



## Εισαγωγή στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra και στις Εφαρμογές τους

Μαλανδράκη Ελένη

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικολόπουλος Χρήστος

Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήματος Μαθηματικών,

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Χατζηνικολάου Μαρία

Καθηγήτρια

Τμήματος Μαθηματικών,

Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Αθήνα, Σεπτέμβριος, 2022

## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής αξιολόγησής μου κ. Χρήστο Νικολόπουλο και κ. Μαρία Χατζηνικολάου. Ιδιαίτερος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας κ. Νικολόπουλο, ο οποίος καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας ήταν ευγενής και διαθέσιμος για επικοινωνία, δίνοντας τις κατάλληλες οδηγίες και κάνοντας εύστοχα σχόλια.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύζυγο μου Ανδρέα και τα παιδιά μου Γεώργιο, Ειρήνη και Μελίνα για την αμέριστη συμπαράσταση, ενθάρρυνση και υπομονή όλα αυτά τα χρόνια σπουδών μου.

## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται Ολοκληρωτικές Εξισώσεις τύπου Volterra και οι Εφαρμογές τους σε προβλήματα Φυσικής και σε πληθυσμιακά μοντέλα. Στην αρχή παρουσιάζονται θεωρητικά και κατόπιν γίνεται χρήση του λογισμικού πακέτου Mathematica για αναπαράσταση, επίλυση και διεξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων. Η εργασία αναπτύσσεται σε οκτώ κεφάλαια.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται ιστορική αναδρομή των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων, αναφέρεται η επιμέρους ταξινόμησή τους και τέλος, παρουσιάζονται χρήσιμοι μαθηματικοί τύποι, αλγόριθμοι μετατροπής σε Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Αρχικών Τιμών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύονται μέθοδοι επίλυσης γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Επιμέρους προβλήματα επιλύονται και κάποια βασικά θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης γραμμικών και μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων αποδεικνύονται.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύονται μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Επιλύονται επιμέρους προβλήματα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται μέθοδοι επίλυσης Ιδιόμορφων και Ασθενώς Ιδιόμορφων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Επιλύονται επιμέρους προβλήματα και τέλος αναφέρονται και αποδεικνύονται κάποια θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητάς λύσεως.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναλύονται μέθοδοι επίλυσης ολοκληρό – διαφορικών εξισώσεων. Επιλύονται επιμέρους προβλήματα και παρουσιάζονται αλγόριθμοι μετατροπής τους σε ισοδύναμες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και Προβλήματα Αρχικών Τιμών. Τέλος αναφέρονται και αποδεικνύονται κάποια βασικά Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεως.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια συγκεκριμένη εφαρμογή. Αναλύεται η ολοκληρό - διαφορική εξίσωση Thomas – Fermi, η οποία εμφανίζεται στην δομή του ατόμου ενός μη εκφυλισμένου αερίου. Αρχικά γίνεται ιστορική αναδρομή και τέλος επιλύεται με διαφορετικές τεχνικές.

Στο έβδομο κεφάλαιο αναλύεται και επιλύεται με διάφορες τεχνικές η μη γραμμική ολοκληρό – διαφορική εξίσωση Volterra για την αύξηση του πληθυσμού σε κλειστό σύστημα.

Το όγδοο κεφάλαιο είναι ο επίλογος της εργασίας, όπου δίνονται γενικά συμπεράσματα για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra.

### **Λέξεις – Κλειδιά**

Μέθοδος Picard, Μέθοδος Διάσπασης Adomian, Frobenius Σειρές, Μετασχηματισμός Ομοτυπικής Ανάλυσης, Τροποποιημένη Μέθοδο Διάσπασης, Μέθοδος Επαναληπτικής Μεταβολής, Μετασχηματισμός Laplace, Μέθοδος Newton – Kantorovich, Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης ή Τετραγωνισμού, Ιδιόμορφη, Αδύναμα Ιδιόμορφη, Thomas – Fermi.

# Introduction in Integral Volterra Equation and their applications

Malandraki Eleni

## Abstract

This present thesis studies Integral Volterra Equations and their applications in Physical problems and population problems. At the beginning the basic theory will be presented and then use the Mathematica software package to represent, solve and carry out numerical results. The work is developed in eight chapters.

In the first chapter a historical review of Integral Equations will be presented, continuing with their classification and finally, mentioning useful mathematical formulas, algorithms for the transformation to Ordinary Differential Equations and Initial Value Problems.

In the second chapter, methods for solving linear integral equations will be analyzed. Individual problems will be solved and some basic existence and uniqueness theorems for the solution of linear and non-integral equations will be stated and proved.

In the third chapter methods for solving nonlinear Integral Equations will be analyzed and some specific problems will be solved.

In the fourth chapter we will analyze methods for solving Singular and Weakly - Singular Integral Equations. Certain relevant problems will be solved and finally some existence and uniqueness theorems will be stated and proved.

In the fifth chapter some methods for solving integral differential equations will be analyzed, some specific problems will be solved. Moreover certain algorithms for their transformation to equivalent Integral Differential Equations and Initial Value Problems will be mentioned. Finally, some basic existence and uniqueness theorems of solution will be stated and proved.

Moreover, in the sixth chapter is devoted to an application and specifically the integral-differential Thomas - Fermi equation, which appears in the atomic structure of a non-degenerate gas. It's derivation, and solution will be presented together with a relevant historical review.

In chapter seven, the nonlinear integral-differential Volterra equation for population growth in a closed loop will be analyzed and solved.

Finally, in the eighth chapter an overview of this thesis together with some conclusions will be presented regarding the theory of Volterra's Integrals Equations.

### **Keywords**

Picard Method, Adomian Decomposition, Frobenius Series, Homotopy Analysis Transform, Modified Decomposition Method, Variational Iteration Method, Transform Laplace, Newton – Kantorovich, Quadrature Method, Singular, Weakly – Singular, Thomas – Fermi.



## Περιεχόμενα

Περίληψη.....	iii
Abstract .....	v
Περιεχόμενα.....	viii
1. Εισαγωγικές Έννοιες .....	1
1.1 Ιστορική Αναδρομή .....	1
1.2 Ταξινόμηση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων .....	7
1.3 Τύπος Leibnitz .....	9
1.4 Μετατροπή Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra πρώτου είδους σε δεύτερου είδους .....	9
1.5 Μετατροπή μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra πρώτου είδους σε δεύτερου είδους .....	10
1.6 Μετατροπή Προβλημάτων Αρχικών Τιμών σε ισοδύναμες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra .....	11
1.7 Αλγόριθμος Αναλυτικής Μεθόδου Padé .....	13
1.8 Μέθοδος Ομοτυπικής Ανάλυσης.....	13
2. Μέθοδοι επίλυσης γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra .....	16
2.1 Εισαγωγή .....	16
2.2 Μέθοδος Διαδοχικών Προσεγγίσεων για ομαλές γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra .....	16
2.3 Μέθοδος Επαναληπτικών Πυρήνων .....	18
2.4 Μέθοδος Διάσπασης Adomian .....	20
2.5 Μέθοδος Επίλυσης με την βοήθεια σειρών .....	22
2.6 Μέθοδος Μετασχηματισμού Ομοτυπικής Ανάλυσης .....	23
2.7 Μέθοδος Επαναληπτική Μέθοδος Μεταβολών .....	27
2.8 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης γραμμικών και μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra .....	33
3. Μέθοδοι επίλυσης μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra .....	42
3.1 Εισαγωγή .....	42
3.2 Μέθοδος Picard .....	43
3.3 Μέθοδος Διάσπασης Adomian .....	45
3.4 Τροποποιημένη Μέθοδος Διάσπασης .....	48
3.5 The Noise Term Phenomenon .....	48
3.6 Μετασχηματισμός Laplace .....	50
3.7 Μέθοδος παραγωγικής Ολοκληρωτικών Εξισώσεων .....	57
3.8 Μέθοδος Newton - Kantorovich.....	57
3.9 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης – Μέθοδος Τετραγωνισμού .....	59
4. Μέθοδοι επίλυσης Ιδιόμορφων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra .....	68
4.1 Εισαγωγή .....	68
4.2 Πρόβλημα Abel .....	69
4.3 Γενικευμένη μορφή Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Abel .....	69
4.4 Ολοκληρωτική Εξίσωση Abel δεύτερου είδους .....	70
4.5 Ιδιόμορφα Ασθενής Ολοκληρωτική Εξίσωση Volterra .....	71



4.6	Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης Ιδιόμορφα Ασθενών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra .....	75
5.	Μέθοδοι επίλυσης Ολοκληρό – διαφορικών Εξισώσεων Volterra .....	80
5.1	Εισαγωγή.....	80
5.2	Μέθοδος επίλυσης με την βοήθεια σειρών.....	80
5.3	Μέθοδος Διάσπασης και Τροποποιημένης Διάσπασης .....	82
5.4	Μετατροπή σε Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και Προβλήμα Αρχικών Τιμών .....	85
5.5	Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης ολοκληρό - διαφορικών Εξισώσεων Volterra .....	88
6.	Εφαρμογή Ολοκληρό–διαφορικών Εξισώσεων Volterra – Εξίσωση Thomas – Fermi	91
6.1	Ιστορική Αναδρομή.....	91
6.2	Εύρεση Εξίσωσης .....	91
6.3	Άτομο Thomas - Fermi .....	92
6.4	Επίλυση με την Μέθοδο Διάσπασης Adomian .....	96
6.5	Επίλυση με την Βελτιωμένη Μέθοδο Διαφορικού Μετασχηματισμού .....	98
6.6	Επίλυση με την Μέθοδο Επαναληπτικής Μεταβολής .....	101
6.7	Επίλυση με την Μέθοδο Διάσπασης Laplace .....	101
6.8	Επίλυση με την Μέθοδο προσεγγίσεων Padé .....	103
6.9	Επίλυση με την Μέθοδο της Ομοτυπικής Ανάλυσης.....	104
7.	Μέθοδοι επίλυσης Ολοκληρό – διαφορικών Εξισώσεων Volterra .....	109
7.1	Εισαγωγή .....	109
7.2	Μέθοδος επίλυσης με την βοήθεια σειρών .....	110
7.3	Μέθοδος Διάσπασης και Τροποποιημένης Διάσπασης .....	110
7.4	Μετατροπή σε Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και Προβλήμα Αρχικών Τιμών .....	113
8.	Συμπεράσματα .....	115
	Βιβλιογραφία.....	117
	Παράρτημα Α: «Βιογραφία Vito Volterra» .....	120



## 1<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τα μαθηματικά είναι η επιστήμη που χρησιμοποιείται για την μελέτη φαινομένων του φυσικού κόσμου, αλλά και για την υλοποίηση ανθρώπινων σχεδίων και στόχων. Η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης κατάφερε την επαναδιατύπωση των Φυσικών Νόμων με μαθηματικούς τύπους. Η ανάπτυξη της Μαθηματικής Ανάλυσης και ιδιαίτερα η μελέτη των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων (Integral Equations) οδήγησε στην λύση, αναλυτική ή ποιοτική, πολλών προβλημάτων Φυσικής και Τεχνολογίας (π.χ. ελαστικότητα, δυναμική αεροσκαφών κ.τ.λ.). Πολλά προβλήματα αρχικών αλλά και συνοριακών τιμών που συσχετίζονται με Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.) και Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε.) μπορούν να μετατραπούν σε κατά προσέγγιση προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων και να επιλυθούν.

**Ορισμός** Κάθε εξίσωση που περιέχει την άγνωστη συνάρτηση, την οποία θέλουμε να καθορίσουμε, μέσα σε ένα ολοκλήρωμα ονομάζεται **ολοκληρωτική εξίσωση**. Μία τυπική μορφή ολοκληρωτικής εξίσωσης της άγνωστης συνάρτησης  $u(x)$  είναι η ακόλουθη,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} K(x, t)u(t)dt.$$

όπου:

$K(x, t)$ : ονομάζεται πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης,

$a(x), b(x)$ : τα όρια της ολοκλήρωσης,

$\lambda$ : ένας μη μηδενικός πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός.

Δίνονται μερικά παραδείγματα,

$$f(x) = \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t)dt,$$

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)u^2(t)dt,$$

$$u(x) = \int_a^b \int_a^b K(x, s, t)u(s)u(t)dsdt, \quad a \leq s \leq b.$$

Σημειώνεται ότι ο πυρήνας  $K(x, t)$  και η συνάρτηση  $f(x)$  είναι δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις.

#### 1.1 Ιστορική Αναδρομή

Το όνομα Ολοκληρωτική Εξίσωση δόθηκε για πρώτη φορά το 1888 από τον Bois-Raymond. Παρόλα αυτά, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται πολύ πιο νωρίς. Το 1782, ο Laplace χρησιμοποίησε τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό,

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xs} \varphi(x) ds.$$

για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Το 1822, ο Fourier με την χρήση τριγωνομετρικών σειρών για την επίλυση προβλημάτων διάδοσης θερμότητας, βρήκε τους αντίστροφους τύπους:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xs) F(s) ds,$$

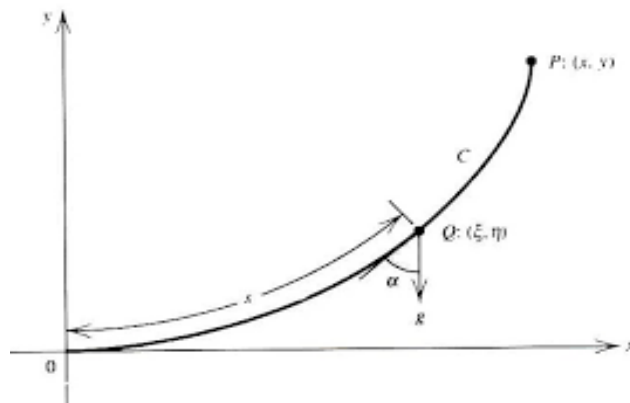
$$F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xs) f(s) ds, \quad \text{« ημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier »},$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(xs) F(s) ds,$$

$$F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(xs) f(s) ds, \quad \text{« συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier »}.$$

Το 1825, ο Abel, Ιταλός μαθηματικός πρώτος παρήγαγε μία ολοκληρωτική εξίσωση στην προσπάθειά του να επιλύσει το γνωστό πρόβλημα του ταυτοχρόνου (tautochrone or isochrone curve). Στο πρόβλημα γίνεται αναζήτηση της καμπύλης, στην οποία ένα σωματίδιο γλιστρά κατά μήκος της, χωρίς να ασκείται η δύναμη της τριβής και φτάνει στην χαμηλότερη θέση συναρτήσει της αρχικής του θέσης.

Σύμφωνα με το Σχήμα 1.1, θεωρούμε μία λεία καμπύλη σε ένα σύστημα συντεταγμένων και ένα σώμα μάζας  $m$ , το οποίο ξεκινάει από σημείο  $P(x, y)$  με αρχική ταχύτητα μηδέν. Θα ψάξουμε να βρούμε τον χρόνο  $T$  μέχρι το σώμα να φτάσει στο χαμηλότερο σημείο  $O$ . Δίνεται ότι στο σώμα ασκείται η δύναμη της βαρύτητας. Σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει ότι το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας είναι σταθερό.



Σχήμα 1.1: Κίνηση σωματιδίου μάζας  $m$  χωρίς την δύναμη της τριβής.

Για σημείο  $Q(\xi, \eta)$  ισχύει:

$$KE + \Delta E = \text{σταθερό},$$

$$\frac{1}{2} m U^2 + m g h = c,$$

$$\frac{1}{2} U^2 + g h = c, \quad (1.1.1)$$

όπου:

$U$ : η ταχύτητα του σωματιδίου στην θέση  $Q$ ,

$g$ : η επιτάχυνση της βαρύτητας,

$\xi$ : η κατακόρυφη συντεταγμένη του σημείου  $Q$ .

Στο σημείο  $P$  το σωματίδιο βρίσκεται σε ηρεμία, με  $U(0) = 0$ .

Για το σημείο  $P(x, y)$  ισχύει:

$$\frac{1}{2} m U^2 + m g h = c,$$

$$m g x = c, \quad \text{δηλαδή } c = g x. \quad (1.1.2)$$

Από (1.1.1) και (1.1.2) έχουμε ότι,

$$\frac{1}{2} U^2 + g \xi = g x,$$

$$U^2 = 2 g (x - \xi),$$

$$U = \pm \sqrt{2g(x - \xi)}. \quad (1.1.3)$$

Ξέρουμε ότι  $U = \frac{\partial s}{\partial t}$  και η (1.1.3) γίνεται,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \pm \sqrt{2g(x - \xi)}.$$

Παίρνοντας την αρνητική τιμή και ολοκληρώνοντας από το  $P$  στο  $Q$  έχουμε,

$$\int_P^Q dt = - \int_P^Q \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}},$$

$$t = - \int_P^Q \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$

Άρα ο ολικός χρόνος είναι:

$$\int_P^0 dt = - \int_P^0 \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}},$$

$$T = \int_0^P \frac{ds}{\sqrt{2g(x-\xi)}}. \quad (1.1.4)$$

**Σημείωση** Εάν το σχήμα της καμπύλης είναι γνωστό τότε το  $s$  μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του  $\xi$ .

Έστω  $ds = u(\xi) d\xi$  τότε η (1.1.4) γίνεται:

$$T = \int_0^x \frac{u(\xi) d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}}.$$

Σύμφωνα με την μέθοδο Abel, κατά την οποία θέτουμε όπου  $T = f(x)$ , η ισότητα μετασχηματίζεται σε

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(\xi) d\xi}{\sqrt{2g(x-\xi)}},$$

ή

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2g(x-\xi)}} u(\xi) d\xi,$$

και τελικά,

$$f(x) = \int_0^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

όπου  $K(x, \xi)$  ο πυρήνας.

Έτσι το 1825 κάνουν την εμφάνισή τους μια οικογένεια ολοκληρωτικών εξισώσεων γενικής μορφής,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^a} dt, \quad 0 < a < 1,$$

οι **Abel Ολοκληρωτικές Εξισώσεις (Abel's Integral Equations)** με  $f(x)$  συνεχής συνάρτηση.

Λίγο αργότερα ο Huygens έλυσε την Abel's ολοκληρωτική εξίσωση για  $a = 1/2$ .

### Πρόβλημα ταυτόχρονου με την βοήθεια του Mathematica

Το πρόβλημα του ταυτόχρονου, όπως ήδη διατυπώθηκε απαιτεί την εύρεση μιας καμπύλης. Η έκφραση του συνολικού χρόνου πτώσης ως προς το μήκος του τόξου της καμπύλης και την ταχύτητα  $u$ , δίνεται από την ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση του Abel,

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{u}.$$

Ο ορισμός της άγνωστης συνάρτησης  $h$  από την σχέση  $ds = h(y) dy$  και η χρήση της διατήρησης της ενέργειας  $\frac{u^2}{2} = g (y_{max} - y)$  δίνουν την ρητή εξίσωση:

$$\text{In[1]:= abeleqn} = T == \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{h[z]}{\sqrt{y-z}} dz;$$

Η λύση της εξίσωσης δίνεται:

$$\text{In[2]:= dsdy} = \text{DSolveValue[abeleqn, h[y], y]$$

$$\text{Out[2]=} \frac{\sqrt{2} g T}{\pi \sqrt{g y}}$$

Στην σχέση  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  λύνουμε ως προς  $x'(y)$ ,

$$\text{In[3]:= } dx dy = \sqrt{ds dy^2 - 1}$$

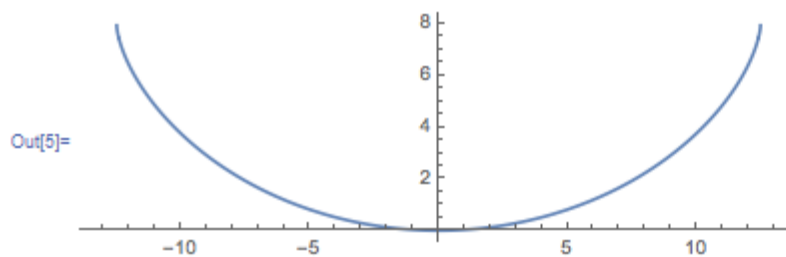
$$\text{Out[3]= } \sqrt{-1 + \frac{2gT^2}{\pi^2 y}}$$

$$\text{In[4]:= } x[y_] = \text{Integrate}[dx dy, \{y, 0, y\}, \text{Assumptions} \rightarrow \frac{2gT^2}{\pi^2 y} > 1 \ \&\& \ y > 0]$$

$$\text{Out[4]= } \frac{2\pi \sqrt{y(2gT^2 - \pi^2 y)} + gT^2 \left( \pi - 2 \text{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{-\pi^2 + \frac{2gT^2}{y}} (-gT^2 + \pi^2 y)}{-2g\pi T^2 + \pi^3 y} \right] \right)}{2\pi^2}$$

Χρησιμοποιώντας για χρόνο καθόδου τα 2 δευτερόλεπτα και βάζοντας την σταθερά της επιτάχυνση της βαρύτητας σχεδιάζουμε την μέγιστη τιμή του ταυτόχρονου.

$$\text{In[5]:= } \text{Show}[\text{ParametricPlot}[\{\{x[y], y\}, \{-x[y], y\}\} /. \{g \rightarrow 9.8, T \rightarrow 2\}, \{y, 0, \frac{2(9.8)^2}{\pi^2}\}], \text{ImageSize} \rightarrow \text{Medium}]$$



Κάνοντας μία αλλαγή των μεταβλητών  $y = \frac{gT^2(1 - \cos\theta)}{\pi^2}$  δίνουμε μια παραμετροποίηση της καμπύλης  $-\pi < \theta < \pi$ .

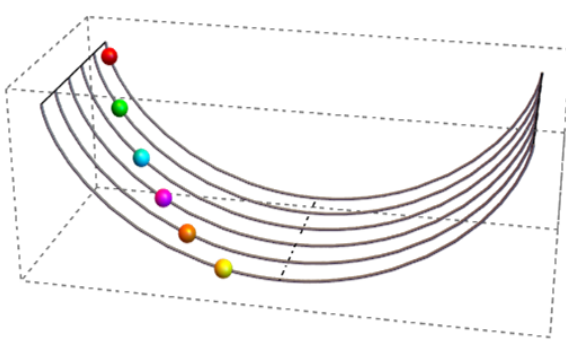
$$\text{In[6]:= } c[\theta_] = \frac{gT^2}{\pi^2} \{\text{Sin}[\theta] + \theta, 1 - \text{Cos}[\theta]\};$$

Η εξίσωση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας σε συνδυασμό με τον κανόνα αλυσίδας

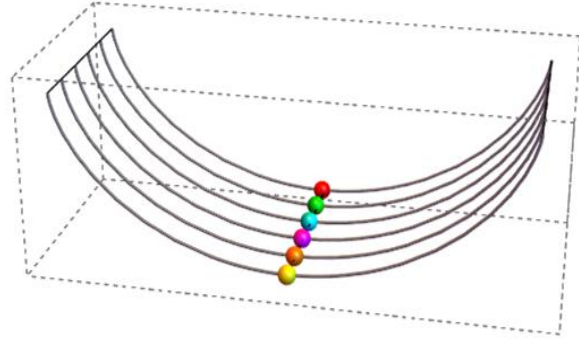
$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \text{ παράγει την παρακάτω διαφορική εξίσωση:}$$

$$\text{In[7]= } \theta' == \pm \text{FullSimplify}\left[\frac{\sqrt{2g(\text{Last}[c[\theta\text{Max}]] - \text{Last}[c[\theta]])}}{\sqrt{c'[\theta].c'[\theta]}}, g > 0 \ \&\& \ T > 0\right]$$

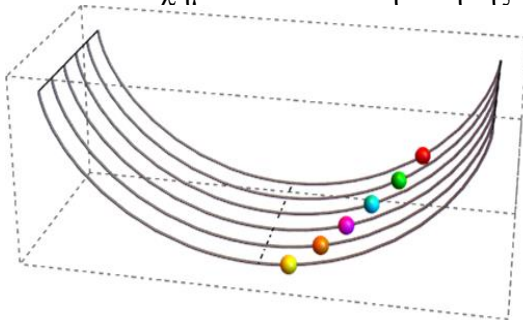
$$\text{Out[7]= } \theta' == \pm \frac{\pi \sqrt{\text{Cos}[\theta] - \text{Cos}[\theta\text{Max}]}}{T \sqrt{1 + \text{Cos}[\theta]}}$$



Σχήμα 1.2: 1<sup>η</sup> Φάση κίνησης.



Σχήμα 1.3: 2<sup>η</sup> Φάση κίνησης.



Σχήμα 1.4: 3<sup>η</sup> Φάση κίνησης.

Παρατηρούμε, Σχήματα (1.2) – (1.4), ότι 6 μπάλες μάζας  $m$  γλιστρούν σε μια καμπύλη από διαφορετικές θέσεις και φτάνουν στο κατώτατο μέρος της ταυτόχρονα.

Το 1826, ο Poisson σε μια μελέτη για τον μαγνητισμό κατέληξε σε μια ολοκληρωτική εξίσωση με γενική μορφή,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt,$$

όπου η άγνωστη συνάρτηση  $u(x)$  εμφανίζεται μέσα και έξω από το ολοκλήρωμα, καθώς και η μεταβλητή  $x$  εμφανίζεται ως ένα από τα όρια της ολοκλήρωσης. Ο Poisson λίγο αργότερα κατάφερε να λύσει την εξίσωση αναπτύσσοντάς την σε δυνάμεις χωρίς όμως να αποδείξει την σύγκλιση της σειράς. Αυτό επιτεύχθηκε το 1837 από τον Liouville.

Η εδραίωση της θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων ξεκίνησε από μια εργασία του Ιταλού μαθηματικού Vito Volterra και του Σουηδού μαθηματικού Ivar Fredholm. Ο Vito Volterra (1860 - 1940) και ο Ivar Fredholm (1866 - 1940) μαζί με τον David Hilbert (1862 - 1943), Edhard Schmidt και Bois Raymond είναι οι θεμελιωτές της θεωρίας ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ο Volterra ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε την σημασία της



θεωρίας των ολοκληρωτικών εξισώσεων και ασχολήθηκε με αυτές συστηματικά. Το 1896, έδωσε μια γενική διαδικασία επίλυσης μιας κλάσης ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες έκτοτε φέρουν το όνομά του. Χαρακτηριστικό αυτών είναι ότι η μεταβλητή  $x$  εμφανίζεται ως πάνω όριο αυτών των ολοκληρωμάτων. Περισσότερα βιογραφικά στοιχεία παρουσιάζονται στο Παράρτημα Α. Τέλος το 1900 και πιο συστηματικά σε άρθρο του το 1903, ο Ivar Fredholm μελετάει μια γενικότερη κλάση γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων που έχουν μορφή:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds, \quad \text{με } a, b \text{ σταθερές,} \quad (1.1.5)$$

και η οποία περιλαμβάνει την κλάση των γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra. Ο Fredholm μελέτησε την ολοκληρωτική εξίσωση (1.1.3) θεωρώντας την ως την οριακή μορφή, καθώς  $n \rightarrow \infty$ , ενός συστήματος  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων,

$$\varphi(x_r) = f(x_r) + \sum_{s=1}^n K(x_r, x_s) \varphi(x_s) \delta_n, \quad r = 1, 2, 3, 4, \dots, n$$

όπου,

$$\delta_n = \frac{b-a}{n} \quad \text{και } x_r = a + r \delta_n. \quad (1.1.6)$$

## 1.2 Ταξινόμηση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Μια ολοκληρωτική εξίσωση διακρίνεται σε γραμμική ή μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση όταν ο αντίστοιχος τελεστής  $L[u(x)]$  είναι μια γραμμική ή μη γραμμική έκφραση. Συγκεκριμένα, εάν η άγνωστη συνάρτηση  $u(x)$  που βρίσκεται κάτω από το ολοκλήρωμα είναι της μορφής  $F(u(x))$  - σύνθετη συνάρτηση - ή η δύναμη της  $u(x)$  δεν είναι η πρώτη, δηλαδή  $F(u(x)) = u^n(x)$ ,  $n \neq 1$ , τότε οι εξισώσεις Volterra και Fredholm ανήκουν στην κατηγορία των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Δίνονται μερικά παραδείγματα:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u^2(t)dt,$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\eta\mu(u(t))dt,$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\ln(u(t))dt.$$

Σε αυτή την εργασία θα διακρίνουμε τέσσερις κύριες κατηγορίες ολοκληρωτικών εξισώσεων:

**Volterra Ολοκληρωτικές εξισώσεις,**

**Fredholm Ολοκληρωτικές εξισώσεις,**

**Ολοκληρό - διαφορικές Εξισώσεις,**

**Ιδιόμορφες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις (Singular).**

### Volterra Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Η γενική μορφή μιας γραμμικής Volterra ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι:

$$\varphi(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt.$$

Εάν  $\varphi(x) = 1$ , τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt.$$

και ονομάζεται **Volterra ολοκληρωτική εξίσωση 2<sup>ου</sup> είδους**.

Εάν  $\varphi(x) = 0$  τότε η εξίσωση γίνεται:

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt.$$

και ονομάζεται **Volterra ολοκληρωτική εξίσωση 1<sup>ου</sup> είδους**.

Εάν η  $\varphi(x)$  είναι διάφορη του μηδενός και του ένα, τότε η ολοκληρωτική εξίσωση ονομάζεται **Volterra ολοκληρωτική εξίσωση 3<sup>ου</sup> είδους**.

Εάν  $f(x) = 0$  και  $\varphi(x) = 1$  τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt.$$

και ονομάζεται **ομογενής Volterra ολοκληρωτική εξίσωση**.

### **Fredholm Ολοκληρωτικές εξισώσεις**

Η γενική μορφή μιας γραμμικής Fredholm ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι:

$$\varphi(x) u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt, \quad \text{με } a, b \text{ σταθερές.}$$

Εάν  $\varphi(x) = 1$  τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt.$$

και ονομάζεται **Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση 2<sup>ου</sup> είδους**.

Εάν  $\varphi(x) = 0$  τότε η εξίσωση γίνεται:

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) u(t) dt.$$

και ονομάζεται **Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση 1<sup>ου</sup> είδους**.

Εάν η  $\varphi(x)$  είναι διάφορη του μηδενός και του ένα, τότε η ολοκληρωτική εξίσωση ονομάζεται **Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση 3<sup>ου</sup> είδους**.

Εάν  $f(x) = 0$  και  $\varphi(x) = 1$  τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)u(t) dt.$$

και ονομάζεται **ομογενής Fredholm ολοκληρωτική εξίσωση**.

### Ολοκληρό - Διαφορικές Εξισώσεις

Στις αρχές του 1900, ο Vito Volterra καθώς μελετούσε τον αριθμό γεννήσεων ενός πληθυσμού ανέπτυξε και προσδιόρισε την κατηγορία των **ολοκληρό - διαφορικών εξισώσεων**. Η κατηγορία των ολοκληρό - διαφορικών εξισώσεων έχει ευρεία εφαρμογή στα εφαρμοσμένα μαθηματικά καθώς εμφανίζονται σε φυσικά μοντέλα, όπως δυναμική των ρευστών και βιολογικά μοντέλα. Στην συγκεκριμένη κατηγορία η άγνωστη συνάρτηση  $u(x)$  εμφανίζεται ως συνδυασμός των παραγώγων της. Παράδειγμα:

$$u'(x) = u(x) + f(x) + \int_a^x \sin(x-t)u(t) dt.$$

### Ιδιόμορφες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Οι **Ιδιόμορφες (Singular) Ολοκληρωτικές Εξισώσεις** εμφανίζονται σε ένα ή και στα δύο όρια ολοκλήρωσης το άπειρο ή στον πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης εμφανίζονται ένα ή περισσότερα σημεία όπου απειρίζονται στο διάστημα ολοκλήρωσης τους. Μερικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|} u(t) dt,$$

$$u(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^a} dt, \text{ με } 0 < a < 1.$$

### 1.3 Τύπος Leibnitz

Μια πολύ χρήσιμη σχέση για την μελέτη των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι ο τύπος του Leibnitz [38]. Συγκεκριμένα, αν οι συναρτήσεις  $f(x, t)$  και  $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$  είναι συνεχείς ως προς  $x$ ,  $t$  και οι  $\frac{dg_1}{dx}(x)$ ,  $\frac{dg_2}{dx}(x)$  είναι συνεχείς ως προς  $x$  τότε ισχύει ο εξής βασικός τύπος:

$$\frac{d}{dt} \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} f(x, t) dx = f(g_2(t), t) \frac{dg_2}{dt}(t) - f(g_1(t), t) \frac{dg_1}{dt}(t) + \int_{g_1(t)}^{g_2(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx.$$

### 1.4 Μετατροπή Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra πρώτου είδους σε δεύτερου είδους

Θεωρούμε την γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t) dt,$$

όπου,

$$K \in C^2(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}), K(x, x) \neq 0 \text{ και } f(a) = 0. \quad (1.4.1)$$

**1<sup>ος</sup> τρόπος:** Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης ως προς  $x$  έχουμε,

$$f'(x) = \lambda K(x, x) \varphi(x) + \lambda \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \varphi(t) dt.$$

Με την προϋπόθεση ότι  $K(x, x) \neq 0$ , για  $a \leq x \leq b$  διαιρούμε κατά μέλη και έχουμε,

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{\lambda K(x, x)} - \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \frac{1}{K(x, x)} \varphi(t) dt.$$

μία δεύτερου είδους ολοκληρωτική εξίσωση Volterra.

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Θέτουμε  $g(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ ,

και έχουμε ότι

$$\frac{dg(x)}{dx} = \varphi(x) \text{ και } g(a) = 0.$$

Συνεπώς η (1.4.1) γίνεται:

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \frac{dg(t)}{dt} dt.$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο δεύτερο μέλος έχουμε,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda K(x, x) g(x) - \lambda \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} g(t) dt, \\ \text{ή} \\ g(x) &= \frac{f(x)}{\lambda K(x, x)} + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x K(x, x)} g(t) dt. \end{aligned}$$

που είναι ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2<sup>ου</sup> είδους.

**Παρατήρηση** Ο δεύτερος τρόπος είναι προτιμότερος από τον πρώτο γιατί δεν απαιτείται η  $f(x)$  να είναι παραγωγίσιμη.

### 1.5 Μετατροπή μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra πρώτου είδους σε δεύτερου είδους

Θεωρούμε τη μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 1<sup>ου</sup> είδους:

$$f(x) = \int_a^x F(x, t, \varphi(t)) dt, \quad (1.5.1)$$

όπου  $f(x)$  και  $F(x, t, u)$  συνεχείς συναρτήσεις στα διαστήματα  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq t \leq b$ ,  $p \leq u \leq q$  με συνεχείς παραγώγους και  $f(a) = 0$ .

Παραγωγίζοντας δύο φορές την (1.5.1) ως προς  $x$  και λαμβάνουμε,

$$f'(x) = F(x, x, \varphi(x)) + \int_a^x \frac{\partial F(x, t, \varphi(t))}{\partial x} dt,$$

ή

$$f''(x) = \frac{dF(x, x, \varphi(x))}{dx} + \int_a^x \frac{\partial^2 F(x, t, \varphi(t))}{\partial x^2} dt + \frac{\partial F(x, t, \varphi(t))}{\partial x},$$

όπου ο όρος  $\frac{dF(x, x, \varphi(x))}{dx}$  είναι το ολικό διαφορικό της  $F(x, x, \varphi(x))$  και μας δίνει

$$\frac{dF(x, x, \varphi(x))}{dx} = \frac{\partial F(x, t, \varphi(t))}{\partial x} + \left( \frac{\partial F(x, t, \varphi(t))}{\partial t} \Big|_{t=x} \right) (x) + \left( \frac{\partial F(x, t, u)}{\partial t} \Big|_{t=x, u=\varphi(x)} \right) \varphi'(x).$$

Επομένως έχουμε:

$$f''(x) = 2 \int_a^x \frac{\partial F(x, x, \varphi(x))}{\partial x} dt + \left( \frac{\partial F(x, t, \varphi(t))}{\partial t} \Big|_{t=x} \right) + \left( \frac{\partial F(x, t, u)}{\partial t} \Big|_{t=x, u=\varphi(x)} \right) \varphi'(x) + \int_a^x \frac{\partial^2 F(x, t, \varphi(t))}{\partial x^2} dt,$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\left( \frac{\partial F(x, t, u)}{\partial t} \Big|_{t=x, u=\varphi(x)} \right)} \left[ f''(x) - 2 \frac{\partial F(x, x, \varphi(x))}{\partial x} - \left( \frac{\partial F(x, t, \varphi(t))}{\partial t} \Big|_{t=x} \right) - \int_a^x \frac{\partial^2 F(x, t, \varphi(t))}{\partial x^2} dt \right].$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση έχουμε,

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \frac{f''(z) - \frac{\partial F(z, z, \varphi(z))}{\partial z} - \left( \frac{\partial F(z, t, \varphi(t))}{\partial t} \Big|_{t=z} \right)}{\left( \frac{\partial F(z, t, u)}{\partial t} \Big|_{t=z, u=\varphi(z)} \right)} dz$$

$$= \frac{1}{\left( \frac{\partial F(x, t, u)}{\partial t} \Big|_{t=x, u=\varphi(x)} \right)} \int_a^x \int_a^x \frac{\partial^2 F(x, t, \varphi(t))}{\partial x^2} dt dz.$$

Έτσι μετατρέπουμε τις μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra 1<sup>ου</sup> είδους σε δεύτερου είδους.

## 1.6 Μετατροπή Προβλημάτων Αρχικών Τιμών σε Ισοδύναμες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra δεύτερου είδους

**Βασική Πρόταση** Αν  $f$  συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $I$ , τότε για κάθε  $x_0 \in I$ ,  $x \in I$  ισχύει

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(t) dt dt \dots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Υπάρχει μία θεμελιώδης σχέση μεταξύ ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra και συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα η λύση κάθε διαφορικής εξίσωσης με τύπο:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) = F(x), \quad (1.6.1)$$

με συνεχείς συντελεστές, μαζί με τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y''(0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

μπορούν να παράγουν τη λύση μιας συγκεκριμένη ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2ου είδους της μορφής,

$$u(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt = f(x). \quad (1.6.2)$$

Για να πετύχουμε κάτι τέτοιο κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x), \quad (1.6.3)$$

και ολοκληρώνοντας την σχέση (1.6.3) ως προς  $x$  από το 0 έως το  $x$  έχουμε,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(t)dt + c_{n-1}. \quad (1.6.4)$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία παίρνουμε ότι,

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt + c_{n-1}x + c_{n-2},$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt dt + c_{n-1} \frac{x^2}{2!} + c_{n-2} x + c_{n-3},$$

... = ...

$$y(x) = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x u(t)dt dt dt \dots dt + c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0,$$

$$y(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt + c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + c_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_1 x + c_0. \quad (1.6.5)$$

Επιστρέφοντας στην σχέση (1.6.1) έχουμε,

$$u(x) + \int_0^x \{a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x) \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots + a_n(x) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\} u(t) dt =$$

$$F(x) - c_{n-1}a_1(x) - (c_{n-1} - c_{n-2}) a_2(x) - \dots - (c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1 x + c_0) a_n(x).$$

δηλαδή,

$$u(x) + \int_0^x K(x, t)u(t)dt = f(x),$$

όπου,

$$K(x, t) = \sum_{v=1}^n a_v(x) \frac{(x-t)^{v-1}}{(v-1)!},$$

και

$$f(x) = F(x) - c_{n-1}a_1(x) - (c_{n-1} - c_{n-2}) a_2(x) - \dots - (c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1 x + c_0) a_n(x).$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα λοιπόν ότι κάθε διαφορική εξίσωση με τύπο:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) = F(x),$$

με αρχικές συνθήκες,

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, y''(0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

παράγει την λύση μιας συγκεκριμένης ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra 2ου είδους, με μορφή:

$$u(x) + \int_a^x K(x, t)u(t)dt = f(x).$$

### 1.7 Αλγόριθμος Αναλυτικής Μεθόδου Προσεγγίσεων Padé

Η τεχνική των **προσεγγίσεων Padé** (αναπτύχθηκε γύρω στο 1890 από τον Γάλλο μαθηματικό Henri Padé (1863 – 1963), αλλά ανάγεται στον Γερμανό μαθηματικό Georg Frobenius (1849 - 1917) που εισήγαγε και ερεύνησε τα χαρακτηριστικά των ρητών συναρτήσεων) έχει ένα ζωτικό ρόλο στην επίλυση προβλημάτων, διαφορικών εξισώσεων και την αριθμητική ανάλυση. Η φιλοσοφία της μεθόδου βασίζεται στον ορισμό μίας συνάρτησης ως πολλαπλάσιο μιας ρητής συνάρτησης. Οι προσεγγίσεις Padé είναι πολλές φορές ανώτερες από την έκφραση της δοθείσας συνάρτησης ως σειρά Taylor, γιατί επιτρέπει την καλύτερη αναπαράστασή τους και εξακολουθεί να λειτουργεί όταν η σειρά Taylor αποκλίνει. Η προσέγγιση  $[m/n]$  Padé ορίζεται ως:

$$[m/n] = \frac{P_m(x)}{L_n(x)} = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n} = \sum_{i=0}^{2n} c^i x^i = f(x). \quad (1.7.1)$$

όπου  $P_m(x)$  είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με  $m$  και  $L_n(x)$  είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου  $n$ . Η διαφορά

$$f(x) - \frac{P_m(x)}{L_n(x)} = O(x^{m+n+1}), \quad (1.7.2)$$

προσδιορίζει τους συντελεστές.

Αυτή η μέθοδο χρησιμοποιείται για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra. Ειδικότερα στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο και την επίλυση της εξίσωσης Thomas - Fermi.

### 1.8 Μέθοδος Ομοτυπικής Ανάλυσης

Η μέθοδος Ανάλυσης της Ομοτυπίας εισήχθη αρχικά από τον Liao[3] – [6], και αποτελεί μία γενική, αναλυτική προσεγγιστική μέθοδο για επίλυση διαφόρων ειδών γραμμικών και μη εξισώσεων όπως, συνήθων διαφορικών, μερικών διαφορικών, ολοκληρό – διαφορικών εξισώσεων κ. α. Η μέθοδος αυτή, ισχύει ανεξάρτητα από το αν ένα πρόβλημα έχει μικρές ή μεγάλες φυσικές παραμέτρους. Το πιο σημαντικό στοιχείο της είναι ότι μας παρέχει τόσο

την ελευθερία επιλογής κατάλληλων συναρτήσεων βάσης για την προσέγγιση του προβλήματος, όσο και έναν απλό τρόπο διασφάλισης της σύγκλισης της λύσης. Μετά την δημοσίευση του βιβλίου του Liao, πολλοί ερευνητές εφάρμοσαν την τεχνική σε διάφορα προβλήματα μηχανικής. Όπως περιγράφεται στο βιβλίο του, εν συντομία, μέσω της ομοτυπικής ανάλυσης, κατασκευάζεται μία συνεχής απεικόνιση μιας αρχικής υποθετικής προσέγγισης στην ακριβή λύση των εξεταζόμενων εξισώσεων. Για την κατασκευή μιας τέτοιας συνεχούς απεικόνισης επιλέγεται ένας βοηθητικός γραμμικός τελεστής και χρησιμοποιείται μια βοηθητική παράμετρος για να εξασφαλιστεί η σύγκλιση της λύσης. Η μέθοδος απολαμβάνει μεγάλη ελευθερία στην επιλογή των αρχικών προσεγγίσεων και των βοηθητικών γραμμικών τελεστών. Μέσω αυτού του είδους ελευθερίας, ένα περίπλοκο πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε άπειρο αριθμό απλούστερων γραμμικών υποπροβλημάτων, γεγονός που αποτελεί το πλεονέκτημα της μεθόδου την εποχή των υπολογιστών. Για την επίλυση των γραμμικών και μη διαφορικών ή αλγεβρικών εξισώσεων με την μέθοδο της ομοτυπίας, οι υπάρχοντες όροι του προβλήματος πρέπει να ορίζουν την παράγωγο της ομοτυπίας. Με την χρήση της έννοιας αυτής, παράγωγοι βασικών συναρτήσεων, όπως η απλή εκθετική συνάρτηση  $e^x$ , οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\sin x$ ,  $\cos x$  κ.α. δόθηκαν ως λήμματα σε πρόσφατες εργασίες [46], [47]. Ωστόσο για μια συνάρτηση γενικής μορφής είναι άγνωστο μέχρι στιγμής πως θα πάρουμε μια ομοτυπική παράγωγο, γεγονός που θέτει σοβαρούς περιορισμούς στην χρήση της.

**Ορισμός** Ας είναι  $x$  μία συνάρτηση της ομοτυπικής παραμέτρου  $p \in [0, 1]$ , της οποίας η σειρά Maclaurin δίνεται από την σχέση,

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k. \quad (1.8.1)$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται **σειρά ομοτυπίας** του  $x$ .

**Ορισμός** Ας είναι  $x$  μία συνάρτηση της ομοτυπικής παραμέτρου  $p$ , τότε ορίζεται ως:

$$D(m, x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m x}{\partial p^m}. \quad (1.8.2)$$

Η έκφραση  $D_m(x)$  προκύπτει εάν στην σχέση (1.8.2) βάλουμε για  $p = 0$ , δηλαδή,

$$D_m(x) = D(m, x)|_{p=0} \quad (1.8.3)$$

που ονομάζεται **ομοτυπική παράγωγο  $m$  – τάξης** του  $x$ . Το  $m \geq 0$  ένας ακέραιος αριθμός.

**Θεώρημα** Ας είναι  $f(x)$  μία απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση του  $x$ , εξαρτώμενη από την παράμετρο της ομοτυπίας  $p$ . Μαζί με τους ορισμούς,

$$D(0, f(x)) = f(x), \quad D_0(f(x)) = D(0, f(x))|_{p=0} = f(x_0), \quad (1.8.4)$$

για την ομοτυπική σειρά του  $x$  που δίνεται από την σχέση (1.8.1) ισχύει ότι:

1.  $D(k, f(x)) = \sum_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{k}\right) D(k-m, x) \frac{\partial}{\partial x} D(m, f(x))$ ,
2.  $D_k(f(x)) = D(k, f(x))|_{p=0}$ ,



όπου  $k \geq 1$ , ακέραιος αριθμός.

### Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibnitz για το γινόμενο παραγώγων ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x)}{\partial p^k} &= \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k-1} \left( \frac{\partial x f'(x)}{\partial p} \right)}{\partial p^{k-1}} = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{m!(k-1-m)!} \frac{\partial^{k-m} x}{\partial p^m} \frac{\partial^m f'(x)}{\partial p^m} \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k} \frac{1}{(k-m)!} \frac{\partial^{k-m} x}{\partial p^{k-m}} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f'(x)}{\partial p^m}. \end{aligned}$$

Από την σχέση (1.8.2) παίρνουμε το (1) και θέτοντας  $p = 0$ , στην παραπάνω σχέση αποδεικνύουμε το (2).

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra. Ειδικότερα στην παρούσα εργασία γίνεται εφαρμογή της στην επίλυση γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra και στην ολοκληρό – διαφορική εξίσωση Thomas – Fermi.

## 2<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ VOLTERRA

#### 2.1 Εισαγωγή

Σημαντικό ρόλο στην επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης παίζει ο χώρος στον οποίο αναζητάμε την ύπαρξη αλλά και την μοναδικότητα της λύσης. Δύο συνήθεις χώροι εύρεσης λύσης είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων  $C[a, b]$  και ο χώρος  $L_2[a, b]$  των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Ο χώρος  $C[a, b]$  περιέχει τις συνεχείς συναρτήσεις, χωρίς τον περιορισμό του «σχεδόν παντού». Σε αντιδιαστολή ο  $L_2[a, b]$  είναι ένας χώρος Hilbert, ο οποίος είναι ένας χώρος με πλουσιότερη δομή.

Στο εισαγωγικό μέρος της εργασίας δώσαμε τον ορισμό των ολοκληρωτικών εξισώσεων, και στη συνέχεια σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μερικές τεχνικές επίλυσης των γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra.

#### 2.2 Μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων

Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε έγγυται στο ότι η λύση της δίνεται ως όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων η οποία κατασκευάζεται από μια τυχαία συνάρτηση του χώρου. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης των εξισώσεων προκύπτει, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, βασιζόμενοι στην αρχή συστολής σε ένα πλήρη μετρικό χώρο. Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο, αντικαθιστούμε την άγνωστη συνάρτηση  $u(x)$  που βρίσκεται κάτω από το ολοκλήρωμα, με μια οποιαδήποτε πραγματική, συνεχής συνάρτηση  $u_0(x)$  που ονομάζεται μηδενική προσέγγιση. Η παραδοχή αυτή δίνει την πρώτη προσέγγιση  $u_1(x)$ , δηλαδή για την εξίσωση,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u(t)dt, \quad (2.2.1)$$

και για  $u(x) = u_0(x)$  έχουμε,

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_0(x)dt. \quad (2.2.2)$$

Προφανώς η  $u_1(x)$  είναι μια συνεχής συνάρτηση εάν  $f(x)$ ,  $K(x, t)$  και  $u_0(x)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Η δεύτερη προσέγγιση  $u_2(x)$  βρίσκεται αντικαθιστώντας το  $u_0(x)$  της (2.2.2) με το  $u_1(x)$  δηλαδή,

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_1(x)dt. \quad (2.2.3)$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία παίρνουμε μια πεπερασμένη σειρά συνεχών συναρτήσεων  $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x) \dots$  που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση,

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-1}(x)dt, \quad (2.2.4)$$

για  $n = 1, 2, 3, \dots$  και  $u_0(x)$  τυχαία συνεχής πραγματική συνάρτηση.  
Οι πιο συνηθισμένες  $u_0(x)$  συναρτήσεις είναι  $0, 1$  και  $x$ .

Το όριο της λύσης  $u(x)$  της (2.2.1) δίνεται:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x). \quad (2.2.5)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση  $u(x)$  είναι ανεξάρτητη της  $u_0(x)$ .

Η παραπάνω διαδικασία είναι απόρροια της **μεθόδου Picard**<sup>1</sup>, η οποία ορίζει ότι η πρώτη προσέγγιση θα πρέπει να είναι:

$$u_0(x) = f(x).$$

Επομένως οι διαδοχικές προσεγγίσεις είναι,

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)f(t)dt,$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_1(t)dt,$$

...

$$u_{n-1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-2}(t)dt,$$

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)u_{n-1}(t)dt. \quad (2.2.6)$$

Παίρνοντας την διαφορά της πρώτης και δεύτερης προσέγγισης παρατηρούμε ότι:

$$u_2(x) - u_1(x) = \lambda \int_0^x K(x, t) [f(t) + \lambda \int_0^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau]dt - \lambda \int_0^x K(x, t)f(t) dt =$$

$$\lambda^2 \int_0^x K(x, t) \int_0^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau dt = \lambda^2 y_2(x),$$

όπου,

$$y_2(x) = \int_0^x K(x, t)dt \int_0^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau.$$

Βασιζόμενοι στα παραπάνω έχουμε,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda^k y_k(x),$$

<sup>1</sup> Ε.Τ. Picard λέκτορας του Πανεπιστημίου του Παρισιού το 1878 και καθηγητής του Πανεπιστημίου της Τουλούζ τον επόμενο χρόνο. Ένας από τους πιο διακεκριμένους μαθηματικούς. Έγινε γνωστός για τις έρευνες του πάνω στην Θεωρία Συναρτήσεων [1].

όπου,

$$y_0(x) = f(x) \text{ και } y_k(x) = \int_0^x K(x, t)y_{k-1}(t)dt \text{ με } k = 1, 2, 3, \dots$$

**Παράδειγμα** Βρείτε την λύση της παρακάτω ολοκληρωτικής εξίσωσης με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων,

$$u(x) = x + \int_0^x (t - x)u(t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι  $f(x) = x$  συνεχής,  $K(x, t) = t - x$  συνεχής στον  $\mathbb{R}^2$  με  $\lambda = 1$ .  
Επιλέγουμε  $u_0(x) = x$  και βρίσκουμε,

$$u_1(x) = x + \int_0^x (t - x)t dt = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= x + \int_0^x (t - x)u_1(t)dt = x + \int_0^x (t - x)\left(t - \frac{t^3}{3!}\right)dt = x + \int_0^x (t - x)\left(t - \frac{t^3}{6}\right)dt \\ &= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}, \end{aligned}$$

$$u_3(x) = x + \int_0^x (t - x)u_2(t)dt = x + \int_0^x (t - x)\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\right)dt = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής αποδεικνύεται ότι:

$$u_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Άρα η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x.$$

### 2.3 Μέθοδος Επαναληπτικών Πυρήνων

Κατά την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων, αναπτύσσοντας την μέθοδο Picard και δίνοντας την διαφορά της πρώτης και δεύτερης προσέγγισης, διαπιστώσαμε ότι:

$$u_2 - u_1 = \lambda^2 y_2(x),$$

όπου,

$$y_2(x) = \int_0^x K(x, t)dt \int_0^t K(t, x)f(\tau)d\tau. \quad (2.3.1)$$

Εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι,

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^n \lambda^m y_m(x).$$

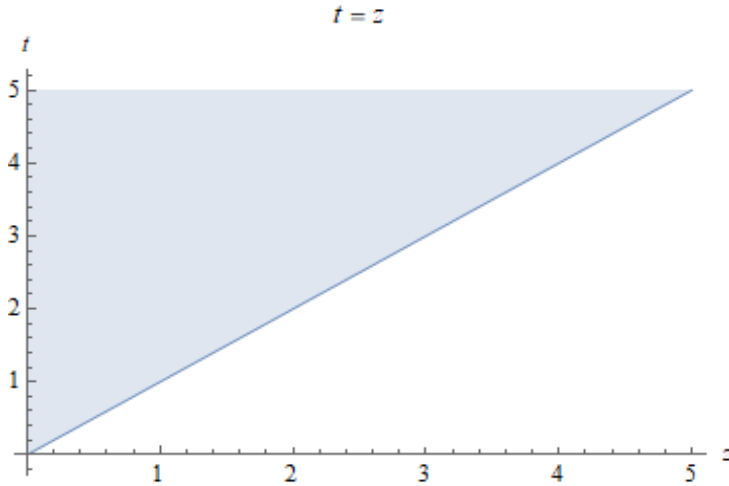
Εάν  $y_0(x) = f(x)$  τότε,

$$y_m(x) = \int_0^x K(x, t)y_{m-1}(t)dt, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

και

$$y_1(x) = \int_0^x K(x, t)f(t)dt.$$

Τα χωρία ολοκλήρωσης στα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα στην σχέση (2.3.1) μπορούν να αποτυπωθούν εικονικά με την τριγωνική περιοχή του Σχήματος 2.1.



Σχήμα 2.1: Τριγωνική περιοχή ολοκληρωμάτων.

Αλλάζοντας έτσι την σειρά ολοκλήρωσης ισχύει:

$$\begin{aligned} y_2 &= \int_0^x (f(\tau) d\tau \int_0^t K(x, t) K(x, \tau) dt \\ &= \int_0^t K_2(x, \tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

όπου,

$$K_2(x, \tau) = \int_{\tau}^x K(x, t) K(t, \tau) dt.$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία έχουμε,

$$y_m = \int_0^t K_m(x, \tau) f(\tau) d\tau, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

όπου οι επαναλαμβανόμενοι πυρήνες ορίζονται ως,

$$K_1(x, t) \equiv K(x, t),$$

και  $K_2(x, t), K_3(x, t), \dots$  ως,

$$K_{m+1} = \int_t^x K(x, \tau) K_m(\tau, t) d\tau, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

με λύση:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{f}(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \mathbf{y}_m(x). \quad (2.3.2)$$

**Παρατήρηση** Είναι εύκολα αποδεκτό ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης υπάρχει εάν το άθροισμα της άπειρης σειράς (2.3.2) υπάρχει και η λύση δίνεται όταν  $n \rightarrow \infty$ ,

δηλαδή,

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \\ &= f(x) + \int_0^x \left\{ \sum_{m=1}^n \lambda^m K_m(x, \tau) \right\} f(\tau) d\tau, \\ &= f(x) + \int_0^x R(x, \tau; \lambda) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

όπου,

$$\boxed{R(x, \tau; \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K_m(x, \tau).} \quad (2.3.3)$$

γνωστός ως **επιλύων πυρήνας**.

**Παρατήρηση** Οι σειρές  $K_1 + \lambda K_2 + \lambda^2 K_3 + \dots + \infty$  ονομάζονται **Neumann Σειρές**.

**Παράδειγμα** Με την μέθοδο του επιλύοντα πυρήνα να βρεθεί η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης,

$$u(x) = x + \int_0^x (t - x) u(t) dt.$$

Έχουμε  $K_1(x, t) = K(x, t) = t - x$ ,  $\lambda = 1$ ,  
με

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K(x, w) K_n(w, t) dw,$$

$$K_2(x, t) = \int_t^x K(x, w) K_1(w, t) dw = \int_t^x (w - x)(t - w) dw = -\frac{1}{3!}(t - x)^3,$$

$$K_3(x, t) = \int_t^x K(x, w) K_2(w, t) dw = \int_t^x (w - x) \left[ -\frac{1}{3!}(t - w)^3 \right] dw = -\frac{1}{5!}(t - x)^5.$$

Άρα ο επιλύων πυρήνας ορίζεται ως:

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, t) = \frac{t-x}{1!} - \frac{1}{3!}(t-x)^3 + \frac{1}{5!}(t-x)^5 - \dots = \sin(t-x).$$

Επομένως η λύση δίνεται:

$$\begin{aligned} u(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x R(x, t; \lambda) f(t) dt, \\ &= x + \int_0^x t \sin(t-x) dt, \\ &= x + \sin x - x = \sin x. \end{aligned}$$

## 2.4 Μέθοδος Διάσπασης Adomian

Η **Μέθοδος Διάσπασης Adomian (Adomian Decomposition Method) (A.D.M.)** χρησιμοποιείται για να δώσει μια αναλυτική προσεγγιστική λύση σε μια μεγάλη ομάδα γραμμικών και μη, διαφορικών, ολοκληρωτικών και ολοκληρό - διαφορικών εξισώσεων. Η μέθοδος παρουσιάστηκε το 1900 από τον Adomian στο Πανεπιστήμιο της Γεωργίας, από όπου και πήρε την ονομασία της [2]. Η μέθοδος βρίσκει τη λύση της  $u(x) = f(x) + \lambda$

$\int_0^x K(x, t) u(t) dt$  υπό την μορφή σειράς  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  με αρχική προσέγγιση  $u_0(x) = f(x)$ . Με άλλα λόγια η A.D.M. μετατρέπει την Volterra ολοκληρωτική εξίσωση σε προσδιορίσιμα υπολογίσιμα στοιχεία. Εάν υπάρχει λύση στο πρόβλημα, τότε τα παραγόμενα στοιχεία συγκλίνουν πιο γρήγορα στη λύση.

$$\mathbf{u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \} dt.} \quad (2.4.1)$$

Για τα στοιχεία  $u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x) \dots$  έχουμε,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_0(t) dt, \\ u_2(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_1(t) dt, \\ &\dots \\ u_n(x) &= \lambda \int_0^x K(x, t) u_{n-1}(t) dt. \end{aligned}$$

**Παρατήρηση** Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι είναι δυνατόν να μην μπορούμε να ολοκληρώσουμε όλους τους πυρήνες που εμφανίζονται. Σε αυτή την περίπτωση, περικόπτουμε την σειρά και προσεγγίζουμε την  $u(x)$ .

**Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra με την μέθοδο διάσπασης Adomian,

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x) u(t) dt. \quad (2.4.2)$$

Έστω  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  τότε (2.4.2) γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x + \int_0^x (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt,$$

με

$$\begin{aligned} u_0(x) &= x, \\ u_1(x) &= \int_0^x (t-x) u_0(t) dt = \int_0^x (t-x)t dt = -\frac{x^3}{3!}, \\ u_2(x) &= \int_0^x (t-x) u_1(t) dt = \int_0^x (t-x) - \frac{t^3}{3!} dt = \frac{x^5}{5!}, \\ &\dots \end{aligned}$$

και υπολογίζοντας τους υπόλοιπους όρους της σειράς, προκύπτει η λύση

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sin x .$$

## 2.5 Μέθοδος επίλυσης με την βοήθεια σειρών

Στην μέθοδο επίλυσης με σειρές θα ακολουθήσουμε μια παράλληλη προσέγγιση γνωστή ως λύση με Frobenius σειρές. Στην μέθοδο αυτή θεωρούμε την λύση ως μία αναλυτική συνάρτηση και την εκφράζουμε σε μορφή σειράς (π. χ Taylor σειρά γύρω από σημείο  $x = 0$ ) δηλαδή, βρίσκει την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra  $u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt$  υπό την μορφή σειράς,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(x), \quad (2.5.1)$$

όπου τα  $a_n$  είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν.

Θεωρούμε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra  $u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt$  και κάνοντας αντικατάσταση στην (2.5.1) η εξίσωση γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt,$$

ή

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) a_0 dt + \lambda \int_0^x K(x, t) a_1 t dt + \lambda \int_0^x K(x, t) a_2 t^2 dt + \dots + \lambda \int_0^x K(x, t) a_n t^n dt. \quad (2.5.2)$$

Παρατηρούμε ότι η αρχική ολοκληρωτική εξίσωση μετατράπηκε σε άθροισμα υπολογίσιμων ολοκληρωμάτων της μορφής  $t^n$  για  $n \geq 0$  μόνο. Στην συνέχεια γράφουμε την  $f(x)$  σε Taylor μορφή και βρίσκουμε τα πρώτα ολοκληρώματα της (2.5.2) και μετέπειτα τις άγνωστες σταθερές  $a_0, a_1, a_2, \dots$ . Αυτό θα μας οδηγήσει στην λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

**Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra χρησιμοποιώντας την μέθοδο των σειρών,

$$u(x) = x + \int_0^x (t - x)u(t)dt.$$

Θεωρούμε ότι η λύση είναι της μορφής  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n(x)$  και αντικαθιστώντας στην ολοκληρωτική εξίσωση, παίρνουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (t - x) a_n t^n.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του  $x$  έχουμε:

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2},$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{6},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{12}, \quad \dots$$



ή

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{3!}, a_4 = 0 \dots$$

Τελικά προκύπτει ότι η λύση της εξίσωσης έχει μορφή  $u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x$ .

## 2.6 Μέθοδος Μετασχηματισμού Ομοτυπικής Ανάλυσης

Η Μέθοδος Μετασχηματισμού Ομοτυπικής Ανάλυσης (**Homotopy Analysis Transform Method**) (**H.A.T.M.**) όπως παρουσιάστηκε στην παράγραφο 1.8 βασίζεται σε ένα συνδυασμό του μετασχηματισμού Laplace και της θεμελιώδης έννοιας της τοπολογίας και της διαφορικής γεωμετρίας, την Ομοτυπία.. Η Μέθοδος H.A.M., όπως έχει αναφερθεί, βασίζεται στον συνεχή μετασχηματισμό μιας τυχαίας αρχικής προσέγγισης ως ότου βρεθεί η ακριβής λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης και προσφέρει μεγάλη ευελιξία στην επιλογή της αρχικής προσέγγισης και του βοηθητικού τελεστή και μια ομάδα από δύσκολα μη γραμμικά προβλήματα τα μετατρέπει σε πεπερασμένο αριθμό απλών, γραμμικών προβλημάτων, όπως απέδειξαν οι Liao και Tan [7].

Θεωρούμε την παρακάτω Volterra ολοκληρωτική εξίσωση 2<sup>ου</sup> είδους,

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t)u(t) dt \quad \text{με } 0 \leq x \leq 1. \quad (2.6.1)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (2.6.1) και παίρνουμε

$$L[u(x)] = L[f(x)] + L\left\{\int_0^x K(x, t)u(t) dt\right\}. \quad (2.6.2)$$

Ορίζουμε τον μη γραμμικό τελεστή,

$$N[\varphi(x; q)] = L[\varphi(x; q)] - L[f(x)] - L\left\{\int_0^x K(x, t)u(t) dt\right\} \quad (2.6.3)$$

όπου  $q \in [0, 1]$  μία ενσωματωμένη παράμετρος και  $\varphi(x; q)$  μία πραγματική συνάρτηση. Με χρήση της τοπολογικής θεωρίας της Ομοτυπίας, ο Liao [35] κατασκεύασε την μηδενικής τάξης εξίσωση,

$$(1 - q) L[\varphi(x; q) - u_0(x)] = hqH(x) N[\varphi(x; q)], \quad (2.6.4)$$

όπου  $h$  είναι μία μη μηδενική βοηθητική παράμετρος,  $H(x) \neq 0$  μία βοηθητική συνάρτηση,  $u_0(x)$  μία αρχική τυχαία λύση της  $u(x)$  και  $\varphi(x; q)$  μία άγνωστη συνάρτηση. Προφανώς για

$$q = 0, q = 1,$$

έχουμε,

$$\varphi(x; 0) = u_0(x) \text{ και } \varphi(x; 1) = u(x). \quad (2.6.5)$$

Καθώς το  $q$  αυξάνει από το 0 στο 1, η λύση της εξίσωσης μεταβάλλεται εξαιτίας της τυχαίας  $u_0(x)$ . Γράφουμε την  $\varphi(x; q)$  σε μορφή Taylor ως προς το  $q$  και έχουμε:

$$\varphi(x; q) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} q^m u_m(x), \quad (2.6.6)$$

όπου,

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \varphi(x; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \quad (2.6.7)$$

Εάν ο βοηθητικός τελεστής, η αρχική τυχαία λύση και η βοηθητική συνάρτηση είναι σωστά επιλεγμένες τότε η σειρά θα συγκλίνει για  $q = 1$  και θα έχουμε:

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x), \quad (2.6.8)$$

όπου θα είναι και μία από τις λύσεις της Volterra ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Ορίζουμε το διάνυσμα,

$$\overrightarrow{u(x)} = \{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)\}. \quad (2.6.9)$$

Παραγωγίζοντας την (2.6.5)  $m$  φορές ως προς το  $q$ , βάζοντας όπου  $q = 0$  και διαιρώντας με  $m!$  έχουμε:

$$L[\overrightarrow{u_{m-1}} - \chi_m u_{m-1}(x)] = h q H(x) R_m(\overrightarrow{u_{m-1}}, x), \quad (2.6.10)$$

όπου,

$$R_m(\overrightarrow{u_{m-1}}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \varphi(x; q)}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0}, \quad (2.6.11)$$

και

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}. \quad (2.6.12)$$

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε την  $u_m(x)$  για  $m \geq 1$  και έχουμε,

$$u(x) = \sum_{m=1}^M u_m(x). \quad (2.6.13)$$

Όταν  $M \rightarrow \infty$  παίρνουμε την ακριβή προσέγγιση της εξίσωσης (2.6.1).

**Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra χρησιμοποιώντας την μέθοδο μετασχηματισμού Ομοτυπικής Ανάλυσης,

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt, \quad 0 < x < 1. \quad (2.6.14)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρωτικής εξίσωσης και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα συνέλιξης έχουμε,

$$L[u(x)] = L[x] - \frac{1}{s^2} L[u(x)]. \quad (2.6.15)$$

Διαλέγουμε ως γραμμικό τελεστή,

$$\mathfrak{H}[\varphi(x; q)] = L[\varphi(x; q)], \quad (2.6.16)$$

με την ιδιότητα  $\mathfrak{H}[c] = 0$ , όπου  $c$  είναι μεταβλητή.

Τώρα ορίζουμε ένα μη γραμμικό τελεστή με μορφή:

$$N[\varphi(x; q)] = L[\varphi(x; q)] - L[x] + \frac{1}{s^2} L[\varphi(x; q)], \quad (2.6.17)$$

για  $H(x) = 1$  και εφαρμόζοντας τον παραπάνω αλγόριθμο έχουμε,

$$(1 - q) L[\varphi(x; q) - u_0(x)] = hqH(x) N[\varphi(x; q)], \quad (2.6.18)$$

όπου  $q = 0, q = 1$  έχουμε,

$$\varphi(x; 0) = u_0(x) \text{ και } \varphi(x; 1) = u(x),$$

$$L[\overline{u_{m-1}} - \chi_m u_{m-1}(x)] = h q H(x) R_m(\overline{u_{m-1}}, x). \quad (2.6.19)$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε,

$$u_m(x) = \chi_m u_{m-1}(x) + h R_m(\overline{u_{m-1}}, x), \quad (2.6.20)$$

όπου,

$$R_m(\overline{u_{m-1}}, x) = L[\overline{u_{m-1}}] - L[x] + \frac{1}{s^2} L[u_{m-1}(x)]. \quad (2.6.21)$$

Η λύση της m-τάξης του μετασχηματισμού δίνει:

$$u_m(x) = (\chi_m + h) u_{m-1}(x) - h(1 - u_m)x + h L^{-1} \left( \frac{1}{s^2} L[u_{m-1}(x)] \right). \quad (2.6.22)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική προσέγγιση  $u_0(x) = f(x) = x$  έχουμε,

$$u_1(x) = \frac{hx^3}{3!},$$

$$u_2(x) = \frac{h(1+h)x^3}{3!} + \frac{h^2x^5}{5!},$$

$$u_3(x) = \frac{h(1+h)^2x^3}{3!} + \frac{h^2(1+h)x^5}{60!} + \frac{h^3x^7}{7!},$$

$$u_4(x) = \frac{h(1+h)^3x^3}{3!} + \frac{h^2(1+h)^2x^5}{40} + \frac{h^3(1+h)x^7}{1680} + \frac{h^4x^9}{9!},$$

...

και η λύση του προβλήματος είναι της μορφής,

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x).$$

Τελικά διαλέγοντας  $h = -1$  έχουμε:

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x. \quad (2.6.23)$$

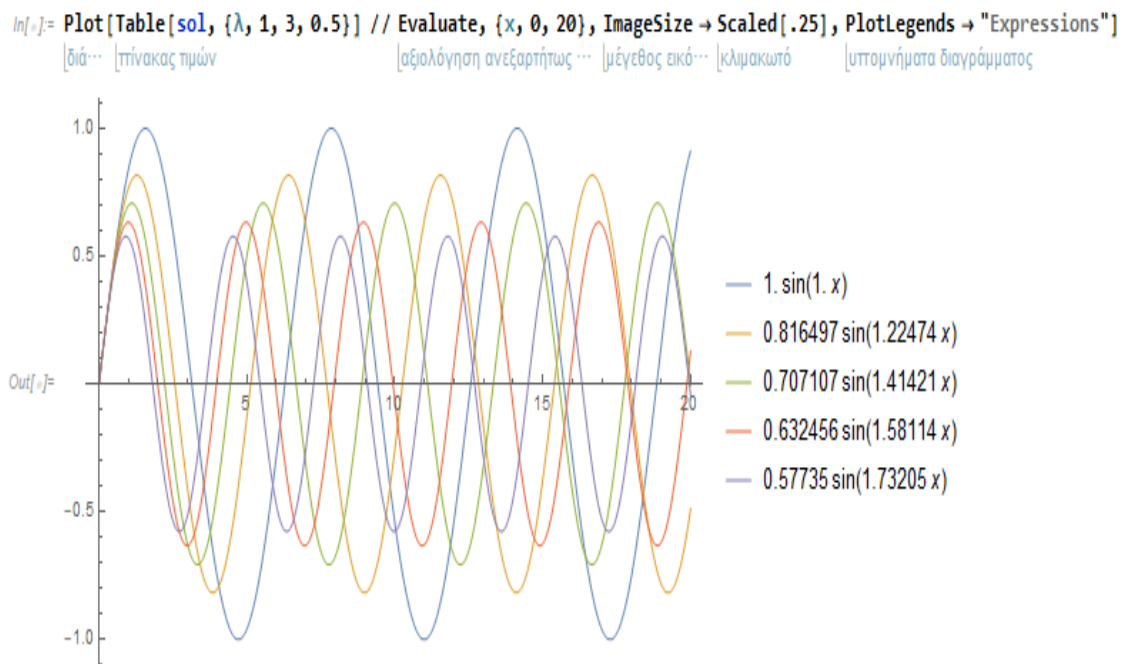
### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Εφαρμόζοντας κατάλληλες εντολές του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 2.2) επιλύεται αναλυτικά η ολοκληρωτική εξίσωση  $u(x) = x + \lambda \int_0^x (t-x)u(t)dt$ . Η λύση της (2.6.14) δίνεται για  $\lambda = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{In[ ]:= eqn} &= u[x] == x + \lambda \int_0^x (t-x) u[t] dt; \\ \text{sol} &= \text{DSolveValue[eqn, u[x], x]} \\ &\quad \text{[συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσης]} \\ \text{Out[ ]:=} & \frac{\text{Sin}[x \sqrt{\lambda}]}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}$$

Σχήμα 2.2 : Εντολές Mathematica για την αναλυτική επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = x + \lambda \int_0^x (t-x)u(t)dt$ .

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη εντολή του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 2.3) απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = x + \lambda \int_0^x (t-x)u(t)dt$ , για  $\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$ . Η λύση της (2.6.23) απεικονίζεται με μπλε.



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση της εξίσωσης  $u(x) = x + \lambda \int_0^x (t-x)u(t)dt$  για διάφορες τιμές της μεταβλητής  $\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$  στο διάστημα  $[0, 20]$ .

Είναι απαραίτητο για την επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης να έχουμε εξασφαλίσει την ύπαρξη και την μοναδικότητα της λύσης. Παρακάτω παραθέτονται ορισμένα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας γραμμικών και μη ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra.

## 2.7 Επαναληπτική Μέθοδος Μεταβολών

Σε αυτή την παράγραφο θα αναλύσουμε μία καινούρια μέθοδος επίλυσης γραμμικών και μη, ομοιόμορφων και μη ολοκληρωτικών εξισώσεων, την **Επαναληπτική Μέθοδο Μεταβολών (Variational Iteration Method) (V.I.M.)** [8]. Η (V.I.M.) καθιερώθηκε από τον Ji-Huan He<sup>2</sup>. Η μέθοδος μας παρέχει μία γρήγορα συγκλίνουσα προσέγγιση της ακριβούς λύσης, εάν αυτή υπάρχει σε κλειστή μορφή.

Έστω η διαφορική εξίσωση,

$$Lu + Nu = g(t), \quad (2.7.1)$$

όπου  $L$  και  $N$  γραμμικοί και μη τελεστές.

Η (V.I.M.) μας δίνει μία συναρτησιακή (functional) διόρθωση της (2.7.1), δηλαδή,

$$\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) + \int_0^x \lambda(\mathbf{x}) (\mathbf{L}\mathbf{u}_n(\xi) + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}}_n(\xi) - \mathbf{g}(\xi)) d\xi. \quad (2.7.2)$$

όπου  $\lambda$  είναι ο γενικός πολλαπλασιαστής Lagrange (general Lagrange's multiplier), ο οποίος μπορεί να είναι μία σταθερά ή μία συνάρτηση και ο όρος  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  ο οποίος συμπεριφέρεται ως μία σταθερά, δηλαδή  $d\tilde{\mathbf{u}}_n = 0$ .

Γενικά μία ολοκληρωμένη χρήση της μεθόδου ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Προσδιορίζουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange.
2. Προσδιορίζουμε το  $\lambda$  και αντικαθιστούμε στην (2.7.2).

Παίρνουμε την μεταβολή της (2.7.2) ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $u_n$  και βρίσκουμε,

$$\frac{\delta u_{n+1}}{\delta u_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta u_n} \left( \int_0^x \lambda(x) (\mathbf{L}u_n(\xi) + \mathbf{N}\tilde{\mathbf{u}}_n(\xi) - \mathbf{g}(\xi)) d\xi \right), \quad (2.7.3)$$

ή

$$\delta u_{n+1} = \delta u_n + \delta \left( \int_0^x \lambda(x) (\mathbf{L}u_n(\xi)) d\xi \right). \quad (2.7.4)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη προσδιορίζουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange, δηλαδή,

$$\int_0^x \lambda(\xi) u_n'(\xi) d\xi = \lambda(\xi) u_n(\xi) - \int_0^x \lambda'(\xi) u_n(\xi) d\xi,$$

$$\int_0^x \lambda(\xi) u_n''(\xi) d\xi = \lambda(\xi) u_n'(\xi) - \lambda'(\xi) u_n(\xi) + \int_0^x \lambda''(\xi) u_n(\xi) d\xi,$$

$$\int_0^x \lambda(\xi) u_n'''(\xi) d\xi = \lambda(\xi) u_n''(\xi) - \lambda'(\xi) u_n'(\xi) + \lambda''(\xi) u_n(\xi) - \int_0^x \lambda'''(\xi) u_n(\xi) d\xi \quad (2.7.5)$$

κ.ο.κ ...

Για παράδειγμα, εάν:

<sup>2</sup> Ο Ji-Huan He είναι καθηγητής στο Soochow University, China με εξειδίκευση σε Fractal theory, Two-scale fractal calculus, Fractional calculus, Nonlinear science, Nanotechnology, Biomechanics

$$Lu_n(\xi) = u_n'(\xi),$$

τότε

$$\delta_{u_{n+1}} = \delta_{u_n} + \delta \left( \int_0^x \lambda(x) (Lu_n(\xi)) d\xi \right).$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\delta_{u_{n+1}} = \delta_{u_n} + \delta \int_0^x \lambda(\xi) u_n(\xi) - \int_0^x \lambda'(\xi) \delta u_n(\xi),$$

$$\delta_{u_{n+1}} = \delta_{u_n}(\xi)(1 + \lambda_{|\xi=x}) - \int_0^x \lambda'(\xi) \delta u_n(\xi).$$

Η εξωτερική συνθήκη επιβάλλει  $\delta_{u_{n+1}} = 0$ ,

δηλαδή,

$$1 + \lambda_{|\xi=x} = 0 \text{ και } \lambda'_{|\xi=x} = 0$$

και παίρνουμε

$$\lambda = -1.$$

Έχοντας προσδιορίσει τον πολλαπλασιαστή Lagrange  $\lambda(\xi)$  η προσέγγιση  $u_{n+1}$  για  $n \geq 0$  της λύσης  $u_n(x)$  θα βρεθεί βρίσκοντας κατάλληλη  $u_0(x)$ . Για γρήγορη σύγκλιση θα επιλέξουμε τις αρχικές συνθήκες ως εξής,

$$u_0(x) = u(0) \text{ για πρώτης τάξης } u_n',$$

$$u_0(x) = u(0) + x u'(0) \text{ για δεύτερης τάξης } u_n'',$$

$$u_0(x) = u(0) + x u'(0) + \frac{1}{2!} x^2 u''(0) \text{ για τρίτης τάξης } u_n''', \text{ κ. τ. λ.}$$

Τελικά η λύση θα είναι της μορφής,

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{u}_n(\mathbf{x})$$

(2.7.6)

Είναι κατανοητό ότι ο προσδιορισμός του πολλαπλασιαστή Lagrange  $\lambda(\xi)$  είναι ένα κυρίαρχο κομμάτι στην εύρεση της λύσης. Παραθέτουμε από κάτω ορισμένους βασικούς πολλαπλασιαστές Lagrange.

1)

$$\mathbf{u}' + \mathbf{f}(\mathbf{u}(\xi), \mathbf{u}'(\xi)) = \mathbf{0}, \lambda = -1,$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \int_0^x [\mathbf{u}_n' + \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n')] d\xi.$$

2)

$$\mathbf{u}'' + \mathbf{f}(\mathbf{u}(\xi), \mathbf{u}'(\xi), \mathbf{u}''(\xi)) = \mathbf{0}, \lambda = \xi - x,$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \int_0^x (\xi - x) [\mathbf{u}_n'' + \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n', \mathbf{u}_n'')] d\xi.$$

3)

$$\mathbf{u}''' + \mathbf{f}(\mathbf{u}(\xi), \mathbf{u}'(\xi), \mathbf{u}''(\xi), \mathbf{u}'''(\xi)) = \mathbf{0}, \lambda = \frac{1}{2!} (\xi - x)^2,$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n - \int_0^x \left[ \frac{1}{2!} (\xi - x)^2 [\mathbf{u}_n''' + \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \dots, \mathbf{u}_n''')] \right] d\xi.$$

και γενικά,

$$\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{f}(\mathbf{u}(\xi), \dots, \mathbf{u}^{(n)}(\xi)) = \mathbf{0}, \lambda = (-1)^n \frac{1}{(n-1)!} (\xi - x)^{n-1},$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + (-1)^n \int_0^x \left[ \frac{1}{(n-1)!} (\xi - x)^{n-1} [\mathbf{u}_n^{(n)} + \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, \dots, \mathbf{u}_n^{(n)})] \right] d\xi, n \geq 1.$$

**Παρατήρηση** Η χρήση της παραπάνω μεθόδου για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης απαιτεί την μετατροπή της σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως το πρόβλημα (1.6) ή σε ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις.

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο των μεταβολών,

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibnitz (1.3) έχουμε,

$$u'(x) - u(x) = 0,$$

Παρατηρούμε ότι για  $x = 0$  έχουμε αρχική συνθήκη  $u(0) = 1$ .

Εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο μεταβολών παίρνουμε ότι,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) (u_n'(\xi) - \tilde{u}_n(\xi)) d\xi.$$

Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα (1) παίρνουμε  $\lambda = -1$  και αντικαθιστώντας στα παραπάνω έχουμε

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(\xi) - u_n(\xi)) d\xi.$$

Θεωρούμε την αρχική συνθήκη και έχουμε,

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = 1 - \int_0^x (u_0'(\xi) - u_0(\xi)) d\xi = 1 + x,$$

$$u_2(x) = 1 - \int_0^x (u_1'(\xi) - u_1(\xi)) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2,$$

$$u_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 - \int_0^x (u_2'(\xi) - u_2(\xi)) d\xi = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3,$$

...

Τελικά,

$$u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots + \frac{1}{n!} x^n \right) = e^x.$$

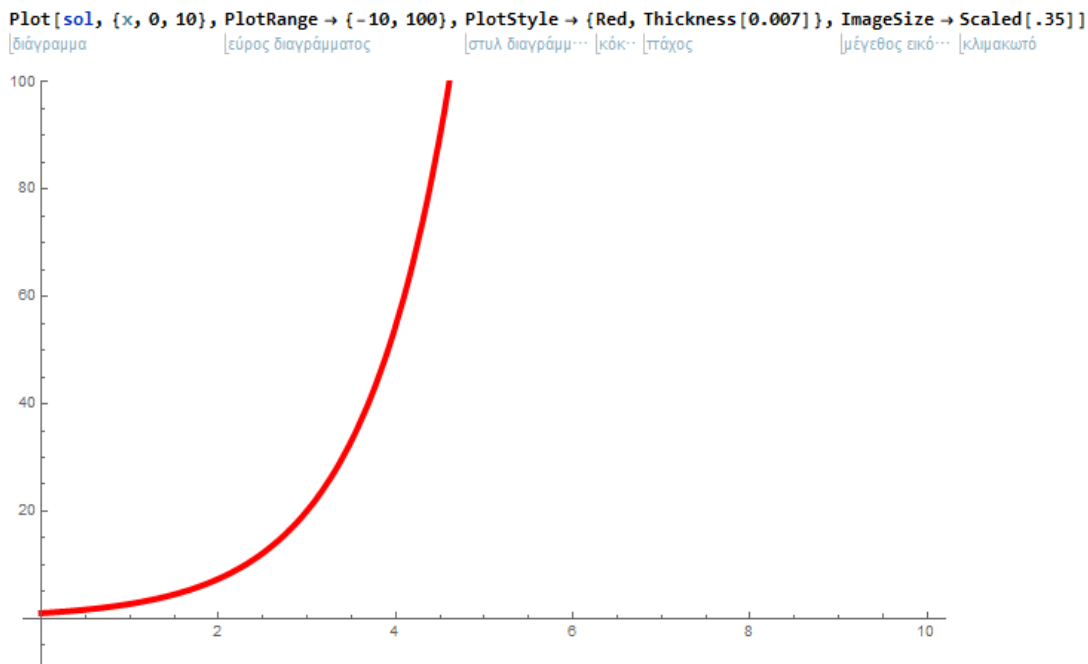
### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Εφαρμόζοντας κατάλληλες εντολές του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 2.4) επιλύεται αναλυτικά η ολοκληρωτική εξίσωση  $u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt$ , επαληθεύοντας την λύση της επαναληπτικής μεθόδου μεταβολών.

```
eqn = u[x] == 1 + Integrate[u[t], t];
sol = DSolveValue[eqn, u[x], x]
|συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσι
ex
```

Σχήμα 2.4: Εύρεση αναλυτικής λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt$ .

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη εντολή του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 2.5) απεικονίζεται η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt$  στο διάστημα  $[0, 10]$ .



Σχήμα 2.5: Απεικόνιση αναλυτικής λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt$  σε διάστημα  $[0, 10]$ .



**Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση χρησιμοποιώντας την επαναληπτική μέθοδο των μεταβολών,

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t) dt.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibnitz έχουμε,

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt \text{ με } u(0) = 0. \quad (2.7.7)$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $x$  παίρνουμε,

$$u''(x) - u(x) = 0,$$

με αρχικές συνθήκες,

$$u(0) = 0 \text{ και } u'(0) = 1. \quad (2.7.8)$$

Θα εφαρμόσουμε την επαναληπτική μέθοδο των μεταβολών με την ολοκληρο-διαφορική εξίσωση (2.7.7) και έχουμε,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) (u_n'(\xi) - 1 - \int_0^\xi \tilde{u}_n(r) dr) d\xi.$$

Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα (1) παίρνουμε  $\lambda = -1$ .

Αντικαθιστώντας έχουμε,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x (u_n'(\xi) - 1 - \int_0^\xi \tilde{u}_n(r) dr) d\xi,$$

και βάζοντας την αρχική συνθήκη τελικά παίρνουμε,

$$u_0(x) = 0,$$

$$u_1(x) = x - \int_0^x (u_0'(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_0(r) dr) d\xi = x,$$

$$u_2(x) = x - \int_0^x (u_1'(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_1(r) dr) d\xi = x + \frac{1}{3!} x^3,$$

$$u_3(x) = x - \int_0^x (u_2'(\xi) - 1 - \int_0^\xi u_2(r) dr) d\xi = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5,$$

...

$$u_n(x) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Επομένως

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}) = \sinh x.$$

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο μεταβολών και για το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.7.8)

$$u''(x) - u(x) = 0$$

με αρχικές συνθήκες,

$$u(0) = 0 \text{ και } u'(0) = 1.$$

Έχουμε,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) (u_n''(\xi) - \tilde{u}_n(\xi)) d\xi,$$

και χρησιμοποιώντας την φόρμουλα (2) παίρνουμε  $\lambda = \xi - x$ .

Αντικαθιστώντας παραπάνω έχουμε,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (\xi - x) (u_n''(\xi) - \tilde{u}_n(\xi)) d\xi.$$

Συνδυάζοντας τις αρχικές συνθήκες  $u_0(x) = u(0) + x$ ,  $u'(0) = x$  παίρνουμε,

$$u_0(x) = x,$$

$$u_1(x) = x - \int_0^x (\xi - x) (u_0''(\xi) - u_0(\xi)) d\xi = x + \frac{1}{3!} x^3,$$

$$u_2(x) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \int_0^x (\xi - x) (u_1''(\xi) - u_1(\xi)) d\xi = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5,$$

$$u_3(x) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \int_0^x (\xi - x) (u_2''(\xi) - u_2(\xi)) d\xi = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7,$$

...

$$u_n(x) = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right) = \sinh x. \end{aligned}$$

### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Εφαρμόζοντας κατάλληλες εντολές του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 2.6) επιλύεται αναλυτικά και επαληθεύεται η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t) dt$ .

```

eqn = u[x] == x + ∫0x (x - t) u[t] dt;

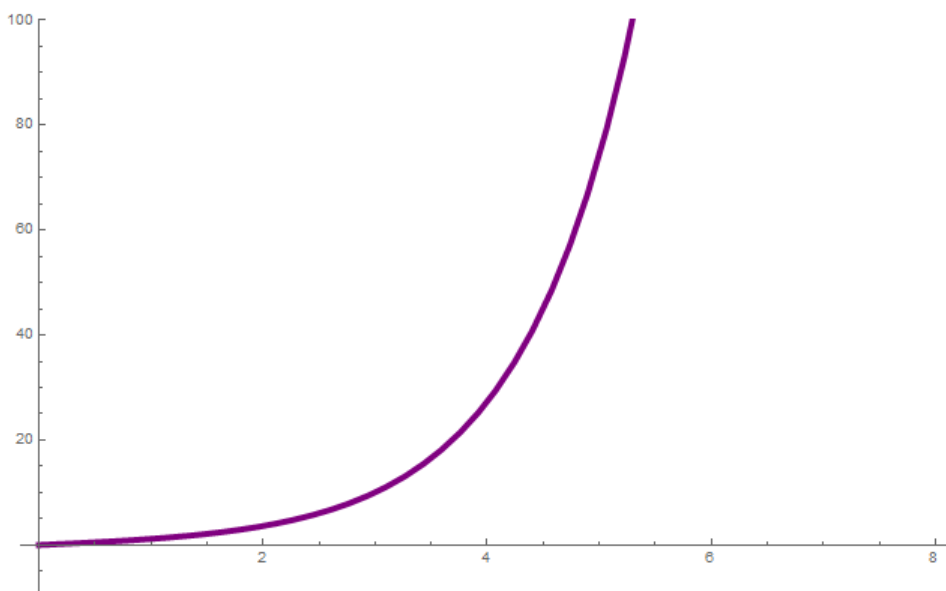
sol = DSolveValue[eqn, u[x], x]
|συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσι
Sinh[x]

```

Σχήμα 2.6: Εύρεση αναλυτικής λύσης της  $u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t) dt$ .

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη εντολή του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 2.7) απεικονίζεται γραφικά η αναλυτική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t) dt$  στο διάστημα  $[0, 8]$ .

`Plot[sol, {x, 0, 8}, PlotRange -> {-10, 100}, PlotStyle -> {Purple, Thickness[0.007]}, ImageSize -> Scaled[.35]]`



Σχήμα 2.7: Απεικόνιση αναλυτικής λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t) dt$  στο διάστημα  $[0, 8]$ .

## 2.8 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας γραμμικών και μη γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Volterra στον  $C[a, b]$ .

**Θεώρημα 2.1** Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2<sup>ου</sup> είδους

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (2.8.1)$$

για την οποία ισχύουν τα εξής:

1.  $f(x)$  συνεχής για  $x \in [a, b]$ ,
2.  $K(x, t)$  συνεχής στο  $[a, b] \times [a, b]$ ,
3.  $\lambda \in \mathbb{C}$ :  $|\lambda| < +\infty$ ,

τότε η (2.8.1) έχει μοναδική λύση στο χώρο  $C[a, b]$  που δίνεται από την σχέση:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, t; \lambda) f(t) dt,$$

όπου η συνάρτηση  $R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t)$  ονομάζεται επιλύων πυρήνας του πυρήνα Volterra  $K(x, t)$ .

Οι  $K_{n+1}(x, t)$  επαναληπτικοί πυρήνες τύπου Volterra ορίζονται ως:

$$\mathbf{K}_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \int_{\mathbf{t}}^{\mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \mathbf{K}_n(\mathbf{s}, \mathbf{t}) d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{t}}^{\mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mathbf{K}_n(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

**Θεώρημα 2.2** Θεωρούμε τη μη γραμμική ολοκληρωτική συνάρτηση Volterra 2ου είδους,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy, \quad (2.8.2)$$

όπου:

1.  $f(x)$  συνεχής στο  $[a, b]$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
2.  $K(x, y, u(y))$  συνεχής στο  $[a, b] \times [a, b] \times \mathbb{C}$ ,
3.  $K(x, y, z)$  Lipschitz ως προς  $z$  με σταθερά  $L$  Lipschitz, δηλαδή  
 $|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|, \quad \forall x, y, z_1, z_2,$
4.  $\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < +\infty,$

τότε η εξίσωση (2.8.2) έχει μοναδική λύση στον  $C[a, b]$  που είναι το όριο της ακολουθίας  $A^n u_0(x)$ , με  $u_0(x)$  τυχαία συνάρτηση στον  $C[a, b]$  και  $Au(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy$ .

### Απόδειξη

Έστω  $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$

με

$$Au(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy.$$

Το σύνολο  $C[a, b]$  είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος (μετρικός χώρος Banach) και αποδεικνύεται ότι  $Au(x) \in C[a, b]$ .

Θεωρώντας την μετρική

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in C} |f(x) - g(x)|, \quad \|f\| = \sup_{x \in C} |f(x)|,$$

για  $\varepsilon > 0$  θα αναζητήσουμε  $\delta > 0$ , τέτοιο ώστε αν  $|g(x) - h(x)| < \delta$  να ισχύει

$$|Ag(x) - Ah(x)| < \varepsilon, \quad \forall g(x), h(x) \in C.$$

Πράγματι έχουμε,

$$|Ag(x) - Ah(x)| = |\lambda \int [K(x, y, g(y)) - K(x, y, h(y))] dy|,$$

ή

$$|Ag(x) - Ah(x)| \leq |\lambda| \int |K(x, y, g(y)) - K(x, y, h(y))| dy,$$

ή

$$|Ag(x) - Ah(x)| \leq |\lambda| \int L |g(y) - h(y)| dy.$$

Επιλέγουμε  $\delta$  οποιοδήποτε θετικό αριθμό τέτοιο ώστε,

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{L|\lambda|m(\Omega)}.$$

Τότε για αυτόν τον αριθμό  $\delta$  έχουμε,

$$|g(x) - h(x)| < \delta \leq \frac{\varepsilon}{L|\lambda|m(\Omega)},$$

και

$$|Ag(x) - Ah(x)| \leq L|\lambda| \int |g(y) - h(y)| dy < L|\lambda| \int \delta ds = L|\lambda|\delta m(\Omega) < \varepsilon.$$

Επομένως

$$Au(x) \in C[a,b].$$

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η  $A$  έχει ένα και μόνο σταθερό σημείο, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός αριθμός  $k > 1$ , έτσι ώστε η  $A^k$  να είναι συστολή. Έχουμε,

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x [K(x,y,u_1(y)) - K(x,y,u_2(y))] dy \right|,$$

ή

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| \int_a^x [K(x,y,u_1(y)) - K(x,y,u_2(y))] dy|,$$

επομένως

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \int_a^x \sup_{a \leq y \leq b} |u_1(y) - u_2(y)| dy,$$

άρα

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \rho(u_1, u_2) (x - a).$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$|A^2u_1(x) - A^2u_2(x)| \leq |\lambda|^2 L^2 \int_a^x |Au_1(y) - Au_2(y)| dy,$$

ή

$$|A^2u_1(x) - A^2u_2(x)| \leq |\lambda|^2 L^2 \rho(u_1, u_2) \frac{(x-a)^2}{2}.$$

Τέλος με μαθηματική επαγωγή αποδεικνύεται ότι,

$$|A^k u_1(x) - A^k u_2(x)| \leq |\lambda|^k L^k \rho(u_1, u_2) \frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Άρα

$$\rho(A^k u_1, A^k u_2) = \sup_{a \leq x \leq b} |A^k u_1(x) - A^k u_2(x)| \leq \rho(u_1, u_2) \frac{r^k}{k!}, \text{ όπου } r = |\lambda| L (b - a).$$

Ξέρουμε ότι η σειρά  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{k!}$  συγκλίνει, υπάρχει δηλαδή  $k$  τέτοιο ώστε  $\frac{r^k}{k!} < 1$ .

Επομένως η  $A^k$  είναι συστολή και η  $A$  έχει ένα μοναδικό σημείο σύμφωνα με το θεώρημα συστολής<sup>3</sup>, δηλαδή υπάρχει μία και μόνο  $u(x) \in C[a, b]$  ώστε  $Au(x) = u(x)$ . Έτσι αποδεικνύεται ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (2.8.1) έχει μοναδική λύση στο  $C([a, b])$ .

**Παράδειγμα** Δείξτε ότι η μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση,

<sup>3</sup> Το θεώρημα του σταθερού σημείου του Banach διατυπώθηκε και απεδείχθη από το Banach το 1922.

Μια πραγματική συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $\mathbb{R}$  ονομάζεται **συστολή**, αν υπάρχει σταθερά  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq a < 1$  τέτοια ώστε,  $|f(x) - f(y)| \leq a|x-y|$ .

**Θεώρημα Σταθερού Σημείου Banach:** Κάθε συστολή  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  έχει μοναδικό σταθερό σημείο δηλαδή υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός  $\xi$  τέτοιος ώστε  $f(\xi) = \xi$  [36].

$$u(x) = 1 + \int_0^x \frac{\cos(x-t)}{1+u^2(x)} dt \text{ έχει μοναδική λύση για κάθε } t.$$

Έχουμε ότι η  $f(x) = 1$  συνεχής συνάρτηση,  $\lambda = 1$ ,  $K(x, y, z) = \frac{\cos(x-t)}{1+u^2(x)}$  συνεχής συνάρτηση και ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz με σταθερά 2, αφού

$$\left| \frac{\partial K(x,y,z)}{\partial z} \right| = \left| -\frac{2z\cos(x-t)}{(1+z^2)^2} \right| \leq \frac{2|z|}{(1+z^2)^2} \leq \frac{2|z|^2}{(1+z^2)^2} = \frac{2z^2}{(1+z^2)^2} \leq 2.$$

Άρα από θεώρημα η δοθείσα ολοκληρωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση.

**Παρατήρηση** Η μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (2.8.1) περιλαμβάνει τις γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra. Πράγματι, αν ο πυρήνας  $K(x, y, u(y))$  είναι της μορφής

$$K(x, y, u(y)) = K(x, y) u(y),$$

όπου  $K(x,y)$  γνωστή συνάρτηση, τότε η (2.8.1) γίνεται:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)u(y)dy.$$

Για τις ομογενείς ολοκληρωτικές εξισώσεις προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

**Θεώρημα 2.3** Θεωρούμε την ομογενή γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2ου είδους,

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)u(y)dy, \quad (2.8.3)$$

όπου,

1.  $K(x, y)$  συνεχής στο  $[a, b] \times [a, b]$ ,
2.  $\lambda \in \mathbb{C}$ :  $|\lambda| < +\infty$ ,

τότε η εξίσωση (2.8.2) έχει μοναδική λύση στον χώρο  $C[a, b]$ .

**Απόδειξη**

Ο τελεστής ορίζεται στον  $C[a, b]$  ως εξής:

$$Au(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)u(y)dy,$$

και είναι μία συστολή σύμφωνα με τις συνθήκες του θεωρήματος. Παρατηρούμε ότι η μηδενική λύση ικανοποιεί την σχέση (2.8.3).

**Παρατήρηση** Αν και οι προϋποθέσεις του παραπάνω θεωρήματος μας δίνουν μία μόνο συνεχή λύση για την ομογενή γραμμική εξίσωση, μπορεί η εξίσωση αυτή εκτός από την συνεχή λύση που είναι η μηδενική, να έχει και άλλες λύσεις που είναι ασυνεχείς.

**Παράδειγμα** Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση  $u(x) = \lambda \int_a^x y^{x-y} u(y) dy$ ,  $0 \leq x, y \leq 1$ , η οποία έχει προφανής λύση τη μηδενική. Ο πυρήνας  $y^{x-y}$  είναι συνεχής. Με την βοήθεια της αντικατάστασης παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει και μια απειρία λύσεων της μορφής  $u(x) = cx^{x-1}$ , που είναι ασυνεχείς στο  $x = 0$  με  $c \neq 0$  αυθαίρετη σταθερά.

**Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Volterra στον  $C[\Omega]$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .**

**Θεώρημα 2.4** Θεωρούμε τη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra 2ου είδους:

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^x A(x, y, \xi) u(\xi, y) d\xi + \lambda \int_0^y B(x, y, \eta) u(x, \eta) d\eta + \lambda \int_0^x \int_0^y K(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.8.4)$$

όπου,

$$y \in [0, b], A, B, K \in C[\bar{\Omega}, \bar{\Omega}], f \in C(\bar{\Omega}) \text{ και } \bar{\Omega} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$|\lambda| < \frac{1}{M(a+b+ab)}, \quad (2.8.5)$$

όπου  $M$  το άνω φράγμα των συναρτήσεων  $|A|, |B|, |K|$ , στο  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ .

Τότε η (2.8.4) έχει μία μοναδική λύση στον  $C[\bar{\Omega}]$  η οποία μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων.

**Απόδειξη**

Έστω  $A: C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$ , με

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^x A(x, y, z) u(z, y) dz + \lambda \int_0^y B(x, y, w) u(x, w) dw + \lambda \int_0^x \int_0^y K(x, y, z, w) dz dw.$$

Έστω  $M$  ένα κοινό άνω φράγμα για τις συναρτήσεις  $|A|, |B|, |K|$ , τότε έχουμε ότι:

$$|Au - Ay| \leq |\lambda| M(a + b + ab) \sup_{\bar{\Omega}} |u - y|,$$

ή

$$\rho(Au, Ay) \leq |\lambda| M(a + b + ab) \rho(u, y).$$

Η παραπάνω εξίσωση λόγω της (2.8.5) είναι συστολή στον  $C(\bar{\Omega})$  και σύμφωνα με την Αρχή Συστολής έχει μοναδική λύση.

**Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Volterra σε μία σφαίρα  $\bar{B}[f, R]$ .**

**Θεώρημα 2.5** Θεωρούμε τη μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy, \quad (2.8.6)$$

για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:

1.  $f(x)$  συνεχής στο  $[a, b]$ ,
2.  $K \in C([a, b] \times [a, b] \times I_r)$ ,  $I_r = [-r, r]$ ,  $K(x, y, u(y)) \leq M$ ,
3. Η συνάρτηση  $K(x, y, z)$  ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς  $u(y)$  με σταθερά  $L$  Lipschitz,
4. Η παράμετρος  $\lambda$  ικανοποιεί την σχέση  $|\lambda| = \frac{1}{M(b-a)}$ , όπου το  $\tau$  στην μετρική Bielecki<sup>4</sup> επιλέγεται έτσι ώστε  $\tau > |\lambda| L$  και  $R$  η ακτίνα μιας σφαίρας  $\bar{B}[f, R]$ .

Τότε η (2.8.6) έχει μοναδική λύση στην σφαίρα  $\bar{B}[f, R]$ , που είναι το όριο της ακολουθίας  $A^n u_0(x)$  με  $u_0(x)$  τυχαία συνάρτηση στο  $\bar{B}[f, R]$  και  $Au(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy$ .

### Απόδειξη

Θεωρούμε την σφαίρα  $\bar{B}[f, R] \subset C[a, b]$  και τον τελεστή,

$$A: \bar{B}[f, R] \subset C(a, b),$$

με

$$Au(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy.$$

Το σύνολο  $\bar{B}[f, R]$  είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος με την μετρική Bielecki. Θα δείξουμε αρχικά ότι η συνθήκη  $\bar{B}[f, R] \subset C[a, b]$  ικανοποιείται, δηλαδή  $Au(x) \in \bar{B}[f, R]$ .

Εάν ισχύει η συνθήκη (4), δηλαδή,

$$|Au(x) - f(x)| = \left| \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy \right| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x, y, u(y))| dy,$$

ή

$$|Au(x) - f(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \leq R,$$

τότε  $Au(x) \in \bar{B}[f, R]$  και

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x [K(x, y, u_1(y)) - K(x, y, u_2(y))] dy \right|,$$

ή

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x, y, u_1(y)) - K(x, y, u_2(y))| dy,$$

επομένως

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \int_a^x \|u_1(y) - u_2(y)\| dy,$$

ή

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \int_a^x |u_1(y) - u_2(y)| e^{-r|x-a|} e^{r|x-a|} dy,$$

άρα

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \rho_B(u_1, u_2) \int_a^x e^{r|y-a|} dy,$$

ή

<sup>4</sup> **Μετρική Bielecki** χρησιμοποιείται για την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης σε διαφορικές, ολοκληρωτικές και ολοκληρό – διαφορικές εξισώσεις. Περιέχει συνάρτηση βάρους  $\omega(t)$  και είναι της μορφής:  $\|u\|^2 = \int_a^b \omega(t) |u(t)|^2 dt$  [37].



$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \rho_B(u_1, u_2) \frac{1}{r} [e^{r|x-a|} - 1],$$

ή

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| \leq |\lambda| L \rho_B(u_1, u_2) \frac{1}{r} e^{r|x-a|},$$

από όπου προκύπτει

$$|Au_1(x) - Au_2(x)| e^{-r|x-a|} \leq |\lambda| L \rho_B(u_1, u_2) \frac{1}{r},$$

και τελικά

$$\rho_B(Au_1, Au_2) \leq |\lambda| L \rho_B(u_1, u_2) \frac{1}{r}.$$

Λόγω της (3) έχουμε ότι  $0 < |\lambda| L \frac{1}{r} < 1$ , οπότε η  $A$  είναι συστολή. Από την αρχή Banach, η  $A$  έχει ένα και μόνο σταθερό σημείο στο  $\bar{B}[f, R]$ . Επομένως η ολοκληρωτική εξίσωση (2.8.6) έχει μοναδική λύση στο  $\bar{B}[f, R]$  η οποία είναι το όριο της ακολουθίας  $A^n u_0(x)$ , με  $u_0(x)$  τυχαία συνάρτηση του  $\bar{B}[f, R]$ .

**Παρατήρηση** Αν συμβολίσουμε με  $\varphi$  την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy$ , και με  $A^v \varphi_0(x)$  την  $v$  διαδοχική προσέγγιση αυτής, τότε έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση,

$$\rho_B(A^v \varphi_0(x), \varphi) \leq \frac{\alpha^v}{1-\alpha} \rho_B(A \varphi_0(x), \varphi_0),$$

όπου,

$$\alpha = \frac{|\lambda|L}{r}.$$

**Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Volterra στον  $L_2[a, \beta]$ .**

**Θεώρημα 2.6** Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y, u(y)) dy, \quad (2.8.7)$$

όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

1.  $f(x) \in L_2[a, b]$ ,  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$ ,
2.  $K(x, y, z) \in L_2[a, b]$ ,  $\int_a^b \int_a^b |K(x, y, z)|^2 dx dy < +\infty$ ,
3.  $|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq a(x, y) |z_1 - z_2|$ , όπου  $a(x, y) \in L_2[a, b]$ ,

δηλαδή,

$$\int_a^b \int_a^b a^2(x, y) dx dy \leq A^2 < +\infty,$$

4.  $|\int_a^x K(x, y, u(y)) dy| \leq n(x)$ , όπου  $n(x) \in L_2[a, b]$ ,

δηλαδή,

$$\int_a^x n^2(y) dy \leq N^2 < +\infty,$$

τότε η (2.8.7) έχει μοναδική λύση  $u(x)$  στον  $L_2[a, b]$ .

**Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης μη γραμμικού συστήματος Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra δεύτερου είδους σε ένα σύνολο  $Y$  του  $C([a, b], \mathbb{R}^m)$**

**Θεώρημα 2.7** Θεωρούμε το ακόλουθο μη γραμμικό σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra:

$$\overrightarrow{u(x)} = \overrightarrow{f(x)} + \lambda \int_a^x \overrightarrow{K(x, y, \overrightarrow{u(y)})} dy, \quad (2.8.8)$$

για το οποίο ισχύουν τα εξής:

1.  $\overrightarrow{f(x)} = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ ,  $f_i(x) \in C[a, b]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,
2.  $\overrightarrow{K(x, y, \overrightarrow{u(y)})} = (K_1(x, y, u(y)), \dots, K_n(x, y, u(y)))$ ,  
 $K_i(x, y, u(y)) \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_n)$ , όπου  $\mathbb{R}_i = [-r_i, r_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,
3. υπάρχει  $L > 0$ , τέτοιο ώστε  $|K_i(x, y, \vec{u}) - K_i(x, y, \vec{w})| \leq L \sum_{i=1}^n |u_i - w_i|$ , για κάθε  $(x, y, \vec{u}), (x, y, \vec{w}) \in [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_k$ ,
4. οι πραγματικοί αριθμοί  $R_i$ ,  $\|K_i\|$ ,  $L$  ικανοποιούν τις σχέσεις,

$$|\lambda| < \frac{R_i}{\|K_i\|(b-a)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.8.9)$$

τότε το σύστημα (2.8.8) έχει μοναδική λύση στο  $Y = \{u: C([a, b], \mathbb{R}^m), \|u_i - f_i\| \leq R_i, i = 1, \dots, m\}$ , που μπορεί να βρεθεί με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων αρχίζοντας από οποιοδήποτε στοιχείο του  $Y$  [38].

**Παράδειγμα** Να μελετηθεί η επιλυσιμότητα του κάτωθι συστήματος ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Volterra ως προς τη μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων στο  $[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 + \lambda \int_0^x [xyu_2^2(y) - u_1(y)] dy, \\ u_2(x) &= x - \lambda \int_0^x [x \sin(yu_2(y)) + yx^3] dy. \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

Έχουμε  $\overrightarrow{f(x)} = (1, x)$  και  $\overrightarrow{K(x, y, \overrightarrow{u(y)})} = (xyu_2^2(y) - u_1(y), x \sin(yu_2(y)) + yx^3)$ ,

$$\overrightarrow{u(x)} = (u_1(x), u_2(x)),$$

$$\mathbb{R}_1 = [-r_1, r_1], \mathbb{R}_2 = [-r_2, r_2].$$

Επιπλέον

$$|K_1(x, y, \vec{u}) - K_1(x, y, \vec{w})| = |xy(u_2^2 - w_2^2) - (u_1 - w_1)| \leq 2r_2|u_2 - w_2| + 2r_1|u_1 - w_1|,$$

και

$$\|K_1(x, y, \overrightarrow{u(y)})\| = r_2^2 + r_1.$$

Επίσης

$$|K_2(x, y, \vec{u}) - K_2(x, y, \vec{w})| = |x \sin(yu_2) - x \sin(yw_2)| \leq |x||yu_2 - yw_2| \leq |u_2 - w_2|,$$

και

$$\|K_2(x, y, \overrightarrow{u}(y))\| = 2.$$

Άρα  $L = \max\{2r_1, 2r_2, 1\}$ .

Σύμφωνα με την συνθήκη (4) του θεωρήματος το σύστημα έχει μοναδική λύση στο  $Y = \{u \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R}^2), \|u_1 - 1\| \leq R_1, \|u_2 - x\| \leq R_2\}$ , όπου  $|\lambda| = \frac{R_1}{r_2^2 + r_1}$ ,  $|\lambda| = \frac{R_2}{2}$ .

### 3<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

#### ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ VOLTERRA

##### 3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να παραθέσουμε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra. Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις παρουσιάζουν αρκετές δυσκολίες. Η λύση μιας μη γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης δεν είναι κατά ανάγκη μοναδική. Η ύπαρξη της μοναδικότητας, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, προϋποθέτει κάποιες συνθήκες. Μια μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους έχει γενική μορφή:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t}, \mathbf{x} \in \mathbf{I} = [0, \mathbf{X}]. \quad (3.1.1)$$

όπου  $\mathbf{f}$  και  $\mathbf{K}$  δοθείσες συναρτήσεις.

Ο μη γραμμικός τελεστής

$$\mathbf{U}'(\mathbf{x}) := \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t}. \quad (3.1.2)$$

ονομάζεται **Volterra – Urysohn ολοκληρωτικός τελεστής**.

Εάν  $K(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})) = K_a(\mathbf{x} - \mathbf{t}) K(\mathbf{x}, \mathbf{t}) G(\mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t}))$  δηλαδή η ολοκληρωτική εξίσωση έχει την μορφή,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \lambda \int_0^{\mathbf{x}} K_a(\mathbf{x} - \mathbf{t}) K(\mathbf{x}, \mathbf{t}) G(\mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t}, \mathbf{x} \in \mathbf{I}, \\ K_a(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &:= (\mathbf{x} - \mathbf{t})^{a-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{t}), 0 < a \leq 1. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση **Volterra – Hammerstein τύπου 2<sup>ου</sup> τύπου**,

και ο μη γραμμικός τελεστής

$$\mathfrak{H}(\mathbf{x}) := \int_0^{\mathbf{x}} K_a(\mathbf{x} - \mathbf{t}) K(\mathbf{x}, \mathbf{t}) G(\mathbf{t}, \mathbf{u}(\mathbf{t})) \, d\mathbf{t}. \quad (3.1.4)$$

ονομάζεται **Volterra – Hammerstein ολοκληρωτικός τελεστής**.

Θα μελετήσουμε μερικές προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης αυτών των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

### 3.2 Μέθοδος Picard

Μια τέτοια προσεγγιστική λύση είναι η μέθοδος Picard την οποία θα παρουσιάσουμε εδώ με την βοήθεια χαρακτηριστικών παραδειγμάτων.

**1<sup>ο</sup> Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra  $u(x)$  με την μέθοδο Picard,

$$u(x) = \int_0^x (x + u^2(x)) dx.$$

Μηδενική προσέγγιση: Αντικαθιστούμε  $u(x) = f(x)$ , δηλαδή,

$$u(x) = 0,$$

Πρώτη προσέγγιση: Θέτουμε το  $u(x) = 0$  μέσα στη παράσταση  $x + u^2(x)$ , δηλαδή,

$$u(x) = \int_0^x x dx = \frac{1}{2} x^2,$$

Δεύτερη προσέγγιση: Θέτουμε το  $u(x) = \frac{1}{2} x^2$  μέσα στη παράσταση  $x + u^2(x)$ , δηλαδή,

$$u(x) = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20},$$

Τρίτη προσέγγιση: Θέτουμε το  $u(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$  μέσα στη παράσταση  $x + u^2(x)$ , δηλαδή,

$$u(x) = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}.$$

Μετά από αρκετές αλγεβρικές πράξεις έχουμε:

Τέταρτη προσέγγιση:

$$u(x) \approx \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + 7 \frac{x^{11}}{8800} + 3 \frac{x^{14}}{49280} + 87 \frac{x^{17}}{23936000} + \frac{x^{20}}{7040000} + \frac{x^{23}}{445280000},$$

και συνεχίζοντας βγάζουμε την λύση του προβλήματος σε μορφή συγκλίνουσων σειρών.

**2<sup>ο</sup> Παράδειγμα** Να λυθεί το παρακάτω μη γραμμικό σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra  $u(x)$ ,  $v(x)$  με την μέθοδο Picard,

$$u(x) = 1 + \int_0^x v dx \text{ και } v(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x x^3(u + v) dx.$$

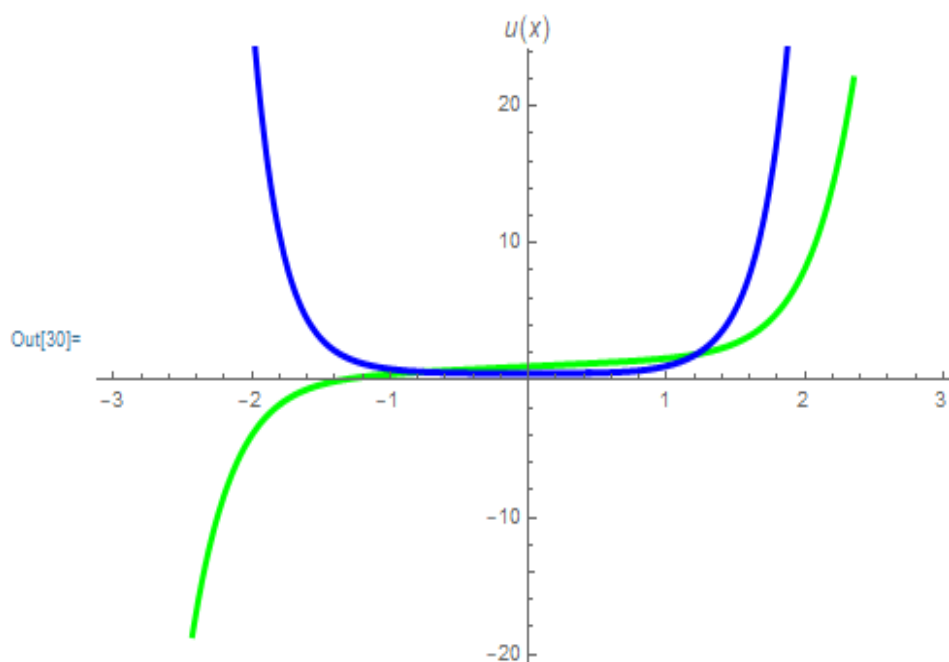
Παίρνοντας ταυτόχρονα και για τις δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις τις προσεγγίσεις έχουμε,

$$\text{Πρώτη προσέγγιση: } u(x) = 1 + \frac{x}{2} \text{ και } v(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8},$$

$$\text{Δεύτερη προσέγγιση: } u(x) = 1 + \frac{x}{2} + 3 \frac{x^5}{40} \text{ και } v(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + 3 \frac{x^8}{64},$$

Τρίτη προσέγγιση:  $u(x) = 1 + \frac{x}{2} + 3\frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$ ,  $v(x) = \frac{1}{2} + 3\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + 3\frac{x^8}{64} + 7\frac{x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$ .  
Η λύση του συστήματος δίνεται από την τρίτη προσέγγιση.

Με την βοήθεια του λογισμικού Mathematica γίνεται απεικόνιση της τρίτης προσέγγισης του μη γραμμικού συστήματος, Σχήμα 3.1. Με τη πράσινη γραμμή δίνεται η αναπαράσταση της  $u(x) = 1 + \frac{x}{2} + 3\frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$ , και με την μπλε γραμμή, η αναπαράσταση της  $v(x) = \frac{1}{2} + 3\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + 3\frac{x^8}{64} + 7\frac{x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$  στο διάστημα  $[-3, 3]$ . Παρατηρούμε ότι τα σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων εντοπίζονται σε περιοχή γύρω από το  $x = 1$  και το  $x = -1$ .



Σχήμα 3.1: Γραφικές Παραστάσεις των συναρτήσεων  $u(x) = 1 + \frac{x}{2} + 3\frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$  (πράσινη καμπύλη) και  $v(x) = \frac{1}{2} + 3\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + 3\frac{x^8}{64} + 7\frac{x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$  (μπλε καμπύλη) στο διάστημα  $[-3, 3]$ .

Ορίζουμε ως eqn1 το πολυώνυμο  $u(x) = 1 + \frac{x}{2} + 3\frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$  και ως eqn2 το πολυώνυμο  $v(x) = \frac{1}{2} + 3\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + 3\frac{x^8}{64} + 7\frac{x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$ . Κάνοντας χρήση κατάλληλων εντολών του λογισμικού Mathematica, βρίσκουμε τις αριθμητικές λύσεις της διαφοράς τους και εν συνεχεία και τις αριθμητικές λύσεις του μη γραμμικού συστήματος, Σχήμα 3.2.

In[31]:= FindRoot [eqn1 - eqn2, {x, -1}]  
| εύρεση ριζών

Out[31]:= {x → -0.759427}

In[32]:= FindRoot [eqn1 - eqn2, {x, 1}]  
| εύρεση ριζών

Out[32]:= {x → 1.2142}

Σχήμα 3.2: Σημεία Τομής των Γραφικών Παραστάσεων eqn1:  $u(x) = 1 + \frac{x}{2} + 3\frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$  και eqn2:  $v(x) = \frac{1}{2} + 3\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + 3\frac{x^8}{64} + 7\frac{x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$  - Αριθμητικές λύσεις Συστήματος.

### 3.3 Μέθοδος Διάσπασης Adomian

Η Μέθοδος Διάσπασης Adomian (Adomian Decomposition Method), (A.M.D.) είναι παρόμοια με την μέθοδο Picard. Στην A.M.D. όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = b + \int_a^x f(x, u) dx$ , εκφράζεται με την μορφή σειράς  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ , δηλαδή,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = b + \int_a^x f(x, \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)) dx.$$

Τα στοιχεία  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ , ... της άγνωστης συνάρτησης  $u(x)$  μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως με τον ακόλουθο τρόπο,

$$u_0(x) = b,$$

$$u_1(x) = \int_a^x f(x, u_0) dx,$$

$$u_2(x) = \int_a^x f(x, u_1) dx \dots$$

Γενικά ισχύει:

$$u_0(x) = b \text{ και } u_{n+1}(x) = \int_a^x f(x, u_n) dx.$$

(3.3.1)

Οι σειρές που λαμβάνουμε συνήθως για την εύρεση της  $u(x)$  μας δίνουν και την ακριβή λύση της εξίσωσης σε κλειστή μορφή. Ωστόσο σε ορισμένα προβλήματα δεν είναι δυνατή η διάσπαση σε σειρές της μορφής  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  οπότε πάμε σε μία προσεγγιστική λύση. Στην συνέχεια αναπτύσσουμε την συνάρτηση  $f(x, u)$  σε Taylor σειρά.

$$f(x, u) = f(x, u_0) + (u - u_0) f_u(x, u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!} f_{uu}(x, u_0)$$

$$+ \frac{(u-u_0)^3}{3!} f_{uuu}(x, u_0) + \frac{(u-u_0)^4}{4!} f_{uuuu}(x, u_0) + \dots$$

Ξέρουμε ότι οι σειρές Taylor συγκλίνουν απόλυτα οπότε,

$$\begin{aligned} f(x, u) &= f(x, u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) f_u(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}^2 f_{uu}(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{3!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}^3 f_{uuu}(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{4!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}^4 f_{uuuu}(x, u_0) + \dots, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$f(x, u) = A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x).$$

$$A_0 = f(x, u_0),$$

$$A_1 = u_1 f_u(x, u_0),$$

$$A_2 = u_2 f_u(x, u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 f_{uu}(x, u_0),$$

$$A_3 = u_3 f_u(x, u_0) + \frac{1}{2} (2 u_1 u_2) f_{uu}(x, u_0) + \frac{1}{6} u_1^3 f_{uuu}(x, u_0),$$

$$\begin{aligned} A_4 &= u_4 f_u(x, u_0) + \frac{1}{2} (2 u_1 u_3 + u_1^2 u_2) f_{uu}(x, u_0) + \frac{1}{6} (3 u_1^2 u_2) f_{uuu}(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{24} u_1^4 f_{uuuu}(x, u_0). \end{aligned}$$

(3.3.2)

Τα παραπάνω πολυώνυμα ονομάζονται **Adomian πολυώνυμα**.

Τελικά η ολοκληρωτική εξίσωση γίνεται:

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots = b + \int_a^x [A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots] dt.$$

**1<sup>ο</sup> Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση με την Μέθοδο Διάσπασης Adomian,

$$u(x) = \int_0^x (x + u^2) dx = \frac{x^2}{2} + \int_0^x u^2(t) dt.$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να πάρει την μορφή:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) dt.$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους έχουμε,

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2},$$



$$u_1(x) = \int_0^x A_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_0^x A_1(t) dt,$$

$$\dots = \dots,$$

$$u_n(x) = \int_0^x A_{n-1}(t) dt.$$

Ξέρουμε ότι  $f(u) = u^2$  με  $f'(u) = 2u$  και  $f''(u) = 2$ . Οι υπόλοιπες ανώτερης τάξης παράγωγοι είναι μηδενικές. Δηλαδή,

$$f(u_0) = u_0^2 = \frac{x^4}{4},$$

$$f'(u_0) = 2u_0 = x^2,$$

$$f''(u_0) = 2,$$

οπότε,

$$A_0(x) = \frac{x^4}{4},$$

$$A_1(x) = u_1 x^2,$$

$$A_2(x) = u_2 x^2 + u_1^2,$$

$$A_3(x) = u_3 x^2 + 2u_1 u_2,$$

και

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$u_1(x) = \int_0^x A_0(t) dt = \int_0^x \frac{t^4}{4} dt = \frac{x^5}{20},$$

$$u_2(x) = \int_0^x A_1(t) dt = \int_0^x u_1(t) t^2 dt = \int_0^x \left(\frac{t^5}{2}\right) t^2 dt = \frac{x^8}{160},$$

$$u_3(x) = \int_0^x A_2(t) dt = \int_0^x \{u_2(t) t^2 + u_1^2(t)\} dt = \int_0^x \left\{ \left(\frac{t^8}{160}\right) t^2 + \frac{t^{10}}{400} \right\} dt = \frac{7x^{11}}{8800}.$$

Επομένως έχουμε:

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{7x^{11}}{8800} + \dots$$

**Παρατήρηση** Όταν η  $f(x)$  δεν είναι μία πολυωνυμική συνάρτηση τότε η χρήση της Μεθόδου Διάσπασης Adomian είναι αποτρεπτική, εξαιτίας των περίπλοκων υπολογισμών. Συγκεκριμένα εάν η  $f(x)$  είναι ένας συνδυασμός δύο ή περισσότερων πολυωνυμικών,

τριγωνομετρικών, υπερβολικών συναρτήσεων τότε εφαρμόζουμε την **Τροποποιημένη Μέθοδο Διάσπασης (Modified Decomposition Method)**.

### 3.4 Τροποποιημένη Μέθοδο Διάσπασης

Βασικό χαρακτηριστικό της Τροποποιημένης μεθόδου Διάσπασης είναι ότι εξαρτάται μόνο από την αρχική  $f(x)$  και βασίζεται στον χωρισμό της  $f(x)$  σε δύο τουλάχιστον κομμάτια, δηλαδή,

Θεωρούμε ότι

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (3.4.1)$$

και εισάγουμε

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x), \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) u_0(t) dt, \\ u_{k+1}(x) &= \lambda \int_0^x K(x,t) u_k(t) dt \quad u_{k+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_k(t) dt, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

**1<sup>ο</sup> Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra,

$$u(x) = \sin x + (e - e^{\cos x}) - \int_0^x e^{\cos t} u(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι  $f(x) = \sin x + (e - e^{\cos x})$  και ορίζουμε  $f_1(x) = \sin x$  και  $f_2(x) = e - e^{\cos x}$ . Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3.4.2) έχουμε

$$u_0(x) = \sin x,$$

$$u_1(x) = e - e^{\cos x} - \int_0^x e^{\cos t} u_0(t) dt = 0,$$

$$u_{k+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_k(t) dt = 0, \quad k \geq 1.$$

Προφανώς κάθε στοιχείο  $u_j = 0$ , για  $j \geq 1$ .

Επομένως η ακριβής λύση είναι  $u(x) = \sin x$ .

### 3.5 Το φαινόμενο όρων θορύβου

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο, το οποίο έχει ως βασική του προϋπόθεσή την επιλογή των  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ . Η νέα τεχνική που θα περιγράψουμε παρακάτω βασίζεται στον παραπάνω τρόπο επίλυσης, ονομάζεται **Το φαινόμενο των όρων θορύβου, (Noise Term Phenomenon), (N.T.P.)** και καταδεικνύει μία γρήγορα συγκλίνουσα λύση. Η μέθοδος N.T.P., εάν υπάρχει δίνει την ακριβή λύση της εξίσωσης με μία – δύο επαναλήψεις.

#### Βασικές παρατηρήσεις

1. Οι όροι θορύβου ορίζονται ως δύο πανομοιότυπα στοιχεία με αντίθετα πρόσημα.

2. Ακυρώνοντας τον όρο θορύβου ανάμεσα στο  $u_0(x)$  και  $u_1(x)$ , το  $u_0(x)$  περιμένουμε να μας δώσει την ακριβή λύση.
3. Βασικό είναι κάθε φορά να αποδεικνύουμε ότι ο όρος  $u_0(x)$  ικανοποιεί την αρχική μας διαφορική και ολοκληρωτική εξίσωση.

**1<sup>ο</sup> Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, με την μέθοδο του φαινομένου των όρων θορύβου,

$$u(x) = x + \frac{x^5}{5} - \int_0^x t u^3(t) dt.$$

Παρατηρούμε ότι  $u(x) = x$  είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης, αφού

$$\int_0^x t (t^3) dt = \frac{x^5}{5} \text{ και } u(x) = x + \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{5} = x.$$

Έστω  $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  με  $f(u) = u^3$ ,  $f'(u) = 3u^2$ ,  $f''(u) = 6u$ ,  $f'''(u) = 6$  και οι ανώτερες παράγωγοι είναι μηδέν.

Με την βοήθεια της σειράς Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} f(u) &= f(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) f'(u_0) \\ &+ \frac{1}{2!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 f''(u_0) \\ &+ \frac{1}{3!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^3 f'''(u_0) \\ &+ \dots, \end{aligned}$$

και

$$A_0 = f(u_0) = u_0^3,$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0) = 3u_0^2 u_1,$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 f''(u_0) = u_2(3u_0^2) + u_1^2(3u_0),$$

$$\begin{aligned} A_3 &= u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3} u_1^3 f'''(u_0) = u_3(3u_0^2) + u_1 u_2(6u_0) + u_1^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Έστω ότι  $u_0(x) = x$  τότε,

$$u_0(x) = x,$$

$$u_1(x) = \frac{x^5}{5} - \int_0^x t A_0(t) dt,$$

$$= \frac{x^5}{5} - \int_0^x t(t^3) dt = \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{5} = 0,$$

$$u_2(x) = - \int_0^x t A_1(t) dt = 0, \text{ επειδή } u_1(x) = 0.$$

Ομοίως

$$u_n(x) = 0 \text{ για } n \geq 2.$$

Επομένως

$$u(x) = x.$$

**Παρατήρηση** Κάνοντας την ίδια διαδικασία αλλά παίρνοντας για  $u_0(x) = x + \frac{x^5}{5}$  βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= - \int_0^x t A_0(t) dt = - \int_0^x t \left( t + \frac{t^5}{5} \right)^3 dt \\ &= - \frac{x^5}{5} - \frac{x^9}{15} - 3 \frac{x^{13}}{325} - \frac{x^{17}}{2125}, \end{aligned}$$

$$u_2(x) = - \int_0^x t A_1(t) dt = \int_0^x 3t \left( t + \frac{t^5}{5} \right)^2 \left( \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{15} + 3 \frac{x^{13}}{325} + \frac{x^{17}}{2125} \right) dt.$$

Παρατηρούμε ότι εάν βγάλουμε τους όρους  $-\frac{x^5}{5}$  και  $\frac{x^5}{5}$  μεταξύ του  $u_0(x)$  και  $u_1(x)$  τότε καταλήγουμε στην ίδια λύση.

**2<sup>ο</sup> Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra,

$$u(x) = -2 + x + x^2 + \frac{x^4}{12} + \sin x + 2 \cos x - \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt.$$

Ακολουθώντας την A.D.M έχουμε,

$$u_0(x) = -2 + x + x^2 + \frac{x^4}{12} + \sin x + 2 \cos x,$$

$$u_{k+1}(x) = -1 \int_0^x (x-t)^2 u_k(t) dt, k \geq 0,$$

δηλαδή,

$$u_0(x) = -2 + x + x^2 + \frac{x^4}{12} + \sin x + 2 \cos x,$$

$$u_1(x) = - \frac{3}{8} \int_0^x t u_0(t) dt$$

$$= 2 - x^2 - \frac{x^4}{12} - 2 \cos x - 4 \sin x - \frac{x^5}{30} + 2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{1260} - 4x.$$

Οι όροι θορύβου είναι  $\pm 2, \pm x^2, \pm \frac{x^4}{12}, \pm 2 \cos x$  και εμφανίζονται στα  $u_0(x)$  και  $u_1(x)$ .

Ακυρώνοντας αυτούς τους όρους από το  $u_0(x)$  παίρνουμε την ακριβή λύση  $u(x) = x + \sin x$ , η οποία ικανοποιεί την αρχική μας ολοκληρωτική εξίσωση.

### 3.6 Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία πολλή χρήσιμη μέθοδος επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών και ολοκληρωτικών εξισώσεων. Πριν ξεκινήσουμε να αναπτύσσουμε την μέθοδο, είναι βασικό να τονίσουμε ότι η εφαρμογή του Θεωρήματος Συνέλιξης του μετασχηματισμού Laplace απαιτεί ο πυρήνας να είναι πυρήνας με όρισμα διαφοράς  $(x-t)$ , δηλαδή να είναι της μορφής  $e^{x-t}, \cos(x-t)$ , κ. τ. λ. Θεωρούμε ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)u(t) dt.$$

(3.6.1)

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις  $f(x_1)$  και  $f(x_2)$  που ικανοποιούν τις συνθήκες για ύπαρξη μετασχηματισμού Laplace, τότε

$$\mathcal{L}\{f_1(x)\} = F_1(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_2(x)\} = F_2(s).$$

Το παράγωγο της συνέλιξης Laplace των δύο συναρτήσεων ορίζεται ως:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-t)f_2(t) dt \quad \text{ή} \quad (f_2 * f_1)(x) = \int_0^x f_2(x-t)f_1(t) dt,$$

δηλαδή,

$$(f_1 * f_2)(x) = (f_2 * f_1)(x).$$

(3.6.2)

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x f_1(x-t)f_2(t) dt\right\} = F_1(s) F_2(s).$$

(3.6.3)

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ιδιότητα αλλά και τους πίνακες μετασχηματισμού και αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace θα αναπτύξουμε τον τρόπο επίλυσης των Volterra ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (3.6.1) έχουμε,

$$U(s) = F(s) + \lambda K(s)U(s),$$

(3.6.4)

όπου,

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}, \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}, \quad K(s) = \mathcal{L}\{K(x)\}.$$

Λύνοντας ως προς  $U(s)$  παίρνουμε ότι,

$$U(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}, \quad 1 - \lambda K(s) \neq 0.$$

(3.6.5)

Η λύση της εξίσωσης βρίσκεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και στις δύο μεριές.

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 - \lambda K(s)}\right\}.$$

(3.6.6)

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση με την μέθοδο μετασχηματισμού Laplace,

$$f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{-(x-t)}f(t) dt.$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{e^{2x}\} + \mathcal{L}\{e^{-x}\} \mathcal{L}\{f(t)\},$$

$$F(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+1} F(s),$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)},$$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{2}e^{0x} + \frac{3}{2}e^{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2x}.$$

Κάνοντας χρήση του λογισμικού Mathematica επιλύεται και απεικονίζεται (Σχήμα 3.3) η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{-(x-t)}f(t) dt$ . Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία πολύ σημαντική μέθοδος επίλυσης διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων για αυτό και τα περισσότερα μαθηματικά λογισμικά παρουσιάζουν στα εργαλεία τους συγκεκριμένες εντολές.

### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Με τις κατάλληλες εντολές του λογισμικού Mathematica εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace για τους όρους  $e^{2x}$  και  $e^{-x}$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{-(x-t)}f(t) dt$ .

```
LaplaceTransform[Exp[2 t], t, s]
```

λαπλασσιανός μετασχ... [εκθετική συνάρτηση]

$$\frac{1}{-2 + s}$$

```
LaplaceTransform[Exp[-t], t, s]
```

λαπλασσιανός μετασχ... [εκθετική συνάρτηση]

$$\frac{1}{1 + s}$$

Στην συνέχεια, κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις παίρνουμε ότι  $F(s) = \frac{s+1}{s(s-2)}$ . Εκτελώντας την κατάλληλη εντολή του λογισμικού Mathematica για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{-(x-t)}f(t) dt$  είναι  $f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2x}$ .

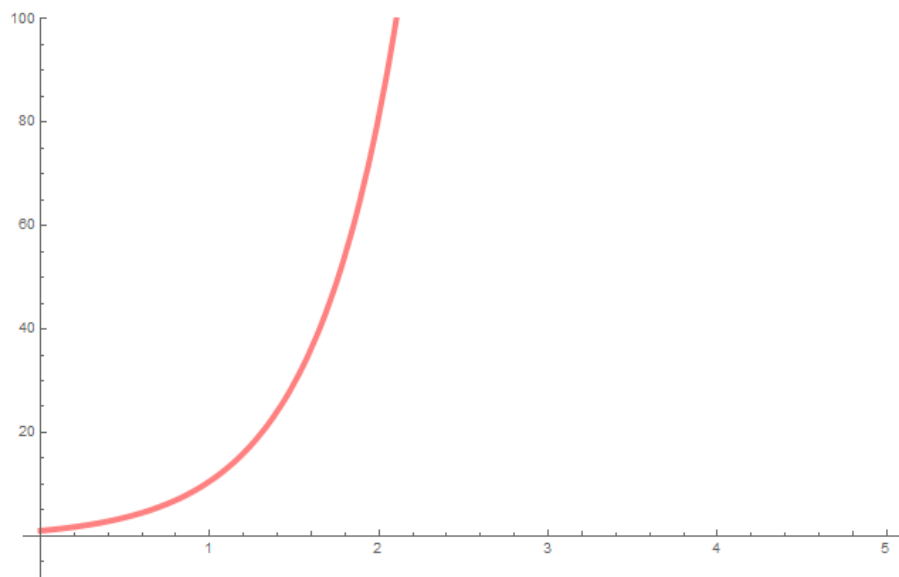
```
eik1 = InverseLaplaceTransform[ $\frac{s+1}{s(s-2)}$ , s, t]
```

αντίστροφος λαπλασσιανός

$$-\frac{1}{2} + \frac{3 e^{2 t}}{2}$$

Τέλος απεικονίζουμε την λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{-(x-t)}f(t) dt$  στο διάστημα  $[0, 5]$ .

```
s1 = Plot[eik1, {t, 0, 5}, PlotRange -> {-10, 100}, PlotStyle -> {Pink, Thickness[0.007]}, ImageSize -> Scaled[.35]]
```



Σχήμα 3.3: Απεικόνιση λύσης της  $f(x) = e^{2x} + \int_0^x e^{-(x-t)}f(t) dt$  στο διάστημα  $[0, 5]$ .

**Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>** Ας υποθέσουμε μία τετραγωνική μη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra της μορφής,

$$\mu y(x) - \lambda \int_0^x y(x-t)y(t)dt = f(x). \quad (3.6.7)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη παίρνουμε μία τετραγωνική εξίσωση της μορφής

$$\mu \check{y}(p) - \lambda \check{y}^2(p) = \check{f}(p),$$

όπου,

$$\check{y}(p) = \mathcal{L}\{y(x)\}.$$

Λύνοντας έχουμε,

$$\check{y}(p) = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\lambda \check{f}(p)}}{2\lambda}. \quad (3.6.8)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (εάν υπάρχει) παίρνουμε δύο διαφορετικές λύσεις της (3.6.7).

**Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση,

$$\int_0^x y(x-t)y(t)dt = Ax^m, \quad m > -1. \quad (3.6.9)$$

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη και η (3.6.9) γίνεται:

$$\check{y}^2(p) = A \Gamma(m+1)p^{-m-1},$$

όπου  $\Gamma(m)$  είναι η γάμμα συνάρτηση.

Βάζοντας ρίζα και στα δύο μέλη έχουμε,

$$\check{y}(p) = \pm \sqrt{A \Gamma(m+1)} p^{-m-1},$$

ή

$$y_1(x) = -\frac{\sqrt{A \Gamma(m+1)}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} x^{\frac{m-1}{2}}, \quad y_2(x) = \frac{\sqrt{A \Gamma(m+1)}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} x^{\frac{m-1}{2}}.$$

### 3.7 Μέθοδος Παραγωγίσις Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Μερικές φορές η πολλαπλή παραγωγή μιας μη γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης με σκοπό την εξάλειψη του ολοκληρώματος, μας μετατρέπει την αρχική μας εξίσωση σε μια μη γραμμική συνηθής διαφορική εξίσωση και την εύκολη επίλυση της. Παραθέτονται παρακάτω ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

1. Η εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x f(t, y(t)) dt = g(x)$ ,

μετατρέπεται σε μη γραμμική 1<sup>ης</sup> τάξης εξίσωση της μορφής:

$$y'_x + f(x, y) - g'_x = 0,$$

με αρχική συνθήκη  $y(a) = g(a)$ .

2. Η εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x (x-t)f(t, y(t)) dt = g(x)$ ,

με διπλή παραγωγή μετατρέπεται σε μια 2<sup>ου</sup> βαθμού μη γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y''_{xx} + f(x, y) - g''_{xx} = 0,$$

με αρχικές συνθήκες  $y(a) = g(a)$  και  $y'_x(a) = g'_x(a)$ .

3. Η εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x e^{\lambda(x-t)} f(t, y(t)) dt = g(x)$ ,

μετατρέπεται σε μη γραμμική 1<sup>ης</sup> τάξης εξίσωση της μορφής:

$$y'_x + f(x, y) - \lambda y + \lambda g(x) - g'_x(x) = 0,$$

με αρχική συνθήκη  $y(a) = g(a)$ .

4. Η εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x \cos h[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x)$ ,

παραγωγίζουμε δύο φορές και τα δύο μέλη ως προς το x, δηλαδή,

$$y'_x + f(x, y(x)) + \lambda \int_a^x \sin h[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g'_x(x),$$

$$y''_{xx} + [f(x, y(x))]'_x - \lambda^2 \int_a^x \cos h[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g''_{xx}(x).$$

και στην συνέχεια, αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα έχουμε,

$$y''_{xx} + [f(x, y)]'_x - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0,$$

με αρχικές συνθήκες  $y(a) = g(a)$  και  $y'_x(a) = g'_x(a) - f(a, g(a))$ .



5. Για την εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x \sinh[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x)$ , ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία έχουμε,

$$y''_{xx} + [f(x, y)'_x - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x)] = 0,$$

με αρχικές συνθήκες  $y(a) = g(a)$ ,  $y'_x(a) = g'_x(a)$ .

6. Η εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x \cos[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x)$ , μετατρέπεται σε:

$$y''_{xx} + [f(x, y)'_x - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x)] = 0,$$

με αρχικές συνθήκες  $y(a) = g(a)$ ,  $y'_x(a) = g'_x(a) - f(a, g(a))$ .

7. Η εξίσωση με μορφή  $y(x) + \int_a^x \sin[\lambda(x-t)] f(t, y(t)) dt = g(x)$ , μετατρέπεται σε:

$$y''_{xx} + \lambda f(x, y) - \lambda^2 y + \lambda^2 g(x) - g''_{xx}(x) = 0,$$

με αρχικές συνθήκες  $y(a) = g(a)$ ,  $y'_x(a) = g'_x(a)$ .

Παρακάτω με την βοήθεια του λογισμικού Mathematica λύνεται με την μέθοδο των πολλαπλών παραγωγίσεων η ολοκληρωτική εξίσωση  $P(t) = R(t) + \int_0^t P(s) \times R(t-s) ds$ .

### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Αρχικά ορίζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση  $P(t) = R(t) + \int_0^t P(s) \times R(t-s) ds$  και ζητάμε να βρεθούν σε μορφή πίνακα οι μέχρι  $2^{ns}$  τάξης παράγωγοι.

```
In[ ]:= ClearAll[P, R, s, t];
      |διαγραφή ιδιοτήτων συμβόλων
      eqn = P[t] == R[t] + Integrate[P[s] * R[t - s], {s, 0, t}]
      |αόριστο ολοκλήρωμα
      Table[D[eqn, {t, n}], {n, 0, 2}] // TableForm
      |πίνακας... |μερική παράγωγος |μορφή ορθογώνιου πίνακα
Out[ ]:= P[t] == \int_0^t P[s] * R[-s + t] ds + R[t]
Out[ ]//TableForm=
      P[t] == \int_0^t P[s] * R[-s + t] ds + R[t]
      P'[t] == \int_0^t P[s] R'[-s + t] ds + P[t] * R[0] + R'[t]
      P''[t] == \int_0^t P[s] R''[-s + t] ds + R[0] P'[t] + P[t] R'[0] + R''[t]
```

Ορίζουμε ότι η συνάρτηση  $R(t)$  είναι πολυωνυμική και βρίσκουμε τις παραγώγους της  $P$ .

```

In[ ]:= R = 1 + 2 #^2 &;
deg = Exponent[R[t], t];
      |βαθμός πολυωνύμου

Table[D[eqn, {t, n}], {n, 0, deg + 1}] // TableForm
      |πίνακας... |μερική παράγωγος |μορφή ορθογ

```

Out[ ]//TableForm=

$$P[t] = 1 + 2t^2 + \int_0^t (1 + 2(-s + t)^2) P[s] ds$$

$$P'[t] = 4t + \int_0^t 4(-s + t) P[s] ds + P[t]$$

$$P''[t] = 4 + \int_0^t 4P[s] ds + P'[t]$$

$$P^{(3)}[t] = 4P[t] + P''[t]$$

Παίρνουμε τις αρχικές συνθήκες με την βοήθεια των ενδιάμεσων παραγώγων.

```

In[ ]:= iconsd = Table[D[eqn, {t, n}] /. t -> 0, {n, 0, deg}];
      |πίνακας τιμών παράγωγος

TableForm[ndeqs = {D[eqn, {t, deg + 1}]} ~Join~ iconsd]
      |μορφή ορθογώνιου πίνακα κή παράγωγος |ένωση στοιχείων

```

Out[ ]//TableForm=

$$P^{(3)}[t] = 4P[t] + P''[t]$$

$$P[0] = 1$$

$$P'[0] = P[0]$$

$$P''[0] = 4 + P'[0]$$

Τώρα μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αναλυτικά με χρήση της εντολής DSolve και αριθμητικά με χρήση της εντολής NDSolve .

```


In[ ]:= dsol = DSolve[ndeqs, P, t][[1, 1]]
      |λύση διαφορικής εξίσωσης

ndsol = NDSolve[ndeqs, P, {t, 0, 1}][[1, 1]]
      |αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης

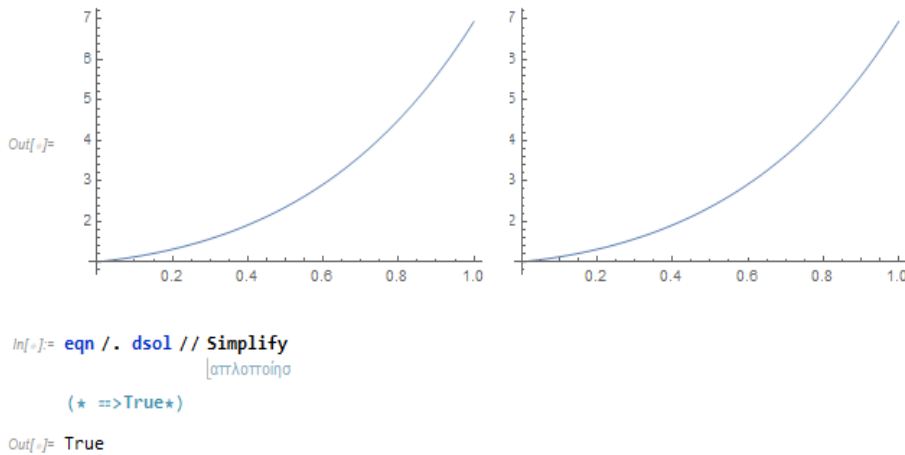
GraphicsRow[Plot[P[t] /. #, {t, 0, 1}, PlotRange -> All] & /@ {dsol, ndsol}]
      |γραμμή γραφ... |διάγραμμα |εύρος διαγρά... |όλα

```

Out[ ]:= P -> Function[{t},  $\frac{1}{7} e^{-t/2} \left( 7 e^{5t/2} - 2\sqrt{7} \sin\left[\frac{\sqrt{7}t}{2}\right] \right)$ ]

Out[ ]:= P -> InterpolatingFunction[ Domain: {{0, 1}} Output: scalar]

Τις λύσεις μπορούμε να τις απεικονίσουμε με την βοήθεια κατάλληλων εντολών και να επιβεβαιώσουμε ότι η συμβολική λύση είναι ακριβής (Σχήμα 3.4).



Σχήμα 3.4: Απεικόνιση της  $P(t) = R(t) + \int_0^t P(s) \times R(t-s) ds$  με την Μέθοδο των πολλαπλών Παραγωγίσεων.

### 3.8 Μέθοδος Newton Kantorovich

Η μέθοδος **Newton Kantorovich** έχει σαν βασική εφαρμογή τις μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις 2<sup>ου</sup> είδους με σταθερά όρια ολοκλήρωσης. Παρόλα αυτά είναι χρήσιμο εργαλείο και για την λύση πολλών προβλημάτων Volterra και βασίζεται στην μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων. Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Newton Kantorovich για να επιλύσουμε μια Volterra ολοκληρωτική εξίσωση μορφής Urysohn,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u(t)) dt. \quad (3.8.1)$$

Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία,

$$u_k(x) = u_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, 3 \dots, \quad (3.8.2)$$

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^x K'_y(x, t, u_{k-1}(t)) \varphi_{k-1}(t) dt, \quad (3.8.3)$$

$$\varepsilon_{k-1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t, u_{k-1}(t)) dt - u_{k-1}(x). \quad (3.8.4)$$

Ο αλγόριθμος βασίζεται στην λύση της γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.8.3). Με αυτή την διαδικασία οι εξισώσεις εμφανίζουν μεγάλη σύγκλιση με μοναδικό μειονέκτημα της λύσης την εμφάνιση μιας νέας ολοκληρωτικής εξίσωσης κάθε φορά που θα βρίσκουμε το  $\varphi_{k-1}(x)$ . Για να απλοποιήσουμε το πρόβλημα, αντικαθιστούμε την (3.8.3) με την εξίσωση και παίρνουμε,

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^x K'_y(x, t, u_0(t)) \varphi_{k-1}(t) dt, \quad (3.8.4)$$

ή

$$\varphi_{k-1}(x) = \varepsilon_{k-1}(x) + \int_a^x K'_y(x, t, u_m(t)) \varphi_{k-1}(t) dt, \quad m < k - 1. \quad (3.8.5)$$

**Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra με την μέθοδο Newton Kantorovich,

$$y(x) = \int_0^x [ty^2(t) - 1] dt.$$

Παραγωγίζουμε τον πυρήνα ως προς  $y$  και έχουμε,

$$K'_y(t, y(t)) = 2ty(t).$$

Μηδενική προσέγγιση:  $y_0(x) = 0$ .

Κάνοντας αντικατάσταση στην (3.8.3) και (3.8.4) έχουμε,

$$\varphi_0(x) = -x \text{ και } y_1(x) = -x.$$

Επιπλέον ισχύει

$$y_2(x) = y_1(x) + \varphi_1(x). \quad (3.8.6)$$

Από την (3.8.4) έχουμε,

$$\varepsilon_1(x) = \int_0^x [t(-t)^2(t) - 1] dt + x = \frac{1}{4} x^4,$$

$$\varphi_1(x) = -2 \int_0^x t^2 \varphi_1(t) dt + \frac{1}{4} x^4.$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο διαδοχικών προσεγγίσεων για την επίλυση γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra 2<sup>ov</sup> είδους οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα,

$$\varphi_1^{(0)} = \frac{1}{4} x^4,$$

$$\varphi_1^{(1)} = \frac{1}{4} x^4 - 2 \int_0^x \frac{1}{4} t^6 dt = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{14} x^7,$$

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{1}{4} x^4 - 2 \int_0^x t^2 \left( \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{14} t^7 \right) dt = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{14} x^7 + \frac{1}{70} x^{10}.$$

Αντικαθιστούμε στην (3.8.6) και βρίσκουμε,

$$y_2(x) = -x + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{14} x^7 + \frac{1}{70} x^{10},$$

$$y_3(x) = y_2(x) + \varphi_2(x),$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{160} x^{10} - \frac{1}{1820} x^{13} - \frac{1}{7840} x^{16} + \frac{1}{9340} x^{19} + \frac{1}{107800} x^{22},$$

$$\varphi_2(x) = \varepsilon_2(x) + 2 \int_0^x t \left( -t + \frac{1}{4} t^4 - \frac{1}{14} t^7 + \frac{1}{70} t^{10} \right) \varphi_2(x) dt.$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βγάζουμε,

$$y_3(x) = -x + \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{14} x^7 + \frac{23}{112} x^{10} - \frac{1}{1820} x^{13} - \frac{1}{7840} x^{16} + \frac{1}{9340} x^{19} + \frac{1}{107800} x^{22},$$

συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία βρίσκω ότι η 4<sup>η</sup> προσέγγιση δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Επομένως η λύση είναι:

$$y(x) = -x + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{23}{112}x^{10} - \frac{1}{1820}x^{13} - \frac{1}{7840}x^{16} + \frac{1}{9340}x^{19} + \frac{1}{107800}x^{22}.$$

### 3.9 Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης ή Μέθοδος Τετραγωνισμού

Η Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης ή Μέθοδος Τετραγωνισμού (Quadrature) είναι ένα πρωταρχικό εργαλείο που χρησιμοποιούν οι μηχανικοί και οι εφαρμοσμένοι επιστήμονες για να προσεγγίσουν την λύση σε ολοκληρώματα που δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Σκοπός της μεθόδου είναι να προσεγγίσει το πεπερασμένο ολοκλήρωμα της  $f(x)$  πάνω σε διάστημα  $[a, b]$  βρίσκοντας την σε πεπερασμένο αριθμό σημείων του διαστήματος.

**Ορισμός** Υποθέτουμε ότι  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_M < b$ . Η συνάρτηση με μορφή,

$$Q[f] = \sum_{k=0}^M w_k f(x_k) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_M f(x_M) \quad (3.9.1)$$

με ιδιότητα,

$$\int_a^b f(x) dx = Q[f] + E[f] \quad (3.9.2)$$

ονομάζεται **Αριθμητική Ολοκλήρωση ή Μέθοδος Τετραγωνισμού (Quadrature)**. Ο όρος  $E(f)$  ονομάζεται **Σφάλμα Αποκοπής** της ολοκλήρωσης. Οι τιμές των  $\{x_k\}_{k=0}^M$  ονομάζονται **Κόμβοι Τετραγωνισμού** και οι συναρτήσεις  $\{w_k\}_{k=0}^M$  ονομάζεται **Βάρος**.

Ανεξάρτητα της εφαρμογής, οι κόμβοι  $\{x_k\}_{k=0}^M$  επιλέγονται με διάφορους τρόπους. Για τον Κανόνα Τραπεζίου, τον Κανόνα Simpson και τον Κανόνα Boole, οι κόμβοι διαλέγονται σε ίσα διαστήματα, ενώ για τον Gauss – Legendre οι κόμβοι επιλέγονται να είναι μηδέν για ορισμένα Legendre πολυώνυμα.

**Ορισμός** Ο βαθμός ακρίβειας της Μεθόδου Τετραγωνισμού είναι ένας θετικός ακέραιος  $n$  τέτοιος ώστε  $E[P_i] = 0$  για όλα τα πολυώνυμα  $P_i(x)$  βαθμού  $i \leq n$ , αλλά  $E[P_{n+1}] \neq 0$  για μερικά πολυώνυμα  $P_{n+1}(x)$  βαθμού  $n+1$ .

Όταν η  $f(x)$  είναι ένα πολυώνυμο ο όρος  $E[P_i]$  μπορεί να προσδιοριστεί. Θεωρούμε αυθαίρετο πολυώνυμο βαθμού  $i$ ,

$$P_i(x) = a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + a_{i-2} x^{i-2} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Εάν  $i \leq n$ , τότε  $P_i^{(n+1)} \equiv 0$  για όλα τα  $x$  και  $P_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)! a_{n-1}$ .

Η γενική μορφή του σφάλματος δίνεται,

$$E[f] = K f^{(n+1)} c, \quad (3.9.3)$$

όπου  $K$  μια κατάλληλη σταθερά και  $n$  ο βαθμός ακρίβειας.

Η παραγωγή των μεθόδων Τετραγωνισμού βασίζεται μερικές φορές σε πολυωνμικές παρεμβολές. Υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο  $P_M(x)$  βαθμού  $\leq M$ , το οποίο διέρχεται από  $M + 1$  ίσου διαστήματος σημεία  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^M$ . Όταν αυτό το πολυώνυμο χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε την  $f(x)$ , τότε η μέθοδος ονομάζεται **Newton – Cotes Quadrature Μέθοδος**. Όταν χρησιμοποιούνται τα σημεία  $x_0 = a$  και  $x_M = b$  τότε ονομάζεται **Κλειστή Newton – Cotes Quadrature Μέθοδος**. Παρακάτω δίνονται πολυώνυμα προσέγγισης βαθμού  $M = 1, 2, 3$  και  $4$ .

**Θεώρημα 3.1** Υποθέτουμε ότι  $x_k = x_0 + kh$  ίσα διαστήματα και  $f_k = f(x_k)$ . Οι τέσσερις πρώτοι κλειστοί Newton – Cotes είναι:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1) && \text{Κανόνας Τραπεζίου,} \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) && \text{Κανόνας Simpson,} \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) && \text{Κανόνας Simpson 3/8,} \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \frac{2h}{25} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) && \text{Κανόνας Boole.} \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

**Θεώρημα 3.2** Υποθέτουμε ότι η  $f(x)$  είναι επαρκώς διαφορίσιμη, τότε το  $E[f]$  των (3.9.4) περιέχει παραγώγους και συγκεκριμένα ισχύει:

Ο Κανόνας Τραπεζίου έχει βαθμό ακρίβειας  $n = 1$ . Εάν η  $f \in C^2[a, b]$ , τότε,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{2} (f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(c). \quad (3.9.5)$$

Ο Κανόνας Simpson έχει βαθμό ακρίβειας  $n = 3$ . Εάν η  $f \in C^4[a, b]$ , τότε,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c). \quad (3.9.6)$$

Ο Κανόνας Simpson 3/8 έχει βαθμό ακρίβειας  $n = 3$ . Εάν η  $f \in C^4[a, b]$ , τότε,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(c). \quad (3.9.7)$$

Ο Κανόνας Boole έχει βαθμό ακρίβειας  $n = 5$ . Εάν η  $f \in C^6[a, b]$ , τότε,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \frac{2h}{25} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(c). \quad (3.9.8)$$

### Απόδειξη Κανόνων (3.9.5) – (3.9.6)

Ξεκινάμε με τα πολυώνυμα Lagrange  $P_M(x)$  πάνω σε  $x_0, x_1, \dots, x_M$  που μπορούν να προσεγγίσουν την  $f(x)$  ως,

$$f(x) \approx P_M(x) = \sum_{k=0}^M f_k L_{M,k}(x), \quad (3.9.9)$$

όπου  $f_k = f(x_k)$  για  $k = 0, 1, \dots, M$ .

Μία προσέγγιση του ολοκληρώματος βρίσκεται εάν αντικαταστήσουμε την συνάρτηση  $f(x)$  με τα πολυώνυμα  $P_M(x)$ , δηλαδή,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx \int_{x_0}^{x_1} P_M(x) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left( \sum_{k=0}^M f_k L_{M,k}(x) \right) dx = \sum_{k=0}^M \int_{x_0}^{x_1} f_k L_{M,k}(x) dx \\ &= f_k \sum_{k=0}^M \int_{x_0}^{x_1} L_{M,k}(x) dx = \sum_{k=0}^M w_k f_k. \end{aligned} \quad (3.9.10)$$

### Κανόνας Τραπεζίου

Στον κανόνα τραπεζίου για να προσεγγίσουμε το  $\int_a^b f(x) dx$ , θεωρούμε  $x_0 = a, x_1 = b$ , με  $h = b - a$ , χρησιμοποιούμε τα γραμμικά πολυώνυμα Lagrange,

$$P_1(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1), \quad (3.9.11)$$

και έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right] dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x)) (x-x_0)(x-x_1) dx. \end{aligned} \quad (3.9.12)$$

Ο όρος  $(x-x_0)(x-x_1)$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $[x_0, x_1]$  και για κάποιο  $\xi \in (x_0, x_1)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x)) (x-x_0)(x-x_1) dx &= f''(\xi) \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) dx \\ &= f''(\xi) \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2} x^2 + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= -\frac{h^3}{6} f''(\xi). \end{aligned} \quad (3.9.13)$$

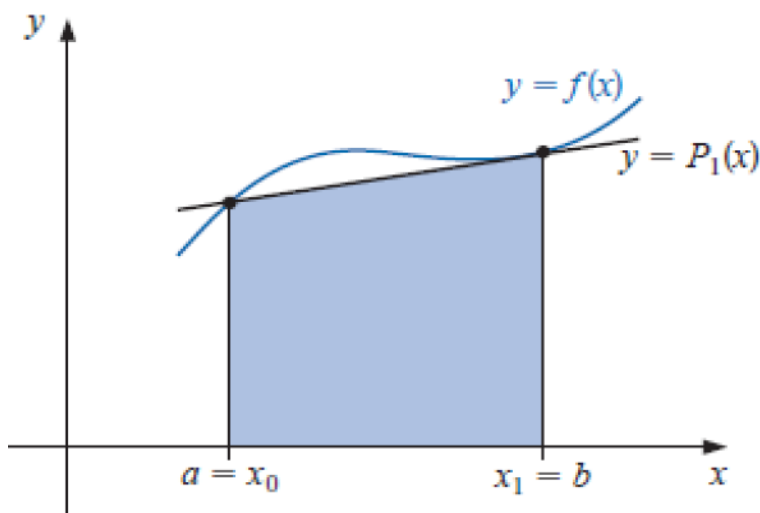
Επομένως η (3.9.12) γίνεται,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \left[ \frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_1)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi) \\ &= \frac{(x_1-x_0)}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi). \end{aligned} \quad (3.9.14)$$

Θέτουμε  $h = x_0 - x_1$  και δίνεται ο παρακάτω κανόνας,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi). \quad (3.9.15)$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται Κανόνας Τραπεζίου γιατί όταν η  $f$  είναι συνάρτηση με μη αρνητικούς αριθμούς το  $\int_a^b f(x)dx$  προσεγγίζει γεωμετρικά την περιοχή ενός τραπεζίου Σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Απεικόνιση του Κανόνα Τραπεζίου.

**Αλγόριθμος Επίλυσης:**

$$x_0 = t_0 = 0, \quad h = (b - a)/n = b/n,$$

$$x_r = x_0 + r * h, \quad t_r = t_0 + r * h,$$

$$u(x_0) = f(x_0),$$

$$u(x_r) = f(x_r) + \frac{h}{2} [ K(x_r, t_0, u(t_0)) + 2 \sum_{j=1}^{r-1} K(x_r, t_j, u(t_j)) + K(x_r, t_r, u(t_r)) ], \quad (3.9.16)$$

όπου  $r = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Για να υπολογίσουμε την  $u_1(t_r)$  εφαρμόζουμε τους τύπους:

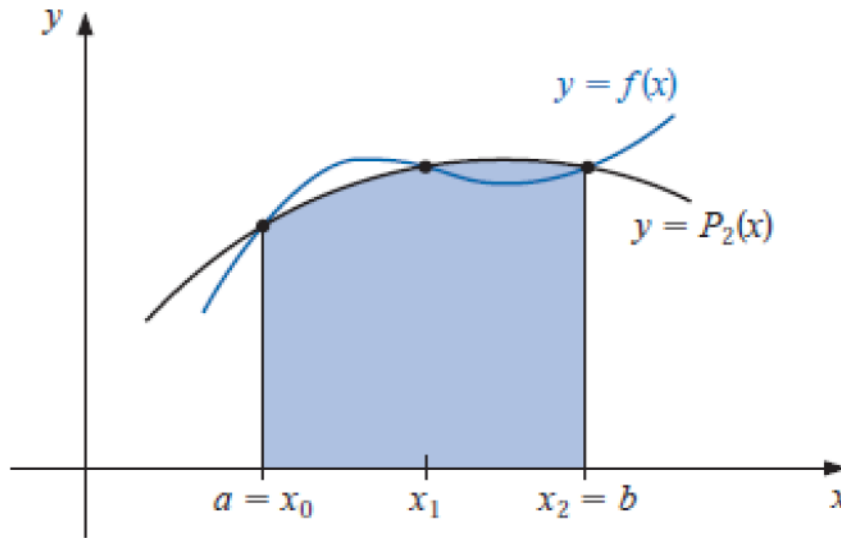
$$u_1(x_1) = f(x_1) + h * K(x_1, t_0, u(t_0)),$$

$$u_1(x_r) = f(x_r) + \left(\frac{r}{r-1}\right) * h * \sum_{j=1}^{r-1} K(x_r, t_j, u(t_j)), \quad \text{όπου } r = 2, 3, 4, \dots, n. \quad (3.9.17)$$



### Κανόνας Simpson's

Ολοκληρώνοντας σε διάστημα  $[a, b]$  (Σχήμα 3.6) και κάνοντας χρήση δεύτερης τάξης πολυώνυμο Lagrange σε ισοδύναμο διάστημα σημείων  $x_0 = a$ ,  $x_2 = b$  και  $x_1 = a + h$  με  $h = \frac{(b-a)}{2}$ , έχουμε,



Σχήμα 3.6: Απεικόνιση του Κανόνα Simpson.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} \left[ \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_0)(x-x_2)}{6} f^{(3)}(\xi(x)) dx. \quad (3.9.18)$$

Με αυτό τον τρόπο ο κανόνας Simpson συχνά δίνει όρο σφάλματος  $O(h^4)$  περιέχοντας την  $f^{(3)}$ . Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  γράφεται ως πολυώνυμο Taylor τρίτου βαθμού, τότε για κάθε  $x$  σε διάστημα  $[x_0, x_2]$ , υπάρχει  $\xi(x) \in (x_0, x_2)$  τέτοιο ώστε,

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x-x_1)^4,$$

και

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \left[ f(x_1)(x-x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3 + \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4 \right]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx. \quad (3.9.19)$$

Επειδή ο όρος  $(x-x_1)^4$  είναι ένας μη αρνητικός αριθμός στο διάστημα  $[x_0, x_2]$  εφαρμόζουμε το Θεώρημα Σταθμισμένης Μέσης Τιμής για ολοκληρώματα και έχουμε,

$$\frac{1}{24} \int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4 dx = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)^4 dx = \left[ \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{120} (x-x_1)^5 \right]_{x_0}^{x_2},$$

για κάποιο  $\xi \in (x_0, x_2)$ . Όμως,

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0,$$

άρα

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2 &= (x_2 - x_1)^4 - (x_0 - x_1)^4 = 0, \\ (x_2 - x_1)^3 - (x_0 - x_1)^3 &= 2h^3 \text{ και } (x_2 - x_1)^5 - (x_0 - x_1)^5 = 2h^5 \end{aligned} \quad (3.10.20)$$

Συμπερασματικά η (3.9.19) γράφεται:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = 2h f(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60} h^5.$$

Αντικαθιστώντας το  $f''(x_1)$  με προσέγγιση έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= 2h f(x_1) + \frac{h^3}{3} \left\{ \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi_2) \right\} + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{60} h^5 \\ &= \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{12} \left[ \frac{1}{3} f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5} f^{(4)}(\xi_1) \right]. \end{aligned}$$

Γενικά, αντικαθιστώντας τα  $\xi_1$  και  $\xi_2$  με  $\xi \in (x_0, x_2)$  έχουμε,

**Κανόνας Simpson:**

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi). \quad (3.9.21)$$

**Αλγόριθμος Επίλυσης:**

$$x_0 = t_0 = 0, h = (b - a)/n = b/n,$$

$$x_r = x_0 + r * h, t_r = t_0 + r * h,$$

$$u(x_0) = f(x_0),$$

$$u(x_1) = f(x_1) + \left(\frac{h}{3}\right) * [K(x_1, t_0, u(t_0)) + 4K(x_1, \frac{t_1}{2}, u_3(t_1)) + K(x_1, t_1, u_2(t_1))], \quad (3.9.22)$$

για να υπολογίσουμε τα  $u_2(x_1)$  και  $u_3(x_1)$  εφαρμόζουμε τα ακόλουθα,

$$u_1(x_1) = f(x_1) + h * K(x_1, t_0, u(t_0)),$$

$$u_2(x_1) = f(x_1) + \left(\frac{h}{2}\right) * [K(x_1, t_0, u(t_0)) + K(x_1, t_1, u_1(t_1))],$$

$$u_3(x_1) = \frac{f(x_1)}{2} + \left(\frac{h}{4}\right) * [K\left(\frac{x_1}{2}, t_0, u(t_0)\right) + K\left(\frac{x_1}{2}, \frac{t_1}{2}, \frac{u(t_0)}{2} + \frac{u_2(t_1)}{2}\right)]. \quad (3.9.23)$$

Εάν  $r$  είναι άρτιος αριθμός:

$$u(x_r) = f(x_r) + \left(\frac{h}{3}\right) * [K(x_r, t_0, u(t_0)) + \sum_{j=1}^{r-1} W_{ij}(x_r, t_j, u(t_j)) + K(x_r, t_r, u_1(t_1))]. \quad (3.9.24)$$

$W_{ij} = 4$ , εάν  $j = 1, 3, 5, \dots$

$W_{ij} = 2$ , εάν  $j = 2, 4, 6, \dots$

Εάν  $r$  είναι περιττός αριθμός:

$$u(x_r) = f(x_r) + \left(\frac{h}{3}\right) \sum_{j=0}^{r-3} W_{ij} K(x_r, t_j, u(t_j)) + \left(\frac{3}{8}\right) * h [K(x_r, t_{r-3}, u(t_{r-3})) + K(x_r, t_r, u_1(t_r))], \quad (3.9.24)$$

όπου,

$$W_{r0} = W_{r,r-3} = 1,$$

και

$$W_{rj} = 4, \text{ εάν } j = 1, 3, 5, \dots \text{ και } W_{rj} = 2, \text{ εάν } j = 2, 4, 6, \dots$$

$$u_1(x_r) = f(x_r) + \left(\frac{r}{r-1}\right) * h \sum_{j=1}^{r-1} K(x_r, t_j, u(t_j)), \text{ όπου } r = 2, 3, 4, \dots, n. \quad (3.9.26)$$

**Παράδειγμα** Θεωρούμε την μη γραμμική εξίσωση Volterra,

$$u(x) = 1 + x^2 - xe^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2-1} e^{u(t)} dt,$$

με ακριβή λύση  $u(x) = 1 + x^2$ .

Κάνοντας χρήση κατάλληλων εντολών στο λογισμικό Mathematica για αριθμό κόμβων  $n = 1$  και  $n = 18$  βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης στο διάστημα  $[0, 1.5]$  με τον Κανόνα Τραπεζίου (Σχήμα 3.7) και με τον Κανόνα Simpson (Σχήμα 3.8). Ανάλογα μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης σε διάφορα διαστήματα και να αναπαραστήσουμε γραφικά την μορφή της συνάρτησης (Σχήματα 3.9 – 3.10).

```
In[31]:= IT[f_, a_, b_, n_] := (h = (b - a) / n; Sum[(f[a + (i - 1) * h] + f[a + i * h]) * h / 2, {i, 1, n}])
```

[άθροιση]

```
f[x_] := 1 + x^2;
```

```
IT[f, 0, 1.5, 1.0]
```

```
IT[f, 0, 1.5, 18.0]
```

```
Out[33]= 3.1875
```

```
Out[34]= 2.62674
```

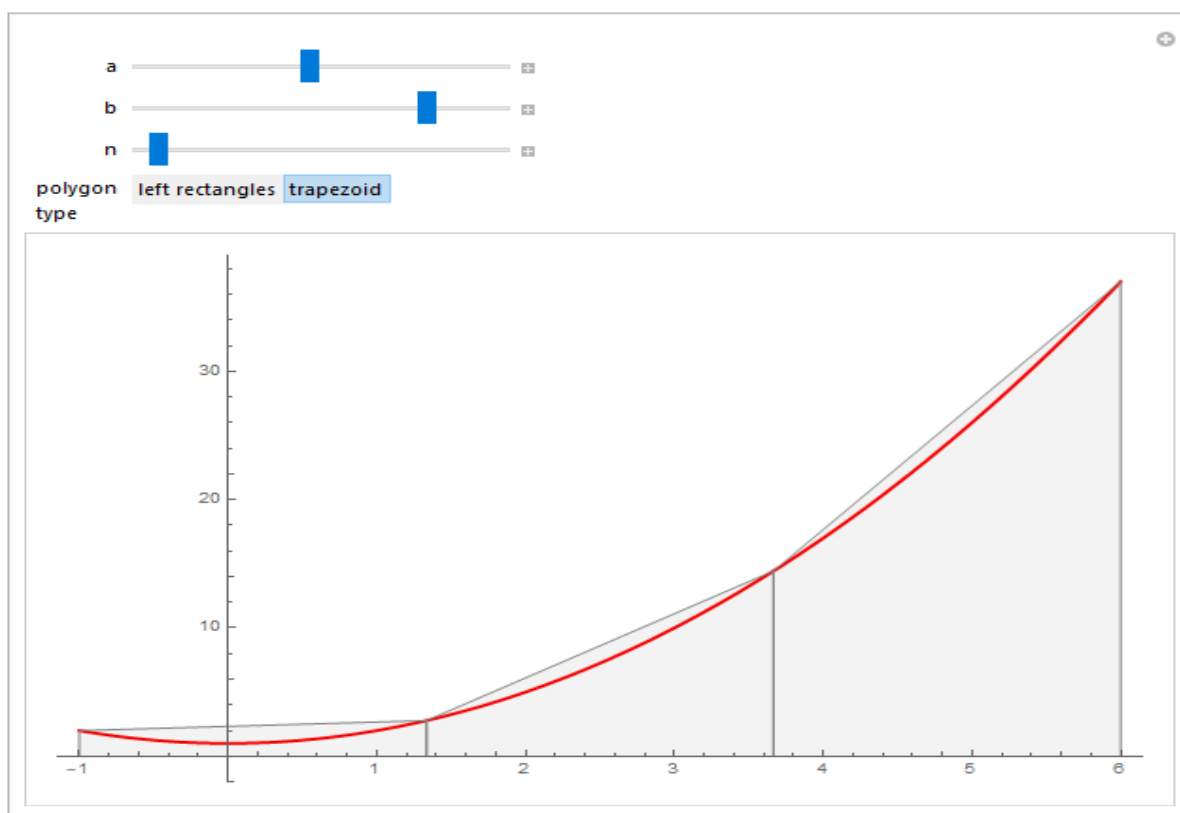
Σχήμα 3.7: Κώδικας Mathematica σε Κανόνα Τραπεζίου για  $n = 1$  και  $n = 18$  από 0 έως 1.5.

```
IS1[f_, a_, b_, n_] := (h = (b - a) / 2 / n; h / 3 * Sum[(f[a + (2 i - 2) * h] + 4 * f[a + (2 i - 1) * h] + f[a + (2 i) * h]), {i, 1, n}])
[άθροιση]

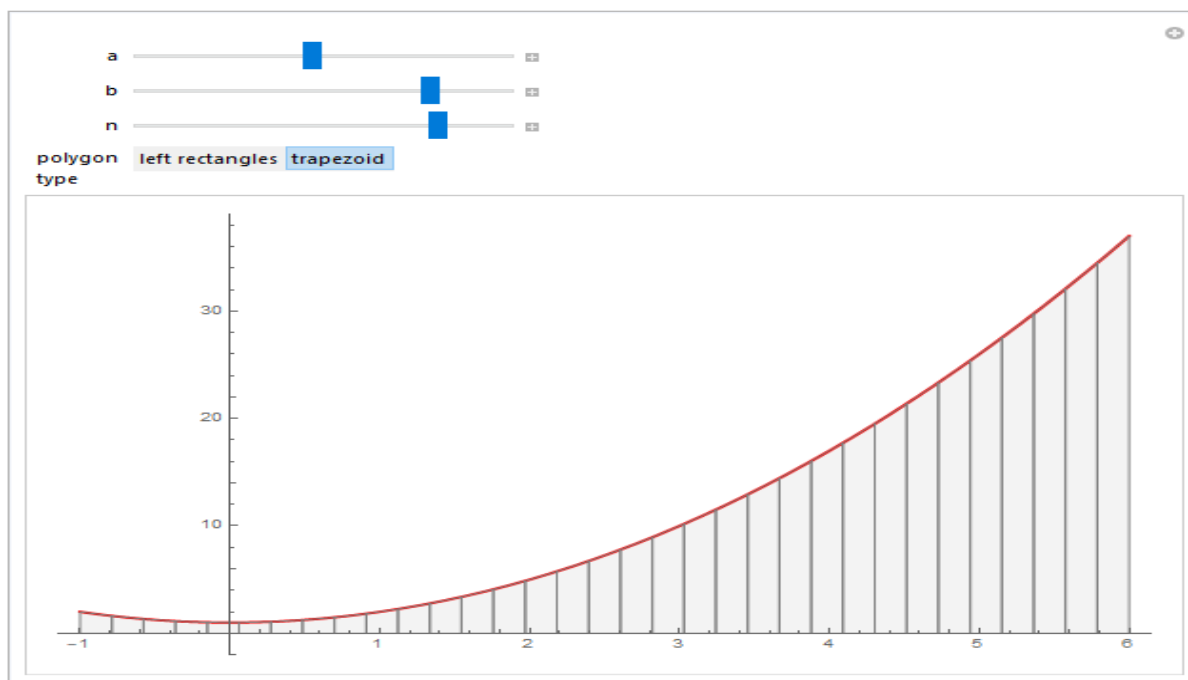
f[x_] := 1 + x^2;
IS1[f, 0, 1.5, 1.0]
IS1[f, 0, 1.5, 18.0]

2.625
2.625
```

Σχήμα 3.8: Κώδικας Mathematica σε Κανόνα Simpson για  $n = 1$  και  $n = 18$  από 0 έως 1.5.



Σχήμα 3.9: Απεικόνιση του Κανόνα Τραπεζίου της  $u(x) = 1 + x^2$  σε μικρό αριθμό βημάτων,  $n = 3$ .



Σχήμα 3.10: Απεικόνιση του Κανόνα Τραπεζίου  $u(x) = 1 + x^2$  σε μεγάλο αριθμό βημάτων.

Τα αποτελέσματα της παραπάνω εξίσωσης κάνοντας χρήση των αλγορίθμων του Τραπεζίου και Simpson αλλά δίνοντας και την ακριβή λύση, παρουσιάζονται στο παρακάτω πίνακα (Σχήμα 3.11). Παρατηρούμε ότι η απόκλιση των αποτελεσμάτων είναι σχεδόν μηδενική.

x	Ακριβής Λύση	Κανόνας Τραπεζίου	Κανόνας Simpson
0.0	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	1.010000	1.010000	1.010000
0.2	1.040000	1.040000	1.040000
0.3	1.090000	1.090000	1.090000
0.4	1.160000	1.160000	1.160000
0.5	1.250000	1.250000	1.250000
0.6	1.360000	1.360000	1.360000
0.7	1.490000	1.490000	1.490000
0.8	1.640000	1.640000	1.640000
0.9	1.810000	1.810000	1.810000
1.0	2.000000	2.000000	1.999999

Σχήμα 3.11: Πίνακας σύγκρισης αποτελεσμάτων της συνάρτησης  $u(x) = 1 + x^2$ .

## 4<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ VOLTERRA

#### 4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τις Ιδιόμορφες Volterra Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, οι εφαρμογές των οποίων επεκτείνονται στους τομείς της μηχανικής υγρών, στην βιομηχανική και στον ηλεκτρομαγνητισμό. Γενικά, μία ολοκληρωτική εξίσωση λέγεται **Ιδιόμορφη Ολοκληρωτική Εξίσωση (Singular Ολοκληρωτική Εξίσωση)**, εάν ένα ή και τα δύο όρια ολοκλήρωσης απειρίζονται ή εάν στον πυρήνα  $K(x, y)$  υπάρχουν ένα ή περισσότερα σημεία που τον απειρίζουν. Παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων είναι:

$$u(x) = e^x + \int_0^{\infty} K(x, t)u(t) dt, \quad (4.1.1)$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt, \quad \text{“Πρόβλημα του Abel”}, \quad (4.1.2)$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^a} u(t) dt, \quad \text{“Γενικευμένο πρόβλημα Abel”}, \quad (4.1.3)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt. \quad (4.1.4)$$

Οι εξισώσεις (4.1.2), (4.1.3) λέγονται και **Ιδιόμορφα Ασθενείς (Weakly – Singular) 2<sup>ο</sup> είδους Volterra Ολοκληρωτικές Εξισώσεις**.

#### Γενικά:

Η ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x, s) u(s) ds, \quad (4.1.5)$$

με  $f \in C[a, b]$  είναι **Ιδιόμορφα Ασθενή Ολοκληρωτική Εξίσωση**, εάν υπάρχει  $L_1 \in C([a, b] \times [a, b])$  και  $a \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $K_1(x, s) = \frac{L_1(x, s)}{|x-s|^a}$ ,  $\forall x, s \in [a, b]$ , με  $x \neq s$ . Σε αυτή την περίπτωση ο πυρήνας της συνάρτησης λέγεται **Ιδιόμορφα Ασθενής**. Η ολοκληρωτική εξίσωση,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K_1(x, s) u(s) ds + \int_a^b K_2(x, s) u(s) ds, \quad (4.1.6)$$

με  $f \in C[a, b]$  είναι **Ιδιόμορφα Ασθενής**, εάν τουλάχιστον ένας από τους πυρήνες  $K_1$  και  $K_2$  είναι **Ιδιόμορφα Ασθενής**.

## 4.2 Πρόβλημα Abel

Όπως αναφέρεται και στην εισαγωγή η ολοκληρωτική εξίσωση του Abel έχει μορφή,

$$\mathbf{f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt.} \quad (4.2.1)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης βρίσκεται εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη, δηλαδή,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt\right\} = \mathcal{L}\{f(x)\}. \quad (4.2.2)$$

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Συνέλιξης και γνωρίζοντας ότι  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  έχουμε,

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L}\{f(x)\}, \quad (4.2.3)$$

δηλαδή,

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{s}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \mathcal{L}\{f(x)\} \right],$$

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L}^{-1}\left\{s \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} \mathcal{L}\{f(x)\} \right]\right\},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x-t}} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt.$$

Σημειώνουμε ότι ο κανόνας Leibnitz δεν μπορεί να εφαρμοστεί εδώ λόγω της μορφής του ολοκληρώματος. Σύμφωνα με την μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης έχουμε,

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ -2 (\sqrt{x-t} f(t)) \Big|_0^x + 2 \int_0^x \sqrt{x-t} f'(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt \right\}. \end{aligned}$$

## 4.3 Γενικευμένη μορφή Ολοκληρωτικής Εξίσωσης Abel

Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\int_0^x (x-t)^{-a} \varphi(t) dt = f(x), \quad 0 < a < 1. \quad (4.3.1)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης παίρνουμε,

$$\mathcal{L}\{x^{-a}\} \mathcal{L}\{\varphi(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\},$$

ή

$$\frac{\Gamma(1-a)}{s^{-a+1}} \Phi(s) = F(s), \quad (4.3.2)$$

όπου,

$$\Phi(s) = \mathcal{L} \{ \varphi(x) \} \text{ και } F(s) = \mathcal{L} \{ f(x) \}.$$

Σύμφωνα με την (4.3.2) ισχύει ότι,

$$\Phi(s) = \frac{s^{-a+1}}{\Gamma(1-a)} F(s),$$

και επειδή η  $s^{-a+1}$  δεν έχει αντίστροφο για  $0 < a < 1$  έχουμε,

$$\frac{\Phi(s)}{s} = \frac{s^{-a}}{\Gamma(1-a)} F(s) = \frac{\mathcal{L}\{x^{a-1}\}\mathcal{L}\{f(x)\}}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)},$$

ή

$$\frac{\Phi(s)}{s} = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \mathcal{L} \left\{ \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt \right\}. \quad (4.3.3)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  στην (4.3.3) παίρνουμε,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Phi(s)}{s} \right\} = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt,$$

ή

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt,$$

από όπου παραγωγίζοντας ως προς  $x$  και για τα δύο μέλη παίρνουμε τελικά,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt.$$

Τέλος ξέρουμε ότι  $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$  και η παραπάνω σχέση γράφεται ως:

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt = \frac{\sin \pi a}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-a}} dt.$$

Θέτοντας  $t = wx$  έχουμε το αποτέλεσμα,

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{\sin \pi a} \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{f(wx)}{(1-w)^{1-a}} dw = \frac{\pi}{\sin \pi a} \left\{ ax^{a-1} \int_0^1 \frac{f(wx)}{(1-w)^{1-a}} dw + \int_0^1 \frac{wf'(wx)}{(1-w)^{1-a}} dw \right\}.$$

#### 4.4 Ολοκληρωτική Εξίσωση Abel 2<sup>ου</sup> είδους

Η γενική μορφή μιας 2<sup>ου</sup> είδους ολοκληρωτικής εξίσωσης Abel έχει μορφή,

$$\mathbf{u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt.}$$

(4.4.1)

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέλη της εξίσωσης παίρνουμε,



$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} \mathcal{L}\{u(x)\} \\ &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \mathcal{L}\{u(x)\}.\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(x)\} &= \left\{\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} \mathcal{L}\{f(x)\} \\ &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} \mathcal{L}\{f(x)\}.\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε,

$$u(x) = f(x) + \int_0^x g(t)f(x-t) dt, \quad (4.4.4)$$

όπου,

$$g(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του  $\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\}$  βρίσκεται με την βοήθεια του τύπου:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s-a-b}}\right\} = e^{ax} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + be^{xb^2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{xp})\right\},$$

για  $a = 0$ ,  $b = \sqrt{\pi}$  και βρίσκουμε ότι,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} = \sqrt{\pi} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{\pi} e^{x\pi} \operatorname{erfc}(-\sqrt{x\pi})\right\}.$$

Όμως το  $\operatorname{erfc}(-\sqrt{x\pi}) = \operatorname{erfc}(\sqrt{x\pi})$ .

Άρα προκύπτει

$$g(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}-\sqrt{\pi}}\right\} = \sqrt{\pi} \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{\pi} e^{x\pi} \operatorname{erfc}(\sqrt{x\pi})\right\}.$$

#### 4.5. Ιδιόμορφα Ασθενής Ολοκληρωτική Εξίσωση Volterra

Μία **Ιδιόμορφα Αδύναμη Volterra ολοκληρωτικής εξίσωσης 2<sup>ου</sup> είδους** έχει την μορφή,

$$\boxed{u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} u(t) dt.} \quad (4.5.1)$$

Η παραπάνω εξίσωση εμφανίζεται συχνά σε πολλά μαθηματικά μοντέλα φυσικής και χημείας, όπως ο ηλεκτρομαγνητισμός. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι με την χρήση του μετασχηματισμού Laplace μπορούμε να βρούμε λύση. Σε αυτή την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Διάσπασης.

Έστω ότι η λύση έχει μορφή,

$$u(x) = \sum_0^\infty u_n(x). \quad (4.5.2)$$

Αντικαθιστούμε στην (4.5.1) και βρίσκουμε ότι,

$$\sum_0^{\infty} u_n(x) = f(x) + \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} (\sum_0^{\infty} u_n(t)) dt. \quad (4.5.3)$$

Για τους όρους  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  ... έχουμε,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f(x), \\ u_1(x) &= \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} u_0(x) dt, \\ u_2(x) &= \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} u_1(x) dt, \\ &\dots = \dots \\ u_n(x) &= \int_0^x \frac{\lambda}{\sqrt{x-t}} u_{n-1}(x) dt. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Έχοντας υπολογίσει τους όρους, αντικαθιστούμε στην (4.5.2) και βρίσκουμε την λύση της (4.5.1).

**Παράδειγμα** Να λυθεί η παρακάτω Ιδιόμορφα Ασθενής ολοκληρωτική εξίσωση Volterra,

$$u(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt. \quad (4.5.5)$$

**1<sup>ος</sup> τρόπος:** Μέθοδος Διάσπασης

Σύμφωνα με την σχέση (4.5.4) έχουμε,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2}, \\ u_1(x) &= - \int_0^x \frac{\sqrt{t} + \frac{\pi t}{2}}{\sqrt{x-t}} dt. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

Για  $t = x \sin^2 \theta$  η (4.5.6) γίνεται,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= - \int_0^{\pi/2} (2x \sin^2 \theta + \pi x^{3/2} \sin^3 \theta) d\theta \\ &= - \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{3} \pi x^{3/2}. \end{aligned}$$

Παρατηρείται η εμφάνιση των όρων  $\frac{\pi x}{2}$  και  $-\frac{\pi x}{2}$  ανάμεσα στα  $u_0(x)$  και  $u_1(x)$ . Σύμφωνα με την μέθοδο του φαινομένου των όρων θορύβου έχουμε ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (4.5.5) είναι  $u(x) = \sqrt{x}$ , η οποία επαληθεύει και την αρχική μας σχέση.

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** Μέθοδος Laplace

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να επαληθευτεί και με την μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.5.5) και έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x)\} + \frac{\pi}{2} \mathcal{L}\{x\} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}\right\} \mathcal{L}\{u(x)\} \\ &= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} + \frac{\pi}{2s^2} - \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} \mathcal{L}\{u(x)\}.\end{aligned}$$

Απλοποιώντας την παράσταση παίρνουμε,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(x)\} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s(\sqrt{s} + \sqrt{\pi})} + \frac{\pi}{2s^{3/2}(\sqrt{s} + \sqrt{\pi})} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \left[ \frac{\sqrt{s} + \sqrt{\pi}}{\sqrt{s} + \sqrt{\pi}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε τελικά τη λύση,

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} \right] = \sqrt{x}.$$

### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Κάνοντας χρήση κατάλληλων εντολών του λογισμικού Mathematica (Σχήμα 4.1)

καταλήγουμε ότι η αναλυτική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2} \cdot \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt$  είναι  $u(x) = \sqrt{x}$ .

```
Out[11]= ClearAll

In[12]:= eqn = y[x] == x^a + Pi*x/2 - Integrate[y[t], {t, 0, x}]/Sqrt[x-t];

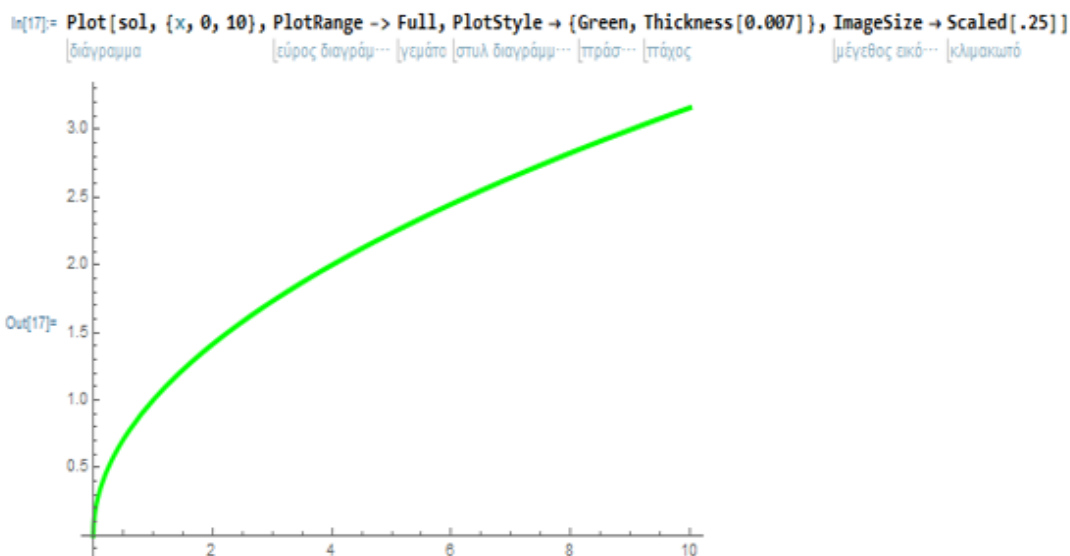
In[13]:= a = 1/2;

In[14]:= sol = DSolveValue[eqn, y[x], x]
           |συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσης|

Out[14]= Sqrt[x]
```

Σχήμα 4.1: Αναλυτική λύση της  $y(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2} \cdot \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt$ .

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη εντολή του λογισμικού Mathematica απεικονίζεται η αναλυτική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης  $u(x) = \sqrt{x} + \frac{\pi x}{2} \cdot \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt$  στο διάστημα  $[0, 10]$ .



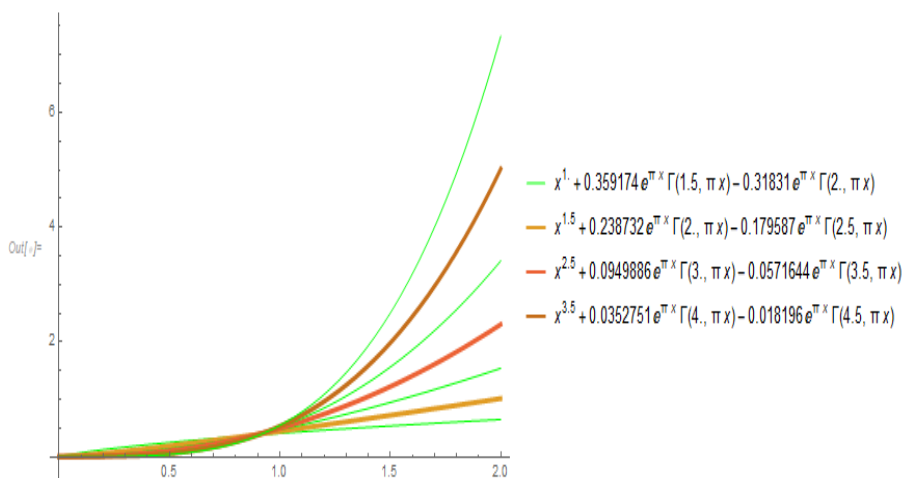
Στην συνέχεια, βάζοντας παράμετρο  $a$  στην παραπάνω Ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση, δηλαδή,  $y(x) = x^a + \frac{\pi x}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt$ , παίρνουμε μια οικογένεια ολοκληρωτικών εξισώσεων όπου στην αναλυτική λύση τους εμφανίζεται η συνάρτηση Γάμμα. Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζονται οι αναλυτικές λύσεις της ολοκληρωτικής εξίσωσης για τις τιμές  $a = 1, 1.5, 2.5, 3.5$  στο διάστημα  $[0, 20]$ .

$$\text{In[1]}:= \text{eqn} = y[x] == x^a - \int_0^x \frac{y[t]}{\sqrt{x-t}} dt;$$

$$\text{In[2]}:= \text{sol} = \text{DSolveValue}[\text{eqn}, y[x], x]$$

$$\text{Out[2]}:= x^a + \frac{e^{\pi x} \pi^{-a} \text{Gamma}[1+a] \text{Gamma}[\frac{1}{2}+a, \pi x]}{\text{Gamma}[\frac{1}{2}+a]} - e^{\pi x} \pi^{-a} \text{Gamma}[1+a, \pi x]$$

```
In[3]:= Plot[Table[sol, {a, 1, 4, 0.5}] // Evaluate, {x, 0, 2}, PlotRange -> Full, PlotStyle -> {Green, Thickness[0.007]}, ImageSize -> Scaled[.25], PlotLegends -> "Expressions"]
```



Σχήμα 4.2: Απεικόνιση και αναλυτική επίλυση της  $y(x) = x^a + \frac{\pi x}{2} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} y(t) dt$  για  $a = 1, 1.5, 2.5, 3.5$  στο διάστημα  $[0, 20]$ .

#### 4.6 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας Ιδιόμορφα Αδύναμων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Volterra

Σε αυτή την παράγραφο θα παραθέσουμε κάποια θεωρήματα [35], [37] ύπαρξης και μοναδικότητας της εξίσωσης (4.1.7). Θα χρησιμοποιήσουμε για αυτό το θεώρημα Σταθερού Σημείου και θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση μας είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως προς την παράμετρο  $x$ .

**Θεώρημα 4.1** Εάν  $(X, d)$  ένας πλήρης μετρικός χώρος και  $T: X \rightarrow X$  ένας τελεστής με  $d(Tu, Tw) \leq L d(u, w)$ ,  $\forall u, w \in X$ , όπου  $0 < L < 1$  τότε,

1. έχει μοναδικό σταθερό σημείο  $u^*$ ,
2. η ακολουθία  $u_{n+1} = T u_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  είναι συγκλίνουσα στο  $u^*$  για όλα τα  $u_0 \in X$ ,
3.  $d(u_n, u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(u_1, u_0)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Θεώρημα 4.2 (Picard τελεστής<sup>5</sup>)[39]** Έστω  $(V, d)$  γενικευμένος μετρικός χώρος με  $d(u_1, u_2) \in \mathbb{R}_+^p$  και  $(W, \rho)$  ένας πλήρης μετρικός χώρος με  $\rho(w_1, w_2) \in \mathbb{R}_+^m$ . Επιπλέον, έστω  $A: V \times W \rightarrow V \times W$  ένας συνεχής τελεστής. Υποθέτουμε ότι,

1.  $A(u, w) = (B(u), C(u, w))$  για όλα τα  $u \in V$  και  $w \in W$ ,
2. ο τελεστής  $B: V \rightarrow V$  είναι Ασθενής Picard τελεστής,
3. υπάρχει πίνακας  $Q \in M_m(\mathbb{R}_+)$  που συγκλίνει στο 0, τέτοιος ώστε ο τελεστής

$C(u, \cdot): W \rightarrow W$  είναι μία  $Q$  συνάρτηση συστολής για όλα τα  $u \in V$  τότε:

ο τελεστής  $A$  είναι ένας Ασθενής Picard τελεστής. Εξάλλου εάν ο  $B$  είναι Ασθενής Picard τελεστής, τότε και ο  $A$  είναι Ασθενής Picard τελεστής.

**Θεώρημα 4.3** Εάν  $X$  σύνολο και  $T: X \rightarrow X$  μία συνάρτηση τέτοια ώστε η ισότητα  $T^k(u) = u$  έχει μοναδική λύση  $u^*$ , τότε η  $u^*$  είναι μοναδική λύση της εξίσωσης  $Tu = u$ .

**Θεώρημα 4.4** Εάν  $(X, d)$  ένας γενικευμένος πλήρης μετρικός χώρος και  $T: X \rightarrow X$  είναι ένας τελεστής τέτοιος ώστε ο  $T^k$  να είναι συστολή, τότε η ακολουθία  $u_{n+1} = T u_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  είναι συγκλίνουσα σε μοναδικό σημείο του  $T^k$ .

**Θεώρημα 4.5** Εάν  $K(x, s) = \frac{L_1(x, s)}{|x-s|^a}$ ,  $0 < a < 1$  και  $L \in C([a, b] \times [a, b])$ , τότε ο τελεστής  $T: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ,

$$(Tu)(x) = \int_a^x K(x, s)u(s) ds, \quad (4.6.1)$$

είναι καλά ορισμένος.

#### Απόδειξη

<sup>5</sup> Ας είναι  $(X, d)$  μετρικός χώρος. Ένας τελεστής  $A: X \rightarrow X$  ονομάζεται **τελεστής Picard** εάν υπάρχει  $x^* \in X$  τέτοιο ώστε  $F_A = \{x^*\}$ , το σύνολο των σταθερών σημείων του συνόλου  $A$  και η ακολουθία  $(A^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ . Ας είναι  $(X, d)$  μετρικός χώρος. Ένας τελεστής  $A: X \rightarrow X$  ονομάζεται **Ασθενής τελεστής Picard** εάν η ακολουθία  $(A^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει για όλα τα  $x_0 \in X$  και τα οριά τους (που μπορεί να εξαρτάται από το  $x_0$ ) είναι σταθερό σημείο του  $A$ .

Εάν  $a \leq x < x' \leq b$  και  $\delta_1 > 0$  έχουμε,

$$\begin{aligned} |(Tu)(x') - (Tu)(x)| &\leq \int_a^{x-\delta_1} |K(x', s) - K(x, s)| |u(s)| ds + \int_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1} |K(x', s)| |u(s)| ds \\ &\quad + \int_{x-\delta_1}^x |K(x, s)| |u(s)| ds + \int_{x'-\delta_1}^{x'} |K(x', s)| |u(s)| ds. \end{aligned}$$

Επειδή το  $u \in C[a, b]$  υπάρχει  $M = \max_{s \in [a, b]} |u(s)|$  και

$$K: [x - \frac{\delta_1}{2}, b] \times [a, x - \delta_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ομοιόμορφα συνεχής.}$$

Άρα  $\forall \varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta_2 > 0$  τέτοιο ώστε,

$$|K(x', s) - K(x, s)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}, \text{ εάν } |x - x'| < \delta_2 \text{ και } s < x - \delta_1,$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} |(Tu)(x') - (Tu)(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M \int_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1} |K(x', s)| ds + M \int_{x-\delta_1}^x |K(x, s)| ds + M \\ &\quad \int_{x'-\delta_1}^{x'} |K(x', s)| ds. \end{aligned}$$

Επιπλέον εάν  $|x - x'| < \delta_2$ , τότε έχουμε τις εξής ανισότητες:

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1} |K(x', s)| ds &\leq P \int_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1} \frac{ds}{(x'-s)^a} = P \left( -\frac{(x'-s)^{1-a}}{1-a} \Big|_{x-\delta_1}^{x'-\delta_1} \right) = \\ &= \frac{P}{1-a} ((x' - x + \delta_1)^{1-a} - \delta_1^{1-a}) \leq \frac{P}{1-a} (2(x' - x))^{1-a} < \frac{\varepsilon}{6M}, \end{aligned}$$

όπου,

$$|x' - x| < \delta_3 \text{ και } P = \max_{x, s \in [a, b]} |L(x, s)|.$$

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta_1}^x |K(x, s)| ds &\leq P \int_{x-\delta_1}^x \frac{ds}{(x-s)^a} = \frac{P}{1-a} (-(x-s)^{1-a} \Big|_{x-\delta_1}^x) = \\ &= \frac{P}{1-a} \delta_1^{1-a} < \frac{\varepsilon}{6M}, \text{ για } \delta_1 \leq \delta_4, \end{aligned}$$

$$\int_{x'-\delta_1}^{x'} |K(x', s)| ds \leq \frac{P}{1-a} \delta_1^{1-a} < \frac{\varepsilon}{6M}, \text{ για } \delta_1 \leq \delta_3,$$

από αυτές τις ανισότητες συμπεραίνουμε ότι,

$$|(Tu)(x') - (Tu)(x)| < \varepsilon.$$

Εάν  $|x - x'| < \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ , τότε ο τελεστής είναι καλά ορισμένος.

**Θεώρημα 4.6** Εάν  $K_1$  ή  $K_2$  είναι Ιδιόμορφα Ασθενείς πυρήνες, τότε ο τελεστής

$T: \mathbb{C} [a, b] \rightarrow \mathbb{C} [a, b]$ ,

$$(Tu)(x) = \int_a^x K_1(x, s)u(s)ds + \int_a^b K_2(x, s)u(s)ds \quad (4.6.2)$$

είναι καλά ορισμένος.

### Απόδειξη

Βασιζόμενοι στο θεώρημα 4.1 αποδεικνύουμε ότι ο τελεστής  $T_2: \mathbb{C} [a, b] \rightarrow \mathbb{C} [a, b]$

$$(T_2u)(x) = \int_a^b K_2(x, s)u(s)ds$$

είναι καλά ορισμένος, αφού ο  $K_2$  είναι ένας Ιδιόμορφα Ασθενής πυρήνας.

Επομένως ο  $T$  είναι καλά ορισμένος ως άθροισμα δύο καλά ορισμένων τελεστών.

**Θεώρημα 4.7** Εάν  $K_1$  και  $K_2$  είναι Ιδιόμορφα Ασθενείς πυρήνες και

$$|K_1(x, s)| \leq \frac{P_1}{(x-s)^{a_1}}, \quad |K_2(x, s)| \leq \frac{P_2}{(x-s)^{a_2}} \quad (4.6.3)$$

για  $x \geq s$ , τότε η συνάρτηση

$$K_3(x, s) = \int_a^x K_1(x, t)K_2(t, s)dt, \quad (4.6.4)$$

ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. Εάν  $a_1 + a_2 > 1$ , τότε η συνάρτηση  $K_3(x, s)$  είναι ένας Ιδιόμορφα Ασθενής πυρήνας και

$$|K_3(x, s)| < \frac{P_3}{|x-s|^{a_1+a_2-1}}.$$

2. Εάν  $a_1 + a_2 = 1$ , τότε η συνάρτηση  $K_3(x, s)$  είναι συνεχής για  $x \neq s$  και

$$|K_3(x, s)| \leq P_4.$$

3.  $a_1 + a_2 < 1$ , η συνάρτηση  $K_3(x, s)$  είναι συνεχής και

$$|K_3(x, s)| \leq P_4 (x-s)^{1-a_1-a_2}.$$

**Θεώρημα 4.8** Εάν  $K(x, s, \lambda) = \frac{L(x,s,\lambda)}{(x-s)^a}$  με  $L \in C([a, b] \times [a, b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$  και  $0 < a < 1$ , τότε η εξίσωση

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s, \lambda)u(s)ds, \quad (4.6.5)$$

με  $f \in C [a, b]$  και  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  έχει μοναδική λύση στον  $C [a, b]$  και αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί με διαδοχικές προσεγγίσεις. Η λύση εξαρτάται συνεχώς από το  $\lambda$  και εάν ο  $K$  είναι συνεχώς διαφορίσιμος ως προς  $\lambda$ , η λύση είναι επίσης συνεχώς διαφορίσιμη ως προς  $\lambda$ .

## Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα 4.5 ο τελεστής,

$$T: \mathbb{C} [a, b] \rightarrow \mathbb{C} [a, b],$$

$$(Tu)(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s, \lambda) u(s) ds \quad (4.6.6)$$

είναι καλά ορισμένος.

Από το θεώρημα 4.7 συμπεραίνουμε ότι υπάρχει  $n \in \mathbb{N}^*$  τέτοιο ώστε ο πυρήνας  $K^{(n)}$  που ορίζεται από τις σχέσεις,

$$K^{(1)}(x, s, \lambda) = K(x, s, \lambda) \text{ και } K^{(j+1)}(x, s, \lambda) = \int_s^x K(x, t, \lambda) \delta t, \forall j \geq 1 \quad (4.6.7)$$

να είναι συνεχής.

Κάθε λύση της εξίσωσης (4.6.5) ικανοποιεί την εξίσωση,

$$u(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^x K^{(i)}(x, s, \lambda) f(s) ds + \int_a^x K^{(n)}(x, s, \lambda) u(s) ds. \quad (4.6.8)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 4.1 για τον τελεστή  $\bar{T}: \mathbb{C} [a, b] \rightarrow \mathbb{C} [a, b]$ , έχουμε,

$$(\bar{T}u) = f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} K^{(i)}(x, s, \lambda) f(s) ds + \int_a^x K^{(n)}(x, s, \lambda) u(s) ds, \quad (4.6.9)$$

που έχει συνεχή πυρήνα. Έτσι διαλέγοντας την μετρική Bielecki στο  $\mathbb{C} [a, b]$ , ο  $\bar{T}$  είναι μία συστολή και η εξίσωση  $\bar{T}u = u$  έχει μοναδική λύση  $u^*$  στο  $\mathbb{C} [a, b]$ . Όμως σύμφωνα με το θεώρημα 4.3, ξέρουμε ότι η  $u^*$  είναι μοναδική λύση της εξίσωσης  $Tu = u$  γιατί  $\bar{T} = T^{(n)}$ .

Από το θεώρημα 4.4 ξέρουμε ότι η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων

$$u_{n+1} = T u_n$$

συγκλίνει στο  $u^*$  για κάθε  $u_0 \in \mathbb{C} [a, b]$ .

Άρα η εξίσωση (4.6.5) έχει μοναδική συνεχή λύση και αυτή μπορεί να εκφραστεί ως με διαδοχικές προσεγγίσεις.

Εφαρμόζοντας αυτή την μέθοδο στην εξίσωση,

$$u(x, \lambda) = f(x) + \int_a^x K(x, s, \lambda) u(s, \lambda) ds, \quad (4.6.10)$$

έχουμε ότι η  $u^*$  είναι μοναδική λύση στο  $\mathbb{C} ([a, b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$ , έτσι η λύση εξαρτάται συνεχώς από την παράμετρο  $\lambda$ . Για την μελέτη της διαφορισιμότητας, εφαρμόζουμε το θεώρημα 4.2 στους παρακάτω χώρους και τελεστές,

$$1. \quad V = \mathbb{C} ([a, b] \times [\lambda_1, \lambda_2]) \text{ και } B = \bar{T},$$



2.  $W = \mathbb{C}([a, b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$  και

$$\mathbb{C}(u, w)(x, \lambda) = g(x, \lambda) + \int_a^x K^{(n)}(x, s, \lambda) w(s, \lambda) ds + \int_a^x \frac{\partial K^{(n)}}{\partial \lambda} u(s, \lambda) ds,$$

όπου,

$$g(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^x \frac{\partial K^{(i)}(x, s)}{\partial \lambda} f(s) ds.$$

Ο τελεστής  $A = (B, C)$  ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος 4.2 επειδή στον χώρο  $\mathbb{C}([a, b] \times [\lambda_1, \lambda_2])$  χρησιμοποιούμε την μετρική Bielecki και η  $K^{(n)}$  είναι συνεχής συνάρτηση. Αυτό μας δίνει την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας  $u_{n+1} = V(u_n)$  στο  $u^*$  της εξίσωσης (4.6.10) και την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας  $w_{n+1} = C(u_n, w_n)$  σε μία συνάρτηση  $w^*$ .

Εάν διαλέξουμε  $u_0 \in \mathbb{C}^1[a, b] \times [\lambda_1, \lambda_2]$  και  $w_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \lambda}$  στον τελεστή  $C$  έχουμε,

$$w_n = \frac{\partial u_n}{\partial \lambda}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Από το θεώρημα Weierstrass έχουμε ότι η  $w^*$  είναι συνεχής και  $w^*(x, \lambda) = \frac{\partial u^*(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ . Επομένως η  $u^*$  είναι συνεχής και διαφορίσιμη ως προς την παράμετρο  $\lambda$ .

**Παρατήρηση** Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια πιο άμεση απόδειξη χρησιμοποιώντας την παρακάτω ανίσωση:

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tw(x)| &\leq \int_a^x \frac{\max_{x, s \in [a, b], \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} |L(x, s, \lambda)|}{|x-s|^a} |u(s) - w(s)| ds \leq \\ &\leq L^* \|u - w\| \int_a^x \frac{e^{r(s-a)}}{(x-s)^a} ds \leq \left( \int_a^x \frac{ds}{(x-s)^{ap}} \right)^{1/p} \left( \int_a^x e^{r(s-a)q} ds \right)^{1/q} \\ &\leq \left( \frac{(b-a)^{1-ap}}{1-ap} \right)^{1/p} \frac{e^{r(x-a)}}{(rq)^{1/q}}. \end{aligned}$$

όπου,

$$ap < 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, L^* = \max_{x, s \in [a, b], \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} |L(x, s, \lambda)|$$

και

$$\|u - w\| = \max_{x \in [a, b], \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]} |u(x, \lambda) - w(x, \lambda)| e^{-r(x-a)}.$$

Έτσι μπορούμε να διαλέξουμε το  $r$ , ώστε ο τελεστής  $T$  να είναι συστολή σε Bielecki μετρικό χώρο.

## 5<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΟ – ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ VOLTERRA

#### 5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για μια κατηγορία πολύ δημοφιλών ολοκληρωτικών εξισώσεων στον τομέα της μηχανικής, τις ολοκληρό - διαφορικές εξισώσεις. Οι ολοκληρό - διαφορικές εξισώσεις είναι εξισώσεις με ολοκληρωτικούς και διαφορικούς τελεστές στην ίδια εξίσωση. Αυτό το τύπο εξισώσεων παρουσίασε για πρώτη φορά ο Volterra, το 1900, καθώς μελετούσε την αύξηση του πληθυσμού, βασιζόμενος στην μελέτη του για τις κληρονομικές επιρροές. Στην συνέχεια επιστήμονες και ερευνητές χρησιμοποίησαν τις ολοκληρό - διαφορικές εξισώσεις σε διεργασίες διάχυσης θερμότητας και μάζας, προβλήματα ηλεκτρικού κυκλώματος, κ. α. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι στις ολοκληρό - διαφορικές εξισώσεις η άγνωστη συνάρτηση  $u(x)$  και μία ή περισσότερες παράγωγοι της εμφανίζονται έξω και μέσα από το σύμβολο του ολοκληρώματος. Ένα τέτοιο απλό παράδειγμα έχουμε κατά την διάρκεια μετατροπή της διαφορικής εξίσωση σε ολοκληρωτική με την χρήση του κανόνα Leibnitz.

Θα επικεντρωθούμε στην μελέτη ολοκληρωτικών εξισώσεων με διαχωρίσιμους πυρήνες της μορφής

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) \mathbf{h}_k(\mathbf{t}).$$

Θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου  $K(x, t)$  είναι γινόμενο μόνο των  $g(x)$ ,  $h(x)$  δηλαδή  $K(x, t) = g(x)h(x)$ . Στις άλλες περιπτώσεις δουλεύουμε με την ίδια διαδικασία, γενικεύοντας την μεθοδολογία για  $k$  παράγοντες. Σε περίπτωση που ο πυρήνας δεν είναι διαχωρίσιμος μπορεί να μετατραπεί σε διαχωρίσιμο με την βοήθεια του αναπτύγματος Taylor.

#### 5.2 Μέθοδος επίλυσης με την βοήθεια σειρών

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια βασική μορφή ολοκληρό - διαφορικών εξισώσεων Volterra  $n$ -τάξης:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_0^x h(t)u(t) dt, \quad u^{(n)} = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1). \quad (5.2.1)$$

Θα κάνουμε χρήση των σειρών Frobenius. Θεωρούμε ότι η  $u(x)$  μπορεί να γραφεί σε μορφή σειρών γύρω από ένα σταθερό σημείο  $x = 0$ , δηλαδή,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \quad (5.2.2)$$

Οι συντελεστές  $a_k$  είναι άγνωστες σταθερές και θα πρέπει να προσδιοριστούν. Είναι σημαντικό να πούμε ότι οι συντελεστές θα προσδιοριστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή  $a_0 = u(0)$ ,  $a_1 = u'(0)$ ,  $a_2 = \frac{1}{2!} u''(0)$ , κ. τ. λ.

Κάνουμε αντικατάσταση στην εξίσωση (5.2.1) και έχουμε,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = f(x) + g(x) \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt. \quad (5.2.3)$$

Στην εξίσωση (5.2.3) αρχικά θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που βρίσκεται στο δεξί μέλος και στην συνέχεια θα γράψουμε την  $f(x)$  σε μορφή σειρών Taylor. Εξισώνοντας τα δύο μέλη, μπορούμε να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $a_0, a_1, a_2, \dots$ .

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρώ – διαφορική εξίσωση Volterra με την μέθοδο των σειρών,

$$u''(x) = x \cosh x - \int_0^x t u(t) dt, \quad u(0) = 0, u'(0) = 1. \quad (5.2.4)$$

Υποθέτουμε ότι η  $u(x)$  έχει την μορφή,

$$u(x) = \sum_0^x a_n x^n. \quad (5.2.5)$$

Αντικαθιστούμε στην (5.2.4) και στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας την Taylor έκφραση για την  $\cosh x$  η εξίσωση γίνεται,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) - \int_0^x t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt. \quad (5.2.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, βγάζουμε ότι  $a_0 = 0$  και  $a_1 = 1$ . Αναπτύσσοντας σειρές και στα δύο μέλη έχουμε,

$$2 a_2 + 6 a_3 x + 12 a_4 x^2 + 20 a_5 x^3 + \dots = x \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) - \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4} a^2 x^4 + \dots\right). \quad (5.2.7)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων μονωνύμων προκύπτει ότι

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = 0,$$

και γενικά

$$a_{2n} = 0, n \geq 0 \text{ και } a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, n \geq 0.$$

Αντικαθιστώντας στην (5.2.5) παίρνουμε λύση,

$$u(x) = x + \frac{x}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,$$

η οποία σε κλειστή μορφή γράφεται,

$$u(x) = \sinh x.$$

### 5.3 Μέθοδος Διάσπασης και Τροποποιημένης Διάσπασης

Θεωρούμε την βασική μορφή ολοκληρό-διαφορικής εξίσωσης Volterra

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad \mu\epsilon \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1), \quad (5.3.1)$$

όπου  $u^{(n)}$  είναι η  $n$ -ιοστή παράγωγος του  $u(x)$  και  $b_k$  είναι σταθερές που θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες. Εάν ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη από το 0 έως το  $x$  όσες φορές είναι και η δύναμη των παραγώγων τότε έχουμε,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right), \quad (5.3.2)$$

όπου το  $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k$  θα υπολογιστεί από τις αρχικές συνθήκες και ο  $L^{-1}$  είναι ο  $n$ -ιοστός ολοκληρωτικός τελεστής.

Εφαρμόζουμε την Μέθοδο Διάσπασης και θεωρούμε την λύση της εξίσωσης (5.3.2) σε μορφή σειρών

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad (5.3.3)$$

αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.3.3) και στα δύο μέλη έχουμε,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right)dt\right). \quad (5.3.4)$$

Αναπτύσσοντας τις σειρές παίρνουμε,

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right) \\ &+ L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_3(t)dt\right) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Οι όροι  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ , ... της άγνωστης συνάρτησης πλέον μπορούν να προσδιοριστούν αναδρομικά καθώς ισχύει,

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)),$$

$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt\right),$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt\right),$$

$$u_3(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt\right),$$

κ.τ.λ.

Γενικά ισχύει:

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x))$$

και

$$u_{n+1}(x) = L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt\right). \quad (5.3.6)$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.3.5) και (5.3.6) μπορούμε να προσδιορίσουμε τους όρους  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ , ... άμεσα και να βρούμε την λύση της εξίσωσης σε κλειστή μορφή.

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρό – διαφορική εξίσωση Volterra με την μέθοδο Διάσπασης,

$$u''(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad \text{με } u(0) = 0, u'(0) = 1. \quad (5.3.7)$$

Εφαρμόζοντας τον διπλό ολοκληρωτικό τελεστή  $L^{-1}$  με

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx, \quad (5.3.8)$$

και στα δύο μέλη της εξίσωσης (5.3.7) έχουμε,

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right). \quad (5.3.9)$$

Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της Μεθόδου Διάσπασης έχουμε,

$$u_0(x) = x + \frac{x^3}{3!},$$

$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt\right) = \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!},$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt\right) = \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}.$$

Επομένως παίρνουμε την λύση,

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots$$

που οδηγεί σε κλειστής μορφής λύση την  $u(x) = \sinh x$ .

**Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica**

Κάνοντας χρήση κατάλληλων εντολών του λογισμικού Mathematica βρίσκουμε τη αναλυτική λύση της ολοκληρό - διαφορικής εξίσωσης  $u''(x) = x + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt$ .

$$\text{eqn} = y''[x] == x + \lambda \int_0^x (x-t) y[t] dt;$$

$$\text{In[39]} = \text{sol} = \text{DSolveValue}[\text{eqn}, y[x], x]$$

[συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσης]

$$\text{Out[39]} = e^{x\lambda^{1/4}} c_1 + e^{-x\lambda^{1/4}} c_2 - e^{x\lambda^{1/4}} c_2 + c_1 \text{Cos}[x\lambda^{1/4}] + \left(-\frac{1}{\lambda^{3/4}} + c_1 - 2c_2\right) \text{Sin}[x\lambda^{1/4}]$$

Βάζουμε τις αρχικές συνθήκες  $u(0) = 0, u'(0) = 1$  και παίρνουμε ότι:

$$\text{In[40]} = \text{init1} = y[0] == 0;$$

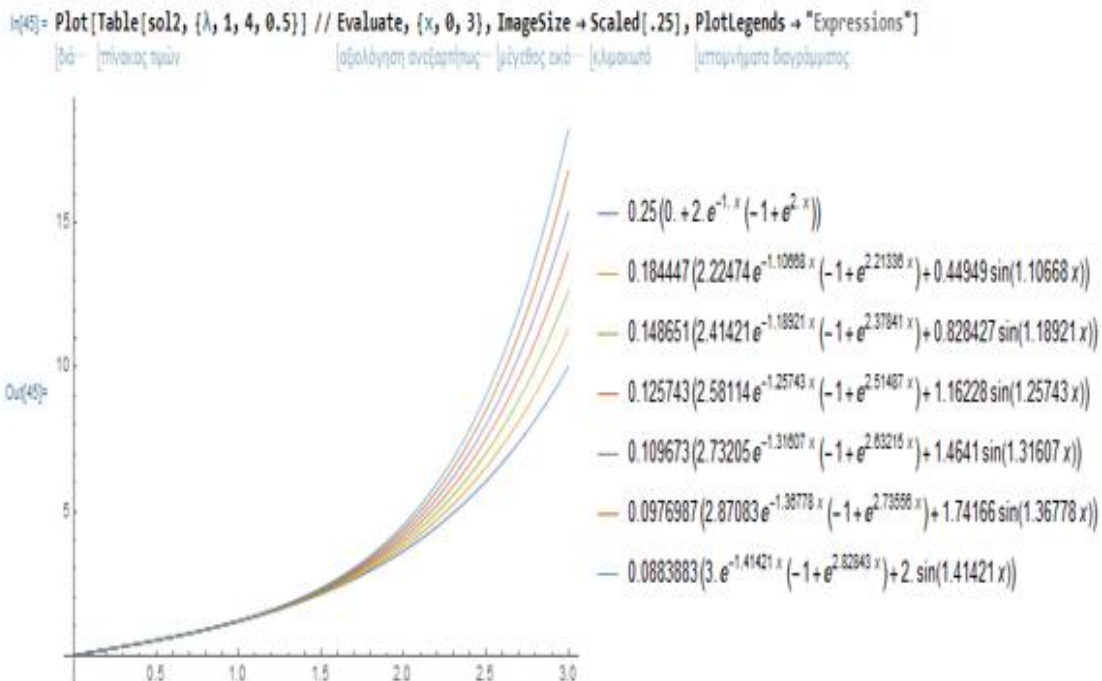
$$\text{In[41]} = \text{init2} = y'[0] == 1;$$

$$\text{In[42]} = \text{sol2} = \text{DSolveValue}[\{\text{eqn}, \text{init1}, \text{init2}\}, y[x], x]$$

[συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσης]

$$\text{Out[42]} = \frac{e^{-x\lambda^{1/4}} \left(-1 + e^{2x\lambda^{1/4}}\right) \left(1 + \sqrt{\lambda}\right) + 2 \left(-1 + \sqrt{\lambda}\right) \text{Sin}[x\lambda^{1/4}]}{4\lambda^{3/4}}$$

Τέλος απεικονίζουμε την αναλυτική λύση για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$  στο διάστημα  $[0,10]$ .



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση της αναλυτικής λύσης της ολοκληρό - διαφορικής εξίσωσης  $u''(x) = x + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt$ , με αρχικές συνθήκες  $u(0) = 0, u'(0) = 1$  για  $\lambda = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$  σε διάστημα  $[0,10]$ .

#### 5.4. ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΟΛΟΚΛΗΡΟ - ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ VOLTERRA

##### Μετατροπή ολοκληρό – διαφορικών εξισώσεων Volterra σε Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra

Σε αυτή την παράγραφο θα αναπτύξουμε την μέθοδο μετατροπής των ολοκληρό – διαφορικών εξισώσεων Volterra σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra, όπου ο πυρήνας της εξίσωσης είναι της μορφής  $K(x, t) = K(x - t)$ . Η διαδικασία μετατροπής βασίζεται στη συνεχή ολοκλήρωση και των δύο μελών της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες. Η παραπάνω διαδικασία αναλύεται με την βοήθεια χαρακτηριστικών παραδειγμάτων.

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Να μετατραπεί η παρακάτω ολοκληρό – διαφορική εξίσωση Volterra σε απλή ολοκληρωτική εξίσωση Volterra,

$$u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t) dt, \quad u(0) = 0.$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης από 0 έως x και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη έχουμε,

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^x u(t) dt \\ &= 2x - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4} \int_0^x (x - t) u(t) dt. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Παρατηρούμε ότι η (5.4.1) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra η οποία μπορεί να λυθεί με την Μέθοδο Διάσπασης, δηλαδή,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 2x - \frac{x^3}{12}, \\ u_1(x) &= \frac{1}{4} \int_0^x (x - t) \left( 2t - \frac{t^3}{12} \right) dt \\ &= \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος  $\frac{x^3}{12}$  εμφανίζεται με αντίθετα πρόσημα στα  $u_0(x)$  και  $u_1(x)$ . Εξαφανίζοντας τον όρο θορύβου από το  $u_0(x)$  βλέπουμε ότι η λύση είναι της μορφής  $u(x) = 2x$ , η οποία ικανοποιεί την αρχική μας εξίσωση.

##### Μετατροπή ολοκληρό – διαφορικών εξισώσεων Volterra σε Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Σε αυτή την παράγραφο θα αναπτύξουμε την μέθοδο μετατροπής τις ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις Volterra σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών, με πυρήνα της μορφής  $K(x, t) = K(x - t)$ . Η διαδικασία μετατροπής βασίζεται στην παραγωγή και των δύο μελών όσες

φορές χρειάζεται μέχρι να απαλειφθεί το σύμβολο της ολοκλήρωσης. Βασικό εργαλείο υλοποίησης αυτής της διαδικασίας είναι ο κανόνας του Leibnitz (Βλέπε 1.3). Υπενθυμίζουμε ότι,

εάν

$$u(x) = \int_{t=a(x)}^{t=b(x)} f(x, t) dt,$$

τότε,

$$\frac{dy}{dx} = \int_{t=a(x)}^{t=b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt + \frac{db(x)}{dx} f(b(x), x) - \frac{da(x)}{dx} f(a(x), x). \quad (5.4.2)$$

Έχοντας μετατρέψει την ολοκληρό - διαφορική εξίσωση Volterra σε πρόβλημα αρχικών τιμών, μια ποικιλία μεθόδων επίλυσης συνήθων διαφορικών εξισώσεων μπορούν να εφαρμοστούν για την επίλυση της εξίσωσης.

**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Να μετατραπεί η παρακάτω ολοκληρό - διαφορική εξίσωση Volterra σε πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t) dt, \quad u(0) = 0.$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς  $x$  έχουμε,

$$u''(x) = u(x), \quad \text{με αρχική συνθήκη } u(0) = 0. \quad (5.4.3)$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής,

$$u(x) = A \cosh x + B \sinh x,$$

με  $A$  και  $B$  είναι σταθερές, όπου προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες

και έχουμε  $A = 0$  και  $B = 1$ .

Επομένως η λύση είναι η ακόλουθη,

$$u(x) = \sinh x.$$

### Επίλυση εξίσωσης με την βοήθεια του Mathematica

Κάνοντας χρήση κατάλληλων εντολών του λογισμικού Mathematica βρίσκουμε την αναλυτική λύση της ολοκληρό - διαφορικής εξίσωσης  $y'(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$ .

$$\begin{aligned} \text{eqn} &= y'[x] == 1 + \int_0^x y[t] dt; \\ \text{sol} &= \text{DSolveValue}[\text{eqn}, y[x], x] \\ &\quad \text{[συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσης]} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{1} x} (-1 + (1 + e^{2\sqrt{1} x}) \sqrt{1} C[1])}{\sqrt{1}} \end{aligned}$$



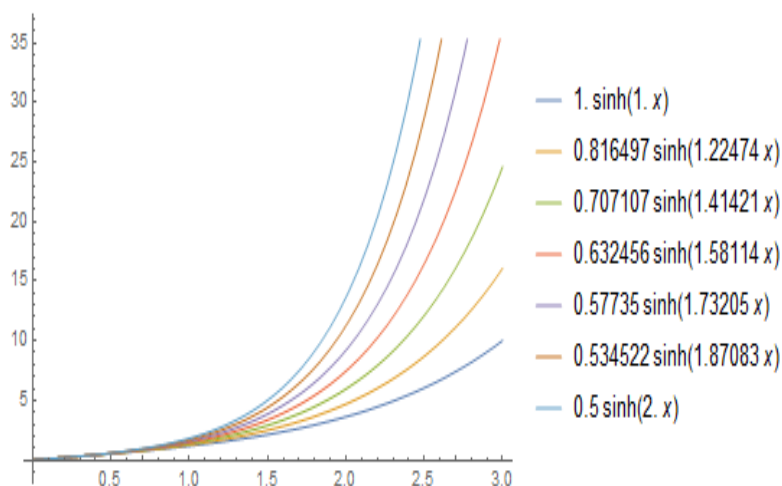
Αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη  $y(0) = 0$  και παίρνουμε ότι:

```
init1 = y[0] == 0;
sol2 = DSolveValue[{eqn, init1}, y[x], x]
|συμβολική λύση διαφορικής εξίσωσης
```

$$\frac{\text{Sinh}[\sqrt{1} x]}{\sqrt{1}}$$

Τέλος απεικονίζουμε τις αναλυτικές λύσεις της ολοκληρό – διαφορικής εξίσωσης για τις τιμές  $l = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$  στο διάστημα  $[0, 3]$ .

```
s1 = Plot[Table[sol2, {l, 1, 4, 0.5}] // Evaluate, {x, 0, 3}, ImageSize -> Scaled[.25], PlotLegends -> "Expressions"]
|διά... |πίνακας τιμών |αξιολόγηση ανεξαρτήτως... |μέγεθος εικό... |κλιμακωτό |υπομνήματα διαγράμματος
```



Σχήμα 5.4: Απεικόνιση αναλυτικών λύσεων της  $y'(x) = 1 + \int_0^x y(t)dt$ , με αρχική συνθήκη  $y(0) = 0$  για  $l = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$  στο διάστημα  $[0, 3]$ .

## 5.5 Θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας ολοκληρό – διαφορικών εξισώσεων Volterra

Όπως αναφέραμε και στο εισαγωγικό κεφάλαιο η αναλυτική επίλυση των ολοκληρό-διαφορικών εξισώσεων είναι συνήθως μια δύσκολη διαδικασία. Παρακάτω παραθέτονται μερικά θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης [40].

**Θεώρημα 5.1** Θεωρούμε την εξίσωση με μορφή,

$$u(t) = f(t) + \int_0^x K(x, t, u(t)). \quad (5.5.1)$$

Εάν ισχύει:

1. Η  $f(x)$  είναι συνεχής συνάρτηση,
2.  $K(x, t, u)$  είναι συνεχής συνάρτηση για  $0 \leq x \leq t \leq b$ ,  $-\infty \leq \|u\| \leq \infty$ ,
3. ο πυρήνας ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz, δηλαδή:
 
$$\|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|, \quad (5.5.2)$$

όπου ο  $L$  είναι ανεξάρτητος των  $x, t, u_1$  και  $u_2$ , τότε η εξίσωση (5.5.1) έχει μοναδική λύση στο  $0 \leq x \leq b$ .

**Πόρισμα** Θεωρούμε την εξίσωση με μορφή,

$$u'(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t))dt, \quad (5.5.3)$$

με αρχική συνθήκη  $y(0) = a$ , όπου  $f$  και  $K$  είναι συνεχείς συναρτήσεις και ο  $K$  ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz (5.5.2)

$$\|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)\| \leq L \|u_1 - u_2\|,$$

τότε η εξίσωση έχει μοναδική συνεχή λύση.

**Απόδειξη**

Αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $s$  στην (5.5.3) και η εξίσωση γίνεται

$$u'(s) = f(s) + \int_0^s K(s, t, u(t))dt. \quad (5.5.4)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας την υπόθεση  $u(0) = a$ , έχουμε

$$u(x) = a + \int_0^x f(s) ds + \int_0^x \int_0^s K(s, t, u(t)) dt ds,$$

ή

$$u(x) = a + \int_0^x (f(s) + \int_0^s K(s, t, u(t))dt) ds. \quad (5.5.5)$$

Θέτοντας  $H(s, y(s)) = f(s) + \int_0^s K(s, t, u(t))dt$ , συνεχή συνάρτηση και αντικαθιστώντας στην (5.5.5) παίρνουμε,

$$u(t) = a + \int_0^x H(s, u(s)) ds,$$

και

$$\begin{aligned} \|H(s, u_1(s)) - H(s, u_2(s))\| &= \left\| \int_0^s (K(s, t, u_1(t)) - K(s, t, u_2(t))) dt \right\| \\ &\leq \int_0^s \|K(s, t, u_1) - K(s, t, u_2(t))\| dt \\ &\leq L_1 \|u_1 - u_2\| \int_0^s dt \end{aligned}$$

$$\leq L_1 b \|u_1 - u_2\|.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έχουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα συνεχούς λύσης.

**Πόρισμα** Εάν στην εξίσωση

$$u'(x) + c u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t)) dt, \quad (5.5.6)$$

με συνθήκη  $u(0) = a$ , οι συναρτήσεις  $f$  και  $K$  είναι συνεχείς και ικανοποιούν την συνθήκη Lipschitz (5.5.2), τότε η εξίσωση (5.5.6) με τις δοθείς συνθήκες έχει μοναδική συνεχή λύση.

**Απόδειξη**

Αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $s$  στην (5.5.6) και η εξίσωση γίνεται,

$$u'(s) = f(s) - cu(s) + \int_0^s K(s, t, u(t)) dt. \quad (5.5.7)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας την συνθήκη  $u(0) = a$  έχουμε,

$$u(x) = a + \int_0^x f(s) ds - c \int_0^x u(s) ds + \int_0^x \left( \int_0^s K(s, t, u(t)) dt \right) ds.$$

Ωστόσο,

$$u(x) = a + \int_0^x \{ f(s) - cu(s) + \int_0^s K(s, t, u(t)) dt \} ds.$$

Θέτοντας  $H(s, u(s)) = f(s) - cu(s) + \int_0^s K(s, t, u(t)) dt$  συνεχής συνάρτηση έχουμε,

$$\|H(s, u_1(s)) - H(s, u_2(s))\| = \|c [u_2(s) - u_1(s)] + \int_0^s [K(s, t, u_1(t)) - K(s, t, u_2(t))] dt\|$$

$$\leq |c| \|u_1 - u_2\| + \int_0^s L_1 \|u_1 - u_2\| dt$$

$$\leq (|c| + b L_1) \|u_1 - u_2\|.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα συστολής έχουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα συνεχούς λύσης.

**Πόρισμα** Εάν στην εξίσωση

$$u''(x) + c_1 u'(x) + c_2 u(x) = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t)) dt, \quad (5.5.8)$$

με αρχικές συνθήκες  $u(0) = a$ ,  $u'(0) = b$ , οι συναρτήσεις  $f$  και  $K$  είναι συνεχείς και η  $K$  ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz (5.5.2), τότε το πρόβλημα έχει μοναδική συνεχή λύση.

**Απόδειξη**

Αντικαθιστούμε το  $x$  με το  $s$  στην (5.5.8) και η εξίσωση γίνεται,

$$u''(s) + c_1 u'(s) + c_2 u(s) = f(s) + \int_0^s K(s, t, u(t)) dt, \quad (5.5.9)$$

ολοκληρώνοντας δύο φορές και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες  $u(0) = a$ ,  $u'(0) = b$  έχουμε,

$$u(z) = a + (b - c_1 a)z + \int_0^x \left\{ -c_1 u(s) + \int_0^s (f(s) - c_2 u(s) + \int_0^s K(s, t, u(s)) dt) ds \right\} dx.$$

Θέτοντας

$$H(x, u(x)) = -c_1 u(x) + \int_0^x (f(s) - c_2 u(s) + \int_0^s K(s, t, u(s)) dt) ds,$$

έχουμε,

$$\begin{aligned} & \|H(x, u_1(x)) - H(x, u_2(x))\| = \\ & = \left\| c_1(u_2(s) - u_1(s)) + \int_0^x (c_2(u_2(s) - u_1(s)) + \int_0^s K(s, t, u_1(s)) - \right. \\ & \quad \left. K(s, t, u_2(s)) dt) ds \right\| \\ & \leq |c_1| \|u_1 - u_2\| + b \|u_1 - u_2\| + \int_0^x \int_0^x L_1 \|u_1 - u_2\| dt ds \\ & \leq (|c_1| + b|c_2| + b^2 L_1) \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.1 έχουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα συνεχής λύσης.

**Παρατήρηση** Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε για το αρχικό πρόβλημα εάν έχουμε (n) παραγώγους, δηλαδή,

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^x K(x, t, u(t)) dt,$$

με συνθήκες  $u^{(i)}(0) = a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , όπου οι συναρτήσεις  $f$  και  $K$  είναι συνεχείς και η  $K$  ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz.

## 6<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΟΛΟΚΛΗΡΟ - ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ VOLTERRA Η ΕΞΙΣΩΣΗ THOMAS-FERMI

#### 6.1 Ιστορική αναδρομή

Ο Η. Thomas [9] και ο E. Fermi [10] ανεξάρτητα το 1927, έδωσαν μία μέθοδο μελέτης για την σφαιρικά συμμετρική κατανομή δυναμικού σε άτομα με μεγάλο πλήθος ηλεκτρονίων. Αυτό τους οδήγησε στην μη γραμμική 2<sup>ης</sup> τάξης διαφορική εξίσωση (6.1.1). Παρόλο που η ακριβής λύση της εξίσωσης είναι άγνωστη, μπορούμε να αντλήσουμε σημαντικές πληροφορίες μελετώντας τις ασυμπτωματικές ιδιότητες της εξίσωσης όταν το  $x \rightarrow 0$  και όταν το  $x \rightarrow \infty$  [44].

$$x^{1/2}u''(x) = [u(x)]^{3/2} \quad (6.1.1)$$

Οι φυσικοί ενδιαφέρονταν για 3 διαφορετικές περιπτώσεις συνοριακών τιμών:

$$1. \quad u(0) = 1, \quad ru'(r) = u(r), \quad r: \text{ατομική ακτίνα Bohr}, \quad (6.1.2)$$

$$2. \quad u(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad \text{ουδέτερο άτομο}, \quad (6.1.3)$$

$$3. \quad u(0) = 1, \quad u(a) = 0, \quad \text{ιόν}. \quad (6.1.4)$$

Η λύση της (6.1.1) δίνεται ως,

$$u(x) = 1 + b_2x + b_3x^{3/2} + b_4x^{5/2} + \dots \quad (6.1.5)$$

#### Παρατηρήσεις:

- Οι σειρές θεωρούνται ως ημισυγκλίνουσες [11].
- Η ασυμπτωματική συμπεριφορά της (6.1.5) για μεγάλες τιμές του  $x$  προσδιορίστηκε από τον A. Sommerfeld [12].
- Υπολογίστηκε ότι

$$u_0(x) \sim 144x^{-3} [1 + (12^{2/3}x^{-1})^\sigma]^{-1/2r},$$

με

$$\sigma = \frac{1}{2}[\sqrt{73} - 7] \quad \text{και} \quad r = \frac{1}{2}[\sqrt{73} + 7].$$

Ο παράγοντας  $144x^{-3}$  είναι η ιδιόμορφη λύση που δίνει ο H. Thomas.

- Η ύπαρξη μια τέτοια λύσης αποδείχθηκε με το θεώρημα A. Mambriani [13], το 1929.

#### 6.2 Εύρεση της εξίσωσης

Θεωρούμε ένα σύστημα από  $N$  ηλεκτρόνια σε ακίνητη κατάσταση που υπακούν την εξίσωση Schrödinger,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u(r_i, r_j) \right] \Psi(r_1, r_2, \dots, r_N) = E_i \Psi(r_1, r_2, \dots, r_N). \quad (6.2.1)$$

Η μέθοδος Thomas-Fermi επικεντρώνεται στην διαδικασία εύρεσης λύσης αποφεύγοντας την κυματοσυνάρτηση  $\Psi$  και χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ηλεκτρονίων  $\rho(r)$ , που είναι ένα μέγεθος φυσικά παρατηρήσιμο και μετρήσιμο.

Για ένα σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση  $\phi(r)$ , η πυκνότητα αντιπροσωπεύει το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί ένα οποιοδήποτε σωματίδιο κοντά σε μια συγκεκριμένη θέση στο χώρο, δηλαδή,

$$\rho(r) = \phi^*(r) \phi(r). \quad (6.2.2)$$

Για ένα σύστημα  $N$  σωματιδίων έχουμε,

$$\rho(r) = N \int \Psi^*(r, r_2, \dots, r_N) \Psi(r, r_2, \dots, r_N) dr_2 \dots dr_N. \quad (6.2.3)$$

Η προσέγγιση Thomas-Fermi [14] είναι ημικλασσική, δηλαδή μερικές ιδέες πάρθηκαν από την κβαντομηχανική χρησιμοποιώντας όμως τελεστές με κανονικές συναρτήσεις αντί για κβαντομηχανικούς τελεστές. Η συνθήκη για την ημικλασσική προσέγγιση μπορεί να είναι εφαρμοστέα με χωρικές αναλογίες του de Broglie<sup>6</sup> μήκους κύματος σε ένα σύστημα όπου οι άγνωστοι πρέπει να είναι λίγοι. Συγκεκριμένα, θεωρούμε την ορμή  $p$  ως χωρική συνάρτηση και εισάγουμε τον αριθμό κύματος  $K(x) = \frac{1}{\hbar p(x)}$ , τότε το de Broglie κυματομήκος [42] γίνεται  $\lambda(x) = \frac{1}{K(x)}$ . Τα πάντα είναι ανεξάρτητα της θέσης και η συνθήκη της ημικλασσικής προσέγγισης είναι:

$$\xi = \left| \frac{d\lambda(x)}{dx} \right| \ll 1. \quad (6.2.4)$$

Από την κβαντομηχανική παραμένουν δύο στοιχεία:

- 1) Τα στατιστικά του Fermi, δηλαδή όλες οι καταστάσεις που έχουν Μέγιστη Ενέργεια και Ορμή Fermi, μπορούν να ποικίλλουν με την πάροδο του χρόνου.
- 2) Η αρχή αβεβαιότητας, δηλαδή κάθε στοιβάδα στο χώρο με όγκο  $h^3$  μπορεί να φιλοξενήσει πάνω από 2 ηλεκτρόνια με αντίθετη κατεύθυνση περιστροφής.

Στην θεμελιώδη κατάσταση υποθέτουμε ότι η  $p_F$  πάνω σε όγκο  $V$  μετράει τον αριθμό ηλεκτρονίων  $N$ , δηλαδή,

$$\frac{4\pi}{3} p_F^3 V \frac{2}{h^3} = N, \quad (6.2.5)$$

με πυκνότητα

<sup>6</sup> Στη φυσική σύμφωνα με την πρόταση που διατύπωσε ο πρώτος ο Γάλλος φυσικός Louis De Broglie η ύλη μπορεί να έχει κυματική συμπεριφορά (κυματοσωματιδιακός δυϊσμός) και επομένως τα υλικά σωματίδια συμπεριφέρονται σε ορισμένες περιπτώσεις ως κύματα, γνωστά ως **κύματα Ντε Μπροκλί ή Υλοκύματα**. Σύμφωνα, με την κυματική αυτή υπόθεση, ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο μάζας  $m$  και ταχύτητας  $u$  χαρακτηρίζεται από ένα μήκος κύματος  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu}$ , όπου  $h$  είναι η σταθερά Πλανκ. Ο Ντε Μπρολί διατύπωσε την πρότασή του στα πλαίσια της διδακτορικής του διατριβής, το 1923.

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 \quad \text{ή} \quad p_F = \left[ \frac{3h^3}{8\pi} \rho \right]^{1/3}. \quad (6.2.6)$$

Υποθέτουμε ότι  $\rho$  και  $p_F$  εξαρτώνται από το  $r$  διατηρώντας την συνθήκη (6.2.4). Επιπλέον υποθέτουμε ότι όλα τα ηλεκτρόνια κινούνται σε δυναμικό πεδίο  $V(r)$  και η ενέργεια του πιο γρήγορου ηλεκτρονίου δίνεται από την σχέση,

$$E_{\max} = \frac{p_F^2(r)}{2m} + V(r), \quad (6.2.7)$$

όπου συμπεριλαμβάνει τη κινητική και δυναμική ενέργεια και το άθροισμα – τουλάχιστον στην κατάσταση ισορροπίας - παραμένει σταθερό. Σε αντίθετη περίπτωση τα ηλεκτρόνια θα έφευγαν σε περιοχές με μεγαλύτερη ενέργεια ως ότου αυτή γίνει σταθερή. Συνδυάζοντας την (6.2.6) και (6.2.7) έχουμε:

$$E_{\max} = \frac{1}{2m} \left[ \frac{3h^3}{8\pi} \rho \right]^{2/3} + V(r). \quad (6.2.8)$$

Ξέρουμε ότι,  $T = \int t(r) dr$ , όπου  $T$  η Κινητική Ενέργεια και  $t$  η Κινητική Πυκνότητα και βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} t &= \frac{T}{V} = \frac{1}{V} \int \frac{p^2}{2m} dN = \frac{1}{V} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} \frac{4 \cdot \pi p^2 \cdot V \cdot 2}{h^3} dp \\ &= \frac{8\pi}{2m h^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{8\pi}{2m h^3} \frac{p_F^5}{5}. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.2.6) και (6.2.9) παίρνουμε,

$$t = \frac{8\pi}{2m h^3} \cdot \frac{1}{5} \left[ \frac{3h^3}{8\pi} \rho(r) \right]^{5/3} = \frac{3h^2}{10m} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} [\rho(r)]^{5/3}, \quad \text{με } C_k = \frac{3h^2}{10m} \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (6.2.10)$$

Η Δυναμική Ενέργεια οφείλεται στην αλληλεπίδραση με τον εξωτερικό χώρο  $V_{\text{ext.}}(r)$  και στην ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση της ηλεκτρικής πυκνότητας με τον εαυτόν της.

$$U = e \int \rho(r) V_{\text{ext.}}(r) dr + \frac{1}{2} e^2 \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r-r'|} dr dr'. \quad (6.2.11)$$

Επομένως η Ολική Ενέργεια είναι:

$$E_{\text{tot}} = C_k \int [\rho(r)]^{5/3} dr + e \int \rho(r) V_{\text{ext.}}(r) dr + \frac{1}{2} e^2 \int \frac{\rho(r)\rho(r')}{|r-r'|} dr dr'. \quad (6.2.12)$$

Θα ερευνήσουμε παρακάτω μια τέτοια κατανομή πυκνότητας ηλεκτρονίων που θα ελαχιστοποιεί την Ολική Ενέργεια, υπό κατάλληλη κανονικοποίηση,

$$\int \rho(r) = N, \quad (6.2.13)$$

$$\delta(E_{\text{tot}} - \mu N) = 0. \quad (6.2.14)$$

Εισάγοντας πολλαπλασιαστή Lagrange  $\mu$  ως προς  $\rho(r)$  έχουμε:

$$\delta(E_{\text{tot}} - \mu N) = \int \left\{ \frac{5C_k}{3} [\rho(r)]^{2/3} + eV_{\text{ext.}}(r) + e^2 \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr' - \mu \right\} \delta\rho(r) dr = 0,$$

$$\frac{5C_k}{3} [\rho(r)]^{2/3} + eV_{\text{ext.}}(r) + e^2 \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr' = \mu. \quad (6.2.15)$$

Αυτή είναι η Thomas-Fermi εξίσωση στην κατάσταση ισορροπίας.

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με την (6.2.8) και παρατηρώντας ότι στους τελευταίους όρους της αριστερής πλευράς παρουσιάζεται η δυναμική ενέργεια, βλέπουμε ότι το  $\mu$  είναι η κλασσική ενέργεια του γρηγορότερου ηλεκτρονίου που μπορεί να αναγνωριστεί ως η Ενέργεια Fermi. Από την άλλη, η εξίσωση  $\mu = \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial N}$  εκφράζει το χημικό δυναμικό.

Η σχέση (6.2.15) είναι η Thomas - Fermi εξίσωση για το  $\rho(r)$  σε ολοκληρωτική μορφή.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις των  $\rho$  και  $p_F$  έχουμε,

$$\rho^{1/3}(r) = p_F \left( \frac{8\pi}{3h^3} \right)^{1/3} = \frac{1}{(3\pi^2)^{1/3}} \cdot \frac{p_F}{h} = \frac{1}{(3\pi^2)^{1/3}} k_F,$$

και με την (6.2.15) παίρνουμε,

$$\frac{5}{3} C_k \frac{1}{(3\pi^2)^{2/3}} k_F^2(r) + eV_{\text{ext.}}(r) + \frac{e^2}{3\pi^2} \int \frac{k_F^3(r')}{|r-r'|} dr' = \mu, \quad (6.2.16)$$

ή

$$\frac{p_F(r)}{2m} + eV_{\text{ext.}}(r) + \frac{e^2}{3\pi^2} \int \frac{k_F^3(r')}{|r-r'|} dr' = \mu.$$

Ξέρουμε ότι για το δυναμικό ισχύει,

$$u(r) = e \int \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dr',$$

και πρέπει να ικανοποιείται η εξίσωση Poisson άρα

$$\Delta u(r) = -4\pi e \rho(r). \quad (6.2.17)$$

Από την σχέση (6.2.16) έχουμε:

$$\rho(r) = \left( \frac{3}{5C_k} \right)^{3/2} [\mu - eV_{\text{ext.}} - eu(r)]^{3/2}, \quad (6.2.18)$$

και με την (6.2.17) έχουμε:

$$\Delta u(r) = -4\pi e \left( \frac{3}{5C_k} \right)^{3/2} [\mu - eV_{\text{ext.}} - eu(r)]^{3/2}$$



$$= -\frac{32\pi^2 e}{3h^3} (2m)^{3/2} [\mu - eV_{\text{ext.}} - eu(r)]^{3/2}. \quad (6.2.19)$$

Αυτή είναι η εξίσωση Thomas-Fermi σε διαφορική μορφή.

### 6.3 Thomas - Fermi άτομο

Έστω ένα Thomas - Fermi ουδέτερο άτομο, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

$$N = Z, V_{\text{ext.}} = -\frac{eZ}{r} \text{ και } \Delta V_{\text{ext.}}(r) = 4\pi eZ\delta(r).$$

Η Ενεργειακά χαμηλή λύση της εξίσωσης Thomas - Fermi είναι μοναδική. Συνδυάζοντας το εξωτερικό πεδίο ενός νουκλεόνιου και το πεδίο Coulomb δημιουργείται μια ηλεκτρική πυκνότητα της μορφής:

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{ext.}}(r) + u(r),$$

$$\Delta V_{\text{eff}}(r) = 4\pi eZ\delta(r) + \Delta u(r).$$

Όταν  $r \rightarrow \infty$ , τότε  $\rho(r) \rightarrow 0$  και το δυναμικό Coulomb δημιουργεί σφαιρική συμμετρία με την κατανομή του ουδέτερου φορτίου να πέφτει στο 0. Στην εξίσωση (6.2.18) όλα προσεγγίζουν το 0 καθώς το  $r \rightarrow \infty$ , ενώ για  $\mu = 0$  επέρχεται ισορροπία και η (6.2.19) γίνεται:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{eff}}(r) - 4\pi eZ\delta(r) &= -\frac{32\pi^2 e}{3h^3} (2m)^{3/2} [-eV_{\text{eff}}(r)]^{3/2}, \\ -\Delta V_{\text{eff}}(r) &= \frac{32\pi^2 e}{3h^3} (2m)^{3/2} [-eV_{\text{eff}}(r)]^{3/2} - 4\pi eZ\delta(r). \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Η  $\delta$  - συνάρτηση έχει ως συνοριακές συνθήκες:

$$V_{\text{eff}}(r) \rightarrow -\frac{Z}{r}, \text{ όταν } r \rightarrow 0,$$

$$V_{\text{eff}}(r) \rightarrow 0, \text{ όταν } r \rightarrow \infty \text{ με } V_{\text{eff}}(r) \text{ μοναδική λύση.}$$

Για  $r \neq 0$  η εξίσωση έχει λύση:

$$-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r V_{\text{eff}}(r) = \frac{32\pi^2 e}{3h^3} (2m)^{3/2} e^{3/2} [-eV_{\text{eff}}(r)]^{3/2}. \quad (6.3.2)$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι  $V_{\text{eff}}(r) = -Z/r\chi(\alpha r)$  η σχέση (6.3.1) γίνεται:

$$\frac{Z\alpha^3}{x} \frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \left(\frac{Z\alpha}{x}\right)^{3/2} \frac{32\pi^2 e}{h^3} (2me)^{3/2} [\chi(x)]^{3/2},$$

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \left(\frac{Z}{x}\right)^{1/2} \alpha^{-3/2} \frac{32\pi^2 e}{3h^3} (2me)^{3/2} [\chi(x)]^{3/2},$$

$$\frac{d^2\chi(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^{1/2}} \left[ Z^{1/2} \frac{32\pi^2 e}{h^3} (2me)^{3/2} \alpha^{-3/2} \right] [\chi(x)]^{3/2}. \quad (6.3.3)$$

Η αγκύλη μπορεί να ισούται με 1, εάν διαλέξουμε ότι  $\alpha = \frac{32\pi^2 e}{3h^3} 2me Z^{1/3}$ .

Αυτό οδηγεί σε μία ολική μορφή της Thomas-Fermi εξίσωσης που προσδιορίζει το  $\chi(x)$ .

### Παρατηρήσεις:

1. Ας υποθέσουμε ότι  $V_{\text{eff}}(r) \sim r^{-\nu}$  όταν  $r \rightarrow \infty$ , τότε

$$-\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r V_{\text{eff}}(r) \sim r^{-(\nu+2)}.$$

Από την άλλη μεριά το  $[-V_{\text{eff}}(r)]^{3/2} \sim r^{-3\nu/2}$ , για  $\nu + 2 = 3\nu/2$ , δηλαδή για  $\nu = 4$ , και  $\rho(r) \sim \Delta V_{\text{eff}}(r) \sim [-eV_{\text{eff}}(r)]^{3/2}$ , δηλαδή  $\rho(r) \sim r^{-6}$ .

Όταν  $r \rightarrow 0$  έχουμε

$$V_{\text{eff}}(r) \sim -\frac{Z}{r} \text{ και } \rho(r) \sim r^{-3/2}.$$

2. Η εξίσωση έχει λύση σε ουδέτερο ή θετικά φορτισμένο ιόν, ενώ σε αρνητικά φορτισμένο ιόν η λύση είναι μη φραγμένη.
3. Είναι λάθος η εκτίμηση ότι το  $\rho(r) \sim r^{-6}$  όταν  $r \rightarrow \infty$ , στην πραγματικότητα ισχύει  $\rho(r) \sim e^{-6}$ , όταν  $r \rightarrow \infty$ . Ομοίως, όταν  $r \rightarrow 0$  έχουμε ότι το  $\rho(r) \sim r^{-3/2}$  ενώ στην πραγματικότητα η συνάρτηση  $\rho(r)$  τείνει στο άπειρο [44].
4. Η Ολική Ενέργεια είναι χαμηλή, ειδικά σε ελαφριά άτομα.
5. Δεν υπάρχει χημική δέσμευση, δηλαδή η Ολική Ενέργεια δεν είναι ποτέ μικρότερη σε σχέση με δύο άτομα που βρίσκονται σε απόσταση [15].
6. Η θεωρία είναι ασυμπτωτικά ακριβής για  $N \rightarrow \infty$ .

Το πιο σοβαρό ελάττωμα στην εφαρμογή της θεωρίας είναι ότι η θεωρία δεν προβλέπει δεσμούς μεταξύ των ατόμων και έτσι μόρια και στερεά δεν μπορούν να σχηματιστούν. Η κύρια πηγή του λάθους προέρχεται από την προσέγγιση της Κινητικής Ενέργειας, η οποία αντιπροσωπεύει ένα μεγάλο μέρος της Συνολικής Ενέργειας και έτσι μικρά σφάλματα μπορούν να είναι καταστροφικά.

## 6.4 Επίλυση με Μέθοδο Διάσπασης Adomian

Στην συνέχεια παραθέτονται μέθοδοι επίλυσης της εξίσωσης Thomas - Fermi στην διαφορική μορφή της.

Δίνεται ότι η αδιάστατη μορφή της Thomas - Fermi εξίσωσης είναι:

$$u'' = x^{-1/2} u^{3/2},$$

με συνοριακές συνθήκες  $u(0) = 1, u(a) = 0, a$  θετική σταθερά. (6.4.1)

Χρησιμοποιώντας την Μέθοδο Διάσπασης [16, 17] γράφουμε

$$u = c_1 + c_2 x + L^{-1} x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \{u^{3/2}\} \quad (6.4.2)$$

όπου,

$L^{-1}$  : ο τελεστής διπλής ολοκλήρωσης,

$A_n \{u^{3/2}\}$ : τα πολυώνυμα Adomian για  $u^{3/2}$ ,

$c_1, c_2$ : σταθερές ολοκλήρωσης.

Θεωρούμε  $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$  και  $u_0 = c_1 + c_2 x$  και η εξίσωση (6.4.2) γίνεται:

$$u_{n+1} = L^{-1} x^{-1/2} A_n. \quad (6.4.3)$$

Για τα  $A_n$  έχουμε:

$$A_0 = u_0^r,$$

$$A_1 = r u_0^{r-1} u_1,$$

$$A_2 = r u_0^{r-1} u_2 + \frac{1}{2} r(r-1) u_0^{r-2} u_1^2,$$

$$A_3 = r u_0^{r-1} u_3 + r(r-1) u_0^{r-2} u_1 u_2 + \frac{1}{6} (r-1)(r-2) u_0^{r-3} u_1^3,$$

$$A_4 = r u_0^{r-1} u_4 + r(r-1) \left[ \frac{1}{2} u_2^2 + u_1 u_3 \right] + \frac{1}{2} r(r-1)(r-2) u_0^{r-3} u_1^2 u_2.$$

⋮

Θεωρούμε ότι  $z_n = \sum_{m=0}^{n-1} u_m$ , ως δική μας προσεγγιστική λύση, η οποία συγκλίνει πολύ γρήγορα στο  $u$ . Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στην πρώτη προσέγγιση έχουμε:

$$z_1 = u_0 = c_1 + c_2 x = 1 - a^{-1}x. \quad (6.4.4)$$

Για τους επόμενους όρους έχουμε:

$$u_1 = L^{-1} x^{-1/2} A_0 = L^{-1} x^{-1/2} u_0^{3/2} = L^{-1} x^{-1/2} (1 - a^{-1}x)^{3/2},$$

$$u_2 = L^{-1} x^{-1/2} A_1 = L^{-1} x^{-1/2} r u_0^{r-1} u_1 = L^{-1} x^{-1/2} \left( \frac{3}{2} \right) (1 - a^{-1}x)^{1/2} u_1,$$

$$u_3 = L^{-1} x^{-1/2} A_2 = L^{-1} x^{-1/2} \left[ r u_0^{r-1} u_2 + \frac{1}{2} r(r-1) u_0^{r-2} u_1^2 \right]$$

$$= L^{-1} x^{-1/2} \left[ \left( \frac{3}{2} \right) (1 - a^{-1}x)^{1/2} u_2 + \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) (1 - a^{-1}x)^{-1/2} u_1^2 \right],$$

$$u_4 = L^{-1} x^{-1/2} A_3 = L^{-1} x^{-1/2} \left[ r u_0^{r-1} u_3 + r(r-1) u_0^{r-2} u_1 u_2 + \frac{1}{6} (r-1)(r-2) u_0^{r-3} u_1^3 \right]$$

$$= L^{-1} x^{-1/2} \left[ \left(\frac{3}{2}\right) (1 - a^{-1}x)^{1/2} u_3 + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (1 - a^{-1}x)^{-1/2} u_1 u_2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) (1 - a^{-1}x)^{-3/2} u_1^3 \right],$$

$$u_5 = L^{-1} x^{-1/2} A_4 = L^{-1} x^{-1/2} \left[ r u_0^{r-1} u_4 + r(r-1) \left[ \frac{1}{2} u_2^2 + u_1 u_3 \right] + \frac{1}{2} r(r-1)(r-2) u_0^{r-3} u_1^2 u_2 \right]$$

$$= L^{-1} x^{-1/2} \left[ \left(\frac{3}{2}\right) (1 - a^{-1}x)^{1/2} + \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (1 - a^{-1}x)^{-1/2} \left( \frac{1}{2} u_1^2 + u_1 u_3 \right) + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (1 - a^{-1}x)^{-3/2} u_1^2 u_2 \right].$$

Δίνεται ότι:

$$(1 - a^{-1}x)^{3/2} = 1 - \frac{3}{2} a^{-1}x + \frac{3}{8} a^{-2}x^2 - \dots,$$

$$(1 - a^{-1}x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} a^{-1}x + \frac{1}{8} a^{-2}x^2 - \dots,$$

$$(1 - a^{-1}x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} a^{-1}x + \frac{3}{4} a^{-2}x^2 - \dots,$$

$$(1 - a^{-1}x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} a^{-1}x + \frac{15}{8} a^{-2}x^2 - \dots,$$

⋮

$$(1 - a^{-1}x)^n = 1 + n a^{-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{-3}x^3 + \dots,$$

« διωνυμική έκφραση ».

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την προσέγγιση, χρησιμοποιώντας τις συνοριακές τιμές, δηλαδή  $z_{n+1}(0) = 1$  και  $z_{n+1}(a) = 0$ .

## 6.5 Επίλυση με την Βελτιωμένη Μέθοδο Διαφορικού Μετασχηματισμού (Improved Differential Transform Method)

Η μέθοδος **Βελτιωμένη Μέθοδος Διαφορικού Μετασχηματισμού (Differential Transform Method) (D.T.M.)** αναπτύχθηκε από τον Zhou κατά την διάρκεια της μελέτης του πάνω στα ηλεκτρικά κυκλώματα [18]. Η μέθοδος προσφέρει αναλυτική λύση με την βοήθεια πολυωνυμικών σειρών. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η μη απαίτηση διακριτοποίησης και γραμμικοποίησης [19]. Θα εφαρμόσουμε αυτή την μέθοδο για την επίλυση της εξίσωσης  $u'' = x^{-1/2} u^{3/2}$ .

Ο μετασχηματισμός της μονοδιάστατης συνάρτησης [41]  $u(x)$  ορίζεται ως,

$$U(k) = DT\{u(x)\} = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right]_{x=0}, \quad (6.5.1)$$

όπου  $u(x)$  και  $U(x)$  ορίζονται η βασική και η μετασχηματισμένη συνάρτηση. Αντίστροφα, ο αντίστροφος διαφορικός μετασχηματισμός δίνεται ως,

$$u(x) = DT^{-1}\{U(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{U(k)x^k\}. \quad (6.5.2)$$

**Παρατήρηση** Οι λεπτομέρειες για τον ορισμό και τις ιδιότητες του  $n$  - διάστατου διαφορικού μετασχηματισμού βρίσκονται στο [41], όπου ο αναγνώστης μπορεί να πάρει περισσότερες πληροφορίες.

**Θεώρημα 6.1** Ας είναι  $U(k) = DT\{u(x)\}$  και  $u(x) = DT^{-1}\{U(k)\}$ , τότε  $A_k = [U(0), U(1), \dots, U(k)]$ , όπου  $A_k$  παριστάνει τα Adomian πολυώνυμα με  $N$  τον μη γραμμικό τελεστή με,

$$A_k = [U(0), U(1), \dots, U(k)] = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{d\lambda^k} N \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i U_i \right]_{\lambda=0}. \quad (6.5.3)$$

Η απόδειξη παραθέτετε πλήρως στο [20].

**Θεώρημα 6.2** Δίνεται  $DT\{f(t)\} = F(k)$ , για κάθε μη αρνητικό ακέραιο ισχύει:

$$DT\{t^m f(t)\} = \begin{cases} F(k - m), & k \geq m \\ 0, & 0 \leq k < m \end{cases}. \quad (6.5.4)$$

**Απόδειξη**

Θεωρούμε ότι  $u(t) = f(t)$  και  $w(t) = t^m$ , τότε έχουμε,

$$DT\{t^m f(t)\} = \sum_{i=0}^k \{F(i) \delta(k - i - m)\}. \quad (6.5.5)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της  $\delta$  - συνάρτησης όλοι οι όροι του αθροίσματος εξαφανίζονται, εκτός από το  $i = k - m$ . Αφού  $i \geq 0$ , η παρακάτω ισότητα ισχύει για  $k - m \geq 0$  με

$$DT\{t^m f(t)\} = F(k - m). \quad (6.5.6)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (6.5.1) έχουμε,

$$DT\{t^m f(t)\} = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k (t^m f(t))}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (6.5.7)$$

και με χρήση του κανόνα Leibniz έχουμε ότι  $DT\{t^m f(t)\} = 0$  για  $0 \leq k < m$ . Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6.5.6) και (6.5.7) αποδεικνύεται το 6.2 θεώρημα.

Αρχικά θεωρούμε  $t = \sqrt{x}$ , τότε:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2t} \frac{du}{dx} \right) \frac{1}{2t} \\ &= \left( \frac{1}{2t} \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{2t^2} \frac{du}{dt} \right) \frac{1}{2t} = \frac{1}{4t^2} \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{4t^3} \frac{du}{dt}. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση  $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\sqrt{u^3}}{\sqrt{x}}$  έχουμε,

$$\frac{1}{4t^2} \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{1}{4t^3} \frac{du}{dt} = \frac{u^{3/2}}{t},$$

ή

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} = 4t^2 u^{3/2}. \quad (6.5.9)$$

Με τον διαφορικό μετασχηματισμό παίρνουμε,

$$DT\left\{t \frac{d^2 u}{dt^2}\right\} - (k+1)U(k+1) = 4DT\{t^2 u^{3/2}\}. \quad (6.5.10)$$

Θέτουμε  $DT\{u^{3/2}\} = F(k)$  και κάνοντας χρήση του 6.1 θεωρήματος έχουμε:

$$F(0) = [U(0)]^{3/2},$$

$$F(1) = \frac{3}{2} [U(0)]^{1/2} U(1),$$

$$F(2) = \frac{3}{8} \frac{[U(0)]^2}{[U(0)]^{1/2}} + \frac{3}{2} [U(0)]^{1/2} U(2),$$

$$F(3) = -\frac{1}{16} \frac{[U(1)]^3}{[U(0)]^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{U(1)U(2)}{[U(0)]^{1/2}} + \frac{3}{2} [U(0)]^{1/2} U(3).$$

⋮

Κάνοντας χρήση του 6.2 θεωρήματος έχουμε,

$$k(k+1)U(k+1) - (k+1)U(k+1) = 4F(k-2),$$

ή

$$U(k+1) = \frac{4}{k^2-1} F(k-2). \quad (6.5.11)$$

Για  $k=0$  έχουμε  $U(1) = 0$  και προφανώς για  $k=1$  οδηγούμαστε στο  $0=0$ . Αυτό μας οδηγεί στην χρήση της δευτέρας συνθήκης, δηλαδή  $U(0) = 1$ .

Έχουμε,

$$U(3) = \frac{4}{3} F(0),$$

$$U(4) = \frac{1}{2} F(1),$$

$$U(5) = \frac{4}{15} F(2),$$

$$U(6) = \frac{1}{6} F(3),$$

$$U(7) = \frac{4}{35} F(4),$$

$$U(8) = \frac{1}{12} F(5) \dots$$

Παρατηρούμε ότι το  $U(2)$  δεν μπορεί να προσδιοριστεί, για αυτό ορίζουμε  $U(2) = \alpha$ , το οποίο θα προσδιοριστεί αργότερα με τη βοήθεια της αρχικής συνθήκης. Κάνοντας αντικατάσταση έχουμε,

$$U(0) = 1,$$

$$U(4) = 0,$$

$$U(8) = \frac{2}{15} \alpha,$$

$$\begin{aligned} U(1) &= 0, & U(5) &= \frac{2}{5} \alpha, & U(9) &= -\frac{a^3}{252} + \frac{2}{27} \\ U(2) &= \alpha, & U(6) &= \frac{1}{3}, & & \dots \\ U(3) &= \frac{4}{3}, & U(7) &= \frac{3}{70} \alpha^2, & & \end{aligned}$$

Τελικά η λύση στην εξίσωση είναι:

$$\begin{aligned} u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \{U(k)t^k\} &= 1 + \alpha t^2 + \frac{4}{3} t^3 + \frac{2}{5} \alpha t^5 + \frac{1}{3} t^6 + \frac{3}{70} a^2 t^7 + \frac{2}{15} \alpha t^8 + \left(-\frac{a^3}{252} + \frac{2}{27}\right) t^9 + \frac{1}{175} \\ & a^2 t^{10} + \left(\frac{1}{1056} a^4 + \frac{31}{1485} \alpha\right) t^{12} - \left(\frac{3}{9152} a^5 - \frac{557}{100100} a^2\right) t^{13} - \left(\frac{29}{24255} a^4 - \frac{4}{693} \alpha\right) t^{14} + \left(\frac{7}{49920} a^6 - \right. \\ & \left. \frac{623}{351000} a^3 + \frac{101}{52650}\right) t^{15} + \left(\frac{68}{105105} a^5 - \frac{46}{45045} a^2\right) t^{16} + \left(\frac{3}{43520} a^7 - \frac{153173}{116424000} a^4 + \frac{113}{1178100} \alpha\right) t^{17} - \\ & \left(\frac{4}{10395} a^6 - \frac{1046}{675675} a^3 - \frac{23}{473850}\right) t^{18} - \left(\frac{1232941}{1278076800} a^5 - \frac{799399}{698377680} a^2\right) t^{19} + \left(\frac{256}{1044225} a^7 - \right. \\ & \left. \frac{70945875}{103378275} a^4 + \frac{51356}{103378275} \alpha\right) t^{20} + O(t^{21}). \end{aligned}$$

**Παρατήρηση** Σημειώνεται ότι η λύση με την βοήθεια σειρών παρουσιάστηκε από τον Wazwaz και τον Noor στην εργασία [21] χάνοντας έναν όρο από τον συντελεστή της δύναμης  $t^{20}$ , συγκεκριμένα τον  $\left(\frac{256}{1044225} a^7\right)$ .

## 6.6 Επίλυση με την Επαναληπτική Μέθοδο Μεταβολών

Κάνοντας χρήση του αναδρομικού τύπου της μεθόδου [22] – [23], παίρνουμε,

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left( u_n'(t) - B - \int_0^t \left( u_n^2(r) r^{-1/2} dr \right) \right) dt. \quad (6.6.1)$$

Επιλέγοντας ως μηδενική προσέγγιση  $u_0(x) = 1$  και θέτοντας  $x^{1/2} = t$  βρίσκεται ότι,

$$\begin{aligned} u_8(t) &= 1 + Bt^2 + \frac{4}{3} t^3 + \frac{2}{5} Bt^5 + \frac{1}{3} t^6 + \frac{3}{70} B^2 t^7 + \frac{2}{15} Bt^8 + \left(-\frac{B^3}{252} + \frac{2}{27}\right) t^9 + \frac{1}{175} B^2 t^{10} + \left(\frac{1}{1056} \right. \\ & B^4 + \frac{31}{1485} B) t^{11} + \left(\frac{4}{405} + \frac{4}{1575} B^2\right) t^{12} - \left(\frac{3}{9152} B^5 - \frac{557}{100100} B^2\right) t^{13} - \left(\frac{29}{24255} B^4 - \frac{4}{693} B\right) t^{14} + \\ & \left(\frac{7}{49920} B^6 - \frac{623}{351000} B^3 + \frac{101}{52650}\right) t^{15} + \left(\frac{68}{105105} B^5 - \frac{46}{45045} B^2\right) t^{16} + \left(\frac{3}{43520} B^7 - \frac{153173}{116424000} B^4 + \right. \\ & \left. \frac{113}{1178100} B\right) t^{17} - \left(\frac{4}{10395} B^6 - \frac{1046}{675675} B^3 - \frac{23}{473850}\right) t^{18} - \left(\frac{1232941}{1278076800} B^5 - \frac{799399}{698377680} B^2\right) t^{19} + \\ & \left(\frac{256}{1044225} B^7 - \frac{70945875}{103378275} B^4 + \frac{51356}{103378275} B\right) t^{20} + O(t^{21}). \end{aligned}$$

## 6.7 Επίλυση με την Μέθοδο Διάσπασης Laplace

Θεωρούμε την Thomas - Fermi εξίσωση με αρχικές συνθήκες,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{u^{3/2}}{x^{1/2}}, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = \alpha. \quad (6.7.1)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace έχουμε,

$$s^2 L[u] - s u(0) - u'(0) = L [x^{-1/2} u^{3/2}]. \quad (6.7.2)$$

Χρησιμοποιώντας την συνοριακή συνθήκη παίρνουμε:

$$s^2 L[u] - s - \alpha = L [x^{-1/2} u^{3/2}],$$

ή

$$L[u] = \frac{s+\alpha}{s} + \frac{1}{s^2} L [x^{-1/2} u^{3/2}]. \quad (6.7.3)$$

Εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (6.7.3) και έχουμε,

$$u(x) = 1 + \alpha x + L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} L [x^{-1/2} u^{3/2}] \right]. \quad (6.7.4)$$

Θεωρούμε ότι η λύση της συνάρτησης μπορεί να γραφτεί σε μορφή σειράς, οπότε,

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x), \quad (6.7.5)$$

και η (6.7.4) γίνεται:

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x) = 1 + \alpha x + L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} L [x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x)] \right], \quad (6.7.6)$$

όπου  $A_m(x)$  τα πολώνυμα Adomian, που αντιπροσωπεύουν τον μη γραμμικό όρο.

Δίνεται η αναδρομική σχέση:

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = \alpha x + L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} L [x^{-1/2} A_0(x)] \right],$$

$$u_{m+1}(x) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} L [x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x)] \right], \quad m \geq 1. \quad (6.7.7)$$

Δηλαδή,

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = \alpha x + \frac{4x^{3/2}}{3},$$

$$u_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2\alpha x^{5/2}}{5},$$

$$u_3(x) = \frac{2\alpha x^4}{15} + \frac{2x^{9/2}}{27} + \frac{3\alpha^2 x^{7/2}}{70}.$$

⋮

Κάνοντας αντικατάσταση στην (6.7.5) έχουμε:



$$u(x) = 1 + ax + \frac{4x^{3/2}}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{2ax^{5/2}}{5} + \frac{2ax^4}{15} + \frac{2x^{9/2}}{27} + \frac{3a^2x^{7/2}}{70} + \dots \quad (6.7.8)$$

Και στις τρεις παραπάνω μεθόδους η λύση βρίσκεται με την βοήθεια μίας παραμέτρου που αντιπροσωπεύει το  $u'(0)$ . Η εύρεση αυτής της παραμέτρου βρίσκεται με την βοήθεια των προσεγγίσεων Padé.

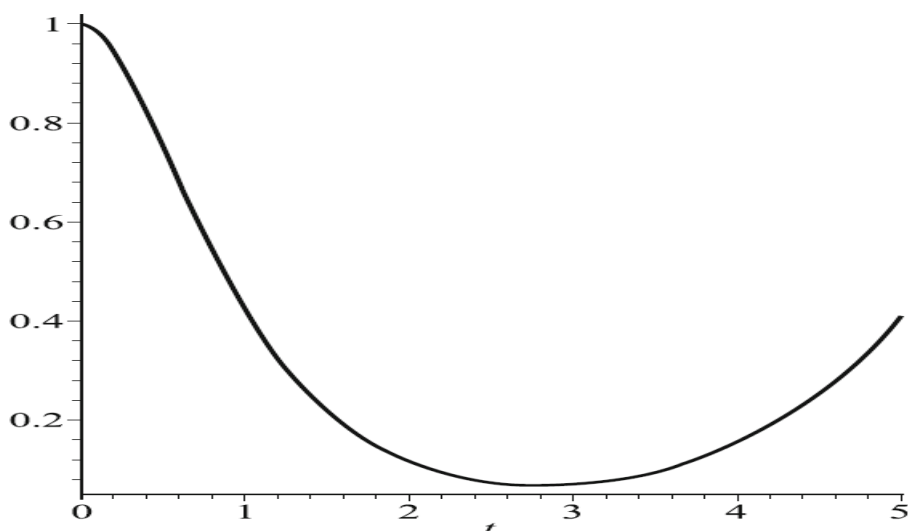
### 6.8. Επίλυση με την Μέθοδο προσεγγίσεων Padé

Κάνοντας χρήση του λογισμικού Mathematica και παίρνοντας ως συνοριακή συνθήκη το  $u(\infty) = 0$ , η διαγώνια προσέγγιση [M/M] δίνεται και απεικονίζεται από τον παρακάτω πίνακα (Σχήματα 6.1 – 6.2).

Padé approximants	Initial slope $B = u'(0)$
[2/2]	-1.211413729
[4/4]	-1.550525919
[5/5]	-1.586834763
[10/10]	-1.587652774

Σχήμα 6.1: Προσεγγίσεις Padé

**Παρατήρηση:** Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η συνοριακή συνθήκη  $u(\infty) = 0$ , για την πολωνυμική εξίσωση δίνει πολλές ρίζες παρόλο που η Thomas-Fermi εξίσωση έχει μοναδική λύση. Θυμόμαστε ότι  $u(x)$  είναι μία φθίνουσα συνάρτηση, επομένως  $u'(0) < 0$ . Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός οι μιγαδικές λύσεις και οι μη φυσικές θετικές λύσεις απορρίπτονται. Επιπλέον, το σφάλμα μειώνεται δραματικά, καθώς αυξάνεται ο βαθμός προσέγγισης Padé.



Σχήμα 6.2: Απεικόνιση της προσεγγιστικής λύσης  $u(x)$  με χρήση της μεθόδου των Προσεγγίσεων Padé [8/8] σε διάστημα  $[0, 5]$ .

## 6.9 Επίλυση με την Μέθοδο της Ομοτυπικής Ανάλυσης

Θεωρούμε την Thomas - Fermi εξίσωση:

$$x[u''(x)]^2 - u^3(x) = 0 \quad (6.9.1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u(0) = 1, u(+\infty) = 0. \quad (6.9.2)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση δεν περιέχει γραμμικούς όρους, ούτε μικρές ή μεγάλες παραμέτρους. Σκοπός μας είναι να βρεθεί μία λύση μέσω ενός συνόλου στοιχειωδών συναρτήσεων. Βασιζόμενοι στις συνοριακές συνθήκες (6.9.2) και στην φυσική ερμηνεία της  $u(x)$  συμπεραίνουμε ότι καθώς το  $x$  αυξάνεται από το 0 στο  $\infty$ , το  $u(x)$  μειώνεται από το 1 στο 0. Επομένως μία καλή επιλογή συνόλου συναρτήσεων είναι το ακόλουθο:

$$\{(1+x)^{-m} | m \geq 1\}. \quad (6.9.3)$$

Έτσι η  $u(x)$  γράφεται ως,

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m (1+x)^{-m}, \quad (6.9.4)$$

όπου  $c_m$  είναι σταθερές.

Σύμφωνα με την συνοριακή (6.9.2) διαλέγω ως αρχική προσέγγιση της  $u(x)$  την

$$u_0(x) = (1+x)^{-1}. \quad (6.9.5)$$

Επειδή η αρχική εξίσωση είναι μία μη γραμμική  $2^{ου}$  είδους διαφορική εξίσωση διαλέγουμε τον γραμμικό τελεστή:

$$\mathcal{L}[\varphi(x;p)] = \frac{(1+x)}{2} \frac{\partial^2 \varphi(x;p)}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi(x;p)}{\partial x}, \quad (6.9.6)$$

τέτοιο ώστε,

$$\mathcal{L}[C_1(1+x)^{-1} + C_2] = 0, \quad (6.9.7)$$

όπου  $C_1, C_2$  σταθερές.

Αντικαθιστούμε στην (6.9.1) και παίρνουμε,

$$\mathcal{F}[\varphi(x;p)] = x \left[ \frac{\partial^2 \varphi(x;p)}{\partial x^2} \right]^2 - \varphi^3(x;p). \quad (6.9.8)$$

Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε αρκετές ομοτυπίες, όπως:

$$\mathcal{H}[\varphi(x;p); \hbar, p] = (1-p) \mathcal{L}[\varphi(x;p) - u_0(x)] - \hbar p \mathcal{F}[\varphi(x;p)], \quad (6.9.9)$$

$$\mathcal{H}_0^b[\varphi(0;p); p] = \varphi(0;p) - 1, \quad (6.9.10)$$

$$\mathcal{H}_\infty^b[\varphi(+\infty; p); p] = \varphi(+\infty; p), \quad (6.9.11)$$

όπου η  $\hbar$  είναι μία μη μηδενική αυθαίρετη παράμετρος. Θέτοντας

$$\mathcal{H}[\varphi(x; p); \hbar, p] = 0, \mathcal{H}_0^b[\varphi(0; p); p] = 0 \text{ και } \mathcal{H}_\infty^b[\varphi(+\infty; p); p] = 0$$

παίρνουμε μια οικογένεια εξισώσεων,

$$(1-p) \mathcal{L}[\varphi(x; p) - u_0(x)] = \hbar p \mathcal{F}[\varphi(x; p)], \quad x \geq 0, \quad (6.9.12)$$

με συνοριακές συνθήκες,

$$\varphi(0; p) = 1, \varphi(+\infty; p) = 0. \quad (6.9.13)$$

Παρατηρούμε ότι ο  $\mathcal{H}[\varphi(x; p); \hbar, p]$  περιέχει την αυθαίρετη παράμετρο  $\hbar$ , η οποία σου δίνει την ελευθερία να διαλέξεις την τιμή που θα πάρει.

Εάν βάλουμε στις παραπάνω σχέσεις  $p = 0$  και  $p = 1$ , βλέπουμε ότι επαληθεύονται οι σχέσεις (6.9.12), (6.9.13) και ο ορισμός (6.9.5) για την αρχική τιμή, δηλαδή:

$$\varphi(x; 0) = u_0(x) \text{ και } \varphi(x; 1) = u(x). \quad (6.9.14)$$

Ωστόσο, καθώς το  $p$  αυξάνεται από το 0 στο 1, η  $\varphi(x; p)$  κυμαίνεται από την αρχική προσέγγιση  $u_0(x)$  στην ακριβή λύση  $u(x)$ . Οι εξισώσεις (6.9.12), (6.9.13) λέγονται **εξισώσεις μηδενικής τάξης παραμόρφωσης**.

Η  $\varphi(x; p)$  μπορεί να πάρει την μορφή Maclaurin σειρών, δηλαδή

$$\varphi(x; p) \sim u_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) p^k, \quad (6.9.15)$$

όπου,

$$u_k(x) = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \varphi(x; p)}{\partial p^k} \right|_{p=0} \quad (6.9.16)$$

Παρατηρούμε ότι η  $\varphi(x; p)$  περιέχει την αυθαίρετη παράμετρο  $\hbar$ . Υποθέτοντας ότι η  $\hbar$  είναι κατάλληλα επιλεγμένη έτσι ώστε η σειρά Maclaurin να συγκλίνει, για  $p = 1$ , έχουμε:

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x). \quad (6.9.17)$$

Παραγωγίζουμε  $k$  φορές την μηδενικής τάξης παραμόρφωση ως προς  $p$ , βάζουμε  $p = 0$  και διαιρούμε με το  $k!$ . Έτσι παίρνουμε τις εξισώσεις  $k$  - τάξης παραμόρφωσης, δηλαδή:

$$\mathcal{L}[u_k(x) - \chi_k u_{k-1}(x)] = \hbar R_k(x), \quad (6.9.18)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(+\infty) = 0, \quad (6.9.19)$$

όπου,

$$R_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} [x u_j''(x) u_{k-1-j}''(x) \sum_{i=0}^j u_i(x) u_{j-1}(x)], \quad (6.9.20)$$

και

$$\chi_k = \begin{cases} 0, & k \leq 1 \\ 1, & k > 1 \end{cases} \quad (6.9.21)$$

Είναι εντυπωσιακό ότι  $u_k(x)$  περιέχει την γραμμική εξίσωση (6.9.18) με γραμμικές συνοριακές συνθήκες (6.9.19) που μπορούν να βρεθούν κάνοντας χρήση προγραμμάτων, όπως το Mathematica [45]. Η Μέθοδος Ανάλυσης με Ομοτυπία μετασχημάτισε το αρχικό μη γραμμικό πρόβλημα σε ένα πεπερασμένο αριθμό γραμμικών εξισώσεων. Ας συμβολίσουμε με  $u_k^*(x)$  μία ειδική λύση της εξίσωσης,

$$\mathcal{L}[u_k^*(x)] = \hbar R_k(x),$$

τότε σύμφωνα με την ιδιότητα (6.9.7) η γενική λύση της εξίσωσης (6.9.18) είναι:

$$u_k(x) = \chi_k u_{k-1}(x) + u_k^*(x) + C_1(1+x)^{-1} + C_2, \quad (6.9.22)$$

όπου οι σταθερές  $C_1, C_2$  θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες.

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να επιλύσουμε επιτυχώς τις εξισώσεις (6.9.18), (6.9.19). Έχει βρεθεί ότι η  $u_k(x)$  μπορεί να εκφραστεί ως,

$$u_k(x) = \sum_{n=1}^{4k+1} a_{k,n} (1+x)^{-n}, \quad (6.9.23)$$

όπου  $a_{k,n}(\hbar)$  είναι σταθερές.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση στις εξισώσεις (6.9.18), (6.9.19) έχουμε τον παρακάτω αλγόριθμο,

$$a_{k,n} = \chi_k(1-\chi_{n-4k+4})a_{k-1,n} + \frac{2\hbar(\chi_{n-2}\beta_{k-1,n-2}-\chi_{n-3}\beta_{k-1,n-3}-\gamma_{k-1,n+1})}{n(n-1)}, \quad (6.9.24)$$

όπου  $k \geq 1, 2 \leq n \leq 4k+1$ , η σταθερά  $\chi_k$  προσδιορίζεται από (6.9.21),

$$\beta_{m,j} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=\max\{1,j+4k-4m-1\}}^{\min\{j-1,4k+1\}} n(n+1)(j-n)(j-n+1) a_{k,n} a_{m-k} a_{j-n},$$

$$\gamma_{m,j} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=\max\{2,j+4k-4m-1\}}^{\min\{j-1,4k+2\}} \delta_{k,n} a_{m-k,j-n},$$

$$\delta_{m,j} = \sum_{k=0}^m \sum_{n=\max\{2,j+4k-4m-1\}}^{\min\{j-1,4k+1\}} a_{k,n} a_{m-k,j-n},$$

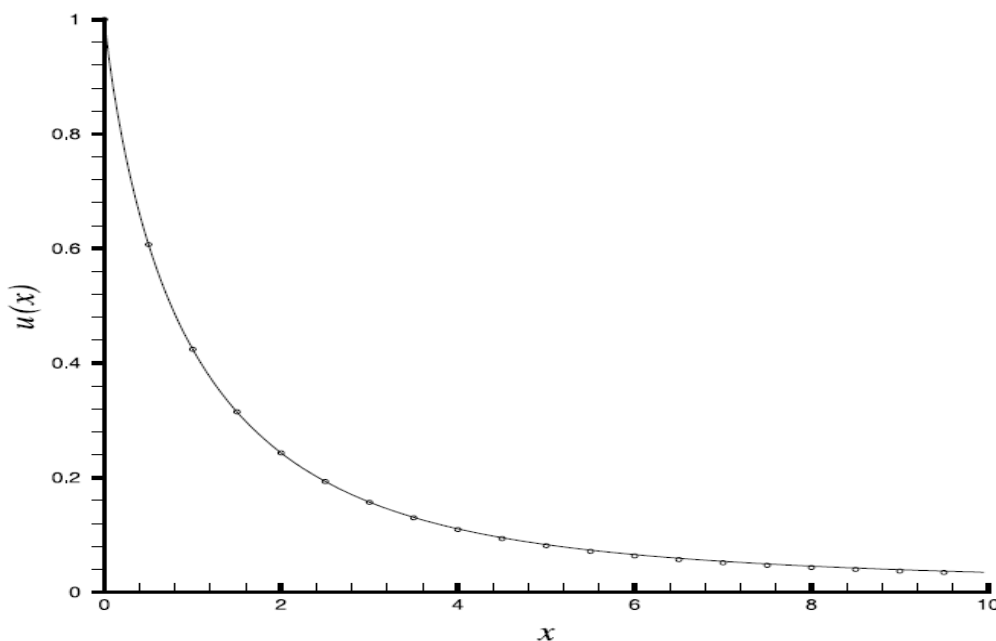
με

$$a_{k,1} = - \sum_{n=2}^{4k+1} a_{k,n}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (6.9.5) της  $u_0(x)$  έχουμε ότι η πρώτη σταθερά είναι  $a_{0,1} = 1$ . Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο και έχοντας γνωστή την πρώτη σταθερά, μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις υπόλοιπες. Αυτό μας οδηγεί στην αναλυτική λύση της εξίσωσης Thomas-Fermi, δηλαδή,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{4k+1} a_{k,n} (1+x)^{-n}. \quad (6.9.25)$$

**Παρατηρήσεις** Η αναλυτική λύση της εξίσωσης περιέχει την αυθαίρετη παράμετρο  $h$  που μπορεί να χρησιμοποιείται για τον έλεγχο σύγκλισης των προσεγγίσεων. Εάν  $h = -1$ , τότε η σειρά αποκλίνει σε όλη την περιοχή  $0 < x < +\infty$ . Ωστόσο, έχει βρεθεί ότι εάν  $-1/2 < h < 0$ , τότε η σειρά συγκλίνει σε όλη την περιοχή  $0 \leq x \leq +\infty$ .



Σχήμα 6.3: Τα αναλυτικά αποτελέσματα της  $u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{4k+1} a_{k,n} (1+x)^{-n}$  για  $h = -1/2$ .  
Συνεχής γραμμή: 60<sup>η</sup> προσέγγιση. Κουκκίδες: 40<sup>η</sup> προσέγγιση

### Θεώρημα 6.3 (Θεώρημα Σύγκλισης)

Εάν η σειρά

$$u_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$$

είναι συγκλίνουσα, όπου  $u_k(x)$  η λύση του προβλήματος (6.9.18), (6.9.19), τότε υπάρχει μία, μοναδική λύση στην εξίσωση Thomas-Fermi.

### Απόδειξη

Θεωρούμε

$$s(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x),$$

επειδή η παραπάνω σειρά συγκλίνει, θα πρέπει

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(x) = 0.$$

Εξαιτίας της (6.9.18), οι σχέσεις (6.9.21) και (6.9.6) γίνονται:

$$h \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathcal{L} [u_k(x) - \chi_k u_{k-1}(x)]$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{L} \left\{ \lim_{m \rightarrow +\infty} [u_k(x) - \chi_k u_{k-1}(x)] \right\} \\
 &= \mathcal{L} \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(x) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι για  $\hbar \neq 0$  έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x) = 0.$$

Από τον ορισμό (6.9.20), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{+\infty} R_k(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} [[x u_j''(x) u_{k-1-j}''(x) \sum_{i=0}^j u_i(x) u_{j-1}(x)]] \\
 &= x [\sum_{k=0}^{+\infty} u_k''(x)]^2 - [\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)]^3 \\
 &= x \left[ \frac{d^2 s(x)}{dx^2} \right]^2 - s^3(x) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Επομένως η  $s(x)$  ικανοποιεί την εξίσωση Thomas-Fermi (6.9.1) και ανταποκρίνεται στις συνοριακές συνθήκες.

Όταν  $\hbar = -1/2$ , το αναλυτικό αποτέλεσμα της 40<sup>ης</sup> προσέγγισης συμφωνεί αρκετά με της 60<sup>ης</sup> προσέγγισης (Σχήμα 6.3) και επιπλέον εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα διαπιστώνουμε ότι η λύση της εξίσωσης είναι μοναδική.

## 7<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΟΛΟΚΛΗΡΟ - ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ VOLTERRA ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ VOLTERRA

#### 7.1 Εισαγωγή

Η μη γραμμική ολοκληρό – διαφορική εξίσωση Volterra για την αύξηση του πληθυσμού σε ένα κλειστό σύστημα [43] ορίζεται ως εξής:

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 - cp \int_0^t p(x)dx, \quad p(0) = p_0, \quad (7.1.1)$$

όπου:

$a > 0$  είναι ο συντελεστής γεννητικότητα,

$b > 0$  είναι ο συντελεστής συνωστισμού,

$c > 0$  είναι ο συντελεστής τοξικότητας,

$p_0$ : ο αρχικός πληθυσμός και

$p(t)$ : ο πληθυσμός που έχει μια κλειστή ομάδα την χρονική στιγμή  $t$  και δείχνει βασικά χαρακτηριστικά της εξέλιξης του πληθυσμού.

Εάν το  $b = c = 0$ , παίρνουμε την **εξίσωση Malthus**, η οποία έχει μορφή:

$$\frac{dp}{dt} = ap, \quad p(0) = p_0$$

και η λύση δίνεται ως

$$p(t) = p_0 e^{at}.$$

Για  $a > 0$  έχουμε αύξηση του πληθυσμού, ενώ για  $a < 0$  έχουμε την μείωσή του.

Εάν  $c = 0$  τότε η (7.1.1) μετατρέπεται στο **λογιστικό μοντέλο** αύξησης του μοντέλου Volterra, δηλαδή,

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, \quad p(0) = p_0.$$

Ο όρος  $cp \int_0^t p(x)dx$  αντιπροσωπεύει την συσσώρευση της τοξικότητας στο είδος δηλαδή, το πλήθος πανομοιοτήτων ατόμων που παρουσίαζαν ευαισθησία σε μια ποσότητα τοξινών. Εισάγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές,

$$t = \frac{\bar{t}c}{b} \quad \text{και} \quad u = \frac{pb}{a},$$

και καταλήγουμε στο αδιάστατο πρόβλημα,

$$k \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, \quad (7.1.2)$$

όπου  $k = \frac{c}{ba}$  μία αδιάστατη παράμετρος.

Ο Volterra εισήγαγε αυτό το πληθυσμιακό μοντέλο σε ένα κλειστό σύστημα, το οποίο αποτελείται από πανομοιότυπα άτομα που παρουσίαζαν ευαισθησία σε μια ποσότητα τοξινών. Η εξίσωση (7.1.2) περιλαμβάνει τους γνωστούς όρους μιας λογιστικής εξίσωσης με επιπλέον έναν ολοκληρωτικό όρο. Σημαντική έρευνα έχει γίνει από τους Scudo [24], Small [25], TeBeest [26] για την ανάπτυξη αποτελεσματικών στρατηγικών για να προσδιορίσουν, αναλυτικά και αριθμητικά, λύσεις για το πρόβλημα (7.1.2). Ωστόσο, η εύρεση κλειστής μορφής λύση βρέθηκε από τους Small, TeBeest, η οποία όμως αποδείχθηκε ότι δεν μπορεί να δώσει μια εικόνα συμπεριφοράς της εξέλιξης ενός πληθυσμού. Αναλυτικές Padé προσεγγίσεις της λύσης είναι συγκεντρωμένες στην εργασία του Wazwaz [27]. Η αδιάστατη παράμετρος  $k$  επηρεάζει την συμπεριφορά του πληθυσμού. Συγκεκριμένα έχει βρεθεί ότι για μικρές τιμές στο  $k$  ο πληθυσμός δεν είναι ευαίσθητος σε τοξίνες, ενώ σε μεγάλες τιμές του  $k$  ο πληθυσμός γίνεται έντονα ευαίσθητος.

## 7.2 Μετατροπή σε Συνήθης Διαφορική Εξίσωση

Θεωρούμε την εξίσωση (7.1.2) και ορίζουμε ως,

$$y(t) = \int_0^t u(x) dx, \quad (7.2.1)$$

τότε παίρνοντας παραγώγους μέχρι 2<sup>ης</sup> τάξης έχουμε,

$$y'(t) = u(t), \quad (7.2.2)$$

$$y''(t) = u'(t). \quad (7.2.3)$$

Έστω για παράδειγμα ότι η αρχική συνθήκη  $u_0$  έχει την τιμή  $u_0 = 0.1$ . Κάνοντας αντικατάσταση τις σχέσεις (7.2.1 – 7.2.3) στην (7.1.2) παίρνουμε,

$$ky''(t) = y'(t) - [y'(t)]^2 - y(t)y'(t), \quad (7.2.4)$$

με αρχικές συνθήκες,

$$y(0) = 0, \quad (7.2.5)$$

$$y'(0) = 0.1. \quad (7.2.6)$$

## 7.3 Επίλυση με Μέθοδο Διάσπασης Laplace

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (7.2.4 – 7.2.6).

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη και έχουμε,

$$\mathcal{L}[ky''] = \mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[(y')^2] - \mathcal{L}[yy']. \quad (7.3.1)$$

Εφαρμόζοντας την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε,

$$k\mathcal{L}[y''] = \mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[(y')^2] - \mathcal{L}[yy'], \quad (7.3.2)$$



$$k(s^2 \mathcal{L}[y] - y(0)s - y'(0)) = \mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[(y')^2] - \mathcal{L}[yy'], \quad (7.3.3)$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{y(0)s + y'(0)}{s^2} - \frac{1}{ks^2} [\mathcal{L}[y'] - \mathcal{L}[(y')^2] - \mathcal{L}[yy']]. \quad (7.3.4)$$

Θεωρούμε ότι,

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \quad (7.3.5)$$

όπου  $y_n$  όροι που θα υπολογιστούν αναδρομικά.

Οι μη γραμμικοί όροι γράφονται ως,

$$(y'(t))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t), \quad (7.3.6)$$

$$(y'(t)y(t))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t), \quad (7.3.7)$$

όπου  $A_n(t)$  και  $B_n(t)$  είναι τα Adomian πολυώνυμα των  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Στην συγκεκριμένη περίπτωση τα  $A_n(t)$  και  $B_n(t)$  δίνονται,

$$A_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y'_i(t) \right)^2 \Big|_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3.8)$$

$$B_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y'_i(t) y_i(t) \right)^2 \Big|_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.3.9)$$

τα πρώτα πολυώνυμα των  $A_n(t)$  και  $B_n(t)$  είναι,

$$A_0(t) = (y'_0)^2(t), \quad A_1(t) = 2y'_0(t) y'_1(t),$$

$$A_2(t) = 2y'_0(t) y'_2(t) + (y'_1)^2(t),$$

$$A_3(t) = 2y'_0(t) y'_3(t) + 2y'_1(t) y'_2(t),$$

$$A_4(t) = 2y'_0(t) y'_4(t) + 2y'_1(t) y'_3(t) + (y'_2)^2(t),$$

$$A_5(t) = 2y'_0(t) y'_5(t) + 2y'_1(t) y'_4(t) + 2y'_2(t) y'_3(t), \dots \quad (7.3.10)$$

και

$$B_0(t) = y'_0(t) y_0(t), \quad B_1(t) = y'_0(t) y_1(t) + y'_1(t) y_0(t),$$

$$B_2(t) = y'_0(t) y_2(t) + y'_1(t) y_1(t) + y'_2(t) y_0(t),$$

$$B_3(t) = y'_0(t) y_3(t) + y'_1(t) y_2(t) + y'_2(t) y_1(t) + y'_3(t) y_0(t),$$

$$B_4(t) = y'_0(t) y_4(t) + y'_1(t) y_3(t) + y'_2(t) y_2(t) + y'_3(t) y_1(t) + y'_4(t) y_0(t), \quad (7.3.11)$$

$$B_5(t) = y'_0(t) y_5(t) + y'_1(t) y_4(t) + y'_2(t) y_3(t) + y'_3(t) y_2(t) + y'_4(t) y_1(t) + y'_5(t) y_0(t), \dots$$

Αντικαθιστώντας τις (7.3.5 – 7.3.7) στην (7.3.4) παίρνουμε,

$$\mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t)] = \frac{y(0)s+y'(0)}{s^2}$$

$$- \frac{1}{ks^2} [\mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} y'_n(t)] - \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)] - \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} B_n(t)]. \quad (7.3.12)$$

Ακολουθεί ο παρακάτω αλγόριθμος:

$$\mathcal{L}[y_0(t)] = \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t)] = \frac{y(0)s+y'(0)}{s^2}, \quad (7.3.13)$$

$$\mathcal{L}[y_1(t)] = - \frac{1}{ks^2} [\mathcal{L}[y'_0(t)] - \mathcal{L}[A_0(t)] - \mathcal{L}[B_0(t)]], \quad (7.3.14)$$

$$\mathcal{L}[y_2(t)] = - \frac{1}{ks^2} [\mathcal{L}[y'_1(t)] - \mathcal{L}[A_1(t)] - \mathcal{L}[B_1(t)]], \quad (7.3.15)$$

$$\mathcal{L}[y_{n+1}(t)] = - \frac{1}{ks^2} [\mathcal{L}[y'_n(t)] - \mathcal{L}[A_n(t)] - \mathcal{L}[B_n(t)]]. \quad (7.3.16)$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην (7.3.13) βρίσκουμε την τιμή της  $y_0$  και αναδρομικά βρίσκουμε την τιμή των  $y_1, y_2, \dots$ .

Συγκεκριμένα έχουμε,

$$y_0(t) = \frac{1}{10}t, \quad y_1(t) = \frac{9}{20}t^2 - \frac{1}{60}t^3,$$

$$y_2(t) = \frac{6}{5}t^3 - \frac{7}{48}t^4 + \frac{1}{300}t^5,$$

$$y_3(t) = \frac{69}{40}t^4 - \frac{757}{1200}t^5 + \frac{97}{2400}t^6 - \frac{17}{25200}t^7,$$

$$y_4(t) = -\frac{12}{25}t^5 - \frac{5611}{3600}t^6 + \frac{479}{2016}t^7 - \frac{139}{13440}t^8 + \frac{31}{226800}t^9,$$

$$y_5(t) = -\frac{91}{10}t^6 - \frac{1681}{1260}t^7 + \frac{332839}{403200}t^8 - \frac{92527}{1209600}t^9 - \frac{6541}{2592000}t^{10} + \frac{691}{24948000}t^{11},$$

$$y_6(t) = -\frac{106}{5}t^7 + \frac{59893}{10080}t^8 + \frac{1308029}{907200}t^9 - \frac{4124311}{12096000}t^{10} + \frac{4478039}{199584000}t^{11} - \frac{7939}{13305600}t^{12}$$

$$+ \frac{5461}{972972000}t^{13}, \dots \quad (7.3.17)$$

Η τελική προσέγγιση είναι της μορφής:

$$y(t) = \frac{1}{10}t + \frac{9}{20}t^2 + \frac{71}{60}t^3 + \frac{379}{240}t^4 - \frac{443}{400}t^5 - \frac{76451}{7200}t^6 - \frac{374593}{16800}t^7 - \frac{931051}{403200}t^8 + \frac{425895551}{3628800}t^9$$

$$+ \frac{190838713}{576000}t^{10} + \frac{89451275731}{399168000}t^{11} + O(t^{12}).$$

Όμως έχουμε ότι:

$$y'(t) = u(t),$$

και η λύση της εξίσωσης (7.1.2) δίνεται ακολούθως,

$$u(t) = \frac{1}{10} + \frac{9}{20}t + \frac{71}{60}t^2 + \frac{379}{240}t^3 - \frac{443}{400}t^4 - \frac{76451}{7200}t^5 - \frac{374593}{16800}t^6 - \frac{931051}{403200}t^7 + \frac{425895551}{3628800}t^8 + \frac{190838713}{576000}t^9 + \frac{89451275731}{399168000}t^{10} + O(t^{11}).$$

#### 7.4 Επίλυση με Επαναληπτική Μέθοδο Μεταβολών

Θεωρούμε το πρόβλημα

$$y'(x) = f(x) - \int_0^T K(x, t)g(y(t)), \quad (7.4.1)$$

όπου  $g(y(t))$  είναι μία μη γραμμική συνάρτηση της  $y(x)$ . Η διορθωτική συνάρτηση για την (7.4.1) είναι η:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) (y_n(\xi) - f(\xi) - \int_0^\xi K(\xi, r)g(\tilde{y}_n(r)) dr) d\xi. \quad (7.4.2)$$

Η μέθοδος εξαρτάται από δύο βασικά βήματα. Αρχικά, ολοκληρώνουμε κατά μέλη και προσδιορίζουμε τον πολλαπλασιαστική Lagrange  $\lambda$ , ο οποίος μπορεί να είναι μία σταθερά ή μία συνάρτηση. Μετά προσδιορίζουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις  $y_{n+1}(x)$ ,  $n \geq 0$ . Η αρχική συνθήκη είναι αυτή που θα μας δώσει την μηδενική προσέγγιση. Έτσι έχουμε,

$$y' = f(y(\xi), y'(\xi)) = 0, \quad \lambda = -1, y_0(x) = y(0), \quad (7.4.3)$$

και η λύση δίνεται ως,

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x). \quad (7.4.4)$$

Θα λύσουμε την παραπάνω εξίσωση με αρχική τιμή  $y(0) = 0.1$  και για 5 διαφορετικές περιπτώσεις της παραμέτρου  $k$ .

Για  $k = 0.04$  έχουμε:

$$\frac{dy}{dt} = 25y - 25y^2 - 25y \int_0^t y(x) dt, \quad \text{με } y(0) = 0.1. \quad (7.4.5)$$

Κάνοντας χρήση του λογισμικού Mathematica παίρνουμε,

$$y_0(t) = 0.1,$$

$$y_1(t) = 0.1 + 2.25t - 0.125t^2,$$

$$y_2(t) = 0.1 + 2.25t - 22.375t^2 - 45.8333t^3 - 12.2005t^4 + 1.09375t^5 - 0.0217014t^6,$$

...

$$y_8(t) = 0.1 + 2.25t - 22.375t^2 - 104.167t^3 - 142.93t^4 - 5693.54t^5 - 37077.6t^6 - 32021.2t^7 + 1.29596 \cdot 10^6 t^8 + O(t^9).$$

...

και η λύση δίνεται ως,

$$y(t) = 0.1 + 2.25t - 22.375t^2 - 104.167t^3 - 142.93t^4 - 5693.54t^5 - 37077.6t^6 - 32021.2t^7 + 1.29596 \times 10^6 t^8 + O(t^9).$$

Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία (Σχήμα 7.1) βρίσκουμε,

Για  $k = 0.02$  έχουμε:

$$y(t) = 0.1 + 2.25t - 22.375t^2 - 104.167t^3 - 1893.85t^4 - 176439t^5 - 2.3469 \times 10^6 t^6 - 4.90299 \times 10^6 t^7 + 3.29942 \times 10^8 t^8 + O(t^9).$$

Για  $k = 0.1$  έχουμε:

$$y(t) = 0.1 + 0.9t + 3.55t^2 + 6.31667t^3 - 5.5375t^4 - 63.7093t^5 - 156.08t^6 - 18.4732t^7 + 1056.29t^8 + O(t^9).$$

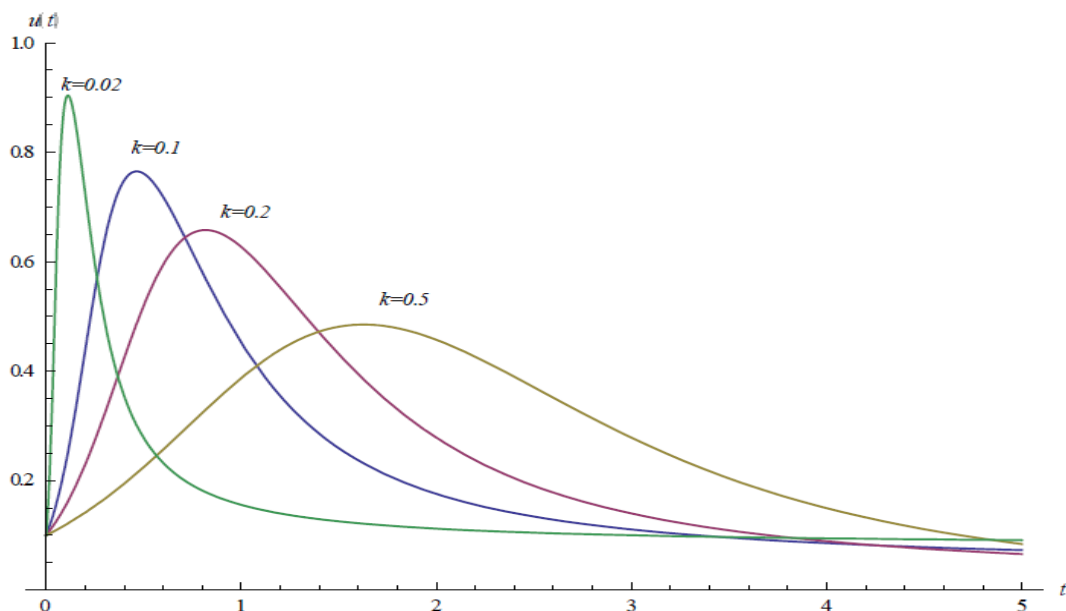
Για  $k = 0.2$  έχουμε:

$$y(t) = 0.1 + 0.45t + 0.875t^2 + 0.716667t^3 - 0.540104t^4 - 2.26042t^5 - 2.50723t^6 + 0.377294t^7 + 5.23533t^8 + O(t^9).$$

Για  $k = 0.5$  έχουμε:

$$y(t) = 0.1 + 0.18t + 0.134t^2 + 0.318667t^3 - 0.0284067t^4 - 0.0304947t^5 - 0.00986271t^6 - 0.0040947t^7 + 0.00585304t^8 + O(t^9).$$

### Γραφικές παραστάσεις αποτελεσμάτων



Σχήμα 7.1: Απεικόνιση της αύξησης του πληθυσμού της εξίσωσης  $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  για τιμές  $k = 0.02, 0.1, 0.2, 0.5$

## 8<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις και γενικότερα τα ολοκληρώματα αποτελούν τη βάση της Μαθηματικής Ανάλυσης, μιας και είναι μία ευσταθής διαδικασία σε αντίθεση της παραγωγίσης. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra, ξεκινούν το ταξίδι τους χρονικά τον 19<sup>ο</sup> αιώνα, αλλά απασχολούν τους μαθηματικούς μέχρι και σήμερα.

Στην παρούσα εργασία γίνεται αναφορά σε βασικές μεθόδους επίλυσης (Μέθοδος Picard, Μέθοδος Επαναληπτικών πυρήνων κ. α) αλλά και σε πιο σύγχρονες τεχνικές (Επαναληπτική Μέθοδος Μεταβολών, Μέθοδος Αριθμητικής Ολοκλήρωσης κ. α). Είναι γνωστό ότι η επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra είναι μία χρονοβόρα και πολύπλοκη, πολλές φορές διαδικασία γι' αυτό και παραθέτονται, σε κάθε μορφή της, τα αντίστοιχα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεως. Επιπλέον με την επίλυση προβλημάτων, δίνεται η ευκαιρία στον αναγνώστη να κατανοήσει τους αλγόριθμους επίλυσης κάθε μεθόδου αλλά και να αναλογιστεί την επανάσταση που έφερε η ανάπτυξη λογισμικών τύπου Mathematica, Matlab κ. α στην εύρεση και αναπαράσταση λύσης.

Πολλοί ερευνητές μέχρι και σήμερα γράφουν εργασίες πάνω στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra δημιουργώντας έτσι ένα τεράστιο οπλοστάσιο σε όποιον ενδιαφέρεται για την μελέτη τους. Η εμφάνισή τους σε πληθυσμιακά – βιολογικά μοντέλα, στην αεροδυναμική αεροσκαφών και την ωκεανογραφία, στον ηλεκτρομαγνητισμό και την δυναμική ρευστών καθιστά τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρωταγωνιστή.

*«Οι Αυτοκρατορίες πεθαίνουν, αλλά τα θεωρήματα του Ευκλείδη διατηρούν τη νεότητά τους για πάντα.»*

*Vito Volterra*



## Βιβλιογραφία

1. Theorie des fonctions algebriques de deux independantes 2 vol. (1897, 1906). Η έρευνα δημοσιεύτηκε από τον George Simart.
2. Adomian and Rach. 1983, Adomian. 1988, 1994, Cherrualt et al, 1995, Adomian and Rach. 1996, Duan et al, 2012
3. Liao S. J. The proposed Homotopy Analysis technique for the solution of nonlinear problems, Phd thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
4. Liao S. J. Beyond perturbation introduction to the Homotopy Analysis method. Chapman and Hall, Boca Raton: CRC Press.
5. Liao S. J. On the Homotopy Analysis method for nonlinear problems. Appl. Math Comp. 2004.
6. Liao S. J. Homotopy Analysis method . A new analytical solutions of non linear problems. 1997.
7. Liao S. J. Tan Y. A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations. Stud. Appl. Math, 2007.
8. Ji – Huan – He. A simple approach to Volterra – Fredholm Integral Equations, App. Math. Dec. 2020.
9. Thomas, L. H. The calculation of atomic fields. Proc. Cambridge Phil. Soc. 23, 542 (1927).
10. Fermi, E. Un metodo statistic per la determinazione di alcune priorieta dell' atome. Rend. Accad. Naz. Lincei 6, 602. (1927).
11. Feynman. R. P. N. Metropolis and E. Teller. Equations of state of elements based on the generalized Fermi – Thomas theory. Phys. Rev. 75, 1561 (1949).
12. Sommerfeld A. Asymptotische Integration der Differential gleichung des Thomas – Fermischen Atoms. Z. Physik 78. 283 (1932).
13. Mabriani A. Su un theorema relativo alle equazioni differenziali ordinarie del 2o ordine. Rend. Accad. Naz. Lincei. 9. 620 (1929).
14. L.H. Thomas Proc. Camb. Phill. Soc. 23 542 (1927), E. Fermi, Rend. Acad. Maz. Lanei 6, 602 (1927). The metod has been since describe review article which covers the history, improvements and applications, see: Larry Spruch, Pedagogic notes on Thomas - Fermi theory: atoms, stars and the stability of bulk matter. Rev. Mod. Phys. 63 pp 151 – 209 (1991).
15. Edward Teller. On the Stability of Molecules in the Thomas – Fermi Theory. Rev. Mod. Phys. 34. No. 4. 627 – 631(Oct. 1962).
16. G. Adomian. Solving frontier Problems of Physics. The Decomposition Method. Kluwer Acad. (1994).
17. G. Adomian. Nonlinear Stochastic Operator Equations. Acad. Press (1986).
18. J. K. Zhou. Differential Transformation and its Applications for Electrical Circuits Huanhong University Press. Wuhan, China (1986).
19. F. Ayaz. Appl. Math.143, 361 (2003).
20. H. Fatoorehchi. H. Abolaghasemi. Appl. Mth. Model 37, 6008 (2013).
21. M. A. Noor. ST Mohynd – Din. M. Tahir. World Appl. Sci. J. 4. 479 (2008).
22. V. Bush. S. H. Cardwell. Thomas – Fermi equation solution by the differential analyzer. Phys. Rev. 38, 1898 – 1901 (1931).
23. B. L. Burrows. P. W. Core. A variational iterative approximate solution of Thomas - Fermi equation. Quart. Appl. Math. 42, 73 -76 (1984).

24. Scudo F. M. Vito Volterra and theoretical ecology. *Theoret Population Biol.* 2, 1 – 23 (1971).
25. Small R. D. Population growth in a closet model. *Mathematical Modelling. Classroom Notes in the Applied Mathematics.* Siam, Philadelphia. PA. (1989).
26. TeBeest K. G. Numerical and analytical solutions of Volterra population method. *Siam. Rev.* 39, 484 – 493 (1997).
27. Wazwaz A. M. Analytical Solution of Volterra’s population model. *Appl. Math. Comp.* 100, 13 – 25 (1999).
28. *Integral Equations and Calculus of Variations.* Dr. Jagbir Singh, Maharshi, Dayanand University Press (2021).
29. *Advanced Numerical and differential Equation Solving in Mathematica.*
30. *Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics.* M. Ablowitz, S. Davis, J. Hinch, A. Iserles, J. Ockendon, P. Oliver. Cambridge University Press.
31. *Handbook of the Integral Equations.* Andrei D. Polyanin and Alexander V. Manzhirov. CRC Press (1998).
32. *Integral Equations and their applications.* M. Rahman. WIT Press (2007).
33. *Linear and nonlinear Integral Equations – Methods and Applications.* Abdul – Majid – Wazwaz, Saint Xavier University Chicago.
34. *Wolfram Mathematica Tutorial.*
35. *Weakly Singular Volterra and Fredholm – Volterra Integral Equations,* Szilard Andras, Department of Applied Mathematics, Babes – Bolyai University, 2003.
36. *A study of Banach, Fixed Point Theorem and it’s Applications,* Mannah M. , Nahar N. ,Nondals S. (2021), *American Journal of Computation Mathematics.*
37. *Bielecki’s Method, Existence and Uniqueness Results for Volterra Integral Equations,* Marian Kwapisz, University of Gdansk, 1989.
38. *Παράλληλα Κείμενα για την Θεματική Ενότητα: Μαθηματικά Πρότυπα στις Φυσικές Επιστήμες,* Ε.Α.Π. 2003, Πάτρα.
39. *Picard and weakly Picard operators technique for nonlinear differential equations in Banach spaces,* JinRong Wang, Yong Zhou, Milan Medved, 2011.
40. *Numerical Solution of a class of the nonlinear Volterra Integro – Differential Equations,* Saeedi L., Tari A. and Masuleh Momeni S. H.
41. A. Kurzaz, G. Oturac, M. E. Kiris, *Int. J. Comput. Math.* Pg82, (2005).
42. *On de Broglie wave Nature,* Anatoli Vankov, Bethany College, Kansas, U.S.A.
43. *Analytic approximate solutions of Volterra’s population and some scientific models by power series method,* M. A. AL-Jawary, F. S. Ahmed and Fadhel S. F., Department of Mathematics, College of Education Ibn-AL-Haithem, Baghdad University, Baghdad, Iraq, Department of Mathematics and Computer Application, College of science, Al-Nahrain University, Baghdad, Iraq.
44. *The improved homotopy analysis method of the Thomas – Fermi equation,* Yinlong Zhao, Zhiliang Lin, Zeng Liu, Shijun Liao, *Applied Math. And Comp.* , (2012).
45. *Liao S. J. An explicit analytic solution to the Thomas – Fermi equation,* School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiao Tong University.
46. *S. J. Liao Noteson the homotopy analysis method: some definitions and theorems,* *Commun. Nonlinear Sci.Numer.Simul.*14 (2009) 983 – 997.
47. *A. Molabahrami, F. Khani, The homotopy analysis method to solve Burgens – Huxley equation,**Nonlinear Anal.Ser.B:RWA*10 (2007) 14-21.





## Παράρτημα Α: «Βιογραφία Vito Volterra»

Ο Vito Volterra γεννήθηκε στις 3 Μαΐου 1940 στην Ανκόνα της Ιταλίας. Οι γονείς του, Abramo Volterra, έμπορος υφασμάτων και η Angelica Almagià παντρεύτηκαν στις 15 Μαρτίου 1859. Η οικογένεια ήταν εβραϊκής καταγωγής. Το όνομα Volterra προέρχεται από την πόλη Volterra της Τοσκάνης όπου μετακόμισε ένας από τους πρόγονους του Vito τον 15<sup>ο</sup> αιώνα, έχοντας αρχικά καταγωγή από τη Μπολόνια. Ένας από τους Volterras είχε ανοίξει μια τράπεζα στη Φλωρεντία, ενώ άλλα μέλη της οικογένειας ήταν συγγραφείς, συλλέκτες βιβλίων και ταξιδιώτες. Το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά ξεκίνησε σε ηλικία 11 ετών όταν άρχισε να μελετά τη Γεωμετρία του Legendre. Σε ηλικία 13 ετών άρχισε



να μελετά το πρόβλημα των τριών σωμάτων και έκανε κάποια πρόοδο κατανέμοντας το χρόνο σε μικρά διαστήματα στα οποία μπορούσε να θεωρήσει τη δύναμη σταθερή. Μετά το δημοτικό, ο Vito σπούδασε στην Τεχνική Σχολή Dante Alighieri και αργότερα πέρασε τρία χρόνια στο Τεχνικό Ινστιτούτο Galileo Galilei στη Φλωρεντία. Δεδομένου ότι η οικογένειά του ήταν εξαιρετικά φτωχή, ασκήθηκε πίεση στον Vito να εγκαταλείψει το Galileo Galilei Τεχνικό Ινστιτούτο μετά από ένα χρόνο σπουδών και να πάσει δουλειά. Ένας από τους δασκάλους μαθηματικών του Vito στο Τεχνικό Ινστιτούτο Galileo Galilei ήταν ο Cesare Arzelà, ο οποίος γρήγορα συνειδητοποίησε ότι ο Vito ήταν ένας εξαιρετικά ταλαντούχος μαθηματικός. Ο καθηγητής φυσικής, Antonio Ròiti (1843 - 1921), έγινε άλλος ένας σημαντικός σύμμαχος στην προσπάθεια του Vito να συνεχίσει την εκπαίδευσή του. Ο Ρόιτι του πρόσφερε μια θέση ως διδάσκαλος φυσικής στο Istituto di Studi Superiori e di Perfezionamento στη Φλωρεντία το 1877. Ο Volterra γράφτηκε στη σχολή των Επιστημών στο Πανεπιστήμιο της Πίζας το φθινόπωρο του 1878. Το φθινόπωρο του επόμενου έτους συμμετείχε στις διαγωνιστικές εξετάσεις για την είσοδο στο Scuola Normale Superiore στην Πίζα και σημείωσε τους υψηλότερους δυνατούς βαθμούς. Έλαβε υποτροφία μαζί με δωρεάν διατροφή και καταλύματα. Στο Scuola Normale διδάχτηκε από αρκετούς εμπνευσμένους δασκάλους, με τους πιο σημαντικούς να είναι ο Ulisse Dini και Ενρίκο Μπέτι. Ο Volterra δημοσίευσε τρεις εργασίες το 1881, μία στη μαθηματική φυσική, Sul potenziale di un' elissoide eterogenea sopra se stessa και δύο στην ανάλυση, Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate και Sui principii del calcolo integrale. Στην Πίζα έκανε τη διατριβή του με σύμβουλο τον Enrico Betti, αποφοιτώντας με δάφνη το 1882. Η διατριβή του για την υδροδυναμική, Sopra alcuni problemi di idrodinami, περιελάμβανε κάποια αποτελέσματα του Τζορτζ Στόουκς. Οι αξιοσημείωτες μαθηματικές συνεισφορές του αναγνωρίστηκαν γρήγορα και του απονεμήθηκε το χρυσό μετάλλιο της. Το 1887, έγινε μέλος της Accademia dei Lincei και μέλος της Γαλλικής Μαθηματικής Society το 1888 και, τρία χρόνια αργότερα, εξελέγη στον Μαθηματικό Κύκλο του Παλέρμιο και ονομάστηκε Ιππότης του Τάγματος του Στέμματος της Ιταλίας. Μετά το θάνατο του Betti το 1892, κατέλαβε την έδρα της Μαθηματικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο της Πίζα. Κατά τη διάρκεια αυτών των ετών, ο Volterra έκανε μια σειρά

από ταξίδια στο εξωτερικό. Επισκέφτηκε τον Henri Poincaré στο Παρίσι το 1888 και προσκλήθηκε να έρθει ξανά στο Παρίσι τον επόμενο χρόνο για το Congrès International de bibliographie des Sciences Mathématique. Το 1891, ως συνέπεια αυτών των νεοσύστατων συνδέσεων, ταξίδεψε στη Γερμανία περνώντας ένα μήνα στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν και λίγες μέρες στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Συνάντησε μια σειρά από κορυφαίους Γερμανούς μαθηματικούς σε αυτό το ταξίδι, συμπεριλαμβανομένων των Hermann Schwarz και Leopold Kronecker. Εξελέγη στην Εθνική Ακαδημία Επιστημών της Ιταλίας το 1894 και την ίδια χρονιά, έγινε μέλος του διοικητικού συμβουλίου του Μαθηματικός Κύκλος του Παλέρμο. Κέρδισε το βραβείο μαθηματικών από την Accademia dei Lincei το 1895. Το 1897 παρακολούθησε το πρώτο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στη Ζυρίχη και εκεί γνώρισε τον Paul Painlevé και τον Émile Borel που τον προσκάλεσαν στο Παρίσι τον επόμενο χρόνο. Στο ταξίδι αυτό έκανε χρήσιμες συζητήσεις με τον Henri Lebesgue. Το επόμενο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών πραγματοποιήθηκε στο Παρίσι τον Αύγουστο του 1900 και ο Volterra προσκλήθηκε να δώσει μία από τις τέσσερις διαλέξεις της ολομέλειας. Εκεί παρουσίασε την διάλεξη Betti, Brioschi, Casorati - Trois analystes italiens et trois manières d'envisager les question d'analyse. Ο Volterra συνέλαβε την ιδέα μιας θεωρίας συναρτήσεων που εξαρτώνται από ένα συνεχές σύνολο τιμών μιας άλλης συνάρτησης το 1883. Ο Hadamard επρόκειτο αργότερα να εισαγάγει τη λέξη «λειτουργικό» που αντικατέστησε την αρχική ορολογία του Volterra. Το 1890 ο Volterra έδειξε μέσω του συναρτησιακού λογισμού του ότι η θεωρία των Hamilton και Jacobi για την ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων της δυναμικής θα μπορούσε να επεκταθεί και σε άλλα προβλήματα της μαθηματικής φυσικής. Κατά τη διάρκεια των ετών 1892 έως 1894 ο Volterra δημοσίευσε έγγραφα σχετικά με μερικές διαφορικές εξισώσεις, ιδιαίτερα την εξίσωση των κυλινδρικών κυμάτων. Το πιο διάσημο έργο του έγινε στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Η μελέτη του στις ολοκληρωτικές εξισώσεις ξεκίνησε το 1884 και το 1896 άρχισε να δημοσιεύει εργασίες πάνω σε αυτές. Πέθανε στις 11 Οκτωβρίου το 1940 στην Ρώμη.

*Ο καθηγητής Volterra είναι ένας αγγελικός νέος, με χαρακτηριστική σεμνότητα.*

*Ερνέστο Πασκάλ.*



Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.