ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Σπουδών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική εργασία

«Συστήματα αναμονής με στρατηγικούς πελάτες»

Κατιμερτζόγλου Μαρία

Επιβλέπων καθηγητής: Ιωάννης Δημητρίου

Μάρτιος 2026

«Συστήματα αναμονής με στρατηγικούς πελάτες»

Κατιμερτζόγλου Μαρία

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Δημητρίου Ιωάννης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Πουλάκης Δημήτριος
Ομότιμος Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.

Μάρτιος 2026

Περίληψη

Η Θεωρία Ουρών Αναμονής αποτελεί ένα διεπιστημονικό πεδίο που έχει αντικείμενο μελέτης τα συστήματα εξυπηρέτησης, γνωστά και ως ουρές αναμονής (συστήματα αναμονής). Πρόκειται για πρότυπα που μοντελοποιούν πραγματικά συστήματα εισόδου και εξόδου πελατών που λαμβάνουν εξυπηρέτηση, στα οποία εμφανίζεται τυχαιότητα. Αναπτύχθηκε από τον Agner Krarup Erlang (1878-1929) στις αρχές του εικοστού αιώνα, και μέχρι σήμερα συνεχίζει να αναπτύσσεται με αμείωτο ρυθμό. Οι εφαρμογές της Θεωρίας Ουρών Αναμονής είναι πολλές και τις συναντάμε σε διάφορα πεδία της καθημερινότητας αλλά και της τεχνολογίας. Στην παρούσα εργασία μελετώνται συστήματα αναμονής με στρατηγικούς πελάτες. Δηλαδή, πελάτες που λαμβάνουν αποφάσεις σύμφωνα με το συμφέρον τους. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις συστημάτων: συστήματα αναμονής με χρόνους επανεκκίνησης και συστήματα αναμονής με καταστροφές. Πιο συγκεκριμένα μελετάται η στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε συστήματα στα οποία ο υπάλληλος απενεργοποιείται όταν το σύστημα είναι άδειο, ενώ ενεργοποιείται ξανά όταν ένας πελάτης εισέλθει σ'αυτό, καθώς και τη στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε συστήματα τα οποία υπόκεινται σε καταστροφές. Στόχος της εργασίας αυτής είναι να υπολογιστεί η στρατηγική ισορροπίας των πελατών, για καθένα από αυτά τα συστήματα, και να αναδειχθεί η επίδραση της πληροφορίας στη στρατηγική των πελατών καθώς και στο κοινωνικό όφελος. Η μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς των πελατών είναι σημαντική διότι μπορεί να οδηγήσει στο σχεδιασμό συστημάτων εξυπηρέτησης που θα εξισορροπούν το συμφέρον του πελάτη με το κοινωνικό όφελος.

Abstract

Queueing Theory is an interdisciplinary field whose object of study is service systems, also known as queueing systems. These are models that represent real systems of customer arrivals and departures in which customers receive service and where randomness is involved. Queueing Theory was developed by Agner Krarup Erlang (1878–1929) at the beginning of the twentieth century and has continued to develop ever since. The applications of Queueing Theory are numerous and can be found in various areas of everyday life as well as in technology. In this thesis, queueing systems with strategic customers are studied. These are customers who make decisions according to their own benefit. Two types of systems are examined: queueing systems with setup (set up) times and queueing systems with catastrophes. More specifically, the strategic behavior of customers is studied in systems in which the server is turned off when the system is empty and is activated again when a customer arrives to it, as well as the strategic behavior of customers in systems that are subject to catastrophes. The aim of this work is to determine the equilibrium strategy of customers for each of these systems and to highlight the effect of information on customers' strategies as well as on social benefit. The study of the strategic behavior of customers is important, as it may lead to the design of service systems that balance the individual benefit of customers with social benefit.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον καθηγητή , κύριο Ιωάννη Δημητρίου για την αποδοχή του να είναι ο πρώτος επιβλέπων για τη διπλωματική μου εργασία, την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές, καθώς επίσης, τον συνεπιβλέποντα καθηγητή κύριο Πουλάκη Δημήτριο για την πολύτιμη συμβολή του και την συμμετοχή του στην επιτροπή επίβλεψης της εργασίας μου .

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
Εισαγωγή

1.1 Τι είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης

Ένα σύστημα εξυπηρέτησης (service system) ή αλλιώς ουρά αναμονής (queuing system) είναι ένα μαθηματικό πρότυπο που παριστάνει συστήματα εισόδου-εξόδου πελατών που δέχονται κάποιας μορφής εξυπηρέτηση από υπηρέτες, στα οποία υπεισέρχεται μέγιστη τυχαιότητα.

Η θεωρία ουρών αναμονής έχει αντικείμενο μελέτης τα παραπάνω συστήματα και ιστορικά αναπτύχθηκε τον 20ο αιώνα από τον Agner Krarup Erlang (1878-1929) όταν αυτός δημοσίευσε την εργασία του για τα τηλεφωνικά δίκτυα.

Παράδειγμα ενός τέτοιου συστηματος εξυπηρέτησης είναι ένα νοσοκομείο: όπου πελάτης θεωρείται ο ασθενής, η εξυπηρέτηση είναι η θεραπεία /εξέταση και ο εξυπηρετητής είναι ο γιατρός/νοσηλευτής.

1.2 Στρατηγικοί πελάτες και σύνδεση με τη Θεωρία Παιγνίων

Θεωρητικά οι πελάτες ενός τέτοιου συστήματος εξυπηρέτησης λαμβάνονται υπόψην ως παθητικές οντότητες που δεν λαμβάνουν αποφάσεις. Όμως στην πραγματικότητα οι πελάτες είναι ενεργητικές οντότητες οι οποίες λαμβάνουν αποφάσεις για να μεγιστοποιήσουν το συμφέρον τους (στρατηγικοί πελάτες). Παρόλα αυτά η συμπεριφορά τους επηρεάζεται από το ίδιο το σύστημα ή τη στρατηγική συμπεριφορά των άλλων πελατών (Π.χ. σε μία τράπεζα, σε μια δημόσια υπηρεσία, σε ένα εστιατόριο ένας πελάτης επηρεάζεται (είτε θετικά είτε αρνητικά) από τον συνωστισμό που συναντά φθάνοντας σε αυτό). Σε κάθε περίπτωση, ο συνωστισμός επηρεάζει τις αποφάσεις των δυνητικών πελατών ενός συστήματος. Στην περίπτωση αυτή, έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα λήψης αποφάσεων με πολλά μέρη: τους πελάτες, τους εξυπηρετητές και τον διαχειριστή. Ο καθένας από αυτούς λαμβάνει την απόφασή του, έχοντας υπόψη ότι και οι άλλες οντότητες λαμβάνουν αποφάσεις, η καθεμιά με σκοπό τη μεγιστοποίηση του δικού της οφέλους.

Οπότε δημιουργείται ένα ”παίγνιο” μεταξύ των διαφόρων μερών και το κατάλληλο πλαίσιο μελέτης και προτυποποίησης κάθε τέτοιου συστήματος είναι να εμπλέξουμε τη θεωρία ουρών αναμονής με τη θεωρία παιγνίων.

1.3 Βασικές έννοιες από τη θεωρία ουρών αναμονής

1.3.1 Ανανεωτική Διαδικασία-Διαδικασία Poisson

Ορισμός 1 (Ανανεωτική διαδικασία – Διαδικασία Poisson)
Έστω $\{S_n : n \geq 0\}$ σημειακή διαδικασία με $S_0 = 0$ και

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \geq 1,$$

όπου $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με κατανομή

$$F_X(t) = \Pr[X_i \leq t],$$

που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων. Έστω επίσης $\{N(t)\}$ η αντίστοιχη απαριθμήτρια διαδικασία με

$$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

να είναι το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί στο διάστημα $(0, t]$. Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ αναφέρεται ως απαριθμήτρια ανανεωτική διαδικασία που γεννάται από την ακολουθία $\{X_n : n \geq 1\}$.

Μια ανανεωτική διαδικασία με εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους με παράμετρο λ λέγεται διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

1.3.2 Βασική περιγραφή και ονοματολογία Kendall

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι:

• η διαδικασία αφίξεων

• οι χρόνοι εξυπηρέτησης
• ο αριθμός των παρόχων εξυπηρέτησης - εξυπηρετητών(υπαλλήλων)
• η χωρητικότητα του συστήματος και
• η πειθαρχία ουράς .

Ο D.G.Kendall στην εργασία του το 1933 εισήγαγε ένα σύστημα συμβολισμού για να περιγράψει με σύντομο τρόπο τα παραπάνω πέντε χαρακτηριστικά. Η ονοματολογία Kendall έχει τη μορφή **A/B/c/k ( ).**. Το **A** συμβολίζει τη διαδικασία αφίξεων, το **B** τους χρόνοι εξυπηρέτησης, το **c** το πλήθος εξυπηρετητών(υπαλλήλων) , το **k** τη χωρητικότητα του συστήματος και το **( )** την πειθαρχία ουράς (για παραδειγμα First Come First Served εν συντομία FCFS).

Η διαδικασία αφίξεων περιγράφει το πώς έρχονται οι πελάτες στο σύστημα. Οι αφίξεις είναι διαδοχικά γεγονότα που συμβαίνουν στον χρόνο. Το πιο απλό μοντέλο για τη μελέτη γεγονότων που συμβαίνουν στον χρόνο, με τυχαίο τρόπο και κάποια μορφή πιθανοθεωρητικής περιοδικότητας, είναι μια ανανεωτική διαδικασία, της οποίας ειδική περίπτωση είναι η συχνά χρησιμοποιούμενη διαδικασία Poisson. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Στη Θεωρία Ουρών Αναμονής, η **διαδικασία των αφίξεων** είναι συνήθως μια ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Το γράμμα **A** της ονοματολογίας Kendall προσδιορίζει τον τύπο της ανανεωτικής διαδικασίας.

Οι **χρόνοι εξυπηρέτησης** θεωρούνται στα κλασικά μοντέλα επίσης ανεξάρτητοι και ισόνομοι και αντιστοιχούν στο γράμμα **B** της ονοματολογίας Kendall, που παίρνει τις ίδιες τιμές με το γράμμα **A**.

Το γράμμα c της ονοματολογίας Kendall αναφέρεται στον αριθμό των υπηρετών. Δηλαδή πόσοι παράλληλοι υπηρέτες εξυπηρετούν τη ροή των πελατών που εισέρχεται στο σύστημα. Οι πελάτες βρίσκονται σε μια κοινή ουρά και εξπηρετούνται από τον πρώτο διαθέσιμο υπηρέτη, ή διαλέγούν τυχαία κάποιον απο τους άδειους και διαθέσιμους υπηρέτες.

Η χωρητικότητα του συστήματος παριστάνεται με το γράμμα k της ονοματολογίας Kendall και εκφράζει το μέγιστο αριθμό των πελατών που μπορεί να εξυπηρετηθεί από ένα σύστημα. Οι πελάτες αυτοί είτε περιμένουν να εξυπηρετηθούν είτε βρίσκονται ήδη σε διαδικασία εξυπηρέτησης. Στα κλασσικά μοντέλα ουρών αναμονής αν το σύστημα φτάσει στο μέγιστο της χωριτηκότητας του κάθε επιπλέον άφιξη απορρίπτεται και ο πελάτης θεωρείται χαμένος για πάντα. Υπάρχουν και μοντέλα στα οποία ο πελάτης αποχωρεί λόγω της αδυναμίας εξυπηρέτησης και επιστρέφει αργότερα για να εξυπηρετηθεί. Τέτοιου είδους μοντέλα δεν περιγράφονται από την ονοματολογία Kendall.

Τέλος, η πειθαρχία ουράς αφορά τον τρόπο με τον οποίο το σύστημα διαλέγει ποιόν πελάτη θα εξυπηρετήσει πρώτο. Υπάρχουν διάφορα είδη πειθαρχίας ουρας όπως FCFS (Firts Come First Served) δηλαδη ο πελάτης εξυπηρετείται σύμφωνα με τη σειρά άφιξης, η LCFS (Last-Come-First-Served) κατά την οποία οι πελάτες εξυπηρετούνται αντίστροφα από τη σειρά άφιξής τους, η SIRO (Service-In-Random-Order) όπου οι πελάτες εξυπηρετούνται τυχαία, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η σειρά άφιξής τους, η SSTF (Shortest-Service-Time-First) όπου επιλέγεται προς εξυπηρέτηση ο πελάτης που έχει τον μικρότερο χρόνο εξυπηρέτησης κ.α. Σε πολλές περιπτώσεις το σύστημα αντιμετωπίζει διαφορετικά τα είδη πελατών. Για παράδειγμα τα ταμεία express, για πελάτες με λίγα προϊόντα στα supermarkets.

Η χωρητικότητα του συστήματος και/ή η πειθαρχία ουράς μπορεί να παραλείπονται στην ονοματολογία Kendall. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που έχουμε απεριόριστη χωρητικότητα ή/και πειθαρχία FCFS αντίστοιχα.

1.3.3 Μέτρα απόδοσης συστήματος

Αφού περιγραφεί ένα σύστημα εξυπηρέτησης, το επόμενο που θα εξετάσουμε είναι το πώς συμπεριφέρεται. Δηλαδή τα μέτρα απόδοσης του συστήματος. Αυτό πρέπει να γίνει λαμβάνοντας υπόψη την οπτική του διαχειριστη του συστήματος, των πελατών και των εξυπηρετητών του συστήματος.

- **Μέτρα απόδοσης που αφορούν τον διαχειριστή**:

$Q(t)$ = πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή t, t ≥ 0
$Q_s(t)$ = πλήθος πελατών στην εξυπηρέτηση τη στιγμή t, t ≥ 0
$Q_q(t)$ = πλήθος πελατών στην αναμονή τη στιγμή t, t ≥ 0
Ισχύει ότι: Q(t)=$Q_q(t)$+$Q_s(t)$
Μας ενδιαφέρει η p_j, δηλαδή η οριακή κατανομή της Q(t), με

$$p_j = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t) = j], \quad j = 0, 1, \dots$$

όπου Q τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των πελατών τη χρονική στιγμή t και η p_j είναι η πιθανότητα μακροπρόθεσμα να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα.

Το οριακό μέσο πλήθος $\overline{Q}$, των πελατών στο σύστημα δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{Q} = E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q(u)\, du.$$

- **Μέτρα απόδοσης που αφορούν τους πελάτες:**

S_n= ο χρόνος παραμονής του n-στού πελάτη στο σύστημα
W_n= ο χρόνος παραμονής στην ουρά του n-οστού πελάτη
X_n= ο χρόνος εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη.

Η οριακή κατανομή του χρόνου παραμονής του πελάτη στο σύστημα δίνεται από τον τύπο:

$$F_S(x) = \lim_{n\to\infty} \Pr[S_n \leq x] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1\{S_k \leq x\}, \quad x \geq 0.$$

Ο οριακός μέσος χρόνος $\overline{S}$, παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{S} = E[S] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

- **Μέτρα απόδοσης που αφορούν τους εξυπηρετητές:**

  Σχετικά με τους εξυπηρετητές μας απασχολούν:

  I= διάρκεια της περιόδου αργίας του συστήματος

  Y= διάρκεια συνεχούς λειτουργίας του συστήματος

  Z= διάρκεια κύκλων απασχόλησης του συστήματος.

  Επομένως αρκεί αν μελετάμε τις οριακές κατανομές των I, Y, Z ή τις αντίστοιχες μέσες τιμές τους, δηλαδη $\overline{I}, \overline{Y}, \overline{Z}$.

1.3.4 Εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων

Έστω $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ οι διαδοχικές στιγμές αφίξεων και $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ οι διαδοχικές στιγμές αναχωρήσεων των πελατών. Ξεκινώντας από τη στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που περιγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο, ορίζουμε :

- $Q_n^- = Q(t_n^-)$: τον αριθμό των πελατών αμέσως πριν την n-οστή άφιξη πελάτη

- $Q_n^+ = Q(\tau_n^+)$: τον αριθμό των πελατών αμέσως μετά την n-οστή αναχώρηση πελάτη

Ορίζουμε επιπλέον τις a_j και d_j που είναι οι οριακές πιθανότητες να βρίσκονται j πελάτες στο σύστημα σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων ανίστοιχα, ενώ όπως είδαμε η p_j είναι η οριακή πιθανότητα σε συνεχή χρόνο.

Ο διαχειριστής ενός συστήματος, όντας εξωτερικός παρατηρητής, έχει διαφορετική αντίληψη από τους πελάτες του συστήματος. Η διαφορά αυτή στην οπτική μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η εικόνα του συστήματος για τον πελάτη και για το διαχειριστή μπορεί να είναι τελείως διαφορετική. Επομένως είναι σημαντικό να βρούμε έναν τρόπο να καταλάβουμε ποσοτικά το πώς αντιλαμβάνονται οι πελάτες το συνωστισμό του συστήματος κατα την είσοδο και την έξοδό τους από αυτό. Οπότε:

$$a_j = \lim_{n\to\infty} \Pr(Q_n^- = j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{Q_k^- = j\}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

$$d_j = \lim_{n\to\infty} \Pr(Q_n^+ = j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}\{Q_k^+ = j\}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

1.3.5 Τέσσερα Βασικά Αποτελέσματα

Ρυθμός συνωστισμού-Ευστάθεια

Έστω λ ο ρυθμός αφίξεων σε ένα σύστημα και b ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης και μ=$1/b$ μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης τότε ο **ρυθμός συνωστισμού ρ** ισούται με το γινόμενο του ρυθμού αφίξεων λ επί τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b, δηλαδή $\rho = \lambda b = \lambda/\mu$. Το μέγιστο ποσό εργασίας που μπορεί να φέρει σε πέρας το σύστημα ανά χρονική μονάδα είναι ίσο με το πλήθος των υπηρετών. Διαισθητικά, για να είναι ένα σύστημα ευσταθές και να μην απειρίζεται η ουρά θα πρέπει ο ρυθμός συνωστισμού να είναι μικρότερος από τη μέγιστη δυνατότητα διεκπεραίωσης που έχει το σύστημα . Δηλαδή:

Όταν μιλάμε για ευστάθεια συστήματος ουσιαστικά εννοούμε ότι ο ρυθμός εισόδου πελατών στο σύστημα δεν υπερβαίνει το ρυθμό εξυπηρέτησης και άρα δεν οδηγούμαστε σε άπειρες ουρές δηλαδή σε αστάθεια.

Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων και ιδιότητα PASTA

- **Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων**

  Σε συστήματα στα οποία οι πελάτες καταφθάνουν και αναχωρουν μεμονωμένα, οι οριακές κατανομές των αφίξεων και των αναχωρήσεων συμπίπτουν, δηλαδή ισχύει ότι a_j=d_j

- **Αρχή PASTA (Poisson - Arrivals-See-Time-Average)**

  Σε συστήματα εξυπηρέτησης όπου οι πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poissonι ισχύει ότι (a_j)=(d_j), δηλαδή οι κατανομές ισορροπίας αφίξεων και αναχωρήσεων συμπίπτουν.

  Οι ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων και η αρχή PASTA μπορούν να συνδυαστούν:

  Σε συστήματα εξυπηρέτησης με μεμονωμένες μεταβάσεις (αφίξεις, αναχωρήσεις) και Poisson διαδικασία αφίξεων όλες οι κατανομές ισορροπίας του πλήθους των πελατών συμπίπτουν:

  (p_j)=(a_j)=(d_j)

- **Ο νόμος του Little**

(1) **(ανοιχτά συστήματα)** Έστω ένα *ευσταθές* σύστημα εξυπηρέτησης με μέσο πλήθος πελατών $E(Q)$, ρυθμό αφίξεων λ και μέσο χρόνο παραμονής πελάτη $E(S)$. Τότε:

$$E(Q) = \lambda E(S).$$

(2) **(κλειστά συστήματα)** Τότε:

$$E(Q) = \gamma E(S),$$

όπου γ ο ρυθμός αναχωρήσεων.

Σημείωση:

Ανοιχτά ονομάζονται τα συστήματα στα οποία όσοι φτάνουν στο σύστημα εισέρχονται σε αυτό και ο πραγματικός ρυθμός εισόδου ισούται με τον ρυθμό εισόδου.

Κλειστά ονομάζονται τα συστήματα τα οποία είναι πχ πεπερασμένης χωρητικότητας και ο πραγματικός ρυθμός εισόδου δεν ισούται με τον πραγματικό ρυθμό εισόδου αφού αν το σύστημα είναι κατειλημμένο ένα ποσοστό πελατών που φθάνουν, δεν θα εισέλθει σε αυτό.

1.3.6 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου. Το μοντέλο M/M/1

Μία Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ) είναι το πιο απλό μοντέλο για να περιγράψουμε ένα σύστημα με διακριτό χώρο καταστάσεων σε συνεχή χρόνο και άπειρη χωρητικότητα. Η ονομασία του συγκεκριμένου μοντέλου προέρχεται από τον Ρώσσο μαθηματικό Αντρέι Μάρκοφ.

Βασική είναι η Μαρκοβιανή Ιδιότητα η οποία δηλώνει ότι η πληροφορία που έχουμε για το σύστημα (πχ μια αλυσιδα Μαρκοφ), αρκεί για να έχουμε όλη την πιθανοθεωρητική πληροφορία για την εξέλιξή του. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι μελλοντική κατάσταση του συστήματος εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση, δηλαδή ένα τέτοιο σύστημα είναι ερμηνεύσιμο μόνο με βάση το παρόν.

Στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με την ουρά M/M/1. Η **M/M/1** ουρά είναι ένα σύστημα εξυπηρέτησης με Poisson διαδικασία αφίξεων (δηλ. ανεξάρτητους εκθετικούς ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων), εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και 1 εξυπηρετητή που έχει άπειρη χωρητικότητα και λειτουργεί υπό την πειθαρχία ουράς FCFS. Το πρώτο γράμμα M υποδηλώνει ότι η διαδικασία αφίξεων είναι χωρίς μνήμη (memoryless) και το δεύτερο M ότι οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι επίσης χωρίς μνήμη. Η M/M/1 ουρα είναι Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕ ΒΑΣΙΚΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ ΓΙΑ ΤΗ M/M/1

Μέγεθος	**Μαθηματική έκφραση**
Πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες	$p_n = (1-\rho)\rho^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$
Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα	$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho}$
Αναμενόμενος χρόνος παραμονής	$E(S) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$
Μέση περίοδος συνεχούς λειτουργίας	$E(BP) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

Όπου ρ= ο ρυθμός συνωστισμού
λ=ο ρυθμός αφίξεων
μ=ο ρυθμός εξυπηρέτησης

1.4 Βασικές έννοιες από τη θεωρία παιγνίων

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα, οι οντότητες που συμμετέχουν σε ένα σύστημα αναμονής μπορούν να θεωρηθούν στρατηγικοί παίκτες. Οι αποφάσεις τους λαμβάνονται με τρόπο που μεγιστοποιεί το ατομικό τους όφελος, γεγονός που δημιουργεί πρόσφορο έδαφος για την ανάλυση των προβλημάτων λήψης αποφάσεων με τα εργαλεία τόσο της θεωρίας ουρών όσο και της θεωρίας παιγνίων. Στα προβλήματα αυτά περιλαμβάνονται μεταξύ άλλων

- η αναζήτηση στρατηγικών που μεγιστοποιούν το κοινωνικό όφελος
- η μελέτη στρατηγικών ισορροπίας — καταστάσεων δηλαδή στις οποίες καμία από τις εμπλεκόμενες οντότητες δεν έχει κίνητρο να μεταβάλει μονομερώς τη στρατηγική της.
- παρεμβάσεις για την εξισορρόπηση προσωπικού και κοινωνικού οφέλους κ.α

Η έννοια της στρατηγικής ισορροπίας προέρχεται από την εργασία του Αμερικανού Μαθηματικού John Nash (1950). Ο Nash εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας σε στρατηγικά παιχνίδια, γνωστή σήμερα ως ισορροπία Nash (Nash equilibrium). Στην ισορροπία αυτή, καμία από τις εμπλεκόμενες οντότητες δεν έχει κίνητρο να τροποποιήσει μονομερώς τη στρατηγική της.

Το πιο γνωστό παράδειγμα ισορροπίας Nash είναι το ”δίλημμα του φυλακισμένου”. Δύο κατηγορούμενοι, καλούνται να αποφασίσουν αν θα ομολογήσουν ή αν θα σιωπήσουν. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Κατηγορούμενος Β: Σιωπή	**Κατηγορούμενος Β: Ομολογία**
Κατηγορούμενος Α: Σιωπή	(Μικρή ποινή, Μικρή ποινή)	(Βαριά ποινή, Ελευθερία)
Κατηγορούμενος Α: Ομολογία	(Ελευθερία, Βαριά ποινή)	(Μεσαία ποινή, Μεσαία ποινή)

Η ισορροπία Nash επιτυγχάνεται στην περίπτωση της αμοιβαίας ομολογίας αφού κανένας από τους δύο δεν έχει κίνητρο να αλλάξει μονομερώς τη στρατηγική του. Η στρατηγική της αμοιβαίας σιωπής δεν αποτελεί ισορροπία Nash αφού οι παίκτες, δηλαδή οι κρατούμενο, έχουν κίνητρο να την αλλάξουν μονομερώς, επιλέγοντας την ομολογία, καθώς έτσι θα αυξήσουν το προσωπικό τους ώφελος.

Το 1969, ο P. Naor, στην εργασία του The Regulation of Queue Size by Levying Tolls, διατύπωσε με σαφήνεια αυτό που αρκετοί οικονομολόγοι είχαν ήδη παρατηρήσει: ότι οι συμμετέχοντες σε ένα σύστημα αναμονής υιοθετούν στρατηγική συμπεριφορά με σκοπό να μεγιστοποιήσουν το ατομικό τους συμφέρον. Το αποτέλεσμα, ωστόσο, είναι η διαμόρφωση μιας ισορροπίας Nash, η οποία δεν ταυτίζεται με το μέγιστο κοινωνικό όφελος, φαινόμενο ανάλογο με εκείνο που παρατηρείται στο «δίλημμα του φυλακισμένου».

Συνεπώς, δεδομένου ότι οι πελάτες δρουν στρατηγικά, η απόφασή τους να εισέλθουν ή όχι σε ένα σύστημα μπορεί να τους αποφέρει όφελος ή ζημία, ενώ ταυτόχρονα επηρεάζει και την απόδοση του συστήματος στο σύνολό του. Το βασικό ζητούμενο είναι να εντοπιστεί η στρατηγική που επιτυγχάνει ισορροπία μεταξύ ατομικού και κοινωνικού συμφέροντος.

Παρακάτω θα δούμε κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας παιγνίων οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση των στρατηγικών, των λήψεων αποφάσεων και εύρεσης ισορροπίας σε συστήματα (ουρές αναμονής) στα οποία οι πελάτες αποφασίζουν αν θα εισέλθουν ή όχι επηρεάζοντας με τις αποφάσεις τους τόσο το ατομικό όσο και το συλλογικό αποτέλεσμα.

Ένα παιχνίδι ορίζεται από:

- Ένα σύνολο παικτών $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Για κάθε παίκτη i, ένα σύνολο στρατηγικών (ή σχεδίων δράσης) A_i.
- Για κάθε παίκτη i, μία συνάρτηση πληρωμής U_i, που καθορίζει το όφελος του ανάλογα με τις επιλογές όλων των παικτών.

Το σύνολο A_i περιλαμβάνει όλες τις πιθανές στρατηγικές του παίκτη i, δηλαδή τους κανόνες που καθορίζουν πώς θα παίξει σε κάθε κατάσταση του παιχνιδιού. Κάθε τέτοια επιλογή ονομάζεται **καθαρή στρατηγική**.

Αντί να επιλέξει μία μόνο καθαρή στρατηγική, ο παίκτης μπορεί να χρησιμοποιήσει μια **μεικτή στρατηγική**, δηλαδή μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στο A_i. Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης επιλέγει κάθε καθαρή στρατηγική με κάποια πιθανότητα. Το σύνολο όλων των μεικτών στρατηγικών του παίκτη i συμβολίζεται με $\mathcal{S}_i$.

Ένα **προφίλ στρατηγικών** είναι ένας συνδυασμός στρατηγικών (καθαρών ή μεικτών), μία για κάθε παίκτη:

$$s = (s_1, s_2, \ldots, s_n), \quad s_i \in \mathcal{S}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Σε κάθε παίκτη αντιστοιχεί μία πραγματική συνάρτηση πληρωμής $F_i(s)$, η οποία καθορίζει την πληρωμή που λαμβάνει ο παίκτης i, αν ακολουθήσει τη στρατηγική s_i και οι υπόλοιποι παίκτες ακολουθήσουν τη στρατηγική s_{-i} . Με το s_{-i}

συμβολίζουμε ένα προφίλ στρατηγικών για το σύνολο των παικτών $N \setminus \{i\}$. Η συνάρτηση $F_i(s) = F_i(s_i, s_{-i})$ είναι γραμμική ως προς τη στρατηγική s_i.

Έστω s_i^1, s_i^2 δύο στρατηγικές του παίκτη i. Λέμε ότι η στρατηγική s_i^1 *κυριαρχεί τελείως ασθενώς* τη στρατηγική s_i^2, αν για κάθε s_{-i} ισχύει:

$$F_i(s_i^1, s_{-i}) \geq F_i(s_i^2, s_{-i}),$$

Μια στρατηγική s_i^* είναι *βέλτιστη απάντηση (best response)* για τον παίκτη i, δεδομένου του προφίλ s_{-i}, αν ισχύει:

$$s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} F_i(s_i, s_{-i}).$$

δηλαδή

$$F_i(s_i^*, s_{-i}) \geq F_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i.$$

. Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων στο s_{-1} συμβολίζεται με BR(s_{-1}).

Έστω $s^e = (s_1^e, s_2^e, \ldots, s_n^e)$ ένα προφίλ στρατηγικών.

Ένα προφίλ στρατηγικών s^e ονομάζεται *προφίλ ισορροπίας (equilibrium profile)*, αν για κάθε παίκτη $i \in N$, η στρατηγική s_i^e είναι βέλτιστη απάντηση απέναντι στο s_{-i}^e. Δηλαδή:

$$F_i(s_i^e, s_{-i}^e) \geq F_i(s_i, s_{-i}^e), \quad \forall s_i \in S_i,\ i \in N.$$

Δηλαδή, κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει την πληρωμή του αν αλλάξει μονομερώς στρατηγική.

Οι παραπάνω έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων είναι πολύ χρήσιμες για τη μελέτη της στρατηγικής συμπεριφοράς πελατών. Για να γίνει η μελέτη αυτή ομως, δημιουργούμε ανάλογες έννοιες με τις παραπάνω θεωρώντας ότι ολοι οι πελάτες είναι όμοιοι.

Έστω S το κοινό σύνολο στρατηγικών και F η συνάρτηση πληρωμής. Έστω επίσης $F(x, y)$ η πληρωμή που λαμβάνει ένας παίκτης αν επιλέξει τη στρατηγική x, όταν όλοι οι υπόλοιποι παίκτες επιλέγουν τη στρατηγική y.

Μια στρατηγική $s^e \in S$ ονομάζεται *συμμετρική ισορροπία (symmetric equilibrium)* αν ισχύει:

$$F(s^e, s^e) \geq F(s, s^e), \quad \forall s \in S.$$

Δηλαδή, η s^e είναι συμμετρική ισορροπία αν αποτελεί βέλτιστη απάντηση απέναντι στον εαυτό της.

Έστω $F(x, y)$ η πληρωμή για έναν πελάτη που ακολουθεί τη στρατηγική x, όταν όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική y. Υποθέτουμε ότι για κάθε y υπάρχει μία μοναδική βέλτιστη απάντηση $x(y)$, η οποία δίνεται από:

$$x(y) = \arg\max_{x} F(x, y).$$

Συμπεριφορές Follow-The-Crowd (FTC) και Avoid-The-Crowd (ATC)

Ενδιαφερόμαστε για περιπτώσεις που η $x(y)$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, τότε ισχύουν τα εξής:

- Αν η $x(y)$ είναι γνησίως αύξουσα, η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι τύπου **Follow-The-Crowd (FTC)**. Σε αυτή την περίπτωση, ο επιλεγμένος πελάτης αλλάζει στρατηγική προς την ίδια κατεύθυνση με τους υπόλοιπους. Συνήθως υπάρχουν πολλαπλές στρατηγικές ισορροπίας.

- Αν η $x(y)$ είναι γνησίως φθίνουσα, η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών είναι τύπου **Avoid-The-Crowd (ATC)**. Σε αυτή την περίπτωση, ο επιλεγμένος πελάτης αλλάζει στρατηγική αντίθετα από τους υπόλοιπους. Συνήθως υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας.

Στρατηγικές κατωφλίου :

Κάθε πελάτης που σκέφτεται να μπει σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης και έχει εικόνα για το πλήθος των πελατών που ήδη βρίσκονται μέσα σε αυτο, καλείται να επιλέξει ανάμεσα σε δύο αποφάσεις, έστω A_1 και A_2

Αν δεν υπάρχει καμία άλλη διαθέσιμη πληροφορία για την κατάσταση του συστήματος τότε ορίζουμε ως γενική στρατηγική το διάνυσμα q= (q_0, q_1, q_2,....) με q_i την πιθανότητα να επιλέξει ένας πελάτης με βάση την απόφαση A_1 όταν το πλήθος των πελατών εντός του συστήματος είναι i.

Μία στρατηγική ονομάζεται **καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n** αν είναι της μορφής $q = (1, 1, 1, .1, 0, 0, ..)$. Με μία τέτοια στρατηγική, ο πελάτης λαμβάνει την απόφαση A_1 αν το πλήθος των πελατών συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου ειναι το πολύ n.

Μία στρατηγική ονομάζεται **μεικτή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι n+p** αν είναι της μορφής $q = (1, 1, 1, , , , p, 0, 0, ...)$, δηλαδη με 1 στις n πρώτες θέσεις $p \in [0, 1]$ στη n+1 θέση και 0 στις υπόλοιπες θέσεις. Αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης λαμβάνει την απόφαση A_1 αν στο σύστημα υπάρχουν 0,1,2,...,n-1 πελάτες και την απόφαση A_2 αν στο σύστημα υπάρχουν n+1, n+2, ... πελάτες. Σε περίπτωση που στο σύστημα υπάρχουν ακριβώς n πελάτες λαβάνει την απόφαση A_1 με πιθανότητα p και την απόφαση A_2 με πιθανότητα 1-p. Αν p=0 ή p=1 τότε η μεικτή στρατηγική ανάγεται σε καθαρή στρατηγική κατωφλίου.

Πλαίσιο ατομικής και κοινωνικής βελτιστοποίησης Σε ένα σύστημα όπου συνυπάρχουν οι πελάτες και οι διαχειριστές ισχύουν τα εξης:

- Το καθαρό πλεόνασμα του πελάτη είναι η αμοιβή από την εξυπηρέτηση μείον την πλήρη τιμή (δηλαδή τιμή υπηρεσίας και κόστος αναμονής).

Ο διαχειριστής του συστήματος μπορεί να δρα ως **κοινωνικός σχεδιαστής** αλλά και ως **μονοπώλιο**.

- στην περίπτωση του κοινωνικού σχεδιαστή, στόχος είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό κοινωνικό όφελος ανά χρονική μονάδα, που ορίζεται ως η αναμενόμενη συνολική ωφέλεια ανά χρονική μονάδα όλων των εμπλεκόμενων οντοτήτων (και των πελατών και του ιδίου)

- Στην περίπτωση που ο διαχειριστής δρα ως μονοπώλιο,στοχεύει στο να μεγιστοποιήσει τη δική του ωφέλεια (συνολικά έσοδα ή κέρδος) ανά χρονική μονάδα. Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση βελτιστοποίησης ισούται με τα έσοδα από τους πελάτες μέσω των τελών/τιμών που επιβάλλει ή με το κέρδος, που ισούται με τα έσοδα μείον τα κόστη λειτουργίας του συστήματος.

Στα επόμενα κεφάλαια αυτής της εργασίας θα εξετάσουμε τη στρατηγική συμπεριφορά πελατών σε θέματα επίδοσης των συστημάτων αναμονής δίνοντας έμφαση στις δύο παρακάτω κατηγορίες:

- Συστήματα αναμονής με χρόνους επανεκκίνησης, όπου ο υπάλληλος μετά από απουσία χρειάζεται κάποιο τυχαίο χρονικό διάστημα για να αρχίσει να εξυπηρετεί

- σε συστήματα με καταστροφές, όπου τυχαία γεγονότα μπορούν να προκαλέσουν την άμεση αναχώρηση των πελατών.

Θα μελετήσουμε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιώντας κατάλληλα μαθηματικά μοντέλα τα οποία συνδυάζουν τη θεωρία ουρών αναμονής με τη θεωρία παιγνίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συστήματα M/M/1 με χρόνους επανεκκίνησης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε στρατηγικές ισορροπίας σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με έναν υπάλληλο, ο οποίος χρειάζεται κάποιο τυχαίο χρονικό διάστημα για να εξυπηρετήσει ξανά μετά από απουσία.

Κάθε πελάτης επιλέγει αν θα εισέλθει ή αν θα αποχωρήσει από το σύστημα βασιζόμενος σε μία λογική κέρδους-κόστους. Πριν εισέλθουν στο σύστημα οι πελάτες έχουν την πληροφορία για το πόσο ''φορτωμένο'' είναι το σύστημα, αλλά και για την κατάσταση του εξυπηρετητή.

2.1 Περιγραφή Μοντέλου M/M/1 με χρόνους επανεκκίνησης

Έστω ένα σύστημα αναμονής με έναν μόνο υπάλληλο και άπειρη χωρητικότητα, στο οποίο οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών θεωρούνται εκθετικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με ρυθμό μ. Ο υπάλληλος απενεργοποιείται μόλις το σύστημα αδειάσει. Όταν ένας νέος πελάτης φτάσει σε ένα άδειο σύστημα, ξεκινά μία διαδικασία επανεκκίνησης, ώστε ο εξυπηρετητής να επανενεργοποιηθεί. Ο χρόνος επανεκκίνσης θεωρείται επίσης εκθετικά κατανεμημένος με ρυθμό θ. Κατά τη διάρκεια της επανεκκίνησης οι πελάτες συνεχίζουν να καταφθάνουν. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων, οι χρόνοι εξυπηρέτησης και οι χρόνοι επανεκκίνησης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από το ζεύγος (N(t), I(t)), με το N(t) να παριστάνει τον αριθμό των πελατών τη στιγμή t και το

I(t) την κατάσταση του εξυπηρετητή. Για το I(t), ισχύει

$$I(t) = 1$$

αν ο υπαλληλος είναι ενεργός και

$$I(t) = 0$$

αν ο υπάλληλος είναι ανενεργός. Επομένως σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
$(0,0)$	$(1,0)$	Exp(λ)
$(n,0),\ n \geq 1$	$(n+1,0)$	Exp(λ)
	$(n,1)$	Exp(θ)
$(1,1)$	$(0,0)$	Exp(μ)
	$(2,1)$	Exp(λ)
$(n,1),\ n \geq 2$	$(n+1,1)$	Exp(λ)
	$(n-1,1)$	Exp(μ)

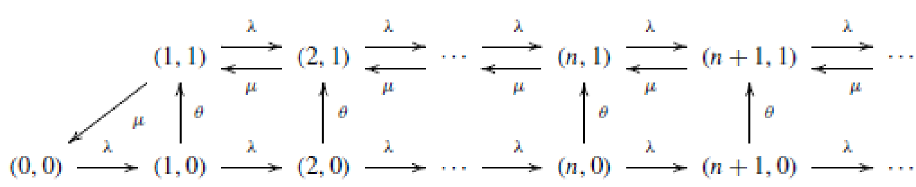
Πίνακας 2.1: Μεταβάσεις της αλυσίδας Markov.

έχουμε τη Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων:

$$S = \{(n,i) : i \in \{0,1\},\ n \geq i\}$$

.

Το διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζει τις πληροφορίες για τις πιθανότητες μετάβασης απο τη μία κατάσταση στην άλλη για το συγκεκριμένο μοντέλο, και ονομάζεται διάγραμμα μεταβάσεων.



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα μεταβάσεων του μοντέλου M/M/1 με χρόνους επανεκκίνησης.[2]

Για την απόφαση κάθε πελάτη να εισέλθει η όχι στο σύστημα υποθέτουμε ότι υπάρχει ώφελος R μονάδες αν τελικά εξυπηρετηθεί ή/και κόστος C μονάδες/μονάδα χρόνου που είναι το κόστος παραμονής ανα χρονική μονάδα στο σύστημα. Υποθέτουμε ότι $R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}$. Με λίγα λόγια το κέρδος ξεπερνάει το αναμενόμενο κόστος για κάθε πελάτη που βρίσκει το σύστημα άδειο. Αξίζει να σημειωθεί ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο οι πελάτες που αποχωρούν από το σύστημα χωρίς αν εξυπηρετηθούν δεν επιστρέφουν ξανά.

2.2 Στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου για πλήρως παρατηρήσιμες ουρές

Στην περίπτωση της πλήρως παρατηρήσιμης ουράς, ένας πελάτης εισέρχεται στο σύστημα, όταν παρατηρεί ότι αυτό βρίσκεται στην κατάσταση (n,i)

Τότε:

- Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι ίσος με $\frac{n+1}{\mu} + \frac{1-i}{\theta}$,
- Το αναμενόμενο κέρδος είναι: $R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C(1-i)}{\theta}$.

Η συνάρτηση κέρδους είναι γνησίως φθίνουσα ως προς n. Αυτό σημαίνει ότι το αναμενόμενο κέρδος μειώνεται, καθώς αυξάνεται ο αριθμός πελατών n στο σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μοναδική στρατηγική ισορροπίας, τύπου κατωφλίου.

Ένας τέτοιος πελάτης μπαίνει στο σύστημα αν και μόνο αν

$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C(1-i)}{\theta} \geq 0.$, όπου n+1 ο αριθμός των πελατών στο σύστημα συμπεριλαμβανομένου του πελάτη που σκέφτεται να εισέλθει.

Λύνοντας ως προς n+1 την παραπάνω ανίσωση έχουμε:

$n + 1 \leq \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu(1-i)}{\theta}$ (1).

- Για την περίπτωση που ο υπάλληλος είναι ενεργός, δηλαδή όταν i=1, η σχέση (1) γίνεται: $n + 1 \leq \frac{R\mu}{C}$ (2)
- Για την περίπτωση που ο υπάλληλος είναι ανενεργός, δηλαδή όταν i=0, η σχέση (1) γίνεται: $n + 1 \leq \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta}$ (3)

Συμβολίζουμε με $n_e(1)$ τον μέγιστο αριθμό πελατών για τον οποίο συμφέρει να μπει κανείς στο σύστημα, αν ο εξυπηρετητής είναι ενεργός. Το $n_e(1)$, ονομάζεται κατώφλι ισορροπίας που αντιστοιχεί στην κατάσταση i=1. Οπότε από την (2) θα πρέπει να ισχύει: $n_e(1) + 1 = \frac{R\mu}{C} \iff n_e(1) = \frac{R\mu}{C} - 1$. Όμως επειδή ο αριθμός των πελατών είναι ακέραιος λαμβάνουμε:

$n_e(1) = \left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor - 1$

Όμοια, αν $n_e(0)$ ο μέγιστος αριθμός πελατών για τον οποίο συμφέρει να μπει κανείς στο σύστημα αν ο εξυπηρετητής είναι ανενεργός, τότε λαμβάνοντας υπόψη την (3) για το κατώφλι ισορροπίας $n_e(0)$ έχουμε:

$n_e(0) + 1 = \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta} \iff n_e(0) == \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta} - 1.$

Όμως επειδή ο αριθμός των πελατών είναι ακέραιος λαμβάνουμε:

$n_e(0) = \left\lfloor \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta} \right\rfloor - 1.$

Συνοψίζοντας έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1. *Στην πλήρως παρατηρήσιμη ουρά $M/M/1$ με χρόνους επανεκκίνσης (setup times) υπάρχουν κατώφλια*

$$(n_e(0), n_e(1)) = \left(\left\lfloor \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta} \right\rfloor - 1,\ \left\lfloor \frac{R\mu}{C} \right\rfloor - 1 \right),$$

τέτοια ώστε η στρατηγική

"παρατήρησε $(N(t), I(t))$, εισέρχεται αν $N(t) \leq n_e(I(t))$ και αποχώρησε διαφορετικά"

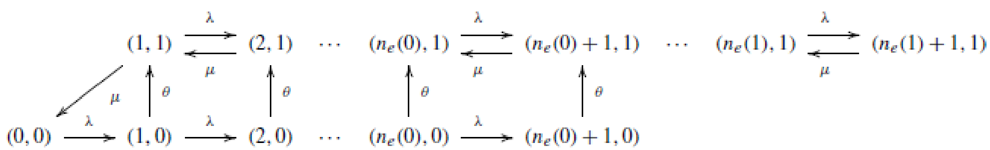
*να αποτελεί **μοναδική ισορροπία** μέσα στην κλάση των στρατηγικών κατωφλίου. Επιπλέον, η στρατηγική αυτή είναι και **ασθενώς κυρίαρχη**.*

2.3 Υπολογισμός στάσιμης κατανομής

Για τον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής και με την προυπόθεση ότι όλοι οι πελάτες ακολουθούν την στρατηγική κατωφλίου του **Θεωρήματος 1**, το σύστημα αποτελεί Μαρκοβιανή Αλυσίδα με χώρο καταστάσεων

$S_{f_o} = \{(n,0)|0 \leq\leq n_e(0)+1\} \cup \{(n,1)|1 \leq n \leq n_e(1)+1\}$

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι όμοιο με αυτό το σχήματος 2.1:



Σχήμα 2.2: Διάγραμμα μεταβάσεων για τη στρατηγική κατωφλίου $(n_e(0), n_e(1))$.[2]

Η **στάσιμη κατανομή** $(p_{f_o}(n,i) : (n,i) \in S_{f_o})$ αποτελεί τη μοναδική θετική κανονικοποιημένη λύση του παρακάτω συστήματος εξισώσεων ισορροπίας:

$$\lambda p(0,0) = \mu p(1,1) \iff p(0,0) = \tfrac{\mu}{\lambda} p(1,1) \quad (1)$$

$$(\lambda+\theta)p(n,0) = \lambda p(n-1,0), \quad n = 1,...,n_e(0) \quad (2)$$

$$\lambda p(n_e(0),0) = \theta p(n_e(0)+1,0) \quad (3)$$

$$p(1,1)(\lambda+\mu) = p(1,0)\theta + p(2,1)\mu \quad (4)$$

$$(\lambda+\mu)p(n,1) = \lambda p(n-1,1) + \theta p(n,0) + \mu p(n+1,1), \quad n = 2,3,...,n_e(0) \quad (5)$$

$$\mu p(n,1) = \lambda p(n-1,1), \quad n = n_e(0)+2,...,n_e(0)+1 \quad (6)$$

$$\mu p(n_e(0)+1,1) = p(n_e(0),1)\lambda + p(n_e(0)+1,0)\theta, \quad (7)$$

Έχουμε επιπλέον ότι $p = \frac{\lambda}{\mu}$ και $\sigma = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$.
Από τη σχέση (1) και (2) για $n = 1, 2, ..., n_e(0)$ έχουμε:
$(\lambda + \theta)p(1, 0) = \lambda p(0, 0) \iff p(1, 0) = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}p(0, 0)$
Επομένως λόγω της (1) έχουμε:

$p(1, 0) = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}p(0, 0) = \sigma\frac{\mu}{\lambda}p(1, 1) \quad (8)$
Συνεχίζοντας για ν=2 στη (2) έχουμε:
$(\lambda + \theta)p(2, 0) = \lambda p(1, 0) \iff p(2, 0) = (\frac{\lambda}{\lambda+\theta})^2 p(0, 0)$
Λαμβάνοντας υποψη την (1) έχουμε:
$p(2, 0) = \sigma^2\frac{\mu}{\lambda}p(1, 1)$
Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς παρατηρούμε ότι:
$p(3, 0) = \sigma^3\frac{\mu}{\lambda}p(1, 1)$, κ.λ.π, οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$p(n, 0) = \sigma^n\frac{\mu}{\lambda}p(1, 1), n = 1, 2, 3, ..., n_e(0) \quad (9)$
Για $n = n_e(0)$ παίρνουμε:

$p(n_e(0), 0) = \sigma^{n_e(0)}\frac{\mu}{\lambda}p(1, 1)$
Οπότε η (3) γίνεται:
$\lambda p(n_e(0), 0) = \theta p(n_e(0) + 1, 0) \iff p(n_e(0) + 1, 0) = \frac{\lambda}{\theta}\sigma^{n_e(0)}\frac{\mu}{\lambda}p(1, 1)$
Και τελικά:
$p(n_e(0) + 1, 0) = \frac{\lambda}{\theta}p(n_e(0), 0) = \frac{1}{\theta}\sigma^{n_e(0)}\mu p(1, 1) \quad (10)$
Από την (5) για $n = n_e(0) + 2, ..., n_e(1) + 1$ έχουμε:
$p(n_e(0) + 2, 1) = p(n_e(0) + 1, 1)\frac{\lambda}{\mu}$
$p(n_e(0) + 3, 1) = p(n_e(0) + 2, 1)\frac{\lambda}{\mu} = p(n_e(0) + 1, 1)(\frac{\lambda}{\mu})^2$

Οπότε για $n = n_e(0) + 2, ..., n_e(1) + 1$ παίρνουμε:

$p(n, 1) = p(n_e(0) + 1, 1)(\frac{\lambda}{\mu})^{n-(ne(0)+1)} \quad (11)$

Αντικαθιστώντας με $p(n, 1) = x_n$ στην (5) οπότε $p(n + 1, 1) = x_{n+1}$ και $p(n - 1, 1) = x_{n-1}$ έχουμε την εξίσωση διαφορών:

$\mu x_{n+1} - (\lambda + \mu)x_n + \lambda x_{n-1} = -\theta p(n, 0) = -\frac{\theta\mu}{\lambda}\sigma^n p(1, 1)$, με
$n = 2, 3, ..., n_e(0) \quad (12)$
Ξεκινάμε με τον υπολογισμό της λύσης της ομογενούς εξίσωσης διαφορών:

$\mu x_{n+1} - (\lambda + \mu)x_n + \lambda x_{n-1} = 0$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:
$\mu x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$

Οπότε έχουμε:
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda - \mu)^2$ και υπολογίζοντας τις ρίζες παίρνουμε:
$x = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$ ή $x = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\mu}{2\mu} = 1$

Επομένως για τη γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών έχουμε:

- για $\rho \neq 1$

  $x_{OM} = A \cdot 1^n + B \cdot \rho^n$

- για $\rho = 1$

  $x_{OM} = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της ειδικής λύσης της εξίσωσης:
Η μορφή του 2ου μέλους της εξίσωσης είναι:
$-\frac{\theta\mu}{\lambda}\sigma^n p(1,1)$
Θεωρούμε τη συνήθη περίπτωση όπου $\sigma \neq \rho, 1$.
Στην περιπτώση αυτή η ειδική λύση της εξίσωσης θα είναι της μορφής:
$x_{\epsilon\iota\delta} = C \cdot \sigma^n$
Αντικαθιστώντας στην (10) έχουμε:
$\mu \cdot C \cdot \sigma^{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot C \cdot \sigma^n + \lambda \cdot C \cdot \sigma^{n-1} = -\frac{\theta \cdot \mu}{\lambda} \cdot \sigma^n \cdot p(1,1)$
Διαιρώντας με σ^n έχουμε:
$\mu \cdot C \cdot \sigma - (\lambda + \mu)C + \lambda \cdot C \cdot \sigma^{-1} = -\frac{\theta \cdot \mu}{\lambda} \cdot p(1,1) \iff$
$C \cdot (\mu \cdot \sigma - \lambda - \mu + \frac{\lambda}{\sigma}) = -\frac{\theta\mu}{\lambda} \cdot p(1,1)$
Επειδή $\sigma = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$ έχουμε ότι:
$C \cdot (\frac{\lambda\mu}{\lambda+\theta} + \theta - \mu) = -\frac{\theta\mu}{\lambda} \cdot p(1,1)$
Κάνοντας και τις τελευταίες πράξεις παίρνουμε τελικά ότι:
$C = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda+\theta)}{(\mu-\theta-\lambda)} \cdot p(1,1) \quad (13)$

Οπότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι:
$x_{\gamma\epsilon\nu} = x_{OM} + x_{\epsilon\iota\delta} \iff$
$x_{\gamma\epsilon\nu} = A \cdot 1^n + B \cdot p^n + C \cdot \sigma^n, n = 1, 2, .., n_e(0) + 1 \quad (14),$
όπου $C = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda+\theta)}{(\mu-\theta-\lambda)} \cdot p(1, 1).$
Περνάμε στον υπολογισμό των A και B:
Αντικαθιστώντας στην (14) n=1, και λαμβάνοντας υπόψη ότι
$x_{\gamma\epsilon\nu} = p(n, 1)$ έχουμε:
$p(1, 1) = A\cdot 1+B\cdot p+C\cdot\sigma \iff A+B\cdot p = -\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{(\lambda+\theta)}{(\mu-\theta-\lambda)}\cdot p(1, 1)\cdot\sigma+p(1, 1)$
Άρα: $A + B \cdot p = -\frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{(\lambda+\theta)}{(\mu-\theta-\lambda)} \cdot p(1, 1) \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\theta} + p(1, 1) \iff$
$A+B\cdot p = p(1, 1)\cdot(1-\frac{\mu}{(\mu-\theta-\lambda)}) \iff A+B\cdot p = -p(1, 1)\cdot(\frac{\theta+\lambda}{\mu-\theta-\lambda}) \quad (15)$
Για n=2 στη (14) έχουμε:
$p(2, 1) = A + Bp^2 + C\sigma^2 \iff A + Bp^2 = p(2, 1) - C\sigma^2 \quad (14)$
Υπολογίζω το p(2,1):
Αντικαθιστώ στην (5):
$p(1, 1)(\lambda + \mu) = p(1, 0)\theta + p(2, 1)\mu$
$\iff p(1, 1)(\lambda + \mu) = \frac{\mu}{\lambda}\sigma\theta p(1, 1) + p(2, 1)\mu$
Άρα λύνοντας ως προς p(2,1) και διαιρώντας με μ έχουμε:
$p(2, 1) = p(1, 1) \cdot (\frac{\lambda+\mu}{\mu} - \frac{\sigma\cdot\theta}{\lambda})$
Επειδή $\sigma = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$ έχουμε:
$p(2, 1) = p(1, 1) \cdot (\frac{\lambda+\mu}{\mu} - \frac{\theta}{\lambda+\theta}) \iff p(2, 1) = p(1, 1) \cdot (\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\mu} - \frac{\theta}{\theta+\lambda})$
Επειδή $= \frac{\lambda}{\mu}$ και $\sigma = 1 - \frac{\theta}{\lambda+\theta} = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$ έχουμε:
$p(2, 1) = p(1, 1) \cdot (\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\mu} - \frac{\theta}{\theta+\lambda}) = p(1, 1) \cdot (\rho + \sigma) \quad (17)$

Για το $C \cdot \sigma^2$ έχουμε:

$C \cdot \sigma^2 = \frac{\mu(\lambda+\theta)}{\lambda(\mu-\lambda-\theta)} \cdot p(1, 1) \cdot \frac{\lambda^2}{(\lambda+\theta)^2} \iff C \cdot \sigma^2 = \frac{\mu\cdot\lambda}{(\lambda+\theta)\cdot(\mu-\lambda-\theta)} \cdot p(1, 1) \quad (18)$
Αντικαθιστώντας τις (17) και (18) στη (16) έχουμε:
$A + p^2 \cdot B = (p + \sigma) \cdot p(1, 1) - \frac{\mu\cdot\lambda}{(\lambda+\theta)\cdot(\mu-\lambda-\theta)} \cdot p(1, 1) \iff$
$A + p^2 \cdot B = p(1, 1)[\rho + \sigma - \frac{\mu\cdot\lambda}{(\lambda+\theta)\cdot(\mu-\lambda-\theta)}] \iff$
$A + \rho^2 \cdot B = p(1, 1) \cdot [\rho + \frac{\lambda}{\lambda+\theta} - \frac{\mu\cdot\lambda}{(\lambda+\theta)\cdot(\mu-\lambda-\theta)}] \iff$
$A + \rho^2 \cdot B = p(1, 1) \cdot [\rho + \frac{\lambda}{\lambda+\theta} - \frac{\mu\cdot\lambda}{(\lambda+\theta)\cdot(\mu-\lambda-\theta)}] \iff$
$A + \rho^2 \cdot B = p(1, 1) \cdot [\frac{\rho(\lambda+\theta)(\mu-\theta-\lambda)+\lambda(\mu-\lambda-\theta)-\mu\lambda}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}] \iff$
$A + \rho^2 \cdot B = \frac{(\lambda+\theta)[\rho(\mu-\theta-\lambda)-\lambda]}{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda-\theta)}$

Και επειδή $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ παίρνουμε τελικά:
$A + \rho^2 B = -\frac{\rho\cdot(\theta+\lambda)}{\mu-\theta-\lambda} \cdot p(1,1) \quad (19)$
Για να βρούμε τα A και B λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (13) και (17), οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} A + \rho^2 B = -\dfrac{(\lambda+\theta)\rho}{(\mu-\lambda-\theta)} p(1,1), \\ \\ A + B\rho = -p(1,1) \cdot \dfrac{(\theta+\lambda)}{(\mu-\theta-\lambda)}. \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας μία από τις δύο σχέσεις με (-1) έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{A = 0}$$

$$\boxed{B = -\frac{(\lambda+\theta)\cdot\mu}{(\mu-\lambda-\theta)\cdot\lambda} \cdot p(1,1).}$$

Οπότε αντικαθιστώντας το A, το B και το C στη σχέση (14) έχουμε:

$x_{\gamma\epsilon\nu} = p(n,1) = -\frac{(\lambda+\theta)\cdot\mu}{(\mu-\lambda-\theta)\cdot\lambda} \cdot p(1,1) \cdot \rho^n + \frac{\mu(\lambda+\theta)}{\lambda(\mu-\lambda-\theta)} \cdot p(1,1) \cdot \sigma^n \iff$

$$\boxed{p(n,1) = \frac{\mu(\lambda+\theta)}{\lambda(\mu-\lambda-\theta)}(\sigma^n - \rho^n)p(1,1), \quad n = 1,2,..,n_e(0)+1.} \quad (20)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{n_e(0)+1} p(n,0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} p(n,1) = 1.$$

Λόγω των σχέσεων (9), (10), (11), (20) έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{n_e(0)} \frac{\mu}{\lambda}\sigma^n p(1,1) + \frac{\mu}{\theta}\sigma^{n_e(0)} p(1,1) + \sum_{n=1}^{n_e(0)+1} \frac{\mu(\lambda+\theta)}{\lambda(\mu-\lambda-\theta)}(\sigma^n - \rho^n)p(1,1)$$
$$+ \sum_{n=n_e(0)+2}^{n_e(1)+1} \rho^{n-n_e(0)-1} \frac{\mu(\lambda+\theta)}{\lambda(\mu-\lambda-\theta)}(\sigma^{n_e(0)+1} - \rho^{n_e(0)+1})p(1,1) = 1. \quad (21)$$

Από τις σχέσεις $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ και $\sigma = \frac{\lambda}{\sigma+\theta}$ έχουμε:
$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\rho} \quad (22)$
$\frac{\mu}{\theta} = \frac{\sigma}{\rho(1-\sigma)} \quad (23)$
$\frac{\mu(\lambda+\theta)}{\lambda(\mu-\lambda-\theta)} = \frac{1}{\sigma-\rho}. \quad (24)$

Υπολογίζουμε κάθε άθροισμα ξεχωριστά:

$$\sum_{n=0}^{n_e(0)} \frac{1}{\rho}\sigma^n p(1,1) = \frac{1}{\rho}p(1,1)\frac{1-\sigma^{n_e(0)+1}}{1-\sigma}. \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{n_e(0)+1} \frac{\mu(\lambda+\theta)}{\mu-\lambda-\theta}(\sigma^n - \rho^n)p(1,1) = \frac{1}{\sigma-\rho}p(1,1)[\sigma\frac{1-\sigma^{n_e(0)+1}}{(1-\sigma)} - \rho\frac{1-\rho^{n_e(0)+1}}{1-\rho}]. \quad (26)$$

Για το τελευταίο άθροισμα θα θέσουμε $u = n - n_e(0) - 1$ οπότε έχουμε:

$$\sum_{n=n_e(0)+2}^{n_e(1)+1} \rho^{n-n_e(0)-1}\frac{1}{\sigma-\rho}(\sigma^{n_e(0)+1} - \rho^{n_e(0)+1})p(1,1) =$$
$$p(1,1)\frac{1}{\sigma-\rho}(\sigma^{n_e(0)+1} - \rho^{n_e(0)+1})\frac{\rho - \rho^{n_e(1)-n_e(0)+1}}{1-\rho}. \quad (27)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (21), (25), (26) και (27) έχουμε:

$$p(1,1)[\frac{1}{\rho(1-\sigma)} + \frac{\sigma}{(\sigma-\rho)(1-\sigma)} - \frac{\rho}{(\sigma-\rho)(1-\rho)} + \frac{\sigma^{n_e(0)+1}}{(\sigma-\rho)}(\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\sigma}{1-\sigma})$$
$$+\frac{\rho^{n_e(1)+2}}{(\sigma-\rho)(1-\rho)}(1-(\frac{\sigma}{\rho})^{n_e(0)+1})] = 1 \iff$$
$$p(1,1) = [\frac{1}{\rho(1-\rho)(1-\sigma)} - \frac{\sigma^{n_e(0)+1}}{(1-\rho)(1-\sigma)} + \frac{\rho^{n_e(1)+2}}{(\sigma-\rho)(1-\rho)}(1-(\frac{\sigma}{\rho})^{n_e(0)+1})]^{-1}.$$

Επομένως με βάση τα παραπάνω έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.1. *Έστω μία M/M/1 ουρά με χρόνους επανεκκίνησης και $\sigma \neq 1 \neq \rho \neq \sigma$ στην οποία οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική κατωφλίου $(n_e(0), n_e(1))$.*
Οι στάσιμες πιθανότητες $(p_{f_0}(n,i) : (n,i) \in S_{f_0})$ είναι οι ακόλουθες:

$$p_{f_0}(1,1) = [\frac{1}{\rho(1-\rho)(1-\sigma)} - \frac{\sigma^{n_e(0)+1}}{(1-\rho)(1-\sigma)} + \frac{\rho^{n_e(1)+2}}{(\sigma-\rho)(1-\rho)}(1-(\frac{\sigma}{\rho})^{n_e(0)+1})]^{-1} \tag{2.1}$$

$$p_{f_0}(n,0) = \frac{1}{\rho}\sigma^n p_{f_0}(1,1), \quad n = 0,1,....,n_e(0), \tag{2.2}$$

$$p_{f_0}(n_e(0)+1,0) = \frac{1}{\rho(1-\sigma)}\sigma^{n_e(0)+1p} p_{f_0}(1,1), \tag{2.3}$$

$$p_{f_0}(n,1) = \frac{1}{\sigma-\rho}(\sigma^n - \rho^n) p_{f_0}(1,1), \quad n = 1,2,...,n_e(0), \tag{2.4}$$

$$p_{f_0}(n,1) = \frac{1}{\sigma-\rho}(\sigma^{n_e(0)+1} - \rho^{n_e(0)+1}) p^{n-n_e(0)-1} p_{f_0}(1,1), \quad n = n_e(0)+1,...,n_e(1)+1. \tag{2.5}$$

Σύμφωνα με την αρχή PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages), η πιθανότητα κατά την άφιξή του ένας πελάτης να βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n_e(0)+1,0)$ ή $(n_e(1)+1,1)$ οπότε να αποχωρήσει ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων της στάσιμης κατανομής που υπολογίσαμε παραπάνω: $p_{f_0}(n_e(0)+1,0) + p_{f_0}(n_e(1)+1,1)$. Αν R η αντιμοιβή του πελάτη για την εξυπηρέτηση, C το κόστος που πληρώνει ο πελάτης ανα μονάδα χρόνου παραμονής στο σύστημα και $\sum_{n=0}^{n_e(0)+1} np_{f_0}(n,0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} np_{f_0}(n,1)$ ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα Οπότε το κοινωνικό ώφελος ανά μονάδα χρόνου όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική κατωφλίου $(n_e(0), n_e(1))$ ισούται με:

$$\begin{aligned} S_{f_0} &= R\lambda(1 - p_{f_0}(n_e(0)+1,0) - p_{f_0}(n_e(1)+1,1)) \\ &\quad - C(\sum_{n=0}^{n_e(0)+1} np_{f_0}(n,0) + \sum_{n=1}^{n_e(1)+1} np_{f_0}(n,1)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.4 Η περίπτωση της σχεδόν παρατηρήσιμης ουράς

Έστω ότι οι πελάτες που καταφθάνουν μπορούν να παρατηρήσουν μόνο τον αριθμό των πελατών στο σύστημα αλλά όχι την κατάσταση του υπαλλήλου δηλαδή αν είναι ενεργός (κατάσταση 1) η ανενεργός (κατάσταση 0). Τότε, ο μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα είναι ίσος με το μέσο χρόνο που χρειάζεται για να εξυπηρετηθεί συν το μέσο χρόνο που χρειάζεται ο υπάλληλος για να περάσει στην κατάσταση 1 δεδομένου οτι στο σύστημα βρίσκονται n πελάτες. Δηλαδή:

$$\frac{(n+1)}{\mu} + \frac{\pi^-_{I|N}(0|n)}{\theta}. \tag{2.6}$$

Όπου $\pi^-_{I|N}(0|n)$ είναι πιθανότητα ένας πελάτης κατα την άφιξή του να βρει τον υπάλληλο στην κατάσταση 0 (ανενεργό) δεδομένου ότι στο σύστημα βρίσκονται n πελάτες.

Επομένως το αναμενόμενο όφελος για κάθε πελάτη αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα είναι ίσο με:

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C\pi^-_{I|N}(0|n)}{\theta}. \tag{2.7}$$

Για τις στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου θα χρειαστεί να βρούμε την πιθανότητα $\pi^-_{I|N}(0|n)$ που αναφέρθηκε παραπάνω. Εφόσον δεν ξέρουμε την κατάσταση του υπαλλήλου αν είναι 0 ή 1 θεωρούμε ότι $n_e(0) = n_e(1) = n_e$ και υποθέτουμε ότι όλοι οι πελάτες έχουν τον αριθμό n_e ώς κατώφλι για να εισέλθουν στο σύστημα. Η στάσιμη κατανομή είναι ίδια με της Πρότασης 1, με την αντικατάσταση $n_e(0) = n_e(1) = n_e$. Με τη βοήθεια των εξισώσεων 2.1-2.5 θα υπολογίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $\pi^-_{I|N}(0|n)$:

$$\pi^-_{I|N}(0|n) = \frac{\lambda p(n,0)}{\lambda p(n,0) + \lambda p(n,1)\mathbf{1}_{\{n\geq 1\}}} = \left(1 + \frac{p(n,1)}{p(n,0)}\right)^{-1}. \tag{2.9}$$

Από τις σχέσεις (2.3) και (2.5) έχουμε:

$$p(n,0) = \frac{1}{\rho}\sigma^n p(1,1), \qquad p(n,1) = \frac{1}{\sigma-\rho}(\sigma^n - \rho^n)p(1,1),$$

οπότε ο λόγος τους είναι:

$$\frac{p(n,1)}{p(n,0)} = \frac{\frac{1}{\sigma-\rho}(\sigma^n - \rho^n)p(1,1)}{\frac{1}{\rho}\sigma^n p(1,1)}$$
$$= \frac{\rho}{\sigma-\rho}\Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^n\Big). \tag{*}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.9) προκύπτει:

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n) = \left[1 + \frac{\rho}{\sigma-\rho}\Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^n\Big)\right]^{-1}.$$

Επειδή

$$\frac{\rho}{\sigma-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\lambda+\theta} - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta},$$

τελικά λαμβάνουμε:

$$\boxed{\pi^{-}_{I|N}(0|n) = \left[1 + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^n\Big)\right]^{-1}, \quad n = 0,1,...,n_e.} \tag{2.10}$$

Όμοια από τη σχέση (2.9) και αντικαθιστώντας $n = n_e + 1$ έχουμε:

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n_e+1) = \left(1 + \frac{p(n_e+1,1)}{p(n_e+1,0)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + \frac{\frac{1}{\sigma-\rho}\left(\sigma^{n_e+1} - \rho^{n_e+1}\right)p(1,1)}{\frac{1}{\rho(1-\sigma)}\,\sigma^{n_e+1}\,p(1,1)}\right)^{-1}$$
$$= \left(1 + \frac{\rho(1-\sigma)}{\sigma-\rho}\Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^{n_e+1}\Big)\right)^{-1}$$
$$= \left[1 + \frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^{n_e+1}\Big)\right]^{-1}. \tag{2.11}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,n) = R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda x + \theta}{\mu - \lambda - \theta}\Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^n\Big)\right]^{-1}, \quad x \in [0,1], \quad n = 0,1,2,3,., \tag{2.12}$$

η οποία θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε την ύπαρξη στρατηγικής ισορροπίας και να υπολογίσουμε το αντίστοιχο κατώφλι.

Έστω

$$f_U(n) = f(1,n), f_L(n) = f(0,n), \quad n = 0,1,2.. \tag{2.13}$$

Αντικαθιστώντας $n = 0$ παίρνουμε:

$$f_U(0) = f(1,0) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta}(1-1)^{-1}\right] = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}.$$

Όμοια:

$$f_L(0) = f(0,0) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu - \lambda - \theta}(1-1)^{-1}\right] = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}.$$

Οπότε:

$$f_U(0) = f_L(0) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta} > 0, \tag{2.14}$$

αφού σε διαφορετική περίπτωση ο πελάτης επιλέγει να μην εισέλθει στο σύστημα. Επιπλέον,

$$\lim_{n\to\infty} f_U(n) = \lim_{n\to\infty} f_L(n) = -\infty. \tag{2.15}$$

Επομένως θα υπάρχει n_U τέτοιο ώστε

$$f_U(n_U + 1) \leq 0$$

και

$$f_U(0), f_U(1), ..., f_U(n_U) > 0. \tag{2.16}$$

Η συνάρτηση $f(x,n)$ είναι αύξουσα ως προς x για κάθε σταθερό n, οπότε $f_L(n) \leq f_U(n), \quad n = 0,1,2,3....$
Συγκεκριμένα, $f_L(n_U+1) \leq 0$ αφού $f_L(n_U+1) \leq f_U(n_U+1)$ και $f_U(n_U+1) \leq 0$ και $f_L(0) > 0$ λόγω της (2.14). Επομένως υπάρχει $n_L \leq n_U$ τέτοιο ώστε:

$$f_L(n_L) > 0$$

και

$$f_L(n_L+1), ..., f_L(n_U), f_L(n_U+1) \leq 0. \tag{2.17}$$

Θεώρημα 2.2. *Στην σχεδόν παρατηρήσιμη ουρά M/M/1 με χρόνους επανεκκίνησης όλες οι καθαρές στρατηγικές κατωφλίου "παρατήρηση $N(t)$, είσοδος αν $N(t) \leq n_e$ και αποχώρηση διαφορετικά", για $n_e = n_L, n_L+1, ..., n_U$ είναι στρατηγικές ισορροπίας.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη τη στιγμή της άφιξής του και υποθέτουμε ότι όλοι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν την ίδια στρατηγική κατωφλίου: «παρατήρηση του $N(t)$, είσοδος αν $N(t) \leq n_e$ και αποχώρηση διαφορετικά», για κάποιο συγκεκριμένο $n_e \in \{n_L, n_L+1, \ldots, n_U\}$. Η πιθανότητα ο υπάλληλος να βρίσκεται σε κατάσταση αδράνειας, δεδομένου ότι υπάρχουν n πελάτες, δίνεται από τις σχέσεις (2.9)–(2.11).

Αν ο επιλεγμένος πελάτης βρει $n \leq n_e$ πελάτες και αποφασίσει να εισέλθει, το αναμενόμενο καθαρό του όφελος είναι:

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1} = f_U(n) > 0,$$

σύμφωνα με τις σχέσεις (2.8), (2.10), (2.12), (2.13) και (2.16). Στην περίπτωση αυτή ο πελάτης προτιμά να εισέλθει στο σύστημα.

Αν όμως βρει $n = n_e+1$ πελάτες και επιλέξει να εισέλθει, τότε το αναμενόμενο καθαρό του όφελος είναι:

$$R - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e+1}\right)\right]^{-1} = f_L(n_e+1) \leq 0,$$

σύμφωνα με τις σχέσεις (2.8), (2.11), (2.12), (2.13) και (2.17). Στην περίπτωση αυτή ο πελάτης προτιμά να αποχωρήσει (να μην εισέλθει). $\square$

Παρατήρηση 2.1. *Όταν $n_L < n_U$, υπάρχουν πολλαπλές στρατηγικές ισορροπίας κατωφλίου. Αυτό συμβαίνει σε καταστάσεις τύπου "Follow-The-Crowd" (FTC), όπου στην ισορροπία οι πελάτες τείνουν να υιοθετούν τη συμπεριφορά των υπόλοιπων πελατών. Σε μοντέλα στα οποία ο χώρος των στρατηγικών μπορεί να διαταχθεί (π.χ. όταν οι στρατηγικές παραμετροποιούνται μέσω ενός κατωφλίου εισόδου), παρατηρείται φαινόμενο "Follow-The-Crowd" (ή αντίστοιχα "Avoid-The-Crowd" (ATC)), ανάλογα με το αν η βέλτιστη απόκριση ενός παίκτη σε μια στρατηγική x που υιοθετούν όλοι οι άλλοι είναι αύξουσα (ή φθίνουσα, αντίστοιχα) ως προς το x.*

Στο πλαίσιο του παρόντος μοντέλου, το πρώτο μέρος της σχέσης (2.8),

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu},$$

το οποίο εκφράζει το αναμενόμενο όφελος ενός επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει όταν παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα, εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται μπροστά του και όχι από τη στρατηγική των υπολοίπων. Αντίθετα, ο όρος

$$\frac{C}{\theta}\pi^{-}_{I|N}(0|n),$$

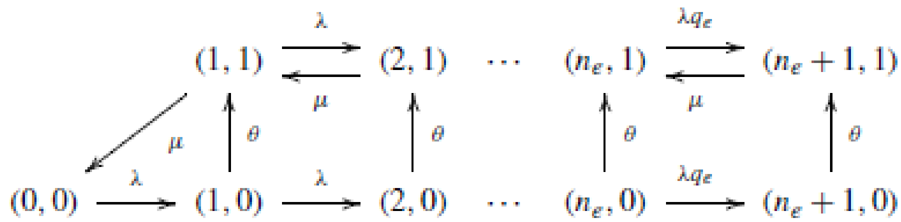
που εξαρτάται από τη στρατηγική που υιοθετούν οι άλλοι πελάτες, είναι φανερό ότι μειώνεται καθώς αυξάνεται το n. Από τις σχέσεις (2.10) και (2.11) προκύπτει ότι η βέλτιστη κατωφλιακή απάντηση ενός επιλεγμένου πελάτη είναι αύξουσα ως προς τη στρατηγική κατωφλίου που ακολουθούν οι υπόλοιποι. Με άλλα λόγια, ένας επιλεγμένος πελάτης του οποίου το αναμενόμενο καθαρό όφελος δίνεται από τη σχέση (2.8), είναι περισσότερο διατεθειμένος να εισέλθει στο σύστημα όταν οι υπόλοιποι πελάτες χρησιμοποιούν υψηλότερη πολιτική κατωφλίου, δηλαδή ***υιοθετεί τη συμπεριφορά των άλλων****.*

Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι το αν θα μπει ο επιλεγμένος πελάτης σε ένα σύστημα δεν έχει να κάνει μόνο με το πόσα άτομα βλέπει μπροστά του να περιμένουν αλλά και με το γεγονός ότι τελικά οι πελάτες επηρεάζονται ο ένας από τον άλλο. Έτσι αν οι περισσότεροι αποφασίζουν να εισέλθουν, δηλαδή έχουν μεγαλύτερο n_e, ο υπάλληλος παραμένει ενεργός, επομένως το σύστημα φαίνεται ενεργό και ο πελάτης αποφασίζει τελικά να ακολουθήσει τους υπόλοιπους και αν εισέλθει στο σύστημα.

Αντίθετα αν ο πελάτης βλέπει ότι οι υπόλοιποι πελάτες φεύγουν εύκολα, δηλαδή υπάρχει μικρό n_e, τότε αντιλαμβάνεται ότι ο υπάλληλος βρίσκεται συχνότερα ανενεργός οπότε γίνονται επαναλαμβανόμενες επανεκκινήσεις, ο χρόνος παραμονής αυξάνεται και έτσι ο πελάτης αποθαρρύνεται από το να εισέλθει στο σύστημα.

Θα αναζητήσουμε στρατηγικές ισορροπίας στην πιο γενική κατηγορία των μεικτών στρατηγικών. Μία στρατηγική της μορφής "παρατήρηση $N(t)$ και είσοδος αν $N(t) \leq n_e - 1$, είσοδος με πιθανότητα q_e αν $N(t) = n_e$ και αποχώρηση διαφορετικά" ονομάζεται **μεικτή στρατηγική κατωφλίου τύπου** (n_e, q_e).

Η στάσιμη κατανομή του συστήματος είναι παρόμοια με αυτή της Πρότασης 1 και το διάγραμμα μεταβάσεων είναι το παρακάτω:



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα μεταβάσεων για την μεικτή στρατηγική (n_e, q_e).[2]

Παρατηρούμε ότι ο ρυθμός μετάβασης από $(n_e, 1)$ σε $(n_e+1, 1)$ και από $(n_e, 0)$ σε $(n_e + 1, 0)$ είναι πλέον λq_e αφού στη μεικτή στρατηγική ο πελάτης αν δει στο σύστημα n_e πελάτες αποφασίζει αν θα εισέλθει με πιθανότητα q_e.

Η στάσιμη κατανομή είναι η εξής:

Για $n = 0, 1, , , , , n_e - 1$ είναι ίδια με τις (9) και (11), δηλαδή

$$p(n, 0) = \sigma^n \frac{\mu}{\lambda} p(1, 1) = \frac{1}{\rho} \sigma^n p(1, 1)$$

Επίσης

$$p(n, 1) = -\frac{\mu(\lambda + \theta)}{(\mu - \lambda - \theta)\lambda} (\sigma^n - \rho^n) p(1, 1)$$

Άρα:

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n) = \left[1 + \frac{\lambda + \theta}{\mu - \lambda - \theta} \Big(1 - \big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^n \Big) \right]^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, 3..., n_e - 1. \quad (2.18)$$

Για $n = n_e$ και $n = n_e + 1$ έχουμε:

$$\lambda p(n_e - 1, 0) = (\theta + \lambda q_e) p(n_e, 0).$$

$$\lambda q_e p(n_e, 0) = \theta p(n_e + 1, 0).$$

$$(\mu + \lambda q_e) p(n_e, 1) = \lambda p(n_e - 1, 1) + \mu p(n_e + 1, 1) + \theta p(n_e, 0).$$

$$p(n_e + 1, 1)\mu = \lambda q_e p(n_e, 1) + \theta p(n_e + 1, 0).$$

Υπολογίζουμε την $\pi^{-}_{I|N}(0|n)$ για $n = n_e$:
Από τη (2.9):

$$\pi^{-}_{I|N}(0|n_e) = \left(1 + \frac{p(n_e, 1)}{p(n_e, 0)}\right)^{-1}.$$

Αρκεί να υπολογίσουμε το λόγο $\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)}$. Από τις εξισώσεις ισορροπίας που παίρνουμε από το διάγραμμα μεταβάσεων του σχήματος 2.3 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\lambda q_e)p(n_e,1) = \lambda p(n_e-1,1) + \lambda q_e p(n_e,1) + \theta p(n_e+1,0) + \theta p(n_e,0)\\
\Rightarrow&\mu p(n_e,1) = \lambda p(n_e-1,1) + (\lambda q_e+\theta)p(n_e,0)\\
\Rightarrow&p(n_e,1) = \frac{\lambda}{\mu}p(n_e-1,1) + \frac{(\lambda q_e+\theta)}{\mu}p(n_e,0)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{p(n_e-1,1)}{\frac{\lambda p(n_e-1,0)}{\theta+\lambda q_e}} + \frac{\lambda q_e+\theta}{\mu}\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\left(1+\frac{p(n_e-1,1)}{p(n_e-1,0)}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\left(1+\frac{\rho}{\sigma-\rho}\frac{\sigma^{n_e-1}-\rho^{n_e-1}}{\sigma^{n_e-1}}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\left(1+\frac{\rho}{\sigma-\rho}-\frac{\rho}{\sigma-\rho}\frac{\rho^{n_e-1}{}^{n_e-1}}{\sigma}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\left(\frac{(\sigma-\rho)\sigma^{n_e-1}+\sigma^{n_e-1}\rho-\rho^{n_e}}{(\sigma-\rho)\sigma^{n_e-1}}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\left(\frac{\sigma^{n_e}-\rho^{n_e}}{\frac{\sigma-\rho}{\sigma}\sigma^{n_e}}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\frac{\sigma}{\sigma-\rho}\left(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu}\frac{\mu}{\mu-\lambda-\theta}\left(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right)\\
\Rightarrow&\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta+\lambda q_e}{\mu-\lambda-\theta}\left(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right)
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Επομένως για $n = n_e$ έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
&\pi^-_{I|N}(0|n_e) = \left(1+\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)}\right)^{-1}\\
\Rightarrow&\pi^-_{I|N}(0|n) = \left(1+\frac{\theta+\lambda q_e}{\mu-\lambda-\theta}\left(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Συνεχίζουμε για $n = n_e + 1$: Αρκεί να υπολογίσω το

$$\frac{p(n_e+1,1)}{p(n_e+1,0)}$$

και να το αντικαταστήσω στη 2.9. Από τις εξισώσεις ισορροπίας του σχήματος (2.3) έχουμε:

$$p(n_e+1,1)\mu = \lambda q_e p(n_e,1) + \theta p(n_e+1,0).$$

και

$$\lambda q_e p(n_e,0) = \theta p(n_e+1,0).$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
&p(n_e+1,1)\mu = \lambda q_e p(n_e,1) + \theta p(n_e+1,0)\\
\Rightarrow &p(n_e+1,1) = \frac{\lambda q_e p(n_e,1)}{\mu} + \frac{\theta}{\mu} p(n_e+1,0)\\
\Rightarrow &\frac{p(n_e+1,1)}{p(n_e+1,0)} = \frac{\lambda q_e p(n_e,1)}{\mu p(n_e+1,0)} + \frac{\theta}{\mu}\\
\Rightarrow &\frac{p(n_e+1,1)}{p(n_e+1,0)} = \frac{\lambda q_e p(n_e,1)}{\mu \frac{\lambda q_e}{\theta} p(n_e,0)} + \frac{\theta}{\mu}\\
\Rightarrow &\frac{p(n_e+1,1)}{p(n_e+1,0)} = \frac{\theta p(n_e,1)}{\mu p(n_e,0)} + \frac{\theta}{\mu}.
\end{aligned}$$

Από (2.19) έχουμε:

$$\frac{p(n_e,1)}{p(n_e,0)} = \frac{\theta + \lambda q_e}{\mu - \lambda - \theta}\left(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right).$$

Έχουμε ότι:

$$\frac{p(n_e+1,1)}{p(n_e+1,0)} = \frac{\theta}{\mu}\left(\frac{\theta + \lambda q_e}{\mu - \lambda - \theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}.$$

Επομένως η (2.9) γίνεται:

$$\pi^-_{I|N}(0|n_e+1) = \left[1 + \frac{\theta}{\mu}\left(\frac{\theta + \lambda q_e}{\mu - \lambda - \theta}(1 - (\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}\right]^{-1}. \tag{2.21}$$

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι για $n_L < n_U$ υπάρχει μία μεικτή στρατηγική ισορροπίας κατωφλίου για κάθε 2 διαδοχικές καθαρές στρατηγικές ισορροπίας κατωφλίου.

Θεώρημα 2.3. *Στην σχεδόν παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά με χρόνους επανεκκίνησης όλες οι μεικτές στρατηγικές της μορφής " παρατήρηση του $N(t)$ και είσοδος αν $N(t) \leq n_e - 1$, είσοδος με πιθανότητα q_e αν $N(t) = n_e$ και αποχώρηση σε κάθε άλλη περίπτωση" είναι στρατηγικές ισορροπίας για $n_e = n_{L+1}, ..., n_U$ και ισχύει*

$$q_e = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu-\lambda-\theta}{1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e}}\left[\frac{C}{\theta\Big(R-\frac{C(n_e+1)}{\mu}\Big)}-1\right]-\theta\right]. \tag{2.22}$$

Απόδειξη. Έστω $n_e \in \{n_L+1, ..., n_U\}$ και q_e η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x, n_e) = 0$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
f(x,n_e)=0 \Rightarrow & R-\frac{C(n_e+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\Big(1-\big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^{n_e}\Big)\right]^{-1}=0\\
\Rightarrow & R-\frac{C(n_e+1)}{\mu}=\frac{C}{\theta}\left[1+\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\Big(1-\big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^{n_e}\Big)\right]^{-1}\\
\Rightarrow & \frac{\mu}{\mu R-C(n_e+1)}=\frac{\theta}{C}\left[1+\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\Big(1-\big(\tfrac{\rho}{\sigma}\big)^{n_e}\Big)\right]\\
\Rightarrow & \frac{C}{\theta}\frac{\mu}{\mu R-C(n_e+1)}-1=\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e})\\
\Rightarrow & q_e=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu-\lambda-\theta}{(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e})}\left[\frac{C}{\theta}\frac{\mu}{\mu R-C(n_e+1)}-1\right]-\theta\right]\\
\Rightarrow & q_e=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu-\lambda-\theta}{(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e})}\left[\frac{C\mu}{\theta\mu R-C(n_e+1)}-1\right]-\theta\right]\\
\Rightarrow & q_e=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu-\lambda-\theta}{(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e})}\left[\frac{C\mu}{\theta\mu(R-\frac{C}{\mu}(n_e+1)}-1\right]-\theta\right]\\
\Rightarrow & q_e=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\mu-\lambda-\theta}{(1-(\frac{\rho}{\sigma})^{n_e})}\left[\frac{C}{\theta(R-\frac{C}{\mu}(n_e+1)}-1\right]-\theta\right].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Επειδή f συνεχής και γν.μονότονη η ρίζα q_e είναι μοναδική.

Επιλεόν ισχύει ότι η $f(x, n_e)$ είναι συνεχής και $f(0, n_e)f(1, n_e) \leq 0$.

Αν $f(0, n_e)f(1, n_e) < 0$ τότε υπάρχει $q_e \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(q_e, n_e) = 0$. Αν $f(0, n_e)f(1, n_e) = 0$ τότε $q_e = 0$ ή $q_e = 1$. Επομένως $q_e \in [0, 1]$ και άρα είναι πιθανότητα.

Θεωρούμε τώρα έναν επιλεγμένο πελάτη κατά την άφιξη του και υποθέτουμε ότι οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν όλοι την ίδια μεικτή στρατηγική ισορροπίας τύπου κατωφλίου n_e, q_e.

Αν ο επιλεγμένος πελάτης βρει κατά την άφιξη του $n \leq n_e - 1$ πελάτες στο σύστημα τότε το αναμενόμενο καθαρό όφελός του είναι:

$$R - \frac{C(n+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n\right)\right]^{-1} = f_U(n) > 0,$$

λόγω των σχέσεων (2.12), (2.12), (2.16). Οπότε στην περίπτωση αυτή ο επιλεγμένος πελάτης θα προτιμήσει να εισέλθει στο σύστημα.

Αν ο επιλεγμένος πελάτης βρει κατά την άφιξή του $n = n_e$ πελάτες και αποφασίσει να εισέλθει το αναμενόμενο καθαρό όφελος είναι

$$R - \frac{C(n_e+1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right)\right]^{-1} = f(q_e, n_e) = 0,$$

οπότε στην περίπτωση αυτή ο επιλεγμένος πελάτης είναι αδιάφορος για το αν θα εισέλθει η όχι στο σύστημα.

Τέλος αν ο επιλεγμένος πελάτης βρει κατά την άφιξη του $n = n_e + 1$ πελάτες στο σύστημα το αναμενόμενο καθαρό όφελος αν αποφασίσει να εισέλθει είναι:

$$\begin{aligned} &R - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu}\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}\right]^{-1} \\ &\leq R - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu}\frac{\lambda+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Επειδή $\frac{\lambda+\theta}{\mu} = \frac{\rho}{\sigma}$, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} &R - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu}\frac{\lambda q_e+\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e}\right) + \frac{\theta}{\mu}\right]^{-1} \\ \leq\ &R - \frac{C(n_e+2)}{\mu} - \frac{C}{\theta}\left[1 + \frac{\theta}{\mu-\lambda-\theta}\left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{n_e+1}\right)\right]^{-1} = f_L(n_e+1) \leq 0. \end{aligned}$$

αφού $q_e \leq 1$ και ισχύουν οι (2.8) (2.17), (2,22). Από την τελευταία ανισότητα καταλαβαίνουμε ότι στην περίπτωση που $n = n_e + 1$ ο πελάτης αποφασίζει να αποχωρήσει.

Επομένως οποιαδήποτε μεικτή στρατηγική κατωφλίου (n_e, q_e) με τα n_e και q_e να ικανοποιούν τις συνθήκες του ερωτήματος είναι βέλτιστη απάντηση απέναντι στον εαυτό της. Δηλαδή ο πελάτης μεγιστοποιεί το όφελος του δεδομένου ότι ακολουθεί την ίδια στρατηγική (q_e, n_e) που ακολουθούν και οι υπόλοιποι. Αυτό σημαίνει ότι η μεικτή στρατηγική (q_e, n_e) είναι βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της, δηλαδή κανείς από τους πελάτες δεν έχει όφελος να αλλάξει μονομερώς τη στρατηγική του, οπότε η (q_e, n_e) είναι στρατηγική ισορροπίας.

□

Παρατήρηση 2.2. *Για μια στρατηγική ισορροπίας y μπορεί να υπάρχει μια βέλτιστη απάντηση $z \neq y$ τέτοια ώστε η z να είναι αυστηρά «καλύτερη απάντηση έναντι του εαυτού της» απ' ότι είναι η y. Σε αυτή την περίπτωση, αν οι πελάτες ξεκινήσουν με τη y, μπορεί όλοι να υιοθετήσουν τη z και τότε δεν θα επιστρέψουν ποτέ στη y. Με αυτή την έννοια, η y είναι «ασταθής» ή «παροδική». Αν δεν υπάρχει τέτοια z, τότε η y λέγεται εξελικτικά σταθερή στρατηγική (ESS-Evolutionary Stable Strategy). Ειδικότερα, μια στρατηγική ισορροπίας που είναι μοναδική βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της είναι ESS (εξελικτικά σταθερή). Οι ισορροπίες–ESS αποκλείουν τις «ασταθείς» ισορροπίες και έτσι αποτελούν βελτίωση της έννοιας της ισορροπίας. Στο παρόν μοντέλο, αν —όπως συνήθως— οι ανισότητες στις (2.16–2.17) είναι αυστηρές, τότε οι καθαρές στρατηγικές ισορροπίας κατωφλίου είναι ESS, αφού είναι μοναδικές βέλτιστες απαντήσεις απέναντι στον εαυτό τους. Αντίθετα, οι μικτές στρατηγικές ισορροπίας τύπου κατωφλίου δεν είναι ESS. Πράγματι, είναι εύκολο να δειχθεί ότι αν όλοι οι πελάτες ξεκινήσουν από μια μικτή στρατηγική κατωφλίου (n_e, q_e) με $q_e \in (0, 1)$, όπως στο Θεώρημα 3, και παρεκκλίνουν σε οποιαδήποτε στρατηγική κατωφλίου (n_e, q), τότε η (n_e, q_e) δεν είναι βέλτιστη απάντηση για ένα άτομο απέναντι στη (n_e, q) απ' ό,τι είναι η ίδια η (n_e, q). Πράγματι, αν:*

$$q < q_e \Rightarrow f(q, n_e) < f(q_e, n_e) \Rightarrow f(q, n_e) < 0$$

Επομένως ο πελάτης αποχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα q, άρα η στρατηγική (qe, ne) είναι ασταθής. Όμοια αν

$$q > q_e \Rightarrow f(q, n_e) > f(q_e, n_e) \Rightarrow f(q, n_e) > 0.$$

Άρα ο πελάτης εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα $q > q_e$ επομένως η στρατηγική (q_e, n_e) είναι ασταθής. Τέλος σε περίπτωση που $q = q_e$, ο πελάτης είναι αδιάφορος *ως προς τη είσοδό του στο σύστημα. Υπό το φως αυτής της παρατήρησης, μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας μόνο στις καθαρές στρατηγικές κατωφλίου.*

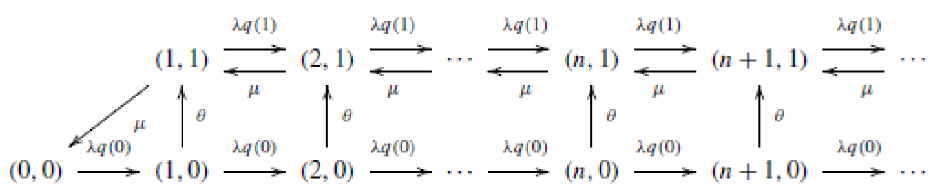
2.5 Μεικτές στρατηγικές ισορροπίας για μη παρατηρήσιμες ουρές

Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε την προσοχή μας στις περιπτώσεις που οι πελάτε;ς κατά την άφιξή τους δεν μπορούν να παρατηρήσουν τον αριθμό των πελατών που βρίσκονται στο σύστημα. Θα αποδειχθεί ότι υπάρχουν μεικτές στρατηγικές ισορροπίας.

Ξεκινάμε με τη σχεδόν μη παρατηρήσιμη περίπτωση όπου οι πελάτες κατά την άφιξή τους μπορούν να παρατηρήσουν την κατάσταση i του υπαλλήλου. Μία μεικτή στρατηγική για έναν πελάτη καθορίζεται από το διάνυσμα $(q(0), q(1))$, όπου $q(i)$ είναι η πιθανότητα εισόδου στο σύστημα αν ο υπάλληλος βρίσκεται στην κατάσταση i. Αν όλοι οι πελάτες ακολουθούν την ίδια μεικτή στρατηγική $q(0), q(1)$ τότε το σύστημα αποτελεί Μαρκοβιανή αλυσίδα:

Κατάσταση	**Επόμενη κατάσταση**	**Χρόνος**
$(0,0)$	$(1,0)$	Exp$\big(\lambda q(0)\big)$
$(n,0),\ n \geq 1$	$(n{+}1,0)$	Exp$\big(\lambda q(0)\big)$
	$(n,1)$	Exp(θ)
$(n,1),\ n \geq 2$	$(n{+}1,1)$	Exp$\big(\lambda q(1)\big)$
	$(n{-}1,1)$	Exp(μ)
$(1,1)$	$(0,0)$	Exp(μ)
	$(2,1)$	Exp$\big(\lambda q(1)\big)$

Ο χώρος καταστάσεων S_{au} για τη σχεδόν μη παρατηρήσιμη περίπτωση είναι ίδιος με τον χώρο καταστάσεων S της περίπτωσης της παρατηρήσιμης ουράς. Ο χώρος καταστάσεων και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Σχήμα 2.4: Διάγραμμα ρυθών μετάβασης για τη μεικτή στρατηγική (q(0),q(1)).[2]

Έστω $(p_{au}(n,i) : (n,i) \in S)$ η στάσιμη κατανομή του αντίστοιχου συστήματος. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$p(0,0)\lambda(0) = p(1,1)\mu, \tag{2.23}$$

$$p(0,0)\lambda(0) = (\theta + \lambda(0))p(1,0) \iff p(1,0) = \frac{\lambda(0)p(0,0)}{\lambda(0)+\theta}, \tag{2.24}$$

Οπότε για $n \geq 0$ έχουμε:

$$p(n,0) = \left(\frac{\lambda(0)}{\lambda(0)+\theta}\right)^n p(0,0), \tag{2.25}$$

Για τις καταστάσεις $(n,1)$ έχουμε:
Για $n = 1$

$$p(1,1)(\lambda(1)+\mu) = p(1,0)\theta + p(2,1)\mu, \tag{2.26}$$

Για $n \geq 2$ έχουμε:

$$p(2,1)(\lambda q(1)+\mu) = \lambda q(1)p(1,1) + \theta p(2,0) + \mu p(3,1)$$

Οπότε γενικά:

$$p(n,1)(\lambda(1)+\mu) = p(n-1,1)\lambda(1) + p(n+1,1)\mu + p(n,0)\theta, \quad n = 2,3,4,... \tag{2.27}$$

Ορίζουμε:

$$\rho(0) = \frac{\lambda(0)}{\mu}, \quad \rho(1) = \frac{\lambda(1)}{\mu} \quad \sigma(0) = \frac{\lambda(0)}{\lambda(0)+\theta} \tag{2.28}$$

Οπότε λόγω των παραπάνω σχέσεων η (2.25) γίνεται:

$$p(n,0) = \sigma(0)^n p(0,0), \quad n = 0,1,2,....$$

Θέτοντας στην (2.27) $p(n,1) = x_n$ προκύπτει ότι το $p(n,1), \quad n = 1,2,3,...$ είναι η λύση της εξίσωσης διαφορών:

$$\mu x_{n+1} - (\lambda(1)+\mu)x_n + \lambda(1)x_{n-1} = -\theta p(n,0) = -\theta\sigma(0)^n p(0,0), \quad n = 2,3,.. \tag{2.29}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι :

$$\mu x^2 - (\lambda(1) + \mu)x + \lambda = 0.$$

Οι ρίζες είναι 1 και $\rho(1)$. Θα θεωρήσουμε ότι $\sigma(0) \neq \rho(1)$ και εξ ορισμού ισχύει ότι $\sigma(0) \neq 1$. Οπότε για τη λύση της ομογενούς έχουμε:

$$x_{OM} = A + B\rho(1)^n.$$

Για μια ειδική λύση της μη ομογενούς, θέτοντας $x_n = C\sigma(0)^n$, στη (2.29) έχουμε:

$$\mu C\sigma(0)^{n+1} - (\lambda(1) + \mu)C\sigma(0)^n + \lambda(1)C\sigma(0)^{n-1} = -\theta\sigma(0)^n p(0,0).$$

Διαιρώντας με $\sigma(0)^n$, λύνοντας ώς προς C και μετα απο παραγοντοποίηση έχουμε:

$$C = \frac{-\theta\sigma(0)p(0,0)}{(\sigma(0)\mu - \lambda(1))(\sigma(0) - 1)}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (2.28) έχουμε:

$$C = \frac{\theta\sigma(0)p(0,0)}{\mu((\sigma(0) - \rho(1))(1 - \sigma(0))}.$$

Επειδή $\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} = \frac{\lambda(0)}{\theta}$ έχουμε:

$$C = \frac{p(0,0)\rho(0)}{(\sigma(0) - \rho(1))}. \tag{2.30}$$

Οπότε η γενική λύση της εξίσωσης είναι:

$$x_n = p(n,1) = A + B\rho(1)^n + C\sigma(0)^n, \tag{2.31}$$

Δηλαδή:

$$p(n,1) = A + B\,\rho(1)^n + C\sigma(0)^n, \qquad n \geq 1.$$

Έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} p(n,1) = A, \quad \text{αφού } \rho(1)^n, \sigma(0)^n \to 0.$$

Για ύπαρξη στάσιμης κατανομής απαιτείται $\sum_{n\geq 1} p(n,1) < \infty$ και $p(n,1) \geq 0$. Αν $A > 0$ η σειρά αποκλίνει· αν $A < 0$ προκύπτουν αρνητικές «πιθανότητες». $\Rightarrow$ $\boxed{A = 0}$.

Αντικαθιστώντας στη (2.31) $n = 1$ έχω:

$$p(1,1) = B\rho(1) + C\sigma(0) = \rho(0)p(0,0) \;\Rightarrow \boxed{B = -\frac{\rho(0)\,p(0,0)}{\sigma(0)-\rho(1)}} \quad (\text{δηλ. } B = -C). \tag{2.32}$$

Οπότε για $A = 0, B = -C$ και

$$C = \frac{p(0,0)\rho(0)}{(\sigma(0)-\rho(1))}$$

η (2.31) γίνεται:

$p(n,1) = C(\sigma(0)^n - \rho(1)^n)$. Επιπλέον είναι $p(n,0) = \sigma(0)^n p(0,0)$ για $n = 0, 1, 2, \ldots.$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε:

$\sum_{n\geq 0} p(n,0) + \sum_{n\geq 1} p(n,1) = 1$

$\iff p(0,0)\sum_{n\geq 0}\sigma(0)^n + C\sum_{n\geq 1}(\sigma(0)^n - \rho(1)^n) = 1.$

Είναι εξορισμού $\sigma(0) = \frac{\lambda(0)}{\lambda(0)+\theta} < 1$ και επιπλέον θα πρέπει $\rho(1) < 1$ για να συγκλίνουν τα άπειρα αθροίσματα.

Άρα:

$$p(0,0)\left(\frac{1}{1-\sigma(0)}\right) + \frac{\rho(0)p(0,0)}{\sigma(0)-\rho(1)}\left(\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} - \frac{\rho(1)}{1-\rho(1)}\right) = 1 \implies \boxed{p(0,0) = \frac{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))}{1-\rho(1)+\rho(0)}}.$$

Επομένως αφού $p(n,0) = \sigma(0)^n p(0,0)$ έχουμε ότι:

$$p(n,0) = \frac{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))}{1-\rho(1)+\rho(0)}\sigma(0)^n, \quad n \geq 0$$

Όμοια αφού $p(n,1) = C(\sigma(0)^n - \rho(0)^n)$, έχουμε:

$$p(n,1) = \frac{p(0,0)\rho(0)}{(\sigma(0)-\rho(1))}(\rho(1)^n - \sigma(0)^n)$$

Άρα:

$$p(n,1) = \frac{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))\rho(0)}{(1-\rho(1)+\rho(0))(\sigma(0)-\rho(1))} \cdot (\sigma(0)^n - \rho(1)^n), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Πρόταση 2.2. *Έστω M/M/1 ουρά με χρόνους επανεκκίνησης και $\sigma(0) \neq \rho(1)$, στην οποία οι πελάτες παρατηρούν την κατάσταση i του υπαλλήλου κατά την άφιξη και μπαίνουν με πιθανότητα $q(i)$, δηλαδή ακολουθούν τη μεικτή στρατηγική $(q(0), q(1))$. Το σύστημα είναι σταθερό αν και μόνο αν $\rho(1) < 1$.*

Στην περίπτωση αυτή οι στάσιμες πιθανότητες $(p_{au}(n,i) : (n,i) \in S$ είναι:

$$p_{au}(n,0) = \frac{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))}{1-\rho(1)+\rho(0)}\sigma(0)^n, \quad n = 0,1,2,... \tag{2.33}$$

$$p_{au}(n,1) = \frac{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))\rho(0)}{(1-\rho(1)+\rho(0))(\sigma(0)-\rho(1))} \cdot (\sigma(0)^n - \rho(1)^n), \quad n = 1,2,.... \tag{2.34}$$

Για το μέσο κοινωνικό όφελος, όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν ίδια μεικτή στρατηγική $(q_e(0), q_e(1))$ έχουμε:

Για $i = 0$:

$$\pi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{au}(n,0) = \frac{1-p(1)}{1-p(1)+p(0)}$$

Για $i = 1$:

$$\pi(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{au}(n,1) = \frac{\rho(0)}{1-\rho(1)+\rho(0)},$$

Το αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη που βρίσκει τον υπάλληλο στην κατάσταση i και αποφασίζει να εισέλθει είναι:

$$R - C\frac{E[N^- \mid i]+1}{\mu} - \frac{C(1-i)}{\theta}$$

Υπολογισμός του $E[N \mid i]$, δηλαδή του αναμενόμενου αριθμού πελατών στο σύστημα κατά τη άφιξη του πελάτη όταν ο υπάλληλος είναι στην κατάσταση i:

Για $i = 0$

$$E[N^- \mid 0] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi^-_{N|0}(n \mid 0)$$

Είναι

$$\pi^-_{N|0}(n \mid 0) = \frac{p(n,0)\lambda(0)}{\sum_{k=0}^{\infty} p(k,0)\lambda(0)} = \frac{(1-\sigma(0)(1-\rho(0))\sigma(0)^n\lambda(0)}{\lambda(0)(1-\rho(0))} = (1-\sigma(0))\sigma(0)^n$$

Επομένως

$$E[N^- \mid 0] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi^-_{N|0}(n \mid 0) = \sum_{n=0}^{\infty} n\sigma(0)^n(1-\sigma(0)) = \frac{\sigma(0)}{(1-\sigma(0))^2}(1-\sigma(0)) = \frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} \tag{2.35}$$

Οπότε το αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη που κατα την άφιξή του βρίσκει τον υπάλληλο ανενεργό είναι:

$$R - \frac{C}{\mu(1-\sigma(0))} - \frac{C}{\theta}.$$

Όμοια για $i = 1$:

$$E[N^- \mid 1] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi^-_{N|1}(n \mid 1)$$

έχουμε:

$$p(n,1) = K\big(\sigma(0)^n - \rho(1)^n\big), \qquad n \geq 1, \quad \pi_I(1) = \sum_{n \geq 1} p(n,1) = K\left(\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} - \frac{\rho(1)}{1-\rho(1)}\right).$$

Όπου $K = \frac{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))\rho(0)}{(1-\rho(1)+\rho(0))(\sigma(0)-\rho(1))}$

$$\pi^-_{N|1}(n \mid 1) = \frac{p(n,1)}{\pi_1(1)} = \frac{\sigma(0)^n - \rho(1)^n}{\dfrac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} - \dfrac{\rho(1)}{1-\rho(1)}}, \qquad n \geq 1.$$

Είναι:

$$E[N^- \mid 1] = \sum_{n \geq 1} nP(N = n \,|\, I = 1) = \frac{\displaystyle\sum_{n \geq 1} n(\sigma(0)^n - \rho(1)^n)}{\dfrac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} - \dfrac{\rho(1)}{1-\rho(1)}}.$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
E[N^- \mid I=1] &= \frac{\dfrac{\sigma(0)}{(1-\sigma(0))^2} - \dfrac{\rho(1)}{(1-\rho(1))^2}}{\dfrac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} - \dfrac{\rho(1)}{1-\rho(1)}} \\
&= \frac{\sigma(0)(1-\rho(1))^2 - \rho(1)(1-\sigma(0))^2}{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))\big(\sigma(0)-\rho(1)\big)} \\
&= \frac{(\sigma(0)-\rho(1))(1-\sigma(0)\rho(1))}{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))(\sigma(0)-\rho(1))} \\
&= \frac{1-\sigma(0)\rho(1)}{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))} \\
&= \frac{\rho(1)(1-\sigma(0)) + (1-\rho(1))}{(1-\sigma(0))(1-\rho(1))} \\
&= \frac{\rho(1)}{1-\rho(1)} + \frac{1}{1-\sigma(0)} \\
&= \boxed{\frac{\lambda(0)+\theta}{\theta} + \frac{\lambda(1)}{\mu-\lambda(1)}} \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

Το αναμενόμενο όφελος για τον πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπάλληλο ενεργό είναι ίσο με:

$$R - \frac{C}{\mu}\left(\frac{\lambda(0)+\theta}{\theta} + \frac{\lambda(1)}{\mu-\lambda(1)}\right) - \frac{C}{\mu} = R - \frac{C(\lambda(0)+\theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\mu-\lambda(1)}.$$

Επομένως το κοινωνικό όφελος ανα μονάδα χρόνου όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν μεικτή στρατηγική $(q_e(0), q_e(1))$ είναι:

$$\begin{aligned}
S_{au} = \lambda(0)\frac{1-\rho(1)}{1-\rho(1)+\rho(0)}\left(R - \frac{C(\lambda(0)+\theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}\right) \\
+\lambda(1)\frac{\rho(0)}{1-\rho(1)+\rho(0)}\left(R - \frac{C(\lambda(0)+\theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\mu-\lambda(1)}\right). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Θεώρημα 2.4. *Στη σχεδόν μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά με χρόνους επανεκκίνησης και $\lambda < \mu$ υπάρχει μία μοναδική μεικτή στρατηγική ισορροπίας $(q_e(0), q_e(1))$ " παρατήρηση $I(t)$ και είσοδος με πιθανότητα $q_e(I(t))$", όπου το διάνυσμα $(q_e(0), q_e(1))$ δίνεται παρακάτω:*

Περίπτωση 1: $\frac{1}{\theta} < \frac{1}{\mu}$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right),\ 0\right), & R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}\right), \\ (1, 0), & R \in \left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu}\right), \\ \left(1, \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right)\right), & R \in \left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu-\lambda}\right), \\ (1, 1), & R \in \left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu-\lambda},\ \infty\right). \end{cases}$$

Περίπτωση 2: $\frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{\mu-\lambda}$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right), \frac{\mu-\theta}{\lambda}\right), & R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}\right), \\ \left(1,\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right)\right), & R \in \left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu-\lambda}\right), \\ (1, 1), & R \in \left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\mu-\lambda},\ \infty\right). \end{cases}$$

Περίπτωση 3: $\frac{1}{\mu-\lambda} < \frac{1}{\theta}$

$$(q_e(0),\, q_e(1)) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right),\, 1\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta},\, \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ \\ (1,1), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}, \infty\right). \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο κατά την άφιξή του στην κατάσταση 0 (ανενεργός). Αν αποφασίσει να εισέλθει, το αναμενόμενο καθαρό όφελός του είναι:

$$R - \frac{C(E[N^- \mid 0] + 1)}{\mu} - \frac{C}{\theta}.$$

Λόγω της (2.35) έχουμε ότι

$$R - \frac{C(\frac{\sigma(0)}{1-\sigma(0)} + 1)}{\mu} - \frac{C}{\theta} = R - \frac{C}{\mu(1-\sigma(0))} - \frac{C}{\theta}.$$

Επειδή $\sigma(0) = \frac{\lambda(0)}{\lambda(0)+\theta}$. το το αναμενόμενο καθαρό όφελος γίνεται:

$$R - \frac{C(\lambda(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}.$$

Είναι $\lambda(0) = \lambda q_e(0)$ άρα:

$$R - \frac{C(\lambda q_e(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}.$$

Αν $q_e(0) = 0$, δηλαδή αν η πιθανότητα κάποιος να μην μπει στο σύστημα αν αυτό είναι άδειο ισούται με μηδεν, τότε το καθαρό όφελος είναι:

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta},$$

με

$$R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}. \tag{2.39}$$

Εξισώνοντας το αναμενόμενο καθαρό όφελος με το 0 έχουμε:

$$R - \frac{C(\lambda q_e(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta} = 0,$$

και λύνοντας ως προς $q_e(0)$ έχουμε:

$$q_e(0) = \frac{R\mu\theta - C(\mu + \theta)}{C\lambda}.$$

Ισχύει ότι: $q_e(0) \leq 1$ επομένως;

$$\frac{R\mu\theta - C(\mu + \theta)}{C\lambda} \leq 1.$$

Λύνοντας την ανίσωση ως προς R έχουμε:

$$R \leq \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}. \tag{2.40}$$

Οπότε έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις;

Περίπτωση (1)

$$\frac{C}{\theta} + \frac{C}{\mu} < R \leq \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}.$$

Εαν όλοι οι πελάτες που βρίσκουν το σύστημα άδειο εισέρχονται σε αυτό με πιθανότητα $q_e(0) = 1$, τότε το αναμενόμενο καθαρό όφελος είναι:

$$R - \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}$$

. Λόγω της (2.40) ο επιλεγμένος πελάτης που επιλέγει να μπει στην περίπτωση αυτή έχει αρνητικό όφελος επομένως το $q_e(0) = 1$ δεν οδηγεί σε ισορροπία. Όμοια αν αν όλοι οι πελάτες που βρίσκουν το σύστημα άδειο δεν εισέρχονται το αναμενόμενο καθαρό όφελος είναι:

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}.$$

Λόγω της (2.39) στην περίπτωση αυτή ο επιλεγμένος πελάτης έχει θετικό όφελος αν επιλέξει να εισέλθει στο σύστημα οπότε το $q_e(0) = 0$ δεν αποτελεί μέρος της μεικτής στρατηγικής ισορροπίας. Επειδή το καθαρό αναμενόμενο όφελος

$$R - \frac{C(\lambda q_e(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta}$$

φθίνει ως προς $q_e(0)$ και οι τιμές για $q_e(0)=0$ και $q_e(0)=1$ είναι ετερόσημες, θα υπάρχει ένα μοναδικό

$$q_e(0) \in (0,1),$$

τέτοιο ώστε

$$R - \frac{C(\lambda q_e(0)+\theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\theta} = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad q_e(0) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right).$$

Περίπτωση 2:

$$R > \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}.$$

Στην περίπτωση αυτή και λόγω της (2.40) οποιαδήποτε στρατηγική και να ακολουθήσουν οι υπόλοιποι πελάτες ο επιλεγμένος πελάτης έχει θετικό καθαρό αναμενόμενο όφελος αν εισέλθει στο σύστημα, οπότε $q_e(0)=1$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την πιθανότητα εισόδου $q_e(1)$ (ο υπαλληλος είναι ενεργός), και έναν επιλεγμένο πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπάλληλο ενεργό. Το αναμενόμενο καθαρό όφελός του αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα είναι λόγω της (2.38):

$$\begin{aligned} R - \frac{C(E[N^- \mid 1]+1)}{\mu} &= R - \frac{C(\lambda(0)+\theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\mu-\lambda(1)} \\ &= \begin{cases} \frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu-\lambda(1)}, & \text{αν} \quad \lambda(0) = \frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta \\ R - \frac{C}{\mu-\lambda(1)} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}, & \text{αν} \quad \lambda(0) = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.41}$$

Έχουμε

$$\frac{C}{\theta} + \frac{C}{\mu} < R \le \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \qquad q_e(0) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right).$$

Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός χαρακτηριστικού πελάτη που βρίσκει τον υπάλληλο ενεργό είναι

$$\frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda q_e(1)},$$

το οποίο είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $q_e(1) \in [0,1]$.

Ειδικότερα, για $q_e(1)=0$ είναι

$$\frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu}$$

, και για $q_e(1) = 1$
$$\frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda}.$$

Περίπτωση 1α: Αν $\frac{C}{\theta} < \frac{C}{\mu}$, τότε το όφελος όταν ο πελάτης εισέρχεται στο σύστημα ενώ ο υπάλληλος είναι ενεργός είναι αρνητικό. Λόγω μονοτονίας , για κάθε $q_e(1) \in [0, 1]$ (και άρα και για $q_e(1) = 1$) ισχύει
$$\frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda} < 0$$

Επομένως, ο πελάτης δεν έχει συμφέρον να εισέλθει στο σύστημα όταν ο υπάλληλος είναι ενεργός και, επομένως,
$$q_e(1) = 0.$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:
$$\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta} < R \leq \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} \quad \text{και} \quad \frac{C}{\theta} < \frac{C}{\mu},$$
$$(q_e(0), q_e(1)) = \left(\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta \right), 0 \right).$$

Περίπτωση 1β:
$$\frac{C}{\theta} + \frac{C}{\mu} < R \leq \frac{C(\lambda + \theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta}, \qquad q_e(0) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta \right), \quad \frac{C}{\mu} \leq \frac{C}{\theta} \leq \frac{C}{\mu - \lambda}$$
.

Άρα το όφελος του χαρακτηριστικού πελάτη αν $q_e(1) = 0$ και αν $q_e(1) = 1$ αντίστοιχα είναι:
$$\frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu} > 0 \quad \text{και} \quad \frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda} < 0.$$
. Επομένως υπάρχει ένα ακριβώς $q_e(1)$ τέτοιο ώστε $q_e(1) = 0$. Υπολογίζουμε το $q_e(1)$ από τη σχέση (2.41):
$$\frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda q_e(1)} = 0 \iff q_e(1) = \frac{\mu - \theta}{\lambda}$$
.

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}<R\leq\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta},\quad \frac{C}{\mu}\leq\frac{C}{\theta}\leq\frac{C}{\mu-\lambda},$$
$$(q_e(0),q_e(1))=\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C}-\mu-\theta\right),\frac{\mu-\theta}{\lambda}\right).$$

Περίπτωση 1γ:

$$\frac{C}{\theta}+\frac{C}{\mu}<R\leq\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta},\qquad q_e(0)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C}-\mu-\theta\right),\quad \frac{C}{\theta}>\frac{C}{\mu-\lambda}>\frac{C}{\mu}.$$

Οπότε για τις στρατηγικές $q_e(1)=0$ και $q_e(1)=1$ αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{C}{\theta}-\frac{C}{\mu}>0\quad\text{και}\quad\frac{C}{\theta}-\frac{C}{\mu-\lambda}>0.$$

Στην περίπτωση αυτή το όφελος του χαρακτηριστικού πελάτη είναι θετικό οποιαδήποτε στρατηγική και αν ακολουθηθεί, οπότε $q_e(1)=1$ Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}<R\leq\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}\quad\text{και}\quad\frac{C}{\mu-\lambda}<\frac{C}{\theta}.$$
$$(q_e(0),q_e(1))=\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C}-\mu-\theta\right),1\right).$$

Περίπτωση 2α: Εξετάζουμε την περίπτωση

$$\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} < R \quad \text{και} \quad q_e(0) = 1.$$

Για $q_e(1) = 0$ και $q_e(1) = 1$, αντίστοιχα το όφελος του χαρακτηριστικού πελάτη είναι:

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} \quad \text{και} \quad R - \frac{C}{\mu-\lambda} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}.$$

Αν:

$$R < \frac{C}{\mu} - \frac{C(1+\theta)}{\mu\theta}$$

τότε, το όφελος εισόδου του χαρακτηριστικού πελάτη αν $q_e(1) = 0$ είναι αρνητικό και επειδή το όφελος είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς $q_e(1)$ έχουμε ότι και το όφελος για $q_e(1) = 1$ θα είναι επίσης αρνητικό, δηλαδή

$$R - \frac{C}{\mu-\lambda} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} < 0.$$

Οπότε όποια πολιτική και αν ακολουθείται ο χαρακτηριστικός πελάτης έχει αρνητικό όφελος εισόδου στο σύστημα, οπότε $q_e(1) = 0$. Οπότε συνοψίζοντας έχουμε:

$$\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} < R \quad \text{και} \quad R < \frac{C}{\mu} + \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}$$

,

$$(q_e(0), q_e(1)) = (1, 0).$$

Περίπτωση 2β: Αν $\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} \leq R \leq \dfrac{C}{\mu-\lambda} + \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}$,

τότε το όφελος του πελάτη να εισέλθει στο σύστημα αν οι υπόλοιποι πελάτες δεν εισέρχονται είναι θετικό ή μηδέν. Αντιθέτως το όφελος εισόδου του πελάτη αν όλοι οι πελάτες εισέρχονται είναι αρνητικό ή μηδέν, επομένως τα $qe(1) = 0$ και $qe(1) = 1$ δεν μπορούν να είναι στρατηγικές ισορροπίας. Οπότε:

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} > 0 \quad \text{και} \quad R - \frac{C}{\mu-\lambda} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} < 0.$$

Επομένως υπάρχει ακριβώς ένα $q_e(1) \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει ότι το αναμενόμενο καθαρό όφελος του πελάτη εισόδου στο σύστημα αν ο υπάλληλος είναι ενεργός είναι ίσο με μηδέν:

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda(1)} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} = 0.$$

Αντικαθιστώντας $\lambda(1) = \lambda q_e(1)$ και λύνοντας ως προς $q_e(1)$ έχουμε:

$$q_e(1) = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right).$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \frac{C}{\theta} < R \quad \text{και} \quad \frac{C}{\mu} + \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} \leq R \leq \frac{C}{\mu-\lambda} + \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta},$$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \left(1, \ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right)\right).$$

Περίπτωση 2γ:

Αν $\quad R > \dfrac{C}{\mu-\lambda} + \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}$, τότε το όφελος του πελάτη να εισέλθει στο σύστημα όταν οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα (δηλαδή όταν $q_e(1) = 1$) είναι θετικό. Επειδή το όφελος είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ως προς q_e, για $q_e(1) = 0$, θα έχουμε ότι το όφελος είναι επίσης θετικό. Δηλαδή:

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} > 0 \quad \text{και} \quad R - \frac{C}{\mu-\lambda} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι όποια στρατηγική και να ακολουθηθεί από τους υπόλοιπους πελάτες, ο χαρακτηριστικός πελάτης έχει θετικό αναμενόμενο καθαρό όφελος αν αποφασίσει να μπει στο σύστημα, δηλαδή $q_e(1) = 1$.

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}<R \quad \text{και} \quad \frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}<R.$$

$$(q_e(0),q_e(1))=(1,1).$$

Αναδιατάσσοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}<\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}<\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu}<\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu-\lambda}$$

Περίπτωση 1: $\frac{1}{\theta}<\frac{1}{\mu}$

$$(q_e(0),q_e(1))=\begin{cases}\left(\frac{1}{\lambda}\Big(\frac{\mu\theta R}{C}-\mu-\theta\Big),\,0\right), & R\in\left(\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}\right),\\ (1,0), & R\in\left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu}\right),\\ \left(1,\frac{1}{\lambda}\Big(\mu-\frac{C}{R-\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\Big)\right), & R\in\left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu},\ \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu-\lambda}\right),\\ (1,1), & R\in\left[\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu-\lambda},\ \infty\right).\end{cases}$$

Περίπτωση 2: $\frac{1}{\mu} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{1}{\mu-\lambda}$

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right), \dfrac{\mu-\theta}{\lambda}\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta},\ \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ \left(1,\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right)\right), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta},\ \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\mu-\lambda}\right), \\ (1,1), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\mu-\lambda},\ \infty\right). \end{cases}$$

Περίπτωση 3: $\frac{1}{\mu-\lambda} < \frac{1}{\theta}$

$$(q_e(0),\ q_e(1)) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right), 1\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta},\ \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ (1,1), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}, \infty\right). \end{cases}$$

□

Φαίνεται λογικό, ότι η πληροφορία πως ο υπάλληλος είναι απενεργοποιημένος κάνει τους πελάτες λιγότερο πρόθυμους να εισέλθουν στο σύστημα, αφού πρέπει να περιμένουν μέχρι να ολοκληρωθεί ο χρόνος ενεργοποίησης του. Δηλαδή θα περιμέναμε ότι $q_e(0) \leq q_e(1)$. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει γενικά, όπως δείχνει το Θεώρημα 4. Στην Περίπτωση 1 ισχύει πάντοτε ότι $q_e(0) \geq q_e(1)$, στην Περίπτωση 3 ότι $q_e(0) \leq q_e(1)$, ενώ στην Περίπτωση 2 η συμπεριφορά ποικίλλει.

Το Θεώρημα 4 ποσοτικοποιεί διάφορα, διαισθητικά αναμενόμενα, σενάρια σχετικά με τη συμπεριφορά των πελατών όταν, κατά την άφιξή τους, ενημερώνονται για την κατάσταση του υπαλλήλου. Ο κρίσιμος παράγοντας είναι ο μέσος χρόνος επανεκκίνησης $1/\theta$, σε σύγκριση με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $1/\mu$

και τον μέσο χρόνο κατά τον οποίο ο υπάλληλος είναι απασχολημένος, $1/(\mu-\lambda)$ της αντίστοιχης ουράς $M/M/1$ χωρίς χωρίς χρόνους επανεκκίνησης.

Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα σύστημα με μικρό μέσο χρόνο επανεκκίνησης και εστιάζουμε σε έναν επιλεγμένο πελάτη. Αν του δοθεί η πληροφορία ότι ο υπάλληλος είναι απενεργοποιημένος, τότε γνωρίζει ότι πρέπει να περιμένει για την επανεκκίνηση. Από την άλλη πλευρά, περιμένει ότι λίγοι πελάτες βρίσκονται μπροστά του, επειδή το σύστημα ήταν άδειο στην αρχή της τρέχουσας επανεκκίνησης και ο μέσος χρόνος που χρειάζεται για την επανεκκίνηση είναι μικρός. Η Περίπτωση 1 του Θεωρήματος 4 δείχνει ότι ο δεύτερος παράγοντας (λίγοι πελάτες σε αναμονή) υπερισχύει, άρα είναι βέλτιστο για τον επιλεγμένο πελάτη να εισέλθει.

Μάλιστα, όταν ο μέσος χρόνος επανεκκίνησης είναι μικρός (Περίπτωση 1), προκύπτει μια ακόμη πιο ακραία κατάσταση. Για να εισέλθει οποιοσδήποτε πελάτης όταν ο υπάλληλος είναι ενεργός, η ανταμοιβή πρέπει να είναι αρκετά υψηλή ώστε όλοι οι πελάτες να εισέρχονται όταν ο υπάλληλος είναι ανενεργός. Με άλλα λόγια, $q_e(1) > 0$ μόνο αν $q_e(0) = 1$. Αντίθετα, όταν ο μέσος χρόνος επανεκκίνησης είναι μέτριος (Περίπτωση 2) ή μεγάλος (Περίπτωση 3), η εικόνα αλλάζει. Στην Περίπτωση 3 που ο μέσος χρόνος επανεκκίνησης είναι μεγαλύτερος από το μέσο χρόνο απασχόλησης του υπαλλήλου, παύει μικρό πλήθος των πελατών να είναι αρκετό για να αντισταθμιστεί η καθυστέρηση λόγω επανεκκίνησης, οπότε $q_e(0) \le q_e(1)$. Τέλος, στη δεύτερη περίπτωση ο μέσος χρόνος επανεκκίνησης είναι ανάμεσα στους μέσους χρόνους εξυπηρέτησης και απασχόλησης του υπαλλήλου η συμπεριφορά του πελάτη ποικίλει και εξαρτάται και από άλλες παραμέτρους για παράδειγμα από την ανταμοιβή R.

Μια ακόμη συνέπεια του Θεωρήματος 4 είναι το ακόλουθο πόρισμα, το οποίο αφορά την οριακή περίπτωση ταχείας επανενεργοποίησης του υπαλλήλου.

Πόρισμα 2.1. *Όταν $\theta \to \infty$,*

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} (1,0), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu}, \dfrac{2C}{\mu}\right), \\ \left(1, \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R-\dfrac{C}{\mu}}\right)\right), & R \in \left[\dfrac{2C}{\mu}, \dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\mu-\lambda}\right], \\ (1,1), & R \in \left[\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\mu-\lambda}, \infty\right). \end{cases}$$

Απόδειξη. Καθώς $\theta \to \infty$ έχουμε ότι $\frac{1}{\theta} \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο υπάλληλος ενεργοποιείται αμέσως μόλις εμφανιστεί ο πελάτης, οπότε το σύστημα συμπεριφέρεται σαν μια κανονική M/M/1 ουρά και ο υπάλληλος είναι ανενεργός αν και μόνο αν το σύστημα είναι άδειο. Επομένως, η πληροφορία για την κατάσταση του υπαλλήλου είναι ισοδύναμη με την πληροφορία στους πελάτες που καταφθάνουν για το εαν το σύστημα είναι άδειο ή όχι. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκει τον υπάλληλο ανενεργό είναι ίσο με $R - \frac{C}{\mu}$. Αφού καθώς $\theta \to \infty$ έχουμε ότι $R - \frac{C(\lambda(0)+\theta)}{\mu\theta} \to R - \frac{C}{\mu}$.Άρα επιλέγει να εισέλθει με $q_e(0) = 1$ όταν $R \in (\frac{C}{\mu}, \infty)$. Ο υπάλληλος είναι στην κατάσταση 1, αν και μόνο αν στο σύστημα βρίσκεται τουλάχιστον ένας πελάτης. Σε αυτή την περίπτωση το αναμενόμενο καθαρό όφελός του σε περίπτωση που αποφασίσει να εισέλθει ισούται με $R - \frac{C}{\mu}\left(E[N^- \mid N > 0] + 1\right)$. Το N^- είναι μια τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των πελατών που συναντά στο σύστημα ο πελάτης κατά την άφιξή του σε μια M/M/1 ουρά όπου ο ρυθμός αφίξεων εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος: $\lambda q_e(0) = \lambda$ και $\lambda q_e(1)$ διαφορετικά. Θα αποδείξουμε ότι η μεταβλητή $N^-, N > 0$ ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{\lambda q_e(1)}{\mu}$:

Θεωρούμε το σύστημα $M/M/1$ με ρυθμό αφίξεων $\lambda_e(1) = \lambda q_e(1)$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Έστω N^- ο αριθμός των πελατών στο σύστημα αμέσως πριν από την άφιξη ενός χαρακτηριστικού πελάτη. Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned}
&\lambda q_e(1)\, p_0 = \mu\, p_1, \\
&\lambda q_e(1)\, p_1 = \mu p_2 \iff p_2 = (\frac{\lambda q_e(1)}{\mu})^2 p_0, \\
&\qquad\quad .... \\
&\lambda q_e(1)\, p_n = \mu\, p_{n-1}.
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω με επαγωγή παίρνουμε ότι:

$$p_n = \left(\frac{\lambda q_e(1)}{\mu}\right)^n p_0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Θέτοντας

$$\rho = \frac{\lambda q_e(1)}{\mu}$$

έχουμε $p_n = \rho^n p_0$ και από την κανονικοποίηση προκύπτει:

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = 1 \;\Rightarrow\; p_0 \frac{1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow\; p_0 = 1 - \rho.$$

Άρα
$$P(N^- = n) = p_n = \rho^n p_0 = (1-\rho)\rho^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Άρα η δεσμευμένη πιθανότητα:

$$P(N^- \mid N > 0) = \frac{p_n}{P(N^- > 0)} = \frac{(1-\rho)\rho^n}{1-(1-\rho)} = (1-\rho)\rho^{n-1}.$$

Επομένως η κατανομή είναι γεωμετρική και η αντίστοιχη μέση τιμή είναι:

$$E[N^- \mid N > 0] = \frac{1}{1-\rho} = \frac{\mu}{\mu - \lambda q_e(1)}.$$

Άρα το καθαρό αναμενόμενο όφελος ενός πελάτη που κατά την είσοδό του που βρίσκει τον υπάλληλο ενεργό ισούται με

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu}\big(E[N^- \mid N > 0] + 1\big) = R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu - \lambda q_e(1)}.$$

Για $q_e(1) = 0$ το αναμενόμενο καθαρό όφελος γίνεται $R - 2\frac{C}{\mu}$,

ενώ για $q_e(1) = 1$ το αναμενόμενο καθαρό όφελος γίνεται $R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu-\lambda}$. Οπότε: Αν $R < \frac{2C}{\mu}$ οπότε το όφελος είναι αρνητικό για $q_e(1) = 0$ αλλά και αν $q_e(1) = 1$ αφού η συνάρτηση του αναμενόμενου καθαρού οφέλους είναι φθίνουσα. Οπότε ο πελάτης δεν έχει συμφέρον να μπει στο σύστημα, άρα $q_e(1) = 0$.

Αν
$$R \in \left[\frac{2C}{\mu}, \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\mu - \lambda}\right)$$
έχουμε ότι το όφελος για $q_e(1) = 0$ είναι μη αρνητικό και το όφελος για $q_e(1) = 1$ είναι αρνητικό. Άρα υπάρχει μοναδικό $q_e(1)$ για το οποίο έχουμε

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\mu - \lambda q_e(1)} = 0 \iff q_e(1) = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C}{\mu}}\right).$$

Τελος,αν $R \in \left[\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\mu-\lambda}, \infty\right)$ έχουμε ότι το όφελος για $q_e(1) = 1$ είναι μη αρνητικό, άρα λόγω μονοτονίας ι το όφελος για $q_e(1) = 0$ είναι θετικό, δηλαδή $q_e(1) = 0 > q_e(1) = 1 \geq 0$, οπότε όποια στρατηγική και να ακολουθηθεί το μέσο καθαρό όφελος του χαρακτηριστικού πελάτη είναι θετικό αν αποφασίσει να εισέλθει, οπότε είναι $q_e(1) = 1$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

Όταν $\theta \to \infty$,

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} (1,0), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu}, \dfrac{2C}{\mu}\right), \\ \left(1, \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - \dfrac{C}{\mu}}\right)\right), & R \in \left[\dfrac{2C}{\mu}, \dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\mu-\lambda}\right), \\ (1,1), & R \in \left[\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\mu-\lambda}, \infty\right). \end{cases}$$

□

Παρατήρηση 2.3. *Στο Θεώρημα 4 υποθέσαμε ότι $\lambda < \mu$, ώστε το σύστημα $M/M/1$ με ρυθμούς αφίξεων $\lambda_e(1) = \lambda q_e(1)$ και εξυπηρέτησης μ να είναι σταθερό. Για την αντίθετη περίπτωση $\lambda \geq \mu$ προκύπτει ανάλογα, ότι υπάρχει και πάλι μοναδική μεικτή στρατηγική ισορροπίας $(q_e(0), q_e(1))$ του παιγνίου «παρατήρηση $I(t)$ και απόφαση εισόδου».*

Όταν $\lambda \geq \mu$, ο ρυθμός αφίξεων όταν ο υπάλληλος είναι ενεργός είναι $\lambda_e(1) = \lambda q_e(1)$. Επειδή $\lambda_e(1) < \mu$ έχουμε ότι $\lambda q_e(1) < \mu \iff q_e(1) < \frac{\mu}{\lambda}$, άρα το επιτρεπτό διάστημα για το $q_e(1)$ γίνεται

$$q_e(1) \in [0, \mu/\lambda).$$

Επιπλέον, οι όροι που περιέχουν το $\frac{C}{\mu-\lambda}$ στον προσδιορισμό των διαστημάτων του R όταν $\lambda \geq \mu$, είναι άπειροι. Συνεπώς οι αντίστοιχες περιπτώσεις του Θεωρήματος 4 απλοποιούνται, και η ανάλυση εστιάζει στα υπόλοιπα. Άρα όταν $\frac{1}{\theta} < \frac{1}{\mu}$ έχουμε ότι για $q \in [0, \mu/\lambda)$ το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκει τον υπάλληλο ενεργό και εισέρχεται στο σύστημα είναι

$$R - \frac{C(\lambda q_e(0) + \theta)}{\mu\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda q_e(1)} = \begin{cases} \frac{C}{\theta} - \frac{C}{\mu - \lambda_e(1)}, & q_e(0) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu\theta R}{C} - \mu - \theta\right) : \\ R - \frac{C}{\mu-\lambda_e(1)} - \frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}, & q_e(0) = 1 \end{cases}$$

όπως και στο Θεώρημα 4. Η διαφορά είναι ότι θα απαλείψουμε τους όρους $\frac{C}{\mu-\lambda}$ και οποιαδήποτε πιθανότητα είναι μεγαλύτερη ή ίση απο $\frac{\mu}{\lambda}$. Οπότε:

Περίπτωση 1: $\dfrac{1}{\theta} < \dfrac{1}{\mu}$.

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\lambda}\left(\mu\theta\dfrac{R}{C} - \mu - \theta\right),\, 0\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta}, \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ (1, 0), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}, \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\mu}\right), \\ \left(1,\, \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right)\right), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\mu}, \infty\right). \end{cases}$$

Περίπτωση 2: $\dfrac{1}{\mu} \leq \dfrac{1}{\theta}$.

$$(q_e(0), q_e(1)) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\lambda}\left(\mu\theta\dfrac{R}{C} - \mu - \theta\right),\, \dfrac{\mu-\theta}{\lambda}\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta}, \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ \left(1,\, \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - \dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}}\right)\right), & R \in \left[\dfrac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta} + \dfrac{C}{\theta}, \infty\right). \end{cases}$$

Τελικά θεωρούμε την πλήρως μη παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι πελάτες δεν παρατηρούν καθόλου την κατάσταση του συστήματος. Εδώ μία μικτή στρατηγική για έναν πελάτη καθορίζεται από την πιθανότητα εισόδου q. Η στάσιμη κατανομή είναι ίδια με την κατανομή της Πρότασης 2 για τη σχεδόν παρατηρήσιμη ουρά απλά θα έχουμε $q(0) = q(1) = q$, $\rho(0) = \rho(1) = \rho = \frac{\lambda q}{\mu}$ και $\sigma(0) = \sigma = \frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}$. Επίσης για τη σταθερότητα πρέπει $\rho < 1 \iff q < \frac{\mu}{\lambda}$.

$$p_u(n, 0) = (1-\sigma)(1-\rho)\sigma^n, \quad n = 0, 1, ...$$
$$p_u(n, 1) = \frac{(1-\sigma)(1-\rho)\rho}{(\sigma-\rho)}(\sigma^n - \rho^n), \quad n = 1, 2, ...$$

Η συμπεριφορά ισορροπίας των πελατών περιγράφεται παρακάτω:

Θεώρημα 2.5. *Στην πλήρως μη παρατηρήσιμη ουρά $M/M/1$ με χρόνους επανεκκίνησης και με $\lambda < \mu$, υπάρχει μία μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας «είσοδος με πιθανότητα q_e», όπου το q_e δίνεται από*

$$q_e = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - \dfrac{C}{\theta}}\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta}, \dfrac{C}{\mu - \lambda} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ 1, & R \in \left[\dfrac{C}{\mu - \lambda} + \dfrac{C}{\theta}, \infty\right). \end{cases} \tag{2.42}$$

Απόδειξη. Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης κατά τη στιγμή της άφιξής του. Αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα το αναμενόμενο καθαρό όφελός του είναι:

$$R - \frac{C}{\mu}(E[N]^- + 1) - \frac{C}{\theta}Pr[I^- = 0].$$

Το N^- είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα οπότε το $E[N]^- + 1$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός των πελατών στο σύστημα μαζί με τον επιλεγμένο πελάτη. Το I^- είναι η κατάσταση του υπαλλήλου όπως τη βλέπει ο επιλεγμένος πελάτης. Οπότε έχουμε:

$$E[N^-] = \sum_{n=0}^{\infty} np_u(n,0) + \sum_{n=1}^{\infty} np_u(n,1) =$$
$$\frac{(1-\rho)\sigma}{1-\sigma} + (1-\rho)\frac{\rho\sigma}{(\sigma-\rho)(1-\sigma)} - (1-\sigma)\frac{\rho^2}{(\sigma-\rho)(1-\rho)} =$$
$$(1-\rho)\frac{\sigma^2}{(\sigma-\rho)(1-\rho)} - (1-\sigma)\frac{\rho^2}{(\sigma-\rho)(1-\sigma)} = \frac{[(1-\rho)\sigma]^2 - [(1-\sigma)\rho]^2}{(1-\rho)(1-\sigma)(\sigma-\rho)} =$$
$$\frac{\sigma+\rho-2\rho\sigma}{(1-\sigma)(1-\rho)}.$$

Επειδή

$$\rho(1-\sigma) + \sigma(1-\rho) = \rho + \sigma - 2\rho\sigma$$

έχουμε:

$$E[N^-] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\sigma}{1-\sigma}.$$

Επιπλέον

$$Pr[I^- = 0] = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\sigma)(1-\rho)\sigma^n = (1-\rho).$$

Επομένως το όφελος είναι:

$$R - \frac{C}{\mu}(\frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\sigma}{1-\sigma} + 1) - \frac{C}{\theta}(1-\rho).$$

Για $\sigma = \frac{\lambda q}{\lambda q + \mu}$ και $\rho = \frac{\lambda q}{\mu}$ το αναμενόμενο καθαρό όφελος γίνεται:

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda q} - \frac{C}{\theta}.$$

Για

$$R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \frac{C}{\mu - \lambda} + \frac{C}{\theta} \right)$$

έχουμε: Η συνάρτηση του αναμενόμενου καθαρού οφέλους είναι γνησίως φθίνουσα ως προς q. Αν $q = 0$ το αναμενόμενο καθαρο όφελος γίνεται

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta} > 0$$

και για $q = 1$ το αναμενόμενο καθαρό όφελος γίνεται

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda} - \frac{C}{\theta} < 0.$$

Επομένως υπάρχει ένα ακριβώς $q_e \in (0, 1)$ τετοιο ώστε το αναμενόμενο καθαρό όφελος ισούται με 0.

Δηλαδή

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda q_e} - \frac{C}{\theta} = 0 \iff q_e = \frac{1}{\lambda} \left(\mu - \frac{C}{R - \frac{C}{\theta}} \right).$$

Σε περίπτωση που

$$R \in \left(\frac{C}{\mu - \lambda} + \frac{C}{\theta}, \infty \right)$$

έχουμε ότι για $q = 1$ το καθαρό αναμενόμενο όφελος είναι θετικό, δηλαδή:

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda} - \frac{C}{\theta} > 0.$$

. Επειδή η συνάρτηση του αναμενόμενου καθαρού οφέλους είναι γνησίως φθίνουσα ως προς q θα έχουμε ότι το αντίστοιχο αναμενόμενο καθαρό όφελος θα είναι επίσης θετικό για κάθε $q \in [0, 1]$. Άρα σε κάθε περίπτωση, ο πελάτης έχει θετικό όφελος να εισέλθει στο σύστημα, δηλαδη $q_e = 1$. Επομένως η μοναδική μεικτή στρατηγική ισορροπίας ''είσοδος με πιθανότητα q_e'' είναι:

$$q_e = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\left(\mu - \dfrac{C}{R - \dfrac{C}{\theta}}\right), & R \in \left(\dfrac{C}{\mu} + \dfrac{C}{\theta}, \dfrac{C}{\mu - \lambda} + \dfrac{C}{\theta}\right), \\ 1, & R \in \left[\dfrac{C}{\mu - \lambda} + \dfrac{C}{\theta}, \infty\right). \end{cases}$$

□

Παρατήρηση 2.4. *Για την περίπτωση $\lambda \geq \mu$, το ανάλογο του Θεωρήματος 5 είναι ότι υπάρχει μία μοναδική μεικτή στρατηγική ισορροπίας «είσοδος με πιθανότητα q_e» στην πλήρως μη παρατηρήσιμη ουρά $M/M/1$ με χρόνους επανεκκίνησης, όπου*

$$q_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - \dfrac{C}{\theta}}\right),$$

για $R \in \left(\frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}, \infty\right)$.

Απόδειξη. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός επιλεγμένου πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα είναι

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda q} - \frac{C}{\theta}.$$

Για να είναι σταθερό το σύστημα πρέπει $\rho < 1 \iff \lambda q < \mu \iff q < \frac{\mu}{\lambda}$. Δηλαδή $q \in [0, \mu/\lambda)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που δίνει το καθαρό αναμενόμενο όφελος είναι φθίνουσα ως προς q.

Επιπλέον για $q = 0$ το όφελος γίνεται:

$$R - \frac{C}{\mu} - \frac{C}{\theta}$$

και

$$\lim_{q \to \mu/\lambda^-} R - \frac{C}{\mu - \lambda q} - \frac{C}{\theta} = -\infty.$$

Αν $R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}$ τότε το όφελος για $q = 0$ είναι θετικό και επειδή

$$\lim_{q \to \mu/\lambda^-} R - \frac{C}{\mu - \lambda q} - \frac{C}{\theta} = -\infty$$

από τη συνέχεια και τη μονοτονία προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό $q_e \in (0, \mu/\lambda)$ τέτοιο ώστε $R - \frac{C}{\mu - \lambda q} - \frac{C}{\theta} = 0$.

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση και έχουμε:

$$R - \frac{C}{\mu - \lambda q_e} - \frac{C}{\theta} = 0 \iff R - \frac{C}{\theta} = \frac{C}{\mu - \lambda q_e}$$

$$\iff \mu - \lambda q_e = \frac{C}{R - C/\theta} \iff q_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - C/\theta}\right).$$

Πράγματι η ρίζα q_e ανήκει στο διάστημα $(0, \frac{\mu}{\lambda}) \subset (0, 1)$:

$$q_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R - C/\theta}\right) \iff \lambda q_e = \mu - \frac{C}{R - C/\theta} < \mu$$

, άρα $\lambda q_e < \mu \iff q_e < \frac{\mu}{\lambda}$.

Επίσης

$$R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta} \Rightarrow R - \frac{C}{\theta} > \frac{C}{\mu} \Rightarrow \frac{\theta R - C}{\theta} > \frac{C}{\mu} \Rightarrow \frac{\mu}{C} > \frac{\theta}{\theta R - C} \Rightarrow \mu > \frac{\theta}{\frac{\theta R}{C} - 1}$$

$$\Rightarrow \mu > \frac{C\theta}{\theta R - C} \Rightarrow \mu > \frac{C}{R - \frac{C}{\theta}}$$

$$\Rightarrow \mu - \frac{C}{R - \frac{C}{\theta}} > 0 \Rightarrow q_e > 0.$$

Συνεπώς $q_e \in (0, \frac{\mu}{\lambda})$. Λόγω της μονοτονίας η λύση είναι μοναδική.

$\square$

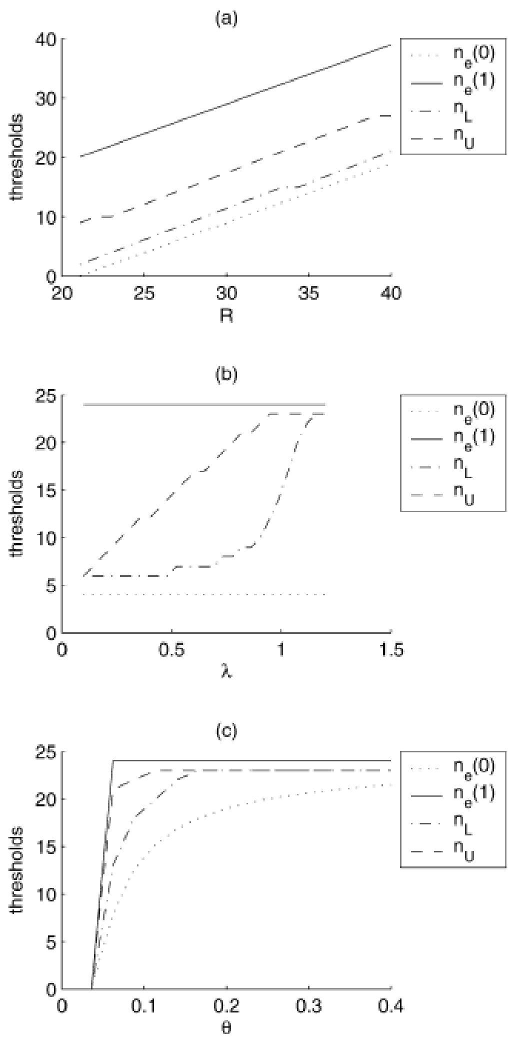
2.6 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε αριθμητικά πειράματα που δείχνουν την επίδραση του επιπέδου της πληροφορίας καθώς και διαφόρων άλλων παραμέτρων στη συμπεριφορά του συστήματος. Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρουν οι τιμές των κατωφλίων ισορροπίας για τα παρατηρήσιμα μοντέλα, καθώς και οι τιμές των πιθανοτήτων ισορροπίας εισόδου για τα μη παρατηρήσιμα μοντέλα, καθώς και το κοινωνικό όφελος ανά μονάδα χρόνου όταν οι πελάτες ακολουθούν στρατηγικές ισορροπίας.

Αρχικά θεωρούμε τα πλήρως και σχεδόν παρατηρήσιμα συστήματα και μελετάμε πώς επηρεάζονται οι καθαρές πολιτικές κατωφλίου ισορροπίας από την αμοιβή εξυπηρέτησης R, τον ρυθμό άφιξης λ, και τον ρυθμό επανεκκίνησης θ. (Αν χρειαστεί, αναπροσαρμόζοντας τις παραμέτρους, θέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $\mu = C = 1$). Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.5. Το ενδιαφέρον συμπέρασμα που προκύπτει από αυτό το σχήμα είναι ότι και στα τρία διαγράμματα, το εύρος των κατωφλίων για την σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση, $n_L, ..., n_U$, περιέχεται στο διάστημα ανάμεσα στα $n_e(0)$ και $n_e(1)$ της πλήρως παρατηρήσιμης περίπτωσης. Με άλλα λόγια, στο σχεδόν παρατηρήσιμο μοντέλο το κοινό κατώφλι έχει μια ενδιάμεση τιμή ανάμεσα στα δύο ξεχωριστά κατώφλια που χρησιμοποιούν οι πελάτες όταν τους δίνονται επιπλέον πληροφορίες για την κατάσταση του υπαλλήλου. Σχετικά με την ευαισθησία σε συγκεκριμένες παραμέτρους, έχουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις. Όταν η επιβράβευση R (με $R > \frac{C}{\mu} + \frac{C}{\theta}$) για την εξυπηρέτηση αυξάνεται, τα κατώφλια αυξάνονται γραμμικά μέχρι το σημείο απαίτησης για ακέραιο αριθμό πελατών.

Καθώς ο ρυθμός άφιξης λ μεταβάλλεται, τα κατώφλια για την παρατηρήσιμη περίπτωση παραμένουν σταθερά. Αυτό ισχύει λόγω του Θεωρήματος 1, όπου αποδείχθηκε ότι η απόφαση του πελάτη να εισέλθει ή όχι στο σύστημα δεν εξαρτάται από το ρυθμό άφιξης λ όταν πρόκειται για την πλήρως παρατηρήσιμη περίπτωση. Στη σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση,αντίθετα, το εύρος των κατωφλίων αυξάνεται με την αύξηση του ρυθμού άφιξης λ. Αυτό σημαίνει ότι αν ένας πελάτης κατά την άφιξη του έχει την πληροφορία για τον αριθμό των πελατών στο σύστημα (αλλά όχι για την κατάσταση του υπαλλήλου), τότε είναι πιο πιθανό να εισέλθει στο σύστημα όταν ο ρυθμός άφιξης είναι μεγαλύτερος. Αυτό συμβαίνει γιατί όταν ο ρυθμός άφιξης είναι υψηλός, είναι πιο πιθανό ο υπάλληλος να είναι ενεργός, οπότε η αναμενόμενη καθυστέρηση από την επανεκκίνησή του μειώνεται, ενώ η καθυστέρηση από τους πελάτες που είναι ήδη στο σύστημα παραμένει ανεπηρέαστη.

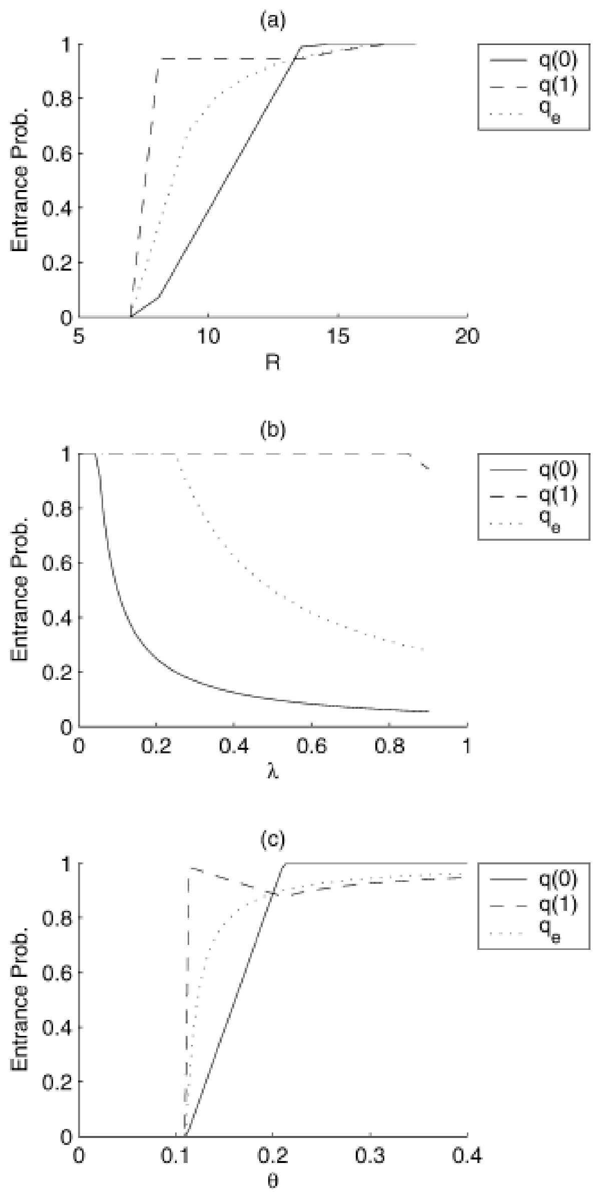
Τέλος καθώς ο ρυθμός επανεκκίνησης θ αυξάνεται , όλα τα κατώφλια αυξάνονται εκτός από το $n_e(1)$, το οποίο παραμένει σταθερό. Αυτό είναι απολύτως λογικό καθώς, όταν η επανεκκίνηση του υπαλλήλου παίρνει λιγότερο χρόνο οι πελάτες έχουν μεγαλύτερο κίνητρο να εισέλθουν στο σύστημα, τόσο στην πλήρως παρατηρήσιμη όσο και στην σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση.



Σχήμα 2.5: Κατώφλια ισορροπίας για την παρατηρήσιμη και τη σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση. Μεταβολή σε σχέση με: a. R για $\lambda = 0.4, \mu = 1, \theta = 0.05, C = 1$; b.$\lambda$ για $\mu = 1, \theta = 0.05, C = 1, R = 25$;c. θ για $\lambda = 0.8, \mu = 1, C = 1, R = 25$.[2]

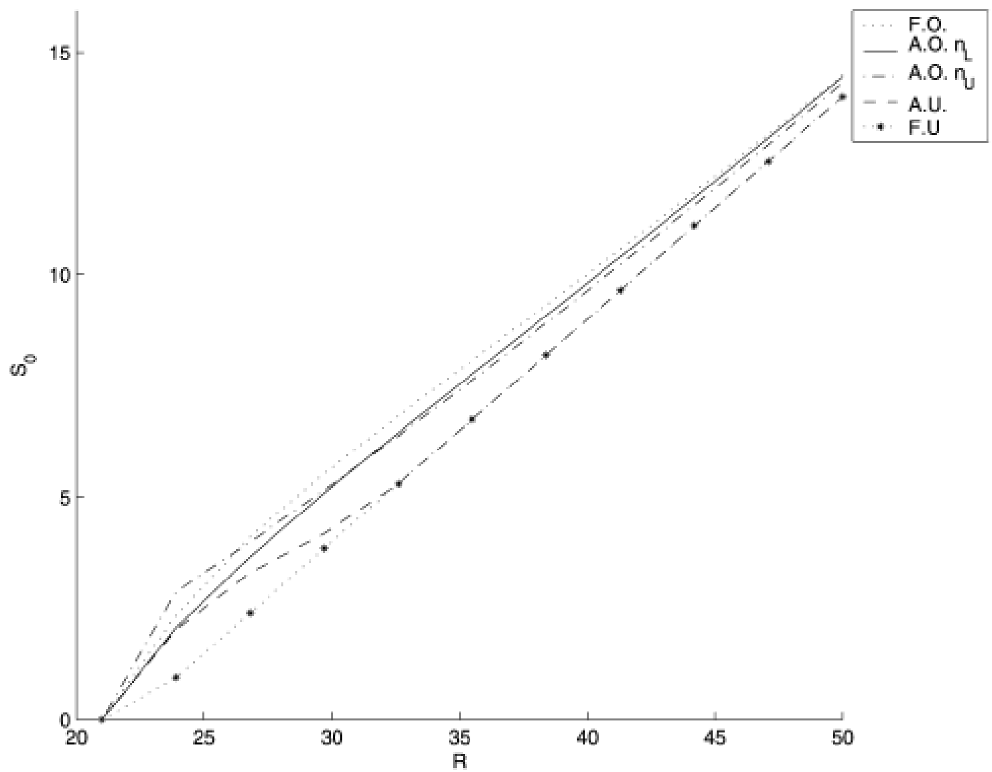
Το δεύτερο αριθμητικό πείραμα εξετάζει το πώς μεταβάλλονται οι πιθανότητες εισόδου ισορροπίας, στα σχεδόν και πλήρως μη παρατηρήσιμα συστήματα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.6. Μία γενική παρατήρηση που προκύπτει από το σχήμα είναι ότι, όπως και με την προηγούμενη περίπτωση που παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5, η πιθανότητα εισόδου στο πλήρως μη παρατηρήσιμο μοντέλο είναι πάντα ανάμεσα στο διάστημα που σχηματίζεται από τις δύο πιθανότητες εισόδου της σχεδόν μη παρατηρήσιμης περίπτωσης. Όμως η σχετική διάταξη των $q_e(0)$ και $q_e(1)$ μεταβάλλεται. Για αυτό το λόγο, οταν οι πελάτες δεν έχουν την πληροφορία για την κατάσταση του υπαλλήλου, ακολουθούν μία ενδιάμεση στρατηγική και μπαίνουν στην ουρά με πιθανότητα ανάμεσα σε εκείνες που θα χρησιμοποιούσαν αν γνώριζαν ξεχωριστά τις δύο καταστάσεις (ενεργός και ανενεργός).

Αναφορικά με την ευαισθησία, οι πιθανότητες εισόδου αυξάνονται όταν αυξάνεται το R, το οποίο είναι λογικό. Επιπλέον, είναι μη αύξουσες όταν αυξάνεται το λ, για αυτό το λόγο οι πελάτες είναι λιγότερο πρόθυμοι να εισέλθουν στο σύστημα, όταν ο ρυθμός άφιξης αυξάνεται. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την παρατηρήσιμη περίπτωση, όπου οι τιμές των κατωφλίων είναι μη φθίνουσες καθώς το λ αυξάνεται. Ο λόγος που υπάρχει αυτή η διαφορά είναι ότι εδώ η πληροφορία για τον αριθμό των πελατών στο σύστημα δεν είναι διαθέσιμη, οπότε όταν το λ είναι υψηλότερο, οι πελάτες κατά την άφιξή τους αναμένουν ότι το σύστημα θα είναι φορτωμένο και θα είναι λιγότερο πρόθυμοι να εισέλθουν σε αυτό. Αναφορικά με το χρόνο επανεκκίνησης θ, η συμπεριφορά των πιθανοτήτων εισόδου ποικίλει. Αν και ως επί το πλείστον οι τιμές τους αυξάνονται καθώς αυξάνεται το θ, το οποίο είναι διαισθητικά αυτονόητο, υπάρχει ένα διάστημα απο μικρές τιμές του θ, στο οποίο το $q_e(1)$ μειώνεται.

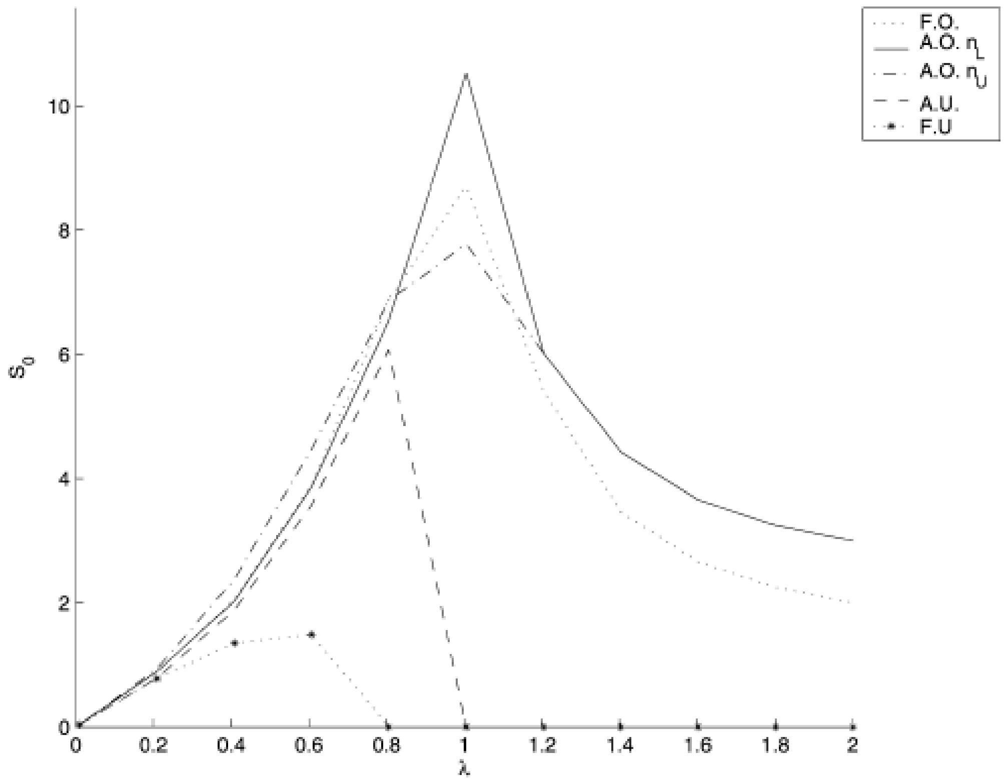


Σχήμα 2.6: Κατώφλια ισορροπίας για την παρατηρήσιμη και τη σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση. Μεταβολή σε σχέση με: a. R για $\lambda = 0.9, \mu = 1, \theta = 0.15, C = 1$; b.$\lambda$ για $\mu = 1, \theta = 0.15, C = 1, R = 8$;c. θ για $\lambda = 0.9, \mu = 1, C = 1, R = 10$.[2]

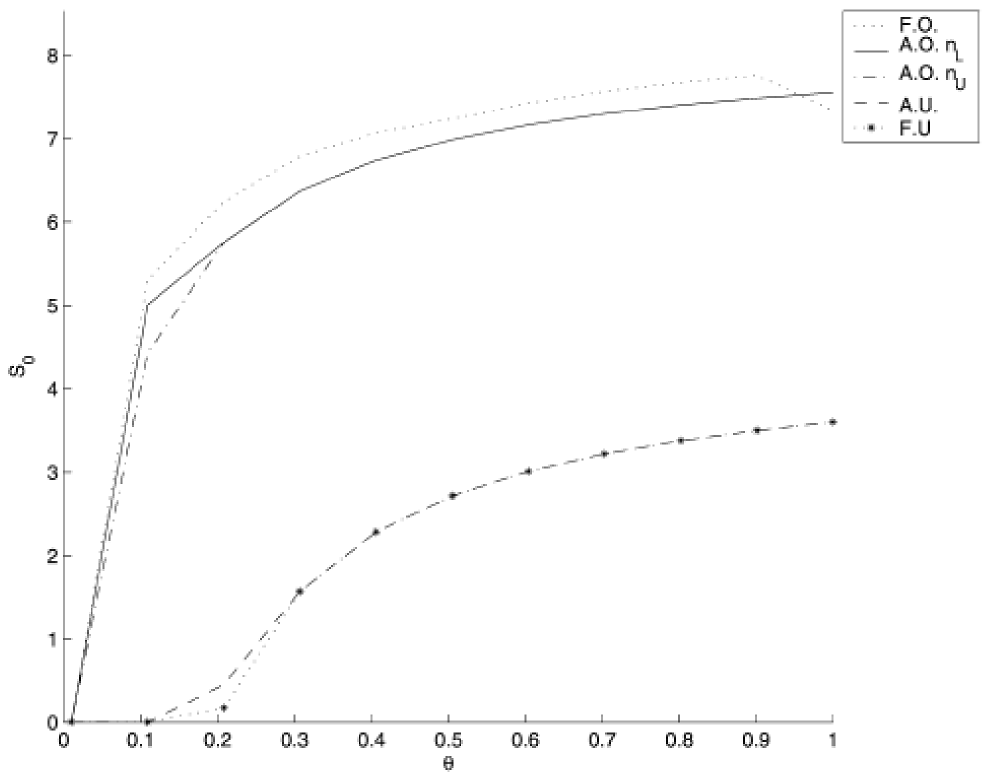
Το τελευταίο αριθμητικό πείραμα αφορά το κοινωνικό όφελος όταν ακολουθείται η στρατηγική ισορροπίας για διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 2.7, 2.8, 2.9. Στην σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση παρατηρούμε ότι, γενικά, υπάρχουν πολλαπλές καθαρές στρατηγικές ισορροπίας, οι οποίες αντιστοιχούν στα κατώφλια $n_L, n_{L+1}, ..., n_U$. Για αυτό το λόγο παρουσιάζουμε το κοινωνικό όφελος μόνο για τα άκρα n_L, n_U. Στα σχήματα παρατηρούμε ότι η διαφορά στο κοινωνικό όφελος είναι μικρή ανάμεσα στην πλήρως και τη σχεδόν παρατηρήσιμη περίπτωση, ενώ μπορεί να υπάρχουν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα παρατηρήσιμα και τα μη παρατηρήσιμα μοντέλα.Έτσι, μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι πελάτες ως σύνολο ωφελούνται περισσότερο όταν, κατά την άφιξή τους, έχουν πληροφορία για το πόσοι πελάτες βρίσκονται ήδη στο σύστημα και αποφασίζουν μόνοι τους αν θα μπουν ή όχι· ενώ η επιπλέον πληροφορία για την κατάσταση του υπαλλήλου δεν προσφέρει ιδιαίτερο όφελος.Όσον αφορά την ευαισθησία στις παραμέτρους,είναι αναμενόμενο,ότι το κοινωνικό όφελος αυξάνεται με την αύξηση της αμοιβής R και του ρυθμού επανεκκίνησης θ. Σε σχέση με τον ρυθμό άφιξης λ, το κοινωνικό όφελος μεγιστοποιείται για ενδιάμεσες τιμές της παραμέτρου. Ο λόγος για αυτή τη συμπεριφορά είναι ότι όταν ο ρυθμός άφιξης είναι μικρός, το σύστημα σπάνια είναι γεμάτο, για αυτό το λόγο καθώς καταφθάνουν όλο και περισσότεροι πελάτες, αυτοί εξυπηρετούνται και το κοινωνικό όφελος αυξάνεται. Ωστόσο, καθώς το λ συνεχίζει να αυξάνεται, ένα μικρότερο ποσοστό πελατών επιλέγει να εισέλθει και όσοι εισέρχονται υπόκεινται σε μεγαλύτερες καθυστερήσεις, κάτι που έχει αρνητική επίδραση στο κοινωνικό όφελος.



Σχήμα 2.7: Κοινωνικό όφελος για διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης. Ευαισθησία ως προς το R, για $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$, $\theta = 0.05$, $C = 1$.[2]



Σχήμα 2.8: Κοινωνικό όφελος για διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης. Ευαισθησία ως προς το λ, για $\mu = 1$, $\theta = 0.05$, $C = 1$, $R = 25$.[2]



Σχήμα 2.9: Κοινωνικό όφελος για διαφορετικά επίπεδα πληροφόρησης.Ευαισθησία ως προς το θ, για $\lambda = 0.9$, $\mu = 1$, $C = 1$, $R = 10$.[2].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Συστήματα M/M/1 με καταστροφές

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η οικονομική μελέτη συστημάτων αναμονής με κάποιο είδος καταστροφών αποτελεί ένα σχετικά νέο πεδίο, αν και στην πράξη καταστροφές εμφανίζονται αρκετά συχνά στον τομέα των υπηρεσιών, στις μεταφορές και ακόμη και στον τομέα της υγείας. Για παράδειγμα, η ακύρωση ενός προγραμματισμένου δρομολογίου (μιας πτήσης ή ενός ταξιδιού) αναγκάζει όλους τους επιβάτες να αναζητήσουν εναλλακτικούς τρόπους να φτάσουν στον προορισμό τους και μπορεί να θεωρηθεί ως μια καταστροφή. Παρομοίως, η βλάβη εξειδικευμένου εξοπλισμού ή η αιφνίδια ασθένεια ενός υπαλλήλου μπορεί να αναγκάσει τους πελάτες να εγκαταλείψουν ένα σύστημα εξυπηρέτησης χωρίς να έχουν εξυπηρετηθεί. Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε τη M/M/1 ουρά υπό την επίδραση καταστροφών που παράγονται από μία διαδικασία Poisson και με εκθετικούς χρόνους αποκατάστασης. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, μόλις συμβεί μια καταστροφή, όλοι οι παρόντες πελάτες εξαναγκάζονται να φύγουν από το σύστημα, οπότε λαμβάνουν μια αποζημίωση (reward) λόγω αποτυχίας εξυπηρέτησης. Επιπλέον, ο υπάλληλος τίθεται εκτός λειτουργίας και ξεκινά μια περίοδος επισκευής. Αντίθετα, όταν ο υπάλληλος είναι ενεργός, το σύστημα συμπεριφέρεται όπως μια συνηθισμένη ουρά M/M/1, όπου οι πελάτες εξυπηρετούνται ένας-ένας και λαμβάνουν την κανονική ανταμοιβή εξυπηρέτησης μόλις ολοκληρώσουν την εξυπηρέτησή τους. Θεωρούμε επίσης ότι όσο οι πελάτες παραμένουν στο σύστημα, συσσωρεύουν κόστος αναμονής με σταθερό ρυθμό . Επιπλέον, θεωρούμε ότι οι πελάτες έχουν πάντα την επιλογή να εισέλθουν στο σύστημα (ακόμα και αν ο υπάλληλος δεν είναι διαθέσιμος). Το μοντέλο που προκύπτει είναι δύο διαστάσεων. Συγκεκριμένα, αναδεικνύονται τα εξής:

- Στο συγκεκριμένο μοντέλο, μπορεί να προκύψουν και οι δυο τύποι στρατηγικής συμπεριφοράς ATC (Avoid The Crowd) ή FTC (Follow The Crowd).

Αυτό εξαρτάται από τη διαφορά $R_f - R_s$, δηλαδή της αποζημίωσης σε περίπτωση αποτυχίας εξυπηρέτησης μείον την την ανταμοιβή που λαμβάνεται όταν ολοκληρώνεται η εξυπηρέτηση. Αν η διαφορά είναι μικρή επικρατεί η συμπεριφορά ATC ενώ αν η διαφορά είναι μεγάλη το μοντέλο επιδεικνύει FTC συμπεριφορά. Αυτό συμβαίνει γιατί αν η διαφορά $R_f - R_s$ είναι μικρή, δηλαδή η αποζημίωση και η ανταμοιβή δεν διαφέρουν πολύ, ο πελάτης θα βασιστεί στο χρόνο αναμονής. Αν η ουρά είναι μεγάλη δεν έχει συμφέρον να μπει στο σύστημα γιατί θα έχει μεγάλο χρόνο αναμονής, οπότε επιλέγει να μην εισέλθει οπότε έχουμε ATC συμπεριφορά. Αντίθετα αν η διαφορά αυτή είναι μεγάλη, δηλαδή η αποζημίωση σε περίπτωση καταστροφής, και άρα μη εξυπηρέτησης, είναι αρκετά μεγαλύτερη από την ανταμοιβή τότε ο πελάτης έχει συμφέρον να μπει στο σύστημα, ακολουθώντας τους υπόλοιπους πελάτες.

- Στο μοντέλο αυτό, στην παρατηρήσιμη περίπτωση, οι στρατηγικές ισορροπίας μπορεί να είναι τύπου κατωφλίου (δηλαδή είσοδος στο σύστημα αν $n \leq n_e$), ή αντίστροφη κατωφλιακή στρατηγική (δηλαδή είσοδος στο σύστημα αν $n \geq n_e$).

- Στο μοντέλο αυτό, για διάφορες τιμές των παραμέτρων, μπορεί να υπάρχουν πολλαπλές στρατηγικές ισορροπίας. Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός των στρατηγικών ισορροπίας μπορεί να κυμαίνεται από μία έως και τρεις, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων του μοντέλου.

- Ο τύπος και ο αριθμός των στρατηγικών ισορροπίας τόσο στην παρατηρήσιμη όσο και στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση εξαρτώνται από της σχετικές τιμές των R_f και R_s. Για αυτό το λόγο, στη συνέχεια, δίνονται διαγράμματα όπου το επίπεδο (R_f, R_s) χωρίζεται σε περιοχές που αντιστοιχούν στους διάφορους τύπους και στον αριθμό στρατηγικών ισορροπίας.

Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζεται η δυναμική του μοντέλου, η δομή ανταμοιβής- κόστους και το πλαίσιο λήψης αποφάσεων. Επίσης, για την παρατηρήσιμη και τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση προσδιορίζονται οι στρατηγικές ισορροπίας και, τέλος, παρουσιάζονται διάφορα αριθμητικά σενάρια που αναδεικνύουν την επίδραση που έχει το επίπεδο πληροφόρησης στη στρατηγική συμπεριφορά των πελατών.

3.2 Περιγραφή Μοντέλου M/M/1 με καταστροφές

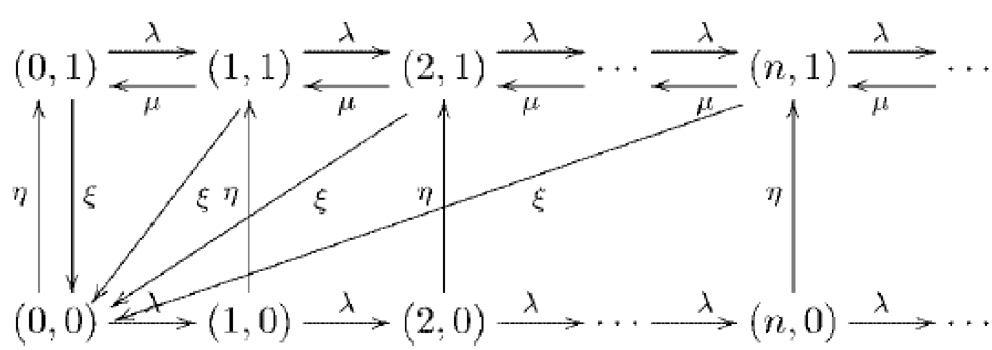
Θεωρούμε ένα σύστημα αναμονής με έναν υπάλληλο και άπειρη χωρητικότητα,στο οποίο οι πελάτες καταφθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Οι απαιτήσεις εξυπηρέτησης των διαδοχικών πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με εκθετική κατανομή ρυθμού μ. Οι πελάτες εξυπηρετούνται ένας ένας με τον κανόνα FCFS-First Come First Served (δηλαδή αυτός που καταφθάνει πρώτος εξυπηρετείται πρώτος). Το σύστημα υπόκειται σε καταστροφές που συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό ξ. Όταν συμβεί μία καταστροφή, οι πελάτες αναγκάζονται να εγκαταλείψουν το σύστημα χωρίς να εξυπηρετηθούν, ο εξυπηρετητής θεωρείται ανενεργός και ξεκινάει μία διαδικασία επισκευής. Η διάρκεια ενός χρόνου επισκευής είναι εκθετικά κατανεμημένη με ρυθμό η. Κατά τη διάρκεια του χρόνου επισκευής νέοι πελάτες συνεχίζουν να καταφθάνουν στο σύστημα. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι όλοι οι χρόνοι άφιξης, οι χρόνοι εξυπηρέτησης, οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών καταστροφών και οι χρόνοι επισκευής είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους.

Έστω $Q(t)$ και $I(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα και η κατάσταση του εξυπηρετητή τη χρονική στιγμή t αντιστοίχως, με το 1 να αντιστοιχεί σε ενεργό εξυπηρετητή και το 0 σε εξυπηρετητή που βρίσκεται υπό επισκευή. Τότε η κατάσταση του συστήματος τη χρονική στιγμή t περιγράφεται από το ζεύγος $(Q(t), I(t))$. Επομένως, σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1 παρακάτω, αποδεικνύεται ότι η στοχαστική διαδικασία $\{(Q(t), I(t)) : t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων: $\{S = (n, i) : n \geq 0, i = 0, 1\}$:

Κατάσταση	Επόμενη κατάσταση	Χρόνος
(0,0)	(1,0)	Exp(λ)
	(0,1)	Exp(η)
(0,1)	(1,1)	Exp(λ)
	(0,0)	Exp(ξ)
$(n, 0),\ n \geq 1$	$(n+1, 0)$	Exp(λ)
	$(n, 1)$	Exp(η)
$(n, 1),\ n \geq 1$	$(n+1, 1)$	Exp(λ)
	$(n-1, 1)$	Exp(μ)
	(0,0)	Exp(ξ)

Πίνακας 3.1: Μεταβάσεις της αλυσίδας Markov $\{(Q(t), I(t))\}$.

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της στοχαστικής διαδικασίας $(Q(t), I(t))$:



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της $(Q(t), I(t))$.[1]

3.3 Η παρατηρήσιμη περίπτωση

Στην ενότητα αυτή μελετάμε την παρατηρήσιμη περίπτωση του μοντέλου M/M/1 με καταστροφές. Υποθέτουμε ότι ο πελάτης κατά την άφιξή του παρατηρεί την κατάσταση του συστήματος, και, μετά, αποφασίζει για το αν θα εισέλθει ή αν θα αποχωρήσει. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει πάντα μία στρατηγική ισορροπίας, η οποία είναι ασθενώς κυρίαρχη, με την έννοια ότι μεγιστοποιεί το όφελος του πελάτη, χωρίς να έχει σημασία τι στρατηγική ακολουθούν οι άλλοι πελάτες.Ξεκινάμε υπολογίζοντας τη αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση (n, i) και αποφασίζει να εισέλθει. Η στρατηγική αυτή χαρακτηρίζεται από ένα ζεύγος κατωφλίων, ένα για την κάθε μία από τις δύο καταστάσεις του εξυπηρετητή. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στην Πρόταση 3.1:

Πρόταση 3.1. *Έστω η παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με καταστροφές. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$ και αποφασίζει να εισέλθει δίνεται από*

$$S^{(\mathrm{obs})}(n,0) = R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1-\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] - \frac{C}{\eta}, \quad n \geq 0. \tag{3.1}$$

Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίζει να εισέλθει δίνεται από

$$S^{(\mathrm{obs})}(n,1) = R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1-\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right], \quad n \geq 0. \tag{3.2}$$

Απόδειξη. : Έστω ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$ (δηλαδή με τον εξυπηρετητή ανενεργό). Ένας τέτοιος πελάτης, συγκριτικά με έναν πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ (δηλαδή με τον εξυπηρετητή ενεργό), επιβαρύνεται με ένα επιπλέον κόστος αναμονής για την ολοκλήρωση του χρόνου επισκευής, με μέση τιμή $\frac{C}{\eta}$. Επομένως αναμενόμενο καθαρό του όφελος είναι:

$$S^{(\mathrm{obs})}(n,0) = S^{(\mathrm{obs})}(n,1) - \frac{C}{\eta}. \tag{3.3}$$

Για να υπολογίσουμε το $S^{(\mathrm{obs})}(n, 1)$, θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη, ο οποίος κατά την άφιξή του βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίζει να εισέλθει. Ο πελάτης φεύγει από το σύστημα είτε επειδή εξυπηρετήθηκε είτε εξαιτίας μίας καταστροφής. Λόγω της υποθέσεων ανεξαρτησίας και εκθετικότητας, βλέπουμε ότι για την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του ο πελάτης πρέπει να περιμένει Y_n μονάδες χρόνου, όπου Y_n το άθροισμα $n+1$ ανεξάρτητων τυχαίων εκθετικά κατανεμημένων μεταβλητών παραμέτρου μ. Επομένως η Y_n ακολουθεί Γάμμα Κατανομή με παραμέτρους $n+1$, μ: Έστω $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_{n+1}$ ο χρόνος αναμονής του πελάτη για να ολοκληρωθεί η εξυπηρέτησή του, όπου X_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρο μ. Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ο αριθμός των ολοκληρωμένων εξυπηρετήσεων μέχρι τη χρονική στιγμή t. άρα $N(t) \sim \text{Poisson}(\mu t)$ για κάθε $t \geq 0$.

$$Y_n = X_1 + \cdots + X_{n+1}.$$

Το γεγονός $\{Y_n > t\}$ σημαίνει ότι μέχρι τον χρόνο t έχουν ολοκληρωθεί το πολύ n εξυπηρετήσεις, δηλαδή

$$\{Y_n > t\} = \{N(t) \leq n\}.$$

Επομένως, για κάθε $t \geq 0$,

$$P(Y_n > t) = P(N(t) \leq n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}.$$

Άρα το α.σ.π. του Y_n είναι

$$F_{Y_n}(t) = P(Y_n \leq t) = 1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^k}{k!}, \qquad t \geq 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t προκύπτει η πυκνότητα:

$$f_{Y_n}(t) = F'_{Y_n}(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{-\mu e^{-\mu t}(\mu t)^k + e^{-\mu t} k (\mu t)^{k-1} \mu}{k!} = e^{-\mu t} \mu \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mu t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k(\mu t)^{k-1}}{k!} \right]$$

Όμως επειδή

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(\mu t)^{k-1}}{k!} = \sum_{u=0}^{n-1} \frac{(\mu t)^u}{u!}$$

, έχουμε:

$$f_{Y_n}(t) = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \mu = \frac{\mu^{n+1} t^n e^{-\mu t}}{n!}, \qquad t \geq 0.$$

Οπότε: $Y_n \sim \Gamma(n+1, \mu)$.

Ο υπολειπόμενος χρόνος X μέχρι την επόμενη καταστροφή, είναι ανεξάρτητος του Y_n και εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο ξ. Οπότε ο χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα δίνεται από $Z_n = min(Y_n, X)$. Με λίγα λόγια ο επιλεγμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί με πιθανότητα $P[Y_n < X]$ ενώ εγκαταλείπει το σύστημα όταν συμβεί κάποια καταστροφή με τη συμπληρωματική πιθανότητα $P[Y_n \geq X]$. Οπότε το μέσο καθαρό του όφελος θα είναι:

$$S^{(\mathrm{obs})}(n,1) = R_s \,\mathrm{Pr}\left[Y_n < X\right] + R_f \,\mathrm{Pr}\left[Y_n \geq X\right] - C\, E[Z_n]. \tag{3.4}$$

Υπολογισμός της $P(Y_n < X)$:

$$Pr(Y_n < X) = \int_0^\infty \int_0^x f_{Y_n}(y) f_X(x)\, dy\, dx.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} Pr(Y_n < X) &= \int_0^\infty \int_y^\infty f_{Y_n}(y) f_X(x)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty f_{Y_n}(y) \left(\int_y^\infty f_X(x)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty f_{Y_n}(y) \left(\int_y^\infty \xi e^{-\xi x} dx \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\xi y} f_{Y_n}(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\xi y} \frac{\mu^{n+1}}{n!} y^n e^{-\mu y}\, dy. \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\mathrm{Pr}(Y_n < X) = \frac{\mu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty y^n e^{-(\mu+\xi)y}\, dy.$$

Θέτουμε $t = (\mu+\xi)y$, οπότε $y = t/(\mu+\xi)$ και $dy = dt/(\mu+\xi)$. Τότε

$$\int_0^\infty y^n e^{-(\mu+\xi)y}\, dy = \frac{1}{(\mu+\xi)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = \frac{1}{(\mu+\xi)^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{(\mu+\xi)^{n+1}}.$$

Επομένως

$$\mathrm{Pr}(Y_n < X) = \frac{\mu^{n+1}}{n!} \cdot \frac{n!}{(\mu+\xi)^{n+1}} = \left(\frac{\mu}{\mu+\xi} \right)^{n+1},$$

Υπολογισμός της $E[Z_n]$:

$$E[Z_n] = \int_0^\infty P(Z_n > z)dz. \tag{3.5}$$

Είναι: $\{Z_n > z\} = \{min(Y_n, X) > z\} = \{Y_n > z, X > z\}$.
Οπότε:

$$P[Z_n > z] = P[Y_n > z]P[X > z] = P[Y_n > z]e^{-\xi z}.$$

Για το $P[Z_n > z]$ έχουμε:

$$\Pr[Y_n > z] = \int_z^\infty f_{Y_n}(u)\, du = \int_z^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du.$$

Άρα συνδυάζοντας τα παραπάνω η (3.5) γίνεται:

$$E[Z_n] = \int_0^\infty e^{-\xi z} \int_z^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du\, dz.$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned}
E[Z_n] &= \int_0^\infty \int_z^\infty e^{-\xi z} \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du\, dz \\
&= \int_0^\infty \int_0^u e^{-\xi z}\, dz\ \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^u e^{-\xi z}\, dz\right] \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\xi}\big(1 - e^{-\xi u}\big) \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du \\
&= \frac{1}{\xi}\left[\int_0^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du\ -\ \int_0^\infty e^{-\xi u} \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du\right].
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du &= \frac{\mu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty u^n e^{-\mu u}\, du \\ &\xrightarrow{t=\mu u} \frac{\mu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\mu}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{\mu} \\ &= \frac{\mu^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{\mu^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) = \frac{1}{n!}\, n! = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\xi u} \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u}\, du &= \frac{\mu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty u^n e^{-(\mu+\xi)u}\, du \\ &\xrightarrow{t=(\mu+\xi)u} \frac{\mu^{n+1}}{n!} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\mu+\xi}\right)^n e^{-t} \frac{dt}{\mu+\xi} \\ &= \frac{\mu^{n+1}}{n!(\mu+\xi)^{n+1}} \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{\mu^{n+1}}{n!(\mu+\xi)^{n+1}} \Gamma(n+1) \\ &= \frac{\mu^{n+1}}{(\mu+\xi)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Οπότε:

$$E[Z_n] = \frac{1}{\xi}\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right].$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην (3.4) έχουμε για το $S^{obs}(n,1)$:

$$S^{(\text{obs})}(n,1) = R_s \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right],$$

Όμοια από τη σχέση (3.3) με αντικατάσταση έχουμε ότι το αντίστοιχο αναμενόμενο καθαρό όφελος όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $(n, 0)$ είναι

$$S^{(\text{obs})}(n,0) = R_s \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] - \frac{C}{\eta}, \quad n \geq 0.$$

□

Θεωρούμε τώρα έναν τυχαίο πελάτη που, κατά την άφιξή του, παρατηρεί την κατάσταση του συστήματος. Λαμβάνουμε δύο ξεχωριστές περιπτώσεις για το αν θα βρει τον εξυπηρετητή σε λειτουργία ή οχι, και καταλύγουμε στα θεωρήματα 3.1 και 3.2:

Θεώρημα 3.1. *Θεωρούμε την παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με καταστροφές. Τότε υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Αν ένας πελάτης κατά την άφιξή του βρίσκει το σύστημα σε κατάσταση επισκευής, προκύπτουν οι ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του R_s.*

Περίπτωση Ι: $R_s < \dfrac{C}{\eta}$.
Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν τρεις υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αποζημίωσης R_f.

Υποπερίπτωση α: $R_f \leq \dfrac{C}{\eta} + \dfrac{C}{\xi}$.
Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει να αποχωρήσει.
Υποπερίπτωση β:

$$\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.$$

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας είναι ένας κανόνας «ανεστραμμένου κατωφλίου» (reverse-threshold), ο οποίος λέει: «Όταν φτάνεις τη χρονική στιγμή t και βρίσκεις το σύστημα σε επισκευή, παρατήρησε το πλήθος $Q(t)$: αν $Q(t) \geq \lceil n_e(0) \rceil$ τότε εισέρχεσαι, διαφορετικά αποχωρείς»,
όπου ο $n_e(0)$ δίνεται από

$$n_e(0) = \frac{\ln K(0)}{\ln S} - 1, \tag{3.5}$$

με

$$K(0) = \frac{\dfrac{C}{\eta} + \dfrac{C}{\xi} - R_f}{R_s - R_f + \dfrac{C}{\xi}}, \qquad S = \frac{\mu}{\mu+\xi}, \tag{3.6}$$

και $\lceil x \rceil$ συμβολίζει μικρότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x.
Υποπερίπτωση γ:

$$R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.$$

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει να εισέλθει.

Περίπτωση ΙΙ: $R_s > \dfrac{C}{\eta}$.
Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν τρεις υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αποζημίωσης R_f.
Υποπερίπτωση α:

$$R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.$$

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει να αποχωρήσει.
Υποπερίπτωση β:

$$\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} < R_f < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}.$$

Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας είναι ένας κανόνας «κατωφλίου» (threshold), ο οποίος λέει:

«Όταν φτάνεις τη χρονική στιγμή t και βρίσκεις το σύστημα σε επισκευή, παρατήρησε το πλήθος $Q(t)$· αν $Q(t) \leq \lfloor n_e(0) \rfloor$ τότε εισέρχεσαι, διαφορετικά αποχωρείς»,
όπου ο $n_e(0)$, καθώς και οι $K(0)$ και S, δίνονται από τις (3.5)–(3.6), και $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x.
Υποπερίπτωση γ: $R_f \geq \dfrac{C}{\eta} + \dfrac{C}{\xi}$.
Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει να εισέλθει.

Περίπτωση ΙΙΙ: $R_s = \dfrac{C}{\eta}$.
Σε αυτή την περίπτωση προκύπτουν δύο υποπεριπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της αποζημίωσης R_f.
Υποπερίπτωση α: $R_f < \dfrac{C}{\xi} + \dfrac{C}{\eta}$.
Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας είναι να αποχωρήσει.
Υποπερίπτωση β: $R_f = \dfrac{C}{\xi} + \dfrac{C}{\eta}$.
Τότε οποιαδήποτε στρατηγική αποτελεί στρατηγική ισορροπίας.

Υποπερίπτωση γ: $R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$.
Τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας είναι να εισέλθει.

Απόδειξη. Έστω ένας χαρακτηριστικός πελάτης που κατά την άφιξή του παρατηρεί το σύστημα. Αν το βρει στην κατάσταση $(n, 0)$ και αποφασίσει να εισέλθει τότε το αναμενόμενο καθαρό του όφελος δίνεται από τη σχέση (3.1). Ο πελάτης προτιμά να εισέλθει αν $S^{(obs)}(n, 0) \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
S^{(obs)}(n,0) \geq 0 &\Rightarrow R_s(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} + (R_f - \frac{C}{\xi})\left[1 - (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}\right] - \frac{C}{\eta} \geq 0 \\
&\Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}) + R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C}{\eta} \geq 0 \\
&\Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$
S^{(obs)}(0,0) = \frac{\xi}{\xi+\mu}R_f + \frac{\mu}{\xi+\mu}(R_s + \frac{C}{\xi}) - \frac{C}{\eta} - \frac{C}{\xi}
$$

η οποία είναι γνησίως αύξουσα ως προς R_f.

Επιπλέον, σχηματίζουμε την εξίσωση

$$
S^{(obs)}(0,0) = 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f \tag{3.8}
$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς R_f έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow \frac{\xi}{\xi+\mu}R_f = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - \frac{\mu}{\mu+\xi}(R_s + \frac{C}{\xi}) \\
&\Rightarrow R_f = \frac{C(\xi+\mu)}{\xi\eta} + \frac{C(\mu+\xi)}{\xi^2} - \frac{\mu}{\xi}(R_s + \frac{C}{\xi}) \Rightarrow R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.
\end{aligned}
$$

Η διαφορά $R_s - \frac{C}{\eta}$ καθορίζει τη διάταξη των $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f$ και $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$ της (3.7) καθώς και της ρίζας της εξίσωσης (3.8), δηλαδή της $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$.

Περίπτωση I: $R_s < \frac{C}{\eta}$:
Είναι $R_s < \frac{C}{\eta} \Rightarrow R_s + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$.
Επιπλέον η ρίζα $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$ της εξίσωσης (3.8) μετά από πράξεις γράφεται ως εξής:
$\frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta} + \frac{\mu}{\xi}(\frac{C}{\eta} - R_s)$.
Οπότε είναι $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta} + \frac{\mu}{\xi}(\frac{C}{\eta} - R_s)$.
Οπότε τελικά αν $R_s < \frac{C}{\eta}$ έχουμε:
$R_s + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta} + \frac{\mu}{\xi}(\frac{C}{\eta} - R_s)$, δηλαδή:

$$R_s + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} \tag{3.9}$$

Υποπερίπτωση α: $R_f < R_s + \frac{C}{\xi}$

Έχουμε ότι $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f > 0$ και $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f > 0$. Λύνοντας την (3.7) ως προς n έχουμε ότι:

$$(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow n \leq \frac{lnK(0)}{lnS} - 1 \Rightarrow n \leq \lfloor ne(0) \rfloor.$$

Είναι $n_e(0) = \frac{lnK(0)}{lnS} - 1$, με $K(0) = \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$ και $S = \frac{\mu}{\mu+\xi}$ και το $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζει τον μικότερο ακέραιο που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του x. Για το πρόσημο του $n_e(0)$ έχουμε:

$$R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$$

Επομένως

$$S^{obs}(0,0) < 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$
$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} < \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow \frac{lnK(0)}{lnS} < 1 \Rightarrow n_e(0) < 0.$$

Οπότε σε αυτή την περίπτωση το βέλτιστο για τον πελάτη είναι να αποχωρήσει.

Αν $R_s + \frac{C}{\xi} \leq R_f \leq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$ έχουμε ότι $R_s + \frac{C}{\xi} - R_f \leq 0$ και $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f \geq 0$. Οπότε στην περίπτωση αυτή και επειδή δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα ίσα με το μηδέν, οπότε γράφουμε: $R_s + \frac{C}{\xi} < R_f \leq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$. Άρα, έχουμε ότι $S^{(obs)}(0,0) < 0$

και συνεπώς και εδώ συμφέρει τον πελάτη αν αποχωρήσει. Άρα μπορούμε να συνοψίζοντας έχουμε ότι αν $R_f \leq \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$, ο πελάτης αποχωρεί από το σύστημα.

Υποπερίπτωση β:

$$\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}.$$

Έχουμε ότι και το δεξί και το αριστερό μέλος της (3.7) είναι αρνητικά. Λύνοντας την ανίσωση $S^{(obs)}(n,0) \geq 0$ ως προς n έχουμε ότι:

Ο πελάτης έχει όφελος να εισέλθει στο σύστημα αν και μόνο αν $n \geq \lfloor n_e(0) \rfloor$. Για το πρόσημο του $n_e(0)$ έχουμε ότι αφου $R_f < \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$ θα ειναι $S(0,0) < 0$. Επομένως

$$S^{obs}(0,0) < 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$
$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} > \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow \frac{lnK(0)}{lnS} > 1 \Rightarrow n_e(0) > 0.$$

Επομένως αφού ισχύουν τα παραπάνω έχουμε ότι η μοναδική στρατηγική ισορροπίας είναι στρατηγική αντίστροφου κατωφλίου: "Κατά την άφιξη στο σύστημα σε χρόνο t το οποίο είναι σε κατάσταση επισκευής παρατήρησε τον αριθμό πελατών $Q(t)$. Είσοδος στο σύστημα αν είναι $Q(t) \geq \lfloor n_e(0) \rfloor$, και αποχώρηση διαφορετικά."

Υποπερίπτωση γ: Στην υποπερίπτωση γ ισχύει ότι $Rf \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$, συνεπώς και τα 2 μέλη της (3.7) είναι αρνητικά . Οπότε λύνοντας ως προς n την (3.7) έχουμε:

$$(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \leq \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow n \geq \frac{lnK(0)}{lnS} - 1 \Rightarrow n \geq n_e(0).$$

Υπολογισμός του προσήμου του $n_e(0)$

Αφού

$$R_f \geq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$$

έχουμε ότι

$$S^{obs}(0,0) \geq 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$
$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} \leq \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow \frac{lnK(0)}{lnS} \leq 1 \Rightarrow n_e(0) \leq 0.$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή, η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει στον πελάτη αν εισέλθει στο σύστημα αφού $S^{(obs)}(n,0) \geq 0$ για κάθε n.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙ: $Rs > \frac{C}{\eta}$.

Στην περίπτωση ΙΙ έχουμε :

Είναι $R_s > \frac{C}{\eta} \Rightarrow R_s + \frac{C}{\xi} > \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$.

Επιπλέον η ρίζα $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$ της εξίσωσης (3.8) μετά από πράξεις γράφεται ως εξής:

$\frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta} + \frac{\mu}{\xi}(\frac{C}{\eta} - R_s)$.

Οπότε είναι $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} > \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta} + \frac{\mu}{\xi}(\frac{C}{\eta} - R_s)$.

Οπότε τελικά αν $R_s > \frac{C}{\eta}$ έχουμε:

$R_s + \frac{C}{\xi} > \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} > \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta} + \frac{\mu}{\xi}(\frac{C}{\eta} - R_s)$, δηλαδή:

$$\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} < R_s + \frac{C}{\xi} \tag{3.10}$$

Ξανά θεωρούμε τρεις υποπεριπτώσεις όσο αφορά την τιμή του R_f:

$$\begin{cases} \text{α.} \quad R_f \leq \dfrac{C}{\xi} - \dfrac{\mu R_s}{\xi} + \dfrac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}, \\ \text{β.} \quad \dfrac{C}{\xi} - \dfrac{\mu R_s}{\xi} + \dfrac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} < R_f < \dfrac{C}{\eta} + \dfrac{C}{\xi}, \\ \text{γ.} \quad \dfrac{C}{\eta} + \dfrac{C}{\xi} \leq R_f. \end{cases}$$

Υποπερίπτωση α:

Και τα 2 μέλη της (3.7) είναι θετικά επομένως λύνοντας ώς προς n έχουμε:

$$\begin{aligned} S^{(obs)}(n,0) \geq 0 \Rightarrow & R_s(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} + (R_f - \frac{C}{\xi})\left[1 - (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}\right] - \frac{C}{\eta} \geq 0 \\ \Rightarrow & (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}) + R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C}{\eta} \geq 0 \\ \Rightarrow & (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f \\ \Rightarrow & S^{n+1} \geq K(0) \Rightarrow n \leq \lfloor n_e(0) \rfloor. \end{aligned}$$

Με τα $n_e(0)$, $K(0)$ και S να δίνονται από τις $(3.5) - (3.6)$.

Έλεγχος προσήμου του $n_e(0)$:

Αφού $R_f \leq \dfrac{C}{\xi} - \dfrac{\mu R_s}{\xi} + \dfrac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$, έχουμε ότι $S^{(obs)}(0,0) \leq 0$ επομένως:

$$S^{obs}(0,0) \leq 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} \leq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$
$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} \leq \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow \frac{lnK(0)}{lnS} \leq 1 \Rightarrow n_e(0) \leq 0.$$

Επομένως από τα παραπάνω, το βέλτιστο για τον πελάτη είναι αν αποχωρήσει.

Υποπερίπτωση β: Εδώ έχουμε ότι $n \leq \lfloor n_e(0) \rfloor$ με τη διαφορά ότι $n_e(0) > 0$:

Αφού $R_f < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$ και τα 2 μέλη της (3.7) είναι θετικά, επομένως λύνοντας την (3.7) ως προς n έχουμε όπως και πριν $n < n_e(0)$. Εδώ το πρόσημο του $n_e(0)$ αλλάζει:

Αφού

$$R_f > \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi}$$

έχουμε

$$S^{obs}(0,0) > 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} > \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$
$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} > \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow \frac{lnK(0)}{lnS} > 1 \Rightarrow n_e(0) > 0.$$

Οπότε στην περίπτωση αυτή η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει τον κανόνα του κατωφλίου: " Κατά την άφιξη σε χρόνο t, και βρίσκοντας το σύστημα σε κατάσταση επισκευής, παρατήρησε τον αριθμό των πελατών $Q(t)$; είσοδος στο σύστημα αν $Q(t) \leq \lfloor n_e(0) \rfloor$ και αποχώρηση διαφορετικά," όπου τα $n_e(0), K(0), S$ δίνονται από τις $(3.5) - (3.6)$.

Υποπερίπτωση γ: $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} \leq R_f \leq Rs + \frac{C}{\xi}$:

Το αριστερό μέλος της $(3.7$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και το δεξί μικρότερο ή ίσο του μηδενός οπότε μεταφέροντας όλους τους όρους της $(3.7$ στο πρώτο μέλος, και επειδή οι όροι της δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα μηδέν δηλαδή δεν μπορεί $Rs + \frac{C}{\xi} - R_f = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f = 0$, έχουμε ότι $S^{(obs)}(n,0) > 0.$, οπότε το συμφέρον του επιλεγμένου πελάτη είναι να εισέλθει στο σύστημα.

Αν $Rf > \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$ τότε και τα δύο μέλη της (3.7) είναι αρνητικά οπότε έχουμε:

$$S^{(obs)}(n,0) \geq 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$
$$\Rightarrow S^{n+1} \leq K(0) \Rightarrow n \geq \lfloor n_e(0) \rfloor.$$

Ελέγχοντας το πρόσημο του $n_e(0)$ έχουμε:
$Rf > \frac{C}{\xi} - \frac{\mu Rs}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi}{\eta\xi}$ άρα: $S^{obs}(0,0) > 0$ οπότε:

$$S^{obs}(0,0) > 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} > \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} < \frac{\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f} \Rightarrow \frac{lnK(0)}{lnS} < 1 \Rightarrow n_e(0) < 0.$$

Επομένως, η μοναδική στρατηγική ισορροπίας για τον επιλεγμένο πελάτη είναι να εισέλθει στο σύστημα.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ III:

Έχουμε ότι

$$\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta\xi} = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} = R_s + \frac{C}{\xi} \tag{3.11}$$

Αν $R_f < \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$ έχουμε ότι $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f = R_s + \frac{C}{\xi} - R_f > 0$ και η (3.7) η οποίαγράφεται:

$$(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$

δεν ισχύει, αφού ισοδυνάμως έχουμε:

$$(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq R_s + \frac{C}{\xi} - R_f,$$

επομένως, στην περίπτωση αυτή ο πελάτης αποχωρεί από το σύστημα. Αντίθετα, αν $R_f > \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}$ έχουμε ότι $\frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f = R_s + \frac{C}{\xi} - R_f < 0$ και η (3.7), γράφεται:

$$(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi} - R_f$$

που ισχύει πάντα αφού ισοδυνάμως έχουμε:

$$(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)(\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq R_s + \frac{C}{\xi} - R_f,$$

επομένως στην περίπτωση αυτή, είναι ωφέλιμο ο πελάτης να εισέλθει στο σύστημα. Τέλος, στις περιπτώσεις όπου $R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C}{\eta}$ έχουμε ότι $S^{(obs)}(n,0) = 0$, οπότε ο πελάτης είναι διάφορος αν θα εισέλθει ή αν θα αποχωρήσει από το σύστημα.

□

Παρατήρηση 3.1. *Η εμφάνιση των κανόνων αντίστροφου κατωφλίου (reverse-threshold rules), όπως αναφέρονται στο Θεώρημα 3.1, υποπερίπτωση (Ι-β), για τη βέλτιστη απόφαση ενός πελάτη όταν αυτός βρίσκει το σύστημα σε φάση επισκευής, μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:*

Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη ο οποίος, κατά την άφιξή του, βρίσκει το σύστημα εκτός λειτουργίας. Αν αποφασίσει να εισέλθει στο σύστημα, θα πρέπει πρώτα να περιμένει την ολοκλήρωση του χρόνου επισκευής, οπότε επιβαρύνεται με κόστος τουλάχιστον ίσο με το μέσο κόστος $\frac{C}{\eta}$ *μονάδες.*

Συνεπώς, αν η τιμή της ανταμοιβής εξυπηρέτησης R_s *είναι μικρότερη από* $\frac{C}{\eta}$*, ο πελάτης δεν επιθυμεί ουσιαστικά να εξυπηρετηθεί. Ωστόσο, μπορεί να βασίζεται στην εμφάνιση μιας καταστροφής, προκειμένου να λάβει την αποζημίωση για τη μη εξυπηρέτηση, εφόσον αυτή είναι επαρκώς μεγάλη.*

Σε αυτή την περίπτωση, είναι εύλογο να προτιμά να υπάρχουν αρκετοί πελάτες μπροστά του. Όπως είναι λογικό, καθώς αυξάνεται ο αριθμός των πελατών, τόσο μεγαλύτερη γίνεται η πιθανότητα να αποχωρήσει από το σύστημα λόγω μιας καταστροφής· έτσι, λαμβάνει την επιθυμητή αποζημίωση.

Ωστόσο, η κατάσταση αυτή είναι παροδικής φύσης. Πράγματι, αν οι πελάτες υιοθετήσουν μια τέτοια στρατηγική, τότε ο αριθμός των πελατών μπορεί να υπερβαίνει το κατώφλι μόνο κατά την αρχική περίοδο λειτουργίας του συστήματος, πριν από την πρώτη καταστροφή. Συγκεκριμένα, η Μαρκοβιανή αλυσίδα που περιγράφει την εξέλιξη του συστήματος απορροφάται στην κατάσταση $(0,0)$ *μετά την εμφάνιση της πρώτης καταστροφής.*

Η εμφάνιση κανόνων αντίστροφου κατωφλίου για στρατηγικές ισορροπίας πελατών έχει παρατηρηθεί και ερμηνευθεί και σε άλλα παρατηρήσιμα συστήματα αναμονής με συμπεριφορά FTC.

Θεώρημα 3.2. *Θεωρούμε μία παρατηρήσιμη* $M/M/1$ *ουρά αναμονής με καταστροφές. Τότε, υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Αν ένας πελάτης κατά την άφιξή του βρίσκει τον εξυπηρετητή σε λειτουργία, ισχύουν οι ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του* R_f*.*

Περίπτωση Ι. Αν
$$R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi},$$
τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει στον πελάτη να μην εισέλθει στο σύστημα.

Περίπτωση ΙΙ. Αν
$$\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi},$$

τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει έναν *κανόνα κατωφλίου*, σύμφωνα με τον οποίο:

> «Κατά την άφιξη σε χρόνο t και εφόσον ο εξυπηρετητής είναι σε λειτουργία, παρατήρησε το $Q(t)\cdot$ είσοδος στο σύστημα αν $Q(t) \leq \lfloor n_e(1) \rfloor$ και αποχώρηση διαφορετικά».

όπου το $n_e(1)$ δίνεται από

$$n_e(1) = \frac{\ln K(1)}{\ln S} - 1, \tag{3.12}$$

με

$$K(1) = \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s - R_f + \frac{C}{\xi}}, \qquad S = \frac{\mu}{\mu + \xi}. \tag{3.13}$$

Περίπτωση ΙΙΙ. Αν

$$R_f \geq \frac{C}{\xi},$$

τότε η μοναδική στρατηγική ισορροπίας υπαγορεύει στον πελάτη να εισέρχεται πάντα στο σύστημα.

Απόδειξη. Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης που παρατηρεί το σύστημα κατά την άφιξη του, Αν βρει το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$ και αποφασίσει να εισέλθει τότε το αναμενόμενο καθαρό του όφελος δίνεται από τη σχέση (3.2). Ο πελάτης θα προτιμήσει να εισέλθει στο σύστημα αν $S^{(obs)}(n, 1) \geq 0$. Δηλαδή

$$\begin{aligned} S^{(\text{obs})}(n,1) \geq 0 \Rightarrow & R_s \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] \geq 0 \\ \Rightarrow & \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\left(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f\right) \geq \frac{C}{\xi} - R_f. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Θεωρούμε την

$$S^{(obs)}(0,1) = \frac{\xi}{\mu+\xi} R_f - \frac{C}{\mu+\xi} + \frac{Rs\mu}{\mu+\xi} \tag{3.15}$$

και την εξίσωση $S^{(obs)}(0,1) = 0$ η οποία έχει λύση ως προς R_f, την $\frac{C}{\xi} - \frac{Rs\mu}{\xi}$.

Ισχύει ότι:

$$\frac{C}{\xi} - \frac{Rs\mu}{\xi} < \frac{C}{\xi} < \frac{C}{\xi} + R_s. \tag{3.16}$$

Περίπτωση I

Έστω $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{Rs\mu}{\xi}$:

Λόγω της (3.16) και τα δύο μέλη της (3.14) είναι θετικά. Λύνω την ανίσωση $S^{(obs)}(n,1) \geq 0$ ως προς n:

$$S^{(\text{obs})}(n,1) \geq 0 \Rightarrow R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f) \geq \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{ln(\frac{\frac{C}{\xi}-R_f}{R_s+\frac{C}{\xi}-R_f})}{ln\frac{\mu}{\mu+\xi}} - 1 \Rightarrow n \leq \lfloor n_e(1) \rfloor.$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε θέτοντας

$$K(1) = \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}, S = \frac{\mu}{\mu+\xi},$$

, και

$$n_e(1) = \frac{ln(\frac{\frac{C}{\xi}-R_f}{R_s+\frac{C}{\xi}-R_f})}{ln\frac{\mu}{\mu+\xi}} - 1 \Rightarrow n_e(1) = \frac{lnK(1)}{lnS} - 1.$$

Για το πρόσημο του $n_e(1)$ έχουμε:

Αφού $R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{R_s\mu}{\xi}$ και η (3.15) είναι γνησίως αύξουσα ως προς R_f θα ισχύει ότι:

$$S^{(obs)}(0,1) \leq 0 \Rightarrow \ (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} \leq \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} \leq \ \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$$

$$\Rightarrow lnS \leq lnK(1) \Rightarrow n_e(1) \leq 0.$$

Αφού $n \leq \lfloor n_e(1) \rfloor$ και $n_e(1) \leq 0$, το βέλτιστο για τον πελάτη είναι να αποχωρήσει από το σύστημα.

Περίπτωση ΙΙ

Αν $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f < \frac{C}{\xi}$ έχουμε ότι το δεξί και το αριστερό μέλος της (3.14) είναι θετικά, οπότε λύνοντας την (3.14) ως προς n έχουμε όπως πριν:

$$S^{(\mathrm{obs})}(n,1) \geq 0 \Rightarrow R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f) \geq \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \geq \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{ln(\frac{\frac{C}{\xi}-R_f}{R_s+\frac{C}{\xi}-R_f})}{ln\frac{\mu}{\mu+\xi}} - 1 \Rightarrow n \leq \lfloor n_e(1) \rfloor.$$

Η περίπτωση αυτή διαφοροποιείται ως προς το πρόσημο του $n_e(1)$:

Αφού $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f$ έχουμε ότι:

$$S^{(obs)} > 0 \Rightarrow \ (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} > \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} > \ \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$$

$$\Rightarrow lnS > lnK(1) \Rightarrow n_e(1) > 0.$$

Οπότε από τα παραπάνω, ο πελάτης εισέρχεται στο σύστημα αν και μονο αν $n \leq \lfloor n_e(1) \rfloor$, διαφορετικά αποχωρεί.

Περίπτωση ΙΙΙ

Αν $\frac{C}{\xi} \leq R_f \leq \frac{C}{\xi} + R_s$, έχουμε ότι το αριστερό μέλος της (3.14) μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός και το δεξί μέλος είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός. Επειδή τα $(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)$ και $\frac{C}{\xi} - R_f$ δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα ίσα με μηδέν, μεταφέροντας όλους τους όρους της (3.14) στο πρώτο μέλος έχουμε ότι $S^{(obs)}(n,1) > 0$. Επομένως συμφέρει τον πελάτη να εισέλθει στο σύστημα.

Αν $R_f > \frac{C}{\xi} + R_s$ έχουμε ότι και τα 2 μέλη της (3.14) είναι αρνητικά, οπότε λύνοντας την (3.14) ως προς n έχουμε:

$$S^{(\mathrm{obs})}(n,1) \geq 0 \Rightarrow R_s \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1}(R_s + \frac{C}{\xi} - R_f) \geq \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow (\frac{\mu}{\mu+\xi})^{n+1} \leq \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{ln(\frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f})}{ln\frac{\mu}{\mu+\xi}} - 1 \Rightarrow n \geq \lfloor n_e(1) \rfloor.$$

Για το πρόσημο του $n_e(1)$ έχουμε:

Αφού $\frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} < R_f$ έχουμε ότι:

$$S^{(obs)}(0,1) > 0 \Rightarrow (R_s + \frac{C}{\xi} - R_f)\frac{\mu}{\mu+\xi} > \frac{C}{\xi} - R_f \Rightarrow \frac{\mu}{\mu+\xi} < \frac{\frac{C}{\xi} - R_f}{R_s + \frac{C}{\xi} - R_f}$$

$$\Rightarrow lnS < lnK(1) \Rightarrow n_e(1) < 0.$$

Επομένως, συμψηφίζοντας τα παραπάνω, για $R_f \geq \frac{C}{\xi}$ η μοναδική στρατηγική ισορροπίας, ορίζει ο πελάτης,να εισέρχεται πάντα στο σύστημα.

Τα ίδια αποτελέσματα θα λαμβάναμε αν στην Περίπτωση ΙΙ του Θεωρήματος 3.1 παίρναμε $\eta \to \infty$.Εφόσον το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $(n,1)$ το κόστος αναμονής $\frac{C}{\eta}$ για την συμπλήρωση του χρόνου επισκευής ισούται με μηδέν. $\square$

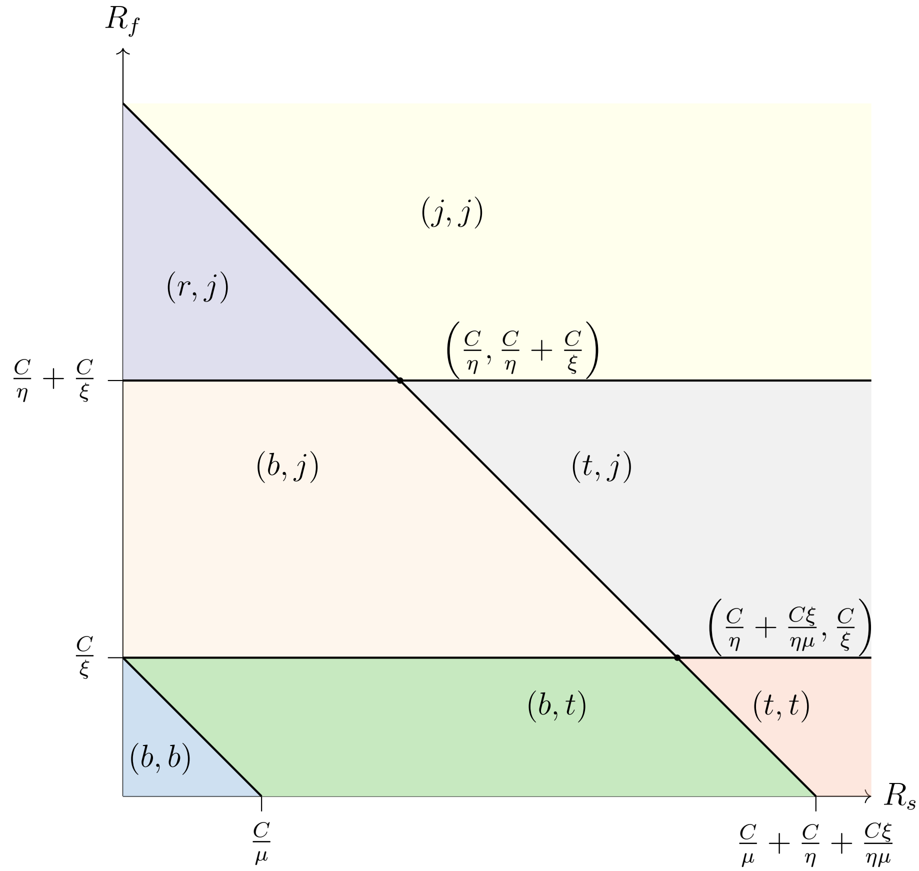
Παρατήρηση 3.2. *Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 3.1 και 3.2, προκύπτει ο τύπος της στρατηγικής ισορροπίας* (s_0, s_1), *για κάθε ζεύγος* (R_s, R_f). *Το* s_0 *αναφέρεται στον κανόνα που ακολουθεί ένας πελάτης όταν βρίσκει τον εξυπηρετητή υπό επισκευή, ενώ το* s_1 *αναφέρεται στον κανόνα που ακολουθεί όταν βρίσκει τον εξυπηρετητή σε λειτουργία.*

Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζεται η διαίρεση του επιπέδου (R_s, R_f) *στις διάφορες περιπτώσεις στρατηγικών, οι οποίες αντιστοιχούν στο ζεύγος κανόνων όταν ο εξυπηρετητής βρίσκεται σε λειτουργία ή όχι. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιήσαμε τις ευθείες*

$$R_f = \frac{C}{\xi}, \quad R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi}, \quad R_f = \frac{C}{\eta} + \frac{C}{\xi}, \quad R_f = \frac{C}{\eta\xi}(\eta + \xi + \mu) - \frac{\mu R_s}{\xi}.$$

Επιπλέον, συμβολίσαμε με b *τον κανόνα αποχώρησης (*balking*), με* j *τον κανόνα συμμετοχής (*joining*), με* t *έναν κανόνα κατωφλίου (*threshold rule*) και με* r *έναν αντίστροφο κανόνα κατωφλίου (*reverse-threshold rule*).*

Παρατήρηση 3.3. *Τα επιχειρήματα των Θεωρημάτων 3.1 και 3.2 δείχνουν ότι η βέλτιστη στρατηγική ενός επιλεγμένου πελάτη, ο οποίος φθάνει στο σύστημα και βρίσκει* n *πελάτες σε αυτό, είναι ανεξάρτητη από τις στρατηγικές που ακολουθούν οι υπόλοιποι πελάτες. Πράγματι, το αναμενόμενο καθαρό όφελος του επιλεγμένου πελάτη δεν επηρεάζεται από τις στρατηγικές των μελλοντικών πελατών, λόγω της πειθαρχίας FCFS. Αντιστρόφως, δεδομένου ότι ο επιλεγμένος πελάτης παρατηρεί τον αριθμό των πελατών στο σύστημα κατά την άφιξή του, το αναμενόμενο καθαρό όφελός του δεν επηρεάζεται από την γνώση των στρατηγικών των παρελθόντων πελατών. Με αυτή τη λογική, η στρατηγική που υπαγορεύεται στις διάφορες περιπτώσεις των θεωρημάτων 3.1 και 3.2, είναι ατομικά βέλτιστες, ανεξάρτητα από το τι κάνουν οι άλλοι πελάτες. Σε παιγνιοθεωρητική ορολογία, μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται (ασθενώς) κυρίαρχη με την έννοια ότι είναι βέλτιστη απάντηση απέναντι σε οποιαδήποτε στρατηγική των υπολοίπων.*



Σχήμα 3.2: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_s and R_f—παρατηρήσιμη περίπτωση. Αναπαραγωγή από [1]

3.4 Η μη παρατηρήσιμη περίπτωση

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στην μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Εδω οι πελάτες ξέρουν τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος λ, μ, ξ, η, των οικονομικών παραμέτρων Rs, Rf και C, αλλά δεν είναι σε θέση να παρατηρήσουν κατά την άφιξή τους την κατάσταση του συστήματος (ούτε την κατάσταση του εξυπηρετητή, ούτε και τον αριθμό πελατών στο σύστημα). Στην περίπτωση αυτή το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός επιλεγμένου πελάτη επηρεάζεται από τις στρατηγικές των άλλων πελατών. Αυτό σημαίνει ότι εδώ δεν έχουμε την περίπτωση της ασθενώς κυρίαρχης στρατηγικής όπως παρουσιάζεται στην Παρατήρηση 3. Καθώς όλοι οι πελάτες θεωρούνται ότι δεν ξεχωρίζουν ο ένας από τον άλλο, μπορούμε να θεωρήσουμε την περίπτωση αυτή σαν ένα συμμετρικό παίγνιο μεταξύ τους. Στο παρόν μοντέλο υπάρχουν μονο δύο καθαρές στρατηγικές για το πρόβλημα της απόφασης των πελατών ''να εισέλθουν'' ή ''να αποχωρήσουν'', έτσι μια μεικτή στρατηγική προσδιορίζεται από την πιθανότητα εισόδου q ενός αφιχθέντος πελάτη. Το θέμα μας σε αυτή την ενότητα ειναι να προσδιορίσουμε τις στρατηγικές ισορροπίας. Πρώτα θα μελετήσουμε τη στάσιμη συμπεριφορά του συστήματος όταν όλοι οι πελάτες ακολουθούν μειτκή στρατηγική με πιθανότητα εισόδου q. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα συμπεριφέρεται όπως και πριν αλλά με ρυθμό άφιξης λq αντί για λ.

Πρόταση 3.2. *Θεωρούμε το μη παρατηρήσιμο σύστημα ουράς $M/M/1$ με καταστροφές, στο οποίο οι πελάτες κατά την άφιξή τους εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα q. Οι στάσιμες πιθανότητες $p^{(\mathrm{un})}(n,i;q)$ του συστήματος δίνονται από*

$$p^{(\mathrm{un})}(n,0;q)=\frac{\eta\xi}{(\xi+\eta)(\lambda q+\eta)}\left(\frac{\lambda q}{\lambda q+\eta}\right)^n,\qquad n\geq 0, \tag{1}$$

$$p^{(\mathrm{un})}(n,1;q)=c_1(q)\,x_2(q)^n+c_2(q)\left(\frac{\lambda q}{\lambda q+\eta}\right)^n,\qquad n\geq 0, \tag{2}$$

όπου οι ποσότητες $x_2(q)$, $c_1(q)$ και $c_2(q)$ ορίζονται ως

$$x_2(q)=\frac{\lambda q+\mu+\xi-\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}}{2\mu}, \tag{3}$$

$$c_1(q)=\frac{\eta^2\big(1-x_2(q)\big)\big[\mu-(\lambda q+\eta)\big]}{(\xi+\eta)\big[(\lambda q+\eta)(\xi-\eta)+\eta\mu\big]}, \tag{4}$$

$$c_2(q)=\frac{\eta^2\xi}{(\xi+\eta)\big[(\lambda q+\eta)(\xi-\eta)+\eta\mu\big]}. \tag{5}$$

Οι πιθανότητες ο εξυπηρετητής να είναι ανενεργός ή ενεργός δίνονται, αντίστοιχα, από

$$p^{(\mathrm{un})}(\cdot,0;q)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(\mathrm{un})}(n,0;q)=\frac{\xi}{\xi+\eta}, \tag{6}$$

$$p^{(\mathrm{un})}(\cdot,1;q)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{(\mathrm{un})}(n,1;q)=\frac{\eta}{\xi+\eta}. \tag{7}$$

Οι γεννήτριες συναρτήσεις

$$\Pi_0^{(\mathrm{un})}(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(\mathrm{un})}(n,0;q)\, z^n, \qquad \Pi_1^{(\mathrm{un})}(z;q) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(\mathrm{un})}(n,1;q)\, z^n$$

δίνονται από

$$\Pi_0^{(\mathrm{un})}(z;q) = \frac{\eta\xi}{(\xi+\eta)\big(\lambda q + \eta - \lambda q z\big)}, \tag{8}$$

$$\Pi_1^{(\mathrm{un})}(z;q) = \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]\big[z - \rho(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]\big[z - \rho_2(q)\big]\left(\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - z\right)}, \tag{9}$$

όπου

$$\rho(q) = \frac{\lambda q + \eta}{\mu x_2(q)}, \tag{10}$$

$$\rho_2(q) = \frac{1}{x_2(q)}. \tag{11}$$

Απόδειξη. Στην παρούσα απόδειξη , συμβολίζουμε τη στάσιμη πιθανότητα $p^{(\mathrm{un})}(n,i;q)$ με $p(n,i)$ και τη γεννήτρια συνάρτηση $\Pi_i^{(\mathrm{un})}(z;q)$ με $\Pi_i(z)$.

Οι εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας λαμβάνονται από το Σχήμα 3.1, με τη διαφορά ότι αντί για λ έχουμε λq. Οπότε είναι:

$$p(0,0)(\eta + \lambda q) = \xi \sum_{n=0}^{\infty} p(n,1), \tag{12}$$

$$(\lambda q + \xi)p(0,1) = \mu p(1,1) + \eta p(0,0). \tag{13}$$

Επίσης

$$p(1,0)(\eta + \lambda q) = \lambda q p(0,0),$$
$$p(2,0)(\eta + \lambda q) = \lambda p(1,0)...$$

Οπότε γενικά έχουμε:

$$p(n,0)(\eta+\lambda q)=\lambda p(n-1,0), n\geq 1. \tag{14}$$

Επιπλέον:

$$(\lambda q+\mu+\xi)p(1,1)=\lambda q p(0,1)+\eta p(1,0)+\mu p(2,1).$$

Συνεχίζοντας παίρνουμε τη σχέση:

$$(\lambda q+\mu+\xi)p(n,1)=\lambda q p(n-1,1)+\eta p(n,0)+\mu p(n+1,1), n\geq 1. \tag{15}$$

Για την πιθανογεννήτρια $\Pi_0(z)$ ισχύει ότι $\Pi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,0)z^n$. Πολλαπλασιάζω την σχέση (14) με z^n, και σχηματίζω τα αθροίσματα από 1 εως n οπότε:

$$(\lambda q+\eta)\sum_{n=1}^{\infty}p(n,0)z^n=\lambda q\sum_{n=1}^{\infty}p(n-1,0)z^n$$

ενώ στο δεξί μέλος, με αλλαγή δείκτη $m=n-1 \iff n=m+1$, προκύπτει

$$\lambda q\sum_{n=1}^{\infty}p(n-1,0)z^n=\lambda q z\sum_{m=0}^{\infty}p(m,0)z^m=\lambda q z\,\Pi_0(z).$$

Παρατηρούμε ότι, από τον ορισμό της πιθανογεννήτριας,

$$\Pi_0(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,0)z^n=p(0,0)z^0+\sum_{n=1}^{\infty}p(n,0)z^n=p(0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}p(n,0)z^n.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(n,0)z^n=\Pi_0(z)-p(0,0).$$

Συνεπώς,

$$(\lambda q+\eta)\sum_{n=1}^{\infty}p(n,0)z^n=(\lambda q+\eta)\big(\Pi_0(z)-p(0,0)\big).$$

Συνεπώς,

$$(\lambda q+\eta)\big(\Pi_0(z)-p(0,0)\big)=\lambda q z\,\Pi_0(z).$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους, παίρνουμε

$$(\lambda q + \eta - \lambda q z)\Pi_0(z) = (\lambda q + \eta)p(0,0).$$

Για τον υπολογισμό του $p(0,0)$ χρησιμοποιούμε την εξίσωση ισορροπίας (12), η οποία δίνει

$$(\lambda q + \eta)p(0,0) = \xi \sum_{i=0}^{\infty} p(i,1) = \xi\, p(\cdot,1) \Rightarrow p(0,0) = \frac{\xi p(\cdot,1)}{\lambda q + \eta}.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση, καταλήγουμε ότι

$$\Pi_0(z) = \frac{\xi\, p(\cdot,1)}{\lambda q + \eta - \lambda q z}. \tag{16}$$

Για $z = 1$ στην (16) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Pi_0(1) = p(\cdot,0)$, έχουμε ότι:

$$\Pi_0(1) = \frac{\xi\, p(\cdot,1)}{\lambda q + \eta - \lambda q} \Rightarrow p(\cdot,0) = \frac{\xi\, p(\cdot,1)}{\eta}$$

Εφόσον είναι $p(\cdot,0) + p(\cdot,1) = 1$ λαμβάνουμε τις (6) και (7):

$$\frac{\xi p(\cdot,1)}{\eta} + p(\cdot,1) = 1 \Rightarrow p(\cdot,1) = \frac{\eta}{\eta + \xi}, \tag{7}$$

και

$$p(\cdot,0) = 1 - p(\cdot,1) = \frac{\xi}{\eta + \xi}. \tag{6}$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (16) λαμβάνουμε την (8):

$$\Pi_0(z) = \frac{\xi \frac{\eta}{\xi + \eta}}{\lambda q + \eta - \lambda q z} \Rightarrow \Pi_0(z) = \frac{\xi \eta}{(\lambda q + \eta - \lambda q z)(\xi + \eta)}.$$

Από την (14) παίρνουμε το $p(n,0)$, σαν συνάρτηση του $p(0,0)$:
Για $n = 1$:

$$(\lambda q + \eta)p(1,0) = \lambda q p(0,0) \Rightarrow p(1,0) = \frac{\lambda q p(0,0)}{\lambda q + \eta}.$$

Για $n = 2$:

$$(\lambda q + \eta)p(2,0) = \lambda q p(1,0) \Rightarrow p(2,0) = \frac{\lambda q p(1,0)}{\lambda q + \eta} \Rightarrow p(2,0) = \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta}\right)^2 p(0,0).$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για $n = 3, 4, ...$ έχουμε την (1):

$$\begin{aligned} p(n,0) &= \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta}\right)^n p(0,0) \\ \Rightarrow p(n,0) &= \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta}\right)^n \frac{\xi p(\cdot,1)}{\lambda q + \eta} \\ \Rightarrow p(n,0) &= \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta}\right)^n \frac{\xi \eta}{(\lambda q + \eta)(\eta + \xi)}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) με z^n, και σχηματίζοντας τα αθροίσματα από 1 εως n έχουμε:

$$(\lambda q + \mu + \xi) \sum_{n=1}^{\infty} z^n p(n,1) = \lambda q \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, p(n-1,1) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} z^n p(n+1,1) + \eta \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, p(n,0).$$

Επειδή $\Pi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,1) z^n$, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n,1) z^n = \Pi_1(z) - p(0,1),$$

άρα

$$(\lambda q + \mu + \xi) \sum_{n=1}^{\infty} p(n,1) z^n = (\lambda q + \mu + \xi)\big(\Pi_1(z) - p(0,1)\big).$$

Για το πρώτο άθροισμα του δεξιού μέλους, για $m = n - 1$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n-1,1) z^n = z \sum_{m=0}^{\infty} p(m,1) z^m = z \Pi_1(z).$$

Για το δεύτερο άθροισμα, με αλλαγή δείκτη $m = n + 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n+1,1) z^n = \sum_{m=2}^{\infty} p(m,1) z^{m-1} = \frac{1}{z}\Big(\Pi_1(z) - p(0,1) - p(1,1) z\Big).$$

Τέλος,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n,0)z^n = \Pi_0(z) - p(0,0).$$

Συνεπώς,

$$(\lambda q+\mu+\xi)(\Pi_1(z)-p(0,1)) = \lambda qz\Pi_1(z)+\frac{\mu}{z}\big(\Pi_1(z)-p(0,1)-p(1,1)z\big)+\eta(\Pi_0-p(0,0)).$$

Πολλαπλασιάζοντας με z και μεταφέροντας τους όρους κατάλληλα, παίρνουμε

$$\big[\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu\big]\Pi_1(z) = \mu(1-z)p(0,1)-\eta z\Pi_0(z)+\Big(\mu zp(1,1)+\eta zp(0,0)-(\lambda q+\xi)zp(0,1)\Big).$$

Όμως λόγω της (13) έχουμε ότι $(\lambda q+\xi)p(0,1) = \mu p(1,1)+\eta p(0,0)$, οπότε $\mu zp(1,1)+\eta zp(0,0)-(\lambda q+\xi)zp(0,1) = 0$. Επομένως:

$$\big[\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu\big]\Pi_1(z) = \mu(1-z)p(0,1)-\eta z\Pi_0(z). \tag{17}$$

Ο συντελεστής του $\Pi_1(z)$ στην (17) είναι το τριώνυμο $\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu$ ως προς z. Λύνουμε την εξίσωση $\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu = 0$: Οι ρίζες του προκύπτουν από τον τύπο της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και δίνονται από

$$z_{1,2} = \frac{\lambda q+\mu+\xi \pm \sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}}{2\lambda q}.$$

Θέτουμε

$$\rho_1(q) = \frac{\lambda q+\mu+\xi - \sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}}{2\lambda q},$$
$$\rho_2(q) = \frac{\lambda q+\mu+\xi + \sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}}{2\lambda q}.$$

Είναι $\rho_1(q)\in(0,1)$ γιατί:

$$(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu < (\lambda q+\mu+\xi)^2$$
$$\Rightarrow \sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu} < \lambda q+\mu+\xi \Rightarrow \rho_1(q) > 0.$$

Επίσης:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda q+\mu+\xi-\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}}{2\lambda q}<1\\
\iff &\lambda q+\mu+\xi-\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}<2\lambda q\\
\iff &\mu+\xi-\lambda q<\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu}.
\end{aligned}
$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$(\mu+\xi-\lambda q)^2<(\lambda q+\mu+\xi)^2-4\lambda q\mu.$$

Υπολογίζω τη διαφορά: $(\lambda q+\mu+\xi)^2-(\mu+\xi-\lambda q)^2$:

$$
\begin{aligned}
(\lambda q+\mu+\xi)^2-(\mu+\xi-\lambda q)^2 =&(\lambda q+\mu+\xi-(\mu+\xi-\lambda q))(\lambda q+\mu+\xi+(\mu+\xi-\lambda q))\\
=&(2\lambda q)\,(2\mu+2\xi)\\
=&4\lambda q(\mu+\xi).
\end{aligned}
$$

Άρα η προηγούμενη ανισότητα ισοδυναμεί με

$$4\lambda q(\mu+\xi)>4\lambda q\mu \quad\iff\quad 4\lambda q\,\xi>0,$$

η οποία ισχύει επειδή $\lambda>0$, $q>0$ και $\xi>0$. Επομένως $\rho_1(q)<1$ και άρα $\rho_1(q)\in(0,1)$.

Επιπλεόν αποδεικνύουμε ότι $\rho_2(q) > 1$:

Έστω $f(z) = \lambda q z^2 - (\lambda q + \mu + \xi)z + \mu$ με ρίζες $\rho_1(q)$ και $\rho_2(q)$.

Είδαμε ότι $\rho_1(q) \in (0, 1)$. Για τη ριζα $\rho_2(q)$ έχουμε:

$$f(1) = \lambda q - (\lambda q + \mu + \xi) + \mu = -\xi < 0.$$

, και

$$\lim_{z \to +\infty} f(z) = +\infty.$$

Οπότε, αφού f συνεχής , υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(z) = 0$ μεγαλύτερη του 1. Εφόσον η άλλη ρίζα είναι $\rho_1(q) \in (0, 1)$, η ρίζα αυτή δεν μπορεί να είναι η $\rho_1(q)$ και άρα $\rho_2(q) > 1$.

Στη συνέχεια, λύνοντας την ομογενή εξίσωση διαφορών που προκύπτει από την (15) έχουμε:

$$(\lambda q + \mu + \xi)p(n, 1) = \lambda q\, p(n - 1, 1) + \mu\, p(n + 1, 1).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\mu x^2 - (\lambda q + \mu + \xi)x + \lambda q = 0.$$

Οι ρίζες του παραπάνω πολυωνύμου είναι

$$x_{1,2} = \frac{\lambda q + \mu + \xi \pm \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}}{2\mu}.$$

Ορίζουμε

$$x_2(q) = \frac{\lambda q + \mu + \xi - \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}}{2\mu},$$

δηλαδή τη ρίζα που ανήκει στο $(0, 1)$, ώστε η αντίστοιχη λύση να είναι φθίνουσα ως προς n.

Τέλος, παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε τις ρίζες $\rho_1(q), \rho_2(q)$ με τη βοήθεια του $x_2(q)$:

$$\rho_1(q) = \frac{\lambda q + \mu + \xi - \sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q \mu}}{2\lambda q} = \frac{\mu}{\lambda q}\, x_2(q).$$

Επιπλέον, από το γινόμενο των ριζών του τριωνύμου ως προς z έχουμε

$$\rho_1(q)\rho_2(q) = \frac{\mu}{\lambda q},$$

οπότε

$$\rho_2(q) = \frac{1}{x_2(q)}.$$

Η $\Pi_1(z)$ συγκλίνει για $|z| \leq 1$ και αφού $\rho_1(q) \in (0,1)$, μπορώ να θέσω στην (17) $z = \rho_1(q)$:

$$\left[\lambda q(\rho_1(q))^2 - (\lambda q + \mu + \xi)\rho_1(q) + \mu\right]\Pi_1(\rho_1(q)) = \mu(1 - \rho_1(q))p(0,1) - \eta\rho_1(q)\Pi_0(\rho_1(q)).$$

Επειδή το $\rho_1(q)$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\lambda q z^2 - (\lambda q + \mu + \xi)z + \mu \ = 0$, έχουμε ότι το πρώτο μέλος μηδενίζεται , οπότε λύνοντας ως προς $p(0,1)$ έχουμε:

$$p(0,1) = \frac{\eta\rho_1(q)\Pi_0(\rho_1(q))}{\mu(1 - \rho_1(q))}.$$

Από την (16) έχουμε

$$\Pi_0(z) = \frac{\xi\, p(\cdot,1)}{\lambda q + \eta - \lambda q z},$$

και συνεπώς

$$\Pi_0(\rho_1(q)) = \frac{\xi\, p(\cdot,1)}{\lambda q + \eta - \lambda q \rho_1(q)}.$$

Επιπλέον, από την (7) ισχύει

$$p(\cdot,1) = \frac{\eta}{\xi + \eta}.$$

Άρα

$$p(0,1) = \frac{\eta\rho_1(q)}{\mu(1 - \rho_1(q))} \cdot \frac{\xi}{\lambda q + \eta - \lambda q \rho_1(q)} \cdot \frac{\eta}{\xi + \eta}.$$

Τέλος, είδαμε πρίν ότι

$$\rho_1(q) = \frac{\mu x_2(q)}{\lambda q}.$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση που έχουμε για το $p(0,1)$ παραπάνω , καταλήγουμε

$$\begin{aligned} p(0,1) &= \frac{\eta \cdot \frac{\mu x_2(q)}{\lambda q}}{\mu(1-\frac{\mu x_2(q)}{\lambda q})} \cdot \frac{\xi}{\lambda q + \eta - \lambda q \frac{\mu x_2(q)}{\lambda q}} \cdot \frac{\eta}{\xi+\eta} \\ &= \frac{\eta^2 \xi x_2(q)}{(\xi+\eta)\left[\lambda q - \mu x_2(q)\right]\left[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\right]}. \end{aligned} \tag{18}$$

Είδαμε ότι το $x_2(q)$ είναι η λύση της εξίσωσης

$$\mu x^2 - (\lambda q + \mu + \xi)x + \lambda q = 0.$$

Επομένως την επαληθεύει, άρα:

$$\mu(x_2(q))^2 - (\lambda q + \mu + \xi)(x_2(q) + \lambda q = 0. \tag{19}$$

Με πράξεις έχουμε:

$$\begin{gathered} \mu x_2(q)(x_2(q)-1) + \lambda q(1-x_2(q)) - \xi x_2(q) = 0 \\ (1-x_2(q))(\lambda q - \mu x_2(q)) = \xi x_2(q) \Rightarrow \lambda q - \mu x_2(q) = \frac{\xi x_2(q)}{1-x_2(q)}. \end{gathered} \tag{20}$$

Αν συνδυάσουμε την (18) και την (20) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} p(0,1) =& \frac{\eta^2 \xi x_2(q)}{(\xi+\eta)\left[\frac{\xi x_2(q)}{1-x_2(q)}\right]\left[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\right]} \\ \Rightarrow p(0,1) =& \frac{\eta^2(1-x_2(q))}{(\xi+\eta)[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]}. \end{aligned} \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας την (21) και την (8) στην (17) παίρνουμε:

$$\Pi_1(z) = \frac{\mu(1-z)\,\frac{\eta(1-x_2(q))}{(\xi+\eta)(\lambda q-\mu x_2(q))} - \frac{\eta^2\xi}{(\xi+\eta)(\lambda q+\eta-\lambda qz)}}{\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu}$$

$$\Rightarrow\ \Pi_1(z) = \frac{(1-z)\mu\eta^2[1-x_2(q)](\lambda q+\eta-\lambda qz)-\eta^2\xi(\lambda q+\eta-\mu x_2(q))}{(\xi+\eta)(\lambda q-\mu x_2(q))(\lambda q+\eta-\lambda qz)[\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu]}$$

$$\Rightarrow\ \Pi_1(z) = \frac{(1-z)\mu\eta^2[1-x_2(q)](\lambda q+\eta-\lambda qz)-\eta^2\xi(\lambda q+\eta-\mu x_2(q))}{\lambda q(\xi+\eta)[\lambda q+\eta-\mu x_2(q)]\big(\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-z\big)[\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu]}. \tag{22}$$

Παρατηρούμε ότι στην (22) ο παρονομαστής είναι ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς z. Οι ρίζες του είναι $\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q} \in (1,\infty)$, καθώς και οι ρίζες του τριωνύμου $\lambda qz^2-(\lambda q+\mu+\xi)z+\mu$, $\rho_1(q) \in (0,1)$ και $\rho_2(q) \in (1,\infty)$. Οπότε ο παρονομάστής μπορεί να γραφτεί:

$$\lambda q(\xi+\eta)[\lambda q+\eta-\mu x_2(q)](\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q})(z-\rho_1(q))(z-\rho_2(q)).$$

Η πιθανογεννήτρια $\Pi_1(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο. Οπότε το $\rho_1(q) \in (0,1)$ είναι υποχρεωτικά ρίζα του αριθμητή της (22). Βλέπουμε ότι ο αριθμητής είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς z οπότε αν οι ρίζες του ειναι $\rho_1(q), \rho(q)$ το πολυώνυμο μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\eta^2\lambda\mu q\,[1-x_2(q)]\,(z-\rho(q))(z-\rho_1(q)),$$

Οπότε η (22) γίνεται:

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta^2\lambda\mu q\,[1-x_2(q)]\,(z-\rho(q))(z-\rho_1(q))}{\lambda q(\xi+\eta)[\lambda q+\eta-\mu x_2(q)](\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q})(z-\rho_1(q))(z-\rho_2(q))}$$

Δηλαδή έχουμε την (9) :

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta^2\mu\big[1-x_2(q)\big]\big[z-\rho(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta\big]\big[z-\rho_2(q)\big]\left(\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-z\right)}.$$

Αν αντικαταστήσουμε $z=1$ στην (9) έχουμε:

$$\Pi_1(1) = \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]\big[1-\rho(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]\big[1-\rho_2(q)\big]\left(\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q} - 1\right)}$$

$$\Rightarrow \Pi_1(1) = \frac{\eta\mu\big[1 - x_2(q)\big]\big[1-\rho(q)\big]}{(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]\big[1-\rho_2(q)\big]}$$

Επειδή $\Pi_1(1) = \frac{\eta}{\eta+\xi}$, έχουμε:

$$\frac{\eta}{\eta+\xi} = \frac{\eta \cdot \mu\big[1 - x_2(q)\big]\big[1-\rho(q)\big]}{(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]\big[1-\rho_2(q)\big]} \Rightarrow$$

$$[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta][1-\rho_2(q)] = \mu\big[1 - x_2(q)\big]\big[1-\rho(q)\big].$$

Οπότε λαμβάνουμε τη σχέση (10) :

$$1 - \rho(q) = \frac{[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta][1-\rho_2(q)]}{\mu\big[1 - x_2(q)\big]} \Rightarrow 1 - \rho(q) = \frac{[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta][1 - \frac{1}{x_2(q)}]}{\mu\big[1 - x_2(q)\big]}$$

$$\Rightarrow -1 + \rho(q) = \frac{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta}{\mu x_2(q)} \Rightarrow \rho(q) = \frac{\lambda q + \eta}{\mu x_2(q)}.$$

Η (9) είναι:

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]\big[z-\rho(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]\big[z-\rho_2(q)\big]\left(\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q} - z\right)}.$$

Μπορούμε να τη γράψουμε σαν άθροισμα κλασμάτων:

$$\Pi_1(z) = K\left[\frac{A_1}{z-\rho_2(q)} + \frac{A_2}{\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q} - z}\right].$$

Οπόυ

$$K := \frac{\eta^2\mu\,[1 - x_2(q)]}{\lambda q(\xi+\eta)\,[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]}$$

Είναι

$$A_1 \cdot \frac{\lambda q+\eta}{\lambda q} - A_1 \cdot z + A_2 \cdot z - A_2 \cdot \rho_2(q) = z - \rho(q)$$

Άρα

$$z-\rho(q)=(A_2-A_1)z+(A_1\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-A_2\rho_2(q)).$$

Οπότε

$$\begin{cases} A_2-A_1=1\\ A_1\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-A_2\rho_2(q)=-\rho(q). \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα έχουμε:

$$A_1=\frac{\rho_2(q)-\rho(q)}{\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-\rho_2(q)}\Rightarrow A_1=\frac{\frac{1}{x_2(q)}-\frac{\lambda q+\eta}{\mu x_2(q)}}{\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-\frac{1}{x_2(q)}}\Rightarrow A_1=\frac{(\mu-\lambda q-\eta)\lambda q}{[x_2(q)(\lambda q+\eta)-\lambda q]\mu},$$
$$A_2=1+A_1=\frac{(\lambda q+\mu)[\mu x_2(q)-\lambda q]}{\mu[(\lambda q+\eta)x_2(q)-\lambda q]}.$$

Οπότε τελικά:

$$\Pi_1(z)=\frac{\eta^2\mu\big[1-x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta\big]}\left(\frac{A_1(q)}{z-\rho_2(q)}+\frac{A_2(q)}{\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-z}\right)$$

Αναπτύσσω σε σειρά το $\frac{A_1(q)}{z-\rho_2(q)}$:

$$\frac{A_1(q)}{z-\rho_2(q)}=\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)}\cdot\frac{1}{\frac{z}{\rho_2(q)}-1}=-\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\rho_2(q)}\right)^n,\qquad |z|\leq 1,\ \rho_2(q)>1.$$

Αναπτύσσω σε σειρά το $\frac{A_2(q)}{\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-z}$

$$\frac{A_2(q)}{\frac{\lambda q+\eta}{\lambda q}-z}=\frac{A_2(q)\lambda q}{\lambda q+\eta}\frac{1}{1-\frac{\lambda qz}{\lambda q+\eta}}=\frac{\lambda q\,A_2(q)}{\lambda q+\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda q\,z}{\lambda q+\eta}\right)^n.$$

Οπότε τελικά έχουμε:

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]} \left(\frac{A_1(q)}{z - \rho_2(q)} + \frac{A_2(q)}{\frac{\lambda q + \eta}{\lambda q} - z} \right)$$

$$= \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]} \left[-\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\rho_2(q)} \right)^n + \frac{\lambda q\, A_2(q)}{\lambda q + \eta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda q\, z}{\lambda q + \eta} \right)^n \right]. \tag{23}$$

όπου

$$A_1(q) = \frac{(\mu - \lambda q - \eta)\lambda q}{\mu\big[(\lambda q + \eta)x_2(q) - \lambda q\big]}, \tag{24}$$

$$A_2(q) = \frac{(\lambda q + \eta)\big[\mu x_2(q) - \lambda q\big]}{\mu\big[(\lambda q + \eta)x_2(q) - \lambda q\big]}. \tag{25}$$

Είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\rho_2(q)} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_2(q))^n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda q\, z}{\lambda q + \eta} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta} \right)^n z^n,$$

οπότε η (23) γράφεται:

$$\Pi_1(z) = \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)}\ (x_2(q))^n + \frac{\lambda q\, A_2(q)}{\lambda q + \eta} \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta} \right)^n \right) z^n \right]$$

Επειδή $\Pi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n,1)$ εξισώνοντας έχουμε τη αχέση (2):

$$p(n,1) = c_1(q)(x_2(q))^n + c_2(q) \left(\frac{\lambda q}{\lambda q + \eta} \right)^n,$$

με

$$c_1(q) = -\frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]}\frac{A_1(q)}{\rho_2(q)}, \tag{26}$$

και

$$c_2(q) = \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]} \cdot \frac{\lambda q\, A_2(q)}{\lambda q + \eta}. \tag{27}$$

Αντικαθιστώντας τις (24) στις (26) έχουμε:

$$\begin{aligned} c_1(q) =& - \frac{\eta^2\mu\big[1 - x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]} \cdot \frac{\frac{(\mu-\lambda q-\eta)\lambda q}{\mu\big[(\lambda q+\eta)x_2(q)-\lambda q\big]}}{\rho_2(q)} \\ \Rightarrow c_1(q) =& \frac{\eta^2[1-x_2(q)](-\mu+\lambda q+\eta)x_2(q)}{(\xi+\eta)[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta][(\lambda q+\eta)x_2(q) - \lambda q]}. \end{aligned}$$

Το γινόμενο

$$[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta][(\lambda q+\eta)x_2(q) - \lambda q],$$

λόγω της (19) γίνεται:

$$\begin{aligned} &(\lambda q - \mu x_2(q) + \eta)\big((\lambda q+\eta)x_2(q) - \lambda q\big) \\ =&(\lambda q+\eta)^2 x_2(q) - (\lambda q+\eta)\lambda q - \mu(\lambda q+\eta)x_2(q)^2 + \mu\lambda q\, x_2(q) \\ \overset{(4.19)}{=}&(\lambda q+\eta)^2 x_2(q) - (\lambda q+\eta)(\lambda q+\mu+\xi)x_2(q) + \mu\lambda q\, x_2(q) \\ =&x_2(q)\Big[(\lambda q+\eta)^2 - (\lambda q+\eta)(\lambda q+\mu+\xi) + \mu\lambda q\Big] \\ =&x_2(q)\Big[(\lambda q+\eta)(\eta-\mu-\xi) + \mu\lambda q\Big] \\ =&-x_2(q)\Big[(\lambda q+\eta)(\xi-\eta) + \eta\mu\Big]. \end{aligned}$$

Άρα:

$$c_1(q) = \frac{\eta^2[1-x_2(q)](-\mu+\lambda q+\eta)x_2(q)}{(\xi+\eta)[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta][(\lambda q+\eta)x_2(q) - \lambda q]} = \frac{\eta^2[1-x_2(q)](\mu-\lambda q-\eta)}{(\xi+\eta)\Big[(\lambda q+\eta)(\xi-\eta)+\eta\mu\Big]} \tag{4}$$

Για το $c_2(q)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
c_2(q) =&\frac{\eta^2\mu\big[1-x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta\big]}\cdot\frac{\lambda q\, A_2(q)}{\lambda q+\eta}\\
=&\frac{\eta^2\mu\big[1-x_2(q)\big]}{\lambda q(\xi+\eta)\big[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta\big]}\cdot\frac{\lambda q\,\frac{(\lambda q+\eta)[\mu x_2(q)-\lambda q]}{\mu[(\lambda q+\eta)x_2(q)-\lambda q)]}}{\lambda q+\eta}\\
=&\frac{\eta^2[1-x_2(q)][\mu x_2(q)-\lambda q]}{(\xi+\eta)[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta][(\lambda q+\eta)x_2(q)-\lambda q]}\\
=&\frac{\eta^2(-\xi x_2(q))}{(\xi+\eta)(-x_2(q))[(\lambda q+\eta)(\xi-\eta)+\eta\mu]}\\
=&\frac{\eta^2\xi}{(\xi+\eta)[(\lambda q+\eta)(\xi-\eta)+\eta\mu]}.
\end{aligned}\tag{5}$$

□

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα, υπολογίζοντας αρχικά το καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα, ενώ οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα q. Για την απόδειξη της παρακάτω πρότασης θα γίνει χρήση της ιδιότητας $PASTA$:

Ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages) Σε συστήματα εξυπηρέτησης στα οποία οι αφίξεις των πελατών ακολουθούν μια διαδικασία Poisson (δηλαδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ αφίξεων είναι ανεξάρτητοι και ισόνομοι με εκθετική κατανομή), η κατανομή της κατάστασης του συστήματος τη στιγμή μιας άφιξης συμπίπτει με την αντίστοιχη στάσιμη κατανομή στον χρόνο.

Πρόταση 3.3. *Θεωρούμε τη μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με καταστροφές. Το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα, όταν οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q, δίνεται από*

$$S^{(\mathrm{un})}(q)=\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu\big[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta x_2(q)\big]}{(\xi+\eta)\lambda q\big[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta\big]}+R_f-\frac{C}{\xi}-\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.\tag{28}$$

Απόδειξη. Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης που αποφασίζει να εισέλθει όταν οι υπόλοιποι πελάτες εισέρχονται στο σύστημα με πιθανότητα q. Εαν ένας τέτοιος πελάτης βρεί το σύστημα στην κατάσταση $(n, 0)$ τότε το καθαρό του όφελος δίνεται από τη σχέση (3.1)

$$S^{(\text{obs})}(n,0) = R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] - \frac{C}{\eta}, \quad n \geq 0,$$

που είδαμε στην ενότητα για την παρατηρήσιμη περίπτωση. Αντίστοιχα αν βρεί το σύστημα στην κατάσταση $(n, 1)$, το καθαρό του όφελος δίνεται από τη σχέση (3.2) της ίδιας ενότητας:

$$S^{(\text{obs})}(n,1) = R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right], \quad n \geq 0.$$

Συνεπώς, το αναμενόμενο καθαρό όφελος ενός πελάτη που αποφασίζει να εισέλθει στο σύστημα, όταν οι υπόλοιποι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική q, μπορεί να υπολογιστεί ως άθροισμα του καθαρού οφέλους επί την αντίστοιχη πιθανότητα $p(n, i)$ για την κάθε κατάσταση (n, i). Λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages), ισχύει ότι η πιθανότητα ένας πελάτης κατά την άφιξή του να βρει το σύστημα στην κατάσταση (n, i) του συμπίπτει με την αντίστοιχη στάσιμη πιθανότητα $p^{(\text{un})}(n, i; q)$.

$$\begin{aligned}
S^{(\text{un})}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right] - \frac{C}{\eta}\right\}p^{(\text{un})}(n,0;q) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{R_s\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right]\right\}p^{(\text{un})}(n,1;q) \\
&= \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}p^{(\text{un})}(n,0;q)\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}p^{(\text{un})}(n,1;q)\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^{n+1}\right\} \\
&\quad + \left(R_f - \frac{C}{\eta} - \frac{C}{\xi}\right)\sum_{n=0}^{\infty}p^{(\text{un})}(n,0;q) + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\sum_{n=0}^{\infty}p^{(\text{un})}(n,1;q).
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι

$$\Pi_0(z) = \Pi_0^{(un)}(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n,0;q),$$

, και

$$\Pi_1(z) = \Pi_1^{(un)}(z,q) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(n,1;q).$$

Για $z = \frac{\mu}{\mu+\xi}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} S^{(\mathrm{un})}(q) &= \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\mu}{\mu+\xi}\left[\Pi_0^{(\mathrm{un})}\left(\frac{\mu}{\mu+\xi},q\right) + \Pi_1^{(\mathrm{un})}\left(\frac{\mu}{\mu+\xi},q\right)\right] \\ &\quad + \left(R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C}{\eta}\right)\frac{\xi}{\eta+\xi} + \left(R_f - \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta}{\eta+\xi} \\ &= \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\mu}{\mu+\xi}\left[\Pi_0^{(\mathrm{un})}\left(\frac{\mu}{\mu+\xi},q\right) + \Pi_1^{(\mathrm{un})}\left(\frac{\mu}{\mu+\xi},q\right)\right] \\ &\quad + R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Θέτω $z = \frac{\mu}{\mu+\xi}$ στην (17):

$$\left[\lambda q\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^2 - (\lambda q+\mu+\xi)\frac{\mu}{\mu+\xi} + \mu\right]\Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right) = \mu\frac{\xi}{\mu+\xi}p(0,1) - \eta\frac{\mu}{\mu+\xi}\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)$$

$$\mu\left[\frac{\lambda q\mu}{(\mu+\xi)^2} - \frac{\lambda q+\mu+\xi}{\mu+\xi} + 1\right]\Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right) = \mu\left[\frac{\xi}{\mu+\xi}p(0,1) - \frac{\eta}{\eta+\xi}\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)\right]$$

$$\left[\frac{\lambda q\mu}{(\mu+\xi)^2} - \frac{\lambda q+\mu+\xi}{\mu+\xi} + 1\right]\Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right) = \frac{\xi}{\mu+\xi}p(0,1) - \frac{\eta}{\eta+\xi}\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)$$

$$\frac{\lambda q\mu - (\lambda q+\mu+\xi)(\mu+\xi) + (\mu+\xi)^2}{(\mu+\xi)^2}\Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right) = \frac{\xi p(0,1) - \eta\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)}{\mu+\xi}.$$

Εκτελώντας τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις
(ταυτότητες, απλοποιήσεις κλπ) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\Pi_1\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)=\frac{\eta(\mu+\xi)}{\lambda q\xi}\Pi_0\left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)-\frac{(\mu+\xi)p(0,1)}{q\lambda}. \tag{30}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (29) και (30) και αντικαθιστώντας στη συνέχεια τις ποσότητες $\Pi_0^{(\mathrm{un})}\left(\frac{\mu}{\mu+\xi};q\right)$ και $p^{(\mathrm{un})}(0,1;q)$ από τις σχέσεις (8) και (21), αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned}
S^{(un)}(q) =&\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)\frac{\mu}{\mu+\xi}\left[\Pi_0+\frac{\eta(\mu+\xi)}{\lambda q\xi}\Pi_0-\frac{\mu+\xi}{\lambda q}p(0,1)\right]+R_f-\frac{C}{\xi}-\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}\\
\overset{(21)}{=}&\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)\frac{\mu}{\mu+\xi}\left[\Pi_0\left(1+\frac{\eta(\mu+\xi)}{\lambda q\xi}\right)-\frac{\mu+\xi}{\lambda q}\frac{\eta^2(1-x_2(q))}{\lambda q(\xi+\eta)(\lambda q+\eta-\mu x_2(q))}\right]\\
&+R_s-\frac{C}{\xi}-\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}\\
\overset{(8)}{=}&\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)\frac{\mu}{\mu+\xi}\left[\frac{\eta\xi}{(\xi+\eta)(\lambda q+\eta-\frac{\lambda q\mu}{\mu+\xi})}\left(1+\frac{\eta(\mu+\xi)}{\lambda q\xi}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\mu+\xi}{\lambda q}\frac{\eta^2(1-x_2(q))}{\lambda q(\xi+\eta)(\lambda q+\eta-\mu x_2(q))}\right]+R_f-\frac{C}{\xi}-\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.
\end{aligned}$$

Εκτελώντας τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις (ομώνυμα, απλοποιήσεις κλπ) έχουμε:

$$\begin{aligned}
S^{(un)}(q) =&\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta x_2(q)]}{(\xi+\eta)\lambda q[\lambda q-\mu x_2(q)+\eta]}\\
&+R_f-\frac{C}{\xi}-\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.
\end{aligned} \tag{28}$$

□

Συνεχίζουμε με την εύρεση της στρατηγικής ισορροπίας αποχώρησης ενός

πελάτη στην μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Πριν την απόδειξη του λήμματος 1 θα ασχοληθούμε με τη σχέση (28) την οποία αποδείξαμε λίγο πριν, στην πρόταση 4.2. Απομονώνουμε τον όρο που εξαρτάται από το q:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta x_2(q)}{\lambda q[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]} &= \frac{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta + \eta x_2(q) - \eta}{\lambda q[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]} \\ &= \frac{1}{\lambda q}\left(1 + \frac{\eta(x_2(q) - 1)}{[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta]}\right)(*)\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (*) συνεχίζουμε με το παρακάτω λήμμα:

ΛΗΜΜΑ 1. *Ορίζουμε*

$$\phi(q) = \frac{\eta\big(x_2(q) - 1\big)}{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta}, \qquad q \in [0,1], \tag{31}$$

$$g(q) = \frac{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta x_2(q)}{\lambda q\big[\lambda q - \mu x_2(q) + \eta\big]} = \frac{1 + \phi(q)}{\lambda q}, \qquad q \in (0,1], \tag{32}$$

$$g(0) = \lim_{q \to 0^+} g(q) = \frac{\xi + \eta}{\eta(\mu + \xi)}, \tag{33}$$

όπου η $x_2(q)$ ορίζεται από τη σχέση (3). Τότε, η συνάρτηση $\phi(q)$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη, ενώ η $g(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για $q \in (0,1)$.

Απόδειξη. Από την (20) έχουμε $\lambda q - \mu x_2(q) = \frac{\xi x_2(q)}{1 - x_2(q)}$. Επειδή $x_2(q) = \frac{1}{\rho_2(q)}$ και $\rho_2(q) > 1$ έχουμε ότι $x_2(q) \in (0,1)$. Επομένως $1 - x_2(q) > 0$ και άρα $\frac{\xi x_2(q)}{1 - x_2(q)} > 0$, οπότε $\lambda q - \mu x_2(q) > 0$..

Επιπλέον επειδή $x_2(q) \in (0,1)$ έχουμε ότι $x_2(q) - 1 < 0$ και επομένως για τη συνάρτηση ϕ, ισχύει ότι $\phi(q) < 0$ για $q \in (0,1)$.

Λόγω της (20) η $\phi(q)$ γίνεται:

$$\phi(q) = \frac{\eta\big(x_2(q) - 1\big)}{\lambda q - \mu x_2(q) + \eta} = \frac{\eta(x_2(q) - 1)}{\frac{\xi x_2(q)}{1 - x_2 2(q)} + \eta} = \frac{-\eta[x_2(q) - 1]^2}{x_2(q)(\xi - \eta) + \eta}, \tag{34}$$

το $x_2(q)$ δίνεται από τη σχέση (3). Παρατηρούμε ότι η ϕ γράφεται σαν σύνθεση μίας συνάρτησης f και του $x_2(q)$, οπότε:

$$\phi(q) = f(x_2(q)),$$

με

$$f(x) = \frac{-\eta(x-1)^2}{(\xi-\eta)x+\eta}. \tag{35}$$

Οπότε εφόσον ϕ είναι πραγωγίσιμη συνάρτηση έχουμε:

$$\phi'(q) = f'(x_2(q)) \cdot x_2'(q), \tag{36}$$

$$\phi''(q) = f''(x_2(q))(x_2'(q))^2 + f'(x_2(q))x''(x_2(q)). \tag{37}$$

Για να υπολογιστούν οι (36) και (37) πρέπει να παραγωγίσουμε το $x_2(q)$, που δίνεται από τη σχέση (3), και την f που δίνεται από τη σχέση (35).

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{-\eta(x-1)[\eta(1-x)+\xi(x+1)]}{[\eta(1-x)+\xi x]^2} > 0,$$

αφού $x \in (0,1)$. Όμοια, υπολογίζοντας τη 2η παράγωγο της f έχουμε:

$$f''(x) = \frac{-2\eta\xi^2}{[\eta(1-x)+\xi x]^3} < 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη για κάθε $x \in (0,1)$. Παραγωγίζοντας την (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} x_2'(q) =& \frac{\lambda}{2\mu} - \frac{1}{4\mu\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2 - 4\lambda q\mu}} \cdot [2(\lambda q+\mu+\xi)\lambda - 4\lambda\mu] \\ =& \frac{\lambda}{2\mu}\left[1 - \frac{\lambda q+\xi-\mu}{\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2 - 4\lambda q\mu}}\right]. \end{aligned}$$

Είναι

$$\frac{\lambda q+\xi-\mu}{\sqrt{(\lambda q+\mu+\xi)^2 - 4\lambda q\mu}} < 1$$

Επομένως
$$x_2'(q) > 0.$$
Βρίσκουμε την $x_2''(q)$:

$$\begin{aligned}
x_2''(q) &= \left[\frac{\lambda}{2\mu}\left[1 - \frac{\lambda q + \xi - \mu}{\sqrt{(\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q\mu}}\right]\right]' \\
&= -\frac{2\lambda^2\xi}{\left((\lambda q + \mu + \xi)^2 - 4\lambda q\mu\right)^{\frac{3}{2}}} < 0.
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $x_2(q)$ είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

Παραγωγίζουμε την $g(q)$ και έχουμε:

$$g'(q) = \frac{\phi'(q)\lambda q - (1 + \phi(q))\lambda}{(\lambda q)^2} = \frac{\phi'(q)q - \phi(q) - 1}{\lambda q^2}.$$

Θέτω τον αριθμητή της $g'(q)$:

$$w(q) = \phi'(q)q - \phi(q) - 1,$$

με
$$w'(q) = \phi''(q)q < 0.$$
Επομένως η $w(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $q \in (0.1)$. Η (3) για $x = 0$ δίνει: $x_2(0) = 0$ και $\phi(0) = -1$. Οπότε:

$$w(0) = -\phi(0) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Άρα εφόσον η $w(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $q \in (0, 1)$ έχουμε ότι για κάθε $q > 0$ ισχύει:
$$w(q) < w(0) \iff w(q) < 0.$$

Επομένως για την $g'(q)$ έχουμε:

$$g'(q) = \frac{w(q)}{\lambda q^2} < 0,$$

δηλάδη η $g(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $q \in (0, 1)$.

Επιπλέον έχουμε ότι το $g(0)$ θα το προσεγγίζουμε από το

$$\lim_{q\to 0^+} g(q)$$

. Οπότε από την (32) έχουμε:

$$\lim_{q\to 0^+} g(q) = \lim_{q\to 0^+} \frac{1+\phi(q)}{\lambda q}.$$

Με εφαρμογή Del Hospital και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (35) και (36) έχουμε:

$$\lim_{q\to 0^+} g(q) = \lim_{q\to 0^+} \frac{\phi'(q)}{\lambda} = \frac{\xi+\eta}{\eta(\mu+\xi)}.$$

Οπότε

$$g(0) = \lim_{q\to 0^+} g(q) = \frac{\xi+\eta}{\eta(\mu+\xi)}. \tag{33}$$

□

Ακολουθεί ο χαρακτηρισμός των στρατηγικών ισορροπίας.

Πρόταση 3.4. *Θεωρούμε τη μη παρατηρήσιμη ουρά $M/M/1$ με καταστροφές. Ορίζουμε*

$$\theta = \frac{(\xi+\eta)\left(\dfrac{C}{\xi} + \dfrac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \dfrac{C}{\xi}\right)}, \tag{38}$$

$$b_e = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\xi+\eta)}, \tag{39}$$

$$j_e = \frac{C}{\xi} - \frac{\eta\mu g(1)\, R_s}{\xi+\eta-\eta\mu g(1)} + \frac{C\xi}{\eta\left[\xi+\eta-\eta\mu g(1)\right]}. \tag{40}$$

Έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή της διαφοράς $R_f - R_s$ των δύο ανταμοιβών.

Περίπτωση A:
$R_f - R_s < \dfrac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση α:
Η αποχώρηση απο το σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \leq b_e$.

Υποπερίπτωση β:
Η είσοδος στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \geq j_e$.

Υποπερίπτωση γ:
Υπάρχει γνήσια μικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα q *αν και μόνο αν* $b_e < R_f < j_e$. *Υπό αυτή τη συνθήκη, υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου* $q_e \in (0,1)$, *όπου* q_e *είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$g(q) = \theta, \qquad q \in (0,1).$$

Περίπτωση Β:
$R_f - R_s > \dfrac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση α:
Η αποχώρηση από το σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \leq b_e$.

Υποπερίπτωση β:
Η είσοδος στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \geq j_e$.

Υποπερίπτωση γ:
Υπάρχει γνήσια μικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα q *αν και μόνο αν* $j_e < R_f < b_e$. *Υπό αυτή τη συνθήκη, υπάρχει μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου* $q_e \in (0,1)$, *όπου* q_e *είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$g(q) = \theta, \qquad q \in (0,1).$$

Περίπτωση Γ:
$R_f - R_s = \dfrac{C}{\xi}$.

Υποπερίπτωση α:
Η αποχώρηση από το σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_s \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)},$$

ή ισοδύναμα,

$$R_f \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}.$$

Υποπερίπτωση β:
Η είσοδος στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$R_s \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)},$$

ή ισοδύναμα,

$$R_f \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}.$$

Υποπερίπτωση γ:
Υπάρχει γνήσια μικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα $q \in (0,1)$ αν και μόνο αν

$$R_s = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)},$$

ή ισοδύναμα,

$$R_f = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} + \frac{C}{\xi}.$$

Υπό αυτή τη συνθήκη, κάθε μικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα q είναι στρατηγική ισορροπίας.

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν επιλεγμένο πελάτη κατά την άφιξή του στο σύστημα και έστω ότι όλοι οι άλλοι πελάτες ακολουθούν στρατηγική εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα $q \in [0,1]$. Τότε, οι επιλεγμένος πελάτης προτιμά να εισέλθει στο σύστημα αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) > 0$, προτιμά να αποχωρήσει αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) < 0$, ενώ είναι αδιάφορος και το αν εισέλθει ή αποχωρήσει αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) = 0$. Για αυτό το λόγο η καθαρή στρατηγική αποχώρησης αποτελεί στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(0) \leq 0$. Όμοια η καθαρή στρατηγική εισόδου αποτελεί στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(1) \geq 0$, και η μεικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα $q \in (0,1)$, είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) = 0$.

Από το Λήμμα 1 η σχέση (28) γίνεται:

$$S^{(un}(q) = \left(Rs - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu}{\xi+\eta}g(q) + R_f - \frac{C}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

Παραγοντοποιώντας έχουμε:

$$\begin{aligned}
S^{(un)}(q) =& \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu}{\xi+\eta}\left[g(q) - \frac{-\frac{(\xi+\eta)}{\eta\mu}R_f + \frac{C(\xi+\eta)}{\eta\mu\xi} + \frac{C\xi}{\eta^2\mu}}{R_s - R_f + \frac{C}{\xi}}\right] \\
=& \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu}{\xi+\eta}\left[g(q) - \frac{-(\xi+\eta)R_f + \frac{C(\xi+\eta)}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta}}{\eta\mu\left(R_s - Rf + \frac{C}{\xi}\right)}\right] \\
=& \left(Rs - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu}{\xi+\eta}\left[g(q) - \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}\right].
\end{aligned}$$

Θέτω

$$\theta = \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}, \tag{38}$$

άρα

$$S^{(un)}(q) = \left(Rs - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu}{\xi+\eta}\left(g(q) - \theta\right).$$

Περίπτωση Α: $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} > 0$.

Για το b_e έχουμε: $S^{(un)}(0) = 0$, και λόγω της (33):

$$g(0) = \theta \Rightarrow \frac{\xi+\eta}{\eta(\mu+\xi)} = \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}.$$

Με τις κατάλληλες αλγεβρικές πράξεις έχουμε:

$$R_f = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\eta+\xi)}.$$

Οπότε $b_e = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\eta+\xi)}$ (39).

Η αποχώρηση είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(0) \leq 0$. Λύνοντας την ανίσωση ως προς R_f έχουμε την υποπερίπτωση α:

$$R_f \leq \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\eta+\xi)} \Rightarrow R_f \leq b_e.$$

Όμοια για το j_e πρέπει $S^{(un)}(1) = 0$. Αντικαθιστώντας $q = 1$ στην (41) έχουμε:

$$S^{(un)}(1) = 0 \Rightarrow g(1) = \theta \Rightarrow g(1) = \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}$$

$$\Rightarrow g(1)\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) = (\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right).$$

Λύνοντας την παραπάνω ως προς R_f έχουμε ότι

$$j_e = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta-g(1)\eta\mu} - \frac{g(1)\eta\mu R_s}{\xi+\eta-g(1)\eta\mu}. \tag{40}$$

Η είσοδος στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν

$$S^{(un)}(1) \geq 0 \Rightarrow g(1) \geq \theta \Rightarrow g(1) \geq \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}$$

$$\Rightarrow g(1)\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) \geq (\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)$$

$$\Rightarrow R_f(\xi+\eta-g(1)\eta\mu) \geq \frac{C(\xi+\eta)}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta} - g(1)\eta\mu\left(Rs + \frac{C}{\xi}\right).$$

Από το Λήμμα 1 η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα άρα $g(1) < g(0)$ και αξιοποιώντας την (33) έχουμε:

Άρα

$$\eta\mu g(1) < \eta\mu g(0) \Rightarrow \frac{g(1)\eta\mu}{\xi+\eta} < \frac{g(0)\eta\mu}{\xi+\eta} \Rightarrow \frac{g(1)\eta\mu}{\xi+\eta} < \frac{\mu}{\mu+\xi} < 1.$$

Οπότε

$$\xi+\eta > g(1)\eta\mu \Rightarrow \xi+\eta-g(1)\eta\mu > 0,$$

και τελικά η παραπάνω ανίσωση γίνεται ως προς R_f:

$$R_f \geq \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta-g(1)\eta\mu} - \frac{g(1)\eta\mu R_s}{\xi+\eta-g(1)\eta\mu} \Rightarrow R_f \geq j_e.$$

Με λίγα λόγια η είσοδος στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν ισχύει $R_f \geq j_e$. (υποπερίπτωση β)

Τελός έχω την γνήσια μικτή στρατηγική εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα q , με $q \in (0,1)$ αν και μόνο αν $g(q) = \theta$.

Η συνάρτηση $g(q)-\theta$ είναι γνησίως φθίνουσα επομένως ισχύει ότι για να έχει λύση η εξίσωση $g(q) = \theta$ έχει λύση στο $(0,1)$ αν και μόνο $\theta \in (g(1), g(0))$. Λύνω την παραπάνω διπλή ανίσωση ως προς R_f.

$$\begin{aligned}
g(1) < \theta \Rightarrow g(1) < &\frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi}+\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}-R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)} \\
\Rightarrow g(1)\eta\mu\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right) &< (\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi}+\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}-R_f\right) \\
\Rightarrow R_f(\xi+\eta-g(1)\eta\mu) &< \frac{C(\xi+\eta)}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta} - g(1)\eta\mu\left(Rs+\frac{C}{\xi}\right)
\end{aligned}$$

Είδαμε παραπάνω ότι $(\xi+\eta-g(1)\eta\mu) > 0$ άρα μετά απο πράξεις έχουμε:

$$R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta-g(1)\eta\mu} - \frac{g(1)\eta\mu R_s}{\xi+\eta-g(1)\eta\mu} \Rightarrow R_f < j_e.$$

Όμοια για την ανίσωση $\theta < g(0)$ έχουμε:

$$\theta < g(0) \Rightarrow g(0) > \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}.$$

Με πράξεις καταλήγουμε στο:

$$R_f > \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\eta+\xi)} \Rightarrow R_f > b_e.$$

Οπότε συνολικά, μία γνήσια μικτή στρατηγική είναι στρατηγική ισορροπίας εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα $q \in (0,1)$ υπάρχει αν και μόνο αν $b_e < R_f < j_e$. Με αυτή την συνθήκη, υπάρχει μοναδική γνήσια στρατηγική εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα $q_e \in (0,1)$, με το q_e να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0,1)$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β: $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} < 0$.

Η αποχώρηση από το σύστημα αποτελεί στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(0) \leq 0$. Για να ισχύει και επειδή $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} < 0$ έχουμε ότι πρέπει $g(0) \geq \theta$. Λύνοντας ως προς R_f έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\xi+\eta}{\eta(\mu+\xi)} \geq \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi}+\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}-R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right)} \\
\Rightarrow &\mu\left(R_s-R_f+\frac{C}{\xi}\right) \leq (\mu+\xi)\left(\frac{C}{\xi}+\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}-R_f\right) \\
\Rightarrow &\mu\left(R_s+\frac{C}{\xi}\right)-\mu R_f \leq (\mu+\xi)\left(\frac{C}{\xi}+\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}\right)-\mu R_f-\xi R_f \\
\Rightarrow &\mu R_s+\frac{\mu C}{\xi}-\mu R_f \leq \frac{\mu C}{\xi}+\frac{C\xi\mu}{\eta(\xi+\eta)}+C+\frac{C\xi^2}{\eta(\xi+\eta)}-\mu R_f-\xi R_f \\
\Rightarrow &R_f \leq \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\xi+\eta)}+\frac{C}{\xi}-\frac{\mu R_s}{\xi} \\
\Rightarrow &R_f \leq b_e.
\end{aligned}
$$

Οπότε έχουμε την υποπερίπτωση Α.

Συνεχίζοντας για την υποπερίπτωση Β, θα αποδείξουμε ότι η είσοδος στο σύστημα αποτελεί στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $R_f \geq j_e$. Ξεκινάμε από την ανισότητα που είδαμε και στην περίπτωση Α: $S^{(un)}(1) \geq 0$. Οπότε εφόσον $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} < 0$ θα πρέπει $g(1) \leq \theta$. Άρα:

$$g(1) \leq \theta \Rightarrow g(1) \leq \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}$$

$$\Rightarrow g(1)\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) \geq (\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)$$

$$\Rightarrow R_f(\xi+\eta-g(1)\eta\mu) \geq \frac{C(\xi+\eta)}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta} - g(1)\eta\mu\left(Rs + \frac{C}{\xi}\right)$$

$$\Rightarrow R_f \geq j_e.$$

Τέλος για την υποπερίπτωση γ της γνήσιας μικτής στρατηγικής, έχουμε ότι η είσοδος στο σύστημα με πιθανότητα $q \in (0,1)$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $g(q) = \theta$. Δηλαδή αν $g(1) < \theta < g(0)$.

$$g(1) < \theta \Rightarrow g(1) < \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}$$

$$\Rightarrow g(1)\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) > (\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)$$

$$\Rightarrow R_f(\xi+\eta-g(1)\eta\mu) > \frac{C(\xi+\eta)}{\xi} - \frac{C\xi}{\eta} - g(1)\eta\mu\left(Rs + \frac{C}{\xi}\right) \Rightarrow \quad R_f > j_e.$$

Επιπλέον $\theta < g(0)$:

$$\theta < g(0) \Rightarrow g(0) > \frac{(\xi+\eta)\left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)}{\eta\mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)}$$

$$\Rightarrow \mu\left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right) < \left(\frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_f\right)(\mu+\xi) \Rightarrow R_f < b_e.$$

Επομένως αν και μόνο αν $j_e < R_f < b_e$, υπάρχει μοναδική γνήσια μικτή στρατηγική ισορροπίας εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα $q_e \in (0,1)$. Τέλος για την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Γ όπου $R_f = \frac{C}{\xi} + R_s$ αντικαθιστώντας στην (28) έχουμε:

$$S^{(un)}(q) = R_s - \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}.$$

Η αποχώρηση από το σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(0) \leq 0$, δηλαδη αν

$$R_s \leq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} \iff R_f \leq \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)}.$$

Η είσοδος στο σύστημα είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $S^{(un)}(1) \geq 0$:

$$R_s \geq \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} \iff R_f \geq \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)}.$$

Τέλος, μία γνήσια μικτή στρατηγική ισορροπίας εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα q υπάρχει αν και μόνο αν $S^{(un)}(q) = 0$, δηλαδή:

$$R_s = \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)} \iff R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)}.$$

□

Υπολογίζοντας την παράγωγο του S έχουμε ότι:

$$(S^{(un)})'(q) = \left(R_s - R_f + \frac{C}{\xi}\right)\frac{\eta\mu}{\xi+\eta}g'(q),$$

οπότε από τις περιπτώσεις Α,Β και Γ της παραπάνω πρότασης για το πρόσημο του $R_s - R_f + \frac{C}{\xi}$ καθώς και τη μονοτονία της g που είδαμε στο Λήμμα 1 (g γνησίως φθίνουσα για κάθε $q \in (0,1)$), έχουμε την παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση 3.4. *Η απόδειξη της Πρότασης 3.4 δείχνει ότι η συνάρτηση $S^{(un)}(q)$ είναι φθίνουσα ως προς q στην Περίπτωση Α, είναι αύξουσα στην Περίπτωση Β και είναι σταθερή στην Περίπτωση Γ. Συνεπώς, στην Περίπτωση Α οι πελάτες υιοθετούν συμπεριφορά τύπου* ATC *(ένας πελάτης δεν έχει συμφέρον να εισέλθει ενώ οι άλλοι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q), ενώ στην Περίπτωση Β υιοθετούν συμπεριφορά τύπου* FTC*, (ένας πελάτης έχει συμφέρον να εισέλθει όταν οι άλλοι πελάτες εισέρχονται με πιθανότητα q). Η Περίπτωση Γ είναι μια οριακή περίπτωση, όπου η στρατηγική των πελατών δεν επηρεάζει το καθαρό όφελος ενός* επιλεγμένου *πελάτη. Μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε όλες τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών, σύμφωνα με τις διάφορες περιπτώσεις των παραμέτρων ανταμοιβής του μοντέλου.*

Θεώρημα 3.3. *Θεωρούμε τη μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά με καταστροφές. Ως προς τις στρατηγικές ισορροπίας των πελατών, ισχύουν οι ακόλουθες περιπτώσεις, ανάλογα με την τιμή του R_s.*

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ I: $R_s < \dfrac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση α: $R_f \leq j_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική αποχώρησης.

Υποπερίπτωση β: $j_e < R_f < b_e$. Τότε υπάρχουν τρεις στρατηγικές ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική αποχώρησης , η καθαρή στρατηγική εισόδου , και μία μοναδική μικτή στρατηγική ισορροπίας εισόδου με πιθανότητα $q_e \in (0,1)$. Η πιθανότητα q_e είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0,1)$.

Υποπερίπτωση γ: $R_f \geq b_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική εισόδου .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ II: $R_s > \dfrac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Υποπερίπτωση α: $R_f \leq b_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική αποχώρησης.

Υποπερίπτωση β: $b_e < R_f < j_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η μικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα $q_e \in (0,1)$, όπου q_e είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0,1)$.
Υποπερίπτωση γ: $R_f \geq j_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική εισόδου .

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΙΙΙ: $R_s = \dfrac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.
Υποπερίπτωση α: $R_f < b_e = j_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική αποχώρησης.
Υποπερίπτωση β: $R_f = b_e = j_e$. Τότε κάθε στρατηγική εισόδου με πιθανότητα $q \in [0,1]$ αποτελεί στρατηγική ισορροπίας.
Υποπερίπτωση γ: $R_f > b_e = j_e$. Τότε υπάρχει μία μοναδική στρατηγική ιοσορροπίας: η καθαρή στρατηγική εισόδου .

Απόδειξη. Στην Πρόταση 3.4 είδαμε ότι ο αριθμός και η φύση των στρατηγικών ισορροπίας των πελατών εξαρτώνται από την τιμή του R_f συγκριτικά με τις ποσότητες b_e, j_e και $R_s + \frac{C}{\xi}$. Εδώ θα βρούμε τη διάταξη των παραπάνω ποσοτήτων.

Σχηματίζοντας τη διαφορά $b_e - \left(R_s + \frac{C}{\xi}\right)$ έχουμε:

$$b_e - \left(R_s + \frac{C}{\xi}\right) = \frac{C}{\xi} - \frac{\mu R_s}{\xi} + \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\xi+\eta)} - R_s - \frac{C}{\xi} = \frac{\mu+\xi}{\xi}\left[\frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} - R_s\right].$$

Όμοια:

$$j_e - \left(R_s + \frac{C}{\xi}\right) = \frac{C}{\xi} - \frac{\eta\mu g(1) R_s}{\xi+\eta-\eta\mu g(1)} + \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi-\eta\mu g(1))} - R_s - \frac{C}{\xi}.$$

Μετά από αλγεβρικές πράξεις (ομώνυμα, παραγοντοποιήσεις κλπ) καταλήγουμε:

$$j_e - \left(R_s + \frac{C}{\xi}\right) = \frac{\eta(\eta+\xi)\left[\frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)} - R_s\right]}{\eta(\eta+\xi-\eta\mu g(1))}.$$

Στην πρόταση είδαμε ότι $\xi+\eta-\eta\mu g(1) > 0$ οπότε το πρόσημο της διαφοράς $j_e - \left(R_s + \frac{C}{\xi}\right)$ εξαρτάται κι εδώ από το πρόσημο της διαφοράς $\frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)} - R_s$.

Οπότε είναι $b_e > R_s + \frac{C}{\xi}$ αν $\frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)} > R_s$ και $j_e > R_s + \frac{C}{\xi}$ αν $\frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)} > R_s$.
Στη συνέχεια θα διατάξουμε τα b_e, j_e και $R_s + \frac{C}{\xi}$. Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:
Σχηματίζουμε τη διαφορά: $j_e - b_e$:

$$j_e - b_e = \frac{C}{\xi} - \frac{\eta\mu g(1)R_s}{\xi+\eta-\eta\mu g(1)} + \frac{C\xi}{\eta[\xi+\eta-\eta\mu g(1)]} - \frac{C}{\xi} + \frac{\mu R_S}{\xi} - \frac{C(\mu+\xi)}{\eta(\xi+\eta)}.$$

Εκτελώντας τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις και παραγοντοποιήσεις έχουμε:

$$\frac{\eta+\xi-\eta g(1)(\mu+\xi)}{\xi+\eta-\eta\mu g(1)}\mu\left[\frac{R_s}{\xi} - \frac{C}{\eta(\eta+\xi)}\right] = \frac{\eta+\xi-\eta g(1)(\mu+\xi)}{\xi+\eta-\eta\mu g(1)}\frac{\mu}{\xi}\left[R_s - \frac{C\xi}{\eta(\eta+\xi)}\right].$$

Περίπτωση Ι: $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$

Στην περίπτωση Ι που μελετάμε είναι $R_s < \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ άρα $j_e < b_e$.
Επομένως η διάταξη είναι $R_s + \frac{C}{\xi} < j_e < b_e$. Ξεχωρίζουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις σχετικά με την τιμή του R_f:

1. $R_f < R_s + \frac{C}{\xi}$.
2. $R_f = R_s + \frac{C}{\xi}$.
3. $R_s + \frac{C}{\xi} < R_f \leq j_e$.
4. $j_e < R_f < b_e$
5. $R_f \geq b_e$.

Αν $R_f < R_s + \frac{C}{\xi}$ έχουμε την υποπερίπτωση Αα της πρότασης 3.4, αν $R_f = R_s + \frac{C}{\xi}$, έχουμε την υποπερίπτωση Γα της ίδιας πρότασης, ενώ αν $R_s + \frac{C}{\xi} < R_f \leq j_e$. έχουμε την περίπτωση Βα επίσης της πρότασης 3.4. Οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις μας δίνουν την υποπερίπτωση α της πρώτης περίπτωσης: αν $R_f \leq j_e$ υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας: η καθαρή στρατηγική αποχώρησης. Αν $j_e < R_f < b_e$ έχουμε την υποπερίπτωση Βγ της πρότασης 3.4-που αναφέρει ότι στην περίπτωση αυτή υπάρχει μοναδική γνήσια μικτή στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα εισόδου q_e, όπου q_e είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(q) = \theta$,

$q \in (0,1)$ -καθώς επίσης και τις υποπεριπτώσεις Ββ και Βα που αφορούν καθαρές στρατηγικές ισορροπίας εισόδου και αποχώρησης αντίστοιχα. Τέλος, αν $R_f \geq b_e$ έχουμε την περίπτωση Ββ της πρότασης 3.4, δηλαδή ότι η είσοδος στο σύστημα είναι μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Παραπάνω περιγράψαμε πώς προέκυψαν οι υποπεριπτώσεις της περίπτωσης Ι του θεωρήματος.

Περίπτωση ΙΙ: $R_s > \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$: Στην περίπτωση αυτή η διάταξη είναι αντίθετη με την περίπτωση Α:

$$j_e - b_e = \frac{\eta + \xi - \eta g(1)(\mu + \xi)}{\xi + \eta - \eta\mu g(1)} \frac{\mu}{\xi} \left[R_s - \frac{C\xi}{\eta(\eta + \xi)} \right] > 0.$$

Άρα $b_e < j_e < R_s + \frac{C}{\xi}$:

Αν $R_f \leq b_e < R_s + \frac{C}{\xi}$ έχουμε την περίπτωση Α(α) της πρότασης 3.4. Με λίγα λόγια υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας, η αποχώρηση από το σύστημα.

Αν $b_e < R_f < j_e < R_s + \frac{C}{\xi}$ έχουμε την περίπτωση Α(γ) της πρότασης 3.4, όπου υπάρχει μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Είναι η μικτή στρατηγική εισόδου στο σύστημα με πιθανότητα $q_e \in (0,1)$, με το q_e να είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο (0,1).

Αν $j_e \leq R_f < R_s + \frac{C}{\xi}$ τότε έχουμε την περίπτωση Α(β) της πρότασης 3.4. Αν $R_f = R_s + \frac{C}{\xi}$ έχουμε την περίπτωση Γ(γ) της πρότασης 3.4 ενώ αν $R_f > R_s + \frac{C}{\xi}$ έχουμε την περίπτωση Β(β) της πρότασης 3.4. Οι 3 αυτές περιπτώσεις υπαγορεύουν την καθαρή στρατηγική εισόδου στο σύστημα σαν την μοναδική στρατηγική ισορροπίας. Οπότε όλα τα παραπάνω μας οδηγούν στην περίπτωση ΙΙ του θεωρήματος.

Περίπτωση ΙΙΙ: $R_s = \frac{C\xi}{(\xi+\eta)\eta}$. Στην περίπτωση αυτή $j_e = b_e = R_s + \frac{C}{\xi}$. Όμως εφόσον $R_s = \frac{C\xi}{(\xi+\eta)\eta}$ έχουμε τελικά $j_e = b_e = R_s + \frac{C}{\xi} = \frac{C\xi}{(\xi+\eta)\eta} + \frac{C}{\xi}$.

1. $R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.
2. $R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.
3. $R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$.

Αν $R_f < \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$ δηλαδή αν $R_f < b_e = j_e$ τότε σύμφωνα με τις ισότητες που προέκυψαν για την περίπτωση ΙΙΙ που εξετάζουμε είναι $R_f < \frac{C}{\xi} + R_s$ και άρα $R_f < b_e$. Οπότε έχουμε την περίπτωση Α(α) της πρότασης 3.4, όπου η μοναδική στρατηγική ισορροπίας που υπάρχει είναι η στρατηγική αποχώρησης.

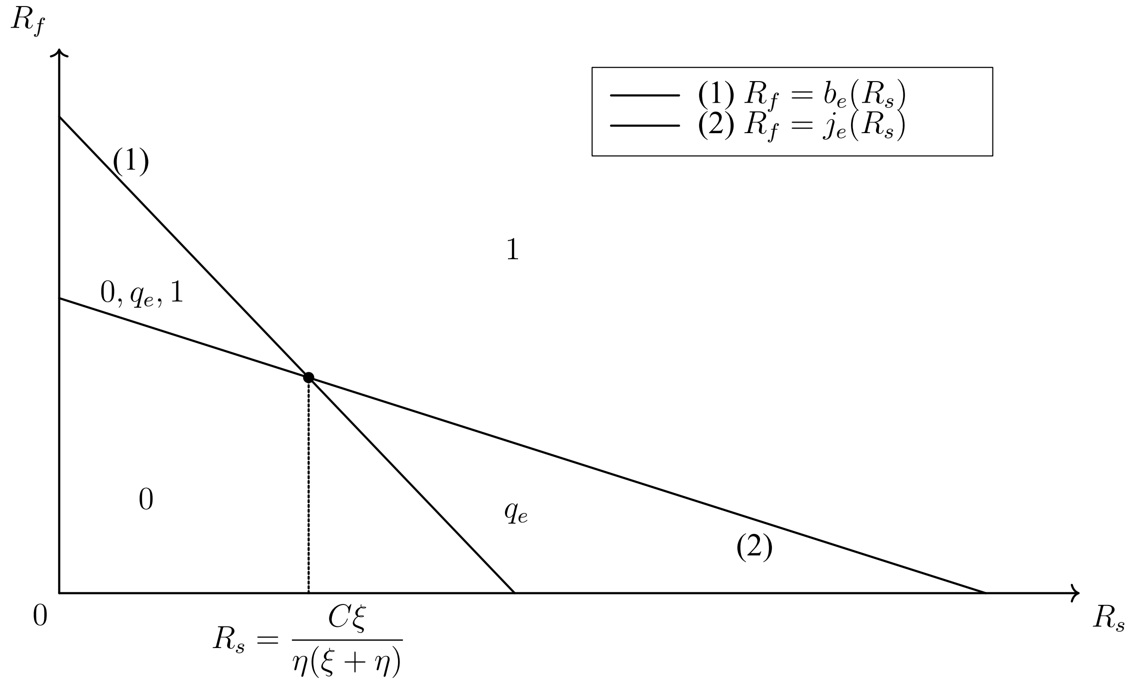
Αν $R_f = \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)} = b_e = j_e$, δηλαδή αν $Rs = \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$, τότε έχουμε την περίπτωση Γ(γ) της πρότασης 3.4. Με λίγα λόγια κάθε μικτή στρατηγική εισόδου με πιθανότητα q με $q \in [0, 1]$ είναι στρατηγική ισορροπίας.

Αν $R_f > \frac{C}{\xi} + \frac{C\xi}{\eta(\xi+\eta)}$, δηλαδή αν $R_f > b_e = j_e$, τότε έχουμε την περίπτωση Β(β) της πρότασης 3.4, σύφμωνα με την οποία η μοναδική στρατηγική ισορροπίας που υπάρχει είναι η καθαρή στρατηγική εισόδου στο σύστημα.

Τα παραπάνω μας δίνουν τελικά μας δίνουν τις περιπτώσεις III(α), III(β) και III(γ) του θεωρήματος.

□

Παρατήρηση 3.5. *Η πρόταση 3.4 δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι η αποχώρηση, η είσοδος και η μικτή στρατηγική q, στρατηγικές ισορροπίας. Επιπλέον δείχνει ότι αν υπάρχει μικτή στρατηγική ισορροπίας τότε αυτή είναι μοναδική, αλλά αυτό δεν αποκλείει την περίπτωση οι καθαρές στρατηγικές εισόδου ή/και αποχώρησης να είναι στρατηγικές ισορροπίας. Το Θεώρημα 3.3 δίνει τον αριθμό και το είδος των στρατηγικών ισορροπίας στις διάφορες περιπτώσεις που αντιστοιχούν στον διαχωρισμό του επιπέδου (R_s, R_f) σε διάφορες περιοχές. Με λίγα λόγια η πρόταση 3.4 μας λέει πότε μία στρατηγική αποτελεί στρατηγική ισορροπίας, και το θεώρημα 3.3 μας λέει πόσες και τι είδους ισορροπίες υπάρχουν. Ακολουθεί το Σχήμα 3.3 που απεικονίζει τις στρατηγικές ισορροπίας ως προς R_s, R_f για την μη παρατηρήσιμη περίπτωση.*



Σχήμα 3.3: Στρατηγικές ισορροπίας ως προς Rs, Rf για τη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Αναπαραγωγή από [1]

Παρατήρηση 3.6. *Για μια στρατηγική ισορροπίας s_e ενδέχεται να υπάρχει μια βέλτιστη απάντηση $s_e' \neq s_e$ τέτοια ώστε η s_e' να αποτελεί αυστηρά καλύτερη απάντηση απέναντι στον εαυτό της από ό,τι η s_e. Στην περίπτωση αυτή, εάν οι πελάτες ξεκινούν με στρατηγική s_e, μπορεί να υιοθετήσουν όλοι τη στρατηγική s_e' και να μην επιστρέψουν ποτέ στη s_e. Υπό αυτή την έννοια, η s_e είναι ασταθής ή παροδική.*

Εάν δεν υπάρχει τέτοια στρατηγική s_e', τότε η s_e ονομάζεται εξελικτικά σταθερή στρατηγική *(Evolutionarily Stable Strategy – ESS). Ειδικότερα, μια στρατηγική ισορροπίας που αποτελεί μοναδική βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της είναι ESS.*

Οι ESS αποκλείουν τις ασταθείς στρατηγικές ισορροπίας και αποτελούν χρήσιμη ενίσχυση της έννοιας της ισορροπίας.

Στο παρόν μοντέλο, η στρατηγική αποχώρησης (balking) είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της — και επομένως ESS — όταν $S^{(un)}(0) < 0$. Αντίστοιχα, η στρατηγική εισόδου (joining) είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της — και συνεπώς ESS — όταν $S^{(un)}(1) > 0$.

Για μια μικτή στρατηγική ισορροπίας q_e τέτοια ώστε $S^{(un)}(q_e) = 0$, κάθε στρα-

τηγική q_e' αποτελεί βέλτιστη απάντηση. Η εξελικτική σταθερότητα της q_e εξαρτάται από τη μονοτονία της συνάρτησης $S^{(un)}(q)$. Εάν η $S^{(un)}(q)$ είναι αύξουσα, τότε η q_e δεν είναι ESS, διότι μια μικρή απόκλιση ορισμένων πελατών από τη q_e οδηγεί έναν τυπικό πελάτη να κινηθεί προς την ίδια κατεύθυνση. Αντίθετα, η q_e είναι ESS όταν η $S^{(un)}(q)$ είναι φθίνουσα.

Από την ανάλυση του Θεωρήματος 3.3 προκύπτει ότι:

- *Στις υποπεριπτώσεις (I-a), (II-a) και (III-a), η στρατηγική αποχώρησης είναι ESS. Πράγματι, όταν όλοι οι πελάτες επιλέγουν να μην εισέλθουν στο σύστημα, ισχύει $S^{(un)}(0) < 0.$, τότε ένας μεμονωμένος πελάτης που αποκλίνει επιλέγοντας την είσοδο έχει αρνητικό αναμενόμενο όφελος. Συνεπώς, δεν τον συμφέρει να αλλάξει στρατηγική. Άρα η στρατηγική αποχώρησης είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση έναντι του εαυτού της και επομένως αποτελεί ESS.*

- *Στις υποπεριπτώσεις (I-γ), (II-γ) και (III-γ), η στρατηγική εισόδου είναι ESS. Όταν ολοι οι πελάτες επιλέγουν να εισέλθουν στο σύστημα και ισχύει $S^{(un)}(1) > 0$, το ανεμενόμενο όφελος ενός πελάτη που επιλέγει να εισέλθει είναι θετικό, άρα δεν έχει συμφέρον να αλλάξει στρατηγική. Επομένως η στρατηγική εισόδου ειναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση απέναντι στον εαυτό της και επομένως αποτελεί ESS.*

- *Στην περίπτωση (I-β), η μικτή στρατηγική q_e δεν είναι ESS. Αυτο συμβαίνει γιατι στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $S^{(un)}(q)$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε μία απόκλιση του q_e, $q_e + c$ δίνει θετικό και μεγαλύτερο αναμενόμενο όφελος οπότε η απόκλιση από το q_e ενισχύεται, οπότε το σύστημα απομακρύνεται από την ισορροπία q_e. Αντίθετα, οι καθαρές στρατηγικές αποχώρησης και εισόδου είναι ESS.*

- *Στην περίπτωση (II-β), η μικτή στρατηγική q_e είναι ESS. Αυτό συμβαίνει γιατί η συνάρτηση $S^{(un)}(q)$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για μία απόκλιση του q_e, $q_e + c$ το αναμενόμενο όφελος μειώνεται, οπότε εξασφαλίζεται έτσι η εξελικτική σταθερότητα του q_e. Με λίγα λόγια η στρατηγική αυτή αποτελεί ESS.*

- *Στην περίπτωση (ΙΙΙ-β), καμία στρατηγική q δεν είναι ESS. Αφού το αναμενόμενο όφελος $S^{(un)}(q)$ είναι μηδενικό για όλες τις στρατηγικές οπότε δεν υπάρχει καμία στρατηγική που να είναι η μοναδική βέλτιστη απάντηση για τον πελάτη. Στην περίπτωση αυτή, οι πελάτες ενδέχεται να επιλέγουν συνεχώς μία στρατηγική έναντι μιας άλλης, χωρίς να υπάρχει επαναφορά στην ισορροπία, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να εξασφαλιστεί η εξελικτική σταθερότητα (ESS).*

Παρατήρηση 3.7. *Μία μικτή στρατηγική ισορροπίας q_e, όποτε υπάρχει στις περιπτώσεις (Ι-β) και (ΙΙ-β) του θεωρήματος 3.3, αποτελεί τη μοναδική ριζα της εξίσωσης $g(q) = \theta$ στο $(0, 1)$. Η εξίσωση αυτή δεν είναι εύκολο να λυθεί άμεσα, καθώς στην $g(q)$ όπως δίνεται από την (32) υπάρχουν οι όροι q και $x_2(q)$. Παρόλα αυτά, είναι εφικτό να υπολογιστεί η ρίζα q_e της εξίσωσης ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:*

Από την (32) έχουμε:

$$g(q) = \frac{1 + \phi(q)}{\lambda q} \Rightarrow \phi(q) = \lambda q g(q) - 1,$$

και επειδή $g(q) = \theta$ η εξίσωση γίνεται:

$$\phi(q) = \lambda q \theta - 1.$$

Λύνοντας την (19) ως προς q έχουμε:

$$q = \frac{x_2(q)[\lambda q + \mu + \xi - \mu x_2(q)]}{\lambda}.$$

Όμως από την (20)

$$\lambda q - \mu x_2(q) = \frac{\xi x_2(q)}{1 - x_2(q)},$$

άρα:

$$q = \frac{x_2(q)\left[\frac{\xi x_2(q)}{1-x_2(q)} + \mu + \xi\right]}{1 - x_2(q)} \Rightarrow q = \frac{x_2(q)[\mu + \xi - \mu x_2(q)]}{\lambda[1 - x_2(q)]}. \tag{42}$$

Ορίσαμε στην απόδειξη του Λήματος 1 τη σύθετη συνάρτηση

$$\phi(q) = f(x_2(q)) = \frac{-\eta[x_2(q)-1]^2}{(\xi-\eta)x_2(q)+\eta}.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} &\phi(q) = \lambda q\theta - 1 \\ \Rightarrow &f(x_2(q)) = \theta\lambda\frac{x_2(q)[\mu+\xi-\mu x_2(q)]}{\lambda[1-x_2(q)]} - 1 \\ \Rightarrow &\frac{-\eta[x_2(q)-1]^2}{(\xi-\eta)x_2(q)+\eta} = \theta\lambda\frac{x_2(q)[\mu+\xi-\mu x_2(q)]}{\lambda[1-x_2(q)]} - 1. \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$-\eta(1-x_2(q))^3 + \left[\theta\mu x_2(q)^2 - [(\mu+\xi)\theta+1]x_2(q)+1\right] \times [(\xi-\eta)x_2(q)+\eta] = 0,$$

δηλαδή πρόκειται για μια πολυωνυμική εξίσωση 3ου βαθμού με άγνωστο το $x_2(q)$*. Μετά από πράξεις παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος της εξίσωσης είναι ίσος με 0, οπότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή*

$$x_2(q)[\alpha x_2(q)^2 + \beta x_2(q) + \gamma = 0]$$

και επειδή $x_2(q) \neq 0$ *έχουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση*

$$\alpha x_2(q)^2 + \beta x_2(q) + \gamma = 0,$$

με

$$\begin{aligned} \alpha =& \eta + \theta\mu(\xi-\eta), \\ \beta =& \eta\theta\mu - \xi - 2\eta - (\xi-\eta)(\mu+\xi)\theta, \\ \gamma =& \xi + \eta - \eta(\mu+\xi)\theta. \end{aligned}$$

Οπότε αφού λύσουμε την παραπάνω εξίσωση, αντικαθιστούμε στην (42) προσέχοντας να είναι $q_e \in (0,1)$.

3.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

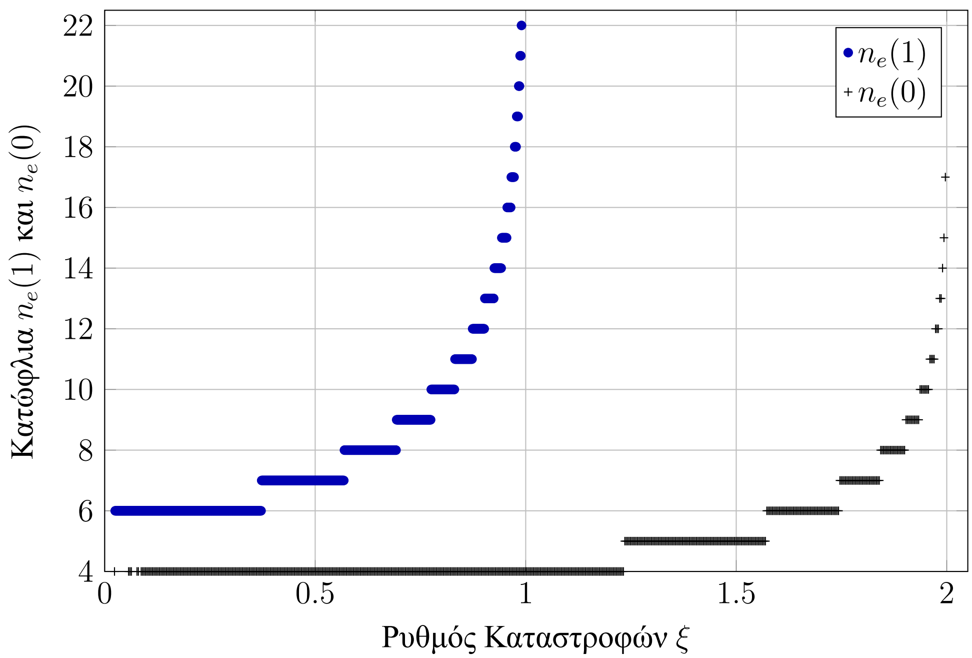
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται μέσα από σχήματα, ποιοτικά συμπεράσματα και αρκετά αριθμητικά πειράματα που βασίζονται στα αναλυτικά αποτελέσματα του άρθρου. Επιπλέον, δίνονται ενστικτώδεις ερμηνείες τον αριθμητικών αποτελεσμάτων σχετικά με τη συμπεριφορά ισορροπίας των πελατών. Πρώτα επικεντρωνόμαστε στη συμπεριφορά των κατωφλίων $n_e(0), n_e(1)$ στην παρατηρήσιμη περίπτωση, καθώς κάποιες παράμετροι του συστήματος όπως πχ η ρυθμός επισκευής η, ο ρυθμός καταστροφών ξ , η αποζημίωση R_f ή η επιβράβευση για την εξυπηρέτηση R_s, μεταβάλλονται. Είδαμε ότι η ανίσωση $n_e(0) \leq n_e(1)$ ισχύει πάντα. Αυτό επιβεβαιώνει τη διαίσθησή μας, ότι, ένας πελάτης που βρίσκει το σύστημα σε κατάσταση επισκευής είναι λιγότερο ανεκτικός (αναφορικά με το αριθμό των πελατών που βρίσκονται μπροστά του) συγκριτικά με έναν πελάτη που βρίσκει το σύστημα σε λειτουργία. Επιπλέον, παρατηρώντας τους τύπους (3.5) και (3.12) διαπιστώνουμε ότι τα $n_e(0)$ και $n_e(1)$ είναι ανεξάρτητα του ρυθμού άφιξης λ. Επιπλέον το $n_e(1)$ είναι ανεξάρτητο και του ρυθμού επισκευής η. Καθώς το $\eta \to \infty$ to $n_e(0) \to n_e(1)$. Αυτό είναι φυσιολογικό, καθώς εφόσον ο ρυθμός της επισκευής αυξάνεται, μειώνεται ο χρόνος αναμονής ενός πελάτη που κατά την άφιξή του βρίσκει το σύστημα σε κατάσταση επισκευής. Όμως, η επίδραση της υψηλής τιμής του η, έχει λιγότερη σημασία, όταν η τιμή του η είναι ήδη υψηλή, το $n_e(0)$, συνεχίζει να αυξάνει, αλλά πολύ αργά και καθώς το $\eta \to \infty$ έχουμε $n_e(0) \to n_e(1)$, οπότε πρακτικά το γεγονός ότι το $n_e(0)$ είναι αύξουσα και κοίλη, και τελικά λογαριθμική συνάρτηση ως προς η είναι κάτι αναμενόμενο. Επιπλέον, τα $n_e(0), n_e(1)$ είναι αύξουσες συναρτήσεις ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης μ και την αποζημίωση R_f, ενώ είναι φθίνουσες ως προς το C (κόστος αναμονής). Όσο αφορά το R_s, δηλαδή την ανταμοιβή για την εξυπηρέτηση παρατηρούμε ότι καθώς η τιμή του R_s αυξάνεται, τα $n_e(0), n_e(1)$ παρουσιάζουν λογαριθμική αύξηση. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το μοντέλο του Naor (1969), χωρίς καταστροφές , στο οποίο η αύξηση είναι γραμμική ως προς R_s. Η διαφορά αυτή εξηγείται ως εξής: στο μοντέλο του Naor, οι πελάτες σίγουρα λαμβάνουν ανταμοιβή για την εξυπηρέτηση, αν επιλέξουν να μπουν στο σύστημα. Αντίθετα στο μοντέλο που μελετάμε, για μεγάλες τιμές του R_s , ο επιλεγμένος πελάτης έχει ήδη μεγάλο αριθμό πελατών μπροστά του,οπότε είναι πολύ πιθανό να μη λάβει ανταμοιβή για την εξυπηρέτηση, αλλά αντίθετα θα λάβει αποζημίωση για την αποτυχία εξυπηρέτησης R_f. Υπό αυτή την έννοια η αύξηση του R_s δεν σηματοδοτεί αναλογική αύξηση των $n_e(0), n_e(1)$. Αυτό αποκαλύπτει ότι η ύπαρξη καταστροφών σε ένα σύστημα το οποίο είναι επιβαρυμένο, μειώνουν σημαντικά την σημασία της τιμής της ανταμοιβής R_s.

Τέλος, η συμπεριφορά των $n_e(0), n_e(1)$ σε σχέση με τον ρυθμό καταστροφής ξ είναι πιο περίπλοκη, οπότε δεν μπορούμε να την προσεγγίσουμε διαισθητικά. Γενικά, για μεγαλύτερες τιμές του ξ, οι καταστροφές στο σύστημα γίνονται συντομότερα , οπότε η αύξηση του ξ ευνοεί την απόφαση εισόδου στο σύστημα για μεγάλες τιμές της αποζημίωσης R_f. Επιπλέον, η αύξηση αυτή μειώνει το κόστος αναμονής. Όμως για να έχουμε πλήρη εικόνα για την επίδραση της τιμής του ξ στη συμπεριφορά των πελατών, πρέπει να πάρουμε ξεχωριστές περιπτώσεις για την κατάσταση του συστήματος: σύστημα σε κατάσταση επισκευής και σύστημα σε λειτουργία.

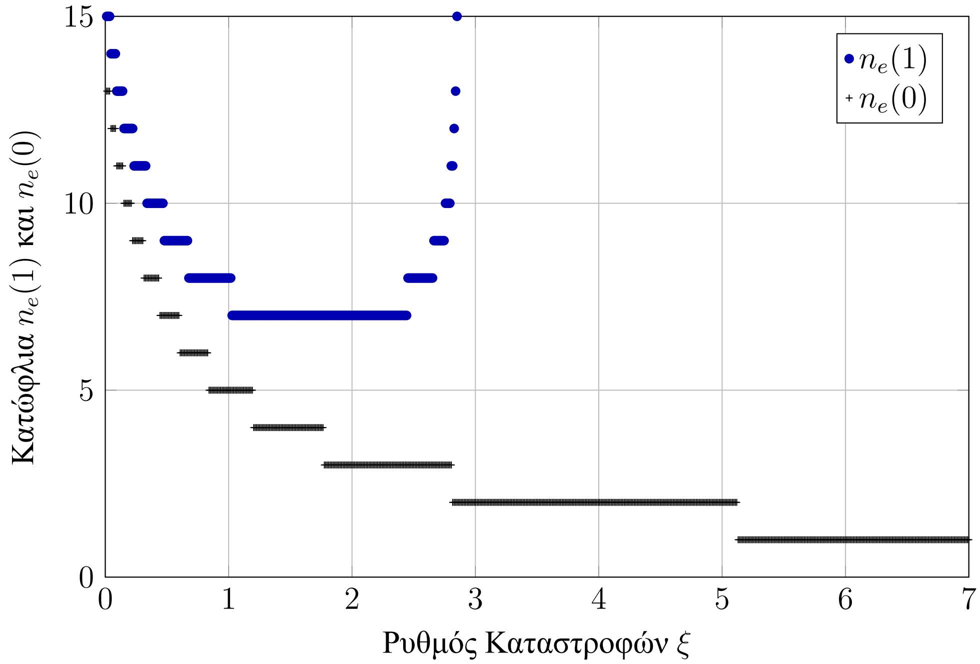
Αν ένας πελάτης κατά την άφιξή του βρει το σύστημα σε κατάσταση επισκευής επιβαρύνεται με αναμονή με μέσο κόστος $\frac{C}{\eta}$ μονάδες. Οπότε ένας τέτοιος πελάτης θα εισέλθει στο σύστημα με την ελπίδα να συμβεί κάποια καταστροφή αν η διαφορά $R_f - \frac{C}{\eta}$ είναι μεγάλη. Σε περίπτωση που η διαφορά αυτή είναι μικρή , οι πελάτες θέλουν να εξυπηρετηθούν και για αυτό το λόγο η αύξηση του ξ τους κάνει λιγότερο ανεκτικούς στο να εισέλθουν σε ένα σύστημα το οποίο είναι γεμάτο.

Θεωρούμε τώρα έναν επιλεγμένο πελάτη που βρίσκει το σύστημα σε λειτουργία. Τότε, μια αύξηση του ξ οδηγεί σε μείωση του κόστους αναμονής, μείωση της πιθανότητας ότι ο πελάτης θα εξυπηρετηθεί, και αύξηση της πιθανότητας ότι ο πελάτης θα αναγκαστεί να εγκαταλείψει το σύστημα εξαιτίας μίας καταστροφής. Οπότε οδηγούμαστε σε μία κατάσταση όπου το $n_e(1)$ μειώνεται για μικρές τιμές της παραμέτρου ξ, και αυξάνεται για τις μεγαλύτερες τιμές. Αυτό συμβαίνει γιατί για μικρές τιμές του ξ, οι καταστροφές συμβαίνουν λιγότερο συχνά, οπότε ο πελάτης δεν είναι πιθανό να λάβει την αποζημίωση R_f ακόμα κι αν είναι υψηλή. Οπότε, θέλει να εξυπηρετηθεί, επομένως είναι λιγότερο ανεκτικός σε μεγάλο αριθμό πελατών μπροστά του. Παρόλα αυτά για μεσαία τιμή του ξ η πιθανότητα να συμβεί κάποια καταστροφή αυξάνεται. Για αυτό οι πελάτες είναι πρόθυμοι να εισέλθουν στο σύστημα, προσδοκώντας να λάβουν την αποζημίωση R_f, αλλά υιοθετούν μία πολιτική κατωφλίου η οποία έχει πτωτική τάση. Με λίγα λόγια για τις μεσαίες τιμές του ξ, δεν είναι ξεκάθαρο τι επικρατεί τελικά. Τέλος, για μεγάλες τιμές του ξ, η τιμή του R_f είναι ο σημαντικότερος παράγοντας, διότι οι πελάτες είναι δεκτικοί να εισέλθουν στο σύστημα με την ελπίδα ότι θα λάβουν την αποζημίωση R_f. Επομένως το $n_e(1)$ αυξάνεται για μεγάλο ξ.

Τα παραπάνω συμπεράσματα για τα $n_e(0)$ και $n_e(1)$ και τις τιμές του ξ απεικονίζονται στα σχήματα που ακολουθούν. Στο σχήμα 3.4 η διαφορά $R_f - \frac{C}{\eta}$ είναι θετική και τα $n_e(0), n_e(1)$ ακολουθούν αυξητική τάση. Στο σχήμα 3.5 η διαφορά $R_f - \frac{C}{\eta}$ είναι αρνητική και παρατηρούμε ότι τα $n_e(0)$ έχουν φθίνουσα συμπεριφορά, ενώ τα $n_e(1)$ παρουσιάζουν συνδυασμό φθίνουσας και από μία τιμή του ξ και μετά αύξουσας συμπεριφοράς :



Σχήμα 3.4: Κατώφλια εισόδου στο σύστημα ως προς ξ για την παρατηρήσιμη περίπτωση $(\mu, \eta) = (4, 2)$ και $(R_s, R_f, C) = (7, 4, 4)$. Αναπαραγωγή από [1]



Σχήμα 3.5: Κατώφλια εισόδου στο σύστημα ως προς ξ για την παρατηρήσιμη περίπτωση $(\mu, \eta) = (4, 2)$ και $(R_s, R_f, C) = (17, 1.4, 4)$. Αναπαραγωγή από [1]

Τώρα περνάμε στη μη παρατηρήσιμη περίπτωση. Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι η συνάρτηση του καθαρού αναμενόμενου οφέλους είναι φθίνουσα ως προς q αν $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} > 0$ οπότε παρατηρείται συμπεριφορά ATC ενώ αν $R_s - R_f + \frac{C}{\xi} < 0$ η συνάρτηση είναι αύξουσα ως προς q, οπότε έχουμε συμπεριφορά FTC. Οπότε είναι φανερό ότι οι παράμετροι λ, η, μ δεν παίζουν ρόλο στο αν ο πελάτης θα ακολουθήσει FTC ή ATC συμπεριφορά. Μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε την επίδραση των παραμέτρων αυτών στις πιθανότητες ισορροπίας εισόδου στο σύστημα. Ξεκινάμε από την παράμετρο λ. Μία αύξηση του ρυθμού εισόδου στο σύστημα λ οδηγεί σε αύξηση του μέσου χρόνου αναμονής και άρα οι πιθανότητες ισορροπίας εισόδου στο σύστημα μειώνονται. Με αύξηση στο ρυθμό επισκευής η, ο μέσος χρόνος αναμονής του επιλεγμένου πελάτη μειώνεται και αυτό με τη σειρά του οδηγεί σε υψηλότερες πιθανότητες ισορροπίας εισόδου. Με τον ίδιο τρόπο μία αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης μ οδηγεί σε αύξηση των πιθανοτήτων ισορροπίας εισόδου.

Σχετικά με το ρυθμό καταστροφών ξ τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα. Μία αύξηση στο ξ οδηγεί σε μείωση του μέσου κόστους αναμονής για τους πελάτες.

Επιπλέον, η πιθανότητα ότι ένας επιλεγμένος πελάτης θα εξυπηρετηθεί δεδομένου ότι παρατηρεί n πελάτες στο σύστημα και αποφασίζει να εισέλθει, μειώνεται (και αντίστοιχα αυξάνεται η συμπληρωματική πιθανότητα να αποχωρήσει από το σύστημα). Η θετική ή η αρνητική επίδραση της αύξησης του ξ, εξαρτάται από τις σχετικές τιμές R_s, R_f και μ. Αν η επιβράβευση R_s για την εξυπηρέτηση είναι μεγάλη τότε η αύξηση του ξ έχει αρνητικό αποτέλεσμα για τον πελάτη, αφού τον συμφέρει να εξυπηρετηθεί αλλά λόγω της αύξησης του ξ αυτό δεν είναι εφικτό. Αντίθετα, η αύξηση του ξ είναι προς όφελος του πελάτη , αν αποζημίωση R_f είναι πιο επιθυμητή. Άλλο ένα αποτέλεσμα της αύξησης του ξ είναι ότι ο επιλεγμένος πελάτης περιμένει κατά την άφιξή του να βρεί λιγότερους πελάτες να περιμένουν μπροστά του. Το αν αυτό είναι θετικό ή αρνητικό εξαρτάται από το αν συμφέρει τον πελάτη αυτό να εξυπηρετηθεί, οπότε αν εισπράξει την ανταμοιβή R_s, ή να μην εξυπηρετηθεί οπότε να εισπράξει την αποζημίωση R_f. Πράγματι, μεγάλος αριθμός πελατών σημαίνει ότι ο πελάτης δεν θα εξυπηρετηθεί λόγω κάποιας καταστροφής, οπότε είναι πιθανότερο να εισπράξει την αποζημίωση R_f. Από τα παραπάνω αντιλαμβανόμαστε ότι για τις διάφορες τιμές του ξ υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρρεάζουν τις πιθανότητες ισορροπίας εισόδου.

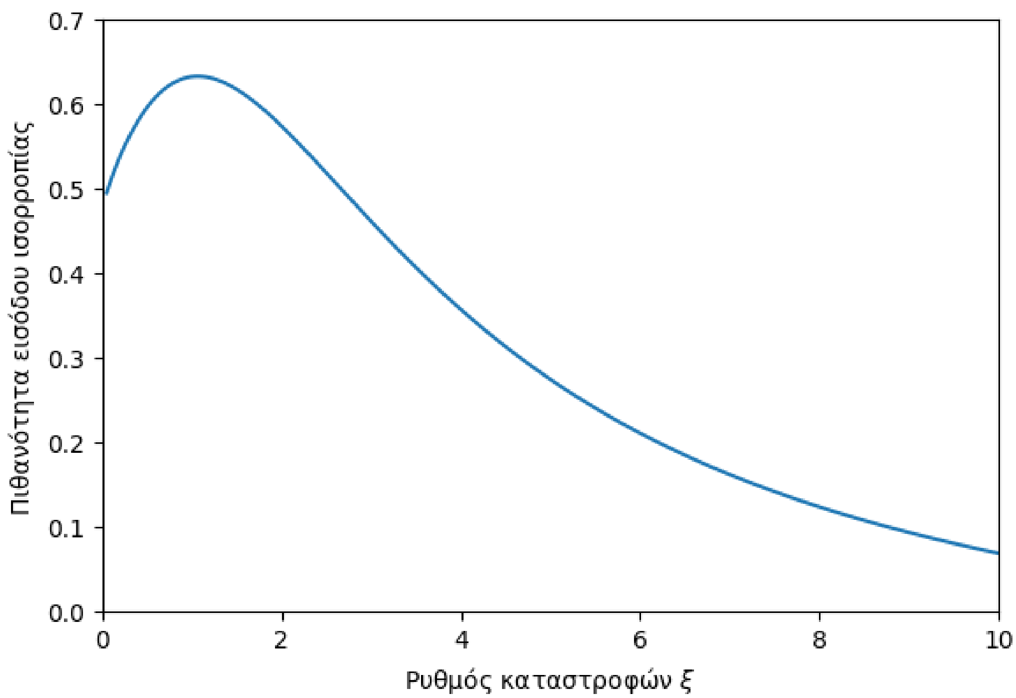
Στο σχήμα 3.6 παρατηρούμε ότι η πιθανότητα ισορροπίας q_e είναι μοναδική και ότι για μικρές τιμές του ξ αυξάνεται, αλλά καθώς το ξ αυξάνεται η τιμή της q_e πέφτει. Δηλαδή για μικρό ρυθμό καταστροφών και αν συμφέρει τον πελάτη να εισπράξει το R_s εισέρχεται στο σύστημα το q_e αυξάνεται, όμως αν ο ρυθμός αυξηθεί δεν συμφέρει τον πελάτη να εισέλθει, συνεπώς το q_e φθίνει. Για το σχήμα 3.7 , το R_f είναι αυξημένο ενώ το R_s αμετάβλητο. Επίσης ο ρυθμός επισκευής η μειώθηκε καθώς και το κόστος C. Παρατηρούμε ότι για μικρές τιμές του ξ έχουμε μοναδική στρατηγική ισορροπίας με πιθανότητα ισορροπίας q_e αλλά καθώς το ξ αυξάνεται έχουμε 3 στρατηγικές με πιθανότητες ισορροπίας: 0,1 και μια μεικτή με $q_e \in (0, 1)$. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του ξ οι καταστροφές συμβαίνουν εξαιρετικά συχνά και η πιθανότητα ένας πελάτης να ολοκληρώσει την εξυπηρέτησή του ελαχιστοποιείται. Συνεπώς, η ανταμοιβή R_s από επιτυχή εξυπηρέτηση καθίσταται αμελητέα και το αναμενόμενο όφελος του πελάτη προέρχεται σχεδόν αποκλειστικά από την αποζημίωση R_f που λαμβάνει σε περίπτωση καταστροφής. Στην περίπτωση αυτή ,το $\frac{C}{\eta}$, προσεγγίζει το μέσο κόστος παραμονής.

Η στρατηγική συμπεριφορά των πελατών καθορίζεται πλέον αποκλειστικά από το πρόσημο της ποσότητας $R_f - \frac{C}{\eta}$ με:

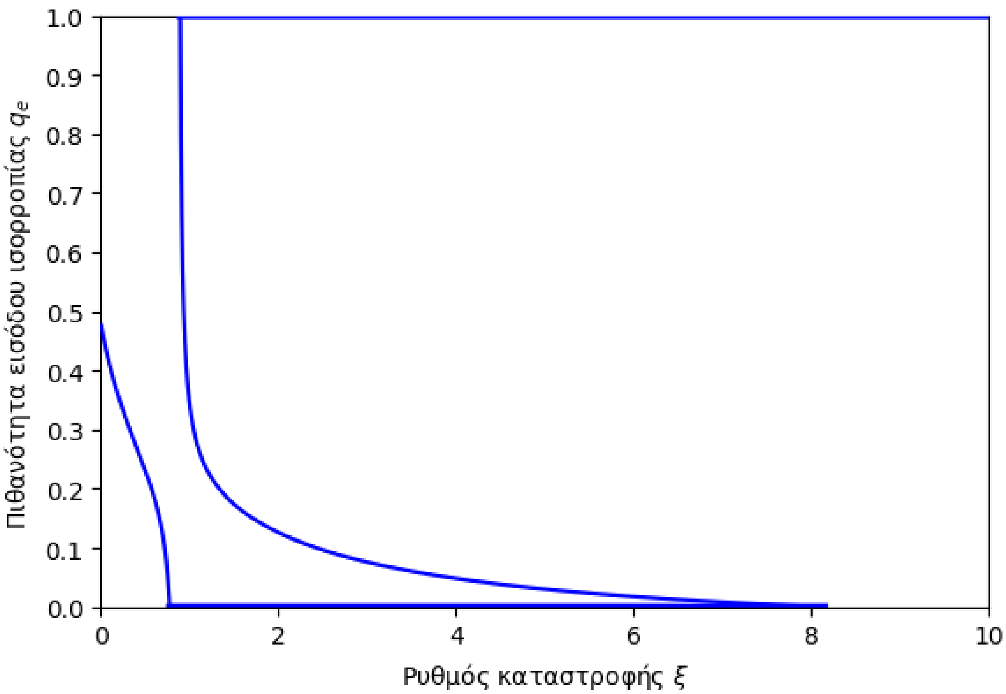
$$\begin{cases} \text{αν } R_f - \dfrac{C}{\eta} > 0, & \text{τότε } q_e = 1, \\ \text{αν } R_f - \dfrac{C}{\eta} < 0, & \text{τότε } q_e = 0. \end{cases}$$

Επομένως, για αρκετά μεγάλες τιμές του ξ, έχουμε είτε είσοδος στο σύστημα αν $R_f - \dfrac{C}{\eta} > 0$ είτε αποχώρηση αν $R_f - \dfrac{C}{\eta} < 0$.

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε κάποια ενδιαφέροντα παραδείγματα σε σχέση με τις πιθανότητες q_e και το ξ.

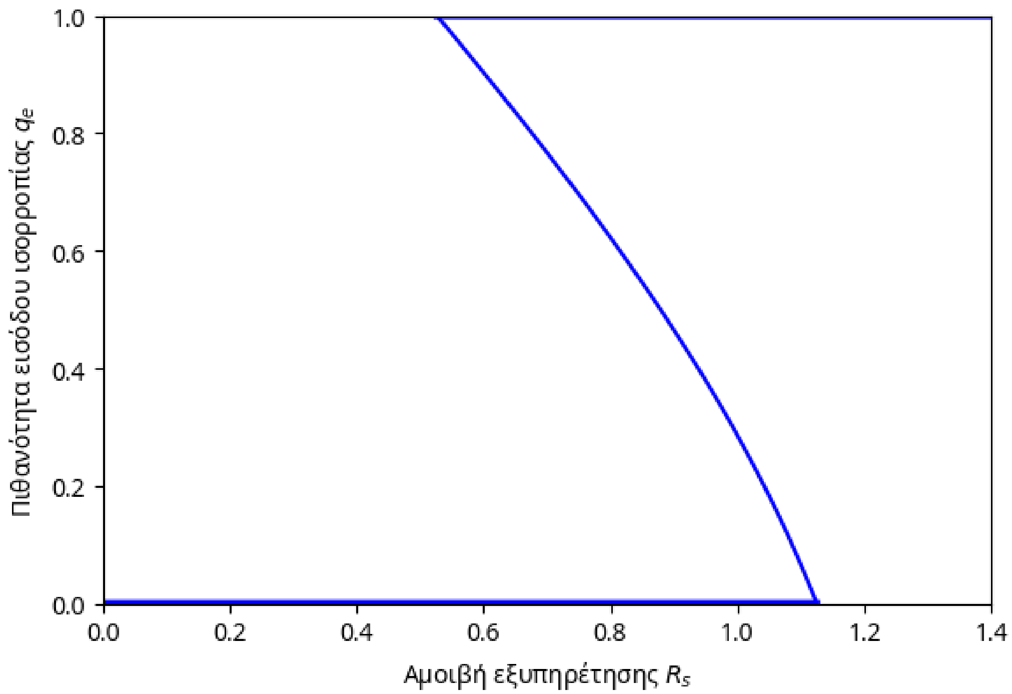


Σχήμα 3.6: Πιθανότητα q_e ως προς ξ για $(\lambda, \mu, \eta) = (7, 4, 1)$ και $(R_s, R_f, C) = (7, 4, 4.7)$. Αναπαραγωγή από [1]

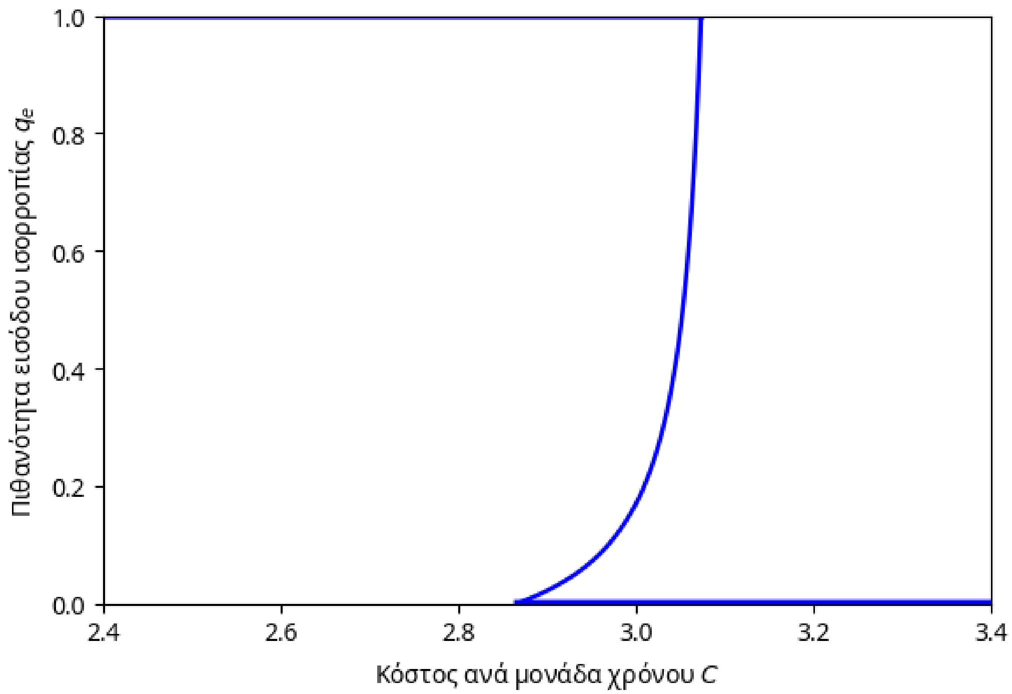


Σχήμα 3.7: Πιθανότητα q_e ως προς ξ για $(\lambda, \mu, \eta) = (7, 4, 0.4)$ και $(R_s, R_f, C) = (7, 12, 4.2)$. Αναπαραγωγή από [1]

Παραπλήσιες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε για τις πιθανότητες ισορροπίας εισόδου q_e, αναφορικά με τις τιμές των R_s, R_f και του κόστους αναμονής ανά μονάδα χρόνου C. Και εδώ παρατηρούμε ότι καθώς οι τιμές των παραμέτρων αυξάνονται η επίδραση της αύξησης αυτής στο q_e μπορεί αν είναι είτε θετική είτε αρνητική. Στα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε ότι πράγματι, για κάποιες τιμές των παραμέτρων που εξετάζουμε τα αποτελέσματα που πήραμε για τα q_e πάνε κόντρα στη διαίσθησή μας. Για παράδειγμα στο σχήμα 3.8 η λογικός συλλογισμός ότι "η πιθανότητα ισορροπίας εισόδου αυξάνεται με την αύξηση της ανταμοιβής για την εξυπηρέτηση R_s" καταρρίπτεται. Με τον ίδιο τρόπο στο σχήμα 3.9 βλέπουμε ότι η αύξηση του κόστους αναμονής ανά μονάδα χρόνου C δεν οδηγεί απαραίτητα σε μείωση της πιθανότητας ισορροπίας εισόδου q_e, δηλαδή η αύξηση αυτή από μόνη της δεν είναι αρκετή ώστε ο πελάτης να αποθαρρυνθεί και να μην εισέλθει στο σύστημα.



Σχήμα 3.8: Πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_e ως προς R_s για $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 4, 2, 2)$ και $(R_f, C) = (4, 5)$. Αναπαραγωγή από [1]



Σχήμα 3.9: Πιθανότητα ισορροπίας εισόδου q_e ως προς C για $(\lambda, \mu, \xi, \eta) = (7, 0.6, 4, 0.8)$ και $(R_s, R_f) = (1, 4)$. Αναπαραγωγή από [1]

Βιβλιογραφία

[1] Boudali, O., & Economou, A. (2013). The effect of catastrophes on the strategic customer behavior in queueing systems. *Naval Research Logistics, 60*, 571–587. https://doi.org/10.1002/nav.21553

[2] Burnetas, A., & Economou, A. (2007). Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times. *Queueing Systems, 56*, 213–228. https://doi.org/10.1007/s11134-007-9036-7

[3] Δημητρίου, I. (2024). *Σημειώσεις ΕΑΠ για τη ΜΣΜ84: Στοχαστικά Μαθηματικά*. Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

[4] Hassin, R., & Haviv, M. (2003). *To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems*. Kluwer Academic Publishers.

[5] Οικονόμου, Α.Θ. (2023). *Θεωρία Ουρών Αναμονής*. Κάλλιπος , Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-182