



ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ
ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ ΠΟΛΥΣΤΡΩΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΚΕΔΑΣΤΩΝ

ΑΝΔΡΕΑΣ Ι. ΧΡΥΣΟΧΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής: ΝΙΚΟΛΑΟΣ Λ. ΤΣΙΤΣΑΣ

Πάτρα, Μάιος 2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή/φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Εφαρμογές Τροποποιημένης Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών σε
Προβλήματα Ηλεκτρομαγνητικής Διέγερσης Πολυστρωματικών
Σκεδαστών

Ανδρέας Ι. Χρυσοχός

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Λ. Τσίτσας

Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Βασίλειος Ι. Σεβρόγλου

Καθηγητής Παν/μίου Πειραιώς

Πάτρα, Μάιος 2023

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές κ.κ. Νικόλαο Τσίτσα και Βασίλειο Σεβρόγλου για την καθοδήγηση και τις πολύτιμες συμβουλές τους.

Επίσης, ευχαριστώ την εταιρεία Ελληνικά Καλώδια για την πλήρη οικονομική κάλυψη των σπουδών μου.

Τέλος, ευχαριστώ την κοπέλα μου Βασιλική για την αμέριστη στήριξη και υπομονή της.

Περίληψη

Βασικό αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η εισαγωγή στη Μέθοδο Βοηθητικών Πηγών (ΜΒΠ) και η εφαρμογή της σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης πολυστρωματικών σκεδαστών.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια στοιχειώδης εισαγωγή στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό και στο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Παρουσιάζονται συνοπτικά οι πιο διαδεδομένες αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης, καταγράφοντας τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της ΜΒΠ και η γενική εφαρμογή της σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Αναλύονται οι παράμετροι που επηρεάζουν την ακρίβεια της, ενώ παρουσιάζονται τα προτερήματα και οι αδυναμίες της μεθόδου. Τέλος, γίνεται σχολιασμός σχετικά με συγκεκριμένες αριθμητικές επιπλοκές που μπορεί να εμφανιστούν λόγω προβληματικού συνδυασμού τιμών των παραμέτρων.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφεται το πρόβλημα σκέδασης σε ένα μονοστρωματικό διηλεκτρικό σκεδαστή κυκλικής διατομής με εν γένει μη τέλειο διηλεκτρικό μέσο. Εφαρμόζεται η ΜΒΠ και τα αποτελέσματά της συγκρίνονται με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ). Δίνεται έμφαση στην υλοποίηση της ΜΒΠ στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB[®], χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες αριθμητικές τεχνικές που αυξάνουν την απόδοση και ακρίβεια του αλγορίθμου. Ακολουθεί μια λεπτομερής ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ, εξάγοντας χρήσιμα συμπεράσματα ως προς την ακρίβεια και την αριθμητική ευστάθεια της μεθόδου.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρόβλημα της σκέδασης σε ένα διστρωματικό μη τέλειο διηλεκτρικό σκεδαστή κυκλικής διατομής. Εφαρμόζεται η ΜΒΠ και τα αποτελέσματα συγκρίνονται και επαληθεύονται με τη ΜΠΣ υπολογίζοντας το σχετικό σφάλμα. Καταγράφονται οι χρόνοι εκτέλεσης και παρουσιάζεται η αντίστοιχη ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ, καταλήγοντας στα μεγέθη που επηρεάζουν αισθητά την ακρίβεια της μεθόδου.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται κάποια συμπεράσματα και σχόλια σχετικά με τη γενικότερη εφαρμογή της ΜΒΠ σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης πολυστρωματικών σκεδαστών.

Λέξεις – Κλειδιά

Ηλεκτρομαγνητική σκέδαση, μέθοδος βοηθητικών πηγών, μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων, πολυστρωματικός σκεδαστής, υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός.

Applications of Modified Method of Auxiliary Sources to Problems of Electromagnetic Excitation of Multilayered Scatterers

Andreas I. Chrysochos

Abstract

The main subject of this master thesis is the presentation of a complete introduction to the Method of Auxiliary Sources (MAS) and its application to problems of electromagnetic excitation of multilayered scatterers.

In the first chapter, a brief introduction to computational electromagnetics and problem of electromagnetic scattering is given. The most common numerical solution methods are shortly presented, noting their advantages and disadvantages.

The second chapter presents the theoretical background of MAS and its general application to electromagnetic scattering problems. The parameters that affect its accuracy are analyzed, while the advantages and disadvantages of the method are presented. Finally, a review is made on specific numerical complications that may arise due to a problematic selection of its parameter values.

The third chapter describes the scattering problem in a single-layer dielectric scatterer of circular cross-section composed of a generally imperfect dielectric medium. The MAS is applied and its results are compared with the corresponding ones of Finite Element Method (FEM). Emphasis is placed on the implementation of MAS in the MATLAB[®] software, using specific numerical techniques that increase the efficiency and accuracy of the algorithm. A detailed sensitivity analysis of the MAS parameters follows, drawing useful conclusions regarding the accuracy and numerical stability of the method.

In the fourth chapter, the problem of scattering in a two-layer imperfect dielectric scatterer of circular cross-section is presented. The MAS is applied while the results are compared

and verified with the corresponding of FEM by calculating the relative error. The execution times are recorded and the corresponding sensitivity analysis of the MAS parameters is presented, resulting in the variables that significantly affect the accuracy of the method.

In the fifth chapter, some conclusions and comments are presented regarding the general applicability of MAS to problems of electromagnetic excitation of multilayered scatterers.

Keywords

Computational electromagnetics, electromagnetic scattering, finite element method, method of auxiliary sources, multilayered scatterer.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract	vii
Περιεχόμενα.....	ix
Κατάλογος Σχημάτων	xi
Κατάλογος Πινάκων	xiii
Κατάλογος Ψευδοαλγορίθμων.....	xiv
Συνοτομογραφίες & Ακρωνύμια.....	xv
1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός.....	1
1.2 Πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης	1
1.3 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης	4
1.3.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.....	4
1.3.2 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ)	4
1.3.3 Γεωμετρική θεωρία περίθλασης.....	4
1.3.4 Μέθοδος ροπών.....	5
1.3.5 Τεχνικές γενικευμένων πολυπόλων	5
1.4 Στόχοι εργασίας.....	6
2. Μέθοδος βοηθητικών πηγών.....	7
2.1 Εισαγωγή.....	7
2.2 Εφαρμογή σε προβλήματα σκέδασης	8
2.2.1 Προσέγγιση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.....	8
2.2.2 Οριακές συνθήκες	9
2.2.3 Δείκτης κατάστασης.....	10
2.2.4 Αριθμητική σύγκλιση.....	11
2.2.5 Εκτίμηση σφάλματος	11
2.2 Κανόνες επιλογής παραμέτρων.....	12
2.2.1 Κατανομή βοηθητικών πηγών	12
2.2.2 Καταμερισμός σημείων επιβολής οριακών συνθηκών	13
3. Πρόβλημα σκέδασης σε απειρομήκη μονοστρωματικό κύλινδρο	14
3.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	14
3.2 Μοντελοποίηση με τη ΜΒΠ	15
3.2.1 Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων.....	15
3.2.2 Υλοποίηση στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB®	19
3.3 Μοντελοποίηση με τη ΜΠΣ	21
3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα.....	23
3.3.1 Σύγκριση ΜΒΠ και ΜΠΣ	23
3.3.2 Αξιολόγηση υπολογιστικού χρόνου.....	26
3.3.3 Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ	26
4. Πρόβλημα σκέδασης σε απειρομήκη διστρωματικό κύλινδρο.....	31
4.1 Περιγραφή του προβλήματος.....	31
4.2 Μοντελοποίηση με τη ΜΒΠ	33
4.2.1 Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων.....	33
4.2.2 Υλοποίηση στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB®	38
4.3 Μοντελοποίηση με τη ΜΠΣ	38
4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα.....	39

4.3.1 Σύγκριση ΜΒΠ και ΜΠΣ	39
4.3.2 Αξιολόγηση υπολογιστικού χρόνου	42
4.3.3 Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ	42
5. Συμπεράσματα	49
Παράρτημα Α: Σύνοψη της ΜΒΠ για τη μοντελοποίηση του μονοστρωματικού σκεδαστή στο MATLAB®	51
Παράρτημα Β: Σύνοψη της ΜΒΠ για τη μοντελοποίηση του διστρωματικού σκεδαστή στο MATLAB®	54
Βιβλιογραφία.....	59

Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1-1: Το γενικό πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης.....	2
Σχήμα 2-1: Εφαρμογή ΜΒΠ στο (α) εξωτερικό και (β) εσωτερικό του σκεδαστή.....	9
Σχήμα 3-1: Ο υπό μελέτη μονοστρωματικός σκεδαστής και το προσπίπτον πεδίο στον χώρο.	14
Σχήμα 3-2: Ο κυκλικός σκεδαστής και οι βοηθητικές καμπύλες της ΜΒΠ.....	16
Σχήμα 3-3: Γεωμετρία και οριακές συνθήκες στη ΜΠΣ.....	22
Σχήμα 3-4: Πλέγμα στη ΜΠΣ.....	23
Σχήμα 3-5: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου Ez σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 3b$	24
Σχήμα 3-6: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\rho$ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\varphi$ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 3b$	25
Σχήμα 3-7: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου Ez σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 0.2b$. 25	25
Σχήμα 3-8: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\rho$ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\varphi$ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 0.2b$	26
Σχήμα 3-9: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεϊ του πλήθους N των βοηθητικών πηγών για το (α) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$	27
Σχήμα 3-10: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεϊ της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵr για το (α) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 14$	28
Σχήμα 3-11: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεϊ της ειδικής αγωγιμότητας σ για το (α) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$	28
Σχήμα 3-12: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεϊ της ακτίνας $a in$ της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης για το (α) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 8$	29
Σχήμα 3-13: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεϊ της ακτίνας $a out$ της εξωτερικής βοηθητικής καμπύλης για το (α) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 8$	30
Σχήμα 3-14: Ο δείκτης κατάστασης του πίνακα συστήματος συναρτήσεϊ των ακτινών (α) $a in$ και (β) $a out$ των δυο βοηθητικών καμπυλών για μεταβλητό πλήθος N των βοηθητικών πηγών.	30
Σχήμα 4-1: Ο υπό μελέτη διστρωματικός σκεδαστής και το προσπίπτον πεδίο στον χώρο.	31
Σχήμα 4-2: Ο κυκλικός σκεδαστής και οι βοηθητικές καμπύλες της ΜΒΠ.....	34
Σχήμα 4-3: Λεπτομέρεια πλέγματος στη ΜΠΣ.....	39
Σχήμα 4-4: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου Ez σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 3b$	40
Σχήμα 4-5: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\rho$ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\varphi$ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 3b$	41

Σχήμα 4-6: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου Ez σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 0.2b$.	41
Σχήμα 4-7: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\rho$ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου $H\varphi$ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho obs = 0.2b$.	42
Σχήμα 4-8: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως του πλήθους N των βοηθητικών πηγών για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$.	43
Σχήμα 4-9: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon r, II$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.	44
Σχήμα 4-10: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως της ειδικής αγωγιμότητας σII για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.	44
Σχήμα 4-11: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως της ακτίνας $a1, out$ της εξωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S1, out$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.	45
Σχήμα 4-12: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως της ακτίνας $a1, in$ της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S1, in$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.	46
Σχήμα 4-13: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως της ακτίνας $a2, out$ της εξωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S2, out$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.	47
Σχήμα 4-14: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσεως της ακτίνας $a2, in$ της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S2, in$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο Ez και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο $H\varphi$. Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.	47
Σχήμα 4-15: Ο δείκτης κατάστασης του πίνακα συστήματος συναρτήσεως των ακτινών (α) $a1, in$, (β) $a1, out$, (γ) $a2, in$, και (δ) $a2, out$ των τεσσάρων βοηθητικών καμπυλών για μεταβλητό πλήθος N των βοηθητικών πηγών	48

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 3-1: Ενδεικτικός χρόνος εκτέλεσης των δύο μεθόδων για την περίπτωση μονοστρωματικού σκεδαστή.....	26
Πίνακας 4-1: Ενδεικτικός χρόνος εκτέλεσης των δύο μεθόδων για την περίπτωση διστρωματικού σκεδαστή.....	42

Κατάλογος Ψευδοαλγορίθμων

Ψευδοκώδικας 3-1: Αλγόριθμος για μαζικές πράξεις στο MATLAB®	20
--	----



Ανδρέας Χρυσόχός
Εφαρμογές Τροποποιημένης Μεθόδου των Βοηθητικών Πηγών σε
Προβλήματα Ηλεκτρομαγνητικής Διέγερσης Πολυστρωματικών
Σκεδαστών

Συνομογραφίες & Ακρωνύμια

ΜΒΠ Μέθοδος Βοηθητικών Πηγών
ΜΠΣ Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

1. Εισαγωγή

1.1 Υπολογιστικός ηλεκτρομαγνητισμός

Πριν την έλευση των πρώτων ψηφιακών υπολογιστών, τα περισσότερα προβλήματα υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού επιλύονταν με τη χρήση κλασικών αναλυτικών τεχνικών. Όπως είναι λογικό, λόγω της γεωμετρικής πολυπλοκότητας των προβλημάτων, μόνο ένα μικρό μέρος αυτών μπορούσε να επιλυθεί αναλυτικά με αρκετή προσπάθεια και διάφορες παραδοχές.

Η αριθμητική επίλυση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού χρονολογείται στα μέσα της δεκαετίας του 1960, όπου δίνεται έμφαση στην επίλυση προβλημάτων που δεν επιδέχονται αναλυτικής λύσης [1]. Σήμερα, ο κλάδος, πλέον, του υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού βρίθει πληθώρα εφαρμογών σε προβλήματα σκέδασης, ακτινοβολίας διατάξεων, δυναμικού, κυματοδηγών και ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας. Τέλος, αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην έρευνα και ανάπτυξη νέων τεχνολογιών και καινοτόμων προϊόντων.

1.2 Πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης

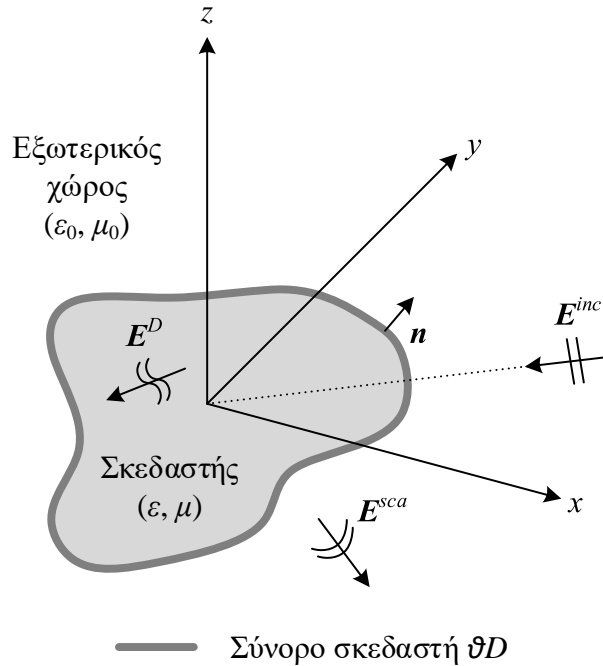
Τα προβλήματα σκέδασης κατηγοριοποιούνται σε δύο βασικές ομάδες, τα ευθέα και τα αντίστροφα. Στα πρώτα αναζητείται το σκεδασμένο πεδίο παρουσία ενός γνωστού σκεδαστή και δεδομένης επιβληθείσας διέγερσης. Αυτά τα προβλήματα είναι συνήθως καλά τοποθετημένα, καθώς είναι πλήρως καθορισμένα το πεδίο ορισμού και οι αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες. Στα αντίστροφα προβλήματα αναζητείται η γεωμετρία του σκεδαστή και οι ιδιότητές του από κάποια μέτρηση του ολικού πεδίου στον χώρο με δεδομένη επιβληθείσα διέγερση. Αυτά τα προβλήματα δύναται να είναι μη καλά τοποθετημένα, δηλαδή, πιθανώς να παρουσιάζουν πολλαπλές λύσεις. Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται σε προβλήματα της πρώτης κατηγορίας.

Στο Σχήμα 1-1 παρουσιάζεται το γενικό πρόβλημα της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Ένα γνωστό προσπίπτον πεδίο με ένταση ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου \mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc} αλληλεπιδρά με τον σκεδαστή που καταλαμβάνει το χωρίο D στον \mathbb{R}^2 ή \mathbb{R}^3 . Στο εξωτερικό του σκεδαστή, τα ολικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία δίνονται ως

$$\mathbf{E}^{ext(D)} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca}, \mathbf{r} \in ext(D) \quad (1.1)$$

$$\mathbf{H}^{ext(D)} = \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^{sca}, \mathbf{r} \in ext(D) \quad (1.2)$$

όπου \mathbf{r} τυχόν σημείο του χώρου, ενώ στο εσωτερικό του σκεδαστή αναπτύσσονται τα πεδία $\mathbf{E}^D, \mathbf{H}^D$.



Σχήμα 1-1: Το γενικό πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης.

Το πρόβλημα σκέδασης έγκειται στον υπολογισμό των σκεδασμένων πεδίων $\mathbf{E}^{sca}, \mathbf{H}^{sca}$ στον εξωτερικό χώρο, καθώς και των πεδίων $\mathbf{E}^D, \mathbf{H}^D$ στο εσωτερικό του σκεδαστή.

Η επίλυση εκκινεί από τη διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.6)$$

όπου \mathbf{B} η μαγνητική επαγωγή, \mathbf{J} η πυκνότητα ρεύματος, \mathbf{D} η διηλεκτρική μετατόπιση, t ο χρόνος και ρ η πυκνότητα φορτίου.

Επιπρόσθετα, λαμβάνονται υπόψη οι καταστατικές εξισώσεις μεταξύ των πεδίων

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.8)$$

όπου ε η διηλεκτρική σταθερά και μ η μαγνητική διαπερατότητα του εκάστοτε μέσου.

Θεωρώντας πως δεν υπάρχουν φορτία ($\rho = 0$) και πηγές ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$) στον χώρο για κάθε χρονική στιγμή t , προκύπτει μέσω των (1.7) και (1.8) ότι

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.12)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή στροφής $\nabla \times$ στην (1.4) και με τη βοήθεια της (1.3) προκύπτει

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

Στη συνέχεια, βάσει της διανυσματικής ταυτότητας $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ και της (1.5) προκύπτει η γνωστή κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο

$$-\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (1.14)$$

Θεωρώντας αρμονική χρονική μεταβολή με γωνιακή συχνότητα ω για το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}$ προκύπτει η κυματική εξίσωση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2(\mathbf{r}))\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1.15)$$

και κατά αναλογία η αντίστοιχη εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο

$$(\nabla^2 + k^2(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

όπου $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ο κυματικός αριθμός.

Το πρόβλημα λοιπόν της σκέδασης ανάγεται στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα, οι εφαπτομενικές συνιστώσες των πεδίων στο σύνορο του σκεδαστή θα πρέπει να είναι συνεχείς.

Επιπρόσθετα, θα πρέπει να διασφαλίζεται και η συνθήκη ακτινοβολίας, δηλαδή ο ασυμπτωτικός μηδενισμός των εφαπτομενικών συνιστωσών των πεδίων για $r \rightarrow \infty$.

1.3 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης

Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των βασικότερων αριθμητικών τεχνικών του υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού.

1.3.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Στη μέθοδο αυτή οι εξισώσεις Maxwell προσεγγίζονται με κεντρικές διαφορές των χωρικών και χρονικών παραγώγων των πεπλεγμένων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων [2]. Η διακριτοποίηση πραγματοποιείται στις ακμές ενός πλέγματος όπου το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλα και κάθετα, αντίστοιχα, ή το αντίστροφο. Λόγω αυτού οι συνοριακές συνθήκες των πεδίων ικανοποιούνται ταυτοτικά χωρίς περαιτέρω ενέργεια. Ο υπολογισμός των πεδίων εναλλάσσεται σε όλα τα στοιχεία του πλέγματος, οι διαστάσεις του οποίου καθώς και το χρονικό βήμα θα πρέπει να ικανοποιούν το κριτήριο Courant [3].

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών θεωρείται η πιο διαδεδομένη μέθοδος ανάλυσης σύνθετων προβλημάτων, αν και το υπολογιστικό κόστος μπορεί να είναι απαγορευτικό ανάλογα τη φύση και το μέγεθος του προβλήματος.

1.3.2 Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ)

Η ΜΠΣ συνίσταται στην πλεγματοποίηση του χώρου και την επιβολή ειδικών οριακών συνθηκών [4]. Το πεδίο σε κάθε πλεγματοεικό στοιχείο περιγράφεται με κατάλληλες συναρτήσεις βάσης, που ικανοποιούν και τις οριακές συνθήκες. Στη συνέχεια επιβάλλεται η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους καταλήγωντας σε ένα σύστημα με άγνωστους συντελεστές τα βάρη των συναρτήσεων βάσης. Η επίλυση του τελευταίου συντελεί στον καθορισμό του πεδίου σε όλο το πλέγμα.

Η ΜΠΣ μπορεί να μοντελοποιήσει σύνθετες δομές ενώ βρίθει δυνατοτήτων στη διαμόρφωση του πλέγματος, το οποίο όμως χρήζει ιδιαίτερης προσοχής για τη σύγκλιση και την ακρίβεια της μεθόδου.

1.3.3 Γεωμετρική θεωρία περίθλασης

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην προσέγγιση ότι τοπικά τα πεδία έχουν χαρακτηριστικά επίπεδου κύματος όταν οι διαστάσεις του σκεδαστή είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος [5], [6]. Στην περίπτωση αυτή δύναται να χρησιμοποιηθούν οι νόμοι της κλασικής

οπτικής σε συνδυασμό με αναλυτικές λύσεις. Οι επιφάνειες υπερθέτουν κύματα ανάκλασης ενώ οι ακμές και αιχμές πεδία περίθλασης, τα οποία προσδιορίζονται από τα τοπικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή με κατάλληλους συντελεστές ανάκλασης και περίθλασης, αντίστοιχα.

Η γεωμετρική θεωρία περίθλασης, καθώς και η βελτιωμένη εκδοχή της ενοποιημένης θεωρίας περίθλασης, βρίσκουν εφαρμογές σε προβλήματα σκέδασης από ηλεκτρικά μεγάλα σώματα.

1.3.4 Μέθοδος ροπών

Η μέθοδος ροπών συνήθως χρησιμοποιείται στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων [7]. Σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού η μέθοδος βασίζεται στην επιβολή των οριακών συνθηκών των πεδίων στις συνοριακές επιφάνειες και την εξαγωγή των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Στη συνέχεια το σώμα διακριτοποιείται καταλλήλως, όπου οι κατανομές ρεύματος και φορτίου εκφράζονται σαν άγνωστοι συντελεστές σε συνδυασμούς δεδομένων συναρτήσεων βάσης. Τελικά επιβάλλονται και οι οριακές συνθήκες χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις δοκιμής στην ολοκληρωτική εξίσωση. Η διαδικασία καταλήγει σε ένα γραμμικό σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές, το οποίο και επιλύεται.

Η μέθοδος ροπών είναι ιδανική για προβλήματα ακτινοβολίας και σκέδασης όπου τα υπό μελέτη σώματα έχουν διαστάσεις έως μερικά μήκη κύματος. Σε διαφορετική περίπτωση, η αύξηση του υπολογιστικού κόστους καθιστά τη μέθοδο αναποτελεσματική.

1.3.5 Τεχνικές γενικευμένων πολυπόλων

Πρόκειται για μια οικογένεια αριθμητικών μεθόδων οι οποίες χαρακτηρίζονται και ως ημιαναλυτικές καθώς βασίζονται στον γραμμικό συνδυασμό θεμελιωδών λύσεων του προβλήματος [8]. Οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται στη συνέχεια για την εύρεση των άγνωστων συντελεστών.

Μεταξύ άλλων, η μέθοδος βοηθητικών πηγών (ΜΒΠ), που αποτελεί αντικείμενο της παρούσας εργασίας, ανήκει σε αυτή την κατηγορία [9], [10]. Η μέθοδος αρχικά αναπτύχθηκε ως μια ημιαναλυτική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων συνοριακών τιμών και μετεξελίχθηκε στην επίλυση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων.

1.4 Στόχοι εργασίας

Οι στόχοι της διπλωματικής εργασίας είναι

- Η παρουσίαση μιας ολοκληρωμένης εισαγωγής στη ΜΒΠ.
- Η ανάπτυξη ενός αλγορίθμου της ΜΒΠ στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB® [11] δίνοντας έμφαση στην αποδοτικότητά του.
- Η επίδειξη της χρήσης της ΜΒΠ σε βασικά προβλήματα διέγερσης πολυστρωματικών σκεδαστών και η σύγκριση των αποτελεσμάτων της με τα αντίστοιχα της ΜΠΣ [12].
- Η διερεύνηση της ακρίβειας και ευστάθειας της ΜΒΠ μέσω ανάλυσης ευαισθησίας ως προς τις παραμέτρους της κάνοντας χρήση κατάλληλων μέτρων σφάλματος.

2. Μέθοδος βοηθητικών πηγών

2.1 Εισαγωγή

Η ΜΒΠ [9], [10] εφαρμόζεται σε προβλήματα συνοριακών τιμών και αναπτύσσει τα άγνωστα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε γραμμικά αναπτύγματα συναρτήσεων που ταυτόχρονα επαληθεύουν την εξίσωση Helmholtz [13]. Οι συντελεστές των αναπτυγμάτων αντιστοιχούν σε βοηθητικές πηγές που τοποθετούνται επί βοηθητικών επιφανειών που διαφέρουν από τις συνοριακές επιφάνειες. Οι άγνωστοι όροι προσδιορίζονται αφού επιβληθούν και οι οριακές συνθήκες των πεδίων σε επιλεγμένα σημεία που βρίσκονται πάνω στις συνοριακές επιφάνειες [14].

Η ΜΒΠ παρουσιάζει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων μεθόδων καθώς προσαρμόζεται εύκολα σε μεγάλο εύρος προβλημάτων ενώ παρέχει ευκολία υλοποίησης αφού οι σχετικές εξισώσεις μπορούν να γραφούν ρητά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων [15], [16]. Η σύγκλιση και η ακρίβεια της λύσης μπορούν να ενισχυθούν βελτιστοποιώντας τις θέσεις των πηγών επί των βοηθητικών επιφανειών. Τέλος, δίνεται η δυνατότητα άμεσου ελέγχου του σφάλματος των οριακών συνθηκών στις συνοριακές επιφάνειες με σκοπό την άμεση αξιολόγηση της αποδοτικότητας της μεθόδου.

Η μέθοδος όμως εμφανίζει και εγγενείς αδυναμίες [15], [16]. Αρχικά, δεν υπάρχει συγκεκριμένη μεθοδολογία που να ορίζει τον αριθμό των βοηθητικών πηγών και την κατανομή τους πάνω στις βοηθητικές επιφάνειες. Κάθε πρόβλημα αντιμετωπίζεται ως μοναδικό και απαιτείται η διενέργεια δοκιμών για την εύρεση αριθμητικώς ευσταθή αποτελέσματος και την διασφάλιση ότι το σφάλμα των οριακών συνθηκών είναι αρκούντως μικρό. Η ΜΒΠ παρουσιάζει δυσκολία εφαρμογής σε περιπτώσεις ανοικτών χωρίων όπου και πάλι απαιτείται μια σειρά δοκιμών για την εύρεση αποδεκτής λύσης, ενώ σε προβλήματα σωμάτων μικρών διαστάσεων υπάρχει επίσης δυσχέρεια λόγω της εγγύτητας μεταξύ βοηθητικών και συνοριακών επιφανειών. Τέλος, παρουσιάζονται δυσκολίες σε περιπτώσεις σωμάτων με έντονες απώλειες. Τα πεδία εντός αυτών αποσβένουν έντονα με αποτέλεσμα την εμφάνιση αριθμητικών ασταθειών.

2.2 Εφαρμογή σε προβλήματα σκέδασης

2.2.1 Προσέγγιση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων

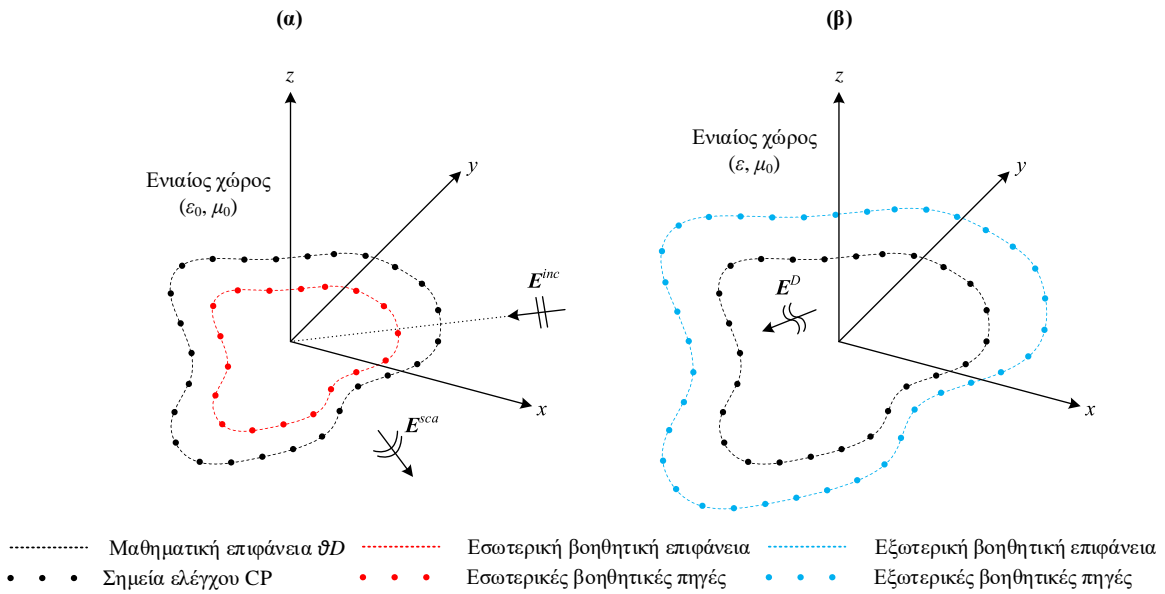
Η ΜΒΠ βρίσκει άμεση εφαρμογή σε ευθέα προβλήματα σκέδασης [17], [18], όπου το πεδίο κάθε διακριτής περιοχής προσεγγίζεται από ένα γραμμικό συνδυασμό αναλυτικών λύσεων της εξίσωσης Helmholtz. Για την επίλυση του προβλήματος απαιτείται και η διακριτή επιβολή των οριακών συνθηκών στις συνοριακές επιφάνειες. Λόγω των παραπάνω, η ΜΒΠ ανήκει στις λεγόμενες ημιαναλυτικές μεθόδους συνοριακών τιμών, παρέχοντας τη δυνατότητα της εκ των υστέρων εκτίμησης της ακρίβειας της λύσης μέσω του υπολογισμού του σφάλματος των οριακών συνθηκών.

Εφαρμόζοντας τη ΜΒΠ στο πρόβλημα σκέδασης που παρουσιάστηκε στο Σχήμα 1-1, τα άγνωστα πεδία σε κάθε περιοχή προσεγγίζονται από αυτά που δημιουργούνται από το εκάστοτε σύνολο βοηθητικών πηγών. Σύμφωνα με το Σχήμα 2-1α, η περιγραφή του πεδίου στον χώρο $ext(D)$ προσεγγίζεται από την υπέρθεση του προσπίπτοντος πεδίου και του πεδίου που παράγεται από τις βοηθητικές πηγές που τοποθετούνται στο εσωτερικό του σκεδαστή και οι οποίες εκπέμπουν σε όλο τον χώρο θεωρώντας ότι είναι ομοιόμορφος και με τα χαρακτηριστικά του $ext(D)$. Αντίστοιχα, σύμφωνα με το Σχήμα 2-1β, το πεδίο στον χώρο D προσεγγίζεται από το πεδίο που δημιουργείται από τις βοηθητικές πηγές που τοποθετούνται στο εξωτερικό του σκεδαστή και οι οποίες εκπέμπουν πάλι σε όλο τον χώρο αλλά αυτή τη φορά με τα χαρακτηριστικά του D . Τελικά, τα άγνωστα πεδία σε κάθε περιοχή περιγράφονται ως

$$\mathbf{F}^{ext(D)} = \mathbf{F}^{inc} + \sum_n w_n^{ext(D)} \mathbf{F}_n^{ext(D)}, \mathbf{r} \in ext(D) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F}^D = \sum_n w_n^D \mathbf{F}_n^D, \mathbf{r} \in D \quad (2.2)$$

όπου $\mathbf{F}^{(\cdot)}$ το ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο κάθε περιοχής, $\mathbf{F}_n^{(\cdot)}$ το θεμελιώδες πεδίο που παράγει η n βοηθητική πηγή του συνόλου που ακτινοβολεί στην εκάστοτε περιοχή, \mathbf{F}^{inc} το προσπίπτον πεδίο διέγερσης, και $w_n^{(\cdot)}$ ο άγνωστος συντελεστής που καθορίζει τη συνεισφορά της n βοηθητικής πηγής.



Σχήμα 2-1: Εφαρμογή ΜΒΠ στο (α) εξωτερικό και (β) εσωτερικό του σκεδαστή.

Η επιτυχής εφαρμογή της ΜΒΠ, δηλαδή η ακρίβεια και η σύγκλιση της λύσης, εξαρτώνται σε σημαντικό βαθμό από το πλήθος και το είδος των βοηθητικών πηγών, καθώς και από τον καταμερισμό τους στο χώρο [17]. Σε εφαρμογές στον \mathbb{R}^2 χρησιμοποιούνται νηματοειδείς πηγές απείρου μήκους ως βοηθητικές πηγές, οποίες μπορεί να είναι είτε ηλεκτρικές είτε μαγνητικές ανάλογα την πόλωση του πεδίου διέγερσης. Σε προβλήματα στον \mathbb{R}^3 , χρησιμοποιούνται ζεύγη εγκάρσιων ηλεκτρικών ή μαγνητικών διπόλων. Το πλήθος των βοηθητικών πηγών και η κατανομή τους στις βοηθητικές επιφάνειες περιγράφονται σε επόμενη ενότητα.

2.2.2 Οριακές συνθήκες

Οι άγνωστοι συντελεστές $w_n^{(i)}$ των (2.1) και (2.2) καθορίζονται από την επιβολή των οριακών συνθηκών στο σύνορο του σκεδαστή ∂D και συγκεκριμένα σε συγκεκριμένες θέσεις επί αυτού. Από την επιβολή προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα, η επίλυση του οποίου καθορίζει τους άγνωστους συντελεστές και οδηγεί στην αριθμητική λύση. Η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld ικανοποιείται ταυτοτικά από τα πεδία των βοηθητικών πηγών στο $ext(D)$, συνεπώς δεν χρειάζεται να επιβληθεί αυτόνομα.

Στη γενική περίπτωση, η επιβολή των οριακών συνθηκών γίνεται στις κάθετες και εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ως εξής

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{ext(D)} = \mathbf{E}_{\parallel}^D, \mathbf{r} \in \partial D \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{ext(D)} \mathbf{E}_{\perp}^{ext(D)} = \varepsilon_D \mathbf{E}_{\perp}^D, \mathbf{r} \in \partial D \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^{ext(D)} = \mathbf{H}_{\parallel}^D, \mathbf{r} \in \partial D \quad (2.5)$$

$$\mu_{ext(D)} \mathbf{H}_{\perp}^{ext(D)} = \mu_D \mathbf{H}_{\perp}^D, \mathbf{r} \in \partial D \quad (2.6)$$

όπου \parallel και \perp η εφαπτομενική και κάθετη συνιστώσα του κάθε πεδίου, αντίστοιχα.

Επισημαίνεται πως δεν είναι απαραίτητη η επιβολή όλων των οριακών συνθηκών. Ανάλογα το πρόβλημα, η επιβολή μπορεί να αφορά είτε τις εφαπτομενικές είτε τις κάθετες συνιστώσες, με τις απομένουσες συνθήκες να ικανοποιούνται ταυτοτικά από τη τελική λύση του συστήματος. Το σύστημα για τους άγνωστους συντελεστές συνήθως επιλέγεται να είναι τετραγωνικό, οπότε και επιλύεται με κλασικές μεθόδους γραμμικών συστημάτων. Όταν το πλήθος των αγνώστων είναι μικρότερο από αυτό των εξισώσεων, το σύστημα προκύπτει υπερπροσδιορισμένο και η επίλυση του γίνεται με μεθόδους ελαχιστοποίησης σφάλματος [20], [21].

2.2.3 Δείκτης κατάστασης

Ο καταμερισμός των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών και ο αριθμός των βοηθητικών πηγών επηρεάζουν σημαντικά την ποιότητα της λύσης [22], [23]. Γενικά, το πλήθος αυτών πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλο ώστε να υπάρχει καλή διακριτοποίηση της γεωμετρίας του προβλήματος και των πεδίων στο σύνορο του σκεδαστή αλλά όχι τόσο μεγάλο ώστε το γραμμικό σύστημα να παρουσιάζει μεγάλο δείκτη κατάστασης

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (2.7)$$

όπου \mathbf{A} ο πίνακας της ΜΒΠ, \mathbf{A}^{-1} ο αντίστοιχος αντίστροφος πίνακας, και $\|\cdot\|$ η νόρμα του πίνακα.

Ο δείκτης κατάστασης είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει τη δυσκολία αντιστροφής του πίνακα ενός γραμμικού συστήματος. Στην περίπτωση διαγώνιου πίνακα, ο δείκτης κατάστασης ισούται με 1 και το γραμμικό σύστημα επιλύεται τετριμμένα. Αντίθετα, η επίλυση δυσχεραίνεται με αύξηση της εξάρτησης μεταξύ των γραμμών. Στο ακραίο σενάριο όπου κάποιες γραμμές του πίνακα είναι γραμμικώς εξαρτημένες, ο δείκτης κατάστασης τείνει στο άπειρο και το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση.

Στις περιπτώσεις όπου το γραμμικό σύστημα είναι τετραγωνικό, μπορεί να προκύψει πίνακας με μικρό δείκτη κατάστασης αφού επιλεγούν κατάλληλα οι σχετικές θέσεις των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών και των βοηθητικών πηγών. Παρόλα αυτά, οι πίνακες που προκύπτουν είναι εξαιρετικά ευαίσθητοι σε αυτές τις αλλαγές. Στις περιπτώσεις υπεροπροσδιορισμένου συστήματος, οι πίνακες συνήθως οδηγούν σε μεγάλο δείκτη κατάστασης χωρίς όμως αυτό να συνεπάγεται απαραίτητα και τη μείωση της ακρίβειας υπολογισμού.

2.2.4 Αριθμητική σύγκλιση

Η αριθμητική σύγκλιση της λύσης της ΜΒΠ εξαρτάται άμεσα από τη σχετική θέση μεταξύ των ιδιζόντων σημείων των αναλυτικών αναπτυγμάτων και των βοηθητικών πηγών. Οι θέσεις όμως των πρώτων δεν μπορούν προσδιοριστούν εκ των προτέρων σε πρακτικά προβλήματα λόγω της εξάρτησής τους από τα χαρακτηριστικά του πεδίου διέγερσης και τη γεωμετρία του σκεδαστή. Ως εκ τούτου, η σύγκλιση της λύσης δεν δύναται να διασφαλιστεί μαθηματικά [13], [15].

Για το λόγο αυτό, η σύγκλιση μπορεί να μελετηθεί από πρακτική μόνο σκοπιά, ελέγχοντας τη λύση που προκύπτει αυξανόμενου του αριθμού των βοηθητικών πηγών και δεδομένου του καταμερισμού των θέσεων τους. Εάν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία τείνουν να συγκλίνουν, τότε η λύση θεωρείται αξιόπιστη, αν και όχι απαραίτητα ακριβής. Για την εξασφάλιση και της ορθότητας, η διαδικασία πρέπει να επαναληφθεί μεταβάλλοντας τα σημεία επιβολής των οριακών συνθηκών και τις θέσεις των βοηθητικών πηγών. Εάν τα πεδία συνεχίζουν να συγκλίνουν στις ίδιες τιμές, τότε η λύση μπορεί να θεωρηθεί ακριβής.

Επιπρόσθετα, δύναται να ελεγχθεί και η συμπεριφορά του σφάλματος των οριακών συνθηκών ενώ συνίσταται και ο έλεγχος των οριακών συνθηκών που δεν χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό της λύσης. Τέλος, πολλές φορές επιλέγεται η αντιπαραβολή με αποτελέσματα άλλων αριθμητικών τεχνικών καθώς και με πειραματικές μετρήσεις.

2.2.5 Εκτίμηση σφάλματος

Η εκτίμηση και απεικόνιση της ακρίβειας της λύσης της ΜΒΠ γίνεται κυρίως με υπολογισμό του συνοριακού σφάλματος [22], [23], που μπορεί να εφαρμοστεί στις οριακές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση της λύσης αλλά και στις υπόλοιπες. Το σφάλμα των πρώτων είναι φυσικά μηδενικό στις θέσεις των σημείων επιβολής, όμως μπορεί

να λάβει υψηλή τιμή σε ενδιάμεσες θέσεις. Αντίθετα, το σφάλμα των δευτέρων είναι πάντα μη μηδενικό, αλλά συνήθως σημαντικά μικρότερο στα σημεία μηδενισμού των πρώτων. Το σφάλμα συνήθως απεικονίζεται κανονικοποιημένο ως προς το αντίστοιχο προσπίπτον πεδίο, για την εύκολη ποσοτική αξιολόγηση του σε σύγκριση με την τιμή του αντίστοιχου πεδίου εκατέρωθεν του συνόρου.

Ο υπολογισμός του σφάλματος των οριακών συνθηκών δεν αποτελεί ικανό έλεγχο για την πλήρη αποτίμηση της ακρίβειας της λύσης παντού στον χώρο [24]. Για το λόγο αυτό ενθαρρύνεται η διενέργεια πρόσθετων δοκιμών που εξετάζουν την αριθμητική ευστάθεια της λύσης σε μεταβολές παραμέτρων της υπολογιστικής διαδικασίας. Εάν η λύση αποδειχθεί ανθεκτική και το συνοριακό σφάλμα μειώνεται με αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών, τότε η λύση μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητική.

2.2 Κανόνες επιλογής παραμέτρων

2.2.1 Κατανομή βοηθητικών πηγών

Βιβλιογραφικά, έχουν προταθεί κάποιοι γενικοί κανόνες στη ΜΒΠ για τον προσδιορισμό αριθμητικά ευσταθών γραμμικών συστημάτων που λαμβάνουν υπόψη τις ιδιότητες του προσπίπτοντος πεδίου και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος [13]. Συνήθως προτείνεται οι βοηθητικές επιφάνειες να επιλέγονται έτσι ώστε να είναι σύμμορφες ως προς το σύνορο του σκεδαστή. Επιπρόσθετα, όλα τα ιδιάζοντα σημεία των αναπτυγμάτων θα πρέπει να εσωκλείονται στις βοηθητικές επιφάνειες, διαφορετικά, η ΜΒΠ μπορεί να οδηγήσει σε αποκλίνουσα λύση. Για σύνθετες δομές, η απόσταση μεταξύ της βοηθητικής επιφάνειας και του συνόρου συνήθως εκλέγεται αρκούντως μικρότερη από την ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας του συνόρου. Τέλος, οι βοηθητικές επιφάνειες πρέπει να οδηγούν σε διαφορετικές συχνότητες συντονισμού από τη συχνότητα διέγερσης.

Παρόλα αυτά, ακόμα και η πιστή τήρηση των παραπάνω κανόνων δεν συνιστούν απαραίτητα ένα γενικευμένο τρόπο τοποθέτησης των βοηθητικών πηγών, καθώς δεν διασφαλίζουν τη σύγκλιση της λύσης σε κάθε δυνατή περίπτωση. Υπάρχουν προβλήματα όπου η κατανομή των βοηθητικών πηγών με μη σύμμορφο τρόπο [25] ή η τοποθέτησή τους επί των καυστικών επιφανειών [15], [16] πλεονεκτεί σε όρους ακρίβειας και αποδοτικότητας της μεθόδου.

2.2.2 Καταμερισμός σημείων επιβολής οριακών συνθηκών

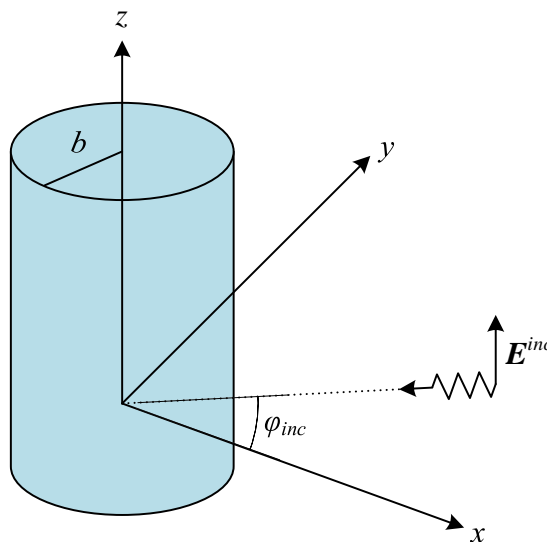
Όπως διατυπώθηκε προηγουμένως, ο αριθμός των βοηθητικών πηγών δύναται να είναι ίσος ή μικρότερος από αυτόν των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών. Στην πρώτη περίπτωση, τα σημεία επιβολής επιλέγονται πάνω στις προβολές των βοηθητικών πηγών επί των συνότων του σκεδαστή, ώστε να σχηματιστεί ένα γραμμικό σύστημα με μικρό δείκτη κατάστασης. Δυνητικά, μπορούν να υπάρχουν και άλλες κατανομές, οι οποίες όμως συνήθως οδηγούν σε λύσεις μειωμένης ακρίβειας. Τέλος, στην περίπτωση που το πλήθος των βοηθητικών πηγών είναι μικρότερο του πλήθους των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών, η λύση γίνεται μη εξαρτώμενη από τις θέσεις των τελευταίων και το συνοριακό σφάλμα προκύπτει σταθμισμένο.

3. Πρόβλημα σκέδασης σε απειρομήκη μονοστρωματικό κύλινδρο

3.1 Περιγραφή του προβλήματος

Αρχικά, στο Σχήμα 3-1, θεωρείται ένας απειρομήκης μονοστρωματικός κύλινδρος κυκλικής διατομής με ακτίνα b , του οποίου ο άξονας είναι παράλληλος στον άξονα \hat{z} ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων O . Ο κύλινδρος βρίσκεται στον κενό χώρο με ιδιότητες ϵ_0, μ_0 και αποτελείται από ένα εν γένει μη τέλει διηλεκτρικό υλικό με ιδιότητες $\epsilon \neq \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma \neq 0$.

Επιπρόσθετα, θεωρείται ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με εγκάρσια μαγνητική πόλωση κατά τον άξονα \hat{z} (TM^z) και γωνιακής συχνότητας ω , το οποίο διαδίδεται κάθετα στον άξονα \hat{z} και υπό γωνία πρόσπτωσης φ_{inc} ως προς τον άξονα \hat{x} . Συνεπώς θα υπάρχει συνιστώσα για το ηλεκτρικό πεδίο μόνο κατά τον \hat{z} , ενώ για το μαγνητικό πεδίο μόνο κατά τους \hat{x} και \hat{y} , ή εναλλακτικά, κατά τους $\hat{\rho}$ και $\hat{\phi}$ στο αντίστοιχο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων (ρ, φ, z) .



Σχήμα 3-1: Ο υπό μελέτη μονοστρωματικός σκεδαστής και το προσπίπτον πεδίο στον χώρο.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στον κενό χώρο και προσπίπτει στον κύλινδρο με αποτέλεσμα την σκέδασή του καθώς και τη μετάδοση στο εσωτερικό του σκεδαστή, συνεπώς την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου τόσο εκτός όσο και εντός του απειρομήκη κυλίνδρου. Θεωρώντας ως περιοχή I τον χώρο στο εξωτερικό του κυλίνδρου ($\rho > b$) και

ως περιοχή II τον χώρο στο εσωτερικό ($\rho < b$), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συμβολίζεται ως $\mathbf{E}^I = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca}$ και \mathbf{E}^{II} , ενώ η αντίστοιχη ένταση του μαγνητικού πεδίου ως $\mathbf{H}^I = \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^{sca}$ και \mathbf{H}^{II} .

Το πρόβλημα σκέδασης αποτελείται από

- Τη διάδοση του πεδίου στη μη φραγμένη περιοχή I με κυματικό αριθμό $k_I = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ και άγνωστα πεδία τα \mathbf{E}^{sca} , \mathbf{H}^{sca} .
- Τη διάδοση του πεδίου στη φραγμένη περιοχή II με κυματικό αριθμό $k_{II} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\left(\varepsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\mu_0}$ και άγνωστα πεδία τα \mathbf{E}^{II} , \mathbf{H}^{II} .
- Τις συνοριακές συνθήκες μετάδοσης πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου ∂D .

Δηλαδή, αναζητείται λύση στο παρακάτω πρόβλημα

$$\mathbf{E}^I = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca}, \mathbf{r} \in D_I \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H}^I = \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^{sca}, \mathbf{r} \in D_I \quad (3.2)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{sca} + k_I^2\mathbf{E}^{sca} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_I \quad (3.3)$$

$$\Delta\mathbf{H}^{sca} + k_I^2\mathbf{H}^{sca} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_I \quad (3.4)$$

$$\Delta\mathbf{E}^{II} + k_{II}^2\mathbf{E}^{II} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_{II} \quad (3.5)$$

$$\Delta\mathbf{H}^{II} + k_{II}^2\mathbf{H}^{II} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_{II} \quad (3.6)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^I = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{II}, \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^I = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{II}, \mathbf{r} \in \partial D \quad (3.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \mathbf{E}^{sca}}{\partial r} + jk_I \mathbf{E}^{sca} \right) = \mathbf{0}, r \in |\mathbf{r}|, \text{ ομοιόμορφα για κάθε } \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (3.9)$$

όπου \mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc} γνωστά πεδία που ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz στο D_I .

3.2 Μοντελοποίηση με τη ΜΒΠ

3.2.1 Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων

Το πρόβλημα μπορεί να μελετηθεί σε οποιοδήποτε οριζόντιο επίπεδο xy , καθώς τα προσπίπτοντα και σκεδασμένα πεδία είναι πάντα ομογενή ως προς τις διευθύνσεις σε κάθε σημείο z . Οι συνιστώσες των \mathbf{E}^{inc} , \mathbf{H}^{inc} σε ένα τυχαίο σημείο (ρ, φ) δίνονται ως

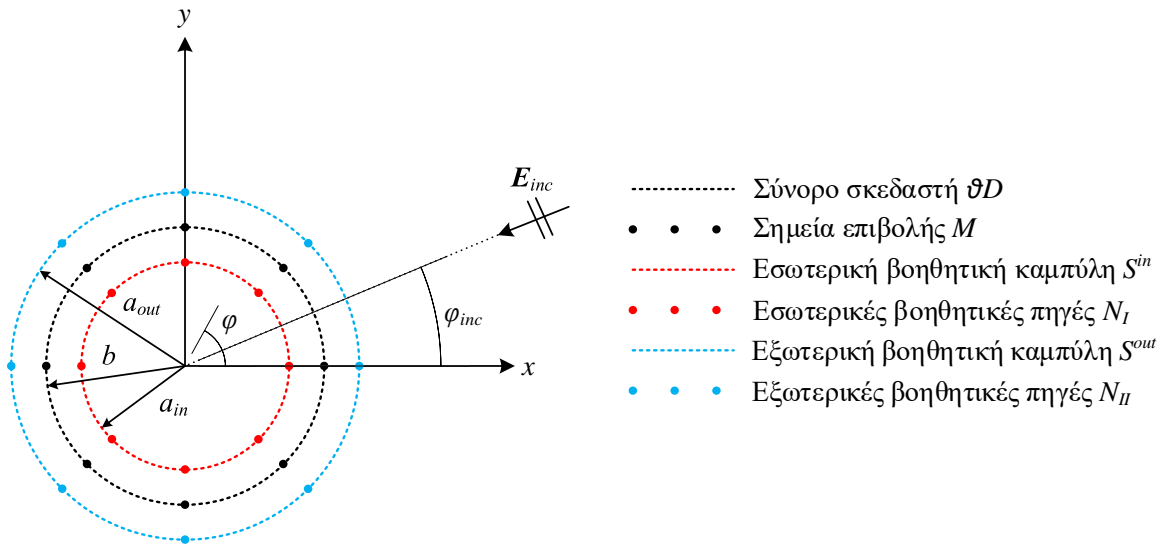
$$E_z^{inc} = E_0 e^{jk_I \rho \cos(\varphi_{inc} - \varphi)} \quad (3.10)$$

$$H_\rho^{inc} = -\frac{k_I}{\omega \mu_0} E_0 \sin(\varphi_{inc} - \varphi) e^{jk_I \rho \cos(\varphi_{inc} - \varphi)} \quad (3.11)$$

$$H_\varphi^{inc} = \frac{k_I}{\omega \mu_0} E_0 \cos(\varphi_{inc} - \varphi) e^{jk_I \rho \cos(\varphi_{inc} - \varphi)} \quad (3.12)$$

όπου E_0 το πλάτος του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου.

Για την κατάστροψη της μοντελοποίησης με τη ΜΒΠ [26]-[28], στο Σχήμα 3-2, θεωρούνται δυο βοηθητικές ομαλές καμπύλες S^{in} , S^{out} , οι οποίες είναι σύμμορφες ως προς το σύνορο του σκεδαστή ∂D . Η πρώτη καμπύλη S^{in} βρίσκεται εντός του σκεδαστή και έχει κυκλική διατομή ακτίνας $a_{in} < b$. Η δεύτερη καμπύλη S^{out} βρίσκεται εκτός του σκεδαστή και έχει κυκλική διατομή ακτίνας $a_{out} > b$.



Σχήμα 3-2: Ο κυκλικός σκεδαστής και οι βοηθητικές καμπύλες της ΜΒΠ.

Στις βοηθητικές καμπύλες S^{in} , S^{out} τοποθετείται αριθμός N_I , N_{II} βοηθητικών πηγών, αντίστοιχα, με τη μορφή ηλεκτρικών ρευμάτων, οι οποίες ακτινοβολούν στοιχειώδη ηλεκτρικά πεδία ανάλογα της συνάρτησης Green. Οι βοηθητικές πηγές της καμπύλης S^{in} ακτινοβολούν εξωτερικά του σκεδαστή θεωρώντας τον χώρο ομοιόμορφο με ιδιότητες ϵ_0 , μ_0 , ενώ οι βοηθητικές πηγές της καμπύλης S^{out} ακτινοβολούν εσωτερικά του σκεδαστή θεωρώντας τον χώρο ομοιόμορφο με ιδιότητες ϵ , μ , σ . Το σύστημα των ΜΒΠ προκύπτει εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες ισότητας στις συνιστώσες E_z και H_φ στα M σημεία

επιβολής στο σύνορο του σκεδαστή ∂D . Με επιλογή $M = N_I = N_{II}$, το τελικό σύστημα προκύπτει τετραγωνικό με μοναδική λύση και μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{P}_{11}] & [\mathbf{P}_{12}] \\ [\mathbf{Q}_{11}] & [\mathbf{Q}_{12}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{C_1\} \\ -\{C_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{A^{inc}\} \\ \{B^{inc}\} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Οι υποπίνακες $[\mathbf{P}_{11}]$, $[\mathbf{P}_{12}]$, $[\mathbf{Q}_{11}]$, $[\mathbf{Q}_{12}]$ είναι διαστάσεων $N \times N$ με στοιχεία $m, n = 1, \dots, N$ που δίνονται ως

$$[\mathbf{P}_{11}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}b) H_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (3.14)$$

$$[\mathbf{P}_{12}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{in}) H_l^{(2)}(k_I b) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (3.15)$$

$$[\mathbf{Q}_{11}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} j_l(k_{II}b) H_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (3.16)$$

$$[\mathbf{Q}_{12}]_{mn} = -\frac{k_I}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{in}) \dot{H}_l^{(2)}(k_I b) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (3.17)$$

όπου $J_l(\cdot)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης l , $H_l^{(2)}(\cdot)$ η συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους τάξης l , και $\dot{(\cdot)}$ η παραγώγιση της εκάστοτε συνάρτησης με βάση το συνολικό όρισμά της.

Τα διανύσματα $\{A^{inc}\}$, $\{B^{inc}\}$ είναι διαστάσεων $N \times 1$ με στοιχεία $n = 1, \dots, N$ που δίνονται ως

$$\{A^{inc}\}_n = E_0 e^{jk_I b \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n)} \quad (3.18)$$

$$\{B^{inc}\}_n = \frac{k_I}{\omega\mu_0} E_0 \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n) e^{jk_I b \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n)} \quad (3.19)$$

Τα διανύσματα $\{C_1\}$, $\{C_2\}$ είναι διαστάσεων $N \times 1$ και τα στοιχεία τους $n = 1, \dots, N$ περιέχουν τα άγνωστα βάρη των βοηθητικών πηγών στις καμπύλες S^{out} και S^{in} , αντίστοιχα.

Μετά τον προσδιορισμό τους, οι βοηθητικές πηγές με γωνία $\varphi_p = p \frac{2\pi}{N}$, $p = 1, \dots, N$, στην καμπύλη S^{in} ακτινοβολούν τα εξής πεδία σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου ($\rho \geq b$, φ)

$$E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4}\{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{in}) H_l^{(2)}(k_I \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_p)} \quad (3.20)$$

$$H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega\mu_0\rho}\{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{in}) H_l^{(2)}(k_I \rho) l e^{jl(\varphi - \varphi_p)} \quad (3.21)$$

$$H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) = -\frac{k_I}{4\omega\mu_0}\{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{in}) \dot{H}_l^{(2)}(k_I \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_p)} \quad (3.22)$$

Με υπέρθεση των παραπάνω προκύπτουν τα ζητούμενα πεδία \mathbf{E}^{sca} , \mathbf{H}^{sca} στη μη φραγμένη περιοχή I

$$E_z^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (3.23)$$

$$H_\rho^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (3.24)$$

$$H_\varphi^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (3.25)$$

Αντίστοιχα, οι βοηθητικές πηγές με γωνία $\varphi_q = q \frac{2\pi}{N}$, $q = 1, \dots, N$, στην καμπύλη S^{out} ακτινοβολούν τα εξής πεδία σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου ($\rho \leq b$, φ)

$$E_{zq}^{II}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4}\{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}\rho) H_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(\varphi - \varphi_q)} \quad (3.26)$$

$$H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega\mu_0\rho}\{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}\rho) H_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) l e^{jl(\varphi - \varphi_q)} \quad (3.27)$$

$$H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0}\{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \dot{J}_l(k_{II}\rho) H_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(\varphi - \varphi_q)} \quad (3.28)$$

Με υπέρθεση των παραπάνω προκύπτουν τα ζητούμενα πεδία \mathbf{E}^{II} , \mathbf{H}^{II} στη φραγμένη περιοχή II

$$E_z^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N E_{zq}^{II}(\rho, \varphi) \quad (3.29)$$

$$H_\rho^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (3.30)$$

$$H_\varphi^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (3.31)$$

3.2.2 Υλοποίηση στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB[®]

Η ΜΒΠ υλοποιείται στο MATLAB[®] δίνοντας έμφαση στην αριθμητική ευστάθεια των επιμέρους υπολογισμών καθώς και στην αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Αυτά επιτυγχάνονται εκμεταλλεύοντας τις παρακάτω δυνατότητες του MATLAB[®]

- Χρήση κανονικοποίησης στον υπολογισμό των συναρτήσεων Bessel και Hankel

Η εφαρμογή της τεχνικής οδηγεί στην αποφυγή αριθμητικών υπερχειλίσεων κατά τη διάρκεια των ενδιάμεσων υπολογισμών λόγω της εν γένει μη ομαλής συμπεριφοράς των συναρτήσεων Bessel και Hankel σε όλο το διάστημα ορισμού τους. Η τεχνική παρουσιάζεται ενδεικτικά στην (3.14), η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} [P_{11}]_{mn} &= -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}b) H_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} = \\ &= -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{J}_l(k_{II}b)}{e^{-|\Im(k_{II}b)|}} \frac{\tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out})}{e^{jk_{II}a_{out}}} e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (3.32) \\ &= -\frac{j}{4e^{jk_{II}a_{out}-|\Im(k_{II}b)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}b) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \end{aligned}$$

όπου $\tilde{J}_l(\cdot)$ η κανονικοποιημένη ως προς $e^{|\Im(\cdot)|}$ συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης l και $\tilde{H}_l^{(2)}(\cdot)$ η κανονικοποιημένη ως προς $e^{-j(\cdot)}$ συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους τάξης l .

Η παραπάνω ισοδυναμία εφαρμόζεται κατά αναλογία στις (3.14)-(3.17), (3.20)-(3.22), και (3.26)-(3.28), όπου η παραγωγή της εκάστοτε συνάρτησης με βάση το συνολικό όρισμά της υλοποιείται σύμφωνα με τους παρακάτω βοηθητικούς τύπους

$$\tilde{J}_l(\cdot) = \frac{1}{2}(\tilde{J}_{l-1}(\cdot) - \tilde{J}_{l+1}(\cdot)) \quad (3.33)$$

$$\tilde{H}_l^{(2)}(\cdot) = \frac{1}{2}(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(\cdot) - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(\cdot)) \quad (3.34)$$

- Μαζικές πράξεις σε στοιχεία πινάκων και διανυσμάτων

Η εφαρμογή της τεχνικής οδηγεί στην κατάργηση των επαναληπτικών βρόχων ‘for loops’ που απαιτούνται για τον υπολογισμό των διαφόρων αθροισμάτων ή στοιχείων του πίνακα ή διανύσματος. Η τεχνική παρουσιάζεται ενδεικτικά στην (3.32), η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_{11}]_{mn} &= -\frac{j}{4e^{jk_{II}a_{out}} - |\Im(k_{II}b)|} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}b) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} = \\ &= -\frac{j}{4e^{jk_{II}a_{out}} - |\Im(k_{II}b)|} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}b) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}} \right)^{m-n} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Η εκτέλεση των πράξεων στο MATLAB[®] για τον υπολογισμό της (3.35) γίνεται υπό τον εξής ψευδοκώδικα

Δημιουργία των διανυσμάτων για τα $m, n = 1, \dots, N, l = -L, \dots, L$.

Δημιουργία του πίνακα $m - n$.

Υπολογισμός του όρου $\left(e^{jl\frac{2\pi}{N}} \right)^{m-n}$ μαζικά για όλα τα m, n, l .

Υπολογισμός των όρων $\tilde{J}_l(k_{II}b)$ και $\tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out})$ μαζικά για όλα τα l .

Άθροιση των όρων $\tilde{J}_l(k_{II}b) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}} \right)^{m-n}$ μαζικά για όλα τα l .

Τελικός υπολογισμός της (3.35) μαζικά για όλα τα m, n .

Ψευδοκώδικας 3-1: Αλγόριθμος για μαζικές πράξεις στο MATLAB[®].

Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται σε όλους τους υποπίνακες της (3.13) με αποτέλεσμα τη σημαντική μείωση του χρόνου εκτέλεσης.

- Εφαρμογή απαλοιφής Gauss

Ο υπολογισμός των άγνωστων διανυσμάτων $\{C_1\}, \{C_2\}$ στην (3.13) δεν απαιτεί απαραίτητα την εύρεση του αντιστρόφου του πίνακα ΜΒΠ. Για αυτό το λόγο, σε αντίθεση με την αντιστροφή, προτιμάται η απαλοιφή Gauss που οδηγεί σε αποφυγή αριθμητικών

υπερχειλίσεων καθώς και σε μειωμένο υπολογιστικό κόστος. Συνεπώς τα άγνωστα διανύσματα επιλύονται ως

$$\begin{bmatrix} \{C_1\} \\ -\{C_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] \\ [Q_{11}] & [Q_{12}] \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} \{A^{inc}\} \\ \{B^{inc}\} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

όπου το σύμβολο ‘\’ υποδηλώνει την απαλοιφή Gauss.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, η τελική έκφραση της μοντελοποίησης με τη ΜΒΠ που υλοποιείται στο MATLAB[®] συνοψίζεται στο Παράρτημα Α.

3.3 Μοντελοποίηση με τη ΜΠΣ

Το πρόβλημα μοντελοποιείται στο λογισμικό COMSOL Multiphysics[®] και επιλύεται με τη ΜΠΣ. Καθώς πρόκειται για ένα διδιάστατο πρόβλημα σκέδασης, χρησιμοποιείται το πακέτο ‘Wave Optics’ και η μοντελοποίηση ‘Electromagnetic Waves, Frequency Domain’ στο διδιάστατο επίπεδο xy .

Αρχικά δίνεται η προς επίλυση διαφορική εξίσωση, η οποία γράφεται στο πεδίο της συχνότητας και έχει ως άγνωστο το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}

$$\nabla \times \mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \left(\epsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

Καθώς στο υπό μελέτη πρόβλημα το προσπίπτων πεδίο είναι γνωστό, αυτό μπορεί να εισαχθεί ως δεδομένο στη ΜΠΣ με σκοπό την απλοποίηση του προβλήματος και την αύξηση της σχετικής ακρίβειας υπολογισμού. Συνεπώς το άγνωστο ηλεκτρικό πεδίο γράφεται ως

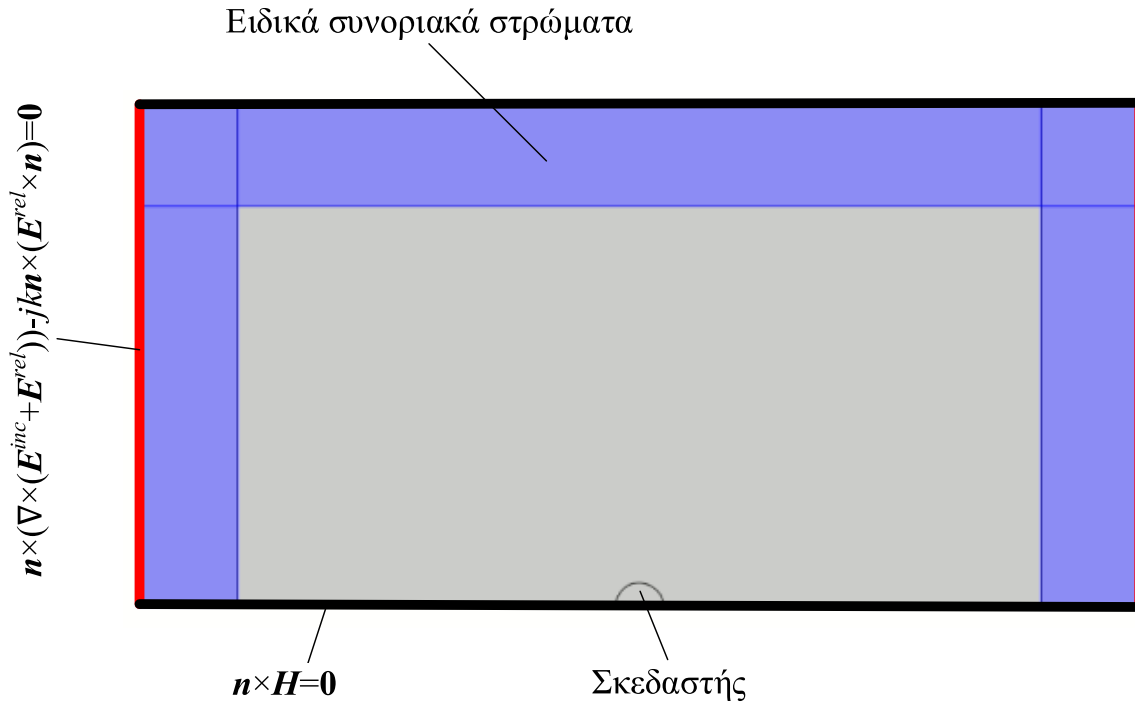
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{rel} \quad (3.38)$$

όπου \mathbf{E}^{inc} το γνωστό προσπίπτων πεδίο της (3.10) και \mathbf{E}^{rel} το άγνωστο σχετικό ηλεκτρικό πεδίο. Λόγω της θεώρησης TM^z , το πεδίο \mathbf{E}^{rel} έχει συνιστώσα μόνο ως προς τον άξονα $\hat{\mathbf{z}}$, με αποτέλεσμα την περαιτέρω απλοποίηση του προβλήματος επιλύοντας το άγνωστο πεδίο μόνο ως προς αυτή τη συνιστώσα

$$\mathbf{E}^{rel} = E^{rel}(x, y) \hat{\mathbf{z}} \quad (3.39)$$

Τέλος το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω εκμεταλλεύοντας τη συμμετρία του σκεδαστή ως προς τη διεύθυνση του προσπίπτοντος πεδίου. Έτσι το πρόβλημα επιλύεται

μόνο κατά τη μισή περίμετρο σύμφωνα με το Σχήμα 3-3, μειώνοντας το χρόνο εκτέλεσης στο μισό.



Σχήμα 3-3: Γεωμετρία και οριακές συνθήκες στη ΜΠΣ.

Η διάδοση του προσπίπτοντος κύματος περιγράφεται από τη συνοριακή συνθήκη

$$\hat{n} \times \left(\nabla \times (\mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{rel}) \right) - jk\hat{n} \times (\mathbf{E}^{rel} \times \hat{n}) = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

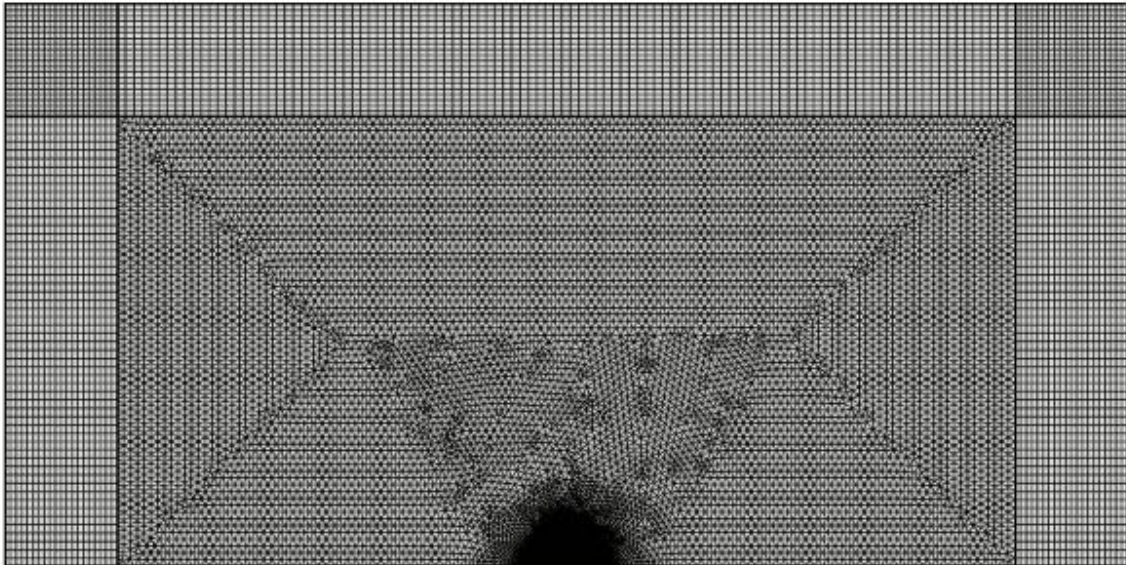
όπου \hat{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στις πλευρές που εφαρμόζεται η συνθήκη. Στην αντίστοιχη πλευρά που ορίζεται από τη διεύθυνση του προσπίπτοντος πεδίου και τη συμμετρία του σκεδαστή τίθεται η συνοριακή συνθήκη καθετότητας του αντίστοιχου μαγνητικού πεδίου

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

Καθώς ο περιβάλλον χώρος του προβλήματος, δηλαδή η περιοχή I , είναι μη φραγμένη, τοποθετούνται ειδικά στρώματα που μαθηματικά εκτείνονται στο άπειρο και εξαλείφουν ψευδές ανακλάσεις λόγω των εξερχόμενων κυμάτων.

Τέλος, η πλεγματοποίηση του προβλήματος στο Σχήμα 3-4 πραγματοποιείται λαμβάνοντας υπόψη το μήκος κύματος λ και τυχόν απώλειες στο εκάστοτε μέσο διάδοσης. Το μέγιστο

δυνατό στοιχείο πλέγματος περιορίζεται σε ένα κλάσμα του λ , ώστε να υπάρχει ικανοποιητική ακρίβεια στη διακριτοποίηση του μέσου.



Σχήμα 3-4: Πλέγμα στη ΜΠΣ.

3.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση του μονοστρωματικού σκεδαστή. Συγκρίνεται η ακρίβεια της ΜΒΠ με την αντίστοιχη της ΜΠΣ, οι χρόνοι εκτέλεσης των δύο μεθόδων, καθώς και μια ανάλυση ευαισθησίας στις παραμέτρους της ΜΒΠ. Στα αποτελέσματα παρακάτω, εκτός αν διατυπωθεί διαφορετικά, θεωρείται σκεδαστής ακτίνας $b = 0.2\lambda$, σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon_r = 5$, και ειδικής αγωγιμότητας $\sigma = 1 S/m$. Το προσπίπτον πεδίο έχει γωνία πρόσπτωσης $\varphi_{inc} = 0^\circ$ και πλάτος ηλεκτρικού πεδίου $E_0 = 1 V/m$. Η γωνία παρατήρησης φ_{obs} εκτείνεται στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$ λόγω της συμμετρίας του σκεδαστή. Οι παράμετροι της ΜΒΠ έχουν τεθεί σε $N = 20$, $a_{in} = 0.5b$, και $a_{out} = 2b$.

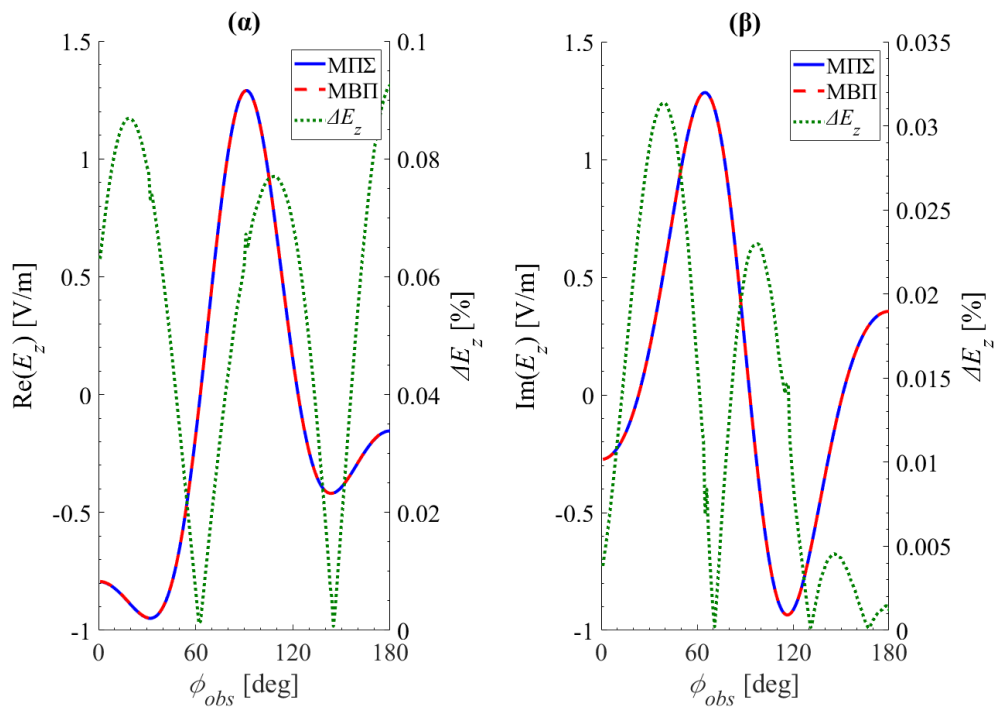
3.3.1 Σύγκριση ΜΒΠ και ΜΠΣ

Στο Σχήμα 3-5 παρουσιάζεται η συνιστώσα z του ηλεκτρικού πεδίου και στο Σχήμα 3-6 οι συνιστώσες ρ , φ του μαγνητικού πεδίου σε μια ακτίνα $\rho_{obs} = 3b$ εξωτερικά του σκεδαστή, όπως υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους. Επιπρόσθετα, στον δεξιό y άξονα απεικονίζεται το σχετικό σφάλμα θεωρώντας τη ΜΠΣ ως μέθοδο αναφοράς

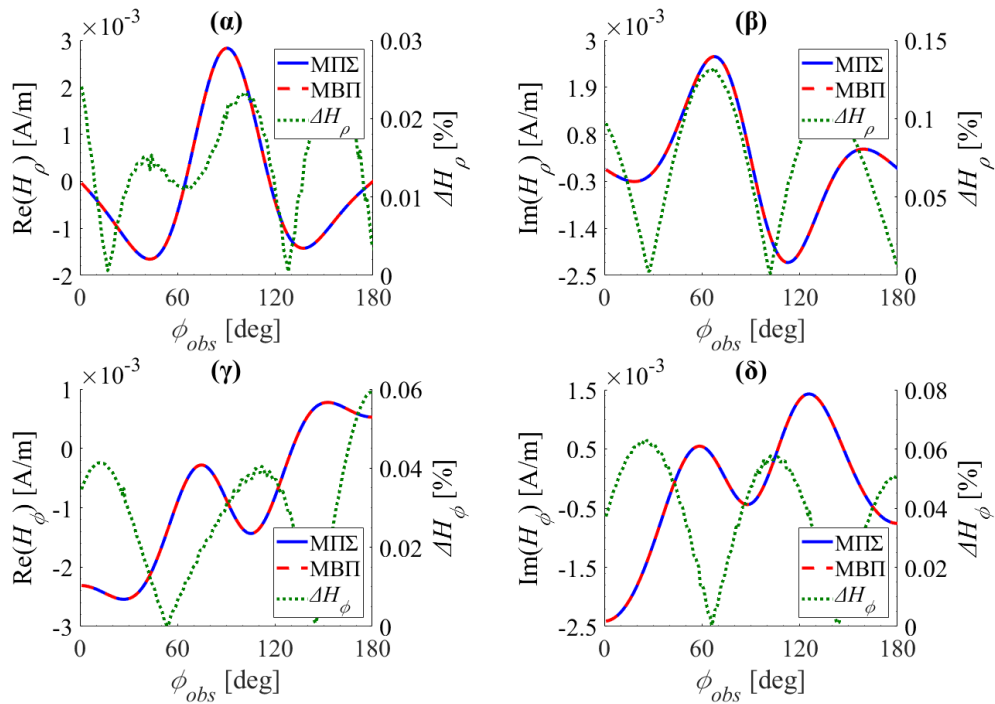
$$\Delta A = \frac{|A_{MB\Pi} - A_{M\Pi\Sigma}|}{|A_{M\Pi\Sigma}|_{max}} 100\% \quad (3.42)$$

όπου A το πραγματικό ή φανταστικό μέρος των συνιστωσών E_z , H_ρ , H_ϕ . Σε κάθε περίπτωση, η μέγιστη απόκλιση παρατηρείται στο μαγνητικό πεδίο και είναι μικρότερη του 0.15%, αναδεικνύοντας την ακρίβεια της MBΠ.

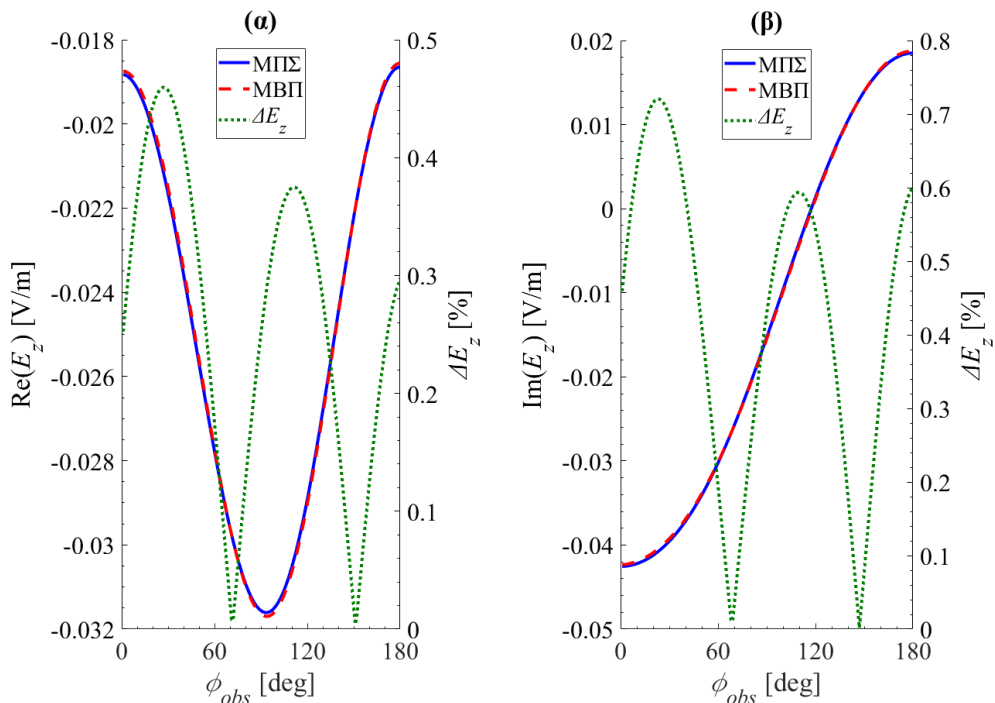
Αντίστοιχα, στο Σχήμα 3-7 και στο Σχήμα 3-8 παρουσιάζονται τα ανάλογα πεδία σε μια ακτίνα $\rho_{obs} = 0.2b$ εσωτερικά του σκεδαστή. Το μέγιστο σφάλμα παρατηρείται πάλι στο μαγνητικό πεδίο και είναι μικρότερο του 4.5%, με τις δύο μεθόδους να βρίσκονται πάλι σε καλή συμφωνία.



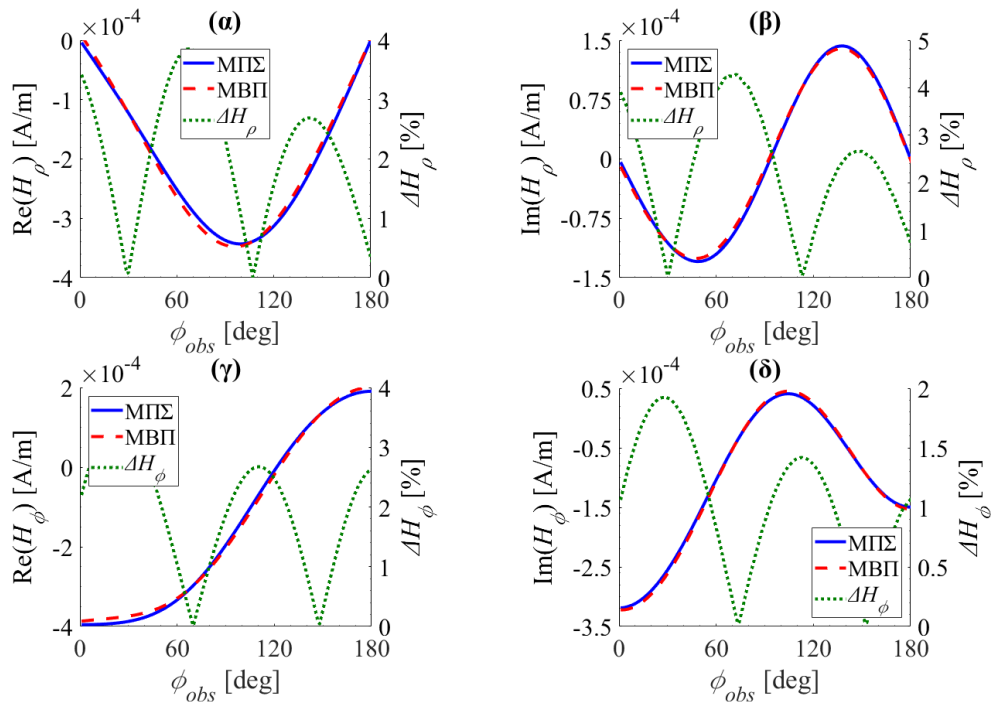
Σχήμα 3-5: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου E_z σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 3b$.



Σχήμα 3-6: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ρ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ϕ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 3b$.



Σχήμα 3-7: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου E_z σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 0.2b$.



Σχήμα 3-8: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ρ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ϕ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 0.2b$.

3.3.2 Αξιολόγηση υπολογιστικού χρόνου

Ο Πίνακας 3-1 παρουσιάζει ενδεικτικά τον χρόνο εκτέλεσης των ΜΒΠ και ΜΠΣ στο παραπάνω πρόβλημα. Τα δύο μοντέλα έτρεξαν σε ένα προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Intel Core i7-8700 @ 3.20 GHz και μνήμη RAM 64 GB. Από τα αποτελέσματα είναι φανερό η ταχύτητα εκτέλεσης της ΜΒΠ έναντι της ΜΠΣ, η οποία συνδυάζεται με την απλότητα υλοποίησης και τη σχεδόν μηδενική ανάγκη για προετοιμασία των δεδομένων.

Πίνακας 3-1: Ενδεικτικός χρόνος εκτέλεσης των δύο μεθόδων για την περίπτωση μονοστρωματικού σκεδαστή.

	ΜΒΠ	ΜΠΣ
Χρόνος εκτέλεσης	0.51 sec	1 min 15 sec

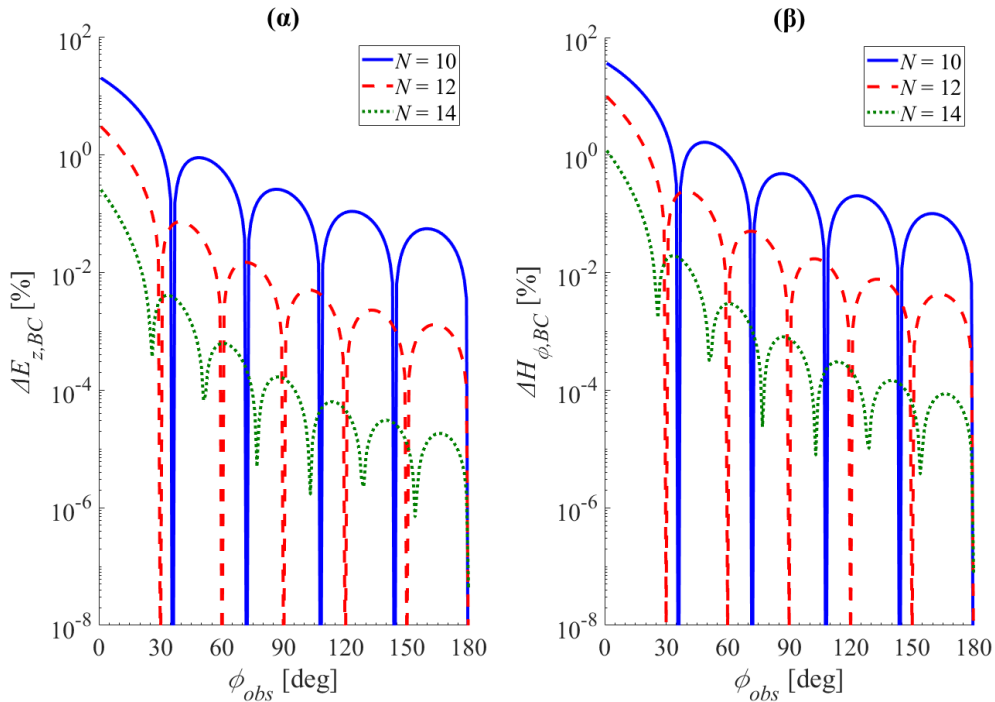
3.3.3 Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ

Στη συνέχεια πραγματοποιείται μια συστηματική ανάλυση της ευαισθησίας ως προς τις παραμέτρους της ΜΒΠ με σκοπό να εξεταστεί η ακρίβεια και η αριθμητική ευστάθεια της μεθόδου [29], [30]. Για το λόγο αυτό υπολογίζεται το σχετικό συνοριακό σφάλμα ως

$$\Delta B_{BC} = \frac{|(B^I - B^{II})|}{|B^{inc}|_{max}} 100\% \Big|_{\partial D} \quad (3.43)$$

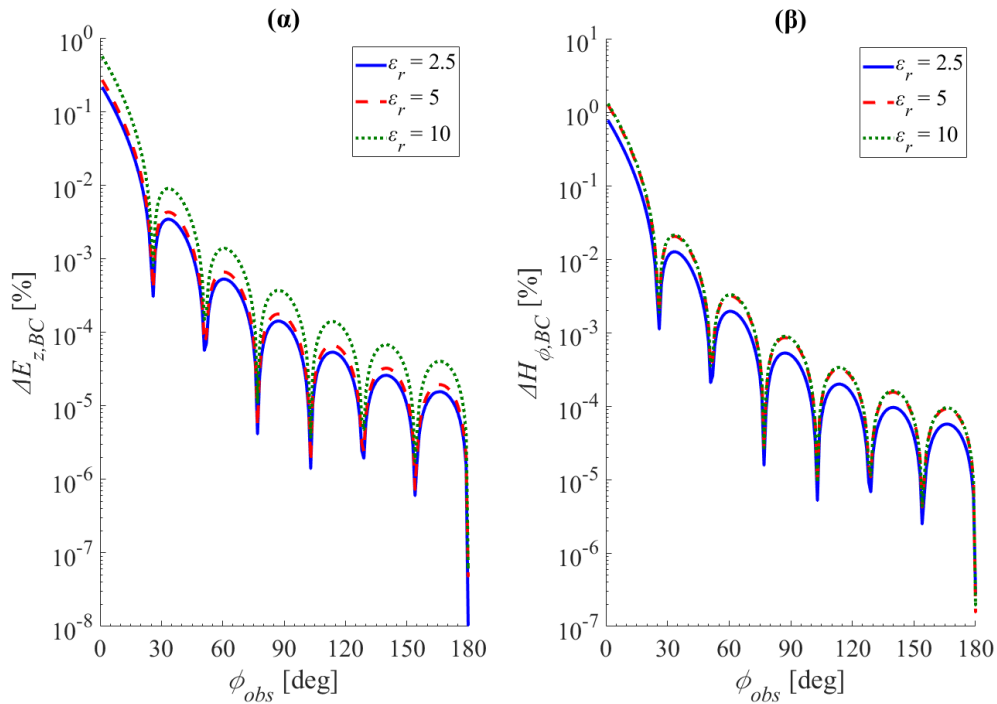
όπου B η συνιστώσα E_z ή H_φ .

Στο Σχήμα 3-9 παρουσιάζεται το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει του πλήθους N των βοηθητικών πηγών για τα δυο πεδία. Παρατηρείται πως το σφάλμα μεταβάλλεται αισθητά συναρτήσει της ϕ_{obs} , εμφανίζοντας τοπικά ελάχιστα στα σημεία επιβολής M πάνω στο σύνορο ∂D . Επίσης διαπιστώνεται πως το σφάλμα παρουσιάζει μέγιστο για $\phi_{obs} = 0^\circ$, το οποίο δικαιολογείται από τη γωνία πρόσπτωσης του πεδίου $\phi_{inc} = 0^\circ$. Είναι εμφανές αλλά και διαισθητικά λογικό ότι με αύξηση του αριθμού των πηγών, το συνοριακό σφάλμα μειώνεται.

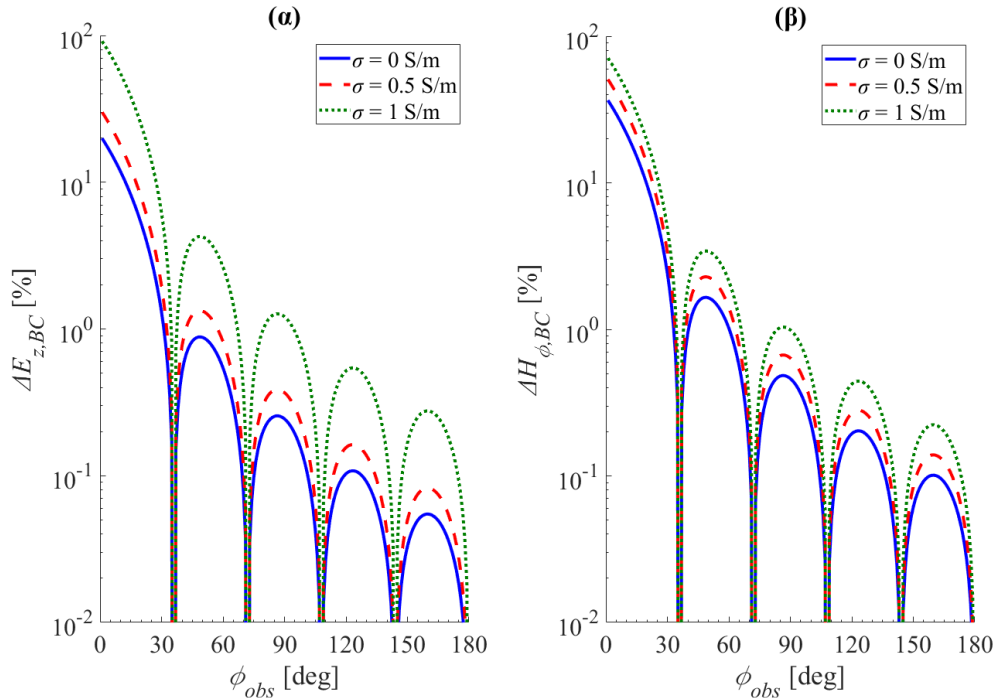


Σχήμα 3-9: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει του πλήθους N των βοηθητικών πηγών για το (α) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β) μαγνητικό πεδίο H_φ .

Παρακάτω μελετάται η επίδραση του ηλεκτρικού μεγέθους του σκεδαστή στο συνοριακό σφάλμα. Στο Σχήμα 3-10 παρουσιάζεται το σφάλμα για διάφορες τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς του σκεδαστή, ενώ στο Σχήμα 3-11 το αντίστοιχο σφάλμα για μεταβολή της ειδικής αγωγιμότητάς του. Είναι φανερό πως το σφάλμα εν γένει αυξάνεται με αύξηση των ϵ_r και σ . Αυτό καταδεικνύει ότι σε μια τέτοια περίπτωση είναι απαραίτητη η αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών για την επίτευξη ικανοποιητικής ακρίβειας.



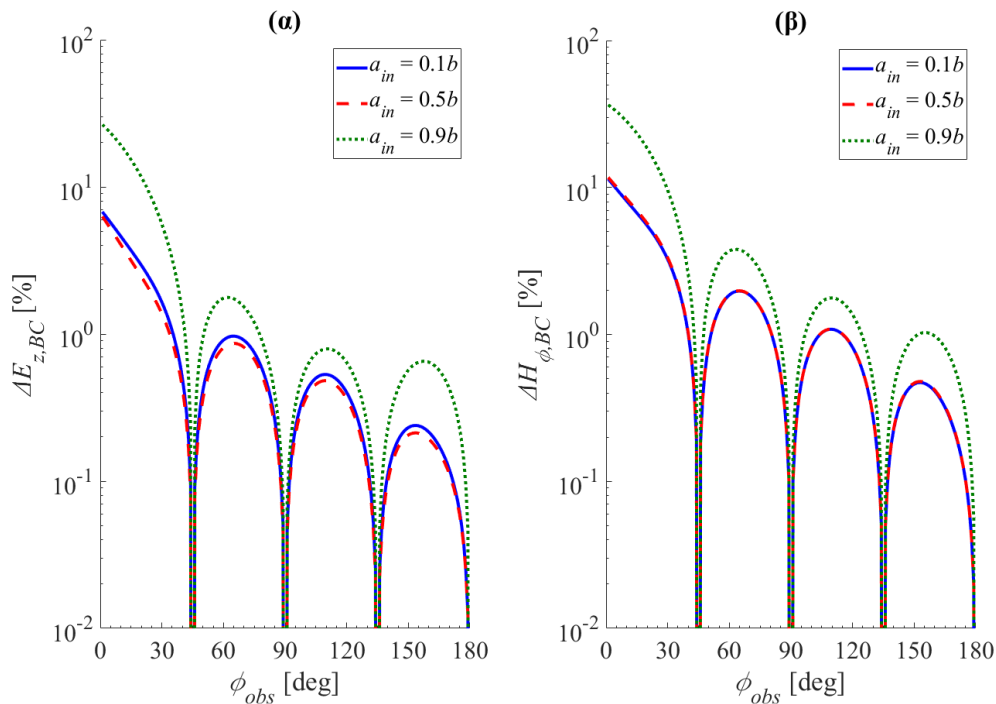
Σχήμα 3-10: Το συνοριακό σφάλμα συναρτῆσει της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r για το (α) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β) μαγνητικό πεδίο H_φ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 14$.



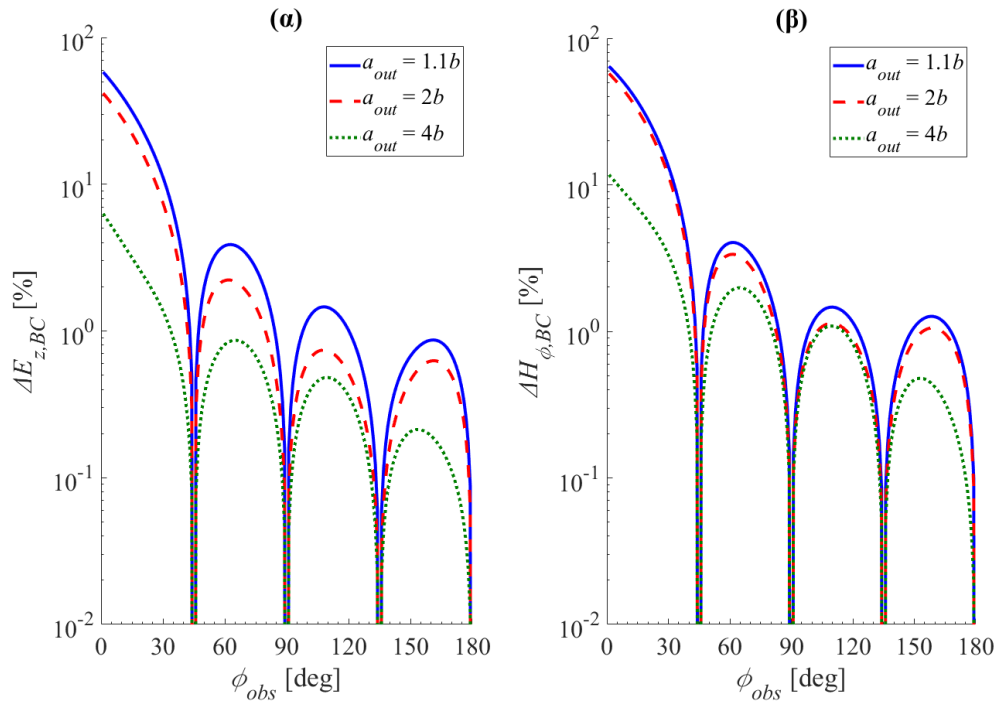
Σχήμα 3-11: Το συνοριακό σφάλμα συναρτῆσει της ειδικῆς αγωγιμότητάς σ για το (α) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β) μαγνητικό πεδίο H_φ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.

Βασικές παράμετροι για την ποιότητα της αριθμητικής λύσης είναι οι ακτίνες των βοηθητικών καμπυλών a_{in} για την εσωτερική και a_{out} για την εξωτερική, αντίστοιχα [31]-[33]. Στο Σχήμα 3-12 απεικονίζεται η επίδραση της μεταβολής της a_{in} στο συνοριακό σφάλμα. Παρατηρείται πως το σφάλμα μεγαλώνει αισθητά όταν αυτή πλησιάζει επαρκώς στο πραγματικό σύνορο ακτίνας b . Αντίστοιχη συμπεριφορά ακολουθεί και η μεταβολή της a_{out} στο Σχήμα 3-13.

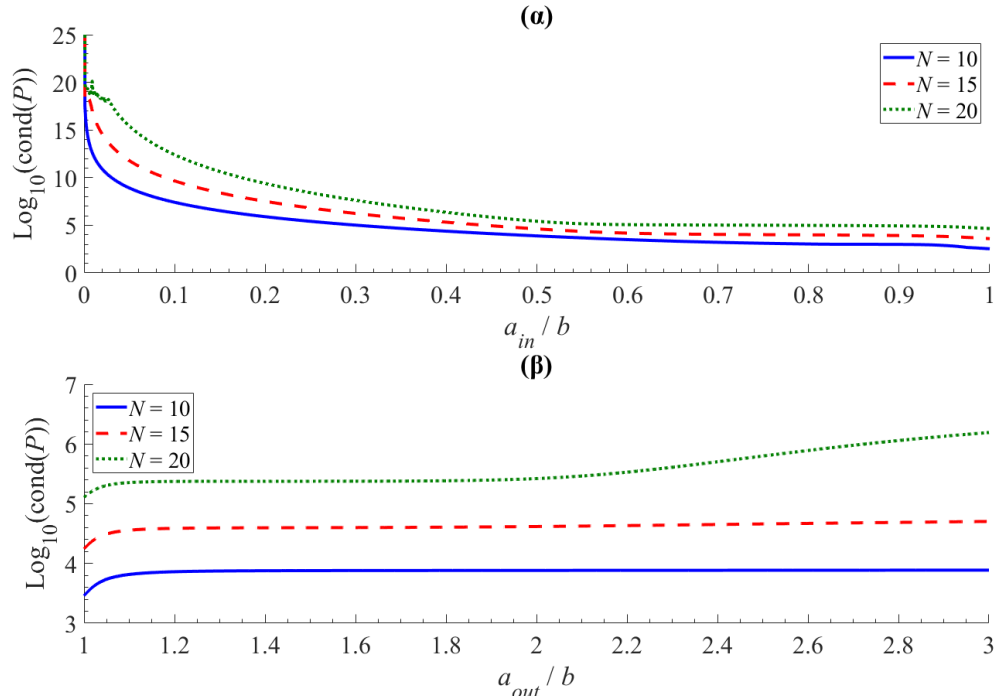
Ένα άλλο μέγεθος που χαρακτηρίζει την ακρίβεια και ευστάθεια είναι ο δείκτης κατάστασης P του πίνακα ΜΒΠ [34]. Στο Σχήμα 3-14α παρουσιάζεται ο δείκτης κατάστασης ως συνάρτηση του πηλίκου a_{in}/b για μεταβαλλόμενο πλήθος βοηθητικών πηγών. Παρατηρείται πως ο δείκτης αυξάνεται απότομα όταν η ακτίνα της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης πλησιάζει το 0 [35], ενώ τείνει να σταθεροποιηθεί σχετικά γρήγορα σε χαμηλές τιμές όταν το a_{in} τείνει στο b . Αντίθετα, η επιλογή του πηλίκου a_{out}/b στο Σχήμα 3-14β δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά το δείκτη κατάστασης, παρά μόνο το πλήθος των βοηθητικών πηγών.



Σχήμα 3-12: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει της ακτίνας a_{in} της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης για το (α) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β) μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 8$.



Σχήμα 3-13: Το συνοριακό σφάλμα συναρτίζεται της ακτίνας a_{out} της εξωτερικής βοηθητικής καμπύλης για το (α) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β) μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 8$.



Σχήμα 3-14: Ο δείκτης κατάστασης του πίνακα συστήματος συναρτίζεται των ακτίνων (α) a_{in} και (β) a_{out} των δυο βοηθητικών καμπυλών για μεταβλητό πλήθος N των βοηθητικών πηγών.

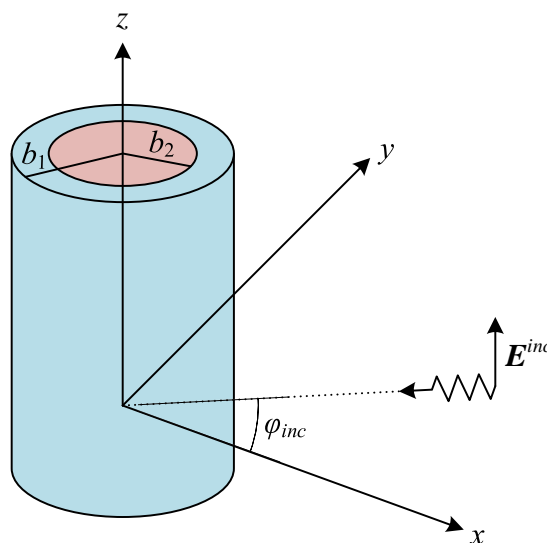
4. Πρόβλημα σκέδασης σε απειρομήκη διστρωματικό κύλινδρο

4.1 Περιγραφή του προβλήματος

Το πρόβλημα αποτελεί επέκταση του αντίστοιχου προβλήματος σκέδασης σε απειρομήκη μονοστρωματικό κύλινδρο, το οποίο περιγράφηκε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 3. Για λόγους πληρότητας και ανεξαρτησίας του συγκεκριμένου κεφαλαίου περιγράφεται εξ' αρχής το πρόβλημα σκέδασης σε απειρομήκη διστρωματικό κύλινδρο.

Αρχικά, στο Σχήμα 4-1, θεωρείται ένας απειρομήκης διστρωματικός κύλινδρος κυκλικής διατομής με ακτίνες b_1 , b_2 για τα δυο στρώματα, αντίστοιχα, του οποίου ο άξονας είναι παράλληλος στον άξονα \hat{z} του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y, z) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων O . Ο κύλινδρος βρίσκεται στον κενό χώρο με ιδιότητες ϵ_0 , μ_0 και αποτελείται από δυο εν γένει μη τέλεια διηλεκτρικά υλικά με ιδιότητες ϵ_{II} , μ_0 , σ_{II} και ϵ_{III} , μ_0 , σ_{III} , αντίστοιχα.

Επιπρόσθετα, θεωρείται ένα επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με εγκάρσια μαγνητική πόλωση κατά τον άξονα \hat{z} (TM^z) και γωνιακής συχνότητας ω , το οποίο διαδίδεται κάθετα στον άξονα \hat{z} και υπό γωνία πρόσπτωσης φ_{inc} ως προς τον άξονα \hat{x} . Συνεπώς θα υπάρχει συνιστώσα για το ηλεκτρικό πεδίο μόνο κατά τον \hat{z} , ενώ για το μαγνητικό πεδίο μόνο κατά τους \hat{x} και \hat{y} , ή εναλλακτικά, κατά τους $\hat{\rho}$ και $\hat{\phi}$ στο αντίστοιχο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων (ρ, φ, z) .



Σχήμα 4-1: Ο υπό μελέτη διστρωματικός σκεδαστής και το προσπίπτον πεδίο στον χώρο.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στον κενό χώρο και προσπίπτει στον κύλινδρο με αποτέλεσμα την σκέδασή του καθώς και τη μετάδοση στο εσωτερικό του σκεδαστή, συνεπώς την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικού πεδίου τόσο εκτός όσο και εντός του απειρομήκη κυλίνδρου. Θεωρώντας ως περιοχή I τον χώρο στο εξωτερικό του κυλίνδρου ($\rho > b_1$), ως περιοχή II τον χώρο στο πρώτο στρώμα του σκεδαστή ($b_2 < \rho < b_1$), και ως περιοχή III τον χώρο στο δεύτερο στρώμα ($\rho < b_2$), η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συμβολίζεται ως $\mathbf{E}^I = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca}$, \mathbf{E}^{II} , και \mathbf{E}^{III} ενώ η αντίστοιχη ένταση του μαγνητικού πεδίου ως $\mathbf{H}^I = \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^{sca}$, \mathbf{H}^{II} και \mathbf{H}^{III} .

Το πρόβλημα σκέδασης αποτελείται από

- Τη διάδοση του πεδίου στη μη φραγμένη περιοχή I με κυματικό αριθμό $k_I = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ και άγνωστα πεδία τα \mathbf{E}^{sca} , \mathbf{H}^{sca} .
- Τη διάδοση του πεδίου στη φραγμένη περιοχή II με κυματικό αριθμό $k_{II} = \omega\sqrt{\epsilon_{II}\mu_0} = \omega\sqrt{\epsilon_0\left(\epsilon_{r,II} - \frac{j\sigma_{II}}{\omega\epsilon_0}\right)\mu_0}$ και άγνωστα πεδία τα \mathbf{E}^{II} , \mathbf{H}^{II} .
- Τη διάδοση του πεδίου στη φραγμένη περιοχή III με κυματικό αριθμό $k_{III} = \omega\sqrt{\epsilon_{III}\mu_0} = \omega\sqrt{\epsilon_0\left(\epsilon_{r,III} - \frac{j\sigma_{III}}{\omega\epsilon_0}\right)\mu_0}$ και άγνωστα πεδία τα \mathbf{E}^{III} , \mathbf{H}^{III} .
- Τις συνοριακές συνθήκες μετάδοσης πάνω στις επιφάνειες ∂D_1 και ∂D_2 .

Δηλαδή, αναζητείται λύση στο παρακάτω πρόβλημα

$$\mathbf{E}^I = \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca}, \mathbf{r} \in D_I \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}^I = \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^{sca}, \mathbf{r} \in D_I \quad (4.2)$$

$$\Delta \mathbf{E}^{sca} + k_I^2 \mathbf{E}^{sca} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_I \quad (4.3)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{sca} + k_I^2 \mathbf{H}^{sca} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_I \quad (4.4)$$

$$\Delta \mathbf{E}^{II} + k_{II}^2 \mathbf{E}^{II} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_{II} \quad (4.5)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{II} + k_{II}^2 \mathbf{H}^{II} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_{II} \quad (4.6)$$

$$\Delta \mathbf{E}^{III} + k_{III}^2 \mathbf{E}^{III} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_{III} \quad (4.7)$$

$$\Delta \mathbf{H}^{III} + k_{III}^2 \mathbf{H}^{III} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_{III} \quad (4.8)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^I = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{II}, \mathbf{r} \in \partial D_1 \quad (4.9)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^I = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{II}, \mathbf{r} \in \partial D_1 \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{II} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{III}, \mathbf{r} \in \partial D_2 \quad (4.11)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{II} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{III}, \mathbf{r} \in \partial D_2 \quad (4.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \mathbf{E}^{sca}}{\partial r} + jk_I \mathbf{E}^{sca} \right) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in |\mathbf{r}|, \text{ ομοιόμορφα για κάθε } \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (4.13)$$

όπου $\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc}$ γνωστά πεδία που ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz στο D_I .

4.2 Μοντελοποίηση με τη ΜΒΠ

4.2.1 Κατάσρωση του συστήματος εξισώσεων

Όπως και στην περίπτωση του μονοστρωματικού σκεδαστή, το πρόβλημα μπορεί να μελετηθεί σε οποιοδήποτε οριζόντιο επίπεδο xy , καθώς τα προσπίπτοντα και σκεδασμένα πεδία είναι πάντα ομογενή προς τις ίδιες διευθύνσεις σε κάθε σημείο z . Οι συνιστώσες των $\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc}$ σε ένα τυχαίο σημείο (ρ, φ) δίνονται ως

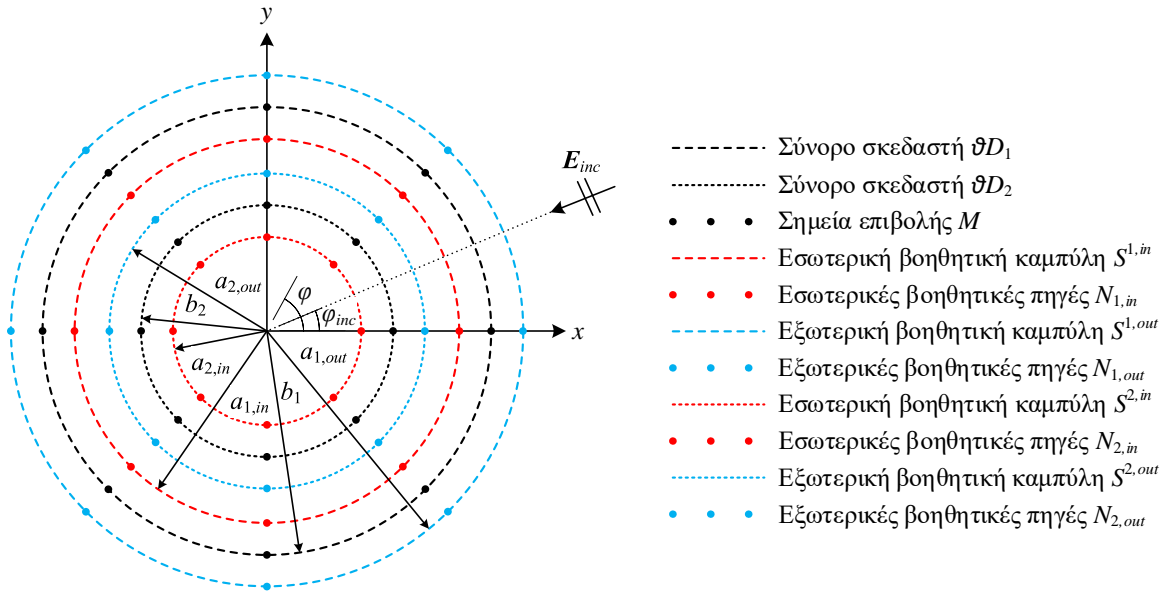
$$E_z^{inc} = E_0 e^{jk_I \rho \cos(\varphi_{inc} - \varphi)} \quad (4.14)$$

$$H_\rho^{inc} = -\frac{k_I}{\omega \mu_0} E_0 \sin(\varphi_{inc} - \varphi) e^{jk_I \rho \cos(\varphi_{inc} - \varphi)} \quad (4.15)$$

$$H_\varphi^{inc} = \frac{k_I}{\omega \mu_0} E_0 \cos(\varphi_{inc} - \varphi) e^{jk_I \rho \cos(\varphi_{inc} - \varphi)} \quad (4.16)$$

όπου E_0 το πλάτος του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου.

Για την κατάσρωση της μοντελοποίησης με τη ΜΒΠ [36], στο Σχήμα 4-2, θεωρούνται τέσσερις βοηθητικές ομαλές καμπύλες $S^{1,in}, S^{1,out}, S^{2,in}, S^{2,out}$ οι οποίες είναι σύμμορφες ως προς τα σύνορα του σκεδαστή $\partial D_1, \partial D_2$. Οι καμπύλες $S^{1,in}$ και $S^{2,out}$ βρίσκονται εντός του πρώτου στρώματος του σκεδαστή και έχουν κυκλική διατομή ακτίνας $b_2 < a_{1,in}, a_{2,out} < b_1$. Η καμπύλη $S^{2,in}$ βρίσκεται εντός του δεύτερου στρώματος του σκεδαστή και έχει κυκλική διατομή ακτίνας $a_{2,in} < b_2$. Τέλος, η καμπύλη $S^{1,out}$ βρίσκεται εκτός του σκεδαστή και έχει κυκλική διατομή ακτίνας $a_{1,out} > b_1$.



Σχήμα 4-2: Ο κυκλικός σκεδαστής και οι βοηθητικές καμπύλες της ΜΒΠ.

Στις βοηθητικές καμπύλες $S^{1,in}$, $S^{1,out}$, $S^{2,in}$, $S^{2,out}$ τοποθετείται ένας αριθμός $N_{1,in}$, $N_{1,out}$, $N_{2,in}$, $N_{2,out}$ βοηθητικών πηγών, αντίστοιχα, με τη μορφή ηλεκτρικών ρευμάτων, οι οποίες ακτινοβολούν στοιχειώδη ηλεκτρικά πεδία ανάλογα της συνάρτησης Green. Οι βοηθητικές πηγές της καμπύλης $S^{1,in}$ ακτινοβολούν εξωτερικά του σκεδαστή θεωρώντας τον χώρο ομοιόμορφο με ιδιότητες ϵ_0 , μ_0 . Οι βοηθητικές πηγές των καμπυλών $S^{1,out}$, $S^{2,in}$ ακτινοβολούν στο πρώτο στρώμα του σκεδαστή θεωρώντας τον χώρο ομοιόμορφο με ιδιότητες ϵ_{II} , μ_0 , σ_{II} . Οι βοηθητικές πηγές της καμπύλης $S^{2,out}$ ακτινοβολούν στο δεύτερο στρώμα του σκεδαστή θεωρώντας τον χώρο ομοιόμορφο με ιδιότητες ϵ_{III} , μ_0 , σ_{III} . Το σύστημα της ΜΒΠ προκύπτει εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες ισότητας στις συνιστώσες E_z και H_φ στα M σημεία επιβολής στα σύνορα του σκεδαστή ∂D_1 , ∂D_2 . Με επιλογή $M = N_{1,in} = N_{1,out} = N_{2,in} = N_{2,out}$, το τελικό σύστημα προκύπτει τετραγωνικό με μοναδική λύση και μπορεί να γραφεί υπό μορφή πινάκων ως

$$\begin{bmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] & [0] & [P_{14}] \\ [Q_{11}] & [Q_{12}] & [0] & [Q_{14}] \\ [P_{21}] & [0] & [P_{23}] & [P_{24}] \\ [Q_{21}] & [0] & [Q_{23}] & [Q_{24}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{C_1\} \\ -\{C_2\} \\ -\{C_3\} \\ \{C_4\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{A^{inc}\} \\ \{B^{inc}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Οι υποπίνακες $[P_{ij}]$, $[Q_{ij}]$ είναι διαστάσεων $N \times N$ με στοιχεία $m, n = 1, \dots, N$ που δίνονται ως:

$$[\mathbf{P}_{11}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}b_1)H_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out})e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.18)$$

$$[\mathbf{P}_{12}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_Ia_{1,in})H_l^{(2)}(k_Ib_1)e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.19)$$

$$[\mathbf{P}_{14}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}a_{2,in})H_l^{(2)}(k_{II}b_1)e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.20)$$

$$[\mathbf{P}_{21}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}b_2)H_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out})e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.21)$$

$$[\mathbf{P}_{23}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{III}b_2)H_l^{(2)}(k_{III}a_{2,out})e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.22)$$

$$[\mathbf{P}_{24}]_{mn} = -\frac{j}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}a_{2,in})H_l^{(2)}(k_{II}b_2)e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.23)$$

$$[\mathbf{Q}_{11}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} j_l(k_{II}b_1)H_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out})e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.24)$$

$$[\mathbf{Q}_{12}]_{mn} = -\frac{k_I}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_Ia_{1,in})\dot{H}_l^{(2)}(k_Ib_1)e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.25)$$

$$[\mathbf{Q}_{14}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II}a_{2,in})\dot{H}_l^{(2)}(k_{II}b_1)e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.26)$$

$$[\mathbf{Q}_{21}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} j_l(k_{II}b_2)H_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out})e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.27)$$

$$[\mathbf{Q}_{23}]_{mn} = -\frac{k_{III}}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} j_l(k_{III}b_2)H_l^{(2)}(k_{III}a_{2,out})e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.28)$$

$$[\mathbf{Q}_{24}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} j_l(k_{II}a_{2,in})H_l^{(2)}(k_{II}b_2)e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (4.29)$$

όπου $J_l(\cdot)$ η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους τάξης l , $H_l^{(2)}(\cdot)$ η συνάρτηση Hankel δεύτερου είδους τάξης l , και (\cdot) η παραγωγή της εκάστοτε συνάρτησης με βάση το συνολικό όρισμά της.

Τα διανύσματα $\{A^{inc}\}$, $\{B^{inc}\}$ είναι διαστάσεων $N \times 1$ με στοιχεία $n = 1, \dots, N$ που δίνονται ως

$$\{A^{inc}\}_n = E_0 e^{jk_I b \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n)} \quad (4.30)$$

$$\{B^{inc}\}_n = \frac{k_I}{\omega \mu_0} E_0 \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n) e^{jk_I b \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n)} \quad (4.31)$$

Τα διανύσματα $\{C_1\}$, $\{C_2\}$, $\{C_3\}$, $\{C_4\}$ είναι διαστάσεων $N \times 1$ και τα στοιχεία τους $n = 1, \dots, N$ περιέχουν τα άγνωστα βάρη των βοηθητικών πηγών στις καμπύλες $S^{1,out}$, $S^{1,in}$, $S^{2,out}$, $S^{2,in}$, αντίστοιχα.

Μετά τον προσδιορισμό τους, οι βοηθητικές πηγές με γωνία $\varphi_p = p \frac{2\pi}{N}$, $p = 1, \dots, N$, στην καμπύλη $S^{1,in}$ ακτινοβολούν τα εξής πεδία σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου ($\rho \geq b_1$, φ)

$$E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{1,in}) H_l^{(2)}(k_I \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_p)} \quad (4.32)$$

$$H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega \mu_0 \rho} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{1,in}) H_l^{(2)}(k_I \rho) l e^{jl(\varphi - \varphi_p)} \quad (4.33)$$

$$H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) = -\frac{k_I}{4\omega \mu_0} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_I a_{1,in}) \dot{H}_l^{(2)}(k_I \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_p)} \quad (4.34)$$

Με υπέρθεση των παραπάνω προκύπτουν τα ζητούμενα πεδία \mathbf{E}^{sca} , \mathbf{H}^{sca} στη μη φραγμένη περιοχή I

$$E_z^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (4.35)$$

$$H_{\rho}^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (4.36)$$

$$H_{\varphi}^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (4.37)$$

Αντίστοιχα, οι βοηθητικές πηγές με γωνία $\varphi_q = q \frac{2\pi}{N}$, $q = 1, \dots, N$, στις καμπύλες $S^{1,out}$ και $S^{2,in}$ ακτινοβολούν τα εξής πεδία σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου ($b_2 \leq \rho \leq b_1$, φ)

$$E_{zq}^{II}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II} a_{1,out}) H_l^{(2)}(k_{II} \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_q)} - \frac{j}{4} \{C_4\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II} a_{2,in}) H_l^{(2)}(k_{II} \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_q)} \quad (4.38)$$

$$H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega\mu_0\rho} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II} a_{1,out}) H_l^{(2)}(k_{II} \rho) l e^{jl(\varphi - \varphi_q)} + \frac{j}{4\omega\mu_0\rho} \{C_4\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II} a_{2,in}) H_l^{(2)}(k_{II} \rho) l e^{jl(\varphi - \varphi_q)} \quad (4.39)$$

$$H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) = -\frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II} a_{1,out}) H_l^{(2)}(k_{II} \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_q)} - \frac{k_{II}}{4\omega\mu_0} \{C_4\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{II} a_{2,in}) \dot{H}_l^{(2)}(k_{II} \rho) e^{jl(\varphi - \varphi_q)} \quad (4.40)$$

Με υπέρθεση των παραπάνω προκύπτουν τα ζητούμενα πεδία \mathbf{E}^{II} , \mathbf{H}^{II} στη φραγμένη περιοχή Π

$$E_z^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N E_{zq}^{II}(\rho, \varphi) \quad (4.41)$$

$$H_{\rho}^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (4.42)$$

$$H_{\varphi}^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (4.43)$$

Τέλος, οι βοηθητικές πηγές με γωνία $\varphi_t = t \frac{2\pi}{N}$, $t = 1, \dots, N$, στην καμπύλη $S^{2,out}$ ακτινοβολούν τα εξής πεδία σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου ($\rho \leq b_2$, φ)

$$E_{zt}^{III}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4}\{C_3\}_t \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{III}a_{2,out})H_l^{(2)}(k_{III}\rho)e^{jl(\varphi-\varphi_t)} \quad (4.44)$$

$$H_{\rho t}^{III}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega\mu_0\rho}\{C_3\}_t \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{III}a_{2,out})H_l^{(2)}(k_{III}\rho)le^{jl(\varphi-\varphi_t)} \quad (4.45)$$

$$H_{\varphi t}^{III}(\rho, \varphi) = -\frac{k_{III}}{4\omega\mu_0}\{C_3\}_t \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(k_{III}a_{2,out})H_l^{(2)}(k_{III}\rho)e^{jl(\varphi-\varphi_t)} \quad (4.46)$$

Με υπέρθεση των παραπάνω προκύπτουν τα ζητούμενα πεδία \mathbf{E}^{III} , \mathbf{H}^{III} στη φραγμένη περιοχή III

$$E_z^{III}(\rho, \varphi) = \sum_{t=1}^N E_{zt}^{III}(\rho, \varphi) \quad (4.47)$$

$$H_\rho^{III}(\rho, \varphi) = \sum_{t=1}^N H_{\rho t}^{III}(\rho, \varphi) \quad (4.48)$$

$$H_\varphi^{III}(\rho, \varphi) = \sum_{t=1}^N H_{\varphi t}^{III}(\rho, \varphi) \quad (4.49)$$

4.2.2 Υλοποίηση στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB®

Όπως και στην περίπτωση του μονοστρωματικού σκεδαστή, η ΜΒΠ υλοποιείται στο MATLAB® δίνοντας έμφαση στην αριθμητική ευστάθεια των επιμέρους υπολογισμών καθώς και στην αποδοτικότητα του αλγορίθμου. Αυτό επιτυγχάνεται με τις εξής τεχνικές

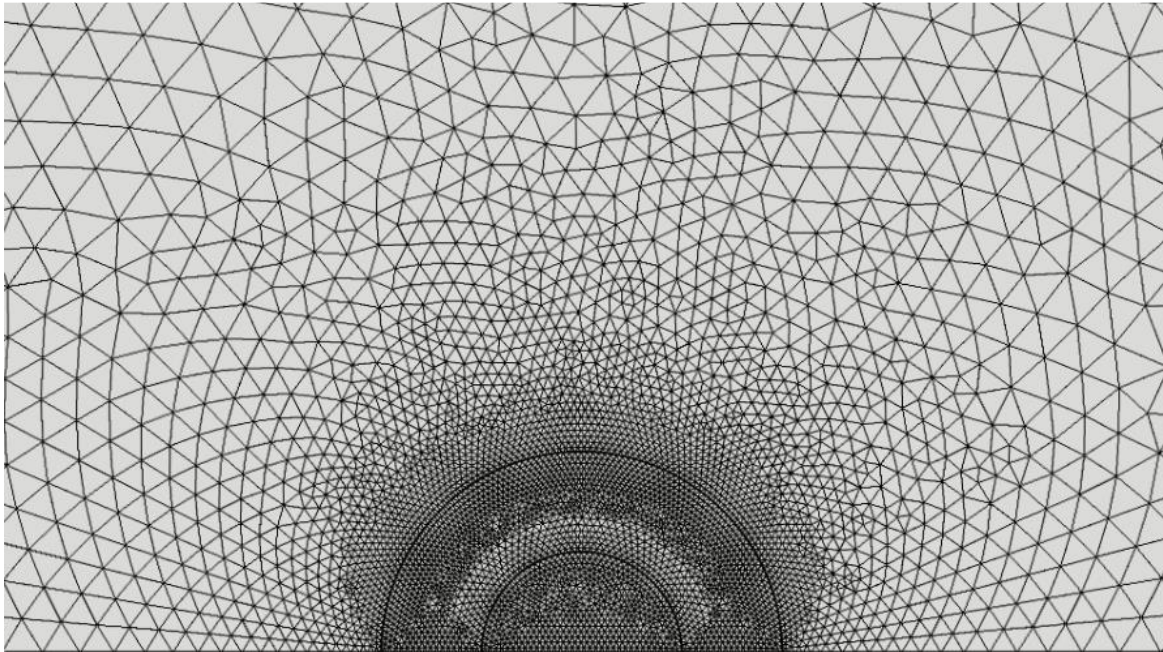
- Χρήση κανονικοποίησης στον υπολογισμό των συναρτήσεων Bessel και Hankel.
- Μαζικές πράξεις σε στοιχεία πινάκων και διανυσμάτων.
- Εφαρμογή απαλοιφής Gauss.

Λεπτομέρειες για την εφαρμογή των παραπάνω δίνονται στην αντίστοιχη ενότητα του Κεφαλαίου 3. Η τελική έκφραση της μοντελοποίησης με τη ΜΒΠ που υλοποιείται στο MATLAB® συνοψίζεται στο Παράρτημα Β.

4.3 Μοντελοποίηση με τη ΜΠΣ

Η μοντελοποίηση του διστρωματικού σκεδαστή με τη ΜΠΣ ακολουθεί τη διαδικασία που περιγράφεται στην αντίστοιχη ενότητα του Κεφαλαίου 3. Η μόνη διαφορά έγκειται στη

σχεδίαση του σκεδαστή, ο οποίος εδώ αποτελείται από δύο στρώματα. Αυτό φαίνεται στο Σχήμα 4-3, όπου παρουσιάζεται μια λεπτομέρεια της πλεγματοποίησης διακρίνοντας τα δυο στρώματα του σκεδαστή.



Σχήμα 4-3: Λεπτομέρεια πλέγματος στη ΜΠΣ.

4.3 Αριθμητικά αποτελέσματα

Παρακάτω παρουσιάζονται διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα για την περίπτωση του διστρωματικού σκεδαστή. Συγκρίνεται η ακρίβεια της ΜΒΠ με την αντίστοιχη της ΜΠΣ, οι χρόνοι εκτέλεσης των δύο μεθόδων, καθώς και μια ανάλυση ευαισθησίας στις παραμέτρους της ΜΒΠ. Στα αποτελέσματα παρακάτω, εκτός αν διατυπωθεί διαφορετικά, θεωρείται σκεδαστής ακτίνων $b_1 = 2b_2 = 0.2\lambda$, σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\epsilon_{r,II} = 5$, $\epsilon_{r,III} = 1$, και ειδικής αγωγιμότητας $\sigma_{II} = 1 S/m$, $\sigma_{III} = 0 S/m$. Το προσπίπτον πεδίο έχει γωνία πρόσπτωσης $\varphi_{inc} = 0^\circ$ και πλάτος ηλεκτρικού πεδίου $E_0 = 1 V/m$. Η γωνία παρατήρησης φ_{obs} εκτείνεται στο διάστημα $[0^\circ, 180^\circ]$ λόγω της συμμετρίας του σκεδαστή. Οι παράμετροι της ΜΒΠ έχουν τεθεί σε $N = 20$, $a_{1,in} = 0.5b_1$, $a_{1,out} = 2b_1$, $a_{2,in} = 0.5b_2$, και $a_{2,out} = 2b_2$.

4.3.1 Σύγκριση ΜΒΠ και ΜΠΣ

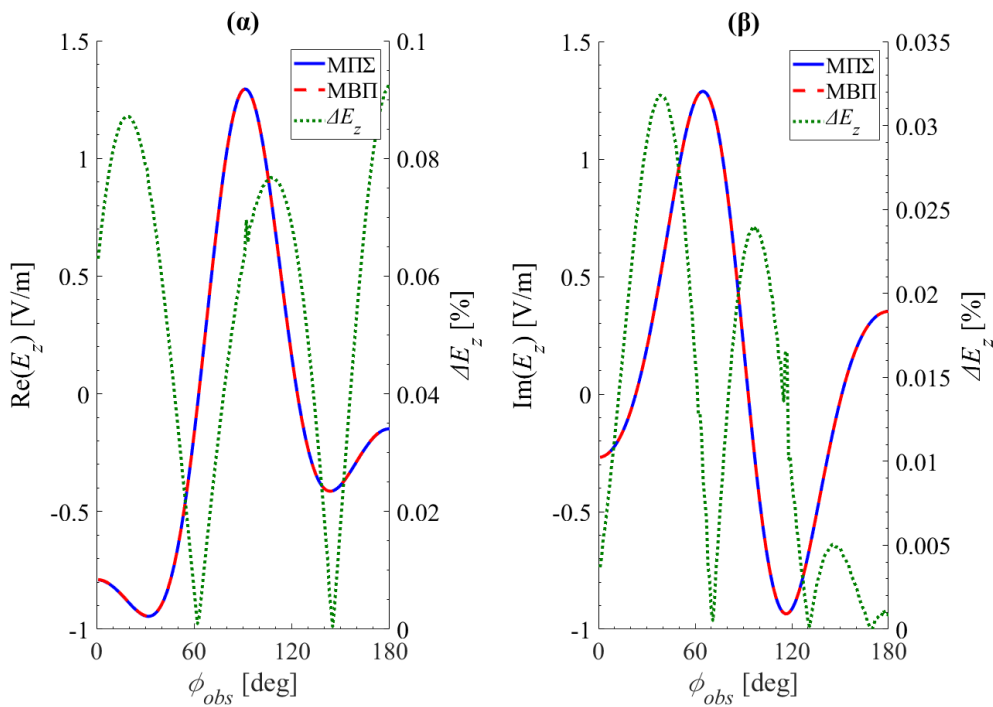
Στο Σχήμα 4-4 παρουσιάζεται η συνιστώσα z του ηλεκτρικού πεδίου και στο Σχήμα 4-5 οι συνιστώσες ρ, φ μαγνητικού πεδίου σε μια ακτίνα $\rho_{obs} = 3b$ εξωτερικά του σκεδαστή,

όπως υπολογίστηκαν από τις δύο μεθόδους. Επιπρόσθετα, στον δεξιό y άξονα απεικονίζεται το σχετικό σφάλμα θεωρώντας τη ΜΠΣ ως μέθοδο αναφοράς

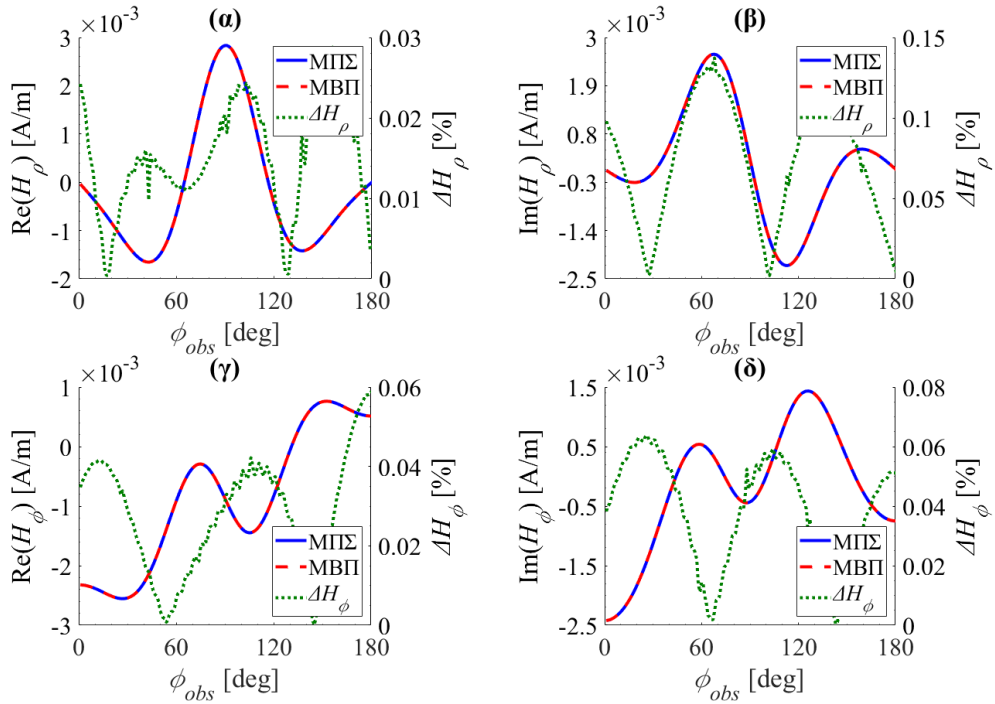
$$\Delta A = \frac{|A_{MBΠ} - A_{MΠΣ}|}{|A_{MΠΣ}|_{max}} 100\% \quad (4.50)$$

όπου A το πραγματικό ή φανταστικό μέρος των συνιστωσών E_z , H_ρ , H_ϕ . Σε κάθε περίπτωση, η απόκλιση είναι μικρότερη του 0.15%, αναδεικνύοντας την ακρίβεια της ΜΒΠ.

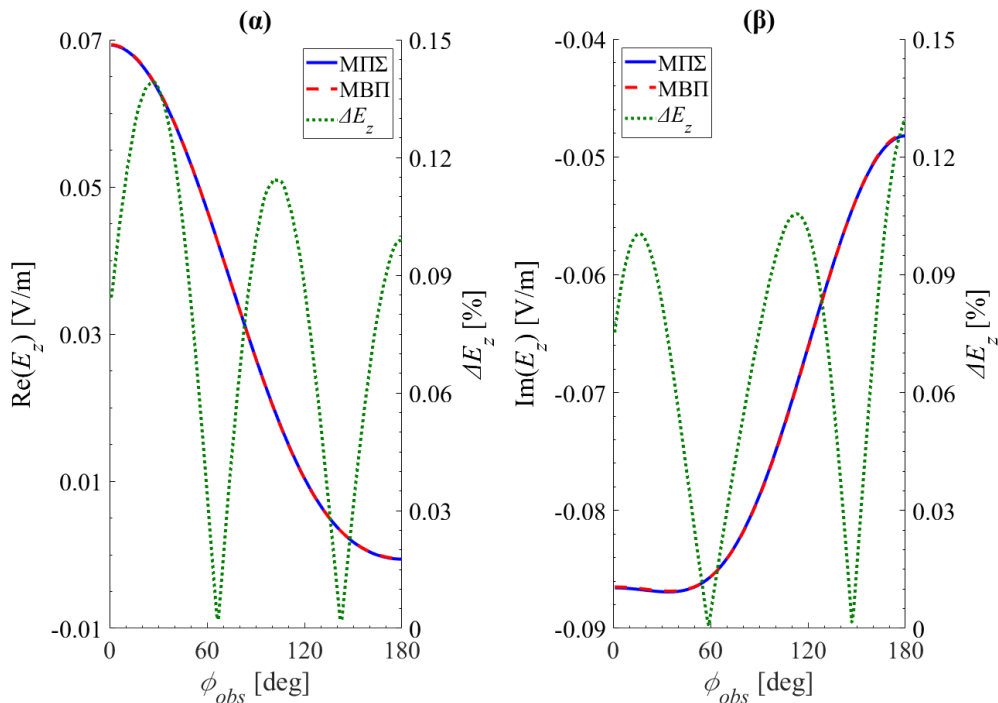
Αντίστοιχα, στο Σχήμα 4-6 και στο Σχήμα 4-7 παρουσιάζονται τα ανάλογα πεδία σε μια ακτίνα $\rho_{obs} = 0.2b$ εσωτερικά του σκεδαστή. Το μέγιστο σφάλμα είναι μικρότερο του 2% με τις δύο μεθόδους να βρίσκονται πάλι σε καλή συμφωνία.



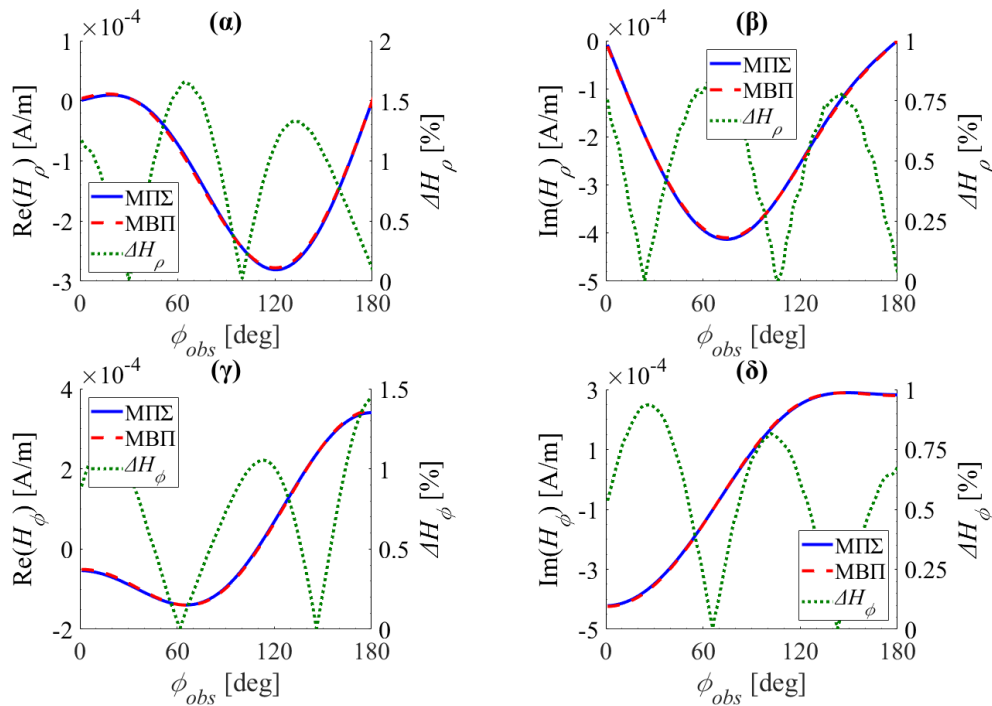
Σχήμα 4-4: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου E_z σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 3b$.



Σχήμα 4-5: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ρ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ϕ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 3b$.



Σχήμα 4-6: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του ηλεκτρικού πεδίου E_z σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 0.2b$.



Σχήμα 4-7: Σύγκριση μεθόδων και απεικόνιση του σφάλματος για το (α) πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ρ καθώς και για το (γ) πραγματικό και (δ) φανταστικό μέρος του μαγνητικού πεδίου H_ϕ σε ακτίνα παρατήρησης $\rho_{obs} = 0.2b$.

4.3.2 Αξιολόγηση υπολογιστικού χρόνου

Ο Πίνακας 4-1 παρουσιάζει ενδεικτικά τον χρόνο εκτέλεσης των MBΠ και ΜΠΣ στο παραπάνω πρόβλημα. Τα δύο μοντέλα έτρεξαν σε ένα προσωπικό υπολογιστή με επεξεργαστή Intel Core i7-8700 @ 3.20 GHz και μνήμη RAM 64 GB. Όπως και στην περίπτωση του μονοστρωματικού σκεδαστή, από τα αποτελέσματα είναι φανερή η ταχύτητα εκτέλεσης της MBΠ έναντι της ΜΠΣ, η οποία συνδυάζεται με την απλότητα υλοποίησης και τη σχεδόν μηδενική ανάγκη για προετοιμασία των δεδομένων.

Πίνακας 4-1: Ενδεικτικός χρόνος εκτέλεσης των δύο μεθόδων για την περίπτωση διστρωματικού σκεδαστή.

	MBΠ	ΜΠΣ
Χρόνος εκτέλεσης	0.73 sec	1 min 38 sec

4.3.3 Ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της MBΠ

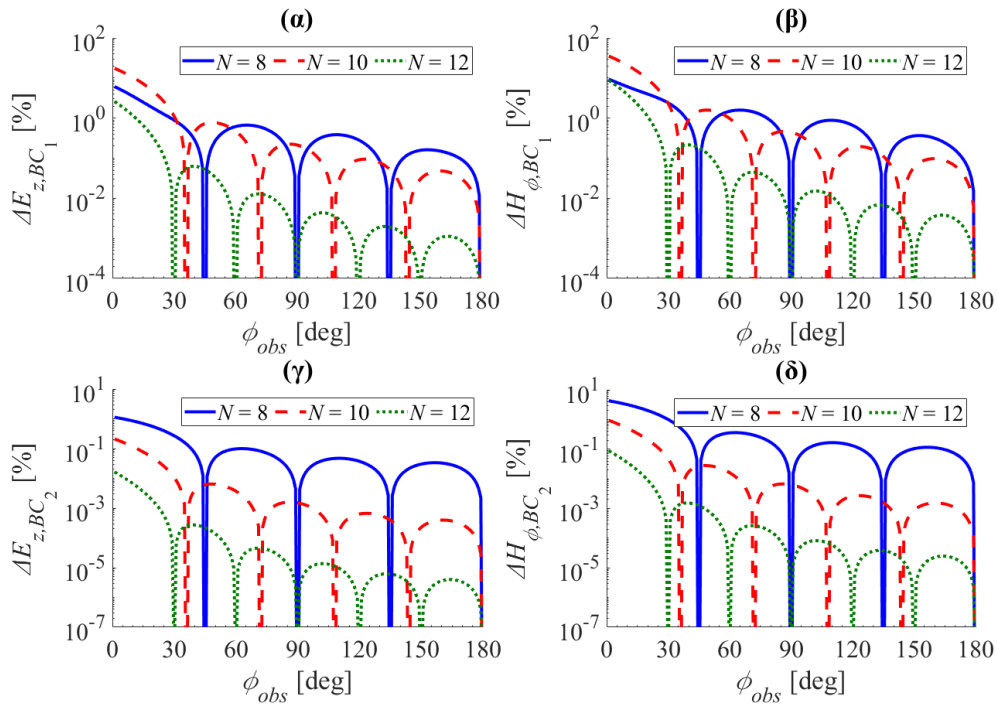
Στη συνέχεια πραγματοποιείται μια συστηματική ανάλυση της ευαισθησίας ως προς τις παραμέτρους της MBΠ με σκοπό να εξεταστεί η ακρίβεια και η αριθμητική ευστάθεια της

μεθόδου. Για το λόγο αυτό υπολογίζεται το σχετικό συνοριακό σφάλμα σε κάθε σύνορο του σκεδαστή ως

$$\Delta B_{BC_{1,2}} = \frac{|(B^{I,II} - B^{II,III})|}{|B^{inc}|_{max}} 100\% \Big|_{\partial D_{1,2}} \quad (4.51)$$

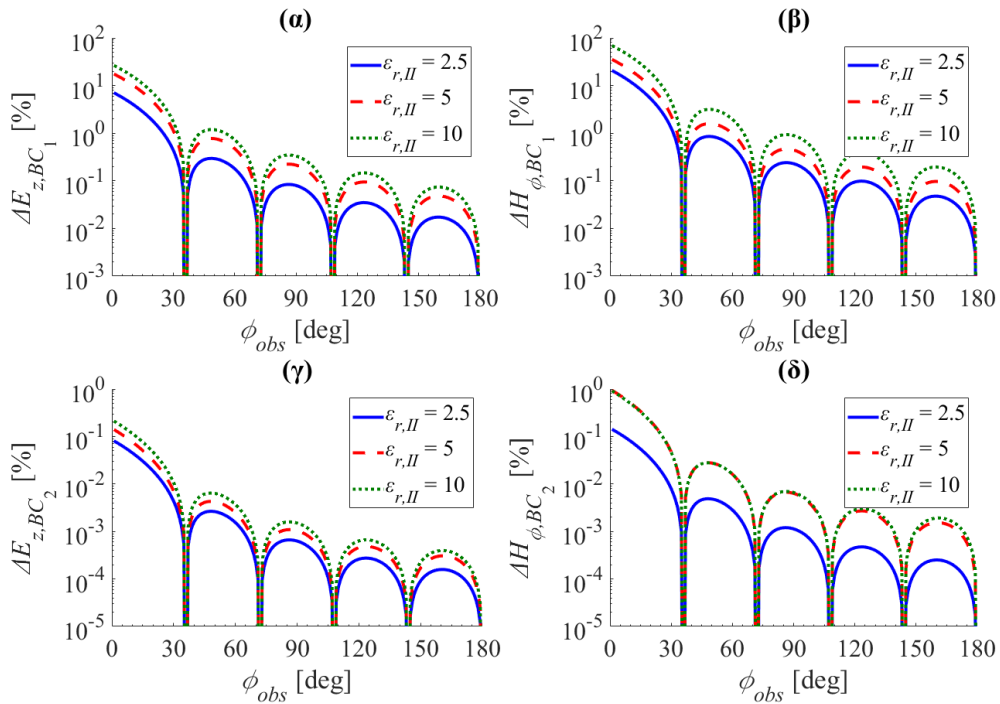
όπου B η συνιστώσα E_z ή H_ϕ .

Στο Σχήμα 4-8 παρουσιάζεται το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει του πλήθους N των βοηθητικών πηγών για τα δυο πεδία. Είναι εμφανές αλλά και διαισθητικά λογικό ότι με αύξηση του αριθμού των πηγών, το συνοριακό σφάλμα μειώνεται.

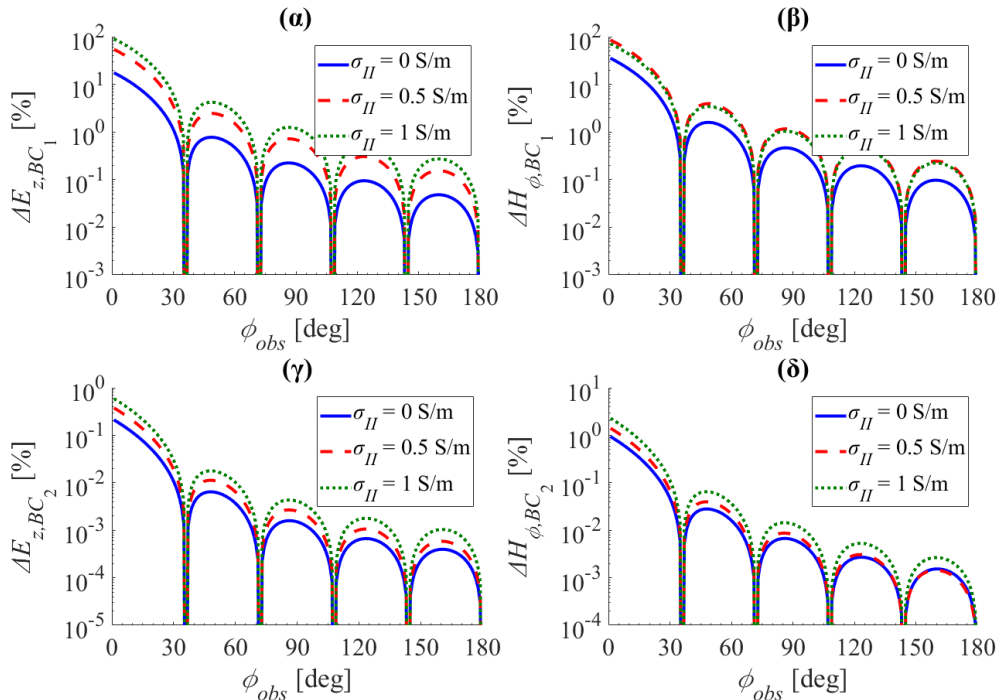


Σχήμα 4-8: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει του πλήθους N των βοηθητικών πηγών για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_ϕ .

Παρακάτω μελετάται η επίδραση του ηλεκτρικού μεγέθους του σκεδαστή στο συνοριακό σφάλμα. Στο Σχήμα 4-9 παρουσιάζεται το σφάλμα για διάφορες τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς του σκεδαστή, ενώ στο Σχήμα 4-10 το αντίστοιχο σφάλμα για μεταβολή της ειδικής αγωγιμότητάς του. Είναι φανερό πως το σφάλμα εν γένει αυξάνεται με αύξηση των $\epsilon_{r,II}$ και σ_{II} . Αυτό καταδεικνύει ότι σε μια τέτοια περίπτωση είναι απαραίτητη η αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών.



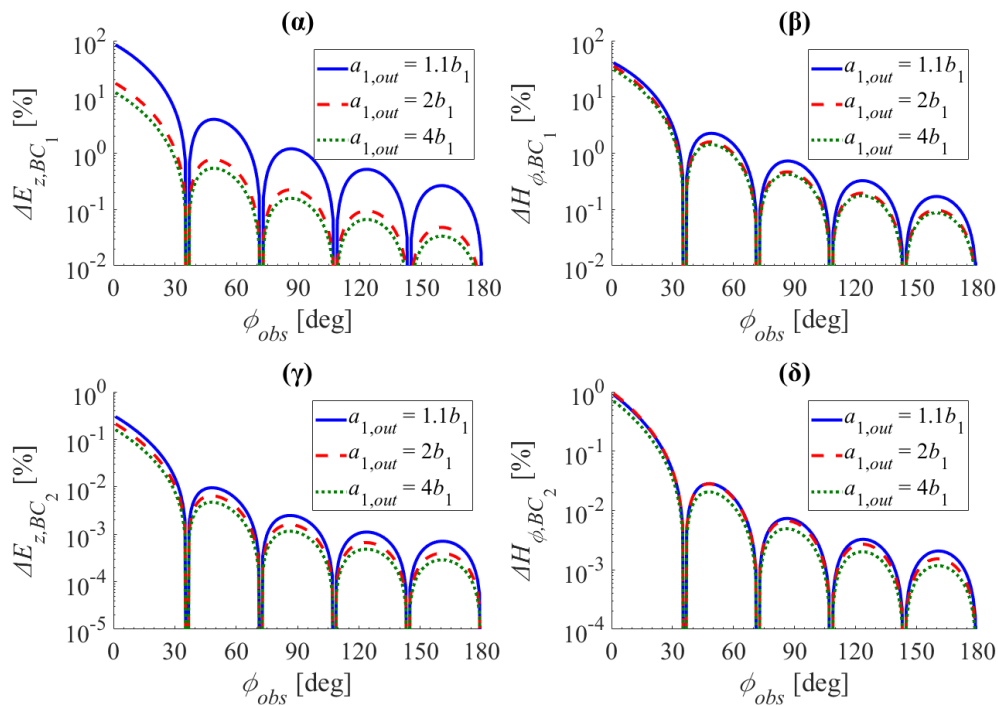
Σχήμα 4-9: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon_{r,II}$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_φ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.



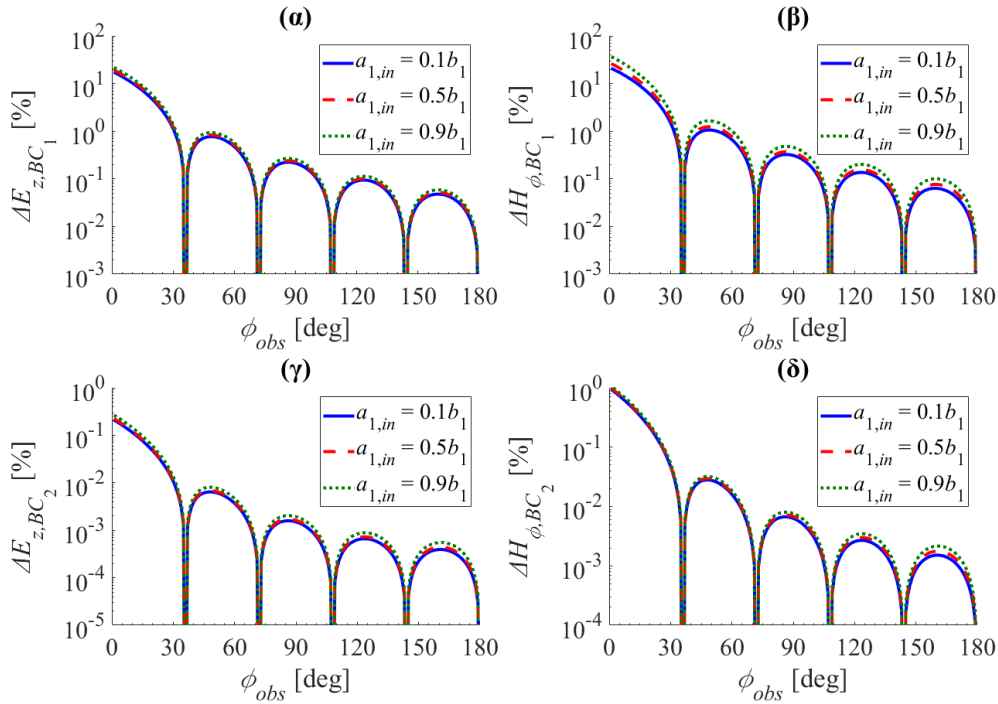
Σχήμα 4-10: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει της ειδικής αγωγιμότητας σ_{II} για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_φ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.

Βασικές παράμετροι για την ποιότητα της αριθμητικής λύσης είναι οι ακτίνες των βοηθητικών καμπυλών. Στο Σχήμα 4-11 απεικονίζεται η επίδραση της μεταβολής της $a_{1,out}$ στο συνοριακό σφάλμα. Παρατηρείται πως το σφάλμα μεγαλώνει όταν αυτή πλησιάζει επαρκώς στο πραγματικό σύνορο ακτίνας b_1 . Επιπρόσθετα, φαίνεται πως η επίδραση είναι ισχυρότερη στο BC_1 , το οποίο είναι λογικό αφού η $a_{1,out}$ είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτό το σύνορο.

Στο Σχήμα 4-12 απεικονίζεται η επίδραση της μεταβολής της $a_{1,in}$ στο συνοριακό σφάλμα. Παρατηρείται μια ασθενής εξάρτηση με μικρή αύξηση του σφάλματος όταν αυτή πλησιάζει επαρκώς στο πραγματικό σύνορο ακτίνας b_1 .



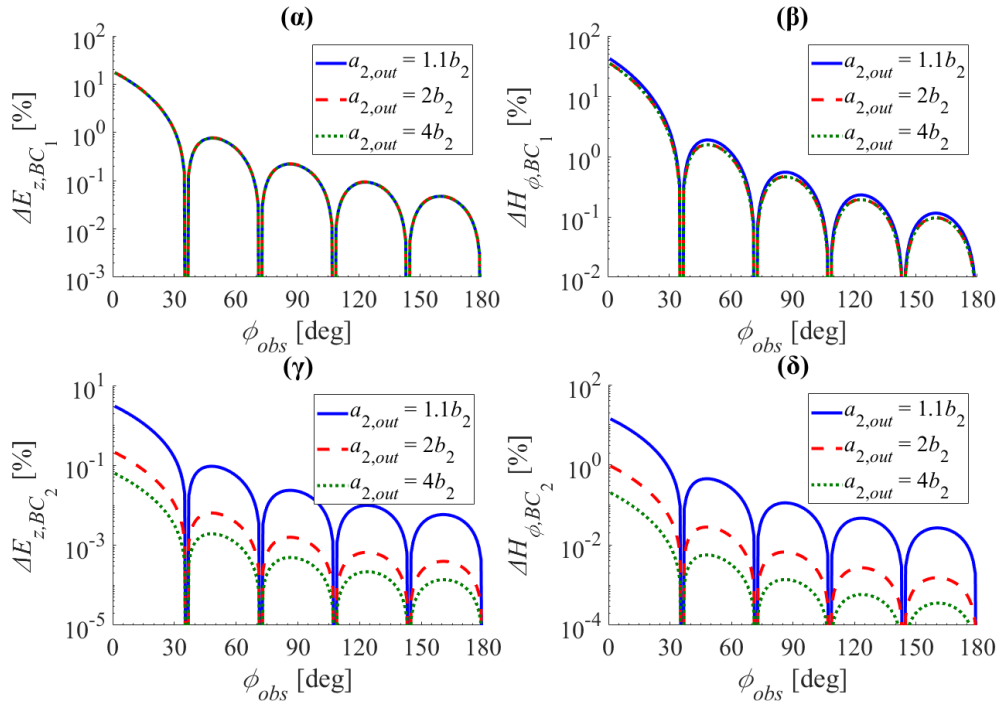
Σχήμα 4-11: Το συνοριακό σφάλμα συναρτίζεται της ακτίνας $a_{1,out}$ της εξωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S^{1,out}$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.



Σχήμα 4-12: Το συνοριακό σφάλμα συναρτήσει της ακτίνας $a_{1,in}$ της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S^{1,in}$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Θεώρηση ΜΒΠ με $N = 10$.

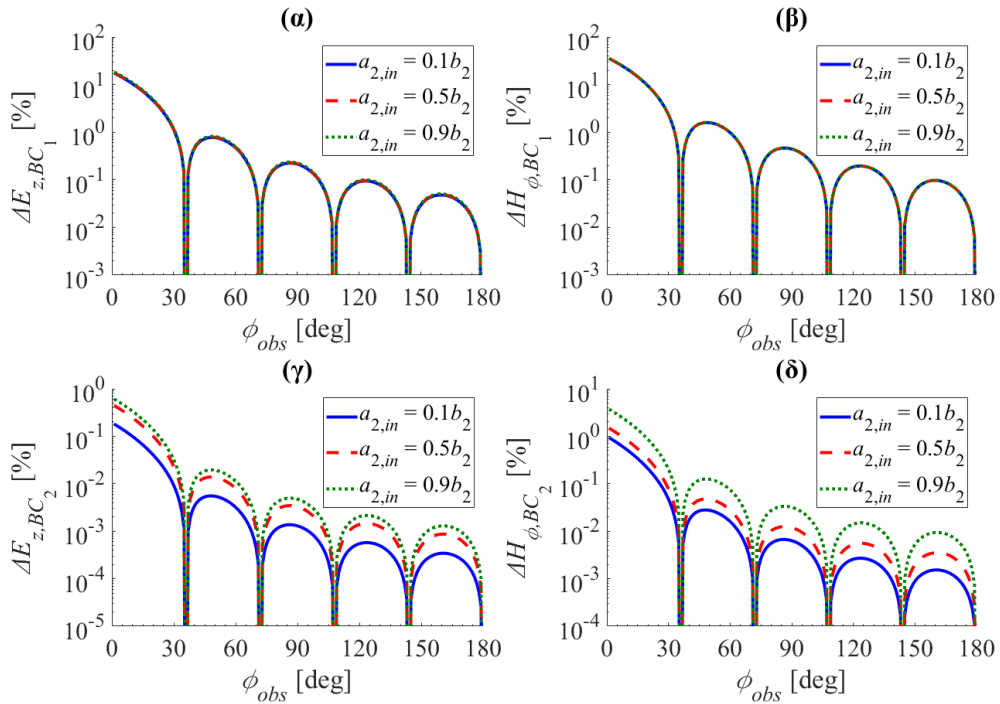
Στο Σχήμα 4-13 απεικονίζεται η επίδραση της μεταβολής της $a_{2,out}$ στο συνοριακό σφάλμα. Παρατηρείται πως το σφάλμα μεγαλώνει όταν αυτή πλησιάζει επαρκώς στο πραγματικό σύνορο ακτίνας b_2 . Επιπρόσθετα, φαίνεται πως η επίδραση είναι ισχυρότερη στο BC_2 , το οποίο είναι λογικό αφού η $a_{2,out}$ είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτό το σύνορο.

Στο Σχήμα 4-14 απεικονίζεται η επίδραση της μεταβολής της $a_{2,in}$ στο συνοριακό σφάλμα. Παρατηρείται πως το σφάλμα μεγαλώνει όταν αυτή πλησιάζει επαρκώς στο πραγματικό σύνορο ακτίνας b_2 . Επιπρόσθετα, φαίνεται πως η επίδραση είναι ισχυρότερη στο BC_2 , το οποίο είναι λογικό αφού η $a_{2,in}$ είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με αυτό το σύνορο.



Σχήμα 4-13: Το συνοριακό σφάλμα συναρτίζεται της ακτίνας $a_{2,out}$ της εξωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S^{2,out}$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Θεώρηση ΜΒΠ με

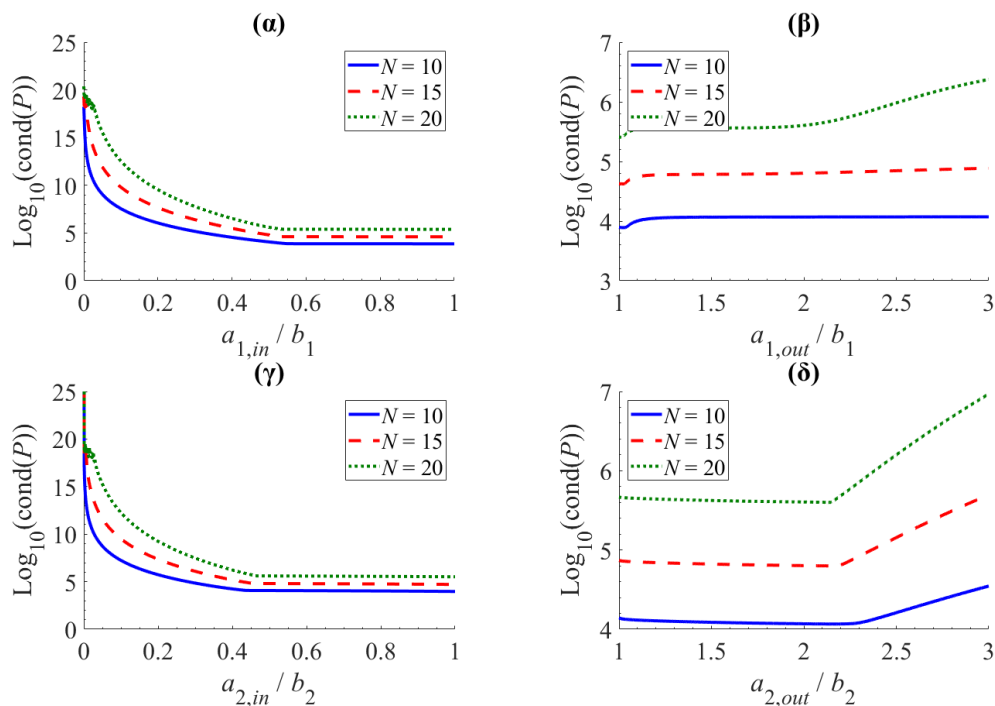
$N = 10$.



Σχήμα 4-14: Το συνοριακό σφάλμα συναρτίζεται της ακτίνας $a_{2,in}$ της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης $S^{2,in}$ για το (α), (γ) ηλεκτρικό πεδίο E_z και (β), (δ) μαγνητικό πεδίο H_ϕ . Θεώρηση ΜΒΠ με

$N = 10$.

Ένα άλλο μέγεθος που χαρακτηρίζει την ακρίβεια και ευστάθεια είναι ο δείκτης κατάστασης P του πίνακα ΜΒΠ. Στο Σχήμα 4-15 παρουσιάζεται ο δείκτης κατάστασης ως συνάρτηση των ακτίνω όλων των βοηθητικών καμπυλών για μεταβαλλόμενο πλήθος βοηθητικών πηγών. Παρατηρείται πως ο δείκτης αυξάνεται απότομα όταν οι ακτίνες $a_{1,in}$ και $a_{2,in}$ των εσωτερικών βοηθητικών καμπυλών πλησιάζουν το 0, ενώ τείνει να σταθεροποιηθεί σχετικά γρήγορα σε χαμηλές τιμές όταν τείνουν στα b_1 και b_2 , αντίστοιχα. Αντίθετα, η επιλογή των $a_{1,out}$ και $a_{2,out}$ δεν φαίνεται να επηρεάζει σημαντικά το δείκτη κατάστασης, παρά μόνο το πλήθος των βοηθητικών πηγών.



Σχήμα 4-15: Ο δείκτης κατάστασης του πίνακα συστήματος συναρτῆσει των ακτίνων (α) $a_{1,in}$, (β) $a_{1,out}$, (γ) $a_{2,in}$, και (δ) $a_{2,out}$ των τεσσάρων βοηθητικών καμπυλών για μεταβλητό πλήθος N των βοηθητικών πηγών

5. Συμπεράσματα

Βασικό αντικείμενο της εργασίας είναι η εισαγωγή στη ΜΒΠ και η εφαρμογή της σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης πολυστρωματικών σκεδαστών.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου και η γενική εφαρμογή της σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Αναλύονται οι παράμετροι που επηρεάζουν την ακρίβειά της, ενώ παρουσιάζονται τα προτερήματα και οι αδυναμίες της μεθόδου. Τέλος, γίνεται σχολιασμός σχετικά με συγκεκριμένες αριθμητικές επιπλοκές που μπορεί να εμφανιστούν λόγω προβληματικού συνδυασμού τιμών των παραμέτρων. Συμπεραίνεται πως η σύγκλιση της μεθόδου μπορεί να γίνει από πρακτική σκοπιά με πολλαπλές δοκιμές ακολουθώντας κάποιους γενικούς κανόνες στην κατανομή των σημείων επιβολής των οριακών συνθηκών και βοηθητικών πηγών.

Στο Κεφάλαιο 3 περιγράφεται το πρόβλημα σκέδασης σε ένα μονοστρωματικό διηλεκτρικό σκεδαστή κυκλικής διατομής με εν γένει μη τέλειο διηλεκτρικό μέσο. Στον σκεδαστή προσπίπτει κάθετα ένα επίπεδο κύμα πόλωσης TM^z . Εφαρμόζεται η ΜΒΠ και τα αποτελέσματά της συγκρίνονται και επαληθεύονται με τη ΜΠΣ υπολογίζοντας το σχετικό σφάλμα. Παρατίθενται οι αντίστοιχοι υπολογιστικοί χρόνοι όπου διαπιστώνεται η μεγάλη αποδοτικότητα της ΜΒΠ έναντι της ΜΠΣ. Δίνεται έμφαση στην υλοποίηση της ΜΒΠ στο προγραμματιστικό περιβάλλον του MATLAB[®], χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες τεχνικές κανονικοποίησης συναρτήσεων, πράξεων πινάκων και διανυσμάτων, και αποδοτικής επίλυσης του γραμμικού συστήματος, που αυξάνουν την απόδοση και ακρίβεια του αλγορίθμου. Ακολουθεί μια λεπτομερής ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ, εξάγοντας χρήσιμα συμπεράσματα ως προς την επίδοση της μεθόδου. Παρατηρείται πως η αριθμητική ακρίβεια αυξάνεται με αύξηση του πλήθους των βοηθητικών πηγών και με μείωση του ηλεκτρικού μεγέθους του σκεδαστή. Επιπρόσθετα, η μείωση της ακτίνας της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης και η αντίστοιχη αύξηση της εξωτερικής επίσης συντελούν στην αύξηση της ακρίβειας της μεθόδου. Τέλος, ο δείκτης κατάστασης του πίνακα παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση μόνο από την ακτίνα της εσωτερικής βοηθητικής καμπύλης και όχι από την αντίστοιχη της εξωτερικής, ενώ επηρεάζεται αισθητά και από το πλήθος των βοηθητικών πηγών.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται το πρόβλημα της σκέδασης σε ένα διστρωματικό μη τέλειο διηλεκτρικό σκεδαστή κυκλικής διατομής. Σε αντιστοιχία με το Κεφάλαιο 3, εφαρμόζεται η ΜΒΠ και τα αποτελέσματα συγκρίνονται και επαληθεύονται με τη ΜΠΣ υπολογίζοντας το σχετικό σφάλμα. Καταγράφονται οι χρόνοι εκτέλεσης και παρουσιάζεται η αντίστοιχη ανάλυση ευαισθησίας των παραμέτρων της ΜΒΠ, καταλήγοντας στα ανάλογα με το Κεφάλαιο 3 μεγέθη που επηρεάζουν αισθητά την ακρίβεια της μεθόδου. Επιπρόσθετα, συμπεραίνεται πως οι παράμετροι κάθε ζεύγους βοηθητικών επιφανειών επηρεάζουν κατά κύριο λόγο το συνοριακό σφάλμα στο αντίστοιχο σύνορο του σκεδαστή και δευτερευόντως το αντίστοιχο σφάλμα στην άλλη συνοριακή επιφάνεια.

Παράρτημα Α: Σύνοψη της ΜΒΠ για τη μοντελοποίηση του μονοστρωματικού σκεδαστή στο MATLAB®

Παρακάτω συνοψίζεται η τελική έκφραση των εξισώσεων για τη μοντελοποίηση του μονοστρωματικού σκεδαστή με τη ΜΒΠ στο MATLAB®.

$$\begin{bmatrix} \{C_1\} \\ -\{C_2\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] \\ [Q_{11}] & [Q_{12}] \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} \{A^{inc}\} \\ \{B^{inc}\} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

όπου:

$$[P_{11}]_{mn} = -\frac{j}{4e^{jk_{II}a_{out}-|\Im(k_{II}b)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}b) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (A.2)$$

$$[P_{12}]_{mn} = -\frac{j}{4e^{jk_{I}b-|\Im(k_{I}a_{in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{I}a_{in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{I}b) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (A.3)$$

$$[Q_{11}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}a_{out}-|\Im(k_{II}b)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{II}b) - \tilde{J}_{l+1}(k_{II}b) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (A.4)$$

$$[Q_{12}]_{mn} = -\frac{k_I}{8\omega\mu_0 e^{jk_I b-|\Im(k_I a_{in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_I a_{in}) \left(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(k_I b) - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(k_I b) \right) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (A.5)$$

$$\{A^{inc}\}_n = E_0 e^{jk_I b \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n)} \quad (A.6)$$

$$\{B^{inc}\}_n = \frac{k_I}{\omega\mu_0} E_0 \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n) e^{jk_I b \cos(\varphi_{inc} - \varphi_n)} \quad (A.7)$$

Για σημείο $(\rho \geq b, \varphi)$ του επιπέδου, δηλαδή στη μη φραγμένη περιοχή I :

$$E_z^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (A.8)$$

$$H_{\rho}^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (\text{A.9})$$

$$H_{\varphi}^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (\text{A.10})$$

όπου:

$$E_{z p}^{sca}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4e^{jk_I \rho - |\Im(k_I a_{in})|}} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_I a_{in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_I \rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_p} \quad (\text{A.11})$$

$$H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega\mu_0\rho e^{jk_I \rho - |\Im(k_I a_{in})|}} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_I a_{in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_I \rho) l (e^{jl})^{\varphi - \varphi_p} \quad (\text{A.12})$$

$$H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) = -\frac{k_I}{8\omega\mu_0 e^{jk_I \rho - |\Im(k_I a_{in})|}} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_I a_{in}) \left(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(k_I \rho) - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(k_I \rho) \right) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_p} \quad (\text{A.13})$$

Για σημείο $(\rho \leq b, \varphi)$ του επιπέδου, δηλαδή στη φραγμένη περιοχή II:

$$E_z^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N E_{z q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (\text{A.14})$$

$$H_{\rho}^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (\text{A.15})$$

$$H_{\varphi}^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (\text{A.16})$$

όπου:

$$E_{z q}^{II}(\rho, \varphi) = -\frac{j}{4e^{jk_{II} a_{out} - |\Im(k_{II} \rho)|}} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II} \rho) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II} a_{out}) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q} \quad (\text{A.17})$$

$$H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) = \frac{j}{4\omega\mu_0\rho e^{jk_{II}a_{out}-|\Im(k_{II}\rho)|}} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}\rho) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) l (e^{jl})^{\varphi-\varphi_q} \quad (A.18)$$

$$H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) = -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}a_{out}-|\Im(k_{II}\rho)|}} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{II}\rho) - \tilde{J}_{l+1}(k_{II}\rho) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{out}) (e^{jl})^{\varphi-\varphi_q} \quad (A.19)$$

Παράρτημα Β: Σύνοψη της ΜΒΠ για τη μοντελοποίηση του διστρωματικού σκεδαστή στο MATLAB®

Παρακάτω συνοψίζεται η τελική έκφραση των εξισώσεων για τη μοντελοποίηση του μονοστρωματικού σκεδαστή με τη ΜΒΠ στο MATLAB®.

$$\begin{bmatrix} \{C_1\} \\ -\{C_2\} \\ -\{C_3\} \\ \{C_4\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P_{11}] & [P_{12}] & [0] & [P_{14}] \\ [Q_{11}] & [Q_{12}] & [0] & [Q_{14}] \\ [P_{21}] & [0] & [P_{23}] & [P_{24}] \\ [Q_{21}] & [0] & [Q_{23}] & [Q_{24}] \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} \{A^{inc}\} \\ \{B^{inc}\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

όπου:

$$\begin{aligned} [P_{11}]_{mn} \\ = -\frac{j}{4e^{jk_{II}a_{1,out}-|\Im(k_{II}b_1)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}b_1) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$[P_{12}]_{mn} = -\frac{j}{4e^{jk_{II}b_1-|\Im(k_{II}a_{1,in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{1,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}b_1) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (B.3)$$

$$[P_{14}]_{mn} = -\frac{j}{4e^{jk_{II}b_1-|\Im(k_{II}a_{2,in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{2,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}b_1) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (B.4)$$

$$\begin{aligned} [P_{21}]_{mn} \\ = -\frac{j}{4e^{jk_{II}a_{1,out}-|\Im(k_{II}b_2)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}b_2) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$\begin{aligned} [P_{23}]_{mn} \\ = -\frac{j}{4e^{jk_{III}a_{2,out}-|\Im(k_{III}b_2)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{III}b_2) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{III}a_{2,out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \end{aligned} \quad (B.6)$$

$$[P_{24}]_{mn} = -\frac{j}{4e^{jk_{II}b_2-|\Im(k_{II}a_{2,in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{2,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}b_2) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}}\right)^{m-n} \quad (B.7)$$

$$[\mathbf{Q}_{11}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}a_{1,out}-|\Im(k_{II}b_1)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{II}b_1) - \tilde{J}_{l+1}(k_{II}b_1) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out}) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}} \right)^{m-n} \quad (\text{B.8})$$

$$[\mathbf{Q}_{12}]_{mn} = -\frac{k_I}{8\omega\mu_0 e^{jk_I b_1 - |\Im(k_I a_{1,in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_I a_{1,in}) \left(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(k_I b_1) - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(k_I b_1) \right) \left(e^{jl\frac{2\pi}{N}} \right)^{m-n} \quad (\text{B.9})$$

$$[\mathbf{Q}_{14}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}b_1-|\Im(k_{II}a_{2,in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{2,in}) \left(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(k_{II}b_1) - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(k_{II}b_1) \right) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{B.10})$$

$$[\mathbf{Q}_{21}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}a_{1,out}-|\Im(k_{II}b_2)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{II}b_2) - \tilde{J}_{l+1}(k_{II}b_2) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}a_{1,out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{B.11})$$

$$[\mathbf{Q}_{23}]_{mn} = -\frac{k_{III}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{III}a_{2,out}-|\Im(k_{III}b_2)|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{III}b_2) - \tilde{J}_{l+1}(k_{III}b_2) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{III}a_{2,out}) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{B.12})$$

$$[\mathbf{Q}_{24}]_{mn} = -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}b_2-|\Im(k_{II}a_{2,in})|}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{II}a_{2,in}) - \tilde{J}_{l+1}(k_{II}a_{2,in}) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}b_2) e^{jl(m-n)\frac{2\pi}{N}} \quad (\text{B.13})$$

Για σημείο $(\rho \geq b_1, \varphi)$ του επιπέδου, δηλαδή στη μη φραγμένη περιοχή I :

$$E_z^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (\text{B.14})$$

$$H_\rho^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (\text{B.15})$$

$$H_{\varphi}^{sca}(\rho, \varphi) = \sum_{p=1}^N H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) \quad (\text{B.16})$$

όπου:

$$\begin{aligned} & E_{zp}^{sca}(\rho, \varphi) \\ &= -\frac{j}{4e^{jk_1\rho - |\Im(k_1 a_{1,in})|}} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_1 a_{1,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_1 \rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_p} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} & H_{\rho p}^{sca}(\rho, \varphi) \\ &= \frac{j}{4\omega\mu_0\rho e^{jk_1\rho - |\Im(k_1 a_{1,in})|}} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_1 a_{1,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_1 \rho) l (e^{jl})^{\varphi - \varphi_p} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi p}^{sca}(\rho, \varphi) &= -\frac{k_1}{8\omega\mu_0 e^{jk_1\rho - |\Im(k_1 a_{1,in})|}} \{C_2\}_p \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_1 a_{1,in}) \left(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(k_1 \rho) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(k_1 \rho) \right) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_p} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Για σημείο ($b_2 \leq \rho \leq b_1, \varphi$) του επιπέδου, δηλαδή στη φραγμένη περιοχή II:

$$E_z^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N E_{zq}^{II}(\rho, \varphi) \quad (\text{B.20})$$

$$H_{\rho}^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (\text{B.21})$$

$$H_{\varphi}^{II}(\rho, \varphi) = \sum_{q=1}^N H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) \quad (\text{B.22})$$

όπου:

$$\begin{aligned} & E_{zq}^{II}(\rho, \varphi) \\ &= -\frac{j}{4e^{jk_{II}\rho - |\Im(k_{II} a_{1,out})|}} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II} a_{1,out}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II} \rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q} \\ &\quad - \frac{j}{4e^{jk_{II}\rho - |\Im(k_{II} a_{2,in})|}} \{C_4\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II} a_{2,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II} \rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned}
& H_{\rho q}^{II}(\rho, \varphi) \\
&= \frac{j}{4\omega\mu_0\rho e^{jk_{II}\rho - |\Im(k_{II}a_{1,out})|}} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{1,out}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}\rho) l (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q} \\
&+ \frac{j}{4\omega\mu_0\rho e^{jk_{II}\rho - |\Im(k_{II}a_{2,in})|}} \{C_4\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{2,in}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}\rho) l (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q}
\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\begin{aligned}
& H_{\varphi q}^{II}(\rho, \varphi) \\
&= -\frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}\rho - |\Im(k_{II}a_{1,out})|}} \{C_1\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{II}a_{1,out}) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{J}_{l+1}(k_{II}a_{1,out}) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{II}\rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q} \\
&\quad - \frac{k_{II}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{II}\rho - |\Im(k_{II}a_{2,in})|}} \{C_4\}_q \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{II}a_{2,in}) \left(\tilde{H}_{l-1}^{(2)}(k_{II}\rho) \right. \\
&\quad \left. - \tilde{H}_{l+1}^{(2)}(k_{II}\rho) \right) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_q}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

Για σημείο $(\rho \leq b_2, \varphi)$ του επιπέδου, δηλαδή στη φραγμένη περιοχή III:

$$E_z^{III}(\rho, \varphi) = \sum_{t=1}^N E_{zt}^{III}(\rho, \varphi) \tag{B.26}$$

$$H_\rho^{III}(\rho, \varphi) = \sum_{t=1}^N H_{\rho t}^{III}(\rho, \varphi) \tag{B.27}$$

$$H_\varphi^{III}(\rho, \varphi) = \sum_{t=1}^N H_{\varphi t}^{III}(\rho, \varphi) \tag{B.28}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
& E_{zt}^{III}(\rho, \varphi) \\
&= -\frac{j}{4e^{jk_{III}\rho - |\Im(k_{III}a_{2,out})|}} \{C_3\}_t \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{III}a_{2,out}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{III}\rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi_t}
\end{aligned} \tag{B.29}$$

$$\begin{aligned}
& H_{\rho t}^{III}(\rho, \varphi) \\
&= \frac{j}{4\omega\mu_0\rho e^{jk_{III}\rho - |\Im(k_{III}a_{2,out})|}} \{C_3\}_t \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_l(k_{III}a_{2,out}) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{III}\rho) l (e^{jl})^{\varphi - \varphi_t}
\end{aligned} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned}
 H_{\varphi t}^{III}(\rho, \varphi) = & -\frac{k_{III}}{8\omega\mu_0 e^{jk_{III}\rho - |\Im(k_{III}a_{2,out})|}} \{C_3\}_t \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\tilde{J}_{l-1}(k_{III}a_{2,out}) \right. \\
 & \left. - \tilde{J}_{l+1}(k_{III}a_{2,out}) \right) \tilde{H}_l^{(2)}(k_{III}\rho) (e^{jl})^{\varphi - \varphi t}
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Βιβλιογραφία

- [1] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, 2001.
- [2] K. L. Shlager, J. B. Schneider, “A selective survey of the finite-difference time domain literature”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 37, no. 4, pp. 39-57, 1995.
- [3] A. Taflove, K. R. Umashankar, “Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section”, *IEEE Proceedings*, vol. 77, no. 5, pp. 682-699, 1989.
- [4] J. P. Webb, “Application of the finite-element method to electromagnetic and electrical topics”, *Reports on Progress in Physics*, vol. 58, pp. 1673-1712, 1995.
- [5] F. A. Molinet, “Geometrical theory of diffraction (GTD). Part I: Foundations of the theory”, *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, vol. 29, no. 4, pp. 6-16, 1987.
- [6] F. A. Molinet, “Geometrical theory of diffraction (GTD). Part II: Extensions and future trends of the theory”, *IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter*, vol. 29, no. 5, pp. 5-16, 1987.
- [7] M. M. Ney, “Method of moments as applied to electromagnetic problems”, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 33, no. 10, pp. 972-980, 1985.
- [8] A. C. Ludwig, “The generalized multipole technique”, *Proceedings IEEE AP-S International Symposium*, pp. 160-163, 1989.
- [9] V. D. Kupradze, M. A. Aleksidze, “The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 4, no. 4, pp. 82-126, 1964.
- [10] R. Mathon, R. L. Johnston, “The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 14, no. 4, pp. 638-650, 1977.
- [11] MATLAB, version 9.8.0.1721703 (R2020a) Update 7. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2020.
- [12] COMSOL Multiphysics® version 6.1. COMSOL AB, Stockholm, Sweden.
- [13] F. G. Bogdanov, D. D. Karkashadze and R. S. Zaridze, “The method of auxiliary sources in electromagnetic scattering problems”, *Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering*, Elsevier Science, 1999.
- [14] Y. Leviatan, “Analytic continuation considerations when using generalized formulations for scattering problems”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 38, no. 8, pp. 1259-1263, 1990.
- [15] R. Zaridze et al., *The Method of Auxiliary Sources (MAS): Solution of Propagation, Diffraction, and Inverse Problems Using MAS*, ICCS/NTUA, 1998.

- [16] R. S. Zaridze, et al., “The method of auxiliary sources and scattered field singularities (caustics)”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 12, no. 11, pp. 1491-1507, 1998.
- [17] Σ. Μανδραφούδης, “Προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης με εφαρμογή της μεθόδου των βοηθητικών πηγών”, *Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο*, 2019.
- [18] M. Kouroumplakis, “The method of auxiliary sources in electromagnetic problems of scattering, mode analysis, and shielding: Theory and applications”, *National Technical University of Athens*, 2022.
- [19] M. Kouroumplakis, N. L. Tsitsas, G. Fikioris, “Convergence analysis of the currents and fields involved in the method of auxiliary sources applied to scattering by PEC cylinders”, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. 63, no. 2, pp. 454-462, 2021.
- [20] B. Pomerianec, Y. Leviatan, A. Boag, “Analysis of the 5:1 dipole benchmark case using the current-model method with an SVD-improved point matching technique”, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 7, no. 12, pp. 1577-1593, 1993.
- [21] A. Boag, Y. Leviatan, A. Boag, “On the use of SVD-improved point matching in the current-model method”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, no. 7, pp. 926-933, 1993.
- [22] Π. Ι. Παπακανέλλος, “Ανάπτυξη της μεθόδου βοηθητικών πηγών για την ανάλυση σύνθετων διατάξεων ακτινοβολήσης”, *Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο*, 2004.
- [23] Ι. Ι. Χαιρετάκης, “Βελτιστοποίηση της μεθόδου βοηθητικών πηγών σε προβλήματα σκέδασης στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό με χρήση γενετικών αλγορίθμων”, *Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο*, 2006.
- [24] A. C. Ludwig, “Validating scattering calculations using boundary value and internal field checks”, *Proceedings of the IEEE AP-S International Symposium*, pp. 1363-1365, 1988.
- [25] Y. Leviatan, Z. Baharav, E. Heyman, “Analysis of electromagnetic scattering using arrays of fictitious sources”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 10, pp. 1091-1098, 1995.
- [26] H. T. Anastassiou, D. I. Kaklamani, “Error estimation and optimization of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering from a dielectric circular cylinder”, *Radio Science*, vol. 39, no. RS5015, pp. 1-10, 2004.
- [27] N. L. Tsitsas, E. G. Alivizatos, H. T. Anastassiou, D. I. Kaklamani, “Optimization of the method of auxiliary sources (MAS) for oblique incidence scattering by an infinite dielectric cylinder”, *Electrical Engineering*, vol. 89, pp. 353-361, 2007.

- [28] N. L. Tsitsas, E. G. Alivizatos, H. T. Anastassiou, D. I. Kaklamani, “Optimization of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering by an infinite cylinder under oblique incidence”, *Electromagnetics*, vol. 25, pp. 39-54, 2005.
- [29] G. Fikioris, “On two types of convergence in the method of auxiliary sources”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 54, no. 7, pp. 2022-2033, 2006.
- [30] P. Andrianesis, G. Fikioris, “Near-field behavior in the method of auxiliary sources (MAS) for a simple scattering problem”, *International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, Kyiv, Ukraine, September 06-08, 2010.
- [31] H. T. Anastassiou, G. Avdikos, A. T. Vouldis, “Efficient preconditioning of the method of auxiliary sources (MAS) for cylindrical scatterers of quasi-circular cross-section”, *The Open Electrical & Electronic Engineering Journal*, vol. 2, pp. 50-55, 2008.
- [32] D. I. Kaklamani, H. T. Anastassiou, “Aspects of the method of auxiliary sources (MAS) in computational electromagnetics”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 44, no. 3, pp. 48-64, 2002.
- [33] C. A. Valagiannopoulos, N. L. Tsitsas, G. Fikioris, “Convergence and oscillations in method of auxiliary sources analyses of dielectric scattering problems”, *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, Sydney, Australia, September 20-24, 2010.
- [34] S. Yu. Reutskiy, “The method of fundamental solutions for eigenproblems with Laplace and biharmonic operators”, *Computers, Materials & Continua*, vol. 2, no. 3, pp. 177-188, 2005.
- [35] N. L. Tsitsas, G. P. Zouros, G. Fikioris, Y. Leviatan, “On methods employing auxiliary sources for 2-D electromagnetic scattering by noncircular shapes”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 10, pp. 5443-5452, 2018.
- [36] N. L. Tsitsas, E. G. Alivizatos, H. T. Anastassiou, D. I. Kaklamani, “Accuracy analysis of the method of auxiliary sources (MAS) for scattering from a two-layer dielectric circular cylinder”, *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, Washington DC, USA, July 03-08, 2005.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.