha G(\alpha_*,\varphi_*), G_2(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\varphi G(\alpha_*,\varphi_*)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(\alpha_*,\varphi_*) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha_*,\varphi_*) & F_2(\alpha_*,\varphi_*) \\ G_1(\alpha_*,\varphi_*) & G_2(\alpha_*,\varphi_*) \end{bmatrix}$$

με

$$F_1(\alpha_*,\varphi_*) = \mu$$

$$F_2(\alpha_*,\varphi_*)=(-\frac{\sigma}{3}+\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0})\alpha_*+\frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha_*^3$$

$$G_1(\alpha_*,\varphi_*)=-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha_*-\frac{\sigma}{\alpha_*}+\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0\alpha_*}$$

$$G_2(\alpha_*,\varphi_*)=-3\mu$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω ο Ιακωβιανός πίνακας γίνεται

$$\boldsymbol{J}(\alpha_*,\varphi_*)=\begin{bmatrix} \mu & (-\frac{\sigma}{3}+\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0})\alpha_*+\frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha_*^3 \\ -\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha_*-\frac{\sigma}{\alpha_*}+\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0\alpha_*} & -3\mu \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του δίνονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση του γραμμικοποιημένου συστήματος, στη μορφή

$$\lambda^2-p\lambda+q=0 \qquad (4.3.39)$$

όπου το ίχνος είναι

$$p=-2\mu<0$$

και η ορίζουσα

$$q=-3\mu^2-[(-\frac{\sigma}{3}+\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0})\alpha_*+\frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha_*^3](-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha_*-\frac{\sigma}{\alpha_*}+\frac{9\beta\Lambda^2}{\omega_0\alpha_*})$$

$$=-3\mu^2-\frac{\sigma^2}{3}+\frac{6\beta\sigma\Lambda^2}{\omega_0}-\frac{27\beta^2\Lambda^4}{\omega_0^2}+\frac{27\beta^2}{64\omega_0^2}\alpha^4$$

Αφού προσδιορίστηκαν το ίχνος και η ορίζουσα, εισάγουμε τώρα τη διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

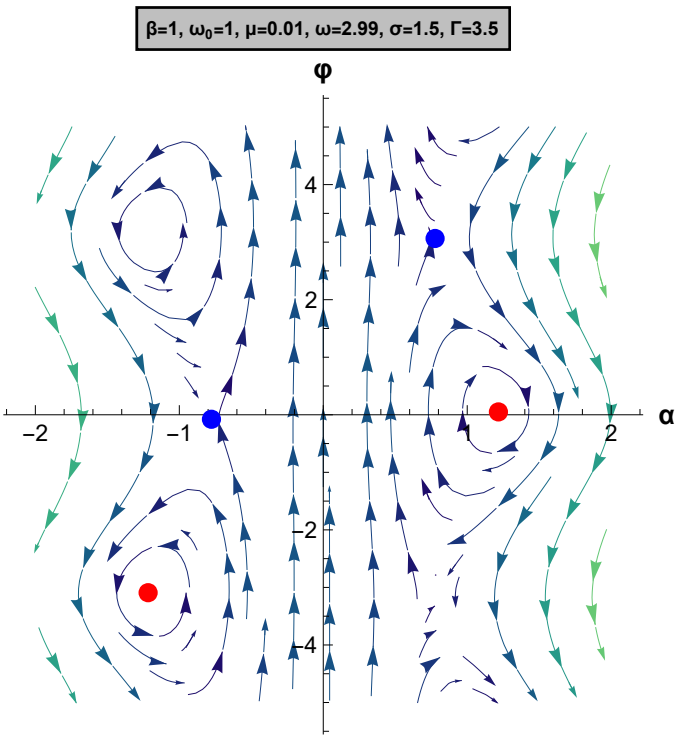
$$\Delta=p^2-4q$$

Με την ανάλυση της *Ενότητας 2.2.5.2*, είμαστε σε θέση να αποφανθούμε για το είδος ευστάθειας των υποαρμονικών περιοδικών αποκρίσεων που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα.

- Αν $q<0$ τότε $\Delta>0$ και οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες πραγματικές, άρα το σημείο ισορροπίας είναι **ασταθές σαγματικό**.
- Αν $q>\mu^2$, δηλαδή αν $4\mu^2-4q<0\Rightarrow\Delta<0$, επειδή $p<0$, τότε οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος, και το σημείο ισορροπίας είναι **ευσταθής σπείρα**.
- Η συνθήκη ύπαρξης υποαρμονικών αποκρίσεων, επιβάλλει περιορισμούς στις παραμέτρους, τέτοιους ώστε να μην εμφανίζεται η ενδιάμεση περιοχή $0<q<\mu^2$.

Συνοψίζοντας, από την ανάλυση του Ιακωβιανού πίνακα προκύπτει ότι το ίχνος του είναι σταθερά αρνητικό, γεγονός που αντανακλά τον αποσβεννύμενο χαρακτήρα του συστήματος. Η φύση των σημείων ισορροπίας καθορίζεται επομένως από το πρόσημο της ορίζουσας. Για τις παραμέτρους

που ικανοποιούν τη συνθήκη ύπαρξης των υποαρμονικών αποκρίσεων, προκύπτουν αποκλειστικά ευσταθείς σπείρες και σαγματικά σημεία, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 4.3.6*, όπου με μπλε χρώμα απεικονίζονται τα σαγματικά σημεία και με κόκκινο οι σπείρες.



Σχήμα 4.3.6: Πορτραίτο φάσης για υποαρμονικές αποκρίσεις της αποσβεννύμενης εξίσωσης Duffing

Επιπλέον, η παρουσία ευσταθών και ασταθών σημείων συνεπάγεται έντονη εξάρτηση της τελικής δυναμικής από τις αρχικές συνθήκες. Συγκεκριμένα, οι ευσταθείς περιοχές έλξης που αντιστοιχούν στις σπείρες καθορίζουν σύνολα αρχικών συνθηκών για τα οποία το σύστημα εγκλωβίζεται σε συγκεκριμένη υποαρμονική απόκριση. Αντίθετα, αρχικές συνθήκες που βρίσκονται κοντά στις διαχωριστικές τροχιές των σαγματικών σημείων μπορεί να οδηγήσουν σε μετάβαση μεταξύ διαφορετικών δυναμικών καταστάσεων, γεγονός που εξηγεί την πολυσταθερότητα του συστήματος.

<u>Σημείωση</u>

Η εισαγωγή μικρού όρου απόσβεσης στην εξίσωση *Duffing* (*4.2.1*)

$$\ddot{x}+k\,\dot{x}+\alpha\,x+\beta\,x^3=\Gamma\cos\omega t$$

και η εφαρμογή της μεθόδου *Poincaré–Lindstedt* για την αναζήτηση υποαρμονικών αποκρίσεων οδηγεί στο σύστημα αργής ροής

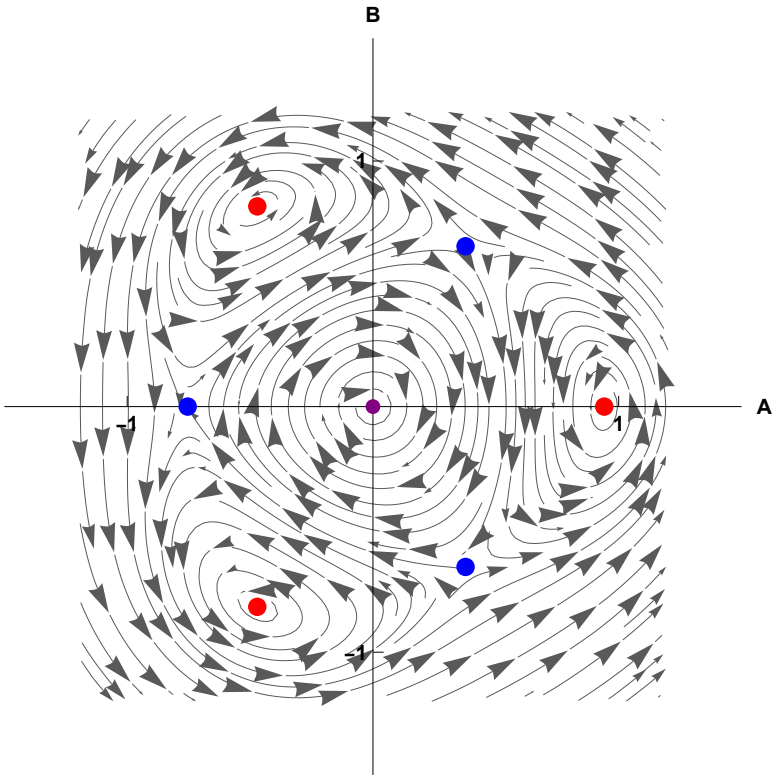
$$\dot{A}=\frac{9\beta}{8\omega}\left\{B\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{\Gamma}{4\alpha}AB\right\}+\frac{3}{2}k\left(\dot{B}-\frac{1}{3}\omega A\right)$$

$$\dot{B}=\frac{9\beta}{8\omega}\left\{-A\left(A^2+B^2+\frac{\Gamma^2}{32\alpha^2}-\frac{4}{27}\frac{\omega^2-9\alpha}{\beta}\right)+\frac{\Gamma}{8\alpha}\left(A^2-B^2\right)\right\}-\frac{3}{2}k\left(\dot{A}+\frac{1}{3}\omega B\right)$$

Η ανάλυση της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας, δείχνει ότι τα κέντρα του μη αποσβεννύμενου συστήματος μετατρέπονται σε ευσταθείς σπείρες, ενώ τα σαγματικά σημεία διατηρούν τον ρόλο τους ως διαχωριστικές τροχιές.

Στο *Σχήμα 4.3.7*, απεικονίζεται το πορτραίτο φάσης της $\ddot{x}+0.002\dot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=1.5\cos(2.85t)$ όπου παρατηρούμε ότι τα κόκκινα σημεία αντιστοιχούν στις ευσταθείς σπείρες, ενώ τα μπλε στα σαγματικά σημεία.

Η σύγκριση με το σύστημα που προκύπτει από τη μέθοδο των πολλαπλών κλιμάκων αναδεικνύει ότι οι δύο προσεγγίσεις περιγράφουν την ίδια φυσική δυναμική, αλλά σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μεταβλητών (καρτεσιανή μορφή πλάτους–συνιστωσών έναντι πολικής μορφής πλάτους–φάσης). Για τον λόγο αυτό, τα αντίστοιχα πορτραίτα φάσης δεν είναι άμεσα ταυτόσημα, καθώς η δομή τους εξαρτάται από τη χρησιμοποιούμενη παραμετροποίηση του συστήματος.



Σχήμα 4.3.7: Πορτραίτο φάσης για υποαρμονικές αποκρίσεις της

$$\ddot{x}+0.002\dot{x}+x-\frac{1}{6}x^3=1.5\cos(2.85t)$$

4.3.2 Υπεραρμονικές αποκρίσεις

Για να μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία η συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης βρίσκεται κοντά στην τιμή $\frac{1}{3}\omega_0$, εισάγουμε την παράμετρο αποσυντονισμού $\sigma = O(1)$, έτσι ώστε

$$3\omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \tag{4.3.40}$$

άρα

$$3\omega t = (\omega_0 + \varepsilon\sigma)t = \omega_0 t + \sigma\varepsilon t = \omega_0 t + \sigma\tau \tag{4.3.41}$$

Παρατηρούμε στην εξίσωση (4.3.11) ότι εκτός από τους όρους που είναι ανάλογοι του $e^{i\omega_0 t}$, υπάρχει και ο όρος $-\beta\Lambda^3 e^{3i\omega t}$ που εφαρμόζοντας την (4.3.41), θα οδηγήσει σε αιώνιο όρο στην X_1.

Έτσι, αντικαθιστούμε την (4.3.41) στην (4.3.11) μόνο στον όρο αυτό, και έχουμε

$$\partial_t^2 X_1 + \omega_0^2 X_1 = -[2i\omega_0(A' + \mu A) + 3\beta(A\bar{A} + 2\Lambda^2)A]e^{i\omega_0 t} - (2i\mu\omega + 6\beta A\bar{A} + 3\beta\Lambda^2)\Lambda e^{i\omega t}$$

$$-\beta[A^3 e^{3i\omega_0 t} + \Lambda^3 e^{i\omega_0 t + i\sigma\tau} + 3A^2\Lambda e^{i(2\omega_0+\omega)t} + 3\bar{A}^2\Lambda e^{i(\omega-2\omega_0)t} + 3A\Lambda^2 e^{i(\omega_0+2\omega)t} + 3A\Lambda^2 e^{i(\omega_0-2\omega)t}]$$

+ συζυγείς μιγαδικοί

Για να παραμείνει, έγκυρη η ασυμπτωτική ανάπτυξη, απαιτείται η εξάλειψη όλων των αιώνιων όρων από την εξίσωση του X_1. Για τον λόγο αυτό, επιβάλλεται ο μηδενισμός των συντελεστών του $e^{i\omega_0 t}$. Δηλαδή

$$2i\omega_0 A' + 2i\omega_0\mu A + 3\beta A^2\bar{A} + 6\beta A\Lambda^2 + \beta\Lambda^3 e^{i\sigma\tau} = 0 \tag{4.3.42}$$

Εισάγουμε την πολική μορφή (4.3.9) στην (4.3.42) και γίνεται

$$i\omega_0\alpha' e^{ib} - \omega_0\alpha b' e^{ib} + i\omega_0\mu\alpha e^{ib} + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 e^{ib} + 3\beta\alpha\Lambda^2 e^{ib} + \beta\Lambda^3 e^{i\sigma\tau} = 0 \tag{4.3.43}$$

Πολλαπλασιάζουμε με e^{-ib}

$$i\omega_0\alpha' - \omega_0\alpha b' + i\omega_0\mu\alpha + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 + 3\beta\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda^3 e^{i(\sigma\tau - b)} = 0 \tag{4.3.44}$$

Από τον τύπο του *Euler*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,sin\theta$$

η (4.3.44) γίνεται

$$i\omega_0\alpha' - \omega_0\alpha b' + i\omega_0\mu\alpha + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 + 3\beta\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda^3[\cos(\sigma\tau - b) + i\sin(\sigma\tau - b)] = 0 \Rightarrow$$

$$i[\omega_0\alpha' + \omega_0\mu\alpha + \beta\Lambda^3\sin(\sigma\tau - b)] - \omega_0\alpha b' + \frac{3}{8}\beta\alpha^3 + 3\beta\alpha\Lambda^2 + \beta\Lambda^3\cos(\sigma\tau - b) = 0 \tag{4.3.45}$$

Από την ισότητα μιγαδικού αριθμού με το μηδέν, προκύπτει ότι τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος του πρέπει να μηδενίζονται ανεξάρτητα, άρα από την (4.3.45) παίρνουμε

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\sin(\sigma\tau - b) \tag{4.3.46}$$

$$\alpha b' = \frac{3\beta}{\omega_0}\left(\Lambda^2 + \frac{1}{8}\alpha^2\right)\alpha + \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\cos(\sigma\tau - b) \tag{4.3.47}$$

Οι εξισώσεις (4.3.46) και (4.3.47) περιγράφουν τη βραδεία μεταβολή του πλάτους α και της φάσης b του όρου της ελεύθερης ταλάντωσης.

Θέτουμε

$$\varphi(\tau) = \sigma\tau - b(\tau) \tag{4.3.48}$$

οπότε

$$\varphi'(\tau) = \sigma - b'(\tau) \Rightarrow b'(\tau) = \sigma - \varphi'(\tau) \tag{4.3.49}$$

Αντικαθιστούμε την (4.3.48) στην (4.3.46) και τις (4.3.48), (4.3.49) στην (4.3.47), κι έχουμε

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\sin\varphi \tag{4.3.50}$$

$$\alpha\varphi' = \left(\sigma - \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right)\alpha - \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha^3 - \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\cos\varphi \tag{4.3.51}$$

Από την (4.3.48) έπεται πως

$$b(\tau) = \sigma\tau - \varphi(\tau) = \varepsilon\sigma t - \varphi(\tau) \tag{4.3.52}$$

και η λύση (4.3.2) με εφαρμογή της (4.3.7) είναι

$$x(t,\varepsilon) = X(t,\tau,\varepsilon) = \alpha(\tau)\cos(\omega_0 t + b(\tau)) + 2\Lambda\cos\omega t + O(\varepsilon)$$

Αντικαθιστούμε την (4.3.52)

$$x(t,\varepsilon) = X(t,\tau,\varepsilon) = \alpha(\tau)\cos[(\omega_0 + \varepsilon\sigma)t - \varphi(\tau)] + 2\Lambda\cos\omega t + O(\varepsilon)$$

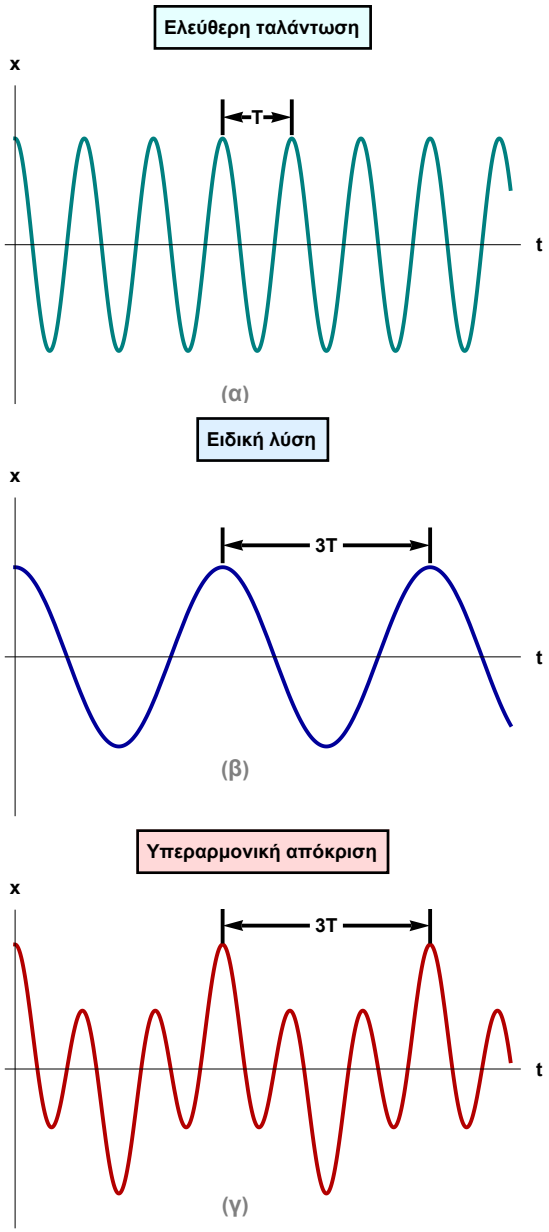
και εφαρμόζοντας την (4.3.40), έχουμε τελικά την προσεγγιστική λύση με έναν όρο

$$x(t,\varepsilon) = X(t,\tau,\varepsilon) = \alpha(\tau)\cos(3\omega t - \varphi(\tau)) + \frac{\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + O(\varepsilon) \tag{4.3.53}$$

όπου $\alpha(\tau), \varphi(\tau)$ δίνονται από τις (4.3.50) και (4.3.51).

Από την προσεγγιστική λύση (4.3.53) προκύπτει ότι ο όρος της ελεύθερης ταλάντωσης εμφανίζεται με συχνότητα ίση με 3ω, δηλαδή με συχνότητα τριπλάσια της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης. Σε αντίθεση με τη γραμμική περίπτωση, ο όρος αυτός δεν αποσβένεται προς το μηδέν, παρά την παρουσία απόσβεσης, καθώς η μη γραμμικότητα του συστήματος επιτρέπει τη διατήρησή

του στη μόνιμη κατάσταση. Συνεπώς, η περιοδική απόκριση του συστήματος αντιστοιχεί σε υπεραρμονική τάξης *3*.



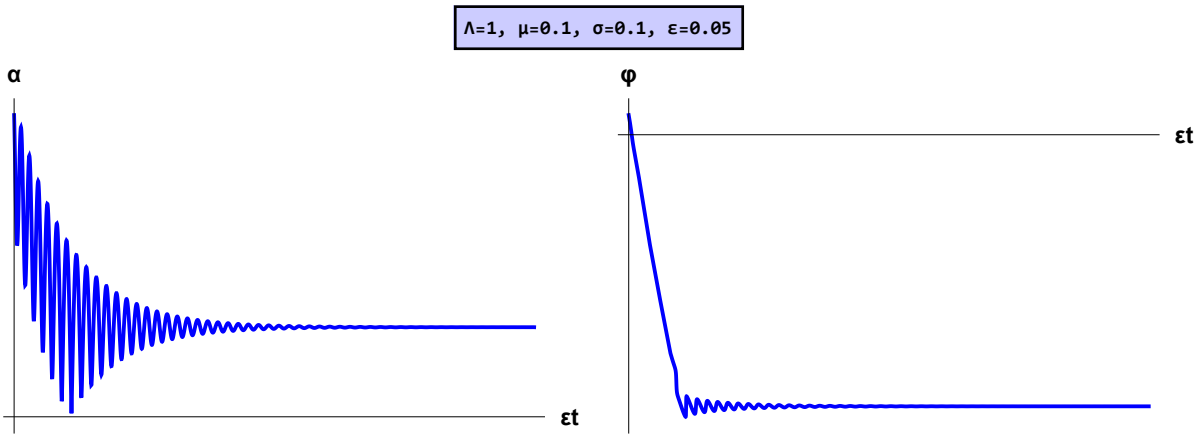
Σχήμα 4.3.8: Σύνθεση της υπεραρμονικής απόκρισης της εξίσωσης Duffing

Στο *Σχήμα 4.3.8* απεικονίζονται: (α) ο όρος της ελεύθερης ταλάντωσης υψηλής συχνότητας, (β) η εξαναγκασμένη συνιστώσα που οφείλεται στη διεγείρουσα δύναμη και ταλαντώνεται με συχνότητα ω, και (γ) η σύνθεση των δύο συνιστωσών, η οποία αποτελεί τη συνολική υπεραρμονική περιοδική απόκριση του συστήματος.

Παρατηρείται ότι, παρότι η διέγερση έχει συχνότητα μικρότερη από τη φυσική, η μη γραμμικότητα δημιουργεί την τρίτη αρμονική 3ω, η οποία συντονίζεται με τη φυσική συχνότητα του συστήματος και οδηγεί σε έντονη υπεραρμονική απόκριση.

4.3.2.1 Εξισώσεις πλάτους-φάσης

Από τα διαγράμματα των συναρτήσεων πλάτους α και φάσης φ ως προς τον αργό χρόνο τ του *Σχήματος 4.3.9*, τα οποία προέκυψαν από αριθμητική επίλυση των εξισώσεων (*4.3.50*) και (*4.3.51*), παρατηρούμε ότι, μετά από ένα αρχικό μεταβατικό στάδιο, οι συναρτήσεις τείνουν σε σταθερές τιμές. Αυτό υποδηλώνει ότι το σύστημα οδηγείται σε μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 4.3.9: Διαγράμματα πλάτους και φάσης ως προς τον χρόνο τ

Αφού στην μόνιμη περιοδική κατάσταση τα α και φ είναι σταθερά, θέτουμε

$$\alpha' = 0 \text{ και } \varphi' = 0$$

οπότε οι (*4.3.50*) και (*4.3.51*) γίνονται

$$-\mu\alpha = \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\sin\varphi \tag{4.3.54}$$

$$\left(\sigma - \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right)\alpha - \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha^3 = \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\cos\varphi \tag{4.3.55}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις (*4.3.54*), (*4.3.55*), τις προσθέτουμε, και επειδή $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, προκύπτει

$$\mu^2\alpha^2 + \left(\sigma - \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0} - \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha^2\right)^2\alpha^2 = \frac{\beta^2\Lambda^6}{\omega_0^2} \tag{4.3.56}$$

Η εξίσωση (*4.3.56*) είναι κυβική ως προς α^2, και όπως πριν, συνήθως αναφέρεται ως **εξίσωση συχνότητας-απόκρισης.** Όταν είναι γνωστό το πλάτος α, υπολογίζουμε τη φάση φ από την (*4.3.54*) ή (*4.3.55*).

Από τη σχέση (*4.3.56*) παρατηρούμε πως όταν το πλάτος α είναι μικρό, αυτό είναι ανάλογο του Λ^3. Επομένως, καθώς το πλάτος Γ της διεγείρουσας δύναμης τείνει στο μηδέν, η απόκριση προσεγγίζει εκείνη του γραμμικού συστήματος.

Λύνοντας την (*4.3.56*) ως προς την παράμετρο αποσυντονισμού σ, προκύπτει

$$\sigma = \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0} + \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha^2 \pm \sqrt{\frac{\beta^2\Lambda^6}{\omega_0^2\alpha^2} - \mu^2} \qquad (4.3.57)$$

Για να υπάρχουν πραγματικές λύσεις, θα πρέπει το υπόρριζο μέγεθος να είναι μη αρνητικό. Επομένως, πρέπει να ισχύει

$$\frac{\beta^2\Lambda^6}{\omega_0^2\alpha^2} - \mu^2 \geq 0$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\alpha \leq \frac{\beta\Lambda^3}{\mu\omega_0}$$

Συνεπώς, το μέγιστο πλάτος της απόκρισης δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_{max} = \frac{\beta\Lambda^3}{\mu\omega_0}$$

Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στο σημείο όπου το υπόρριζο μηδενίζεται και οι δύο κλάδοι της καμπύλης απόκρισης συχνότητας συμπίπτουν. Παρατηρούμε πως σε αντίθεση με την περίπτωση του κύριου συντονισμού, το μέγιστο πλάτος εξαρτάται από τον συντελεστή μη γραμμικότητας του συστήματος. Η αντίστοιχη τιμή της παραμέτρου αποσυντονισμού σ στο σημείο αυτό δίνεται από

$$\sigma_p = \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0}\left(1 + \frac{\beta^2\Lambda^4}{8\mu^2\omega_0^2}\right)$$

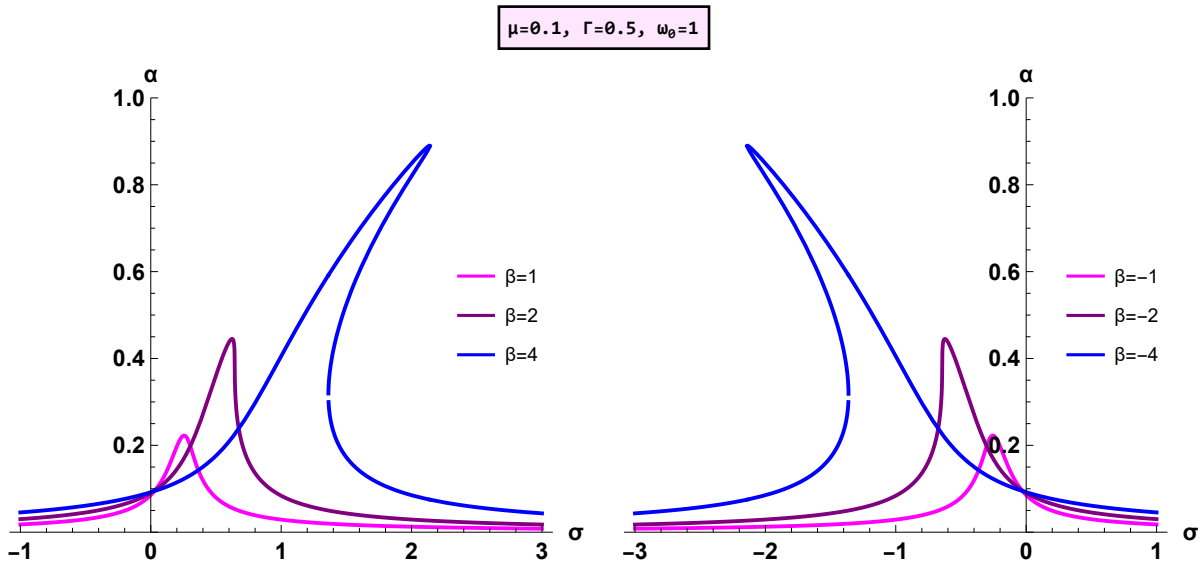
- ***Καμπύλες του πλάτους της υπεραρμονικής απόκρισης***

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι καμπύλες του πλάτους της υπεραρμονικής ταλάντωσης ως συνάρτηση του αποσυντονισμού, για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Οι καμπύλες αυτές αναδεικνύουν την επίδραση της μη γραμμικότητας, της απόσβεσης και του πλάτους διέγερσης στη μορφή της απόκρισης και στη δημιουργία περιοχών αυξημένης μη γραμμικής συμπεριφοράς.

Στην παρούσα ανάλυση εξετάζονται μόνο οι θετικές τιμές του πλάτους α, καθώς το α ορίζεται ως μέτρο της απόκρισης του συστήματος. Οι αρνητικές τιμές δεν αντιστοιχούν σε διακριτές φυσικές καταστάσεις, αλλά μπορούν να ανακτηθούν μέσω μετατόπισης της φάσης κατά π. Συνεπώς, η πληροφορία που θα παρείχαν οι αρνητικές τιμές του α περιέχεται ήδη στη μεταβλητή της φάσης και δεν εξετάζεται ξεχωριστά.

- ***Μεταβολή του β***

Στο *Σχήμα 4.3.10* παρουσιάζονται οι καμπύλες πλάτους της υπεραρμονικής απόκρισης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου μη γραμμικότητας β. Παρατηρείται ότι η αύξηση της β ενισχύει τη μη γραμμικότητα του συστήματος, οδηγώντας σε μεγαλύτερη κάμψη των καμπυλών απόκρισης και σε εντονότερη εμφάνιση περιοχών πολλαπλών λύσεων.

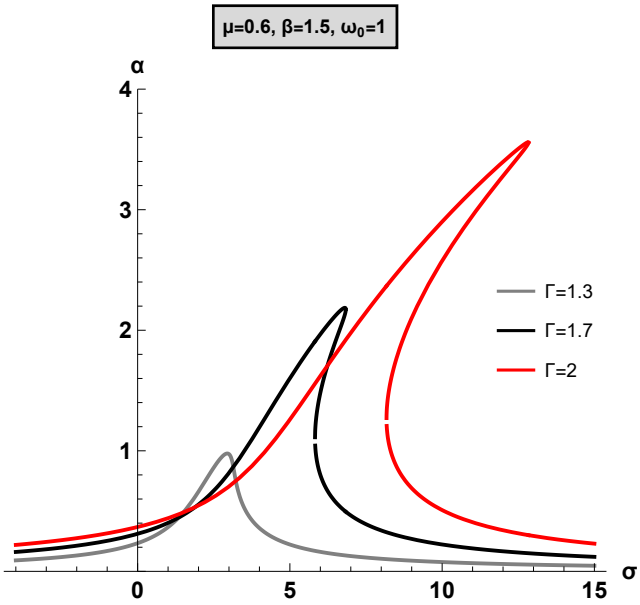


Σχήμα 4.3.10: Καμπύλες συχνότητας-πλάτους υπεραρμονικής απόκρισης για διάφορες τιμές της β

Παρατηρούμε επίσης, ότι η εξίσωση απόκρισης παρουσιάζει συμμετρική συμπεριφορά ως προς την αλλαγή του προσήμου της παραμέτρου β. Συγκεκριμένα, η αντικατάσταση $\beta \rightarrow -\beta$ οδηγεί σε κατοπτρική μεταβολή των καμπυλών απόκρισης ως προς το $\sigma = 0$, γεγονός που αντανακλά την εσωτερική συμμετρία της μαθηματικής μορφής της εξίσωσης (4.3.57).

- ***Μεταβολή του Γ***

Στο *Σχήμα* 4.3.11 παρουσιάζονται οι καμπύλες πλάτους της υπεραρμονικής απόκρισης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου *Γ*, δηλαδή στο πλάτος της διεγείρουσας δύναμης. Η μεταβολή του *Γ* επηρεάζει σημαντικά τη μορφή της απόκρισης, οδηγώντας σε ενίσχυση της μη γραμμικότητας και σε διεύρυνση των περιοχών πολλαπλών λύσεων.

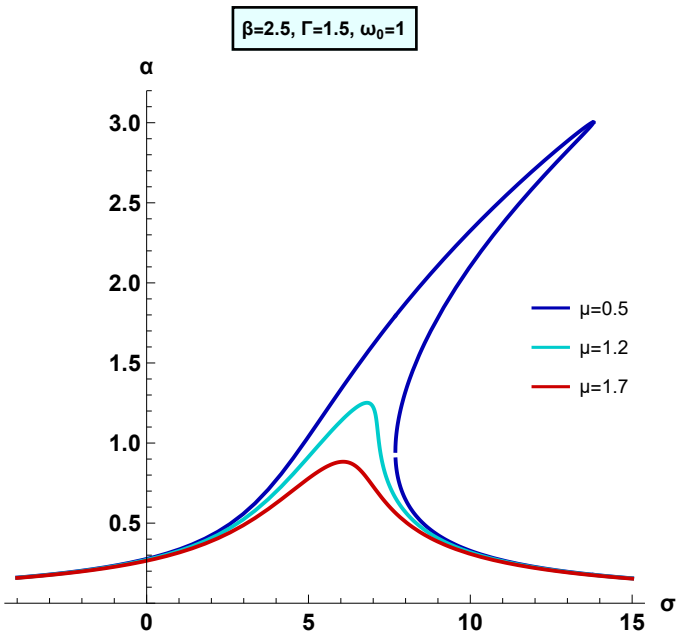


Σχήμα 4.3.11: Καμπύλες συχνότητας-πλάτους υπεραρμονικής απόκρισης για διάφορες τιμές του Γ

Μεταβολή του μ

Στο *Σχήμα 4.3.12* παρουσιάζονται οι καμπύλες πλάτους της υπεραρμονικής απόκρισης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου απόσβεσης *μ*.

Παρατηρούμε ότι η αύξηση της απόσβεσης οδηγεί σε μείωση του πλάτους της απόκρισης και σε ηπιότερη κάμψη των καμπυλών.



Σχήμα 4.3.12: Καμπύλες συχνότητας-πλάτους υπεραρμονικής απόκρισης για διάφορες τιμές του μ

Από τα προηγούμενα διαγράμματα παρατηρούμε ότι, για ορισμένες περιοχές των παραμέτρων, η εξίσωση απόκρισης παρουσιάζει πολλαπλές δυνατές μόνιμες λύσεις για την ίδια τιμή του αποσυντονισμού. Η συνύπαρξη πολλαπλών κλάδων απόκρισης αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της μη γραμμικής δυναμικής του συστήματος και συνδέεται άμεσα με την εμφάνιση φαινομένων αστάθειας, υστέρησης και απότομων μεταβάσεων (φαινόμενα άλματος), όπως είδαμε και στην περίπτωση του κύριου συντονισμού στην *Ενότητα 2.2.6*. Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια εξετάζεται η ευστάθεια των λύσεων και η δυναμική του φαινομένου άλματος στην υπεραρμονική απόκριση.

4.3.2.2 Ανάλυση ευστάθειας υπεραρμονικών αποκρίσεων

Σε αντιστοιχία με τη μη αποσβεννύμενη περίπτωση, η ύπαρξη υπεραρμονικών λύσεων δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την παρατηρούμενη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Η εμφάνιση ή μη των αντίστοιχων αποκρίσεων καθορίζεται από την ευστάθεια των λύσεων, καθώς και από τις

αρχικές συνθήκες. Κατά συνέπεια, η μελέτη της ευστάθειας των μόνιμων υπεραρμονικών λύσεων είναι απαραίτητη, αφού προσδιορίζει ποιες από αυτές είναι δυναμικά εφικτές και ποιες δεν εμφανίζονται ποτέ.

Στην παρούσα ενότητα, η ανάλυση ευστάθειας θα πραγματοποιηθεί με βάση τις εξισώσεις πλάτους –φάσης (4.3.50) και (4.3.51) που προέκυψαν με την μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων.

Διαιρώντας την (4.3.51) με το $\alpha \neq 0$, έχουμε

$$\alpha' = -\mu\alpha - \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0}\sin\varphi = F(\alpha,\varphi) \tag{4.3.58}$$

$$\varphi' = \left(\sigma - \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right) - \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha^2 - \frac{\beta\Lambda^3}{\omega_0\alpha}\cos\varphi = G(\alpha,\varphi) \tag{4.3.59}$$

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος καθορίζονται από τις εξισώσεις

$$F(\alpha,\varphi) = G(\alpha,\varphi) = 0 \tag{4.3.60}$$

και αντιστοιχούν σε καταστάσεις όπου το πλάτος και η φάση παραμένουν σταθερά.

Επομένως, τα σημεία αυτά περιγράφουν μόνιμες υπεραρμονικές τάξης $\frac{1}{3}$ της εξίσωσης (4.3.1).

Αρχικά λύνουμε τις (4.3.58), (4.3.59) ως προς $\sin\varphi, \cos\varphi$ και παίρνουμε

$$\sin\varphi = -\frac{\omega_0\mu}{\beta\Lambda^3}\alpha \quad \text{και} \quad \cos\varphi = \left(\frac{\omega_0\sigma}{\beta\Lambda^3} - \frac{3}{\Lambda}\right)\alpha - \frac{3}{8\Lambda^3}\alpha^3$$

Θα γραμμικοποιήσουμε τώρα το μη γραμμικό σύστημα (4.3.58), (4.3.59), θεωρώντας πως τα σημεία ισορροπίας είναι α_* και φ_*. Έτσι θέτουμε

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_*$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_*$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\tilde{\alpha}} = F_1(\alpha_*,\varphi_*)(\alpha-\alpha_*) + F_2(\alpha_*,\varphi_*)(\varphi-\varphi_*)$$

$$\dot{\tilde{\varphi}} = G_1(\alpha_*,\varphi_*)(\alpha-\alpha_*) + G_2(\alpha_*,\varphi_*)(\varphi-\varphi_*)$$

όπου

$$F_1(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\alpha F(\alpha_*,\varphi_*), F_2(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\varphi F(\alpha_*,\varphi_*), G_1(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\alpha G(\alpha_*,\varphi_*), G_2(\alpha_*,\varphi_*) = \partial_\varphi G(\alpha_*,\varphi_*)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(\alpha_*,\varphi_*) = \begin{bmatrix} F_1(\alpha_*,\varphi_*) & F_2(\alpha_*,\varphi_*) \\ G_1(\alpha_*,\varphi_*) & G_2(\alpha_*,\varphi_*) \end{bmatrix}$$

με

$$F_1(\alpha_*,\varphi_*) = -\mu$$

$$F_2(\alpha_*,\varphi_*) = \left(-\sigma + \frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0}\right)\alpha_* + \frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha_*^3$$

$$G_1(\alpha_*,\varphi_*)=-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha_*+\frac{\sigma}{\alpha_*}-\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0\alpha_*}$$

$$G_2(\alpha_*,\varphi_*)=-\mu$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω ο Ιακωβιανός πίνακας γίνεται

$$\boldsymbol{J}(\alpha_*,\varphi_*)=\begin{bmatrix} -\mu & (-\sigma+\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0})\alpha_*+\frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha_*^3 \\ -\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha_*+\frac{\sigma}{\alpha_*}-\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0\alpha_*} & -\mu \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα δίνονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση του γραμμικοποιημένου συστήματος, στη μορφή

$$\lambda^2-p\lambda+q=0$$

όπου το ίχνος είναι

$$p=-2\mu<0$$

και η ορίζουσα

$$q=\mu^2-J_{12}J_{21}$$

όπου

$$J_{12}=(-\sigma+\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0})\alpha_*+\frac{3\beta}{8\omega_0}\alpha_*^3 \text{ και } J_{21}=-\frac{9\beta}{8\omega_0}\alpha_*+\frac{\sigma}{\alpha_*}-\frac{3\beta\Lambda^2}{\omega_0\alpha_*}$$

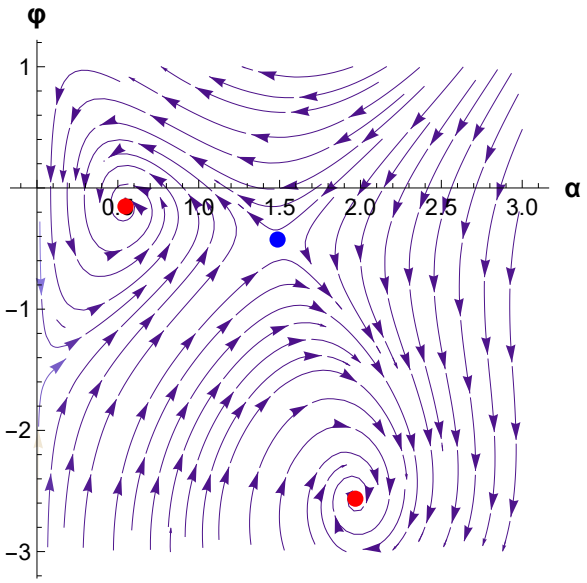
Αφού προσδιορίστηκαν το ίχνος και η ορίζουσα, εισάγουμε τώρα τη διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\Delta=p^2-4q$$

- Αν $q<0$ δηλαδή $J_{12}J_{21}>0$ και $J_{12}J_{21}>\mu^2$ τότε $\Delta>0$ και οι ιδιοτιμές είναι ετερόσημες πραγματικές, άρα το σημείο ισορροπίας είναι **ασταθές σαγματικό**.
- Αν $q>0$ η φύση των ευσταθών σημείων καθορίζεται από το πρόσημο του γινομένου $J_{12}J_{21}$ Από τον υπολογισμό των ιδιοτιμών στα σημεία ισορροπίας προκύπτει ότι στους ευσταθείς κλάδους ισχύει $J_{12}J_{21}<0$. Τότε $q>\mu^2$, άρα $4\mu^2-4q<0\Rightarrow\Delta<0$, και επειδή $p<0$, έπεται πως οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος, και το σημείο ισορροπίας είναι **ευσταθής σπείρα**.

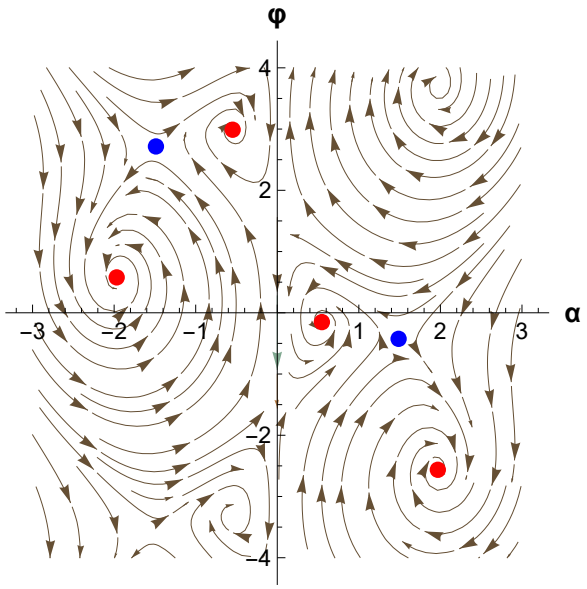
Στο *Σχήμα 4.3.13* παρουσιάζεται το πορτραίτο φάσης του αργού συστήματος περιορισμένο στις θετικές τιμές του πλάτους α, οι οποίες αντιστοιχούν στη φυσική ερμηνεία του πλάτους της ταλάντωσης. Παρατηρούνται οι ευσταθείς σπείρες, προς τις οποίες συγκλίνουν οι τροχιές του συστήματος, καθώς και το σαγματικό σημείο που αντιστοιχεί σε ασταθή λύση. Τα αποτελέσματα

αυτά συμφωνούν με την προηγούμενη ανάλυση του Ιακωβιανού πίνακα και επιβεβαιώνουν τη συνύπαρξη ευσταθών και ασταθών κλάδων στις καμπύλες απόκρισης.



Σχήμα 4.3.13: Πορτραίτο φάσης υπεραρμονικών αποκρίσεων για $\alpha > 0$

Στο *Σχήμα* 4.3.14 παρουσιάζεται το αντίστοιχο πορτραίτο φάσης όταν επιτρέπονται και αρνητικές τιμές του α. Παρατηρείται ότι οι επιπλέον λύσεις που εμφανίζονται δεν αντιστοιχούν σε νέες δυναμικές καταστάσεις, αλλά προκύπτουν από την ισοδυναμία $(-\alpha, \varphi) \equiv (\alpha, \varphi - \pi)$, δηλαδή από μετατόπιση της φάσης κατά π. Η συμμετρία αυτή αντανακλά την περιοδική φύση της αναπαράστασης πλάτους–φάσης και οδηγεί σε επαναλαμβανόμενα σημεία ισορροπίας στο πορτραίτο φάσης.



Σχήμα 4.3.14: Πορτραίτο φάσης υπεραρμονικών αποκρίσεων για $\alpha > 0$ *και* $\alpha < 0$

4.3.2.3 Σημεία αναδίπλωσης και φαινόμενο άλματος

Από τις καμπύλες πλάτους–αποσυντονισμού που παρουσιάστηκαν προηγουμένως παρατηρείται ότι, για ορισμένες τιμές των παραμέτρων, οι καμπύλες αποκτούν χαρακτηριστική αναδίπλωση και εμφανίζουν περιοχές πολλαπλών λύσεων. Τα σημεία στα οποία η καμπύλη παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη ονομάζονται **σημεία αναδίπλωσης** (**fold points**).

Μαθηματικά, τα σημεία αναδίπλωσης προκύπτουν από την εξίσωση πλάτους μέσω έμμεσης παραγώγισης ως προς α^2, επιβάλλοντας τη συνθήκη

$$\frac{d\sigma}{d\left(\alpha^2\right)}=0$$

Η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με τον μηδενισμό της ορίζουσας του Ιακωβιανού πίνακα.

Η ύπαρξη των σημείων αναδίπλωσης έχει καθοριστική επίδραση στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, καθώς συνοδεύεται από απώλεια ευστάθειας ενός κλάδου της λύσης και από τη μετάβαση σε έναν διαφορετικό ευσταθή κλάδο. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως φαινόμενο άλματος και αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα της μη γραμμικής απόκρισης, όπως έχει παρατηρηθεί και στην περίπτωση του κύριου συντονισμού.

Η συμπεριφορά αυτή αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στις καμπύλες πλάτους–διέγερσης του *Σχήματος 4.3.15*, όπου για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων εμφανίζονται περιοχές πολλαπλών δυνατών λύσεων. Καθώς το πλάτος της διέγερσης μεταβάλλεται αργά και η συχνότητα αποσυντονισμού παραμένει σταθερή, η απόκριση του συστήματος δεν ακολουθεί μονοσήμαντη καμπύλη ισορροπίας.

Αναλυτικότερα, έστω ότι για μια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου *Γ*, το πλάτος α αντιστοιχεί στο σημείο *A*. Καθώς το *Γ* αυξάνεται, η απόκριση εξελίσσεται ομαλά κατά μήκος ενός ευσταθούς κλάδου μέχρι την προσέγγιση του κρίσιμου σημείου *B*, όπου ο κλάδος αυτός χάνει την ευστάθειά του. Με περαιτέρω αύξηση του *Γ*, η λύση μεταπηδά απότομα σε διαφορετικό ευσταθή κλάδο στο σημείο *C*. Στη συνέχεια, για μεγαλύτερες τιμές του *Γ*, η απόκριση εξελίσσεται κατά μήκος του νέου ευσταθούς κλάδου, προσεγγίζοντας το σημείο *E*.

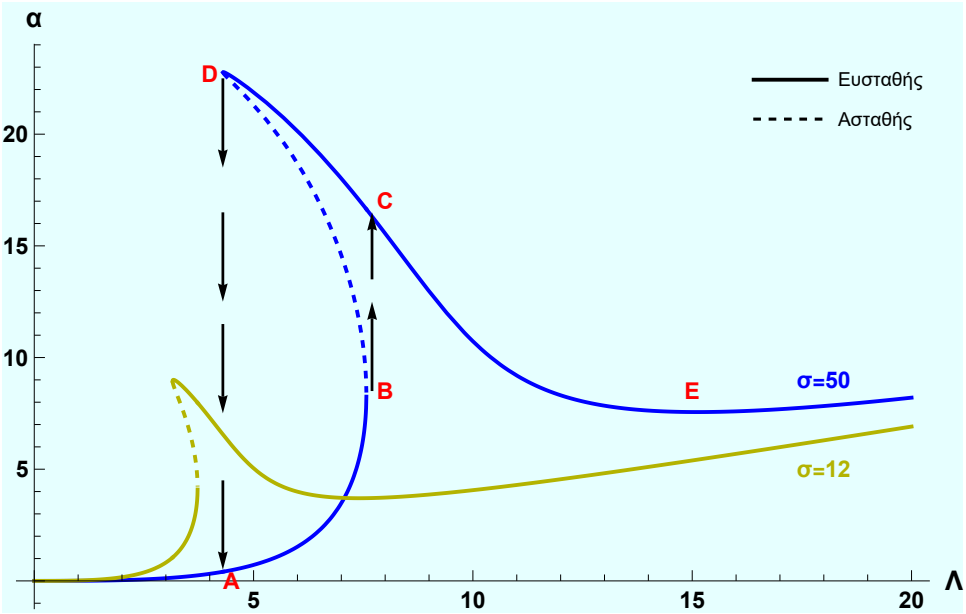
Αντίστροφα, κατά τη μείωση του Γ, η λύση ακολουθεί διαφορετική διαδρομή: από το σημείο *E* εξελίσσεται ομαλά μέχρι το σημείο *C* και στη συνέχεια φτάνει στο κρίσιμο σημείο *D*, όπου πραγματοποιείται απότομη μετάβαση στον αρχικό ευσταθή κλάδο στο σημείο *A*. Έπειτα, η απόκριση συνεχίζει ομαλά κατά μήκος αυτού του κλάδου με περαιτέρω μείωση της παραμέτρου.

Η διαφοροποίηση της διαδρομής της λύσης κατά την αύξηση και τη μείωση του *Γ* αναδεικνύει την ύπαρξη **υστέρησης** στην απόκριση του συστήματος. Η υστέρηση αυτή αποτελεί άμεση συνέπεια

της πολυτιμίας των λύσεων και της ύπαρξης ασταθών ενδιάμεσων κλάδων, οι οποίοι δεν είναι προσπελάσιμοι μέσω αργής μεταβολής της παραμέτρου.

Στο *Σχήμα 4.3.15* παρουσιάζονται οι καμπύλες απόκρισης για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου σ, συγκεκριμένα $\sigma=12$ και $\sigma=50$. Παρατηρούμε ότι η μεταβολή της παραμέτρου αυτής επηρεάζει σημαντικά τη μορφή της καμπύλης και τη θέση των σημείων αναδίπλωσης, μεταβάλλοντας αντίστοιχα την έκταση της περιοχής πολλαπλών λύσεων.

Στην περίπτωση μικρότερης τιμής της παραμέτρου σ, η μη γραμμική συμπεριφορά είναι πιο περιορισμένη και η περιοχή αστάθειας εμφανίζεται σε διαφορετικό εύρος της παραμέτρου διέγερσης. Αντίθετα, για μεγαλύτερες τιμές του σ, η καμπύλη μετατοπίζεται και η δομή της αναδίπλωσης διαφοροποιείται, γεγονός που επηρεάζει άμεσα τη θέση εμφάνισης των φαινομένων άλματος. Τα ευσταθή και ασταθή τμήματα της απόκρισης σημειώνονται αντίστοιχα με συνεχείς και διακεκομμένες γραμμές, ενώ τα βέλη υποδεικνύουν τις δυνατές μεταβάσεις της λύσης κατά την αύξηση ή μείωση της παραμέτρου διέγερσης, αναδεικνύοντας το φαινόμενο υστέρησης.



Σχήμα 4.3.15: Καμπύλες πλάτους διέγερσης για διαφορετικά σ

Σύγκριση με τον κύριο συντονισμό

Σε σύγκριση με τον κύριο συντονισμό (*Ενότητα 2.2.6*), η υπεραρμονική απόκριση παρουσιάζει σημαντικές διαφοροποιήσεις τόσο στη μορφή των καμπυλών όσο και στον μηχανισμό εμφάνισης του φαινομένου άλματος. Στην περίπτωση του κύριου συντονισμού, η διέγερση εμφανίζεται γραμμικά στις εξισώσεις της μόνιμης κατάστασης, ενώ στην υπεραρμονική περίπτωση η επιρροή

της εισέρχεται με υψηλότερη δύναμη, γεγονός που ενισχύει τη μη γραμμική συμπεριφορά του συστήματος.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι καμπύλες απόκρισης στην υπεραρμονική περίπτωση να παρουσιάζουν εντονότερη κάμψη και μεγαλύτερες περιοχές πολλαπλότητας λύσεων σε σχέση με τον κύριο συντονισμό. Επιπλέον, το φαινόμενο άλματος εμφανίζεται πιο έντονα, καθώς η συνύπαρξη ευσταθών και ασταθών κλάδων είναι πιο εκτεταμένη.

Παράλληλα, παρατηρείται ότι η απόκριση στην υπεραρμονική περίπτωση είναι πιο ευαίσθητη σε μεταβολές του πλάτους διέγερσης, οδηγώντας σε πιο απότομες μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων ισορροπίας. Αντίθετα, στον κύριο συντονισμό η μεταβολή της απόκρισης είναι πιο ομαλή και μονοτονική σε ευρύτερες περιοχές παραμέτρων.

Συνολικά, η σύγκριση αναδεικνύει ότι η υπεραρμονική απόκριση αποτελεί μια πιο έντονα μη γραμμική διαδικασία, στην οποία τα φαινόμενα πολλαπλότητας και αστάθειας παίζουν καθοριστικό ρόλο στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

5. ΜΕΘΟΔΟΙ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ VAN DER POL

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήθηκαν περιοδικά φαινόμενα σε μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, με χαρακτηριστικότερο παράδειγμα τον ταλαντωτή *Duffing*, όπου αναδείχθηκε η επίδραση της μη γραμμικότητας στην απόκριση του συστήματος υπό περιοδική διέγερση. Στο πλαίσιο αυτής της ανάλυσης παρουσιάστηκαν οι βασικές μέθοδοι διαταραχών, οι οποίες αποδείχθηκαν ιδιαίτερα αποτελεσματικές στην προσέγγιση λύσεων για ασθενώς μη γραμμικές εξισώσεις.

Οι ίδιες τεχνικές δεν περιορίζονται αποκλειστικά στην περίπτωση εξαναγκασμένων ταλαντώσεων, αλλά εφαρμόζονται και σε ένα ευρύτερο φάσμα δυναμικών συστημάτων με διαφορετικό φυσικό μηχανισμό. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση *Rayleigh*, η οποία εισήχθη στο *3ο Κεφάλαιο* ως ένα πρότυπο σύστημα αυτοδιεγειρόμενων ταλαντώσεων και εμφάνισης οριακού κύκλου. Εκεί αναδείχθηκε ότι η μη γραμμική απόσβεση οδηγεί σε σταθερές περιοδικές λύσεις, των οποίων η περιγραφή μπορεί να προσεγγιστεί αποτελεσματικά μέσω μεθόδων διαταραχών.

Στο παρόν κεφάλαιο η ανάλυση επεκτείνεται στην εξίσωση *van der Pol*, η οποία αποτελεί το κατεξοχήν κλασικό παράδειγμα μη γραμμικού αυτοσυντηρούμενου ταλαντωτή. Στόχος είναι η διερεύνηση των φαινομένων αυτοδιέγερσης και δημιουργίας οριακού κύκλου με τη χρήση των διαταρακτικών μεθόδων που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια, καθώς και η ανάδειξη της μακροχρόνιας συμπεριφοράς του συστήματος, υπό την επίδραση εξωτερικής περιοδικής διέγερσης.

5.2 Αυτοδιεγειρόμενοι ταλαντωτές - Οριακός κύκλος

Σε πολλά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα εμφανίζονται περιοδικές κινήσεις οι οποίες διατηρούνται χωρίς την παρουσία εξωτερικής περιοδικής διέγερσης. Τα συστήματα αυτά χαρακτηρίζονται ως **αυτοδιεγειρόμενοι** ή **αυτοσυντηρούμενοι** ταλαντωτές. Ο όρος αυτοδιεγειρόμενος αναφέρεται στην ικανότητα του συστήματος να αναπτύσσει αυθόρμητα ταλαντώσεις μέσω εσωτερικών μηχανισμών παροχής ενέργειας, ενώ ο όρος αυτοσυντηρούμενος υποδηλώνει ότι η ταλάντωση διατηρείται χωρίς συνεχή εξωτερική διέγερση. Η μόνιμη περιοδική συμπεριφορά καθορίζεται από τη δομή και τις παραμέτρους του ίδιου του συστήματος και όχι από τις αρχικές συνθήκες, αρκεί αυτές να ανήκουν σε κατάλληλη περιοχή του χώρου φάσεων.

Η γεωμετρική περιγραφή τέτοιων συστημάτων πραγματοποιείται στο επίπεδο φάσεων, όπου η εξέλιξη της κίνησης παριστάνεται μέσω τροχιών. Σε συντηρητικά συστήματα οι περιοδικές κινήσεις εμφανίζονται συνήθως ως οικογένειες κλειστών τροχιών που περιβάλλουν ένα κέντρο. Αντίθετα, στα μη γραμμικά αποσβεννύμενα συστήματα μπορεί να εμφανιστεί μία μοναδική κλειστή τροχιά προς την οποία συγκλίνουν οι γειτονικές κινήσεις. Η τροχιά αυτή είναι **απομονωμένη**, με την έννοια ότι στη γειτονιά της δεν υπάρχουν άλλες κλειστές τροχιές, και ονομάζεται **οριακός κύκλος** (**limit cycle**).

Ο οριακός κύκλος αντιστοιχεί σε μια περιοδική λύση που περιγράφει τη μακροχρόνια δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Οι γειτονικές τροχιές δεν παραμένουν κλειστές, αλλά είτε συγκλίνουν προς τον οριακό κύκλο, είτε απομακρύνονται από αυτόν σχηματίζοντας σπειροειδείς καμπύλες στο επίπεδο φάσεων. Αν όλες οι γειτονικές τροχιές συγκλίνουν προς τον κύκλο όταν $t \to +\infty$, τότε ο οριακός κύκλος χαρακτηρίζεται ως **ευσταθής** ή **ελκτικός**. Αντίθετα, όταν οι γειτονικές τροχιές απομακρύνονται από αυτόν, χαρακτηρίζεται ως **ασταθής**. Σε πιο σπάνιες περιπτώσεις μπορεί να εμφανιστεί **ημι-ευσταθής** οριακός κύκλος, όπου οι τροχιές από τη μία πλευρά συγκλίνουν προς τον κύκλο, ενώ από την άλλη απομακρύνονται από αυτόν.

Η εμφάνιση οριακών κύκλων αποτελεί καθαρά μη γραμμικό φαινόμενο. Σε γραμμικά συστήματα, όταν υπάρχουν περιοδικές λύσεις, αυτές δεν είναι απομονωμένες αλλά εμφανίζονται σε οικογένειες κλειστών τροχιών, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να εξαρτάται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες. Αντίθετα, στους αυτοσυντηρούμενους μη γραμμικούς ταλαντωτές το σύστημα «επιλέγει» τελικά μια συγκεκριμένη περιοδική κατάσταση σταθερού πλάτους και συχνότητας.

Φαινόμενα αυτού του τύπου εμφανίζονται σε πλήθος φυσικών και τεχνολογικών εφαρμογών, όπως σε ηλεκτρονικούς ταλαντωτές, βιολογικά συστήματα, χημικές αντιδράσεις και μηχανικές ταλαντώσεις. Ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά πρότυπα που περιγράφουν τέτοιες συμπεριφορές είναι η εξίσωση *van der Pol*, η οποία θα μελετηθεί στη συνέχεια

5.3 Η αυτόνομη εξίσωση van der Pol

Η εξίσωση **van der Pol** εισήχθη από τον Ολλανδό φυσικό και ηλεκτρολόγο μηχανικό *Balthasar van der Pol* (*1889-1959*) κατά τη δεκαετία του *1920*, στο πλαίσιο της μελέτης ηλεκτρικών κυκλωμάτων με λυχνίες κενού. Κατά το πρώτο μισό του *20ού* αιώνα, ο *van der Pol* υπήρξε πρωτοπόρος στους τομείς του ραδιοφώνου και των τηλεπικοινωνιών, συμβάλλοντας καθοριστικά στην ανάπτυξη της θεωρίας των ηλεκτρικών ταλαντώσεων. Μελετώντας τη δυναμική τέτοιων κυκλωμάτων, διαπίστωσε την εμφάνιση σταθερών αυτοσυντηρούμενων ταλαντώσεων, οι οποίες

σήμερα ερμηνεύονται μέσω της έννοιας του οριακού κύκλου. Σε συνεργασία με τον *Appleton*, το *1922* διατύπωσε μια πρώιμη μορφή της εξίσωσης που περιγράφει τη συμπεριφορά ταλαντωτών με λυχνίες κενού, η οποία αποτελεί την ιστορική βάση της σημερινής αυτόνομης εξίσωσης *van der Pol*:

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(x^2-1\right)\dot{x}+x=0 \qquad (5.3.1)$$

Η εξίσωση (5.3.1) έχει τη μορφή του απλού αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{x}+x=0$, με την προσθήκη του όρου απόσβεσης $\varepsilon\left(x^2-1\right)\dot{x}$, που είναι μη γραμμικός ως προς την ταχύτητα. Η ε είναι μια παράμετρος που εκφράζει την ένταση της μη γραμμικής απόσβεσης και καθορίζει την επίδρασή της στη δυναμική εξέλιξη του ταλαντωτή.

Ποιοτική ανάλυση

Η εξίσωση (5.3.1) γράφεται ως σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\varepsilon\left(x^2-1\right)y-x \end{cases}$$

με μοναδικό σημείο ισορροπίας το $(0,0)$.

Ο Ιακωβιανός πίνακας του γραμμικοποιημένου συστήματος στο $(0,0)$ είναι

$$\boldsymbol{J}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

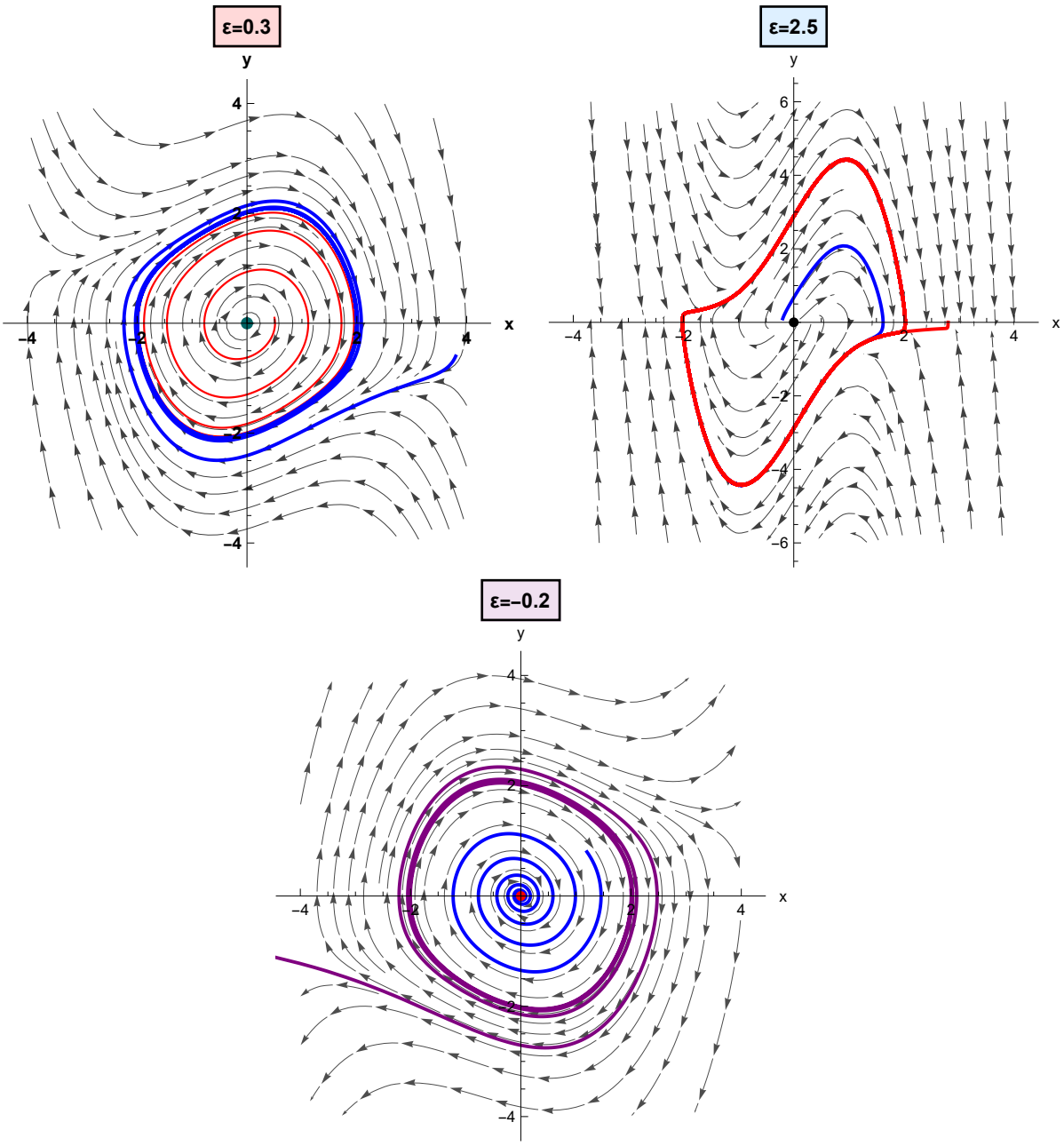
Οι ιδιοτιμές του προσδιορίζονται από την χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=|J(0,0)-\lambda I|=0$, και είναι

$$\lambda_{1,2}=\frac{\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}$$

Ανάλογα με την τιμή του ε, έχουμε τις εξής περιπτώσεις για την τοπική ευστάθεια του $(0,0)$:

- Αν $\varepsilon\geq 2$ ► $\lambda_{1,2}$ θετικές πραγματικές : ασταθής κόμβος
- Αν $\varepsilon\leq -2$ ► $\lambda_{1,2}$ αρνητικές πραγματικές : ευσταθής κόμβος
- Αν $0<\varepsilon<2$ ► $\lambda_{1,2}$ μιγαδικές με θετικό πραγματικό μέρος: ασταθής εστία
- Αν $-2<\varepsilon<0$ ► $\lambda_{1,2}$ μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος: ευσταθής εστία

Στο Σχήμα 5.3.1 βλέπουμε κάποιες τροχιές των λύσεων του συστήματος για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ε. Παρατηρούμε πως όταν $\varepsilon<0$, το σημείο ισορροπίας δρα ως ελκυστής των τροχιών, δηλαδή με την αύξηση του χρόνου οι τροχιές το πλησιάζουν, ενώ όταν $\varepsilon>0$ οι τροχιές απομακρύνονται από αυτό.



Σχήμα 5.3.1: Πορτραίτα φάσης της εξίσωσης van der Pol για διάφορες τιμές της ε.

Επιπλέον, το σύστημα παρουσιάζει συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων, υπό τον μετασχηματισμό:

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$

γεγονός που συνεπάγεται ότι το πορτραίτο φάσεων είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0,0)$. Επομένως, κάθε τροχιά του συστήματος έχει αντίστοιχη συμμετρική τροχιά ως προς την αρχή των αξόνων.

- ***Ενέργεια του συστήματος***

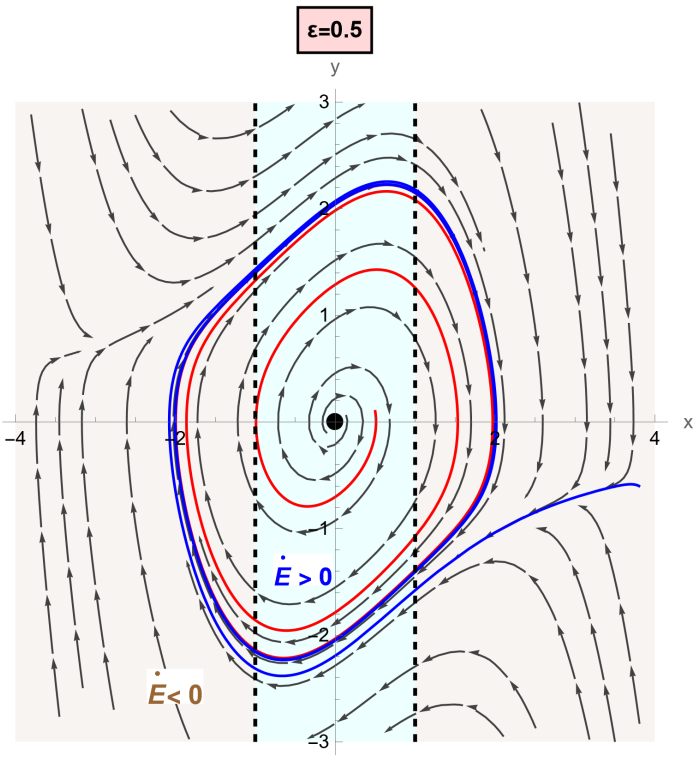
Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι $E=T+U=\frac{1}{2}\dot{x}^2+\int x\,dx$, όπου T η κινητική ενέργεια και U η δυναμική ενέργεια. Η μεταβολή της ενέργειας είναι τότε

$$\frac{dE}{dt}=\dot{x}\,\ddot{x}+\dot{x}\,x=-\varepsilon\left(x^2-1\right)y^2 \qquad (5.3.2)$$

και εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο ο μη γραμμικός όρος συμβάλλει στην παροχή ή απορρόφηση ενέργειας από το σύστημα.

Ειδικότερα, έστω $\mathcal{R}$ ένα συνεκτικό χωρίο του φασικού επιπέδου που περιέχει το σημείο ισορροπίας $(0,0)$. Θεωρούμε τις τροχιές του συστήματος που, μετά από κάποιο χρονικό σημείο t_0, παραμένουν εντός του $\mathcal{R}$ για κάθε $t>t_0$. Τότε, για $\varepsilon>0$, ισχύουν τα εξής ως προς τη συμπεριφορά της ενέργειας κατά μήκος των τροχιών:

- Αν $|x|<1$ τότε $\frac{dE}{dt}>0$, (για $y\neq 0$) και η ενέργεια αυξάνεται με τον χρόνο κατά μήκος των τροχιών, οδηγώντας τες σε απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας.
- Αν $|x|>1$ τότε $\frac{dE}{dt}<0$, (για $y\neq 0$) και η ενέργεια μειώνεται κατά μήκος των τροχιών, με αποτέλεσμα οι τροχιές αυτές να κινούνται προς το εσωτερικό της φασικής περιοχής.



Σχήμα 5.3.2: Ο ευσταθής οριακός κύκλος της εξίσωσης van der Pol.

Η ταυτόχρονη ύπαρξη περιοχών παροχής και απορρόφησης ενέργειας δημιουργεί μια δυναμική εξισορρόπηση της κίνησης, η οποία δεν επιτρέπει ούτε την απεριόριστη αύξηση ούτε την

εξασθένηση των τροχιών προς το σημείο ισορροπίας. Κατά συνέπεια, οι τροχιές τείνουν ασυμπτωτικά σε μια κλειστή περιοδική τροχιά, δηλαδή σε έναν οριακό κύκλο (*Σχήμα 5.3.2*), ο οποίος προκύπτει ως αποτέλεσμα αυτής της ενεργειακής ισορροπίας, και, όπως φαίνεται από την ανάλυση, είναι **ευσταθής**· η αυστηρή απόδειξη της ευστάθειάς του θα παρουσιαστεί παρακάτω.

Επίσης, η παραπάνω ενεργειακή ανάλυση είναι συνεπής με τα αποτελέσματα της ποιοτικής μελέτης της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $(0,0)$, καθώς εξηγεί τη συμπεριφορά των τροχιών σε μικρή απόσταση από αυτό.

Για $\varepsilon<0$, οι περιοχές παροχής και απορρόφησης ενέργειας αντιστρέφονται. Ως αποτέλεσμα, το σημείο ισορροπίας καθίσταται ευσταθές, ενώ ο οριακός κύκλος γίνεται **ασταθής**.

5.3.1 Το πλάτος του οριακού κύκλου

Για μικρές τιμές της παραμέτρου ε, η εξίσωση *van der Pol* μπορεί να θεωρηθεί ως μικρή διαταραχή του γραμμικού συστήματος $\ddot{x}+x=0$, του οποίου οι λύσεις είναι περιοδικές τροχιές της μορφής

$$x(t)=\alpha\cos(t+\varphi)$$

Στο πορτραίτο φάσης, οι λύσεις αυτές είναι οι κυκλικές τροχιές $x^2+y^2=\alpha^2$, με $x=\alpha\cos t$ και $y=\dot{x}=-\alpha\sin t$.

Θεωρώντας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\alpha>0$ και $\varphi=0$, παίρνουμε για την περιοδική λύση που αντιστοιχεί στον οριακό κύκλο την προσεγγιστική μορφή

$$x\approx\alpha\cos t,\ y\approx-\alpha\sin t \tag{5.3.3}$$

με περίοδο $T\approx 2\pi$.

Για τον προσδιορισμό του πλάτους του οριακού κύκλου εφαρμόζεται η μέθοδος της μεσοστάθμισης στην εξίσωση μεταβολής της ενέργειας (*5.3.2*), που κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, δίνεται από

$$E(T)-E(0)=\int_0^T dE=-\varepsilon\int_0^T\left[x^2(t)-1\right]y^2(t)\,dt \tag{5.3.4}$$

Πάνω στον οριακό κύκλο η μέση μεταβολή της ενέργειας, σε μια πλήρη περίοδο, πρέπει να είναι μηδενική, δηλαδή $E(T)=E(0)$, οπότε προκύπτει η συνθήκη μεσοστάθμισης

$$\int_0^T\left[x^2(t)-1\right]y^2(t)\,dt=0 \tag{5.3.5}$$

Αντικαθιστώντας τις προσεγγιστικές εκφράσεις (5.3.3) στην (5.3.5), προκύπτει προσεγγιστικά η ακτίνα του οριακού κύκλου, δηλαδή το πλάτος της περιοδικής κίνησης

$$\int_0^{2\pi} \left[\alpha^2\cos^2 t-1\right]\alpha^2\sin^2 t\,dt=0\Rightarrow\frac{\pi\alpha^2}{4}\left(\alpha^2-4\right)=0\Rightarrow\alpha=2 \qquad (5.3.6)$$

5.3.2 Η ευστάθεια του οριακού κύκλου

Έστω μη κλειστές τροχιές, πολύ κοντά στον οριακό κύκλο, δηλαδή με πλάτος $\alpha\in(2-\delta,2+\delta)$, όπου $\delta>0$ είναι πολύ μικρό. Πάνω σε αυτές τις τροχιές, οι λύσεις του συστήματος μπορούν να γραφούν προσεγγιστικά $x\approx\alpha\cos t$ και $y\approx-\alpha\sin t$, όπου α θεωρούμε πως είναι σταθερό στο διάστημα $0\le t\le 2\pi$. Επίσης κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, η μεταβολή της ενέργειας πάνω σε αυτές τις τροχιές είναι περίπου ίδια με αυτήν στον οριακό κύκλο. Έτσι, από την (5.3.6) έχουμε

$$f(\alpha)=-\varepsilon\int_0^T\left[x^2(t)-1\right]y^2(t)\,dt=-\varepsilon\alpha^2\int_0^{2\pi}\left(\alpha^2\cos^2 t-1\right)\sin^2 t\,dt=\frac{\varepsilon\pi\alpha^2}{4}\left(4-\alpha^2\right)$$

Παρατηρούμε ότι $f(2)=0$, οπότε το $\alpha=2$ αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας, δηλαδή στον οριακό κύκλο.

Για $\varepsilon>0$, είναι $f'(\alpha)<0$ για κάθε $\alpha\in(2-\delta,2+\delta)$, όπου $\delta<2-\sqrt{2}$, άρα η $f(\alpha)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2-\delta,2+\delta)$. Επομένως:

- Για $\alpha\in(2-\delta,2)$ ισχύει $f(\alpha)>0$, άρα κατά μήκος των εσωτερικών κοντινών τροχιών η ενέργεια αυξάνεται
- Για $\alpha\in(2,2+\delta)$ ισχύει $f(\alpha)<0$, άρα κατά μήκος των εξωτερικών κοντινών τροχιών η ενέργεια μειώνεται.

Συνεπώς, όλες οι γειτονικές τροχιές συγκλίνουν προς τον οριακό κύκλο, ο οποίος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής για $\varepsilon>0$.

Παρόμοια αποδεικνύεται πως για $\varepsilon<0$ ο οριακός κύκλος είναι ασταθής.

5.3.3 Η περίοδος του οριακού κύκλου με τη μέθοδο της μεσοστάθμισης

Θεωρήσαμε για την περιοδική λύση που αντιστοιχεί στον οριακό κύκλο την προσεγγιστική μορφή $x\approx\alpha\cos(t+\varphi)$, $y\approx-\alpha\sin(t+\varphi)$ που στο φασικό επίπεδο αντιστοιχούν στις κυκλικές τροχιές $x^2+y^2=\alpha^2$.

Τώρα υποθέτουμε πως το πλάτος α και η φάση φ είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή

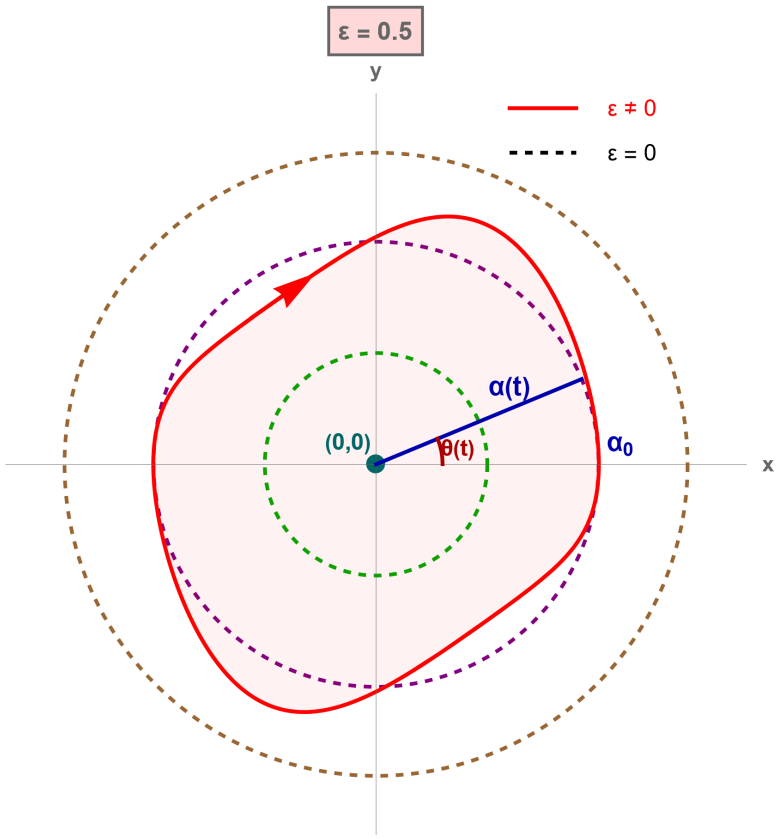
$$x \approx \alpha(t)\cos(t+\varphi(t)) \text{ και } y \approx -\alpha(t)\sin(t+\varphi(t))$$

και χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες (*Σχήμα* 5.3.3)

$$x=\alpha(t)\cos\theta(t),\ y=-\alpha(t)\sin\theta(t)$$

Οι παράγωγοι τότε ως προς τον χρόνο είναι

$$\dot{x}=\dot{\alpha}\cos\theta-\alpha\dot{\theta}\sin\theta \text{ και } \dot{y}=-\dot{\alpha}\sin\theta-\alpha\dot{\theta}\cos\theta$$



Σχήμα 5.3.3: Οριακός κύκλος και το προσεγγιστικό πορτραίτο φάσης για $\varepsilon=0$

Εφαρμόζουμε στο σύστημα και μετά από πράξεις παίρνουμε

$$\dot{\alpha}=-\varepsilon(\alpha^2\cos^2\theta-1)\alpha\sin^2\theta \tag{5.3.7}$$

$$\dot{\theta}=-1-\varepsilon(\alpha^2\cos^2\theta-1)\sin\theta\cos\theta \tag{5.3.8}$$

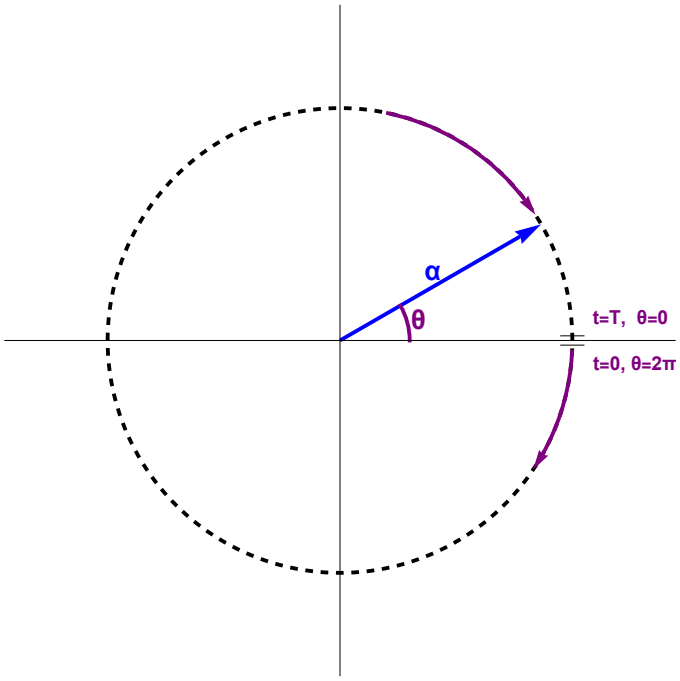
Διαιρούμε τις σχέσεις (5.3.7), (5.3.8), και παίρνοντας ανάπτυγμα *Taylor* γύρω από το $\varepsilon=0$, έχουμε τη διαφορική εξίσωση των τροχιών

$$\frac{d\alpha}{d\theta}=\varepsilon(\alpha^2\cos^2\theta-1)\alpha\sin^2\theta+O(\varepsilon^2) \tag{5.3.9}$$

Στο φασικό επίπεδο (x,y), με $y=\dot{x}$, οι τροχιές του συστήματος διαγράφονται κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού καθώς ο χρόνος αυξάνεται, επομένως αντίθετα από τη θετική φορά της πολικής γωνίας θ. Έτσι, αν T είναι η περίοδος του οριακού κύκλου, θα ισχύει (*Σχήμα* 5.3.4)

$$\alpha(0)=\alpha(T)=\alpha_0,\ \theta(0)=2\pi,\theta(T)=0$$

Βλέπουμε ότι κατά τη διάρκεια μίας πλήρους περιόδου η μεταβλητή θ μεταβάλλεται μονοτονικά από 2π σε 0, ενώ το πλάτος επιστρέφει στην αρχική του τιμή α_0.



Σχήμα 5.3.4: Σχέση μεταξύ θ και t.

Χρησιμοποιούμε τη θ ως ανεξάρτητη μεταβλητή και ολοκληρώνουμε:

$$\alpha(\theta)-\alpha(2\pi)=\int_{2\pi}^{\theta} d\alpha=\int_{2\pi}^{\theta}\left[\varepsilon\left(\alpha^2\cos^2\theta-1\right)\alpha\sin^2\theta+O\left(\varepsilon^2\right)\right]d\varphi$$

Επειδή οι συναρτήσεις που εμφανίζονται είναι φραγμένες και το διάστημα ολοκλήρωσης πεπερασμένο, το ολοκλήρωμα είναι τάξης $O(\varepsilon)$. Επομένως

$$\alpha(\theta)-\alpha(2\pi)=O(\varepsilon)\Rightarrow\alpha(\theta)=\alpha_0+O(\varepsilon) \qquad (5.3.10)$$

Αυτό δείχνει ότι το πλάτος μεταβάλλεται πολύ αργά μέσα σε μία περίοδο.

Εξετάζουμε τώρα τη μεταβολή του πλάτους σε μία πλήρη περίοδο. Από την περιοδικότητα έχουμε

$$\int_0^T d\alpha=0$$

Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή θ, αυτό γράφεται:

$$0=\int_{2\pi}^{0}\frac{d\alpha}{d\theta}d\theta=\varepsilon\int_{2\pi}^{0}\left(\alpha^2\cos^2\theta-1\right)\alpha\sin^2\theta\,d\theta+O\left(\varepsilon^2\right)\Rightarrow\int_0^{2\pi}\left(\alpha^2\cos^2\theta-1\right)\alpha\sin^2\theta\,d\theta=O(\varepsilon)$$

$$\overset{(5.3.10)}{\Rightarrow} \int_0^{2\pi} \left(\alpha_0^2 \cos^2\theta - 1\right)\alpha_0 \sin^2\theta \, d\theta = O(\varepsilon)$$

Επειδή το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την παράμετρο ε, ενώ το δεξί μέλος είναι τάξης $O(\varepsilon)$, προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα πρέπει να μηδενίζεται ταυτοτικά. Έτσι, προκύπτει η **συνθήκη μεσοστάθμισης**

$$\int_0^{2\pi} \left(\alpha_0^2 \cos^2\theta - 1\right)\alpha_0 \sin^2\theta \, d\theta = 0 \qquad (5.3.11)$$

Η (5.3.11) καθορίζει το πλάτος του οριακού κύκλου $\alpha = 2$, που ήδη έχουμε προσδιορίσει.

Η περίοδος δίνεται από

$$T = \int_0^T dt = \int_{2\pi}^0 \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \overset{(5.3.8)}{=} \int_{2\pi}^0 \frac{d\theta}{-1 - \varepsilon\left(\alpha^2 \cos^2\theta - 1\right)\sin\theta\cos\theta}$$

Για μικρό ε παίρνουμε ανάπτυγμα *Taylor* του $\frac{1}{\dot{\theta}}$ και έχουμε

$$T = \int_0^{2\pi} \left[1 - \varepsilon\left(\alpha_0^2 \cos^2\theta - 1\right)\sin\theta\cos\theta\right] d\theta + O(\varepsilon^2) = 2\pi - \varepsilon \int_0^{2\pi} \left[\left(\alpha_0^2 \cos^2\theta - 1\right)\sin\theta\cos\theta\right] d\theta + O(\varepsilon^2)$$

Το ολοκλήρωμα πρώτης τάξης περιέχει γινόμενα τριγωνομετρικών συναρτήσεων τα οποία είναι αντισυμμετρικά στο διάστημα [0,2π]. Με κατάλληλη μετατόπιση της μεταβλητής $\theta \to \theta + \pi$, προκύπτει ότι οι συνεισφορές στο πρώτο και δεύτερο ημικύκλιο αλληλοαναιρούνται. Επομένως, ο όρος πρώτης τάξης μηδενίζεται και η περίοδος δίνεται τελικά από:

$$T = 2\pi + O(\varepsilon^2)$$

5.3.4 Εφαρμογή μεθόδου Poincaré–Lindstedt

Θα αναζητήσουμε την περιοδική λύση, δηλαδή τον οριακό κύκλο της εξίσωσης *van der Pol* (5.3.1), όπου $|\varepsilon| \ll 1$, εφαρμόζοντας την μέθοδο ιδιόμορφων διαταραχών, *Poincaré–Lindstedt*.

Το αδιατάρακτο πρόβλημα $\ddot{x} + x = 0$ έχει ιδιοσυχνότητα $\omega_0 = 1$, έτσι εκφράζουμε την άγνωστη συχνότητα ω με το ανάπτυγμα διαταραχών

$$\omega = 1 + \varepsilon\,\omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \ldots \qquad (5.3.12)$$

Εισάγουμε τη νέα ανεξάρτητη χρονική μεταβλητή

$$\tau = \omega t \qquad (5.3.13)$$

ώστε να ενσωματωθεί η διόρθωση της συχνότητας και να επιβληθεί 2π-περιοδικότητα στη λύση ως προς τον νέο χρόνο.

Έτσι, θεωρούμε τη λύση ως συνάρτηση του τ και της παραμέτρου ε

$$x(t,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

με

$$X(\tau+2\pi,\varepsilon)=X(\tau,\varepsilon)$$

Εφαρμόζουμε κανόνα αλυσίδας

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dX}{dt}\frac{dt}{d\tau}=\omega\frac{dX}{d\tau} \quad \text{και} \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2\frac{d^2X}{d\tau^2}$$

και η (5.3.1) γίνεται

$$\omega^2 X''+\omega\varepsilon(X^2-1)X'+X=0 \tag{5.3.14}$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, θεωρώντας πως η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$X(\tau,\varepsilon)=X_0(\tau)+\varepsilon X_1(\tau)+\varepsilon^2 X_2(\tau)+\ldots \tag{5.3.15}$$

και παίρνουμε τις εξισώσεις μέχρι $O(\varepsilon^3)$:

$$X_0''+X_0=0 \tag{5.3.16}$$

$$X_1''+X_1=(1-X_0^2)X_0'-2\omega_1 X_0'' \tag{5.3.17}$$

$$X_2''+X_2=(-\omega_1 X_0^2-2X_1X_0+\omega_1)X_0'-(\omega_1^2+2\omega_2)X_0''-2\omega_1 X_1''+(1-X_0^2)X_1' \tag{5.3.18}$$

$$\begin{aligned} X_3''+X_3=&-(\omega_2 X_0^2+2\omega_1 X_1 X_0+2X_2X_0+X_1^2-\omega_2)X_0'-(2\omega_1\omega_2+2\omega_3)X_0'' \\ &-(\omega_1 X_0^2+2X_1X_0-\omega_1)X_1'-(\omega_1^2+2\omega_2)X_1''-2\omega_1 X_2''+(1-X_0^2)X_2' \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

Από την συνθήκη περιοδικότητας για την $X(\tau,\varepsilon)$, προκύπτει ότι

$$X_i(\tau+2\pi)=X_i(\tau), \text{ για } i=0,1,2,\ldots$$

Επίσης, επειδή η λύση είναι περιοδική, υπάρχει χρονική στιγμή όπου $X'(\tau,\varepsilon)=0$. Με κατάλληλη μετατόπιση της αρχής του χρόνου μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να επιλέξουμε $X'(0,\varepsilon)=0$, άρα κατά συνέπεια $X_i'(0)=0$, για $i=0,1,2,\ldots$.

Έτσι, η (5.3.16), με την αρχική συνθήκη $X_0'(0)=0$ δίνει τον πρωτεύοντα όρο

$$X_0=A_0\cos\tau \tag{5.3.20}$$

όπου η A_0 είναι κάποια σταθερά που θα προσδιοριστεί στη συνέχεια.

Εφαρμόζουμε τώρα την (5.3.20) στην εξίσωση (5.3.17), και γίνεται

$$X_1''+X_1=2A_0\omega_1\cos\tau+\frac{1}{4}A_0^3\sin 3\tau+\left(\frac{A_0^3}{4}-A_0\right)\sin\tau \tag{5.3.21}$$

Οι όροι των $\cos\tau$ και $\sin\tau$ ανήκουν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, και ως εκ τούτου οδηγούν στην εμφάνιση αιώνιων όρων στη λύση της X_1. Επειδή θέλουμε η λύση να είναι περιοδική, είναι απαραίτητο να εξαλείψουμε αυτούς τους όρους, μηδενίζοντας τους συντελεστές τους. Έτσι, πρέπει

$$\frac{A_0^3}{4}-A_0=0 \text{ και } 2A_0\omega_1=0$$

από όπου προκύπτουν οι λύσεις

$$A_0=2 \text{ και } \omega_1=0 \tag{5.3.22}$$

Η λύση $A_0=0$ αντιστοιχεί στην τετριμμένη κατάσταση ισορροπίας και απορρίπτεται. Επιπλέον, οι λύσεις $A_0=2$ και $A_0=-2$ διαφέρουν μόνο κατά μετατόπιση φάσης κατά π, επομένως περιγράφουν την ίδια περιοδική τροχιά. Συνεπώς ο πρωτεύων όρος (5.3.20) είναι

$$X_0=2\cos\tau \tag{5.3.23}$$

και η (5.3.21) γίνεται

$$X_1''+X_1=2\sin 3\tau$$

που με την αρχική συνθήκη $X_1'(0)=0$, έχει λύση

$$X_1=A_1\cos\tau+\frac{3}{4}\sin\tau-\frac{1}{4}\sin 3\tau \tag{5.3.24}$$

όπου A_1 κάποια σταθερά που όπως προηγουμένως θα την προσδιορίσουμε στη συνέχεια.

Αντικαθιστούμε την (5.3.24) στην εξίσωση (5.3.18), και με χρήση της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos^3\tau=\frac{1}{4}\cos 3\tau+\frac{3}{4}\cos\tau$, γίνεται

$$X_2''+X_2=\left(4\omega_2+\frac{1}{4}\right)\cos\tau+2A_1\sin\tau+3A_1\sin 3\tau-\frac{3}{2}\cos 3\tau+\frac{5}{4}\cos 5\tau \tag{5.3.25}$$

Επιβάλλοντας πάλι τη συνθήκη περιοδικότητας $X_2(\tau+2\pi)=X_2(\tau)$ στον δεύτερο διορθωτικό όρο, μηδενίζουμε τους συντελεστές των $\cos\tau$ και $\sin\tau$. Άρα

$$4\omega_2+\frac{1}{4}=0 \text{ και } 2A_1=0$$

από όπου προκύπτει πως

$$A_1=0 \text{ και } \omega_2=-\frac{1}{16} \tag{5.3.26}$$

Έτσι, ο πρώτος διορθωτικός όρος (5.3.24) γίνεται

$$X_1=\frac{3}{4}\sin\tau-\frac{1}{4}\sin 3\tau \tag{5.3.27}$$

Αντικαθιστούμε τις (5.3.26) και (5.3.27) στην (5.3.25) και έχουμε

$$X_2''+X_2=-\frac{3}{2}\cos 3\tau+\frac{5}{4}\cos 5\tau$$

που με την αρχική συνθήκη $X_2'(0)=0$, έχει λύση

$$X_2=A_2\cos\tau+\frac{3}{16}\cos 3\tau-\frac{5}{96}\cos 5\tau \qquad (5.3.28)$$

όπου A_2 κάποια σταθερά που όπως προηγουμένως θα την προσδιορίσουμε στη συνέχεια.

Αντικαθιστούμε την (5.3.28) στην εξίσωση (5.3.19), και γίνεται

$$X_3''+X_3=(2A_2+\frac{1}{4})\sin\tau+4\omega_3\cos\tau+(3A_2-\frac{9}{32})\sin 3\tau+\frac{35}{24}\sin 5\tau-\frac{7}{12}\sin 7\tau \qquad (5.3.29)$$

Επιβάλλοντας ξανά τη συνθήκη περιοδικότητας $X_3(\tau+2\pi)=X_2(\tau)$ στον τρίτο διορθωτικό όρο, μηδενίζουμε τους συντελεστές των $\cos\tau$ και $\sin\tau$. Άρα

$$2A_2+\frac{1}{4}=0 \text{ και } 4\omega_3=0$$

από όπου προκύπτει πως

$$A_2=-\frac{1}{8} \text{ και } \omega_3=0 \qquad (5.3.30)$$

και ο δεύτερος διορθωτικός όρος (5.3.28) είναι

$$X_2=-\frac{1}{8}\cos\tau+\frac{3}{16}\cos 3\tau-\frac{5}{96}\cos 5\tau \qquad (5.3.31)$$

Συνεπώς η προσεγγιστική λύση της εξίσωσης *van der Pol* από τις (5.3.13), (5.3.15), (5.3.23), (5.3.27), (5.3.31) είναι

$$x(t,\varepsilon)=2\cos\omega t+\varepsilon[\frac{3}{4}\sin\omega t-\frac{1}{4}\sin 3\omega t]+\varepsilon^2[-\frac{1}{8}\cos\tau+\frac{3}{16}\cos 3\tau-\frac{5}{96}\cos 5\tau]+O(\varepsilon^3)$$

όπου η συχνότητα ω από τις (5.3.12), (5.3.22), (5.3.26), και (5.3.30) είναι

$$\omega=1-\frac{1}{16}\varepsilon^2+O(\varepsilon^4)$$

<u>Σημείωση:</u>

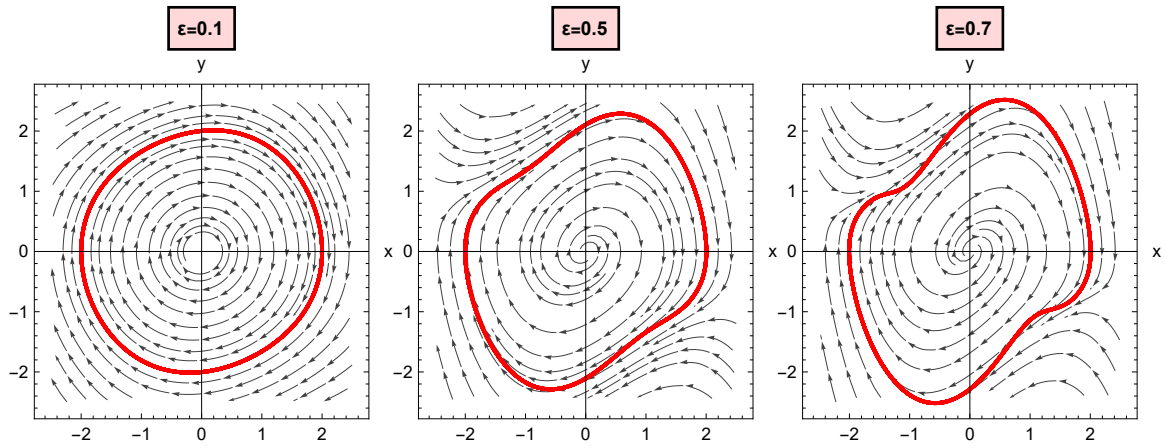
Μετά την αντικατάσταση των διορθωτικών όρων που προκύπτουν σε κάθε τάξη στις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης, εφαρμόστηκαν οι τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos^3\tau=\frac{1}{4}\cos 3\tau+\frac{3}{4}\cos\tau$$

$$\sin^3\tau=\frac{3}{4}\sin\tau-\frac{1}{4}\sin 3\tau$$

$$\cos^5\tau=\frac{5}{8}\cos\tau+\frac{5}{16}\cos 3\tau+\frac{1}{16}\cos 5\tau$$

ώστε οι μη γραμμικοί όροι να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί αρμονικών συναρτήσεων.



Σχήμα 5.3.5: Οριακός κύκλος για διάφορες τιμές της ε.

ε	ω	T
0	1	6.28319
0.1	0.999375	6.28711
0.2	0.9975	6.29893
0.3	0.994375	6.31873
0.4	0.99	6.34665
0.5	0.984375	6.38292
0.6	0.9775	6.42781
0.7	0.969375	6.48169
0.8	0.96	6.54498

Πίνακας 5.3.1: Συχνότητα και περίοδος της αυτόνομης εξίσωσης van der Pol.

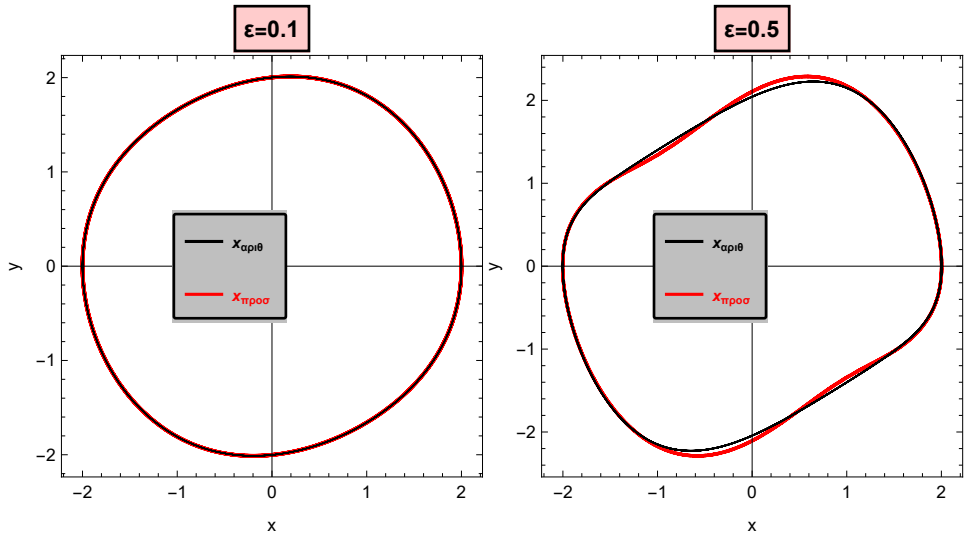
Στο *Σχήμα* 5.3.5 παρατηρούμε τον οριακό κύκλο, ο οποίος μεταβάλλει ελαφρώς τη μορφή του με την αύξηση της παραμέτρου ε, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης παραμένει περίπου σταθερό και κοντά στην τιμή 2. Αυτό υποδεικνύει ότι η δυναμική του συστήματος διατηρεί σταθερό περιοδικό καθεστώς παρά την αλλαγή της παραμέτρου. Παράλληλα, στον *Πίνακα* 5.3.1 παρουσιάζεται η μεταβολή της συχνότητας και της περιόδου της ταλάντωσης, από όπου προκύπτει ότι η αύξηση του ε επηρεάζει κυρίως τη χρονική κλίμακα της κίνησης και όχι το εύρος της.

Σύγκριση με την αριθμητική λύση

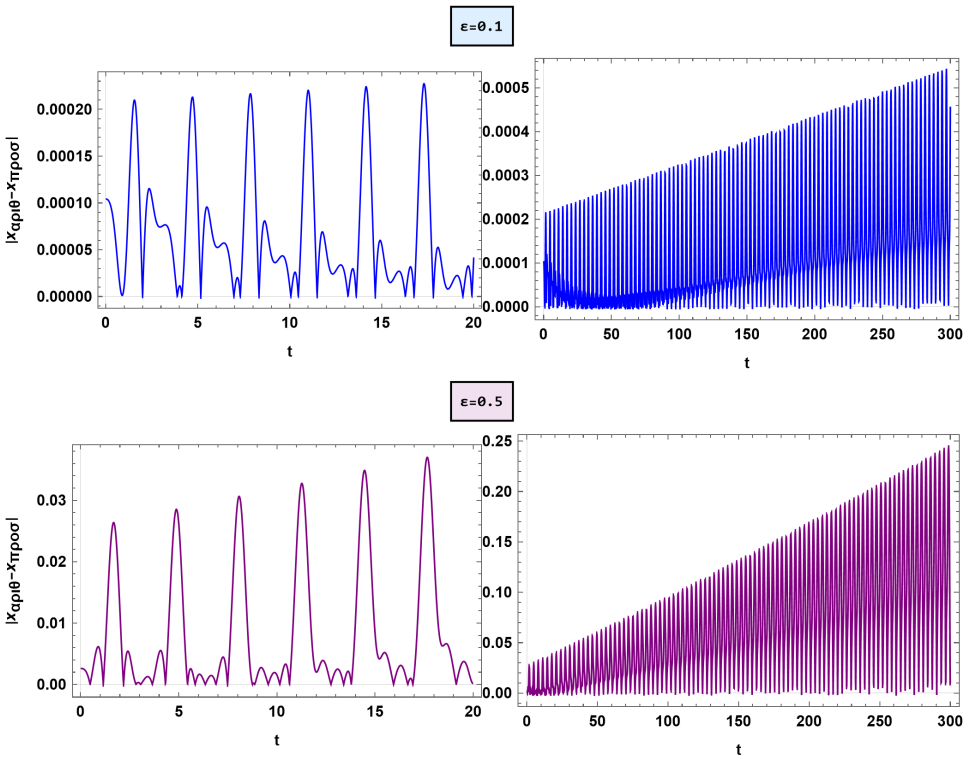
Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται η σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης μέσω της μεθόδου *Poincaré–Lindstedt* με την αντίστοιχη αριθμητική λύση του συστήματος *van der Pol* για αρχική συνθήκη $x(0)=2$, για τιμές της παραμέτρου $\varepsilon=0.1$ και $\varepsilon=0.5$.

Από τη σύγκριση των οριακών κύκλων στο *Σχήμα* 5.3.6 παρατηρείται ότι η προσεγγιστική λύση αναπαράγει με υψηλή ακρίβεια τη γεωμετρία της περιοδικής τροχιάς, με μικρές αποκλίσεις οι οποίες αυξάνονται ελαφρώς με την αύξηση της παραμέτρου ε. Παρ' όλα αυτά, ακόμη και για

μεγαλύτερες τιμές της ε, η συνολική μορφή του οριακού κύκλου παραμένει σε πολύ καλή συμφωνία με την αριθμητική λύση.



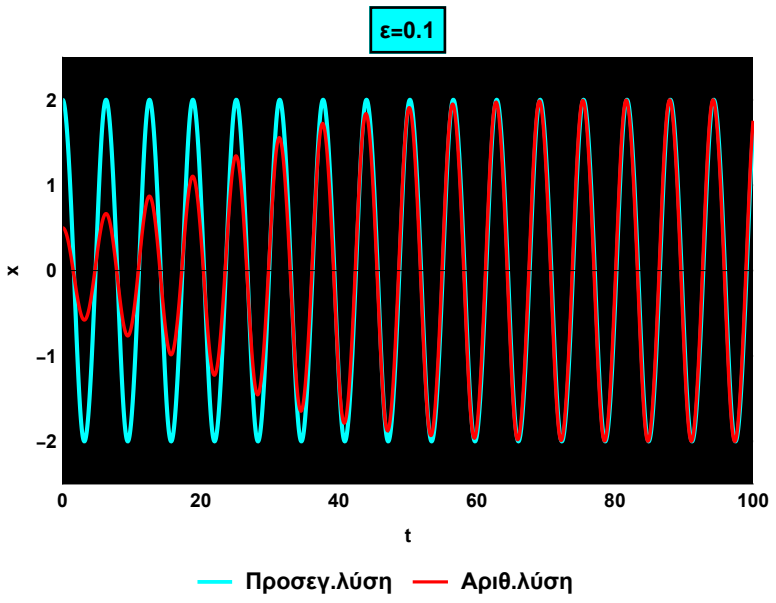
Σχήμα 5.3.6: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης



Σχήμα 5.3.7: Απόλυτο σφάλμα προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης.

Αντίστοιχα, από τα διαγράμματα της απόλυτης διαφοράς μεταξύ των δύο λύσεων στο *Σχήμα 5.3.7*, προκύπτει ότι το σφάλμα παραμένει μικρό σε όλο το χρονικό διάστημα και αυξάνεται ελαφρώς καθώς αυξάνει η τιμή της ε. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη, καθώς η μέθοδος βασίζεται

σε ανάπτυγμα ως προς μικρές τιμές της παραμέτρου, οπότε η ακρίβεια μειώνεται σταδιακά με την αύξησή της.



Σχήμα 5.3.8: Προσεγγιστική-Αριθμητική λύση με $x(0)=0.5$

Για να αναδειχθεί πιο καθαρά η συμπεριφορά του συστήματος υπό διαφορετικές αρχικές συνθήκες, εξετάζεται στη συνέχεια η περίπτωση όπου $x(0)=0.5$. Στο *Σχήμα 5.3.8* παρουσιάζεται η σύγκριση της προσεγγιστικής λύσης μέσω της μεθόδου *Poincaré–Lindstedt* με την αντίστοιχη αριθμητική λύση.

Παρατηρείται ότι η αριθμητική λύση εμφανίζει αρχικά μεταβατική συμπεριφορά και στη συνέχεια συγκλίνει στον οριακό κύκλο, ο οποίος αποτελεί τη μοναδική ασυμπτωτικά ευσταθή περιοδική κατάσταση του συστήματος. Αντίθετα, η προσεγγιστική λύση δεν αποδίδει αυτή τη διαδικασία προσέγγισης, αλλά αναπαριστά απευθείας την τελική περιοδική μορφή της ταλάντωσης.

Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος *Poincaré–Lindstedt* είναι κατασκευασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαλείφει τους αιώνιους όρους και να οδηγεί απευθείας σε περιοδική λύση σταθερού πλάτους και συχνότητας, χωρίς να περιγράφει την ενδιάμεση χρονική εξέλιξη προς αυτήν. Συνεπώς, ενώ η αριθμητική λύση αναδεικνύει τη δυναμική σύγκλισης προς τον οριακό κύκλο, η προσεγγιστική λύση αποτυπώνει μόνο τη μόνιμη περιοδική κατάσταση, η οποία είναι ανεξάρτητη από τις αρχικές συνθήκες, όπως έχουμε αναφέρει.

Η παρατήρηση αυτή καθιστά απαραίτητη την υιοθέτηση μεθόδων που περιγράφουν ταυτόχρονα τόσο τη μεταβατική όσο και τη μόνιμη δυναμική, όπως η μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων.

5.3.5 Εφαρμογή μεθόδου πολλαπλών κλιμάκων

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών που περιγράφεται από την εξίσωση *van der Pol*

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(x^2-1\right)\dot{x}+x=0$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0,\varepsilon)=A \text{ και } \dot{x}(0,\varepsilon)=0$$

Για $\varepsilon>0$, το σύστημα εμφανίζει έναν ελκυστικό οριακό κύκλο, προς τον οποίο συγκλίνουν οι λύσεις ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, εντός της περιοχής έλξης του (αντίθετα, για $\varepsilon<0$ η δράση της μη γραμμικής απόσβεσης αντιστρέφεται και ο οριακός κύκλος καθίσταται ασταθής).

Η σύγκλιση προς τη μόνιμη περιοδική κατάσταση πραγματοποιείται μέσω μιας βραδείας μεταβολής του πλάτους της ταλάντωσης, γεγονός που υποδηλώνει την ύπαρξη διαφορετικών χρονικών κλιμάκων στη δυναμική του συστήματος: μιας γρήγορης, που σχετίζεται με την ταλαντωτική κίνηση, και μιας αργής, που περιγράφει την εξέλιξη του πλάτους και τη σύγκλιση προς τον οριακό κύκλο.

Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος πολλαπλών χρονικών κλιμάκων για την ασυμπτωτική ανάλυση της λύσης της εξίσωσης *van der Pol*.

Θεωρούμε πως η λύση της εξίσωσης εξαρτάται από δύο χρονικές μεταβλητές: τον γρήγορο χρόνο t, και τον αργό χρόνο $\tau=\varepsilon t$, και υποθέτουμε πως έχει τη μορφή της γενικευμένης σειράς διαταραχής

$$x(t,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon)=X_0(t,\tau)+\varepsilon X_1(t,\tau)+O\left(\varepsilon^2\right) \tag{5.3.32}$$

για $t=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ και $\tau=O(1)$ καθώς $\varepsilon\to 0$.

Για την πρώτη παράγωγο έχουμε

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\tau}{dt}\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}=\partial_t+\varepsilon\,\partial_\tau \tag{5.3.33}$$

Αντίστοιχα, για τη δεύτερη παράγωγο προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}=\left(\partial_t+\varepsilon\,\partial_\tau\right)^2=\partial_t^2+2\varepsilon\,\partial_{t\tau}+\varepsilon^2\partial_\tau^2 \tag{5.3.34}$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση την (5.3.32) και εφαρμόζοντας τις (5.3.33), (5.3.34), έχουμε

$$\partial_t^2 X_0+X_0=0 \tag{5.3.35}$$

$$\partial_t^2 X_1+X_1=\partial_t X_0-X_0^2\partial_t X_0-2\partial_{t\tau}X_0 \tag{5.3.36}$$

Από τις αρχικές συνθήκες έπεται πως

$$X_0(0,0)=A \text{ και } \partial_t X_0(0,0)=0 \tag{5.3.37}$$

Η εξίσωση (5.3.35) αντιστοιχεί στον απλό αρμονικό ταλαντωτή, και έχει γενική λύση

$$X_0(t,\tau)=C(\tau)\cos t+D(\tau)\sin t$$

όπου $C(\tau), D(\tau)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις του τ.

Εισάγουμε πολική αναπαράσταση, θέτοντας το πλάτος

$$\alpha(\tau)=\sqrt{C^2(\tau)+D^2(\tau)}$$

και ορίζοντας τη φάση $\beta(\tau)$ μέσω των σχέσεων

$$\cos(\beta(\tau))=\frac{C(\tau)}{\alpha(\tau)} \text{ και } \sin(\beta(\tau))=\frac{-D(\tau)}{\alpha(\tau)}$$

Με τον τρόπο αυτό η λύση της (5.3.35) γράφεται στη μορφή

$$X_0(t,\tau)=\alpha(\tau)\cos(t+\beta(\tau)) \tag{5.3.38}$$

- Υπολογισμός των $\alpha(0), \beta(0)$

Από την αρχική συνθήκη $X_0(0,0)=A$, έχουμε

$$X_0(0,0)=\alpha(0)\cos(0+\beta(0))=A, \text{ κι έστω } \alpha(0)=\alpha_0, \beta(0)=\beta_0, \text{ οπότε}$$

$$\alpha_0\cos(\beta_0)=A$$

Από την αρχική συνθήκη $\partial_t X_0(0,0)=0$, και αφού $\partial_t X_0(t,\tau)=-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))$, έχουμε

$$-\alpha_0\sin(\beta_0)=0$$

Έτσι,

$$\begin{cases}\alpha_0\cos(\beta_0)=A\\ -\alpha_0\sin(\beta_0)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_0=A\\ \beta_0=0\end{cases} \tag{5.3.39}$$

- Υπολογισμός των $\alpha(\tau), \beta(\tau)$

Οι μερικές παράγωγοι του πρωτεύοντα όρου είναι

$$\partial_t X_0=-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))$$

$$\partial_{tt} X_0=\partial_\tau\left[-\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))\right]=-\alpha'(\tau)\sin(t+\beta(\tau))-\alpha(\tau)\beta'(\tau)\cos(t+\beta(\tau))$$

Εφαρμόζουμε στην (5.3.36) και γίνεται

$$\partial_t^2 X_1+X_1=[\alpha^2(\tau)\cos^2(t+\beta(\tau))-1]\alpha(\tau)\sin(t+\beta(\tau))$$

$$+2[\alpha'(\tau)\sin(t+\beta(\tau))+\alpha(\tau)\beta'(\tau)\cos(t+\beta(\tau))]$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^3\tau=\frac{3}{4}\sin\tau-\frac{1}{4}\sin 3\tau$ είναι τελικά

$$\partial_t^2 X_1+X_1=[2\alpha'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)]\sin(t+\beta(\tau))+2\alpha(\tau)\beta'(\tau)\cos(t+\beta(\tau))$$

$$+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)\sin(3t+3\beta(\tau))$$

Παρατηρούμε στο δεξί μέλος πως έχουμε όρους $\sin(t+\beta(\tau))$ και $\cos(t+\beta(\tau))$, που ανήκουν στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης, άρα θα οδηγήσουν σε αιώνιους όρους.
Για την αποφυγή τους, θα μηδενίσουμε τους συντελεστές των $\sin(t+\beta(\tau))$ και $\cos(t+\beta(\tau))$, και θα έχουμε

$$2\alpha'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)=0 \tag{5.3.40}$$

$$2\alpha(\tau)\beta'(\tau)=0 \tag{5.3.41}$$

Από την (5.3.41) επειδή $\alpha(\tau)\neq 0$, έπεται πως $\beta'(\tau)=0$, άρα $\beta(\tau)$ είναι κάποια σταθερά, επομένως από την (5.3.39)

$$\beta(\tau)=\beta(0)=\beta_0=0$$

Η εξίσωση (5.3.40) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση *Bernoulli*,

$$2\alpha'(\tau)-\alpha(\tau)+\frac{1}{4}\alpha^3(\tau)=0\Rightarrow\alpha'(\tau)-\frac{1}{2}\alpha(\tau)+\frac{1}{8}\alpha^3(\tau)=0$$

με λύση (*Ενότητα* 3.6.2)

$$\alpha(\tau)=\pm\frac{2}{\sqrt{1+4c\,e^{-\tau}}}$$

Η $\alpha(\tau)=\sqrt{C^2(\tau)+D^2(\tau)}$ άρα είναι θετική, κι έτσι

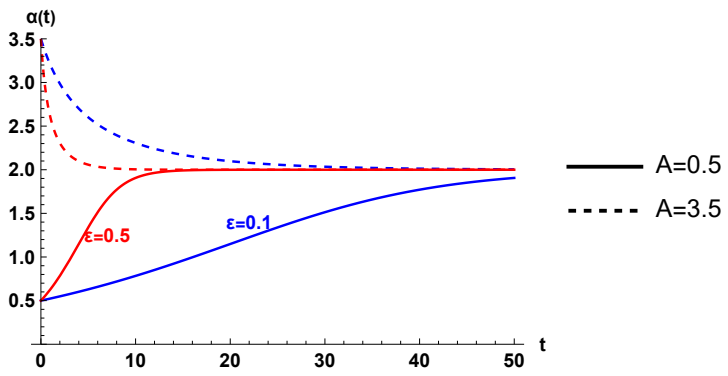
$$\alpha(\tau)=\frac{2}{\sqrt{1+4c\,e^{-\tau}}}$$

για κάποια σταθερά c, που την προσδιορίζουμε από την $\alpha_0=A$.

$$\alpha(0)=\frac{2}{\sqrt{1+4c}}\Rightarrow A=\frac{2}{\sqrt{1+4c}}\Rightarrow c=\frac{4-A^2}{4A^2}$$

Έτσι,

$$\alpha(\tau)=\frac{2}{\sqrt{1+(\frac{4}{A^2}-1)e^{-\tau}}},\quad \beta(\tau)=0$$



Σχήμα 5.3.9: Εξέλιξη του πλάτους για διαφορετικές αρχικές συνθήκες

Στο *Σχήμα* 5.3.9 βλέπουμε την εξέλιξη του πλάτους σε σχέση με τον χρόνο για αρχικές τιμές $A=0.5$ και $A=3.5$ και διαφορετικές τιμές του ε.

▶ Προσεγγιστική λύση μηδενικής τάξης

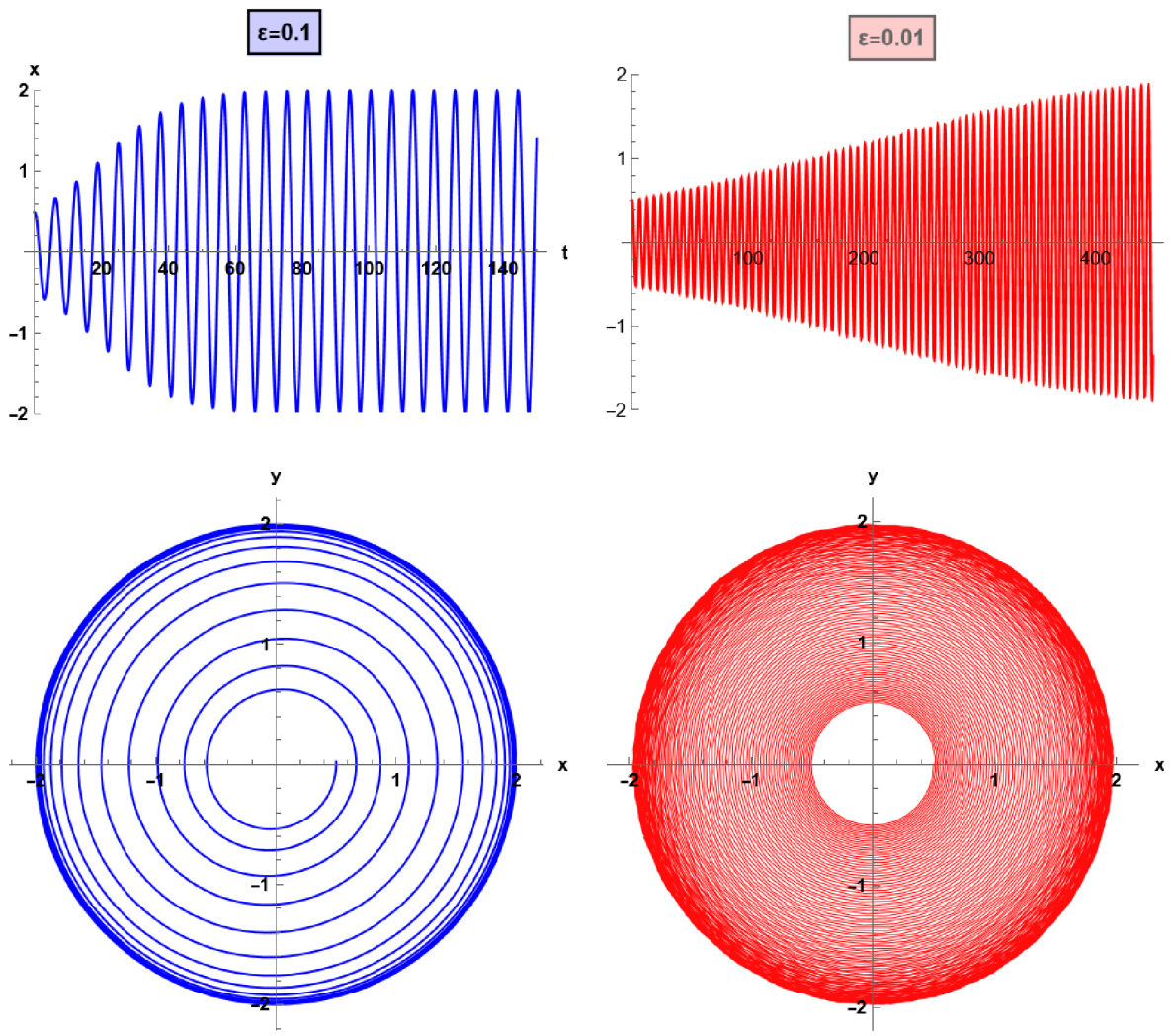
Αφού προσδιορίσαμε το πλάτος και τη φάση, ο πρωτεύων όρος είναι

$$X_0(t,\tau)=\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{A^2}-1\right)e^{-\tau}}}\cos t$$

και η προσεγγιστική λύση μηδενικής τάξης για $t=O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ είναι

$$x(t,\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{A^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}}}\cos t+O(\varepsilon) \tag{5.3.42}$$

Στο *Σχήμα* 5.3.10 βλέπουμε την προσεγγιστική λύση και το πορτραίτο φάσης για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ε.

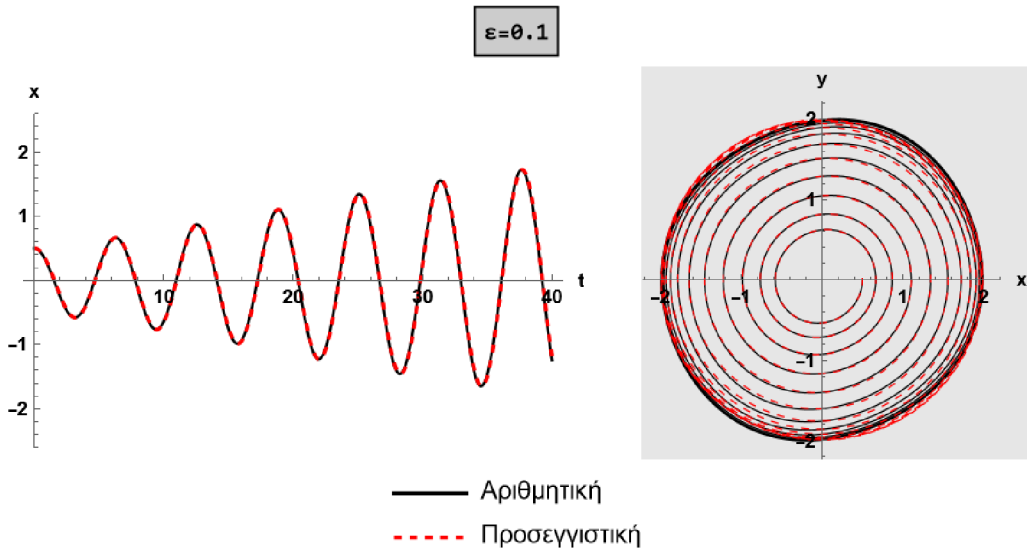


Σχήμα 5.3.10: Η προσεγγιστική λύση και το πορτραίτο φάσης για διαφορετικές τιμές της ε.

Παρατηρούμε πως η μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων δίνει μια σταθερή λύση $x(t)=0$, και μια περιοδική με περίοδο $T=2\pi$, $x(t)=2\cos t+O(\varepsilon)$, όταν η αρχική συνθήκη είναι $A=0$ και $A=2$ αντίστοιχα. Για οποιαδήποτε άλλη αρχική συνθήκη, η λύση έχει τη μορφή της (5.3.42), η οποία τείνει στον ευσταθή οριακό κύκλο, καθώς $t\to+\infty$.

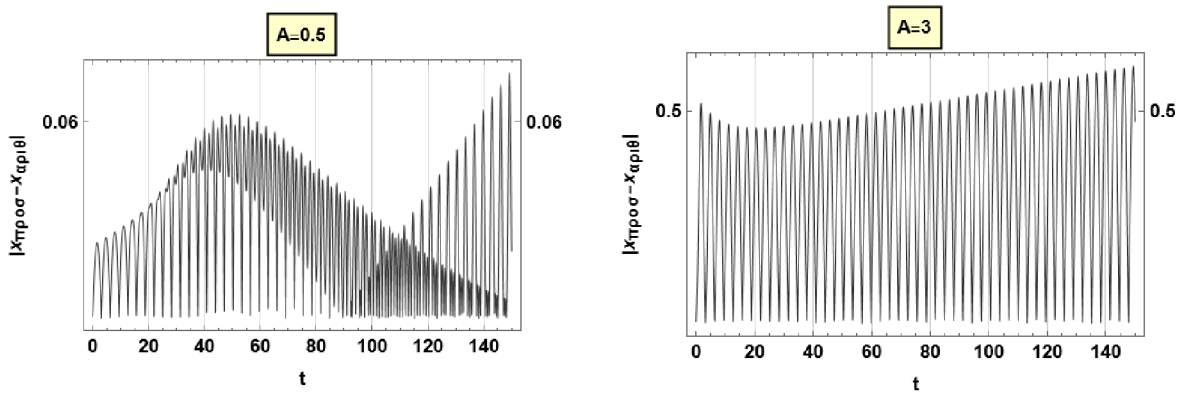
Σύγκριση με την αριθμητική λύση

Στο *Σχήμα* 5.3.11 παρουσιάζεται η σύγκριση της αριθμητικής λύσης με την προσεγγιστική λύση. Στα αριστερά απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη της λύσης, ενώ στα δεξιά παρουσιάζεται το αντίστοιχο πορτραίτο φάσης. Παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική λύση βρίσκεται σε εξαιρετική συμφωνία με την αριθμητική, τόσο ως προς το πλάτος όσο και ως προς τη φάση της ταλάντωσης. Επιπλέον, στο πορτραίτο φάσης οι δύο καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται, γεγονός που δείχνει ότι η μέθοδος των πολλαπλών κλιμάκων αναπαράγει με μεγάλη ακρίβεια τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.



Σχήμα 5.3.11: Σύγκριση προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης.

Ωστόσο, από το *Σχήμα* 5.3.12 του απόλυτου σφάλματος παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική λύση παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια όταν η αρχική συνθήκη είναι εντός του οριακού κύκλου. Αντίθετα, για αρχική συνθήκη μεγαλύτερη του *2*, το σφάλμα αυξάνεται αισθητά, γεγονός που υποδηλώνει ότι η ακρίβεια της μεθόδου μειώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από την περιοχή μικρότερων αρχικών τιμών.



Σχήμα 5.3.12: Απόλυτο σφάλμα προσεγγιστικής-αριθμητικής λύσης για διαφορετικές αρχικές συνθήκες.

5.4 Η εξαναγκασμένη εξίσωση van der Pol

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήθηκε η αυτόνομη εξίσωση *van der Pol* και αναλύθηκε η εμφάνιση του οριακού κύκλου, ως αποτέλεσμα της μη γραμμικής απόσβεσης του συστήματος. Στην παρούσα ενότητα εξετάζεται η εξαναγκασμένη μορφή της εξίσωσης, στην οποία το σύστημα διεγείρεται από εξωτερικό περιοδικό όρο, κι έχει τη μορφή

$$\ddot{x}+\varepsilon\left(x^2-1\right)\dot{x}+x=F\cos\omega t, \quad \text{με} \quad \varepsilon>0 \tag{5.4.1}$$

Εισάγοντας τη νέα ανεξάρτητη χρονική μεταβλητή

$$\tau=\omega t \tag{5.4.2}$$

η εξίσωση (5.4.1) γράφεται στη μορφή

$$\omega^2 x''+\omega\,\varepsilon\left(x^2-1\right)x'+x=F\cos\tau \tag{5.4.3}$$

Με την εισαγωγή εξωτερικής ημιτονοειδούς διέγερσης στο αυτόνομο σύστημα *van der Pol*, η δυναμική του συστήματος εμπλουτίζεται σημαντικά και εμφανίζει φαινόμενα όπως η **ημιπεριοδική συμπεριφορά** (**quasi-periodicity**) και **παράσυρση συχνότητας** (**frequency entrainment**).

Στην ημιπεριοδική κατάσταση, η λύση δεν είναι απλή περιοδική συνάρτηση, αλλά μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση περιοδικών συνιστωσών με ασύμμετρες μεταξύ τους συχνότητες, των οποίων ο λόγος είναι άρρητος αριθμός. Στην περίπτωση της εξαναγκασμένης *van der Pol*, η απόκριση συνήθως διαμορφώνεται από δύο βασικές συνιστώσες: μία που αντιστοιχεί στη φυσική συχνότητα ταλάντωσης του αυτόνομου συστήματος και μία που σχετίζεται με τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης.

Ως παράσυρση συχνότητας χαρακτηρίζεται το φαινόμενο κατά το οποίο δύο ταλαντωτές διαφορετικών συχνοτήτων, αλληλεπιδρώντας, καταλήγουν να έχουν την ίδια συχνότητα. Παρεμφερής έννοια είναι αυτή του **συγχρονισμού** (**synchronization**) ή του **κλειδώματος φάσης** (**phase-locking**), οι οποίες αναφέρονται στις περιπτώσεις ταλαντωτών που, έπειτα από προσθήκη εξωτερικής διέγερσης, «κλειδώνουν» στη συχνότητα της διέγερσης.

Στην εξίσωση *van der Pol* τα παραπάνω φαινόμενα παρατηρούνται όταν η προσθήκη εξωτερικής διέγερσης στο αυτόνομο σύστημα έχει ως αποτέλεσμα, υπό ορισμένες συνθήκες, η τελική απόκριση του συστήματος να εκτελεί μονοσυχνοτικές ημιτονοειδείς ταλαντώσεις. Όταν οι προκύπτουσες ταλαντώσεις είναι στην ίδια συχνότητα με τη διέγερση, το φαινόμενο ονομάζεται **αρμονική παράσυρση** (**harmonic entrainment**). Είναι, όμως, δυνατή η παρουσία στην απόκριση καθαρά υποαρμονικών ταλαντώσεων, δηλαδή ταλαντώσεων σε ακέραια υποπολλαπλάσια της συχνότητας της διέγερσης, οπότε λέγεται ότι συμβαίνει **υποαρμονική παράσυρση** (**subharmonic entrainment**). Αντίστοιχα, όταν οι λύσεις της εξίσωσης είναι ταλαντώσεις με συχνότητα ακέραιο πολλαπλάσιο της συχνότητας διέγερσης, πρόκειται για **υπεραρμονική παράσυρση** (**superharmonic entrainment**). Η συνθήκη για την εμφάνιση του φαινομένου είναι η συχνότητα της διέγερσης να παίρνει τιμές είτε πολύ κοντά στη συχνότητα του αυτόνομου συστήματος (περίπτωση αρμονικής παράσυρσης), είτε πολύ κοντά σε κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιό της (περιπτώσεις υποαρμονικής και υπεραρμονικής παράσυρσης αντίστοιχα). Όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, υπό κάποιες προϋποθέσεις, μπορεί να έχουμε φαινόμενο αρμονικής παράσυρσης ακόμα και όταν η συχνότητα της διέγερσης βρίσκεται μακριά από τη συχνότητα του αυτόνομου συστήματος.

Η εξωτερική διέγερση, λοιπόν, επηρεάζει καθοριστικά τη δυναμική του συστήματος, καθώς η μόνιμη κατάσταση προκύπτει από την αλληλεπίδραση της μη γραμμικότητας με την εξαναγκασμένη απόκριση. Ανάλογα με τις παραμέτρους, η λύση μπορεί να περιλαμβάνει συνύπαρξη φυσικής και εξαναγκασμένης συνιστώσας ή να συγκλίνει σε καθαρά περιοδική συμπεριφορά.

Στόχος της ενότητας είναι η ασυμπτωτική διερεύνηση της εξαναγκασμένης δυναμικής του συστήματος και η μελέτη της επίδρασης των παραμέτρων διέγερσης στη δομή και τη σταθερότητα των λύσεων.

5.4.1 Ισχυρή διέγερση εκτός συντονισμού

Υποθέτουμε ότι η συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης δεν παίρνει τιμές κοντά σε ακέραιο, ώστε να μην υπάρχει συντονισμός με την φυσική συχνότητα του συστήματος. Στη

μετασχηματισμένη χρονική μεταβλητή τ, η εξωτερική διέγερση είναι περιοδική με περίοδο 2π. Κατά συνέπεια, αναζητούμε λύσεις οι οποίες είναι επίσης 2π-περιοδικές ως προς τη μεταβλητή τ.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο κανονικών διαταραχών στην εξίσωση (5.4.3), θεωρώντας πως η λύση έχει τη μορφή της σειράς διαταραχής

$$x(\tau,\varepsilon)=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2 x_2(\tau)+\ldots \tag{5.4.4}$$

όπου $x_i(\tau+2\pi)=x_i(\tau)$, για $i=0,1,2,\ldots$, και παίρνουμε τις εξισώσεις μέχρι $O(\varepsilon^2)$

$$\omega^2 x_0''+x_0=F\cos\tau \tag{5.4.5}$$

$$\omega^2 x_1''+x_1=\omega x_0'-\omega x_0^2 x_0' \tag{5.4.6}$$

$$\omega^2 x_2''+x_2=\omega x_1'-2\omega x_0 x_1 x_0'-\omega x_0^2 x_1' \tag{5.4.7}$$

Η λύση της εξίσωσης (5.4.5) είναι

$$x_0(\tau)=\alpha_0\cos\frac{\tau}{\omega}+b_0\sin\frac{\tau}{\omega}+\frac{F}{1-\omega^2}\cos\tau$$

Για να ισχύει η συνθήκη περιοδικότητας $x_0(\tau+2\pi)=x_0(\tau)$, πρέπει $\omega=\frac{1}{\kappa}$, με $\kappa=\pm2,\pm3,\ldots$, αλλά τότε ο πρώτος διορθωτικός όρος x_1 θα περιέχει τους αιώνιους όρους $\kappa\tau\cos\tau$ και $\kappa\tau\sin\tau$, και δεν θα ισχύει η συνθήκη $x_1(\tau+2\pi)=x_1(\tau)$. Άρα επιβάλλεται $\alpha_0=b_0=0$ και ο πρωτεύων όρος είναι

$$x_0(\tau)=\frac{F}{1-\omega^2}\cos\tau \tag{5.4.8}$$

Αντικαθιστούμε την (5.4.8) στην εξίσωση (5.4.6) και γίνεται

$$\omega^2 x_1''+x_1=\frac{\omega F^3}{(1-\omega^2)^3}\sin\tau\cos^2\tau-\frac{\omega F}{1-\omega^2}\sin\tau$$

Η λύση της μετά τον μηδενισμό των συντελεστών που οδηγούν σε αιώνιους όρους είναι

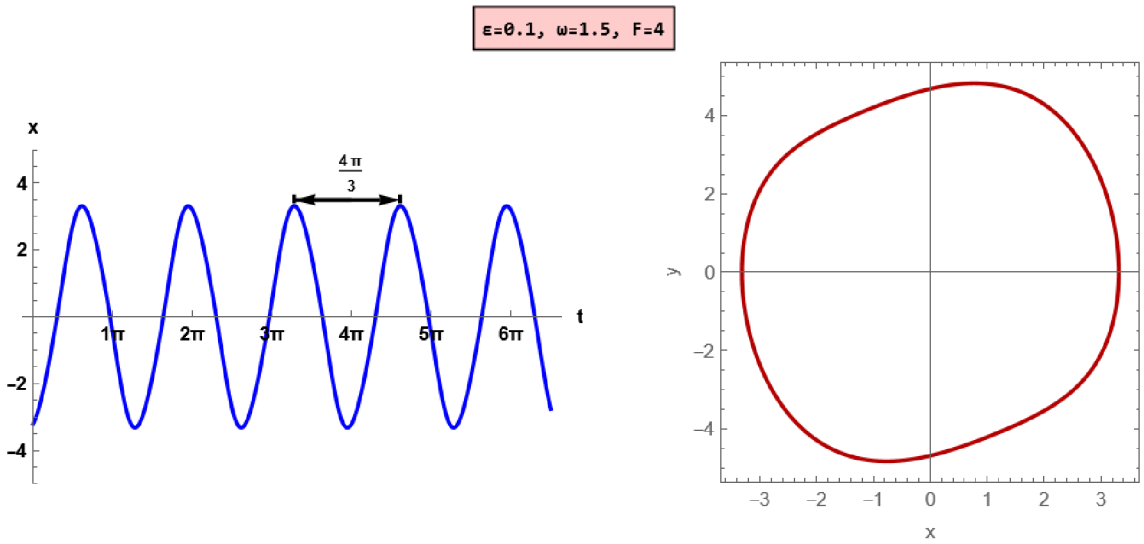
$$x_1(\tau)=\frac{\omega F(F^2-4(\omega^2-1)^2)}{4(\omega^2-1)^4}\sin\tau+\frac{\omega F^3}{4(\omega^2-1)^3(9\omega^2-1)}\sin3\tau \tag{5.4.9}$$

Αν συνεχίσουμε ανάλογα, θα δούμε πως ο δεύτερος διορθωτικός όρος περιέχει τις αρμονικές $\cos\tau,\cos3\tau,\cos5\tau$, άρα η μη γραμμικότητα δεν μεταβάλλει τη θεμελιώδη συχνότητα, αλλά εισάγει ανώτερες αρμονικές, οι οποίες τροποποιούν το σχήμα του οριακού κύκλου χωρίς να επηρεάζουν την βασική περιοδικότητα του συστήματος.

Η προσεγγιστική λύση της (5.4.3) είναι με αντικατάσταση των (5.4.2), (5.4.8), (5.4.9) στην (5.4.4)

$$\begin{aligned}x(t,\varepsilon)&=\frac{F}{1-\omega^2}\cos\omega t\\&+\varepsilon\left[\frac{\omega F(F^2-4(\omega^2-1)^2)}{4(\omega^2-1)^4}\sin\omega t+\frac{\omega F^3}{4(\omega^2-1)^3(9\omega^2-1)}\sin3\omega t\right]+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Από τη μορφή της προσεγγιστικής λύσης βλέπουμε ότι η μόνιμη απόκριση του συστήματος δεν ακολουθεί πλέον τη φυσική περιοδικότητα της αυτόνομης εξίσωσης, αλλά ταλαντώνεται με τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης. Άρα έχουμε φαινόμενο **παράσυρσης**.



Σχήμα 5.4.1: Εξαναγκασμένη εξίσωση van der Pol με ισχυρή διέγερση εκτός συντονισμού

Στο *Σχήμα 5.4.1*, για συχνότητα της διέγερσης $\omega = 1.5$, παρατηρούμε πως η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = \frac{4\pi}{3}$, η οποία ταυτίζεται με την περίοδο της διέγερσης, και όχι με την περίοδο 2π του αυτόνομου συστήματος. Παράλληλα, ο οριακός κύκλος μεταβάλλεται σημαντικά τόσο ως προς το σχήμα, όσο και ως προς το πλάτος, το οποίο δεν παραμένει πλέον ίσο με *2*.

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι η ισχυρή εξωτερική διέγερση τροποποιεί ουσιαστικά την ισορροπία μεταξύ παραγωγής και απώλειας ενέργειας, που είναι υπεύθυνη για τη δημιουργία της αυτόνομης περιοδικής ταλάντωσης.

5.4.2 Ασθενής διέγερση εκτός συντονισμού

Θεωρούμε πάλι πως η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης δεν παίρνει τιμές κοντά σε ακέραιο. Επιπλέον, υποθέτουμε πως η εξωτερική διέγερση είναι ασθενής, γι' αυτό θέτουμε $F = \varepsilon F_0$, και η εξίσωση (*5.4.3*) γράφεται

$$\omega^2 x'' + \omega \varepsilon \left(x^2 - 1\right) x' + x = \varepsilon F_0 \cos \tau \qquad (5.4.11)$$

Αντικαθιστούμε την σειρά διαταραχών (*5.4.4*) στην (*5.4.11*) και παίρνουμε τις εξισώσεις μέχρι $O\left(\varepsilon^2\right)$

$$\omega^2 x_0'' + x_0 = 0 \tag{5.4.12}$$

$$\omega^2 x_1'' + x_1 = F_0 \cos\tau + \omega x_0' - \omega x_0^2 x_0' \tag{5.4.13}$$

$$\omega^2 x_2'' + x_2 = \omega x_1' - 2\omega x_0 x_1 x_0' - \omega x_0^2 x_1' \tag{5.4.14}$$

Η λύση της (5.4.12) είναι

$$x_0(\tau) = \alpha_0 \cos\frac{\tau}{\omega} + b_0 \sin\frac{\tau}{\omega} \Rightarrow x_0(\tau) = 0$$

λόγω της συνθήκης περιοδικότητας. Οπότε ανάλογα προκύπτουν

$$x_1(\tau) = \frac{F_0}{1-\omega^2}\cos\tau, \quad x_2(\tau) = -\frac{\omega F_0}{(1-\omega^2)^2}\sin\tau$$

και η προσεγγιστική λύση είναι

$$x(t,\varepsilon) = \frac{F}{1-\omega^2}\cos\omega t - \varepsilon\frac{\omega F}{(1-\omega^2)^2}\sin\omega t + O(\varepsilon^2) \tag{5.4.15}$$

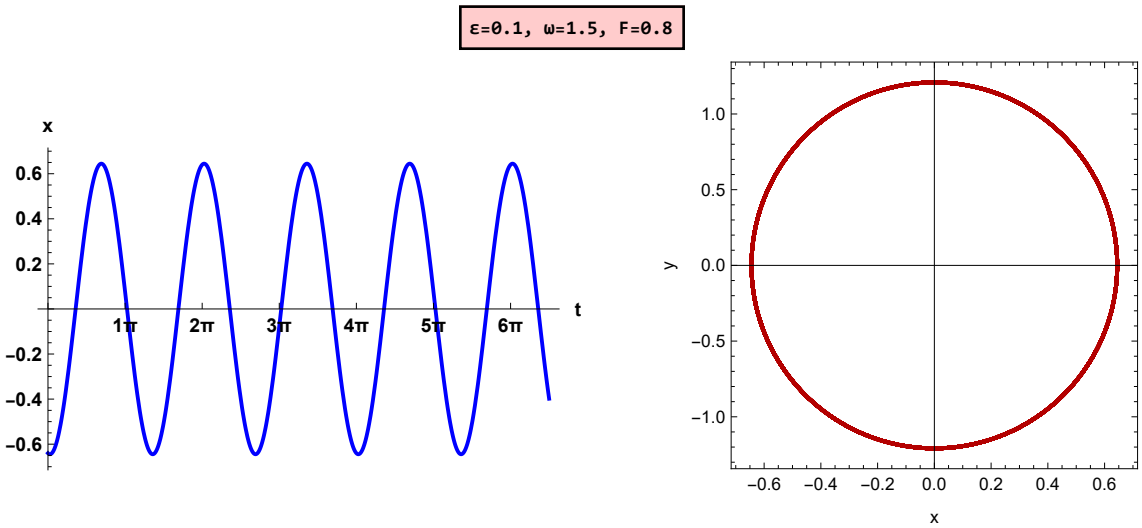
Παρατηρείται ότι η πρώτη αρμονική της (5.4.15) συμφωνεί με την αντίστοιχη συνιστώσα της περίπτωσης ισχυρής διέγερσης της (5.4.10). Ωστόσο, για ασθενή διέγερση εκτός συντονισμού, η προσέγγιση αυτή δεν επαρκεί για την πλήρη περιγραφή της δυναμικής, καθώς η λύση περιέχει ταυτόχρονα συνεισφορές από τη φυσική και την εξαναγκασμένη απόκριση.

Στην περιοχή εκτός συντονισμού και για τιμές του πλάτους διέγερσης κάτω από το κατώφλι συγχρονισμού, το σύστημα δεν παρουσιάζει πλήρη παράσυρση στη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης. Αντίθετα, η μόνιμη απόκριση προκύπτει από τη συνύπαρξη δύο ανεξάρτητων χρονικών κλιμάκων, οδηγώντας σε ημιπεριοδική κίνηση.

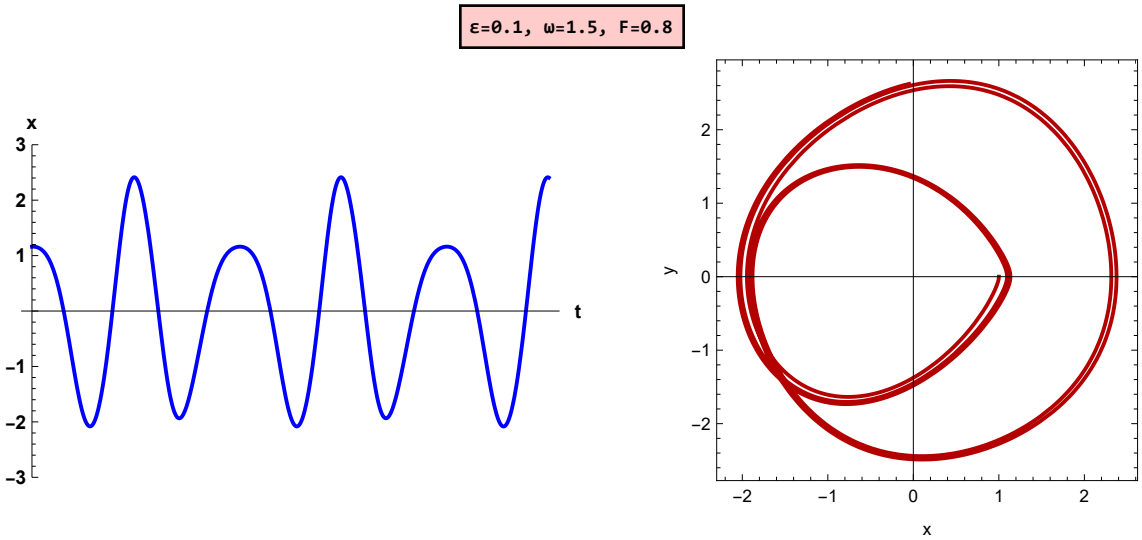
Σε αυτό το καθεστώς, η ελεύθερη ταλάντωση δεν καταστέλλεται πλήρως, αλλά διατηρείται σε πεπερασμένο πλάτος. Το φαινόμενο αυτό αντιστοιχεί σε **μερική καταστολή** (**partial quenching**), καθώς η ένταση της διέγερσης δεν είναι επαρκής ώστε να αντιστρέψει το πρόσημο του αποτελεσματικού όρου απόσβεσης και να εξαλείψει τη φυσική συνιστώσα της ταλάντωσης.

Καθώς το πλάτος της διέγερσης αυξάνεται και πλησιάζει την κρίσιμη περιοχή συγχρονισμού, παρατηρείται μετάβαση από ημιπεριοδική σε περιοδική συμπεριφορά μέσω **πλήρους καταστολής** (**complete quenching**) της ελεύθερης ταλάντωσης και επικράτησης της εξαναγκασμένης απόκρισης. Η μετάβαση αυτή συνδέεται με τη μεταβολή του αποτελεσματικού γραμμικού όρου απόσβεσης λόγω της μη γραμμικής σύζευξης των όρων του συστήματος.

Τα *Σχήματα* 5.4.2-5.4.3 επιβεβαιώνουν την παραπάνω συμπεριφορά, δείχνοντας ότι εκτός συντονισμού η λύση δεν συγκλίνει σε μοναδικό ελκυστή οριακού κύκλου, αλλά εμφανίζει μεικτή δυναμική που εξαρτάται από την ένταση της διέγερσης.



Σχήμα 5.4.2: Προσεγγιστική λύση της εξαναγκασμένης εξίσωσης van der Pol με ασθενή διέγερση εκτός συντονισμού



Σχήμα 5.4.3: Αριθμητική λύση της εξαναγκασμένης εξίσωσης van der Pol με ασθενή διέγερση εκτός συντονισμού

5.4.3 Ασθενής διέγερση κοντά στον συντονισμό

Ενδιαφερόμαστε για ασθενή διέγερση, κοντά στον κύριο συντονισμό ($\omega \approx 1$), γι' αυτό θέτουμε

$$F = \varepsilon\gamma \tag{5.4.16}$$

$$\omega = 1 + \varepsilon\beta \tag{5.4.17}$$

στην (5.4.3) και γίνεται

$$(1+\varepsilon\beta)^2 x'' + (1+\varepsilon\beta)\varepsilon(x^2-1)x' + x = \varepsilon\gamma\cos\tau \tag{5.4.18}$$

Εφαρμόζουμε μέθοδο κανονικών διαταραχών, αντικαθιστώντας την σειρά (5.4.4) στην (5.4.18)

$$(1+\varepsilon\beta)^2(x_0''+\varepsilon x_1'')+\varepsilon(1+\varepsilon\beta)[(x_0+\varepsilon x_1)^2-1](x_0'+\varepsilon x_1')+x_0+\varepsilon x_1=\varepsilon\gamma\cos\tau$$

και παίρνουμε τις εξισώσεις μέχρι $O(\varepsilon)$

$$x_0''+x_0=0 \tag{5.4.19}$$

$$x_1''+x_1=\gamma\cos\tau-2\beta x_0''-x_0^2x_0'+x_0' \tag{5.4.20}$$

Η λύση της (5.4.19) είναι

$$x_0(\tau)=\alpha_0\cos\tau+b_0\sin\tau \tag{5.4.21}$$

Αντικαθιστούμε την (5.4.21) στην (5.4.20) και γίνεται

$$\begin{aligned} x_1''+x_1=&\left(-\frac{1}{4}\alpha_0^2b_0+2\beta\alpha_0-\frac{1}{4}b_0^3+b_0+\gamma\right)cos\tau\\ &+\left(\frac{1}{4}\alpha_0b_0^2+\frac{1}{4}\alpha_0^3-\alpha_0+2\beta b_0\right)sin\tau\\ &+\frac{1}{4}\alpha_0\left(a_0^2-3b_0^2\right)\sin 3\tau+\frac{1}{4}b_0\left(b_0^2-3\alpha_0^2\right)\cos 3\tau \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

Από τη μορφή της εξίσωσης (5.4.22) φαίνεται ότι το μέλος του εξαναγκασμού περιέχει τους όρους των $sin\tau$ και $cos\tau$ που πρέπει να μηδενιστούν, για να μην οδηγήσουν σε αιώνιους όρους τη λύση. Άρα

$$\begin{cases} 2\beta\alpha_0-b_0\left[\frac{1}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)-1\right]=-\gamma\\ 2\beta b_0+\alpha_0\left[\frac{1}{4}(\alpha_0^2+b_0^2)-1\right]=0 \end{cases} \tag{5.4.23}$$

Έτσι, με γνωστά πλέον τα α_0 και b_0, η (5.4.22) γίνεται

$$x_1''+x_1=\frac{1}{4}\alpha_0\left(a_0^2-3b_0^2\right)\sin 3\tau+\frac{1}{4}b_0\left(b_0^2-3\alpha_0^2\right)\cos 3\tau$$

που έχει λύση

$$x_1(\tau)=\alpha_1cos\tau+b_1sin\tau+\frac{1}{32}\left[b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\cos 3\tau-\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\sin 3\tau\right] \tag{5.4.24}$$

όπου α_1, b_1 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αντικαθιστώντας την $x_1(\tau)$ στο $O(\varepsilon^2)$, και για να ικανοποιείται η απαίτηση, η $x_2(\tau)$ να είναι 2π-περιοδική, δηλαδή να μην υπάρχουν αιώνιοι όροι, προκύπτουν εξισώσεις για τον προσδιορισμό των α_1, b_1.

Τελικά η προσεγγιστική λύση τάξης $O(\varepsilon)$ είναι

$$x(t,\varepsilon)=\alpha_0\cos\tau+b_0\sin\tau+\varepsilon\left(\alpha_1cos\tau+b_1sin\tau+\frac{1}{32}\left[b_0(3\alpha_0^2-b_0^2)\cos 3\tau-\alpha_0(\alpha_0^2-3b_0^2)\sin 3\tau\right]\right)+O(\varepsilon^2)$$

5.4.3.1 Η εξίσωση του πλάτους

Στη συνέχεια, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τη συμπεριφορά του **πλάτους** της ταλάντωσης **κοντά στον κύριο συντονισμό.** Για τον σκοπό αυτό, μελετάμε τις αλγεβρικές εξισώσεις (5.4.23) που προέκυψαν από τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, και οι οποίες δίνουν τις τιμές των α_0 και b_0.

Για να τις λύσουμε, θεωρούμε r_0 το πλάτος του πρωτεύοντα όρου, δηλαδή

$$r_0=\sqrt{\alpha_0^2+b_0^2}\ >0 \tag{5.4.25}$$

Αντικαθιστούμε στις (5.4.23) την (5.4.25) και έχουμε

$$\begin{cases} 2\beta\alpha_0-b_0\left[\frac{1}{4}r_0^2-1\right]=-\gamma \\ 2\beta b_0+\alpha_0\left[\frac{1}{4}r_0^2-1\right]=0 \end{cases} \tag{5.4.26}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο, προσθέτουμε κατά μέλη και προκύπτει η εξίσωση του πλάτους της απόκρισης, για δεδομένα β και γ

$$r_0^2\left[4\beta^2+\left(1-\tfrac{1}{4}r_0^2\right)^2\right]=\gamma^2 \tag{5.4.27}$$

Παρατηρούμε την ομοιότητα της εξίσωσης με την εξίσωση (2.2.53) του αποσβεννύμενου εκκρεμούς, και καταλαβαίνουμε πως μπορεί να έχει ως και 3 πραγματικές λύσεις για το πλάτος της απόκρισης r_0.

Θα αναλύσουμε αυτές τις λύσεις μέσω της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε και την ευστάθειά τους.

Υποθέτουμε πως οι περιοδικές λύσεις της (5.4.3) κοντά στη συχνότητα ω της εξωτερικής διέγερσης, είναι της μορφής

$$x(t)=\alpha(t)\cos\omega t+b(t)\sin\omega t \tag{5.4.28}$$

όπου α και b είναι αργά μεταβαλλόμενες συναρτήσεις του χρόνου.

Τότε

$$\dot{x}(t)=(\dot{\alpha}+\omega b)\cos\omega t+(-\omega\alpha+\dot{b})\sin\omega t$$

και αγνοώντας τους $\ddot{\alpha}, \ddot{b}$, επειδή υποθέτουμε πως είναι πολύ μικροί

$$\ddot{x}(t)\approx(-\omega^2\alpha+2\omega\dot{b})\cos\omega t+(-2\omega\dot{\alpha}-\omega^2 b)\sin\omega t$$

Αντικαθιστούμε στην (5.4.3), και παραλείποντας τους όρους με $\cos 3\omega t$ και $\sin 3\omega t$, παίρνουμε

$$[(-2\omega+\frac{1}{2}\varepsilon\alpha b)\dot{\alpha}+\varepsilon(-1+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{3}{4}b^2)\dot{b}+b(1-\omega^2)+\varepsilon\omega\alpha(1-\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{4}b^2)]\sin\omega t$$

$$+[\varepsilon(-1+\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}b^2)\dot{\alpha}+(2\omega+\frac{1}{2}\varepsilon\alpha b)\dot{b}+\alpha(1-\omega^2)-\varepsilon\omega b(1-\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{4}b^2)]\cos\omega t=F\cos\omega t$$

Με την προϋπόθεση ότι τα α, b μεταβάλλονται αργά, μπορούμε περίπου να ισοσταθμίσουμε τους συντελεστές του $\cos\omega t$ και του $\sin\omega t$, και θέτοντας $r=\sqrt{\alpha^2+b^2}$, παίρνουμε το αυτόνομο σύστημα

$$\left(-2\omega+\frac{1}{2}\varepsilon\alpha b\right)\dot{\alpha}+\varepsilon\left(-1+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{3}{4}b^2\right)\dot{b}=-b\left(1-\omega^2\right)-\varepsilon\omega\alpha\left(1-\frac{1}{4}r^2\right) \tag{5.4.29}$$

$$\varepsilon\left(-1+\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{1}{4}b^2\right)\dot{\alpha}+\left(2\omega+\frac{1}{2}\varepsilon\alpha b\right)\dot{b}=F-\alpha\left(1-\omega^2\right)+\varepsilon\omega b\left(1-\frac{1}{4}r^2\right) \tag{5.4.30}$$

Ενδιαφερόμαστε για τις μόνιμες περιοδικές λύσεις, δηλαδή οι α, b να είναι σταθερές στον χρόνο, άρα $\dot{\alpha}=\dot{b}=0$, και οι (5.4.29), (5.4.30) γίνονται

$$\alpha\left(1-\frac{1}{4}r^2\right)-\frac{b\left(\omega^2-1\right)}{\varepsilon\omega}=0 \tag{5.4.31}$$

$$\alpha\frac{\left(\omega^2-1\right)}{\varepsilon\omega}+b\left(1-\frac{1}{4}r^2\right)=-\frac{F}{\varepsilon\omega} \tag{5.4.32}$$

Θέτουμε

$$\sigma=\frac{\omega^2-1}{\varepsilon\omega} \text{ και } \Gamma=\frac{F}{2\varepsilon\omega} \tag{5.4.33}$$

όπου σ η παράμετρος αποσυντονισμού, και οι (5.4.31), (5.4.32) γίνονται

$$\alpha\left(1-\frac{1}{4}r^2\right)-b\sigma=0 \tag{5.4.34}$$

$$\alpha\sigma+b\left(1-\frac{1}{4}r^2\right)=-2\Gamma \tag{5.4.35}$$

Τις υψώνουμε στο τετράγωνο, τις προσθέτουμε κατά μέλη, και έχουμε την εξίσωση του πλάτους απόκρισης στη μορφή

$$r^2\left[\sigma^2+\left(1-\tfrac{1}{4}r^2\right)^2\right]=4\Gamma^2 \tag{5.4.36}$$

Για απλοποίηση θέτουμε

$$\rho=\frac{1}{4}r^2$$

και θεωρώντας το πρώτο μέλος της (5.4.36) συνάρτηση του ρ, έχουμε

$$G(\rho)=\rho^3-2\rho^2+\left(1+\sigma^2\right)\rho=\Gamma^2, \quad \rho\geq 0 \tag{5.4.37}$$

η οποία έχει πρώτη παράγωγο

$$G'(\rho)=3\rho^2-4\rho+\left(1+\sigma^2\right)$$

και δεύτερη παράγωγο

$$G''(\rho)=6\rho-4$$

Συνεπώς η γραφική παράσταση της $G(\rho)$ έχει ένα σημείο καμπής στο $\rho=\frac{2}{3}$.

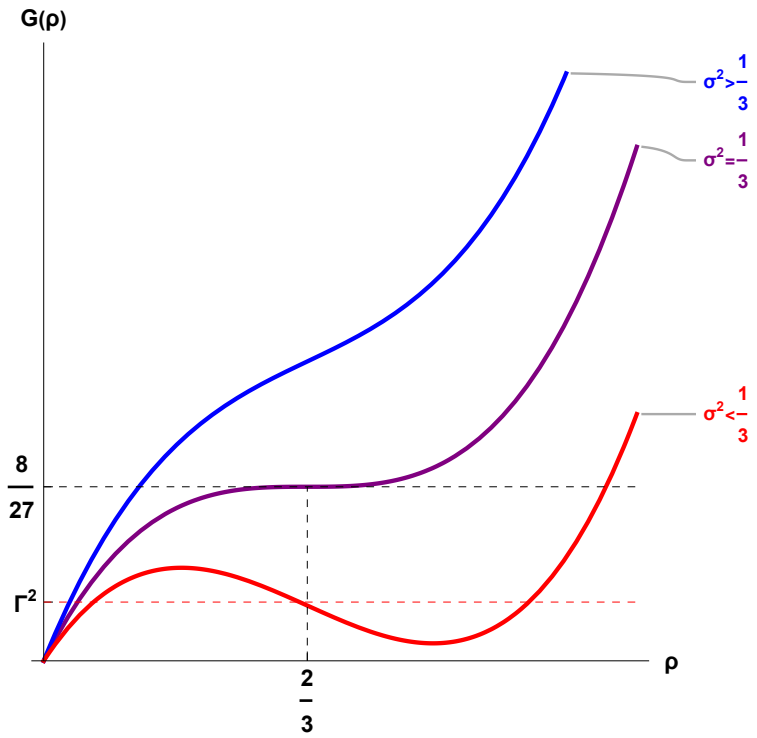
Οι μόνιμες περιοδικές αποκρίσεις του συστήματος προκύπτουν από τις θετικές ρίζες της εξίσωσης

$$G(\rho)=\Gamma^2$$

καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα επιτρεπτό πλάτος ταλάντωσης.

Θεωρητικά, γνωρίζουμε πως επειδή $G(0)=0$ και $\lim_{\rho\to+\infty} G(\rho)=+\infty$, η εξίσωση $G(\rho)=\Gamma^2$ έχει πάντα, τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

Αυτό επιβεβαιώνεται στο *Σχήμα 5.4.4*, όπου οι λύσεις μπορούν να προσδιοριστούν γραφικά από την τομή των συναρτήσεων $G(\rho)$ και $y=\Gamma^2$, και παρατηρούμε πως μπορεί να υπάρχουν *1*, *2*, ή *3* σημεία τομής, κι αυτό εξαρτάται από την τιμή της Γ^2.



Σχήμα 5.4.4: Οι ρίζες της εξίσωσης πλάτους απόκρισης για την εξαναγκασμένη ταλάντωση van der Pol.

Για να υπάρξουν, λοιπόν, περισσότερες από μια, θετικές ρίζες, η $G(\rho)$ πρέπει να έχει τοπικά ακρότατα, δηλαδή η παράγωγος $G'(\rho)$ να έχει δύο διακριτές πραγματικές ρίζες. Αν η παράγωγος δεν έχει πραγματικές ρίζες, η $G(\rho)$ είναι μονότονη και υπάρχει μόνο μία θετική ρίζα.

Η κρίσιμη μετάβαση, συμβαίνει όταν η ευθεία $y=\Gamma^2$ είναι εφαπτόμενη στην $G(\rho)$, δηλαδή όταν η εξίσωση (*5.4.37*) έχει διπλή ρίζα. Αυτό γίνεται όταν ισχύουν ταυτόχρονα

$$G(\rho)=\Gamma^2 \text{ και } \frac{dG(\rho)}{d\rho}=0$$

Συνεπώς, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$G'(\rho)=3\rho^2-4\rho+(1+\sigma^2)=0 \qquad (5.4.38)$$

Η (5.4.38) είναι δευτεροβάθμια, με διακρίνουσα $\Delta=4(1-3\sigma^2)$.

- Αν $\sigma^2<\frac{1}{3}$ τότε η $\Delta>0$, και η (5.4.38) έχει δύο θετικές ρίζες, τις $\rho_1=\frac{1}{3}(2-\sqrt{1-3\sigma^2})$ και $\rho_2=\frac{1}{3}(2+\sqrt{1-3\sigma^2})$, με $\rho_1<\rho_2$. Η κυβική συνάρτηση $G(\rho)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ρ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ρ_2.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\Gamma^2>G(\rho_1)$ ή $\Gamma^2<G(\rho_2)$

  δηλαδή αν η ευθεία $y=\Gamma^2$ βρίσκεται πάνω από το τοπικό μέγιστο ή κάτω από το τοπικό ελάχιστο, τότε, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 5.4.4*, υπάρχει ένα σημείο τομής, άρα μια περιοδική λύση.
- Αν $G(\rho_2)<\Gamma^2<G(\rho_1)$

  δηλαδή αν η ευθεία $y=\Gamma^2$ βρίσκεται ανάμεσα στα ακρότατα, τότε, όπως φαίνεται στο *Σχήμα 5.4.4*, υπάρχουν τρία σημεία τομής, άρα τρεις αποκρίσεις.
- Αν $\Gamma^2=G(\rho_1)$ (εφαπτομένη στο τοπικό μέγιστο), ή $\Gamma^2=G(\rho_2)$ (εφαπτομένη στο τοπικό ελάχιστο),

  τότε υπάρχει διπλή ρίζα στο ρ_1 ή αντίστοιχα στο ρ_2 και μία τρίτη απλή ρίζα σε άλλη θέση — συνολικά δύο διακριτά σημεία τομής, αλλά μία εξ αυτών είναι διπλή.

  Τα σημεία που η Γ^2 εφάπτεται στην κυβική συνάρτηση είναι τα **κρίσιμα σημεία ή σημεία αναδίπλωσης (fold points)** και οι δύο λύσεις συγχωνεύονται και εξαφανίζονται ή δημιουργούνται καθώς η Γ^2 διασχίζει τις τιμές αυτές.

- Αν $\sigma^2=\frac{1}{3}$ τότε η $\Delta=0$, και η (5.4.38) έχει διπλή ρίζα, τη $\rho_0=\frac{2}{3}$, και το σημείο καμπής της $G(\rho)$ είναι το $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{27}\right)$.

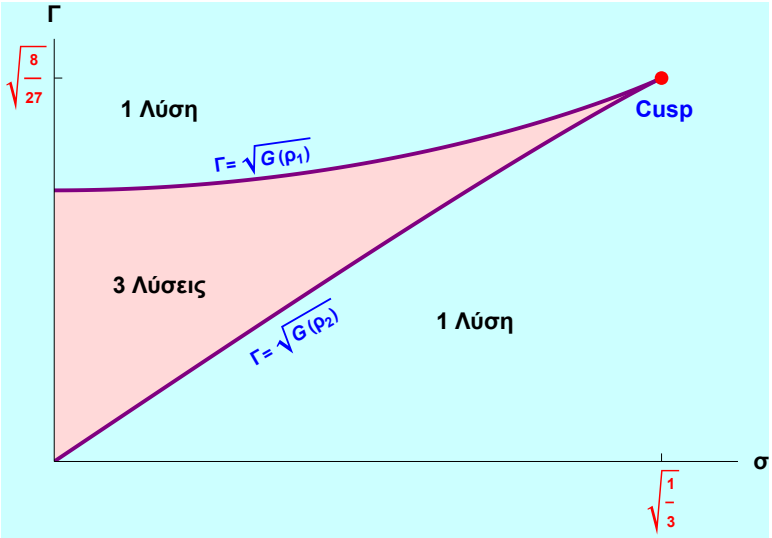
  Αν η $\Gamma^2=\frac{8}{27}$, η εξίσωση $G(\rho)=\Gamma^2$ έχει μια τριπλή ρίζα, την $\rho=\frac{2}{3}$ που είναι το **σημείο αιχμής (cusp)**. Αυτή είναι η εκφυλισμένη περίπτωση, όπου οι δύο καμπύλες $G(\rho_1)=\Gamma^2$ και

$G(\rho_2)=\Gamma^2$ συναντιούνται. Αν $\Gamma^2 \neq \frac{8}{27}$, τότε η εξίσωση $G(\rho)=\Gamma^2$ έχει μια μόνο ρίζα, άρα υπάρχει μόνο μια περιοδική ταλάντωση.

- Αν $\sigma^2 > \frac{1}{3}$ τότε η $\Delta<0$ και η (5.4.38) δεν έχει πραγματικές ρίζες. Η $G'(\rho)>0$ για κάθε $\rho>0$, άρα η $G(\rho)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, και αφού $G(0)=0$ και $\lim_{\rho \to +\infty} G(\rho)=+\infty$, η εξίσωση $G(\rho)=\Gamma^2$ έχει πάντα, μια θετική ρίζα, δηλαδή θα έχουμε μια μόνο περιοδική απόκριση.
- Τέλος, αν $\Gamma^2 > \frac{8}{27}$ η εξίσωση $G(\rho)=\Gamma^2$ έχει πάντα, μια θετική ρίζα, για κάθε τιμή του σ.

Μέχρι στιγμής, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε για σταθερές τιμές της παραμέτρου αποσυντονισμού σ και μελετήθηκε η εξάρτηση των περιοδικών λύσεων από το πλάτος της διέγερσης Γ. Από την εξίσωση πλάτους προέκυψαν οι κρίσιμες τιμές στις οποίες εμφανίζονται *fold points* και περιοχές πολλαπλών λύσεων.

Για την πληρέστερη κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς του εξαναγκασμένου ταλαντωτή *van der Pol*, παρουσιάζεται στο *Σχήμα* 5.4.5 η συνδυασμένη επίδραση των παραμέτρων σ και Γ. Στο επίπεδο παραμέτρων, τα σημεία αναδίπλωσης σχηματίζουν καμπύλες *fold*, οι οποίες διαχωρίζουν περιοχές μοναδικής και πολλαπλής απόκρισης, ενώ η γεωμετρία τους συνδέεται με τη θεωρία καταστροφών και ειδικότερα με την καταστροφή αιχμής (*cusp catastrophe*).



Σχήμα 5.4.5: Διάγραμμα (σ,Γ)

5.4.3.2 Καμπύλες του πλάτους απόκρισης

Στην παρούσα ενότητα, θα εξετάσουμε την ευστάθεια των περιοδικών λύσεων, μέσω της γραμμικοποίησης του συστήματος αργής ροής (5.4.29), (5.4.30) που προέκυψε από τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων.

◉ *Ανάλυση ευστάθειας των μόνιμων περιοδικών αποκρίσεων*

Από τις εξισώσεις (5.4.29), (5.4.30) παραλείπουμε τους πολύ μικρούς όρους $\varepsilon\dot{\alpha}$ και $\varepsilon\dot{\beta}$, και παίρνουμε το αυτόνομο σύστημα

$$\dot{\alpha}=\frac{\varepsilon}{2}[(1-\frac{1}{4}r^2)\alpha-\sigma b]=A(\alpha,b) \tag{5.4.39}$$

$$\dot{b}=\frac{\varepsilon}{2}[\sigma\alpha+(1-\frac{1}{4}r^2)b+2\Gamma]=B(\alpha,b) \tag{5.4.40}$$

Τα σημεία ισορροπίας δίνονται από

$$A(\alpha,b)=\frac{\varepsilon}{2}[(1-\frac{1}{4}r^2)\alpha-\sigma b]=0 \tag{5.4.41}$$

$$B(\alpha,b)=\frac{\varepsilon}{2}[\sigma\alpha+(1-\frac{1}{4}r^2)b+2\Gamma]=0 \tag{5.4.42}$$

Για να διερευνήσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας, θα προχωρήσουμε σε γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος (5.4.41), (5.4.42).
Αρχικά, αν (α_0,b_0) σημείο ισορροπίας, θέτουμε

$$\tilde{\alpha}=\alpha-\alpha_0$$

$$\tilde{b}=b-b_0$$

και το γραμμικοποιημένο σύστημα στα σημεία ισορροπίας, είναι

$$\dot{\tilde{\alpha}}=A_1(\alpha_0,b_0)(\alpha-\alpha_0)+A_2(\alpha_0,b_0)(b-b_0)$$

$$\dot{\tilde{b}}=B_1(\alpha_0,b_0)(\alpha-\alpha_0)+B_2(\alpha_0,b_0)(b-b_0)$$

όπου

$$A_1(\alpha_0,b_0)=\partial_\alpha A(\alpha_0,b_0),A_2(\alpha_0,b_0)=\partial_b A(\alpha_0,b_0),B_1(\alpha_0,b_0)=\partial_\alpha B(\alpha_0,b_0),B_2(\alpha_0,b_0)=\partial_b B(\alpha_0,b_0)$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος είναι τότε ο

$$\boldsymbol{J}(\alpha_0,b_0)=\begin{bmatrix} A_1(\alpha_0,b_0) & A_2(\alpha_0,b_0) \\ B_1(\alpha_0,b_0) & B_2(\alpha_0,b_0) \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{J}(\alpha_0,b_0)=\begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon}{8}(-4+3\alpha_0^2+b_0^2) & -\frac{\varepsilon}{4}(\alpha_0 b_0+2\sigma) \\ -\frac{\varepsilon}{4}(\alpha_0 b_0-2\sigma) & -\frac{\varepsilon}{8}(-4+\alpha_0^2+3b_0^2) \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα δίνονται από τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, στη μορφή

$$\lambda^2-p\lambda+q=0$$

όπου το ίχνος είναι

$$p=-\frac{\varepsilon}{2}(-2+\alpha_0^2+b_0^2)=-\frac{\varepsilon}{2}(-2+r_0^2)=\varepsilon(1-2\rho_0)$$

και η ορίζουσα

$$q=\frac{\varepsilon^2}{64}(16-16\alpha_0^2-3\alpha_0^4-16b_0^2+6\alpha_0^2b_0^2+3b_0^4+16\sigma^2)$$

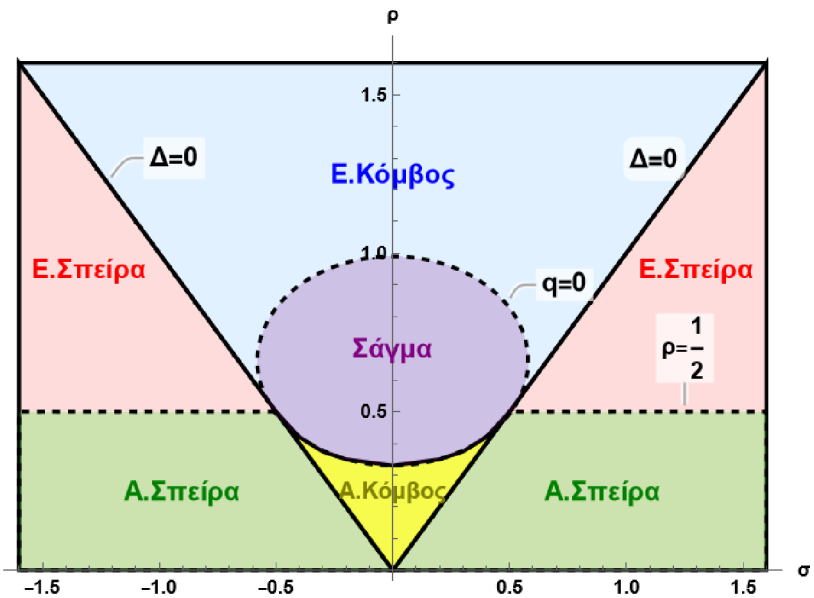
$$=\frac{\varepsilon^2}{64}(3r_0^4-16r_0^2+16+16\sigma^2)=\frac{\varepsilon^2}{4}(3\rho_0^2-4\rho_0+1+\sigma^2)$$

με $r_0=\sqrt{\alpha_0^2+b_0^2}$ και $\rho_0=\frac{1}{4}r_0^2$

Η διακρίνουσα της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι τότε

$$\Delta=p^2-4q=\frac{\varepsilon^2}{16}(\alpha_0^4+2\alpha_0^2b_0^2+b_0^4-16\sigma^2)=\frac{\varepsilon^2}{16}((\alpha_0^2+b_0^2)^2-16\sigma^2)-\varepsilon(\rho_0^2-\sigma^2)$$

Ανάλογα με τις τιμές των p,q και Δ, από τον *Πίνακα 2.2.1*, προκύπτει το είδος της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας.



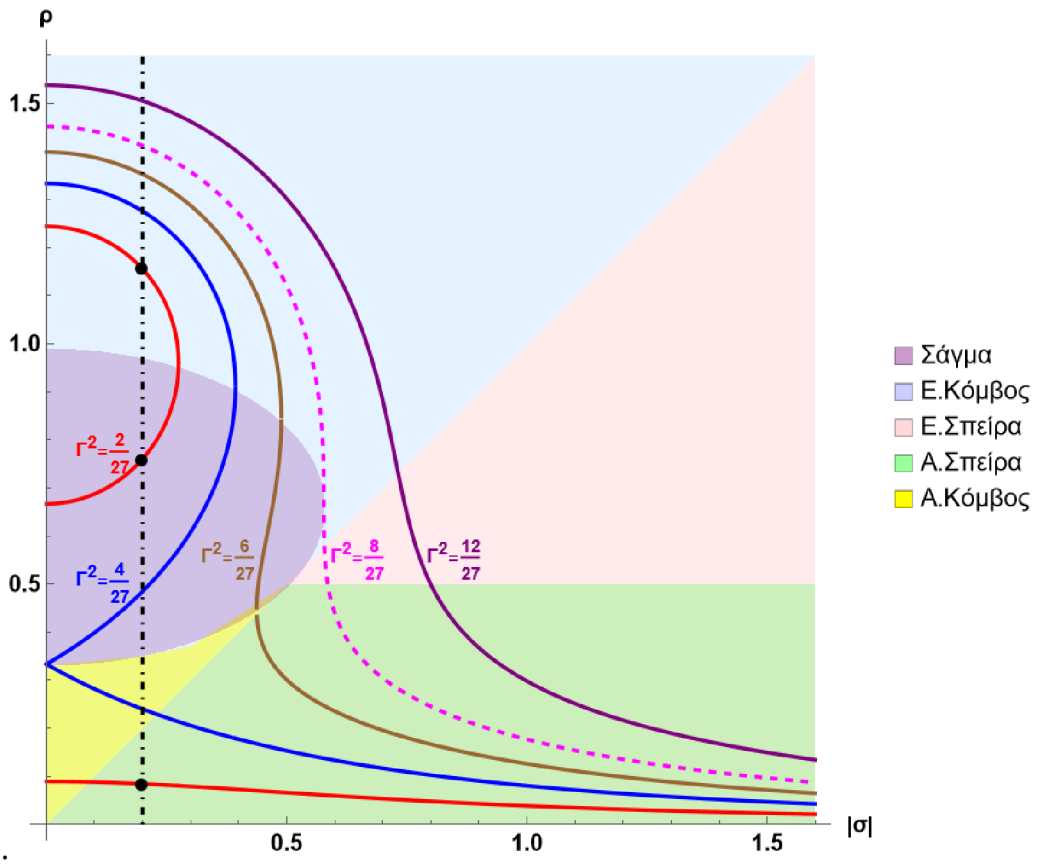
Σχήμα 5.4.6: Περιοχές ευστάθειας και διαχωριστικές καμπύλες

Οι καμπύλες $p=0$, $q=0$ και $\Delta=0$ αποτελούν διαχωριστικές καμπύλες (separatrices) στο επίπεδο παραμέτρων (σ,ρ), καθώς πάνω σε αυτές μεταβάλλεται ο χαρακτήρας της ισορροπίας.

Η καμπύλη $p=0$ αντιστοιχεί στην ευθεία $\rho=\frac{1}{2}$, η οποία διαχωρίζει τις ευσταθείς από τις ασταθείς περιοχές. Πιο συγκεκριμένα, για $\rho>\frac{1}{2}$ ισχύει $p<0$ και τα σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή, ενώ για $\rho<\frac{1}{2}$ ισχύει $p>0$ και τα σημεία είναι ασταθή.

Η καμπύλη $q=0$ είναι έλλειψη στο επίπεδο (σ,ρ). Τα σημεία στο εσωτερικό της έλλειψης αντιστοιχούν σε $q<0$, οπότε η ισορροπία είναι σημείο σάγματος, και συνεπώς ασταθής. Αντίθετα, στα εξωτερικά σημεία της έλλειψης ισχύει $q>0$, οπότε η ισορροπία είναι είτε κόμβος, είτε σπείρα.

Η καμπύλη $\Delta=0$ δίνεται από τις ευθείες $\rho=\pm\sigma$. Οι ευθείες αυτές διαχωρίζουν τις περιοχές κόμβων και σπειρών. Συγκεκριμένα, όταν $\Delta>0$, οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και το σημείο ισορροπίας είναι κόμβος, ενώ όταν $\Delta<0$, οι ιδιοτιμές είναι μιγαδικές συζυγείς και το σημείο ισορροπίας είναι σπείρα.



Σχήμα 5.4.7: Καμπύλες πλάτους απόκρισης και περιοχές ευστάθειας

Στο *Σχήμα* 5.4.6 φαίνονται οι διάφορες περιοχές ευστάθειας στις οποίες χωρίζεται το επίπεδο (σ,ρ), μαζί με τις διαχωριστικές καμπύλες.

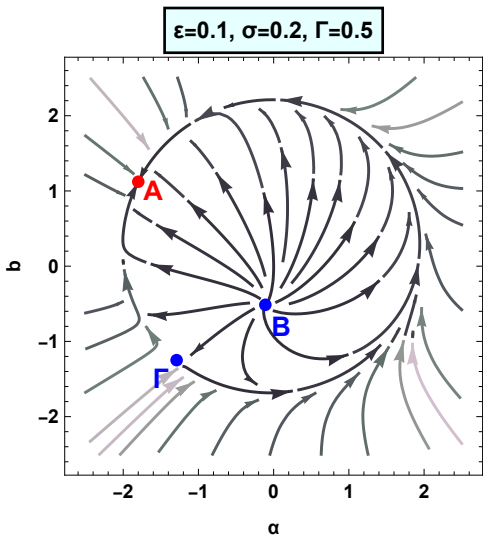
Στο *Σχήμα* 5.4.7 σχεδιάζουμε μαζί με τις περιοχές ευστάθειας, τις καμπύλες του πλάτους της απόκρισης από την (5.4.37) στο επίπεδο $(|\sigma|,\rho)$ για διάφορες τιμές του Γ^2, οι οποίες εξαρτώνται από τις τιμές των ω, ε και F από την (5.4.33). Για σ κοντά στο 0, η εξωτερική συχνότητα ω προσεγγίζει την φυσική συχνότητα του συστήματος που είδαμε πως είναι περίπου ίση με 1.

Παρατηρούμε πως αν επιβάλουμε μία ταλάντωση που αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας το οποίο βρίσκεται στην ασταθή περιοχή του *Σχήματος* 5.4.7, το σύστημα απομακρύνεται από αυτή την κατάσταση και μεταβαίνει είτε σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας, εφόσον αυτό είναι διαθέσιμο, είτε σε έναν οριακό κύκλο, ο οποίος αντιστοιχεί σε ημιπεριοδική κίνηση.

Συγκεκριμένα, τα φαινόμενα που αναμένονται για διάφορες τιμές των παραμέτρων σ, Γ ή ω,ε,F, είναι:

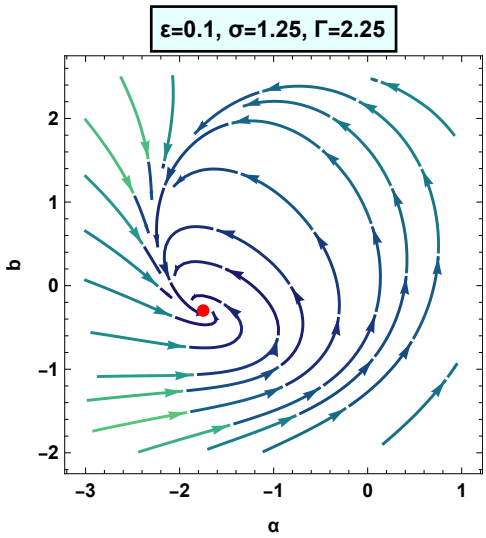
I. Όταν $\Gamma^2<\frac{8}{27}$ υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας. Από αυτά, το ένα είναι ευσταθές, ενώ τα άλλα δύο είναι ασταθή (σάγμα και ασταθής κόμβος ή ασταθής σπείρα). Οι τροχιές που ξεκινούν από ένα ευρύ σύνολο αρχικών συνθηκών έλκονται προς το ευσταθές σημείο ισορροπίας, το οποίο αντιστοιχεί στην περιοδική λύση (5.4.28) της αρχικής εξίσωσης. Συνεπώς, το σύστημα καταλήγει να ταλαντώνεται με τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης, γεγονός που αντιστοιχεί σε αρμονική παράσυρση. Το φαινόμενο αυτό είναι σχετικά ανθεκτικό σε μικρές μεταβολές των παραμέτρων ω, ε και F, καθώς το σύστημα παραμένει συγχρονισμένο στη συχνότητα της διέγερσης.

Στο *Σχήμα* 5.4.8 βλέπουμε το πορτραίτο φάσης του συστήματος για $\Gamma=0.5$ και $\sigma=0.2$, και παρατηρούμε πως η τροχιά πλησιάζει το σημείο ισορροπίας A.



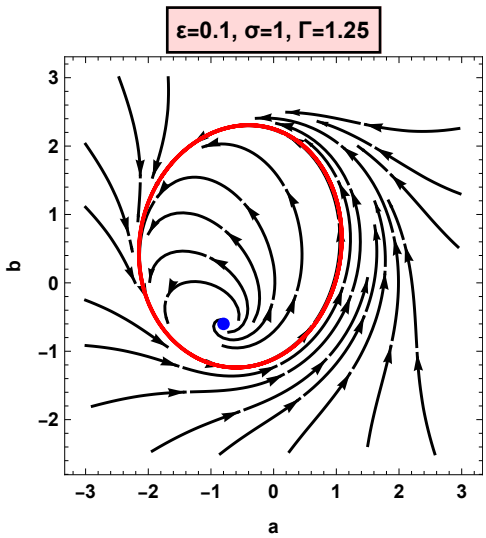
Σχήμα 5.4.8: Πορτραίτο φάσης στην περιοχή $\Gamma^2<\frac{8}{27}$

II. Όταν $\Gamma^2 > \frac{8}{27}$ και $\rho > \frac{1}{2}$, υπάρχει ένα μόνο σημείο ισορροπίας που είναι ευσταθής κόμβος ή ευσταθής σπείρα, και όλες οι τροχιές το πλησιάζουν (*Σχήμα 5.4.9*), Πάλι έχουμε το φαινόμενο της παράσυρσης, δηλαδή το σύστημα ταλαντώνεται με την εξωτερική συχνότητα.



Σχήμα 5.4.9: Πορτραίτο φάσης στην περιοχή $\Gamma^2 > \frac{8}{27}$ και $\rho > \frac{1}{2}$

III. Όταν $\Gamma^2 > \frac{8}{27}$ και $\rho < \frac{1}{2}$, υπάρχει ένα μόνο σημείο ισορροπίας, που είναι ασταθής σπείρα, άρα όλες οι τροχιές απομακρύνονται από αυτό και πλησιάζουν έναν οριακό κύκλο (θεώρημα *Poincaré–Bendixson*), όπως βλέπουμε στο *Σχήμα 5.4.10*. Εδώ έχουμε την περίπτωση της ημιπεριοδικής κίνησης, δηλαδή η ταλάντωση περιλαμβάνει την φυσική και την εξωτερική συχνότητα.



Σχήμα 5.4.10: Πορτραίτο φάσης στην περιοχή $\Gamma^2 > \frac{8}{27}$ και $\rho < \frac{1}{2}$

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, παρατηρείται ότι η ύπαρξη περιοδικής απόκρισης συνδέεται άμεσα με την παρουσία ευσταθών σημείων ισορροπίας του συστήματος. Όταν η αντίστοιχη περιοδική λύση είναι ευσταθής, η απόκριση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης συγχρονίζεται με τη διέγερση και το σύστημα εκτελεί μονοσυχνοτική περιοδική κίνηση στη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης, δηλαδή, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, έχουμε αρμονική παράσυρση.

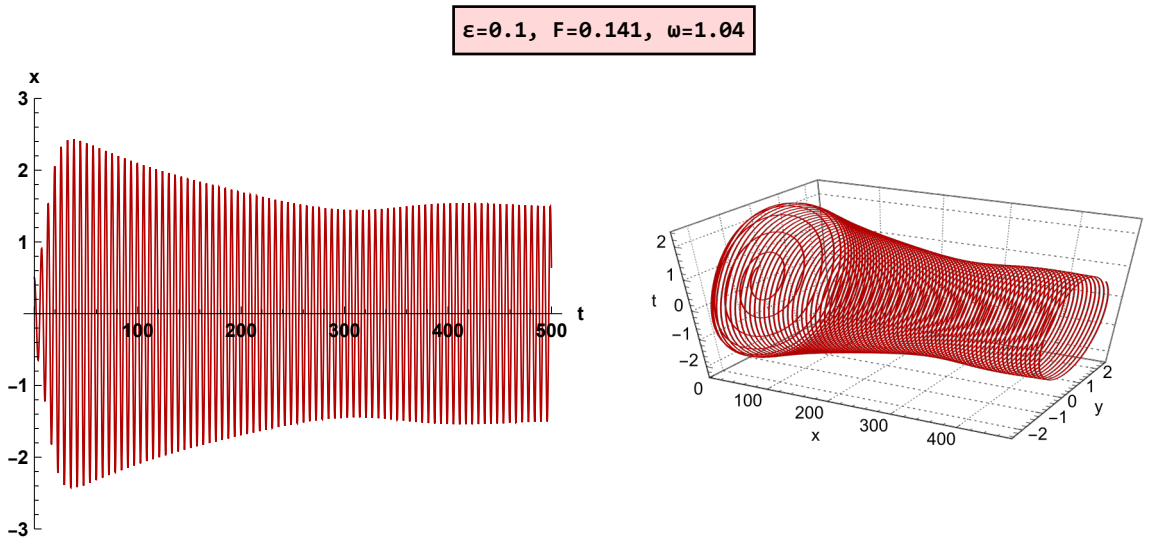
Αντίθετα, όταν δεν υπάρχει ευσταθές σημείο ισορροπίας, ο συγχρονισμός χάνεται και δεν είναι δυνατή η ύπαρξη ευσταθούς συγχρονισμένης απόκρισης. Στην περίπτωση αυτή η κίνηση δεν καταλήγει σε ταλάντωση μίας μόνο συχνότητας. Μετά την απόσβεση του μεταβατικού φαινομένου, συνυπάρχουν η φυσική συχνότητα του αυτόνομου ταλαντωτή, και η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης, με αποτέλεσμα η απόκριση να καθίσταται ημιπεριοδική.

Η εμφάνιση ημιπεριοδικής κίνησης αποτελεί ένδειξη **αποσυγχρονισμού** (**unlocking**) μεταξύ της αυτοσυντηρούμενης ταλάντωσης του συστήματος *van der Pol* και της εξωτερικής διέγερσης. Η μετάβαση από τη συγχρονισμένη στην αποσυγχρονισμένη κατάσταση πραγματοποιείται σε κρίσιμη τιμή της συχνότητας διέγερσης, γνωστή ως **συχνότητα αποσυγχρονισμού** (***pull-out frequency***), πέρα από την οποία η περιοδική συγχρονισμένη απόκριση παύει να υφίσταται. Κοντά στο όριο αυτό η ημιπεριοδική απόκριση εκδηλώνεται χαρακτηριστικά μέσω του **φαινομένου των παλμών** (***beat phenomenon***), το οποίο εμφανίζεται ως περιοδική αυξομείωση του πλάτους λόγω της συνύπαρξης δύο γειτονικών συχνοτήτων.

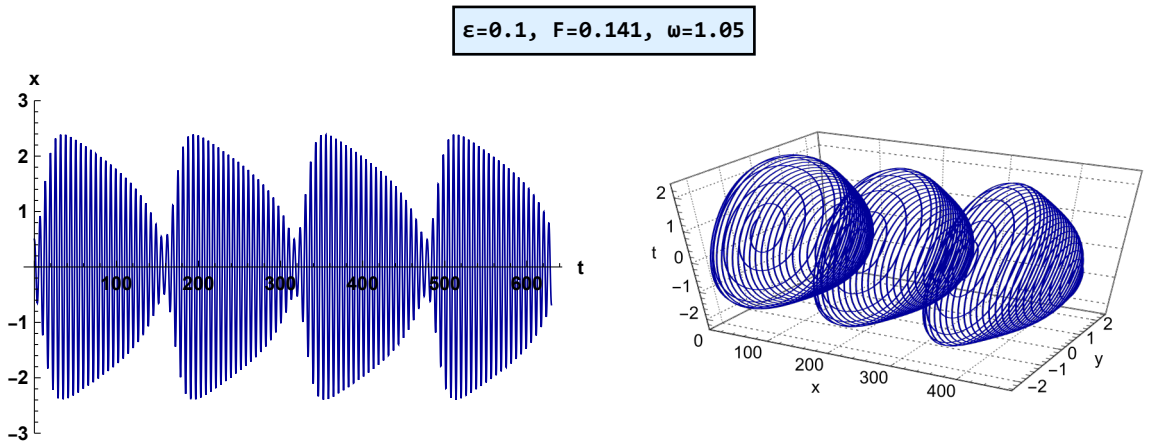
Τα παραπάνω αποτελέσματα γίνονται σαφέστερα στα *Σχήματα* 5.4.11 και 5.4.12.

Συγκεκριμένα, για $\varepsilon=0.1$, πλάτος διέγερσης $\Gamma=0.6714$ (που αντιστοιχεί σε $F=0.141$) και συχνότητα $\omega=1.04$, επιλύθηκε αριθμητικά η εξαναγκασμένη εξίσωση *van der Pol*. Από το διάγραμμα της χρονικής εξέλιξης και το τρισδιάστατο πορτραίτο φάσης του *Σχήματος* 5.4.11, παρατηρείται ότι, μετά την εξασθένηση των μεταβατικών φαινομένων, το σύστημα καταλήγει σε μόνιμη περιοδική κίνηση. Η συμπεριφορά αυτή είναι σύμφωνη με την ύπαρξη μοναδικού ευσταθούς σημείου ισορροπίας στην περιοχή όπου $\Gamma^2>\frac{8}{27}$ και $\rho>\frac{1}{2}$.

Όμως, για μια πολύ μικρή μεταβολή της συχνότητας στη τιμή $\omega=1.04$, η δυναμική του συστήματος μεταβάλλεται αισθητά. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα της απόκρισης και το αντίστοιχο τρισδιάστατο πορτραίτο φάσης του *Σχήματος* 5.4.12, η τροχιά δεν συγκλίνει πλέον σε μία απλή περιοδική κατάσταση αλλά εμφανίζει ημιπεριοδική συμπεριφορά. Η μετάβαση αυτή συνοδεύεται από την εμφάνιση παλμών, οι οποίοι οφείλονται στην αλληλεπίδραση δύο γειτονικών συχνοτήτων και αποτελούν ένδειξη ότι το σύστημα έχει εξέλθει από την περιοχή συγχρονισμού, δηλαδή η $\omega=1.04$ είναι η συχνότητα αποσυγχρονισμού.



Σχήμα 5.4.11: Χρονική εξέλιξη και τρισδιάστατο πορτραίτο φάσης ευσταθούς περιοδικής λύσης



Σχήμα 5.4.12: Χρονική εξέλιξη και τρισδιάστατο πορτραίτο φάσης ημιπεριοδικής λύσης με φαινόμενο παλμών

6. ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

6.1 Εφαρμογές του ταλαντωτή Duffing

Ο ταλαντωτής *Duffing* αποτελεί ένα από τα πιο θεμελιώδη μη γραμμικά δυναμικά συστήματα, το οποίο έχει μελετηθεί εκτενώς λόγω της ικανότητάς του να περιγράφει ένα ευρύ φάσμα φυσικών και μηχανικών διεργασιών όπου η γραμμική προσέγγιση δεν επαρκεί για την ακριβή περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς. Η χαρακτηριστική παρουσία κυβικής μη γραμμικότητας καθιστά το μοντέλο ικανό να αναπαραστήσει φαινόμενα όπως η εξάρτηση της ιδιοσυχνότητας από το πλάτος ταλάντωσης, καθώς και μη γραμμικές καμπύλες απόκρισης με σκλήρυνση (*hardening*) ή μαλάκωση (*softening*).

Λόγω αυτών των ιδιοτήτων, ο ταλαντωτής *Duffing* συναντάται σε πληθώρα εφαρμογών σε διαφορετικά πεδία της μηχανικής, όπως η μηχανολογία, η πολιτική μηχανική και η αεροναυπηγική, καθώς και σε συστήματα ελέγχου και βιολογικά δυναμικά μοντέλα, όπου η μη γραμμική απόκριση παίζει καθοριστικό ρόλο στη συνολική συμπεριφορά του συστήματος.

Μια ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία εφαρμογών αφορά τα μικρο-ηλεκτρο-μηχανικά συστήματα (*MEMS*), στα οποία οι μικρές γεωμετρικές διαστάσεις και η χαμηλή απόσβεση οδηγούν σε έντονη εμφάνιση μη γραμμικών φαινομένων. Σε τέτοιες διατάξεις, η δυναμική των μικρο-δομών μπορεί να περιγραφεί με εξισώσεις τύπου *Duffing*, λόγω των μεγάλων σχετικών μετατοπίσεων και των γεωμετρικών μη γραμμικοτήτων που προκύπτουν από την ελαστική παραμόρφωση.

Στην επόμενη υποενότητα παρουσιάζεται ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα *MEMS* ταλαντωτή, στο οποίο εξετάζεται η επίδραση της μη γραμμικότητας στη δυναμική απόκριση του συστήματος και αναδεικνύεται η σημασία της για την εμφάνιση πολύπλοκων φαινομένων, όπως ο εσωτερικός συντονισμός και η μη γραμμική μεταβολή της συχνότητας.

6.1.1 Εφαρμογές του ταλαντωτή Duffing σε συστήματα MEMS

Τα μικρο-ηλεκτρο-μηχανικά συστήματα (*Micro-Electro-Mechanical Systems – MEMS*) αποτελούν μικροσκοπικές μηχανικές δομές ενσωματωμένες σε ηλεκτρονικά κυκλώματα, οι οποίες αξιοποιούνται ευρέως σε αισθητήρες, ταλαντωτές αναφοράς, φίλτρα και συστήματα συλλογής ενέργειας. Η λειτουργία τους βασίζεται στη μηχανική ταλάντωση μικροδομών, όπως δοκοί, μεμβράνες και δίσκοι, οι οποίες διεγείρονται ηλεκτροστατικά, θερμικά ή πιεζοηλεκτρικά.

Συστήματα *MEMS* συναντώνται σε πλήθος σύγχρονων τεχνολογικών εφαρμογών, όπως κινητά τηλέφωνα, υπολογιστές, αυτοκίνητα, ιατρικές διατάξεις και τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

Λόγω της μικρής γεωμετρικής κλίμακας, της χαμηλής απόσβεσης και της αυξημένης ευαισθησίας σε μηχανικές παραμορφώσεις, τα *MEMS* εμφανίζουν συχνά μη γραμμική δυναμική συμπεριφορά, ιδιαίτερα όταν λειτουργούν κοντά στον συντονισμό ή σε μεγάλες ταλαντώσεις. Σε αυτές τις συνθήκες, η σχέση μεταξύ αποκαταστατικής δύναμης και μετατόπισης παύει να είναι γραμμική και η περιγραφή του συστήματος απαιτεί μη γραμμικά μοντέλα.

Σε πολλές περιπτώσεις, η δυναμική των *MEMS* δεν περιορίζεται σε μία μόνο ιδιομορφή ταλάντωσης, αλλά περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση πολλών ιδιομορφών. Η αλληλεπίδραση αυτή περιγράφεται μέσω όρων σύζευξης, οι οποίοι επιτρέπουν τη μεταφορά ενέργειας μεταξύ διαφορετικών τρόπων ταλάντωσης. Όταν οι ιδιοσυχνότητες δύο ιδιομορφών βρίσκονται κοντά σε ακέραιο λόγο, μπορεί να εμφανιστεί το φαινόμενο του **εσωτερικού συντονισμού** (**internal resonance**).

Ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση **εσωτερικού συντονισμού 1:2**, κατά τον οποίο η ιδιοσυχνότητα ενός τρόπου ταλάντωσης είναι περίπου διπλάσια της ιδιοσυχνότητας ενός άλλου. Η συνύπαρξη εσωτερικού συντονισμού και μη γραμμικότητας τύπου *Duffing* οδηγεί σε πολύπλοκα δυναμικά φαινόμενα, όπως ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ ιδιομορφών, υστέρηση, διακλαδώσεις και σταθεροποίηση της συχνότητας ταλάντωσης.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται πρόσφατη ερευνητική εργασία [27], στην οποία μελετάται ένας μικρομηχανικός ταλαντωτής *MEMS* με εσωτερικό συντονισμό 1:2 και ισχυρή μη γραμμικότητα τύπου *Duffing*. Η ανάλυση βασίζεται σε σύστημα συζευγμένων μη γραμμικών εξισώσεων και αναδεικνύει τον ρόλο του αποσυντονισμού και της μη γραμμικής σύζευξης στη δυναμική απόκριση και στη σταθεροποίηση της συχνότητας.

◆ *Το μοντέλο*

Για τη μελέτη του φαινομένου χρησιμοποιήθηκε ένας μικρομηχανικός ταλαντωτής τύπου δοκού διπλής πάκτωσης. Η γεωμετρία του σχεδιάστηκε έτσι ώστε να αυξηθεί ο συντελεστής της μη γραμμικότητας *Duffing*, και οι δύο κυρίαρχες ιδιομορφές κάμψης να έχουν ιδιοσυχνότητες πολύ κοντά σε λόγο 1:2. Μέσω θερμικής ρύθμισης της συχνότητας κατέστη δυνατή η ακριβής μεταβολή του λόγου των ιδιοσυχνοτήτων και η διερεύνηση διαφορετικών συνθηκών αποσυντονισμού.

Η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από δύο συζευγμένες μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, οι οποίες αντιστοιχούν στους δύο κυρίαρχους τρόπους ταλάντωσης της δοκού. Ο πρώτος τρόπος διεγείρεται αρμονικά και εμφανίζει κυβική μη γραμμικότητα τύπου

Duffing, ενώ ο δεύτερος ενεργοποιείται μέσω μη γραμμικής σύζευξης με τον πρώτο. Το μοντέλο γράφεται στη μορφή

$$\ddot{x}_1+2\zeta_1\dot{x}_1+\omega_1^2 x_1+\gamma_1 x_1^3+2\alpha x_1 x_2=F\sin\Omega t \qquad (6.1.1)$$

$$\ddot{x}_2+2\zeta_2\dot{x}_2+\omega_2^2 x_2+\alpha x_1^2=0 \qquad (6.1.2)$$

όπου x_1 και x_2 είναι οι γενικευμένες μετατοπίσεις των δύο ιδιομορφών, ω_1 και ω_2 οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες, ζ_1 και ζ_2 οι συντελεστές απόσβεσης, γ_1 ο συντελεστής της κυβικής μη γραμμικότητας *Duffing*, α ο συντελεστής μη γραμμικής σύζευξης, ενώ F και Ω αντιστοιχούν στο πλάτος και τη συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης.

Για τη διερεύνηση του εσωτερικού συντονισμού 1:2 θεωρήθηκε ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες βρίσκονται κοντά στη σχέση

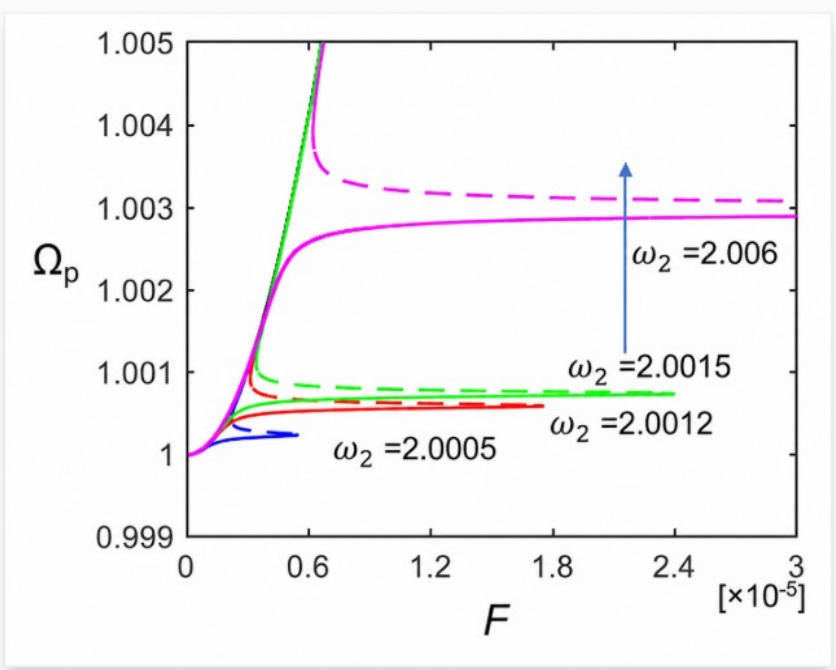
$$\omega_2=2\omega_1-\varepsilon\sigma \qquad (6.1.3)$$

όπου σ είναι η παράμετρος αποσυντονισμού και εκφράζει την απόκλιση από τον ακριβή λόγο 1:2. Η παράμετρος αυτή αποτελεί το βασικό μέγεθος ελέγχου της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο ιδιομορφών και επηρεάζει σημαντικά τη μεταφορά ενέργειας και τη δυναμική απόκριση του συστήματος.

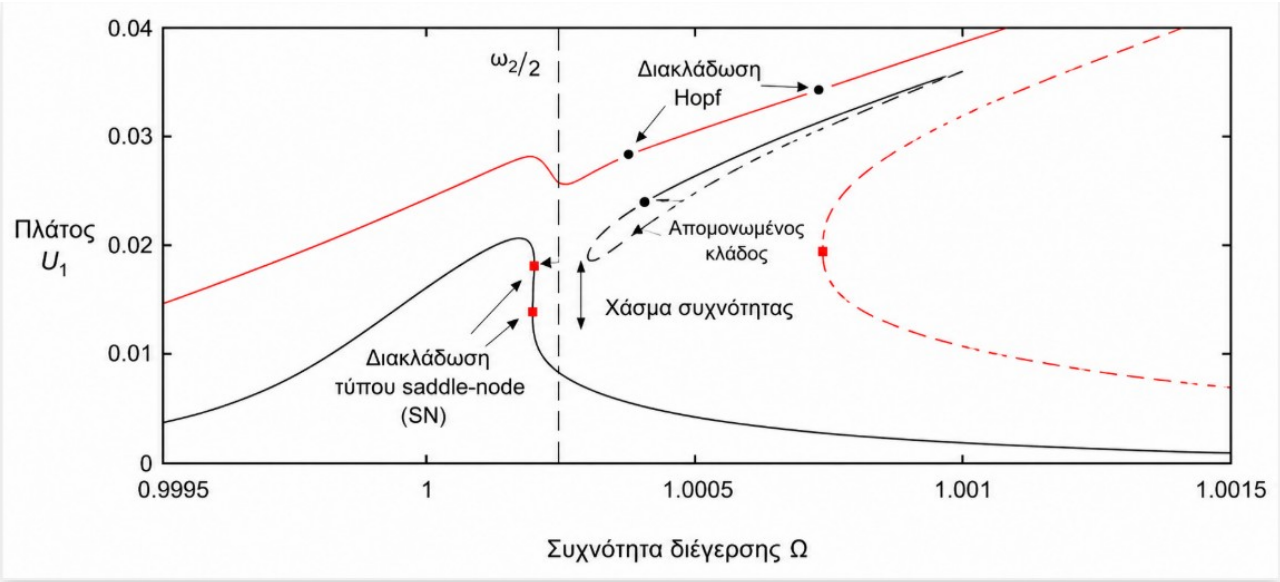
Εφαρμόζοντας μέθοδο ιδιόμορφων διαταραχών, αποδείχθηκε θεωρητικά, σε συμφωνία με πειραματικές παρατηρήσεις, ότι στο σημείο μηδενικής διασποράς η συχνότητα απόκρισης παραμένει σχεδόν σταθερή για ένα εύρος μικρών μεταβολών του πλάτους του διεγέρτη (*Σχήμα 6.1.1*).

Πέρα από αυτό το φαινόμενο, η μεταβολή της συχνότητας διέγερσης Ω επηρεάζει κυρίως το πλάτος της απόκρισης, το οποίο εμφανίζει την τυπική μη γραμμική συμπεριφορά τύπου *Duffing* με απότομες μεταβάσεις (*jump phenomena*). Στην περιοχή εσωτερικού συντονισμού 1:2, η μη γραμμική σύζευξη οδηγεί σε ανακατανομή της ενέργειας προς τον δευτερεύοντα τρόπο ταλάντωσης και στην εμφάνιση **απομονωμένου κλάδου λύσεων** (**isola**), περιορίζοντας το πλάτος απόκρισης σε συγκεκριμένες περιοχές του διαγράμματος πλάτους–συχνότητας. Έτσι, η συχνότητα απόκρισης παρουσιάζει ασθενή εξάρτηση από τη διεγείρουσα συχνότητα, υποδηλώνοντας δυναμικό κλείδωμα κοντά στον συντονισμό (*Σχήμα 6.1.2*).

Τα παραπάνω αναδεικνύουν ότι η μη γραμμικότητα δεν αποτελεί αποκλειστικά αποσταθεροποιητικό παράγοντα, αλλά μπορεί, υπό κατάλληλο ελεγχόμενο αποσυντονισμό, να αξιοποιηθεί για τον σχεδιασμό *MEMS* ταλαντωτών με βελτιωμένη σταθερότητα απόκρισης και μειωμένη ευαισθησία σε διακυμάνσεις της διέγερσης.



Σχήμα 6.1.1: Backbone καμπύλη της συχνότητας απόκρισης στο σημείο μηδενικής διασποράς ως συνάρτηση του πλάτους διέγερσης



Σχήμα 6.1.2: Απομονωμένος κλάδος πλάτους απόκρισης (isola) στο επίπεδο (Ω,U_1)

6.2 Εφαρμογές του ταλαντωτή van der Pol

Η εξίσωση *Van der Pol* αποτελεί ένα από τα κλασικά παραδείγματα μη γραμμικών αυτοδιεγειρόμενων ταλαντωτών, και έχει μελετηθεί εκτενώς ως πρότυπο σύστημα, με εφαρμογές σε πλήθος φυσικών και βιολογικών φαινομένων. Ενδεικτικά, έχει χρησιμοποιηθεί στη μοντελοποίηση ηλεκτρικών κυκλωμάτων, καρδιακών αρρυθμιών, νευρωνικής δραστηριότητας, χημικών ταλαντώσεων, καθώς και σε πεδία όπως η αστροφυσική, η εμβιομηχανική και τα υπολογιστικά οικονομικά.

Η ιδιότητά του να συγχρονίζεται με εξωτερική διέγερση τον καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμο για τη μελέτη φαινομένων συγχρονισμού που εμφανίζονται σε πολλά φυσικά και τεχνολογικά συστήματα. Το ενδιαφέρον για τα φαινόμενα συγχρονισμού ανάγεται ήδη στον *17ο* αιώνα, όταν ο *Christian Huygens* παρατήρησε ότι δύο εκκρεμή ρολόγια αναρτημένα με την πλάτη στον ίδιο τοίχο, τείνουν, μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, να ταλαντώνονται με κοινό ρυθμό. Η παρατήρηση αυτή θεωρείται μία από τις πρώτες καταγεγραμμένες περιπτώσεις αυθόρμητου συγχρονισμού συζευγμένων ταλαντωτών.

Στη σύγχρονη εποχή, τα φαινόμενα συγχρονισμού εξακολουθούν να αποτελούν αντικείμενο έντονης έρευνας, καθώς εμφανίζονται σε συστήματα πολύ διαφορετικής φύσης, από δίκτυα νευρώνων και χημικές ταλαντώσεις έως βιολογικούς ρυθμούς. Ιδιαίτερη σημασία έχουν και στην ιατρική τεχνολογία, όπου η λειτουργία συσκευών όπως οι τεχνητοί καρδιακοί βηματοδότες βασίζεται στην αλληλεπίδραση και τον συγχρονισμό με τη φυσική ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς, προκειμένου να διατηρείται ένας φυσιολογικός καρδιακός ρυθμός.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό παράδειγμα βιολογικού συστήματος στο οποίο ο συγχρονισμός διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο είναι το κιρκάδιο σύστημα, που θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια.

6.2.1 Ο βηματοδότης van der Pol και ο συγχρονισμός με το φως

Ο ταλαντωτής *van der Pol* έχει χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση μίας από τις θεμελιώδεις περιοδικές λειτουργίες του ανθρώπου, αλλά και άλλων οργανισμών, δηλαδή του **κιρκάδιου ρυθμού**. Ο κιρκάδιος ρυθμός αποτελεί έναν ενδογενή βιολογικό μηχανισμό με περίοδο περίπου 24 ωρών, ο οποίος ρυθμίζει διάφορες φυσιολογικές λειτουργίες, όπως τον κύκλο ύπνου–εγρήγορσης, τη θερμοκρασία του σώματος και την έκκριση ορμονών. Με απλά λόγια, ο ταλαντωτής θεωρείται ότι προσομοιώνει τον βιολογικό βηματοδότη που είναι γνωστός ως υπερχιασματικός πυρήνας. Ο

πυρήνας αυτός βρίσκεται στον υποθάλαμο του εγκεφάλου και θεωρείται ο κύριος ρυθμιστής του ανθρώπινου κιρκάδιου συστήματος.

Για τον σκοπό αυτό, η αρχική μορφή του ταλαντωτή *van der Pol* έχει επεκταθεί με μη γραμμικότητες υψηλότερης τάξης, καθώς και με πρόσθετους βαθμούς ελευθερίας που επιτρέπουν την περιγραφή των κιρκάδιων ταλαντώσεων διαφόρων βιολογικών λειτουργιών.

Επιπλέον, θεωρείται ότι ο κιρκάδιος ταλαντωτής αλληλεπιδρά με το περιβάλλον και συγχρονίζεται με περιοδικά φωτεινά ερεθίσματα.

Σε πρόσφατη εργασία του *2022* [28], προτάθηκε η ακόλουθη τροποποιημένη εξίσωση *van der Pol* για την περιγραφή του ανθρώπινου κιρκάδιου βηματοδότη

$$\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \ddot{x}+\mu\left(-\frac{1}{3}-4x^2+\frac{256}{15}x^6\right)\left(\frac{12}{\pi}\right)\dot{x}+\left(\frac{24}{\tau_x}\right)^2 x=0 \qquad (6.2.1)$$

όπου η μεταβλητή x αντιπροσωπεύει τη συνιστώσα του ανθρώπινου κιρκάδιου βηματοδότη που αντανακλά τον ενδογενή κύκλο της θερμοκρασίας του πυρήνα του σώματος. Η παράμετρος τ_x εκφράζει την εγγενή περίοδο του κιρκάδιου ταλαντωτή, ενώ η παράμετρος μ καθορίζει τη μη γραμμική απόσβεση και τη δυναμική του οριακού κύκλου. Ο ταλαντωτής αυτός θεωρείται το βασικό δυναμικό στοιχείο που ρυθμίζει τον κύκλο ύπνου–εγρήγορσης.

Εφαρμόζοντας μέθοδο ιδιόμορφων διαταραχών *Poincaré–Lindstedt*, υπολογίζεται πως η εξίσωση αυτή οδηγείται σε οριακό κύκλο πλάτους $A\approx 1$ και περίοδο $T\approx 24.45$, όταν $\mu\approx 0.23$.

Είναι γνωστό από παλιότερες μελέτες πως στον άνθρωπο η παράμετρος μ παίρνει τιμές στο διάστημα [0.005, 0.34], άρα η τιμή $\mu=0.23$ είναι πολύ λογική για τον κιρκάδιο ρυθμό μας, και τα αποτελέσματα της διαταρακτικής μεθόδου πολύ ικανοποιητικά.

Το σημαντικό αποτέλεσμα εδώ, είναι ότι η φυσική περίοδος του συστήματος δεν είναι ακριβώς *24* ώρες, γεγονός που οδηγεί σε σταδιακή απόκλιση από τον εξωτερικό ημερήσιο κύκλο όταν δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση.

Αυτό αντιστοιχεί στο φαινόμενο του **free-running circadian rhythm**, όπου ο βιολογικός ρυθμός «τρέχει ελεύθερα» χωρίς συγχρονισμό με το περιβάλλον. Με άλλα λόγια, χωρίς το ηλιακό φως, ο ύπνος μας θα μετατοπιζόταν συνεχώς, αποσυγχρονίζοντας τον οργανισμό μας.

Έτσι, η επίδραση του φωτός εισάγεται ως εξωτερική περιοδική διέγερση, με αποτέλεσμα το σύστημα να γράφεται

$$\left(\frac{12}{\pi}\right)^2 \ddot{x}+\mu\left(-\frac{1}{3}-4x^2+\frac{256}{15}x^6\right)\left(\frac{12}{\pi}\right)\dot{x}+\left(\frac{24}{\tau_x}\right)^2 x=I(t) \qquad (6.2.2)$$

όπου $I(t)=H(D_L-t_{24})I_0\sin(\omega t_{24}+\varphi)$ με $\omega=\frac{\pi}{D_L}$, και $t_{24}=mod(t,24)$

Το μοντέλο χρησιμοποιεί τη συνάρτηση *Heaviside* (*H*) για τη δημιουργία μιας κενής περιόδου που αντιστοιχεί στη διάρκεια της νύχτας. Η D_L είναι η διάρκεια της ημερήσιας φωτεινής διέγερσης, η οποία εξαρτάται από τις εποχικές μεταβολές, ενώ το I_0 εκφράζει την ένταση του φωτός κατά τη διάρκεια της ημέρας. Η διαφορά φάσης φ σχετίζεται με το φαινόμενο *jet lag* που προκύπτει από αλλαγές χρονικής ζώνης.

Συνεπώς, η $I(t)$ περιγράφει τον περιοδικό κύκλο φωτός–σκότους. Η εξωτερική αυτή διέγερση λειτουργεί ως μηχανισμός συγχρονισμού (παράσυρση) του βιολογικού ρολογιού με το περιβάλλον. Για την αναλυτική προσέγγιση του συστήματος, η διέγερση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά *Fourier* και να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από την κύρια αρμονική συνιστώσα, η οποία κυριαρχεί στη δυναμική.

Με την εισαγωγή της εξωτερικής διέγερσης, η λύση προσεγγίζεται μέσω μεθόδων διαταραχών, θεωρώντας σχεδόν ημιτονοειδή ταλάντωση με αργά μεταβαλλόμενο πλάτος και φάση, καθώς και ενδεχόμενη σταθερή μετατόπιση της μέσης θέσης ισορροπίας.

Η ανάλυση οδηγεί στα εξής βασικά συμπεράσματα:

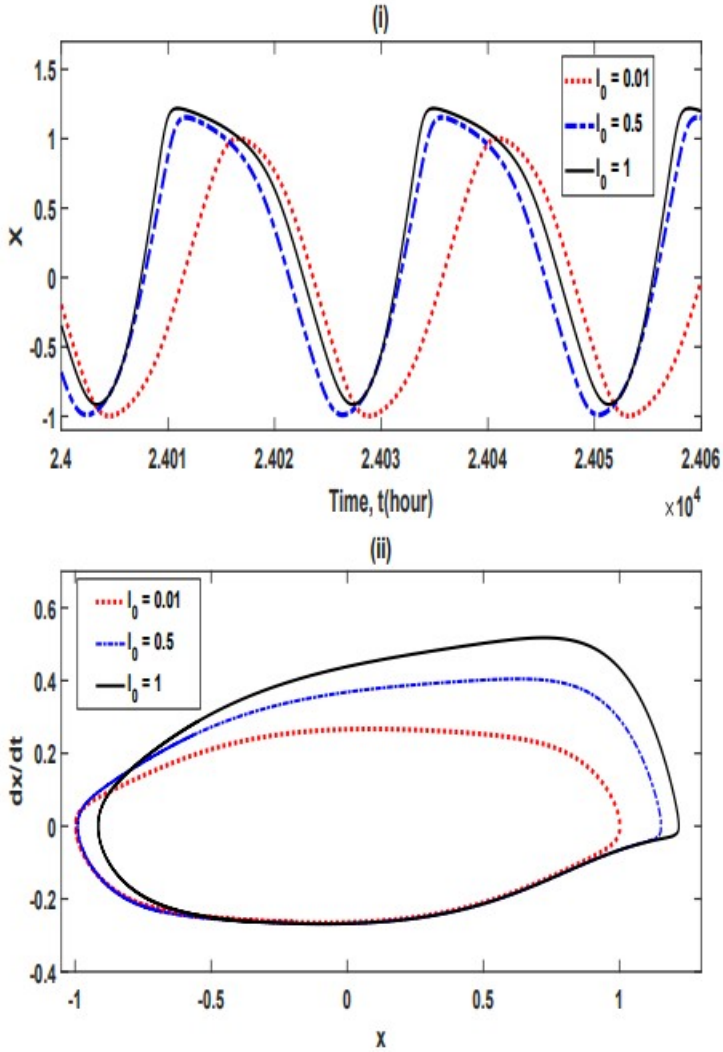
Η μελέτη του τροποποιημένου ταλαντωτή οδηγεί στην ύπαρξη ενός σταθερού οριακού κύκλου με περίοδο κοντά στις *24* ώρες. Στην απουσία εξωτερικής διέγερσης, το σύστημα παρουσιάζει ελαφρά απόκλιση από το αστρονομικό ημερονύκτιο, εκδηλώνοντας ελεύθερη εξέλιξη του κιρκάδιου ρυθμού (free-running regime).

Η εισαγωγή περιοδικής φωτεινής διέγερσης οδηγεί σε εξωτερικό συγχρονισμό του ταλαντωτή. Η απόκριση του συστήματος και τα αντίστοιχα πορτραίτα φάσης για διαφορετικές τιμές της έντασης I_0 παρουσιάζονται στο *Σχήμα 6.2.1*

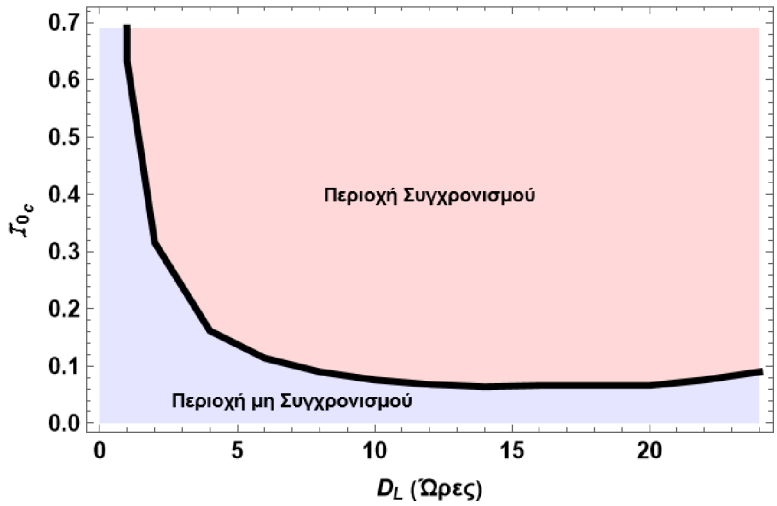
Για τιμές της έντασης άνω μιας κρίσιμης τιμής I_{0c}, παρατηρείται κλείδωμα της περιόδου στην τιμή των *24* ωρών όπως παρουσιάζεται στο *Σχήμα 6.2.2*, όπου διακρίνονται σαφώς η περιοχή συγχρονισμού και η περιοχή μη συγχρονισμού.

Η κρίσιμη αυτή τιμή εξαρτάται από τη διάρκεια της ημερήσιας έκθεσης στο φως, γεγονός που υποδηλώνει έντονη εποχική επίδραση στον μηχανισμό συγχρονισμού. Παράλληλα, ο χρόνος προσαρμογής στο συγχρονισμένο καθεστώς αυξάνεται με την ένταση και τη διάρκεια της διέγερσης, αναδεικνύοντας τη δυναμική φύση της διαδικασίας προσαρμογής (*jet lag*).

Τέλος, η ανάλυση δείχνει ότι η ύπαρξη επαρκούς σκοτεινής περιόδου είναι κρίσιμη για τη διατήρηση ταλαντώσεων μεγάλου πλάτους, ενώ παρατεταμένη φωτεινή έκθεση οδηγεί σε εξασθένηση της κιρκάδιας δυναμικής, ακόμη και σε σχεδόν πλήρη καταστολή της ταλάντωσης.



Σχήμα 6.2.1: Απόκριση x(t) και διαγράμματα φάσεων για τρεις τιμές του I_0 με D_L=12 h.



Σχήμα 6.2.2: Διαχωριστική καμπύλη στο επίπεδο (I_0,D_L) μεταξύ της περιοχής συγχρονισμού και της περιοχής μη συγχρονισμού

Παράρτημα Α.
Γραμμικές Ταλαντώσεις

Στο παρόν παράρτημα παρουσιάζεται η θεωρία των γραμμικών ταλαντώσεων ως συμπληρωματικό υλικό της εργασίας. Η μελέτη τους αποτελεί απαραίτητη βάση για την κατανόηση και την ερμηνεία της δυναμικής συμπεριφοράς των μη γραμμικών ταλαντωτικών συστημάτων που αναλύονται στο κυρίως μέρος της.

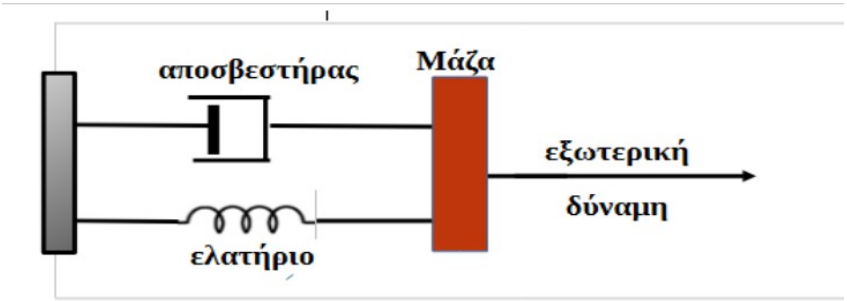
Γραμμικές ταλαντώσεις

Θεωρούμε ένα σώμα μάζας *m*, στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, του οποίου το άλλο άκρο είναι πακτωμένο σε σταθερό σημείο.

Παράλληλα με τον άξονα του ελατηρίου βρίσκεται κάποιος αποσβεστικός μηχανισμός, ενώ εφαρμόζεται στο σώμα μια εξωτερική δύναμη, όπως φαίνεται στο *Σχήμα A.1*.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

- Το σώμα είναι άκαμπτο, δηλαδή δεν υφίσταται καμία παραμόρφωση από τις δυνάμεις που του ασκούνται.
- Το ελατήριο έχει μέτρο ακαμψίας *κ*, όπου *κ* θετική σταθερά.
- Η εξωτερική δύναμη μπορεί να είναι αρμονική, μη αρμονική, περιοδική, ή απεριοδική.
- Ο μηχανισμός απόσβεσης έχει συντελεστή *b*.
- Επειδή το σώμα κινείται στην διεύθυνση του άξονα του ελατηρίου, η μοναδική μεταβλητή που περιγράφει την κίνησή του είναι η μετατόπιση *x*, συναρτήσει του χρόνου *t*.



Σχήμα A.1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου

Εφαρμόζουμε τον **δεύτερο νόμο του Νεύτωνα**, για τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα:

$$\Sigma F = m\alpha \qquad (A.1)$$

και έχουμε

$$F(t) - F_{\kappa} - F_b = F_m \qquad (A.2)$$

ή

$$F(t)=F_m+F_\kappa+F_b \tag{A.3}$$

όπου $F(t)$ είναι η εξωτερική δύναμη.

Οι δυνάμεις αδράνειας που ασκούνται στο σώμα, λόγω επιτάχυνσης, δίνονται από τη σχέση

$$F_m=m\alpha=\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{A.4}$$

Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου δίνεται από τη σχέση

$$F_k=-\kappa x \tag{A.5}$$

και η δύναμη απόσβεσης από τη σχέση

$$F_b=-b\frac{dx}{dt} \tag{A.6}$$

Ανάλογα με το αν υπάρχει απόσβεση, και εξωτερική δύναμη, οι ταλαντώσεις ενός συστήματος διακρίνονται σε:

- Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση (αμείωτη περιοδική κίνηση)
- Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση
- Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση
- Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση
- Εξαναγκασμένη μη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

Α.1 Απλή αρμονική ταλάντωση

Όταν στο σώμα ασκείται μόνο η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου F_κ, αφού $b = 0$, και $F(t)=0$, η *(A.3)*, δίνει

$$F_m+F_\kappa=0 \tag{A.7}$$

Αντικαθιστούμε τις F_m, F_k στην *(A.7)* και έχουμε

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\kappa x=0 \tag{A.8α}$$

ή ισοδύναμα

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=0 \tag{A.8β}$$

όπου η $\boldsymbol{\omega_0=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}}$ ονομάζεται **κυκλική ιδιοσυχνότητα,** ή **φυσική κυκλική συχνότητα** του συστήματος.

Η *(Α.8β)* είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, ομογενής. Ονομάζεται **εξίσωση του γραμμικού ταλαντωτή** και έχει περιοδική λύση

$$x(t)=C\,sin(\omega_0 t)+D\,cos(\omega_0 t) \qquad (A.9\alpha)$$

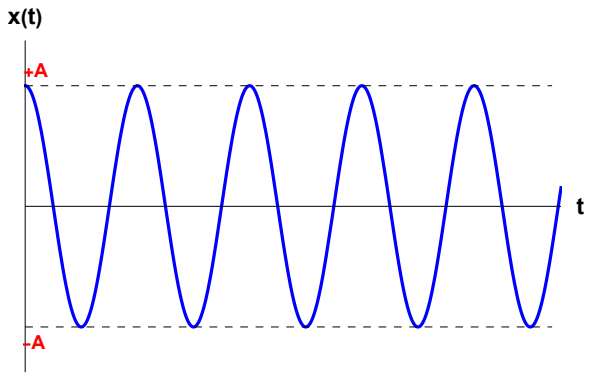
όπου οι συντελεστές C και D είναι δυνατό να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες που λαμβάνονται για τις τιμές της μετατόπισης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης.

Η λύση *(Α.9α)* μπορεί να τεθεί και στη μορφή

$$x(t)=A\,cos(\omega_0 t-\varphi) \qquad (A.9\beta)$$

όπου $A=\sqrt{C^2+D^2}$ το πλάτος της ταλάντωσης και $\varphi=\arctan(\frac{C}{D})$ η αρχική της φάση.

Η συνάρτηση *(Α.9β)* καλείται **συνάρτηση της μετατόπισης,** και παριστάνει **αρμονική ταλάντωση.**



Σχήμα Α.2: Αρμονική ταλάντωση

Το πλάτος είναι η μέγιστη δυνατή απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας, $x_{max}=A$, όπως βλέπουμε και στο *Σχήμα Α.2*.

Υπενθυμίζουμε πως η περίοδος της αρμονικής ταλάντωσης που ορίζεται από $x(t+T)=x(t)$ είναι:

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$$

Επίσης συνδέεται με τη συχνότητα $f=\frac{1}{T}$, με τη σχέση $\omega_0=2\pi f$.

Α.2 Αρμονική ταλάντωση με απόσβεση

Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με απόσβεση έχει την μορφή

$$F_m+F_\kappa+F_b=0$$

που προκύπτει από την *(Α.3)* αν τεθεί $F(t)=0$.

Αντικαθιστούμε τις δυνάμεις F_m, F_κ, F_b, και παίρνουμε την διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\kappa x=0$$

ή

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad (A.10)$$

όπου $k=\frac{b}{m}$ και $\omega_0=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$, είναι σταθερές που δεν εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες.

Είναι φανερό πως k είναι ο συντελεστής απόσβεσης, και ω_0^2 είναι η σταθερά του ελατηρίου.

Η εξίσωση *(A.10)* είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές. Το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο είναι

$$\lambda^2+k\lambda+\omega_0^2=0$$

με ρίζες

$$\lambda_1=-\frac{k}{2}+\frac{\sqrt{k^2-4\omega_0^2}}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_2=-\frac{k}{2}-\frac{\sqrt{k^2-4\omega_0^2}}{2}$$

Η γενική λύση της *(A.10)* καθορίζεται από τη φύση των ριζών λ_1 και λ_2.

Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις, που θα δούμε ξεχωριστά.

<u>Περίπτωση (α):</u> $\Delta>0 \Rightarrow k>2\omega_0$ **(Ισχυρή απόσβεση ή υπεραπόσβεση)**

Σε αυτήν την περίπτωση οι ρίζες λ_1 και λ_2 είναι πραγματικές, διακεκριμένες και αρνητικές.

Η γενική λύση της *(A.10)* είναι τότε

$$x(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}+c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (A.11)$$

με c_1 και c_2 σταθερές που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

<u>Περίπτωση (β):</u> $\Delta=0 \Rightarrow k=2\omega_0$ **(Κρίσιμη απόσβεση)**

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2$, και η γενική λύση της *(A.10)* είναι τότε

$$x(t)=c_1 e^{\frac{-k}{2}t}+c_2 t e^{\frac{-k}{2}t} \quad \text{ή} \quad x(t)=(c_1+c_2 t)e^{\frac{-k}{2}t} \qquad (A.12)$$

<u>Περίπτωση (γ):</u> $\Delta<0 \Rightarrow k<2\omega_0$ **(Ασθενής απόσβεση ή υποαπόσβεση)**

Εδώ οι ρίζες λ_1 και λ_2 είναι μιγαδικές συζυγείς, και η γενική λύση της (*A.10*) έχει τη μορφή

$$x(t)=e^{\frac{-k}{2}t}(c_1\cos(\omega_d t)+c_2\sin(\omega_d t)) \qquad (A.13\alpha)$$

ή

$$x(t)=A_0 e^{\frac{-k}{2}t}\cos(\omega_d t-\varphi) \qquad (A.13\beta)$$

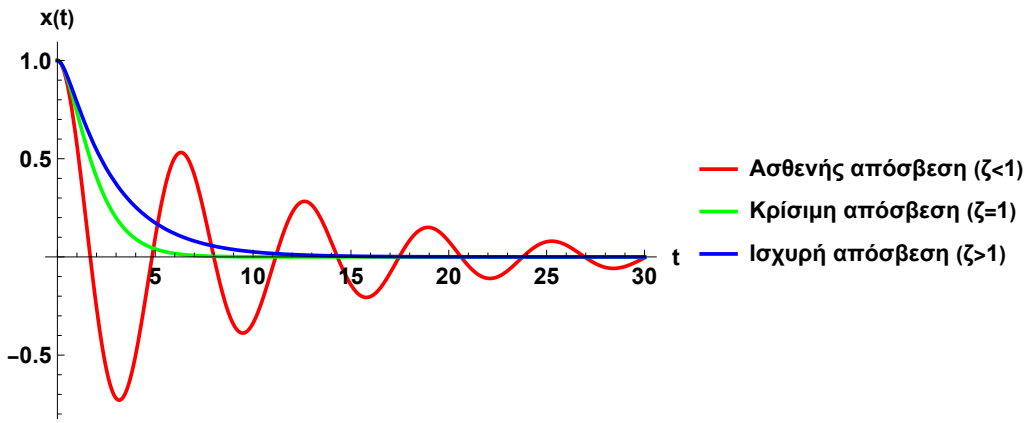
όπου $A_0=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\frac{k^2}{4}}$ και $\varphi=\arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$

Ορισμός του λόγου απόσβεσης ζ

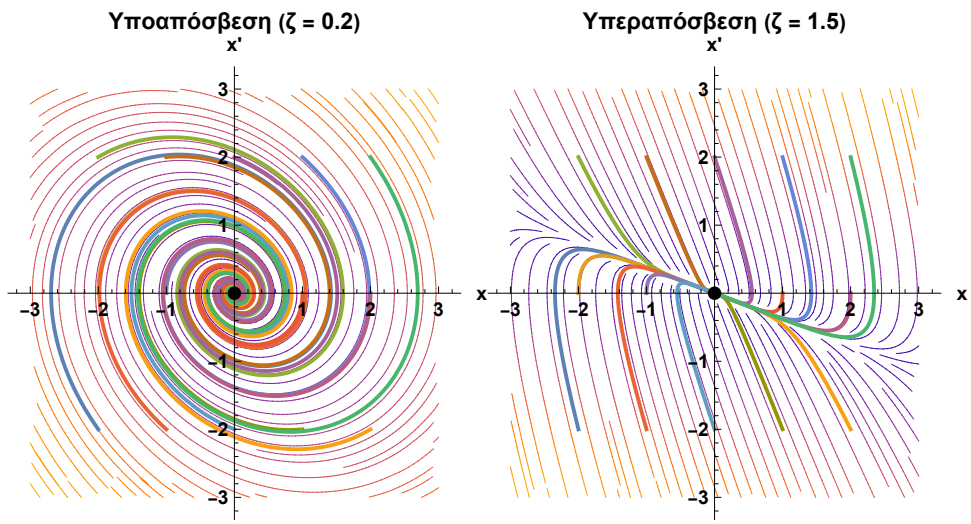
Ο λόγος απόσβεσης

$$\zeta = \frac{k}{2\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{\kappa m}} \tag{A.14}$$

είναι αδιάστατος και χρησιμοποιείται ευρέως, για την μελέτη των ταλαντώσεων. Εάν ο λόγος απόσβεσης είναι μεγαλύτερος της μονάδας, η απόσβεση είναι ισχυρή, εάν είναι μικρότερος, η απόσβεση είναι ασθενής, και αν είναι ίσος με τη μονάδα η απόσβεση είναι κρίσιμη.



Σχήμα Α.3: Αρμονική ταλάντωση με απόσβεση



Σχήμα Α.4: Πορτραίτα φάσης αρμονικής ταλάντωσης με απόσβεση

Συμπεράσματα

Όλες οι παραπάνω λύσεις λέγονται λύσεις της μεταβατικής περιόδου γιατί παρατηρούμε ότι όλες τείνουν στο μηδέν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Το σύστημα εξαιτίας της αντίστασης

(απόσβεσης) επιστρέφει τελικά στη θέση ισορροπίας του. Οι σταθερές που εμφανίζονται σε κάθε λύση προσδιορίζονται ως συνήθως από τις αρχικές συνθήκες.

Από τα *Σχήματα A.3-A.4* και από την θεωρητική ανάλυση παρατηρούμε τα εξής:

- **Ισχυρή απόσβεση**

Το σώμα δεν πραγματοποιεί καμιά ταλάντωση, όμως υπερνικά την τριβή και επιστρέφει στη θέση ισορροπίας σε άπειρο χρόνο.

- **Κρίσιμη απόσβεση**

Επίσης δεν έχουμε ταλάντωση, και η μετατόπιση έχει τα ίδια φυσικά χαρακτηριστικά με την περίπτωση της ισχυρής απόσβεσης.

- **Ασθενής απόσβεση**

Από την *(A.14)*, η συχνότητα ω μπορεί να γραφεί ως

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$$

που καλείται και **συχνότητα αποσβεννύμενων ταλαντώσεων.** Το σύστημα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, με την κυκλική συχνότητα ω_d να είναι λίγο μικρότερη της φυσικής συχνότητας της αμείωτης ταλάντωσης ω_0. Το πλάτος $A(t)$, φθίνει χρονικά με έναν εκθετικό παράγοντα:

$$A(t) = A_0 \mathrm{e}^{\frac{-k}{2}t}$$

Η σταθερά $\tau = \frac{2}{k}$ έχει διάσταση χρόνου, και ονομάζεται **χρόνος απόσβεσης**. Καθορίζει το πόσο γρήγορα η ταλάντωση θα σβήσει. Η περίοδος T σχετίζεται με τη συχνότητα ταλάντωσης και όχι με την φυσική συχνότητα, δηλαδή ισχύει: $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$.

A.3 Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

Εξαναγκασμένη ταλάντωση ονομάζεται η ταλάντωση του συστήματος, όταν σε αυτό ασκείται εξωτερική περιοδική δύναμη (**διεγείρουσα δύναμη**), με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να παραμένει σταθερό. Το αίτιο που προκαλεί αυτή τη δύναμη λέγεται **διεγέρτης**. Η κυκλική συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι ίδια με του διεγέρτη και όχι με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Δηλαδή, στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ο διεγέρτης επιβάλλει στην ταλάντωση την συχνότητα του. Η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην εξαναγκασμένη αποσβεννύμενη αρμονική ταλάντωση έχει την μορφή

$$F_m + F_b + F_\kappa = F(t) \qquad (A.15)$$

Αφού η διεγείρουσα δύναμη εφαρμόζεται περιοδικά και αρμονικά είναι της μορφής

$$F(t)=F_0 cos(\omega t)$$

όπου F_0 το πλάτος και ω η κυκλική της συχνότητα.

Αντικαθιστούμε στην *(A.15)* τις F_m, F_b, F_κ και *F(t)* και παίρνουμε την διαφορική εξίσωση της κίνησης

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\kappa x=F_0 cos(\omega t) \qquad (A.16)$$

που μετά τις αντικαταστάσεις των $k=\frac{b}{m}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ και $f=\frac{F_0}{m}$, η *(A.16)* παίρνει τη μορφή

$$\ddot{x}+k\dot{x}+\omega_0^2 x=f\, cos(\omega t) \qquad (A.17)$$

Η γενική λύση της (*A.17*), που περιγράφει τη μετατόπιση του συστήματος και αναφέρεται ως **απόκριση**, έχει τη μορφή:

Γενική λύση μη ομογενούς = Γενική λύση ομογενούς + Μερική λύση μη ομογενούς

$$x(t)=x_{o\mu}(t)+x_{\mu\varepsilon\rho}(t) \qquad (A.18)$$

Η λύση της ομογενούς είναι αυτή που βρήκαμε στην *Ενότητα A.2*, αν θεωρήσουμε ασθενή απόσβεση ($k<2\omega_0$), ώστε το σύστημα να παραμένει ταλαντωτικό.

Έτσι, έχουμε

$$x_{o\mu}(t)=A_0 e^{\frac{-k}{2}t} cos(\omega_d t-\varphi) \;=\; A_0 e^{\frac{-k}{2}t}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\frac{k^2}{4}}-\varphi\right) \qquad (A.19)$$

όπου είδαμε πως A_0 και φ είναι σταθερές και καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Η μερική λύση είναι μια και μοναδική, συγκεκριμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την μη ομογενή διαφορική εξίσωση και είναι λογικό να υποθέσουμε ότι θα έχει την ίδια χρονική εξάρτηση με τη διεγείρουσα αιτία.

Έτσι, η μορφή της μερικής λύσης μπορεί να θεωρηθεί:

$$x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=C_1 cos(\omega t)+C_2 sin(\omega t) \qquad (A.20)$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές την *(A.20)*

$$\dot{x}_{\mu\varepsilon\rho}(t)=-C_1\omega\sin(\omega t-\theta)+C_2\omega\cos(\omega t-\theta) \qquad (A.21)$$

$$\ddot{x}_{\mu\varepsilon\rho}(t)=-C_1\omega^2\cos(\omega t-\theta)-C_2\omega^2\sin(\omega t-\theta) \qquad (A.22)$$

Εφαρμόζουμε στην *(A.17)* τις *(A.20)*, *(A.21)*, *(A.22)* κι έχουμε για τους συντελεστές C_1 και C_2:

$$C_1=\frac{f(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}$$

$$C_2=\frac{f(k\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}$$

Η μερική λύση *(Α.20)* μπορεί να γραφτεί και στην μορφή

$$x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=D\cos(\omega t-\theta) \qquad (A.23)$$

όπου $D=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}}$

και, τελικά, η μερική λύση είναι

$$x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}}\cos(\omega t-\theta) \qquad (A.24)$$

όπου θ η πολική γωνία του μιγαδικού $(\omega_0^2-\omega^2)+ik\omega$ στο μιγαδικό επίπεδο.

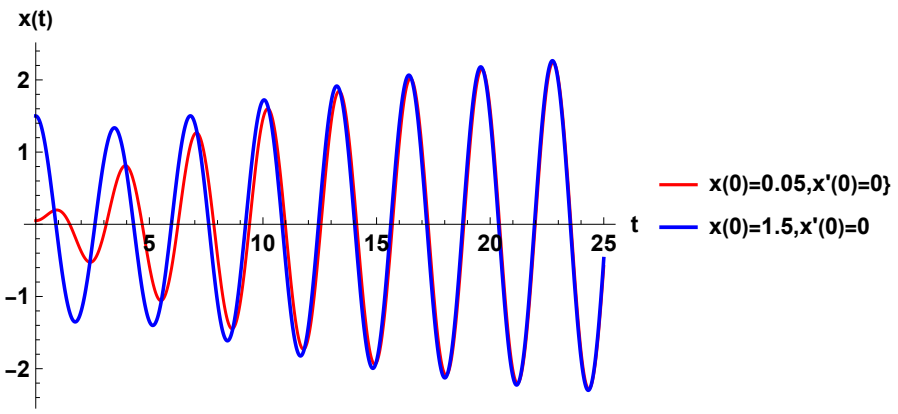
Η ποσότητα $\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}$ λέγεται **εμπέδηση**.

Τελικά, σύμφωνα με την *(Α.18)*, η γενική λύση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης με ασθενή απόσβεση είναι

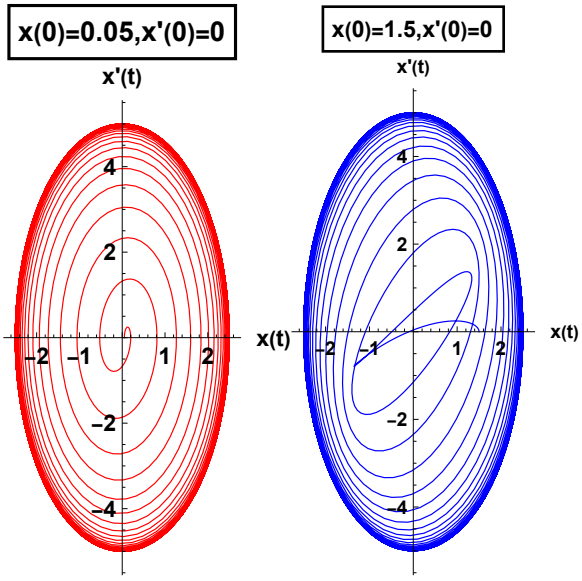
$$x(t)=A_0 e^{\frac{-k}{2}t}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\frac{k^2}{4}}-\varphi\right)+\frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}}\cos(\omega t-\theta) \qquad (A.25)$$

Ο πρώτος όρος της *(Α.25)* αποσβένει εκθετικά και μέσα σε χρόνο $t\approx 5\tau$ (είδαμε πως $\tau=\frac{2}{k}$ είναι ο χρόνος απόσβεσης) γίνεται αμελητέος, γι' αυτό λέγεται **παροδικός ή μεταβατικός όρος**.

Έτσι, μετά από ένα μεταβατικό διάστημα ($t\geqslant 5\tau$), η λύση δεν εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, αφού αυτές εισέρχονται μόνο μέσω των A_0 και φ, και η μερική λύση (ο δεύτερος όρος της *(Α.25)*) είναι η οριακή λύση που επικρατεί, και ως εκ τούτου λέγεται **λύση μόνιμης κατάστασης**.



Σχήμα Α.5: Εξαναγκασμένες αποσβεννύμενες ταλαντώσεις με διαφορετικές αρχικές συνθήκες



Σχήμα A.6: Πορτραίτα φάσης για τις εξαναγκασμένες αποσβεννύμενες ταλαντώσεις με διαφορετικές αρχικές συνθήκες

Οι ταλαντώσεις που παρουσιάζονται στο *Σχήμα A.5* παρουσιάζουν αρχικά μια μη τακτική χρονική εξέλιξη και αυτό αποτυπώνεται και στην σχετικά ανώμαλη μορφή των φασικών τροχιών του *Σχήματος A.6*. Μετά όμως από ένα χρονικό διάστημα, στο οποίο η μεταβατική συνιστώσα της λύσης εξασθενεί, οι λύσεις τείνουν προς μια αρμονική ταλάντωση με συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα, που λέγεται **οριακός κύκλος**.

Άρα, μετά από την μεταβατική κατάσταση το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση με την κυκλική συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης, με διαφορά φάσης θ, και με πλάτος απόκρισης

$$A=\frac{|f|}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+k^2\omega^2}} \qquad (A.26)$$

Η γωνία θ εκφράζει τη διαφορά φάσης μεταξύ της διεγείρουσας δύναμης και της απόκρισης του συστήματος. Για κατάλληλη τιμή της θ, η δύναμη παρέχει ενέργεια στο σύστημα τη στιγμή που τη χρειάζεται, με αποτέλεσμα τη μέγιστη ενίσχυση της ταλάντωσης.

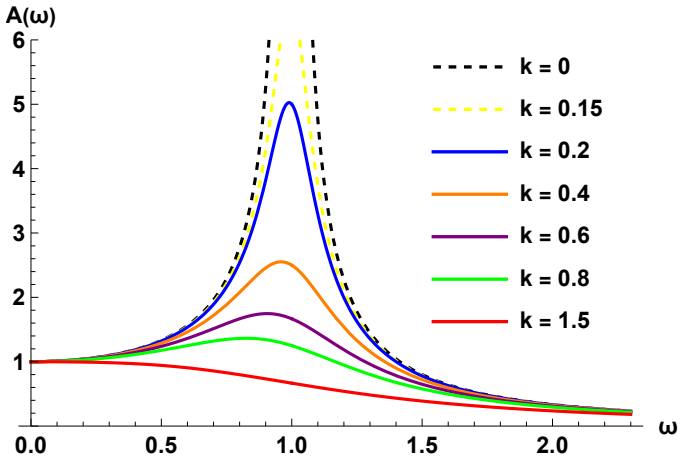
Το πλάτος της απόκρισης, για συγκεκριμένο k, γίνεται μέγιστο και ίσο με

$$A_{max}=\frac{2|f|}{k\sqrt{4\omega_0^2-k^2}}$$

όταν ο παρονομαστής της *(A.26)* γίνει ελάχιστος, δηλαδή όταν

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{k^2}{2} \Rightarrow \omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{k^2}{2}}$$

Η συχνότητα αυτή λέγεται **συχνότητα συντονισμού,** είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος, και το φαινόμενο, όπου το πλάτος γίνεται μέγιστο, ονομάζεται **συντονισμός**.



Σχήμα A.7: Το πλάτος της απόκρισης για διαφορετικές τιμές του k, όταν ω_0=1 και f=1

Από το *Σχήμα A.7*, και την θεωρητική ανάλυση για το πλάτος, μπορούμε να εξάγουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα:

- Το μέγιστο του πλάτους μετατοπίζεται προς μικρότερες συχνότητες όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής απόσβεσης *k*.
- Το πλάτος της ταλάντωσης είναι αντιστρόφως ανάλογο του συντελεστή *k*. Αν ο *k* είναι πολύ μικρός, τότε το πλάτος τείνει στο άπειρο, όταν η κυκλική συχνότητα *ω* γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα ω_0 του ταλαντωτή. Αυτό δεν συμβαίνει βέβαια, γιατί το σύστημα οδηγείται προηγουμένως σε καταστροφή.
- Δεν έχουμε συντονισμό όταν $\omega_0^2 < \frac{k^2}{2}$ επειδή η συχνότητα συντονισμού γίνεται μιγαδική. Σε αυτή την περίπτωση το πλάτος ταλάντωσης μειώνεται μονοτονικά με τη συχνότητα *ω*.

A.4 Εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη ταλάντωση

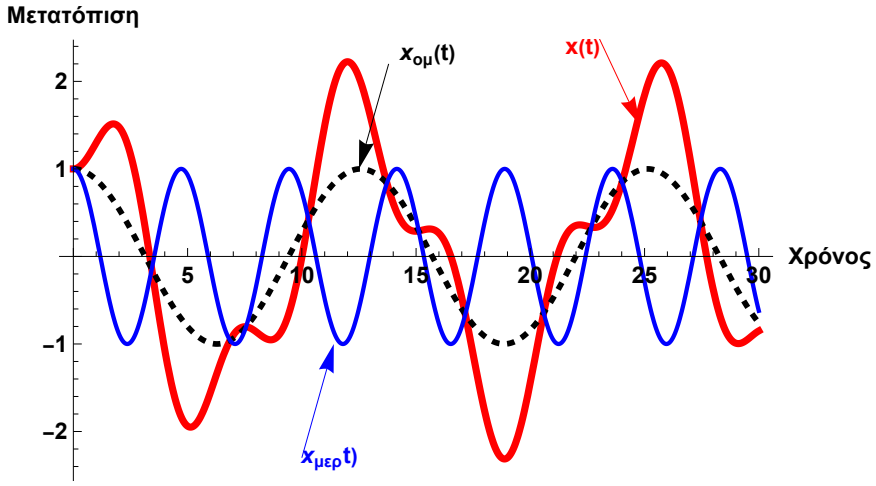
Όταν δεν υπάρχει απόσβεση, τότε *k = 0*, και για $\omega \neq \omega_0$ η *(A.25)* γίνεται:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) \qquad (A.27)$$

Ο πρώτος όρος της *(A.27)* είναι η ελεύθερη ταλάντωση στη φυσική συχνότητα ω_0, και δεν είναι μεταβατικός, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η εξαναγκασμένη ταλάντωση στη συχνότητα διέγερσης *ω*. Άρα, η συνολική κίνηση είναι **άθροισμα δύο ταλαντώσεων** με διαφορετικές συχνότητες ω_0 και ω.

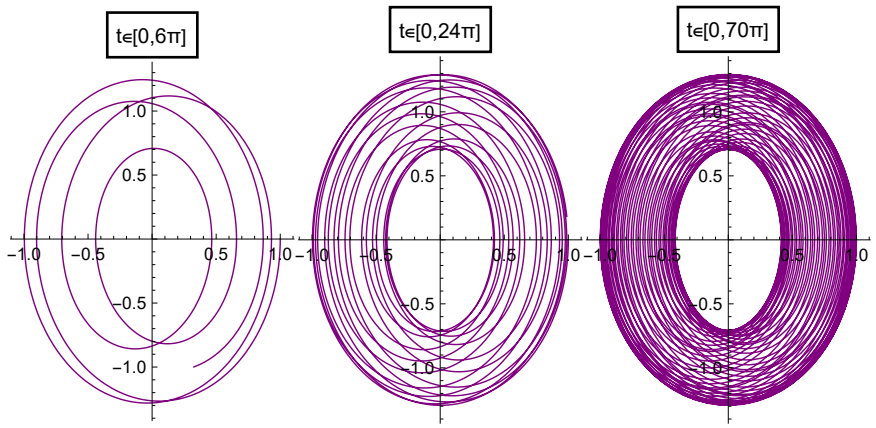
Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Όταν αυτές οι συχνότητες δεν έχουν ακέραιο λόγο μεταξύ τους (δηλαδή $\frac{\omega}{\omega_0}$ δεν είναι ρητός αριθμός), τότε οι δύο ταλαντώσεις δεν "κλείνουν" ποτέ σε ένα κοινό χρονικό διάστημα. Η κίνηση δεν επαναλαμβάνεται ποτέ ακριβώς ίδια, όπως βλέπουμε στο *Σχήμα Α.8*, είναι μη περιοδική, αλλά περιοδικά μεταβαλλόμενη και λέγεται **ημιπεριοδική (quasi-periodic)**.



Σχήμα Α.8: Ομογενής, μερική και ολική λύση της εξαναγκασμένης μη αποσβεννύμενης ταλάντωσης ($\omega_0=\frac{1}{2}, \omega=\sqrt[4]{\pi}$)

Οι φασικές τροχιές που αντιστοιχούν στις ημιπεριοδικές ταλαντώσεις δεν κλείνουν ποτέ. Έτσι, γεμίζουν πυκνά μια περιοχή του επιπέδου φάσεων, καθώς $t \to \infty$ (*Σχήμα Α.9*).



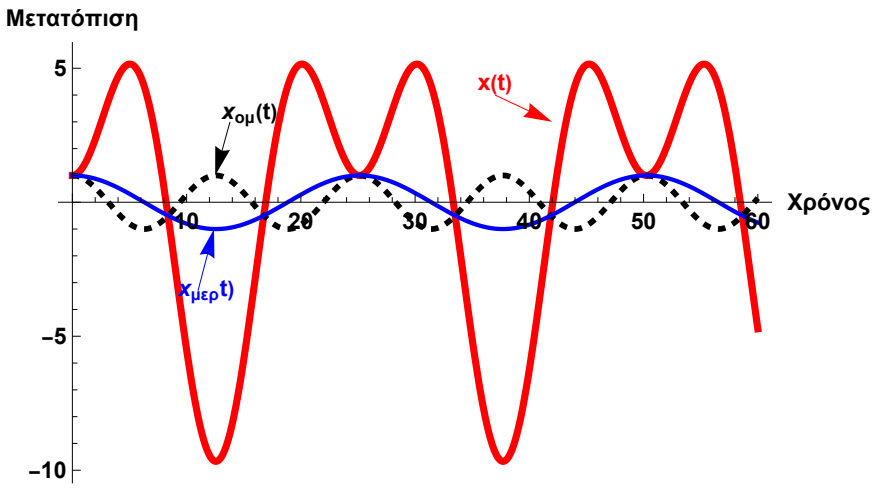
Σχήμα Α.9: Πορτραίτο φάσης εξαναγκασμένης μη αποσβεννύμενης ταλάντωσης ($\omega_0=1, \omega=\sqrt{2}$)

- Όταν οι συχνότητες σχετίζονται με **ρητό λόγο**:

$$\omega=\frac{p}{q}\omega_0$$

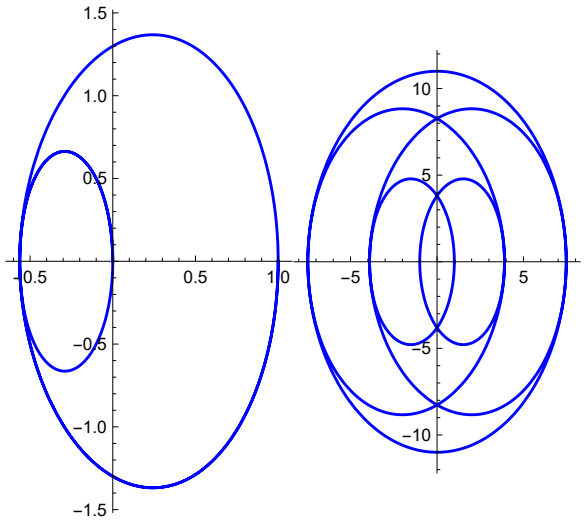
όπου *p,q* είναι ακέραιοι, τότε υπάρχει μια κοινή πολλαπλάσια περίοδος *T* τέτοια ώστε και οι δύο όροι ολοκληρώνουν ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων στο ίδιο χρονικό διάστημα. Επομένως η συνολική κίνηση **επαναλαμβάνεται** μετά από χρόνο T (*Σχήμα Α.10*).

Επειδή $T_{\varepsilon\xi}=\frac{2\pi}{\omega}$ και $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$, η περίοδος της ταλάντωσης θα είναι $T=pT_{\varepsilon\xi}$ ή $T=qT_0$



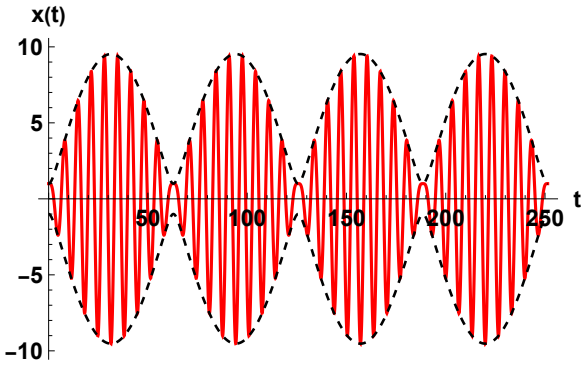
Σχήμα Α.10: Εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη ταλάντωση με $\omega_0=\frac{1}{2},\omega=\frac{1}{4}$

Οι φασικές τροχιές, οι οποίες αντιστοιχούν στις ταλαντώσεις, κλείνουν μετά από χρόνο *T*, αλλά ενδιάμεσα τέμνουν εγκάρσια τον εαυτό τους (*Σχήμα Α.11*).



Σχήμα Α.11: Πορτραίτα φάσης εξαναγκασμένων μη αποσβεννύμενων ταλαντώσεων, με $\omega=\frac{p}{q}\omega_0$

- Αν $\omega\approx\omega_0$, δηλαδή αν οι συχνότητες είναι παραπλήσιες, έχουμε εμφάνιση **διακροτημάτων** (*Σχήμα Α.12*).



Σχήμα Α.12: Εξαναγκασμένη μη αποσβεννύμενη ταλάντωση με ω_0 =1, ω = 0.9

- Αν $\omega=\omega_0$, έχουμε το φαινόμενο του **συντονισμού** και η *(Α.17)* γίνεται

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=f\cos(\omega_0 t) \qquad (A.28)$$

Επειδή το μη ομογενές μέρος της *(Α.28)* ανήκει στο θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς, μια μερική λύση της *(Α.28)* είναι της μορφής

$$x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=t\left(C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\sin(\omega_0 t)\right)$$

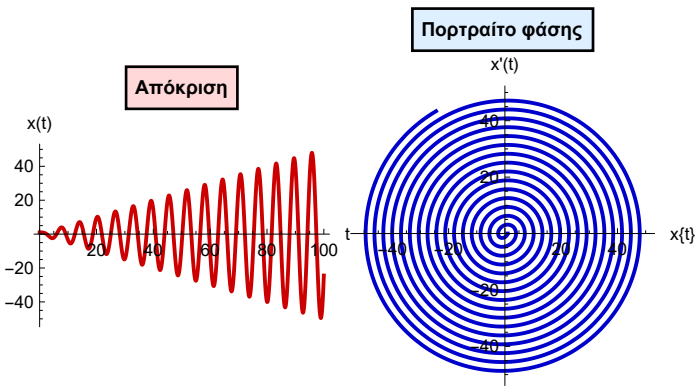
Εφαρμόζουμε στην *(Α.28)*, και προκύπτει $C_1=0$ *και* $C_2=\dfrac{f}{2\omega_0}$

Συνεπώς, η μερική λύση είναι

$$x_{\mu\varepsilon\rho}(t)=\frac{f}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t)$$

και η απόκριση για την εξαναγκασμένη ταλάντωση χωρίς απόσβεση, όταν $\omega=\omega_0$ είναι τελικά

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t-\varphi)+\frac{f}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t) \qquad (A.29)$$



Σχήμα Α.13: Συντονισμός εξαναγκασμένου μη αποσβεννύμενου ταλαντωτή

Βλέπουμε και στο *Σχήμα Α.13* πως το σύστημα ταλαντώνεται με την ιδιοσυχνότητά του, αλλά το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται απεριόριστα με το χρόνο, εξαιτίας του όρου $\dfrac{f}{2\omega_0}t\sin(\omega_0 t)$, που ονομάζεται **αιώνιος όρος (secular term).**

Παράρτημα Β.
Κώδικες Mathematica

Στο παρόν παράρτημα παρατίθενται ενδεικτικοί κώδικες που αναπτύχθηκαν στο λογισμικό Mathematica για την εφαρμογή διαταρακτικών μεθόδων σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και για την παραγωγή των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων. Όλα τα σχήματα της παρούσας εργασίας δημιουργήθηκαν με τη χρήση του Mathematica, ωστόσο παρουσιάζονται μόνο επιλεγμένα παραδείγματα κώδικα, τα οποία θεωρούνται αντιπροσωπευτικά της μεθοδολογίας που ακολουθήθηκε.

Β.1 Μέθοδος κανονικών διαταραχών

Ο ακόλουθος κώδικας χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής λύσης του εξαναγκασμένου αποσβεννύμενου εκκρεμούς με τη μέθοδο των κανονικών διαταραχών, κοντά στον κύριο συντονισμό και υπό ασθενή διέγερση. Παράλληλα, υπολογίζονται οι εξισώσεις των συντελεστών α_0 και b_0, που οδηγούν στην εξίσωση του πλάτους της απόκρισης (*Ενότητα 2.2.6*).

```
FDuffingeq = x''[τ] + x[τ] - ε (γ Cos[τ] - δ x'[τ] - β x[τ] + x[τ]^3) == 0;
                                 συνημίτονο
xRule[maxOrder_] := x → (Sum[ε^i x_i[#], {i, 0, maxOrder}] &)
                         άθροιση
eqtemp = FDuffingeq /. xRule[2] // ExpandAll;
                                   επέκταση όλων
eqA = eqtemp /. ε^n_ /; n>1 → 0
prob = CoefficientList[eqA[[1]], ε] == 0 // Thread
       λίστα συντελεστών                    thread
sol0 = DSolve[prob[[1]], x_0[τ], τ][[1]] // Simplify;
       λύση διαφορικής εξίσωσης            απλοποίηση

x_0[τ_] = sol0[[1, 2]] /. {C[1] → α_0, C[2] → b_0};
                          προεπιλεγ··· προεπιλεγμένη μορφή σταθεράς
TraditionalForm[Style[HoldForm[x_0[τ]] == x_0[τ], Blue, Bold, 16]]
παραδοσιακή μορφή  στυλ  μορφή χωρίς αξιολόγηση  μπλε  έντονοι χαρακτήρες
probA = prob[[2]] // TrigReduce
                     απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
cond1 = Solve[{Coefficient[probA[[1]], Cos[τ]] == 0, Coefficient[probA[[1]], Sin[τ]] == 0}] // Simplify;
        λύση ε··· συντελεστής  συνημίτονο  συντελεστής  ημίτονο  απλοποίηση
TraditionalForm[Style[Row[{"γ = ", cond1[[1, 1, 2]], "  ,  ", "δ = ", cond1[[1, 2, 2]]}], Bold, Blue, 16]]
παραδοσιακή μορφή  στυλ  γραμμή                                                    έντο··· μπλε
sol1 = DSolve[prob[[2]] /. cond1[[1]], x_1[τ], τ][[1]] // TrigReduce;
       λύση διαφορικής εξίσωσης                          απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
x_1[τ_] = sol1[[1, 2]] /. {C[1] → α_1, C[2] → b_1} // Simplify;
                          προεπιλεγ··· προεπιλεγμένη··· απλοποίηση
TraditionalForm[Style[HoldForm[x_1[τ]] == x_1[τ], Bold, Blue, 16]]
παραδοσιακή μορφή  στυλ  μορφή χωρίς αξιολόγηση  έντο··· μπλε
xsol = (x[τ] /. xRule[1]);
TraditionalForm[Style[Row[{"x(τ)≈", xsol}], Bold, Red, 16]]
παραδοσιακή μορφή  στυλ  γραμμή                  έντο··· κόκκινο
```

Με βάση τον παραπάνω κώδικα, ακολουθούν ενδεικτικοί κώδικες για την παραγωγή γραφικών παραστάσεων.

◆ Το πορτραίτο φάσης (*Σχήμα 2.2.25*)

```
Fs = {0.06, 0.08, 0.09, 0.11, 0.12, 0.14};
cols = {Darker[Green, 0.5], Orange, Brown, Darker[Cyan, 0.3], Purple, Blue};
        |σκοτει··· |πράσινο      |πορτοκ··· |καφέ  |σκοτει··· |κυανό     |μωβ    |μπλε
makePlot[F_, col_] := Plot[Evaluate[psol[ω, F]], {ω, 0.73, 1.15}, PlotStyle → {col, Directive[col, Dashed]}];
                      |διά··· |αξιολόγηση ανεξαρτήτως περιορισμών  |στυλ διαγράμματος  |οδηγία  |διακεκομμένη
backbone = Plot[8 - 8 ω^2 - 4 k^2, {ω, 0.73, 1.15}, PlotRange → {0, 3.5}, PlotStyle → {Black, DotDashed}];
           |διάγραμμα                                |εύρος διαγράμματος  |στυλ διαγράμμ··· |μαύρο |μορφή παύλα–τελεία–παύλα
Show[MapThread[makePlot, {Fs, cols}], backbone, AxesLabel → {"ω", "p"}, LabelStyle → {Bold, 10, Black}, ImageSize → 600,
|πρ··· |map thread                                |ετικέτες αξόνων  |στυλ ετικέτας  |έντονοι χ··· |μαύρο  |μέγεθος εικόνας
 Epilog → {{Black, Dashing[0.02], Line[{{0.85, 0}, {0.85, 3.5}}]}, Text[Style["F=0.06", cols[[1]], 10, Bold], {0.98, 0.3}],
 |επίλογα γρα··· |μαύρο  |διακεκομμένο στυ··· |γραμμή                                |κείμ··· |στυλ                          |έντονοι χαρακτήρες
   Text[Style["F=0.08", cols[[2]], 10, Bold], {0.96, 0.6}], Text[Style["F=0.09", cols[[3]], 10, Bold], {0.94, 0.8}],
   |κείμ··· |στυλ                          |έντονοι χαρακτήρες  |κείμ··· |στυλ                          |έντονοι χαρακτήρες
   Text[Style["F=0.11", cols[[4]], 10, Bold], {0.91, 1.31}], Text[Style["F=0.12", cols[[5]], 10, Bold], {0.88, 1.75}],
   |κείμ··· |στυλ                          |έντονοι χαρακτήρες  |κείμ··· |στυλ                          |έντονοι χαρακτήρες
   Text[Style["F=0.14", cols[[6]], 10, Bold], {0.81, 3.13}], {PointSize[0.012], Red, Point[{{0.85, 2.44}, {0.85, 1.67}, {0.85, 0.3}}]}},
   |κείμ··· |στυλ                          |έντονοι χαρακτήρες  |μέγεθος σημείων  |κόκ··· |σημείο
 PlotRange → Full]
 |εύρος διαγρ··· |γεμάτο
```

◆ Οι καμπύλες πλάτους απόκρισης (*Σχήμα 2.2.23*).

```
ω0 = 1;
k = 0.1;
F = 0.14;

A[a_, b_, ω_] := -b (ω^2 - 1 + 1/8 (a^2 + b^2)) - k ω a;
B[a_, b_, ω_] := a (ω^2 - 1 + 1/8 (a^2 + b^2)) - k ω b + F;

fixed1 = N[({a, b} /. NSolve[{A[a, b, 0.85] == 0, B[a, b, 0.85] == 0}, {a, b}])];
         |αριθμητική τιμή  |αριθμητική προσέγγιση λύσεων διαφορικής εξίσωσης
StreamPlot[{A[a, b, 0.85], B[a, b, 0.85]}, {a, b} ∈ Disk[{0, 0.7}, 1.5], StreamScale → 0.25, StreamPoints → 40, FrameLabel → {"α", "b"},
|διάγραμμα ροής                                  |δίσκος  |κλίμακα ροϊκών γραμμών  |σημεία ροής  |ετικέτα κορνίζας
 StreamStyle → Directive[Black, Thickness[0.007]], StreamMarkers → {"Arrow"}, ImageSize → 300, StreamColorFunction → None,
 |στυλ ροϊκών γρ··· |οδηγία  |μαύρο  |πάχος                                  |μέγεθος εικόνας  |ροϊκή συνάρτηση χρώματος  |κανένα
 LabelStyle → {Bold, 10, Black},
 |στυλ ετικέτας  |έντονοι χ··· |μαύρο
 Epilog → {{Blue, PointSize[0.03], Point[fixed1[[1]]]}, {Red, PointSize[0.03], Point[fixed1[[2]]]}, {Red, PointSize[0.03], Point[fixed1[[3]]]},
 |επίλογα γρα··· |μπλε  |μέγεθος σημείων  |σημείο  |κόκ··· |μέγεθος σημείων  |σημείο  |κόκ··· |μέγεθος σημείων  |σημείο
   Text[Style["A", Purple, 12, Bold], {-0.6, 1.51}], Text[Style["B", Purple, 12, Bold], {0.9, 0.95}],
   |κείμ··· |στυλ  |μωβ  |έντονοι χαρακτήρες  |κείμ··· |στυλ  |μωβ  |έντονοι χαρακτήρες
   Text[Style["Γ", Purple, 12, Bold], {0.5, 0.08}]}]
   |κείμ··· |στυλ  |μωβ  |έντονοι χαρακτήρες
```

Β.2 Μέθοδος πολλαπλών κλιμάκων

Με τον ακόλουθο κώδικα υπολογίζεται η προσεγγιστική υποαρμονική λύση τάξης $\frac{1}{3}$, της εξαναγκασμένης αποσβεννύμενης εξίσωσης *Duffing* με τη μέθοδο πολλαπλών κλιμάκων, και το αντίστοιχο σύστημα αργής ροής πλάτους–φάσης, από το οποίο προκύπτει η εξίσωση του πλάτους απόκρισης (*Ενότητα 4.3.1*).

```
timesScales = {t0, t1};
dt[1][expr_] := Sum[ε^i D[expr, timesScales[[i + 1]]], {i, 0, maxOrder}]
                    άθρο··· μερική παράγωγος
dt[2][expr_] := {dt[1][dt[1][expr]] // Expand} /. ε^i_ /;i>maxOrder → 0
                                                  επέκταση πολυωνύμου
DuffingEq = x''[t] + ω^2 x[t] + 2 ε μ x'[t] + ε β x[t]^3 - Γ Cos[Ω t] == 0;
                                                          συνημίτονο
maxOrder = 1;
eqa = DuffingEq /. {t → t0, x[t] → x[t0, t1], Derivative[n_][x][t] → dt[n][x[t0, t1]]}
                                                  παράγωγος
solRule = x → (Sum[ε^i x1[#1, #2], {i, 0, maxOrder}] &);
               άθροιση
eqb = (eqa /. solRule // ExpandAll) /. ε^n_ /;n>maxOrder → 0
                       επέκταση όλων
eqEps = CoefficientList[eqb[[1, 1]], ε] == 0 // Thread // TrigToExp
        λίστα συντελεστών                    thread    μετατροπή τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε εκθετικούς
sol0p = DSolve[eqEps[[1]], x0 @@ timesScales, timesScales][[1]] /. C[_] → (0 &) // Simplify
        λύση διαφορικής εξίσωσης                                  προεπιλεγμένη μ···  απλοποίηση
ΓRule = {Γ → -2 Λ (-ω^2 + Ω^2)};
sol0 = x0[t0, t1] → A[t1] e^(i ω t0) + Ā[t1] e^(-i ω t0) + sol0p[[1, 2]] /. ΓRule // ExpandAll // Simplify
                                                                              επέκταση όλων  απλοποίηση
dsol0 = {x0^(1,0)[t0, t1] :→ D[sol0[[2]], t0], x0^(0,1)[t0, t1] :→ D[sol0[[2]], t1], x0^(1,1)[t0, t1] :→ D[D[sol0[[2]], t0], t1]};
                             μερική παράγωγος                    μερική παράγωγος                  ·· μερική παράγωγος
eqc = eqEps[[2]] /. dsol0 /. sol0 // ExpandAll
                                     επέκταση όλων
OmgRule = {Ω → 3 ω + ε σ};
expRule1 = {Exp[arg_] :→ Exp[Expand[arg /. OmgRule]]};
            εκθετική συνά··· εκ··· επέκταση πολυωνύμου
SCond1 = Coefficient[eqc[[1]] /. expRule1 /. ε t0 → t1, e^(i ω t0)] == 0
         συντελεστής
alphaRule = {A[t1] → 1/2 a[t1] e^(i b[t1]), A'[t1] → D[1/2 a[t1] e^(i b[t1]), t1], Ā[t1] → 1/2 a[t1] e^(-i b[t1])};
                                                     μερική παράγωγος
SCond2 = SCond1 /. alphaRule // Expand;
                                 επέκταση πολυωνύμου
eulerRule = {e^(-3 i b[t1] + i σ t1) → Cos[σ t1 - 3 b[t1]] + i Sin[σ t1 - 3 b[t1]]};
                                       συνημίτονο              ημίτονο
SCond3 = Expand[SCond2[[1]] e^(-i b[t1])] == 0
         επέκταση πολυωνύμου
SCond4 = SCond3 /. eulerRule // Simplify
                                 απλοποίηση
realEq = Assuming[Element[{β, Λ, μ, ω, σ}, Reals], ComplexExpand[Re[SCond4[[1]]] == 0]
         υποθέτον··· στοιχείο πεδίου               πεδίο ···  επέκταση μιγαδι···  πραγματικό μέρος

imagEq = Assuming[Element[{β, Λ, μ, ω, σ}, Reals], ComplexExpand[Im[SCond4[[1]]] == 0]
         υποθέτον··· στοιχείο πεδίου               πεδίο ···  επέκταση μιγαδι···  φανταστικό μέρος
phaseRules = {b[t1] :→ (σ t1 - ϕ[t1]) / 3, b'[t1] :→ (σ - ϕ'[t1]) / 3};
TraditionalForm[Style[realEq /. phaseRules, Bold, Blue, 16]] // Simplify
παραδοσιακή μορφή  στυλ                     έντο···  μπλε      απλοποίηση
TraditionalForm[Style[imagEq /. phaseRules, Bold, Blue, 16]] // Simplify
παραδοσιακή μορφή  στυλ                     έντο···  μπλε      απλοποίηση
OmgRule1 = {ω → (Ω - ε σ) / 3};
finalRules = Join[phaseRules, OmgRule1, {ε x1[t0, t1] → 0}];
             ένωση στοιχείων
sol0a = x0 → (a[t1] Cos[ω t0 + b[t1]] + 2 Λ Cos[Ω t0] &);
                 συνημίτονο              συνημίτονο
eqd = x[t0, t1] → Simplify[x[t0, t1] /. solRule /. sol0a /. finalRules]
                  απλοποίηση
xsol = Simplify[eqd[[2]] /. {t0 → t, t1 → ε t}];
       απλοποίηση
TraditionalForm[Style[Row[{"x(t)≈", xsol}], Bold, 14, Red]]
παραδοσιακή μορφή  στυλ  γραμμή                  έντονοι χ···  κόκκινο
```

Στη συνέχεια παρατίθενται ενδεικτικοί κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων.

◆ Η σύνθεση της υποαρμονικής απόκρισης (*Σχήμα 4.3.1*)

```
ε = 0.1; Λ = 1.5 / (2 (1 - 3^2)); Ω = 3; a[t ε] = 1; ϕ[t ε] = 0;

p1 = Plot[Evaluate[a[t ε] Cos[1/3 (t Ω - ϕ[t ε])]], {t, 0, 15}, PlotRange → {-1.5, 1.5}, AxesLabel → {"t", "x"}, PlotStyle → Brown,
     διά··· αξιολόγηση ανεξα··· συνημίτονο                    εύρος διαγράμματος          ετικέτες αξόνων          στυλ διαγρά··· καφέ

   Ticks → None, PlotLabel → Style[Framed["Ελεύθερη ταλάντωση"], Bold, 10, Black, Background → LightBrown], LabelStyle → {Bold, 10, Black},
   σημάδι··· κανένα ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο                    έντονοι χ··· μαύρο φόντο          ανοιχτό καφέ στυλ ετικέτας έντονοι χ··· μαύρο
   Epilog → {Black, Thick, Line[{{2 π, 1.05}, {2 π, 1.35}}], Line[{{4 Pi, 1.05}, {4 Pi, 1.35}}], Arrow[{{2 π + 2.6, 1.2}, {2 π, 1.2}}],
   επίλογα γ··· μαύρο παχύ γραμμή                                γραμμή π π βέλος
     Arrow[{{2 π + 3.7, 1.2}, {4 π, 1.2}}], Black, Text[Style["T", 10, Bold], {3 Pi, 1.2}], Text[Style["(α)", 12, Bold, Gray], {7, -1.4}]},
     βέλος                                  μαύρο κείμ··· στυλ          έντονοι χ··· π κείμ··· στυλ                  έντο··· γκρι
   ImageSize → 280];
   μέγεθος εικόνας

p2 = Plot[2 Λ Cos[t Ω], {t, 0, 15}, PlotRange → {-0.3, 0.35}, AxesLabel → {"t", "x"}, PlotStyle → Blue,
     διάγρά··· συνημίτονο                εύρος διαγράμματος          ετικέτες αξόνων          στυλ διαγρά··· μπλε

   PlotLabel → Style[Framed["Ειδική λύση"], Bold, 10, Black, Background → LightBlue], LabelStyle → {Bold, 10, Black}, Ticks → None,
   ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο                    έντονοι χ··· μαύρο φόντο          γαλάζιο στυλ ετικέτας έντονοι χ··· μαύρο σημάδι··· κανένα
   Epilog → {Black, Thick, Line[{{5.2, 0.22}, {5.2, 0.28}}], Line[{{5.2 + 2 Pi / 3, 0.22}, {5.2 + 2 Pi / 3, 0.28}}],
   επίλογα γ··· μαύρο παχύ γραμμή                                γραμμή π π

     Arrow[{{5.9, 0.25}, {5.2, 0.25}}], Arrow[{{6.6, 0.25}, {5.2 + 2 Pi / 3, 0.25}}], Black, Text[Style["T/3", 10, Bold], {6.3, 0.25}],
     βέλος                              βέλος                                π μαύρο κείμ··· στυλ          έντονοι χαρακτήρες

     Text[Style["(β)", 12, Bold, Gray], {7, -0.25}]}, ImageSize → 280];
     κείμ··· στυλ                    έντο··· γκρι                    μέγεθος εικόνας

p3 = Plot[Evaluate[xsol], {t, 0, 15}, PlotRange → {-1.2, 1.4}, AxesLabel → {"t", "x"}, PlotStyle → Red, Ticks → None,
     διά··· αξιολόγηση ανεξαρτήτως περιοριο··· εύρος διαγράμματος          ετικέτες αξόνων          στυλ διαγρά··· κόκ·· σημάδι··· κανένα
   PlotLabel → Style[Framed["Υποαρμονική απόκριση"], Bold, 10, Black, Background → LightRed], LabelStyle → {Bold, 10, Black},
   ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο                    έντονοι χ··· μαύρο φόντο          ανοιχτό κόκκ·· στυλ ετικέτας έντονοι χ··· μαύρο
   Epilog → {Black, Thick, Line[{{2 π, 0.9}, {2 π, 1.15}}], Line[{{4 Pi, 0.9}, {4 Pi, 1.15}}], Arrow[{{9, 1.02}, {2 π, 1.02}}],
   επίλογα γ··· μαύρο παχύ γραμμή                                γραμμή π π βέλος
     Arrow[{{9.8, 1.02}, {4 π, 1.02}}], Black, Text[Style["T", 10, Bold], {3 Pi, 1.02}], Text[Style["(γ)", 12, Bold, Gray], {7, -1}]},
     βέλος                              μαύρο κείμ··· στυλ          έντονοι χ··· π κείμ··· στυλ                  έντο··· γκρι
   ImageSize → 280];
   μέγεθος εικόνας
Column[{p1, p2, p3}]
στήλη
```

◆ Το πορτραίτο φάσης (*Σχήμα 2.2.23*)

```
Γ = 3.5; ω0 = 1; β = 1; ω = 2.99; μ = 0.01; σ = 1.5; Λ = Γ / (2 (ω0^2 - ω^2));

F[α_, φ_] := -μ α - 3 β / (4 ω0) α^2 Λ Sin[φ];
                                        ημίτονο

G[α_, φ_] := σ - 9 β / ω0 Λ^2 - 9 β / (8 ω0) α^2 - 9 β / (4 ω0) α Λ Cos[φ];
                                                                  συνημίτονο

eq = Quiet[Solve[{F[α, ϕ] == 0, G[α, ϕ] == 0}, {α, ϕ}]];
     ήσυχ··· λύση εξισώσεων και ανισώσεων
pts = ({α, ϕ} /. eq);

J = D[{F[α, ϕ], G[α, ϕ]}, {{α, ϕ}}];
    μερική παράγωγος
saddles = {}; spirals = {};

Do[jac = J /. eq[[i]] // N; det = Det[jac]; tr = Tr[jac]; disc = tr^2 - 4 det;
βρόχος Do                   αριθμητ··· ορίζουσα          ίχνος μήτρας

  If[det < 0, AppendTo[saddles, pts[[i]]], If[disc < 0, AppendTo[spirals, pts[[i]]]]], {i, Length[pts]}];
  αν          επισύναψη στο τέλος          αν          επισύναψη στο τέλος                μήκος
plot = StreamPlot[{F[α, ϕ], G[α, ϕ]}, {α, -2, 2}, {ϕ, -5, 5}, StreamScale → 0.2, StreamPoints → 100, StreamMarkers → {"Arrow"},
       διάγραμμα ροής                                          κλίμακα ροϊκών γραμμών σημεία ροής
  StreamColorFunction → "BlueGreenYellow", Frame → False, Axes → True, AxesLabel → {Style["α", 14, Bold], Style["ϕ", 14, Bold]},
  ροϊκή συνάρτηση χρώματος                    κορνίζα ψευδής επιλο··· αλη··· ετικέτες αξόνων στυλ          έντονο·· στυλ          έντονοι χαμ
  LabelStyle → Directive[Black, 12], ImageSize → 350,
  στυλ ετικέτας οδηγία μαύρο μέγεθος εικόνας
  PlotLabel → Style[Framed["β=1, ω0=1, μ=0.01, ω=2.99, σ=1.5, Γ=3.5"], Bold, 10, Black, Background → Lighter[Gray, 0.5]],
  ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο                    έντονοι χ··· μαύρο φόντο          πιο ανοι··· γκρι
  Epilog → {Blue, PointSize[0.03], Point[saddles], Red, PointSize[0.03], Point[spirals]}]
  επίλογα γ··· μπλε μέγεθος σημείων σημείο κόκ·· μέγεθος σημείων σημείο
```

B.3 Μέθοδος Poincaré–Lindstedt

Τέλος, παρουσιάζεται κώδικας για την προσεγγιστική επίλυση της αυτόνομης εξίσωσης *van der Pol* μέσω της μεθόδου *Lindstedt–Poincaré*.

```
vdpEq = x''[t] + ε (x[t]^2 - 1) x'[t] + x[t] == 0;
eqa = vdpEq /. x → (x[ω #] &) /. t → τ / ω
xExpRule[maxOrder_] := x → (Sum[ε^i x_i[#], {i, 0, maxOrder}] &)
                            άθροιση
omgRule[maxOrder_] := ω → 1 + Sum[ε^i ω_i, {i, maxOrder}]
                              άθροιση
eqb = ExpandAll[eqa /. xExpRule[3] /. omgRule[3]] /. ε^n_ /; n>3 → 0
      επέκταση όλων
eqEps = CoefficientList[eqb[[1]], ε] == 0 // Thread
        λίστα συντελεστών                   thread
sol0 = DSolve[{eqEps[[1]], x_0[0] == A_0, x_0'[0] == 0}, x_0[τ], τ][[1]]
       λύση διαφορικής εξίσωσης
derivativeRules[n_] := {Derivative[1][x_n][τ_] :→ D[x_n[τ] /. Evaluate[Symbol["sol" <> ToString[n]]], τ],
                        παράγωγος                  μερική παρ··· αξιολόγησ·· σύμβολο     εκτυπωμένη μορφή συμβολοσειράς
   Derivative[2][x_n][τ_] :→ D[x_n[τ] /. Evaluate[Symbol["sol" <> ToString[n]]], {τ, 2}]};
   παράγωγος          μερική παρ··· αξιολόγησ·· σύμβολο     εκτυπωμένη μορφή συμβολοσειράς
order1Eq = eqEps[[2]] /. sol0 /. derivativeRules[0] // TrigReduce
                                                       απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
omg1Rule = Solve[Coefficient[order1Eq[[1]], {Sin[τ], Cos[τ]}] == {0, 0}, {A_0, ω_1}]
           λύση ··· συντελεστής                ημίτονο  συνημίτονο
sol1 = DSolve[{order1Eq /. sol0 /. omg1Rule[[3]] // ExpandAll, x_1[0] == A_1, x_1'[0] == 0}, x_1[τ], τ][[1]]
       λύση διαφορικής εξίσωσης                                 επέκταση όλων
order2Eq = eqEps[[3]] /. sol0 /. derivativeRules[0] /. sol1 /. derivativeRules[1] /. omg1Rule[[3]] // TrigReduce
                                                                                     απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
omg2Rule = Solve[Coefficient[order2Eq[[1]], {Sin[τ], Cos[τ]}] == {0, 0}, {A_1, ω_2}][[1]]
           λύση ··· συντελεστής                ημίτονο  συνημίτονο
sol2 = DSolve[{order2Eq /. omg2Rule // ExpandAll, x_2[0] == A_2, x_2'[0] == 0}, x_2[τ], τ][[1]] // TrigReduce
       λύση διαφορικής εξίσωσης                 επέκταση όλων                                    απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
order3Eq = eqEps[[4]] /. sol0 /. derivativeRules[0] /. sol1 /. derivativeRules[1] /. sol2 /. derivativeRules[2] /. omg1Rule[[3]] /. omg2Rule //
  TrigReduce
  απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
omg3Rule = Solve[Coefficient[order3Eq[[1]], {Sin[τ], Cos[τ]}] == {0, 0}, {A_2, ω_3}]
           λύση ··· συντελεστής                ημίτονο  συνημίτονο
xτ = x[τ] /. xExpRule[2] /. sol0 /. sol1 /. sol2 /. omg1Rule[[3]] /. omg2Rule /. omg3Rule // ExpandAll // TrigReduce
                                                                                              επέκταση όλων  απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
xT = xτ /. τ → ω t
xTfinal = x[t] → xT /. omgRule[3] /. omg1Rule[[3]] /. omg2Rule /. omg3Rule // Expand // TrigReduce
                                                                               επέκταση··· απλοποίηση τριγωνομετρικών δυνάμεων
```

Στη συνέχεια δίνονται η αριθμητική λύση και ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις.

- Σύγκριση αριθμητικής-προσεγγιστικής λύσης (*Σχήμα 5.3.8*)

```
u[t_, ε_] := Evaluate[xTfinal]
             αξιολόγηση ανεξαρτήτως περιορισμών
z[t_, ε_] := Evaluate[D[xTfinal, t]]
             αξιολόγησ·· μερική παράγωγος

f[ε_, A_, T_] := NDSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == ε (1 - x[t]^2) y[t] - x[t], x[0] == A, y[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, T}]
                 αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης
s1 = f[0.1, 0.5, 500];

Plot[{u[t, 0.1], x[t] /. s1}, {t, 0, 100}, PlotStyle → {{Cyan, Thickness[0.006]}, {Red, Thickness[0.005]}}, PlotTheme → "Marketing",
διάγραμμα                                  στυλ διαγράμμα··· κυανό πάχος          κόκ·· πάχος              θέμα διαγράμματος
 PlotLabel → Style[Framed["ε=0.1"], Bold, 12, Background → Cyan],
 ετικέτα διαγρ··· στυλ  πλαισιωμένο          έντονοι χ··· φόντο     κυανό
 PlotLegends → Placed[LineLegend[{"Προσεγ.λύση", "Αριθ.λύση"}, LabelStyle → Directive[Bold, Black, 12]], Bottom],
 υπομνήματα δια··· τοποθε··· υπόμνημα γραμμών                  στυλ ετικέτας  οδηγία  έντο··· μαύρο  κάτω θέση
 PlotRange → {{0, 100}, {-2.5, 2.5}}, Axes → True, FrameLabel → {"t", "x"}, LabelStyle → {Bold, Black, 10}, ImageSize → 400]
 εύρος διαγράμματος                   επιλο··· αλη··· ετικέτα κορνίζας  στυλ ετικέτας  έντο··· μαύρο  μέγεθος εικόνας
```

◆ Τα πορτραίτα φάσης για διάφορες τιμές της ε (*Σχήμα* 5.3.5)

```
field1 = StreamPlot[{y, 0.1 (1 - x^2) y - x}, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5}, StreamStyle → Darker[Gray, 0.5], StreamColorFunction → None,
         διάγραμμα ροής                                                       στυλ ροϊκών γρ··· σκοτει··· γκρι          ροϊκή συνάρτηση χρώματος  κανένα
   StreamScale → 0.1, StreamPoints → 20, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabel → Style[Framed["ε=0.1"], Bold, 10, Background → LightRed]];
   κλίμακα ροϊκών γραμμών σημεία ροής  επιλο··· αλη··· ετικέτες αξόνων        ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο        έντονοι χ···  φόντο  ανοιχτό κόκκινο
p1 = ParametricPlot[{u[t, 0.1][[1, 1]], z[t, 0.1][[1, 1]]}, {t, 0, 50}, PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red];
     παραμετρικό διάγραμμα                                                   εύρος διαγρ··· όλα ετικέτες αξόνων          στυλ διαγρά··· κόκκινο
pp1 = Show[field1, p1, ImageSize → 200];
      προβολή γραφικών  μέγεθος εικόνας
field2 = StreamPlot[{y, 0.5 (1 - x^2) y - x}, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5}, StreamStyle → Darker[Gray, 0.5], StreamColorFunction → None,
         διάγραμμα ροής                                                       στυλ ροϊκών γρ··· σκοτει··· γκρι          ροϊκή συνάρτηση χρώματος  κανένα
   StreamScale → 0.1, StreamPoints → 20, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabel → Style[Framed["ε=0.5"], Bold, 10, Background → LightRed]];
   κλίμακα ροϊκών γραμμών σημεία ροής  επιλο··· αλη··· ετικέτες αξόνων        ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο        έντονοι χ···  φόντο  ανοιχτό κόκκινο
p2 = ParametricPlot[{u[t, 0.5][[1, 1]], z[t, 0.5][[1, 1]]}, {t, 0, 50}, PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red];
     παραμετρικό διάγραμμα                                                   εύρος διαγρ··· όλα ετικέτες αξόνων          στυλ διαγρά··· κόκκινο
pp2 = Show[field2, p2, ImageSize → 200];
      προβολή γραφικών  μέγεθος εικόνας

field3 = StreamPlot[{y, 0.7 (1 - x^2) y - x}, {x, -2.5, 2.5}, {y, -2.5, 2.5}, StreamStyle → Darker[Gray, 0.5], StreamColorFunction → None,
         διάγραμμα ροής                                                       στυλ ροϊκών γρ··· σκοτει··· γκρι          ροϊκή συνάρτηση χρώματος  κανένα
   StreamScale → 0.1, StreamPoints → 20, Axes → True, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotLabel → Style[Framed["ε=0.7"], Bold, 10, Background → LightRed]];
   κλίμακα ροϊκών γραμμών σημεία ροής  επιλο··· αλη··· ετικέτες αξόνων        ετικέτα διαγρ··· στυλ πλαισιωμένο        έντονοι χ···  φόντο  ανοιχτό κόκκινο
p3 = ParametricPlot[{u[t, 0.7][[1, 1]], z[t, 0.7][[1, 1]]}, {t, 0, 50}, PlotRange → All, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotStyle → Red];
     παραμετρικό διάγραμμα                                                   εύρος διαγρ··· όλα ετικέτες αξόνων          στυλ διαγρά··· κόκκινο
pp3 = Show[field3, p3, ImageSize → 200];
      προβολή γραφικών  μέγεθος εικόνας
r = Row[{pp1, pp2, pp3}]
    γραμμή
```

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.

Βιβλιογραφία

[1] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An introduction for Scientists and Engineers, Fourth Edition*. Oxford University Press, 2007.

[2] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations-Problems and Solutions: A Sourcebook for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2007.

[3] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques.* Wiley, 1993.

[4] A. H. Nayfeh. *Perturbation Methods.* Wiley, 1973.

[5] J. G. Simmonds and J. E. Mann. *A First Look at Perturbation Theory, Second Edition.* Dover Publications, 1997.

[6] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos.* Westview Press, 1994.

[7] R. O'Malley. *Historical Developments in Singular Perturbations.* Springer International Publishing, 2014.

[8] E. M. de Jager and J. Furu. *The Theory of Singular Perturbations.* North Holland, 1996.

[9] M. H. Holmes. *Introduction to Perturbation Methods, Second Edition*. Springer-Verlag New York, 2013.

[10] J. Kevorkian and J. D. Cole. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods.* Springer-Verlag New York, 1996.

[11] C. M. Bender and S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I*: *Asymptotic Methods and Perturbation Theory.* Springer-Verlag New York, 1999.

[12] Y. A. Mitropolskii and N. Van Dao. *Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations.* Springer, 1997.

[13] J. D. Logan. *Applied Mathematics, Fourth Edition.* John Wiley & Sons Hoboken NJ, 2013.

[14] W. Paulsen. *Asymptotic Analysis and Perturbation Theory.* CRC Press Boca Raton FL, 2014.

[15] J. A. Sanders, F. Verhulst and J. Murdock. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, Second Edition*. Springer New York, 2007.

[16] C. C. Lin and L. A. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences.* Macmillan Publishing Co Inc New York, 1974.

[17] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems.* Princeton University Press New Jersey, 1985.

[18] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons New York, 1979.

[19] R. H. Enns and G McGuire. *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers.* Birkhäuser Boston, 2001.

[20] M. Grinfeld (Editor). *Mathematical Tools for Physicists, Second Edition*. Wiley VCH, 2015.

[21] J. K. Hale and H. Kocak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag New York, 1991.

[22] P. G. Drazin. *Nonlinear Systems*. Cambridge University Press, 1992.

[23] B. K. Shivamoggi. *Perturbation Methods for Differential Equations.* Birkhauser Boston, 2003.

[24] R. N. Jazar. *Perturbation Methods in Science and Engineering.* Springer Nature Switzerland AG, 2021.

[25] Ivana Kovacic and M. J. Brennan. *The Duffing Eguation. Nonlinear Oscillators and their Behaviour.* John Wiley & Sons Ltd, 2011.

[26] E. J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.

[27] J. Yu, A. Donmez, H. Herath and H. Cho. *One-to-two internal resonance in a micromechanical resonator with strong Duffing nonlinearity*. Journal of Micromechanics and Microengineering, vol. 34, 2024.

[28] F. L. Tsafack Tayong, R. Yamapi, and G. Filatrella. *Entrainment of a van der Pol-type circadian pacemaker to daylight cycle*. arXiv preprint arXiv:2201.04551, 2022.