



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Από το υπόδειγμα Black–Scholes στην προσαρμοστική
μη γραμμική εξίσωση Schrödinger στη
Χρηματοοικονομική: Μαθηματική ανάλυση
σολιτονικών και περιοδικών λύσεων

Διπλωματική Εργασία
του
Δημητρίου Ζάγκου

1ος Επιβλέπων: Νικόλαος Καραχάλιος
2ος Επιβλέπων: Νικόλαος Τσίτσας

Πάτρα 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Δημητρίου Ζάγκου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading) «ανάρτηση» (uploading) μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα. Ο συγγραφέας διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Ευχαριστίες

Η διπλωματική εργασία που ακολουθεί βασίζεται στη μελέτη θεμάτων που μου προτάθηκαν από τον καθηγητή κ. Νικόλαο Καραχάλιο, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά για τις πολύτιμες κατευθύνσεις και τις τεχνικές συμβουλές του σε επιμέρους ζητήματα, καθώς και για τη συνολική ενθάρρυνση και υποστήριξή του κατά την εκπόνηση και ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τη μετάβαση από το κλασικό υπόδειγμα Black–Scholes προς ένα μη γραμμικό κυματικό πλαίσιο τιμολόγησης, βασισμένο στην προσαρμοστική μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLS) του Vladimir G. Ivancevic. Αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές υποθέσεις και η εξαγωγή της εξίσωσης Black–Scholes, οι τύποι κλειστής μορφής για ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης και οι κύριοι περιορισμοί του υποδείγματος. Στη συνέχεια αναλύεται το προσαρμοστικό κυματικό μοντέλο και διευκρινίζεται ότι αποτελεί περιγραφικό υπόδειγμα δυναμικής και όχι υπόδειγμα αποτίμησης χωρίς αρμπιτράζ.

Το κύριο μαθηματικό μέρος της εργασίας βασίζεται σε ansatz οδεύοντος κύματος, μέσω του οποίου η NLS ανάγεται σε εξίσωση Duffing. Η φασική ανάλυση του μηχανικού αναλόγου συνδέει τη λύση φωτεινού σολιτονίου sech με ομοκλινική τροχιά και τη λύση σκοτεινού σολιτονίου tanh με ετεροκλινική τροχιά. Πέρα από τις δύο διαχωριστικές λύσεις, κατασκευάζονται και ταξινομούνται οι περιοδικές οικογένειες cn, sn και dn με χρήση των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi, ενώ ελέγχεται η μετάβασή τους στα αντίστοιχα σολιτονικά ή σταθερά όρια. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο πρόσημο του προσαρμοστικού δυναμικού β , στην ερμηνεία του ελλειπτικού μέτρου m μέσα σε κάθε δυναμικό κλάδο και στη χαρακτηριστική περίοδο $2K(m)/p$ των περιοδικών προφίλ.

Τέλος, διερευνώνται οι δυνατές χρηματοοικονομικές ερμηνείες των λύσεων, μαζί με τους περιορισμούς τους: η κανονικοποίηση του $|\psi|^2$, η διάκριση του συντελεστή διασποράς της NLS από τη μεταβλητότητα του Black–Scholes, η απουσία εμπειρικής βαθμονόμησης και τα γνωστά ζητήματα ευστάθειας. Στόχος της εργασίας δεν είναι η πρόταση ενός έτοιμου εργαλείου αποτίμησης, αλλά η μαθηματική κατανόηση της δομής, των οικογενειών λύσεων και των ορίων του μη γραμμικού κυματικού υποδείγματος.

Λέξεις-κλειδιά: χρηματοοικονομικά μαθηματικά, Black–Scholes, μη γραμμική εξίσωση Schrödinger, εξίσωση Duffing, σολιτόνια, ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi, περιοδικές λύσεις.

Abstract

This master's thesis studies the transition from the classical Black–Scholes framework to a nonlinear wave-based option-pricing model founded on Vladimir G. Ivancevic's adaptive nonlinear Schrödinger equation (NLS). The first part reviews the main assumptions and derivation of the Black–Scholes equation, the closed-form formulas for European options, and the principal limitations of the classical model. The adaptive wave model is then introduced, with an explicit distinction between a descriptive dynamical model and a no-arbitrage pricing model.

The main mathematical part uses a travelling-wave ansatz to reduce the NLS equation to a Duffing equation. Phase-plane analysis of the associated mechanical system identifies the bright sech soliton with a homoclinic orbit and the dark tanh soliton with a heteroclinic orbit. Beyond these separatrix solutions, the periodic cn, sn, and dn families are derived and classified in terms of Jacobi elliptic functions, and their limiting behaviour is checked against the corresponding solitary-wave or equilibrium states. Particular attention is paid to the sign of the adaptive market potential β , to the interpretation of the elliptic modulus m within each dynamical branch, and to the characteristic period $2K(m)/p$ of the periodic profiles.

The final part examines possible financial interpretations of the solutions while making their limitations explicit. These include the normalization of $|\psi|^2$, the distinction between the NLS dispersion coefficient and Black–Scholes volatility, the absence of empirical calibration, and known stability issues. The aim is not to propose a ready-to-use pricing method, but to clarify the mathematical structure, solution families, and applicability limits of the nonlinear wave model.

Keywords: financial mathematics, Black–Scholes, nonlinear Schrödinger equation, Duffing equation, solitons, Jacobi elliptic functions, periodic solutions.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων	7
1 Εισαγωγή	9
2 Υπόδειγμα Black-Scholes - Υποθέσεις	10
3 Εξαγωγή του Υποδείγματος Black-Scholes	11
4 Τύποι τιμολόγησης Black-Scholes	14
5 Περιορισμοί και προβλήματα του υποδείγματος Black-Scholes	16
6 Επεκτάσεις και Εναλλακτικά Μοντέλα	16
7 Το προσαρμοστικό μη γραμμικό μοντέλο Schrödinger	17
7.1 Θεωρητικό υπόβαθρο του υποδείγματος	17
7.1.1 Φυσική και οικονομική ερμηνεία της δεύτερης μερικής παραγώγου	19
7.1.2 Απουσία όρου πρώτης μερικής παραγώγου	19
7.2 Βιβλιογραφική ανάλυση των δομικών στοιχείων του μοντέλου	20
7.2.1 Η Προσαρμοστική δυναμική των αγορών	20
7.2.2 Κβαντικά και δυναμικά πρότυπα της ανθρώπινης συμπεριφοράς και δράσης	21
7.2.3 Η Προσαρμοστικότητα (Adaptivity) και η Μάθηση	22
7.2.4 Θεωρητικά και μαθηματικά υποδείγματα ανάλυσης της χρηματοπιστωτικής αγοράς	23
7.2.5 Νόηση, νευρωνικά συστήματα και δυναμική πλήθους	24
8 Αναλυτικές Σολιτονικές και Περιοδικές Λύσεις	25
8.1 Αναζήτηση κυματικής λύσης	25
8.2 Αναγωγή στην Εξίσωση Duffing	26
8.2.1 α) — Υπολογισμός παραγώγων	26
8.2.2 β) — Αντικατάσταση στη NLS	26
8.2.3 γ) — Διαχωρισμός πραγματικού-φανταστικού	26
8.2.4 Πραγματικό μέρος = 0 → δίνει την Εξίσωση Duffing	26
8.3 Δυναμική Ανάλυση της Duffing — Φασικό Πορτραίτο	27
8.4 Λύση φωτεινού σολιτονίου	29
8.4.1 α) — Πρώτο ολοκλήρωμα	29
8.4.2 β) — Χωρισμός μεταβλητών	29
8.4.3 γ) — Αλλαγή μεταβλητής	29
8.4.4 δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα	29
8.4.5 ε) — Εξίσωση και τελική λύση	29
8.5 Λύση σκοτεινού σολιτονίου	30
8.5.1 α) — Πρώτο ολοκλήρωμα	30
8.5.2 β) — Χωρισμός μεταβλητών	31
8.5.3 γ) — Ανάλυση σε μερικά κλάσματα	31
8.5.4 δ) — Ολοκλήρωση	31
8.5.5 ε) — Τελική λύση	32
8.6 Περιοδικές λύσεις	32
8.6.1 Γιατί υπάρχουν και άλλες φραγμένες λύσεις	32
8.6.2 Το πρώτο ολοκλήρωμα για $E_0 \neq 0$	34

8.6.3	Ταξινόμηση των φραγμένων τροχιών	34
8.7	Περίπτωση Γ: Λύση cn (κλειστές τροχιές με $E_0 > 0$)	36
8.7.1	α) — Παραγοντοποίηση του πρώτου ολοκληρώματος	36
8.7.2	β) — Χωρισμός μεταβλητών	36
8.7.3	γ) — Αλλαγή μεταβλητής	36
8.7.4	δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα	37
8.7.5	ε) — Εξίσωση και τελική λύση	37
8.7.6	στ) — Επιστροφή στο ansatz και έλεγχος	37
8.8	Περίπτωση Δ: Λύση sn (κλειστές τροχιές της ανεστραμμένης Duffing)	38
8.8.1	α) — Παραγοντοποίηση	38
8.8.2	β,γ) — Χωρισμός και αλλαγή μεταβλητής	38
8.8.3	δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα	38
8.8.4	ε) — Τελική λύση	39
8.9	Περίπτωση Ε: Λύση dn (κλειστές τροχιές εντός ενός πηγαδιού)	39
8.9.1	α) — Παραγοντοποίηση	40
8.9.2	β,γ) — Χωρισμός και αλλαγή μεταβλητής	40
8.9.3	δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα	40
8.9.4	ε) — Τελική λύση	40
9	Ερμηνεία των Σολιτονικών και Περιοδικών Λύσεων	41
9.1	Ερμηνεία της λύσης του Σκοτεινού Σολιτονίου	41
9.2	Οικονομική ερμηνεία του «βυθίσματος»	42
9.3	Ταχύτητα διάδοσης και δυναμική του κρίσιμου σημείου	43
9.4	Σύνδεση με «χαμόγελο» μεταβλητότητας/λοξότητα	43
9.5	Συμπέρασμα για τη λύση σκοτεινού σολιτονίου	45
9.6	Ερμηνεία της λύσης του Φωτεινού Σολιτονίου	45
9.7	Οικονομική ερμηνεία	46
9.8	Ερμηνεία των περιοδικών λύσεων: η παράμετρος m ως δείκτης καθεστώτος	47
9.9	Η λύση sn^2 : από τη «ζώνη αποκλεισμού» στο πλέγμα κρίσιμων τιμών	48
9.10	Η λύση cn^2 : κατανομή με πολλαπλές κορυφές και συνυπάρχουσες προσδοκίες	49
9.11	Χαρακτηριστική κλίμακα στον αδιάστατο άξονα τιμής: απόκλιση κοντά στη διαχωριστική τροχιά	49
9.12	Ταχύτητα διάδοσης: το πλέγμα κινείται συλλογικά	51
9.13	Επιφυλάξεις και όρια εφαρμοσιμότητας	51
10	Συμπεράσματα και προοπτικές	53
	Βιβλιογραφία	55

Κατάλογος Σχημάτων

- 1 Περίπτωση Α ($\alpha = -\kappa_0^2 < 0$, $\gamma = \mu_0^2 > 0$: εδώ $\kappa_0 = \mu_0 = 1$). *Αριστερά*: το δυναμικό $V(\phi)$ με τοπικό μέγιστο στο ασταθές $\phi_0^* = 0$ και τοπικά ελάχιστα στα ευσταθή $\phi_{1,2}^* = \pm\kappa_0/\mu_0$. *Δεξιά*: το φασικό επίπεδο (ϕ, ϕ') . Η έντονη κόκκινη καμπύλη είναι η στάθμη $E_0 = 0$, η οποία αποτελείται από δύο **ομοκλινικές** τροχιές (μία ανά πηγάδι): καθεμία εγκαταλείπει και επιστρέφει στο $\phi_0^* = 0$, και μαζί σχηματίζουν το χαρακτηριστικό «οκτώ». Η δεξιά αντιστοιχεί στη λύση φωτεινού σολιτονίου της §8.4: η αριστερή δίνει την αντίθετή της, $-\phi(\xi)$, λόγω της συμμετρίας $\phi \rightarrow -\phi$ της Duffing. Οι λεπτές μπλε καμπύλες είναι τυπικές στάθμες $E_0 \neq 0$ (Σχ. 6). 28
- 2 Περίπτωση Β ($\alpha = \kappa_0^2 > 0$, $\gamma = -\mu_0^2 < 0$). *Αριστερά*: το ανεστραμμένο δυναμικό, με ελάχιστο στο ευσταθές $\phi_0^* = 0$ και μέγιστα στα ασταθή $\pm\kappa_0/\mu_0$. *Δεξιά*: η έντονη κόκκινη καμπύλη είναι η **ετεροκλινική** τροχιά $E_0 = \kappa_0^4/4\mu_0^2$, που συνδέει τα δύο ασταθή σημεία και αντιστοιχεί στη λύση σκοτεινού σολιτονίου της §8.5. Η σύγκριση με το Σχ. 1 δείχνει καθαρά την αντιστροφή της ευστάθειας. Σημειώνεται ότι η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε $\beta < 0$ (βλ. (10)). 28
- 3 Το πραγματικό μέρος της λύσης φωτεινού σολιτονίου (8) για $k = 1.2$, $\sigma = \beta = 1$ (άρα $\beta > 0$, όπως απαιτεί η Περίπτωση Α), $s \in (-7, 18)$, $t \in (0, 10)$. Ο κατακόρυφος άξονας καλύπτει ολόκληρο το εύρος $\pm\sqrt{\sigma/\beta} = \pm 1$, ώστε να φαίνονται όλες οι κορυφές και τα βυθίσματα της εσωτερικής ταλάντωσης. Η περιβάλλουσα $\pm \operatorname{sech}(s)$, σχεδιασμένη διακεκομμένη στην πρόσοψη $t = 0$, διατηρεί το σχήμα της καθώς μετακινείται με ταχύτητα $v = \sigma k$, ενώ η ταλάντωση εντός της οφείλεται αποκλειστικά στον όρο φάσης και δεν επηρεάζει την πυκνότητα $|\psi_4|^2$. Οι παράμετροι και τα διαστήματα είναι εκείνα του Σχ. 6 του άρθρου [7], ώστε η σύγκριση να είναι άμεση. 30
- 4 Το πραγματικό μέρος της λύσης σκοτεινού σολιτονίου (10) για $k = 1.2$, $\sigma = 1$, $\beta = -1$ (άρα $|\beta| = 1$ και πλάτος $\sqrt{\sigma/|\beta|} = 1$), $s \in (-7, 18)$, $t \in (0, 5)$ — αναπαράγωγή του Σχ. 3 του άρθρου [7]. Σημειώνεται ότι το πρόσημο $\beta < 0$ είναι υποχρεωτικό εδώ: με $\beta > 0$ η Περίπτωση Β δεν υφίσταται. Η αλλαγή προσήμου αφορά την περιβάλλουσα $\tanh(s - \sigma kt)$ και όχι το ίδιο το $\operatorname{Re} \psi_2$, το οποίο ταλαντώνεται σε ολόκληρο το πεδίο λόγω του όρου φάσης: το κινούμενο μέτωπο διακρίνεται ως η γραμμή $s = \sigma kt$ όπου το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται. Η περιβάλλουσα $\pm \tanh(s)$ είναι σχεδιασμένη διακεκομμένη στην πρόσοψη $t = 0$ 33
- 5 Τα δύο χωρικά προφίλ $\phi(\xi)$ που παρήχθησαν στις §8.4 και §8.5. Το φωτεινό σολιτόνιο είναι εντοπισμένο και μηδενίζεται στο άπειρο (μηδενικές συνοριακές συνθήκες, §8.4.1), ενώ το σκοτεινό συνδέει τις δύο μη μηδενικές τιμές $\pm\phi_0 = \pm\kappa_0/\mu_0$ ((9)). Η διαφορά αυτή στις συνοριακές συνθήκες είναι ακριβώς η διαφορά ομοκλινικής–ετεροκλινικής τροχιάς των Σχ. 1–2. 34
- 6 Το δυναμικό $V(\phi)$ των δύο περιπτώσεων της §8.3 και τα επίπεδα ενέργειας E_0 που παράγουν τις ελλειπτικές λύσεις. Οι λύσεις sech και $\tanh$ των §8.4–8.5 είναι οι **διαχωριστικές** στάθμες: κάθε άλλη επιτρεπτή στάθμη δίνει περιοδική λύση: cn για $E_0 > 0$ (§8.7), sn για $0 < E_0 < \kappa_0^4/4\mu_0^2$ (§8.8) και dn για $-\kappa_0^4/4\mu_0^2 < E_0 < 0$ (§8.9). Οι τρεις αυτές οικογένειες εξαντλούν τις μη εκφυλισμένες περιοδικές φραγμένες τροχιές: μαζί με τις σταθερές και τις διαχωριστικές λύσεις συμπληρώνουν την ταξινόμηση των φραγμένων τροχιών του συστήματος. 35
- 7 Το προφίλ πιθανοτικής έντασης $|\psi_2|^2 = \frac{\sigma}{|\beta|} \tanh^2(s - \sigma kt)$, σε μονάδες $\sigma/|\beta|$. Το «βύθισμα» στο $s = \sigma kt$ είναι η ζώνη αποκλεισμού που ερμηνεύεται στη §9.2: εκατέρωθεν το προφίλ σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στην τιμή $\sigma/|\beta|$. Υπενθυμίζεται ότι η λύση αυτή απαιτεί $\beta < 0$ 42

- 8 Το προφίλ $|\psi_2(s, t)|^2$ στο επίπεδο (s, t) για $k = 1.2$, $\sigma = 1$, σε μονάδες $\sigma/|\beta|$. Η σκούρα λωρίδα αντιστοιχεί σε χαμηλή ένταση και είναι η ζώνη αποκλεισμού· το ανοιχτόχρωμο υπόβαθρο αντιστοιχεί στην ασυμπτωτική τιμή 1. Η λωρίδα μετατοπίζεται κατά μήκος της ευθείας $s = \sigma kt$ (διακεκομμένη), με $ds/dt = v = \sigma k$. Εδώ το σ είναι ο αδιάστατος συντελεστής διασποράς της NLS, όχι απευθείας η μεταβλητότητα σ_{BS} 44
- 9 Σύγκριση της sech^2 με κατανομή Gauss ίδιου ύψους και ίδιας καμπυλότητας στην κορυφή. *Αριστερά*: σε γραμμική κλίμακα οι δύο καμπύλες είναι σχεδόν δυσδιάκριτες. *Δεξιά*: σε λογαριθμική κλίμακα η sech^2 φθίνει γραμμικά (δηλαδή ως $e^{-2|s|}$) ενώ η Gauss παραβολικά (ως e^{-s^2}): στις ουρές η διαφορά φτάνει πολλές τάξεις μεγέθους. Αυτό είναι το ποσοτικό περιεχόμενο του ισχυρισμού για τις βαρύτερες ουρές — πρόκειται όμως για εκθετικές και όχι για δυναμοσειριακές ουρές, βλ. Παρατήρηση 10. 46
- 10 Τα δύο κανονικοποιημένα ως προς το ύψος προφίλ $|\psi|^2$ μαζί. Το σκοτεινό σολιτόνιο παρουσιάζει ελάχιστη σχετική ένταση στο κέντρο («διχασμός»), ενώ το φωτεινό παρουσιάζει εκεί μέγιστη σχετική ένταση («συναίνεση»). Οι δύο καμπύλες είναι ακριβώς συμπληρωματικές, αφού $\tanh^2 + \text{sech}^2 = 1$ (και οι δύο σε μονάδες $\sigma/|\beta|$). Υπενθυμίζεται πάντως ότι δεν ανήκουν στο ίδιο καθεστώς σταθερού β : απαιτούν αντίθετα πρόσημα της μη γραμμικότητας (Παρατήρηση 11). 47
- 11 Δύο από τις τρεις περιοδικές οικογένειες: τα προφίλ sn^2 και cn^2 για $m = 0.30, 0.80, 0.99$ (σε μονάδες $\sigma/|\beta|$), στην κανονικοποίηση $p = 1$. Το m είναι το μέτρο (modulus), σύμφωνα με την Παρατήρηση 6. Καθώς $m \rightarrow 1$ τα προφίλ τείνουν αντίστοιχα στα $\tanh^2$ και sech^2 . Για την cn η παραμετροποίηση (17) του διπλού πηγαδιού απαιτεί $m > 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ (Παρατήρηση 7)· η καμπύλη $m = 0.30$ του δεξιού πλαισίου δείχνει μόνο την τυπική επέκταση του cn κλάδου έξω από το διπλό πηγάδι. Η τρίτη περιοδική οικογένεια, dn^2 , απεικονίζεται χωριστά στο Σχ. 12. 48
- 12 Το περιοδικό προφίλ dn^2 για $m = 0.30, 0.80, 0.99$ (σε μονάδες $\sigma/|\beta|$), στην κανονικοποίηση $p = 1$. Σε αντίθεση με τα sn^2 και cn^2 , η dn^2 παραμένει αυστηρά θετική: τα ελάχιστα της είναι $1 - m^2$ και δεν μηδενίζεται. Για $m \rightarrow 1$ τείνει στη sech^2 , ενώ για $m \rightarrow 0$ τείνει ομοιόμορφα στη σταθερά 1. Απεικονίζει έτσι περιοδική διαμόρφωση πάνω σε θετικό υπόβαθρο, χωρίς ζώνες αποκλεισμού. 50
- 13 Η κανονικοποιημένη κλίμακα $\Lambda_\xi = 2K(m)$ για $p = 1$ ως συνάρτηση του ελλειπτικού μέτρου m . Γενικά η περίοδος των τετραγωνικών προφίλ είναι $\Lambda_\xi = 2K(m)/p$. Η απόκλιση καθώς $m \rightarrow 1^-$ είναι λογαριθμική· το σχήμα απεικονίζει την ειδική κανονικοποίηση $p = 1$. Η Λ_ξ μετριέται στην αδιάστατη μεταβλητή ξ της Παρατήρησης 2. 50

1 Εισαγωγή

Στις αρχές της δεκαετίας του 1970, οι Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton παρουσίασαν μια καθοριστική καινοτομία στην τιμολόγηση των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης επί μετοχών. Επρόκειτο για το υπόδειγμα που έμεινε γνωστό ως Black-Scholes-Merton (ή απλώς Black-Scholes). Το συγκεκριμένο υπόδειγμα επηρέασε βαθιά τις πρακτικές των επενδυτών στην αποτίμηση και την αντιστάθμιση κινδύνων στα παράγωγα. Το 1997, η σημασία του υποδείγματος αναγνωρίστηκε διεθνώς, όταν οι Robert Merton και Myron Scholes τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ Οικονομικών (Ο Fischer Black είχε αποβιώσει το 1995).

Πριν προχωρήσουμε, όμως, στην ανάλυση του υποδείγματος θα πρέπει να εξηγήσουμε ποια είναι η έννοια των παραγώγων. **Παράγωγο** είναι ένα χρηματοοικονομικό εργαλείο – αξιόγραφο η τιμή του οποίου εξαρτάται από την αγοραία τιμή ενός ή περισσότερων υποκείμενων προϊόντων – τίτλων [1]. Ο επίσημος στατιστικός ορισμός, με τα κριτήρια ταξινόμησης που χρησιμοποιούνται στα εθνικά ισοζύγια πληρωμών, δίνεται στο [3].

Τα παράγωγα χρησιμοποιούνται για αντιστάθμιση κινδύνου (hedging) έναντι των διακυμάνσεων της αγοράς και για κερδοσκοπία (speculation), ενώ η διαπραγμάτευσή τους γίνεται στο χρηματιστήριο ή και εξωχρηματιστηριακά. Επίσης, σε αντίθεση με τους χρεωστικούς τίτλους κανένα κεφάλαιο δεν προκαταβάλλεται προς εξόφληση και δεν προκύπτει εισόδημα από επενδύσεις. Τα πιο κοινά υποκείμενα προϊόντα με τα οποία είναι συνδεδεμένα τα παράγωγα είναι οι μετοχές, τα ομόλογα, τα εμπορεύματα, τα νομίσματα και τα επιτόκια.

Τα παράγωγα χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες, ακολουθώντας την ταξινόμηση του [1]:

1. **Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης** (future contracts). Ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών για την αγορά ή την παράδοση ενός περιουσιακού στοιχείου σε προκαθορισμένη τιμή και σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία. Τα συμβόλαια αυτά διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια και χρησιμοποιούνται από τους διαπραγματευτές (traders) είτε για αντιστάθμιση κινδύνου είτε για κερδοσκοπία πάνω στην τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου - προϊόντος. Και τα δύο μέρη που συμμετέχουν δεσμεύονται νομικά να ολοκληρώσουν τη συμφωνημένη συναλλαγή αγοράς ή πώλησης του περιουσιακού στοιχείου.
2. **Προθεσμιακά συμβόλαια** (forward contracts). Η διαπραγμάτευση αυτών των συμβολαίων πραγματοποιείται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς. Σύμφωνα με τους όρους τους, ο αντισυμβαλλόμενος που βρίσκεται σε θέση αγοράς (long) δεσμεύεται να αγοράσει μια συγκεκριμένη ποσότητα αγαθού σε προκαθορισμένη τιμή και χρόνο στο μέλλον. Αντίστοιχα, ο αντισυμβαλλόμενος που κατέχει θέση πώλησης (short) υποχρεούται να πουλήσει την καθορισμένη ποσότητα του αγαθού στην ίδια προκαθορισμένη τιμή και χρονική στιγμή.
Τα προθεσμιακά συμβόλαια ενέχουν υψηλότερο κίνδυνο αντισυμβαλλομένου (counterparty risk), ο οποίος αποτελεί μορφή πιστωτικού κινδύνου. Αυτός ο κίνδυνος προκύπτει όταν ένα από τα μέρη αδυνατεί να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις που προβλέπει η σύμβαση. Σε περίπτωση αφερεγγυότητας ενός μέρους, το άλλο μέρος ενδέχεται να μην έχει δυνατότητα προσφυγής και να υποστεί απώλεια της αξίας της θέσης του.
3. **Δικαιώματα Προαίρεσης** (Options). Το υπόδειγμα Black-Scholes ασχολείται με τον καθορισμό της τιμής ακριβώς αυτών των δικαιωμάτων γι' αυτό θα τα αναλύσουμε λίγο παραπάνω.
Τα δικαιώματα προαίρεσης διαπραγματεύονται τόσο σε χρηματιστήρια όσο και στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Διακρίνονται σε δύο βασικούς τύπους:

- **Δικαίωμα αγοράς** (call option): παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή έως μια συγκεκριμένη ημερομηνία.
- **Δικαίωμα πώλησης** (put option): παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή έως μια συγκεκριμένη ημερομηνία.

Η προκαθορισμένη τιμή ονομάζεται strike price, ενώ η συγκεκριμένη ημερομηνία είναι η expiration date.

Στα αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης η άσκηση του δικαιώματος μπορεί να γίνει οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη, ενώ στα ευρωπαϊκά μόνο την ίδια την ημέρα λήξης. Τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης είναι συνήθως ευκολότερα στην ανάλυση και αποτελούν τη βάση για την εξαγωγή ιδιοτήτων των αμερικανικών. Το υπόδειγμα Black-Scholes ασχολείται με τον υπολογισμό τιμών για ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα.

Κύριο χαρακτηριστικό ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι ότι προσφέρει στον κάτοχο το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να προβεί σε αγορά ή πώληση. Αυτό τα διαφοροποιεί από τα προθεσμιακά και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, όπου η εκτέλεση της συναλλαγής είναι υποχρεωτική. Σε αντίθεση με αυτά, η απόκτηση ενός δικαιώματος προαίρεσης συνεπάγεται πάντοτε κόστος (premium).

Ας δούμε ένα παράδειγμα αντιστάθμισης κινδύνου που κάνει πιο ξεκάθαρη την έννοια των options. Έστω ότι ένας επενδυτής έχει στην κατοχή του 200 μετοχές με τρέχουσα αξία ανά μετοχή 40 €. Ευελπιστεί ότι η τιμή τους θα αυξηθεί στο μέλλον, ωστόσο, για να αντισταθμίσει τον ενδεχόμενο κίνδυνο από την πτώση της τιμής τους, αγοράζει ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης πώλησης με κόστος 1 €/μετοχή το οποίο του δίνει το δικαίωμα να πουλήσει τις μετοχές του σε δύο μήνες (συνήθως τα options είναι μέχρι ενός έτους με κάποιες εξαιρέσεις) στην τιμή των 40 €. Εάν η τιμή ανά μετοχή μειωθεί στα 20 € τότε θα ασκήσει το δικαίωμα και θα έχει κόστος μόνο $1 \times 200 = 200$ €. Αν δεν είχε κάνει αντιστάθμιση κινδύνου θα είχε ζημιά $20 \times 200 = 4000$ €.

Αντίθετα, σε περίπτωση που αυξηθεί η τιμή ανά μετοχή στο τέλος των δύο μηνών, έστω στα 50 €, δεν ασκεί το δικαίωμα, πουλά στα 50 € και έχει πάλι κόστος $1 \times 200 = 200$ €.

4. **Συμβάσεις Ανταλλαγής** (Swaps). Τα swaps χρησιμοποιούνται κυρίως για την ανταλλαγή διαφορετικών τύπων ταμειακών ροών. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής μπορεί να αξιοποιήσει ένα swap επιτοκίου προκειμένου να μεταβεί από ένα δάνειο με μεταβλητό επιτόκιο σε ένα με σταθερό ή το αντίστροφο. Τα swaps δεν διαπραγματεύονται σε οργανωμένες αγορές και γενικά δεν εμπλέκονται σε αυτά ιδιώτες επενδυτές, ενώ είναι από τα παράγωγα που συνέβαλαν στη χρηματοπιστωτική κρίση του 2008.

2 Υπόδειγμα Black-Scholes - Υποθέσεις

Μετά τη μικρή εισαγωγή στα παράγωγα θα επικεντρωθούμε, πλέον, στο υπόδειγμα Black-Scholes.

Αφού παραθέσουμε τις απαραίτητες υποθέσεις του υποδείγματος έτσι ώστε να προκύπτει μια αναλυτική λύση, κατόπιν θα εξάγουμε τον γενικό τύπο του υποδείγματος σε μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων καθώς και τους τύπους κλειστής μορφής για την τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Το υπόδειγμα αυτό χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης (options). Για μια διαισθητική παρουσίαση των υποθέσεων και του ρόλου τους βλ. [5]. Οι βασικές παραδοχές της κλασικής εκδοχής είναι οι εξής:

1. Η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, έστω μετοχές, ακολουθεί **γεωμετρική κίνηση Brown**. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση (SDE) που περιγράφει τη δυναμική της τιμής S_t είναι

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

όπου μ είναι η αναμενόμενη απόδοση υπό το πραγματικό μέτρο πιθανότητας, σ η μεταβλητότητα και W_t τυπική κίνηση Brown. Για σταθερά μ, σ οι τιμές S_t είναι λογαριθμοκανονικά κατανεμημένες και παραμένουν θετικές.

2. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για **αρμπιτράζ** (arbitrage), δηλαδή δυνατότητες βέβαιου κέρδους χωρίς καθαρή επένδυση και χωρίς κίνδυνο. Η αρχή του μη αρμπιτράζ είναι το κρίσιμο οικονομικό επιχείρημα που επιτρέπει την αποτίμηση του αντισταθμισμένου χαρτοφυλακίου με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.
3. Η αγορά θεωρείται **χωρίς τριβές**: δεν υπάρχουν φόροι, προμήθειες ή κόστη συναλλαγών, τα περιουσιακά στοιχεία είναι απείρως διαιρετά, επιτρέπεται συνεχής αναπροσαρμογή της αντιστάθμισης και ο δανεισμός/η τοποθέτηση κεφαλαίων γίνεται στο ίδιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.
4. Στην κλασική μορφή που χρησιμοποιούμε δεν καταβάλλονται **μερίσματα** κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος.
5. Το **επιτόκιο χωρίς κίνδυνο** r θεωρείται σταθερό. Η υπόθεση αυτή απλοποιεί την αναλυτική επίλυση· γενικότερες εκδοχές μπορούν να επιτρέψουν χρονικά μεταβαλλόμενο επιτόκιο.
6. Η **μεταβλητότητα** σ θεωρείται γνωστή και σταθερή. Η παραδοχή αυτή είναι καθοριστική για την κλασική λύση κλειστής μορφής, όχι όμως για τη γραμμικότητα καθαυτή της ΜΔΕ. Στην πράξη η τεχμαρτή μεταβλητότητα μεταβάλλεται με την τιμή άσκησης και τη λήξη, σχηματίζοντας χαμόγελο ή λοξότητα μεταβλητότητας (smile/skew).

Δύο διευκρινίσεις. Η υπόθεση αποτελεσματικών αγορών, με την έννοια ότι οι τιμές ενσωματώνουν όλη τη διαθέσιμη πληροφορία, συχνά συνοδεύει τη γενικότερη οικονομική συζήτηση, αλλά *δεν αποτελεί ανεξάρτητη μαθηματική προϋπόθεση* της παραγωγής της εξίσωσης Black-Scholes. Επίσης, η κλασική λύση κλειστής μορφής αφορά ευρωπαϊκά δικαιώματα. Για αμερικανικά δικαιώματα η δυνατότητα πρόωρης άσκησης οδηγεί γενικά σε πρόβλημα ελεύθερου συνόρου και απαιτεί αριθμητική ή άλλη ειδική αντιμετώπιση. Ειδικά όμως ένα αμερικανικό δικαίωμα αγοράς σε μετοχή χωρίς μέρισμα δεν συμφέρει να ασκηθεί πρόωρα και έχει την ίδια αξία με το αντίστοιχο ευρωπαϊκό [4, 38].

3 Εξαγωγή του Υποδείγματος Black-Scholes

Θεωρούμε μια **τυπική** κίνηση Brown (διαδικασία Wiener) $W(t)$, με $0 \leq t \leq T$ και χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η στοχαστική διαδικασία με την οποία καθορίζεται η τιμή μιας μετοχής είναι η εξής:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \quad (1)$$

όπου:

- Το $S(t)$ είναι η στοχαστική διαδικασία που αναπαριστά την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t . Η λύση $S(t)$ θα είναι μια τυχαία μεταβλητή για κάθε χρονική στιγμή t .
- Το $dS(t)$ αντιπροσωπεύει την απειροελάχιστη μεταβολή στην τιμή της μετοχής στο απειροστό χρονικό διάστημα dt .

- Το $\mu S(t)dt$ είναι το ντετερμινιστικό στοιχείο της διαδικασίας. Το μ είναι ο ρυθμός μεταβολής (drift) υπό το πραγματικό μέτρο πιθανότητας και εκφράζει την αναμενόμενη απόδοση της μετοχής. Δεν ταυτίζεται γενικά με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r . Στην αποτίμηση παραγώγων, η αρχή του μη αρμπιτράζ οδηγεί ισodύναμα σε ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο πιθανότητας, υπό το οποίο ο ρυθμός μεταβολής του υποκείμενου γίνεται r (στην περίπτωση χωρίς μερίσματα).
- Το σ είναι η μεταβλητότητα (volatility) των αποδόσεων της μετοχής. Είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας ή του κινδύνου που σχετίζεται με τη μετοχή. Όσο υψηλότερο είναι τόσο μεγαλύτερος είναι ο κίνδυνος. Θεωρείται και αυτό σταθερό.
- Το $dW(t)$ είναι η απειροστή προσauξηση της διαδικασίας Wiener, δηλαδή της τυπικής κίνησης Brown (γεωμετρική είναι η $S(t)$, όχι η $W(t)$). Αυτή είναι η πηγή της τυχαιότητας στο υπόδειγμα. Για το $dW(t)$ ισχύουν οι εξής υποθέσεις: είναι κανονικά κατανομημένο, $dW(t) \sim N(0, dt)$ · οι προσauξήσεις είναι στάσιμες, δηλαδή η κατανομή της $W(t+h) - W(t)$ εξαρτάται μόνο από το h και όχι από το t · και οι προσauξήσεις του W σε οποιαδήποτε δύο μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες.

Χρησιμοποιώντας την σχέση (1) θα προσδιορίσουμε τη λύση που θα μας δώσει τις πιθανές μελλοντικές τιμές της υποκείμενης μετοχής. Δηλαδή θα βρούμε μια κατανομή αποτελεσμάτων ώστε να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την πιθανότητα η μετοχή να ξεπεράσει, για παράδειγμα, μια συγκεκριμένη τιμή σε ένα έτος ή να προσομοιώσουμε χιλιάδες πιθανές μελλοντικές πορείες της.

Ορίζουμε $f(t, x) = \ln x$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Itô έχουμε:

$$\begin{aligned} d \ln(S_t) &= df(t, S_t) = 0 \cdot dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial x} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial x^2} (dS_t)^2 \\ &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (dS_t)^2 = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την (1) και τη σχέση $(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$. Ολοκληρώνοντας από 0 έως t , λαμβάνουμε την παρακάτω λύση:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Αφού βρήκαμε τον τύπο που περιγράφει τις τιμές που μπορεί να πάρει η μετοχή, θα προχωρήσουμε στην εξαγωγή της ΜΔΕ Black-Scholes — ακολουθώντας κατά βάση την παρουσίαση του [2] — για να υπολογίσουμε την τιμή, χωρίς αρμπιτράζ, ενός δικαιώματος προαίρεσης με βάση ακριβώς τη συμπεριφορά της μετοχής αυτής.

Έστω ότι $u(S(t), t)$ είναι η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης με πεδίο ορισμού:

$$0 \leq s < \infty, \quad 0 \leq t \leq T$$

όπου T είναι ο χρόνος λήξης του δικαιώματος. Η $u(S(t), t)$ είναι συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής S και του χρόνου t . Για να βρούμε το διαφορικό της du , πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Itô, που αποτελεί την εκδοχή του κανόνα της αλυσίδας, στον στοχαστικό λογισμό όμως.

Στη γενική της μορφή η στοχαστική διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ) (1) γράφεται ως:

$$dS = a(S, t)dt + b(S, t)dW$$

Οπότε το λήμμα Itô για du δίνει:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} (dS)^2 \quad (2)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε το $(dS)^2$. Από την (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= (\mu S dt + \sigma S dW)^2 \\ &= \mu^2 S^2 dt^2 + 2\mu\sigma S^2 dt dW + \sigma^2 S^2 (dW)^2 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του στοχαστικού λογισμού όπου $dt^2 = 0$, $dt dW = 0$, $(dW)^2 = dt$ το παραπάνω απλοποιείται σε:

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω καθώς και την έκφραση για το dS στην (2) έχουμε:

$$du(t) = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} dt \quad (3)$$

Από την (3) εξάγουμε (κάποια από) τα λεγόμενα Greeks.

$\frac{\partial u}{\partial t}$ (Theta), η ευαισθησία του δικαιώματος στη μεταβολή του χρόνου.

$\frac{\partial u}{\partial S}$ (Delta), η ευαισθησία του δικαιώματος στη μεταβολή της μετοχής.

$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$ (Gamma) αναπαριστά το ρυθμό μεταβολής μεταξύ του Delta και της τιμής της μετοχής (μαθηματικώς, την κυρτότητα σε σχέση με την τιμή της μετοχής).

Το επόμενο βήμα είναι να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου:

Για να απαλείψουμε τον στοχαστικό όρο dS , κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο, P , σχεδιασμένο να είναι απαλλαγμένο από κίνδυνο στο απειροστό χρονικό διάστημα dt .

$$P(t) = u(S(t), t) - n(t)S(t) \quad (4)$$

Εδώ το u αντιστοιχεί σε θέση αγοράς δικαιώματος αγοράς (long call option), ενώ το $n \cdot S$ αντιστοιχεί σε θέση πώλησης n μετοχών (short position). Θα επιλέξουμε το n έτσι ώστε να απαλείψουμε τον κίνδυνο.

Για μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική, η θέση $n(t)$ μπορεί να αναπροσαρμόζεται δυναμικά, χωρίς εξωτερική εισροή ή εκροή κεφαλαίου. Στο διαφορικό του χαρτοφυλακίου γράφουμε επομένως:¹

$$dP = du - n \cdot dS$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην παραπάνω εξίσωση έχουμε:

$$dP = \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} dt \right) - n \cdot dS$$

και

$$dP(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \right) dt + \left(\frac{\partial u}{\partial S} - n \right) dS$$

Κατόπιν απαλείψουμε τον κίνδυνο από την εξίσωση. Εφόσον το dS είναι ο στοχαστικός όρος θέλουμε δηλαδή να ισχύει

$$n = \frac{\partial u}{\partial S}$$

¹ Αυστηρά, το $n(t)$ είναι προσαρμοσμένη (adapted) διαδικασία και η αυτοχρηματοδότηση εκφράζεται σε ολοκληρωτική μορφή: $P_t = P_0 + \int_0^t du_s - \int_0^t n_s dS_s$. Στο συμβολικό διαφορικό αυτό αποδίδεται ως $dP = du - n dS$, χωρίς πρόσθετο όρο $-S dn$.

Αυτή είναι η στρατηγική αντιστάθμισης κινδύνου Delta (Delta Hedging). Με την πώληση ακριβώς $\frac{\partial u}{\partial S}$ μονάδων της μετοχής, το χαρτοφυλάκιο καθίσταται ουδέτερο απέναντι σε μικρές διακυμάνσεις της τιμής της μετοχής. Οπότε προκύπτει ότι

$$dP(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \right) dt \quad (5)$$

και το χαρτοφυλάκιο εξαρτάται πλέον μόνο από τον ντετερμινιστικό όρο dt και όχι από το dW .

Μια θεμελιώδης αρχή στα χρηματοοικονομικά είναι η αρχή του μη αρμπιτράζ. Ένα χαρτοφυλάκιο απαλλαγμένο από κίνδυνο οφείλει να αποδίδει το ίδιο με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, r . Σε διαφορετική περίπτωση θα δημιουργούνταν δυνατότητες εκμετάλλευσης: αν η απόδοση ήταν υψηλότερη, ένας επενδυτής θα μπορούσε να δανειστεί απεριόριστα με επιτόκιο r για να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο, εξασφαλίζοντας βέβαιο κέρδος. Αν ήταν χαμηλότερη, θα συνέφερε η πώλησή του και η τοποθέτηση των εσόδων με απόδοση r .

Συνεπώς θα ισχύει ότι

$$dP = rP dt$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση όπου dP την (5) και όπου P την (4) και επιπλέον $n = \frac{\partial u}{\partial S}$ θα είναι:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} \right) dt = r \left(u - \frac{\partial u}{\partial S} S \right) dt$$

Από όπου τελικά

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru = 0 \quad (6)$$

Η παραπάνω ΜΔΕ είναι η Black-Scholes. Παρατηρούμε ότι η αναμενόμενη απόδοση μ του πραγματικού υποδείγματος της μετοχής έχει εξαφανιστεί. Αυτό είναι συνέπεια της δυναμικής αντιστάθμισης και του μη αρμπιτράζ: ισοδύναμα, υπό το ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο $\mathbb{Q}$ η δυναμική γράφεται

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

στην περίπτωση χωρίς μερίσματα.

Από τη συγκεκριμένη ΜΔΕ που είναι γενική μπορούμε να εξάγουμε έναν συγκεκριμένο μαθηματικό τύπο – φόρμουλα (λύση κλειστής μορφής) που αφορά την τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης ευρωπαϊκού τύπου. Πρόκειται για ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται έτοιμο, αλλά η «πηγή» είναι η ανωτέρω ΜΔΕ.

4 Τύποι τιμολόγησης Black-Scholes

Στην ενότητα αυτή ακολουθούμε, μερικώς, την προσέγγιση του συγγράμματος Options, Futures, and Other Derivatives του John Hull [4]. Οι πιο διαδεδομένες λύσεις της ΜΔΕ (6) είναι οι τύποι που δίνουν τις τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς και πώλησης:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Η συνάρτηση $N(x)$ με $x = d_1, d_2$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για μια μεταβλητή με τυπική κανονική κατανομή. Οι μεταβλητές c και p αντιστοιχούν στις τιμές των ευρωπαϊκού τύπου δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Η S_0 δηλώνει την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή μηδέν, ενώ η K εκφράζει την τιμή άσκησης. Το r συμβολίζει το συνεχώς ανατοχιζόμενο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, το σ τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και το T τον χρόνο που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης.

Ένας τρόπος εξαγωγής του είναι να λύσουμε την (6) παίρνοντας τις συνοριακές συνθήκες

$$f = \max(S - K, 0) \quad \text{όταν } t = T$$

Για συμβόλαια αγοράς (Call Options).

Ο αγοραστής ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης αγοράς (Call Option) δεν θα προχωρούσε στην άσκηση του δικαιώματος εάν η τιμή της μετοχής βρισκόταν χαμηλότερα από την τιμή άσκησης, δηλαδή όταν το δικαίωμα είναι «εκτός χρημάτων» (out of the money). Αντίθετα, αν η τιμή της μετοχής υπερέβαινε την τιμή άσκησης, το δικαίωμα θα θεωρούνταν «εντός χρημάτων» (in the money) και ο αγοραστής είτε θα το ασκούσε είτε θα το μεταπωλούσε σε άλλον επενδυτή στην αγορά. Η αποτίμηση μιας τέτοιας επένδυσης αποτελεί παίγνιο μηδενικού αθροίσματος και πραγματοποιείται με τη χρήση της ανωτέρω συνάρτησης.

Και

$$f = \max(K - S, 0) \quad \text{όταν } t = T$$

Για συμβόλαια πώλησης.

Αντίστοιχη είναι η ανάλυση και της παραπάνω συνάρτησης αυτή τη φορά για συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης πώλησης (Put Option).

Τα Greeks

Ολοκληρώνοντας την ανάλυση για το υπόδειγμα Black-Scholes θα αναφερθούμε στα λεγόμενα Greeks. Στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, τα Greeks αναφέρονται στις μερικές παραγώγους που εκφράζουν το βαθμό ευαισθησίας της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης απέναντι σε διάφορους παράγοντες. Έχουμε ήδη μιλήσει για τα Theta, Delta και Gamma. Θα αναφερθούμε επιπλέον στα Rho και Vega.

Το Vega μετράει την ευαισθησία της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης στις μεταβολές της μεταβλητότητας (σ) και είναι το ίδιο για Call και Put Options:

$$\nu = \frac{\partial u}{\partial \sigma} = S\sqrt{T} N'(d_1)$$

Το Rho μετράει την ευαισθησία της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης στις μεταβολές του επιτοκίου άνευ κινδύνου (r).

Για Call Options είναι:

$$\rho_C = \frac{\partial u}{\partial r} = KTe^{-rT} N(d_2)$$

Για Put Options είναι:

$$\rho_P = \frac{\partial u}{\partial r} = -KTe^{-rT} N(-d_2)$$

5 Περιορισμοί και προβλήματα του υποδείγματος Black–Scholes

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, μία από τις βασικές υποθέσεις του υποδείγματος Black–Scholes είναι η σταθερή μεταβλητότητα (σ) των αποδόσεων των μετοχών. Κάτι τέτοιο όμως αποτελεί και ένα βασικό θεωρητικό μειονέκτημα του υποδείγματος που αναδείχθηκε με πρακτικό και αδιαμφισβήτητο τρόπο μετά το χρηματιστηριακό «κραχ» της Μαύρης Δευτέρας του έτους 1987. Ο βιομηχανικός δείκτης Dow Jones—ο σημαντικότερος δείκτης της αμερικανικής οικονομίας εκείνη την περίοδο—κατέγραψε πτώση 22,6%. Οι πωλητές δικαιωμάτων προαίρεσης πώλησης, τα οποία θεωρητικά λειτουργούσαν ως προστασία απέναντι σε τέτοιες περιπτώσεις, υπέστησαν σημαντικές απώλειες. Το γεγονός αυτό ανέδειξε ότι, παρότι ο τύπος Black–Scholes αποδίδει ικανοποιητικά σε κανονικές συνθήκες αγοράς, αδυνατεί να ενσωματώσει και να προβλέψει ακραία χρηματιστηριακά φαινόμενα.

Συγκεκριμένα, η δραματική πτώση των τιμών εκείνης της ημέρας ήταν στατιστικά εξαιρετικά απίθανη υπό τις βασικές υποθέσεις του υποδείγματος, το οποίο στηρίζεται σε συνεχείς κινήσεις τιμών και σε σταθερή μεταβλητότητα. Ως άμεση αντίδραση, η αγορά προσαρμοσε τις παραμέτρους του μοντέλου κατά τρόπο που οδήγησε στην εμφάνιση του λεγόμενου «χαμόγελου μεταβλητότητας» (volatility smile). Στο νέο αυτό πλαίσιο, οι επιλογές που παρείχαν προστασία έναντι απότομων πτώσεων τιμολογήθηκαν με υψηλότερη μεταβλητότητα.

Γενικά, παρατηρήθηκε πως, όταν το υπόδειγμα Black–Scholes εφαρμόζεται σε πραγματικές τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουν κοινή ημερομηνία λήξης αλλά διαφορετικές τιμές άσκησης, η μεταβλητότητα δεν εμφανίζεται σταθερή· αντιθέτως, σχηματίζει τη χαρακτηριστική καμπύλη σε σχήμα “U”, το λεγόμενο χαμόγελο μεταβλητότητας. Το φαινόμενο αυτό αποκαλύπτει ότι η αγορά αποδίδει διαφορετικά επίπεδα κινδύνου στις ακραίες τιμές των μετοχών, κάτι που δεν μπορεί να αποτυπωθεί από την υπόθεση κανονικής κατανομής και σταθερής μεταβλητότητας που διέπει το μοντέλο Black–Scholes.

Συστηματική καταγραφή των αδυναμιών του υποδείγματος — σταθερή μεταβλητότητα, κανονικότητα των αποδόσεων, απουσία κόστους συναλλαγών και απουσία γενικής λύσης κλειστής μορφής για δικαιώματα με πρόωρη άσκηση — δίνεται στο [6], ενώ μια συνοπτική ιστορική αποτίμηση της επίδρασης και των ορίων του τύπου υπάρχει στο [19].

Σήμερα, το μοντέλο Black–Scholes αντιμετωπίζεται κυρίως ως μια θεμελιώδη προσέγγιση πρώτης τάξης, χρήσιμη ως αφετηρία, αλλά ανεπαρκής ως πλήρες εργαλείο για την περιγραφή της συμπεριφοράς των αγορών.

6 Επεκτάσεις και Εναλλακτικά Μοντέλα

Για την αντιμετώπιση των περιορισμών του αρχικού πλαισίου, έχει αναπτυχθεί μια σειρά από πιο εξελιγμένα υποδείγματα, μεταξύ των οποίων:

- **Υποδείγματα τοπικής μεταβλητότητας (local volatility models):** Εισάγουν μεταβλητότητα που εξαρτάται από την τρέχουσα τιμή της μετοχής και τον χρόνο, επιτρέποντας καλύτερη προσαρμογή στις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης.
- **Στοχαστικά υποδείγματα μεταβλητότητας (stochastic volatility models):** Η μεταβλητότητα θεωρείται στοχαστική διαδικασία (π.χ. μοντέλο Heston), προσφέροντας πιο ρεαλιστική περιγραφή της δυναμικής της αγοράς.
- **Jump–diffusion μοντέλα:** Ενσωματώνουν ασυνεχείς, ξαφνικές μεταβολές των τιμών (jumps), προκειμένου να αποτυπώσουν αιφνίδια γεγονότα, όπως κρίσεις ή απότομες ανατιμήσεις και υποτιμήσεις.

Υπάρχουν κι άλλα υποδείγματα που προσπαθούν να αμβλύνουν το πρόβλημα του «χαμόγελου μεταβλητότητας». Εμείς, στην παρούσα εργασία θα αναλύσουμε ένα υπόδειγμα που εισάγει την κυματική περιγραφή της τιμολόγησης παραγώγων, αντλώντας έμπνευση από τις μεθόδους της κβαντομηχανικής. Συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε ένα προσαρμοστικό, μη γραμμικό και στοχαστικό υπόδειγμα τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης (Adaptive Wave Option Pricing Model) στηριζόμενοι στο άρθρο Adaptive-Wave Alternative for the Black-Scholes Option Pricing Model του Vladimir G. Ivancevic που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Cognitive Computation [7].

7 Το προσαρμοστικό μη γραμμικό μοντέλο Schrödinger

Το υπόδειγμα που θα αναλύσουμε στηρίζεται σε μια προσαρμοστική μορφή της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger (Nonlinear Schrödinger Equation, στο εξής NLS) — μιας από τις θεμελιώδεις εξισώσεις της μη γραμμικής κυματικής διάδοσης, για την οποία η κανονική βιβλιογραφία είναι τα [22, 23, 24] και, για τις φυσικές εφαρμογές σε οπτικές ίνες, το [37] — και επιχειρεί να συνδυάσει: (α) την κβαντική πιθανοτική θεώρηση (όπου η κυματοσυνάρτηση ενός «σωματιδίου» αποδίδει πιθανότητες εξέλιξης των τιμών), (β) τη μη γραμμικότητα που επιτρέπει φαινόμενα όπως τα μοναχικά κύματα (solitons), και (γ) την προσαρμοστικότητα της αγοράς σύμφωνα με τη θεωρία των προσαρμοστικών αγορών του Lo. Στόχος είναι ένα υπόδειγμα που να «αντιλαμβάνεται» τόσο την αποτελεσματικότητα όσο και τις συμπεριφορικές ανωμαλίες των αγορών, δίνοντας μια πιο ρεαλιστική αποτύπωση της τυχαίας (Brownian) συμπεριφοράς των χρηματοπιστωτικών αγορών.

7.1 Θεωρητικό υπόβαθρο του υποδείγματος

Ακολουθεί το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκε ο συγγραφέας για την κατασκευή και αιτιολόγηση του συγκεκριμένου υποδείγματος το οποίο δίνεται εδώ στη μορφή που έχει και στο άρθρο που αναπτύσσεται [7].

$$i \partial_t \psi = -\frac{1}{2} \sigma \partial_{ss} \psi - \beta |\psi|^2 \psi, \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (7)$$

Στο [7] η $\psi = \psi(s, t)$ εισάγεται ως μιγαδική κυματοσυνάρτηση του προσαρμοστικού κυματικού υποδείγματος, με s τη μεταβλητή που συνδέεται με την τιμή του υποκείμενου και t τον χρόνο. Η οικονομική της ερμηνεία δεν είναι μοναδική και διευκρινίζεται αμέσως στην Παρατήρηση 1.

Στην πιθανοτική ανάγνωση του άρθρου, το $|\psi|^2$ λειτουργεί ως προφίλ πιθανότητας πάνω στον χώρο της μεταβλητής s . Αυστηρά, ο χαρακτηρισμός «πυκνότητα πιθανότητας» απαιτεί κατάλληλη κανονικοποίηση, ζήτημα στο οποίο επανερχόμαστε στη §9.13.

Το σ της (7) πολλαπλασιάζει τον όρο δεύτερης χωρικής παραγώγου και λειτουργεί μαθηματικά ως συντελεστής διασποράς. Το άρθρο [7] τον ονομάζει μεταβλητότητα, αλλά στην παρούσα εργασία δεν τον ταυτίζουμε απευθείας με την ετησιοποιημένη μεταβλητότητα της Black-Scholes· μετά την αδιαστατοποίηση της Παρατήρησης 2 είναι αδιάστατη παράμετρος του κυματικού μοντέλου.

Το $\beta = \beta(r, w)$ είναι το προσαρμοστικό δυναμικό της αγοράς (adaptive market potential) και στην απλή περίπτωση που δεν χρήζει προσαρμογής στα δεδομένα της αγοράς είναι ίσο με το επιτόκιο r . Διαφορετικά προσαρμόζεται δυναμικά (π.χ. μέσω αλγορίθμων μάθησης όπως οι Hebbian ή Levenberg-Marquardt). Η παρουσία του $i \partial_t \psi$ δείχνει ότι το μοντέλο NLS έχει δυναμική τύπου Schrödinger και περιγράφει την εξέλιξη μιας μιγαδικής κυματοσυνάρτησης ψ . Αντίθετα, η Black-Scholes είναι πραγματική ΜΔΕ τύπου διάχυσης για την τιμή $u(S, t)$ του δικαιώματος και δεν περιλαμβάνει κυματοσυνάρτηση ψ .

Παρατήρηση 1 (Τι ακριβώς αναπαριστά η ψ και τι το $|\psi|^2$). Η διατύπωση του [7] επιδέχεται δύο αναγνώσεις και αξίζει να διακριθούν ρητά, γιατί χρησιμοποιούνται και οι δύο στη συνέχεια:

- **Πιθανοτική ανάγνωση.** Η ανεξάρτητη μεταβλητή s είναι η τιμή (ή η λογαριθμική τιμή) του υποκειμένου, και το $|\psi(s, t)|^2$ είναι πυκνότητα πιθανότητας πάνω στον χώρο των τιμών του υποκειμένου. Αυτή είναι η ανάγνωση που κληρονομείται από το προσαρμοστικό ολοκλήρωμα διαδρομής της §7.2.2 και είναι εκείνη που χρησιμοποιούμε σε ολόκληρο το Κεφάλαιο 9.
- **Ανάγνωση αποτίμησης.** Το ίδιο το $|\psi(s, t)|$ (και όχι το τετράγωνό του) προσαρμόζεται στην καμπύλη τιμής $u(s, t)$ του δικαιώματος, όπως γίνεται στα Σχ. 8–10 του [7]. Σε αυτήν την ανάγνωση στηρίζεται η §9.4 και η πρώτη επιφύλαξη της §9.13.

Οι δύο αναγνώσεις δεν συνεπάγονται η μία την άλλη: η πρώτη απαιτεί $\int |\psi|^2 ds < \infty$, η δεύτερη απαιτεί μονοτονία ως προς s . Ωστόσο, το μοντέλο τις χρησιμοποιεί εναλλάξ. Θα επανέλθουμε στο ζήτημα αυτό στην §9.13.

Παρατήρηση 2 (Διαστάσεις και αδιαστατοποίηση). Το όρισμα $s - \sigma k t$ των λύσεων που θα κατασκευάσουμε πρέπει να είναι *αδιάστατο*. Αν το s μετριέται σε μονάδες τιμής και το σ είναι η ετησιοποιημένη μεταβλητότητα της Black–Scholes, αυτό δεν ισχύει. Για να ξεχωρίζουμε τις δύο ποσότητες, συμβολίζουμε εδώ τη μεταβλητότητα του κλασικού υποδείγματος με σ_{BS} . Μια συνεπής αδιαστατοποίηση είναι, για παράδειγμα,

$$x = \frac{1}{\sigma_{BS}\sqrt{T}} \ln \frac{S}{K}, \quad \tau = \frac{t}{T}.$$

Το x είναι αδιάστατη λογαριθμική απόσταση από την τιμή άσκησης. Επομένως το σ της (7) δεν ταυτίζεται άμεσα με το σ_{BS} της (6): μετά την επιλογή αδιάστατων μεταβλητών τα σ, β, k της (7) είναι καθαροί αριθμοί (αντίστοιχα συντελεστής διασποράς, ένταση μη γραμμικότητας και κυματαριθμός). Στη συνέχεια διατηρούμε τον συμβολισμό (s, t) του [7], εννοώντας τις αδιαστατοποιημένες μεταβλητές.

Παρατήρηση 3 (Σε ποια χρονική κλίμακα δρα η προσαρμοστικότητα). Οι αναλυτικές λύσεις των §8.4–8.9 κατασκευάζονται με ansatz οδεύοντος κύματος, το οποίο προϋποθέτει *σταθερούς* συντελεστές. Άρα σε όλες αυτές τις λύσεις το β θεωρείται «παγωμένο». Αυτό δεν αναιρεί τον χαρακτηρισμό «προσαρμοστικό μοντέλο», αλλά τον τοποθετεί σωστά: το μοντέλο λειτουργεί σε *δύο χρονικές κλίμακες*. Στη *γρήγορη* κλίμακα (t της (7)) το β είναι σταθερό και η δυναμική είναι η κυματική δυναμική που μελετάμε: στην *αργή* κλίμακα (μεταξύ επεισοδίων βαθμονόμησης) οι κανόνες μάθησης της §7.2.3 ενημερώνουν τα βάρη w και άρα το β , μετακινώντας το σύστημα σε άλλο μέλος του κατάλληλου δυναμικού κλάδου. Όπως θα φανεί στη §9.14, το *πρόσημο* του β επιλέγει οικογένεια και το μέτρο του ρυθμίζει την κλίμακα των πλατών· η προσαρμογή του β είναι επομένως ακριβώς η μετακίνηση μέσα σε αυτόν τον χώρο καθεστώτων.

Παρατήρηση 4 (Πώς σχετίζονται τυπικά η Black–Scholes και η Schrödinger). Η (7) δεν προκύπτει από την (6) με παραγωγή: είναι ένα *ανεξάρτητο* υπόδειγμα εμπνευσμένο από την κβαντομηχανική. Υπάρχει ωστόσο μια κλασική τυπική γέφυρα ανάμεσα στις δύο δομές, την οποία σημειώνουμε γιατί εξηγεί γιατί η αντιπαράβολή τους δεν είναι αυθαίρετη. Με τους μετασχηματισμούς

$$x = \ln \frac{S}{K}, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma_{BS}^2(T - t), \quad u(S, t) = K e^{-\frac{q-1}{2}x - \frac{(q+1)^2}{4}\tau} v(x, \tau), \quad q = \frac{2r}{\sigma_{BS}^2},$$

όπου σ_{BS} είναι η μεταβλητότητα του κλασικού υποδείγματος (Παρατήρηση 2), η (6) ανάγεται στην **εξίσωση θερμότητας** $v_\tau = v_{xx}$ (η κλασική αυτή αναγωγή δίνεται αναλυτικά στο [38], §5.4). Η εξίσωση θερμότητας και η ελεύθερη εξίσωση Schrödinger $i\psi_t = -\frac{1}{2}\sigma\psi_{xx}$ — όπου τώρα το σ είναι ο *αδιάστατος* συντελεστής διασποράς της (7) και όχι το σ_{BS} — συνδέονται με τη *στροφή Wick* $\tau \mapsto i\tau$: πρόκειται για την ίδια εξίσωση σε πραγματικό και σε φανταστικό χρόνο αντίστοιχα. Η (7) είναι επομένως ο *μη γραμμικός* συγγενής της αναλυτικής συνέχισης της Black–Scholes. Δύο διαφορές παραμένουν

όμως ουσιώδεις και δεν γεφυρώνονται από τα παραπάνω: (i) η (6) λύνεται προς τα πίσω από την τελική συνθήκη $u(S, T) = \max(S - K, 0)$, ενώ η (7) είναι πρόβλημα αρχικών τιμών και (ii) στην (6) η τιμή προκύπτει από επιχείρημα αντιστάθμισης και μη αρμπιτράζ, ενώ στην (7) δεν υπάρχει χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής. Η (7) είναι συνεπώς περιγραφικό υπόδειγμα δυναμικής και όχι υπόδειγμα αποτίμησης χωρίς αρμπιτράζ.

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να αναλύσουμε λίγο παραπάνω την έννοια της δεύτερης μερικής παραγώγου.

7.1.1 Φυσική και οικονομική ερμηνεία της δεύτερης μερικής παραγώγου

Από μαθηματική άποψη, η δεύτερη μερική παράγωγος

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}$$

εκφράζει την τοπική καμπυλότητα της κυματοσυνάρτησης ψ ως προς την τιμή των μετοχών. Στο πλαίσιο της εξίσωσης NLS, ο συγκεκριμένος όρος αποτελεί τη διασπορά της εξίσωσης και περιγράφει την τάση ενός κυματικού πακέτου να εξαπλώνεται κατά μήκος του άξονα s . Η παρουσία της δεύτερης παραγώγου είναι συνεπώς χαρακτηριστικό στοιχείο της κυματικής δυναμικής του υποδείγματος.

Η σημασία του όρου αυτού γίνεται ιδιαίτερα εμφανής κατά τη μελέτη των σολιτονικών λύσεων. Οι λύσεις αυτές δεν προκύπτουν αποκλειστικά από τη δεύτερη παράγωγο, αλλά από την ισορροπία μεταξύ δύο ανταγωνιστικών μηχανισμών: της διασποράς και της μη γραμμικότητας. Η κατάλληλη εξισορρόπηση των δύο αυτών επιδράσεων μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία κυματικών μορφών, οι οποίες διατηρούν σε σημαντικό βαθμό τη μορφή τους κατά τη διάδοσή τους. Με τον τρόπο αυτό, η δεύτερη μερική παράγωγος αποτελεί ουσιώδες μέρος του μαθηματικού μηχανισμού που επιτρέπει την ύπαρξη των σολιτονικών λύσεων της εξίσωσης NLS.

Από οικονομική άποψη, η παρουσία της δεύτερης παραγώγου παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα αναλογία με το υπόδειγμα Black-Scholes. Στην εξίσωση Black-Scholes, η δεύτερη παράγωγος εκφράζει την ευαισθησία της καμπυλότητας της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης ως προς τις τιμές των μετοχών και συνδέεται άμεσα με το μέγεθος Gamma.

Στο μοντέλο NLS, ωστόσο, η δυναμική δεν περιγράφεται μέσω κλασικής στοχαστικής διάχυσης αλλά μέσω κυματικής εξίσωσης. Ο αδιάστατος συντελεστής σ της (7) λειτουργεί ως συντελεστής διασποράς και καθορίζει την ένταση του όρου $\partial_{ss} \psi$. Δεν πρέπει επομένως να διαβάζεται αυτομάτως ως η μεταβλητότητα σ_{BS} του κλασικού υποδείγματος χωρίς πρόσθετη βαθμονόμηση που να συνδέει τις δύο παραμέτρους.

7.1.2 Απουσία όρου πρώτης μερικής παραγώγου

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό της εξίσωσης είναι ότι δεν περιλαμβάνει όρο πρώτης μερικής παραγώγου ως προς s , δηλαδή όρο της μορφής

$$v \frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

Σε εξισώσεις μεταφοράς και διάχυσης, ένας τέτοιος όρος περιγράφει συνήθως μια κατευθυνόμενη μεταφορά της κατανομής. Στη χρηματοοικονομική θεωρία, αντίστοιχοι όροι πρώτης τάξης μπορούν να συνδεθούν με τη συστηματική τάση μεταβολής των τιμών των μετοχών, δηλαδή με τον όρο drift.

Η απουσία μιας τέτοιας παραγώγου από την εξίσωση NLS δεν σημαίνει ότι το μοντέλο υποθέτει πως δεν υφίσταται κατευθυνόμενη μεταβολή των τιμών στην αγορά. Αντίθετα, αντανακλά το γεγονός ότι το συγκεκριμένο υπόδειγμα δεν έχει τη μαθηματική δομή μιας κλασικής εξίσωσης μεταφοράς-διάχυσης,

αλλά τη δομή μιας μη γραμμικής κυματικής εξίσωσης. Η βασική δυναμική του μοντέλου καθορίζεται από την αλληλεπίδραση μεταξύ διασποράς και μη γραμμικότητας και όχι από έναν ανεξάρτητο όρο μεταφοράς πρώτης τάξης.

Επιπλέον, η απουσία του όρου $\partial\psi/\partial s$ δεν εμποδίζει τις λύσεις της εξίσωσης να διαδίδονται κατά μήκος του άξονα s . Χαρακτηριστικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν λύσεις της μορφής

$$\psi(s, t) = \phi(\xi)e^{i(ks-\omega t)},$$

με

$$\xi = s - \sigma kt.$$

7.2 Βιβλιογραφική ανάλυση των δομικών στοιχείων του μοντέλου

Αφού αναλύσαμε, εν συντομία, το υπόδειγμα NLS θα δούμε αμέσως παρακάτω πού βασίστηκε ο συγγραφέας για τη δημιουργία αυτού του μοντέλου.

7.2.1 Η Προσαρμοστική δυναμική των αγορών

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα άρθρα [8] και [9] στα οποία στηρίζεται ο συγγραφέας για την υιοθέτηση της προσαρμοστικής υπόθεσης της αγοράς μπορούμε να παραθέσουμε τα εξής:

Η αιτιολόγηση της υιοθέτησης ενός προσαρμοστικού μοντέλου στην τιμολόγηση των options βασίζεται εν μέρει στο ότι η απόδοση του κινδύνου, στην πραγματικότητα, δεν είναι σταθερή στο χρόνο ενώ η αποτελεσματικότητα της αγοράς είναι δυναμική και εξελισσόμενη. Αυτό δικαιολογεί την ανάγκη για ένα τέτοιο υπόδειγμα, όπου η παράμετρος β μπορεί να αλλάζει και να προσαρμόζεται, αντί να είναι σταθερή όπως το επιτόκιο r στο Black-Scholes. Επιπλέον, οι «παρανοήσεις» των επενδυτών (π.χ., αποστροφή κινδύνου, υπερβολική εμπιστοσύνη) δεν είναι παράλογες, αλλά προσαρμοστικές ευρετικές (adaptive heuristics) που εξελίσσονται. Στο υφιστάμενο χρηματοοικονομικό πλαίσιο, αυτές οι συμπεριφορές μπορεί να γίνουν «δυσπροσαρμοστικές» (maladaptive). Έτσι εισάγεται η ιδέα της σύνθετης, μη γραμμικής συμπεριφοράς της αγοράς που προέρχεται από την αλληλεπίδραση πολλών κατηγοριών επενδυτών. Το μη γραμμικό μέρος της εξίσωσης NLS ($-\beta|\psi|^2\psi$) είναι ακριβώς αυτό που επιχειρεί να συλλάβει τέτοιες σύνθετες αλληλεπιδράσεις και συμπεριφορές που δεν μπορούν να περιγραφούν γραμμικά.

Επιπροσθέτως, οι αγορές είναι οικοσυστήματα με διαφορετικά «είδη» (species) συμμετεχόντων (π.χ., συνταξιοδοτικά ταμεία, αμοιβαία κεφάλαια, μικροεπενδυτές). Η αποτελεσματικότητα και η δυναμική της αγοράς καθορίζονται από τον ανταγωνισμό και την αλληλεπίδραση αυτών των ομάδων συμμετεχόντων. Συνεπώς, αν εκληφθεί η αγορά ως ένα δυναμικό, ζωντανό και προσαρμόσιμο σύστημα, τότε μπορεί να εκφραστεί καλύτερα από τη χρήση μιας εξίσωσης κυμάτων. Η συνάρτηση κύματος ψ δύναται να θεωρηθεί ότι περιγράφει την κατάσταση αυτού του πολύπλοκου οικοσυστήματος.

Η αναφορά του Lo στην «ψυχοφυσιολογία της επεξεργασίας κινδύνου» [8] ανοίγει το δρόμο για υποδείγματα που μπορούν να συλλάβουν αυτή τη συναισθηματικά επηρεαζόμενη, μη γραμμική διάσταση της αγοράς όπως το υπόδειγμα NLS, που έχει ρίζες στην κβαντική μηχανική και είναι ικανό να αντιπροσωπεύσει τέτοιες «κβαντικές» διακυμάνσεις στη συλλογική ψυχολογία των επενδυτών. Η χρήση, άλλωστε, ενός κυματικού μοντέλου για να περιγράψει τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης γίνεται πιο εύλογη όταν βλέπουμε την αγορά ως ένα οικοσύστημα, η συμπεριφορά του οποίου προσομοιάζει περισσότερο με τη δυναμική ενός σύνθετου φυσικού συστήματος παρά με έναν απλό μηχανισμό ισορροπίας. Το ότι η αγορά μοιάζει με ένα φυσικό σύστημα υποστηρίζεται στο άρθρο [8] όπου αναφέρεται πως οι φυσιολογικές μεταβλητές που σχετίζονται με το αυτόνομο νευρικό σύστημα είναι ισχυρά συσχετισμένες με γεγονότα της αγοράς, δηλαδή, από την παρατήρηση ανθρώπων που αναλαμβάνουν κινδύνους στην

αγορά, μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι το σώμα τους (μέσω δεικτών του αυτόνομου νευρικού συστήματος) αντιδρά συγχρονισμένα με γεγονότα της αγοράς.

7.2.2 Κβαντικά και δυναμικά πρότυπα της ανθρώπινης συμπεριφοράς και δράσης

Κατόπιν ο Ivancevic χρησιμοποιεί κάποιες έννοιες που ανέπτυξε σε τρία δικά του άρθρα ώστε να χτίσει ένα γενικό μαθηματικό υπόδειγμα για πολύπλοκα, προσαρμοζόμενα συστήματα. Η προσέγγιση που υιοθετεί βασίζεται στο προσαρμοστικό ολοκλήρωμα τροχιών (adaptive path integral) και, όπως τονίζει ο ίδιος [7], το χρησιμοποιεί στη συνέχεια ως πρότυπο για την κατασκευή του κβαντικού, μη γραμμικού και προσαρμοστικού μοντέλου τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης.

Συγκεκριμένα, τα άρθρα [10], [11] και [12] ερμηνεύουν τον θεωρητικό μηχανισμό και τη μαθηματική θεμελίωση πίσω από τη χρήση της κβαντικής πιθανότητας και της προσαρμοστικότητας στο χρηματοοικονομικό μοντέλο NLS.

Στο άρθρο [10] ο συγγραφέας εισάγει την έννοια του Life-Space Foam (LSF). Υποστηρίζει ότι σε μακροσκοπικό επίπεδο η συμπεριφορά των δρώντων φαίνεται ομαλή και χαρακτηρίζεται από την αρχή της ελάχιστης δράσης σύμφωνα με την οποία από όλες τις δυνατές πορείες, το σύστημα ακολουθεί μια 'βέλτιστη/ομαλή' που ελαχιστοποιεί το κόστος της δράσης, όπου η δράση λογίζεται ως μια ποσότητα που συνοψίζει το «κόστος/προσπάθεια» μιας πορείας. Σε μικροσκοπικό επίπεδο, ωστόσο, η συμπεριφορά αποτελείται από άγρια διακυμαινόμενες διαδρομές και πεδία. Δηλαδή, μακροσκοπικά υπάρχει μία σχετικά σταθερή τάση αλλά μικροσκοπικά «κάτω από την επιφάνεια» υπάρχουν όλες οι μικρές, γρήγορες, αβέβαιες διεργασίες (δισταγμοί, παρεμβολές, εναλλακτικές σκέψεις, θόρυβος και εμπόδια). Μαθηματικά αυτά εκφράζονται ως εξής στο άρθρο [10].

Σε μακροσκοπικό επίπεδο:

- Ορίζεται δράση (action)

$$S[\Phi] = \int_{t_{\text{ini}}}^{t_{\text{fin}}} L[\Phi] dt$$

και αρχή ελάχιστης δράσης $\delta S[\Phi] = 0$, που δίνει **μοναδική** μακροσκοπική τροχιά, πεδίο ή γεωμετρία.

Σε μικροσκοπικό επίπεδο:

- Στο μικροσκοπικό επίπεδο όμως, αντί για «τροχιά», έχουμε **πολλές** εναλλακτικές μικροδιαδρομές και ορίζεται ως πλάτος μετάβασης (transition amplitude) με προσαρμοστικό ολοκλήρωμα διαδρομής (adaptive path integral):

$$\langle \text{Action} | \text{Intention} \rangle_{\text{total}} = \int \mathcal{D}[w\Phi] e^{iS[\Phi]}.$$

με προσαρμοστικό μέτρο.

Στο Προσαρμοστικό Ολοκλήρωμα Διαδρομής η πιθανότητα δίνεται από το τετράγωνο του μέτρου του πλάτους:

$$P(\text{Action} | \text{Intention}) = |\langle \text{Action} | \text{Intention} \rangle|^2.$$

Αυτό είναι ακριβώς το εννοιολογικό 'καλούπι' που χρησιμοποιεί στο άρθρο του ο Ivancevic όταν λέει: 'η $|\psi(s, t)|^2$ είναι PDF'. Δηλαδή, μεταφέρει τη λογική πλάτους $\rightarrow$ πυκνότητας πιθανότητας από το πλαίσιο της γνωσιακής δυναμικής (cognitive dynamics) στο πλαίσιο της τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης.

Επιπλέον, η εξίσωση (7) του NLS μοντέλου είναι ουσιαστικά η διαφορική μορφή που περιγράφει την εξέλιξη αυτού του ολοκληρώματος διαδρομής. Η χρήση της μιγαδικής συνάρτησης ψ (όπου $|\psi|^2$ είναι η πιθανότητα) στο χρηματοοικονομικό μοντέλο δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι αγορές, όπως και η ανθρώπινη γνωστική λειτουργία, περιλαμβάνουν αλληλεπιδρώσες επιλογές και αβεβαιότητα που περιγράφονται καλύτερα από κβαντικά πλάτη πιθανότητας παρά από κλασικές πιθανότητες.

7.2.3 Η Προσαρμοστικότητα (Adaptivity) και η Μάθηση

Το βασικό χαρακτηριστικό της εξίσωσης (7) είναι ότι είναι προσαρμοστική (Adaptive), δηλαδή οι παράμετροί της (όπως το δυναμικό β) αλλάζουν. Στο άρθρο [10], εξηγείται ότι το ολοκλήρωμα διαδρομής είναι «προσαρμοστικό» επειδή ενσωματώνει μια διαδικασία μάθησης (learning process). Συγκεκριμένα, τα βάρη w_s ενημερώνονται μέσω ενός μηχανισμού ανατροφοδότησης (Monitor feedback). Οι κανόνες μάθησης δίνονται ως:

- Hebbian-like:

$$w_s(t+1) = w_s(t) + \frac{\sigma}{\eta} (w_s^d(t) - w_s^a(t))$$

- ή gradient descent:

$$w_s(t+1) = w_s(t) - \eta \nabla J(t).$$

Αυτό είναι το θεωρητικό ανάλογο του άρθρου [7] όταν καθιστά την $\beta = \beta(r, \psi)$ συνάρτηση ρυθμιζόμενων παραμέτρων (βάρων) και την «εκπαιδεύει». Στο άρθρο [7] η προσαρμοστική αγορά εισάγεται μέσα από τον όρο $\beta(r, \psi)$ που εξαρτάται από βάρη $\{w_i\}$. Το χρηματοοικονομικό μοντέλο υιοθετεί αυτή τη «νευρωνική» προσέγγιση μάθησης για να προσαρμόσει το «θερμικό δυναμικό της αγοράς» (market heat potential).

Τα άρθρα [11] και [12] δίνουν την ερμηνεία της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας που περιγράφονται στην εξίσωση (7) πιο πάνω, στο πλαίσιο της ανθρώπινης συμπεριφοράς (και κατ'επέκταση της συμπεριφοράς της αγοράς). Πιο λεπτομερειακά, η εξίσωση (7) περιλαμβάνει τον όρο που περιέχει τη δεύτερη παράγωγο ως προς τον χώρο (εδώ ως προς την τιμή της μετοχής s) και αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια του συστήματος και είναι ο

$$-\frac{1}{2}\sigma \partial_{ss}\psi.$$

Επίσης, περιλαμβάνει τον όρο που αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια και είναι ο μη γραμμικός όρος $-\beta|\psi|^2\psi$ που αντιπροσωπεύει το «δυναμικό πεδίο» (potential field) σύμφωνα με το κύριο άρθρο [7], ο οποίος εξαρτάται από την κυματοσυνάρτηση ψ . Αυτό το πεδίο συνδέεται με το «θερμικό δυναμικό της αγοράς» (market heat potential). Τα παραπάνω ως προς το άρθρο [12] αντιστοιχούν στην εξίσωση

$$A[x, y; t_i, t_j] = \frac{1}{2} \iint \alpha_i \beta_j \delta(I_{ij}^2) \dot{x}^i \dot{y}^j dt_i dt_j + \frac{1}{2} \int g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt$$

η οποία περιλαμβάνει έναν όρο δυναμικής ενέργειας (γνωστική/κινητήρια αλληλεπίδραση) και έναν όρο κινητικής ενέργειας και αναφέρεται στην κοινή δράση ατόμων.

Αντίστοιχα στο άρθρο [11] η δράση ορίζεται ως:

$$S[q] = \frac{1}{2} \int_{t_{\text{ini}}}^{t_{\text{fin}}} [a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q)] dt$$

Ως προς τον όρο β της εξίσωσης (7) που αφορά την προσαρμοστικότητα (adaptive market potential) το άρθρο [12] (όπως και το [10]) παρέχουν τον αλγόριθμο μάθησης που δικαιολογεί την προσαρμογή

στις συνεχώς μεταβαλλόμενες συνθήκες των αγορών. Συγκεκριμένα το ολοκλήρωμα διαδρομής είναι «προσαρμοστικό» επειδή ενσωματώνει μια διαδικασία μάθησης (learning process) ενώ τα βάρη w_s ενημερώνονται μέσω ενός μηχανισμού ανατροφοδότησης (Monitor feedback). Η εξίσωση μάθησης δίνεται ως

$$w_{ij}^s(t+1) = w_{ij}^s(t) + \frac{\sigma}{\eta} \left(w_{ij}^{s,d}(t) - w_{ij}^{s,a}(t) \right).$$

Αυτός είναι ο μηχανισμός που εξηγεί γιατί το χρηματοοικονομικό μοντέλο ονομάζεται προσαρμοστικό. Η παράμετρος $\beta(r, w)$ στην εξίσωση (7) δεν είναι σταθερή, αλλά προσαρμόζεται δυναμικά βασιζόμενη στους «κανόνες μάθησης» που περιγράφονται στα άρθρα [10] και [12]. Το χρηματοοικονομικό μοντέλο υιοθετεί αυτή τη «νευρωνική» προσέγγιση μάθησης για να προσαρμόσει το θερμικό δυναμικό της αγοράς (market heat potential).

7.2.4 Θεωρητικά και μαθηματικά υποδείγματα ανάλυσης της χρηματοπιστωτικής αγοράς

Συνεχίζουμε με τη συσχέτιση των άρθρων [13], [14] και [15] με την εξίσωση (7). Σύμφωνα με το άρθρο [13] έχουμε δύο είδη κυμάτων στις αγορές. Το ένα είδος είναι τα προωθητικά κύματα που αποτελούν τα δομικά στοιχεία των τάσεων στις χρηματοπιστωτικές αγορές (κατεύθυνση και συμπεριφορά των τιμών) και αποτελούνται από πέντε υποκύματα. Τα κύματα 1, 3 και 5 ακολουθούν την ευρύτερη τάση των αγορών, ενώ τα κύματα 2 και 4 αποτελούν διορθωτικές κινήσεις αντίθετες προς αυτήν την τάση. Η εν λόγω δομή πέντε κυμάτων παρατηρείται σε ολόκληρο το φάσμα των χρηματοπιστωτικών αγορών και χρονικών σημείων.

Το δεύτερο είδος είναι τα διορθωτικά κύματα, τα οποία εμφανίζονται όταν η αγορά κινείται αντίθετα προς την επικρατούσα ευρύτερη τάση. Συνήθως αναπτύσσονται σε μια δομή τριών κυμάτων. Τα μοτίβα αυτών των κυμάτων είναι φράκταλ εκ φύσεως δηλαδή μπορούν να χωριστούν σε υποκύματα με την ίδια βασική δομή ενώ η ίδια μορφή εμφανίζεται σε όλες τις βαθμίδες τάσης και χρονικών πλαισίων.

Στην εξίσωση (7) η ιδέα της κυματικής οργάνωσης μεταφέρεται σε ένα συνεχές δυναμικό υπόδειγμα μέσω της μιγαδικής κυματοσυνάρτησης $\psi(s, t)$. Στο πλαίσιο του [7] το $|\psi(s, t)|^2$ ερμηνεύεται πιθανοτικά: όπως διευκρινίστηκε όμως στην Παρατήρηση 1, ο χαρακτηρισμός «πυκνότητα πιθανότητας» είναι κυριολεκτικός μόνο όταν υπάρχει κατάλληλη κανονικοποίηση.

Ο μη γραμμικός όρος $-\beta|\psi|^2\psi$ είναι εκείνος που διαφοροποιεί την NLS από μια γραμμική κυματική εξίσωση και επιτρέπει, σε ισορροπία με τη διασπορά, εντοπισμένες και περιοδικές κυματομορφές. Η σύνδεση με την Αρχή των Κυμάτων Elliott των [13, 14] είναι επομένως *επνολογική* και όχι παραγωγική: τα πρότυπα πέντε και τριών κυμάτων και οι λόγοι Fibonacci δεν προκύπτουν ως θεωρήματα της (7). Αντίστοιχα, οι παράμετροι σ , β και k καθορίζουν κλίμακες και μορφές των λύσεων, αλλά δεν ταυτίζονται αυτομάτως με τους εμπειρικούς λόγους της θεωρίας Elliott.

Οφείλουμε στο σημείο αυτό μια διευκρίνιση για το καθεστώς των πηγών [13, 14]. Η Αρχή των Κυμάτων Elliott ανήκει στην τεχνική ανάλυση και όχι στην ακαδημαϊκή χρηματοοικονομική βιβλιογραφία: δεν έχει δημοσιευθεί σε περιοδικό με αξιολόγηση (peer review), οι κανόνες μέτρησης των κυμάτων επιτρέπουν πολλαπλές ταυτόχρονα «έγκυρες» αναγνώσεις των ίδιων δεδομένων, και δεν υπάρχει ελεγχόμενη εμπειρική επικύρωση της προβλεπτικής της ικανότητας. Τις παραθέτουμε επειδή αποτελούν τεκμηριωμένα την προέλευση της κυματικής εικόνας που υιοθετεί ο συγγραφέας του [7], όχι ως στήριξη της ίδιας της εξίσωσης (7).

Στο βιβλίο [14] η αγορά περιγράφεται μέσω κυματικής οργάνωσης και συλλογικής ψυχολογίας. Η εργασία χρησιμοποιεί αυτή την εικόνα ως φαινομενολογικό κίνητρο για την κυματική προσέγγιση του [7], όχι ως μαθηματική απόδειξη της εξίσωσης (7). Με τον ίδιο τρόπο, η δυνατότητα της NLS να παράγει ομαλές περιοδικές λύσεις και εντοπισμένα σολιτονικά προφίλ προσφέρει ένα μαθηματικό λεξιλόγιο για διαφορετικές κλίμακες ή καταστάσεις της αγοράς, χωρίς να συνεπάγεται ότι οι συγκεκριμένες

κυματομορφές της θεωρίας Elliott αναπαράγονται ποσοτικά.

Ο Mandelbrot [15] επισημαίνει ότι τα απλά Γκαουσιανά μοντέλα δεν αναπαράγουν ικανοποιητικά τη συχνότητα ακραίων μεταβολών και τη μεταβολή της δραστηριότητας της αγοράς σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Το αποτέλεσμα αυτό λειτουργεί εδώ ως κίνητρο για την εξέταση μη Γκαουσιανών και μη γραμμικών περιγραφών. Δεν αποτελεί, ωστόσο, παραγωγή της NLS ούτε του όρου $-\beta|\psi|^2\psi$.

Η μαθηματική αιτιολόγηση των σολιτονικών λύσεων της κυβικής NLS βρίσκεται στη γνωστή ισοροπία ανάμεσα στη διασπορά και τη μη γραμμικότητα [21, 22, 23]. Στην αδιαστατοποιημένη εξίσωση (7) ο σ είναι ο συντελεστής διασποράς της NLS και δεν πρέπει να ταυτίζεται άμεσα με την ετησιοποιημένη μεταβλητότητα σ_{BS} της Black-Scholes. Η παράμετρος β καθορίζει την ένταση και το πρόσημο της κυβικής μη γραμμικότητας και, όπως θα φανεί στα Κεφάλαια 8–9, το πρόσημό της επιλέγει τον ελκτικό ή απωστικό δυναμικό κλάδο.

Τέλος, στο προσαρμοστικό πλαίσιο του [7] το δυναμικό γράφεται σχηματικά ως

$$V(s, t) = -\beta |\psi(s, t)|^2,$$

με το $\beta = \beta(r, w)$ να ενημερώνεται μέσω των βαρών w . Η προσαρμογή αυτή αφορά διαφορετική χρονική κλίμακα από εκείνη των ακριβών οδευουσών λύσεων, στις οποίες το β θεωρείται «παγωμένο», όπως εξηγείται στην Παρατήρηση 3.

7.2.5 Νόηση, νευρωνικά συστήματα και δυναμική πλήθους

Τα άρθρα [16] και [17] χρησιμοποιούν μηχανισμούς διάχυσης και κατευθυνόμενης κίνησης για τη μοντελοποίηση της δυναμικής πλήθους (crowd dynamics). Η διάχυση (diffusion process) συνδέεται μαθηματικά με την κίνηση Brown, ενώ η κατευθυνόμενη κίνηση (goal-directed crowd movement) εισάγει τον έλεγχο της κίνησης προς έναν στόχο. Στο μεταγενέστερο άρθρο [7], ο ίδιος ο συγγραφέας (V. Ivancevic) συνοψίζει εκ των υστέρων αυτή τη μεθοδολογική εικόνα με τον όρο «Ελεγχόμενη Κίνηση Brown» (Controlled Brownian Motion).

Στο πλαίσιο των άρθρων αυτών:

- Η αγορά θεωρείται ως ένα «πλήθος» πρακτόρων.
- Αντί για απλή τυχαία κίνηση, οι πράκτορες κινούνται με βάση ένα σκοπό (goal-directed) σε ένα πολύπλοκο περιβάλλον.

Τα κείμενα [16] και [17] δικαιολογούν γιατί η εξίσωση (7) πρέπει να έχει τη μορφή Schrödinger (με φανταστική μονάδα i) και όχι απλής διάχυσης.

- Ο όρος $\partial_t \psi$ προκύπτει από την κυματική φύση των ολοκληρωμάτων διαδρομής (Feynman Path Integrals).
- Ο όρος $-\frac{1}{2}\sigma \partial_{ss}\psi$ αντιστοιχεί στον όρο κινητικής ενέργειας

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

της ελεύθερης κίνησης στο χώρο των τιμών, όπου ο συντελεστής διασποράς σ παίζει τον ρόλο του αντίστροφου της μάζας στο κβαντομηχανικό ανάλογο.

Πιο συγκεκριμένα, στα κείμενα αυτά, η δυναμική της αγοράς (όπως και η δυναμική πλήθους) μοντελοποιείται ως μια «ψυχοφυσική» διαδικασία που βασίζεται στην έννοια της ελεγχόμενης κίνησης Brown.

Σε αντίθεση με την απλή τυχαία κίνηση, εδώ υπάρχει μια κατευθυνόμενη συμπεριφορά (goal-directed behavior) που συνυπάρχει με τη στοχαστικότητα.

Για να περιγραφεί αυτή η πολύπλοκη κίνηση σε τρία επίπεδα (μακροσκοπικό, μεσοσκοπικό και μικροσκοπικό), τα κείμενα εισάγουν τον φορμαλισμό δράσης-πλάτους του Feynman. Η χρήση αυτού του φορμαλισμού μετατρέπει το πρόβλημα της διάχυσης (diffusion process), που συνήθως περιγράφεται από την εξίσωση θερμότητας, σε πρόβλημα εξέλιξης πλάτους πιθανότητας που διέπεται από την εξίσωση Schrödinger.

Ενώ τα [16] και [17] δικαιολογούν τη γραμμική δομή της εξίσωσης, στο βιβλίο [18] εξηγείται ο μη γραμμικός όρος και η προσαρμοστικότητα.

Πιο ειδικά, προτείνει ότι πολύπλοκα συστήματα (όπως ο εγκέφαλος ή οι αγορές) λειτουργούν ως Κβαντικοί Νευρωνικοί Υπολογιστές. Σε αντίθεση με την κλασική κβαντομηχανική που είναι γραμμική, τα νευρωνικά συστήματα απαιτούν μη γραμμικότητα για να πραγματοποιήσουν υπολογισμούς, να διατηρήσουν μνήμη και να λάβουν αποφάσεις.

Ο όρος $|\psi|^2\psi$ της (7) εισάγει τη μη γραμμικότητα, η οποία είναι απαραίτητη για τη μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων που παρουσιάζουν μνήμη και αυτο-οργάνωση, σε αντίθεση με τα γραμμικά κβαντικά συστήματα. Αυτός ο όρος επιτρέπει την ύπαρξη λύσεων όπως τα σολιτόνια (solitons), τα οποία διατηρούν τη μορφή τους.

Το βιβλίο [18] είναι κρίσιμο και για την παράμετρο β που αποτελεί ένα προσαρμοστικό δυναμικό αγοράς (adaptive market potential):

$$\beta = \beta(r, w)$$

Η παράμετρος β στο μοντέλο δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από βάρη (w) που προσαρμόζονται δυναμικά και ο υπολογισμός τους γίνεται μέσω αλγορίθμων μάθησης, όπως η μάθηση Hebbian ή ο αλγόριθμος Levenberg–Marquardt. Το κείμενο [18] συνδέει αυτή την προσαρμογή με τη μη επιβλεπόμενη μάθηση (unsupervised learning). Συγκεκριμένα, οι αλγόριθμοι μάθησης Hebbian χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των βαρών του δυναμικού της αγοράς, επιτρέποντας στο μοντέλο να «μαθαίνει» από τη συμπεριφορά των τιμών.

8 Αναλυτικές Σολιτονικές και Περιοδικές Λύσεις

8.1 Αναζήτηση κυματικής λύσης

Πριν προχωρήσουμε, αξίζει να σημειωθεί το εξής. Η κυβική NLS σε μία χωρική διάσταση είναι πλήρως ολοκληρώσιμη: οι Zakharov και Shabat [21] έδειξαν ότι επιλύεται με τη μέθοδο της αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering transform), η οποία παρέχει γενικό μηχανισμό επίλυσης για ευρεία κλάση κατάλληλων αρχικών δεδομένων και επιτρέπει, μεταξύ άλλων, την κατασκευή πολυσολιτονικών λύσεων [22, 24]. Η μέθοδος οδεύοντος κύματος που ακολουθούμε εδώ είναι πολύ πιο στοιχειώδης και δεν εξαντλεί το πρόβλημα — δεν παράγει, για παράδειγμα, τις λύσεις N σολιτονίων που περιγράφουν αλληλεπίδραση μεταξύ σολιτονίων. Την επιλέγουμε γιατί οδηγεί σε κλειστές εκφράσεις με άμεση οικονομική ανάγνωση, που είναι και ο σκοπός της εργασίας.

Αναζητούμε λύσεις οδεύοντος προφίλ με επίπεδο κυματικό φορέα, ώστε η μερική διαφορική εξίσωση NLS να αναχθεί σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Η αναγωγή αυτή οδηγεί στην εξίσωση Duffing για το πραγματικό πλάτος του κύματος.

Η διαδικασία έχει ως εξής:

Αναζητούμε, επομένως, λύσεις της μορφής οδεύοντος προφίλ με επίπεδο κυματικό φορέα:

$$\psi(s, t) = \phi(\xi) e^{i(ks - \omega t)}, \quad \xi = s - vt$$

Εδώ $\phi(\xi)$ είναι πραγματική συνάρτηση πλάτους, k ο κυματαριθμός, ω η κυκλική συχνότητα και v η ταχύτητα διάδοσης. Όπως θα προκύψει από το φανταστικό μέρος της εξίσωσης,

$$v = \sigma k.$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί δοκιμαστική μορφή οδεύοντος κύματος (ansatz): υποθέτουμε εκ των προτέρων τη μορφή της λύσης και προσδιορίζουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση. Η μορφή αυτή θα μας επιτρέψει να εξαγάγουμε την εξίσωση Duffing.

8.2 Αναγωγή στην Εξίσωση Duffing

8.2.1 α) — Υπολογισμός παραγώγων

Ορίζουμε τη φάση $\theta = ks - \omega t$. Παραγωγίζοντας το ansatz:

Χρονική παράγωγος:

$$\psi_t = (-v\phi' - i\omega\phi) e^{i\theta}$$

Χωρικές παράγωγοι:

$$\begin{aligned}\psi_s &= (\phi' + ik\phi) e^{i\theta} \\ \psi_{ss} &= (\phi'' + 2ik\phi' - k^2\phi) e^{i\theta}\end{aligned}$$

8.2.2 β) — Αντικατάσταση στη NLS

Αντικαθιστούμε στην

$$i\psi_t + \frac{\sigma}{2}\psi_{ss} + \beta|\psi|^2\psi = 0.$$

Καθώς $|\psi|^2 = \phi^2$ (η ϕ είναι πραγματική) και απαλείφοντας τον κοινό παράγοντα $e^{i\theta}$, παίρνουμε:

$$\frac{\sigma}{2}\phi'' + \left(\omega - \frac{\sigma k^2}{2}\right)\phi + \beta\phi^3 + i(\sigma k - v)\phi' = 0.$$

8.2.3 γ) — Διαχωρισμός πραγματικού-φανταστικού

$$\text{Φανταστικό μέρος} = 0 \implies \sigma k - v = 0 \implies v = \sigma k.$$

8.2.4 Πραγματικό μέρος = 0 → δίνει την Εξίσωση Duffing

$$\phi'' + \alpha\phi + \gamma\phi^3 = 0$$

με

$$\alpha = \frac{2\omega - \sigma k^2}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{2\beta}{\sigma}.$$

8.3 Δυναμική Ανάλυση της Duffing — Φασικό Πορτραίτο

Η εξίσωση Duffing $\phi'' + \alpha\phi + \gamma\phi^3 = 0$ είναι η εξίσωση του Νεύτωνα

$$F'' = K(F)$$

με

$$K(\phi) = -\alpha\phi - \gamma\phi^3.$$

Ακολουθούμε την προσέγγιση του [20] που αναλύει λεπτομερώς δύο περιπτώσεις που αντιστοιχούν στις δύο βασικές σολιτονικές λύσεις.

Ορίζουμε τη συνάρτηση δυναμικού:

$$V(\phi) = - \int K(\phi) d\phi = \frac{\alpha}{2}\phi^2 + \frac{\gamma}{4}\phi^4$$

και τη συνάρτηση ενέργειας (πρώτο ολοκλήρωμα):

$$E(\phi, \phi') = \frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + \frac{\alpha}{2}\phi^2 + \frac{\gamma}{4}\phi^4 = E_0.$$

Περίπτωση A: $\alpha < 0$, $\gamma > 0$ — **Ομοκλινική τροχιά** $\rightarrow$ Bright Soliton

Θέτουμε $\alpha = -\kappa_0^2 < 0$ και $\gamma = \mu_0^2 > 0$.

Σημεία ισορροπίας:

$$K(\phi) = \kappa_0^2\phi - \mu_0^2\phi^3 = 0$$

$$\phi_0^* = 0 \text{ (ασταθές)}, \quad \phi_{1,2}^* = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0} \text{ (ευσταθής)}.$$

Δυναμικό:

$$V(\phi) = \frac{\mu_0^2}{4}\phi^4 - \frac{\kappa_0^2}{2}\phi^2,$$

τοπικό μέγιστο στο $\phi = 0$, τοπικά ελάχιστα στα $\pm\kappa_0/\mu_0$.

Για ενέργεια $E_0 = 0$, η τροχιά στο φασικό επίπεδο (ϕ, ϕ') είναι **ομοκλινική**: ξεκινά από το ασταθές σημείο $\phi_0^* = 0$, φτάνει στο σημείο επιστροφής

$$\phi = A = \frac{\kappa_0}{\mu_0}\sqrt{2},$$

και επιστρέφει στο $\phi_0^* = 0$ σε άπειρο χρόνο. Αυτή αντιστοιχεί στο bright soliton (sech)

Περίπτωση B: $\alpha > 0$, $\gamma < 0$ — **Ετεροκλινική τροχιά** $\rightarrow$ Dark Soliton

Θέτουμε $\alpha = \kappa_0^2 > 0$ και $\gamma = -\mu_0^2 < 0$ (ανεστραμμένη Duffing).

Σημεία ισορροπίας: τα ίδια $\phi_0^* = 0$, $\phi_{1,2}^* = \pm\kappa_0/\mu_0$, αλλά με **ανεστραμμένη ευστάθεια**:

$$\phi_0^* = 0 \text{ (ευσταθές)}, \quad \phi_{1,2}^* = \pm \frac{\kappa_0}{\mu_0} \text{ (ασταθής)}.$$

Δυναμικό:

$$V(\phi) = \frac{\kappa_0^2}{2}\phi^2 - \frac{\mu_0^2}{4}\phi^4,$$

τοπικό ελάχιστο στο $\phi = 0$, τοπικά μέγιστα στα $\pm\kappa_0/\mu_0$.

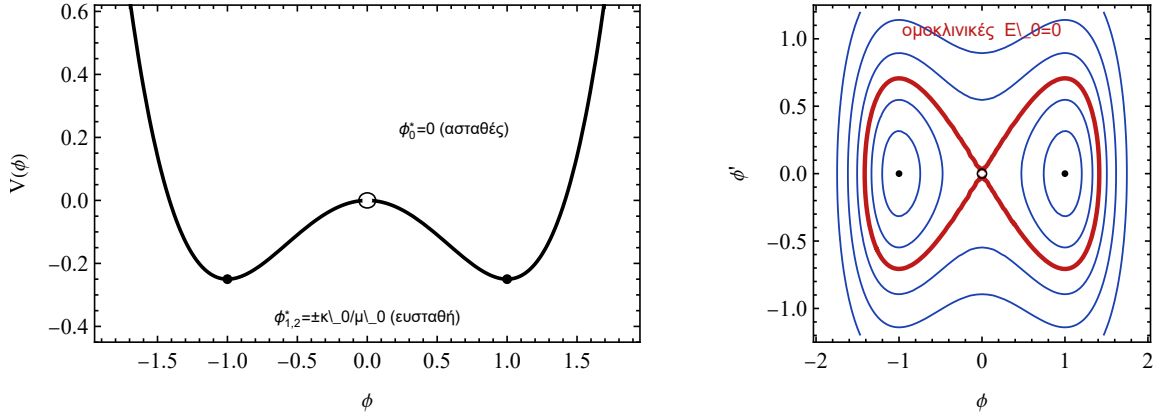
Για ενέργεια

$$E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2},$$

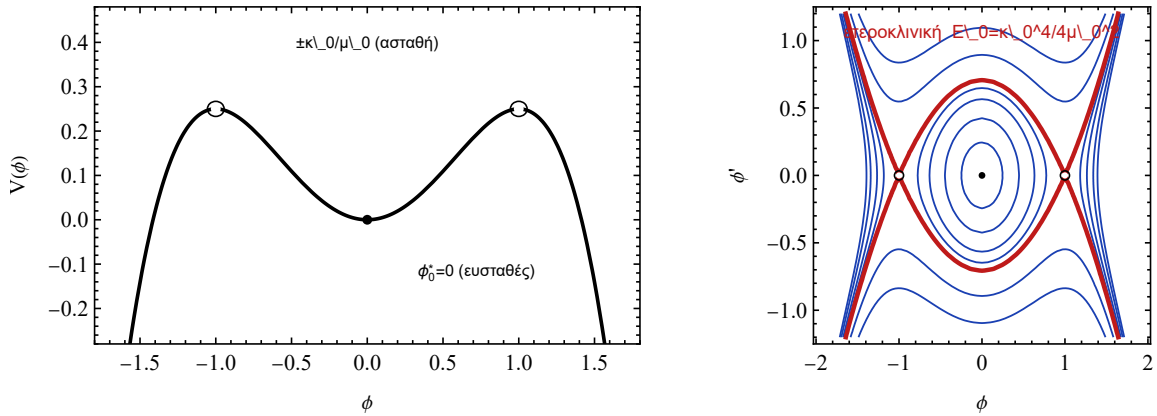
η τροχιά είναι **ετεροκλινική**: συνδέει τα δύο ασταθή σημεία

$$\phi_2^* = -\frac{\kappa_0}{\mu_0} \quad \text{και} \quad \phi_1^* = +\frac{\kappa_0}{\mu_0}$$

σε άπειρο χρόνο. Αυτή αντιστοιχεί στο dark soliton (tanh).



Σχήμα 1: Περίπτωση Α ($\alpha = -\kappa_0^2 < 0$, $\gamma = \mu_0^2 > 0$: εδώ $\kappa_0 = \mu_0 = 1$). Αριστερά: το δυναμικό $V(\phi)$ με τοπικό μέγιστο στο ασταθές $\phi_0^* = 0$ και τοπικά ελάχιστα στα ευσταθή $\phi_{1,2}^* = \pm\kappa_0/\mu_0$. Δεξιά: το φασικό επίπεδο (ϕ, ϕ') . Η έντονη κόκκινη καμπύλη είναι η στάθμη $E_0 = 0$, η οποία αποτελείται από δύο **ομοκλινικές** τροχιές (μία ανά πηγάδι): καθεμία εγκαταλείπει και επιστρέφει στο $\phi_0^* = 0$, και μαζί σχηματίζουν το χαρακτηριστικό «οκτώ». Η δεξιά αντιστοιχεί στη λύση φωτεινού σολιτονίου της §8.4· η αριστερή δίνει την αντίθετή της, $-\phi(\xi)$, λόγω της συμμετρίας $\phi \rightarrow -\phi$ της Duffing. Οι λεπτές μπλε καμπύλες είναι τυπικές στάθμες $E_0 \neq 0$ (Σχ. 6).



Σχήμα 2: Περίπτωση Β ($\alpha = \kappa_0^2 > 0$, $\gamma = -\mu_0^2 < 0$). Αριστερά: το ανεστραμμένο δυναμικό, με ελάχιστο στο ευσταθές $\phi_0^* = 0$ και μέγιστα στα ασταθή $\pm\kappa_0/\mu_0$. Δεξιά: η έντονη κόκκινη καμπύλη είναι η **ετεροκλινική** τροχιά $E_0 = \kappa_0^4/4\mu_0^2$, που συνδέει τα δύο ασταθή σημεία και αντιστοιχεί στη λύση σκοτεινού σολιτονίου της §8.5. Η σύγκριση με το Σχ. 1 δείχνει καθαρά την αντιστροφή της ευστάθειας. Σημειώνεται ότι η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε $\beta < 0$ (βλ. (10)).

8.4 Λύση φωτεινού σολιτονίου

8.4.1 α) — Πρώτο ολοκλήρωμα

Για $\alpha = -|\alpha|$ και $\gamma > 0$, με μηδενικές συνοριακές συνθήκες στο άπειρο

$$\phi \rightarrow 0, \phi' \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad \xi \rightarrow \pm\infty,$$

η σταθερά ενέργειας είναι $E_0 = 0$ και προκύπτει:

$$(\phi')^2 = |\alpha| \phi^2 - \frac{\gamma}{2} \phi^4.$$

8.4.2 β) — Χωρισμός μεταβλητών

$$\frac{d\phi}{\phi \sqrt{|\alpha| - \frac{\gamma}{2} \phi^2}} = d\xi.$$

8.4.3 γ) — Αλλαγή μεταβλητής

Θέτουμε:

$$\phi = \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\gamma}} \operatorname{sech}(u) \quad \Rightarrow \quad d\phi = -\sqrt{\frac{2|\alpha|}{\gamma}} \operatorname{sech}(u) \tanh(u) du.$$

8.4.4 δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα

Αντικαθιστούμε στο αριστερό μέλος. Με

$$\phi = \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\gamma}} \operatorname{sech}(u), \quad d\phi = -\sqrt{\frac{2|\alpha|}{\gamma}} \operatorname{sech}(u) \tanh(u) du,$$

παίρνουμε

$$\int \frac{d\phi}{\phi \sqrt{|\alpha| - \frac{\gamma}{2} \phi^2}} = -\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \int \frac{\tanh(u)}{\tanh(u)} du.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$1 - \operatorname{sech}^2(u) = \tanh^2(u),$$

προκύπτει

$$-\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \int du = -\frac{u}{\sqrt{|\alpha|}}.$$

8.4.5 ε) — Εξίσωση και τελική λύση

Εξισώνοντας:

$$-\frac{u}{\sqrt{|\alpha|}} = \xi + C,$$

άρα

$$u = -\sqrt{|\alpha|} \xi \quad (\text{με } C = 0 \text{ για κέντρο στο } \xi = 0).$$

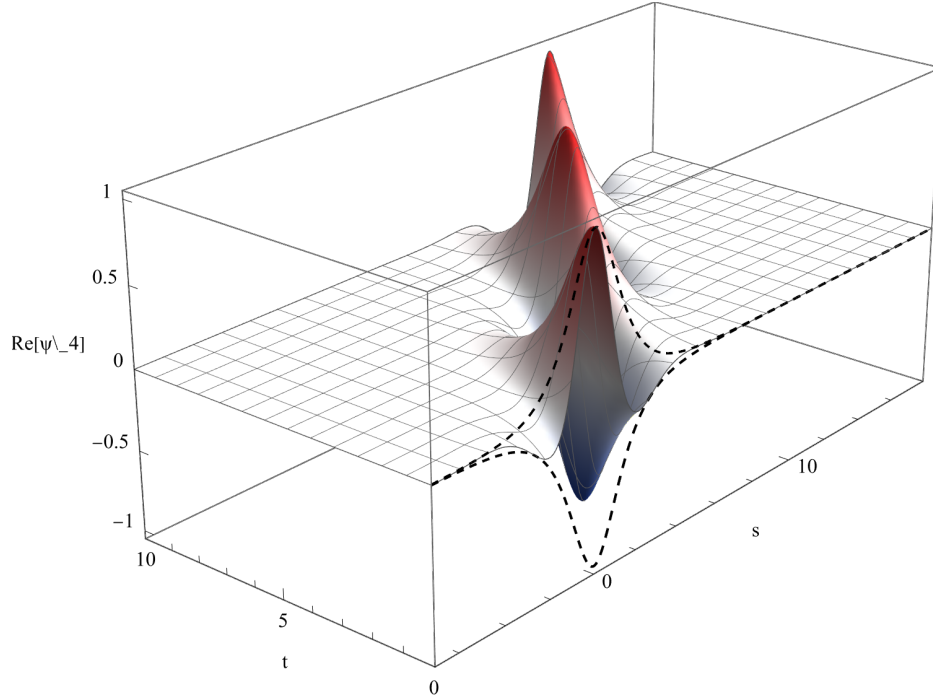
Επειδή η sech είναι άρτια συνάρτηση,

$$\phi(\xi) = \sqrt{\frac{2|\alpha|}{\gamma}} \text{sech}\left(\sqrt{|\alpha|}\xi\right).$$

Αντικαθιστώντας πίσω στο ansatz $\psi(s, t) = \phi(\xi)e^{i(ks-\omega t)}$ με $\xi = s - \sigma kt$:

$$\psi_4(s, t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \text{sech}(s - \sigma kt) e^{i[k s - \frac{1}{2}\sigma t(k^2-1)]}, \quad \beta > 0. \quad (8)$$

Η συνθήκη $\beta > 0$ προκύπτει από την απαίτηση $\gamma = 2\beta/\sigma > 0$ της Περίπτωσης Α και εξασφαλίζει ότι το πλάτος $\sqrt{\sigma/\beta}$ είναι πραγματικό.



Σχήμα 3: Το πραγματικό μέρος της λύσης φωτεινού σολιτονίου (8) για $k = 1.2$, $\sigma = \beta = 1$ (άρα $\beta > 0$, όπως απαιτεί η Περίπτωση Α), $s \in (-7, 18)$, $t \in (0, 10)$. Ο κατακόρυφος άξονας καλύπτει ολόκληρο το εύρος $\pm\sqrt{\sigma/\beta} = \pm 1$, ώστε να φαίνονται όλες οι κορυφές και τα βυθίσματα της εσωτερικής ταλάντωσης. Η περιβάλλουσα $\pm \text{sech}(s)$, σχεδιασμένη διακεκομμένη στην πρόσοψη $t = 0$, διατηρεί το σχήμα της καθώς μετακινείται με ταχύτητα $v = \sigma k$, ενώ η ταλάντωση εντός της οφείλεται αποκλειστικά στον όρο φάσης και δεν επηρεάζει την πυκνότητα $|\psi_4|^2$. Οι παράμετροι και τα διαστήματα είναι εκείνα του Σχ. 6 του άρθρου [7], ώστε η σύγκριση να είναι άμεση.

8.5 Λύση σκοτεινού σολιτονίου

8.5.1 α) — Πρώτο ολοκλήρωμα

Για $\alpha > 0$ και $\gamma = -|\gamma| < 0$, με μη μηδενικές συνοριακές συνθήκες

$$\phi \rightarrow \pm\phi_0 \quad \text{καθώς} \quad \xi \rightarrow \pm\infty,$$

η ενέργεια

$$E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$$

δίνει:

$$(\phi')^2 = \frac{|\gamma|}{2} (\phi_0^2 - \phi^2)^2.$$

όπου

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{|\gamma|}} = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \quad (9)$$

δηλαδή το ϕ_0 συμπίπτει ακριβώς με τα ασταθή σημεία ισορροπίας $\phi_{1,2}^* = \pm \kappa_0/\mu_0$ της Περίπτωσης Β — όπως άλλωστε επιβάλλει η ετεροκλινική φύση της τροχιάς. Πράγματι, αναπτύσσοντας το δεξί μέλος,

$$\frac{|\gamma|}{2} (\phi_0^2 - \phi^2)^2 = \frac{|\gamma|}{2} \phi_0^4 - |\gamma| \phi_0^2 \phi^2 + \frac{|\gamma|}{2} \phi^4,$$

και συγκρίνοντας με $(\phi')^2 = 2E_0 - \alpha\phi^2 + \frac{|\gamma|}{2}\phi^4$ προκύπτει από τον όρο ϕ^2 ότι $|\gamma|\phi_0^2 = \alpha$, ενώ ο σταθερός όρος δίνει $2E_0 = \frac{|\gamma|}{2}\phi_0^4$, δηλαδή $E_0 = \alpha^2/(4|\gamma|) = \kappa_0^4/(4\mu_0^2)$, σε συμφωνία με τη §8.3.

8.5.2 β) — Χωρισμός μεταβλητών

$$\frac{d\phi}{\phi_0^2 - \phi^2} = \sqrt{\frac{|\gamma|}{2}} d\xi.$$

8.5.3 γ) — Ανάλυση σε μερικά κλάσματα

$$\frac{1}{\phi_0^2 - \phi^2} = \frac{1}{(\phi_0 - \phi)(\phi_0 + \phi)} = \frac{1}{2\phi_0} \left(\frac{1}{\phi_0 - \phi} + \frac{1}{\phi_0 + \phi} \right).$$

8.5.4 δ) — Ολοκλήρωση

Από την ανάλυση σε μερικά κλάσματα,

$$\frac{1}{2\phi_0} \left[-\ln(\phi_0 - \phi) + \ln(\phi_0 + \phi) \right] = \sqrt{\frac{|\gamma|}{2}} \xi$$

οπότε

$$\frac{1}{2\phi_0} \ln \left(\frac{\phi_0 + \phi}{\phi_0 - \phi} \right) = \sqrt{\frac{|\gamma|}{2}} \xi.$$

Αναγνωρίζουμε ότι

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

άρα

$$\frac{1}{\phi_0} \tanh^{-1} \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) = \sqrt{\frac{|\gamma|}{2}} \xi.$$

8.5.5 ε) — Τελική λύση

$$\phi(\xi) = \phi_0 \tanh\left(\phi_0 \sqrt{\frac{|\gamma|}{2}} \xi\right).$$

Ο συντελεστής του ξ είναι $p = \phi_0 \sqrt{|\gamma|/2} = \sqrt{\alpha/2}$, οπότε η κανονικοποίηση $p = 1$ αντιστοιχεί σε $\alpha = 2$ (βλ. Παρατήρηση 5). Επιπλέον, αφού $\gamma = 2\beta/\sigma$, από την (9) έχουμε $\phi_0 = \sqrt{\alpha/|\gamma|} = \sqrt{2/|\gamma|} = \sqrt{\sigma/|\beta|}$.

Προσοχή στο πρόσημο του β . Η Περίπτωση Β απαιτεί $\gamma < 0$, και επειδή $\gamma = 2\beta/\sigma$ με $\sigma > 0$, αυτό σημαίνει

$$\boxed{\beta < 0}$$

για τη λύση σκοτεινού σολιτονίου. Το πλάτος γράφεται επομένως υποχρεωτικά με $|\beta|$ και όχι με β — διαφορετικά θα ήταν φανταστικό. Οπότε τελικά:

$$\psi_2(s, t) = \sqrt{\frac{\sigma}{|\beta|}} \tanh(s - \sigma kt) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(2+k^2)]}, \quad \beta < 0. \quad (10)$$

Αντίστροφα, η λύση φωτεινού σολιτονίου της §8.4 απαιτεί $\gamma > 0$, δηλαδή $\beta > 0$, και εκεί το $\sqrt{\sigma/\beta}$ είναι θεμιτό. Οι δύο σολιτονικές λύσεις δεν ανήκουν στο ίδιο καθεστώς σταθερού β , καθώς απαιτούν αντίθετα πρόσημα της μη γραμμικότητας: επανερχόμαστε σε αυτό στην Παρατήρηση 11 και στη §9.14.

8.6 Περιοδικές λύσεις

8.6.1 Γιατί υπάρχουν και άλλες φραγμένες λύσεις

Στις §8.4 και §8.5 απομονώσαμε δύο μόνο τροχιές του φασικού επιπέδου (ϕ, ϕ') : την ομοκλινική ($E_0 = 0$, Περίπτωση Α) και την ετεροκλινική ($E_0 = \kappa_0^4/4\mu_0^2$, Περίπτωση Β). Και οι δύο όμως είναι **διαχωριστικές τροχιές**: δεν είναι τυπικές τροχιές του συστήματος, αλλά τα σύνορα ανάμεσα σε οικογένειες τροχιών. Είναι εξ ορισμού μη γενικές, αφού αντιστοιχούν σε μία ακριβώς τιμή της ενέργειας.

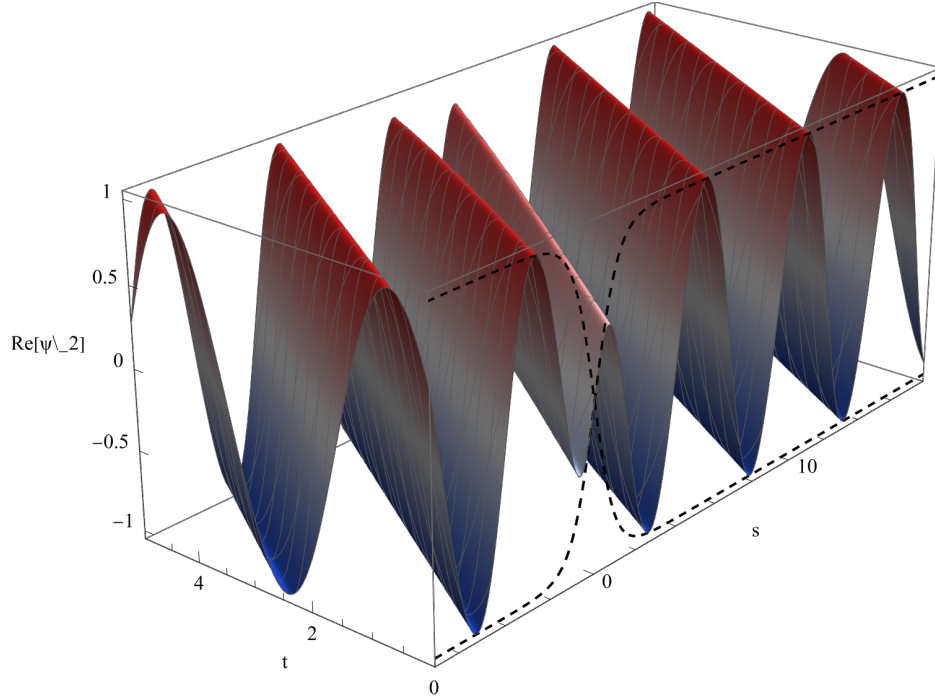
Η διατήρηση της ενέργειας του μηχανικού αναλόγου,

$$E(\phi, \phi') = \frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) = E_0, \quad V(\phi) = \frac{\alpha}{2}\phi^2 + \frac{\gamma}{4}\phi^4,$$

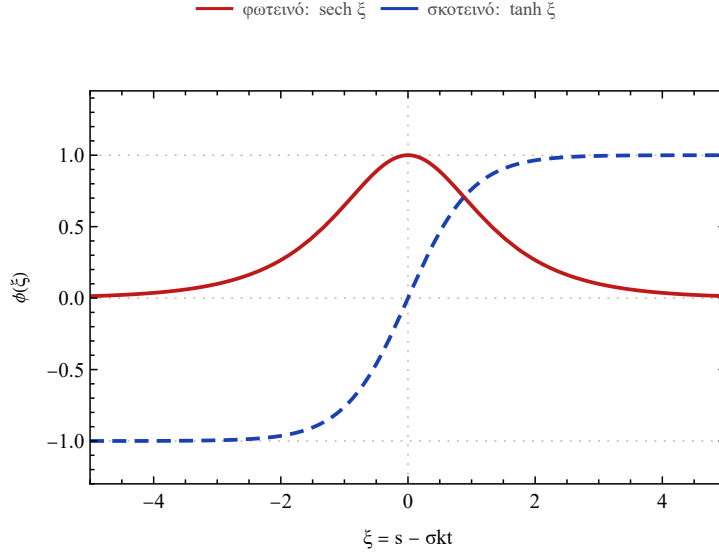
μας λέει ότι κάθε επιτρεπτή τιμή του E_0 δίνει και μία τροχιά. Όσες από αυτές δεν είναι διαχωριστικές αλλά παραμένουν φραγμένες είναι **κλειστές** (periodic orbits) και αντιστοιχούν σε **περιοδικές** λύσεις $\phi(\xi)$ — δηλαδή σε περιοδικά κύματα αντί για μεμονωμένα σολιτόνια. Αυτές θα παραγάγουμε εδώ, και είναι ακριβώς οι λύσεις (12) και (14) του άρθρου του Ivančević, οι οποίες όμως εκεί παρατίθενται χωρίς παραγωγή και χωρίς προσδιορισμό των παραμέτρων a, p, E_0 ως προς το μέτρο m .

Σχέση με τη βιβλιογραφία. Το ότι οι στάσιμες λύσεις της κυβικής NLS εκφράζονται μέσω των ελλειπτικών συναρτήσεων Jacobi είναι γνωστό και έχει μελετηθεί συστηματικά σε άλλα φυσικά πλαίσια. Οι Carr, Clark και Reinhardt [30, 31] δίνουν την πλήρη ταξινόμηση για συμπυκνώματα Bose–Einstein και για οπτικές ίνες, χωριστά για την απωστική ($\beta < 0$, όπου εμφανίζονται οι λύσεις sn) και την ελκτική περίπτωση ($\beta > 0$, όπου εμφανίζονται οι cn και dn) — ακριβώς η διάκριση που στο δικό μας πλαίσιο εκφράζεται από το πρόσημο του δυναμικού αγοράς β . Η δομή που θα βρούμε δεν είναι επομένως νέα ως μαθηματικό αποτέλεσμα: νέα είναι η μεταφορά της στο χρηματοοικονομικό υπόδειγμα, η σύνδεσή της με τη φασική δομή της Duffing και η οικονομική ερμηνεία του Κεφαλαίου 9.

Για τις ιδιότητες, τις ταυτότητες και τα ολοκληρώματα των ελλειπτικών συναρτήσεων που θα χρησιμοποιήσουμε παραπέμπουμε στα [26, 27], και για τις αριθμητικές τιμές και τις συμβάσεις στα [28, 29].



Σχήμα 4: Το πραγματικό μέρος της λύσης σκοτεινού σολιτονίου (10) για $k = 1.2$, $\sigma = 1$, $\beta = -1$ (άρα $|\beta| = 1$ και πλάτος $\sqrt{\sigma/|\beta|} = 1$), $s \in (-7, 18)$, $t \in (0, 5)$ — αναπαράγωγή του Σχ. 3 του άρθρου [7]. Σημειώνεται ότι το πρόσημο $\beta < 0$ είναι υποχρεωτικό εδώ: με $\beta > 0$ η Περίπτωση B δεν υφίσταται. Η αλλαγή προσήμου αφορά την περιβάλλουσα $\tanh(s - \sigma kt)$ και όχι το ίδιο το $\text{Re} \psi_2$, το οποίο ταλαντώνεται σε ολόκληρο το πεδίο λόγω του όρου φάσης· το κινούμενο μέτωπο διακρίνεται ως η γραμμή $s = \sigma kt$ όπου το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται. Η περιβάλλουσα $\pm \tanh(s)$ είναι σχεδιασμένη διακεκομμένη στην πρόσοψη $t = 0$.



Σχήμα 5: Τα δύο χωρικά προφίλ $\phi(\xi)$ που παρήχθησαν στις §8.4 και §8.5. Το φωτεινό σολιτόνιο είναι εντοπισμένο και μηδενίζεται στο άπειρο (μηδενικές συνοριακές συνθήκες, §8.4.1), ενώ το σκοτεινό συνδέει τις δύο μη μηδενικές τιμές $\pm\phi_0 = \pm\kappa_0/\mu_0$ ((9)). Η διαφορά αυτή στις συνοριακές συνθήκες είναι ακριβώς η διαφορά ομοκλινικής–ετεροκλινικής τροχιάς των Σχ. 1–2.

Ειδικότερα, όλες οι αναγωγές ολοκληρωμάτων της μορφής $\int d\phi/\sqrt{P(\phi)}$ με P πολυώνυμο 4ου βαθμού σε ελλειπτικές συναρτήσεις είναι καταλογογραφημένες στο [26] (§§200–260)· εμείς τις εκτελούμε ρητά, ώστε η αντιστοιχία ρίζες $\rightarrow$ ελλειπτική συνάρτηση να είναι διαφανής.

8.6.2 Το πρώτο ολοκλήρωμα για $E_0 \neq 0$

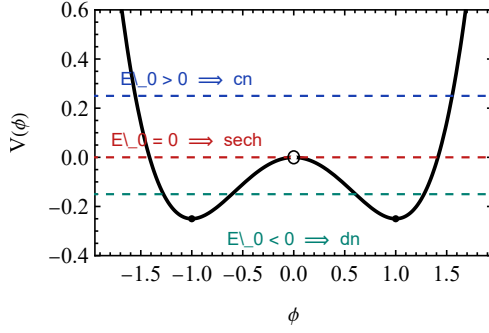
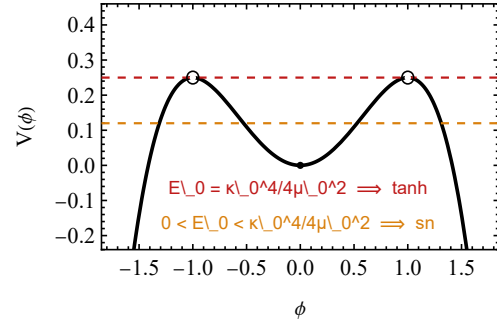
Επαναλαμβάνουμε το βήμα της §8.4.1 χωρίς να μηδενίσουμε τη σταθερά ενέργειας:

$$(\phi')^2 = 2E_0 - \alpha\phi^2 - \frac{\gamma}{2}\phi^4 \equiv P(\phi). \quad (11)$$

Επειδή $(\phi')^2 \geq 0$, η κίνηση περιορίζεται στις περιοχές όπου $P(\phi) \geq 0$. Το P είναι άρτιο πολυώνυμο 4ου βαθμού (κληρονομιά της συμμετρίας $\phi \rightarrow -\phi$ της Duffing), άρα οι ρίζες του έρχονται σε συμμετρικά ζεύγη $\pm a, \pm b$ ή $\pm a, \pm ic$. Αυτό αφήνει ακριβώς τρεις δυνατές δομές, και καθεμία παράγει διαφορετική ελλειπτική συνάρτηση Jacobi (πρβλ. την αντίστοιχη ταξινόμηση στα [30, 31], όπου το ίδιο τριμερές σχήμα προκύπτει από τις συνοριακές συνθήκες αντί από τη στάθμη ενέργειας).

8.6.3 Ταξινόμηση των φραγμένων τροχιών

Με βάση το δυναμικό της §8.3 (Σχ. 1–2), εμπλουτισμένο τώρα με τις ενδιάμεσες στάθμες ενέργειας (Σχ. 6), η ταξινόμηση είναι άμεση:

Περίπτωση Α: $\alpha < 0, \gamma > 0$ Περίπτωση Β: $\alpha > 0, \gamma < 0$ 

Σχήμα 6: Το δυναμικό $V(\phi)$ των δύο περιπτώσεων της §8.3 και τα επίπεδα ενέργειας E_0 που παράγουν τις ελλειπτικές λύσεις. Οι λύσεις sech και tanh των §8.4–8.5 είναι οι διαχωριστικές στάθμες· κάθε άλλη επιτρεπτή στάθμη δίνει περιοδική λύση: cn για $E_0 > 0$ (§8.7), sn για $0 < E_0 < \kappa_0^4/4\mu_0^2$ (§8.8) και dn για $-\kappa_0^4/4\mu_0^2 < E_0 < 0$ (§8.9). Οι τρεις αυτές οικογένειες εξαντλούν τις μη εκφυλισμένες περιοδικές φραγμένες τροχιές· μαζί με τις σταθερές και τις διαχωριστικές λύσεις συμπληρώνουν την ταξινόμηση των φραγμένων τροχιών του συστήματος.

Ενέργεια E_0	Τροχιά στο (ϕ, ϕ')	Ρίζες του $P(\phi)$	Λύση
Περίπτωση Α ($\alpha = -\kappa_0^2 < 0, \gamma = \mu_0^2 > 0$ – διπλό πηγάδι):			
$E_0 = -\frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$	σημείο ισορροπίας $\pm\kappa_0/\mu_0$	διπλή	$\phi = \text{σταθ.}$
$-\frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2} < E_0 < 0$	κλειστή, εντός ενός πηγαδιού	$\pm a, \pm b$	dn
$E_0 = 0$	ομοκλινική (§8.4)	$\pm a$ και διπλή στο 0	sech
$E_0 > 0$	κλειστή, περικλείει και τα δύο πηγάδια	$\pm a, \pm ic$	cn
Περίπτωση Β ($\alpha = \kappa_0^2 > 0, \gamma = -\mu_0^2 < 0$ – ανεστραμμένη):			
$0 < E_0 < \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$	κλειστή, γύρω από το $\phi = 0$	$\pm a, \pm c$	sn
$E_0 = \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$	ετεροκλινική (§8.5)	$\pm\kappa_0/\mu_0$ διπλές	tanh
$E_0 > \frac{\kappa_0^4}{4\mu_0^2}$	μη φραγμένη	—	—

Παρατήρηση 5 (Η κανονικοποίηση $p = 1$). Στις §8.4.5 και §8.5.5 καταλήξαμε στα

$$\psi_4 = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \operatorname{sech}(s - \sigma kt) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(k^2 - 1)]}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{\sigma}{|\beta|}} \tanh(s - \sigma kt) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(2 + k^2)]},$$

όπου και στις δύο περιπτώσεις το όρισμα εμφανίζεται χωρίς πρόσθετο συντελεστή κλίμακας, δηλαδή ως $(s - \sigma kt)$. Αυτό **δεν** αντιστοιχεί στην ίδια τιμή του κ_0 :

- §8.4: ο συντελεστής του ξ είναι $\sqrt{|\alpha|} = \kappa_0$, άρα $\kappa_0 = 1$ και $\alpha = -1$, οπότε $\omega = \frac{\sigma}{2}(k^2 - 1)$.

- §8.5: ο συντελεστής του ξ είναι $\phi_0 \sqrt{|\gamma|/2} = \sqrt{\alpha/2}$ (χρησιμοποιώντας τη διορθωμένη (9)), άρα $\alpha = 2$ και $\kappa_0 = \sqrt{2}$, οπότε $\omega = \frac{\sigma}{2}(2 + k^2)$.

Επομένως ο συντελεστής p του ξ μέσα στην ελλειπτική (ή υπερβολική) συνάρτηση τίθεται ίσος με 1, και όχι « $\kappa_0 = 1$ ». Αυτήν ακολουθούμε παρακάτω: υπολογίζουμε πρώτα τη γενική μορφή με ελεύθερα κ_0, μ_0 και μετά θέτουμε $p = 1$.

Οι δύο φαινομενικά ασύνδετες τιμές $\alpha = -1$ και $\alpha = 2$ θα αποδειχθούν τα όρια $m \rightarrow 1$ των δύο περιοδικών οικογενειών, αφού θα βρούμε $\alpha = 1 - 2m^2 \rightarrow -1$ για την cn και $\alpha = 1 + m^2 \rightarrow 2$ για την sn .

Παρατήρηση 6 (Σύμβαση για το μέτρο m). Ο Ivancevic ορίζει το m ως μέτρο (elliptic modulus), με $\text{sn}(s, 0) = \sin s$ και $\text{sn}(s, 1) = \tanh s$. Χρησιμοποιούμε παντού τις ταυτότητες

$$\text{cn}^2 u = 1 - \text{sn}^2 u, \quad \text{dn}^2 u = 1 - m^2 \text{sn}^2 u, \quad \text{dn}^2 u = 1 - m^2 + m^2 \text{cn}^2 u.$$

Η σύμβαση αυτή πρέπει να τηρείται με προσοχή στους αριθμητικούς υπολογισμούς: αρκετά συστήματα υπολογιστικής άλγεβρας (μεταξύ των οποίων η Mathematica) δέχονται ως δεύτερο όρισμα την παράμετρο m^2 και όχι το μέτρο m . Όλα τα σχήματα της παρούσας εργασίας έχουν παραχθεί με το μέτρο m , δηλαδή καλώντας `JacobiSN[u, m^2]`.

8.7 Περίπτωση Γ: Λύση cn (κλειστές τροχιές με $E_0 > 0$)

8.7.1 α) — Παραγοντοποίηση του πρώτου ολοκληρώματος

Εδώ $\gamma = \mu_0^2 > 0$ και $E_0 > 0$, οπότε $P(0) = 2E_0 > 0$ και το P έχει δύο πραγματικές ρίζες $\pm a$ και δύο φανταστικές $\pm ic$:

$$(\phi')^2 = \frac{\mu_0^2}{2} (a^2 - \phi^2)(\phi^2 + c^2). \quad (12)$$

Αναπτύσσοντας και συγκρίνοντας συντελεστές με την (11):

$$\frac{\mu_0^2}{2} (c^2 - a^2) = \alpha = -\kappa_0^2, \quad \frac{\mu_0^2}{4} a^2 c^2 = E_0. \quad (13)$$

Η κίνηση γίνεται στο $|\phi| \leq a$ και η τροχιά διασχίζει το $\phi = 0$: περικλείει και τα δύο πηγάδια του δυναμικού.

8.7.2 β) — Χωρισμός μεταβλητών

$$\frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2} (a^2 - \phi^2)(\phi^2 + c^2)}} = d\xi. \quad (14)$$

8.7.3 γ) — Αλλαγή μεταβλητής

Ορίζουμε το μέτρο m ως

$$m^2 = \frac{a^2}{a^2 + c^2} \in (0, 1) \quad \Longleftrightarrow \quad c^2 = a^2 \frac{1 - m^2}{m^2}, \quad (15)$$

και θέτουμε

$$\phi = a \text{cn}(u, m) \quad \Longrightarrow \quad d\phi = -a \text{sn}(u, m) \text{dn}(u, m) du.$$

8.7.4 δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα

Οι δύο παράγοντες γίνονται

$$a^2 - \phi^2 = a^2(1 - \operatorname{cn}^2 u) = a^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

$$\phi^2 + c^2 = a^2 \operatorname{cn}^2 u + a^2 \frac{1 - m^2}{m^2} = \frac{a^2}{m^2} (m^2 \operatorname{cn}^2 u + 1 - m^2) = \frac{a^2}{m^2} \operatorname{dn}^2 u,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $\operatorname{dn}^2 = 1 - m^2 + m^2 \operatorname{cn}^2$ (ο ρόλος που έπαιζε η $1 - \operatorname{sech}^2 = \tanh^2$ στη §8.4.4). Άρα η ρίζα του παρονομαστή της (14) γίνεται

$$\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2} \cdot a^2 \operatorname{sn}^2 u \cdot \frac{a^2}{m^2} \operatorname{dn}^2 u} = \frac{a^2 \mu_0}{m\sqrt{2}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

και το αριστερό μέλος απλοποιείται πλήρως:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2} (a^2 - \phi^2)(\phi^2 + c^2)}} = \int \frac{-a \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u du}{\frac{a^2 \mu_0}{m\sqrt{2}} \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u} = -\frac{m\sqrt{2}}{a\mu_0} \int du = -\frac{m\sqrt{2}}{a\mu_0} u.$$

8.7.5 ε) — Εξίσωση και τελική λύση

Εξισώνοντας με το δεξί μέλος $\xi + C$ και θέτοντας $C = 0$ (κέντρο στο $\xi = 0$):

$$-\frac{m\sqrt{2}}{a\mu_0} u = \xi \quad \implies \quad u = -\frac{a\mu_0}{m\sqrt{2}} \xi.$$

Επειδή η cn είναι **άρτια** συνάρτηση, το πρόσημο δεν επηρεάζει:

$$\boxed{\phi(\xi) = a \operatorname{cn}(p\xi, m), \quad p = \frac{a\mu_0}{m\sqrt{2}}} \quad (16)$$

Λύνοντας τις (13)–(15) ως προς a και p προκύπτει η πλήρης παραμετροποίηση:

$$a = \frac{\kappa_0}{\mu_0} m \sqrt{\frac{2}{2m^2 - 1}}, \quad p = \frac{\kappa_0}{\sqrt{2m^2 - 1}}, \quad E_0 = \frac{\kappa_0^4}{\mu_0^2} \frac{m^2(1 - m^2)}{(2m^2 - 1)^2} > 0. \quad (17)$$

8.7.6 στ) — Επιστροφή στο ansatz και έλεγχος

Με την κανονικοποίηση $p = 1$ της Παρατήρησης 5, δηλαδή $\kappa_0^2 = 2m^2 - 1$:

$$\alpha = -\kappa_0^2 = 1 - 2m^2, \quad a = m \sqrt{\frac{2}{\mu_0^2}} = m \sqrt{\frac{2}{\gamma}} = m \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}},$$

και από $\alpha = \frac{2\omega - \sigma k^2}{\sigma}$ (§8.2.4):

$$\boxed{\omega = \frac{\sigma}{2}(1 - 2m^2 + k^2)}$$

[Cnoidal λύση] Αντικαθιστώντας πίσω στο ansatz $\psi(s, t) = \phi(\xi)e^{i(ks - \omega t)}$ με $\xi = s - \sigma kt$:

$$\boxed{\psi_3(s, t) = m \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \operatorname{cn}(s - \sigma kt, m) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(1 - 2m^2 + k^2)]}, \quad m \in (0, 1).} \quad (18)$$

Έλεγχος ορίων.

- $m \rightarrow 1^-$: από την (17) $E_0 \rightarrow 0$, δηλαδή επιστρέφουμε στη διαχωριστική στάθμη. Πράγματι $\text{cn}(u, 1) = \text{sech } u$, $a \rightarrow \sqrt{\sigma/\beta}$ και $\omega \rightarrow \frac{\sigma}{2}(k^2 - 1)$, οπότε η (18) ανάγεται **ακριβώς** στη λύση ψ_4 της §8.4.5. Παρατηρούμε ότι $\alpha \rightarrow -1$, δηλαδή $\kappa_0 \rightarrow 1$: ανακτάται αυτόματα η κανονικοποίηση της §8.4 (Παρατήρηση 5).
- $m \rightarrow 0^+$: $\text{cn}(u, 0) = \cos u$, $a \rightarrow 0$ και $\omega \rightarrow \frac{\sigma}{2}(1 + k^2)$: γραμμικό όριο μικρού πλάτους, δηλαδή το επίπεδο κύμα de Broglie της §8.1.

Παρατήρηση 7 (Το εύρος ισχύος της παραμετροποίησης (17)). Η (17) προϋποθέτει $2m^2 - 1 > 0$, δηλαδή $m > 1/\sqrt{2}$. Στην κανονικοποίηση $p = 1$ αυτό αντιστοιχεί σε $\alpha = 1 - 2m^2 < 0$, δηλαδή στο διπλό πηγάδι της Περίπτωσης Α που χρησιμοποιήσαμε.

Για $m < 1/\sqrt{2}$ η λύση $\phi = a \text{cn}(p\xi, m)$ εξακολουθεί να ικανοποιεί την Duffing, αλλά με $\alpha = 1 - 2m^2 > 0$ και $\gamma > 0$: το δυναμικό έχει πλέον ένα ελάχιστο στο $\phi = 0$ (σκληρός μη γραμμικός ταλαντωτής) και όχι διπλό πηγάδι. Πρόκειται δηλαδή για μια τέταρτη περίπτωση προσήμων ($\alpha > 0, \gamma > 0$), η οποία δεν εξετάστηκε στη §8.3 επειδή δεν παράγει σολιτονική λύση — το φασικό της πορτραίτο αποτελείται αποκλειστικά από κλειστές τροχιές γύρω από το μοναδικό ευσταθές σημείο, χωρίς διαχωριστική τροχιά. Οικονομικά αντιστοιχεί σε αγορά με ένα μόνο επίπεδο ισορροπίας και συμμετρικές, μη γραμμικά «σκληρές» διακυμάνσεις γύρω του.

Η τιμή $m = 1/\sqrt{2}$ είναι το σύνορο των δύο καθεστώτων: εκεί $\kappa_0 = 0$, $\alpha = 0$, και η (17) εκφυλίζεται (0/0). Το όριο υπάρχει και είναι πεπερασμένο — η Duffing γίνεται καθαρά κυβική, $\phi'' + \gamma\phi^3 = 0$ — αλλά η συγκεκριμένη γραφή μέσω των κ_0, μ_0 δεν εφαρμόζεται. Στη συνέχεια περιοριζόμαστε σε $m \in (1/\sqrt{2}, 1)$, που είναι άλλωστε το διάστημα που ενδιαφέρει την ερμηνεία της §9.8 (προσέγγιση στη διαχωριστική τροχιά).

8.8 Περίπτωση Δ: Λύση sn (κλειστές τροχιές της ανεστραμμένης Duffing)

8.8.1 α) — Παραγοντοποίηση

Τώρα $\alpha = \kappa_0^2 > 0$, $\gamma = -\mu_0^2 < 0$ (Περίπτωση Β της §8.3) και $0 < E_0 < \kappa_0^4/4\mu_0^2$. Ο συντελεστής του ϕ^4 στην (11) είναι $+\mu_0^2/2 > 0$, άρα και οι τέσσερις ρίζες είναι πραγματικές:

$$(\phi')^2 = \frac{\mu_0^2}{2}(a^2 - \phi^2)(c^2 - \phi^2), \quad 0 < a < c, \quad (19)$$

με

$$a^2 + c^2 = \frac{2\kappa_0^2}{\mu_0^2}, \quad \frac{\mu_0^2}{4}a^2c^2 = E_0. \quad (20)$$

Το $P(\phi) \geq 0$ ισχύει είτε για $|\phi| \leq a$ είτε για $|\phi| \geq c$: η φραγμένη κίνηση είναι η πρώτη, ανάμεσα στις δύο εσωτερικές ρίζες.

8.8.2 β, γ) — Χωρισμός και αλλαγή μεταβλητής

Θέτουμε $m = a/c \in (0, 1)$, δηλαδή $c = a/m$, και

$$\phi = a \text{sn}(u, m) \quad \implies \quad d\phi = a \text{cn}(u, m) \text{dn}(u, m) du.$$

8.8.3 δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα

$$a^2 - \phi^2 = a^2 \text{cn}^2 u, \quad c^2 - \phi^2 = \frac{a^2}{m^2}(1 - m^2 \text{sn}^2 u) = \frac{a^2}{m^2} \text{dn}^2 u,$$

οπότε οι όροι $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ απλοποιούνται όπως ακριβώς πριν:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2}(a^2 - \phi^2)(c^2 - \phi^2)}} = \int \frac{a \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u du}{\frac{a^2 \mu_0}{m\sqrt{2}} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} = \frac{m\sqrt{2}}{a\mu_0} u = \xi.$$

8.8.4 ε) — Τελική λύση

$$\phi(\xi) = a \operatorname{sn}(p\xi, m), \quad p = \frac{a\mu_0}{m\sqrt{2}} = \frac{\kappa_0}{\sqrt{1+m^2}}, \quad a = \frac{\kappa_0}{\mu_0} m \sqrt{\frac{2}{1+m^2}}, \quad (21)$$

$$E_0 = \frac{\kappa_0^4}{\mu_0^2} \frac{m^2}{(1+m^2)^2}. \quad (22)$$

Με $p = 1$, δηλαδή $\kappa_0^2 = 1 + m^2$:

$$\alpha = 1 + m^2, \quad a = m \sqrt{\frac{2}{\mu_0^2}} = m \sqrt{\frac{2}{|\gamma|}} = m \sqrt{\frac{\sigma}{|\beta|}}, \quad \boxed{\omega = \frac{\sigma}{2}(1 + m^2 + k^2)}$$

[Snoidal λύση]

$$\boxed{\psi_1(s, t) = m \sqrt{\frac{\sigma}{|\beta|}} \operatorname{sn}(s - \sigma kt, m) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(1+m^2+k^2)]}, \quad m \in (0, 1).} \quad (23)$$

Έλεγχος ορίων.

- $m \rightarrow 1^-$: η (22) δίνει $E_0 \rightarrow \kappa_0^4/4\mu_0^2$ – ακριβώς η ενέργεια της ετεροκλινικής τροχιάς της §8.3 – ενώ $a \rightarrow \kappa_0/\mu_0 = \phi_0$, δηλαδή τα σημεία επιστροφής συμπίπτουν με τα ασταθή σημεία ισορροπίας $\phi_{1,2}^* = \pm \kappa_0/\mu_0$ – ακριβώς οι μη μηδενικές συνοριακές τιμές $\phi \rightarrow \pm \phi_0$ της §8.5.1. Αφού $\operatorname{sn}(u, 1) = \tanh u$, $a \rightarrow \sqrt{\sigma/|\beta|} = \phi_0$ και $\omega \rightarrow \frac{\sigma}{2}(2 + k^2)$, ανακτάται ακριβώς η λύση ψ_2 της §8.5.5. Εδώ $\alpha \rightarrow 2$, δηλαδή $\kappa_0 \rightarrow \sqrt{2}$: η κανονικοποίηση της §8.5 (βλ. και Παρατήρηση 5).
- $m \rightarrow 0^+$: $E_0 \rightarrow 0$, $a \rightarrow 0$, $\operatorname{sn}(u, 0) = \sin u$: μικρές αρμονικές ταλαντώσεις γύρω από το ευσταθές σημείο $\phi_0^* = 0$ – ακριβώς όπως προβλέπει το φασικό πορτραίτο της Περίπτωσης Β.

Παρατήρηση 8 (Η σχέση του m με την ενέργεια και την κανονικοποίηση $p = 1$). Για σταθερούς συντελεστές α, γ της Duffing, το ελλειπτικό μέτρο m αποτελεί ισοδύναμη παραμετροποίηση της επιτρεπτής ενέργειας E_0 μέσα στον συγκεκριμένο κλάδο τροχιών. Χρειάζεται όμως προσοχή όταν επιβάλλουμε την κανονικοποίηση $p = 1$: τότε οι σχέσεις που βρήκαμε, π.χ. $\alpha = 1 + m^2$ για την sn ή $\alpha = 1 - 2m^2$ για την cn , δείχνουν ότι μεταβάλλοντας το m μεταβάλλουμε ταυτόχρονα και τον κανονικοποιημένο συντελεστή α . Άρα η φράση «το m ισοδυναμεί με την ενέργεια» αναφέρεται αυστηρά σε σταθερό δυναμικό πριν από την επιλογή της χωρικής κλίμακας: οι οικογένειες με $p = 1$ πρέπει να νοούνται ως κανονικοποιημένη παρουσίαση συγγενών συστημάτων.

Μέσα σε κάθε τέτοιο δυναμικό κλάδο, το m λειτουργεί ως συνεχής δείκτης της μορφής της τροχιάς: από μικρές ή σχεδόν σταθερές ταλαντώσεις προς το διαχωριστικό όριο $m \rightarrow 1$. Η οικονομική ανάγνωση αυτής της παρεμβολής απαιτεί εμπειρική βαθμονόμηση για να αποκτήσει ποσοτικό περιεχόμενο.

8.9 Περίπτωση Ε: Λύση dn (κλειστές τροχιές εντός ενός πηγαδιού)

Η ταξινόμηση της §8.6.3 προέβλεψε τρεις δομές ριζών για την Περίπτωση Α, από τις οποίες έχουμε καλύψει δύο (sech για $E_0 = 0$, cn για $E_0 > 0$). Απομένει η τρίτη, που αντιστοιχεί σε αρνητική ενέργεια και είναι εκείνη που σημειώνεται στο Σχ. 6 ως « $E_0 < 0 \Rightarrow \operatorname{dn}$ ». Στη φυσική βιβλιογραφία η λύση αυτή είναι γνωστή ως $\operatorname{dnoidal}$ και εμφανίζεται στην ελκτική περίπτωση της στάσιμης NLS [31]: εδώ την παράγουμε στο δικό μας πλαίσιο και με τη δική μας κανονικοποίηση.

8.9.1 α) — Παραγοντοποίηση

Εδώ $\alpha = -\kappa_0^2 < 0$, $\gamma = \mu_0^2 > 0$ και $-\kappa_0^4/4\mu_0^2 < E_0 < 0$. Τώρα $P(0) = 2E_0 < 0$, οπότε και οι τέσσερις ρίζες είναι πραγματικές, $\pm a, \pm b$ με $0 < b < a$:

$$(\phi')^2 = \frac{\mu_0^2}{2} (a^2 - \phi^2)(\phi^2 - b^2), \quad b \leq |\phi| \leq a. \quad (24)$$

Συγκρίνοντας συντελεστές με την (11):

$$a^2 + b^2 = \frac{2\kappa_0^2}{\mu_0^2}, \quad E_0 = -\frac{\mu_0^2}{4} a^2 b^2 < 0. \quad (25)$$

Η κρίσιμη διαφορά από τις §8.7–8.8 είναι ότι η κίνηση περιορίζεται σε $b \leq \phi \leq a$ (ή στο κατοπτρικό διάστημα): η τροχιά **δεν διασχίζει το** $\phi = 0$ αλλά παραμένει μέσα σε ένα από τα δύο πηγάρδια του δυναμικού.

8.9.2 β,γ) — Χωρισμός και αλλαγή μεταβλητής

Ορίζουμε το μέτρο

$$m^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \in (0, 1) \iff b^2 = a^2(1 - m^2), \quad (26)$$

και θέτουμε

$$\phi = a \operatorname{dn}(u, m) \implies d\phi = -a m^2 \operatorname{sn}(u, m) \operatorname{cn}(u, m) du.$$

8.9.3 δ) — Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα

Με τις ταυτότητες της Παρατήρησης 6,

$$a^2 - \phi^2 = a^2(1 - \operatorname{dn}^2 u) = a^2 m^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

$$\phi^2 - b^2 = a^2 \operatorname{dn}^2 u - a^2(1 - m^2) = a^2(1 - m^2 \operatorname{sn}^2 u - 1 + m^2) = a^2 m^2 \operatorname{cn}^2 u,$$

οπότε η ρίζα του παρονομαστή γίνεται $\frac{a^2 m^2 \mu_0}{\sqrt{2}} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$ και οι όροι $\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u$ απλοποιούνται όπως ακριβώς στις §8.7.4 και §8.8.3:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\mu_0^2}{2} (a^2 - \phi^2)(\phi^2 - b^2)}} = \int \frac{-a m^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u du}{\frac{a^2 m^2 \mu_0}{\sqrt{2}} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} = -\frac{\sqrt{2}}{a \mu_0} \int du = -\frac{\sqrt{2}}{a \mu_0} u.$$

8.9.4 ε) — Τελική λύση

Εξισώνοντας με ξ και αξιοποιώντας ότι η dn είναι άρτια:

$$\phi(\xi) = a \operatorname{dn}(p \xi, m), \quad p = \frac{a \mu_0}{\sqrt{2}} = \frac{\kappa_0}{\sqrt{2 - m^2}}, \quad a = \frac{\kappa_0}{\mu_0} \sqrt{\frac{2}{2 - m^2}}, \quad (27)$$

$$E_0 = -\frac{\kappa_0^4}{\mu_0^2} \cdot \frac{1 - m^2}{(2 - m^2)^2} < 0. \quad (28)$$

Με την κανονικοποίηση $p = 1$ της Παρατήρησης 5, δηλαδή $\kappa_0^2 = 2 - m^2$:

$$\alpha = -\kappa_0^2 = m^2 - 2, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}}, \quad \omega = \frac{\sigma}{2} (k^2 + m^2 - 2).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι εδώ, σε αντίθεση με τις (18) και (23), το πλάτος a δεν εξαρτάται από το m .
[Dnoidal λύση] Αντικαθιστώντας στο ansatz:

$$\psi_5(s, t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \operatorname{dn}(s - \sigma kt, m) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(k^2 + m^2 - 2)]}, \quad m \in (0, 1), \beta > 0. \quad (29)$$

Έλεγχος ορίων.

- $m \rightarrow 1^-$: από την (28) $E_0 \rightarrow 0$, δηλαδή η διαχωριστική στάθμη. Πράγματι $\operatorname{dn}(u, 1) = \operatorname{sech} u$, $b \rightarrow 0$, $a \rightarrow (\kappa_0/\mu_0)\sqrt{2}$ — ακριβώς το σημείο επιστροφής της ομοκλινικής τροχιάς της §8.3 — και $\omega \rightarrow \frac{\sigma}{2}(k^2 - 1)$. Ανακτάται επομένως **ακριβώς** η λύση ψ_4 της (8).
- $m \rightarrow 0^+$: $\operatorname{dn}(u, 0) = 1$, $b \rightarrow a \rightarrow \kappa_0/\mu_0$ και $E_0 \rightarrow -\kappa_0^4/4\mu_0^2$, δηλαδή ο πυθμένας του πηγαδιού: η λύση εκφυλίζεται στη σταθερή $\phi = \kappa_0/\mu_0$, που είναι το ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αυτό αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή του πίνακα της §8.6.3.

Παρατήρηση 9 (Γιατί η dn είναι ποιοτικά διαφορετική). Οι sn και cn αλλάζουν πρόσημο και μηδενίζονται περιοδικά: η dn όχι. Το προφίλ έντασης

$$|\psi_5(s, t)|^2 = \frac{\sigma}{\beta} \operatorname{dn}^2(s - \sigma kt, m) \in \left[\frac{\sigma}{\beta}(1 - m^2), \frac{\sigma}{\beta} \right]$$

είναι περιοδικά διαμορφωμένο αλλά **αυστηρά θετικό**: δεν υπάρχει καμία ζώνη αποκλεισμού. Η περίοδός του ως προς ξ είναι $2K(m)/p$ και στην κανονικοποίηση $p = 1$ γίνεται $2K(m)$, όπως και για τα $\operatorname{sn}^2, \operatorname{cn}^2$.

Ως φαινομενολογική οικονομική ανάγνωση, η dn περιγράφει το ενδιάμεσο καθεστώς που λείπει από την εικόνα των §9.9–9.10: μια αγορά με περιοδική δομή προτιμώμενων επιπέδων, όπου όμως κανένα επίπεδο δεν αποκλείεται — η σχετική ένταση απλώς ταλαντώνεται ανάμεσα σε ένα ελάχιστο και ένα μέγιστο. Το βάθος της διαμόρφωσης ελέγχεται από το m : για $m \rightarrow 0$ το προφίλ γίνεται ομοιόμορφο, ενώ για $m \rightarrow 1$ το ελάχιστο κατεβαίνει στο μηδέν και ανακτάται το μεμονωμένο φωτεινό σολιτόνιο. Επιπλέον, επειδή η τροχιά παραμένει μέσα σε ένα πηγάδι, η dn είναι η μόνη από τις τρεις λύσεις που περιγράφει αγορά **εγκλωβισμένη σε ένα καθεστώς**, χωρίς εναλλαγή ανάμεσα στα δύο σημεία ισορροπίας.

9 Ερμηνεία των Σολιτονικών και Περιοδικών Λύσεων

Στο παρόν κεφάλαιο χρησιμοποιούμε την πιθανοτική ανάγνωση της Παρατήρησης 1. Υπενθυμίζουμε ότι το s και το t είναι οι αδιάστατες μεταβλητές της Παρατήρησης 2 και ότι το σ είναι ο αδιάστατος συντελεστής διασποράς της NLS, όχι απευθείας η μεταβλητότητα σ_{BS} . Για τον λόγο αυτό οι οικονομικές αντιστοιχίσεις που ακολουθούν είναι **φαινομενολογικές**. Επίσης, ο όρος «πυκνότητα πιθανότητας» χρησιμοποιείται αυστηρά μόνο όταν το $|\psi|^2$ έχει κανονικοποιηθεί: διαφορετικά μιλάμε για **προφίλ πιθανοτικής έντασης**.

9.1 Ερμηνεία της λύσης του Σκοτεινού Σολιτονίου

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση μας από την εξίσωση της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου (10), υπενθυμίζοντας ότι η λύση αυτή υφίσταται μόνο για $\beta < 0$:

$$\psi_2(s, t) = \sqrt{\frac{\sigma}{|\beta|}} \tanh(s - \sigma kt) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(2 + k^2)]}.$$

Αυτό που διαπιστώνουμε από την παραπάνω σχέση είναι ότι η λύση αποτελείται από πλάτος, σχήμα και φάση και μόνο τα δύο πρώτα επηρεάζουν το προφίλ έντασης $|\psi|^2$.

Θα μπορούσαμε να το αναλύσουμε ως εξής. Πρώτον, ο συντελεστής πλάτους $\sqrt{\sigma/|\beta|}$ καθορίζει το συνολικό μέγεθος του προφίλ $|\psi|^2$. Δεύτερον, ο όρος $\tanh(s - \sigma kt)$ περιγράφει το χωρικό σχήμα της λύσης: είναι μια σιγμοειδής συνάρτηση που μεταβαίνει ομαλά από -1 στο $+1$, με κέντρο στο σημείο όπου

$$s - \sigma kt = 0 \implies s = \sigma kt.$$

Πρόκειται, δηλαδή, για ένα μετακινούμενο μέτωπο (οδεύον κύμα). Τρίτον, το εκθετικό τμήμα

$$e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(2+k^2)]}$$

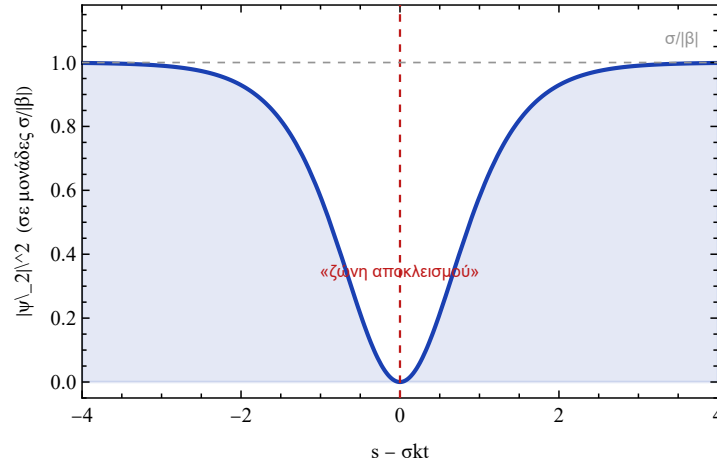
το οποίο αντιπροσωπεύει τη φάση του κύματος και δεν επηρεάζει το $|\psi|^2$ (καθώς $|e^{i\theta}| = 1$).

Προφίλ $|\psi|^2$ και πιθανοτική ανάγνωση

Το προφίλ που προκύπτει είναι:

$$|\psi_2(s, t)|^2 = \frac{\sigma}{|\beta|} \tanh^2(s - \sigma kt).$$

Η συνάρτηση $\tanh^2$ έχει χαρακτηριστική μορφολογία: μηδενίζεται στο $s = \sigma kt$ και τείνει ασυμπτωτικά στην τιμή $\sigma/|\beta|$ για $s \rightarrow \pm\infty$. Στην πιθανοτική ανάγνωση αυτό παριστά ένα «βύθισμα» του προφίλ πάνω στον αδιάστατο χώρο τιμών του υποκείμενου: κοντά στο $s = \sigma kt$ το σχετικό βάρος είναι ελάχιστο, ενώ μακριά από το κέντρο προσεγγίζει σταθερό υπόβαθρο. Επειδή όμως η $\tanh^2$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, το ίδιο το προφίλ δεν αποτελεί κανονικοποιημένη πυκνότητα πιθανότητας σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.



Σχήμα 7: Το προφίλ πιθανοτικής έντασης $|\psi_2|^2 = \frac{\sigma}{|\beta|} \tanh^2(s - \sigma kt)$, σε μονάδες $\sigma/|\beta|$. Το «βύθισμα» στο $s = \sigma kt$ είναι η ζώνη αποκλεισμού που ερμηνεύεται στη §9.2: εκατέρωθεν το προφίλ σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στην τιμή $\sigma/|\beta|$. Υπενθυμίζεται ότι η λύση αυτή απαιτεί $\beta < 0$.

9.2 Οικονομική ερμηνεία του «βυθίσματος»

Το μηδενικό σημείο του προφίλ μπορεί να ερμηνευθεί ως «ζώνη αποκλεισμού» στον αδιάστατο χώρο τιμών του υποκείμενου: γύρω από το κρίσιμο επίπεδο το σχετικό βάρος του προφίλ είναι μικρότερο

από το ασυμπτωτικό υπόβαθρο. Η ερμηνεία αυτή είναι ποιοτική και δεν αποτελεί εμπειρική απόδειξη πραγματικής μετάβασης καθεστώτος. Μαθηματικώς το προφίλ ικανοποιεί:

$$|\psi|^2 = \begin{cases} 0, & \text{όταν } s = \sigma kt, \\ \sigma/|\beta|, & \text{μακριά από το κέντρο.} \end{cases}$$

Πιο αυστηρά, επειδή η $\tanh^2$ έχει μη μηδενικό υπόβαθρο, η εντοπισμένη ποσότητα που μπορεί να κανονικοποιηθεί είναι το έλλειμμα ως προς το υπόβαθρο

$$\Delta\rho(\xi) = \frac{\sigma}{|\beta|} - |\psi|^2 = \frac{\sigma}{|\beta|} \operatorname{sech}^2 \xi, \quad \xi = s - \sigma kt,$$

με $\int_{\mathbb{R}} \Delta\rho(\xi) d\xi = 2\sigma/|\beta|$ για την κανονικοποίηση $p = 1$. Αυτό δίνει μαθηματικά ακριβέστερο μέτρο του βάθους της «ζώνης αποκλεισμού».

Στα χρηματοοικονομικά, αυτό το φαινόμενο μπορεί φαινομενολογικά να συσχετιστεί με περιόδους μετάβασης καθεστώτος (regime transitions), όπου οι τιμές «αναπηδούν» από ένα επίπεδο ισορροπίας σε άλλο. Τυπικά παραδείγματα περιλαμβάνουν το κραχ του 1987, την κρίση του 2008 και τις απότομες αντιδράσεις σε ανακοινώσεις κεντρικών τραπεζών. Σε αυτές τις περιόδους, η αγορά επιδεικνύει έντονη διπολικότητα: οι συμμετέχοντες είναι είτε έντονα αισιόδοξοι είτε έντονα απαισιόδοξοι, χωρίς ενδιάμεση κατάσταση.

9.3 Ταχύτητα διάδοσης και δυναμική του κρίσιμου σημείου

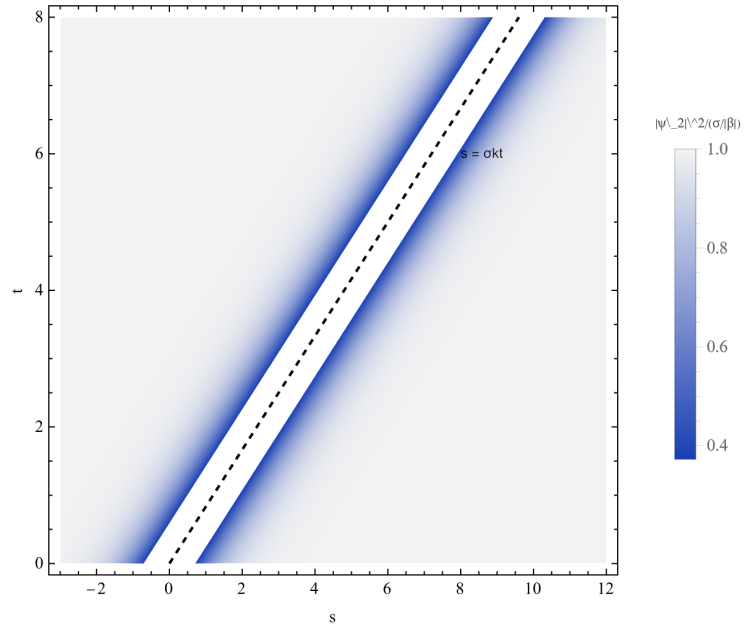
Το σημείο μηδενισμού της $\tanh$ βρίσκεται στο $s = \sigma kt$, όπου σ είναι ο αδιάστατος συντελεστής διασποράς της NLS και k ο κυματαριθμός. Η «ζώνη αποκλεισμού» μετακινείται επομένως γραμμικά με ταχύτητα

$$v = \frac{ds}{dt} = \sigma k.$$

Μεγαλύτερο $|\sigma k|$ σημαίνει ταχύτερη μετατόπιση στον αδιάστατο άξονα s , ενώ το πρόσημο του k καθορίζει την κατεύθυνση όταν $\sigma > 0$. Η ερμηνεία του k ως «ορμής» της αγοράς είναι αναλογική. Δεν συμπεραίνουμε από τη σχέση $v = \sigma k$ ότι η πραγματική μεταβλητότητα σ_{BS} επιταχύνει άμεσα το μέτωπο, εκτός αν προηγηθεί βαθμονόμηση που να συνδέει το σ της NLS με το σ_{BS} .

9.4 Σύνδεση με «χαμόγελο» μεταβλητότητας/λοξότητα

Στο άρθρο [7] που εξετάζουμε αναφέρεται ότι κατά την προσαρμογή της λύσης του σκοτεινού σολιτονίου στο δικαίωμα πώλησης (put option), εμφανίζεται μια απότομη αλλαγή κλίσης (kink) κοντά στην τιμή άσκησης $s \approx 100$ (εικόνα 9). Ας σημειωθεί ότι ο όρος «kink» χρησιμοποιείται εδώ καταχρηστικά: η $\tanh$ είναι συνάρτηση κλάσης C^∞ και δεν έχει πραγματική γωνία, αλλά μια ταχεία και τοπικά εντοπισμένη μεταβολή κλίσης, της οποίας το εύρος ελέγχεται από το ϕ_0 . Το ίδιο ισχύει και εμπειρικά: οι επιφάνειες τεκμαρτής μεταβλητότητας (implied volatility surfaces) δεν παρουσιάζουν ασυνέχεια κλίσης στην τιμή άσκησης, αλλά έντονη καμπύλωση σε στενή περιοχή γύρω από αυτήν. Η αντιστοίχιση είναι επομένως ποιοτική — ταιριάζει το σχήμα, όχι κάποια ιδιομορφία. Στην πράξη, η λοξότητα (volatility skew) εμφανίζεται ως ασυμμετρία στην τεκμαρτή μεταβλητότητα γύρω από την τιμή άσκησης (strike price), φαινόμενο που η υπόθεση σταθερής μεταβλητότητας του βασικού Black-Scholes δεν αναπαράγει. Η μορφολογία της $\tanh$ προσφέρει εδώ μόνο μια φαινομενολογική αναλογία: για να αποδειχθεί ότι το κυματικό μοντέλο αναπαράγει πραγματική λοξότητα τεκμαρτής μεταβλητότητας θα απαιτούνταν βαθμονόμηση σε τιμές δικαιωμάτων και αντιστροφή προς την αντίστοιχη τεκμαρτή μεταβλητότητα.



Σχήμα 8: Το προφίλ $|\psi_2(s, t)|^2$ στο επίπεδο (s, t) για $k = 1.2$, $\sigma = 1$, σε μονάδες $\sigma/|\beta|$. Η σκούρα λωρίδα αντιστοιχεί σε χαμηλή ένταση και είναι η ζώνη αποκλεισμού· το ανοιχτόχρωμο υπόβαθρο αντιστοιχεί στην ασυμπτωτική τιμή 1. Η λωρίδα μετατοπίζεται κατά μήκος της ευθείας $s = \sigma kt$ (διακεκομμένη), με $ds/dt = v = \sigma k$. Εδώ το σ είναι ο αδιάστατος συντελεστής διασποράς της NLS, όχι απευθείας η μεταβλητότητα σ_{BS} .

9.5 Συμπέρασμα για τη λύση σκοτεινού σολιτονίου

Όπως επισημαίνεται στο συμπέρασμα του άρθρου [7], το κυματικό πλαίσιο συνδέεται από τον συγγραφέα με περιόδους κρίσης και «χρυστικά κύματα». Μαθηματικά όμως η κυβική NLS που μελετάμε είναι συντηρητική: το ιδανικό σολιτονικό προφίλ διατηρεί τη μορφή του και δεν διαθέτει μηχανισμό απόσβεσης. Επομένως η οικονομική ανάγνωση πρέπει να περιοριστεί στην ταχεία μεταφορά ενός εντοπισμένου μετώπου. Πραγματική απόσβεση θα απαιτούσε πρόσθετους αποσβεστικούς ή γενικότερα μη συντηρητικούς όρους, οι οποίοι δεν περιλαμβάνονται στην (7).

9.6 Ερμηνεία της λύσης του Φωτεινού Σολιτονίου

Ξαναγράφουμε τη λύση του φωτεινού σολιτονίου που είναι η εξής:

$$\psi_4(s, t) = \sqrt{\frac{\sigma}{\beta}} \operatorname{sech}(s - \sigma kt) e^{i[ks - \frac{1}{2}\sigma t(k^2 - 1)]}.$$

Όπως και στην εξίσωση του σκοτεινού σολιτονίου, η λύση αποτελείται από τον συντελεστή πλάτους $\sqrt{\sigma/\beta}$, το χωρικό προφίλ $\operatorname{sech}(s - \sigma kt)$ και τον εκθετικό όρο φάσης. Η κρίσιμη διαφορά έγκειται στη συνάρτηση sech : αντί να μηδενίζεται στο κέντρο, σχηματίζει μια συμμετρική κορυφή (μέγιστο) και φθίνει εκθετικά εκατέρωθεν.

Σε αυτήν την περίπτωση το προφίλ είναι

$$|\psi_4(s, t)|^2 = \frac{\sigma}{\beta} \operatorname{sech}^2(s - \sigma kt).$$

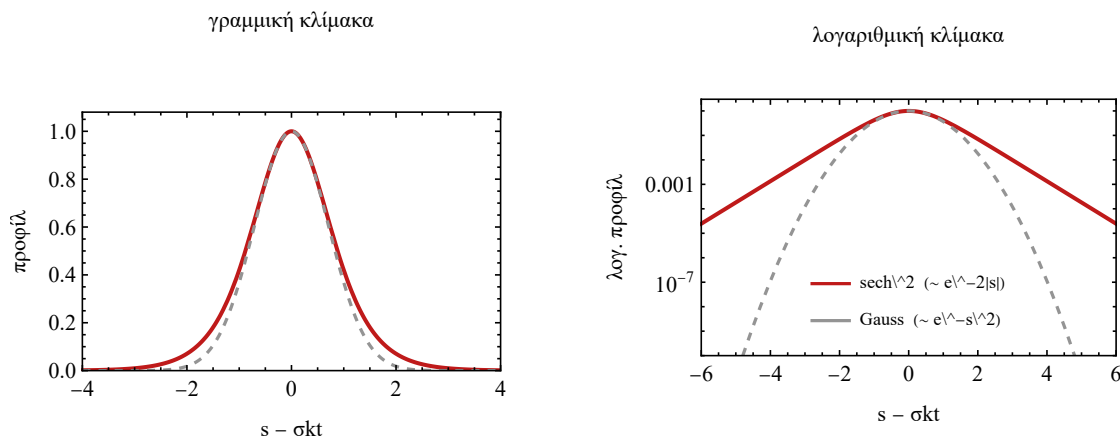
Σε αντίθεση με τη $\tanh^2$, το προφίλ αυτό είναι ολοκληρώσιμο στο $\mathbb{R}$ και άρα μπορεί να κανονικοποιηθεί σε πραγματική πυκνότητα πιθανότητας. Για την επιλογή $p = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_4|^2 ds = \frac{2\sigma}{\beta}, \quad f_{\text{bright}}(s, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2(s - \sigma kt).$$

Αναλυτικά, η sech^2 είναι κωδωνοειδής και τοπικά συγκεντρωμένη γύρω από το $s = \sigma kt$. Μοιάζει μορφολογικά με την κατανομή Gauss, αλλά με μια σημαντική διαφορά στις ουρές: ενώ η Gauss φθίνει ως e^{-s^2} , η sech^2 φθίνει ως $e^{-2|s|}$, δίνοντας κατά πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη πιθανότητα σε ακραίες τιμές.

Παρατήρηση 10 (Πόσο «παχιές» είναι πραγματικά οι ουρές). Ο χαρακτηρισμός χρειάζεται ακρίβεια, γιατί ο όρος «fat tails» έχει στη χρηματοοικονομική συγκεχυμένο και αυστηρότερο περιεχόμενο. Η sech^2 έχει εκθετικές ουρές: είναι βαρύτερη από την Gauss, αλλά όλες οι ροπές της είναι πεπερασμένες και η ασυμπτωτική της συμπεριφορά είναι $e^{-2|s|}$, όχι νόμος δύναμης $|s|^{-(1+a)}$.

Αυτό έχει άμεση συνέπεια για την επιχειρηματολογία της §7.2.4: τα ευρήματα του Mandelbrot [15] αφορούν κατανομές με δυναμοσειριακές ουρές και — σε αρκετές εκτιμήσεις — άπειρη κύρτωση. Η λύση φωτεινού σολιτονίου δεν τις αναπαράγει. Η συνεισφορά της βρίσκεται αλλού: στη διατήρηση σχήματος (μνήμη μορφής) και στην ύπαρξη χαρακτηριστικής κλίμακας, όχι στην εκθετικότητα των ουρών. Η πραγματική βελτίωση έναντι της λογαριθμοκανονικής της Black–Scholes είναι ποσοτικά υπαρκτή αλλά ποιοτικά περιορισμένη, και οφείλουμε να τη διατυπώνουμε ως τέτοια.



Σχήμα 9: Σύγκριση της sech^2 με κατανομή Gauss ίδιου ύψους και ίδιας καμπυλότητας στην κορυφή. Αριστερά: σε γραμμική κλίμακα οι δύο καμπύλες είναι σχεδόν δυσδιάκριτες. Δεξιά: σε λογαριθμική κλίμακα η sech^2 φθίνει γραμμικά (δηλαδή ως $e^{-2|s|}$) ενώ η Gauss παραβολικά (ως e^{-s^2}): στις ουρές η διαφορά φτάνει πολλές τάξεις μεγέθους. Αυτό είναι το ποσοτικό περιεχόμενο του ισχυρισμού για τις βαρύτερες ουρές — πρόκειται όμως για εκθετικές και όχι για δυναμοσειριακές ουρές, βλ. Παρατήρηση 10.

9.7 Οικονομική ερμηνεία

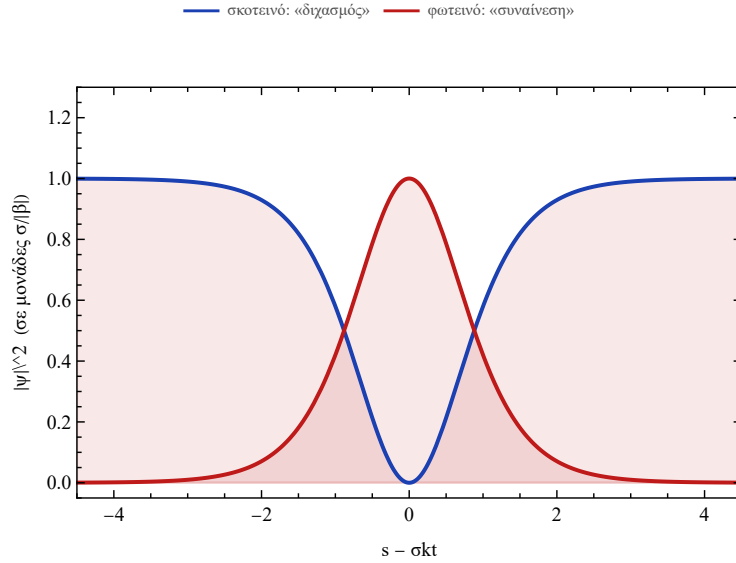
Στην πιθανοτική ανάγνωση, η κανονικοποιημένη λύση του φωτεινού σολιτονίου περιγράφει ένα προφίλ πάνω στον αδιάστατο χώρο τιμών του υποκείμενου, συγκεντρωμένο γύρω από ένα κέντρο που μετακινείται ομαλά στον χρόνο. Αυτό αντιστοιχεί σε μια αγορά σε οιοδήποτε στάσιμη κατάσταση (quasi-stationary state): οι συμμετέχοντες έχουν μια σχετικά συμφωνημένη εκτίμηση για την κατεύθυνση της τιμής, με περιορισμένη αβεβαιότητα γύρω από την προσδοκώμενη τιμή.

Το θεμελιώδες χαρακτηριστικό του σολιτονίου είναι ότι διατηρεί το σχήμα του καθώς διαδίδεται. Οικονομικά, αυτό μεταφράζεται ως σταθερότητα του προφίλ κινδύνου. Συγκεκριμένα, η σχετική αβεβαιότητα γύρω από την αναμενόμενη τιμή δεν αυξάνεται ούτε μειώνεται με τον χρόνο.

Αυτό αποτελεί σημαντική διαφορά από το μοντέλο Black-Scholes, όπου η αβεβαιότητα της τιμής αυξάνεται ως τετραγωνική ρίζα του χρόνου. Στην πράξη, η διατήρηση σχήματος αντιστοιχεί σε αγορές που λειτουργούν σε κανονικές συνθήκες, με ισχυρή τάση (trend) και περιορισμένο θόρυβο.

Οφείλουμε ωστόσο να είμαστε προσεκτικοί ως προς την έκταση αυτού του ισχυρισμού. Η διατήρηση σχήματος ισχύει για δεδομένο αδιάστατο συντελεστή διασποράς σ . Το σ εμφανίζεται ταυτόχρονα στο πλάτος $\sqrt{\sigma/\beta}$, στην ταχύτητα $v = \sigma k$ και στη φάση: μεταβολή του μετακινεί τη λύση σε άλλο μέλος της κανονικοποιημένης οικογένειας. Αυτό δεν αποτελεί από μόνο του δήλωση για μεταβολή της πραγματικής μεταβλητότητας σ_{BS} . Το σωστό συμπέρασμα είναι πιο περιορισμένο: το προφίλ κινδύνου δεν διαχέεται με τον χρόνο, σε αντίθεση με τη λογαριθμοκανονική κατανομή της Black-Scholes της οποίας το εύρος αυξάνεται ως $\sqrt{T - t}$.

Συμπερασματικά, οι δύο λύσεις περιγράφουν διαμετρικά αντίθετες καταστάσεις αγοράς. Η εξίσωση του σκοτεινού σολιτονίου αποτυπώνει τον «διχασμό» της αγοράς — μια κατάσταση όπου οι τιμές απομακρύνονται από ένα κρίσιμο επίπεδο. Η εξίσωση του φωτεινού σολιτονίου αποτυπώνει τη «συναίνεση» της αγοράς — μια κατάσταση όπου οι τιμές συγκλίνουν σε μια κεντρική προσδοκία.



Σχήμα 10: Τα δύο κανονικοποιημένα ως προς το ύψος προφίλ $|\psi|^2$ μαζί. Το σκοτεινό σολιτόνιο παρουσιάζει ελάχιστη σχετική ένταση στο κέντρο («διχασμός»), ενώ το φωτεινό παρουσιάζει εκεί μέγιστη σχετική ένταση («συναίνεση»). Οι δύο καμπύλες είναι ακριβώς συμπληρωματικές, αφού $\tanh^2 + \operatorname{sech}^2 = 1$ (και οι δύο σε μονάδες $\sigma/|\beta|$). Υπενθυμίζεται πάντως ότι δεν ανήκουν στο ίδιο καθεστώς σταθερού β : απαιτούν αντίθετα πρόσημα της μη γραμμικότητας (Παρατήρηση 11).

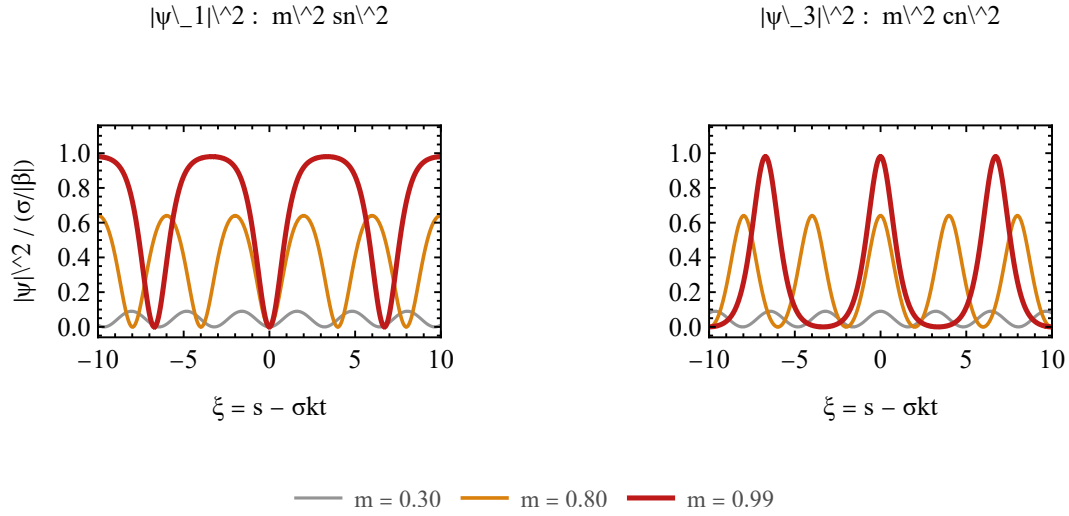
9.8 Ερμηνεία των περιοδικών λύσεων: η παράμετρος m ως δείκτης καθεστώτος

Στις §9.1–9.7 εμφανίστηκαν δύο σολιτονικά προφίλ με αντίθετη μορφολογία: η $\tanh$ («διχασμός») απαιτεί $\beta < 0$, ενώ η sech («συναίνεση») απαιτεί $\beta > 0$. Οι περιοδικές λύσεις των §8.7–8.9 δείχνουν ότι δεν υπάρχει μία ενιαία οικογένεια που να μεταφέρει συνεχώς το σύστημα από τη sech στη $\tanh$. Υπάρχουν δύο διαφορετικοί δυναμικοί κλάδοι, οι οποίοι επιλέγονται από το πρόσημο του β :

Κλάδος	Περιοδική οικογένεια	Όριο $m \rightarrow 1$	Μικρό- m όριο
$\beta < 0$	sn	$\tanh$	μικρές ταλαντώσεις γύρω από $\phi = 0$
$\beta > 0$	cn	sech	μικρού πλάτους κλάδος*
$\beta > 0$	dn	sech	σταθερό ευσταθές σημείο

*Για την παραμετροποίηση του διπλού πηγαδιού της §8.7 ισχύει $m > 1/\sqrt{2}$: η επέκταση σε μικρότερα m ανήκει στην περίπτωση $\alpha > 0, \gamma > 0$, όπως εξηγείται στην Παρατήρηση 7.

Το m είναι επομένως συνεχής παράμετρος μέσα στον επιλεγμένο κλάδο, ενώ το πρόσημο του β είναι ο διακόπτης μεταξύ ελκτικής και απωστικής μη γραμμικότητας. Για σταθερά α, γ , το m παραμετροποιεί ισοδύναμα την ενέργεια E_0 της κλειστής τροχιάς: μετά όμως την κανονικοποίηση $p = 1$ μεταβάλλεται και ο κανονικοποιημένος α , όπως διευκρινίζεται στην Παρατήρηση 8. Συνεπώς η οικονομική ερμηνεία του m ως δείκτη «δομής» της αγοράς πρέπει να νοείται ως φαινομενολογική περιγραφή της μορφής της λύσης και όχι ως ήδη βαθμονομημένος παρατηρήσιμος δείκτης.



Σχήμα 11: Δύο από τις τρεις περιοδικές οικογένειες: τα προφίλ sn^2 και cn^2 για $m = 0.30, 0.80, 0.99$ (σε μονάδες $\sigma/|\beta|$), στην κανονικοποίηση $p = 1$. Το m είναι το μέτρο (modulus), σύμφωνα με την Παρατήρηση 6. Καθώς $m \rightarrow 1$ τα προφίλ τείνουν αντίστοιχα στα $\tanh^2$ και sech^2 . Για την cn η παραμετροποίηση (17) του διπλού πηγαδιού απαιτεί $m > 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ (Παρατήρηση 7): η καμπύλη $m = 0.30$ του δεξιού πλαισίου δείχνει μόνο την τυπική επέκταση του cn κλάδου έξω από το διπλό πηγάδι. Η τρίτη περιοδική οικογένεια, dn^2 , απεικονίζεται χωριστά στο Σχ. 12.

9.9 Η λύση sn^2 : από τη «ζώνη αποκλεισμού» στο πλέγμα κρίσιμων τιμών

Το προφίλ έντασης της snoidal λύσης είναι

$$|\psi_1(s, t)|^2 = \frac{m^2 \sigma}{|\beta|} \operatorname{sn}^2(s - \sigma kt, m). \quad (30)$$

Στη §9.2 διαπιστώσαμε ότι το $\tanh^2$ δημιουργεί μία «ζώνη αποκλεισμού», δηλαδή ένα κρίσιμο επίπεδο της αδιάστατης μεταβλητής του υποκείμενου στο οποίο το προφίλ έχει ελάχιστο. Η sn^2 γενικεύει ακριβώς αυτή την εικόνα: μηδενίζεται όχι σε ένα σημείο, αλλά σε **ολόκληρη ακολουθία** σημείων

$$s_j = \sigma kt + 2jK(m), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (31)$$

όπου $K(m)$ το πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους. Πρόκειται δηλαδή για ένα πλέγμα κρίσιμων επιπέδων. Για τη γενική λύση $\operatorname{sn}(p\xi, m)$ η περίοδος του τετραγώνου είναι

$$\Lambda_\xi = \frac{2K(m)}{p}.$$

Στη δική μας κανονικοποίηση $p = 1$ παίρνουμε $\Lambda_\xi = 2K(m)$ και τα μηδενικά είναι $s_j = \sigma kt + 2jK(m)$. Ανάμεσα στα διαδοχικά μηδενικά το προφίλ φτάνει έως $m^2 \sigma/|\beta|$.

Η οικονομική ερμηνεία είναι η εξής. Η αγορά δεν έχει ένα μόνο κρίσιμο επίπεδο αλλά μια κλίμακα επιπέδων, στα οποία η τιμή δυσκολεύεται να παραμείνει και ανάμεσα στα οποία σταθεροποιείται. Δύο ποσοτικά χαρακτηριστικά:

- Το **βήμα** $\Lambda_\xi = 2K(m)/p$ μετριέται στον αδιάστατο άξονα ξ της Παρατήρησης 2. Δεν είναι απευθείας προσθετικό βήμα σε ευρώ ή δολάρια.

- Το ύψος των «φραγμών» στην κανονικοποίηση $p = 1$ είναι $m^2\sigma/|\beta|$. Εξαρτάται από τον αδιάστατο συντελεστή διασποράς σ και από $|\beta|$ · δεν μεταφράζεται απευθείας σε σχέση με τη μεταβλητότητα σ_{BS} χωρίς βαθμονόμηση.

Στο όριο $m \rightarrow 1$ έχουμε $K(m) \rightarrow \infty$: εφόσον το p παραμένει πεπερασμένο και μη μηδενικό, τα γειτονικά επίπεδα απομακρύνονται και αναχτάται η εικόνα της §9.2. Στην κανονικοποίηση $p = 1$, για $m \rightarrow 0$ το βήμα τείνει σε $\Lambda_\xi \rightarrow \pi$ αλλά ταυτόχρονα το ύψος τους σβήνει ($\propto m^2$): οι φραγμοί γίνονται αδιόρατοι και η αγορά συμπεριφέρεται ομοιόμορφα.

9.10 Η λύση cn^2 : κατανομή με πολλαπλές κορυφές και συνυπάρχουσες προσδοκίες

Αντίστοιχα,

$$|\psi_3(s, t)|^2 = \frac{m^2\sigma}{\beta} \text{cn}^2(s - \sigma kt, m) \quad (32)$$

γενικεύει το sech^2 της §9.6. Εκεί είχαμε μία κορυφή του προφίλ — τη «συναίνεση» της αγοράς γύρω από μία κεντρική τιμή. Εδώ έχουμε τρένο κορυφών με γενικό βήμα $2K(m)/p$ και, στην κανονικοποίηση $p = 1$, με βήμα $2K(m)$. Ως φαινομενολογική ανάγνωση, η αγορά δεν συγκλίνει σε μία προσδοκία αλλά εμφανίζει πολλαπλά ισοδύναμα προτιμώμενα επίπεδα.

Ως φαινομενολογική οικονομική ανάγνωση, ένα τέτοιο τρένο κορυφών θα μπορούσε να παριστά αγορά με περισσότερα του ενός προτιμώμενα επίπεδα. Μπορεί να θυμίζει αγορά που κινείται σε εύρος ή φαινόμενα συγκράτησης τιμής κοντά σε επίπεδα αυξημένου ενδιαφέροντος, αλλά η παρούσα εργασία δεν βαθμονομεί τη λύση σε πραγματικά δεδομένα και επομένως δεν αποδεικνύει τέτοια αντιστοιχισή.

Στον ίδιο ελκτικό κλάδο $\beta > 0$ ανήκει και η τρίτη περιοδική οικογένεια, η dn της §8.9. Δεν πρόκειται δηλαδή για κάτι «ανάμεσα» στους δύο κλάδους — η επιλογή κλάδου γίνεται αποκλειστικά από το πρόσημο του β (§9.8). Η διαφορά της από τη cn είναι το βάθος της διαμόρφωσης: το προφίλ έντασης της dn ταλαντώνεται περιοδικά αλλά παραμένει αυστηρά θετικό, ανάμεσα στο $\frac{\sigma}{\beta}(1 - m^2)$ και το $\frac{\sigma}{\beta}$, ενώ της cn μηδενίζεται. Περιγράφει επομένως, στην ίδια φαινομενολογική γλώσσα, αγορά με προτιμώμενα επίπεδα αλλά χωρίς καμία ζώνη αποκλεισμού (Παρατήρηση 9). Στο όριο $m \rightarrow 1$ και οι δύο καταλήγουν στο ίδιο φωτεινό σολιτόνιο, προσεγγίζοντάς το από αντίθετες πλευρές της ενέργειας.

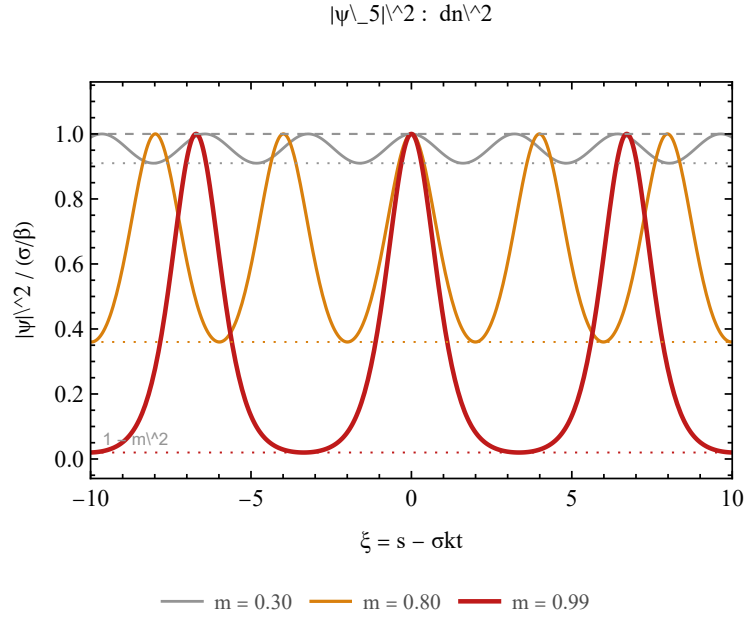
Παρατήρηση 11 (Οι δύο λύσεις είναι ακριβώς συμπληρωματικές). Από την ταυτότητα $\text{cn}^2 u = 1 - \text{sn}^2 u$ προκύπτει ότι, για κοινό m , τα δύο κανονικοποιημένα προφίλ αθροίζουν στη μονάδα: όπου η μία λύση έχει ζώνη αποκλεισμού, η άλλη έχει κορυφή. Δεν ανήκουν όμως στο ίδιο καθεστώς σταθερού β , αφού απαιτούν αντίθετα πρόσημα του δυναμικού β : το $\beta > 0$ (ελκτικό, αυτοεστιάζον δυναμικό αγοράς) παράγει κορυφές, ενώ το $\beta < 0$ (απωστικό) παράγει ζώνες αποκλεισμού. Το πρόσημο του β είναι επομένως ο διακόπτης ανάμεσα σε αγορά που συγκεντρώνει και σε αγορά που απωθεί τιμές, ενώ το m ρυθμίζει πόσο έντονο είναι το φαινόμενο.

9.11 Χαρακτηριστική κλίμακα στον αδιάστατο άξονα τιμής: απόκλιση κοντά στη διαχωριστική τροχιά

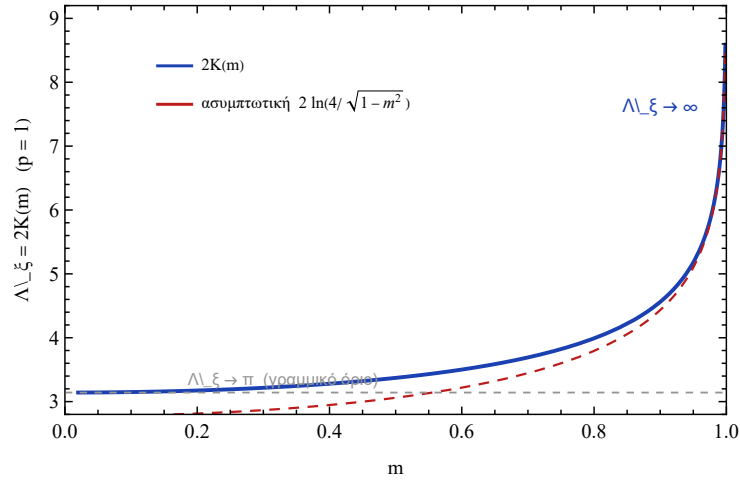
Οι περιοδικές λύσεις εισάγουν μια προνομιακή κλίμακα στον αδιάστατο λογαριθμικό άξονα τιμής. Για γενικό χωρικό συντελεστή p η περίοδος των sn^2 , cn^2 , dn^2 είναι

$$\Lambda_\xi(m) = \frac{2K(m)}{p}. \quad (33)$$

Το Σχ. 13 απεικονίζει την κανονικοποίηση $p = 1$. Η ποσότητα αυτή δεν είναι απευθείας προσθετικό βήμα στην τιμή S . Αν χρησιμοποιήσουμε την αδιαστατοποίηση $x = (\sigma_{BS}\sqrt{T})^{-1} \ln(S/K)$ της Παρατήρησης 2,



Σχήμα 12: Το περιοδικό προφίλ dn^2 για $m = 0.30, 0.80, 0.99$ (σε μονάδες σ/β), στην κανονικοποίηση $p = 1$. Σε αντίθεση με τα sn^2 και cn^2 , η dn^2 παραμένει αυστηρά θετική: τα ελάχιστα της είναι $1 - m^2$ και δεν μηδενίζεται. Για $m \rightarrow 1$ τείνει στη $sech^2$, ενώ για $m \rightarrow 0$ τείνει ομοιόμορφα στη σταθερά 1. Απεικονίζει έτσι περιοδική διαμόρφωση πάνω σε θετικό υπόβαθρο, χωρίς ζώνες αποκλεισμού.



Σχήμα 13: Η κανονικοποιημένη κλίμακα $\Lambda_\xi = 2K(m)$ για $p = 1$ ως συνάρτηση του ελλειπτικού μέτρου m . Γενικά η περίοδος των τετραγωνικών προφίλ είναι $\Lambda_\xi = 2K(m)/p$. Η απόκλιση καθώς $m \rightarrow 1^-$ είναι λογαριθμική· το σχήμα απεικονίζει την ειδική κανονικοποίηση $p = 1$. Η Λ_ξ μετρείται στην αδιάστατη μεταβλητή ξ της Παρατήρησης 2.

ένα βήμα $\Delta x = \Lambda_\xi$ αντιστοιχεί σε πολλαπλασιαστικό λόγο τιμών

$$\frac{S_{j+1}}{S_j} = \exp(\sigma_{BS} \sqrt{T} \Lambda_\xi).$$

Με $m' = \sqrt{1 - m^2}$ ισχύει $K(m) \simeq \ln(4/m')$. Εφόσον κατά την προσέγγιση $m \rightarrow 1^-$ ο $p(m)$ τείνει σε πεπερασμένο μη μηδενικό όριο, η γενική περίοδος αποκλίνει λογαριθμικά:

$$\Lambda_\xi(m) \simeq \frac{2}{p(m)} \ln \frac{4}{\sqrt{1 - m^2}} \xrightarrow{m \rightarrow 1^-} \infty. \quad (34)$$

Για $p = 1$ ανακτάται ακριβώς η καμπύλη του Σχ. 13. Η κλίμακα αποκλίνει λογαριθμικά καθώς η μαθηματική τροχιά πλησιάζει τη διαχωριστική στάθμη. Η συμπεριφορά αυτή είναι ανάλογη της απόκλισης ενός μήκους συσχέτισης κοντά σε κρίσιμο σημείο· η αναλογία είναι μαθηματική και δεν αποδεικνύει από μόνη της πραγματική μετάβαση φάσης στην αγορά. Με άλλα λόγια, αν γίνει δεκτή η αντιστοίχιση « $m \rightarrow 1 \leftrightarrow$ καθεστώς κρίσης», τότε το μοντέλο δεν διακρίνει απλώς δύο ξεχωριστές καταστάσεις, αλλά περιγράφει την προσέγγιση ως συνεχή διαδικασία κατά την οποία τα διαδοχικά προτιμώμενα επίπεδα απομακρύνονται μεταξύ τους έως ότου μείνει μόνο ένα. Η διατύπωση παραμένει υποθετική: εντός του μαθηματικού πλαισίου η απόκλιση της Λ_ξ είναι βέβαιη, αλλά η οικονομική της ανάγνωση είναι φαινομενολογική. Κινείται πάντως στην ίδια κατεύθυνση με το πλαίσιο του [7], το οποίο μιλά ρητά για θερμοκρασία αγοράς και κατανομή Boltzmann· και εκεί όμως πρόκειται για αναλογία και όχι για βαθμονομημένη αντιστοίχιση.

Σημειώνουμε ότι η αργή μεταβολή των παραμέτρων ενός περιοδικού κύματος — εδώ, η αργή μεταβολή του m και άρα του Λ_ξ — έχει συστηματική θεωρία, τη θεωρία διαμόρφωσης του Whitham [25]. Η εφαρμογή της θα επέτρεπε να περιγραφεί ποσοτικά η μετάβαση ανάμεσα στα καθεστώτα του πίνακα της §9.8, αντί να τα ταξινομούμε στατικά· την αναφέρουμε ως φυσική επέκταση.

9.12 Ταχύτητα διάδοσης: το πλέγμα κινείται συλλογικά

Η ανάλυση της §9.3 μεταφέρεται αυτούσια: και οι τρεις περιοδικές οικογένειες $\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$ έχουν όρισμα της μορφής $p(s - \sigma kt)$, άρα το κέντρο της δομής μετακινείται με

$$v = \frac{ds}{dt} = \sigma k.$$

Δεν μετακινείται πλέον ένα μεμονωμένο κρίσιμο σημείο, αλλά ολόκληρο το περιοδικό πλέγμα. Το πρόσημο του k καθορίζει την κατεύθυνση για $\sigma > 0$ και το $|\sigma k|$ την ταχύτητα στον αδιάστατο άξονα. Όπως στη §9.3, το σ είναι ο συντελεστής διασποράς της NLS και όχι απευθείας η πραγματική μεταβλητότητα σ_{BS} .

Η περιοδικότητα της sn^2 οδηγεί σε επαναλαμβανόμενα, ομαλά τοπικά ελάχιστα του προφίλ σε κάθε μηδενισμό της. Αν η φαινομενολογική ερμηνεία της §9.4 είναι χρήσιμη, τα ελάχιστα αυτά μπορούν να ιδωθούν ως επαναλαμβανόμενα τοπικά χαρακτηριστικά κατά μήκος του άξονα της τιμής, χωρίς να υπονοείται πραγματική ασυνέχεια κλίσης.

9.13 Επιφυλάξεις και όρια εφαρμοσιμότητας

Οφείλουμε να είμαστε σαφείς ως προς το τι δεν μπορούν να κάνουν οι περιοδικές λύσεις:

1. **Δεν προσαρμόζονται ολικά στην Black–Scholes.** Οι καμπύλες u_{Call} και u_{Put} είναι μονότονες ως προς s , ενώ οι $\text{sn}^2, \text{cn}^2, \text{dn}^2$ είναι περιοδικές. Επομένως δεν έχει νόημα να επιχειρηθεί προσαρμογή αντίστοιχη εκείνης των Σχ. 8–10 του άρθρου· τέτοια προσαρμογή έχει νόημα μόνο για τις οριακές λύσεις $m \rightarrow 1$, και ακριβώς αυτές χρησιμοποιεί το άρθρο.

2. **Η πιθανοτική κανονικοποίηση εξαρτάται από την οικογένεια.** Η $\tanh^2$ της §9.1 τείνει στη σταθερά $\sigma/|\beta|$ και δεν είναι ούτε ολοκληρώσιμη ούτε περιοδική στο $\mathbb{R}$. Για αυτήν είναι αυστηρότερο να κανονικοποιούμε είτε σε πεπερασμένο παράθυρο είτε το εντοπισμένο έλλειμμα $\Delta\rho \propto \text{sech}^2$ της §9.2.

Οι περιοδικές λύσεις sn , cn , dn επίσης δεν είναι κανονικοποιήσιμες σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, αλλά μπορούν να κανονικοποιηθούν ανά περίοδο. Για γενικό p η στοιχειώδης κυψελίδα έχει μήκος $2K(m)/p$. Οι μέσες τιμές ανά περίοδο είναι

$$\langle \text{sn}^2 \rangle = \frac{K - E}{m^2 K}, \quad \langle \text{cn}^2 \rangle = \frac{E - (1 - m^2)K}{m^2 K}, \quad \langle \text{dn}^2 \rangle = \frac{E}{K}, \quad (35)$$

όπου $K = K(m)$ και $E = E(m)$ είναι τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους. Ισχύει $\langle \text{sn}^2 \rangle + \langle \text{cn}^2 \rangle = 1$.

Η sech^2 είναι η μόνη από τις παραπάνω μη σταθερές οικογένειες που είναι ολοκληρώσιμη σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και επομένως μπορεί να κανονικοποιηθεί παγκόσμια. Η (7) διατηρεί τυπικά τη μάζα $N = \int |\psi|^2 ds$ για λύσεις του L^2 με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες· για περιοδικές λύσεις διατηρείται αντίστοιχα η μάζα ανά περίοδο. Για να ερμηνευθεί το $|\psi|^2$ ως πραγματική πυκνότητα πιθανότητας απαιτείται επιπλέον η αρχική κανονικοποίηση $N = 1$ (ή μονάδα μάζας ανά κυψελίδα).

3. **Δεν πραγματοποιήθηκε ανεξάρτητη ανάλυση ευστάθειας.** Οι λύσεις που κατασκευάσαμε είναι ακριβείς λύσεις της (7), αλλά στην παρούσα εργασία δεν υπολογίζουμε το γραμμικοποιημένο φάσμα ούτε εκτελούμε ανάλυση Floquet. Το ερώτημα είναι κρίσιμο, επειδή η πρακτική σημασία μιας ακριβούς περιοδικής λύσης εξαρτάται και από τη συμπεριφορά της υπό μικρές διαταραχές.

Για να τοποθετηθεί το ζήτημα σε πλαίσιο, παραθέτουμε γνωστά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας για την ευστάθεια. Για το φωτεινό σολιτόνιο ($\beta > 0$) το κριτήριο των Vakhitov και Kolokolov [36] δίνει ευστάθεια, και το ίδιο προκύπτει από τη γενική θεωρία [23]. Για τις περιοδικές λύσεις όμως:

- Στην **απωστική** περίπτωση ($\beta < 0$, οικογένεια sn) οι Bottman, Deconinck και Nivala [34] απέδειξαν ότι οι ελλειπτικές λύσεις είναι ευσταθείς ως προς διαταραχές οποιασδήποτε περιόδου. Το καθεστώς «διχασμού» των §9.2 και §9.9 είναι επομένως δυναμικά βιώσιμο.
- Στην **ελκτική** περίπτωση ($\beta > 0$, οικογένειες cn και dn) η εικόνα είναι αντίθετη: ήδη ο Rowlands [35] εικάσε αστάθεια, και οι Deconinck και Segal [33] έδωσαν τον πλήρη χαρακτηρισμό του φάσματος, δείχνοντας ότι όλες οι ελλειπτικές λύσεις της εστιάζουσας NLS είναι **ασταθείς** ως προς διαταραχές γενικής περιόδου — πρόκειται για τη **διαμορφωτική αστάθεια** (modulational instability). Αριθμητικές επιβεβαιώσεις για τη στάσιμη περίπτωση υπάρχουν στο [32].

Η οικονομική ανάγνωση αυτής της ασυμμετρίας αποτελεί ενδιαφέρον ανοιχτό ζήτημα. Στο πλαίσιο της μαθηματικής αναλογίας, η αστάθεια ενός περιοδικού ελκτικού κλάδου ($\beta > 0$) σημαίνει ότι μικρές διαταραχές μπορούν να αλλοιώσουν το περιοδικό προφίλ. Δεν συνεπάγεται όμως από μόνη της ότι η εξέλιξη θα καταλήξει σε ένα μεμονωμένο σολιτόνιο ούτε ότι περιγράφει αναγκαστικά χρηματοοικονομική κρίση. Μια τέτοια δυναμική ερμηνεία θα απαιτούσε επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών και εμπειρική βαθμονόμηση. Η πλήρης διερεύνηση απαιτεί ανάλυση Floquet και υπερβαίνει τα όρια της παρούσας εργασίας.

Ο ρόλος των περιοδικών λύσεων είναι επομένως διπλός: (i) αποτελούν τη γενική οικογένεια από την οποία οι λύσεις που όντως χρησιμοποιεί το άρθρο προκύπτουν ως οριακά μέλη, δικαιολογώντας εκ των

υστέρων γιατί οι sech και $\tanh$ είναι οι «σωστές» επιλογές· και (ii) προσφέρουν το κατάλληλο εργαλείο για αγορές με πολλαπλά επίπεδα, τις οποίες τα μεμονωμένα σολιτόνια δεν μπορούν να περιγράψουν.

10 Συμπεράσματα και προοπτικές

Η παρούσα εργασία είχε ως αφετηρία το κλασικό υπόδειγμα Black–Scholes και ως κύριο αντικείμενο τη διερεύνηση μιας διαφορετικής μαθηματικής περιγραφής της χρηματοοικονομικής δυναμικής, βασισμένης στην προσαρμοστική μη γραμμική εξίσωση Schrödinger. Η μετάβαση αυτή δεν αντιμετωπίστηκε ως αντικατάσταση ενός καθιερωμένου υποδείγματος αποτίμησης από ένα νέο, αλλά ως σύγκριση δύο διαφορετικών μαθηματικών οπτικών. Από τη μία πλευρά, η εξίσωση Black–Scholes προκύπτει από το πλαίσιο της αποτίμησης χωρίς αρμπιτράζ και οδηγεί σε συγκεκριμένους τύπους τιμολόγησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης. Από την άλλη, η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger εισάγει κυματική δυναμική, διασπορά και μη γραμμικότητα και επιτρέπει την εμφάνιση εντοπισμένων ή περιοδικών δομών που δεν ανήκουν στη λογική του κλασικού υποδείγματος διάχυσης.

Η παρουσίαση του υποδείγματος Black–Scholes ανέδειξε τόσο τη μαθηματική του συνοχή όσο και τις υποθέσεις στις οποίες στηρίζεται. Η σταθερή μεταβλητότητα, η λογαριθμοκανονική περιγραφή της τιμής του υποκείμενου, η συνεχής διαπραγμάτευση και η απουσία απότομων μεταβολών αποτελούν παραδοχές που καθιστούν το υπόδειγμα αναλυτικά διαχειρίσιμο, αλλά περιορίζουν την ικανότητά του να αποτυπώσει ορισμένα χαρακτηριστικά των πραγματικών αγορών. Η ύπαρξη φαινομένων όπως το χαμόγελο ή η λοξότητα μεταβλητότητας, οι βαρύτερες ουρές των εμπειρικών κατανομών και οι μεταβαλλόμενες συνθήκες της αγοράς αιτιολογούν τη μελέτη εναλλακτικών μη γραμμικών προσεγγίσεων. Ωστόσο, η διαπίστωση αυτών των περιορισμών δεν αναιρεί τον θεμελιώδη ρόλο του Black–Scholes ως υποδείγματος αναφοράς.

Στο προσαρμοστικό κυματικό μοντέλο, το ουσιώδες νέο στοιχείο είναι ότι η δυναμική περιγράφεται από μια μιγαδική συνάρτηση $\psi(s, t)$, ενώ η παράμετρος β εισέρχεται ως προσαρμοστικό δυναμικό της αγοράς. Η εργασία έδωσε ιδιαίτερη έμφαση στην ανάγκη να διακρίνεται η μαθηματική αυτή κατασκευή από μια αυστηρή θεωρία αποτίμησης χωρίς αρμπιτράζ. Αντίστοιχα, το $|\psi|^2$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πιθανοτικό προφίλ μόνο όταν πληρούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις κανονικοποίησης, ενώ ο συντελεστής σ της μη γραμμικής εξίσωσης Schrödinger δεν πρέπει να ταυτίζεται αυτομάτως με την ετησιοποιημένη μεταβλητότητα του υποδείγματος Black–Scholes. Οι διακρίσεις αυτές είναι απαραίτητες ώστε η οικονομική ερμηνεία να παραμένει συμβατή με τη μαθηματική δομή του μοντέλου.

Το κύριο μαθηματικό αποτέλεσμα της ανάλυσης προέκυψε από την αναζήτηση λύσεων οδεύοντος κύματος. Με την κατάλληλη μορφή της ψ , η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger ανάγεται σε μια εξίσωση Duffing, γεγονός που επιτρέπει τη χρήση του μηχανικού αναλόγου και του φασικού επιπέδου. Μέσα από αυτή την αναγωγή οι δύο βασικές σολιτονικές λύσεις αποκτούν σαφή γεωμετρική ερμηνεία: το φωτεινό σολιτόνιο τύπου sech αντιστοιχεί σε ομοκλινική τροχιά, ενώ το σκοτεινό σολιτόνιο τύπου $\tanh$ σε ετεροκλινική τροχιά. Έτσι, οι λύσεις αυτές δεν εμφανίζονται ως απομονωμένοι αναλυτικοί τύποι, αλλά ως ειδικές τροχιές ενός ενιαίου δυναμικού συστήματος.

Η επέκταση της ανάλυσης στις περιοδικές λύσεις με ελλειπτικές συναρτήσεις Jacobi έδωσε μια πληρέστερη εικόνα της δομής των φραγμένων λύσεων. Οι οικογένειες sn , cn και dn οργάνωνονται σε διαφορετικούς δυναμικούς κλάδους ανάλογα με το πρόσημο του β και την τιμή της ενέργειας του μηχανικού αναλόγου. Για $\beta < 0$ η οικογένεια sn συνδέεται, στο όριο $m \rightarrow 1$, με τη σκοτεινή λύση $\tanh$. Για $\beta > 0$ οι οικογένειες cn και dn συνδέονται με τη φωτεινή λύση sech , προσεγγίζοντάς την από διαφορετικά ενεργειακά καθεστώτα. Η παράμετρος m δεν αποτελεί από μόνη της έναν καθολικό δείκτη μετάβασης μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων της αγοράς. Αντίθετα, παραμετροποιεί τη μορφή της τροχιάς μέσα στον εκάστοτε δυναμικό κλάδο, ενώ το πρόσημο του β καθορίζει ποιος κλάδος είναι διαθέσιμος. Παράλληλα, η περίοδος $2K(m)/p$ παρέχει μια φυσική χαρακτηριστική κλίμακα των

περιοδικών προφίλ και αποκλίνει λογαριθμικά καθώς $m \rightarrow 1$, όταν η περιοδική τροχιά προσεγγίζει τη διαχωριστική.

Από πλευράς χρηματοοικονομικής ερμηνείας, οι σολιτονικές και περιοδικές λύσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μαθηματικές αναπαραστάσεις διαφορετικών μορφών συγχέντρωσης, απομείωσης ή επανάληψης ενός προφίλ στον χώρο των τιμών. Το φωτεινό σολιτόνιο περιγράφει ένα εντοπισμένο προφίλ που διατηρεί το σχήμα του, ενώ το σκοτεινό σολιτόνιο χαρακτηρίζεται από ένα τοπικό βύθισμα πάνω σε μη μηδενικό υπόβαθρο. Οι περιοδικές οικογένειες επιτρέπουν την αναπαράσταση πολλαπλών χαρακτηριστικών επιπέδων ή κορυφών. Οι εικόνες αυτές είναι χρήσιμες ως ερμηνευτικά σχήματα, αλλά δεν πρέπει να θεωρούνται άμεσες εμπειρικές προβλέψεις χωρίς βαθμονόμηση. Ειδικότερα, η διατήρηση σχήματος ενός σολιτονίου δεν ισοδυναμεί με ισχυρισμό ότι η πραγματική μεταβλητότητα παραμένει σταθερή, ούτε η αστάθεια ενός μαθηματικού κλάδου αρκεί για να ταυτιστεί με χρηματοοικονομική κρίση.

Συνολικά, η ανάλυση δείχνει ότι η μη γραμμική κυματική προσέγγιση προσφέρει ένα πλούσιο μαθηματικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο οι μοναχικές και οι περιοδικές λύσεις μπορούν να ταξινομηθούν ενιαία μέσω της αναγωγής στην εξίσωση Duffing. Η αξία του πλαισίου αυτού, στο επίπεδο της παρούσας εργασίας, βρίσκεται κυρίως στη μαθηματική οργάνωση και ερμηνεία των οικογενειών λύσεων και όχι στην απόδειξη ότι το μοντέλο υπερέχει εμπειρικά του Black-Scholes. Η δεύτερη αυτή αξίωση θα απαιτούσε διαφορετικό είδος μελέτης, με πραγματικά δεδομένα και συστηματική σύγκριση της προβλεπτικής ή τιμολογιακής επίδοσης των δύο προσεγγίσεων.

Οι βασικές κατευθύνσεις στις οποίες θα μπορούσε να επεκταθεί η παρούσα μελέτη είναι οι ακόλουθες:

1. **Εμπειρική βαθμονόμηση του μοντέλου.** Θα ήταν αναγκαίο να προσδιοριστούν οι παράμετροι σ και β από πραγματικές χρονοσειρές ή από επιφάνειες τιμών δικαιωμάτων προαίρεσης και να εξεταστεί αν οι λύσεις του κυματικού μοντέλου μπορούν να αναπαράγουν συστηματικά παρατηρούμενα χαρακτηριστικά της αγοράς.
2. **Μελέτη του προβλήματος αρχικών τιμών.** Οι ακριβείς λύσεις οδεύοντος κύματος αποτελούν ειδικές λύσεις της εξίσωσης. Η αριθμητική εξέλιξη γενικότερων αρχικών δεδομένων θα επέτρεπε να διερευνηθεί αν και υπό ποιες συνθήκες σχηματίζονται, διατηρούνται ή αλληλεπιδρούν σολιτονικές και περιοδικές δομές.
3. **Πληρέστερη ανάλυση ευστάθειας.** Η φασματική ευστάθεια των περιοδικών λύσεων είναι καθοριστική για την πρακτική τους σημασία. Μια συστηματική γραμμικοποίηση γύρω από τις λύσεις και ανάλυση τύπου Floquet θα μπορούσε να συνδέσει αυστηρότερα τη μαθηματική ευστάθεια με τη δυναμική συμπεριφορά των αντίστοιχων προφίλ.
4. **Σύγκριση με εναλλακτικά χρηματοοικονομικά υποδείγματα.** Εκτός από το Black-Scholes, θα είχε ενδιαφέρον η σύγκριση με υποδείγματα στοχαστικής μεταβλητότητας, τοπικής μεταβλητότητας ή ασυνεχών αλμάτων, ώστε να διαπιστωθεί ποια εμπειρικά χαρακτηριστικά εξηγούνται πράγματι από τη μη γραμμικότητα και ποια απαιτούν διαφορετικό μηχανισμό.

Καταληκτικά, η μετάβαση από την εξίσωση Black-Scholes στη μη γραμμική εξίσωση Schrödinger δεν συνιστά απλώς αλλαγή μαθηματικού τύπου, αλλά μεταβολή του τρόπου με τον οποίο περιγράφεται η εξέλιξη της αγοράς: από μια γραμμική εξίσωση διάχυσης για την τιμή ενός παραγώγου σε ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα με κυματικές δομές. Η παρούσα εργασία ανέδειξε τη μαθηματική συνέπεια αυτής της κυματικής περιγραφής, τη σχέση μεταξύ σολιτονικών και περιοδικών λύσεων και τα όρια μέσα στα οποία μπορούν να διατυπωθούν χρηματοοικονομικές ερμηνείες. Το επόμενο ουσιαστικό βήμα είναι η μετάβαση από την αναλυτική δυνατότητα στην εμπειρική αξιολόγηση: να εξεταστεί δηλαδή κατά πόσο το πλούσιο μαθηματικό φάσμα των λύσεων αντιστοιχεί σε μετρήσιμες και επαναλαμβανόμενες δομές πραγματικών αγορών.

Βιβλιογραφία

- [1] Chan, R. H., Guo, Y. Zy., Lee, S. T., & Li, X. (2024). *Financial Mathematics, Derivatives and Structured Products*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-981-99-9534-9>
- [2] Guernsey, S. (2013). *An Introduction to the Black-Scholes PDE Model*. REU project proposal, University of New Mexico. https://math.unm.edu/~nitsche/mctp/reus/proposals/2013prop_Guernsey.pdf
- [3] International Monetary Fund. (n.d.). *Financial Derivatives*. IMF Committee on Balance of Payments Statistics. <https://www.imf.org/external/np/sta/fd/>
- [4] Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives* (11th ed.). Pearson. ISBN 9780136939979.
- [5] Saari, D. G. (2019). *Mathematics of Finance: An Intuitive Introduction*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-25443-8>
- [6] Janková, Z. (2018). Drawbacks and Limitations of Black-Scholes Model for Options Pricing. *Journal of Financial Studies and Research*, 2018, 1–7. <https://doi.org/10.5171/2018.79814>
- [7] Ivancevic, V. G. (2010). Adaptive-Wave Alternative for the Black-Scholes Option Pricing Model. *Cognitive Computation*, 2(1), 17–30. <https://doi.org/10.1007/s12559-009-9031-x>
- [8] Lo, A. W. (2004). *The Adaptive Markets Hypothesis: Market Efficiency from an Evolutionary Perspective* (SSRN Scholarly Paper No. 602222). *Social Science Research Network*. <https://papers.ssrn.com/abstract=602222>
- [9] Lo, A. W. (2005). *Reconciling Efficient Markets with Behavioral Finance: The Adaptive Markets Hypothesis* (SSRN Scholarly Paper No. 1702447). *Social Science Research Network*. <https://papers.ssrn.com/abstract=1702447>
- [10] Ivancevic, V., & Aidman, E. (2007). Life-space foam: A medium for motivational and cognitive dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 382(2), 616–630. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2007.04.025>
- [11] Ivancevic, V. G., & Ivancevic, T. T. (2008). *Nonlinear Quantum Neuro-Pscho-Dynamics with Topological Phase Transitions* (No. arXiv:0807.3790). *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0807.3790>
- [12] Ivancevic, V. G., Aidman, E. V., & Yen, L. (2009). Extending Feynman’s formalisms for modeling human joint action coordination. *International Journal of Biomathematics*, 02(01), 1–7. <https://doi.org/10.1142/S1793524509000509>
- [13] Frost, A. J., & Prechter, R. R. (2001). *Elliott Wave Principle: Key to Market Behavior*. Wiley. ISBN 9780471988496.
- [14] Poser, S. W. (2003). *Applying Elliott Wave Theory Profitably*. Wiley. ISBN 9780471420071.
- [15] Mandelbrot, B. B. (1999). A multifractal walk down Wall Street. *Scientific American*, 280(2), 70–73.
- [16] Ivancevic, V. G., & Reid, D. J. (2008). *Entropic Geometry of Crowd Dynamics* (No. arXiv:0809.4069). *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0809.4069>

- [17] Ivancevic, V. G., Reid, D. J., & Aidman, E. V. (2009). *Crowd Behavior Dynamics: Entropic Path-Integral Model* (No. arXiv:0906.5415). *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0906.5415>
- [18] Ivancevic, V. G., & Ivancevic, T. T. (2010). *Quantum Neural Computation*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3350-5>
- [19] Bowers, J. (2023, September 6). Black-Scholes: The formula at the origin of Wall Street. *Polytechnique Insights*. Ανακτήθηκε 19 Ιανουαρίου 2026, από <https://www.polytechnique-insights.com/en/columns/economy/black-scholes-the-formula-at-the-origin-of-wall-street/>
- [20] Χαριτιάκης, Μ. (2024). Μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις διασποράς ανώτερης τάξης: Από το πλαίσιο των γεωμετρικών εξισώσεων εξέλιξης ως την μη-γραμμική κυματική διάδοση [ΕΑΠ]. apothesis.eap.gr/archive/item/215070
- [21] Zakharov, V. E., & Shabat, A. B. (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Soviet Physics JETP*, 34(1), 62–69. [Πρωτική έκδοση: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 61 (1971), 118–134.]
- [22] Ablowitz, M. J., & Segur, H. (1981). *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM Studies in Applied Mathematics 4. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970883>
- [23] Sulem, C., & Sulem, P.-L. (1999). *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collapse*. Applied Mathematical Sciences 139. Springer. <https://doi.org/10.1007/b98958>
- [24] Drazin, P. G., & Johnson, R. S. (1989). *Solitons: An Introduction*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CB09781139172059>
- [25] Whitham, G. B. (1974). *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience. <https://doi.org/10.1002/9781118032954>
- [26] Byrd, P. F., & Friedman, M. D. (1971). *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists* (2nd ed., revised). Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 67. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65138-0>
- [27] Lawden, D. F. (1989). *Elliptic Functions and Applications*. Applied Mathematical Sciences 80. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3980-0>
- [28] NIST Digital Library of Mathematical Functions. Chapter 22: Jacobian Elliptic Functions; Chapter 19: Elliptic Integrals. Ανακτήθηκε από <https://dlmf.nist.gov/22>
- [29] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (Eds.). (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55. (Κεφ. 16–17: ελλειπτικές συναρτήσεις και ολοκληρώματα.)
- [30] Carr, L. D., Clark, C. W., & Reinhardt, W. P. (2000). Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. I. Case of repulsive nonlinearity. *Physical Review A*, 62, 063610. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.063610>
- [31] Carr, L. D., Clark, C. W., & Reinhardt, W. P. (2000). Stationary solutions of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation. II. Case of attractive nonlinearity. *Physical Review A*, 62, 063611. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.063611>

- [32] Carr, L. D., Kutz, J. N., & Reinhardt, W. P. (2001). Stability of stationary states in the cubic nonlinear Schrödinger equation: Applications to the Bose-Einstein condensate. *Physical Review E*, 63, 066604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.066604>
- [33] Deconinck, B., & Segal, B. L. (2017). The stability spectrum for elliptic solutions to the focusing NLS equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 346, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.01.004>
- [34] Bottman, N., Deconinck, B., & Nivala, M. (2011). Elliptic solutions of the defocusing NLS equation are stable. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(28), 285201. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/28/285201>
- [35] Rowlands, G. (1974). On the stability of solutions of the non-linear Schrödinger equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 13(3), 367–377. <https://doi.org/10.1093/imamat/13.3.367>
- [36] Vakhitov, N. G., & Kolokolov, A. A. (1973). Stationary solutions of the wave equation in a medium with nonlinearity saturation. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 16(7), 783–789. <https://doi.org/10.1007/BF01031343>
- [37] Kivshar, Y. S., & Agrawal, G. P. (2003). *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-410590-4.X5000-1>
- [38] Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. (1995). *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CB09780511812545>