



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΙΤΛΟΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

**Εκτιμήσεις για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση και διαφόριση ως προς τη
βάση των ορθογωνίων**

ΟΝΟΜΑ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΑΪΒΑΤΖΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΟΝΟΜΑ ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

ΜΗΤΣΗΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ

**ΠΑΤΡΑ
ΜΗΝΑΣ, ΕΤΟΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026**

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ

**Εκτιμήσεις για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση και διαφόριση ως προς τη
βάση των ορθογωνίων**

ΑΪΒΑΤΖΙΔΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Επιτροπή επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής

Θεμιστοκλής Μήτσης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Συν- επιβλέπων Καθηγητής

Μιχαήλ Ανούσης
Καθηγητής
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

ΠΑΤΡΑ
ΜΗΝΑΣ, ΕΤΟΣ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2026

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Θεμιστοκλή Μήτση, για την πολύτιμη καθοδήγηση, την επιστημονική υποστήριξη και τις ουσιαστικές παρατηρήσεις του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η συμβολή του υπήρξε καθοριστική για την ολοκλήρωση της εργασίας.

Περίληψη

Η μελέτη της θεωρίας που αφορά τους Μεγιστικούς τελεστές και τα θεωρήματα διαφόρισης είναι ένα σημαντικό πεδίο του κλάδου της Μαθηματικής ανάλυσης, που εξετάζει τη δυνατότητα ανάκτησης σημειακών τιμών μίας συνάρτησης μέσω των μέσων τιμών τους σε περιοχές που συρρικνώνονται γύρω από ένα σημείο, με αποτέλεσμα την ανάδειξη μίας σύνδεσης ολοκληρωτικής και σημειακής συμπεριφοράς συναρτήσεων. Στην μελέτη της διαφόρισης ως προς μία βάση ιδιαίτερη σημασία έχει η διερεύνηση του ρόλου της γεωμετρίας της οικογένειας των συνόλων που τη συγκροτούν. Σκοπός της παρούσας εργασίας λοιπόν είναι η συστηματική μελέτη της διαφόρισης ως προς τη βάση των ορθογωνίων με παράλληλους άξονες, με ιδιαίτερη έμφαση στην ανάδειξη του ρόλου της γεωμετρίας της συγκεκριμένης κατηγορίας συνόλων στη διαδικασία. Αρχικά λοιπόν αναλύεται το μεθοδολογικό πλαίσιο διαφόρισης ως προς τη βάση των Ευκλείδειων μπαλών, μέσω του οποίου η ασθενής εκτίμηση τύπου $(1,1)$ για τον μεγιστικό τελεστή Hardy-Littlewood οδηγεί στο κλασικό Θεώρημα Διαφόρισης του Lebesgue. Στη συνέχεια αναδεικνύεται ότι η αλλαγή βάσης και η μετάβαση στη βάση ορθογώνιων με άξονες παράλληλους, λόγω γεωμετρικών ιδιοτήτων που έχουν συγκριτικά με τις μπάλες, οδηγούν στην αποτυχία της ασθενούς εκτίμησης τύπου $(1,1)$ για τον αντίστοιχο ισχυρό μεγιστικό τελεστή και κατά συνέπεια αποτυγχάνει η επέκταση του μεθοδολογικού πλαισίου διαφόρισης που αποδεικνύει τη διαφόριση ως προς τις μπάλες σε ολόκληρη την κλάση L^1 στην περίπτωση της νέας βάσης. Για την ανάδειξη του ρόλου της Γεωμετρίας της βάσης στη διαδικασία της Διαφόρισης αποτελεί κεντρικό πυρήνα της παρούσας εργασίας, η ανάπτυξη μίας γεωμετρικής προσέγγισης για την απόδειξη ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund, βασισμένη στην απόδειξη των Córdoba-Fefferman. Η επιλογή της συγκεκριμένης απόδειξης επιτρέπει την ανάδειξη του ρόλου της γεωμετρίας των ορθογωνίων στη διαδικασία της διαφόρισης. Ειδικότερα, μέσω της κατάλληλης επιλογής υποοικογενειών ορθογωνίων, του ελέγχου των επικαλύψεων τους και μιας επαγωγικής διαδικασίας ως προς τη διάσταση, προκύπτει η απαιτούμενη εκθετική εκτίμηση μίας συνάρτησης που εισάγεται για να μετρά το βαθμό επικαλύψεων μεταξύ των ορθογωνίων η οποία, σε συνδυασμό με κατάλληλη ανισότητα τύπου Orlicz-Young, οδηγεί στην απόδειξη της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund. Η ανάλυση καταλήγει στο θεώρημα διαφόρισης ως προς τη βάση των ορθογωνίων και ειδικότερα στο αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο η εν λόγω βάση διαφορίζει την κλάση $L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}$.

Λέξεις Κλειδιά: Ισχυρή μεγιστική συνάρτηση, διαφορίση ολοκληρωμάτων, βάση ορθογωνίων, ανισότητα Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund, μεγιστική συνάρτηση Hardy–Littlewood, ανισότητα Córdoba–Fefferman.

Abstract

The study of maximal operators and differentiation theorems constitutes an important area of Mathematical Analysis, concerned with the recovery of pointwise values of a function from its average's oversets shrinking to a given point, thereby revealing a fundamental connection between the integral and pointwise behavior of functions. In the study of differentiation with respect to a differentiation basis, particular importance is attached to investigating the role played by the geometry of the family of sets that constitutes the basis. Accordingly, the aim of the present thesis is to provide a systematic study of differentiation with respect to the basis of axis-parallel rectangles, with particular emphasis on highlighting the role of the geometry of this specific family of sets in the differentiation process. The thesis first examines the methodological framework for differentiation with respect to the basis of Euclidean balls, within which the weak-type $(1, 1)$ estimate for the Hardy–Littlewood maximal operator leads to the classical Lebesgue Differentiation Theorem. It is then shown that changing the differentiation basis from Euclidean balls to axis-parallel rectangles, due to the distinctive geometric features of rectangles in comparison with balls, results in the failure of the weak-type $(1, 1)$ estimate for the corresponding strong maximal operator. Consequently, the methodological framework used to establish differentiation of the entire class L^1 with respect to Euclidean balls cannot be directly extended to the new basis. To highlight the role of the geometry of the basis in the differentiation process, a central part of the present thesis is devoted to developing a geometric approach to the proof of the Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund inequality, based on the argument of Córdoba and Fefferman. The choice of this approach makes it possible to bring out explicitly the role played by the geometry of rectangles in the differentiation process. More specifically, through the appropriate selection of subfamilies of rectangles, the control of their overlaps, and an inductive procedure with respect to the dimension, the required exponential estimate is obtained for a function introduced to measure the degree of overlap among the rectangles. Combined with an appropriate Orlicz–Young-type inequality, this estimate leads to the proof of the Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund inequality. The analysis culminates in the

differentiation theorem for the basis of axis-parallel rectangles and, more specifically, in the result that this basis differentiates the class $L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}$.

Keywords: Strong maximal function, differentiation of integrals, rectangular differentiation basis, Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund inequality, Hardy-Littlewood maximal function, Córdoba–Fefferman inequality.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή.....	i
Κεφάλαιο 1: Προαπαιτούμενες Γνώσεις Και Βασικά Εργαλεία	1
1.1 Μετρικοί και Τοπολογικοί Χώροι.....	1
1.1.1 Τοπολογικοί χώροι.....	2
1.1.2 Μετρικοί χώροι και επαγόμενη τοπολογία	3
1.1.3 Συνέχεια σε μετρικούς χώρους.....	6
1.1.4 Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους.....	9
1.1.5 Συμπαγότητα	10
1.2 Ευκλείδειοι χώροι.....	13
1.3 Μέτρο Lebesgue και Ολοκλήρωση.....	15
1.4 Χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$	23
1.5 Θεωρήματα Κάλυψης.....	27
Κεφάλαιο 2: Η μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood	30
2.1 Η μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood	30
2.2 Βασικές ιδιότητες της μεγιστικής συνάρτησης.....	32
2.3 Η εκτίμηση ασθενούς τύπου $(1,1)$	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η Ισχυρή Μειστική Συνάρτηση και η Γεωμετρική Απόδειξη της Ανισότητας Jessen- Marcinkiewicz- Zygmund	41
3.1 Η βάση των ορθογωνίων και η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση	41
3.2 Η Γεωμετρία της Βάσης των Ορθογωνίων	44
3.3 Η ανισότητα Jessen- Marcinkiewicz- Zygmund	49
3.3.1 Διαδικασία επιλογής υποοικογένειας ορθογωνίων με ελεγχόμενες επικαλύψεις	51
3.3.2 Η συνάρτηση επικάλυψης και η ανάγκη ισχυρότερου ελέγχου.....	55
3.3.3 Κατασκευή υποοικογένειας με την ισχυρότερη ιδιότητα ελέγχου επικαλύψεων P2	58
3.3.4 Επαγωγική μετάβαση ως προς τη διάσταση και ολοκλήρωση της απόδειξης της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund	60
Κεφάλαιο 4: Διαφορίσιση Ολοκληρωμάτων ως προς τη Βάση των Ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες.....	80

4.1 Θεώρημα διαφορίσισης ως προς τη βάση των ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες του συστήματος συντεταγμένων	80
4.2 Απόδειξη της πρότασης 4.1.....	81
Επίλογος.....	87
Βιβλιογραφία.....	88

Εισαγωγή

Η θεωρία των μεγιστικών συναρτήσεων και των θεωρημάτων διαφόρισης αποτελεί έναν από τους θεμελιώδεις κλάδους της Σύγχρονης Ανάλυσης και ειδικότερα της Αρμονικής Ανάλυσης. Κεντρικό ερώτημα της θεωρίας είναι η διερεύνηση της σύγκλισης των μέσων τιμών μίας συνάρτησης, οι οποίες λαμβάνονται σε μία περιοχή γύρω από μία σημειακή τιμή, στη σημειακή τιμή της συνάρτησης σχεδόν παντού. Συνεπώς κεντρικό ζήτημα στην πιο γενική του μορφή είναι η ανάκτηση σημειακής τιμής μίας συνάρτησης μέσω χρήσης πληροφόρησης γύρω για τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε μία περιοχή γύρω από τη σημειακή τιμή. Το ζήτημα αυτό συνδέεται άμεσα με τη δομή του ευκλείδειου χώρου, με τη γεωμετρική δομή των συνόλων γύρω από τη σημειακή τιμή τα οποία μέσω διαρκούς συρρίκνωσης οδηγούν στη σύγκλιση στη σημειακή τιμή, τη θεωρία μέτρου Lebesgue και τη συμπεριφορά συγκεκριμένων μεγιστικών τελεστών, οι οποίοι επιτρέπουν τον έλεγχο των τοπικών μέσων τιμών γύρω από τα σημεία και αποτελούν βασικό εργαλείο για σημαντικές αποδείξεις που εξασφαλίζουν υπό προϋποθέσεις την εν λόγω σημειακή σύγκλιση (Stein, 1970; de Guzmán, 1975).

Αφετηρία της θεωρίας αποτελεί το κλασικό Θεώρημα Διαφόρισης του Lebesgue, το οποίο αποδεικνύει την εν λόγω σύγκλιση όταν οι μέσες τιμές λαμβάνονται σε μία περιοχή γύρω από το σημείο που καθορίζεται από Ευκλείδειες μπάλες. Πιο αναλυτικά σύμφωνα με το εν λόγω θεώρημα οι μέσες τιμές μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης πάνω σε ευκλείδειες μπάλες που συρρικνώνονται σε ένα σημείο συγκλίνουν σχεδόν παντού στη σημειακή τιμή της συνάρτησης. Η απόδειξη του αποτελέσματος αυτού βασίζεται καθοριστικά στην μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood και στην εκτίμηση ασθενούς τύπου $((1,1))$ που αφορά τον έλεγχο των τιμών του εν λόγω τελεστή (Hardy & Littlewood, 1930; Stein, 1970). Πιο αναλυτικά για να αποδειχθεί η διαφόριση μίας τυχούσας συνάρτησης $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ στην απόδειξη λαμβάνεται προσέγγισή της από μία συνεχή συνάρτηση για την οποία είναι δεδομένο ότι ο μέσος όρος των τιμών της όταν λαμβάνεται σε μία μπάλα με κέντρο ένα σημείο συγκλίνει σημειακά στο σημείο καθώς η ακτίνα συγκλίνει προς το μηδέν. Για να αποδειχθεί η σημειακή προσέγγιση της f καθώς η ακτίνα της μπάλας τείνει στο μηδέν θα πρέπει να ελεγχθεί το σφάλμα προσέγγισης που είναι ακριβώς η διαφορά $(f-g)$. Η εκτίμηση του ασθενούς λοιπόν δίνει τη δυνατότητα του ελέγχου αυτού του σφάλματος καθώς μέσω αυτής εξασφαλίζεται ότι το σύνολο που ο μέσος όρος της συνάρτησης σφάλματος παίρνει

μεγάλες τιμές γίνεται αμελητέα μικρό. Με αυτόν τον μηχανισμό η σύγκλιση επεκτείνεται από τις συνεχείς συναρτήσεις σε όλες τις τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Η κατάσταση όμως, όσον αφορά τη διαφόριση, καθίσταται σημαντικά πιο σύνθετη όταν οι ευκλείδειες μπάλες αντικαθίστανται από ορθογώνια παράλληλα στους άξονες λόγω διαφορών γεωμετρικών μεταξύ των εν λόγω συνόλων. Στην περίπτωση των ευκλείδειων μπαλών, η ασθενής εκτίμηση τύπου (1,1) για τον μεγιστικό τελεστή Hardy-Littlewood αποδεικνύεται με τη βοήθεια κατάλληλων θεωρημάτων κάλυψης, τα οποία ισχύουν όταν τα σύνολα της βάσης είναι μπάλες. Όταν όμως τα σύνολα είναι ορθογώνια η εκτίμηση (1,1) για τον αντίστοιχο Ισχυρό Μεγιστικό Τελεστή, που ουσιαστικά υπολογίζει το supremum των μέσων όρων των τιμών μίας συνάρτησης σε ένα ορθογώνιο που περιλαμβάνει ένα σημείο x , αποτυγχάνει. Συνεπώς η δεν είναι εφικτό να ακολουθεί η ίδια μεθοδολογία που ακολουθείται στην περίπτωση των μπαλών ώστε να αποδειχθεί διαφόριση για τυχούσες συναρτήσεις $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Η αποτυχία οφείλεται λοιπόν στην ιδιαίτερη γεωμετρία που έχουν τα ορθογώνια, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν πολύ πιο σύνθετης γεωμετρίας γεωμετρικοί τόποι στο πλαίσιο μελέτης τέτοιου είδους προβλημάτων σύγκλισης. Πιο συγκεκριμένα η γεωμετρία των ορθογωνίων είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει ανεξάρτητη μεταβολή των πλευρών τους σε κάθε διεύθυνση του χώρου, σε αντίθεση με τις μπάλες όπου η μεταβολή τους για σμίκρυνση ή διερεύνηση εξαρτάται μόνο από μία παράμετρος που είναι η ακτίνα, και συνεπώς ο λόγος των πλευρών τους δύναται να τείνει στο άπειρο. Η διερεύνηση του ζητήματος που αφορά το αν και με ποιον τρόπο επιτυγχάνεται διαφόριση ως προς τη νέα βάση, που έχει γεωμετρικές ιδιαιτερότητες συγκριτικά με τις μπάλες, οδηγεί στην εισαγωγή ενός νέου τελεστή της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης (strong maximal function) ο οποίος όπως είναι φυσικό στον ορισμό του περιλαμβάνει ορθογώνια. Το πρόβλημα όμως που αποτελεί βασικό εμπόδιο επέκτασης της αποδεικτικής συλλογιστικής που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη διαφόρισης ως προς βάση που αποτελείται από Ευκλείδειες μπάλες στην περίπτωση ορθογωνίων είναι ότι σε αντίθεση με την κλασική μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood, η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση δεν ικανοποιεί εκτίμηση ασθενούς τύπου ((1,1)), γεγονός που καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη νέων τεχνικών ανάλυσης ώστε να εξασφαλιστεί ο έλεγχος των συνόλων που δύνανται οι μέσοι όροι να λαμβάνουν τιμές που μπορεί να αποκλίνουν από τη σημειακή τιμή της συνάρτησης (Jessen, Marcinkiewicz & Zygmund, 1935; de Guzmán, 1975).

Σκοπός της παρούσας εργασίας λοιπόν είναι η συστηματική μελέτη του προβλήματος της διαφόρισης ως προς τη βάση των ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στο χώρο $\mathbb{R}^n$, με ιδιαίτερη έμφαση στον καθοριστικό ρόλο που διαδραματίζει η γεωμετρία της συγκεκριμένης βάσης. Στο πλαίσιο αυτό μελετάται ο ισχυρός μεγιστικός τελεστής ως βασικό αναλυτικό εργαλείο που υπολογίζει το supremum των μέσων όρων της απόλυτης τιμές μίας συνάρτησης σε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ πάνω σε όλα τα ορθογώνια με άξονες παράλληλους που περιέχουν το εν λόγω σημείο x . Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην ανάδειξη του ρόλου της Γεωμετρίας της βάσης για την επίτευξη της διαφόρισης και ειδικώς στην παρούσα εργασία υπάρχει επικέντρωση στην ανάλυση της ιδιαίτερης Γεωμετρίας των Ορθογωνίων η οποία οδηγεί στην αποτυχία της ασθενούς εκτίμησης τύπου $(1, 1)$ που ισχύει για τον αντίστοιχο τελεστή όταν η βάση πάνω στην οποία μελετάται η διαφόριση είναι οι μπάλες. Ο στόχος της μελέτης της διαφόρισης μέσω της ανάλυσης του ρόλου της Γεωμετρίας της βάσης των ορθογωνίων μπορεί να επιτευχθεί μέσω της παρουσίας μίας Γεωμετρικής απόδειξης της οριακής ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund βασισμένη σε μία προσέγγιση που ανέλυσαν σε άρθρο τους οι Córdoba- Fefferman. Ο σκοπός είναι μέσω μίας τέτοιας γεωμετρίας προσέγγισης να αναδειχθεί η σύνδεση μεταξύ της γεωμετρίας της βάσης των ορθογωνίων και της διαφόρισης της κλάσης $L(\log L)_{loc}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Η ανάλυση της διαφόρισης ως προς τις Ευκλείδειες μπάλες χρησιμοποιείται για να αναδειχθεί αρχικά ένα πρότυπο διαφόρισης ως προς σύνολα που έχουν λιγότερο σύνθετες, όσον αφορά το τεχνικό μέρος της διαδικασίας, γεωμετρικές ιδιότητες με την παράλληλη ανάδειξη των γεωμετρικών διαφορών που έχουν τα ορθογώνια και οι οποίες αποτέλεσαν τον κύριο λόγο δημιουργίας μίας ανάγκης ανάπτυξης μίας νέας ανισότητας με στόχο να αποδειχθεί η διαφόριση ως προς τα ορθογώνια. Η εργασία με πιο απλά λόγια επικεντρώνεται στη διερεύνηση της σχέσης μεταξύ των μεγιστικών τελεστών και της θεωρίας διαφόρισης ολοκληρωμάτων, αναδεικνύοντας τον τρόπο με τον οποίο γεωμετρικές ιδιότητες συγκεκριμένων οικογενειών συνόλων επηρεάζουν τη συμπεριφορά των τοπικών μέσων τιμών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν λοιπόν, το κεντρικό ερευνητικό ερώτημα της εργασίας λοιπόν αφορά το κατά πόσο η βάση των ορθογωνίων διαφορίζει κατάλληλες κλάσεις συναρτήσεων και πως η Γεωμετρία της βάσης, και ειδικώς η Γεωμετρία των Ορθογωνίων μπορεί να επηρεάσει τη διαφόριση. Η συμβολή της παρούσας εργασίας έγκειται στην ενιαία και συστηματική παρουσίαση μίας μαθηματικής συλλογιστικής που συνδέει τη θεωρία μέτρου, τα θεωρήματα κάλυψης, τις μεγιστικές συναρτήσεις και τα θεωρήματα διαφορίσισης η οποία έχει ως στόχο πέραν της μελέτης της διαδικασίας διαφόρισης ως προς τις βάσεις των

ορθογωνίων και την ανάδειξη του ρόλου της γεωμετρίας των βάσεων, γεγονός χρήσιμο ώστε να αναδειχθούν προβλήματα που προκύπτουν στην περίπτωση συλλογισμών που έχουν ως στόχο επέκταση μίας μεθοδολογίας απόδειξης διαφορίσης ως προς νέες βάσεις. Ειδικότερα, αναδεικνύεται με σαφήνεια η λογική αλληλουχία που ξεκινά από το κλασικό Θεώρημα Διαφορίσισης του Lebesgue, συνεχίζεται με την απόδειξη της αποτυχίας της εκτίμησης ασθενούς τύπου $(1,1)$ για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση και καταλήγει στον πυρήνα της εργασίας που είναι Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund και στο θεώρημα διαφορίσισης για τη βάση των ορθογωνίων. Με τον τρόπο αυτό παρουσιάζεται ένα πλήρες και συνεκτικό θεωρητικό πλαίσιο που αναδεικνύει τον θεμελιώδη δεσμό μεταξύ γεωμετρίας, μεγιστικών τελεστών και διαφορίσισης ολοκληρωμάτων.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της παρούσας εργασίας αποτελεί η συστηματική σύνδεση των επιμέρους αποτελεσμάτων σε μια ενιαία συλλογιστική πορεία. Αντί της αποσπασματικής παρουσίας ανεξάρτητων θεωρημάτων, επιχειρείται η ανάδειξη της λογικής μετάβασης από τα θεωρήματα κάλυψης και την μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood στην ισχυρή μεγιστική συνάρτηση, στην αποτυχία της εκτίμησης ασθενούς τύπου $(1,1)$ στη συνέχεια, στην ανισότητα Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund και τελικά στη διατύπωση του θεωρήματος διαφορίσισης για τη βάση των ορθογωνίων.

Όσον αφορά τη δομή εργασία οργανώνεται σε τέσσερα κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά θεωρητικά εργαλεία της τοπολογίας, της θεωρίας μέτρου και των χώρων συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της μεγιστικής συνάρτησης Hardy-Littlewood και αποδεικνύεται το κλασικό θεώρημα διαφορίσισης του Lebesgue. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση, μελετώνται οι βασικές ιδιότητές της και αναλύεται η Γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αποδεικνύεται το θεώρημα διαφορίσισης ως προς τη βάση των αξονοπαράλληλων ορθογωνίων.

Κεφάλαιο 1: Προαπαιτούμενες Γνώσεις Και Βασικά Εργαλεία

1.1 Μετρικοί και Τοπολογικοί Χώροι

Στο παρόν υποκεφάλαιο παρουσιάζονται συστηματικά οι θεμελιώδεις έννοιες και τα βασικά θεωρήματα της θεωρίας των Τοπολογικών και Μετρικών Χώρων, τα οποία μεταξύ άλλων συνθέτουν ένα θεωρητικό υπόβαθρο εντός του οποίου διατυπώνονται και μελετώνται τα προβλήματα που εξετάζονται στα επόμενα κεφάλαια. Ο πυρήνας της εργασίας περιλαμβάνει εκτιμήσεις, προσεγγίσεις και εν γένει αποδείξεις που περιλαμβάνουν γεωμετρικά σύνολα αλλά και μαθηματικές διεργασίες, όπως σύγκλιση, τα οποία ορίζονται και κατασκευάζονται εντός και μέσω των ιδιοτήτων τοπολογικών μετρικών χώρων.

Πιο συγκεκριμένα αρχικά εισάγονται οι βασικοί ορισμοί που αφορούν την τοπολογία ενός συνόλου, όπως τα ανοικτά και κλειστά σύνολα, το εσωτερικό και το κλειστό περίβλημα, καθώς και η έννοια της συνέχειας απεικονίσεων μεταξύ τυπολογικών χώρων. Στη συνέχεια εξετάζονται οι μετρικοί χώροι ως ιδιαίτερη περίπτωση τοπολογικών χώρων με έμφαση στην μετρική έννοια της απόστασης και στην τοπολογία που αυτή επάγει. Ιδιαίτερη εστίαση υπάρχει στις ισοδύναμες μορφές της συνέχειας σε μετρικούς χώρους καθώς και στα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών.

Ακολούθως μελετώνται αναλυτικά οι έννοιες της σύγκλισης των ακολουθιών Cauchy και της πληρότητας οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στη θεμελίωση διαδικασιών που εντάσσονται στα κεφάλαια των ορίων. Σημαντικό μέρος του υποκεφαλαίου επίσης εστιάζει στην έννοια της συμπαγότητας σε μετρικούς χώρους τόσο μέσω του ορισμού με ανοικτές καλύψεις όσο και μέσω των ισοδύναμων διαδοχικών και μετρικών χαρακτηρισμών της. Παρουσιάζονται και αποδεικνύονται βασικά θεωρήματα όπως το κριτήριο συμπαγότητας μέσω πληρότητας και ολικής φραγμένότητας, καθώς και θεμελιώδεις συνέπειες της συμπαγότητας.

Τέλος εξετάζεται η ειδική περίπτωση των ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^n$, όπου η γενική θεωρία αποκτά απλούστερη και πιο συγκεκριμένη μορφή. Διατυπώνονται κλασικά αποτελέσματα, όπως το Θεώρημα Heine-Borel και το Θεώρημα ύπαρξης μέγιστης και ελάχιστης τιμής για συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα, τα οποία χρησιμοποιούνται στα επόμενα κεφάλαια. Η παρουσίαση στοχεύει στην ακριβή και αυστηρή διατύπωση των εννοιών, καθώς και στην κατανόηση των μεταξύ τους σχέσεων, ώστε να διαμορφωθεί ένα συνεκτικό εννοιολογικό πλαίσιο για τη μελέτη πιο εξειδικευμένων αναλυτικών φαινομένων.

1.1.1 Τοπολογικοί χώροι

Η μελέτη εννοιών όπως η εγγύτητα, η σύγκλιση και η συνέχεια απαιτεί ένα αφηρημένο πλαίσιο το οποίο να μην εξαρτάται από την ύπαρξη απόστασης. Για το σκοπό αυτό εισάγεται η έννοια της τοπολογίας, η οποία επιτρέπει την περιγραφή της τοπικής δομής ενός συνόλου αποκλειστικά μέσω επιλεγμένων υποσυνόλων του. Παρατίθεται λοιπόν ο ορισμός της τοπολογίας σε ένα μη κενό σύνολο καθώς η Τοπολογία ως έννοια αποτελεί πυρήνα από τον οποίο απορρέουν όλες οι επόμενες έννοιες.

Ορισμός 1.1.

Έστω X μη κενό σύνολο. Μία οικογένεια $T \subseteq P(X)$ λέγεται τοπολογία αν:

- (i) $\emptyset, X \in T$
- (ii) Για κάθε οικογένεια συνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq T$ ισχύει ότι $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in T$
- (iii) Για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $U_1, \dots, U_k \in T$ ισχύει ότι $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k \in T$

Το ζεύγος (X, T) λέγεται τοπολογικός χώρος

Στο πλαίσιο ενός τοπολογικού χώρου ορισμένα σύνολα ξεχωρίζουν ως στοιχεία καθώς περιγράφουν με ακρίβεια τη συμπεριφορά του χώρου σε τοπικό επίπεδο. Η διάκριση αυτών των συνόλων οδηγεί στις έννοιες των ανοικτών και κλειστών συνόλων οι οποίες αποτελούν τον βασικό κορμό της τοπολογικής θεωρίας. Συνεπώς στη συνέχεια παρατίθεται ο ορισμός των Ανοιχτών και Κλειστών συνόλων σε Τοπολογικούς χώρους

Ορισμός 1.2 (Ανοιχτά και Κλειστά σύνολα)

Έστω (X, T) τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία της οικογένειας T ονομάζονται ανοικτά σύνολα του X . Ένα σύνολο $F \subseteq X$ λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμά του $X \setminus F$ είναι ανοικτό, δηλαδή αν $X \setminus F \in T$.

Μετά την εισαγωγή των ανοικτών και κλειστών συνόλων καθίσταται αναγκαία η περιγραφή της σχέσης ενός αυθαίρετου υποσυνόλου με την τοπολογική δομή του χώρου. Η περιγραφή αυτή βασίζεται σε δύο θεμελιώδεις κατασκευές, στον προσδιορισμό του μέγιστου ανοικτού συνόλου που περιέχεται σε ένα δεδομένο σύνολο και στον ελάχιστου κλειστού συνόλου που το περιέχει.

Οι κατασκευές αυτές οδηγούν στις έννοιες του εσωτερικού και του κλειστού περιβλήματος ενός συνόλου οι οποίες αποτελούν βασικά εργαλεία της τοπολογίας και χρησιμοποιούνται εκτενώς στη μελέτη ιδιοτήτων όπως η σύγκλιση και η συνέχεια.

Ορισμός 1.3 (Εσωτερικό και κλειστό περίβλημα)

Για $A \subseteq X$ το κλειστό περίβλημα του A που συμβολίζεται με $\text{cl}(A)$ ορίζεται ως η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το A ενώ το εσωτερικό του A που συμβολίζεται με $\text{int}(A)$ ορίζεται ως η ένωση όλων των ανοικτών συνόλων που περιέχονται στο A .

Τέλος στους Τοπολογικούς χώρους εκτός από τη μελέτη των ίδιων των συνόλων ιδιαίτερη σημασία έχει η μελέτη απεικονίσεων μεταξύ Τοπολογικών Χώρων. Οι απεικονίσεις αυτές επιτρέπουν τη σύγκριση τοπολογικών δομών και την μεταφορά ιδιοτήτων από έναν Τοπολογικό χώρο σε έναν άλλο υπό κατάλληλες προϋποθέσεις.

Για το σκοπό αυτό απαιτείται ένας ακριβής ορισμός που να προσδιορίζει πότε μία απεικόνιση διατηρεί τη δομή που καθορίζεται από τα ανοικτά σύνολα των χώρων. Ο ορισμός αυτός εισάγεται με βάση τη συμπεριφορά των αντίστροφων απεικονίσεων μέσω μίας συνάρτησης ανοικτών συνόλων και οδηγεί στην έννοια της συνέχειας απεικονίσεων σε τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 1.4 (Συνέχεια Απεικονίσεων μεταξύ τοπολογικών χώρων)

Έστω $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ τοπολογικοί χώροι και $f: X \rightarrow Y$ απεικόνιση.

Η f λέγεται συνεχής αν για κάθε σύνολο $V \in \mathcal{T}_Y$ ισχύει

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$$

Ισοδύναμα η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα μέσω της f κάθε κλειστού συνόλου του Y είναι κλειστό σύνολο στο X

1.1.2 Μετρικοί χώροι και επαγόμενη τοπολογία

Οι τοπολογικοί χώροι ως δομές είναι αρκετά αφηρημένοι καθώς αρκούνται στην περιγραφή της δομής ενός χώρου μέσω συνόλων και υποσυνόλων, χωρίς ωστόσο να περιλαμβάνουν έννοιες που αναφέρονται σε ποσοτικά μεγέθη, συγκρίσεις, αποστάσεις. Είναι συνεπώς βέβαιον ότι σε πολλές περιπτώσεις, απαιτείται η εισαγωγή μίας δομής, που επιτρέπει την μελέτη του χώρου μέσω και της ανάλυσης ποσοτικών χαρακτηριστικών. Μία τέτοια πιο ισχυρή δομή είναι βέβαιον ότι θα πρέπει να περιλαμβάνει την έννοια της απόστασης ή αλλιώς εγγύτητας μεταξύ σημείων η οποία όπως είναι αναμενόμενο μπορεί να οδηγήσει σε πληρέστερη ανάλυση της δομής ενός χώρου και να παρέχει σημαντική πληροφόρηση για χαρακτηριστικά που θεωρούνται τοπικά. Η έννοια της απόστασης λοιπόν σε έναν χώρο εισάγεται με δομημένο τρόπο, και οδηγεί στην κατασκευή μίας πιο ισχυρής και πληρέστερης δομής από αυτή του Τοπολογικού χώρου, μέσω του ορισμού των μετρικών χώρων.

Οι μετρικοί χώροι λοιπόν αποτελούν ειδική κατηγορία τοπολογικών χώρων στην οποία η τοπολογία προκύπτει από μία συνάρτηση που μετρά “την απόσταση”, χωρίς η έννοια “απόσταση” να ταυτίζεται πάντα με τη γνωστή απόσταση που είναι γνωστή από τους Ευκλείδειους χώρους, μεταξύ ζευγών σημείων. Ο ορισμός και η ύπαρξη μετρικής λοιπόν επιτρέπει την ακριβή διατύπωση εννοιών όπως η σύγκλιση, η συνέχεια και η πληρότητα, καθώς και την ανάπτυξη αναλυτικών εργαλείων που δεν είναι διαθέσιμα σε δομές πιο αφηρημένες όπως οι Τοπολογικοί Χώροι. Στο πλαίσιο αυτό παρουσιάζεται ο ορισμός του Μετρικού χώρου με τη βοήθεια του ορισμού μίας απεικόνισης που ονομάζεται μετρική

Ορισμός 1.5 (Μετρική και Μετρικός χώρος)

Έστω X ένα σύνολο.

μία συνάρτηση $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ λέγεται μετρική αν για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύουν:

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ αντιμεταθετική ιδιότητα
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Το ζεύγος (X, d) λέγεται μετρικός χώρος

Είναι δεδομένο και προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό της μετρικής, ότι η εισαγωγή της σε ένα σύνολο παρέχει σημαντική πληροφορία, υπό ελεγχόμενες προϋποθέσεις φυσικά, για την εγγύτητα κατά κάποιον τρόπον των σημείων μέσω μίας ορισμένης συνάρτησης που

ικανοποιεί αυστηρές προϋποθέσεις. Κατά κάποιον τρόπο η έννοια εγγύτητα μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφεται ως έννοια από τις ιδιότητες της μετρικής, και δεν πρέπει να ταυτίζεται όπως προαναφέρθηκε πάντα με την εγγύτητα που προκύπτει ως έννοια από τη συνήθη μετρική που ορίζεται στους Ευκλείδειους χώρους, δεδομένου ότι ο ορισμός είναι πιο γενικός και αναφέρεται σε τυχαία σύνολα. Σε κάθε περίπτωση κατόπιν της εισαγωγής της μετρικής, η πληροφόρηση που λαμβάνεται μπορεί να αξιοποιηθεί για την περιγραφή της τοπικής δομής του χώρου οδηγώντας με φυσικό τρόπο σε μία τοπολογία που συνδέεται άμεσα με τη μετρική.

Κεντρικό ρόλο στη διαδικασία αυτή διαδραματίζουν ορισμένα υποσύνολα του χώρου τα οποία περιγράφουν γειτονιές σημείων, και άρα δίνουν σημαντική πληροφορία για την τοπική δομή του χώρου πλέον, με βάση την μετρική απόσταση. Τα σύνολα αυτά αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία της τοπολογίας που επάγεται από τη μετρική και ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 1.6 (Ανοικτή και κλειστή μπάλα)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος όπου $x \in X$ και $r > 0$.

Το σύνολο $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ ονομάζεται ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r . Αντίστοιχα το σύνολο $\bar{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ ονομάζεται κλειστή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r .

Οι ανοικτές μπάλες επιτρέπουν τον ακριβή χαρακτηρισμό της τοπικής συμπεριφοράς ενός μετρικού χώρου ενώ επιπλέον όπως φαίνεται και από τον παρακάτω ορισμό δίνουν τη δυνατότητα να επεκταθεί ένας μετρικός χώρος, μέσω επαγόμενης τοπολογίας από μετρική, σε τοπολογικό χώρο. Συνεπώς όπως προαναφέρθηκε προκύπτει ένα πιο πλήρες σύνολο πλέον που πέραν της περιγραφής του μέσω συνόλων δίνεται η δυνατότητα της ανάλυσης της τοπικής του συμπεριφοράς και φυσικά της εισαγωγής νέων ορισμών και μαθηματικών εργαλείων. Ακολουθεί λοιπόν ο ορισμός της επαγόμενης τοπολογίας από μετρική

Ορισμός 1.7 (Τοπολογία που επάγεται από μετρική)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

Ορίζεται $\mathcal{T}_d := \{U \subseteq X : \text{για κάθε } x \in U \text{ υπάρχει } r > 0 \text{ με } B(x, r) \subseteq U\}$.

Η οικογένεια $\mathcal{T}_d$ είναι τοπολογία στο X η οποία ονομάζεται τοπολογία που επάγεται από την μετρική d . Το ζεύγος $(X, \mathcal{T}_d)$ αποτελεί Τοπολογικό Χώρο

Εφόσον λοιπόν η εισαγωγή της έννοιας της μετρικής και της επαγόμενης τοπολογίας οδηγεί σε πιο πλήρεις χώρους στους οποίους όπως προαναφέρθηκε κεντρικό ρόλο διαδραματίζει η

έννοια της απόστασης είναι σημαντικό τα νέα εργαλεία που παρέχονται στους μετρικούς χώρους να περιληφθούν και σε αναλύσεις που σχετίζονται άμεσα με τις απεικονίσεις και οδηγούν σε χρήσιμες σημαντικές αποδείξεις. Συνεπώς, με πιο απλά λόγια, προκύπτει ότι η εισαγωγή της μετρικής δομής σε έναν χώρο δεν επιτρέπει μόνο τον ορισμό γειτονιών και την κατασκευή της αντίστοιχης τοπολογίας, αλλά παρέχει επίσης τα κατάλληλα εργαλεία για τη μελέτη της συμπεριφοράς απεικονίσεων μεταξύ χώρων. Μία από τις σημαντικότερες έννοιες που συνδέονται με την τοπική δομή ενός χώρου είναι η έννοια της συνέχειας. Στους τοπολογικούς χώρους η συνέχεια ορίζεται μέσω της συμπεριφοράς των ανοικτών συνόλων. Ωστόσο, στους μετρικούς χώρους η ύπαρξη της απόστασης επιτρέπει μία πιο αναλυτική περιγραφή της ίδιας έννοιας, βασισμένη στον έλεγχο των αποστάσεων μεταξύ σημείων και των εικόνων τους μέσω μιας απεικόνισης. Η προσέγγιση αυτή οδηγεί στον κλασικό ε - δ χαρακτηρισμό της συνέχειας, ο οποίος αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο της μαθηματικής ανάλυσης. Όλα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά στο επόμενο υποκεφάλαιο.

1.1.3 Συνέχεια σε μετρικούς χώρους

Όπως προαναφέρθηκε και στο πέρας του προηγούμενου υποκεφαλαίου η ύπαρξη μετρικής δομής σε έναν χώρο επιτρέπει την ακριβέστερη μελέτη της συμπεριφοράς απεικονίσεων που με τη σειρά της οδηγεί σε σημαντική πληροφόρηση της δομής του ίδιου του χώρου. Σε αντίθεση με το γενικό τοπολογικό πλαίσιο όπου η συνέχεια διατυπώνεται αποκλειστικά με όρους ανοικτών συνόλων στους μετρικούς χώρους η έννοια της απόστασης καθιστά δυνατή μία ισοδύναμη αλλά περισσότερο αναλυτική περιγραφή της συνέχειας.

Η περιγραφή αυτή βασίζεται στον έλεγχο της μεταβολής των τιμών μιας απεικόνισης πάντα σε σχέση με την μεταβολή των σημείων του πεδίου ορισμού και οδηγεί στον κλασικό ε - δ χαρακτηρισμό της συνέχειας. Ο χαρακτηρισμός αυτός αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο της Ανάλυσης καθώς συνδέει άμεσα την μετρική δομή με τη συμπεριφορά απεικονίσεων.

Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι σε μετρικούς χώρους ο Τοπολογικός ορισμός της συνέχειας και ο ε - δ χαρακτηρισμός είναι ισοδύναμοι. Η ισοδυναμία αυτή εξασφαλίζει τη συνοχή μεταξύ της τοπολογικής και της μετρικής θεώρησης και επιτρέπει τη μετάβαση από πιο αφηρημένα τοπολογικά επιχειρήματα σε συγκεκριμένες αναλυτικές αποδείξεις.

Το αποτέλεσμα αυτό συνοψίζεται στην ακόλουθη πρόταση η οποία παίζει κεντρικό ρόλο στη θεωρία των μετρικών χώρων. Για λόγους πληρότητας και αυστηρότητας η πρόταση διατυπώνεται και αποδεικνύεται αναλυτικά.

Πρόταση 1.1 (ε-δ χαρακτηρισμός της συνέχειας)

Έστω (X, d_X) , (Y, d_Y) μετρικοί χώροι $f: X \rightarrow Y$ απεικόνιση και $x_0 \in X$. Τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Η f είναι συνεχής στο x_0 ως απεικόνιση τοπολογικών χώρων $(X, \mathcal{T}_{d_X}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$, δηλαδή για κάθε ανοικτό $V \subseteq Y$ με $f(x_0) \in V$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ με $x_0 \in U$ και $f(U) \subseteq V$.

(Ισοδύναμα: για κάθε ανοικτό $V \in \mathcal{T}_{d_Y}$ ισχύει $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_{d_X}$)

2. (ε - δ μορφή) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$,

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Απόδειξη

(1) $\rightarrow$ (2)

Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ως προς τις επαγόμενες τοπολογίες από τις μετρικές d_X και d_Y

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε η ανοικτή μπάλα:

$$B_Y(f(x_0), \varepsilon) = \{y \in Y: d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$$

είναι ανοικτό σύνολο του Y και περιέχει το $f(x_0)$.

Από τη συνέχεια της f στο x_0 προκύπτει ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subseteq X$ τέτοιο ώστε:

$$x_0 \in U \text{ και } f(U) \subseteq B_Y(f(x_0), \varepsilon)$$

Επειδή U είναι ανοικτό στο (X, d_X) και $x_0 \in U$ από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου σε μετρικό χώρο υπάρχει $\delta > 0$ με

$$B_X(x_0, \delta) \subseteq U.$$

Τότε για κάθε $x \in X$ με $d_X(x, x_0) < \delta$ ισχύει $x \in B_X(x_0, \delta) \subseteq U$ άρα

$$f(x) \in f(U) \subseteq B_Y(f(x_0), \varepsilon),$$

δηλαδή $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Έτσι προκύπτει ο ε - δ χαρακτηρισμός

(2) $\rightarrow$ (1)

Έστω ότι ισχύει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ να ισχύει:

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Θα αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ως απεικόνιση τοπολογικών χώρων

$(X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, δηλαδή για κάθε ανοικτό $V \subseteq Y$ με $f(x_0) \in V$ θα αποδειχθεί ότι υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ με $x_0 \in U$ και $f(U) \subseteq V$

Έστω $V \subseteq Y$ ανοικτό σύνολο με $f(x_0) \in V$. Επειδή V είναι ανοικτό και περιέχει το $f(x_0)$ από τον ορισμό του ανοικτού συνόλου σε μετρικό χώρο υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V.$$

Από την υπόθεση γι' αυτό το $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Θέτουμε $U := B_X(x_0, \delta)$, τότε U είναι ανοικτό στο X και $x_0 \in U$.

Επιπλέον για κάθε $x \in U$ ισχύει $d_X(x, x_0) < \delta$, άρα $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ λόγω υπόθεσης δηλαδή τελικά ισχύει:

$$f(x) \in B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$$

Επομένως $f(U) \subseteq V$

Αφού αποδείχθηκαν και οι δύο συνεπαγωγές, οι (1) και (2) είναι ισοδύναμες και συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώθηκε

Στο σημείο αυτό, πέραν των εφαρμογών των εργαλείων που προκύπτουν από την μεταφορά από τους γενικούς τοπολογικούς χώρους σε μετρικούς τοπολογικούς χώρους, στο χώρο των απεικονίσεων ιδιαίτερη σημασία προκύπτει ότι έχει η έννοια της απόστασης, όπως αυτή προκύπτει από τον ορισμό της εκάστοτε μετρικής, για τη διαδικασία των προσεγγίσεων ενός σημείου του χώρου. Η ύπαρξη μιας μετρικής, όπως προαναφέρθηκε, επιτρέπει την ποσοτική περιγραφή της εγγύτητας μεταξύ σημείων και κατ' επέκταση την μελέτη διαδικασιών προσέγγισης μέσα στον χώρο. Στο πλαίσιο αυτό οι ακολουθίες αποτελούν ένα από τα

βασικότερα εργαλεία ανάλυσης καθώς επιτρέπουν τη διατύπωση και τη μελέτη εννοιών όπως η σύγκλιση, η συνέχεια και η πληρότητα. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια παρουσιάζεται η έννοια των ακολουθιών σε μετρικούς χώρους και οι βασικές ιδιότητές τους.

1.1.4 Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

Η εισαγωγή μετρικής δομής λοιπόν σε έναν χώρο καθιστά δυνατή τη μελέτη της συμπεριφοράς ακολουθιών σημείων μέσω της έννοιας της απόστασης. Αν και η σύγκλιση μπορεί να διατυπωθεί γενικότερα στο πλαίσιο της τοπολογίας με άλλους πιο γενικούς τρόπους βασισμένους σε σύνολα, στους μετρικούς χώρους η χρήση ακολουθιών παρέχει έναν ιδιαίτερα αποτελεσματικό και πλήρη μηχανισμό περιγραφής βασικών ιδιοτήτων.

Μία ακολουθία σε μετρικό χώρο ορίζεται ως απεικόνιση από το σύνολο των φυσικών αριθμών στον χώρο και εκφράζει μία διακριτή διαδικασία προσέγγισης ενός σημείου, με αξιοποίηση φυσικά της έννοιας της “απόστασης”. Η μελέτη λοιπόν της σύγκλισης ακολουθιών επιτρέπει τον ακριβή χαρακτηρισμό της σύγκλισης σημείων καθώς και τη διατύπωση και απόδειξη θεμελιωδών ιδιοτήτων όπως η κλειστότητα συνόλων και η συνέχεια απεικονίσεων.

Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι σε μετρικούς χώρους πολλές τοπολογικές έννοιες μπορούν να εκφραστούν ισοδύναμα με όρους ακολουθιών. Η παρατήρηση αυτή καθιστά τις ακολουθίες κεντρικό εργαλείο ανάλυσης στην μετρική τοπολογία και οδηγεί φυσικά στην εισαγωγή ειδικών κατηγοριών ακολουθιών όπως οι ακολουθίες Cauchy, καθώς και στην έννοια της πληρότητας ενός μετρικού χώρου.

Με βάση τα παραπάνω, ακολουθεί ο ορισμός της σύγκλισης ακολουθίας σε μετρικό χώρο:

Ορισμός 1.8 (Σύγκλιση ακολουθίας μετρικού χώρου)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος, μία ακολουθία $\{x_n\} \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέμε ότι συγκλίνει σε $x \in X$ ($x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq m$

Μετά τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών εισάγεται μία έννοια που περιγράφει την εσωτερική συμπεριφορά μιας ακολουθίας ως προς τη μετρική ανεξάρτητα από το γεγονός της σύγκλισης ή όχι εντός του χώρου. Η έννοια αυτή βασίζεται αποκλειστικά στις αποστάσεις μεταξύ των όρων της ακολουθίας.

Οι ακολουθίες Cauchy αποτελούν κεντρικό εργαλείο στην μελέτη μετρικών χώρων καθώς επιτρέπουν τον διαχωρισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας από την τοπολογική ιδιότητα του χώρου στον οποίο αυτή ορίζεται. Η έννοια αυτή οδηγεί άμεσα στον ορισμό της πληρότητας στη συνέχεια ο οποίος εκφράζει πότε η εσωτερική συγκλίνουσα συμπεριφορά των ακολουθιών οδηγεί σε πραγματική σύγκλιση σε σημείο εντός του χώρου. Στη συνέχεια παρατίθενται οι ορισμοί της Ακολουθίας Cauchy και της Πληρότητας Μετρικού Χώρου:

Ορισμός 1.9 (Ακολουθίες Cauchy)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος, μία ακολουθία $\{x_n\} \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέμε ότι είναι ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει m ώστε $d(x_k, x_n) < \varepsilon$ για όλα $k, n \geq m$.

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy.

Ορισμός 1.10 (Πληρότητα Μετρικού Χώρου)

Ένας μετρικός χώρος (X, d) θα λέμε ότι είναι πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε στοιχείο του X .

Η μελέτη των ακολουθιών, που προηγήθηκε, δεν περιορίζεται μόνο στην έννοια της σύγκλισης, αλλά αποτελεί ως διαδικασία ένα μέσο που μπορεί να οδηγήσει στην ανάλυση σημαντικών τοπολογικών ιδιοτήτων ενός χώρου. Μεταξύ αυτών, ιδιαίτερη θέση κατέχει η συμπαγότητα, η οποία αποτελεί θεμελιώδη έννοια της Ανάλυσης και θα χρησιμοποιηθεί επανειλημμένα στη συνέχεια. Για το λόγο αυτό, στη συνέχεια παρουσιάζεται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων.

1.1.5 Συμπαγότητα

Οι έννοιες της σύγκλισης ακολουθιών και της πληρότητας επιτρέπουν τη μελέτη της συμπεριφοράς ακολουθιών σε μετρικούς χώρους. Ωστόσο πολλές βασικές ιδιότητες της Ανάλυσης δεν αφορούν μεμονωμένες ακολουθίες αλλά τη συνολική δομή του χώρου και των υποσυνόλων του. Για το σκοπό αυτό εισάγεται η έννοια της συμπαγότητας η οποία εκφράζει μία ισχυρή μορφή ελέγχου άπειρων κατασκευών εντός ενός χώρου μέσω πεπερασμένων καλύψεων και αποτελεί κεντρικό εργαλείο στη μελέτη της συνέχειας, της σύγκλισης και της ύπαρξης ακροτάτων. Η έννοια της συμπαγότητας διατυπώνεται αρχικά στο γενικό τοπολογικό πλαίσιο, ανεξάρτητα από την μετρική δομή, και βασίζεται στη συμπεριφορά ανοικτών καλύψεων. Στη συνέχεια, και ειδικά στους μετρικούς χώρους, η συμπαγότητα

αποκτά ισοδύναμους χαρακτηρισμούς σε όρους ακολουθιών και πληρότητας, οι οποίοι θα εξεταστούν αργότερα.

Με βάση τα παραπάνω, δίνεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.12 (Συμπαγές σύνολο)

Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $K \subseteq X$. Το σύνολο K λέγεται συμπαγές αν για κάθε οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}$ με

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο δεικτών $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ τέτοιο ώστε

$$K \subseteq U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n}$$

Όπως ήδη αναφέρθηκε ο ορισμός της συμπαγείας δεν είναι αποκομμένος από τους μετρικούς χώρους, αντιθέτως τα εργαλεία που προκύπτουν μέσα από την κατασκευή ενός μετρικού χώρου που εννοείται ξεκινάει από τον ορισμό της μετρικής μπορούν να δώσουν εξειδικευμένους τρόπους εξέτασης ενός χώρου ως προς τη συμπαγεία πέραν του ορισμού που φυσικά εντάσσεται στο γενικότερο τοπολογικό πλαίσιο. Τέτοια αποτελέσματα δίνουν τη δυνατότητα μελέτης τοπολογικών ιδιοτήτων με εργαλεία και τεχνικές που βασίζονται στον ορισμό της μετρικής εντός ενός χώρου. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να εξεταστεί ένα θεώρημα το οποίο αποδεικνύει ότι η συμπαγεία ενός μετρικού χώρου είναι ισοδύναμη με ιδιότητες που μελετώνται κυρίως με τεχνικές μετρικής ανάλυσης. Πριν την παρουσίαση του θεωρήματος λαμβάνει χώρα ο ορισμός της έννοιας του ολικά φραγμένου συνόλου, καθώς η έννοια αυτή περιλαμβάνεται στο εν λόγω θεώρημα που αποδεικνύεται αμέσως μετά.

Ορισμός 1.13 (Ολικά φραγμένο σύνολο)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το σύνολο A λέγεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο σημείων $x_1, \dots, x_N \in X$ τέτοιο ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon).$$

και ακολουθεί πλέον το θεώρημα που συνδέει με ισοδυναμία την ιδιότητα της συμπαγείας με την πληρότητα.

Πρόταση 1.2

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

K συμπαγές αν και μόνο αν K πλήρες (ως υποχωράς) και ολικά φραγμένο

Απόδειξη

Πρώτο μέρος της απόδειξης

Αν K συμπαγές σύνολο, τότε θα αποδειχθεί ότι είναι πλήρες και ολικά φραγμένο

Έστω $\varepsilon > 0$

Η οικογένεια των ανοικτών μπαλών

$$\{B(x, \varepsilon) : x \in K\}$$

είναι ανοικτή κάλυψη του K

Επειδή το K είναι συμπαγές υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon).$$

Άρα το K είναι ολικά φραγμένο σύνολο

Έστω τώρα $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy του συνόλου X ($x_n \in K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$)

Επειδή το K είναι συμπαγές σύνολο κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

$$x_{n_k} \rightarrow x \in K.$$

Επειδή η αρχική ακολουθία είναι Cauchy, ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο x .

Άρα το K είναι πλήρες.

Στο σημείο αυτό θα ακολουθήσει το δεύτερο μέρος της απόδειξης που εξασφαλίζει την ισοδυναμία. Πιο συγκεκριμένα θα αποδειχθεί το κάτωθι:

Αν K είναι πλήρες και ολικά φραγμένο, τότε είναι συμπαγές.

Αρχικά θα δείξουμε ότι κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

Έστω (x_n) ακολουθία στο K

Επειδή το K είναι ολικά φραγμένο, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη από μπάλες ακτίνας 1. Μία από αυτές περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας.

Με επανάληψη της διαδικασίας για $\varepsilon = 1/2, 1/3, \dots$ προκύπτει κατασκευή διαγώνιας υπακολουθίας που είναι Cauchy.

Επειδή το K είναι πλήρες, η υπακολουθία συγκλίνει σε στοιχείο του K .

Άρα κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή το K είναι διαδοχικά συμπαγές.

Σε μετρικούς χώρους:

$$\text{διαδοχική συμπαγότητα} \Leftrightarrow \text{συμπαγότητα}.$$

Άρα το K είναι συμπαγές.

Η θεωρία των μεγιστικών συναρτήσεων και των θεωρημάτων διαφορίσισης που μελετώνται στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Πιο αναλυτικά στην παρούσα εργασία η θεωρία αναπτύσσεται στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$, καθώς τα αποτελέσματα που μελετώνται αφορούν τη μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood και την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση όπως αυτές ορίζονται μέσω του μέτρου Lebesgue και συγκεκριμένων γεωμετρικών οικογενειών συνόλων του $\mathbb{R}^n$, όπως οι ευκλείδειες μπάλες και τα ορθογώνια με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Συνεπώς η ανάλυση εξειδικεύεται σε Ευκλείδειους μετρικούς χώρους και για το λόγο αυτό, πριν από την ανάπτυξη της σχετικής θεωρίας, κρίνεται σκόπιμη η συνοπτική παρουσίαση ορισμένων βασικών γεωμετρικών εννοιών του ευκλείδειου χώρου που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.2 Ευκλείδειοι χώροι

Ο ευκλείδειος χώρος διάστασης n αρχικά συμβολίζεται με $\mathbb{R}^n$ και αποτελεί έναν διανυσματικό χώρο εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο από το οποίο προκύπτει η Ευκλείδεια νόρμα που επάγει την Ευκλείδεια Μετρική. Πιο αναλυτικά ως Ευκλείδειο $\mathbb{R}^n$ χώρο στη βιβλιογραφία εννοείται το ίδιο το σύνολο μαζί με την Ευκλείδεια μετρική.

Πιο αναλυτικά η Ευκλείδεια νόρμα

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2},$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Από τη νόρμα αυτή επάγεται η Ευκλείδεια Μετρική, η οποία είναι γνωστή ως “απόσταση” και ορίζεται ως εξής:

$$d(x,y) = \|x - y\|_2,$$

Η Ευκλείδεια Μετρική όπως αναφέρθηκε εκφράζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του $\mathbb{R}^n$. Η έννοια της απόστασης, όπως αναλύθηκε στην ανάπτυξη της θεωρίας των μετρικών χώρων, αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο στην ανάλυση καθώς επιτρέπει την μελέτη της τοπικής συμπεριφοράς συναρτήσεων και την ανάπτυξη διαδικασιών που σχετίζονται με την έννοια της προσέγγισης σημείων του χώρου.

Δεδομένου λοιπόν ότι ο Ευκλείδειος Χώρος είναι ένας μετρικός χώρος, με την Ευκλείδεια μετρική, περιλαμβάνει όλες τις ιδιότητες ενός μετρικού χώρου και σύμφωνα με βάση την μετρική αυτή ορίζονται οι ανοικτές μπάλες

$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r \}$, όπου $x \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Οι μπάλες διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία που ακολουθεί, καθώς αποτελούν τα βασικά γεωμετρικά σύνολα ως προς τα οποία ορίζεται η μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood και διατυπώνεται το κλασικό θεώρημα διαφορίσισης του Lebesgue.

Πέραν των ανοιχτών μπαλών, ιδιαίτερη σημασία για το αντικείμενο της παρούσας εργασίας παρουσιάζουν τα ορθογώνια με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Ένα τέτοιο ορθογώνιο στον χώρο $\mathbb{R}^n$ έχει την μορφή:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n], \text{ όπου } a_i < b_i \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n$$

Τα ορθογώνια αυτά αποτελούν τα βασικά σύνολα ως προς τα οποία ορίζεται η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση (strong maximal function) και διατυπώνονται τα αντίστοιχα θεωρήματα διαφορίσισης. Ενώ οι μπάλες αποτελούν μία ομαλή γεωμετρική δομή, τα ορθογώνια επιτρέπουν ανεξάρτητη μεταβολή των πλευρών τους σε κάθε διεύθυνση του χώρου. Η γεωμετρική αυτή ιδιότητα αποτελεί τη βασική πηγή δυσκολίας στη θεωρία της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης, καθώς οι κλασικές τεχνικές που εφαρμόζονται στην περίπτωση των μπαλών δεν μεταφέρονται πάντοτε άμεσα στην περίπτωση των ορθογωνίων.

Η γεωμετρία των μπαλών και των ορθογωνίων επηρεάζει καθοριστικά την μορφή των αντίστοιχων μεγιστικών τελεστών και των εκτιμήσεων που αυτοί ικανοποιούν. Για το λόγο αυτό, οι έννοιες που παρουσιάστηκαν στην παρούσα ενότητα θα αποτελέσουν το βασικό γεωμετρικό υπόβαθρο για την μελέτη της μεγιστικής συνάρτησης Hardy- Littlewood, της

ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης και των θεωρημάτων διαφορίσισης που θα αναπτυχθούν στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

Με την ολοκλήρωση της μελέτης του ευκλείδειου χώρου και των βασικών γεωμετρικών συνόλων που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια, το ενδιαφέρον μετατοπίζεται στην μελέτη των συναρτήσεων που ορίζονται πάνω σε αυτά. Δεδομένου ότι το κεντρικό αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η συμπεριφορά των μέσων τιμών συναρτήσεων σε μπάλες και ορθογώνια και η σύγκλισή τους προς τις σημειακές τιμές των συναρτήσεων, καθίσταται απαραίτητη η εισαγωγή της θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης Lebesgue. Η θεωρία αυτή παρέχει το κατάλληλο πλαίσιο για τον ορισμό των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στους μεγιστικούς τελεστές και στα θεωρήματα διαφορίσισης που θα μελετηθούν στα επόμενα κεφάλαια καθώς ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue περιλαμβάνει ως αναπόσπαστο μέρος την μαθηματική έννοια του “μέτρου Lebesgue” εν απουσία της οποίας δεν μπορεί να υπάρξει. Το μέτρο Lebesgue αποτελεί μία ειδική περίπτωση μέτρου ορισμένο στους χώρους $\mathbb{R}^n$ και η διαδικασία κατασκευής του μία ειδική περίπτωση μίας γενικότερης μεθόδου κατασκευής μέτρου που εφαρμόζεται σε τυχαία μη κενά σύνολα και εξασφαλίζει τη δυνατότητα μετατροπής τους σε χώρους μέτρου μέσω της εφαρμογής ενός σημαντικού θεωρήματος που αναφέρεται στη βιβλιογραφία συχνά ως θεώρημα επέκτασης του Caratheodory ή εναλλακτικά κριτήριο του Caratheodory για εξωτερικά μέτρα.

1.3 Μέτρο Lebesgue και Ολοκλήρωση

Η θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης λοιπόν αποτελεί ένα από τα βασικά θεμέλια της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης. Στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ το Lebesgue μέτρο παρέχει έναν γενικευμένο τρόπο μέτρησης του μεγέθους υποσυνόλων του χώρου, επεκτείνοντας τις κλασικές έννοιες του μήκους, του εμβαδού και του όγκου σε πολύ πιο γενικές κατηγορίες συνόλων. Η έννοια αυτή επιτρέπει τη συστηματική μελέτη μετρήσιμων συνόλων και αποτελεί το κατάλληλο υπόβαθρο για την εισαγωγή του Lebesgue ολοκληρώματος.

Γενικότερα η κατασκευή του μέτρου Lebesgue στους Ευκλείδειους χώρους είναι μία εφαρμογή, μία συγκεκριμένη περίπτωση κατασκευής μέτρου, της μεθοδολογίας της γενικής θεωρίας μέτρου η οποία αναφέρεται στην εισαγωγή μέτρου σε τυχαία σύνολα. Πυρήνας της θεωρίας είναι σαφώς ο ορισμός του μέτρου, όμως για να οριστεί το μέτρο, ως συνάρτηση, απαιτείται πρώτα να κατασκευαστεί το πεδίο ορισμού του, δηλαδή το πεδίο πάνω στο οποίο

θα οριστεί η εν λόγω συνάρτηση. Η βασική ιδέα πίσω από τη θεωρία του μέτρου όπως αναφέρθηκε είναι να εισαχθεί ένας αυστηρά δομημένος τρόπος για την “μέτρηση” συνόλων. Συνεπώς γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το πεδίο ορισμού του μέτρου είναι ένα σύνολο το οποίο περιλαμβάνει υποσύνολα του συνόλου στο οποίο εισάγεται το μέτρο. Από τη θεωρία μέτρου η εισαγωγή μέτρου εντός ενός τυχόντος συνόλου X , προϋποθέτει να έχει κατασκευαστεί ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του X το οποίο όμως δε θα είναι τυχαίο αλλά θα πρέπει να ικανοποιεί αυστηρές προϋποθέσεις για να μπορέσει να αποτελέσει πεδίο πάνω στο οποίο θα οριστεί το μέτρο. Πιο αναλυτικά ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται σ -Άλγεβρα του συνόλου X . Ακολουθεί πιο αναλυτικός ορισμός της σ - Άλγεβρας :

Ορισμός 1.14 (σ - Άλγεβρα) :Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια υποσυνόλων

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

ονομάζεται σ - άλγεβρα επί του συνόλου X , αν ικανοποιεί τις εξής τρεις ιδιότητες:

Το X ανήκει στην $\mathcal{M}$

$$X \in \mathcal{M}.$$

Ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{Αν} \quad E \in \mathcal{M} \quad \text{τότε} \quad X \setminus E \in \mathcal{M}$$

Η είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις των συνόλων/ στοιχείων της:

$$\text{Δηλαδή ισχύει ότι Αν } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}, \text{ τότε } \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

Το μέτρο ως συνάρτηση όπως ήδη αναφέρθηκε ορίζεται πάνω σε μία σ - Άλγεβρα που ορίζεται επί ενός συνόλου X . Συνεπώς πλέον έχει αναλυθεί το απαιτούμενο υπόβαθρο για την εισαγωγή του ορισμού του μέτρου:

Ορισμός 1.15 (Μέτρου)

Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{M}$ μία σ -άλγεβρα υποσυνόλων του X .

Μια συνάρτηση

$$\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$$

ονομάζεται μέτρο εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\mu(\emptyset) = 0.$$

(ii) Αριθμήσιμη προσθετικότητα

Για κάθε ακολουθία $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ανά δύο ξένων συνόλων της $\mathcal{M}$, δηλαδή

$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ για } i \neq j,$$

ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Η τριάδα $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ονομάζεται χώρος μέτρου.

Όπως γίνεται αντιληπτό ο χαρακτηρισμός μίας συνάρτησης που ορίζεται σε ένα υποσύνολο του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου X , το οποίο όπως αναλύθηκε πρέπει να είναι σ -άλγεβρα, είναι μία διαδικασία εφικτή όταν ικανοποιούνται αυστηρές προϋποθέσεις που αφορούν την ίδια τη συμπεριφορά της συνάρτησης. Μία σημαντική ιδιότητα που αξίζει παρατήρησης είναι η αριθμήσιμη προσθετικότητα, με απλά λόγια η ιδιότητα της συνάρτησης να δίνει την ίδια τιμή στην ένωση οποιονδήποτε ξένων συνόλων στοιχείων του πεδίο ορισμού της με το άθροισμα των τιμών των ιδίων συνόλων. Στη θεωρία μέτρου εξέχουσα θέση έχει και μία ακόμη συνάρτηση η οποία ορίζεται ώστε να “μετρήσει” υποσύνολα ενός συνόλου X η οποία όμως δεν απαιτείται να ικανοποιεί τις ίδιες αυστηρές προϋποθέσεις, το εξωτερικό μέτρο. Αφενός το εξωτερικό μέτρο ορίζεται σε όλο το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X και αφετέρου όπως θα φαίνεται και παρακάτω, όπου παρατίθεται ο αυστηρός ορισμός, δεν απαιτείται να ισχύει η αριθμήσιμη προσθετικότητα αλλά αρκεί η υποπροσθετικότητα

Ορισμός 1.16 (Εξωτερικού Μέτρου)

Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολό του

Μια απεικόνιση

$$\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$$

ονομάζεται εξωτερικό μέτρο στο X , εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

Για κάθε $A, B \subseteq X$, ισχύει ότι αν $A \subseteq B$ τότε : $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Αριθμήσιμη Υποπροσθετικότητα

Για κάθε ακολουθία υποσυνόλων $A_1, A_2, \dots \subseteq X$, ισχύει:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

Στην κλασική γεωμετρία, όσον αφορά τους Ευκλείδειους χώρους, το μέγεθος ενός συνόλου είναι άμεσα υπολογίσιμο όταν το σύνολο έχει απλή γεωμετρική μορφή, όπως ένα διάστημα ή ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Για παράδειγμα, αν

$$R = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i), \quad a_i < b_i,$$

τότε το γεωμετρικό μέγεθος του R δίνεται από

$$|R| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί στο μήκος, στο εμβαδό ή στον όγκο του ορθογωνίου, ανάλογα με τη διάσταση του χώρου. Ωστόσο, στην μαθηματική ανάλυση εμφανίζονται συχνά πολύ πιο σύνθετα σύνολα, για τα οποία ο άμεσος υπολογισμός του μεγέθους δεν είναι δυνατός. Για το λόγο αυτό η έννοια του μέτρου επεκτείνεται μέσω της έννοιας του εξωτερικού μέτρου η οποία ως ιδέα βασίζεται σε καλύψεις συνόλου από ορθογώνια.

Ορισμός 1.18 (εξωτερικό μέτρο Lebesgue)

Για κάθε σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |R_k| : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right\},$$

όπου R_k είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα του $\mathbb{R}^n$ (Ορθογώνια αριθμήσιμα σε πλήθος).

Με τον τρόπο αυτό το μέγεθος ενός συνόλου προσεγγίζεται από το άθροισμα των όγκων αριθμήσιμων οικογενειών ορθογωνίων που το καλύπτουν. Ωστόσο δεν είναι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ κατάλληλα για να αποτελέσουν αντικείμενο μέτρησης. Για τον λόγο αυτό εισάγεται η έννοια των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

Ορισμός 1.19 (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο)

Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο αν για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Για τα σύνολα αυτά το εξωτερικό μέτρο συμπεριφέρεται με τρόπο συμβατό με την αποσύνθεση του χώρου. Στην περίπτωση αυτή το μέτρο του συνόλου E ορίζεται ως

$$m(E) = m^*(E),$$

και ονομάζεται Lebesgue μέτρο του E . Συχνά χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$|E|$$

για το Lebesgue μέτρο ενός συνόλου.

Το Lebesgue μέτρο ικανοποιεί βασικές ιδιότητες που το καθιστούν κατάλληλο εργαλείο για την μαθηματική ανάλυση και φυσικά αποτελεί ένα μέτρο του Ευκλείδειου χώρου ορισμένο πάνω στη σ -άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων. Μεταξύ των ιδιοτήτων που ικανοποιεί το μέτρο, όπως και κάθε μέτρο ορισμένο σε σ -άλγεβρα, ιδιαίτερη σημασία έχει η σ -προσθετικότητα σύμφωνα με την οποία για αριθμήσιμη οικογένεια ανά δύο ξένων μετρήσιμων συνόλων E_i ισχύει

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Αφού οριστεί το μέτρο των συνόλων, μπορεί πλέον να εισαχθεί η έννοια της ολοκλήρωσης για συναρτήσεις που ορίζονται στον χώρο $\mathbb{R}^n$. Η κατασκευή του Lebesgue ολοκληρώματος βασίζεται αρχικά στις λεγόμενες απλές συναρτήσεις.

Ορισμός 1.20 (απλή συνάρτηση)

Μια συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}(x),$$

όπου $a_i \geq 0$ και E_i είναι μετρήσιμα σύνολα, ενώ χ_{E_i} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του E_i .

Για τις απλές συναρτήσεις το ολοκλήρωμα ορίζεται άμεσα μέσω του μέτρου των αντίστοιχων συνόλων.

Ορισμός 1.21 (ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης)

$$\int \varphi \, dm = \sum_{i=1}^k a_i \, m(E_i).$$

Αφού ορίστηκε το ολοκλήρωμα για απλές συναρτήσεις υπάρχει η δυνατότητα επέκτασης της έννοιας αυτής σε ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων. Οι απλές συναρτήσεις αποτελούν ένα βασικό εργαλείο στην κατασκευή του Lebesgue ολοκληρώματος, καθώς μπορούν να προσεγγίσουν κατάλληλα γενικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Η βασική ιδέα της κατασκευής είναι ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από μια αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων. Έτσι, το ολοκλήρωμα μιας γενικής συνάρτησης ορίζεται μέσω των ολοκληρωμάτων των απλών συναρτήσεων που την προσεγγίζουν. Με τον τρόπο αυτό το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει τον ορισμό του ολοκληρώματος από τις απλές συναρτήσεις σε πολύ ευρύτερες κατηγορίες συναρτήσεων. Η κατασκευή αυτή επιτρέπει την μελέτη συναρτήσεων με ιδιαίτερα σύνθετη συμπεριφορά και οδηγεί στην ανάπτυξη του ολοκληρώματος Lebesgue, το οποίο επεκτείνει ουσιαστικά το πεδίο εφαρμογής του ολοκληρώματος Riemann, μπορεί να θεωρηθεί ένα ισχυρότερο και πιο γενικευμένο είδος

ολοκληρώματος. Στη συνέχεια λοιπόν παρουσιάζεται ο ορισμός του Lebesgue ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και η επέκτασή του σε γενικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Καθώς το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται για μετρήσιμες συναρτήσεις προηγείται ο ορισμός μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε με ομαλό τρόπο να προκύψει η παρουσίαση του ορισμού του ολοκληρώματος Lebesgue.

Ορισμός 1.22 (μετρήσιμη συνάρτηση)

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ μια συνάρτηση.

Η f λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) > a\}$$

είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο

Φυσικά όπως γίνεται αντιληπτό και από τη φύση του ορισμού η πλειοψηφία των συναρτήσεων που εμφανίζονται στην μαθηματική ανάλυση και περιλαμβάνουν στοιχεία και ιδιότητες ενδιαφέρουσες για ανάλυση ανήκουν στην ευρεία κατηγορία των μετρήσιμων συναρτήσεων. Ακολουθεί στη συνέχεια ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue που αποτελεί σημαντικό θεμέλιο του μαθηματικού υποβάθρου που πλαισιώνει το κεντρικό ζήτημα της εργασίας, καθώς διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στον ορισμό των Μεγιστικών Συναρτήσεων, ως προαπαιτούμενη γνώση

Ορισμός 1.22 (Ολοκλήρωμα Lebesgue)

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη

Ορίζουμε

$$\int f \, dm = \sup \left\{ \int \varphi \, dm: 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ απλή} \right\}.$$

Η f λέγεται Lebesgue ολοκληρώσιμη αν

$$\int |f| \, dm < \infty$$

Τότε γράφουμε

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Από τον ορισμό κιάλας του ολοκληρώματος Lebesgue που αναλύθηκε προκύπτουν με άμεσο τρόπο θεμελιώδεις ιδιότητες του ολοκληρώματος, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν

επανελημμένα στη συνέχεια της εργασίας καθώς αποτελούν βασικά εργαλεία για τη μελέτη ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη των χώρων L^p , καθώς και στη διατύπωση και απόδειξη των αποτελεσμάτων που αφορούν τις μεγιστικές συναρτήσεις. Οι ιδιότητες που παρουσιάζονται αρχικά αποδεικνύονται πολύ εύκολα, σχεδόν άμεσα, μέσα από τον ορισμό του ολοκληρώματος και παραλείπονται. Παρακάτω, στην παρουσίαση των χώρων $L^p(\mathbb{R}^n)$ παρουσιάζονται οι ανισότητες Holder και Minkowski που ολοκληρώνουν κατά κάποιον τρόπο τις βασικές ιδιότητες του εν λόγω ολοκληρώματος.

Ιδιότητα 1 - Γραμμικότητα

Έστω f και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει:

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$$

Ιδιότητα 2

Αν f είναι μετρήσιμη συνάρτηση και $f(x) \geq 0$ για σχεδόν κάθε x , τότε:

$$\int f \, d\mu \geq 0$$

Ιδιότητα 3- Μονοτονία

Αν f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $f(x) \leq g(x)$ για σχεδόν κάθε x , τότε ισχύει:

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

Και τέλος βασική είναι και η ιδιότητα με την ανισότητα που σχετίζεται με την απόλυτη τιμή

Ιδιότητα 4

Για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ισχύει:

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες όπως προαναφέρθηκε αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία της θεωρίας ολοκλήρωσης Lebesgue και θα αξιοποιηθούν στη μελέτη των χώρων L^p και στις εκτιμήσεις που αφορούν τις μεγιστικές συναρτήσεις. Οι χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$ που θα μελετηθούν είναι χώροι ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων και συνεπώς πυρήνας στον ορισμό τους είναι η έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της σημασίας των ιδιοτήτων του εν λόγω ολοκληρώματος είναι ότι πάνω σε αυτές τις ιδιότητες και στην ανισότητα Minkowski στηρίζεται ο ορισμός συγκεκριμένης νόρμας για τους χώρους που τους καθιστά μετρικούς νορμικούς χώρους. Η μελέτη και παρουσίαση των βασικών

χαρακτηριστικών των εν λόγω χώρων συναρτήσεων είναι απαραίτητη καθώς ως χώροι αποτελούν το βασικό λειτουργικό πλαίσιο μέσα στο οποίο θα μελετηθούν οι μεγιστικές συναρτήσεις στα επόμενα κεφάλαια. Ειδικότερα, οι βασικές ιδιότητες και εκτιμήσεις των μεγιστικών τελεστών διατυπώνονται σε χώρους $(L^p(\mathbb{R}^n))$. Για το λόγο αυτό, στην ενότητα που ακολουθεί παρουσιάζονται συνοπτικά οι βασικές ιδιότητες των χώρων (L^p) που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια της εργασίας.

1.4 Χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$

Μετά την ανάπτυξη λοιπόν της θεωρίας μέτρου Lebesgue και του αντίστοιχου ολοκληρώματος, είναι φυσικό να εξεταστούν κλάσεις συναρτήσεων οι οποίες χαρακτηρίζονται μέσω της ολοκληρωσιμότητάς. Στη σύγχρονη ανάλυση οι χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$, για $1 \leq p \leq \infty$, αποτελούν θεμελιώδεις χώρους συναρτήσεων και παρέχουν το κατάλληλο πλαίσιο εντός του οποίου μπορεί να πραγματοποιηθεί μελέτη πολλών σημαντικών τελεστών. Στη θεωρία της αρμονικής ανάλυσης και ειδικότερα στην μελέτη των μεγιστικών συναρτήσεων κεντρικό ζήτημα αποτελεί για παράδειγμα το ζήτημα του προσδιορισμού σε ποιους χώρους L^p οι αντίστοιχοι τελεστές είναι φραγμένοι και ποιες εκτιμήσεις ικανοποιούν. Στο σημείο αυτό πρέπει αρχικά να αναφερθεί, πριν τον ορισμό των εν λόγω χώρων συναρτήσεων, όπως προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue με τη βοήθεια των απλών συναρτήσεων, οι τιμές μιας συνάρτησης σε σύνολα μέτρου μηδέν δεν επηρεάζουν το ολοκλήρωμά της. Για το λόγο αυτό δύο συναρτήσεις που διαφέρουν μόνο σε τέτοια σύνολα θεωρούνται ουσιαστικά ίδιες.

Ορισμός 1.23

Έστω $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Λέμε ότι οι f και g είναι ίσες σχεδόν παντού αν

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$f = g \text{ σχεδόν παντού}$$

Η έννοια αυτή επιτρέπει την ομαδοποίηση τέτοιων συναρτήσεων σε κλάσεις ισοδυναμίας και την παρουσίαση των χώρων L^p ως χώρους που περιλαμβάνουν κλάσεις ισοδυναμίας

συναρτήσεων που συμπίπτουν σχεδόν παντού. Τώρα με βάση το Lebesgue ολοκλήρωμα μπορούμε πλέον να ορίσουμε τους βασικούς χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, χώρου που αποτελούνται από συναρτήσεις με ελεγχόμενο πεδίο τιμών στον $\mathbb{R}^n$. Ακολουθούν λοιπόν οι ορισμοί των εν λόγω χώρων συναρτήσεων

Ορισμός 1.24 (χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$)

Για $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $L^p(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται ως

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη: } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Τα στοιχεία του χώρου θεωρούνται ως κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων ως προς την ισότητα σχεδόν παντού. Επιπλέον είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η ποσότητα

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

αποτελεί νόρμα στο χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων, όπως προκύπτει ξεκάθαρα από τις ιδιότητες και τα θεωρήματα που παρουσιάζονται παρακάτω, και ονομάζεται L^p νόρμα της συνάρτησης f .

Πέρα από τους χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $L^p(\mathbb{R}^n)$, ιδιαίτερο ρόλο παίζει και ο χώρος των ουσιαστικά φραγμένων συναρτήσεων L^∞ του οποίου ακολουθεί ο ορισμός.

Ορισμός 1.25

Ο χώρος $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ αποτελείται από τις μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχει

$M \geq 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \leq M \text{ για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Οι χώροι L^p περιλαμβάνουν κατηγορίες συναρτήσεων των οποίων οι τιμές τους στο χώρο είναι “ελεγχόμενες” και ως χώροι διαθέτουν σημαντικές δομικές ιδιότητες που εκφράζονται μέσω βασικών ανισοτήτων της ανάλυσης, με προεξέχουσες τις ανισότητες που εκφράζονται στα κάτωθι θεωρήματα τα οποία παρουσιάζονται χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.3 (Θεώρημα Hölder)

Έστω $1 < p, q < \infty$ με

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Αν $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ και $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, τότε $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Η ανισότητα αυτή παίζει θεμελιώδη ρόλο στη μελέτη ολοκληρωμάτων γινομένων συναρτήσεων και εν γένει όπως το σύνολο των ιδιοτήτων αποτελούν εργαλεία για αποδείξεις στους εν λόγω χώρους, στους οποίους όπως προαναφέρθηκε θα μελετηθούν οι Μεγιστικές Συναρτήσεις στα επόμενα κεφάλαια.

Πρόταση 1.4 (Θεώρημα Minkowski)

Για $1 \leq p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Η ανισότητα αυτή εξασφαλίζει ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι πράγματι νόρμα στον χώρο $L^p(\mathbb{R}^n)$, και εξασφαλίζεται ότι ο χώρος είναι μετρικός χώρος καθώς από την εν λόγω νόρμα επάγεται μετρική. Έως αυτό το σημείο έχουν οριστεί στον Ευκλείδειο γενικό n -διάστατο χώρο το ολοκλήρωμα του Lebesgue και οι χώροι συναρτήσεων $L^p(\mathbb{R}^n)$, που ορίζονται με κριτήριο την ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων. Ωστόσο για τον ορισμό των μεγιστικών τελεστών, που αποτελούν τον πυρήνα της παρούσας εργασίας, δεν απαιτείται πάντοτε μία συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη σε έναν ολόκληρο χώρο. Αντιθέτως στη συγκεκριμένη περίπτωση, αρκεί η ολοκληρωσιμότητά των συναρτήσεων να εξασφαλίζεται σε κάθε φραγμένη περιοχή του χώρου, γεγονός που οδηγεί φυσικά στην έννοια των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Η σημασία της κλάσης αυτής για την παρούσα εργασία είναι ιδιαίτερα μεγάλη, καθώς τόσο η μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood όσο και η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση ορίζονται

μέσω τοπικών μέσων τιμών συναρτήσεων πάνω σε μπάλες και ορθογώνια αντίστοιχα. Για να έχουν νόημα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στους ορισμούς αυτούς, αρκεί η συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε τέτοιο τοπικό σύνολο, χωρίς να απαιτείται να είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση της σε ολόκληρο τον χώρο $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, τα θεωρήματα διαφορίσισης που αποτελούν κύριο και πολύ σημαντικό αντικείμενο μελέτης της εργασίας διατυπώνονται φυσικά για συναρτήσεις της κλάσης $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, γεγονός που καθιστά την ανάπτυξη όσων έχουν αναφερθεί για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις μέσω της συμπερίληψης στη θεωρία της έννοιας της τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης που όπως αναλύθηκε θα αποτελέσει ως έννοια πυρήνα για την εξασφάλιση του κατάλληλου πλαισίου για την μελέτη της συμπεριφοράς των τοπικών μέσων τιμών. Ακολουθεί λοιπόν ο ορισμός της ‘‘τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης’’.

Ορισμός 1.26

Μία μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται τοπικά ολοκληρώσιμη εάν για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ισχύει $\int_K |f(x)| dx < \infty$.

Η κλάση όλων των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων συμβολίζεται με $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Με άλλα λόγια, μία συνάρτηση είναι τοπικά ολοκληρώσιμη όταν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές σύνολο. Στον $\mathbb{R}^n$ όμως λόγω του θεωρήματος Heine- Borel, που αποδεικνύει την ισοδυναμία που λέει ότι ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο, μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμα τοπικά ολοκληρώσιμη μία συνάρτηση αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του χώρου δεδομένου ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του χώρου είναι υποσύνολο ενός φραγμένου συμπαγούς υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς η έννοια της τοπικής ολοκληρωσιμότητας δεν εμπεριέχει την απαίτηση ύπαρξης πεπερασμένου ολοκληρώματος σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$. Η ιδιότητα αυτή είναι ακριβώς εκείνη που απαιτείται για τον ορισμό των τοπικών μέσων τιμών που εμφανίζονται στους μεγιστικούς τελεστές και στα θεωρήματα διαφορίσισης τα οποία θα μελετηθούν στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

Η μελέτη των μεγιστικών συναρτήσεων και των αντίστοιχων θεωρημάτων διαφορίσισης συνδέεται άμεσα με τη γεωμετρία των συνόλων πάνω στα οποία υπολογίζονται οι τοπικές μέσες τιμές των συναρτήσεων. Στο πλαίσιο αυτό, τα θεωρήματα κάλυψης αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της θεωρίας μέτρου και της αρμονικής ανάλυσης, καθώς επιτρέπουν την απλοποίηση οικογενειών συνόλων που καλύπτουν ένα υποσύνολο του χώρου

και μάλιστα πιο συγκεκριμένα την μετάβαση πολλές φορές από οικογένειες με μη αριθμήσιμο πλήθος συνόλων που καλύπτουν το χώρο σε οικογένειες με αριθμήσιμο πλήθος συνόλων. Η μετάβαση αυτή είναι απαραίτητη παρακάτω σε αποδείξεις που αφορούν σημαντικά θεωρήματα που σχετίζονται με τους μεγιστικούς τελεστές δεδομένου ότι είναι ανάγκη να χρησιμοποιηθούν σημαντικές ιδιότητες του μέτρου που ισχύουν για αριθμήσιμο πλήθος συνόλων ξένων ανά δύο. Για να καταστεί λοιπόν δυνατή η εκτίμηση του μέτρου τέτοιων συνόλων, είναι απαραίτητο να αντικατασταθούν οι αρχικές, ενδεχομένως πολύπλοκες και αλληλεπικαλυπτόμενες οικογένειες μπαλών από υποοικογένειες που παρουσιάζουν ελεγχόμενη γεωμετρική συμπεριφορά. Η δυνατότητα αυτή παρέχεται ακριβώς από τα θεωρήματα κάλυψης. Παραδείγματος χάρη τα αποτελέσματα που προσφέρουν τα θεωρήματα κάλυψης, μέσω της μετάβασης από σύνθετες και αυθαίρετες καλύψεις ενός συνόλου σε καλύψεις που γεωμετρικά είναι πιο απλές από την άποψη ότι ικανοποιούνται σε αυτές βασικές ιδιότητες του μέτρου, αποτελούν το βασικό γεωμετρικό υπόβαθρο για την απόδειξη της εκτίμησης ασθενούς τύπου (1,1) της μεγιστικής συνάρτησης Hardy-Littlewood. Η συγκεκριμένη εκτίμηση αποτελεί το πρώτο ουσιαστικό βήμα μετάβασης από τη γεωμετρία των συνόλων σε αποτελέσματα ανάλυσης και οδηγεί τελικά στο θεώρημα διαφορίσισης του Lebesgue, σύμφωνα με το οποίο οι τοπικές μέσες τιμές μιας συνάρτησης συγκλίνουν σχεδόν παντού στη σημειακή τιμή της.

Κατά συνέπεια, τα θεωρήματα κάλυψης αποτελούν τον συνδετικό κρίκο μεταξύ της γεωμετρίας του ευκλείδειου χώρου, των εκτιμήσεων για τις μεγιστικές συναρτήσεις και των θεωρημάτων διαφορίσισης που εντάσσονται στον πυρήνα της παρούσας εργασίας. Για το λόγο αυτό, πριν από τη μελέτη των μεγιστικών τελεστών, κρίνεται απαραίτητη η παρουσίαση των βασικών θεωρημάτων κάλυψης που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια και παρουσιάζονται στο αμέσως επόμενο υποκεφάλαιο.

1.5 Θεωρήματα Κάλυψης

Στην μελέτη των μεγιστικών συναρτήσεων, όπως αναλύθηκε, εμφανίζονται συχνά οικογένειες γεωμετρικών συνόλων που καλύπτουν ένα δεδομένο σύνολο του ευκλείδειου χώρου. Για να είναι δυνατός ο έλεγχος του μέτρου τέτοιων καλύψεων, απαιτούνται κατάλληλα γεωμετρικά εργαλεία που επιτρέπουν την επιλογή υποοικογενειών με ευνοϊκές ιδιότητες. Τα αποτελέσματα αυτά είναι γνωστά ως θεωρήματα κάλυψης και αποτελούν βασικό εργαλείο στη σύγχρονη αρμονική ανάλυση. Ένα από τα σημαντικότερα

αποτελέσματα αυτής της κατηγορίας είναι το θεώρημα κάλυψης του Vitali, το οποίο επιτρέπει την επιλογή μιας υποοικογένειας από ανά δύο ξένες μπάλες από μια δοσμένη οικογένεια μπαλών διατηρώντας ταυτόχρονα την ικανότητα κάλυψης του αρχικού συνόλου.

Πριν την παρουσίαση του βασικού θεωρήματος κάλυψης του Vitali παρουσιάζεται ο ορισμός της Οικογένειας μπαλών και αμέσως μετά ακολουθεί η μαθηματική διατύπωση του εν λόγω θεωρήματος

Ορισμός (Οικογένειες Μπαλών)

Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$. Μια οικογένεια μπαλών

$$\mathcal{B} = \{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$$

λέγεται ότι καλύπτει το σύνολο E αν

$$E \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

Τέτοιες οικογένειες εμφανίζονται συχνά όταν μελετούμε τοπικές ιδιότητες συναρτήσεων γύρω από κάθε σημείο ενός συνόλου.

Πρόταση 1.5 (Vitali Covering Lemma)

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{B}$ μία οικογένεια μπαλών του $\mathbb{R}^n$ η οποία καλύπτει το E , δηλαδή

$$E \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Υποθέτουμε ότι οι ακτίνες των μπαλών της $\mathcal{B}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες¹, δηλαδή υπάρχει σταθερά $R > 0$ τέτοια ώστε

$$r(B) \leq R, \forall B \in \mathcal{B}, \text{ όπου } r(B) \text{ η ακτίνα της μπάλας } B$$

Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια ανά δύο ξένων μπαλών

$$\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$$

¹ Ο όρος <<ομοιόμορφα φραγμένες>> σημαίνει ότι υπάρχει κοινό άνω φράγμα για όλες τις ακτίνες της οικογένειας και όχι απλώς ότι κάθε ακτίνα είναι πεπερασμένη. Η απαίτηση αυτή είναι ισχυρότερη από το να είναι η ακτίνα κάθε μπάλας απλώς φραγμένη. Πράγματι, μπορεί όλες οι ακτίνες να είναι πεπερασμένες και το supremum του συνόλου που περιλαμβάνει τις ακτίνες να είναι “άπειρο”

τέτοια ώστε

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} 5B_k,$$

όπου $5B_k$ είναι η μπάλα με το ίδιο κέντρο και πενταπλάσια ακτίνα από τη B_k .

Η παρουσίαση των θεωρημάτων κάλυψης που ολοκληρώθηκε με το θεώρημα κάλυψης του Vitali, ολοκληρώνει μία παρουσίαση ενός γεωμετρικού υποβάθρου απαραίτητου για σημαντικές αποδείξεις που θα ακολουθήσουν στο κύριο μέρος της εργασίας. Ιδιαίτερα το Θεώρημα Κάλυψης Vitali διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο, καθώς όπως αναλύθηκε επιτρέπει την αντικατάσταση μιας ενδεχομένως πολύπλοκης οικογένειας επικαλυπτόμενων μπαλών, σε πολλές περιπτώσεις η πολυπλοκότητα συνδέεται με μη αριθμήσιμο πλήθος τέτοιων συνόλων, από μία αριθμήσιμη υποοικογένεια ανά δύο ξένων μπαλών, χωρίς να διαταράσσεται η κάλυψη του αρχικού συνόλου. Η δυνατότητα αυτή θα αποδειχθεί καθοριστική κατά την μελέτη των συνόλων στα οποία οι τοπικές μέσες τιμές, όπως αυτές εκφράζονται από την μεγιστική συνάρτηση των Hardy- Littlewood , μιας συνάρτησης υπερβαίνουν ένα προκαθορισμένο επίπεδο. Ο έλεγχος του μέτρου των συνόλων αυτών αποτελεί το βασικό βήμα για την απόδειξη της εκτίμησης ασθενούς τύπου (1,1) και, κατ' επέκταση, για τα θεωρήματα διαφορίσισης που ακολουθούν.

Κατά συνέπεια το υποκεφάλαιο με τα θεωρήματα κάλυψης που ολοκληρώθηκε αποτέλεσε ένα βασικό εισαγωγικό υποκεφάλαιο για το Κεφάλαιο που ακολουθεί και αφορά την μελέτη της Μεγιστικής Συνάρτησης του Hardy- Littlewood, η οποία ως τελεστής συνοψίζει σε μία μόνο ποσότητα την πληροφορία που περιέχεται σε όλες τις τοπικές μέσες τιμές μιας συνάρτησης γύρω από κάθε σημείο του χώρου. Η έννοια αυτή επιτρέπει τη συστηματική μελέτη της τοπικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων και παρέχει το κατάλληλο εργαλείο για τη σύνδεση της θεωρίας μέτρου με τη θεωρία διαφορίσισης.

Η σημασία της μεγιστικής συνάρτησης είναι μεγάλη για τη συνέχεια της εργασίας και για την ανάλυση των παραμέτρων που συνθέτουν το κεντρικό θέμα μελέτης της. Ειδικότερα η θεωρία του υποκεφαλαίου που ακολουθεί και βασίζεται στην Μεγιστική Συνάρτηση των Hardy- Littlewood λειτουργεί ως το πρότυπο μοντέλο πάνω στο οποίο θα αναπτυχθεί η θεωρία της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης. Πιο αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια οι ευκλείδειες μπάλες, που περιλαμβάνονται στο υποκεφάλαιο που αναλύεται η θεωρία που

συνδέεται με την Μεγιστική Συνάρτηση, θα αντικατασταθούν από ορθογώνια με πλευρές παράλληλες στους άξονες και το ενδιαφέρον θα στραφεί στις αντίστοιχες μεγιστικές συναρτήσεις και στα σχετικά θεωρήματα διαφορίσισης. Ωστόσο οι βασικές ιδέες παραμένουν οι ίδιες, ο έλεγχος των τοπικών μέσων τιμών μέσω κατάλληλων μεγιστικών τελεστών, η ανάπτυξη εκτιμήσεων για τα αντίστοιχα σύνολα στα οποία οι μέσες τιμές λαμβάνουν μεγάλες τιμές πάνω από ένα όριο και η απόδειξη θεωρημάτων διαφορίσισης που είναι το κεντρικό ζητούμενο και αφορά την ανάκτηση της σημειακής τιμής μίας συνάρτησης μέσω πληροφορίας που προέρχεται από την ανάλυση της συμπεριφοράς της τοπικά σε περιοχή γύρω από το σημείο.

Κεφάλαιο 2: Η μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood

2.1 Η μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood

Όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν οι βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου και ολοκλήρωσης Lebesgue, καθώς και οι χώροι $L^p(\mathbb{R}^n)$, οι οποίοι αποτελούν ιδανικούς χώρους μελέτης πολλών σημαντικών τελεστών της ανάλυσης. Παράλληλα, εισήχθησαν ορισμένα γεωμετρικά εργαλεία, όπως τα θεωρήματα κάλυψης, τα οποία χρησιμοποιούνται ως βασικό εργαλείο απόδειξης θεωρημάτων που επιτρέπουν τον έλεγχο του μέτρου συνόλων στα οποία οι μέσες τιμές συναρτήσεων του ενδιαφέροντος μελέτης συναρτήσεις λαμβάνουν ακραίες ή μεγάλες τιμές. Η ποσότητα της μέσης τιμής μίας συνάρτησης, που αναφέρθηκε, αποτελεί ένα από τα σημαντικά αντικείμενα και μέσω αυτής καθίσταται στη συνέχεια δυνατή η εισαγωγή ενός από τους σημαντικότερους τελεστής της αρμονικής ανάλυσης, της μεγιστικής συνάρτησης Hardy- Littlewood.

Η έννοια λοιπόν της μεγιστικής συνάρτησης προκύπτει από την μελέτη των μέσων τιμών μιας συνάρτησης σε περιοχές του χώρου. Η μέση τιμή μίας συνάρτησης f τοπικά ολοκληρώσιμης σε μία μπάλα B του $\mathbb{R}^n$, εκφράζεται από την παρακάτω ποσότητα

$$\frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy$$

Οι μέσες τιμές μιας συνάρτησης αποτελούν ένα βασικό εργαλείο για την μελέτη της τοπικής συμπεριφοράς της. Η ιδέα που οδηγεί στον ορισμό της μεγιστικής συνάρτησης είναι να εξεταστούν όλες τις δυνατές μέσες τιμές μίας ολοκληρώσιμης κατά Lebesgue συνάρτησης σε μπάλες που περιέχουν ένα δεδομένο σημείο του χώρου. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να μετρηθεί και να υπολογιστεί η μεγαλύτερη δυνατή μέση τιμή της συνάρτησης γύρω από το σημείο αυτό. Η διαδικασία αυτή οδηγεί σε έναν νέο τελεστή που αντιστοιχίζει σε κάθε συνάρτηση μια νέα συνάρτηση, η οποία αποτυπώνει την μέγιστη τοπικά, γύρω από το σημείο του χώρου, συγκέντρωση της αρχικής συνάρτησης. Για να είναι καλά ορισμένος ο νέος αυτός τελεστής, δηλαδή οι μέσες τιμές που περιγράφηκαν και αποτυπώνονται στον μεγιστικό τελεστή, αρκεί η συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένη περιοχή του χώρου. Για το λόγο αυτό η μελέτη του μεγιστικού τελεστή περιλαμβάνει συναρτήσεις που ανήκουν στο χώρο $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή στο χώρο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Έστω λοιπόν $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε μπάλα $B \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει το x , μπορεί να υπολογιστεί η μέση τιμή της απόλυτης τιμής της f στη μπάλα αυτή μέσω της ποσότητας

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

Καθώς η μπάλα μεταβάλλεται και το σημείο x παραμένει στο εσωτερικό της προκύπτει μια οικογένεια τέτοιων μέσων τιμών γύρω από το σημείο x . Η μεγιστική συνάρτηση ορίζεται λαμβάνοντας το supremum όλων αυτών των μέσων τιμών.²

Πιο συγκεκριμένα, η Hardy- Littlewood μεγιστική συνάρτηση της f ορίζεται ως

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy,$$

όπου το supremum λαμβάνεται σε όλες τις μπάλες B του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το σημείο x .

² Στη βιβλιογραφία χρησιμοποιείται συχνά και ο ισοδύναμος ορισμός της μεγιστικής συνάρτησης Hardy- Littlewood μέσω ευκλείδειων μπαλών με κέντρο το σημείο x . Στον χώρο $\mathbb{R}^n$ οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι (Stein & Shakarchi, 2005· Grafakos, 2014).

Η συνάρτηση Mf είναι επομένως μια μη αρνητική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$ η οποία αποδίδει σε κάθε σημείο x την μεγαλύτερη δυνατή μέση τιμή της $|f|$, η οποία μέγιστη τιμή μπορεί να είναι και το άπειρο σε περίπτωση που δεν είναι φραγμένο το πεδίο τιμών της νέας συνάρτησης που προκύπτει από τον εν λόγω τελεστή, σε μπάλες που περιέχουν το σημείο αυτό. Με τον τρόπο αυτό η μεγιστική συνάρτηση παρέχει έναν τρόπο μέτρησης της τοπικής συγκέντρωσης της συνάρτησης f γύρω από κάθε σημείο του χώρου.

Η σημασία της μεγιστικής συνάρτησης στη σύγχρονη ανάλυση είναι ιδιαίτερα μεγάλη. Ειδικότερα, η μελέτη της μεγιστικής συνάρτησης οδηγεί στην απόδειξη του Θεωρήματος Διαφορίσισης του Lebesgue, σύμφωνα με το οποίο οι μέσες τιμές μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης πάνω σε μπάλες που συρρικνώνονται σε ένα σημείο συγκλίνουν σχεδόν παντού στη σημειακή τιμή της συνάρτησης. Αυτή η φιλοσοφία θα αποτελέσει την μεθοδολογική βάση, ή μεθοδολογικό πρότυπο, για την μελέτη της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης και της διαφορίσισης ως προς τη βάση πλέον ορθογωνίων αντί μπαλών. Από τον ορισμό του τελεστή που περιγράφηκε, της Μεγιστικής Συνάρτησης, γίνεται ξεκάθαρο ότι έχει βασικές δομικές ιδιότητες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμο να αναφερθούν πριν εξεταστούν οι εκτιμήσεις που οδηγούν στο Θεώρημα Διαφορίσισης του Lebesgue. Οι ιδιότητες αυτές θα αποτελέσουν το σημείο εκκίνησης για την ανάπτυξη της θεωρίας που ακολουθεί στο κύριο μέρος του Κεφαλαίου που αφορά τη θεωρία της Μεγιστικής Συνάρτησης και τη διαφορίση ως προς βάσεις μπαλών

2.2 Βασικές ιδιότητες της μεγιστικής συνάρτησης

Στο παρόν υποκεφάλαιο λοιπόν θα ακολουθήσει η μελέτη βασικών δομικών ιδιοτήτων της Μεγιστικής Συνάρτησης οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της. Αρχικά από τον ορισμό της συνάρτησης είναι εμφανές ότι η μεγιστική συνάρτηση είναι πάντοτε μη αρνητική. Πράγματι για κάθε μπάλα B του $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι:

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy \geq 0$$

καθώς το ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής μιας συνάρτησης είναι μη αρνητικό. Επομένως και το supremum όλων αυτών των ποσοτήτων είναι μη αρνητικό γεγονός που συνεπάγεται ότι

$$Mf(x) \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$

Μια δεύτερη βασική ιδιότητα της μεγιστικής συνάρτησης είναι η μονοτονία που παρουσιάζει ο Μεγιστικός Τελεστής ως προς τη συνάρτηση που λαμβάνει από το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα αν f και g είναι τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$|f(x)| \leq |g(x)| \text{ για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n$$

τότε για κάθε μπάλα B ισχύει

$$\int_B |f(y)| dy \leq \int_B |g(y)| dy$$

Κατόπιν διαιρέσεως με το μέτρο της μπάλας και λήψης του supremum σε όλες τις μπάλες που περιέχουν το x προκύπτει ότι

$$Mf(x) \leq Mg(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι επίσης η υπογραμμικότητα της μεγιστικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα αν $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, τότε ισχύει

$$M(f + g)(x) \leq Mf(x) + Mg(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Η ιδιότητα αυτή γίνεται άμεσα αντιληπτή, αν παρατηρηθεί ότι για κάθε μπάλα B που περιέχει το x ισχύει:

$$\frac{1}{|B|} \int_B |f(y) + g(y)| dy \leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy + \frac{1}{|B|} \int_B |g(y)| dy,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η τριγωνική ανισότητα για το ολοκλήρωμα. Κατόπιν λήψης του supremum ως προς όλες τις μπάλες B που περιέχουν το x , προκύπτει αμέσως η παραπάνω ανισότητα. Οι ιδιότητες αυτές δείχνουν ότι η μεγιστική συνάρτηση συμπεριφέρεται ως ένας υπογραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση, τοπικά ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue, μια μη αρνητική συνάρτηση.

Μετά την παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων του μεγιστικού τελεστή Hardy-Littlewood, το επόμενο φυσικό βήμα είναι η μελέτη των εκτιμήσεων που ικανοποιεί. Οι εκτιμήσεις αυτές αποτελούν τον πυρήνα της θεωρίας, καθώς επιτρέπουν τον έλεγχο, ως προς το μέγεθος όπως αυτό μετριέται μέσω του μέτρου Lebesgue, των συνόλων στα οποία ο μεγιστικός τελεστής

λαμβάνει μεγάλες τιμές. Από τις εκτιμήσεις ιδιαίτερη σημασία έχει η ανισότητα ασθενούς τύπου (1,1), η οποία αποτελεί το πρώτο θεμελιώδες αποτέλεσμα της θεωρίας των μεγιστικών τελεστών. Η σημασία της ανισότητας αυτής, όπως ήδη αναφέρθηκε, δεν περιορίζεται στην μελέτη του ίδιου του τελεστή. Αντιθέτως, αποτελεί το βασικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος Διαφορίσισης του Lebesgue, σύμφωνα με το οποίο οι τοπικές μέσες τιμές μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης πάνω σε μπάλες που συρρικνώνονται σε ένα σημείο συγκλίνουν σχεδόν παντού στη σημειακή τιμή της συνάρτησης. Για το λόγο αυτό, η ανισότητα ασθενούς τύπου (1,1) θεωρείται το θεμελιώδες βήμα που συνδέει τη θεωρία των μεγιστικών τελεστών με τα θεωρήματα διαφορίσισης. Στο υποκεφάλαιο λοιπόν που ακολουθεί θα αποδειχθεί η ανισότητα ασθενούς τύπου (1,1) για τον μεγιστικό τελεστή Hardy- Littlewood, μέσω της αξιοποίησης των θεωρημάτων κάλυψης που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενο υποκεφάλαιο και ιδιαίτερα του θεωρήματος Κάλυψης του Vitali.

2.3 Η εκτίμηση ασθενούς τύπου (1,1)

Στο παρόν υποκεφάλαιο θα παρουσιαστεί η εκτίμηση ασθενούς τύπου (1,1) για την μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood. Η εκτίμηση αυτή αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της θεωρίας των μεγιστικών τελεστών, καθώς αποτελεί βασικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος Διαφορίσισης του Lebesgue και εισάγει μία μεθοδολογία εκτιμήσεων για τον τελεστή που θα αξιοποιηθεί αργότερα στην μελέτη διαφορίσισης ως προς τη βάση ορθογωνίων με την εισαγωγή της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης. Αρχικά λοιπόν διατυπώνεται το εν λόγω θεώρημα και ακολουθεί η απόδειξή του.

Στη διατύπωση του θεωρήματος περιλαμβάνεται ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν όλα τα σημεία του χώρου στα οποία η μεγιστική συνάρτηση υπερβαίνει το επίπεδο λ , δηλαδή το σύνολο

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$$

Όπου ισχύει ότι το λ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και συμβολικά ισχύει ότι $\lambda > 0$. Ακολουθεί λοιπόν η διατύπωση και η απόδειξη του θεωρήματος που αποτελούν κεντρικό ζήτημα εστίασης του παρόντος υποκεφαλαίου

Πρόταση 2.1 (Ανισότητα ασθενούς τύπου (1,1))

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\lambda > 0$. Τότε υπάρχει σταθερά $C_n > 0$, η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n , τέτοια ώστε

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Απόδειξη

Έστω

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$$

Αν $E_\lambda = \emptyset$ τότε η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $E_\lambda \neq \emptyset$.

Για κάθε $x \in E_\lambda$, από τον ορισμό της μεγιστικής συνάρτησης Hardy- Littlewood έχουμε

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy > \lambda$$

Επομένως από τον ορισμό του supremum υπάρχει μπάλα B_x τέτοια ώστε $x \in B_x$ και

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(y)| dy > \lambda$$

Άρα

$$\lambda |B_x| < \int_{B_x} |f(y)| dy$$

Επειδή $B_x \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ από υπόθεση ισχύει:

$$\int_{B_x} |f(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Συνεπώς

$$|B_x| < \frac{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda} \quad (1)$$

Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{B_x : x \in E_\lambda\}$$

Η οικογένεια $\mathcal{B}$ καλύπτει το E_λ και όπως αποδείχθηκε στη σχέση (1) τα μέτρα των μπαλών της είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Με εφαρμογή του θεωρήματος Κάλυψης Vitali, υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια ανά δύο ξένων μπαλών

$$\{B_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{B}$$

τέτοια ώστε

$$E_\lambda \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty 5 B_k.$$

Από την ιδιότητα υποπροσθετικότητας του μέτρου Lebesgue προκύπτει ότι

$$|E_\lambda| \leq \sum_{k=1}^\infty |5 B_k|.$$

Λόγω ιδιότητας του μέτρου Lebesgue (ομογένεια) όμως θα ισχύει:

$$|5 B_k| = 5^n |B_k|,$$

και επομένως

$$|E_\lambda| \leq 5^n \sum_{k=1}^\infty |B_k|$$

Από την επιλογή των μπαλών B_k ισχύει

$$|B_k| < \frac{1}{\lambda} \int_{B_k} |f(y)| dy$$

οπότε

$$|E_\lambda| \leq \frac{5^n}{\lambda} \sum_{k=1}^\infty \int_{B_k} |f(y)| dy$$

Οι μπάλες B_k είναι ανά δύο ξένες, άρα

$$\sum_{k=1}^\infty \int_{B_k} |f(y)| dy = \int_{\bigcup_{k=1}^\infty B_k} |f(y)| dy$$

Επιπλέον

$$\bigcup_{k=1}^\infty B_k \subseteq \mathbb{R}^n,$$

οπότε

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k} |f(y)| \, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις, καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$|E_\lambda| \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Δηλαδή

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{5^n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Θέτοντας $C_n = 5^n$ προκύπτει

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε

Με την ολοκλήρωση και της απόδειξης του θεωρήματος εκτίμησης ασθενούς τύπου $((1,1))$ εισήχθη στην εργασία ένα βασικό εργαλείο για την μετάβαση από τις ιδιότητες της μεγιστικής συνάρτησης σε αποτελέσματα διαφορίσισης, γεγονός που αποτελεί κεντρικό ζητούμενο του κεφαλαίου. Πιο συγκεκριμένα ένας τέτοιος μηχανισμός ικανός να ελέγχει το μέτρο των συνόλων στα οποία η μεγιστική συνάρτηση παίρνει μεγάλες τιμές είναι απαραίτητος για να αποδειχθεί από το Θεώρημα Διαφορίσισης του Lebesgue, που εισάγεται και αποδεικνύεται στο παρακάτω υποκεφάλαιο, ότι οι μέσοι όροι μιας συνάρτησης πάνω σε μπάλες που συρρικνώνονται σε ένα σημείο συγκλίνουν στην τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό και αυτό ισχύει σχεδόν σε κάθε σημείο του χώρου. Η σύνδεση αυτή των ολοκληρωτικών μέσων όρων και σημειακών τιμών μίας συνάρτησης είναι κεντρικό αντικείμενο της διαφορίσισης ως προς γεωμετρικές βάσεις μπαλών ενώ αποτελεί πρότυπο για την ανάπτυξη της θεωρίας διαφορίσισης ως προς άλλες βάσεις συνόλων και κυρίως των ορθογώνιων που αποτελεί βασικό ζητούμενο της παρούσας εργασίας. Στο παρακάτω υποκεφάλαιο λοιπόν διατυπώνεται και αποδεικνύεται το βασικό θεώρημα διαφορίσισης του Lebesgue.

Πρόταση 2.1 (Θεώρημα Διαφορίσισης του Lebesgue)

Έστω $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Τότε για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x).$$

Δηλαδή, οι μέσοι όροι της συνάρτησης f πάνω σε ευκλείδειες μπάλες που συρρικνώνονται στο σημείο x συγκλίνουν σχεδόν παντού στην τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε αρχικά το αποτέλεσμα για συναρτήσεις του χώρου $L^1(\mathbb{R}^n)$

Για κάθε $r > 0$ θέτουμε

$$A_r f(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(x) = f(x)$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$Df(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f(x) - f(x)|.$$

Είναι προφανές ότι αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$Df(x) = 0 \text{ για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την πυκνότητα του $C_c(\mathbb{R}^n)$ ³ στον χώρο $L^1(\mathbb{R}^n)$, υπάρχει συνάρτηση

$$\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$$

τέτοια ώστε

$$\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $r > 0$ έχουμε

$$|A_r f(x) - f(x)| \leq |A_r(f - \varphi)(x)| + |A_r \varphi(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x)|.$$

Επειδή η φ είναι συνεχής, ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r \varphi(x) = \varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n.$$

³ Συμβολίζει το χώρο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, δηλαδή των συνεχών συναρτήσεων $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχει συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \notin K$.

Λαμβάνοντας $\limsup$ καθώς $r \rightarrow 0$, παίρνουμε

$$Df(x) \leq M(f - \varphi)(x) + |f(x) - \varphi(x)|.$$

Έστω τώρα $\lambda > 0$. Τότε

$$\{x: Df(x) > \lambda\} \subseteq \left\{x: M(f - \varphi)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{x: |f(x) - \varphi(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Επομένως,

$$|\{x: Df(x) > \lambda\}| \leq \left|\left\{x: M(f - \varphi)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{x: |f(x) - \varphi(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$

Από την εκτίμηση ασθενούς τύπου $(1, 1)$ για τη μεγιστική συνάρτηση Hardy- Littlewood έχουμε

$$\left|\left\{x: M(f - \varphi)(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2C_n}{\lambda} \|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Επιπλέον, από την ανισότητα Chebyshev,

$$\left|\left\{x: |f(x) - \varphi(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{2}{\lambda} \|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Συνεπώς,

$$|\{x: Df(x) > \lambda\}| \leq \frac{2(C_n + 1)}{\lambda} \|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Από την ίδια την επιλογή της συνεχούς συνάρτησης φ έχουμε $\|f - \varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$, άρα τελικά προκύπτει

$$|\{x: Df(x) > \lambda\}| \leq \frac{2(C_n + 1)}{\lambda} \varepsilon$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετη επιλογή, καταλήγουμε ότι $|\{x: Df(x) > \lambda\}| = 0$ για κάθε $\lambda > 0$

Άρα τελικά αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$Df(x) = 0$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(x) = f(x)$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Έτσι το θεώρημα αποδείχθηκε για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Η επέκταση στην περίπτωση $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ προκύπτει με άμεσο τρόπο καθώς από τις ίδιες τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Lebesgue ισχύει:

$$L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

Και συνεπώς για κάθε συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ισχύει $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και ουσιαστικά το θεώρημα αποδείχθηκε.

Η προηγούμενη απόδειξη αναδεικνύει με σαφή τρόπο ότι το Θεώρημα Διαφορίσισης του Lebesgue δεν αποτελεί ένα απομονωμένο αποτέλεσμα της Θεωρίας Μέτρου, αλλά το τελικό συμπέρασμα μιας αλληλουχίας αποτελεσμάτων που ξεκινά από την εισαγωγή και μελέτη της μεγιστικής συνάρτησης Hardy-Littlewood. Το κρίσιμο βήμα της απόδειξης είναι η δυνατότητα ελέγχου του μέτρου του συνόλου των σημείων στα οποία ενδέχεται να αποτυγχάνει η επιθυμητή σύγκλιση των τοπικών μέσων όρων. Ο έλεγχος αυτός επιτυγχάνεται ακριβώς από την εκτίμηση ασθενούς τύπου (1,1).

Ένα ακόμη βασικό στοιχείο που προκύπτει από τον ορισμό και την απόδειξη του θεωρήματος διαφορίσισης παραπάνω είναι ότι όλη η διαδικασία διαφορίσισης που αποδείχθηκε ότι συμβαίνει εξαρτάται ουσιαστικά από τη γεωμετρία της βάσης διαφορίσισης. Πιο συγκεκριμένα στην απόδειξη χρησιμοποιείται η εκτίμηση ασθενούς τύπου (1,1), όπως αναφέρθηκε, αποδείχθηκε για τη βάση των ευκλείδειων μπαλών με χρήση του αντίστοιχου θεωρήματος κάλυψης του Vitalli. Το βασικό λοιπόν ερώτημα που προκύπτει είναι αν υπάρχει δυνατότητα γενίκευσης της μεθοδολογίας της απόδειξης της διαφορίσισης ως προς άλλες οικογένειες βάσεων και ειδικότερα το ενδιαφέρον της παρούσας εργασίας εστιάζει στη διαφορίση ως προς τη βάση ορθογωνίων. Το ερώτημα αυτό απαντάται στο αμέσως επόμενο υποκεφάλαιο όπου λόγω των γεωμετρικών διαφορών των ορθογωνίων από τις Ευκλείδειες μπάλες, δεν αποδεικνύεται η εκτίμηση ασθενούς τύπου (1,1), με την ίδια μορφή για τον τελεστή που αντιστοιχεί στη νέα βάση. Η αποτυχία αυτή καθιστά αναγκαία την ανάπτυξη νέων εκτιμήσεων που να ανταποκρίνονται στη γεωμετρία της βάσης των ορθογωνίων (Grafakos, 2008).

Παρότι η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε για την απόδειξη διαφορίσης ως προς Ευκλείδειες μπάλες δεν μπορεί να μεταφερθεί αυτούσια όπως αναδείχθηκε, είναι ικανή για να παρέχει ένα πρότυπο παράδειγμα για τη λογική της απόδειξης διαφορίσης ως προς τη βάση Ορθογωνίων. Πιο συγκεκριμένα ένα πρότυπο στο οποίο μία ακολουθία μαθηματικών κατασκευών και αποτελεσμάτων, που ξεκινά από την επιλογή της βάσης διαφορίσισης, συνεχίζεται με την εισαγωγή ενός κατάλληλου μεγιστικού τελεστή και τις αντίστοιχες εκτιμήσεις μέτρου και ολοκληρώνεται με ένα θεώρημα διαφορίσισης, οδηγεί επιτυχώς στην ανάκτηση της σημειακής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης από τους τοπικούς μέσους όρους της (de Guzmán, 1975).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Η Ισχυρή Μεγιστική Συνάρτηση και η Γεωμετρική Απόδειξη της Ανισότητας Jessen- Marcinkiewicz-Zygmund

3.1 Η βάση των ορθογωνίων και η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήθηκε η διαφορίσιση ολοκληρωμάτων ως προς τη βάση των ευκλείδειων μπαλών και αναδείχθηκε ο καθοριστικός ρόλος της μεγιστικής συνάρτησης

Hardy-Littlewood στην απόδειξη του Θεωρήματος Διαφορίσισης του Lebesgue όπως έχει ήδη επισημανθεί. Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η μετάβαση από τη βάση των Ευκλείδειων μπαλών στη βάση των ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και η εισαγωγή του αντίστοιχου μεγιστικού τελεστή που συνδέεται με το εν λόγω πρόβλημα διαφορίσισης (Stein, 1970; de Guzmán, 1975).

Θεωρούμε αρχικά την οικογένεια

$$\mathcal{R} = \{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n : I_j \subset \mathbb{R} \text{ φραγμένο διάστημα μη εκφυλισμένο, } j = 1, \dots, n\}.$$

Για κάθε ορθογώνιο $R = I_1 \times \cdots \times I_n \in \mathcal{R}$ το Lebesgue μέτρο του δίνεται από την ισότητα

$$|R| = |I_1| \cdots |I_n|.$$

Όσον αφορά την μετάβαση από τη βάση των μπαλών σε βάση ορθογωνίων παρατηρείται ότι ενώ μία μπάλα $B(x, r)$ καθορίζεται πλήρως γεωμετρικά από την ακτίνα r , ένα ορθογώνιο της μορφής

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n$$

καθορίζεται από τα n ανεξάρτητα μήκη (πλευρές των ορθογωνίων)

$$|I_1|, \dots, |I_n|$$

Κατά συνέπεια η οικογένεια των ορθογωνίων $\mathcal{R}$ μπορεί να περιέχει ορθογώνια με αυθαίρετα μεγάλο λόγο μεταξύ της μεγαλύτερης και της μικρότερης πλευράς. Ειδικότερα, δεν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $R \in \mathcal{R}$ να ισχύει

$$\max_{1 \leq j \leq n} |I_j| \leq C \min_{1 \leq j \leq n} |I_j|$$

Για παράδειγμα η ακολουθία Ορθογωνίων του $\mathbb{R}^2$

$$R_k = [0, k] \times [0, 1]$$

ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{R}$ και ισχύει ότι ο λόγος των πλευρών των Ορθογωνίων τείνει στο άπειρο καθώς $k \rightarrow \infty$. Η παρατήρηση αυτή αποτελεί τη θεμελιώδη γεωμετρική διαφορά μεταξύ της βάσης των μπαλών και της βάσης των ορθογωνίων και βασικό λόγο που η εκτίμηση ασθενούς τύπου (1,1) δεν αποδεικνύεται με την ίδια μορφή όταν υπάρχει η εν λόγω γεωμετρική μεταβολή στα ολοκληρώματα.

Όσον αφορά την μελέτη διαφορίσισης ως προς τη βάση ορθογωνίων πρέπει να οριστεί ο νέος μέσος όρος μέσω ολοκληρωμάτων πάνω σε ορθογώνια σύνολα. Αν λοιπόν $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και $R \in \mathcal{R}$ ορίζουμε τον μέσο όρο της f επί του R ως

$$A_R f = \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy$$

Το πρόβλημα διαφορίσισης συνίσταται στη μελέτη της συμπεριφοράς των ποσοτήτων $A_R f$ όταν τα ορθογώνια της βάσης συρρικνώνονται συγκλίνοντας προς ένα εσωτερικό τους σημείο x . Πιο συγκεκριμένα το ενδιαφέρον εστιάζεται για την ύπαρξη και τον υπολογισμό του ορίου

$$\lim_{\substack{x \in R \\ \text{diam}(R) \rightarrow 0}} A_R f$$

Η μελέτη των παραπάνω μέσων όρων οδηγεί φυσικά στην εισαγωγή του ακόλουθου τελεστή

Ορισμός 3.1

Για $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση ορίζεται από

$$M_S f(x) = \sup_{\substack{R \in \mathcal{R} \\ x \in R}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy$$

Ο τελεστής M_S αποτελεί τον μηχανισμό ελέγχου των μέσων όρων που αντιστοιχούν στη βάση $\mathcal{R}$ όπως αντίστοιχα συμβαίνει με τον Μεγιστικό Τελεστή για τη βάση Ευκλείδειων Μπαλών. Ο έλεγχος πιο συγκεκριμένα εκφράζεται από μία ανισότητα που προκύπτει από τον ίδιο τον ορισμό του supremum. Αν λοιπόν $R \in \mathcal{R}$ και $x \in R$, τότε από τον ορισμό του supremum προκύπτει

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy \leq M_S f(x).$$

Επομένως ισχύει

$$|A_R f| \leq M_S f(x) \quad x \in R$$

Η τελευταία ανισότητα είναι θεμελιώδους σημασίας, διότι δείχνει ότι ο έλεγχος των μέσων όρων ανάγεται στον έλεγχο του ισχυρού μεγιστικού τελεστή.

Από τον ορισμό της Ισχυρής Μεγιστικής συνάρτησης, σχεδόν άμεσα, προκύπτει ότι ικανοποιεί συγκεκριμένες βασικές αλγεβρικές ιδιότητες οι οποίες συνοψίζονται στην πρόταση που ακολουθεί

Πρόταση 3.1

Για κάθε $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι τέσσερις παρακάτω ιδιότητες:

$$M_S f(x) \geq 0,$$

$$M_S(af)(x) = |a| M_S f(x)$$

$$|f| \leq |g| \text{ σχεδόν παντού} \Rightarrow M_S f \leq M_S g$$

και

$$M_S(f + g) \leq M_S f + M_S g.$$

Απόδειξη

Οι τρεις πρώτες ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι το Ολοκλήρωμα Lebesgue δεν παίρνει αρνητικές τιμές όταν η συνάρτηση εντός είναι μη αρνητική και από τις υπόλοιπες ιδιότητες που ισχύουν για το ολοκλήρωμα Lebesgue. Για την ιδιότητα της υπογραμμικότητας είναι γνωστό ότι ισχύει ότι για κάθε $R \in \mathcal{R}$,

$$\frac{1}{|R|} \int_R |f + g| \leq \frac{1}{|R|} \int_R |f| + \frac{1}{|R|} \int_R |g|$$

Λαμβάνοντας supremum ως προς όλα τα ορθογώνια της βάσης που περιέχουν το σημείο x , προκύπτει ότι

$$M_S(f + g)(x) \leq M_S f(x) + M_S g(x)$$

Η σημασία του τελεστή που εισήχθη για την απόδειξη της Διαφορίσης ως προς τη βάση ορθογωνίων στηρίζεται στις εκτιμήσεις μέτρου που ικανοποιεί όπως αντίστοιχα στην περίπτωση της μεγιστικής συνάρτησης Hardy-Littlewood, οι εκτιμήσεις αυτές οδηγούν στην ανισότητα ασθενούς τύπου $(1, 1)$ και τελικά στο Θεώρημα Διαφορίσης του Lebesgue. Για τη βάση των ορθογωνίων και το νέο τελεστή αποδεικνύονται νέες εκτιμήσεις δεδομένης της μη ισχύος της εκτίμησης τους ασθενούς, γεγονός που αποδεικνύεται στο παρακάτω υποκεφάλαιο.

3.2 Η Γεωμετρία της Βάσης των Ορθογωνίων

Στο Κεφάλαιο 2 αποδείχθηκε ότι η μεγιστική συνάρτηση Hardy-Littlewood ικανοποιεί την εκτίμηση ασθενούς τύπου $(1, 1)$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \lambda > 0$$

η οποία χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του θεωρήματος διαφόρισης ως προς τη βάση Ευκλείδειων μπαλών. Μετά την εισαγωγή της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης, λόγω αλλαγής της βάσης σε ορθογώνια, το πρώτο φυσικό ερώτημα που προκύπτει, κατά τη διαδικασία μελέτης διαφόρισης ως προς τη βάση ορθογωνίων, είναι αν ισχύει ανάλογη εκτίμηση και για τον τελεστή M_S . Πιο συγκεκριμένα, βασικό ερώτημα είναι αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και κάθε $\lambda > 0$ να ισχύει

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Αν η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα ήταν καταφατική και η παραπάνω ανισότητα ήταν αληθής, τότε η αποδεικτική μέθοδος που εφαρμόστηκε για τη βάση των Ευκλείδειων μπαλών με τελεστή την Μεγιστική Συνάρτηση Hardy- Littlewood δυνητικά θα μπορούσε να μεταφερθεί και στη βάση των ορθογωνίων. Ωστόσο, λόγω της ιδιαίτερης γεωμετρίας της οικογένειας $\mathcal{R}$ των ορθογωνίων, παρακάτω αποδεικνύεται ότι η συγκεκριμένη ανισότητα δεν ισχύει σε αυτήν την περίπτωση (Stein, 1970; de Guzmán, 1975). Το γεγονός αυτό συνοψίζει το θεώρημα που ακολουθεί

Πρόταση 3.2

Έστω $n \geq 2$ και έστω M_S η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση που αντιστοιχεί στη βάση των ορθογωνίων του $\mathbb{R}^n$ με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, δηλαδή

$$M_S f(x) = \sup_{\substack{R \in \mathcal{R} \\ x \in R}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy.$$

Τότε ο τελεστής M_S δεν είναι ασθενούς τύπου (1,1). Ισοδύναμα, δεν υπάρχει σταθερά $C > 0$, ανεξάρτητη από τη συνάρτηση f και από το $\lambda > 0$ τέτοια ώστε

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και κάθε $\lambda > 0$

Απόδειξη

Επιλέγουμε αυθαίρετα συνάρτηση

$$f = \chi_{[0,1]^n}$$

Θα ισχύει

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$$

Έστω τώρα

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in [1, \infty)^n$$

Θεωρούμε το ορθογώνιο

$$R_x = [0, x_1] \times \dots \times [0, x_n]$$

Από τον τρόπο επιλογής του Ορθογωνίου έχουμε

$$[0,1]^n \subset R_x$$

και επομένως προκύπτει

$$\int_{R_x} f(y) dy = 1$$

Επίσης θα ισχύει

$$|R_x| = x_1 x_2 \dots x_n$$

Άρα τελικά για την Ισχυρή Μεγιστική Συνάρτηση θα ισχύει η ανισότητα

$$M_S f(x) \geq \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (1)$$

Τώρα θα δείξουμε ότι το μέτρο του συνόλου που περιλαμβάνει τα σημεία στα οποία το $M_S f$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες από $\lambda > 0$ είναι μεγαλύτερο από ό,τι θα επέτρεπε μία weak (1,1) εκτίμηση

Για $0 < \lambda < 2^{-(n-2)}$, θέτουμε

$$A_\lambda = \frac{1}{2^{n-2}\lambda}.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, 1 \leq x_j \leq 2 \text{ για } j = 3, \dots, n, x_1 x_2 < A_\lambda\}$$

Αν $x \in E_\lambda$, τότε

$$x_3 \dots x_n \leq 2^{n-2}$$

Άρα

$$x_1 x_2 \cdots x_n < A_\lambda 2^{n-2} = \frac{1}{\lambda}$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} > \lambda$$

και από το προηγούμενο κάτω φράγμα (σχέση 1) παίρνουμε:

$$M_S f(x) > \lambda$$

Άρα τελικά θα έχουμε

$$E_\lambda \subset \{x \in \mathbb{R}^n : M_S f(x) > \lambda\}$$

Επομένως

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_S f(x) > \lambda\}| \geq |E_\lambda|$$

Τώρα υπολογίζουμε το μέτρο του E_λ . Επειδή οι μεταβλητές $x_3, \dots, x_n$ κινούνται στο διάστημα $[1, 2]$, το αντίστοιχο μέτρο είναι ίσο με 1. Άρα θα έχουμε

$$|E_\lambda| = |\{(x_1, x_2) \in [1, \infty)^2 : x_1 x_2 < A_\lambda\}|$$

Για $1 \leq x_1 < A_\lambda$, η συνθήκη

$$x_1 x_2 < A_\lambda$$

ισοδυναμεί με

$$1 \leq x_2 < \frac{A_\lambda}{x_1}$$

Άρα τελικά έχουμε ότι

$$|E_\lambda| = \int_1^{A_\lambda} \left(\frac{A_\lambda}{x_1} - 1 \right) dx_1 \rightarrow |E_\lambda| = A_\lambda \int_1^{A_\lambda} \frac{1}{x_1} dx_1 - \int_1^{A_\lambda} 1 dx_1$$

Επομένως τελικά καταλήγουμε ότι

$$|E_\lambda| = A_\lambda \log A_\lambda - (A_\lambda - 1)$$

Για A_λ αρκετά μεγάλο, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$A_\lambda \log A_\lambda - (A_\lambda - 1) \geq c A_\lambda \log A_\lambda$$

Άρα

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \geq c A_\lambda \log A_\lambda$$

Και επειδή ισχύει

$$A_\lambda = \frac{1}{2^{n-2}\lambda},$$

Παίρνουμε τελικά την παρακάτω ανισότητα

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \geq c_n \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda} \quad (2)$$

Αν ο M_S ως τελεστής είναι ασθενούς τύπου $(1, 1)$, τότε θα υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Αλλά

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$$

Άρα θα έχουμε

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}$$

Συνδυάζοντας με το προηγούμενο κάτω φράγμα (σχέση 2) θα έχουμε:

$$c_n \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda} \leq \frac{C}{\lambda}$$

Άρα τελικά καταλήγουμε ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει:

$$c_n \log \frac{1}{\lambda} \leq C$$

Αυτό είναι αδύνατο όταν ισχύει $\lambda \rightarrow 0^+$

Άρα μία υπόθεση ότι ο τελεστής M_S ως τελεστής είναι ασθενούς τύπου $(1, 1)$ καταλήγει σε άτοπο. Συνεπώς ο M_S δεν είναι ασθενούς τύπου $(1, 1)$ και ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος

3.3 Η ανισότητα Jessen- Marcinkiewicz- Zygmund

Η αποτυχία της εκτίμησης ασθενούς τύπου $(1, 1)$, η οποία αποδείχθηκε στην προηγούμενη ενότητα δε συνεπάγεται την αποτυχία της διαφορίσισης ως προς βάσεις ορθογωνίων. Αντιθέτως οδηγεί στη διαπίστωση ότι απαιτείται μια διαφορετική εκτίμηση για τον έλεγχο των συνόλων στα οποία η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση παίρνει τιμές από ένα όριο και πάνω (υπερεπίπεδα) . Το θεμελιώδες αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση, το οποίο παρουσιάζεται στο παρόν υποκεφάλαιο, είναι η ανισότητα των Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund, η οποία αποτελεί εκτίμηση που επιτρέπει τον έλεγχο των υπερεπιπέδων συνόλων του τελεστή M_S (Jessen et al., 1935; Stein, 1970; de Guzmán, 1975).

Πρόταση 3.3 (Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund)

Υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ εξαρτώμενη μόνο από τη διάσταση n , τέτοια ώστε για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και κάθε $\lambda > 0$ να ισχύει:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n: M_S f(x) > \lambda\}| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{n-1} dx$$

όπου

$$\log^+ t = \max\{\log t, 0\}.$$

Η ανισότητα του Θεωρήματος 3.3.1 δείχνει ξεκάθαρα ότι ο έλεγχος των υπερεπιπέδων συνόλων της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης δεν πραγματοποιείται πλέον μέσω του ολοκληρώματος

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$$

όπως συμβαίνει στην κλασική θεωρία της μεγιστικής συνάρτησης Hardy-Littlewood όπου εξετάζεται το πρόβλημα διαφορίσισης ως προς Ευκλείδειες μπάλες, αλλά μέσω μιας ισχυρότερης ολοκληρωτικής ποσότητας η οποία περιλαμβάνει λογαριθμικό παράγοντα. Η εμφάνιση του παράγοντα αυτού δεν είναι τεχνικό χαρακτηριστικό της απόδειξης, αλλά

αντανακλά τη μεγαλύτερη γεωμετρική πολυπλοκότητα της βάσης των αξονοπαράλληλων ορθογωνίων.

Για το λόγο αυτό είναι φυσικό να εισαχθεί μία συνάρτηση ανάπτυξης που ενσωματώνει ακριβώς τον λογαριθμικό όρο της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund.

Πιο αναλυτικά αν θέσουμε

$$\Phi_n(t) = t(1+\log^+ t)^{n-1}, t \geq 0$$

Τότε η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$|\{M_S f > \lambda\}| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_n\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx$$

Η συνάρτηση Φ_n είναι αύξουσα στο $[0, \infty)$ και ικανοποιεί

$$\Phi_n(t) \sim t(\log t)^{n-1}, t \rightarrow \infty.$$

Η εν λόγω συνάρτηση αποτελεί τη φυσική συνάρτηση Orlicz που συνδέεται με την ανισότητα Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund. Μέσω αυτής εκφράζεται ο πρόσθετος λογαριθμικός έλεγχος που απαιτείται στην περίπτωση της ισχυρής μεγιστικής συνάρτησης και αναδεικνύεται η κλάση

$$L(\log L)^{n-1}$$

η οποία θα διαδραματίσει κεντρικό ρόλο στο θεώρημα διαφορίσισης του επόμενου κεφαλαίου.

Παρατήρηση 3.1

Η ανισότητα JMZ δεν αποτελεί απλώς τεχνική διόρθωση της weak $(1, 1)$ εκτίμησης.

Στην περίπτωση των ευκλείδειων μπαλών η γεωμετρία της βάσης περιγράφεται από μία μόνο παράμετρο κλίμακας.

Αντίθετα, ένα ορθογώνιο

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n$$

διαθέτει n ανεξάρτητα μήκη πλευρών

⁴ Ορίζουμε

$$L(\log L)^{n-1}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f: \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| (1 + \log^+ |f(x)|)^{n-1} dx < \infty \right\}$$

$$|I_1|, \dots, |I_n|.$$

Η πολυπαραμετρική αυτή δομή οδηγεί στην εμφάνιση λογαριθμικών παραγόντων στα υπερεπίπεδα σύνολα του M_S . Ο εκθέτης

$$n - 1$$

που εμφανίζεται στη συνάρτηση

$$\Phi_n(t) = t(1 + \log^+ t)^{n-1}$$

αποτυπώνει ακριβώς τον αριθμό των επιπλέον ανεξάρτητων παραμέτρων κλίμακας της βάσης $\mathcal{R}$ (de Guzmán, 1975; Torchinsky, 1986). Η εμφάνιση της κλάσης $L(\log L)^{n-1}$ αποτελεί χαρακτηριστικό γνώρισμα των εκτιμήσεων για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση (Stein, 1970; de Guzmán, 1975).

Στο σημείο αυτό θα λάβει χώρα η παρουσίαση και ανάλυση της απόδειξης της ανισότητας των Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund. Η εν λόγω ανάλυση βασίζεται σε μία Γεωμετρική προσέγγιση, προσέγγιση που ανέλυσαν στο άρθρο τους οι Cordoba και Fefferman, το οποίο δημοσιεύτηκε το έτος 1975. Η προσέγγιση της απόδειξης ακολουθεί μία συνεκτική δομή χωρισμένη σε υποκεφάλαια όπου κάθε υποκεφάλαιο αντιστοιχεί σε ένα βήμα της απόδειξης. Κατά συνέπεια επιχειρείται έτσι μία αναλυτική μορφή απόδειξης σε βήματα, βασισμένη σε μία γεωμετρική προσέγγιση, μέσω της οποίας διαφαίνεται ο τρόπος σύνδεσης των σημαντικών μαθηματικών συλλογισμών που οδηγούν στο τελικό αποτέλεσμα. Ο εν λόγω διαχωρισμός σε βήματα συνεπώς επιλέχθηκε με στόχο να υπάρχει μία βαθύτερη προσέγγιση στη συλλογιστική που οδηγεί στην απόδειξη. Ειδικώς η Γεωμετρική προσέγγιση συνδέεται άμεσα με την κεντρική λογική της εργασίας που αφορά την εστίαση στη Γεωμετρική πολυπλοκότητα που εμφανίζουν τα Ορθογώνια συγκριτικά με τις μπάλες, γεγονός στο οποίο οφείλεται και η αποτυχία της ασθενούς εκτίμησης τύπου $(1, 1)$ για τον ισχυρό μεγιστικό τελεστή.

3.3.1 Διαδικασία επιλογής υποοικογένειας ορθογωνίων με ελεγχόμενες επικαλύψεις

Η ανισότητα εστιάζει στον έλεγχο των μέσων τιμών σε αξονοπαράλληλα ορθογώνια και κατά συνέπεια προκύπτει, με άμεσο τρόπο από τον ορισμό της ισχυρής Μεγιστικής Συνάρτησης, ότι η Γεωμετρία των εν λόγω γεωμετρικών κατασκευών διαδραματίζει

σημαντικό ρόλο στην απόδειξη. Μία οικογένεια ορθογωνίων, αξονοπαράλληλων συγκεκριμένα, όμως είναι δυνατόν να περιλαμβάνει ορθογώνια με περίπλοκες επικαλύψεις μεταξύ των συνόλων που ανήκουν σε αυτή. Η λογική του πρώτου βήματος της απόδειξης λοιπόν εστιάζει σε μία μέθοδο που θα αντικαταστήσει μία τυχούσα οικογένεια από ορθογώνια με μία υποοικογένεια όπου θα υπάρχει έλεγχος των επικαλύψεων μεταξύ των ορθογωνίων. Συνεπώς όπως γίνεται κατανοητό το πρώτο βήμα είναι μία λογική απλοποίηση της γεωμετρίας των συνόλων που φυσικά αποτελούν βασικό πυρήνα στον ορισμό της ισχυρής Μεγιστικής Συνάρτησης.

Η εν λόγω διαδικασία επιτυγχάνεται μέσω της επιλογής μίας αριθμήσιμης υποοικογένειας μίας τυχούσας οικογένειας ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες, με τρόπο όπου κάθε επόμενο ορθογώνιο της υποοικογένειας που θα επιλέγεται θα εξασφαλίζεται ότι ένα μεγάλο μέρος του ως σύνολο δε θα έχει ήδη καλυφθεί από προηγούμενα σύνολα της εν λόγω αριθμήσιμης υποοικογένειας.

Πιο αναλυτικά, έστω

$$\mathcal{F} = \{Q_j\}_{j \geq 1}$$

μία τυχούσα αριθμήσιμη οικογένεια αξονοπαράλληλων ορθογωνίων του $\mathbb{R}^n$.

Από την εν λόγω Οικογένεια θα κατασκευαστεί μία νέα οικογένεια ορθογωνίων R , με στοιχεία της οικογένειας $\mathcal{F}$, όπου οι επικαλύψεις μεταξύ των ορθογωνίων θα είναι ελεγχόμενες

Επιλέγεται λοιπόν το πρώτο στοιχείο της νέας Οικογένειας Ορθογωνίων $R_1 = Q_1$

Κάθε επόμενο ορθογώνιο του Ορθογωνίου R_k στη νέα αριθμήσιμη υποοικογένεια, δηλαδή κάθε Ορθογώνιο R_{k+1} , επιλέγεται από την Οικογένεια Ορθογωνίων (τυχούσα) $\mathcal{F} = \{Q_j\}_{j \geq 1}$ με τρόπο που να ικανοποιεί την εν λόγω σχέση:

$$\left| R_{k+1} \cap \bigcup_{i=1}^k R_i \right| < \frac{1}{2} |Q_j|$$

Έστω ότι, μετά από ορισμένα στάδια της διαδικασίας, k - στάδια, έχουν επιλεγεί τα ορθογώνια

$$R_1, R_2, \dots, R_k.$$

Στο σημείο αυτό να τονιστεί ότι εφόσον υπάρχουν περισσότερα από ένα ορθογώνια της αρχικής τυχούσας αριθμήσιμης Οικογένειας $\mathcal{F} = \{Q_j\}_{j \geq 1}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη, σε κάποιο στάδιο της διαδικασίας επιλογής, επιλέγεται το πρώτο από αυτά. (δεδομένου ότι η αρχική Οικογένεια επιλέχθηκε να είναι αριθμήσιμη υπάρχει μία διάταξη μεταξύ των στοιχείων της , και κατά συνέπεια στο πλαίσιο αυτής της διάταξης υπάρχει πάντα ‘‘πρώτο’’ στοιχείο που ικανοποιεί τη συνθήκη). Αν δεν υπάρχει σε κάποιο βήμα πλέον άλλο τέτοιο Ορθογώνιο η διαδικασία επιλογής παύει και έχει συμπληρωθεί η Οικογένεια R

Μέσω λοιπόν αυτής της διαδικασίας επιλογής προκύπτει μία νέα Οικογένεια Ορθογωνίων R με πλευρές παράλληλες στους άξονες η οποία θα περιλαμβάνει Ορθογώνια τέτοια ώστε :

$$\{R_k\} \in \mathcal{F} \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

και θα ισχύει η ανισότητα:

$$\left| R_k \cap \bigcup_{j < k} R_j \right| < \frac{1}{2} |R_k| \quad (P_1)^5$$

για κάθε $k \geq 2$. Συνεπώς όπως αναλύθηκε και παραπάνω προέκυψε μία νέα οικογένεια Ορθογωνίων με πιο ελεγχόμενες επικαλύψεις για την ιδιότητα αραιότητας P_1 που χρησιμοποιείται στη γεωμετρική προσέγγιση του ισχυρού μεγιστικού θεωρήματος. Στην αρχική διατύπωση των Córdoba και Fefferman εμφανίζεται ως disjoint-parts property P_1 .

Ανάλυση της Γεωμετρικής σημασίας της ιδιότητας P_1

Η ιδιότητα P_1 που αναφέρθηκε είναι σημαντική καθώς δηλώνει ότι κάθε νέο Ορθογώνιο που προστίθεται στη νέα οικογένεια , υποοικογένεια της αρχικής, συνεισφέρει σημαντικά στην ένωση από την οπτική του μέτρου, πάντα ως ποσοστό του συνολικού μέτρου του, δεδομένου ότι ένα μεγάλο μέρος του δεν επικαλύπτεται από άλλα ορθογώνια που είχαν επιλεγεί σε προηγούμενα βήματα. Η διαδικασία της κατασκευής μίας τέτοιας υποοικογένειας μπορεί να γίνει αντιληπτή αν υπάρξει εστίαση στο τμήμα κάθε νέου ορθογωνίου που επιλέγεται το οποίο δεν επικαλύπτεται από τα προηγούμενα ορθογώνια. Πιο συγκεκριμένα έστω

$$E_1 = R_1$$

και, για $k \geq 2$,

$$E_k = R_k \setminus \bigcup_{j < k} R_j.$$

⁵ Η εν λόγω Ιδιότητα στο άρθρο των Córdoba και Fefferman εμφανίζεται ως disjoint-parts property P_1

Από τον ορισμό του E_k έχουμε

$$|E_k| = |R_k| - \left| R_k \cap \bigcup_{j < k} R_j \right|.$$

Χρησιμοποιώντας την P_1 , παίρνουμε

$$|E_k| > |R_k| - \frac{1}{2} |R_k| = \frac{1}{2} |R_k|.$$

Επομένως,

$$\boxed{|E_k| > \frac{1}{2} |R_k|}.$$

Από τη σχέση αυτή αναδεικνύεται η συνεισφορά του κάθε νέου συνόλου- ορθογωνίου στην ένωση από την άποψη του μέτρου, συγκριτικά με το συνολικό του μέτρο. Αξίζει επιπλέον να αναφερθεί ως παρατήρηση, τα σύνολα E_k είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή ισχύει :

$$E_k \cap R_i = \emptyset,$$

ενώ $E_i \subseteq R_i$. Συνεπώς,

$$E_i \cap E_k = \emptyset.$$

Άρα, για κάθε πεπερασμένο πλήθος επιλεγμένων ορθογωνίων⁶

$$\sum_{k=1}^N |E_k| = \left| \bigcup_{k=1}^N E_k \right| \leq \left| \bigcup_{k=1}^N R_k \right|.$$

Επειδή όμως

$$|E_k| > \frac{1}{2} |R_k|,$$

προκύπτει

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N |R_k| < \left| \bigcup_{k=1}^N R_k \right|,$$

και επομένως

⁶ Εδώ γίνεται αναφορά στην απόδειξη για πεπερασμένη οικογένεια $\{R_k\}$ και όχι απειραριθμήσιμη σε πλήθος στοιχείων. Παρακάτω εξηγείται ότι επιλέγεται τέτοια υποοικογένεια ώστε να καλύπτει τυχόν συμπαγές υποσύνολο K του υποσυνόλου $\{x \in \mathbb{R}^n : M_S f(x) > \lambda\}$. Άρα για την απόδειξη αρκεί να είναι πεπερασμένη

$$\sum_{k=1}^N |R_k| < 2 \left| \bigcup_{k=1}^N R_k \right|.$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται πλέον με ποσοτικό τρόπο ότι στη νέα οικογένεια υπάρχει πλέον έλεγχος των επικαλύψεων των ορθογωνίων, δεδομένου ότι το άθροισμα των μέτρων των ορθογωνίων δεν μπορεί να είναι ανεξέλεγκτα μεγαλύτερο από το μέτρο της ένωσης τους.

3.3.2 Η συνάρτηση επικάλυψης και η ανάγκη ισχυρότερου ελέγχου

Στο πρώτο βήμα λοιπόν, ιδιότητα P_1 , εξασφαλίστηκε ότι επιλέχθηκε από μία τυχούσα οικογένεια ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονας μία υποοικογένεια για την οποία ισχύει:

$$\left| R_k \cap \bigcup_{j < k} R_j \right| < \frac{1}{2} |R_k|.$$

Και στη συνέχεια με χρήση της εν λόγω ιδιότητας προέκυψε μία σχέση που αποτελεί έναν πρώτο έλεγχο των επικαλύψεων των ορθογωνίων της νέας οικογένειας ορθογωνίων όπως αυτός αποτυπώνεται συγκεκριμένα στον έλεγχο του αθροίσματος των μέτρων των ορθογωνίων

$$\sum_k |R_k| \leq 2 \left| \bigcup_k R_k \right|.$$

Η εν λόγω εκτίμηση αφενός παρέχει έναν πρώτο συνολικό έλεγχο επικάλυψης των ορθογωνίων όμως υστερεί όσον αφορά την παροχή πληροφορίας για επικαλύψεις σημειακά. Πιο αναλυτικά δεν παρέχει πληροφόρηση για κάθε σημείο αν ανήκει σε ένα ή περισσότερα ορθογώνια. Το έλλειμα αυτό αποτελεί το λόγο εισαγωγής μίας συνάρτησης επικάλυψης:

$$N(x) = \sum_k \chi_{R_k}(x),$$

όπου χ_{R_k} είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του R_k . Η εν λόγω συνάρτηση που ορίστηκε παρέχει πληροφόρηση για τον αριθμό των ορθογώνιων που περιλαμβάνουν ένα σημείο της

οικογένειας χ . Είναι πρακτικά λοιπόν μέτρηση των ορθογωνίων που έχουν την προαναφερθείσα ιδιότητα.

Με ολοκλήρωση προκύπτει

$$\int_{\mathbb{R}^n} N(x) dx = \sum_k |R_k|,$$

και συνεπώς, από την προηγούμενη εκτίμηση,

$$\int_{\mathbb{R}^n} N(x) dx \leq 2 \left| \bigcup_k R_k \right|.$$

Συνεπώς προκύπτει ένας πρώτος έλεγχος και της συνάρτησης επικάλυψης όπως φαίνεται από την εν λόγω παραπάνω σχέση. Ο έλεγχος αυτός όμως δεν είναι επαρκής για τις ανάγκες της απόδειξης της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund και χρειάζεται ισχυρότερος έλεγχος των επικαλύψεων. Για $m > 0$, από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε

$$|\{x: N(x) \geq m\}| \leq \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^n} N(x) dx \leq \frac{2}{m} \left| \bigcup_k R_k \right|.$$

Για την απόδειξη της ανισότητας Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund λοιπόν όπως αναφέρθηκε απαιτείται ένα φράγμα του μέτρου $|\{x: N(x) \geq m\}|$ που θα εξασφαλίζει ταχύτερη μείωση του εν λόγω μέτρου καθώς αυξάνεται το m . Όπως θα αναλυθεί και στα επόμενα βήματα θα επιδιωχθεί μία εκθετική εκτίμηση η οποία θα προσφέρει αρκούντως ικανοποιητικό ρυθμό μείωσης του εν λόγω μέτρου γεγονός που σημαίνει ότι θα υπάρχει σημαντικός έλεγχος του μέτρου του συνόλου των σημείων που εμφανίζουν υψηλό αριθμό επικαλύψεων. Συνεπώς η επιδίωξη με απλά λόγια είναι η απόδειξη μίας ανισότητας που θα περιορίζει σημαντικά το μέτρο του συνόλου των σημείων που ανήκουν σε πολλά ορθογώνια της οικογένειας ταυτόχρονα.

Η εν λόγω κρίσιμη εκθετική εκτίμηση που θα επιδιωχθεί να εξαχθεί στα επόμενα βήματα πιο αναλυτικά θα έχει τη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\exp(c_n N(x)^{1/(n-1)}) - 1] dx \leq C_n \left| \bigcup_k R_k \right|,$$

όπου $c_n, C_n > 0$ είναι σταθερές που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση.

Αφού αναλύθηκε η εν λόγω επιδίωξη, της εξαγωγής ενός ισχυρού ελέγχου των συνόλων που εμφανίζουν υψηλό βαθμό επικαλύψεων από ορθογώνια της οικογένειας, μπορεί στο σημείο αυτό να αναφερθεί ότι ένας βασικός πυλώνας της απόδειξης που αναλύεται στην παρούσα εργασία είναι το κύριο θεώρημα επιλογής των Córdoba- Fefferman. Το εν λόγω θεώρημα λοιπόν δίνει τη δυνατότητα από μία τυχούσα οικογένεια ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες να επιλεγθεί μία κατάλληλη υποοικογένεια η οποία θα ικανοποιεί δύο βασικές συνθήκες:

1^η συνθήκη: Αφενός η νέα υποοικογένεια της αρχικής μπορεί να είναι γνήσιο υποσύνολο της αρχικής (άρα να μην καλύπτει όλο το σύνολο που καλύπτει η αρχική), όμως το μέτρο της ένωσης των ορθογωνίων της νέας υποοικογένειας εφόσον μπορεί να είναι ελεγχόμενα μικρότερο από το μέτρο της ένωσης των ορθογωνίων της αρχικής τυχούσας οικογένειας. Πιο αναλυτικά λοιπόν ισχύει:

Έστω μία αρχική τυχούσα οικογένεια ορθογωνίων

$$\{Q_j\}$$

επιλέγουμε μία υποοικογένεια

$$\{R_k\} \subseteq \{Q_j\}$$

με συγκεκριμένη διαδικασία

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$\bigcup_k R_k \subseteq \bigcup_j Q_j.$$

Συνεπώς λόγω της διαδικασίας επιλογής υποοικογένειας μπορεί να χαθούν σημεία

Όμως το γεωμετρικό θεώρημα εξασφαλίζει ότι υπάρχει $c_n > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left| \bigcup_k R_k \right| \geq c_n \left| \bigcup_j Q_j \right|.$$

Άρα η απώλεια που προκύπτει λόγω αντικατάστασης της αρχικής οικογένειας από μία υποοικογένεια, όταν οδηγεί σε “απώλεια μέτρου” αυτή είναι ελεγχόμενη όπως φαίνεται και από την ανισότητα

2^η συνθήκη: Η νέα υποοικογένεια ικανοποιεί μία εκθετική εκτίμηση

Πιο αναλυτικά το μέτρο του συνόλου των σημείων που ανήκουν σε περισσότερα ορθογώνια, μειώνεται εκθετικά καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ορθογωνίων τα οποία συμμετέχουν στην επικάλυψη. Με άλλα λόγια το μέτρο $|\{x: N(x) \geq m\}|$ μειώνεται εκθετικά, άρα με αρκετά μεγάλο ρυθμό, καθώς αυξάνεται το m . Συνεπώς υπάρχει ισχυρός έλεγχος των επικαλύψεων μεταξύ των Ορθογωνίων μίας επιλεχθείσας υποοικογένειας Ορθογωνίων, με δομημένη διαδικασία επιλογής, από μία τυχούσα Οικογένεια αποτελούμενη από αριθμήσιμου πλήθους Ορθογώνια.

3.3.3 Κατασκευή υποοικογένειας με την ισχυρότερη ιδιότητα ελέγχου επικαλύψεων P_2

Έως τώρα έχει ήδη διατυπωθεί το Γεωμετρικό Θεώρημα επιλογής ενώ παράλληλα έχει δοθεί ήδη μία ανισότητα που επιτρέπει να υπάρχει ο έλεγχος των επικαλύψεων που δημιουργούνται από Ορθογώνια μίας καταλλήλως επιλεχθείσας υποοικογένειας από μία τυχούσα οικογένεια:

$$\left| R_k \cap \bigcup_{j < k} R_j \right| < \frac{1}{2} |R_k| \quad (P_1)$$

Όπως λοιπόν αναφέρθηκε ο έλεγχος των επικαλύψεων των Ορθογωνίων μίας Οικογένειας είναι βασικό βήμα της απόδειξης και η ιδιότητα (P1) που αποδείχθηκε ελέγχει την επικάλυψη κατά τη διαδικασία μόνο της επιλογής κάθε ορθογωνίου R_k μόνο με τα ορθογώνια που προηγούνται στη διαδικασία επιλογής. Συνεπώς γίνεται αντιληπτό ότι απαιτείται ισχυρότερος έλεγχος των επικαλύψεων μεταξύ των Ορθογωνίων για τις ανάγκες της απόδειξης. Για την επαγωγική διαδικασία που θα ακολουθήσει λοιπόν θα αποδειχθεί η παρακάτω ισχυρότερη ιδιότητα ώστε να υπάρχει περιορισμός και ισχυρότερος έλεγχος των επικαλύψεων:

$$\left| R_k \cap \bigcup_{j \neq k} R_j \right| < \frac{1}{2} |R_k|,$$

η οποία θα συμβολιστεί με P_2 . Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό η νέα ιδιότητα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ένα υποσύνολο κάθε Ορθογωνίου R_k που επιλέγεται να ανήκει στην Οικογένεια που κατασκευάζεται, από ορθογώνια τυχούσας οικογένειας, το οποίο έχει μέτρο

μεγαλύτερο από το ήμισυ του μέτρου όλου του ορθογωνίου παραμένει εκτός της ένωσης όλων των υπολοίπων επιλεγμένων ορθογωνίων.

Ξεκινάμε από την αρχική οικογένεια $\{Q_i\}$ και, αφού διατάζουμε κατάλληλα τα ορθογώνια, εφαρμόζουμε αρχικά τη διαδικασία επιλογής που χρησιμοποιήθηκε για την P_1 . Προκύπτει έτσι μία υποοικογένεια

$$R_1, R_2, \dots$$

η οποία διατηρεί ποσοτικό έλεγχο του μέτρου της αρχικής ένωσης. Συγκεκριμένα, υπάρχει σταθερά $A_n > 0$, εξαρτώμενη μόνο από τη διάσταση, τέτοια ώστε

$$\left| \bigcup_i Q_i \right| \leq A_n \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right|.$$

Από τον τρόπο επιλογής των R_k και τις ιδιότητες του μέτρου εύκολα προκύπτει ότι ισχύει:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{k=1}^M R_k \right| = \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right|.$$

Συνεπώς θα υπάρχει MER τέτοιο ώστε:

$$\left| \bigcup_{k=1}^M R_k \right| \geq \frac{1}{2} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right|.$$

Με τον τρόπο αυτό επιλέγεται μία πεπερασμένη οικογένεια Ορθογωνίων χωρίς παράλληλα να προκύπτει ουσιώδες πρόβλημα λόγω απώλειας υποσυνόλου που κάλυπτε η Ένωση των ορθογωνίων της αριθμήσιμης οικογένειας, δεδομένου ότι η διαφορά του μέτρου της ένωσης των πεπερασμένων ορθογωνίων από την ένωση της αρχικής αριθμήσιμης είναι ελεγχόμενη όπως προέκυψε από την προηγούμενη ανισότητα (λόγω κατάλληλης επιλογής πραγματικού αριθμού M). Η συγκεκριμένη επιλογή πεπερασμένης ακολουθίας ορθογωνίων, από μία αρχική που δυνητικά θα μπορούσε να έχει αριθμήσιμο αλλά άπειρο παράλληλα πλήθος ορθογωνίων, αποτελεί μέρος της κατασκευής των Córdoba- Fefferman.

Το κρίσιμο επόμενο βήμα είναι να γραφεί η πεπερασμένη οικογένεια με την αντίστροφη σειρά,

$$R_M, R_{M-1}, \dots, R_1,$$

και να εφαρμοστεί εκ νέου η ίδια διαδικασία αραιής επιλογής. Από τη δεύτερη αυτή επιλογή προκύπτει μία υποοικογένεια

$$\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_N$$

η οποία πλέον ικανοποιεί την ισχυρότερη συνθήκη

$$\left| \tilde{R}_k \cap \bigcup_{j \neq k} \tilde{R}_j \right| < \frac{1}{2} |\tilde{R}_k|, \quad k = 1, \dots, N.$$

Στην αρχική οικογένεια $\{R_1, R_2, \dots\}$ προς την μία κατεύθυνση υπάρχει έλεγχος επικαλύψεων όπως αποτυπώνεται και από την ιδιότητα (P1) με την αντιστροφή της σειράς επιτυγχάνεται ο έλεγχος των επικαλύψεων και προς την αντίθετη κατεύθυνση της ακολουθίας των ορθογωνίων μία κατεύθυνση της διάταξης, ενώ η δεύτερη, εφαρμοζόμενη στην αντίστροφη σειρά, παρέχει τον αντίστοιχο έλεγχο προς την άλλη κατεύθυνση. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η ιδιότητα P_2 . Παράλληλα είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η τελική επιλογή υποοικογένειας μίας τυχούσας Οικογένειας Ορθογωνίων $\{Q_i\}$ καλύπτει αρκετά σημαντικό μέρος του συνόλου που προκύπτει από την ένωση των Q_i δεδομένου ότι ισχύει η παρακάτω ανισότητα για κάποια σταθερά c_n η οποία εξαρτάται μόνο από τη διάσταση του χώρου

$$\left| \bigcup_{k=1}^N \tilde{R}_k \right| \geq c_n \left| \bigcup_i Q_i \right|.$$

Κατασκευάστηκε μία υποοικογένεια ορθογωνίων λοιπόν μέσω μίας αρχικής τυχούσας αρχικής η οποία αφενός καλύπτει σημαντικό τμήμα του συνόλου που καλύπτει η αρχική, από την άποψη ότι το σύνολο που πιθανώς να μην καλυφθεί έχει μέτρο απολύτως ελεγχόμενο και αφετέρου υπάρχει ένας πιο ισχυρός έλεγχος των επικαλύψεων όπως προκύπτει και από την ανισότητα P_2 .

3.3.4 Επαγωγική μετάβαση ως προς τη διάσταση και ολοκλήρωση της απόδειξης της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund

Στα προηγούμενα βήματα κατασκευάστηκε, από μία αρχική οικογένεια ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες, μία πεπερασμένη υποοικογένεια

$$\mathcal{R} = \{R_k\}_{k=1}^N$$

με τρόπο ώστε η ένωση των ορθογωνίων της πεπερασμένης οικογένειας να έχει μέτρο που δεν είναι ανεξέλεγκτα και σημαντικά μικρότερο του μέτρου του συνόλου που προκύπτει από την ένωση των ορθογωνίων της αρχικής αριθμήσιμης οικογένειας. Επιπλέον η εν λόγω οικογένεια ικανοποιεί την ισχυρότερη ιδιότητα ελέγχου των επικαλύψεων μεταξύ των ορθογωνίων

$$(P_2) \left| R_k \cap \bigcup_{j \neq k} R_j \right| < \frac{1}{2} |R_k|, \quad k = 1, \dots, N.$$

Τώρα στο παρόν βήμα θα υπάρξει εστίαση στο τελικό μέρος της απόδειξης της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund. Για το σκοπό αυτό εντός της απόδειξης θα λάβει χώρα και η απόδειξη της εκθετικής εκτίμησης που έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω, ως μία ισχυρή ανισότητα ελέγχου του συνόλου των σημείων που επικαλύπτονται από πολλά Ορθογώνια:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\exp (c_n N(x)^{1/(n-1)}) - 1] dx \leq C_n \left| \bigcup_{k=1}^N R_k \right|,$$

Αρχικά για τις ανάγκες της απόδειξης ορίζουμε τη συνάρτηση επικάλυψης

$$N(x) = \sum_{k=1}^N \chi_{R_k}(x).$$

Σκοπός λοιπόν όπως προαναφέρθηκε του παρόντος βήματος είναι να αποδειχθεί η εκθετική εκτίμηση, όπου $c_n, C_n > 0$ εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση και παράλληλα να αποδειχθεί η ζητούμενη

Η απόδειξη της εκθετικής εκτίμησης και της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund θα υλοποιηθεί μέσω της Μεθόδου της Μαθηματικής Επαγωγής στη διάσταση n . Πιο αναλυτικά η μεθοδολογία που ακολουθείται για την απόδειξη περιλαμβάνει ένα συνεπαγωγικό σχήμα αλυσίδας, της γεωμετρικής εκθετικής εκτίμησης της συνάρτησης επικάλυψης και της ανισότητας ανισότητα Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund

Το σχήμα της ταυτόχρονης επαγωγής

Για να γίνει σαφής η λογική της απόδειξης, συμβολίζουμε με A_n τη γεωμετρική πρόταση

$$A_n: \int_{\mathbb{R}^n} [\exp (c_n N^{1/(n-1)}) - 1] \leq c_n \left| \bigcup_k R_k \right|$$

για την κατάλληλα επιλεγμένη οικογένεια ορθογωνίων που περιγράφηκε ανωτέρω η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα P_2 .

Αντίστοιχα, συμβολίζουμε με B_n την Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund εκτίμηση για τον ισχυρό μεγιστικό τελεστή $M_S^{(n)}$:

$$B_n: |\{x: M_S^{(n)} f(x) > \lambda\}| \leq D_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{n-1} dx.$$

Αρχικά λοιπόν θα αποδειχθεί η βάση της επαγωγής για την πρώτη ανισότητα, η A_2 . Από αυτήν συνεπαγωγικά θα αποδειχθεί στη συνέχεια η ανισότητα B_2 . Κατόπιν θα υποτεθεί ότι ισχύει η B_{n-1} στο $\mathbb{R}^{n-1}$ και συνεπαγωγικά με χρήση της εν λόγω υπόθεσης θα αποδειχθεί ότι ισχύει η A_n . Τέλος, η εκθετική εκτίμηση που παρέχει η A_n , σε συνδυασμό με κατάλληλη ανισότητα τύπου Orlicz–Young, θα οδηγήσει στην B_n και συνεπώς θα ολοκληρωθεί η απόδειξη των Jessen–Marcinkiewicz–Zygmund.

Πρώτο βήμα της Επαγωγικής διαδικασίας:

Αρχικά με χρήση της weak $(1, 1)$ στο παρόν βήμα θα αποδειχθεί ότι ισχύει η A_2 , η οποία είναι η βάση της επαγωγής για την απόδειξη της A_n . Ως γνωστόν στη διάσταση 1 τα ορθογώνια και οι μπάλες ταυτίζονται ουσιαστικά και κατά συνέπεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κλασικό θεώρημα Hardy–Littlewood, σύμφωνα με το οποίο όπως αποδείχθηκε και στο αντίστοιχο υποκεφάλαιο παραπάνω ο μονοδιάστατος μεγιστικός τελεστής M είναι ασθενούς τύπου $(1, 1)$, δηλαδή ισχύει:

$$|\{x \in \mathbb{R}: M g(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx.$$

Η εν λόγω εκτίμηση στην επαγωγική διαδικασία ταυτίζεται με την πρόταση B_1 .

Θεωρούμε τώρα μία οικογένεια διαστημάτων $\{I_k\}$ στον $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την P_1 :

$$\left| I_k \cap \bigcup_{j < k} I_j \right| < \frac{1}{2} |I_k|$$

Από τη weak (1, 1) ιδιότητα του M , σε συνδυασμό με την P_1 , προκύπτει εκθετικός έλεγχος της αντίστοιχης συνάρτησης επικάλυψης

$$N_1(x) = \sum_k \chi_{I_k}(x),$$

δηλαδή υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{cN_1(x)} - 1) dx \leq C \left| \bigcup_k I_k \right| \quad (3.1)$$

Η (3.1) αποτελεί εργαλείο για να αποδειχθεί ότι ισχύει η A_2

Τώρα ακολουθεί αναλυτική απόδειξη της σχέσης (3.1)

Έστω $I_1, \dots, I_N$ πεπερασμένη οικογένεια διαστημάτων στον $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα

$$(P_1) \quad \left| I_k \cap \bigcup_{j < k} I_j \right| < \frac{1}{2} |I_k|, \quad k = 1, \dots, N$$

Θέτουμε

$$U = \bigcup_{k=1}^N I_k$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση επικάλυψης

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{k=1}^N \chi_{I_k}(x)$$

Σαν πρώτο βήμα της απόδειξης θα κατασκευάσουμε οικογένεια ξένων διαστημάτων όπου κάθε διάστημα θα είναι υποσύνολο ενός διαστήματος της πεπερασμένης οικογένειας $I_1, \dots, I_N$

Για κάθε k ορίζουμε

$$E_k = I_k \setminus \bigcup_{j < k} I_j$$

Με χρήση της ιδιότητας P_1 (η αρχική πεπερασμένη οικογένεια την ικανοποιεί την P_1) έχουμε:

$$\begin{aligned} |E_k| &= |I_k| - \left| I_k \cap \bigcup_{j < k} I_j \right| \\ &> |I_k| - \frac{1}{2} |I_k| = \frac{1}{2} |I_k|. \end{aligned}$$

Άρα καταλήξαμε ότι ισχύει:

$$\boxed{|E_k| > \frac{1}{2} |I_k|}. \quad (1)$$

Επιπλέον όπως προκύπτει από τον τρόπο που επιλέχθηκαν τα E_k είναι ανά δύο ξένα, δηλαδή ισχύει:

$$E_j \cap E_k = \emptyset.$$

Επομένως

$$\sum_{k=1}^N |E_k| = \left| \bigcup_{k=1}^N E_k \right| \leq |U|.$$

Από τη σχέση (1) ισχύει

$$|I_k| < 2 |E_k|,$$

και συνεπώς

$$\boxed{\sum_{k=1}^N |I_k| \leq 2 |U|} \quad (2)$$

Στο δεύτερο βήμα τώρα της απόδειξης ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή

$$Tf(x) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(y) dy \right) \chi_{E_k}(x).$$

Όπως αναφέρθηκε ήδη τα σύνολα E_k είναι ανά δύο ξένα, και συνεπώς για κάθε x υπάρχει το πολύ ένας δείκτης k τέτοιος ώστε $x \in E_k$

Έστω τώρα $x \in E_k \subseteq I_k$, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &= \left| \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(y) dy \right| \\
&\leq \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |f(y)| dy \\
&\leq Mf(x)
\end{aligned}$$

όπου M είναι ο τελεστής των Hardy- Littlewood για τη διάσταση $n=1$

Επομένως αποδείχθηκε η παρακάτω ανισοτική σχέση:

$$\boxed{|Tf(x)| \leq Mf(x)} \quad (3)$$

Αφού ο M είναι ασθενούς τύπου $(1,1)$ όπως προκύπτει από το θεώρημα των Hardy- Littlewood θα ισχύει η ανισότητα:

$$|\{x: Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

και λόγω της σχέσης (3) προκύπτει η παρακάτω ανισότητα:

$$|\{x: |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1$$

Άρα φαίνεται ότι το πεδίο τιμών του Γραμμικού Τελεστή που ορίστηκε περιλαμβάνει συναρτήσεις ουσιωδώς φραγμένες, δηλαδή φραγμένες σε όλο το πεδίο ορισμού τους αν αγνοηθούν σύνολα φυσικά μέτρου μηδέν. Δηλαδή καταλήξαμε στο εξής:

$$\boxed{T: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R})} \quad (4)$$

Παράλληλα έχουμε για $f \in L^\infty$ ότι

$$\left| \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f \right| \leq \|f\|_\infty$$

Οπότε προκύπτει (λόγω του ορισμού του Γραμμικού Τελεστή) ότι ισχύει:

$$\boxed{\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty} \quad (5)$$

Άρα αποδείχθηκε ότι ο Γραμμικός Τελεστής T που ορίσαμε είναι επίσης φραγμένος από L^∞ σε L^∞

Στη συνέχεια στο επόμενο βήμα θα επιχειρηθεί L^p - εκτίμηση του τελεστή T ώστε στη συνέχεια να προκύψει φραγή του συζυγούς τελεστή λόγω της δυϊκότητας

Από τις (4) και (5) σχέσεις λοιπόν, με εφαρμογή του θεωρήματος παρεμβολής Marcinkiewicz (Grafakos, 2014) θα έχουμε ότι για κάθε $1 < p \leq 2$ ο τελεστής T είναι φραγμένος στο L^p και ειδικότερα θα ισχύει για τον Τελεστή :

$$\|Tf\|_p \leq C \frac{p}{p-1} \|f\|_p \quad (6)$$

αν τώρα θέσουμε

$$p' = \frac{p}{p-1}$$

η σχέση (6) θα γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq Cp'} \quad (7)$$

Στο παρόν βήμα, σε αυτό το σημείο της απόδειξης, θα λάβει χώρα η εξαγωγή του συζυγούς τελεστή T^*

Για f, g κατάλληλες συναρτήσεις λοιπόν θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} T f(x) g(x) dx &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} f(y) dy \right) \int_{E_k} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{E_k} g(x) dx \right) \chi_{I_k}(y) dy \end{aligned}$$

Άρα προκύπτει όπως αποδείχθηκε ο συζυγής Τελεστής θα είναι:

$$\boxed{T^* g(y) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{|I_k|} \int_{E_k} g(x) dx \right) \chi_{I_k}(y).} \quad (8)$$

Θέτουμε τώρα

$$g = \chi_U$$

Επειδή

$$E_k \subseteq I_k \subseteq U$$

έχουμε

$$\int_{E_k} \chi_U(x) dx = |E_k|$$

Επομένως

$$T^* \chi_U(y) = \sum_{k=1}^N \frac{|E_k|}{|I_k|} \chi_{I_k}(y)$$

Λόγω της σχέσης (1) θα έχουμε όσον αφορά το πηλίκο των μέτρων των ξένων ανα δύο υποσυνόλων των συνόλων I_k προς το αντίστοιχο μέτρο των I_k

$$\frac{|E_k|}{|I_k|} > \frac{1}{2},$$

Οπότε θα ισχύει

$$T^* \chi_U(y) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \chi_{I_k}(y) = \frac{1}{2} \mathcal{N}(y).$$

Άρα τελικά καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση (9) η οποία ουσιαστικά δίνει τη δυνατότητα να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι ο έλεγχος της συνάρτησης επικαλύψεων μπορεί να αναχθεί σε μία διαδικασία ελέγχου του συζυγούς τελεστή T^*

$$\boxed{\mathcal{N}(y) \leq 2T^* \chi_U(y)}. \quad (9)$$

Συνεπώς παρακάτω η μεθοδολογία θα επικεντρωθεί στη διαδικασία ελέγχου, μέσω ανισοτικής σχέσης, του συζυγούς Τελεστή T^* . Προφανώς η εξαγωγή τέτοιας ανισοτικής σχέσης μπορεί να προκύψει με την αξιοποίηση της σχέσης (7), η οποία αποτελεί μία ανισοτική σχέση που ελέγχει τον Γραμμικό Τελεστή T . Με τον τρόπο αυτό θα εξαχθεί ανισοτική σχέση που λόγω της σχέσης (9) θα αποτελεί σχέση ελέγχου της συνάρτησης επικάλυψης και κατ' επέκτασιν των επικαλύψεων των Ορθογωνίων συνόλων

Έστω τώρα

$$q \geq 2$$

αν θέσουμε τώρα

$$p = \frac{q}{q-1}$$

Τότε είναι προφανές ότι θα ισχύει

$$1 < p \leq 2$$

και

$$p' = q$$

Λόγω τώρα της σχέσης (7) η οποία αποδείχθηκε παραπάνω προκύπτει η σχέση:

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq Cq$$

Και λόγω της δυϊκότητας των χώρων L^p και L^q , όπου ισχύει $1/p + 1/q = 1$, προκύπτει φραγή του συζυγούς Τελεστή

$$\boxed{\|T^*\|_{L^q \rightarrow L^q} \leq Cq} \quad (10)$$

Αξιοποιώντας τώρα τη σχέση (9) μπορεί να εμφανιστεί μία ανισοτική σχέση που θα περιλαμβάνει τη συνάρτηση επικάλυψης

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}\|_q &\leq 2 \|T^* \chi_U\|_q \\ &\leq 2Cq \|\chi_U\|_q \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει η παρακάτω ισότητα

$$\|\chi_U\|_q = |U|^{1/q}$$

Προκύπτει αρχικά η ανισοτική σχέση

$$\boxed{\|\mathcal{N}\|_q \leq C_1 q |U|^{1/q}} \quad (11)$$

Και με απλές πράξεις, πιο συγκεκριμένα υψώνοντας στην q -οστή δύναμη, προκύπτει ότι ισχύει:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x)^q dx \leq (C_1 q)^q |U|, \quad q \geq 2} \quad (12)$$

Στη συνέχεια πρέπει να εμφανιστεί η εκθετική συνάρτηση ώστε να αποδειχθεί εκθετικής μορφής έλεγχος της συνάρτησης επικάλυψης όπως απαιτεί η απόδειξη της σχέσης A2 που επιχειρείται

Από το ανάπτυγμα Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης

$$e^{c\mathcal{N}(x)} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^m \mathcal{N}(x)^m}{m!}.$$

Και καθώς όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί εύκολα προκύπτει όσον αφορά το ολοκλήρωμα η σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{c\mathcal{N}(x)} - 1) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^m}{m!} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x)^m dx. \quad (13)$$

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση που το $m=1$

Από τη σχέση (2) που αποδείχθηκε παραπάνω θα έχουμε ότι ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x) dx = \sum_{k=1}^N |I_k| \leq 2 |U|$$

Αρα με εφαρμογή στη σχέση (13) για $m=1$ παίρνουμε:

$$c \int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x) dx \leq 2c |U| \quad (14)$$

Για $m \geq 2$, με εφαρμογή της σχέσης (12) θέτοντας $q = m$ θα έχουμε ότι ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(x)^m dx \leq (C_1 m)^m |U|$$

Επομένως τελικά από συνδυασμό των σχέσεων (13) και (14) θα προκύψει η σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{c\mathcal{N}(x)} - 1) dx \leq 2c |U| + |U| \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c^m (C_1 m)^m}{m!} \quad (15)$$

Όπως είναι γνωστό αποδεικνύεται εύκολα με απλή εφαρμογή της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής η παρακάτω κλασική ανισότητα, προφανώς για κάθε m φυσικό αριθμό για τον οποίο ισχύει $m \geq 2$

$$m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m$$

Η οποία ανισότητα οδηγεί με τη σειρά της στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{(C_1 m)^m}{m!} \leq (C_1 e)^m.$$

Με απλή αντικατάσταση στη σχέση (15) προκύπτει η σχέση

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{c\mathcal{N}(x)} - 1) dx \leq 2c |U| + |U| \sum_{m=2}^{\infty} (c C_1 e)^m.$$

Με κατάλληλη επιλογή τώρα μία σταθερά $c > 0$ αρκετά μικρής ώστε να ισχύει

$$c C_1 e < 1$$

θα προκύψει ότι η σειρά $\sum_{m=2}^{\infty} (cC_1 e)^m$ είναι μία συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά. Επομένως υπάρχει σταθερά $C_2 > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{cN(x)} - 1) dx \leq C_2 |U|. \quad (16)$$

Δηλαδή, λόγω του ορισμού της συνάρτησης επικάλυψης, προκύπτει ότι ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\exp \left(c \sum_{k=1}^N \chi_{I_k}(x) \right) - 1 \right] dx \leq C \left| \bigcup_{k=1}^N I_k \right|.$$

Στη συνέχεια για την ολοκλήρωση της απόδειξης θα μεταφέρουμε τη διαδικασία στο χώρο $\mathbb{R}^2$ αξιοποιώντας το γεγονός ότι οι τομές των ορθογωνίων με μία ευθεία παράλληλη στον άξονα των x είναι διαστήματα του χώρου $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε λοιπόν μία οικογένεια ορθογωνίων $\{R_k\} \subset \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την ανισότητα P_2 .

Διατάσσουμε τα ορθογώνια με κριτήριο για τη σειρά το μήκος της πλευράς τους στη δεύτερη συντεταγμένη, πρακτικά στο λεγόμενο άξονα $y'y$, και στη συνέχεια για κάθε $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε τις τομές τους με την παρακάτω ευθεία η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

$$H_t = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Οι μη κενές τομές προφανώς είναι διαστήματα στον $\mathbb{R}$ και η γεωμετρική ιδιότητα P_2 , σε συνδυασμό με τη διάταξη των ορθογωνίων που επιλέχθηκε, εξασφαλίζει ότι κάθε στοιχείο της οικογένειας των υποσυνόλων του R που είναι οι τομές που περιγράφηκαν ικανοποιεί την ιδιότητα ελέγχου των επικαλύψεων P_1 . Συνεπώς αξιοποιήθηκε μία γεωμετρική διαδικασία μετάβασης από το χώρο $\mathbb{R}^2$ και από σύνολα που ικανοποιούν την ιδιότητα P_2 στον πραγματικό χώρο R μέσω των τομών σε σύνολα που ικανοποιούν την ιδιότητα P_1

Αν $N_t(x)$ είναι η συνάρτηση επικάλυψης των τομών τότε έχουμε ότι

$$N_t(x) = N(x, t).$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.1) για κάθε σταθερό t τώρα θα προκύψει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{cN(x,t)} - 1) dx \leq C \left| \bigcup_k R_k(t) \right|.$$

μέσω ολοκλήρωσης στη συνέχεια ως προς t (και του θεωρήματος Tonelli δεδομένης της μη αρνητικότητας των όρων) προκύπτει

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{cN(x,t)} - 1) dx dt \leq C \int_{\mathbb{R}} \left| \bigcup_k R_k(t) \right| dt.$$

Αν τώρα έχουμε ότι

$$U = \bigcup_k R_k,$$

τότε προκύπτει ότι η τομή U_t ισούται με $\bigcup_k R_k(t)$

Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος του Fubini θα έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \bigcup_k R_k(t) \right| dt = |U| = \left| \bigcup_k R_k \right|.$$

Άρα τελικά καταλήγουμε ότι ισχύει

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} (e^{cN(x)} - 1) dx \leq C \left| \bigcup_k R_k \right|}$$

η οποία είναι ακριβώς η πρόταση A_2 , δηλαδή η απόδειξη της εκθετικής εκτίμησης για τη συνάρτηση επικαλύψεων στη διάσταση 2

Δεύτερο βήμα της Επαγωγικής διαδικασίας: Θα αποδειχθεί ότι η A_n συνεπάγεται ότι ισχύει η B_n

Σε αυτό το σημείο λοιπόν θα αποδειχθεί πρώτα ότι η εκτίμηση A_n , που αφορά τη συνάρτηση επικάλυψης, συνεπάγεται την Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund, εκτίμηση B_n . Εφόσον έχει αποδειχθεί στο προηγούμενο στάδιο η σχέση A_2 αν αποδειχθεί ότι η A_n συνεπάγεται ότι ισχύει η B_n άμεσα αποδεικνύεται η ισχύς της εκτίμησης B_2 που είναι η βάση της Μεθόδου της Μαθηματικής Επαγωγής κατά το στάδιο της απόδειξης της B_n για κάθε n φυσικό αριθμό.

Προχωράμε λοιπόν στην απόδειξη της συνεπαγωγικής σχέσης

Αρχικά θέτουμε

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_S^{(n)} f(x) > \lambda\}, \lambda > 0$$

Έστω $K \subset E_\lambda$ συμπαγές. Για κάθε $x \in K$, από τον ορισμό του ισχυρού μεγιστικού τελεστή (και πιο συγκεκριμένα λόγω της ιδιότητας του supremum) υπάρχει ορθογώνιο $Q_x \ni x$, με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \lambda$$

Ισοδύναμα,

$$\boxed{\lambda |Q_x| < \int_{Q_x} |f(y)| dy.} \quad (3.2)$$

Επειδή στην ανισότητα το ολοκλήρωμα είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το γινόμενο $\lambda |Q_x|$, μπορεί να αντικατασταθεί το σύνολο Q_x μπορούμε να πάρουμε ένα λίγο μεγαλύτερο ορθογώνιο $Q_x^\varepsilon \supset Q_x$, με πλευρές ελάχιστα μεγαλύτερες, ανοιχτό έτσι ώστε να εξακολουθεί να ισχύει η ανισότητα (3.2) για το νέο ανοιχτό ορθογώνιο πλέον. Έτσι εισάγεται μία ανοικτή κάλυψη του K και καθώς το K συμπαγές σύνολο, από γνωστό θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^m Q_j.$$

Στη συνέχεια ακολουθεί εφαρμογή της A_n , που υποθέσαμε ότι ισχύει, στην πεπερασμένη οικογένεια $\{Q_1, \dots, Q_m\}$

Επιλέγεται υποοικογένεια

$$R_1, \dots, R_N$$

τέτοια ώστε, για κάποια σταθερά $a_n > 0$,

$$\left| \bigcup_{k=1}^N R_k \right| \geq a_n \left| \bigcup_{j=1}^m Q_j \right|.$$

Επομένως θα έχουμε τώρα ότι ισχύει:

$$|K| \leq \left| \bigcup_j Q_j \right| \leq a_n^{-1} \left| \bigcup_k R_k \right|. \quad (3.3)$$

Λόγω της A_n για τη συνάρτηση επικάλυψης

$$\mathcal{N}(x) = \sum_{k=1}^N \chi_{R_k}(x)$$

θα ισχύει η σχέση:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{c_n \mathcal{N}(x)^{1/(n-1)}} - 1 \right] dx \leq c_n \left| \bigcup_k R_k \right|. \quad (3.4)$$

Όπως και στο άρθρο των Córdoba- Fefferman, επιλέξαμε μία κατάλληλη για την απόδειξη οικογένεια ορθογωνίων που ικανοποιεί την κατάλληλη εκθετική εκτίμηση επικάλυψης, πρακτικά που εξασφαλίζει δηλαδή ισχυρό εκθετικό έλεγχο των επικαλύψεων μεταξύ των ορθογωνίων της οικογένειας.

Στη συνέχεια λοιπόν η απόδειξη εστιάζει στη σύνδεση της επικάλυψης με τη συνάρτηση f

Κάθε R_k , προκύπτει από τον τρόπο επιλογής, προέρχεται από την αρχική οικογένεια των ορθογωνίων που ικανοποιούν τη σχέση

$$\lambda |R_k| < \int_{R_k} |f(y)| dy$$

αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε k , για όλα τα ορθογώνια, με άθροιση κατά μέλη ως προς k προκύπτει η σχέση:

$$\lambda \sum_{k=1}^N |R_k| < \sum_{k=1}^N \int_{R_k} |f(y)| dy$$

Όμως στο άθροισμα μέσω της κατάλληλης χαρακτηριστικής συνάρτησης είναι εύκολο να εισαχθεί η συνάρτηση επικάλυψης όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{R_k} |f(y)| dy &= \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_{R_k}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \sum_{k=1}^N \chi_{R_k}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \mathcal{N}(y) dy \end{aligned}$$

Τελικά λοιπόν καταλήγουμε στη σχέση

$$\lambda \sum_k |R_k| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \mathcal{N}$$

και εφόσον από βασικές ιδιότητες του μέτρου, λόγω πιθανών επικαλύψεων των ορθογωνίων, ισχύει

$$\left| \bigcup_k R_k \right| \leq \sum_k |R_k|,$$

καταλήγουμε στην παρακάτω ανισοτική σχέση η οποία περιλαμβάνει τη συνάρτηση επικάλυψης

$$\left| \bigcup_k R_k \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \mathcal{N}(x) dx. \quad (3.5)$$

τώρα στο σημείο αυτό θέτουμε

$$\Phi_n(t) = t(1 + \log^+ t)^{n-1}, \quad t \geq 0$$

αυτή είναι η Young συνάρτηση συνδέεται, με συμπληρωματική Young συνάρτηση εκθετικού τύπου, δηλαδή με συνάρτηση Ψ ώστε το ζεύγος (Φ, Ψ) ικανοποιεί μια ανισότητα τύπου $ab \leq \Phi(a) + \Psi(b)$, η οποία θα είναι της μορφής

$$\Psi(s) = \exp(c s^{1/(n-1)}) - 1,$$

όπου $c > 0$ είναι κατάλληλη σταθερά (Mayoral, 2025).

Η συμπληρωματική ανάπτυξη της Φ_n λοιπόν είναι, με σταθερές, είναι η εκθετική συνάρτηση

$$\Psi_n(s) = e^{c_n s^{1/(n-1)}} - 1.$$

Στη συνέχεια από την Orlicz-Young ανισότητα για τις συμπληρωματικές συναρτήσεις που αναφέρθηκε παραπάνω, προκύπτει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C_{n,\varepsilon} > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$ab \leq C_{n,\varepsilon} a(1 + \log^+ a)^{n-1} + \varepsilon \left(e^{c_n b^{1/(n-1)}} - 1 \right) \quad (3.6)$$

για κάθε $a, b \geq 0$

τώρα στην παραπάνω αποδειχθείσα σχέση (3.6) θέτουμε

$$a = \frac{|f(x)|}{\lambda}, \quad b = \mathcal{N}(x).$$

Τότε από τη σχέση (3.5) θα έχουμε την παρακάτω ανισότητα

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_k R_k \right| &\leq C_{n,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{n-1} dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{c_n \mathcal{N}(x)^{1/(n-1)}} - 1 \right] dx. \end{aligned}$$

Και με χρήση της αποδειχθείσας επίσης σχέσης (3.4),

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_k R_k \right| &\leq C_{n,\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right)^{n-1} dx \\ &\quad + \varepsilon C_n \left| \bigcup_k R_k \right|. \end{aligned}$$

Με κατάλληλη επιλογή του ε τώρα και πιο συγκεκριμένα αν πάρουμε

$$\varepsilon = \frac{1}{2C_n}.$$

Τότε θα έχουμε

$$\varepsilon C_n = \frac{1}{2}$$

και κατά συνέπεια καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\frac{1}{2} \left| \bigcup_k R_k \right| \leq C'_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f|}{\lambda} \right)^{n-1} dx.$$

Άρα τελικά αποδείχθηκε ότι ισχύει

$$\boxed{\left| \bigcup_k R_k \right| \leq C''_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{n-1} dx.}$$

Τώρα λόγω της παραπάνω σχέσης (3.3) θα έχουμε ότι

$$|K| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{n-1} dx.$$

Όμως το K είναι αυθαίρετο συμπαγές υποσύνολο του E_λ , άρα κάθε συμπαγές υποσύνολο, και συνεπώς με απλή χρήση των ιδιοτήτων του μέτρου Lebesgue καταλήγουμε στη σχέση

$$\boxed{|E_\lambda| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{n-1} dx.} \quad (3.7)$$

η οποία στην ουσία είναι η JMZ ανισότητα B_n

Άρα τελικά σε αυτό το βήμα αποδείχθηκε ότι ισχύει η ζητούμενη συνεπαγωγή μεταξύ των ανισοτήτων A_n, B_n

$$\boxed{A_n \Rightarrow B_n}$$

Έχοντας αποδείξει λοιπόν αυτή τη συνεπαγωγή, αν αποδειχθεί η συνεπαγωγή $B_{n-1} \Rightarrow A_n$

Θα έχουμε, με δεδομένο ότι έχει αποδειχθεί η A_2 θα ισχύει και η B_2 και αν υποθεθεί ότι ισχύει B_{n-1} θα έχουμε ότι θα ισχύει A_n και λόγω της αποδειχθείσας συνεπαγωγής $A_n \Rightarrow B_n$ θα ισχύει και η B_n . Άρα από μαθηματική επαγωγή αποδεικνύεται η ζητούμενη JMZ ανισότητα B_n

Επαγωγικό βήμα: απόδειξη της συνεπαγωγής $B_{n-1} \Rightarrow A_n$

Έστω λοιπόν $n \geq 3$ και υποθέτουμε ότι έχει ήδη αποδειχθεί η Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund ανισότητα στη διάσταση $n-1$, δηλαδή με τους συμβολισμούς που θέσαμε στην άσκηση έστω ότι ισχύει η B_{n-1} :

$$\left| \left\{ x' \in \mathbb{R}^{n-1} : M_S^{(n-1)} g(x') > \lambda \right\} \right| \leq C_{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|g(x')|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|g(x')|}{\lambda}\right)^{n-2} dx'. \quad (3.8)$$

Από την επαγωγική υπόθεση B_{n-1} ισχύει η ανισότητα Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund στη διάσταση $n-1$. Σύμφωνα με το αντίστοιχο αποτέλεσμα των Córdoba-Fefferman για οικογένειες ορθογωνίων που ικανοποιούν την ιδιότητα P_1 , μία εκτίμηση του μεγιστικού τελεστή της μορφής $L(1 + (\log^+ L)^r) \rightarrow L^{1,\infty}$ συνεπάγεται εκθετικό έλεγχο της αντίστοιχης συνάρτησης επικάλυψης με εκθέτη $1/(r+1)$

Στην απόδειξη μας έχουμε

$$r = n - 2,$$

Οπότε με απλές πράξεις προκύπτει η ισότητα

$$\frac{1}{r+1} = \frac{1}{n-1}.$$

Τελικώς λοιπόν σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν , αν $\{T_k\}$ είναι οικογένεια ορθογωνίων στο $\mathbb{R}^{n-1}$ που ικανοποιεί P_1 , τότε προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[\exp \left(c_{n-1} \left(\sum_k \chi_{T_k}(x') \right)^{1/(n-1)} \right) - 1 \right] dx' \leq c_{n-1} \left| \bigcup_k T_k \right|. \quad (3.9)$$

Τέλος θα εφαρμόσουμε τη γεωμετρική μεθοδολογία που εφαρμόσαμε και παραπάνω, την κατασκευή μίας οικογένειας που ικανοποιεί την ιδιότητα ελέγχου επικαλύψεων P_2 στο $\mathbb{R}^n$ και στη συνέχεια με τομές των ορθογωνίων της εν λόγω οικογένειας θα μεταφερθούμε στη διάσταση n .

Ξεκινώντας λοιπόν από την αρχική οικογένεια ορθογωνίων στο $\mathbb{R}^n$, εφαρμόζεται η διαδικασία επιλογής που αναλύθηκε και παραπάνω⁷ και επιλέγεται υποοικογένεια

$$\{R_k\}$$

η οποία ικανοποιεί την ισχυρότερη ιδιότητα P_2 :

$$\left| R_k \cap \bigcup_{j \neq k} R_j \right| < \frac{1}{2} |R_k|. \quad (3.10)$$

Στο σημείο αυτό η απόδειξη συνεχίζεται με τις τομές των ορθογωνίων, μία γεωμετρική διαδικασία που επίσης αναλύθηκε παραπάνω

Γράφουμε λοιπόν

$$x = (x', t), \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ακολουθεί η διάταξη των ορθογωνίων R_k τα οποία διατάσσονται κατά φθίνουσα σειρά με μέτρο διάταξης το μήκος της πλευράς τους στη διεύθυνση x_n . Κατόπιν προχωρούμε σε σταθεροποίηση του t και ορίζεται η τομή

$$T_k(t) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', t) \in R_k\}.$$

Κάθε μη κενό $T_k(t)$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^{n-1}$, ενώ ισχύει ότι λόγω της P_2 ιδιότητας που ικανοποιεί η αρχική οικογένεια ορθογωνίων και της επιλεχθείσας διάταξης των R_k , οι μη κενές τομές $T_k(t)$ ικανοποιούν την ιδιότητα P_1 στο $\mathbb{R}^{n-1}$. Η συγκεκριμένη παρατήρηση είναι

⁷ Η διαδικασία επιλογής τέτοιας υποοικογένειας Ορθογωνίων αναλύθηκε βήμα προς βήμα σε προηγούμενο στάδιο της απόδειξης και γι' αυτό παραλείπεται σε αυτό το σημείο

λήμμα που χρησιμοποιείται στο άρθρο των Córdoba–Fefferman στο στάδιο ανάλυσης της απόδειξης. Για σταθερό t λοιπόν θέτουμε

$$\mathcal{N}_t(x') = \sum_k \chi_{T_k(t)}(x').$$

Αλλά από τον τρόπο που ορίζονται οι τομές παίρνουμε

$$\boxed{\mathcal{N}_t(x') = \mathcal{N}(x', t).} \quad (3.11)$$

Και επειδή οι $T_k(t)$ ικανοποιούν την ιδιότητα ελέγχου, ασθενούς όπως προαναφέρθηκε, επικαλύψεων P_1 , με εφαρμογή της ανισοτικής σχέσης (3.9) θα προκύψει:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[e^{c_n \mathcal{N}(x', t)^{1/(n-1)}} - 1 \right] dx' \leq C_n \left| \bigcup_k T_k(t) \right|. \quad (3.12)$$

Τώρα με ολοκλήρωση ως προς t , από Tonelli δεδομένου ότι έχουμε μη αρνητικούς όρους, παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{c_n \mathcal{N}(x)^{1/(n-1)}} - 1 \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left[e^{c_n \mathcal{N}(x', t)^{1/(n-1)}} - 1 \right] dx' dt \\ &\leq C_n \int_{\mathbb{R}} \left| \bigcup_k T_k(t) \right| dt. \end{aligned}$$

Τέλος από το γνωστό θεώρημα Fubini/Cavalieri έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \bigcup_k T_k(t) \right| dt = \left| \bigcup_k R_k \right|.$$

Αρα τελικά αποδεικνύεται η ανισότητα

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{c_n \mathcal{N}(x)^{1/(n-1)}} - 1 \right] dx \leq C_n \left| \bigcup_k R_k \right|.} \quad (3.13)$$

η οποία είναι η ζητούμενη ανισότητα A_n και επιτυγχάνεται ο σκοπός του βήματος, δηλαδή της απόδειξης της συνεπαγωγής

$$\boxed{B_{n-1} \Rightarrow A_n.}$$

Η οποία όπως αναλύθηκε παραπάνω συνεπαγωγή, συνεπάγεται ότι ισχύει B_n , δηλαδή ότι ισχύει για κάθε $n \geq 2$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_S f(x) > \lambda\}| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{n-1} dx.$$

Η τελευταία σχέση είναι η ανισότητα Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund για τον ισχυρό μεγιστικό τελεστή και με κατά συνέπεια στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξή της.

Κεφάλαιο 4: Διαφορίσιση Ολοκληρωμάτων ως προς τη Βάση των Ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες

4.1 Θεώρημα διαφορίσισης ως προς τη βάση των ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες του συστήματος συντεταγμένων

Η ανισότητα Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund που αποδείχθηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο παρέχει την εκτίμηση που αφορά τον έλεγχο των συνόλων στα οποία η ισχυρή μεγιστική συνάρτηση μπορεί να λαμβάνει τιμές από ένα όριο, που τίθενται από έναν πραγματικό αριθμό λ , και πάνω (υπερεπιπέδων). Το αποτέλεσμα αυτό εισάγεται λόγω αποτυχίας της εκτίμησης $(1,1)$ για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση και οδηγεί στο θεμελιώδες θεώρημα διαφορίσισης ως προς τη βάση των ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι οι μέσοι όροι μιας συνάρτησης πάνω σε ορθογώνια της βάσης $\mathcal{R}$ συρρικνώνονται σε ένα σημείο συγκλίνουν σχεδόν παντού στη σημειακή τιμή της συνάρτησης, εφόσον η συνάρτηση ανήκει σε μία ειδική και πιο περιορισμένη κλάση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Ακολουθεί παρακάτω η διατύπωση λοιπόν του εν λόγω θεωρήματος και στη συνέχεια στο επόμενο υποκεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η απόδειξή του.

Πρόταση 4.1

Έστω

$$f \in L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

Τότε θα ισχύει

$$\lim_{\substack{x \in R \\ R \in \mathcal{R} \\ \text{diam}(R) \rightarrow 0}} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy = f(x)$$

για σχεδόν κάθε

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Ισοδύναμα με λίγα λόγια το θεώρημα αναφέρει ότι η βάση των αξονοπαράλληλων ορθογωνίων
 $\mathcal{R}$
 διαφορίζει την κλάση

$$L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

Το θεώρημα αυτό αποτελεί το ανάλογο του κλασικού Θεωρήματος Διαφορίσισης του Lebesgue που αποδείχθηκε για τη βάση των ευκλείδειων μπαλών. Ωστόσο, λόγω της διαφορετικής γεωμετρίας των ορθογωνίων, η κλάση $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ αντικαθίσταται από την κλάση $L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Η παρατήρηση αυτή αναδεικνύει τον καθοριστικό ρόλο της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund στην απόδειξη της διαφορίσισης ως προς βάσεις ορθογωνίων. Το εν λόγω θεώρημα εν τέλει αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας, καθώς αποδεικνύει ότι διαδικασία διαφορίσισης μπορεί να επιτευχθεί και ως προς βάσεις που έχουν γεωμετρικές ιδιαιτερότητες, συγκριτικά με τις Ευκλείδειες μπάλες, όπως η βάση ορθογωνίων. Συνεπώς με το αποτέλεσμα που παράγει η διατύπωση του εν λόγω θεωρήματος διαφαίνεται τελικά ότι με κατάλληλους τελεστές, με κατάλληλες εκτιμήσεις που αφορούν τον έλεγχο των συνόλων στα οποία ο τελεστής μπορεί να λαμβάνει τιμές που δύνανται να μη συγκλίνουν στις σημειακές τιμές μπορεί η διαφορίση να επεκταθεί ως προς πιο σύνθετες βάσεις.

4.2 Απόδειξη της πρότασης 4.1

Το Θεώρημα 4.1 όπως διατυπώθηκε λοιπόν αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου και εκφράζει τη δυνατότητα διαφορίσισης ως προς βάσεις ορθογωνίων με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Η σημασία του θεωρήματος έγκειται στο γεγονός ότι συνδέει τις ολοκληρωτικές μέσες τιμές μιας συνάρτησης πάνω σε ορθογώνια που συρρικνώνονται σε ένα σημείο με τη σημειακή τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό όπως αντίστοιχα αναδείχθηκε ότι συμβαίνει όταν οι βάσεις είναι μπάλες. Σε αντίθεση όμως με την περίπτωση των ευκλείδειων μπαλών, όπου η διαφορίσιση προκύπτει από την εκτίμηση ασθενούς τύπου $(1, 1)$ της κλασικής μεγιστικής συνάρτησης Hardy-Littlewood, η γεωμετρία της βάσης των ορθογωνίων απαιτεί τη χρήση της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund και της κλάσης ολοκληρωσιμότητας

$$L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

όπως ήδη αναλύθηκε

Η απόδειξη που ακολουθεί αξιοποιεί το αποτέλεσμα του προηγούμενου υποκεφαλαίου για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η βάση $\mathcal{R}$ διαφορίζει την παραπάνω κλάση συναρτήσεων. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται η μετάβαση από τις εκτιμήσεις μεγιστικών τελεστών στα αποτελέσματα διαφορίσισης, η οποία αποτελεί τον βασικό στόχο της παρούσας εργασίας.

Απόδειξη

Ορίζουμε τη συνάρτηση ταλάντωσης

$$\Omega_{\mathcal{R}}f(x) = \limsup_{\substack{x \in R \\ R \in \mathcal{R} \\ \text{diam}(R) \rightarrow 0}} \left| \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy - f(x) \right|$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\Omega_{\mathcal{R}}f(x) = 0$$

για σχεδόν κάθε σημείο του ευκλείδειου χώρου, δηλαδή για σχεδόν κάθε

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Έστω αρχικά

$$g \in C_c(\mathbb{R}^n)$$

Η ομοιόμορφη συνέχεια της g συνεπάγεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon$$

κάθε φορά που ισχύει

$$|x - y| < \delta$$

Αν έχουμε

$$x \in R, \text{diam}(R) < \delta$$

τότε για κάθε $y \in R$ θα ισχύει

$$|x - y| < \delta$$

Άρα θα έχουμε

$$\left| \frac{1}{|R|} \int_R g(y) dy - g(x) \right| \leq \frac{1}{|R|} \int_R |g(y) - g(x)| dy < \varepsilon.$$

Επομένως θα έχουμε

$$\Omega_{\mathcal{R}}g(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$$

Θεωρούμε τώρα συνάρτηση

$$f \in L(\log L)_{\text{loc}}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$$

και έναν αυθαίρετο κύβο με συμπαγή εγκλεισμό στο ανοικτό σύνολο που ακολουθεί,

$$Q \Subset \Omega.$$

Το Ω είναι ανοικτό και φραγμένο σύνολο. Λόγω του συμπαγούς εγκλεισμού του Q στο Ω , υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε κάθε ορθογώνιο της βάσης $\mathcal{R}$ που περιέχει σημείο του Q και έχει διάμετρο μικρότερη του ρ , να περιέχεται ολόκληρο στο Ω . Δηλαδή, θα έχουμε ότι

$$R \subset \Omega.$$

Θέτουμε τώρα

$$\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)^{n-1}, t \geq 0$$

Από την ιδιότητα της πυκνότητας των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω στην αντίστοιχη τοπική κλάση Orlicz, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει

$$g \in C_c(\Omega)$$

τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} \Phi(|f - g|) dx < \varepsilon.$$

Θέτουμε λοιπόν

$$h = f - g$$

Για κάθε σημείο $x \in Q$ και για κάθε ορθογώνιο $R \in \mathcal{R}$ με $x \in R$ και αρκετά μικρή διάμετρο ώστε $R \subset \Omega$, έχουμε

$$\left| \frac{1}{|R|} \int_R f(y) dy - f(x) \right| \leq \left| \frac{1}{|R|} \int_R g(y) dy - g(x) \right| + \frac{1}{|R|} \int_R |h(y)| dy + |h(x)|$$

Λαμβάνοντας $\limsup$ καθώς

$$\text{diam}(R) \rightarrow 0$$

και χρησιμοποιώντας ότι

$$\Omega_{\mathcal{R}} g(x) = 0,$$

προκύπτει

$$\Omega_{\mathcal{R}} f(x) \leq M_S(h\chi_{\Omega})(x) + |h(x)|$$

για σχεδόν κάθε

$$x \in Q$$

Επομένως για κάθε $\lambda > 0$ θα έχουμε ότι :

$$\{\Omega_{\mathcal{R}} f > \lambda\} \cap Q \subseteq \left\{M_S(h\chi_{\Omega}) > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|h| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Αρα θα ισχύει

$$|\{\Omega_{\mathcal{R}} f > \lambda\} \cap Q| \leq \left|\left\{M_S(h\chi_{\Omega}) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{|h| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|.$$

Και από την ανισότητα Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund για την ισχυρή μεγιστική συνάρτηση θα έχουμε

$$\left|\left\{M_S(h\chi_{\Omega}) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq C_n \int_{\Omega} \frac{2|h(x)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{2|h(x)|}{\lambda}\right)^{n-1} dx$$

επειδή

$$\Phi(t) = t(1 + \log^+ t)^{n-1},$$

υπάρχει θετική σταθερά $C_{\lambda,n}$, εξαρτώμενη μόνο από το λ και τη διάσταση n , τέτοια ώστε

$$\frac{2t}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{2t}{\lambda}\right)^{n-1} \leq C_{\lambda,n} \Phi(t), t \geq 0.$$

Συνεπώς θα ισχύει

$$\left|\left\{M_S(h\chi_{\Omega}) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq C_{\lambda,n} \int_{\Omega} \Phi(|h(x)|) dx.$$

Επιπλέον, από την ανισότητα Chebyshev στην κλάση Orlicz, θα έχουμε

$$|\{ |h| > \frac{\lambda}{2} \}| \leq \frac{1}{\Phi(\lambda/2)} \int_{\Omega} \Phi(|h(x)|) dx.$$

Άρα υπάρχει θετική σταθερά $C'_{\lambda,n}$, εξαρτώμενη μόνο από το λ και τη διάσταση n , ώστε να ισχύει

$$|\{\Omega_{\mathcal{R}}f > \lambda\} \cap Q| \leq C'_{\lambda,n} \int_{\Omega} \Phi(|h(x)|) dx.$$

Λόγω της επιλογής της g , το δεξί μέλος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό. Επομένως θα έχουμε

$$|\{\Omega_{\mathcal{R}}f > \lambda\} \cap Q| = 0, \lambda > 0.$$

Θέτοντας

$$\lambda = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N},$$

λαμβάνουμε

$$|\{x \in Q : \Omega_{\mathcal{R}}f(x) > \frac{1}{m}\}| = 0$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Επομένως

$$\Omega_{\mathcal{R}}f(x) = 0$$

για σχεδόν κάθε

$$x \in Q.$$

Επειδή ο κύβος Q ήταν αυθαίρετη επιλογή και ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ καλύπτεται από αριθμήσιμη οικογένεια κύβων, προκύπτει ότι

$$\Omega_{\mathcal{R}} f(x) = 0$$

για σχεδόν κάθε

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

Άρα

$$\lim_{\substack{x \in R \\ R \in \mathcal{R} \\ \text{diam}(R) \rightarrow 0}} \frac{1}{|R|} \int_R f(y) \, dy = f(x)$$

για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$

Επίλογος

Η παρούσα εργασία όπως αναλύθηκε επικεντρώθηκε στην μελέτη της διαφόρισης ως προς τη βάση των αξονοπαράλληλων ορθογωνίων, με κύριο ερευνητικό ενδιαφέρον την ανάλυση και ανάδειξη του ρόλου που διαδραματίζει η γεωμετρία της βάσης. Για το σκοπό αυτό, αναλύθηκε αρχικά η διαφόριση ως προς τη βάση των μπαλών, ώστε να κατανοηθεί γιατί η μετάβαση σε βάση Ορθογωνίων, και κυρίως πως η ιδιαίτερη συγκριτικά με τις μπάλες Γεωμετρία των Ορθογωνίων, αποτρέπει την εφαρμογή της μαθηματικής μεθοδολογίας που εφαρμόζεται όταν η βάση είναι μπάλες για την απόδειξη διαφόρισης ως προς βάση ορθογωνίων. Οι γεωμετρικές ιδιότητες της βάσης των ορθογωνίων αναδείχθηκε, επομένως, ότι διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην αποτυχία της διαφόρισης ολόκληρης της κλάσης L^1 , σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στην περίπτωση της βάσης των μπαλών. Για την κατανόηση του ρόλου της γεωμετρίας της βάσης λοιπόν επιλέχθηκε μία γεωμετρική προσέγγιση της απόδειξης της ανισότητας Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund, πάνω στην οποία στηρίζεται η απόδειξη διαφόρισης της κλάσης συναρτήσεων $L(\log L)_{loc}^{n-1}$ ως προς βάσεις ορθογώνια. Αναδείχθηκαν λοιπόν ιδιαιτερότητες γεωμετρικές των Ορθογωνίων, που δεν έχουν οι μπάλες ως σύνολα, καθώς και ένα γεωμετρικό μεθοδολογικό πλαίσιο που εφαρμόζεται ώστε να αποδειχθεί η προαναφερθείσα ανισότητα που καθορίζει τη διαφόριση.

Συνολικά, από την μελέτη αναδείχθηκε ότι η γεωμετρία της βάσης διαφορίσεως επηρεάζει ουσιαστικά την κλάση συναρτήσεων για την οποία μπορεί να εξασφαλιστεί διαφόριση. Η κατανόηση μίας γεωμετρικής προσέγγισης εντός του πλαισίου της μελέτης της διαφόρισης δημιουργεί δυνητικά παράλληλα ένα πλαίσιο για την περαιτέρω διερεύνηση γενικότερων βάσεων διαφορίσεως. Με βάση αυτά τα αποτελέσματα θα μπορούσε να προκύψει μελλοντική έρευνα επικεντρωμένη στην μελέτη διαφορετικών γεωμετρικών οικογενειών συνόλων και στον προσδιορισμό των γεωμετρικών συνθηκών που επιτρέπουν δυνητικά τη διαφόριση κάποιων κλάσεων συναρτήσεων. Η κατανόηση δηλαδή ενός μηχανισμού μπορεί να οδηγήσει με τη σειρά του στην καλύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ της γεωμετρίας μιας βάσης και των κλάσεων συναρτήσεων που αυτή διαφορίζει μπορεί να δημιουργήσει μία μαθηματική συλλογιστική ώστε να εφαρμοστεί για περαιτέρω έρευνα.

Βιβλιογραφία

Córdoba, A., & Fefferman, R. (1975). A geometric proof of the strong maximal theorem. *Annals of Mathematics*, 102(1), 95–100. <https://doi.org/10.2307/1970976>

Grafakos, L. (2008). *Classical Fourier analysis* (2nd ed.). Springer.

Grafakos, L. (2014). *Classical Fourier analysis* (3rd ed.). Springer

de Guzmán, M. (1975). *Differentiation of integrals in R^n* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 481). Springer.

Grafakos, L. (2014). *Classical Fourier analysis* (3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249). Springer.

Mayoral, F. (2025). On $L_{\exp}$ and $L \log L$ Zygmund's spaces and its r -convexifications: The Orlicz–Luxemburg point of view. *Advances in Operator Theory*, 10, Article 60. <https://doi.org/10.1007/s43036-025-00450-0>

Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions* (Princeton Mathematical Series, Vol. 30). Princeton University Press.

Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). *Real analysis: Measure theory, integration, and Hilbert spaces*. Princeton University Press

Stein, E. M., & Strömberg, J.-O. (1983). Behavior of maximal functions in R^n for large n . *Arkiv för Matematik*, 21(1-2), 259-269.

Torchinsky, A. (1986). *Real-variable methods in harmonic analysis*. Academic Press.

Jessen, B., Marcinkiewicz, J., & Zygmund, A. (1935). Note on the differentiability of multiple integrals. *Fundamenta Mathematicae*, 25(1), 217-234.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης