



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας  
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική εργασία

## **Λογιστική Συνάρτηση**

*Μελέτη, γενικεύσεις κι εφαρμογές*

**Κώστας Κούδας**

Επιβλέπων καθηγητής: Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Πάτρα, Μάρτιος, 2025

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Κώστα Κούδα που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



## Λογιστική Συνάρτηση

*Μελέτη, γενικεύσεις κι εφαρμογές*

**Κώστας Κούδας**

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:  
Πρωτοπαπάς Ελευθέριος  
Ε.ΔΙ.Π.  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και  
Φυσικών Επιστημών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συν-Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:  
Χατζηνικολάου Μαρία  
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας  
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Πάτρα, Μάρτιος, 2025







# Περιεχόμενα

<b>Εν περιλήψει</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Κατάλογος σχημάτων</b>	<b>viii</b>
<b>Κατάλογος πινάκων</b>	<b>ix</b>
<b>Συντομογραφίες &amp; Ακρωνύμια</b>	<b>xi</b>
<b>I Διακριτή Εκδοχή</b>	<b>1</b>
<b>1 Γνωριμία με τη λογιστική απεικόνιση</b>	<b>3</b>
1.1 Εισαγωγή - Οικολογική προσέγγιση (πληθυσμός ισορροπίας)	3
1.2 Οικολογική προσέγγιση (πυκνοεξαρτώμενες γεννήσεις)	3
1.3 Οικολογική προσέγγιση (συσχέτιση με διαθέσιμους πόρους)	4
1.4 Πιθανοκρατική προσέγγιση	4
<b>2 Μελέτη λογιστικής απεικόνισης</b>	<b>5</b>
2.1 Ορισμός λογιστικής απεικόνισης	5
2.2 Σημεία ισορροπίας	8
2.3 Περιοδικότητα	17
2.4 Γεννήτρια συνάρτηση	22
2.5 Χαστική συμπεριφορά	35
2.5.α' Ορισμός	35
2.5.β' Εκθέτης Lyapunov - Τοπολογική εντροπία	39
2.5.γ' Έλεγχος 0-1 για το χάος	43
<b>3 Περαιτέρω εφαρμογές</b>	<b>47</b>
3.1 Παρόμοια συστήματα με τη λογιστική απεικόνιση	47
3.1.α' Ορισμοί - Αποδείξεις	47
3.1.β' Απεικόνιση σκηνης	49
3.1.γ' Τετραγωνική απεικόνιση	49
3.1.δ' Απεικόνιση με ρίζα	51
3.2 Εφαρμογή της λογιστικής απεικόνισης ως γεννήτριας τυχαίων αριθμών - δαμάζοντας το χάος	53
3.2.α' Ορισμός	53
3.2.β' Πώς κατανέμονται οι τιμές της λογιστικής απεικόνισης;	53
3.2.γ' Περί ποιας κατανομής πρόκειται;	57
3.2.δ' Φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα	59

<b>4 Γενικεύσεις της λογιστικής απεικόνισης</b>	<b>65</b>
4.1 Μιγαδική εκδοχή της λογιστικής απεικόνισης . . . . .	65
4.1.α' Ορισμός . . . . .	65
4.1.β' Σημεία ισορροπίας και περιοδικά σημεία . . . . .	71
 <b>II Συνεχής εκδοχή</b>	 <b>75</b>
<b>5 Γνωριμία με τη λογιστική συνάρτηση</b>	<b>77</b>
5.1 Εισαγωγή - Οικολογική προσέγγιση (συνεχής εκδοχή από διακριτή) . . . . .	77
5.2 Εισαγωγή - Οικολογική προσέγγιση (αναπαραγωγικός ρυθμός) . . . . .	78
5.3 Μια πιο γενική προσέγγιση . . . . .	79
5.4 Πιθανοθεωρητική προσέγγιση . . . . .	79
5.5 Λογισμός διαφορών . . . . .	80
 <b>6 Μελέτη λογιστικής συνάρτησης</b>	 <b>85</b>
6.1 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης - Ορισμός λογιστικής συνάρτησης . . . . .	85
6.2 Πρωτογενής μελέτη συνάρτησης . . . . .	91
6.3 Συσχέτιση με υπερβολική εφαιπτομένη/συνεφαπτομένη . . . . .	94
6.4 Αναπτύγματα . . . . .	95
6.4.α' Ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων . . . . .	95
6.4.β' Ανάπτυγμα σε σειρά εκθετικών . . . . .	98
6.5 Μετασχηματισμός Fourier . . . . .	102
6.5.α' Αρχική τιμή μικρότερη της φέρουσας ικανότητας . . . . .	104
6.5.β' Αρχική τιμή μεγαλύτερη της φέρουσας ικανότητας . . . . .	109
6.6 Μετασχηματισμός Laplace . . . . .	115
6.6.α' Αρχική τιμή μεγαλύτερη/ίση της ημισείας φέρουσας ικανότητας . . . . .	119
6.6.β' Αρχική τιμή μικρότερη της ημισείας φέρουσας ικανότητας . . . . .	121
 <b>7 Περαιτέρω χρήσεις</b>	 <b>127</b>
7.1 Εξίσωση Fisher . . . . .	127
7.2 Μοντέλο Lotka-Volterra για τον ανταγωνισμό . . . . .	133
7.2.α' Περιγραφή μοντέλου . . . . .	133
7.2.β' Σημεία ισορροπίας . . . . .	133
 <b>8 Γενικεύσεις λογιστικής συνάρτησης</b>	 <b>145</b>
8.1 Μοντέλα Rütter-Bertalanffy και Bertalanffy-Richards. . . . .	145
8.2 Λογιστικό μοντέλο με σπορά/συγκομιδή . . . . .	149
8.3 Προσπέλαση μέσω συναρτησιακών εξισώσεων . . . . .	153

# Εν περιλήψει

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετάμε τη λογιστική συνάρτηση, ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την υπό περιορισμούς ανάπτυξη πληθυσμών. Η μελέτη αναπτύσσεται σε δύο κύριες ενότητες: τη διακριτή και τη συνεχή εκδοχή του λογιστικού μοντέλου.

Στη διακριτή εκδοχή, εξετάζεται η λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ , αναλύοντας τη δυναμική συμπεριφορά της. Διερευνώνται οι συνθήκες υπό τις οποίες το σύστημα οδηγείται σε σταθερά σημεία ή σε περιοδικές τροχιές. Αναδεικνύεται η χαοτική συμπεριφορά του για κάποιες τιμές του  $\lambda$ , παρουσιάζονται κάποιες εφαρμογές του (ως γεννήτρια τυχαίων αριθμών) και επιχειρούνται κάποιες γενικεύσεις του (από την πραγματική ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο).

Αντίστοιχα, στη συνεχή εκδοχή, μελετάται η λογιστική συνάρτηση μέσω της διαφορικής εξίσωσης  $y' = \kappa(S - y)y$ . Εδώ, αναλύεται συμπεριφορά της λογιστικής συνάρτησης σε σχέση με τη φέρουσα ικανότητα ( $S$ ) και τον ρυθμό ανάπτυξης ( $\kappa$ ). Περιγράφεται η πορεία του δυναμικού συστήματος προς μια κατάσταση ισορροπίας, επιχειρείται η προσέγγισή της μέσω δυναμοσειρών ή σειρών εκθετικών και δίνονται οι μετασχηματισμοί Fourier και Laplace στα πλαίσια κάποιων προβλημάτων που την εμφανίζουν. Παρουσιάζονται εφαρμογές που την εμπεριέχουν, όπως το ανταγωνιστικό μοντέλο Lotka-Volterra ή το Bertalanffy-Richards, και δίνονται κάποιες γενικεύσεις της είτε εισάγοντας έναν ρυθμό σποράς-συγκομιδής, είτε στα πλαίσια των συναρτησιακών εξισώσεων.

Λέξεις-κλειδιά:

- Q λογιστική συνάρτηση
- Q λογιστική απεικόνιση
- Q χάος
- Q μοντέλο Fisher
- Q μοντέλο Lotka-Volterra
- Q μοντέλο Bertalanffy-Richards

Εν είδει υστερογράφου να πούμε ότι, όσον αφορά τη μετάφραση των όρων στα ελληνικά, ακολουθήθηκε από τον γράφοντα είτε η ισχύουσα ορολογία της αντίστοιχης μαθηματικής βιβλιογραφίας, είτε, σε περίπτωση πολλαπλής ορολογίας, επιλέχθηκε αυτή που αντιστοιχεί καθαρότερα στην περιγράφουσα μαθηματική έννοια και που σέβεται τους κανόνες σύνταξης της ελληνικής γλώσσας. Σε περιπτώσεις μη διαθεσιμότητας ελληνόφωνης μαθηματικής πηγής έγινε χρήση αγγλο-ελληνικού μαθηματικού λεξικού (βλ. [79]).

# Abstract

In the present postgraduate thesis, we study the logistic function, a mathematical model that describes population growth under constraints. The study is developed in two main sections: the discrete and the continuous version of the logistic model.

In the discrete version, the logistic map  $x_{n+1} = \lambda(1-x_n)x_n$  is examined, analyzing its dynamic behavior. The conditions under which the system converges to fixed points or periodic orbits are investigated. The chaotic behavior of the system for certain values of  $\lambda$  is highlighted, some of its applications (as a random number generator) are presented, and certain generalizations are attempted (from the real line to the complex plane).

Similarly, in the continuous version, the logistic function is studied through the differential equation  $y' = \kappa(S - y)y$ . Here, the behavior of the logistic function is analyzed in relation to the carrying capacity ( $S$ ) and the growth rate ( $\kappa$ ). The evolution of the dynamical system toward an equilibrium state is described, and its approximation is attempted using power series or exponential series. The Fourier and Laplace transforms are given in the context of certain problems involving it. Applications that include it are presented, such as the competitive Lotka-Volterra model or the Bertalanffy-Richards model, and certain generalizations are given either by introducing a seeding-harvesting rate or within the framework of functional equations.

Keywords:

- Q logistic function
- Q logistic map
- Q chaos
- Q Fisher model
- Q Lotka-Volterra model
- Q Bertalanffy-Richards model

As a postscript, we should note that regarding the translation of mathematical terms into Greek, the author has followed either the established terminology found in the corresponding mathematical literature or, in cases where multiple terminologies exist, the one that most accurately represents the described mathematical concept while adhering to the syntactic rules of the Greek language. In cases where a Greek mathematical source was unavailable, an English-Greek mathematical dictionary [79] was used.

# Κατάλογος Σχημάτων

2.1 Σχηματική αναπαράσταση ενός δυναμικού συστήματος. . . . .	5
2.2 Σχηματική αναπαράσταση ενός κλειστού δυναμικού συστήματος χωρίς μνήμη. . . .	6
2.3 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$ και $x_0 = 0.06$ . . . .	10
2.4 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)$ . Αριστερή ημιευστάθεια. . . . .	10
2.5 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = 4x(1 - x^2)^2$ αν $ x  \leq 1$ (και $f(x) = 0$ αλλού) και $x_0 = 0.25$ . . . . .	12
2.6 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = \lambda(1 - x)x$ . . . .	15
2.7 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = 1(1 - x)x$ . Δεξιά ημιευστάθεια. . . . .	15
2.8 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = \lambda(1 - x)x$ . . . .	16
2.9 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = 3(1 - x)x$ και αρχική τιμή $x_0 = 0.21$ . . . . .	17
2.10 Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το $f^{\circ 2}$ -δυναμικό σύστημα με $f(x) = \lambda(1 - x)x$ . . . .	20
2.11 Περιοδική συμπεριφορά του $f$ -δυναμικού συστήματος με $f(x) = 3.44(1-x)x$ (σημειώνουμε ότι $1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ ) και αρχική τιμή $x_0 = 0.1$ . . . . .	20
2.12 Περιοδική συμπεριφορά του $f$ -δυναμικού συστήματος με $f(x) = (1 + \sqrt{6})(1 - x)x$ και αρχική τιμή $x_0 = 0.1$ . . . . .	21
2.13 Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 0.9(1 - x_n)x_n$ με $x_0 = 0.3$ . .	24
2.14 Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ με $\lambda \in (0, 3)$ . .	25
2.15 Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ με $\lambda \in ([3, 4]$ . .	31
2.16 Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 2.8(1 - x_n)x_n$ με $x_0 = 0.1$ . .	32
2.17 Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ με $\lambda \in (0, 3)$ . .	33
2.18 Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ με $\lambda \in (0, 3)$ . .	34
2.19 Εξέλιξη της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$ για $x_0 = 0.75$ και $x_0 = 0.75 +$ $10^{-16}$ . . . . .	37
2.20 Εξέλιξη της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$ για $x_0 = 0.1$ και $x_0 = 0.1 + 10^{-16}$ . .	37
2.21 Ανάμειξη των τροχιών της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$ για $x_0 = 0.1$ , $x_0 = 0.2, \dots, x_0 = 0.9$ . . . . .	38
2.22 Διάγραμμα διακλάδωσης της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ . . . . .	38
2.23 Διάγραμμα διακλάδωσης της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ . . . . .	39
2.24 Ο εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ για τα διάφορα $\lambda \in [0, 4]$ . . . . .	41
2.25 Ο εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ για τα διάφορα $\lambda \in [3.5, 4]$ . . . . .	41
2.26 Το διάγραμμα διασποράς που αντιπαραθέτει την $p_c(n)$ με την $q_c(n)$ για την περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 3.55(1 - x_n)x_n$ . Έχουν χρησιμοποιηθεί $n_\infty = 5000$ σημεία. . . . .	43
2.27 Το διάγραμμα διασποράς που αντιπαραθέτει την $p_c(n)$ με την $q_c(n)$ για την περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = 3.95(1 - x_n)x_n$ . Έχουν χρησιμοποιηθεί $n_\infty = 5000$ σημεία. . . . .	44



2.28 Η τιμή $K$ του ελέγχου 0-1 για το χάος στην περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ . Οι τιμές αφορούν 1000 διαφορετικά $\lambda$ του διαστήματος $[3.5, 4]$ και τα $K$ εξήχθησαν από 2000 επιλογές για το $c$ σε κάθε περίπτωση. . . . .	45
3.1 Διάγραμμα König-Lémeray για τη λογιστική απεικόνιση $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$ και αρχική τιμή $x_0 = 0.17$ . . . . .	49
3.2 Διάγραμμα König-Lémeray για την απεικόνιση σκηνης και αρχική τιμή $x_0 = 251/954$ . . . . .	50
3.3 Διάγραμμα König-Lémeray για την τετραγωνική απεικόνιση και αρχική τιμή $x_0 = 0.2$ . . . . .	50
3.4 Διάγραμμα König-Lémeray για την απεικόνιση $x_{n+1} = 16x_n(1 - \sqrt{x_n})^2$ και αρχική τιμή $x_0 = 0.2$ . . . . .	51
3.5 Ιστογράμματα των τιμών της $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$ με αρχικές τιμές $x_0 = 0.01, x_0 = 0.16, x_0 = 0.26, x_0 = 0.49, x_0 = 0.74$ και $x_0 = 0.79$ . . . . .	54
3.6 Καμπύλες πυκνότητας πιθανότητας των τιμών της $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$ με αρχικές τιμές $x_0 = 0.01, x_0 = 0.16, x_0 = 0.26, x_0 = 0.49, x_0 = 0.74$ και $x_0 = 0.79$ . . . . .	54
3.7 Διάγραμμα ισοϋψών για τις $p$ -τιμές του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov περί της ταύτισης των κατανομών των λογιστικών απεικονίσεων για τις εκάστοτε αρχικές τιμές. . . . .	55
3.8 Τα δείγματα που αποτυγχάνουν να περάσουν τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov έχουν χρωματιστεί με πράσινο. . . . .	56
3.9 Διάγραμμα πυκνότητας πιθανότητας των ζευγών δειγμάτων που καταφέρνουν να «επιβιώσουν» του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov . . . . .	57
3.10 Γράφημα Cullen και Frey για οπτικό προσανατολισμό της φύσης της κατανομής της λογιστικής απεικόνισης. . . . .	58
3.11 Το γράφημα Q-Q, το οποίο απορρίπτει την υπόθεση ότι οι τιμές της λογιστικής απεικόνισης ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή. . . . .	58
3.12 Γράφημα ασυμμετρίας που φανερώνει την αξονική συμμετρία των τιμών της λογιστικής απεικόνισης. . . . .	59
4.1 Σύνολο Mandelbrot. . . . .	69
4.2 Το σύνολο $\mathcal{M}_{\text{logistic}}$ των $\lambda \in \mathbb{C}$ , για τα οποία το $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ είναι συνεκτικό. . . . .	69
4.3 Το πλήρες σύνολο Julia $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ σε σχέση με το $\mathcal{K}_c$ . . . . .	70
4.4 Το πλήρες σύνολο Julia $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ σε σχέση με το $\mathcal{K}_c$ . . . . .	71
4.5 Το πλήρες σύνολο Julia $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ σε σχέση με το αν το 0 είναι ελκτικό ή ουδέτερο σημείο ισορροπίας. . . . .	72
4.6 Το πλήρες σύνολο Julia $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ σε σχέση με το αν το $1 - 1/\lambda$ είναι ελκτικό ή ουδέτερο σημείο ισορροπίας. . . . .	73
4.7 Το πλήρες σύνολο Julia $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ για την περίπτωση που $\lambda = 1 \in \partial D_1 \cap \partial D_2$ . . . . .	74
4.8 Το πλήρες σύνολο Julia $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ για την περίπτωση που έχουμε ελκτικό περιοδικό σημείο. . . . .	74
6.1 Γραφική παράσταση της ακολουθίας $(x_n)$ (σε σχέση με το $n$ ) και της ακολουθίας $y_{n+1} = (h\kappa S + 1)(1 - \frac{h\kappa}{h\kappa S + 1}y_n)y_n$ (σε αντιπαραβολή με τη χρονική στιγμή $t_n = nh$ ). Έχει επιλεγεί $S = 3, \kappa = 4, y_0 = 0.1$ και $h = 0.01$ . . . . .	86
6.2 Γραφική παράσταση της λογιστικής συνάρτησης. Έχει επιλεγεί $S = 3, \kappa = 4$ και $l_0 = 0.1$ . . . . .	86
6.3 Διάγραμμα φάσης και πεδίο κατευθύνσεων της διαφορικής εξίσωσης $y' = \kappa(S - y)y$ . . . . .	87
6.4 Η λογιστική συνάρτηση προσεγγίζει, αλλά δεν τέμνει ποτέ τη φέρουσα ικανότητά της. Ο αναγνώστης αξίζει να προσέξει το μικρό ορθογώνιο γύρω από το σημείο με τετμημένη 10, το οποίο έχει μεγεθυνθεί παραπάνω. . . . .	88
6.5 Ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις λογιστικών συναρτήσεων. . . . .	90
6.6 Ασυμπτωτική συμπεριφορά λογιστικής συνάρτησης στην περίπτωση που $l_0 < S$ . . . . .	91
6.7 Ενδεικτική ασυμπτωτική συμπεριφορά λογιστικής συνάρτησης στην περίπτωση που $l_0 > S$ . . . . .	92

6.8	Απεικόνιση της ακολουθίας των μέτρων των αριθμών Bernoulli σε λογαριθμική κλίμακα.	96
6.9	Προσέγγιση υπερβολικής εφαπτομένης με άθροισμα δυνάμεων $N$ όρων.	97
6.10	Προσέγγιση υπερβολικής συνεφαπτομένης με άθροισμα δυνάμεων $N$ όρων.	97
6.11	Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα δυνάμεων $N$ όρων.	98
6.12	Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα δυνάμεων $N$ όρων.	99
6.13	Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα εκθετικών $N$ όρων για $t > t_c$ , όπου $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{ S-l_0 }{l_0} \right)$ .	101
6.14	Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα εκθετικών $N$ όρων για $t < t_c$ , όπου $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{ S-l_0 }{l_0} \right)$ .	101
6.15	Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier της λογιστικής συνάρτησης για τις περιπτώσεις που $l_0 < S$ .	104
6.16	Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier της λογιστικής συνάρτησης για τις περιπτώσεις που $l_0 > S$ .	105
6.17	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\Gamma$ άμμα, ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.	106
6.18	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $B$ ήτα.	107
6.19	Η καμπύλη $C_R$ για τις διάφορες περιπτώσεις του $\omega \in \mathbb{R}$ .	111
6.20	Γραφική παράσταση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης $F(2, 74; z)$ , ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.	117
6.21	Γραφική παράσταση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης $F(1, -2-3; z)$ , ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.	117
6.22	Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Laplace της λογιστικής συνάρτησης (πραγματική και μιγαδική εκδοχή) για την περίπτωση που $l_0 < S$ .	118
6.23	Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Laplace της λογιστικής συνάρτησης (πραγματική και μιγαδική εκδοχή) για την περίπτωση που $l_0 > S$ .	118
6.24	Γραφική παράσταση της συνάρτησης $\Psi$ i, ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.	123
7.1	Δύο από τις λύσεις της Μ.Δ.Ε. $v_t - v_{xx} = (1-v)v$ , Η μία με $a = 10$ κι άλλη με $a = -5$ .	130
7.2	Κύμα εξάπλωσης πληθυσμού «προς ανατολάς» για τις θέσεις $x \in [-10, 10]$ και το χρόνο $t \in [0, 1]$ .	131
7.3	Πληθυσμιακή εξάπλωση «προς ανατολάς».	132
7.4	Κύμα εξάπλωσης πληθυσμού «προς δυσμάς» για τις θέσεις $x \in [-10, 10]$ και το χρόνο $t \in [0, 1]$ .	132
7.5	Πληθυσμιακή εξάπλωση «προς δυσμάς».	132
7.6	Ισοκλινείς στην περίπτωση που $a_j > s_j$ .	135
7.7	Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που $a_j > s_j$ .	136
7.8	Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που $a_2 > s_2$ , αλλά $a_1 = s_1$ .	137
7.9	Ισοκλινείς στην περίπτωση που $a_1 < s_1$ και $a_2 > s_2$ .	138
7.10	Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που η δυνατότητα επιβολής σε κάποιο είδος είναι μικρότερη από αυτό που χρειάζεται για την επιβίωσή του.	138
7.11	Ισοκλινείς στην περίπτωση που $a_j < s_j$ .	139
7.12	Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που $a_j < s_j$ .	140
7.13	Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που $a_2 < s_2$ , αλλά $a_1 = s_1$ .	141
7.14	Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που $a_1 = s_1$ και $s_2 = a_2$ . Οι δύο ισοκλινείς αλληλοεπικαλύπτονται και φτιάχνουν την εικονιζόμενη λευκή γραμμή.	143
8.1	Διάγραμμα φάσης της $y' = \kappa(S-y)y + h$ στην περίπτωση που $h < -\frac{\kappa S^2}{4}$ .	149
8.2	Διάγραμμα φάσης της $y' = \kappa(S-y)y + h$ στην περίπτωση που $h = -\frac{\kappa S^2}{4}$ .	150
8.3	Διάγραμμα φάσης της $y' = \kappa(S-y)y + h$ στην περίπτωση που $h > -\frac{\kappa S^2}{4}$ .	151
8.4	Διάγραμμα διακλάδωσης της $y' = \kappa(S-y)y + h$ .	152

8.5 Πεδία διευθύνσεων για την περίπτωση της λογιστικής διαφορικής εξίσωσης με σπορά/συγκομιδή. 152

# Κατάλογος Πινάκων

3.1	Οι πρώτες τιμές κάποιων λογιστικών απεικονίσεων. . . . .	53
8.1	Λύσεις της $W' = aW^m - cW$ στις περιπτώσεις όπου $a = 0$ ή $m = 1$ ή $c = 0$ . . . . .	148



# Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

**Ε.Α.Π.:** Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

**Σ.Δ.Ε.:** Συνήθης Διαφορική Εξίσωση

**Μ.Δ.Ε.:** Μερική Διαφορική Εξίσωση

**Μέρος Ι**

**Διακριτή Εκδοχή**





# Κεφάλαιο 1

## Γνωριμία με τη λογιστική απεικόνιση

### 1.1 Εισαγωγή - Οικολογική προσέγγιση (πληθυσμός ισορροπίας)

Ως λογιστικές απεικονίσεις εννοούμε τις αναδρομικά ορισμένες ακολουθίες:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = c(X_E - x_n) \quad (1.1)$$

όπου  $c, X_E \in \mathbb{R}$  αυθαίρετες σταθερές, ή τις ακολουθίες:

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n. \quad (1.2)$$

Στις σελίδες 6 και 7 της παρούσης εργασίας βλέπουμε ότι η (1.2) είναι μια απλούστερη εκδοχή της (1.1), εξ ου και δικαιολογείται ο όρος «λογιστικές απεικονίσεις» και στις δύο.

Η πιο παλιά αναφορά που συναντάμε στη λογιστική απεικόνιση αφορά καταρχάς την περίπτωση (1.2) και έγινε το 1947 από τους M. J. Ulam και J. von Neumann (βλ. [69] σελ. 1120) σε μια συνάντηση της Αμερικανικής Μαθηματικής Κοινότητας (AMS). Εκεί, σε αντίθεση με την βιολογική προσέγγιση που πλέον κυριαρχεί, αυτοί αναφέρθηκαν στη χρήση της:

$$x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$$

ως μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας, η οποία μπορεί να παράγει ψευδοτυχαίους αριθμούς για σχεδόν κάθε αρχική τιμή  $x_0$  (με την έννοια του μέτρου Lebesgue).

Την επόμενη χρήση της τη συναντάμε το 1968 (βλ. [62] σελ. 25) κι αυτή τη φορά χρησιμοποιείται η εκδοχή (1.1), της οποίας τον συμβολισμό διατηρήσαμε προς το παρόν εδώ αυτούσιο. Εκεί μοντελοποιείται μέσω της (1.1) μια κατάσταση όπου ένας πληθυσμός έχει ένα σημείο ισορροπίας ( $X_E$ ), από το οποίο όσο πιο κάτω βρίσκεται τόσο πιο ραγδαία αυξάνεται.

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να έρθουμε σε επαφή με τη λογιστική εξίσωση «πατώντας» πάνω στη λογική της και καταλήγοντας εν τέλει στον μαθηματικό φορμαλισμό της. Ακολουθούν διάφορες προσεγγίσεις!

### 1.2 Οικολογική προσέγγιση (πυκνοεξαρτώμενες γεννήσεις)

Ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό, στον οποίο το ποσοστό των γεννήσεων είναι πυκνοεξαρτώμενο. Πυκνότητα ενός πληθυσμού  $P_n$  (τη χρονική στιγμή  $n$ ) ως προς κάποιο διαθέσιμο μέγεθος  $S$  είναι η ποσότητα:

$$\rho_n = \frac{P_n}{S}.$$

Αυτή, δηλαδή, μπορεί να εκφράζει άτομα ανά κιλά τροφής ή άτομα ανά τετραγωνικό μέτρο ή άτομα ανά θέση εργασίας κ.τ.λ. Επομένως, εν προκειμένω, θεωρούμε ότι το ποσοστό των γεννήσεων εξαρτάται από αυτή την αναλογία του αγαθού  $S$  ανά άτομο.

Έστω επίσης  $\rho_{\max}$  η μέγιστη πυκνότητα που μπορούμε να έχουμε. Το λογιστικό μοντέλο λέει πως η ποσοστιαία αύξηση του πληθυσμού είναι ανάλογη της περιθώριας πυκνότητας  $\rho_{\max} - \rho_n$ . Έτσι, αν  $a$  η ποσοστιαία αύξηση του πληθυσμού, όταν η περιθώρια πυκνότητα είναι 1 άτομο ανά μονάδα τροφής (π.χ.), τότε σύμφωνα με το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P_n}{P_n} &= a(\rho_{\max} - \rho_n) \Leftrightarrow \frac{\Delta P_n}{P_n} = a\left(\rho_{\max} - \frac{P_n}{S}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = \frac{a}{S}(\rho_{\max} S - P_n).\end{aligned}$$

### 1.3 Οικολογική προσέγγιση (συσχέτιση με διαθέσιμους πόρους)

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε μιαν άλλη προσέγγιση της λογιστικής εξίσωσης, πάλι όμως από τον χώρο της οικολογίας. Εν προκειμένω θεωρούμε ότι κάθε άτομο καταναλώνει σταθερή ποσότητα πόρων ( $\nu_0$ ). Υπό αυτή την παραδοχή το λογιστικό μοντέλο ισχυρίζεται ότι το ποσοστό των ατόμων που επιβιώνει είναι ανάλογο των διαθέσιμων πόρων ( $s_n$ ) την τρέχουσα χρονική περίοδο ( $n$ ). Έχουμε, δηλαδή, το ακόλουθο μαθηματικό μοντέλο:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta P_n}{P_n} &= a(S - s_n) \Leftrightarrow \frac{\Delta P_n}{P_n} = a(S - P_n \nu_0) \\ &\Leftrightarrow \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = a\nu_0\left(\frac{S}{\nu_0} - P_n\right).\end{aligned}$$

### 1.4 Πιθανοκρατική προσέγγιση

Ας υποθέσουμε ότι σχεδιάζουμε ένα τυχερό παιχνίδι με την εξής απαίτηση: Αν έχει κάποιος  $n$  νίκες στη σειρά, τότε να μπορεί να έχει άλλη μία νίκη σερί στο βαθμό, όμως, που οι  $n$  στη σειρά νίκες δεν είναι ένα συχνό φαινόμενο. Δηλαδή αν σπανίως συμβαίνουν  $n$  νίκες, τότε να έχει μεγάλη πιθανότητα άλλης μιας νίκης σερί με τις υπόλοιπες. Αν συμβαίνουν συχνά  $n$  νίκες στη σειρά, τότε να είναι απίθανο να τύχει άλλη μία κατ' εξακολούθηση. Η συνθήκη αυτή κατασκευάζει μια ευχάριστη κατάσταση για τον παίκτη, ένα πιθανό δέλεαρ, αλλά που όμως δεν θα γονατίσει τη στοιχηματική εταιρία εξαντλώντας το αποθεματικό της με συχνές απανωτές νίκες παιχτών.

Αν ορίσουμε ως  $X_n$  το πλήθος των νικών στα  $n$  παιχνίδια, τότε:

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = n)$$

είναι η πιθανότητα να τύχουμε  $n$  νίκες στη σειρά. Η συνθήκη του προβλήματος είναι η:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1 | X_n = n) = \lambda(1 - \mathbb{P}(X_n = n)).$$

Όμως:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1 | X_n = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1 \& X_n = n)}{\mathbb{P}(X_n = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1)}{\mathbb{P}(X_n = n)} \\ &= \frac{p_{n+1}}{p_n}.\end{aligned}$$

Άρα:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \lambda(1 - p_n) \Leftrightarrow p_{n+1} = \lambda(1 - p_n)p_n.$$

## Κεφάλαιο 2

# Μελέτη λογιστικής απεικόνισης

### 2.1 Ορισμός λογιστικής απεικόνισης

Πριν παραθέσουμε τον ορισμό της λογιστικής απεικόνισης θα επιχειρήσουμε μια πιο γενική προσέγγιση. Προς τούτο θα απαιτηθεί μια εισαγωγική αναφορά σε κάποιες καινούριες έννοιες. Συγκεκριμένα, στα διάφορα παραδείγματα που συναντήσαμε μοντελοποιούσαμε την εξέλιξη ενός συστήματος στην πάροδο του χρόνου. Σε αυτό το πλαίσιο θα παραμείνουμε. Ως εκ τούτου θα χρειαστεί να δανειστούμε λίγη ορολογία από σχετικούς κλάδους.

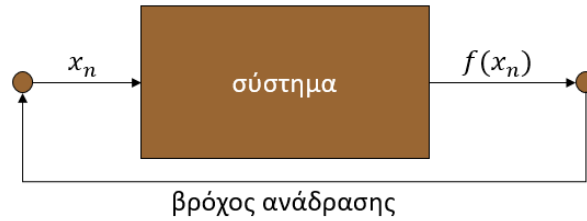
Καταρχάς, τι είναι ένα σύστημα; Στο [78] (σελ. 58) ορίζεται ως σύστημα «ένα “κανάλι” εισερχομένων και εξερχομένων Πληροφοριών, με Εισόδους και Εξόδους Πληροφοριών και με μηχανισμό επεξεργασίας τους». Στην International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences ([61] σελ. 13845) αναφέρεται ότι δυναμικό σύστημα είναι αυτό που μεταβάλλεται στην πάροδο του χρόνου. Ακριβέστερα μιλώντας, είναι αυτό που εξαρτάται από κάποιες χρονομεταβαλλόμενες μεταβλητές. Η κλασσική σχηματική αναπαράσταση δίνεται στο σχήμα 2.1.

Εμείς εδώ θα ασχοληθούμε με ένα κλειστό δυναμικό σύστημα χωρίς μνήμη. Στα κλειστά συστήματα η όποια είσοδος/έξοδος εξαντλείται αποκλειστικά στην ανάδραση. Καμία ύλη/πληροφορία δεν εισέρχεται ή εξέρχεται από το σύστημα (βλ. [9] σελ. 23). Η έλλειψη μνήμης κάνει το σύστημα να επηρεάζεται μόνο από την τελευταία του κατάσταση. Ένα κλειστό σύστημα χωρίς μνήμη, λοιπόν, τη χρονική στιγμή  $n$  δέχεται μια είσοδο  $x_n$ , την οποία επεξεργάζεται παράγοντας ένα αποτέλεσμα  $f(x_n)$  βάσει κάποιας συνάρτησης  $f$ . Αυτό το αποτέλεσμα γίνεται η είσοδος της επόμενης χρονικής στιγμής, της χρονικής στιγμής  $n+1$ , δηλαδή  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Και αυτή η είσοδος θα υποστεί την  $f$ -επεξεργασία και θα οδηγήσει με τη σειρά της στην επόμενη είσοδο  $x_{n+2} = f(x_{n+1})$ . Κ.ο.κ. (βλ. σχ. 2.2).

Εύλογο, λοιπόν, είναι να οδηγηθούμε στον κάτωθι ορισμό.



Σχήμα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση ενός δυναμικού συστήματος.



Σχήμα 2.2: Σχηματική αναπαράσταση ενός κλειστού δυναμικού συστήματος χωρίς μνήμη.

**δυναμικό σύστημα**

---

**Ορισμός 2.1.** Ο αναδρομικός τύπος:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

ονομάζεται ***f*-δυναμικό σύστημα** ή πιο απλά, όταν δεν υπάρχει πρόβλημα ασάφειας, **δυναμικό σύστημα**.

Επίσης, συμβολίζοντας:

$$f^{\circ 0}(x) = x \text{ και } f^{\circ n+1}(x) = f(f^{\circ n}(x)) \text{ και } f^{\circ -n}(x) = (f^{-1})^{\circ n}(x) = (f^{\circ n})^{-1}(x),$$

για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , έχουμε ότι:

$$x_n = f^{\circ n}(x_0).$$

Επανερχόμενοι στο θέμα της εργασίας, θα επιχειρήσουμε την προαναγγελθείσα πιο γενική προσέγγιση, χρησιμοποιώντας την ορολογία των Δυναμικών Συστημάτων και της Κυβερνητικής (βλ. [78] ορ. σελ. 15) εμπνεόμενοι σ' ένα βαθμό από το [16] (σελ. 299). Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα κλειστό κυβερνητικό σύστημα χωρίς μνήμη και  $m_n$  τη μέτρηση μιας πτυχής της κατάστασής του τη χρονική περίοδο  $n$ . Αν, επί παραδείγματι, το σύστημα είναι μια οικολογική κοινότητα, το  $m_n$  μπορεί να είναι η ετήσια μέτρηση της πληθυσμιακής του κατάστασης. Αν, από την άλλη, το σύστημα είναι ένα κοινωνικο-οικονομικο-πολιτικό σύστημα, τότε η  $m_n$  μπορεί να είναι η μέτρηση ενός οικονομικού δείκτη, ο οποίος μεταβάλλεται μέρα με τη μέρα.

Αφού το σύστημά μας είναι κλειστό και χωρίς μνήμη, ο μόνος που ευθύνεται για την τιμή της  $m_n$  είναι η προηγούμενη τιμή της, επομένως θα προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε τη σύνδεσή τους στα πλαίσια της παρούσης εργασίας. Εν προκειμένω, λοιπόν, θα υποθέσουμε ότι η εν λόγω πτυχή του συστήματος έχει ένα σημείο κορεσμού, στο οποίο η μέτρηση είναι  $S$  και ας δεχτούμε τώρα ότι η ποσοστιαία αύξηση των μετρήσεων από χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή είναι ανάλογη της απόστασης της  $m_n$  από το σημείο κορεσμού της, δηλαδή ανάλογη της ποσότητας  $S - m_n$ . Τοιαύτη περιπτώσει έχουμε:

$$\frac{\Delta m_n}{m_n} = \alpha(S - m_n).$$

Ας κάνουμε λίγο πιο απλά και ομοιόμορφα τα πράγματα. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
m_{n+1} &= \alpha(S - m_n)m_n + m_n \\
&= m_n(\alpha(S - m_n) + 1) \\
&= m_n(\alpha S + 1 - \alpha m_n) \\
&= (\alpha S + 1) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha S + 1} m_n\right) m_n.
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\frac{\alpha}{\alpha S + 1} m_{n+1} = (\alpha S + 1) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha S + 1} m_n\right) \frac{\alpha}{\alpha S + 1} m_n.$$

Θέτουμε  $x_n = \frac{\alpha}{\alpha S + 1} m_n$  και  $\lambda = \alpha S + 1$ , επομένως καταλήγουμε στη σχέση:

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n.$$

Ακολουθίες που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο ονομάζονται **λογιστικές απεικονίσεις**. Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, η λογιστική απεικόνιση δεν είναι παρά ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = \lambda(1 - x)x$ . Καθόσον στην περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης η συνάρτηση  $f$  είναι πραγματική συνάρτηση, στο εξής, οποιεδήποτε γίνεται λόγος περί  $f$ -δυναμικού συστήματος, η  $f$  θα νοείται ως πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής ορισμένη σε κάποιο διάστημα, εκτός κι αν δηλώνεται ρητά κάτι άλλο. Δεν υπάρχει ουσιαστικός λόγος ο οποίος η θεωρία δυναμικών συστημάτων να περιοριστεί στους πραγματικούς αριθμούς ή σε μία μεταβλητή, δεν είναι αναγκαίο καν να περιοριστεί σε μετρικούς χώρους. Παραταύτα αυτό θα κάνουμε, διότι οτιδήποτε άλλο ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσης εργασίας.

Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα ας κάνουμε όμως κάποιες παραδοχές περί του τι θέλουμε να συμβαίνει με τις λογιστικές απεικονίσεις που θα διαπραγματευτούμε στην παρούσα εργασία. Όποια ιδέα, από όσες κι αν αναφέραμε, και να πυροδότησε τον ορισμό της λογιστικής απεικόνισης, το αποτέλεσμα ήταν το ίδιο:

$$\lambda > 0 \text{ και } \forall n \in \mathbb{N} (x_n \geq 0).$$

Όχι ότι πειράζει να θεωρήσουμε  $\lambda < 0$ . Μάλιστα για  $\lambda = -2$  έχουμε και μία από τις τρεις γνωστές λύσεις<sup>[\*]</sup> της παραπάνω αναδρομικής σχέσης (βλ. [74] σελ. 1098):

$$x_{n+1} = -2(1 - x_n)x_n \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{2} - \cos \left[ \frac{1}{3} \left( \pi - (-2)^n \left( \pi - 3 \arccos \left( \frac{1}{2} - x_0 \right) \right) \right) \right].$$

Απλά δεν θα μάς απασχολήσει στην παρούσα εργασία.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει καταρχάς  $x_0 \in [0, 1]$ . Για την ακρίβεια, αν για κάποιο  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει  $x_n > 1$ , αυτομάτως το  $x_{n+1}$  καθίσταται αρνητικό, όπερ ανεπιθύμητον, όπως είπαμε. Τι είναι αυτό που διασφαλίζει ότι κανένας όρος δεν θα ξεπεράσει το 1 ανεξαρτήτως της επιλογής  $x_0 \in [0, 1]$ ; Δεδομένου ότι η συνάρτηση  $f(x) = \lambda(1 - x)x$  έχει μέγιστο το  $f(1/2) = \lambda/4$ , για να είναι όλοι οι όροι  $x_n \in [0, 1]$ , θα πρέπει  $\lambda \in [0, 4]$ . Κλείνοντας αυτή τη συζήτηση θα πρέπει να πούμε ότι η περίπτωση  $\lambda = 0$  είναι ανιαρά τετριμμένη και γι' αυτό τον λόγο δεν θα εξεταστεί.

Συνοψίζουμε λοιπόν:

<sup>[\*]</sup>Οι άλλες δύο γνωστές λύσεις (βλ. π.χ. [40] σελ. 2-3) του αναδρομικού τύπου  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  είναι:

- Για  $\lambda = 2$  και  $x_0 \in (0, 1/2)$  έχουμε:

$$x_n = \frac{1}{2} (1 - \exp(2^n \ln(1 - 2x_0))).$$

- Για  $\lambda = 4$  και  $x_0 \in (0, 1)$  έχουμε:

$$x_n = \frac{1}{2} (1 - \cos(2^n \arccos(1 - 2x_0))).$$

## Λογιστική απεικόνιση

**Ορισμός 2.2.** Ονομάζουμε *λογιστική απεικόνιση* κάθε ακολουθία  $(x_n)$  με αναδρομικό τύπο:

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n,$$

όπου  $\lambda \in (0, 4]$  και  $x_0 \in [0, 1]$ .

Ας πάμε τώρα να τη μελετήσουμε!

## 2.2 Σημεία ισορροπίας

Θα εξετάσουμε τώρα τη λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  με διάφορες αρχικές τιμές. Εν πρώτοις με αρχική τιμή  $x_0 = 0.25$  και ακολούθως με αρχική τιμή  $x_0 = 0.3$ . Έχουμε τις κάτωθι 10 τιμές σε κάθε περίπτωση:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_n$	0.25	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75

και:

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_n$	0.300	0.840	0.538	0.994	0.022	0.088	0.321	0.872	0.448	0.989	0.043

Παρατηρούμε ότι το 0.75 είναι κάτι σαν μαύρη τρύπα. Με το που πέσει κανείς πάνω του δεν πρόκειται να αποχωρήσει ποτέ. Με τους δύο αυτούς πειραματισμούς μας δεν παρατηρούμε να συμβαίνει κάτι ανάλογο με τους άλλους αριθμούς που εμφανίζονται. Αυτό αναδεικνύει μια ξεχωριστή αξία για τον αριθμό 0.75 και για κάθε τέτοιον αριθμό που η παραμικρή επαφή μαζί του είναι κατηλωτική. Έτσι προκύπτει η ανάγκη για τον πρώτο μας ορισμό (βλ. επίσης [23] σελ. 9).

## σημείο ισορροπίας

**Ορισμός 2.3.** Ονομάζουμε *σημείο ισορροπίας* ενός  $f$ -δυναμικού συστήματος το στοιχείο  $x^* \in \mathcal{D}_f$ , για το οποίο:

$$f(x^*) = x^*.$$

Είδαμε ότι τα σημεία ισορροπίας έχουν την ιδιότητα να παγιδεύουν τις ακολουθίες που θα έχουν την «ατυχία» να πέσουν πάνω τους. Πώς όμως συμπεριφέρονται στην ακολουθία πριν αυτή πέσει πάνω τους; Συμπεριφέρονται όντως σαν μαύρες τρύπες που ρουφάν τα πάντα ή μήπως σαν μια μπάλα στην κορυφή ενός λόφου, η οποία ναι μεν θα σταθεί αν την τοποθετήσεις ακριβώς εκεί, αλλά θα απομακρυνθεί αν την βάλεις λίγο πιο δίπλα;

Τα ερωτήματα αυτά μας εξαναγκάζουν να προβούμε σε κάποιες περαιτέρω κατηγοριοποιήσεις των σημείων ισορροπίας. Η πρώτη κατηγοριοποίηση θα σχηματιστεί βάσει της ευστάθειας. Αυτή

απαντάει το εξής ερώτημα: Δοθείσας μιας οσοδήποτε στενής περιοχής<sup>[1]</sup> πέριξ της θέσεως ισορροπίας ( $I_\varepsilon$ ), υπάρχουν περιοχές ( $I_\delta$ ), από τις οποίες όταν εκκινεί το σύστημα ( $x_0 \in I_\delta$ ) να καταλήγει άμεσα και άπαξ διαπαντός εντός της ( $f^{on}(x_0) \in I_\varepsilon$ ); Ή μήπως, όσο και να περιοριστούμε πέριξ του  $x^*$ , πάντα θα υπάρχουν στιγμές που το σύστημα θα βγαίνει εκτός της επιθυμητής προκαθορισμένης περιοχής;

Πιο φορμαλιστικά (βλ. [23] σελ. 11 και σελ. 34) έχουμε τον κάτωθι ορισμό:

#### (ημι)ευστάθεια

**Ορισμός 2.4.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  είναι **ευσταθές** εάν, δοθέντος ενός  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε η  $|x_0 - x^*| < \delta$  να οδηγεί στην  $|f^{on}(x_0) - x^*| < \varepsilon$  για κάθε φυσικό  $n > 0$ . Αν το  $x^*$  δεν είναι ευσταθές, τότε λέμε ότι είναι **ασταθές**.

**Ορισμός 2.5.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  είναι **αριστερά (δεξιά) ημιευσταθές** εάν, δοθέντος ενός  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο, ώστε η  $x_0 \in (x^* - \delta, x^*)$  ( $x_0 \in (x^*, x^* + \delta)$ ) να οδηγεί στην  $f^{on}(x_0) \in (x^* - \varepsilon, x^*)$  ( $f^{on}(x_0) \in (x^*, x^* + \varepsilon)$ ) για κάθε φυσικό  $n > 0$ .

«Και πώς θα μπορούσε να είναι ένα σημείο ισορροπίας ασταθές;», θα μπορούσε κάποιος να ρωτήσει. Θα εξετάσουμε το  $f$ -δυναμικό σύστημα με:

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}.$$

Λύνοντας την  $f(x) = x$  βρίσκουμε τρία σημεία ισορροπίας, τα:

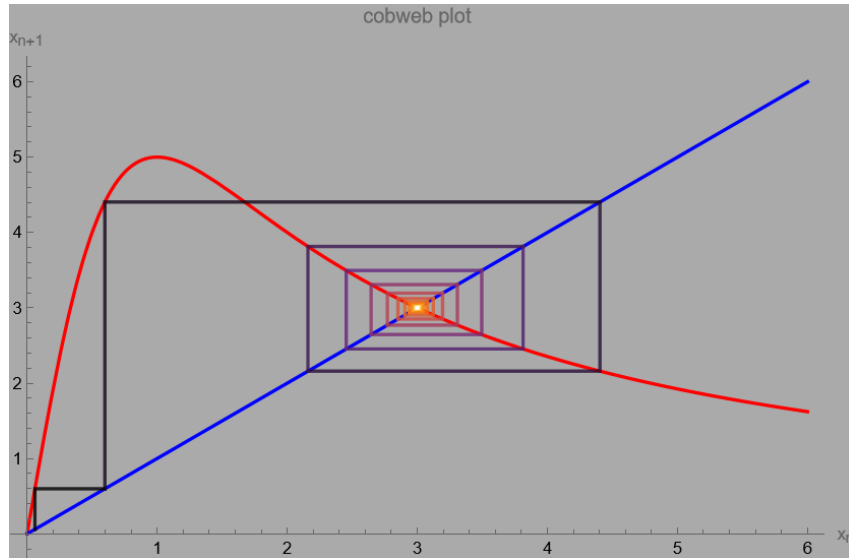
$$x_1^* = -2 \text{ και } x_2^* = 0 \text{ και } x_3^* = 2.$$

Τα επόμενα βήματα θα γίνουν με τη συνεισφορά του διαγράμματος König-Lémeray (γράφημα ιστού αράχνης, αν προτιμάτε). Για να το παράγουμε σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων την ευθεία  $\epsilon: y = x$  και τη γραφική παράσταση της  $f$  (βλ. σχ. 2.3). Ακολουθώς ξεκινάμε με το σημείο  $A_0(x_0, x_0)$  της ευθείας  $\epsilon$  και κινούμαστε κατακόρυφα μέχρι να συναντήσουμε σημείο της  $\mathcal{C}_f$ . Αυτό θα είναι το  $B_0(x_0, f(x_0))$  ή, με άλλα λόγια, το  $B_0(x_0, x_1)$ . Η επόμενη κίνηση είναι οριζοντίως, μέχρι να ξανασυναντήσουμε την ευθεία  $\epsilon$ , κι αυτό θα συμβεί στο σημείο  $A_1(x_1, x_1)$ . Κατόπιν κινούμαστε πάλι κατακόρυφα μέχρι να ξαναβρούμε τη  $\mathcal{C}_f$  στο σημείο της  $B_1(x_1, f(x_1))$ , δηλαδή το  $B_1(x_1, x_2)$ . Ύστερα πάλι κινούμαστε οριζοντίως μέχρι να προσκρούσουμε στην ευθεία  $\epsilon$  στο σημείο  $A_2(x_2, x_2)$ . Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται δείχνοντάς μας την πορεία της ακολουθίας  $x_{n+1} = f(x_n)$  βάσει της αρχικής τιμής που δώσαμε.

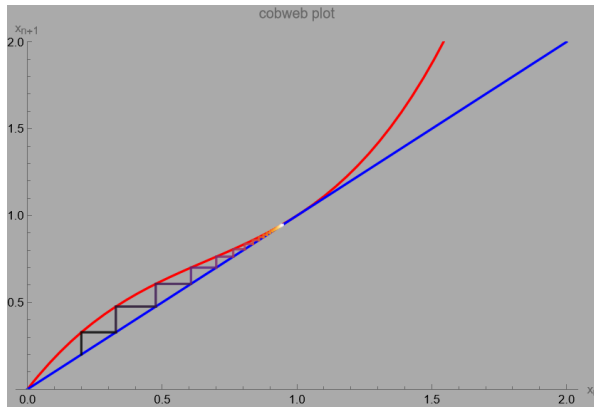
Μιλώντας για το  $f$ -δυναμικό σύστημα που ορίσαμε και διαλέγοντας αρχική τιμή  $x_0 = 0.06$  βλέπουμε στο σχήμα 2.3 ότι απομακρυνόμαστε ολοένα και περισσότερο από το  $x_2^* = 0$  και πλησιάζουμε στο  $x_3^* = 2$ , στο σημείο που «πυρώνει» το γράφημα König-Lémeray.

Όσον αφορά την ημιευστάθεια, θα δανειστούμε ένα παράδειγμα από το [15] (σελ. 4-5). Θα χρησιμοποιήσουμε το  $f$ -δυναμικό σύστημα με:

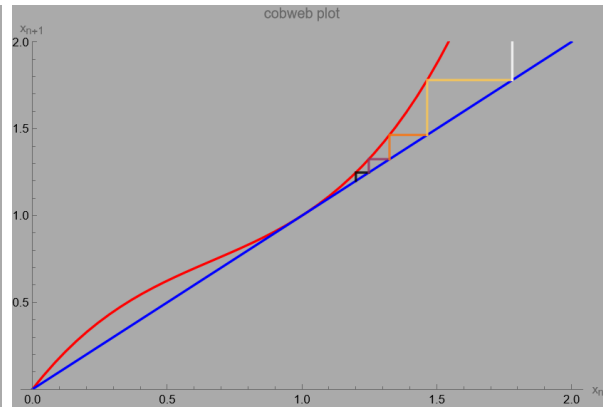
<sup>[1]</sup>Ο αναγνώστης προσέξει ότι δεν έχουμε χρησιμοποιήσει κάποια έννοια που να εξαντλεί την παρούσα φάση της μελέτης στο  $\mathbb{R}$ .



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα König-Lémeray για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$  και  $x_0 = 0.06$ .



(α) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.2$ .



(β) Αρχική τιμή  $x_0 = 1.2$

Σχήμα 2.4: Διάγραμμα König-Lémeray για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)$ . Αριστερή ημιευστάθεια.

$$f(x) = x(x^2 - 2x + 2).$$

Αυτό διαθέτει δύο σημεία ισορροπίας, τα:

$$x_1^* = 0 \text{ και } x_2^* = 1.$$

Το  $x_2^*$  είναι αριστερά ημιευσταθές, καθόσον η  $f^{(n)}(x_0)$  προσεγγίζει το  $x_2^*$  εφόσον  $x_0 < 1$  (βλ. σχ. 2.4α), αλλά απομακρύνεται από αυτό εφόσον  $x_0 > 1$  (βλ. σχ. 2.4β).

Από την παραπάνω συζήτηση δίνεται η εντύπωση ότι αν ένα σημείο είναι ευσταθές, τότε οι ακολουθίες με αναδρομικό τύπο  $x_{n+1} = f(x_n)$  θα συγκλίνουν σε αυτό, ανεξάρτητα από την αρχική τιμή  $x_0$ . Άλλωστε, ο ορισμός της ευστάθειας που παραθέσαμε ομοιάζει με τον ορισμό της σύγκλισης (βλ. π.χ. [17] σελ. 4). Είναι όμως έτσι;

Ας πάρουμε, επί παραδείγματι, το  $f$ -δυναμικό σύστημα με:

$$f(x) = \begin{cases} x \cos^2 \frac{\pi}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}.$$



Το 0 είναι ένα προφανές σημείο ισορροπίας. Επίσης αν επιλεγεί ένα  $x_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , τότε  $|x_1| \leq |x_0|$ , καθόσον  $0 \leq \cos^2(\pi/x_0) \leq 1$ . Έτσι και το  $x_1$  θα βρίσκεται εντός του  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Γενικότερα αν  $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , τότε  $|x_{n+1}| \leq |x_n|$ , καθόσον  $0 \leq \cos^2(\pi/x_n) \leq 1$ . Έτσι και το  $x_{n+1}$  θα βρίσκεται εντός του  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Συνεπώς, χάρις στη Μαθηματική Επαγωγή έχουμε ότι για οσοδήποτε στενή περιοχή του 0 (έστω  $I_\varepsilon$ ) μπορούμε να βρούμε γειτονιά του 0 από την οποία να εισερχόμαστε άμεσα και ανεπιστρεπτί στην  $I_\varepsilon$ .

Στο σημείο αυτό αρχίζει και ξεκαθαρίζει το τοπίο. Για κάθε  $\varepsilon > 0$  που διαλέγαμε βρίσκαμε διάστημα  $I_\delta$  από το οποίο όταν εκκινούν οι ακολουθίες μας να μένουν «κλειδωμένες» στο διάστημα  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . Αυτό όμως δεν τις υποχρέωνε να πλησιάσουν περισσότερο από το  $\varepsilon$  που προκαθορίσαμε. Όμως η σύγκλιση στο 0 κάποιας ακολουθίας απαιτεί από αυτήν να περιορίζεται περαιτέρω και με την επόμενη επιλογή του  $\varepsilon$ . Αλλά με την επόμενη επιλογή του  $\varepsilon$  πιθανότατα να έχουμε άλλο διάστημα εκκίνησης ( $I_\delta$ ) με άλλες ακολουθίες εντός του. Κι αυτό συμβαίνει εν προκειμένω! Όσο περιορισμένη περιοχή  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  και να διαλέξουμε, μπορούμε να βρούμε ακέραιο  $k > 1/\varepsilon$  (Αρχιμήδεια Ιδιότητα του  $\mathbb{R}$ , βλ. [17] σελ. 5). Έτσι, διαλέγοντας  $x_0 = 1/k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  καταλήγουμε στη σταθερή ακολουθία  $x_n = 1/k$ , που προφανώς να μην συγκλίνει, αλλά όχι στο 0.

Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι η ευστάθεια δεν σημαίνει απαραίτητως και σύγκλιση. Αν θελήσουμε να μιλήσουμε για «έλξη», τότε πάμε στον επόμενο ορισμό, αυτόν του ελκυστή (βλ. [23] σελ. 11). Ένα σημείο ισορροπίας  $x^*$  είναι ελκυστής, αν υπάρχει περιοχή  $I_\eta$ , η οποία να λειτουργεί ως παγίδα. Δηλαδή άπαξ και βρεθούμε σε αυτήν (δηλαδή  $x_0 \in I_\eta$ ), να παρασυρόμαστε πάνω στην  $x^*$  (δηλαδή  $x_n \rightarrow x^*$ ). Σε μαθηματική γλώσσα:

### ελκυστής

**Ορισμός 2.6.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα. Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  είναι **ελκυστής** εάν υπάρχει  $\eta > 0$  τέτοιο, ώστε η σχέση  $|x_0 - x^*| < \eta$  να συνεπάγεται τη σχέση  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(x_0) = x^*$ .

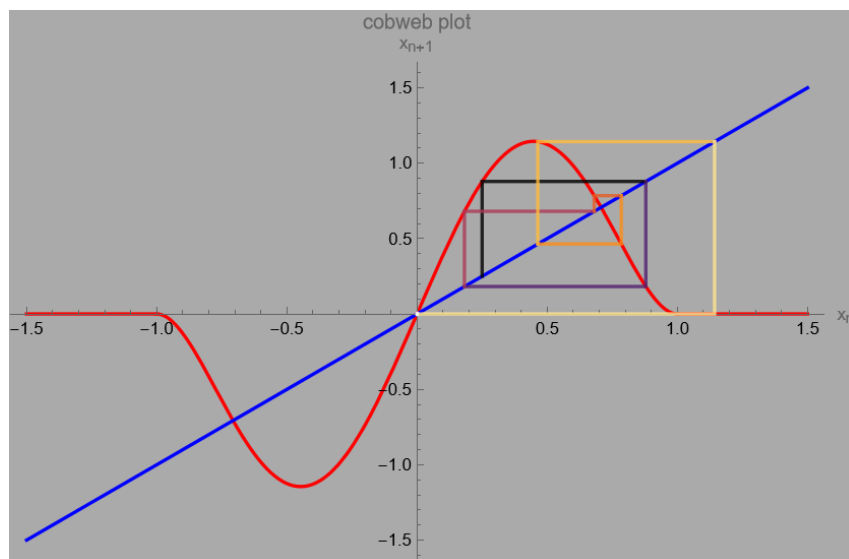
Στην περίπτωση που  $\eta = \infty$ , το  $x^*$  καλείται **καθοδικός ελκυστής**.

Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ο ορισμός του ελκυστή να υπερκαλύπτει τον ορισμό της ευστάθειας. Σε τελική ανάλυση, αν το  $x^*$  είναι ελκυστής, τότε στην περίπτωση που διαλέξουμε  $x_0$  εντός της περιοχής-παγίδας ( $I_\eta$ ), θα είναι  $x_n \rightarrow x^*$ , όπερ σημαίνει ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$  θα υπάρχει κάποιο  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο, ώστε  $d(x_n, x^*) < \varepsilon$  για τα  $n > n_0$ . Οπότε ιδού! Εσωκλείστηκε η ακολουθία σε αυθαίρετο διάστημα  $I_\varepsilon$ .

Αυτό όμως είναι μια ψευδαίσθηση. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά τα παραπάνω, θα δούμε ότι το  $n_0$  που επιλέξαμε εξαρτάται από την εκάστοτε ακολουθία που έχουμε, συγκεκριμένα από την αρχική τιμή που κάθε φορά διαλέγουμε. Συνεπώς, να μην όλες οι εκ του  $I_\eta$  εκπορευόμενες ακολουθίες είναι εν τέλει κλεισμένες στο προεπιλεγθέν διάστημα  $I_\varepsilon$ , αλλά κανείς δεν τους απαγορεύει να έχουν αυθαίρετα μεγάλες αρχικές αποκλίσεις, οι οποίες ν' απαγορεύουν στις ακολουθίες μας να ενταχθούν εξ ολοκλήρου στο  $I_\varepsilon$ . Μιλώντας με ορολογία καθομιλουμένης, μπορεί το  $x^*$  να ροφεί τους τελικούς όρους από όλες τις ακολουθίες που «ατυχώς» βρεθούν στο  $I_\eta$ , αυτό όμως δεν σημαίνει πως αυτές δεν θα κάνουν μια προσποίηση απόκλισης η κάθε μία σε διαφορετική χρονική στιγμή, για διαφορετική διάρκεια και διαφορετικής έντασης.

Τέτοια δυναμικά συστήματα μπορούμε να βρούμε στο [42] (σελ. 183-185). Ένα εξ αυτών παράδειγμα «παθολογικής» συμπεριφοράς είναι το  $f$ -δυναμικό σύστημα με:

$$f(x) = \begin{cases} 4x(1-x^2)^2, & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$



Σχήμα 2.5: Διάγραμμα König-Lémeray για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = 4x(1 - x^2)^2$  αν  $|x| \leq 1$  (και  $f(x) = 0$  αλλού) και  $x_0 = 0.25$ .

Από το διάγραμμα König-Lémeray (βλ. σχ. 2.5) βλέπουμε ότι νομοτελειακά η εκάστοτε  $x_n$  θα μηδενιστεί, αφού όμως κάνει μian αρχική απόκλιση. Λόγω του τελικού μηδενισμού της ακολουθίας, σημαίνει πως το 0 είναι ελκυστής. Μάλιστα, είναι καθολικός ελκυστής, διότι σε αυτό θα οδηγηθούμε από όποιο σημείο και να ξεκινήσουμε. Από την άλλη, αν διαλέξουμε οποιοδήποτε  $\varepsilon < 1$ , τότε από όποιο διάστημα  $(-\delta, \delta)$  και να ξεκινήσουμε ( $x_0 \in (-\delta, \delta)$ ), θα έχουμε αρχική απόκλιση τουλάχιστον μέχρι το 1. Δηλαδή, για κάποιο  $n \in \mathbb{N}^*$  θα είναι  $|x_n| > 1$ , πράγμα που καθιστά ανεφάρμοστο το να είναι  $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  για όλα τα  $n \in \mathbb{N}^*$ . Συνεπώς, το 0 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

Είδαμε ότι το να είναι ένα σημείο ισορροπίας ευσταθές δεν το κάνει ελκυστή. Όπως και το να είναι ελκυστής δεν το κάνει ευσταθές. Έχουμε ανάγκη, λοιπόν, από έναν επιπλέον ορισμό που θα τα συνδυάζει και τα δύο. Ένα σημείο ισορροπίας όντας και ελκυστής και ευσταθές, διαθέτει μια περιοχή  $I$  σαν τον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας. Αν κάτι βρεθεί εκεί ( $x_0 \in I$ ) αυτομάτως παγιδεύεται εντός της μαύρης τρύπας (ευστάθεια) και οδεύει με πορεία πρόσκρουσης προς το κέντρο της (ελκυστής). Πιο τυπικά μιλώντας έχουμε τον επόμενο ορισμό μας (βλ. [23] σελ. 12):

#### ασυμπτωτική ευστάθεια

**Ορισμός 2.7.** Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταδές** εάν είναι ευσταθές και ελκυστής.

Στην περίπτωση που  $\eta = \infty$  (βλ. ορ. 2.6), το  $x^*$  καλείται **καδοβικά ασυμπτωτικά ευσταδές**.

**Ορισμός 2.8.** Το σημείο ισορροπίας  $x^*$  λέγεται **αριστερά (δεξιά) ημιασυμπτωτικά ευσταδές** εάν είναι αριστερά (δεξιά) ημιευσταδές και επίσης υπάρχει  $\eta > 0$  τέτοιο, ώστε  $f^{\circ n}(x_0) \rightarrow x^*$  οποιεδήποτε  $x_0 \in (x^* - \eta, x^*)$  (ή  $x_0 \in (x^*, x^* + \eta)$ ).

Πώς όμως εξακριβώνουμε το είδος του σημείου ισορροπίας; Οι περισσότερες πηγές μάς λένε

τι συμβαίνει στην περίπτωση που  $|f'(x^*)| < 1$ , δηλαδή στις περιπτώσεις που έχουμε *υπερβολική εξίσωση διαφορών* (βλ. π.χ. [15] σελ. 3). Από την άλλη, στην περίπτωση που  $|f'(x^*)| = 1$  γίνεται λόγος για *αδιάφορη ισορροπία* (βλ. π.χ. [19] σελ. 48) και δίνεται έμφαση στην ιδιόρρυθμη συμπεριφορά αυτών των σημείων ισορροπίας, όπως η *ημιευστάθεια*<sup>[§]</sup> (βλ. [15] σελ. 4). Το [23] (σελ. 27, 29, 32 και 34-35) δεν εστιάζει τόσο στην ιδιόρρυθμία των *μη-υπερβολικών εξισώσεων διαφορών*, αλλά προσφέρει κάποια κριτήρια ασυμπτωτικής ευστάθειας ή αστάθειας και στις περιπτώσεις αυτές. Ακολουθούν παρακάτω:

### κριτήρια ασυμπτωτικής ευστάθειας

**Θεώρημα 2.1.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα και  $x^*$  κάποιο σημείο ισορροπίας του.

(α') Αν ισχύει  $|f'(x^*)| < 1$ , τότε αυτό είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

(β') Αν ισχύει  $|f'(x^*)| > 1$ , τότε αυτό είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

(γ') Αν ισχύει  $f'(x^*) = 1$ , τότε:

(i) αν  $f''(x^*) < 0$ , τότε αυτό είναι δεξιά ημιασυμπτωτικά ευσταθές,

(ii) αν  $f''(x^*) > 0$ , τότε αυτό είναι αριστερά ημιασυμπτωτικά ευσταθές,

(iii) αν  $f''(x^*) = 0$  και  $f'''(x^*) > 0$ , τότε αυτό είναι ασταθές,

(iv) αν  $f''(x^*) = 0$  και  $f'''(x^*) < 0$ , τότε αυτό είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(δ') Αν ισχύει  $f'(x^*) = -1$ , τότε<sup>[\*]</sup>:

(i) αν  $Sf(x^*) < 0$ , τότε είναι ασυμπτωτικά ευσταθές,

(ii) αν  $Sf(x^*) > 0$ , τότε είναι ασταθές.

<sup>[\*]</sup>Ως  $Sf(x)$  ορίζουμε την κατά Schwarz παράγωγο της  $f$  στο  $x$ , ήτοι:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Πάμε τώρα στη λογιστική απεικόνιση. Ποια είναι τα σημεία ισορροπίας της; Για να τα βρούμε θα λύσουμε την εξίσωση:

$$\lambda(1 - x^*) = x^*.$$

Έχουμε, λοιπόν:

$$\begin{aligned} \lambda(1 - x^*) = x^* &\Leftrightarrow x^* = 0 \text{ ή } \lambda(1 - x^*) = 1 \\ &\Leftrightarrow x^* = 0 \text{ ή } x^* = 1 - \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Για  $\lambda = 4$  το ένα εκ των δύο σημείων ισορροπίας προκύπτει 0.75, κάτι που επιβεβαιώνει και θεωρητικά το γεγονός που παρατηρήσαμε εμπειρικά στην αρχή αυτής της ενότητας (σελ. 8).

Ας πάμε να εξετάσουμε τώρα την ευστάθεια ή την αστάθεια των εν λόγω σημείων ισορροπίας. Ορίζουμε:

$$f(x) = \lambda(1 - x)x,$$

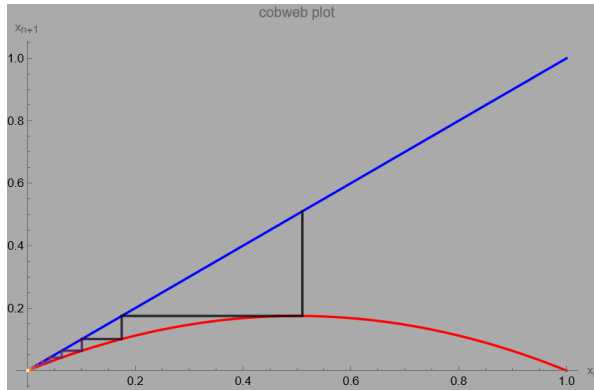
<sup>[§]</sup> **Ημιευστάθεια** είναι η ευστάθεια από τη μία μεριά του σημείου ισορροπίας.

άρα:

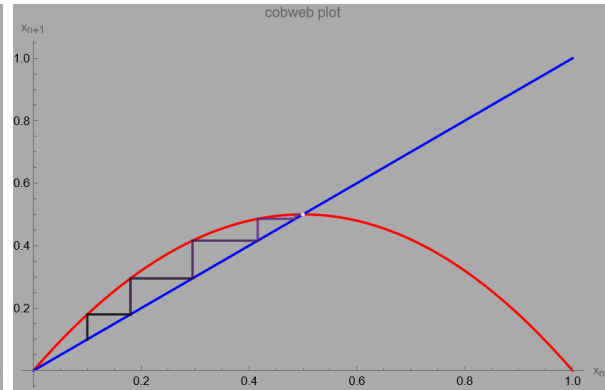
$$f'(x) = \lambda(1 - 2x).$$

Έτσι:

$$f'(0) = \lambda \quad \text{και} \quad f'\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda.$$

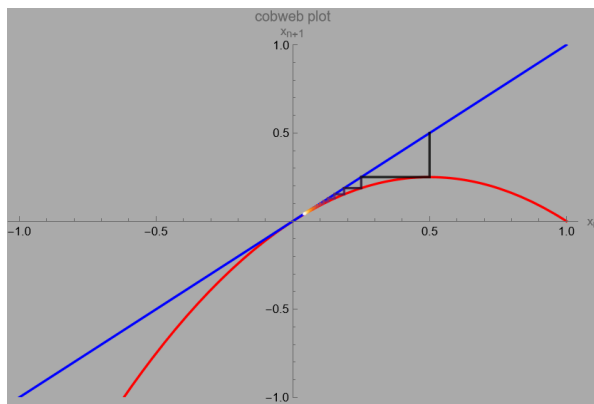


(α) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.51$  και  $\lambda = 0.7$ . Το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

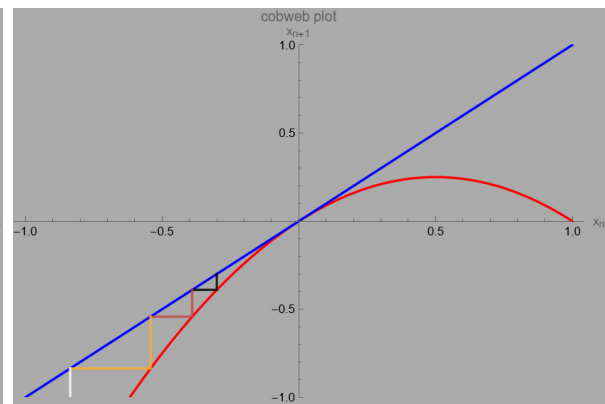


(β) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.1$  και  $\lambda = 2$ . Το 0 είναι ασταθές.

Σχήμα 2.6: Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = \lambda(1-x)x$ .



(α) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.5$ .



(β)  $x_0 = -0.3$

Σχήμα 2.7: Διάγραμμα Kőnig-Lémeray για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = 1(1-x)x$ . Δεξιά ημιευστάθεια.

👉 Ευστάθεια του 0 👈

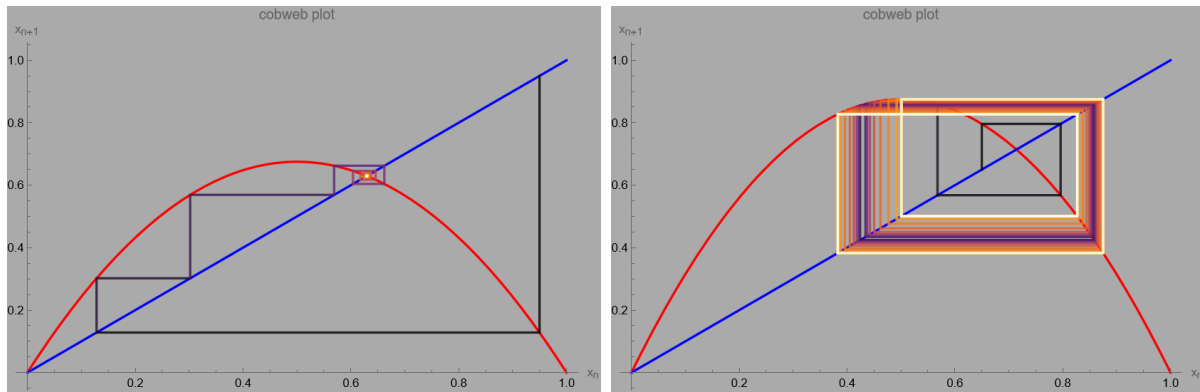
Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας στην περίπτωση που  $\lambda \in (0, 1)$  (βλ. σχ. 2.6α), ενώ για  $\lambda > 1$  καθίσταται ασταθές (βλ. σχ. 2.6β).

Στην περίπτωση που  $\lambda = 1$  θα πρέπει να υπολογίσουμε και τη δεύτερη παράγωγο της  $f$ :

$$f''(x) = -2\lambda.$$

Καθόσον  $f''(0) = -2 < 0$ , έχουμε ότι στην περίπτωση που  $\lambda = 1$  η  $f^{(n)}(x_0)$  συγκλίνει στο 0, αν  $x_0 > 0$  (βλ. σχ. 2.7α), ενώ απομακρύνεται από αυτό, όταν  $x_0 < 0$  (βλ. σχ. 2.7β). Βέβαια, καθόσον μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση όπου  $x_0 \in [0, 1]$ , καταλήγουμε ότι για  $\lambda = 1$  το 0 συμπεριφέρεται ως ασυμπτωτικά ευσταθές.

👉 Ευστάθεια του 0 👈



(α') Αρχική τιμή  $x_0 = 0.95$  και  $\lambda = 2.7$ . Το  $1 - 1/\lambda$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (β') Αρχική τιμή  $x_0 = 0.65$  και  $\lambda = 3.5$ . Το  $1 - 1/\lambda$  είναι ασταθές.

Σχήμα 2.8: Διάγραμμα König-Lémeray για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = \lambda(1-x)x$ .

👉 Ευστάθεια του  $1 - 1/\lambda$  👉

Όσον αφορά το άλλο σημείο ισορροπίας, το  $x^* = 1 - 1/\lambda$ , αυτό είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν (βλ. σχ. 2.8α):

$$|2 - \lambda| < 1 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 3,$$

ενώ είναι ασταθές όταν (βλ. σχ. 2.8β):

$$|2 - \lambda| > 1 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 1) \cup (3, 4].$$

Όμως για  $\lambda \in (0, 1)$  είναι  $1 - 1/\lambda < 0$ . Δεδομένης της υπόθεσής μας  $x_n \in [0, 1]$  (βλ. ορ. 2.2 και σχόλια στη σελ. 7), τα  $x_n$  δεν συγχρωτίζονται ούτε οριακά με το  $1 - 1/\lambda$  για  $\lambda \in (0, 1)$ . Επομένως, πρακτικά, για  $\lambda \in (0, 1)$  έχουμε μόνο ένα σημείο ισορροπίας, το 0 που εξετάσαμε προηγουμένως.

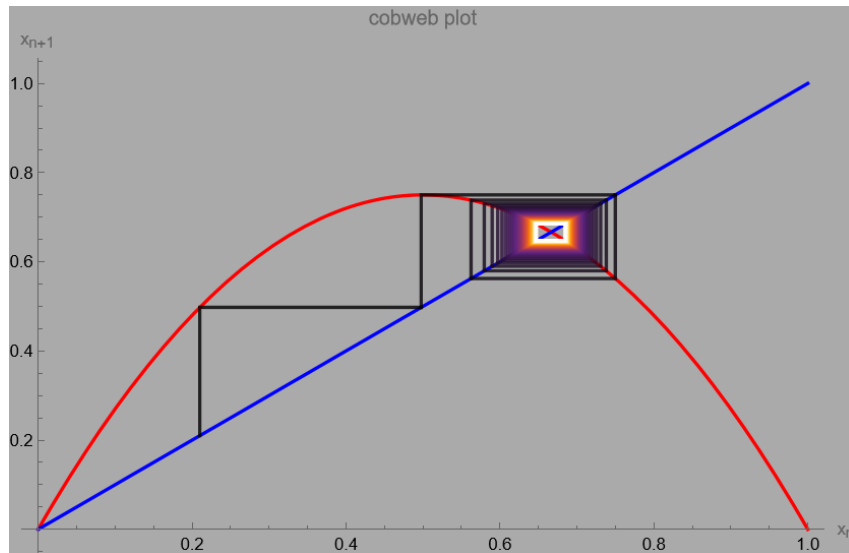
Τι γίνεται όμως όταν  $\lambda = 1$  και  $\lambda = 3$ ; Αν  $\lambda = 1$ , τότε  $1 - 1/\lambda = 0$ , άρα πρακτικά εξετάζουμε πάλι το 0 ως σημείο ισορροπίας, το οποίο είδαμε ότι εν γένει είναι ημιασυμπτωτικά ευσταθές για  $\lambda = 1$ , αλλά για  $x \in [0, 1]$  μπορεί να θεωρηθεί ασυμπτωτικά ευσταθές. Για να απαντήσουμε τη δεύτερη περίπτωση όπου  $\lambda = 3$ , καθόσον τότε  $f'(1 - 1/\lambda) = 2 - \lambda = -1$ , θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα την κατά Schwarz παράγωγο της  $f$  στο  $x^* = 1 - 1/\lambda$ :

$$Sf(x^*) = \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right)^2 = -\frac{3}{2} \left( \frac{-2\lambda}{-1} \right)^2 = -54 < 0.$$

Βρίσκουμε, λοιπόν, ότι το  $1 - 1/\lambda$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για  $\lambda = 3$  (βλ. σχ. 2.9).

👉 Ευστάθεια του  $1 - 1/\lambda$  👉

Ανακεφαλαιώνουμε:



Σχήμα 2.9: Διάγραμμα Κόνιγ-Λέμεραγ για το  $f$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = 3(1-x)x$  και αρχική τιμή  $x_0 = 0.21$ .

### ευστάθεια σημείων ισορροπίας λογιστικής απεικόνισης

**Θεώρημα 2.2.** Έστω το  $f$ -δυναμικό σύστημα με<sup>[\*]</sup>:

$$f(x) = \lambda(1-x)x.$$

- Αν  $\lambda \in (0, 1]$ , τότε αυτή έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας το 0, το οποίο μάλλον είναι ασυμπτωτικά ευσταθές<sup>[†]</sup>.
- Αν  $\lambda \in (1, 4]$ , τότε αυτή έχει δύο σημεία ισορροπίας, το 0 και το  $1 - \frac{1}{\lambda}$ .

\* Το 0 είναι ασταθές.

\* Το  $1 - \frac{1}{\lambda}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $1 < \lambda \leq 3$ , διαφορετικά είναι ασταθές.

<sup>[\*]</sup> Έχουμε, δηλαδή, τη λογιστική απεικόνιση:

$$x_{n+1} = \lambda(1-x_n)x_n.$$

<sup>[†]</sup> Όπως αναφέραμε στη σελ. 15 το 0 είναι ημισυμπτωτικά ευσταθές για  $\lambda = 1$ . Απλά, επειδή θεωρούμε  $x_0 \in [0, 1]$  συμπεριφέρεται ως ασυμπτωτικά ευσταθές.

## 2.3 Περιοδικότητα

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα την έννοια του σημείου ισορροπίας. Ήταν το σημείο που άπαξ και πέσει πάνω σου, τότε καθηλώνεσαι κει. Τώρα θα δούμε κάτι λίγο ευρύτερο. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την περίπτωση που η «πρόσκρουση» σε μια τιμή δεν σε εγκλωβίζει πάνω της, αλλά σε υποχρεώνει σε μια αέναη επίσκεψη ανά τακτά διαστήματα. Ας το δούμε λίγο πιο αυστηρά (βλ. [23] σελ. 35):

————— **περιοδικότητα** —————

**Ορισμός 2.9.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα και  $b \in \mathcal{D}_f$ . Το  $b$  καλείται  **$k$ -περιοδικό σημείο** αν ισχύει ότι  $f^{\circ k}(b) = b$ .

Το σύνολο:

$$\mathcal{O}(b) = \{b, f(b), f^{\circ 2}(b), \dots, f^{\circ k-1}(b)\}$$

ονομάζεται **περιοδική τροχιά** του  $b$  ή  **$k$ -κύκλος**.

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι το  $b$  είναι  $k$ -περιοδικό, αν αποτελεί σημείο ισορροπίας του  $f^{\circ k}$ -συστήματος. Υπό αυτή την οτική γωνία μπορούμε να επεκτείνουμε και την έννοια της ευστάθειας στην περίπτωση της περιοδικής συμπεριφοράς (βλ. [23] σελ. 39). Ας το δούμε.

————— **περιοδική ευστάθεια** —————

**Ορισμός 2.10.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα και  $b \in \mathcal{D}_f$  ένα  $k$ -περιοδικό του σημείο. Το  $b$  είναι:

- **ευσταδές περιοδικό σημείο**, αν είναι ευσταδές σημείο ισορροπίας του  $f^{\circ k}$ -δυναμικού συστήματος,
- **ασυμπτωτικά ευσταδές περιοδικό σημείο**, αν είναι ασυμπτωτικά ευσταδές σημείο ισορροπίας του  $f^{\circ k}$ -δυναμικού συστήματος,
- **ασταδές περιοδικό σημείο**, αν είναι ασταδές σημείο ισορροπίας του  $f^{\circ k}$ -δυναμικού συστήματος,

Όσον αφορά το ζήτημά μας, ας πάμε αρχικά να βρούμε τα 2-περιοδικά σημεία της λογιστικής απεικόνισης. Προς τούτο θα χρειαστούμε την  $f^{\circ 2}$ , όπου  $f(x) = \lambda(1-x)x$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{\circ 2}(x) &= \lambda(1 - \lambda(1-x)x)\lambda(1-x)x \\ &= -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - \lambda^2(\lambda+1)x^2 + \lambda^2 x. \end{aligned}$$

Αν το  $x^*$  είναι λύση της  $f(x) = x$ , τότε επίσης θα ισχύει:

$$f^{\circ 2}(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^*,$$

άρα το  $x^*$  είναι λύση και της  $f^{\circ 2}(x) = x$ . Συνεπώς έχουμε ήδη δύο διαθέσιμες λύσεις της  $f^{\circ 2}(x) = x$ , το 0 και το  $1 - \frac{1}{\lambda}$ . Ας πάμε να βρούμε τις άλλες. Έχουμε για  $x \neq 0$  ότι:

$$\begin{aligned} f^{\circ 2}(x) = x &\Leftrightarrow -\lambda^3 x^4 + 2\lambda^3 x^3 - \lambda^2(\lambda+1)x^2 + \lambda^2 x = x \\ &\Leftrightarrow -\lambda^3 x^3 + 2\lambda^3 x^2 - \lambda^2(\lambda+1)x + \lambda^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$



Αφού μία ρίζα του τελευταίου πολυωνύμου είναι το  $1 - \frac{1}{\lambda}$ , μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner, οπότε και βρίσκουμε:

$$\left(x - 1 + \frac{1}{\lambda}\right)(-\lambda^3 x^2 + \lambda^2(\lambda + 1)x - \lambda^2 - \lambda) = 0.$$

Η εξίσωση  $-\lambda^3 x^2 + \lambda^2(\lambda + 1)x - \lambda^2 - \lambda = 0$  είναι αδύνατη όταν:

$$(\lambda^3 + \lambda^2)^2 - 4(-\lambda^3)(-\lambda^2 - \lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda^4(\lambda - 3)(\lambda + 1) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 3).$$

Σε διαφορετική περίπτωση έχουμε τις δύο (διπλές ενδεχομένως) λύσεις:

$$\frac{-\lambda^2(\lambda + 1) \pm \lambda^2 \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{-2\lambda^3} = \frac{\lambda + 1 \mp \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}.$$

Αν επιλέξουμε  $\lambda = 3$ , ώστε να έχουμε διπλή λύση, τότε με απλούς υπολογισμούς προκύπτει ότι αυτή είναι το σημείο ισορροπίας  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .

Εν κατακλείδι, λοιπόν, έχουμε:

$$f^{\circ 2}(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 1 - \frac{1}{\lambda}, & \text{αν } 0 < \lambda \leq 3 \\ x = 0 \text{ ή } x = 1 - \frac{1}{\lambda} \text{ ή } x = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}, & \text{αν } 3 < \lambda \leq 4 \end{cases}.$$

Ας πάμε αρχικά να εξετάσουμε την περιοδική ευστάθεια των σημείων 0 και  $1 - \frac{1}{\lambda}$  που μελετήσαμε πριν. Προφανώς στην περίπτωση που αυτά ήταν ασυμπτωτικά ευσταθή, τότε το ίδιο θα συμβαίνει και όταν εξετάζουμε την περιοδικότητα. Τι γίνεται όμως όταν αυτά είναι ασταθή; Ναι, μπορεί π.χ. η ακολουθία να μην προσεγγίζει το 0, αλλά μπορεί να ταλαντώνεται γύρω από αυτό, μία να το προσεγγίζει, μία να απομακρύνεται, μία να το προσεγγίζει, μία να απομακρύνεται κ.ο.κ. Έχουμε λοιπόν:

$$(f^{\circ 2})'(0) = \lambda^2 \text{ και } (f^{\circ 2})'\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = (\lambda - 2)^2.$$

Πέραν αυτού που προαναφέραμε περί του ότι η ασυμπτωτική ευστάθεια συνεπάγεται την περιοδικότητα, η πρώτη εξέταση των παραπάνω δίνει ότι, όπως και πριν, το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\lambda \in (0, 1]$  (βλ. σχ. 2.10α) και ασταθές αν  $\lambda \in (1, 4]$  (βλ. σχ. 2.10β' και 2.10γ'), ενώ το  $1 - \frac{1}{\lambda}$ , όπως πριν, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν  $\lambda \in (1, 3]$  (βλ. σχ. 2.10β') και ασταθές αλλού (βλ. σχ. 2.10γ').

Πώς όμως συμπεριφέρεται η λογιστική απεικόνιση στις καινούριες τιμές  $b_{1,2} = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}$ ; Υπάρχει κάποια τάση φενακισμού σε κάποια εξ αυτών; Θα μας χρειαστεί να υπολογίσουμε την ποσότητα:

$$(f^{\circ 2})'(b_{1,2}) = -\lambda^2 + 2\lambda + 4.$$

Ερευνούμε τώρα πότε:

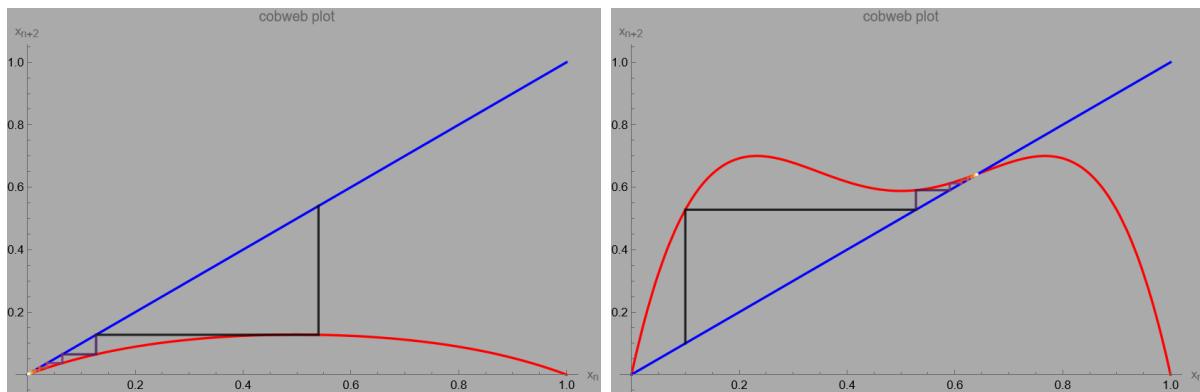
$$|(f^{\circ 2})'(b_{1,2})| < 1 \Leftrightarrow -1 < \lambda^2 - 2\lambda - 4 < 1 \Leftrightarrow \lambda \in (3, 1 + \sqrt{6}).$$

Βρήκαμε, δηλαδή, ότι για  $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6})$  η λογιστική απεικόνιση έχει τη συμπεριφορά ενός κομήτη γύρω από το «δίδυμο άστρο»  $\frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}$ . Πλησιάζει κάποια στιγμή κάποιο εξ αυτών για να απομακρυνθεί λίγο μετά ώστε να πλησιάσει το άλλο και κατόπιν να πλησιάσει κι άλλο το αρχικό κ.ο.κ. (βλ. σχ. 2.11α' και 2.11β').

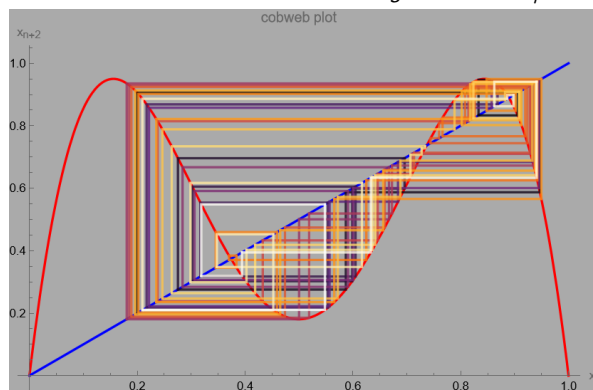
Για  $\lambda = 1 + \sqrt{6}$  έχουμε  $(f^{\circ 2})'(b_{1,2}) = -1$ , άρα υπολογίζουμε την κατά Schwarz παράγωγο της  $f^{\circ 2}$  στα  $b_1 = \frac{\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}$  και  $b_2 = \frac{\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda - 3)(\lambda + 1)}}{2\lambda}$ :

$$\mathcal{S}f^{\circ 2}(b_1) = \frac{(f^{\circ 2})'''(b_1)}{(f^{\circ 2})'(b_1)} - \frac{3}{2} \left( \frac{(f^{\circ 2})''(b_1)}{(f^{\circ 2})'(b_1)} \right)^2 = -60(2 - \sqrt{2})(7 + 2\sqrt{6})$$

$$\mathcal{S}f^{\circ 2}(b_2) = \frac{(f^{\circ 2})'''(b_2)}{(f^{\circ 2})'(b_2)} - \frac{3}{2} \left( \frac{(f^{\circ 2})''(b_2)}{(f^{\circ 2})'(b_2)} \right)^2 = -60(2 + \sqrt{2})(7 + 2\sqrt{6}).$$

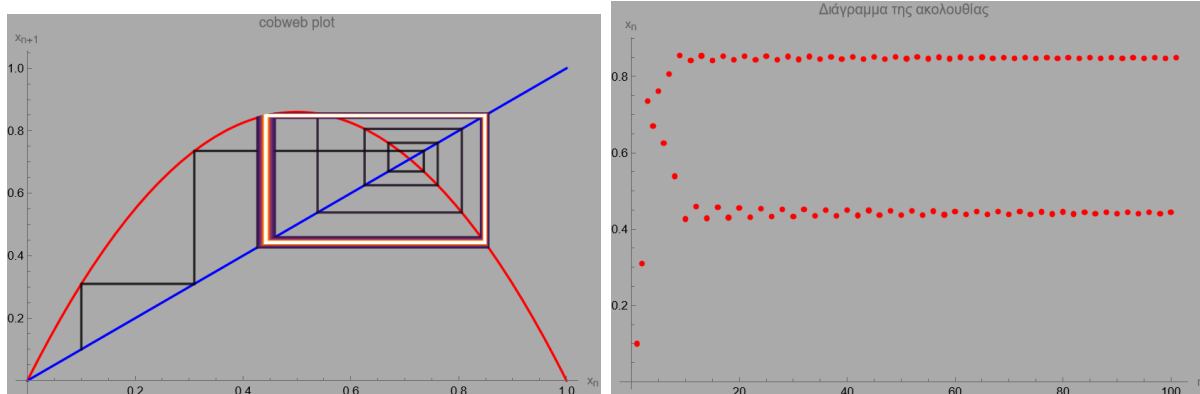


(α) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.54$  και  $\lambda = 0.8$ . Το 0 είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. (β) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.1$  και  $\lambda = 2.8$ . Το 0 είναι ασταθές και το  $1 - 1/\lambda$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.



(γ) Αρχική τιμή  $x_0 = 0.2$  και  $\lambda = 3.8$ . Το 0 και το  $1 - 1/\lambda$  είναι ασταθή.

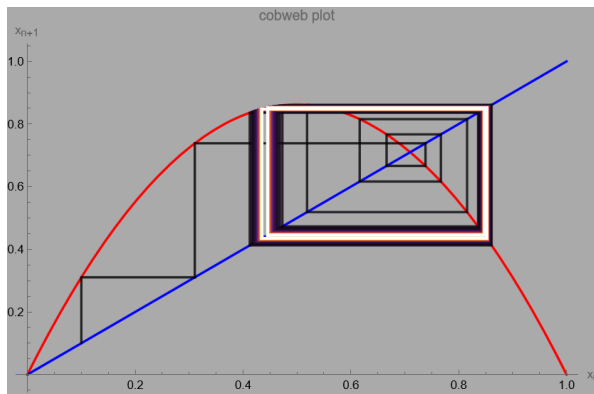
Σχήμα 2.10: Διάγραμμα König-Lémeray για το  $f^{\circ 2}$ -δυναμικό σύστημα με  $f(x) = \lambda(1-x)x$ .



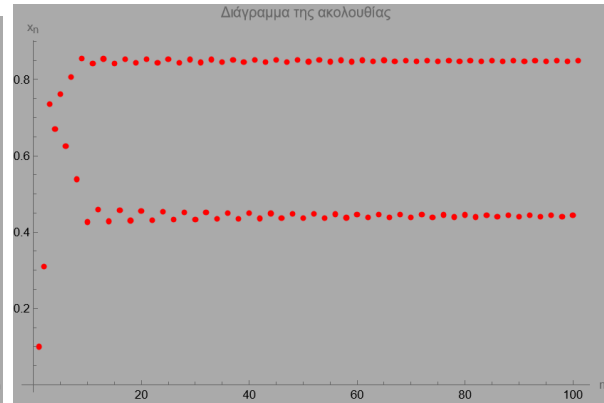
(α) Διάγραμμα König-Lémeray.

(β) Γραφική παράσταση ακολουθίας.

Σχήμα 2.11: Περιοδική συμπεριφορά του  $f$ -δυναμικού συστήματος με  $f(x) = 3.44(1-x)x$  (σημειώνουμε ότι  $1 + \sqrt{6} \approx 3.44949$ ) και αρχική τιμή  $x_0 = 0.1$ .



(α) Διάγραμμα Κόνιγ-Λέμερ.



(β) Γραφική παράσταση ακολουθίας.

Σχήμα 2.12: Περιοδική συμπεριφορά του  $f$ -δυναμικού συστήματος με  $f(x) = (1 + \sqrt{6})(1 - x)x$  και αρχική τιμή  $x_0 = 0.1$ .

Καθόσον  $\mathcal{S}f^{\circ 2}(b_{1,2}) < 0$ , τα  $b_{1,2}$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας της  $x_{n+1} = f^{\circ 2}(x_n)$ , όταν  $\lambda = 1 + \sqrt{6}$  (βλ. σχ. 2.12α' και 2.12β').

Ανακεφαλαιώνουμε:

### ευστάθεια 2-περιοδικών σημείων λογιστικής απεικόνισης

**Θεώρημα 2.3.** Έστω η λογιστική απεικόνιση:

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n.$$

- Αν  $0 < \lambda \leq 3$ , τότε αυτή έχει δύο μόνο 2-περιοδικά σημεία:
  - \* το 0, το οποίο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\lambda \in (0, 1]$  και ασταθές αλλιώς,
  - \* το  $1 - \frac{1}{\lambda}$ , το οποίο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\lambda \in [1, 3]$  και ασταθές αλλιώς.
- Αν  $3 < \lambda \leq 4$ , τότε αυτή έχει τέσσερα 2-περιοδικά σημεία:
  - \* το 0, το οποίο είναι ασταθές,
  - \* το  $1 - \frac{1}{\lambda}$ , το οποίο είναι ασταθές,
  - \* το  $\frac{\lambda+1-\sqrt{(\lambda-3)(\lambda+1)}}{2\lambda}$ , το οποίο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6}]$  και ασταθές αλλιώς,
  - \* το  $\frac{\lambda+1+\sqrt{(\lambda-3)(\lambda+1)}}{2\lambda}$ , το οποίο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{6}]$  και ασταθές αλλιώς.

Στο σημείο αυτό θα βάλουμε μια άνω τελεία στη μελέτη της περιοδικότητας. Δεν θα εξετάσουμε άλλες τιμές περιόδων, αλλά στην επόμενη ενότητα η έννοια της περιοδικότητας και των περιοδικών σημείων θα μας απασχολήσει ξανά στην εξέταση της χαοτικής συμπεριφοράς της λογιστικής απεικόνισης.

## 2.4 Γεννήτρια συνάρτηση

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε μια σχέση που να περιγράφει τη γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης. Για να αποδώσει αυτή η μέθοδος θα χρειαστούμε το κατά Hadamard γινόμενο δύο σειρών.

### Hadamard γινόμενο σειρών

**Ορισμός 2.11.** Έστωσαν οι σειρές:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ και } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Η σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$$

ονομάζεται **Hadamard γινόμενο των σειρών  $f$  και  $g$** , και συμβολίζεται ως  $(f * g)(z)$ .

Έστω, λοιπόν, ότι η ακολουθία:

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$$

έχει γεννήτρια συνάρτηση την:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n.$$

Καθόσον  $x_{n+1}z^n = \lambda(1 - x_n)x_n z^n$ , αθροίζοντας για  $n \in \mathbb{N}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(1 - x_n)x_n z^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_{n+1} z^{n+1} = z \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(1 - x_n)x_n z^n \\ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n &= z \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n z^n - \lambda x_n^2 z^n) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n = x_0 + \lambda z \left( \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 z^n \right) \\ \Leftrightarrow f(z) &= x_0 + \lambda z (f(z) - (f * f)(z)) \Leftrightarrow f(z) (1 - \lambda z) + \lambda z (f * f)(z) = x_0. \end{aligned}$$

Από τα [34] (σελ. 84) και [67] (σελ. 157-158) βρίσκουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση του Hadamard γινομένου δύο σειρών, ήπερ ακολουθεί παρακάτω.

## ολοκλήρωμα Parseval - 1

**Θεώρημα 2.4.** Έστωσαν οι σειρές:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ και } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Αν η  $f$  συγκλίνει για  $|z| < R_1$  και η  $g$  για  $|z| < R_2$ , τότε το Hadamard γινόμενο των σειρών  $f$  και  $g$  συγκλίνει για  $|z| < R_1 R_2$  και ισούται με:

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{w} f(w) g\left(\frac{z}{w}\right) dw,$$

όπου  $C$  μια οποιαδήποτε κλειστή περιοχή που περιέχει το 0 και εντός της οποίας ισχύουν αμφότερες οι σχέσεις  $|w| < R_1$  και  $\left|\frac{z}{w}\right| < R_2$  (\*).

(\*) Με άλλα λόγια θέλουμε ο  $C$  να περιέχει το 0 και να περιέχεται σ' ένα άστρο Mittag-Leffler της  $f$ , και επίσης ο  $\frac{z}{w}$  να ανήκει σ' ένα άστρο Mittag-Leffler της  $g$ .

Η συνθήκη της αναλυτικότητας των  $f$  και  $g$  περίξ του μηδενός είναι ουσιαστική (βλ. [4] σελ. 2) κι αυτή θα διερευνήσουμε.

Καταρχάς έχουμε ότι η συνάρτηση  $m(x) = \lambda(1-x)x$  λαμβάνει μέγιστο στο  $1/2$  το  $\lambda/4$ . Επομένως για  $\lambda \in (1, 4)$  θα είναι  $\max m \in (0, 1)$ , όπερ σημαίνει ότι αν  $x_0 \in (0, 1)$ , τότε  $x_1 = m(x_0) \in (0, 1)$ , άρα και  $x_2 = m(x_1) \in (0, 1)$ , άρα και  $x_3 = m(x_2) \in (0, 1)$  κ.ο.κ.

Συνεπώς, στην περίπτωση που συμβαίνει  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , θα έχουμε  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι το 0 είναι ασταθές σημείο ισορροπίας (βλ. ενότητα 2.2). Επομένως  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in (0, 1]$ .

Έστω  $\ell$  τον εν λόγω ανώτερο όριο. Θα ισχύει ότι (βλ. [17] σελ. 12) ότι για κάθε  $\varepsilon > 0$ :

- όλα τα  $x_n$  πλην πεπερασμένων θα είναι μικρότερα του  $\ell + \varepsilon$  και
- άπειρα  $x_n$  θα είναι μεγαλύτερα του  $\ell - \varepsilon$ .

Συνεπώς:

- όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  πλην πεπερασμένων θα ισχύει  $\sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{\ell + \varepsilon}$  και
- άπειρα  $n \in \mathbb{N}$  θα ισχύει  $\sqrt[n]{x_n} > \sqrt[n]{\ell - \varepsilon}$ .

Όμως:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ell \pm \varepsilon} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ell \pm \varepsilon)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ell \pm \varepsilon)^0 = 1.$$

Επομένως για οποιοδήποτε  $\epsilon > 0$  θα συμβαίνει:

$$1 - \epsilon < \sqrt[n]{\ell \pm \varepsilon} < 1 + \epsilon$$

για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  πλην πεπερασμένων.

Συνεπώς, για κάθε  $\epsilon > 0$ :

- όλα τα  $\sqrt[n]{x_n}$  πλην πεπερασμένων θα είναι μικρότερα του  $1 + \epsilon$  και
- άπειρα  $\sqrt[n]{x_n}$  θα είναι μεγαλύτερα του  $1 - \epsilon$ .

Επομένως (βλ. [17] σελ. 12):

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1,$$

όπερ σημαίνει ότι η δυναμοσειρά  $f(z)$  έχει ακτίνα σύγκλισης (βλ. [57] σελ. 104):

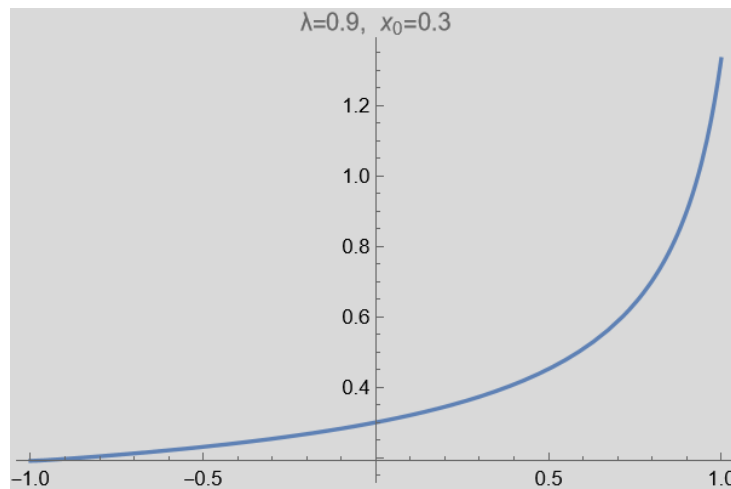
$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}} = 1.$$

Αφού δείξαμε ότι η  $f$  είναι αναλυτική στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο του  $\mathbb{C}$ , θα παρουσιάσουμε κάποιες γραφικές παραστάσεις της, ανάλογα με το  $\lambda$  και το  $x_0$  που θα επιλεγεί.

Σε πρώτη φάση για  $\lambda = 0.9$  και  $x_0 = 0.3$  έχουμε την γραφική παράσταση της:

$$f_{30}(z) = \sum_{n=0}^{30} x_n z^n, \quad z \in \mathbb{R}$$

στο σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13: Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 0.9(1 - x_n)x_n$  με  $x_0 = 0.3$ .

Για την περίπτωση που αναγνώστης θέλει να εξετάσει τι συμβαίνει και με άλλες επιλογές από  $\lambda$ ,  $x_0$  παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της  $f_{30}$  για κάποια  $\lambda \in (0, 3)$  (σχ. 2.14) και ακολούθως για κάποια  $\lambda \in [3, 4]$  (σχ. 2.15).



Σχήμα 2.14: Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  με  $\lambda \in (0, 3)$ .

Καθόσον η  $f(z)$  ορίζεται στο  $\mathbb{C}$ , έχει νόημα να σχεδιάσουμε και τις μιγαδικές της γραφικές παραστάσεις. Στο σχήμα 2.16, επί παραδείγματι, παρουσιάζονται οι μιγαδικές γραφικές παραστά-

σεις των

$$f_{20}(z) = \sum_{n=0}^{20} x_n z^n, \quad z \in \mathbb{R}, \text{ για το δισδιάστατο γράφημα}$$

και

$$f_{10}(z) = \sum_{n=0}^{10} x_n z^n, \quad z \in \mathbb{R}, \text{ για το τρισδιάστατο γράφημα}$$

με  $\lambda = 2.8$  και  $x_0 = 0.1$ . Οι λευκές γραμμές στο πρώτο σχήμα είναι οι εικόνες των «κατακόρυφων» ευθειών  $\operatorname{Re}(z) = c$ , ενώ οι μαύρες των «οριζόντιων» ευθειών  $\operatorname{Im}(z) = c$ .

Ακολουθούν οι 2D μιγαδικές αναπαραστάσεις για  $\lambda \in (0, 3)$  (σχ. 2.17) και για  $\lambda \in [3, 4]$  (σχ. 2.18).



Και τώρα μπορούμε να συνεχίσουμε από κει που είχαμε μείνει.

$$f(z)(1-\lambda z) + \lambda z(f * f)(z) = x_0 \Leftrightarrow f(z)(1-\lambda z) + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{w} f(w) f\left(\frac{z}{w}\right) dw = x_0,$$

όπου ως  $C$  μπορούμε να πάρουμε τον μοναδιαίο δίσκο. Έτσι, θέτοντας  $w = e^{\theta i}$  (βλ. [5] σελ. 48), έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{w} f(w) f\left(\frac{z}{w}\right) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{\theta i}} f(e^{\theta i}) f(z e^{-\theta i}) (e^{\theta i})' d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\theta i}) f(z e^{-\theta i}) d\theta.$$

Έχουμε αποδείξει, λοιπόν, το κάτωθι θεώρημα.

#### γεννήτρια συνάρτηση λογιστικής απεικόνισης

**Θεώρημα 2.5.** Η γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης ( $f$ ) ικανοποιεί την μιγαδική ολοκληρωτική εξίσωση:

$$f(z)(1-\lambda z) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\theta i}) f(z e^{-\theta i}) d\theta = x_0.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να προχωρήσουμε λίγο παραπάνω θα μας χρησιμεύσει μια νότα γενίκευσης του παραπάνω, όπως αυτή μπορεί να αντληθεί από το [12] (σελ. 36) και το [32] (σελ. 55).

#### ολοκλήρωμα Parseval - 2

**Θεώρημα 2.6.** Έστωσαν οι σειρές:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ και } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Αν η  $f$  συγκλίνει για  $|z| < R_1$  και η  $g$  για  $|z| < R_2$ , τότε το Hadamard γινόμενο των σειρών  $f$  και  $g$  ισούται με:

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 e^{\theta i}) g(z_2 e^{-\theta i}) d\theta,$$

όπου  $z_1, z_2$  δύο οποιοδήποτε μιγαδικοί για τους οποίους να ισχύει  $|z_1| < R_1, |z_2| < R_2$  και  $z = z_1 z_2$ .

Πλέον έχουμε τη μιγαδική ολοκληρωτική εξίσωση:

$$f(z)(1-\lambda z) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1 e^{\theta i}) g(z_2 e^{-\theta i}) d\theta = x_0,$$

Μπορούμε να γράψουμε  $z = r e^{\phi i}$  και να επιλέξουμε  $z_1 = \sqrt{r}$  και  $z_2 = \sqrt{r} e^{\phi i}$ , επομένως έχουμε:

$$f(re^{\phi i})(1 - \lambda re^{\phi i}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sqrt{r}e^{\theta i}) f(\sqrt{r}e^{(\phi-\theta)i}) d\theta = x_0.$$

Ορίζοντας τώρα  $g_r(\phi) = f(\sqrt{r}e^{\phi i})$  έχουμε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$g_r(\phi)(1 - \lambda re^{\phi i}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_r(\theta) g_r(\phi - \theta) d\theta = x_0. \quad (2.1)$$

Αν και η σχέση (2.1) είναι μια αρκετά απλή σχέση που προσδιορίζει εμμέσως την  $f$ , θα προχωρήσουμε λίγο παραπάνω τη διαδικασία, διότι καταλήγει σε ένα απρόσμενο συμπέρασμα.

Η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση είναι μη γραμμική τύπου συνελιζέως, κάτι που μας κάνει να υποψιαζόμαστε ότι θα χρειαστούμε κάποιον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό για την επίλυσή της. Δυστυχώς ο Laplace απαιτεί το ένα όριο ολοκλήρωσης να είναι μεταβλητό, ενώ ο Fourier απαιτεί να βρισκόμαστε σε άπειρο διάστημα. Στο [18] σελ. 436 μαθαίνουμε για τους πεπερασμένους μετασχηματισμούς Fourier, κάτι που ίσως να είναι αυτό που ψάχνουμε<sup>[1]</sup>. Δυστυχώς, αυτοί δεν συμπεριφέρονται όπως θα θέλαμε στην περίπτωση της συνέλιξης. Θα τους χρησιμοποιήσουμε όμως σαν έμπνευση.

Στο εν λόγω σύγγραμμα μια παραλλαγή των συντελεστών Fourier επέχει θέση μετασχηματισμού. Αυτό θα κάνουμε και εμείς εδώ, θα χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές Fourier της εκθετικής αναπαράστασης της σειράς Fourier (βλ. [51] σελ. 19) ως μετασχηματισμό.

#### πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier

**Ορισμός 2.14.** Αν η  $f$  είναι μία συνεχής ή τμηματικά συνεχής συνάρτηση  $2\pi$ -περιοδική, τότε ο **πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier** ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}_0(f(\theta))(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-n\theta i} d\theta,$$

όπου  $n \in \mathbb{Z}$ .

Με βάση τον ορισμό που δώσαμε, αν  $\hat{f}(n) = \mathcal{F}_0(f(\theta))(n)$ , τότε:

$$f(\theta) = \mathcal{F}_0^{-1}(\hat{f}(n))(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{n\theta i}.$$

<sup>[1]</sup>

**Ορισμός 2.12.** Αν η  $f$  είναι μία συνεχής ή τμηματικά συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα  $[0, a]$ , τότε ο **πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier ημιτόνιου** ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}_s(f(x))(n) = \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,$$

όπου  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Ορισμός 2.13.** Αν η  $f$  είναι μία συνεχής ή τμηματικά συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα  $[0, a]$ , τότε ο **πεπερασμένος μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνιου** ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}_c(f(x))(n) = \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,$$

όπου  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Η γραμμικότητα του  $\mathcal{F}_0$  είναι προφανής, οπότε θα πάμε να εξετάσουμε μια ιδιότητα που σίγουρα θα μας απασχολήσει. Έχουμε, αν  $\hat{f}(n) = \mathcal{F}_0(f(\theta))(n)$ , ότι:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0(f(\theta)e^{\theta i})(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{\theta i} e^{-n\theta i} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-(n-1)\theta i} d\theta \\ &= \mathcal{F}_0(f(\theta)e^{\theta i})(n-1) \\ &= \hat{f}(n-1).\end{aligned}$$

Ας πάμε να εξετάσουμε και το θεώρημα της συνέλιξης. Αν  $\hat{f}(n) = \mathcal{F}_0(f(\theta))(n)$  και  $\hat{g}(n) = \mathcal{F}_0(g(\theta))(n)$ , τότε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0((f \odot g)(\theta))(n) &= \mathcal{F}_0\left(\int_0^{2\pi} f(t)g(\theta-t) dt\right)(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(\theta-t) dt e^{-n\theta i} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(\theta-t)e^{-n\theta i} d\theta dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \int_0^{2\pi} g(\theta-t)e^{-n\theta i} d\theta dt.\end{aligned}$$

Στο εσωτερικό ολοκλήρωμα θέτουμε  $u = \theta - t$ , άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0((f \odot g)(\theta))(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \int_{-t}^{2\pi-t} g(u)e^{-n(u+t)i} du dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-nti} \int_{-t}^{2\pi-t} g(u)e^{-nui} du dt.\end{aligned}$$

Καθόσον για τον υπολογισμό των συντελεστών Fourier δεν παίζει ρόλο ποιο είναι το διάστημα ολοκλήρωσης, αρκεί να έχει πλάτος μιας περιόδου (βλ. [51] σελ. 19) θα ισχύει:

$$\int_{-t}^{2\pi-t} g(u)e^{-nui} du = \int_0^{2\pi} g(u)e^{-nui} du$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0((f \odot g)(\theta))(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \int_{-t}^{2\pi-t} g(u)e^{-n(u+t)i} du dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-nti} \int_0^{2\pi} g(u)e^{-nui} du dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-nti} \hat{g}(n) dt \\ &= \hat{f}(n)\hat{g}(n).\end{aligned}$$

Έτσι ορίζοντας  $\hat{g}_r(n) = \mathcal{F}_0(g_r(\phi))(n)$ , μετασχηματίζουμε την (2.1) και έχουμε:

$$\hat{g}_r(n) - \lambda r \hat{g}_r(n-1) + \frac{1}{2\pi} \hat{g}_r^2(n) = \delta_{0,n} \cdot x_0 \quad (2.2)$$

όπου  $\delta_{a,b}$  το «δέλτα του Kronecker», διότι:

$$\mathcal{F}_0(x_0)(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_0 e^{-n\theta i} d\theta = \begin{cases} x_0, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = x_0 \cdot \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \delta_{0,n} \cdot x_0.$$

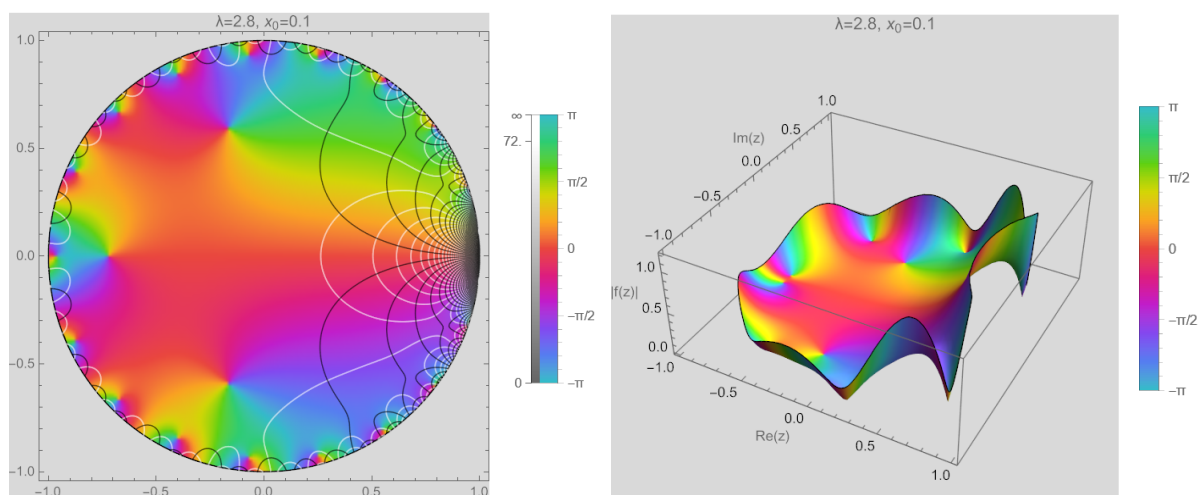
Μια προσπάθεια βελτίωσης της (2.2) θα επιτυγχανόταν θέτοντας  $\hat{h}_r(n) = \hat{g}_r(-n)$ . Αυτό θα οδηγούσε σε έναν λογιστικού τύπου αναδρομικό τύπο:

$$\hat{h}_r(n) - \lambda r \hat{h}_r(n+1) + \frac{1}{2\pi} \hat{h}_r^2(n) = \delta_{0,n} \cdot x_0 \quad (2.3)$$

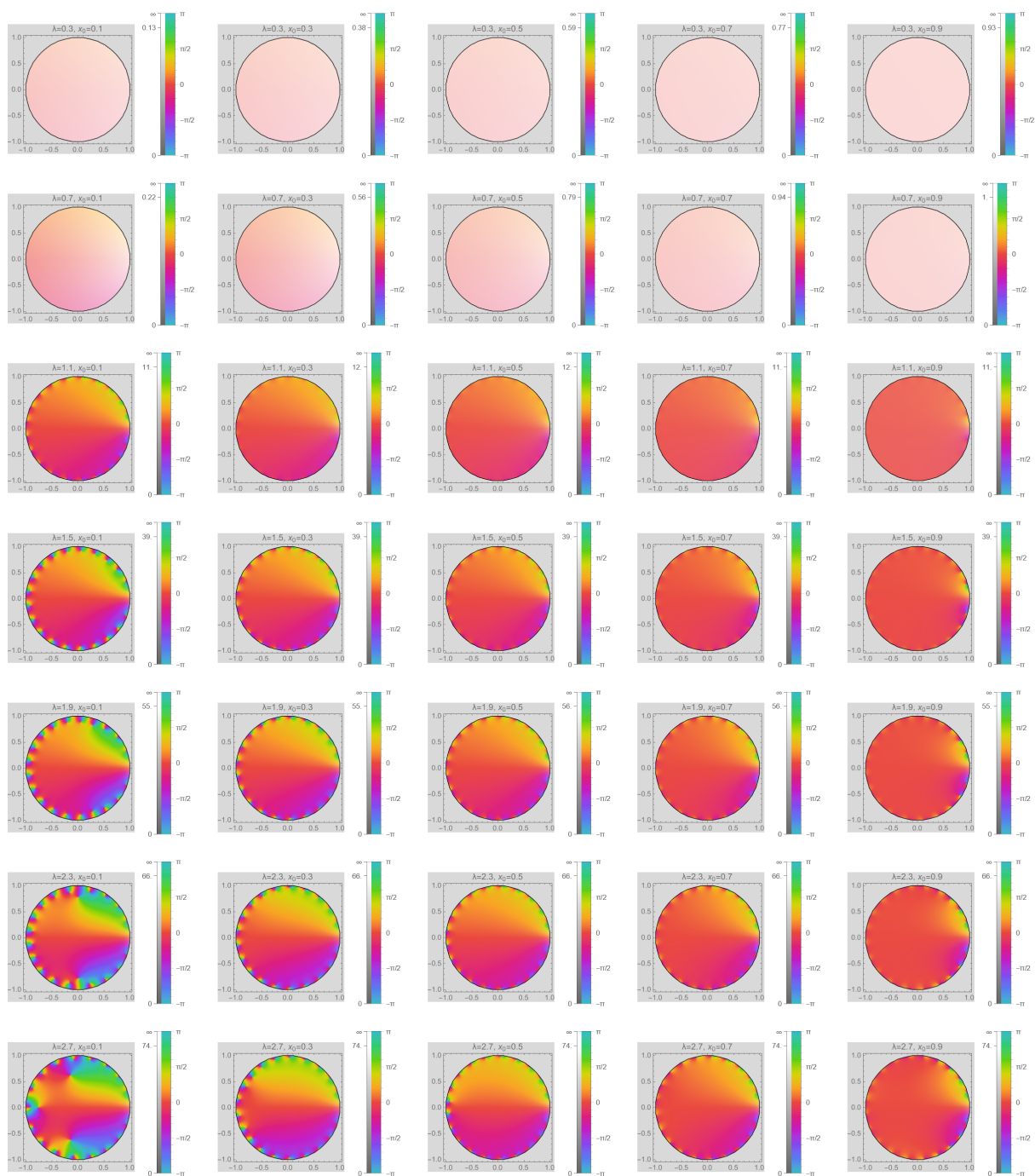
Κι εδώ τελειώνει το ταξίδι της ενασχόλησης με τη γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης. Αυτό που βρήκε ενδιαφέρον ο γράφων στην (2.3) (όπερ και αποτέλεσε τον λόγο της συνέχειας μετά την (2.1)) είναι ο λογιστικός της χαρακτήρας. Ίσως αυτή η «κυκλική» κίνηση, αυτή η μεταφορά από λογιστική απεικόνιση σε «λογιστική απεικόνιση», να φανερώνει την αδυναμία εύρεσης ενός κλειστού τύπου για τη γεννήτρια συνάρτηση. Ίσως και να φανερώνει μια σχέση των δυο τους που οδηγεί στην επίλυση και των δύο. Οψόμεθα!



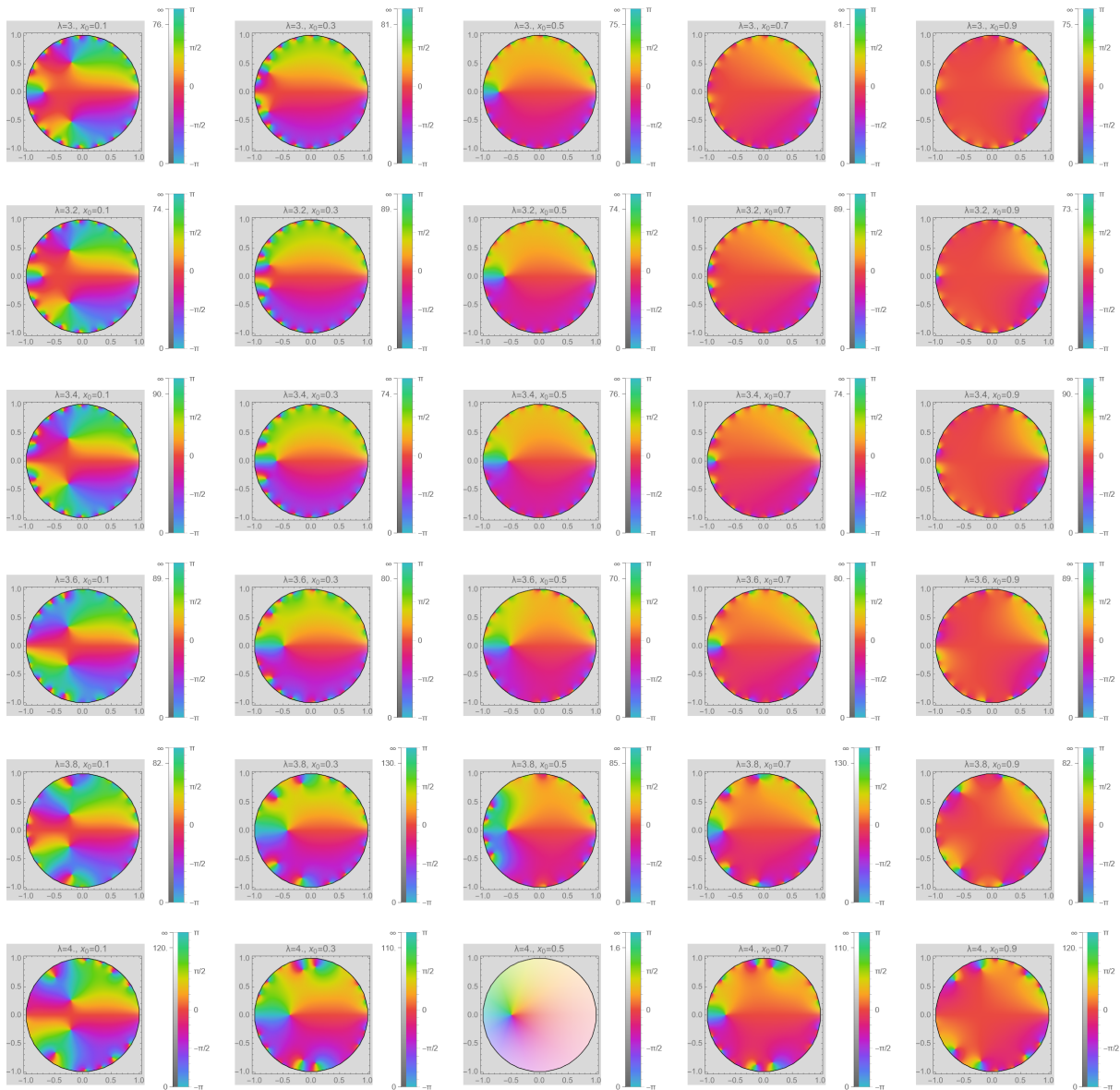
Σχήμα 2.15: Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  με  $\lambda \in ([3, 4])$ .



Σχήμα 2.16: Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 2.8(1 - x_n)x_n$  με  $x_0 = 0.1$ .



Σχήμα 2.17: Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  με  $\lambda \in (0, 3)$ .



Σχήμα 2.18: Γεννήτρια συνάρτηση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  με  $\lambda \in (0, 3)$ .



## 2.5 Χαρακτηριστική συμπεριφορά

### 2.5.α' Ορισμός

Σε κάθε βιβλίο περί της Θεωρίας του Χάους που σέβεται τον εαυτό του, εκλαϊκευμένο ή μη, ο αναγνώστης μπορεί να βρει αναφορές στη λογιστική απεικόνιση. Έτσι, καθόσον το θέμα του παρόντος μέρους της εργασίας είναι η λογιστική απεικόνιση, δεν θα μπορούσε να απουσιάζει μια έστω λακωνική νύξη για τη χαοτική συμπεριφορά της ακολουθίας αυτής.

Τι σημαίνει όμως «χαοτική συμπεριφορά»; Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον κατά Devaney ορισμό του χαοτικού συστήματος (βλ. [20] σελ. 62). Πριν όμως προχωρήσουμε, θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε προς αποφυγήν μελλοντικών παρεξηγήσεων ότι είναι διαφορετικό ένα χαοτικό σύστημα από ένα πιθανοκρατικό. Τα χαοτικά συστήματα είναι ντετερμινιστικά. Αν έχεις απόλυτη γνώση των συνθηκών, τότε μπορείς να είσαι 100% σίγουρος για το τι θα επακολουθήσει. Αν έχεις ίδιες συνθήκες, τότε καταλήγεις στο ίδιο αποτέλεσμα. Τίποτα από αυτά δεν ισχύει σε ένα σύστημα που διέπεται από τυχαιότητα. Αλλά ας πάμε να γνωρίσουμε καλύτερα το χάος.

#### χαοτικό σύστημα

**Ορισμός 2.15.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα, όπου  $f : M \rightarrow M$  και  $(M, d)$  κάποιος μετρικός χώρος. Αυτό το δυναμικό σύστημα καλείται **χαοτικό**, όταν:

**Παράγοντας κανονικότητας:** Τα περιοδικά σημεία της  $f$  είναι πυκνά στο  $M$ . Δηλαδή κάθε σημείο του  $M$  έχει οσοδήποτε κοντά του θέλουμε κάποιο περιοδικό σημείο.

**Ανάμειξη καταστάσεων:** Η  $f$  είναι τοπολογικά μεταβατική. Δηλαδή για οιαδήποτε σημεία  $u, w \in M$  και  $\varepsilon > 0$  υπάρχει τρίτο σημείο  $x_0 \in M$  σε απόσταση το πολύ  $\varepsilon$  από το  $u$ , του οποίου η τροχιά να διέρχεται το πολύ σε απόσταση  $\varepsilon$  από το  $w$ .

**Ισχύει το Φαινόμενο της Πεταλούδας:** Η  $f$  εξαρτάται ευαίσθητα από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή υπάρχει  $d_0 > 0$  τέτοιο, ώστε για οποιοδήποτε σημείο  $x$  και  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει:

- $y$  σε απόσταση το πολύ  $\varepsilon$  από το  $x$  και
- $n \in \mathbb{N}$

τέτοια, ώστε η απόσταση των  $f^{on}(x)$  και  $f^{on}(y)$  να είναι τουλάχιστον  $d_0$ .

Αλλά ας ασχοληθούμε λίγο παραπάνω με τον ορισμό. Ένα χαοτικό σύστημα, φαίνεται να λέει αυτός, είναι ένα σύστημα που φέρει μια οργανωμένη υποδομή (παράγοντας κανονικότητας), η οποία καθίσταται απρόβλεπτη λόγω της ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες και η οποία είναι αδύνατο να διασπασθεί ή να διαιρεθεί σε δύο απλούστερα υποσυστήματα λόγω της τοπολογικής μεταβατικότητας.


Σε μια πρώτη ανάγνωση βλέποντας πως η συνθήκη της ευαισθησίας από τις αρχικές συνθήκες είναι μετρική, αλλά η συνθήκη του παράγοντα κανονικότητας είναι τοπολογική<sup>†</sup>, όπως και της

<sup>†</sup>Τοπολογικά μιλώντας, ένα σύνολο  $A$  καλείται πυκνό στο  $M$ , αν  $\bar{A} = M$  (βλ. [17] σελ. 59)

ανάμειξης καταστάσεων<sup>[1]</sup>, μπορούμε να θεωρήσουμε πως μιλάμε για τρεις διακριτές συνθήκες. Στην πραγματικότητα, όμως, δεν συμβαίνει αυτό. Οι δύο πρώτες συνθήκες οδηγούν νομοτελειακά στην τρίτη (βλ. [6]), πράγμα που δεν επιφέρει μόνο την αισθητική αναβάθμιση του ορισμού 2.15 δια της απόσυρσης της τρίτης συνθήκης, αλλά μας πληροφορεί ότι ο παράγοντας κανονικότητας τελικά καθίσταται παράγοντας αστάθειας!

Αν ρίξουμε μια ματιά στην απόδειξη του [6], θα δούμε ότι η πυκνότητα των περιοδικών σημείων μάς επιτρέπει αφενός να βρούμε περιοδικό σημείο  $p_1$  οσοδήποτε κοντά θέλουμε σε ένα οποιοδήποτε σημείο  $x$  και αφετέρου να βρούμε περιοδικό σημείο  $p_2$ , του οποίου η τροχιά να απέχει από την  $\mathcal{O}(p_1)$  τουλάχιστον μια σταθερή απόσταση  $d_0$ . Ακολουθώντας η τοπολογική μεταβατικότητα κάνει εφικτό να βρούμε σημείο  $y$  οσοδήποτε κοντά στο  $x$  θέλουμε το οποίο να στέλνεται μετά από κάποιες επαναλήψεις κοντά στην  $\mathcal{O}(p_2)$ , ήτοι σχεδόν  $d_0$  μακριά είτε από τη νέα θέση του  $x$  είτε από το  $p_1$ .

Προφανώς, η παραπάνω παράγραφος δεν συνιστά αυστηρή απόδειξη. Δείχνει όμως πως η πυκνότητα των περιοδικών σημείων δεν είναι τόσο η τάξη μέσα στο χάος, όσο μία συνιστώσα του χάους. Τα πράγματα γίνονται ακόμα πιο ύποπτα για την καθωσπρέπει συμπεριφορά του παράγοντα «πυκνότητα περιοδικών σημείων». Λίγα χρόνια πιο μετά από το [6], στο [71] αποδεικνύεται ότι, αν το  $M$  είναι διάστημα του  $\mathbb{R}$ , τότε η τοπολογική μεταβατικότητα αρκεί από μόνη της για να είναι χαοτικό το σύστημά μας. Αυτό, θα μπορούσαμε να πούμε, υποδηλώνει ότι η πυκνότητα των περιοδικών σημείων εμφανίζεται σχεδόν ταυτόχρονα με τη χαοτική συμπεριφορά.

Ας επιστρέψουμε πίσω στη λογιστική απεικόνιση. Την ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες της  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  την διαπίστωσε ο γράφων «στο πετσί του» όταν εκτελούσε τον κώδικα  της ενότητας 3.2. Φτιάχνοντας το `data.frame` με τις τιμές της λογιστικής απεικόνισης, η στήλη που αφορούσε την αρχική τιμή 0.75, ενώ αρχικά παρέμενε 0.75 ως όφειλε, μετά από κάποιες επαναλήψεις άλλαζε ανεπιστρεπτί. Αυτό δεν μπορούσε να συμβαίνει! Αν  $x_0 = 3/4$ , τότε:

$$x_1 = 3/4 \Rightarrow x_2 = 3/4 \Rightarrow x_3 = 3/4 \Rightarrow \dots$$

Αυτό που τελικά διαπίστωσε ο γράφων<sup>[2]</sup> είναι ότι μια συνάρτηση που διάλεξε για να παράγει την ακολουθία, αντί να ξεκινήσει από το 0.75 ξεκινούσε από το  $0.75 + 10^{-16}$ , πράγμα που επέφερε αυτά τα αναπάντεχα αποτελέσματα. Η απεικόνιση αυτής της απρόσμενης συμπεριφοράς παριστάνεται στο σχ. 2.19.

Φυσικά, αυτό δεν αποτελεί κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των αρχικών τιμών περίξ του 0.75. Η λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  έχει ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες, πράγμα που διαπιστώνουμε εμπειρικά και στο σχ. 2.20, έχοντας επιλέξει ενδεικτικά  $x_0 = 0.1$ .

Την ανάμειξη των διαφόρων τροχιών, την τοπολογική μεταβατικότητα, μπορεί να τη διακρίνει κανείς εμπειρικά στο σχ. 2.21. Εκεί πήραμε αρχικές τιμές από το 0.1 έως και το 0.9 ανά 0.1. Βλέπουμε πως όποιο ζεύγος αρχικών τιμών και να είχαμε διαλέξει, μετά από επαρκές χρονικό διάστημα σημεία των τροχιών τους θα βρίσκονταν κοντά το ένα με το άλλο.

Τέλος, όσον αφορά την πυκνότητα των περιοδικών σημείων, μπορεί να ανατρέξει κανείς στο διάγραμμα διακλάδωσης της λογιστικής απεικόνισης (βλ. σχ. 2.22). Στο εν λόγω διάγραμμα κάθε σημείο αντιστοιχεί μια τιμή του  $\lambda$  με τα αντίστοιχα ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας ή ασυμπτωτικά ευσταθή περιοδικά σημεία. Αξίζει ο αναγνώστης να επαληθεύσει οπτικά το ότι για  $\lambda \in [0, 3]$  έχουμε ένα σημείο ισορροπίας και ότι για  $\lambda \in (3, 3.45]$  (είναι  $1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ ) έχουμε δύο 2-περιοδικά σημεία.

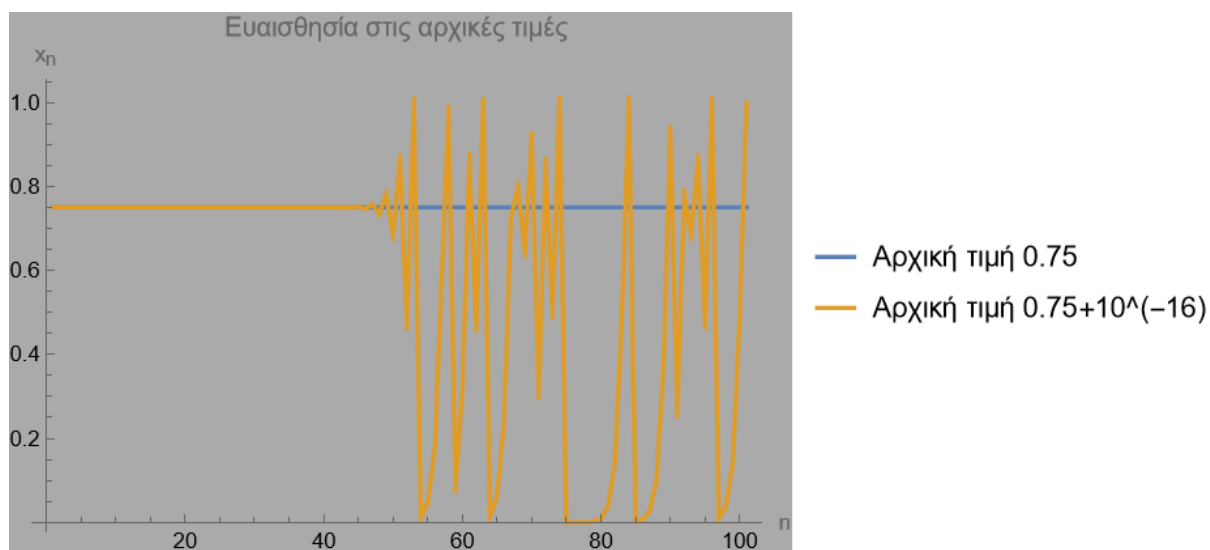
Παρατηρούμε στο σχ. 2.22 ότι για  $\lambda = 4$  τα περιοδικά σημεία καλύπτουν όλο το διάστημα  $[0, 1]$ . Αυτό το επιβεβαιώνουμε οπτικά λίγο ευκρινέστερα στο σχ. 2.23, όπου έχουμε εστιάσει εκεί σε μεγαλύτερες τιμές του  $\lambda$ .

<sup>[1]</sup>Μπορούμε να την επαναδιατυπώσουμε ως εξής:

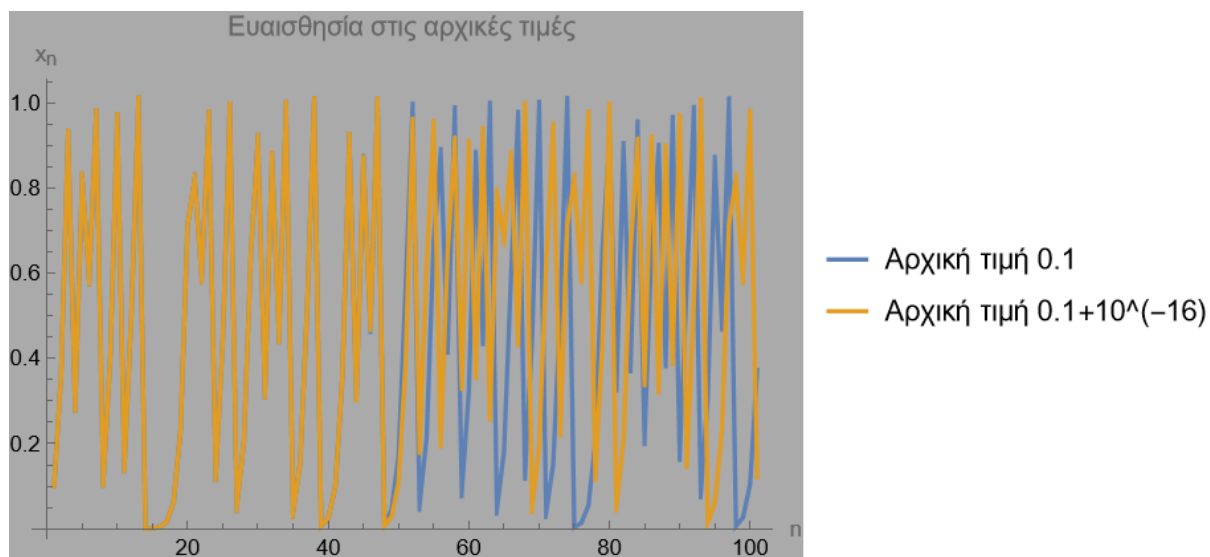
Για οποιαδήποτε  $J_1, J_2 \neq \emptyset$  ανοιχτά υποσύνολα του  $M$  να υπάρχει  $n \in \mathbb{N}^*$  τέτοιο, ώστε  $f^{on}(J_1) \cap J_2 \neq \emptyset$  (βλ. [24] σελ. 124).

<sup>[2]</sup>Η σχετική συζήτηση στον σύνδεσμο:

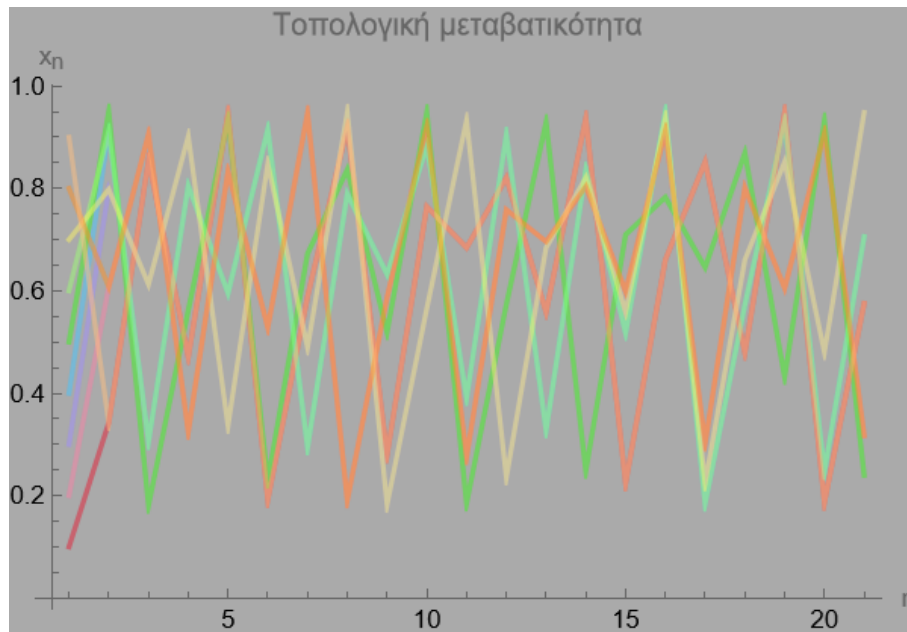
<https://shorturl.at/PTxCO>



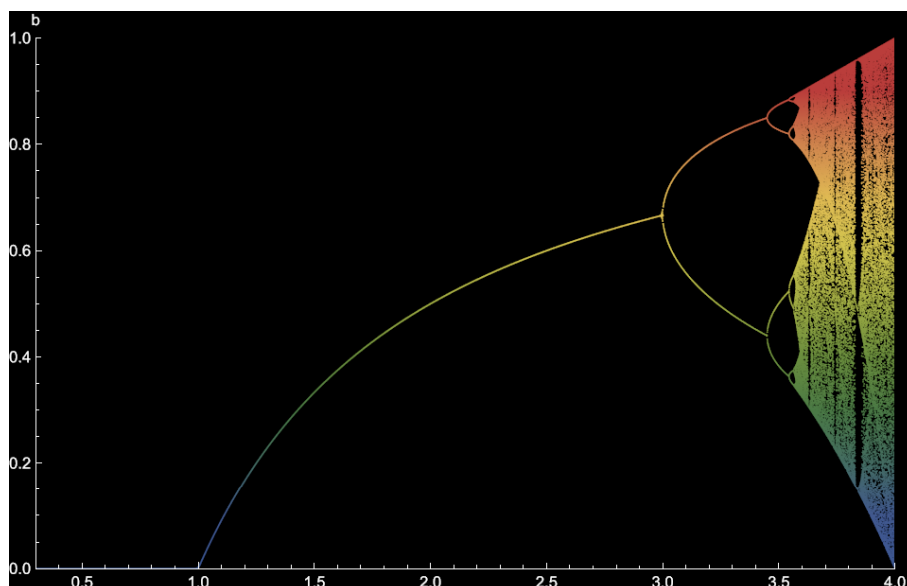
Σχήμα 2.19: Εξέλιξη της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  για  $x_0 = 0.75$  και  $x_0 = 0.75 + 10^{-16}$ .



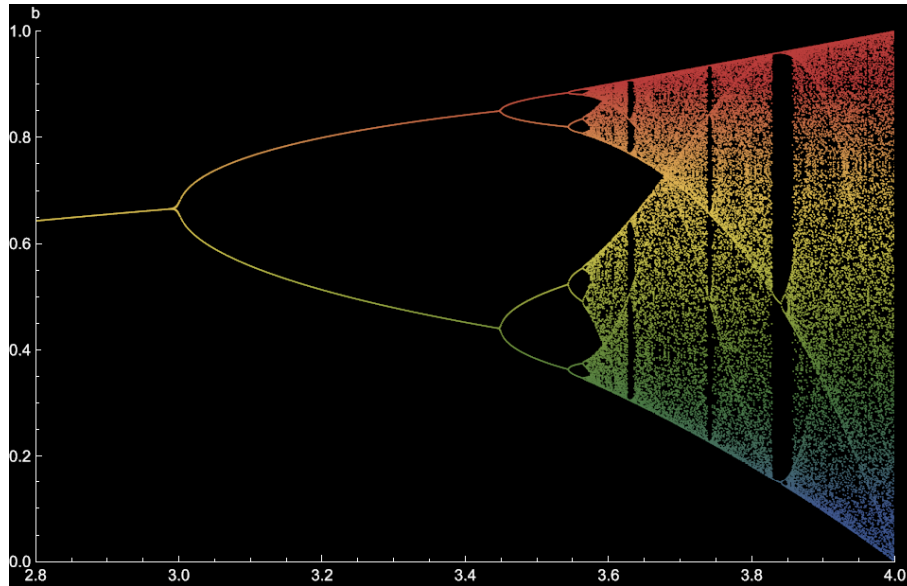
Σχήμα 2.20: Εξέλιξη της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  για  $x_0 = 0.1$  και  $x_0 = 0.1 + 10^{-16}$ .



Σχήμα 2.21: Ανάμειξη των τροχιών της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  για  $x_0 = 0.1$ ,  $x_0 = 0.2, \dots, x_0 = 0.9$ .



Σχήμα 2.22: Διάγραμμα διακλάδωσης της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ .



Σχήμα 2.23: Διάγραμμα διακλάδωσης της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ .

Αυστηρά μιλώντας, η хаοτική συμπεριφορά της λογιστικής απεικόνισης για  $\lambda = 4$  εξασφαλίζεται από τη хаοτική συμπεριφορά της απεικόνισης Bernoulli:

$$x_{n+1} = 2x_n \mod 1 = \begin{cases} 2x_n, & \text{αν } 0 \leq x_n < 1/2 \\ 2x_n - 1, & \text{αν } 1/2 \leq x_n \leq 1 \end{cases}.$$

Η συνάρτηση  $D(x) = 2x \mod 1$  είναι τοπολογικά μεταβατική (βλ. [24] σελ. 126), όπερ σημαίνει ότι το σύστημα, του οποίου η κατάσταση στο χρόνο  $n$  περιγράφεται από τη σχέση:

$$x_n = D(x_{n-1}),$$

είναι χαοτικό.

Λόγω της ημι-συζυγίας της  $D$  και της  $f(x) = 4(1-x)x$  (βλ. [20] σελ. 63 και ενότητα 3.1 της παρούσης εργασίας) έχουμε ότι και το σύστημα, του οποίου η κατάσταση στο χρόνο  $n$  περιγράφεται από τη σχέση:

$$x_n = 4(1 - x_{n-1})x_{n-1},$$

θα είναι χαοτικό.

## 2.5.β' Εκθέτης Lyapunov - Τοπολογική εντροπία

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι μέτρησης της χαοτικής συμπεριφοράς ενός συστήματος. Ένας εξ αυτών είναι ο εκθέτης Lyapunov (βλ. [24] σελ. 130-131). Ο εκθέτης Lyapunov σε ένα σημείο  $x_0$  (έστω  $l(x_0)$ ) μετρά την αύξηση του σφάλματος ανά επανάληψη ή τη μέση απώλεια πληροφορίας κατά τις διαδοχικές επαναλήψεις σημείων κοντά στο  $x_0$ .

Αυστηρά μιλώντας, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απεικόνιση  $x_{n+1} = f(x_n)$  και ας εξετάσουμε τι θα συνέβαινε αν, αντί για αρχικό όρο  $x_0$  χρησιμοποιούσαμε κάποιον κοντινό του  $x_0 + \varepsilon$ , λόγω π.χ. κάποιου σφάλματος  $\varepsilon \neq 0$ . Τότε:

- η αρχική ακολουθία θα ήταν η:

$$x_0, f(x_0), f^{\circ 2}(x_0), f^{\circ 3}(x_0), \dots,$$

- ενώ η ακολουθία με το αρχικό σφάλμα  $\varepsilon$  θα ήταν η:

$$x_0 + \varepsilon, f(x_0 + \varepsilon), f^{\circ 2}(x_0 + \varepsilon), f^{\circ 3}(x_0 + \varepsilon), \dots$$

Οι όροι των δύο ακολουθιών που παράγονται θα έχουν, φυσικά, μια απόκλιση. Συγκεκριμένα, το σφάλμα που θα υφίσταται στον  $n$ -οστό όρο θα είναι:

$$|f^{on}(x_0) - f^{on}(x_0 + \varepsilon)|.$$

Έτσι, το σχετικό σφάλμα, δηλαδή το σφάλμα των όρων εν συγκρίσει με το αρχικό σφάλμα θα είναι:

$$\left| \frac{f^{on}(x_0) - f^{on}(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right|.$$

Λόγω της ευαισθησίας στις αρχικές αυτό το σφάλμα θα διογκώνεται εκθετικά, δηλαδή περιμένουμε ότι θα ισχύει:

$$e^{n\tilde{l}} \approx \left| \frac{f^{on}(x_0) - f^{on}(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right|$$

για  $\varepsilon \approx 0$ , όπου  $\tilde{l}$  κάποιος αριθμός που εξαρτάται από το  $x_0$  και το  $n$ . Ο εκθέτης Lyapunov είναι η τιμή του  $\tilde{l}$  σε βάθος χρόνου, δηλαδή:

$$l(x_0) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^{on}(x_0) - f^{on}(x_0 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right|.$$

Αυτά περί του πώς ορίζεται ο εκθέτης Lyapunov. Αν θελήσουμε να τον υπολογίσουμε έχουμε κάτι πιο άμεσο, το οποίο παρουσιάζεται στο κάτωθι θεώρημα (για την απόδειξη βλ. [24] σελ. 131).

#### εκθέτης Lyapunov

**Θεώρημα 2.7.** Ο εκθέτης Lyapunov ενός  $f$ -δυναμικού συστήματος με αρχική τιμή  $x_0$  υπολογίζεται από τον τύπο:

$$l(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |f'(x_k)|.$$

Επίσης αν ο εκθέτης Lyapunov είναι θετικός, τότε το σύστημα είναι χαοτικό, ενώ αν είναι αρνητικός δεν είναι χαοτικό (βλ. [70] σελ. 298).

Ο εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης:

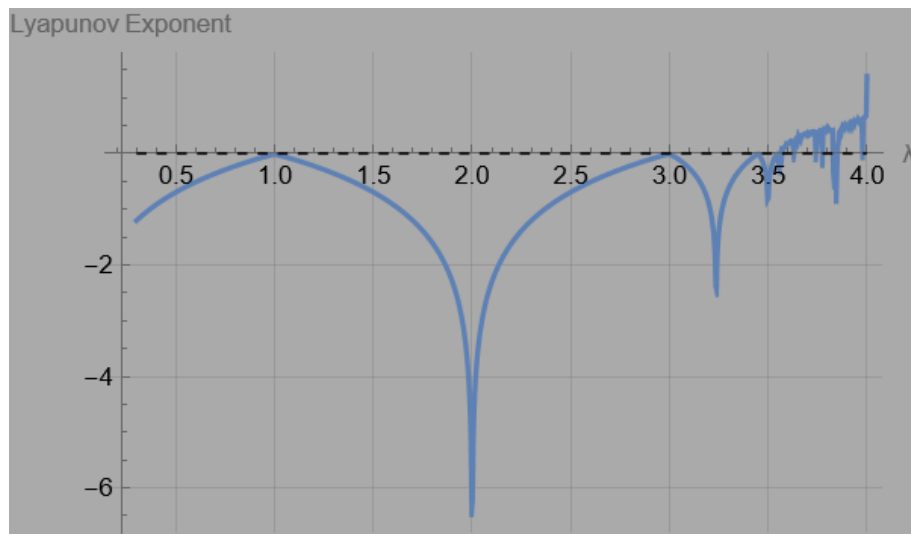
$$x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$$

για κάθε σημείο  $x_0$  που δεν οδηγεί σε περιοδικό σημείο (δηλαδή να μην είναι *τελικά περιοδικό*) είναι (βλ. [63] σελ. 649):

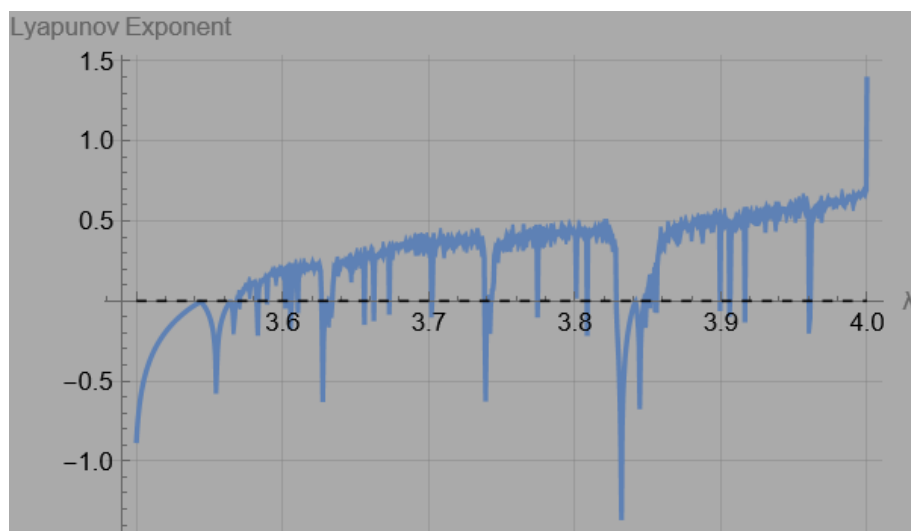
$$l(x_0) = \ln 2.$$

Στο σχ. 2.24 παριστάνεται ο εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης για τα διάφορα  $\lambda \in [0, 4]$ . Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για  $\lambda$  μέχρι λίγο μετά το 3 ο εκθέτης Lyapunov είναι αρνητικός, πράγμα που καταδεικνύει τον μη-χαοτικό χαρακτήρα της λογιστικής απεικόνισης γι' αυτά τα  $\lambda$ .

Ακριβώς, λοιπόν, επειδή εν προκειμένω ενδιαφερόμαστε για τις περιπτώσεις που συναντάμε χαοτική συμπεριφορά, παραθέτουμε στο σχ. 2.25 τους εκθέτες Lyapunov όταν το  $\lambda$  είναι μεταξύ του 3.5 και του 4. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε κάποια διαλείμματα τάξης (π.χ. στο  $\lambda \approx 3.84$ ) σε περιοχές του  $\lambda$  που έχει αποκτηθεί χαοτική συμπεριφορά. Κάτι τέτοιο φαίνεται να επιβεβαιώνουν και τα διαγράμματα διακλάδωσης (βλ. σχ. 2.22 και 2.23), όπου σε διάφορα σημεία (του 3.84 συμπεριλαμβανομένου) έχουμε υπερβολική αραιώση σημείων, συνεπώς χάνεται η πυκνότητα των περιοδικών σημείων, που συντροφεύει το χάος.



Σχήμα 2.24: Ο εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  για τα διάφορα  $\lambda \in [0, 4]$ .



Σχήμα 2.25: Ο εκθέτης Lyapunov της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  για τα διάφορα  $\lambda \in [3.5, 4]$ .

Τέλος, έχοντας κλείσει τη μελέτη του εκθέτη Lyapunov, μπορούμε να αναφέρουμε και μια άλλη μετρική του χάους την τοπολογική εντροπία. Η τοπολογική εντροπία είναι μια έννοια σχετική με τον εκθέτη Lyapunov (βλ. [59] σελ. 15). Αυτή είναι ένας δείκτης της περιπλοκότητας ενός συστήματος, καθώς σε γενικές γραμμές περιγράφει τον ρυθμό αύξησης των διακριτών τροχιών καταστάσεων ενός συστήματος  $\mathcal{D}$  όσο αυτό εξελίσσεται στο χρόνο (βλ. [33] σελ. 196-197 και 245-246).

Ο γενικός ορισμός της απαιτεί έννοιες που η παρουσίασή τους ξεφεύγει από τη θεματολογία της παρούσης εργασίας και, συν τοις άλλοις, δεν μας χρειάζεται για τη μελέτη της λογιστικής απεικόνισης. Τοιαύτη περιπτώσει, λοιπόν, θα παρουσιάσουμε έναν πιο εξειδικευμένο στις ανάγκες μας ορισμό της τοπολογικής εντροπίας, όπως αυτός παρουσιάζεται στα [21] (σελ. 2) και [44] (σελ. 45).

### τοπολογική εντροπία

**Ορισμός 2.16.** Έστω ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα, όπου  $f : I \rightarrow I$  τμηματικά συνεχής συνάρτηση σε κάποιο διάστημα  $I$ . Έστω  $m_n$  το ελάχιστο πλήθος των μονοτονικών τμημάτων της  $f^{\circ n}$  και  $N(f^{\circ n})$  ο αριθμός των σημείων ισορροπίας της  $f^{\circ n}$ . Η **τοπολογική εντροπία** ορίζεται ως:

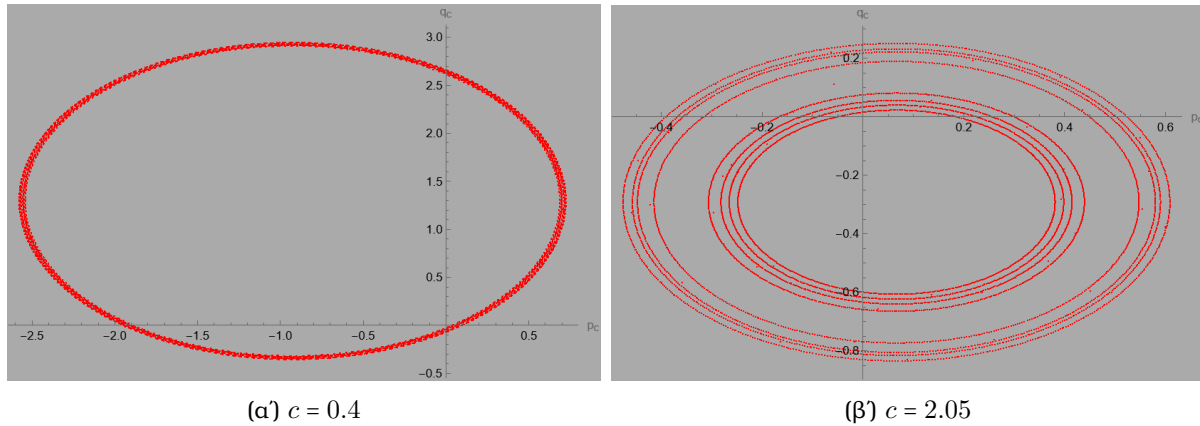
$$h(f) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(m_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N(f^{\circ n}).$$

Η τοπολογική εντροπία της συνάρτησης:

$$f(x) = 4(1-x)x$$

που παράγει την λογιστική απεικόνιση είναι, όπως κι ο εκθέτης Lyapunov, είναι  $\ln 2$  (βλ. [21] σελ. 2).





Σχήμα 2.26: Το διάγραμμα διασποράς που αντιπροσώπευε την  $p_c(n)$  με την  $q_c(n)$  για την περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 3.55(1 - x_n)x_n$ . Έχουν χρησιμοποιηθεί  $n_\infty = 5000$  σημεία.

### 2.5.γ' Έλεγχος 0-1 για το χάος

Αναφέραμε στο 2.7 (σελ. 40 της παρούσης εργασίας) ότι ένα σύστημα είναι χαοτικό αν ο εκθέτης Lyapunov είναι θετικός. Εδώ θα παρουσιάσουμε έναν πιο μοντέρνο και πιο πρακτικό τρόπο εξακρίβωσης του χαοτικού χαρακτήρα ενός δυναμικού συστήματος, ο οποίος εισήχθη το 2003 (βλ. [28]). Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε μια βελτιωμένη εκδοχή του, όπως αυτή παρουσιάζεται στο [29].

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα, του οποίου γνωρίζουμε τις τιμές του:

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Εν προκειμένω αυτές οι τιμές θα παραχθούν από τη συνάρτηση  $f(x) = \lambda(1 - x)x$  και επειδή, φυσικά, δεν μπορούμε να εξετάσουμε άπειρες τιμές, θα αρκεστούμε στις:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_\infty},$$

όπου  $n_\infty$  κάποιος αρκετά μεγάλος αριθμός. Αυτός στην παρούσα μελέτη έχει θεωρηθεί τότε  $n_\infty = 5000$  και τότε  $n_\infty = 1000$ .

Ακολουθώντας για αυθαίρετο  $c \in (0, \pi)$  ορίζουμε τις ακολουθίες:

$$p_c(n) = \sum_{j=1}^n x_j \cos(jc) \quad \text{και} \quad q_c(n) = \sum_{j=1}^n x_j \sin(jc).$$

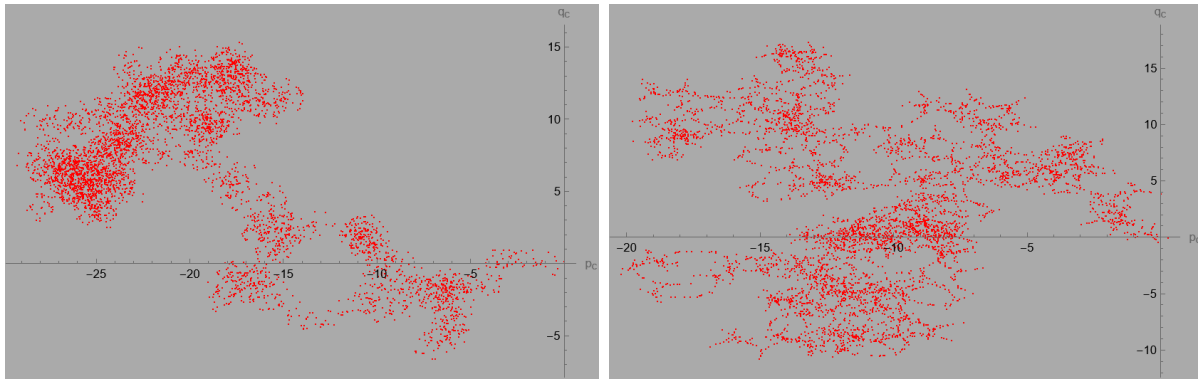
Ήδη από το σημείο αυτό μπορούμε να διαγνώσουμε τη χαοτική ή την ομαλή συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος. Συγκεκριμένα, στα σχήματα 2.26α' και 2.26β' βλέπουμε κάποιες ενδεικτικές απεικονίσεις των σημείων  $(p_c(n), q_c(n))$  για την περίπτωση που δεν έχουμε χαοτικό σύστημα. Η διαφορά των δύο προαναφερθέντων με την περίπτωση που έχουμε χαοτικό σύστημα είναι οπτικά προφανής (βλ. σχ. 2.27α' και 2.27β').

Ακολουθώντας υπολογίζουμε τη μέση τετραγωνική μετατόπιση:

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ((p_c(j+n) - p_c(j))^2 + (q_c(j+n) - q_c(j))^2).$$

Στην περίπτωση που προσομοιώνουμε τη διαδικασία με πεπερασμένους όρους, θα πρέπει το  $n$  να είναι αρκετά μικρότερο το  $n_\infty$ . Στο [29] (σελ. 4) αναφέρεται ότι είναι ικανοποιητικό να φτάνουν τα  $n$  μέχρι το  $n_{\text{cut}} = n_\infty/10$ . Τοιαύτη περιπτώσει έχουμε (βλ. επίσης [30] σελ. 3):

$$M_c(n) = \frac{1}{n_\infty - n_{\text{cut}}} \sum_{j=1}^{n_\infty - n_{\text{cut}}} ((p_c(j+n) - p_c(j))^2 + (q_c(j+n) - q_c(j))^2).$$

(α)  $c = 1.5$ (β)  $c = 3$ 

Σχήμα 2.27: Το διάγραμμα διασποράς που αντιπροσθθετει την  $p_c(n)$  με την  $q_c(n)$  για την περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 3.95(1 - x_n)x_n$ . Έχουν χρησιμοποιηθεί  $n_\infty = 5000$  σημεία.

Εν συνεχεία υπολογίζουμε την τροποποιημένη μέση τετραγωνική μετατόπιση:

$$D_c(n) = M_c(n) - (\mathbb{E}x_n)^2 \frac{1 - \cos(nc)}{1 - \cos c},$$

όπου  $\mathbb{E}x_n$  η μέση τιμή των  $x_j$ . Σε προσεγγιστικό επίπεδο:

$$\mathbb{E}x_n \approx \frac{1}{n_\infty} \sum_{j=1}^{n_\infty} x_j.$$

Τέλος, ορίζοντας:

$$\vec{n} = (1, 2, 3, \dots, n_{\text{cut}})$$

και:


$$\vec{D}_c = (D_c(1), D_c(2), D_c(3), \dots, D_c(n_{\text{cut}})),$$



υπολογίζουμε την ποσότητα:

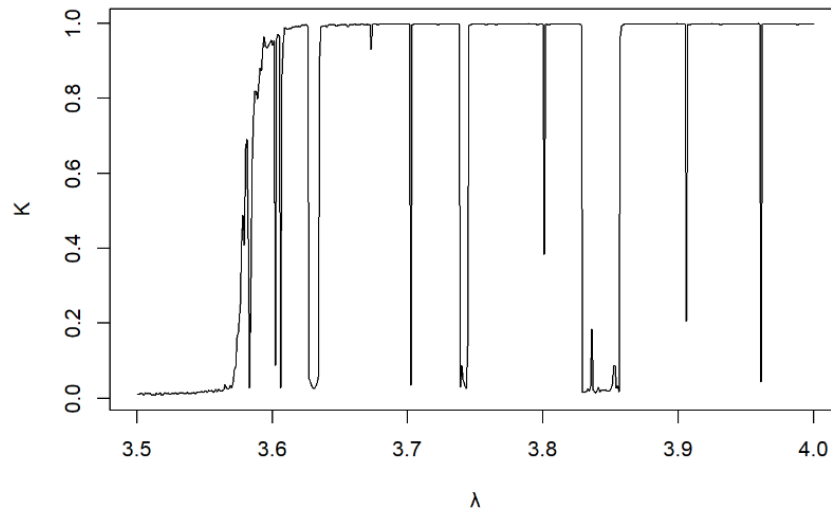
$$K_c = \text{cor}(\vec{n}, \vec{D}_c),$$

όπου  $\text{cor}()$  ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης Pearson.




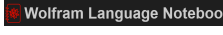

Ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία για διάφορα τυχαία  $c \in (0, \pi)$  και εξάγουμε τη διάμεσο των  $K_c$  που προκύπτουν. Αυτή την ονομάζουμε  $K$ . Αν το  $K$  είναι κοντά στο 1, τότε το σύστημα είναι χαοτικό. Αν είναι κοντά στο 0, τότε δεν είναι χαοτικό. Σημειωτέον ότι στο [30] (σελ. 4) δίνεται έμφαση στο να μην πάρουμε τη μέση τιμή των  $K_c$ , διότι, ναι μεν θεωρητικά η κακή επιλογή  $c$  έχει πιθανότητα 0, αλλά αν το  $c$  που διαλέξαμε αποτυγχάνει να διαγνώσει χαοτικότητα ή τάξη, τότε αποτυγχάνει οικτρά.

Δοκιμάζοντας 100 διαφορετικά  $c$  για 1000 διαφορετικές τιμές της  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  (δηλαδή  $n_\infty = 1000$ ) βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας το  in VS Code, ότι  $K = 0.99758 \approx 1$ , άρα το σύστημα είναι όντως χαοτικό, όπως ξέραμε. Ομοίως χαοτικό χαρακτήρα υποδηλώνει και η τιμή  $K = 0.99643$ , επιβεβαιώνοντας τα όσα έδειχναν τα σχήματα 2.27α' και 2.27β'. Αν πράξουμε τα ίδια για τη λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = 3.55(1 - x_n)x_n$  βρίσκουμε  $K = 0.00138698 \approx 0$ , άρα έχουμε μη-χαοτικό σύστημα, όπως διαφαινόταν ήδη από τα σχήματα 2.26α' και 2.26β'.

Ο γράφων φιλοδοξούσε να δημιουργήσει στο  in VS Code ένα γράφημα που να αντιστοιχεί το  $\lambda$  της λογιστικής απεικόνισης με το  $K$  που εξάγεται από αυτήν. Κάτι παρόμοιο, δηλαδή, με τα σχήματα 2.24 και 2.25 για τον εκθέτη Lyapunov. Δυστυχώς το  δεν έχει έτοιμη συνάρτηση που να το υπολογίζει, συνεπώς ο γράφων έπρεπε να βασιστεί αποκλειστικά



Σχήμα 2.28: Η τιμή  $K$  του ελέγχου 0-1 για το χάος στην περίπτωση της λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$ . Οι τιμές αφορούν 1000 διαφορετικά  $\lambda$  του διαστήματος  $[3.5, 4]$  και τα  $K$  εξήχθησαν από 2000 επιλογές για το  $c$  σε κάθε περίπτωση.

στις δικές του προγραμματιστικές δυνάμεις για να υπολογίσει το εκάστοτε  $K$ . Αυτό σημαίνει ότι οι υπολογισμοί έγιναν καθαρά σε γλώσσα  κι όχι σε , όπου βασίζονται οι built-in συναρτήσεις της , πράγμα που κοστίζει σημαντικά σε χρόνο εκτέλεσης. Συγκεκριμένα, για τον κάθε έναν από τους προαναφερθέντες υπολογισμούς των  $K$  απαιτήθηκε χρόνος 40 s-45 s, επομένως οποιαδήποτε προσπάθεια να απεικονιστεί μία ευλόγου μεγέθους πλειάδα τιμών έκανε το  να κρασάρει. Στην απόπειρα να περιορίσουμε τον αριθμό των  $c$  (π.χ. σε 100 τιμές) επιτυγχανόταν εκτέλεση σε χρόνο λίγο περισσότερο 1.5 min, αλλά με δραματικά αποτελέσματα, οπότε δεν αξίζει τον κόπο να παρατεθεί το αποτέλεσμα. Λόγω αυτού η εν λόγω γραφική παράσταση δημιουργήθηκε στην  χρησιμοποιώντας το πακέτο [Chaos01](#) (βλ. σχ. 2.28).



## Κεφάλαιο 3

# Περαιτέρω εφαρμογές

### 3.1 Παρόμοια συστήματα με τη λογιστική απεικόνιση

#### 3.1.α' Ορισμοί - Αποδείξεις

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε δυναμικά συστήματα παραπλήσια με το δυναμικό σύστημα που μοντελοποιείται από τη λογιστική απεικόνιση. Τι σημαίνει, όμως «παραπλήσια»; Σημαίνει ότι υπό κάποιες συνθήκες αυτά έχουν παρόμοια συμπεριφορά όσον αφορά τα ζητήματα που εξετάσαμε (σημεία ισορροπίας, περιοδικότητα, χαοτικός χαρακτήρας). Αυτά τα «παρόμοια» δυναμικά συστήματα τα λέμε συζυγή. Ας δούμε αυστηρότερα ποια είναι αυτά συμβουλευόμενοι το [20] (σελ. 55 και 57) και χρησιμοποιώντας την ορολογία του [43] (σελ. 467).

#### (ημι)συζυγία

**Ορισμός 3.1.** Έστωσαν δύο τοπολογικοί χώροι  $T_1, T_2$  και οι συναρτήσεις  $f : T_1 \rightarrow T_1, g : T_2 \rightarrow T_2$ . Λέμε ότι το  $f$ -δυναμικό σύστημα και το  $g$ -δυναμικό σύστημα είναι **συζυγή**, όταν υπάρχει ομοιομορφισμός<sup>(\*)</sup>  $h : T_1 \rightarrow T_2$  τέτοιος, ώστε  $h \circ f = g \circ h$ .

**Ορισμός 3.2.** Έστωσαν δύο τοπολογικοί χώροι  $T_1, T_2$  και οι συναρτήσεις  $f : T_1 \rightarrow T_1, g : T_2 \rightarrow T_2$ . Λέμε ότι το  $g$ -δυναμικό σύστημα είναι **ημισυζυγές** του  $f$ -δυναμικού συστήματος, όταν υπάρχει συνεχής<sup>(†)</sup> συνάρτηση  $h : T_1 \rightarrow T_2$  τέτοια, ώστε  $h \circ f = g \circ h$ .

<sup>(\*)</sup>Θυμίζουμε (βλ. [43] σελ. 96) ότι **ομοιομορφισμός** δύο τοπολογικών χώρων  $X$  και  $Y$  είναι η αμφίρριψη  $(b)$ , ήτοι ένριψη  $(b : X \rightarrow Y)$  και επίρριψη  $(b : X \rightarrow Y)$ , όπου για κάθε ανοιχτό σύνολο  $A$  του  $X$  το  $b(A)$  είναι επίσης ανοιχτό του  $Y$  και για κάθε ανοιχτό σύνολο  $A$  του  $Y$  το  $b^{-1}(A)$  είναι ανοιχτό του  $X$ .

<sup>(†)</sup>Προσέξτε την απουσία της δήλωσης ότι είναι ένριψη.

Η συζυγία, όπως προαναφέραμε, καθιστά πρακτικά ισοδύναμα δύο δυναμικά συστήματα. Ας πάρουμε, επί παραδείγματι, τα σημεία ισορροπίας. Έστω  $x^*$  ένα σημείο ισορροπίας του  $f$ -δυναμικού συστήματος, δηλαδή ένα σημείο για το οποίο ισχύει  $f(x^*) = x^*$ . Τότε θα συμβαίνει:

$$g(h(x^*)) = (g \circ f)(x^*) = (h \circ f)(x^*) = h(f(x^*)) = h(x^*),$$

ήτοι το  $h(x^*)$  θα είναι σημείο ισορροπίας του  $g$ -δυναμικού συστήματος. Αλλά και αντίστροφα! Ας είναι  $y^*$  ένα σημείο ισορροπίας του  $g$ -δυναμικού συστήματος. Τότε<sup>[\*]</sup>:

$$f(h^{-1}(y^*)) = (f \circ h^{-1})(y^*) = (h^{-1} \circ g)(y^*) = h^{-1}(g(y^*)) = h^{-1}(y^*),$$

επομένως το  $h^{-1}(y^*)$  είναι σημείο ισορροπίας του  $f$ -δυναμικού συστήματος. Κοντολογίς, ο ομοιομορφισμός  $h$  απεικονίζει τα σημεία ισορροπίας του ενός στα σημεία ισορροπίας του άλλου.

Ας εξετάσουμε και τα περιοδικά σημεία. Έστω  $p$  ένα  $n$ -περιοδικό σημείο του  $f$ -δυναμικού συστήματος, δηλαδή ένα σημείο για το οποίο να ισχύει  $f^{on}(p) = p$ . Εν τοιαύτη περιπτώσει:

$$\begin{aligned} g^{on}(h(p)) &= (g^{on} \circ h)(p) = (g^{on-1} \circ g \circ h)(p) \\ &= (g^{on-1} \circ h \circ f)(p) = (g^{on-2} \circ g \circ h \circ f)(p) \\ &= (g^{on-2} \circ h \circ f^2)(p) \\ &\dots \\ &= (h \circ f^{on})(p) \\ &= h(f^{on}(p)) \\ &= h(p) \end{aligned}$$

όπερ σημαίνει ότι το  $h(p)$  είναι  $n$ -περιοδικό σημείο του  $g$ -δυναμικού συστήματος. Ομοίως, αν το  $q$  είναι  $n$ -περιοδικό σημείο του  $g$ -δυναμικού συστήματος, τότε και το  $h^{-1}(q)$  είναι  $n$ -περιοδικό σημείο του  $f$ -δυναμικού συστήματος. Εν ολίγοις οι περιοδικές τροχιές δύο συζυγών δυναμικών συστημάτων ταυτίζονται.

Η διαφορά που θα υπήρχε στην περίπτωση της ημισυζυγίας θα ήταν ότι, ναι μεν πάλι τα περιοδικά σημεία θα απεικονίζονταν σε περιοδικά σημεία, αλλά θα υπήρχε περίπτωση να διαφέρουν οι δύο περίοδοι. Π.χ. το 2-περιοδικό σημείο του  $f$ -συστήματος θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε σημείο ισορροπίας (ήτοι 1-περιοδικό σημείο) του  $g$ -δυναμικού συστήματος.

Τέλος, ας δούμε τι συμβαίνει και με τον χαοτικό χαρακτήρα ενός δυναμικού συστήματος. Προς τούτο ας υποθέσουμε ότι το  $f$ -δυναμικό σύστημα είναι χαοτικό. Δεδομένου ότι, όπως προαναφέραμε, η ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες εξασφαλίζεται από την πυκνότητα των περιοδικών σημείων και την τοπολογική μεταβατικότητα, αρκεί να εξετάσουμε αυτά τα δύο.

Έστω, λοιπόν, ότι τα περιοδικά σημεία  $(\Lambda_f)$  του  $f$ -δυναμικού συστήματος είναι πυκνά και ότι  $f : T_1 \rightarrow T_1$ . Θεωρούμε ανοιχτό  $V \subseteq T_2$ . Για τη συνεχή συνάρτηση<sup>[†]</sup>  $h$  θα ισχύει ότι το  $h^{-1}(V)$  είναι επίσης ανοιχτό στον  $T_1$  (βλ. [17] σελ. 63). Αφού όμως το  $\Lambda_f$  είναι πυκνό, θα ισχύει  $h^{-1}(V) \cap \Lambda_f \neq \emptyset$  (βλ. [17] σελ. 59). Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε  $x_0 \in h^{-1}(V) \cap \Lambda_f$ . Καθόσον  $x_0 \in h^{-1}(V)$  εξ ορισμού  $h(x_0) \in V$ . Επίσης, δείξαμε πριν ότι τα περιοδικά σημεία του  $f$  (δηλαδή  $x_0 \in \Lambda_f$ ) απεικονίζονται μέσω του  $h$  σε περιοδικά σημεία του  $g$  (δηλαδή  $h(x_0) \in \Lambda_g$ ). Συνεπώς  $h(x_0) \in V \cap \Lambda_g$ , όπερ σημαίνει ότι  $V \cap \Lambda_g \neq \emptyset$ . Δείξαμε ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο  $V$  του  $T_2$  ισχύει  $V \cap \Lambda_g \neq \emptyset$ , πράγμα που αποδεικνύει την πυκνότητα του  $\Lambda_g$  (βλ. [17] σελ. 59).

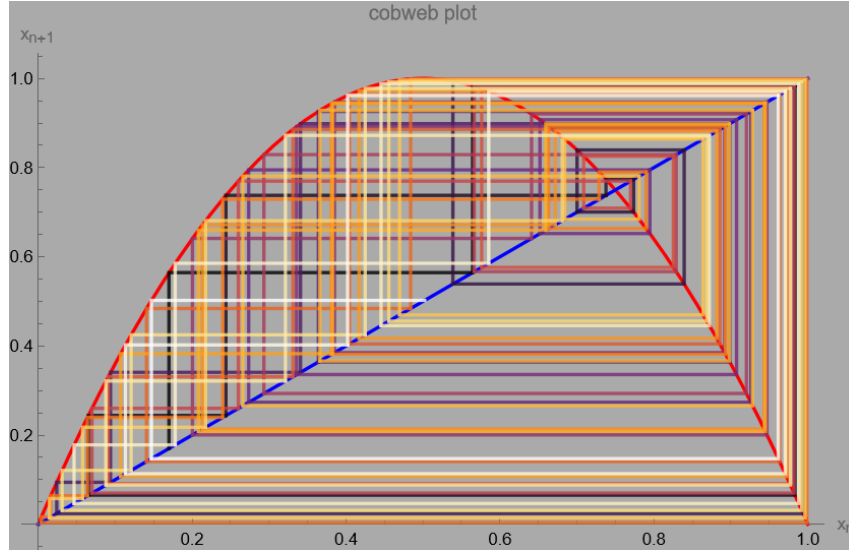
Όσον αφορά την τοπολογική μεταβατικότητα θα χρησιμοποιήσουμε τον τοπολογικό ορισμό που δώσαμε στην υποσημείωση [‡] στη σελ. 36. Για μια απόδειξη πιο «μετρική» βλ. [43] σελ. 468. Έστωσαν, λοιπόν, δύο ανοιχτά  $V_1, V_2 \subseteq T_2$  και  $U_j = h^{-1}(V_j)$  ( $j = 1, 2$ )<sup>[§]</sup>. Τα  $U_j$  θα είναι επίσης ανοιχτά και αφού η  $f$  είναι τοπολογικά μεταβατική, θα υπάρχει  $n \in \mathbb{N}^*$  τέτοιο, ώστε  $f^{on}(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ . Διαλέγουμε  $x_0 \in f^{on}(U_1) \cap U_2$ . Καθόσον  $x_0 \in U_2$ , θα είναι  $h(x_0) \in V_2$ . Επίσης, αφού  $x_0 \in f^{on}(U_1)$ , θα υπάρχει  $x_1 \in U_1$  τέτοιο, ώστε  $f^{on}(x_1) = x_0$ , και για το οποίο θα έχουμε:

[\*]Επισημαίνουμε την προφανή ισοδυναμία:

$$h \circ f = g \circ h \Leftrightarrow f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g.$$

[†]Δεν αναφέρουμε «ομοιομορφισμό», ώστε να πετύχουμε αποτέλεσμα που να αφορά την ημισυζυγία.

[§]Και πάλι η  $h$  δεν έχει υποτεθεί αντιστρέψιμη, ώστε να εξασφαλιστεί η ισχύς των γεγραμμένων μας και στην περίπτωση της ημισυζυγίας.



Σχήμα 3.1: Διάγραμμα Κόνιγ-Lémeray για τη λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = 4(1-x_n)x_n$  και αρχική τιμή  $x_0 = 0.17$ .

$$(h \circ f^{\circ n})(x_1) = h(x_0) \Leftrightarrow g^{\circ n}(h(x_1)) = h(x_0).$$

Έτσι, το  $y_0 = h(x_0)$  ανήκει στο  $V_2$  και και επίσης  $y_0 \in g^{\circ n}(V_1)$ , μιας και υπάρχει  $y_1 \in V_1$ , το  $y_1 = h(x_1)$ , για το οποίο  $g^{\circ n}(y_1) = y_0$ . Άρα  $g^{\circ n}(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$ , κάτι που καθιστά την  $g$  τοπολογικά μεταβατική.

Αφού αποδείξαμε ότι τα συζυγή δυναμικά συστήματα είναι όντως παρόμοια, πάμε να δούμε κάποια που να ομοιάζουν από άποψη συστημικής συμπεριφοράς με  $L$ -δυναμικό σύστημα της χαοτικής λογιστικής απεικόνισης  $x_{n+1} = 4(1-x_n)x_n$  ( $L(x) = 4(1-x)x$ , βλ. σχ. 3.1) όπως τα αντλούμε από τα [58] (σελ. 3-4) και [31] (σελ. 2-3).

### 3.1.β' Απεικόνιση σκηνής

Το  $T$ -δυναμικό σύστημα της **απεικόνισης σκηνής** (βλ. σχ. 3.2), όπου:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2-2x, & \text{αν } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

είναι συζυγές του  $L$ -δυναμικού συστήματος μέσω του ομοιομορφισμού:

$$L\text{-δυναμικό σύστημα} \xrightarrow{h} T\text{-δυναμικό σύστημα}$$

με τύπο (βλ. [58] σελ. 3):

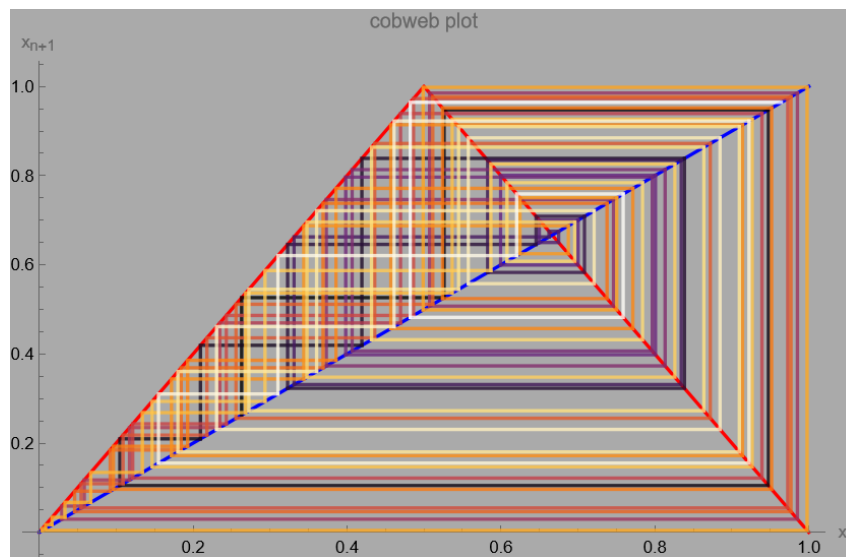
$$h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}).$$

### 3.1.γ' Τετραγωνική απεικόνιση

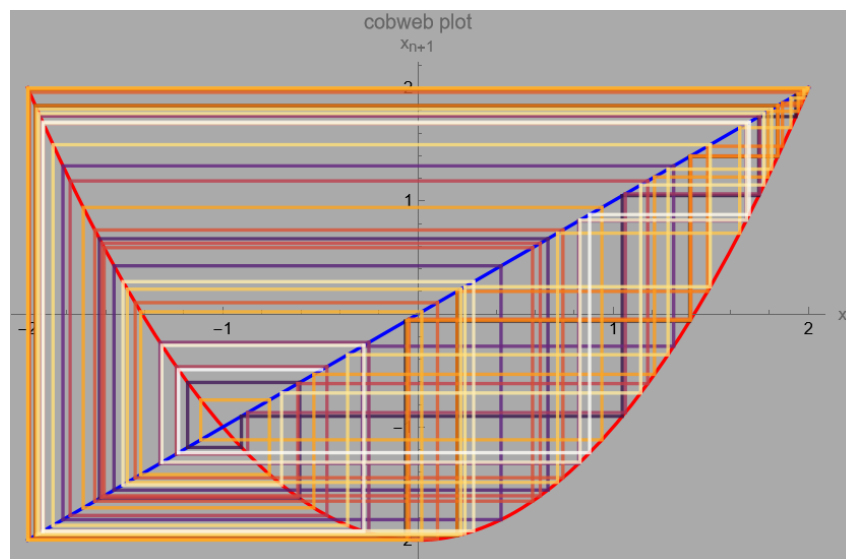
Το  $Q_2$ -δυναμικό σύστημα της **τετραγωνικής απεικόνισης** (βλ. σχ. 3.3), όπου:

$$Q(x) = x^2 - 2, \quad x \in [-2, 2]$$

είναι συζυγές του  $L$ -δυναμικού συστήματος μέσω του ομοιομορφισμού:

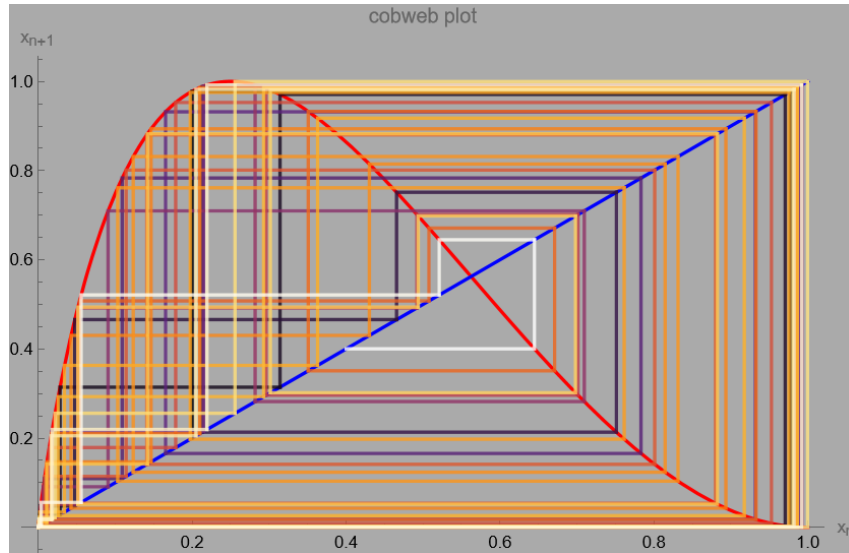


Σχήμα 3.2: Διάγραμμα K nig-Lémeray για την απεικόνιση σκηνής και αρχική τιμή  $x_0 = 251/954$ .



Σχήμα 3.3: Διάγραμμα K nig-Lémeray για την τετραγωνική απεικόνιση και αρχική τιμή  $x_0 = 0.2$ .





Σχήμα 3.4: Διάγραμμα Κόνηγ-Lémeray για την απεικόνιση  $x_{n+1} = 16x_n(1 - \sqrt{x_n})^2$  και αρχική τιμή  $x_0 = 0.2$ .

$$L\text{-δυναμικό σύστημα} \xrightarrow{h} Q_2\text{-δυναμικό σύστημα}$$

με τύπο (βλ. [58] σελ. 3):

$$h(x) = -4x + 2.$$

Γενικότερα,  $Q$ -δυναμικό σύστημα της **τετραγωνικής απεικόνισης**, όπου:

$$Q(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in [d_1, d_2]$$

είναι συζυγές του  $L$ -δυναμικού συστήματος αν και μόνον αν (βλ. [31] σελ. 2):

$$\begin{cases} b^2 - 4ac - 2b = 8 \\ d_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{2}{|a|} \\ d_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{2}{|a|} \end{cases}$$

μέσω του ομοιομορφισμού:

$$L\text{-δυναμικό σύστημα} \xrightarrow{h} Q\text{-δυναμικό σύστημα}$$

με τύπο (βλ. [31] σελ. 3):

$$h(x) = -\frac{4}{a}x + \frac{4-b}{2a}.$$

### 3.1.8' Απεικόνιση με ρίζα

Το  $R$ -δυναμικό σύστημα της απεικόνισης  $x_{n+1} = R(x_n)$  (βλ. σχ. 3.4), όπου:

$$R(x) = 16x(1 - \sqrt{x})^2$$

είναι συζυγές του  $L$ -δυναμικού συστήματος μέσω του ομοιομορφισμού:

$L$ -δυναμικό σύστημα  $\xrightarrow{h}$   $R$ -δυναμικό σύστημα

με τύπο (βλ. [58] σελ. 4):

$$h(x) = x^2.$$

## 3.2 Εφαρμογή της λογιστικής απεικόνισης ως γεννήτριας τυχαίων αριθμών - δαμάζοντας το χάος

### 3.2.α' Ορισμός

Λόγω του χαοτικού χαρακτήρα της λογιστικής απεικόνισης για  $\lambda = 4$  (βλ. ενότητα 2.5) έχει προταθεί η χρήση της ως γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε τα πιθανοκρατικά χαρακτηριστικά της κατανομής των ψευδοτυχαίων αριθμών  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\}$  χρησιμοποιώντας σε πρώτη φάση τη γλώσσα προγραμματισμού **R**. Αρχικά ας δούμε κάποιους εξ αυτών.

	$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.2$	$x_0 = 0.3$	$x_0 = 0.4$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0.6$	$x_0 = 0.7$	$x_0 = 0.8$	$x_0 = 0.9$
1	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90
2	0.36	0.64	0.84	0.96	1.00	0.96	0.84	0.64	0.36
3	0.92	0.92	0.54	0.15	0.00	0.15	0.54	0.92	0.92
4	0.29	0.29	0.99	0.52	0.00	0.52	0.99	0.29	0.29
5	0.82	0.82	0.02	1.00	0.00	1.00	0.02	0.82	0.82
6	0.59	0.59	0.09	0.01	0.00	0.01	0.09	0.59	0.59

Πίνακας 3.1: Οι πρώτες τιμές κάποιων λογιστικών απεικονίσεων.

Παρατηρούμε από τον πίνακα 3.1 ότι, αν  $x_0 = 0.5$ , τότε η  $x_n$  απέχει παρασάγγας από το να είναι χαοτική. Μετά από δύο μετακινήσεις απορροφάται μόνιμα από το 0. Το ίδιο μπορούμε να παρατηρήσουμε και για την περίπτωση που  $x_0 = 0.25$  ή ακόμα περισσότερο στην περίπτωση που  $x_0 = 0.75$ . Θα επιχειρήσουμε, λοιπόν, τη μελέτη των υπολοίπων περιπτώσεων.

### 3.2.β' Πώς κατανέμονται οι τιμές της λογιστικής απεικόνισης;

Θα μελετήσουμε την κατανομή των  $x_n$  για δοσμένο  $x_0$ . Όμως τα δείγματα που προκύπτουν από διαφορετικά  $x_0$  ακολουθούν την ίδια κατανομή; Μήπως, π.χ. αν  $x_0 = 0.1$  το δείγμα ακολουθεί την εκθετική κατανομή, ενώ αν  $x_0 = 0.27$  την κανονική; Για να μπορέσουμε να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα αρχικά θα σχεδιάσουμε κάποια ιστογράμματα.

Σχεδιάζουμε τα ιστογράμματα των τιμών που προκύπτουν αν  $x_0 = 0.01$ , αν  $x_0 = 0.16$ , αν  $x_0 = 0.26$ , αν  $x_0 = 0.49$ , αν  $x_0 = 0.74$  και αν  $x_0 = 0.79$  (βλ. σχ. 3.5). Επίτηδες βάλαμε κάποια κοντά σε στάσιμα σημεία και κάποια πιο απόμακρα, ώστε να δούμε κατά πόσον αυτό παίζει κάποιο ρόλο.

Παρατηρούμε ότι όλα τα ιστογράμματα έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Είναι όντως, όμως; Ας δούμε και κάποιες καμπύλες πυκνότητας πιθανότητας παραπάνω, αφού, προφανώς, αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις που οδηγούν σε στάσιμη τιμή (βλ. σχ. 3.6).

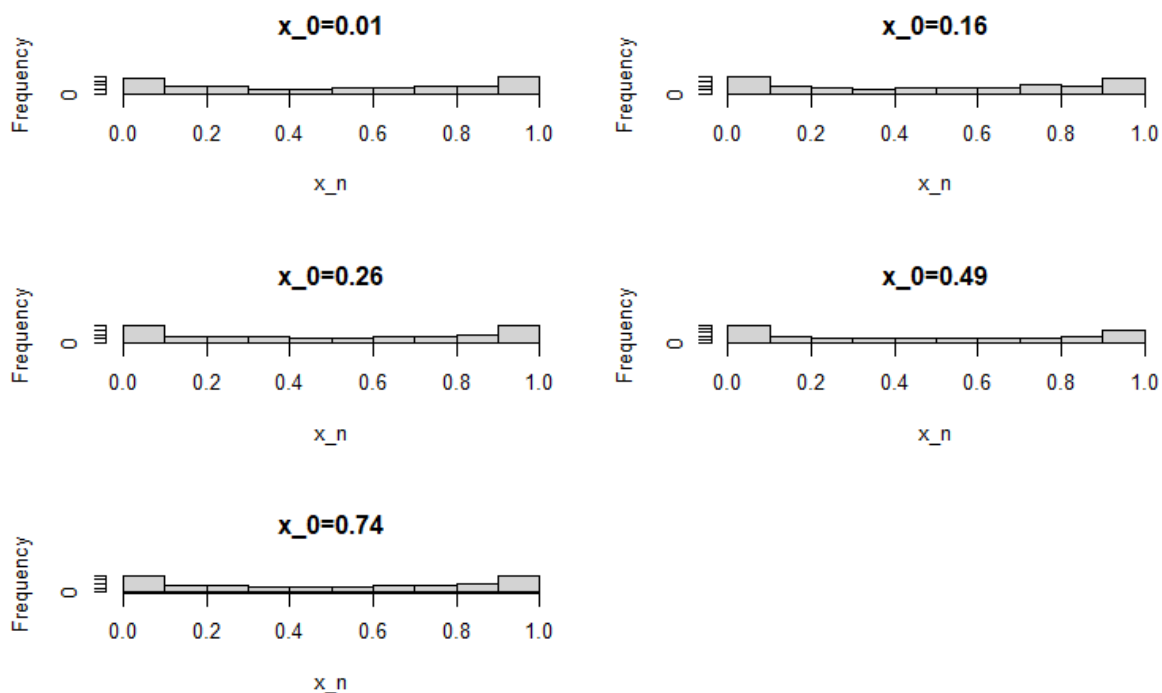
Και πάλι βλέπουμε μεγάλη ομοιότητα μεταξύ των κατανομών. Μήπως όμως πρόκειται για επιφανειακή ομοιότητα; Μήπως δεν πρόκειται παρά για μια οπτική και μόνο ομοιότητα; Σε αυτό θα μας απαντήσουν κάποιοι έλεγχοι Kolmogorov-Smirnov.

Αρχικά πειραματιζόμαστε με δύο τυχαίους αριθμούς ως αρχικές τιμές της λογιστικής απεικόνισης. Εδώ χρησιμοποιήσαμε τους  $x_0 = 0.2655087$  και  $x_0 = 0.3721239$  που εξήγαγε η γεννήτρια τυχαίων αριθμών `runif()`. Από την κάθε εξ αυτών εκκίνηση σχηματίσαμε τους πρώτες χίλιες τιμές της λογιστικής απεικόνισης. Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov που εκτελέσαμε μάς έδωσε  $p$ -τιμή την 0.7226, όπερ σημαίνει ότι δεν καταφέραμε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι οι κατανομές των δειγμάτων:

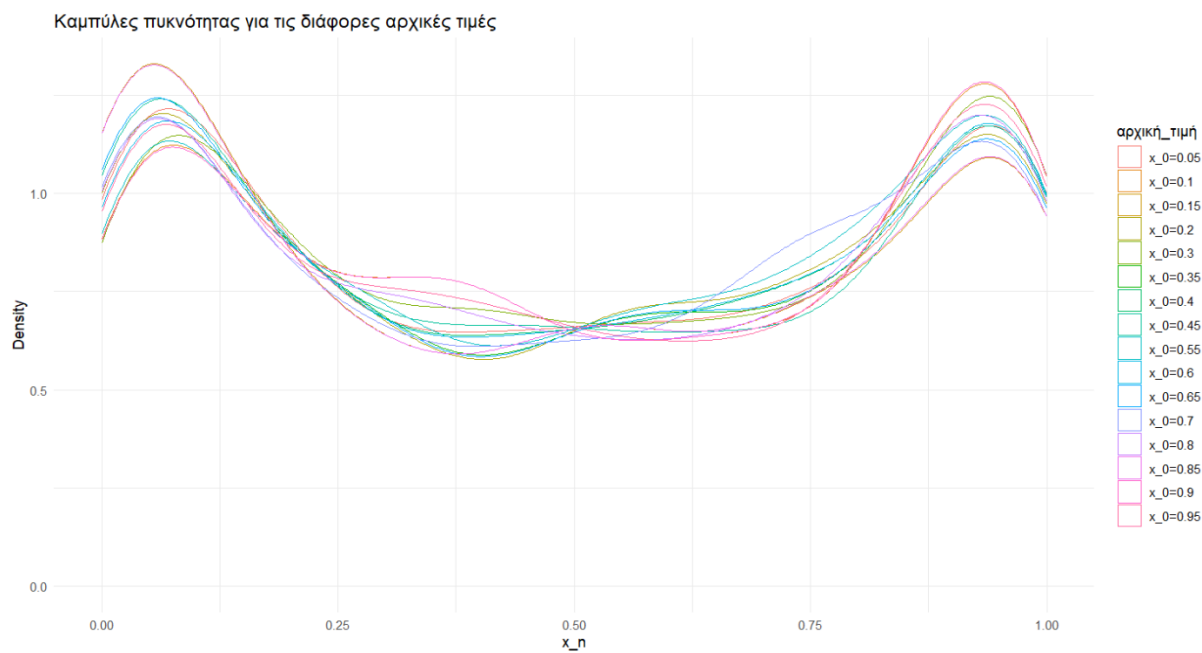
0.2655087, 0.780055321, 0.686276069, 0.861204905, 0.478124068, 0.998085774, 0.007642246, ...

και:

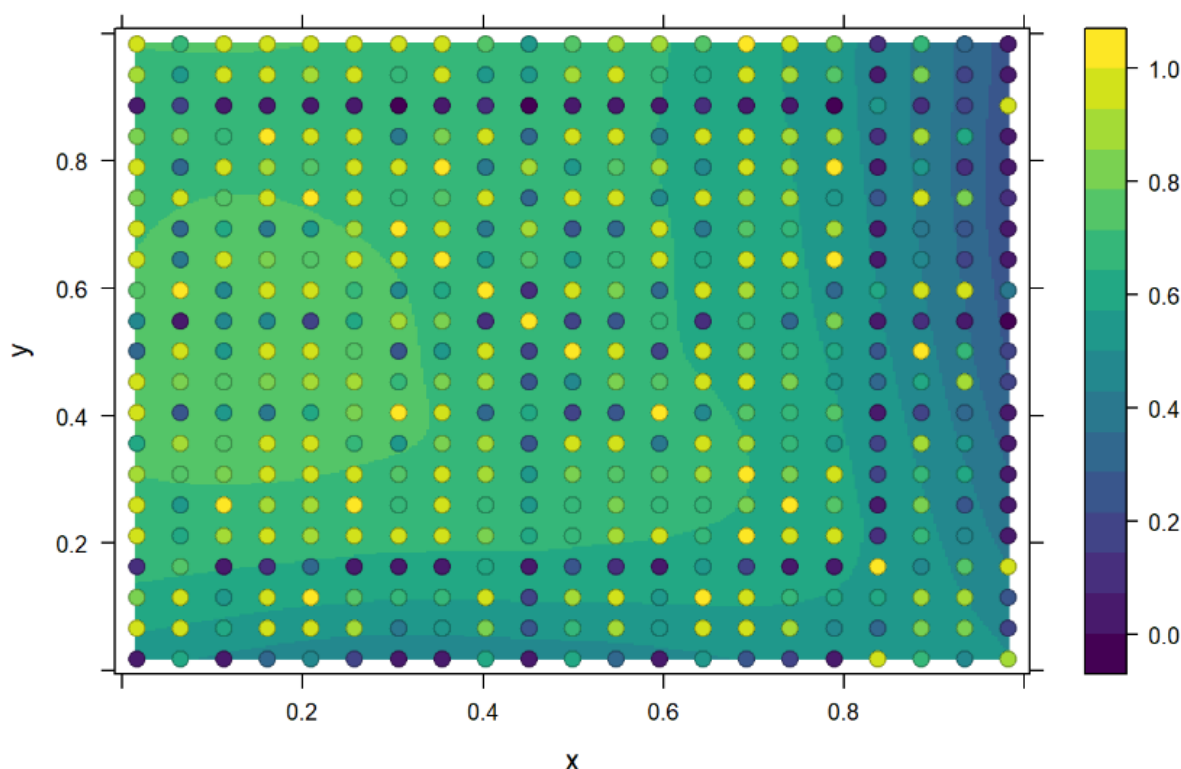
0.3721239, 0.93459081, 0.24452330, 0.73892663, 0.77165626, 0.7048115, 0.83220899, ...



Σχήμα 3.5: Ιστογράμματα των τιμών της  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  με αρχικές τιμές  $x_0 = 0.01$ ,  $x_0 = 0.16$ ,  $x_0 = 0.26$ ,  $x_0 = 0.49$ ,  $x_0 = 0.74$  και  $x_0 = 0.79$ .



Σχήμα 3.6: Καμπύλες πυκνότητας πιθανότητας των τιμών της  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  με αρχικές τιμές  $x_0 = 0.01$ ,  $x_0 = 0.16$ ,  $x_0 = 0.26$ ,  $x_0 = 0.49$ ,  $x_0 = 0.74$  και  $x_0 = 0.79$ .



Σχήμα 3.7: Διάγραμμα ισοϋψών για τις  $p$ -τιμές του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov περί της ταύτισης των κατανομών των λογιστικών απεικονίσεων για τις εκάστοτε αρχικές τιμές.

είναι διαφορετικές, το οποίο ήταν η μηδενική μας υπόθεση.

Μήπως όμως τύχαμε τα δείγματα που έχουν αυτή τη ξεχωριστή συμπεριφορά; Ας δοκιμάσουμε να κάνουμε κάποιους επιπλέον ελέγχους Kolmogorov-Smirnov. Για λόγους συνοπτικότητας της παρουσίασης (ελέγχθηκαν  $20 \cdot 20 = 400$  δείγματα) οι  $p$ -τιμές του ελέγχου των δειγμάτων με  $x_0 = \alpha$  και  $x_0 = \beta$  παρουσιάζονται χρωματικά στο σημείο  $(\alpha, \beta)$  στο διάγραμμα ισοϋψών του σχήματος 3.7.

Παρατηρούμε ότι τα δείγματα ως επί το πλείστον αποτυγχάνουν να απορρίψουν τη μηδενική υπόθεση του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov λόγω της μεγάλης  $p$ -τιμής.

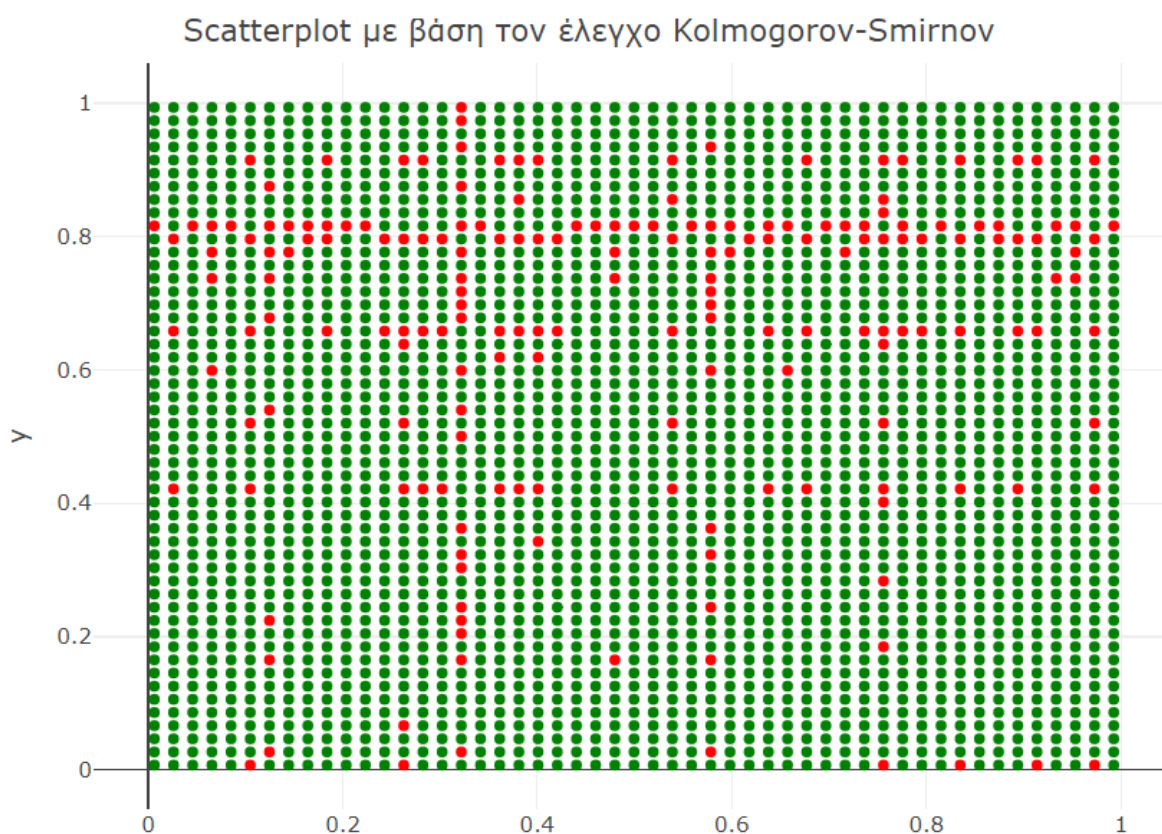
Ας δούμε όμως και λίγο πιο καθαρά τι ανακαλύψαμε. Ας εκτελέσουμε πάλι τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov για αρκετά πάλι δείγματα (αυτή τη φορά  $50 \cdot 50 = 2500$ ) και ας χρωματίσουμε (βλ. σχ. 3.8):

- με κόκκινο τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη δειγμάτων που αποτυγχάνουν στον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov (δηλαδή ακολουθούν πιθανότατα διαφορετική κατανομή),
- με πράσινο τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη δειγμάτων που δεν αποτυγχάνουν στον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov (δηλαδή δεν μπορούμε να αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να ακολουθούν την ίδια κατανομή)

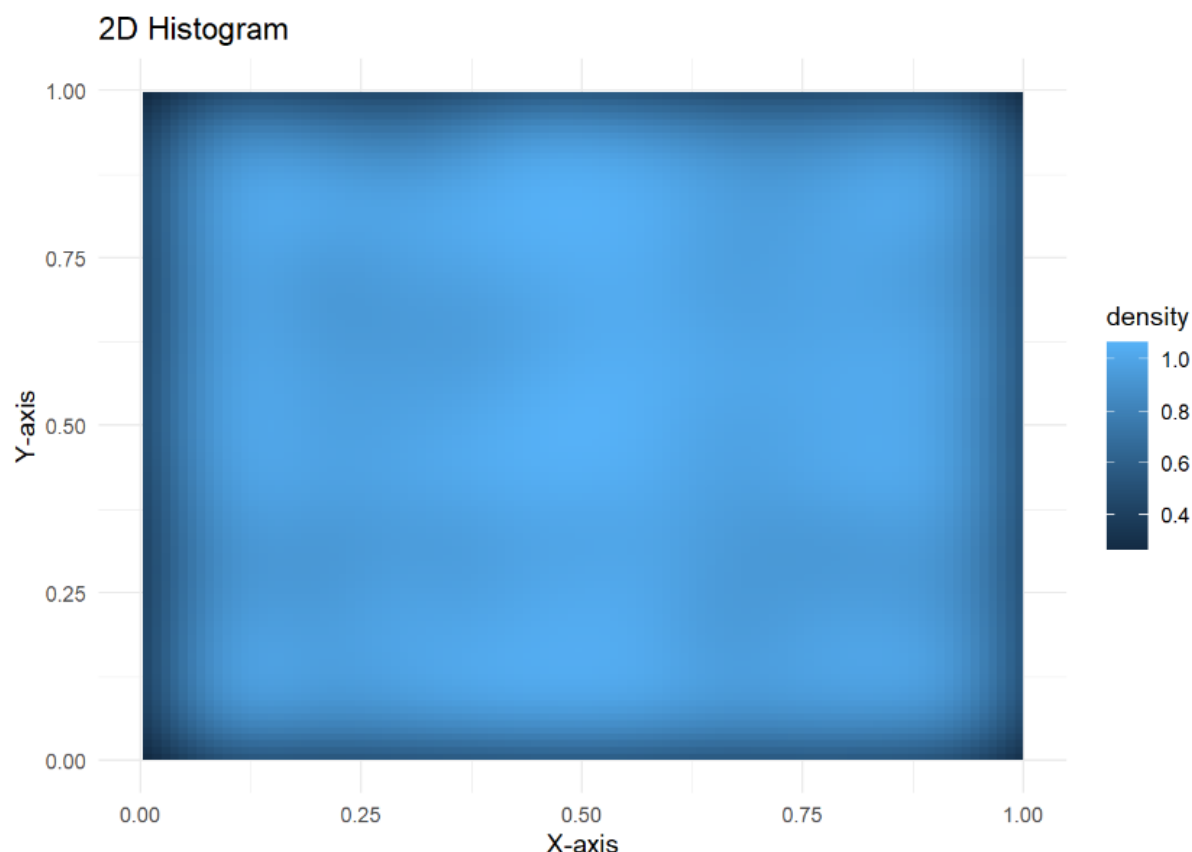
Βλέπουμε ότι η μερίδα του λέοντος των ζευγών δειγμάτων δεν καταφέρνει να απορρίψει τη μηδενική υπόθεση του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov. Τα συγκριτικά λίγα κόκκινα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ανήκουν στα όρια του στατιστικού λάθους ή υπόκεινται στον παράγοντα τύχη.

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, πως οι όροι της λογιστικής απεικόνισης ακολουθούν μια δικιά τους κατανομή, ανεξάρτητη μάλιστα από την τιμή που θα δώσουμε στο  $x_0$ . Αυτή θα μελετήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Πρώτα όμως θα δώσουμε το διάγραμμα πυκνότητας πιθανότητας των ζευγών δειγμάτων που καταφέρνουν να «επιβιώσουν» του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov. Σε ποιες περιοχές αρχικών τιμών



Σχήμα 3.8: Τα δείγματα που αποτυγχάνουν να περάσουν τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov έχουν χρωματιστεί με πράσινο.



Σχήμα 3.9: Διάγραμμα πυκνότητας πιθανότητας των ζευγών δειγμάτων που καταφέρνουν να «επιβιώσουν» του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov

είναι πιθανότερο να απορριφθεί ο εν λόγω έλεγχος; Ας το δούμε στο σχ. 3.9.

### 3.2.γ' Περί ποιας κατανομής πρόκειται;

Η πρώτη μας κίνηση θα είναι η εύκολη λύση του γραφήματος Cullen και Frey. Θα αντιπαραβάλλουμε τη λοξότητα/κυρτότητα της κατανομής των τιμών μιας λογιστικής απεικόνισης με τη λοξότητα/κυρτότητα κάποιων γνωστών συναρτήσεων.

Διαλέξαμε στην τύχη τον αριθμό 0.2655087 για αρχικό όρο της λογιστικής απεικόνισης και βάσει αυτού σχεδιάσαμε το γράφημα Cullen και Frey (βλ. σχ. 3.10).

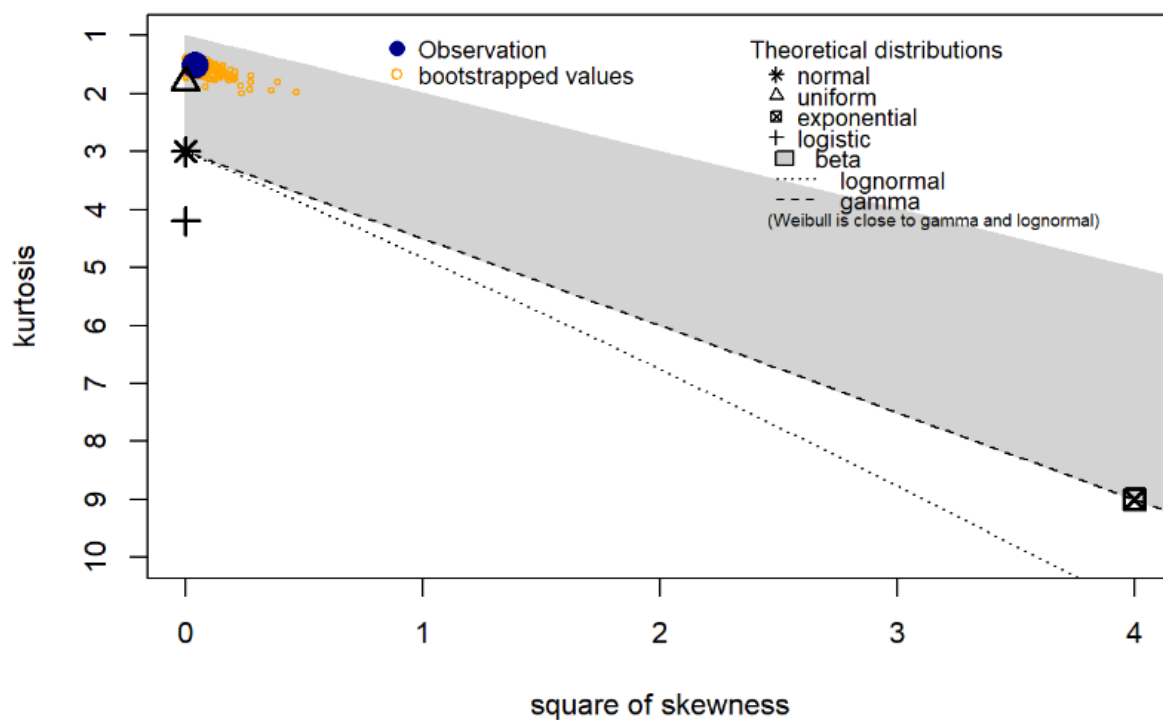
Το αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι υπέροχο! Η μέθοδος Bootstrap (πορτοκαλί σημεία) δεν χρειάστηκε καν για να επισημάνει ότι τα σημεία μας ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή (τρίγωνο). Βέβαια, ο παρατηρητικός αναγνώστης θα προσέξει ότι βρισκόμαστε εντός της περιοχής της κατανομής *Βήτα*, κι ας το κρατήσει σαν σκέψη για πιο μετά.

Πολύ ωραίο αποτέλεσμα για να είναι αληθινό. Άλλωστε θυμόμαστε τις καμπύλες κατανομών των τιμών της λογιστικής απεικόνισης (βλ. σχ. 3.6). Απείχαν παρασάγγας από το να είναι ομοιόμορφης κατανομής. Ας κάνουμε ένα γράφημα Q-Q πριν παραδώσουμε τα όπλα (βλ. σχ. 3.11).

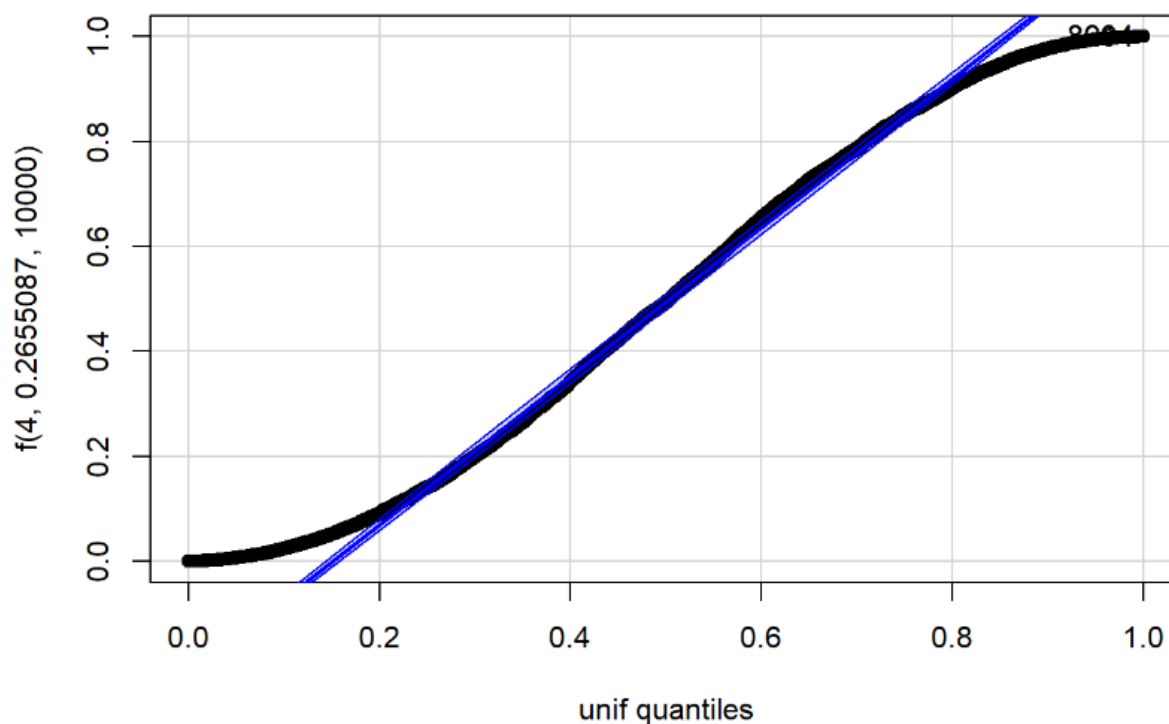
Βλέπουμε εδώ πως τα πράγματα αρχίζουν και χαλάνε. Οι περισσότερες τιμές κείτονται πάνω στην ευθεία Q-Q, αλλά οι ακραίες τιμές (όπερ αναμενόμενο) ξεφεύγουν. Οριστικό τέλος στην αρχική μας αυταπάτη δίνει ένας έλεγχος Kolmogorov-Smirnov. Αυτός για το δείγμα που διαλέξαμε δίνει  $p$ -τιμή την  $1.631 \cdot 10^{-15}$ . Με άλλα λόγια, είναι τελείως απίθανο να πρόκειται για ομοιόμορφη κατανομή.

Μήπως όμως ατυχήσαμε; Μήπως αν δοκιμάζαμε και άλλες εναλλακτικές τιμές για αρχική είσοδο στη λογιστική απεικόνιση, τότε να είχαμε διαφορετικά αποτελέσματα; Η απάντηση είναι

## Cullen and Frey graph

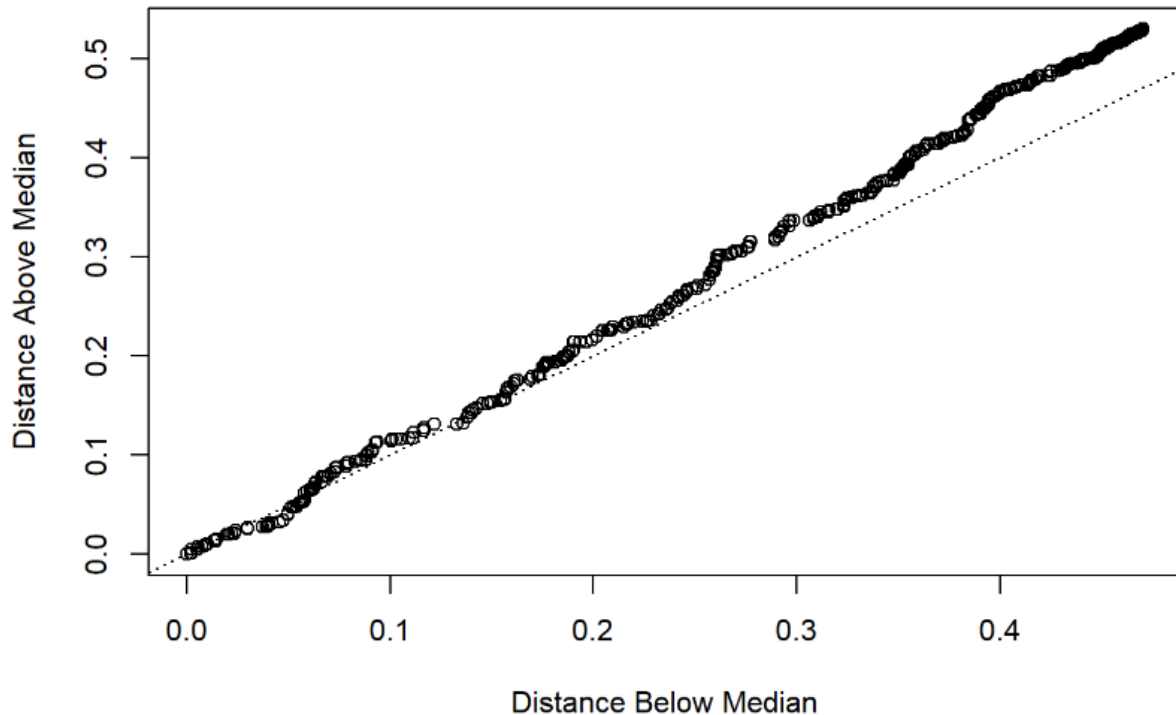


Σχήμα 3.10: Γράφημα Cullen και Frey για οπτικό προσανατολισμό της φύσης της κατανομής της λογιστικής απεικόνισης.



Σχήμα 3.11: Το γράφημα Q-Q, το οποίο απορρίπτει την υπόθεση ότι οι τιμές της λογιστικής απεικόνισης ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή.





Σχήμα 3.12: Γράφημα ασυμμετρίας που φανερώνει την αξονική συμμετρία των τιμών της λογιστικής απεικόνισης.

αρνητική. Κάθε φορά θα τυχαίναμε μια παρόμοια αρχική πλάνη από το γράφημα Cullen και Frey, ενώ ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov θα μας επανέφερε στην πεζή πραγματικότητα.

Κλείνοντας αυτή την ανεπιτυχή προσπάθεια προσδιορισμού της κατανομής των τιμών της λογιστικής απεικόνισης, ίσως αξίζει να επισημάνουμε ότι ενδεχομένως το σφάλμα του γραφήματος Cullen και Frey πήγαζε από την εξαιρετική συμμετρία των τιμών της λογιστικής απεικόνισης. Συμμετρία που υποστηρίζει εύγλωττα και το γράφημα ασυμμετρίας τους (βλ. σχ. 3.12).

### 3.2.δ' Φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα

Από την παραπάνω συζήτηση διαπιστώνουμε την ύπαρξη κάποιας κατανομής που αφορά τη λογιστική απεικόνιση, την οποία όμως δεν καταφέραμε να μαντέψουμε στατιστικά, παρά μόνο να υποψιαστούμε. Σε αυτή την αναζήτηση στατιστικής ομαλότητας ενός χαοτικού δυναμικού συστήματος δεν μπήκε μόνο ο γράφων (προφανώς!). Στο [52] (σελ. 32) διαβάζουμε για την έννοια της φυσικής αναλλοίωτης πυκνότητας, η οποία προσπαθεί να βγάλει ένα στατιστικό νόημα από το παραγόμενο χάος. Ας τη γνωρίσουμε!

## φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα

**Ορισμός 3.3.** Έστω  $\mathcal{D}$  ένα  $f$ -δυναμικό σύστημα. Ονομάζουμε **φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα** τη συνάρτηση  $\rho$  για την οποία ισχύει ότι το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b \rho(x) dx$$

είναι το ποσοστό του χρόνου που μια τροχιά καταστάσεων του  $\mathcal{D}$ :

$$x, f(x), f^{\circ 2}(x), f^{\circ 3}(x), \dots$$

βρίσκεται εντός του διαστήματος  $[a, b]$ <sup>[\*]</sup>.

<sup>[\*]</sup> Αυτό σημαίνει ότι αν  $f: I \rightarrow I$ , τότε:

$$\int_I \rho(x) dx = 1$$

καθόσον στο  $I$  θα παραμένει στο 100% του χρόνου.

Με άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα  $\int_a^b \rho(x) dx$  δηλώνει την πιθανότητα μια κατάσταση του συστήματος  $\mathcal{D}$  να βρίσκεται εντός του διαστήματος  $[a, b]$ , δηλαδή πρόκειται για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πολυπόθητης κατανομής της λογιστικής απεικόνισης. Πέραν τούτου, αυτή η διαπίστωση υποδηλώνει ότι αν το  $\mathcal{D}$  είναι χαοτικό, τότε για οποιοδήποτε μη κενό διάστημα  $J \subseteq I$  θα υπάρχει έστω κάποια μικρή αλλά θετική πιθανότητα η κατάσταση του  $\mathcal{D}$  να είναι εκεί μέσα, όσο στενά και να 'ναι τα όρια του  $J$ .

Προς τι, όμως ο όρος «αναλλοίωτη»; Ως προς τι μένει αυτή αναλλοίωτη; Θα συμβουλευτούμε το [52] στη σελ. 52. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε κάποια σημεία  $x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,m} \in I$ , όπου  $I$  κάποιο διάστημα. Θεωρούμε ότι αυτά είναι κατανεμημένα στο  $I$  βάσει κάποιας κατανομής  $\rho_0(x)$ , δηλαδή ότι το ποσοστό αυτών των σημείων που βρίσκονται εντός κάποιου διαστήματος  $[a, b]$  δίνεται από το ολοκλήρωμα  $\int_a^b \rho_0(x) dx$ .

Τώρα ας εφαρμόσουμε πάνω τους τη συνάρτηση  $f$ . Αυτομάτως προκύπτουν καινούρια σημεία:

$$x_{1,j} = f(x_{0,j}), \text{ όπου } j = 1, \dots, n,$$

τα οποία έχουν μια νέα κατανομή  $\rho_1(x)$ . Ομοίως προκύπτουν κάποια καινούρια σημεία:

$$x_{2,j} = f(x_{1,j}), \text{ όπου } j = 1, \dots, n,$$

τα οποία θα κατανέμονται βάσει μιας άλλης κατανομής  $\rho_2(x)$ . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προκύπτει μια ακολουθία από τέτοιες ομάδες σημείων, όπου η  $k$ -οστή ομάδα  $x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n}$  προκύπτει αναδρομικά από την:

$$x_{k,j} = f(x_{k-1,j}),$$

και είναι κατανεμημένη βάσει της  $\rho_k(x)$ <sup>[†]</sup>.

Πώς σχετίζεται η  $\rho(x)$  με όλα αυτά; Η  $\rho(x)$  παραμένει αναλλοίωτη από αυτούς τους μετασχηματισμούς!

<sup>[†]</sup> Η σχέση που συνδέει το κάθε  $\rho_k$  με το προηγούμενό του είναι η εξίσωση Frobenius-Perron (βλ. [52] σελ. 52):

$$\rho_{k+1}(x) = \int_I \rho_k(t) \delta(x - f(t)) dt,$$

όπου  $\delta$  η συνάρτηση Dirac (βλ. ορ. 6.4 σελ. 103 της παρούσης εργασίας), την οποία σχέση αξίζει να ανακαλέσει ο αναγνώστης όταν θα ασχοληθεί με το θεώρημα 3.2.

Μιας και το 'φερε η συζήτηση προς τα 'κει, αξίζει να αναφέρουμε ότι ο τελεστής  $P_f$  που στέλνει την  $\rho_{k-1}$  στην  $\rho_k$ , συμβολικά :

$$\int_A (P_f \rho_k)(x) dx = \int_{f^{-1}(A)} f(x) dx,$$

ονομάζεται **τελεστής Frobenius-Perron** (βλ. [73] σελ. 17). Συνεπώς, με αυτή την ορολογία, αυτό που κάνει η  $\rho$  είναι να ικανοποιεί την ισότητα :

$$P_f \rho = \rho.$$

Για την απόδειξη της ύπαρξης τέτοιας συνάρτησης ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [73] (σελ. 20).

Πώς όμως υπολογίζεται η φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα ; Κάναμε μια μικρή νύξη στα προηγούμενα και τώρα θα δούμε δύο ισοδύναμους τρόπους (βλ. [73] σελ. 21 και σελ. 23), τους οποίους παραθέτουμε ακολούθως.

### εύρεση φυσικής αναλλοίωτης πυκνότητας

**Θεώρημα 3.1.** Έστω διάστημα  $I = [a, b]$  και συνάρτηση  $f : I \rightarrow I$  τμηματικά μονότονη. Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να υπάρχει διαμέριση του  $I$ :

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

στην οποία :

- η  $f$  να είναι τουλάχιστον μία φορά παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα  $(a_{j-1}, a_j)$  και η παραγωγισιμότητά της να μπορεί να επεκταθεί στο  $[a_{j-1}, a_j]$ ,
- $|f'(x)| \neq 0$  στο  $(a_{j-1}, a_j)$ .

Τότε το  $f$ -δυναμικό σύστημα έχει φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα την  $\rho$  για την οποία ισχύει η συναρτησιακή εξίσωση :

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\rho(f_j^{-1}(x))}{|f'_j(f_j^{-1}(x))|} \cdot \chi_{f([a_{j-1}, a_j])}(x),$$

όπου  $f_j(x)$  ο περιορισμός της  $f$  στο  $[a_{j-1}, a_j]$  και  $\chi_A$  η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου  $A$ .

**Θεώρημα 3.2.** Έστω  $f : I \rightarrow I$  μια τμηματικά λεία και μονότονη συνάρτηση (βλ. παραπάνω θεώρημα). Τότε η φυσική αναλλοίωτη πυκνότητα του  $f$ -δυναμικού συστήματος προσδιορίζεται από την ολοκληρωτική εξίσωση :

$$\rho(x) = \int_I \rho(t) \delta(x - f(t)) dt,$$

όπου  $\delta$  η συνάρτηση Dirac.

Όσον αφορά συγκεκριμένα τη λογιστική απεικόνιση  $x_{n+1} = 4(1 - x_n)x_n$  έχουμε (βλ. [52] σελ. 34):

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{(1-x)x}}.$$

Δεδομένου ότι:

$$\rho(x) = \frac{x^{1/2-1}(1-x)^{1/2-1}}{\pi}.$$

αρχίζουμε όντως να υποψιαζόμαστε λίγο παραπάνω ότι πρόκειται για κατανομή *Βήτα*. Θυμίζουμε ότι (βλ. [56] σελ. 237) μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ακολουθεί την κατανομή *Βήτα* με παραμέτρους  $a$  και  $b$ , αν η πυκνότητά της δίνεται από τον τύπο :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\mathfrak{B}(a,b)}, & \text{αν } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases},$$

όπου :

$$\mathfrak{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

η συνάρτηση *Βήτα*. Για την σύνδεση της παραπάνω ισότητας με τον ορισμό 6.6 (σελ. 106 της παρούσης εργασίας) ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [36] (σελ. 13).

Όλα δείχνουν ότι πρόκειται για την κατανομή *Βήτα* με παραμέτρους  $(a,b) = (1/2, 1/2)$ . Ας το ελέγξουμε! Στο ολοκλήρωμα:

$$\mathfrak{B}(1/2, 1/2) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

θέτουμε  $x = \sin^2 \theta$  κι έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{|\sin \theta| |\cos \theta|} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} 2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} 2 d\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε :

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^{1/2-1}(1-x)^{1/2-1}}{\mathfrak{B}(1/2, 1/2)}, & \text{αν } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases},$$

δηλαδή η κατανομή των τιμών της λογιστικής απεικόνισης είναι η κατανομή *Βήτα* με παραμέτρους  $1/2$  και  $1/2$ .

Κλείνοντας, ας δούμε με έναν τελευταίο τρόπο πώς η στατιστική ομαλότητα συνδέεται με το χάος. Δεδομένου, λοιπόν, ότι η συνάρτηση  $\rho$  έχει ελάχιστο το  $\rho(1/2) = 2/\pi$ , από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού κάθε διάστημα  $[a,b]$  έχει πιθανότητα τουλάχιστον  $\frac{2(b-a)}{\pi}$  να

περιέχει κάποιον όρο της εν λόγω λογιστικής απεικόνισης. Είναι ενδιαφέρον πώς ένας παράγοντας τάξης, η στατιστικά ομαλή συμπεριφορά, συνδέεται τελικά με την πρόκληση χάους δια μέσου της ανάμειξης καταστάσεων.



## Κεφάλαιο 4

# Γενικεύσεις της λογιστικής απεικόνισης

### 4.1 Μιγαδική εκδοχή της λογιστικής απεικόνισης

#### 4.1.α' Ορισμός

Μία προσπάθεια γενίκευση της λογιστικής συνάρτησης είναι επιτρέποντας τόσο στον συντελεστή  $\lambda$ , όσο και στους όρους της ακολουθίας, να πάρουν μιγαδικές τιμές. Τοιαύτη περιπτώσει έχουμε:

$$z_{n+1} = \lambda(1 - z_n)z_n,$$

όπου  $z_n, \lambda \in \mathbb{C}$ .

Ένα πρώτο ερώτημα που πρέπει ν' απαντήσουμε είναι «Για ποιες τιμές των  $z_0, \lambda \in \mathbb{C}$  οι τιμές της ακολουθίας παραμένουν φραγμένες;». Στην περίπτωση που η λογιστική απεικόνιση μελετιόταν στους πραγματικούς μια μερική απάντηση ήταν εύκολη: Για  $\lambda \in [0, 4]$  αν διαλέξουμε  $x_0 \in [0, 1]$ , τότε οι όροι της ακολουθίας  $x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n$  είναι όλοι φραγμένοι στο διάστημα  $[0, 1]$ . Σε αντίθεση, όμως, με την πραγματική περίπτωση, η μιγαδική έχει κάποιες δυσκολίες. Προς τούτο θα χρειαστούμε κάποιες καινούριες έννοιες (βλ. [25] σελ. 236).

## πλήρες σύνολο Julia

**Ορισμός 4.1.** Έστω  $f$  μια ρητή συνάρτηση. Το **πλήρες σύνολο Julia της  $f$** , συμβολικά  $\mathcal{K}(f)$ , είναι το σύνολο των  $z_0 \in \mathbb{C}$ , για τους οποίους η ακολουθία:

$$z_{n+1} = f(z_n),$$

ήτοι η ακολουθία:

$$z_0, f(z_0), f^{\circ 2}(z_0), f^{\circ 3}(z_0), \dots$$

είναι φραγμένη.

Στην περίπτωση που αναφέρουμε απλά **πλήρες σύνολο  $c$ -Julia**, συμβολικά  $\mathcal{K}_c$ , θα εννοούμε το σύνολο των  $z_0 \in \mathbb{C}$ , για τους οποίους η ακολουθία:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

ήτοι η ακολουθία:

$$z_0, z_0^2 + c, (z_0^2 + c)^2 + c, ((z_0^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots$$

είναι φραγμένη.

Συνοπώς, αυτό που μάς ενδιαφέρει εδώ είναι το πλήρες σύνολο Julia της συνάρτησης  $f(z) = \lambda(1 - z)z$ . Αυτό για κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  είναι μη κενό και συμπαγές (βλ. [25] σελ. 237), άρα δεν χρειάζεται ν' ανησυχούμε για τα  $\lambda$  που θα διαλέξουμε, διότι σε κάθε περίπτωση μπορούμε να έχουμε μια επαναληπτική διαδικασία που να μην ξεφεύγει στο άπειρο, αρκεί, φυσικά, να διαλέξουμε το κατάλληλο  $z_0$ .

Στην πραγματική εκδοχή της λογιστικής απεικόνισης μάς ενδιέφερε όλοι οι όροι της ακολουθίας να κείτονται στο διάστημα από το οποίο αντλούνται οι αρχικοί όροι. Και το 'χαμε πετύχει: Διαλέγοντας  $0 < \lambda \leq 4$  και  $x_0 \in [0, 1]$ , για κάθε φυσικό  $n$  ήταν το  $x_n \in [0, 1]$ . Συμβαίνει το ίδιο και στη μιγαδική εκδοχή; Πάμε να τα δούμε ένα ένα.

Ας εξετάσουμε πρώτα αν όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στο σύνολο από το οποίο αντλούμε τους αρχικούς όρους κι ας δούμε μετά το πώς πρέπει να 'ναι αυτό για να έχει χαρακτηριστικά διαστήματος στο μιγαδικό επίπεδο. Είπαμε ότι, για να μην αποκλίνει η ακολουθία μας, θα πρέπει  $z_0 \in \mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ . Αυτό σημαίνει ότι επίσης  $z_1 \in \mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ , διότι διαφορετικά, αν η ακολουθία:

$$w_{n+1} = \lambda(1 - w_n)w_n, \text{ με } w_0 = z_1$$

δεν είναι φραγμένη, τότε αυτό θα ισχύει και για την  $z_{n+1} = \lambda(1 - z_n)z_n$ . Με την ίδια συλλογιστική είναι και  $z_2 \in \mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ ,  $z_3 \in \mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$  κ.ο.κ. Συνοπώς, διαλέγοντας  $z_0 \in \mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$ , όλη η ακολουθία  $(z_n)$  είναι εγκλωβισμένη εντός του  $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$  (βλ. επίσης [27] σελ. 194).

Τι είναι το αντίστοιχο ενός διαστήματος, όταν βρισκόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο; Μπορούμε να πούμε ότι το αντίστοιχο είναι ένα συνεκτικό χωρίο. Τοιαύτη περιπτώσει, για να ολοκληρωθεί η σύνδεση της πραγματικής εκδοχής που υιοθετήσαμε και της μιγαδικής, θα θέλαμε το  $\mathcal{K}(\lambda(1 - z)z)$  να είναι συνεκτικό (βλ. [17] σελ. 79 και σελ. 81). Ας δούμε τον αντίστοιχο ορισμό.



## συνεκτικά χωρία

**Ορισμός 4.2.** Ένα υποσύνολο  $E$  ενός μετρικού χώρου  $(M, d)$  καλείται **μη συνεκτικό**, αν υπάρχουν μη κενά ανοιχτά (στο  $E$ ) σύνολα  $A$  και  $B$  τέτοια, ώστε:

$$A \cap B = \emptyset \text{ και } A \cup B = E.$$

Αν δεν είναι δυνατόν να βρεθούν τέτοια σύνολα, τότε το  $E$  ονομάζεται **συνεκτικό**. Στην περίπτωση που όλα τα μη κενά συνεκτικά υποσύνολα του  $E$  είναι μονοσύνολα, λέμε ότι αυτό είναι **ολικά μη συνεκτικό**.

Στο ερώτημα που θέσαμε έχουμε μια πολύ όμορφη γνωστή απάντηση (βλ. π.χ. [39] σελ. 266), της οποίας τη διατύπωση θα αναβάλλουμε για να πούμε λίγα πράγματα περί του πώς σχετίζεται το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  με το  $\mathcal{K}_c$ , ώστε να χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα του ενός στο άλλο.

Ας πάρουμε, λοιπόν, το τριώνυμο που μας ενδιαφέρει:

$$f(z) = \lambda(1-z)z.$$

Θα δείξουμε ότι το  $\mathcal{K}(f)$  μπορεί να εκφραστεί και με τη βοήθεια του  $\mathcal{K}_c$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \lambda(1-z_n)z_n \\ &= -\lambda(z_n^2 - z_n) \\ &= -\lambda\left(z_n^2 - z_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\lambda\left(z_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} -\lambda z_{n+1} &= (-\lambda)^2 \left(z_n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} \\ \Leftrightarrow -\lambda z_{n+1} &= \left(-\lambda z_n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} \\ \Leftrightarrow -\lambda z_{n+1} + \frac{\lambda}{2} &= \left(-\lambda z_n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Θέτοντας  $w_n = -\lambda z_n + \frac{\lambda}{2}$  και  $c = -\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2}$  έχουμε:

$$w_{n+1} = w_n^2 + c.$$

Είναι φανερό ότι, για  $\lambda \neq 0$ , η  $z_n$  είναι φραγμένη αν και μόνον αν η  $w_n$  είναι φραγμένη. Συνεπώς, για δεδομένο  $\lambda$ , η  $z_n$  είναι φραγμένη αν:

$$-\lambda z_0 + \frac{\lambda}{2} \in \mathcal{K}_{-\lambda^2/4 + \lambda/2}.$$

Θεωρώντας ότι  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$  έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} z_0 \in \mathcal{K}(\lambda(1-z)z) &\Leftrightarrow -\lambda z_0 + \frac{\lambda}{2} \in \mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2} \\ &\Leftrightarrow \exists w_0 \in \mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2} \left( -\lambda z_0 + \frac{\lambda}{2} = w_0 \right) \\ &\Leftrightarrow \exists w_0 \in \mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2} \left( z_0 = -\frac{1}{\lambda} w_0 + \frac{1}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists w_0 \in \mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2} \left( z_0 = \frac{1}{|\lambda|} e^{(\pi-\theta)i} w_0 + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Επομένως το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  είναι το  $\mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2}$  όπου έχει συσταλεί  $|\lambda|$  φορές, κατόπιν έστριψε  $\pi - \theta$  ακτίνια προς τα αριστερά και τέλος μετακινήθηκε  $1/2$  μονάδες παράλληλα με τον άξονα των πραγματικών προς τη θετική κατεύθυνση.

Ας επανέλθουμε πίσω στο αρχικό μας ερώτημα. Πότε το σύνολο  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  είναι συνεκτικό; Η απάντηση, σύμφωνα με αυτό που είπαμε, είναι «Όταν το  $\mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2}$  είναι συνεκτικό». Ανακύπτει, βέβαια τώρα το ερώτημα περί του πότε το  $\mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2}$  είναι συνεκτικό. Γι' αυτό θα χρειαστούμε έναν επιπλέον ορισμό, αυτόν του συνόλου Mandelbrot.

### σύνολο Mandelbrot

**Ορισμός 4.3.** Ονομάζουμε **σύνολο Mandelbrot**, συμβολικά  $\mathcal{M}$ , το σύνολο των  $c \in \mathbb{C}$ , για τους οποίους η ακολουθία:

$$0, 0^2 + c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c, \dots$$

είναι φραγμένη (βλ. σχ. 4.1).

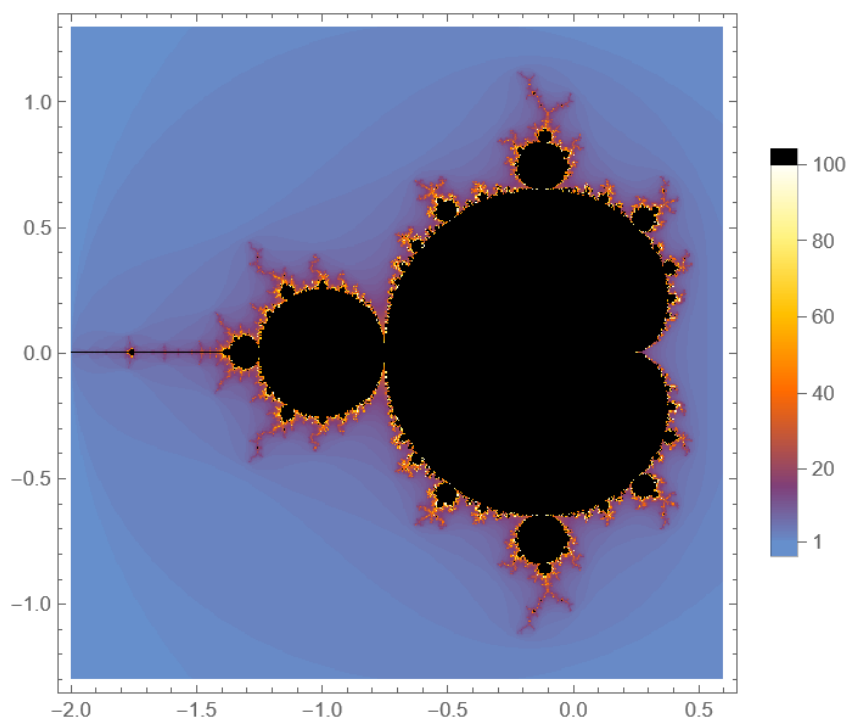
Πλέον μπορούμε να επανέλθουμε στο ερώτημα που είχαμε αφήσει να εκκρεμεί. «Πότε το  $\mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2}$  είναι συνεκτικό;». Η απάντηση, όπως είπαμε, δίνεται στο [39] στη σελ. 266. Το  $\mathcal{K}_c$  είναι συνεκτικό, όταν  $c \in \mathcal{M}$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση το  $\mathcal{K}_c$  είναι μια σκόνη χωρίς εσωτερικό, ένα ολικά μη συνεκτικό χωρίο, το οποίο ταυτίζεται με το σύνολό του<sup>[†]</sup>. Έτσι, δεδομένης της σχέσης των  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  και  $\mathcal{K}_{-\lambda^2/4+\lambda/2}$  έχουμε το κάτωθι θεώρημα.

### συνεκτικότητα του $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$

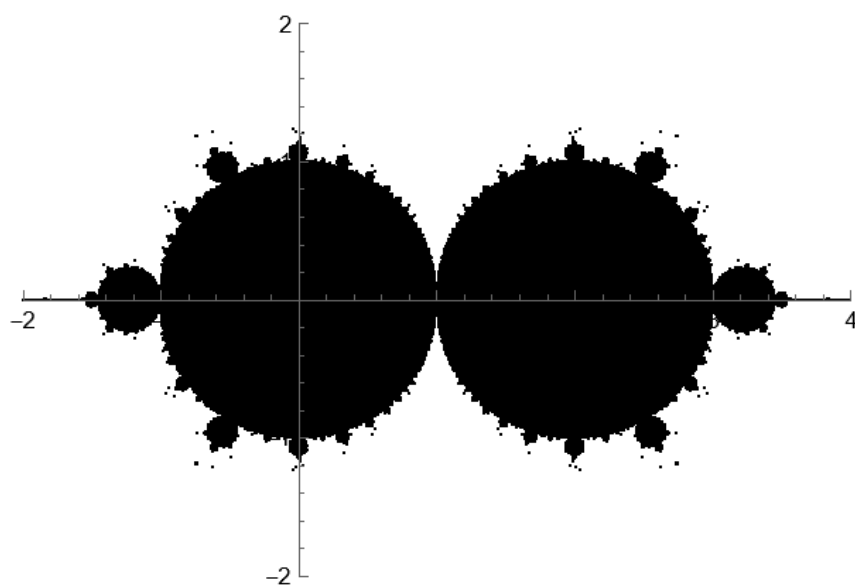
**Θεώρημα 4.1.** Το πλήρες σύνολο Julia  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  είναι συνεκτικό, αν  $-\lambda^2/4 + \lambda/2 \in \mathcal{M}$ . Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι ολικά μη συνεκτικό. Το σύνολο των  $\lambda \in \mathbb{C}$  που καθιστά συνεκτικό το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$ , το συμβολίζουμε ως  $\mathcal{M}_{\text{logistic}}$  (βλ. σχ. 4.2).

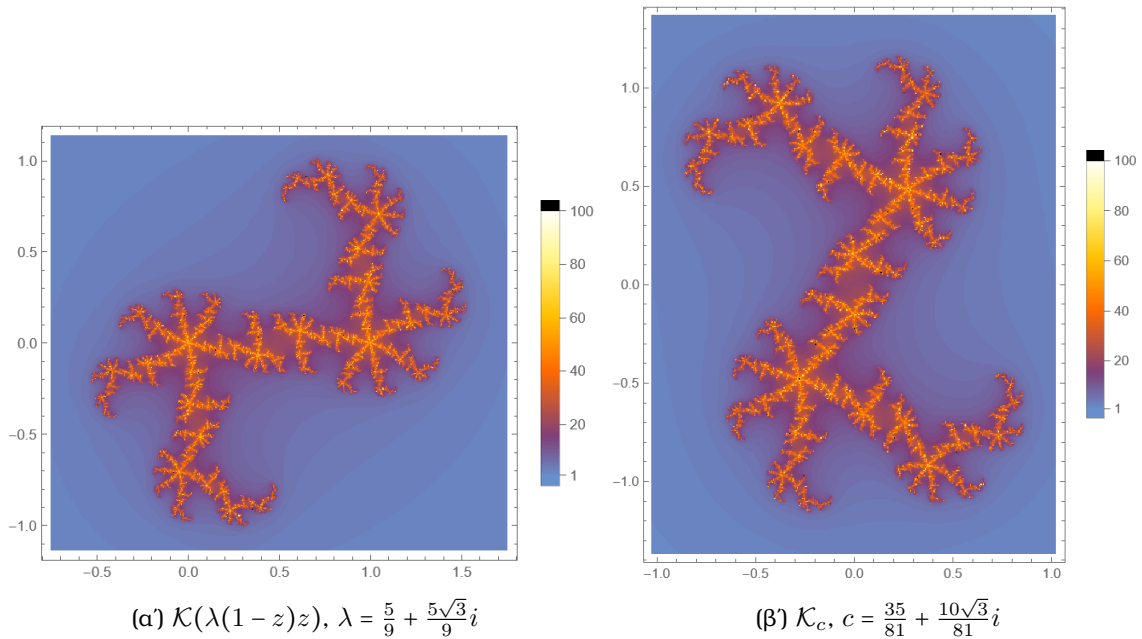
<sup>[\*]</sup>Για ένα γενικότερο συμπέρασμα και την απόδειξη αυτού βλ. [41] σελ. 96.

<sup>[†]</sup>Το σύνολο ενός πλήρους συνόλου Julia, έστω  $\mathcal{K}(f)$ , ονομάζεται **σύνολο Julia** και συμβολίζεται  $\mathcal{J}(f)$  (βλ. [25] σελ. 236). Για το σύνολο Julia μπορεί να βρει κανείς πλειάδα ισοδύναμων ορισμών (όπως και για το πλήρες σύνολο Julia). Στην παρούσα εργασία, όμως, δεν θα εμβαθύνουμε παραπάνω σε αυτό.



Σχήμα 4.1: Σύνολο Mandelbrot.

Σχήμα 4.2: Το σύνολο  $\mathcal{M}_{\text{logistic}}$  των  $\lambda \in \mathbb{C}$ , για τα οποία το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  είναι συνεκτικό.



Σχήμα 4.3: Το πλήρες σύνολο Julia  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  σε σχέση με το  $\mathcal{K}_c$ .

Ας πάμε να δούμε γραφικά όσα αναφέραμε. Ας πάρουμε:

$$\lambda = \frac{10}{9} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5}{9} + \frac{5\sqrt{3}}{9}i.$$

Τότε, διαλέγοντας:

$$c = -\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} = \frac{35}{81} + \frac{10\sqrt{3}}{81}i,$$

έχουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  (βλ. σχ. 4.3α) είναι μια λίγο μικρότερη εκδοχή του  $\mathcal{K}_c$  (είναι σε μέγεθος τα  $9/10$  αυτού, βλ. σχ. 4.3β), η οποία περιστράφηκε  $120^\circ$  δεξιόστροφα και μετατοπίστηκε  $0.5$  μονάδες δεξιά.

Παρατηρούμε ότι το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  είναι ολικά μη συνεκτικό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το  $c = -\lambda^2/4 + \lambda/2$  δεν ανήκει στο  $\mathcal{M}$ , όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με τη βοήθεια του [Wolfram Language Notebook](#) [in VS Code](#) χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `MandelbrotSetMemberQ[]`. Εναλλακτικά, δεδομένου ότι  $\lambda \approx 0.555556 + 0.96225i$ , παρατηρούμε από το σχήμα 4.2 ότι  $\lambda \notin \mathcal{M}_{\text{logistic}}$ , κάτι το οποίο επαναβεβαιώνει το προαναφερθέν συμπέρασμα.

Ας κάνουμε ακόμα έναν πειραματισμό. Θα διαλέξουμε αυτή τη φορά:

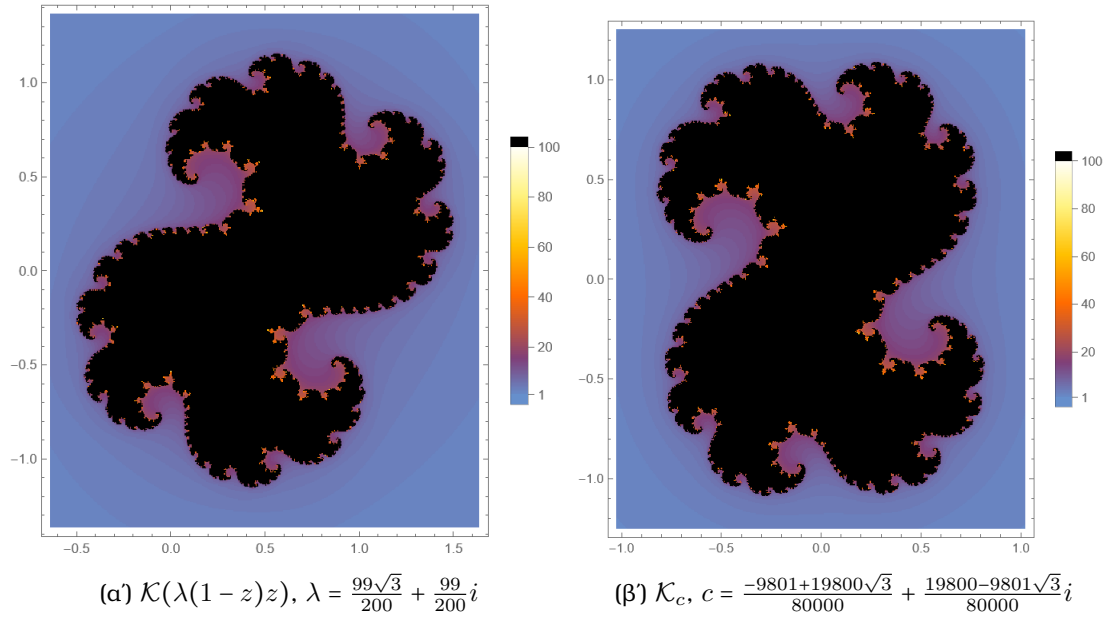
$$\lambda = \frac{99}{100} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{99\sqrt{3}}{200} + \frac{99}{200}i$$

και συνεπώς:

$$c = -\frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{2} = \frac{-9801 + 19800\sqrt{3}}{80000} + \frac{19800 - 9801\sqrt{3}}{80000}i.$$

Τοιαύτη περιπτώσει το σύνολο  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  (βλ. σχ. 4.4α) είναι μια λίγο μεγαλύτερη εκδοχή του  $\mathcal{K}_c$  (είναι σε μέγεθος τα  $100/99$  αυτού, βλ. σχ. 4.4β), η οποία περιστράφηκε  $150^\circ$  δεξιόστροφα και μετατοπίστηκε όπως ανέκαθεν  $0.5$  μονάδες δεξιά.

Επίσης, το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  φαίνεται συνεκτικό. Αυτό ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι το  $c = -\lambda^2/4 + \lambda/2$  ανήκει στο  $\mathcal{M}$ . Πράγματι! Το [Wolfram Language Notebook](#) [in VS Code](#) με τη βοήθεια της συνάρτησης `MandelbrotSetMemberQ[]` επαληθεύει αυτή την παρατήρηση. Επαλήθευση θα μπορούσε να γίνει απευθείας στο  $\lambda$  μέσω του σχήματος 4.2, παρατηρώντας ότι, αφού  $\lambda \approx 0.857365 + 0.495i$ , είναι  $\lambda \in \mathcal{M}_{\text{logistic}}$ .



Σχήμα 4.4: Το πλήρες σύνολο Julia  $K(\lambda(1-z)z)$  σε σχέση με το  $K_c$ .

#### 4.1.β' Σημεία ισορροπίας και περιοδικά σημεία

Δεν μπορούσε να απουσιάζει από αυτή την ενότητα η μελέτη των σημείων ισορροπίας της λογιστικής απεικόνισης. Ευτυχώς για μας, τόσο ο ορισμός του σημείου ισορροπίας (βλ. ορ. 2.3 σελ. 8), όσο και πολλά από τα κριτήρια ευστάθειας (βλ. ορ. 2.1 σελ. 13) διατηρούνται στο  $\mathbb{C}$ . Απουσία κριτηρίων για τις περιπτώσεις που η παράγωγος προκύπτει 1, θα υιοθετήσουμε έναν άλλο ορισμό (βλ. [13] σελ. 3)

#### σημεία ισορροπίας στο μιγαδικό επίπεδο

**Ορισμός 4.4.** Ας είναι η αναδρομική ακολουθία  $z_{n+1} = f(z_n)$ , όπου  $z_n \in \mathbb{C}$ , και κάποιο σημείο ισορροπίας  $z^*$ , δηλαδή σημείο για το οποίο:

$$f(z^*) = z^*.$$

(α') Αν ισχύει  $0 < |f'(z^*)| < 1$ , τότε αυτό είναι **ελκτικό** σημείο ισορροπίας.

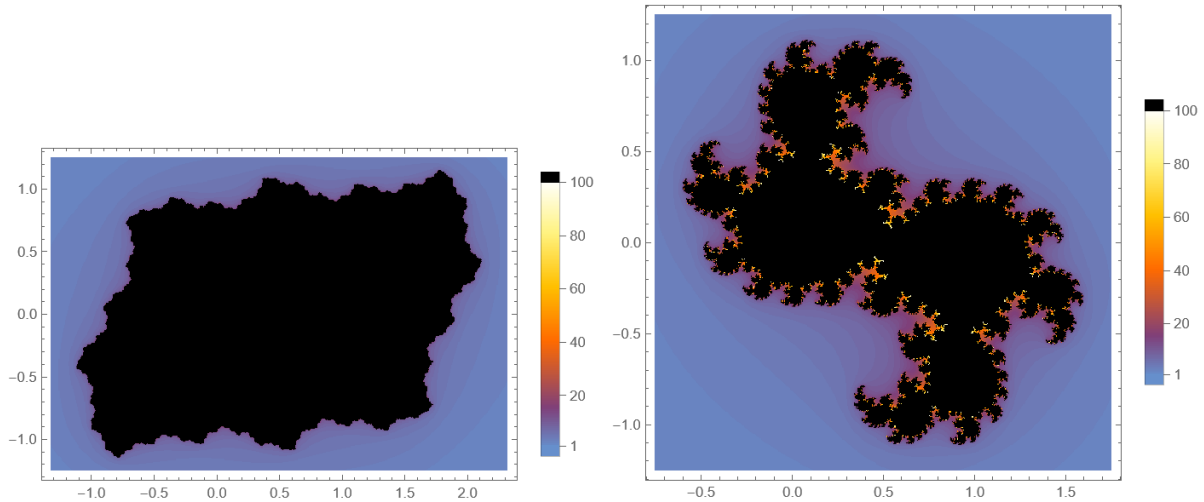
(β') Αν ισχύει  $|f'(z^*)| = 0$ , τότε αυτό είναι **υπερ-ελκτικό** σημείο ισορροπίας.

(γ') Αν ισχύει  $|f'(z^*)| > 1$ , τότε αυτό είναι **απωθητικό** σημείο ισορροπίας.

(δ') Αν ισχύει  $|f'(z^*)| = 1$ , τότε αυτό είναι **ουδέτερο** σημείο ισορροπίας.

Οι ενέργειες που θα πρέπει να κάνουμε για την εύρεση των μιγαδικών σημείων ισορροπίας δεν διαφέρουν από αυτές της ενότητας 2.2, οι οποίες μάς οδήγησαν στα :

$$0 \text{ και } 1 - \frac{1}{\lambda}.$$



(α) Το 0 είναι ελκτικό σημείο ισορροπίας.  
 $\lambda = -0.4 + 0.6i$ .

(β) Το 0 είναι ουδέτερο σημείο ισορροπίας.  
 $\lambda = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ .

Σχήμα 4.5: Το πλήρες σύνολο Julia  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  σε σχέση με το αν το 0 είναι ελκτικό ή ουδέτερο σημείο ισορροπίας.

Θεωρώντας ότι  $f(z) = \lambda(1-z)z$ , έχουμε ότι όπως και στην πραγματική περίπτωση:

$$f'(0) = \lambda \quad \text{και} \quad f'\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = 2 - \lambda.$$

Συνεπώς, ορίζοντας τον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο το 0 του  $\mathbb{C}$  ως:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\},$$

έχουμε τα παρακάτω:

- Για να είναι το 0 ελκτικό, θα πρέπει  $\lambda \in D_0^\circ - \{0\}$  (ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος με σημειακή τρύπα στη μέση).
- Για να είναι το 0 υπερ-ελκτικό, θα πρέπει  $\lambda = 0$ .
- Για να είναι το 0 απωθητικό, θα πρέπει  $\lambda \in D_0^c$  (το μιγαδικό επίπεδο με μοναδιαία τρύπα πέριξ του μηδενός).
- Για να είναι το 0 ουδέτερο, θα πρέπει  $\lambda \in \partial D_0$  (μοναδιαίος κύκλος).

Στο σημείο αυτό ο αναγνώστης αξίζει να παρατηρήσει την κυκλική περιοχή ακτίνας 1 πέριξ του μηδενός στο σχήμα 4.2 στη σελ. 69.

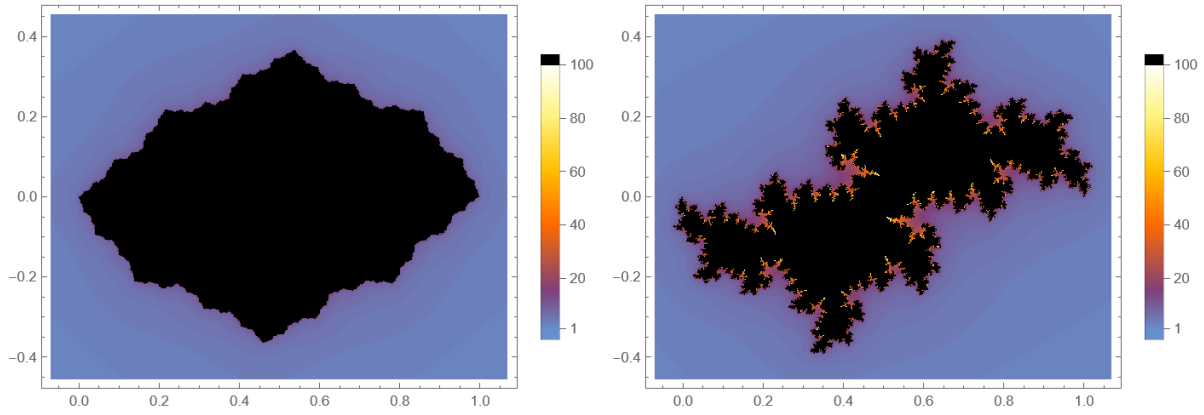
Πριν προχωρήσουμε, ας πάμε να ρίξουμε μια ματιά στο  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  διαλέγοντας  $\lambda$  σε διάφορες περιοχές. Διαλέγοντας, λοιπόν,  $\lambda = -0.4 + 0.6i$  έχουμε ότι  $\lambda \in D_0^\circ$  και το ζητούμενο σύνολο είναι το σχ. 4.5α'. Λίγο πιο ενδιαφέρουσα αισθητική έχει το  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  άπαξ και το  $\lambda$  επιλεγεί στο σύνορο του δίσκου. Επιλέγοντας  $\lambda = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$  έχουμε το σχ. 4.5β'.

Ακολουθώντας, όσον αφορά πλέον το άλλο σημείο ισορροπίας, ορίζοντας τον μοναδιαίο δίσκο με κέντρο το 2 του  $\mathbb{C}$  ως:

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\},$$

έχουμε ότι:

- Για να είναι το  $1 - 1/\lambda$  ελκτικό, θα πρέπει  $\lambda \in D_2^\circ - \{2\}$  (ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος κέντρου 2 με σημειακή τρύπα στη μέση).



(α) Το  $1 - 1/\lambda$  είναι ελκτικό σημείο ισορροπίας.  
 $\lambda = 2.6 + 0.2i$ .

(β) Το  $1 - 1/\lambda$  είναι ουδέτερο σημείο ισορροπίας.  
 $\lambda = \frac{31}{13} + \frac{12}{13}i$ .

Σχήμα 4.6: Το πλήρες σύνολο Julia  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  σε σχέση με το αν το  $1 - 1/\lambda$  είναι ελκτικό ή ουδέτερο σημείο ισορροπίας.

- Για να είναι το  $1 - 1/\lambda$  υπερ-ελκτικό, θα πρέπει  $\lambda = 2$ .
- Για να είναι το  $1 - 1/\lambda$  απωθητικό, θα πρέπει  $\lambda \in D_2^c$  (το μιγαδικό επίπεδο με μοναδιαία τρύπα πέριξ του 2).
- Για να είναι το  $1 - 1/\lambda$  ουδέτερο, θα πρέπει  $\lambda \in \partial D_2$  (μοναδιαίος κύκλος κέντρου 2).

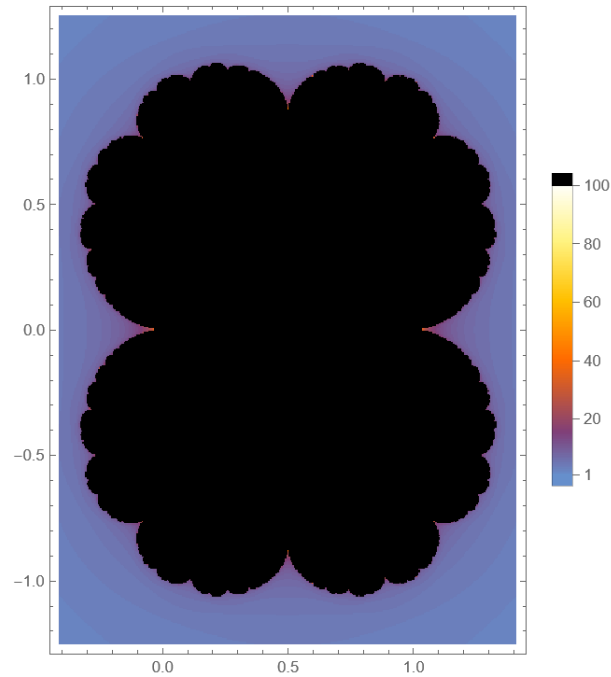
Κι εδώ ο αναγνώστης αξίζει να παρατηρήσει το σχήμα 4.2 στη σελ. 69. Αυτή όμως τη φορά να προσέξει την κυκλική περιοχή ακτίνας 1 πέριξ του 2.

Κι εδώ θα ρίξουμε μια ματιά στο  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  διαλέγοντας  $\lambda$  σε διάφορες περιοχές που έπαιξαν ρόλο στην κατηγοριοποίηση της ευστάθειας του σημείου ισορροπίας. Διαλέγοντας, λοιπόν,  $\lambda = 2.6 + 0.2i$  έχουμε ότι  $\lambda \in D_2^o$  και το σύνολο  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  είναι το σχ. 4.6α'. Και πάλι η αισθητική του  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  γίνεται λίγο πιο ενδιαφέρουσα εφόσον το  $\lambda$  επιλεγεί στο σύνορο του δίσκου. Επιλέγοντας  $\lambda = \frac{31}{13} + \frac{12}{13}i$  έχουμε το σχ. 4.6β'. Αν τώρα επιλέξουμε  $\lambda = 1$ , ήτοι πάνω στο σύνορο και των δύο δίσκων  $D_1$  και  $D_2$ , έχουμε κάτι σαν το σχ. 4.7.

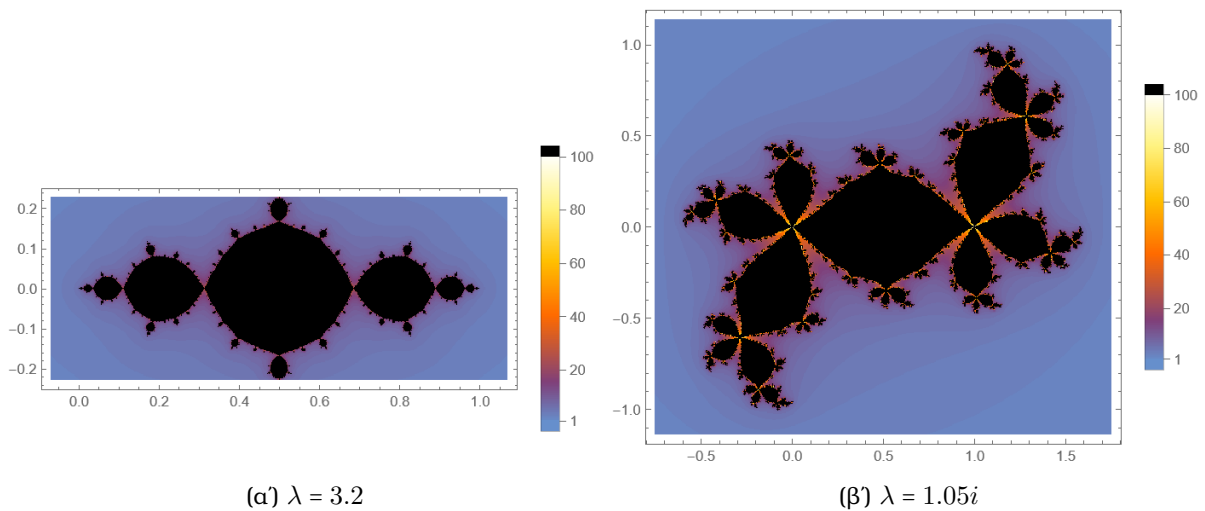
Όσον αφορά τα ελκτικά περιοδικά σημεία<sup>[§]</sup> αν βγάλουμε από τη μέση τους δίσκους  $D_0$  και  $D_2$ , που εκεί η ακολουθία είτε απορροφάται από το 0 είτε από το  $1 - 1/\lambda$ , τότε για τα υπόλοιπα περιοδικά σημεία δεν περισσεύουν παρά αυτά τα κλασματειδή εξογκώματα πέριξ αυτών των δίσκων, όπως αυτοί αποτυπώνονται στο 4.2 στη σελ. 69. Αλλά ας το δούμε λίγο καλύτερα. Έστω, λοιπόν, ένα ελκτικό  $k$ -περιοδικό σημείο  $p$  με  $k > 1$ , για το οποίο όμως να μην ισχύει  $f(p) = p$ . Αυτό το τελευταίο εξασφαλίζει ότι  $p \neq 0$  και  $p \neq 1 - 1/\lambda$ , διότι αν διαλέξουμε  $\lambda \in D_0^o \cup D_2^o$ , τότε η ακολουθία  $z_{n+1} = \lambda(1 - z_n)z_n$  θα συγκλίνει είτε στο 0 είτε στο  $1 - 1/\lambda$ , πράγμα που θα απαγορεύει αυξανόμενη προσέγγιση στην τιμή  $p$ . Επομένως θα πρέπει το  $\lambda \in \mathcal{M}_{\text{logistic}} \setminus (D_0^o \cup D_2^o)$ , αν θέλουμε να έχουμε ελκτικό περιοδικό σημείο περιόδου μεγαλύτερης του 1 και να βρισκόμαστε σε χωρίο του  $\mathbb{C}$  που να επέχει θέση διαστήματος.

Κλείνοντας το ζήτημα των περιοδικών σημείων, αλλά και όλη την ενότητα της μιγαδικής λογιστικής απεικόνισης, παρουσιάζουμε τα σύνολα  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  με τα  $\lambda$  να βρίσκονται σε περιοχές με ενδεχόμενη περιοδική συμπεριφορά. Διαλέγουμε αρχικά  $\lambda = 3.2$ , ώστε να ανήκει στη μινιατούρα Mandelbrot δεξιά του  $D_2$ . Το σχήμα είναι το σχ. 4.8α'. Ακολουθώντας επιλέγουμε  $\lambda = 1.05i$ , ώστε να πέσει πάνω στη μικρή φράκταλ-φούσκα πάνω από τον  $D_0$ . Αυτή η επιλογή δίνει αυτό το σχ. 4.8β'.

<sup>[§]</sup>Επαναλαμβάνουμε ότι  $k$ -περιοδικό σημείο είναι αυτό για το οποίο  $f^{\circ k}(p) = p$ . Θα είναι ελκτικό, διαισθητικά μιλώντας, αν η  $f^{\circ n}(z_0)$  κάνει όλο και εγγύτερες  $k$ -περιοδικές επισκέψεις στις τιμές  $p$ . Αυστηρά μιλώντας, το  $p$  θα είναι ελκτικό (ή υπερ-ελκτικό) αν  $|(f^{\circ k})'(p)| < 1$ .



Σχήμα 4.7: Το πλήρες σύνολο Julia  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  για την περίπτωση που  $\lambda = 1 \in \partial D_1 \cap \partial D_2$ .



Σχήμα 4.8: Το πλήρες σύνολο Julia  $\mathcal{K}(\lambda(1-z)z)$  για την περίπτωση που έχουμε ελκτικό περιοδικό σημείο.



**Μέρος II**

**Συνεχής εκδοχή**



## Κεφάλαιο 5

# Γνωριμία με τη λογιστική συνάρτηση

### 5.1 Εισαγωγή - Οικολογική προσέγγιση (συνεχής εκδοχή από διακριτή)

Έν αρχῇ ἦν το μοντέλο του Malthus το 1798 (βλ. [38]), στο οποίο ο πληθυσμός ενός όντος ( $p$ ) με άφθονους πόρους αυξάνεται ανάλογα με το μέγεθός του<sup>[\*]</sup>:

$$\frac{dm}{dt} = mp. \quad (5.1)$$

Αυτό, βέβαια, οδηγεί σε εκθετική αύξηση του πληθυσμού, και λόγω τούτου το μοντέλο (5.1) δέχθηκε αμφισβήτηση ήδη από τον Malthus (βλ. [38] κεφ. 1) συζητώντας για περιοριστικούς παράγοντες που θα περιόριζαν την εν λόγω γεωμετρική αύξηση του πληθυσμού, ήπερ δεν επαληθεύεται πειραματικά.

Τη σκυτάλη πήρε ο A. Quetelet το 1842 (βλ. [55] σελ. 48-49), όπου σκιαγράφησε με εντυπωσιακή ακρίβεια το λογιστικό μοντέλο που θα ακολουθούσε γράφοντας ότι «η θεωρία του πληθυσμού μπορεί να περιοριστεί σε δύο βασικές αρχές [...]: (1) Ο πληθυσμός τείνει να αυξάνεται σε γεωμετρική πρόοδο. (2) Η αντίσταση, ή το σύνολο των εμποδίων στην ανάπτυξή του, είναι, αν όλα τα άλλα παραμένουν σταθερά, ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας με την οποία τείνει να αυξηθεί.».

Την «τελική πινελιά» έβαλε ο P. F. Verhulst το 1838, ο οποίος (βλ. [72] σελ. 2) αποφάσισε να σπάσει τον εκθετικό χαρακτήρα της (5.1) αφαιρώντας από τον όρο  $mp$  μια συνάρτηση  $\varphi(p)$  του  $p$ :

$$\frac{dm}{dt} = mp - \varphi(p). \quad (5.2)$$

Η απλούστερη επιλογή για την  $\varphi$ , αναφέρει, είναι η  $\varphi(p) = np^2$ , κι έτσι οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\frac{dm}{dt} = mp - np^2,$$

ήτοι στο λογιστικό μοντέλο:

$$\frac{dm}{dt} = mp - np^2.$$

Όσον αφορά τη φυσική σημασία των σταθερών  $m$  και  $n$  ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέψει στις ενότητες 1.1, 1.2 και 1.3 της διακριτής εκδοχής. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τις ημερομηνίες, προς αποφυγήν παρερμηνειών: Πρώτα διατυπώθηκε η συνεχής εκδοχή του λογιστικού μοντέλου και σχεδόν έναν αιώνα μετά συναντάμε τη διακριτή εκδοχή του. Απλά η διακριτοποίηση του χρόνου έκανε ευκολότερη την επιχειρηματολογία του γράφοντος στην παρούσα εργασία.

---

[\*]Το  $m$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ισούται με τη διαφορά του πλήθους των γεννήσεων ανά άτομο μείον την πιθανότητα θανάτου.

Θέλοντας να εφαρμόσουμε τα μοντέλα της πληθυσμιακής ανάπτυξης σε διακριτές γενιές ( $P_n$ ) στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου ( $P(t)$ ) θα ορίσουμε ως  $T$  τον χρόνο μετάβασης από την μία γενιά ( $n$ ) στην επόμενη ( $n+1$ ). Έτσι, αν τη χρονική στιγμή  $t$  ο πληθυσμός ήταν  $P(t) = P_n$ , τότε τη χρονική στιγμή  $t+T$  θα ήταν  $P(t+T) = P_{n+1}$ . Στο σημείο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε πως για χρονικό διάστημα  $\Delta t < T$  η ποσοστιαία μεταβολή:

$$\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{P(t)}$$

θα είναι ανάλογη του εν λόγω χρονικού διαστήματος  $\Delta t$ . Έτσι, θα έχουμε:

$$\frac{\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{P(t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{P(t+T) - P(t)}{P(t)}}{T} \Leftrightarrow \frac{\frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{P(t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}}{T}.$$

Επομένως το διακριτό μοντέλο:

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = c(K - P_n)$$

μετασχηματίζεται στο:

$$\frac{T(P(t+\Delta t) - P(t))}{P(t)\Delta t} = c(K - P(t)),$$

το οποίο με τη σειρά του, για  $\Delta t = dt \approx 0$ , μας οδηγεί στη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{T}{P(t)} \cdot \frac{dP(t)}{dt} = c(K - P(t)) \Leftrightarrow \frac{dP(t)}{dt} = \frac{c}{T} (K - P(t)) P(t).$$

## 5.2 Εισαγωγή - Οικολογική προσέγγιση (αναπαραγωγικός ρυθμός)

Στην ενότητα αυτή θα αναπτύξουμε το επιχείρημα κατασκευής της λογιστικής εξίσωσης όπως αυτό παρουσιάζεται στο [54] (σελ. 209-210). Ορίζουμε, λοιπόν, ως **φέρουσα ικανότητα** ( $K$ ) την πυκνότητα των οργανισμών ( $\rho$ , δηλαδή τον αριθμό τους ανά μονάδα επιφάνειας) για την οποία:

- ο μέσος αριθμός απογόνων που παράγει ένας μέσος οργανισμός σε όλη του τη ζωή<sup>[f]</sup> είναι 1 και
- ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ανά άτομο<sup>[g]</sup> είναι 0.

Θεωρούμε ότι ένας πληθυσμός που ξεκινά με πυκνότητα μεγαλύτερη της φέρουσας ικανότητας, μειώνεται μέχρι να φτάσει στη σταθερή κατάσταση  $K$ , ενώ αν ξεκινά με πυκνότητα μικρότερη της φέρουσας ικανότητας, τότε αυξάνεται μέχρι να φτάσει στη σταθερή κατάσταση  $K$ . Αυτό σημαίνει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού ανά άτομο ( $r$ ) θα είναι αρνητικός για πληθυσμιακές πυκνότητες μεγαλύτερες του  $K$  και θετικός για πυκνότητες μικρότερες του  $K$ .

Η απλούστερη παραδοχή που μπορούμε να κάνουμε για τον  $r$  είναι ότι μειώνεται γραμμικά, ξεκινώντας από μια μέγιστη τιμή ( $r_{\max}$ ) για  $\rho = 0$  και καταλήγοντας στο 0 για  $\rho = K$ . Έτσι, συναντάμε και πάλι το λογιστικό μοντέλο:

<sup>[f]</sup>Εδώ μιλάμε για τον **καθαρό ρυθμό αναπαραγωγής** (βλ. [54] σελ. 169), ο οποίος είναι το άθροισμα:

$$\sum_x [\text{πιθανότητα επιβίωσης μέχρι την ηλικία } x] \cdot [\text{αριθμός απογόνων μέχρι την ηλικία } x].$$

<sup>[g]</sup>Εδώ αναφερόμαστε στον **εγγενή ρυθμό αύξησης** (βλ. [54] σελ. 178), που ορίζεται ως η διαφορά:

$$[\text{στιγμιαίος ρυθμός γεννήσεων (ανά άτομο)}] - [\text{στιγμιαίος ρυθμός θανάτων (ανά άτομο)}].$$

$$\begin{aligned}
r = r_{\max} - r_{\max} \frac{\rho}{K} &\Leftrightarrow \frac{d\rho/dt}{\rho} = r_{\max} - r_{\max} \frac{\rho}{K} \\
&\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = \left( r_{\max} - r_{\max} \frac{\rho}{K} \right) \rho \\
&\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{r_{\max}}{K} (K - \rho) \rho.
\end{aligned}$$

### 5.3 Μια πιο γενική προσέγγιση

Έστω ένα δυναμικό σύστημα και  $\mathcal{D}(t)$  μια πτυχή της κατάστασής του τη χρονική στιγμή  $t$ . Ας συμβολίσουμε επίσης με  $m(t)$  τη μέτρηση της  $\mathcal{D}(t)$ , η οποία υποθέτουμε επίσης ότι έχει σημείο κορεσμού την τιμή  $S$  και ότι η κατώτατη τιμή που μπορεί να πάρει είναι το 0.

Θα μοντελοποιήσουμε τη  $m$  με την απαίτηση ο ρυθμός αύξησής της ( $m'(t)$ ) να είναι ανάλογος από:

- την απόσταση της τρέχουσας μέτρησης από το σημείο κορεσμού της, δηλαδή την  $S - m(t)$ ,
- την απόσταση της τρέχουσας μέτρησης από το σημείο μηδενικής της διαθεσιμότητας, δηλαδή την  $m(t) - 0 = m(t)$ .

Τι σημαίνει αυτό;

- Σημαίνει ότι αν το σημείο κορεσμού μετατοπιστεί πιο ψηλά, σε βαθμό που η περιθώρια διαθεσιμότητα ανάπτυξης της  $\mathcal{D}(t)$  (δηλαδή η  $S - m(t)$ ) π.χ. να διπλασιάζεται, τότε αυτό να συμπαρασύρει και τον ρυθμό αύξησης της ανάπτυξης της ( $m'(t)$ ) διπλασιάζοντάς τον κι αυτόν.
- Σημαίνει ότι η ανάπτυξη της  $\mathcal{D}(t)$  επαφίεται στη διαθεσιμότητά της. Δηλαδή, αν η απόσταση της  $\mathcal{D}(t)$  από την απόλυτη σπάνη (το  $m(t)$ ) π.χ. διπλασιαστεί κρατώντας συγχρόνως την απόσταση από το σημείο κορεσμού ίδια (αυξάνοντας πάλι το σημείο κορεσμού), τότε αυτό έχει ανάλογο αντίκρουσμα και στον ρυθμό αύξησης διπλασιάζοντάς τον κι αυτόν.

Θέλουμε, λοιπόν:

$$m'(t) = f(m(t), S - m(t))$$

με  $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) = f(x, \lambda y)$  για κάθε  $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ . Τα πράγματα είναι απλά στο σημείο αυτό:

$$f(x, y) = f(x \cdot 1, y) = x f(1, y) = x f(1, y \cdot 1) = x y f(1, 1).$$

Ορίζοντας αυθαίρετα  $c = f(1, 1)$  έχουμε και πάλι το λογιστικό μοντέλο:

$$m'(t) = c(S - m(t))m(t).$$

### 5.4 Πιθανοθεωρητική προσέγγιση

Για να διαμορφώσουμε το πιθανοκρατικό ανάλογο του λογιστικού πληθυσμιακού μοντέλου θα χρειαστεί να μοντελοποιήσουμε κάποιες διαισθητικές τοποθετήσεις που αφορούν τη διάρκεια ζωής κάποιου όντος, εργαλείου, κοινωνικού συστήματος κ.τ.λ.:

- Καταρχάς θα πρέπει να βρούμε έναν τρόπο να περιγράψουμε το γεγονός ότι κάποιος (ή κάτι) είναι σε προχωρημένη ηλικία. Επ' αυτού ορίζουμε ως  $X$  τον χρόνο ζωής του ή, με άλλα λόγια, την ηλικία που αυτός θα πεθάνει. Έτσι, το γεγονός ότι η ηλικία  $t$  είναι προχωρημένη ηλικία σημαίνει ότι κάποιος έχει μεγάλη πιθανότητα μέχρι τότε να πεθάνει, δηλαδή η  $\mathbb{P}(X \leq t)$  είναι μεγάλη. Εν ολίγοις, το πόσο προχωρημένη είναι η ηλικία  $t$  ισούται με την πιθανότητα:

$$\mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t).$$

- Σε δεύτερη φάση θα χρειαστεί να μεταφράσουμε σε μαθηματική γλώσσα την ένταση της πιθανότητας κάποιος να πεθάνει από στιγμή σε στιγμή όταν αυτός έχει ηλικία  $t$ . Η πιθανότητα κάποιος να πεθάνει από στιγμή σε στιγμή όταν αυτός έχει ηλικία  $t$  είναι  $\mathbb{P}(X \in (t, t + dt) | X > t)$ . Σημειωτέον ότι αυτή είναι περίπου μηδενική για  $dt \approx 0$  (εξ ου κι ενδιαφερόμαστε για την ένταση αυτής) και αυξάνεται, όσο αυξάνεται το  $dt$ . Οπότε, το πόσο έντονος είναι ο κίνδυνος να πεθάνει κάποιος ηλικίας  $t$  τα επόμενα  $dt$  δευτερόλεπτα ισούται με την πιθανότητα να πεθάνει στα επόμενα  $dt$  δευτερόλεπτα μοιρασμένη στο κάθε δευτερόλεπτο. Αυτή δεν είναι άλλη από (βλ. [56] σελ. 232) τη συνάρτηση βαθμού κινδύνου ( $\lambda(t)$ ). Εν κατακλείδι, η ένταση της πιθανότητας κάποιος να πεθάνει από στιγμή σε στιγμή ισούται με

$$\lambda(t) = \frac{f_X(t)}{F_X(t)} = \frac{F'_X(t)}{1 - F_X(t)}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο χρόνος ζωής κάποιου έχει την εξής ιδιότητα. Η ένταση της δεσμευμένης πιθανότητας ότι αυτός θα πεθάνει από στιγμή σε στιγμή, εφόσον είναι  $t$  ετών, είναι ανάλογος της του προχωρημένου της ηλικίας του. Αυτό σε γλώσσα μαθηματική μεταφράζεται ως ακολούθως:

$$\lambda(t) = \alpha \mathbb{P}(X \leq t) \Leftrightarrow \frac{F'_X(t)}{1 - F_X(t)} = \alpha F_X(t) \Leftrightarrow F'_X(t) = \alpha (1 - F_X(t)) F_X(t).$$

Είναι ηλίου φαινότερον ότι η  $F_X$  ακολουθεί το λογιστικό μοντέλο.

## 5.5 Λογισμός διαφορών

Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε μια τελείως διαφορετική προσέγγιση. Ο γράφων σκέφτηκε πως θα είχε ενδιαφέρον να διερευνηθεί ποιο ερώτημα μεγίστου/ελαχίστου απαντά η λογιστική εξίσωση<sup>li</sup>. Άλλωστε στο [46] (σελ. 31) αναφέρεται ότι μία από τις αρχές της λειτουργίας των βιολογικών συστημάτων (η πρώτη που παραθέτει!) είναι η αρχή της ελάχιστης δράσης. Ένα δυναμικό σύστημα εξελίσσεται από μια αρχική κατάσταση σε μια τελική κατάσταση σε ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα κατά μήκος μιας τροχιάς που ελαχιστοποιεί τη δράση (ένα συναρτησιακό της τροχιάς).

Ψάχνουμε, λοιπόν, μια συνάρτηση  $L$ , όπου όταν καλούμαστε να μεγιστοποιήσουμε/ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιοειδές:

$$\mathfrak{F}(y) = \int_{\alpha}^{\beta} L(y, y') dx$$

να καταλήγουμε στην λογιστική συνάρτηση.

Το εγγύτερο σε αυτό το στόχο που μπόρεσε να φτιάξει ο γράφων είναι η κάτωθι μερική διαφορική εξίσωση, την οποία λύνουμε παρακάτω και βρίσκουμε την περί ου ο λόγος συνάρτηση  $L$ :

$$L_y = y' L_{y'y} + k y' (S - 2y) L_{y'y'} \quad (5.3)$$

<sup>li</sup>Εν γένει το αντίστροφο του προβλήματος του λογισμού διαφορών είναι ένα άκρος ενδιαφέρον θέμα, παραταύτα εδώ δεν θα επεκταθούμε καθόσον η μελέτη του δεν σχετίζεται με το θέμα της παρούσης εργασίας.

Πράγματι, θέλοντας να ελαχιστοποιείται το  $\mathfrak{F}$  καταλήγουμε στην εξίσωση Euler-Lagrange (βλ. [37] σελ. 135):

$$L_y - \frac{d}{dx} L'_y = 0,$$

η οποία μετασχηματίζεται μέσω του κανόνα αλυσίδας στην:

$$L_y = y' L_{y'y} + y'' L_{y'y'} = 0.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την τελευταία εξίσωση με την (5.3), καταλήγουμε στη σχέση:

$$(y'' - ky'(S - 2y)) L_{y'y'} = 0.$$

Θεωρώντας ότι η  $L_{y'y'}$  δεν είναι η μηδενική συνάρτηση καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση:

$$y'' = ky'(S - 2y) \quad (5.4)$$

Ακολουθώντας έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} y'' = ky'(S - 2y) &\Leftrightarrow y'' = ky'(S - y - y) \\ &\Leftrightarrow y'' = ky'(S - y) - ky'y \\ &\Leftrightarrow y'' = ky'(S - y) + ky(S - y)' \\ &\Leftrightarrow y'' = (ky(S - y))' \\ &\Leftrightarrow y' = ky(S - y) + c. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε, λοιπόν, στην τροποποίηση της λογιστικής εξίσωσης με τρόπο που να περιλαμβάνει σπορά/συγκομιδή (βλ. ενότητα 8.2). Λόγω αυτής της στενής σύνδεσης της (5.4) με τη λογιστική συνάρτηση, θα την αποκαλούμε στο εξής **λογιστική εξίσωση δευτέρου βαθμού**.

Ας πάμε τώρα να λύσουμε την Μ.Δ.Ε. (5.3). Προς τούτο αναδιατυπώνουμε λιγάκι τη Μ.Δ.Ε.:

$$2ky'(S - 2y)L_{y'y'} + 2y'L_{y'y} - 2L_y = 0$$

και υπολογίζουμε τη «διακρίνουσα» της Μ.Δ.Ε. (βλ. [75] σελ. 65):

$$\Delta(y, y') = (y')^2 - 0 \cdot 2ky'(S - 2y) = (y')^2.$$

Μιλάμε, δηλαδή, για υπερβολική Μ.Δ.Ε., οπότε προχωράμε λύνοντας τις Σ.Δ.Ε. (βλ. [75] σελ. 67):

$$\frac{dy}{dy'} = \frac{y' \pm \sqrt{\Delta(y, y')}}{2ky'(S - 2y)}.$$

Συνεπώς έχουμε τις εξισώσεις:

$$\frac{dy}{dy'} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dy'} = \frac{1}{k(S - 2y)}.$$

Η πρώτη καταλήγει στην  $y = \text{σταθ.}$  και η δεύτερη στην  $k(Sy - y^2) - y' = \text{σταθ.}$  Επομένως θέτουμε:

$$\eta = y \quad \text{και} \quad \xi = k(Sy - y^2) - y'.$$

Έτσι, αν ορίσουμε  $v(\xi, \eta) = L(y, y')$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} L_y &= \partial_y v = v_{\xi} \xi_y + v_{\eta} \eta_y \\ &= k(S - 2y)v_{\xi} + v_{\eta} \\ L_{y'} &= \partial_{y'} v = v_{\xi} \xi_{y'} + v_{\eta} \eta_{y'} \\ &= -v_{\xi}. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} L_{y'y'} &= \partial_{y'} L_{y'} = \partial_{y'} (-v_\xi) = -v_{\xi\xi} \xi_{y'} - v_{\xi\eta} \eta_{y'} \\ &= v_{\xi\xi} \\ L_{y'y} &= \partial_y L_{y'} = \partial_y (-v_\xi) = -v_{\xi\xi} \xi_y - v_{\xi\eta} \eta_y \\ &= -k(S-2y)v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Έτσι, η (5.3) μετασχηματίζεται στην:

$$k(S-2y)v_\xi + v_\eta = y'(-k(S-2y)v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta}) + ky'(S-2y)v_{\xi\xi}$$

ή απλούστερα:

$$y'v_{\xi\eta} + k(S-2y)v_\xi + v_\eta = 0.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι:

$$\eta = y \text{ και } y' = k(S\eta - \eta^2) - \xi,$$

έχουμε τη Μ.Δ.Ε.:

$$(k(S\eta - \eta^2) - \xi)v_{\xi\eta} + k(S-2\eta)v_\xi + v_\eta = 0.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} &\partial_\eta ((k(S\eta - \eta^2) - \xi)v_\xi + v) = 0 \\ \Leftrightarrow &(k(S\eta - \eta^2) - \xi)v_\xi + v = f(\xi) \\ \Leftrightarrow &\frac{(k(S\eta - \eta^2) - \xi)v_\xi - v\partial_\xi (k(S\eta - \eta^2) - \xi)}{(k(S\eta - \eta^2) - \xi)^2} = \frac{f(\xi)}{(k(S\eta - \eta^2) - \xi)^2} \\ \Leftrightarrow &\partial_\xi \left( \frac{v}{k(S\eta - \eta^2) - \xi} \right) = \frac{f(\xi)}{(k(S\eta - \eta^2) - \xi)^2} \\ \Leftrightarrow &\frac{v}{k(S\eta - \eta^2) - \xi} = g(\eta) + \phi(\xi, \eta), \end{aligned}$$

όπου  $g$  μια αυθαίρετη συνάρτηση μίας μεταβλητής και  $\phi$  τέτοια, ώστε  $\partial_\xi \phi(\xi, \eta) = \frac{f(\xi)}{(k(S\eta - \eta^2) - \xi)^2}$ .

Έχοντας βρει εμμέσως πλην σαφώς τη συνάρτηση  $v$ , μπορούμε να επαναφερθούμε στην  $L$ :

$$\begin{aligned} L(y, y') &= v(\xi, \eta) \\ &= (k(S\eta - \eta^2) - \xi)(g(\eta) + \phi(\xi, \eta)) \\ &= (k(Sy - y^2) - \xi)(g(y) + \phi(\xi, \eta)) \\ &= y'(g(y) + \phi(k(Sy - y^2) - y', y)) \\ &= y'g(y) + y'\phi(k(Sy - y^2) - y', y) \end{aligned}$$

Πριν προχωρήσουμε, ας επαληθεύσουμε αν όντως η παραπάνω συνάρτηση οδηγεί την εξίσωση



Euler-Lagrange πάνω στην λογιστική διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\begin{aligned}
 L_y &= y'g'(y) + y'\phi_\xi(k(Sy - y^2) - y', y)k(S - 2y) + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &= y'g'(y) + y'k(S - 2y)\frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{(k(Sy - y^2) - (k(Sy - y^2) - y'))^2} + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &= y'g'(y) + y'k(S - 2y)\frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{(y')^2} + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &= y'g'(y) + k(S - 2y)\frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{y'} + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 L_{y'} &= g(y) + \phi(k(Sy - y^2) - y', y) - y'\phi_\xi(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &= g(y) + \phi(k(Sy - y^2) - y', y) - y'\frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{(y')^2} \\
 &= g(y) + \phi(k(Sy - y^2) - y', y) - \frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{y'}
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}L_{y'} &= \frac{d}{dx}\left(g(y) + \phi(k(Sy - y^2) - y', y) - \frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{y'}\right) \\
 &= y'g'(y) + \phi_\xi(k(Sy - y^2) - y', y)(k(Sy' - 2y'y) - y'') + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &\quad - \frac{f'(k(Sy - y^2) - y')(k(Sy' - 2y'y) - y'')y' - y''f(k(Sy - y^2) - y')}{(y')^2} \\
 &= y'g'(y) + \frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{(y')^2}(k(Sy' - 2y'y) - y'') + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &\quad + \frac{-f'(k(Sy - y^2) - y')(k(Sy' - 2y'y) - y'')y' + y''f(k(Sy - y^2) - y')}{(y')^2} \\
 &= y'g'(y) + \frac{f(k(Sy - y^2) - y')}{y'}k(S - 2y) + y'\phi_\eta(k(Sy - y^2) - y', y) \\
 &\quad + \frac{-f'(k(Sy - y^2) - y')(k(Sy' - 2y'y) - y'')y'}{(y')^2}
 \end{aligned}$$

Έτσι, από την εξίσωση Euler-Lagrange οδηγούμαστε στην:

$$\frac{-f'(k(Sy - y^2) - y')(k(Sy' - 2y'y) - y'')}{y'} = 0.$$

Διαλέγοντας την  $f$  με τρόπο που να μην είναι σταθερά καταλήγουμε τελικά στη σχέση:

$$k(Sy' - 2y'y) - y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = ky'(S - 2y),$$

όπερ έδει δείξαι.

Καταλήξαμε, λοιπόν, στο συναρτησιοειδές:

$$\mathfrak{F}(y) = \int_\alpha^\beta y' \left( g(y) + \int_0^{ky(S-y)-y'} \frac{f(\xi)}{(ky(S-y) - \xi)^2} d\xi \right) dx,$$

το οποίο καλούμαστε να ελαχιστοποιήσουμε/μεγιστοποιήσουμε, για να οδηγηθούμε στη λογιστική συνάρτηση (με σοπρά/συγκομιδή). Κάνοντας στο εσωτερικό ολοκλήρωμα την αλλαγή μεταβλητής  $m = ky(S - y) - \xi$  έχουμε να εξετάσουμε πλέον την ποσότητα:

$$\mathfrak{F}(y) = \int_\alpha^\beta y' \left( g(y) + \int_{y'}^{ky(S-y)} \frac{f(ky(S-y) - m)}{m^2} dm \right) dx.$$

Το αν αυτή ή η προηγούμενη έχουν κάποια σημαντική βιολογική σημασία ο γράφων δεν το γνωρίζει. Αυτό πλέον ίσως να είναι δουλειά κάποιου βιολόγου, παρά μαθηματικού.



## Κεφάλαιο 6

# Μελέτη λογιστικής συνάρτησης

### 6.1 Επίλυση διαφορικής εξίσωσης - Ορισμός λογιστικής συνάρτησης

Κρίνοντας από την χαοτική συμπεριφορά της λογιστικής απεικόνισης, ο αναγνώστης που δεν γνωρίζει την απάντηση στο ερώτημα «Ποια είναι η λύση της  $y' = \kappa(S - y)y$ » θα περιμένει κάτι τελείως περίεργο στη συνεχή της εκδοχή. Αν η ίδια η διαφορική εξίσωση δεν «φώναζε» ότι η  $y$  είναι λεία, μπορεί και να περίμενε κάποιο αποκρουστικό φράκταλ, αντίξιο της αύξησης της περιπλοκότητας από τη μετάβαση:

$$y_{n+1} = \lambda(1 - y_n)y_n \longrightarrow y' = \kappa(S - y)y.$$

Στην πραγματικότητα, αν κάποια αναδρομική εξίσωση ακολουθίας δικαιούται να φέρει τον τίτλο της συγγένειας με την  $y' = \kappa(S - y)y$ , αυτή είναι η:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \kappa(S - y_n)y_n,$$

για πολύ μικρό  $h$ .


Ακολουθώντας τη διαδικασία της ενότητας 2.1 έχουμε ότι:

$$y_{n+1} = (h\kappa S + 1) \left(1 - \frac{h\kappa}{h\kappa S + 1} y_n\right) y_n,$$

από την οποία θέτοντας  $x_n = \frac{h\kappa}{h\kappa S + 1} y_n$  και  $\lambda = h\kappa S + 1$ , καταλήγουμε στη σχέση:

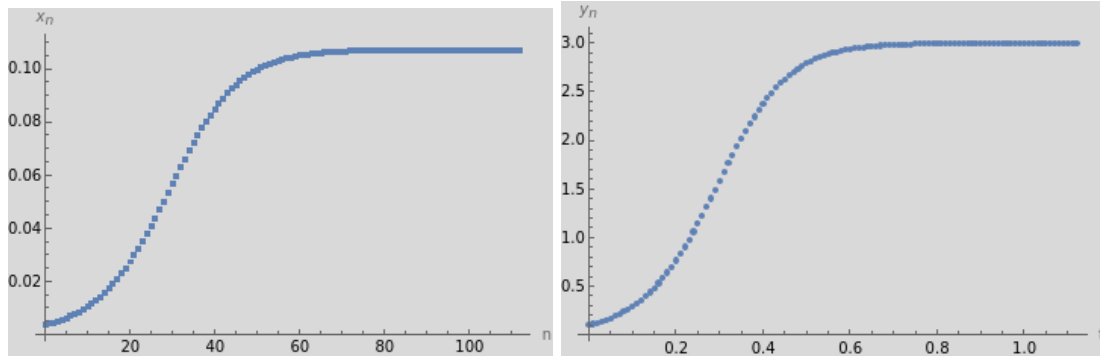
$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n, \text{ με } \lambda > 1 \text{ και } \lambda \approx 1,$$

η οποία κάθε άλλο παρά δημιουργεί χαοτική συμπεριφορά, διότι, όπως είδαμε στο 9.2.2 σελ. 17, η  $x_n$  έχει ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας το  $1 - 1/\lambda$ , όταν  $\lambda \in (1, 3]$ .

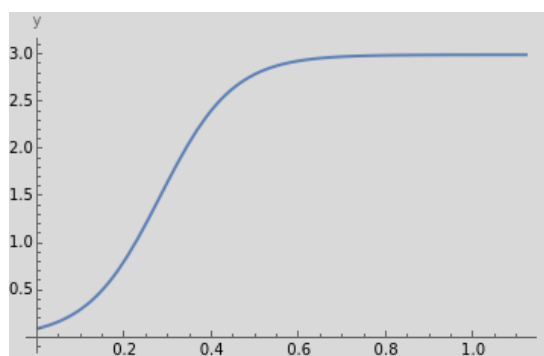
Για του λόγου το αληθές θα σχεδιάσουμε στο  in VS Code τόσο την  $(x_n)$  σε σχέση με το  $n$ , όσο και τη  $(y_n)$  σε σχέση με το βήμα του χρόνου  $hn$ . Στο σχήμα 6.1 βλέπουμε ότι όντως, για  $\lambda > 1$  και  $\lambda \approx 1$  αυτές δίνουν κάτι που απέχει παρασάγγας από το να λέγεται χαοτικό. Τολμώντας και μια προοικονομία σχετικά με τη γραφική παράσταση της λογιστικής συνάρτησης (τη λύση, δηλαδή, της διαφορικής εξίσωσης  $y' = \kappa(S - y)y$ ) βλέπουμε, αντιπαραθέτοντας τα σχήματα 6.1 με το σχήμα 6.2, ότι δεν υπάρχει ποιοτική διαφοροποίηση μεταξύ τους.

Τώρα που διαπιστώσαμε ότι η λογιστική διαφορική εξίσωση δεν πρόκειται να οδηγήσει στην περιπλοκότητα της λογιστικής απεικόνισης, ας πάμε να τη λύσουμε. Παρατηρούμε ότι η  $y' = \kappa(S - y)y$  έχει δύο σημεία ισορροπίας, το 0 και το  $S$ . Θα εξετάσουμε καταρχάς αν υπάρχει περίπτωση να καταλήξει η  $y(t)$  σε ένα από αυτά σε πεπερασμένο χρόνο έχοντας ξεκινήσει από  $y(0) = l_0 \notin \{0, S\}$ . Στο σχήμα 6.3 παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσης της και το πεδίο κατευθύνσεων (βλ. επίσης [76] σελ. 134).

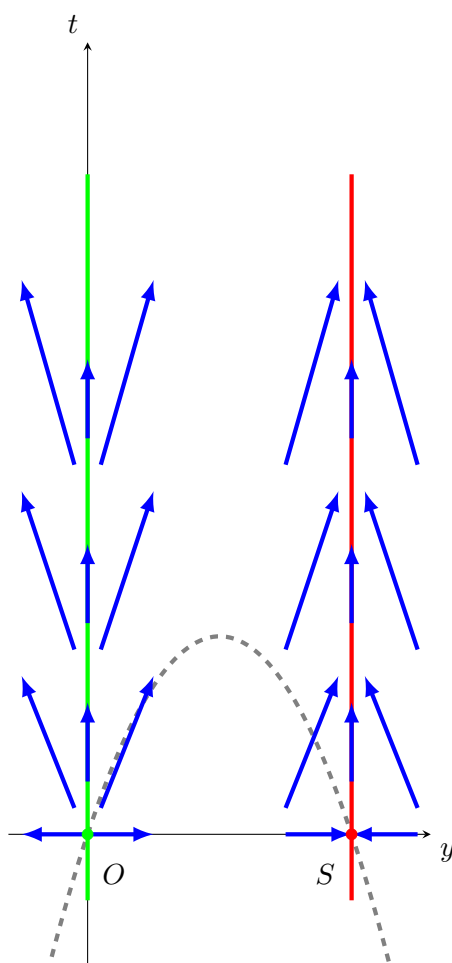
Εξ όσων φαίνονται, διαπιστώνουμε ότι το 0 είναι ασταθές, επομένως σε αυτό δεν κατευθύνεται καν. Απλά, αν συμβεί να βρεθεί εκεί εξ αρχής, τότε εκεί θα παραμείνει. Από την άλλη, το  $S$  είναι



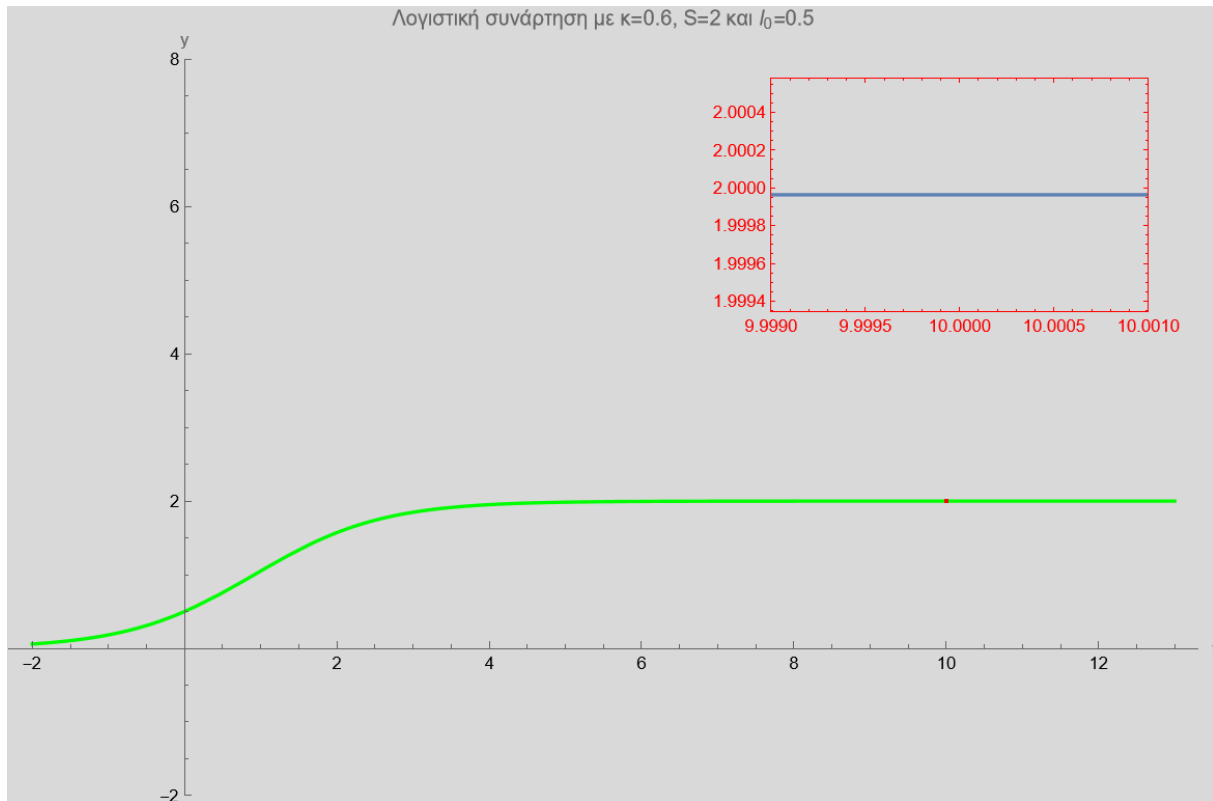
Σχήμα 6.1: Γραφική παράσταση της ακολουθίας  $(x_n)$  (σε σχέση με το  $n$ ) και της ακολουθίας  $y_{n+1} = (h\kappa S + 1) \left(1 - \frac{h\kappa}{h\kappa S + 1} y_n\right) y_n$  (σε αντιπαράθεση με τη χρονική στιγμή  $t_n = nh$ ). Έχει επιλεγεί  $S = 3$ ,  $\kappa = 4$ ,  $y_0 = 0.1$  και  $h = 0.01$ .



Σχήμα 6.2: Γραφική παράσταση της λογιστικής συνάρτησης. Έχει επιλεγεί  $S = 3$ ,  $\kappa = 4$  και  $l_0 = 0.1$ .



Σχήμα 6.3: Διάγραμμα φάσης και πεδίο κατευθύνσεων της διαφορικής εξίσωσης  $y' = \kappa(S - y)y$ .



Σχήμα 6.4: Η λογιστική συνάρτηση προσεγγίζει, αλλά δεν τέμνει ποτέ τη φέρουσα ικανότητά της. Ο αναγνώστης αξίζει να προσέξει το μικρό ορθογώνιο γύρω από το σημείο με τετμημένη 10, το οποίο έχει μεγεθυνθεί παραπάνω.

ασυμπτωτικά ευσταθές, άρα δεν μπορούμε προς το παρόν να αποκλείσουμε μια κατάληξη εκεί. Όμως, λόγω ακριβώς αυτής της ασυμπτωτικής ευστάθειας, καταλαβαίνουμε πως άπαξ και υπάρχει  $t_0 > 0$  για το οποίο  $y(t_0) = S$ , η  $y(t)$  μένει δια παντός εκεί, ήτοι είναι σταθερά ( $S$ ) στο διάστημα  $[t_0, +\infty)$ . Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = \kappa(S - y)y, \quad y(t_0) = l_0$$

θα έχει δύο λύσεις:

- τη σταθερή  $y(t) = S$  για κάθε  $t \geq 0$ ,
- και τη μη σταθερή, η οποία ξεκινάει τη χρονική στιγμή 0 από το  $l_0 \neq S$  και καταλήγει στο χρόνο  $t_0$  στο  $S$ .

Όπερ ἄτοπον, άρα δεν υπάρχει περίπτωση να καταλήξει κανείς σε πεπερασμένο χρόνο στο  $S$ , εκτός κι αν ξεκινήσει από αυτό (για μια οπτική επαλήθευση βλ. σχ. 6.4 και για μια πιο γενική θεώρηση όπου  $t \in \mathbb{R}$  βλ. [76] σελ. 122).

Για  $l_0 \notin \{0, S\}$  (άρα και  $y \notin \{0, S\}$ ) ισχύει:

$$\begin{aligned} y' = \kappa(S - y)y &\Leftrightarrow \frac{1}{(S - y)y} y' = \kappa \Leftrightarrow \left( \frac{1}{Sy} - \frac{1}{S(y - S)} \right) y' = \kappa \\ &\Leftrightarrow (\ln |y| - \ln |y - S|)' = (\kappa St)' \\ &\Leftrightarrow \ln \left| \frac{y}{y - S} \right| = \kappa St + c, \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά  $c \in \mathbb{R}$ . Θεωρώντας  $y(0) = l_0$  έχουμε ότι:

$$c = \ln \left| \frac{l_0}{l_0 - S} \right|.$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{y}{y - S} \right| &= \kappa St + \ln \left| \frac{l_0}{l_0 - S} \right| \Leftrightarrow \exp \left( \ln \left| \frac{y}{y - S} \right| \right) = \exp \left( \kappa St + \ln \left| \frac{l_0}{l_0 - S} \right| \right) \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{y}{y - S} \right| = \left| \frac{l_0}{l_0 - S} \right| e^{\kappa St} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Για να απαλείψουμε τις απόλυτες τιμές, θα παρατηρήσουμε ότι, καθόσον τα σημεία 0 και  $S$  αποτελούν φράγματα τα οποία δεν μπορεί να αφιχθεί, τότε δεν μπορεί και να τα υπερβεί. Δηλαδή, αν επί παραδείγματι ξεκινάει από κάποιο  $l_0 < 0$ , τότε μη μπορώντας να φτάσει ποτέ το 0, δεν θα το ξεπεράσει κιόλας. Επομένως θα είναι «φυλακισμένη» καθόλη τη διάρκεια της εξέλιξής της στο  $(-\infty, 0)$ . Γενικότερα η  $y$  είναι εγκλωβισμένη σε ένα από τα σύνολα:

$$(-\infty, 0), \{0\}, (0, S), \{S\}, (S, +\infty)$$

αναλόγως με το πού βρισκόταν τη χρονική στιγμή 0 (βλ. επίσης [76] σελ. 122).

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι τα:

$$y \text{ και } l_0$$

και:

$$S - y \text{ και } S - l_0$$

έχουν ίδιο πρόσημο (βλ. επίσης [14] σελ. 29 και 37). Έτσι από την (6.1) έχουμε ότι:

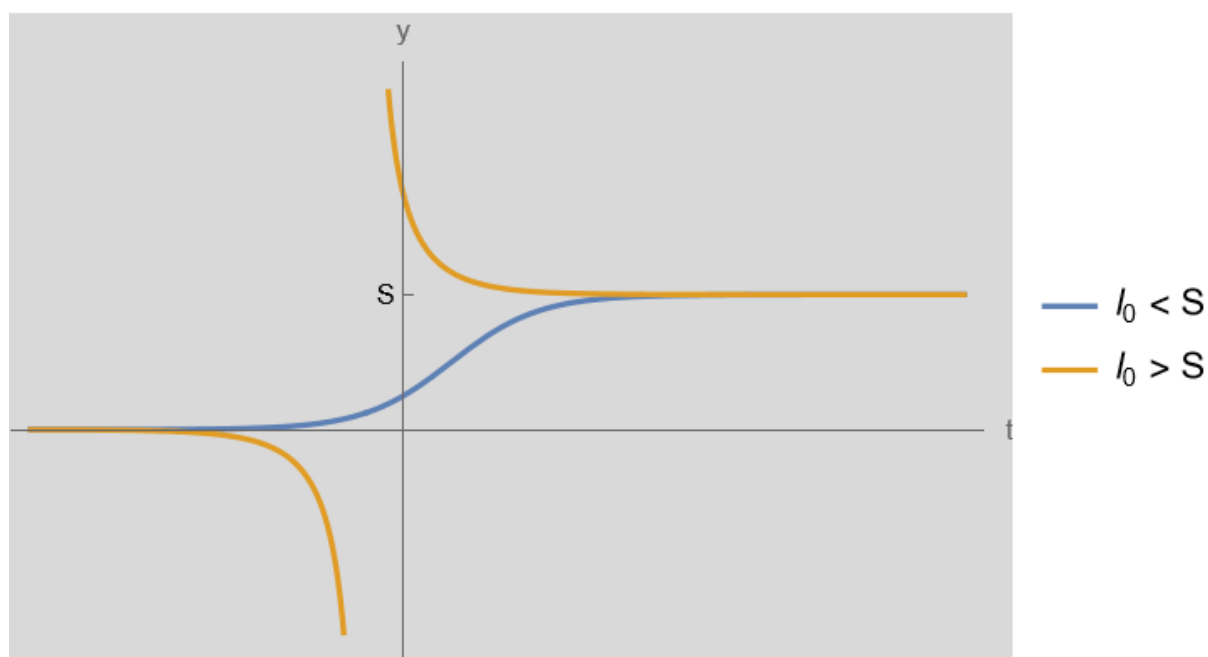
$$\frac{y}{y - S} = \frac{l_0}{l_0 - S} e^{\kappa St} \Leftrightarrow y = \frac{l_0 S e^{\kappa St}}{S - l_0 + l_0 e^{\kappa St}} \Leftrightarrow y = \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0) e^{-\kappa St}}.$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο παραπάνω τύπος καλύπτει και τις περιπτώσεις που  $l_0 = 0$  (άρα που  $y = 0$ ) και  $l_0 = S$  (άρα που  $y = S$ ).

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να δώσουμε λίγο περισσότερη προσοχή. Τι γίνεται αν το πεδίο ορισμού έχει χάσματα; Τι συμβαίνει αν, επί παραδείγματι, υπάρχει  $t_c < 0$  στο οποίο η συνάρτηση να μην ορίζεται; Επιδιώκοντας να έχουμε το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού η περίπτωση  $0 \leq l_0 \leq S$  αποκλείει τέτοιο ενδεχόμενο καθόσον τοιαύτη περίπτωση η  $y$  είτε απορροφάται εξαρχής από κάποιο σημείο ισορροπίας, είτε κατευθύνεται προς το  $S$ . Σε κάθε ενδεχόμενο, πάντως, δεν απειρίζεται.

Προβληματική περίπτωση ενδέχεται να έχουμε όταν  $l_0 > S$ , κι έχουμε όντως, όπως θα δούμε αργότερα. Στην περίπτωση αυτή θα είναι  $y'(t) < 0$  στο διάστημα  $(t_c, 0)$  για τους λόγους που προαναφέραμε. Αν οι «χρονικές στιγμές»  $(-\infty, t_c)$  βρίσκουν την  $y(t)$  στο διάστημα  $(0, S)$ , τότε πάει να πει πως έχει επιπλέον σημείο ισορροπίας εντός του διαστήματος  $(0, S)$  (βλ. σύγκλιση μονότονης ακολουθίας στο [68] σελ. 611 και κατά Heine ισοδύναμο ορισμό ορίου στο [17] σελ. 15), υπεράνω. Άρα η  $y(t)$  βρίσκεται εντός του  $(-\infty, 0)$ , οπότε και πάλι τα κλάσματα  $\frac{y}{y-S}$  και  $\frac{l_0}{l_0-S}$  είναι ομόσημα, συνεπώς καταλήγουμε στα ίδια αποτελέσματα.

Έχουμε λοιπόν το κάτωθι ορισμό με τη γενική λύση του.



Σχήμα 6.5: Ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις λογιστικών συναρτήσεων.

### Λογιστική συνάρτηση

**Ορισμός 6.1.** Τη λύση του Π.Α.Τ.:

$$y' = \kappa(S - y)y, \quad y(0) = l_0$$

την αποκαλούμε **λογιστική συνάρτηση** και τη συμβολίζουμε ως  $\text{lgc}_{S,l_0,\kappa}(t)$  ή απλά, αν δεν δημιουργείται κάποια παρανόηση, ως  $\text{lgc}(t)$ . Ο τύπος της είναι<sup>[\*]</sup> (βλ. σχ. 6.5):

$$\text{lgc}_{S,l_0,\kappa}(t) = \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa S t}}.$$

Επίσης, αν  $l_0 < S$ , τότε το πεδίο ορισμού της λογιστικής συνάρτησης είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Όμως, στην περίπτωση που  $l_0 > S$ , τότε<sup>[†]</sup>:

$$\mathcal{D}_{\text{lgc}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0 - S}{l_0} \right) \right\}.$$

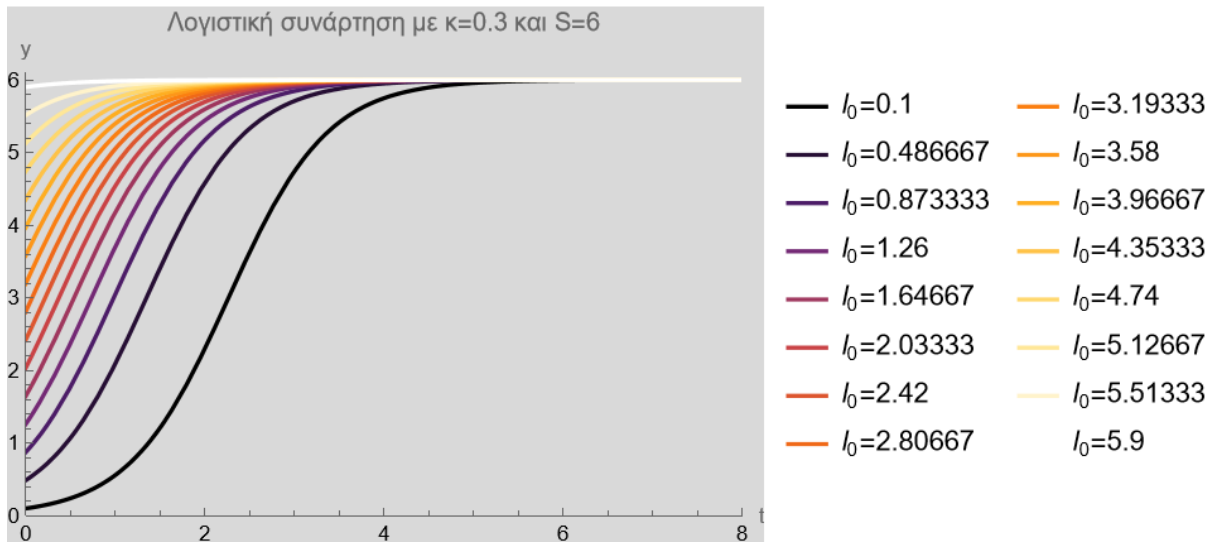
Τέλος, η ποσότητα  $S$  θα αποκαλείται **φέρουσα ικανότητα της λογιστικής συνάρτησης**.

<sup>[\*]</sup> Προκειμένου να αποφύγουμε άσκοπη (ως προς τη προαναφερθείσα φυσική ερμηνεία της λογιστικής συνάρτησης) περιπτώσιολογία, από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι  $l_0, S > 0$  και ότι  $l_0 \neq S$ .

<sup>[†]</sup> Στο εξής θα συμβολίζουμε συχνά:

$$t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0 - S}{l_0} \right).$$





Σχήμα 6.6: Ασυμπτωτική συμπεριφορά λογιστικής συνάρτησης στην περίπτωση που  $l_0 < S$ .

## 6.2 Πρωτογενής μελέτη συνάρτησης

Ήδη από την αρχή αυτού του κεφαλαίου έχουμε θίξει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λογιστικής συνάρτησης. Πλέον, με δεδομένο τον τύπο της τα πράγματα είναι κατά πολύ απλούστερα.

Δεδομένου ότι  $e^{-\kappa St} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , έχουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lgc(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa St}} = S.$$

Μια οπτικοποίηση των παραπάνω έχουμε στις εικόνες 6.6 και 6.7. Εκεί παρατηρούμε ότι, ανεξαρτήτως της αρχικής τιμής, η τιμή της  $\lgc(t)$  σε βάθος χρόνου τείνει να απορροφηθεί από τη φέρουσα ικανότητα  $S$ .

Ας πάμε να εξετάσουμε τώρα την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λογιστικής συνάρτησης στο  $-\infty$ . Δεδομένου, λοιπόν, ότι  $e^{-\kappa St} \rightarrow +\infty$  καθώς  $t \rightarrow -\infty$ , συμπεραίνουμε πως:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \lgc(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa St}} = 0.$$

Αφού τελειώσαμε με τις οριζόντιες ασύμπτωτες, ας πάμε να εξετάσουμε τις κατακόρυφες. Όσον αφορά την περίπτωση που  $l_0 < S$  η  $\lgc$  έχει πεδίο ορισμού του  $\mathbb{R}$  και, ως συνεχής, δεν μπορεί να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Άρα πάμε να εξετάσουμε την περίπτωση που  $l_0 > S$ . Η μοναδική πιθανή θέση απειρισμού της  $\lgc$  είναι στο  $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)$ , αφού στα υπόλοιπα σημεία είναι συνεχής. Εκεί έχουμε το εξής<sup>[\*]</sup>:

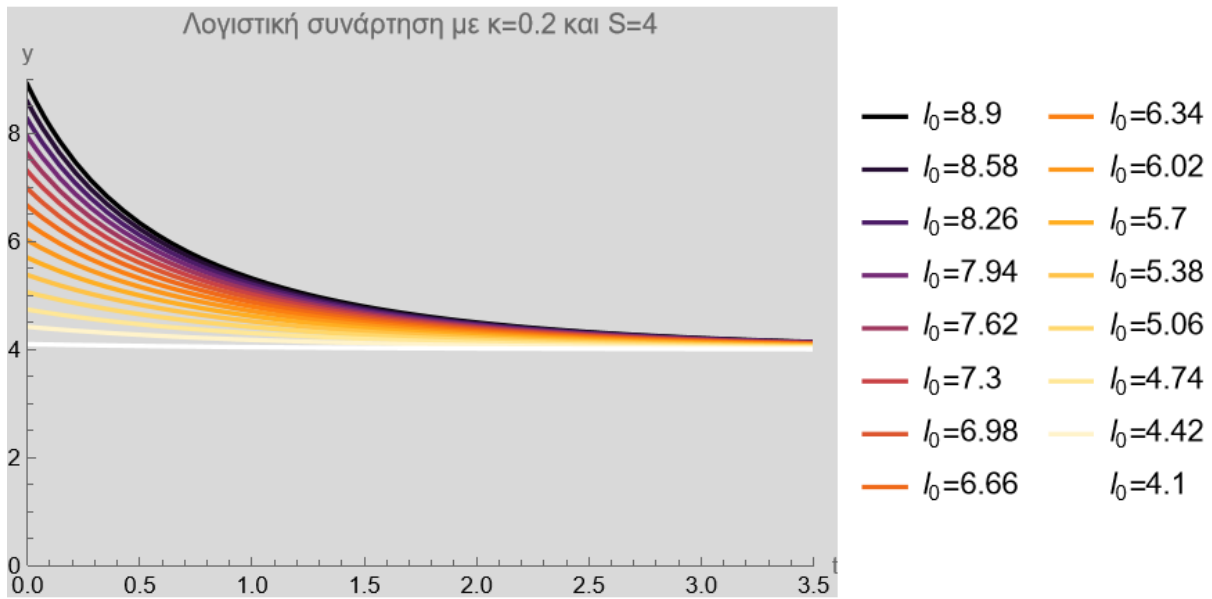
$$\begin{aligned} t > t_c &\Leftrightarrow t > \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right) \Leftrightarrow e^{\kappa St} > \frac{l_0 - S}{l_0} \Leftrightarrow e^{-\kappa St} < \frac{l_0}{l_0 - S} \Leftrightarrow e^{-\kappa St}(l_0 - S) < l_0 \\ &\Leftrightarrow l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa St} > 0. \end{aligned}$$

Συμπερασματικά:

$$\lim_{t \rightarrow t_c^+} \lgc(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^+} \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa St}} = +\infty.$$

Με παρεμφερή επιχειρηματολογία βρίσκουμε ότι:

[\*]Θυμίζουμε εδώ ότι όλες οι σταθερές έχουν υποτεθεί θετικές.



Σχήμα 6.7: Ενδεικτική ασυμπτωτική συμπεριφορά λογιστικής συνάρτησης στην περίπτωση που  $l_0 > S$ .

$$\lim_{t \rightarrow t_c^-} \lg c(t) = \lim_{t \rightarrow t_c^-} \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa S t}} = -\infty,$$

κάτι που γνωρίζαμε εμπειρικά ήδη από το σχήμα 6.5.

Ένα εύλογο ερώτημα που ανακύπτει αυτή τη στιγμή είναι το εξής:

«Στην περίπτωση που ένα φαινόμενο εξελίσσεται σύμφωνα με τη λογιστική κατανομή ξεκινώντας από  $l_0 > S$ , θα συναντήσουμε καταβάρδρωσή του στο  $-\infty$  όσο πλησιάζουμε στη χρονική στιγμή  $t_c$ , η οποία οδηγεί άμεσα και ασυνεχώς σε μία εκτίναξη στο  $+\infty$ ;»

Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση είναι απορριπτική, αφού το εν λόγω σημείο ανωμαλίας είναι σίγουρα αρνητικό, καθόσον:

$$\frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0 - S}{l_0} \right) = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( 1 - \frac{S}{l_0} \right),$$

ήτοι το όρισμα του λογαρίθμου είναι μικρότερο της μονάδας, άρα όλη η παράσταση καταλήγει αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι για τους χρόνους που έχουν φυσικό νόημα, δηλαδή τα  $t \geq 0$ , η λογιστική συνάρτηση δεν περιγράφει ακραίες συμπεριφορές όπως πληθυσμιακές εκρήξεις στο άπειρο.

Ας μελετήσουμε τώρα τη μονοτονία της συνάρτησης. Στην περίπτωση που  $l_0 < S$  τα πράγματα είναι απλά. Ξεκινώντας με  $t_1 < t_2$  οδηγούμαστε στην  $-\kappa S t_1 > -\kappa S t_2$  κι από κει στην  $\lg c(t_1) < \lg c(t_2)$ . Επομένως εν τοιαύτη περιπτώσει:

$$\lg c \uparrow \mathbb{R}.$$

Στην περίπτωση που συμβαίνει  $l_0 > S$ , τότε η  $-\kappa S t_1 > -\kappa S t_2$  οδηγεί στην  $(S - l_0)e^{-\kappa S t_1} < (S - l_0)e^{-\kappa S t_2}$  κι από κει στην  $\lg c(t_1) > \lg c(t_2)$ , όπερ σημαίνει ότι:

$$\lg c \downarrow (-\infty, t_c) \text{ και } \lg c \downarrow (t_c, +\infty),$$

όπου  $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0 - S}{l_0} \right)$ .

Από τα παραπάνω εύκολα βρίσκουμε το σύνολο τιμών. Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα για τα όρια της  $\lg c$  με αυτά της μονοτονίας έχουμε ότι, αν  $l_0 < S$ , τότε:

$$f(\mathbb{R}) = (0, S)$$

και αν  $l_0 > S$ , τότε:

$$f\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)\right\}\right) = (-\infty, 0) \cup (S, +\infty).$$

Έρθε και η ώρα πλέον της κυρτότητας. Από τη σχέση:

$$\lg c'(t) = \kappa (S - \lg c(t)) \lg c(t)$$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lg c''(t) &= \kappa \lg c'(t) (S - \lg c(t)) - \kappa \lg c(t) \lg c'(t) \\ &= \kappa \lg c'(t) (S - 2 \lg c(t)) \end{aligned}$$

Καθόσον η  $\lg c'(t)$  σε κάθε περίπτωση διατηρεί πρόσημο, η κυρτότητα εναλλάσσεται μόνο βάσει του προσήμου της παράστασης  $S - 2 \lg c(t)$ . Ας δούμε πότε μπορεί να συμβαίνει αυτό βάσει του ποια μπορεί να είναι η αρχική τιμή  $l_0$  της λογιστικής συνάρτησης.

Αν ισχύει ότι  $l_0 > S$ , τότε θα είναι  $\lg c'(t) < 0$  για κάθε  $t \neq \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)$ . Επίσης  $\lg c(t) > S$  για κάθε  $t > \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)$ , άρα  $S - 2 \lg c(t) > 0$ , όπερ σημαίνει ότι η  $\lg c$  είναι κυρτή στο διάστημα  $\left(\frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right), +\infty\right)$ . Από την άλλη, για  $t < \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)$  είναι  $\lg c(t) < 0$ , άρα η  $\lg c$  είναι κοίλη στο διάστημα  $\left(-\infty, \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)\right)$ . Αυτό σημαίνει ότι η  $\lg c$  δεν έχει σημεία καμψής στην περίπτωση που  $l_0 > S$ .

Αν, από την άλλη, ισχύει ότι  $l_0 < S$ , τότε θα είναι  $\lg c(\mathbb{R}) = (0, S)$ , όπερ σημαίνει ότι το  $\lg c^{-1}(S/2)$  ορίζεται και αυτή ακριβώς είναι και η θέση του σημείου καμψής. Διότι περί σημείου καμψής πρόκειται αφού για  $t < \lg c^{-1}(S/2)$  (για  $t > \lg c^{-1}(S/2)$ ), θα είναι λόγω μονοτονίας  $\lg c(t) < S/2$  ( $\lg c(t) > S/2$ ), άρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι  $\lg c'(t) > 0$  ( $\lg c'(t) < 0$ ), ήτοι η  $\lg c$  θα είναι κυρτή (κοίλη).

Ας πάμε, όμως, να βρούμε πιο συγκεκριμένα την προαναφερθείσα θέση του σημείου καμψής:

$$\begin{aligned} t_{\text{infl}} = \lg c^{-1}(S/2) &\Leftrightarrow \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa S t_{\text{infl}}}} = \frac{S}{2} \\ &\Leftrightarrow (S - l_0)e^{-\kappa S t_{\text{infl}}} = l_0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\kappa S t_{\text{infl}}} = \frac{l_0}{S - l_0}. \end{aligned}$$

Αφού έχει υποθεθεί ότι  $l_0 < S$ , έχουμε:

$$t_{\text{infl}} = \lg c^{-1}(S/2) = \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{S - l_0}{l_0}\right) = t_c. \quad (6.2)$$

Ανακεφαλαιώνουμε:

### Βασικά χαρακτηριστικά λογιστικής συνάρτησης

**Θεώρημα 6.1.** Στην περίπτωση που  $l_0 < S$  η  $\lgc_{S,l_0,\kappa}$ :

- έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και σύνολο τιμών το  $(0, S)$ ,
- είναι γνησίως αύξουσα,
- είναι κυρτή στο διάστημα  $(-\infty, t_c]$  και κοίλη στο διάστημα  $[t_c, +\infty)$ ,
- τείνει στο 0, όταν  $t \rightarrow -\infty$ , αλλιώς τείνει στο  $S$ , όταν  $t \rightarrow +\infty$ .

**Θεώρημα 6.2.** Στην περίπτωση που  $l_0 > S$  η  $\lgc_{S,l_0,\kappa}$ :

- έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0 - S}{l_0} \right) \right\}$  και σύνολο τιμών το  $(-\infty, 0) \cup (S, +\infty)$ ,
- είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της,
- είναι κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, t_c)$  και κυρτή στο διάστημα  $(t_c, +\infty)$ ,
- τείνει στο 0 όταν  $t \rightarrow -\infty$ , τείνει στο  $S$  όταν  $t \rightarrow +\infty$ , τείνει στο  $-\infty$  όταν  $t \rightarrow t_c^-$  και τείνει στο  $+\infty$  όταν  $t \rightarrow t_c^+$ .

### 6.3 Συσχέτιση με υπερβολική εφαπτομένη/συνεφαπτομένη

Στην παρούσα ενότητα θα εκφράσουμε την  $\lgc$  με τη βοήθεια της υπερβολικής εφαπτομένης και της υπερβολικής συνεφαπτομένης. Αν και με τα συμπεράσματα αυτής της ενότητας θα χάσει κάτι από τη μαγεία της η λογιστική συνάρτηση διότι θα πάψει να είναι μια εντελώς καινούρια συνάρτηση, θα ανταμειφθούμε σε επόμενες ενότητες που θα αξιοποιήσουμε τα εν λόγω συμπεράσματα για την εύκολη εξαγωγή συμπερασμάτων. Πάμε, λοιπόν, να επιχειρήσουμε τις εκφράσεις που θέλουμε.

Προς τούτο θα αποδείξουμε κάποιες ταυτότητες:

$$\begin{aligned}\tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{2 - (1 + e^{-2x})}{1 + e^{-2x}} = \frac{2}{1 + e^{-2x}} - 1 \\ \coth(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{2 - (1 - e^{-2x})}{1 - e^{-2x}} = \frac{2}{1 - e^{-2x}} - 1.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι:

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1 + \tanh(x/2)}{2} \quad \text{και} \quad \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1 + \coth(x/2)}{2}.$$

Για  $l_0 > 0$  έχουμε:

$$\lgc(t) = \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa S t}} = S \cdot \frac{1}{1 + \frac{S - l_0}{l_0} e^{-\kappa S t}}.$$

Επομένως, αν  $l_0 < S$ , τότε:

$$\begin{aligned}\lg c(t) &= S \cdot \frac{1}{1 + \ln \left( \exp \left( \frac{S-l_0}{l_0} \right) \right) e^{-\kappa S t}} \\ &= S \cdot \frac{1}{1 + \exp \left( -\kappa S t + \ln \left( \frac{S-l_0}{l_0} \right) \right)} \\ &= \frac{S}{2} \cdot \left( 1 + \tanh \left( \frac{1}{2} \left( \kappa S t - \ln \left( \frac{S-l_0}{l_0} \right) \right) \right) \right),\end{aligned}$$

ενώ αν  $l_0 > S$ , τότε:

$$\begin{aligned}\lg c(t) &= S \cdot \frac{1}{1 - \ln \left( \exp \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right) \right) e^{-\kappa S t}} \\ &= S \cdot \frac{1}{1 - \exp \left( -\kappa S t + \ln \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right) \right)} \\ &= \frac{S}{2} \cdot \left( 1 + \coth \left( \frac{1}{2} \left( \kappa S t - \ln \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right) \right) \right) \right),\end{aligned}$$

Συνοψίζουμε:

#### Λογιστική συνάρτηση και υπερβολικές συναρτήσεις

**Θεώρημα 6.3.** Η λογιστική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια της υπερβολικής εφαπτομένης και της υπερβολικής συνεφαπτομένης ως ακολούθως:

- Στην περίπτωση που  $l_0 < S$  έχουμε:

$$\lg c_{S,l_0,\kappa}(t) = \frac{S}{2} \cdot \left( 1 + \tanh \left( \frac{1}{2} \left( \kappa S t + \ln \left( \frac{l_0}{S-l_0} \right) \right) \right) \right). \quad (6.3)$$

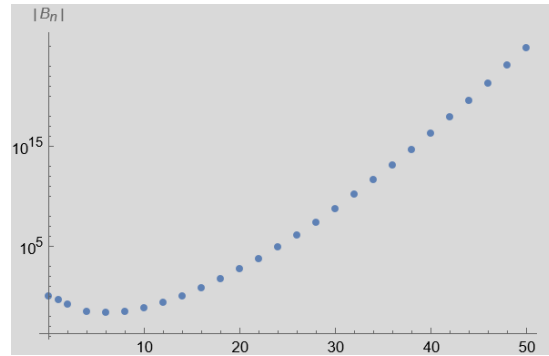
- Στην περίπτωση που  $l_0 > S$  έχουμε:

$$\lg c_{S,l_0,\kappa}(t) = \frac{S}{2} \cdot \left( 1 + \coth \left( \frac{1}{2} \left( \kappa S t + \ln \left( \frac{l_0}{l_0-S} \right) \right) \right) \right). \quad (6.4)$$

## 6.4 Αναπτύγματα

### 6.4.α' Ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων

Δεν θα μπορούσε να απουσιάζει από τη μελέτη μιας συνάρτησης η έκφρασή της ως δυναμοσειρά. Εδώ θα ανλήσουμε πληροφορίες από το [48], ώστε να προχωρήσουμε προς τον στόχο αυτό. Πρώτα όμως θα πρέπει να γνωρίσουμε την ακολουθία των αριθμών Bernoulli (βλ. [48] σελ. 41).



Σχήμα 6.8: Απεικόνιση της ακολουθίας των μέτρων των αριθμών Bernoulli σε λογαριθμική κλίμακα.

### αριθμοί Bernoulli

**Ορισμός 6.2.** Οι **αριθμοί Bernoulli** είναι οι τιμές της ακολουθίας (βλ. σχ. 6.8):

$$B_0 = 1$$

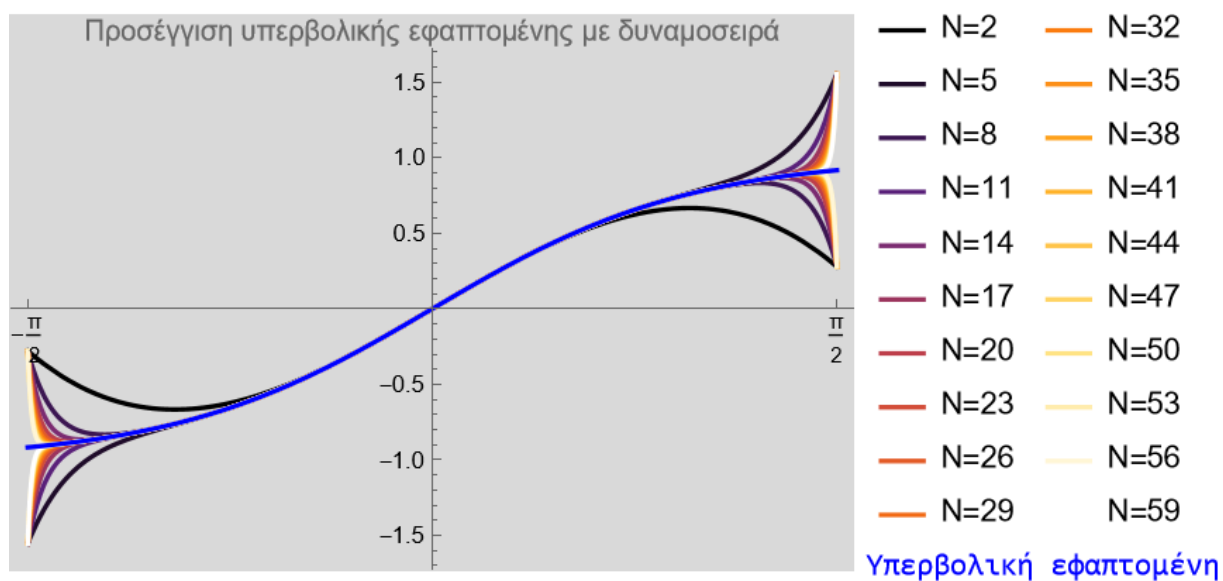
$$B_n = -n! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{B_j}{j!(n+1-j)!}.$$

Τώρα είμαστε σε θέση να εκφράσουμε την υπερβολική εφαπτομένη και την υπερβολική συνεφαπτομένη ως δυναμοσειρές και μέσω αυτών να εκφράσουμε και τη λογιστική συνάρτηση. Έχουμε, λοιπόν (βλ. [48] σελ. 291):

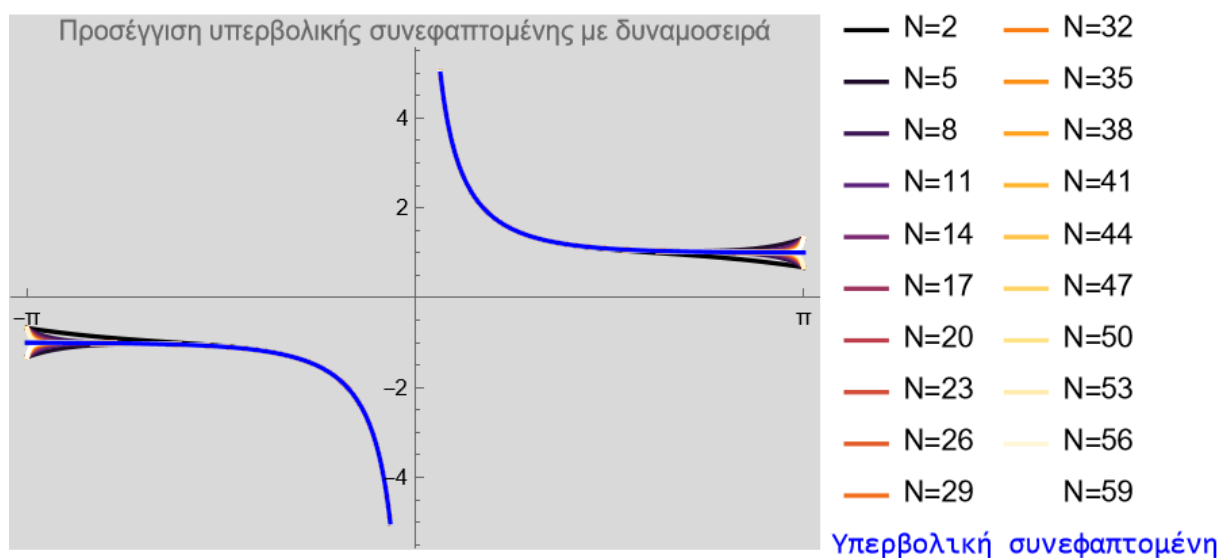
$$\tanh(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{2j}(2^{2j}-1)B_{2j}}{(2j)!} x^{2j-1}, \text{ όπου } |x| < \pi/2 \quad (\text{βλ. σχ. 6.9})$$

$$\coth(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j}B_{2j}}{(2j)!} x^{2j-1}, \text{ όπου } |x| < \pi \quad (\text{βλ. σχ. 6.10})$$

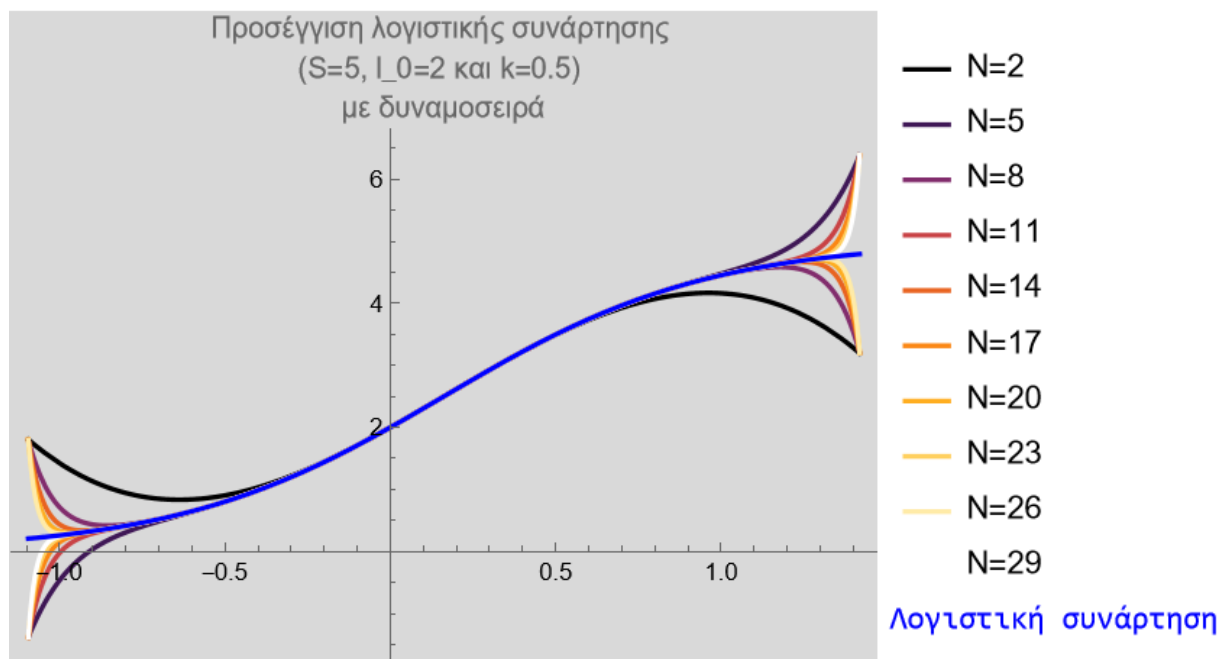
Μετά από αυτό αναλαμβάνουν δράση οι σχέσεις (6.3) και (6.4) που δείξαμε στο θεώρημα 6.3. Με άμεση αντικατάσταση προκύπτει:



Σχήμα 6.9: Προσέγγιση υπερβολικής εφαπτομένης με άθροισμα δυνάμεων  $N$  όρων.



Σχήμα 6.10: Προσέγγιση υπερβολικής συνεφαπτομένης με άθροισμα δυνάμεων  $N$  όρων.



Σχήμα 6.11: Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα δυνάμεων  $N$  όρων.

#### ανάπτυγμα σε σειρά δυνάμεων

**Θεώρημα 6.4.** Η λογιστική συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά δυνάμεων ως εξής:

- Στην περίπτωση που  $l_0 < S$  αναπτύσσεται ως σειρά Taylor:

$$\lg c_{S,l_0,\kappa}(t) = \frac{S}{2} \cdot \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{2j} (2^{2j} - 1) B_{2j}}{(2j)!} \left( \frac{1}{2} \left( \kappa S t + \ln \left( \frac{l_0}{S - l_0} \right) \right) \right)^{2j-1} \right),$$

$$\text{όπου } \frac{-\pi - \ln \left( \frac{l_0}{S - l_0} \right)}{\kappa S} < t < \frac{\pi - \ln \left( \frac{l_0}{S - l_0} \right)}{\kappa S} \quad (\text{βλ. σχ. 6.11}).$$

- Στην περίπτωση που  $l_0 > S$  αναπτύσσεται ως σειρά Laurent:

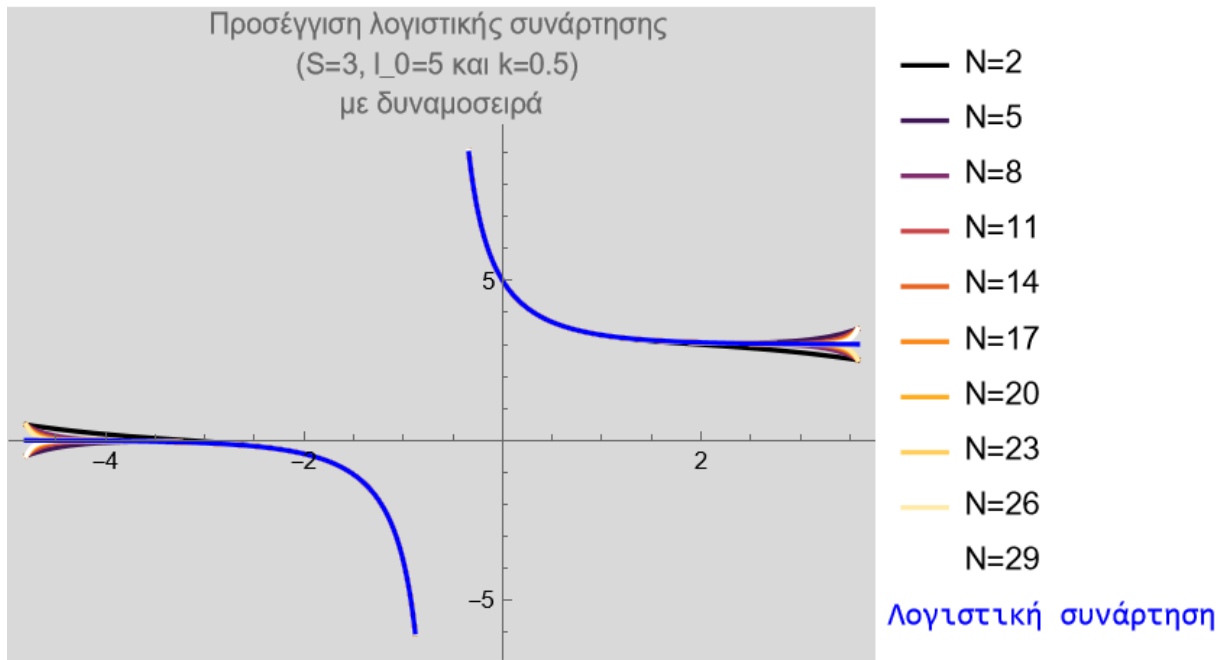
$$\lg c_{S,l_0,\kappa}(t) = \frac{S}{2} \cdot \left( 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j} B_{2j}}{(2j)!} \left( \frac{1}{2} \left( \kappa S t + \ln \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right) \right) \right)^{2j-1} \right),$$

$$\text{όπου } \frac{-2\pi - \ln \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)}{\kappa S} < t < \frac{2\pi - \ln \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)}{\kappa S} \quad (\text{βλ. σχ. 6.12}).$$

#### 6.4.β' Ανάπτυγμα σε σειρά εκθετικών

Η αλήθεια είναι πως τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας ήταν ολίγον τι απογοητευτικά. Αφενός ενέπλεκαν ειδικές συναρτήσεις, αφετέρου οι προσεγγίσεις μας ήταν περιορισμένες στα στενά όρια ενός διαστήματος  $(a, b)$ . Γι' αυτό το λόγο θα στρέψουμε το βλέμμα μας προς την κατεύθυνση των εκθετικών. Δεδομένου ότι η λογιστική συνάρτηση είναι μια απλή επεξεργασία της





Σχήμα 6.12: Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα δυνάμεων  $N$  όρων.

εκθετικής συνάρτησης αναμένουμε αποτελέσματα αρκετά απλά, τουλάχιστον εν συγκρίσει με αυτά της προηγούμενης ενότητας.

Έχουμε, λοιπόν:

$$\lg c(t) = \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0)e^{-\kappa S t}} = S \cdot \frac{1}{1 + \frac{S-l_0}{l_0}e^{-\kappa S t}}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

για να αναπτύξουμε σε σειρά εκθετικών την  $\lg c$ . Για να γίνει αυτό, όμως, απαιτείται  $|x| < 1$ , ήτοι εν προκειμένω:

$$\begin{aligned} \left| \frac{S-l_0}{l_0} e^{-\kappa S t} \right| < 1 &\Leftrightarrow -1 < \frac{S-l_0}{l_0} e^{-\kappa S t} < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1 + \frac{S-l_0}{l_0} e^{-\kappa S t}}{S} < \frac{2}{S} \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{\lg c(t)} < \frac{2}{S}. \end{aligned}$$

Η μοναδική περίπτωση να είναι  $\lg c(t) < 0$  είναι όταν  $l_0 > S$  και δη όταν  $t < \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right)$ . Στην περίπτωση που δεν συμβαίνει αυτό, μάς απασχολεί μόνο το να λαμβάνει χώρα η σχέση  $\lg c(t) > S/2$ . Σε αυτές τις περιπτώσεις ισχύει:

$$\lg c(t) = S \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right)^n e^{-\kappa S n t}.$$

Πότε όμως συμβαίνει  $\lg c(t) > S/2$  και πότε όχι; Καταρχάς, όπως έχουμε πει (βλ. σελ. 89 της παρούσης εργασίας), αν η  $\lg c(t)$  ξεκινήσει πάνω από το  $S$ , τότε εκεί και εγκλωβίζεται για όλα τα  $t > \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right)$ . Αυτό σημαίνει ότι αν  $l_0 > S$ , τότε  $\lg c(t) > S > S/2$  για κάθε  $t > \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{l_0-S}{l_0} \right)$ . Στην

περίπτωση που  $l_0 < S$ , δεν κινδυνεύουμε να βρεθούμε υπό του μηδενός, κινδυνεύουμε όμως να βρεθούμε υπό του  $S/2$ . Για να μη συμβεί αυτό, θα πρέπει  $t > \lg c^{-1}(S/2) = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{S-l_0}{l_0} \right)$ .

Κι αφού εξετάσαμε τις περιπτώσεις που συνέβαινε  $\left| \frac{S-l_0}{l_0} e^{-\kappa S t} \right| < 1$ , ας εξετάσουμε και τις περιπτώσεις όπου  $\left| \frac{S-l_0}{l_0} e^{-\kappa S t} \right| > 1$ . Προφανώς δεν θα συγκλίνει η προαναφερθείσα σειρά, όπως είναι πρόδηλο ότι θα ισχύει  $\left| \frac{l_0}{S-l_0} e^{\kappa S t} \right| < 1$ . Επομένως κινούμαστε ως ακολούθως:

$$\lg c(t) = \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0) e^{-\kappa S t}} = \frac{l_0 S e^{\kappa S t}}{S - l_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{l_0}{S-l_0} e^{\kappa S t}}.$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \lg c(t) &= \frac{l_0 S e^{\kappa S t}}{S - l_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{l_0}{S-l_0} \right)^n e^{\kappa S n t} \\ &= S \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{l_0}{S-l_0} \right)^{n+1} e^{\kappa S (n+1)t} \\ &= -S \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^{n+1} e^{\kappa S (n+1)t} \\ &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n e^{\kappa S n t}. \end{aligned}$$

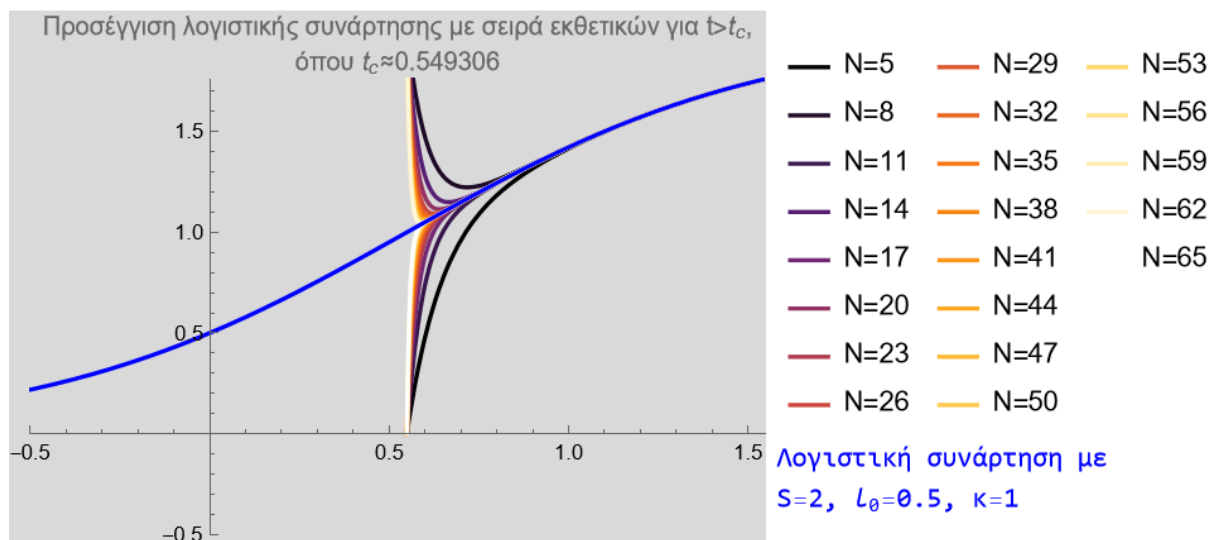
Ανακεφαλαιώνουμε!

#### ανάπτυγμα σε σειρά εκθετικών

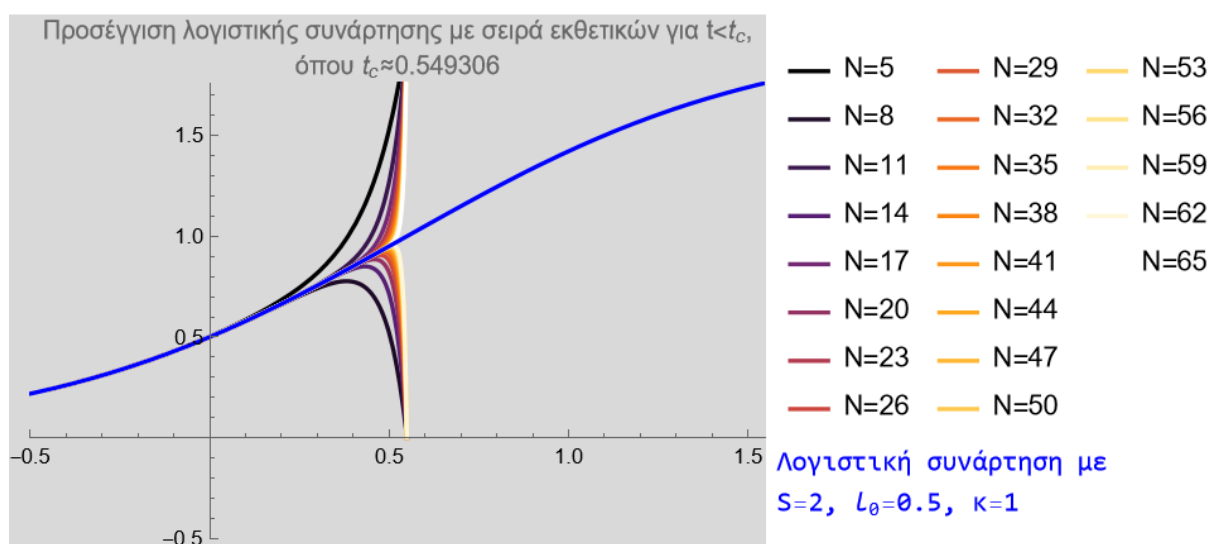
**Θεώρημα 6.5.** Η λογιστική συνάρτηση αναπτύσσεται σε σειρά εκθετικών ως εξής:

$$\lg c_{S, l_0, \kappa}(t) = \begin{cases} S \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{l_0 - S}{l_0} \right)^n e^{-\kappa S n t}, & \text{αν } t > \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{|S - l_0|}{l_0} \right) \\ -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n e^{\kappa S n t}, & \text{αν } t < \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{|S - l_0|}{l_0} \right) \end{cases}.$$

Για την περίπτωση που  $l_0 < S$  βλ. ενδεικτικά σχ. 6.13 και 6.14.



Σχήμα 6.13: Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα εκθετικών  $N$  όρων για  $t > t_c$ , όπου  $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{|S-l_0|}{l_0} \right)$ .



Σχήμα 6.14: Προσέγγιση λογιστικής συνάρτησης με άθροισμα εκθετικών  $N$  όρων για  $t < t_c$ , όπου  $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln \left( \frac{|S-l_0|}{l_0} \right)$ .

## 6.5 Μετασχηματισμός Fourier

Στην ενότητα αυτή θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον μετασχηματισμό Fourier της λογιστικής απεικόνισης. Αξίζει όμως τον κόπο; Έχει κάποια ενδιαφέρουσα φυσική σημασία αυτή η στόχευση; Ας το δούμε!

Έστω  $T_1 > 0$  κι ας θεωρήσουμε έναν περιορισμό της λογιστικής απεικόνισης  $lgc$  στο διάστημα  $[-T_1/2, T_1/2]$ . Κατόπιν, την επεκτείνουμε  $T_1$ -περιοδικά κι έτσι έχουμε μια νέα συνάρτηση  $f$ . Η  $f$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi ni}{T_1}t\right),$$

όπου:

$$c_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \exp\left(-\frac{2\pi ni}{T_1}t\right) dt.$$

Ναι μεν η σήμανση των συντελεστών Fourier είναι με βάση το  $n \in \mathbb{Z}$ , σύμφωνα με τη λογική «1ος συντελεστής», «2ος συντελεστής» κ.τ.λ., αλλά θα ήταν ίσως πιο χρήσιμο να εκφραζόντουσαν συναρτήσει των «συχνοτήτων»<sup>[†]</sup>  $\omega_n = n/T_1$ . Από άποψη φυσικής ερμηνείας είναι πιο λογικό να λέμε «στην ταλάντωση συχνότητας τάδε αντιστοιχεί συντελεστής τάδε», παρά να λέμε «στην 5η (π.χ.) συχνότητα αντιστοιχεί συντελεστής τάδε». Έτσι έχουμε:

$$c_n = \omega_1 \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \exp(-2\pi\omega_n it) dt.$$

Βάζοντας  $T_1 \rightarrow +\infty$ , ώστε να πάει να καλυφθεί από την  $f$  όλη η λογιστική συνάρτηση, έχουμε  $\omega_1 \rightarrow 0$ . Ίσως προκαλεί αλγεινή εντύπωση ότι τότε προκύπτει  $c_n \rightarrow 0$ , αλλά αξίζει να θυμηθούμε την περίπτωση μιας συνεχούς τυχαιάς μεταβλητής  $X$ , στην οποία δεν μας προβλημάτιζε το ότι  $\mathbb{P}(X = \text{τάδε}) = 0$ , καθόσον πλέον το ρόλο της συνάρτησης μάζας πιθανότητας έπαιζε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Έτσι κι εδώ! Το ρόλο του συντελεστή  $c_n$  αναλαμβάνει η  $\hat{f}(\omega)$ , η οποία έχει την ιδιότητα  $\hat{f}(\omega_n)\Delta\omega_n = c_n$ .

Όμως:

$$\Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{n}{T_1} - \frac{n-1}{T_1} = \frac{1}{T_1} = \omega_1.$$

Επομένως:

$$\hat{f}(\omega_n)\omega_1 = c_n \Leftrightarrow \hat{f}(\omega_n) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(t) \exp(-2\pi\omega_n it) dt.$$

Παίρνοντας, όπως προαναγγείλαμε,  $T_1 \rightarrow +\infty$  έχουμε ότι:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-2\pi\omega it) dt,$$

με το  $\hat{f}(\omega)$  να υποδηλώνει τελικά την πυκνότητα της έντασης της συνιστώσας της ταλάντωσης που αντιστοιχεί στην συχνότητα  $\omega$ . Ας δώσουμε τώρα τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier που θα υιοθετήσουμε σ' αυτή την εργασία.

<sup>[†]</sup>Τα εισαγωγικά οφείλονται στο ότι για αρνητικά  $n$  μόνο καταχρηστικά μπορούμε να μιλάμε για συχνότητες.

## μετασχηματισμός Fourier

**Ορισμός 6.3.** Ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης  $f$  ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i \omega t} dt,$$

όπου  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Θεώρημα 6.6.** Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης  $f$  είναι ο:

$$\mathcal{F}^{-1}(f(\omega))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{2\pi i \omega t} d\omega,$$

όπου  $t \in \mathbb{R}$ .

Έχουμε κάθε λόγο, λοιπόν, να ενδιαφερόμαστε για τον μετασχηματισμό Fourier της λογιστικής συνάρτησης. Δεν είναι απλά μια στεγνή μαθηματική κατασκευή χωρίς πρακτική ερμηνεία, αλλά έχει ένα χειροπιαστό φυσικό νόημα. Στις επόμενες ενότητες θα προσπαθήσουμε ν' ανακαλύψουμε τον εν λόγω μετασχηματισμό, αλλά το συμπέρασμά τους το εκμυστηρευόμαστε από τώρα, για λόγους αισθητικής της διάταξης του περιεχομένου αυτής της εργασίας.

Προτού, όμως, προχωρήσουμε σε αυτή την αποκάλυψη, θα δώσουμε έναν επιπλέον ορισμό (βλ. [37] σελ. 283 και 290).

## δέλτα Dirac

**Ορισμός 6.4.** Ορίζουμε ως *συνάρτηση δέλτα του Dirac* (συμβολικά:  $\delta$ ) την κατανομή με την ιδιότητα:

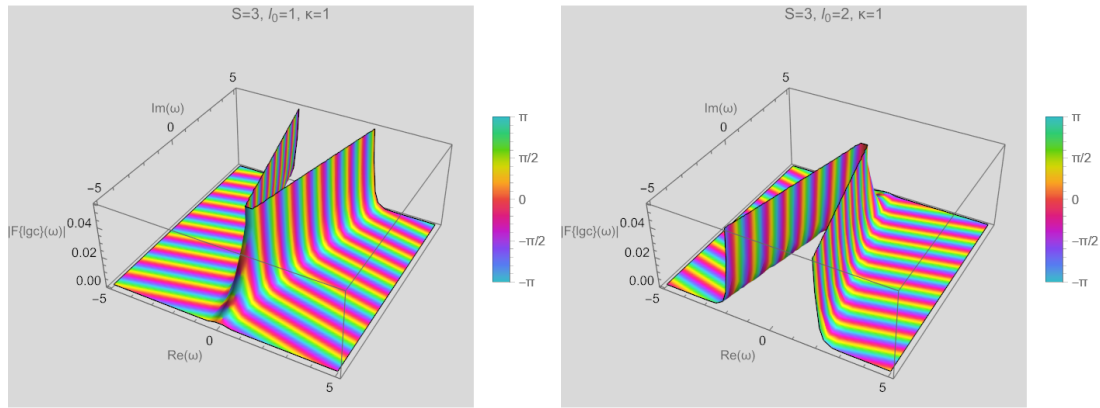
$$\int_a^b \delta(x - \xi) f(x) dx = f(\xi)$$

για κάθε άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  σε διάστημα  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , με συνεχείς όλεις της τις παραγώγους και της οποίας ο φορέας, ήτοι το:

$$\overline{\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}},$$

είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του  $(a, b)$ .

Ακολουθεί ο μετασχηματισμός που υποσχεθήκαμε.



Σχήμα 6.15: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier της λογιστικής συνάρτησης για τις περιπτώσεις που  $l_0 < S$ .

### μετασχηματισμός Fourier λογιστικής συνάρτησης

**Θεώρημα 6.7.** Ο μετασχηματισμός Fourier λογιστικής συνάρτησης εκφράζεται σε κλειστή μορφή ως ακολούθως<sup>[\*]</sup>:

- Στην περίπτωση που  $l_0 < S$  (βλ. σχ. 6.15):

$$\mathcal{F}(\lg_{S,l_0,\kappa}(t))(\omega) = \frac{S\delta(\omega)}{2} - \frac{\pi i}{\kappa \sinh\left(\frac{2\pi^2\omega}{\kappa S}\right)} \left(\frac{l_0}{S-l_0}\right)^{\frac{2\pi\omega}{\kappa S}i}.$$

- Στην περίπτωση που  $l_0 > S$  (βλ. σχ. 6.16):

$$\mathcal{F}(\lg_{S,l_0,\kappa}(t))(\omega) = \frac{S\delta(\omega)}{2} - \frac{\pi i \coth\left(\frac{2\pi^2\omega}{\kappa S}\right)}{\kappa} \left(\frac{l_0}{l_0-S}\right)^{\frac{2\pi\omega}{\kappa S}i}.$$

[\*] Για την παραγωγή των σχημάτων τέθηκε  $\delta(\omega) = 0$ . Δεδομένου ότι αυτό συμβαίνει για όλα τα  $\omega \neq 0$ , δεν ήταν και τόσο μεγάλη ατασθαλία αυτή μας η γραφιστική παράλειψη.

### 6.5.α' Αρχική τιμή μικρότερη της φέρουσας ικανότητας

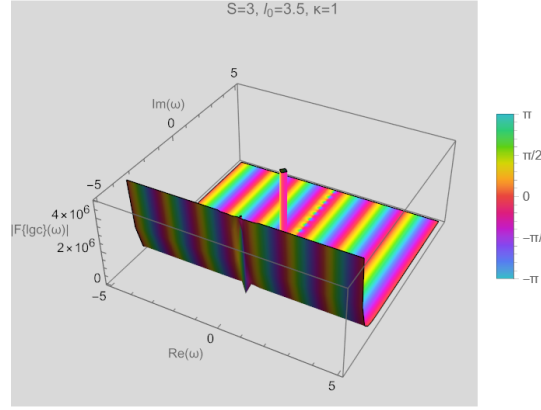
Επειδή τα πράγματα είναι λίγο δυσχερή, δεδομένης της σύνδεσης της λογιστικής συνάρτησης με την υπερβολική εφαπτομένη, θα προσπαθήσουμε πρώτα να βρούμε τον μετασχηματισμό Fourier της  $\tanh$  και βάσει αυτού τον μετασχηματισμό της  $\lgc$ .

Από το [47] σελ. 9 έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}(\tanh(\pi t))(\omega) = -\frac{i}{\sinh(\pi t)} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi i}{\sinh\left(\frac{\pi^2 t}{\pi}\right)}.$$

Επομένως, προκύπτει (βλ. [51] σελ. 125):

$$\mathcal{F}(\tanh(t))(\omega) = -\frac{\pi i}{\sinh(\pi^2 t)}.$$



Σχήμα 6.16: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Fourier της λογιστικής συνάρτησης για τις περιπτώσεις που  $l_0 > S$ .

Αλλά ας δώσουμε κι εμείς μιαν απόδειξη, εναλλακτική αυτής του [47]. Αρχικά, λοιπόν, παρατηρούμε ότι (βλ. [51] σελ. 133):

$$\mathcal{F}(\tanh(t))(\omega) = \frac{\mathcal{F}(\tanh'(t))(\omega)}{2\pi i \omega}.$$

Επομένως αρκεί να βρούμε τον  $\mathcal{F}(\tanh'(t))(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)(\omega)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2(t)} e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{-2\pi i \omega t}}{(e^t + e^{-t})^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4e^{-2\pi i \omega t}}{(e^{2t} + 1)^2} e^{2t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(e^{2t})^{-\pi i \omega}}{(e^{2t} + 1)^2} (e^{2t})' dt. \end{aligned}$$

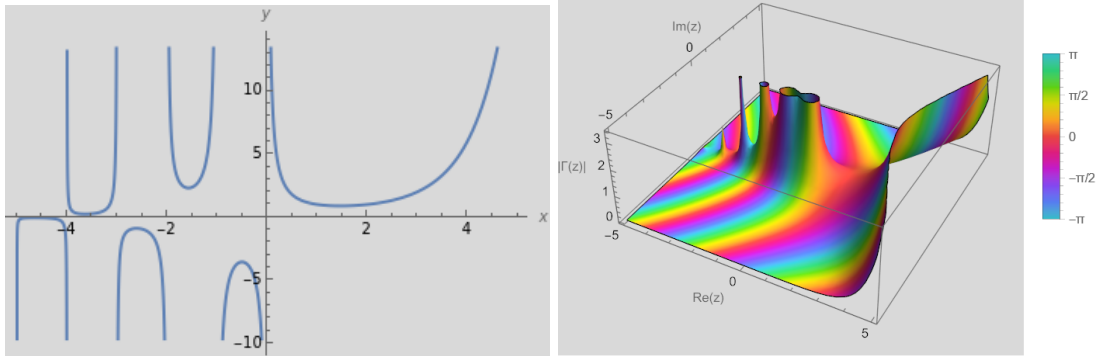
Θέτοντας στο παραπάνω ολοκλήρωμα  $\tau = e^{2t}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)(\omega) &= \int_0^{+\infty} \frac{2\tau^{-\pi i \omega}}{(\tau + 1)^2} d\tau \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{(1-\pi i \omega)-1}}{(\tau + 1)^{(1-\pi i \omega)+(1+\pi i \omega)}} d\tau. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Για να προχωρήσουμε, θα πρέπει να κάνουμε μια μικρή αναφορά στις συναρτήσεις *Βήτα* και *Γάμμα*. Σύμφωνα με το [36] (σελ. 1-2 και 13-14) και θεωρώντας τον συμβολισμό:

$$z\mathbb{N} = \{zn | n \in \mathbb{N}\}, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C},$$

έχουμε:



Σχήμα 6.17: Γραφική παράσταση της συνάρτησης Γάμμα, ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.

### συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα

**Ορισμός 6.5.** Στην περίπτωση που  $z > 0$  ορίζουμε ως **συνάρτηση Γάμμα**:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Στην περίπτωση που θέλουμε κάτι γενικότερο, δηλαδή  $z \in \mathbb{C} \setminus (-1\mathbb{N})$ , λαμβάνουμε υπ' όψιν την αναλυτική συνέχιση του παραπάνω ολοκληρώματος (βλ. επίσης σχ. 6.17).

**Ορισμός 6.6.** Ως **συνάρτηση Βήτα** (βλ. επίσης σχ. 6.18) ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\mathfrak{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

όπου  $x, y \in \mathbb{C} \setminus (-1\mathbb{N})^{(*)}$ .

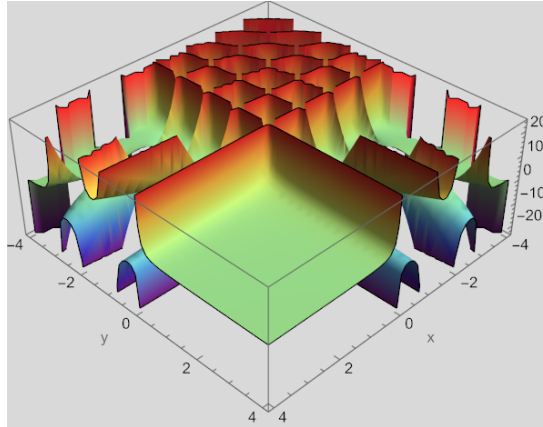
<sup>(\*)</sup> Στην περίπτωση που  $x + y \in (-1\mathbb{N})$  με  $x, y \in \mathbb{C} \setminus (-1\mathbb{N})$  έχουμε ότι  $\mathfrak{B}(x, y) = 0$ .

Ας συνεχίσουμε τώρα από κει που είχαμε μείνει. Έχουμε από τη σχέση (6.5) (βλ. [36] σελ. 13):

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)(\omega) = 2\mathfrak{B}(1 - \pi\omega i, 1 + \pi\omega i) = 2 \frac{\Gamma(1 - \pi\omega i) \Gamma(1 + \pi\omega i)}{\Gamma((1 + \pi\omega i) + (1 - \pi\omega i))}.$$

Αφού  $\Gamma(2) = (2 - 1)! = 1$  (βλ. [36] σελ. 4) έχουμε ότι για  $\omega \neq 0$  (βλ. [36] σελ. 3 και σχόλια στη



Σχήμα 6.18: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $B\eta\tau\alpha$ .

σελ. 4):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)(\omega) &= 2\Gamma(1 - \pi\omega i)\Gamma(1 + \pi\omega i) \\ &= 2\pi\omega i\Gamma(1 - \pi\omega i)\Gamma(\pi\omega i) \\ &= 2\pi\omega i\frac{\pi}{\sin(\pi(\pi\omega i))} \\ &= 2\pi\omega i\frac{\pi}{\sin(\pi^2\omega i)}\end{aligned}$$

Όμως για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  είναι  $\sin(z) = -i \sinh(iz)$  (βλ. [64] σελ. 471). Άρα :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{1}{\cosh^2(t)}\right)(\omega) &= 2\pi\omega i\frac{\pi}{-i \sinh(\pi^2\omega i^2)} \\ &= \frac{2\pi^2\omega}{\sinh(\pi^2\omega)}.\end{aligned}$$

Άρα :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\tanh(t))(\omega) &= \frac{\frac{2\pi^2\omega}{\sinh(\pi^2\omega)}}{\frac{2\pi i\omega}{\pi i}} \\ &= -\frac{2\pi^2\omega}{\sinh(\pi^2\omega)}.\end{aligned}$$

Όπερ έδει δείξαι.

Από τη σχέση (6.3) έχουμε :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lg c(t))(\omega) &= \mathcal{F}\left(\frac{S}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{1}{2}\left(\kappa St + \ln \frac{l_0}{S - l_0}\right)\right)\right)\right)(\omega) \\ &= \frac{S}{2}\mathcal{F}(1)(\omega) + \frac{S}{2}\mathcal{F}\left(\tanh\left(\frac{1}{2}\left(\kappa St + \ln \frac{l_0}{S - l_0}\right)\right)\right)(\omega).\end{aligned}$$

Όμως (βλ. [51] σελ. 273):

$$\mathcal{F}(1)(\omega) = \delta(\omega).$$

Όσον αφορά τον διπλανό μετασχηματισμό, θα πρέπει πρώτα να δούμε πώς συνδυάζονται οι κανόνες του [51] στις σελ. 123 και 125. Έστω, λοιπόν, ότι  $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$ . Θα βρούμε τον μετασχηματισμό  $\mathcal{F}(f(at + b))(\omega)$  με τη βοήθεια της συνάρτησης  $\hat{f}$ .

Έχουμε για  $a > 0$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f(at+b))(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at+b)e^{-2\pi i \omega t} dt \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(at+b)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} at} a dt \\
 &\stackrel{t_1=at}{=} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1+b)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} it_1} dt_1 \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1+b)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} i(t_1+b)+2\pi i \frac{\omega}{a} ib} dt_1 \\
 &= \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a} ib}}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1+b)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} i(t_1+b)} dt_1 \\
 &\stackrel{t_2=t_1+b}{=} \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a} ib}}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_2)e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} it_2} dt_2 \\
 &= \frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a} ib}}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Η περίπτωση  $a < 0$  έχει μόνο μια μικρή προφανή διαφορά στην αλλαγή μεταβλητής στη σχέση (6.6), η οποία μας οδηγεί στην ισότητα:

$$\mathcal{F}(f(at+b))(\omega) = -\frac{e^{2\pi i \frac{\omega}{a} ib}}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Συνοψίζουμε:

**μετασχηματισμός Fourier σύνθεσης με γραμμική**


---

**Θεώρημα 6.8.** Έστω συνάρτηση  $f$ , για την οποία ισχύει  $\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \hat{f}(\omega)$ . Για  $a \neq 0$ :

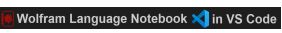

$$\mathcal{F}(f(at+b))(\omega) = \frac{e^{\frac{2\pi i \omega b}{a}}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$


---

Επομένως<sup>[5]</sup>:

<sup>[5]</sup>Στην περίπτωση που ο αναγνώστης προσπαθήσει να επαληθεύσει τα παρακάτω χρησιμοποιώντας το  WOLFRAM MATHEMATICA, θα βρει, αντί του δικού μας αποτελέσματος, ένα συνονθύλευμα από πράξεις με μη πλήρεις συναρτήσεις βήτα. Επί παραδείγματι, για τον μετασχηματισμό  $\mathcal{F}(\tanh(5t+7))(\omega)$  δίνει την απάντηση:

$$\frac{e^{-\frac{1}{5}\pi(\pi-14i)w} \left( -5ie^{\frac{1}{5}\pi(\pi-14i)w} + 2\pi e^{\frac{2\pi^2 w}{5}} w \mathfrak{B}_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{i\pi w}{5} + 1, 0\right) - \pi w \mathfrak{B}_{-14}\left(-\frac{1}{5}i\pi w, 0\right) - \pi w \mathfrak{B}_{-14}\left(1 - \frac{i\pi w}{5}, 0\right) \right)}{10\pi w}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο  Wolfram Language Notebook  in VS Code, ώστε να επαληθεύσει ότι ο μετασχηματισμός της  $\mathcal{F}(\tanh(5t+7))(\omega)$  είναι όντως ο:

$$\frac{e^{\frac{14\pi\omega}{5}i}}{5} \left( -\frac{\pi i}{\sinh(\pi^2 \frac{\omega}{5})} \right)$$

που προβλέπουν τα γεγραμμένα μας.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\tanh\left(\frac{1}{2}\left(\kappa St + \ln \frac{l_0}{S-l_0}\right)\right)\right)(\omega) &= \mathcal{F}\left(\tanh\left(\frac{\kappa S}{2}t + \frac{1}{2}\ln \frac{l_0}{S-l_0}\right)\right)(\omega) \\
&= -\frac{\exp\left(2\pi i \frac{\omega}{\kappa S/2} \frac{1}{2}\ln \frac{l_0}{S-l_0}\right)}{|\kappa S/2|} \cdot \frac{\pi i}{\sinh\left(\pi^2 \frac{\omega}{\kappa S/2}\right)} \\
&= -\frac{2 \exp\left(\frac{2\pi \omega i}{\kappa S} \ln \frac{l_0}{S-l_0}\right)}{|\kappa S|} \cdot \frac{\pi i}{\sinh\left(\frac{2\pi^2 \omega}{\kappa S}\right)} \\
&= -\frac{2\pi i}{|\kappa S| \sinh\left(\frac{2\pi^2 \omega}{\kappa S}\right)} \left(\frac{l_0}{S-l_0}\right)^{\frac{2\pi \omega}{\kappa S} i}.
\end{aligned}$$

Εν κατακλείδι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lg c(t))(\omega) &= \frac{S}{2}\delta(\omega) - \frac{S}{2} \frac{2\pi i}{|\kappa S| \sinh\left(\frac{2\pi^2 \omega}{\kappa S}\right)} \left(\frac{l_0}{S-l_0}\right)^{\frac{2\pi \omega}{\kappa S} i} \\
&= \frac{S\delta(\omega)}{2} - \frac{\pi \operatorname{sign}(S)i}{|\kappa| \sinh\left(\frac{2\pi^2 \omega}{\kappa S}\right)} \left(\frac{l_0}{S-l_0}\right)^{\frac{2\pi \omega}{\kappa S} i}.
\end{aligned}$$

Φυσικά, σύμφωνα με τη φυσική σημασία που δώσαμε στη λογιστική συνάρτηση, δεν νοείται  $\kappa < 0$  ή  $S < 0$ , παραταύτα αδιαφορήσαμε γι' αυτές τις προδιαγραφές, καθόσον δεν είχε ουσιαστικό κόστος στην επίλυση.

### 6.5.β' Αρχική τιμή μεγαλύτερη της φέρουσας ικανότητας

Στην παρούσα ενότητα θ' ακολουθήσουμε άλλη διαδρομή, για να βρούμε τον μετασχηματισμό που ψάχνουμε. Αρχικά, θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν κλειστό τύπο για τη σειρά:

$$\Sigma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

αλλά πριν θα δώσουμε έναν ορισμό (βλ. [5] σελ. 123):

**υπόλοιπο συνάρτησης**

---

**Ορισμός 6.7.** Αν για τη μιγαδική συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

σε μια (τρυπημένη) περιοχή του  $z_0$ , τότε ο  $c_{-1}$  λέγεται **υπόλοιπο της  $f$  στο  $z_0$**  και συμβολίζουμε:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0).$$


---

Έχουμε, λοιπόν, ότι σύμφωνα με το [5] (σελ. 149) έχουμε ότι:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = - \left( \operatorname{Res} \left( \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z^2 + a^2)}; ai \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z^2 + a^2)}; -ai \right) \right).$$

Από το [5] (σελ. 124) διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left( \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z^2 + a^2)}; ai \right) &= \lim_{z \rightarrow ai} \left( (z - ai) \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z^2 + a^2)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \left( \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z + ai)} \right) \\ &= \frac{\pi \cot(\pi ai)}{2ai}. \end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\operatorname{Res} \left( \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z^2 + a^2)}; ai \right) = \frac{\pi \cot(-\pi ai)}{-2ai} = \frac{\pi \cot(\pi ai)}{2ai}.$$

Επομένως λαμβάνοντας υπ' όψιν το [64] (σελ. 471):

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= - \left( \frac{\pi \cot(\pi ai)}{2ai} + \frac{\pi \cot(\pi ai)}{2ai} \right) \\ &= - \frac{\pi \cos(\pi ai)}{ai \sin(\pi ai)} \\ &= - \frac{\pi \cosh(\pi a)}{ai^2 \sinh(\pi a)} \\ &= \frac{\pi \cosh(\pi a)}{a \sinh(\pi a)} \\ &= \frac{\pi}{a} \coth(\pi a). \end{aligned}$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στη σχέση:

$$\frac{1}{a^2} + 2\Sigma(a) = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a) \Leftrightarrow \Sigma(a) = \frac{\pi a \coth(\pi a) - 1}{2a^2}.$$

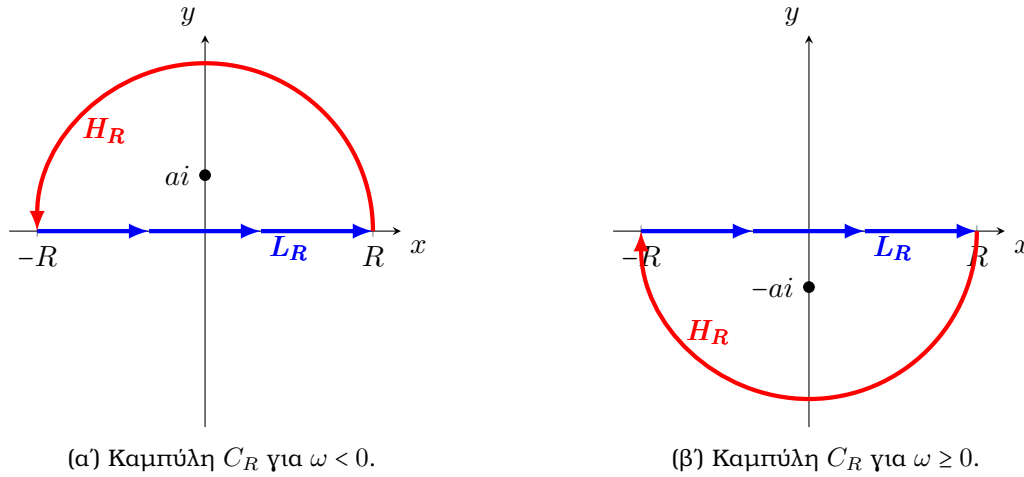
Η αλήθεια είναι πως στα παραπάνω δεν μας ενδιέφερε τόσο το να βρούμε το άθροισμα  $\Sigma(a)$ , όσο το να εκφράσουμε την υπερβολική συνεφαπτομένη συναρτήσει αυτού. Έχουμε ως προς αυτή τη στοχοθεσία:

$$\coth(\pi a) = \frac{2a^2 \Sigma(a) + 1}{\pi a} = \frac{1}{\pi a} + \frac{2a}{\pi} \Sigma(a),$$

και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $t = \pi a$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \coth(t) &= \frac{1}{t} + \frac{2t}{\pi^2} \Sigma(t/\pi) \\ &= \frac{1}{t} + \frac{2t}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (t/\pi)^2} \\ &= \frac{1}{t} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 + n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο υπολογισμός του  $\mathcal{F}(\coth(t))(\omega)$  περνάει μέσα από τον υπολογισμό των  $\mathcal{F}(1/t)(\omega)$  και  $\mathcal{F}\left(\frac{t}{t^2 + n^2 \pi^2}\right)(\omega)$ .

(α') Καμπύλη  $C_R$  για  $\omega < 0$ .(β') Καμπύλη  $C_R$  για  $\omega \geq 0$ .Σχήμα 6.19: Η καμπύλη  $C_R$  για τις διάφορες περιπτώσεις του  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Όσον αφορά τον πρώτο μετασχηματισμό, από το [51] (σελ. 292) έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)(\omega) = -\pi i \operatorname{sign}(\omega).$$

Όσον αφορά τον δεύτερο μετασχηματισμό, θα υπολογίσουμε πρώτα βοηθητικά τον  $\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+a^2}\right)(\omega)$ , με  $a > 0$ . Συγκεκριμένα, θα υπολογίσουμε πρώτα την περίπτωση που  $\omega = 0$ , η οποία είναι και η πιο εύκολη. Έχουμε:

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t \omega i}}{t^2+a^2} dt$  θα δώσουμε μια επιπρόσθετη μιγαδική νότα στο επιχείρημα του [5] (σελ. 139-141) χρησιμοποιώντας το όριο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{C_R} \frac{e^{-2\pi z \omega i}}{z^2 + a^2} dz,$$

για κάποια κατάλληλη κλειστή καμπύλη  $C_R$  που θα γνωρίσουμε παρακάτω.

Ας δούμε όμως πρώτα κάποια πράγματα. Αν  $z = x + yi$ , τότε:

$$-2\pi z \omega i = -2\pi \omega i(x + yi) = 2\pi y \omega - 2\pi x \omega i.$$

Άρα:

$$|e^{-2\pi z \omega i}| = e^{2\pi y \omega}. \quad (6.7)$$

Αυτό σημαίνει ότι για  $\omega > 0$  και  $y > 0$ , θα είναι  $|e^{-2\pi z \omega i}| \rightarrow \infty$  καθώς  $z \rightarrow \infty$ . Έτσι καταλήγουμε να πάρουμε τις δύο κάτωθι περιπτώσεις, ώστε να αλλάξει το πρόσημο του  $y$ :

- Στην περίπτωση που  $\omega < 0$  η  $C_R$  είναι η κλειστή καμπύλη του μιγαδικού επιπέδου που απεικονίζεται στο σχήμα 6.19α'.
- Αν  $\omega \geq 0$ , τότε χρησιμοποιούμε την καμπύλη του σχήματος 6.19β'.

Σε κάθε περίπτωση η κλειστή καμπύλη  $C_R$  αποτελείται από ένα ημικύκλιο ( $H_R$ ) κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$  και από το ευθύγραμμο τμήμα ( $L_R$ ) που ενώνει τα σημεία  $(-R, 0)$  και  $(R, 0)$ .

Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που  $\omega < 0$ . Προφανώς:

$$\oint_{C_R} \frac{e^{-2\pi z \omega i}}{z^2 + a^2} dz = \int_{L_R} \frac{e^{-2\pi z \omega i}}{z^2 + a^2} dz + \int_{H_R} \frac{e^{-2\pi z \omega i}}{z^2 + a^2} dz.$$

Ας πάμε να εξετάσουμε πρώτα το  $\int_{H_R} \frac{e^{-2\pi z \omega i}}{z^2 + a^2} dz$ . Για  $z = x + yi \in H_R$  ισχύει λόγω της εξίσωσης (6.7):

$$\left| \frac{e^{-2\pi z \omega i}}{z^2 + a^2} \right| = \frac{|e^{-2\pi z \omega i}|}{|z^2 + a^2|} = \frac{e^{2\pi y \omega}}{|z^2 + a^2|}.$$

Διαλέγοντας  $R$  αρκετά μεγάλο, θα είναι  $R > |ai|$ . Τοιαύτη περιπτώσει, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|z^2 + a^2| \geq ||z|^2 - |a|^2| = |R^2 - a^2| = R^2 - a^2.$$

Επομένως:

$$\left| \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} \right| \leq \frac{e^{2\pi y\omega}}{R^2 - a^2}.$$

Επίσης για  $z = x + yi \in H_R$  είναι  $y > 0$  κι επίσης  $\omega < 0$ , άρα:

$$e^{2\pi y\omega} < 1.$$

Έτσι, από την ανισότητα M-L (βλ. [5] σελ. 52) έχουμε ότι:

$$\left| \int_{H_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz \right| \leq |H_R| \frac{1}{R^2 - a^2} = \frac{\pi R}{R^2 - a^2}.$$

Όμως:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi R}{R^2 - a^2} = 0,$$

το οποίο με τη σειρά του μας οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{H_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz = 0.$$

Όσον αφορά το  $\int_{L_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz$  τα πράγματα είναι απλά:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{L_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt.$$

Το μόνο που μένει, λοιπόν, είναι ο υπολογισμός του  $\oint_{C_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz$ .

Για το εν λόγω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι πασιφανές ότι για αρκετά μεγάλο  $R$  ο πόλος  $ai$  θα περιέχεται εντός της καμπύλης  $C_R$ . Άρα από το Θεώρημα Υπολοίπων του Cauchy (βλ. [5] σελ. 128) έχουμε ότι:

$$\oint_{C_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2}; ai \right).$$

Ο πόλος είναι τάξης 1, οπότε έχουμε (βλ. [5] σελ. 124):

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2}; ai \right) = \lim_{z \rightarrow ai} \left( (z - ai) \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} \right) = \lim_{z \rightarrow ai} \left( \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z + a} \right) = \frac{e^{2\pi a\omega}}{2ai}.$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt = 2\pi i \frac{e^{2\pi a\omega}}{2ai} = \frac{\pi e^{2\pi a\omega}}{a}.$$

Στην περίπτωση που  $\omega \geq 0$  κινούμαστε, όπως είπαμε στο κάτω ημικύκλιο. Εκεί θα είναι  $y < 0$ , άρα και πάλι:

$$e^{2\pi y\omega} \leq 1.$$

Έτσι, από την ανισότητα M-L (βλ. [5] σελ. 52) έχουμε την ανισότητα:

$$\left| \int_{H_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz \right| \leq |H_R| \frac{e^{2\pi R\omega}}{R^2 - a^2} = \frac{1}{R^2 - a^2},$$

η οποία και πάλι στέλνει το  $\int_{H_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz$  στο μηδέν.

Τέλος, από το Θεώρημα Υπολοίπων του Cauchy (βλ. [5] σελ. 128) δεδομένου ότι κινούμαστε δεξιόστροφα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\oint_{C_R} \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} dz &= -2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2}; -ai \right) \\ &= -2\pi \lim_{z \rightarrow -ai} \left( (z + ai) \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z^2 + a^2} \right) = -2\pi \lim_{z \rightarrow -ai} \left( \frac{e^{-2\pi z\omega i}}{z - a} \right) \\ &= \frac{\pi e^{-2\pi a\omega}}{a}.\end{aligned}$$

Στην προκειμένη περίπτωση καταλήγουμε στη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt = \frac{e^{2\pi a\omega i}}{2a}.$$

Συνοψίζουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \left( \frac{1}{t^2 + a^2} \right) (\omega) &= \begin{cases} \frac{\pi e^{2\pi a\omega}}{a}, & \text{αν } \omega < 0 \\ \frac{\pi e^{-2\pi a\omega}}{a}, & \text{αν } \omega \geq 0 \end{cases} \\ &= \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\omega|}.\end{aligned}$$

Γνωρίζοντας πλέον ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\omega|},$$

από τον κανόνα του Leibniz (βλ. [37] σελ. 268) ότι:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\omega|} \right) \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2\pi t i e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt &= \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\omega|} (-2\pi a \operatorname{sign}(\omega)) \\ \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{-2\pi t\omega i}}{t^2 + a^2} dt &= \frac{1}{-2\pi i} \cdot \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\omega|} (-2\pi a \operatorname{sign}(\omega)) \\ \Leftrightarrow \mathcal{F} \left( \frac{t}{t^2 + a^2} \right) (\omega) &= -\pi e^{-2\pi a|\omega|} \operatorname{sign}(\omega) i\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\coth(t))(\omega) &= \mathcal{F} \left( \frac{1}{t} \right) (\omega) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F} \left( \frac{t}{t^2 + n^2\pi^2} \right) (\omega) \\ &= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \pi e^{-2n\pi^2|\omega|} \operatorname{sign}(\omega) i \\ &= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n\pi^2|\omega|} \right).\end{aligned}$$

Καθόσον  $e^{-2\pi^2|\omega|} < 1$ , θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\coth(t))(\omega) &= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) \left(1 + 2 \frac{1}{e^{2\pi^2|\omega|} - 1}\right) \\
&= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) \left(\frac{e^{2\pi^2|\omega|} + 1}{e^{2\pi^2|\omega|} - 1}\right) \\
&= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) \left(\frac{e^{\pi^2|\omega|} + e^{-\pi^2|\omega|}}{e^{\pi^2|\omega|} - e^{-\pi^2|\omega|}}\right) \\
&= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) \coth(\pi^2|\omega|).
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι  $|\omega| = \omega \cdot \operatorname{sign}(\omega)$  και ότι η  $\cosh$  είναι περιττή, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\coth(t))(\omega) &= -\pi i \operatorname{sign}(\omega) \coth(\pi^2 \omega \operatorname{sign}(\omega)) \\
&= -\pi i (\operatorname{sign}(\omega))^2 \coth(\pi^2 \omega) \\
&= -\pi i \coth(\pi^2 \omega).
\end{aligned}$$

Και αυτή τη φορά θα χρειαστούμε τη συνδρομή του θεωρήματος 6.8 και της σχέσης (6.4). Ανακαλύπτουμε, λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\lg c(t))(\omega) &= \mathcal{F}\left(\frac{S}{2} \cdot \left(1 + \coth\left(\frac{1}{2}\left(\kappa S t + \ln\left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right)\right)\right)\right)\right)(\omega) \\
&= \frac{S}{2} \mathcal{F}(1)(\omega) + \frac{S}{2} \mathcal{F}\left(\coth\left(\frac{1}{2}\left(\kappa S t + \ln\left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right)\right)\right)\right)(\omega) \\
&= \frac{S\delta(\omega)}{2} + \frac{S}{2} \mathcal{F}\left(\coth\left(\frac{\kappa S}{2} t + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right)\right)\right)(\omega) \\
&= \frac{S\delta(\omega)}{2} + \frac{S}{2} \frac{\exp\left(\frac{2\pi\omega \frac{1}{2} \ln\left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right) i}{\kappa S/2}\right)}{|\kappa S/2|} \left(-\pi i \coth\left(\pi^2 \frac{\omega}{\kappa S/2}\right)\right) \\
&= \frac{S\delta(\omega)}{2} - \frac{\operatorname{sign}(S) \exp\left(\frac{2\pi\omega \ln\left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right) i}{\kappa S}\right)}{|\kappa|} \pi i \coth\left(\frac{2\pi^2 \omega}{\kappa S}\right) \\
&= \frac{S\delta(\omega)}{2} - \frac{\pi i \coth\left(\frac{2\pi^2 \omega}{\kappa S}\right) \operatorname{sign}(S)}{|\kappa|} \left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right)^{\frac{2\pi\omega}{\kappa S} i}.
\end{aligned}$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, έτσι κι εδώ παραβλέψαμε το ότι  $\kappa, S > 0$  για χάρη μιας πιο γενικής θεώρησης, κάτι που όμως θα εγκαταλείψουμε στην διατύπωση του θεωρήματος 6.7 που συνοψίζει όσα έχουμε βρει σε αυτές τις δύο ενότητες.



## 6.6 Μετασχηματισμός Laplace

Ας κάνουμε τώρα την εξής όχι παράλογη σκέψη. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό ζώων ( $p$ ) που ακολουθεί όντως το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης. Βλέπουμε, όμως, πως ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού δεν επηρεάζεται από το φράγμα που περιορίζει την ανάπτυξη του πληθυσμού ( $L$ ). Δηλαδή τα ζώα γεννάνε με τον ίδιο ρυθμό ( $b$ ) κι έχουμε και τις ίδιες μεταναστευτικές ροές ( $r$ ). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ο πληθυσμός φράσσεται λόγω της θνησιμότητας των μελών του. Ενδιαφερόμαστε, συνεπώς, να βρούμε τη συνάρτηση ( $s$ ) που δηλώνει το ποσοστό των ατόμων που επιβιώνουν τουλάχιστον  $t$  χρόνια από τώρα.

Μαθηματικά τα παραπάνω σημαίνουν τα εξής:

- Αφού ο πληθυσμός ακολουθεί το λογιστικό μοντέλο ανάπτυξης, θα ισχύει:

$$p(t) = \lg c_{L,p_0,k}(t).$$

- Αφού τα ζώα γεννάνε με σταθερό ρυθμό ( $b$  γεννήσεις ανά ζώο), σημαίνει ότι τα επιπλέον ζώα λόγω των γεννήσεων θα είναι:

$$b \cdot p(t) \text{ ζώα ανά έτος.}$$

- Ο συνολικός ρυθμός αύξησης των νέων ζώων, συμπεριλαμβανομένων των μεταναστευτικών ροών, είναι:

$$r(t) + b \cdot p(t) \text{ ζώα ανά έτος.}$$

Για να βρούμε τη συνάρτηση  $s$  ας πάμε να προβλέψουμε τον πληθυσμό των ζώων  $t$  έτη από σήμερα εστιάζοντας στον ρυθμό αύξησης των ζώων και το ποσοστό επιβιώσής τους. Έχουμε καταρχάς ότι από τον αρχικό πληθυσμό ( $p_0$ ) εξ ορισμού θα έχουν επιβιώσει  $s(t) \cdot p_0$  άτομα. Ας πάρουμε τώρα μια χρονική στιγμή  $\tau$  στο μεσοδιάστημα του  $[0, t]$ . Αφού το έτος  $\tau$  εμφανίζονται  $r(\tau) + b \cdot p(\tau)$  νέα ζώα, κατά το χρονικό διάστημα  $[\tau, \tau + d\tau]$  θα έχουν προκύψει  $(r(\tau) + b \cdot p(\tau)) d\tau$  νέα ζώα. Από αυτά θα έχουν επιβιώσει μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  τα  $s(t - \tau) \cdot (r(\tau) + b \cdot p(\tau)) d\tau$ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλες τις ενδιάμεσες χρονιές του διαστήματος  $[0, t]$  έχουμε ότι στο έτος  $t$  θα έχουν προκύψει/επιβιώσει:

$$\sum_{\tau} s(t - \tau) (r(\tau) + b \cdot p(\tau)) d\tau \text{ νέα ζώα} = \int_0^t s(t - \tau) (r(\tau) + bp(\tau)) d\tau \text{ νέα ζώα.}$$

Συνεπώς, ο συνολικός πληθυσμός των ζώων το έτος  $t$  θα είναι (βλ. [66] σελ. 401):

$$s(t)p_0 + \int_0^t s(t - \tau) (r(\tau) + bp(\tau)) d\tau.$$

Καταλήγουμε στην κάτωθι ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους συνελίξεως:

$$p(t) = s(t)p_0 + \int_0^t s(t - \tau) (r(\tau) + bp(\tau)) d\tau, \quad (6.8)$$

στην οποία οι συναρτήσεις  $p$ ,  $r$  και οι σταθερές  $p_0$ ,  $b$  νοούνται σταθερές και εμείς καλούμαστε να βρούμε τη συνάρτηση  $s$ .

Ένας κομψός τρόπος επίλυσης της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι μέσω του μετασχηματισμού Laplace. Ας τον γνωρίσουμε. Να που χρειάζεται κι αυτός στη μελέτη της λογιστικής εξίσωσης! Κατ' αρχάς, ας δούμε περί ου ο λόγος:

## μετασχηματισμός Laplace

**Ορισμός 6.8.** Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης  $f$  ορίζεται ως:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(w) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-wt} dt,$$

όπου  $w \in \mathbb{R}$ .

**Θεώρημα 6.9.** Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης  $f$  είναι ο (βλ. [37] σελ. 240):

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(w)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(w)e^{wt} dw,$$

όπου  $t \geq 0$  και το  $a$  είναι τέτοιο, ώστε η καμπύλη Bromwich ( $a - i\infty \rightarrow a + i\infty$ ) να είναι δεξιά από κάθε ανωμαλία (πόλους, ουσιώδεις ανωμαλίες, σημεία αλληλαγής κλάδου, τομές) της συνάρτησης  $f(w)$ .

Όπως και στην περίπτωση του μετασχηματισμού Fourier, έτσι κι εδώ, πρώτα θα παρουσιάσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της λογιστικής συνάρτησης, ώστε να τον χρησιμοποιήσουμε για να εξάγουμε τα συμπεράσματα που χρειαζόμαστε, κι ύστερα θα τον αποδείξουμε, στις ενότητες που ακολουθούν.

Πριν τον παρουσιάσουμε, ας γνωριστούμε με την υπεργεωμετρική συνάρτηση. Αυτή θα μας χρειαστεί τόσο για την έκφραση του συγκεκριμένου μετασχηματισμού, όσο και στην αποδεικτική διαδικασία. Θα δώσουμε μια λακωνική περιγραφή βασιζόμενοι στο [36] (σελ. 238-239).

## υπεργεωμετρική συνάρτηση

**Ορισμός 6.9.** Δεδομένων παραμέτρων  $a, b, c \in \mathbb{C}$  με  $c \notin -1\mathbb{N}$  κι εφόσον  $|z| < 1$ , ορίζουμε ως υπεργεωμετρική συνάρτηση την τιμή της σειράς:

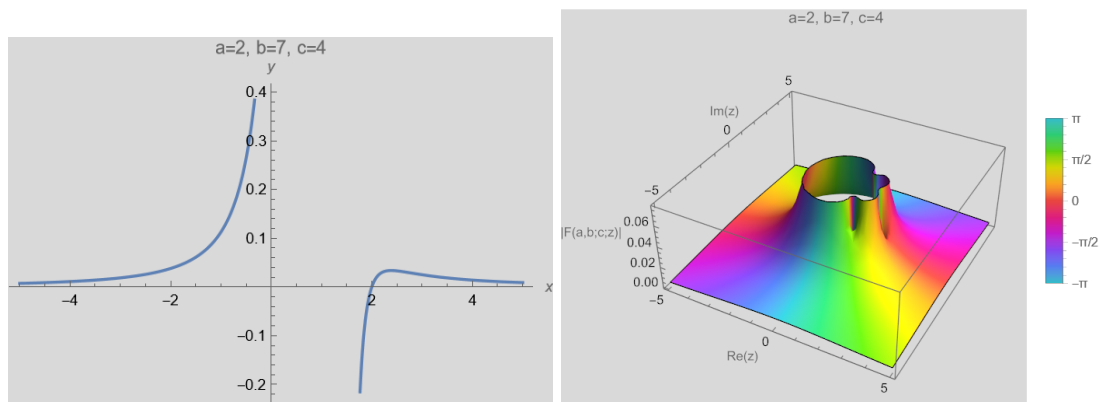
$$F\left(\begin{matrix} a & , & b \\ c \end{matrix}; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n,$$

όπου  $(x)_y$  το σύμβολο Pochhammer (βλ. [36] σελ. 162.), ήτοι:

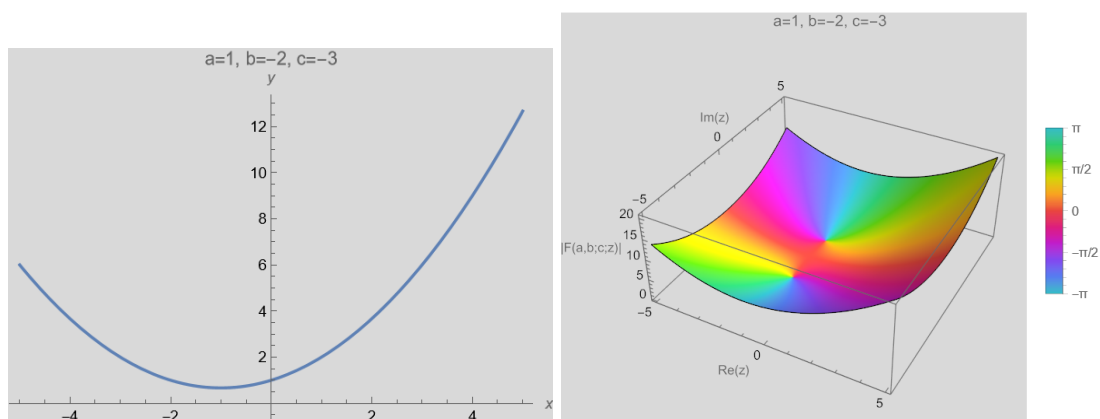
$$(x)_y = \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

Στην περίπτωση που  $z \in \mathbb{C}$  χρησιμοποιούμε την αναλυτική συνέχιση της παραπάνω σειράς.

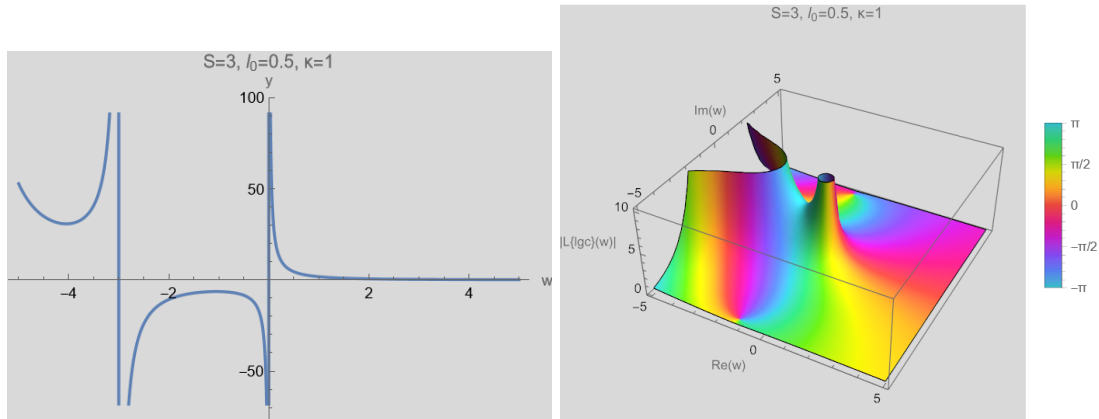
Ακολουθεί ο περί ου ο λόγος μετασχηματισμός:



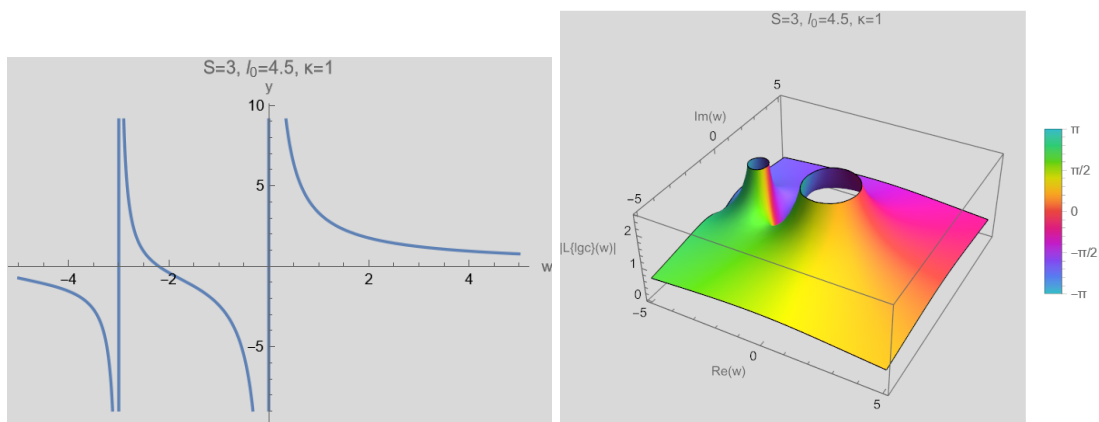
Σχήμα 6.20: Γραφική παράσταση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F\left(2, 7, 4; z\right)$ , ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 6.21: Γραφική παράσταση της υπεργεωμετρικής συνάρτησης  $F\left(1, -2, -3; z\right)$ , ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 6.22: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Laplace της λογιστικής συνάρτησης (πραγματική και μιγαδική εκδοχή) για την περίπτωση που  $l_0 < S$ .



Σχήμα 6.23: Γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Laplace της λογιστικής συνάρτησης (πραγματική και μιγαδική εκδοχή) για την περίπτωση που  $l_0 > S$ .

### μετασχηματισμός Laplace λογιστικής συνάρτησης

**Θεώρημα 6.10.** Ο μετασχηματισμός Laplace λογιστικής συνάρτησης (βλ. σχ. 6.22 και 6.23) εκφράζεται σε κλειστή μορφή ως ακολούθως:

$$\mathcal{L}\{lgc_{S,l_0,\kappa}(t)\}(w) = \frac{S}{w} F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1 + w/\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right).$$

Επιστρέφουμε στην επίλυση της (6.8). Έχουμε:



$$\mathcal{L}\{p\} = p_0 \mathcal{L}\{s\} + \mathcal{L}\{s\} (\mathcal{L}\{r\} + b \mathcal{L}\{p\}) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{s\} = \frac{\mathcal{L}\{p\}}{p_0 + \mathcal{L}\{r\} + b \mathcal{L}\{p\}}.$$

Στην περίπτωση που ο πληθυσμός εξελίσσεται σύμφωνα με το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο, καλούμαστε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παράστασης:

$$\frac{\frac{S}{w} F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1 + w/\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right)}{l_0 + \mathcal{L}\{r\} + b \frac{S}{w} F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1 + w/\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right)}.$$

Ακόμα και στην περίπτωση που έχουμε απουσία μεταναστευτικών ροών (άρα ο όρος  $\mathcal{L}\{r\}$  απουσιάζει), προκύπτει παράσταση αρκετά δύσκολο να αντιστραφεί. Τουλάχιστον βάσει των μαθηματικών δεξιοτήτων του γράφοντος. Τα πράγματα όμως είναι ακόμα χειρότερα! Επιχειρώντας ο γράφων μια αριθμητική επίλυση του παραπάνω προβλήματος χρησιμοποίησε τη συνάρτηση:

`NInverseLaplaceTransform`

στο  Wolfram Language Notebook  in VS Code, ώστε να βρει ορισμένες έστω τιμές του  $s$ , χρησιμοποιώντας το παραπάνω συμπέρασμα. Τα αποτελέσματα ήταν κάποιες εντελώς παράδοξες για τη φυσική σημασία του  $s$  λύσεις. Επί παραδείγματι, για  $S = 400$ ,  $\kappa = 0.01$ ,  $l_0 = 3$  και  $b = 2$ , προκύπτει  $s(1) \approx 1.22299$  και  $s(3) \approx -1268.76$ . Αμφότερα είναι απαράδεκτα αποτελέσματα, καθόσον ως ποσοστό η  $s$  οφείλει να βρίσκεται εντός του διαστήματος  $[0, 1]$ .

Φυσικά, αν επιτρέψουμε στον εαυτό μας μικρές μαθηματικές ακρότητες, μπορούμε να δώσουμε ερμηνεία σε ποσοστά επιβίωσης, όπως τα 122.299% ή -126 876% που εξάγαμε. Το μεν ποσοστό επιβίωσης 122.299% μπορούμε να πούμε ότι σημαίνει ότι θα επιβιώσουν όλοι και θα έχουμε και αύξηση 22.299%. Το δε ποσοστό επιβίωσης -126 876% μπορεί να λογιστεί ως ποσοστό θνησιμότητας 126 876%. Όμως, πώς γίνεται να πεθαίνει το 126 876% ενός πληθυσμού; Το μόνο που μπορεί να φανταστεί ο γράφων είναι ότι πεθαίνει το 100% του πληθυσμού και υπάρχει ένα «χρέος θανάτου» 126 776% για την επόμενη γενιά (η οποία θα προκύψει ως δια μαγείας εκ του μη όντος...).

Προφανώς, δεν πρόκειται για ερμηνείες που αξίζουν τον κόπο να μελετηθούν. Ίσως αυτό να σημαίνει ότι πρόβλημα επιβίωσης που θελήσαμε να μελετήσουμε δεν έχει πρακτική λύση στην περίπτωση της λογιστικής συνάρτησης. Παρόλα αυτά θα προχωρήσουμε στην εύρεση του μετασχηματισμού Laplace, όπως υποσχθήκαμε, διότι ενδέχεται το πρόβλημα να έχει ενδιαφέρουσες ερμηνευτικά λύσεις στις περιπτώσεις που υπάρχει (θετική ή αρνητική) μετανάστευση.

Για να τα καταφέρουμε, θα αξιοποιήσουμε το θεώρημα 6.5 της παρούσης εργασίας. Καθόσον:

$$\lg c(t) = \begin{cases} S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n e^{-\kappa S n t}, & \text{αν } t > t_c \\ -S \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right)^n e^{\kappa S n t}, & \text{αν } t < t_c \end{cases},$$

όπου  $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{|S-l_0|}{l_0}\right)$ , μάς ενδιαφέρει πρωτίστως αν  $t_c > 0$  ή αν  $t_c \leq 0$ .

Πότε συμβαίνει το ένα ή το άλλο; Καταρχάς όταν  $l_0 > S$ , τότε θα είναι, φυσικά, και  $l_0 > S/2$ , άρα και  $t_c < 0$ . Στην περίπτωση που  $l_0 < S$ , λόγω της μονοτονίας της  $\lg c$  θα έχουμε:

$$t_c < 0 \Leftrightarrow \lg c^{-1}\left(\frac{S}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{S}{2} < \lg c(0) \Leftrightarrow \frac{S}{2} < l_0.$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι το να συμβαίνει  $t_c > 0$  ή  $t_c \leq 0$  είναι ισοδύναμο με το να δούμε αν συμβαίνει  $l_0 < S/2$  ή αν  $l_0 \geq S/2$  (βλ. εξίσωση (6.2) της παρούσης εργασίας). Θα μελετήσουμε πρώτα τη δεύτερη περίπτωση, μιας και είναι η ευκολότερη.

### 6.6.α' Αρχική τιμή μεγαλύτερη/ίση της ημισείας φέρουσας ικανότητας

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι:

$$\lg c(t) = S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n e^{-\kappa S n t},$$

για κάθε  $t > 0$ , επομένως για  $w > 0$ <sup>li</sup> (βλ. [37] σελ. 237):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\lg c(t)\}(w) &= S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n \mathcal{L}\{e^{-\kappa S n t}\}(w) \\ &= S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n \mathcal{L}\{e^{-\kappa S n t}\}(w) \\ &= S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n \frac{1}{w + \kappa S n}.\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια παύση, για να υπολογίσουμε τη σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{an + b}.$$

Καταρχάς έχουμε:

$$\frac{(1)_n (b/a)_n}{(1 + b/a)_n n!} = \frac{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(n+b/a)}{\Gamma(b/a)}}{\frac{\Gamma(1+b/a+n)}{\Gamma(1+b/a)} n!} = \frac{\Gamma(1+n) \Gamma(n+b/a) \Gamma(1+b/a)}{\Gamma(1) \Gamma(b/a) \Gamma(1+b/a+n) n!}.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$  και  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  (βλ. [36] σελ. 3-4), επομένως:

$$\frac{(1)_n (b/a)_n}{(1 + b/a)_n n!} = \frac{n! \Gamma(n+b/a) \frac{b}{a} \Gamma(b/a)}{1 \cdot \Gamma(b/a) (n+b/a) \Gamma(b/a+n) n!} = \frac{\frac{b}{a}}{n + \frac{b}{a}} = \frac{b}{an + b}.$$

Αυτό μάς οδηγεί στο συμπέρασμα (βλ. ορισμό στο [36] σελ. 238 και συμβολισμό στο [49] § 15.1) ότι για  $-1 \leq x < 1$ <sup>li</sup>:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{an + b} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n (b/a)_n}{(1 + b/a)_n n!} x^n = \frac{1}{b} F\left(1, \frac{b/a}{1 + b/a}; x\right).$$

Εν κατακλείδι:

$$\mathcal{L}\{\lg c(t)\}(w) = S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n \frac{1}{\kappa S n + w} = \frac{S}{w} F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1 + w/\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right),$$

η οποία ισότητα ισχύει ακριβώς όταν:

$$-1 < \frac{l_0 - S}{l_0} < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{S}{l_0} < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{S}{l_0} < 2,$$

ήτοι εξ υποθέσεως αυτής της ενότητας.

<sup>li</sup>Ωστε να είναι  $w > -\kappa S n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>li</sup>Στο [36] (σελ. 163) αναφέρεται πως για τη σύγκλιση της σειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b/a)_n}{(c)_n n!} z^n$$

καλυπτόμεθα από τη συνθήκη  $|z| \leq 1$ , εφόσον  $a, b \notin -\mathbb{N}$ . Ο γράφων διατηρεί κάποιες επιφυλάξεις για την περίπτωση που  $z = 1$ , διότι τότε για  $a = b = 1$  και  $c = 2$  η παραπάνω σειρά είναι η  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ , η οποία απέχει παρασάγγας από το να συγκλίνει. Στην περίπτωση, βέβαια, που  $z = -1$  έχουμε εναλλάσσουσα σειρά φθινόντων όρων που τείνουν στο 0, άρα οφείλει να συγκλίνει κι αυτή.

**6.6.β' Αρχική τιμή μικρότερη της ημισείας φέρουσας ικανότητας**

Πάμε τώρα να δούμε τι γίνεται, αν  $l_0 < S/2$ . Τοιαύτη περιπτώσει είχαμε πει πως θα συμβαίνει  $t_c = \frac{1}{\kappa S} \ln\left(\frac{S-l_0}{l_0}\right) > 0$ <sup>†1</sup>, άρα από τον τύπο:

$$\lg c(t) = \begin{cases} S \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{l_0 - S}{l_0}\right)^n e^{-\kappa S n t}, & \text{αν } t > t_c \\ -S \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l_0}{l_0 - S}\right)^n e^{\kappa S n t}, & \text{αν } t < t_c \end{cases},$$

παύει να μονοπωλεί το ενδιαφέρον μας μόνο η μία πτυχή του. Συνεπώς, θα κάνουμε μια μικρή αλλαγή στην έναρξη του συλλογισμού μας:

$$\mathcal{L}\{\lg c_{S,l_0,\kappa}(t)\}(w) = \int_0^{+\infty} \lg c(t) e^{-wt} dt = \int_0^{t_c} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt + \int_{t_c}^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt.$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής  $\tau = t - t_c$  έχουμε ότι:

$$\int_{t_c}^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt = \int_0^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(\tau + t_c) e^{-w(\tau+t_c)} d\tau = \int_0^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t + t_c) e^{-w(t+t_c)} dt.$$

Όμως, αφού  $e^{t_c} = \left(\frac{S-l_0}{l_0}\right)^{1/\kappa S}$ , θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t + t_c) &= \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0) e^{-\kappa S(t+t_c)}} \\ &= \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0) e^{-\kappa S} e^{-\kappa S t_c}} \\ &= \frac{l_0 S}{l_0 + (S - l_0) e^{-\kappa S} \frac{l_0}{S-l_0}} \\ &= \frac{S}{1 + e^{-\kappa S}} \\ &= \frac{\frac{S}{2} \cdot S}{\frac{S}{2} + \left(S - \frac{S}{2}\right) e^{-\kappa S}} \\ &= \lg c_{S,S/2,\kappa}(t). \end{aligned}$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$\int_{t_c}^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt = e^{-t_c w} \int_0^{+\infty} \lg c_{S,S/2,\kappa}(t) e^{-wt} dt = e^{-t_c w} \mathcal{L}\{\lg c_{S,S/2,\kappa}(t)\}(w),$$

όπου σύμφωνα με την προηγούμενη ενότητα θα έχουμε:

$$\int_{t_c}^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt = \frac{S e^{-t_c w}}{w} F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1 + w/\kappa S}; \frac{S/2 - S}{S/2}\right) = \frac{S e^{-t_c w}}{w} F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1 + w/\kappa S}; -1\right).$$

Ας ασχοληθούμε τώρα με το έτερον ήμισυ του μετασχηματισμού Laplace που ψάχνουμε:

$$\int_0^{t_c} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt.$$

<sup>†1</sup>προφανώς, αφού  $l_0 < S/2$ , θα είναι και  $S > l_0$ .

Αφού χρειαζόμαστε μόνο τα  $t \in (0, t_c)$  μπορούμε να υποθέσουμε ότι εκεί:

$$\lg c_{S, l_0, \kappa}(t) = -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n e^{\kappa S n t}.$$

Επομένως θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} \lg c_{S, l_0, \kappa}(t) e^{-wt} dt &= -S \int_0^{t_c} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n e^{\kappa S n t} e^{-wt} dt \\ &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \int_0^{t_c} e^{(\kappa S n - w)t} dt \\ &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \frac{e^{(\kappa S n - w)t_c} - 1}{\kappa S n - w} \\ &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \left( (e^{\kappa S t_c})^n \frac{e^{-wt_c}}{\kappa S n - w} - \frac{1}{\kappa S n - w} \right) \\ &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \left( \left( \frac{S - l_0}{l_0} \right)^n \frac{e^{-wt_c}}{\kappa S n - w} - \frac{1}{\kappa S n - w} \right) \\ &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{e^{-wt_c}}{\kappa S n - w} - \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \frac{1}{\kappa S n - w} \right) \end{aligned}$$

Επίσης, είναι ευκόλως εννοούμενο ότι, αν  $l_0 < S/2$ , θα ισχύει:

$$\left| \frac{l_0}{l_0 - S} \right| < 1.$$

Άρα (βλ. σελ. 120 της παρούσης εργασίας):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\kappa S n - w} = -\frac{1}{w} F \left( 1, \frac{-w/\kappa S}{1 - w/\kappa S}; -1 \right)$$

και:

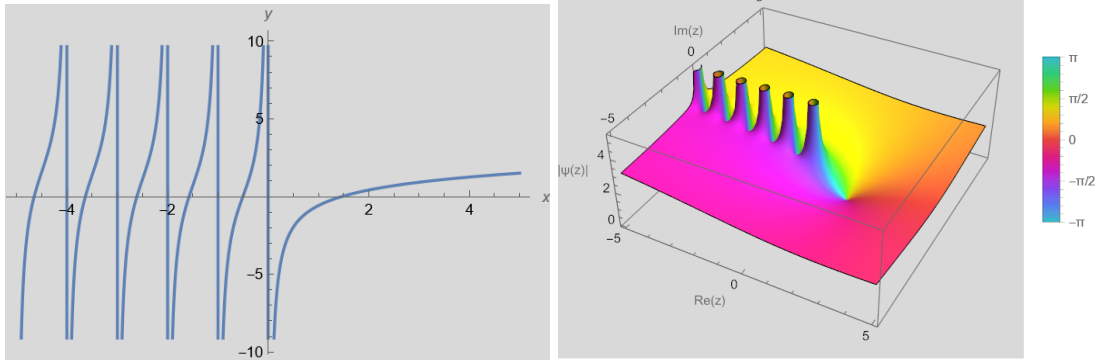
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \frac{1}{\kappa S n - w} = -\frac{1}{w} F \left( 1, \frac{-w/\kappa S}{1 - w/\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S} \right).$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_c} \lg c_{S, l_0, \kappa}(t) e^{-wt} dt &= -S \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{e^{-wt_c}}{\kappa S n - w} - \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \frac{1}{\kappa S n - w} \right) \\ &= -S \left[ \frac{e^{-wt_c} - 1}{w} + e^{-wt_c} \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^n \frac{1}{\kappa S n - w} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \left( \frac{l_0}{l_0 - S} \right)^n \frac{1}{\kappa S n - w} \right) \right] \\ &= -S \left[ \frac{e^{-wt_c} - 1}{w} - e^{-wt_c} \frac{1}{w} F \left( 1, \frac{-w/\kappa S}{1 - w/\kappa S}; -1 \right) + \frac{1}{w} F \left( 1, \frac{-w/\kappa S}{1 - w/\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S} \right) \right] \\ &= \frac{S(1 - e^{-wt_c})}{w} + \frac{S e^{-wt_c}}{w} F \left( 1, \frac{-w/\kappa S}{1 - w/\kappa S}; -1 \right) - \frac{S}{w} F \left( 1, \frac{-w/\kappa S}{1 - w/\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S} \right) \end{aligned}$$

Άρα:





Σχήμα 6.24: Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $\Psi$ , ορισμένη στην πραγματική ευθεία και στο μιγαδικό επίπεδο.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\lg c_{S,l_0,\kappa}(t)\}(w) &= \int_0^{t_c} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt + \int_{t_c}^{+\infty} \lg c_{S,l_0,\kappa}(t) e^{-wt} dt \\ &= \frac{S(1 - e^{-wt_c})}{w} + \frac{Se^{-wt_c}}{w} F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; -1\right) - \frac{S}{w} F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S}\right) \\ &\quad + \frac{Se^{-t_c w}}{w} F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; -1\right)\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θα χρειαστούμε μια χείρα βοήθειας από τη συνάρτηση  $\Psi$ . Παραθέτουμε στοιχεία από το [36] (σελ. 5).

**συνάρτηση  $\Psi$**

---

**Ορισμός 6.10.** Ορίζουμε ως **συνάρτηση  $\Psi$**  ή **συνάρτηση δίγαμμα** (βλ. σχ. 6.24) τη λογαριθμική παράγωγο της συναρτήσεως Γάμμα, ήτοι:

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

όπου  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ .

---

Η απλοποίηση του άνωθεν τύπου είναι κάτι παραπάνω από επιθυμητή. Προς τούτο, ανατρέχουμε στο [2] (σελ. 557) όπου αναφέρεται η σχέση:

$$F\left(1, a; -1\right) = \frac{a}{2} (\psi(1/2 + a/2) - \psi(a/2)).$$

Χάρης σε αυτή διαπιστώνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1+w/\kappa S}; -1\right) + F\left(1, \frac{-w/\kappa S}{1-w/\kappa S}; -1\right) &= \frac{w/\kappa S}{2} \left( \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{w/\kappa S}{2}\right) - \psi\left(\frac{w/\kappa S}{2}\right) \right) \\
&\quad - \frac{w/\kappa S}{2} \left( \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{w/\kappa S}{2}\right) - \psi\left(-\frac{w/\kappa S}{2}\right) \right) \\
&= \frac{w/\kappa S}{2} \left( \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{w/\kappa S}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{w/\kappa S}{2}\right) + \psi\left(-\frac{w/\kappa S}{2}\right) - \psi\left(\frac{w/\kappa S}{2}\right) \right)
\end{aligned}$$

Αφού  $\frac{1}{2} + \frac{w/\kappa S}{2} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{w/\kappa S}{2}\right)$ , από την σχέση (βλ. [36] σελ. 5):

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z)$$

προκύπτει:

$$\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{w/\kappa S}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - \frac{w/\kappa S}{2}\right) = \pi \cot\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{w/\kappa S}{2}\right)\right) = \pi \tan\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right)$$

Επίσης, από το [65] (σελ. 25) ανακαλύπτουμε την ταυτότητα:

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z) + \frac{1}{z}.$$

Άρα έχουμε:

$$\psi\left(-\frac{w/\kappa S}{2}\right) - \psi\left(\frac{w/\kappa S}{2}\right) = \pi \cot\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right) + \frac{2}{w/\kappa S}.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
F\left(1, \frac{w/\kappa S}{1+w/\kappa S}; -1\right) + F\left(1, \frac{-w/\kappa S}{1-w/\kappa S}; -1\right) &= \frac{w/\kappa S}{2} \left( \pi \tan\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right) + \pi \cot\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right) + \frac{2}{w/\kappa S} \right) \\
&= \frac{w/\kappa S}{2} \left( \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right)} + \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right)} + \frac{2}{w/\kappa S} \right) \\
&= \frac{w/\kappa S}{2} \left( \pi \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi w/\kappa S}{2}\right)} + \frac{2}{w/\kappa S} \right) \\
&= \frac{w/\kappa S}{2} \left( \frac{2\pi}{\sin(\pi w/\kappa S)} + \frac{2}{w/\kappa S} \right) \\
&= \frac{\pi w/\kappa S}{\sin(\pi w/\kappa S)} + 1.
\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό θα χρειαστούμε το [2] (σελ. 559). Εκεί μαθαίνουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned}
F\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; z\right) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(\begin{matrix} a & 1-c+a \\ 1-b+a \end{matrix}; \frac{1}{z}\right) \\
&\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(\begin{matrix} b & 1-c+b \\ 1-a+b \end{matrix}; \frac{1}{z}\right),
\end{aligned} \tag{6.9}$$

όπου  $|\arg(-z)| < \pi$ . Θα τη χρησιμοποιήσουμε, για να επεξεργαστούμε αυτή την ποσότητα:

$$F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S}\right).$$

Εδώ έχουμε:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -\frac{w}{\kappa S} \\ c &= 1 - \frac{w}{\kappa S} \\ z &= \frac{l_0}{l_0 - S} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} b - a &= -\frac{w}{\kappa S} - 1 \\ c - a &= -\frac{w}{\kappa S} \\ 1 - c + a &= 1 + \frac{w}{\kappa S} \\ 1 - b + a &= 2 + \frac{w}{\kappa S} \\ a - b &= 1 + \frac{w}{\kappa S} \\ c - b &= 1 \\ 1 - c + b &= 0 \\ 1 - a + b &= -\frac{w}{\kappa S} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι για τα  $a$ ,  $b$  και  $c$  που διαλέξαμε:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; z\right) &= F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S}\right) \\ F\left(\begin{matrix} b & 1 - c + b \\ 1 - a + b \end{matrix}; \frac{1}{z}\right) &= 1 \\ F\left(\begin{matrix} a & 1 - c + a \\ 1 - b + a \end{matrix}; \frac{1}{z}\right) &= F\left(1, 1 + \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) \end{aligned}$$

καθόσον (βλ. [36] σελ. 258 και [2] σελ. 561):

$$F\left(\begin{matrix} a & 0 \\ c \end{matrix}; z\right) = F\left(0, \frac{b}{c}; z\right) = 1. \quad (6.12)$$

Η τελευταία σχέση που εξήγαμε μάς προκαλεί μια αλγερινή αίσθηση, οπότε θα ανατρέξουμε για μια ακόμα φορά στο [36] (σελ. 243), όπου θα βρούμε την ισότητα:

$$F\left(\begin{matrix} a & b + 1 \\ c + 1 \end{matrix}; z\right) = \frac{c}{(a - b - 1) \cdot z} \left[ F\left(\begin{matrix} a - 1 & b + 1 \\ c \end{matrix}; z\right) - F\left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; z\right) \right].$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ισότητα (6.12) έχουμε:

$$\begin{aligned}
F\left(1, 1 + \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) &= \frac{1 + \frac{w}{\kappa S}}{\left(1 - \frac{w}{\kappa S} - 1\right) \frac{l_0 - S}{l_0}} \left[ F\left(1 - 1, \frac{w}{\kappa S} + 1; z\right) - F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) \right] \\
&= -\frac{1 + \frac{w}{\kappa S}}{\frac{w(l_0 - S)}{\kappa S l_0}} \left[ 1 - F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) \right]
\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε με κάποιους υπολογισμούς που αφορούν την (6.9). Σύμφωνα με τις τιμές που εκχωρήσαμε στα  $a$ ,  $b$  και  $c$  της εν λόγω ισότητας (βλ. (6.10) και (6.11)) έχουμε (βλ. επίσης [36] σελ. 3-4):

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{w}{\kappa S}\right)\Gamma\left(-1 - \frac{w}{\kappa S}\right)}{\Gamma\left(-\frac{w}{\kappa S}\right)\Gamma\left(-\frac{w}{\kappa S}\right)} = \frac{-\frac{w}{\kappa S}\Gamma\left(-\frac{w}{\kappa S}\right)\Gamma\left(-1 - \frac{w}{\kappa S}\right)}{\left(-\frac{w}{\kappa S} - 1\right)\Gamma\left(-\frac{w}{\kappa S}\right)\Gamma\left(-\frac{w}{\kappa S} - 1\right)} = \frac{\frac{w}{\kappa S}}{\frac{w}{\kappa S} + 1} \\
\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{w}{\kappa S}\right)\Gamma\left(1 + \frac{w}{\kappa S}\right)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = \frac{w}{\kappa S}\Gamma\left(1 - \frac{w}{\kappa S}\right)\Gamma\left(\frac{w}{\kappa S}\right) = \frac{\pi w}{\kappa S \sin(\pi w/\kappa S)}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S}\right) &= -\frac{\frac{w}{\kappa S}}{\frac{w}{\kappa S} + 1} \cdot \left(-\frac{l_0}{l_0 - S}\right)^{-1} \frac{1 + \frac{w}{\kappa S}}{\frac{w(l_0 - S)}{\kappa S l_0}} \left[ 1 - F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) \right] \\
&\quad + \frac{\pi w}{\kappa S \sin(\pi w/\kappa S)} \left(-\frac{l_0}{l_0 - S}\right)^{w/\kappa S} \cdot 1 \\
&= 1 - F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) + \frac{\pi w}{\kappa S \sin(\pi w/\kappa S)} \left(-\frac{l_0}{l_0 - S}\right)^{w/\kappa S}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\lg c_{S, l_0, \kappa}(t)\}(w) &= \frac{S}{w} - \frac{S e^{-wt_c}}{w} + \frac{S e^{-wt_c}}{w} \left[ F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; -1\right) + F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; -1\right) \right] \\
&\quad - \frac{S}{w} F\left(1, -\frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0}{l_0 - S}\right) \\
&= \frac{S}{w} - \frac{S e^{-wt_c}}{w} + \frac{S e^{-wt_c}}{w} \left( \frac{\pi w/\kappa S}{\sin(\pi w/\kappa S)} + 1 \right) \\
&\quad - \frac{S}{w} \left[ 1 - F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) + \frac{\pi w}{\kappa S \sin(\pi w/\kappa S)} \left(\frac{l_0}{S - l_0}\right)^{w/\kappa S} \right] \\
&= \frac{\pi e^{-wt_c}}{\kappa \sin(\pi w/\kappa S)} + \frac{S}{w} F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right) - \frac{\pi}{\kappa \sin(\pi w/\kappa S)} \left(\frac{l_0}{S - l_0}\right)^{w/\kappa S}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι  $e^{t_c} = \left(\frac{S - l_0}{l_0}\right)^{1/\kappa S}$ , έχουμε τελικά:

$$\mathcal{L}\{\lg c_{S, l_0, \kappa}(t)\}(w) = \frac{S}{w} F\left(1, \frac{w}{\kappa S}; \frac{l_0 - S}{l_0}\right).$$

## Κεφάλαιο 7

# Περαιτέρω χρήσεις

### 7.1 Εξίσωση Fisher

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό κατανομημένο σε μια ακτογραμμή ( $\mathbb{R}$ ), σε ένα λιβάδι ( $\mathbb{R}^2$ ) ή στον αέρα ( $\mathbb{R}^3$ ), η πυκνότητα του οποίου στη θέση  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) τη χρονική στιγμή  $t$  δίνεται από τη συνάρτηση  $u(\mathbf{x}, t)$ . Θεωρούμε επίσης ότι στη θέση  $\mathbf{x}$  τη χρονική στιγμή  $t$  υπάρχει ροή πληθυσμού ίση με  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο ρυθμός γεννήσεων ακολουθεί το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο, δηλαδή είναι ίσος με  $\kappa(S - u)u$ .

Ας εξετάσουμε τώρα μια περιοχή  $A$  της ακτογραμμής/λιβαδιού/αέρα. Εκεί η πληθυσμιακή πυκνότητα τη χρονική στιγμή  $t$  θα είναι:

$$\int_V u(\mathbf{x}, t) dV,$$

όπου  $dV$  το στοιχείο του χώρου  $A$ . Επομένως ο ρυθμός μεταβολής των ατόμων της περιοχής αυτής θα είναι:

$$\frac{d}{dt} \int_A u(\mathbf{x}, t) dV.$$

Όμως ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού της περιοχής  $A$  είναι:

- ο ρυθμός των ατόμων που ρέουν προς το εσωτερικό του  $A$  (βλ. [68] σελ. 1034):

$$- \int_{\partial A} \phi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dS,$$

όπου  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $\partial A$  στη θέση  $\mathbf{x} \in \partial A$  και  $dS$  το στοιχείο της επιφάνειας  $\partial A$ ,

- συν τον ρυθμό παραγωγής νέων ατόμων σε όλη την περιοχή  $A$ :

$$\int_A \kappa(S - u(\mathbf{x}, t)) u(\mathbf{x}, t) dV.$$

Όμως από το θεώρημα της απόκλισης (βλ. [68] σελ. 1102, για θ. Green βλ. σελ. 1058) έχουμε ότι:

$$- \int_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dS = - \int_V \nabla \cdot \phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Έτσι, δεδομένου ότι:

$$\frac{d}{dt} \int_A u(\mathbf{x}, t) dV = \int_A u_t(\mathbf{x}, t) dV,$$

διαπιστώνουμε ότι:

$$\int_A (u_t + \nabla \cdot \phi - \kappa (S - u) u) dx = 0.$$

Καθόσον τα παραπάνω θέλουμε να ισχύουν για κάθε περιοχή  $A$ , καταλήγουμε στη μερική διαφορική εξίσωση:

$$u_t + \nabla \cdot \phi = \kappa (S - u) u.$$

Μέχρι τώρα έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις, την  $u$  και τη  $\phi$ . Ας δούμε μήπως αυτές σχετίζονται, ώστε να έχουμε να ψάξουμε μόνο μία. Είναι λογικό ο πληθυσμός να εκτονώνεται προς την κατεύθυνση που είναι πιο άνετο να εκτονωθεί, προς την κατεύθυνση που του αφήνει τα περισσότερα περιθώρια εξάπλωσης. Με άλλα λόγια, σε κάθε σημείο  $x \in \mathbb{R}^n$  ο πληθυσμός τείνει να μετατοπιστεί προς το γειτονικό σημείο  $(x + dx)$  με τη λιγότερη δυνατή πυκνότητα. Η εν λόγω κατεύθυνση της μέγιστης μείωσης πυκνότητας δεν είναι άλλη από αυτήν του  $-\nabla u$  (βλ. [68] σελ. 897 ή ευκρινέστερα [77] σελ. 86). Αφού, λοιπόν, ο πληθυσμός ρέει προς την κατεύθυνση του  $-\nabla u$ , σημαίνει ότι  $\phi \uparrow -\nabla u$ , ήτοι ότι υπάρχει  $D > 0$  τέτοιο, ώστε:

$$\phi = -D\nabla u,$$

το οποίο είναι ο νόμος του Fick για τις  $n$  διαστάσεις (βλ. [37] σελ. 210, από το οποίο και «δανειστήκαμε» την παραπάνω επιχειρηματολογία).

Καταλήγουμε, λοιπόν, στη μερική διαφορική εξίσωση:

$$u_t - D\nabla^2 \phi = \kappa (S - u) u,$$

όπου  $\nabla^2$  η Λαπλασιανή:

$$\nabla^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

η οποία Μ.Δ.Ε. αποκαλείται πολυδιάστατη εξίσωση Fisher (βλ. [22] σελ. 1043).

Το μονοδιάστατο ανάλογο της παραπάνω εξίσωσης (στην περίπτωση που ο πληθυσμός κατανέμεται πάνω σε μια ακτογραμμή) είναι:

$$u_t - Du_{xx} = \kappa (S - u) u \quad (7.1)$$

και με αυτό θ' ασχοληθούμε.

Αρχικά θα βρούμε μία μερική λύση της:

$$v_t - v_{xx} = (1 - v) v. \quad (7.2)$$

Ακολουθώντας, παρατηρούμε ότι για την  $w(x, t) = v\left(\frac{x}{\sqrt{D}}, t\right)$  ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= v_t \left( \frac{x}{\sqrt{D}}, t \right) - D \frac{1}{\sqrt{D}^2} v_{xx} \left( \frac{x}{\sqrt{D}}, t \right) \\ &= \left( 1 - v \left( \frac{x}{\sqrt{D}}, t \right) \right) v \left( \frac{x}{\sqrt{D}}, t \right) \\ &= w(1 - w), \end{aligned}$$

επομένως επαληθεύει την:

$$w_t - Dw_{xx} = (1 - w) w. \quad (7.3)$$

Εν συνεχεία ορίζουμε  $y(x, t) = w(x\sqrt{\kappa}, \kappa t)$ . Αυτή επαληθεύει την:

$$y_t - Dy_{xx} = \kappa(1 - y)y, \quad (7.4)$$

καθόσον:

$$\begin{aligned} y_t - Dy_{xx} &= \kappa w_t(x\sqrt{\kappa}, \kappa t) - D\sqrt{\kappa}^2 w(x\sqrt{\kappa}, \kappa t) \\ &= \kappa(1 - w(x\sqrt{\kappa}, \kappa t))w(x\sqrt{\kappa}, \kappa t) \\ &= \kappa(1 - y)y. \end{aligned}$$

Τέλος, από το γεγονός ότι:

$$\begin{aligned} u_t - Du_{xx} = \kappa(S - u)u &\Leftrightarrow u_t - Du_{xx} = \kappa S \left(1 - \frac{1}{S}u\right)u \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{S}u_t - D\frac{1}{S}u_{xx} = \kappa S \left(1 - \frac{1}{S}u\right)\frac{1}{S}u, \end{aligned}$$

αρκεί να λύσουμε τις (7.2), (7.3) και (7.4), ώστε να έχουμε μια λύση της (7.1). Επιστρέφουμε, λοιπόν, στην (7.2), όπου θα ψάξουμε μια λύση της μορφής  $f(x - ct)$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} v_t &= -cf'(x - ct) \\ v_x &= f'(x - ct) \\ v_{xx} &= f''(x - ct) \end{aligned}$$

Επομένως, θέλοντας να ισχύει η:

$$v_t - v_{xx} = (1 - v)v,$$

καταλήγουμε στη σχέση:

$$-cf'(x - ct) - f''(x - ct) = f(x - ct)(1 - f(x - ct)).$$

Θέτοντας  $z = x - ct$  έχουμε:

$$cf'(z) + f''(z) = f(z)(f(z) - 1).$$

Θέλοντας, κατά παρότρυνση του [37] (σελ. 210), η  $f$  να είναι με τη σειρά της στη μορφή<sup>[\*]</sup>  $f(z) = (1 + ae^{bz})^{-d}$ , έχουμε τη σχέση:

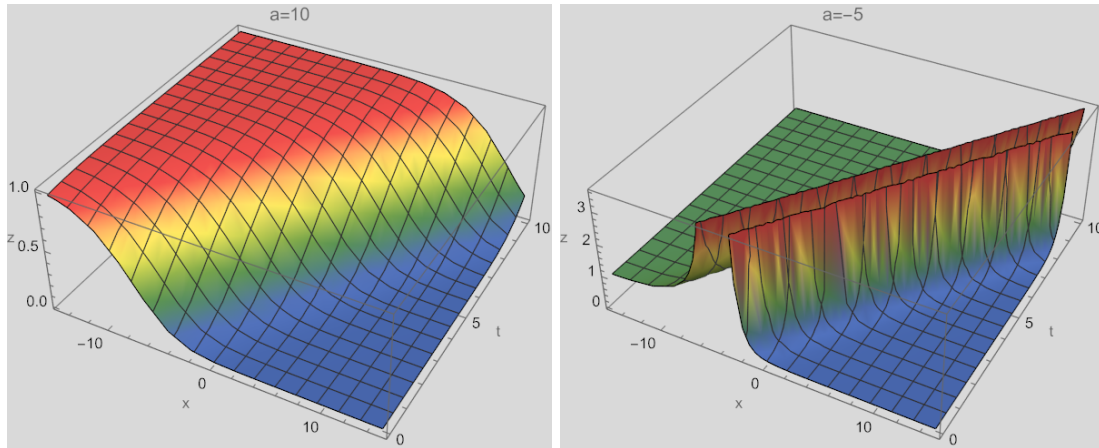
$$abde^{bz}(ae^{bz} + 1)^{-d-2}(b(ae^{bz} - 1) - c(ae^{bz} + 1)) = -(ae^{bz} + 1)^{-2d}((ae^{bz} + 1)^d - 1).$$

Ακολουθώντας, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $(1 + ae^{bz})^{2d+2}$  και θέτοντας  $m = ae^{bz}$  καταλήγουμε στην ισότητα:

$$\begin{aligned} b^2 d^2 m^2 (m + 1)^d - b^2 dm(m + 1)^d - bcdm^2(m + 1)^d - bcdm(m + 1)^d \\ + m^2(m + 1)^d + 2m(m + 1)^d + (m + 1)^d - m^2 - 2m - 1 = 0. \end{aligned}$$

Προκειμένου αυτή να ισχύει για κάθε  $m \in \mathbb{R}$ , θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

<sup>[\*]</sup> Προφανώς, δεν είναι απαραίτητο να ασχοληθούμε με αυτή την περίπτωση. Οι πιθανές περιπτώσεις, άλλωστε, είναι όσες και οι συναρτήσεις κατανομής πληθυσμού που μπορούν να εκχωρηθούν ως αρχικές τιμές στην  $v$ . Εδώ επιχειρήσαμε κάτι πιο κοντά στη λογιστική συνάρτηση.



Σχήμα 7.1: Δύο από τις λύσεις της Μ.Δ.Ε.  $v_t - v_{xx} = (1 - v)v$ , Η μία με  $a = 10$  κι άλλη με  $a = -5$ .

$$\begin{aligned} b^2 d^2 - bcd + 1 &= 0 \\ -b^2 d - bcd + 2 &= 0 \\ d &= 2 \end{aligned}$$

ώστε, αφενός να ταυτίζονται οι συντελεστές των  $m^2(m+1)^d$  και  $m(m+1)^d$  αντίστοιχα, αφετέρου να ισχύει  $(m+1)^d - m^2 - 2m - 1 = 0$ . Εν ολίγοις έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 4b^2 - 2bc + 1 = 0 \\ -2b^2 - 2bc + 2 = 0 \end{cases}$$

Έτσι προκύπτει ότι:

$$(b, c) = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{5}{\sqrt{6}} \right).$$

Καταλήγουμε στη μερική λύση της (7.2):

$$v(x, t) = \frac{1}{\left( 1 + a \exp \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \pm x - \frac{5}{\sqrt{6}} t \right) \right) \right)^2}.$$

Στο σχήμα 7.1 παριστάνονται δύο ενδεικτικές γραφικές παραστάσεις της  $v$ .

Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι η:

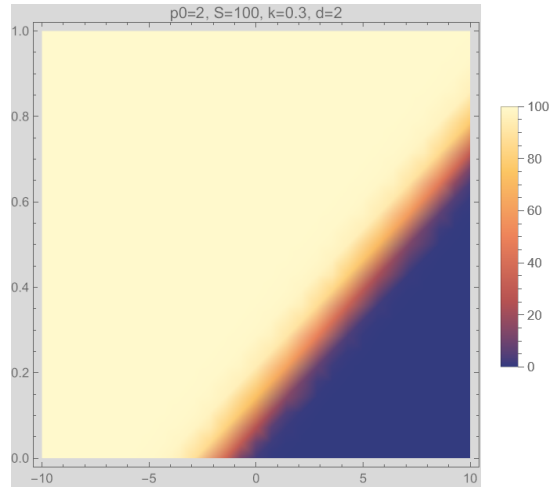
$$w(x, t) = v \left( \frac{x}{\sqrt{D}}, t \right) = \frac{1}{\left( 1 + a \exp \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \pm \frac{x}{\sqrt{D}} - \frac{5}{\sqrt{6}} t \right) \right) \right)^2}$$

επαληθεύει την (7.3), η οποία μας δίνει σαν λύση της (7.4) την:

$$y(x, t) = w(x\sqrt{\kappa}, \kappa t) = \frac{1}{\left( 1 + a \exp \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \left( \pm x\sqrt{\frac{\kappa}{D}} - \frac{5\kappa}{\sqrt{6}} t \right) \right) \right)^2},$$

Τέλος από την ισοδυναμία των  $u_t - Du_{xx} = \kappa(S - u)u$  και  $\frac{1}{S}u_t - D\frac{1}{S}u_{xx} = \kappa S \left(1 - \frac{1}{S}u\right) \frac{1}{S}u$ , λαμβάνοντας υπ' όψιν την προκύπτουσα λύση της (7.4) αν το  $\kappa$  αντικατασταθεί από  $\kappa S$  καταλήγουμε στη λύση της μονοδιάστατης (χωρικά) εξίσωσης Fisher (7.1):





Σχήμα 7.2: Κύμα εξάπλωσης πληθυσμού «προς ανατολάς» για τις θέσεις  $x \in [-10, 10]$  και το χρόνο  $t \in [0, 1]$ .

$$u(x, t) = Sy(x, t) = \frac{S}{\left(1 + a \exp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\pm x \sqrt{\frac{\kappa S}{D}} - \frac{5\kappa S}{\sqrt{6}}t\right)\right)\right)^2}.$$

Για τον αναγνώστη που κρίνει ανεπιθύμητη τη σταθερά  $a$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή 0 στη θέση 0 έχουμε πληθυσμό  $u(0, 0) = u_0$ . Η ισότητα αυτή μας οδηγεί στη σχέση:

$$a = \pm \sqrt{\frac{S}{u_0}} - 1.$$

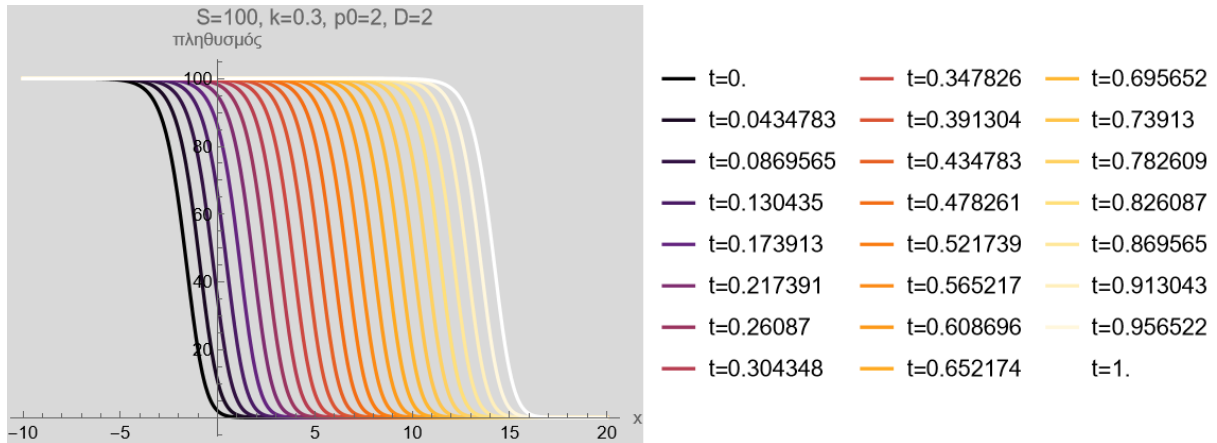
Προφανώς (βλ. επίσης [1] σελ. 838) αν  $a < 0$ , τότε συναντάμε πληθυσμιακές εκρήξεις σε πεπερασμένο χρόνο. Στην περίπτωση που αυτό δεν επιθυμούμε να συμβαίνει διαλέγουμε  $a = \sqrt{S/u_0} - 1$  και  $u_0 < S$ . Εν τοιαύτη περιπτώσει η λύση:

$$u(x, t) = \frac{S}{\left(1 + a \exp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left(x \sqrt{\frac{\kappa S}{D}} - \frac{5\kappa S}{\sqrt{6}}t\right)\right)\right)^2}$$

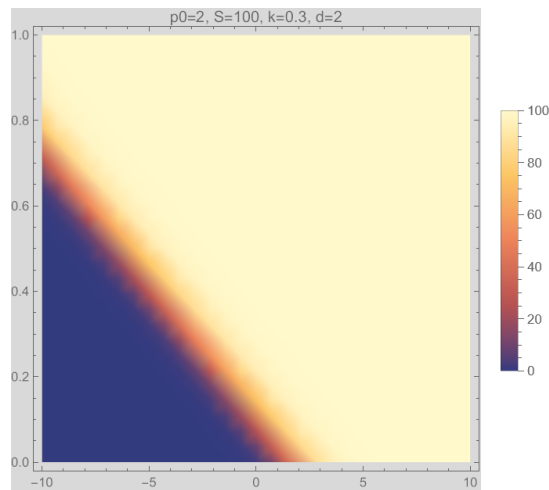
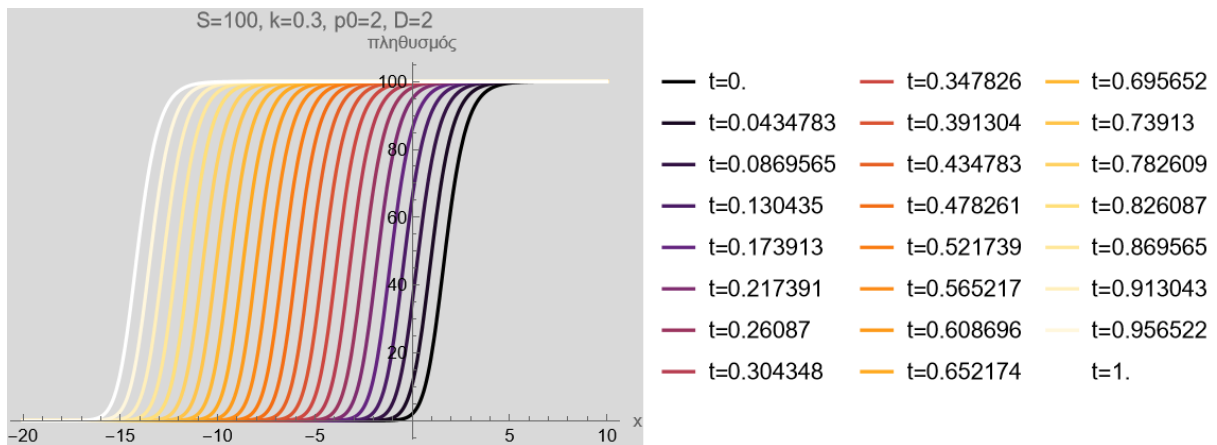
περιγράφει το κύμα της πληθυσμιακής εξάπλωσης (βλ. σχ. 7.2) προς τη θετική μεριά της ακτογραμμής (βλ. σχ. 7.3), ενώ η λύση:

$$u(x, t) = \frac{S}{\left(1 + a \exp\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-x \sqrt{\frac{\kappa S}{D}} - \frac{5\kappa S}{\sqrt{6}}t\right)\right)\right)^2}$$

περιγράφει το κύμα της πληθυσμιακής εξάπλωσης (βλ. σχ. 7.4) προς την αρνητική μεριά της ακτογραμμής (βλ. σχ. 7.5).



Σχήμα 7.3: Πληθυσμιακή εξάπλωση «προς ανατολάς».

Σχήμα 7.4: Κύμα εξάπλωσης πληθυσμού «προς δυσμάς» για τις θέσεις  $x \in [-10, 10]$  και το χρόνο  $t \in [0, 1]$ .

Σχήμα 7.5: Πληθυσμιακή εξάπλωση «προς δυσμάς».

## 7.2 Μοντέλο Lotka-Volterra για τον ανταγωνισμό

### 7.2.α' Περιγραφή μοντέλου

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο ανταγωνιστικά είδη με πληθυσμούς  $x_1$  και  $x_2$ . Τα είδη αυτά ανταγωνίζονται για μια ποσότητα πόρων απαραίτητων για την επιβίωσή τους, αλλά όχι απεριόριστων. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ότι:

- η διαθέσιμη ποσότητα πόρων είναι  $S$ ,
- το κάθε άτομο του  $j$  είδους έχει τη δυνατότητα να επιβάλλει εις βάρος του άλλου είδους την κατανάλωση κατά μέσο όρο  $a_j$  πόρων σε χρόνο  $dt$ ,
- το κάθε άτομο του  $j$  είδους σε χρόνο  $dt$  έχει ανάγκη (κατά μέσο όρο) από  $s_j$  πόρους για να μπορεί να αναπαράγει τον εαυτό του (να έχουμε διατήρηση πληθυσμού).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού του 1ου είδους θα περιορίζεται από τους εναπομείναντες πόρους, ήτοι την ποσότητα  $S$  από την οποία αφαιρούμε αυτό που το 2ο είδος κατανάλωσε σύμφωνα με τις ικανότητές του ( $a_2 x_2$ ). Αυτό σημαίνει ότι ο πληθυσμός του 1ου είδους θα ακολουθεί το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο:

$$x_1' = \kappa_1 (S - a_2 x_2 - s_1 x_1) x_1.$$

Ομοίως, το δεύτερο είδος  $\theta$  ακολουθεί το κάτωθι λογιστικό μοντέλο:

$$x_2' = \kappa_2 (S - a_1 x_1 - s_2 x_2) x_2.$$

Εν ολίγοις έχουμε το κάτωθι πληθυσμιακό μοντέλο (βλ. [54] σελ. 288):

$$\begin{cases} x_1' &= \kappa_1 (S - a_2 x_2 - s_1 x_1) x_1 \\ x_2' &= \kappa_2 (S - a_1 x_1 - s_2 x_2) x_2 \end{cases}. \quad (7.5)$$

### 7.2.β' Σημεία ισορροπίας

Είναι σημαντικό να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του παραπάνω συστήματος, ώστε να αποκτήσουμε μια εικόνα περί του πώς αυτό εξελίσσεται σε βάθος χρόνου. Προς τούτο λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \kappa_1 (S - a_2 x_2 - s_1 x_1) x_1 &= 0 \\ \kappa_2 (S - a_1 x_1 - s_2 x_2) x_2 &= 0 \end{cases}$$

και βρίσκουμε τα κάτωθι σημεία ισορροπίας  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ :

$$(0, 0), \left(0, \frac{S}{s_2}\right), \left(\frac{S}{s_1}, 0\right), \left(\frac{S(a_2 - s_2)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}, \frac{S(a_1 - s_1)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}\right).$$

Η πρώτη σκέψη είναι να μείνουμε εντός της διδαχθείσας ύλης<sup>[1]</sup> προσδιορίζοντας τον ιακωβιανό πίνακα (βλ. [76] σελ. 530 και 533):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x_1, y_1) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial(\kappa_1(S - a_2 x_2 - s_1 x_1)x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\kappa_1(S - a_2 x_2 - s_1 x_1)x_1)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(\kappa_2(S - a_1 x_1 - s_2 x_2)x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\kappa_2(S - a_1 x_1 - s_2 x_2)x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_1(S - a_2 x_2 - 2s_1 x_1) & -a_2 \kappa_1 x_1 \\ -a_1 \kappa_2 x_2 & \kappa_2(S - a_1 x_1 - 2s_2 x_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<sup>[1]</sup>Ο γράφων αναφέρεται στη Θεματική ενότητα «ΜΣΜ71: Μαθηματικά Πρότυπα στις Φυσικές Επιστήμες» του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του Ε.Α.Π. - ακαδημαϊκό έτος 2023-24.

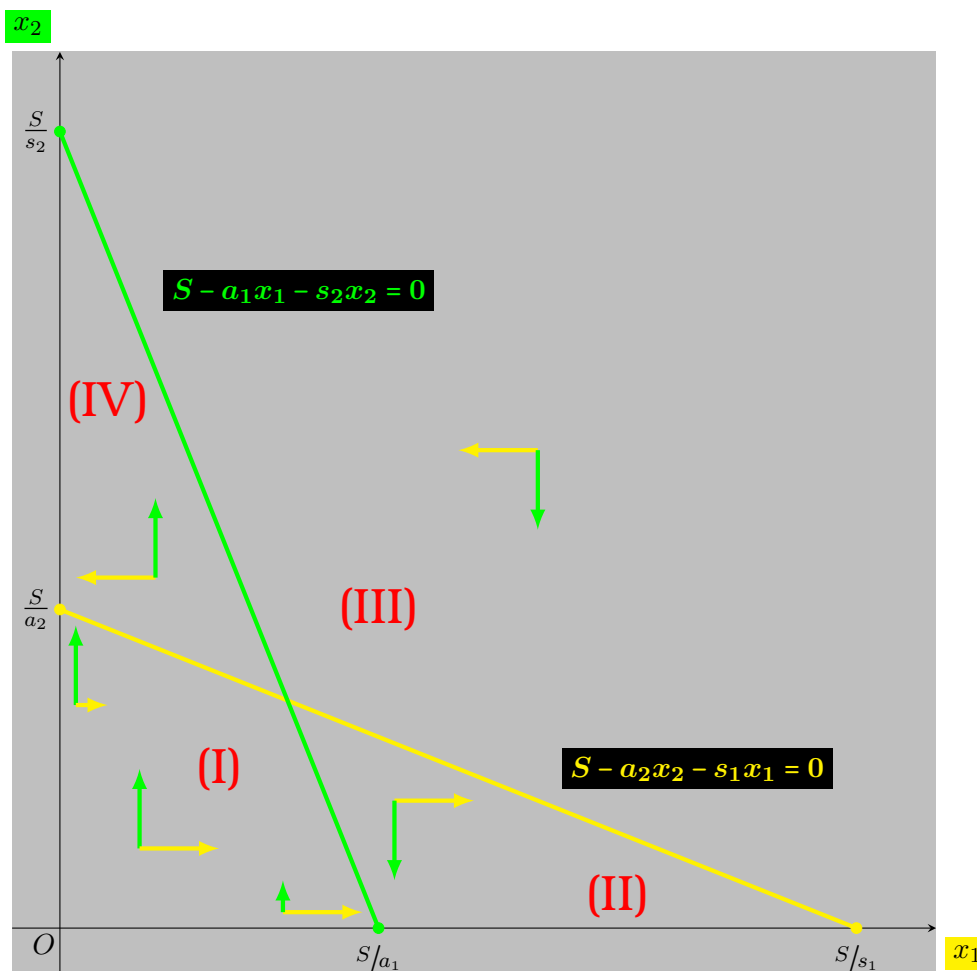
και τις τιμές του στα διάφορα σημεία ισορροπίας:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(0,0) &= \begin{bmatrix} \kappa_1 S & 0 \\ 0 & \kappa_2 S \end{bmatrix} \\ \mathcal{J}\left(0, \frac{S}{s_2}\right) &= \begin{bmatrix} \kappa_1 S \left(1 - \frac{a_2}{s_2}\right) & 0 \\ -\frac{a_1 \kappa_2 S}{s_2} & -\kappa_2 S \end{bmatrix} \\ \mathcal{J}\left(\frac{S}{s_1}, 0\right) &= \begin{bmatrix} -\kappa_1 S & -\frac{a_2 \kappa_1 S}{s_1} \\ 0 & \kappa_2 S \left(1 - \frac{a_1}{s_1}\right) \end{bmatrix} \\ \mathcal{J}\left(\frac{S(a_2 - s_2)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}, \frac{S(a_1 - s_1)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{\kappa_1 s_1 S(a_2 - s_2)}{s_1 s_2 - a_1 a_2} & \frac{a_2 \kappa_1 S(s_2 - a_2)}{a_1 a_2 - s_1 s_2} \\ \frac{a_1 \kappa_2 S(s_1 - a_1)}{a_1 a_2 - s_1 s_2} & \frac{\kappa_2 s_2 S(s_1 - a_1)}{a_1 a_2 - s_1 s_2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Όμως, αν και τα χαρακτηριστικά τους πολυώνυμα δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερη περιπλοκότητα:

$$\begin{aligned}\chi_{(0,0)} &= (x - \kappa_1 S)(x - \kappa_2 S) \\ \chi_{(0, S/s_2)} &= \frac{(x + \kappa_2 S)(s_2 x + a_2 \kappa_1 S - \kappa_1 s_2 S)}{s_2} \\ \chi_{(S/s_1, 0)} &= \frac{(x + \kappa_1 S)(s_1 x + a_1 \kappa_2 S - \kappa_2 s_1 S)}{s_1} \\ \chi_{\left(\frac{S(a_2 - s_2)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}, \frac{S(a_1 - s_1)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}\right)} &= x^2 + \frac{S(a_1 \kappa_2 s_2 + a_2 \kappa_1 s_1 - s_1 s_2(\kappa_1 + \kappa_2))}{a_1 a_2 - s_1 s_2} x - \frac{\kappa_1 \kappa_2 S^2(a_1 - s_1)(a_2 - s_2)}{a_1 a_2 - s_1 s_2}\end{aligned}$$

οι ιδιοτιμές αρχίζουν και κάνουν επίπονη τη μελέτη της ευστάθειας ειδικά στην τελευταία περίπτωση, αλλά και στις περιπτώσεις όπου επί παραδείγματι  $s_2 = a_2$ . Συνεπώς, θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση μέσω της μελέτης των ισοκλινών (βλ. ενδεικτικά [14] σελ. 454 ή [54] σελ. 291). Ακολουθούν διάφορες περιπτώσεις μελέτης.

Σχήμα 7.6: Ισοκλινείς στην περίπτωση που  $a_j > s_j$ .

### 7.2.β'.i Ισορροπία όταν οι δυνατότητες επιβολής ικανοποιούν τις ανάγκες του κάθε είδους

Σε αυτή την περίπτωση θα μελετήσουμε τι συμβαίνει όταν το κάθε είδος έχει την ικανότητα να επιβάλλει στο άλλο την ικανοποίηση τουλάχιστον των αναγκών επιβίωσής του, ήτοι  $a_j \geq s_j$ .

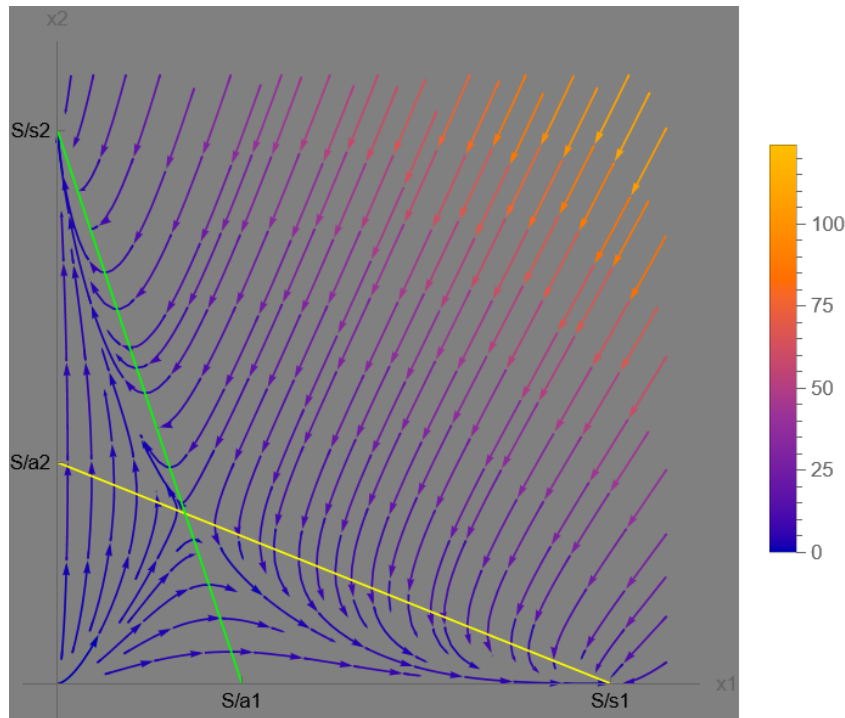
Από τη σχέση  $x'_1 = \kappa_1(S - a_2x_2 - s_1x_1)x_1$  καταλαβαίνουμε ότι το 1ο είδος δεν μεταβάλλεται καθόλου όταν είτε έχει εκμηδενιστεί ( $x_1 = 0$ ) είτε όταν το δίπολο  $(x_1, x_2)$  βρίσκεται πάνω στην ευθεία  $S - a_2x_2 - s_1x_1 = 0$ . Μάλιστα, δεδομένου ότι μιλάμε για μη αρνητικούς πληθυσμούς, κάτω από αυτή την ευθεία θα έχουμε αύξηση του  $x_1$  (αφού  $x'_1 > 0$ ), ενώ πάνω από αυτήν θα έχουμε μείωση ( $x'_1 < 0$ ). Παρόμοια πράγματα μπορούμε να ισχυριστούμε και για το 2ο είδος.

Τα προαναφερθέντα τα συνοψίζουμε στο σχήμα 7.6<sup>[§]</sup> και πλέον είναι θέμα απλής παρατήρησης το να διαπιστώσουμε ότι αν το ζεύγος  $(x_1, x_2)$  βρεθεί κοντά στο σημείο  $(0, S/s_2)$ , τότε απορροφάται από αυτό, ενώ απορροφάται από το  $(S/s_1, 0)$ , εφόσον βρεθεί κοντά σ' αυτό. Εν γένει, δηλαδή, το είδος που είναι πιο μακριά από το να ικανοποιήσει τις ανάγκες του οδηγείται σε πληθυσμιακή κατάρρευση, ενώ το άλλο σταθεροποιείται γύρω από τον απαραίτητο πληθυσμό για την ικανοποίηση των βασικών αναγκών.

Τα παραπάνω παρουσιάζονται πιο εύγλωττα στο σχήμα 7.7<sup>[¶]</sup>. Αξίζει, ίσως, ο αναγνώστης να παρατηρήσει πως η ροή γίνεται κατακόρυφη (εξαφανίζεται η οριζόντια συνιστώσα) όταν διερχόμαστε από την ισοκλινή του 1ου είδους (κίτρινο), ενώ η ροή γίνεται οριζόντια (εξαφανίζεται η κατακόρυφη

<sup>[§]</sup>Το 1ο είδος παριστάνεται με κίτρινο και το 2ο με πράσινο.

<sup>[¶]</sup>Η ισοκλινή του 1ου είδους παριστάνεται με κίτρινο και του 2ου με πράσινο.



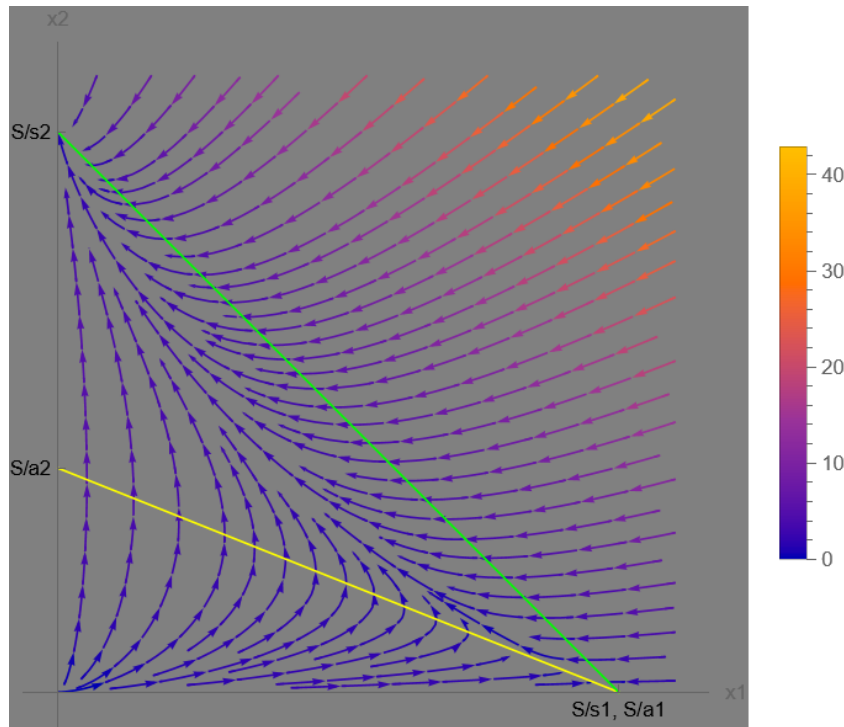
Σχήμα 7.7: Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που  $a_j > s_j$ .

συνιστώσα) όταν διερχόμαστε από την ισοκλινή του 2ου είδους (πράσινο).

Είναι φανερό ότι μόνο από τις περιοχές (II) και (IV) του σχήματος 7.6 μπορούμε να καταλήξουμε σε ευσταθές σημείο ισορροπίας. Σε οποιαδήποτε άλλη υπάρχει παντού μη-μηδενική ροή εξόδου από αυτή. Αυτό σημαίνει πως αν, επί παραδείγματι, το 1ο είδος μπορεί να επιβάλλει μόνο την ικανοποίηση των βασικών του αναγκών και τίποτα άλλο ( $a_1 = s_1$ ), αλλά το 2ο μπορεί να επιβάλει κι ένα πλεόνασμα των βασικών του αναγκών ( $a_2 > s_2$ ), τότε νομοτελειακά το 1ο θα εξαφανιστεί<sup>II</sup>, αφού δεν θα υπάρχει πλέον περιοχή με ροή προς αυτό (βλ. σχ. 7.8<sup>III</sup>). Σημειωτέον ότι πουθενά δεν έπαιξε ρόλο το ποιο είδος ήταν πιο ολιγαρκές! Επιβιώνει απλά ο έχων δυνατότητα περισσεύματος!

<sup>II</sup>Εκτός, φυσικά, κι αν έχουμε αρχίσει με μηδενικό πληθυσμό για το 2ο είδος.

<sup>III</sup>Η ισοκλινή του 1ου είδους παριστάνεται με **κίτρινο** και του 2ου με **πράσινο**.



Σχήμα 7.8: Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που  $a_2 > s_2$ , αλλά  $a_1 = s_1$ .

### 7.2.β'.ii Ισορροπία όταν μόνο το ένα είδος μπορεί να επιβάλλει την ικανοποίηση των αναγκών του

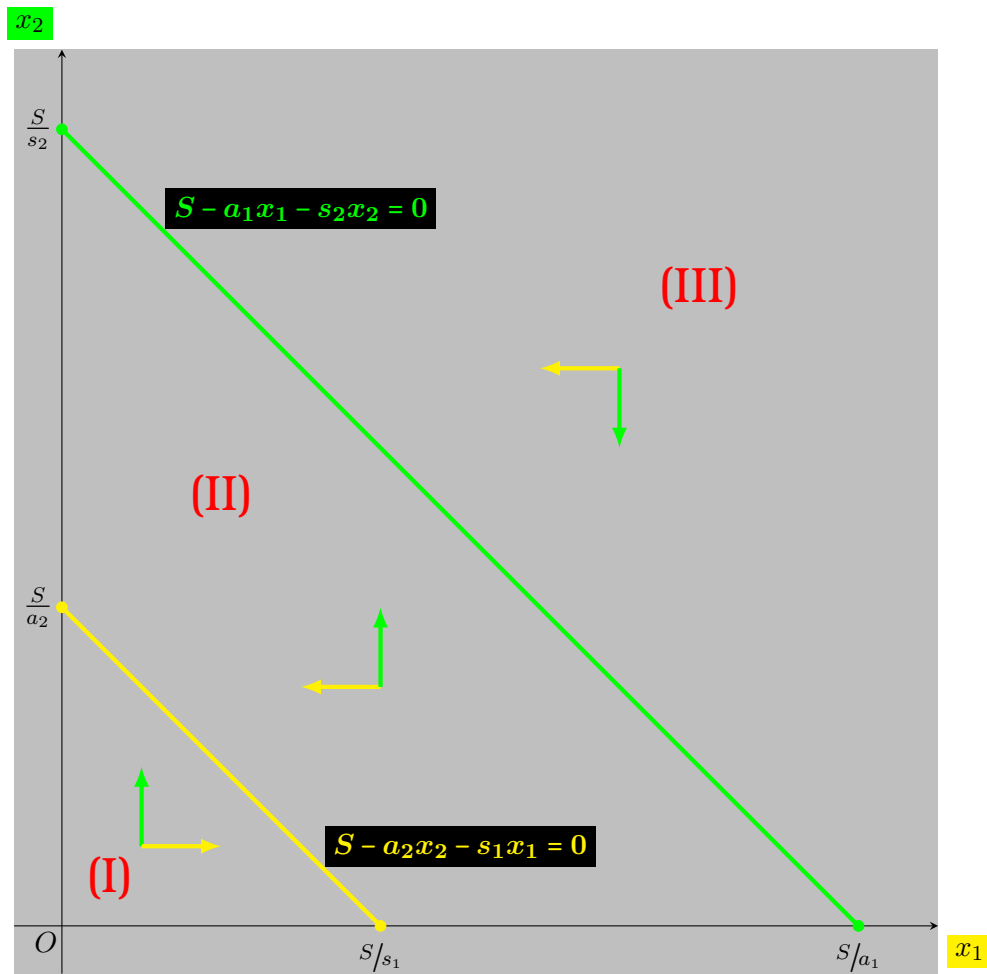
Εδώ θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου ένα από τα δύο είδη μπορεί να επιβάλει στο άλλο μόνο λιγότερα από αυτά που του είναι ζωτικής σημασίας. Είδαμε πριν πως ήδη και στην περίπτωση που ίσα-ίσα μπορούσε κάποιος να επιβάλλει τις ανάγκες του, ακόμα και τότε οδηγούταν σε συντριβή. Αυτό, τώρα που κάνουμε λόγο για ακόμα πιο μειονεκτική θέση, προβλέπεται ακόμα πιο δυσοίωνα.

Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε πάλι να θεωρήσουμε το 1ο είδος ως το άτυχο της μελέτης μας. Δηλαδή  $a_1 < s_1$ , αλλά  $a_2 > s_2$ . Στο σχήμα 7.9 παρατηρούμε<sup>[†]</sup> ότι στην περιοχή (I) υπάρχει μη-μηδενική κατακόρυφη ροή προς τα πάνω, ήτοι υπάρχει ροή εξόδου από την (I) και εισόδου στην (II). Όσον αφορά την περιοχή (III) εκεί ή έχουμε (οριζόντια) ροή εισόδου στην (II) ή κατακόρυφη απορρόφηση από το σημείο  $(0, S/s_2)$ . Τέλος, μιλώντας πλέον για την περιοχή (II) είναι φανερό πως η μείωση του  $x_1$  σε συνδυασμό με την αύξηση του  $x_2$  στέλνει το ζεύγος  $(x_1, x_2)$  πάνω στο σημείο  $(0, S/s_2)$ .

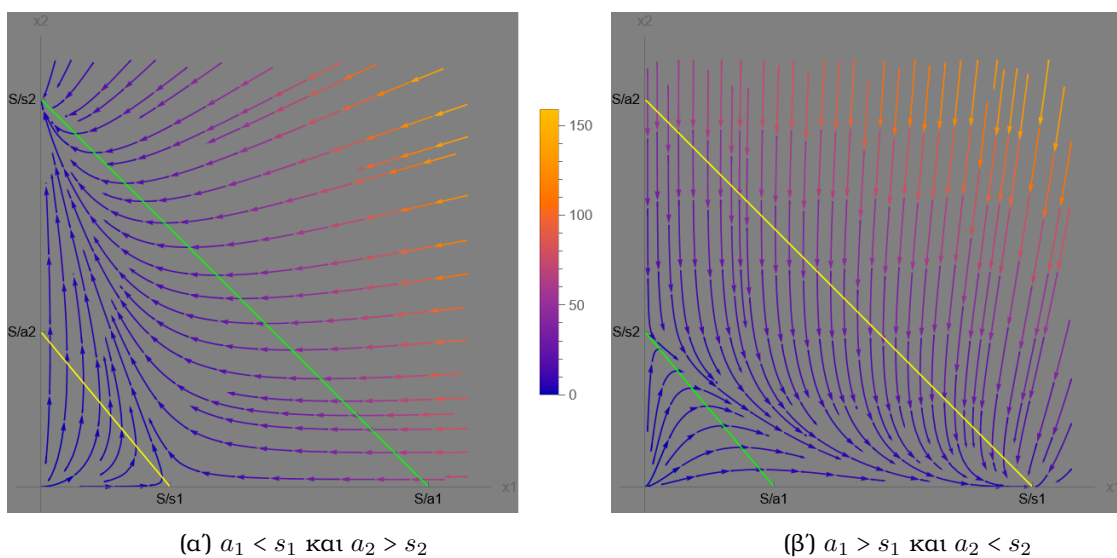
Δείξαμε, λοιπόν, ότι το σημείο  $(0, S/s_2)$  είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας (βλ. επίσης σχ. 7.10α<sup>[\*\*]</sup>). Στο αντίστροφο αποτέλεσμα, ότι δηλαδή το σημείο  $(S/s_1, 0)$  είναι το σημείο ευσταθούς ισορροπίας, θα είχαμε καταλήξει αν είχαμε δεχτεί ότι  $a_1 > s_1$  και  $a_2 < s_2$  (βλ. επίσης σχ. 7.10β).

<sup>[†]</sup>Το 1ο είδος παριστάνεται με κίτρινο και το 2ο με πράσινο.

<sup>[\*\*]</sup>Η ισοκλινής του 1ου είδους παριστάνεται με κίτρινο και του 2ου με πράσινο.

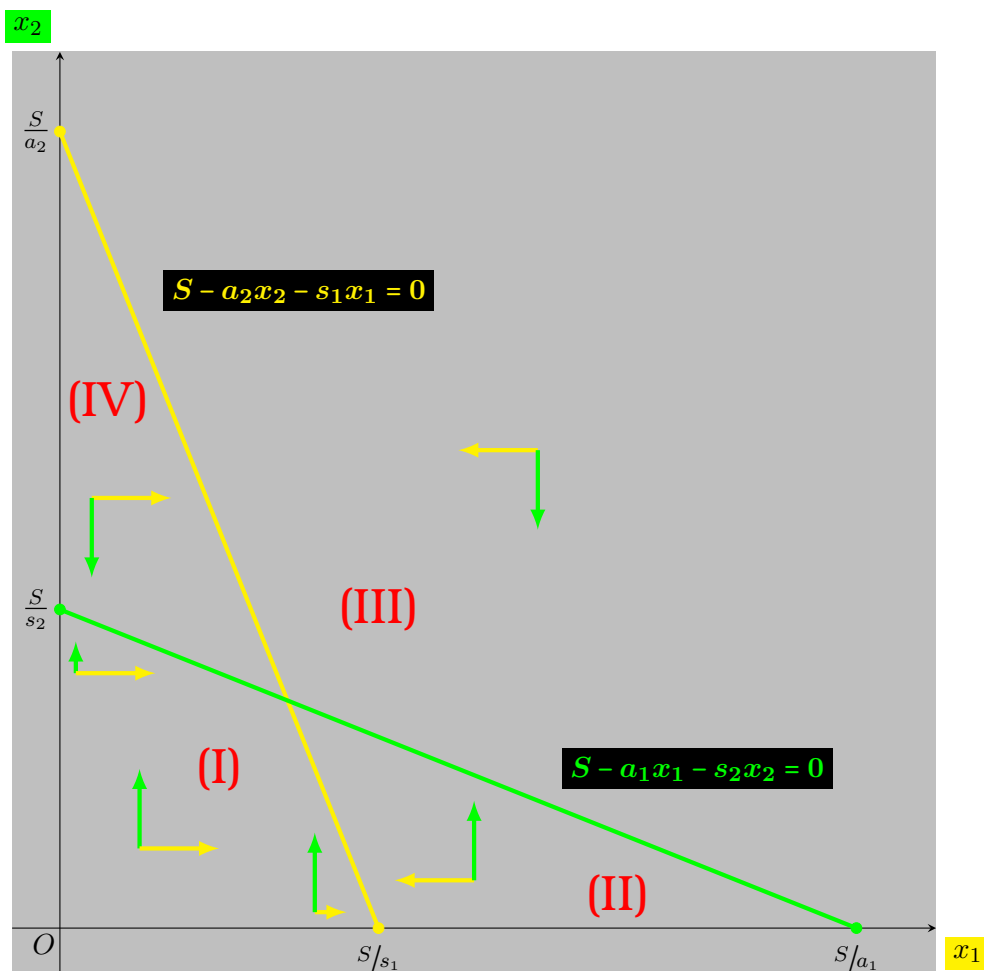


Σχήμα 7.9: Ισοκλινείς στην περίπτωση που  $a_1 < s_1$  και  $a_2 > s_2$ .



Σχήμα 7.10: Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που η δυνατότητα επιβολής σε κάποιο είδος είναι μικρότερη από αυτό που χρειάζεται για την επιβίωσή του.





Σχήμα 7.11: Ισοκλινείς στην περίπτωση που  $a_j < s_j$ .

### 7.2.β'.iii Ισορροπία όταν κανένα είδος δεν μπορεί να επιβάλλει την ικανοποίηση των αναγκών του

Στην περίπτωση αυτή θα μελετήσουμε την ασυμπτωματική συμπεριφορά των δύο πληθυσμών στην περίπτωση που κάθε είδος μπορεί να επιβάλλει στο άλλο την ικανοποίηση μόνο ενός μέρους των αναγκών του. Δηλαδή ισχύουν εν προκειμένω αμφότερες οι σχέσεις  $a_1 < s_1$  και  $a_2 < s_2$ .

Στο σχήμα 7.11<sup>††</sup> παρατηρούμε ότι σε κάθε περιοχή υπάρχει ροή προς κάποια ισοκλινή. Όμως, βλέπουμε επίσης ότι προσεγγίζοντας τη μία ισοκλινή, να μεν η μία συνιστώσα της κίνησης ελαττώνεται σημαντικά, αλλά από την άλλη υπάρχει μη μηδενική συνιστώσα προς την άλλη ισοκλινή. Αυτό κάνει το ζεύγος  $(x_1, x_2)$  να αναρροφάται από το σημείο τομής των δύο ισοκλινών:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \left( \frac{S(s_2 - a_2)}{s_1 s_2 - a_1 a_2}, \frac{S(s_1 - a_1)}{s_1 s_2 - a_1 a_2} \right)$$

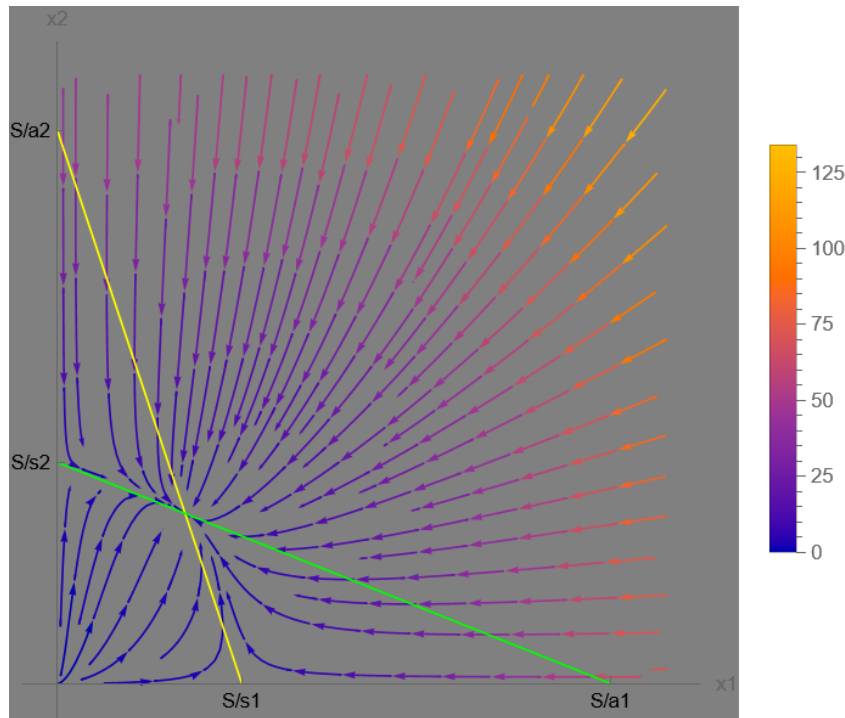
το οποίο και αποτελεί το μοναδικό σημείο ευσταθούς ισορροπίας.

Τα προαναφερθέντα παρουσιάζονται πιο εύγλωπτα στο σχήμα 7.12<sup>§§</sup>, όπου απεικονίζονται οι ροές στο πεδίο κατευθύνσεων.

Τέλος, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν π.χ.  $a_1 \approx s_1$ , τότε το σημείο ισορροπίας είναι κοντά στο  $(\frac{S}{s_1}, 0)$ . Αυτό σημαίνει ότι στην οριακή κατάσταση που συμβαίνει  $a_1 = s_1$ , αλλά το άλλο είδος αδυνατεί να επιβάλλει την ικανοποίηση των βασικών του αναγκών ( $a_2 < s_2$ ), το 2ο είδος θα οδηγείται

<sup>††</sup> Το 1ο είδος παριστάνεται με κίτρινο και το 2ο με πράσινο.

<sup>§§</sup> Η ισοκλινή του 1ου είδους παριστάνεται με κίτρινο και του 2ου με πράσινο.

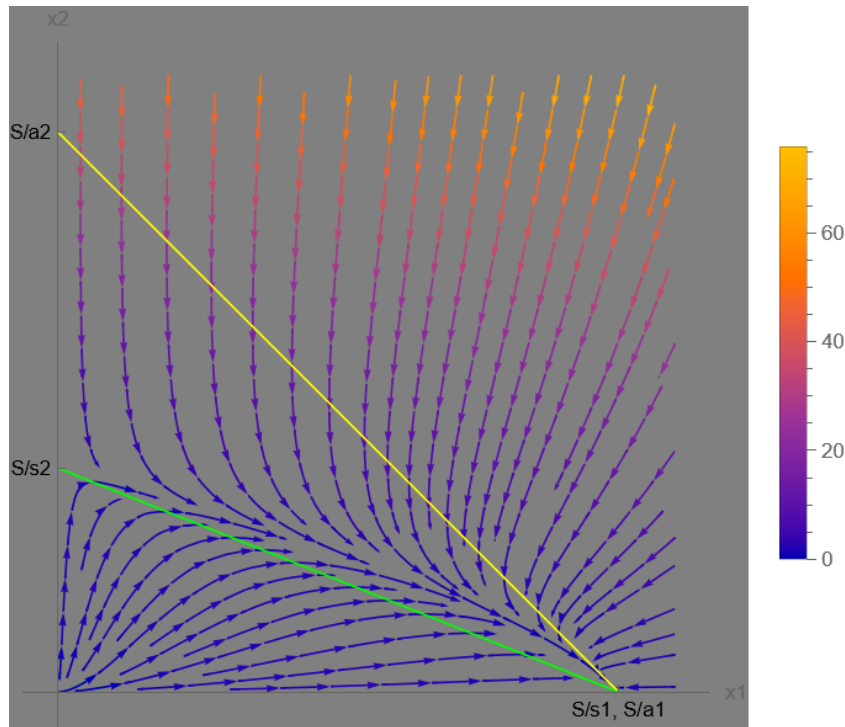


Σχήμα 7.12: Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που  $a_j < s_j$ .

στην εξαφάνιση προς αποκλειστική επικράτηση του 1ου. Οπτική παρουσίαση των παραπάνω γίνεται στο σχήμα 7.13<sup>ll ll</sup>, όπου είναι σαφές ότι το σημείο  $(s/s_1, 0)$  είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Φυσικά, τα ίδια θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε και στην περίπτωση που ήταν  $a_1 < s_1$  και  $a_2 = s_2$ . Τότε όμως το ανταγωνιστικό πλεονέκτημα θα το είχε το 2ο είδος, με αποτέλεσμα το 1ο είδος να είναι υπό εξαφάνιση.

Αξιζεί να αντιπαραβάλλει ο αναγνώστης το σχήμα 7.13 με το σχήμα 7.8, τόσο για να φανερωθεί το εξελικτικό πλεονέκτημα του  $a_2 > s_2$  έναντι του  $a_2 < s_2$ , όσο και για να δούμε τι γίνεται στην περίπτωση που  $a_1 = s_1$  και  $a_2 = s_2$ . Καθόσον αυτή αποτελεί οριακή εκδοχή ταυτοχρόνως της περίπτωσης  $s_1 \approx a_1$  και της  $s_2 \approx a_2$ , θα υπάρχει ταυτόχρονη τάση και προς τα δύο υποψήφια σημεία ισορροπίας. Αυτό μας κάνει να υποψιαστούμε ότι δεν θα υπάρχουν σημεία ευσταθούς ισορροπίας. Αλλά ας το δούμε καλύτερα στην επόμενη υποενοότητα.

<sup>ll ll</sup> Η ισοκλινής του 1ου είδους παριστάνεται με κίτρινο και του 2ου με πράσινο.



Σχήμα 7.13: Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που  $a_2 < s_2$ , αλλά  $a_1 = s_1$ .

#### 7.2.β'.iv Ισορροπία όταν κάθε είδος μπορεί να επιβάλλει στο άλλο αποκλειστικά και μόνο την ικανοποίηση των βασικών του αναγκών

Θεωρώντας ότι  $a_1 = s_1$  και  $s_2 = a_2$  το σύστημα (7.5) γράφεται ως:

$$\begin{cases} x_1' = \kappa_1(S - a_2x_2 - a_1x_1)x_1 \\ x_2' = \kappa_2(S - a_1x_1 - a_2x_2)x_2 \end{cases}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις και ορίζοντας  $k = \kappa_1/\kappa_2$  έχουμε:

$$\frac{x_1'}{x_2'} = k \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1'}{x_1} = k \frac{x_2'}{x_2} \Leftrightarrow \ln x_1 = k \ln x_2 + c,$$

όπου  $c \in \mathbb{R}$ . Καταλήγουμε, λοιπόν:

$$x_1 = x_2^k e^c.$$

Έτσι έχουμε:

$$x_2' = \kappa_2(S - a_1x_1 - a_2x_2)x_2 \Leftrightarrow x_2' = \kappa_2(S - a_1x_2^k e^c - a_2x_2)x_2.$$

Ορίζουμε τώρα την οικογένεια συναρτήσεων:

$$f_c(x) = S - a_1x^k e^c - a_2x.$$

Καθόσον:

$$f(0) = S \text{ και } f\left(\left(\frac{S}{a_1 e^c}\right)^{\frac{1}{k}}\right) = -a_2\left(\frac{S}{a_1 e^c}\right)^{\frac{1}{k}} < 0,$$

από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι θα υπάρχει  $\rho_c \in \left(0, \left(\frac{S}{a_1 e^c}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$  τέτοιο, ώστε  $f_c(\rho_c) = 0$ . Επίσης αποδεικνύεται εύκολα ότι  $f \searrow [0, +\infty)$ , επομένως αυτό το  $\rho_c$  είναι μοναδικό. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ως ακολούθως:

$$g(c) = \rho_c,$$

ή, αν προτιμάτε:

$$c \xrightarrow{g} \text{ρίζα της } f_c.$$

Η  $g$ , προφανώς, είναι λύση της:

$$S - a_1 x^k e^c - a_2 x = 0$$

ως προς  $x$ , οπότε από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων (βλ. [77] σελ. 200) η  $g$  θα είναι συνεχής και παραγωγισιμη.

Επίσης, αν  $c_1 < c_2$ , τότε:

$$f_{c_2}(x) - f_{c_1}(x) = a_1 x^k (e^{c_1} - e^{c_2}) \Rightarrow f_{c_2}(\rho_{c_1}) = a_1 \rho_{c_1}^k (e^{c_1} - e^{c_2}) < 0,$$

όπερ σημαίνει ότι πάλι από θεώρημα Bolzano έχουμε ότι θα υπάρχει  $\rho_{c_2} \in (0, \rho_{c_1})$  τέτοιο, ώστε  $f_{c_2}(\rho_{c_2}) = 0$ . Προφανώς, αφού η εκάστοτε  $f_c$  έχει μοναδική ρίζα, τα  $\rho_{c_2}$  και  $\rho_{c_1}$  ταυτίζονται. Εν κατακλείδι,  $\rho_{c_1} > \rho_{c_2}$ , πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα  $g(c_1) > g(c_2)$ , ήτοι  $g \searrow \mathbb{R}$ .

Καθόσον η  $g$  είναι γνησίως μονότονη, θα υπάρχουν τα όρια (βλ. [64] σελ. 113):

$$\ell_1 = \lim_{c \rightarrow -\infty} g(c) \quad \text{και} \quad \ell_2 = \lim_{c \rightarrow +\infty} g(c).$$

Για να επαληθεύεται η σχέση:

$$S - a_1 g^k(c) e^c - a_2 g(c) = 0,$$

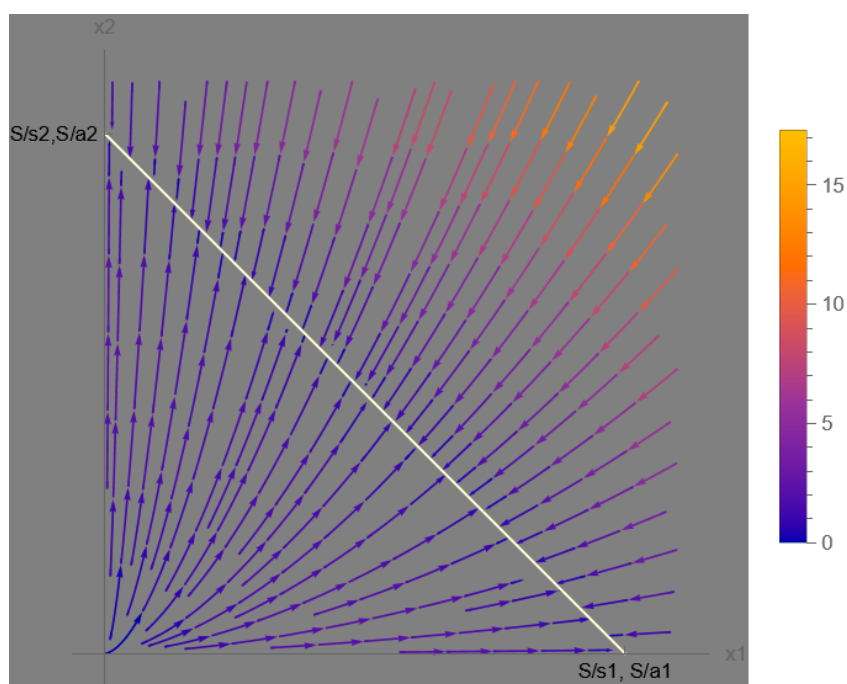
θα πρέπει  $\ell_1 = S/a_2$  και  $\ell_2 = 0$ . Καθόσον η  $g$  είναι συνεχής και μονότονη έχουμε ότι  $g(\mathbb{R}) = (0, S/a_2)$ .

Ας δούμε πώς τα άνωθεν επηρεάζουν το αρχικό μας πρόβλημα! Αφού, λοιπόν,  $f_c \searrow$ , θα είναι  $f_c(x) > 0$  για  $x < \rho_c$  και  $f_c(x) < 0$  για  $x > \rho_c$ . Επομένως το  $\rho_c$  είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας της:

$$x'_2 = \kappa_2 (S - a_1 x_2^k e^c - a_2 x_2) x_2.$$

Αυτό που καταφέραμε να δείξουμε παραπάνω είναι ότι όταν το  $c$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ , η ρίζα της  $f_c$  διατρέχει το  $(0, S/a_2)$ . Με άλλα λόγια, όταν το  $c$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$  το σημείο ευσταθούς ισορροπίας της  $x'_2 = \kappa_2 (S - a_1 x_2^k e^c - a_2 x_2) x_2$  διατρέχει το  $(0, S/a_2)$ . Δηλαδή, ανάλογα με το ποιες ήταν οι αρχικές συνθήκες (διότι  $c = \ln(x_1(0)/x_2^k(0))$ ), έχουμε και διαφορετική οριακή συμπεριφορά της  $x_2$ . Τέλος, δεδομένου ότι η  $x_1$  ακολουθεί κατά πόδας την  $x_2$  (θυμίζουμε ότι  $x_1 = x_2^k e^c$ ), τα προαναφερθέντα εφαρμόζονται και για την  $x_1$ .

Συνοψίζοντας τα προαναφερθέντα, λέμε ότι στην περίπτωση που  $a_1 = s_1$  και  $s_2 = a_2$ , τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (7.5) είναι όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα  $(S/a_1)$  και  $(0, S/a_2)$  (βλ. σχ. 7.14).



Σχήμα 7.14: Πεδίο κατευθύνσεων στην περίπτωση που  $a_1 = s_1$  και  $s_2 = a_2$ . Οι δύο ισοκλινείς αλληλοεπικαλύπτονται και φτιάχνουν την εικονιζόμενη λευκή γραμμή.



## Κεφάλαιο 8

# Γενικεύσεις λογιστικής συνάρτησης

### 8.1 Μοντέλα Pütter-Bertalanffy και Bertalanffy-Richards.

Η πρώτη γενίκευση που θα αποπειραθούμε να δώσουμε στο λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο αντλήθηκε από το [10] (σελ. 223) και δεν είναι άλλο από το μοντέλο Pütter-Bertalanffy:

$$\frac{dW}{dt} = aW^m - cW^n. \quad (8.1)$$

Σε αυτή το  $W$  αναπαριστά το βάρος ενός ζώου και σε αδρές γραμμές η (8.1) λέει πως η μεταβολή του σωματικού βάρους δίνεται από τη διαφορά μεταξύ των διαδικασιών δημιουργίας και καταστροφής. Συγκεκριμένα, το  $a$  είναι μια σταθερά αναβολισμού (διαδικασία κατά την οποία το σώμα χτίζει σύνθετα μόρια από απλούστερα συστατικά - χρησιμοποιείται ενέργεια) και το  $c$  μια σταθερά καταβολισμού (διαδικασία κατά την οποία το σώμα διασπά σύνθετες ουσίες σε απλούστερα μόρια - απελευθερώνεται ενέργεια). Τα δε  $m$  και  $n$  είναι μη αρνητικές σταθερές.

Αλλά ας κάνουμε λίγο απλούστερα τα πράγματα. Στο [10] (σελ. 224) ο Bertalanffy διαπιστώνει πως μια μικρή απόκλιση του  $n$  από τη μονάδα δεν επιφέρει δραματικά αποτελέσματα στη λύση μας. Επομένως έχουμε την κατά πολύ απλούστερη εκδοχή της (8.1), την Σ.Δ.Ε. του μοντέλου Bertalanffy-Richards (βλ. επίσης [53] σελ. 422):

$$\frac{dW}{dt} = aW^m - cW. \quad (8.2)$$

Στην ίδια σελίδα ο συγγραφέας δηλώνει πως μπορούμε να θεωρήσουμε για μια μεγάλη ποικιλία οργανισμών (κυρίως ψάρια) ότι  $m = 2/3$ , οπότε έχουμε:

$$\frac{dW}{dt} = aW^{2/3} - cW.$$

Δεν θα επικεντρωθούμε, όμως, σε αυτήν την υποπερίπτωση, αλλά θα αντιμετωπίσουμε την (8.2) στη γενικότητά της.

Η περίπτωση που  $m = 1$  οδηγεί στο εκθετικό μοντέλο του Malthus ή σε σταθερό πληθυσμό καθόσον η (8.2) γίνεται:

$$\frac{dW}{dt} = (a - c)W,$$

ενώ για  $m = 2$  έχουμε το λογιστικό μοντέλο Verhulst-Pearl, διότι η (8.2) γίνεται:

$$\frac{dW}{dt} = -a \left( \frac{c}{a} - W \right) W,$$

κι αυτός είναι ο λόγος που η (8.2) (άρα και πολύ περισσότερο η (8.1)) αποτελεί γενίκευση του λογιστικού μοντέλου.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην επίλυση της (8.2). Αν  $m \neq 1$ , τότε θέτουμε  $V = W^{m-1}$  επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} V' &= (m-1)W^{m-2}W' \\ &= (m-1)W^{m-2}(aW^m - cW) \\ &= (m-1)W^{m-1}(aW^{m-1} - c) \\ &= (m-1)V(aV - c). \end{aligned}$$

Αν επίσης  $a \neq 0$ , τότε έχουμε:

$$V' = a(1-m) \left( \frac{c}{a} - V \right) V \quad (8.3)$$

Για να ισχυριστούμε ότι η (8.3) είναι η λογιστική εξίσωση, θα πρέπει:

**Περίπτωση 1η** 📌  $a(1-m) > 0$  και  $c/a > 0$ .

Σε αυτή την περίπτωση η  $V$  περιγράφεται από το λογιστικό μοντέλο με σταθερά «αναλογίας»  $\kappa = a(1-m)$  και φέρουσα ικανότητα  $S = c/a$ . Εν ολίγοις:

$$V(t) = \lg c_{c/a, l_0, a(1-m)}(t),$$

όπου  $l_0 = V(0)$ .

Εν τοιαύτη περιπτώσει, συμβολίζοντας  $w_0 = W(0) = l_0^{\frac{1}{m-1}}$  θα ισχύει:

$$W(t) = \left( \lg c_{c/a, w_0^{m-1}, a(1-m)}(t) \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Στην περίπτωση που:

**Περίπτωση 2η** 📌  $a(1-m) < 0$ , αλλά  $c/a > 0$ ,

θέτουμε  $U(t) = V(-t)$  κι έχουμε:

$$\begin{aligned} U'(t) &= -V'(-t) \\ &= -a(1-m) \left( \frac{c}{a} - V(-t) \right) V(-t) \\ &= -a(1-m) \left( \frac{c}{a} - U(t) \right) U(t). \end{aligned}$$

Προφανώς, αν  $a(1-m) < 0$ , τότε  $-a(1-m) > 0$ , άρα η  $U$  ακολουθεί το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο με σταθερά «αναλογίας»  $\kappa = -a(1-m)$  και φέρουσα ικανότητα  $S = c/a$ . Με άλλα λόγια, τότε θα είναι:

$$V(t) = \lg c_{c/a, l_0, a(m-1)}(-t),$$

όπου  $l_0 = U(0) = V(0)$ .

Έτσι, καταλήγουμε στη σχέση:

$$W(t) = \left( \lg c_{c/a, w_0^{m-1}, a(m-1)}(-t) \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Αν, όμως:

**Περίπτωση 3η** 📌  $a(1-m) < 0$  και  $c/a < 0$ ,



τότε θέτουμε  $U = -V$ , επομένως:

$$\begin{aligned} U' &= -V' \\ &= -a(1-m) \left( \frac{c}{a} - V \right) V \\ &= -a(1-m) \left( -\frac{c}{a} + V \right) (-V) \\ &= -a(1-m) \left( -\frac{c}{a} - U \right) U, \end{aligned}$$

δηλαδή η  $U$  ακολουθεί το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο με σταθερά «αναλογίας»  $\kappa = -a(1-m)$  και φέρουσα ικανότητα  $S = -c/a$ . Με άλλα λόγια, τότε θα είναι:

$$V(t) = -\lg c_{-c/a, l_0, a(m-1)}(t),$$

όπου  $l_0 = -U(0) = V(0)$ .

Δηλαδή θα ισχύει:

$$W(t) = \left( -\lg c_{-c/a, -w_0^{m-1}, a(m-1)}(t) \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Τέλος, αν:

**Περίπτωση 4η** 🍷  $a(1-m) > 0$ , αλλά  $c/a < 0$ ,

τότε θέτουμε  $U(t) = -V(-t)$ . Έτσι:

$$\begin{aligned} U'(t) &= V'(-t) \\ &= a(1-m) \left( \frac{c}{a} - V(-t) \right) V(-t) \\ &= a(1-m) \left( -\frac{c}{a} + V(-t) \right) (-V(-t)) \\ &= a(1-m) \left( -\frac{c}{a} - U(t) \right) U(t), \end{aligned}$$

όπερ σημαίνει ότι η  $U$  ακολουθεί το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο με σταθερά «αναλογίας»  $\kappa = a(1-m)$  και φέρουσα ικανότητα  $S = -c/a$ . Με άλλα λόγια, τότε θα είναι:

$$V(t) = -\lg c_{-c/a, -l_0, a(1-m)}(-t),$$

όπου  $l_0 = -U(0) = V(0)$ .

Οπότε καταλήγουμε στην ισότητα:

$$W(t) = \left( -\lg c_{-c/a, -w_0^{m-1}, a(1-m)}(-t) \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Μας μένουν οι περιπτώσεις όπου:

**Περίπτωση 5η-8η** 🍷  $a = 0$  ή  $c = 0$  ή  $m = 1$ .

Αμφότερες έχουν λυκειακού επιπέδου βαθμό δυσκολίας, οπότε οι αποδείξεις τους παραλείπονται ως τετριμμένες, και παραθέτονται μόνο οι λύσεις τους στον πίνακα 8.1. Ενδεικτικά παραθέτουμε μόνο την περίπτωση όπου  $a = 0$  και  $c \neq 0$ . Εν προκειμένω πρόκειται για μια απλή εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, επομένως πράττουμε ως εξής:

$a = 0$	$c = 0$	$m = 1$	$W$
✓	✗	✓/✗	$W_0 e^{-ct}$
✓	✓	✓/✗	$W_0$
✗	✓	✗	$(at(1-m) + W_0^{1-m})^{\frac{1}{1-m}}$
✓/✗	✓/✗	✓	$W_0 e^{(a-c)t}$

Πίνακας 8.1: Λύσεις της  $W' = aW^m - cW$  στις περιπτώσεις όπου  $a = 0$  ή  $m = 1$  ή  $c = 0$ .

$$dW = -cW dt \Leftrightarrow \frac{1}{W} dW = -c dt.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι στο ολοκλήρωμα  $\int_{x_1}^{x_2} 1/x dx$  τα  $x_1$  και  $x_2$  είναι ομόσημα, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\ln\left(\frac{W}{W_0}\right) = -ct \Leftrightarrow W = W_0 e^{-ct},$$

όπου  $W_0 = W(0)$ .

## 8.2 Λογιστικό μοντέλο με σπορά/συγκομιδή

Στην παρούσα υποενότητα θα τροποποιήσουμε το λογιστικό πληθυσμιακό μοντέλο με τρόπο που να περιλαμβάνει έναν όρο «σποράς/συγκομιδής» (βλ. [37] σελ. 434). Έτσι η διαφορική εξίσωση που μας οδήγησε στην λογιστική συνάρτηση μετατρέπεται στην:

$$y' = \kappa(S - y)y + h, \quad y(t_0) = l_0,$$

όπου ο όρος  $h$  δηλώνει ότι ο πληθυσμός υφίσταται σταθερό ρυθμό:

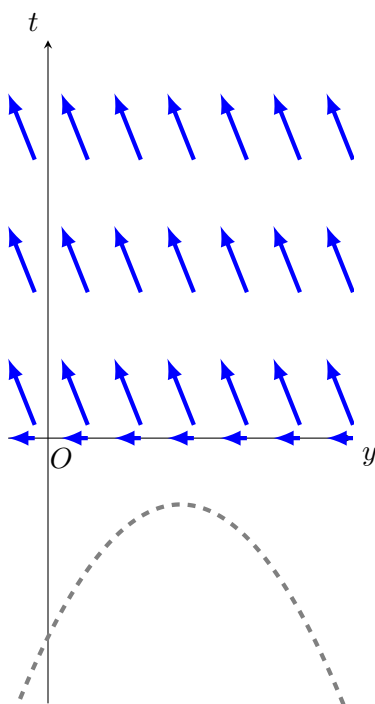
- σποράς, αν  $h > 0$ ,
- συγκομιδής, αν  $h < 0$ .

Ας πάμε να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του παραπάνω μοντέλου βρίσκοντας τα σημεία ισορροπίας του. Έχουμε:

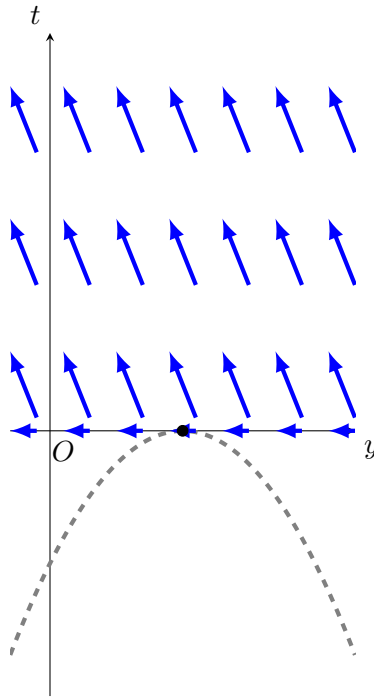
$$\kappa(S - y)y + h = 0 \Leftrightarrow -\kappa y^2 + \kappa S y + h = 0 \Leftrightarrow h + \frac{\kappa S^2}{4} = \kappa \left(y - \frac{S}{2}\right)^2.$$

Έχουμε λοιπόν τις επόμενες περιπτώσεις, όπου σε κάθε μία εξ αυτών τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας έχουν σημειωθεί με κόκκινο και τα ασταθούς ισορροπίας με πράσινο.

**Περίπτωση 1η** 🖱️ Για ρυθμό (συγκομιδής)  $h < -\frac{\kappa S^2}{4}$  δεν έχουμε σημεία ισορροπίας, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα φάσης του σχήματος 8.1.



Σχήμα 8.1: Διάγραμμα φάσης της  $y' = \kappa(S - y)y + h$  στην περίπτωση που  $h < -\frac{\kappa S^2}{4}$ .

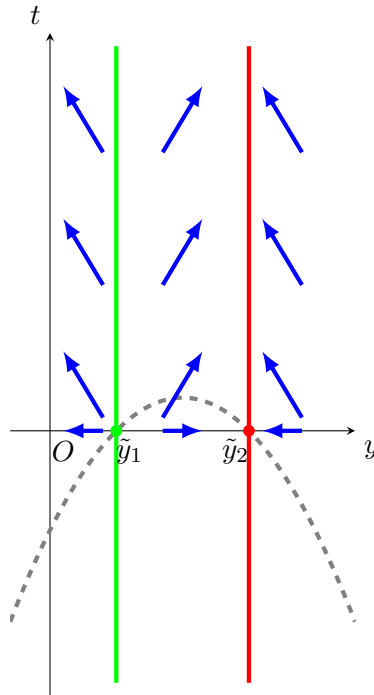


Σχήμα 8.2: Διάγραμμα φάσης της  $y' = \kappa(S - y)y + h$  στην περίπτωση που  $h = -\frac{\kappa S^2}{4}$ .

**Περίπτωση 2η** 📌 Για  $h = -\frac{\kappa S^2}{4}$ , τότε έχουμε ως σημείο ισορροπίας το:

$$\tilde{y} = \frac{\kappa S}{2},$$

του οποίου η ασταθής ή η ευσταθής συμπεριφορά εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, όπως φαίνεται από το διάγραμμα φάσης στο σχήμα 8.2:

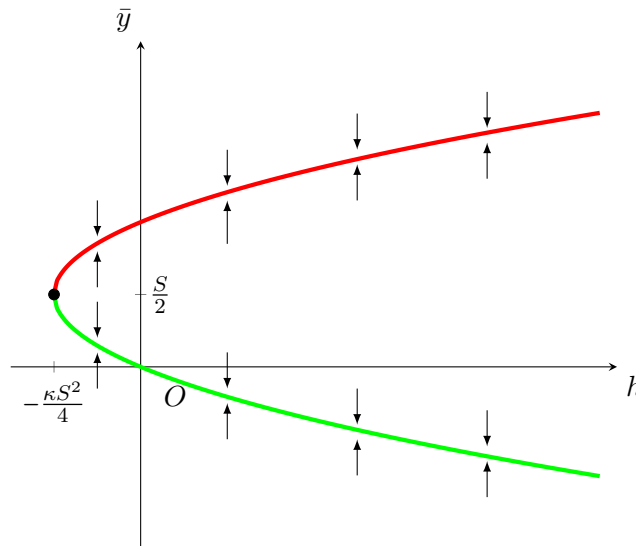


Σχήμα 8.3: Διάγραμμα φάσης της  $y' = \kappa(S - y)y + h$  στην περίπτωση που  $h > -\frac{\kappa S^2}{4}$ .

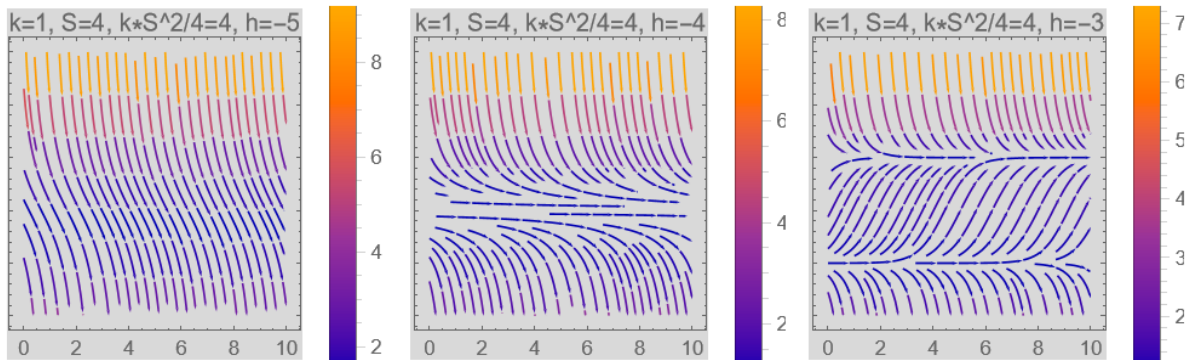
**Περίπτωση 3η** 📌 Ενώ αν  $h > -\frac{\kappa S^2}{4}$ , τότε έχουμε δύο σημεία ισορροπίας, τα :

$$\tilde{y}_1 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{h}{\kappa} + \frac{S^2}{4}} \quad \text{και} \quad \tilde{y}_2 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{h}{\kappa} + \frac{S^2}{4}}$$

την οπτική διαπίστωση των οποίων επιτυγχάνουμε στο σχήμα 8.3.



Σχήμα 8.4: Διάγραμμα διακλάδωσης της  $y' = \kappa(S - y)y + h$ .



Σχήμα 8.5: Πεδία διευθύνσεων για την περίπτωση της λογιστικής διαφορικής εξίσωσης με σπορά/συγκομιδή.

Κατά συνέπεια, έχουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του σχήματος 8.4. Προφανώς, το σημείο διακλάδωσης είναι το 0. Στο σχήμα 8.5 παριστάνονται κάποια ενδεικτικά πεδία διευθύνσεων για τις διάφορες περιπτώσεις που εξετάσαμε παραπάνω.

### 8.3 Προσπέλαση μέσω συναρτησιακών εξισώσεων

Στην παρούσα ενότητα θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε μια συναρτησιακή εξίσωση που να περιγράφει τη φιλοσοφία της λογιστικής εξίσωσης και να καταλήγει στη λογιστική συνάρτηση. Θα προσπαθήσουμε να μην αρκεστούμε στη συνεχή λύση, που είναι η λογιστική συνάρτηση, ώστε να δώσουμε έναν χαρακτήρα γενίκευσης, όπως υπόσχεται το παρόν κεφάλαιο.

Έστω  $f(t)$  η τιμή ενός μεγέθους τη χρονική στιγμή  $t$ . Ας εξετάσουμε τις ποσότητες:

$$f(t_1 + t_2) - f(t_1) \quad \text{και} \quad f(t_1 + t_2) - f(t_2).$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, θέλουμε να υπερέρχει η διαφορά  $f(t_1 + t_2) - f(t_j)$  στην περίπτωση που το  $f(t_j)$  είναι πιο κοντά στο σημείο καμπής ( $S/2$ ) και να υστερεί αυτή όταν το  $f(t_j)$  είναι κοντά στα σημεία 0 και  $S$  που σταθεροποιείται. Με περισσότερα λόγια, η  $f(t_1 + t_2) - f(t_1)$  είναι τόσο μεγαλύτερη από την ποσότητα  $f(t_1 + t_2) - f(t_2)$ :

- όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση του  $f(t_1)$  από το 0 σε σχέση με την απόσταση του  $f(t_2)$  από το 0,
- όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση του  $f(t_1)$  από το  $S$  σε σχέση με την απόσταση του  $f(t_2)$  από το  $S$ ,
- όσο μικρότερη είναι η απόσταση του  $f(t_1)$  από το  $S/2$  σε σχέση με την απόσταση του  $f(t_2)$  από το  $S/2$ .

Σε μαθηματικό φορμαλισμό τα παραπάνω έχουν ως εξής:

$$\frac{f(t_1 + t_2) - f(t_1)}{f(t_1 + t_2) - f(t_2)} = \frac{f(t_1)}{f(t_2)} \cdot \frac{S - f(t_1)}{S - f(t_2)} \cdot \frac{f(t_2) - S/2}{f(t_1) - S/2}, \quad (8.4)$$

όπου  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, S)$ .

Λύνοντας ως προς  $f(t_1 + t_2)$  έχουμε την (ομολογουμένως όχι και πολύ ωραία) συναρτησιακή εξίσωση:

$$f(t_1 + t_2) = \frac{Sf(t_1)f(t_2)}{S^2 - Sf(t_1) - Sf(t_2) + 2f(t_1)f(t_2)},$$

από την οποία συνάγουμε ότι:

$$\begin{aligned} f(t_1 + t_2) - \frac{S}{2} &= \frac{S^2(f(t_1) + f(t_2) - S)}{2(S^2 - Sf(t_1) - Sf(t_2) + 2f(t_1)f(t_2))} \\ &= \frac{S^2(f(t_1) + f(t_2) - S)}{4\left(\frac{S^2}{2} - \frac{S}{2}f(t_1) - \frac{S}{2}f(t_2) + f(t_1)f(t_2)\right)} \\ &= \frac{S^2(f(t_1) + f(t_2) - S)}{4\left(\frac{S^2}{4} + \frac{S^2}{4} - \frac{S}{2}f(t_1) - \frac{S}{2}f(t_2) + f(t_1)f(t_2)\right)} \\ &= \frac{S^2(f(t_1) + f(t_2) - S)}{4\left(\frac{S^2}{4} + \left(f(t_1) - \frac{S}{2}\right)\left(f(t_2) - \frac{S}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\left(f(t_1) - \frac{S}{2}\right) + \left(f(t_2) - \frac{S}{2}\right)}{1 + \frac{4}{S^2}\left(f(t_1) - \frac{S}{2}\right)\left(f(t_2) - \frac{S}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της ισότητας που φτιάξαμε με  $2/S$  και θέτοντας  $g(t) = \frac{2}{S} \left( f(t) - \frac{S}{2} \right)$  έχουμε την ισότητα:

$$g(t_1 + t_2) = \frac{g(t_1) + g(t_2)}{1 + g(t_1)g(t_2)}.$$

Γνωρίζουμε ότι για την υπερβολική εφαπτομένη ισχύει η σχέση:

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}.$$

Επομένως, θέτοντας  $x = \operatorname{arctanh}(u)$  και  $y = \operatorname{arctanh}(v)$  καταλήγουμε στην ταυτότητα:

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{u+v}{1+uv}\right) = \operatorname{arctanh}(u) + \operatorname{arctanh}(v).$$

Έτσι, καθόσον  $0 < f(x) < S$ , θα είναι  $-1 < g(x) < 1$ , άρα και  $-1 < \frac{g(t_1)+g(t_2)}{1+g(t_1)g(t_2)} < 1$ , αφού επί παραδείγματι:

$$\frac{g(t_1) + g(t_2)}{1 + g(t_1)g(t_2)} < 1 \Leftrightarrow \frac{(g(t_1) - 1)(1 - g(t_2))}{1 + g(t_1)g(t_2)} < 0,$$

το οποίο ισχύει. Επομένως:

$$\operatorname{arctanh}(g(t_1 + t_2)) = \operatorname{arctanh}(g(t_1)) + \operatorname{arctanh}(g(t_2)),$$

οπότε θέτοντας  $h(t) = \operatorname{arctanh}(g(t))$  καταλήγουμε στην προσθετική συναρτησιακή εξίσωση του Cauchy:

$$h(t_1 + t_2) = h(t_1) + h(t_2), \quad (8.5)$$

της οποίας οι συνεχείς λύσεις είναι οι  $h(x) = cx$ , όπου  $c$  αυθαίρετη πραγματική σταθερά (βλ. [3] σελ. 32).

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ορισμούς συναρτήσεων, στους οποίους προβήκαμε, έχουμε ότι:

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{2}{S}\left(f(t) - \frac{S}{2}\right)\right) = ct \Leftrightarrow f(t) = \frac{S}{2} \tanh(ct) + \frac{S}{2}.$$

Έτσι, σύμφωνα με τη σχέση (6.3) έχουμε ότι η  $f$  είναι η λογιστική συνάρτηση με φέρουσα ικανότητα  $S$ , αρχική τιμή  $l_0 = S/2$  και σταθερά  $\kappa = 2c/S$ , όπως κι επιθυμούσαμε. Συμβολικά:

$$f(t) = \lg_{S, S/2, 2c/S}(t).$$

Το πλεονέκτημα της (8.5) είναι ότι μπορεί να δώσει λύσεις και πέραν των απλών γραμμικών, άρα αυτό συνιστά μια δυνατότητα γενίκευσης. Προς τούτο θα χρειαστούμε αρχικά την έννοια της βάσης Hamel (βλ. [45] σελ. 9).

### βάση Hamel

**Ορισμός 8.1.** Έστω διανυσματικός χώρος  $V$  (όχι απαραίτητως πεπερασμένης διάστασης). Ένα σύνολο διανυσμάτων  $\mathcal{H}$  καλείται **βάση Hamel** για τον  $V$ , αν:

- κάθε διάνυσμα  $v \in V$  γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του  $\mathcal{H}$ ,
- κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του  $\mathcal{H}$  συνίσταται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.



Έστω, λοιπόν,  $\mathcal{H}$  μία βάση Hamel του  $\mathbb{R}$ . Τότε, η πιο γενική λύση της προσθετικής συναρτησιακής εξίσωσης του Cauchy-(8.5) (βλ. [3] σελ. 35-36) κατασκευάζεται διαλέγοντας αυθαίρετες τιμές για τα στοιχεία της βάσης  $\mathcal{H}$  και ακολούθως ορίζοντας την  $h$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , με:

$$t = t_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + t_n \mathbf{b}_n,$$

όπου  $t_j \in \mathbb{Q}$  και  $\mathbf{b}_j \in \mathcal{H}$ , ως:

$$h(t) = t_1 h(\mathbf{b}_1) + \cdots + t_n h(\mathbf{b}_n).$$

Έτσι, η πιο γενική λύση της λογιστικής συναρτησιακής εξίσωσης-(8.4) είναι η  $f$ , για την οποία ισχύει:

$$\operatorname{arctanh} \left( \frac{2}{S} \left( f(t) - \frac{S}{2} \right) \right) = h(t) \Leftrightarrow f(t) = \frac{S}{2} \tanh(h(t)) + \frac{S}{2}.$$



# Βιβλιογραφία

- [1] Ablowitz M. J. & Zeppetella A. *Explicit solutions of Fisher's equation for special wave speed*. Bulletin of Mathematical Biology, Vol. 41. pp. 835-840 Pergamon Press Ltd. 1979. .
- [2] Abramowitz M. & Stegun I. A. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1964.
- [3] Aczél J. *Lectures on Functional Equations and their Applications*. Academic Press, 1966.
- [4] Allouche J.-P. & Mendès France M.. *Hadamard grade of power series*, arXiv:1101.0526.
- [5] Bak J. & Newman D. J. *Μιγαδική Ανάλυση*, Leader Books, 2004.
- [6] Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G. & Stacey P.. *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly Απρίλιος 1992, Vol. 99, No. 4, σελ. 332-334.
- [7] Bergstrom T. & Bagnoli M. *Log-Concave Probability and Its Applications*, Economic Theory Αύγουστος 2005.
- [8] Berryman A. A. *The origins and evolution of predator-prey theory*, Ecology, 73(5), 1992, pp. 1530-1535.
- [9] Bertalanffy L. *The Theory of Open Systems in Physics and Biology*, Science , Jan. 13, 1950, New Series, Vol. 111, No. 2872 (Jan. 13, 1950), pp. 23-29.
- [10] Bertalanffy L. *Quantitative Laws in Metabolism and Growth*, The Quarterly Review of Biology, Vol. 32, No. 3 (Sep., 1957), pp. 217-231.
- [11] Boyce W. E. & DiPrima R. C. *Elementary Differential Equations*, Wiley, 2012.
- [12] Bragg L. R. *Trigonometric Integrals and Hadamard Products*, The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 1. Ιανουάριος 1999, σελ. 36-42.
- [13] Branner B., Keen L., Douady A., Blanchard P., Hubbard J. H., Schleicher D. & Devaney R. L. *Complex Dynamical Systems The Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets*, American Mathematical Society, Vol.. 49, 1994.
- [14] Braun M. *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 1993.
- [15] Bubolo M. *The Dynamics of the Logistic Map and Difference Equations*, DigitalCommons@SHU, 2019.
- [16] Capocelli R. M. & Ricciardi L. R. M. *A Cybernetic Approach to Population Dynamics Modeling*, Journal of Cybernetics 9(3):297-312, 2007.
- [17] Carothers N. L. *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.
- [18] Debnath L. & Bhatta D. *Integral Transforms and Their Applications*, CRC Press, 2015.

- [19] Devaney R. L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*, CRC Press, 2020.
- [20] Devaney R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, CRC Press, 2022.
- [21] Dilão R. & Amigó. *Computing the Topological Entropy of Unimodal Maps*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Ιούνιος 2012.
- [22] Ducrot A. *On the large time behaviour of the multi-dimensional Fisher-KPP equation with compactly supported initial data*, IOP Publishing, Μάρτιος 2015.
- [23] Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.
- [24] Elaydi S. *Discrete Chaos*, Chapman&Hall/CRC, 2007.
- [25] Falconer K. *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Ltd, 2014.
- [26] Gerry C. & Knight P. *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, 2004.
- [27] Goodson G. R. *Lecture notes on Dynamical Systems, Chaos and Fractal Geometry*, 2013.
- [28] Gottwald G. A. & Melbourne I. *A new test for chaos in deterministic systems*, Proc. R. Soc. Lond. A (2004).
- [29] Gottwald G. A. & Melbourne I. *On the Implementation of the  $O(1)$  Test for Chaos*, <https://arxiv.org/abs/0906.1418v1>.
- [30] Gottwald G. A. & Melbourne I. *Testing for Chaos in Deterministic Systems with Noise*, <https://arxiv.org/abs/nlin/0410020v1>.
- [31] Guo H., Zhang X., Zhao X, Yu H. & Zhang L. *Quadratic Function Chaotic System and its Application on Digital Image Encryption*, IEEE Access 4, 1{10 (2016).
- [32] Hadamard J., *Theoreme sur les series entieres*, Acta Math. 22 (1899) 55-63.
- [33] Hasselblatt B. & Katok A. *A First Course in Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.
- [34] Hille E. *Analytic Function Theory, Vol. II*, Chelsea Publishing Company, 1962.
- [35] Kuczma M., Choczewski B. & Ger R. *Iterative functional equations*, Cambridge University Press, 1990.
- [36] Lebedev N. N. *Special Functions and their Applications*, Prentice-Hall, 1965.
- [37] Logan D. G. Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2022.
- [38] Malthus T. R. *An essay on the principle of population*, London : Printed for J. Johnson, 1798.
- [39] Mandelbrot B. B. *Fractals and Chaos*, Springer, 2004.
- [40] Maritz M. F. *A note on exact solutions of the logistic map*, Chaos 30, 033136 (2020); doi: 10.1063/1.5125097, 2020.
- [41] Milnor J. *Dynamics in One Complex Variable*, Princeton University Press, 2006.
- [42] Milnor J. *On the Concept of Attractor*, Commun. Math. Phys. 99, 177-195, 1985.
- [43] Morris S. A. *Topology without tears*, διαδικτυακή τοποθεσία <https://www.topologywithouttears.net/>, 2024.

- [44] Misiurewicz M. & Szlenk W. *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Mathematica 67.1 (1980): 45-63.
- [45] Navarro M. M. *Comparative Study of Several Bases in Functional Analysis*, Department of Mathematics, Linköping University, 2018.
- [46] Novikov D. A. *Cybernetics From Past to Future*, Springer, 2016.
- [47] Ogata H. *Numerical calculation of Fourier transforms based on hyperfunction theory*, Department of Computer and Network Engineering, Graduate School of Informatics and Engineering, The University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofu-ga-Oka, Chofu 182-8585, Japan, 2020.
- [48] Oldham K. B., Myland J. C. & Spanier J. *An Atlas of Functions*, Springer, 2009.
- [49] Olver F. W. J., Olde Daalhuis A. B., Lozier D. W., Schneider B. I., Boisvert R. F., Clark C. W., Miller B. R., Saunders B. V., Cohl H. S. & McClain M. A. *Digital Library of Mathematical Functions*. <https://dlmf.nist.gov/>, Release 1.2.2 of 2024-09-15.
- [50] Ohnishi S., Yamakawa T. & Akamine T. *On the analytical solution for the Pütter(Bertalanffy growth equation*, Journal of Theoretical Biology, 2013.
- [51] Osgood B. G. *Lectures on the Fourier Transform and Its Applications*, American Mathematical Society, 2019.
- [52] Ott E.. *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.
- [53] Pella J. J. & Thomlinson P. K. *A generalized stock production model*, Inter-american Tropical tuna commision. Vol. 13. No. 3, 1969.
- [54] Pianka E. A. *Εξελικτική οικολογία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.
- [55] Quetelet A. *A treatise on man and the development of his faculties*, Edinburgh : W. and R. Chambers, 1842.
- [56] Ross S. *Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων*, Κλειδάριθμος, 2011.
- [57] Rudin W. *Αρχές Μαθηματικής Αναλυτικής*, Leader Books, 2000.
- [58] Ruslan A. T., Marwan & Aini Q. *Behavior of Logistic Map and Some of Its Conjugate Maps*, AIP Conference Proceedings, Published Online: 19 December 2022.
- [59] Saha L. M., Prasad S. & Yuasa M.. *Measuring Chaos: Topological Entropy and Correlation Dimension in Discrete Maps*, Research Institute for Science and Technology, Kinki University, Higashi-Osaka 577-8502- Japan, Δεκέμβριος 2011.
- [60] Samuelson P. A. *Generalized Predator-Prey Oscillations in Ecological and Economic Equilibrium*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA Vol. 68, No. 5, pp. 980-983, Μάιος 1971.
- [61] Εκδότες: Smelser N. J. & Baltes T. *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, Elsevier Ltd, 2001.
- [62] Smith M. J. *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge University Press, 1968.
- [63] Socolar J. *Chaos*, Encyclopedia of Physical Science and Technology, σελ. 637-665 2003.
- [64] Spivak M. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

- [65] Srivastava H. M. & Junesang Choi. *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*, Elsevier, 2012.
- [66] Stewart J. & Day T. *Biocalculus. Calculus for the life sciences*, Cengage Learning, 2015.
- [67] Titchmarsh E. *The Theory of Functions*, Oxford University Press, 1939.
- [68] Thomas George B. Jr., Hass Joel, Heil Christopher & Maurice D. Weir. *Απειροστικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2021.
- [69] Ulam S.N. & von Neumann J., *On combination of stochastic and deterministic processes*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) p. 1120 (Summer Meeting of the AMS in 1947)
- [70] Εκδότες: Vaidyanathan S. & Azar A. T. *Backstepping Control of Nonlinear Dynamical Systems*, Elsevier Ltd, 2021.
- [71] Vellekoop M. & Berglund R. *On Intervals, Transitivity = Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 101, No. 4, Απρίλιος 1994, σελ. 353-355.
- [72] Verhulst P.F. *Notice on the law that a population follows in its growth*, Corr. math. phys. 10 (1838), σελ. 113-121. Μετάφραση από D. H. Delphenich
- [73] Wei N. *Solutions of the Inverse Frobenius-Perron Problem*, A Thesis for The Department of Mathematics and Statistics Presented in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science (Mathematics) at Concordia University Montréal, Québec, Canada, 2015.
- [74] Wolfram S. *A new kind of science*, Wolfram Media, Inc., 2002.
- [75] Pinchover Y. & Jacob R.. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.
- [76] Αλικάκος Ν. Δ. & Καλογερόπουλος Γ. Η. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, 2021.
- [77] Δανίκας Ν & Μαριάς Μ. Γ. *Μαθήματα Διαφορικού Λογισμού Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Ζήτη, 2003.
- [78] Νικολόπουλος Γ. *Η Κυβερνητική*, Επιστημονικές Εκδόσεις Αρκάδι, 1972.
- [79] Τζελέκης Κ. Π. *Αγγλο-ελληνικό Μαθηματικό Λεξικό*, Εκδόσεις Πατάκη, 2002.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα :

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.