



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Σπουδών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Μαθηματικά μοντέλα για τη δυναμική του DNA
και των πρωτεϊνών.

Διπλωματική Εργασία
του
Αθανάσιου Παρασκευόπουλου

Επιβλέπων: Καραχάλιος Νικόλαος

Πάτρα
14 Οκτωβρίου 2024

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Αθανάσιου Παρασκευόπουλου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας / δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσης τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μεταβίβαση, διανομή, έκδοση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάταρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα / δημιουργού. Ο συγγραφέας / δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Σπουδών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Μαθηματικά μοντέλα για τη δυναμική του DNA και των πρωτεϊνών.

Αθανάσιος Παρασκευόπουλος

Επιτροπή Επιβλέψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:	Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Καραχάλιος Νικόλαος	Νικολόπουλος Χρήστος
Καθηγητής	Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας	Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πάτρα
14 Οκτωβρίου 2024

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα πραγματοποιηθεί μια εισαγωγή στη μελέτη μαθηματικών μοντέλων για τη δυναμική του DNA και πρωτεϊνών. Σύγχρονες μελέτες έχουν αποδείξει ότι τα μαθηματικά μοντέλα στο πλαίσιο των δυναμικών συστημάτων πλέγματος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικά και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη μελέτη της συμπεριφοράς τους είναι σε απόλυτη συμφωνία με πειραματικά δεδομένα για την περιγραφή σύνθετων φαινομένων που αφορούν την εξέλιξη μοριακών αλυσίδων όπως το DNA (δυναμική της διπλής έλικας) αλλά και της αναδίπλωσης πρωτεϊνών. Θα μελετηθούν από μαθηματικής πλευράς οι σχετικές διακριτές εξισώσεις Klein-Gordon και μέσω της ολικής θεωρίας διακλαδώσεων η ποικιλομορφία των στάσιμων καταστάσεων που σχετίζεται με τη δυναμική των μακρομορίων. Η θεωρητική μελέτη θα συνοδευθεί από αριθμητικές προσομοιώσεις.

Λέξεις-κλειδιά: Δυναμική του DNA, Διακριτή Εξίσωση Klein-Gordon, Δυναμική των Πρωτεϊνών, Θεωρία Διακλαδώσεων, Μη Γραμμική Δυναμική

Abstract

In this paper, an introduction to the study of mathematical models for DNA and protein dynamics will be given. Modern studies have shown that mathematical models in the context of dynamical lattice systems are highly effective and the conclusions drawn from the study of their behavior are in perfect agreement with experimental data for the description of complex phenomena concerning the evolution of molecular chains such as DNA (double helix dynamics) and protein folding. From a mathematical point of view, the relevant discrete Klein-Gordon equations will be studied and, through the total branching theory, the diversity of stationary states related to macromolecular dynamics will be studied. The theoretical study will be accompanied by numerical simulations.

Keywords: DNA Dynamics, Discrete Klein-Gordon Equation, Protein Dynamics, Branching Theory, Nonlinear Dynamics

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία δε θα είχε περατωθεί χωρίς να έχω τη στήριξη ορισμένων ανθρώπων τους οποίους θέλω να ευχαριστήσω ολόψυχα. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κύριο Νικόλαο Καραχάλιο τόσο για την υπόδειξη του θέματος της εργασίας όσο και για την συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη που μου έδειξε καθ'όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Τον ευχαριστώ επίσης για τις συμβουλές, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, καθώς και για την προτροπή του να ασχοληθώ με το πρόγραμμα WOLFRAM MATHEMATICA πέραν του περιεχομένου της εργασίας. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου για τη στήριξη και την ενθάρρυνση που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Αριστερή εικόνα: Γράφημα του δυναμικού (2.3) για $\omega_d^2 = 10$ (συνεχείς μπλέ καμπύλη) και $\omega_d^2 = 100$ (διακεκομμένη μαύρη καμπύλη), όταν $\beta = 1$. Δεξιά εικόνα: Δυναμική στην περίπτωση του αντι-συνεχούς ορίου $k = 0$, όταν $\omega_d^2 = 1, \beta = 1, \delta = 0.01$: κάθε ταλαντωτής U_n υπακούει στην εξίσωση Duffing με γραμμική τριβή.	17
2.2	Δυναμική για αρχική συνθήκη (2.140), για $\omega_d^2 = 1$ για διάφορες τιμές πλάτους. Μειώνοντας τις τιμές του πλάτους, παρατηρούμε τη σύγκλιση σε σημεία ισορροπίας διαφορετικών κλαδιών από το C_{E_4}	38
2.3	(Συνέχεια του Σχήματος 2.2): Ανίχνευση ενός κατωφλιού ευστάθειας $a^* = 1.45$: Για $a \leq a^*$, η αρχική συνθήκη (2.140), $U_n(0) \simeq C_{E_4}$, συγκλίνει σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας $\Phi_4 \in C_{E_4}$	39
2.4	Δυναμική για μια αρχική συνθήκη (2.145), για $\omega_d^2 = 1, K = 99, L = 200, \beta = 1$ και για διάφορες τιμές της δύναμης απόσβεσης δ	40

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων	iv
1 Δυναμικά Συστήματα	1
1.1 Ο χώρος ℓ^p	1
1.2 Προσέγγιση Πεπερασμένων Διαφορών της Δεύτερης Παραγώγου	2
2 Δυναμική της σύγκλισης σε Καταστάσεις Ισορροπίας σε Πλέγμα Klein-Gordon με Τριβή	6
2.1 Διακριτή Εξίσωση Klein-Gordon	6
2.2 Η Διακριτή εξίσωση Klein-Gordon με Δυναμική ϕ^4	8
2.3 Σύγκλιση σε Σημεία Ισορροπίας	11
2.3.1 Καθολική Ύπαρξη Λύσεων	12
2.3.2 Απόδειξη της Σύγκλισης	15
2.4 Διακλαδώσεις των Μη-Γραμμικών Σημείων Ισορροπίας	30
2.5 Αριθμητική μελέτη	35
2.5.1 Εξέλιξη των Χωρικά Εκτεταμένων Αρχικών Συνθηκών	37
2.5.2 Εξέλιξη των Χωρικά Εντοπισμένων Αρχικών Συνθηκών	39
2.6 Συμπέρασμα	40
A' Ακρωνύμια και συντομογραφίες	45
B' Κώδικας Mathematica	46

Κεφάλαιο 1

Δυναμικά Συστήματα

Ξεκινάμε με ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, στο οποίο γίνεται μια σύντομη αναφορά βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων από τη περιοχή των δυναμικών συστημάτων.

1.1 Ο χώρος ℓ^p

Θα αναφέρουμε κάποια χαρακτηριστικά των χώρων φάσεων για τα δυναμικά συστήματα που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να ταξινομούμε ακολουθίες πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών, με βάση του βαθμού της αθροιστικότητας τους. Συμβολίζουμε με ℓ^p το σύνολο των διπλά άπειρα ακολουθιών $u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, για τις οποίες η νόρμα,

$$\|u\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } 0 < p < \infty \\ \sup_{-\infty < n < \infty} |u_n| & \text{αν } p = \infty \end{cases}$$

είναι πεπερασμένη.

Αν $1 \leq p \leq \infty$ τότε, ο ℓ^p είναι ένας χώρος Banach με νόρμα $\|\cdot\|_{\ell^p}$. Για $-\infty < n < \infty$, μπορούμε να ορίσουμε ακολουθίες όπως οι $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, ή ακόμα και πεπερασμένες ακολουθίες όπως $\{u_n\}_{n=k}^m$ στις οποίες ισχύει ότι $u_n = 0$ για n έξω από ένα καθορισμένο διάστημα. Έτσι καθορίζουν τους υποχώρους ℓ^p .

Οι ανισώσεις Hölder, Minkowski και Young προκύπτουν για τους χώρους ℓ^p από τις ίδιες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τους χώρους $L^p(\mathbb{R})$. Πιο συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι έχουμε τις εξής ακολουθίες, $u = (u_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ και $v = (v_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν $u \in \ell^p$ και $v \in \ell^q$ τότε, $uv = \{u_n v_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^r$, όπου r ικανοποιεί την σχέση $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ και ισχύει ότι

$$\|uv\|_{\ell^r} \leq \|u\|_{\ell^p} \cdot \|v\|_{\ell^q} \quad (\text{Ανισότητα Hölder})$$

(β) Αν $u, v \in \ell^p$ τότε,

$$\|u + v\|_{\ell^p} \leq \|u\|_{\ell^p} + \|v\|_{\ell^p} \quad (\text{Ανισότητα Minkowski})$$

(γ) Αν $u \in \ell^p$ και $v \in \ell^q$ όπου ισχύει $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ τότε, οι σειρές $(u * v)_n$ που ορίζονται από την σχέση:

$$(u * v)_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{n-m} v_m, \quad \infty < n < \infty$$

συγκλίνουν απόλυτα. Επιπλέον οι ακολουθίες $u * v$ ονομάζονται συνέλιξη των u και v που ανήκουν στον χώρο ℓ^r με $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ και

$$\|u * v\|_{\ell^r} \leq \|u\|_{\ell^p} \cdot \|v\|_{\ell^q} \quad (\text{Ανισότητα Young})$$

Είναι αναγκαίο να παρατηρήσουμε ωστόσο, ότι οι χώροι ℓ^p εμφυτεύοντας ο ένας στον άλλο με την αντίστροφη σειρά σε σχέση με τις εμφυτεύσεις των $L^p(\Omega)$, όπου Ω είναι πεπερασμένο.

Αν ισχύει ότι $0 < p \leq q \leq \infty$ τότε, έχουμε ότι

$$\ell^p \rightarrow \ell^q, \quad \|u\|_{\ell^q} \leq \|u\|_{\ell^p} \quad (1.1)$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής αν $q = \infty$ και προκύπτει για $q \geq p$, από την άθροιση

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|u_n\|^q &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|u_n\|^p \|u_n\|^{q-p} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right) \|u_n\|_{\ell^\infty}^{q-p} \\ &\leq \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_n|^p \right) \|u_n\|_{\ell^p}^{q-p}. \end{aligned}$$

1.2 Προσέγγιση Πεπερασμένων Διαφορών της Δεύτερης Παραγώγου

Σε αυτή την παράγραφο, θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες του τελεστή πεπερασμένων διαφορών 2ης τάξης, που ορίζεται από την σχέση

$$A(u) = -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} \quad (1.2)$$

Αναγνωρίζουμε τον παραπάνω τελεστή, ως την προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών της δεύτερης παραγώγου μια συνάρτησης. Στα δυναμικά συστήματα πλέγματος, όπως οι διακριτές εξισώσεις Klein-Gordon και Schrödinger, περιγράφει συνήθως την γραμμική σύζευξη των σωματιδίων του πλέγματος. [3] Έστω $u, v \in \ell^2$ όπου $u = (u_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$ και $v = (v_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$. Παρατηρούμε ότι

$$u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = (u_{n+1} - u_n)v_n + u_{n+1}(v_{n+1} - v_n), \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

Θα αθροίσουμε κατ'αρχήν από την $n = -k$ έως $n = k$, και στην συνέχεια, θα θεωρήσουμε το όριο για $k \rightarrow \infty$. Η εξίσωση (1.3) μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$(u_{n+1} - u_n)v_n = u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n - u_{n+1}(v_{n+1} - v_n).$$

Έτσι θεωρώντας τα αθροίσματα στην παραπάνω σχέση, έχουμε ότι

$$\sum_{n=-k}^k (u_{n+1} - u_n)v_n = \sum_{n=-k}^k u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n - \sum_{n=-k}^k u_{n+1}(v_{n+1} - v_n). \quad (1.4)$$

Για τον πρώτο όρο του δεξιού μέρους της Εξ. (1.4), έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=-k}^k u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n &= (u_{-k+1}v_{-k+1} - u_{-k}v_{-k}) \\ &+ (u_{-k+2}v_{-k+2} - u_{-k+1}v_{-k+1}) \\ &+ \cdots + (u_kv_k - u_{k-1}v_{k-1}) + (u_{k+1}v_{k+1} - u_kv_k) \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\sum_{n=-k}^k u_{n+1}v_{n+1} - u_nv_n = u_{k+1}v_{k+1} - u_{-k}v_{-k}$$

Έτσι καταλήγουμε στην σχέση

$$\sum_{n=-k}^k (u_{n+1} - u_n)v_n = u_{k+1}v_{k+1} - u_{-k}v_{-k} - \sum_{n=-k}^k u_{n+1}(v_{n+1} - v_n). \quad (1.5)$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι $u, v \in \ell^2$, καθώς $k \rightarrow \infty$, οι όροι

$$\sum_{n=-k}^k (u_{n+1} - u_n)v_n,$$

και

$$\sum_{n=-k}^k u_{n+1}(v_{n+1} - v_n),$$

υπάρχουν. Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\sum_{n=-k}^k (u_{n+1} - u_n)v_n = \sum_{n=-k}^k u_{n+1}v_n - u_nv_n = \sum_{n=-k}^k u_{n+1}v_n - \sum_{n=-k}^k u_nv_n$$

Αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Hölder για αθροίσματα, τότε:

$$\left| \sum_{n=-k}^k u_{n+1}v_n \right| \leq \left(\sum_{n=-k}^k u_{n+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-k}^k v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_{n+1}\|_{\ell^2} \|v_n\|_{\ell^2}$$

και

$$\left| \sum_{n=-k}^k u_nv_n \right| \leq \left(\sum_{n=-k}^k u_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-k}^k v_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u_n\|_{\ell^2} \|v_n\|_{\ell^2}$$

Επομένως, αν λάβουμε το όριο καθώς $k \rightarrow \infty$ οι όροι συγκλίνουν. Επίσης καθώς, $k \rightarrow \infty$, επειδή $u, v \in \ell^2$ ισχύει ότι $u_n \rightarrow 0, v_n \rightarrow 0$. Συνεπώς ισχύει

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u_{k+1}v_{k+1} - u_{-k}v_{-k}) = 0$$

και συμπεραίνουμε ότι $\forall u, v \in \ell^2$

$$\sum_{n=-k}^k (u_{n+1} - u_n)v_n = - \sum_{n=-k}^k u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) \quad (1.6)$$

Πρόταση 1.2.1. Για κάθε $u, v \in \ell^2$ ο τελεστής A είναι:

1. γραμμικός,
2. συνεχής,
3. συμμετρικός.

Απόδειξη. 1. Πράγματι, ο τελεστής είναι γραμμικός εφόσον

$$\begin{aligned} A(u + v) &= - \frac{(u_{n+1} + v_{n+1}) - 2(u_n + v_n) + (u_{n-1} + v_{n-1})}{h^2} \\ &= - \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - \frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{h^2} \\ &= A(u) + A(v) \end{aligned}$$

2. Επίσης ο τελεστής είναι συνεχής, γιατί ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|A(u)\|_{\ell^2}^2 &:= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}|^2 \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|u_{n+1}| + |2u_n| + |u_{n-1}|)^2 \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{n+1}|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |2u_n|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u_{n-1}|^2 \\ &\quad + 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{n+1}u_n + 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{n-1}u_n + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{n+1}u_{n-1} \\ &\leq 16\|u\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

Το τελευταίο μας δίνει την ανισότητα

$$\|A(u)\|_{\ell^2} \leq 4\|u\|_{\ell^2}^2. \quad (1.7)$$

Ως εκ τούτου, αφού ο τελεστής είναι γραμμικός και φραγμένος, συνεπάγεται ότι είναι και συνεχής.

3. Για να αποδείξουμε τη συμμετρία, λαμβάνουμε το εσωτερικό γινόμενο,

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v \rangle_{\ell^2} &= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})v_n \\
&= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1})]v_n \\
&= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)v_n + \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_n - u_{n-1})v_n \\
&= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_{n+1} + \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n-1} - u_n)v_{n+1} \\
&= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_{n+1} - \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_{n+1} \\
&= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)(v_{n+1} - v_n) \\
&= \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)v_{n+1} - \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)v_n \\
&= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_n + \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_{n+1} \\
&= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_n + \frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)u_n \\
&= -\frac{1}{h^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1})u_n = \langle u, A(v) \rangle_{\ell^2}
\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 2

Δυναμική της σύγκλισης σε Καταστάσεις Ισορροπίας σε Πλέγμα Klein-Gordon με Τριβή

2.1 Διακριτή Εξίσωση Klein-Gordon

Η έρευνα στα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα πλέγματος αποτελεί έναν τομέα με διαρκώς αυξανόμενο ενδιαφέρον. Οι πρώτες συστηματικές αναλύσεις αυτών των συστημάτων αναδύθηκαν στα τέλη της δεκαετίας του '30, χάρη στις εργασίες των Frenkel και Kontorova σχετικά με τις κρυσταλλικές εξαρθώσεις. Αυτές οι μελέτες οδήγησαν στη διατύπωση της διακριτής εξίσωσης Klein-Gordon (DKG). Ειδικότερα, το 1939, οι Frenkel και Kontorova πρότειναν ένα μοντέλο που περιγράφει τη δομή και τη δυναμική ενός κρυσταλλικού πλέγματος σε μια ζώνη εξάρθρωσης. Το μοντέλο FK έχει καθιερωθεί ως ένα από τα θεμελιώδη μοντέλα στη φυσική, καθώς αποδεικνύεται ότι περιγράφει με αξιοπιστία σημαντικά φαινόμενα που παρατηρούνται σε διακριτά μέσα.

Η εξίσωση που θα εξετάσουμε είναι μια παραλλαγή της εξής μορφής [12]:

$$\ddot{\theta}_n - K(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) = \omega^2 F(\theta_n); F(\theta) = \sin \theta \quad (2.1)$$

Η διαδικασία που περιγράφεται αφορά την προσέγγιση μιας μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης μέσω της μεθόδου Taylor και την απλούστευσή της σε ένα γραμμικό μοντέλο. Ας αναλύσουμε βήμα προς βήμα τη διαδικασία από την αρχική εξίσωση προς την τελική της μορφή.

Για μικρές γωνίες, το $\sin \theta$ μπορεί να προσεγγιστεί μέσω της σειράς Taylor ως:

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!}$$

Αντικαθιστούμε το $F(\theta)$ στην αρχική εξίσωση με την προσέγγιση Taylor:

$$\ddot{\theta}_n - K(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) = \omega^2 \left(\theta_n - \frac{\theta_n^3}{3!} \right)$$

Για την αντιστοίχιση αυτής της εξίσωσης σε ένα γραμμικό μοντέλο, θεωρούμε ότι οι γωνίες θ_n αντιστοιχούν σε μετατοπίσεις x_n σε ένα σύστημα μαζών και ελατηρίων. Έτσι, η εξίσωση μετασχηματίζεται σε:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} - K(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = \omega^2 \left(x_n - \frac{x_n^3}{3!} \right)$$

Αναγνωρίζουμε ότι ο όρος $\frac{x_n^3}{3!}$ εκφράζει τη μη-γραμμικότητα του συστήματος, ενώ β είναι ένας συντελεστής που αντιστοιχεί σε αυτή τη μη-γραμμικότητα, απλοποιώντας την έκφραση.

Η τελική μορφή της εξίσωσης είναι:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} - \kappa(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = \omega_d^2(x_n - \beta x_n^3)$$

Η ακριβής τιμή του β εξαρτάται από την αντιστοίχιση των συντελεστών στην προσέγγιση Taylor και την εφαρμογή της στο συγκεκριμένο φυσικό πρόβλημα.

Ο κύριος στόχος μας είναι να εξάγουμε αποτελέσματα σχετικά με την ευστάθεια και τη σύγκλιση σε μη-γραμμικά πλέγματα υπό μη-γραμμικές συνθήκες.

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εξετάσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της διακριτής εξίσωσης Klein-Gordon:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} - \kappa(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = \omega_d^2(x_n - \beta x_n^3)$$

Ο όρος $\kappa(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$ αποτελεί μια γενίκευση του νόμου του Hooke σε ένα διακριτό και μη-γραμμικό πλαίσιο, όπου κ είναι η σταθερά ελαστικότητας που δείχνει την αντίσταση ενός σώματος στην παραμόρφωση, αντικατοπτρίζοντας την αλληλεπίδραση ενός σημείου με τα δύο άμεσα γειτονικά του σημεία σε μια διακριτή δομή.

Η διαφορά $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}$ παρέχει μια μέτρηση της καμπυλότητας ή της διαφοράς κλίσης της συνάρτησης στο σημείο n .

Ο όρος $\frac{d^2 x_n}{dt^2}$ αποκαλύπτει την εξέλιξη της κίνησης του σώματος.

Στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης, ο όρος $\omega_d^2(x_n - \beta x_n^3)$ περιγράφει μια μη-γραμμική δυναμική που επηρεάζει το n -οστό σωματίδιο, με τον ω_d^2 να αντιπροσωπεύει το τετράγωνο μιας συχνότητας που καθορίζει την ένταση της γραμμικής απόκρισης του συστήματος στις μετατοπίσεις των σωματιδίων από την ισορροπία τους, ενώ ο όρος $-\beta x_n^3$ εισάγει μια μη-γραμμικότητα στην εξίσωση, με το β να είναι μια σταθερά που καθορίζει την ένταση της μη-γραμμικής αλληλεπίδρασης, λαμβάνοντας υπόψη τις μη-γραμμικές δυνάμεις που ενεργούν στο σωματίδιο, οι οποίες γίνονται σημαντικότερες καθώς οι μετατοπίσεις από την ισορροπία αυξάνονται.

2.2 Η Διακριτή εξίσωση Klein-Gordon με Δυναμική ϕ^4

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη της δυναμικής της διακριτή εξίσωσης Klein-Gordon (DKG) με τριβή,

$$\ddot{U}_n - K(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \delta \dot{U}_n + W'(U_n) = 0; \beta > 0, \delta > 0 \quad (2.2)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η W περιγράφει την συνάρτηση δυναμικού

$$W(U_n) = -\frac{\omega_d^2}{2} U_n^2 + \frac{\beta \omega_d^2}{4} U_n^4 \quad (2.3)$$

στην οποία υπακούει κάθε συζευγμένη μονάδα U_n . Στην εξίσωση (2.2), η μεταβλητή $U_n(t)$ είναι η άγνωστη μετατόπιση του ταλαντωτή που καταλαμβάνει την n -ιοστή θέση του πλέγματος και $\kappa = h^{-2}$ είναι η παράμετρος της διακριτοποίησης. Ορίζουμε h την απόσταση μεταξύ των ταλαντωτών του πλέγματος. Η αλυσίδα (DKG) περιέχει γραμμική φθορά με συντελεστή φθοράς $\delta > 0$, ενώ ο β είναι ο συντελεστής του μη γραμμικού κυβικού όρου.

Όταν $\delta = 0$, η εξίσωση (2.2) είναι γνωστή ως διακριτό μοντέλο ϕ^4 . Αυτό το μοντέλο, είναι ένα από τα θεμελιώδη μη γραμμικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται στην φυσική. Το ζήτημα της διακριτοποίησης της Χαμιλτονιανής περίπτωσης του μοντέλου ϕ^4 , έχει προσελκύσει έντονο ενδιαφέρον τις τελευταίες δυο δεκαετίες. [4] [9] [10] Οι διακριτοποιήσεις επηρεάζουν σημαντικά ιδιότητες της συνεχούς μη-ολοκληρώσιμης περίπτωσης του μοντέλου, όπως οι συγκρούσεις των σολιτονίων fractal. ([2] [5])

Τόσο η συνεχής, όσο και η διακριτή μορφή του μοντέλου ϕ^4 , έχουν χρησιμοποιηθεί στην θεωρία Ginzburg-Landau η οποία περιγράφει την υπεραγωγιμότητα ηλεκτρονίων, στην θεωρία των σιδηρομαγνητικών και σιδηροηλεκτρικών υλικών, στο φαινόμενο της συνδεσμολογίας Josephson και στην μη γραμμική οπτική. Επίσης το μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί ακόμα και στον κλάδο της Βιολογίας περιγράφοντας τοπολογικές διεγέρσεις σε μακρομόρια, ή στην αλυσίδα ζεύγων βάσεων του DNA. Είναι μια από τις δυο εξισώσεις του συστήματος Davydov που περιγράφει τη δυναμική μεταφοράς ενέργειας που μεταφέρεται σε μια πρωτεΐνη από τον μηχανισμό υδρόλυσης-ATP. Το μοντέλο (DKG), όπως και το μιγαδικό ανάλογο, η Διακριτή Μη-Γραμμική Schrödinger, (DNLS) [20], το οποίο είναι και αυτό ένα δυναμικό πλέγμα με μη κυβική μη-γραμμικότητα, έχουν προσελκύσει έντονο ενδιαφέρον. Και αυτό λόγω ότι αποτελούν πρωτότυπα συστήματα, στα οποία η αλληλεπίδραση της διακριτότητας και της μη-γραμμικότητας μπορεί να αξιολογηθεί και να συγκριθεί με το αντίστοιχο συνεχές όριο των εξισώσεων αυτών, δηλαδή τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDEs), (NLS) και (KG). Γενικά, οι κρίσιμες διαφορές μεταξύ των (PDEs) και των διακριτών μοντέλων, προκαλούνται από την παραβίαση του αναλλοιώτου ως προς τις όποιες χωρικές μετατοπίσεις (translation invariance), στα τελευταία. Αυτό με την σειρά του έχει σαν αποτέλεσμα, την εμφάνιση των λεγόμενων φραγμάτων (Peierls-Nabarro). ([20] [8])

Το μοντέλο ϕ^4 (2.2), είναι το θεμελιώδες μοντέλο για τη μελέτη μεταβατικών καταστάσεων που παρατηρούνται σε αλυσίδες συζευγμένων σωματιδίων. Ξεκινώντας από το πεδίο έλξης μιας τοπικά ευσταθούς κατάστασης, τα σωματίδια διαφεύγουν σε μια γειτονική ευσταθή κατάσταση, μέσο ενός ενεργειακού φράγματος. ([1] [16] [17]) Το ενεργειακό φράγμα αντιστοιχεί στο τοπικό μέγιστο του δυναμικού, το οποίο σχετίζεται με ένα σωματικό σημείο και διαχωρίζει τα δυο ελάχιστα του δυναμικού. Τότε, μπορεί να υπάρχουν

τοπολογικές διεγέρσεις "υπό την μορφή kink", οι οποίες παρεμβάλουν μεταξύ των ελαχίστων και παίζουν κρίσιμο ρόλο στη μελέτη των πιθανών μεταβάσεων. Ενώ είναι γνωστό ότι τα διακριτά μοντέλα επιτρέπουν στάσιμες λύσεις kink, ([6] [26]) η παραβίαση του αναλλοίωτου ως προς τις όποιες χωρικές μετατοπίσεις, εγείρει ένα σημαντικό ερώτημα. Αυτό διερευνά αν υπάρχουν οδεύοντα kinks.

Επιστρέφοντας ξανά στην περίπτωση του μοντέλου το οποίο περιέχει τριβή, η παραπάνω φαινομενολογία των μεταβατικών καταστάσεων, έχει διερευνηθεί σε διάφορα φυσικά φαινόμενα. Σε αυτά οι επιδράσεις της τριβής έχουν προεξέχοντα ρόλο, όπου μεταξύ άλλων, μεταβάσεις φάσης, χημική κινητική και άλλα, ([13] [21] [23] [24] [28]) Συγκεκριμένα, όταν $\delta > 0$, το αντίστοιχο του διακριτού μοντέλου ϕ^4 με γραμμική τριβή (2.2), έχει προφανή σημασία για τα διακριτά φυσικά φαινόμενα τα οποία αναφέρθηκαν παραπάνω, όταν οι επιδράσεις τριβής δεν μπορούν να αμεληθούν. ([7] [11] [19] [22])

Στην μελέτη αυτή, θέλουμε να διερευνήσουμε τη δομή του συνόλου των πιθανών σημείων ισοροπίας, της παραπάνω εξίσωσης, η οποία παίζει το ρόλο του ελκυστή για τη δυναμική της όταν $\delta > 0$ [31]. Εφοδιάζοντας την εξίσωση (2.2) με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, το σύστημα ανήκει στην κλάση ενός δυναμικού συστήματος κλίσης (gradient system), δεύτερης τάξης και πεπερασμένης διάστασης. Για αυτό το σύστημα η Χαμιλτονιανή ενέργεια έχει το ρόλο της συνάρτησης Lyapunov. Στην παραπάνω διακριτή περίπτωση, χρησιμοποιούμε μια διακριτή εκδοχή της ανισότητας Łojasiewicz, ([14] [15]) για να αποδείξουμε ότι όλες οι φραγμένες λύσεις συγκλίνουν σε σημείο ισοροπίας. Αυτά τα σημεία είναι οι λύσεις του στάσιμου προβλήματος:

$$-\kappa(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) = \omega_a^2(U_n - \beta U_n^3) \quad (2.4)$$

Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι η ανισότητα Łojasiewicz αναδεικνύεται ως ένα σημαντικό εργαλείο για τη διερεύνηση των προβλημάτων στα μη-γραμμικά πλέγματα. Η περίπτωση της αλυδίσας (DKG) με ένα δυναμικό ϕ^4 είναι μόνο ένα παράδειγμα ενός δυναμικού συστήματος πλέγματος, δευτέρου βαθμού. Η προσέγγιση του προβλήματος που χρησιμοποιούμε σε αυτή τη μελέτη, μπορεί να καλύπτει μια ευρεία κλάση δυναμικών συστημάτων κλίσης με τριβή.

Παρόλο που από την άποψη της τοπολογίας του χώρου φάσεων, η δομή του καθολικού ελκυστή είναι τετριμμένη (εφόσον αποτελείται από μοναδικό σημείο ισοροπίας), σε αυτή τη μελέτη δείχνουμε ότι η δομή του συνόλου ισοροπίας δεν είναι διόλου τετριμμένη. Για τις αναλυτικές μας εκτιμήσεις, εφαρμόζουμε αποτελέσματα καθολικών διακλάδωσεων ([27] [30]) στην εξίσωση (2.3). Θεωρούμε ως παράμετρο διακλάδωσης την ω_a^2 , για να δείξουμε ότι η κάθε γραμμική ιδιοκατάσταση του συστήματος (δηλαδή λύση υπό την απουσία της μη-γραμμικότητας), μπορεί να επεκταθεί σε μια αντίστοιχη μη-γραμμική. Μια τέτοια αναλυτική προσέγγιση, προσφέρει το πλεονέκτημα του χαρακτηρισμού των κλαδιών των σημείων ισοροπίας, με βάση τον αριθμό αλλαγών προσήμων των λύσεων που σχετίζονται με το κλαδί. Αυτό είναι το φυσικό επακόλουθο της φύσης του γραμμικού αυτοσυζυγή τελεστή και των υποθέσεων της θεωρίας Sturm-Liouville, για τη περίπτωση της μιας διάστασης που μας ενδιαφέρει σε αυτή τη μελέτη. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι, εξαιτίας αυτών των αλλαγών προσήμου, τα μη-γραμμικά σημεία ισοροπίας, ως στοιχεία των κλαδιών, μπορεί να ορίζουν μη-τετριμμένες τοπολογικές διασυνδέσεις μεταξύ των στάσιμων καταστάσεων. Αυτές οι καταστάσεις σχετίζονται με τα συμμετρικά ελάχιστα δυναμικού. Αυτό μας παρέχει με τη σειρά του τη δυνατότητα

της σύνδεσης των καταστάσεων ισορροπίας, οι οποίες θεωρούνται εδώ ως παραλλαγές multi-kink του ενός ή δυο kink. Αυτές είναι καταστάσεις που έχουν μελετηθεί σε προηγούμενες μελέτες.

Ένα σημαντικό ερώτημα, στο πλαίσιο του συστήματος (DKG) (2.2), αφορά το βασικό μηχανισμό ο οποίος οδηγεί την επιλογή της τελικής κατάστασης της σύγκλισης. Έτσι διερευνούμε αυτό το ερώτημα με αναλυτικές εκτιμήσεις, οι οποίες επιβεβαιώνονται απο αριθμητικές προσομοιώσεις. Υπό το πρίσμα της ανάλυσης των καθολικών διακλαδώσεων, με μια τέτοια προσέγγιση επιδιώκουμε να εξετάσουμε την πιθανή δυναμική ευστάθεια των κλάδιών των σημείων ισορροπίας. Έτσι θεωρούμε δυο ξεχωριστά σενάρια για την αρχική συνθήκη $U_n(0)$ και την παράμετρο διακλάδωσης ω_a^2 . Και για τα δυο σενάρια, θεωρούμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες $U_n(0)$ (που μοιάζουν με τις γραμμικές ιδιοκαταστάσεις) και μηδενικές ταχύτητες $U_n(0) = 0$, ως εξής.

Για το Σενάριο (I), θεωρούμε ζευγάρια $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2)$, τα οποία από μικρές τιμές του ω_a^2 και αρχικές τιμές των οποίων η νόρμα ορίζει ένα σημείο τοπικού διαγράμματος διακλαδώσεων ως εξής: η αρχική συνθήκη έχει τον ίδιο αριθμό αλλαγών προσήμου με αυτό ενός συγκεκριμένου κλαδιού. Λέμε ότι μια τέτοια αρχική συνθήκη είναι όμοια με ένα κλαδί σημείων ισορροπίας. Με αυτό τον τρόπο, το σημείο $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2)$, έχει επιλεγεί σε μια αρκετά μικρή γειτονία ενός σημείου ισορροπίας του όμοιου κλαδιού. Με το Σενάριο (I), επιδιώκουμε να εκμεταλλευτούμε το πλεονέκτημα δομής των κλαδιών των σημείων ισορροπίας μαζί με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας, η οποία σχετίζεται με αυτή. Επιβεβαιώνουμε αριθμητικά - με εξαιρετική συμφωνία- τις αναλυτικές προβλέψεις για τη γεωμετρική δομή των κλαδιών, (σύμφωνα με το θεώρημα καθολικών διακλαδώσεων [3] σελ.20 [27] [30]), καθώς και το αποτέλεσμα της αστάθειας στη δυναμική σύγκλισης. Το τελευταίο δηλώνεται από την μεταευστάθεια, φαινόμενο κατά το οποίο τροχιές συνδέουν διαφορετικά σημεία ισορροπίας, μεταβαίνοντας προοδευτικά από περισσότερο σε λιγότερο ασταθείς καταστάσεις. Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι, η εξέλιξη της Χαμιλτονιανής ενέργειας, είναι ένα αποτελεσματικό εργαλείο για τη πιθανή μεταευσταθή δυναμική.

Για το Σενάριο (II), θεωρούμε μια τυχαία τιμή της παραμέτρου διακλάδωσης ω_a^2 , ενώ η αρχική συνθήκη είναι και σε αυτή την περίπτωση όμοια με ένα συγκεκριμένο κλαδί. Ωστόσο, η νόρμα της είναι αρκετά μεγάλη, έτσι ώστε το αντίστοιχο σημείο $(\|U_n(0)\|, \omega_a^2)$, να είναι αρκετά μακριά από το αντίστοιχο τοπικό διάγραμμα διακλαδώσεων. Στην πραγματικότητα το Σενάριο (II), θέλουμε να ξεκινήσουμε τη μελέτη μας για τη δομή του διαγράμματος καθολικών διακλαδώσεων και τις ευστάθειας οι οποίες σχετίζονται με αυτό. Για την αριθμητική μας διερεύνηση θεωρούμε σταθερές τις τιμές της παραμέτρου ω_a^2 εκτός του γραμμικού φάσματος, ενώ μειώνουμε προοδευτικά το πλάτος μιας αρχικής συνθήκης, η οποία είναι όμοια με ένα κλαδί. Είναι εντυπωσιακό το γεγονός ότι, καθώς μειώνουμε το πλάτος των αρχικών συνθηκών, τα αποτελέσματα που εξάγουμε δείχνουν αρχικά ότι συγκλίνουν σε γεωμετρικά διαφορετικές καταστάσεις ισορροπίας ενός μη-όμοιου κλαδιού. Το παραπάνω φαινόμενο πραγματοποιείται χωρίς τη μεταευσταθή μετάβαση που παρατηρήθηκε στο Σενάριο (I). Στη συνέχεια μειώνουμε περισσότερο το πλάτος και αποκαλύπτουμε την ύπαρξη ενός ενδιάμεσου διαστήματος από τιμές του πλάτους της αρχικής συνθήκης, για τις οποίες η τελευταία συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας είτε ενός όμοιου ή ενός μη-όμοιου κλαδιού. Τέλος, απεικονίζουμε την ύπαρξη ενός (άνω) κατωφλίου για το πλάτος της αρχικής συνθήκης, κάτω από το οποίο, η τροχία της αρχικής συνθήκης συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας του όμοιου κλαδιού. Αυτό καταδεικνύει ότι πάνω από την κατωφλική τιμή, το όμοιο κλαδί ίσως είναι δυναμικά α-

σταθές και ως εκ τούτου το σύστημα ακολουθεί μια διαφορετικού τύπου δυναμική. Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα, υποδηλώνουν ότι το διάγραμμα καθολικών διακλαδώσεων μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκο.

2.3 Σύγκλιση σε Σημεία Ισορροπίας

Για την ανάλυση, θα θεωρούμε έναν αυθαίρετο αριθμό $K + 2$ ταλαντωτές που καταλαμβάνουν ίσες αποστάσεις σε ένα διάστημα $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ μήκους L , με απόσταση $h = \frac{L}{K+1}$. Συνεπώς, οι ταλατωντές τοποθετούνται στα σημεία $x_n = -\frac{L}{2} + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, K + 1$ του διαστήματος $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$, με διακριτοποίηση $-\frac{L}{2} = x_0 < x_1 < \dots < x_{K+1} < \frac{L}{2}$. Με την παραπάνω περιγραφή μπορούμε στην εξίσωση (2.2), να χρησιμοποιούμε το σύντομο συμβολισμό $U(x_n, t) := U_n(t)$. Σε μερικές περιπτώσεις θα χρησιμοποιούμε το σύντομο συμβολισμό U για τα διανύσματα του \mathbb{R}^{K+2} , δηλαδή, $U := \{U_n\}_{n=0}^{K+1}$. Για την αλυσίδα (DKG) (2.2), θα θεωρήσουμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών, με αρχικές συνθήκες

$$U_n(0) = U_{n,0} \text{ και } \dot{U}_n(0) = U_{n,1} \in \mathbb{R}^{K+2} \quad (2.5)$$

και συνοριακές συνθήκες Dirichlet στα συνοριακά σημεία $x_0 = -\frac{L}{2}$ και $x_{K+1} = \frac{L}{2}$, δηλαδή:

$$U_0 = U_{K+1} = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

Όποτε γίνεται αναγκαίο, θα χρησιμοποιούμε το σύντομο συμβολισμό Δ_d για την μονοδιάστατη διακριτή Λαπλασιανή

$$\{\Delta_d U\}_{n \in \mathbb{Z}} = U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1} \quad (2.7)$$

που στη περίπτωση μας ορίζεται στο χώρο \mathbb{R}^{K+2} . Αυτό ο χώρος μπορεί να θεωρηθεί ο πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος των τετραγωνικά αθροισμών ακολουθιών, ℓ^2 . Με άλλα λόγια, θα εργαστούμε με τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του χώρου ακολουθιών ℓ^p , $1 \leq p \leq \infty$,

$$\ell_{K+2}^p = \{X \in \ell^p : X_n = X_{K+1} = 0\} \quad (2.8)$$

Δηλαδή, στην περίπτωση πεπερασμένης διάστασης έχουμε ότι $\ell_{K+2}^p \equiv \mathbb{R}^{K+2}$, οποίος είναι εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|X\|_p = \left(\sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.9)$$

Για το χώρο ℓ^p ισχύει η ισοδυναμία των νορμών,

$$\|X\|_q \leq \|X\|_p \leq (K+2)^{\frac{(q-p)}{qp}} \|X\|_q, \quad 1 \leq p \leq q < \infty \quad (2.10)$$

Ο χώρος ℓ_{K+2}^2 εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$(X, Y)_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{K+1} X_n Y_n, \quad \|X\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{K+1} X_n^2$$

του ℓ^2 . Σημειώνουμε εδώ ότι στη περίπτωση του απειροδιάστατου πλέγματος \mathbb{Z} , ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες

$$\|X\|_q \leq \|X\|_p, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty \quad (2.11)$$

$$0 \leq (-\Delta_d X, X)_{\ell^2} \leq 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |X_n|^2 \quad (2.12)$$

Οι σχέσεις (2.11), (2.12) ισχύουν και στην περίπτωση του συστήματος πεπερασμένης διάστασης.

2.3.1 Καθολική Ύπαρξη Λύσεων

Ένα σημαντικό ζήτημα προς διερεύνηση που σχετίζεται με την ασυμπτωματική συμπεριφορά των λύσεων εξελικτικών εξισώσεων είναι αυτό της καθολικής ύπαρξης λύσεων. Ξεκινάμε γράφοντας την εξίσωση (2.2) στην ακόλουθη μορφή:

$$\ddot{U} - \kappa(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \delta \dot{U} - \omega_d^2 U + g(U) = 0 \quad (2.13)$$

όπου $g(U) = \beta \omega_d^2 U_n^3$ ο μη-γραμμικός όρος. Είναι βολικό για την απόδειξη να θεωρήσουμε $\kappa = 1$. Υπενθυμίζουμε ότι $\beta > 0$. Ορίζουμε τους γραμμικούς τελεστές, $A, B, B^* : \ell^2 \rightarrow \ell^2$.

$$(BU)_{n \in \mathbb{Z}} = U_{n+1} - U_n, \quad (B^*U)_{n \in \mathbb{Z}} = U_{n-1} - U_n \quad (2.14)$$

$$(AU)_{n \in \mathbb{Z}} = -(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) \quad (2.15)$$

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι ισχύει:

$$A = B^*B = BB^*$$

Στη συνληξια ορίζουμε την ακόλουθη μη-γραμμική μορφή

$$\langle U, V \rangle_{\ell^2} = \langle BU, BV \rangle + \omega_d^2 \langle U, V \rangle \quad (2.16)$$

με νόρμα

$$\|U\|_{\ell^2} = \langle U, U \rangle_{\ell^2} = \|BU\|^2 + \omega_d^2 \|U\|^2$$

Επιπλέον αν $\mathcal{X} = \ell^2$ και $\mathcal{V} = \ell_1^2$ ισχύει ότι

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{V}^* \quad (2.17)$$

όπου οι εμφυτεύσεις είναι πυκνές και συνεχείς. Συμβολίζουμε με \mathcal{V}^* τον δυικό του \mathcal{V} . Ενώ ισχύει ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_{\ell_1^2}$ και $\|\cdot\|_{\ell^2}$ είναι ισοδύναμες διότι :

$$\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2 \leq \|U\|_{\ell_1^2}^2 \leq (4 + \omega_d^2) \|U\|_{\ell^2}^2 \quad (2.18)$$

Όπως θα δούμε και παρακάτω, για τη πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή A ισχύει ότι,

$$E_1 = \inf_{U \in \ell_1^2} \frac{\langle AU, U \rangle_{\ell^2}}{\|U\|_{\ell^2}^2} \quad (2.19)$$

Έτσι προκύπτει ότι $\langle AU, U \rangle_{\ell^2} \geq \|U\|_{\ell^2}^2$.

Θεώρημα 2.3.1. Για κάθε αρχική συνθήκη, οι λύσεις του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6) ορίζονται καθολικά στο χρόνο.

Απόδειξη. Θα περιοριστούμε για συντομία στην πιο σύνθετη περίπτωση όπου $\omega_d^2 > E_1$. Στόχος μας είναι να χρησιμοποιήσουμε τη παραπάνω ημι-γραμμική μορφή. Ξαναγράψουμε την εξίσωση (2.13) στην ακόλουθη μορφή,

$$\ddot{U} + \delta\dot{U} + AU + \omega_d^2 U + g(U) = 2\omega_d^2 U \quad (2.20)$$

Θέτουμε $V = \dot{U} + \varepsilon U$, όπου $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, επιλέγουμε

$$\varepsilon_0 = \min\left(\frac{\delta}{4}, \frac{E_1}{2\delta}\right) \quad (2.21)$$

Τότε, η εξίσωση (2.20) γίνεται

$$\dot{V} - \varepsilon\dot{U} + \delta\dot{U} + AU + \omega_d^2 U + g(U) = 2\omega_d^2 U \quad (2.22)$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης (2.22) με V , έχουμε ότι

$$\langle \dot{V}, V \rangle_{\ell^2} - \langle \varepsilon\dot{U}, V \rangle_{\ell^2} + \langle \delta\dot{U}, V \rangle_{\ell^2} + \langle AU, V \rangle_{\ell^2} + \langle \omega_d^2 U, V \rangle_{\ell^2} + \langle g(U), V \rangle_{\ell^2} = \langle 2\omega_d^2 U, V \rangle_{\ell^2}$$

Χρησιμοποιώντας την ημι-γραμμική μορφή (2.16) του τελεστή A καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|U\|_{\ell^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2] + \varepsilon\|U\|_{\ell^2}^2 + (\delta - \varepsilon)\|V\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon(\delta - \varepsilon)\langle U, V \rangle_{\ell^2} + \langle g(U), V \rangle_{\ell^2} \\ = \langle 2\omega_d^2 U, V \rangle_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Χρειαζόμαστε σε αυτό το σημείο κάποιες εκτιμήσεις πριν προχωρήσουμε. Η επιλογή του ε (2.21), μαζί με την ανισότητα $\langle U, V \rangle_{\ell^2} \geq \frac{1}{\sqrt{E_1}}\|U\|_{\ell^1}\|V\|_{\ell^2}$ μας δίνει το αποτέλεσμα,

$$\begin{aligned} \varepsilon\|U\|_{\ell^2}^2 + (\delta - \varepsilon)\|V\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon(\delta - \varepsilon)\langle U, V \rangle_{\ell^2} \\ \geq \varepsilon\|U\|_{\ell^2}^2 + (\delta - \varepsilon)\|V\|_{\ell^2}^2 - \frac{1}{\sqrt{E_1}}\|U\|_{\ell^1}\|V\|_{\ell^2}^2 \\ \geq \varepsilon\|U\|_{\ell^2}^2 + \frac{3\delta}{4}\|V\|_{\ell^2}^2 - \frac{\delta\varepsilon}{4\sqrt{E_1}}\|U\|_{\ell^1}\|V\|_{\ell^2}^2 \\ \geq \frac{\varepsilon}{2}\|U\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta}{2}\|V\|_{\ell^2}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη μη-γραμμικότητα για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \langle g(U), V \rangle_{\ell^2} &= \langle g(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \varepsilon\langle g(U), U \rangle_{\ell^2} \\ &= \sum_{n=0}^{K+1} \beta\omega_d^2 U_n^3 \dot{U}_n + \varepsilon \sum_{n=0}^{K+1} \beta\omega_d^2 U_n^3 U_n \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta\omega_d^2}{4} \|U\|_{\ell^2}^4 \right) + \varepsilon\beta\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^4 \\ &= \frac{d}{dt} G(U) + 4\varepsilon G(U) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Στην (2.25) έχουμε θέσει με $G(U) = \frac{\beta\omega_d^2}{4}\|U\|_{\ell^2}^4$. Από την άλλη μεριά για τον όρο $2\omega_d^2\langle U, V \rangle_{\ell^2}$, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned} 2\omega_d^2\langle U, V \rangle_{\ell^2} &= 2\omega_d^2\langle U, \dot{U} \rangle_{\ell^2} + 2\varepsilon\omega_d^2\langle U, U \rangle_{\ell^2} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \right) + 2\varepsilon\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Συνεπώς, εισάγοντας τις σχέσεις (2.24) – (2.25) – (2.26) στην εξίσωση (2.23) καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|U\|_{\ell^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \right] + \frac{\varepsilon}{2}\|U\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta}{2}\|V\|_{\ell^2}^2 \\ + 4\varepsilon G(U) - 2\varepsilon\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $2G(U) \geq 0$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|U\|_{\ell^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \right] + \frac{\varepsilon}{2}\|U\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta}{2}\|V\|_{\ell^2}^2 \\ + \varepsilon \left(2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Έτσι, θεωρώντας ως $\psi = \|U\|_{\ell^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2$ και $\frac{\mu}{2} = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\}$, η τελευταία ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{d}{dt}\psi + \mu\psi \leq 0 \quad (2.27)$$

Επιλύοντα την διαφορική ανισότητα (2.27) λαμβάνουμε την

$$\psi(t) \leq \psi(0)e^{-\mu t} \quad (2.28)$$

Τώρα για $t \rightarrow \infty$ παρατηρούμε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$ και ότι

$$\psi(t) \leq |\psi(0)| := M, \quad \forall t \in [0, +\infty] \quad (2.29)$$

Από τη θεώρηση της $\psi(t)$ η τελευταία γράφεται

$$\|U\|_{\ell^2}^2 + \|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) - 2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq M$$

Σημειώνουμε επίσης ότι η ποσότητα $\psi(t)$ είναι αόριστου προσήμου, καθώς περιλαμβάνει τον μη-θετικό όρο $-2\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2$. Χρησιμοποιώντας ξανά την ισοδυναμία των νορμών $\omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \leq \|U\|_{\ell^1}^2$ λαμβάνουμε τελικά την ανισότητα

$$\|V\|_{\ell^2}^2 + 2G(U) \leq M + \omega_d^2\|U\|_{\ell^2}^2 \quad (2.30)$$

Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των νορμών σε χώρους πεπερασμένης διάστασης της σχέσης (2.10), λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\|U\|_{\ell^2}^2 \leq \omega_d^2(K+2)^{\frac{1}{2}}\|U\|_{\ell^4}^2 \quad (2.31)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Young στη μορφή $ab \leq \frac{\xi a^2}{2} + \frac{b^2}{2\xi}$ για $\xi = \frac{\beta}{\omega_d^2}$, η ανισότητα (2.31) γίνεται

$$\|U\|_{\ell^2}^2 \leq \frac{\beta\omega_d^2}{2}\|U\|_{\ell^4}^4 + \frac{\omega_d^2}{2\beta}(K+2) \quad (2.32)$$

Άρα τελικά η ανισότητα (2.30) μετατρέπεται στην

$$\|V\|_{\ell^2}^2 \leq M + \frac{\omega_d^2}{2\beta}(K+2)$$

Από τη τελευταία εξάγουμε ότι οι λύσεις ορίζονται καθολικά στο χρόνο. \square

2.3.2 Απόδειξη της Σύγκλισης

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη της σύγκλισης σε καταστάσεις ισορροπίας, αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις για τις ενεργειακές ποσότητες που δίνονται από το πρόβλημα (2.2) – (2.5) – (2.6). Όταν η παράμετρος $\delta = 0$, το σύστημα (DKG) (2.1) περιγράφει τις εξισώσεις κίνησης προέρχονται από την Χαμιλτονιανή ενέργεια:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) = & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 \\ & - \frac{\omega_d^2}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 + \frac{\beta\omega_d^2}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Από την άλλη μεριά, στη περίπτωση όπου $\delta > 0$, η Χαμιλτονιανή ενέργεια διαχέεται σύμφωνα με συγκεκριμένη ενεργειακή σχέση, η οποία προκύπτει ως εξής: Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.2) με U_n έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{K+1} \ddot{U}_n \dot{U}_n - \sum_{n=0}^{K+1} k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) \dot{U}_n + \sum_{n=0}^{K+1} \delta \dot{U}_n \dot{U}_n = \sum_{n=0}^{K+1} \omega_d^2 (U_n - \beta U_n^3)$$

Ολοκληρώνοντας τη παραπάνω σχέση ως προς t , βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 + k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)(\dot{U}_{n+1} - \dot{U}_n) + \delta \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 \\ = \omega_d^2 \sum_{n=0}^{K+1} U_n \dot{U}_n - \beta\omega_d^2 \sum_{n=0}^{K+1} U_n^3 \dot{U}_n \end{aligned} \quad (2.34)$$

Συνεπώς η $\mathcal{H}(t)$ ικανοποιεί την ενεργειακή σχέση

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{H}(t) = & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 \right] \\ & - \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_d^2}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 - \frac{\beta\omega_d^2}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \right] = -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Είναι βολικό για τους υπολογισμούς να θεωρήσουμε από την εξίσωση (2.35), το συναρτησιακό

$$F(U_n) = -\frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 + \frac{\omega_d^2}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 - \frac{\beta\omega_d^2}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \quad (2.36)$$

Ξαναγράφουμε την εξίσωση (2.35) ως εξής:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} = \frac{d}{dt} F(U_n) \quad (2.37)$$

Εφόσον οι λύσεις του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6) υπάρχουν καθολικά στο χρόνο από το Θεώρημα 2.3.1, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2.37) στο διάστημα $[0, t]$, για αυθαίρετο $t \in [0, +\infty)$, λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2}^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{U}(0)\|_{\ell^2}^2 + \delta \int_0^t \langle \dot{U}(s), \dot{U}(s) \rangle ds \\ = F(U_n(t)) - F(U_{n,0}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Τα σημεία ισοροπίας του προβλήματος (2.2)–(2.5)–(2.6) έχουν την μορφή $\bar{\Phi} = (\Phi, 0) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$, όπου οι $\Phi = (0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_K, 0)$ ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (2.6). Επιπλέον, οι Φ πρέπει να ικανοποιούν το στάσιμο πρόβλημα

$$-k\Delta_d \Phi_d = \omega_d^2 (\Phi_n - \beta \Phi_n^3) \quad (2.39)$$

$$\Phi_0 = \Phi_{K+1} = 0 \quad (2.40)$$

Σημειώνουμε ότι, στη περίπτωση των μη-συζευγμένων σωματιδίων που αντιστοιχεί στη περίπτωση του αντί-συνεχούς ορίου $k = 0$, οι καταστάσεις ισοροπίας αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης δυναμικού.

Έτσι η εξίσωση (2.39) μετατρέπεται σε:

$$\Phi_n - \beta \Phi_n^3 = 0$$

Αυτή η εξίσωση έχει λύσεις $\Phi_n = 0$ και $\Phi_n = \mp \frac{1}{\sqrt{\beta}}$.

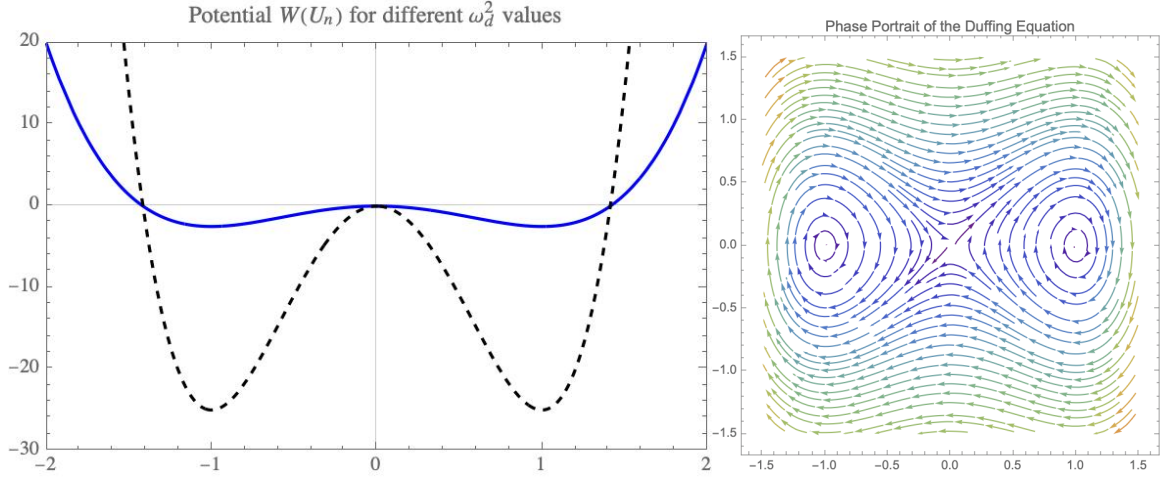
Σε αυτή τη περίπτωση κάθε ταλαντωτής υπακούει στην εξίσωση Duffing με γραμμική απόσβεση,

$$\ddot{U}_n + \delta \dot{U}_n = \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3$$

Το γνωστό πορτραίτο φάσεων για κάθε ταλαντωτή απεικονίζεται στην δεξιά εικόνα του Σχήματος 2.1. Στην αριστερή εικόνα του Σχήματος 2.1 απεικονίζεται η συνάρτηση δυναμικού, με τα τοπικά ακρότατα: Το ασταθές μέγιστο στο $U_{max}^0 = 0$ που αντιστοιχεί στην ενέργεια ηρεμίας $E_{max} = W(0) = 0$ και δύο ευσταθή ελάχιστα στα σημεία $U_{min}^\mp = \mp \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, που αντιστοιχούν στην $E_{min} = W(\mp \frac{1}{\sqrt{\beta}}) = \frac{\omega_d^2}{4\beta}$. Συμβολίζουμε τις καταστάσεις ισοροπίας που αντιστοιχούν σε αυτά τα ακρότατα με $\Phi^* = \{U_{min}^-, U_{min}^0, U_{min}^+\}$. Τότε, στο όριο $k = 0$ των μη-συζευγμένων ταλαντωτών, κάθε κατάσταση

$$\Phi = (0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_K, 0) \text{ με } \Phi_n \in \Phi \text{ και } n = 1, \dots, K \quad (2.41)$$

αντιστοιχεί σε ένα σημείο ισοροπίας του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6). Είναι πολύ πιθανό κάποιες από αυτές τις καταστάσεις να συνεχίζονται και για $k \neq 0$ υπό τη μορφή μόνο-παραμετρικών οικογενειών σημείων ισοροπίας, με k ως παράμετρο, αλλά αυτό το πρόβλημα διακλάδωσης δεν περιλαμβάνεται σε αυτή την εργασία.



Σχήμα 2.1: Αριστερή εικόνα: Γράφημα του δυναμικού (2.3) για $\omega_d^2 = 10$ (συνεχείς μπλέ καμπύλη) και $\omega_d^2 = 100$ (διακεκομμένη μαύρη καμπύλη), όταν $\beta = 1$. Δεξιά εικόνα: Δυναμική στην περίπτωση του αντι-συνεχούς ορίου $k = 0$, όταν $\omega_d^2 = 1, \beta = 1, \delta = 0.01$: κάθε ταλαντωτής U_n υπακούει στην εξίσωση Duffing με γραμμική τριβή.

Η περίπτωση όμως που θα μελετηθεί είναι αυτού του γραμμικού ορίου $\omega_d^2 = 0$, όπου η τετριμμένη λύση $\Phi = (0, 0, \dots, 0, 0) \in \ell_{K+2}^2$ αντιστοιχεί σε μια λύση του στάσιμου προβλήματος (2.39) – (2.40) και ως εκ τούτου είναι ένα σημείο ισορροπίας του (2.2) – (2.5) – (2.6) για κάθε τιμή του k . Σύμφωνα με την εξίσωση (2.35), η Χαμιλτονιανή ενέργεια

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) = -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 \leq 0, \quad (2.42)$$

δηλαδή για κάθε $U, \dot{U} \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$ η \mathcal{H} ορίζει μια γνήσια συνάρτηση Lyapunov για το πρόβλημα (2.2) – (2.5) – (2.6). Έτσι ισχύει ότι [3],

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+(\omega(\mathcal{B})).$$

Όλα τα παραπάνω σημεία ισορροπίας περιέχονται στο ω -οριακό σύνολο της ροής $S(t) : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \ell^2 \times \ell^2$. Θυμόμαστε ότι αν το $\mathcal{B} \subseteq \ell^2 \times \ell^2$ είναι ένα φραγμένο σύνολο τότε,

$$\omega(\mathcal{B}) = \{\overline{\Phi_*} : \exists t_n \text{ τ.ω } t_n \rightarrow \infty \text{ καθώς } n \rightarrow \infty, \text{ και} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n) \overline{\Phi_0} = \overline{\Phi_*}, \forall \overline{\Phi_0} \in \mathcal{B}\} \quad (2.43)$$

Κατά τη σύγκλιση σε ισορροπία, θα πρέπει $\dot{U}(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Η ακόλουθη πρόταση, μας διασφαλίζει σύγκλιση για κάθε λύση του (2.2) – (2.5) – (2.6).

Πρόταση 2.3.2. Έστω $\overline{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)) \in C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$ να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών-συννοριακών τιμών (2.2)–(2.5)–(2.6), για κάθε αρχικές τιμές $\overline{U}(0) = (U_{n,0}, U_{n,1}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$. Τότε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2} = 0 \quad (2.44)$$

Απόδειξη. Επειδή η μοναδική λύση $\overline{U}(t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο

$$C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$$

υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$, τέτοιες ώστε

$$\|U\|_{\ell^2} \leq c_1, \text{ και } \|\dot{U}\|_{\ell^2} \leq c_2, \quad (2.45)$$

αντίστοιχα. Πρώτα θα επαληθεύσουμε, ότι από τα παραπάνω ομοιόμορφα φράγματα συνεπάγεται επίσης ότι η $\dot{U} \in C([0, \infty), \ell^2)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο χρόνο, δηλαδή, $\|\dot{U}\|_{\ell^2} \leq c$, για κάποια σταθερά $c > 0$. Πράγματι, ξαναγράφοντα την εξίσωση (2.2), ως

$$\ddot{U}_n = -\delta \dot{U}_n + k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3 \quad (2.46)$$

και εισάγοντας τις νόρμες στην εξίσωση (2.46), παίρνουμε ότι

$$\|\ddot{U}\|_{\ell^2} = \|\delta \dot{U} + k\Delta_d U + f(U)\|_{\ell^2} \quad (2.47)$$

όπου

$$f(U) = \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3 \quad (2.48)$$

Τώρα, από την εξίσωση (2.47) και το γεγονός $-\Delta_d : \ell_{K+2}^2 \rightarrow \ell_{K+2}^2$ είναι φραγμένος τελεστής και ισχύει ότι

$$\|-\Delta_d X\|_{\ell^2}^2 \leq 4\|X\|_{\ell^2}^2 \text{ για όλα τα } X \in \ell_{K+2}^2 \quad (2.49)$$

προκύπτει η ανισότητα

$$\begin{aligned} \|\ddot{U}\|_{\ell^2} &= \|\delta \dot{U} + k\Delta_d U + f(U)\|_{\ell^2} \\ &\leq \delta \|\dot{U}\|_{\ell^2} + k\|\Delta_d U\|_{\ell^2} + \|f(U)\|_{\ell^2} \\ &\leq \delta \|\dot{U}\|_{\ell^2} + 2k\|U\|_{\ell^2} + \|f(U)\|_{\ell^2} \\ &\leq \delta c_1 + 2kc_2 + \|f(U)\|_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας την ℓ_{K+2}^2 -νόρμα για το δυναμικό (2.48), παίρνουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned} \|f(U)\|_{\ell^2}^2 &= \omega_d^4 \sum_{n=0}^{K+1} (U_n - \beta U_n^3)^2 = \omega_d^4 \|U - \beta U^3\|_{\ell^2}^2 \\ &\leq \omega_d^4 (\|U\|_{\ell^2}^2 + \beta \|U\|_{\ell^2}^3)^2 \\ &\leq \omega_d^4 (c_1^2 + \beta c_1^3)^2 := c_3 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Σημειώνουμε ότι για να λάβουμε την εκτίμηση (2.51) χρησιμοποιήσαμε την (2.10) για $q = 6$ και $p = 2$ η οποία μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την νόρμα του κυβικού όρου στην (2.51) από την ανισότητα

$$\left(\sum_{n=0}^{K+1} U_n^6 \right)^{\frac{1}{6}} \leq \left(\sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{K+1} U_n^6 \right) \leq \left(\sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 \right)^3$$

Εισάγοντας την (2.51) στην (2.50), παίρνουμε ότι $\|\ddot{U}\|_{\ell^2} \leq c := \delta c_2 + 2kc_1 + c_3$. Από το ομοιόμορφο φράγμα της νόρμας $\|\dot{U}\|_{\ell^2}$, συνεπάγεται ότι \dot{U} είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$ ως εξής: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση $V(t) = \|\dot{U}\|^2$, έχουμε ότι για τυχαία $t_1 \geq 0, t_2 > 0 \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει $t^* \in (t_1, t_2)$ τέτοιο ώστε

$$|V(t_1) - V(t_2)| \leq |\dot{V}(t^*)| |t_1 - t_2| \quad (2.52)$$

Άλλωστε, για την παράγωγο ως προς το χρόνο της $V(t)$ που δίνεται από την $\dot{V}(t) = \frac{d}{dt} \langle \dot{U}(t), \dot{U}(t) \rangle = 2 \langle \ddot{U}(t), \dot{U}(t) \rangle$ κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\dot{V}(t)| &= 2 |\langle \ddot{U}(t^*), \dot{U}(t^*) \rangle| \\ &\leq 2 \|\ddot{U}(t^*)\|_{\ell^2} \|\dot{U}(t^*)\|_{\ell^2} \leq m := 2cc_2 \end{aligned} \quad (2.53)$$

Εφόσον το διάστημα (t_1, t_2) είναι τυχαίο, από την (2.53) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $\dot{V}(t)$ είναι φραγμένη και ότι

$$|V(t_1) - V(t_2)| = \left| \|\dot{U}(t_1)\|_{\ell^2}^2 - \|\dot{U}(t_2)\|_{\ell^2}^2 \right| \leq m|t_1 - t_2| \quad (2.54)$$

Συμπεραίνουμε ότι, η $V(t)$ είναι καθολικά Lipschitz συνεχής και ομοιόμορφα φραγμένη στον \mathbb{R}^+ , συνεπώς τοπικά ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$. Επιπλέον, μπορούμε να λάβουμε από την (2.38), ότι οι U και \dot{U} είναι φραγμένες στον ℓ_{K+2}^2 (2.45). Έτσι μαζί με το φράγμα από την (2.51) καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t \langle \dot{U}(s), \dot{U}(s) \rangle ds &\leq \frac{1}{2} \left| \|\dot{U}(t)\|_{\ell^2}^2 - \|\dot{U}(0)\|_{\ell^2}^2 \right| \\ &\quad + |F(U_n(t)) - F(U_{n,0})| < C, \end{aligned} \quad (2.55)$$

όπου C είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του t . Παίρνοντας το όριο καθώς $t \rightarrow \infty$, στην εξίσωση (2.55) συνεπάγεται η ολοκληρωσιμότητα της $V(t)$ στο $[0, \infty)$, και συνεπώς τον ισχυρισμό (2.44). \square

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0$$

το οποίο θα ολοκληρώσει στην Πρόταση (2.3.8), την απόδειξη της σύγκλισης των λύσεων (2.2) – (2.5) – (2.6) στα σημεία ισορροπίας. Θα εκμεταλλευτούμε το αποτέλεσμα (2.44), θεωρώντας τη διαφορά $U - \Phi$ για μεγάλους χρόνους. Η διαφορά αυτή, ικανοποιεί την εξίσωση

$$U(t) - \Phi = U(t_N) - \Phi + \int_{t_N}^t \frac{d}{dt} (U(s) - \Phi) ds$$

για κάποιο $t_N \in [0, \infty)$. Η ℓ^2 -νόρμα της διαφορά $U - \Phi$, ικανοποιεί την ανισότητα

$$\|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} \leq \|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2} + \int_{t_N}^t \left\| \frac{d}{dt} (U(s) - \Phi) \right\|_{\ell^2} ds \quad (2.56)$$

Η στρατηγική για την απόδειξη είναι η εξής: απαιτώντας $t \rightarrow \infty$ και οι δυο όροι στο δεξί μέρος της σχέσης (2.56) γίνονται αυθαίρετα μικροί εξασφαλίζοντας τη σύγκλιση στο σημείο ισορροπίας. Για τον όρο $\|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2}$, ο ορισμός του ω -οριακού συνόλου μας επιτρέπει να επιλέξουμε αρκετά μεγάλο t_N έτσι ώστε το $U(t_N)$ να είναι αυθαίρετα κοντά στο Φ . Να ξεκαθαρίσουμε ότι η ύπαρξη τέτοιων $U(t_N)$ -τροχιακών σημείων, δεν εξασφαλίζει από μόνη της, τη σύγκλιση ολοκλήρωση της τροχιάς σε ένα σημείο ισορροπίας Φ , εφόσον η τροχιά μπορεί να ξεφεύγει από τη γειτονιά του Φ , για $t > t_N$. Ωστόσο, το τελευταίο σενάριο θα εξαιρεθεί αποδεικνύοντας ότι ο όρος $\int_{t_N}^t \left\| \frac{d}{dt} (U(s) - \Phi) \right\|_{\ell^2} ds$ γίνεται

αυθαίρετα μικρός για αρκετά μεγάλους χρόνους. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια κατάλληλα ενεργειακών εκτιμήσεων. Τέτοιες εκτιμήσεις θα περιλαμβάνουμε τη Χαμιλτονιανή του συντηρητικού συστήματος, ($\delta = 0$) (που όμως είναι συνάρτηση Lyapunov για το πλήρες σύστημα). Θα ξαναγράψουμε τη Χαμιλτονιανή (2.33) ως εξής:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) = \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - F(U) \quad (2.57)$$

όπου η $F(U)$, ορίζει το συναρτησιακό (2.36). Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι για μια τροχιά $(U(t), \dot{U}(t))$ που συγκλίνει σε μια κατάσταση ισορροπίας $(\Phi, 0)$, η Χαμιλτονιανή της ενέργεια (που είναι μια συνεχής συνάρτησης), θα πρέπει να συγκλίνει ως $\mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) \rightarrow \mathcal{H}(\Phi, 0) = -F(\Phi)$ για $t \rightarrow \infty$. Συνεπώς, αρχικά θα θεωρήσουμε τη διαφορά των Χαμιλτονιανών ενεργειών

$$\mathcal{H}(U(t), \dot{U}(t)) - \mathcal{H}(\Phi, 0) = \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) \quad (2.58)$$

Από το γεγονός ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{U}\|_{\ell^2} = 0$ και από τη συνέχεια του συναρτησιακού F , θα πρέπει να ισχύει ότι $F(U) - F(\Phi)$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Έτσι θα διαχειριστούμε το δεύτερο όρο στο δεξί μέρος της εξίσωσης (2.56), μέσω της διαφοράς (2.58). Ωστόσο, επειδή το συναρτησιακό F είναι τοπικά Lipschitz, μας παρέχει αποκλειστικά μια γραμμική διαφορική ανισότητα για τη διαφορά $\|U(t) - \Phi\|_{\ell^2}$ που δεν είναι αρκετή για τη σύγκλιση σε σημείο ισορροπίας. Σε αυτό το σημείο αναδυσκνείται ο ρόλος της Ανισότητας Łojasiewicz, ([3] σελ.23) η οποία προτείνει την κατάλληλη διαταραχή της διαφοράς των Χαμιλτονιανών ενεργειών στη σχέση (2.58). Η ανισότητα περιλαμβάνει το συναρτησιακό F και τον μη-γραμμικό τελεστή

$$J(U_n) := k(\Delta_d U)_n + \omega_d^2 U_n - \beta \omega_d^2 U_n^3 \quad (2.59)$$

με τον σύντομο συμβολισμό $J(U)$.

Η Διακριτή Μορφή της Ανισότητας Łojasiewicz: Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε εν συντομία κάποιες πληροφορίες σχετικά με τη διακριτή εκδοχή της ανισότητας Łojasiewicz:

Λήμμα 2.3.3. Υπάρχει $\tilde{\epsilon} > 0$ και $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ τέτοια ώστε

$$\|J(U)\|_{\ell^2} \geq \nu_0 |F(U) - F(\Phi)|^{1-\vartheta}, \quad (2.60)$$

για κάθε $U \in \ell_{K+2}^2$ και κάποια σταθερά $\nu_0 > 0$ με $\|U - \Phi\|_{\ell^2} < \tilde{\epsilon}$.

Στη πραγματικότητα είναι ένα άμεσο πόρισμα του ακόλουθου αποτελέσματος ([15] Πόρισμα 5.5 σελ.2839), για τις γενικευμένες αναλυτικές συναρτήσεις σε χώρους Hilbert: Θεωρούμε δυο πραγματικούς χώρους Hilbert με την εμφύτευση $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X}$ να είναι πυκνή και συνεχής. Συμβολίζουμε με \mathcal{V}^* τον τοπολογικά δυικό χώρο του χώρου \mathcal{V} . Θεωρούμε την εξελικτική τριάδα $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{X} \equiv \mathcal{V}^* \hookrightarrow \mathcal{X}^*$, με συνεχείς και πυκνές εμφυτεύσεις.

Παρατήρηση 2.3.4. Με τον όρο εξελικτική τριάδα (γνωστό και ως Gelfand triple) εννοούμε μια τριάδα χώρων $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}^*$ τέτοιους ώστε

- (α) ο \mathcal{X} είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert ορισμένος με τον δυικό του,
- (β) ο \mathcal{V} είναι ένας διαχωρίσιμος ανακλαστικός χώρος Banach,
- (γ) οι εμφυτεύσεις είναι συνεχείς και πυκνές.

Θεώρημα 2.3.5. Έστω $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι μια αναλυτική συνάρτηση όπου $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ να είναι μια ανοιχτή γειτονία του ϕ και υποθέτουμε ότι η Fréchet παράγωγος του F στο ϕ , $DF(\phi) = 0$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$, τον γραμμικό τελεστή που ορίζεται από τη γραμμικοποίηση του $DF : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ στο ϕ . Υποθέτουμε τις ακόλουθες συνθήκες:

(α) $\ker \mathcal{L}$ είναι πεπερασμένης διάστασης και

(β) για κάποιο γραμμικό συμπαγή τελεστή $\mathcal{K} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$, ο τελεστής $\mathcal{L} + \mathcal{K}$ είναι αντιστρέψιμος.

Τότε, υπάρχουν $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, μια γειτονία \mathcal{Q} του ϕ και $\nu_0 > 0$, για τα οποία

$$\forall u \in \mathcal{Q}, \|DF(u)\|_{\mathcal{V}^*} \geq \nu_0 |F(u) - F(\phi)|^{1-\delta}, \quad (2.61)$$

Εξαιτίας της πεπερασμένης διάστασης του φασικού χώρου $\mathcal{V} = \ell^2_{K+2} \equiv \mathbb{R}^{K+2} \equiv \mathcal{X} \equiv \mathcal{V}^*$, το Λήμμα 2.3.3, προκύπτει από την άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.5, για τα συναρτησιακά F που ορίσαμε στην (2.36) και J που ορίσαμε στη (2.59). Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε με τη βοήθεια του ορισμού ([3] σελ.12), τη Fréchet παράγωγο $J : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ της F , θεωρώντας τρία συναρτησιακά για κάθε όρο της ως εξής: $F(U) = F_1(U) + F_2(U) + F_3(U)$ όπου,

$$F_1(U) = -\frac{k}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)^2 \quad (2.62)$$

$$F_2(U) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^2 \quad (2.63)$$

$$F_3(U) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \quad (2.64)$$

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στη μορφή,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F[(U_{n+1} - U_n) + \partial a(V_{n+1} - V_n)] a &= F[(U_{n+1} - U_n) + a(V_{n+1} - V_n)] \\ &- F[(U_{n+1} - U_n)] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε το διαφορικό για κάθε όρο της F . Πρώτα ασχολούμαστε με τον όρο F_1

$$\begin{aligned} \frac{F_1(U + aV) - F_1(U)}{a} &= -\frac{k}{2a} \frac{d}{d\partial} \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\partial V_{n+1}) - (U_n + a\partial V_n)]^2 \\ &= -\frac{k}{a} \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\partial V_{n+1})aV_{n+1} - (U_n + a\partial V_n)aV_n] \\ &= -k \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\partial V_{n+1})V_{n+1} - (U_n + a\partial V_n)V_n] \end{aligned} \quad (2.66)$$

και λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{|F_1(U + aV) - F_1(U)|}{|a|} &= \left| k \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\partial V_{n+1})V_{n+1} - (U_n + a\partial V_n)V_n] \right| \\
&\leq k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_{n+1} + a\partial V_{n+1})V_{n+1}| + k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\partial V_n)V_n| \quad (2.67) \\
&\leq k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_{n+1} + a\partial V_{n+1})||V_{n+1}| + k \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\partial V_n)||V_n|
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε ότι τα αθροίσματα είναι φραγμένα $\forall U_n, V_n \in \ell^2$ καθώς ο \mathbb{R}^{K+2} είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης. Ως εκ τούτου προχωρούμε ως εξής:

για να υπολογίσουμε τη παράγωγο F_1 θεωρούμε το όριο $a \rightarrow \infty$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
&\lim_{a \rightarrow \infty} k \sum_{n=0}^{K+1} [(U_{n+1} + a\partial V_{n+1})V_{n+1} - (U_n + a\partial V_n)V_n] \\
&= k \sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1}V_{n+1} - U_nV_n) \\
&= k \left[\sum_{n=0}^{K+1} (U_{n+1} - U_n)V_n + \sum_{n=0}^{K+1} (V_{n+1} - V_n)U_{n+1} \right] \quad (2.68) \\
&= k \left[\sum_{n=0}^{K+1} -(V_{n+1} - V_n)U_n + \sum_{n=0}^{K+1} (V_{n+1} - V_n)U_{n+1} \right] \\
&= k \sum_{n=0}^{K+1} (V_{n+1} - V_n)(U_{n+1} - U_n)
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\langle F_1'(U), V \rangle = \langle -k\Delta_d U, V \rangle \quad (2.69)$$

Για τον δεύτερο όρο παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{F_2(U + aV) - F_2(U)}{a} &= \frac{1}{2a} \frac{d}{d\partial} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)aV_n \quad (2.70) \\
&= \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)V_n
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας την απόλυτη τιμή έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|F_2(U + aV) - F_2(U)|}{|a|} &= \left| \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)V_n \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\partial V_n)V_n| \quad (2.71) \\
&\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\partial V_n)||V_n|
\end{aligned}$$

ο οποίος προκύπτει φραγμένος, όπως πριν. Θεωρώντας ξανά $a \rightarrow \infty$ καταλήγουμε στο ότι

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)V_n = \sum_{n=0}^{K+1} U_n V_n \quad (2.72)$$

και άρα,

$$\langle F'_2(U), V \rangle = \sum_{n=0}^{K+1} U_n V_n \quad (2.73)$$

Τώρα, για τον τελευταίο όρο της F

$$\begin{aligned} \frac{F_3(U + aV) - F_3(U)}{a} &= -\frac{1}{4a} \frac{d}{d\partial} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)^4 \\ &= -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)^3 a\partial V_n \\ &= -\sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)^3 V_n \end{aligned} \quad (2.74)$$

Θεωρώντας και πάλι την απόλυτη τιμή έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|F_3(U + aV) - F_3(U)|}{|a|} &= \left| \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)^3 V_n \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\partial V_n)^3 V_n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{K+1} |(U_n + a\partial V_n)^3| |V_n| \end{aligned} \quad (2.75)$$

όπου και αυτό το άθροισμα είναι φραγμένο για τον ίδιο λόγο με τα προηγούμενα. Καθώς $a \rightarrow \infty$ έχουμε πάλι

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{K+1} (U_n + a\partial V_n)^3 V_n = \sum_{n=0}^{K+1} U_n^3 V_n \quad (2.76)$$

λαμβάνοντας ότι

$$\langle F'_3(U), V \rangle = \sum_{n=0}^{K+1} U_n^3 V_n \quad (2.77)$$

Έτσι προκύπτει από τους παραπάνω υπολογισμούς ότι $J(U) = DF(U)$. Συνεπώς κάθε λύση Φ του στάσιμου προβλήματος (2.39) – (2.40) ικανοποιεί τη σχέση $J(\Phi) = 0$.

Στη συνέχεια, η γραμμικοποίηση του J στο σημείο ισορροπίας Φ , είναι ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{L} : \ell_{K+2}^2 \rightarrow \ell_{K+2}^2$,

$$\mathcal{L}(U_n) = -k\Delta_d U_n + f'(\Phi_n)U_n, \quad \forall U \in \ell_{K+2}^2$$

όπου f δίνεται από τη σχέση (2.48). Εξαιτίας της ισοδυναμίας των νορμών από τη σχέση (2.10), παρατηρούμε ότι ο τελεστής \mathcal{L} είναι καλά ορισμένος για κάθε σημείο ισορροπίας Φ . Ο πυρήνας του $\ker \mathcal{L}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, ως εκ τούτου συνθήκης (α)

του Θεωρήματος 2.3.5 ικανοποιείται. Στη συνέχεια για να ελέγξουμε τη συνθήκη (β), θεωρούμε τον τελεστή $\mathcal{K} = \hat{\mu}I$, για κατάλληλο $\hat{\mu} > 0$ και $I : \ell_{K+2}^2 \rightarrow \ell_{K+2}^2$ την ταυτοτική απεικόνιση. Τώρα επειδή ο χώρος ℓ_{K+2}^2 είναι πεπερασμένης διάστασης, ο τελεστής \mathcal{K} είναι συμπαγής. Επιπλέον, υπάρχει $\hat{\mu} > 0$, τέτοιο ώστε ο τελεστής $\Lambda = \mathcal{L} + \mathcal{K}$ να είναι συμπιεστικός, και συνεπώς αντιστρέψιμος. Έτσι παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (\Lambda(U), U)_{\ell^2} &= k(-\Delta_d U, U)_{\ell^2} + (\hat{\mu} - \omega_d^2) \sum_{n=0}^{K+1} |U_n|^2 + 3\omega_d^2 \beta \sum_{n=0}^{K+1} |\Phi_n|^2 |U_n|^2 \\ &\geq E_1 \sum_{n=0}^{K+1} |U_n|^2 + (\hat{\mu} - \omega_d^2) \sum_{n=0}^{K+1} |U_n|^2 \end{aligned}$$

Τότε, επιλέγοντας $\hat{\mu} > \omega_d^2$, η συμπιεστικότητα $(\Lambda(U), U)_{\ell^2} > \Omega \|U\|_{\ell^2}$, ικανοποιείται για $\Omega = E_1 + (\hat{\mu} - \omega_d^2) > 0$. Εφόσον όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.3.5 ικανοποιούνται, εφαρμόζοντας την ανισότητα (2.61) για τα προαναφερθέντα συναρτησιακά, προκύπτει η διακριτή ανισότητα (2.60) του Λήμματος 2.3.3. Επιστρέφοντας στο πρόβλημα μας και έχοντας στο μυαλό μας το Λήμμα 2.3.3, θα θεωρήσουμε μια διαταραχή της διαφοράς των Χαμιλτονιανών ενεργειών (2.58)

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) - \varepsilon \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.78)$$

Θα διευκρινίσουμε σε αυτό το σημείο το ρόλο του όρου $\varepsilon \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}$ της (2.78). Η νόρμα $\|\dot{U}\|_{\ell^2}$ γίνεται αυθαίρετα μικρή για μεγάλους χρόνους, ενώ ο $J(U)$ είναι ομοίμορφα φραγμένος στον ℓ^2 . Επιπλέον παρατηρούμε από την ανισότητα (2.60), ότι $\|J(U)\|_{\ell^2}$ είναι φραγμένη από κάτω, από την $(1 - \delta)$ -δύναμη της διαφοράς $|F(U) - F(\Phi)|$. Όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια, αυτό το κατώτερο φράγμα μας επιτρέπει να λάβουμε μια εκτίμηση για την $E(t)$ με όρους της φραγμένης ποσότητας $\|J(U)\|_{\ell^2}$ καθώς από προηγούμενο αποτέλεσμα ο όρος $\|\dot{U}\|_{\ell^2}$ εξαφανίζεται ασυμπτωματικά. Με αυτό το τρόπο αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα που δημιουργεί ο όρος της διαφοράς $|F(U) - F(\Phi)|$. Η παραπάνω διαδικασία θα ολοκληρωθεί σε διάφορα βήματα, υπό τη μορφή Λημμάτων.

Λήμμα 2.3.6. *Το διαφορικό $\dot{E}(t)$ του συναρτησιακού (2.78) ικανοποιεί την ανισότητα.*

$$\dot{E}(t) \leq -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \frac{\rho}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \delta \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\| \quad (2.79)$$

για κάθε λύση του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6).

Απόδειξη. Ξεκινάμε παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.78) ως προς το χρόνο. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.35) και (2.38), βλέπουμε ότι η $\dot{E}(t)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) \right] - \varepsilon \frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &= -\delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} - \varepsilon \frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Θα δουλέψουμε με τον δεύτερο όρο του δεξιού μέρους της (2.80), ο οποίος είναι

$$\frac{d}{dt} \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} = \langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \langle J(U), \ddot{U} \rangle_{\ell^2} \quad (2.81)$$

Αντικαθιστώντας την \ddot{U} - από την εξίσωση $\ddot{U} = -\delta\dot{U} + J(U)$ - στη (2.81) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} &= \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \langle J(U), -\delta\dot{U} + J(U) \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \langle J(U), J(U) \rangle_{\ell^2} - \delta\langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &= \langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}^2 - \delta\langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Εισάγοντας την (2.82) στην (2.80), καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= -\delta\langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} - \varepsilon\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &\quad - \varepsilon\|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon\delta\langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Θα συνεχίσουμε εκτιμώνοντας τον τελευταίο όρο του δεξιού μέρους της (2.83) εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Με αυτό τον τρόπο, λαμβάνουμε την εκτίμηση

$$|\langle J(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}| \leq \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}$$

Με τη παραπάνω εκτίμηση, η εξίσωση (2.83) μετατρέπεται στην ανισότητα

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\leq -\delta\langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} - \varepsilon\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2} \\ &\quad - \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon\delta\|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Παρόμοια, εκτιμούμε την ποσότητα $\varepsilon\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}$ που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της (2.84) ως εξής:

$$\varepsilon|\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}| \leq \varepsilon\|\dot{J}(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2} \quad (2.85)$$

Επειδή η $\|\dot{U}\|_{\ell^2}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, για να εκτιμήσουμε περαιτέρω την ποσότητα $\varepsilon\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}$, θα χρειαστούμε την εκτίμηση της $\|\dot{J}(U)\|_{\ell^2}$. Πρώτα, από τον ορισμό του συναρτησιακού $J(U)$ στην (2.59), η παράγωγος του ως προς το χρόνο είναι

$$\dot{J}(U) = k\Delta_d \dot{U}_n + \omega_d^2 \dot{U}_n - 3\beta\omega_d^2 U_n^2 \dot{U}_n \quad (2.86)$$

Σημειώνουμε ότι εφαρμόζοντας την ανισότητα της (2.11) για $p = \infty$ και $q = 2$

$$\begin{aligned} \|U^2 \dot{U}\|_{\ell^2}^2 &= \sum_{n=0}^{K+1} U_n^4 \dot{U}_n^2 \leq \|U\|_{\ell^\infty}^4 \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 \\ &\leq \|U\|_{\ell^2}^4 \sum_{n=0}^{K+1} \dot{U}_n^2 = \|U\|_{\ell^2}^4 \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Τότε παρατηρούμε ότι η (2.86) μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \|\dot{J}(U)\|_{\ell^2} &\leq k\|\Delta_d \dot{U}\|_{\ell^2} + \omega_d^2 \|\dot{U}\|_{\ell^2} + 3\beta\omega_d^2 \|U^2 \dot{U}\|_{\ell^2} \\ &\leq 2k\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \omega_d^2 \|\dot{U}\|_{\ell^2} + 3\beta\omega_d^2 \|U\|_{\ell^2}^2 \|\dot{U}\|_{\ell^2} \\ &\leq c_4 \|\dot{U}\|_{\ell^2}, \quad c_4 = 2k + \omega_d^2 (3\beta c_1^2 + 1) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.86) με ε , έχουμε ότι

$$\varepsilon\|\dot{J}(U)\|_{\ell^2} \leq \frac{\rho}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}, \quad \frac{\rho}{2} := \varepsilon c_4 \quad (2.89)$$

Εισάγοντας την (2.89) στην (2.85) καταλήγουμε στην εκτόμηση για τον όρο $\varepsilon|\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}|$,

$$\varepsilon|\langle \dot{J}(U), \dot{U} \rangle_{\ell^2}| \leq \frac{\rho}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 \quad (2.90)$$

Έτσι χρησιμοποιώντας την (2.90) στη (2.84), συμπεραίνουμε ότι

$$\dot{E}(t) \leq -\delta \langle \dot{U}, \dot{U} \rangle_{\ell^2} + \frac{\rho}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \varepsilon \delta \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}$$

που είναι ο ισχυρισμός της (2.79). \square

Το Λήμμα 2.2.6 θα χρησιμοποιηθεί ως βοηθητικό εργαλείο για την απόδειξη της ανισότητας στην $\dot{E}(t)$, η οποία θα έχει ρόλο κλειδί στην απόδειξη της σύγκλισης $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \bar{\Phi}\|_{\ell^2} = 0$. Αυτή η ανισότητα δίνεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.3.7. Έστω $\bar{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)) \in C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$, να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6) για κάθε αρχικές συνθήκες $\bar{U}(0) = (U_{n,0}, u_{n,1}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$. Τότε, αυτή η λύση ικανοποιεί τη διαφορική ανισότητα

$$-\dot{E}(t) \geq \frac{\varepsilon}{4} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right)^2, \quad \forall t \geq 0 \quad (2.91)$$

Απόδειξη. Η ανισότητα (2.91) μπορεί να προκύψει από μια επιπλέον εκτίμηση της ανισότητας (2.79). Πράγματι, ξεκινώντας την διαδικασία, κρατώντας τον τελευταίο όρο της (2.79) και εφαρμόζοντας την ανισότητα Young, έχουμε ότι

$$\varepsilon \delta \|J(U)\|_{\ell^2} \|\dot{U}\|_{\ell^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta^2 \varepsilon}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2$$

Τότε, η ανισότητα (2.79) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &\leq -\delta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \frac{\rho^2}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \varepsilon \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 + \frac{\delta^2 \varepsilon}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 \\ &= \left(\frac{-2\delta + \rho^2 + \delta^2 \varepsilon}{2} \right) \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \\ &= \left(\frac{-2\delta + 2\varepsilon c_4 + \delta^2 \varepsilon}{2} \right) \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \end{aligned} \quad (2.92)$$

από τον ορισμό της σταθεράς $\rho^2 = 2\varepsilon c_4$ στην (2.89). Επειδή θέλουμε ο συντελεστής της $\|\dot{U}\|_{\ell^2}^2$ στο δεξί μέρος της (2.92) να είναι αρνητικός, απαιτούμε το ε να ικανοποιεί τη σχέση,

$$0 < \varepsilon < \frac{2\delta}{\delta^2 + 2c_4} \quad (2.93)$$

Με αυτό το τρόπο, προκύπτει ότι

$$\left(\frac{-2\delta + 2\varepsilon c_4 + \delta^2 \varepsilon}{2} \right) := \varepsilon_1 < 0 \quad (2.94)$$

Τότε η ανισότητα (2.92) γίνεται

$$\dot{E}(t) \leq -\varepsilon_1 \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2$$

ή ισοδύναμα

$$-\dot{E}(t) \geq \varepsilon_1 \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \quad (2.95)$$

Στην (2.95), ζητάμε επιπλέον το $\varepsilon > 0$, να ικανοποιεί τον περιορισμό $\varepsilon_1 > \frac{\varepsilon}{2}$. Αυτές δίνουν την τελική συνθήκη για το ε , απαιτώντας:

$$0 < \varepsilon < \frac{2\delta}{\delta^2 + 2c_4 + 1} \quad (2.96)$$

Παρατηρούμε ότι αν η (2.96) ισχύει τότε, ικανοποιείται η (2.91). Με τον περιορισμό της σχέσης (2.96), από την (2.95) συνεπάγεται ο ισχυρισμός (2.91), δηλαδή ότι ισχύει ότι

$$-\dot{E}(t) \geq \frac{\varepsilon}{2} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \right) \geq \frac{\varepsilon}{4} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right)^2 \quad (2.97)$$

Αναφέρουμε επίσης ότι χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\left(\|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + \|J(U)\|_{\ell^2}^2 \right) \geq \frac{1}{2} \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right)^2$$

□

Μετά από τις παραπάνω προετοιμασίες, συνεχίζουμε με την απόδειξη της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 2.3.8. Έστω $\bar{U}(t) = (U(t), \dot{U}(t)) \in C([0, \infty), \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2)$, να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6) για κάθε αρχικές συνθήκες $\bar{U}(0) = (U_{n,0}, u_{n,1}) \in \ell_{K+2}^2 \times \ell_{K+2}^2$. Τότε,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0 \quad (2.98)$$

όπου Φ είναι λύση της εξίσωσης (2.39)

Απόδειξη. Για την απόδειξη της (2.98) χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι $E(t) \geq 0$, για όλα τα $t > 0$. Θα θεωρήσουμε μόνο τη περίπτωση όπου $E(t) \geq 0$ εφόσον η περίπτωση $E(t) = 0$ είναι προφανής. Όπως θα δούμε παρακάτω, το Λήμμα 2.3.3 μας υποδεικνύει να ασχοληθούμε με τη ποσότητα $[E(t)]^{1-\delta}$. Αν θυμηθούμε τον ορισμό της $E(t)$ στην εξίσωση (2.78), παρατηρούμε ότι ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned} [E(t)]^{1-\delta} &= \left[\frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 - (F(U) - F(\Phi)) - \varepsilon \langle J(U), \dot{U} \rangle \right]^{1-\delta} \\ &\leq \left[\frac{1}{2} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^2 + |F(U) - F(\Phi)| + \varepsilon |\langle J(U), \dot{U} \rangle| \right]^{1-\delta} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $(a+b)^r \leq K_r(a^r + b^r)$, που ισχύει για κάποιο $K_r > 0$ και για κάθε $a, b, r > 0$ όταν $r = 1 - \delta$. Την ανισότητα θα την εφαρμόσουμε στο δεξί μέρος της (2.99). Με αυτό τον τρόπο έχουμε ότι

$$[E(t)]^{1-\delta} \leq K_\delta \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\delta)} + |F(U) - F(\Phi)|^{(1-\delta)} + |\langle J(U), \dot{U} \rangle|^{(1-\delta)} \right) \quad (2.100)$$

Κάνοντας μια εκτίμηση για τον όρο $|\langle J(U), \dot{U} \rangle|^{1-\delta}$ της (2.100) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, οδηγούμαστε στη σχέση

$$[E(t)]^{1-\vartheta} \leq K_\vartheta \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\vartheta)} + |F(U) - F(\Phi)|^{(1-\vartheta)} + \|J(U)\|_{\ell^2}^{1-\vartheta} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{1-\vartheta} \right) \quad (2.101)$$

Ο όρος $\|J(U)\|_{\ell^2}^{1-\vartheta} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{1-\vartheta}$ στην (2.101), μπορεί να εκτιμηθεί με τη χρήση της ανισότητας Young στη μορφή $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, η οποία ισχύει για όλα τα $a, b > 0$, ως εξής: θέτοντας $p = \frac{1}{(1-\vartheta)} > 1$ και $q = \frac{1}{\vartheta}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|J(U)\|_{\ell^2}^{1-\vartheta} \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{1-\vartheta} &\leq (1-\vartheta) \|J(U)\|_{\ell^2} + \vartheta \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)} \\ &\leq \|J(U)\|_{\ell^2} + \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)} \end{aligned}$$

Τελικά εισάγοντας την παραπάνω εκτίμηση στην (2.101), έχουμε ότι η $[E(t)]^{1-\vartheta}$ ικανοποιεί την σχέση

$$[E(t)]^{1-\vartheta} \leq K_\vartheta \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\vartheta)} + |F(U) - F(\Phi)|^{(1-\vartheta)} + \|J(U)\|_{\ell^2} + \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)} \right) \quad (2.102)$$

Τώρα, από τον ορισμό του ω -οριακού συνόλου (2.43), ο οποίος περιέχει όλα τα σημεία ισορροπίας, υπάρχει μια ακολουθία $t_n \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0$. Με άλλα λόγια υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$, τέτοιο ώστε

$$\|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \quad \forall n \geq N \quad (2.103)$$

για οσοδήποτε μικρό $\tilde{\varepsilon} > 0$. Από την άλλη πλευρά, εξαιτίας του Λήμματος 2.3.7, η $E(t)$ είναι φθίνουσα. Επιπλέον επειδή η $E(t) > 0$, έχουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$. Το τελευταίο, μαζί με το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.3.3, μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μεταξύ των ακολουθιών $t_n \rightarrow \infty$, την ίδια ακολουθία t_n και το ίδιο $\tilde{\varepsilon}$ με τα προηγούμενα. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\|\dot{U}\|_{\ell^2} \leq 1 \text{ και } \frac{4\tilde{K}_\vartheta}{\vartheta\varepsilon} [E(t_n)]^\vartheta < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}, \quad \forall n \geq N \quad (2.104)$$

Από την (2.103), μπορούμε να ορίσουμε με

$$\tilde{t} := \sup\{t_n \geq t_N \mid \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} < \tilde{\varepsilon}, t \in [t_N, t_n]\} \quad (2.105)$$

Ως εκ τούτου, αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.3.3 χρησιμοποιώντας την (2.105) συμπεραίνουμε ότι

$$\|J(U(t))\|_{\ell^2} \geq \nu_0 |F(U(t)) - F(\Phi)|^{1-\vartheta}, \quad \forall t \in [t_N, \tilde{t}] \quad (2.106)$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ανισότητες:

$$\|\dot{U}\|_{\ell^2}^{2(1-\vartheta)} \leq \|\dot{U}\|_{\ell^2} \text{ και } \|\dot{U}\|_{\ell^2}^{\left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)} \leq \|\dot{U}\|_{\ell^2}, \quad \forall t \in [t_N, \tilde{t}] \quad (2.107)$$

Συμπεραίνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την (2.106) και την (2.107), ανισότητα (2.101) μετατρέπεται στην

$$[E(t)]^{1-\vartheta} \leq \tilde{K}_\vartheta \left(\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2} \right), \quad \forall t \in [t_N, \tilde{t}]$$

όπου $\tilde{K}_\vartheta = \max\{\nu_0, 2\}K_\vartheta$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$[E(t)]^{\vartheta-1} = \frac{1}{[E(t)]^{1-\vartheta}} \geq \frac{1}{\tilde{K}_\vartheta (\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2})}, \forall t \in [t_N, \tilde{t}] \quad (2.108)$$

Παραγωγίζοντας τη ποσότητα $[E(t)]^\vartheta$ ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας την (2.108), παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η ανισότητα

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}[E(t)]^\vartheta &= -\vartheta \dot{E}(t)[E(t)]^{\vartheta-1} \\ &\geq \frac{\partial \varepsilon}{4} (\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2})^2 [E(t)]^{\vartheta-1} \\ &\geq \frac{\partial \varepsilon}{4} (\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2})^2 \times \frac{1}{\tilde{K}_\vartheta (\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2})}, \forall t \in [t_N, \tilde{t}] \end{aligned} \quad (2.109)$$

Συνεπώς καταλήγουμε στην διαδορική ανισότητα για την $[E(t)]^\vartheta$:

$$-\frac{d}{dt}[E(t)]^\vartheta \geq \frac{\partial \varepsilon}{4\tilde{K}_\vartheta} (\|\dot{U}\|_{\ell^2} + \|J(U)\|_{\ell^2}), \forall t \in [t_N, \tilde{t}] \quad (2.110)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.110) ως προς το χρόνο $t \in [t_N, \tilde{t}]$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [E(t)]^\vartheta &\geq \frac{\partial \varepsilon}{4\tilde{K}_\vartheta} \int_{t_N}^{\tilde{t}} \|\dot{U}\|_{\ell^2} dt \\ &\quad + \frac{\partial \varepsilon}{4\tilde{K}_\vartheta} \int_{t_N}^{\tilde{t}} \|J(U)\|_{\ell^2} dt + [E(\tilde{t})]^\vartheta \end{aligned} \quad (2.111)$$

Επειδή οι δύο τελευταίοι ολοκληρωτικοί όροι της (2.111) είναι θετικοί, προκύπτει η ανισότητα

$$\int_{t_N}^{\tilde{t}} \|\dot{U}\|_{\ell^2} dt \leq \frac{4\tilde{K}_\vartheta}{\partial \varepsilon} [E(t_N)]^\vartheta \quad (2.112)$$

Ενώ είναι γνωστό από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ότι

$$U(\tilde{t}) - \Phi = U(t_N) - \Phi + \int_{t_N}^{\tilde{t}} \frac{d}{dt} (U(t) - \Phi) dt$$

Αν λάβουμε τις νόρμες των παραπάνω ποσοτήτων και χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\|U(\tilde{t}) - \Phi\|_{\ell^2} \leq \|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2} + \int_{t_N}^{\tilde{t}} \left\| \frac{d}{dt} (U(t) - \Phi) \right\|_{\ell^2} dt \quad (2.113)$$

Επιπλέον από την (2.104) έχουμε ότι η ανισότητα, $\frac{4\tilde{K}_\vartheta}{\partial \varepsilon} [E(t)]^\vartheta < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$, ισχύει όχι μόνο για $t \in [t_N, \tilde{t}]$, αλλά για όλα τα $t \geq t_N$. Συνεπώς, από την (2.112) συνεπάγεται επίσης ότι

$$\int_{t_N}^{\tilde{t}} \|\dot{U}\|_{\ell^2} dt < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2} \quad (2.114)$$

Εξάλλου ισχύει ότι $\|U(t_N) - \Phi\|_{\ell^2} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$. Συνεπώς, αν εισάγουμε την τελευταία εκτίμηση μαζί με την σχέση (2.114), στην (2.113), θεωρώντας $\tilde{t} \rightarrow \infty$, οδηγούμαστε στο ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \Phi\|_{\ell^2} = 0$. Με αυτό το τρόπο ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

2.4 Διακλαδώσεις των Μη-Γραμμικών Σημείων Ισοροπίας

Σε αυτή τη παράγραφο θα μελετήσουμε την ύπαρξη της δεύτερης κλάσης των σημείων ισοροπίας του προβλήματος (2.2) – (2.5) – (2.6). Όπως είδαμε στη προηγούμενη παράγραφο αυτά έχουν τη μορφή $\bar{\Phi} = (\Phi, 0)$, όπου οι Φ είναι λύσεις του μη γραμμικού αλγεβρικού συστήματος (2.39) – (2.40).

Το αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε εδώ είναι διπλό. Θα δείξουμε όχι μόνο την ύπαρξη λύσεων της (2.39) – (2.40), αλλά θα επιβεβαιώσουμε επίσης ότι αυτά τα σημεία ισοροπίας, διακλαδίζονται από τις ιδιοτιμές του γραμμικού διακριτού προβλήματος ιδιοτιμών:

$$-\kappa \Delta_d \varphi_n^j = E \varphi_n^j \quad (2.115)$$

$$\varphi_0^j = \varphi_{K+1}^j = 0 \quad (2.116)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του (2.115) – (2.116) είναι βλέπε [18]

$$E_j(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{j\pi h}{2L}\right) = \frac{4(K+1)^2}{L^2} \sin^2\left(\frac{j\pi}{2(K+1)}\right), \quad j = 1, \dots, K \quad (2.117)$$

με πρωτεύουσα ιδιοτιμή E_1

$$E_1(h) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi h}{2L}\right) = \frac{4(K+1)^2}{L^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2(K+1)}\right) \quad (2.118)$$

Είναι επίσης χρήσιμο για την αριθμητική μελέτη, να συζητήσουμε την συμπεριφορά των ιδιοτιμών σε διάφορες καταστάσεις διακριτότητας. Η διακριτή περίπτωση αντιστοιχεί στη περίπτωση όπου $h = O(1)$. Στη συνεχή περίπτωση όπου $h \rightarrow 0$ και στην αντι-συνεχή περίπτωση $h \rightarrow \infty$, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_1(h) = \hat{\rho}_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad (\text{συνεχές όριο}) \quad (2.119)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E_1(h) = 0, \quad (\text{αντί-συνεχές όριο}) \quad (2.120)$$

Συγκεκριμένα στην περίπτωση του $L = 1$ έχουμε ότι ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} E_1(h) = \hat{\rho}_1 = \pi^2, \quad (2.121)$$

$$4 \leq E_1(h) \leq \pi^2, \quad \text{για } 0 < h \leq 1 \quad (2.122)$$

Επίσης θυμόμαστε ότι για την $E_1 > 0$, ισχύει ότι

$$E_1 = \inf_{\substack{X \in \ell_{K+2}^2 \\ X \neq 0}} \frac{(-\kappa \Delta_D X, X)_{\ell^2}}{\sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^2} \quad (2.123)$$

Το τελευταίο συνεπάγεται ότι

$$E_1 \sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^2 \leq \kappa (-\Delta_D X, X)_{\ell^2} \leq 4\kappa \sum_{n=0}^{K+1} |X_n|^2 \quad (2.124)$$

Οι διακλαδώσεις των μη γραμμικών σημείων ισορροπίας θα είναι συνέπεια του θεωρήματος Rabinowitz (βλέπε επίσης [27] [30]). Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα χρειαζόμαστε κάποια προεργασία, ώστε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (2.39) στη μορφή που ζητά το θεώρημα,

$$\Phi - \mathcal{F}(\mu, \Phi) = 0. \quad (2.125)$$

Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε το γραμμικό τελεστή \mathcal{R} και να συζητήσουμε τις ιδιότητές του. Ο \mathcal{R} θα είναι ο αντίστροφος του τελεστή

$$\mathcal{T}(\Phi_n) = -\kappa \Delta_d \Phi_n. \quad (2.126)$$

Η συζήτηση πιο πάνω, για τις ιδιοτιμές E_j του γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.40)–(2.116). Ο τελεστής \mathcal{T} είναι θετικός και αυτοσυζυγής στο χώρο Hilbert $\mathcal{X} := \ell_{K+2}^2$, το οποίο προκύπτει από την (2.124). Οι ιδιοτιμές του δίνονται από την (2.117) και μπορούν να διαταχθούν ως εξής

$$0 < E_1 < E_2 < \dots < E_K$$

Εκάθαρα, ο τελεστής \mathcal{T} είναι αντιστρέψιμος και ορίζεται ο αντίστροφός του, $\mathcal{R} := \mathcal{T}^{-1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Τώρα, ξαναγράφουμε την εξίσωση (2.39) στην ακόλουθη μορφή

$$\mathcal{T}(\Phi) - \omega_d^2 \Phi - \mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi) = 0, \quad \Phi \in \mathcal{X}. \quad (2.127)$$

Ο $\mathcal{G} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ είναι ο μη γραμμικός τελεστής

$$\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi) = -\omega_d^2 \Phi^3.$$

Εισάγοντας στην εξίσωση (2.127) τον τελεστή \mathcal{R} , παίρνουμε την εξίσωση

$$\Phi - \omega_d^2 \mathcal{R}(\Phi) - \mathcal{R}\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi) = 0. \quad (2.128)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2.128) είναι σύμφωνη με την εξίσωση $f(\mu, x) = \mu \mathcal{R} + \mathcal{W}(\mu, x)$ (βλέπε θεώρημα (1.6.4) [3]) και την εξίσωση (2.125), με $\mathcal{R} = \mathcal{T}^{-1}(\Phi)$, και $\mathcal{W}(\omega_d^2, \Phi) = \mathcal{R}\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi)$. Είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε το θεώρημα (1.6.4) χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.128) και να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.4.1. *Υπάρχει ένα μέγιστο συνεχές λύσεων C_{E_j} της εξίσωσης (2.39) με $j = 1, \dots, K+1$ που διακλαδίζεται από τις $(E_j, 0)$ και C_{E_j} είτε (1) συναντά το άπειρο στο $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ ή (2) συναντά $\Phi = 0$ σε ένα σημείο $(\omega_d^2, 0)$, όπου $\omega_d^2 \neq E_n$ και $\frac{1}{\omega_d^2}$ είναι μια ιδιοτιμή του \mathcal{R} .*

Απόδειξη. Εφόσον η εξίσωση (2.128) έχει θεωρηθεί στον πεπερασμένης διάστασης χώρο \mathcal{X} , οι τελεστές \mathcal{R} , και $\mathcal{W} = \mathcal{R}\mathcal{G}$ είναι συμπαγείς. Εξάλλου οι ιδιοτιμές του \mathcal{R} είναι οι $1/E_j$, $j = 1, \dots, K+1$, και είναι όλες απλές. Συνεπώς, μένει μόνο να εξετάσουμε τις συνθήκες μεταβολής $\lim_{\|\mathcal{X}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{W}(\mu, \mathcal{X})\|_{\mathcal{X}}}{\|\mathcal{X}\|_{\mathcal{X}}} = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathcal{W}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} &= \frac{\|\mathcal{R}\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} \\ &\leq \frac{\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{X}} \|\mathcal{G}(\omega_d^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} \\ &\leq \frac{\omega_d^2 \beta \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{X}} \|\Phi\|_{\mathcal{X}}^3}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} \\ &= \omega_d^2 \beta \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{X}} \|\Phi\|_{\mathcal{X}}^3 \end{aligned}$$

Για τις παραπάνω εκτιμήσεις χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα (2.10), με $q = 3$ και $p = 2$. Θεωρώντας $\|\Phi\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0$, παρατηρούμε ότι $\lim_{\|\mathcal{X}\|_{\mathcal{X}} \rightarrow 0} \frac{\|W(\omega_n^2, \Phi)\|_{\mathcal{X}}}{\|\Phi\|_{\mathcal{X}}} = 0$ και με αυτό το τρόπο καταλήγουμε στην απόδειξη της πρότασης \square

Στη συνέχεια, θα συζητήσουμε κάποιες από τις γεωμετρικές ιδιότητες των κλαδιών C_{E_j} . Για το σκοπό αυτό, είναι απαραίτητο να θυμηθούμε κάποιες περαιτέρω ιδιότητες του διακριτού, γραμμικού προβλήματος των ιδιοτιμών (2.115) – (2.116). Αρχικά από το Θεώρημα Krein-Rutman (1.4.3) [3], συνεπάγεται ότι η ιδιοσυνάρτηση ϕ_n^1 που σχετίζεται με την ιδιοτιμή E_1 είναι θετική, υπό την έννοια ότι $\phi_n^1 > 0$ για όλα τα $n = 1, \dots, K$, εκτός από τα σημεία $n = 0$ και $n = K + 1$, όπου ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (2.116). Από την άλλη μεριά, το πρόβλημα ιδιοτιμών (2.115) – (2.116) είναι το ανάλογο του διακριτού προβλήματος Sturm-Liouville

$$-\psi''(x) = \beta\psi(x), \quad -L/2 < x < L/2 \quad (2.129)$$

$$\psi(-L/2) = \psi(L/2) = 0 \quad (2.130)$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω προβλήματος, είναι $\beta_j = \frac{j^2 \pi^2}{L^2}$, $j = 1, 2, \dots$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις $\psi_j(x) = \sin(\frac{j\pi x}{L})$, οι οποίες έχουν ακριβώς $j - 1$ κομβικά σημεία. Έχοντας στο μυαλό μας τις παραπάνω ιδιότητες του διακριτού προβλήματος ιδιοσυναρτήσεων (2.115) – (2.116), ορίζουμε τα σύνολα \mathcal{X}

$$S_j := \{X \in \mathbb{R}^{K+2} : X_0 = X_{K+1} = 0 \text{ με ακριβώς } j - 1 \text{ κομβικά σημεία}\} \quad (2.131)$$

Αυτά τα σύνολα είναι ανοιχτά στον \mathcal{X} , εφόσον $\forall X \in S_j$ η ανοιχτή μπάλα

$$B(X, \rho) = \{X \in S_j : \|X - Y\|_{\mathcal{X}} < \rho, Y \in \mathcal{X}\}$$

βρίσκεται στο S_j , θεωρώντας ρ -οσοδήποτε μικρό. Για παράδειγμα, για ρ -οσοδήποτε μικρό έχουμε οσοδήποτε μικρή διαταραχή των συντεταγμένων του \mathcal{X} στο S_j . Συνεπώς, όλα τα διανύσματα του \mathcal{X} που είναι στην $B(X, \rho)$ έχουν τον ίδιο αριθμό κομβικών σημείων. Επιστρέφοντας στις λύσεις Φ_n του μη γραμμικού στάσιμου προβλήματος (2.39) – (2.40), η θεωρία διακλάδωσης και το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης (βλέπε [3]), διασφαλίζουν ότι το κλαδί C_{E_j} μπορεί να αναπαρασταθεί τοπικά από μια C^1 -καμπύλη

$$(\mu, \Phi) : (-\gamma, \gamma) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{X},$$

για κάποια οσοδήποτε μικρά γ . Για παράδειγμα, αυτή η αναπαράσταση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\mu(0) = E_j, \quad \chi = 0 \quad (2.132)$$

$$(\mu(s), \Phi(s)) = (\mu(s), s(\varphi^j + \chi(s))), \quad |s| < \gamma. \quad (2.133)$$

Εδώ, το $\mu(s) := \omega_n^2(s)$ και $\|\mathcal{X}\|_{\mathcal{X}} = O(|s|)$, σε μια γειτονιά του σημείου διακλάδωσης $(E_j, 0)$. Επιπλέον υπάρχει μια γειτονιά του $(E_j, 0)$, τέτοια ώστε κάθε λύση του (2.39) – (2.40), να βρίσκεται στη καμπύλη ή να είναι ακριβώς στο σημείο $(E_j, 0)$. Η επόμενη πρόταση, αναφέρεται σε μια τοπική ιδιότητα καμπυλότητας του κλαδιού C_{E_j} .

Πρόταση 2.4.2. *Θεωρούμε τη τοπική αναπαράσταση (2.132)–(2.133) του κλαδιού C_{E_j} . Τότε, $\mu'(0) = 0$, $\mu''(0) > 0$, δηλαδή η τοπική αναπαράσταση έχει τα κοίλα άνω.*

Απόδειξη. Εισάγοντας τη τοπική αναπάρασταση του κλαδιού

$$(\mu(s), \Phi(s)) = (\mu(s), s(\varphi^j + \chi(s)))$$

στην (2.39), και διαιρούμε με $s > 0$. Έτσι, έχουμε ότι

$$-\kappa \Delta_d(\varphi^j + \chi_n(s)) + \mu(s)\beta s^2(\varphi^j + \chi_n(s))^3 = \mu(s)(\varphi^j + \chi_n(s))$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς s έχουμε ότι

$$\begin{aligned} -\kappa \Delta_d \chi'_n(s) + \mu(s)[2s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 + 3\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2 \chi'_n(s)] \\ + \mu'(s)[\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3] \\ = \mu'(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s)) + \mu(s)\chi'_n(s) \end{aligned} \quad (2.134)$$

Θέτουμε με $s = 0$ στην (2.134), χρησιμοποιούμε επίσης ότι $\mu(0) = E_j$, $X_n(0) = 0$. Έτσι καταλήγουμε στην ισότητα

$$-\kappa \Delta_d \chi'_n(0) - \mu'(0)\beta \varphi_n^j = E_j \chi'_n(0) \quad (2.135)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.135) με φ^j και αθροίζοντας τους όρους, λαμβάνουμε την σχέση

$$-\kappa \sum_{n=0}^{K+1} \Delta_d \chi'_n(0) \varphi_n^j - \sum_{n=0}^{K+1} \mu'(0)\beta (\varphi_n^j)^2 = \sum_{n=0}^{K+1} E_j \chi'_n(0) \varphi_n^j$$

Αθροίζοντας κατά παράγοντες το πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης έχουμε ότι

$$-\kappa \sum_{n=0}^{K+1} \chi'_n(0) \Delta_d \varphi_n^j - \sum_{n=0}^{K+1} \mu'(0)\beta (\varphi_n^j)^2 = \sum_{n=0}^{K+1} E_j \chi'_n(0) \varphi_n^j \quad (2.136)$$

Εφόσον E_j και φ_n^j είναι λύσεις του διακριτού γραμμικού προβλήματος ιδιοτιμών (2.40) – (2.116), έχουμε ότι ισχύει

$$-\kappa \sum_{n=0}^{K+1} \chi'_n(0) \Delta_d \varphi_n^j = \sum_{n=0}^{K+1} E_j \chi'_n(0) \varphi_n^j$$

Ως εκ τούτου, η (2.136) μας δίνει το αποτέλεσμα

$$\sum_{n=0}^{K+1} \mu'(0)\beta |\varphi_n^j|^2 = 0.$$

Το τελευταίο μας δίνει ότι το $\mu'(0) = 0$. Για να υπολογίσουμε την $\mu''(s)$, παραγωγίζουμε την (2.134) ως προς s :

$$\begin{aligned} -\kappa \Delta_d \chi''(s) + \mu(s) [2\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 + 6s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2 \chi'_n(s)] \\ + 2\mu'(s)s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 \\ + \mu(s)[6\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2 \chi'_n(s) + 6\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))\chi'_n(s)^2 \\ + 3\beta s^2(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2 \chi''_n(s)] + 3s^2\beta\mu'(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s))\chi'_n(s)^2 \\ + \mu'(s)[2s\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3 + 3s^2\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^2 \chi'_n(s)] \\ + \mu''(s)(s^2\beta(\varphi_n^j + \chi_n(s))^3) \\ = \mu''(s)(\varphi_n^j + \chi_n(s)) + \mu(s)\chi''_n(s) \\ + \mu'(s)\chi'_n(s) + \mu(s)\chi''_n(s) \end{aligned} \quad (2.137)$$

Για μια ακόμη φορά, θέτουμε με $s = 0$ στην (2.137) και χρησιμοποιούμε ότι $\mu'(0) = 0$, το οποίο αποδείχθηκε παραπάνω. Επιπλέον χρησιμοποιούμε τις σχέσεις, $\mu(0) = E_j$, $\chi_n(0) = 0$ και με αυτό το τρόπο φτάνουμε στην εξίσωση

$$-\kappa \Delta_d \chi_n''(0) + 2\beta E_j (\varphi_n^j)^3 - \mu''(0) \varphi_n^j + E_j^j \chi_n''(0) \quad (2.138)$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως στην εξίσωση (2.136), από την εξίσωση (2.138) παίρνουμε ότι

$$-\kappa \sum_{n=0}^{K+1} \chi_n''(0) \Delta_d \varphi_n^j + 2\beta \sum_{n=0}^{K+1} E_j (\varphi_n^j)^4 = \sum_{n=0}^{K+1} \mu''(0) (\varphi_n^j)^2 + \sum_{n=0}^{K+1} E_j \chi_n''(0) \varphi_n^j$$

Τότε, χρησιμοποιώντας ξανά ότι οι (E_j, φ_n^j) είναι λύσεις του προβλήματος (2.115) – (2.116), τελικά οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$\mu''(0) \sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^2 = 2\beta \sum_{n=0}^{K+1} E_j (\varphi_n^j)^4 \quad (2.139)$$

Η εξίσωση ξεκάθαρα συνεπάγεται ότι $\mu''(0) > 0$. □

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.139) μπορούμε να εξάγουμε μια εκτίμηση σχετικά με την τιμή της $\mu''(0)$. Έτσι έχουμε ότι

$$\mu''(0) = 2\beta E_j \frac{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^4}{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^2} \quad (2.140)$$

Μπορούμε να λάβουμε μια προσέγγιση μέσα από την ακόλουθη φόρμουλα

$$2\beta E_j \frac{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^4}{\sum_{n=0}^{K+1} (\varphi_n^j)^2} = \frac{\int_0^\pi a^4 \sin^4(jx) dx}{\int_0^\pi a^2 \sin^2(jx) dx} = \frac{3a^2}{4}$$

Ως εκ τούτου η εξίσωση (2.140) γίνεται

$$\mu''(0) = \frac{3}{2} a^2 \beta E_j \quad (2.141)$$

Η επόμενη πρόταση μας διασφαλίζει ότι το μέγιστο συνεχές των λύσεων C_{E_j} είναι μη φραγμένο σύνολο.

Πρόταση 2.4.3. Για κάθε $\kappa > 0$, το μέγιστο συνεχές των λύσεων C_{E_j} της εξίσωσης (2.39) που διακλαδίζεται από τα σημεία $(E_j, 0)$ συναντά το άπειρο στο \mathbb{R}

Απόδειξη. (α) Θυμόμαστε ότι κάθε λύση (μ, Φ) κοντά στο $(E_j, 0)$ έχει τον ίδιο αριθμό κομβικών σημείων με τις Φ^j που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές E_j . Αυτό οφείλεται στη C^1 -αναπαράσταση των λύσεων Φ που έχει τη μορφή, $\Phi_n(s) = s\Phi_n^j + s\chi_n(s)$. Για παράδειγμα, κάθε γραμμική κατάσταση Φ^j ανήκει στο σύνολο S_n που ορίσαμε στην εξίσωση (2.131) και $\|\chi\|_X = O(|s|)$. Τότε, έπεται ότι η λύση Φ ικανοποιεί την εκτίμηση $\|\Phi(s)\|_X \leq |s| \|\Phi^j\|_X + O(s^2)$ στη γειτονιά των σημείων διακλάδωσης $(E_j, 0)$. Ως εκ τούτου, εφόσον το σύνολο S_j είναι ανοιχτό, έχουμε από τη παραπάνω εκτίμηση, ότι $\Phi \in S_j$ για $|s| < \gamma$.

(β) Τώρα για όλα τα $(\mu, \Phi) \in C_{E_j}$ και για κάθε $j = 0, 1, 2, \dots, K$, θεωρούμε την δείκτρια συνάρτηση:

$$f(\mu, \Phi) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \Phi \in S_n \\ 0 & \text{αν } \Phi = 0, \mu = E_j, m \neq j \end{cases}$$

για την οποία ισχύει ότι $f(\mu, \Phi) = 0$ αν το κλαδί C_{E_j} , συναντά στον άξονα $(\mu, 0)$ σε μια άλλη ιδιοτιμή $E_m \neq E_j$. Σημειώνουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη σύμφωνα με τις δύο περιπτώσεις που περιγράψαμε σε προηγούμενη πρόταση. Από το (α) έχουμε ότι αν $f(\mu, \Phi) = 1$. Έτσι, η συνάρτηση f είναι σταθερή σε μια μικρή γειτονιά του $(E_j, 0)$ και δεν μπορεί να αλλάξει τιμή. Δηλαδή, η f είναι τοπικά σταθερή. Το σύνολο S_j είναι ανοιχτό και η συνάρτηση f είναι τοπικά σταθερή σε ένα συνεκτικό σύνολο C_{E_j} . Ξεκάθαρα και από τα δύο αυτά γεγονότα μαζί, συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής. Άρα, το σύνολο $f(C_{E_j})$ πρέπει να είναι επίσης συνεκτικό, εφόσον η εικόνας ενός συνεκτικού συνόλου μιας συνεχούς συνάρτησης θα πρέπει να είναι συνεκτικό σύνολο. Ωστόσο, η f λαμβάνει ακέραιες τιμές και το γεγονός ότι το $f(C_{E_j})$ είναι συνεκτικό σύνολο, συνεπάγεται ότι η f θα πρέπει να είναι σταθερή με $ηf = 1$, για όλα τα $(\mu, \Phi) \in C_{E_j}$. Συνεπώς, το C_{E_j} δεν μπορεί να περιέχει ένα σημείο $(E_m, 0)$ με $E_m \neq E_j$ και το C_{E_j} θα πρέπει να είναι μη φραγμένο.

□

2.5 Αριθμητική μελέτη

Σε αυτή τη παράγραφο, διερευνούμε αριθμητικά την δυναμική του συστήματος (2.2) – (2.5) – (2.6). Ο πρώτος μας στόχος μεριμνά την αριθμητική μελέτη της ιδιότητας της Δυναμικής Ευστάθειας του συστήματος, η οποία εξαρτάται άμεσα από την ύπαρξη και τη γραμμική ευστάθεια των κλαδιών των σημείων ισορροπίας που προσδιορίζονται στις Προτάσεις (2.4.1) – (2.4.2).

Για τη συζήτηση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, είναι επίσης σημαντικό να τονιστεί ο ρόλος της παραμέτρου ω_d^2 . Αλλάζοντας τη χρονική μεταβλητή $t \rightarrow \frac{t}{h}$, ξαναγράφουμε την εξίσωση (2.2) στη μορφή

$$\ddot{U}_n - \Delta_d U + \hat{\delta} \dot{U}_n = \Omega_d^2 (U_n - \beta U_n^2), \quad t > 0, \quad \Omega_d^2 = h^2 \omega_d^2, \quad \hat{\delta} = h\delta$$

Απόδειξη. Η αρχική διακριτή εξίσωση Klein-Gordon με τριβή δίνεται από:

$$\ddot{U}_n - k(U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) + \delta \dot{U}_n + W'(U_n) = 0, \quad \beta > 0, \delta > 0$$

Η συνάρτηση δυναμικού $W(U_n)$ είναι:

$$W(U_n) = -\frac{\omega_d^2}{2} U_n^2 + \frac{\beta \omega_d^2}{4} U_n^4$$

Βήμα προς βήμα ο μετασχηματισμός:

(α) **Διακριτή Laplace:**

Ο διακριτός τελεστής Laplace $\Delta_d U$ δίνεται από:

$$\Delta_d U = U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}.$$

Επομένως, η εξίσωση (2.2) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$\ddot{U}_n - k\Delta_d U + \delta\dot{U}_n + W'(U_n) = 0.$$

(β) **Παράγωγος Δυναμικού $W'(U_n)$:**

Η παράγωγος της συνάρτησης δυναμικού $W(U_n)$ είναι:

$$W'(U_n) = -\omega_d^2 U_n + \beta\omega_d^2 U_n^3.$$

Υποκαθιστώντας $W'(U_n)$ στην εξίσωση, έχουμε:

$$\ddot{U}_n - k\Delta_d U + \delta\dot{U}_n - \omega_d^2 U_n + \beta\omega_d^2 U_n^3 = 0.$$

(γ) **Παράμετρος Διακριτοποίησης:**

Δεδομένου ότι $k = h^{-2}$, έχουμε:

$$\ddot{U}_n - h^{-2}\Delta_d U + \delta\dot{U}_n - \omega_d^2 U_n + \beta\omega_d^2 U_n^3 = 0.$$

(δ) **Αλλαγή Χρονικής Μεταβλητής:**

Αλλάζουμε τη χρονική μεταβλητή $t \rightarrow \frac{t}{h}$. Υπό αυτή την αλλαγή:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{d(t/h)} = h \frac{d}{dt}.$$

Κατά συνέπεια:

$$\ddot{U}_n \rightarrow h^{-2}\ddot{U}_n, \quad \dot{U}_n \rightarrow h^{-1}\dot{U}_n.$$

(ε) **Υποκατάσταση Χρονικών Παραγώγων:**

Υποκαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση έχουμε:

$$h^{-2}\ddot{U}_n - h^{-2}\Delta_d U + h^{-1}\delta\dot{U}_n - \omega_d^2 U_n + \beta\omega_d^2 U_n^3 = 0.$$

(ζ) **Κανονικοποίηση και Απλοποίηση:**

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη με h^2 για απλοποίηση:

$$\ddot{U}_n - \Delta_d U + h\delta\dot{U}_n - h^2\omega_d^2 U_n + \beta h^2\omega_d^2 U_n^3 = 0.$$

(η) **Ορισμός Νέων Παραμέτρων:**

Ορίζουμε τις νέες παραμέτρους:

$$\Omega_d^2 = h^2\omega_d^2, \quad \hat{\delta} = h\delta.$$

Υποκαθιστώντας τις παραπάνω, έχουμε την μετασχηματισμένη εξίσωση:

$$\ddot{U}_n - \Delta_d U + \hat{\delta}\dot{U}_n = \Omega_d^2(U_n - \beta U_n^3).$$

(θ) Τελική Μετασχηματισμένη Εξίσωση:

Επομένως, η σωστά μετασχηματισμένη εξίσωση γίνεται:

$$\ddot{U}_n - \Delta_d U + \hat{\delta} \dot{U}_n = \Omega_d^2 (U_n - \beta U_n^3), \quad t > 0, \quad \Omega_d^2 = h^2 \omega_d^2, \quad \hat{\delta} = h\delta.$$

□

Η αλλαγή κλίμακας της πλεγματικής παραμέτρου του προβλήματος, την κάνει σημαντική ώστε να σχολιάσουμε σε αυτό το σημείο τη φύση του συνεχούς και του αντί-συνεχούς ορίου. Για το αντί-συνεχές όριο χρειάζεται να θεωρήσουμε για την εξίσωση (2.2), το όριο $\omega_d^2 \rightarrow \infty$. Σε αυτή τη περίπτωση η μη-γραμμικότητα κυριαρχεί και βρισκόμαστε πλέον στη περίπτωση των ασύζευκτων ταλαντωτών. Από την άλλη μεριά, για μικρές τιμές του ω_d^2 , ο γραμμικός όρος σύζευξης γίνεται σημαντικός. Ωστόσο, εξαιτίας της φύσης του μοντέλου μας, λαμβάνουμε το ασυπτωματικό γραμμικό όριο, καθώς $\omega_d^2 \rightarrow 0$.

2.5.1 Εξέλιξη των Χωρικά Εκτεταμένων Αρχικών Συνθηκών

Ξεκινάμε την αριθμητική μελέτη, επιβεβαιώνοντας αριθμητικά την θεωρία των καθολικών διακλαδώσεων που συζητήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Θεωρούμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες με την εξής μορφή:

$$U_n(0) = U_{n,0} = a \sin\left(\frac{j\pi hn}{L}\right), \quad j = 1, \dots, K \quad (2.142)$$

όπου $h = \frac{L}{K+1}$ είναι η απόσταση του πλέγματος και $a > 0$ είναι το πλάτος της αρχικής συνθήκης.

Υποθέτουμε επίσης μηδενική αρχική ταχύτητα:

$$\dot{U}_n(0) = U_{n,1} = 0. \quad (2.143)$$

Χρησιμοποιούμε το εξής συμβολισμό για την αρχική συνθήκη

$$U_n(0) \simeq C_{E_j}, \quad (2.144)$$

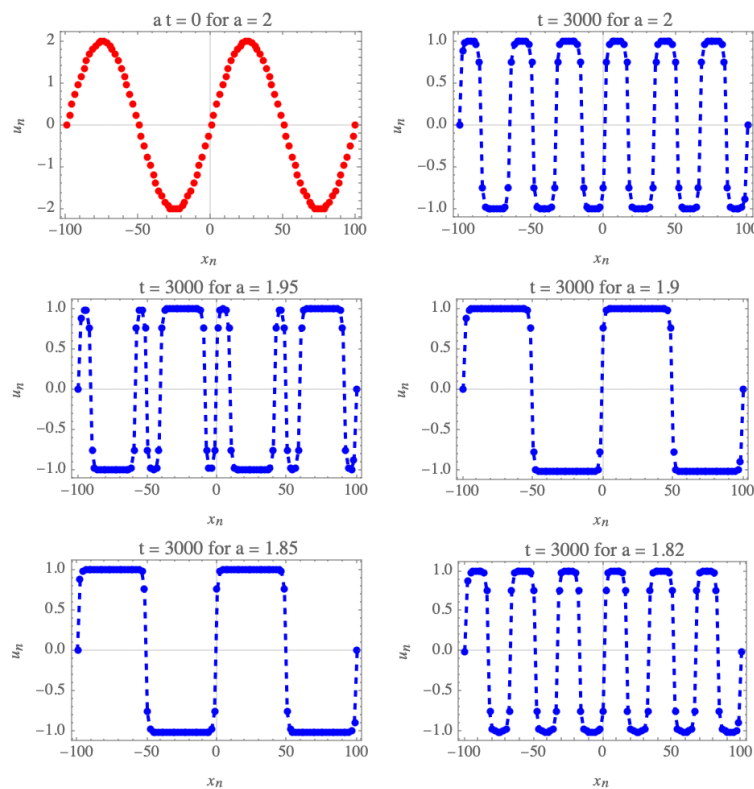
για να περιγράψουμε την ακόλουθη ιδιότητα της (2.142): η $U_n(0)$ έχει τις ίδιες αλλαγές προσήμου με τη μη-γραμμική στάσιμη κατάσταση $\Phi_j \in C_{E_j}$ της αλυσίδας (DKG) (2.2)–(2.5)–(2.6) (που είναι οι λύσεις του μη-γραμμικού στάσιμου προβλήματος (2.39)–(2.40)). Υπενθυμίζουμε ότι μια μη-γραμμική στάσιμη κατάσταση $\Phi_j \in C_{E_j}$ έχει $j - 1$ αλλαγές προσήμου. Λέμε ότι μια τέτοια αρχική συνθήκη είναι παρόμοια με ένα κλαδί C_{E_j} .

Σενάριο :

Εξετάξουμε την εξέλιξη όταν η παράμετρος ω_d^2 είναι τυχαία, με αρχική συνθήκη (2.142) $U_n(0) \simeq C_{E_j}$ για διάφορα πλάτη.

Με το Σενάριο I θέλουμε να διερευνήσουμε το ρόλο της ισχύς της μη γραμμικότητας στη σύγκλιση της δυναμικής σε ένα σημείο ισορροπίας Φ_j , όταν η αρχική συνθήκη για διάφορα πλάτη σχετίζεται με ένα κλαδί με τον τρόπο που ορίζεται παραπάνω. Για την αριθμητική μελέτη αυτού του σεναρίου, θεωρούμε για την αρχική συνθήκη (2.142) $U_n(0) \simeq C_{E_4}$ εξετάζοντας την δυναμική για διάφορες τιμές του πλάτους a . Και για τα δύο παραδείγματα θεωρούμε τις εξής παραμέτρους: $\omega_d^2 = 1, K = 99, L = 200, \beta = 1$ και $\delta = 0.05$. Η ολοκλήρωση του συστήματος γίνεται μέχρι την χρονική στιγμή $t = 3000$.

Για να κατανοήσουμε τα αποτελέσματα από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις που δημιουργούνται από τον κώδικα Mathematica, θα πρέπει να εστιάσουμε στα εξής σημεία:



Σχήμα 2.2: Δυναμική για αρχική συνθήκη (2.140), για $\omega_d^2 = 1$ για διάφορες τιμές πλάτους. Μειώνοντας τις τιμές του πλάτους, παρατηρούμε τη σύγκλιση σε σημεία ισορροπίας διαφορετικών κλαδιών από το C_{E_4}

Για κάθε τιμή του a στη λίστα, παρατηρούμε τα εξής:

Για Μεγάλες Τιμές του a :

- Για τις μεγαλύτερες τιμές του a (π.χ. 2, 1.95, 1.9), το σύστημα ξεκινά με μεγαλύτερη αρχική ενέργεια.
- Απόσβεση: Η απόσβεση (λόγω του δ) μειώνει την ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου, αλλά η αρχική μεγάλη διαταραχή μπορεί να οδηγήσει σε μεγαλύτερη παραμένουσα ενέργεια στη σταθερή κατάσταση.
- Μη Γραμμικότητα: Η μη γραμμικότητα (β) μπορεί να οδηγήσει σε πιο σύνθετες καταστάσεις και δομές στο τελικό σύστημα.

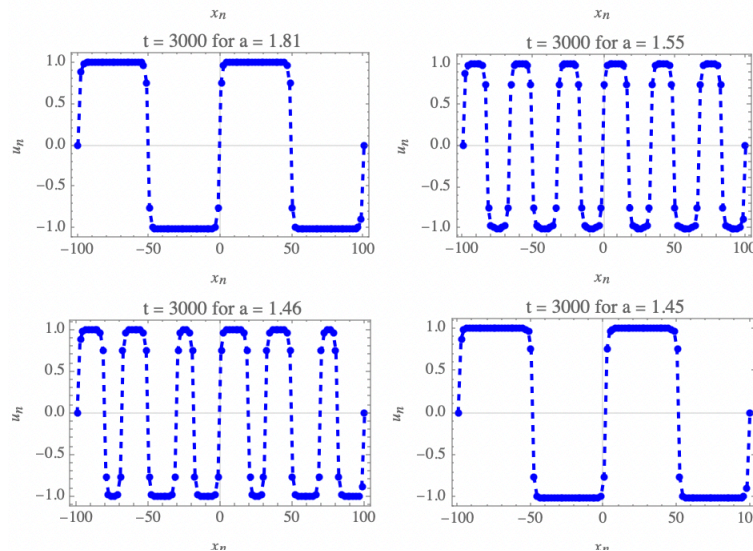
Οι μεγαλύτερες αρχικές τιμές του a οδηγούν σε πιο έντονη αρχική διαταραχή, μεγαλύτερη παραμένουσα ενέργεια και πιο σύνθετες τελικές καταστάσεις λόγω της μη γραμμικότητας.

Για Μικρότερες Τιμές του a :

- Για μικρότερες τιμές του a (π.χ. 1.55, 1.46, 1.45), η αρχική ενέργεια είναι μικρότερη.
- Απόσβεση: Η ενέργεια αποσβένεται πιο γρήγορα, οδηγώντας σε μια πιο ήρεμη τελική κατάσταση με λιγότερες ταλαντώσεις.
- Μη Γραμμικότητα: Η επίδραση της μη γραμμικότητας είναι λιγότερο έντονη λόγω της μικρότερης αρχικής ενέργειας.

Μικρότερες αρχικές τιμές του a οδηγούν σε γρήγορη απόσβεση της ενέργειας και πιο ήρεμες τελικές καταστάσεις.

Μειώνοντας το πλάτος a , παρατηρούμε κάποια αξιοσημείωτα χαρακτηριστικά



Σχήμα 2.3: (Συνέχεια του Σχήματος 2.2): Ανίχνευση ενός κατωφλιού ευστάθειας $a^* = 1.45$: Για $a \leq a^*$, η αρχική συνθήκη (2.140), $U_n(0) \simeq C_{E_4}$, συγκλίνει σε ένα μη-γραμμικό σημείο ισορροπίας $\Phi_4 \in C_{E_4}$

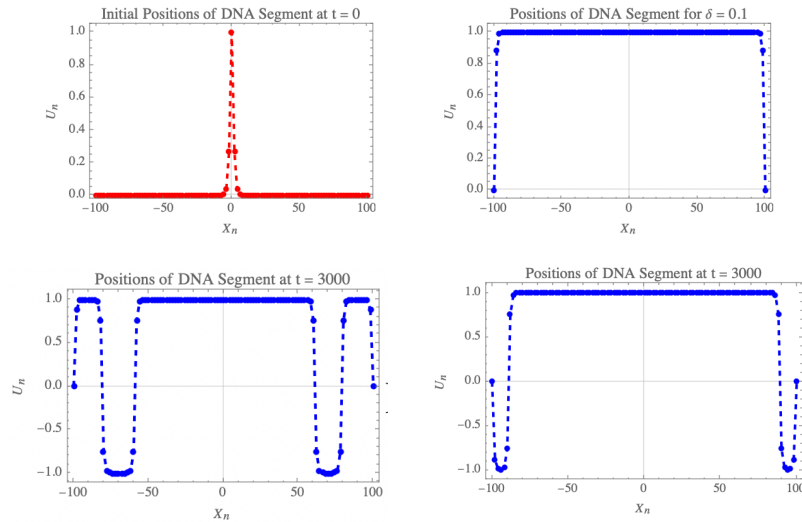
2.5.2 Εξέλιξη των Χωρικά Εντοπισμένων Αρχικών Συνθηκών

Τέλος, το τρίτο μέρος εξετάζει το ρόλο της δύναμης απόσβεσης στη δομή των κλαδιών των σημείων ισορροπίας. Σε αυτή τη μελέτη θεωρούμε εντοπισμένες αρχικές συνθήκες της μορφής:

$$U_n(0) = U_{n,0} = a \operatorname{sech}\left(-\frac{L}{2} + nh\right) \quad (2.145)$$

Επίσης σημειώνουμε ότι εφόσον θεωρούμε πεπερασμένη αλυσίδα, οι αρχικές συνθήκες (2.145) ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet (2.5) μόνο ασυμπτωτικά. Ωστόσο αφού το μικρότερο ημι-μήκος της αλυσίδας έχει θεωρηθεί $L/2 = 100$, το σφάλμα είναι της τάξης 10^{-44} συνεπώς δεν επηρεάζονται οι αριθμητικοί υπολογισμοί.

Το Σχήμα 2.4 απεικονίζει τη δυναμική της αρχικής συνθήκης (2.145) για τις παραμέτρους: $\omega_d^2 = 1, K = 99, L = 200$ και $\beta = 1$. Στη πρώτη εικόνα του Σχήματος 2.4 παρατηρούμε το προφίλ της αρχικής συνθήκης. Οι υπόλοιπες εικόνες απεικονίζουν την δυναμική του συστήματος για τις τιμές της δύναμης απόσβεσης $\delta = 0.1, 0.05, 0.01$. Για $\delta = 0.1$ η σύγκλιση πραγματοποιείται στο σημείο ισορροπίας $\Phi_1 \in C_1$ που είναι και η βασική κατάσταση. Για μικρότερες



Σχήμα 2.4: Δυναμική για μια αρχική συνθήκη (2.145), για $\omega_d^2 = 1, K = 99, L = 200, \beta = 1$ και για διάφορες τιμές της δύναμης απόσβεσης δ .

τιμές της δύναμης απόσβεσης παρατηρούμε αλλαγή της τελικής κατάστασης. Εντοπίζεται μια κατωφλική τιμή για την δύναμη απόσβεσης $\delta^* = 0.05$ κάτω από την οποία, το σύστημα συγκλίνει στα σημεία ισορροπίας $\Phi_3 \in C_3$ και $\Phi_5 \in C_5$. Παρατηρούμε συνεπώς ότι για μεγάλες τιμές του δ η τελική κατάσταση έχει τον ίδιο αριθμό σημείων μηδενισμού με την αρχική συνθήκη. Ενώ για μικρότερες τιμές του δ περισσότεροι ταλαντωτές αλλάζουν πηγάδι δυναμικού που στη περίπτωση μας είναι το -1 .

2.6 Συμπέρασμα

Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετήσαμε τις δυναμικές μεταβάσεις μεταξύ σημείων ισορροπίας της αλυσίδας Klein–Gordon με τριβή, εφοδιασμένη με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Προσπαθήσαμε να διαλευκάνουμε το περίπλοκο ενεργειακό τοπίο που υπαγορεύει την αντίστοιχη δυναμική.

Αρχικά, συζητήσαμε τη σύγκλιση σε μοναδικό, μη-τετριμμένο σημείο ισορροπίας, καθώς το σύστημα ανήκει στη κλάση ενός δυναμικού συστήματος κλίσης, δευτέρου βαθμού. Αναδείξαμε το ρόλο της διακριτής εκδοχής της ανισότητας Łojasiewicz, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτή την κλάση συστημάτων. Στη συνέχεια, εφαρμόσαμε στη διακριτή περίπτωση, τη θεωρία καθολικών δια-κλαδώσεων, για να αποδείξουμε ότι τα κλαδιά των μη-γραμμικών σημείων ισορροπίας, διακλαδίζονται από τις γραμμικές ιδιοκαταστάσεις της διακριτής Λαπλασιανής. Κατά συνέπεια, χαρακτηρίσαμε τα κλαδιά των καταστάσεων ισορροπίας, από τον αριθμό των αλλαγών προσήμου. Ως εκ τούτου, τα

αντίστοιχα σημεία ισορροπίας μπορεί να ορίζουν μη-τετριμμένες τοπολογικές παρεμβολές μεταξύ των προσκείμενων ελαχίστων του δυναμικού φ^4 .

Στην συνέχεια, πραγματοποιώντας αριθμητικές προσομοιώσεις σε συνδυασμό με τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας των κλαδιών, καταφέραμε να αποκαλύψουμε σημαντικά χαρακτηριστικά σχετικά με την πολύπλοκη δομή της δυναμικής της σύγκλισης. Είδαμε ότι η δυναμική αυτή εξαρτάται από τη διακριτότητα, τη μη-γραμμικότητα και τη τριβή. Στα αριθμητικά πειράματα, αρχικά θεωρήσαμε χωρικά εκτεταμένες αρχικές συνθήκες, οι οποίες μοιράζονταν τον ίδιο αριθμό αλλαγών προσήμου με τα σημεία ισορροπίας ενός συγκεκριμένου κλαδιού. Μεταβάλλοντας τη δύναμη της μη-γραμμικότητας και της διακριτότητας, αποκαλύψαμε τον πλούτο των δυναμικών μεταβάσεων της δυναμικής της σύγκλισης, σε καταστάσεις ισορροπίας διαφορετικών κλαδιών. Ενώ είδαμε την ποικιλία της χωρικής δομής των σημείων ισορροπίας. Επιπλέον καταλάβαμε το ρόλο του πλάτους της αρχικής συνθήκης στη σύγκλιση σε διαφορετικές τελικές καταστάσεις των κλαδιών.

Συνοψίζοντας, σε ένα απλό πλέγμα με τριβή, το οποίο περιγράφει την φαινομενολογία των μεταβατικών καταστάσεων, δείξαμε ότι ενώ ο καθολικός ελκυστής είναι τετριμμένος σε σχέση με την τοπολογία του χώρου των φάσεων, μπορεί να οδηγήσει σε ένα εξαιρετικά μη-τετριμμένο ενεργειακό τοπίο. Αυτό το τοπίο, ορίζεται από την πλούσια δομή του συνόλου των σημείων ισορροπίας και τη ποικιλία των πιθανοτήτων για την δυναμική της σύγκλισης.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε σε αυτή τη μελέτη, μπορεί να ανοίξουν το δρόμο για μια μελλοντική μελέτη σε πολλές ενδιαφέρουσες κατευθύνσεις. Μια σημαντική κατεύθυνση είναι το να διερευνήσουμε περαιτέρω τη δομή του διαγράμματος καθολικών διακλαδώσεων, έχοντας ως κίνητρο τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά τα οποία καταδεικνύονται στην παρούσα μελέτη. Άλλη μία φυσική επιλογή είναι να επεκτείνουμε την παρούσα θεώρηση σε περιπτώσεις ανώτερης διάστασης, όπου ο ρόλος της σύζευξης των ταλαντωτών είναι πιο σημαντικός. Είναι επίσης σχετικό να θεωρήσουμε, μέσω των μεθόδων που παρουσιάζονται εδώ, τη φαινομενολογία διαφορετικών τύπων δυναμικού. Όπως το δυναμικό Morse, το οποίο σχετίζεται με τη μετουσίωση του DNA, όπως έχει μοντελοποιηθεί από το μοντέλο Peyrard–Bishop [25]. Εικάζουμε ότι οι τεχνικές οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη, μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι περισσότερο σχετικές σε τέτοια προβλήματα. Τέλος, είναι σίγουρα σχετικό να διερευνήσουμε τη δυναμική της σύγκλισης σε άλλα πλέγματα με τριβή, δεύτερης ή ανώτερης τάξης, όπως τη δυναμική των μη-γραμμικών μετα-υλικών, (βλ. [32], [29]).

Βιβλιογραφία

- [1] V Achilleos, A Álvarez, J Cuevas, Dimitri J Frantzeskakis, Nikolaos I Karachalios, Panayotis G Kevrekidis, and Bernardo Sánchez-Rey. Escape dynamics in the discrete repulsive ϕ^4 model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 244(1):1–24, 2013.
- [2] Peter Anninos, Samuel Oliveira, and Richard A Matzner. Fractal structure in the scalar $\hat{\lambda}(\varphi^2 - 1)^2$ theory. *Physical Review D*, 44(4):1147, 1991.
- [3] Κωνσταντίνος Βέτας. *δυναμική μη-γραμμικών συστημάτων πλέγματος*. 2018.
- [4] IV Barashenkov, OF Oxtoby, and Dmitry E Pelinovsky. Translationally invariant discrete kinks from one-dimensional maps. *Physical Review E*, 72(3):035602, 2005.
- [5] David K Campbell, Jonathan F Schonfeld, and Charles A Wingate. Resonance structure in kink-antikink interactions in φ^4 theory. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 9(1-2):1–32, 1983.
- [6] J Andrew Combs and Sidney Yip. Single-kink dynamics in a one-dimensional atomic chain: A nonlinear atomistic theory and numerical simulation. *Physical Review B*, 28(12):6873, 1983.
- [7] Jean-Christophe Comte, Patrick Marquié, and Michel Remoissenet. Dissipative lattice model with exact traveling discrete kink-soliton solutions: Discrete breather generation and reaction diffusion regime. *Physical Review E*, 60(6):7484, 1999.
- [8] Thierry Dauxois and Michel Peyrard. *Physics of solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [9] Sergey V Dmitriev, Panayotis G Kevrekidis, Avinash Khare, and Avadh Saxena. Exact static solutions to a translationally invariant discrete ϕ^4 model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(24):6267, 2007.
- [10] Sergey V Dmitriev, Avinash Khare, Panayotis G Kevrekidis, Avadh Saxena, and Ljupčo Hadžievski. High-speed kinks in a generalized discrete ϕ^4 model. *Physical Review E*, 77(5):056603, 2008.
- [11] SV Dmitriev, PG Kevrekidis, and N Yoshikawa. Discrete klein–gordon models with static kinks free of the peierls–nabarro potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38(35):7617, 2005.
- [12] SW Englander, NR Kallenbach, AJ Heeger, JA Krumhansl, and S Litwin. Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 77(12):7222–7226, 1980.
- [13] Paul C Fife. *Dynamics of internal layers and diffusive interfaces*. SIAM, 1988.

- [14] Alain Haraux and Mohamed-Ali Jendoubi. Convergence of solutions of second-order gradient-like systems with analytic nonlinearities. *journal of differential equations*, 144(2):313–320, 1998.
- [15] Alain Haraux and Mohamed Ali Jendoubi. The lojasiewicz gradient inequality in the infinite dimensional hilbert space framework. 2010.
- [16] Dirk Hennig, Simon Fugmann, Lutz Schimansky-Geier, and Peter Hänggi. Self-organized escape of oscillator chains in nonlinear potentials. *Physical Review E*, 76(4):041110, 2007.
- [17] Dirk Hennig, Simon Fugmann, Lutz Schimansky-Geier, and Peter Hänggi. Role of energy exchange in the deterministic escape of a coupled nonlinear oscillator chain. *Acta Physica Polonica B*, 39(5), 2008.
- [18] Nikos I Karachalios, Bernardo Sánchez-Rey, Panayotis G Kevrekidis, and J Cuevas. Breathers for the discrete nonlinear schrödinger equation with nonlinear hopping. *Journal of nonlinear science*, 23:205–239, 2013.
- [19] Eyal Kenig, Boris A Malomed, MC Cross, and Ron Lifshitz. Intrinsic localized modes in parametrically driven arrays of nonlinear resonators. *Physical Review E*, 80(4):046202, 2009.
- [20] Panayotis G Kevrekidis. *The discrete nonlinear Schrödinger equation: mathematical analysis, numerical computations and physical perspectives*, volume 232. Springer Science & Business Media, 2009.
- [21] Hendrik Anthony Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7(4):284–304, 1940.
- [22] Boris A Malomed, Edwin Ding, KW Chow, and Siu Kai Lai. Pinned modes in lossy lattices with local gain and nonlinearity. *Physical Review E*, 86(3):036608, 2012.
- [23] Konstantin Mischaikow. Global asymptotic dynamics of gradient-like bistable equations. *SIAM journal on mathematical analysis*, 26(5):1199–1224, 1995.
- [24] Yasumasa Nishiura. *Far-from-equilibrium Dynamics*, volume 209. American Mathematical Soc., 2002.
- [25] Michel Peyrard and Alan R Bishop. Statistical mechanics of a nonlinear model for dna denaturation. *Physical review letters*, 62(23):2755, 1989.
- [26] P Prelovsek and Igor Sega. Domain-wall-like excitations in a discrete one-dimensional anharmonic lattice model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 14(36):5609, 1981.
- [27] Paul H Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of functional analysis*, 7(3):487–513, 1971.
- [28] Alwyn Scott. *The nonlinear universe: chaos, emergence, life*. Springer, 2007.
- [29] Yannan Shen, PG Kevrekidis, GP Veldes, DJ Frantzeskakis, D DiMarzio, X Lan, and V Radisic. From solitons to rogue waves in nonlinear left-handed metamaterials. *Physical Review E*, 95(3):032223, 2017.
- [30] Joel Smoller. *Shock waves and reaction—diffusion equations*, volume 258. Springer Science & Business Media, 2012.

- [31] Roger Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.
- [32] Giorgios P Veldes, J Cuevas, Panayotis G Kevrekidis, and Dimitri J Frantzeskakis. Coupled backward-and forward-propagating solitons in a composite right-and left-handed transmission line. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 88(1):013203, 2013.

Παράρτημα Α΄

Ακρωνύμια και συντομογραφίες

ATP Adenosine triphosphate

DKG Discrete Klein-Gordon equation

DNA Deoxyribonucleic acid

DNLS Discrete Nonlinear Schrödinger equation

KG Klein-Gordon equation

NLS Nonlinear Schrödinger equation

PDEs Partial Differential Equations

Παράρτημα Β΄

Κώδικας Mathematica

Γράφημα 2.1

```
1000     wd1 = 10;
1001     wd2 = 100;
1002     beta = 1;
1003     Plot[{-wd1/2 u^2 + beta *wd1/4 u^4, -wd2/2 u^2 +
1004     beta *wd2/4 u^4}, {u, -2, 2},
1005     PlotLabel ->
1006     "Potential \!\(\(* TemplateBox [ <|\"boxes\" -> FormBox [\nRowBox [{\n\
1007     StyleBox [\\"W\", \\"TI\"], \\"(\", \nSubscriptBox [\nStyleBox [\\"U\", \\"TI\
1008     \"], \nStyleBox [\\"n\", \\"TI\"], \")\"}], TraditionalForm], \
1009     \\"errors\" -> {}, \\"input\" -> \\"W (U_n)\", \\"state\" -> \\"Boxes\"|>, \
1010     \n\"TeXAssistantTemplate\" ]\) for different \
1011     \!\(\(* TemplateBox [ <|\"boxes\" -> FormBox [\nSubsuperscriptBox [\\" \
1012     \[Omega]\\", \nStyleBox [\\"d\", \\"TI\"], \\"2\"], TraditionalForm], \
1013     \\"errors\" -> {}, \\"input\" -> \\"\\\\\\omega_d^2\", \\"state\" -> \
1014     \\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\" ]\) values\",
1015     PlotStyle -> {Blue, {Black, Dashed}},
1016     PlotRange -> {{-2, 2}, {-30, 20}}, PlotTheme -> "Scientific",
1017     PlotLegends -> {"\!\(\(* TemplateBox [ <|\"boxes\" -> FormBox [\n\
1018     SubsuperscriptBox [\\" \[Omega]\\", \nStyleBox [\\"d\", \\"TI\"], \\"2\"], \
1019     TraditionalForm], \\"errors\" -> {}, \\"input\" -> \\"\\\\\\omega_d^2\", \
1020     \\"state\" -> \\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\" ]\) = 1\",
1021     "\!\(\(* TemplateBox [ <|\"boxes\" -> FormBox [\nSubsuperscriptBox [\\" \
1022     \[Omega]\\", \nStyleBox [\\"d\", \\"TI\"], \\"2\"], TraditionalForm], \
1023     \\"errors\" -> {}, \\"input\" -> \\"\\\\\\omega_d^2\", \\"state\" -> \
1024     \\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\" ]\) = 10"}]}
1025
1026     (* Parameters of the system *) \[Omega]dSquared = 1;      (* \[Omega]_d^2 *)
1027     \[Beta] = 1;      (* \[Beta] *)
1028     \[Delta] = 0.01;      (* \[Delta], damping coefficient *)
1029
1030     (* Duffing equation setup for use with NDSolve for simulation *)
1031     duffingEquations = {U'[
1032     t] + \[Delta] U'[t] == \[Omega]dSquared U[t] - \[Beta] U[t]^3,
1033     U[0] == 0.1, U'[0] == 0};
1034
1035     (* Numerical solution of the equations for the trajectory *)
1036     solution = NDSolve[duffingEquations, U, {t, 0, 100}];
```

```

1038 (*StreamPlot for phase portrait*)
1040 StreamPlot[{v, \[Omega]dSquared u - \[Beta] u^3 - \[Delta] v}, {u, \
-1.5, 1.5}, {v, -1.5, 1.5}, StreamPoints -> Fine,
1042 StreamColorFunction -> "Rainbow",
PlotLabel -> "Phase Portrait of the Duffing Equation"]
1044
(*Use ParametricPlot for the visualization of the trajectory from the \
solution*)
1046 ParametricPlot[Evaluate[{U[t], U'[t]} /. solution], {t, 0, 100},
1048 PlotRange -> All, AxesLabel -> {"U(t)", "U'(t)"}, PlotStyle -> Thick]

```

Γράφημα 2.2-2.3

```

1000 aList = {2, 1.95, 1.9, 1.85, 1.82, 1.81, 1.55, 1.46,
1.45}; (*List of different values for a*)
1002 j = 4; (*Mode number*)
L = 200; (*Length of the system*)
1004 omegad = 1; (*characteristic frequency*)
beta = 1; (*Nonlinearity parameter*)
1006 delta = 0.05; (*damping coefficient*)
h = 2; (*spatial grid spacing*)
1008 grid = Range[-L/2, L/2, h]; (*Spatial points*)
k = Length[grid]; (*number of spatial points*)
1010 omegad2 = (h^2)*omegad^2;
deltaHat = h*delta;
1012 tmax = 3000; (*Maximum time*)

1014 (*Generate initial plot for a=2*)
var = Table[u[i][t], {i, k}];
1016 eqs = Table[
u[i]''[t] - (u[i + 1][t] + u[i - 1][t] - 2 u[i][t]) +
1018 deltaHat u[i]'[t] - omegad2 (u[i][t] - beta u[i][t]^3) == 0, {i,
2, k - 1}];
1020 bc = {u[1][t] == 0, u[1][k] == 0};
ic = Join[Thread[var == 2 Sin[4 Pi grid/L]] /. t -> 0,
1022 Table[u[i]'[0] == 0, {i, 2, k - 1}]];
sol = NDSolve[Join[eqs, {u[1]'[t] == 0, u[k]'[t] == 0}, ic],
1024 var, {t, 0, tmax}];
initialPlot =
1026 ListPlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> 0}],
FrameLabel -> {"\!\(\(* TemplateBox[<|\"boxes\" -> FormBox[\n\
SubscriptBox[\nStyleBox[\\"x\", \\"TI\"], \nStyleBox[\\"n\", \\"TI\"], \
1028 TraditionalForm], \\"errors\" -> {}], \\"input\" -> \\"x_n\", \\"state\" -> \
\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\"|)\)",
"\!\(\(* TemplateBox[<|\"boxes\" -> FormBox[\nSubscriptBox[\n\
StyleBox[\\"u\", \\"TI\"], \nStyleBox[\\"n\", \\"TI\"], \
1032 TraditionalForm], \\"errors\" -> {}], \\"input\" -> \\"u_n\", \\"state\" -> \
\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\"|)\)",
1034 PlotLabel -> " a t = 0 for a = 2", PlotTheme -> "Scientific",
PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]}}];
1036

1038 (*Solve the equations and generate plots for each value of a*)
plots = Table[
1040 Module[{var, eqs, bc, ic, sol, finalPlot},

```

```

var = Table[u[i][t], {i, k}];
1042 eqs =
Table[u[i]''[t] - (u[i + 1][t] + u[i - 1][t] - 2 u[i][t]) +
1044   deltaHat u[i]'[t] - omegad2 (u[i][t] - beta u[i][t]^3) ==
0, {i, 2, k - 1}];
1046 bc = {u[1][t] == 0, u[1][k] == 0};
ic =
1048 Join[Thread[var == a Sin[4 Pi grid/L]] /. t -> 0,
Table[u[i]'[0] == 0, {i, 2, k - 1}]];
1050 sol =
NDSolve[Join[eqs, {u[1]'[t] == 0, u[k]'[t] == 0}], ic],
1052 var, {t, 0, tmax}];
finalPlot =
1054 Show[ListPlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> tmax}],
FrameLabel -> {"!\(\(*TemplateBox[<!\\"boxes\" -> FormBox[\n\
1056 SubscriptBox[\nStyleBox[\\"x\", \\"TI\"], \nStyleBox[\\"n\", \\"TI\"], \
TraditionalForm], \\"errors\" -> {}, \\"input\" -> \\"x_n\", \\"state\" -> \
\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\"|)\",
\"!\(\(*TemplateBox[<!\\"boxes\" -> FormBox[\nSubscriptBox[\n\
1060 StyleBox[\\"u\", \\"TI\"], \nStyleBox[\\"n\", \\"TI\"], \
TraditionalForm], \\"errors\" -> {}, \\"input\" -> \\"u_n\", \\"state\" -> \
\"Boxes\"|>, \n\"TeXAssistantTemplate\"|)\",
1062 PlotLabel -> " t = 3000 for a = " <> ToString[a],
1064 PlotTheme -> "Scientific",
PlotStyle -> {Blue, PointSize[Medium]}},
1066 ListLinePlot[
Transpose[{grid,
1068 var /. sol[[1]] /. t -> tmax}], {PlotStyle -> {Blue,
Dashed}}]];
1070 finalPlot], {a, aList}];

1072 (* Display the initial plot and the final plots in a grid with 2 plots \
per row *)
1074 Grid[Partition[Prepend[plots, initialPlot], 2]]

```

Γράφημα 2.4

```

1000 a = 1; (* Amplitude of the initial condition *)
j = 2; (* Mode number *)
1002 L = 200; (* Length of the system *)

1004 omegad = 1; (* Characteristic frequency *)
beta = 1; (* Nonlinearity parameter *)
1006

(* List of damping coefficients *)
1008 deltaList = {0.1};

1010 h = 2; (* Spatial grid step size *)
grid = Range[-L/2, L/2, h]; (* Spatial points *)
1012 k = Length[grid]; (* Number of spatial points *)

1014 omegad2 = (h^2)*omegad^2; (* Scaled frequency *)

1016 tmax = 3000; (* Maximum time for simulation *)

```



```

1018 var = Table[u[i][t], {i, k}]; (* Variables for each grid point *)
1020 (* Initial conditions *)
ic = Join[Thread[var == a Sech[grid]] /. t -> 0,
1022   Table[u[i]'[0] == 0, {i, 2, k - 1}]];
1024 (* Function to solve the system for a given delta *)
solveForDelta[delta_] :=
1026   Module[{deltaHat, eqs, sol}, deltaHat = h*delta;
    eqs =
1028     Table[u[i]''[t] - (u[i + 1][t] + u[i - 1][t] - 2 u[i][t]) +
      deltaHat u[i]'[t] - omegad2 (u[i][t] - beta u[i][t]^3) ==
1030       0, {i, 2, k - 1}];
    sol =
1032     NDSolve[Join[eqs, {u[1]'[t] == 0, u[k]'[t] == 0}, ic],
      var, {t, 0, tmax}];
1034     Return[sol];];
1036 (* Solve the system for each value of delta in deltaList *)
solutions = Table[solveForDelta[delta], {delta, deltaList}];
1038
1040 (* Visualization *)
plots = Flatten@
1042   Table[{If[i == 1,
    Show[ListPlot[
1044       Transpose[{grid, var /. solutions[[i, 1]] /. t -> 0}],
      FrameLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(X\), \(\(n\)\)\]}",
        "\!\(\*SubscriptBox[\(U\), \(\(n\)\)\]}"},
1046       PlotLabel -> "Initial Positions of DNA Segment at t = 0",
      PlotTheme -> "Scientific",
1048       PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]}, PlotRange -> All],
    ListLinePlot[
1050       Transpose[{grid, var /. solutions[[i, 1]] /. t -> 0}],
      PlotStyle -> {Red, Dashed}, PlotRange -> All]], Nothing],
1052   Show[ListPlot[
    Transpose[{grid, var /. solutions[[i, 1]] /. t -> tmax}],
1054     FrameLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(X\), \(\(n\)\)\]}",
      "\!\(\*SubscriptBox[\(U\), \(\(n\)\)\]}"},
    PlotLabel ->
1056       "Positions of DNA Segment for \[Delta] = " <>
      ToString[deltaList[[i]], PlotTheme -> "Scientific",
1058       PlotStyle -> {Blue, PointSize[Medium]}, PlotRange -> All],
    ListLinePlot[
1060       Transpose[{grid, var /. solutions[[i, 1]] /. t -> tmax}],
      PlotStyle -> {Blue, Dashed}, PlotRange -> All]], {i,
1062     Length[deltaList]}}];
1064
1066 (* Display all plots *)
GraphicsGrid[Partition[plots, 2]]

```

Γράφημα 2.4

```

1000 a = 1; (* Amplitude of the initial condition *)
1002 L = 200; (* Length of the system *)

```

```

1004 omegad = 1; (* characteristic frequency *)
      beta = 1; (* Nonlinearity parameter *)
1006
      (* damping coefficient *)
1008 delta = 0.01;
1010
      (* spatial grid *)
      h = 2;
1012 grid = Range[-L/2, L/2, h]; (* Spatial points *)
      k = Length[grid]; (* number of spatial points *)
1014 (* discretization parameter *)
      (* Scaled parameters *)
1016 omegad2 = (h^2)*omegad^2;
      deltaHat = h*delta;
1018
      tmax = 3000; (* Maximum time *)
1020
1022 (* Initial positions *)
1024 var = Table[u[i][t], {i, k}]; eqs =
      Table[u[i]''[t] - (u[i + 1][t] + u[i - 1][t] - 2 u[i][t]) +
1026       deltaHat u[i]'[t] - omegad2 (u[i][t] - beta u[i][t]^3) == 0, {i,
        2, k - 1}]; bc = {u[1][t] == 0, u[k][t] == 0};
1028 ic = Join[Thread[var == a Sech[grid]] /. t -> 0,
      Table[u[i]'[0] == 0, {i, 2, k - 1}]];
1030 sol = NDSolve[Join[eqs, {u[1]'[t] == 0, u[k]'[t] == 0}, ic],
      var, {t, 0, tmax},
1032      Method -> {"StiffnessSwitching",
        Method -> {"ExplicitRungeKutta", Automatic}}, AccuracyGoal -> 8,
1034      PrecisionGoal -> 10]; // AbsoluteTiming
1036
      {Show[ListPlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> 0}],
1038       FrameLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(X)\, \(\(n)\)\]}",
        "\!\(\*SubscriptBox[\(U)\, \(\(n)\)\]}"},
        PlotLabel -> "Initial Positions of DNA Segment at t = 0",
1040       PlotTheme -> "Scientific", PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]},
        PlotRange -> All],
1042       ListLinePlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> 0}],
        PlotStyle -> {Red, Dashed}, PlotRange -> All]],
1044       Show[ListPlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> tmax}],
        FrameLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(X)\, \(\(n)\)\]}",
1046         "\!\(\*SubscriptBox[\(U)\, \(\(n)\)\]}"},
        PlotLabel -> "Positions of DNA Segment at t = 3000",
1048         PlotTheme -> "Scientific", PlotStyle -> {Blue, PointSize[Medium]},
        PlotRange -> All],
1050         ListLinePlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> tmax}],
        PlotStyle -> {Blue, Dashed}, PlotRange -> All]]}

```

Γράφημα 2.4

```

1000 (* parameters *) a = 1; (* Amplitude of the initial condition *)
1002 L = 200; (* Length of the system *)

```

```

kappa = 99
1004 omegad = 1; (* characteristic frequency *)
      beta = 1; (* Nonlinearity parameter *)
1006
      (* damping coefficient *)
1008 delta = 0.05;

1010 (* spatial grid *)
      h = L/(kappa + 1);
1012 grid = Range[-L/2, L/2, h]; (* Spatial points *)
      k = Length[grid]; (* number of spatial points *)
1014 (* discretization parameter *)
      (* Scaled parameters *)
1016 omegad2 = (h^2)*omegad^2;
      deltaHat = h*delta;
1018
      tmax = 3000; (* Maximum time *)
1020

1022 (* Initial positions *)

1024 var = Table[u[i][t], {i, k}]; eqs =
      Table[u[i]''[t] - (u[i + 1][t] + u[i - 1][t] - 2 u[i][t]) +
1026         deltaHat u[i]'[t] - omegad2 (u[i][t] - beta u[i][t]^3) == 0, {i,
          2, k - 1}]; bc = {u[1][t] == 0, u[k][t] == 0};
1028 ic = Join[Thread[var == a Sech[grid]] /. t -> 0,
      Table[u[i]'[0] == 0, {i, 2, k - 1}]];
1030 sol = NDSolve[Join[eqs, {u[1]'[t] == 0, u[k]'[t] == 0}, ic],
      var, {t, 0, tmax},
1032      Method -> {"StiffnessSwitching",
        Method -> {"ExplicitRungeKutta", Automatic}}, AccuracyGoal -> 8,
1034      PrecisionGoal -> 10]; // AbsoluteTiming

1036      {Show[ListPlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> 0}],
1038      FrameLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(X\), \(\(n\)\)]\)",
        "\!\(\*SubscriptBox[\(U\), \(\(n\)\)]\)"},
        PlotLabel -> "Initial Positions of DNA Segment at t = 0",
1040      PlotTheme -> "Scientific", PlotStyle -> {Red, PointSize[Medium]},
        PlotRange -> All],
1042      ListLinePlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> 0}],
        PlotStyle -> {Red, Dashed}, PlotRange -> All]],
1044      Show[ListPlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> tmax}],
        FrameLabel -> {"\!\(\*SubscriptBox[\(X\), \(\(n\)\)]\)",
1046      "\!\(\*SubscriptBox[\(U\), \(\(n\)\)]\)"},
        PlotLabel -> "Positions of DNA Segment at t = 3000",
1048      PlotTheme -> "Scientific", PlotStyle -> {Blue, PointSize[Medium]},
        PlotRange -> All],
1050      ListLinePlot[Transpose[{grid, var /. sol[[1]] /. t -> tmax}],
        PlotStyle -> {Blue, Dashed}, PlotRange -> All]]}

```

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.