ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

« Σύγχρονες Τάσεις στην μαθηματική Δημιουργικότητα. Γεωμετρική σύλληψη σχήμα, κατασκευή βοηθητικών γραμμών και πολλαπλές λύσεις στην επίλυση προβλημάτων: Πτυχές της μαθηματικής δημιουργικότητας στη σχολική γεωμετρία κατά την μετάβαση από την Πρωτοβάθμια στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. »

Δρίτσας Ευάγγελος
ΑΜ 150384

Επιβλέπων Καθηγητής
Ευγένιος Αυγερινός

Θήβα, Σεπτέμβριος 2022

Φοιτητής	Δρίτσας Ευάγγελος ΑΜ150384
Επιβλέπων	Αυγερινός Ευγένιος
Β΄ Αξιολογητής	Δουκάκης Σπυρίδων

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει το Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο (ΕΑΠ) στο Πρόγραμμα Σπουδών Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ).

Αφιερώνεται στα παιδιά μου,

Στυλιανή και Σοφία Δρίτσα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά :

• Τον επιβλέπων καθηγητή μου κ. Ευγένιο Αυγερινό για όλα όσα έμαθα από αυτόν για την επιστήμη της διδακτικής των μαθηματικών κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος, για τις πολύτιμες συμβουλές του αλλά και για τις ευχάριστες συζητήσεις που είχαμε καθ΄ όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας. Προπαντός θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ευγένιο Αυγερινό για την διαρκή υποστήριξη, ειδικά σε στιγμές που ήθελα να τα παρατήσω, λόγω των πολλών ανειλημμένων υποχρεώσεων μου, τόσο ακαδημαϊκών όσο και προσωπικών.

• Τον κ. Σπυρίδων Δουκάκη τόσο για την συμμετοχή της στην διμελή συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή όσο και για όσα έμαθα από αυτήν κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

• Την κα. Ρόζα Βλάχου, διδακτορική φοιτήτρια για την βοήθειά της στην στατιστική διερεύνηση της έρευνας της εργασίας αυτής.

• Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τους διευθυντές των σχολείων της επαρχίας Θηβών που συνεργάστηκα καθώς και τους συναδέλφους καθηγητές για την πολύτιμη βοήθειά τους.

• Την οικογένεια μου που με στηρίζει όλα αυτά τα χρόνια σε ότι και αν χρειαστώ και ειδικά τα τελευταία δύο χρόνια, όπου οι ακαδημαϊκές υποχρεώσεις μου σε αυτό το πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών μου έχουν στερήσει πολύτιμο χρόνο, που υπόσχομαι να τους τον αναπληρώσω.

Περίληψη

Η γεωμετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που προσφέρει τον χώρο για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών, περισσότερο από κάθε άλλο κλάδο, αν και τα τελευταία χρόνια έχει παραγκωνιστεί από τους στόχους του σχολείου στην Ελλάδα. Η ίδια όμως η δημιουργικότητα είναι πολυσύνθετη και σαν σχετικά νέα έννοια στην έρευνα, χρήζει εξερεύνησης. Σε αυτή την εργασία παρουσιάζονται οι νέες τάσεις στην διδασκαλία της γεωμετρίας και διερευνώνται οι πτυχές της δημιουργικότητας, εστιάζοντας στο Ελληνικό σχολείο και στην μετάβαση από την πρωτοβάθμια στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στο πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας προσδιορίζεται η αναγκαιότητα της έρευνας ο σκοπός και οι στόχοι της, γίνεται θεωρητική βιβλιογραφική προσέγγιση, τόσο της διδασκαλίας της γεωμετρίας όσο και της μαθηματικής δημιουργικότητας, με έμφαση στα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, στις βοηθητικές γραμμές, στην τοποθέτηση νέων προβλημάτων και στα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας και ερευνάται ο τρόπος με τον οποίον συνεισφέρουν στην ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης και ιδιαίτερα στην ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Στην έρευνα της παρούσας εργασίας, που αποτελεί το δεύτερο μέρος της εργασίας, ερευνάται η επίδοση των μαθητών της Α Γυμνασίου, σχολείων της επαρχίας Θηβών, όσον αφορά στην κατανόηση της γεωμετρίας (ορισμών, ιδιοτήτων κτλ), σε έργα γεωμετρίας πολλαπλών λύσεων, στην τοποθέτηση προβλημάτων και στο πως μπορούν λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας να συνεισφέρουν στις επιδόσεις των μαθητών. Η κατανόηση βασικών όρων της γεωμετρίας γίνεται μέσω ενός σύντομου ερωτηματολογίου (σωστό - λάθος), ερευνάται η γνώμη των μαθητών για την γεωμετρία μέσω ενός σύντομου ερωτηματολόγιου Likert, ενώ επίσης μελετώνται οι τις τρεις διαστάσεις της μαθηματικής δημιουργικότητας, ευχέρεια, ευελιξία και πρωτοτυπία, μέσω 4 γεωμετρικών προβλημάτων, που προτάθηκαν στους μαθητές για επίλυση, τα οποία δέχονται διάφορες λύσεις (στα 3 από τα 4) και χρήζουν για την επίλυσή τους την χρήση βοηθητικών γραμμών. Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 94 μαθητές Α Γυμνασίου (41 αγόρια και 53 κορίτσια) από 3 σχολεία της επαρχίας Θηβών, οι οποίοι χωρίστηκαν σε δύο ομάδες, όπου η πρώτη (ομάδα πειράματος), αποτελούμενη από 39 μαθητές, έλαβε μέρος στην γραπτή δοκιμασία με την βοήθεια του λογισμικού δυναμικής γεωμετρία Geogebra στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους, ενώ οι υπόλοιποι (ομάδα ελέγχου) έλαβε μέρος στην γραπτή δοκιμασία στην σχολική αίθουσά τους.

Λέξεις κλειδιά: Ορισμοί γεωμετρικών αντικειμένων, κατανόηση γεωμετρικού σχήματος, δημιουργικότητα, μαθηματική δημιουργικότητα, προβλήματα γεωμετρίας πολλαπλών λύσεων, βοηθητικές γραμμές, λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.

Abstract

Geometry is the area of mathematics that offers the space for cultivating students' creativity more than any other area, although in recent years it has been sidelined from the school's goals in Greece. However, creativity itself is complex and as a relatively new concept in research, it is worth exploring. This paper presents new trends in the teaching of geometry and explores aspects of creativity, focusing on the Greek school and the transition from primary to secondary education.

The first part of this paper identifies the necessity of the research, its purpose and objectives are identified, a theoretical literature review of both the teaching of geometry and mathematical creativity, with emphasis on multi-solution problems, auxiliary lines, new problem posing and dynamic geometry software, and the way they contribute to the development of geometric thinking and especially to the development of mathematical creativity is investigated.

The second part of this study investigates the performance of students of the first grade of high school in the province of Thebes, regarding the understanding of geometry (definitions, properties, etc.), in geometry multi-solution projects, in problem posing and how dynamic geometry software can contribute to the performance of students. The understanding of basic geometry terms is assessed through a short questionnaire (true-false), students' opinion of geometry is investigated through a short Likert questionnaire, and the three dimensions of mathematical creativity, fluency, flexibility and originality, are also studied through 4 geometric problems proposed to students to solve, which accept different solutions (in 3 out of 4) and require the use of auxiliary lines to solve them. The sample of the research consisted of 94 first grade students (41 boys and 53 girls) from 3 schools in the province of Thebes, who were divided into two groups, where the first (experimental group), consisting of 39 students, took part in the written test with the help of the Geogebra dynamic geometry software in the computer laboratory of their school, while the rest (control group) took part in the written test in their classroom.

Key words: Definitions of geometric objects, geometric shape understanding, creativity, mathematical creativity, multi-solution geometry problems, auxiliary lines, dynamic geometry software.

Περιεχόμενα

Μέρος Α: Θεωρητικό Πλαίσιο

1. Εισαγωγή

Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι η αποτύπωση των σύγχρονων τάσεων στη μαθηματική δημιουργικότητα και συγκεκριμένα στο πώς αυτή αποτυπώνεται στο μάθημα της Γεωμετρίας. Οι επιμέρους στόχοι της εργασίας είναι οι παρακάτω:

1. Η αποτύπωση του βαθμού ικανότητας των μαθητών αναφορικά με τις δεξιότητες αξιοποίησης και χειρισμού ενός γεωμετρικού σχήματος, προκειμένου να απαντήσουν στα ζητούμενα μιας άσκησης. Ο συγκεκριμένος στόχος κρίνεται ως ιδιαίτερα σημαντικός δεδομένου ότι το γεωμετρικό σχήμα σε μια άσκηση είναι θεμελιώδες στοιχείο της, και ο σωστός χειρισμός του, όπως η χάραξη βοηθητικών γραμμών, είναι σε θέση να οδηγήσει τους μαθητές στη σωστή απάντηση.
2. Η αποτύπωση των δυσκολιών με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι μαθητές κατά την μετάβαση τους από τη Γεωμετρία της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, σε αυτήν την Δευτεροβάθμιας. Η διαφορά διδασκαλίας της Γεωμετρίας στις δύο βαθμίδες, ενδέχεται να προκαλεί στους μαθητές προβλήματα κατανόησης των δεδομένων, ενώ επιπλέον η χρήση μιας πιο τυπικής ορολογίας ενδέχεται να τους δυσκολεύει κατά την κατασκευή και τον χειρισμό ενός γεωμετρικού σχήματος.
3. Η μελέτη της σύγχρονης βιβλιογραφίας στο πεδίο της μαθηματικής δημιουργικότητας, για την επίλυση προβλήματος με πολλές λύσεις, αλλά και κατασκευής προβλήματος (με χρήση βοηθητικών γραμμών), κυρίως στη Γεωμετρία.
4. Να προσδιοριστούν οι διαδικασίες κατασκευής και ταξινόμησης μαθηματικών προβλημάτων (Silver), από τους μαθητές. Παράλληλα, διερευνώνται οφέλη που θα αποκομίζουν οι μαθητές μέσω της δραστηριότητας και η στενή σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην επίλυση και την κατασκευή προβλημάτων. Τέλος, η κατασκευή προβλημάτων παρουσιάζεται ως ένα επιστημονικό εργαλείο για την αξιολόγηση μαθητών.

5. Η διερεύνηση του κατά πόσο η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων σχετίζεται με την ικανότητα τροποποίησης μαθηματικών προβλημάτων, που αποτελεί κριτήριο μαθηματικής δημιουργικότητας, καθώς και η εξέταση αν και σε ποιο βαθμό αυτή η ικανότητα αποτελεί μέτρο και κριτήριο κατανόησης για τη διαδικασία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων και κριτήριο κατανόησης μαθηματικών εννοιών.
6. Η εξέταση του βαθμού κατά τον οποίο η ικανότητα κατασκευής προβλημάτων αποτελεί ένα μέτρο αναγνώρισης μαθηματικών ταλέντων, η οποία σχετίζεται με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μαθηματικών διαγωνισμών.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο από αυτά, το οποίο αποτελεί βιβλιογραφική ανασκόπηση, παρουσιάζονται οι ιδιαιτερότητες της διδασκαλίας της γεωμετρίας, στις δύο βαθμίδες εκπαίδευσης, προκειμένου να εντοπιστούν πιθανές διαφορές και οι σύγχρονες τάσεις της διδασκαλίας της γεωμετρίας, μέσα από τη σχετική Ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία. Επιπλέον παρουσιάζονται οι πτυχές της δημιουργικότητας και ο ρόλος που παίζουν στην καλλιέργειά της τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, η τοποθέτηση νέων προβλημάτων, οι βοηθητικές γραμμές στο σχήμα και τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας. Στο ερευνητικό μέρος η εργασία εστιάζει στην αποτύπωση της κατάστασης στην Ελλάδα, μέσω μιας ποσοτικής έρευνας στην οποία συμμετείχαν μαθητές της Α Γυμνασίου.

2. Η Γεωμετρία στο Ελληνικό πλαίσιο και σύγχρονες τάσεις για τη διδασκαλία της.

2.1 Η σημασία της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Η Γεωμετρία περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα διδασκαλίας των σχολείων σε όλο τον κόσμο. Προφανώς, το συγκεκριμένο μάθημα θεωρείτε ότι ωφελεί τους μαθητές και για αυτό διδάσκεται. Πιο συγκεκριμένα, ο Τουμάσης (Τουμάσης, 1994) αναφέρεται σε πέντε λόγους οι οποίοι καθιστούν αδιαμφισβήτητη την παιδαγωγική αξία του μαθήματος της Γεωμετρίας:

- Συμβάλει στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου, η οποία είναι σημαντική διότι ο άνθρωπος ζει και κινείται στο χώρο.
- Συμβάλει στην καλλιέργεια της ικανότητας μιας νοερής σύλληψης των μαθηματικών.
- Είναι ο τομέας των μαθηματικών ο οποίος συνδέεται, περισσότερο άμεσα από τους υπόλοιπους, με τον πραγματικό κόσμο.
- Συμβάλει στην κατανόηση άλλων περισσότερο αφηρημένων μαθηματικών εννοιών, από άλλες περιοχές τους, μέσω των γεωμετρικών μοντέλων ερμηνείας.
- Αποτελεί ένα μαθηματικό σύστημα το οποίο είναι απλό και κατανοητό από τους μαθητές, με αποτέλεσμα να είναι σε θέση να κατανοήσουν πιο σύνθετα μαθηματικά συστήματα.

Κατά τον Λεμονίδη (2003), οι μαθητές, στο πλαίσια της Γεωμετρίας, αρχίζουν να μελετούν το χώρο εντός του οποίου ζουν και προσανατολίζονται, μετρούν, συγκρίνουν και παράλληλα σχηματίζουν νοερές εικόνες της μορφής των γεωμετρικών αντικειμένων. Ο ίδιος συμπληρώνει ότι μια από τις σημαντικότερες πλευρές του γεωμετρικού συλλογισμού είναι η νοερή απεικόνιση του χώρου η οποία σχηματίζεται από τη χρήση των νοερών αναπαραστάσεων των τρισδιάστατων και δισδιάστατων γεωμετρικών αντικειμένων, καθώς και οι διαφορετικές προοπτικές θεωρήσεις τους. Οι μαθητές αρχικά διδάσκονται τα γεωμετρικά σχήματα, τη δομή τους, και αναλύουν στη συνέχεια τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους. Στη συνέχεια, με αυτά ως εργαλεία, είναι σε θέση να διαχειριστούν και να περιγράψουν το χώρο που τους περιβάλλει, καθώς και να επιλύσουν διάφορα γεωμετρικά προβλήματα.

Η Κολέζα (2000) θεωρεί τη μελέτη της Γεωμετρίας απαραίτητη, διότι εμπεριέχει τρία είδη γνωστικών διεργασιών. Η πρώτη από αυτές τις διαδικασίες είναι η διαδικασία της οπτικοποίησης με σκοπό την αναπαράσταση αντικειμένων του χώρου, καθώς και την επεξήγηση μιας πρότασης, τη συστηματική διερεύνηση μιας σύνθετης κατάστασης, ή τον έλεγχο κάποιων υποθέσεων. Το δεύτερο είδος γνωστικής διεργασίας είναι αυτή της κατασκευής, με τη χρήση συγκεκριμένων εργαλείων και υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Το τρίτο είδος είναι οι διαδικασίες συλλογισμού. Και οι τρεις είναι σε θέση να εκτελεσθούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη, αλλά αυτό που είναι απαραίτητο για τη γεωμετρική σκέψη, είναι ο συνδυασμός τους. Η συνύπαρξη των τριών αυτών γνωστικών διαδικασιών, μπορεί να προσφέρει μεθοδολογικά πλεονεκτήματα στην κατανόηση της Γεωμετρίας, έναντι άλλων γνωστικών περιοχών.

2.2 Το αναλυτικό πρόγραμμα της Γεωμετρίας στο Δημοτικό.

Με δεδομένο ότι η παρούσα εργασία εστιάζει στη Γεωμετρία στην Α΄ Γυμνασίου, είναι σημαντικό να δούμε ποιο είναι το υπόβαθρο με το οποίο μεταβαίνουν οι μαθητές από το Δημοτικό σχολείο στο Γυμνάσιο, και συγκεκριμένα τι διδάσκονται οι μαθητές κατά την διάρκεια των δύο τελευταίων τάξεων του Δημοτικού.

Ο στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στην Ε τάξη του Δημοτικού, σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) Μαθηματικών είναι να:

- χαράζουν με τη βοήθεια οργάνων (κανόνας διαβήτης, μοιρογνωμόνιο) γεωμετρικά σχήματα,
- υπολογίζουν τα εμβαδά και τις περιμέτρους βασικών γεωμετρικών σχημάτων, όπως και το μήκος ενός κύκλου,
- γνωρίζουν την ονομασία γωνιών και τριγώνων, να μπορούν να τα ταξινομούν καθώς και να τα κατασκευάζουν,
- μπορούν να κατασκευάσουν αναπτύγματα απλών βασικών στερεών.

Οι έννοιες που προσεγγίζονται μέσω της Διαθεματικής Προσέγγισης είναι αυτής της μεταβολής, του συστήματος, του χώρου και του χρόνου, του ατόμου και του συνόλου, της ομοιότητας και της διαφοράς, και τέλος της ταξινόμησης.

Οι επιμέρους στόχοι της διδασκαλίας του μαθήματος είναι οι μαθητές να:

- χαράζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων,
- αναγνωρίζουν σχήματα που είναι μέρη ενός σύνθετου σχήματος,
- υπολογίζουν τα εμβαδά του τετραγώνου, του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και του ορθογώνιου τριγώνου,
- συγκρίνουν εμβαδά,
- κατανοήσουν ότι η έννοια του εμβαδού είναι διαφορετική από την έννοια της περιμέτρου επιλύοντας προβλήματα, στα οποία γνωρίζουν τη μία από τις δύο έννοιες και ζητάμε την άλλη,
- υπολογίζουν το μήκος ενός κύκλου,
- διακρίνουν τα είδη των γωνιών (ορθή, οξεία, αμβλεία),
- συγκρίνουν και να σχηματίζουν γωνίες,
- διακρίνουν τα είδη τριγώνων και τις ιδιότητές τους,
- εφαρμόζουν τις συνήθεις τεχνικές χάραξης των υψών ενός τριγώνου,
- κάνουνε σμικρύνσεις και μεγεθύνσεις, απλών ευθυγράμμων σχημάτων σε χαρτί μιλιμετρέ,
- φτειάχνουνε το συμμετρικό κάποιου σχήματος ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο ή μιλιμετρέ χαρτί.

Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες εστιάζουν στα παρακάτω:

- Διδασκαλία του λεξιλογίου των επίπεδων σχημάτων, όπως της ευθείας, του κύκλου, του κέντρου, της ακτίνας, της διαμέτρου, της γωνίας κτλ.
- Ανάλυση ενός σύνθετου γεωμετρικού σχήματος, διατύπωση εικασιών για τα επιμέρους στοιχεία του, όπως και επαλήθευση χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα.
- Σμίκρυνση και μεγέθυνση σε τετραγωνισμένο χαρτί, χωρίς την χρήση υπολογιστικών διαδικασιών κλιμάκων και αναλογιών.
- Πραγματοποιούνται μετρήσεις μόνο πάνω σε τετραγωνισμένο χαρτί.
- Δημιουργία συμμετρικού σχήματος με μορφή δράσεως σχεδιασμού.

- Μελέτη των μαθηματικών εννοιών κατά τον σχεδιασμό του τροχού ποδηλάτου και χρησιμοποίηση λογισμικών Γεωμετρίας.

Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών, όλα τα παραπάνω πρέπει να αναπτυχθούν σε 8 διδακτικές ώρες.

Ο στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στην ΣΤ τάξη του Δημοτικού, σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών είναι να:

- μελετούν τον σχεδιασμό ευθύγραμμων σχημάτων και κύκλων με διαβήτη και κανόνα (χάρακα),
- υπολογίζουν το μήκος κύκλου και το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, όπως και τα εμβαδά και τους όγκους βασικών στερεών σχημάτων,
- να αναπαράγουνε, να κατασκευάζουνε και να συγκρίνουνε γωνίες,
- να σχεδιάζουνε το συμμετρικό κάποιου σχήματος ως προς άξονα και να διενεργούνε σμικρύνσεις, μεγεθύνσεις και μεταφορές.

Οι έννοιες που προσεγγίζονται μέσω της Διαθεματικής Προσέγγισης είναι αυτής της μεταβολής, του συστήματος, του χώρου και του χρόνου, του ατόμου και του συνόλου,, της ομοιότητας και της διαφοράς, και τέλος της συμμετρίας.

Οι επιμέρους στόχοι της διδασκαλίας του μαθήματος είναι οι μαθητές να:

- αναγνωρίζουνε σχήματα σε ένα σύνθετο περιβάλλον, καθώς και να χαράζουν με τη βοήθεια οργάνων γεωμετρικά σχήματα,
- μεταχειρίζονται τους τύπους υπολογισμού των εμβαδών του τριγώνου, του παραλληλόγραμμου και του τραπεζίου,
- να επιλύουν σχετικά προβλήματα με εμβαδά τριγώνου, παραλληλόγραμμου, τραπεζίου και κύκλου,
- υπολογίζουνε τα εμβαδά και τους όγκους ολικής και παράπλευρης επιφάνειας, στερεών, όπως κύβου, ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και κυλίνδρου, καθώς και να επιλύουν συνδυαστικά προβλήματα εμβαδών και όγκων.
- αξιοποιούνε δεδομένα από εμβαδά και όγκους για να κατασκευάζουν τα αναπτύγματα στερών, όπως κύβου, κυλίνδρου και ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου,
- σχεδιάζουνε, να αναπαράγουνε και να συγκρίνουνε γωνίες,

- διενεργούνε σμικρύνσεις, μεγεθύνσεις και μεταφορές σε χαρτί μιλιμετρέ απλών ευθύγραμμων σχημάτων,
- κατασκευάζουνε το συμμετρικό σχήματος ως προς άξονα.

Οι εκπαιδευτικές δραστηριότητες εστιάζουν στα παρακάτω:

- Σχεδιασμός και κατασκευή κύβου, ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου και κυλίνδρου.
- Ανάλυση των αναπτυγμάτων στερέων σχημάτων, καθώς και μελέτη και μετρήσεις των θέσεων των εδρών.
- Για να γίνει κατανοητή η έννοια του όγκου χρησιμοποιείτε η μέθοδος της «διαδοχικής πλακόστρωσης» με μικρούς κύβους, μέθοδος ανάλογη της πλακόστρωσης με τετραγωνάκια στην περίπτωση κατανόησης της έννοιας του εμβαδού.
- Συγκρίνουνε γωνίες με πολλούς τρόπους, όπως με ολική αντίληψη, με εναπόθεση, με δίπλωση, με διαφανές χαρτί, καθώς και με μοιρογνωμόνιο.
- Οι μαθητές με ένα κουτί με νιφάδες καλαμποκιού - το οποίο χρησιμοποιείται για πρωινό – φτειάχνουνε διαφορετικά γεωμετρικά στερεά με την ίδια χωρητικότητα.
- Χρησιμοποιούνε Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας.

Σύμφωνα με το ΔΕΠΠΣ Μαθηματικών, όλα τα παραπάνω πρέπει να αναπτυχθούν σε 8 διδακτικές ώρες.

2.3 Το αναλυτικό πρόγραμμα της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο.

Ο στόχος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στην Α τάξη του Γυμνασίου, σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) Μαθηματικών είναι να:

- γνωρίσουνε τις βασικές γεωμετρικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο, ευθύγραμμα τμήματα, γωνία, ευθύγραμμα σχήματα, κύκλος, τόξο, επίκεντρη γωνία, κτλ. και να μπορούν να κατανοούν την σημασία τους στην ανάπτυξη του μαθήματος της Γεωμετρίας,
- γνωρίσουνε τις έννοιες της παραλληλίας, της καθετότητας και της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς και κέντρο, καθώς και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν αναλυτικές

μεθόδους κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (π.χ. ιδιότητες τριγώνου, κύκλου, παραλληλογράμμου, κτλ.).

- κατανοήσουνε τις έννοιες: μέτρο γωνίας και τόξου και μήκος ευθύγραμμου τμήματος, να γνωρίζουνε μονάδες μέτρησης αυτών και να είναι σε θέση να υπολογίζουν το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος, όπως και το μέτρο ενός τόξου και μιας γωνίας.

Οι έννοιες που προσεγγίζονται μέσω της Διαθεματικής Προσέγγισης είναι αυτής της μεταβολής, του συστήματος, του χώρου και του χρόνου, της επικοινωνίας, της ομοιότητας και της διαφοράς, και τέλος του πολιτισμού και των τεχνών.

Οι επιμέρους στόχοι της διδασκαλίας του μαθήματος, αναφορικά με τις βασικές γεωμετρικές έννοιες του επιπέδου, του σημείου, του ευθύγραμμου τμήματος, της ευθείας, της ημιευθείας και του ημιεπιπέδου (2 διδακτικές ώρες) είναι οι μαθητές να:

- συμβολίζουνε και να σχεδιάζουνε σημεία, ευθείες, επίπεδα, ευθύγραμμα τμήματα, ημιευθείες και ημιεπίπεδα,
- διακρίνουνε τη διαφορά ενός ευθύγραμμου τμήματος, που ορίζουν δύο σημεία και μιας ευθείας, που διέρχεται από δύο σημεία.
- γνωρίζουνε ότι από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία και μοναδική ευθεία και ότι αντίστοιχα από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα και μοναδικό επίπεδο,
- γνωρίζουνε ότι από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες και αντίστοιχα από ένα ή από δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα.

Οι επόμενες έννοιες που μελετώνται είναι αυτές της γωνίας, της γραμμής, των επίπεδων σχημάτων (2 διδακτικές ώρες). Οι επιμέρους στόχοι της διδασκαλίας του μαθήματος, είναι οι μαθητές να είναι σε θέση να:

- κατανοήσουνε την έννοια της γωνίας, να μπορούν να σχεδιάζουν, να συμβολίζουν και να διαβάζουν γωνίες,
- γνωρίσουν τα είδη των γραμμών και να μπορούν να διακρίνουν τις μη κυρτές από τις κυρτές πολυγωνικές γραμμές,
- γνωρίσουν την έννοια του ευθύγραμμου σχήματος, καθώς και να μπορούν να διακρίνουν το μη κυρτό από το κυρτό ευθύγραμμο σχήμα,
- γνωρίζουν ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα είναι ίσα όταν συμπίπτουν, τοποθετούμενα το ένα πάνω στο άλλο.

Ακολούθως, το πρόγραμμα σπουδών εστιάζει στις έννοιες της μέτρησης ευθυγράμμων τμημάτων, καθώς και στη σύγκριση και την ισότητα τους, όπως και στην απόσταση σημείων και το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος (2 διδακτικές ώρες). Οι επιμέρους στόχοι της διδασκαλίας του μαθήματος, για τη συγκεκριμένη ενότητα είναι οι μαθητές να:

- γνωρίζουν ότι κάθε τμήμα έχει συγκεκριμένο μήκος, το οποίο να μπορούν να υπολογίζουν,
- γνωρίζουν τις μονάδες μέτρησης μήκους στο δεκαδικό μετρικό σύστημα, τον συμβολισμό τους και τις μεταξύ τους σχέσεις,
- γνωρίζουν ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν ίσα μήκη,
- συγκρίνουν ευθύγραμμα τμήματα, με το χάρακα και με το διαβήτη,
- κατασκευάζουν τμήμα δοθέντος μήκους με αρχή γνωστό σημείο πάνω σε γνωστή ευθεία,
- βρίσκουν την απόσταση σημείων με χάρακα (υποδεκάμετρο),
- γνωρίζουν ότι κάθε τμήμα έχει μοναδικό μέσο, το οποίο να μπορούν να προσδιορίσουν με τη βοήθεια χάρακα,
- βρίσκουν μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος. με το χάρακα,
- γνωρίζουν ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι η μικρότερη σε μήκος γραμμή από όλες τις γραμμές, που συνδέει τα σημεία Α και Β.

Επίσης, σε μία διδακτική ώρα, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να προσθέτουν και να αφαιρούν ευθύγραμμα τμήματα.

Αναφορικά με την ενότητα της μέτρησης, σύγκρισης και ισότητας γωνιών, τη διχοτόμο μιας γωνίας και την ισότητα ευθύγραμμων σχημάτων (2 διδακτικές ώρες), οι μαθητές πρέπει να:

- γνωρίζουνε ότι κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο το οποίο θα πρέπει να μπορούν να το υπολογίσουνε,
- γνωρίζουνε ότι το μέτρο γωνίας εξαρτάται από το «άνοιγμα» μόνο των πλευρών της,
- γνωρίζουνε τη βασική μονάδα μέτρησης γωνιών (μοίρες), όπως και τις υποδιαιρέσεις της,
- υπολογίζουνε με το μοιρογνωμόνιο το μέτρο γωνίας,
- γνωρίζουνε ότι δύο γωνίες είναι ίσες όταν έχουν το ίδιο μέτρο,

- σχεδιάζουνε οποιαδήποτε γωνία όταν γνωρίζουνε το μέτρο της,
- συγκρίνουνε γωνίες με μοιρογνωμόνιο (κυρίως) ή με διαφανές χαρτί,
- γνωρίζουνε τι είναι η διχοτόμος γωνίας, όπως και ότι κάθε γωνία έχει μοναδική διχοτόμο, να μπορούν να τη σχεδιάζουνε με χρήση μοιρογνωμονίου ή με δίπλωση του φύλλου σχεδίασης.

2.4 Μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο.

Όπως είναι φανερό από τα παραπάνω αναλυτικά προγράμματα γεωμετρίας, η γεωμετρία της Α΄ γυμνασίου, και κατά προέκταση τα μαθηματικά, αποτελούν κατά το μεγαλύτερο μέρος τους επανάληψη των μαθηματικών τα οποία διδάχτηκαν οι μαθητές κατά την διάρκεια των δυο τελευταίων τάξεων του δημοτικού. Η διαφοροποίηση στην διδασκαλία της γεωμετρίας έγκειται στην διαφορετική προσέγγιση των αντικειμένων της και την προσπάθεια για περισσότερη ακριβολογία, όσον αφορά την ορολογία, δίνοντας έμφαση στην κατανόηση εννοιών και διαδικασιών. Στα επόμενα 2 χρόνια του γυμνασίου, το μεγαλύτερο ποσοστό της ύλης αποτελείται από νέες έννοιες που βασίζονται σε ότι έχει προηγηθεί στην προηγούμενη τάξη. Γενικά στο Γυμνάσιο ζητείται από τους μαθητές να δώσουν ιδιαίτερη έμφαση στην ακριβή και σαφή διατύπωση των μαθηματικών, στις διαφορετικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών, αλλά και στους διαφορετικούς τρόπους προσέγγιση και επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων.

Η διδασκαλία της γεωμετρίας, ώστε οι μαθητές να την μαθαίνουν με νόημα, απαιτεί κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τις γνώσεις τους για διάφορα γεωμετρικά θέματα (Battista, 1999). Αυτό σημαίνει ότι είναι απαραίτητο οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών να ερευνήσουν και να κατανοήσουν πώς οι μαθητές κατασκευάζουν γεωμετρικές γνώσεις ως αποτέλεσμα των μαθησιακών τους εμπειριών στο σχολείο. Η μετάβαση από το δημοτικό σχολείο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αναγνωρίζεται ως ένα κρίσιμο γεγονός ζωής, καθώς, προχωρώντας από το ένα επίπεδο εκπαίδευσης στο επόμενο, οι μαθητές μπορεί να βιώσουν σημαντικές αλλαγές στο σχολικό κλίμα, τις εκπαιδευτικές πρακτικές και τις κοινωνικές δομές (Rice, 2001). Τα αποτελέσματα των ερευνών αποκαλύπτουν ουσιαστική συμφωνία ότι συχνά παρατηρείται μείωση των επιδόσεων των μαθητών μετά από αυτή τη μετάβαση, αλλά οι βαθμολογίες επίδοσης τείνουν να ανακάμπτουν κατά το έτος που ακολουθεί τη μετάβαση (Alspaugh, 1998). Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη μετάβαση από το δημοτικό στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, γεγονός που είναι εμφανές στις επιδόσεις τους στα περισσότερα θέματα, ιδίως στα μαθηματικά.

Η είσοδος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αποτελεί σημαντική μετάβαση για τα παιδιά. Στοιχεία από διεθνείς μελέτες δείχνουν ότι τα παιδιά ανυπομονούν να συνεχίσουν τις σπουδές τους στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ως ένα είδος πρωτοχρονιάτικης απόφασης, μια ευκαιρία να ξεκινήσουν από την αρχή (Fullarton, 1996). Κυρίως αντιλαμβάνονται τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ως ένα νέο, ενδιαφέρον και πολλά υποσχόμενο περιβάλλον όπου μπορούν να διευρύνουν τις προσωπικές τους σχέσεις και να επιδιώξουν τα ακαδημαϊκά και εξωσχολικά ενδιαφέροντα. Συχνά η δευτεροβάθμια εκπαίδευση δεν αποδεικνύεται ότι ανταποκρίνεται στις ακαδημαϊκές προσδοκίες των μαθητών, ιδίως όσον αφορά τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες (Ellerton & Clements, 1989 – Fullarton, 1996). Η ποιότητα των σχέσεων καθηγητών – μαθητών πριν και μετά τη μετάβαση φαίνεται να είναι σημαντικός παράγοντας που καθορίζει τη διάθεση των μαθητών προς τα μαθηματικά. Η αξία που αποδίδουν οι μαθητές στα μαθηματικά μπορεί να μειώνεται καθώς μετακινούνται από περισσότερο σε λιγότερο υποστηρικτικούς εκπαιδευτικούς και τάξεις μαθηματικών μετά τη μετάβαση (Midgley κ.ά., 1989).

Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παρά την ποικιλία στο σχολικό τους υπόβαθρο, οι μαθητές πρέπει να συμμορφώνονται με ένα ενιαίο στυλ διδασκαλίας (Clarke, 1985). Η πεποίθηση ότι μια τέτοια σύγκλιση είναι εύκολη να επιτευχθεί είναι από μόνη της μια υπεραπλούστευση, λαμβάνοντας υπόψη τις υπάρχουσες διαφορές στις απαιτήσεις, στις προσδοκίες και στις διδακτικές προσεγγίσεις μεταξύ των δύο επιπέδων. Η διεθνής εμπειρία δείχνει ότι υπάρχουν προγράμματα που είχαν θετικά αποτελέσματα στη σφυρηλάτηση δεσμών μεταξύ πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Επιτυχημένα παραδείγματα στην Αυστραλία, τη Νέα Ζηλανδία, Μεγάλη Βρετανία και τις Ηνωμένες Πολιτείες εφαρμόζουν προγράμματα προσανατολισμού για μαθητές και γονείς, καθώς και για τους διευθυντές των σχολείων και τους εκπαιδευτικούς, οι οποίοι εξοικειώνονται με το πρόγραμμα σπουδών της άλλης σχολικής βαθμίδας (MacIver & Epstein, 1991 – Nicholls & Gardner 1999).

Στην Ελλάδα, δεν υπάρχουν τέτοια προγράμματα προσανατολισμού, παρά το γεγονός ότι η τοπική εκπαιδευτική αρχή προκαθορίζει τα δημοτικά σχολεία που τροφοδοτούν κάθε δευτεροβάθμιο σχολείο. Παρόλο που οι εκπαιδευτικοί και των δύο εκπαιδευτικών βαθμίδων προσδιορίζουν ευρέως τη μετάβαση στη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως πιθανό πρόβλημα για τα παιδιά, ιδίως στα μαθηματικά, συνήθως δηλώνουν ότι δεν είναι εξοικειωμένοι με το πρόγραμμα σπουδών της άλλης σχολικής βαθμίδας ή με τις διδακτικές προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται (Sdrolias & Triandafillidis, 2003). Στα μαθηματικά, αυτό το πρόβλημα μετάβασης θεωρείται ότι επιλύεται μέσω της πολυδιαφημισμένης συνέχειας των μαθηματικών. Πράγματι, οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συχνά απεικονίζουν τα σχολικά μαθηματικά ως μια «αλυσίδα» εννοιών και διαδικασιών. Αυτό που μένει αναπάντητο είναι η ακαμψία και η μονοδιάστατη φύση αυτής της κατασκευής και, όπως επισημάνει ο Freudenthal (1973), πώς οι κρίκοι αυτής της αλυσίδας σφυρηλατούνται από τους μαθητές. Το εκπαιδευτικό σύστημα στην Ελλάδα είναι συγκεντρωτικό σε εθνικό επίπεδο. Τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι κανονιστικά, με την έννοια ότι κατανέμουν ένα συγκεκριμένο αριθμό ωρών για τη διδασκαλία κάθε θέματος. Η διδασκαλία στην τάξη περιορίζεται σε ένα μόνο εγχειρίδιο που παρέχεται από το κράτος, με τους εκπαιδευτικούς να διδάσκουν συνήθως «από μπροστά». Από αυτήν άποψη του μοντέλου διδασκαλίας, τα σχολεία πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα, στην πραγματικότητα, φαίνεται να μοιάζουν περισσότερο παρά να διαφέρουν. Αυτή η τακτική, του να διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί συνήθως «από μπροστά», έχει ως αποτέλεσμα την παραγκώνιση της γεωμετρίας, η οποία διδάσκεται, τουλάχιστον κατά ένα μέρος της, στο τέλος της σχολικής χρονιάς, συνήθως βιαστικά και χωρίς εμβάθυνση στους στόχους του μαθήματος.

2.5 Η μετάβαση κατά τα επίπεδα van Hiele.

Η μετάβαση από το δημοτικό στο γυμνάσιο, που αναλύθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, όπως και η μετάβαση από κάθε παιδαγωγική βαθμίδα στην επόμενη (νηπιαγωγείο – δημοτικό, δημοτικό – γυμνάσιο, γυμνάσιο – λύκειο, λύκειο – πανεπιστήμιο) για τους πιο πολλούς μαθητές είναι δύσκολη. Ειδικά για την γεωμετρία το ζεύγος van Hiele ανέπτυξε στο βιβλίο "Structure and insight" (1986), μια θεωρία που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι νέοι μαθαίνουν γεωμετρία,. Ο Pierre van Hiele και η σύζυγός του Dina van Hiele – Geldof ήταν Ολλανδοί ερευνητές και καθηγητές. Είχαν προσωπική εμπειρία με τις δυσκολίες που αντιμετώπιζαν οι μαθητές τους στην εκμάθηση της γεωμετρίας και ως εκ τούτου, ασχολήθηκαν λεπτομερώς με τα προβλήματα αυτά. Η θεωρία προέκυψε από τις διατριβές τους στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης το 1957. Ο Pierre van Hiele αφιέρωσε τη ζωή του στη θεωρία τους, ενώ η Dina πέθανε λίγο μετά την ολοκλήρωση της διατριβής της. Η έρευνα που βασίστηκε στη θεωρία πραγματοποιήθηκε στη Σοβιετική Ένωση τη δεκαετία του 1960. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά της, ένα πολύ επιτυχημένο νέο πρόγραμμα σπουδών γεωμετρίας σχεδιάστηκε στη Σοβιετική Ένωση. Οι Αμερικανοί ερευνητές έκαναν αρκετές μεγάλες μελέτες σχετικά με τη θεωρία van Hiele στα τέλη της δεκαετίας του 1970 (Usiskin, 1982 – Senk, 1985). Αυτές οι μελέτες επηρέασαν τα αμερικανικά πρότυπα NCTM (2000).

Μέσω της θεωρίας εξηγείτε ο λόγος που πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουνε πολλές δυσκολίες στο μάθημα της γεωμετρίας, προπαντός με τις τυπικές αποδείξεις. Η άποψη του ζεύγους van Hiele ήταν ότι η συγγραφή αποδείξεων προϋποθέτει υψηλό επίπεδο σκέψης και κάτι τέτοιο είναι δυνατόν όταν οι μαθητές έχουν όσο το δυνατόν πιο πολλές εμπειρίες σκέψης σε χαμηλότερα επίπεδα, προτού ασχοληθούν με τυπικές γεωμετρικές έννοιες. Σε κάθε ένα από τα πέντε επίπεδα της θεωρίας van Hiele περιγράφονται οι συλλογιστικές διεργασίες, που χρησιμοποιούν οι μαθητές στη εξέταση ή τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων. Τα ίδια τα επίπεδα δεν έχουν στόχο να περιγράψουν τις γνώσεις τις οποίες κατέχει ένας μαθητής σε κάποιο από τα επίπεδα, αλλά το τρόπο σκέψης και τους τύπους γεωμετρικών ιδεών που μπορεί ο μαθητής να επεξεργαστεί νοητικά. Καθώς ένας μαθητής μεταβαίνει από ένα επίπεδο στο επόμενο, το αντικείμενο των γεωμετρικών συλλογισμών αλλάζει. Κάθε ένα από τα επίπεδα χαρακτηρίζονται από τα αντικείμενα της σκέψης καθώς και από τα προϊόντα της σκέψης.

Η θεωρία van Hiele αποτελείται από τρεις πτυχές οι οποίες είναι οι εξής:

1. η ύπαρξη επιπέδων,
2. οι ιδιότητες των επιπέδων και τέλος
3. η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο επόμενο επίπεδο.

Αν και στην πρώτη έκδοση του έργα τους, οι van Hieles ξεκινούσαν την αρίθμηση των επιπέδων από το 0 καταλήγοντας στο 4, οι Αμερικανοί αποφάσισαν να αλλάξουν την αρίθμηση ξεκινώντας από το 1 για το πρώτο επίπεδο και καταλήγοντας στο 5 στο τελευταίο επίπεδο. Ο λόγος της αλλαγής αρίθμησης ήταν για να μπορεί το σύστημα να επιτρέπει την ύπαρξη ενός επιπέδου προ-αναγνώρισης το οποίο ονομάζεται επίπεδο 0. Το επίπεδο αυτό πρότειναν και ονόμασαν οι Clements και Battista (1992). Ο μαθητής που βρίσκεται σε αυτό το επίπεδο αντιλαμβάνεται μόνο ένα υποσύνολο των οπτικών χαρακτηριστικών κάποιου σχήματος, χωρίς να μπορεί να διακρίνει μεταξύ παρόμοιων σχημάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να διακρίνει μεταξύ τριγώνων και τετράπλευρων, αλλά μπορεί να μην είναι σε θέση να διακρίνει μεταξύ ενός παραλληλόγραμμου και ενός ρόμβου. Ο Pierre van Hiele αρχικά περιέγραψε μόνο τρία επίπεδα σκέψης και όχι πέντε.

Τα επίπεδα Van Hiele είναι τα εξής:

1. Οπτικοποίηση (Βασική οπτικοποίηση ή Αναγνώριση): Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές χρησιμοποιούν την οπτική αντίληψη και τη μη λεκτική σκέψη. Αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα με το σχήμα τους ως «σύνολο» και συγκρίνουν τα σχήματα με τα πρωτότυπά τους ή με καθημερινά πράγματα («φαίνεται σαν παράθυρο»), τα κατηγοριοποιούν (είναι / δεν είναι...). Χρησιμοποιούν απλή γλώσσα. Δεν προσδιορίζουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. Στο επίπεδο αυτό, οι μαθητές παίρνουνε αποφάσεις βάση της αντίληψης, και όχι με συλλογισμό.
2. Ανάλυση (Περιγραφή): Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές αρχίζουν να αναλύουν και να κατονομάζουν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων. Δεν βλέπουν σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, θεωρούν ότι όλες οι ιδιότητες είναι σημαντικές, δηλαδή ότι δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ αναγκαίων και επαρκών ιδιοτήτων. Δεν βλέπουν την ανάγκη απόδειξης των γεγονότων που ανακαλύπτουν εμπειρικά. Μπορούν να μετρούν, να διπλώνουν και να κόβουν χαρτί, να χρησιμοποιούν γεωμετρικό λογισμικό κ.λπ..
3. Αφαίρεση (άτυπη / μη τυπική αφαίρεση): Σε αυτό το επίπεδο οι αντιλαμβάνονται σχέσεις μεταξύ ιδιοτήτων και σχημάτων. Δημιουργούν ουσιαστικούς ορισμούς. Λογικές συνέπειες και συμπεράσματα τάξεων, όπως ότι τα τετράγωνα είναι ένας τύπος ρόμβου, μπορούν να γίνουν κατανοητά. Είναι σε θέση να δώσουν απλά επιχειρήματα για να δικαιολογήσουν τους συλλογισμούς τους. Μπορούν να σχεδιάζουν λογικούς χάρτες και διαγράμματα. Χρησιμοποιούν σκίτσα, χαρτί μιλιμετρέ, Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρικά. Ο Pierre van Hiele έγραψε: «Η εμπειρία μου ως καθηγητής γεωμετρίας με

πείθει ότι πολύ συχνά, οι μαθητές δεν έχουν ακόμη επιτύχει αυτό το επίπεδο άτυπης εξαγωγής συμπερασμάτων. Κατά συνέπεια, δεν είναι επιτυχείς στη μελέτη του είδους της γεωμετρίας που δημιούργησε ο Ευκλείδης, η οποία περιλαμβάνει την τυπική εξαγωγή συμπερασμάτων».

4. Αφαίρεση (Επίσημη Αφαίρεση): Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές μπορούν να δώσουν επαγωγικές γεωμετρικές αποδείξεις. Είναι σε θέση να διακρίνουν μεταξύ αναγκαίων και επαρκών συνθήκων. Προσδιορίζουν ποιες ιδιότητες συνεπάγονται από άλλες. Μπορούν να κατανοούν το ρόλο των ορισμών, των θεωρημάτων, των αξιωμάτων και των αποδείξεων. Εδώ, οι μαθητές θα πρέπει να είναι μπορούν να κατασκευάζουν αποδείξεις, σαν αυτές που τυπικά συναντώνται σε μαθήματα Γεωμετρίας του λυκείου.

5. Αυστηρότητα: Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές κατανοούν τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται τα μαθηματικά συστήματα. Είναι σε θέση να χρησιμοποιούν όλους τους τύπους αποδείξεων. Κατανοούν την Ευκλείδεια και τη μη Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι σε θέση να περιγράφουν την επίδραση της προσθήκης ή της αφαίρεσης ενός αξιώματος σε ένα δεδομένο γεωμετρικό σύστημα. Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο μπορούν να κατανοήσουν τη χρήση της έμμεσης απόδειξης και της απόδειξης μέσω αντίφασης.

Τα επίπεδα έχουν πέντε σημαντικά χαρακτηριστικά:

- Σταθερή ακολουθία (σειρά). Κάθε μαθητής για να μπορέσει να φτάσει σε ένα επίπεδο πρέπει οπωσδήποτε να έχει περάσει από το προηγούμενο, περνώντας από επίπεδο σε επίπεδο με την σειρά.
- Συνδεσιμότητα. Περνώντας από ένα επίπεδο στο επόμενο, αυτό που ήταν έμφυτο στο προηγούμενο, γίνεται εξωγενές στο επόμενο επίπεδο.
- Διάκριση. Σε κάθε επίπεδο υπάρχουν διαφορετικά γλωσσικά σύμβολα και ξεχωριστό δίκτυο σχέσεων που συνδέει τα σύμβολα αυτά. Το νόημα ενός γλωσσικού συμβόλου είναι κάτι περισσότερο από τον ρητό ορισμό του και περιλαμβάνει τις εμπειρίες που ο ομιλητής συνδέει με το συγκεκριμένο σύμβολο. Αυτό που μπορεί να είναι «σωστό» σε ένα επίπεδο, αλλά δεν είναι απαραίτητα σωστό σε ένα άλλο επίπεδο.
- Διαχωρισμός. Για δύο άτομα που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο δεν είναι δυνατό να κατανοήσουν ο ένας τον άλλον. Ο δάσκαλος μιλάει διαφορετική «γλώσσα» στον μαθητή που βρίσκεται σε πιο χαμηλό επίπεδο. Οι van Hieles πίστευαν ότι αυτή η ιδιότητα ήταν ένας από τους κύριους λόγους αποτυχίας στο μάθημα της Γεωμετρίας.

- Επίδοση. Η μαθησιακή διαδικασία που οδηγεί στην πλήρη κατανόηση του επόμενου επιπέδου αποτελείτε από πέντε φάσεις: πληροφόρηση, καθοδηγούμενος προσανατολισμός, εξήγηση, ελεύθερος προσανατολισμός, ολοκλήρωση, οι οποίες δεν είναι αυστηρά διαδοχικές.

Το ζεύγος van Hieles πίστευε ότι η γνωστική πρόοδος στη γεωμετρία μπορεί να επιταχυνθεί μέσω της κατάλληλης διδασκαλίας. Ο τρόπος διδασκαλίας επηρεάζει την πρόοδο από το ένα επίπεδο στο επόμενο, περισσότερο από την ηλικία ή την ωριμότητα του μαθητή. Εξήγησαν σαφώς πώς πρέπει να προχωρήσει ο δάσκαλος για να οδηγήσει τους μαθητές στο πέρασμα από το ένα επίπεδο στο επόμενο. Ωστόσο, η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα. Σύμφωνα με το ζεύγος, ένας μαθητής εξελίσσεται μέσα από κάθε επίπεδο σκέψης ως αποτέλεσμα της διδασκαλίας που θα πρέπει να οργανώνεται σε πέντε φάσεις μάθησης, οι οποίες είναι οι εξής:

- Πληροφόρηση: Ο δάσκαλος μπορεί να εντοπίσει μέσω συζήτησης, τι είναι αυτό που οι μαθητές ήδη γνωρίζουν για κάποιο θέμα και προσανατολίζει τους μαθητές του σε νέα θέματα παρεμφερή.
- Καθοδηγούμενος προσανατολισμός: Ο δάσκαλος παρακινεί τους μαθητές να εξερευνήσουν τα αντικείμενα της διδασκαλίας, μέσω προσεκτικά δομημένων εργασιών που έχει προετοιμάσει, όπως η μέτρηση, το δίπλωμα ή η κατασκευή, εφιστώντας τους την προσοχή στο να εξερευνούν και να εστιάζουν σε συγκεκριμένες σημαντικές έννοιες.
- Επεξήγηση: Ο δάσκαλος ζητάει από τους μαθητές να περιγράφουν με δικά τους όσο το δυνατόν λόγια, τι έχουν μάθει για το θέμα του μαθήματος. Ο δάσκαλος εισάγει σταδιακά σχετικούς μαθηματικούς όρους.
- Ελεύθερος προσανατολισμός: Οι μαθητές υλοποιούνε τις σχέσεις που έμαθαν κατά την επίλυση ασκήσεων και διερευνούν εργασίες πιο ανοιχτού τύπου.
- Ενσωμάτωση: Οι μαθητές συνοψίζουν και ενσωματώνουν όσα έχουν μάθει, αναπτύσσουν ένα νέο δίκτυο αντικειμένων και σχέσεων.

Για κάποιον μαθητή το πέρασμα από κάποια συγκεκριμένη από τις πέντε φάσεις μπορεί να χρειαστεί επανάληψη για κάποιο συγκεκριμένο θέμα, ίσως και πολλές φορές.

Σύμφωνα με τους Johnson κ.ά. (2021) στόχος του εκπαιδευτικού στο νηπιαγωγείο και το δημοτικό σχολείο στα μαθήματα Γεωμετρίας είναι η εξέλιξη του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης των εκπαιδευόμενών του από το Επίπεδο 1 στο Επίπεδο 2 ή ακόμα και στο Επίπεδο

3, αν αυτό μπορεί να καταστεί δυνατόν στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Ταυτόχρονα, βελτιώνεται η αίσθηση του χώρου μέσω της κατανόησης και της αναγνώρισης των γεωμετρικών σχημάτων, ενισχύεται η δυνατότητα περιγραφής του χώρου μέσω της ταξινόμησης και της γνώσης των ονομάτων των γεωμετρικών σχημάτων, κατανοούν τις έννοιες ισότητα και ομοιότητα, και εξοικειώνονται με τις μονάδες μέτρησης, όπως και με τη διαδικασία μέτρησης ή υπολογισμού διαφόρων αντικειμένων (μήκη, εμβαδά, γωνίες, όγκοι κτλ). Τα παραπάνω δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται σαν αντικείμενα που απλά πρέπει ο μαθητής να μάθει, αλλά σαν μέθοδος εκμάθησης, αφομοίωσης και κατανόησης του κόσμου της Γεωμετρίας. Μέσω της θεωρίας van Hiele προσφέρετε ένα πλαίσιο, μέσα από το οποίο δίνεται η δυνατότητα να διεξάγονται δραστηριότητες Γεωμετρίας. Δεν γίνεται προσπάθεια να καθοριστεί το περιεχόμενο αυτό καθαυτό, αλλά είναι δυνατόν να εφαρμοστεί σε πολλές και διαφορετικές δραστηριότητες. Μία δραστηριότητα μπορεί να σχεδιαστεί σε σχέση με ένα συγκεκριμένο επίπεδο, αλλά οφείλει να διαθέτει την ευελιξία προσαρμογής στο επίπεδο σκέψης των εκπαιδευόμενων της εκάστοτε τάξης, διαμέσου των ερωτήσεων ή της διδασκαλίας που παρέχει ο εκπαιδευτικός, ο οποίος οφείλει να σέβεται τις αντιδράσεις και τις παρατηρήσεις των μαθητών. Οι αντιδράσεις και οι παρατηρήσεις αυτές υποκρύπτουν ένα κατώτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης. Κάτι τέτοιο θα πρέπει να ενθαρρυνθεί, έτσι ώστε να μπορέσει ο εκπαιδευτικός να προκαλέσει τους μαθητές να λειτουργήσουνε στο επόμενο κάθε φορά επίπεδο.

2.6 Η αναπαράσταση των μαθηματικών σχέσεων μέσα από τη Γεωμετρία.

Σύμφωνα με τον Parzyz (1991), τα γεωμετρικά σχήματα παρουσιάζουν μια ολιστική αναπαράσταση των μαθηματικών σχέσεων μέσα σε ένα πρόβλημα. Για αυτό το λόγο η αναγνώριση των γεωμετρικών σχέσεων με βάση αυτές τις αναπαραστάσεις είναι το πιο κρίσιμο βήμα σε μια διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Δεδομένου ότι τα γεωμετρικά σχήματα, από τη φύση τους, δεν μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα από έννοιες (Fischbein, 1993), οι μαθητές πρέπει να δημιουργήσουν ακριβείς σχέσεις μεταξύ ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος και των μαθηματικών αρχών-εννοιών, κατά την επίλυση προβλημάτων ή την απόδειξη θεωρημάτων.

Σύμφωνα με τον Duval (1995), μια τέτοια αλληλεπίδραση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα από την κατανόηση του σχήματος. Κάθε μία από αυτές τις διαδικασίες, οι οποίες ονομάζονται αντιληπτικές, λεκτικές, λειτουργικές και διαδοχικές αντιλήψεις, εξυπηρετεί έναν σκοπό μέσα στην αλληλεπίδραση εικόνας-έννοιας (Duval, 1995, 1998). Έτσι, ορισμένες μελέτες αποκαλύπτουν τη σημασία των διαδικασιών κατανόησης του σχήματος από την πλευρά των μαθητών προκειμένου να προχωρήσουν στην επίλυση προβλημάτων ή την απόδειξη θεωρημάτων (Llinares & Clemente, 2014 – Torregrosa & Quesada, 2008).

Στα περισσότερα προγράμματα σπουδών του Γυμνασίου, με την ολοκλήρωση των σπουδών, οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να εξηγήσουν τα χαρακτηριστικά των γεωμετρικών ιδιοτήτων, καθώς και τις σχέσεις μεταξύ τους, προκειμένου να είναι σε θέση να έχουν πρόσβαση σε εμπειρικά στοιχεία έτσι ώστε να τα χρησιμοποιήσουν για την κατασκευή, ανάλυση και κατηγοριοποίηση των γεωμετρικών σχημάτων. Στην ουσία οι μαθητές, ερχόμενοι από την προηγούμενη βαθμίδα, βρίσκονται σε μια διαδικασία μιας πιο αυστηρής και τυπικής χρήσης της Γεωμετρίας, ενώ στο Λύκειο οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση να αποδείξουν τις γεωμετρικές σχέσεις που είχαν πειραματικά-εμπειρικά αποδείξει στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο, αλλά και να κατανοήσουν καλύτερα τις αποδείξεις.

Έχουν προκύψει διαφορετικές προσεγγίσεις σχετικά με τις προσπάθειες να εφοδιαστούν οι μαθητές με δεξιότητες σκέψης ανώτερης τάξης που η γεωμετρία μπορεί να προσφέρει, τη φύση της γεωμετρίας, καθώς και πώς μπορεί να διδαχθεί. Μία από αυτές τις προσεγγίσεις είναι το γνωστικό μοντέλο του Duval. Σε αυτό το μοντέλο, η γεωμετρία αντιμετωπίζεται από μια αντιληπτική και γνωστική άποψη βάσει διαδικασιών οι οποίες έχουν προηγηθεί (Jones, 1998). Ο Duval προσπάθησε να εξηγήσει ποιες διαδικασίες βιώνει κατά τη διάρκεια της κατανόησης του σχήματος, ονομάζοντας αυτές τις διεργασίες ως «*διεργασίες κατανόησης σχήματος*».

Σύμφωνα με τον Duval (2004), η προσέγγιση ενός γεωμετρικού αντικειμένου μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο ένας είναι «δια του σχήματος» με την έννοια ότι η γνωστική προσέγγιση εστιάζει στην εξεικόνιση (οπτικοποίηση) (visualization) του γεωμετρικού αντικειμένου, που ουσιαστικά έχει να κάνει με τις σχέσεις που εντοπίζει κάποιος μεταξύ των δύο γεωμετρικών αντικειμένων προκειμένου να είναι σε θέση να επεξεργαστεί ευκολότερα το γεωμετρικό πρόβλημα. Ο άλλος τρόπος προσέγγισης είναι «δια του λόγου», με την έννοια ότι επικεντρώνεται στη γεωμετρική έννοια του αντικειμένου βάσει ορισμών, θεωρημάτων και αξιωμάτων.

Ο ίδιος (Duval, 2017), αναφέρεται σε δύο επίπεδα αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων. Το ένα επίπεδο αφορά την αναγνώριση του σχήματος, με την έννοια του φυσικού αντιληπτού τρόπου για αντικείμενα ή χωρικές οντότητες, όπως είναι οι εικόνες και τα διαγράμματα, και το άλλο αφορά στην αναγνώριση του αντικειμένου, η οποία λαμβάνει χώρα σε σχέση με το μαθηματικό τρόπο με τον οποίο αιτιολογείται, ορίζεται και επιλύεται ένα πρόβλημα ορισμού, επίλυσης προβλήματος και απόδειξης. Στη γεωμετρία υπάρχει ένα κενό ανάμεσα στα δύο επίπεδα αναγνώρισης.

Αυτό το οποίο προκαλεί προβλήματα κατά την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος, είναι ότι παρατηρείται συχνά μια ασυμφωνία ανάμεσα σε αυτό που βλέπουμε, δηλαδή το σχήμα, και αυτού που δηλώνεται στην εκφώνηση του προβλήματος (Duval, 2017). Όταν συμβαίνει αυτό, προκαλεί επαναλαμβανόμενες και πολύ συχνά ανυπέρβλητες δυσκολίες για την πλειοψηφία των μαθητών.

Ανάλογη είναι και η άποψη της Mesquita (1998), η οποία διακρίνει τα γεωμετρικά σχήματα ως προς τη φύση τους, με βάση τις γεωμετρικές σχέσεις που προκύπτουν από αυτά. Συγκεκριμένα, διακρίνει το γεωμετρικό σχήμα ως αντικείμενο, ή ως εικόνα. Στην πρώτη περίπτωση, από την κατασκευή του σχήματος είναι δυνατόν να εξαχθούν οι γεωμετρικές σχέσεις, οι οποίες είναι πιθανόν να χρησιμοποιηθούν κατά την αποδεικτική διαδικασία. Σε αυτή την περίπτωση η οπτική αντίληψη του σχήματος είναι σύμφωνη με την λεκτική περιγραφή του προβλήματος. Στη δεύτερη περίπτωση, όταν το σχήμα γίνεται αντιληπτό απλά ως εικόνα δεν είναι δυνατή η εξαγωγή σχέσεων από την κατασκευή του σχήματος. Τότε το σχήμα παραπλανεί τον μαθητή και η οπτική του σύλληψη έρχεται σε αντίθεση με όσα αναφέρονται στην εκφώνηση του προβλήματος.

Ο Duval (2004), χρησιμοποιεί τον όρο εξεικόνιση για την οποία διακρίνει δύο τύπους, την εικονική και την μη εικονική εξεικόνιση. Στην εικονική εξεικόνιση γίνεται η αναγνώριση του σχήματος βάσει της ομοιότητας που έχει αυτό με το τυπικό μοντέλο, με τους μαθητές να το αντιλαμβάνονται ως μορφή, ανεξάρτητα από το πως μπορούν να το επεξεργαστούν. Αντιθέτως, στην μη εικονική εξεικόνιση, η αναγνώριση του σχήματος βασίζεται σε μια νοερή εσωτερική επεξεργασία με σκοπό τον εντοπισμό των ιδιοτήτων που προσδιορίζουν το σχήμα.

Αυτή η επεξεργασία υλοποιείται είτε μέσω της κατασκευής, είτε μέσω του μετασχηματισμού ενός γεωμετρικού σχήματος.

2.7 Ο ρόλος του σχήματος στη Γεωμετρία.

Ο Fischbein (1993) αναφερόμενος στα γεωμετρικά σχήματα και στην διπλή φύση τους, επισημαίνει ότι τα γεωμετρικά σχήματα «έχουν μια ιδιότητα, που δεν έχουν οι άλλες μαθηματικές έννοιες, δηλαδή περιέχουν την νοητική αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου». Σύμφωνα με την άποψή του αυτή, η γεωμετρική σκέψη χαρακτηρίζεται από την αλληλεπίδραση ανάμεσα στο γεωμετρικό σχήμα (υπό την έννοια της γεωμετρικής φιγούρας – figure) και της αντίστοιχης γεωμετρικής έννοιας.

Ειδικότερα, ο ίδιος (1993) δηλώνει ότι στο γεωμετρικό σχήμα υπάρχουν ταυτόχρονα τρεις κατηγορίες νοερών οντοτήτων, οι εξής:

1. *ο ορισμός* (definition),
2. η *εικόνα* (image) και
3. το *εννοιολογικό σχήμα ή έννοια* (figural concept).

Έτσι, το γεωμετρικό σχήμα δεν συγκροτεί μια γνήσια έννοια, αλλά ουσιαστικά υπερτερεί μιας απλής εικόνας, μιας και είναι μια νοερή δομή η οποία αναπαριστά νοερές κατασκευές, ενώ ταυτόχρονα σύμφωνα με τους Fischbein και Nachlielli (1998) εμπεριέχει «εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες».

Αυτές οι σχηματικές και εννοιολογικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων, ενυπάρχουν και υπό την μορφή ενός σχήματος, όσο και υπό την μορφή αναπαράστασης στο χώρο, που υπάγεται πάντα σε τυπικούς περιορισμούς. Δηλαδή με άλλα λόγια αποτελούν το «εννοιολογικό σχήμα» σύμφωνα με τον Fischbein, στο οποίο υπαγορεύονται οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί από τα αξιώματα, τους ορισμούς και τα θεωρήματα. Έτσι οι Fischbein και Nachlielli (1998) υποστηρίζουν ότι «*το υψηλότερο σημείο του γεωμετρικού συλλογισμού*» επιτυγχάνεται μόνο όταν τα σχήματα και οι συνοδεύουσες σε αυτά έννοιες εναρμονίζονται καθολικά σε ένα εννοιολογικό σχήμα.

2.8 Το γνωστικό μοντέλο του Duval.

Στο πλαίσιο του Duval, οι «διεργασίες κατανόησης σχήματος» διακρίνονται σε τέσσερεις τύπους: την αντιληπτική, την διαδικαστική, την σειριακή και την λειτουργική κατανόηση ή σύλληψη. Σύμφωνα με τον Duval, καθεμία από αυτές τις διαδικασίες εξυπηρετεί διαφορετικές λειτουργίες προκειμένου να επιτρέψει στους μαθητές να αναγνωρίσουν τις μαθηματικές σχέσεις που περιέχονται σε ένα σχήμα ενώ στη συνέχεια να αλληλοεπιδράσουν με το σχήμα κατά τη διάρκεια μιας διαδικασίας επίλυσης προβλημάτων.

Ο Duval (2004) θεωρεί ότι η αναγνώριση σχημάτων δεν θα έπρεπε να αποτελεί αφετηρία για την διδασκαλία της Γεωμετρίας, επειδή μέσω της διαδικασίας αυτής «καθηλώνει τους μαθητές στην εικονική ερμηνεία», ενώ συνεχίζοντας αναφέρει «πως δεν είναι δυνατόν να μαθευτεί και να κατανοηθεί η Γεωμετρία, όταν κανείς βλέπει τα σχήματα μόνο εικονικά».

Επίσης ο Duval είχε δηλώσει την διαφωνία του σε σχέση με την ύπαρξη ιεραρχικών επιπέδων (Van Hieles), την οποία στήριζε στην υιοθέτηση ανάπτυξης των γνωστικών γεωμετρικών λειτουργιών, που ξεκινούν να διαφαίνονται από τη νηπιακή ηλικία. Ο ίδιος αναφέρει (Duval, 1995), «κατά την αναζήτηση απόδειξης ή την επίλυση προβλημάτων τα γεωμετρικά σχήματα επιτρέπουν αυτό που ο Peirce αναφέρει ως απαγωγή (abduction) και έγκειται στον περιορισμό των δυνατών επιλογών ή των υποθέσεων. Το να μιλάμε για την ευρετική δύναμη ενός σχήματος είναι ισοδύναμο με μια απαγωγική σκέψη, η οποία οδηγεί στην παραγωγική σκέψη. Η δυνατότητα μιας τέτοιας μεταχείρισης υπερβαίνει τη γνώση των μαθηματικών ορισμών και των μαθηματικών κανόνων. Η ικανότητα επεξεργασίας ενός γεωμετρικού σχήματος σχετίζεται με την ικανότητα αναδιοργάνωσης των επιμέρους στοιχείων του, την οπτική ή θεσιακή αναδιοργάνωση, η οποία μπορεί να εκτελεστεί νοητικά ή φυσικά ανεξαρτήτως από οποιαδήποτε μαθηματική γνώση».

Έτσι λοιπόν, ο Duval προχωρά, μέσω της αντιληπτικής και γνωστικής του προσέγγισης, στο να υιοθετήσει ένα ξεχωριστό πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών σχημάτων, τα οποία έχουν αυτοτελή οργάνωση, ενώ για την πλήρη σύλληψη τους χρειάζονται τέσσερα είδη ή τύποι γνωστικής κατανόησης: η αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension), η σειριακή κατανόηση (sequential apprehension), η λεκτική κατανόηση (discursive apprehension) και τέλος η λειτουργική κατανόηση (operative apprehension).

Συγκεκριμένα:

- Η αντιληπτική κατανόηση είναι η διαδικασία η οποία συνδέεται με την αναγνώριση ενός σχήματος με αυτό που λέμε «με την πρώτη ματιά», και τον προσανατολισμό του και γενικά εστιάζει στην αφομοίωση της συνολικής μορφής του. Επίσης εστιάζει και στην διάκριση των τμημάτων του, ή αλλιώς των υποσχημάτων, με τρόπο όμως που ενδέχεται να μην βοηθά στην περαιτέρω επεξεργασία του, στην περίπτωση όπου απαιτείται αιτιολόγηση, ή απόδειξη (με βάση το σχήμα) ή έστω κάποια διαδικασία κατασκευής.
- Η σειριακή κατανόηση (ή αλλιώς διαδικαστική κατανόηση) αφορά την αντίληψη του τρόπου με τον οποίο δομούνται τα επιμέρους στοιχεία του και η οποία είναι απαραίτητη στις περιπτώσεις όπου χρειάζεται να κατασκευαστεί το σχήμα, είτε με τη βοήθεια γεωμετρικών οργάνων είτε με τη βοήθεια ειδικού λογισμικού, αλλά και για να περιγραφεί το σχήμα. Αυτό το επίπεδο κατανόησης εδράζεται σε κατασκευαστικούς περιορισμούς και μαθηματικές ιδιότητες, χωρίς να εμπίπτει σε αντιληπτικούς νόμους.
- Η λεκτική κατανόηση σχετίζεται με τα δύο προηγούμενα στάδια, ιδιαίτερα στην περίπτωση εκείνη στην οποία η επεξεργασία του γεωμετρικού σχήματος εντάσσεται στο πλαίσιο κατανόησης κάποιας εκφώνησης, όπως και στα πλαίσια μιας απόδειξης κατά τη διάρκεια της παρακολούθησης ενός μαθηματικού συλλογισμού. Σχετίζεται με άμεσο τρόπο με το γεγονός, ότι σε ένα γεωμετρικό σχήμα οι μαθηματικές σχέσεις δεν γίνεται να προσδιοριστούν μόνο με την αντιληπτική – οπτική κατανόηση, αλλά χρειάζεται και ο έλεγχος των λεκτικών δηλώσεων (ορισμοί, ονομασίες ή διαδικασίες).
- Η λειτουργική κατανόηση είναι μια διαδικασία με την οποία ουσιαστικά εκφράζεται με τον απαγωγικό συλλογισμό και είναι αυτή που κατασκευάζει συνθήκες πρόσβασης στη επίλυση ενός προβλήματος. Συνδέεται άμεσα με τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να μετασχηματιστεί ένα σχήμα, φυσικά ή νοερά, οι οποίοι και οδηγούν τελικά στη λύση .

Προκειμένου να γίνει κατανοητή αυτή η αλληλεπίδραση με το σχήμα, οι διαδικασίες κατανόησης του σχήματος θα πρέπει να αναπτύσσονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη (Duval, 1995). Κατά το στάδιο της αντιληπτικής κατανόησης-σύλληψης είναι το στάδιο στο οποίο μπορούν να ληφθούν πληροφορίες με μια πρώτη ματιά ενός σχήματος, καθώς και πληροφορίες σχετικά με την δομή-διαμόρφωση ενός γεωμετρικού σχήματος. Σε αυτό το στάδιο περιλαμβάνονται διαδικασίες όπως η παροχή πληροφοριών σχετικά με το όνομα και την περιοχή ενός σχήματος και την αναγνώριση των θεμελιωδών γεωμετρικών στοιχείων του, όπως είναι τα σημεία, τα ευθύγραμμα τμήματα, τρίγωνα κ.ά.

Η αναγνώριση των επιμέρους στοιχείων ενός σχήματος βρίσκεται στο ενδιάμεσο του σταδίου της αντιληπτικής και της σειριακής κατανόησης. Αυτός ο τύπος κατανόησης είναι στατικός και οι σχέσεις μεταξύ αυτής της κατανόησης και των επιμέρους τμημάτων δεν είναι εύκολο να γίνει διακριτή (Duval, 1995) και για αυτό θεωρείται πρακτικά αδύνατο να προσδιοριστούν οι μαθηματικές ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος που βασίζονται αποκλειστικά στο αντιληπτικό στάδιο κατανόησης.

Απαιτούνται επίσης κάποιες προκαταρκτικές πληροφορίες για το σχήμα, όπως είναι η καθιέρωση μιας σχέσης μεταξύ του σχήματος καθώς και οι μαθηματικές αρχές που το διέπουν όπως είναι οι διάφοροι ορισμοί και τα διάφορα θεωρήματα και αξιώματα, με βάση τις δεδομένες προκαταρκτικές πληροφορίες ανήκουν στο στάδιο της λεκτικής κατανόησης (Duval, 1995, 1998 – Micheal, 2013).

Ο Duval (1998) αναφέρει και τρία είδη μεταβολών ενός γεωμετρικού σχήματος, τα οποία συνιστούν αυτό που αναφέρει ως λειτουργική κατανόηση. Το πρώτο είδος είναι η «μερολογική» (mereologic) τροποποίηση, η οποία αφορά τη διάσπαση του σχήματος σε διάφορα «υποσχήματα», στον συνδυασμό τους σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην συνέχεια στην εμφάνιση νέων «υποσχημάτων». Πρακτικά αυτή η διαδικασία οδηγεί σε μια αλλαγή του τρόπου με τον οποίο αντιλαμβάνεται ο μαθητής το σχήμα με μία ματιά. Η τυπικότερη λειτουργία μέσω αυτής της τροποποίησης είναι αυτή της «αναδιαμόρφωσης» του σχήματος (reconfiguration). Το δεύτερο είδος τροποποίησης είναι η λεγόμενη «οπτική» (optic) τροποποίηση. Το συγκεκριμένο είδος τροποποίησης επιτρέπει τη μεγέθυνση ή σμίκρυνση ενός σχήματος ή ακόμα και την λοξή εμφάνιση του σχήματος, σαν να γίνεται ένα είδος χρήσης φακών. Έτσι, τα σχήματα εμφανίζονται παραλλαγμένα, χωρίς όμως να έχουν υποστεί οποιαδήποτε τροποποίηση. Για παράδειγμα, τα επίπεδα σχήματα μπορούν να τοποθετηθούν στον τρισδιάστατο χώρο, η επικαλυμμένη παρουσίαση δύο όμοιων σχημάτων, στο βάθος, με τέτοιο τρόπο ώστε το μικρότερο από αυτά να εμφανίζεται σαν να είναι το μεγαλύτερο λόγω απόστασης. Τέλος, υπάρχει και η τροποποίηση της αλλαγής θέσης (place way), μέσω της οποίας αλλάζει ο προσανατολισμός κάποιου σχήματος στο επίπεδο της εικόνας, ο οποίος όμως είναι ο ασθενέστερος μετασχηματισμός. Επενεργεί κυρίως την αναγνώριση ορθών γωνιών, οι οποίες σχηματίζονται από οριζόντιες και κατακόρυφες γραμμές. Και οι τρεις αυτές λειτουργίες δίνουνε στο σχήμα μια ευρετική λειτουργία, ενώ σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, κάποια ή κάποιες από αυτές οδηγούν σε μετασχηματισμούς οι οποίοι μπορεί να οδηγήσουν στη λύση (Gagatsis κ.ά., 2010).

3 Οι πτυχές της Δημιουργικότητας.

3.1 Η Δημιουργικότητα.

Η δημιουργικότητα έχει αναγνωριστεί ως ένα από τα πιο σημαντικές δεξιότητες του 21ου αιώνα. Αν και η σημασία της έχει αναγνωριστεί ευρέως, είναι επίσης κοινώς αποδεκτό ότι η δημιουργικότητα είναι μια σύνθετη ιδιότητα του ανθρώπινου νου. Στο σχολικό περιβάλλον, οι μαθητές που καταφέρνουν να ζωγραφίσουν κάτι όμορφο ή να γράψουν μια καλή ιστορία θεωρούνται ότι είναι δημιουργικοί. Όμως έρευνες δείχνουν ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν την δυνατότητα να είναι δημιουργικοί. Για την ακρίβεια, η δημιουργικότητα είναι ένα από τα πιο γνώριμα χαρακτηριστικά όλων των ανθρώπων. Είναι ένα από τα κύρια γνωρίσματα που μας κάνουν λιγότερο ή περισσότερο επιτυχημένους ως άτομα και ως είδος. Η δημιουργικότητα, για πολλούς, είναι η ικανότητα παραγωγής έργου, το οποίο είναι τόσο πρωτότυπο όσο και κατάλληλο (δηλαδή χρήσιμο) (Sternberg, 2000). Η δημιουργικότητα αποτελεί ένα θέμα ευρείας εμβέλειας, το οποίο είναι σημαντικό τόσο σε ατομικό όσο και σε κοινωνικό επίπεδο, σε ένα ευρύ φάσμα τομέων. Η δημιουργικότητα σε ατομικό επίπεδο, είναι σημαντική, κάθε φορά που κάποιος αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα στην δουλειά ή στην καθημερινότητά του. Αντιστοίχως, η δημιουργικότητα σε κοινωνικό επίπεδο μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά επιστημονικά ευρήματα, νέα κινήματα στις τέχνες, νέες ριζοσπαστικές έρευνες, όπως και σε νέα κοινωνικά προγράμματα. Η βαρύτητά της στην οικονομία είναι προφανής, επειδή νέα προϊόντα ή υπηρεσίες μπορεί να δημιουργήσουν νέες θέσεις εργασίας. Επίσης, τα άτομα, οι οργανώσεις όσο και οι κοινωνίες οφείλουν να προσαρμόσουν τους πόρους που διαθέτουν στις ολοένα μεταβαλλόμενες απαιτήσεις της εποχής μας, για να επιτύχουν να μένουν συνεχώς ανταγωνιστικές (Sternberg, 2000).

Η σημασία της δημιουργικότητας έχει αυξηθεί στους καιρούς μας τόσο στην κοινωνία όσο και στην εκπαίδευση. Ο σχετικά πρόσφατα επινοημένος όρος της δημιουργικότητας έκανε την εμφάνιση στην βιβλιογραφία το 1950, αλλά απουσίαζε από πολλά δημοφιλή περιοδικά μέχρι το 1960 (Piirto, 2004). Ωστόσο, κατά τα τέλη του 20ου αιώνα, δημοσιεύθηκε μια δίτομη εγκυκλοπαίδεια δημιουργικότητας από τους Runco & Pritzker (1999), στην οποία συνεισέφεραν πολλοί επιστήμονες από διάφορους επιστημονικούς τομείς, όμως δεν είναι εύκολο να εκτιμηθεί η σημαντικότητα της δημιουργικότητας. Η τάση για αύξηση της δημιουργικότητας οφείλετε κυρίως στις όλο και μεγαλύτερες οικονομικές ανάγκες. Στον συνεχώς μεταβαλλόμενο κόσμο, όπου οι επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις μεταβάλουν τα κοινωνικά δίκτυα και τη ζωή των ανθρώπων, η δημιουργικότητα έχει σημαίνοντα ρόλο, τόσο στην ίδια την μεταβολή όσο και στην επιτάχυνση των εξελίξεων.

Σε έναν συνεχώς σε μεγάλο βαθμό μεταβαλλόμενο κόσμο, στον οποίο οι επιστημονικές και τεχνολογικές εξελίξεις τροποποιούν τα κοινωνικά δίκτυα και τη ζωή των ανθρώπων, η δημιουργικότητα είναι αναγκαία τόσο για την προσαρμογή σε αυτόν τον κόσμο που αλλάζει διαρκώς, όσο και για τη δυνατότητα οι εξελίξεις αυτές να συνεχιστούν. Η ανάγκη της σημερινής κοινωνίας για ιδιαίτερα δημιουργικούς ανθρώπους που δεν θα έχουν απλά πρόσβαση ή θα κατέχουν ένα μεγάλο όγκο πληροφοριών που κατανοούν εννοιολογικά, αλλά που θα μπορούν πραγματικά να θέσουν σε χρήση αυτή τη γνώση και την κατανόηση για να παράγουν νέα γνώση οφείλει να είναι ένας από τους κυριότερους στόχους των εκπαιδευτικών μας συστημάτων.

Η δημιουργικότητα είναι ένα σύνθετο φαινόμενο, για το οποίο υπάρχουν πολλοί ορισμοί στην ερευνητική βιβλιογραφία (Haylock, 1987, Leikin, 2019). Σύμφωνα με την άποψη του Mann (Mann, 2006) υπάρχουν πιο πολλοί από 100 σύγχρονοι ορισμοί της δημιουργικότητας. Κάποιοι ορισμοί αναφέρονται στα στάδια των δημιουργικών διαδικασιών (Ervynck, 2002) και άλλοι στις ιδιότητες της δημιουργικής πράξης και του δημιουργικού προϊόντος (Silver, 1997). Κατά τον Guilford (Carroll & Guilford, 1968) υπάρχει η εξής διάκριση μεταξύ της συγκλίνουσας και της αποκλίνουσας δομής της σκέψης (διάνοιας, intelect). Η συγκλίνουσα σκέψη εμπεριέχει την επιδίωξη μιας μοναδικής, σωστής λύσης σε κάποιο πρόβλημα, ενώ από την άλλη η αποκλίνουσα σκέψη περιλαμβάνει τη δημιουργική παραγωγή πολλαπλών απαντήσεων σε κάποιο πρόβλημα ή φαινόμενο και αναφέρεται συχνότερα ως ευέλικτη σκέψη. Ο Guilford έχει επίσης ορίσει τη δημιουργικότητα ως την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων με πολλαπλούς τρόπους. Ο Runco (Runco, 1993) αναφέρει ότι η δημιουργικότητα περιλαμβάνει τόσο αποκλίνουσα όσο και συγκλίνουσα σκέψη, εύρεση προβλημάτων, ευελιξία της ιδέας και είναι κάτι περισσότερο από μια απλή διανοητική δεξιότητα, που απαιτεί εγγενή επίλυση προβλημάτων και αυτο-έκφραση. Μπορεί να φανεί στην ευχέρεια, στην πρωτοτυπία και τα κίνητρα, σε μια στάση αμφισβήτησης και στην αυτοπεποίθηση. Καθένα από αυτά μπορεί να ενθαρρυνθεί. Ο Haylock (Haylock, 1987) συνοψίζοντας την πληθώρα των προσπαθειών ορισμού της δημιουργικότητας αναφέρει:

«περιλαμβάνει την ικανότητα να βλέπει κανείς νέες σχέσεις μεταξύ τεχνικών και τομέων εφαρμογής και να κάνει συσχετισμούς μεταξύ πιθανώς άσχετων ιδεών». . Οι Bolden, Harries και Newton (2010), δίνουν τον ορισμό της δημιουργικότητας ως μια ατομική κυρίως δραστηριότητα, η οποία έχει στόχο την παραγωγή κάτι νέου ως «πολυδιάστατη ικανότητα ή δεξιότητα του ανθρώπου να σκεφτεί κάτι καινούριο».

Τα τελευταία χρόνια, υπάρχει μια αυξανόμενη ανάγκη να αναπτυχθεί η ικανότητα των ανθρώπων να παρέχουν καινοτόμες και δημιουργικές λύσεις στα προβλήματα που παρουσιάζονται στην σημερινή κοινωνία. Η δημιουργικότητα είναι ένα πολύ σημαντικό, προσωπικό και κοινωνικό χαρακτηριστικό, που ενδυναμώνει την ανθρώπινη εξέλιξη και πρόοδο (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Αυτή η αξία της σκέψης των δημιουργικών ανθρώπων αναγνωρίζεται και από διεθνείς κυβερνητικούς και εκπαιδευτικούς οργανισμούς, όπως το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο και το Συμβούλιο (European Parliament and the Council, 2006) και το Εθνικό Συμβούλιο των Καθηγητών Μαθηματικών στις ΗΠΑ (NTCM, 2000), οργανισμοί που υπογραμμίζουνε τη σημασία της ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών, σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες, να σκέφτονται δημιουργικά και ευέλικτα στα μαθηματικά. Από αυτή την άποψη, η δημιουργικότητα θεωρείται αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών (Brunkalla, 2009) και προτείνεται ως ένα από τα κύρια συστατικά που πρέπει να προωθηθούν στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς «η ουσία των Μαθηματικών είναι να σκέφτονται δημιουργικά» (Mann, 2006).

3.2 Η μαθηματική Δημιουργικότητα.

Σύμφωνα με τους Bolden, κ.ά. (Bolden, Harries & Newton, 2010), αν και η δημιουργικότητα συνδέεται συχνότερα με τις τέχνες παρά με τα μαθηματικά, οι δάσκαλοι στο Ηνωμένο Βασίλειο και αλλού αναμένεται πλέον να προωθούν τη δημιουργικότητα στα μικρά παιδιά στη διδασκαλία των μαθηματικών και ορίζουν τη δημιουργικότητα κυρίως ως ατομική δραστηριότητα που αποσκοπεί στην παραγωγή κάτι νέου ως «την πολυδιάστατη ικανότητα ή δυνατότητα του ανθρώπου να σκεφτεί κάτι νέο».

Επειδή η δημιουργικότητα είναι μια σύνθετη νοητική διαδικασία που απαιτεί ανάλυση, διαιρούμε την τελευταία σε διακριτά μέρη. Στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, η έρευνα για τη δημιουργικότητα επικεντρώνεται κυρίως στα εξής:

(1) στα στάδια της δημιουργικής διαδικασίας,
(2) στις ιδιότητες της δημιουργικής πράξης και του προϊόντος,
(3) στην προσωπικότητα των δημιουργικών μαθητών και
(4) στις γνωστικές διεργασίες οι οποίες εμπλέκονται στις δημιουργικές δραστηριότητες.

Η μαθηματική δημιουργικότητα εξασφαλίζει την ανάπτυξη του τομέα των μαθηματικών στο σύνολό του. Η συνεχής αύξηση του αριθμού των περιοδικών που ασχολούνται με τη μαθηματική έρευνα αποδεικνύει την ανάπτυξη των μαθηματικών. Ωστόσο, αυτό που βρίσκεται στην ουσία αυτής της ανάπτυξης, η δημιουργικότητα του μαθηματικού, δεν έχει αποτελέσει αντικείμενο πολλών ερευνών. Συνήθως οι περισσότεροι μαθηματικοί δεν ενδιαφέρονται να αναλύσουν τις διαδικασίες σκέψης που οδηγούν στη μαθηματική δημιουργία (Ervynck, 1991). Η πρώτη γνωστή προσπάθεια μελέτης της μαθηματικής δημιουργικότητας ήταν ένα εκτενές ερωτηματολόγιο που δημοσιεύθηκε στο γαλλικό περιοδικό L'Enseigement Mathematique το 1902. Αυτό το ερωτηματολόγιο και μια διάλεξη για τη δημιουργικότητα που έδωσε ο διάσημος μαθηματικός του 20ου αιώνα Henri Poincaré στην Societé de Psychologie ενέπνευσε τον συνάδελφό του Jacques Hadamard, έναν άλλο διακεκριμένο μαθηματικό του 20ου αιώνα, να διερευνήσει την ψυχολογία της μαθηματικής δημιουργικότητας (Hadamard, 1945). Ο Hadamard ανέλαβε μια ανεπίσημη έρευνα μεταξύ επιφανών μαθηματικών και επιστημόνων στην Αμερική, συμπεριλαμβανομένων των George Birkhoff, George Polya και Albert Einstein, σχετικά με τις νοητικές εικόνες που χρησιμοποιούνται κατά την εκτέλεση των μαθηματικών. Ο Hadamard (Hadamard, 1945), επηρεασμένος από την ψυχολογία Gestalt της εποχής του, διατύπωσε τη θεωρία ότι οι δημιουργικές διεργασίες των μαθηματικών ακολουθούσαν το μοντέλο Gestalt τεσσάρων σταδίων (Wallas, 1926): προετοιμασία-επώαση-φωτισμός-επαλήθευση. Το μοντέλο των τεσσάρων σταδίων Gestalt είναι ένας χαρακτηρισμός της δημιουργικής διαδικασίας του μαθηματικού, αλλά δεν ορίζει τη δημιουργικότητα αυτή καθαυτή.

Πως ορίζει κανείς τη δημιουργικότητα; Ειδικότερα, τι ακριβώς είναι η μαθηματική δημιουργικότητα; Είναι η ανακάλυψη ενός νέου θεωρήματος από έναν ερευνητή μαθηματικό;

Η ανακάλυψη από τους φοιτητές ενός μέχρι τώρα γνωστού αποτελέσματος συνιστά επίσης δημιουργικότητα; Η μαθηματική δημιουργικότητα έχει περιγραφεί από τον Poincaré το 1948 (Poincaré, 1948) απλά ως διάκριση ή επιλογή. Σύμφωνα με τον Poincaré (Poincaré, 1948), το να δημιουργείς έγκειται ακριβώς στο να μην κάνεις άχρηστους συνδυασμούς και στο να κάνεις εκείνους που είναι πραγματικά χρήσιμοι και οι οποίοι συγκροτούν μόνο μια μικρή μειοψηφία. Ο Poincaré αναφέρεται στο γεγονός ότι ο «σωστός» συνδυασμός μόνο μιας μικρής μειοψηφίας ιδεών οδηγεί σε μια δημιουργική διαπίστωση, ενώ η πλειοψηφία τέτοιων συνδυασμών δεν οδηγεί σε δημιουργικό αποτέλεσμα. Αυτό μπορεί να φαίνεται σαν ένας αόριστος χαρακτηρισμός της μαθηματικής δημιουργικότητας.

Μπορεί κανείς να ερμηνεύσει τη μεταφορά της «επιλογής» του Poincaré ως την ικανότητα του μαθηματικού να επιλέγει προσεκτικά μεταξύ των ερωτημάτων (ή προβλημάτων) που φέρουν καρπούς, σε αντίθεση με εκείνα που δεν οδηγούν σε τίποτα καινούργιο. Αλλά αυτή η ερμηνεία δεν επιλύει το γεγονός ότι ο ορισμός της δημιουργικότητας του Poincaré παραβλέπει το πρόβλημα της καινοτομίας. Με άλλα λόγια, ο χαρακτηρισμός της μαθηματικής δημιουργικότητας ως ικανότητας επιλογής μεταξύ χρήσιμων και άχρηστων συνδυασμών μοιάζει με τον χαρακτηρισμό της τέχνης της γλυπτικής ως διαδικασίας αποκοπής του περιττού. Ο ορισμός του Poincaré για τη δημιουργικότητα ήταν αποτέλεσμα των συνθηκών υπό τις οποίες έπεσε πάνω σε βαθιά αποτελέσματα στις συναρτήσεις Φουξ (Fuchsian functions).

Το πρώτο στάδιο της δημιουργικότητας συνίσταται στη σκληρή εργασία για να αποκτήσει κανείς μια εικόνα του προβλήματος που αντιμετωπίζει. Ο Poincaré (1948) ονόμασε αυτό το στάδιο την προκαταρκτική περίοδο της ενσυνείδητης εργασίας. Το στάδιο αυτό αναφέρεται και ως προπαρασκευαστικό στάδιο σύμφωνα με τον Hadamard (1945). Στο δεύτερο, ή εκκολαπτικό, στάδιο πάλι κατά τον Hadamard (Hadamard, 1945), το πρόβλημα παραμερίζεται για κάποιο χρονικό διάστημα έτσι ώστε το μυαλό να απασχολείται με άλλα προβλήματα. Στο επόμενο και τρίτο στάδιο η λύση του προβλήματος εμφανίζεται ξαφνικά, ενώ ο μαθηματικός πιθανόν να ασχολείται με άλλες μη σχετικές δραστηριότητες. «Αυτή η εμφάνιση του ξαφνικού φωτισμού είναι ένα φανερό σημάδι μακράς, ασυνείδητης προηγούμενης εργασίας» (Poincaré (Hadamard, 1945)). Ο Hadamard (Hadamard, 1945) αναφέρθηκε σε αυτό ως το στάδιο του φωτισμού. Ωστόσο, η δημιουργική διαδικασία δεν τελειώνει εδώ. Υπάρχει ένα τέταρτο στάδιο, το τελευταίο, το οποίο συνίσταται στην έκφραση των αποτελεσμάτων των προβλημάτων στη γλώσσα ή στη γραφή. Εδώ, κανείς επαληθεύει το αποτέλεσμα, το καθιστά ακριβές και στην συνέχει αναζητά πιθανές επεκτάσεις, μέσω της αξιοποίησης του αποτελέσματος. Το μοντέλο αυτό έχει ορισμένες ελλείψεις. Αρχικά, το μοντέλο εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα τα οποία έχουν τεθεί εκ των προτέρων από τους μαθηματικούς και με αυτόν τον τρόπο αγνοούν τη συναρπαστική διαδικασία με την οποία εξελίσσονται τα πραγματικά ερωτήματα. Επίσης, το μοντέλο αποδίδει ένα μεγάλο μέρος όσων «συμβαίνουν» σε υποσυνείδητες ορμές κατά την διάρκεια των φάσεων επώασης και φωτισμού. Η πρώτη από αυτές τις ελλείψεις, το πρόβλημα του τρόπου με τον οποίο αναπτύσσονται οι ερωτήσεις, αντιμετωπίζεται εν μέρει από τον Ervynck (Ervynck, 1991) με το μοντέλο τριών σταδίων.

Ο Ervynck (1991) σκιαγράφησε τη μαθηματική δημιουργικότητα μέσω τριών σταδίων. Στο Στάδιο 0 (η αρίθμηση είναι του Ervynck), που ορίζεται ως προκαταρκτικό τεχνικό στάδιο, αποτελείται από «κάποιο είδος πρακτικής ή τεχνικής εφαρμογής των μαθηματικών κανόνων και διαδικασιών, χωρίς ο ίδιος ο χρήστης να έχει καμία επίγνωση της θεωρητικής βάσης» (σ. 42). Το Στάδιο 1 είναι αυτό της αλγοριθμικής δραστηριότητας, που συνίσταται κυρίως στην εκτέλεση μαθηματικών τεχνικών, όπως αυτό της ρητής εφαρμογής κάποιου αλγορίθμου κατά επανάληψη. Το Στάδιο 2 αναφέρεται ως δημιουργική (εποικοδομητική, εννοιολογική) δραστηριότητα. Στο στάδιο αυτό εμφανίζεται η πραγματική μαθηματική δημιουργικότητα και συνίσταται στη λήψη μη αλγοριθμικών αποφάσεων. «Οι αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν μπορεί να είναι πολύ διαφορετικής φύσης και περιλαμβάνουν πάντα μια επιλογή» (σελ. 43). Αν και ο Ervynck (Ervynck, 1991) προσπαθεί να περιγράψει τη διαδικασία με την οποία ένας μαθηματικός καταλήγει στα ερωτήματα μέσω των χαρακτηρισμών του για το Στάδιο 0 και το Στάδιο 1, η περιγραφή της μαθηματικής δημιουργικότητας μοιάζει πολύ με αυτές των Poincaré και Hadamard. Ειδικότερα, η χρήση του όρου «μη αλγοριθμική λήψη αποφάσεων» είναι ανάλογη με τη χρήση από τον Poincaré της μεταφοράς της «επιλογή».

Η βιβλιογραφία για τη μαθηματική εκπαίδευση δείχνει ότι πολύ λίγες προσπάθειες έχουν γίνει για να οριστεί ρητά η μαθηματική δημιουργικότητα. Υπάρχουν αναφορές στη δημιουργικότητα από τον σοβιετικό ερευνητή Krutetskii (Krutetskii, 1976) στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των μαθητών να αφαιρούν και να γενικεύουν το μαθηματικό περιεχόμενο. Ο Krutetskii (1976) και ο Singh (1987) έχουν δώσει παρόμοιους ορισμούς για τη μαθηματική δημιουργικότητα, συνδέοντας τον όρο με την ανεξαρτησία, την πρωτοτυπία και την καινοτομία, αντίστοιχα.

Υπάρχει επίσης ένα εξαιρετικό παράδειγμα μαθηματικού (George Polya) που προσπάθησε να δώσει ευρετικές μεθόδους για την αντιμετώπιση προβλημάτων με τρόπο παρόμοιο με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευμένοι μαθηματικοί. Ο Polya (Polya, 1954) παρατήρησε ότι «προσπαθώντας να λύσουμε ένα πρόβλημα, εξετάζουμε διάφορες πτυχές του με τη σειρά, το κυλάμε ξανά και ξανά στο μυαλό μας- η παραλλαγή του προβλήματος είναι απαραίτητη για την εργασία μας». Ο Polya (Polya, 1954) έδωσε έμφαση στη χρήση μιας ποικιλίας ευρετικών μεθόδων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων διαφορετικής πολυπλοκότητας. Κατά την εξέταση της αληθοφάνειας μιας μαθηματικής εικασίας, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών. Κατά την αναζήτηση εμφανών μοτίβων, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν ευρετικές μεθόδους όπως (1) η επαλήθευση των συνεπειών, (2) η διαδοχική επαλήθευση πολλών συνεπειών, (3) η επαλήθευση μιας απίθανης συνέπειας, (4) η εξαγωγή συμπερασμάτων από αναλογία και (5) η εμβάθυνση της αναλογίας.

Ένα βασικό ερώτημα των μαθηματικών είναι αν ο μαθηματικός ανακαλύπτει ή εφευρίσκει τα μαθηματικά, στο οποίο μια σύντομη περιγραφή των τεσσάρων πιο δημοφιλών απόψεων για τη φύση των μαθηματικών μπορεί να αναδείξει το πρόβλημα του ορισμού της φύσης της μαθηματικής δημιουργικότητας. Οι μαθηματικοί που ασχολούνται ενεργά με την έρευνα έχουν ορισμένες πεποιθήσεις σχετικά με την οντολογική φύση των μαθηματικών που επηρεάζουν την προσέγγισή τους στην έρευνα (Davis & Hersh, 1981). Η πλατωνική άποψη είναι ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν πριν από την ανακάλυψή τους και ότι «κάθε ουσιαστικό ερώτημα σχετικά με ένα μαθηματικό αντικείμενο έχει μια οριστική απάντηση, είτε είμαστε σε θέση να την προσδιορίσουμε είτε όχι» (Davis & Hersh, 1981). Σύμφωνα με αυτή την άποψη, οι μαθηματικοί δεν εφευρίσκουν ή δημιουργούν μαθηματικά, αλλά ανακαλύπτουν τα μαθηματικά. Οι λογικιστές υποστηρίζουν ότι «όλες οι έννοιες των μαθηματικών μπορούν τελικά να αναχθούν σε λογικές έννοιες», γεγονός που συνεπάγεται ότι «όλες οι μαθηματικές αλήθειες μπορούν να αποδειχθούν μόνο από τα αξιώματα και τους κανόνες της συμπερασματολογίας και της λογικής» (Ernest, 1991). Οι φορμαλιστές δεν πιστεύουν ότι τα μαθηματικά ανακαλύπτονται, αλλά πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι απλώς ένα παιχνίδι, που δημιουργήθηκε από τους μαθηματικούς και βασίζεται σε σειρές συμβόλων που δεν έχουν κανένα νόημα (Davis & Hersh, 1981). Ο κονστρουκτιβισμός (που ενσωματώνει τον διαισθητισμό) είναι μία από τις σημαντικότερες σχολές σκέψης (εκτός από τον πλατωνισμό, τον λογικισμό και τον φορμαλισμό) που προέκυψε λόγω των αντιφάσεων που προέκυψαν κατά την ανάπτυξη της θεωρίας των συνόλων και της θεωρίας των συναρτήσεων στις αρχές του 20ου αιώνα. Η άποψη του κονστρουκτιβισμού (διαισθητισμού), σύμφωνα με τον Ernest (Ernest, 1994) είναι ότι «η ανθρώπινη μαθηματική δραστηριότητα είναι θεμελιώδης για τη δημιουργία νέας γνώσης και ότι τόσο οι μαθηματικές αλήθειες όσο και η ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων πρέπει να τεκμηριώνονται με εποικοδομητικές μεθόδους». Αντιφάσεις όπως το Παράδοξο του Russel αποτέλεσαν σημαντικό πλήγμα για την απολυταρχική θεώρηση της μαθηματικής γνώσης, διότι αν τα μαθηματικά είναι σίγουρα και όλα τα θεωρήματά τους είναι σίγουρα, πώς είναι δυνατόν να υπάρχουν αντιφάσεις μεταξύ των θεωρημάτων τους; Οι πρώτοι κονστρουκτιβιστές στα μαθηματικά ήταν οι διαισθητικοί Brouwer και Heyting. Οι κονστρουκτιβιστές υποστηρίζουν ότι τόσο οι μαθηματικές αλήθειες όσο και η ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων πρέπει να τεκμηριώνονται με κονστρουκτιβιστικές μεθόδους.

Το ερώτημα λοιπόν είναι πώς ένας μαθηματικός διεξάγει μαθηματική έρευνα; Εμφανίζονται τα ερωτήματα από το πουθενά, ή υπάρχει ένας τρόπος σκέψης ή έρευνας που οδηγεί σε ουσιαστικά ερωτήματα και στη μεθοδολογία για την αντιμετώπιση αυτών των ερωτημάτων; Πιθανόν οι τύποι των ερωτήσεων που τίθενται καθορίζονται σε μεγάλο βαθμό από την κουλτούρα στην οποία ζει και εργάζεται ο μαθηματικός. Με απλά λόγια, είναι αδύνατο για ένα άτομο να αποκτήσει γνώση του εξωτερικού κόσμου χωρίς κοινωνική αλληλεπίδραση. Σύμφωνα με τον Ernest (Ernest, 1994) δεν υπάρχει καμία υποκείμενη μεταφορά για το εντελώς απομονωμένο ατομικό μυαλό. Αντίθετα, η υποκείμενη μεταφορά είναι αυτή των ατόμων που συνομιλούν, των ατόμων που συμμετέχουν σε ουσιαστική γλωσσική αλληλεπίδραση και διάλογο. Κατά τον Wittgenstein (Wittgenstein, 1978) η γλώσσα είναι ο διαμορφωτής, καθώς και το «αθροιστικό» προϊόν του ατομικού νου.

Η πρόσφατη βιβλιογραφία στην ψυχολογία αναγνωρίζει αυτές τις κοινωνικές διαστάσεις της ανθρώπινης δραστηριότητας ως καθοριστικές για τη δημιουργική διαδικασία. Η έρευνα για τη δημιουργικότητα βρίσκεται στο περιθώριο της ψυχολογίας, της εκπαιδευτικής ψυχολογίας και της μαθηματικής εκπαίδευσης. Μόνο τα τελευταία χρόνια έχει ανανεωθεί το ενδιαφέρον της ψυχολογικής κοινότητας για το φαινόμενο της δημιουργικότητας. Το Handbook of Creativity (Sternberg, 2000), το οποίο περιέχει μια ολοκληρωμένη ανασκόπηση όλων των ερευνών που ήταν τότε διαθέσιμες στον τομέα της δημιουργικότητας, υποδεικνύει ότι οι περισσότερες προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται στη μελέτη της δημιουργικότητας μπορούν να ενταχθούν σε έξι κατηγορίες: μυστικιστική, πραγματιστική, ψυχοδυναμική, ψυχομετρική, γνωστική και της κοινωνικής προσωπικότητας. Η μυστικιστική προσέγγιση της μελέτης της δημιουργικότητας υποδηλώνει ότι η δημιουργικότητα είναι αποτέλεσμα θεϊκής έμπνευσης ή είναι μια πνευματική διαδικασία. Η ρεαλιστική προσέγγιση συνεπάγεται «να ασχολούμαστε πρωτίστως με την ανάπτυξη της δημιουργικότητας», σε αντίθεση με την κατανόησή της. Η ψυχοδυναμική προσέγγιση για τη μελέτη της δημιουργικότητας βασίζεται στην ιδέα ότι η δημιουργικότητα προκύπτει από την ένταση μεταξύ της συνειδητής πραγματικότητας και των ασυνείδητων ορμών. Η ψυχομετρική προσέγγιση για τη μελέτη της δημιουργικότητας συνεπάγεται την ποσοτικοποίηση της έννοιας της δημιουργικότητας με τη βοήθεια εργασιών με χαρτί και μολύβι. Η γνωστική προσέγγιση στη μελέτη της δημιουργικότητας επικεντρώνεται στην κατανόηση των νοητικών αναπαραστάσεων και διαδικασιών που διέπουν την ανθρώπινη σκέψη. Και τέλος η προσέγγιση της κοινωνικής προσωπικότητας για τη μελέτη της δημιουργικότητας επικεντρώνεται στις μεταβλητές της προσωπικότητας και των κινήτρων, καθώς και στο κοινωνικοπολιτισμικό περιβάλλον ως πηγές της δημιουργικότητας (Sriraman, 2009).

Όπως προκύπτει από τις προηγούμενες παραγράφους, το πρόβλημα του ορισμού της δημιουργικότητας δεν είναι καθόλου εύκολο. Δεν υφίσταται μία ενιαία και επίσημη άποψη ή ορισμός της δημιουργικότητας (Mann, 2006). Παράλληλα με τον γενικό ορισμό της δημιουργικότητας, το ίδιο συμβαίνει και με την Μαθηματική δημιουργικότητα. Έτσι, έχουν δοθεί πολλοί διαφορετικοί ορισμοί για την Μαθηματική δημιουργικότητα, οι οποίοι προέρχονται από διαφορετικές προσεγγίσεις της δημιουργικότητας (Haylock, 1987). Κάποιοι από αυτούς τους ορισμούς αναφέρονται στα στάδια των δημιουργικών διαδικασιών (Ervynck, 1991), ενώ άλλοι αναφέρονται στις ιδιότητες των δημιουργικών πράξεων και του προϊόντος το οποίο παράγεται (Silver, 1997). Ο Ervynck (1991) έκανε την σύνδεση της προηγμένης μαθηματικής σκέψης με την μαθηματική δημιουργικότητα και παράλληλα θεωρούσε ότι η μαθηματική δημιουργικότητα είναι η ικανότητα ενός ατόμου να μπορεί να εκφράζει μαθηματικούς στόχους και να ανευρίσκει ενυπάρχουσες σχέσεις μεταξύ τους. Ο ίδιος αναφερόμενος στην μαθηματική κατανόηση, αναφέρει ότι η διορατικότητα και η διαίσθηση συγκροτούνε στοιχεία της μαθηματικής δημιουργίας και ως εκ τούτου τα δημιουργικά προϊόντα είναι σε θέση να βοηθούν στην κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και επομένως να αποκαλύπτουν κρυφές σχέσεις. Η Leikin (Leikin, 2009) κάνει την διάκριση μεταξύ της γενικής (general) και της ειδικής (specific) μαθηματικής δημιουργικότητας. Η γενική δημιουργικότητα κατά την Leikin συνδέεται με τη χρήση προτύπων επίλυσης προβλημάτων, από κάποιο πεδίο των μαθηματικών σε άλλα πεδία των μαθηματικών. Αντιθέτως η ειδική δημιουργικότητα, αφορά την δημιουργικότητα σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό πεδίο.

Η Leikin (Leikin, 2009) επίσης σημειώνει την διαφορά μεταξύ της δημιουργικότητας στα σχολικά μαθηματικά και εκείνης των επαγγελματικών μαθηματικών. Στο σχολείο η μαθηματική δημιουργικότητα αξιολογείται σε σχέση με τις εμπειρίες που έχουν ήδη αποκτήσει οι μαθητές και στις επιδόσεις των υπόλοιπων μαθητών που έχουν παρόμοιο εκπαιδευτικό ιστορικό. Η Leikin υποδεικνύει ότι η προσωπική δημιουργικότητα ως δυναμικό χαρακτηριστικό (τόσο ως κοινωνική όσο και ως προσωπική) προϋποθέτει μια διάκριση μεταξύ απόλυτης (absolute) και σχετικής (relative) δημιουργικότητας, η οποία σχετίζεται με τις ανακαλύψεις οι οποίες προωθούνται από τα μαθηματικά, γενικά ως επιστήμη. Η σχετική δημιουργικότητα, κατά την ίδια, άπτεται σε ανακαλύψεις από κάποιο συγκεκριμένο άτομο, μέσα σε μια συγκεκριμένη ομάδα αναφοράς. Έτσι, οι εκπαιδευόμενοι δύνανται να προσφέρουν ιδέες οι οποίες είναι καινοτόμες σε σχέση με τα μαθηματικά τα οποία έχουν διδαχθεί, όπως επίσης και τα προβλήματα που έχουν λύσει. Κατά αναλογία ο Sriraman (Sriraman, 2009) παρουσίασε ένα μοντέλο για την μαθηματική δημιουργικότητα, που αποτελείται από επτά επίπεδα μαθηματικών ικανοτήτων. Τα επίπεδα 6 και 7 αφορούν του εξαιρετικά δημιουργικούς μαθηματικούς, που μέσω της έρευνας προετοιμάζουν το έδαφος για τους υπόλοιπους μαθηματικούς. Ο Sriraman κάνει μια διάκριση μεταξύ της μαθηματικής δημιουργικότητας όσον αφορά το σχολικό περιβάλλον και της δημιουργικότητας αυτών που ασχολούνται επαγγελματικά με τα μαθηματικά. Ενώ τα άτομα που ασχολούνται επαγγελματικά με τα μαθηματικά διακατέχονται πολύ συχνά από αβεβαιότητα, αντιθέτως τα έργα που δίνουμε στους εκπαιδευόμενους δεν περιέχουν το στοιχείο αυτό.

Ίσως όμως ο πιο χρήσιμος ορισμός της δημιουργικότητας και εφαρμόσιμος σε πραγματικές συνθήκες τάξης, προτάθηκε από τον Torrance (Torrance, 1997). Ο ορισμός του Torrance για τη δημιουργικότητα είναι πολυδιάστατος. Σύμφωνα με τον ίδιο: η ευχέρεια, η ευελιξία, η πρωτοτυπία και η επεξήγηση είναι όλα στοιχεία της δημιουργικότητας. Στον τομέα της εκπαίδευσης και ειδικά των μαθηματικών χρησιμοποιούνται συχνά μόνο οι τρεις από τις 4 αυτές πτυχές της δημιουργικότητας, δηλαδή η ευχέρεια, η ευελιξία και η πρωτοτυπία. Αναλυτικότερα, η ευχέρεια σχετίζεται με τη ροή των ιδεών, τον αριθμό των σωστών λύσεων, και στη χρήση των βασικών γνώσεων. Μετά η ευελιξία σχετίζεται με την εναλλαγή των ιδεών, την προσέγγιση ενός προβλήματος με διαφορετικούς ποιοτικά τρόπους και από διαφορετικές προοπτικές. Η πρωτοτυπία σχετίζεται με την ικανότητα του μαθητή να εξετάζει το πρόβλημα με νέο, μοναδικό τρόπο και να βρίσκει μη αναμενόμενη και αντισυμβατική λύση. Η επεξήγηση, αν και όπως αναφέρθηκε δεν χρησιμοποιείται στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, αναφέρεται στην δεξιότητα του ατόμου να σκέφτεται με σύνθετο τρόπο, να εξελίσσει μια ιδέα συνδυάζοντάς την με άλλες, να επεκτείνει σε γενικεύσεις και με αυτόν τον τρόπο να καταλήγει σε σύνθετες λύσεις.

3.3 Ο ρόλος της απόδειξης στα Μαθηματικά.

Η απόδειξη και ο συλλογισμός είναι θεμελιώδεις για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Μας βοηθούν να κατανοήσουμε τα μαθηματικά, να επικοινωνήσουμε τις μαθηματικές ιδέες και να δικαιολογήσουμε την εγκυρότητα των μαθηματικών θεωρημάτων (Martin κ.ά.,2005). Ποτέ δεν θα μπορούσε κανείς να αμφισβητήσει τη σημασία της απόδειξης στα μαθηματικά, σε γενικά, ούτε στα σχολικά μαθηματικά (Harel & Sowder, 2007). Οι ρόλοι της απόδειξης είναι να αποδεικνύει, να εξηγεί και να πείθει (Hanna, 1990 – Hemmi & Löfwall, 2009). Ο Στυλιανίδης (Stylianides, 2007) ορίζει την απόδειξη ως «Ένα μαθηματικό επιχείρημα, μια συνδεδεμένη ακολουθία ισχυρισμών υπέρ ή εναντίον ενός μαθηματικού ισχυρισμού», με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Χρησιμοποιεί δηλώσεις αποδεκτές από την κοινότητα της τάξης (ένα σύνολο αποδεκτών δηλώσεων) που είναι αληθείς και διαθέσιμες χωρίς περαιτέρω αιτιολόγηση.
2. Χρησιμοποιεί μορφές συλλογισμού (τρόπους επιχειρηματολογίας) που είναι έγκυρες και γνωστές στην κοινότητα της τάξης, ή εντός της εννοιολογικής εμβέλειας της κοινότητας της τάξης.
3. Επικοινωνείτε με μορφές έκφρασης (τρόποι αναπαράστασης επιχειρημάτων) που είναι κατάλληλες και γνωστές ή εντός της εννοιολογικής εμβέλειας της κοινότητας της τάξης.

Ο Στυλιανίδης (Stylianides, 2007) χρησιμοποιεί αυτόν τον ορισμό για να αναλύσει τη διδασκαλία που αφορά την απόδειξη και για να φωτίσει πιθανές ενέργειες στις οποίες μπορούν να προβούν οι εκπαιδευτικοί για να υποστηρίξουν τις δραστηριότητες απόδειξης στις τάξεις τους. Οι Lo και McCrory (Lo & McCrory, 2009) πρότειναν ότι προκειμένου να κατανοηθούν οι δραστηριότητες απόδειξης στα μαθήματα μαθηματικών, θα πρέπει να προστεθεί ένα τέταρτο στοιχείο στον ορισμό:

4. Η απόδειξη είναι σχετική με τους στόχους στο πλαίσιο (εξάρτηση από το πλαίσιο), οι οποίοι καθορίζουν τι πρέπει να αποδειχθεί.

Ο Rav (Rav, 1999) επισημαίνει ότι μια απόδειξη είναι πολύτιμη όχι μόνο επειδή αποδεικνύει ένα αποτέλεσμα, αλλά και επειδή μπορεί να επιδεικνύει νέες μεθόδους, εργαλεία, στρατηγικές και έννοιες που έχουν ευρύτερη εφαρμογή στα μαθηματικά και ανοίγουν νέες μαθηματικές κατευθύνσεις. Κατά την άποψη του Rav, οι αποδείξεις είναι απαραίτητες για τη διεύρυνση της μαθηματικής γνώσης και αποτελούν, στην πραγματικότητα, «την καρδιά των μαθηματικών, τη βασιλική οδό για τη δημιουργία αναλυτικών εργαλείων και την καταλυτική ανάπτυξη» (Rav, 1999). Ο Rav δήλωσε στη διατριβή του ότι «οι αποδείξεις, και όχι η μορφή δήλωσης των θεωρημάτων, είναι φορείς της μαθηματικής γνώσης» (Rav, 1999). Οι Hanna και Barbeau (Hanna & Barbeau, 2008) εξετάζουν την κεντρική ιδέα του Rav για την απόδειξη και στη συνέχεια συζητούν τη σημασία της για τη μαθηματική εκπαίδευση, γενικά, και για τη διδασκαλία των αποδείξεων, ειδικότερα. Οι Hemmi και Löfwall (Hemmi & Löfwall, 2009), μετά από μια μελέτη στην οποία διερεύνησαν τις απόψεις των μαθηματικών σχετικά με τα οφέλη της μελέτης των αποδείξεων, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι «όλοι οι μαθηματικοί που συμμετείχαν στη μελέτη θεωρούσαν τις αποδείξεις πολύτιμες για τους μαθητές επειδή προσφέρουν στους μαθητές νέες μεθόδους, σημαντικές έννοιες και άσκηση στη λογική σκέψη που απαιτείται για την επίλυση προβλημάτων» (Hemmi & Löfwall, 2009). Δεν είναι επομένως περίεργο ότι η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να αποδεικνύουν και να συλλογίζονται αποτελεί έναν από τους στόχους των προτύπων του αναλυτικού προγράμματος σε πολλές χώρες. Για παράδειγμα, μια αρχή για τα αμερικανικά σχολικά μαθηματικά είναι η εξής: «ο συλλογισμός και η απόδειξη θα πρέπει να αποτελούν σταθερό μέρος των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών από το νηπιαγωγείο έως τη 12η τάξη» (NTCM, 2000).

Η εκμάθηση των μαθηματικών αφορά βασικά την «απόκτηση μιας μαθηματικής άποψης», την «ανάπτυξη μαθηματικών συλλογισμών», την «εκμάθηση μαθηματικής επικοινωνίας», την «δημιουργία συνδέσεων» στα μαθηματικά και την οικοδόμηση «συνδέσεων» με άλλους κλάδους και (μεταξύ μαθηματικών) εμπειριών (NTCM, 2000). Επειδή η μάθηση των μαθηματικών περιλαμβάνει την ανακάλυψη, η απόδειξη και η συλλογιστική είναι ισχυροί τρόποι ανάπτυξης της άποψης, της δημιουργίας συνδέσεων και της μαθηματικής επικοινωνίας. Το NTCM υπογραμμίζει αυτό το γεγονός υποστηρίζοντας: «η ικανότητα συλλογισμού είναι απαραίτητη για την κατανόηση» (NTCM, 2000). Αυτό υποδηλώνει ότι η επάρκεια στη μαθηματική απόδειξη και τη συλλογιστική αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των μαθηματικών.

Παρόμοια με το NCTM, οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης υποστηρίζουν επίσης ότι δεν πρέπει να υποτιμούν το ρόλο της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στη μάθηση των μαθητών και υποστηρίζουν την ιδέα της ένταξης αυτού του θέματος στα σχολικά προγράμματα σπουδών και στα προγράμματα εκπαίδευσης εκπαιδευτικών. Για παράδειγμα, οι Ball κ.ά., Dreyfus και Hanna υποστηρίζουν ότι:

> «Η απόδειξη είναι κεντρικό στοιχείο των μαθηματικών και ως εκ τούτου θα πρέπει να αποτελεί βασικό συστατικό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτή η έμφαση μπορεί να δικαιολογηθεί όχι μόνο επειδή η απόδειξη βρίσκεται στην καρδιά της μαθηματικής πρακτικής αλλά και επειδή αποτελεί βασικό εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης» (Ball κ.ά., 2000).

> «Η απόδειξη βρίσκεται στην καρδιά των μαθηματικών και θεωρείται κεντρική σε πολλά προγράμματα σπουδών του λυκείου» (Dreyfus, 2000).

> «Η απόδειξη αξίζει μια εξέχουσα θέση στα προγράμματα σπουδών λόγω ότι συνεχίζει να αποτελεί κεντρικό χαρακτηριστικό των μαθηματικών, ως η προτιμώμενη μέθοδος επαλήθευσης, και επειδή αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την προώθηση της μαθηματικής κατανόησης» (Hanna, 1996).

3.4 Προβλήματα Πολλαπλών Λύσεων (ΠΠΛ).

Οι μαθητές του σχολείου είναι συνηθισμένοι όταν καταφέρουν να λύσουν μια άσκηση να μην αναζητούν κάποια άλλη λύση. Ποιος όμως είναι ο ρόλος των προβλημάτων πολλαπλών λύσεων (ΠΠΛ) (Multiple Solution Tasks (MSTs)) στην ανάπτυξη της γνώσης και της δημιουργικότητας στη γεωμετρία; Οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών συμφωνούν ότι η σύνδεση μαθηματικών ιδεών με τη χρήση περισσοτέρων της μίας προσεγγίσεων για την επίλυση του ίδιου προβλήματος είναι ένα ουσιαστικό στοιχείο για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και της μαθηματικής δημιουργικότητας (NTCM, 2000 – Polya. 1973 – Schoenfeld, 1985). Η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους απαιτεί και αναπτύσσει τη μαθηματική γνώση (Polya. 1973) και ενθαρρύνει την ευελιξία και τη δημιουργικότητα στη μαθηματική σκέψη του ατόμου (Krutetskii, 1976 – Leikin & Lev, 2007 – Silver, 1997 – Tall, 2007).

Όπως είδαμε στην παράγραφο της δημιουργικότητας, κριτήρια της είναι η επιδεξιότητα, η ευελιξία και η πρωτοτυπία. Αποτελέσματα ερευνών (Levav-Waynberg & Leikin, 2012) δείχνουν ότι η συνδεσιμότητα των μαθητών καθώς και η επιδεξιότητα και η ευελιξία τους ωφελήθηκαν από την εφαρμογή των ΠΠΛ. Η πρωτοτυπία αποτελεί ένα πιο εσωτερικό χαρακτηριστικό από ότι η ευχέρεια και η ευελιξία, επομένως συνδέεται περισσότερο με τη δημιουργικότητα και ταυτόχρονα είναι λιγότερο δυναμικό. Παρ' όλα αυτά, η προσέγγιση των ΠΠΛ παρέχει μεγαλύτερη ευχέρεια στους δυνητικά δημιουργικούς μαθητές να παρουσιάσουν τα δημιουργικά τους προϊόντα από ό,τι το συμβατικό μαθησιακό περιβάλλον.

Με κατάλληλη υποστήριξη και παρότρυνση, οι μαθητές μπορούν να παρακινηθούν να βρουν διαφορετικές λύσεις σε ένα πρόβλημα. Έτσι οι νέες ιδέες που προκύπτουν από την διαδικασία αυτή, επιφέρουν αλλαγές στην ευελιξία για την παραγωγή πολλαπλών λύσεων. Με αυτόν τον τρόπο ενισχύεται η πεποίθησή μας για τη δυνατότητα χρήσης των ΠΠΛ στη διδασκαλία των μαθηματικών. Εκτός από τους ειδικούς ρόλους της απόδειξης στα μαθηματικά, οι προσπάθειες να αποδειχθεί ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα (ή να λυθεί ένα πρόβλημα) χρησιμοποιώντας μεθόδους από διαφορετικές περιοχές των μαθηματικών (γεωμετρία, τριγωνομετρία, αναλυτική γεωμετρία, διανύσματα, μιγαδικοί αριθμοί κ.λπ.) είναι πολύ σημαντικές για την ανάπτυξη βαθύτερης μαθηματικής κατανόησης, της δημιουργικότητας, της εκτίμησης της αξίας της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης στην εκμάθηση διαφορετικών θεμάτων των μαθηματικών.

Η βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης συνιστά συχνά την προσέγγιση του ίδιου μαθηματικού προβλήματος με τη χρήση διαφορετικών εργαλείων ή στρατηγικών από τον ίδιο τομέα ή από διαφορετικούς μαθηματικούς τομείς (Polya, 1963,1973,1981 – Dhombres, 1993 – House & Coxford, 1995 – Bell & Polya, 1945 – Schoenfeld, 1988 – NCTM, 2000 – Levav- Waynberg & Leikin, 2009). Οι συστάσεις αυτές βασίζονται στην υπόθεση ότι τέτοιες δραστηριότητες εμβαθύνουν τη γνώση και την κατανόηση των μαθηματικών και αναπτύσσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα (Ervynck, 1991 – Silver, 1997). Παρ' όλα αυτά, είναι δύσκολο να βρεθούν πειραματικά στοιχεία για τα οφέλη της επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους, και δεν υπάρχουν αρκετά στοιχεία για την εφαρμογή τέτοιων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών.

Για να καταστεί δυνατή μια βαθύτερη διερεύνηση των διδακτικών δραστηριοτήτων που ενθαρρύνουν την επίλυση προβλημάτων με πολλαπλές λύσεις, οι Leikin, Levav-Waynberg, Gurevich και Mednikov (2006) και οι Leikin και Levav-Waynberg (2008) όρισαν τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων (ΠΠΛ) (Multiple Solution Tasks (MSTs)) ως προβλήματα που ζητούν ρητά την εύρεση περισσότερων από μία διαδρομών επίλυσης ενός συγκεκριμένου μαθηματικού προβλήματος. Τα ΠΠΛ περιέχουν μια ρητή απαίτηση για την απόδειξη μιας δήλωσης με πολλαπλούς τρόπους. Η Leikin (2009) αναφέρει ότι οι διαφορές μεταξύ των αποδείξεων βασίζονται στη χρήση:

1. διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας

2. διαφορετικών ιδιοτήτων (ορισμών ή θεωρημάτων) των μαθηματικών εννοιών από ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα

3. διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών ή

4. διαφορετικά εργαλεία και θεωρήματα από διαφορετικά θέματα (όχι απαραίτητα μαθηματικά).

Προσθέτοντας την έννοια των πολλαπλών λύσεων/αποδείξεων για ένα πρόβλημα στο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών επιτρέπει την ανάπτυξη συνδεδεμένων μαθηματικών γνώσεων όχι μόνο για τους μαθητές αλλά και για τους δασκάλους τους. Οι Leikin και Levav-Waynberg (2008) διαπίστωσαν ότι η συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε ένα σεμινάριο επαγγελματικής ανάπτυξης στο οποίο υποβλήθηκαν συστηματικά στην επίλυση ΠΠΛ ακολουθήθηκε από αλλαγή στις μαθηματικές τους γνώσεις, ειδικά σε εκείνα τα θέματα στα οποία επέλεξαν να εφαρμόσουν ΠΠΛ και στις τάξεις τους. Έτσι γεννιέται το ερώτημα αν θα παρατηρηθεί παρόμοια επίδραση στους μαθητές που διδάσκονται σε ένα διδακτικό περιβάλλον που ενθαρρύνει την εύρεση πολλαπλών λύσεων για το ίδιο μαθηματικό πρόβλημα με τη συχνή χρήση των ΠΠΛ.

Η επίλυση προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους αποτελεί μία από τις πλέον αναγνωρισμένες μεθόδους ανάπτυξης της συνδεσιμότητας των μαθηματικών γνώσεων (Leikin, 2003 – Leikin & Levav-Waynberg, 2009 –Askew, 2001 – House & Coxford, 1995 –Dhombres, 1993 – Polya, 1963, 1973, 1981– NCTM, 2000). Η εκπαιδευτική βιβλιογραφία δείχνει ότι οι συνδέσεις αποτελούν ουσιαστικό μέρος της μαθηματικής κατανόησης (π.χ. Hiebert & Carpenter, 1992 – Kieren, 1990 – Skemp,1987). Επιπλέον, η ανάπτυξη της επίγνωσης των εκπαιδευομένων στο ότι τα προβλήματα των μαθηματικών μπορεί να έχουν πάνω της μίας λύσης και η παρότρυνση των μαθητών να εκτελέσουν πολλαπλές λύσεις σε κάποιο πρόβλημα αυξάνουν την ποιότητα των μαθημάτων μαθηματικών (Stigler & Hiebert, 1999). Η συνειδητοποίηση της δυνατότητας επίλυσης προβλημάτων με διαφορετικούς τρόπους οδηγεί τους μαθητές να ανακαλύψουν διαφορετικές διαδρομές στις μαθηματικές τους γνώσεις (Dhombres, 1993 – Schoenfeld, 1983). Με τη σειρά τους, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με διαφορετικές μεθόδους καλλιεργεί τη νοητική τους ευελιξία και τη δημιουργικότητά τους (Elia, Van den Heuvel-Panhuizen, & Kolovou, 2009 – Ervynck,o1991 – Krutetskii, 1976 – Kwon, Park, & Park, 2006 – Leikin, 2009 – Silver, 1997 – Star & Newton, 2009).

Οι Stupel και Ben-chaim (Stupel & Ben-chaim, 2014) πιστεύουν ότι η απόδειξη ενός έργου με τη χρήση διαφορετικών μεθόδων, ιδίως με το συνδυασμό μεθόδων από διαφορετικούς κλάδους των μαθηματικών, χρησιμεύει για να καταδείξει τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων τομέων, αποκαλύπτει την ομορφιά των μαθηματικών και δείχνει πώς τα μαθηματικά είναι ένας συνδυασμός αλληλένδετων τομέων. Οι Silver κ.ά. (2005) υποστήριξαν ότι «διαφορετικές λύσεις μπορούν να διευκολύνουν τη σύνδεση του εκάστοτε προβλήματος με διαφορετικά στοιχεία της γνώσης με τα οποία ο μαθητής μπορεί να είναι εξοικειωμένος, ενισχύοντας έτσι τα δίκτυα σχετικών ιδεών» (Silver κ.ά., 2005).

Οι Star και Rittle-Johnson (2008) όρισαν την ευελιξία της στρατηγικής ως τη γνώση πολλαπλών στρατηγικών και της σχετικής αποτελεσματικότητάς τους. Ένα ειδικό τεύχος του περιοδικού ZDM Mathematics Education (Μάιος 2009) περιλάμβανε αναλύσεις της ευελιξίας στρατηγικών μαθητών διαφορετικών ηλικιών και επιπέδων ικανότητας (Elia κ.α., 2009 – Torbeyn κ α., 2009). Οι μελέτες αυτές εξέτασαν τόσο την ευελιξία μεταξύ των εργασιών (Elia κ. α., 2009 – Star & Newton, 2009 – Torbeyns κ. α., 2009) όσο και την ευελιξία εντός των εργασιών (Elia κ. α., 2009). Όλες οι μελέτες επεσήμαναν τη σημασία της προώθησης της νοητικής ευελιξίας στα σχολικά μαθηματικά. Οι μελέτες αυτές, ωστόσο, είτε εξέταζαν την ευελιξία των εκπαιδευτικών (Leikin & Levav Waynberg, 2008 – Yakes & Star, 2009) είτε δεν παρείχαν σαφείς οδηγίες για την επίλυση ενός προβλήματος με περισσότερους από έναν τρόπους (Elia κ.α., 2009). Σε αντίθεση, στις μελέτες των Elia κ.α. η ανάγκη για ευελιξία στρατηγικής εκδηλώθηκε μόνο όταν η πρώτη στρατηγική που επιλέχθηκε δεν ήταν επιτυχής. Επιπλέον, οι μελέτες που διερεύνησαν τις συνιστώσες της μαθηματικής δημιουργικότητας χρησιμοποίησαν διάφορα είδη εργασιών, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών προβλημάτων ανοιχτού τύπου για την ανάπτυξη αποκλίνουσας συλλογιστικής (π.χ. Kwon κ. α., 2006). Οι Kwon κ.ά. (2006) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που μάθαιναν συστηματικά με ανοικτά προβλήματα παρουσίασαν σημαντικά υψηλότερη μέση βαθμολογία στη δημιουργικότητα από ό,τι οι μαθητές της ομάδας ελέγχου. Έτσι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα μαθηματικά προβλήματα με μία μόνο σωστή απάντηση αποθαρρύνουν τους μαθητές από τη διερεύνηση ποικίλων ιδεών, ενώ τα ανοικτά προβλήματα (καθώς και τα ΠΠΛ) προωθούν και ενθαρρύνουν την δημιουργική σκέψη.

Ξεκινάμε από τη θέση ότι τα ΠΠΛ είναι πολύ αποτελεσματικά ως διδακτικό και ως ερευνητικό εργαλείο, ενώ παράλληλα είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση των γνώσεων και της δημιουργικότητας των εκπαιδευομένων. Η χρησιμοποίηση των ΠΠΛ ως ερευνητικού εργαλείου επιτρέπει τη διερεύνηση των δυνατοτήτων των μαθητικών επιδόσεων, η οποία συνήθως δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθεί στην περίπτωση που οι μαθητές είναι ικανοποιημένοι με μια στρατηγική εφόσον φτάνουν σε μια λύση.

Ο Skemp (1987) περιέγραψε την κατανόηση ως τη σύνδεση και την αφομοίωση της νέας γνώσης σε ένα γνωστό κατάλληλο σχήμα. Διέκρινε μεταξύ συνειρμικών και εννοιολογικών συνδέσεων. Ενώ η συνειρμική σύνδεση μπορεί να διατηρηθεί μόνο με την απομνημόνευση, χωρίς να υπάρχει ρύθμιση ή πρότυπο που να επιτρέπει την ευφυή μάθηση, η εννοιολογική σύνδεση βασίζεται σε κάποιον κανόνα. Σύμφωνα με τον Skemp, η πρόκληση των εκπαιδευτικών είναι να προωθήσουν στους μαθητές τους την ανάπτυξη καλά συνδεδεμένων σχημάτων και την επιδεξιότητα σε κάποιες απαραίτητες ρουτίνες, ώστε να καταστεί δυνατή η επιτυχία τους στα μαθηματικά. Οι Hiebert και Carpenter (1992) επέκτειναν αυτή την ιδέα περιγράφοντας τη μαθηματική κατανόηση ως «δίκτυα» μαθηματικών εννοιών, των ιδιοτήτων τους και των αναπαραστάσεών τους. Χωρίς συνδέσεις, οι μαθητές πρέπει να βασίζονται στη μνήμη τους και να θυμούνται πολλές μεμονωμένες έννοιες και διαδικασίες. Σύνδεση μαθηματικών ιδεών σημαίνει σύνδεση νέων ιδεών με συνάφειες και επίλυση απαιτητικών μαθηματικών εργασιών αναζητώντας οικείες έννοιες και διαδικασίες που μπορεί να βοηθήσουν σε νέες καταστάσεις.

Οι γνωστικές θεωρίες για τη μνήμη (Anderson, 1990) συμφωνούν ότι τα υψηλής προσβασιμότητας στοιχεία γνώσης είναι απαραίτητα κατά την επίλυση προβλημάτων. Οι Lawson και Chinnappan (2000) διαπίστωσαν σχέση μεταξύ της ποιότητας της οργάνωσης των γνώσεων των μαθητών και της επίδοσης τους στην επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία. Το επίπεδο οργάνωσης εκδηλώνεται με τη συνδεσιμότητα της γνώσης που επιδεικνύουν οι μαθητές. Όσο περισσότερες συνδέσεις κάνουν οι μαθητές μεταξύ διαφόρων εννοιών, ιδεών και διαδικασιών, τόσο πιο οργανωμένες είναι οι γνώσεις τους στη γεωμετρία. Όταν οι συγγραφείς συνέκριναν τις επιδόσεις των μαθητών με χαμηλές επιδόσεις με αυτές των μαθητών με υψηλές επιδόσεις στην επίλυση προβλημάτων στη γεωμετρία, διαπίστωσαν ότι οι δείκτες συνδεσιμότητας ήταν καλύτεροι προγνωστικοί δείκτες από τους δείκτες περιεχομένου για τη διαφοροποίηση των ομάδων με βάση την επιτυχία τους στην επίλυση προβλημάτων.

Όπως αναφέρθηκε στη παράγραφο της δημιουργικότητας, υπάρχουν πολλοί ορισμοί της γενικά και της μαθηματικής δημιουργικότητας ειδικότερα, οι οποίοι προέρχονται από τις διάφορες προσεγγίσεις της δημιουργικότητας (Haylock, 1987 – Leikin, 2009 – Mann, 2006 – Sriraman, 2009). Κάποιοι από τους ορισμούς αφορούν τα στάδια των δημιουργικών διαδικασιών (Ervynck, 1991 – Poincaré, 1948), ενώ άλλοι ορισμοί αφορούν τις ιδιότητες της δημιουργικής πράξης και του προϊόντος (Silver, 1997 – Sriraman, 2009).

Σύμφωνα με την πραγματιστική άποψη, η μελέτη της δημιουργικότητας αφορά την αναζήτηση τρόπων ανάπτυξης της δημιουργικότητας, ενώ η ψυχομετρική προσέγγιση ασχολείται με την αξιολόγησή της (Sriraman, 2009). Η πραγματιστική θεώρηση θεωρεί τη δημιουργικότητα στα σχολικά μαθηματικά σχετική με το συγκεκριμένο επίπεδο γνώσεων περιεχομένου που διαθέτουν οι μαθητές μιας συγκεκριμένης διδακτικής ομάδας. Η δημιουργικότητα δεν είναι ένα δεδομένο και στατικό χαρακτηριστικό των εξαιρετικά ταλαντούχων ατόμων, αλλά μάλλον είναι μια δυναμική ιδιότητα που μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα ευρύ φάσμα μαθητών με τη χρήση κατάλληλων διδακτικών εργαλείων (Leikin, 2009 – Liljedahl & Sriraman, 2006 – Silver, 1997). Αντί της εμμονής σε μια μόνο μαθηματική ιδέα, αυτή η στάση απέναντι στη δημιουργικότητα απαιτεί διδασκαλία που αναπτύσσει τον αποκλίνοντα συλλογισμό του μαθητή ή παράλληλες ιδέες ευελιξίας και ευχέρειας (Elia κ.α., 2009 - Kwonoκ.α., 2006 – Silver, 1997- Star & Newton, 2009- Torbeyns κ.α., 2009), αυξάνοντας έτσι τις πιθανότητες για ένα πρωτότυπο μαθηματικό προϊόν (Kwon κ.α., 2006).

Ο ορισμός της δημιουργικότητας του Torrance (1974), που είδαμε, σύμφωνα με τον οποίο η δημιουργικότητα βασίζεται σε τέσσερις αλληλένδετες συνιστώσες: ευχέρεια, ευελιξία, καινοτομία και επεξεργασία, μπορεί να αποτελέσει εργαλείο αξιολόγησης της δημιουργικότητας. Ακολουθώντας τον Torrance (1974), ο Silver (1997) υποστήριξε ότι για την ανάπτυξη της δημιουργικότητας μέσω της επίλυσης προβλημάτων είναι απαραίτητο να προωθηθούν οι τρεις συνιστώσες της δημιουργικότητας. Η ευχέρεια προωθείται με την έγερση πολλαπλών ιδεών για τη λύση ενός προβλήματος. Η ευελιξία προάγεται όταν, αφού έχει ήδη στα χέρια του μια λύση, το άτομο αναζητά περισσότερες πιθανές λύσεις και τέλος η καινοτομία αναπτύσσεται όταν το άτομο καταφέρνει να δημιουργήσει μια νέα λύση, πέραν αυτών που γνωρίζει εκείνη τη στιγμή.

Η Γεωμετρία είναι ένας από τους τομείς των μαθηματικών που προσφέρεται για προβλήματα πολλαπλών λύσεων και είναι σημαντικός ο κεντρικός ρόλος της στα σχολικά μαθηματικά. Οι Stupel και Ben-chaim (2014) υποστηρίζουν ότι οι πολλαπλές αποδείξεις προωθούν τόσο την καλύτερη κατανόηση όσο και την αυξημένη δημιουργικότητα στα μαθηματικά για τους μαθητές. Η γεωμετρία συνδυάζει την αναγκαιότητα των οπτικών δεξιοτήτων (Clements & Battista, 1992) με την απαίτηση για αφηρημένη και λογική σκέψη. Προσφέρει ευκαιρίες για δραστηριότητες διερεύνησης και απόδειξης που ομοιάζουνε με το έργο των μαθηματικών έρευνας (Herbst, 2002). Ένα περιβάλλον έρευνας προάγει επίσης την ικανότητα των μαθητών να συμπεραίνουν ιδιότητες και να τις γενικεύουν, και να αποκτούν μεγαλύτερη αυτονομία στη μαθηματική τους σκέψη κατά τη διάρκεια των μαθηματικών μαθημάτων (Christou, Mousoulides, Pittalis, & Pitta-Pantazi, 2004).

Αυτή η ενασχόληση με τη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών τομέων, μέσω της επίλυσης ΠΠΛ, οικοδομεί μεταξύ των μαθητών μια αντίληψη των μαθηματικών ως μια συνδεδεμένη επιστήμη και όχι ως μια συλλογή διακριτών, απομονωμένων θεμάτων (House & Coxford, 1995). Στα περισσότερα σχολικά εγχειρίδια παγκοσμίως, τα προβλήματα των μαθηματικών οργανώνονται με βάση συγκεκριμένα θέματα που παρουσιάζονται στο πρόγραμμα σπουδών: οι μαθητές τείνουν να κατανοούν ότι ορισμένα προβλήματα συνδέονται με συγκεκριμένα θέματα και, ως εκ τούτου, υποθέτουν ότι για κάθε πρόβλημα υπάρχει μία, και μόνο μία, μέθοδος για την επίλυσή του (Schoenfeld, 1988). Επίσης, ενώ το έγγραφο με τα πρότυπα NCTM τονίζει ότι οι εκπαιδευτικοί πρέπει να βρίσκουν εργασίες που παρουσιάζουν συνδεσιμότητα μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών τομέων, αναφέρει, ωστόσο, ότι ο εντοπισμός τέτοιων προβλημάτων είναι χρονοβόρος και απαιτεί ιδιαίτερη πρωτοβουλία από τους εκπαιδευτικούς. Βέβαια, η εμπειρία μας δείχνει επίσης ότι, ενώ η αποστολή αυτή δεν είναι εύκολη, υπάρχει σίγουρα η ανάγκη εντοπισμού πρόσθετων προβλημάτων που μπορούν να επιλυθούν με διάφορες μεθόδους και απαιτούν την εφαρμογή αποδείξεων από διαφορετικά πεδία των μαθηματικών. Οπότε είναι καθήκον τους να συνεχίσουν να αναζητούν τέτοια κατάλληλα προβλήματα και να ενθαρρύνουν τους συναδέλφους τους να το πράξουν επίσης. Οι καθηγητές μαθηματικών θα πρέπει να παρουσιάζουν στους μαθητές τους προβλήματα που πρέπει να επιλυθούν με περισσότερους από έναν τρόπους, απαιτώντας όσο το δυνατόν περισσότερο, την εφαρμογή γνώσεων από διαφορετικούς τομείς των μαθηματικών. Στη μελέτη του, ο Bingolbali (2011) ανέφερε ότι η εφαρμογή πολλαπλών τρόπων επίλυσης προβλημάτων έχει τη δυνατότητα να αναπτύξει τη «σχεσιακή κατανόηση» των μαθητών (όρος που αποδίδεται στον Skemp (1976)) και να συμβάλει στην ανάπτυξη της αυτονομίας τους. Επιπλέον, κατά την εξέταση των μαθητών, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να επιτρέπουν περιστασιακά στους μαθητές τους να επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας αποδείξεις από οποιαδήποτε μαθηματική περιοχή και να μην επιμένουν σε μια απόδειξη από το συγκεκριμένο αντικείμενο που μελετούν.

Ταυτόχρονα, οι δραστηριότητες απόδειξης μετατρέπουν τον επαγωγικό συλλογισμό, ο οποίος είναι ο κύριος μηχανισμός για την ανάπτυξη της λογικής σκέψης και της μαθηματικής κατανόησης (Hanna, 1996 – Herbst & Brach, 2006), σε μέθοδο επικοινωνίας και αιτιολόγησης (Lehrer & Chazan, 1998). Επιπλέον, μια απόδειξη έχει δυνητικά επεξηγηματική δύναμη και μπορεί να δείξει όχι μόνο ότι μια δήλωση είναι αληθής αλλά και γιατί ισχύει (Chazan, 1993 – Schoenfeld, 1994). Η αναζήτηση διαφορετικών αποδείξεων ενός επιχειρήματος ενισχύει τη λογική και την επαγωγική συλλογιστική (Hansen, 1998) και καθιστά το επιχείρημα πιο πειστικό (Neubrand, 1998).

Ο τελευταίος σημαντικός λόγος για την επιλογή της γεωμετρίας ως πλαίσιο για τη μελέτη μας ήταν ο πλούτος των δυνατοτήτων για τον εντοπισμό και τη δημιουργία ΠΠΛ, καθώς σχεδόν όλα τα πρόβλημα γεωμετρίας που συναντάται σε ένα τυπικό εγχειρίδιο έχουν την δυνατότητα να μετατραπούν σε ένα ΠΠΛ (Levav-Waynberg & Leikin, 2009), αν και δεν είναι τόσο εύκολο σε μικρές τάξεις του Γυμνασίου, όπως η Α΄ Γυμνασίου. Τα ΠΠΛ στη γεωμετρία επιτρέπουν την επίτευξη διαφόρων λύσεων χρησιμοποιώντας έννοιες και ιδιότητες στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος σπουδών γεωμετρίας και δεν απαιτούν καμία εξωσχολική γνώση από τους μαθητές και τους εκπαιδευτικούς. Τέλος, οι λύσεις των προβλημάτων γεωμετρίας δεν βασίζονται ποτέ πλήρως σε αλγοριθμικές διαδικασίες και επομένως περιλαμβάνουν ευρετική συλλογιστική (Polya, 1981 – Schoenfeld, 1985), και απαιτούν ακόμη πιο εκτεταμένη χρήση ευρετικών μεθόδων. Η παραγωγή πολλαπλών λύσεων, η οποία γίνεται μέρος του διδακτικού συμβολαίου, έχει ευρετικό χαρακτήρα.

3.5 Τοποθέτηση προβλημάτων.

Η τοποθέτηση προβλήματος έχει αναγνωριστεί εδώ και καιρό ως μια εξαιρετικά σημαντική πνευματική δραστηριότητα στην επιστημονική έρευνα. Σύμφωνα με τον Einstein η διατύπωση ενός ενδιαφέροντος προβλήματος είναι συχνά πιο σημαντική από τη λύση του, η οποία μπορεί να είναι απλώς θέμα μαθηματικής ή πειραματικής ικανότητας (Einstein & Infeld, 1938). Ωστόσο, ενώ η υπόθεση της επίλυσης προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά είναι σχετικά ξεκάθαρη, η σημασία της διατύπωσης προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά απαιτεί ελαφρώς περισσότερες εξηγήσεις. Τα τελευταία χρόνια η επίλυση προβλημάτων είναι μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης (Stanic & Kilpatrick, 1988). Αν και πριν από 30 χρόνια ο Getzels (1979) παραπονέθηκε ότι, σε σύγκριση με την επίλυση προβλημάτων, η τοποθέτηση προβλημάτων ήταν ένας παραμελημένος τομέας έρευνας, τα τελευταία χρόνια τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι ερευνητές έχουν αρχίσει να δίνουν συντονισμένη προσοχή στην τοποθέτηση προβλημάτων.

Ο Kilpatrick (1987) παρατήρησε ότι στην πραγματική ζωή, τα προβλήματα πρέπει συχνά να δημιουργούνται ή να ανακαλύπτονται από αυτόν που τα επιλύει. Έτσι, το βάρος της παρατήρησης ενός προβλήματος και στη συνέχεια της διαμόρφωσης με παραγωγικό τρόπο, εναπόκειται αποκλειστικά σε αυτόν που το επιλύει. Πράγματι, στην ανάλυσή του, ο μαθηματικός Jacques Hadamard (1945) θεώρησε τον εντοπισμό και τη διατύπωση καλών προβλημάτων ως σημαντικό μέρος της εργασίας των μαθηματικών υψηλής ποιότητας. Έτσι, αν ένας στόχος της εκπαίδευσης είναι να προετοιμάσει τους μαθητές για τα είδη της σκέψης που θα χρειαστούν, φαίνεται λογικό ότι η δημιουργία προβλημάτων θα πρέπει να αποτελεί σημαντικό μέρος του προγράμματος σπουδών. Επιπλέον, οι προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών που προσπαθούν να εμπλέξουν τους μαθητές σε εμπειρίες που είναι πιο αυθεντικές στη διερεύνηση στο πλαίσιο του γνωστικού αντικειμένου των μαθηματικών, θα πρέπει να παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να διερευνούν, να διατυπώνουν εικασίες και να θέτουν προβλήματα με νόημα (Bonotto, 2013).

Η τοποθέτηση προβλημάτων αποτελεί επίσης μια κρίσιμη πτυχή του έργου των εκπαιδευτικών, τόσο στην τοποθέτηση προβλημάτων για τους μαθητές όσο και στο να βοηθούν τους μαθητές να εξελιχθούν σε καλύτερους δημιουργούς προβλημάτων (Crespo, 2003 – Olson & Knott, 2013). Οι εκπαιδευτικοί πρέπει τακτικά να διατυπώνουν και να θέτουν αξιόλογα προβλήματα για τους μαθητές τους, ακόμη και όταν εργάζονται με προβλήματα που δίνονται στο υλικό του αναλυτικού προγράμματος (NCTM, 2000). Τα προβλήματα που θέτουν οι εκπαιδευτικοί μπορούν να διαμορφώσουν τη μαθηματική μάθηση στις τάξεις τους και «να διευρύνουν τους μαθηματικούς στόχους της τάξης» (NCTM, 2000, σ.53). Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις εργασίες που θέτουν προβλήματα για να αποκτήσουν μεγαλύτερη εικόνα για τις αντιλήψεις των μαθητών τους σχετικά με τα μαθηματικά (Kotsopoulos & Cordy, 2009 – Silver, 1994).

Τα θεωρητικά επιχειρήματα που υποστηρίζουν τη σημασία της τοποθέτησης προβλημάτων στα σχολικά μαθηματικά ενισχύονται από το αυξανόμενο σύνολο εμπειρικών στοιχείων. Οι ερευνητές διερευνούν ενεργά τους δεσμούς μεταξύ της δημιουργίας προβλημάτων και άλλων πτυχών της μαθηματικής ικανότητας, συμπεριλαμβανομένης της εννοιολογικής κατανόησης, της επίλυσης προβλημάτων και της δημιουργικότητας (Cai & Hwang, 2002 – Silver & Cai, 1996 – Ellerton, 1986). Δεδομένης της δυνατότητάς βελτίωσης της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών, είναι σαφές ότι η προβληματοθεσία αποτελεί σημαντικό μέρος της έρευνας και της πρακτικής στα σχολικά μαθηματικά.

Σε τι βαθμό όμως, μπορούν οι καθηγητές και οι μαθητές να τοποθετούν προβλήματα; Οι ερευνητές συνήθως σχεδιάζουν μια προβληματική κατάσταση και ζητούν από τα υποκείμενα να θέσουν προβλήματα τα οποία μπορούν να επιλυθούν χρησιμοποιώντας πληροφορίες που δίνονται στην κατάσταση. Διαφορετικοί τύποι προβληματικών καταστάσεων έχουν χρησιμοποιηθεί, μερικές από τις οποίες δεν περιέχουν γνώσεις και άλλες είναι πλούσιες σε γνώσεις. Ορισμένες καταστάσεις είναι αρκετά δομημένες, ενώ άλλες είναι σχετικά ανοικτές. Οι Stoyanova και Ellerton (1996) ταξινόμησαν το βαθμό δομής των προβληματικών καταστάσεων ως ελεύθερες, ημιδομημένες και δομημένες. Οι έρευνες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων έχουν διερευνήσει τις επιδόσεις των μαθητών, των υποψήφιων εκπαιδευτικών και των εν ενεργεία εκπαιδευτικών (Cai & Hwang, 2002 – Crespo, 2003 - Ma, 1999 – Stickles, 2011). Σε γενικές γραμμές, τα ευρήματα έχουν υποστηρίξει τον ισχυρισμό ότι τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να θέτουν ενδιαφέροντα και σημαντικά μαθηματικά προβλήματα (Silver & Cai, 2005).

Ωστόσο, η ικανότητα να θέτουν έγκυρα προβλήματα φαίνεται να συνδέεται με άλλους παράγοντες. Για παράδειγμα, στη σύγκρισή της μεταξύ Αμερικανών και Κινέζων εκπαιδευτικών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης για την κατανόηση των στοιχειωδών μαθηματικών, η L. Ma (1999) διαπίστωσε ότι οι ικανότητες των εκπαιδευτικών να θέτουν προβλήματα, όπως για κάποια συγκεκριμένη διαίρεση κλάσματος σχετιζόταν με την κατανόηση της σημασίας της διαίρεσης κλασμάτων. Οι Αμερικανοί δάσκαλοι της μελέτη δεν ήταν σε θέση να δημιουργήσουν κατάλληλα προβλήματα και οι δυσκολίες τους είχαν τις ρίζες τους στις ανεπαρκείς αντιλήψεις τους για τη διαίρεση κλασμάτων. Αντίθετα, οι Κινέζοι εκπαιδευτικοί ήταν γενικά σε θέση να θέσουν τουλάχιστον ένα πρόβλημα για τη δεδομένη διαίρεση κλασμάτων με βάση μία από τις τρεις αντιλήψεις της έννοιας (μοντέλο μέτρησης, μερικό μοντέλο, παράγοντες και γινόμενο).

Παρόλο που η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί είναι ικανοί να θέτουν ενδιαφέροντα και σημαντικά μαθηματικά προβλήματα, οι ερευνητές έχουν επίσης διαπιστώσει ότι ορισμένοι μαθητές και καθηγητές θέτουν μη μαθηματικά προβλήματα, μη επιλύσιμα προβλήματα, και άσχετα προβλήματα (Cai & Hwang, 2002 - Silver & Cai, 1996). Για παράδειγμα, οι Silver και Cai (1996) διαπίστωσαν ότι σχεδόν το 30% των προβλημάτων που έθεταν οι μαθητές του γυμνασίου ήταν είτε μη μαθηματικά προβλήματα ή απλά προβληματικές δηλώσεις (παρόλο που οι οδηγίες ζητούσαν σαφή προβλήματα). Οι Crespo και Sinclair (2008) υπέθεσαν ότι αυτές οι δυσκολίες μπορεί να σχετίζονται με την έλλειψη ευκαιρίας για τους μαθητές να διερευνήσουν επαρκώς μια προβληματική κατάσταση πριν και κατά τη διάρκεια της διαδικασίας υποβολής. Υπάρχει σαφώς η ανάγκη να διερευνηθεί πώς οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί ερμηνεύουν και αναλύουν προβλήματα, όταν εμπλέκονται στην τοποθέτηση προβλημάτων.

Η καλύτερη κατανόηση των γνωστικών διαδικασιών της δημιουργίας προβλημάτων μπορεί να ανανεώσει τη διδασκαλία. Ιδανικά, όσο περισσότερα γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί για τη σκέψη των μαθητών τους, τόσο καλύτερα εξοπλισμένοι είναι για να βοηθήσουν τους μαθητές τους να αναπτυχθούν (Cai, 2005). Ωστόσο, δεν φτάνει να ενημερωθούν μόνο οι εκπαιδευτικοί, αλλά και οι ίδιοι οι μαθητές, χρειάζονται πολλή δουλειά για να συνδεθούν οι βασισμένες στην έρευνα αντιλήψεις της γνώσης των μαθητών με την πρακτική των εκπαιδευτικών. Όπως η Γνωστικά Καθοδηγούμενη Διδασκαλία (Cognitively Guided Instruction - CGI) παρείχε ένα θεωρητικό και εμπειρικό πλαίσιο που βοήθησε τους εκπαιδευτικούς να κατανοήσουν τη μαθηματική σκέψη και την επίλυση προβλημάτων των μαθητών τους (Fennema κ.ά., 1996), έτσι και η έρευνα που φωτίζει τα γνωστικά μοντέλα του προβληματισμού των μαθητών έχει τη δυνατότητα να βελτιώσει τη διδασκαλία.

Μια σημαντική κατεύθυνση για την έρευνα σχετικά με την τοποθέτηση προβλημάτων είναι η διερεύνηση των δεσμών μεταξύ της δημιουργίας προβλήματος και της επίλυσης προβλήματος (Kilpatrick, 1987 – Silver & Cai, 1996). Ο Kilpatrick (1987) παρείχε ένα θεωρητικό επιχείρημα ότι η ποιότητα των προβλημάτων που θέτουν τα υποκείμενα μπορεί να χρησιμεύσει ως δείκτης του πόσο καλά μπορούν να επιλύσουν προβλήματα. Εκτός από αυτό το θεωρητικό επιχείρημα, αρκετοί ερευνητές έχουν διεξάγει εμπειρικές μελέτες που εξετάζουν τις πιθανές συνδέσεις μεταξύ της δημιουργίας προβλημάτων και της επίλυσης προβλημάτων. Ο Ellerton (1986) συνέκρινε τα μαθηματικά προβλήματα που δημιούργησαν οκτώ μικρά παιδιά υψηλής ικανότητας με εκείνα που δημιούργησαν οκτώ μικρά παιδιά χαμηλής ικανότητας, ζητώντας από το καθένα να θέσει ένα μαθηματικό πρόβλημα που θα ήταν αρκετά δύσκολο να λύσουν οι φίλοι του. Ο Ellerton ανέφερε ότι οι πιο ικανοί μαθητές έθεταν προβλήματα που ήταν πιο πολύπλοκα από εκείνα που έθεταν οι λιγότερο ικανοί μαθητές.

Τα αποτελέσματα των μαθητών στα μαθήματα μαθηματικών αξιολογούνται συνήθως με το να λύνουν οι μαθητές προβλήματα. Ωστόσο οι ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι η επιτυχία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων σχετίζεται με τις ικανότητές τους να θέτουν προβλήματα (Cai & Hwang, 2002 – Silver & Cai, 1996). Επιπλέον, υπάρχουν ενδείξεις ότι το να ζητείται από τους μαθητές να θέτουν προβλήματα μπορεί να παρέχει πρόσθετες χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με το τι έχουν μάθει οι μαθητές στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, σε μια μελέτη σχετικά με την εννοιολογική κατανόηση των κλασμάτων από τους υποψήφιους εκπαιδευτικούς πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, οι Tichá και Hošpesová (2013) χρησιμοποίησαν τη δημιουργία προβλημάτων ως διαγνωστικό εργαλείο για να μετρήσουν την κατανόηση των μελλοντικών εκπαιδευτικών. Αναλύοντας τα προβλήματα που έθεσαν οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί, οι Tichá και Hošpesová μπόρεσαν να εντοπίσουν εννοιολογικές αδυναμίες και σύγχυση. Παρομοίως, οι Kotsopoulos και Cordy (2009) χρησιμοποίησαν τις ημερολογιακές καταγραφές των μαθητών τους της έβδομης τάξης για τη δημιουργία προβλημάτων ως ένα είδος διαμορφωτικής αξιολόγησης για να μετρήσουν την πρόοδο που σημείωναν οι μαθητές.

Δεδομένων των γενεσιουργών ιδιοτήτων της τοποθέτησης προβλημάτων, θα περίμενε κανείς ότι οι δραστηριότητες τοποθέτησης προβλημάτων θα μπορούσαν να είναι έγκυρα μέτρα της δημιουργικότητας των μαθητών. Πράγματι, ο Silver (1997) πρότεινε μια σχέση μεταξύ της εμπλοκής των μαθητών στην προβληματική τοποθέτηση και της ανάπτυξης της δημιουργικής τους ευχέρειας, της ευελιξίας και της καινοτομίας. Μελετώντας παιδιά δημοτικού στην Ταϊβάν, ο Leung (1997) ανέπτυξε ένα εργαλείο 18 εργασιών που ήταν χρήσιμο για τη μέτρηση της γενικής ικανότητας των μαθητών να θέτουν προβλήματα, καθώς και για την ανάδειξη της δημιουργικής τους τοποθέτησης προβλημάτων. Ομοίως, οι Van Harpen και Sriraman (2013) χρησιμοποίησαν ένα τεστ προβληματικής τοποθέτησης για να εξετάσουν την ικανότητα των Αμερικανών και Κινέζων μαθητών γυμνασίου στην δημιουργικότητα τοποθέτησης προβλημάτων κατά τις τρεις διαστάσεις της ευχέρειας, της ευελιξίας και της καινοτομίας. Γενικά, οι επιδόσεις σε τέτοιου είδους τεστ αποκάλυψαν αδυναμίες στην τοποθέτηση προβλημάτων. Ωστόσο, οι Voica και Singer (2012) πρότειναν ότι υπάρχουν σημαντικές αποχρώσεις στη σχέση μεταξύ προβληματισμού και δημιουργικότητας. Συγκεκριμένα, σε μελέτη τους σχετικά με τις τροποποιήσεις των προβλημάτων από μαθητές τέταρτης έως έκτης δημοτικού, διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που παρέμειναν κοντά στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος επέδειξαν βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών από εκείνους που έθεσαν τροποποιημένα προβλήματα που ήταν φαινομενικά πιο δημιουργικά επειδή απομακρύνονταν περισσότερο από το αρχικό. Παρ' όλα αυτά, οι Voica και Singer (2013) διαπίστωσαν ότι, με επαρκώς προσεκτική ανάλυση της γνώσης των μαθητών κατά τη διάρκεια της τροποποίησης των προβλημάτων, η τοποθέτηση προβλημάτων μπορεί να παρέχει χρήσιμα στοιχεία για τη γνωστική ευελιξία των μαθητών. Τα χαμηλά επίπεδα επιτυχίας που εμφανίζουν οι μαθητές μπορεί να οφείλονται στη γενική έλλειψη εμπειρίας με τις εργασίες προβληματισμού. Επιπλέον, οι Crespo και Sinclair (2008) τονίζουν την ανάγκη οι μαθητές να αναπτύξουν αισθητικά κριτήρια για την αξιολόγηση της μαθηματικής ποιότητας των προβλημάτων που τίθενται. Η ανάπτυξη τέτοιων κριτηρίων και η διάθεση για την εφαρμογή τους μπορεί επίσης να είναι μέρος των εμπειριών που προϋποθέτουν την τοποθέτηση προβλημάτων να είναι πρακτικά εφικτή ως μέτρο δημιουργικότητας.

Η χρησιμοποίηση τεχνολογίας κατά την διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών αποτελεί ένα ενδιαφέρον ζήτημα για τους ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ειδικότερα, η ευελιξία των τεχνολογιών που βασίζονται σε υπολογιστές για τη διευκόλυνση της εξερεύνησης και του πειραματισμού φαίνεται να έχει σχέση με την τοποθέτηση προβλημάτων. Οι Cai και Cifarelli (2005) χρησιμοποίησαν έναν μικρόκοσμο υπολογιστή για να επιτρέψουν στους μαθητές να εξερευνήσουν μια μαθηματική κατάσταση που αφορούσε την κίνηση μιας μπάλας μπιλιάρδου. Ο μικρόκοσμος παρείχε στους μαθητές σχετική αυτονομία και ελευθερία στην εξερεύνηση των σχέσεων και των ορίων της μαθηματικής κατάστασης. Αυτές οι εξερευνήσεις διευκόλυναν τους μαθητές να δημιουργήσουν πολλαπλά ερωτήματα και εικασίες. Έτσι, αυξάνοντας τις ευκαιρίες για τους μαθητές να εξερευνήσουν ένα πρόβλημα και να δοκιμάσουν τα όριά του (Crespo & Sinclair, 2008), οι τεχνολογίες που βασίζονται στον υπολογιστή μπορούν τελικά να βοηθήσουν τους μαθητές να επεκτείνουν τα δεδομένα προβλήματα θέτοντας σχετικές ερωτήσεις (Santos-Trigo & Diaz-Barriga, 2000) και να θέτουν συνολικά προβλήματα υψηλότερης ποιότητας.

Τα συστήματα που βασίζονται σε υπολογιστές είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για να παρέχουν στους μαθητές ευκαιρίες να εξερευνήσουν δυναμικές οπτικοποιήσεις γεωμετρικών καταστάσεων. Οι Christou, Mousoulides, Pittalis και Pitta-Pantazi (2005) διαπίστωσαν ότι η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας διευκόλυνε τη δημιουργία νέων προβλημάτων κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων. Οι εκπαιδευόμενοι ήταν σε θέση να χρησιμοποιήσουν τα δυναμικά χαρακτηριστικά του λογισμικού, και συγκεκριμένα το «σύρσιμο», για να δημιουργήσουν και να ελέγξουν εικασίες, να πειραματιστούν και να γενικεύσουν. Παρομοίως, ο Chazan (1990) περιέγραψε πώς οι εκπαιδευτικοί μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν το γεωμετρικό λογισμικό Supposers για να αυξήσουν την εξερεύνηση των μαθητών και να αναπτύξουν τις ερευνητικές δεξιότητες των μαθητών: επαλήθευση, εικασίες, γενίκευση, επικοινωνία, απόδειξη και δημιουργία συνδέσεων. Το Supposers είναι πρόγραμμα λογισμικού που διευκολύνει τις γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες μπορούν στη συνέχεια να καταγραφούν και να επαναληφθούν με νέες αρχικές συνθήκες. Ο Chazan διαπίστωσε ότι η χρήση τέτοιων προγραμμάτων θα μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές να θέσουν πολύ καλά προβλήματα σχεδιάζοντας βοηθητικές γραμμές ή μεταβάλλοντας συστηματικά πτυχές των προβλημάτων.

Εκμεταλλευόμενοι τη δύναμη των υπολογιστών για την εμπλοκή των μαθητών σε παιχνίδια, οι Chang, Wu, Weng και Sung (2012) υλοποίησαν ένα σύστημα υποβολής προβλημάτων που ζητούσε από τους μαθητές να θέτουν και να αναπροσαρμόζουν προβλήματα τα οποία στη συνέχεια θα παρουσιάζονταν σε ένα από τα έξι πλαίσια ενός παιχνιδιού στον υπολογιστή. Η μαθηματική εστίαση αυτού του έργου ήταν σε στοιχειώδεις λεκτικά προβλήματα. Με την εμπλοκή των μαθητών σε αυτό το σύστημα παιχνιδιού – προβληματισμού, οι ερευνητές επεδίωξαν να βελτιώσουν την ικανότητα των μαθητών να θέτουν και να επιλύουν προβλήματα. Συγκεκριμένα, οι Chang κ.ά. διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που χρησιμοποιούσαν τη δραστηριότητα που βασιζόταν στην τεχνολογία ήταν περισσότερο αφοσιωμένοι και προβληματισμένοι από τους μαθητές που λάμβαναν παραδοσιακή διδασκαλία προβληματισμού στην ομάδα ελέγχου, οι οποίοι κουράστηκαν από τις εργασίες.

Η πρόσφατη άνοδος των εξελιγμένων διαδικτυακών τεχνολογιών είχε επίσης αντίκτυπο στη δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων. Οι ερευνητές έχουν αρχίσει να διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο τα διαδικτυακά περιβάλλοντα μπορούν να διευκολύνουν το έργο των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την υποβολή προβλημάτων, τη συζήτηση των λύσεων και την αξιολόγηση και βελτίωση των προβλημάτων και των λύσεων. Για παράδειγμα, οι Beal και Cohen (2012) χρησιμοποίησαν ένα διαδικτυακό σύστημα συγγραφής περιεχομένου και διαμοιρασμού στο οποίο οι μαθητές της μέσης εκπαίδευσης έθεσαν μαθηματικά προβλήματα και έλυναν προβλήματα που είχαν συγγράψει οι συμμαθητές τους. Το σύστημα περιλάμβανε πτυχές των μέσων κοινωνικής δικτύωσης, στις οποίες οι μαθητές μπορούσαν να επαινέσουν ή να επικρίνουν τα προβλήματα των συμμαθητών τους. Οι Beal και Cohen διαπίστωσαν ότι οι μαθητές ήταν σε θέση να δημιουργήσουν προβλήματα με επιτυχία, δημιουργώντας κατά μέσο όρο τέσσερα προβλήματα ο καθένας. Ωστόσο, οι μαθητές συμμετείχαν σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων πολύ συχνότερα από τη συγγραφή νέων προβλημάτων, παρά το ότι τους δόθηκαν περισσότεροι βαθμοί για τη δημιουργία παρά για την επίλυση προβλημάτων. Παρ' όλα αυτά, και οι δύο, μαθητές και οι εκπαιδευτικοί ανταποκρίθηκαν θετικά στη δραστηριότητα.

3.6 <u>Βοηθητικές Γραμμές.</u>

Σύμφωνα με τον Pólya (1957) «Ένα στοιχείο που εισάγουμε με την ελπίδα ότι θα προωθήσει τη λύση ονομάζεται βοηθητικό στοιχείο» (σ. 46). Η κατασκευή βοηθητικών γραμμών, μια λειτουργία που σχετίζεται με τη λειτουργική κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος, φαίνεται να ανοίγει το δρόμο για πολλαπλές προσεγγίσεις ενός γεωμετρικού πρόβλημα (Gridos, Gagatsis, Elia, & Deliyianni, 2019). Από αυτή την άποψη, οι Gridos κ.ά. (2019) προτείνουν ότι οι βοηθητικές γραμμές κατηγοριοποιούνται σε δύο τύπους:

(α) τις βοηθητικές γραμμές που δημιουργούν υπο-σχήματα εντός του συγκεκριμένου σχήματος και

(β) οι βοηθητικές γραμμές που έχουν ως αποτέλεσμα την κατασκευή σχημάτων των οποίων το συγκεκριμένο σχήμα αποτελεί μέρος.

Λόγω αυτής της πολυπλοκότητας, κατά τη μελέτη της λειτουργικής αντίληψης των γεωμετρικών σχημάτων, είναι απαραίτητο να γίνει διάκριση μεταξύ της ικανότητας αναδιαμόρφωσης ενός δεδομένου σχήματος και της ικανότητας δημιουργίας νέων υποσχημάτων με τη χρήση νέων βοηθητικών γραμμών (Avgerinos & Gridos, 2019) και (Avgerinos et all 2019).

Σύμφωνα με τον Senk (1985) η εισαγωγή βοηθητικών γραμμών αποτελεί κρίσιμο μέρος στην επίλυση προβλημάτων γεωμετρικής απόδειξης. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η δυσκολία με τις βοηθητικές γραμμές «αποτελεί παράδειγμα της ανάγκης να διδάξουμε στους μαθητές πώς, γιατί και πότε μπορούν να μετατρέψουν ένα σχήμα σε απόδειξη» (σ. 455). Οι Ding και Jones (2006) εντόπισαν επίσης την εισαγωγή μιας βοηθητικής γραμμής για χρήση σε μια απόδειξη ως πηγή μεγάλης δυσκολίας για τους μαθητές. Ο Hsu (2007) υποστηρίζει ότι η δυσκολία αυτή οφείλεται στην ανάγκη των μαθητών να αντιληφθούν τα σχήματα δυναμικά και να εφαρμόσουν μετασχηματιστική παρατήρηση για να απεικονίσουν μια λύση που μπορεί να παραχθεί με τη βοήθεια των βοηθητικών γραμμών. Αυτό συμφωνεί με τα ευρήματα των Yerushalmy και Chazan (1990) σχετικά με τη χρήση των σχημάτων στη γεωμετρία από τους μαθητές γυμνασίου. Επιπλέον, οι Hsu και Silver (2014), στη μελέτη τους για τη γνωστική πολυπλοκότητα των εργασιών, θεώρησαν την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών ως μία από τις τέσσερις κατηγορίες πολυπλοκότητας της επίλυσης προβλημάτων.

Η δυσκολία των μαθητών με την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών κατά την απόδειξη μιας γεωμετρικής δήλωσης μπορεί να εξηγηθεί εν μέρει από μια μορφή διδασκαλίας, η οποία δεν ενθαρρύνει τους μαθητές να προσθέσουν νέες γραμμές στο δεδομένο σχήμα. Για παράδειγμα, οι μαθητές στη μελέτη των Herbst και Brach (2006) ανέφεραν οι ίδιοι ότι αναμένουν να διαδραματίσουν παθητικό ρόλο στην αλληλεπίδραση με τα σχήματα κατά την απόδειξη: Πιστεύουν ότι συνήθως δεν αναμένεται από αυτούς να εισάγουν βοηθητικές γραμμές, και αν το κάνουν, περιμένουν να λάβουν μια υπόδειξη για να το κάνουν από τον καθηγητή. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία οι Hsieh, Horng και Shy (2012) πρότειναν ότι η ενσωμάτωση της εξερεύνησης στην απόδειξη βοηθά τους μαθητές να αποκαλύψουν νέες πληροφορίες, γεγονός που καθιστά την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών πιο διαφανή. Σε παρόμοιο πνεύμα, η μελέτη των Fan κ.ά. (2017) αναγνώρισε τη δυσκολία των μαθητών στη σχεδίαση βοηθητικών γραμμών και διερεύνησε μια διδακτική προσέγγιση στην τάξη όπου οι βοηθητικές γραμμές συνδέονται με αντίστοιχους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς.

Υπάρχει ένας αυξανόμενος όγκος ερευνών για τη μαθηματική εκπαίδευση που θεωρεί την κατασκευή αποδείξεων ως έργο επίλυσης προβλημάτων (π.χ. Koichu and Leron, 2015 – Weber, 2005). Σύμφωνα με τον Weber (2005) η θεώρηση της απόδειξης ως επίλυσης προβλήματος επιτρέπει την εστίαση σε θέματα που παραμένουν ανεξερεύνητα στο πλαίσιο άλλων θεωρητικών προοπτικών. Μεταξύ αυτών είναι οι ευρετικές μέθοδοι που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί για να κατασκευάσουν αποδείξεις (Pólya, 1957). Συγκεκριμένα, ο Pólya αναφέρει ότι ο λύτης προβλήματος δεν πρέπει να εισάγει βοηθητικά στοιχεία τυχαία και απαριθμεί τρεις βασικούς λόγους για την εισαγωγή τους (σελ. 46):

1) Προσπάθεια χρήσης γνωστών αποτελεσμάτων,
2) Επιστροφή στους ορισμούς,
3) Προσδοκία να γίνει το αρχικό πρόβλημα «πληρέστερο, πιο υποβλητικό, πιο οικείο».

Είναι αξιοσημείωτο, ωστόσο, ότι ο Pólya κάνει διάκριση μεταξύ των δύο πρώτων λόγων και του τρίτου. Αναφέρει ότι στην τρίτη περίπτωση «μόλις και μετά βίας γνωρίζουμε ακόμη ρητά πώς θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία που προστίθενται. Μπορεί απλώς να νιώθουμε ότι είναι μια «φαεινή ιδέα» να συλλάβουμε το πρόβλημα με αυτόν τον τρόπο με τα τάδε ή τα δείνα στοιχεία που προστίθενται» (Pólya, 1957). Σε μια πρόσφατη μελέτη οι Palatnik και Sigler (2018) χρησιμοποίησαν έναν ευρετικό φακό και εξέτασαν την εισαγωγή βοηθητικών στοιχείων ως μέθοδο επίλυσης προβλημάτων στη γεωμετρία γυμνασίου από δύο οπτικές γωνίες: πρώτον, για να προκαλέσουν την ανάκληση κάποιου γνωστού αποτελέσματος ή τη συγκεκριμενοποίηση ενός ορισμού και, δεύτερον, ως μέσο μετατόπισης της εστίασης και της δομής της προσοχής των μαθητών.

Συνοψίζοντας, η εισαγωγή των βοηθητικών γραμμών είναι μια κρίσιμη απόφαση για τους μαθητές σε αποδεικτικές καταστάσεις. Συμβάλλει στην πολυπλοκότητα της απόδειξης και της κατανόησης της απόδειξης (π.χ. Hsu & Silver, 2014 – Senk, 1985), ενώ οι μαθητές συχνά αναμένουν να διαδραματίσουν παθητικό ρόλο στην πρόταση βοηθητικών γραμμών σε καταστάσεις απόδειξης (Herbst & Brach, 2006). Σύμφωνα με τους Gridos κ.ά. (2022), οι εκπαιδευτικοί που ενθαρρύνουν τους μαθητές να κατασκευάσουν βοηθητικές προκειμένου να δημιουργήσουν εναλλακτικές προσεγγίσεις στην επίλυση, θα καλλιεργήσουν τη μαθηματική δημιουργικότητα σε αυτούς. Ο τρόπος ανάπτυξης των δεξιοτήτων των μαθητών για την εισαγωγή βοηθητικών γραμμών παραμένει ένα ανοιχτό ερώτημα (Fan, Qi, Liu, Wang, & Lin, 2017).

3.7 Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρία.

Στη σημερινή εποχή, είναι αδύνατο να αγνοήσουμε τη ραγδαία ανάπτυξη της τεχνολογίας και τον τρόπο με τον οποίο επηρεάζει σχεδόν κάθε πτυχή της ζωής. Το εκπαιδευτικό σύστημα δεν αποτελεί εξαίρεση και σίγουρα δεν μπορεί κανείς να αγνοήσει την αξία της τεχνολογίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Πολλοί συγγραφείς (Christou κ.ά, 2005 – Stupel & Ben-chaim, 2014 – Adelabu κ.ά, 2019) πιστεύουν ακράδαντα στα πλεονεκτήματα της ενσωμάτωσης λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ΛΔΓ (dynamic geometry software – DGS) στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Σε ένα ειδικό τεύχος του PME, οι Jones κ.ά. (2000), γράφοντας ένα άρθρο με τίτλο «Απόδειξη σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας» ("Proof in dynamic geometry environments"), δήλωσαν ότι «Αυτό το ειδικό τεύχος παρέχει μια σειρά από στοιχεία που αποδεικνύουν ότι η εργασία με λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας παρέχει στους μαθητές δυνατότητες πρόσβασης στα θεωρητικά μαθηματικά, κάτι που μπορεί να είναι ιδιαίτερα άπιαστο με άλλα παιδαγωγικά εργαλεία» (σ.3). Η επαγωγική εξερεύνηση με τα ΛΔΓ μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές να αναπτύξουν τις δικές τους εικασίες σχετικά με τη λύση του προβλήματος και στη συνέχεια να ασχοληθούν με την επαγωγική απόδειξη. Αυτό συμβαίνει εκτός από τη συμβολή της οπτικοποίησης διαφορετικών γραφικών αναπαραστάσεων εννοιών και άλλων συναφών καταστάσεων με το πρόβλημα.

Ένα από τα διακριτικά χαρακτηριστικά των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας είναι η δυνατότητα κατασκευής γεωμετρικών αντικειμένων και καθορισμού σχέσεων μεταξύ τους. Μέσα στο περιβάλλον του ηλεκτρονικού υπολογιστή τα γεωμετρικά αντικείμενα που δημιουργούνται στην οθόνη μπορούν να χειριστούν, να μετακινηθούν και να αναδιαμορφωθούν διαδραστικά με τη χρήση του ποντικιού. Οι ορισμοί, τα εργαλεία, οι τεχνικές εξερεύνησης και οι οπτικές αναπαραστάσεις οι οποίες σχετίζονται με τη δυναμική γεωμετρία συνεισφέρουν σε ένα περιβάλλον μάθησης που έχει απομακρυνθεί θεμελιωδώς από το αντίστοιχο του κανόνα και του διαβήτη (Laborde, 1998). Πολλά λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να ενισχύσουν τις δυνατότητες των μαθητών στις διαδικασίες επίλυσης και τοποθέτησης προβλημάτων. Μπορούν επίσης να εισαχθούν νέοι τρόποι επίλυσης προβλημάτων. Οι υπολογιστές εισάγονται στην εκπαίδευση όχι μόνο επειδή κάνουν καλύτερη δουλειά, αλλά επειδή κάνουν τη δουλειά διαφορετικά (Aviram, 1999, 2001). Υπάρχουν καλοί λόγοι για να υποστηρίξουμε ότι τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας έχουν τη δυνατότητα να βοηθήσουν τους μαθητές να βελτιώσουν τις ικανότητές τους να λύσουν μια ποικιλία μαθηματικών προβλημάτων με νέους τρόπους και να παρέχουν ένα ισχυρό μέσο για την τοποθέτηση νέων προβλημάτων, εφαρμόζοντας διαφορετικές ευρετικές προσεγγίσεις (Gomes & Vergnaud, 2004).

Έρευνες έχουν ασχοληθεί με τις ικανότητες των δασκάλων και των μαθητών να κατασκευάζουν γεωμετρικά αντικείμενα και να λύνουν και να θέτουν προβλήματα σε περιβάλλον βασισμένο σε υπολογιστή, το οποίο χρησίμευε ως εργαλείο διαμεσολάβησης. Τα είδη των τεχνουργημάτων (artifacts) σχετίζονται στενά με τη γνώση που κατασκευάζουν οι μαθητές (Artigue, 2002) και είναι κεντρικά στις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθητές μαθηματικοποιούν τις δραστηριότητές τους. Επιπλέον, τα τεχνουργήματα υποστηρίζουν τη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών προβλέποντας πως οι μαθητές θα μπορούσαν να ενεργήσουν με συγκεκριμένα εργαλεία και τι θα μπορούσαν να μάθουν καθώς το κάνουν (Cobb, 1997). Ο Jones (1997) υποστήριξε ότι τα τεχνουργήματα βρίσκονται μεταξύ των μαθητών και της γνώσης που οι μαθητές προορίζονται να μάθουν. Αυτό προϋποθέτει ότι η μάθηση σε ένα περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας περιλαμβάνει την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών και του λογισμικού, καθώς υποβάλλουν τις προηγούμενες γνώσεις τους σε αναθεώρηση, τροποποίηση, ολοκλήρωση ή απόρριψη στη διαδικασία απόκτησης νέας γνώσης (Jones, 2000). Αυτή η αλληλεπίδραση εξηγείται πιο ξεκάθαρα ως η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο συστημάτων (Brousseau, 1997 – Jones, 1997). Το πρώτο σύστημα αναφέρεται στους μαθητές που προσπαθούν να λύσουν ή να θέσουν ένα πρόβλημα και το δεύτερο σύστημα αναφέρεται στο περιβάλλον, το οποίο προσφέρει ευκαιρίες στους μαθητές να δράσουν και να αντιδράσουν. Το περιβάλλον περιλαμβάνει επίσης τα εργαλεία που μεσολαβούν στις ενέργειες των μαθητών και υπάρχει μεταξύ των μαθητών και του κόσμου των μαθηματικών (Artigue, 2002) και, το πιο σημαντικό, μεταμορφώνει τις δραστηριότητες των μαθητών στον κόσμο.

Οι Gomes και Vergnaud (2004) θεώρησαν τα ΛΔΓ ως αναπόσπαστο μέρος του διδακτικού περιβάλλοντος, εκτελώντας μια συγκεκριμένη διαμεσολάβηση της γνώσης. Κατά την επίλυση προβλημάτων και την τοποθέτηση, το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να δημιουργήσουν και να χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένες στρατηγικές (Hölzl, 1996). Ο Hölzl, για παράδειγμα, προσδιόρισε δύο στοιχεία της επιστημολογίας του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας: πρώτον τη φύση της διεπαφής (interface) και δεύτερον τις συνέπειες στις αντιλήψεις των μαθητών. Συγκεκριμένα, η δομή μιας συγκεκριμένης διεπαφής είναι βασικός καθοριστικός παράγοντας των χαρακτηριστικών της γνώσης που εξελίχθηκε με τη χρήση της. Η επίλυση και η τοποθέτηση προβλημάτων, χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, περιλαμβάνει τις άμεσες και έμμεσες επιδράσεις της διεπαφής του λογισμικού στις διαδικασίες και την κατανόηση των μαθητών. Επιπλέον, η διεπαφή του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουν οπτικό συλλογισμό στα μαθηματικά και τους βοηθά, μέσω των εγκαταστάσεων μεταφοράς, να γενικεύουν προβλήματα και σχέσεις (Sinclair, 2004).

Το κύριο ζήτημα, ωστόσο, είναι εάν η εμπλοκή των μαθητών σε τέτοια περιβάλλοντα μάθησης μπορεί να οδηγήσει σε κατανοήσεις που δεν θα μπορούσαν να επιτευχθούν μέσω της παραδοσιακής διδασκαλίας (Artique, 2002) και εάν το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας χρησιμοποιείται και μετασχηματίζεται πραγματικά από τους μαθητές για την οπτική επιβεβαίωση ή άρνηση εικασιών, όπως και στην ανάπτυξη μιας νέας προοπτικής για την επίλυση και την τοποθέτηση πρωτότυπων προβλημάτων (Meira, 1998 – Sinclair, 2004).

Η τοποθέτηση προβλημάτων, η επίλυση προβλημάτων και η εικασία είναι τρεις σημαντικές μαθηματικές δραστηριότητες (NCTM, 2000). Στη γεωμετρία, αυτές οι δραστηριότητες περιλαμβάνουν ορισμένες εργασίες που η τεχνολογία εκτελεί αποτελεσματικά και καλά, όπως υπολογισμούς και γραφήματα. Η σημασία και η συνάφεια αυτών των μαθηματικών δραστηριοτήτων υποστηρίζεται από το "The Principles and Standards for School Mathematics Document" (NCTM, 2000). Για παράδειγμα, αυτό το έγγραφο αναφέρει ότι τα εκπαιδευτικά προγράμματα θα πρέπει να παρέχουν ευκαιρίες σε όλους τους μαθητές να «χρησιμοποιούν οπτικοποίηση, χωρικό συλλογισμό και γεωμετρική μοντελοποίηση για την επίλυση προβλημάτων» (σελ. 308). Το έγγραφο καλεί επίσης τους μαθητές να «διατυπώσουν ενδιαφέροντα προβλήματα με βάση μια μεγάλη ποικιλία καταστάσεων, τόσο εντός όσο και εκτός των μαθηματικών» (σελ. 258). Επιπλέον, το έγγραφο συνιστά στους μαθητές να κάνουν και να διερευνούν μαθηματικές εικασίες και να μάθουν πώς να γενικεύουν και να επεκτείνουν τα προβλήματα θέτοντας επακόλουθες ερωτήσεις.

Επίσης, η εισαγωγή λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (όπως το Geometers Sketchpad, το Geogebra και άλλα παρόμοια λογισμικά) στις τάξεις δημιουργεί μια πρόκληση για την πρακτική της απόκτησης θεωρημάτων και της επαγωγικής απόδειξης στη μελέτη και τη διδασκαλία της Ευκλείδειας και της Αναλυτικής γεωμετρίας. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν μέσω διαφορετικών τρόπων έλξης σε γεωμετρικά αντικείμενα που κατασκευάζουν και, κατά συνέπεια, να συμπεράνουν ιδιότητες, γενικότητες και εικασίες σχετικά με τα γεωμετρικά αντικείμενα, κάτι που είναι αδύνατον (ή πάρα πολύ δύσκολο και χρονοβόρο) στο στατικό σχήμα του πίνακα. Η λειτουργία σύρσης σε ένα γεωμετρικό αντικείμενο επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν μια ολόκληρη κατηγορία αντικειμένων στην οποία η εικασία της ιδιότητας είναι αναλλοίωτη και, ως εκ τούτου, οι μαθητές πείθονται ότι η εικασία τους θα είναι πάντα αληθής (De Villiers, 1988). Παρόλα αυτά, λόγω της επαγωγικής φύσης των ΛΔΓ, οι Stupel & Ben-chaim, (2014) ονομάζουν αυτή τη διαδικασία «ημι-απόδειξη». Ως εκ τούτου, μετά την ενασχόληση με τα ΛΔΓ, το πειραματικό-θεωρητικό χάσμα που υπάρχει στην απόκτηση και αιτιολόγηση της γεωμετρικής γνώσης γίνεται ένα σημαντικό παιδαγωγικό και επιστημολογικό ζήτημα (Leung & Lopez, 2002). Οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν ότι εξακολουθούν να πρέπει να αποδεικνύουν και όχι να βασίζονται στο εικονικό πείραμα. Οι Garuti κ.ά., (1996, 1998), Boero κ.ά. (1996) και Mariotti κ.ά. (1997), διεξήγαγαν ένα σύνολο ερευνών σχετικά με τη συμπεριφορά των μαθητών στη σύνδεση της διαδικασίας παραγωγής εικασιών με τη διαδικασία απόδειξης θεωρημάτων ή ισχυρισμών. Συγκεκριμένα, οι Boero κ.ά. (1996) πρότειναν μια υπόθεση σχετικά με την παραγωγή εικασιών ως εξής: «η συνθήκη της δήλωσης μπορεί να είναι το προϊόν μιας δυναμικής διερεύνησης της προβληματικής κατάστασης κατά την οποία ο εντοπισμός μιας ειδικής κανονικότητας οδηγεί σε ένα χρονικό τμήμα της διερευνητικής διαδικασίας, το οποίο στη συνέχεια θα αποσπαστεί από αυτήν και στη συνέχεια θα «αποκρυσταλλωθεί» από λογική άποψη (αν..., τότε ...)» (σ. 121).

Οι «οιονεί εμπειρικές έρευνες» αποκτούν όλο και περισσότερο σημασία, αναδεικνύοντας λειτουργίες της απόδειξης που παραδοσιακά υπονομεύονταν (Connor & Moss, 2007 – De Villiers, 2004). Παραδείγματα τέτοιων λειτουργιών είναι η εξήγηση, η ενόραση, η κατανόηση, η επικύρωση και η ανακάλυψη. Αυτές οι μη επαγωγικές μέθοδοι διερεύνησης, οι οποίες βασίζονται στην πειραματική, διαισθητική και επαγωγική συλλογιστική (De Villiers, 2004), θεωρείται ότι παρέχουν πιο ουσιαστικό πλαίσιο για τη διδασκαλία – μάθηση της γεωμετρίας μέσω των ΛΔΓ από την κλασική προσέγγιση της απόδειξης ως τρόπο απόκτησης βεβαιότητας.

Οι Stupel & Ben-chaim, (2014) συνιστούν στους καθηγητές μαθηματικών να επιτρέπουν αρχικά στους μαθητές τους να αντιμετωπίσουν την επίλυση προβλημάτων δουλεύοντας σε ένα τέτοιο περιβάλλον, μέχρι να φτάσουν σε μια σταθερή εικασία για την επαγωγική απόδειξη. Οι ίδιοι (Stupel & Ben-chaim, 2014) ισχυρίζονται ότι οι προσπάθειές τους για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που αντιμετώπισαν, τους έδωσε μια πραγματική αίσθηση ότι εργάστηκαν ως μαθηματικοί που αναζητούν πολλαπλές λύσεις σε ένα πρόβλημα, ειδικά αυτές που είναι σύντομες, κομψές και μαθηματικά αισθητικές. Ενθαρρύνοντας τους μαθητές να κάνουν το ίδιο, θα μάθουν και αυτοί να εκτιμούν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών και θα ανακαλύψουν πώς ένα πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Επιπλέον, η ενσωμάτωση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας θα προσθέσει ένα συμπληρωματικό τεχνολογικό εργαλείο που θα βοηθήσει τους μαθητές στις έρευνές τους, ενώ παράλληλα θα παρέχει στους εκπαιδευτικούς ένα μέσο με το οποίο θα μπορούν να βασίσουν την παιδαγωγική δράση και τη συζήτηση στην τάξη.

Οι Christou κ.ά. (2005) αναφέρουν ότι η αυξανόμενη και σχεδόν καθολική διαθεσιμότητα τεχνολογικών εργαλείων διευκολύνει τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία και τη βελτίωση των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών, τόσο στη χρήση ενός ΛΔΓ στην επίλυση προβλημάτων, όσο και στη διερεύνηση και στην εξερεύνηση στα μαθηματικά. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν το εργαλεία ενός ΛΔΓ για να επιλύσουν και να θέσουν μαθηματικά προβλήματα. Οι δυνατότητες υπολογισμού, γραφικής παράστασης και συρσίματος των δυναμικών λογισμικών γεωμετρίας μπορούν να επιτρέψουν στους μαθητές να εξερευνήσουν και να κάνουν μαθηματικές εικασίες, να επιλύουν προβλήματα και να θέτουν συναφή προβλήματα. Ένα ΛΔΓ μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην πρόκληση της επίλυσης προβλημάτων και της δημιουργίας προβληματισμών.

Μέσω της μοντελοποίησης, οι μαθητές μπορούν κατασκεύασαν ακριβείς εικόνες των προβλημάτων, γεγονός που τους βοηθάει να εξερευνήσουν οπτικά τα προβλήματα και να προβληματιστούν σχετικά. Το νόημα που μπορούν να εξάγουν οι μαθητές από τις κατασκευασμένες εικόνες τους επιτρέπει να διερευνήσουν σε αντιληπτικό επίπεδο και να κάνουν εικασίες σχετικά με τις πιθανές λύσεις των προβλημάτων. Μέσω του πειραματισμού, οι μαθητές είναι σε θέση να επιβεβαιώσουν ή να αντικρούσουν οπτικά τις εικασίες τους και έτσι να προχωρήσουν σε προτάσεις για πιθανές λύσεις ή επεκτάσεις στα προβλήματα που τους ανατίθενται. Στο περιβάλλον ενός ΛΔΓ οι διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνουν τις δημιουργία νέων προβλημάτων, υποστηρίζοντας τη σχέση μεταξύ της επίλυσης προβλημάτων χρήσης στρατηγικής και της τάσης να τίθενται προβλήματα επέκτασης (Cai & Hwang, 2002).

Τέλος, αν και ένα ΛΔΓ μπορεί να παρείχε ένα πλαίσιο στο οποίο μπορούμε να κάνουμε μαθηματικά σε ένα διαφορετικό τρόπο (Aviram, 2001) μπορεί να επιφέρει γνωστικές συγκρούσεις ή ακόμα και εκπλήξεις (Christou κ.ά., 2005). Δεδομένου ότι ένα συγκεκριμένο σχήμα από χαρτί και μολύβι συνήθως εμφανίζει μια γενική περίπτωση, είναι δύσκολο για τους μαθητές να εκτιμήσουν τη σημασία των ειδικών περιπτώσεων. Ωστόσο, οι μαθητές που χρησιμοποιούν κάποιο ΛΔΓ είναι πολύ πιθανό να σύρουν ένα σχήμα πέρα από μια ειδική περίπτωση, και επομένως είναι πιο πιθανό να σταματήσουν σε μια ειδική περίπτωση και να έρθουν αντιμέτωποι με τις συνέπειες.

Μέρος Β: Έρευνα – Αποτελέσματα

4 Η έρευνα

Η μετάβασή από την μία εκπαιδευτική βαθμίδα στην επόμενη ήταν ανέκαθεν ένα δύσκολο σκαλοπάτι για όλους σχεδόν τους μαθητές. Ειδικά τα τελευταία χρόνια (2020 – 2022) με τις καταστρεπτικές επιπτώσεις του κορονοϊού (Covid 19) και της τηλεκπαίδευσης που επιβλήθηκε στα σχολεία συνέπειά του, η μετάβαση αυτή έγινε ακόμα πιο δύσκολη. Η έρευνα αυτή επικεντρώνεται στον τομέα της Γεωμετρίας και στην μετάβαση από το Δημοτικό Σχολείο στο Γυμνάσιο. Η έρευνα αυτή αφορά την δημιουργικότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και στα στοιχεία που μπορούν να την ενισχύσουν, όπως τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων, η τοποθέτηση νέων προβλημάτων (problem posing), οι βοηθητικές γραμμές και τα Δυναμικά Λογισμικά Γεωμετρίας. Δυστυχώς δεν υπάρχουν πολλές αντίστοιχες εκτεταμένες έρευνες στον Ελλαδικό χώρο, όμως έρευνες σε άλλες χώρες και ειδικά στο Ισραήλ (Leikin & Lev, 2007) υποδεικνύουν τα προβλήματα πολλαπλών λύσεων ως το καλύτερο εργαλείο για την καλλιέργεια της δημιουργικότητας.

4.1 Ερευνητικά ερωτήματα.

Ο βασικός στόχος της έρευνας αυτής είναι ο έλεγχος της μαθηματικής δημιουργικότητας και των παραμέτρων, όσο και την συμβολή στους παράγοντες αυτούς των Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας, αλλά και η το επίπεδο κατανόησης της ύλης (ορισμοί, θεωρία κτλ).

Στην εργασία αυτή ασχολήθηκα με τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Ποιο είναι το επίπεδο κατανόησης βασικών ορισμών, ιδιοτήτων και θεωρημάτων;

2. Ποιος είναι ο βαθμός ικανότητας των μαθητών αναφορικά με τις δεξιότητες κατανόησης, αξιοποίησης και χειρισμού ενός γεωμετρικού σχήματος, προκειμένου να απαντήσουν στα ζητούμενα μιας άσκησης;
3. Ποια είναι η γνώμη των μαθητών για το μάθημα της Γεωμετρίας;
4. Ποιος είναι ο βαθμός ικανότητας να χρησιμοποιούν οι μαθητές βοηθητικές γραμμές για την επίλυση ενός προβλήματος Γεωμετρίας;
5. Ποια είναι η ικανότητα των μαθητών να τοποθετούν νέα προβλήματα.
6. Ποιο είναι το είδος δημιουργικότητας (ευχέρεια – πρωτοτυπία – ευελιξία) που επιδεικνύουν στα προβλήματα οι μαθητές ανάλογα αν χρησιμοποιούν Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας ή όχι;

   Και τέλος, ένα επιπλέον ερώτημα που προέκυψε κατά την διεξαγωγή της έρευνας είναι:
7. Ποιος είναι ο ρόλος του διδακτικού συμβολαίου, όπως το ορίζει ο Brousseau (1984), κατά την επίλυση ενός προβλήματος;

Θα ήταν καλό η έρευνα να μπορούσε να ελέγξει τις παραμέτρους της δημιουργικότητας όπως ορίζει η Leikin, δηλαδή την ευχέρεια, την ευελιξία και την πρωτοτυπία, αλλά αυτό προϋποθέτει καλύτερη γνώση της γεωμετρίας καθολικά, κάτι που δεν δύναται να συμβεί στην Α Γυμνασίου.

4.2 Το δείγμα της έρευνας.

Η έρευνα αυτή διεξήχθη τον Μάιο του 2022 σε σχολεία της Θήβας και του χωριού Ασωπίας του δήμου Τανάγρας, σε μαθητές της Α’ Γυμνασίου. Ο λόγος που διεξήχθη τον Μάιο η έρευνα αυτή, ήταν για να έχουν προλάβει οι μαθητές να έχουν διδαχθεί Γεωμετρικές έννοιες, όπως γωνίες μεταξύ παραλλήλων ευθειών, ιδιότητες παραλληλογράμμων κτλ, τα οποία βρίσκονται στο τέλος του σχολικού βιβλίου και διδάσκονται συνήθως στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Συγκεκριμένα στην έρευνα αυτή έλαβαν μέρος 94 μαθητές της Α’ Γυμνασίου. Από αυτούς 41 ήταν αγόρια και 53 κορίτσια. Τα σχολεία στα οποία διεξήχθη η έρευνα είναι τα εξής:

- 5ο Ημερήσιο Γυμνάσιο Θήβας – Πελοπίδειο
- 3ο Ημερήσιο Γυμνάσιο Θήβας

- Ημερήσιο Γυμνάσιο με Λυκειακές τάξεις Ασωπίας (Δήμου Τανάγρας)

Οι μαθητές χωρίσθηκαν σε δύο ομάδες, στην πειραματική ομάδα και στην ομάδα ελέγχου. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας έγραψαν τις ασκήσεις της έρευνας με την βοήθεια Δυναμικού Λογισμικού Γεωμετρίας (Geogebra) στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους, για να μπορέσουν να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την χρηστικότητα των Δυναμικών Λογισμικών Γεωμετρίας. Στην πειραματική ομάδα συμμετείχαν 39 μαθητές (21 από το 5ο Γυμνάσιο Θηβών και 18 από το Γυμνάσιο Ασωπίας), ενώ στην ομάδα ελέγχου συμμετείχαν 55 μαθητές (37 από το 5ο Γυμνάσιο Θηβών και 18 από το 3ο Γυμνάσιο Θηβών).

<table>
<tr><th></th><th>Σχολείο</th><th>Μαθητές</th><th>Αγόρια</th><th>Κορίτσια</th><th>Σύνολο</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Πειραματική Ομάδα</td><td>Ημερήσιο Γυμνάσιο με Λ.Τ. Ασωπίας</td><td>18</td><td>9</td><td>9</td><td rowspan="2">39</td></tr>
<tr><td>5ο Ημερήσιο Γυμνάσιο Θήβας Τμήμα Α1</td><td>21</td><td>7</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Ομάδα Ελέγχου</td><td>5ο Ημερήσιο Γυμνάσιο Θήβας Τμήμα Α2</td><td>19</td><td>10</td><td>9</td><td rowspan="3">55</td></tr>
<tr><td>5ο Ημερήσιο Γυμνάσιο Θήβας Τμήμα Α3</td><td>18</td><td>10</td><td>8</td></tr>
<tr><td>3ο Ημερήσιο Γυμνάσιο Θήβας Τμήμα Α1</td><td>18</td><td>5</td><td>13</td></tr>
<tr><td></td><td>Σύνολο</td><td>94</td><td>41</td><td>53</td><td>94</td></tr>
</table>

Οι μαθητές εξετάστηκαν στην ύλη που διδάχτηκαν στην Α’ Γυμνασίου, ύλη όμως η οποία είχε διδαχθεί επί το πλείστων στις τελευταίες δύο τάξεις του Δημοτικού σχολείου, φυσικά όχι με την ίδια αυστηρότητα. Η συλλογή των δεδομένων πραγματοποιήθηκε τον Μάιο του 2022.

4.3 <u>Μεθοδολογική προσέγγιση.</u>

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο, το δείγμα των μαθητών χωρίστηκε σε δύο ομάδες, αυτή της πειραματικής ομάδας και αυτή της ομάδας ελέγχου. Και στις δύο ομάδες χορηγήθηκε ένα τετρασέλιδο ερωτηματολόγιο (Παράρτημα). Το ερωτηματολόγιο είναι χωρισμένο σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου υπάρχουν αρχικά δημογραφικές ερωτήσεις που αφορούν, το φύλλο και τη βαθμολογία των μαθητών, όπως και το μορφωτικό επίπεδο των γονέων τους. Στην συνέχεια ακολουθούν είκοσι ερωτήσεις της μορφής «Σωστό – Λάθος», οι οποίες έχουν σκοπό την διερεύνηση του επιπέδου γνώσης και κατανόησης των μαθητών βασικών ορισμών και ιδιοτήτων, βασικών αντικειμένων της Γεωμετρίας, των γωνιών των τριγώνων, της συμμετρίας, των γωνιών μεταξύ παράλληλων ευθειών και των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων.

Στην συνέχεια υπάρχουν 23 ερωτήσεις τύπου Likert για το πόσο έντονα συμφωνούν ή διαφωνούν οι μαθητές με μια δήλωση που αφορά την Γεωμετρία. Το ερωτηματολόγιο Likert έχει σκοπό να αναδείξει την άποψη των μαθητών για το μάθημα της Γεωμετρίας και το βαθμό δυσκολίας που αντιμετωπίζουν στο μάθημα αυτό. Οι απαντήσεις κυμαίνονται από «Πολύ Λίγο», σε «Λίγο», σε «Πολύ» και σε «Πάρα Πολύ». Αν και πολύ συχνά επιλέγεται στην κλίμακα Likert περιττός αριθμός χαρακτηριστικών τιμών, ώστε η μεσαία απάντηση να είναι ουδέτερη, εδώ επιλέχθηκε άρτιος αριθμός χαρακτηριστικών τιμών για την αποφυγή της λεγόμενης «παγίδας της μέσης τιμής», έτσι ώστε να επιβάλλεται μια αρνητική ή καταφατική δήλωση.

Οι ερωτήσεις 5 και 21 είναι αντίστροφες και αναφέρουν τα εξής:

- 5. Η Γεωμετρία είναι πιο εύκολη από την Άλγεβρα.
- 21. Η Γεωμετρία είναι πιο δύσκολη από την Άλγεβρα.

Ο λόγος της αντιστροφής είναι ο έλεγχος αξιοπιστίας των απαντήσεων των μαθητών.

Το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου αποτελείται από 4 ασκήσεις, που σκοπό έχουν τον έλεγχο της δημιουργικότητας των μαθητών, αναφορικά με τις διάφορες πτυχές της. Οι ασκήσεις 1, 2 και 3 υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο της Α’ Γυμνασίου με διαφορετική διατύπωση. Η άσκηση 1 είναι παρόμοια με την άσκηση 6 στην σελίδα 224 του σχολικού βιβλίου. Το πρώτο ερώτημα της άσκησης 2 είναι παρόμοιο με τις δραστηριότητες 1 και 2 στην σελίδα 209 του σχολικού βιβλίου. Η άσκηση 3 είναι ουσιαστικά η συγχώνευση των ασκήσεων 5 και 6 στην σελίδα 231 του σχολικού βιβλίου. Η άσκηση 4 δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, αλλά η λύση της στηρίζεται στις παραγράφους «Β2.4 Συμμετρία ως προς σημείο» και «Β2.5 Κέντρο συμμετρίας». Η επιλογή των ασκήσεων έγινε για να μπορέσουν να αναδειχθούν οι δημιουργικές ικανότητες των μαθητών στην εξεύρεση πολλαπλών λύσεων με την βοήθεια γραμμών που δεν δίνονται (αν και στην άσκηση 1 γίνεται υπόδειξη) και η ικανότητα τοποθέτησης νέων προβλημάτων. Η ομοιότητα των ασκήσεων με ασκήσεις του σχολικού βιβλίου έγινε έτσι ώστε οι μαθητές να έχουν προηγούμενες εμπειρίες με παρόμοια θέματα, έτσι ώστε να μπορούν να ενεργοποιηθούν τα met-befores κατά τον Tall (2014), δηλαδή να ενεργοποιηθούν εμπειρίες που έχουν αποκτήσει κατά την διάρκεια της χρονιάς στο σχολείο.

Η διάρκεια της εξέτασης ήταν 2 διδακτικές ώρες. Την πρώτη ώρα ζητήθηκε από τους μαθητές να συμπληρώσουν το πρώτο μέρος του ερωτηματολογίου, δηλαδή τις πρώτες 2 σελίδες. Την δεύτερη ώρα ζητήθηκε από τους μαθητές να ασχοληθούν με τις ασκήσεις των σελίδων 3 και 4 του ερωτηματολογίου. Οι μαθητές που ανήκαν στην πειραματική ομάδα μεταφέρθηκαν στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους, όπου υπήρχαν έτοιμα τα σχήματα των ασκήσεων σε ένα Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας (Geogebra), ενώ οι μαθητές της ομάδας ελέγχου παρέμειναν στην αίθουσά τους.

5 Παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

5.1 Περιγραφική Στατιστική.

5.1.1 Δημογραφικά Αποτελέσματα.

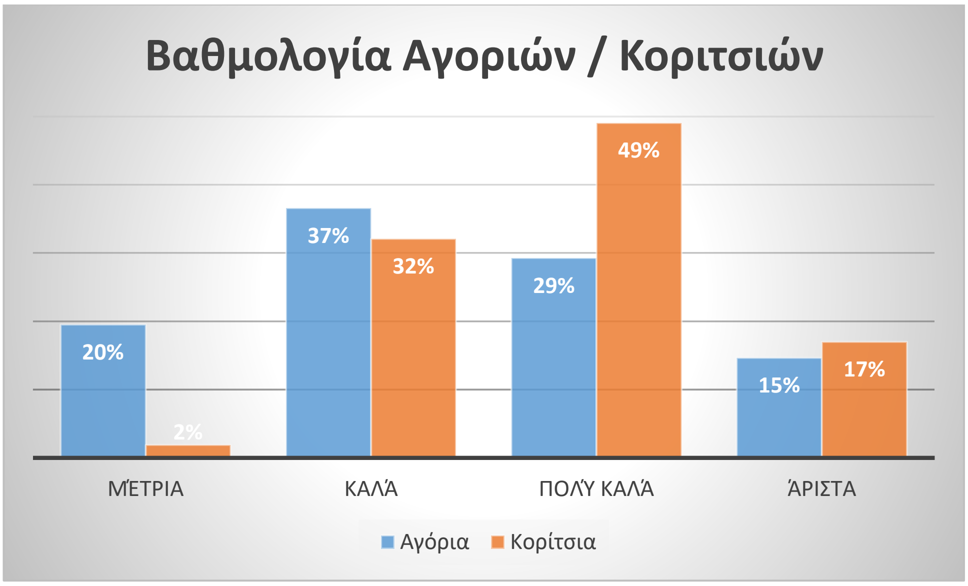
Στην έρευνα έλαβαν μέρος 94 μαθητές, εκ των οποίων οι 41 ήταν αγόρια και οι 53 κορίτσια. Η εμβέλεια του συστήματος βαθμολόγησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση κυμαίνεται από 1 έως 20 στο Γυμνάσιο και χαρακτηρίζεται ως Ανεπαρκώς έως Άριστα σύμφωνα με τον διπλανό πίνακα.

Βαθμός	Εξήγηση
18,5-20	Άριστα
15,5-18,5	Πολύ Καλά
12,5-15,5	Καλά
10-12,5	Μέτρια
1-10	Ανεπαρκώς

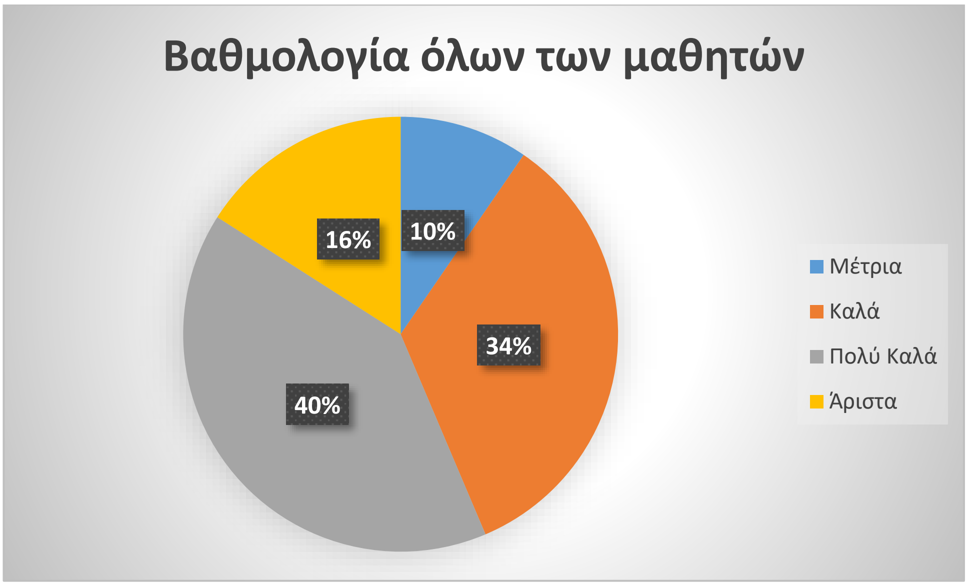
Κανένας από τους 94 μαθητές δεν είχε βαθμολογία κάτω του 10 στο προηγούμενο τετράμηνο (Α' τετράμηνο), κάτι που μπορεί να οφείλετε στο μικρό δείγμα, αλλά ίσως δείχνει μια τάση των καθηγητών να προσπαθούν να μην αφήσουν μετεξεταστέο κανένα μαθητή. Προσωπική μου άποψη είναι ότι κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό και για το σύνολο των μαθητών, αλλά ειδικά για τον εκάστοτε μαθητή, που όντως ανέτοιμος να προχωρήσει στην επόμενη τάξη, προβιβάζετε και μεταφέρει τα προβλήματα κατανόησης στην επόμενη τάξη. Αθροιστικά αυτή η κατάσταση επιδεινώνει το πρόβλημα του μαθητή σε κάθε επόμενη τάξη.

Ο παρακάτω πίνακας και τα γραφήματα παρουσιάζουν την κατανομή των βαθμών των μαθητών της έρευνας.

	Μέτρια	Καλά	Πολύ Καλά	Άριστα
Αγόρια	20%	37%	29%	15%
Κορίτσια	2%	32%	49%	17%
Σύνολο	10%	34%	40%	16%

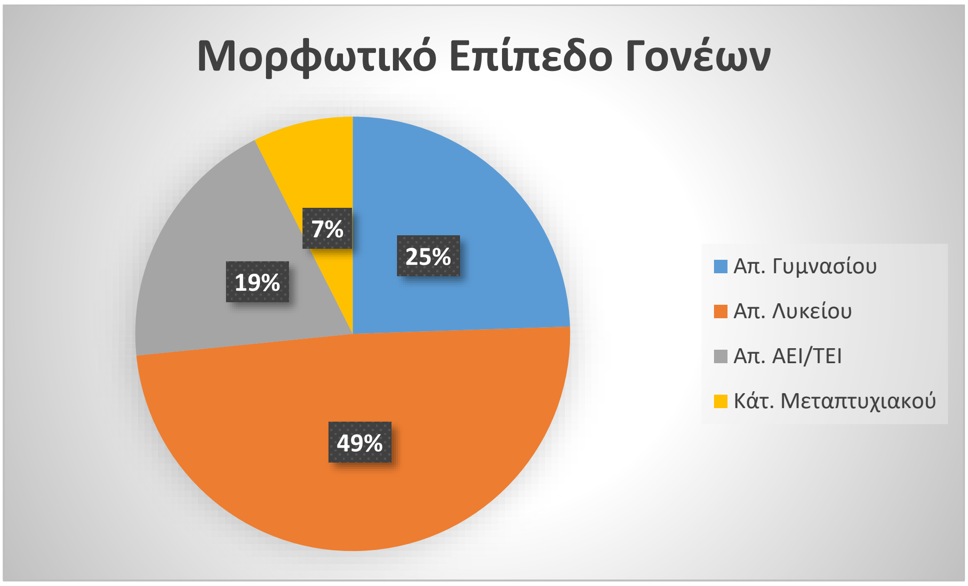


Παρατηρούμε ότι τα αγόρια έχουν υψηλότερα ποσοστά στις χαμηλότερες βαθμολογίες, ειδικά στις πολύ χαμηλές (Μέτρια: 20% αγόρια – 2% κορίτσια). Γενικά όμως πάνω από το 50% των μαθητών (56%) έχει υψηλούς βαθμούς (Πολύ Καλά – Άριστα).

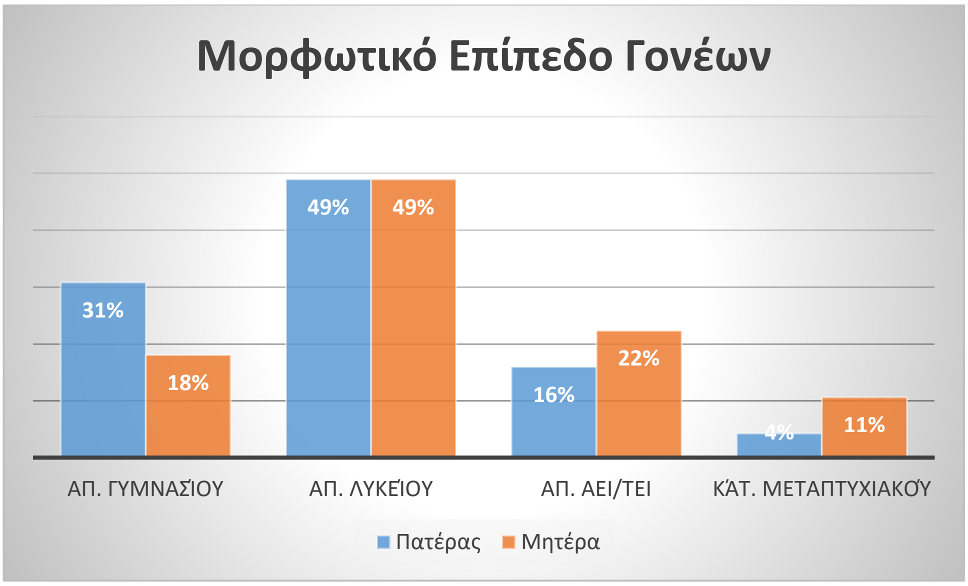


Το μορφωτικό επίπεδο των γονέων των μαθητών παρατηρούμε ότι είναι σχετικά χαμηλό, κάτι που δεν είναι παράξενο μιας και το δείγμα της έρευνας είναι παρμένο σε επαρχεία (επαρχεία Θηβών), η οποία είναι επί το πλείστων αγροτική και βιομηχανική περιοχή. Εντύπωση δημιουργεί ότι το ποσοστό των γονέων που έχουν μόνο απολυτήριο γυμνασίου (υποχρεωτική εκπαίδευση) είναι 25%, ενώ σχεδόν τα $\frac{3}{4}$ των γονέων δεν προχώρησε στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (Απόφοιτοι Γυμνασίου + Λυκείου = 25%+49%=74%).

Αντιθέτως, μόλις το 26% έχει προχωρήσει στην ανώτατη εκπαίδευση (ΑΕΙ/ΤΕΙ 17% και Μεταπτυχιακό 7%).



Συγκριτικά οι μητέρες των μαθητών έχουν μεγαλύτερα ποσοστά από τους πατέρες στην τριτοβάθμια εκπαίδευση (22% έναντι 16% απόφοιτοι ΑΕΙ/ΤΕΙ και 11% έναντι 4% κάτοχοι Μεταπτυχιακού), ενώ παρατηρείται ισορροπία στους αποφοίτους Λυκείου.



5.1.2 Βασικοί Ορισμοί.

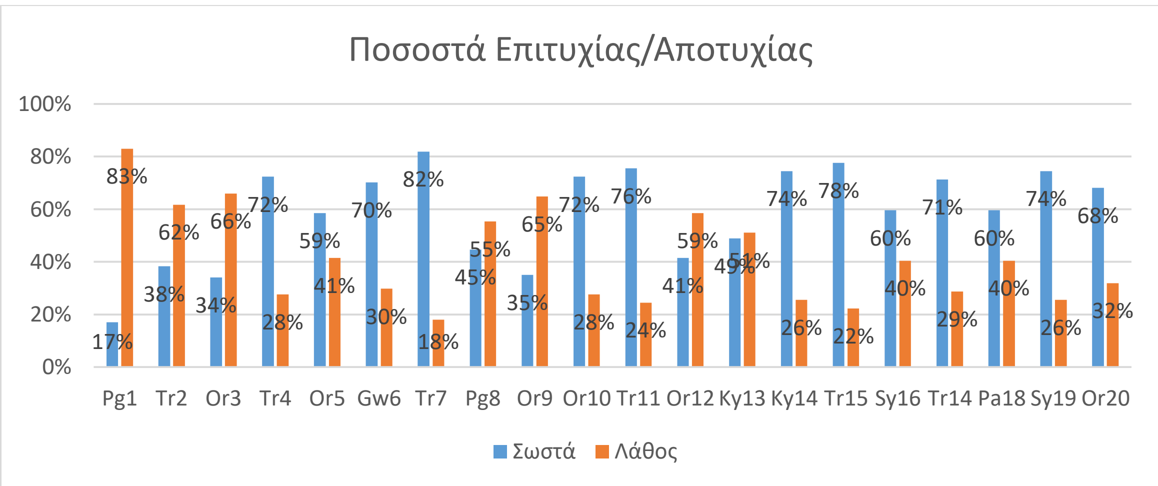
Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3 στο ερωτηματολόγιο υπάρχουν είκοσι ερωτήσεις της μορφής «Σωστό – Λάθος», οι οποίες έχουν σκοπό την διερεύνηση του επιπέδου γνώσης και κατανόησης των μαθητών βασικών ορισμών και ιδιοτήτων, βασικών αντικειμένων της Γεωμετρίας, των γωνιών των τριγώνων, της συμμετρίας, των γωνιών μεταξύ παράλληλων ευθειών και των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων.

Ακολουθεί ο πίνακας με τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών και τα ποσοστά επιτυχίας και αποτυχίας. Στην συνέχεια ακολουθούν ραβδογράμματα των αποτελεσμάτων αυτών, χωρισμένα σε κατηγορίες ανάλογα το γνωστικό αντικείμενο.

Ερωτήσεις	Σωστή απάντηση	Ποσοστό Επιτυχίας Μαθητών	Ποσοστό Αποτυχίας Μαθητών
1. Το τετράπλευρο που έχει 4 πλευρές ίσες είναι τετράγωνο.	Λάθος	17%	83%
2. Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές.	Σωστό	38%	62%
3. Οι ημιευθείες που έχουν κοινό άκρο λέγονται αντικείμενες.	Λάθος	34%	66%
4. Δεν υπάρχει αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.	Λάθος	72%	28%
5. Κάθε τόξο ενός κύκλου ανήκει πάνω σε μια ευθεία.	Λάθος	59%	41%
6. Η παραπληρωματική της γωνίας 60° είναι ίση με 30°.	Λάθος	70%	30%
7. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο δύο γωνίες του είναι πάντα ίσες.	Σωστό	82%	18%
8. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο.	Σωστό	45%	55%
9. Οι γωνίες που έχουν κοινή κορυφή λέγονται κατακορυφήν.	Λάθος	35%	65%
10. Οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κοινά σημεία.	Σωστό	72%	28%
11. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ απέναντι από την κορυφή Α βρίσκεται η πλευρά ΒΓ.	Σωστό	76%	24%
12. Ο κυκλικός δίσκος είναι το ίδιο σχήμα με τον κύκλο.	Λάθος	41%	59%
13. Δύο διάμετροι ενός κύκλου τον χωρίζουν σε τέσσερα ίσα τόξα.	Λάθος	49%	51%
14. Σε έναν κύκλο η διάμετρος είναι διπλάσια από την ακτίνα του.	Σωστό	74%	26%
15. Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία του είναι αμβλεία.	Σωστό	78%	22%
16. Ο κύκλος έχει άπειρα κέντρα συμμετρίας.	Σωστό	60%	40%

17. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο μια γωνία του μπορεί να είναι ίση με 80°.	Λάθος	71%	29%
18. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές.	Λάθος	60%	40%
19. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις άξονες συμμετρίας.	Σωστό	74%	26%
20. Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ το οποίο έχει μήκος 10 cm. τότε είναι $AM = 5cm$ και $MB = 0,5dm$.	Σωστό	68%	32%

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι τα ποσοστά αποτυχίας των μαθητών είναι αρκετά υψηλά. Σε μερικές περιπτώσεις όπως στην ερώτηση 1 το ποσοστό αποτυχίας είναι πάρα πολύ μεγάλο (83%). Η διατύπωση μπορεί να μπέρδεψε και τους καλύτερους μαθητές, που έχουν ταυτίσει το τετράπλευρο με ίσες πλευρές με το τετράγωνο, χωρίς να αναγνωρίζουν τις υπόλοιπες ιδιότητες του τετραγώνου, όπως τις ορθές γωνίες του ή να σκεφτούν την περίπτωση του ρόμβου. Αυτό αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές δεν έχουν προχωρήσει στο 2^o επίπεδο Van Hiele. Επίσης μεγάλα ποσοστά αποτυχίας μπορούμε να παρατηρήσουμε και σε άλλες ερωτήσεις, όπως στις ερωτήσεις 2, 3, 8, 9 και 12, όπου τα ποσοστά αποτυχίας είναι κοντά στο 60%. Ειδικά στην ερώτηση 3 το ποσοστό αποτυχίας είναι 66%, γεγονός που από προσωπική εμπειρία μπορεί να οφείλεται στην μη κατανόηση της ίδιας της έννοιας της λέξης που ο ορισμός της εξετάζεται, που στην προκειμένη περίπτωση είναι η λέξη «αντικείμενες». Κάθε φορά που συναντώ στην τάξη την έννοια των αντικείμενων ευθειών, ρωτάω τους μαθητές μου αν γνωρίζουν την έννοια του ρήματος «κείμαι» και ποτέ δεν έχω λάβει ικανοποιητική απάντηση. Αυτή η έλλειψη κατανόησης των εννοιών των λέξεων που υπάρχουν στους ορισμούς των γεωμετρικών αντικειμένων έχει αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιμετωπίζουν μεγάλες δυσκολίες στην Γεωμετρία.

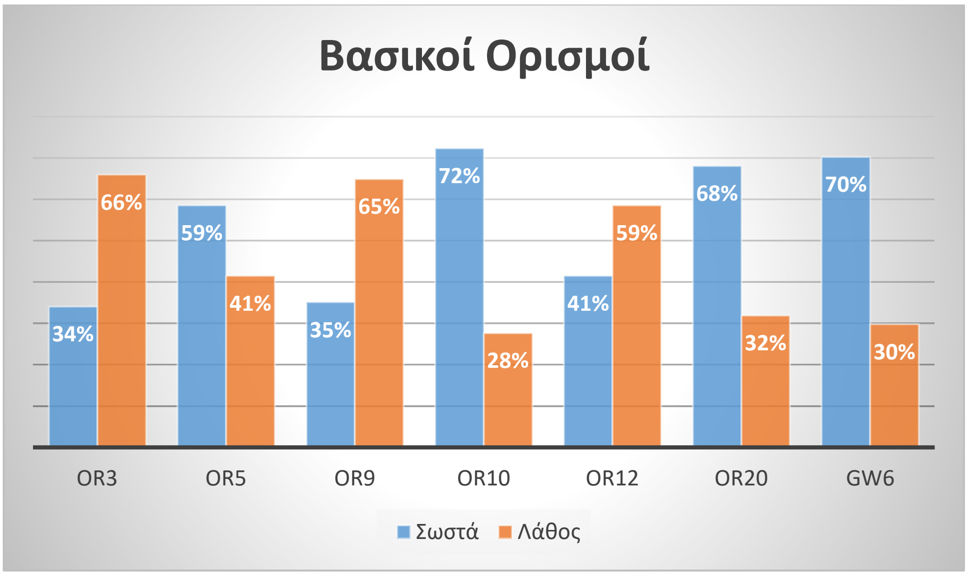


Οι ερωτήσεις 3, 5, 9, 10, 12, 20 και 6 αφορούν βασικούς ορισμούς γεωμετρικών αντικειμένων. Τα ποσοστά αποτυχίας είναι αρκετά υψηλά. Στην ερώτηση 5 το 41% των μαθητών δεν μπόρεσε να διακρίνει ότι το τόξο ενός κύκλου είναι καμπύλο και δεν θα μπορούσε σε καμία περίπτωση να ανήκει σε κάποια ευθεία, γεγονός που επιδεικνύει την έλλειψη κατανόησης του όρου «τόξο» ή την σύγχυση του όρου «τόξο» με τον όρο «χορδή» του κύκλου. Όπως και στην ερώτηση 12, οι μαθητές κατά 59% δεν μπόρεσαν να διακρίνουν την διαφορά του κύκλου από τον κυκλικό δίσκο.

Στην ερώτηση 3 που αναφέρθηκες προηγουμένως είδαμε την αδυναμία των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας των αντικείμενων ημιευθειών, που κατά προέκταση δημιουργεί το πρόβλημα της κατανόησης των κατακορυφήν γωνιών. Το ποσοστό αποτυχίας στην ερώτηση 9 που αφορά τις κατακορυφήν γωνίες είναι σχεδόν ίδιο με της ερώτησης 3 (65% - 66% αντίστοιχα). Ένας μαθητής που δεν είναι σε θέση να κατανοήσει την έννοια των αντικείμενων ημιευθειών, δεν είναι σε θέση να κατανοήσει την έννοια των κατακορυφήν γωνιών, οι οποίες εκτός από κοινή κορυφή προϋποθέτουν το γεγονός ότι οι πλευρές της μίας γωνίας είναι αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της άλλης. Δηλαδή το πρόβλημα της έλλειψης κατανόησης της έννοιας ενός γεωμετρικού αντικειμένου μετατίθεται και σε οποιοδήποτε άλλο γεωμετρικό αντικείμενο περιέχει την έννοια αυτή.

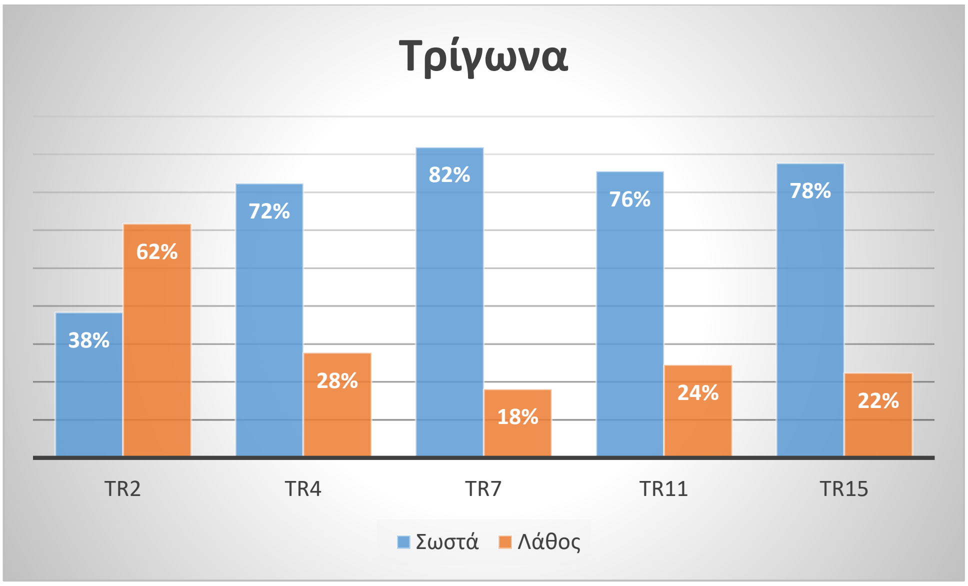
Στην ερώτηση 20 βλέπουμε ότι το 32% των μαθητών δεν μπορούν να διακρίνουν ότι το μήκος $0{,}5dm$ είναι το ίδιο με το μήκος $5cm$. Η δυσκολία αυτή μπορεί να οφείλεται και στο γεγονός ότι στο δημοτικό οι αντίστοιχες μονάδες μέτρησης του μήκους αναγράφονται στα ελληνικά, δηλαδή «δμ» και «εκ» αντίστοιχα για τα δεκατόμετρα (decimeter) και τα εκατοστά (centimeter).

Οι μαθητές τα πήγαν αρκετά καλά στην ερώτηση 10 που αφορά την μη ύπαρξη κοινών σημείων μεταξύ παραλλήλων ευθειών, αν και εδώ υπάρχει ένα σημαντικό ποσοστό μαθητών που απάντησε λανθασμένα (28%).

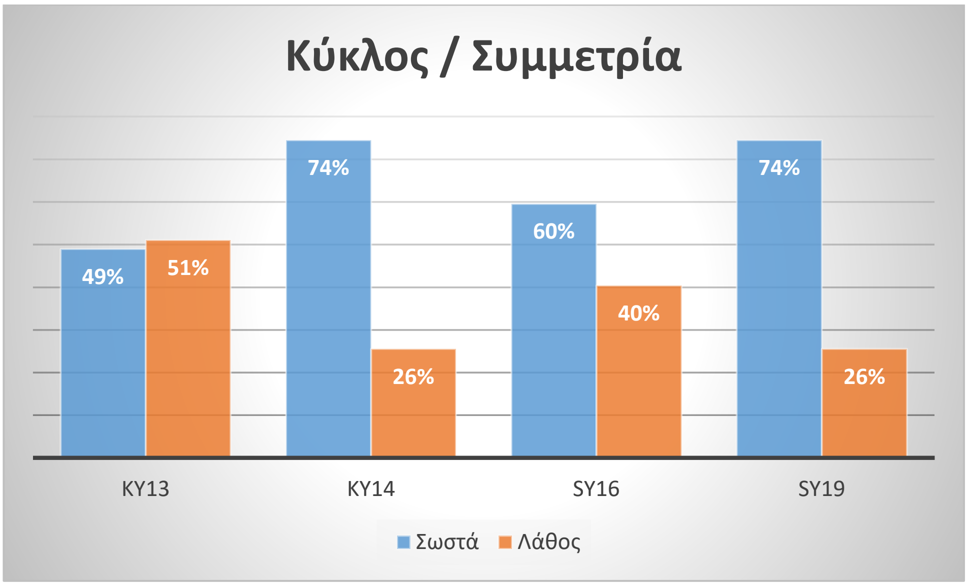


Στις ερωτήσεις 2, 4, 7, 11 και 15 που αφορούν τα τρίγωνα οι μαθητές τα πήγαν πολύ καλύτερα, με εξαίρεση την ερώτηση 2. Η ερώτηση αυτή αναφέρεται στο ότι ένα ισόπλευρο τρίγωνο μπορεί να χαρακτηρισθεί και ως ισοσκελές. Το 61% των μαθητών θεώρησε λανθασμένα ότι κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν.

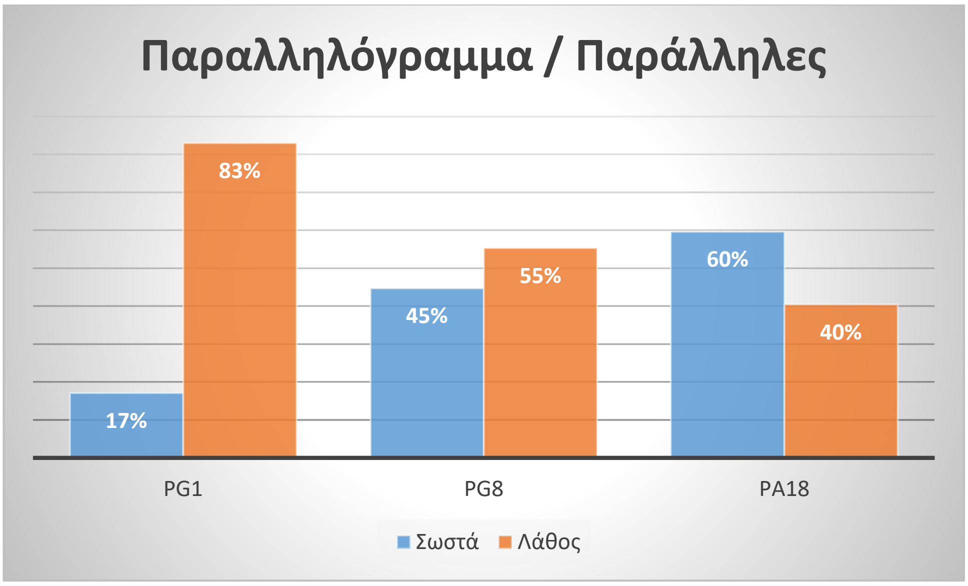
Στις υπόλοιπες ερωτήσεις όμως που αφορούν τα τρίγωνα, τα ποσοστά επιτυχίας ήταν αρκετά υψηλά (72% έως 82%). Αυτό φανερώνει την εξοικείωση των μαθητών με τους ορισμούς και τις ιδιότητες των τριγώνων.



Στις ερωτήσεις 12, 14, 16 και 19 που αφορούν τον κύκλο και την συμμετρία τα αποτελέσματα ήταν εξίσου ικανοποιητικά, με εξαίρεση την ερώτηση 13, όπου σχεδόν οι μισοί μαθητές θεώρησαν ότι δύο τυχαίες διάμετροι χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα. Στις υπόλοιπες ερωτήσεις οι μαθητές είχαν αρκετά υψηλά ποσοστά επιτυχίας.



Στις ερωτήσεις 1, 8 και 18 που αφορούν τις παράλληλες ευθείες και τα παραλληλόγραμμα οι μαθητές είχαν μέτριες έως πολύ κακές επιδόσεις. Όπως ήδη αναφέρθηκε οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν το γεγονός ότι ένα σχήμα μπορεί να ανήκει σε δύο κατηγορίες σχημάτων. Ενώ αρκετοί παρατήρησαν (45%) στην ερώτηση 8 ότι κάθε τετράγωνο είναι και ορθογώνιο, αντιθέτως μόλις το 17% μπόρεσε να διακρίνει ότι ένα τετράπλευρο με 4 ίσες πλευρές δεν είναι αναγκαστικά τετράγωνο, αλλά μπορεί να είναι και ρόμβος.



5.1.3 Στάσεις απέναντι στη Γεωμετρία.

Ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων που αφορά τις ερωτήσεις Likert του ερωτηματολογίου.

Απαντήσεις μαθητών στο ερωτηματολόγιο τύπου Likert.

	Πολύ Λίγο	Λίγο	Πολύ	Πάρα Πολύ
1. Όλοι οι μαθητές μπορούν να μάθουν Γεωμετρία	3	26	47	18
2. Η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο είναι δυσκολότερη από ότι στο Δημοτικό	7	24	36	27
3. Είμαι από εκείνους/ες που τα πάνε καλά στη Γεωμετρία.	22	41	25	6
4. Η Γεωμετρία μου αρέσει περισσότερο από την Άλγεβρα	50	21	15	8
5. Η Γεωμετρία είναι πιο εύκολη από την Άλγεβρα	38	24	20	12
6. Η προετοιμασία για το μάθημα της Γεωμετρίας με ευχαριστεί	36	28	23	7
7. Μου αρέσει να λύνω προβλήματα Γεωμετρίας	26	31	23	14
8. Συνήθως μου παίρνει πολύ χρόνο να λύσω ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	12	37	29	16
9. Αγχώνομαι όταν πρόκειται να γράψω διαγώνισμα στη Γεωμετρία	12	23	29	30
10. Η Γεωμετρία έχει δύσκολες έννοιες	15	46	22	11

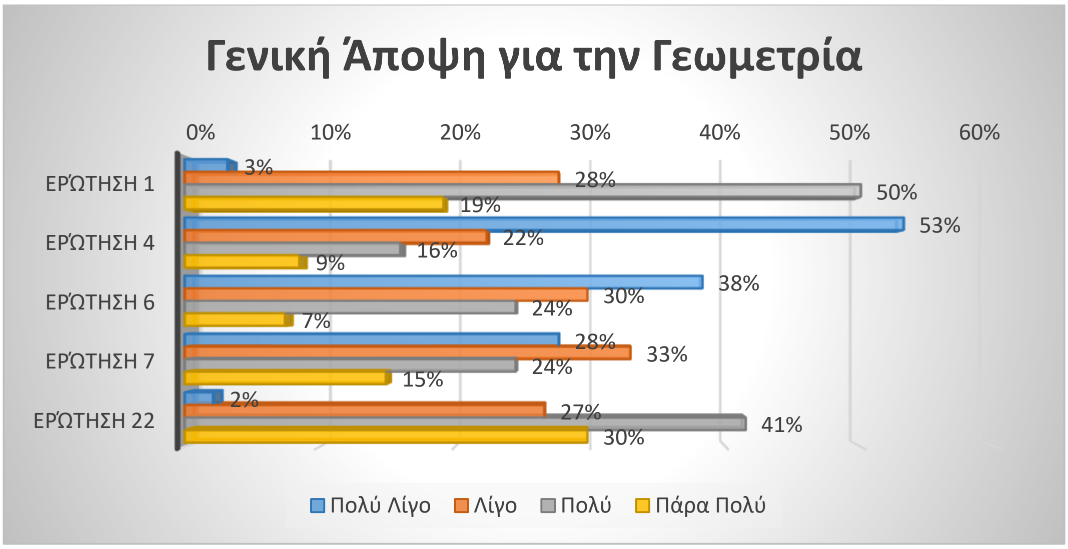
11. Η Γεωμετρία έχει πολύ θεωρία	8	47	20	19
12. Δυσκολεύομαι να κατανοήσω ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	22	33	21	18
13. Δυσκολεύομαι να κατανοήσω το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	38	34	16	6
14. Δυσκολεύομαι να κατασκευάσω το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	42	38	8	6
15. Δυσκολεύομαι να χρησιμοποιήσω σωστά τα γεωμετρικά όργανα	65	22	4	3
16. Δεν ξέρω πώς να ξεκινήσω την επίλυση σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	20	34	28	12
17. Καταλαβαίνω εύκολα ένα πρόβλημα Γεωμετρίας όταν το λύνει ο καθηγητής μου	9	23	23	39
18. Αφού λύσω ένα πρόβλημα στην Γεωμετρία αναζητώ και άλλη λύση	56	21	12	5
19. Δυσκολεύομαι σε προβλήματα Γεωμετρίας που δεν δίνεται το σχήμα	12	33	32	17
20. Δυσκολεύομαι σε προβλήματα Γεωμετρίας που πρέπει να κατασκευάσω δικές μου γραμμές	31	39	13	11
21. Η Γεωμετρία είναι πιο δύσκολη από την Άλγεβρα	26	16	21	31
22. Η Γεωμετρία είναι ένα χρήσιμο μάθημα	2	25	39	28
23. Στο μάθημα της Γεωμετρίας χρησιμοποιούμε συχνά κατάλληλο λογισμικό	20	35	25	14

Απαντήσεις μαθητών στο ερωτηματολόγιο τύπου Likert σε ποσοστά %.

	Πολύ Λίγο	Λίγο	Πολύ	Πάρα Πολύ
1. Όλοι οι μαθητές μπορούν να μάθουν Γεωμετρία	3%	28%	50%	19%
2. Η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο είναι δυσκολότερη από ότι στο Δημοτικό	7%	26%	38%	29%
3. Είμαι από εκείνους/ες που τα πάνε καλά στη Γεωμετρία.	23%	44%	27%	6%
4. Η Γεωμετρία μου αρέσει περισσότερο από την Άλγεβρα	53%	22%	16%	9%
5. Η Γεωμετρία είναι πιο εύκολη από την Άλγεβρα	40%	26%	21%	13%
6. Η προετοιμασία για το μάθημα της Γεωμετρίας με ευχαριστεί	38%	30%	24%	7%
7. Μου αρέσει να λύνω προβλήματα Γεωμετρίας	28%	33%	24%	15%
8. Συνήθως μου παίρνει πολύ χρόνο να λύσω ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	13%	39%	31%	17%

9. Αγχώνομαι όταν πρόκειται να γράψω διαγώνισμα στη Γεωμετρία	13%	24%	31%	32%
10. Η Γεωμετρία έχει δύσκολες έννοιες	16%	49%	23%	12%
11. Η Γεωμετρία έχει πολύ θεωρία	9%	50%	21%	20%
12. Δυσκολεύομαι να κατανοήσω ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	23%	35%	22%	19%
13. Δυσκολεύομαι να κατανοήσω το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	40%	36%	17%	6%
14. Δυσκολεύομαι να κατασκευάσω το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	45%	40%	9%	6%
15. Δυσκολεύομαι να χρησιμοποιήσω σωστά τα γεωμετρικά όργανα	69%	23%	4%	3%
16. Δεν ξέρω πώς να ξεκινήσω την επίλυση σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας	21%	36%	30%	13%
17. Καταλαβαίνω εύκολα ένα πρόβλημα Γεωμετρίας όταν το λύνει ο καθηγητής μου	10%	24%	24%	41%
18. Αφού λύσω ένα πρόβλημα στην Γεωμετρία αναζητώ και άλλη λύση	60%	22%	13%	5%
19. Δυσκολεύομαι σε προβλήματα Γεωμετρίας που δεν δίνεται το σχήμα	13%	35%	34%	18%
20. Δυσκολεύομαι σε προβλήματα Γεωμετρίας που πρέπει να κατασκευάσω δικές μου γραμμές	33%	41%	14%	12%
21. Η Γεωμετρία είναι πιο δύσκολη από την Άλγεβρα	28%	17%	22%	33%
22. Η Γεωμετρία είναι ένα χρήσιμο μάθημα	2%	27%	41%	30%
23. Στο μάθημα της Γεωμετρίας χρησιμοποιούμε συχνά κατάλληλο λογισμικό	21%	37%	27%	15%

Οι ερωτήσεις 1, 4, 6, 7 και 22 αφορούν την άποψη των μαθητών για το μάθημα της Γεωμετρίας. Η διατύπωση των ερωτήσεων αυτών είναι θετική, εννοώντας ότι η απάντηση «Πάρα πολύ» δείχνει την θετική άποψη για την Γεωμετρία και αντιθέτως η απάντηση «Πολύ Λίγο» την αρνητική άποψη για την Γεωμετρία.



Η άποψη των μαθητών σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στην Ερώτηση 1 είναι ότι οι μαθητές είναι σε θέση να μάθουν Γεωμετρία (50% – Πολύ + 19% – Πάρα Πολύ = 69%) αν και σχεδόν το 30% έχει αρνητική άποψη.

Ανάμεσα όμως στην Γεωμετρία και την Άλγεβρα οι μαθητές δείχνουν εμφανή προτίμηση στην Άλγεβρα. Στην Ερώτηση 4 το 53% απάντησε ότι τους αρέσει Πολύ Λίγο η Γεωμετρία σε σχέση με την Άλγεβρα, ενώ μόλις ένας στους 4 (16% – Πολύ + 9% – Πάρα Πολύ = 25%) είχε προτίμηση στην Γεωμετρία έναντι της Άλγεβρας.

Επίσης αρνητική είναι η άποψη των μαθητών για την προετοιμασία τους στο μάθημα της Γεωμετρίας. Το 68% των μαθητών (30% – Πολύ Λίγο + 38% – Λίγο) δεν αρέσκεται στο να προετοιμάζεται για το μάθημα της Γεωμετρίας, με μόλις το 31% (24% – Πολύ + 7% – Πάρα Πολύ) να έχει θετική άποψη. Από την προσωπική μου πείρα, οι πιο πολλοί μαθητές θεωρούν ότι η προετοιμασία για το μάθημα της Γεωμετρίας αφορά επί το πλείστων την επίλυση ασκήσεων που ανατίθενται από τους καθηγητές τους προς επίλυση στο σπίτι, ενώ δίνουν πολύ λίγη προσοχή κατά την προετοιμασία για το μάθημα στην θεωρία του μαθήματος. Αυτό είναι εμφανές και από τις πανομοιότυπες απαντήσεις τους στις ερωτήσεις 6 και 7. Στην Ερώτηση 7 που αφορά στο πόσο τους αρέσει να επιλύουν Γεωμετρικά προβλήματα το 61% (28% – Πολύ Λίγο + 33% – Λίγο) έχει αρνητική άποψη (αντίστοιχα στην Ερώτηση 6 το ποσοστό ήταν 68%), με μόλις το 39% να έχει θετική άποψη.

Παρόλη όμως την αρνητική άποψη των μαθητών για το μάθημα της Γεωμετρίας, οι πιο πολλοί μαθητές θεωρούν ότι το μάθημα της Γεωμετρίας είναι πολύ χρήσιμο. Το 71%

(41% – Πολύ + 30% – Πάρα Πολύ = 71%) των μαθητών θεωρούν ότι είναι ένα χρήσιμο μάθημα, με μόλις το 2% να έχει πολύ αρνητική άποψη για την χρησιμότητα του μαθήματος.

Οι ερωτήσεις 2, 3, 5, 8, 9, 12, 16, 17 και 21 αφορούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο μάθημα της Γεωμετρίας, με τις ερωτήσεις 2, 8, 9, 12, 16 και 21 να έχουν αρνητική διατύπωση, ενώ οι ερωτήσεις 3, 5 και 17 να έχουν θετική. Ειδικά οι ερωτήσεις 5 και 21 είναι εσκεμμένα αντίθετα διατυπωμένες για να μετρηθεί η αξιοπιστία των απαντήσεων των μαθητών, ανάλυση της οποίας υπάρχει παρακάτω.

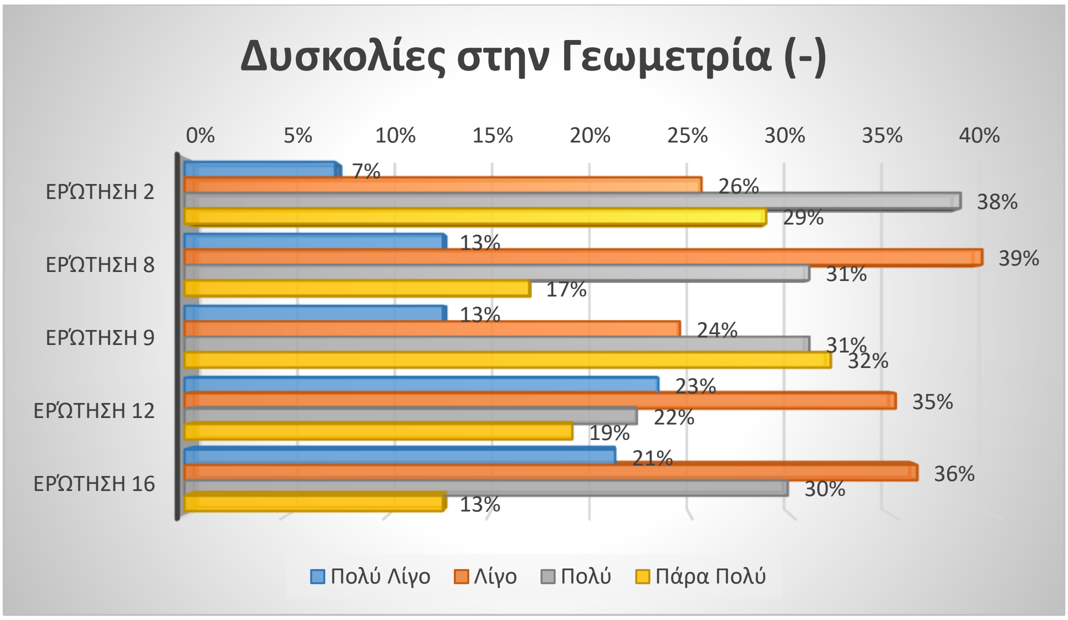
Για τις αρνητικά διατυπωμένες ερωτήσεις 2, 8, 9, 12 και 16 παρατηρούμε τα εξής:

Οι μαθητές, σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στην Ερώτηση 2, θεωρούν ότι η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο είναι πιο δύσκολη από ότι στο Δημοτικό (38% – Πολύ + 29% – Πάρα Πολύ = 67%), το οποίο είναι μια πρώτη ένδειξη των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν με το μάθημα αυτό. Στην Ερώτηση 8 η οποία αφορά τον χρόνο επίλυσης ενός Γεωμετρικού προβλήματος, οι απόψεις των μαθητών είναι μοιρασμένες, με το 48% (31% – Πολύ + 17% – Πάρα Πολύ) να δηλώνει ότι χρειάζεται πολύ χρόνο για την επίλυση ενός Γεωμετρικού προβλήματος και το 52% (13% – Πολύ Λίγο + 39% – Λίγο) ότι χρειάζεται λίγο χρόνο.

Στην Ερώτηση 9, που αναφέρεται στο άγχος των μαθητών κατά την διάρκεια των διαγωνισμάτων Γεωμετρίας, οι πιο πολύ μαθητές απάντησαν ότι τα διαγωνίσματα τους προκαλούν άγχος (31% – Πολύ + 32% – Πάρα Πολύ = 63%).

Η Ερώτηση 12 αναφέρεται στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στο να κατανοήσουν ένα πρόβλημα Γεωμετρίας. Το 58% των μαθητών (23% – Πολύ Λίγο + 35% – Λίγο) δηλώνει ότι δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα με την κατανόηση των ζητουμένων ενός προβλήματος Γεωμετρίας, ενώ το 41% (22% – Πολύ + 19% – Πάρα Πολύ) δηλώνει ότι αντιμετωπίζει δυσκολίες.

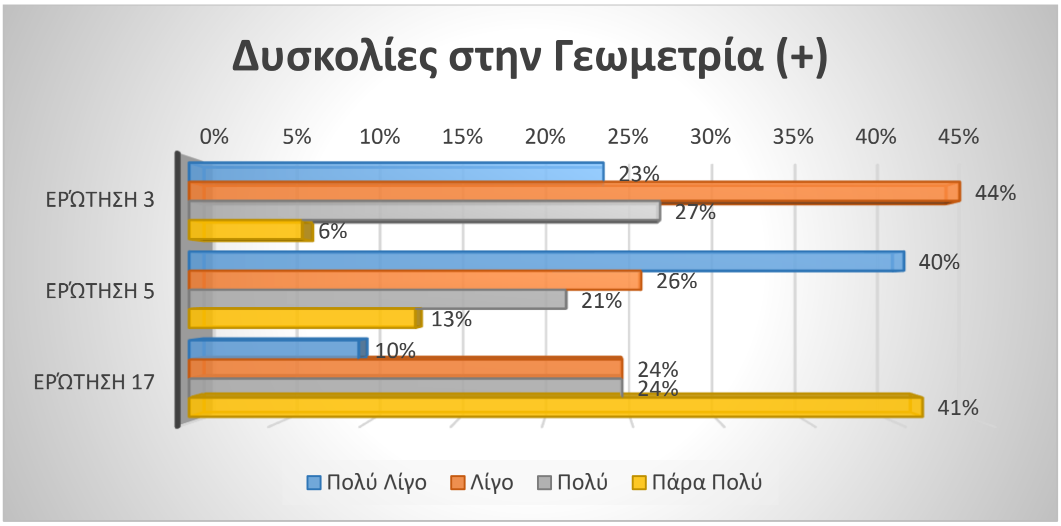
Η Ερώτηση 16 αναφέρεται στην δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές να ξεκινήσουν την επίλυση ενός προβλήματος Γεωμετρίας. Εδώ πάλι οι γνώμες των μαθητών είναι σχεδόν μοιρασμένες με το 57% να δηλώνει λίγο (21% – Πολύ Λίγο + 36% – Λίγο) και το 43% πολύ (30% – Πολύ + 13% – Πάρα Πολύ). Έτσι παρατηρούμε ότι οι μαθητές αγχώνονται κατά την διάρκεια επίλυσης προβλημάτων Γεωμετρίας και σε μεγάλο ποσοστό αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην έναρξη της επίλυσης.



Για τις θετικά διατυπωμένες ερωτήσεις 3, 5 και 17 παρατηρούμε τα εξής:

Η Ερώτηση 3 αναφέρεται στις επιδόσεις των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας. Οι πιο πολλοί μαθητές αναφέρουν ότι οι επιδόσεις τους δεν είναι καλές (23% – Πολύ Λίγο + 44% – Λίγο = 67%), με μόλις το 6% να δηλώνει ότι οι τα πάνε Πάρα Πολύ καλά στο μάθημα της Γεωμετρίας. Στην Ερώτηση 5 το 66% (40% – Πολύ Λίγο + 26% – Λίγο) δήλωσε ότι δυσκολεύονται πιο πολύ στην Γεωμετρία από ότι στο μάθημα της Άλγεβρας.

Η συμβολή του καθηγητή στην επίλυση Γεωμετρικών προβλημάτων αναγνωρίζεται από τους μαθητές, σύμφωνα με τις απαντήσεις τους στην Ερώτηση 17. Το 66% (24% – Πολύ + 41% – Πάρα Πολύ) αναφέρει ότι μπορεί να κατανοήσει την επίλυση ενός Γεωμετρικού προβλήματος, όταν αυτή την αναλαμβάνει ο καθηγητής. Μόλις το 10% δηλώνει ότι η συνεισφορά του καθηγητή είναι Πολύ Λίγη, στην κατανόησή τους της επίλυσης του προβλήματος.



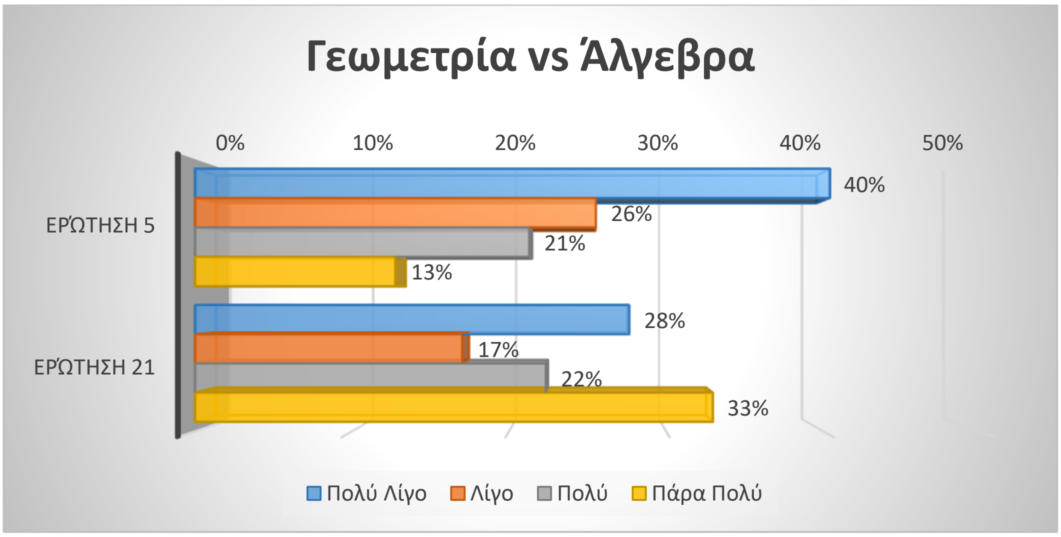
Αξιοπιστία Απαντήσεων Μαθητών στο ερωτηματολόγιο Likert.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι ερωτήσεις 5 και 21 έχουν αντίθετη διατύπωση. Συγκεκριμένα οι ερωτήσεις αυτές αναφέρουν:

5. Η Γεωμετρία είναι πιο **εύκολη** από την Άλγεβρα.

21. Η Γεωμετρία είναι πιο **δύσκολη** από την Άλγεβρα.

Τα αποτελέσματα των δύο ερωτήσεων φαίνονται στο παρακάτω γράφημα:

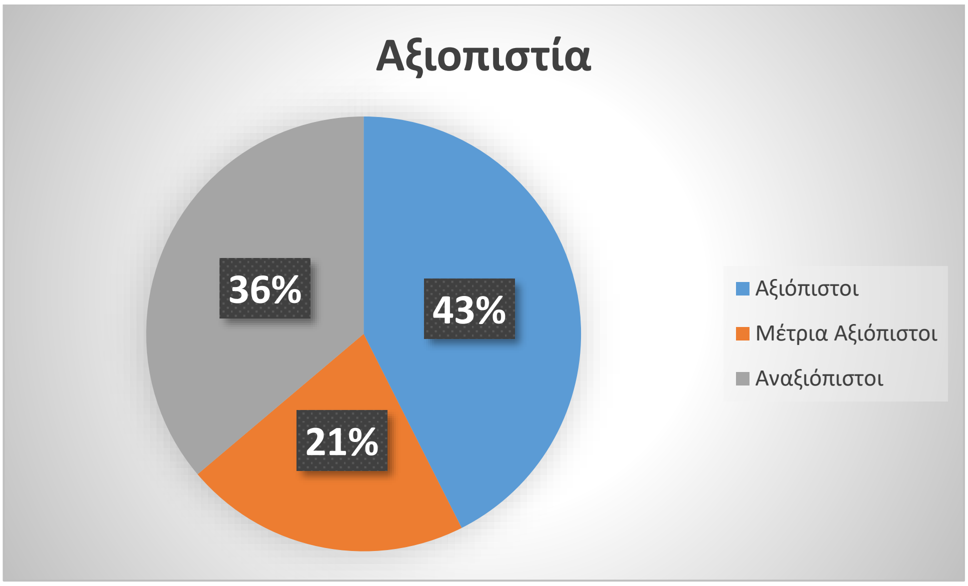


Από τα παραπάνω διακρίνουμε την προτίμηση των μαθητών στο μάθημα της Άλγεβρας σε σχέση με το μάθημα της Γεωμετρίας.

Οι ερωτήσεις αυτές επιλέχθηκαν κατά αυτόν τον τρόπο για να γίνει έλεγχος της αξιοπιστίας των μαθητών. Η αξιοπιστία των απαντήσεων, εφόσον αυτές είναι αντίθετα διατυπωμένες, χαρακτηρίστηκε σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Απάντηση στην Ερώτηση 5	Απάντηση στην Ερώτηση 21	Χαρακτηρισμός Αξιοπιστίας
Πολύ Λίγο	**Πάρα Πολύ**	**Αξιόπιστος/η**
Λίγο	**Πολύ**	**Αξιόπιστος/η**
Πολύ	**Λίγο**	**Αξιόπιστος/η**
Πάρα Πολύ	**Πολύ Λίγο**	**Αξιόπιστος/η**
Πολύ Λίγο	**Πολύ**	**Μέτρια Αξιόπιστος/η**
Λίγο	**Πάρα Πολύ**	**Μέτρια Αξιόπιστος/η**
Πολύ	**Πολύ Λίγο**	**Μέτρια Αξιόπιστος/η**
Πάρα Πολύ	**Λίγο**	**Μέτρια Αξιόπιστος/η**
Πολύ Λίγο	**Πολύ Λίγο**	**Αναξιόπιστος/η**
Λίγο	**Λίγο**	**Αναξιόπιστος/η**
Πολύ	**Πολύ**	**Αναξιόπιστος/η**
Πάρα Πολύ	**Πάρα Πολύ**	**Αναξιόπιστος/η**
Πολύ Λίγο	**Λίγο**	**Αναξιόπιστος/η**
Λίγο	**Πολύ Λίγο**	**Αναξιόπιστος/η**
Πολύ	**Πάρα Πολύ**	**Αναξιόπιστος/η**
Πάρα Πολύ	**Πολύ**	**Αναξιόπιστος/η**

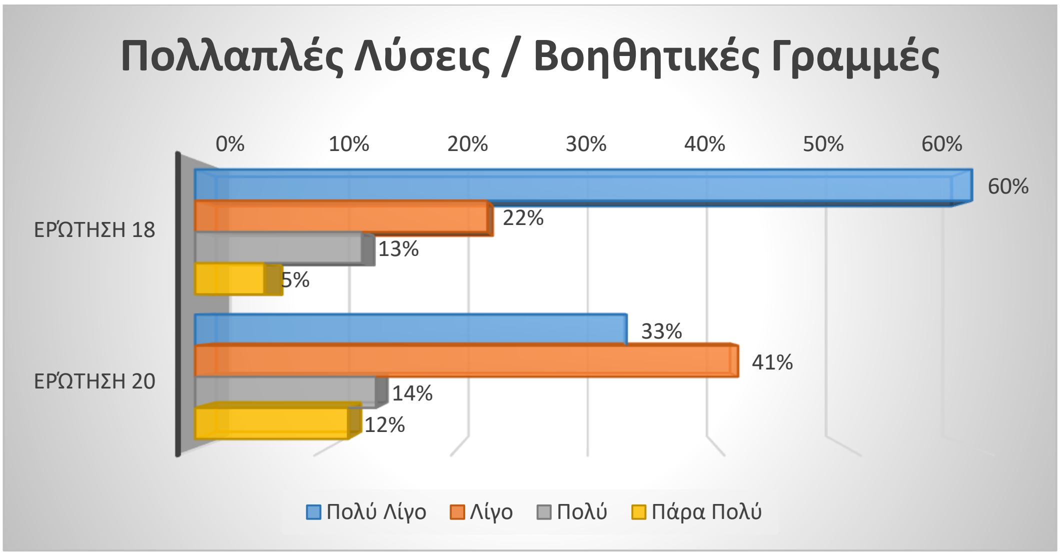
Η λογική πίσω από τον παραπάνω χαρακτηρισμό αξιοπιστίας των απαντήσεων των μαθητών είναι ότι αν ο μαθητής έχει απαντήσει Πολύ Λίγο στην μία από τις δύο ερωτήσεις, για να είναι αξιόπιστες οι απαντήσεις του θα πρέπει στην αντίθετα διατυπωμένη ερώτηση να απαντήσει Πάρα Πολύ, όπως και αν στην μία απαντήσει Λίγο στην άλλη θα πρέπει να απαντήσει Πολύ. Αν κάποιος μαθητής απαντήσει στην μία ερώτηση Πολύ Λίγο και στην αντίθετα διατυπωμένη Πολύ, τότε θεωρείται μέτρια η αξιοπιστία του, όπως και σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση που στην μία ερώτηση η απάντηση είναι αρνητική και στην άλλη ερώτηση είναι θετική εκτός των περιπτώσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω που οι απαντήσεις θεωρούνται αξιόπιστες. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση οι απαντήσεις θεωρούνται αναξιόπιστες. Δηλαδή αν πχ ένας μαθητής απαντήσει αρνητικά και στις δύο ερωτήσεις, θεωρείται αναξιόπιστος.



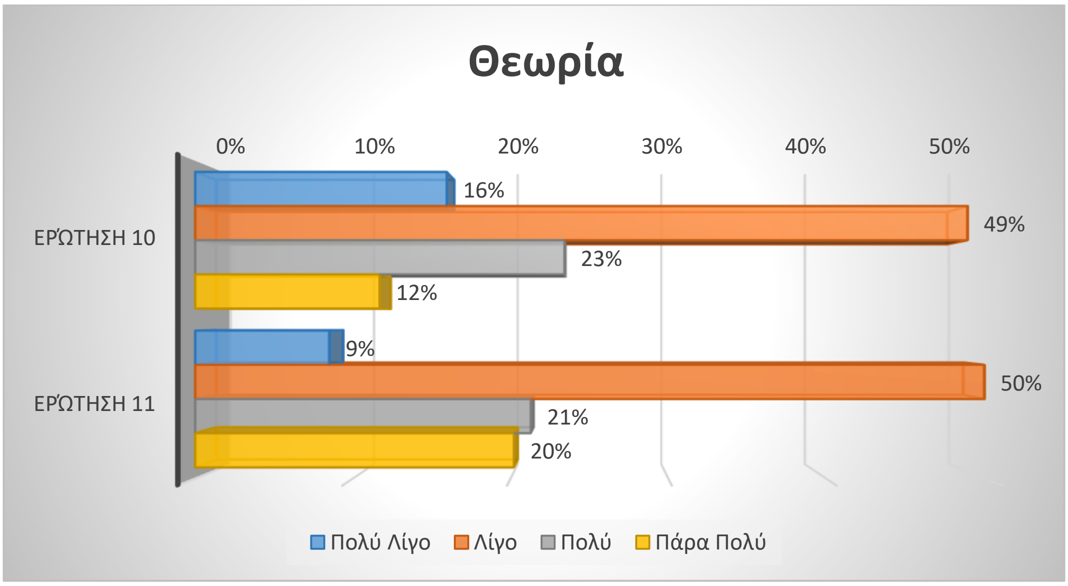
Από το παραπάνω διάγραμμα πίτα παρατηρούμε ότι το 43% των μαθητών έδωσαν αξιόπιστες απαντήσεις, το 21% μετρίως αξιόπιστες απαντήσεις και τέλος το 36% έδωσε αναξιόπιστες απαντήσεις.

Συνοψίζοντας, από τις ερωτήσεις 2, 3, 5, 8, 9, 16, 17 και 21 παρατηρούμε ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν το μάθημα της Γεωμετρίας σαν ένα μάθημα που τους προκαλεί δυσκολίες και έχουν την τάση να προτιμούν το μάθημα της Άλγεβρας.

Οι ερωτήσεις 18 και 20 αφορούν την αναζήτηση Πολλαπλών Λύσεων και την χρήση Βοηθητικών Γραμμών αντίστοιχα. Όπως έχουμε δει στην παράγραφο 3.4 η αναζήτηση Πολλαπλών Λύσεων σε κάποιο πρόβλημα Γεωμετρίας ενισχύει την δημιουργικότητα των μαθητών. Στα σχολικά βιβλία όμως του Ελληνικού σχολείου δεν ζητείται από τους μαθητές η αναζήτηση άνω της μίας λύσης. Αποτέλεσμα της πρακτικής αυτής είναι ότι οι μαθητές δεν αναζητούν από μόνοι τους άλλη λύση, εφόσον έχουν βρει τουλάχιστον μία. Στην Ερώτηση 18 το 60% απάντησε ότι δεν αναζητά λύση σε προβλήματα Γεωμετρίας που έχει ήδη λύσει, ενώ η αρνητική άποψη των μαθητών στο θέμα φτάνει το 82% (60% – Πολύ Λίγο + 22% – Λίγο). Στις απαντήσεις των μαθητών στην Ερώτηση 20 το 74% των μαθητών (33% – Πολύ Λίγο + 41% – Λίγο) δηλώνει ότι δυσκολεύεται στα προβλήματα Γεωμετρίας τα οποία για να λυθούν θα πρέπει οι μαθητές να συμπληρώσουν το σχήμα (είτε περιγράφεται στην εκφώνηση είτε δίνεται) με κάποια δικιά τους γραμμή. Τέτοιες ασκήσεις όπου η επίλυσή τους εξαρτάται από την δημιουργικότητα των μαθητών στο να εξελίξουν το σχήμα έτσι ώστε να βρεθεί η λύση του προβλήματος δυσκολεύει τους μαθητές, κάτι που είναι μία ακόμα ένδειξη για το χαμηλό επίπεδο δημιουργικότητας των μαθητών.



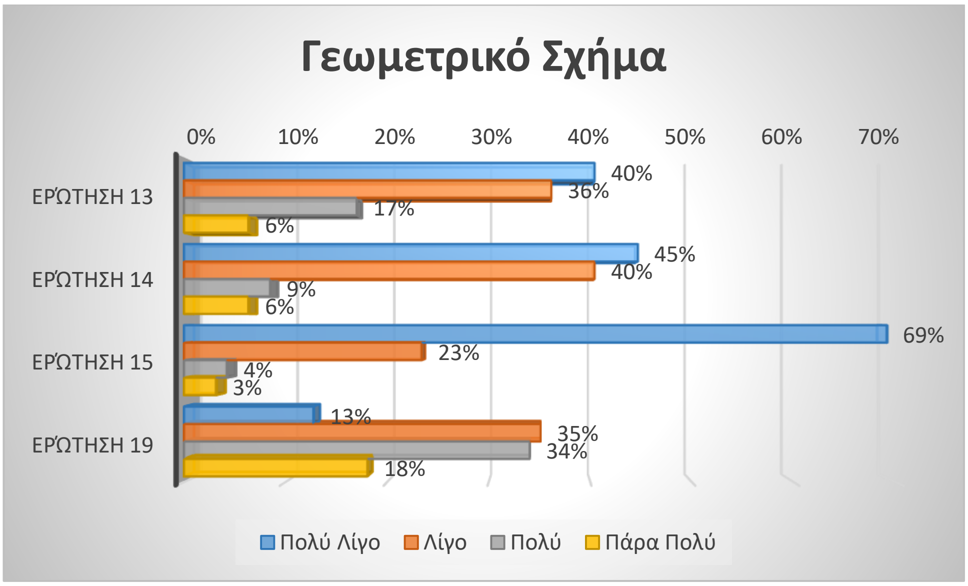
Οι ερωτήσεις 10 και 11 αφορούν την θεωρία του μαθήματος της Γεωμετρίας. Τόσο στην Ερώτηση 10, που αφορά την δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση εννοιών της Γεωμετρίας, τόσο και στην Ερώτηση 11, που αφορά στην δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με το μέγεθος της θεωρίας του μαθήματος της Γεωμετρίας, οι μαθητές απαντούν αρνητικά. Το 65% των μαθητών (16% – Πολύ Λίγο + 49% – Λίγο) θεωρούν ότι δυσκολεύονται με τις έννοιες της Γεωμετρίας και το 59% (9% – Πολύ Λίγο + 50% – Λίγο) θεωρούν ότι ο όγκος της θεωρίας του μαθήματος δεν είναι μεγάλος.



Οι ερωτήσεις 13, 14, 15 και 19 αφορούν το Γεωμετρικό σχήμα και την χρήση των Γεωμετρικών οργάνων (κανόνας, διαβήτης, μοιρογνωμόνιο (στην Α΄ Γυμνασίου)) και είναι αρνητικά διατυπωμένες.

Από τις ερωτήσεις 13, 14 και 15 παρατηρούμε ότι οι πιο πολλοί μαθητές δηλώνουν ότι δεν αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση και κατασκευή του Γεωμετρικού σχήματος ενός Γεωμετρικού προβλήματος. Στην Ερώτηση 13 το 76% των μαθητών (40% – Πολύ Λίγο + 36% – Λίγο) δηλώνει ότι δεν δυσκολεύεται να κατανοήσει το σχήμα ενός Γεωμετρικού προβλήματος και κατά συνέπεια αφού μπορούν να κατανοήσουν το σχήμα δεν δυσκολεύονται στην κατασκευή του, δηλώνοντας στην Ερώτηση 14 το 85% των μαθητών (45% – Πολύ Λίγο + 40% – Λίγο) ότι δεν δυσκολεύεται στην υλοποίηση του σχήματος σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας. Στην Ερώτηση 15 που αφορά την χρήση των Γεωμετρικών οργάνων, το 92% των μαθητών (69% – Πολύ Λίγο + 23% – Λίγο) δηλώνει ότι δεν αντιμετωπίζει προβλήματα. Δυστυχώς η προσωπική εμπειρία μου από τις σχολικές αίθουσες είναι ότι η εικόνα αυτή δεν είναι αληθής. Οι πιο πολλοί μαθητές έρχονται στην σχολική αίθουσα χωρίς καν να έχουν τα βασικά Γεωμετρικά όργανα, τα οποία δεν μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν επιτυχώς, ειδικά τον διαβήτη που δεν ξέρουν ούτε καν πως πρέπει να τον κρατάνε, ακόμα και σε πιο μεγάλες τάξεις.

Στην Ερώτηση 19 η άποψη των μαθητών είναι μοιρασμένη. Το 48% (13% – Πολύ Λίγο + 35% – Λίγο) απαντά ότι δεν δυσκολεύεται όταν δεν δίνεται το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας, ενώ το 52% (34% – Πολύ + 18% – Πάρα Πολύ) απαντά ότι αντιμετωπίζει δυσκολίες.



Τέλος η Ερώτηση 23 αφορά την χρήση λογισμικών Γεωμετρίας και στο πόσο συχνά χρησιμοποιείται στο μάθημα της Γεωμετρίας. Δυστυχώς λόγω της κατάστασης με την πανδημία του κορονοϊού τα τελευταία χρόνια η χρήση λογισμικών Γεωμετρίας έχει περιορισθεί. Ο βασικός λόγος είναι τα μέτρα κατά του κορονοϊού, ανάμεσα στα οποία είναι οι αποστάσεις που πρέπει οι μαθητές να διατηρούν εντός των σχολικών αιθουσών και στο γεγονός ότι τα εργαστήρια υπολογιστών στα πιο πολλά σχολεία είναι μικρά με λίγους σε σχέση με τους μαθητές ενός τμήματος υπολογιστές και οι μαθητές αναγκάζονται να κάθονται συνήθως σε ζεύγη ανά υπολογιστή. Παρόλα αυτά το 58% των μαθητών (21% – Πολύ + 37% – Πάρα Πολύ) θεωρούν ότι δεν γίνεται συχνή χρήση κατάλληλου λογισμικού Γεωμετρίας.

5.1.4 Ασκήσεις.

Στους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα δόθηκαν 4 ασκήσεις. Οι μαθητές, όπως αναφέρθηκε χωρίσθηκαν σε 2 ομάδες, στην πειραματική ομάδα που έλυσαν τις ασκήσεις με την βοήθεια Λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας (Geogebra) στο εργαστήριο του σχολείου τους και στην ομάδα ελέγχου που έλυσαν τις ασκήσεις στην σχολική αίθουσα.

Άσκηση 1

Στην Άσκηση 1 (3η σελίδα του φυλλαδίου στο Παράστημα) ζητήθηκε από τους μαθητές να λύσουν ένα πρόβλημα Γεωμετρίας, με την υπόδειξη ότι για την επίλυση είναι αναγκαία μία βοηθητική γραμμή, ενώ στην συνέχεια να λύσουν το ίδιο πρόβλημα με διαφορετική βοηθητική γραμμή. Παρόμοια άσκηση υπάρχει και στο σχολικό βιβλίο, χωρίς όμως να ζητείται από τους μαθητές να την λύσουν με πάνω από έναν τρόπο.

Στο ερώτημα (α) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Βοηθητική Γρ1	Σωστά	Αιτιολογήθηκε
Πειραματική	92%	90%	46%	32%
Ελέγχου	71%	62%	53%	22%

Μια πρώτη σημαντική παρατήρηση είναι ότι τα ποσοστά των μαθητών που αιτιολόγησαν την απάντησή τους είναι πολύ μικρά. Είναι φανερό εδώ, όπως και παρακάτω, η επιρροή του τρόπου σκέψης και λειτουργίας του δημοτικού σχολείου, όπου η αιτιολόγηση του αποτελέσματος μιας άσκηση έχει δευτερεύοντα ρόλο. Αν και το 90% της πειραματικής ομάδας κατάφερε να βρει την βοηθητική γραμμή, που είναι αναγκαία για την επίλυση της άσκησης, μόλις το 46% κατάφερε να την λύσει σωστά.

Στο ερώτημα (β) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Βοηθητική Γρ2	Σωστά	Αιτιολογήθηκε
Πειραματική	31%	26%	15%	10%
Ελέγχου	13%	11%	11%	11%

Συγκρίνοντας τον πίνακα των αποτελεσμάτων του ερωτήματος (α) με το (β) είναι εμφανές ότι οι πιο πολλοί μαθητές δεν κατάφεραν να επιλύσουν με διαφορετικό τρόπο την ίδια άσκηση. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν συνηθίσει να επιλύουν μια άσκηση ξανά και με διαφορετικό τρόπο, από την στιγμή που έχουν ήδη βρει μία λύση. Τα ποσοστά των μαθητών που αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους είναι εξίσου χαμηλά.

Έτσι η ευχέρεια των μαθητών να παράγουν διαφορετικές λύσεις, η οποία αποτελεί πτυχή της δημιουργικότητας μπορεί να χαρακτηρισθεί πολύ χαμηλή. Η ευελιξία των μαθητών δεν μπορεί εύκολα να χαρακτηρισθεί στην Α Γυμνασίου ελλείψει του γεγονότος ότι δεν έχουν διδαχθεί πλήρως την Γεωμετρία ως ένα αξιωματικό σύστημα, κάτι που γίνεται στην Α και Β Λυκείου.

Και από τους 2 παραπάνω πίνακες αποτελεσμάτων διακρίνουμε μια εμφανή τάση για καλύτερα αποτελέσματα στην πειραματική ομάδα. Το λογισμικό Γεωμετρίας (Geogebra) βοήθησε τους μαθητές να απαντήσουν, αν και όχι πάντα με επιτυχία.

Άσκηση 2

Όπως και η Άσκηση 1 έτσι και η 2 υπάρχει ως εφαρμογή στο σχολικό βιβλίο. Η άσκηση χρειάζεται για την επίλυσή της την κατανόηση της ιδιότητας της μεσοκαθέτου, δηλαδή ότι όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος.

Στο ερώτημα (α) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Βοηθητική Γρ1	Σωστά	Αιτιολογήθηκε
Πειραματική	90%	73%	44%	19%
Ελέγχου	56%	9%	9%	0%

Ενώ το λογισμικό βοήθησε τους μαθητές της πειραματικής ομάδας να βρουν την βοηθητική γραμμή, οι μαθητές που απάντησαν σωστά ήταν περίπου οι μισοί αυτών που απάντησαν, ενώ μόλις το 19% των μαθητών της πειραματικής ομάδας αιτιολόγησε την απάντησή τους. Η ομάδα ελέγχου είχε πολύ πιο χαμηλά ποσοστά. Μόλις το 56% ασχολήθηκε με το ερώτημα και τελικά μόνο το 9% κατάφερε να βρει τις βοηθητικές γραμμές και να λύσει το πρόβλημα, χωρίς κανένας όμως να αιτιολογήσει την απάντησή του.

Στο ερώτημα (β) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Σωστά	Αιτιολογήθηκε
Πειραματική	51%	38%	21%
Ελέγχου	27%	18%	0%

Στο ερώτημα (β) οι μαθητές ρωτήθηκαν αν θα ήταν ίδια η απάντησή του στην περίπτωση που το πρόβλημα γενικευόταν (από τα 3 χωριά στο ερώτημα (α) σε 4 στο ερώτημα (β)). Τα ποσοστά είναι ακόμα χαμηλότερα σε σχέση με το ερώτημα (α), με τους πιο πολλούς μαθητές να απαντά μονολεκτικά (συνήθως η απάντηση ήταν «Όχι») χωρίς να αιτιολογούν την απάντηση αυτή.

Η τάση για την πειραματική ομάδα να απαντά στα ερωτήματα και με μεγαλύτερη επιτυχία διατηρείται και εδώ.

Στο ερώτημα (γ) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Τοποθέτηση Προβλήματος	Αιτιολογήθηκε
Πειραματική	36%	30%	0%
Ελέγχου	18%	16%	0%

Το ερώτημα ζητούσε από τους μαθητές να διατυπώσουν ένα παρόμοιο πρόβλημα με το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Αν και πάλι διατηρείται η τάση η πειραματική ομάδα να δίνει πιο πολλές και πιο σωστές απαντήσεις, τα ποσοστά των μαθητών που κατάφεραν να απαντήσουν το ερώτημα είναι πάρα πολύ μικρά. Κανένας μαθητής, από αυτούς που απάντησαν το ερώτημα, δεν αιτιολόγησε την απάντησή του. Αν και στο δημοτικό σχολείο ζητείται από τους μαθητές να κατασκευάζουν δικά τους προβλήματα, αν και όχι πολύ συχνά, στο γυμνάσιο μια τέτοια πρακτική δεν ακολουθείται. Έτσι οι μαθητές δεν έχουν εξοικειωθεί με το να χρησιμοποιούν την δημιουργικότητά τους ώστε να μπορούν να τοποθετήσουν νέα προβλήματα, στηριζόμενοι σε προβλήματα που έχουν ήδη λύσει.

Άσκηση 3

Το ερώτημα (α) της άσκησης είναι η άσκηση 5 στην σελίδα 231 του σχολικού βιβλίου, ενώ το ερώτημα (β) είναι παράφραση της άσκησης 6 στην ίδια σελίδα. Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας παροτρύνθηκαν, αφού εμφάνιζαν τις διχοτόμους των γωνιών του παραλληλογράμμου, να μετασχηματίσουν το σχήμα που τους είχε δοθεί, κατασκευασμένο έτσι ώστε αν μετακινούνταν οποιαδήποτε κορυφή του να παραμένει παραλληλόγραμμο, ενώ με κατάλληλες μετατοπίσεις να μπορεί να μετατραπεί σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, σε ρόμβο ή ακόμα και σε τετράγωνο, έτσι ώστε να μπορούν να απαντήσουν και στο ερώτημα (β) της άσκησης χωρίς να χρειασθεί να κατασκευάσουν το σχήμα από την αρχή.

Στο ερώτημα (α) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Διαγώνιοι vs Διχ/μοι	Σωστά
Πειραματική	85%	36%	31%
Ελέγχου	64%	60%	4%

Ακόμα μια φορά βλέπουμε την τάση η πειραματική ομάδα να δίνει πιο πολλές και πιο σωστές απαντήσεις. Το ενδιαφέρον αποτέλεσμα όμως στο ερώτημα (α) στην άσκηση αυτή είναι το λάθος που έκανε μεγάλο μέρος των μαθητών, που μπέρδεψαν την έννοια της διχοτόμου μιας γωνίας με τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου. Σ' αυτό το λάθος υπέπεσε το 36% της πειραματικής ομάδας και το 60% της ομάδας ελέγχου ή το 94% των μαθητών που προσπάθησαν από την ομάδα ελέγχου να απαντήσει στο ερώτημα αυτό. Αποτέλεσμα αυτού του λάθους στην κατανόηση της έννοιας της διχοτόμου ήταν πολλοί λίγοι μαθητές να απαντήσουν σωστά σε μία άσκηση που πολύ πιθανόν να την έχουν διδαχθεί, αφού είναι άσκηση του σχολικού βιβλίου.

Στο ερώτημα (β) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Σωστά	Απάντηση Πολλαπλής Επιλογής	Σωστά		
				(i)	(ii)	(iii)
Πειραματική	56%	14%	23%	15%	21%	10%
Ελέγχου	47%	4%	33%	4%	4%	4%

Τα ποσοστά των μαθητών που επιχείρησαν να επιλύσουν το ερώτημα (β) είναι εμφανώς μειωμένα, όπως και τα ποσοστά επιτυχούς επίλυσης. Μόλις το 14% της πειραματικής ομάδας και το 4% της ομάδας ελέγχου μπόρεσαν να απαντήσουν επιτυχώς.

Από τους λίγους μαθητές που επιχείρησαν να επιλύσουν το ερώτημα (β) μεγάλο μέρος τους δεν κατανόησε το ζητούμενο του ερωτήματος αυτού και αντί να δώσει μια συγκεκριμένη απάντηση στα τρία υποερωτήματα του ερωτήματος (β), κύκλωσαν στην τύχη ένα από αυτά, νομίζοντας ότι η ερώτηση ήταν του είδους των ερωτήσεων με απαντήσεις πολλαπλής επιλογής. Αυτό πολύ πιθανόν να οφείλεται σε αυτό που ο Brousseau (1997) ονόμασε «Διδακτικό Συμβόλαιο». Οι μαθητές χωρίς να διαβάσουν με προσοχή την εκφώνηση του ερωτήματος, υπέθεσαν λανθασμένα το είδος του ερωτήματος και προσπάθησαν να δώσουν μια απάντηση. Αυτό το έκαναν οι 9 από τους 33 μαθητές της πειραματικής ομάδας (27%) και οι 18 στους 35 μαθητές της ομάδας ελέγχου (51%) που προσπάθησαν να επιλύσουν το ερώτημα.

<u>Άσκηση 4</u>

Η άσκηση αυτή είχε σκοπό να αναδείξει πόσες διαφορετικές λύσεις μπορούν οι μαθητές να δώσουν σε ένα σχετικά απλό πρόβλημα συμμετρίας. Ενώ είναι αρκετά εύκολο με μια ευθεία να χωρίσουμε ένα τετράγωνο σε δύο ίσα σχήματα, οι πιο πολλοί μαθητές δεν κατάφεραν να δουν ότι υπάρχουν άπειρες τέτοιες ευθείες.

Στο ερώτημα (α) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	Απαντήθηκε	Σωστά
Πειραματική	90%	90%

Ελέγχου	73%	71%

Το πρώτο ερώτημα της άσκησης ήταν αρκετά εύκολο, έτσι σχεδόν όλοι οι μαθητές που επιχείρησαν να το απαντήσουν το απάντησαν σωστά. Κανένας μαθητής όμως δεν επιχείρησε να αιτιολογήσει γιατί η ευθεία που έφερε χωρίζει το τετράγωνο σε δύο ίσα σχήματα και τι είδους σχήματα είναι αυτά.

Στο ερώτημα (β) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	**Απαντήθηκε**	**Ευθείες**		
		Δύο	Τέσσερις	Άπειρες
Πειραματική	87%	21%	46%	21%
Ελέγχου	69%	22%	44%	4%

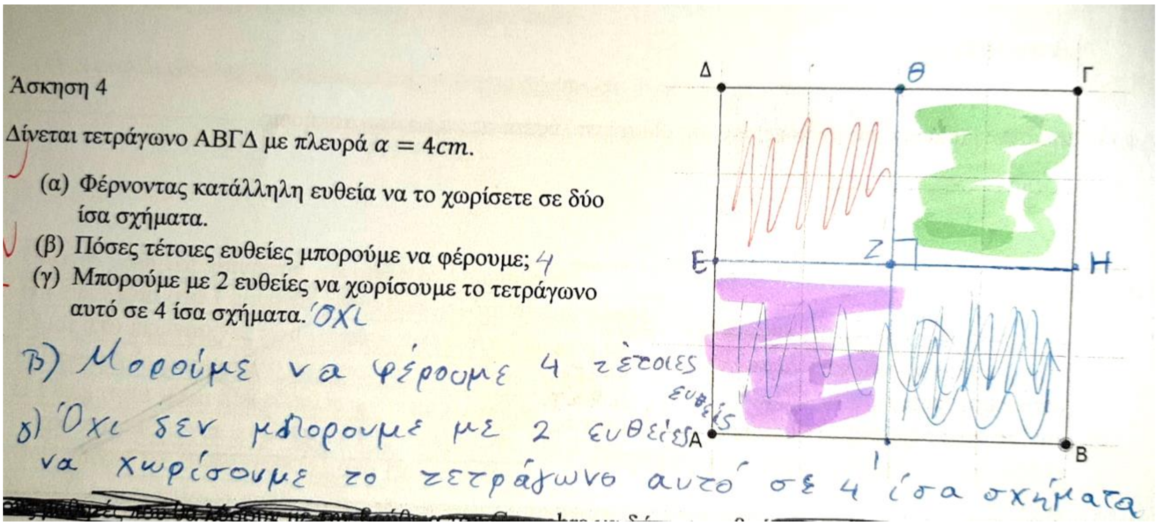
Όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις βλέπουμε την τάση η πειραματική ομάδα να δίνει πιο πολλές και πιο σωστές απαντήσεις. Το 21% και το 22% των μαθητών της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου αντιστοίχως κατάφεραν να βρουν δύο ευθείες που χωρίζουν το τετράγωνο σε δύο ίσα σχήματα, συνήθως αυτές ήταν οι διαγώνιοι του τετραγώνου και σε άλλες περιπτώσεις τις μεσοκάθετους των απέναντι πλευρών. Τέσσερις ευθείες, δηλαδή τις διαγωνίους αλλά και τις μεσοκάθετους, βρήκαν το 46% και το 44% αντιστοίχως, ενώ άπειρες το 21% και το 4% αντιστοίχως. Κι εδώ όμως το σύνολο των μαθητών δεν αιτιολόγησε ποιες είναι οι ευθείες αυτές. Ακόμα και οι μαθητές που βρήκαν ότι υπάρχουν άπειρες ευθείες με την ιδιότητα να χωρίζουν το τετράγωνο σε δύο ίσα σχήματα δεν ανέφεραν ότι αυτές είναι όλες οι ευθείες που διέρχονται από το κέντρο του τετραγώνου, δηλαδή την τομή των διαγωνίων και των μεσοκαθέτων.

Στο ερώτημα (γ) οι μαθητές απάντησαν ως εξής:

Ομάδα	**Απαντήθηκε**	**Σωστά**
Πειραματική	62%	18%
Ελέγχου	47%	16%

Το αξιοπερίεργο σ’ αυτό το ερώτημα είναι ότι παρόλο που το 87% της πειραματικής ομάδας και το 69% της ομάδας ελέγχου απάντησε ότι υπάρχουν τουλάχιστον Δύο Ευθείες που μπορούν να χωρίσουν το τετράγωνο σε δύο ίσα σχήματα, μόλις το 18% και το 16% των αντίστοιχων ομάδων μπόρεσε να συνδυάσει τις ευθείες αυτές, έτσι ώστε να χωρίσει το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα σχήματα. Οι περισσότεροι μαθητές, που απάντησαν το ερώτημα αυτό, απάντησαν μονολεκτικά (Ναι – Όχι). Τα πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας σε σχέση με τα ποσοστά επιτυχίας του ερωτήματος (β) φανερώνουν την μεγάλη έλλειψη δημιουργικότητας των μαθητών.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της σύγχυσης των μαθητών αποτελεί το παρακάτω. Ενώ η μαθήτρια απάντησε στο ερώτημα (β) ότι υπάρχουν τέσσερις ευθείες που μπορούν να χωρίσουν το τετράγωνο σε δύο ίσα σχήματα, στο σχήμα της εμφάνισε μόνο τις δύο από τις τέσσερις ευθείες. Στην συνέχεια χρωμάτισε με διαφορετικό τρόπο τα τέσσερα τετράγωνα που οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τετραγώνου χωρίζουν το τετράγωνο, αλλά απάντησε ότι δεν υπάρχουν δύο ευθείες που να χωρίζουν το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα σχήματα.



5.2 Ανάλυση ομοιότητας

Η ανάλυση ομοιότητας έγινε μέσω του λογισμικού CHIC Analysis (Correspondence & Hierarchical Cluster Analysis). To CHIC Analysis είναι ένα λογισμικό που υπάγεται στα λογισμικά της Ανάλυσης Δεδομένων (ΑΔ) το οποίο απευθύνεται στους ερευνητές οι οποίοι επιθυμούν να υλοποιήσουνε δύο ιδιαίτερα διαδεδομένες και συμπληρωματικές μεταξύ τους μεθόδους της Ανάλυσης Δεδομένων, οι οποίες είναι οι εξής:

1. την Παραγοντική Ανάλυση των Αντιστοιχιών (Correspondence Analysis) και
2. την Ανιούσα Ιεραρχική Ταξινόμηση ή Ιεραρχική Ανάλυση σε Συστάδες (Hierarchical Cluster Analysis).

Το λογισμικό αυτό ξεκίνησε την ανάπτυξή του το 2003 στο πλαίσιο της διδακτορικής διατριβής που εκπόνησε ο Άγγελος Μάρκος στο Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας, με την πολύτιμη συμβολή του Δρ. Γιώργου Μενεξέ.

Το CHIC Analysis χρησιμοποιείται ή έχει χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο της διδασκαλίας μαθημάτων Στατιστικής - Ανάλυσης Δεδομένων στο Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Μακεδονίας (προπτυχιακό, μεταπτυχιακό), στο Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης (μεταπτυχιακό), καθώς και στο Τμήμα Λογιστικής του Α.Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης (προπτυχιακό, μεταπτυχιακό). Το CHIC Analysis χρησιμοποιείται για τη διεκπεραίωση στατιστικών αναλύσεων σε προπτυχιακές, μεταπτυχιακές εργασίες και διατριβές, και άλλες δημοσιεύσεις.

Σύμφωνα με τον Άγγελο Μάρκου (Markos κ.α., 2010) το CHIC (Correspondence & HIerarchical Cluster) Analysis είναι ένα εξειδικευμένο πακέτο λογισμικού για την Ανάλυση Αντιστοιχιών και την Ιεραρχική Ανάλυση Συστάδων. Το λογισμικό CHIC Analysis είναι σύμφωνο τόσο με τη γαλλική προσέγγιση όσο και με το σύστημα ανάλυσης δεδομένων Gifi. Το CHIC Analysis συνδυάζει τα χαρακτηριστικά της γραφικής διεπαφής του CodeGear Delphi με την υπολογιστική ισχύ του MatLab.

Το λογισμικό υλοποιήθηκε ως μια προσπάθεια να συμβάλει στην αποτελεσματικότητα και την αξιοπιστία της Ανάλυσης Αντιστοιχιών. Για το σκοπό αυτό, προσφέρει ποικίλα βοηθήματα για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και εργαλεία για την κατασκευή ειδικών πινάκων δεδομένων. Μια τροποποιημένη έκδοση του αλγορίθμου Ανάλυσης Αντιστοιχιών εφαρμόζεται στην περίπτωση των πολυμεταβλητών. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στις γραφικές επιλογές για διαγράμματα, χάρτες και δενδρογράμματα.

Η ανάλυση

Η ανάλυση ομοιότητας περιορίσθηκε στις ασκήσεις της έρευνας. Ο λόγος αυτού του περιορισμού είναι ότι αν η ανάλυση αφορούσε όλο το ερωτηματολόγιο της έρευνας, τότε τα διαγράμματα ομμοιότητας θα είχαν πάρα πολλές μεταβλητές, με αποτέλεσμα να είναι δυσανάγνωστα τα αποτελέσματα.

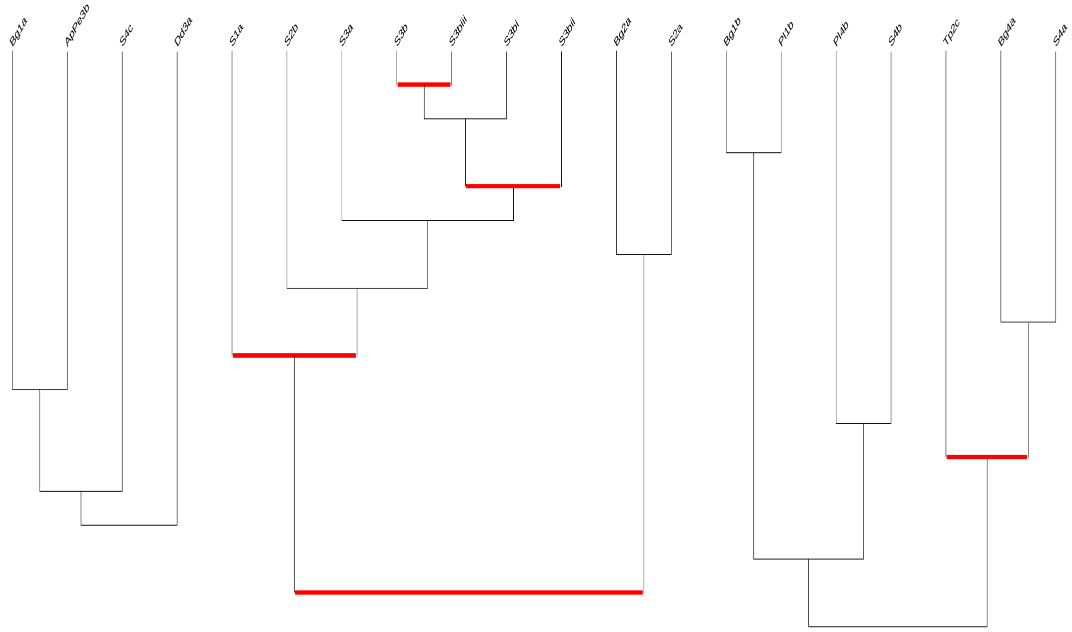
Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν στις τέσσερις ασκήσεις της έρευνας είναι οι παρακάτω:

Μεταβλητές

Ασκήσεις		
Βοηθητική Γραμμή 1	Ερ. (α)	Bg1a
Σωστά	Ερ. (α)	S1a
Βοηθητική Γραμμή 2	Ερ. (β)	Bg1b
Πολλαπλές λύσεις	Ερ. (β)	Pl1b
Βοηθητική Γρ1	Ερ. (α)	Bg2a
Σωστά	Ερ. (α)	S2a
Σωστά	Ερ. (β)	S2b
Τοποθέτηση Προβλήματος	Ερ. (γ)	Tp2c
Διαγώνιοι vs Διχοτόμοι	Ερ. (α)	Dd3a
Σωστά	Ερ. (α)	S3a
Σωστά	Ερ. (β)	S3b
Απάντηση vs Πολλαπλής Επιλογής	Ερ. (β)	ApPe3b
Σωστά	Ερ. (β i)	S3bi
Σωστά	Ερ. (β ii)	S3bii
Σωστά	Ερ. (β iii)	S3biii
Βοηθητική Γραμμή	Ερ. (α)	Bg4a
Σωστά	Ερ. (α)	S4a
Πολλαπλές λύσεις	Ερ. (β)	Pl4b
Σωστά	Ερ. (β)	S4b
Σωστά	Ερ. (γ)	S4c

Παρακάτω ακολουθούν οι αναλύσεις ομοιότητας για την πειραματική ομάδα και για την ομάδα ελέγχου.

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΟΜΑΔΑΣ (SIMILARITY TREE)



Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζετε το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας της πειραματικής ομάδας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων οι μαθητές (τα υποκείμενα) συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Στην πρώτη ομάδα υπάρχουν οι μεταβλητές (S1a, S2b, S3a, S2biii, S2bi, S2bii, Bg2a, S2a) δηλαδή οι μαθητές που απάντησαν σωστά στα αντίστοιχα υποερωτήματα των ασκήσεων. Η υποομάδα (Bg2a, S2a) μας δείχνει ότι οι μαθητές που βρήκαν την βοηθητική γραμμή στο ερώτημα α της άσκηση 2 κατάφεραν να την λύσουν σωστά.

Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τις μεταβλητές (Bg1b, Pl1b, Pl4b,S4b,Tp2c, Bg4a, S4a) με την υποομάδα (Tp2c, Bg4a, S4a) να αναδεικνύει ότι μαθητές που μπόρεσαν να τοποθετήσουν το πρόβλημα που ζητείται στο ερώτημα β της άσκησης 2 μπόρεσαν να λύσουν το ερώτημα α της άσκησης 4.

Υπάρχει επίσης η ομάδα μεταβλητών (Bg1a, ApPe3b, S4c, Dd3a). Οι μεταβλητές ApPe3b και Dd3a μας δείχνουν ότι οι μαθητές που έκαναν το λάθος να μπερδέψουν τις διχοτόμους με τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου απάντησαν το β ερώτημα της άσκησης 3 σαν να ήταν ερώτηση πολλαπλής επιλογής.

Από το διάγραμμα ομοιότητας παρατηρούμε ότι έχουν δημιουργηθεί 17 κόμβοι ομοιότητας:

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα

Classification at level: 1: (S3b S3biii) similarity: 0.999999

Classification at level: 2: ((S3b S3biii) S3bi) similarity: 0.999992

Classification at level: 3: (Bg1b Pl1b) similarity: 0.999919

Classification at level: 4: (((S3b S3biii) S3bi) S3bii) similarity: 0.999664

Classification at level: 5: (S3a (((S3b S3biii) S3bi) S3bii)) similarity: 0.987484

Classification at level: 6: (Bg2a S2a) similarity: 0.94567

Classification at level: 7: (S2b (S3a (((S3b S3biii) S3bi) S3bii))) similarity: 0.942048

Classification at level: 8: (Bg4a S4a) similarity: 0.859698

Classification at level: 9: (S1a (S2b (S3a (((S3b S3biii) S3bi) S3bii)))) similarity: 0.839998

Classification at level: 10: (Bg1a ApPe3b) similarity: 0.792044

Classification at level: 11: (Pl4b S4b) similarity: 0.706891

Classification at level: 12: (Tp2c (Bg4a S4a)) similarity: 0.644195

Classification at level: 13: ((Bg1a ApPe3b) S4c) similarity: 0.538867

Classification at level: 14: (((Bg1a ApPe3b) S4c) Dd3a) similarity: 0.363902

Classification at level: 15: ((Bg1b Pl1b) (Pl4b S4b)) similarity: 0.360663

Classification at level: 16: ((S1a (S2b (S3a (((S3b S3biii) S3bi) S3bii)))) (Bg2a S2a)) similarity: 0.245151

Classification at level: 17: (((Bg1b Pl1b) (Pl4b S4b)) (Tp2c (Bg4a S4a))) similarity: 0.115296

Σημαντικοί κόμβοι (Significant nodes):

at level: 1

at level: 4

at level: 9

at level: 12

at level: 16

Ο πιο σημαντικός κόμβος είναι ο κόμβος 1 (The most significant node is at level: 1)

Συχνότητα απαντήσεων

nb col : 20, nb lig : 39

Occurrence Average Standard deviations:

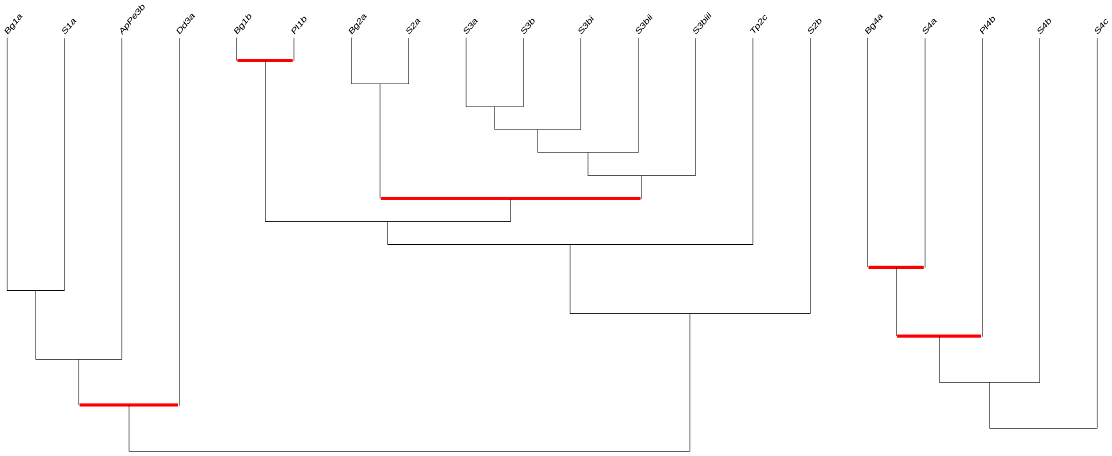
Bg1a	: 35.00	0.90	0.30
S1a	: 18.00	0.46	0.50
Bg1b	: 10.00	0.26	0.44
Pl1b	: 6.00	0.15	0.36
Bg2a	: 28.33	0.73	0.44
S2a	: 17.33	0.44	0.49
S2b	: 15.00	0.38	0.49
Tp2c	: 11.66	0.30	0.45
Dd3a	: 14.00	0.36	0.48
S3a	: 12.00	0.31	0.46
S3b	: 5.32	0.14	0.32
ApPe3b	: 9.00	0.23	0.42
S3bi	: 6.00	0.15	0.36
S3bii	: 8.00	0.21	0.40
S3biii	: 4.00	0.10	0.30
Bg4a	: 35.00	0.90	0.30
S4a	: 35.00	0.90	0.30
Pl4b	: 22.52	0.58	0.31
S4b	: 22.86	0.59	0.32
S4c	: 6.93	0.18	0.16

Δείκτες συσχέτισης (Correlation indexes):

	Bg1a	S1a	Bg1b	Pl1b	Bg2a	S2a	S2b	Tp2c	Dd3a	S3a	S3b	ApPe3b	S3bi	S3bii	S3biii	Bg4a	S4a	Pl4b	S4b	S4c
Bg1a		0.31	0.20	0.14	0.37	0.31	0.09	0.04	0.08	0.04	-0.03	0.19	-0.09	-0.04	0.11	0.44	0.44	0.27	0.27	0.20
S1a			0.28	0.32	0.34	0.42	0.43	0.11	-0.05	0.27	0.36	-0.02	0.32	0.29	0.37	-0.03	-0.03	0.09	0.12	0.13
Bg1b				0.73	-0.04	0.31	0.38	0.13	0.05	0.12	0.24	-0.18	0.24	0.14	0.19	0.20	0.20	0.23	0.21	0.43
Pl1b					-0.06	0.19	0.25	0.03	-0.02	0.18	0.41	-0.23	0.41	0.31	0.32	0.14	0.14	0.35	0.33	0.39
Bg2a						0.54	0.25	0.02	-0.39	0.29	0.21	0.11	0.10	0.32	0.21	0.17	0.17	0.27	0.28	0.09
S2a							0.57	0.37	-0.24	0.30	0.16	-0.08	0.05	0.19	0.21	-0.04	-0.04	0.02	0.05	0.17
S2b								0.46	-0.04	0.39	0.38	-0.18	0.25	0.25	0.43	0.09	0.09	0.05	0.08	0.41
Tp2c									0.22	0.09	-0.11	-0.05	-0.13	-0.20	-0.04	0.23	0.23	0.12	0.16	0.43
Dd3a										-0.50	-0.27	-0.16	-0.17	-0.25	-0.25	0.08	0.08	-0.02	0.01	0.05
S3a											0.53	-0.23	0.49	0.35	0.51	0.23	0.23	0.12	0.10	0.28
S3b												-0.24	0.93	0.78	0.92	0.15	0.15	0.09	0.07	0.29
ApPe3b													-0.23	-0.13	-0.19	0.19	0.19	0.28	0.26	-0.10
S3bi														0.66	0.79	0.14	0.14	0.12	0.10	0.25
S3bii															0.67	0.17	0.17	0.21	0.19	0.09
S3biii																0.11	0.11	0.00	-0.01	0.31
Bg4a																	1.00	0.63	0.63	0.37
S4a																		0.63	0.63	0.37
Pl4b																			0.99	0.19
S4b																				0.15
S4c																				

Ακολουθεί η ανάλυση ομοιότητας για την ομάδα ελέγχου.

ΔΕΝΔΡΟΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΟΜΑΔΑΣ ΕΛΕΓΧΟΥ (SIMILARITY TREE)



Το παραπάνω σχήμα παρουσιάζει το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας της ομάδας ελέγχου σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

Στην πρώτη ομάδα υπάρχουν οι μεταβλητές (Bg1a, S1a, ApPe3b, Dd3a, Bg1b, Pl1b, Bg2a, S2a, S3a, S2bi, S2bii, S2biii, Tp2c, S2b) με τις υποομάδες (Bg1b, Pl1b) και (Bg2a, S2a) που επιδεικνύουν ότι οι μαθητές που βρήκαν την βοηθητική γραμμή κατάφεραν να λύσουν το αντίστοιχο ερώτημα. Επίσης παρατηρούμε ότι στην υποομάδα (ApPe3b, Dd3a) οι μαθητές που μπέρδεψαν τις διχοτόμους του παραλληλογράμμου με τις διαγωνίους του, απάντησαν στο ερώτημα β της άσκησης 3 σαν να ήταν ερώτημα πολλαπλής επιλογής, επηρεασμένοι από την επίδραση του διδακτικού συμβολαίου (Brousseau, 1997).

Η δεύτερη ομάδα αποτελείται από τις μεταβλητές (Bg4a, S4a, Pl4b, S4b, S4c) με την υποομάδα (Bg4a, S4a) να δείχνει πάλι ότι οι μαθητές που βρήκαν την βοηθητική γραμμή κατάφεραν να λύσουν το αντίστοιχο ερώτημα, αλλά και τα ερωτήματα β και γ.

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα

Classification at level: 1: (Bg1b Pl1b) similarity: 1

Classification at level: 2: (Bg2a S2a) similarity: 1

Classification at level: 3: (S3a S3b) similarity: 1

Classification at level: 4: ((S3a S3b) S3bi) similarity: 1

Classification at level: 5: (((S3a S3b) S3bi) S3bii) similarity: 1

Classification at level: 6: ((((S3a S3b) S3bi) S3bii) S3biii) similarity: 1

Classification at level: 7: ((Bg2a S2a) ((((S3a S3b) S3bi) S3bii) S3biii)) similarity: 0.99995

Classification at level: 8: ((Bg1b Pl1b) ((Bg2a S2a) ((((S3a S3b) S3bi) S3bii) S3biii))) similarity: 0.999523

Classification at level: 9: (((Bg1b Pl1b) ((Bg2a S2a) ((((S3a S3b) S3bi) S3bii) S3biii))) Tp2c) similarity: 0.992247

Classification at level: 10: (Bg4a S4a) similarity: 0.988482

Classification at level: 11: (Bg1a S1a) similarity: 0.983784

Classification at level: 12: ((((Bg1b Pl1b) ((Bg2a S2a) ((((S3a S3b) S3bi) S3bii) S3biii))) Tp2c) S2b) similarity: 0.983471

Classification at level: 13: ((Bg4a S4a) Pl4b) similarity: 0.932303

Classification at level: 14: ((Bg1a S1a) ApPe3b) similarity: 0.91365

Classification at level: 15: (((Bg4a S4a) Pl4b) S4b) similarity: 0.900193

Classification at level: 16: (((Bg1a S1a) ApPe3b) Dd3a) similarity: 0.797737

Classification at level: 17: ((((Bg4a S4a) Pl4b) S4b) S4c) similarity: 0.68908

Classification at level: 18: ((((Bg1a S1a) ApPe3b) Dd3a) ((((Bg1b Pl1b) ((Bg2a S2a) ((((S3a S3b) S3bi) S3bii) S3biii))) Tp2c) S2b)) similarity: 0.285441

Significant nodes

at level: 1

at level: 7

at level: 10

at level: 13

at level: 16

Ο πιο σημαντικός κόμβος είναι ο κόμβος 7 (The most significant node is at level : 7).

Συχνότητα απαντήσεων

nb col : 20, nb lig : 55

	Occurrence	Average	Standard deviations:
Bg1a	: 34.00	0.62	0.49
S1a	: 29.00	0.53	0.50
Bg1b	: 6.00	0.11	0.31
Pl1b	: 5.00	0.09	0.29
Bg2a	: 5.00	0.09	0.29
S2a	: 5.00	0.09	0.29
S2b	: 10.00	0.18	0.39
Tp2c	: 9.00	0.16	0.37
Dd3a	: 33.00	0.60	0.49
S3a	: 2.00	0.04	0.19
S3b	: 2.00	0.04	0.19

ApPe3b : 18.00 0.33 0.47

S3bi : 2.00 0.04 0.19

S3bii : 2.00 0.04 0.19

S3biii : 2.00 0.04 0.19

Bg4a : 40.00 0.73 0.45

S4a : 39.00 0.71 0.45

Pl4b : 21.80 0.40 0.31

S4b : 21.80 0.40 0.31

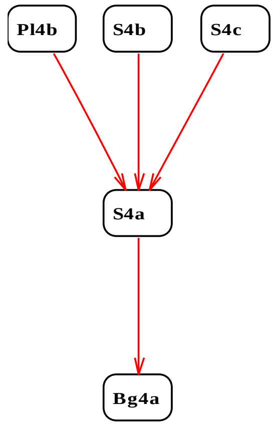
S4c : 8.91 0.16 0.18

Δείκτες συσχέτισης (Correlation indexes):

	Bg1a	S1a	Bg1b	Pl1b	Bg2a	S2a	S2b	Tp2c	Dd3a	S3a	S3b	ApPe3b	S3bi	S3bii	S3biii	Bg4a	S4a	Pl4b	S4b	S4c
Bg1a		0.76	0.28	0.25	0.25	0.25	0.27	0.25	0.58	0.15	0.15	0.47	0.15	0.15	0.15	0.36	0.32	0.33	0.33	0.23
S1a			0.33	0.30	0.30	0.30	0.07	0.22	0.64	0.18	0.18	0.27	0.18	0.18	0.18	0.32	0.36	0.40	0.40	0.19
Bg1b				0.90	0.50	0.50	0.14	0.16	0.05	0.56	0.56	0.25	0.56	0.56	0.56	0.08	0.10	0.11	0.11	0.01
Pl1b					0.34	0.34	0.01	0.03	0.13	0.28	0.28	0.32	0.28	0.28	0.28	0.05	0.06	0.07	0.07	0.06
Bg2a						1.00	0.34	0.20	0.00	0.61	0.61	0.05	0.61	0.61	0.61	0.19	0.20	0.20	0.20	0.06
S2a							0.34	0.20	0.00	0.61	0.61	0.05	0.61	0.61	0.61	0.19	0.20	0.20	0.20	0.06
S2b								0.43	0.19	0.41	0.41	0.17	0.41	0.41	0.41	0.29	0.20	0.36	0.36	0.36
Tp2c									0.16	0.44	0.44	-0.10	0.44	0.44	0.44	0.27	0.18	0.33	0.33	0.42
Dd3a										-0.24	-0.24	0.41	-0.24	-0.24	-0.24	0.50	0.46	0.46	0.46	0.26
S3a											1.00	-0.14	1.00	1.00	1.00	0.12	0.12	0.17	0.17	0.18
S3b												-0.14	1.00	1.00	1.00	0.12	0.12	0.17	0.17	0.18
ApPe3b													-0.14	-0.14	-0.14	0.25	0.19	0.27	0.27	0.30
S3bi														1.00	1.00	0.12	0.12	0.17	0.17	0.18
S3bii															1.00	0.12	0.12	0.17	0.17	0.18
S3biii																0.12	0.12	0.17	0.17	0.18
Bg4a																	0.96	0.80	0.80	0.56
S4a																		0.79	0.79	0.51
Pl4b																			1.00	0.68
S4b																				0.68
S4c																				

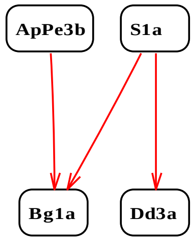
ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΟΜΑΔΑΣ ΕΛΕΓΧΟΥ (IMPLICATIVE GRAPHS)

Τα παρακάτω σχήματα παρουσιάζουν τα Συνεπαγωγικά Διαγράμματα. Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1→Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.



Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 1

Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που μπόρεσαν να βρουν πολλαπλές λύσεις στο ερώτημα β της άσκησης 4 και να το λύσουν σωστά, όπως και το ερώτημα γ συνεπάγεται ότι έλυσαν σωστά το ερώτημα α και βρήκαν την βοηθητική γραμμή στο ερώτημα αυτό.



Συνεπαγωγικό Διάγραμμα 2

Στο παραπάνω συνεπαγωγικό διάγραμμα παρατηρούμε ότι οι μαθητές που απάντησαν το ερώτημα β της άσκησης 3 σαν να ήταν ερώτηση πολλαπλής επιλογής είχαν καταφέρει να βρουν την βοηθητική γραμμή στο ερώτημα α της άσκησης 1, που αν δεν είχαν βρει δεν θα είχαν απαντήσει σωστά το αντίστοιχο ερώτημα. Το περίεργο είναι ότι οι μαθητές που απάντησαν σωστά στο ερώτημα α της άσκησης 1, μπέρδεψαν στο ερώτημα α της άσκησης 3 τις διχοτόμους του παραλληλογράμμου με τις διαγωνίους.

Συγκρίνοντας τις αναλύσεις ομοιότητας, της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου, παρατηρούμε επίσης ότι και στις δύο ομάδες οι μεταβλητές ApPe3b και Dd3a ανήκουν στην ίδια ομάδα μεταβλητών, αλλά με σημαντική διαφορά στην ομοιότητα των αντίστοιχων κόμβων, όπως φαίνεται παρακάτω:

Πειραματική Ομάδα

Classification at level: 14: (((Bg1a ApPe3b) S4c) Dd3a) similarity: 0.363902

Ομάδα ελέγχου

Classification at level: 16: (((Bg1a S1a) ApPe3b) Dd3a) similarity: 0.797737

Άρα οι μαθητές της ομάδας ελέγχου που υπέπεσαν στο σφάλμα να μπερδέψουν τις διχοτόμους με τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου στο ερώτημα α της άσκησης 3, στην συνέχεια απάντησαν στο ερώτημα β της ίδιας άσκησης σαν να ήταν ερώτηση πολλαπλής επιλογής. Το ίδιο έγινε και στην πειραματική ομάδα, όμως σε πολύ μικρότερο βαθμό, το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το Λογισμικό Δυναμικής Γεωμετρίας που χρησιμοποίησαν οι μαθητές της πειραματικής ομάδας τους βοήθησε να διακρίνουν τις περιπτώσεις των υποερωτημάτων και να μην κάνουν το σφάλμα να υποθέσουν ότι το ερώτημα είναι της μορφής ερώτησης πολλαπλής επιλογής.

6. Συμπεράσματα – Προτάσεις

Ο σκοπός αυτής της έρευνας ήταν η διερεύνηση της μετάβασης από την πρωτοβάθμια στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση και οι πτυχές της δημιουργικότητας των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας. Εξετάστηκαν προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές, τόσο με το γνωστικό αντικείμενο της Γεωμετρίας, όσο και με την δημιουργική διαδικασία, σε ασκήσεις που ζητούσαν πάνω της μίας λύσης, σε ασκήσεις που ήταν αναγκαία η βοηθητική γραμμή για την επίλυσή τους και σε ασκήσεις που ζητούσαν από τους μαθητές να τοποθετήσουν δικά τους νέα προβλήματα.

Τα συμπεράσματα της εργασίας αυτής συνοπτικά είναι τα εξής:

1. Χαμηλό γνωστικό επίπεδο μαθητών.
2. Αρνητική στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα της Γεωμετρίας.
3. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες προσαρμογής κατά την μετάβαση από την πρωτοβάθμια στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
4. Ευρήματα για την δημιουργικότητα:
   α) Αδυναμία εύρεσης πολλαπλών λύσεων σε προβλήματα Γεωμετρίας.
   β) Δυσκολία στην κατασκευή και κατανόηση Γεωμετρικών Σχημάτων.
   γ) Αδυναμία τοποθέτησης νέων προβλημάτων.
   δ) Τα Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας ενισχύουν την δημιουργικότητα.
5. Προσκόλληση στο Διδακτικό Συμβόλαιο.

Για τα αντίστοιχα παραπάνω ευρήματα προτείνουμε τα εξής:

Επανασχεδιασμός της θεωρίας των σχολικών βιβλίων.

1) Με χρήση περισσότερων παραδειγμάτων (met-befores – Tall, 2014).
2) Με χρήση Λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

Περισσότερες διδακτικές ώρες στο σχολικό πρόγραμμα.

Για την μετάβαση από την μία βαθμίδα στην άλλη.

1) Προσδιορισμός και ενίσχυση επιπέδου van Hiele μαθητών πριν την μετάβαση.
2) Καλύτερη συνεργασία μεταξύ σχολείων πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας για την ομαλή μετάβαση.

Για την ενίσχυση της δημιουργικότητας:

1) Εισαγωγή Προβλημάτων Πολλαπλών Λύσεων στο σχολικό βιβλίο και στην διδασκαλία της Γεωμετρίας.
2) Ενίσχυση της λειτουργικής κατανόησης του σχήματος.
3) Εισαγωγή στο σχολικό βιβλίο ασκήσεων τοποθέτησης νέων προβλημάτων.
4) Περισσότερη ενασχόληση με Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας.

Ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου μέσω της εισαγωγής απροσδόκητων προβλημάτων (πχ προβλήματα ανοιχτού τύπου).

Αναλυτικότερα τα ευρήματα και οι προτάσεις της εργασίας αυτής είναι τα εξής:

Αν και το θέμα της μαθηματικής δημιουργικότητας είναι πολυσύνθετο, δεν μπορούμε να ερευνούμε το θέμα αυτό αν δεν έχει γίνει σωστή αρχή, που στην προκειμένη περίπτωση θεωρώ πως είναι η καλή (όχι αναγκαία τέλεια) γνώση των βασικών όρων της Γεωμετρίας. Τόσο από την προσωπική πείρα στην εκπαίδευση, όσο και από την βιβλιογραφία η καλή γνώση της θεωρίας είναι ίσως το πιο σοβαρό θέμα στο οποίο χωλαίνουν το σύνολο σχεδόν των μαθητών. Αυτός ήταν κι ο λόγος ύπαρξης των ερωτήσεων τύπου σωστό λάθος και αυτό ήταν το σκεπτικό σχεδιασμού των ερωτήσεων αυτών. Όπως είναι φανερό από τα αποτελέσματα της παραγράφου 5.1.2 και με εξαίρεση τις ερωτήσεις που αφορούσαν τα τρίγωνα, οι μαθητές είχαν μέτριες έως πολύ χαμηλές επιδόσεις, κάτι που αντικατοπτρίζεται και στα αποτελέσματα των μαθητών στις ασκήσεις της έρευνας. Σίγουρα θα πρέπει να ερευνηθεί περαιτέρω το θέμα αυτό, αλλά ίσως ο επανασχεδιασμός των σχολικών βιβλίων, με συχνότερη χρήση των κατά τον Tall met-befores (Tall, 2014), δηλαδή συχνότερων εμπειριών επί των αντικειμένων της Γεωμετρίας και σίγουρα η πιο συχνή χρήση Λογισμικού Δυναμικής Γεωμετρίας μπορεί να ενισχύσει τις γνώσεις των μαθητών, τόσο σε βασικές έννοιες όσο και στην δυνατότητές τους επίλυσης Γεωμετρικών προβλημάτων. Στην διαδραστική έκδοση του σχολικού βιβλίου υπάρχουν συνδέσεις (links) με τα επονομαζόμενα «Μικροπειράματα», που αποτελούν εφαρμογές στο λογισμικό Geogebra, τα οποία δεν χρησιμοποιούνται συχνά έως καθόλου στην σχολική αίθουσα και ίσως χρειάζονται επανασχεδιασμό.

Από το ερωτηματολόγιο Likert είδαμε ότι οι περισσότεροι μαθητές δεν έχουν καλή γνώμη για το μάθημα της Γεωμετρίας, με εμφανή την προτίμησή τους στο μάθημα της Άλγεβρας. Οι πιο πολλοί μαθητές δήλωσαν με τις απαντήσεις τους ότι αντιμετωπίζουν προβλήματα στην κατανόηση, στην προετοιμασία και στην επίλυση προβλημάτων στο μάθημα της Γεωμετρίας, με αποτέλεσμα τις χαμηλές επιδόσεις τους, όμως παρόλα αυτά κατανοούν την χρησιμότητα του μαθήματος. Ίσως περισσότερες ώρες στο σχολικό πρόγραμμα θα βοηθούσε τους μαθητές να εξοικειωθούν με το μάθημα της Γεωμετρίας, αλλάζοντας έτσι την αρνητική προς το μάθημα στάση τους.

Μια άλλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές είναι η μετάβαση τους από την πιο χαλαρή προσέγγιση του μαθήματος στο Δημοτικό σχολείο στην πιο αυστηρή στο Γυμνάσιο, που πολύ πιθανόν έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι μαθητές δεν έχουν ολοκληρώσει την μετάβασή τους από το πρώτο επίπεδο van Hiele στο δεύτερο ή και στο τρίτο επίπεδο. Όπως είδαμε στις παραγράφους 2.3 και 2.4 το αναλυτικό πρόγραμμα της Α Γυμνασίου αποτελεί συνέχεια και επέκταση του προγράμματος των τελευταίων τάξεων του δημοτικού στη διδασκαλία και τη μάθηση της Γεωμετρίας, αλλά υπάρχει και η ανάγκη στενής συνεργασίας των σχολείων πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να αναγνωριστεί και να διευκολυνθεί η συνέχεια και η πρόοδος της διδασκαλίας της Γεωμετρίας, έτσι ώστε να μειωθούν οι εντάσεις και το άγχος που μπορεί να βιώνουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της μεταβατικής περιόδου.

Όπως έγινε φανερό από την παράγραφο 3.4 η αναζήτηση Πολλαπλών Λύσεων σε κάποιο πρόβλημα Γεωμετρίας ενισχύει την δημιουργικότητα των μαθητών, πρακτική όμως που είναι ξένη στα σχολικά βιβλία και στις μεθόδους διδασκαλίας των καθηγητών. Αυτό θα πρέπει να αλλάξει έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να επιλύουν προβλήματα όχι μόνο σχολικών μαθημάτων, αλλά και της καθημερινής ζωής με πολλούς τρόπους, γινόμενοι έτσι πιο ευέλικτοι σε οποιοδήποτε κλάδο ακολουθήσουν.

Αν και οι μαθητές απάντησαν ότι είναι σε θέση να κατανοήσουν και να χειριστούν το σχήμα ενός Γεωμετρικού προβλήματος, παρόλο που παραδέχονται ότι οι ασκήσεις που για την επίλυσή τους χρειάζονται κάποια βοηθητική γραμμή τους δυσκολεύει, οι απαντήσεις στις ασκήσεις τους έδειξαν ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Σχεδόν το σύνολο το μαθητών περιορίσθηκε στα σχήματα που τους δόθηκαν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας, χωρίς να κατασκευάσουν δικά τους όπου χρειαζόταν. Τα Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας και η δυνατότητα μετασχηματισμού των σχημάτων μπορεί να ενισχύσει την ικανότητα λειτουργικής κατανόησης του Γεωμετρικού σχήματος.

Από τα αποτελέσματα των ασκήσεων της έρευνας είναι προφανές ότι η ευχέρεια των μαθητών στο να μπορούν να παράγουν διαφορετικές λύσεις είναι πολύ χαμηλή. Η ευελιξία των μαθητών δεν είναι εύκολο να χαρακτηρισθεί λόγω του γεγονότος ότι οι μαθητές στην Α Γυμνασίου δεν έχουν πλήρη εικόνα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως ένα αξιωματικό σύστημα. Άλλη μια πρακτική που είναι ξένη προς τους μαθητές της Α Γυμνασίου είναι η τοποθέτηση προβλημάτων, που η βιβλιογραφία, όπως είδαμε στην παράγραφο 3.5 έχει αναγνωρίσει εδώ και καιρό ως μια εξαιρετικά σημαντική πνευματική δραστηριότητα στην επιστημονική έρευνα και ενισχύει την δημιουργικότητα των μαθητών, οπότε θα πρέπει να ενσωματωθεί στο πρόγραμμα του σχολείου.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν καθαρά ότι τα Λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας ενισχύουν την δημιουργικότητα των μαθητών. Σε όλες τις ασκήσεις η πειραματική ομάδα έδωσε πιο σωστές και πιο πολλές λύσεις, σε σχέση με την ομάδα ελέγχου. Η συστηματική εφαρμογή λογισμικών Γεωμετρίας μπορεί να ενισχύσει τόσο την κατανόηση βασικών εννοιών, όσο και στην καλλιέργεια της δημιουργικότητας των μαθητών στην επίλυση Γεωμετρικών προβλημάτων.

Ένα τελευταίο εύρημα, που δεν ήταν στους αρχικούς στόχους της εργασίας, ήταν η προσκόλληση των μαθητών στο διδακτικό συμβόλαιο (Brousseau, 1997). Ένα μεγάλο μέρος των μαθητών δεν κατανόησαν το β ερώτημα της άσκησης 3 και απάντησαν κυκλώνοντας ένα από τα τρία υποερωτήματα, νομίζοντας ότι είναι ερώτηση πολλαπλής επιλογής. Ιδιαίτερα σημαντική είναι επομένως η συνειδητοποίηση της επίδρασης του διδακτικού συμβολαίου από τους εκπαιδευτικούς ώστε να διαμορφώσουν κατάλληλα τις αλληλεπιδράσεις τους με τους μαθητές σε σχέση με τη γνώση. Στόχος τους πρέπει να είναι η ρήξη του διδακτικού συμβολαίου, καθώς μέσω αυτής επιτυγχάνεται η μάθηση των μαθηματικών. Η ρήξη του Διδακτικού Συμβολαίου μπορεί να επιτευχθεί μέσω της εισαγωγής απροσδόκητων προβλημάτων (πχ προβλήματα ανοιχτού τύπου).

Σίγουρα θα πρέπει να υπάρξουν πιο αναλυτικές έρευνες στο θέμα της μαθηματικής δημιουργικότητας εν γένει και ειδικά στο μάθημα της Γεωμετρίας. Αν και η έρευνα αυτή αποτελεί μια φωτογραφία ενός μικρού μέρους της εικόνας των μαθητών της Α Γυμνασίου, θα πρέπει να υπάρξουν παρεμβατικά προγράμματα, με στόχο την ανάπτυξη της μαθηματικής δημιουργικότητας, σε βάθος χρόνου.

7. <u>Βιβλιογραφία</u>

Adelabu, F. M., Makgato, M., & Ramaligela, M. S. (2019). The importance of dynamic geometry computer software on learners' performance in geometry. Electronic Journal of E-Learning, 17(1), 52–63.

Alspaugh, J. (1998). Achievement loss associated with the transition to middle school and high school. Journal of Educational Research, 92 (1), 20-25.

Anderson, J. R. (1990). The adaptive character of thought. Lawrence Erlbaum: Hillsdale.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245-274.

Askew, M. (2001). Policy, practices and principles in teaching numeracy: What makes a difference? In P. Gates (Ed.), Issues in mathematics teaching (pp. 105–119). London, GB: Routledge Falmer.

Avgerinos, E., & Gridos, P. (2019). Mathematical creativity in school mathematics: definitions, ways to elicit and empirical insights from geometry. Proceedings of the congress Creativity 2019: 1st World Congress of the Brazilian Academy of Philosophy in Honor of Newton da Costa 90th Birthday. Rio de Janeiro, Brazil.

Avgerinos, E., Gridos, P., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2019). On exploring mathematical creativity through cognitive and perceptual approach in geometry. Proceedings of the 12th annual International Conference of Education, Research and Innovation. Seville, Spain.

Aviram, A. (1999). The end of the age of innocent optimism. In A. Aviram & J. Richardson-Deberghes (Eds.), Proceedings of First Israeli Seminar on Pedagogical Technology and Educational Systems: Guiding Visions for the 21st Century. Jerusalem, The Center for Futurism in Education, Ben-Gurion University, Beer-Sheva. Aviram, A. (2001). From "computers in the classroom" to mindful radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture. Journal of Educational Change, 1, 331–352.

Aviram, A. (2001). From "computers in the classroom" to mindful radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture. Journal of Educational Change, 1, 331–352.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke H. N. & Movshovitz-Hadar N., (2000). The teaching of proof, ICME IX Discussion Document, Tokyo, Japan.

Battista, M.T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. Teaching Children Mathematics, 6 (3), 170-177.

Beal, C. R., & Cohen, P. R. (2012). Teach ourselves: Technology to support problem posing in the STEM classroom. Creative Education, 3, 513–519.

Bell, E. T., & Polya, G. (1945). How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. The American Mathematical Monthly, 52(10), 575. https://doi.org/10.2307/2306109

Bingolbali, E. (2011). Multiple solutions to problems in mathematics teaching: do teachers really value them? Australian Journal of Teacher Education 36(1), 18-31.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures, Proceedings of PME 20: Psychology of Mathematics Education 20th International Conference, Vol. 2, Valencia, Spain, 1996, pp. 121-128.

Bolden, D. S., Harries, T. V., & Newton, D. P. (2010). Pre-service primary teachers' conceptions of creativity in mathematics. Educational Studies in Mathematics, 73(2), 143–157. https://doi.org/10.1007/S10649-009-9207-Z/TABLES/1

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. Educational Studies in Mathematics, 83, 37–55.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des Mathematiques 1970-1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brunkalla, K. (2009). How to increase mathematical creativity – An experiment. The Montana Mathematics Enthusiast, 6(1), 257–266

Cai, J. (2005). U.S. and Chinese teachers' knowing, evaluating, and constructing representations in mathematics instruction. Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 7 (2), 135–169.

Cai, J., & Cifarelli, V. V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. Focus on Learning Problems in Mathematics, 27 (3), 43–72.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students'mathematical problem solving and problem posing. Journal of Mathematical Behavior, 21(4), 401-421.

Carroll, J. B., & Guilford, J. P. (1968). The Nature of Human Intelligence. American Educational Research Journal, 5(2), 249. https://doi.org/10.2307/1161820

Chang, K. E., Wu, L. J., Weng, S. E., & Sung, Y. T. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. Computers &

Education, 58 (2), 775–786. doi: 10.1016/j.compedu.2011.10.002.

Chazan, D. (1990). Students' microcomputer-aided exploration in geometry. Mathematics Teacher, 83, 628–635.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. Educational Studies in Mathematics, 24, 359–387.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environment. International Journal of Science and Mathematics Education, 2, 339–352.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry Environment. The Mathematics Enthusiast, 2(2), 125–143. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1029

Clarke, D. J. (1985). The impact of secondary schooling and secondary mathematics on student mathematical behaviour. Educational Studies in Mathematics, 16(3), 231–257.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 420–464). New York, NY: Macmillan.

Cobb, P. (1997). Learning from distributed theories of intelligence. In E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 169-176). Lahti, Finland.

Connor, J., & Moss, L. (2007). Student use of mathematical reasoning in quasi-empirical investigations using dynamic geometry software, Paper presented at Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (CRUME 2007), Retrieved on May 09, from http://cresmet.asu.edu/crume2007/papers/connor-moss.pdf.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. Educational Studies in Mathematics, 52, 243–270.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. Journal of Mathematics Teacher Education, 11, 395–415.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). The mathematical experience. New York: Houghton Mifflin.

De Villiers, M. (1988). An alternative approach to proof in dynamic geometry, R. Lehrer and D. Chazan, eds., Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, pp. 369-394.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 4(3), 397-418.

Dhombres, J. (1993). Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period. Educational Studies in Mathematics 1993 24:4, 24(4), 401–419. https://doi.org/10.1007/BF01273373

Ding, L., & Jones, K. (2006). Teaching geometry in lower secondary school in Shanghai, China. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 26, 41–46.

Dreyfus, T. (2000). Some views on proofs by teachers and mathematicians, A. Gagatsis, ed., Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education, Vol. 1, The University of Cyprus, Cyprus, pp. 11-25.

Duval, R. (1995), Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), Exploiting mental imagery with computers in mathematics education (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view, In C. Mammana & V. Villani (Ed.), Perspectives on the Teaching of geometry for the 21st century (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2004). Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings. Notes from Lecture.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking - The registers of semiotic representations. In Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Registers of Semiotic Representations. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). The evolution of physics. New York, NY: Simon & Schuster.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. ZDM, 41, 605–618

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems—A new perspective on talented mathematicians. Educational Studies in Mathematics, 17, 261–271.

Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (1989). Towards a theory of transition. In Proceedings of the 13th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 1 (pp. 236–243) Paris, France.

Ernest, P. (1991). The philosophy of mathematics education, Briston, PA: Falmer.

Ernest, P. (1994). Conversation as a metaphor for mathematics and learning. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics Day Conference, Manchester

Metropolitan University (pp. 58−63). Nottingham: BSRLM.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 42–53). Dordrecht, Netherlands: Kluwer

Ervynck, G. (2002). Mathematical Creativity. Advanced Mathematical Thinking, 42–53. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_3

European Parliament and the Council. (2006). Recommendation of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning. Retrieved from http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:en:PDF.

Fan, L., Qi, C., Liu, X., Wang, Y., & Lin, M. (2017). Does a transformation approach improve students' ability in constructing auxiliary lines for solving geometric problems? An intervention-based study with two Chinese classrooms. Educational Studies in Mathematics, 96, 229–248.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 403–434.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24(2), 139-162

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. International Journal of Science Education, 20(10), 1193- 1211.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: D. Reidel.

Fullarton, S. (1996). Perceived competence in the transition to secondary school mathematics. In Proceedings of the 19th conference on technology in mathematics education (pp. 208–214). Melbourne, Australia.

Gagatsis, A., Monoyiou, A., Deliyianni, E., Elia, I., Michael, P., Kalogirou, P., Panaoura, A., & Philippou, A. (2010). One way of assessing the understanding of a geometrical figure. Στο Α. Γαγάτσης, Ικανότητα Χρήσης Πολλαπλών Αναπαραστάσεων Συναρτήσεων και Γεωμετρίας: η Μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof, Proceedings of PME 22: Psychology of Mathematics Education 22nd International Conference, Vol. 2, Stellenbosch, South Africa, 1998, pp. 345-352.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. & Mariotti M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems, Proceedings of PME 20: Psychology of Mathematics Education 20th International Conference, Vol. 2, Valencia, Spain, pp. 121-128.

Getzels, J. W. (1979). Problem fi nding: A theoretical note. Cognitive Science, 3, 167–172.

Gomes, A. S., & Vergnaud, G. (2004). On the learning of geometric concepts using Dynamic Geometry Software. Novas Technologias na Educaçao, 2(1), 1-20.

Gridos, P., Avgerinos, E., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2022). Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry. International Journal of Science and Mathematics Education, 20(3), 619–636. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4

Gridos, P., Gagatsis, A., Elia, I. & Deliyianni, E. (2019). Mathematical creativity and geometry: The influence of geometrical figure apprehension on the production of multiple solutions. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), Proceedings of the 11th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 4 (pp. 789–796). Utrecht, Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands and ERME.

Hadamard, J. (1945). Essay on the psychology of invention in the mathematical field. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof, Interchange 21, 6-13

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof, Proceedings of PME 20: Psychology of Mathematics Education 20th International Conference, Vol. 2, Valencia, Spain, pp. 21-34.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge, ZDM Mathematics Education 40, 345-353.

Hansen, V. L. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 235–242). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof, F. K. Lester, ed., Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, Information Age Publishing Inc., Greenwich, CT, pp. 805-842.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school chilren.

Educational Studies in Mathematics, 18(1), 59–74. https://doi.org/10.1007/BF00367914

Heinz, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 41, 535–540.

Hemmi, K. & Löfwall, C. (2009). Why do we need proof? Proceedings of CERME 6, January 28th -February 1st 2009, Working Groups, Vol. 2, Lyon, France, pp. 201-210.

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. Journal for Research in Mathematics Education, 33, 176–203.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students? Cognition and Instruction, 24, 73–122.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Ggrouws (Ed.), Handbook for research on mathematics teaching and learning (pp. 65–97). New York, NY: Macmillan.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry? International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1(2), 169- 187.

House, P., & Coxford, A. F. (1995). Connecting mathematics across the curriculum. 245.

Hsieh, F.-J., Horng, W.-S., & Shy, H.-Y. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.). Proof and proving in mathematics education (pp. 279–304). NY: Springer.

Hsu, H. (2007). Geometric calculations are more than calculations. J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, & D.-Y. Seo (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, 57–64.

Hsu, H. Y., & Silver, E. A. (2014). Cognitive complexity of mathematics instructional tasks in a Taiwanese classroom: An examination of task sources. Journal for Research in Mathematics Education, 45, 460–496.

Johnson, D. T., Mason, M. M., & Adelson, J. (2021). The van Hiele Levels of Geometric Understanding. Polygons Galore, 4, 10–11. https://doi.org/10.4324/9781003237204-6

Jones, K. (1997). Children learning to specify geometrical relationships using a dynamic geometry package. In E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 121-128). Lahti, Finland.

Jones, K. (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18(1-2), 29-

34.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic Geometry software and their evolving Mathematical explanations. Educational Studies in Mathematics, 44, 55–85.

Jones, K., Gutierrez. A., & Mariotti, M. A. (2000). Proof in dynamic geometry environments: guest editorial, Educational Studies in Mathematics 44, 1-3.

Kieren, T. E. (1990). Understanding for teaching for understanding. The Alberta Journal of Educational Research, XXXVI, 191–201.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive science and mathematics education (pp. 123–147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Koichu, B., & Leron, U. (2015). Proving as problem solving: The role of cognitive decoupling. The Journal of Mathematical Behavior, 40, 233–244.

Kotsopoulos, D., & Cordy, M. (2009). Investigating imagination as a cognitive space for learning mathematics. Educational Studies in Mathematics, 70, 259–274.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. (J. Kilpatrick & I. Wirszup, Eds.; J. Teller, Trans.). Chicago: University of Chicago Press. (Original work published 1968)

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7, 51–61.

Laborde, C. (1998). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 113-121). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 26–43

Lehrer, R., & Chazan, D. (1998). Designing learning environments for developing understanding of geometry and space. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Leikin, R. (2003). Problem-solving preferences of mathematics teachers: Focusing on symmetry. Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 297–329

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), Creativity in mathematics and the education of gifted students (pp. 129–145). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher (Chapter 9).

Leikin, R., & Lev, H. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity, J. H. Wo, H. C. Lew, K. S. Park and D. Y. Seo, eds., Proceedings of the 31st International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, The Korea Society of Educational Studies in Mathematics, Korea, pp. 161-168.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2008). Solution spaces of multiple-solution connecting tasks as a mirror of the development of mathematics teachers' knowledge. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8(3), 233–251.

Leikin, R., & Levav-Waynberg, A. (2009). Development of teachers' conceptions through learning and teaching: Meaning and potential of multiple-solution tasks. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 9(4), 203–223.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 45, 159–166

Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (2019). Exploring Mathematical Creativity Using Multiple Solution Tasks. In Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students (pp. 129–145). https://doi.org/10.1163/9789087909352_010

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? Focus on Learning Problems in Mathematics, 28, 1–22.

L'Enseigement Mathematique. (1902), 4, 208–211.

Leung, A., & Lopez, F. J. (2002). Real, Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: a case of proof by contradiction, International Journal of Computers for Mathematical Learning 7(2), 145-165.

Leung, S. S. (1997). On the role of creative thinking in problem posing. Zentralbatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 29, 81–85.

Liljedahl, P., & Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity (pp. 17–19). For the learning of mathematics.

Llinares, S. & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. Mathematical Thinking and Learning, 16(3), 234-250.

Lo, J. J. & McCrory, R. (2009). Proof and proving in a mathematics course for prospective elementary teachers, ICME Study 19, Vol. 2, pp. 41-46.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

MacIver, D. J., & Epstein, J. L. (1991). Responsive practices in the middle grades: Teacher teams, advisory groups, remedial instruction, and school transition programs. American Journal of Education, 99(4), 587–622.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. Journal for the Education of the Gifted, 30(2), 236–260. https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264

Mariotti, M. A., Bartolini, B. M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, Proceedings of PME 21: Psychology of Mathematics Education 21st International Conference, Vol. 1, Lahti, Finland, pp. 180-195.

Markos, A. & Menexes, G. & Papadimitriou, I. (2010). The CHIC Analysis software v1.0. 10.1007/978-3-642-10745-0_44.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, Education Studies in Mathematics 60, 95-124.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency of mathematical activity. Journal for Research in Mathematics Education, 29(2), 121-142.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. Journal of mathematical behavior,17(2), 183-195.

Michael, P. (2013). Geometrical figure apprehension: cognitive processes and structure (Unpublished doctoral thesis). The University of Cyprus, Cyprus.

Midgley, C., Feldlaufer, H., & Eccles, J. S. (1989). Student/teacher relation and attitudes toward mathematics before and after the transition to junior high school. Child Development, 60, 981–992.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and NCTM standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM

Neubrand, M. (1998). General tendencies in the development of geometry teaching in the past two decades. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century (pp. 226–228). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Nicholls, G., & Gardner, J. (2013). Pupils in transition: Moving between key stages. In Pupils in Transition: Moving Between Key Stages. https://doi.org/10.4324/9780203048191

Olson, J. C., & Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. Educational Studies in Mathematics, 83, 27–36.

Palatnik, A., & Sigler, A. (2018). Focusing attention on auxiliary lines when introduced into geometric problems. International Journal of Mathematical Education in Science and

Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1489076.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. Educational Studies in Mathematics, 22(6), 575-593.

Piirto, J. (2004). Understanding creativity. Scottsdale, AZ: Great Potential Press.

Poincaré, H. (1948). Science and method. New York: Dover

Polya, G. (1954). Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (Vol. II). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1963). On learning, teaching, and learning teaching. American Mathematical Monthly, 70, 605–619

Polya, G. (1973). How to solve it; A new aspect of mathematical method. Princeton University Press.

Polya, G. (1981). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. New York: Wiley

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? Philosophia Mathematica 7(1), 5-41.

Rice, J. (2001). Explaining the negative impact of the transition from middle to high school on student performance in mathematics and science. Educational Administration Quarterly, 37, 372-400.

Runco, M. A. (1993). Creativity as an educational objective for disadvantaged students. Creativity: Research-Based Decision Making Series, 9306.

Runco, M. A., & Pritzker, S. R. (Eds.). (1999). Encyclopedia of creativity, Vol. 1 A–H and Vol. 2 I–Z with indexes. Academic Press.

Santos-Trigo, M., & Diaz-Barriga, E. (2000). Posing questions from proposed problems: Using technology to enhance mathematical problem solving. Mathematics Teacher, 93 (7), 578–580.

Schoenfeld, A. H. (1983). Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography. The Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press

Schoenfeld, A. H. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of “well-taught” mathematics courses, Educational Psychologist 23(2), 145-166.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? Journal of Mathematical Behaviour, 13, 55–80.

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2003). Is the “myth of secondary school” alive? Teachers’ beliefs concerning the effect of transition from primary to secondary school on the teaching of geometry (in Greek). Sygchroni Ekpaideysi, 132–133(4), 58–74.

Sdrolias, K. A., & Triandafillidis, T. A. (2008). The transition to secondary school geometry: Can there be a “chain of school mathematics”? Educational Studies in Mathematics, 67(2), 159–169. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9093-1

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? Mathematics Teacher, 78, 448–456.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics, 14 (1), 19–28.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. In ZDM, 06/1997, Τόμος 29, Τεύχος 3 (Vol. 29, Issue 3, pp. 75–80). https://doi.org/10.1007%2Fs11858-997-0003-x

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for Research in Mathematics Education, 27 (5), 521–539.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students’ mathematical problem posing. Teaching Children Mathematics, 12 (3), 129–135.

Silver, E. A., Ghoesseini, H., Gosen, D., Charalambos C. & Font Strawhun, B. T. (2005). ‘Moving from rhetoric to praxis: issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom, Journal of Mathematical Behavior 24, 287-301.

Sinclair, M. (2004). Working with accurate representations: The case of preconstructed dynamic geometry sketches. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 23(2), 191-208.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, Mathematics Teaching 77, 20-26.

Skemp, R. R. (1987). The psychology of learning mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41(1–2), 13–27. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0114-z

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in mathemat- ics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), Research agenda for mathematics education: The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1–22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Star, J. R., & Newton, J. K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. ZDM, 41, 557–567.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. Learning and Instruction, 18, 565–579

Sternberg, R. J. (2000). Handbook of creativity. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Stickles, P. (2011). An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing. Investigations in Mathematics Learning, 3 (2), 1–34.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York, NY: The Free Press.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), Technology in mathematics education (pp. 518– 525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Stupel, M., & Ben-chaim, D. (2014). One Problem, Multiple Solutions: How Multiple Proofs Can Connect Several Areas of Mathematics. Far East Journal of Mathematical Education, 11(2), 129–161. https://www.researchgate.net/profile/David-Ben-Chaim/publication/267438373_One_problem_multiple_solutions_how_multiple_proofs_can_connect_several_areas_of_mathematics/links/566d789e08ae62b05f0b1d9c/One-problem-multiple-solutions-how-multiple-proofs-can-co.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, Journal of Research in Mathematics Education 38, 289-321.

Tall, D. (2007). Teachers as mentors to encourage both power and simplicity in active material learning, Plenary Lecture at the Third Annual Conference for Middle East Teachers of Science, Mathematics and Computing, 17-19, March 2007, Abu- Dhabi.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. Educational Studies in Mathematics, 83 (1), 133–143.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100. ZDM, 41, 581–590.

Torrance, E.P. (1997), Creativity: Just wanting to know. Pretoria, South Africa: Benedic books.

Torregrosa, G. & Quesada, H. (2008). The coordination of cognitive processes in solving geometric problems requiring proof. In O. Figueras & A. Sepulveda (Eds.), Proceedings of the Joint Meeting of PME (Vol. 32, pp. 321-328). Mexico: PME.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry, University of Chicago.

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and USA. Educational Studies in Mathematics, 82 (2), 201–221.

Van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. A theory of Mathematics Education, Academic press Inc.

Voica, C., & Singer, F. M. (2012). Problem modification as an indicator of deep understanding. Paper presented at Topic Study Group 3, Activities and Programs for Gifted Students, ICME- 12, Seoul, Korea.

Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modifi cation as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. Zentralbatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 45, 267–279.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. The Journal of Mathematical Behavior, 24(3–4), 351–360.

Wittgenstein, L. (1978). Remarks on the foundations of mathematics (Rev. Ed.). Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press.

Yakes, C., & Star, J. R. (2009). Using comparison to develop flexibility for teaching algebra. Journal of Mathematics Teacher Education, retrieved from: http://www.springerlink.com/content/v21k817n9168x842/fulltext.pdf

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. Educational Studies in Mathematics, 21, 199–219.

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) http://www.pi-schools.gr/programs/depps/

Κολέζα, Ε. (2000). Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Εκδόσεις Leader Books. Αθήνα 2000.

Τουμάσης, Μ. (1994), Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών. Αθήνα, Gutenberg.

Χ. Λεμονίδης (2003). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας των Μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Εκδόσεις Πατάκη. Αθήνα, σελ. 235.

8. Παράρτημα

Στην επόμενη σελίδα ακολουθεί το τετρασέλιδο ερωτηματολόγιο που χορηγήθηκε στους μαθητές που λάβαν μέρος στην έρευνα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Το ερωτηματολόγιο μπήκε στην επόμενη σελίδα και ενότητα του αρχείου word για λόγους διατήρησης της μορφοποίησής του.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Ώρα έναρξης: …….

Δημογραφικά στοιχεία

(1) Σημείωσε το φύλο σου: Αγόρι ☐ Κορίτσι ☐

(2) Σημειώστε το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα και της μητέρας σου

	Πατέρας	Μητέρα
Απόφοιτος Γυμνασίου	☐	☐
Απόφοιτος Λυκείου	☐	☐
Απόφοιτος ΑΕΙ/ΤΕΙ	☐	☐
Κάτοχος Μεταπτυχιακού/Διδακτορικού	☐	☐

(3) Σημειώστε το βαθμό που πήρες στα Μαθηματικά στο Α΄ τετράμηνο …….

Ερωτήσεις Σωστό Λάθος

(4) Σημείωσε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.

1. Το τετράπλευρο που έχει 4 πλευρές ίσες είναι τετράγωνο. **Σ Λ**
2. Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές. **Σ Λ**
3. Οι ημιευθείες που έχουν κοινό άκρο λέγονται αντικείμενες. **Σ Λ**
4. Δεν υπάρχει αμβλυγώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. **Σ Λ**
5. Κάθε τόξο ενός κύκλου ανήκει πάνω σε μια ευθεία. **Σ Λ**
6. Η παραπληρωματική της γωνίας $60°$ είναι ίση με $30°$. **Σ Λ**
7. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο δύο γωνίες του είναι πάντα ίσες. **Σ Λ**
8. Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο. **Σ Λ**
9. Οι γωνίες που έχουν κοινή κορυφή λέγονται κατακορυφήν. **Σ Λ**
10. Οι παράλληλες ευθείες δεν έχουν κοινά σημεία. **Σ Λ**
11. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ απέναντι από την κορυφή Α βρίσκεται η πλευρά ΒΓ. **Σ Λ**
12. Ο κυκλικός δίσκος είναι το ίδιο σχήμα με τον κύκλο. **Σ Λ**
13. Δύο διάμετροι ενός κύκλου τον χωρίζουν σε τέσσερα ίσα τόξα. **Σ Λ**
14. Σε έναν κύκλο η διάμετρος είναι διπλάσια από την ακτίνα του. **Σ Λ**
15. Σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία του είναι αμβλεία. **Σ Λ**
16. Ο κύκλος έχει άπειρα κέντρα συμμετρίας. **Σ Λ**
17. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο μια γωνία του μπορεί να είναι ίση με $80°$. **Σ Λ**
18. Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές. **Σ Λ**
19. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις άξονες συμμετρίας. **Σ Λ**
20. Αν Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ το οποίο έχει μήκος 10 cm. τότε είναι $AM = 5cm$ και $MB = 0{,}5dm$. **Σ Λ**

Στάσεις απέναντι στη Γεωμετρία

(5) Αφού διαβάσεις τις παρακάτω προτάσεις σημείωσε πόσο συμφωνείς με αυτές

Πρόταση	**Πολύ λίγο**	**Λίγο**	**Πολύ**	**Πάρα πολύ**
1. Όλοι οι μαθητές μπορούν να μάθουν Γεωμετρία				
2. Η Γεωμετρία στο Γυμνάσιο είναι δυσκολότερη από ότι στο Δημοτικό				
3. Είμαι από εκείνους/ες που τα πάνε καλά στη Γεωμετρία.				
4. Η Γεωμετρία μου αρέσει περισσότερο από την Άλγεβρα				
5. Η Γεωμετρία είναι πιο εύκολη από την Άλγεβρα				
6. Η προετοιμασία για το μάθημα της Γεωμετρίας με ευχαριστεί				
7. Μου αρέσει να λύνω προβλήματα Γεωμετρίας				
8. Συνήθως μου παίρνει πολύ χρόνο να λύσω ένα πρόβλημα Γεωμετρίας				
9. Αγχώνομαι όταν πρόκειται να γράψω διαγώνισμα στη Γεωμετρία				
10. Η Γεωμετρία έχει δύσκολες έννοιες				
11. Η Γεωμετρία έχει πολύ θεωρία				
12. Δυσκολεύομαι να κατανοήσω ένα πρόβλημα Γεωμετρίας				
13. Δυσκολεύομαι να κατανοήσω το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας				
14. Δυσκολεύομαι να κατασκευάσω το σχήμα σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας				
15. Δυσκολεύομαι να χρησιμοποιήσω σωστά τα γεωμετρικά όργανα				
16. Δεν ξέρω πώς να ξεκινήσω την επίλυση σε ένα πρόβλημα Γεωμετρίας				
17. Καταλαβαίνω εύκολα ένα πρόβλημα Γεωμετρίας όταν το λύνει ο καθηγητής μου				
18. Αφού λύσω ένα πρόβλημα στην Γεωμετρία αναζητώ και άλλη λύση				
19. Δυσκολεύομαι σε προβλήματα Γεωμετρίας που δεν δίνεται το σχήμα				
20. Δυσκολεύομαι σε προβλήματα Γεωμετρίας που πρέπει να κατασκευάσω δικές μου γραμμές				
21. Η Γεωμετρία είναι πιο δύσκολη από την Άλγεβρα				
22. Η Γεωμετρία είναι ένα χρήσιμο μάθημα				
23. Στο μάθημα της Γεωμετρίας χρησιμοποιούμε συχνά κατάλληλο λογισμικό				

Ώρα λήξης: …….

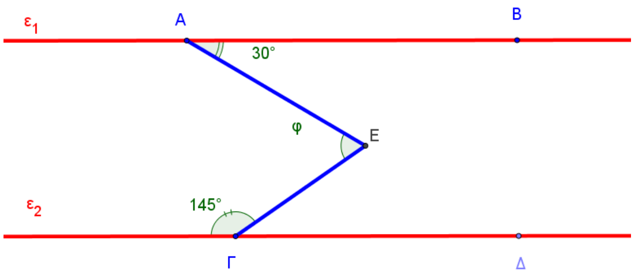
Ώρα έναρξης: …….

Ασκήσεις

Αφού διαβάσετε καλά τις εκφωνήσεις, προσπαθήστε να λύσετε τις παρακάτω ασκήσεις.

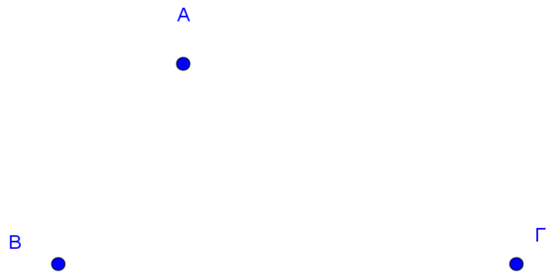
Άσκηση 1

(1) Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, τότε να βρεθεί η γωνία $\varphi = \widehat{AE\Gamma}$. (Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να φέρεται μία βοηθητική γραμμή;)
(2) Αν λύσατε το ερώτημα (α), μπορείτε να λύσετε το πρόβλημα ξανά φέροντας μια άλλη βοηθητική γραμμή;



Άσκηση 2

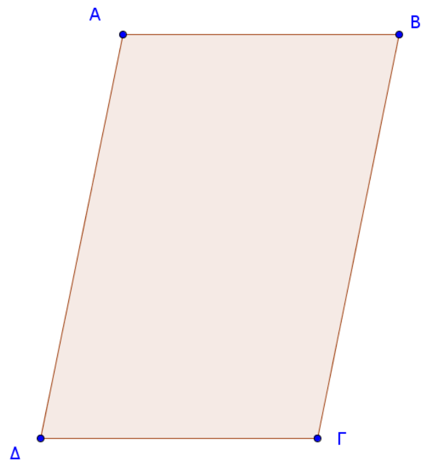
(1) Για την υδροδότηση τριών χωριών Α, Β και Γ, ζητάμε ένα σημείο Μ, στο οποίο θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα υδραγωγείο, με την ιδιότητα να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Βρείτε αυτό το σημείο.
(2) Θα ήταν η ίδια η απάντησή σας αν στο πρόβλημα υπήρχαν τέσσερα χωριά;
(3) Διατυπώστε ένα παρόμοιο πρόβλημα (πχ τα Α, Β και Γ δεν χρειάζεται να είναι χωριά).

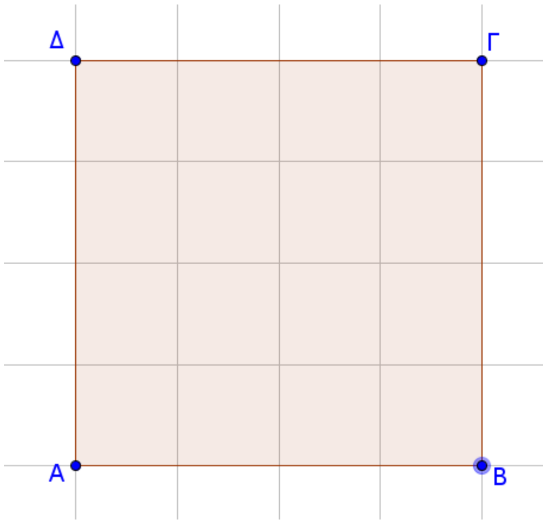


Άσκηση 3

Κατασκευάστε τις διχοτόμους ενός πλάγιου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

(1) Τι παρατηρείται για το σχήμα που δημιουργείται από αυτές, εάν προεκταθούν;
(2) Τι παρατηρείται για το σχήμα που δημιουργείται αν το ΑΒΓΔ είναι:
  (i) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο
  (ii) Ρόμβος
  (iii) Τετράγωνο





Άσκηση 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά $\alpha = 4cm$.

(1) Φέρνοντας κατάλληλη ευθεία να το χωρίσετε σε δύο ίσα σχήματα.
(2) Πόσες τέτοιες ευθείες μπορούμε να φέρουμε;
(3) Μπορούμε με 2 ευθείες να χωρίσουμε το τετράγωνο αυτό σε 4 ίσα σχήματα.

Ώρα λήξης: …….

Σε ευχαριστώ για τη συμμετοχή σου