**ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜΒ)

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Μέθοδοι Απόδειξης Στα Μαθηματικά: Ιστορική προσέγγιση και προεκτάσεις της.

ΙΩΑΝΝΗΣ ΛΥΓΟΥΡΗΣ
Α.Μ. 147456

Επιβλέπουσα Α': ΠΑΝΑΟΥΡΑ ΑΡΕΤΗ
Επιβλέπων Β': ΑΥΓΕΡΙΝΟΣ ΕΥΓΕΝΙΟΣ

ΠΑΤΡΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2024

# Περιεχόμενα

## Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά όλους τους διδάσκοντες στο πρόγραμμα Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ) και ιδιαίτερα την κα Αρετή Παναούρα για την υπομονή και την πολύτιμη βοήθειά της στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

# Περίληψη

Στη παρούσα διπλωματική εργασία, αρχικά παρουσιάζουμε εν συντομία την κατάσταση που επικρατούσε στα Μαθηματικά πριν την εμφάνιση της μαθηματικής απόδειξης τον $6^{ο}$ αιώνα π.Χ. από τους Αρχαίους Έλληνες και τον Θαλή.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις σημαντικότερες εξελίξεις στα μαθηματικά που ακολούθησαν την εμφάνιση της μαθηματικής απόδειξης. Δηλαδή, την αξιωματική θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη, τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και τα τυπικά αξιωματικά συστήματα.

Στις μαθηματικές αποδείξεις υποσυνείδητα πολλές φορές, γίνεται χρήση κάποιων κανόνων της λογικής. Τους κυριότερους από τους κανόνες της προτασιακής και κατηγορηματικής λογικής αναφέρουμε στο $4^{ο}$ κεφάλαιο.

Στο $5^{ο}$ κεφάλαιο, αναλύουμε τις σημαντικότερες μεθόδους μαθηματικής απόδειξης.

Τέλος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στη διδασκαλία των Μαθηματικών η απόδειξη δεν πρέπει να παρουσιάζεται ως ένα τελικό προϊόν, αλλά ως μέρος μιας διδακτικής πορείας η οποία περιλαμβάνει επίσης εικασίες, αντιπαραδείγματα και αναθεωρήσεις.

# Abstract

In the present thesis, we firstly present briefly the situation that prevailed in Mathematics before the appearance of mathematical proof in the 6th century B.C. by the Ancient Greeks and Thales.

Then we present the most important developmental phases in mathematics that followed the appearance of mathematical proof. That is, Euclid's axiomatic foundation of Geometry, non-Euclidean geometries and formal axiomatic systems.

In mathematical proofs some rules of logic are used, most of the time subconsciously. We mention the main rules of propositional and predicate logic in the 4th chapter.

In chapter 5, we analyze the most important methods of mathematical proof.

Finally, we conclude that in teaching Mathematics the proof should not be presented as a final product, but as part of a teaching process which also includes conjectures, counterexamples and revisions.

# Κεφάλαιο 1ο : Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά ως θεωρητική επιστήμη ξεκίνησαν με την εμφάνιση της απόδειξης το 600 περίπου π.Χ. από τους Αρχαίους Έλληνες και τον Θαλή. Μέχρι τότε τα μαθηματικά προσεγγίζονταν με διαισθητικό και εμπειρικό τρόπο και η διατύπωση συμπερασμάτων γινόταν επαγωγικά.

Η επαγωγή είναι η πορεία από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο, από το μερικό στο γενικό, από την παρατήρηση και το πείραμα στο γενικό συμπέρασμα. Αν και είναι μια μέθοδος που είναι ανεκτίμητη για την ανακάλυψη χρήσιμων σχέσεων και ιδιοτήτων στα μαθηματικά, τα συμπεράσματα που βασίζονται στην επαγωγή ισχύουν με κάποια πιθανότητα και όχι με απόλυτη βεβαιότητα. Η κατάσταση στα μαθηματικά πριν την εμφάνιση της απόδειξης είχε φτάσει σε ένα τέλμα. Είχε συσσωρευθεί ένας μεγάλος όγκος ανοργάνωτων επαγωγικών συμπερασμάτων, τα οποία παρουσιάζονταν με τη μορφή παραδειγμάτων και αποσκοπούσαν στη λύση συγκεκριμένων πρακτικών προβλημάτων.

Η απόδειξη με τη χρήση του παραγωγικού συλλογισμού, όχι μόνο ξεκαθάρισε ποιο από τα επαγωγικά συμπεράσματα είναι έγκυρο, αλλά και τα οργάνωσε ιεραρχικά σε συστήματα, όπου κάθε συμπέρασμα προκύπτει από κάποια άλλα. Ο παραγωγικός συλλογισμός βασίζεται στους νόμους της λογικής και εξασφαλίζει την αλήθεια του συμπεράσματος από την αλήθεια των υποθέσεων.

Με την εμφάνιση της μαθηματικής απόδειξης η ανάπτυξη των μαθηματικών ήταν ραγδαία και κορυφώθηκε με την αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη το 300 περίπου π.Χ. Από την Αναγέννηση και μετά είχαμε μια νέα άνθηση των μαθηματικών η οποία συνεχίζεται μέχρι σήμερα.

Σημαντική στιγμή για τα μαθηματικά και την απόδειξη είναι η δημιουργία του πρώτου τυπικού αξιωματικού συστήματος από τον Hilbert το 1899. Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert είναι τυπικό γιατί τα αξιώματα του είναι λογικοί τύποι (logical forms) που εκφράζουν αφηρημένες ιδιότητες μεταξύ τριών ειδών αφηρημένων αντικειμένων: «σημείων», «ευθειών» και «επιπέδων» (Rodin, 2014).

Ένας γενικός ορισμός για την απόδειξη δίνεται από τον Hersh (1993): απόδειξη είναι ένα επιχείρημα που πείθει την μαθηματική κοινότητα. Σύμφωνα με την Hanna (2000), η απόδειξη στην μαθηματική πρακτική έχει τις παρακάτω λειτουργίες:

- *Επιβεβαίωση (Verification),* όταν καθιερώνει την αλήθεια μιας πρότασης.
- *Επεξήγηση (Explanation),* όταν η απόδειξη μας βοηθάει να καταλάβουμε γιατί ένας ισχυρισμός είναι αληθής.
- *Συστηματοποίηση (Systematisation),* όταν η απόδειξη βοηθά στο να οργανωθούν διάφορα αποτελέσματα σε ένα παραγωγικό σύστημα με αξιώματα, βασικούς όρους και θεωρήματα.
- *Ανακάλυψη (Discovery),* όταν η απόδειξη συνεισφέρει στην ανάπτυξη νέων αποτελεσμάτων.
- *Επικοινωνία (Communication),* όταν βοηθά στη μετάδοση της μαθηματικής γνώσης.

Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσουμε την ιστορική εξέλιξη της απόδειξης από την εμφάνισή της τον 6$^{ο}$ αιώνα π.Χ., μέχρι τις αρχές του 20$^{ου}$ αιώνα και την εμφάνιση των τυπικών αξιωματικών συστημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις λογικές ισοδυναμίες και τους κανόνες συμπερασμού στους οποίους στηρίζεται η παραγωγική απόδειξη και αναλύουμε τις κυριότερες μεθόδους απόδειξης που χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά. Στο τέλος, θα δούμε την απόδειξη στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Λαμβάνουμε υπόψη ότι, δεν πρέπει να παρουσιάζουμε την νέα γνώση μόνο παραγωγικά: αξιώματα, ορισμοί, θεωρήματα και αποδείξεις. Αυτή η μέθοδος αποκρύπτει τη διαδικασία με την οποία ανακαλύπτεται η μαθηματική γνώση. Πρέπει ο μαθητής με καθοδήγηση από το σχολείο να κατασκευάζει μόνος του τη νέα γνώση ακολουθώντας μια πορεία εικασιών, ελέγχων, αναθεωρήσεων και αποδείξεων.

Στο 2$^{ο}$ κεφάλαιο παρουσιάζουμε την ιστορική εξέλιξη της απόδειξης, στο 3$^{ο}$ κεφάλαιο τα τυπικά αξιωματικά συστήματα, στο 4$^{ο}$ κεφάλαιο τη Μαθηματική Λογική, στο 5$^{ο}$ κεφάλαιο τις μεθόδους της Μαθηματικής Απόδειξης και στο 6$^{ο}$ κεφάλαιο παρουσιάζουμε μερικές διδακτικές προεκτάσεις των όσων είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

# Κεφάλαιο 2ο: Ιστορική εξέλιξη της Απόδειξης.

## 2.1 Εμπειρικά Μαθηματικά: Λαοί της αρχαίας Ανατολής.

Τα μαθηματικά αναπτύχθηκαν από οργανωμένες κοινωνίες που είχαν εγκατασταθεί στις όχθες μεγάλων ποταμών στην Αφρική και στην Ασία. Ιστορικά δεδομένα δείχνουν ότι οι λαοί της αρχαίας Ανατολής: οι Αιγύπτιοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Κινέζοι και οι Ινδοί, ανέπτυξαν τα μαθηματικά για να εξυπηρετήσουν πρακτικές ανάγκες του εμπορίου, της γεωργίας και της μηχανικής.

Το υλικό στο οποίο αυτοί οι λαοί κατέγραφαν τις μαθηματικές τους ανακαλύψεις ήταν καθοριστικό για την διάσωση του έργου τους στις επόμενες γενιές και σε εμάς σήμερα. Οι Κινέζοι και οι Ινδοί χρησιμοποιούσαν φλοιούς δέντρων ή μπαμπού, οπότε η ευπάθεια αυτών των υλικών είχε ως αποτέλεσμα ελάχιστα έργα τους να διασωθούν ως τις μέρες μας. Οι Βαβυλώνιοι έγραφαν σε πήλινες πλάκες τις οποίες έψηναν σε φούρνους καθιστώντας τες ουσιαστικά άφθαρτες. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν πάπυρο, ένα υλικό που άντεξε στο χρόνο, βοηθούμενο από το ξηρό κλίμα της Αιγύπτου. Στη συνέχεια επικεντρωνόμαστε στα Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και τα ιστορικά στοιχεία που κατέχουμε για αυτά σήμερα.

### 2.1.1 Μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων

Τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων αναπτύχθηκαν από το 3000 π.Χ. μέχρι το 1000 π.Χ. (Φιλίππου, 2003; Van Der Waerden, 2007). Οι κύριες πηγές μας για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων είναι ο πάπυρος του Rhind και ο πάπυρος της Μόσχας. Συνολικά και οι δύο αυτοί πάπυροι αναφέρονται σε 110 απλά προβλήματα μαθηματικών.

Σύμφωνα με τους Εξαρχάκο (1993) και Φιλίππου (2003), η Αιγυπτιακή ιερογλυφική αρίθμηση που εμφανίστηκε γύρω στο 3000 π.Χ. είναι ένα από τα αρχαιότερα συστήματα αρίθμησης. Είναι δεκαδικό σύστημα (βασισμένο στις δυνάμεις του 10) και δεν είναι σύστημα θέσης. Υπήρχαν ειδικά σύμβολα για τις μονάδες κάθε δεκαδικής τάξης από το 1 μέχρι το 1.000.000. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν αυτό το σύστημα αρίθμησης για να μετρούν και να λύνουν μαθηματικά προβλήματα πρόσθεσης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης καθώς και προβλήματα με κλάσματα.

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι γνώριζαν να λύνουν απλές γραμμικές εξισώσεις με έναν άγνωστο και εξισώσεις δευτέρου βαθμού επίσης με έναν άγνωστο. Η μέθοδος επίλυσης που χρησιμοποιούσαν δεν ήταν αλγεβρική αλλά μια αριθμητική μέθοδος η οποία ονομαζόταν «κανόνας ψευδούς παραδοχής» (rule of false position). Π.χ. Για να λύσουν ένα πρόβλημα, το οποίο με σύγχρονο συμβολισμό ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης $x + \frac{1}{4}x = 15$ (1) εργάζονταν ως εξής:

Θεωρούσαν αρχικά μια τυχαία τιμή για το x, έστω $x = 4$

άρα το πρώτο μέρος της (1) ισούται με $4 + 1 = 5$

αλλά επειδή πρέπει να ισούται με 15, διαιρούσαν το 15 με το 5 και έβρισκαν 3.

Άρα η λύση της (1) είναι $4 \cdot 3 = 12$

Επίσης γνώριζαν να λύνουν προβλήματα αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου και προβλήματα με αναλογίες.

Η γεωμετρία των Αιγυπτίων περιορίζεται σε υπολογισμούς εμβαδών και όγκων. Οι Αιγύπτιοι ήξεραν να υπολογίζουν σωστά τα εμβαδά των τριγώνων, των ορθογωνίων, και των τραπεζίων. Από τα προβλήματα στα οποία υπολογίζουν το εμβαδόν του κύκλου, συμπεραίνουμε ότι οι Αιγύπτιοι είχαν για το π μια καλή προσέγγιση: $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}16049 \ldots$ Επίσης υπολόγιζαν σωστά τους όγκους κύβων, ορθογωνίων πρισμάτων, κυλίνδρων και πυραμίδων. Μεγάλο τους επίτευγμα ήταν ο σωστός τρόπος υπολογισμού του όγκου της κόλουρης πυραμίδας με τετραγωνική βάση.

### 2.1.2 Μαθηματικά των Βαβυλώνιων

Έχουν βρεθεί εκατοντάδες πήλινες πλάκες στις οποίες οι Βαβυλώνιοι είχαν καταγράψει μαθηματικά προβλήματα. Οι πλάκες αυτές χρονολογούνται από το 2100 π.Χ. έως το 600 π.Χ. Τα προβλήματα αυτά μας δείχνουν ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν πολύ καλά να εκτελούν λογιστικές πράξεις, να υπολογίζουν απλό και σύνθετο τόκο, προεξόφληση γραμματίου και άλλα (Φιλίππου, 2003).

Το αριθμητικό σύστημα των Βαβυλωνίων ήταν αρκετά εξελιγμένο, είχε ως βάση το 60 και ήταν σύστημα θέσης. Οι αριθμοί από το 1 μέχρι το 59 γράφονταν αθροιστικά με βάση μόνο δύο σύμβολα, ένα σύμβολο για τη μονάδα και ένα για τη δεκάδα (Φιλίππου, 2003; Van Der Waerden, 2007). Επίσης στο εξηκονταδικό σύστημα έγραφαν και τα κλάσματα. Ο συμβολισμός των Βαβυλωνίων για τους ακέραιους και για τα κλάσματα, τους επέτρεπε να κάνουν αριθμητικές πράξεις εύκολα και τους έδωσε τη δυνατότητα να αναπτύξουν σε υψηλό βαθμό την άλγεβρα. Ο Φιλίππου (2003) αναφέρει ότι πρώτοι οι Βαβυλώνιοι αντιλήφθηκαν τη σημασία του μηδενός και χρησιμοποίησαν ειδικό σύμβολο γι' αυτό.

Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν έναν απλό και αποτελεσματικό αλγόριθμο για τον υπολογισμό των τετραγωνικών ριζών. Με σύγχρονο συμβολισμό, για να βρουν τη ρίζα $x = \sqrt{a}$ με α>0 εργάζονταν ως εξής:
Έπαιρναν έναν αριθμό της επιλογής τους $x_1 > 0$ ως μια πρώτη προσέγγιση του $\sqrt{\alpha}$.
Οι επόμενες προσεγγίσεις δίνονται από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.
Η διαισθητική εξήγηση του παραπάνω αλγόριθμου είναι η εξής:
Αν η προσέγγιση $x_n$ είναι μεγαλύτερη από το $\sqrt{a}$ τότε το $\frac{a}{x_n}$ θα είναι μικρότερο.
Οπότε ο μέσος όρος $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$ θα είναι πλησιέστερα στο $\sqrt{a}$ από ότι ήταν το $x_n$ (Boyer & Merzbach, 2011).

Οι Βαβυλώνιοι για να κάνουν τους αριθμητικούς υπολογισμούς τους είχαν κατασκευάσει διάφορους πίνακες. Είχαν πίνακες πολλαπλασιασμού, αντιστρόφων, τετραγώνων, κύβων, τετραγωνικών ριζών, λογαρίθμων κ.τ.λ. (Boyer & Merzbach, 2011).

Έλυναν τη γενική μορφή της εξίσωσης πρώτου βαθμού και ειδικές περιπτώσεις δευτεροβάθμιων και τριτοβάθμιων εξισώσεων (Φιλίππου, 2003). Για να δείξουν τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων, οι Βαβυλώνιοι λύνουν μια σειρά από σχετικά προβλήματα, βήμα προς βήμα, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους αριθμούς και χωρίς να δίνουν τους τύπους που χρησιμοποιούν. Με σύγχρονο συμβολισμό θα λέγαμε ότι προσπαθούσαν να ανάγουν την επίλυση κάθε αλγεβρικής εξίσωσης στις ακόλουθες κανονικές μορφές, τις οποίες ήταν σε θέση να επιλύουν με ευχέρεια (Van Der Waerden 2007).

Α. Εξισώσεις με έναν άγνωστο:

1. $ax = b$
2. $x^2 = a$
3. $x^2 + ax = b$
4. $x^2 - ax = b$
5. $x^3 = a$
6. $x^2(x + 1) = a$

Β. Συστήματα εξισώσεων με 2 αγνώστους:

1. $x + y = a, \quad xy = b$
2. $x - y = a, \quad xy = b$
3. $x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b$
4. $x - y = a, \quad x^2 + y^2 = b$

Επίσης ήταν γνωστοί και οι ακόλουθοι τύποι:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Η γεωμετρία των Βαβυλωνίων, σύμφωνα με τον Struik (1993) είχε έναν έντονο αριθμητικό-αλγεβρικό προσανατολισμό. Κίνητρο για τη γεωμετρία ήταν, όπως και στην Αίγυπτο, η ανάγκη ν' αντιμετωπιστούν πρακτικά προβλήματα. Συχνά όμως, δίνοντας σ' ένα πρόβλημα γεωμετρική μορφή, απέβλεπαν σ' έναν τρόπο παρουσίασης κάποιου αλγεβρικού προβλήματος. Ο τρόπος σκέψης των Βαβυλώνιων ήταν πρωτίστως αλγεβρικός. Σύμφωνα με τον Van Der Waerden (2007), ακόμη και σε προβλήματα που είναι διατυπωμένα με γεωμετρικούς όρους, αυτό που ζητείται από τους Βαβυλώνιους είναι πάντα κάποιος υπολογισμός, ποτέ μια κατασκευή ή μια απόδειξη.

Ήξεραν να υπολογίζουν το εμβαδόν ευθύγραμμων σχημάτων, όπως του τριγώνου, του ορθογωνίου και του τραπεζίου. Επίσης ήξεραν να υπολογίζουν τον όγκο απλών στερεών, όπως του πρίσματος, της πυραμίδας και του κυλίνδρου. Για τον υπολογισμό της περιφέρειας και του εμβαδού του κύκλου χρησιμοποιούσαν το $\pi = 3$ και πολύ αργότερα την καλύτερη προσέγγιση $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$ (Εξαρχάκος, 1993).

Ο Φιλίππου (2003) αναφέρει ότι μια πήλινη πλάκα των Βαβυλώνιων (γνωστή ως Plimpton 322) χρονολογίας ανάμεσα στο 1900-1600 π.Χ. περιέχει 15 Πυθαγόρειες τριάδες. Δηλαδή τριάδες φυσικών αριθμών που πληρούν το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στην ίδια πλάκα ένας πίνακας περιέχει τις τέμνουσες των γωνιών από 45° έως και 31°. Οπότε είναι φανερό ότι οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και έναν τρόπο εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων. Επίσης είχαν κάνει και κάποια βήματα στην τριγωνομετρία.

Σύμφωνα με τους Katz (2013), Boyer και Merzbach (2011) και Van Der Waerden (2007), υπάρχουν μαθηματικά προβλήματα σε Βαβυλωνιακές πήλινες πλάκες που κάνουν σαφή χρήση του Πυθαγόρειου θεωρήματος π.χ. σε μία πλάκα αναφέρεται το παρακάτω πρόβλημα:

Μία δοκός μήκους 30 στηρίζεται κατακόρυφα σε έναν τοίχο. Το επάνω άκρο γλιστράει προς τα κάτω κατά μία απόσταση ίση με 6. Πόσο μετακινήθηκε το κάτω άκρο; Σύμφωνα με το πρόβλημα, δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα $\alpha = 30$ και μία κάθετη πλευρά ίση προς $\beta = 30 - 6 = 24$. Η άλλη κάθετη πλευρά που αντιστοιχεί στη μετατόπιση του κάτω άκρου, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα δηλαδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18$.

### 2.1.3 Χαρακτηριστικά των Αιγυπτιακών και Βαβυλωνιακών μαθηματικών

Οι λαοί της αρχαίας Ανατολής ακολούθησαν μια εντελώς εμπειρική αντιμετώπιση των μαθηματικών. Σύμφωνα με τους Φιλίππου (2003) και Eves (1990), για να ανακαλύψουν χρήσιμες σχέσεις και ιδιότητες εφάρμοζαν την επαγωγική μέθοδο. Βασισμένοι σ’ ένα περιορισμένο πλήθος παραδειγμάτων, δοκιμών «σωστού και λάθους» και παρατηρήσεων, κατέληγαν σε σχέσεις και ιδιότητες που θεωρούσαν ότι ισχύουν για κάθε περίπτωση. Τις ανακαλύψεις αυτές δεν τις διατύπωναν ως θεωρήματα αλλά τις παρουσίαζαν μέσα από αριθμητικά παραδείγματα. Στα παραδείγματα αυτά δεν υπάρχει καμιά επιχειρηματολογία, παρά μόνο εντολές εφαρμογής ορισμένων κανόνων: «κάνε αυτό, μετά κάνε το άλλο». Επίσης δεν διαχωρίζουν τα ακριβή αποτελέσματα από τα προσεγγιστικά και προπάντων δεν γίνεται κάποια απόπειρα να δοθεί αυτό που ονομάζουμε απόδειξη (Struik, 1993).

Στον επαγωγικό συλλογισμό οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πιθανολογικά, με την πεποίθηση ή την προσδοκία ότι αυτό που ισχύει για το περιορισμένο πλήθος που μελετήσαμε, θα ισχύει και για το σύνολο όλων των περιπτώσεων. Δηλαδή το επαγωγικό συμπέρασμα είναι πιθανό να ισχύει, δεν είναι σίγουρο ότι ισχύει. Για να είμαστε βέβαιοι για την ισχύ του, πρέπει να ακολουθήσει μια παραγωγική απόδειξη. Παρά την επισφάλεια της γνώσης που προκύπτει από την επαγωγική μέθοδο, είδαμε ότι οι Αιγύπτιοι και ιδιαίτερα οι Βαβυλώνιοι είχαν προχωρήσει σημαντικά στη λύση των πρακτικών θεμάτων που τους απασχολούσαν και συσσώρευσαν κανόνες, τύπους και τεχνικές χρήσιμες για τη λύση συγκεκριμένων προβλημάτων.

Δεν μπόρεσαν όμως να αποφύγουν μερικούς λανθασμένους ή ανακριβείς κανόνες. Σύμφωνα με τον Eves (1990), ο Αιγυπτιακός κανόνας για τον προσδιορισμό του εμβαδού του κύκλου παίρνει το τετράγωνο των οχτώ ενάτων της διαμέτρου του κύκλου. Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό:

$$E = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \Leftrightarrow \pi\, r^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 (2r)^2 \Leftrightarrow \pi\, r^2 = \frac{64}{81}\, 4\, r^2 \Leftrightarrow \pi = \frac{256}{81} \Leftrightarrow \pi = 3{,}1604 \ldots$$

το οποίο δεν είναι ακριβές. Η αντίστοιχη προσέγγιση των Βαβυλώνιων είναι ακόμα χειρότερη, είναι $\pi = 3$.

Ένας λανθασμένος κανόνας των Βαβυλώνιων λέει ότι ο όγκος της κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας δίνεται από το γινόμενο του ύψους και του ημιαθροίσματος των εμβαδών των βάσεων. Δηλαδή αν το εμβαδόν της μίας βάσης είναι $a^2$, το εμβαδόν της άλλης βάσης είναι $b^2$ και το ύψος είναι h, τότε ο όγκος της κόλουρης τετραγωνικής πυραμίδας είναι $V = h\frac{a^2+b^2}{2}$. Αυτός ο τύπος είναι μια λανθασμένη γενίκευση του τύπου για το εμβαδόν του τραπεζίου (Katz, 2013). Επίσης οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν για την εύρεση του εμβαδού τετραπλεύρου με διαδοχικές πλευρές α, β, γ, δ τον λανθασμένο κανόνα: $E = \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{4}$. Αυτός ο κανόνας δίνει το σωστό εμβαδόν μόνο στην περίπτωση του ορθογωνίου (Boyer & Merzbach, 2011; Eves, 1990).

Σύμφωνα με τους Φιλίππου (2003) και Basmakova (2014) τα μαθηματικά των λαών της αρχαίας Ανατολής, αναπτύσσονταν με εξαιρετικά αργό ρυθμό και χίλια χρόνια περίπου μετά τον πάπυρο του Rhind και την πλάκα Plimpton 322, είχαν φθάσει σε στασιμότητα και αδιέξοδο. Τα μαθηματικά τους ήταν λογικά ασύνδετα μεταξύ τους, εν μέρει ορθά, εν μέρει λανθασμένα. Για να διακρίνει κάποιος τις ακριβείς γνώσεις από τις προσεγγιστικές, τις σωστές από τις λανθασμένες, έπρεπε αυτές τις γνώσεις να τις αποδείξει και να τις εντάξει σε ένα λογικά συνεκτικό σύστημα (Van Der Waerden, 2007).

## 2.2 Η εμφάνιση της Απόδειξης.

Στο ίδιο περίπου επίπεδο με αυτό των λαών της Ανατολής, βρίσκονταν τον 8$^{ο}$ -7$^{ο}$ π.Χ. αιώνα, οι μαθηματικές γνώσεις στην Ελλάδα. Όμως τον 6$^{ο}$ αιώνα η κατάσταση αλλάζει και τα μαθηματικά μετασχηματίζονται σε αφηρημένη παραγωγική επιστήμη, όπου η βασική μέθοδος καθορισμού της αλήθειας και διερεύνησης της αλληλουχίας των προτάσεων γίνεται η απόδειξη (Basmakova, 2014). Η αρχή έγινε στην Ιωνία της Μικράς Ασίας από τον Θαλή τον Μιλήσιο (περ. 624-550 π.Χ.), του οποίου η σχολή θεωρείται ως το πρώτο στην ιστορία Πανεπιστήμιο (Φιλίππου, 2003).

### 2.2.1 Ο πρώτος «επώνυμος» Μαθηματικός.

Ο Θαλής ήταν έμπορος, πολιτικός, φιλόσοφος, αστρονόμος και μαθηματικός. Ο Θαλής και οι μαθητές του, ήταν οι πρώτοι που επιχείρησαν να κατανοήσουν και να εξηγήσουν τη δομή του κόσμου, χωρίς να στηρίζονται σε θρησκευτικά δόγματα. Ασχολήθηκαν κυρίως με τα προβλήματα της κοσμογονίας και της ανθρωπογονίας. Δηλαδή με ερωτήματα όπως: πως δημιουργήθηκε το σύμπαν και η γη και από που κατάγεται ο άνθρωπος. Βασικά στοιχεία της φιλοσοφίας τους αποτελούσαν η Αστρονομία και τα Μαθηματικά (Basmakova, 2014).

Αυθεντικά κείμενα του ίδιου του Θαλή δεν έχουν διασωθεί ως τις μέρες μας, υπάρχουν όμως αρκετές πληροφορίες γι' αυτόν από τους μεταγενέστερους, που μας επιτρέπουν να σχηματίσουμε μια αρκετά καθαρή εικόνα για την προσωπικότητα και το έργο του. Κύρια πηγή για το έργο του Θαλή στα μαθηματικά είναι ο Πρόκλος ο σχολιαστής του πρώτου βιβλίου των «Στοιχείων» του Ευκλείδη. Ο Πρόκλος άντλησε πληροφορίες από την «Ιστορία της Γεωμετρίας» του Ευδήμου η οποία, δυστυχώς έχει χαθεί (Van Der Waerden, 2007). Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Θαλής ήταν ο πρώτος που διατύπωσε και απέδειξε γεωμετρικά θεωρήματα (Φιλίππου, 2003). Μερικά από αυτά είναι:

- Κάθε διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.
- Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

- Τρίγωνα που έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες γωνίες, μία προς μία ίσες, είναι ίσα.

Ο Θαλής διατύπωσε τις παραπάνω προτάσεις έτσι ώστε να εκφράζουν ιδιότητες γενικής μορφής διάφορων γεωμετρικών αντικειμένων. Παρότι οι ιδιότητες αυτές είναι εποπτικά προφανείς, τις απέδειξε με τη χρήση λογικών διαδικασιών. Αυτό που κάνει το έργο του Θαλή πρωτοποριακό, είναι ο διαχωρισμός των μαθηματικών από την καθημερινή πρακτική τους χρήση. Τώρα για πρώτη φορά το ενδιαφέρον δεν εστιάζεται στις πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών αλλά στην ίδια τη γνώση, στην ανακάλυψη της αλήθειας και στην ικανοποίηση της επιστημονικής περιέργειας (Φιλίππου, 2003).

### 2.2.2 Πυθαγόρας (περ. 572 – 497 π.Χ.)

Ο Πυθαγόρας είναι το δεύτερο πρόσωπο που αναφέρεται με το όνομά του στην ιστορία των μαθηματικών. Γεννήθηκε στη Σάμο, κοντά στη Μίλητο, την πατρίδα του Θαλή και πολλοί πιστεύουν ότι ο Πυθαγόρας υπήρξε μαθητής του Θαλή.

Γύρω στο 530 π.Χ. αφού εξαναγκάστηκε να εγκαταλείψει τη γενέτειρά του τη Σάμο, εγκαταστάθηκε στον Κρότωνα, την ελληνική αποικία της νότιας Ιταλίας (Katz, 2013). Εκεί ίδρυσε την περίφημη Πυθαγόρεια σχολή, όπου μαζί με τους μαθητές του μελέτησαν φιλοσοφία, μαθηματικά και φυσικές επιστήμες. Η Πυθαγόρεια σχολή εξελίχθηκε σε μια στενά συνδεδεμένη αδελφότητα με μυστικούς κανόνες και ιεροτελεστίες (Eves, 1989).

Οι πληροφορίες μας για τους Πυθαγόρειους προέρχονται από διάφορους συγγραφείς, όπως είναι π.χ. ο Ηρόδοτος, ο Ιάμβλιχος, ο Αριστοτέλης και ο Πρόκλος. Οι Πυθαγόρειοι ταξινόμησαν τα Μαθηματικά σε τέσσερις κλάδους: τη μουσική, την αριθμητική, τη γεωμετρία και την αστρονομία. Οι ίδιοι ασχολήθηκαν με τους τρεις πρώτους κλάδους (Φιλίππου, 2003). Ιδιαίτερα ασχολήθηκαν με την αριθμητική γιατί πίστευαν ότι «ο αριθμός είναι η ουσία όλων των πραγμάτων», δηλαδή ότι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί αποτελούν τη βασική οργανωτική αρχή του κόσμου (Katz, 2013). Ανέπτυξαν τη θεωρία των άρτιων και των περιττών αριθμών, μελέτησαν τους παραστατικούς, τους τέλειους, τους φίλους αριθμούς, τις πυθαγόρειες τριάδες κ.λ.π.

Οι Πυθαγόρειοι είναι περισσότερο γνωστοί από το ομώνυμο θεώρημα: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών». Το θεώρημα αυτό, ήταν γνωστό στους Βαβυλώνιους και τους Αιγύπτιους τουλάχιστον χίλια χρόνια πριν τον Πυθαγόρα. Αλλά σύμφωνα με τους ιστορικούς ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που το απέδειξε, χρησιμοποιώντας μια γεωμετρική απόδειξη διαίρεσης (τεμαχισμού) εμβαδών (Φιλίππου, 2003).

Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι υπάρχουν ασύμμετρα μεγέθη, δηλαδή ευθύγραμμα τμήματα, ο λόγος των οποίων δεν μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια λόγου θετικών ακέραιων αριθμών. Η ανακάλυψη αυτή ήταν σημείο καμπής στην ιστορία των αρχαίων μαθηματικών. Για πρώτη φορά αποδείχτηκε μια πρόταση, η οποία φαινόταν ότι είναι αντίθετη με την εποπτεία και με ολόκληρη την πρακτική του ανθρώπου (αφού στην πράξη όλα τα μεγέθη είναι σύμμετρα) (Basmakova, 2014).

Αν εφαρμόσουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με ίσες κάθετες πλευρές, θα διαπιστώσουμε ότι η υποτείνουσα του συγκεκριμένου τριγώνου, δεν έχει κοινό μέτρο με τις κάθετες πλευρές του ίδιου τριγώνου. Έστω x το μήκος μιας από τις κάθετες πλευρές και y το μήκος της υποτείνουσας, τότε:

$y^2 = 2x^2$ άρα $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$

Η πρώτη γνωστή απόδειξη της ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$ γίνεται με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Αυτή είναι η πρώτη απόδειξη τέτοιου είδους (έμμεση απόδειξη) που απαντάται στην ιστορία των μαθηματικών (Basmakova, 2014).

### 2.2.3 Αριστοτέλης (384 - 322 π.Χ.)

Ο Αριστοτέλης ήταν μαθητής του Πλάτωνα και δάσκαλος του Μεγάλου Αλεξάνδρου. Το 355 π.Χ. ίδρυσε τη δική του σχολή στην Αθήνα το «Λύκειο». Ήταν ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά τις αρχές και τους κανόνες της Λογικής, γι' αυτό και θεωρείται ως ο «Πατέρας» της Λογικής επιστήμης. Το σύνολο των εργασιών του που αφορούν τη λογική, εκδόθηκε μετά τον θάνατό του από τους μαθητές του και ονομάζεται «Όργανον». Τα έργα που περιλαμβάνει το «Όργανον» είναι: «Κατηγορίαι», «Τοπικά», «Περί Σοφιστικών Ελέγχων», «Περί Ερμηνείας», «Αναλυτικά Πρότερα» και

«Αναλυτικά Ύστερα» (Αναπολιτάνος, Γαβαλάς, Δέμης, Δημητρακόπουλος & Καρασμάνης, 2001).

Η συνεισφορά του Αριστοτέλη στην εξέλιξη των μαθηματικών σε αποδεικτική επιστήμη είναι τεράστια. Στο έργο του «Αναλυτικά Ύστερα», αναπτύσσει μια αρκετά επεξεργασμένη θεωρία για το πως πρέπει να δομείται μια αποδεικτική επιστήμη.

Αρχικά, στα «Αναλυτικά Πρότερα» ο Αριστοτέλης ορίζει τον **συλλογισμό** ως μια λεκτική μορφή σύμφωνα με την οποία από ένα σύνολο υποθέσεων (προκείμενες), παράγονται κατ' ανάγκη συγκεκριμένα συμπεράσματα. Στο ίδιο έργο αναπτύσσει μια θεωρία για τους συλλογισμούς και διακρίνει δεκατέσσερις τρόπους κατασκευής ορθών συλλογισμών (Αναπολιτάνος κ.α., 2001).

Στα «Αναλυτικά Ύστερα» αναφέρει ότι η **απόδειξη** είναι επιστημονικός συλλογισμός, δηλαδή ένας συλλογισμός που αποτελεί, από όλες τις απόψεις, γνώση και όχι γνώμη (Ross, 2001). Με την απόδειξη, από κάποιες προτάσεις (προκείμενες) των οποίων η αλήθεια είναι δεδομένη, συνάγεται αναγκαστικά ένα συμπέρασμα.

Σύμφωνα με τους Bunt, Jones και Bedient (1981), ο Αριστοτέλης είχε αναπτύξει μια θεωρία για το πως πρέπει να ορίζονται οι έννοιες μιας επιστήμης. Κάθε έννοια ορίζεται ως υποκατηγορία μιας γενικότερης έννοιας, η οποία καλείται «προσεχές γένος». Κάθε ειδική υποκατηγορία του «προσεχούς γένους» χαρακτηρίζεται από ιδιαίτερα γνωρίσματα, τα οποία λέγονται «ειδοποιός διαφορά». Για παράδειγμα, ο ρόμβος είναι ένας ειδικός τύπος παραλληλογράμμου. Ο ρόμβος είναι ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Στο παράδειγμα αυτό έχουμε **προσεχές γένος**: παραλληλόγραμμο, **ειδοποιός διαφορά**: όλες οι πλευρές είναι ίσες και **νέα έννοια**: ρόμβος. Εκτός από τον ορισμό μιας έννοιας, ο Αριστοτέλης απαιτούσε και την απόδειξη της ύπαρξής της.

Ο Αριστοτέλης είχε εντοπίσει την ανάγκη αποδοχής κάποιων «αρχικών εννοιών», οι οποίες γίνονται δεχτές χωρίς ορισμό. Με βάσει τις αρχικές έννοιες ορίζονται άλλες έννοιες με τη μέθοδο της «ειδοποιού διαφοράς». Θεωρούσε ότι μπορούσε να γίνει έμμεσος ορισμός των αρχικών εννοιών, μέσω προτάσεων που εκφράζουν ουσιώδεις ιδιότητες αυτών των εννοιών. Επίσης θεωρούσε απαραίτητο να υπάρχει για κάθε αρχική έννοια, μια πρόταση που να δηλώνει την ύπαρξη αυτής της έννοιας (Bunt κ.α., 1981). Οι προτάσεις που εκφράζουν το νόημα ή βεβαιώνουν την ύπαρξη των αρχικών εννοιών ονομάζονται **«θέσεις»** όπως θα δούμε παρακάτω.

Σύμφωνα με τον Ross (2001), ο Αριστοτέλης υποστήριζε ότι η απόδειξη δεν αποτελεί τη μόνη μέθοδο γνώσης και ότι υπάρχουν πρώτες προκείμενες που ούτε χρειάζονται αλλά ούτε επιδέχονται απόδειξη. Αν η απόδειξη αποτελεί τη μόνη μέθοδο γνώσης, τότε είτε θα έχουμε μια αναδρομή στο άπειρο από προκείμενη σε προκείμενη, έτσι ώστε να μην γίνεται τίποτα δεκτό χωρίς απόδειξη, είτε θα έχουμε ένα κύκλο αποδείξεων, δηλαδή μια αμοιβαία συνεπαγωγή προτάσεων, από τις οποίες καμία δεν γίνεται γνωστή ως αληθής ανεξάρτητα από την άλλη. Επομένως κάθε αποδεικτική επιστήμη πρέπει να έχει ως αφετηρία κάποιες προτάσεις, των οποίων την αλήθεια δεχόμαστε χωρίς απόδειξη (Ross, 2001). Οι προτάσεις αυτές είναι τα αξιώματα και οι «θέσεις»

1. **Αξιώματα,** είναι προτάσεις που είναι αληθείς σε κάθε παραγωγική επιστήμη, π.χ. η πρόταση ότι, αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, η ισότητα δεν μεταβάλλεται. Ο Αριστοτέλης κατατάσσει στα αξιώματα και νόμους της Λογικής  όπως η «αρχή της αντίφασης» και η «αρχή του αποκλειόμενου μέσου».
2. Οι **«Θέσεις»**, αποτελούν ιδιαίτερο χαρακτηριστικό κάθε επιστήμης ξεχωριστά. Οι «θέσεις» υποδιαιρούνται σε:

    α. **«Υποθέσεις»**: τις προτάσεις που βεβαιώνουν την **ύπαρξη** των αρχικών εννοιών της επιστήμης και

    β. **«Ορισμούς»**: τις προτάσεις που καθορίζουν το **νόημα** των αρχικών εννοιών.

**Αιτήματα**, ονομάζει ο Αριστοτέλης τις προτάσεις που δεν είναι γενικά αποδεκτές ή που θα έπρεπε να αποδειχθούν, αλλά εμείς τις δεχόμαστε χωρίς απόδειξη (Ross, 2001).

Από την εποχή του Θαλή, που οι αρχαίοι Έλληνες άρχισαν να χρησιμοποιούν την αποδεικτική διαδικασία, συσσωρεύονταν συνεχώς  μαθηματική γνώση υπό τη μορφή αποδεδειγμένων προτάσεων. Οι προτάσεις που συνδέονταν με απόδειξη έπρεπε να οργανωθούν και να ιεραρχηθούν σε ένα ενιαίο Αξιωματικό Σύστημα. Δηλαδή έπρεπε να διευκρινιστούν οι αρχικές προτάσεις από τις οποίες, όλες οι άλλες προτάσεις προκύπτουν ως συμπέρασμα. Επίσης, έπρεπε να διευκρινιστούν οι αρχικές έννοιες, από τις οποίες ορίζονται οι υπόλοιπες έννοιες της θεωρίας.

Στην αρχαία Ελλάδα, μια τέτοια συγκέντρωση και οργάνωση της μαθηματικής γνώσης ονομαζόταν με τον όρο «Στοιχεία». Τα πρώτα «Στοιχεία» τα έγραψε ο Ιπποκράτης ο Χίος (470 – 410 π.Χ.) και ακολούθησαν μεταξύ άλλων, ο Λέων ο Αθηναίος (5ος π.Χ. αιώνας), ο Θεύδιος από τη Μαγνησία και ο Ευκλείδης. Το έργο του Θεύδιου αποτέλεσε εγχειρίδιο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Ακαδημία του Πλάτωνα (Φιλίππου, 2003). Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη ήταν η τελευταία και πιο επιτυχημένη προσπάθεια για την αξιωματική οργάνωση της γεωμετρίας στην αρχαία Ελλάδα. Όχι μόνο εκτόπισε όλες τις προηγούμενες προσπάθειες, αλλά για δυο χιλιάδες χρόνια αποτέλεσε το μοναδικό εγχειρίδιο διδασκαλίας της γεωμετρίας.

## 2.3 Το πρώτο αξιωματικό σύστημα: Ευκλείδης

Για τη ζωή του Ευκλείδη γνωρίζουμε πολύ λίγα πράγματα. Έζησε γύρω στο 300 π.Χ. και σπούδασε στην Αθήνα, πολύ πιθανόν στην Ακαδημία του Πλάτωνα την εποχή που δίδασκαν οι μαθητές του Πλάτωνα. Ο ίδιος δίδαξε στο Πανεπιστήμιο της Αλεξάνδρειας, την εποχή του Πτολεμαίου του 1ου (Φιλίππου, 2003).

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποτελούνται από δεκατρία βιβλία. Στα έξι πρώτα βιβλία (I – VI) αναπτύσσεται η αξιωματική θεμελίωση της επίπεδης γεωμετρίας, ενώ στα επόμενα τρία βιβλία (VII – IX) αναπτύσσεται η θεωρία αριθμών. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ευκλείδης παρουσιάζει δύο διαφορετικές μελέτες της θεωρίας των αναλογιών: μία για τα μεγέθη στο βιβλίο V και μία για τους αριθμούς στο βιβλίο VII. Στο βιβλίο X ο Ευκλείδης ασχολείται με την μελέτη των ασύμμετρων μεγεθών. Τα τελευταία τρία βιβλία (XI – XIII) περιλαμβάνουν τη στερεομετρία (Katz, 2013).

Η αξιωματική θεμελίωση της επίπεδης γεωμετρίας παρουσιάζεται στα έξι πρώτα βιβλία των «Στοιχείων». Ο Ευκλείδης προσπάθησε να οικοδομήσει αυτό το σύστημα, σύμφωνα με τις απόψεις του Αριστοτέλη. Σύμφωνα με τους Ντζιαχρήστο, Κοντογιάννη και Τσιγώνη (2001) στο πρώτο βιβλίο των «Στοιχείων» παρουσιάζονται 23 ορισμοί, 5 αιτήματα και 9 «κοινές έννοιες».

Οι 23 **ορισμοί ή «όροι»** όπως αναφέρει ο Ευκλείδης είναι:

1. **Σημείο** είναι αυτό που δεν έχει διαστάσεις.
2. **Γραμμή** είναι ό,τι έχει μόνο μήκος και όχι πλάτος.
3. Τα άκρα μιας γραμμής είναι σημεία.
4. **Ευθεία γραμμή** είναι αυτή που κείται εξ ίσου ως προς τα σημεία της.
5. Μια **επιφάνεια** είναι αυτό που έχει μόνο μήκος και πλάτος.
6. Τα άκρα μιας επιφάνειας είναι γραμμές.
7. **Επίπεδη** είναι μια **επιφάνεια** που κείται εξ ίσου ως προς τις ευθείες της.
8. **Επίπεδη γωνία** είναι η κλίση της μιας ως προς την άλλη, δύο ευθειών του επιπέδου που τέμνονται και δεν ταυτίζονται.
9. Αν οι ευθείες που περιέχουν τη γωνία ταυτίζονται σε ευθεία, η γωνία ονομάζεται ευθεία.
10. Αν μια ευθεία τέμνει μια άλλη και σχηματίζει μ' αυτήν ίσες γωνίες, τότε οι γωνίες είναι **ορθές** και οι ευθείες γραμμές λέμε ότι είναι η μια **κάθετη** στην άλλη.
11. **Αμβλεία γωνία** είναι μια γωνία μεγαλύτερη από την ορθή.
12. **Οξεία γωνία** είναι μια γωνία μικρότερη από την ορθή.
13. **Σύνορο** είναι εκείνο που είναι τα άκρα κάποιου.
14. **Σχήμα** είναι εκείνο που περιέχεται σε κάποιο σύνορο ή σύνορα.
15. **Κύκλος** (κυκλικός δίσκος) είναι επίπεδο σχήμα, το οποίο περικλείεται από μια γραμμή που ονομάζεται περιφέρεια (κύκλος), της οποίας τα σημεία ισαπέχουν από ένα σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου.
16. Αυτό το σημείο το λέμε **κέντρο** του κύκλου.
17. **Διάμετρος** κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου, τα άκρα του είναι σημεία του κύκλου και διαιρεί τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.

18. **Ημικύκλιο** ονομάζεται το σχήμα που περιέχεται από τη γραμμή που αποτελείται από μια διάμετρο του κύκλου και από το αντίστοιχο στη διάμετρο τόξο. Κέντρο του ημικυκλίου είναι το κέντρο του κύκλου.

19. **Ευθύγραμμα σχήματα** είναι αυτά που περικλείονται από ευθύγραμμα τμήματα, **τρίπλευρα** (τρίγωνα), αυτά που περικλείονται από τρεις, τετράπλευρα από τέσσερις, **πολύπλευρα** (πολύγωνα) από περισσότερες των τεσσάρων γραμμές.

20. Από τα τρίπλευρα σχήματα αυτό που έχει ίσες τις τρεις πλευρές ονομάζεται **ισόπλευρο** τρίγωνο, αυτό που έχει δύο μόνο πλευρές ίσες **ισοσκελές** και **σκαληνό** αυτό που έχει τις τρεις πλευρές άνισες.

21. Από τα τρίπλευρα σχήματα, **ορθογώνιο τρίγωνο** είναι αυτό που έχει μία γωνία ορθή, **αμβλυγώνιο** αυτό που έχει μια γωνία αμβλεία και **οξυγώνιο** αυτό που έχει τις γωνίες οξείες.

22. Από τα τετράπλευρα σχήματα, **τετράγωνα** είναι εκείνα τα οποία είναι ισόπλευρα και ορθογώνια, **ετερομήκη** είναι εκείνα που είναι ορθογώνια αλλά όχι ισόπλευρα, **ρόμβοι** είναι εκείνα που είναι ισόπλευρα αλλά όχι ορθογώνια και **ρομβοειδή** είναι εκείνα που δεν είναι ισόπλευρα ή ορθογώνια. Τα υπόλοιπα τετράπλευρα ονομάζονται **τραπέζια**.

23. **Παράλληλες** ονομάζονται οι ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ’ άπειρον εκατέρωθεν δεν τέμνονται.

Τα **αιτήματα** είναι:

1. Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο.
2. Το ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.
3. Με κέντρο ένα τυχαίο σημείο και ακτίνα κάθε τμήμα, είναι δυνατό να γράψουμε κύκλο.
4. Και όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

5. Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες και σχηματίζει με αυτές ένα ζεύγος «εντός και επί τα αυτά» γωνιών με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος που βρίσκονται οι γωνίες αυτές.

Οι **κοινές έννοιες** είναι:

1. Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους ίσα.
2. Και αν σε ίσα προστεθούν ίσα προκύπτουν ίσα.
3. Και αν από ίσα αφαιρεθούν ίσα, μένουν ίσα.
4. Και αν σε άνισα προσθέσουμε ίσα, προκύπτουν άνισα.
5. Και τα διπλάσια του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.
6. Και τα μισά του ίδιου μεγέθους είναι ίσα.
7. Και αυτά που εφαρμόζουν μεταξύ τους, είναι ίσα μεταξύ τους.
8. Και ολόκληρο (το μέγεθος) είναι μεγαλύτερο ενός μέρους του.
9. Και δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια (χωρίο).

Σύμφωνα με τον Ross (2001), τα «αξιώματα», οι «ορισμοί» και οι «υποθέσεις» του Αριστοτέλη αντιστοιχούν, ως ένα βαθμό, στις «κοινές έννοιες», τους «ορισμούς» και τα «αιτήματα» του Ευκλείδη.

Για τον Ευκλείδη οι «κοινές έννοιες» και τα «αιτήματα» γίνονται δεκτά χωρίς απόδειξη ως προφανείς αλήθειες που πηγάζουν από τον φυσικό κόσμο. Και ενώ οι «κοινές έννοιες» είναι βασικές αλήθειες για κάθε παραγωγική επιστήμη, τα «αιτήματα» είναι βασικές αλήθειες μόνο για τη γεωμετρία.

Ο Ευκλείδης αντίθετα με τις απόψεις του Αριστοτέλη, δεν χρησιμοποιεί αρχικές έννοιες και προσπαθεί να ορίσει όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα. Σύμφωνα με τους Bunt, Jones και Bedient (1981), τα τρία πρώτα αιτήματα δηλώνουν την ύπαρξη των γεωμετρικών αντικειμένων: ευθύγραμμο τμήμα, ευθεία και κύκλο. Οπότε έμμεσα αυτά τα τρία αντικείμενα δηλώνονται ως αρχικές έννοιες.

Τα δύο τελευταία αιτήματα δεν συμφωνούν με τις αντιλήψεις του Αριστοτέλη. Δεν είναι ούτε αριστοτελικά αξιώματα ούτε «θέσεις». Ο Ευκλείδης όμως έκρινε ότι ήταν απαραίτητα για το αξιωματικό του σύστημα και όπως ξέρουμε εκ των υστέρων είχε απόλυτο δίκιο.

## 2.4 Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες

Μέχρι τον $19^{ο}$ αιώνα η Ευκλείδεια Γεωμετρία εθεωρείτο ως η μόνη δυνατή γεωμετρία η οποία περιγράφει τις ιδιότητες του φυσικού χώρου. Αυτό είχε ως συνέπεια οι «κοινές έννοιες» και τα «αιτήματα» να γίνονται δεκτά χωρίς απόδειξη ως προφανείς αλήθειες που πηγάζουν από τον φυσικό κόσμο. Επίσης, οι βασικές γεωμετρικές έννοιες ορίζονται με βάση τα αρχέτυπα των εννοιών αυτών στο φυσικό χώρο. Η ανακάλυψη των μη Ευκλείδειων Γεωμετριών απελευθέρωσε τη Γεωμετρία από την περιγραφή του φυσικού κόσμου και δημιούργησε την ανάγκη για μια νέα αξιωματική μέθοδο.

Η προσπάθεια απόδειξης μιας εικασίας μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές ανακαλύψεις στα Μαθηματικά. Οι μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες προέκυψαν από τις προσπάθειες απόδειξης της εικασίας ότι το $5^{ο}$ αίτημα του Ευκλείδη είναι ένα θεώρημα. Το $5^{ο}$ αίτημα - που ονομάζεται και «αίτημα των παραλλήλων» - δεν εκφράζει μια προφανή αλήθεια του φυσικού κόσμου και επιπλέον έχει τη μορφή μιας συνεπαγωγής: «αν … τότε …». Επίσης, ο Ευκλείδης το χρησιμοποιεί για πρώτη φορά στην απόδειξη της $29^{ης}$ πρότασης. Οι 28 πρώτες προτάσεις των «Στοιχείων», μαζί με όλες τις άλλες προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση του «αιτήματος των παραλλήλων», αποτελούν την Απόλυτη Γεωμετρία. Όλα αυτά οδήγησαν πολλούς μαθηματικούς, στο να θεωρήσουν ότι το «αίτημα των παραλλήλων» είναι ένα θεώρημα, που αποδεικνύεται με βάση τα τέσσερα πρώτα αιτήματα των «Στοιχείων».

Η προσπάθεια απόδειξης του, άρχισε από την εποχή που παρουσιάστηκαν τα «Στοιχεία» και συνεχίστηκε μέχρι τον $19^{ο}$ αιώνα. Το 1868 ο Eugenio Beltrami (1835 – 1900), απέδειξε ότι το $5^{ο}$ αίτημα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αιτήματα των «Στοιχείων», οπότε δικαιώθηκε ο Ευκλείδης για την ιδιοφυή επιλογή του (Βασιλείου, 2015) .

Μέχρι τότε όμως είχαν γίνει πολλές προσπάθειες απόδειξης του $5^{ου}$ αιτήματος, μερικές από τις οποίες έγιναν από τους:

- **Κλαύδιο Πτολεμαίο** (150 μ.Χ.). Ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να δώσει μια τέτοια απόδειξη.
- **Πρόκλο** (410 – 485 μ.Χ.).
- **Nasiz Eddin al-Tusi** (1201 – 1274).
- **J. Wallis** (1616 – 1703).
- **G. Saccheri** (1667 – 1733).
- **Johann Heinrich Lambert** (1728 – 1777).
- **Adrrien – Marie Legendre** (1752 – 1833).

Ο κάθε ένας από τους τέσσερεις πρώτους αυτούς μαθηματικούς, θεωρούσε ότι είχε «αποδείξει» το $5^ο$ αίτημα, αλλά και οι τέσσερεις είχαν κάνει το λάθος να συμπεριλάβουν στην ακολουθία της «απόδειξης» προτάσεις ισοδύναμες με το $5^ο$ αίτημα (Eves, 1990).

Σύμφωνα με τους Βασιλείου (2015) και Φιλίππου (2003), μερικές προτάσεις που είναι ισοδύναμες με το $5^ο$ αίτημα είναι:

1. Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.
2. Υπάρχει ένα τουλάχιστον τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του οποίου ισούται με δύο ορθές.
3. Υπάρχει ζεύγος τριγώνων που είναι όμοια χωρίς να είναι ίσα.
4. Υπάρχει ζεύγος συνεπίπεδων ευθειών που απέχουν μεταξύ τους απόσταση παντού σταθερή.
5. Δοθέντων τριών διαφορετικών σημείων, υπάρχει κύκλος που διέρχεται από αυτά.
6. Αν τρεις γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ορθές, τότε και η τέταρτη γωνία είναι ορθή.

7. Αν μία ευθεία τέμνει μία από δύο δοθείσες παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.

Η πρώτη από τις παραπάνω ισοδύναμες προτάσεις του «αιτήματος των παραλλήλων», χρησιμοποιείται σήμερα στα διδακτικά βιβλία και είναι γνωστή ως αξίωμα του Playfair, από τον Σκοτσέζο μαθηματικό John Playfair (1748 - 1819).

Η πιο σημαντική προσπάθεια από όλες ήταν αυτή του Saccheri που προσπάθησε να αποδείξει το 5ο αίτημα χρησιμοποιώντας την **μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο**. Θεώρησε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ όπως αυτό που βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο $ΑΔ = ΒΓ$ και οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ είναι ορθές. Στη συνέχεια αφού απέδειξε ότι $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ διέκρινε τρεις περιπτώσεις:

α. $\hat{Γ} = \hat{Δ} = 90°$ (υπόθεση της ορθής γωνίας)

β. $\hat{Γ} = \hat{Δ} > 90°$ (υπόθεση της αμβλείας γωνίας)

γ. $\hat{Γ} = \hat{Δ} < 90°$ (υπόθεση της οξείας γωνίας)


Ο Eves (1990) και ο Φιλίππου (2003), αναφέρουν ότι ο σκοπός του Saccheri ήταν να αποκλείσει τις υποθέσεις της αμβλείας και της οξείας γωνίας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, οπότε αναγκαστικά θα ίσχυε η υπόθεση της ορθής γωνίας. Η υπόθεση της ορθής γωνίας όμως είναι ισοδύναμη με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, οπότε θα είχε φθάσει στον σκοπό του. Ο Saccheri απέρριψε την υπόθεση της αμβλείας γωνίας χρησιμοποιώντας τη σιωπηλή παραδοχή ότι οι ευθείες γραμμές είναι άπειρες σε μήκος. Απέρριψε και την υπόθεση της οξείας γωνίας, χρησιμοποιώντας όμως ανακρίβειες σε μια μη πειστική αντίφαση, η οποία περιλαμβάνει ασαφείς έννοιες για στοιχεία στο άπειρο. Παρά το λάθος του Saccheri στην περίπτωση της υπόθεσης της οξείας γωνίας, η προσπάθεια του  είναι πολύ σημαντική για την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτό που έκανε ο Saccheri στην προσπάθειά του, ήταν να μελετήσει τις συνέπειες της άρνησης του «αιτήματος της παραλληλίας». Έτσι απέδειξε πολλές προτάσεις της μη-Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά δεν σκέφτηκε να προτείνει ένα νέο γεωμετρικό σύστημα. Αν η επιθυμία του να καταλήξει σε αντίφαση δεν ήταν τόσο έντονη, ίσως να ήταν ο πρώτος που θα πρότεινε ένα γεωμετρικό σύστημα διαφορετικό από αυτό του Ευκλείδη.

Ο Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), ήταν ο πρώτος μαθηματικός που πίστεψε ότι το «αίτημα των παραλλήλων» ήταν ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα και ότι ήταν δυνατόν να δημιουργηθούν μη Ευκλείδειες γεωμετρίες. Οι απόψεις του αυτές έγιναν γνωστές από επιστολές που αντάλλαξε με το φίλο του και μαθηματικό Wolfgang Farkas Bolyai (1775 – 1856)  και κάποιες σημειώσεις του που βρέθηκαν μετά τον θάνατό του (Παναγιωτάτου, 2013).

Ο Ρώσος Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793, 1856) και ο Ούγγρος Janos Bolyai (1802 – 1860), είναι οι πρώτοι που ανακάλυψαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον την Υπερβολική Γεωμετρία. Ο Lobachevsky δημοσιοποίησε την εργασία του για την Υπερβολική Γεωμετρία το 1829  με τίτλο «Περί των Θεμελίων της Γεωμετρίας». Ο Bolyai δημοσίευσε τις απόψεις του το 1832 με τίτλο «Η Επιστήμη του Απόλυτου Χώρου» (Παναγιωτάτου, 2013).

**Υπερβολική** είναι η μη Ευκλείδεια γεωμετρία στην οποία αληθεύουν τα τέσσερα πρώτα αιτήματα του Ευκλείδη, αλλά το πέμπτο αντικαθίσταται από το αίτημα: Από σημείο εκτός ευθείας άγονται προς αυτή δύο ή περισσότερες παράλληλες.

Ο Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), δημιούργησε μια δεύτερη μη Ευκλείδεια γεωμετρία στην οποία το «αίτημα των παραλλήλων» αντικαθίσταται από το αίτημα: δύο οποιεσδήποτε ευθείες γραμμές ενός επιπέδου τέμνονται. Επίσης τα αιτήματα ένα και δύο διαφοροποιούνται ως εξής (Φιλίππου, 2003):

1. Δύο διακεκριμένα σημεία ορίζουν μία τουλάχιστον ευθεία.
2. Καμία ευθεία γραμμή δεν έχει τέλος.

Η γεωμετρία αυτή ονομάζεται **Ελλειπτική**.

Τον $19^o$ αιώνα με την ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, την ανακάλυψη μιας μη αντιμεταθετικής άλγεβρας από τον Χάμιλτον και την αριθμητικοποίηση της ανάλυσης, υπήρξε η ανάγκη για μια αναθεώρηση της αξιωματικής μεθόδου που κυριαρχούσε από την εποχή του Ευκλείδη (Eves 1990). Η νέα αξιωματική μέθοδος που εμφανίζεται, ονομάζεται τυπική αξιωματική μέθοδος και αποκορύφωμά της είναι η τυπική αξιωματικοποίηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον David Hilbert (Χριστοδουλίδης, 1980).

# Κεφάλαιο 3ο

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στην τυπική αξιωματική μέθοδο, η οποία είναι η σύγχρονη μορφή της αξιωματικοποίησης και παρουσιάστηκε σε μια πλήρη μορφή το 1899, στο βιβλίο του David Hilbert (1862–1943), «Θεμέλια της Γεωμετρία» (Grundlagen der Geometrie).

## 3.1 Αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας από τον David Hilbert

Ο Hilbert στο αξιωματικό του σύστημα για τη Γεωμετρία του χώρου, θεωρεί τρία διαφορετικά είδη αντικειμένων: τα «σημεία», τις «ευθείες» και τα «επίπεδα». Οι λέξεις αυτές είναι αυθαίρετες ονομασίες κάποιων οντοτήτων των οποίων αγνοείται η φύση και θα μπορούσαν, κατά τον Hilbert να αντικατασταθούν με τις λέξεις τραπέζια, καρέκλες και ποτήρια. Θεωρεί επίσης ότι τα «σημεία», οι «ευθείες» και τα «επίπεδα» συνδέονται μεταξύ τους με σχέσεις τις οποίες ονομάζει με τις λέξεις: «κείνται» (are situated), «μεταξύ» (between) και «ισοδυναμία» (congruent). Τα παραπάνω αντικείμενα και σχέσεις αποτελούν τις έξι αρχικές έννοιες του συστήματος και δεν ορίζονται άμεσα. Οι αρχικές έννοιες ορίζονται έμμεσα από είκοσι αξιώματα. Τα αξιώματα είναι προτάσεις που τις δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη (Eves, 1997).

Ο Hilbert χωρίζει τα είκοσι αξιώματα σε πέντε ομάδες:

I. Οκτώ αξιώματα συνδέσεως (Axioms of Connection), τα οποία ορίζουν έμμεσα την αρχική έννοια «κείνται». Για παράδειγμα:
Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν κείνται στην ίδια ευθεία.

II. Τέσσερα αξιώματα διάταξης (Axioms of Order), τα οποία ορίζουν τις ιδιότητες της αμοιβαίας θέσης σημείων πάνω σε μια ευθεία σε ένα επίπεδο και στον χώρο. Για παράδειγμα:
Από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας ένα και μόνο ένα βρίσκεται μεταξύ των άλλων.

III. Πέντε αξιώματα ισοδυναμίας (Axioms of Congruence), τα οποία προσδιορίζουν την έννοια της «ισότητας» δύο τμημάτων, γωνιών και τριγώνων. Π.χ. Αν δύο τμήματα είναι ισοδύναμα προς τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.

IV. Ένα αξίωμα παραλληλίας (Axiom of Parallels): Έστω ευθεία α και σημείο Α εκτός της α. τότε στο επίπεδο που ορίζει η α με το Α, υπάρχει μια το πολύ ευθεία που διέρχεται από το Α και δεν τέμνει την ευθεία α.

V. Δύο αξιώματα συνέχειας (Axioms of Continuity), τα οποία καθιστούν δυνατή τη μέτρηση και τη γραμμική πληρότητα.

Ο Hilbert σύμφωνα με τους Κοντογιάννη και Ντζιαχρήστο (2003), θεωρούσε ότι τα αξιώματα ενός τυπικού συστήματος πρέπει να ικανοποιούν τρεις γενικές αρχές:

i. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι συνεπές. Δηλαδή δεν πρέπει να προκύπτουν αντιφάσεις.

ii. Τα αξιώματα πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή να μην μπορεί ένα αξίωμα του συστήματος να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα.

iii. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να είναι πλήρες, δηλαδή να υπάρχει μια τουλάχιστον απόδειξη για κάθε θεώρημα της θεωρίας.

## 3.2 Τυπικά αξιωματικά συστήματα

Σύμφωνα με τον Βασιλείου (2009) ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα, όπως το σύστημα του Hilbert αποτελείται από:

1. Απροσδιόριστους όρους
2. Προσδιορισμένους όρους
3. Αξιώματα
4. Θεωρήματα
5. Ένα σύστημα λογικής

Οι **απροσδιόριστοι όροι** είναι αρχικές έννοιες, τις οποίες περιλαμβάνουμε επειδή δεν μπορούμε να ορίσουμε κάθε δυνατό όρο χωρίς να αναχθούμε σε φαύλο κύκλο.

Τα **αξιώματα** είναι αρχικές προτάσεις, την αλήθεια των οποίων αποδεχόμαστε χωρίς απόδειξη. Είναι απαραίτητα γιατί δεν μπορούμε να αποδείξουμε κάθε δυνατή πρόταση χωρίς να καταλήξουμε σε φαύλο κύκλο. Τα αξιώματα προσδιορίζουν τις σχέσεις μεταξύ των απροσδιόριστων όρων.

Τα **θεωρήματα** είναι αποφάνσεις που προέρχονται με λογική διεργασία από την εφαρμογή των αξιωμάτων, σε συνδυασμό με τους απροσδιόριστους και προσδιορισμένους όρους.

Ως **σύστημα λογικής** συνήθως χρησιμοποιείται η Κατηγορηματική Λογική .

**Ερμηνεία** ενός τυπικού αξιωματικού συστήματος είναι ένα σύνολο από συγκεκριμένους όρους προκαθορισμένης σημασίας που αν μπουν στη θέση των απροσδιόριστων όρων, μετατρέπουν όλα τα αξιώματα σε αληθείς προτάσεις. Το αποτέλεσμα που προκύπτει από μια τέτοια αντικατάσταση ονομάζεται **μοντέλο** του τυπικού αξιωματικού συστήματος. Ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα μπορεί να έχει πολλά μοντέλα (Εξαρχάκος, 1990).

Σύμφωνα με τον Eves (1990) υπάρχουν δύο τύποι μοντέλων, τα **πραγματικά μοντέλα** και τα **αφηρημένα μοντέλα**. Ένα μοντέλο λέγεται πραγματικό αν οι σημασίες που δίνονται στους απροσδιόριστους όρους είναι αντικείμενα και σχέσεις από τον πραγματικό κόσμο, ενώ ένα μοντέλο λέγεται αφηρημένο αν οι σημασίες που δίνονται στους αρχικούς όρους είναι αντικείμενα και σχέσεις από ένα άλλο αξιωματικό σύστημα.

Όπως αναφέραμε στην αξιωματική θεμελίωση του Hilbert, ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα πρέπει να ικανοποιεί τις ιδιότητες της **συνέπειας**, της **ανεξαρτησίας** και της **πληρότητας**.

Ο Kurt Godel το 1931 απέδειξε δύο θεωρήματα, σύμφωνα με τα οποία η τυποποίηση μιας θεωρίας δεν διασφαλίζει ούτε την πληρότητα ούτε τη συνέπειά της.

**1ο θεώρημα του Godel**: Σε κάθε συνεπές τυπικό σύστημα Φ που περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, υπάρχουν προτάσεις που δεν μπορούν να αποδειχτούν μέσα στο Φ (Eves, 1990).

**2ο θεώρημα του Godel**: Για κάθε συνεπές τυπικό σύνολο Φ το οποίο περιέχει το σύστημα των φυσικών αριθμών, η συνέπεια του Φ δεν μπορεί να αποδειχτεί μέσα στο Φ (Eves, 1990).

Οπότε σύμφωνα με το δεύτερο θεώρημα του Godel δεν μπορούμε να αποδείξουμε άμεσα την συνέπεια ενός τυπικού συστήματος. Δηλαδή ξεκινώντας από ένα δεδομένο σύνολο αξιωμάτων και χρησιμοποιώντας τους κανόνες του παραγωγικού συλλογισμού δεν μπορούμε να δείξουμε ότι δεν παράγονται αντιφατικά θεωρήματα.

Για να δείξουμε τη συνέπεια ενός τυπικού συστήματος πρέπει να εργαστούμε έμμεσα με τη βοήθεια ερμηνειών και μοντέλων. Σύμφωνα με τον Davis (2007), αν ένα αξιωματικό σύστημα έχει μοντέλο, τότε είναι συνεπές. Χρησιμοποιώντας αυτή την πρόταση μπορούμε να ανάγουμε την συνέπεια ενός συστήματος στην συνέπεια ενός άλλου συστήματος. Π.χ. η συνέπεια της υπερβολικής γεωμετρίας ανάγεται στη συνέπεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Κατασκευάζοντας ένα μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας στα πλαίσια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας η υπερβολική γεωμετρία είναι συνεπής αν είναι συνεπής η Ευκλείδεια. Η συνέπεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μπορεί να αναχθεί στη συνέπεια της πραγματικής ανάλυσης, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα πλαίσια της αναλυτικής γεωμετρίας. Επομένως, τα πάντα ανάγονται στη συνέπεια της πραγματικής ανάλυσης, η οποία με τη σειρά της βασίζεται στη συνέπεια της αριθμητικής. Η συνέπεια της αριθμητικής δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο δικό της πλαίσιο. Όμως, όλοι σχεδόν οι μαθηματικοί ευχαρίστως δέχονται τη συνέπεια της αριθμητικής και τη συνακόλουθη συνέπεια της πραγματικής ανάλυσης, της Ευκλείδειας και των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών (Davis, 2007).

Η συμβολή της αξιωματικής μεθόδου στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών είναι τεράστια. Όλες οι μαθηματικές θεωρίες, από την αριθμητική και τη θεωρία συνόλων μέχρι τον λογισμό των πιθανοτήτων, έχουν αξιωματικοποιηθεί, συχνά με πολλούς τρόπους. Η αξιωματική μέθοδος απαλλάσσει την επιστήμη από τα προβλήματα που αφορούν την ουσία των οντοτήτων που χειρίζεται, προβλήματα τα οποία η ορθολογική επιστήμη δεν πίστευε ότι μπορεί να αντιμετωπίσει (Blanche, 1980).

# Κεφάλαιο 4ο: Μαθηματική Λογική

Η Λογική ασχολείται με τη μελέτη των επιχειρημάτων, δηλαδή, των λογικών διαδικασιών με τις οποίες οδηγούμαστε από ένα σύνολο αληθών προτάσεων οι οποίες ονομάζονται προκείμενες ή υποθέσεις, στην αλήθεια μιας πρότασης που ονομάζεται συμπέρασμα. Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα επιχειρήματος είναι:

Κάθε άνθρωπος είναι θνητός.
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος.
Άρα ο Σωκράτης είναι θνητός.

Σε αυτό το επιχείρημα που οφείλεται στον Αριστοτέλη, η αλήθεια των δύο πρώτων προτάσεων (προκείμενες) οδηγεί στην αλήθεια της τρίτης πρότασης (συμπέρασμα).

Ως θεμελιωτής της Λογικής θεωρείται ο Αριστοτέλης. Όπως έχουμε αναφέρει στο $2^{ο}$ κεφάλαιο το σύνολο των εργασιών του που αφορούν τη λογική, εκδόθηκε μετά τον θάνατό του το 322 π.Χ. από τους μαθητές του και ονομάζεται «Όργανον».

Εκτός από τον Αριστοτέλη και την Περιπατητική Σχολή του, μεγάλη συνεισφορά στη μελέτη της Λογικής είχε και η Στωική σχολή η οποία ιδρύθηκε από τον Χρύσιππο. Μεταξύ των δύο αυτών σχολών υπήρχε σημαντική διαμάχη και αντιζηλία, αλλά στο τέλος του $1^{ου}$ αιώνα μ.Χ. έγινε αντιληπτό ότι οι θεωρίες τους δεν ήταν αντικρουόμενες άλλα η μία συμπλήρωνε την άλλη. Το έργο των Περιπατητικών αφορά στη λογική κατηγορημάτων και το έργο των Στωικών αφορά στη λογική προτάσεων (Αναπολιτάνος κ.α. 2001).

Ραγδαία ανάπτυξη γνώρισε η Λογική από τα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα και μετά, με έντονη επιρροή από τα Μαθηματικά. Μέχρι τότε, είχε γίνει σαφές ότι για τη μελέτη της Λογικής η φυσική γλώσσα δεν αρκούσε και ήταν σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν συμβολικές ή τυπικές γλώσσες. Το 1847, δημοσιεύτηκαν τα έργα των A. De Morgan (1806-1871) και G. Boole (1815-1864), «Formal Logic» και «Mathematical Analysis of Logic» αντίστοιχα και τα έργα αυτά αποτέλεσαν την απαρχή της Μαθηματικής Λογικής. Μεγάλη συνεισφορά στην εξέλιξη της Μαθηματικής Λογικής είχαν μεταξύ άλλων, ο G. Frege (1848-1925), ο B. Russell (1872-1970), ο G. Peano (1858-1932), ο D. Hilbert (1862-1943), ο A. Tarski (1901-1983) και ο K. Goedel (1906-1978), (Δημητρακόπουλος, 2003).

Οι τυπικές γλώσσες που χρησιμοποιούνται στη Μαθηματική Λογική έχουν δύο πλευρές:

- Τη συντακτική, δηλαδή ένα σύνολο κανόνων με βάση τους οποίους κατασκευάζονται οι προτάσεις της γλώσσας, χωρίς καμία αναφορά στο νόημα των προτάσεων.
- Τη σημασιολογική, δηλαδή την απόδοση νοήματος στις προτάσεις και τον χαρακτηρισμό τους ως αληθείς ή ψευδείς.

Η Μαθηματική Λογική ασχολείται με την εγκυρότητα των επιχειρημάτων. Έγκυρο λέγεται ένα επιχείρημα όταν η αλήθεια του συμπεράσματος προκύπτει αναγκαία από την αλήθεια των προκείμενων. Δηλαδή δεν είναι δυνατόν να είναι οι προκείμενες αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Υπάρχουν δύο τρόποι ελέγχου της εγκυρότητας ενός επιχειρήματος. Η σημασιολογική και η συντακτική προσέγγιση. Η σημασιολογική προσέγγιση, βασίζεται στις δυνατές αληθοτιμές των προτάσεων του επιχειρήματος. Η συντακτική προσέγγιση, βασίζεται σε ένα σύνολο αξιωμάτων και κάποιους κανόνες συμπερασμού (Δημητρακόπουλος, 2003). Οι δύο αυτοί τρόποι ελέγχου είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους, τόσο στην προτασιακή λογική όσο και στην κατηγορηματική λογική.

Η προτασιακή λογική και η κατηγορηματική λογική είναι τα δύο είδη της Μαθηματικής Λογικής με τα οποία θα ασχοληθούμε. Θα ασχοληθούμε μόνο με τη σημασιολογική πλευρά των λογικών αυτών και κυρίως με τις λογικές ισοδυναμίες και τους κανόνες συμπερασμού που θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στο 5$^{ο}$ κεφάλαιο.

## 4.1 Προτασιακή Λογική

Η Προτασιακή Λογική χρησιμοποιεί μια βασική τυπική γλώσσα, η οποία επιτρέπει την ανάλυση των προτάσεων μόνο με βάση τις εμφανίσεις των συνδέσμων «όχι», «και», «ή» κ.τ.λ.

### 4.1.1 Λογικές Προτάσεις

Στα Μαθηματικά λογική πρόταση ονομάζουμε μια έκφραση με πλήρες νόημα που επιδέχεται ένα μόνο από τους χαρακτηρισμούς αληθής ή ψευδής. Π.χ.

1. Το 3 διαιρεί το 12.
2. Το 10 είναι πρώτος αριθμός.
3. $1 + 1 = 11$
4. $\sqrt{625} = 25$
5. Πόσες ασκήσεις λύσατε;
6. Σας αρέσουν τα Μαθηματικά;
7. Λύστε την άσκηση 5.
8. Το 100 είναι μεγάλος αριθμός.

Οι εκφράσεις (1), (2), (3), (4) είναι λογικές προτάσεις από τις οποίες οι (1) και (4) είναι αληθείς ενώ οι (2) και (3) είναι ψευδείς. Οι εκφράσεις (5) – (8) δεν είναι λογικές προτάσεις.

Οι χαρακτηρισμοί αληθής ή ψευδής που αποδίδουμε σε μια λογική πρόταση λέγονται **τιμές αλήθειας** της λογικής πρότασης. Στην προτασιακή λογική ενδιαφερόμαστε μόνο για τις τιμές αλήθειας των προτάσεων και όχι για τη σημασία τους.

### 4.1.2 Λογικοί σύνδεσμοι

Λογικοί σύνδεσμοι είναι οι σχέσεις που μας επιτρέπουν να συνδέουμε λογικές προτάσεις και να σχηματίζουμε νέες. Οι σχέσεις αυτές είναι:

Η άρνηση $\neg$

Η διάζευξη $\vee$

Η σύζευξη $\wedge$

Η συνεπαγωγή $\Rightarrow$

Η ισοδυναμία $\Leftrightarrow$

#### *4.1.2.1 Απλές και Σύνθετες προτάσεις*

Μια λογική πρόταση που δεν περιέχει κανένα από τους λογικούς συνδέσμους λέγεται **απλή πρόταση.**

**Σύνθετη** είναι κάθε λογική πρόταση που προκύπτει αποκλειστικά από τη σύνδεση λογικών προτάσεων με λογικούς συνδέσμους.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τους πίνακες αλήθειας των λογικών συνδέσμων.

#### *4.1.2.2 Η άρνηση* $\neg$

Ονομάζουμε άρνηση μιας απλής πρότασης p μια νέα πρόταση που συμβολίζεται με $\neg p$ και διαβάζεται «όχι p». Η τιμή αλήθειας της $\neg p$ είναι πάντοτε αντίθετη από την τιμή αλήθειας της p. Ο αληθοπίνακας της άρνησης είναι:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| Α | Ψ |
| Ψ | Α |

#### *4.1.2.3 Η διάζευξη* $\vee$

Ονομάζουμε διάζευξη δύο απλών προτάσεων p, q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται $p \vee q$ και διαβάζεται «p ή q». Η διάζευξη $p \vee q$ ορίζεται ως αληθής όταν τουλάχιστον μια από τις προτάσεις p, q είναι αληθής. Ο αληθοπίνακας της διάζευξης είναι:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Α |
| Ψ | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Ψ |

#### *4.1.2.4 Η σύζευξη* ∧

Ονομάζουμε σύζευξη δύο απλών προτάσεων p, q μια νέα πρόταση, η οποία συμβολίζεται $p \wedge q$ και διαβάζεται «p και q». Η σύζευξη $p \wedge q$ ορίζεται ως αληθής όταν οι προτάσεις p, q είναι ταυτόχρονα αληθείς. Ο αληθοπίνακας της σύζευξης είναι:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ |
| Ψ | Α | Ψ |
| Ψ | Ψ | Ψ |

#### *4.1.2.5 Η συνεπαγωγή* ⇒

Ονομάζουμε συνεπαγωγή με υπόθεση p και συμπέρασμα q, όπου p, q απλές προτάσεις, μια νέα πρόταση που συμβολίζεται $p \Rightarrow q$ και διαβάζεται «αν p τότε q». Η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ ορίζεται ως ψευδής μόνο όταν η υπόθεση p είναι αληθής και το συμπέρασμα q είναι ψευδές. Ο αληθοπίνακας της συνεπαγωγής είναι:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ |
| Ψ | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Α |

Σημείωση: στα μαθηματικά για τη συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ χρησιμοποιούμε και τις εξής διατυπώσεις:

« Η p είναι ικανή συνθήκη της q» και

«Η q είναι αναγκαία συνθήκη της p».

#### *4.1.2.6 Η ισοδυναμία* ⇔

Ονομάζουμε ισοδυναμία δύο απλών προτάσεων p, q μια νέα πρόταση, η οποία διαβάζεται «p αν και μόνο αν q» και συμβολίζεται $p \Leftrightarrow q$. Η ισοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ ορίζεται ως αληθής όταν δύο προτάσεις p, q είναι ομότιμες. Ο αληθοπίνακας της ισοδυναμίας είναι:

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ |
| Ψ | Α | Ψ |
| Ψ | Ψ | Α |

Σημείωση: η ισοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ διαβάζεται και ως «η p είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη της q».

### 4.1.3 Γλώσσα της Προτασιακής Λογικής

Μια γλώσσα L της Προτασιακής Λογικής αποτελείται από:

α. Ένα σύνολο **προτασιακών μεταβλητών** για τις οποίες θα χρησιμοποιούμε ως σύμβολα είτε τα μικρά γράμματα από το κέντρο του λατινικού αλφαβήτου: $\{p, q, r, s, \dots\}$, είτε την αριθμημένη γραμματοσειρά $\{p_1, p_2, \dots\}$. Το πεδίο τιμών των προτασιακών μεταβλητών είναι σύνολα απλών προτάσεων της φυσικής γλώσσας.

β. Τα σύμβολα των συνδέσμων: $\neg$, $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

γ. Παρενθέσεις: «(» και «)»

### 4.1.4 Εκφράσεις

Κάθε πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της L λέγεται έκφραση. Για παράδειγμα: $p_1 \Rightarrow) p_4 \vee$, $(p_1 \Leftrightarrow p_2) \wedge p_3$ και $\Leftrightarrow \Rightarrow p_{12} \neg p_{32}($.

### 4.1.5 Προτασιακοί Τύποι

Οι προτασιακοί τύποι της γλώσσας L είναι το υποσύνολο των εκφράσεων της, οι οποίες έχουν σαφές νόημα και επιδέχονται αληθοτιμές. Οι συντακτικοί κανόνες που ορίζουν ποιες εκφράσεις αποτελούν προτασιακούς τύπους είναι:

α. Οι προτασιακές μεταβλητές $p_i$, $i \in \mathbb{N}$, είναι προτασιακοί τύποι.

β. Αν οι φ, ψ είναι προτασιακοί τύποι, τότε και οι εκφράσεις $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$, $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ είναι προτασιακοί τύποι.

γ. Αν η φ είναι προτασιακός τύπος, τότε και η έκφραση $\neg(\varphi)$ είναι προτασιακός τύπος.

δ. Δεν υπάρχουν άλλοι προτασιακοί τύποι εκτός από αυτούς που δίνουν οι κανόνες σχηματισμού α) - γ).

Οι προτασιακές μεταβλητές της L ονομάζονται **απλοί** προτασιακοί τύποι, ενώ οι υπόλοιποι τύποι ονομάζονται **σύνθετοι** προτασιακοί τύποι. Οι προτασιακοί τύποι γίνονται προτάσεις μετά την αντικατάσταση των προτασιακών μεταβλητών τους με συγκεκριμένες προτάσεις.

### 4.1.6 Προτεραιότητα λογικών συνδέσμων (Κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων)

Για να απλουστέψουμε τον τρόπο γραφής των προτασιακών τύπων, εισάγουμε ορισμένους κανόνες απαλοιφής παρενθέσεων:

α. Παρενθέσεις που περικλείουν ακριβώς μία μεταβλητή απαλείφονται π.χ. αντί για $(p) \vee (q)$, γράφουμε $p \vee q$.

β. Η άρνηση δρα κατά προτεραιότητα έναντι των άλλων συνδέσμων π.χ. αντί για $\neg(p) \Rightarrow q$, γράφουμε $\neg p \Rightarrow q$.

γ. Η σύζευξη και η διάζευξη δρουν κατά προτεραιότητα έναντι της συνεπαγωγής και της διπλής συνεπαγωγής π.χ. αντί για $(p \vee q) \Rightarrow r$, γράφουμε $p \vee q \Rightarrow r$.

### 4.1.7 Πίνακας αλήθειας ενός προτασιακού τύπου

Η τιμή αλήθειας ενός προτασιακού τύπου εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών από τις οποίες αποτελείται.

**Αποτίμηση** ονομάζεται μια συνάρτηση α: Μ(Γ) → {Α, Ψ} η οποία σε κάθε προτασιακή μεταβλητή της γλώσσας Γ της προτασιακής λογικής αντιστοιχίζει μία από τις τιμές αλήθειας Α,Ψ. Όπου Μ(Γ) είναι το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών της Γ.

Όταν μας δοθεί μια αποτίμηση α, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια τιμή αλήθειας σε κάθε προτασιακό τύπο, δηλαδή να ορίσουμε μια συνάρτηση $\bar{\alpha}: T(\Gamma) \rightarrow \{A, \Psi\}$, όπου Τ(Γ) το σύνολο των προτασιακών τύπων της Γ. Η αντιστοίχιση αυτή γίνεται με τη βοήθεια των παρακάτω πινάκων αλήθειας:

| $\bar{\alpha}(\varphi)$ | $\bar{\alpha}(\neg\varphi)$ |
|---|---|
| Α | Ψ |
| Ψ | Α |

| $\bar{\alpha}(\varphi)$ | $\bar{\alpha}(\psi)$ | $\bar{\alpha}(\varphi \wedge \psi)$ | $\bar{\alpha}(\varphi \vee \psi)$ | $\bar{\alpha}(\varphi \Rightarrow \psi)$ | $\bar{\alpha}(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Α | Ψ | Ψ |
| Ψ | Α | Ψ | Α | Α | Ψ |
| Ψ | Ψ | Ψ | Ψ | Α | Α |

Αν ο προτασιακός τύπος αποτελείται από n προτασιακές μεταβλητές τότε ο πίνακας αλήθειας του προτασιακού τύπου θα αποτελείται από:

- Τουλάχιστον n+1 στήλες, μια για κάθε προτασιακή μεταβλητή του, μια για τον ίδιο τον προτασιακό τύπο και μια για κάθε προτασιακό τύπο που ενδεχομένως αποτελεί συστατικό μέρος του αρχικού.
- $2^n$ γραμμές, τόσες δηλαδή, όσοι οι δυνατοί τρόποι που μπορούν να συνδυαστούν οι τιμές αλήθειας των n μεταβλητών του.

Για παράδειγμα θα βρούμε τον πίνακα αλήθειας του προτασιακού τύπου $(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$.

Εργαζόμαστε ως εξής:

- Μετράμε το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών. Ο προτασιακός τύπος περιέχει τρεις προτασιακές μεταβλητές τις p, q, r. Άρα ο πίνακας αλήθειας θα έχει $2^3$=8 γραμμές.
- Βρίσκουμε τους υπότυπους από τους οποίους αποτελείται ο προτασιακός τύπος. Οι υπότυποι είναι $\neg q$ και $p \wedge \neg q$. Άρα ο πίνακας αλήθειας θα έχει έξι στήλες μία για κάθε μεταβλητή, μια για κάθε υπότυπο και μία για τον προτασιακό τύπο.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Ψ | Ψ | Α |
| Α | Α | Ψ | Ψ | Ψ | Α |
| Α | Ψ | Α | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Α | Α | Ψ |
| Ψ | Α | Α | Ψ | Ψ | Α |
| Ψ | Α | Ψ | Ψ | Ψ | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Α | Ψ | Α |
| Ψ | Ψ | Ψ | Α | Ψ | Α |

#### 4.1.8 Είδη προτασιακών τύπων: Ταυτολογία, Αντίφαση, Σχετικός προτασιακός τύπος

**Ταυτολογία**, ονομάζεται ένας προτασιακός τύπος στον οποίο αντιστοιχεί η αληθοτιμή Α, για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών που τον συγκροτούν. Με το σύμβολο **Τ** θα αποδίδουμε τη γενική έννοια της ταυτολογίας. Για παράδειγμα, ο προτασιακός τύπος $p \Rightarrow (p \vee q)$ είναι ταυτολογία όπως φαίνεται από τον πίνακα αλήθειας:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Α | Α |
| Ψ | Α | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Ψ | Α |

**Αντίφαση**, ονομάζεται ένας προτασιακός τύπος στον οποίο αντιστοιχεί η αληθοτιμή Ψ, για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών που τον συγκροτούν. Με το σύμβολο $\perp$ θα αποδίδουμε τη γενική έννοια της αντίφασης. Για παράδειγμα, ο προτασιακός τύπος $p \wedge \neg p$ είναι αντίφαση.

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|
| Α | Ψ | Ψ |
| Ψ | Α | Ψ |

**Σχετικός**, ονομάζεται ένας προτασιακός τύπος που δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση.

**Ικανοποιήσιμος**, ονομάζεται ένας προτασιακός τύπος που δεν είναι αντίφαση και που για μια τουλάχιστον αποτίμηση των μεταβλητών του παίρνει την αληθοτιμή Α.

### 4.1.9 Σχέσεις μεταξύ προτασιακών τύπων: Λογική Ισοδυναμία, Λογική Αντίφαση, Λογική Συνεπαγωγή.

Μπορούμε να συγκρίνουμε προτασιακούς τύπους μεταξύ τους ως προς τις αληθοτιμές που παίρνουν, για αποτιμήσεις των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτούς. Η σημαντικότερη λογική σχέση μεταξύ προτασιακών τύπων είναι αυτή της λογικής ισοδυναμίας.

#### *4.1.9.1 Λογική Ισοδυναμία*

**Λογικά ισοδύναμοι**, λέγονται δύο προτασιακοί τύποι φ, ψ και γράφουμε $\varphi \equiv \psi$, αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας για κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτούς.

Ισχύει το παρακάτω **θεώρημα**:

Δύο προτασιακοί τύποι είναι λογικά ισοδύναμοι αν και μόνο αν η σχετική διπλή συνεπαγωγή τους είναι ταυτολογία. Δηλαδή, αν φ και ψ είναι οποιοιδήποτε προτασιακοί τύποι τότε ισχύει: $\varphi \equiv \psi$ αν και μόνο αν $\varphi \Leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

**Παρατηρήσεις**:

1. Η λογική ισοδυναμία «≡», είναι μια σχέση μεταξύ προτασιακών τύπων (το να έχουν τις ίδιες τιμές αλήθειας) και δεν είναι ένας νέος λογικός σύνδεσμος. Το $\varphi \equiv \psi$ δεν είναι προτασιακός τύπος.
2. Διαισθητικά, μπορούμε να σκεφτούμε ότι οι λογικά ισοδύναμοι προτασιακοί τύποι εκφράζουν τα ίδια πράγματα με διαφορετικό τρόπο. Αυτό έχει μεγάλη σημασία στις μαθηματικές αποδείξεις. Αν θέλουμε να αποδείξουμε έναν προτασιακό τύπο φ αρκεί να αποδείξουμε έναν προτασιακό τύπο ψ ο οποίος είναι λογικά ισοδύναμος με τον φ. Συνήθως διαλέγουμε ο ψ να είναι πιο απλός στην απόδειξη από τον φ.

#### *4.1.9.2 Νόμοι του Προτασιακού Λογισμού*

Οι πιο γνωστές λογικές ισοδυναμίες ονομάζονται Νόμοι του Προτασιακού Λογισμού και είναι οι παρακάτω:

1. Νόμος ταυτότητας: $p \equiv p$
2. Αντιμεταθετικοί νόμοι:
$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
3. Προσεταιριστικοί νόμοι:
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
4. Επιμεριστικοί νόμοι:
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
5. Νόμος διπλής άρνησης:
$$\neg\neg p \equiv p$$
6. Νόμοι του de Morgan:
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
7. Νόμος αντιθετοαντιστροφής:
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
8. Νόμοι αντικατάστασης:
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$
$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$
$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$
$$(p \vee q) \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$
9. Νόμος άρνησης συνεπαγωγής:
$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$$
10. Νόμος άρνησης ισοδυναμίας:
$$\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$
11. Νόμος της Αντίφασης:
$$(\neg p \Rightarrow \perp) \equiv p$$

12. Νόμοι Συμπληρώματος:

$$(p \vee \neg p) \equiv \mathbf{T}$$

$$(p \wedge \neg p) \equiv \perp$$

Οι παραπάνω λογικές ισοδυναμίες αποδεικνύονται με τη χρήση πινάκων αλήθειας. Για παράδειγμα θα δείξουμε ότι $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg p \vee q$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Ψ | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Ψ | Ψ | Α |
| Ψ | Α | Α | Α | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Α | Α | Α |

Επειδή η ισοδυναμία $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ είναι ταυτολογία, ισχύει η λογική ισοδυναμία $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

#### *4.1.9.3 Λογική Αντίφαση*

**Λογικά αντιφατικοί**, λέγονται δύο προτασιακοί τύποι αν και μόνο αν οι πίνακες αλήθειας έχουν σε κάθε αντίστοιχη σειρά αντίθετες τιμές αλήθειας.

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Δύο προτασιακοί τύποι είναι λογικά αντιφατικοί αν και μόνο αν η σχετική τους διπλή συνεπαγωγή είναι αντίφαση. Δηλαδή, αν φ και ψ είναι οποιοιδήποτε προτασιακοί τύποι τότε ισχύει: Οι $\varphi, \psi$ είναι αντιφατικοί μεταξύ τους αν και μόνο αν ο προτασιακός τύπος $\varphi \Leftrightarrow \psi$ είναι αντίφαση.

#### *4.1.9.4 Λογική συνεπαγωγή*

Όταν κατασκευάζουμε μαθηματικές αποδείξεις θέλουμε να είμαστε σίγουροι ότι κάθε προτασιακός τύπος που μετέχει στην αποδεικτική ακολουθία «προκύπτει λογικά» από προηγούμενους προτασιακούς τύπους της απόδειξης. Δηλαδή, θέλουμε να είμαστε σίγουροι ότι η αλήθεια κάθε προτασιακού τύπου στην αποδεικτική ακολουθία είναι εγγυημένη από την αλήθεια των προηγούμενων προτασιακών τύπων (Taylor & Garnier, 2014). Αυτή η έννοια ονομάζεται «λογική συνεπαγωγή» και θα την ορίσουμε παρακάτω. Αλλά πρώτα θα ορίσουμε την έννοια της ικανοποιησιμότητας ενός συνόλου προτασιακών τύπων. Με Τ(Γ) συμβολίζουμε το σύνολο των προτασιακών τύπων της γλώσσας Γ της Προτασιακής Λογικής, οπότε έχουμε:

**Ορισμός**: έστω $T \subseteq T(\Gamma)$, φ προτασιακός τύπος και α αποτίμηση. Θα λέμε τα εξής (Δημητρακόπουλος, 2003):

1. «Η αποτίμηση α ικανοποιεί τον φ», αν και μόνο αν $\bar{\alpha}(\varphi) = A$ και «η αποτίμηση α ικανοποιεί το Τ», αν και μόνο αν η α ικανοποιεί κάθε στοιχείο του Τ.
2. «Το Τ είναι ικανοποιήσιμο», αν και μόνο αν υπάρχει μια αποτίμηση που το ικανοποιεί.
3. Ο φ είναι «ταυτολογία», αν και μόνο αν κάθε αποτίμηση ικανοποιεί τον φ.
4. Ο φ είναι «αντίφαση», αν και μόνο αν ο $\neg\varphi$ είναι ταυτολογία.

**Ορισμός**: έστω $T \subseteq T(\Gamma)$ και φ προτασιακός τύπος. Θα λέμε ότι «το Τ συνεπάγεται λογικά τον φ» και θα γράφουμε $T \vDash \varphi$, αν και μόνο αν κάθε αποτίμηση, που ικανοποιεί το Τ, ικανοποιεί και τον φ.

**Θεώρημα**: ο προτασιακός τύπος φ συνεπάγεται λογικά τον ψ αν και μόνο αν ο προτασιακός τύπος $\varphi \Rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία. Δηλαδή: $\varphi \vDash \psi$ αν και μόνο αν $\varphi \Rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

### 4.1.10 Κανόνες Συμπερασμού Προτασιακής Λογικής

Οι παρακάτω βασικές λογικές συνεπαγωγές ονομάζονται κανόνες συμπερασμού και χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στις μαθηματικές αποδείξεις (Σκανδάλης, 2010).

1. $\{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi\} \vDash \psi$ Συλλογισμός απόσπασης (Modus Ponens)
2. $\{\varphi \Rightarrow \psi, \neg\psi\} \vDash \neg\varphi$ Συλλογισμός αρνητικής μορφής (Modus Tollens)
3. $\{\varphi \Rightarrow \psi, \psi \Rightarrow \chi\} \vDash \varphi \Rightarrow \chi$ Υποθετικός συλλογισμός
4. $\{\varphi \vee \psi, \neg\psi\} \vDash \varphi$ Διαζευκτικός συλλογισμός
5. $\{\varphi \Rightarrow \psi, \chi \Rightarrow \zeta, \varphi \vee \chi\} \vDash \psi \vee \zeta$ Δημιουργικό δίλημμα

6. $\varphi \wedge \psi \vDash \varphi$ Απλουστευτικός συλλογισμός
7. $\varphi \vDash \varphi \vee \psi$ Προσθετικός συλλογισμός

Οι αποδείξεις των λογικών συνεπαγωγών γίνονται με τη βοήθεια πινάκων αλήθειας. Για παράδειγμα θα αποδείξουμε ότι $\{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi\} \vDash \psi$.

| $\varphi$ | $\psi$ | $\varphi \Rightarrow \psi$ | $\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)$ | $(\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi$ |
|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Ψ | Α |
| Ψ | Α | Α | Ψ | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Ψ | Α |

Επειδή η συνεπαγωγή $(\varphi \wedge (\varphi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία ισχύει ότι $\{\varphi, \varphi \Rightarrow \psi\} \vDash \psi$.

## 4.2 Κατηγορηματική Λογική

Η κατηγορηματική λογική χρησιμοποιεί τυπικές γλώσσες, οι οποίες επιτρέπουν την ανάλυση των προτάσεων όχι μόνο με βάση τους συνδέσμους, όπως γίνεται στην προτασιακή λογική, αλλά και με βάση ποσοδείκτες και κατηγορήματα. Οι τυπικές γλώσσες της κατηγορηματικής λογικής επιτρέπουν μια λεπτομερή ανάλυση των λογικών προτάσεων και των λογικών επιχειρημάτων, αλλά καθιστούν αδύνατη τη χρήση πινάκων αλήθειας. Η κατηγορηματική λογική χρησιμοποιείται για την τυπική αξιωματικοποίηση πολλών κλάδων των μαθηματικών.

### 4.2.1 Τύποι της Κατηγορηματικής Λογικής

Έστω η έκφραση: «ο αριθμός x είναι άρτιος » όπου x είναι ένας φυσικός αριθμός. Για κάθε τιμή του x η παραπάνω έκφραση μετατρέπεται σε λογική πρόταση. Για παράδειγμα:

- Για x=1 προκύπτει η πρόταση «ο αριθμός 1 είναι άρτιος», η οποία είναι ψευδής.
- Για x=16 προκύπτει η πρόταση «ο αριθμός 16 είναι άρτιος», η οποία είναι αληθής.

Έστω Ω ένα σύνολο και p(x) μια έκφραση που περιέχει το σύμβολο x και που μετατρέπεται σε λογική πρόταση κάθε φορά που το x αντικαθίσταται με ένα στοιχείο του Ω. Τότε η p(x) λέγεται **τύπος μιας μεταβλητής x**, με **σύνολο αναφοράς** το Ω (Εξαρχάκος, 2001).

Για κάθε τύπο p(x) με σύνολο αναφοράς Ω, ορίζουμε ένα σύνολο Α το οποίο αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του Ω που κάνουν τον p(x) αληθή πρόταση. Το σύνολο Α το ονομάζουμε **σύνολο αλήθειας** του τύπου p(x). Π.χ. έστω ο τύπος p(x): «ο αριθμός x είναι διαιρέτης του 10» με σύνολο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς. Τότε Α={1, 2, 5, 10}.

**Σημείωση**: οι εξισώσεις και οι ανισώσεις είναι τύποι. Όταν λύνουμε μια εξίσωση ή μια ανίσωση στην ουσία βρίσκουμε το σύνολο αλήθειας τους. Π.χ. η εξίσωση $x^2 - 4 = 0$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι τύπος με σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{R}$ και σύνολο αλήθειας $A = \{-2, 2\}$.

**Τύπο p(x, y) με δύο μεταβλητές x και y**, ονομάζουμε κάθε έκφραση που περιέχει τις μεταβλητές x και y και η οποία γίνεται λογική πρόταση όταν οι μεταβλητές αντικατασταθούν από συγκεκριμένα στοιχεία του πεδίου ορισμού του τύπου. Π.χ. η έκφραση p(x, y): «ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό y» με x, y να διατρέχουν το σύνολο των φυσικών αριθμών, είναι ένας τύπος με δύο μεταβλητές x, y και σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Εξαρχάκος, 2001).

Ομοίως ορίζουμε και τους τύπους με τρεις ή περισσότερες μεταβλητές.

Τους τύπους με μία, με δύο ή περισσότερες μεταβλητές τους συμβολίζουμε αντίστοιχα:

- p(x), q(x), r(x), …
- p(x, y), q(x, y), r(x, y), …
- p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z), …
- ………………………………………

Όλοι οι τύποι της μορφής p(x), p(x, y), p(x, y, z) κ.τ.λ. παράγουν απλές λογικές προτάσεις. Έχουν στην κατηγορηματική λογική ένα ρόλο ανάλογο με αυτό που έχουν οι προτασιακές μεταβλητές στην προτασιακή λογική. Γι' αυτό το λόγο, ονομάζονται **απλοί** τύποι. Αν συνδέσουμε απλούς τύπους με λογικούς συνδέσμους, τότε προκύπτουν νέοι τύποι, οι οποίοι ονομάζονται **σύνθετοι** (Εξαρχάκος, 2001).

### 4.2.2 Κατηγορήματα

Ένας τύπος p(x) μιας μεταβλητής αποδίδει μια ιδιότητα στο αντικείμενο x. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **κατηγόρημα** και συμβολίζεται με p(.). π.χ. έστω ο τύπος p(x): «ο αριθμός x είναι περιττός» με σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{N}$. Εδώ το κατηγόρημα είναι p(.): «…είναι περιττός».

Ένας τύπος p(x, y) εκφράζει μια σχέση μεταξύ των αντικειμένων x και y. Αυτή η σχέση ονομάζεται κατηγόρημα και συμβολίζεται με p( , ). π.χ. έστω ο τύπος p(x, y): «ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό y» με σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Το κατηγόρημα είναι p( , ): «… είναι μεγαλύτερος …».

Ομοίως κάθε τύπος τριών τεσσάρων κ.λ.π. μεταβλητών, εκφράζει μια σχέση μεταξύ των μεταβλητών που περιέχει και αυτή η σχέση ονομάζεται **κατηγόρημα**.

Στα Μαθηματικά μερικά κατηγορήματα παριστάνονται με ειδικά σύμβολα. Για παράδειγμα:

- Το κατηγόρημα «είναι στοιχείο του» το παριστάνουμε με το σύμβολο «∈».
- Το κατηγόρημα «είναι ίσο με» το παριστάνουμε με το σύμβολο «=».
- Το κατηγόρημα «είναι μικρότερο του» το παριστάνουμε με το σύμβολο «<».
- Το κατηγόρημα «είναι μικρότερο ή ίσο του» το παριστάνουμε με το σύμβολο «≤». Κ.λ.π.

### 4.2.3 Ποσοδείκτες

Η αντικατάσταση της μεταβλητής με μια συγκεκριμένη τιμή από κάποιο σύνολο αναφοράς, δεν είναι ο μόνος τρόπος για να καταστήσουμε έναν τύπο λογική πρόταση. Αυτό μπορεί να γίνει με την προσθήκη στον τύπο, των εκφράσεων «για κάθε» ή «υπάρχει» οι οποίες ονομάζονται ποσοδείκτες. Για παράδειγμα:

- ο τύπος «ο αριθμός x διαιρεί τον αριθμό 10» με σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{N}$, με την προσθήκη της λέξης «υπάρχει», γίνεται η αληθής πρόταση «υπάρχει αριθμός x που διαιρεί τον αριθμό 10».
- Ο τύπος «$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$» με σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{R}$, με την προσθήκη της έκφρασης «για κάθε», γίνεται η αληθής πρόταση «για κάθε πραγματικό x ισχύει ότι $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$».

Η έκφραση «για κάθε x στο Ω, ισχύει p(x)» γράφεται συμβολικά**:** $\boldsymbol{\forall x \in \Omega, p(x)}$**.** Το σύμβολο ∀ ονομάζεται **καθολικός ποσοδείκτης** και διαβάζεται «για κάθε»

Η έκφραση «υπάρχει x στο Ω, έτσι ώστε να ισχύει p(x)» γράφεται συμβολικά**:** $\boldsymbol{\exists\, x \in \Omega, p(x)}$. Το σύμβολο ∃ ονομάζεται **υπαρξιακός ποσοδείκτης** και διαβάζεται «υπάρχει».

Σημειώσεις:

- οι ποσοδείκτες αναφέρονται σε κάποια μεταβλητή, οπότε σε ένα τύπο ποτέ δεν εμφανίζονται μόνοι τους αλλά πάντα ακολουθούνται από κάποια μεταβλητή π.χ. $\forall x$, $\forall y$, $\exists x$, $\exists y$ κ.λ.π.
- η προτεραιότητα των ποσοδεικτών ∀ και ∃ είναι μεγαλύτερη από αυτή των λογικών συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Για παράδειγμα, ο τύπος $\forall x\, p(x) \vee q(x)$ είναι η διάζευξη του $\forall x\, p(x)$ με τον $q(x)$. Δηλαδή σημαίνει $\forall x(\, p(x)) \vee q(x)$ και όχι $\forall x(\, p(x) \vee q(x))$.

#### *4.2.3.1 Ακτίνα ποσοδείκτη. Δεσμευμένες και ελεύθερες μεταβλητές*

Ακτίνα ενός ποσοδείκτη, λέγεται το μέρος του τύπου στο οποίο αναφέρεται ο ποσοδείκτης. Για παράδειγμα:

1. Στον τύπο $\forall x\, p(x) \vee q(y)$ η ακτίνα του ποσοδείκτη ∀ ο οποίος αναφέρεται στη μεταβλητή x είναι ο τύπος p(x).
2. Στον τύπο $\exists x\, p(x,y) \wedge q(x)$ η ακτίνα του ποσοδείκτη ∃ ο οποίος αναφέρεται στη μεταβλητή x είναι ο τύπος $p(x,y)$.
3. Στον τύπο $\forall x\; (p(x,y) \Rightarrow \exists y\; q(x,y))$ η ακτίνα του ποσοδείκτη ∀ που αναφέρεται στη μεταβλητή x είναι ο τύπος $p(x,y) \Rightarrow \exists y\; q(x,y)$, ενώ η ακτίνα του ποσοδείκτη ∃ που αναφέρεται στη μεταβλητή y είναι ο τύπος $q(x,y)$.

Μια εμφάνιση μιας μεταβλητής σε ένα τύπο λέμε ότι είναι **δεσμευμένη**, αν και μόνο αν βρίσκεται εντός της ακτίνας (επιρροής) κάποιου ποσοδείκτη. Αν η εμφάνιση της μεταβλητής δεν είναι δεσμευμένη τότε λέγεται **ελεύθερη**. Στο πρώτο παράδειγμα παραπάνω, η εμφάνιση της μεταβλητής x είναι δεσμευμένη από τον ποσοδείκτη ∀, ενώ η εμφάνιση της μεταβλητής y είναι ελεύθερη. Στο τρίτο παράδειγμα η δύο εμφανίσεις της μεταβλητής x είναι δεσμευμένες από τον ποσοδείκτη ∀, ενώ η πρώτη εμφάνιση της μεταβλητής y είναι ελεύθερη, η δεύτερη εμφάνισή της είναι δεσμευμένη από τον ποσοδείκτη ∃.

Μια μεταβλητή σε ένα τύπο, λέγεται ότι είναι:

α. Δεσμευμένη, αν μία τουλάχιστον εμφάνισή της είναι δεσμευμένη.

β. Ελεύθερη, αν μία τουλάχιστον εμφάνισή της είναι ελεύθερη.

Αν σε ένα τύπο δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές τότε αυτός είναι λογική πρόταση.

### 4.2.4 Τυποποίηση φυσικής γλώσσας

Θα παρουσιάσουμε την τυποποίηση τεσσάρων χαρακτηριστικών εκφράσεων της φυσικής γλώσσας (Αναπολιτάνος κ.α, 2001):

1. **Γενική καταφατική: «κάθε Α είναι Β»**
   Η φράση αυτή τυποποιείται ως εξής: $\forall x\ (p(x) \Rightarrow q(x))$
2. **Γενική αποφατική: «κάθε Α δεν είναι Β»**
   Η φράση αυτή τυποποιείται ως εξής: $\forall x\ (p(x) \Rightarrow \neg q(x))$
3. **Μερική καταφατική: «μερικά Α είναι Β»**
   Η φράση αυτή τυποποιείται ως εξής: $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$
4. **Μερική αποφατική: «μερικά Α δεν είναι Β»**
   Η φράση αυτή τυποποιείται ως εξής: $\exists x\ (p(x) \wedge \neg q(x))$

### 4.2.5 Νόμοι Ποσοδεικτών

Οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες ονομάζονται «νόμοι ποσοδεικτών» (Δημητρακόπουλος, 2003):

Νόμοι άρνησης ποσοδεικτών:

1. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
2. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
3. $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$
4. $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$

Νόμοι κατανομής ποσοδεικτών:

1. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$
2. $\exists x(\varphi \vee \psi) \equiv \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

Νόμοι εναλλαγής ποσοδεικτών:

1. $\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$
2. $\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$

Νόμοι μετακίνησης ποσοδεικτών:

1. $(\varphi \Rightarrow \forall x \psi) \equiv \forall x(\varphi \Rightarrow \psi)$
2. $(\varphi \Rightarrow \exists x \psi) \equiv \exists x(\varphi \Rightarrow \psi)$
3. $(\forall x \psi \Rightarrow \varphi) \equiv \exists x(\psi \Rightarrow \varphi)$
4. $(\exists x \psi \Rightarrow \varphi) \equiv \forall x(\psi \Rightarrow \varphi)$

Με την προϋπόθεση ότι η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στο φ.

### 4.2.6 Κανόνες Συμπερασμού Κατηγορηματικής Λογικής

Όπως στην προτασιακή λογική έτσι και στην κατηγορηματική λογική, κάποιες σημαντικές για τις μαθηματικές αποδείξεις λογικές συνεπαγωγές, τις ονομάζουμε κανόνες συμπερασμού. Όλοι οι αποδεικτικοί κανόνες του Προτασιακού Λογισμού είναι και κανόνες του Κατηγορηματικού Λογισμού. Επιπλέον έχουμε τους ακόλουθους κανόνες (Κυριακόπουλος, 1977):

1. **Κανόνας απαλοιφής του καθολικού ποσοδείκτη**: έστω φ(x) ένας τύπος μιας μεταβλητής x, με σύνολο αναφοράς το Ω. Αν $(\forall x \in \Omega)\varphi(x)$ αληθής και $\alpha \epsilon \Omega$, τότε $\varphi(\alpha)$ αληθής.
   Δηλαδή: $(\forall x \in \Omega)\varphi(x) \vDash \varphi(\alpha)$, όπου $\alpha \epsilon \Omega$.
2. **Κανόνας εισαγωγής του καθολικού ποσοδείκτη**: έστω φ(x) ένας τύπος μιας μεταβλητής x, με σύνολο αναφοράς το Ω. Αν για τυχαίο $\alpha \in \Omega$, φ(α) αληθής, τότε $(\forall x \in \Omega)\varphi(x)$ αληθής.
   Δηλαδή: $\varphi(\alpha) \vDash (\forall x \in \Omega)\varphi(x)$.
3. **Κανόνας απαλοιφής υπαρξιακού ποσοδείκτη**: έστω φ(x) ένας τύπος μιας μεταβλητής x, με σύνολο αναφοράς το Ω. Αν $(\exists x \in \Omega)\varphi(x)$ αληθής, τότε για κάποιο $\alpha \in \Omega$, φ(α) αληθής.
   Δηλαδή: $(\exists x \in \Omega)\varphi(x) \vDash \varphi(\alpha)$.
4. **Κανόνας εισαγωγής υπαρξιακού ποσοδείκτη**: έστω φ(x) ένας τύπος μιας μεταβλητής x, με σύνολο αναφοράς το Ω. Αν για ένα $\alpha \in \Omega$, φ(α) αληθής, τότε

$(\exists\ x \in \Omega)\varphi(x)$ αληθής.

Δηλαδή: $\varphi(\alpha) \vDash (\exists x \in \Omega)\varphi(x)$.

# Κεφάλαιο 5ο: Μέθοδοι Μαθηματικής Απόδειξης

Απόδειξη είναι ένα έγκυρο επιχείρημα, το οποίο καθιερώνει την αλήθεια μιας μαθηματικής πρότασης (Rosen, 2012). Σε κάθε απόδειξη διακρίνουμε (Εξαρχάκος, 2001):

- **Την υπόθεση**, δηλαδή τις προκείμενες του επιχειρήματος. Η υπόθεση της απόδειξης αποτελείται από:
    - Τα δεδομένα του αποδεικτικού προβλήματος, δηλαδή τις προτάσεις που δίνονται ως αληθείς στο συγκεκριμένο πρόβλημα.
    - Αρχικές έννοιες, ορισμούς, αξιώματα και άλλες αληθείς προτάσεις του μαθηματικού συστήματος στο οποίο εργαζόμαστε.
- **Το συμπέρασμα**, που είναι η πρόταση ή οι προτάσεις που θέλουμε να αποδείξουμε ως αληθείς.
- **Τους λογικούς κανόνες,** που μας εξασφαλίζουν την εγκυρότητα της απόδειξης, δηλαδή τη σωστή πορεία από την αφετηρία μέχρι το τέρμα της διαδικασίας.

Για να αποδείξουμε μια μαθηματική πρόταση q μπορούμε να εργαστούμε με πολλούς τρόπους. Δύο μεγάλες κατηγορίες αποδείξεων είναι οι ευθείες και οι έμμεσες αποδείξεις.

**Ευθεία** λέγεται η απόδειξη, όταν ξεκινάμε από την υπόθεση και με διαδοχικά λογικά βήματα καταλήγουμε στο συμπέρασμα. Σύμφωνα με τον Κυριακόπουλο (1977) εργαζόμαστε ως εξής:

Για να αποδείξουμε μια πρόταση q κατασκευάζουμε μια πεπερασμένη ακολουθία αληθών προτάσεων της μορφής:

$$p_1 \Rightarrow p_2, p_2 \Rightarrow p_3 \dots, p_n \Rightarrow q$$

Ή συντομότερα:

$$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n \Rightarrow q$$

Όπου $p_1$ είναι μια αληθής πρόταση της θεωρίας (αξίωμα ή θεώρημα ή υπόθεση) στα πλαίσια της οποίας εργαζόμαστε. Τότε σύμφωνα με τον **κανόνα του υποθετικού**

**συλλογισμού** η πρόταση $p_1 \Rightarrow q$ είναι αληθής. Επειδή $p_1$ αληθής και $p_1 \Rightarrow q$ αληθής, από τον **κανόνα αποσπάσεως** (Modus Ponens) είναι και η q αληθής.

Οι **έμμεσες αποδείξεις** ακολουθούν διαφορετική πορεία από αυτή της ευθείας απόδειξης. Θα δούμε στη συνέχεια πως λειτουργούν όταν εξετάσουμε τη μέθοδο της «απαγωγής σε άτοπο» και τη μέθοδο της «αντιθετοαντιστροφής».

Παρακάτω θα δούμε τις κυριότερες μεθόδους απόδειξης, ανάλογα με τη λογική μορφή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε.

## 5.1 Ευθεία απόδειξη συνεπαγωγής ($p \Rightarrow q$)

Από τον πίνακα αλήθειας της $p \Rightarrow q$ ξέρουμε ότι είναι πάντα αληθής εκτός από την περίπτωση που η p είναι αληθής και η q ψευδής. Άρα για να δείξουμε ότι η $p \Rightarrow q$ είναι αληθής, αρκεί να δείξουμε ότι αν η p είναι αληθής τότε και q είναι αληθής. Οπότε, θεωρούμε ως υπόθεση την αλήθεια της p και με ευθεία απόδειξη δείχνουμε ότι και η q είναι αληθής.

**Παράδειγμα**

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε να δειχτεί ότι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

**Προεργασία Απόδειξης**

Θα καταγράψουμε πρώτα την υπόθεση και το συμπέρασμα του αποδεικτικού προβλήματος που μας δίνεται.

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| α, β, γ πραγματικοί αριθμοί | Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. |

Επειδή η λογική μορφή του συμπεράσματος είναι της μορφής $p \Rightarrow q$ θα θεωρήσουμε ως υπόθεση την αλήθεια της $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και θα δείξουμε την αλήθεια της $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. Οπότε η υπόθεση και το συμπέρασμα της απόδειξής μας τώρα έχουν ως εξής:

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| α, β, γ πραγματικοί αριθμοί<br>$\alpha+\beta+\gamma=0$ | $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ |

**Απόδειξη**

Έστω α, β, γ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

$\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow$

$\alpha+\beta=-\gamma \Rightarrow$

$(\alpha+\beta)^3=(-\gamma)^3 \Rightarrow$

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=-\gamma^3 \Rightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 \Rightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \Rightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma) \Rightarrow$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

## 5.2 Απόδειξη πρότασης της μορφής: «$(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$»

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση $(\forall x \in \Omega)p(x)$, όπου p(x) ένας τύπος μιας μεταβλητής x, με πεδίο αναφοράς το σύνολο Ω. Παίρνουμε ένα **τυχαίο** στοιχείο $x \in \Omega$ και αποδεικνύουμε ότι η πρόταση p(x) είναι αληθής. Τότε, από τον κανόνα της εισαγωγής του καθολικού ποσοδείκτη ισχύει ότι η ζητούμενη πρόταση $(\forall x \in \Omega)p(x)$ είναι αληθής.

**Παράδειγμα**

Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $x > 3$, τότε $x^2+5x+2>25$.

**Προεργασία**

Η λογική μορφή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε είναι $(\forall x \in \mathbb{R})(p(x) \Rightarrow q(x))$. Άρα για τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ θα δείξουμε τη συνεπαγωγή: αν $x > 3$, τότε $x^2+5x+2>25$ .

**Απόδειξη**

Για τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

1. $x>3 \Rightarrow x^2>9$
2. $x>3 \Rightarrow 5x>15$

*3.* $x^2 + 5x > 24$ (από 1 και 2)

*4.* $x^2 + 5x + 2 > 26 > 25$

Άρα $x^2 + 5x + 2 > 25$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

## 5.3 Μέθοδος των δυνατών περιπτώσεων

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για την απόδειξη προτάσεων της μορφής

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow q$$

Επειδή ισχύει η λογική ισοδυναμία

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \Rightarrow q \equiv (p_1 \Rightarrow q) \wedge (p_2 \Rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \Rightarrow q)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ξεχωριστά τις συνεπαγωγές $p_i \Rightarrow q$ για κάθε $i = 1,2, \dots, n$

**Παράδειγμα**

Αν α,β,γ πραγματικοί αριθμοί και $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$, τότε να δείξτε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

**Προεργασία**

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| α, β, γ πραγματικοί αριθμοί | Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ |

Η λογική μορφή του συμπεράσματος είναι $p_1 \vee p_2 \Rightarrow q$, όπου $p_1 : \alpha + \beta + \gamma = 0$, $p_2 : \alpha = \beta = \gamma$ και $q : \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, οπότε σύμφωνα με τη μέθοδο των δυνατών περιπτώσεων θα δείξουμε ότι $p_1 \Rightarrow q$ και $p_2 \Rightarrow q$.

**Απόδειξη**

Την πρώτη συνεπαγωγή $p_1 \Rightarrow q$ την αποδείξαμε στο παράδειγμα της παραγράφου 5.1.

Θα αποδείξουμε τη δεύτερη συνεπαγωγή $p_2 \Rightarrow q$.

Ξεκινάμε υποθέτοντας την αλήθεια της $p_2$ και θα αποδείξουμε την αλήθεια της q.

Επειδή $\alpha = \beta = \gamma$ ισχύει

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \alpha^3 + \alpha^3 + \alpha^3 = 3\alpha^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Άρα $p_2 \Rightarrow q$ αληθής, οπότε και η $p_1 \vee p_2 \Rightarrow q$ αληθής.

## 5.4 Απόδειξη πρότασης της μορφής $p \vee q$

Για να αποδείξουμε μια πρόταση με λογική μορφή $p \vee q$ σκεφτόμαστε ως εξής: αν p είναι αληθής τότε είναι φανερό ότι $p \vee q$ αληθής. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι αν p ψευδής τότε q αληθής. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε την συνεπαγωγή $\neg p \Rightarrow q$. Αυτό δικαιολογείται και από την λογική ισοδυναμία $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$.

**Παράδειγμα**

Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς α, β, αν $\alpha\beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

**Προεργασία**

Η συμβολική μορφή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε είναι: $(\forall \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R})(\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \beta = 0)$

Για α=0 προφανώς η συνεπαγωγή ισχύει. Αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή $\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$. Συγκεντρωτικά έχουμε

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| Τυχαία $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$<br>$\alpha\beta = 0$<br>$\alpha \neq 0$ | $\beta = 0$ |

**Απόδειξη**

Έστω τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί α, β.

Για α=0 προφανώς η συνεπαγωγή ισχύει. Αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή $\alpha \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$. Επειδή $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta = 0$ έχουμε:

$$\alpha\beta = 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha\beta) = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right)\beta = 0 \Rightarrow 1 \cdot \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Άρα ισχύει ότι $\forall \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$, αν $\alpha\beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

## 5.5 Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο

Η απαγωγή σε άτοπο είναι μια έμμεση μέθοδος απόδειξης. Σύμφωνα με τον **Νόμο της Αντίφασης**: $(\neg p \Rightarrow \perp) \equiv p$, για να αποδείξουμε έναν τύπο p αρκεί να αποδείξουμε την συνεπαγωγή $\neg p \Rightarrow \perp$. Οπότε υποθέτουμε ότι δεν ισχύει ο τύπος p και προσπαθούμε να φθάσουμε σε μια αντίφαση (άτοπο).

**Παράδειγμα 1**

Να δείξτε ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

**Απόδειξη**

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Υποθέτουμε ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ όλοι οι πρώτοι αριθμοί.

Τότε ο φυσικός αριθμός $\alpha = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ είναι μεγαλύτερος από τον $p_n$ ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός.

Άρα ο α είναι σύνθετος.

Άρα ο α έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη p.

Άρα $p = p_k$ για κάποιο κ, όπου $1 \leq \kappa \leq n$.

Άρα $p|\alpha$ και $p|p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

Άρα $p|\alpha - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \Rightarrow p|1$ Άτοπο γιατί $p > 1$.

Άρα το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

**Παράδειγμα 2**

Έστω α ένας ακέραιος αριθμός. Να δειχθεί ότι αν ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός.

**Προεργασία**

Η λογική μορφή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε είναι $p \Rightarrow q$, όπου

p: ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός

q: ο α είναι άρτιος αριθμός

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| p: ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός | q: ο α είναι άρτιος αριθμός |

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο θα υποθέσουμε την $\neg q$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Δηλαδή

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| p: ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός<br>$\neg q$: ο α είναι περιττός αριθμός | Άτοπο |

**Απόδειξη**

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω ότι ο α είναι περιττός.

Άρα $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος. Έχουμε:

$\alpha^2 = (2\kappa + 1)^2$

$= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1$

$= 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1$

$= 2\lambda + 1$ (όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa$)

Ο λ είναι ακέραιος, άρα ο $\alpha^2 = 2\lambda + 1$ είναι περιττός. Αυτό είναι άτοπο γιατί έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση p: ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός. Άρα ο α είναι άρτιος.

## 5.6 Μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής

Η μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής είναι μια έμμεση μέθοδος απόδειξης. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην λογική ισοδυναμία:

$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

Οπότε για να δείξουμε μια συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ αρκεί να δείξουμε την $\neg q \Rightarrow \neg p$

**Παράδειγμα**

Θα αποδείξουμε πάλι την πρόταση:«Έστω α ένας ακέραιος αριθμός. Να δειχθεί ότι αν ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός», αλλά αυτή τη φορά με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής.

**Προεργασία**

Η λογική μορφή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε είναι $p \Rightarrow q$, όπου p: ο $\alpha^2$ είναι άρτιος αριθμός

q: ο α είναι άρτιος αριθμός

Το αντιθετοαντίστροφο της πρότασης είναι: $\neg q \Rightarrow \neg p$ όπου

$\neg q$: ο α είναι περιττός αριθμός

$\neg p$: ο $\alpha^2$ είναι περιττός αριθμός.

Οπότε η υπόθεση και το συμπέρασμα του αποδεικτικού μας προβλήματος έχει ως εξής:

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| $\neg q$: ο α είναι περιττός αριθμός | $\neg p$: ο $\alpha^2$ είναι περιττός αριθμός. |

**Απόδειξη**

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής. Έστω ότι ο α είναι περιττός.

Άρα $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος. Έχουμε:

$\alpha^2 = (2\kappa + 1)^2$

$= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1$

$= 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1$

$= 2\lambda + 1$ (όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa$)

Ο λ είναι ακέραιος, άρα ο $\alpha^2 = 2\lambda + 1$ είναι περιττός.

Άρα σύμφωνα με την μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής ο α είναι άρτιος.

## 5.7 Απόδειξη ισοδυναμίας ($\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$)

**1ος Τρόπος**.

Ισχύει η λογική ισοδυναμία:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ξεχωριστά τις συνεπαγωγές: $p \Rightarrow q$ και $q \Rightarrow p$.

**Παράδειγμα**

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση και $x_1, x_2 \epsilon A$, ισχύει η ισοδυναμία $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

**Απόδειξη**

**Ευθύ:** η συνεπαγωγή $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ισχύει από τον ορισμό της γνήσιας αύξουσας συνάρτησης.

**Αντίστροφο**: θα δείξουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο τη συνεπαγωγή $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| $f$ γνησίως αύξουσα,<br>$x_1, x_2 \epsilon A$,<br>$f(x_1) < f(x_2)$,<br>$(x_1 = x_2) \vee (x_1 > x_2)$ | Άτοπο |

1η περίπτωση: Αν $x_1 = x_2$ τότε από τον ορισμό της συνάρτησης ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$, που είναι άτοπο γιατί από υπόθεση ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

2η περίπτωση: Αν $x_1 > x_2$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$, το οποίο είναι άτοπο γιατί από υπόθεση ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα από την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο ισχύει $x_1 < x_2$.

**2ος Τρόπος. (Μέθοδος ισοδυναμιών)**

Αν μπορούμε να βρούμε μια πεπερασμένη ακολουθία αληθών προτάσεων της μορφής:

$$p \Leftrightarrow r, r \Leftrightarrow t, \dots u \Leftrightarrow q$$

Τότε η πρόταση $p \Leftrightarrow q$ θα έχει αποδειχτεί.

**Παράδειγμα**

Να αποδειχτούν οι παρακάτω ιδιότητες των αναλογιών:

i. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ όπου α,β,γ,δ πραγματικοί αριθμοί και $\beta\delta \neq 0$.

ii. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ όπου α,β,γ,δ πραγματικοί αριθμοί και $\beta\gamma\delta \neq 0$.

iii. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\delta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ όπου α,β,γ,δ πραγματικοί αριθμοί και $\beta\delta \neq 0$.

**Απόδειξη**

i. Θα ξεκινήσουμε από την ισότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και με ισοδυναμίες θα φθάσουμε στην ισότητα $\alpha\delta=\beta\gamma$. Έχουμε:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta\delta\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\beta\delta\cdot\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow$ (από υπόθεση $\beta\delta\neq 0$)

$\Leftrightarrow \delta\alpha=\beta\gamma\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma$

ii. Έχουμε:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\delta=\beta\gamma\Leftrightarrow$ (από ερώτημα i.)

$\Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta}=\frac{\beta\gamma}{\gamma\delta}\Leftrightarrow$ (από υπό$\theta\varepsilon\sigma\eta$ $\gamma\delta\neq 0$)

$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

iii. Έχουμε:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\delta}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$

## 5.8 Απόδειξη προτάσεων της μορφής: «$(\exists \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$»

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε μία πρόταση με λογική μορφή $(\exists x\in\Omega)p(x)$, όπου p(x) είναι ένας τύπος μιας μεταβλητής x με πεδίο αναφοράς το σύνολο Ω. Τότε, βάσει του **κανόνα της εισαγωγής του υπαρξιακού ποσοδείκτη** αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $\alpha\in\Omega$, για το οποίο η πρόταση p(α) είναι αληθής. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση κατασκευαστικών και μη κατασκευαστικών αποδείξεων.

**Α) Κατασκευαστικές Αποδείξεις**

Στις κατασκευαστικές αποδείξεις βρίσκουμε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο $\alpha\in\Omega$, για το οποίο η πρόταση p(α) είναι αληθής.

**Παράδειγμα**

Να δειχθεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x, αν $x>0$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε $y(y+2)=x$.

**Προεργασία**

Η λογική μορφή της πρότασης είναι $(\forall x \in \mathbb{R})[x > 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathbb{R})(y(y+2) = x)]$.

| Υπόθεση | Συμπέρασμα |
|---|---|
| $x \in \mathbb{R}, x > 0$ | $(\exists y \in \mathbb{R})(y(y+2) = x)$ |

Επειδή το συμπέρασμα είναι της μορφής $(\exists y \in \mathbb{R})p(y)$, όπου

$p(y)$: $y(y+2) = x$,

για να βρούμε μια τιμή του y που θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη θα λύσουμε την εξίσωση $y(y+2) = x$.

Έχουμε:

$y(y+2) = x \Leftrightarrow y^2 + 2y - x = 0$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 - 4x = 4(1-x) > 0$, γιατί $x > 0$.

Άρα $y_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4(1-x)}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{1-x}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-x}$

Βρήκαμε δύο τιμές για το y και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξή μας οποιαδήποτε από τις δύο. Διαλέγουμε την $y = -1 + \sqrt{1-x}$.

**Απόδειξη**

Έστω τυχαίο $x \in \mathbb{R}$, με $x > 0$ και έστω $y = -1 + \sqrt{1-x}$. Έχουμε

$y(y+2) = \left(-1 + \sqrt{1-x}\right)\left(-1 + \sqrt{1-x} + 2\right) =$

$= \left(-1 + \sqrt{1-x}\right)\left(1 + \sqrt{1-x}\right) =$

$= \left(\sqrt{1+x}\right)^2 - 1^2 = 1 + x - 1 = x$

**Β) Μη-Κατασκευαστικές Αποδείξεις**

Στις μη-κατασκευαστικές αποδείξεις χρησιμοποιούμε διάφορα θεωρήματα όπως π.χ. το θεώρημα του Bolzano, το θεώρημα του Rolle κ.α. για να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός αντικείμενου $\alpha \in \Omega$, για το οποίο η πρόταση p(α) είναι αληθής χωρίς να χρειάζεται να γίνει προσδιορισμός της τιμής του α.

Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

**Παράδειγμα**

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $3x \cdot 4^x = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

**Απόδειξη**

Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano στη συνάρτηση $f(x) = 3x \cdot 4^x - 1$ στο διάστημα [0,1].

- Η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0) = -1 < 0$ και $f(1) = 12 - 1 = 11 > 0$, άρα $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Άρα η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [0,1], οπότε υπάρχει $\alpha \epsilon (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha \cdot 4^\alpha = 1$.

## 5.9 Απόδειξη προτάσεων της μορφής $\forall x \exists y, p(x,y)$

Για να αποδείξουμε μια πρόταση της μορφής $\forall x \exists y, p(x,y)$, θεωρούμε τυχαίο x και κατασκευάζουμε ένα y τέτοιο ώστε $p(x,y)$ αληθής. Σε αυτή την κατηγορία αποδείξεων ανήκουν και οι αποδείξεις ορίου συνάρτησης με τη χρήση του ε-δ ορισμού, ο οποίος οφείλεται στον Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

**Παράδειγμα**

Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x) = 8$.

**Προεργασία**

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 2x$. Για να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to 2} f(x) = 8$ πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό του Cauchy να δείξουμε ότι:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}(0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 8| < \varepsilon)$ , όπου ε, δ πραγματικοί αριθμοί.

Θα θεωρήσουμε τυχαίο ε και θα κατασκευάσουμε ένα δ συναρτήσει του ε, τέτοιο ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 8| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$|f(x) - 8| = |x^2 + 2x - 8| = |(x-2)(x+4)| = |x-2||x+4|$

Αλλά $|x+4| = |x - 2 + 2 + 4| = |(x-2) + 6| \leq |x-2| + 6$

Επειδή το x ανήκει σε μια περιοχή του 2, θεωρούμε $0 < |x-2| < 1$ οπότε $|x+4| < 7$

Άρα $|f(x) - 8| = |x-2||x+4| < 7|x-2|$

Για $7|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{7}$ έχουμε $|f(x) - 8| < \varepsilon$

Άρα έχουμε $|x-2| < 1$ και $|x-2| < \frac{\varepsilon}{7}$

Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

**Απόδειξη**

Έστω τυχαίος πραγματικός αριθμός $\varepsilon > 0$ και $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$. Έστω επίσης τυχαίος πραγματικός αριθμός x και $0 < |x - 2| < \delta$ αληθής.

Θα δείξουμε ότι $|x^2 + 2x - 8| < \varepsilon$. Έχουμε

$|x - 2| < 1, \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{7}$ και $|x + 4| < 7$. Οπότε

$|x^2 + 2x - 8| = |(x - 2)(x + 4)| = |x - 2||x + 4| < 7|x - 2| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$

Άρα $\lim_{x \to 2}(x^2 + 2x) = 8$.

## 5.10 Μέθοδος του αντιπαραδείγματος

Για να δείξουμε ότι μια πρόταση της μορφής $(\forall x \in \Omega)p(x)$ είναι ψευδής, αρκεί να δείξουμε ότι η άρνησή της είναι αληθής. Από τον **Νόμο άρνησης ποσοδεικτών** ισχύει $\neg\forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$.

Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι είναι αληθής η πρόταση $(\exists x \in \Omega)\neg p(x)$. Οπότε, αρκεί να βρούμε $\alpha \in \Omega$ ώστε η πρόταση $\neg p(\alpha)$ να είναι αληθής. Το α λέγεται **αντιπαράδειγμα** της πρότασης $(\forall x \in \Omega)p(x)$.

**Παράδειγμα 1**

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι για κάθε x, y η ισότητα $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ δεν ισχύει.

**Απόδειξη**

Για $x = 1$ και $y = 2$ έχουμε:

$(x + y)^2 = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$

$x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

Άρα $(x + y)^2 \neq x^2 + y^2$, άρα η ισότητα $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ δεν ισχύει για κάθε x, y, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.

**Παράδειγμα 2**

Να δειχθεί ότι ο πολλαπλασιασμός των $2 \times 2$ πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός.

**Απόδειξη**

Έστω οι $2 \times 2$ πίνακες $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. Έχουμε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-6 & -1+21 \\ 8-8 & 2+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & 12+4 \\ 2+14 & -6+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$$

Άρα $A \cdot B \neq B \cdot A$, άρα ο πολλαπλασιασμός των $2 \times 2$ πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός.

## 5.11 Μαθηματική Επαγωγή

Τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής τη χρησιμοποιούμε όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένας τύπος **p(n) ισχύει για κάθε** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, δηλαδή όταν θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{p(n)}$.

Η μαθηματική επαγωγή ονομάζεται και τέλεια επαγωγή και είναι μια μέθοδος που βασίζεται στην «αρχή της μαθηματικής επαγωγής», η οποία αποτελεί το πέμπτο αξίωμα της αξιωματικής θεμελίωσης των φυσικών αριθμών από τον Giuseppe Peano (1858 – 1932).

**Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής**: Έστω $S$ ένα υποσύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ με τις ιδιότητες:

1. $0 \in S$
2. $\forall k \in S \Rightarrow (k+1) \in S$,

Τότε $S = \mathbb{N}$.

Έχουμε δύο βασικές μορφές μαθηματικής επαγωγής την απλή και την ισχυρή μαθηματική επαγωγή. Αυτές οι δύο μορφές, είναι ισοδύναμες μεταξύ τους και επίσης είναι ισοδύναμες με την «αρχή του ελαχίστου» των φυσικών αριθμών. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τις μεθόδους της απλής και της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής.

### 5.11.1 Απλή Μαθηματική Επαγωγή

**Θεώρημα 1 (Απλή Μαθηματική Επαγωγή)**

Έστω p(n) ένας τύπος με $n \in \mathbb{N}$. Αν

1) Η πρόταση p(0) είναι αληθής και
2) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

Τότε η πρόταση p(n) είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Μεθοδολογία**

Σύμφωνα με τη μέθοδο της απλής μαθηματικής επαγωγής , για να αποδείξουμε ότι μια πρόταση *p(n)* είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εργαζόμαστε σε δύο βήματα:

1. **Επαγωγική Βάση**: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει p(0).
2. **Επαγωγικό Βήμα**: Αποδεικνύουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει η συνεπαγωγή $p(k) \Rightarrow p(k+1)$. Δηλαδή
   α. **Επαγωγική υπόθεση**: Υποθέτουμε ότι για τυχαίο φυσικό k ισχύει $p(k)$ και
   β. **Επαγωγικό συμπέρασμα**: Δείχνουμε ότι ισχύει $p(k+1)$.

Η απλή μαθηματική επαγωγή μπορεί να εκφραστεί ως κανόνας συμπερασμού ως εξής:

$\{p(0), \forall k\big(p(k) \Rightarrow p(k+1)\big)\} \vDash \forall n\, p(n)$

**Παράδειγμα**

Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι το άθροισμα ενός πεπερασμένου πλήθους όρων μιας γεωμετρικής προόδου, με αρχικό όρο α και λόγο λ δίνεται από τον τύπο: $\sum_{j=0}^{n} \alpha\lambda^j = \frac{\alpha\lambda^{n+1}-\alpha}{\lambda-1}$, όπου $\lambda \neq 1$ και n ένας φυσικός αριθμός.

**Απόδειξη**

Έστω ο τύπος $p(n)$: $\sum_{j=0}^{n} \alpha\lambda^j = \frac{\alpha\lambda^{n+1}-\alpha}{\lambda-1}$, όπου $\lambda \neq 1$ και n ένας φυσικός αριθμός. Θα δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση $(\forall n \in \mathbb{N})p(n)$.

Επαγωγική Βάση: θα δείξουμε ότι p(0) αληθής.

$p(0)$: $\alpha\lambda^0 = \frac{\alpha\lambda^1-\alpha}{\lambda-1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha(\lambda-1)}{\lambda-1} \Leftrightarrow \alpha = \alpha$ Αληθής

Επαγωγικό Βήμα: θα δείξουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η συνεπαγωγή $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

- Επαγωγική Υπόθεση: υποθέτουμε ότι για τυχαίο φυσικό k ισχύει
  $p(k)$: $\sum_{j=0}^{k} \alpha\lambda^j = \frac{\alpha\lambda^{k+1}-\alpha}{\lambda-1}$, όπου $\lambda \neq 1$.

- <u>Επαγωγικό Συμπέρασμα</u>: θα δείξουμε ότι για τυχαίο φυσικό k ισχύει

  $p(k+1)\colon \sum_{j=0}^{k+1} \alpha\lambda^j = \frac{\alpha\lambda^{k+2}-\alpha}{\lambda-1}$, όπου $\lambda \neq 1$.

  Έχουμε:

  $\sum_{j=0}^{k+1} \alpha\lambda^j = \alpha\lambda^{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \alpha\lambda^j =$

  $= \alpha\lambda^{k+1} + \frac{\alpha\lambda^{k+1}-\alpha}{\lambda-1} =$ (από επαγωγική υπόθεση)

  $= \frac{\alpha\lambda^{k+1}(\lambda-1)+\alpha\lambda^{k+1}-\alpha}{\lambda-1} =$

  $= \frac{\alpha\lambda^{k+2}-\alpha\lambda^{k+1}+\alpha\lambda^{k+1}-\alpha}{\lambda-1} = \frac{\alpha\lambda^{k+2}-\alpha}{\lambda-1}$

  άρα δείξαμε το επαγωγικό συμπέρασμα.

Οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\sum_{j=0}^{n} \alpha\lambda^j = \frac{\alpha\lambda^{n+1}-\alpha}{\lambda-1}$, όπου $\lambda \neq 1$.

Η απλή μαθηματική επαγωγή όπως είδαμε αρχίζει με $n = 0$. Πολλές φορές όμως, θέλουμε να αρχίζει από κάποιο φυσικό $b > 0$. Τότε χρησιμοποιούμε τη γενικευμένη μορφή της απλής μαθηματικής επαγωγής.

**Θεώρημα 2 (Γενικευμένη μορφή της Απλής Μαθηματικής Επαγωγής)**

Έστω p(n) ένας τύπος με σύνολο αναφοράς $\Omega = \{n \in \mathbb{N}\colon n \geq b\}$, όπου b ένας δοσμένος φυσικός αριθμός. Αν

1. p(b) αληθής και
2. $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ αληθής για κάθε φυσικό $k \geq b$

Τότε για κάθε φυσικό $n \geq b$ ισχύει p(n).

**Μεθοδολογία**

Τα δύο βήματα της γενικευμένης απλής μαθηματικής επαγωγής είναι

1. Επαγωγική Βάση: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει p(b).
2. Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι για κάθε φυσικό $k \geq b$, ισχύει η συνεπαγωγή $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

**Παράδειγμα 1**

Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός, με $a \in [-1,0) \cup (0,+\infty)$, να δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ (Ανισότητα του Bernoulli).

**Απόδειξη**

Έστω ο τύπος p(n): $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ , για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$, όπου α πραγματικός αριθμός με $a \in [-1,0) \cup (0,+\infty)$. Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι ισχύει $(\forall n \geq 2)p(n)$.

<u>Επαγωγική Βάση</u>: θα δείξουμε ότι p(2) αληθής

Για $n = 2$ έχουμε:
$(1+\alpha)^2 > 1 + 2\alpha \Leftrightarrow 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$ Αληθής.

<u>Επαγωγικό Βήμα</u>: θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 2$ ισχύει η συνεπαγωγή $p(k) \Rightarrow p(k+1)$

- <u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: έστω k τυχαίος φυσικός αριθμός με $k \geq 2$ και p(k) αληθής.
  Δηλαδή για τυχαίο φυσικό $k \geq 2$ υποθέτουμε ότι ισχύει $(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha$
- <u>Επαγωγικό Συμπέρασμα</u>: θα δείξουμε ότι p(k+1) αληθής.
  Δηλαδή για τυχαίο φυσικό $k \geq 2$ θα δείξουμε ότι
  $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha.$ Έχουμε:
  $(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha \Rightarrow$ (από επαγωγική υπόθεση)
  $(1+\alpha)^k(1+\alpha) > (1+k\alpha)(1+\alpha) \Rightarrow$ $(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\, a \geq -1 \Rightarrow 1 + \alpha \geq 0)$
  $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + \alpha + k\alpha + k\alpha^2 \Rightarrow$
  $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 \Rightarrow$
  $(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha$ (γιατί $k\alpha^2 > 0$)

Άρα p(κ+1) Αληθής.

Άρα για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει $(1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$ όπου α πραγματικός αριθμός με $a \in [-1,0) \cup (0,+\infty)$.

**Παράδειγμα 2**

Να αποδείξετε ότι $2^n < n!$ για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \geq 4$.

**Απόδειξη**

Έστω ο τύπος p(n): $2^n < n!$ για φυσικό αριθμό $n \geq 4$. Θα δείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι $(\forall n \geq 4)p(n)$ Αληθής.

Επαγωγική Βάση: θα δείξουμε ότι p(4) Αληθής.
p(4): $2^4 < 4! \Leftrightarrow 16 < 24$ Αληθής.

Επαγωγικό Βήμα: θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 4$ ισχύει η συνεπαγωγή $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

- Επαγωγική Υπόθεση: έστω τυχαίος φυσικός $k \geq 4$ και p(k): $2^k < k!$ Αληθής.
- Επαγωγικό συμπέρασμα: θα δείξουμε ότι για τυχαίο φυσικό $k \geq 4$ ισχύει η p(k+1): $2^{k+1} < (k+1)!$

  Έχουμε:

  $$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \\ &< 2 \cdot k! && \text{(από επαγωγική υπόθεση)} \\ &< (k+1)k! && \text{(γιατί } 4 \leq k \Rightarrow 5 \leq k+1 \Rightarrow 2 < k+1\text{)} \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

  Άρα p(k+1) Αληθής

Άρα ισχύει ότι $2^n < n!$ για κάθε φυσικό αριθμό n με $n \geq 4$.

## 5.11.2 Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

Υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις όπου δυσκολευόμαστε να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα $p(k) \Rightarrow p(k+1)$. Αυτό συμβαίνει γιατί η υπόθεση $p(k)$ είναι πολύ ασθενής για να μας δώσει το συμπέρασμα $p(k+1)$. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την ισχυρή μαθηματική επαγωγή.

**Θεώρημα 3 (Ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή)**

Έστω p(n) ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς $\Omega = \mathbb{N}$. Αν

1. $p(0)$ αληθής και

2. $p(0) \wedge p(1) \wedge \dots \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1)$ αληθής για κάθε $k \in \mathbb{N}$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει p(n).

**Μεθοδολογία**

Τα δύο βήματα της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής είναι

1. Επαγωγική Βάση: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει p(0).
2. Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει η συνεπαγωγή $p(0) \wedge p(1) \wedge \dots \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

Έχουμε γενικευμένη μορφή και για την ισχυρή μαθηματική επαγωγή.

**Θεώρημα 4 (Γενικευμένη μορφή της Ισχυρής Μαθηματικής Επαγωγής)**
Έστω p(n) ένας προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς $\Omega = \{n \in \mathbb{N}: n \geq b\}$ , όπου b ένας δοσμένος φυσικός αριθμός. Αν

1. p(b) αληθής και
2. $p(b) \wedge p(b+1) \wedge \dots \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1)$ αληθής για κάθε φυσικό $k \geq b$

Τότε για κάθε φυσικό $n \geq b$ ισχύει p(n).

**Μεθοδολογία**

Τα δύο βήματα της γενικευμένης ισχυρής μαθηματικής επαγωγής είναι

1. Επαγωγική Βάση: Αποδεικνύουμε ότι ισχύει p(b).
2. Επαγωγικό Βήμα: Αποδεικνύουμε ότι για κάθε φυσικό $k \geq b$, ισχύει η συνεπαγωγή $p(b) \wedge p(b+1) \wedge \dots \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

**Παράδειγμα 1**
Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων αριθμών, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών μεταξύ τους.
**Απόδειξη**
Θεωρούμε τον τύπο p(n): «ο αριθμός n μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών», για κάθε φυσικό $n \geq 2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής για να αποδείξουμε ότι ο τύπος p(n) είναι αληθής για κάθε φυσικό $n \geq 2$.

Επαγωγική Βάση: θα δείξουμε ότι η p(2) είναι αληθής.

Το 2 είναι πρώτος αριθμός και $2 = 2$ άρα η p(2) είναι αληθής.

Επαγωγικό Βήμα: θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό $\kappa \geq 2$ ισχύει η συνεπαγωγή $p(2) \wedge p(3) \wedge \ldots \wedge p(\kappa) \Rightarrow p(\kappa+1)$

- Επαγωγική Υπόθεση: έστω τυχαίος $\kappa \geq 2$ και έστω ότι οι προτάσεις $p(2), p(3), \ldots, p(\kappa)$ είναι αληθείς. Δηλαδή είναι αληθείς οι προτάσεις
  «ο αριθμός 2 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών»,
  «ο αριθμός 3 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών»,
  ……..
  «ο αριθμός κ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών»

- Επαγωγικό Συμπέρασμα: θα δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση p(κ+1).
  Δηλαδή θα δείξουμε ότι «ο αριθμός κ+1 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πρώτων αριθμών».
  Ο κ+1 είναι ή πρώτος ή σύνθετος.
  Αν ο κ+1 είναι πρώτος τότε η p(κ+1) είναι αληθής.
  Αν ο κ+1 είναι σύνθετος, τότε $\kappa + 1 = a \cdot b$ όπου $a$ και b είναι φυσικοί αριθμοί με $2 \leq a < \kappa + 1$ και $2 \leq b < \kappa + 1$ δηλαδή $2 \leq a \leq \kappa$ και $2 \leq b \leq \kappa$.
  Από την Επαγωγική Υπόθεση ισχύει ότι οι $a$ και b μπορούν να γραφούν ως γινόμενα πρώτων αριθμών. Δηλαδή υπάρχουν πρώτοι αριθμοί $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ και $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$, όχι αναγκαστικά διαφορετικοί μεταξύ τους έτσι ώστε
  $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_\nu$ και $b = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_\mu$
  Άρα $\kappa + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_\nu \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_\mu$
  Άρα p(κ+1) Αληθής.
  Άρα από τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής ισχύει ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων αριθμών, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών μεταξύ τους.

**Παράδειγμα 2**

Έστω η ακολουθία του Fibonacci η οποία ορίζεται ως εξής:

$f_0 = 0$

$f_1 = 1$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

**Απόδειξη**

Έστω ο τύπος $p(n)$: $f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$ όπου $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε με τη μέθοδο της ισχυρής επαγωγής ότι ($\forall n \in \mathbb{N}$)p(n) Αληθής.

Επαγωγική Βάση:

$p(0)$: $f_0 = \frac{1-1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 0 = 0$ Αληθής.

$p(1)$: $f_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 1 = 1$ Αληθής.

$p(2)$: $f_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow f_1 + f_0 = \frac{\frac{(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5})}{4}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + 0 = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 1 = 1$ Αληθής.

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο της $f_n$, θα αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα για φυσικό αριθμό $k \geq 2$. Τις περιπτώσεις για $0 \leq k \leq 2$ τις αποδείξαμε στην επαγωγική βάση.

Επαγωγικό Βήμα:

Θα δείξουμε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 2$ ισχύει η συνεπαγωγή

$p(2) \wedge p(3) \dots \wedge p(k) \Rightarrow p(k+1)$

- Επαγωγική Υπόθεση:
  Έστω τυχαίος φυσικός $k \geq 2$ και $p(2), p(3), \dots, p(k)$ Αληθείς.
- Επαγωγικό Συμπέρασμα:
  Θα δείξουμε ότι για τυχαίο φυσικό $k \geq 2$ ισχύει η πρόταση

$$p(k+1): f_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Έχουμε $k \geq 2 \Rightarrow k+1 \geq 3$ άρα:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} +\right.$$

$$\left.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right] - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left[\frac{2}{1-\sqrt{5}} + \frac{4}{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\frac{2+2\sqrt{5}+4}{\left(1+\sqrt{5}\right)^2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\frac{2-2\sqrt{5}+4}{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\frac{6-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Άρα δείξαμε ότι για κάθε φυσικό $k \geq 2$ ισχύει η πρόταση

$$p(k+1): f_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Οπότε σύμφωνα με τη μέθοδο της ισχυρής μαθηματικής επαγωγής ισχύει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}$.

# Κεφάλαιο 6ο: Διδακτικές Προεκτάσεις - Συμπέρασμα

Η ιστορική εξέλιξη της απόδειξης που ξεκίνησε από την εμπειρία, την διαίσθηση και τον επαγωγικό συλλογισμό των αρχαίων Ανατολικών Λαών και έφτασε στον παραγωγικό συλλογισμό, στα τυπικά αξιωματικά συστήματα και την αυστηρή απόδειξη, μας δείχνει τον δρόμο που πρέπει να ακολουθήσουμε στην διδασκαλία της απόδειξης.

Ένα τυπικό αξιωματικό σύστημα είναι το τελικό προϊόν μιας πολύχρονης προσπάθειας της μαθηματικής κοινότητας. Για παράδειγμα, το τυπικό αξιωματικό σύστημα του Hilbert για την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι το τελικό αποτέλεσμα μιας προσπάθειας και συσσώρευσης γνώσης που ξεκίνησε πριν χιλιάδες έτη από τους αρχαίους Λαούς της Ανατολής.

Η αποδεικτική διαδικασία ενός θεωρήματος μπορεί να διαρκέσει αρκετά χρόνια και να περιλαμβάνει πολλές προσεγγίσεις από τις οποίες ελάχιστες οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα (για παράδειγμα, οι πολλές προσπάθειες για την απόδειξη του θεωρήματος του Fermat). Στη διδασκαλία, η απόδειξη δεν πρέπει να παρουσιάζεται μόνο ως ένα τελικό προϊόν, αλλά θα πρέπει να μεταφέρονται στους μαθητές όλες οι λειτουργίες και διαδικασίες που περιλαμβάνει μια απόδειξη στην μαθηματική πρακτική (Μούτσιος-Ρέντζος & Πιτσιλή-Χατζή, 2015).

Σύμφωνα με τον Lakatos και τη θεωρία του Ημιεμπειρισμού, τα μαθηματικά είναι ένα υποθετικό-παραγωγικό σύστημα. Σε ένα τέτοιο σύστημα δεν πρέπει να δίνεται έμφαση στην αυστηρή απόδειξη των συμπερασμάτων από αληθείς υποθέσεις, αλλά στον τρόπο που ανασκευάζονται οι αρχικές υποθέσεις και εικασίες, όταν στην αποδεικτική διαδικασία δεν παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα ή όταν εμφανίζεται κάποιο αντιπαράδειγμα. Απόδειξη για τον Lakatos δεν είναι η μηχανική μεταφορά της αλήθειας από μια πεπερασμένη διαδοχή υποθέσεων και συμπερασμάτων. Απόδειξη για τον Lakatos σημαίνει εξηγήσεις, αιτιολογήσεις και επεξεργασίες που κάνουν μια εικασία πιο πειστική (Τούμασης, 2000).

Η απόδειξη είναι ένα από τα τέσσερα στάδια της μεθόδου της μαθηματικής ανακάλυψης του Lakatos:

i. Αρχική εικασία.

ii. Απόδειξη, (ένα νοητικό πείραμα, το οποίο αναλύει την αρχική εικασία σε υποεικασίες ή λήμματα).

iii. Αντιπαραδείγματα στην αρχική εικασία.

iv. Επανεξέταση της απόδειξης. Εντοπίζεται το ένοχο λήμμα και τοποθετείται ως επιπλέον συνθήκη στην αρχική εικασία. Η βελτιωμένη εικασία, αντικαθιστά την αρχική εικασία.

Στο NCTM (2000), (όπως αναφέρεται στο Hanna, 2000), προτείνεται η αιτιολόγηση (reasoning), και η απόδειξη (proof), να διδάσκονται σε όλες τις βαθμίδες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ένας μαθητής θα πρέπει:

- Να αναγνωρίζει την αιτιολόγηση και την απόδειξη ως βασικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών.
- Να διατυπώνει και να ερευνά μαθηματικές εικασίες.
- Να αναπτύσσει και να αξιολογεί μαθηματικά επιχειρήματα και αποδείξεις.
- Να επιλέγει και να χρησιμοποιεί ποικίλους τρόπους συλλογισμού και απόδειξης.

Σύμφωνα με τις αρχές της θεωρίας κατασκευής της γνώσης (Οικοδομισμός), η νέα γνώση δεν μεταδίδεται από τον εκπαιδευτικό στον εκπαιδευόμενο, αλλά κατασκευάζεται ενεργητικά από τον ίδιο τον μαθητή. Ο μαθητής συνδέει τις νέες πληροφορίες με τις υπάρχουσες δομές γνώσης και τις αναδιοργανώνει σ’ ένα καινούργιο ενιαίο σχήμα. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού συνίσταται στη δημιουργία κατάλληλων διδακτικών καταστάσεων οι οποίες να επιτρέπουν στο μαθητή την οικοδόμηση της νέας γνώσης πάνω στις ήδη υπάρχουσες (Τούμασης, 2000).

Σύμφωνα με τις αρχές του Οικοδομισμού η νέα μαθηματική γνώση δεν πρέπει να παρουσιάζεται από τη διδακτική πορεία: ορισμός, αξίωμα, θεώρημα και απόδειξη. Αλλά θα πρέπει να ακολουθεί τη διδακτική πορεία: αναγνώριση προτύπων, δημιουργία εικασίας, έλεγχος της εικασίας και αναθεώρησή της σε περίπτωση ύπαρξης αντιπαραδείγματος, διατύπωση ανεπίσημων επιχειρημάτων και τέλος απόδειξη της αναθεωρημένης εικασίας. Η διδασκαλία της απόδειξης, για να είναι ουσιαστική δεν πρέπει να παρουσιάζεται ως ένα τελικό προϊόν άλλα ως μέρος μιας διαδικασίας που οδηγεί σε νέα γνώση.

Στη διερευνητική προσέγγιση διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός δημιουργεί τις κατάλληλες διδακτικές εμπειρίες στο μαθητευόμενο για να δράσει στο αντικείμενο μάθησης και να εκφράσει τις δικές του μαθηματικές ιδέες. Η έκφραση αυτή ως μορφή επικοινωνίας μετακινείται ηλικιακά από τη μη τυπική μορφή στην πιο τυπική. Η αιτιολόγηση στην ηλικία της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θεωρείται το πρώτο βήμα ενώ στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση επιδιώκεται η χρήση ορολογίας, συμβόλων και πιο τυπικής δομής. Αναμφίβολα η διδακτική εξέταση του θέματος μετακινείται σε διάφορες άλλες διαστάσεις τα τελευταία χρόνια όπως είναι η αξιοποίηση της τεχνολογίας, τα ψηφιακά εργαλεία της δυναμικής γεωμετρίας, αλλά και προσομοιώσεις που δίνουν τη δυνατότητα αντίληψης του ιστορικού συγκείμενου ανάπτυξης της κάθε μαθηματικής έννοιας. Οι διαστάσεις αυτές αποτελούν αναμφίβολα αντικείμενα περαιτέρω μελλοντικής διερεύνησης σε σχέση πάντοτε με τη δυνατότητα αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους.

# Βιβλιογραφικές αναφορές


Αναπολιτάνος, Δ., Γαβαλάς, Δ., Δέμης, Α., Δημητρακόπουλος, Κ. & Καρασμάνης, Β. (2001). *Λογική Θεωρία και Πρακτική*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Βασιλείου, Ε. Ε. (2015). *Γεωμετρία για τη Διδακτική*. Πανεπιστημιακές σημειώσεις. Ανακτήθηκε από: http://users.uoa.gr/~evassil/dida15.pdf

Βασιλείου, Ε. Ε. (2009). *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*. Αθήνα: Συμμετρία.

Blanche, R. (1980). *Αξιωματική Μέθοδος*. Αθήνα: Καστανιώτη.

Basmakova, I. G. (2014). *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*. Παπασωτηρίου.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics Third Edition*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S. & Bedient, J. D. (1981): *Οι Ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*. Αθήνα: Πνευματικού.

Davis, D. M. (2007). *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Δημητρακόπουλος, Κ. (2003). *Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική (Τόμος Γ΄)*. Πάτρα: Ε.Α.Π.

Eves, H. (1989). *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών έως το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία.

Eves, H. (1990). *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών μετά το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία.

Eves, H. (1997). *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Mineola, New York: Dover.

Εξαρχάκος, Θ. Γ. (1993). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Εξαρχάκος, Θ. Γ. (2001). *Εισαγωγή στα Μαθηματικά Τόμος Α΄*. Αθήνα: Αυτοέκδοση.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics. 44*. 5-23.

Hersh, R. (1993). Proving Is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 389–399.

Katz, V. J. (2013). *Ιστορία των Μαθηματικών μια Εισαγωγή*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Κοντογιάννης, Δ., & Ντζιαχρήστος, Β. (2003). *Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας Τέταρτη Έκδοση*. Αθήνα: Αυτοέκδοση

Κυριακόπουλος, Α. Κ. (1977): *Μαθηματική Λογική*. Αθήνα: Παπαδημητροπούλου

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2015). Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Στο Σκουμπουρδή Χ. & Σκουμιός Μ., *Πρακτικά του 1ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή για το Εκπαιδευτικό Υλικό στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες* (σελ. 561-578). 17-18 Οκτωβρίου 2014, Ρόδος, Ελλάδα.

Ντζιαχρήστος, Β., Κοντογιάννης, Δ. & Τσιγώνη, Τ. (2001). Τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Θ. Εξαρχάκος (Επιμ.), *Ευκλείδη «Στοιχεία» Τόμος Ι* (σσ. 89-204). Αθήνα: Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.

Παναγιωτάτου, Μ. (2013). Μαθηματικά. Στο Α. Μπαλτάς και Κ. Στεργιόπουλος (Επιμ.), *Φιλοσοφία και Επιστήμες* (σσ. 121-145). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Rodin, A. (2014). *Axiomatic Method and Category Theory*. Switzerland: Springer.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition*. New York: McGraw-Hill

Ross, W. D. (2001). *Αριστοτέλης*. Αθήνα: Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης.

Σκανδάλης, Κ. (2010). *Σημειώσεις του Μαθήματος Μ2422 Λογική*. Πανεπιστήμιο Κρήτης. Ανακτήθηκε από: https://fourier.math.uoc.gr/~mathweb/lnotes/logic-skandalis.pdf

Struik, D. S. (1993). *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*. Αθήνα: «Δαίδαλος» - Ι. Ζαχαρόπουλος Α.Ε.

Taylor, J. & Garnier, R. (2014). *Understanding Mathematical Proof.* New York: CRC Press, Taylor & Francis Group.

Τούμασης, Μ. (2000). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg

Van Der Waerden, B. L. (2007). *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Φιλίππου, Γ. (2003). *Εισαγωγή στις βάσεις και στις βασικές έννοιες των μαθηματικών*. Αθήνα: Ατραπός.

Χριστοδουλίδης, Π. (1980). *Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, Τόμος Ι από τον Frege ως τον Kreisel: 1884-1979.* Αθήνα: Εγνατία.