ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Σύγχρονες τάσεις στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων και η επίδραση της χρήσης λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας»

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΑΜ 134853

Επιβλέπων καθηγητής: ΑΥΓΕΡΙΝΟΣ ΕΥΓΕΝΙΟΣ

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

«Σύγχρονες τάσεις στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων και η επίδραση της χρήσης λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας»

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΑΜ 134853

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
ΑΥΓΕΡΙΝΟΣ ΕΥΓΕΝΙΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Π.Τ.Δ.Ε.
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
ΚΑΡΙΩΤΟΥ ΦΩΤΕΙΝΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ ΕΑΠ

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Στην οικογένειά μου

για την αμέριστη βοήθεια και συμπαράσταση

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αυγερινό Ευγένιο για την καθοδήγηση και την άψογη συνεργασία κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Η συμβολή του ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την συνεπιβλέπουσα καθηγήτριά μου κα Καριώτου Φωτεινή για την εποικοδομητική συμμετοχή της στην επιτροπή αξιολόγησης της διπλωματικής εργασίας καθώς και την κα Βλάχου Ρόζα για τη συμβολή της στην στατιστική επεξεργασία των δεδομένων της έρευνας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη διαρκή και ουσιαστική στήριξη κατά τη διάρκεια των σπουδών μου

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως κύριο αντικείμενό της τη μελέτη των σύγχρονων τάσεων στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων καθώς και τον τρόπο με τον οποίο επιδρά σε αυτές η χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας.

Η εργασία αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, που είναι το θεωρητικό πλαίσιο, περιγράφεται αρχικά η έννοια της επίλυσης μαθηματικού προβλήματος, παρουσιάζονται αναλυτικά οι θέσεις του Polya, αναφέρονται τα οφέλη που αποκομίζει κάποιος από την ενασχόλησή του με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και γίνεται αναφορά στη θέση που κατέχει η εν λόγω διαδικασία στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών. Στη συνέχεια αναφέρονται τα στοιχεία που πρέπει να έχει ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα, προβάλλεται η θέση που κατέχει η σύνθεση προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών ενώ παράλληλα περιγράφονται οι τεχνικές και τα πλαίσια, που σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οδηγούν στην ορθή τοποθέτηση ενός μαθηματικού προβλήματος. Επιπλέον, παρουσιάζεται η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στην μαθηματική εκπαίδευση, με ιδιαίτερη αναφορά στην επίδραση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην επίλυση και κατασκευή προβλημάτων.

Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει το ερευνητικό πλαίσιο της εργασίας. Ένα δείγμα μαθητών λυκείου που συμμετείχε στην έρευνα, κλήθηκε να απαντήσει σε ένα ερωτηματολόγιο με στόχο την αποτύπωση των θέσεων και των απόψεών τους σχετικά με την επίλυση και την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων αλλά και την αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιπλέον, συμπλήρωσε ένα δοκίμιο έργων που αφορούσε την επίλυση και κατασκευή προβλημάτων. Το δείγμα κατά τη συμπλήρωση του δοκιμίου χωρίστηκε σε δύο ίσα μέρη, έτσι ώστε το ένα μέρος να εργαστεί με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ενώ το άλλο να εργαστεί παραδοσιακά, χρησιμοποιώντας απλώς μολύβι και χαρτί. Στη συνέχεια γίνεται η αναλυτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της έρευνας με τη χρήση κατάλληλων πινάκων, ραβδογραμμάτων και διαγραμμάτων ομοιότητας. Τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας και διατυπώνονται προτάσεις για την αξιοποίησή τους.

Λέξεις – Κλειδιά: Επίλυση μαθηματικού προβλήματος, Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος, Λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, Διδασκαλία των μαθηματικών

Abstract

This dissertation mainly addresses the study of the current methodology in problem posing and problem solving as well as the impact dynamic geometry software has on them.

The dissertation consists of two parts. The first part, which provides the theoretical background, describes the notion of solving a math problem, presents Poyla's views and the benefits of taking part in the process of solving mathematical problems. Also, the extent to which this process is used in the current school curricula in math education is being mentioned. Following, there is reference to the elements required for a well posed math problem, the importance of problem posing in teaching math as well as the framework and the techniques that lead to successful problem posing according to bibliography. Furthermore, the implementation of new technologies on math education is presented with a particular interest in the impact of dynamic geometry software on problem posing and problem solving.

The second part involves the research framework of the dissertation. The sample of senior high school students that took part at the research answered a questionnaire concerning their views and attitudes towards problem posing, problem solving and the use of new technologies in teaching mathematics. They also had to complete a series of activities in relation to problem posing and problem solving. Two groups of the same size were formed. The first group completed the series of problem posing and problem solving activities by using dynamic geometry software whereas the second group used more traditional methods, like pen and paper. The results of the research are presented in the form tables, bar diagrams and diagrams of similarities. Finally, there are the research results and suggestions for future development.

Keywords

Mathematical problem solving, Mathematical problem posing, Dynamic geometry software, Teaching mathematics.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

ΔΕ	Διπλωματική Εργασία
ΕΑΠ	Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά αποτελούν μία από τις σημαντικότερες επιστήμες που διαχρονικά έχουν βοηθήσει σε σημαντικό βαθμό τον άνθρωπο προκειμένου να αντιμετωπίσει και να ξεπεράσει απλές ή σύνθετες προβληματικές καταστάσεις της καθημερινότητάς του και όχι μόνο. Ταυτόχρονα, αποτελούν τη βάση πολλών άλλων επιστημών, συμβάλλοντας καθοριστικά στην εξέλιξή τους. Η σπουδαιότητα των μαθηματικών και η επίδρασή τους στη συνεχή πρόοδο του ανθρώπου και της επιστήμης, αποτελεί έναν από τους κυριότερους λόγους που θεωρούνται από τα βασικά αντικείμενα διδασκαλίας στα σχολεία όλου του κόσμου. Η διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι μια απλή και εύκολη διαδικασία. Έχει ως κύριο στόχο να βοηθήσει τον διδασκόμενο να αντιληφθεί τί ακριβώς συμβαίνει στον φυσικό κόσμο και παράλληλα να του καλλιεργήσει την κριτική και λογική σκέψη. Ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται τα μαθηματικά στη σημερινή εποχή είναι αποτέλεσμα διεργασιών, αντιλήψεων και ιδεών που διατυπώθηκαν, εφαρμόστηκαν, τροποποιήθηκαν και αναδιαμορφώθηκαν εδώ και εκατοντάδες χρόνια.

Στη σύγχρονη εποχή, ιδιαιτέρως σημαντική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών κατέχουν η επίλυση και η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (NCTM, 1980, 1989, 1991). Η επίλυση προβλημάτων εισάγεται στα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών κατά τη δεκαετία του ’80. Καθοριστικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο πρέπει να επιλύονται τα μαθηματικά προβλήματα αλλά και στην επίδραση που έχει η διαδικασία της επίλυσης στην μαθηματική εκπαίδευση, έχει διαδραματίσει ο George Polya (Schoenfeld, 1987). Παρά τους πολλούς και αντιφατικούς ορισμούς που έχουν δοθεί διαχρονικά στην έννοια της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Schoenfeld, 1992), είναι πλέον ευρέως αποδεκτό από τους παιδαγωγούς, ότι οι μαθητές μέσα από την ενασχόληση τους με την επίλυση προβλημάτων βελτιώνουν την κριτική τους σκέψη, καλλιεργούν τη δημιουργικότητά τους, διευκολύνονται σημαντικά και ουσιαστικά στην κατανόηση και αφομοίωση μαθηματικών εννοιών ενώ παράλληλα μέσω αυτής της διαδικασίας διενεργείται με φυσιολογικό τρόπο η μετάβαση σε καινούργια γνωστικά αντικείμενα (Stanic & Kilpatrick, 1988).

Πολλοί είναι οι ερευνητές στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης που έχουν εστιάσει την προσοχή τους κατά τις τελευταίες δεκαετίες, όχι μόνο στην επίλυση προβλημάτων άλλα και στην τοποθέτησή τους. Η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων θεωρείται πλέον ότι αποτελεί μια δραστηριότητα που συμβάλλει σημαντικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, δίνοντας τη δυνατότητα τόσο στους διδάσκοντες όσο και στους διδασκόμενους, να διατυπώνουν σκέψεις, ιδέες και γενικεύσεις, πραγματοποιώντας έτσι τα πρώτα τους βήματα στο χώρο της μαθηματικής έρευνας (Solórzano, 2015). Επιπλέον, η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων βοηθά σημαντικά στην ανάπτυξη της δημιουργικότητάς τους, στη βελτίωση των μαθηματικών τους δεξιοτήτων ενώ παράλληλα παίζει καθοριστικό ρόλο στο να διαμορφώσουν θετική άποψη για τα μαθηματικά (Espinoza et al., 2014).

Η ραγδαία εξέλιξη και πρόοδος της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια θα ήταν αδύνατο να αφήσει ανεπηρέαστο το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι δυνατότητες εξερεύνησης και πειραματισμού που προσφέρουν οι νέες τεχνολογίες σε δραστηριότητες επίλυσης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων (Cai et al., 2015). Στη σύγχρονη εποχή, τα τεχνολογικά εργαλεία που αξιοποιούνται με μεγαλύτερη συχνότητα κατά διδασκαλία των μαθηματικών είναι οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές, τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, τα υπολογιστικά φύλλα, το διαδίκτυο καθώς και συσκευές διαδραστικών παρουσιάσεων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιχειρείται η μελέτη και διερεύνηση της επίδρασης των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1 Επίλυση μαθηματικού προβλήματος (problem solving)

1.1 Η έννοια του προβλήματος

Ο άνθρωπος έρχεται συχνά αντιμέτωπος με αντίξοες και δυσάρεστες καταστάσεις είτε στην προσωπική του ζωή είτε στον επαγγελματικό και κοινωνικό χώρο που δραστηριοποιείται. Οι καταστάσεις αυτές χαρακτηρίζονται συνήθως ως προβλήματα.

«*Πρόβλημα στην καθημερινότητα, θεωρείται οποιοδήποτε θέμα πρέπει να αντιμετωπιστεί από τον άνθρωπο ή οποιαδήποτε κατάσταση τον απασχολεί εξαιτίας του δυσάρεστου ή πιεστικού χαρακτήρα της*» (Μπαμπινιώτης, 2002). Η έννοια του προβλήματος είναι συνυφασμένη με κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα που εμφανίζει μια υποκειμενική ή αντικειμενική δυσκολία και η οποία είναι αναγκαίο να ξεπεραστεί. Επιπλέον ως πρόβλημα μπορεί να λογίζεται και οποιαδήποτε άποψη ή θέση δεν είναι εύκολο να γίνει κατανοητή (Merriam-Webster).

Γενικότερα, ως πρόβλημα θεωρείται μία κατάσταση κατά την οποία ένα άτομο προσπαθεί να προσδιορίσει κάτι, δίχως να γνωρίζει τον τρόπο, τη μέθοδο ή τα εργαλεία που πρέπει να χρησιμοποιήσει προκειμένου να επιτευχθεί ο στόχος του. Πρόκειται για μια κατάσταση που αντιμετωπίζουν με μεγάλη συχνότητα οι άνθρωποι εκτός από την καθημερινότητα, ακόμα και σε εξειδικευμένες επιστημονικές αναζητήσεις. Τα προβλήματα είναι μάλλον αδύνατο να ξεπεραστούν με έναν ενιαίο, μοναδικό και αποτελεσματικό τρόπο. Πολλές φορές απαιτούνται ειδικές διαδικασίες και ενέργειες που είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με το σωστό χειρισμό της φυσικής γλώσσας, τη λογική, τη σκέψη και την εμπειρία (Βακάλη et al, 1999).

Στη βιβλιογραφία ως πρόβλημα ορίζεται συνήθως μία κατάσταση στην οποία τα εμπλεκόμενα άτομα καλούνται να αξιοποιήσουν και να συνδυάσουν καταλλήλως όλες τις πληροφορίες και τα δεδομένα που έχουν στη διάθεσή τους, προκειμένου να προβούν στις απαιτούμενες ενέργειες που θα τους οδηγήσουν σε ένα επιθυμητό και αποδεκτό αποτέλεσμα.

Αν οι ενέργειες αυτές είναι δυνατό να αναγνωρισθούν άμεσα, τότε η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος εξελίσσεται σε μια τυπική και σχετικά απλή διαδικασία (Kantowski, 1980). Σύμφωνα με τον Αμερικανό φιλόσοφο John Dewey κάθε πρόβλημα περιπλέκει το ανθρώπινο μυαλό και τη σκέψη, προκαλώντας αβεβαιότητα για την ορθότητα κάποιων θέσεων ή απόψεων (Baykul, 2004) διότι δεν είναι εκ προοιμίου γνωστές οι διαδικασίες που είναι πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να αντιμετωπιστεί και να ξεπεραστεί (Çanakçı, 2008).

Μία μορφή της έννοιας του προβλήματος που είναι ευρέως διαδεδομένη ειδικά στο χώρο της εκπαίδευσης, είναι αυτή της ερώτησης που τίθεται από τον διδάσκοντα με στόχο να δοθεί μία απάντηση από τον διδασκόμενο (Henderson et al., 1953). Στην περίπτωση αυτή, ο όρος «πρόβλημα» αποτελεί μια πολυσύνθετη κατάσταση (όχι όμως αναγκαία δύσκολη) κατά την οποία ο διδασκόμενος εμπλέκεται σε ένα οργανωμένο σύστημα ενεργειών που αποβλέπει στην απόκτηση νέων γνώσεων και εμπειριών (Καλλιμάνη & Κρικώνη, 2017).

Πότε όμως μία κατάσταση αποτελεί πρόβλημα; Η απάντηση στο εν λόγω ερώτημα είναι σίγουρο πως δε μπορεί να δοθεί μονοδιάστατα. Κάθε άνθρωπος που βιώνει ένα πρόβλημα, αντιμετωπίζει στην ουσία μια κατάσταση που ο ίδιος θεωρεί και αισθάνεται ότι παρουσιάζει πολλές δυσκολίες (Brookes, 1976). Επομένως πρέπει πάντοτε να λαμβάνεται υπόψη ότι στην έννοια του προβλήματος ή της προβληματικής κατάστασης υπάρχει μια υποκειμενική διάσταση (Schoenfeld, 1985a). Δηλαδή, αυτό που μπορεί να είναι πρόβλημα για κάποιον, ενδεχομένως δεν αποτελεί πρόβλημα για κάποιον άλλο. Επιπλέον, αυτό που μπορεί να αποτελεί πρόβλημα για ένα συγκεκριμένο άτομο σε κάποια χρονική στιγμή, μπορεί να μην είναι πρόβλημα σε κάποια άλλη χρονική περίοδο (Henderson et al., 1953).

Στα πλαίσια της υποκειμενικότητας που διέπει την έννοια του προβλήματος, είναι σύνηθες να δίνονται χαρακτηρισμοί στα διάφορα προβλήματα όπως εύκολα, δύσκολα, πραγματικά, ενδιαφέροντα, συνηθισμένα κλπ. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αποτελούν τις περισσότερες φορές απόψεις και θέσεις των ατόμων που εμπλέκονται στο πρόβλημα και καθορίζονται από τη συμπεριφορά τους κατά την αντιμετώπισή του σε μία δεδομένη στιγμή και κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες (Mason, 2016).

Πολύ συχνά ο άνθρωπος καλείται να ξεπεράσει όχι ένα μεμονωμένο πρόβλημα, αλλά μια σειρά προβλημάτων τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένα μεταξύ τους, έχοντας ένα κοινό σημείο αναφοράς. Ένα τέτοιο σύνολο αλληλένδετων προβλημάτων καλείται «πεδίο προβλημάτων» (Pehkonen 1986, 1992) ή τομέας προβλήματος (Solvang, 1994).

1.2 Το πρόβλημα στα μαθηματικά

Ένα πρόβλημα θα χαρακτηρίζεται ως μαθηματικό όταν κατά την διαδικασία αναζήτησης της λύσης του απαιτείται η χρήση εννοιών που προέρχονται από την μαθηματική επιστήμη (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017). Σε κάθε μαθηματικό πρόβλημα υπάρχει μια δεδομένη κατάσταση (ποσοτική ή όχι) η οποία πρέπει να αντιμετωπιστεί προκειμένου να επιτευχθεί ο επιθυμητός στόχος (Mayer, 1985) δίχως όμως να είναι εξαρχής γνωστά και ξεκάθαρα τα στάδια ή η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί (Krulik & Rudnick, 1987). Γενικότερα, το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως μια κλειστή εργασία με ξεκάθαρο και σαφή στόχο, χωρίς όμως κατ' ανάγκη άμεση ή προφανή απάντηση (Blum & Niss, 1991, Nunokawa, 2005, Polya, 1981). Για την επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας αυτής είναι αναγκαία η εμπλοκή ιδεών και διαδικασιών από το χώρο των μαθηματικών (Haylock & Cockburn, 2008).

Ένα άτομο όταν έρχεται αντιμέτωπο με ένα πρόβλημα, συνήθως αδυνατεί να απαντήσει σε μια δεδομένη ερώτηση ή να ξεπεράσει μια δύσκολη και ιδιαιτέρως απαιτητική κατάσταση, χρησιμοποιώντας τις γνώσεις ή τις τεχνικές που διαθέτει. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να επινοήσει νέους τρόπους και νέες μεθόδους με τις οποίες θα αξιοποιήσει όλες τις πληροφορίες που διαθέτει, προκειμένου να επιτύχει τον στόχο του και να επιλύσει το πρόβλημα (Kantowski, 1977). Αν το πρόβλημα προέρχεται από το χώρο των μαθηματικών, τότε περιέχει ερωτήματα που συνήθως αποτελούν πρόκληση για το μυαλό και το πνεύμα οποιουδήποτε επιχειρήσει να τα απαντήσει (Blum & Niss, 1991). Πρόκειται επομένως για μία μη τυποποιημένη κατάσταση που απαιτεί την επινόηση νέων σύνθετων διαδικασιών και αλγορίθμων (Buchanan, 1987) .

Κάθε μαθηματικό πρόβλημα που είναι σωστά τοποθετημένο, χαρακτηρίζεται από τέσσερα ιδιαίτερα γνωρίσματα:

α) την ύπαρξη ξεκάθαρων αρχικών συνθηκών και σαφούς στόχου

β) την εμπλοκή των μαθηματικών

γ) την επιθυμία του λύτη να ασχοληθεί με την επίλυσή του δ) την ύπαρξη εμφανούς δυσκολίας κατά τη μετάβαση από τα δεδομένα στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Είναι αναγκαίο να επισημανθεί και να τονισθεί ότι στα χαρακτηριστικά γνωρίσματα ενός μαθηματικού προβλήματος περιέχεται και μια συναισθηματική παράμετρος που είναι η επιθυμία του λύτη να ασχοληθεί με το πρόβλημα και την επίλυσή του (Ohio Department of Education, 1980). Με άλλα λόγια, ένα πρόβλημα πρέπει να αρχικά να κεντρίσει το ενδιαφέρον ενός ατόμου και εν συνεχεία το άτομο αυτό να εμπλακεί με την επίλυση, έχοντας είτε εσωτερικά κίνητρα (όπως η χαρά της ενασχόλησης με τα μαθηματικά ή η ικανοποίηση που προσφέρει η επιτυχής λύση) είτε εξωτερικά (όπως η αποδοχή από τον εκπαιδευτικό ή τον κοινωνικό περίγυρο) (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Σύμφωνα με τον Polya, τα προβλήματα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο γενικές κατηγορίες: στα προβλήματα εύρεσης και στα προβλήματα απόδειξης. Στα προβλήματα εύρεσης, αν και δεν είναι γνωστό ένα από τα κύρια μέρη, ο στόχος είναι να προσδιοριστεί το ζητούμενο άγνωστο στοιχείο, αξιοποιώντας τα δεδομένα και τις συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα. Ένα πρόβλημα εύρεσης πρέπει να είναι σωστά διατυπωμένο και να περιγράφει με σαφήνεια το είδος και τη φύση του αγνώστου. Τα βασικά μέρη από τα οποία αποτελείται είναι τα δεδομένα, η συνθήκη και το ζητούμενο. Στα προβλήματα απόδειξης δίνεται με σαφήνεια τόσο η υπόθεση όσο και το συμπέρασμα. Ο σκοπός σε αυτού του είδους τα προβλήματα είναι να αποδειχθεί ουσιαστικά η ορθότητα ή όχι ενός μαθηματικού ισχυρισμού. Τα κύρια μέρη ενός προβλήματος απόδειξης είναι η υπόθεση και το συμπέρασμα που πρέπει να επιβεβαιωθεί ή να απορριφθεί (Polya, 1985, Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

Μία άλλη διάκριση που μπορεί να γίνει στα μαθηματικά προβλήματα είναι σε εφαρμοσμένα και καθαρά. Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά προβλήματα ανήκουν ουσιαστικά στον πραγματικό κόσμο (εκτός δηλαδή του χώρου των μαθηματικών) άλλα για την επίλυσή τους απαιτείται η χρήση και η εμπλοκή μαθηματικών εννοιών ενώ τα καθαρά μαθηματικά προβλήματα, είναι ενσωματωμένα εξ ολοκλήρου στον χώρο των μαθηματικών.

Μια ιδιαίτερη κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων είναι τα λεκτικά προβλήματα (word problems). Πρόκειται για τα προβλήματα εκείνα που ορίζονται ως οι προφορικές περιγραφές προβληματικών καταστάσεων μέσα από τις οποίες εγείρονται ένα ή περισσότερα ερωτήματα. Για να απαντηθούν τα ερωτήματα αυτά, απαιτείται η εφαρμογή μαθηματικών διαδικασιών καθώς και η αξιοποίηση των αριθμητικών δεδομένων που συνήθως δίνονται στη διατύπωση του προβλήματος (Verschaffel et al, 2000). Τα λεκτικά προβλήματα είναι τις περισσότερες φορές εύκολα αναγνωρίσιμα. Παρόλα αυτά πολλοί είναι εκείνοι που δεν κατανοούν πλήρως την έννοια των συγκεκριμένων μαθηματικών προβλημάτων και θεωρούν ότι πρόκειται για προβλήματα στα οποία οι μαθηματικοί όροι και συμβολισμοί περιγράφονται απλώς με λέξεις (π.χ. ποιο είναι το άθροισμα του πέντε με το οκτώ;) ή για προβλήματα που η διατύπωσή τους περιέχει κάποιου είδους ιστορία (Chapman, 2003).

Η λέξη «πρόβλημα» αν και χρησιμοποιείται ευρέως στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης με κοινή ή παραπλήσια ερμηνεία, εντούτοις υπάρχουν ερευνητές που της αποδίδουν πολλαπλές και συχνά αντιφατικές ερμηνείες (Lester, 1994, Schoenfeld, 1992). Για παράδειγμα κάποιοι θεωρούν ότι ως προβλήματα λογίζονται και οι τυποποιημένες ασκήσεις ρουτίνας που αξιοποιούνται από τους εκπαιδευτικούς συνήθως για την εξάσκηση και εμπέδωση νέων μαθηματικών εννοιών και τεχνικών. Βέβαια, η μεγαλύτερη μερίδα ερευνητών αντιμετωπίζει τα μαθηματικά προβλήματα ως μη τυποποιημένες εργασίες που παρουσιάζουν κάποια δυσκολία ή πολυπλοκότητα κατά την προσπάθεια επίλυσής τους (Schoenfeld, 1992, Goos et al, 2000).

Γενικότερα, το πρόβλημα και η άσκηση δεν μπορούν να θεωρηθούν ταυτόσημες έννοιες. Σε ένα πρόβλημα οι διαδικασίες και τα βήματα που πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να προκύψει η επιθυμητή λύση, δεν είναι εκ των προτέρων γνωστά και διαθέσιμα. Δεν υπάρχει δηλαδή ένας ήδη έτοιμος αλγόριθμος που θα καθορίσει πλήρως την πορεία και την εξέλιξη της επίλυσης. Αντιθέτως σε μία άσκηση, η πορεία της λύσης είναι γνωστή και αυτό που απομένει στο άτομο που εμπλέκεται με την επίλυσή της, είναι απλώς να χειριστεί καταλλήλως τα στάδια που πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα (Kantowski, 1977, Lester, 1980). Βέβαια πρέπει πάντοτε να λαμβάνουμε υπόψη ότι ο χαρακτηρισμός μιας εργασίας ως πρόβλημα ή ως άσκηση καθώς και ο τρόπος με τον οποίον θα αντιμετωπιστεί, σχετίζεται άμεσα και με τα άτομα που εμπλέκονται με αυτήν. Αυτό σημαίνει ότι πολλές φορές κάτι που είναι πρόβλημα για ένα άτομο, μπορεί να αποτελεί μια απλή άσκηση για κάποιο άλλο. Για παράδειγμα, η εύρεση του αθροίσματος 2+3 μπορεί να αποτελεί πρόβλημα για ένα παιδί προσχολικής ηλικίας, όχι όμως και για έναν μαθητή της μέσης εκπαίδευσης (Blum & Niss, 1991).

Μελετώντας και αναλύοντας τις διάφορες θέσεις και απόψεις που έχουν διατυπωθεί για την έννοια του μαθηματικού προβλήματος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένα πρόβλημα στο χώρο των μαθηματικών είναι στην ουσία μια εργασία ή μία δράση την οποία κάποιος καλείται να φέρει εις πέρας για πρώτη φορά και με τη δική του πάντα θέληση, χωρίς όμως να γνωρίζει εκ των προτέρων τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να λειτουργήσει ή τις διαδικασίες που είναι απαραίτητο να ακολουθήσει. Στην περίπτωση αυτή το εμπλεκόμενο άτομο σχεδιάζει ή επινοεί τη δική του μέθοδο επίλυσης η οποία στηρίζεται σε γνώσεις, στρατηγικές και δεξιότητες που ήδη γνωρίζει ή έχει διδαχθεί (Hoosain, 2004).

Έπειτα από όλα τα παραπάνω, είναι σαφής η ιδιαιτέρως σημαντική θέση που έχει η έννοια του προβλήματος στο χώρο των μαθηματικών. Το γεγονός ότι τα μαθηματικά αποτελούν ένα ζωντανό κλάδο του επιστημονικού χώρου που εξελίσσεται διαρκώς, οφείλεται κυρίως στην συνεχή κατασκευή και επίλυση προβλημάτων (Μαμωνά-Downs & Παπαδόπουλος, 2017).

1.3 Εισαγωγή στην έννοια της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων

Από την εποχή της αρχαιότητας, ο άνθρωπος ασχολήθηκε με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων προκειμένου να βρει λύσεις και να ξεπεράσει δυσκολίες και εμπόδια που συναντούσε στην καθημερινότητά του. Η χρήση της αριθμητικής και της άλγεβρας στις εμπορικές συναλλαγές ή η χρήση της γεωμετρίας για τη μέτρηση της γης, αποτελούν τα απλούστερα ίσως παραδείγματα που καταδεικνύουν την ενασχόληση των ανθρώπων με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (Burton, 2007).

Η επίλυση προβλημάτων θεωρείται από πολλούς ως η ικανότητα της εφαρμογής μαθηματικών εννοιών σε πληθώρα προβληματικών καταστάσεων, οι οποίες ενδέχεται να πηγάζουν από την καθημερινή ζωή και δραστηριότητα ή να είναι εντελώς άγνωστες και πρωτόγνωρες. Συνήθως οι άνθρωποι που αγαπούν τα μαθηματικά και έχουν μια έφεση σε αυτά, θεωρούν ότι δράσεις όπως η επίλυση προβλημάτων, η μοντελοποίηση, η γεωμετρική ερμηνεία προτάσεων, οι γεωμετρικές κατασκευές ή οι αποδείξεις θεωρημάτων, είναι συνυφασμένες με τα μαθηματικά. Από την άλλη πλευρά, άτομα που δεν έχουν ενεργή ενασχόληση με τα μαθηματικά, πιστεύουν ότι οποιαδήποτε μαθηματική ενέργεια ή δραστηριότητα, λογίζεται ως επίλυση προβλημάτων (Stanic & Kilpatrick, 1988).

Μεγάλη μερίδα μαθητών (και όχι μόνο) θέτει συχνά ερωτήματα όπως «τι ακριβώς κάνουν οι μαθηματικοί;», «γιατί πρέπει να μαθαίνουμε τα μαθηματικά;» ή «τι είναι τα μαθηματικά;». Οι πρώτες απαντήσεις που θα έρχονταν πρόχειρα στο μυαλό των περισσοτέρων (ειδικά για την τελευταία ερώτηση) θα συμπεριλάμβαναν έννοιες όπως οι αριθμοί, η άλγεβρα, η γεωμετρία, οι πιθανότητες, η στατιστική, ο διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός κλπ. Εμβαθύνοντας λίγο περισσότερο, στις απαντήσεις θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν και πιο εξειδικευμένες έννοιες όπως η έρευνα, ο συλλογισμός, η λογική, η ανακάλυψη ή η επίλυση προβλημάτων. Οι τελευταίες έννοιες περιγράφουν ένα μεγάλο σύνολο μαθηματικών διεργασιών με ιδιαίτερη σημασία και βαρύτητα στη μαθηματική επιστήμη. Το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών των Η.Π.Α. (N.C.T.M.) μελετώντας και ερευνώντας θεμελιώδη ερωτήματα για τη φύση των μαθηματικών (κυρίως στο χώρο της εκπαίδευσης), κατέληξε ότι η επίλυση προβλημάτων αποτελεί την καρδιά των μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics, 1980, 1989).

Αν ο τρόπος ζωής των ανθρώπων ήταν διαφορετικός και η καθημερινότητα χαρακτηριζόταν από μια σταθερή και αμετάβλητη κατάσταση ρουτίνας στην οποία θα ήταν αναγκαίες κάποιες ελάχιστες δουλειές και δραστηριότητες, τότε το να γνωρίζει κάποιος τεχνικές και τρόπους επίλυσης προβλημάτων δε θα ήταν ούτε επιτακτικό ούτε αναγκαίο. Σε μία τέτοιου είδους κοινωνία, ελάχιστες θα ήταν οι απαραίτητες εργασίες και αυτές θα βασίζονταν στην ανθρώπινη μνήμη και συνήθεια. Όμως, ευτυχώς ή δυστυχώς, ο κόσμος στον οποίο ζούμε και δραστηριοποιούμαστε δεν είναι απλός και αμετάβλητος, αντιθέτως αλλάζει με γρήγορο ρυθμό. Ο καθένας επομένως είναι σε θέση να αντιληφθεί ότι στο μέλλον οι καταστάσεις και οι συνθήκες της ζωής θα είναι ριζικά διαφορετικές συγκριτικά με τις σημερινές. Σε έναν τέτοιον λοιπόν κόσμο είναι επιβεβλημένη η ικανότητα των ανθρώπων να προσαρμόζονται και να επιλύουν διάφορα προβλήματα που συνεχώς εγείρονται.

Ο όρος «επίλυση προβλήματος», συνοδεύεται από πλήθος αντιφατικών ορισμών που έχουν δοθεί από πολλούς ερευνητές και συγγραφείς (Schoenfeld, 1992). Οι διάφορες ερμηνείες μπορεί να διαφέρουν και να ποικίλουν τόσο στα πλαίσια των επιστημονικών στόχων που έχουν τεθεί, όσο και στον τρόπο μελέτης και διερεύνησης των γνωστικών πτυχών που ακολουθεί ένα άτομο, προκειμένου να οδηγηθεί στη λύση ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, σε προβλήματα που εντάσσονται στο χώρο της μηχανικής, η διαδικασία της επίλυσης επικεντρώνεται στην αναζήτηση ενός ευρύτερου πλαισίου που οδηγεί στο βέλτιστο αποτέλεσμα ενώ σε προβλήματα ανθρωπιστικού περιεχομένου, η επίλυση εστιάζει κυρίως στην τεκμηρίωση προσωπικών θέσεων και απόψεων καθώς και στον τρόπο με τον οποίο αυτές επιδρούν στην λύση του προβλήματος (Frensch & Funke, 1995).

Η επίλυση ενός προβλήματος περιλαμβάνει όλες εκείνες τις διεργασίες που πραγματοποιεί ένα άτομο, αξιοποιώντας τις γνώσεις που έχει ήδη αποκτήσει, έτσι ώστε να κατανοήσει αρχικώς τις απαιτήσεις μιας άγνωστης προς αυτό κατάστασης και εν συνεχεία (συνδυάζοντας τόσο τις γνώσεις όσο και τις δεξιότητές του) να επιχειρήσει να την αντιμετωπίσει (Krulik & Rudnick, 1987). Αποτελεί στην ουσία μια διαδικασία που περιέχει ένα σύνολο παραγόντων και δραστηριοτήτων που αποβλέπουν στο να επιτευχθεί ένας στόχος που είναι καθορισμένος με σαφήνεια. Η επίτευξη του στόχου αυτού εξαρτάται και επηρεάζεται από διάφορες παραμέτρους, όπως είναι οι δεξιότητες, οι γνώσεις και η εμπειρία που διαθέτει το άτομο που εμπλέκεται με την επίλυση του προβλήματος. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος που καθίσταται δύσκολη (αλλά όχι ανέφικτη) τόσο η διδασκαλία όσο και η εκμάθηση μεθόδων και τρόπων επίλυσης των προβλημάτων (Dendane, 2009). Βέβαια αξίζει να σημειωθεί πως το βασικότερο και πιο ουσιώδες στοιχείο που αποτελεί το κλειδί για την επίλυση ενός προβλήματος, δε βρίσκεται σε αυτό καθεαυτό το πρόβλημα, αλλά στο άτομο ή στην ομάδα ατόμων που ασχολούνται με τη λύση του. Η επιτυχής ή όχι αντιμετώπιση της πολυπλοκότητας ενός προβλήματος καθώς και των δυσκολιών που εγείρονται στα διάφορα στάδια επίλυσης, είναι συνάρτηση των γνώσεων, των εμπειριών και της διάθεσης του λύτη (Blum & Niss, 1991, Borasi, 1986, Kilpatrick, 1985, Schoenfeld, 1985a).

Μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του ’50, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων θεωρούταν από πολλούς ως μια μαγική δραστηριότητα, με στοιχεία μυστικισμού η οποία στηριζόταν σε ανεξήγητες πράξεις και ενέργειες. Κατά τις δεκαετίες του ’80 και του ’90 αναπτύχθηκε μια ιδιαίτερη ρητορική με ισχυρή και καταλυτική επίδραση στην μαθηματική εκπαίδευση. Πρόκειται για μια χρονική περίοδο κατά την οποία διάφοροι ειδικοί τοποθετούνταν σχετικά με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, υποστηρίζοντας και υιοθετώντας διαφορετικές θέσεις και απόψεις, χαρακτηρίζοντας παράλληλα κάθε δραστηριότητα που είχαν στο μυαλό τους ως επίλυση προβλήματος (Wilson et al., 1993).

Ένας από τους βασικότερους στόχους της διδασκαλίας και της μάθησης στο χώρο των μαθηματικών είναι η βελτίωση της ικανότητας επίλυσης σύνθετων προβλημάτων (Wilson et al., 1993). Η εκμάθηση τρόπων και μεθόδων για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί ίσως τον κύριο λόγο για τη μελέτη των μαθηματικών (National Council of Supervisors of Mathematics, 1978).

Στο πέρασμα των χρόνων, πολλοί ήταν οι ερευνητές που ασχολήθηκαν με τις επιδιώξεις, τα οφέλη και τους στόχους που επιτυγχάνονται μέσα από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, προσπαθώντας να προσδιορίσουν το πλαίσιο μέσα στο οποίο θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια την έννοια της επίλυσης προβλημάτων. Δυστυχώς όμως οι διάφορες έρευνες συχνά οδηγούσαν σε αντιφατικά συμπεράσματα, γεγονός που περιέπλεκε ακόμη περισσότερο την όλη κατάσταση (Schoenfeld, 1992).

Στη σύγχρονη εποχή, είναι ευρέως αποδεκτό ότι η διαρκής ενασχόληση ενός ατόμου με την επίλυση προβλημάτων, συμβάλλει καθοριστικά στην ανάπτυξη της κριτικής σκέψης, του συλλογισμού καθώς και στην αφομοίωση διάφορων μαθηματικών εννοιών (Reys et al, 2001, Schoenfeld, 1992, Schoen & Charles, 2003). Επιπροσθέτως, βοηθά στην βελτίωση των μαθηματικών δεξιοτήτων (Kilpatrick, 1969).

Για πολλούς ανθρώπους τα μαθηματικά είναι δυσνόητα με αποτέλεσμα να πιστεύουν πως η αξιοποίηση και εφαρμογή τους στην καθημερινότητα είναι μάλλον αδύνατη. Η πραγματικότητα βέβαια είναι κάπως διαφορετική. Τα μαθηματικά αποτελούν το ισχυρότερο ίσως εργαλείο που μπορεί να αξιοποιηθεί από τον καθένα, προκειμένου να επιλυθούν μικρά ή μεγάλα καθημερινά προβλήματα. Τόσο η μαθηματική σκέψη όσο και ο μαθηματικός συλλογισμός είναι απαραίτητα στοιχεία για την αντιμετώπιση καθημερινών προβληματικών καταστάσεων όπως ο οικογενειακός προϋπολογισμός, η αποταμίευση, ο υπολογισμός φιλοδωρήματος σε ένα εστιατόριο, η εκτίμηση χιλιομετρικών αποστάσεων κλπ (Leonard et al., 2004).

Μέσα από έρευνες που διεξήχθησαν σε μαθηματικά τμήματα διαφόρων Αμερικανικών κολλεγίων το 1983 σχετικά με τον ρόλο της επίλυσης προβλημάτων στα μαθηματικά, διαπιστώθηκε ότι μέσω της επίλυσης προβλημάτων βελτιώνεται σε μεγάλο βαθμό η δημιουργική σκέψη των μαθητών, γίνεται καλύτερα η προετοιμασία τους για μαθηματικούς διαγωνισμούς, αναπτύσσονται οι ευρετικές στρατηγικές τόσο στους μαθητές όσο και στους καθηγητές, κατανοείται καλύτερα η χρήση τεχνικών και μηχανισμών για τη μαθηματική μοντελοποίηση και τέλος προάγεται η κριτική σκέψη, ο ορθολογικός συλλογισμός και η τεκμηρίωση (Schoenfeld, 1983).

Η διαρκής βελτίωση της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων είναι ένας κοινά αποδεκτός πλέον στόχος από τη διεθνή επιστημονική κοινότητα. Ο ρόλος των προβλημάτων στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεξιοτήτων καθώς και στη βελτίωση της μαθηματικής σκέψης ενός ατόμου, αποτέλεσε θέμα προς συζήτηση σε μεγάλα διεθνή συνέδρια Μαθηματικών, όπως το Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στη Μόσχα το 1966, η Διάσκεψη του Συμβουλίου Μαθηματικών Επιστημών στις Ηνωμένες Πολιτείες και το συνέδριο του Συλλόγου Καθηγητών Μαθηματικών την ίδια χρονιά στην Αγγλία. Τα συμπεράσματα όλων των επιστημονικών συζητήσεων επιβεβαίωναν την ιδιαίτερη σημασία που έχει η επίλυση των προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών διότι αφενός αναπτύσσει τις μαθηματικές ικανότητες, αφετέρου τονώνει και ενισχύει την ανεξάρτητη δημιουργική σκέψη (Kilpatrick, 1969).

Γενικά, η επίλυση προβλημάτων λογίζεται ως μια ιδιαιτέρως ωφέλιμη και διδακτική δραστηριότητα που συνδυάζει τη συμμετοχή όλων των εμπλεκομένων σε μια σειρά γνωστικών ενεργειών, λαμβάνοντας υπόψη βέβαια την ήδη υπάρχουσα γνώση και εμπειρία. Για την επιτυχή έκβαση της επίλυσης ενός προβλήματος θα πρέπει να αξιοποιούνται διαρκώς όλα τα επιμέρους συμπεράσματα καθώς και η διαίσθηση του λύτη (Lester & Kehle, 2003). Οι μηχανισμοί και οι διαδικασίες που εφαρμόζονται κατά την επίλυση ενός προβλήματος πρέπει να δικαιολογούνται και να εξηγούνται διαρκώς, έτσι ώστε να είναι δυνατό να προβλεφθεί οποιοδήποτε τυχαίο φαινόμενο ή απρόσμενη αλλαγή των συνθηκών που μπορεί να επηρεάσει την πορεία της επίλυσης ή τη συμπεριφορά του λύτη (Newell et al., 1958)

1.4 Ιστορικά στοιχεία

Το 1945 αποτέλεσε μια χρονιά ορόσημο για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Ήταν η χρονιά κατά την οποία δημοσιεύθηκε για πρώτη φορά στην Αγγλική γλώσσα το κλασικό έργο του Max Wertheimer, «Productive Thinking». Στο βιβλίο αυτό γίνεται αναφορά στην παραγωγική σκέψη και τη συμβολή της στη μετάβαση από μία κατάσταση αμηχανίας και σύγχυσης σε μία νέα ξεκάθαρη κατάσταση (Wertheimer, 1996).

Την περίοδο εκείνη, η διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία στηριζόταν κυρίως στην εξάσκηση μέσω της επίλυσης πολλών παραδειγμάτων και ασκήσεων, ως απλές εφαρμογές των διδασκομένων γνώσεων. Αυτή όμως η τακτική - μέθοδος διδασκαλίας άρχισε να δέχεται αμφισβήτηση, η οποία σταδιακά γινόταν ολοένα και πιο έντονη.

Έγινε αντιληπτό ότι η έως τότε διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών δεν προωθούσε τη μαθηματική σκέψη. Η άποψη αυτή υιοθετήθηκε από τους γκεσταλτιστές της εποχής, οι οποίοι επισήμαναν ότι οι μαθητές αρκούνταν απλώς στην απομνημόνευση, δίχως να κατανοούν την ουσία των μαθηματικών εννοιών που μελετούσαν. Παράλληλα οι συμπεριφοριστές διατύπωναν τις δικές τους αντιρρήσεις για το μοντέλο διδασκαλίας των μαθηματικών που εφαρμοζόταν, υποστηρίζοντας ότι η συνολική μαθηματική συμπεριφορά θα έπρεπε να στηρίζεται στην απόκριση των μαθητών στα διάφορα ερεθίσματα που θα τους δίνονταν. Παρά τις διάφορες θέσεις που εξέφραζαν όσοι διαφωνούσαν με τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών, κανείς δεν αντιπρότεινε κάποια εναλλακτική θεωρία μάθησης ή διδασκαλίας.

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο ψυχολογικής και παιδαγωγικής σύγχυσης που επικρατούσε, εκδόθηκε το βιβλίο του George Polya «How to Solve it», που αποτέλεσε τη σπουδαιότερη εργασία (με πολλαπλά οφέλη) για την επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων. Το έργο αυτό ήταν για τον Polya το πρώτο από μια σειρά πολύ σημαντικών βιβλίων που έγραψε ο ίδιος σχετικά με τη φύση της μαθηματικής σκέψης. Ο Polya στιγμάτισε τόσο την μαθηματική εκπαίδευση όσο και την έννοια της επίλυσης προβλημάτων, καθώς σηματοδότησε ουσιαστικά μία ξεκάθαρη γραμμή που οριοθετούσε δύο εποχές: την εποχή της επίλυσης προβλημάτων πριν την επιρροή του και μετά από αυτήν. Όλα αυτά καταδεικνύουν το μέγεθος της επίδρασης του Polya στη διδασκαλία των μαθηματικών, στη μελέτη της μαθηματικής σκέψης αλλά και στη διερεύνηση της δημιουργικής σκέψης (Schoenfeld, 1987).

1.5 Τα τέσσερα βήματα του Polya

Σύμφωνα με τον Polya, η επίλυση προβλημάτων είναι το κυριότερο ζητούμενο της ενασχόλησης ενός ατόμου με τα μαθηματικά. Αυτός εξάλλου είναι και ο λόγος που αποκτά ιδιαιτέρως βαρύνουσα σημασία η διδασκαλία του τρόπου με τον οποίο κάποιος θα οδηγήσει τη σκέψη του σε ξεκάθαρα και σαφή μονοπάτια, ώστε να επιτευχθεί η ορθή λύση των προβλημάτων (Polya, 1965). Ο τρόπος με τον οποίο πρέπει να σκέφτεται κάποιος, αποτελεί θεμελιώδες ζήτημα για την αναζήτηση της λύσης ενός προβλήματος. Πρέπει ωστόσο να τονιστεί ότι υπάρχει ουσιώδης (ίσως και χαοτική) διαφορά ανάμεσα στη διδασκαλία του να μάθει ένα άτομο πώς να σκέφτεται από το να καθοδηγείται στο τι να σκεφτεί ή σε ποιες ενέργειες πρέπει να προβεί (Wilson et al., 1993).

Κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, η θέση και η άποψη του λύτη για το πρόβλημα, μπορεί να διαφοροποιείται. Αρχικά, η γενική εικόνα του λύτη για το πρόβλημα ενδέχεται να είναι ελλιπής. Όσο όμως υπάρχει πρόοδος στη διαδικασία επίλυσης, η αντίληψή του για αυτό τροποποιείται έως ότου αποκτήσει ολοκληρωμένη μορφή όταν τελικά βρεθεί η λύση του (Pólya, 1957).

Στο βιβλίο του Polya «How to Solve it», διατυπώνεται το γενικό πλαίσιο επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος καθώς και κάποιες απαραίτητες υποδείξεις που βοηθούν στην επιτυχή εφαρμογή του. Σε αυτό το γενικό πλαίσιο περιέχεται η αναφορά και περιγραφή των τεσσάρων βημάτων που πρέπει να ακολουθηθούν. Τα βήματα αυτά είναι τα εξής:

1ο βήμα: η κατανόηση του προβλήματος

2ο βήμα: η κατάστρωση ενός σχεδίου επίλυσης

3ο βήμα: η υλοποίηση του σχεδίου

4ο βήμα: ο αναδρομικός έλεγχος της λύσης

Τα τέσσερα παραπάνω βήματα έχουν αναμφισβήτητα την δική τους σπουδαιότητα καθώς η εφαρμογή τους αποσκοπεί στην αποφυγή λαθών και παραλείψεων κατά τη διαδικασία της επίλυσης. Βέβαια, δεν αποκλείεται κάποιος να έχει μια εξαιρετική ιδέα που να τον οδηγήσει στη λύση ενός προβλήματος, παρακάμπτοντας κάποιο ή κάποια από τα παραπάνω στάδια. Σε αυτήν όμως την περίπτωση, αυξάνεται η πιθανότητα να καταλήξει σε ασαφή συμπεράσματα ή σε αδιέξοδα (Pólya, 1957).

Ας επιχειρήσουμε να αναλύσουμε διεξοδικά τα βήματα που προτείνει ο Polya για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Το πρώτο βήμα, δηλαδή η κατανόηση του προβλήματος, ξεκινά από τον προσδιορισμό του ζητούμενου. Ο λύτης θα πρέπει να έχει αποσαφηνίσει πλήρως το βασικό ερώτημα που τίθεται καθώς και το στόχο του προβλήματος (Michener, 1978). Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να αναγνωρισθούν όλα τα δεδομένα και να εντυπωθούν ξεκάθαρα στο μυαλό του λύτη, να εντοπισθούν οι χρήσιμες συνθήκες που τα συνδέουν και να διαχωριστούν από εκείνες που είναι περιττές ή αντιφατικές. Ενδέχεται να αξιοποιηθούν και άλλες πρόσθετες πληροφορίες που κάποιες φορές προκύπτουν μέσα από διαγράμματα ή υποσημειώσεις του προβλήματος (Tjoe, 2019).

Θεωρείται μάλλον αφελές να επιχειρήσει κάποιος να οδηγηθεί στη λύση ενός προβλήματος χωρίς να το έχει κατανοήσει πλήρως. Το λάθος αυτό συναντάται συχνά στα σχολεία από τους μαθητές. Ειδικά στο χώρο της εκπαίδευσης, για να καταφέρει ένας μαθητής να φτάσει στη λύση ενός προβλήματος πρέπει αφενός να το έχει κατανοήσει πλήρως και αφετέρου να έχει κίνητρο και ενδιαφέρον για να ασχοληθεί με την επίλυσή του.

Το δεύτερο βήμα, δηλαδή η κατάστρωση ενός σχεδίου επίλυσης, είναι συνήθως μια χρονοβόρα και επίπονη διαδικασία που προκύπτει έπειτα από επανειλημμένες και πολλές φορές ανεπιτυχείς προσπάθειες. Για να δημιουργηθεί ένα αξιόλογο σχέδιο επίλυσης, απαιτείται πέρα από την πλήρη κατανόηση του προβλήματος, η ύπαρξη κατάλληλου γνωστικού υπόβαθρου ενώ πολλές φορές καταλυτικό ρόλο διαδραματίζει η εμπειρία που έχει αποκτήσει ο λύτης από την ενασχόλησή του με την επίλυση παρόμοιων προβλημάτων. Για να δημιουργηθεί ένα σχέδιο επίλυσης, πρέπει το πρόβλημα να προσεγγίζεται από διαφορετικές πλευρές, αξιοποιώντας την κάθε λεπτομέρεια αλλά και τις ήδη υπάρχουσες μαθηματικές γνώσεις. Όλη αυτή η διεργασία αποσκοπεί στη σύλληψη κάποιας ιδέας που θα υποδείξει τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος ή έστω ενός μέρους αυτού (Pólya, 1957).

Ένα καλά καταρτισμένο σχέδιο επίλυσης προβλήματος, απλουστεύει, διευκολύνει, κάνει πιο κατανοητή τη σύνδεση δεδομένων και ζητούμενων και παράλληλα καθοδηγεί τον λύτη στην πραγματοποίηση των κατάλληλων υπολογισμών. Επιπροσθέτως, συμβάλλει στην αξιοποίηση των εμπειριών του λύτη από ανάλογα προβλήματα που έχουν επιλυθεί στο παρελθόν, τα οποία ενδέχεται να διαφέρουν από το προς επίλυση πρόβλημα ως προς τη διατύπωση, τη δομή των δεδομένων ή τον τρόπο παρουσίασης των ζητούμενων (Gick & Holyoak, 1980).

Το τρίτο στάδιο του Polya, η υλοποίηση του σχεδίου επίλυσης, πρέπει να πραγματοποιείται με ιδιαίτερη προσοχή και να εκτελείται σύμφωνα με τα όσα έχουν σχεδιαστεί αλλά και με βάση τις γνώσεις που έχουν ήδη αποκτηθεί στα μαθηματικά. Η ορθή εκτέλεση των διαφόρων ενεργειών πρέπει να ελέγχεται διαρκώς (Garofalo & Lester, 1985).

Η εκτέλεση του σχεδίου επίλυσης ξεκινά από την ιδέα (τυχερή ή όχι) που θα οδηγήσει στη λύση του προβλήματος. Εν συνεχεία πραγματοποιούνται όλες οι αλγεβρικές και γεωμετρικές πράξεις που έχουν αναγνωριστεί εξαρχής ότι είναι εφικτές. Ο λύτης πρέπει να είναι πεπεισμένος για την ορθότητα των βημάτων που εκτελεί κατά την εξέλιξη του πλάνου, αιτιολογώντας τα με επίσημο τρόπο ή έστω με τη διαίσθηση και τη διορατικότητά του. Αν το πρόβλημα είναι σύνθετο και περίπλοκο, τότε τα διάφορα βήματα που έχουν αποφασισθεί να εκτελεσθούν κατά την υλοποίηση του σχεδίου, μπορούν να διαιρεθούν σε μικρότερα βήματα έτσι ώστε να είναι ευκολότερος ο έλεγχος της ορθότητάς τους.

Η επίτευξη της λύσης ενός προβλήματος δε σημαίνει αναγκαστικά ότι η όλη διαδικασία έχει ολοκληρωθεί. Αυτό ακριβώς πρεσβεύει το τέταρτο στάδιο του Polya. Όταν λυθεί ένα πρόβλημα, ειδικά στην περίπτωση που η λύση προέρχεται από επίπονη και χρονοβόρα διαδικασία, δημιουργείται εύλογα η πεποίθηση ότι το πρόβλημα πιθανόν να λύνεται και με κάποιον διαφορετικό, απλούστερο ή συντομότερο τρόπο. Η εύρεση εναλλακτικού τρόπου λύσης αποτελεί μια διαδικασία που βοηθάει τους λύτες (ειδικά αν αυτοί είναι μαθητές) να εξασκηθούν και να αποκτήσουν μεγαλύτερη εμπειρία στην επίλυση προβλημάτων, ενώ ταυτόχρονα λειτουργεί και ως επαλήθευση της αρχικής λύσης.

Ο αναδρομικός έλεγχος, ξεκινά από τη σωστή λύση που έχει βρεθεί. Εξετάζεται η ορθότητα της λύσης από κάθε οπτική γωνία καθώς και ο τρόπος σύνδεσής της με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις. Στη συνέχεια ερευνώνται εκτενέστερα τα διάφορα μέρη της λύσης ελέγχοντας αν μπορούν να παρουσιαστούν απλούστερα ή συντομότερα (Pólya, 1957).

Μέσα από την υλοποίηση του αναδρομικού ελέγχου, ο λύτης εξετάζει ενδελεχώς την ορθότητά της, καθώς και την απουσία λαθών ή σφαλμάτων στη συλλογιστική του (Silver et al., 1995). Ελέγχει επίσης αν υπάρχουν ή όχι εναλλακτικές προσεγγίσεις για την επίλυση του προβλήματος, οι οποίες μπορεί να είναι απλούστερες, συντομότερες ή καλύτερα διατυπωμένες. Σε περίπτωση που υπάρχουν, τότε μπορεί να φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμες και να αξιοποιηθούν μελλοντικά σε κάποιο άλλο παραπλήσιο πρόβλημα (Silver et al., 2005). Σε κάθε πάντως περίπτωση, ο λύτης αναπτύσσει τις ικανότητές του και αποκτά νέες εμπειρίες στην επίλυση προβλημάτων (Pólya, 1957).

Κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, παράλληλα με την εφαρμογή των τεσσάρων βημάτων του Polya, χρειάζεται πολλές φορές να αξιοποιηθούν και κάποιες τεχνικές οι οποίες συμβάλλουν στο να γίνει το πρόβλημα ευκολότερα επιλύσιμο. Ο Polya ασχολήθηκε επισταμένα με τέτοιου είδους τεχνικές, τις οποίες ονόμασε ευρετικές στρατηγικές. Πρόκειται ουσιαστικά για χρήσιμες υποδείξεις, που συμβάλλουν στο να ξεπεραστούν αντιξοότητες οι οποίες μπορεί να εμφανίζονται σε ιδιαιτέρως απαιτητικά και δύσκολα προβλήματα. Κάποιες από αυτές τις ευρετικές στρατηγικές που μπορούν να εφαρμοστούν για την κατανόηση ενός προβλήματος είναι η εστίαση στο ζητούμενο ή στα δεδομένα ή η σχεδίαση ενός διαγράμματος. Αντίστοιχα για την δημιουργία του σχεδίου λύσης είναι η αξιοποίηση παραπλήσιων προβλημάτων ή η μελέτη ανάλογων προβλημάτων ενώ για τον έλεγχο της ορθότητας της λύσης είναι η αντίστροφη εργασία (Schoenfeld, 1979a, b).

1.6 Διαδικασία επίλυσης προβλημάτων – Ευρετικές

Η επίλυση προβλημάτων θεωρείται συχνά ως μία από τις πολλές δεξιότητες που πρέπει να διδαχθούν και να καλλιεργηθούν στο σχολείο. Στην πραγματικότητα όμως, δεν πρόκειται για μια απλή δεξιότητα, αλλά για μια σειρά ικανοτήτων που πρέπει να αναπτυχθούν στους μαθητές προκειμένου να είναι σε θέση να αντιμετωπίζουν με επιτυχία από απλά προβλήματα ρουτίνας έως περισσότερο σύνθετα και πολύπλοκα (Stanic & Kilpatrick, 1988).

Γενικά, είναι αποδεκτό πως η διδασκαλία των μαθηματικών έχει ως κύριο στόχο να βοηθήσει τους διδασκόμενους να αντιληφθούν και να κατανοήσουν τον φυσικό κόσμο, να αναπτύξουν τη λογική σκέψη, να αφομοιώσουν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες έτσι ώστε είναι σε θέση να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα. Παράλληλα είναι αναγκαίο να τους παρέχει τη δυνατότητα και τις ευκαιρίες, να αποκτήσουν τη γνώση με τρόπο ανακαλυπτικό και δυναμικό και όχι μέσω της αποστήθισης και της στείρας εφαρμογής κανόνων. Ειδικά για την διαδικασία της επίλυσης προβλημάτων, είναι απαραίτητο να ενθαρρύνονται οι μαθητές στο να αναζητούν λύσεις και να ανακαλύπτουν διαδικασίες επίλυσης, να διατυπώνουν εικασίες και όχι απλώς να απομνημονεύουν τύπους και μεθόδους που έχουν εφαρμόσει κατά το παρελθόν. Μόνον έτσι θα μπορέσουν να κατανοήσουν αλλά και να αναγνωρίσουν τα μαθηματικά ως επιστήμη (National Research Council, 1989).

Σύμφωνα με την εμπειρία των περισσοτέρων εκπαιδευτικών, οι μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων παρατηρείται να υιοθετούν σιωπηρά κάποιες λανθασμένες θέσεις, όπως:

- η ορθότητα κάθε προβλήματος που περιέχεται στα σχολικά εγχειρίδια ή παρουσιάζεται από τον διδάσκοντα είναι αδιαμφισβήτητη
- σε κάθε πρόβλημα υπάρχει μόνο μία σωστή λύση
- σε κάθε πρόβλημα πρέπει να δοθεί απάντηση
- όλοι οι αριθμοί που εμφανίζονται στην εκφώνηση ενός προβλήματος πρέπει να

αξιοποιηθούν για να βρεθεί η λύση

- αν οι μαθηματικές πράξεις που εκτελούνται κατά την επίλυση του προβλήματος δεν παρουσιάζουν δυσκολίες, τότε η πορεία της λύσης είναι προς τη σωστή κατεύθυνση (Reusser et al., 1997)

Η επίλυση προβλημάτων είναι μια νοητική διεργασία και επηρεάζεται από διάφορες ψυχολογικές παραμέτρους. Ένας από τους λίγους ψυχολόγους που μελέτησε τον τρόπο επίλυσης πολύπλοκων μαθηματικών προβλημάτων ήταν ο Karl Duncker, ο οποίος υποστήριξε ότι για να έχει επιτυχή κατάληξη η ενασχόληση ενός ατόμου με ένα πρόβλημα, είναι χρήσιμο να εφαρμοστεί η τεχνική του «σκέφτομαι δυνατά». Το να αναπαράγει κάποιος τις σκέψεις του φωναχτά, αποτελεί μια αποτελεσματική προσέγγιση της επεξεργασίας των πληροφοριών ενός προβλήματος (Hunt, 1968).

Ο τρόπος ή η διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί για να επιλυθεί ένα πρόβλημα, αποτέλεσε για πολλούς ερευνητές και συγγραφείς μείζον θέμα προς μελέτη, με συνέπεια τη διατύπωση διάφορων θέσεων και απόψεων από τις οποίες άλλες περισσότερο και άλλες λιγότερο σχετίζονταν με τα όσα διατύπωσε ο Polya (Johnson, 1944). Για παράδειγμα, ο John Dewey στο βιβλίο του «How we think», έδωσε ιδιαίτερη έμφαση και βαρύτητα στον αυτοστοχασμό κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων (Dewey, 1933). Ο Schoenfeld από τη δική του πλευρά, εστίασε στη σωστή καθοδήγηση μέσω της οποίας προάγεται με συστηματικό και εποικοδομητικό τρόπο η σκέψη, ο στοχασμός και ο προβληματισμός (Schoenfeld, 1985b), ενώ ο Duncker τόνισε τη σημασία που έχει η πλήρης κατανόηση των δεδομένων του προβλήματος αφού η λύση προκύπτει πάντοτε από τις απαιτήσεις των ζητούμενων σε σχέση με τα δεδομένα (Dunker, 1945).

Η θέση του Duncker για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων μελετήθηκε επισταμένα από ερευνητές που ασχολήθηκαν ιδιαιτέρως με την επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Σύμφωνα με σύγχρονες μελέτες, ένα πρόβλημα επιλύεται μέσω διαδοχικών αναπαραστάσεων που είναι δοσμένες με σαφήνεια και επιπροσθέτως ενσωματώνουν τη συσχέτιση των δοσμένων πληροφοριών με τους επιθυμητούς στόχους του προβλήματος, θέτοντας παράλληλα ενδιάμεσους στόχους των οποίων η επίτευξη οδηγεί στην τελική λύση. Αυτού του είδους η διαδικασία αποτελεί ουσιαστικά μια ποιοτική ανάλυση του προβλήματος, που απαιτεί αρκετό χρόνο για τους νέους λύτες ενώ επιτυγχάνεται γρηγορότερα για τους πιο έμπειρους (Silver & Marshall, 1989).

Ο Donald Johnson υποστήριξε ότι για να επιτευχθεί με ορθό και αποτελεσματικό τρόπο η επίλυση ενός προβλήματος, είναι απαραίτητο να ακολουθηθούν τα εξής βήματα:

- προσανατολισμός στο πρόβλημα
- παραγωγή υλικού σκέψης
- έλεγχος υποθέσεων

Τα τρία αυτά βήματα πλαισιώνονται βέβαια από διαδικασίες και δραστηριότητες οι οποίες δε διαχωρίζονται ευκρινώς. Αντιθέτως πολλές φορές είναι εμφανής η επικάλυψη και αλληλεπίδρασή τους (Johnson, 1944).

Ο προσανατολισμός σε ένα πρόβλημα περιλαμβάνει όλες εκείνες τις διεργασίες που πρέπει να πραγματοποιηθούν, προκειμένου να συλλάβει κάποιος τις κατάλληλες ιδέες που θα αποτελέσουν το υλικό για σκέψη και οι οποίες θα παραμένουν διαρκώς διαθέσιμες για επεξεργασία και περεταίρω ανάλυση. Η αποδοτικότητα του κάθε ατόμου σε αυτό το στάδιο επίλυσης ενός προβλήματος, επηρεάζεται εν μέρει τόσο από την ψυχολογική όσο και από τη σωματική του κατάσταση. Επιπλέον εξαρτάται από το τι σημαίνει το πρόβλημα για αυτόν, αν δηλαδή κατανοεί πλήρως το νόημά του, τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα και τις σχέσεις που περιγράφονται, καθώς και από τα κίνητρα που έχει για να το επιλύσει, όπως μπορεί να είναι για παράδειγμα η χαρά της επιτυχίας, η αποδοχή που θα βιώσει από τους άλλους ή απλώς η τόνωση της αυτοπεποίθησης του (Henderson & Pingry, 1953).

Όλες οι παράμετροι που προαναφέρθηκαν και επηρεάζουν τον προσανατολισμό ενός ατόμου στο πρόβλημα, πρέπει να είναι διαρκώς στο μυαλό των εκπαιδευτικών κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών έτσι ώστε να είναι σε θέση να βοηθούν με τρόπο ουσιαστικό τους μαθητές τους. Το σπουδαιότερο όμως στοιχείο που δεν πρέπει να παραβλέπεται σχετικά με τα κίνητρα που έχει συνήθως ένας μαθητής για να επιλύσει ένα μαθηματικό πρόβλημα, είναι ότι αυτά σπανίως σχετίζονται με το ίδιο το πρόβλημα (Cronbach, 1948).

Η παραγωγή υλικού σκέψης στηρίζεται σε αντιλήψεις, θέσεις, απόψεις, έννοιες ή γενικεύσεις που καθορίζονται τόσο από τη φύση του προβλήματος, όσο και από την κατάσταση που περιγράφεται από αυτό. Η χωρική αντίληψη για παράδειγμα, παίζει καθοριστικό ρόλο σε προβλήματα σχετικά με τη διαίσθηση, την αποδεικτική γεωμετρία, την τριγωνομετρία και όχι τόσο σε προβλήματα αριθμητικής, άλγεβρας ή ανάλυσης (Henderson & Pingry, 1953). Οποιοδήποτε άτομο (μαθητής ή όχι) εμπλέκεται με την επίλυση προβλημάτων είναι αναγκαίο να αξιοποιήσει μια ποικιλία νοητικών δεξιοτήτων και ευρετικών μεθόδων προκειμένου να παράγει υλικό σκέψης. Δεξιότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μια διαδικασία σκέψης είναι η ταξινόμηση, η σύγκριση, η ανάλυση μέρους ή όλου του προβλήματος, η αναγνώριση σχέσεων, η επαγωγή, η χωρική απεικόνιση. Αντίστοιχα ευρετικές μέθοδοι που μπορούν να αξιοποιηθούν είναι η αναπαράσταση του προβλήματος μέσω ενός διαγράμματος, ενός πίνακα ή εξισώσεων, η εικασία, η αναπροσαρμογή του προβλήματος που συνήθως επιτυγχάνεται μέσω της αναδιατύπωσής του σε απλούστερη και πιο κατανοητή μορφή (Akinmola, 2014).

Γενικά οι ευρετικές αποκτούν μεγάλη αξία και ενδιαφέρον όταν είναι ενσωματωμένες σε μαθηματικές καταστάσεις. Η χρησιμότητά τους κρίνεται ιδιαιτέρως πολύτιμη στη μαθηματική εκπαίδευση και βρίσκουν εφαρμογή μέσω των συμβουλών και των οδηγιών του διδάσκοντα (Polya, 1957, 1962, 1965). Αποτελούν ουσιαστικά ένα σύνολο κατευθυντήριων γραμμών που εφαρμόζει ο λύτης προκειμένου να παράγει υλικό για σκέψη και να λάβει τις σωστές αποφάσεις που θα τον οδηγήσουν στον τρόπο επίλυσης του προβλήματος, χωρίς όμως από μόνες τους να εξασφαλίζουν και να εγγυώνται την επιτυχή κατάληξη της όλης προσπάθειας (Krulik & Rudnick, 1987).

Κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλημάτων υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη αποφάσεων που μπορεί να ληφθούν από το λύτη: οι τακτικές και οι στρατηγικές αποφάσεις. Οι τακτικές αποφάσεις περιλαμβάνουν ενέργειες που πρέπει να πραγματοποιηθούν ή να εφαρμοστούν, όπως είναι οι κατάλληλοι αλγόριθμοι ή οι ευρετικές. Για παράδειγμα η αντιμετώπιση ενός μαθηματικού προβλήματος με χρήση αναλυτικής γεωμετρίας ή με αξιοποίηση τριγωνομετρίας είναι μια τακτική απόφαση. Στον αντίποδα, οι στρατηγικές αποφάσεις καθορίζουν την πορεία που θα ακολουθήσει η λύση και τον τρόπο αξιοποίησης των δεδομένων στα διάφορα στάδια της επίλυσης. Για παράδειγμα, αν ζητηθεί ο υπολογισμός του εμβαδού μιας περιοχής, ο τρόπος με τον οποίο θα διαιρεθεί η περιοχή για να είναι εφικτός ο υπολογισμός του εμβαδού, είναι μια στρατηγική απόφαση, ανεξαρτήτως από τις πράξεις που θα εκτελεστούν. Οι περισσότερες μελέτες για τις μεθόδους επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων εστιάζουν κυρίως στις τακτικές αποφάσεις, όμως εξίσου σημαντικό ρόλο στην επιτυχή έκβαση της διαδικασίας επίλυσης έχουν οι αποφάσεις για τον τρόπο με τον οποίο θα γίνει η διαχείριση της λύσης (Schoenfeld, 1981).

Ουσιαστικό ρόλο στην επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος έχει η αναγνώριση και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που περιέχονται σε αυτό καθώς και η εύρεση του τρόπου με τον οποίο θα αξιοποιηθούν. Επιπλέον η αναζήτηση εναλλακτικών τρόπων παρουσίασης και επίλυσης ενός προβλήματος αποτελεί μια ισχυρή κίνηση στρατηγικής για τους λύτες, διότι τους δίνεται η δυνατότητα να αναγνωρίσουν και να αντιπαραβάλλουν το ρόλο που διαδραματίζουν οι διάφορες έννοιες και αναπαραστάσεις τους σε όλη τη διαδικασία της επίλυσης. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα ωφέλιμη στη διδασκαλία των μαθηματικών διότι οι μαθητές καταφέρνουν να αποσαφηνίσουν και να εκτιμήσουν τα πολλαπλά μονοπάτια που χρησιμοποιούνται για την εξερεύνηση ενός προβλήματος, ενώ παράλληλα αντιλαμβάνονται τον τρόπο αξιοποίησης και διασύνδεσης των κατάλληλων εννοιών για την επιτυχή έκβαση της λύσης (Cai & Nie, 2007).

Στην επιστήμη, όπως και στην καθημερινή ζωή, όταν ο άνθρωπος έρχεται αντιμέτωπος με μια νέα κατάσταση, προσπαθεί να βρει τρόπους να τη διαχειριστεί κάνοντας διάφορες εικασίες. Η πρώτη εικασία που θα διατυπώσει μπορεί να είναι τελείως άστοχη, όμως έπειτα από αρκετές δοκιμές και τροποποιήσεις, καθοδηγούμενος από παρατηρήσεις και ανάλογες καταστάσεις, ενδέχεται να καταλήξει σε μία ικανοποιητική εικασία. Ο Polya υποστήριξε ότι ομοίως και στα μαθηματικά, πρώτα γίνονται εικασίες και εν συνεχεία αυτές αποδεικνύονται. Ειδικότερα αν η διδασκαλία των μαθηματικών στοχεύει στο να ανακαλύψουν οι μαθητές τη μαθηματική γνώση, θα πρέπει πρώτα να τους δίνεται η δυνατότητα να υποθέτουν κάποιο μαθηματικό γεγονός και μετέπειτα να το τεκμηριώνουν και να το αποδεικνύουν. Σε φιλοσοφικό επίπεδο, η θέση του Polya για την εικασία αποτελεί ουσιαστικά μια εμπειρική άποψη για τα μαθηματικά. Η δημιουργική εργασία ενός μαθηματικού, ο συλλογισμός του και οι αποδείξεις που διατυπώνει είναι πολλές φορές το αποτέλεσμα μιας εικασίας και όχι μια αυστηρή επαγωγική δραστηριότητα που απλώς στηρίζεται σε κάποια αξιώματα (Polya, 1954).

Μία εικασία μπορεί να βασιστεί σε μια νοητική εικόνα ή σε μια λεκτική δήλωση η οποία περιγράφει το κλειδί που θα ξεκλειδώσει το πρόβλημα, υποδεικνύοντας στην ουσία τη μετάβαση από τα δεδομένα του προβλήματος στη ζητούμενη λύση. Καθοριστικοί παράγοντες για τη διατύπωση μιας αξιόλογης εικασίας αποτελούν η γνώση και η κατανόηση του προβλήματος. Όμως η γνώση με την έννοια της απομνημόνευσης ενός μεγάλου αριθμού γεγονότων, δεν εγγυάται απαραιτήτως γόνιμες και ουσιαστικές υποθέσεις, όπως αποδεικνύεται διαρκώς από την εμπειρία. Μια εικασία μπορεί να διαπιστωθεί αν είναι χρήσιμη ή όχι στην επίλυση ενός προβλήματος είτε ελέγχοντάς την σύμφωνα με τις συνθήκες του προβλήματος είτε εξετάζοντάς την, έχοντας ως στόχο την εύρεση πιθανού σφάλματος ή ασυμβατότητας με την ήδη υπάρχουσα γνώση. Σε περίπτωση που αποδειχθεί ότι μια εικασία δεν μπορεί να αξιοποιηθεί στο πρόβλημα τότε πρέπει να εγκαταλειφθεί (Henderson & Pingry, 1953).

Γενικά, μια εκτεταμένη βάση πληροφοριών, αλγορίθμων και ευρετικών δεν αποτελεί την πανάκεια για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος. Το κάθε άτομο (ειδικά αν πρόκειται για μαθητή) που ασχολείται με την αντιμετώπιση ενός προβλήματος είναι απαραίτητο και αναγκαίο να αναπτύξει έναν μηχανισμό λήψης κατάλληλων αποφάσεων για την επιτυχή επίλυσή του (Polya, 1962, 1965).

1.7 Είδη μαθηματικών προβλημάτων

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι σύμφωνα με τους περισσότερους εκπαιδευτικούς, ο βασικός πυρήνας δραστηριότητας μέσα σε μια σχολική αίθουσα. Στο πλαίσιο αυτό θεωρείται απολύτως φυσιολογικό και αναμενόμενο, να υπάρχουν διάφορα είδη προβλημάτων που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια ή κατασκευάζονται από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς, προκειμένου να εξυπηρετηθούν συγκεκριμένοι μαθησιακοί και διδακτικοί στόχοι. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις τέτοιων προβλημάτων είναι τα υπολογιστικά προβλήματα, τα προβλήματα κατανόησης και χειρισμού τύπων, τα αποδεικτικά, τα προβλήματα στρατηγικής και τα διαγωνιστικά.

Στα υπολογιστικά προβλήματα, ο λύτης επικεντρώνεται σε αριθμητικές πράξεις και σε αλγεβρικές υπολογιστικές διαδικασίες. Στα προβλήματα κατανόησης και χειρισμού τύπων πρέπει να έχει κατανοήσει πλήρως τις έννοιες που εμπεριέχονται στους αντίστοιχους μαθηματικούς τύπους και να έχει την ευχέρεια να τους χειριστεί για να οδηγηθεί στη λύση ενώ στα προβλήματα αιτιολόγησης και απόδειξης μαθηματικών σχέσεων απαιτείται η συνδυαστική αξιοποίηση θεωρημάτων ώστε να προκύψει ένα πλήρως τεκμηριωμένο αποτέλεσμα. Σε προβλήματα στρατηγικής ο λύτης αναζητά τη βέλτιστη πορεία που θα ακολουθήσει προκειμένου να επιλύσει επιτυχημένα το πρόβλημα ενώ τέλος στα διαγωνιστικά προβλήματα απαιτείται δημιουργικότητα, φαντασία και συνδυασμός μαθηματικών γνώσεων από διάφορους τομείς της μαθηματικής επιστήμης (Πούλος, 2007).

Γενικά, τα μαθηματικά προβλήματα ποικίλουν από απλά προβλήματα που επιλύονται εύκολα έως προβλήματα που για να αντιμετωπιστούν απαιτούνται σύνθετες διαδικασίες σκέψης. Μελετώντας τα μαθηματικά προβλήματα υπό το πρίσμα της προέλευσής τους αλλά και του τρόπου αντιμετώπισής τους, διακρίνονται σε δύο γενικές κατηγορίες: στα προβλήματα κλειστού και ανοιχτού τύπου.

Στα προβλήματα κλειστού τύπου οι πληροφορίες και τα δεδομένα που απαιτούνται για την επίλυσή τους είναι προφανή και ευδιάκριτα. Πρόκειται για προβλήματα που χρησιμοποιούνται ευρέως κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία και η πορεία επίλυσής τους θεωρείται σχετικά απλή. Τα προβλήματα αυτά διακρίνονται επιπροσθέτως σε προβλήματα ρουτίνας και μη. Ως πρόβλημα ρουτίνας θεωρείται ουσιαστικά μία άσκηση που αποσκοπεί στην άμεση εξάσκηση, χρήση και εφαρμογή γνώσεων ή δεξιοτήτων που αποκτήθηκαν μέσω της διδασκαλίας ενώ αντιθέτως κάθε περίπλοκο πρόβλημα που η επίλυσή του απαιτεί ικανότητα οργάνωσης, ταξινόμησης και συσχέτισης δεδομένων, δεν αποτελεί πρόβλημα ρουτίνας (Arslan & Altun, 2007).

Τα σύνθετα προβλήματα διακρίνονται με τη σειρά τους σε προβλήματα της καθημερινής ζωής και σε προβλήματα διαδικασίας. Τα πρώτα στηρίζονται σε δεδομένα του πραγματικού κόσμου και η επίλυσή τους εξαρτάται τόσο από μαθηματικούς συλλογισμούς, διεργασίες και πράξεις, όσο και από συνθήκες και καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Για την επιτυχή επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι απαραίτητη η ικανότητα του λύτη να ενσωματώνει τις μαθηματικές του γνώσεις στο πλαίσιο του πραγματικού κόσμου (Greer, 1993). Στα σύνθετα προβλήματα διαδικασίας, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος προσέγγισης, οι λογικές εκτιμήσεις, η μαθηματική σκέψη που αναπτύσσεται και η διαδικασία που ακολουθείται για να επιλυθούν, οδηγώντας σε δεύτερη μοίρα το αποτέλεσμα που θα προκύψει (Akben, 2020).

Τα προβλήματα ανοιχτού τύπου είναι ένα ιδιαίτερο είδος προβλημάτων. Με αυτά τα προβλήματα ο διδάσκων δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να πειραματιστούν αλλά και να εξοικειωθούν με νέες μεθόδους επίλυσης, όπως η χρήση του αντιπαραδείγματος ή η έννοια της εικασίας. Εξυπηρετούν πολύ εξειδικευμένους διδακτικούς στόχους και για το λόγο αυτό δεν συνηθίζεται να δίνονται σε μαθητές μιας τυπικής σχολικής τάξης, αλλά σε άτομα με ιδιαίτερες μαθηματικές ικανότητες, δεξιότητες και γνώσεις.

Ένα πρόβλημα ανοιχτού τύπου χαρακτηρίζεται από μία σαφή, σχετικά σύντομη εκφώνηση – διατύπωση, η οποία περιγράφει με σαφήνεια την κατάσταση που πρέπει να αντιμετωπιστεί, δίχως όμως να οδηγεί σε μια προφανή και αναμενόμενη λύση, ούτε σε ενδιάμεσα ερωτήματα (Πούλος, 2007). Περιέχει ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών με τις οποίες ο λύτης πρέπει να ασχοληθεί, αξιοποιώντας παράλληλα με ποικίλους τρόπους τη δημιουργικότητά του, τη φαντασία του και όποιες άλλες δεξιότητες διαθέτει (Akay, 2006).

Έρευνες στο χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών έδειξαν ότι η ενασχόληση με προβλήματα ανοιχτού τύπου έχει πολλαπλά οφέλη για τους μαθητές διότι αποκτούν ενεργή συμμετοχή στο μάθημα διατυπώνοντας παρατηρήσεις και εικασίες, βιώνουν τη χαρά της δημιουργίας και της ανακάλυψης, προσπαθούν να αποδείξουν τους ισχυρισμούς που έθεσαν ως εικασίες και να αποδείξουν την ορθότητα των ευρημάτων τους. Ο ρόλος βέβαια του διδάσκοντα και ο χειρισμός της όλης κατάστασης είναι σύνθετος. Αφενός πρέπει να προσέξει να μην παρασυρθεί ο ίδιος και να διαχειριστεί την όλη διαδικασία όπως θα έπραττε σε ένα πρόβλημα κλειστού τύπου, αφετέρου δεν πρέπει να χάσει τον έλεγχο, αφού η επίλυση ενός προβλήματος ανοιχτού τύπου μπορεί να επιφυλάσσει εκπλήξεις και να έχει απροσδόκητη εξέλιξη, ειδικά στην περίπτωση που κάποια από τις εικασίες των μαθητών είναι αδύνατο να απαντηθεί (Πούλος, 2007).

1.8 Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων και ο πραγματικός κόσμος

Στη μαθηματική εκπαίδευση ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο κατέχει η επίλυση προβλημάτων, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι τα μαθηματικά διδάσκονται για να αξιοποιούνται αποκλειστικά στην επίλυση προβλημάτων. Για να αντιμετωπιστεί επιτυχώς ένα πρόβλημα, όπως έχει ήδη προαναφερθεί, απαιτείται η εις βάθος γνώση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών καθώς και η ικανότητα συνδυασμού και συσχέτισής τους. Γενικά, είναι ευρέως γνωστό ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων περιλαμβάνει ένα σύνολο εξειδικευμένων διεργασιών και συλλογισμών, που μπορούν να δείξουν τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να δράσει ένα άτομο, προκειμένου να ξεπεράσει δύσκολες ή προβληματικές καταστάσεις σε οποιονδήποτε τομέα της καθημερινής του ζωής (National Council of Teachers of Mathematics, 1980).

Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, ο λύτης μετατρέπει συνήθως τα λεκτικά δεδομένα σε εξισώσεις ή άλλες μαθηματικές παραστάσεις, προκειμένου να οδηγηθεί στη λύση, αξιοποιώντας ταυτόχρονα τις μαθηματικές του γνώσεις και δεξιότητες. Η περιγραφή μιας κατάστασης που προσδιορίζεται λεκτικά ή μιας πραγματικής κατάστασης, με μαθηματικούς όρους και συμβολισμούς, είναι γνωστή ως μαθηματικοποίηση (mathematization) (Polya, 1962).

Τις τελευταίες δεκαετίες πολλές εμπειρικές έρευνες έδειξαν ότι τα προβλήματα που περιείχαν συνθήκες και καταστάσεις από τον πραγματικό κόσμο, δεν ήταν εύκολα διαχειρίσιμα από τους μαθητές. Οι περισσότερες δυσκολίες εντοπίζονταν αφενός στη μοντελοποίηση και μαθηματικοποίηση των προβλημάτων, αφετέρου στον συνυπολογισμό των συνθηκών του πραγματικού κόσμου, προκειμένου να αξιοποιηθούν οι σωστές σχέσεις που συνδέουν τις πραγματικές καταστάσεις με τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες (Reusser & Stebler, 1997).

Οι λόγοι για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην προσπάθεια να επιλύσουν μαθηματικά προβλήματα τα οποία συνδέονται με την πραγματικότητα, είναι πολλοί. Ξεκινώντας από τα σχολικά εγχειρίδια, διαπιστώνει κανείς πολύ εύκολα ότι υπάρχει ένας σχετικά μικρός αριθμός προβλημάτων που ενθαρρύνουν τους μαθητές στο να ενεργοποιήσουν και να αξιοποιήσουν την γνώση και την εμπειρία τους από την καθημερινότητα. Επιπλέον οι μαθητές γνωρίζουν ότι τα περισσότερα προβλήματα που θα κληθούν να αντιμετωπίσουν στα πλαίσια του μαθήματος είναι επιλύσιμα, αξιοποιώντας κατά βάση τα αριθμητικά δεδομένα τους (Davis, 1989, Greer, 1996, Nesher, 1980, Staub & Reusser, 1995, Verschaffel & De Corte, 1996). Πολλές φορές επίσης, επιχειρούν να λύσουν προβλήματα δίχως να τα έχουν κατανοήσει πλήρως, προσπαθώντας απλώς να αξιοποιήσουν επιφανειακές λέξεις – κλειδιά, δίχως όμως να συνυπολογίζουν τις συνθήκες που ισχύουν στον φυσικό κόσμο (Schoenfeld, 1982).

Όλες οι παραπάνω διαπιστώσεις, οδηγούν συχνά την επίλυση προβλημάτων σε λανθασμένες και παράλογες απαντήσεις, ενώ συγχρόνως αποκαλύπτουν τη δυσκολία που υπάρχει τόσο στην αναγνώριση ενός μη επιλύσιμου προβλήματος όσο και στην απόρριψη μη ρεαλιστικών αποτελεσμάτων. Για να αντιμετωπιστεί η κατάσταση αυτή θα πρέπει οι μαθητές να εμπλέκονται ολοένα και περισσότερο με τη μαθηματική μοντελοποίηση και κατανόηση ρεαλιστικών προβλημάτων, έτσι ώστε σταδιακά να είναι σε θέση να περιγράψουν με επιτυχία πτυχές της πραγματικότητας με μαθηματικό τρόπο (Reusser & Stebler, 1997).

1.9 Τα χαρακτηριστικά του λύτη και η ικανότητα του στην επίλυση προβλημάτων

Ο λύτης ενός προβλήματος είναι ένα άτομο το οποίο αφενός έχει διάθεση να ασχοληθεί με το πρόβλημα θεωρώντας την ενασχόλησή του με αυτό ως μία πρόκληση, αφετέρου αντιλαμβάνεται πλήρως ποιο είναι το ζητούμενο, δίχως όμως να είναι σε θέση να γνωρίζει εξαρχής τον τρόπο με τον οποίο θα το προσδιορίσει (Reitman, 1965). Μία προβληματική κατάσταση βέβαια είναι ως ένα βαθμό υποκειμενική, αφού ένα γεγονός που ενδεχομένως θεωρείται πρόβλημα για ένα άτομο, πιθανόν να μην είναι για κάποιο άλλο (Henderson & Pingry, 1953).

Ως ικανός λύτης ενός μαθηματικού προβλήματος θεωρείται εκείνο το άτομο που έχει την ευχέρεια να αναγνωρίσει τον τύπο του προβλήματος, να επεξεργαστεί τις πληροφορίες που του δίνονται και να οδηγηθεί με επιτυχία στην λύση του (Μώκος, 2012). Κάθε καλός λύτης έχει επιπλέον την ικανότητα να κατηγοριοποιεί τα προβλήματα σύμφωνα με τις δομικές τους ομοιότητες (Silver, 1979).

Για να γίνει κάποιος καλός λύτης μαθηματικών προβλημάτων, θα πρέπει αρχικώς να έχει ένα ευρύ και στέρεο υπόβαθρο μαθηματικών γνώσεων. Η αποτελεσματική οργάνωση αυτών των γνώσεων συμβάλλει καθοριστικά στην επιτυχή έκβαση της διαδικασίας επίλυσης (Wilson et al., 1993). Πιο συγκεκριμένα, έχει διαπιστωθεί ότι κατά την επίλυση σχολικών γεωμετρικών προβλημάτων, οι μαθητές εκείνοι που οι γνώσεις τους είναι σε σχετικά υψηλό επίπεδο, παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευχέρεια στη χρήση και εφαρμογή διαφόρων ευρετικών μεθόδων (Kantowski, 1974). Αντιθέτως μαθητές με λιγότερες γνώσεις καταφέρνουν συνήθως να ασχοληθούν επιτυχώς μόνο με απλά προβλήματα στα οποία χρειάζεται η στοιχειώδης εφαρμογή βασικών μαθηματικών αρχών (Schoenfeld & Herrmann, 1982).

Αν και η ικανότητα ως προς την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων δεν μπορεί να θεωρηθεί μετρήσιμο μέγεθος, εντούτοις μπορούν να προκύψουν χρήσιμα και αξιοποιήσιμα συμπεράσματα μέσα από τη συσχέτιση της επιτυχίας ενός ατόμου στην επίλυση προβλημάτων και των χαρακτηριστικών στοιχείων τόσο του τρόπου σκέψης όσο και της προσωπικότητάς του (Kilpatrick, 1969). Σε μια έρευνα που πραγματοποίησαν οι Tate και Stanier σε μαθητές της μέσης εκπαίδευσης, μελετήθηκε η απόδοσή τους στην επίλυση προβλημάτων διερευνώντας την κριτική σκέψη και τις πρακτικές αποφάσεις τους. Τα συμπεράσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι λιγότερο ικανοί λύτες, απαντούσαν σε ερωτήσεις κρίσεως με απλό αλλά μη τεκμηριωμένο τρόπο ενώ οι πρακτικές τους επιλογές βασίζονταν κυρίως στη διαίσθηση. Διαπιστώθηκε επίσης ότι οι περισσότερες λανθασμένες λύσεις δεν οφείλονταν στο πνευματικό ή νοητικό επίπεδο των λυτών αλλά στην ιδιοσυγκρασία τους και στην εν γένει στάση που είχαν απέναντι στα προβλήματα (Tate & Stanier, 1964).

Γενικά, η επιτυχής επίλυση ενός προβλήματος εξαρτάται πρωτίστως από τις ικανότητες που διαθέτει ο λύτης τόσο στην κατανόηση όσο και στην εκτέλεση των απαιτούμενων υπολογιστικών διεργασιών και δευτερευόντως από τον τρόπο που είναι διατυπωμένο.

1.10 Η επιρροή του δασκάλου στην επίλυση προβλημάτων

Η ενασχόληση ενός ατόμου με την επίλυση προβλημάτων αποτελεί την πηγή της μαθηματικής γνώσης. Οι πνευματικές διεργασίες που πραγματοποιούνται, οδηγούν στη γνώση όταν παράγονται ιδέες που αποδεικνύονται αποτελεσματικές και αξιόπιστες στην εύρεση της λύσης ενός προβλήματος (Vergnaud, 1982).

Αν και έχει παρατηρηθεί ότι σε κάποιους ανθρώπους είναι έμφυτη η ικανότητα να αντιμετωπίζουν με ευκολία, άνεση και αποτελεσματικότητα τα προβλήματα, εντούτοις υπάρχουν μέθοδοι και τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν ώστε να βελτιωθούν οι επιδόσεις ενός ατόμου ως προς την επίλυση προβλημάτων.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι γενικά μια πολυσύνθετη διαδικασία της οποίας η επιτυχής έκβαση εξαρτάται από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες, όπως είναι το κίνητρο του λύτη και η θέση του για το πρόβλημα, οι αντιλήψεις του, η προετοιμασία του, το γνωστικό και νοητικό του επίπεδο, εμπειρία του, η εξάσκηση που έχει προηγηθεί, ο τρόπος σκέψης του, οι δεξιότητές του, η συναισθηματική του κατάσταση. Σημαντικός επίσης θεωρείται και ο ρόλος του πεδίου στο οποίο εντάσσεται το πρόβλημα, του χώρου δηλαδή που τοποθετείται και αναφέρεται το πρόβλημα (Kilpatrick, 1969).

Η διδασκαλία για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων έχει γενικά ως στόχο να αποκτήσουν οι μαθητές παραστάσεις, εμπειρίες και δεξιότητες που να βελτιώνουν τις επιδόσεις τους και την αποτελεσματικότητά τους. Η βελτίωση αυτή επιτυγχάνεται μόνο με την εξάσκηση και όχι με την απομνημόνευση τυποποιημένων μεθόδων επίλυσης. Καθοριστικός σε όλη αυτή τη διαδικασία είναι ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος συμβάλλει στο να κατανοήσουν οι μαθητές τόσο το πρόβλημα όσο και τη διαδικασία επίλυσης. Για να στεφθεί με επιτυχία η όλη προσπάθεια του εκπαιδευτικού, πρέπει αρχικά να έχει μελετήσει ο ίδιος διεξοδικά το πρόβλημα και εν συνεχεία να επιχειρήσει να πάρει τη θέση του μαθητή, προκειμένου να αντιληφθεί και να κατανοήσει τις δυσκολίες που ενδέχεται να αντιμετωπίσει. Στόχος του δασκάλου είναι να δείξει στο μαθητή πώς πρέπει να εργαστεί προκειμένου να καταλάβει το πρόβλημα και να του διδάξει ότι η υπομονή και η επιμονή είναι απαραίτητα εφόδια στην προσπάθειά του να ξεπεράσει τα όποια εμπόδια προκύψουν (Kilpatrick, 1969).

Πολλές φορές θεωρείται χρήσιμο από παιδαγωγικής άποψης, να αφήνει ο δάσκαλος τους μαθητές να δυσκολεύονται, να οδηγούνται σε αδιέξοδα και να προβληματίζονται για τον τρόπο με τον οποίο θα ξεπεράσουν τα εμπόδια που προκύπτουν σε κάποιο στάδιο της επίλυσης. Άλλες φορές είναι αναγκαίο να τους προτρέπει να ενεργήσουν με έναν συγκεκριμένο τρόπο έτσι ώστε να εξελιχθεί ομαλά και χωρίς αντιξοότητες η όλη διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση όμως, επιδιώκει την εξοικείωση των μαθητών με συμπεριφορές, δράσεις και ενέργειες που είναι χρήσιμες για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, εξατομικεύοντας παράλληλα τη διδασκαλία του, μιας και ο τρόπος που το κάθε άτομο αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα είναι προφανώς διαφορετικός (Mason, 2014, Watson & Mason, 1998).

Μια αξιοσημείωτη τακτική που εφαρμόζεται από τους εκπαιδευτικούς κατά την επίλυση προβλημάτων είναι η ενθάρρυνση για τη χρήση διάφορων ευρετικών μεθόδων. Για παράδειγμα, αφού ο μαθητής κατανοήσει το πρόβλημα, πολλές φορές ο εκπαιδευτικός του ζητά να το επαναδιατυπώσει χρησιμοποιώντας δικά του λόγια. Η τεχνική αυτή βοηθά το μαθητή αφενός να μάθει να εκφράζεται με μαθηματικούς όρους, αφετέρου να οργανώσει τόσο τις σκέψεις του όσο και τα δεδομένα του προβλήματος. Άλλες φορές τον παροτρύνει να παραστήσει γραφικά το πρόβλημα (αν βέβαια αυτό είναι εφικτό). Μέσω της γραφικής αναπαράστασης ο μαθητής μπορεί να αντιληφθεί χαρακτηριστικά στοιχεία του προβλήματος καθώς και τον τρόπο συσχέτισής τους ενώ γίνεται ευκολότερος ο έλεγχος και η επαλήθευση της λύσης του προβλήματος (Henderson & Pingry, 1953). Επιπλέον, μέσα από κατάλληλες ερωτήσεις όπως «έχετε συναντήσει παρόμοιο πρόβλημα στο παρελθόν;», «μπορείτε να σκεφτείτε ένα κατάλληλο θεώρημα που μπορεί να είναι χρήσιμο;», «μπορείτε να λύσετε ένα μέρος του προβλήματος;», «αξιοποιήσατε όλα τα δεδομένα;» ενδέχεται να αλλάξει ο προσανατολισμός του μαθητή στο πρόβλημα, να διαφοροποιηθεί το σημείο στο οποίο εστιάζει ή να εντάξει ο ίδιος νέα στοιχεία που λειτουργούν βοηθητικά και υποστηρικτικά για την εύρεση της λύσης (Polya, 1957). Αν όμως όλες οι προσπάθειες επίλυσης ενός προβλήματος από κάποιον μαθητή είναι ανεπιτυχείς, τότε ο δάσκαλος συνήθως τον παροτρύνει να σταματήσει προσωρινά να ασχολείται με το πρόβλημα και να επανέλθει αργότερα (Maier, 1933).

Ο εκπαιδευτικός επίσης φροντίζει να αναπτύσσει στην σχολική τάξη ένα κατάλληλο συναισθηματικό περιβάλλον που βοηθά τους μαθητές να εστιάζουν αποκλειστικά στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουν. Η δημιουργία κλίματος εμπιστοσύνης και άνεσης μεταξύ δασκάλου και μαθητών ενθαρρύνει τους τελευταίους να διατυπώνουν τις απορίες και τους προβληματισμούς τους (Henderson & Pingry, 1953), να πειραματίζονται, να προτείνουν νέες ιδέες. Σε αυτό το πλαίσιο, ο δάσκαλος παροτρύνει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους αξιοποιώντας διάφορους τρόπους και μεθόδους (πέραν των παραδοσιακών), όπως είναι οι προσομοιώσεις σε πραγματικές συνθήκες ή οι εφαρμογές σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Η επίλυση ενός προβλήματος με αυτές τις συνθήκες γίνεται μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα δημιουργική διαδικασία που εξελίσσεται δυναμικά (NCTM, 1980).

Γενικά, η εμπειρία δείχνει ότι σε ένα κατάλληλο περιβάλλον, οι μαθητές μπορούν να εμπλέκονται ενεργά στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων, αξιοποιώντας τις γνώσεις τους, τις μαθηματικές τους δεξιότητες και τη φαντασία τους. Εμπιστεύονται τον δάσκαλό τους και αισθάνονται ότι έχουν τη δυνατότητα να κατανοήσουν και να φέρουν επιτυχώς εις πέρας την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος, ξεπερνώντας από μόνοι τους τις όποιες δυσκολίες προκύπτουν (Mason, 2016). Είναι προφανές ότι η θετική ψυχολογική τους κατάσταση είναι αυτή που τους δίνει ισχυρή ώθηση. Αν ο μαθητής αμφιβάλλει για τις δυνατότητές του, τότε δημιουργεί ο ίδιος δυσκολίες που συχνά τις προβάλλει και ως δικαιολογία για την όποια αποτυχημένη προσπάθειά του. Βέβαια στον αντίποδα, η υπερβολική αυτοπεποίθηση μπορεί να επιφέρει άλλου είδους δυσκολίες. Σε τέτοιες καταστάσεις το επιθυμητό είναι η Αριστοτελική χρυσή τομή (Mead, 1934).

Συνοψίζοντας, η ουσιαστική βοήθεια του δασκάλου κατά τη διαδικασία της επίλυσης προβλημάτων δεν γίνεται προσφέροντας έτοιμες λύσεις, αλλά παρέχοντάς στους μαθητές κυρίως ψυχολογική στήριξη. Οι παρεμβάσεις του σε κάθε δυσκολία, θα πρέπει να γίνονται σε λογικά πλαίσια και με τέτοιο τρόπο, ώστε να τους διαβεβαιώνει ότι πρόκειται για κάτι φυσιολογικό και υπαρκτό, επιχειρώντας παράλληλα να τονώνει την ψυχολογία τους και να είναι καθησυχαστικός (Mason, 2002).

1.11 Διδακτικοί στόχοι και οφέλη από την επίλυση προβλημάτων

Η επίλυση προβλημάτων είναι βασικό μέρος της διδασκαλίας των μαθηματικών διότι αποτελεί μια μορφή διερευνητικής μάθησης κατά την οποία η υπάρχουσα γνώση εφαρμόζεται σε νέες άγνωστες καταστάσεις, με κύριο στόχο την αφομοίωση μαθηματικών εννοιών και την απόκτηση νέας γνώσης (Edwards, 2008). Η ενασχόληση ενός ατόμου με τη διερεύνηση προβληματικών καταστάσεων και την αναζήτηση μεθόδων αντιμετώπισής τους, ξεκινά από την προσχολική ηλικία και συνεχίζεται σε όλη του τη ζωή (Cai, 2000, Carpenter et al., 1998, Kamii, 1989, Maher & Martino, 1996, Resnick, 1989).

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων περιλαμβάνει ένα σύνολο δράσεων και ενεργειών, όπου απαιτείται πειθαρχία στον τρόπο εργασίας και ικανότητα στην αξιοποίηση των γνώσεων που έχουν ήδη αποκτηθεί καθώς και στην αναγνώριση των δυσεπίλυτων καταστάσεων. Αναδεικνύει τις πολλαπλές εφαρμογές που έχουν τα μαθηματικά τόσο στην καθημερινή ζωή όσο και στον χώρο της επιστήμης, ενώ παράλληλα ενεργοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών διότι υπάρχει εμφανές κίνητρο που είναι η επίτευξη ενός συγκεκριμένου στόχου. Επιπλέον κάτω από κατάλληλες συνθήκες, μπορεί να εξελιχθεί σε μια ευχάριστη και ίσως διασκεδαστική διαδικασία για τους εμπλεκομένους (Wilson et al., 1993). Συμβάλλει στην εξάσκηση των μαθητών σε συγκεκριμένες τεχνικές και δεξιότητες ενώ ταυτόχρονα μπορεί να αποτελέσει το μέσο για την ανάπτυξη νέων δεξιοτήτων. Γενικά, μέσα από την ενασχόληση με μια σειρά προβλημάτων που έχουν επιλεχθεί προσεκτικά, είναι εφικτή η μετάβαση των μαθητών σε νέα γνωστικά αντικείμενα (Stanic & Kilpatrick, 1988).

Υπάρχουν αναρίθμητοι λόγοι για τους οποίους η επίλυση προβλημάτων είναι ενταγμένη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι μαθητές μέσα από την ενασχόλησή τους με προβλήματα, μαθαίνουν να σκέφτονται με μαθηματικό τρόπο και να δίνουν μαθηματική διάσταση και προοπτική στην αντιμετώπιση των όποιων δυσκολιών ή εμποδίων (Schoenfeld, 1998). Τους δίνεται επιπλέον η δυνατότητα να διαμορφώσουν ή να τροποποιήσουν τις απόψεις και τις πεποιθήσεις τους για τα μαθηματικά, συσχετίζοντάς τες με τις πεποιθήσεις άλλων ατόμων (NCTM, 1989).

Για τον τρόπο επιτυχούς αντιμετώπισης των προβλημάτων, διατυπώθηκαν διάφορα πλαίσια επίλυσης, τα περισσότερα εκ των οποίων στηρίχθηκαν στις θέσεις και απόψεις του Polya. Μια πιθανή αποτυχία στην διαδικασία της επίλυσης οφείλεται συνήθως στην επιλογή αναποτελεσματικής μεθόδου προσέγγισης του προβλήματος ή στην ανεπιτυχή οργάνωση και κατανόηση των δεδομένων (Victor, 2004).

Οι περισσότεροι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης μελέτησαν επισταμένα το μοντέλο επίλυσης προβλημάτων του Polya, δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στα τρία πρώτα βήματα. Αν και το τέταρτο βήμα έχει λάβει τη μικρότερη προσοχή, ωστόσο είναι βαρύνουσα η σημασία και η σπουδαιότητά του τόσο στη διαδικασία επίλυσης όσο και στα διδακτικά οφέλη που προκύπτουν από αυτό (Schoenfeld, 1985a, Silver, 1985, Tjoe, 2014). Η αναδρομική μελέτη ενός προβλήματος συνδέεται με την εξοικείωσή του λύτη στην επίλυση προβλημάτων, με την ευχέρειά του να αξιοποιεί τις γνώσεις του καθώς και με την ευελιξία της σκέψης του. Η έλλειψη εξοικείωσης μειώνει τη διάθεση του εμπλεκόμενου ατόμου να προβληματιστεί και να αναζητήσει περισσότερες μεθόδους λύσης. Χωρίς ευχέρεια σε ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών γνώσεων και ευελιξία στη σκέψη, η αναδρομική μελέτη ενός προβλήματος δύσκολα θα είναι αποτελεσματική και επιτυχημένη (Tjoe, 2019).

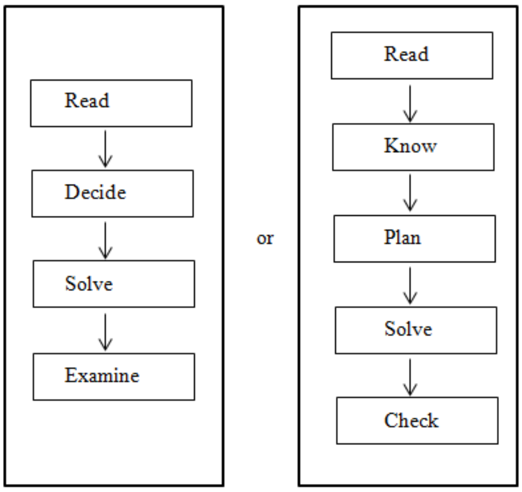
Η εμπειρία της επίλυσης ενός προβλήματος με διαφορετικές προσεγγίσεις, προσφέρει στο λύτη το πλεονέκτημα της εξοικείωσης με διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης και αναπαραστάσεις, ενώ παράλληλα εμπλουτίζει τις μαθησιακές του εμπειρίες. Τα στοιχεία αυτά αποτελούν σημαντικά εφόδια για την αντιμετώπιση στο μέλλον άλλων προβλημάτων μεγάλης δυσκολίας, που η επίλυσή τους ενδεχομένως να απαιτεί υψηλού επιπέδου μαθηματικές γνώσεις και τεχνικές. Επιπλέον αναπτύσσει τη μαθηματική σκέψη και βελτιώνει την ικανότητα του λύτη να συνδυάζει με ενδεδειγμένο τρόπο τις κατάλληλες γνώσεις και έννοιες (Leikin & Levav-Waynberg, 2007, Silver et al.. 2005).

Η αναζήτηση πολλαπλών λύσεων σε ένα πρόβλημα, πέραν των όσων έχουν ήδη αναφερθεί, έχει σημαντικά οφέλη και στο χώρο της ψυχολογίας. Πλήθος ψυχολόγων που ασχολούνται με την εκπαιδευτική ψυχολογία υποστηρίζουν ότι η προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος με περισσότερους από έναν τρόπους, ενισχύει την αυτοπεποίθηση του λύτη μειώνοντας παράλληλα την ανάγκη του για αναζήτηση βοήθειας ή υποστήριξης (Collins, Brown & Newman, 1989).

1.12 Η επίλυση προβλήματος στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων πρωτοεμφανίζεται στα προγράμματα σπουδών της διδασκαλίας των μαθηματικών κατά τη δεκαετία του ’80. Εκείνη την χρονική περίοδο αρχίζει να αξιοποιείται στο χώρο της διδακτικής το έργο του George Polya. Η επίλυση του μαθηματικού προβλήματος επηρέασε σε πολύ μεγάλο βαθμό την ατζέντα της μαθηματικής εκπαίδευσης (Santos-Trigo, 2007) ενώ παράλληλα αποτέλεσε το έναυσμα για την διατύπωση και ανάπτυξη διαφορετικών θέσεων και απόψεων σχετικά με το πώς πρέπει να είναι δομημένη η μαθηματική εκπαίδευση και το σχολείο, τι ακριβώς είναι τα μαθηματικά και πώς πρέπει να διδάσκονται, πώς πρέπει να ενταχθεί η επίλυση προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών (Stanic & Kilpatrick, 1988).

Τα περισσότερα σχολικά βιβλία των μαθηματικών, ασχολούνται με την επίλυση προβλήματος με τρόπο που δε συμβαδίζει με το πνεύμα των θέσεων και απόψεων του Polya. Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση προβλήματος αντιμετωπίζεται κατά κόρον ως μια μονοδιάστατη γραμμική διαδικασία, που με συγκεκριμένα διαδοχικά βήματα επιτυγχάνει τη μετάβαση από τα δεδομένα στα ζητούμενα και διδάσκεται αποκλειστικά μέσω της συνεχούς εξάσκησης, δίνοντας με τον τρόπο αυτό ιδιαίτερη έμφαση στην διατύπωση των αναμενόμενων απαντήσεων. Είναι βέβαια προφανές ότι οι διαπιστώσεις αυτές δε συνάδουν με την πραγματική διάσταση που δίνει η επίλυση προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση (Wilson et al., 1993).



Εικόνα 1: Η επίλυση προβλήματος ως μονοδιάστατη γραμμική διαδικασία (Wilson et al., 1993)

Η εμπειρία από τα διάφορα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών δείχνει ότι οι μαθητές επικεντρώνονται κυρίως στην λύση – απάντηση του προβλήματος, αντιμετωπίζοντας όμως επιφανειακά την όλη διαδικασία που ακολουθείται μέχρι να προκύψει η λύση. Γνωρίζουν ότι η πορεία αντιμετώπισης του προβλήματος θα τους παρουσιαστεί ούτως ή άλλως αναλυτικά από τον εκπαιδευτικό, επομένως αποδέχονται τον παθητικό τους ρόλο και επικεντρώνονται στην απομνημόνευση μεθόδων και διαδικασιών. Με όλα αυτά δημιουργείται η αίσθηση ότι στα μαθηματικά πρέπει κάποιος να έχει έτοιμη μια ήδη δοκιμασμένη λύση για να μπορέσει να επιλύσει επιτυχώς ένα πρόβλημα και μάλιστα όσο συντομότερα οδηγηθεί στη λύση τόσο καλύτερη είναι η μέθοδος (Carpenter et al., 1983, National Assessment of Educational Progress, 1983). Επιπλέον κυριαρχεί η αντίληψη ότι η απομνημόνευση και η εξάσκηση είναι τα βασικά κλειδιά για την επίλυση ενός προβλήματος (National Assessment of Educational Progress, 1983).

Συνέπεια όλων των παραπάνω πεποιθήσεων είναι η φοβική και γεμάτη αρνητισμό αντιμετώπιση των προβλημάτων από τους μαθητές, ειδικά στην περίπτωση που δε γνωρίζουν εκ των προτέρων μια κατάλληλη μέθοδο επίλυσης. Αποτέλεσμα αυτής της στάσης είναι να περιορίζουν ή να εγκαταλείπουν τις προσπάθειές τους μετά από λίγα μόνο λεπτά ενασχόλησης με το πρόβλημα (Schoenfeld, 1992).

Συμπερασματικά, στα περισσότερα προγράμματα σπουδών, η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων έχει εμφανή ελαττώματα που οδηγούν τους μαθητές σε σοβαρές στρεβλώσεις. Σε ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών, η θέση της επίλυσης προβλήματος θα πρέπει να κατέχει πολύ σημαντική θέση και να συνδέεται άμεσα με τη χρήση και αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων, με την ενθάρρυνση για διατύπωση και διερεύνηση εικασιών, με τον πειραματισμό και τη μοντελοποίηση λογικών διαδικασιών καθώς και με την βελτίωση της μαθηματικής και δημιουργικής σκέψης.

1.13 Από τον αναδρομικό έλεγχο στην κατασκευή προβλήματος

O Immanuel Kant υποστήριξε ότι η συλλογή εμπειριών ενός ατόμου δεν αρκεί για να το οδηγήσει στην επιτυχία. Η εμπειρία πρέπει να συνδυαστεί με την παρατήρηση, τον προβληματισμό, τη σκέψη και την επιμονή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος με τη βοήθεια των τεσσάρων βημάτων του Polya. Από τα τέσσερα βήματα το λιγότερο διαδεδομένο και ταυτόχρονα δυσκολότερο να εφαρμοστεί, είναι ο αναδρομικός έλεγχος της λύσης του προβλήματος. Πρόκειται όμως για το στάδιο εκείνο που οδηγεί στην επιβεβαίωση της επιτυχούς λύσης του προβλήματος και ταυτόχρονα οδηγεί στην ουσιαστική μάθηση και αφομοίωση των μαθηματικών γνώσεων (Mason, 2002).

Η αναδρομική μελέτη ενός προβλήματος αποτελεί μια ιδιαίτερα πολύτιμη δραστηριότητα κατά τη διάρκεια της επίλυσης, ειδικά στην περίπτωση που το σχέδιο δράσης που καταστρώθηκε είναι δύσκολο ή αδύνατο να εφαρμοστεί. Στην περίπτωση αυτή ο λύτης ή προχωρά στη δημιουργία νέου πλάνου ή εξετάζει εκ νέου το πρόβλημα επιχειρώντας να το αναδιατυπώσει, με τρόπο πιο κατανοητό και ευκολότερα διαχειρίσιμο (Wilson et. al, 1993).

Βέβαια, πολλοί είναι οι ερευνητές και οι εκπαιδευτικοί που υποστηρίζουν ότι η αναδρομική μελέτη ενός προβλήματος είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί από τους μαθητές (Kantowski, 1977). Αυτό συμβαίνει λόγω της εδραιωμένης πεποίθησης μεταξύ των μαθητών ότι η επίλυση ενός προβλήματος είναι απλώς η εύρεση μιας απάντησης και τίποτε παραπάνω αλλά και λόγω του περιορισμένου χρόνου διδασκαλίας που έχει στη διάθεσή του ο εκπαιδευτικός, που δεν του επιτρέπει να επιμείνει όσο απαιτείται στην αναδρομική ενασχόληση με το πρόβλημα. Πέραν των αντικειμενικών ή υποκειμενικών δυσκολιών που υπάρχουν, η ενασχόληση με το τέταρτο βήμα του Polya έχει πολλαπλά οφέλη για τον μαθητή, αφού προωθεί την ουσιαστική μάθηση, τη διερεύνηση, την επέκταση των λύσεων και των διαδικασιών επίλυσης ενώ παράλληλα ενισχύει τον αυτοστοχασμό (Wilson, 1990).

Ο Duncker αντιμετώπισε την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ως μια παραγωγική διαδικασία. Στο πλαίσιο αυτό, η αναδιατύπωση ενός προβλήματος θεωρείται απαραίτητη διότι μπορεί να βελτιώσει την αρχική τοποθέτηση και να το κάνει πιο κατανοητό. Επομένως, η τελική λύση του προβλήματος είναι σύνηθες να προκύπτει πολλές φορές έπειτα από συνεχείς αναδιατυπώσεις (Duncker, 1945). Από την πλευρά του ο Polya υποστήριξε ότι η αναδιατύπωση ενός προβλήματος είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη προκειμένου να αποκτήσει μορφή που μπορεί να επιλυθεί με επιτυχία (Polya, 1957). Γενικά, τόσο ο Duncker όσο και ο Polya τόνισαν τη σπουδαιότητα που έχει η επαναδιατύπωση ενός προβλήματος για την πορεία προς την επιτυχή λύση ενός προβλήματος (Kilpatrick, 2016).

Εν κατακλείδι, η σημασία του αναδρομικού ελέγχου ενός προβλήματος δεν είναι απλά ο έλεγχος των απαντήσεων ή των μεθόδων που χρησιμοποιήθηκαν για να επιτευχθεί η λύση, αλλά η μεγιστοποίηση των ευκαιριών μάθησης, η ανάπτυξη της ικανότητας στην επίλυση προβλημάτων, η σύγκριση εναλλακτικών λύσεων, η διατύπωση γενικεύσεων, η αναδιατύπωσή του και τέλος, η δημιουργία νέων προβλημάτων (Cai & Brook, 2006).

2 Τοποθέτηση μαθηματικού προβλήματος (problem posing)

2.1 Εισαγωγή στην τοποθέτηση μαθηματικού προβλήματος

Η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί μια πολυσύνθετη διαδικασία που είναι απαραίτητο να μελετηθεί και να διερευνηθεί από διάφορες οπτικές γωνίες (Silver, 1994). Από αυστηρά μαθηματική σκοπιά, αφορά τη δημιουργία νέων προβλημάτων που δεν έχουν λυθεί στο παρελθόν από κανέναν ή (σε μια πιο ρεαλιστική θεώρηση) η λύση δεν είναι τουλάχιστον γνωστή στον δημιουργό τους (Mamona-Downs, 1993, Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1995).

Σύμφωνα με τον Dunker, ως τοποθέτηση μαθηματικού προβλήματος θεωρείται η κατασκευή ενός νέου μαθηματικού προβλήματος ή η αναπροσαρμογή ενός ήδη υπάρχοντος (Duncker, 1945) προκειμένου να γίνει πιο κατανοητό (Cohen, Stover, 1981). Στο ίδιο πνεύμα ο Silver συμπληρώνει ότι η αναδιαμόρφωση ή η τροποποίηση ενός δοσμένου μαθηματικού προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί πριν, κατά τη διάρκεια ή και μετά τη επίλυσή του (Silver, 1993). Σε κάθε όμως περίπτωση, η λύση παραμένει άγνωστη στον δημιουργό του προβλήματος (Leung, 1997). Η English επισημαίνει ότι η κύρια ενέργεια που οδηγεί στην κατασκευή νέων προβλημάτων είναι η δημιουργία νέων ερωτήσεων σε ήδη υπάρχουσες μαθηματικές εργασίες (English, 1997). Η Stoyanova από την πλευρά της, όρισε την τοποθέτηση μαθηματικού προβλήματος ως τη διαδικασία με την οποία διατυπώνονται με μαθηματικό τρόπο, προβλήματα που βασίζονται σε συγκεκριμένες συνθήκες και καταστάσεις (Stoyanova, 1998)

Γενικά, είναι ευρέως αποδεκτό ότι η διατύπωση ενός προβλήματος επιδρά καθοριστικά στη δημιουργία του σχεδίου δράσης που θα ακολουθηθεί για την επίλυσή του. Εξάλλου, μία από τις ευρετικές μεθόδους που πρότεινε ο Polya για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες που ενδεχομένως παρουσιάζονται κατά τη διάρκεια της επίλυσης, είναι το να σκεφτεί ο λύτης μια πιο προσιτή εκδοχή του προβλήματος, δηλαδή έναν εναλλακτικό τρόπο διατύπωσής του (Silver, 1994).

Η τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες πτυχές της μαθηματικής εκπαίδευσης (Freudenthal, 1973, Polya, 1954). Ειδικότερα κατά τις τρεις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται έντονο ενδιαφέρον για τη δημιουργία προβλημάτων τόσο στο χώρο της εκπαίδευσης όσο και στο χώρο της βιβλιογραφίας γενικότερα. Από τις αρχές της δεκαετίας του ’90 στα προγράμματα σπουδών των Η.Π.Α. δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε δραστηριότητες που σχετίζονται με την κατασκευή προβλημάτων, παράλληλα με την κλασική επίλυση δοσμένων προβλημάτων (NCTM, 1989, 1991).

Ως γνωστόν, η διδασκαλία των μαθηματικών αν και δέχεται επιρροές από την κοινωνική και πολιτιστική εξέλιξη της ανθρωπότητας, έχει πάντοτε ως στόχο την κατανόηση και αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών από τους διδασκόμενους (van Oers, 1996). Για το λόγο αυτό περιλαμβάνει δραστηριότητες που βοηθούν τους μαθητές να εκφράζονται προφορικά ή γραπτά με σωστό μαθηματικό τρόπο, να σκέφτονται, να διαμορφώνουν απόψεις και πεποιθήσεις (Moschkovich, 2002). Σε αυτού του είδους τις δραστηριότητες εντάσσεται και η τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων.

Ο Kilpatrick υποστήριξε ότι η κατασκευή ενός προβλήματος δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται ως διδακτικός στόχος αλλά ως μέσο διδασκαλίας (Kilpatrick, 1987). Η ενασχόληση με τη δημιουργία προβλημάτων απαιτεί διαφορετικό τρόπο έκφρασης, δράσης και σκέψης συγκριτικά με την επίλυση προβλημάτων (Carrillo & Cruz, 2016). Στο πλαίσιο αυτό η διδασκαλία της κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων είναι μια διαδικασία που χρειάζεται αυξημένη ενεργοποίηση και συμμετοχή σε δραστηριότητες τόσο επίλυσης όσο και δημιουργίας προβλημάτων, οι οποίες ανοίγουν νέους ορίζοντες στη σκέψη και στον τρόπο δράσης των μαθητών (Jakobsson, 2012).

Αν και όπως έχει προαναφερθεί, κατά την κατασκευή ενός προβλήματος η λύση δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή στο δημιουργό, εντούτοις υπάρχουν περιπτώσεις που για διδακτικούς λόγους, η δημιουργία ενός προβλήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί από κάποιο άτομο που ήδη γνωρίζει τον τρόπο επίλυσής του (Leung, 1991). Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα προβλήματα που τοποθετούνται από τους δασκάλους για τους μαθητές και τα οποία αποσκοπούν στην εξυπηρέτηση εξειδικευμένων διδακτικών αναγκών, στην εξέταση ή στην επανάληψη εννοιών (Leung, 1996). Σε ένα ευρύτερο πλαίσιο, η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων αν και είναι μια διαδικασία που διέπεται από πληθώρα ανομοιογενών χαρακτηριστικών, εντούτοις αφορά μια συγκεκριμένη μερίδα ανθρώπων για την οποία η διαδικασία επίλυσης δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή (Leung, 1997).

2.2 Τα χαρακτηριστικά ενός καλού μαθηματικού προβλήματος

Ο Αλμπερτ Αϊνστάιν φημολογείται ότι ισχυρίστηκε πως αν είχε στη διάθεσή του μία ώρα για να σώσει τον κόσμο, θα αφιέρωνε τα πενήντα πέντε λεπτά για να ορίσει σωστά το πρόβλημα και τα υπόλοιπα πέντε λεπτά για να αναζητήσει τη λύση (Wilson, 1997). Μέσα από την υπερβολή αυτή, αναδεικνύεται η σπουδαιότητα της σωστής τοποθέτησης ενός προβλήματος.

Πότε όμως ένα πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί σωστά τοποθετημένο και ποια είναι τα χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει; Το ερώτημα αυτό απασχόλησε τη μαθηματική κοινότητα και κυρίως το χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, χωρίς όμως να δοθεί μια συγκεκριμένη απάντηση που να αποσαφηνίζει τα χαρακτηριστικά που πρέπει να πληροί ένα πρόβλημα. Παρόλα αυτά, μέσα είτε από μελέτες που έχουν γίνει κατά καιρούς είτε από την εμπειρία όσων έχουν ασχοληθεί με την κατασκευή ή την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, έχουν σκιαγραφηθεί τα γενικά χαρακτηριστικά ενός καλού μαθηματικού προβλήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, κάθε μαθηματικό πρόβλημα (ιδίως αν αναφέρεται σε μαθητές) είναι απαραίτητο να διατυπώνεται με σαφήνεια, χρησιμοποιώντας απλό και κατανοητό λεξιλόγιο. Θα πρέπει να μπορεί να αντιμετωπιστεί και να επιλυθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, διότι μόνο έτσι αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη και η εφευρετικότητα όσων εμπλέκονται με αυτό ενώ παράλληλα αναδεικνύεται ο αστείρευτος πλούτος των μαθηματικών.

Τα προβλήματα καλό είναι να αξιοποιούνται στη μαθηματική εκπαίδευση για να εισάγονται σημαντικές μαθηματικές ιδέες και έννοιες. Σε αυτό το πλαίσιο θα πρέπει να είναι δομημένα με τρόπο που αφενός να προάγει τεχνικές, μεθόδους και στρατηγικές επίλυσης που θεωρούνται απαραίτητες (Schoenfeld, 1998) αφετέρου να δίνει τη δυνατότητα στον διδάσκοντα να αντιληφθεί το επίπεδο γνώσεων των μαθητών καθώς και τις δυσκολίες που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν (Lester et al., 2015).

Τέλος, ένα μαθηματικό πρόβλημα θεωρείται καλά τοποθετημένο όταν η επίλυσή του απαιτεί συνδυαστική σκέψη που προάγει τη μαθηματική θεώρηση και αντιμετώπιση των εμπλεκομένων εννοιών, καθώς και όταν ενθαρρύνει τον λύτη παρέχοντάς του επιπλέον τη δυνατότητα να εξασκηθεί και να βελτιώσει τις δεξιότητές του (Lappan & Phillips, 1998).

2.3 Κατασκευή μαθηματικού προβλήματος και δημιουργικότητα

Η λέξη δημιουργικότητα (creativity) προέρχεται από το λατινικό "creare" που σημαίνει δημιουργώ. Στο παρελθόν η έννοια της δημιουργικότητας αντιμετωπιζόταν ως μια μορφή αποκλίνουσας σκέψης. Στη σύγχρονη εποχή η δημιουργικότητα ενός ατόμου σχετίζεται με την σύλληψη και αξιοποίηση πρωτότυπων ή ασυνήθιστων ιδεών, ενώ σύμφωνα με τους ψυχολόγους διαφοροποιείται από την νοημοσύνη ή την εξυπνάδα. Πέρα όμως από όλα αυτά, ποτέ δεν υπήρξε μία κοινά αποδεκτή επιστημονική θέση που να ορίζει με σαφήνεια τι ακριβώς είναι η δημιουργικότητα (Leung, 1997).

Στο χώρο των μαθηματικών, η δημιουργικότητα αξιοποιήθηκε σε μεγάλο βαθμό από τον Polya κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Η τοποθέτηση ενός προβλήματος μπορεί επίσης να λογιστεί ως μία μορφή δημιουργικότητας αφού σχετίζεται με διαδικασίες που θεωρούνται δημιουργικές όπως είναι η αναγνώριση, η εύρεση ή η δημιουργία του προβλήματος (Dillon, 1988, Voss & Means, 1989). Η σύνδεση μεταξύ της κατασκευής προβλημάτων και της δημιουργικότητας είναι δεδομένη και προφανής, ειδικά από τη στιγμή που η τοποθέτηση προβλημάτων ενσωματώθηκε σε δοκιμασίες αξιολόγησης των δημιουργικών ικανοτήτων και του μαθηματικού ταλέντου ενός ατόμου (Silver, 1994).

Η δημιουργικότητα των μαθητών στα μαθηματικά προκύπτει μέσα από την ικανότητά τους να θέτουν ερωτήματα, να εμβαθύνουν σε ένα δοσμένο πρόβλημα και να το επεκτείνουν, να επιλύουν προβλήματα με διαφορετικούς τρόπους (Jensen, 1973). Οι Einstein και Infeld υποστήριξαν ότι η τοποθέτηση ενός προβλήματος είναι μια διαδικασία πολύ πιο ουσιαστική από την λύση του, διότι η διατύπωση νέων ερωτημάτων ή η επεξεργασία ήδη γνωστών προβλημάτων από άλλη οπτική γωνία, απαιτεί δημιουργική σκέψη και σηματοδοτεί την πραγματική εξέλιξη της επιστήμης (Einstein & Infeld, 1938). Επομένως η έννοια της δημιουργικότητας συνδέεται τόσο με τη δημιουργία νέων προβλημάτων (Newell et Al., 1962) όσο και με την επίλυση, ιδιαιτέρως των κακώς δομημένων προβλημάτων (Voss & Means, 1999).

Παρόλα αυτά, η σχέση που συνδέει τη δημιουργικότητα με την τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων δεν είναι πλήρως αποσαφηνισμένη (Silver, 1994). Δεν υπάρχει δηλαδή ένα ξεκάθαρο πλαίσιο συσχέτισης της δημιουργικότητας ενός ατόμου και της ικανότητάς του να συνθέτει προβλήματα (Haylock, 1987). Το 1993, ο Leung πραγματοποίησε μία έρευνα για να μελετήσει τις επιδόσεις ενός δείγματος εκπαιδευτικών σε ένα συγκεκριμένο τεστ δημιουργικότητας και να συγκρίνει τα αποτελέσματά του με τις ικανότητές τους στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Έπειτα από την αξιολόγηση των προβλημάτων που δημιούργησαν ως προς το γνωστικό πεδίο και την πολυπλοκότητά τους, δε βρέθηκε κάποιου είδους συσχέτιση με τις επιδόσεις τους στο τεστ. Αντιθέτως διαπιστώθηκε ότι υπήρχε ισχυρή συσχέτιση μεταξύ του υπόβαθρου των μαθηματικών γνώσεων των συμμετεχόντων και της ποιότητας των προβλημάτων που συνέθεσαν (Leung, 1993).

Σε παρόμοια συμπεράσματα είχε καταλήξει και η Ellerton έπειτα από έρευνα που πραγματοποίησε σε μαθητές, υποστηρίζοντας ότι εκείνοι που είχαν μεγαλύτερη έφεση στα μαθηματικά ήταν σε θέση να δημιουργήσουν προβλήματα αυξημένης υπολογιστικής δυσκολίας (Ellerton, 1986). Ο Kruetskii ισχυρίστηκε ότι οι μαθητές με τις καλύτερες επιδόσεις στα μαθηματικά μπορούν να συνθέσουν προβλήματα με άνεση, χωρίς ιδιαίτερες υποδείξεις, αρκεί να διαθέτουν τις απαιτούμενες πληροφορίες και το πλαίσιο στο οποίο πρέπει να ενταχθεί το πρόβλημα (Krutetskii, 1976).

2.4 Τεχνικές και πλαίσια κατασκευής προβλημάτων

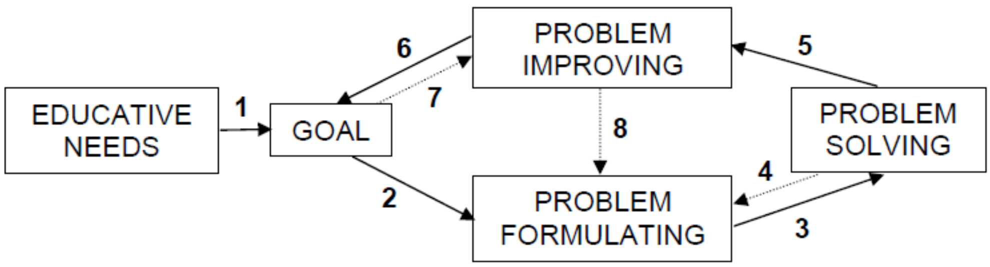
Οι δυσκολίες της καθημερινής ζωής των ανθρώπων είναι μία από τις βασικές πηγές προέλευσης προβλημάτων, πολλά από τα οποία αποκτούν μαθηματική μορφή, όπως για παράδειγμα συμβαίνει με υπολογιστικά προβλήματα ή ερωτήματα που εγείρονται στις διάφορες εμπορικές συναλλαγές ή αγοραπωλησίες (Ellerton, 2013).

Καινούργια προβλήματα προκύπτουν συνήθως μέσα από την επεξεργασία ήδη γνωστών προβλημάτων, διαμορφώνοντας και προσαρμόζοντάς τα σε πραγματικές συνθήκες και καταστάσεις (Kilpatrick, 1987). Ένα υπαρκτό μαθηματικό πρόβλημα μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία ενός νέου προβλήματος αν εξειδικευθεί, αν μελετηθεί κάτω από ειδικές συνθήκες, αν γενικευθεί, αν επεκταθεί, αν επαναδιατυπωθεί ή αν διαφοροποιηθούν τα δεδομένα και τα ζητούμενά του (Sharigin, 1991).

Υπάρχει πληθώρα μεθόδων και στρατηγικών που μπορούν να ακολουθηθούν για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Ο Hashimoto στήριξε την διαδικασία της σύνθεσης μαθηματικών προβλημάτων στο ερώτημα «Τι θα συμβεί αν…» (What if) (Hashimoto 1987) ενώ οι Brown και Walter στο ερώτημα «τι θα συμβεί αν δεν…» (What if not) προσπαθώντας να δημιουργήσουν νέα δεδομένα ή ερωτήματα στο πλαίσιο της αναδρομικής διερεύνησης ενός δοσμένου προβλήματος, σύμφωνα με τα τέσσερα στάδια επίλυσης προβλημάτων του Polya (Brown & Walter, 1983). Μια άλλου είδους στρατηγική βασίζεται στη διερεύνηση και μελέτη των συσχετίσεων που υπάρχουν μεταξύ των δεδομένων που δίνονται, έτσι ώστε το πρόβλημα που θα δημιουργηθεί να πληροί και να είναι συμβατό με τις σχέσεις αυτές (Krutetskii, 1976).

Σύμφωνα με τον Kilpatrick υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να ακολουθήσει κάποιος προκειμένου να κατασκευάσει ένα πρόβλημα. Είτε κατά τη διάρκεια της επίλυσης ενός προβλήματος, οπότε ο λύτης μπορεί να διαφοροποιήσει κάποια δεδομένα εξετάζοντας και διερευνώντας τι μορφής νέο πρόβλημα μπορεί να προκύψει είτε μετά την επίλυση, όταν μπορεί να επιστρέψει πίσω εξετάζοντας σε ποιο βαθμό και με ποιον τρόπο μπορεί να επηρεαστεί η λύση από τροποποιήσεις στα δοσμένα στοιχεία ή στα ζητούμενα του προβλήματος (Kilpatrick, 1987).

Η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων είναι γενικώς αποδεκτό ότι αποτελεί μια σύνθετη και πολύπλοκη γνωστική δραστηριότητα που αποτελείται από τρεις βασικές διαδικασίες: τη διατύπωση, την επίλυση και την βελτίωση. Οποιαδήποτε στρατηγική και αν επιλεχθεί για τη δημιουργία ενός προβλήματος, πάντοτε αρχικώς τίθεται ένα ερώτημα που αποτελεί το θεμέλιο λίθο του προβλήματος. Εν συνεχεία το ερώτημα αυτό πρέπει να απαντηθεί από αυτόν που το έθεσε και να εξεταστεί αν είναι εφικτό να τροποποιηθεί (και με ποιον τρόπο) προκειμένου να αλλάξει το επίπεδο πολυπλοκότητας ή η διδακτική αξία του προβλήματος. Η επεξεργασία ενός προβλήματος κατά τη διάρκεια της τοποθέτησής του εξαρτάται άμεσα από τις ικανότητες του δημιουργού.



Εικόνα 2: Γενικό πλαίσιο κατασκευής ενός μαθηματικού προβλήματος (Cruz Ramírez, 2006)

Κάθε μαθηματικό πρόβλημα που κατασκευάζεται, ειδικά στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, αποσκοπεί στο να ικανοποιήσει κάποιες συγκεκριμένες διδακτικές ανάγκες. Αν για παράδειγμα ένας εκπαιδευτικός θέλει να δημιουργήσει ένα πρόβλημα για να διδάξει μια συγκεκριμένη έννοια, θα πρέπει αρχικώς να επεξεργαστεί ένα πρόβλημα σχετικό με την έννοια αυτή (εικόνα 2, σχέσεις 1 – 2). Στη συνέχεια αφού διατυπώσει το πρόβλημα, προχωρά στην επίλυσή του. Στο στάδιο αυτό μπορεί να επιστρέψει στην αρχική διατύπωση του προβλήματος τροποποιώντας τα δεδομένα ή επιλέγοντας νέα στοιχεία προς μελέτη (εικόνα 2, αλληλεπίδραση 3 – 4). Αφού κατασταλάξει στη μορφή του προβλήματος προχωρά σε βελτιώσεις καθορίζοντας παράλληλα το βαθμό πολυπλοκότητας και δυσκολίας του (εικόνα 2, σχέση 5). Κατόπιν εξετάζει αν το πρόβλημα ικανοποιεί τους απαιτούμενους διδακτικούς στόχους (εικόνα 2, αλληλεπίδραση 6 – 7). Σε αρνητική περίπτωση είτε θα τροποποιήσει κάποια στοιχεία του προβλήματος δίχως να επηρεαστεί το νόημά του (π.χ. χρήση πιο απλών αριθμητικών δεδομένων) είτε θα απορρίψει ολόκληρο το δημιούργημα και θα το συνθέσει εξ αρχής (εικόνα 2, σχέση 8) (Cruz Ramírez, 2006).

Στη συνέχεια θα αναλυθούν οι βασικές τεχνικές δημιουργίας ενός νέου μαθηματικού προβλήματος.

2.4.1 Στρατηγικές τοποθέτησης προβλήματος με βάση τη δομή του

Για την σύνθεση νέων μαθηματικών προβλημάτων υπάρχουν τρεις διαφορετικές μέθοδοι που μπορούν να ακολουθηθούν: η ελεύθερη σύνθεση, η ημιδομημένη και η δομημένη.

Η ελεύθερη σύνθεση ενός μαθηματικού προβλήματος, στηρίζεται σε ερωτήματα και προβληματισμούς από καταστάσεις της καθημερινότητας. Ο δημιουργός του προβλήματος εντάσσει τα ερωτήματα αυτά (προσαρμόζοντάς τα κατάλληλα) σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, το οποίο συνθέτει σε ελεύθερο πλαίσιο, χωρίς περιορισμούς και δεσμεύσεις (Abu Elwan, 2016). Η κατασκευή προβλημάτων σε ελεύθερο πλαίσιο θεωρείται μια ιδιαιτέρως χρήσιμη και ωφέλιμη διαδικασία διότι συνδυάζει ρεαλιστικά γεγονότα με το χώρο των μαθηματικών και συμβάλλει αποτελεσματικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Akay, 2006).

Η διαδικασία της ημιδομημένης σύνθεσης ενός προβλήματος, προαπαιτεί την σαφή και πλήρη περιγραφή μιας αρχικής κατάστασης που δεν έχει προκαθορισμένο αποτέλεσμα (open-ended situation), μίας κατάστασης δηλαδή που περιλαμβάνει απλώς κάποιες αρχικές συνθήκες. Στη συνέχεια ο δημιουργός του προβλήματος αξιοποιώντας τις μαθηματικές γνώσεις, ικανότητες και εμπειρίες του, συμπληρώνει τις συνθήκες (αν είναι απαραίτητο) και θέτει τα κατάλληλα ερωτήματα, προκειμένου να οδηγηθεί στην κατασκευή ενός νέου προβλήματος (Abu Elwan, 2016, Stoyanova, 1996). Για να ολοκληρωθεί με επιτυχία η κατασκευή ενός προβλήματος στα πλαίσια μιας ημιδομημένης κατάστασης, θα πρέπει ο δημιουργός να δίνει διαρκώς απαντήσεις σε ερωτήματα της μορφής «με ποιον τρόπο μπορεί να ολοκληρωθεί η κατάσταση;» ή «μπορεί να τεθεί κάποιο άλλο ερώτημα;» (Abu-Elwan, 1999).

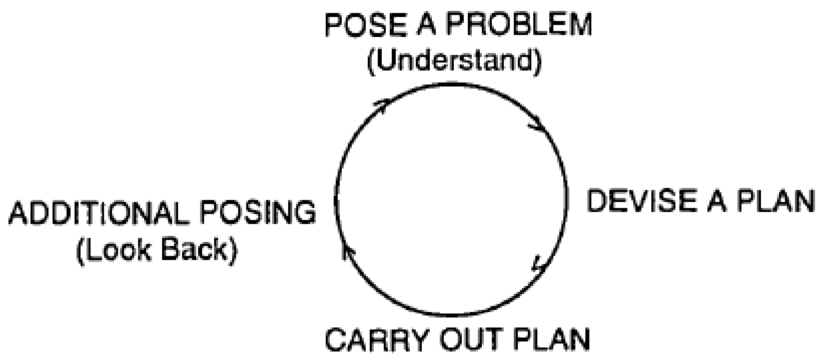
Η δομημένη στρατηγική τοποθέτησης προβλημάτων οδηγεί ουσιαστικά στην αναδιατύπωση γνωστών προβλημάτων διότι βασίζεται στην τροποποίηση των δεδομένων ή των ζητούμενων σε ήδη υπάρχοντα προβλήματα, δημιουργώντας με τον τρόπο αυτό ένα νέο μαθηματικό πρόβλημα. Πρόκειται για μια πολύ συνηθισμένη διαδικασία που εφαρμόζεται από τους εκπαιδευτικούς στις σχολικές αίθουσες (Abu Elwan, 2016, Akay, 2006). Στο πλαίσιο αυτό εντάσσεται και η μέθοδος What If Not των Brown και Walter (Brown & Walter, 1993) που θα αναλυθεί διεξοδικά παρακάτω.

Αξίζει να σημειωθεί πως σύμφωνα με τους Cai και Hwang ένα αναδιατυπωμένο μαθηματικό πρόβλημα πρέπει να εξετάζεται και να μελετάται ως προς την ομοιότητα που έχει με το αρχικό πρόβλημα. Στην περίπτωση που διατηρεί τη δομή του αρχικού προβλήματος αλλά έχει πιο απαιτητική διαδικασία επίλυσης, χαρακτηρίζεται ως εκτεταμένο ενώ αν το επίπεδο δυσκολίας του παραμένει ίδιο, χαρακτηρίζεται ως μη εκτεταμένο. Στην περίπτωση βέβαια που η δομή του αρχικού προβλήματος μεταβάλλεται ριζικά, τότε δεν εντάσσεται σε καμία από τις δύο προηγούμενες κατηγορίες διότι στην ουσία αποτελεί ένα νέο, άλλου είδους πρόβλημα (Cai & Hwang, 2003).

2.4.2 Αναδιατύπωση ενός προβλήματος ακολουθώντας τα τέσσερα στάδια του Polya

Ο Polya αν και δεν ασχολήθηκε εμφανώς με την κατασκευή και σύνθεση μαθηματικών προβλημάτων, μέσω της αναδρομικής διερεύνησης ενός προβλήματος (που αποτελεί το τελευταίο στάδιο της θεωρίας του) δίνει τη δυνατότητα στον λύτη να το αναδιαμορφώσει είτε τροποποιώντας τα δεδομένα του είτε δημιουργώντας νέα ερωτήματα, διαπιστώνοντας παράλληλα με ποιον τρόπο επηρεάζεται η λύση καθώς και τι είδους διαφοροποίηση υφίσταται το αρχικό πρόβλημα (Abu Elwan, 2016).

Από τη στιγμή που το αρχικό πρόβλημα αναδιατυπώνεται, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η προσαρμογή των τεσσάρων βημάτων του Polya στην διαδικασία κατασκευής νέων προβλημάτων. Το πρώτο βήμα του Polya που είναι η κατανόηση του προβλήματος, μπορεί να αντικατασταθεί από την τοποθέτηση του (τροποποιημένου) προβλήματος αφού η δημιουργία ενός προβλήματος προϋποθέτει προφανώς την κατανόησή του. Τα δύο επόμενα βήματα είναι ο σχεδιασμός του πλάνου επίλυσης και η εφαρμογή του. Αφού επιλυθεί το πρόβλημα, εκτελείται το τελευταίο στάδιο του Polya που είναι ο αναδρομικός έλεγχος της λύσης. Μέσω του τελευταίου σταδίου μπορεί να δημιουργηθούν νέες αναδιατυπώσεις που ενδέχεται να οδηγήσουν σε νέα προβλήματα. Επομένως το μοντέλο των τεσσάρων βημάτων του Polya τροποποιείται αποκτώντας τη μορφή: Τοποθέτηση – Σχέδιο – Εκτέλεση σχεδίου – Τοποθέτηση. Δημιουργείται δηλαδή ένα κυκλικό μοντέλο τοποθέτησης και επίλυσης προβλημάτων που οδηγεί σε μία ατελείωτη διαδικασία, όπως φαίνεται και στην εικόνα 3 (Leung, 1997b).



Εικόνα 3: Κυκλικό μοντέλο τοποθέτησης – επίλυσης μαθηματικού προβλήματος (Leung, 1997b)

Το παραπάνω μοντέλο δείχνει επιπλέον ότι η κατασκευή προβλημάτων είναι μια ανοιχτή διαδικασία στην αναζήτηση και διερεύνηση επεκτάσεων (Silver & Mamona, 1990).

2.4.3 Κατασκευή προβλημάτων σύμφωνα με την ταξινόμηση του Reitman

Ένα μαθηματικό πρόβλημα θεωρείται καλά δομημένο αν τα δεδομένα, οι σχέσεις που τα διέπουν και οι στόχοι (ζητούμενα) είναι καλά καθορισμένοι. Ο Reitman ταξινόμησε τα προβλήματα σε τέσσερις κατηγορίες ανάλογα με το πόσο καλά καθορίζονται τα δεδομένα και οι στόχοι τους. Οι κατηγορίες αυτές περιλαμβάνουν προβλήματα που έχουν:

- ακαθόριστα δεδομένα και ακαθόριστους στόχους

- ακαθόριστα δεδομένα και καλά καθορισμένους στόχους
- καλά καθορισμένα δεδομένα και ακαθόριστους στόχους
- καλά καθορισμένα δεδομένα και καλά καθορισμένους στόχους (Reitman, 1965).

Η δημιουργία προβλημάτων με ακαθόριστα δεδομένα και ακαθόριστους στόχους είναι μια ανοιχτή διαδικασία, χωρίς δεσμεύσεις και περιορισμούς (Leung, 1997b) η οποία βασίζεται συνήθως σε καταστάσεις που προέρχονται από την πραγματική ζωή (Winograd, 1991). Συχνά προκύπτουν προβλήματα που αρχικώς παρουσιάζουν μαθηματική πολυπλοκότητα (φαινομενικά τουλάχιστον) που όμως επιλύονται με σχετικά απλό τρόπο (Ellerton, 1986).

Όταν τα δεδομένα δεν είναι προκαθορισμένα και σαφή αλλά ο στόχος είναι ξεκάθαρος, τότε η δημιουργία ενός προβλήματος είναι μια δραστηριότητα που μπορεί να οδηγήσει στην τοποθέτηση πολλών διαφορετικών προβλημάτων. Ο καλά καθορισμένος στόχος μπορεί να παραλληλιστεί σχηματικά με έναν συγκεκριμένο κύκλο ενώ τα δεδομένα με κομμάτια του κύκλου που πρέπει να συνδυαστούν κατάλληλα για να συνθέσουν τον κύκλο.

Για παράδειγμα, αν ο στόχος ενός προβλήματος είναι να προκύψει ότι οι ταχύτητες δύο κινητών Α και Β είναι αντιστοίχως 37 m/min και 28 m/min, μπορούν να διατυπωθούν τα παρακάτω προβλήματα:
Πρόβλημα 1: Τα κινητά Α και Β διανύουν απόσταση 1036 m σε 28 min και 37 min αντίστοιχα. Ποια είναι η ταχύτητα του καθενός;
Πρόβλημα 2: Αθροιστικά οι ταχύτητες των κινητών Α και Β είναι 65 m/min. Αν η ταχύτητα του Α είναι κατά 9 m/min μεγαλύτερη από την ταχύτητα του Β τότε ποια είναι η ταχύτητα του Α και ποια του Β;
Η ανοιχτή φύση των προβλημάτων αυτού του είδους αφορά τόσο τον καθορισμό των δεδομένων όσο και της συσχέτισής τους, προκειμένου να δημιουργηθεί ένα πρόβλημα που θα οδηγήσει στον επιθυμητό στόχο (Leung, 1997b).

Αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι καθορισμένα αλλά ο στόχος απροσδιόριστος τότε η τοποθέτηση του προβλήματος αποτελεί μια ανοιχτή διαδικασία ως προς τον καθορισμό του στόχου. Αν για παράδειγμα δίνεται ως δεδομένο ότι ένα προϊόν συσκευάζεται σε 28 διαφορετικά κουτιά που το καθένα ζυγίζει μισό κιλό, τότε η ερώτηση που μπορεί να διατυπωθεί ώστε να δημιουργηθεί το πρόβλημα ενδεχομένως να είναι η εξής: πόσο είναι το συνολικό βάρος των κουτιών; Σε αυτού του είδους τα προβλήματα παρατηρείται πολύ μικρή ευελιξία κατά τη διαδικασία της τοποθέτησής τους (Leung 1993b, Silver & Leung, 1992).

Οι παραπάνω περιπτώσεις αποδεικνύουν πως με τη σωστή τοποθέτηση μπορεί να μετατραπεί μία κακώς δομημένη κατάσταση σε ένα καλώς δομημένο πρόβλημα, γεγονός που θεωρείται απαραίτητο κατά τη δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων που θα επιλυθούν από άλλους. Τέλος, η κατασκευή προβλημάτων που προέρχονται από μια καλά δομημένη κατάσταση, δηλαδή με σαφή δεδομένα και στόχους, είναι μια διαδικασία που δίνει δυνατότητα ευελιξίας μόνο σε ότι αφορά το μαθηματικό του περιεχόμενο, το πλαίσιο στο οποίο θα ενταχθεί ή τη μορφή των ερωτημάτων του (Leung, 1996).

2.4.4 Η μέθοδος What If Not

Αν τα δεδομένα μιας μαθηματικής δραστηριότητας θεωρηθούν αδιαπραγμάτευτα, τότε τα μαθηματικά μετατρέπονται σε μια συλλογή από συνεχείς αποδεικτικές διαδικασίες. Όμως τα μαθηματικά είναι κάτι περισσότερο από αποδείξεις και τεκμηριώσεις.

Την παραπάνω θέση υιοθέτησαν οι Brown και Walter δίνοντας μεγαλύτερη βαρύτητα στην τοποθέτηση ενός μαθηματικού προβλήματος ή ενός ερωτήματος παρά στην απάντησή του. Πρότειναν δύο στάδια για την κατασκευή προβλημάτων: την αποδοχή και την πρόκληση. Εν συνεχεία αναδιατύπωσαν τον όρο πρόκληση, με το ερώτημα «τι θα συνέβαινε αν δεν…» (what if not), θεμελιώνοντας έτσι τη στρατηγική τοποθέτησης προβλημάτων που είναι ευρέως γνωστή ως «What If Not». Πρόκειται για μια τεχνική που συμβάλλει στο να δημιουργηθούν νέες ιδέες, να προκύψουν νέες αντιλήψεις που θα αξιοποιήσουν κάποιες παλαιότερες, να εκτιμηθούν και να αξιολογηθούν έννοιες που θα προκύψουν από καινούργιες διασυνδέσεις. Στο πλαίσιο αυτό δημιουργείται ένα πλήθος παραλλαγμένων χαρακτηριστικών μιας αρχικής θέσης που μέσω κατάλληλων συνδυασμών και συσχετίσεων οδηγούν σε νέες αναζητήσεις και στην τοποθέτηση νέων προβλημάτων (Brown & Walter, 1990).

Η τεχνική «What If Not» αποτελείται από πέντε διαφορετικά επίπεδα που συνοπτικά είναι τα εξής:

Επίπεδο 0: Επιλογή σημείου εκκίνησης

Επίπεδο I: Δημιουργία λίστας θέσεων, διαπιστώσεων και χαρακτηριστικών

Επίπεδο II: Τι θα συνέβαινε αν δεν ίσχυε… (What if not)

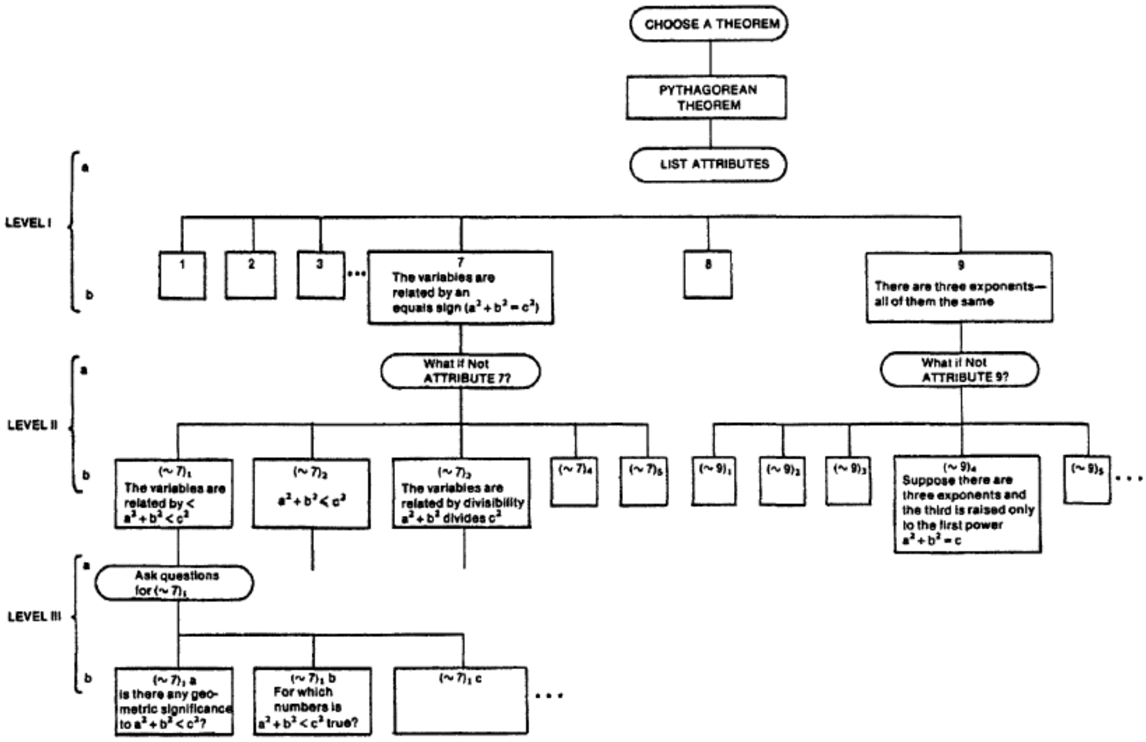
Επίπεδο ΙΙΙ: Διατύπωση νέων ερωτημάτων – Τοποθέτηση προβλήματος

Επίπεδο IV: Ανάλυση προβλήματος

Για τη δημιουργία ενός προβλήματος με τη συγκεκριμένη τεχνική, απαιτείται αρχικά μια σαφής θέση ή ένα θεώρημα το οποίο θα μελετηθεί. Πρόκειται για το αρχικό θέμα ή σημείο εκκίνησης της διαδικασίας, του οποίου η επιλογή μπορεί να γίνει με παιδαγωγικά, διδακτικά ή και προσωπικά κριτήρια (Επίπεδο 0). Στη συνέχεια διατυπώνονται όλες οι δυνατές παρατηρήσεις, διαπιστώσεις ή χαρακτηριστικά που προκύπτουν από την μελέτη της αρχικής θέσης (Επίπεδο Ι). Έπειτα, για κάθε μία διαπίστωση τίθεται το ερώτημα «τι θα συνέβαινε αν δεν ίσχυε;» (Επίπεδο ΙΙ). Η διερεύνηση των απαντήσεων στο εν λόγω ερώτημα οδηγεί στη διατύπωση νέων παρατηρήσεων ή ερωτημάτων, δηλαδή στην τοποθέτηση ενός νέου προβλήματος (Επίπεδο ΙΙΙ). Στο τέλος αναλύονται τα ερωτήματα και οι νέες θέσεις που διατυπώθηκαν (Επίπεδο IV) (Brown & Walter, 1990).

Τα επίπεδα 0, Ι, ΙΙΙ και IV μπορούν να θεωρηθούν ως απλές ενέργειες μιας στρατηγικής μεθόδου δημιουργίας προβλημάτων ενώ το επίπεδο ΙΙ είναι μια πολύπλοκη τεχνική που αποτελεί την καρδιά της εν λόγω στρατηγικής (Campistrous & Rizo, 2000). Το τελευταίο ειδικά επίπεδο που επιβεβαιώνει στην ουσία την ορθότητα του προβλήματος, μπορεί να παραλληλισθεί με τον αναδρομικό έλεγχο του Polya (Cruz Ramírez, 2006).

Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζεται σχηματικά η εφαρμογή της τεχνικής What If Not με αρχικό θέμα (σημείο εκκίνησης) το Πυθαγόρειο Θεώρημα.



Εικόνα 4: Η τεχνική What If Not για το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Brown & Walter, 1990)

Η τεχνική What If Not δίνει τη δυνατότητα για εις βάθος μελέτη μιας μαθηματικής έννοιας ή θεωρήματος. Για παράδειγμα στην περίπτωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος (Εικόνα 4), δίνεται η δυνατότητα διερεύνησης πολλαπλών περιπτώσεων όπως τι συμβαίνει αν δεν υπάρχει ορθή γωνία στο τρίγωνο, τι ισχύει αν ο τύπος του θεωρήματος δεν ήταν σχέση ισότητας κλπ.

Έχει παρατηρηθεί ότι η εφαρμογή της μεθόδου What If Not εφαρμόζεται από πολλούς ανθρώπους με πολύ φυσικό τρόπο διότι είναι ενσωματωμένη στον τρόπο σκέψης τους. Σε κάθε περίπτωση αποτελεί μια ουσιαστική και χρήσιμη διαδικασία που βοηθά σημαντικά στην πλήρη κατανόηση της αρχικής έννοιας μέσω της ανάλυσης, της διερεύνησης και της μελέτης κάθε παραλλαγμένης μορφής της (Brown & Walter, 1990).

2.4.5 Παραλλαγές της μεθόδου What If Not

Αν και οι περισσότεροι ερευνητές θεωρούν ότι η στρατηγική What If Not των Brown και Walter είναι μια αποτελεσματική μέθοδος για τη δημιουργία νέων προβλημάτων (Silver, 1993, Zimmermann, 1986), εντούτοις τα πέντε επίπεδα που την απαρτίζουν ερμηνεύονται και εφαρμόζονται ποικιλοτρόπως. Για παράδειγμα ο Tejima υποστήριξε ότι τα πέντε επίπεδα πρέπει να είναι ως εξής:

Επίπεδο 0: Επιλογή προβλήματος ή κατάστασης

Επίπεδο 1: Ανάπτυξη των χαρακτηριστικών από διάφορες οπτικές

Επίπεδο 2: Τίθεται το ερώτημα «τι θα συνέβαινε αν δεν …» σε κάθε χαρακτηριστικό

Επίπεδο 3: Δημιουργία νέων προβλημάτων

Επίπεδο 4: Ανάλυση του προβλήματος που δημιουργήθηκε και επίλυσή του

Για τον Tejima, η δημιουργία του νέου προβλήματος προκύπτει μέσω της τροποποίησης των δεδομένων του αρχικού προβλήματος (Tejima, 1992).

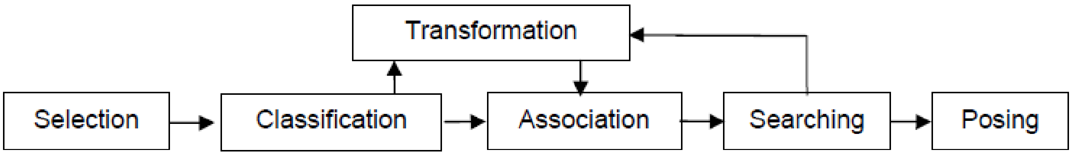
Ο Shiota ερμήνευσε τα επίπεδα 0 έως 3 παρόμοια με τον Tejima. Για το επίπεδο 4 όμως διαφοροποίησε τη θέση του υποστηρίζοντας ότι πρέπει να εξεταστεί το πώς επηρεάζεται η λύση του προβλήματος από τις διάφορες αλλαγές που υφίστανται τα χαρακτηριστικά του. Η διερεύνηση αυτή μπορεί να γίνει μέσω της σύγκρισης των λύσεων του νέου και του αρχικού προβλήματος (Shiota, 1991). Επομένως ο Tejima αναλύει το νέο πρόβλημα πριν την επίλυσή του ενώ ο Shiota αμέσως μετά (Seo, 1997).

Ο Munehiro από την πλευρά του υποστήριξε ότι η επίλυση του προβλήματος που δημιουργείται στο επίπεδο 3 είναι η ουσία του επιπέδου 4 (Munehiro, 1982).

Με διαφορετική τροποποίηση των επιπέδων της στρατηγικής What If Not μπορεί να προκύψει και μία ακόμη μέθοδος για τη δημιουργία νέων μαθηματικών προβλημάτων η οποία αποτελείται από τα ακόλουθα στάδια:

- Επιλέγεται το αντικείμενο (ιδέα ή έννοια) στο οποίο θα στηριχθεί το πρόβλημα.
- Συγκεντρώνονται τα χαρακτηριστικά του στοιχεία, οργανώνονται και συγκρίνονται όλες οι διαθέσιμες πληροφορίες. Παράλληλα, ενσωματώνονται όλα αυτά τα στοιχεία στο προς εξέταση αντικείμενο και αναζητούνται επιπλέον και άλλα πιο σύνθετα συστατικά του.
- Μετασχηματίζεται το αρχικό αντικείμενο ολικώς ή μερικώς. Ο μετασχηματισμός είναι μια πολύπλοκη διαδικασία που μπορεί να έχει συνθετικό ή αναλυτικό χαρακτήρα και αποσκοπεί είτε στη γενίκευση των χαρακτηριστικών του είτε στην αφαίρεση κάποιων, τροποποιώντας την αρχική ιδέα του προβλήματος.
- Αφού τροποποιηθεί (ή όχι) το αρχικό αντικείμενο του προβλήματος, συνδυάζονται τα χαρακτηριστικά που το διέπουν δίνοντάς τους μαθηματική υπόσταση.

- Αξιοποιούνται μόνο τα απαραίτητα χαρακτηριστικά του προς εξέταση αντικειμένου και αναζητούνται πιθανές εξαρτήσεις.
- Τοποθετείται το πρόβλημα (Cruz Ramírez, 2006).



Εικόνα 5: Παραλλαγή της τεχνικής What If Not (Cruz Ramírez, 2006)

2.5 Η κατασκευή προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών

Η τοποθέτηση προβλημάτων μπορεί να μελετηθεί και να διερευνηθεί αναλόγως με το αν έχει ή όχι διδακτικές προεκτάσεις. Στην πρώτη περίπτωση θεωρείται μια διαδικασία, πιθανόν ξεκομμένη από το σύνολο των μαθηματικών, που εξυπηρετεί όμως έναν πολύ εξειδικευμένο σκοπό ενώ στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να οδηγήσει σε άλλες δραστηριότητες που εντάσσονται στο ευρύ φάσμα των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα είναι η έρευνα (Kontorovich, 2020).

Η κατασκευή προβλημάτων στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης αντιμετωπίζεται από την εκπαιδευτική κοινότητα ποικιλοτρόπως. Άλλοτε ως ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, άλλοτε ως διδακτικός στόχος που πρέπει να επιτευχθεί, άλλες φορές ως μέσο για την για τη διερεύνηση άλλων παραμέτρων και κάποιες φορές ως αντικείμενο μελέτης (Cai & Leikin, 2020).

Η θεώρηση ότι η κατασκευή προβλημάτων αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διδασκαλία των μαθηματικών, αντιμετωπίζει την εν λόγω διαδικασία ως ένα μέσο που μπορεί να αξιοποιήσει ο διδάσκων για να βοηθήσει τους μαθητές του να αποκτήσουν και να αφομοιώσουν τη μαθηματική γνώση. Κατά καιρούς έχουν διεξαχθεί πολλές έρευνες σε αυτό το πλαίσιο, οι οποίες διερεύνησαν πώς η ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή προβλημάτων μπορεί να βελτιώσει την διαδικασία εκμάθησης των μαθηματικών (Brown

& Walter, 1983). Μελέτες αυτού του είδους επικεντρώθηκαν σε πληθώρα μαθησιακών στόχων. Για παράδειγμα οι Chen και Cai μελέτησαν πώς μπορούν οι μαθητές μέσω της σύνθεσης μαθηματικών προβλημάτων να κατανοήσουν και να αφομοιώσουν την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση (Chen & Cai, 2020). Ο Koichu ανέλυσε την κατασκευή προβλημάτων ως μέσο για τη διδακτική προσέγγιση τρόπων επίλυσης σύνθετων προβλημάτων (Koichu, 2020) ενώ οι Cifarelli & Sevim προχωρώντας ένα βήμα παραπέρα, θεώρησαν πως αποτελεί ένα εργαλείο για την αναδιαμόρφωση κάποιων ήδη λυμένων προβλημάτων (Cifarelli & Sevim, 2015). Οι Matsko & Thomas διερεύνησαν την επίδραση της κατασκευής προβλημάτων στην βελτίωση της μαθηματικής δημιουργικότητας (Matsko & Thomas, 2015).

Οι έρευνες που μελέτησαν την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων ως στόχο στη διδασκαλία των μαθηματικών, επικεντρώθηκαν στο πώς είναι δυνατόν να βελτιωθεί η επάρκεια ενός ατόμου να συνθέτει καλά προβλήματα. Στην περίπτωση αυτή η σύνθεση μαθηματικών προβλημάτων αντιμετωπίστηκε ως μια δραστηριότητα που εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο άλλων μαθηματικών δραστηριοτήτων, όπως η επίλυση προβλημάτων, η απόδειξη ή η διερεύνηση (Cai & Leikin, 2020). Κάποιες έρευνες επικεντρώθηκαν στο να προσδιορίσουν τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κάποιος να μάθει να δημιουργεί συγκεκριμένου τύπου προβλήματα. Σε αυτό το πνεύμα ο Leikin ασχολήθηκε εξειδικευμένα με γεωμετρικά προβλήματα αναλύοντας τις αποδεικτικές ικανότητες και τη δημιουργικότητα που απαιτείται για την κατασκευή νέων γεωμετρικών προβλημάτων (Leikin, 2015).

Για την ποιοτική και ουσιαστική βελτίωση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι αναγκαία η ανάπτυξη δραστηριοτήτων σχετικών με την τοποθέτηση προβλημάτων, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή τους από τους μαθητές. Στη σύγχρονη εκπαίδευση, οι μαθητές παράλληλα με την επίλυση προβλημάτων που δίνονται από τους εκπαιδευτικούς ή που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία, είναι χρήσιμο να εμπλέκονται και με τη σύνθεση μαθηματικών προβλημάτων. Στο πλαίσιο αυτό, καθοριστικός θεωρείται ο ρόλος του εκπαιδευτικού διότι ενσωματώνοντας δραστηριότητες τοποθέτησης προβλημάτων στη διδασκαλία, βοηθά καταλυτικά τους μαθητές να αποκτήσουν χρήσιμες και ουσιαστικές εμπειρίες σχετικά με την επίλυση τους (NCTM, 1989, 1991).

Μελετώντας την τοποθέτηση προβλημάτων από την πλευρά του διδάσκοντα, δηλαδή με δασκαλοκεντρική προοπτική, το πρόβλημα που κατασκευάζεται πρέπει να πληροί τρεις βασικές προϋποθέσεις: να διαφέρει από τα προβλήματα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια, να μην έχουν ασχοληθεί με αυτό οι μαθητές στο παρελθόν και να καλύπτει ιδιαίτερες και ίσως εξειδικευμένες διδακτικές ανάγκες (Klinshtern et al., 2015). Επομένως, ο εκπαιδευτικός πρέπει να είναι σε θέση να θέτει προβλήματα που να περιέχουν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών, αξιοποιώντας συνδυαστικές μεθόδους και τακτικές επίλυσης, να τροποποιεί ασκήσεις και προβλήματα των σχολικών εγχειριδίων, να εμπνέεται από προβληματικές καταστάσεις του πραγματικού κόσμου δίνοντάς τους μαθηματική διάσταση και να αναδιαμορφώνει κακώς διατυπωμένα προβλήματα έχοντας όμως πάντοτε ως γνώμονα την εξυπηρέτηση των γνωστικών και διδακτικών αναγκών των μαθητών (Chapman, 2011). Εξάλλου δεν πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι ενώ ο κάθε μαθηματικός μπορεί να λύνει προβλήματα που έχουν τεθεί από άλλους και να μελετά προβλήματα που θεωρούνται ιδιαιτέρως σημαντικά στη βιβλιογραφία, εντούτοις η ουσιαστικότερη δραστηριότητά του θεωρείται η δημιουργία προβλημάτων που βασίζονται στις προσωπικές εμπειρίες και τα ενδιαφέροντά του (Poincare, 1948).

Το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο της Κούβας πραγματοποίησε μια ενδιαφέρουσα έρευνα τον Φεβρουάριο του 2000 μελετώντας τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατασκευή προβλημάτων οι εν ενεργεία καθηγητές των μαθηματικών καθώς και οι εν δυνάμει εκπαιδευτικοί, δηλαδή οι φοιτητές των μαθηματικών σχολών. Η συγκεκριμένη έρευνα έδειξε ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες επέλεξαν να δημιουργήσουν απλά και εύκολα επιλύσιμα προβλήματα ενώ πολύ μικρό ήταν το ποσοστό εκείνων που συνέθεσε απαιτητικά προβλήματα των οποίων η επίλυση απαιτούσε συνδυαστική σκέψη. Διαπιστώθηκε επίσης ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες ασχολήθηκαν με την κατασκευή προβλημάτων από το χώρο της Γεωμετρίας.

Το μειωμένο ενδιαφέρον για τη δημιουργία σύνθετων προβλημάτων μπορεί να οφείλεται σε διάφορους παράγοντες. Ένας όμως από τους βασικούς λόγους είναι η έλλειψη ενός ξεκάθαρου πλαισίου μέσα στο οποίο μπορεί να κινηθεί ο εκπαιδευτικός, ακολουθώντας συγκεκριμένη στρατηγική προκειμένου να δημιουργήσει κατάλληλα και ενδιαφέροντα προβλήματα, τα οποία με τη σειρά τους θα εξυπηρετούν τους απαιτούμενους διδακτικούς στόχους (Cruz, 2006).

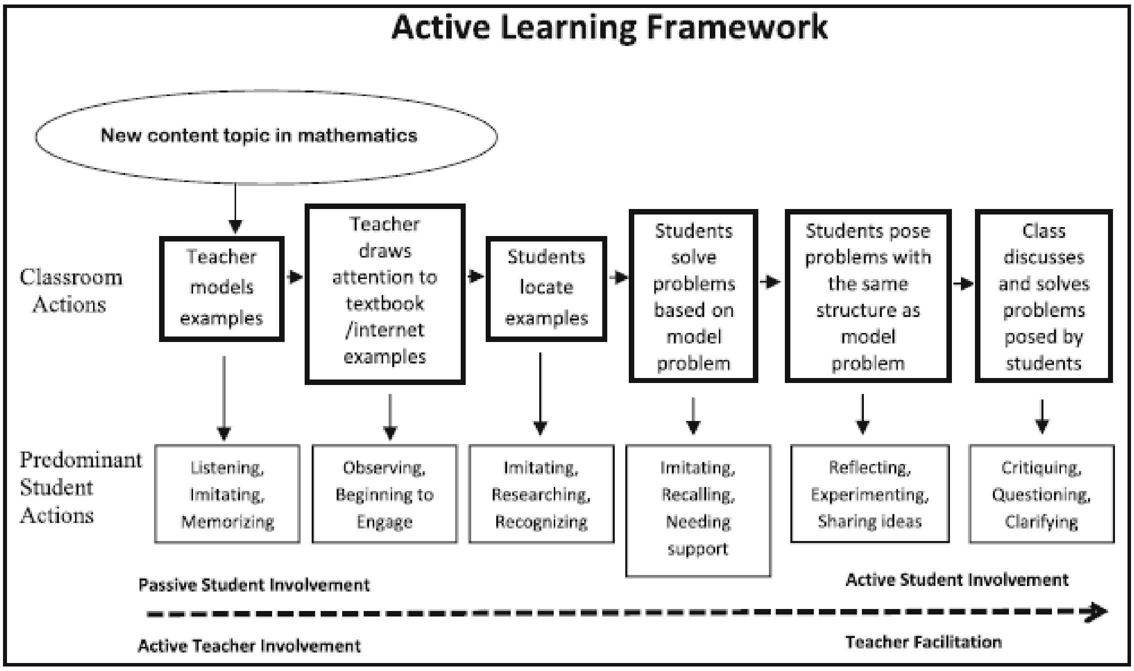
Στο ερώτημα από πού προέρχονται τα καλά μαθηματικά προβλήματα (Kilpatrick, 1987), η άμεση απάντηση που μπορεί να δοθεί είναι ότι προέρχονται κυρίως από τους εκπαιδευτικούς, από τα βιβλία, ενεχομένως από το διαδίκτυο και πολύ σπάνια από τους μαθητές (Kilpatrick, 2016). Το γεγονός ότι δεν ασχολούνται ιδιαιτέρως οι μαθητές με την τοποθέτηση προβλημάτων μπορεί να οφείλεται είτε στη δομή του εκπαιδευτικού συστήματος, που επικεντρώνεται κυρίως στην επίλυση προβλημάτων και όχι στην κατασκευή, είτε στην έλλειψη εξοικείωσής τους με την εν λόγω δραστηριότητα.

Για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων αλλά και για να βελτιώσουν την ικανότητά τους στον τομέα αυτό, υπάρχουν πολλές τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί ο εκπαιδευτικός να δώσει στους μαθητές του ένα πρόβλημα με λανθασμένα δεδομένα και να τους παρακινήσει να το επαναδιατυπώσουν σωστά (Silver et al., 1990) ή να τους ενθαρρύνει να θέσουν οι ίδιοι τα ερωτήματα σε μια δοσμένη μαθηματική κατάσταση. Εναλλακτικά μπορεί να παρουσιάσει μια ημιδομημένη (ημιτελή) κατάσταση της καθημερινότητας ζητώντας από τους μαθητές να την συμπληρώσουν και στη συνέχεια να θέσουν κατάλληλα ερωτήματα. Επίσης μπορεί να επιλέξει ένα πρόβλημα από το σχολικό βιβλίο και αφού οι μαθητές αποσαφηνίσουν ποια είναι τα δεδομένα του, να τους παρακινήσει να τροποποιήσουν τις συνθήκες του προβλήματος (είτε προσθέτοντας είτε αφαιρώντας ένα δεδομένο) και στη συνέχεια να διατυπώσουν ένα νέο ερώτημα (Abu-Elwan, 1999).

Απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχή έκβαση των παραπάνω τεχνικών είναι να έχουν δημιουργηθεί εκ των προτέρων οι κατάλληλες συνθήκες διδασκαλίας - μάθησης που να προάγουν την εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασία κατασκευής προβλημάτων. Στα πλαίσια αυτά οι εκπαιδευτικοί είναι χρήσιμο:

- να ενθαρρύνουν τους μαθητές τους να δημιουργούν προβλήματα και να τα θέτουν αρχικά σε φίλους ή γνωστούς τους που έχουν το ίδιο επίπεδο γνώσεων και μαθηματικών ικανοτήτων με τους ίδιους
- να διασφαλίζουν τη συνεργατική δράση των μαθητών τους στην επίλυση των προβλημάτων έτσι ώστε ο δημιουργός του προβλήματος να μπορεί να λάβει μιας μορφής ανατροφοδότηση σχετικά με την αρτιότητα του προβλήματος που συνέθεσε
- να ζητούν από τους δημιουργούς των προβλημάτων να προτείνουν μεθόδους και στρατηγικές επίλυσης
- να παρακινούν τους μαθητές τους να συνθέτουν προβλήματα που προέρχονται από τις εμπειρίες τους στον πραγματικό κόσμο
- να ενθαρρύνουν τους μαθητές να χρησιμοποιούν και να αξιοποιούν τις νέες τεχνολογίες στην έρευνα και τη μαθηματική αναζήτηση, βελτιώνοντας με τον τρόπο αυτό τόσο τη μαθηματική σκέψη όσο και τις μαθηματικές τους δεξιότητες (Lowrie, 1999).

Γενικά παρατηρείται ότι δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές στη διδασκαλία των μαθηματικών είτε αυτή είναι επικεντρωμένη στην επίλυση προβλημάτων είτε στην τοποθέτησή τους (Schroeder & Lester, 1989). Ειδικά όμως στην περίπτωση που ο εκπαιδευτικός στηρίξει τη διδασκαλία του στην τοποθέτηση προβλημάτων, αξίζει να τονισθεί ότι η διαδικασία της μάθησης επιτυγχάνεται αρχικώς μέσω της κατασκευής προβλημάτων από τους μαθητές και εν συνεχεία μέσω της διεξοδικής συζήτησης, της ανταλλαγής απόψεων και της ανάλυσης τόσο των προβλημάτων που δημιουργήθηκαν όσο και των μεθόδων που εφαρμόστηκαν για την κατασκευή τους (Zhang et al., 2021).



Εικόνα 6: Πλαίσιο ενεργοποίησης των μαθητών στην τοποθέτηση προβλημάτων (Ellerton, 2013)

Τα προβλήματα που συνθέτουν οι μαθητές κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, αντικατοπτρίζουν τις περισσότερες φορές το περιβάλλον στο οποίο ζουν και δραστηριοποιούνται. Ένα παιδί που καθημερινά ασχολείται και μελετάει τα σχολικά βιβλία συνήθως δημιουργεί προβλήματα που είναι παρόμοια με αυτά που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια. Αυτό συμβαίνει είτε γιατί η εμπειρία του περιορίζεται στα πλαίσια που ορίζουν τα σχολικά βιβλία είτε γιατί θεωρεί αδιαμφισβήτητη την αξία τους και επιχειρεί να τα μιμηθεί (Ellerton, 1986).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο τρόπος με τον οποίο εργάζονται κατά την επίλυση είτε εφαρμοσμένων μαθηματικών προβλημάτων είτε κλασικών, καλώς τοποθετημένων σχολικών μαθηματικών προβλημάτων, οι μαθητές που έχουν ήδη εξοικειωθεί με την τοποθέτηση προβλημάτων. Έχει διαπιστωθεί ότι δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα σε διαδικασίες αναδιαμόρφωσης και επαναδιατύπωσης του προβλήματος κατά τη διάρκεια της επίλυσής του (Lesh, 1981, Lesh et al., 1983). Παρατηρήθηκε δηλαδή, πως οι μαθητές εφαρμόζουν διαδικασίες σύνθεσης προβλημάτων την ίδια χρονική στιγμή που τα επιλύουν. Εμπλέκονται έτσι σε διαδικασίες που τους εισαγάγουν στην κουλτούρα και το πνεύμα των μαθηματικών, μαθαίνουν νέους τρόπους σκέψης, συλλογισμού και τεκμηρίωσης (Blum & Niss, 1991). Εξάλλου, με δεδομένο ότι κεντρικό ρόλο στην παραγωγή και εξέλιξη των μαθηματικών έχει η έννοια του προβλήματος, για να κατανοήσει κάποιος τα μαθηματικά και να αντιληφθεί τη φιλοσοφία τους είναι απαραίτητο να εξοικειωθεί με δραστηριότητες και πρακτικές που εφαρμόζουν όσοι παράγουν μαθηματικά (Silver, 1994).

2.6 Η επίδραση στο γνωστικό πεδίο και στο συναίσθημα

Η διδασκαλία και η απόκτηση της γνώσης στο χώρο των μαθηματικών δεν είναι μια απλή διαδικασία μετάδοσης και λήψης ενός μηνύματος. Για να κατακτήσουν και να αφομοιώσουν οι μαθητές τη γνώση πρέπει να την κατασκευάσουν οι ίδιοι (Mathematical Sciences Education Board, 1989). Η ενεργή ενασχόληση των μαθητών με τη μάθηση επιτυγχάνεται με την ενσωμάτωση της τοποθέτησης προβλημάτων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Οι δραστηριότητες που πραγματοποιούνται μέσα στη σχολική αίθουσα και εμπλέκουν τους μαθητές με την κατασκευή προβλημάτων, προάγουν την κριτική σκέψη ενώ ταυτόχρονα δημιουργούν περισσότερες ευκαιρίες μάθησης σε μαθητές διαφορετικών επιπέδων (Baxter, 2005, Silver & Cai, 2005, Whitin, 2004).

Η δημιουργία προβλημάτων τονώνει το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά και επιπλέον τους δίνει τη δυνατότητα να συνδέσουν τα μαθηματικά τόσο με τα δικά τους ενδιαφέροντα όσο και με των συμμαθητών τους. Εξάλλου η περιέργεια, το ενδιαφέρον και η απόλαυση που προσφέρουν τα μαθηματικά, αποτελούν ισχυρά κίνητρα για τη δημιουργία νέων προβλημάτων (Silver, 1994).

Η ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων συμβάλλει σημαντικά στην κατανόηση διάφορων μαθηματικών εννοιών καθώς και στην αξιοποίηση και ενσωμάτωσή τους σε προβληματικές καταστάσεις της καθημερινότητας, προκειμένου οι τελευταίες να διατυπωθούν με μαθηματικό τρόπο (Brueckner, 1932) και σαφήνεια, χρησιμοποιώντας παράλληλα κατάλληλες εκφράσεις και ορολογία (Brown & Walter, 1990). Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αποκτούν γενικότερα ευχέρεια στο να εντάσσουν τα μαθηματικά σε καθημερινές καταστάσεις, γεγονός που αποτελεί μια χρήσιμη δεξιότητα για την επίλυση ήδη διαμορφωμένων προβλημάτων (Silver & Shapiro, 1992). Επομένως η κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος είναι μια πολύ ιδιαίτερη μαθηματική δραστηριότητα, άμεσα συνδεδεμένη τόσο με την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων όσο και με ενέργειες που έχουν ως γνώμονα τη δημιουργικότητα και επιδρά καταλυτικά στην ανάπτυξη των γνωστικών και συναισθηματικών δεξιοτήτων καθώς και στην ενσωμάτωσή τους (Cai et al., 2017, Leikin, 2018; Silver, 1997).

Παρατηρείται συχνά ότι μαθητές που φαίνεται να είναι αδρανείς και ανενεργοί μέσα στην σχολική αίθουσα, γίνονται ιδιαιτέρως ενεργοί και αποδοτικοί κατά τη διάρκεια της ενασχόλησής τους με δραστηριότητες δημιουργίας νέων μαθηματικών προβλημάτων. Η τοποθέτηση προβλημάτων είναι μια γνωστική στρατηγική που βελτιώνει τη στάση και την άποψη των μαθητών για τα μαθηματικά ενώ ταυτόχρονα προσφέρει τη δυνατότητα επέκτασης και σε άλλα θεματικά πεδία ή γνωστικά αντικείμενα, διευρύνοντας έτσι τους ορίζοντες και τα ενδιαφέροντά τους (Tsubota, 1987)

Παρόλο που η χρησιμότητα και σπουδαιότητα των μαθηματικών θεωρείται αδιαμφισβήτητη, εντούτοις είναι κοινά αποδεκτό στην πλειοψηφία του κόσμου ότι τα μαθηματικά προκαλούν φόβο και άγχος σε πολλά άτομα (κυρίως μαθητές). Για να αντιμετωπιστεί η συγκεκριμένη κατάσταση έχουν αναπτυχθεί διάφορες θεωρίες και τεχνικές. Μία μέθοδος που συντελεί καταλυτικά στο να ξεπεραστεί η ψυχολογική φόρτιση που προκαλούν τα μαθηματικά στους μαθητές είναι η ενασχόλησή των τελευταίων με την τοποθέτηση προβλημάτων. Ο κύριος λόγος είναι ότι πρόκειται για μια μαθηματική δραστηριότητα λιγότερο αγχωτική από την απάντηση μιας ερώτησης ή την επίλυση ενός προβλήματος. Αν και ο χαρακτηρισμός «σωστό» ή «λάθος» έχει πολύ μεγάλη βαρύτητα στη λύση ενός προβλήματος, δεν μπορεί να αποδοθεί με την ίδια ευκολία στην διαδικασία της δημιουργίας του.

Γενικότερα, η τοποθέτηση ενός προβλήματος είναι μια ελεύθερη διαδικασία που δύσκολα μπορεί να χαρακτηριστεί με τρόπο αρνητικό. Επομένως ο φόβος της αρνητικής κριτικής ή της απόρριψης μειώνεται δραστικά (Brown & Walter, 1990).

Συμπερασματικά, με την ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην τοποθέτηση προβλημάτων, τα μαθηματικά φαίνεται να είναι λιγότερο δύσκολα ή εκφοβιστικά (Brown & Walter, 1983) με αποτέλεσμα να μειώνεται το άγχος και η αρνητική διάθεση που ενδεχομένως προκαλούν (Moses et al., 1990). Επιπροσθέτως η κατασκευή προβλημάτων από έναν μαθητή ουσιαστικά συνδέει τα μαθηματικά με τα ενδιαφέροντά του (NCTM, 1989) ή με στοιχεία που θα κεντρίσουν την προσοχή των συμμαθητών του (Winograd, 1991). Με τον τρόπο αυτό τα μαθηματικά παύουν να αποτελούν για τον μαθητικό κόσμο ένα σύνολο αφηρημένων ιδεών και συμβολισμών που ήταν προσβάσιμο μέσω της μίμησης και της απομνημόνευσης και μετατρέπονται σε έναν ζωντανό και με ιδιαίτερο ενδιαφέρον επιστημονικό χώρο (Silver, 1994).

2.7 Τα χαρακτηριστικά του δημιουργού μαθηματικών προβλημάτων

Για να κατασκευαστεί ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα που βασίζεται σε μία συγκεκριμένη πραγματική ή μαθηματική κατάσταση, θα πρέπει ο δημιουργός του προβλήματος να έχει αρχικώς κατανοήσει πλήρως την εν λόγω κατάσταση και να εντοπίσει τα ιδιαίτερα γνωρίσματα και χαρακτηριστικά της, τα οποία αποτελούν ουσιαστικά τα δεδομένα του προβλήματος. Στη συνέχεια είναι απαραίτητο να μαθηματικοποιήσει την κατάσταση, δηλαδή να την εκφράσει με κατάλληλο τρόπο ώστε να αποκτήσει μαθηματική μορφή και υπόσταση. Τέλος, πρέπει να διατυπώσει με σαφή και κατανοητό τρόπο το πρόβλημα.

Στην επιτυχή εξέλιξη και κατάληξη της παραπάνω διαδικασίας σημαντικός είναι ο ρόλος της μαθηματικής ικανότητας και αντίληψης του εμπλεκόμενου ατόμου (Leung & Silver, 1997).

Τα μαθηματικά προβλήματα στο χώρο της εκπαίδευσης κατασκευάζονται είτε από τους εκπαιδευτικούς είτε από τους μαθητές. Για να είναι σε θέση να δημιουργήσει επιτυχημένα προβλήματα ένας εκπαιδευτικός είναι χρήσιμο να έχει υψηλό επίπεδο αυτοπεποίθησης, γνώσεων αλλά ταυτόχρονα να διαθέτει και την ανάλογη εμπειρία (Leung & Silver, 1997).

Επιπλέον θα πρέπει, παράλληλα με την κατασκευή προβλημάτων, να έχει τη δυνατότητα και την ικανότητα να συνθέτει και να διαμορφώνει στην αίθουσα διδασκαλίας κατάλληλες συνθήκες και καταστάσεις, που να αποτελούν τη βάση για την τοποθέτηση προβλημάτων από την πλευρά των μαθητών (Gonzales, 1996, Leung, 1996b).

Έχει διαπιστωθεί μέσα από μελέτες ότι οι μαθητές με μεγαλύτερη ευχέρεια και καλύτερες επιδόσεις στα μαθηματικά παρουσιάζουν μεγαλύτερη άνεση στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, σε έρευνα που πραγματοποίησε ο Krutetskii, δόθηκαν σε διάφορους μαθητές προβλήματα από τα οποία απουσίαζε το ζητούμενο. Εν συνεχεία, ζητήθηκε από τους συμμετέχοντες στην έρευνα, να προσθέσουν ερωτήματα που έκριναν ότι θα μπορούσαν να ζητηθούν στα αντίστοιχα προβλήματα. Το συμπέρασμα ήταν ότι οι ικανότεροι μαθητές στα μαθηματικά, συμπλήρωσαν τα ερωτήματα με άνεση, στηριζόμενοι με απολύτως φυσικό τρόπο στα δεδομένα και δίχως να ζητήσουν (ή να λάβουν) περεταίρω οδηγίες. Αντιθέτως οι υπόλοιποι μαθητές, ακόμη κι έπειτα από υποδείξεις των δασκάλων τους, αδυνατούσαν να ολοκληρώσουν επιτυχώς τη διαδικασία (Krutetskii, 1976). Σε ανάλογα συμπεράσματα κατέληξε και η Ellerton υποστηρίζοντας ότι οι μαθητές που διακρίνονταν για την ευχέρειά τους στα μαθηματικά, διερευνούν προσεκτικότερα τις συνθήκες και τις παραμέτρους που πρέπει να συνυπολογίσουν για την κατασκευή ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από μαθητές να συνθέσουν ένα πρόβλημα πολλαπλασιασμού που θα περιείχε κλάσματα, οι μαθητές με καλές επιδόσεις στα μαθηματικά φρόντισαν να χρησιμοποιήσουν κλάσματα που οι πράξεις τους θα μπορούσαν να απλοποιηθούν, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους που επέλεξαν τυχαία κλάσματα (Ellerton, 1986). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι καλές επιδόσεις και η ευχέρεια που έχει κάποιος στα μαθηματικά είναι συνήθως προϊόν του υψηλού επιπέδου γνώσεων που διαθέτει.

Το γνωστικό επίπεδο ενός ατόμου, επιδρά τόσο στην ποιότητα των προβλημάτων που κατασκευάζει όσο και στη δομή τους. Πιο συγκεκριμένα, άτομα με υψηλό επίπεδο γνώσεων συνθέτουν προβλήματα που περιέχουν επαρκείς πληροφορίες, αποτελούνται από ενδιάμεσα στάδια, περιέχουν υποερωτήματα και εντάσσονται πλήρως στο χώρο των μαθηματικών, κάτι που συνήθως δε συμβαίνει με τα προβλήματα που συνθέτουν άτομα με χαμηλότερο επίπεδο γνώσεων.

Ένας άλλο σημαντικό εφόδιο που πρέπει να διαθέτει ένα άτομο που ασχολείται με την τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων είναι η δημιουργικότητα. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διαδικασία της κατασκευής ενός προβλήματος στηρίζεται στην παραγωγική σκέψη και τον σχεδιασμό, επομένως είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια της δημιουργικότητας (Leung & Silver, 1997). Εξάλλου, η ευχέρεια ενός ατόμου να συνθέσει προβλήματα που στηρίζονται σε μια δεδομένη κατάσταση, όπως και η παρουσίαση της εν λόγω κατάστασης με μαθηματικό τρόπο ενσωματώνοντας παράλληλα τα κατάλληλα αριθμητικά δεδομένα, αποτελούν χαρακτηριστικά γνωρίσματα της δημιουργικής του ικανότητας (Getzels & Jackson, 1962, Guilford, 1967). Στο σημείο αυτό αξίζει να τονισθεί ότι άτομα με υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων και δημιουργικότητας συνήθως αποφεύγουν τη χρήση αριθμητικών δεδομένων στα προβλήματα που κατασκευάζουν. Αντιθέτως, το χαμηλό γνωστικό επίπεδο και η έλλειψη δημιουργικής σκέψης οδηγεί στην τοποθέτηση προβλημάτων που βασίζονται κυρίως σε αριθμητικά δεδομένα (Leung & Silver, 1997). Βλεπε επισης (Avgerinos & Gridos, 2019) και (Avgerinos et all 2019).

Πέρα από τα όσα προαναφέρθηκαν, η εμπειρία δείχνει ότι η διαδικασία της τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων αφορά κυρίως άτομα με ανήσυχο πνεύμα. Ένα άτομο με ικανότητα και ταλέντο στην δημιουργία προβλημάτων εστιάζει κυρίως σε καταστάσεις που θα του δώσουν το έναυσμα για τη δημιουργία ενός προβλήματος, κατασκευάζοντας έξυπνα, πρωτότυπα και ίσως δύσκολα επιλύσιμα ερωτήματα (Brown & Walter, 1990). Σημαντικό ρόλο σε όλη αυτή τη διαδικασία έχει και η παρατήρηση. Η παρατήρηση, που αποτελεί τον πυρήνα κάθε επιτυχημένης πράξης ή ενέργειας, συμβάλλει καθοριστικά στο να εντοπισθούν και να αξιοποιηθούν καταλλήλως όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τη σύνθεση ενός προβλήματος (Mason, 2002).

Συμπερασματικά, για να κατασκευάσει ένα άτομο προβλήματα που είναι καλά τοποθετημένα, είναι απαραίτητο να έχει υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων και δημιουργικότητας, να παρατηρεί, να είναι διορατικό, να έχει ευρύτητα σκέψης και εμπειρία (Brown & Walter, 1990).

2.8 Η τοποθέτηση προβλημάτων στα προγράμματα σπουδών

Η κύρια στόχευση στη διδασκαλία των μαθηματικών μέχρι και τη δεκαετία του ΄80 ήταν η επίλυση προβλημάτων που σχετίζονταν κυρίως με τον πραγματικό κόσμο και μπορούσαν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών (NCTM, 1980). Αν και γίνονταν επανειλημμένες προσπάθειες να αποκτήσει η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων πιο ενεργό ρόλο στη διδασκαλία των μαθηματικών, εντούτοις έμπαινε πάντοτε ως δραστηριότητα σε δεύτερη μοίρα, μιας και όλοι επικεντρώνονταν ανέκαθεν στη σημασία και την αξία της επίλυσης προβλημάτων (Silver et. al, 1990). Στο πλαίσιο αυτό οι καθηγητές επιχειρούσαν μέσω της διδασκαλίας τους, να βοηθήσουν τους μαθητές να γίνουν καλοί λύτες μαθηματικών προβλημάτων, εφαρμόζοντας τεχνικές και μεθόδους επίλυσης που απαιτούσαν ιδιαίτερη εξάσκηση. Με τον τρόπο όμως αυτό παραμελήθηκε (ίσως και αγνοήθηκε) η διαδικασία της κατασκευής προβλημάτων, που στη σύγχρονη εποχή θεωρείται ο βασικός δρόμος για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Gonzales 1994) και επιπροσθέτως είναι η νέα τάση στη μαθηματική εκπαίδευση (NCTM, 2000).

Πριν από τριάντα περίπου χρόνια το NCTM εξέφρασε για πρώτη φορά μέσα από δημοσιεύσεις του την αναγκαιότητα να ενταχθεί η τοποθέτηση προβλημάτων στην εκπαιδευτική διαδικασία. Σε μεταγενέστερες δημοσιεύσεις έδωσε ακόμα μεγαλύτερη έμφαση στην ενασχόληση των μαθητών με τη δημιουργία προβλημάτων (NCTM, 2000).

Από το 2000 και έπειτα, διεξήχθησαν σημαντικές έρευνες σχετικά με την ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (Cankoy & Darbaz, 2010), την εισαγωγή της τοποθέτησης προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών (Cai & Nie, 2007), την κατανόηση του τρόπου σύνθεσης προβλημάτων από μελλοντικούς δασκάλους (Chapman, 2011) και το σχεδιασμό παιδαγωγικών στρατηγικών για τη διδασκαλία μαθηματικών πανεπιστημιακού επιπέδου (Staebler-Wiseman, 2011). Τα συμπεράσματα από όλες αυτές τις μελέτες συνέβαλαν σημαντικά στο να δοθεί η απαιτούμενη προσοχή στη δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης (Ellerton, 2013) και να συνειδητοποιήσουν σταδιακά όλοι ότι η κατασκευή νέων μαθηματικών προβλημάτων είναι εκπαιδευτικά απαραίτητη διότι βελτιώνει τις δεξιότητες των μαθητών που απαιτούνται και για την επίλυσή τους (Abu-Elwan, 1999). Ο Kilpatrick και ο Silver ήταν μεταξύ πολλών επιστημόνων που υποστήριξαν ότι η ένταξη των διαδικασιών επίλυσης αλλά και δημιουργίας προβλημάτων στις σχολικές τάξεις, θα είχε θετική επίδραση στη μαθηματική σκέψη των μαθητών (Kilpatrick 1987, Silver, 1993).

Η κατασκευή προβλημάτων έχει ενταχθεί τα τελευταία χρόνια στη διδασκαλία των μαθηματικών σε διάφορα εκπαιδευτικά συστήματα ανά τον κόσμο, παρά το γεγονός ότι οι μελέτες και οι έρευνες για τη σύνθεση μαθηματικών προβλημάτων είναι σχετικά περιορισμένες (Brown & Walter, 1983, Cai & Hwang, 2020, Cai et al., 2015, Felmer et al., 2016, Kilpatrick, 1987, Leikin, 2015, Silver, 1994, Singer et al., 2015). Πλέον τα προγράμματα σπουδών σε πολλές χώρες, δίνουν έμφαση στην τοποθέτηση προβλημάτων και συστήνουν να δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να συνθέτουν τα δικά τους προβλήματα (Australian Education Council, 1991, Chinese Ministry of Education, 2003, Ministry of Education (Singapore), 2012, NCTM, 1989, 1991, 2000).

Για παράδειγμα, στα προγράμματα σπουδών της Κίνας κατά την εννεαετή υποχρεωτική εκπαίδευση, η τοποθέτηση προβλημάτων τίθεται ως κεντρικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών, αφενός για να μάθουν οι μαθητές να θέτουν προβλήματα με μαθηματική προοπτική αφετέρου για να αξιοποιούν τις γνώσεις και τις δεξιότητές τους ώστε να μπορούν και να επιλύουν προβλήματα (Chinese Ministry of Education, 2001b, 2011). Επιπλέον στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, το πρόγραμμα σπουδών έχει ως στόχο να βελτιώσει τις ικανότητές τους στην κατασκευή προβλημάτων καθώς και στον τρόπο μαθηματικής τους έκφρασης. Επιδιώκεται δηλαδή η μετάβαση των μαθητών από έναν παθητικό ρόλο μάθησης σε έναν ενεργητικό ρόλο όπου κυρίαρχη θέση κατέχει η τοποθέτηση προβλημάτων (Chinese Ministry of Education, 2001a, 2003, 2011).

Ο κεντρικός ρόλος που κατέχει η τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων στα περισσότερα προγράμματα σπουδών, οφείλεται στο γεγονός ότι αποτελεί την καρδιά κάθε μαθηματικής δραστηριότητας (Brown & Walter, 1993, Kilpatrick, 1987, Moses et. al., 1990, Silver, 1990, 1994, Silver & Mamona, 1989). Παρατηρείται όμως ότι η ενσωμάτωσή της στη διδασκαλία δε γίνεται συνήθως με τρόπο ουσιαστικό και αποδοτικό, καθώς αξιοποιείται ένα πολύ μικρό ποσοστό δραστηριοτήτων που εμπλέκει τους μαθητές στη δημιουργία προβλημάτων (Cai & Jiang, 2017).

Η βασική αιτία αυτού του φαινομένου είναι αφενός ο μικρός αριθμός δραστηριοτήτων κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων που περιέχεται στα σχολικά βιβλία αφετέρου η έλλειψη εμπειρίας των εκπαιδευτικών στην εφαρμογή τέτοιου είδους δραστηριοτήτων. Κρίνεται συνεπώς αναγκαίο, να δομηθεί ένα νέο πεδίο γνώσης για τους εκπαιδευτικούς προκειμένου να αξιοποιηθούν πλήρως τα διδακτικά οφέλη που προκύπτουν από την εμπλοκή των μαθητών με τη σύνθεση προβλημάτων (Cai et al., 2020).

2.9 Σύνδεση κατασκευής και επίλυσης μαθηματικού προβλήματος

Πολλοί ερευνητές επιχείρησαν να κατανοήσουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ της τοποθέτησης και της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων (Crespo, 2003, English, 1998, Kar et al., 2010, Keil, 1965, Leung & Silver, 1997, Nicolaou & Philippou, 2004). Πιο συγκεκριμένα, σε έρευνα που πραγματοποίησε ο Keil σε μαθητές του δημοτικού, διαπίστωσε ότι όσοι δημιουργούσαν μόνοι τους προβλήματα και εν συνεχεία τα έλυναν, είχαν καλύτερες επιδόσεις στην επίλυση προβλημάτων συγκριτικά με εκείνους που αρκούνταν μόνο στην λύση προβλημάτων του σχολικού βιβλίου (Keil, 1965). Οι Silver και Cai σε αντίστοιχη έρευνα που πραγματοποίησαν σε μαθητές γυμνασίου, επιχείρησαν να αξιολογήσουν την ικανότητά τους στην κατασκευή προβλημάτων και να τη συσχετίσουν με τις επιδόσεις τους στην επίλυση. Η ευχέρεια και αποδοτικότητα που εμφάνιζαν οι μαθητές στη δημιουργία προβλημάτων αξιολογήθηκε σύμφωνα με την πολυπλοκότητα των βημάτων που απαιτούνταν για την εύρεση της λύσης ενώ το επίπεδο τους στην επίλυση προβλημάτων προσδιορίστηκε σύμφωνα με τις επιδόσεις τους κατά την επίλυση οκτώ συγκεκριμένων ερωτήσεων ανοιχτού τύπου. Τα συμπεράσματα της έρευνας έδειξαν ότι υπήρχε θετική συσχέτιση ανάμεσα στην ικανότητα σύνθεσης και επίλυσης προβλημάτων (Silver & Cai, 1996).

Η English οδηγήθηκε σε παρόμοια συμπεράσματα, υποδηλώνοντας ότι η έμπνευση ενός ατόμου για την κατασκευή νέων μαθηματικών προβλημάτων μπορεί να προέρχεται από τη διαδικασία επίλυσής τους. Η τοποθέτηση ενός προβλήματος εκπαιδεύει τους μαθητές να εμβαθύνουν στο μαθηματικό περιεχόμενο (Lowrie, 2002) και να εντοπίζουν τα βασικά στοιχεία του κάθε ερωτήματος, αλλά ταυτόχρονα βελτιώνει την ικανότητά τους να επιλύουν προβλήματα (English 1997a, 1997b).

Επομένως, σύμφωνα με τις έρευνες που έχουν διεξαχθεί, διαπιστώνεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ενασχόληση ενός ατόμου με την κατασκευή προβλημάτων τόσο μεγαλύτερη ευχέρεια παρουσιάζει και κατά τη διαδικασία επίλυσής τους (Kar et al., 2010). Αντιστρόφως, η επίλυση προβλημάτων έχοντας κεντρική θέση στο χώρο των μαθηματικών, βοηθά σημαντικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης (Silver, 1994), συμβάλλει στην αποσαφήνιση εκείνων των καταστάσεων που προκαλούν σύγχυση στο ανθρώπινο μυαλό (Cai & Hwang, 2002, English 2003) και αποτελεί το βασικό μέσο για την αναδιατύπωση προβλημάτων. Άρα υπάρχει μία σχέση αμφίδρομη καθώς η ενασχόληση με την τοποθέτηση προβλημάτων βελτιώνει την ικανότητά ενός ατόμου να επιλύει προβλήματα και η επίλυση προβλημάτων συμβάλλει στην απόκτηση μεγαλύτερης ευχέρειας στη δημιουργία προβλημάτων (Carrillo et al., 2016).

3 Η επιρροή των νέων τεχνολογιών στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων

3.1 Ιστορικές αναφορές για τη χρήση της τεχνολογίας στα μαθηματικά

Για πάρα πολλούς αιώνες, η εφαρμογή και αξιοποίηση της τεχνολογίας στο χώρο των μαθηματικών περιοριζόταν στη χρήση του άβακα. Από τον 17^{ο} αιώνα περίπου η κατάσταση αυτή σταδιακά αλλάζει καθώς διάφορα τεχνολογικά επιτεύγματα αρχίζουν να χρησιμοποιούνται με σκοπό να διευκολύνουν την εκτέλεση απλών ή και πολύπλοκων πράξεων. Δημιουργούνται αρκετές υπολογιστικές μηχανές των οποίων η λειτουργία στηρίζεται αρχικά σε περιστρεφόμενους τροχούς. Ο Wilhelm Schickard (1592 – 1635) ήταν πιθανόν ο πρώτος εφευρέτης μιας τέτοιας υπολογιστικής μηχανής ενώ ακολούθησε ο Blaise Pascal το 1645 με την πρώτη αριθμομηχανή μικρών διαστάσεων και ο Leibniz το 1674 που προχώρησε στην τελειοποίηση της μηχανής του Pascal (Lenzen, 2018). Καμία όμως από τις μηχανές αυτές δεν χρησιμοποιήθηκε ευρέως, λόγω κυρίως των πολλών και συχνών τεχνικών προβλημάτων που παρουσίαζαν. Η ευρεία χρήση των μηχανικών αριθμομηχανών καθώς και η μαζική εμφάνισή τους στο εμπόριο, άρχισε κατά το δεύτερο μισό του 18^{ου} αιώνα (Swade, 2011, 2018).

Οι πρώτες σοβαρές προσπάθειες για τη δημιουργία τεχνολογικών εργαλείων που θα μπορούσαν να πραγματοποιήσουν αυτόματους υπολογισμούς με αξιοπιστία και ακρίβεια έγιναν από τον Άγγλο μαθηματικό Charles Babbage (1791 – 1871), ο οποίος εφηύρε δυο γενικής χρήσης υπολογιστικές μηχανές, την πρώτη το 1820 και τη δεύτερη το 1834. Η δεύτερη υπολογιστική μηχανή, λειτουργούσε στηριζόμενη σε μια πρωτοποριακή για την εποχή μέθοδο, καθώς λάμβανε οδηγίες από τον χειριστή της μέσω διάτρητων καρτών. Ήταν ίσως η πρώτη προσπάθεια μιας μορφής προγραμματισμού.

Παρά το γεγονός ότι δεν ολοκληρώθηκε η κατασκευή καμίας από τις δύο μηχανές κατά τη διάρκεια της ζωής του Babbage, άνοιξε διάπλατα ο δρόμος για μελλοντικές τεχνολογικές εξελίξεις σε αυτόν τον τομέα, επιβεβαιώνοντας την αμφίδρομη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στα μαθηματικά και τα τεχνολογικά εργαλεία. Από τη μια πλευρά η δημιουργία των υπολογιστικών μηχανών στηρίχθηκε στις ήδη υπάρχουσες και αποδεκτές μαθηματικές αρχές, από την άλλη οι θεμελιακοί τεχνολογικοί κανόνες που ενυπάρχουν στις μηχανές, συμβάλλουν στη σύλληψη κι ανάπτυξη νέων μαθηματικών ιδεών (Hansson, 2020).

Οι πρώτοι προγραμματιζόμενοι ηλεκτρονικοί υπολογιστές κατασκευάστηκαν κατά τη δεκαετία του 1940. Οι Βρετανοί δημιούργησαν τον Colossus, έναν προγραμματιζόμενο υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε ευρέως από τους κρυπτοαναλυτές της εποχής. Δύο άλλες πρωτοποριακές μηχανές που κατασκευάστηκαν στα τέλη της ίδιας δεκαετίας στις Η.Π.Α., ήταν ο ENIAC και ο EDVAC (Hansson, 2020).

Παράλληλα με την ραγδαία εξέλιξη και πρόοδο της τεχνολογίας που παρατηρήθηκε από τα μέσα κυρίως του 20ου αιώνα στο χώρο των υπολογιστών, αναπτύχθηκε ο σχεδιασμός διαφόρων γλωσσών προγραμματισμού που επεξεργάζονται πληροφορίες και δεδομένα, δίνοντας τη δυνατότητα σε εξειδικευμένους επιστήμονες να δημιουργήσουν κατάλληλα προγράμματα τα οποία εκτελούνται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές, ικανοποιώντας υπολογιστικές και όχι μόνο ανάγκες. Ένα τέτοιο πρόγραμμα που γράφτηκε σε μία από τις γλώσσες προγραμματισμού και η εκτέλεσή του στους υπολογιστές έδινε λύση σε σύνθετα και δύσκολα προβλήματα, ήταν το Logic Theorist (LT) (Newell, Shaw & Simon, 1957).

Το Logic Theorist ήταν το πρώτο πρόγραμμα που λειτουργούσε αυτοματοποιημένα με συγκεκριμένη συλλογιστική. Αυτός είναι και ο λόγος που θεωρείται από πολλούς ως το πρώτο πρόγραμμα τεχνητής νοημοσύνης. Είχε τη δυνατότητα να αποδεικνύει θεωρήματα και να εκτελεί μαθηματικές δραστηριότητες που για να τις φέρει εις πέρας ένας άνθρωπος απαιτούνταν εις βάθος σκέψη. Η λειτουργία του στηρίχθηκε στον τρόπο με τον οποίο σκέφτεται και ενεργεί ένας άνθρωπος κατά την αναζήτηση της διαδικασίας που οδηγεί στην επίλυση ενός προβλήματος. Στο πλαίσιο αυτό, αξιοποιούσε διάφορες ευρετικές μεθόδους ενώ παράλληλα είχε τη δυνατότητα κατά την αντιμετώπιση μεγάλων προβλημάτων, να τα περιορίζει σε μικρότερα στάδια, προκειμένου ακόμα και ένας αργός επεξεργαστής ηλεκτρονικού υπολογιστή, να μπορέσει να εργαστεί αποτελεσματικά. Συμπερασματικά, το κυριότερο χαρακτηριστικό γνώρισμα του Logic Theorist δεν ήταν η ταχύτητα επίλυσης προβλημάτων, αλλά η επιλογή και χρήση των κατάλληλων κάθε φορά ευρετικών μεθόδων (Newell & Simon, 1972).

Γενικά η εξέλιξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών και του προγραμματισμού τους, επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τα μαθηματικά. Εκτός από την προφανή παροχή βοήθειας σε υπολογιστικό επίπεδο, οι υπολογιστές συνέβαλλαν τα μέγιστα στο να δημιουργηθούν νέοι τρόποι σκέψης, μελέτης και αντιμετώπισης θεμελιωδών ζητημάτων στα μαθηματικά, όπως είναι η αποδεικτική διαδικασία και η αφομοίωση της γνώσης. Παράλληλα άνοιξαν νέους δρόμους στην επικοινωνία και τη συνεργασία, ενθαρρύνοντας έναν νέο τρόπο έρευνας και μελέτης με ταχεία ανταλλαγή θέσεων και απόψεων μεταξύ των ενδιαφερομένων (Gowers & Nielsen, 2009, Martin, 2015, Martin & Pease, 2013).

3.2 Οι νέες τεχνολογίες στη διδασκαλία των μαθηματικών

Ο τρόπος που διεξάγεται το μάθημα των μαθηματικών στις σχολικές αίθουσες κατά τη σημερινή εποχή είναι πολύ διαφορετικός συγκριτικά με ότι συνέβαινε μερικές δεκαετίες πριν. Η διαφοροποίηση που παρατηρείται οφείλεται κυρίως στην ανάπτυξη και εξέλιξη της πληροφορικής. Η αξιοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών καθώς και των εφαρμογών τους στη διδασκαλία των μαθηματικών, προκάλεσε σαρωτικές αλλαγές τόσο στον τρόπο διδασκαλίας όσο και στην συμμετοχή των μαθητών στην κατάκτηση και αφομοίωση της γνώσης (Steen, 1988).

Θεωρείται ιδιαιτέρως δύσκολο να υπάρξει σαφής διαχωρισμός μεταξύ της ανθρώπινης δραστηριότητας και της τεχνολογίας, με την έννοια ότι η τεχνολογία βοηθά σημαντικά τον άνθρωπο να μαθαίνει, να αναγνωρίζει, να αναδιαμορφώνει τρόπους σκέψης και δράσης, να γίνεται πιο παραγωγικός αλλά ταυτόχρονα ο άνθρωπος είναι σε διαρκή προσπάθεια ανάπτυξης, βελτίωσης και εξέλιξης της τεχνολογίας. Επομένως το δίπολο άνθρωπος – τεχνολογία ίσως πρέπει να αντιμετωπίζεται ως μία ενιαία οντότητα (Borba & Villarreal, 2005).

Αν και στη βιβλιογραφία γίνεται εκτενής αναφορά για τη σχέση της τεχνολογίας με την επιστήμη, εντούτοις δεν έχει αναλυθεί ιδιαιτέρως η σύνδεση της τεχνολογίας με το χώρο των μαθηματικών, παρά το γεγονός ότι η συσχέτιση των δύο χώρων θεωρείται προφανής. Η τεχνολογία ούτε θα εξελίσσονταν ούτε (πιθανόν) θα υπήρχε χωρίς τα μαθηματικά. Συνεπώς, η εν λόγω σχέση είναι αμφίδρομη διότι όσο ανάγκη έχει η τεχνολογία τα μαθηματικά άλλο τόσο ανάγκη έχουν και τα μαθηματικά την τεχνολογία.

Στη σύγχρονη εποχή, οι μαθηματικοί χρησιμοποιούν τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές όχι μόνο για υπολογισμούς αλλά και για πλήθος άλλων εργασιών όπως είναι η απόδειξη, η τεκμηρίωση της ορθότητας μιας έννοιας, η εύρεση αντιπαραδειγμάτων, η επίλυση προβλημάτων (Hansson, 2020). Επιπλέον οι μαθητές έχουν εύκολη πρόσβαση σε πληθώρα υλικού στο χώρο του διαδικτύου σχετικό με τα μαθηματικά. Παράλληλα τους δίνεται η δυνατότητα να συμβουλεύονται παρουσιάσεις και εργασίες άλλων εκπαιδευτικών που είναι αναρτημένες σε διάφορες ιστοσελίδες. Το μεγάλο πλήθος διαδικτυακών πόρων ενδέχεται να προκαλεί σύγχυση στους μαθητές ως προς τα κριτήρια με τα οποία καλούνται να επιλέξουν την πληροφορία που αναζητούν. Θεωρείται μάλλον αναγκαίο, η επιλογή να γίνεται με γνώμονα κυρίως τις μαθησιακές τους ανάγκες, αξιολογώντας και κρίνοντας ταυτόχρονα ποιες από τις πληροφορίες που συλλέγουν είναι αξιόλογες, αξιοποιήσιμες και σχετικές με το θέμα που αναζητούν (Santos-Trigo et al., 2018).

Παράλληλα με την πρόσβαση στο διαδίκτυο, ο κάθε μαθητής έχει πλέον στη διάθεσή του λογισμικά και τεχνολογικά εργαλεία που είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει προκειμένου να αναπαραστήσει και να αναπτύξει τις λύσεις διάφορων προβλημάτων, ανταλλάσσοντας ιδέες και προβληματισμούς με τους συμμαθητές του, ακόμα και πέρα από τα όρια της αίθουσας διδασκαλίας (Santos-Trigo et al., 2016).

Στη νέα κατάσταση που δημιουργεί η είσοδος των νέων τεχνολογιών στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης, θεωρείται ιδιαιτέρως καθοριστικός ο ρόλος των εκπαιδευτικών. Οι εκπαιδευτικοί είναι αναγκαίο να διαμορφώσουν ένα νέο περιβάλλον μάθησης στο οποίο θα προάγεται η χρήση των νέων τεχνολογιών. Η ενσωμάτωση στη διδασκαλία διαφόρων ψηφιακών εργαλείων δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να τα χρησιμοποιήσουν και να τα αξιοποιήσουν είτε σε απλές εφαρμογές είτε σε δύσκολες και απαιτητικές δραστηριότητες, όπως είναι η επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (Jacinto et al., 2018, Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016). Ένα κατάλληλα επιλεγμένο τεχνολογικό εργαλείο συμβάλλει τόσο στο να ξεπεράσουν οι μαθητές τις δυσκολίες που ενδεχομένως αντιμετωπίζουν σε γνωστικό επίπεδο, όσο και να επεκτείνουν τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους (Mishra & Koehler, 2006). Με τη χρήση ψηφιακών τεχνολογικών εργαλείων οι μαθητές συμμετέχουν πιο ενεργά στη διαδικασία της μάθησης διότι έχουν τη δυνατότητα μελέτης και διερεύνησης οποιασδήποτε έννοιας ή προβλήματος από διάφορες οπτικές γωνίες ενώ ταυτόχρονα η διδασκαλία γίνεται μια ζωντανή και δυναμική διαδικασία (Santos-Trigo & Moreno-Armella, 2016).

Το βασικό βέβαια ζήτημα τη σημερινή εποχή στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να προσδιοριστεί ο τρόπος και ο βαθμός χρήσης των ψηφιακών τεχνολογιών έτσι ώστε να προσφέρονται στους μαθητές νέες ευκαιρίες κατανόησης και ανάπτυξης της γνώσης, με σωστό και παιδαγωγικό τρόπο. Για να έχει θετικά αποτελέσματα η χρήση τεχνολογικών εργαλείων στη διδασκαλία των μαθηματικών, θα πρέπει η όλη διαδικασία να είναι προσαρμοσμένη σε ένα περιβάλλον που θα περιέχει αξιόλογο και ελεγμένο υλικό προς αξιοποίηση καθώς και δραστηριότητες προσαρμοσμένες στο κατάλληλο εννοιολογικό ή θεωρητικό πλαίσιο (Churchill et al., 2016). Ο εκπαιδευτικός οφείλει να διασφαλίσει ότι η χρήση της τεχνολογίας θα γίνεται σε εξειδικευμένες δραστηριότητες δίχως να παρακάμπτεται ή να παρεμποδίζεται η κριτική σκέψη και η ανταλλαγή θέσεων και απόψεων μεταξύ μαθητών και εκπαιδευτικών. Εξάλλου δεν πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι αυτή η αλληλεπίδραση προάγει την επικοινωνία, τη συνεργασία, το σεβασμό και τη βελτίωση του γνωστικού επιπέδου των μαθητών, γεγονός που αποτελεί το κύριο ζητούμενο της εκπαιδευτικής διαδικασίας (National Council of Teachers of Mathematics, 1980). Ταυτόχρονα είναι χρήσιμο να παρέχεται διαρκής υποστήριξη (μέσω forum, ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, ή ζωντανών διαδικτυακών συνομιλιών) έτσι ώστε να ενθαρρύνονται οι μαθητές, ενώ απαραίτητη θεωρείται η συνεχής αξιολόγηση και ενημέρωση για τα μαθησιακά αποτελέσματα που επιτυγχάνονται (Churchill et al., 2016). Με τον τρόπο αυτό ανοίγουν νέοι ορίζοντες στους τρόπους αναπαράστασης και εξερεύνησης διάφορων μαθηματικών εννοιών, ενώ παράλληλα καλλιεργείται η διαδικασία της συζήτησης και του αναστοχασμού για τα μαθηματικά προβλήματα και πέρα από τα όρια της τάξης (Santos-Trigo et al., 2018).

Τα τεχνολογικά εργαλεία που μπορούν να αξιοποιηθούν στη διαδικασία της μάθησης καθώς και στη διδασκαλία των μαθηματικών, διακρίνονται γενικά σε δύο κατηγορίες: στα εργαλεία που συνδέονται με τα μαθηματικά και στα ουδέτερα. Η πρώτη κατηγορία περιέχει λογισμικά επίλυσης αλγεβρικών συστημάτων, λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας καθώς και διάφορες υπολογιστικές εφαρμογές. Όλα αυτά τα ψηφιακά εργαλεία προάγουν την αναζήτηση και την έρευνα, παρέχοντας ουσιαστική βοήθεια στους μαθητές να αναγνωρίσουν και να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και σχέσεις.

Τα ψηφιακά εργαλεία της δεύτερης κατηγορίας, δηλαδή τα ουδέτερα, είναι τα εργαλεία επικοινωνίας και συνεργασίας που τα συναντάμε κυρίως στο διαδίκτυο. Η χρήση των εν λόγω εργαλείων, διευκολύνει την πρόσβαση των μαθητών σε πληροφορίες, ιδέες και αλληλεπιδράσεις, ενισχύοντας την κριτική σκέψη και την λογική. Τόσο η κριτική σκέψη όσο και η λογική βοηθούν ιδιαιτέρως στην απόκτηση και αφομοίωση της νέας γνώσης.

Μια άλλη μαθηματική δράση που στη σύγχρονη εποχή κατέχει πολύ σημαντική θέση στα μαθηματικά (ιδιαιτέρως στην επίλυση προβλημάτων) και που προάγεται με τη χρήση των νέων τεχνολογιών, είναι η εικασία. Στα πλαίσια της διδασκαλίας οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται για να διατυπώνουν εικασίες, να μοντελοποιούν συνθήκες και καταστάσεις, να σχεδιάζουν και να ολοκληρώνουν μια απόδειξη. Για να πραγματοποιηθούν επιτυχώς όμως όλες αυτές οι ενέργειες, συνήθως απαιτείται η παροχή κινήτρων. Τα κίνητρα αυτά μπορεί να τα προσφέρει η τεχνολογία με τα κατάλληλα ψηφιακά εργαλεία (Shara, 2020).

Όταν οι μαθητές δεν είναι σε θέση να αναπτύξουν μια εικασία ή αδυνατούν να επινοήσουν τον τρόπο με τον οποίο θα ξεπεράσουν μια προβληματική κατάσταση, μπορούν να λάβουν σημαντική βοήθεια μέσω της χρήσης των αντίστοιχων λογισμικών. Για παράδειγμα, τα ψηφιακά συστήματα δυναμικής γεωμετρίας δίνουν τη δυνατότητα αναπαράστασης γεωμετρικών αντικειμένων, μετρήσεων καθώς και αλλαγής διαστάσεων (Hollebrands, Laborde & Straber, 2008). Αντιστοίχως τα υπολογιστικά φύλλα δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να πραγματοποιήσουν μεγάλο πλήθος υπολογιστικών δραστηριοτήτων, να δημιουργήσουν αριθμητικές τιμές είτε στηριζόμενοι σε κατάλληλες συναρτήσεις που ορίζουν οι ίδιοι είτε σε τυχαία βάση (Heid & Blume, 2008).

Είναι γεγονός ότι η ευρεία χρήση των νέων τεχνολογιών διαμόρφωσε νέες συνθήκες και καταστάσεις στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Οι μέθοδοι διδασκαλίας που εφαρμόζονται κατά κόρον στη σύγχρονη εποχή είναι η συμβατική, που έχει ως βασικούς πυλώνες τον εκπαιδευτικό, την αίθουσα και τα βιβλία, η ηλεκτρονική, που στηρίζεται σε πληροφοριακά συστήματα και σε εκπαιδευτικά λογισμικά αξιοποιώντας τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και το διαδίκτυο και τέλος η συνδυαστική, που ενσωματώνει στοιχεία από τις δύο προηγούμενες μεθόδους (Δέλλας & Κέκκερης, 2007). Η συνδυαστική μάθηση ουσιαστικά εντάσσει παραδοσιακές μορφές διδασκαλίας προσαρμοσμένες στο νέο περιβάλλον που διαμορφώνουν οι νέες τεχνολογίες, στοχεύοντας στην αξιοποίηση των θετικών στοιχείων και των δύο προσεγγίσεων (Sauter, 2004). Πρόκειται στην ουσία για μια μορφή εκπαιδευτικής διαδικασίας που αφήνει ιδιαιτέρως ικανοποιημένους μαθητές και εκπαιδευτικούς, έχοντας πολύ καλά μαθησιακά αποτελέσματα (Reinmann, 2005). Συνέπεια όλων των παραπάνω, είναι η ποιοτική διαφοροποίηση του τρόπου μελέτης, σκέψης και κατανόησης των μαθηματικών αντικαθιστώντας την παραδοσιακή χρήση χαρτιού και μολυβιού με το κατάλληλο ψηφιακό εργαλείο (Villarreal & Borba, 2010).

Γενικά, η εξέλιξη της ψηφιακής τεχνολογίας επιδρά σημαντικά στον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι επικοινωνούν, ενημερώνονται, κοινωνικοποιούνται, μαθαίνουν. Ένα τεχνολογικό εργαλείο στο χώρο των μαθηματικών, όπως για παράδειγμα ένα λογισμικό, μπορεί να συμβάλλει στη βελτίωση του γνωστικού επιπέδου ενός ατόμου, αξιοποιώντας τις υπάρχουσες γνώσεις και επεκτείνοντάς τες. Βοηθά στην εξερεύνηση, τη διερεύνηση και την ανακάλυψη της γνώσης. Επιπλέον, σε συνδυασμό με την προσωπική μελέτη και εργασία, αποτελεί πηγή γνώσης ενώ παράλληλα συμβάλλει καταλυτικά στον τρόπο κατανόησης διαφόρων μαθηματικών ιδεών καθώς και στην επίλυση προβλημάτων (Santos-Trigo et al., 2016).

Αν και τα μαθηματικά θεωρούνται απαραίτητα στην ανάπτυξη και εξέλιξη της τεχνολογίας, εντούτοις παρατηρείται σημαντική καθυστέρηση στην ενσωμάτωση των νέων τεχνολογιών στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Είναι γεγονός ότι ένα μεγάλο μέρος της εκπαιδευτικής κοινότητας χρησιμοποιεί τις νέες τεχνολογίες από ελάχιστα έως και καθόλου (Dick & Hollebrands, 2011). Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αδυναμία των προγραμμάτων σπουδών να αξιοποιήσουν τα πλεονεκτήματα που προσφέρει η τεχνολογία, στην επιμονή πολλών εκπαιδευτικών στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, καθώς και στην έλλειψη εξοικείωσης με τα λογισμικά και τα διάφορα τεχνολογικά εργαλεία (Sauter, 2004).

Επομένως κρίνεται μάλλον αναγκαίο, το σύγχρονο μαθησιακό περιβάλλον στο οποίο δρουν οι μαθητές (όπως αυτό καθορίζεται από τα εκάστοτε προγράμματα σπουδών) να αναλυθεί και να μελετηθεί διεξοδικά, λαμβάνοντας υπόψη τις νέες τάσεις που διαμορφώνονται έτσι ώστε να επανασχεδιαστεί με σκοπό να είναι σε θέση οι μαθητές να κατασκευάσουν και να εφαρμόσουν τη μαθηματική γνώση, στηριζόμενοι στα κατάλληλα ψηφιακά εργαλεία (Kereluik et al., 2013). Η χρήση της τεχνολογίας στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι απαραίτητο να εντάσσεται στα προγράμματα σπουδών αφού ο ρόλος της δεν είναι η απλή επιβεβαίωση ενός αριθμητικού αποτελέσματος (όπως πίστευαν πολλοί πριν από μερικές δεκαετίες), αλλά η διευκόλυνση της έρευνας, η ανακάλυψη της γνώσης και η βελτίωση του γνωστικού επιπέδου των μαθητών (National Council of Teachers of Mathematics, 1980).

3.3 Η επίδραση των νέων τεχνολογιών στην επίλυση προβλημάτων

Η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι η προσπάθεια ανάπτυξης ενός παραγωγικού τρόπου σκέψης, προκειμένου να αντιμετωπιστεί μια δύσκολη κατάσταση (Lesh & Zawojewski, 2007) την οποία ο λύτης επιδιώκει να εκφράσει με τρόπο μαθηματικό. Ειδικά στη σύγχρονη εποχή, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αποτελεί έναν τρόπο έκφρασης της μαθηματικής σκέψης και μια διαδικασία μαθηματικοποίησης διαφόρων καταστάσεων μέσω της χρήσης και αξιοποίησης κατάλληλων τεχνολογικών εργαλείων (Carreira et al., 2016).

Τα παραδοσιακά μοντέλα επίλυσης προβλημάτων που είχαν ως κύρια εργαλεία το χαρτί και το μολύβι, αδυνατούν να ενσωματώσουν στη διαδικασία επίλυσης τα οφέλη που παρέχει η χρήση των νέων τεχνολογιών (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). Η χρήση ενός λογισμικού για παράδειγμα, συμβάλλει τόσο στην αναπαράσταση ενός προβλήματος με τρόπο σύγχρονο και ρεαλιστικό, όσο και στη δημιουργία κατάλληλων επικοινωνιακών δομών στην αίθουσα διδασκαλίας, οι οποίες φυσικά δεν εντάσσονται στους παραδοσιακούς τρόπους μαθηματικής έκφρασης. Επιπλέον, με την εισαγωγή διάφορων βοηθητικών αντικειμένων, με την αξιοποίηση χρωμάτων, συμβόλων και μεταφορών, παρέχει συνήθως περισσότερους τρόπους εξήγησης και ερμηνείας, δίνοντας σε κάθε μαθητή τη δυνατότητα έκφρασης με τρόπο ζωντανό ή διαδραστικό, σε πλαίσια είτε επίσημα είτε ανεπίσημα (Hegedus & Moreno-Armella, 2009a, 2009b).

Εμβαθύνοντας στον τρόπο με τον οποίο αξιοποιούνται τα ψηφιακά εργαλεία στο χώρο των μαθηματικών και ειδικότερα στην επίλυση προβλημάτων, παρατηρείται μια μορφή αλληλεπίδρασης μεταξύ του ατόμου που εμπλέκεται με την επίλυση του προβλήματος και του ψηφιακού εργαλείου. Η εξέλιξη των στατικών εργαλείων και η μετατροπή τους σε δυναμική μορφή, οδήγησε στη συνδυαστική δράση του ατόμου και του ψηφιακού εργαλείου (Hegedus & Moreno-Armella, 2009a, 2009b, 2010, 2011), γεγονός που σημαίνει ότι το άτομο μπορεί και να καθοδηγηθεί αλλά και να καθοδηγήσει το ψηφιακό εργαλείο προκειμένου να καταλήξει στον επιθυμητό στόχο (Jacinto et al., 2018).

Για παράδειγμα, κατά την επίλυση ενός προβλήματος με τη χρήση υπολογιστικού φύλλου, αρχικώς πρέπει να καθοριστεί με σαφήνεια το περιεχόμενο των γραμμών και των στηλών που θα χρησιμοποιηθούν. Κατόπιν ο λύτης δίνει όνομα σε ένα σύνολο αριθμών το οποίο θα λειτουργεί ως η μεταβλητή του προβλήματος. Στη συνέχεια εισάγονται τα αριθμητικά δεδομένα στα διάφορα κελιά, συμπεριλαμβάνοντας (αν χρειάζεται) και τις σχέσεις που τα συνδέουν. Από το σημείο αυτό κι έπειτα, ο λύτης έχει τη δυνατότητα να επεξεργαστεί και να αναλύσει την άμεση ανατροφοδότηση που του παρέχει το υπολογιστικό φύλλο, αναπροσαρμόζοντας τον τρόπο δράσης του σε ένα γενικότερο πλαίσιο διαρκούς αλληλεπίδρασης με το εργαλείο (Nobre & Amado, 2013, Wilson, 2006, Wilson, Ainley & Bills, 2005).

Είναι πολύ συνηθισμένο φαινόμενο, ένα ψηφιακό εργαλείο να υποδεικνύει αρκετούς και διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης ενός προβλήματος. Ο τελικός όμως τρόπος προσέγγισης και επίλυσης του προβλήματος προκύπτει πάντοτε μέσα από την καθοδήγηση που παρέχει στο εργαλείο ο λύτης, προκειμένου να εκφράσει τον δικό του τρόπο σκέψης. Μέσα από αυτήν τη διαδικασία διαπιστώνεται πως η επίτευξη της λύσης ενός προβλήματος είναι αποτέλεσμα της συνεργασίας ατόμου και ψηφιακού μέσου.

Η συνεργασία αυτή αναδεικνύει επιπλέον την καθοριστική συμβολή της μαθηματικής γνώσης. Η γνώση που διαθέτει ο λύτης ενσωματώνεται στο τεχνολογικό εργαλείο δημιουργώντας τις κατάλληλες προϋποθέσεις για να παραχθεί νέα γνώση, αξιοποιώντας ταυτόχρονα τη μαθηματική σκέψη αλλά και τις ψηφιακές αναπαραστάσεις που προέρχονται από τη χρήση των νέων τεχνολογιών (Jacinto et al., 2018).

Γενικότερα, όταν η τεχνολογία συνδέει με δυναμικό τρόπο πολλαπλές αναπαραστάσεις, δίνει τη δυνατότητα στους διδασκόμενους να κατανοήσουν με μεγαλύτερη ευκολία το περιεχόμενο ενός προβλήματος (NCTM, 2009). Παράλληλα η χρήση της τεχνολογίας προσφέρει σημαντική βοήθεια στην εκτέλεση των κλασικών βημάτων που ακολουθούνται κατά την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, όπως αυτά διατυπώθηκαν και αναλύθηκαν από τον Polya. Πιο συγκεκριμένα, συμβάλλει καθοριστικά στην κατανόηση και ανάλυση του προβλήματος, αρκεί να έχει επιλεχθεί το κατάλληλο ψηφιακό εργαλείο που ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος. Βοηθά επίσης τόσο στην κατάστρωση του σχεδίου επίλυσης όσο και στην εφαρμογή του, μέσω της ενδελεχούς μελέτης διαφορετικών αναπαραστάσεων του προβλήματος καθώς και του διαρκούς ελέγχου της προόδου που επιτυγχάνεται για την εύρεση της τελικής λύσης (Santos-Trigo et al., 2018).

Συμπερασματικά, η χρήση των νέων τεχνολογιών είναι ιδιαιτέρως βοηθητική σε δραστηριότητες που απαιτείται διερεύνηση ή διεξοδική μελέτη αναπαραστάσεων, δηλαδή σε δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων. Οι νέες τεχνολογίες ανοίγουν νέους ορίζοντες στη μάθηση διότι διευκολύνουν την εκ νέου ερμηνεία διάφορων ήδη γνωστών εννοιών, μετασχηματίζοντας νοήματα και ιδέες που προέρχονται από αυτές. Αντικείμενα που παραδοσιακά αντιμετωπίζονταν με αναπαραστάσεις και σχεδιασμό σε χαρτί, πλέον μπορούν να αναπαρασταθούν με τρόπο ψηφιακό. Η χρήση των νέων τεχνολογιών δεν επιδρά απλώς στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές μπορούν να επιλύσουν ένα πρόβλημα αλλά συμβάλλει καθοριστικά στην αναδιαμόρφωση της πολιτισμικής φύσης των μαθηματικών (Santos-Trigo et al., 2016).

3.4 Η επίδραση των νέων τεχνολογιών στην τοποθέτηση προβλημάτων

Η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων είτε δημιουργώντας νέα προβλήματα είτε αναδιατυπώνοντας προβλήματα που ήδη υπάρχουν (Silver, 1994) αφενός βελτιώνει τις δεξιότητές τους στην επίλυση προβλημάτων (Krulik & Rudnick, 1987) αφετέρου συμβάλλει στην αφομοίωση της γνώσης και καλλιεργεί τον μαθηματικό τρόπο σκέψης (Silver, 1994). Όλα αυτά σε συνδυασμό με τη συνεχή εξέλιξη της τεχνολογίας, έδωσε ισχυρό κίνητρο στους προγραμματιστές να δημιουργήσουν και να αναπτύξουν νέα ψηφιακά εργαλεία που σχετίζονται με δραστηριότητες σύνθεσης προβλημάτων (Barak & Rafaeli, 2004, Fellenz, 2004).

Παρατηρήθηκε ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν συνήθως οι μαθητές στις κλασικές δραστηριότητες τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων παραμένουν ίδιες, ακόμα και στην περίπτωση που οι δραστηριότητες αυτές πραγματοποιούνται σε ψηφιακό περιβάλλον με τη χρήση των κατάλληλων τεχνολογικών εργαλείων. Έπειτα από έρευνες που πραγματοποιήθηκαν, διαπιστώθηκε ότι μια μεγάλη μερίδα μαθητών θεωρεί πως η δημιουργία προβλημάτων, ακόμα και μέσα από διαδικτυακές ή ψηφιακές δραστηριότητες, εξακολουθεί να είναι μια δύσκολη δραστηριότητα ενώ παράλληλα επιβεβαιώνεται η διαπίστωση ότι οι μαθητές με χαμηλότερες επιδόσεις στα μαθηματικά αντιμετωπίζουν τις περισσότερες δυσκολίες στην κατασκευή προβλημάτων. Επομένως, η ψηφιοποίηση των δραστηριοτήτων για την τοποθέτηση προβλημάτων δεν φαίνεται να αποτελεί πανάκεια για τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές, ούτε παρέχει ισχυρό κίνητρο για την εμπλοκή τους με τις εν λόγω δραστηριότητες (English, 1998, Mestre, 2002).

Όλες αυτές οι δυσκολίες που έχουν ήδη περιγραφεί, διαμόρφωσαν την πεποίθηση ότι οι ψηφιακές εφαρμογές για την τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων είναι αναγκαίο να ενσωματωθούν σε άλλου είδους δραστηριότητες προκειμένου να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών (Umetsu et al., 2002, Yu et al., 2005). Για παράδειγμα τα παιχνίδια σε ψηφιακή μορφή, αν αξιοποιηθούν σωστά, μπορούν να αποτελέσουν χρήσιμα εκπαιδευτικά εργαλεία διότι παρέχουν στους μαθητές ισχυρό κίνητρο για να ασχοληθούν με την δημιουργία προβλημάτων, δίνοντάς τους παράλληλα τη δυνατότητα να έχουν οι ίδιοι τον έλεγχο της μάθησης (Dickey, 2007, Huizeng et al., 2009, Kumar, 2000, Papastergiou, 2009).

Σε γενικές γραμμές, η συντονισμένη χρήση των νέων τεχνολογιών παρέχει στους μαθητές σημαντική βοήθεια στην επίλυση και τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων διότι τους προσφέρει τη δυνατότητα να επικοινωνούν και να συζητούν για μαθηματικά θέματα, για τρόπους αντιμετώπισης, τοποθέτησης ή διατύπωσης προβλημάτων καθώς επίσης να αναπαριστούν ή να διερευνούν τα προβλήματα από διάφορες οπτικές γωνίες και προοπτικές. Αν και οι ψηφιακές τεχνολογίες δεν έχουν ενσωματωθεί πλήρως στη σχολική ζωή και κουλτούρα, εντούτοις η παρουσία τους διαρκώς κερδίζει έδαφος έναντι των παραδοσιακών τρόπων αντιμετώπισης προβλημάτων (Santos-Trigo et al., 2016).

3.5 Η επιρροή των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων

Σύμφωνα με τους γενικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης, ο μαθητής θα πρέπει αξιοποιώντας τις μαθηματικές του γνώσεις, να είναι σε θέση να επιλύει προβληματικές καταστάσεις του φυσικού κόσμου, να τις κατανοεί και να τις ερμηνεύει. (Baki, 2001). Βέβαια, ο φυσικός κόσμος για να ερμηνευθεί, κρίνεται απαραίτητη η διδασκαλία της γεωμετρίας του χώρου, έτσι ώστε οι μαθητές αξιοποιώντας τις γνώσεις τους αλλά και τις χωρικές τους ικανότητες να είναι σε θέση να επιλύουν προβλήματα του φυσικού κόσμου (NCTM, 2000).

Η αναφορά στις χωρικές ικανότητες ενός ατόμου, αφορά συνήθως δεξιότητες όπως η περιστροφή, η αναστροφή, η κάμψη ή η μετατόπιση ενός αντικειμένου (McGee, 1976), η οπτική κατανόηση σχέσεων, η τροποποίηση σχημάτων, η αναδιάταξη και η ερμηνεία τους (Tartre, 1990 και Αυγερινος, Γαλουζη, Ρεμουνδου, 2017). Σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη των χωρικών δεξιοτήτων καθώς και στη μελέτη μαθηματικών αντικειμένων έχουν διαδραματίσει στη σύγχρονη εποχή τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας. Τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας μπορούν να οπτικοποιήσουν ενα πρόβλημα, δίνοντας τη δυνατότητα σε όσους τα χρησιμοποιούν να εξερευνούν σχέσεις, να κατασκευάζουν σχήματα και να διατυπώνουν εικασίες (Güven & Kosa, 2008).

Η επίλυση και η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (όπως έχει ήδη αναφερθεί) αποτελούν δύο από τις σημαντικότερες διαδικασίες εκμάθησης και κατανόησης των μαθηματικών (NCTM, 2000). Η ενασχόληση ενός ατόμου με την επίλυση και την τοποθέτηση προβλημάτων του δίνει τη δυνατότητα να αντιληφθεί την ουσία των μαθηματικών και να κατανοήσει το νόημα της φράσης «δημιουργώ μαθηματικά» (Lavy & Shriki, 2009, Shriki, 2006, Shriki & Lavy, 2004). Τη σημερινή εποχή, με τη χρήση της τεχνολογίας, οι δραστηριότητες επίλυσης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων καθώς και η διατύπωση διάφορων εικασιών μπορούν να γίνουν με τρόπο πιο άμεσο και ουσιαστικό. Η αξιοποίηση των δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών καθώς και των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, μεταφέρει τα μαθηματικά σε άλλο επίπεδο καθώς δίνεται η δυνατότητα επίλυσης και επέκτασης των προβλημάτων, ενέργειες που δύσκολα θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν με τον παραδοσιακό τρόπο μελέτης, δηλαδή με μολύβι κι χαρτί (Aviram, 2001).

Κατά την επίλυση ή τοποθέτηση ενός μαθηματικού προβλήματος με τη χρήση λογισμικού, παρατηρείται μια αλληλεπίδραση ανάμεσα στο άτομο και το λογισμικό. Σε αυτού του είδους την αλληλεπίδραση, εμπλέκονται δύο διαφορετικά συστήματα. Το πρώτο σύστημα περιλαμβάνει το άτομο που επιθυμεί να λύσει ή να κατασκευάσει ένα πρόβλημα ενώ το δεύτερο σύστημα περιλαμβάνει το ψηφιακό περιβάλλον που παρέχει στο ενδιαφερόμενο άτομο τα κατάλληλα εργαλεία προκειμένου να αξιοποιήσει τις γνώσεις του, γεφυρώνοντας στην ουσία το άτομο με τον κόσμο των μαθηματικών (Brousseau, 1997, Antigue, 2002).

Με άλλα λόγια, ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας αποτελεί ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο διαμεσολάβησης, το οποίο οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν τόσο για την επίλυση όσο και για την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων, εφαρμόζοντας διαδικασίες μοντελοποίησης, διατυπώνοντας εικασίες και γενικεύσεις. Παράλληλα μέσω της λεπτομερούς και ακριβούς οπτικοποίησης που παρέχεται στο πρόβλημα, απλουστεύεται η επεξεργασία του καθώς και ο έλεγχος της ορθότητας των εικασιών που ενδεχομένως διατυπώθηκαν (Christou et al., 2005).

Γενικά, η εξέλιξη της τεχνολογίας και ιδιαιτέρως η αξιοποίηση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας, έχει επιφέρει σημαντικές αλλαγές τόσο στον τρόπο μελέτης και εμβάθυνσής των μαθηματικών όσο και στην μορφή τους (De Villiers, 2006). Τα μαθηματικά μετατρέπονται στη σημερινή εποχή σε μια πειραματική επιστήμη (Olive, 2002) επιτρέποντας στον καθένα να ανακαλύψει τη μάθηση και να επαληθεύσει εικασίες (Landau, 2005), να διατυπώσει επαγωγικές επεξηγήσεις, να συλλάβει ιδέες για απόδειξη ή να προχωρήσει σε αποδείξεις (Jones, 2006). Στο πλαίσιο αυτό η εμπλοκή και η ενασχόληση των μαθητών με δραστηριότητες επίλυσης και τοποθέτησης προβλημάτων μέσα σε ένα ψηφιακό περιβάλλον γίνεται ιδιαιτέρως ωφέλιμη και διδακτική (Aviram, 2001).

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

4 Πειραματικό πλαίσιο της έρευνας

Σημαντικό ρόλο στην ορθή διεξαγωγή μίας έρευνας κατέχει ο καθορισμός του προς εξέταση προβλήματος, η διατύπωση των υποθέσεων της έρευνας, ο σαφής προσδιορισμός των στόχων και τέλος η επιλογή της κατάλληλης μεθοδολογίας που πληροί τις προϋποθέσεις για τη διεξοδική μελέτη του προβλήματος (Παπαναστασίου, 2014).

Η έρευνα που διεξήχθη στα πλαίσια της εν λόγω διπλωματικής εργασίας είναι ποσοτική και στηρίχθηκε σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο δείγμα. Το συγκεκριμένο δείγμα κλήθηκε να επεξεργαστεί ένα δομημένο ερωτηματολόγιο και ένα δοκίμιο έργων μέσω των οποίων μελετήθηκε μία σειρά μεταβλητών. Οι μεταβλητές (όπως σε κάθε ποσοτική έρευνα) τυποποιήθηκαν και αντιστοιχήθηκαν σε αριθμητικές τιμές, προκειμένου να μελετηθούν και να γίνει η στατιστική τους ανάλυση.

Μέσω μιας ποσοτικής έρευνας επιτυγχάνεται η διερεύνηση και η ερμηνεία πιθανών συσχετίσεων που υφίστανται μεταξύ των υπό εξέταση μεταβλητών του δείγματος, ενώ παράλληλα είναι δυνατή η εξισορρόπηση των όποιων μεμονωμένων περιπτώσεων που ενδεχομένως εμφανίζουν ιδιόμορφα χαρακτηριστικά και τα οποία διαφοροποιούνται από τα υπόλοιπα υποκείμενα του δείγματος. Συνέπεια όλων των παραπάνω είναι να προκύπτουν συμπεριφορές ή θέσεις που να λογίζονται ως γενικώς ισχύουσες, με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται η γενίκευση των συμπερασμάτων που προκυπτούν (Tsiolis, 2013).

4.1 Ερευνητικά ερωτήματα

Η επίλυση και η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων (όπως έχει ήδη αναφερθεί στο θεωρητικό μέρος της εργασίας) αποτελούν δύο από τις σημαντικότερες δραστηριότητες της διδασκαλίας των μαθηματικών, μέσω των οποίων οι διδασκόμενοι μπορούν να αποκομίσουν πολλαπλά οφέλη.

Εστιάζοντας στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων συμβάλλει στην ανάπτυξη της κριτικής τους σκέψης, της δημιουργικότητας καθώς και στην αφομοίωση απλών ή πολύπλοκων μαθηματικών εννοιών. Επιπλέον, η ενασχόληση των μαθητών με την κατασκευή και τοποθέτηση προβλημάτων, τονώνει το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά διότι τους δίνεται η δυνατότητα να συνδέσουν τα μαθηματικά με τα προσωπικά τους ενδιαφέροντα.

Συνδυάζοντας την επίλυση και την τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων με τη χρήση ενός κατάλληλου τεχνολογικού εργαλείου, όπως είναι ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να αναπαραστήσουν ένα πρόβλημα με τρόπο σύγχρονο και ρεαλιστικό, να το διερευνήσουν και να το μελετήσουν μέσα από διάφορες οπτικές γωνίες και προοπτικές.

Ο κύριος στόχος της έρευνας είναι να διερευνηθεί η επίδραση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας (τεχνολογικού εργαλείου) στην επίλυση και τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων και να μελετηθεί εάν και σε ποιο βαθμό βοηθά στην επιτυχή ολοκλήρωση δραστηριοτήτων επίλυσης και κατασκευής προβλημάτων, στις οποίες εμπλέκονται μαθητές.

Εκτός από τον βασικό στόχο του ερευνητικού μέρους της εργασίας, γίνεται προσπάθεια να δοθούν απαντήσεις στα ακόλουθα ερευνητικά ερωτήματα:

- Πώς συνδέεται η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων με την ευχέρεια τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων.
- Σε ποιο βαθμό η κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων σχετίζεται με τη δημιουργικότητα και τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων.
- Ποιες είναι οι απόψεις, οι θέσεις και οι πεποιθήσεις των μαθητών σχετικά με τα μαθηματικά, την επίλυση και κατασκευή προβλημάτων, τη χρήση των νέων τεχνολογιών.

4.2 Οι συμμετέχοντες στην έρευνα

Η έρευνα στηρίχθηκε σε ένα ομοιογενές δείγμα το οποίο αποτέλεσαν 111 μαθητές που φοιτούσαν στη Β΄ τάξη του 1^{ου} Γενικού Λυκείου Νεάπολης Θεσσαλονίκης. Από τους συμμετέχοντες στην έρευνα τα 59 άτομα ήταν κορίτσια και τα 52 αγόρια. Δηλαδή, το 53% του συνόλου του δείγματος ήταν κορίτσια και το 47% αγόρια. Επιπλέον, οι 43 μαθητές του δείγματος παρακολουθούσαν τα μαθήματα της ομάδας προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών ενώ οι 68 μαθητές παρακολουθούσαν τα μαθήματα της ομάδας προσανατολισμού Θετικών Σπουδών. Συνεπώς, το 39% των συμμετεχόντων στην έρευνα ήταν μαθητές του προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών και το 61% μαθητές του προσανατολισμού Θετικών Σπουδών.

Το ερευνητικό μέρος της διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε τον Απρίλιο του 2022. Η επιλογή του χρονικού πλαισίου της διεξαγωγής της έρευνας έγινε με σκοπό να έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία του μεγαλύτερο μέρους της ύλης των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου, προκειμένου οι συμμετέχοντες μαθητές να έχουν τα απαραίτητα εφόδια και τις απαιτούμενες γνώσεις ώστε να μπορέσουν να επεξεργαστούν το δοκίμιο που τους δόθηκε.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διεξαγωγή του ερευνητικού μέρους της εργασίας, έλαβε χώρα κάτω από τις ιδιαίτερα δύσκολες συνθήκες που δημιούργησε η πανδημία του Covid19. Στα πλαίσια αυτών των συνθηκών, υπήρξαν σημαντικές δυσκολίες στην επιλογή των ατόμων που αποτέλεσαν το δείγμα για την έρευνα της διπλωματικής εργασίας.

4.3 Ερωτηματολόγιο και έργα έρευνας

Προκειμένου να διερευνηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, δημιουργήθηκε ένα ερωτηματολόγιο και ένα δοκίμιο έργων.

Το ερωτηματολόγιο το οποίο δόθηκε στα άτομα που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας, διαμορφώθηκε σύμφωνα με την κλίμακα πεποιθήσεων στα μαθηματικά του Πανεπιστημίου της Ιντιάνα. Η δομή του ερωτηματολογίου στηρίχθηκε στην επιστημονική εργασία των Peter Kloosterman και Frances K. Stage “Measuring Beliefs About Mathematical Problem Solving” (1992). Οι Kloosterman και Stage στην εργασία τους εξέτασαν τις εξής έξι κλίμακες: δύσκολα προβλήματα (difficult problems), βήματα (steps), κατανόηση (understanding), λεκτικά προβλήματα (word problems), προσπάθεια (effort), χρησιμότητα των μαθηματικών (mathematics is useful). Σε κάθε κλίμακα οι Kloosterman και Stage συμπεριέλαβαν έξι ερωτήσεις ενώ ο χρόνος που διέθεσαν στους συμμετέχοντες προκειμένου να απαντήσουν στα ερωτήματα, ήταν συνολικά δεκαπέντε λεπτά.

Στην παρούσα έρευνα συμπεριλήφθηκαν και οι έξι κλίμακες των Kloosterman και Stage, όμως προστέθηκαν και δύο επιπλέον. Η πρώτη κλίμακα που προστέθηκε σχετίζεται με την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων ενώ η δεύτερη με την επιρροή των νέων τεχνολογιών στην επίλυση και τοποθέτηση προβλημάτων.

Το ερωτηματολόγιο που επιλέχθηκε απαρτίζεται συνολικά από είκοσι εννέα ερωτήσεις τύπου Likert 4 – βαθμών: διαφωνώ, διαφωνώ λίγο, συμφωνώ λίγο, συμφωνώ. Δεν συμπεριλήφθηκε στις προτεινόμενες απαντήσεις μια πέμπτη επιλογή της μορφής «ούτε διαφωνώ – ούτε συμφωνώ» για να αποφευχθεί η ουδέτερη στάση των συμμετεχόντων. Αναλυτικά το πλήθος των ερωτήσεων που περιέχονται στο ερωτηματολόγιο ανά πεποίθηση είναι:

1η πεποίθηση (δύσκολα προβλήματα):	2 ερωτήσεις
2η πεποίθηση (βήματα):	3 ερωτήσεις
3η πεποίθηση (κατανόηση):	3 ερωτήσεις
4η πεποίθηση (λεκτικά προβλήματα):	3 ερωτήσεις
5η πεποίθηση (προσπάθεια):	4 ερωτήσεις
6η πεποίθηση (χρησιμότητα των μαθηματικών):	3 ερωτήσεις
7η πεποίθηση (ο ρόλος της κατασκευής προβλημάτων):	4 ερωτήσεις
8η πεποίθηση (η επιρροή των νέων τεχνολογιών):	7 ερωτήσεις

Το δοκίμιο που συντάχθηκε για τις ανάγκες της έρευνας αποτελείται από τέσσερα έργα. Πιο συγκεκριμένα:

Έργο 1: Επίλυση αλγεβρικού προβλήματος

Στο έργο αυτό οι ερωτηθέντες καλούνται να επιλύσουν δύο τριγωνομετρικές εξισώσεις (αλγεβρικό πρόβλημα). Για την πρώτη εξίσωση (που αποτελεί το πρώτο μέρος του έργου) απαιτείται η στοιχειώδης γνώση τόσο του τρόπου επίλυσης τριγωνομετρικών εξισώσεων όσο και του κλασικού τριγωνομετρικού πίνακα (όπως αυτός περιέχεται στην διδασκόμενη ύλη των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης). Στη δεύτερη τριγωνομετρική εξίσωση (που αποτελεί το δεύτερο μέρος του έργου και είναι ουσιαστικά ανεξάρτητο του πρώτου) οι μαθητές είναι αναμενόμενο να δυσκολευτούν. Ο κύριος λόγος της δυσκολίας που θα αντιμετωπίσουν είναι ο προσδιορισμός γωνίας της οποίας οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν περιέχονται στον τριγωνομετρικό πίνακα βασικών γωνιών που έχουν διδαχθεί.

Με το έργο αυτό εξετάζεται η ικανότητα εφαρμογής απλών αλγεβρικών γνώσεων καθώς και η βοήθεια που μπορεί να παρέχει η χρήση κατάλληλου λογισμικού στην αντιμετώπιση αντικειμενικών δυσκολιών οι οποίες δεν οφείλονται στην έλλειψη γνωστικού υπόβαθρου.

Έργο 2: Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος

Στο εν λόγω έργο ελέγχεται η γεωμετρική αντίληψη των μαθητών στην επεξεργασία ενός προβλήματος καθώς και η ευχέρειά τους αφενός να μετασχηματίσουν το πρόβλημα σε αλγεβρική μορφή, αφετέρου να διαχειριστούν τις απαιτητικές αλγεβρικές πράξεις που περιέχονται σε αυτό. Παράλληλα μελετάται η επίδραση που έχει στην επιτυχή επίλυση του προβλήματος η χρήση κατάλληλου λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Έργο 3: Κατασκευή αλγεβρικού προβλήματος με δοσμένη λύση

Στο τρίτο έργο οι συμμετέχοντες στην έρευνα καλούνται να κατασκευάσουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που να έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται. Στο συγκεκριμένο έργο εξετάζεται η ικανότητα των μαθητών να διαχειρίζονται τα στοιχεία του προβλήματος προκειμένου να επιτευχθεί η ορθή τοποθέτησή του. Επιπλέον μελετάται η ευελιξία που μπορεί να προσφέρει στην προαναφερθείσα διαδικασία η αξιοποίηση ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Έργο 4: Αναδιατύπωση γεωμετρικού προβλήματος

Στο συγκεκριμένο έργο οι μαθητές καλούνται να κατασκευάσουν ένα νέο πρόβλημα, αναδιατυπώνοντας με ορθό τρόπο ένα ήδη δοσμένο γεωμετρικό πρόβλημα. Με το έργο αυτό διερευνάται τόσο η δημιουργικότητα των συμμετεχόντων όσο και η ικανότητά τους να επεξεργάζονται τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος. Παράλληλα, εξετάζεται η βοήθεια που δύναται να παρέχει ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας στην επιτυχημένη αναδιατύπωση του προβλήματος.

4.4 Η διεξαγωγής της έρευνας

4.4.1 Η διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας

Το ερευνητικό μέρος της εργασίας πραγματοποιήθηκε αφού πρώτα οι συμμετέχοντες στην έρευνα χωρίστηκαν με τυχαίο τρόπο σε δύο ομάδες, με σχεδόν ίσο πλήθος ατόμων η καθεμία. Η πρώτη ομάδα συμπλήρωσε το ερωτηματολόγιο των πεποιθήσεων καθώς και το δοκίμιο των έργων στο χώρο της αίθουσας διδασκαλίας, ενώ η δεύτερη ομάδα ολοκλήρωσε την ίδια διαδικασία στο εργαστήριο πληροφορικής του σχολείου, χρησιμοποιώντας για την επεξεργασία των έργων του δοκιμίου λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας που ήταν ήδη εγκατεστημένο στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Και οι δυο ομάδες του δείγματος εργάστηκαν παρουσία του διδάσκοντα εκπαιδευτικού και του ερευνητή. Οι συμμετέχοντες μαθητές στην έρευνα είχαν στη διάθεσή τους μία διδακτική ώρα, δηλαδή 45 λεπτά.

Στους συμμετέχοντες στην έρευνα δόθηκαν δύο φύλλα. Στο πρώτο φύλλο υπήρχε το ερωτηματολόγιο ενώ στο δεύτερο φύλλο είχε συμπεριληφθεί το δοκίμιο των έργων. Ανάμεσα στα έργα υπήρχε κενός χώρος στον οποίο οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να δώσουν τις απαντήσεις τους. Κατά τη μορφοποίηση των δύο φύλλων, η βασική επιδίωξη ήταν να υπάρξει θετική στάση των συμμετεχόντων απέναντι στην διεξαγόμενη έρευνα προκειμένου να απαντήσουν με ειλικρίνεια και υπευθυνότητα.

4.4.2 Η πειραματική ομάδα ελέγχου

Δέκα ημέρες πριν την υλοποίηση της έρευνας, δημιουργήθηκε μια ομάδα μαθητών που αποτέλεσε το πειραματικό δείγμα της έρευνας. Από τους μαθητές αυτούς ζητήθηκε να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο και να επεξεργαστούν το δοκίμιο με τα έργα, προκειμένου να ελεγχθεί από τον ερευνητή τόσο η επάρκεια του διαθέσιμου χρόνου όσο και η διατύπωση των κειμένων, με σκοπό να αποφευχθεί πιθανή σύγχυση ή τυχόν παρανοήσεις.

4.5 Αξιολόγηση των απαντήσεων

Η αξιολόγηση των απαντήσεων του ερωτηματολογίου στηρίχθηκε στην εργασία των Kloosterman και Stage, με τη διαφορά ότι η βαθμολόγηση των απαντήσεων κινήθηκε στο εύρος των φυσικών αριθμών από το 1 (ένα) έως το 4 (τέσσερα), δεδομένου ότι δεν υπήρχε πέμπτη επιλογή (η ουδέτερη δηλαδή απάντηση) στις προτεινόμενες απαντήσεις. Πιο συγκεκριμένα, η απάντηση σε κάθε ερώτηση – θέση που διατυπώθηκε στο ερωτηματολόγιο βαθμολογήθηκε με 1 (ένα) αν η απάντηση ήταν «Διαφωνώ», με 2 (δύο) αν η απάντηση ήταν «Διαφωνώ λίγο», με 3 (τρία) αν η απάντηση ήταν «Συμφωνώ λίγο» και με 4 (τέσσερα) αν η απάντηση ήταν «Συμφωνώ». Με άλλα λόγια, η μικρότερη βαθμολογία δόθηκε στην περισσότερο αρνητική απάντηση (ισχυρή διαφωνία αν η διατύπωση του ερωτήματος – θέσης είναι θετική ή ισχυρή συμφωνία αν η διατύπωση του ερωτήματος – θέσης είναι αρνητική) ενώ αντίστοιχα η μεγαλύτερη βαθμολογία δόθηκε στην περισσότερο θετική απάντηση (ισχυρή συμφωνία αν η διατύπωση του ερωτήματος – θέσης είναι θετική ή ισχυρή διαφωνία αν η διατύπωση του ερωτήματος – θέσης είναι αρνητική).

Η αξιολόγηση των έργων του δοκιμίου έγινε σύμφωνα με την κλίμακα 0 – 1. Πιο συγκεκριμένα, τα έργα που είτε δεν απαντήθηκαν είτε απαντήθηκαν λανθασμένα ή ελλιπώς βαθμολογήθηκαν με 0 (μηδέν) ενώ τα έργα που είχαν ορθές και πλήρεις απαντήσεις βαθμολογήθηκαν με 1 (ένα).

4.6 Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας

Η ανάλυση των δεδομένων της έρευνας έγινε σύμφωνα με το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του R. Gras (SIA – Statistical Implicative Analysis) αξιοποιώντας το λογισμικό CHIC (Cohesive Hierarchical Implicative Classification).

Ο κύριος στόχος της συνεπαγωγικής ανάλυσης είναι να δώσει απάντηση στο ερώτημα: «Αν ένα αντικείμενο έχει μια ιδιότητα, τότε μπορεί να έχει και κάποια άλλη συγκεκριμένη ιδιότητα;». Η απάντηση του εν λόγω ερωτήματος άλλες φορές είναι θετική (σπανίως) και άλλοτε αρνητική. Η συνεπαγωγική ανάλυση εξετάζει την πιθανή ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών μιας έρευνας, σύμφωνα με συγκεκριμένα κριτήρια, εξετάζοντας παράλληλα το επίπεδο συσχέτισής τους. Για παράδειγμα, η συνεπαγωγή $A \Rightarrow B$ δε θεωρείται σημαντική εάν όλα τα στοιχεία του πληθυσμού έχουν την ιδιότητα B.

Στη συνεπαγωγική ανάλυση, μέσω του λογισμικού CHIC, γίνεται η μελέτη κυρίως δυαδικών μεταβλητών. Οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή για να μελετηθεί από το CHIC πρέπει να κωδικοποιηθεί, λαμβάνοντας κατάλληλες τιμές μεταξύ του 0 και του 1 (Couturier, 2008).

Η συνεπαγωγική ανάλυση των δεδομένων συμπεριλαμβάνει τη σύγκριση συχνοτήτων ή συντελεστών συσχέτισης, τη θετική συσχέτιση, την ομοιογένεια καθώς και τη θετικά προσανατολισμένη στατιστική εξάρτηση. Με τη χρήση του λογισμικού CHIC στην ανάλυση των δεδομένων της έρευνας, επιτυγχάνεται η κατασκευή του Συνεπαγωγικού Διαγράμματος, του Δενδροδιαγράμματος Ομοιότητας καθώς και του Δενδροδιαγράμματος Ιεράρχησης.

Μέσω του συνεπαγωγικού διαγράμματος παρουσιάζονται οι σχέσεις συνεπαγωγής που προκύπτουν μεταξύ των μεταβλητών. Αν προκύψει η συνεπαγωγή Έργο 1 $\rightarrow$ Έργο 2 τότε η ερμηνεία που δίνεται είναι ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται την επιτυχία στο Έργο 2 καθώς και ότι η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται την αποτυχία στο Έργο 1. Το συνεπαγωγικό διάγραμμα αποτελεί ουσιαστικά τη γραφική απεικόνιση ενός δικτύου συνεπαγωγικών σχέσεων μεταξύ κάποιων μεταβλητών που περιέχονται στο σύνολο όλων των μεταβλητών της έρευνας.

Το διάγραμμα ομοιότητας ομαδοποιεί τις μεταβλητές της έρευνας. Η κάθε ομάδα που προκύπτει αποτελείται από μεταβλητές που τα υποκείμενα της έρευνας αντιμετωπίζουν με όμοιο τρόπο, δηλαδή είτε επιτυγχάνουν ταυτόχρονα είτε αποτυγχάνουν ταυτόχρονα. Επομένως από το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας προκύπτουν οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα στα διάφορα έργα της έρευνας, φαίνονται δηλαδή τα έργα στα οποία οι συμμετέχοντες στην έρευνα (υποκείμενα) συμπεριφέρονται με παραπλήσιο τρόπο.

Γενικά, το λογισμικό CHIC έχει τις δυνατότητες να εφαρμόσει όλες σχεδόν τις μεθόδους και τεχνικές που απαιτεί το Συνεπαγωγικό Στατιστικό Μοντέλο του R. Gras. Αν και η θεωρία του Συνεπαγωγικού Στατιστικού Μοντέλου δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί από τον οποιονδήποτε, το CHIC δίνει τη δυνατότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της συνεπαγωγικής ανάλυσης, γεγονός που το διαφοροποιεί σε μεγάλο βαθμό από άλλα λογισμικά επεξεργασίας στατιστικών δεδομένων(Couturier, 2008).

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε επιπλέον το πρόγραμμα Microsoft Excel, προκειμένου να καταγραφούν τα αποτελέσματα της έρευνας, να γίνει η επεξεργασία τους και να παρουσιαστούν τα αποτελέσματα με τη μορφή πινάκων, γραφημάτων και συγκριτικών διαγραμμάτων.

4.7 Οι μεταβλητές της έρευνας

Η ονομασία των μεταβλητών που σχετίζονται με τα έργα τα οποία συμπεριλαμβάνονται στο δοκίμιο της έρευνας, έγινε με τη χρήση λατινικών χαρακτήρων και αριθμών. Το όνομα της κάθε μεταβλητής αποτελείται από δύο μέρη: το πρώτο μέρος αφορά τα αρχικά των λέξεων που περιγράφουν τι εκφράζει η αντίστοιχη μεταβλητή, ενώ το δεύτερο μέρος αναφέρεται στο έργο που εντοπίζεται η συγκεκριμένη μεταβλητή.

Πιο συγκεκριμένα οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην έρευνα είναι οι εξής:

SAPr1a (Solving Algebraic Problem): Επίλυση αλγεβρικού προβλήματος

Δυνατότητα επίλυσης τετριμμένης τριγωνομετρικής εξίσωσης με τη χρήση γωνιών που περιέχονται στον τριγωνομετρικό πίνακα όπως αυτός διδάσκεται στην Άλγεβρα Β΄ Λυκείου.

SAPr1b (Solving Algebraic Problem): Επίλυση αλγεβρικού προβλήματος

Δυνατότητα επίλυσης μη τετριμμένης τριγωνομετρικής εξίσωσης που απαιτεί τη χρήση γωνιών που δεν περιέχονται στον τριγωνομετρικό πίνακα όπως αυτός διδάσκεται στην Άλγεβρα Β΄ Λυκείου.

SGPr2 (Solving Geometric Problem): Επίλυση γεωμετρικού προβλήματος

Κατανόηση και επεξεργασία γεωμετρικού προβλήματος μέσω του μετασχηματισμού του σε αλγεβρική μορφή.

PAPr3 (Posing Algebraic Problem): Κατασκευή αλγεβρικού προβλήματος

Αξιοποίηση των δεδομένων καθώς και της λύσης που δίνεται προκειμένου να τοποθετηθεί σωστά ένα αλγεβρικό πρόβλημα.

PGPr4 (Posing Geometric Problem): Αναδιατύπωση γεωμετρικού προβλήματος

Τροποποίηση δοσμένου γεωμετρικού προβλήματος ώστε να κατασκευαστεί ένα νέο γεωμετρικό πρόβλημα.

5 Αποτελέσματα της έρευνας

5.1 Αποτελέσματα του ερωτηματολογίου

Κατά την επεξεργασία και την ανάλυση των απαντήσεων που έδωσαν οι συμμετέχοντες στην έρευνα σε κάθε ερώτηση του ερωτηματολογίου, έγινε αρχικά αντιστροφή των απαντήσεών τους σε όσες ερωτήσεις ήταν διατυπωμένες με αρνητική μορφή, προκειμένου να διαπιστωθεί η συμφωνία ή η διαφωνία τους με τις προς μελέτη πεποιθήσεις. Η εν λόγω αντιστροφή έγινε μεταξύ των απαντήσεων Διαφωνώ ↔ Συμφωνώ και Διαφωνώ λίγο ↔ Συμφωνώ λίγο. Επιπλέον, οι ερωτήσεις ομαδοποιήθηκαν με κριτήριο την κλίμακα πεποιθήσεων στην οποία αντιστοιχούν, με κύριο σκοπό να προκύψουν συγκεντρωτικά αποτελέσματα ανά πεποίθηση.

Η πρώτη πεποίθηση έχει ως στόχο να μελετήσει το κατά πόσο οι μαθητές έχουν τη διάθεση και την υπομονή να ασχοληθούν με την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων των οποίων η λύση είναι μια διαδικασία χρονοβόρα. Από τις απαντήσεις που δόθηκαν, προκύπτει ότι οι μαθητές σε ποσοστό 41,44% υποστηρίζουν πως έχουν τη δυνατότητα και τη διάθεση να επεξεργαστούν και να επιλύσουν χρονοβόρα προβλήματα, σε αντίθεση με το 58,56% που έχει την άποψη ότι αν ένα πρόβλημα δεν μπορεί κάποιος να το επιλύσει σε σύντομο χρονικό διάστημα τότε δεν υπάρχει λόγος να επιμείνει περισσότερο. Από τις απαντήσεις των μαθητών προκύπτει πως η πλειοψηφία έχει την τάση να αντιμετωπίζει τα μαθηματικά προβλήματα δίχως να αφιερώνει πολύ χρόνο. Το γεγονός αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στην ανεπάρκεια των απαραίτητων προαπαιτούμενων γνώσεων ή στην έλλειψη εξοικείωσης των μαθητών με την επεξεργασία και επίλυση χρονοβόρων προβλημάτων. Βέβαια, δεν πρέπει να παραβλέπεται το γεγονός ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν θετική στάση απέναντι στα χρονοβόρα μαθηματικά προβλήματα είναι σημαντικό και καθόλου αμελητέο.

Με τη δεύτερη πεποίθηση εξετάζεται η θέση των μαθητών σχετικά με την ύπαρξη μαθηματικών προβλημάτων που δεν επιλύονται ακολουθώντας κάποια σταθερά και συγκεκριμένα βήματα. Το 41,44% των συμμετεχόντων στην έρευνα αποδέχεται την ύπαρξη τέτοιου είδους προβλημάτων ενώ το 58,56% διατυπώνει την ακριβώς αντίθετη άποψη. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι παρατηρείται ταύτιση των ποσοστών τόσο στη θετική όσο και στην αρνητική θέση που εκφράζουν οι μαθητές στις δύο πρώτες πεποιθήσεις. Δηλαδή, είναι ακριβώς ίδιο το ποσοστό των συμμετεχόντων που έχει θετική στάση απέναντι στα χρονοβόρα προβλήματα με το ποσοστό εκείνων που αποδέχονται την ύπαρξη προβλημάτων που η επίλυσή τους δε βασίζεται σε συγκεκριμένα βήματα, κανόνες ή μεθοδολογίες.

Η τρίτη πεποίθηση ερευνά τον σπουδαίο ρόλο που διαδραματίζει στα μαθηματικά η κατανόηση εννοιών. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα σε ποσοστό 79,88% αποδέχονται τη σπουδαιότητα της κατανόησης των εννοιών ενώ μόλις το 20,12% πιστεύει το αντίθετο. Το γεγονός ότι η συντριπτική πλειοψηφία συμφωνεί με την εν λόγω πεποίθηση, δείχνει ότι οι μαθητές κατανοούν πλήρως τον ιδιαιτέρως σπουδαίο ρόλο που διαδραματίζει στο χώρο των μαθηματικών η κατανόηση των διάφορων μαθηματικών εννοιών.

Μέσω της τέταρτης πεποίθησης διερευνάται η σημασία των λεκτικών προβλημάτων στο χώρο των μαθηματικών. Οι μαθητές σε ποσοστό 58,26% θεωρούν ότι τα λεκτικά προβλήματα έχουν ιδιαιτέρως μεγάλη σημασία και αξία στα μαθηματικά, σε αντίθεση με το 41,74% που διαφωνεί με την προαναφερθείσα θέση. Παρατηρείται συνεπώς ότι η πλειοψηφία των μαθητών αντιλαμβάνεται τη σπουδαιότητα των λεκτικών προβλημάτων, γεγονός που προβάλλει και αναδεικνύει τόσο τη σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο όσο και τον ιδιαίτερο ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στην καθημερινότητα των ανθρώπων.

Η πέμπτη πεποίθηση ελέγχει κατά πόσο οι μαθητές συμμερίζονται την άποψη ότι η διαρκής προσπάθεια βελτιώνει τις επιδόσεις ενός ατόμου στα μαθηματικά. Το 74,1% συμφωνεί με την άποψη αυτή ενώ μόλις το 25,9% υποστηρίζει το αντίθετο. Από τα αποτελέσματα αυτά προκύπτει ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών αποδέχεται το γεγονός ότι η βελτίωση και η πρόοδος στα μαθηματικά πραγματοποιείται μέσω της επιμονής, της μελέτης και της συνεχούς προσπάθειας.

Τα αποτελέσματα που σχετίζονται με την έκτη πεποίθηση δείχνουν ότι το μεγαλύτερο μέρος των συμμετεχόντων στην έρευνα, σε ποσοστό 56,46%, αποδέχεται την αξία και τη χρησιμότητα των μαθηματικών σε συνθήκες και καταστάσεις του πραγματικού κόσμου ενώ το 43,54% θεωρεί πως τα μαθηματικά δεν είναι σημαντικά και απαραίτητα στην καθημερινή ζωή του ανθρώπου.

Με την έβδομη πεποίθηση ελέγχεται ο ρόλος της κατασκευής προβλημάτων στα μαθηματικά. Λιγότεροι από τους μισούς μαθητές, δηλαδή το 43,47% των συμμετεχόντων στην έρευνα, θεωρούν ότι η κατασκευή προβλημάτων έχει κεντρικό ρόλο στο χώρο των μαθηματικών. Το υπόλοιπο 56,53% δεν αναγνωρίζει τη σημασία της τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων στο χώρο της μαθηματικής επιστήμης. Ενδεχομένως σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αποτελεσμάτων στην εν λόγω πεποίθηση, να έχει διαδραματίσει η δομή και ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών στα σχολεία, ο οποίος στηρίζεται σε πολύ μεγάλο βαθμό στην επίλυση προβλημάτων και όχι στην σύνθεση, κατασκευή και τοποθέτησή τους.

Τέλος, με την όγδοη πεποίθηση εξετάζεται η επίδραση της χρήσης των νέων τεχνολογιών στην επίλυση και την κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα, σε ποσοστό 76,83% υποστηρίζουν πως οι νέες τεχνολογίες έχουν θετική επίδραση στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Αντιθέτως, το 23,17% των συμμετεχόντων θεωρεί ότι οι νέες τεχνολογίες δεν έχουν κάποια ιδιαίτερη επιρροή στις δύο βασικές δραστηριότητες της μαθηματικής εκπαίδευσης, στην επίλυση και τοποθέτηση προβλημάτων.

Από τις κλίμακες πεποιθήσεων που μελετήθηκαν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας, οι κλίμακες 2, 4, 6, 7 και 8 αποσκοπούν στην καταγραφή και αποτύπωση των θέσεων που έχουν οι συμμετέχοντες στην έρευνα σχετικά με τους κανόνες που διέπουν τα μαθηματικά καθώς και με τον τρόπο που πρέπει να λειτουργεί κάποιος στο χώρο των μαθηματικών ενώ οι κλίμακες 1, 3 και 5 διερευνούν τις θέσεις του κάθε ατόμου από τη σκοπιά του μελετητή των μαθηματικών.

Στον πίνακα 1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου ανά ερώτηση και ανά πεποίθηση.

		Ποσοστά ανά ερώτηση				Ποσοστά ανά πεποίθηση			
Πεποίθηση	**Ερώτηση**	**Διαφωνώ**	**Διαφωνώ λίγο**	**Συμφωνώ λίγο**	**Συμφωνώ**	**Διαφωνώ**	**Διαφωνώ λίγο**	**Συμφωνώ λίγο**	**Συμφωνώ**
1. Έχω τη δυνατότητα να λύνω χρονοβόρα προβλήματα	1	21,62%	32,43%	27,93%	18,02%	29,28%	29,28%	26,58%	14,86%
	2	36,94%	26,13%	25,23%	11,70%				
2. Υπάρχουν προβλήματα που δεν επιλύονται ακολουθώντας συγκεκριμένα βήματα	3	44,14%	25,23%	14,41%	16,22%	31,53%	27,03%	21,02%	20,42%
	4	43,24%	35,14%	12,61%	9,01%				
	5	7,20%	20,72%	36,04%	36,04%				
3. Ιδιαιτέρως σημαντικό ρόλο διαδραματίζει στα μαθηματικά η κατανόηση εννοιών	6	3,60%	2,70%	18,02%	75,68%	9,01%	11,11%	30,63%	49,25%
	7	19,82%	20,72%	36,94%	22,52%				
	8	3,60%	9,91%	36,94%	49,55%				
4. Η σημασία των λεκτικών προβλημάτων στα μαθηματικά είναι μεγάλη	9	19,82%	33,33%	27,93%	18,92%	18,62%	23,12%	35,44%	22,82%
	10	7,21%	11,71%	53,15%	27,93%				
	11	28,83%	24,32%	25,23%	21,62%				
5. Η διαρκής προσπάθεια βελτιώνει τις επιδόσεις στα μαθηματικά	12	0,90%	2,70%	29,73%	66,67%	7,43%	18,47%	34,91%	39,19%
	13	9,91%	17,12%	32,43%	40,54%				
	14	3,60%	27,93%	37,84%	30,63%				
	15	15,32%	26,13%	39,64%	18,91%				
6. Τα μαθηματικά είναι χρήσιμα στην καθημερινότητα του ανθρώπου	16	26,13%	33,33%	25,22%	15,32%	18,01%	25,53%	25,23%	31,23%
	17	18,02%	25,23%	26,13%	30,62%				
	18	9,91%	18,02%	24,32%	47,75%				
7. Η κατασκευή προβλημάτων έχει κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά	19	45,95%	33,33%	11,71%	9,01%	25,68%	30,86%	26,35%	17,12%
	20	14,41%	25,23%	36,94%	23,42%				
	21	23,42%	35,14%	27,03%	14,41%				
	22	18,92%	29,73%	29,73%	21,62%				
8. Η χρήση νέων τεχνολογιών επιδρά θετικά στην επίλυση και κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων	23	0,90%	15,31%	46,85%	36,94%	5,02%	18,15%	43,24%	33,59%
	24	0,90%	17,12%	39,64%	42,34%				
	25	16,22%	31,53%	37,84%	14,41%				
	26	0,90%	5,40%	47,75%	45,95%				
	27	3,60%	18,92%	45,95%	31,53%				
	28	6,31%	24,32%	36,94%	32,43%				
	29	6,31%	14,41%	47,75%	31,53%				

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα απαντήσεων ερωτηματολογίου ανά ερώτηση και ανά πεποίθηση

Στον πίνακα 2 παρουσιάζονται ανά κλίμακα πεποίθησης, η μέση τιμή των απαντήσεων, η τυπική απόκλιση καθώς και ο δείκτης αξιοπιστίας εσωτερικής συνέπειας ή συνοχής Cronbach's a. Η αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας (internal consistency) προσφέρει ουσιαστικά μία εκτίμηση ως προς τη συνέπεια που παρουσιάζουν οι απαντήσεις όσων συμμετέχουν σε μία έρευνα. Με άλλα λόγια, εκτιμά αν οι συμμετέχοντες στην έρευνα απαντούν στα διάφορα ερωτήματα που περιέχονται στο ερωτηματολόγιο με παρεμφερή τρόπο. Η εκτίμηση της αξιοπιστίας της εσωτερικής συνέπειας γίνεται με τη χρήση του συντελεστή Cronbach's a.

Αν οι τιμές του συντελεστή Cronbach's a είναι μικρότερες του 0,5 τότε η αξιοπιστία της εσωτερικής συνέπειας θεωρείται μη αποδεκτή. Για τιμές από 0,5 έως 0,59 η αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας θεωρείται πτωχή, για τιμές από 0,6 έως 0,69 λογίζεται ως αμφισβητήσιμη, για τιμές από 0,7 έως 0,79 θεωρείται αποδεκτή, για τιμές από 0,8 έως 0,89 είναι καλή και για τιμές από 0,9 έως 0,94 θεωρείται άριστη. Γενικά ο συντελεστής Cronbach's a πρέπει να λαμβάνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του 0,7. Τιμές μεγαλύτερες του 0,95 γενικά δε θεωρούνται επιθυμητές διότι υποδηλώνουν πως κάποια από τα ερωτήματα που περιέχονται στο ερωτηματολόγιο είναι ουσιαστικά ίδια μεταξύ τους (Bland & Altman, 1997).

Οι τιμές του συντελεστή Cronbach's a της έρευνας, δείχνουν ότι υπάρχει μικρή συσχέτιση μεταξύ των ερωτημάτων που τέθηκαν ανά πεποίθηση. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η έκτη κλίμακα πεποιθήσεων στην οποία η τιμή του συντελεστή Cronbach's a αγγίζει το 0,74. Το γεγονός αυτό αποδεικνύει πως οι συμμετέχοντες στην έρευνα δέχονται τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινότητα του ανθρώπου, δίχως ιδιαίτερες αντιφάσεις στις θέσεις και τις απόψεις τους.

Οι μικρές τιμές που λαμβάνει ο συντελεστής Cronbach's a στις περισσότερες ερωτήσεις ανά κλίμακα πεποιθήσεων, πιθανόν να οφείλεται στο γεγονός ότι τα ερωτήματα ήταν της κλίμακας Likert – 4 βαθμών: διαφωνώ, διαφωνώ λίγο, συμφωνώ λίγο, συμφωνώ. Η απουσία μιας πέμπτης ουδέτερης επιλογής υποχρέωσε τους συμμετέχοντες στην έρευνα να πάρουν θετική ή αρνητική θέση στα διάφορα ερωτήματα, γεγονός που ενδεχομένως να επηρέασε την αξιοπιστία εσωτερικής συσχέτισης. Επίσης σημαντικό ρόλο ενδεχομένως να διαδραμάτισε ο μικρός αριθμός ερωτημάτων που περιέχονταν στις περισσότερες κλίμακες πεποιθήσεων. Τέλος, ένας σημαντικός παράγοντας για τις χαμηλές τιμές του συντελεστή Cronbach's a πιθανόν να αποτελεί ο βαθμός υπευθυνότητας, συγκέντρωσης και προσοχής με τον οποίο απαντήθηκαν τα ερωτήματα από τους μαθητές που έλαβαν μέρος στην έρευνα. Παράγοντες όπως η κόπωση ή η έλλειψη ενδιαφέροντος για κάποια ερωτήματα, δεν αποκλείεται να οδήγησαν τους μαθητές σε βιαστικές απαντήσεις με αποτέλεσμα να μην υπάρχει η επιθυμητή αξιοπιστία εσωτερικής συνέπειας.

Κλίμακα πεποίθησης	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση	Cronbach's a
1η	2,27	1,04	0,43
2η	2,3	1,12	0,35
3η	3,2	0,96	0,24
4η	2,62	1,03	0,33
5η	3,06	0,93	0,01
6η	2,7	1,1	0,74
7η	2,35	1,04	0,23
8η	3,05	0,85	0,37

Πίνακας 2: Μέση τιμή, τυπική απόκλιση και δείκτης Cronbach's a των απαντήσεων για κάθε κλίμακα πεποιθήσεων.

5.2 Αποτελέσματα των έργων του δοκιμίου

Στον πίνακα 3 περιέχονται συγκεντρωτικά οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα του δοκιμίου που τους ζητήθηκε να επεξεργαστούν. Ο πίνακας περιέχει το πλήθος των συμμετεχόντων στην έρευνα που είτε επέλυσαν επιτυχώς το κάθε έργο είτε λανθασμένα (ή και καθόλου) καθώς και τα αντίστοιχα ανά περίπτωση ποσοστά.

Μεταβλητές	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση Δεν απαντήθηκε	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση Δεν απαντήθηκε
SAPr1a	79	32	71,17 %	28,83 %
SAPr1b	43	68	38,74 %	61,26 %
SGPr2	38	73	34,23 %	65,77 %
PAPr3	73	38	65,77 %	34,23 %
PGPr4	70	41	63,06 %	36,94 %

Πίνακας 3: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα των έργων του δοκιμίου.

Το Έργο 1 του δοκιμίου αποτελείται από δύο ερωτήματα στα οποία ζητήθηκε από τους μαθητές να λύσουν από μία τριγωνομετρική εξίσωση. Στο πρώτο ερώτημα, η τριγωνομετρική εξίσωση που περιέχεται θεωρείται απλή και επιλύεται με τη χρήση στοιχειωδών γνώσεων τριγωνομετρίας ενώ παράλληλα απαιτείται και η γνώση των τριγωνομετρικών αριθμών βασικών γωνιών. Το ποσοστό επιτυχίας στο εν λόγω ερώτημα είναι 71,17% (SAPr1a) ενώ απάντησε λανθασμένα ή καθόλου το 28,83% των μαθητών. Η αποτυχία στην επίλυση της τριγωνομετρικής εξίσωσης που περιέχεται στο πρώτο ερώτημα του Έργου 1 οφείλεται πιθανότατα στην έλλειψη των γνώσεων που απαιτούνται για την επεξεργασία του.

Στο δεύτερο ερώτημα του Έργου 1 περιέχεται και πάλι μια τριγωνομετρική εξίσωση, η επίλυση της οποίας απαιτεί τη γνώση των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας που δεν περιέχεται στον τριγωνομετρικό πίνακα βασικών γωνιών, όπως αυτός διδάσκεται στα σχολεία. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι το σχετικά μικρό ποσοστό επιτυχούς αντιμετώπισης του συγκεκριμένου ερωτήματος, το οποίο ανέρχεται στο 38,74% (μεταβλητή SAPr1b) ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών που απάντησαν λανθασμένα ή και καθόλου είναι 61,26%.

Αν επικεντρωθούμε στα αποτελέσματα των μαθητών αναλόγως με το αν είχαν στη διάθεσή τους λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας ή όχι, τότε θα διαπιστώσουμε (όπως φαίνεται και στους πίνακες 4 και 5) ότι το πρώτο ερώτημα του Έργου 1 το απάντησε σωστά το 75% των μαθητών που χρησιμοποίησε λογισμικό και το 67,27% όσων εργάστηκαν δίχως λογισμικό. Τα συγκεκριμένα ποσοστά είναι πολύ κοντά στο συνολικό ποσοστό επιτυχούς αντιμετώπισης του ερωτήματος σε όλο το εύρος του δείγματος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα αντίστοιχα ποσοστά για το δεύτερο ερώτημα του Έργου 1. Παρατηρούμε ότι το 76,79% όσων εργάστηκαν με λογισμικό απάντησε με επιτυχία σε αντίθεση με το 0% που είναι το ποσοστό σωστών απαντήσεων που δόθηκαν από τους μαθητές που εργάστηκαν χωρίς λογισμικό. Δηλαδή, κανένας από τους μαθητές που εργάστηκε παραδοσιακά (με μολύβι και χαρτί) δεν μπόρεσε να επεξεργαστεί σωστά το εν λόγω ερώτημα.

Στο Έργο 2 οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα στο οποίο ζητείται ο προσδιορισμός μιας παραμέτρου. Για να επιλυθεί το πρόβλημα θα πρέπει ο κάθε μαθητής να αξιοποιήσει απλές γεωμετρικές γνώσεις, να έχει τη δυνατότητα να το διατυπώσει σε αλγεβρική μορφή και παράλληλα να μπορεί να εκτελεί με άνεση και ευχέρεια αλγεβρικές πράξεις μεταξύ μεταβλητών. Συγκεντρωτικά, το 34,23% (μεταβλητή SGPr2) έλυσε με σωστό τρόπο το πρόβλημα, σε αντίθεση με το 65,77% που είτε απάντησε λανθασμένα είτε δεν απάντησε καθόλου. Από τους μαθητές που εργάστηκαν με τη χρήση λογισμικού, το 33,93% ανταποκρίθηκε με επιτυχία στο Έργο 2 ενώ από τους μαθητές που δεν είχαν στη διάθεσή τους λογισμικό, το 34,55% απάντησε σωστά. Παρατηρείται προφανώς, ότι η χρήση ή όχι του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, δε διαφοροποιεί ουσιαστικά τα αποτελέσματα στο εν λόγω έργο.

Το Έργο 3 πρόκειται για μια δραστηριότητα κατασκευής αλγεβρικού προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, ζητείται από τους συμμετέχοντες στην έρευνα να κατασκευάσουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που να έχει μοναδική λύση, η οποία δίνεται. Το 65,77% (μεταβλητή PAPr3) του δείγματος απάντησε σωστά στο έργο, σε αντίθεση με το 34,23% που απάντησε λανθασμένα ή καθόλου. Από τους μαθητές που χρησιμοποίησαν λογισμικό, το 80,36% διαχειρίστηκε με σωστό τρόπο το έργο ενώ το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών που εργάστηκαν χωρίς λογισμικό ανέρχεται στο 50,91%. Διαπιστώνεται συνεπώς ότι στο Έργο 3 η χρήση του λογισμικού έπαιξε ιδιαιτέρως θετικό ρόλο στο να διαχειριστούν οι μαθητές με σωστό τρόπο τη διαδικασία τοποθέτησης αλγεβρικού προβλήματος.

Στο Έργο 4 οι συμμετέχοντες στην έρευνα καλούνται να αναδιατυπώσουν ένα δοσμένο γεωμετρικό πρόβλημα, κατασκευάζοντας με τον τρόπο αυτό ένα νέο γεωμετρικό πρόβλημα. Το 63,06% (μεταβλητή PGPr4) απάντησε σωστά στο συγκεκριμένο έργο ενώ το 36,94% οδηγήθηκε σε λανθασμένες απαντήσεις ή δεν απάντησε καθόλου. Αναλυτικότερα, το 69,64% των μαθητών που είχαν στη διάθεσή τους λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας απάντησε σωστά δημιουργώντας ένα καλά τοποθετημένο γεωμετρικό πρόβλημα. Το αντίστοιχο ποσοστό των μαθητών που επεξεργάστηκαν με ορθότητα το συγκεκριμένο έργο δίχως τη χρήση λογισμικού, ανέρχεται στο 56,36%. Παρατηρείται επομένως ότι και στο Έργο 4 η χρήση λογισμικού διευκόλυνε τους μαθητές σε σημαντικό βαθμό προκειμένου να οδηγηθούν σε σωστές απαντήσεις.

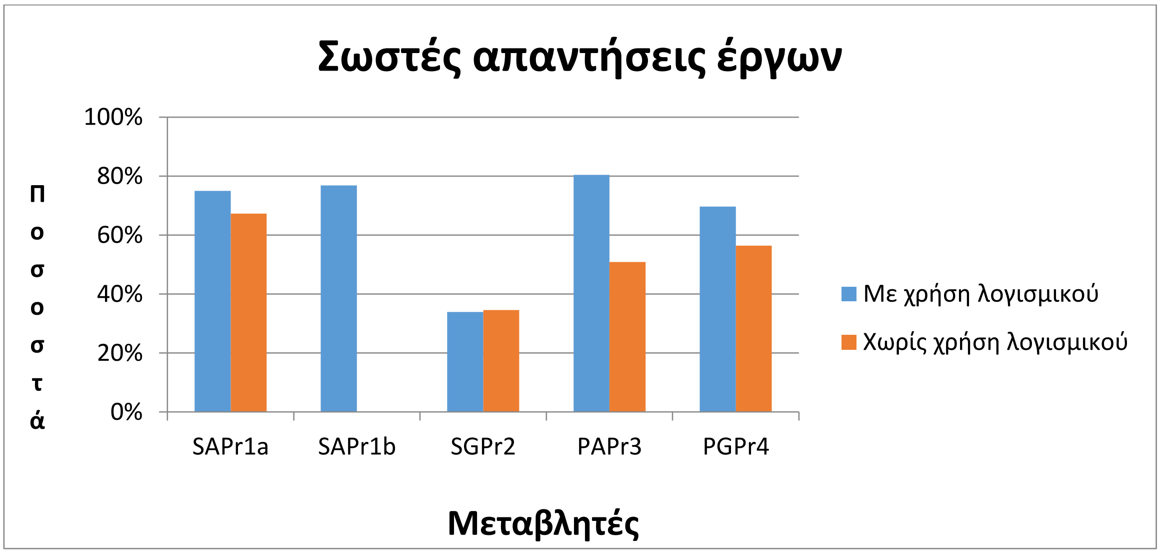
Στον πίνακα 4 περιέχονται οι επιδόσεις των μαθητών στα έργα του δοκιμίου που εργάστηκαν με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας ενώ στον πίνακα 5 περιέχονται οι αντίστοιχες επιδόσεις των μαθητών που εργάστηκαν δίχως τη χρήση λογισμικού. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συγκριτική θεώρηση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζεται στα σχήματα 1 και 2.

Μεταβλητές	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση Δεν απαντήθηκε	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση Δεν απαντήθηκε
SAPr1a	42	14	75,00 %	25,00%
SAPr1b	43	13	76,79 %	23,21 %
SGPr2	19	37	33,93 %	66,07 %
PAPr3	45	11	80,36 %	19,64 %
PGPr4	39	17	69,64 %	30,36 %

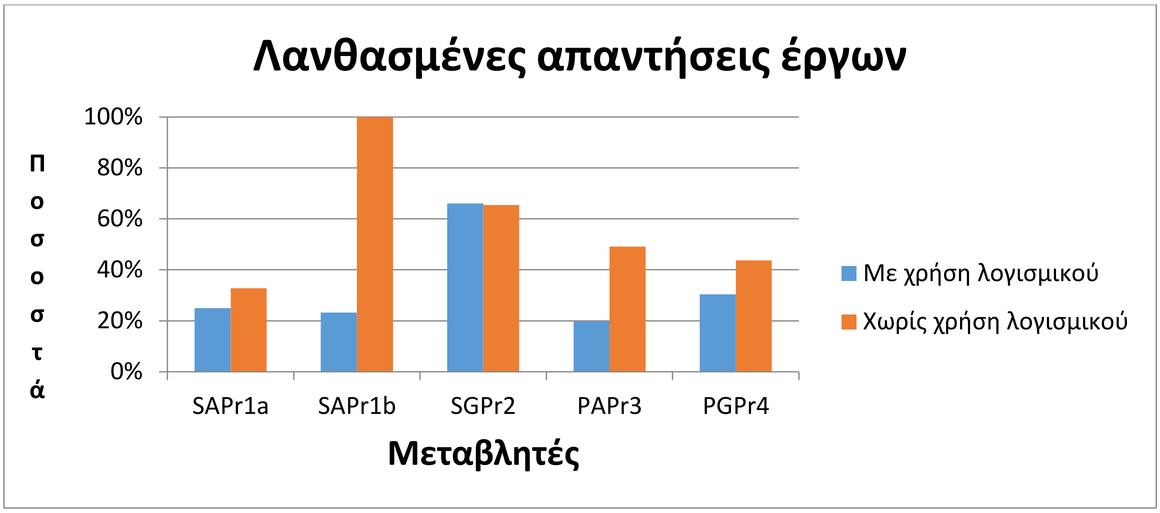
Πίνακας 4: Αποτελέσματα των έργων του δοκιμίου για τους μαθητές που χρησιμοποίησαν λογισμικό.

Μεταβλητές	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση Δεν απαντήθηκε	Σωστή απάντηση	Λάθος απάντηση Δεν απαντήθηκε
SAPr1a	37	18	67,27 %	32,73%
SAPr1b	0	55	0 %	100 %
SGPr2	19	36	34,55 %	65,45 %
PAPr3	28	27	50,91 %	49,09 %
PGPr4	31	24	56,36 %	43,64 %

Πίνακας 5: Αποτελέσματα των έργων του δοκιμίου για τους μαθητές που δεν χρησιμοποίησαν λογισμικό.



Σχήμα 1: Σωστές απαντήσεις έργων με χρήση λογισμικού και χωρίς τη χρήση λογισμικού



Σχήμα 2: Λανθασμένες απαντήσεις έργων με χρήση λογισμικού και χωρίς τη χρήση λογισμικού

5.3 Δενδροδιαγράμματα ομοιότητας του δοκιμίου των έργων

Στα δενδροδιαγράμματα ομοιότητας (σχήμα 3 και σχήμα 4) γίνεται η κατηγοριοποίηση των μεταβλητών σε επίπεδα (classification at level) και φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας μεταξύ των διάφορων έργων του δοκιμίου. Τα έργα ομαδοποιούνται σύμφωνα με τη συμπεριφορά των υποκειμένων σε αυτά. Δηλαδή, ομαδοποιούνται μαζί τα έργα στα οποία τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο κατά την επίλυσή τους.

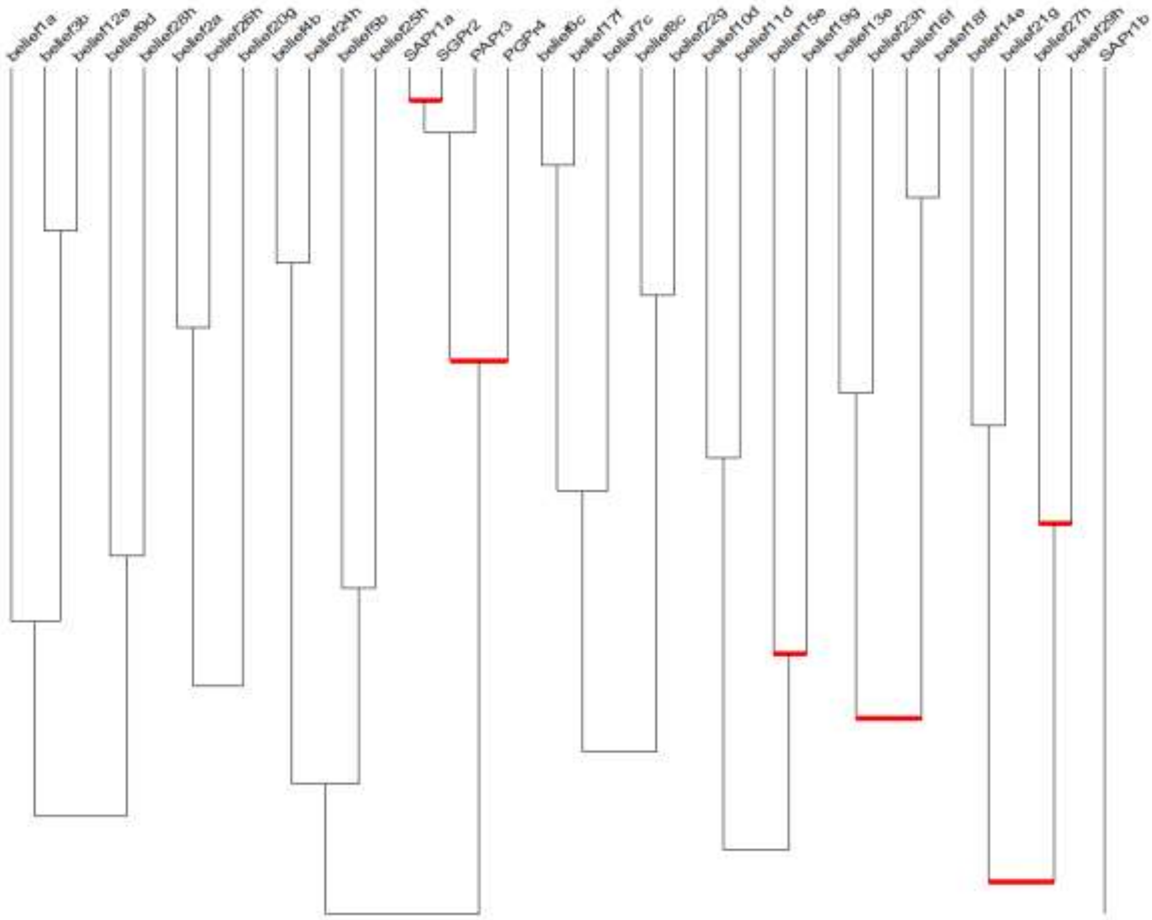
Το πρώτο δενδροδιάγραμμα ομοιότητας (σχήμα 3) αφορά τα έργα στα οποία τα υποκείμενα εργάστηκαν χωρίς τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Σε αυτό το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας παρατηρείται μια ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών SAPr1a και SGPr2 σε επίπεδο σημαντικότητας 0.941166. Συνεπώς, οι μαθητές που κατανόησαν και αντιμετώπισαν επιτυχώς την στοιχειώδη τριγωνομετρική εξίσωση (SAPr1a), κατάφεραν να επεξεργαστούν με επιτυχία και το γεωμετρικό πρόβλημα μετασχηματίζοντάς το με σωστό τρόπο σε αλγεβρική μορφή (SGPr2).

Σε δεύτερο επίπεδο, παρατηρείται ότι οι μαθητές που αντιμετώπισαν με ορθό τρόπο το Έργο1α (SAPr1a) και το Έργο2 (SGPr2), κατασκεύασαν επιτυχώς ένα αλγεβρικό πρόβλημα (PAPr3). Δηλαδή, ((SAPr1a SGPr2) PAPr3) με επίπεδο σημαντικότητας 0.803277. Το αποτέλεσμα αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές που μπορούν να επιλύσουν βασικά αλγεβρικά και γεωμετρικά προβλήματα, έχουν τη δυνατότητα να κατανοήσουν τα δεδομένα που τους δίνονται προκειμένου να τοποθετήσουν με σωστό τρόπο ένα στοιχειώδες αλγεβρικό πρόβλημα.

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει το γεγονός ότι από τη συγκεκριμένη ομάδα μαθητών που εργάστηκε χωρίς λογισμικό και αντιμετώπισε επιτυχώς το Εργο1α (SAPr1a), το Έργο2 (SGPr2) και το Έργο3 (PAPr3), υπάρχει ένας αριθμός μαθητών που αναδιατύπωσε επιτυχώς το γεωμετρικό πρόβλημα που δόθηκε στο Έργο4 (PGPr4). Παρατηρείται ότι (((SAPr1a SGPr2) PAPr3) PGPr4) έχουν επίπεδο σημαντικότητας 0.631471. Συνεπώς υπάρχει ένας σημαντικός αριθμός μαθητών της υποομάδας ((SAPr1a SGPr2) PAPr3) που κατασκεύασαν με σωστό τρόπο το γεωμετρικό πρόβλημα (PGPr4). Το γεγονός αυτό υποδηλώνει ότι η ικανότητα των μαθητών στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων συνδέεται με την ικανότητά τους στην κατασκευή προβλημάτων.

Εξετάζοντας τις πεποιθήσεις και τις απόψεις των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα, παρατηρείται σύνδεση ομοιότητας στις μεταβλητές belief6c και belief17f σε επίπεδο σημαντικότητας 0.767918 καθώς οι περισσότεροι που απάντησαν ότι πρέπει να ελέγχεται αν η λύση ενός προβλήματος ικανοποιεί τις αρχικές του συνθήκες θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι χρήσιμα στην καθημερινότητα του ανθρώπου.

Επίσης παρατηρείται ομοιότητα μεταξύ των μεταβλητών (belief16f belief18f) σε επίπεδο σημαντικότητας 0.725475, αφού ένα σημαντικό μέρος των συμμετεχόντων που δήλωσαν ότι δεν κατανοούν την χρησιμότητα των μαθηματικών στην πραγματική ζωή θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι ένα βαρετό και ανούσιο μάθημα.



Σχήμα 3: Δενδροδιάγραμμα ομοιότητας μεταβλητών δίχως τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας

<u>Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα</u>

Classification at level : 1 : (SAPr1a SGPr2) similarity : 0.941166

Classification at level : 2 : ((SAPr1a SGPr2) PAPr3) similarity : 0.803277

Classification at level : 3 : (belief6c belief17f) similarity : 0.767918

Classification at level : 4 : (belief16f belief18f) similarity : 0.725475

Classification at level : 5 : (belief3b belief12e) similarity : 0.700216

Classification at level : 6 : (belief4b belief24h) similarity : 0.68218

Classification at level : 7 : (belief8c belief22g) similarity : 0.674281

Classification at level : 8 : (belief2a belief26h) similarity : 0.63264

Classification at level : 9 : (((SAPr1a SGPr2) PAPr3) PGPr4) similarity : 0.631471

Classification at level : 10 : (belief13e belief23h) similarity : 0.624236

Classification at level : 11 : (belief14e belief21g) similarity : 0.613931

Classification at level : 12 : (belief10d belief11d) similarity : 0.587644

Classification at level : 13 : ((belief6c belief17f) belief7c) similarity : 0.586729

Classification at level : 14 : (belief27h belief29h) similarity : 0.582455

Classification at level : 15 : (belief9d belief28h) similarity : 0.530411

Classification at level : 16 : (belief5b belief25h) similarity : 0.517452

Classification at level : 17 : (belief1a (belief3b belief12e)) similarity : 0.480878

Classification at level : 18 : (belief15e belief19g) similarity : 0.466518

Classification at level : 19 : ((belief2a belief26h) belief20g) similarity : 0.356848

Classification at level : 20 : ((belief13e belief23h) (belief16f belief18f)) similarity : 0.218309

Classification at level : 21 : (((belief6c belief17f) belief7c) (belief8c belief22g)) similarity : 0.189672

Classification at level : 22 : ((belief4b belief24h) (belief5b belief25h)) similarity : 0.186812

Classification at level : 23 : ((belief1a (belief3b belief12e)) (belief9d belief28h)) similarity : 0.10949

Classification at level : 24 : ((belief10d belief11d) (belief15e belief19g)) similarity : 0.0684343

Classification at level : 25 : ((belief14e belief21g) (belief27h belief29h)) similarity : 0.0436528

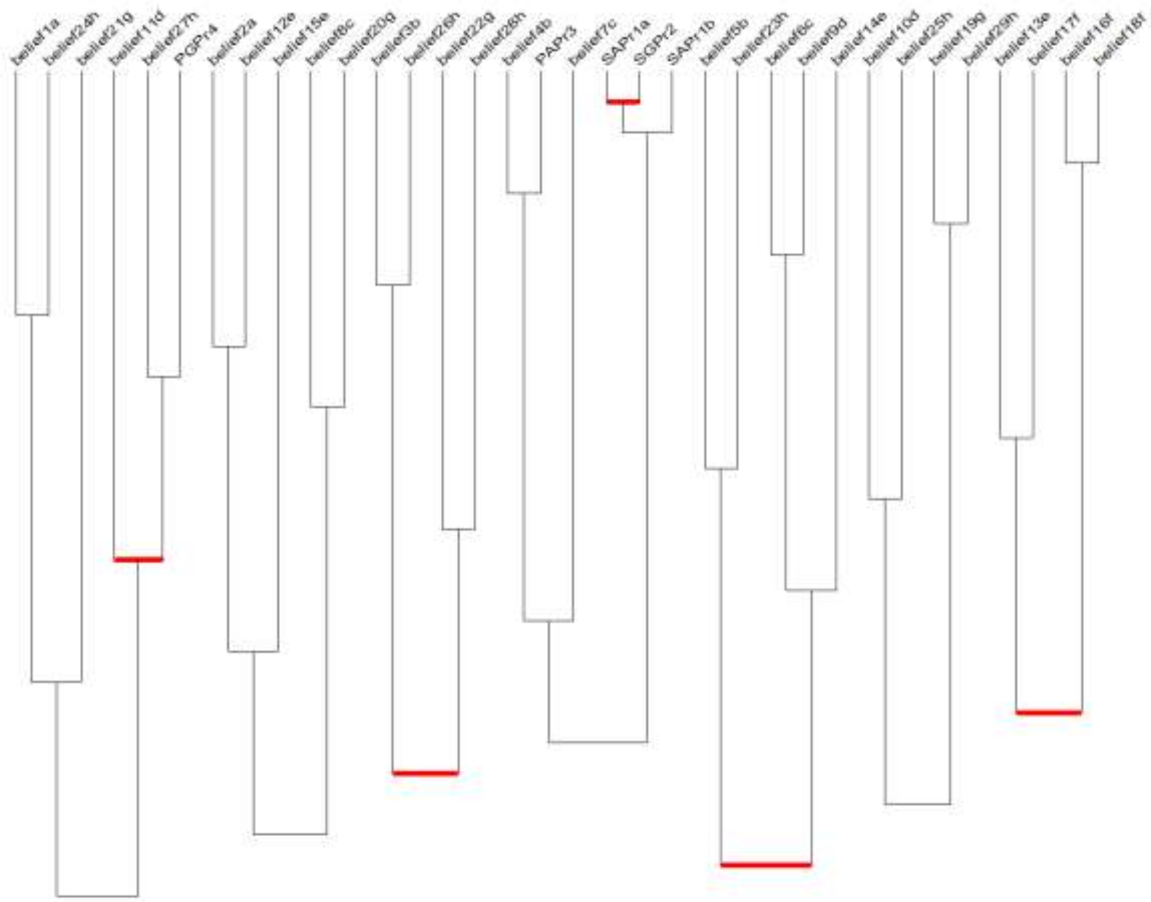
Classification at level : 26 : (((belief4b belief24h) (belief5b belief25h)) (((SAPr1a SGPr2) PAPr3) PGPr4)) similarity : 0.0181247

Το δεύτερο δενδροδιάγραμμα ομοιότητας (σχήμα 4) αναφέρεται στα έργα όπου οι συμμετέχοντες στην έρευνα εργάστηκαν με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Σε αυτό το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας παρατηρείται και πάλι μια ισχυρή συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών SAPr1a και SGPr2 σε επίπεδο σημαντικότητας 0.946498. Όπως και στην περίπτωση που οι μαθητές εργάστηκαν δίχως τη χρήση λογισμικού, έτσι και στο μέρος του δείγματος που τα υποκείμενα είχαν στη διάθεσή τους λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, παρατηρείται ότι η πλειοψηφία όσων αντιμετώπισαν σωστά την στοιχειώδη τριγωνομετρική εξίσωση (SAPr1a), κατάφερε να επιλύσει και το γεωμετρικό πρόβλημα (SGPr2).

Σε δεύτερο επίπεδο, παρατηρείται ότι οι μαθητές που αντιμετώπισαν με ορθό τρόπο το Εργο1α (SAPr1a) και το Έργο2 (SGPr2), κατάφεραν να επιλύσουν με επιτυχία το έργο Εργο1β (SAPr1b). Δηλαδή, ((SAPr1a SGPr2) SAPr1b) με επίπεδο σημαντικότητας 0.875906. Στο σημείο αυτό αξίζει να τονισθεί η μεγάλη διαφοροποίηση που παρατηρείται στην αντιμετώπιση των συγκεκριμένων έργων από τα υποκείμενα που εργάστηκαν με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, συγκριτικά με τα υποκείμενα που δεν είχαν στη διάθεσή τους λογισμικό. Η αξιοποίηση της τεχνολογίας βοήθησε σημαντικά τους μαθητές να επιλύσουν με επιτυχία το Εργο1β (SAPr1b).

Σε ότι αφορά τις απόψεις των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα και εργάστηκαν με την χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, παρατηρείται και πάλι σημαντική σύνδεση ομοιότητας μεταξύ των μεταβλητών (belief16f belief18f) σε επίπεδο σημαντικότητας 0.834761.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση μεταξύ των μεταβλητών (belief4b PAPr3) με επίπεδο σημαντικότητας 0.781669 καθώς οι περισσότεροι που δήλωσαν ότι η επίλυση ενός προβλήματος δε στηρίζεται στην εφαρμογή ενός κανόνα ή ενός τύπου κατάφεραν να κατασκευάσουν με επιτυχία το αλγεβρικό πρόβλημα στο Έργο3 (PAPr3).



Σχήμα 4: Δενδροδιάγραμμα ομοιότητας μεταβλητών με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας

<u>Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα</u>

Classification at level : 1 : (SAPr1a SGPr2) similarity : 0.946498

Classification at level : 2 : ((SAPr1a SGPr2) SAPr1b) similarity : 0.875906

Classification at level : 3 : (belief16f belief18f) similarity : 0.834761

Classification at level : 4 : (belief4b PAPr3) similarity : 0.781669

Classification at level : 5 : (belief19g belief29h) similarity : 0.762547

Classification at level : 6 : (belief6c belief9d) similarity : 0.733431

Classification at level : 7 : (belief3b belief26h) similarity : 0.727811

Classification at level : 8 : (belief1a belief24h) similarity : 0.710243

Classification at level : 9 : (belief2a belief12e) similarity : 0.707829

Classification at level : 10 : (belief27h PGPr4) similarity : 0.701606

Classification at level : 11 : (belief8c belief20g) similarity : 0.642848

Classification at level : 12 : (belief13e belief17f) similarity : 0.62572

Classification at level : 13 : (belief5b belief23h) similarity : 0.617196

Classification at level : 14 : (belief10d belief25h) similarity : 0.561332

Classification at level : 15 : (belief22g belief28h) similarity : 0.503254

Classification at level : 16 : (belief11d (belief27h PGPr4)) similarity : 0.490484

Classification at level : 17 : ((belief6c belief9d) belief14e) similarity : 0.481094

Classification at level : 18 : ((belief4b PAPr3) belief7c) similarity : 0.479345

Classification at level : 19 : ((belief2a belief12e) belief15e) similarity : 0.382107

Classification at level : 20 : ((belief1a belief24h) belief21g) similarity : 0.354552

Classification at level : 21 : ((belief13e belief17f) (belief16f belief18f)) similarity : 0.264725

Classification at level : 22 : (((belief4b PAPr3) belief7c) ((SAPr1a SGPr2) SAPr1b)) similarity : 0.233046

Classification at level : 23 : ((belief3b belief26h) (belief22g belief28h)) similarity : 0.196523

Classification at level : 24 : ((belief10d belief25h) (belief19g belief29h)) similarity : 0.147117

Classification at level : 25 : (((belief2a belief12e) belief15e) (belief8c belief20g)) similarity : 0.10811

Classification at level : 26 : ((belief5b belief23h) ((belief6c belief9d) belief14e)) similarity : 0.106594

Classification at level : 27 : (((belief1a belief24h) belief21g) (belief11d (belief27h PGPr4))) similarity : 0.0175857

5.4 Συσχέτιση μεταβλητών

Η μέτρηση της συσχέτισης που μπορεί να έχουν δύο μεταβλητές μπορεί να γίνει με τον προσδιορισμό του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r (Pearson). Ο συγκεκριμένος συντελεστής παίρνει τιμές στο διάστημα [−1, 1]. Το πρόσημο του r δεν υποδηλώνει τον βαθμό συσχέτισης των μεταβλητών παρά μόνο το είδος της, δηλαδή αν είναι θετική ή αρνητική.

Ο βαθμός συσχέτισης δύο μεταβλητών ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει ο συντελεστής r είναι:

- τέλεια γραμμική συσχέτιση, αν $r = \pm 1$
- πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση, αν $-1 < r \leq -0{,}8$ ή $0{,}8 \leq r < 1$
- ισχυρή γραμμική συσχέτιση, αν $-0{,}8 < r \leq -0{,}7$ ή $0{,}7 \leq r < 0{,}8$
- μέση γραμμική συσχέτιση, αν $-0{,}7 < r \leq -0{,}5$ ή $0{,}5 \leq r < 0{,}7$
- ασθενής γραμμική συσχέτιση, αν $-0{,}5 < r \leq -0{,}3$ ή $0{,}3 \leq r < 0{,}5$
- δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση, αν $-0{,}3 < r \leq 0{,}3$

Στον πίνακα 6 παρουσιάζεται η τιμή του συντελεστή γραμμικής συσχέτισης r για κάθε περίπτωση συνδυασμού των μεταβλητών, για το μέρος εκείνο του δείγματος που εργάστηκε δίχως τη χρήση λογισμικού, ενώ στον πίνακα 5 παρουσιάζονται οι αντίστοιχες τιμές για το μέρος του δείγματος που εργάστηκε με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.a

	SAPr1a	SAPr1b	SGPr2	PAPr3	PGPr4
SAPr1a	1				
SAPr1b	0	1			
SGPr2	0,425223	0	1		
PAPr3	0,477751	0	0,483939	1	
PGPr4	0,167633	0	0,407923	0,309343	1

Πίνακας 6: Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r για το δείγμα που εργάστηκε δίχως λογισμικό

	SAPr1a	SAPr1b	SGPr2	PAPr3	PGPr4
SAPr1a	1				
SAPr1b	0,659321	1			
SGPr2	0,413728	0,394016	1		
PAPr3	0,12975	0,153984	0,259365	1	
PGPr4	0,156957	-0,08706	0,227037	-0,13092	1

Πίνακας 7: Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r για το δείγμα που εργάστηκε με λογισμικό

Από τα αποτελέσματα που περιέχονται στον πίνακα 6, διαπιστώνουμε πως για τους μαθητές που εργάστηκαν δίχως τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας, παρατηρείται ασθενής γραμμική συσχέτιση μεταξύ των περισσοτέρων μεταβλητών, εξαιρώντας βέβαια τη μεταβλητή SAPr1b για την οποία δεν υπήρξε καμία σωστή απάντηση από τους συμμετέχοντες στην έρευνα.

Αντιστοίχως από τα αποτελέσματα του πίνακα 7 παρατηρούμε πως για τους μαθητές που εργάστηκαν με τη χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας υπάρχει μέση συσχέτιση για τις μεταβλητές SAPr1a και SAPr1b (που αφορούν την επίλυση αλγεβρικών προβλημάτων), ασθενής συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών SAPr1a και SGPr2 καθώς και μεταξύ των μεταβλητών SAPr1b και SGPr2 (που αφορούν την επίλυση αλγεβρικού προβλήματος και την επίλυση γεωμετρικού προβλήματος), ενώ στα ζεύγη των υπολοίπων μεταβλητών δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση.

Το χαμηλό εύρος τιμών που λαμβάνει ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r στις περισσότερες περιπτώσεις, είναι πολύ πιθανόν να οφείλεται είτε στο βαθμό υπευθυνότητας με τον οποίο αντιμετώπισαν οι συμμετέχοντες στην έρευνα την επεξεργασία των έργων του δοκιμίου είτε στον τρόπο επιλογής του δείγματος, το οποίο (όπως έχει ήδη αναφερθεί) επιλέχθηκε κάτω από τις ιδιάζουσες και δύσκολες συνθήκες που δημιούργησε η πανδημία του Covid19.

6 Συμπεράσματα

6.1 Συμπεράσματα του ερωτηματολογίου της έρευνας

Σύμφωνα με τις απαντήσεις που έδωσαν στο ερωτηματολόγιο, τα άτομα που αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας, καθίσταται σαφές πως η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών επιθυμεί την αξιοποίηση και χρήση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία των μαθηματικών διότι θεωρεί ότι αφενός γίνεται πιο ευχάριστη η ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά και αφετέρου τους παρέχεται ουσιαστική βοήθεια, τόσο για την απόκτηση και αφομοίωση των νέων γνώσεων όσο και για την ενασχόλησή τους με δραστηριότητες επίλυσης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Επίσης, το μεγαλύτερο μέρος του δείγματος έδειξε πως κατανοεί τον ιδιαιτέρως σημαντικό ρόλο που έχει η αφομοίωση και κατανόηση των διδασκομένων εννοιών στα μαθηματικά, τονίζοντας τη σημασία που πρέπει να αποδίδεται στην τεκμηρίωση και επεξήγηση του κάθε βήματος κατά την διαδικασία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος.

Συνδυάζοντας όλα όσα έχουν προαναφερθεί, μπορεί κανείς να συμπεράνει πως οι μαθητές υποστηρίζουν ότι η αξιοποίηση κατάλληλων τεχνολογικών εργαλείων συμβάλλει σημαντικά τόσο στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών όσο και στην επίλυση και τοποθέτηση προβλημάτων.

Παράλληλα, οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα, αποδέχονται ότι μέσω της συνεχούς προσπάθειας, της μελέτης και της εξάσκησης μπορεί ένα άτομο να αντιληφθεί τα μαθηματικά καλύτερα και να βελτιώσει τις επιδόσεις του σε αυτά. Το οξύμωρο βέβαια στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι η πλειοψηφία των ίδιων μαθητών, υποστηρίζει ταυτόχρονα πως δεν αφιερώνει αρκετό χρόνο για την επίλυση προβλημάτων. Οι αντιφατικές αυτές θέσεις δείχνουν ότι ενώ είναι ξεκάθαρο στο μυαλό όσων συμμετέχουν στην έρευνα πως μόνο μέσα από τη συνεχή δουλειά και την εξάσκηση μπορούν να κατανοήσουν τα μαθηματικά και να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους, εντούτοις υπάρχει έλλειψη διάθεσης (ίσως και κινήτρων) για την ενασχόληση τους με προβλήματα ή έννοιες που απαιτούν επισταμένη μελέτη και χρόνο για να αντιμετωπιστούν ή να αφομοιωθούν αντίστοιχα. Οι αιτίες των συγκεκριμένων αλληλοσυγκρουόμενων θέσεων ίσως είναι βαθύτερες και θα είχε ενδιαφέρον να αναζητηθούν.

Γενικά, αν και οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν τη χρησιμότητα και το ρόλο των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή του ανθρώπου, εντούτοις υπάρχει μια μεγάλη μερίδα που θεωρεί ότι τα μαθηματικά (ως μάθημα) είναι βαρετά και ανούσια. Επιπλέον, θεωρούν ότι κεντρική θέση στα μαθηματικά κατέχει η επίλυση προβλημάτων ενώ η κατασκευή τους (αν και τη λογίζουν ως μια ενδιαφέρουσα και δημιουργική διαδικασία) έχει δευτερεύοντα ρόλο. Μέσα σε αυτά τα πλαίσια, η πλειοψηφία των συμμετεχόντων στην έρευνα αντιλαμβάνεται τη σημαντική θέση που κατέχουν στο χώρο των μαθηματικών τα λεκτικά προβλήματα και υποστηρίζει πως για τη λύση κάθε προβλήματος υπάρχει πάντοτε μια συγκεκριμένη σειρά ενεργειών και βημάτων που πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να επιλυθεί επιτυχώς το πρόβλημα.

6.2 Αποτελέσματα των έργων του δοκιμίου

Παρατηρώντας προσεκτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τα έργα του δοκιμίου της έρευνας και συγκρίνοντας το μέρος του δείγματος που εργάστηκε έχοντας στη διάθεσή του λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, με το μέρος του δείγματος που εργάστηκε παραδοσιακά, δηλαδή με μολύβι και χαρτί (σχήμα 1 και σχήμα 2), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η χρήση του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας συνέβαλε θετικά στην επιτυχή ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων επίλυσης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων.

Τα μαθηματικά πλέον αποκτούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς μέσω των λογισμικών επιτυγχάνεται η οπτικοποίησή τους. Οι μαθητές αξιοποιώντας τις μαθηματικές τους γνώσεις, έχουν τη δυνατότητα μέσα από πειραματισμούς, δοκιμές, εικασίες ή γενικεύσεις, να επιλύουν ή να τοποθετηθούν προβλήματα με μεγαλύτερη άνεση και ευχέρεια. Επαληθεύεται συνεπώς η αρχική υπόθεση ότι η αξιοποίηση των δυνατοτήτων που έχουν τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, έχει θετική επίδραση στην επίλυση και τοποθέτηση μαθηματικών προβλημάτων ενώ παράλληλα επιβεβαιώνεται το θεωρητικό μέρος της εργασίας που στηρίχθηκε σε βιβλιογραφικά τεκμήρια.

Μέσα από τη μελέτη των δενδροδιαγραμμάτων ομοιότητας (σχήμα 3 και σχήμα 4) δεν παρατηρείται κάποια σαφής και αξιοσημείωτη συσχέτιση μεταξύ της ικανότητας επίλυσης και κατασκευής μαθηματικών προβλημάτων. Το γεγονός αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στις ιδιαίτερες συνθήκες που δημιούργησε σε όλα τα σχολεία της χώρας η πανδημία του Covid 19 και είχε επιπτώσεις στο δείγμα, καθώς απουσίαζαν από τις σχολικές αίθουσες πολλοί μαθητές που υπό φυσιολογικές συνθήκες θα συμμετείχαν στην έρευνα. Επιπλέον τα υγειονομικά πρωτόκολλα που έπρεπε να τηρηθούν με σχολαστικότητα, επηρέασε την επιλογή του δείγματος καθώς ήταν δύσκολο να υπάρξει επέκτασή του σε περισσότερα σχολεία και να γίνει περισσότερο αντιπροσωπευτικό του μαθητικού πληθυσμού.

6.3 Προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Στο ερευνητικό μέρος της διπλωματικής εργασίας, διερευνήθηκε κυρίως η επίδραση της χρήσης των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας τόσο στην επίλυση όσο και στην κατασκευή μαθηματικών προβλημάτων. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η χρήση των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας αποδείχθηκε πως βοηθάει σημαντικά τους μαθητές στο να αντιμετωπίσουν με επιτυχία δραστηριότητες επίλυσης και τοποθέτησης μαθηματικών προβλημάτων. Η οπτικοποίηση που παρέχεται στα προβλήματα καθώς και η δυνατότητα δυναμικού χειρισμού πολλαπλών αναπαραστάσεων, δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να αξιοποιήσουν με τον καλύτερο τρόπο τις γνώσεις τους και να οδηγηθούν με επιτυχία στην επίλυση ή την κατασκευή ενός μαθηματικού προβλήματος.

Επομένως, η έρευνα επιβεβαιώνει τη χρησιμότητα της ένταξης των νέων τεχνολογιών στο χώρο της διδασκαλίας των μαθηματικών και ιδιαιτέρως στην ενασχόληση των μαθητών με δύο από τις σημαντικότερες μαθηματικές δραστηριότητες, την επίλυση και κατασκευή προβλημάτων.

Σε μελλοντικές έρευνες θα ήταν ιδιαιτέρως ενδιαφέρον να γίνει περεταίρω έρευνα και μελέτη για θέματα όπως:

- ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να ενταχθούν οι νέες τεχνολογίες και ειδικότερα τα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας, στην διδασκαλία των μαθηματικών, ίσως και στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης

- η εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση νέων τεχνολογικών εργαλείων στα πλαίσια του σχολικού προγράμματος, έτσι ώστε αξιοποιώντας τα δυνατότητές τους, να κατακτούν και να κατανοούν τη μαθηματική γνώση με τρόπο ελκυστικό, σύγχρονο και ιδιαιτέρως αποδοτικό.

Βιβλιογραφία

Abu Elwan, Reda. (2016). MATHEMATICS PROBLEM POSING SKILLS IN SUPPORTING PROBLEM SOLVING SKILLS OF PROSPECTIVE TEACHERS.

Abu-Elwan, R. (1999). The development of mathematical problem posing skills for prospective middle school teachers. In A. Rogerson (Ed.), Proceedings of the International Conference on Mathematical Education into the 21st century: Social Challenges, Issues and Approaches, (Vol. 2, pp. 1–8), Cairo, Egypt

Akay, H. (2006). The examination of the effect of mathematics instruction with problem posing approach on students' academic achievement, problem solving ability and creativity. (Doctoral dissertation). Gazi University, Institute of Educational Sciences, Ankara.

Akben, N. (2020), Effects of the Problem-Posing Approach on Students' Problem Solving Skills and Metacognitive Awareness in Science Education. *Res Sci Educ* **50,** 1143–1165

Akinmola, E.A. (2014), "Developing Mathematical Problem Solving Ability: A Panacea for A Sustainable Development in The 21th Century". International Journal of Education and Research.2(2): 1-8

Arslan, C., & Altun,M. (2007). Learning to solve non-routine problems. Elementary Education Online, 6(1), 50–61.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(3), 245–274.

Australian Education Council. (1991). A national statement on mathematics for Australian schools: A jointproject of the States, Territories and the Commonwealth of Australia initiated by the Australian Education Council. . Curriculum Corporation.

Avgerinos, E., & Gridos, P. (2019). Mathematical creativity in school mathematics: definitions, ways to elicit and empirical insights from geometry. Proceedings of the congress Creativity 2019: 1st World Congress of the Brazilian Academy of Philosophy in Honor of Newton da Costa 90th Birthday. Rio de Janeiro, Brazil.

Avgerinos, E., Gridos, P., Mamona-Downs, J., & Vlachou, R. (2019). On exploring mathematical creativity through cognitive and perceptual approach in geometry. Proceedings of the 12th annual International Conference of Education, Research and Innovation. Seville, Spain.

Aviram, A. (2001). From "computers in the classroom" to mindful radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture. Journal of Educational Change, 1, 331–352.

Baki, A. (2001). Bilişim Teknolojisi Işığı Altında Matematik Eğitiminin Değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi,*149, 26-31.

Barak, M., & Rafaeli, S. (2004). On-line question-posing and peer-assessment as means for web-based knowledge sharing in learning. International Journal of Human-Computer Studies, 61, 84–103.

Baxter, J. A. (2005). Some reflections on problem posing: a conversation with Marion. Teaching Children Mathematics, 12, 122–128.

Baykul, Y. (2004). "Teaching mathematics in primary schools, for 6.-8th grades (2nd Ed.)." Pegem A: Ankara.

Bland, J. M., & Altman, D. G. (1997). Statistics notes: Cronbach's alpha. *BMJ: British Medical Journal*, *314*(7080), 572.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to the other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(2), 125–141.

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. New York, NY: Springer.

Brookes, B. (1976). Philosophy and action in education: When is a problem? ATM Supplement, 19, 11-13

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des Mathematiques 1970–1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, S., & Walter, M. (1990). “*The art of problem posing* (2nd ed.)”. Philadelphia: Franklin Institute Press.

Brown. S.I. & Walter, M.I.(1983): The Art of Problem Posing, Hilldate,NJ.: Lawrence Erlbaum Assoc.

Brown, S., & Walter, M. (1993). *Problem posing: Reflections and applications*. Hillsdale, NJ: Erlbaum

Brueckner, L. (1932). Improving pupils’ ability to solve problems. NEA Journal, 21: 175-176

Buchanan, N. K. (1987). Factors contributing to mathematical problem-solving performance: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 399-415.

Burton, D. M., (2007) “The History of Mathematics, an Introduction", McGraw Hill

Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, *2*, 309---340.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). “Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing.” *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 401–421.

Cai, J., & Hwang, S. (2003). A perspective for examining the link between problem solving and problem posing. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th PME Conference*. (Vol. 3, pp. 103-110). Honolulu, Hawaii: PME.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. International Journal of Educational Research, 102, 101420

Cai, J., & Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and U.S. elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(8), 1521–1540.

Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing:

Conceptualization, advances, and future directions for research. Educational Studies in Mathematics. 105, 287-301.

Cai, J., & Nie, B. (2007). Problem solving in Chinese mathematics education: Research and practice. ZDM – International Journal on Mathematics Education, 39, 459–475.

Cai, J., Chen, T., Li, X., Xu, R., Zhang, S., Hu, Y., Zhang, L., & Song, N. (2020). Exploring the impact of a problem-posing workshop on elementary school mathematics teachers' problem posing and lesson design. *International Journal of Educational Research, 102*, 101404.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem posing research in mathematics: Some answered and unanswered questions. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), Mathematical problem posing: From research to effective practice (pp. 3–34). New York, NY: Springer.

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., & Hiebert, J. (2017). Clarifying the impact of educational research on students' learning. Journal for Research inMathematics Education, 48(2), 118–123.

Cai, Jinfa & Brook, Michael (2006). Looking Back in Problem Solving. Mathematics Teaching Incorporating Micromath. 196.

Campistrous, L. & Rizo, C. (2000). *Technology, problem–solving and didactic of mathematics* (in Spanish). Havana: MINED.

Çanakçı, O. (2008). "Matematik Problemi çözme Tutum ölçeğinin Geliştirilmesi Ve Değerlendirilmesi" Unpublished doctoral dissertation, Marmara University, Institute of Educational Sciences, Istanbul.

Cankoy, O., & Darbaz, S. (2010). Effect of a problem posing-based problem-solving instruction on understanding problems. Hacettepe Universitesi Journal of Education, 38, 11–24.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., Jacobs, V. R., Fennema, E. & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multi-digit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3–20.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher, 76* (9), 652–659.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2016). *Youngsters solving mathematical problems with technology*. New York, NY: Springer.

Carrillo, J., & Cruz, J. (2016). Problem-posing and questioning: Two tools to help solve problems. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (pp. 23–36). New York: Springer.

Chapman, O. (2003). Teachers' Conceptions of Mathematical Word Problems: A Basis for Professional Development. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*.

Chapman, O. (2011). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. In B. Ubuz (Eds.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 209-216). Ankara, Turkey: PME.

Chen, T., & Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. International Journal of Educational Research, 102, 101420.

Chinese Ministry of Education. (2001a). *Curriculum standards for school mathematics of nine-year compulsory education (Trial version)*. . Beijing Normal University Press.

Chinese Ministry of Education. (2001b). *Guidelines for curriculum reform of elementary education (Trial version)*. Beijing Normal University Press.

Chinese Ministry of Education. (2003). *Curriculum standards of high school mathematics (Trial version)*. People's Education Press.

Chinese Ministry of Education. (2011). *Mathematics curriculum standard of compulsory education (2011 version)*. Beijing Normal University Press.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics*

Enthusiast, *2*(2), 125-143.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for designing mobile learning environments. In D. Churchill, J. Lu, T. K. F. Chiu, & B. Fox (Eds.), *Mobile learning design, lectures notes in educational technologies* (pp. 22–52). New York: Springer.

Cifarelli, V. V., & Sevim, V. (2015). Problem posing as reformulation and sense-making within problem solving. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), Mathematical problem posing: From research to effective practice (pp. 177–194). New York, NY: Springer.

Cohen, S.A., Stover, G. (1981): Effects of teaching sixth-grade students to modify format variables of math word problems. In: Reading Research Quarterly 16(2), 175-200.

Collins, A., Brown, J. S., & Newman, S. E. (1989). Cognitive apprenticeship. Teaching the crafts of reading, writing, and mathematics. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction* (pp. 453–493). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. Educational Studies in Mathematics, 52, 243–270.

Cronbach, L. J., (1948), "The Meaning of Problems." Arithmetic, Supplementary Educational Monographs, No. 66. Chicago: University of Chicago Press, 1948. p. 32-43

Cruz Ramírez, Miguel. (2006). A Mathematical Problem–Formulating Strategy.

Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. In: Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., Spagnolo, F. (eds) Statistical Implicative Analysis. Studies in Computational Intelligence, vol 127. Springer, Berlin, Heidelberg.

Davis, R. B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematical Behavior. 8, 143-160.*

De Villiers, M. (2006). Some pitfalls of dynamic geometry software. *Learning and Teaching Mathematics*, *4*, 46-52.

Dendane, A., & Math, U. G. R. U. (2009, April). Skills needed for mathematical problem solving. In *tenth annual research conference, United Arab Emirates*

University, Al-Ain, United Arab Emirates. Abstract retrieved from http://www. analyzemath. com/math_problems/paper_1. html.

Dewey, J. (1933). How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process. Boston: Heath.

Dick, T. P., & Hollebrands, K. F. (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Dickey, M. D. (2007). Game design and learning: a conjectural analysis of how massively multiple online role-playing games (MMORPGs) foster intrinsic motivation.

Educational Technology Research and Development, 55(3), 253–273.

Dillon, J. T. (1988): Levels of problem finding vs problem solving. In: Questioning Exchange 2(2), 105 – 115

Dunker, K., (1945), "On Problem-Solving." Psychological Monographs 58: 1-111

Edwards, B.P. (2008). *"The Interplay among Prospective Secondary Mathematics Teachers' Affect, Metacognition, and Mathematical Cognition in a Problem-Solving Context*" Middle-Secondary Education and Instructional Technology Dissertations. Paper 63.

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). The evolution of physics from early concepts to relativity and quanta. New York, NY: Simon & Schuster.

Ellerton, N. F. (1986). Children’s made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. Educational Studies in Mathematics, 17(3), 261–271.

Ellerton, N.F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educ Stud Math* **83,** 87–101

English, L. D. (1997a). Promoting a problem-posing classroom. Teaching Children Mathematics, 4, 172–179.

English, L. D. (1997b). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities. Educational Studies in Mathematics, 34, 183–217.

English, L. D. (1998). Children’s problem posing within formal and informal contexts. Journal for Research in Mathematics Education, 29, 83–106.

English, L. D. (2003). “*Problem posing in the elementary curriculum*. In F. Lester, & R. Charles (Eds.). *Teaching mathematics through problem solving*.” Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics

Espinoza, J., Lupiañez, J. L., & Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(2).

Fellenz, M. R. (2004). Using assessment to support higher level learning: the multiple choice item development assignment. Assessment & Education in Higher Education, 29(6), 703–719.

Felmer, P., Kilpatrick, J., & Pehkonen, E. (Eds.). (2016). Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives. New York: Springer

Frensch, P. A., & Funke, J. (1995). Definitions, traditions, and a general framework for understanding complex problem solving. In: P. A. Frensch, & J. Funke (Eds.), Complex problem solving. The European perspective (pp. 3–25). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1973), Mathematics as an educational task. Dordrecht: Reidel

Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(3), 163–176.

Getzels, J. W., & Jackson, P. W. (1962). *Creativity pnd intelligence: Exploration with gifted students.* New York: John Wiley.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 12,* 306–355.

Gonzales, N., A., (1994). Problem Posing: A neglected component in mathematics courses for prospective elementary and middle school teachers. School Science and Mathematics,8, pp. 78-84.

Gonzales, N. A (1996). Problem formulation: Insights from student generated questions. *School Science and Mathematics,* 96(3), 152-157.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2000). A money problem: A source of insight into problem solving action. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, *80*, 1–21.

Gowers, T., & Nielsen, M., (2009). Massively collaborative mathematics. *Nature*, *461*(7266), 879–881.

Gras, R. (1996). Implicative statistical analysis. In A.Gagatsis (Ed), *Didactics and history of mathematics* (pp.119-122). Thessaloniki: University of Thessaloniki.

Greer, B. (1993). The mathematical modelling perspective on world problems. Journal of Mathematical Behavior, 12, 239–250.

Greer B. (1996). *Failing to model situations: Classroom culture and the interpretation of word problems.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

Guilford, J. P. (1967). *The nature ofhuman intelligence.* New York: McGraw-Hill.

Güven, B., & Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET, 7*(4), 100-107.

Hansson, S.O. (2020). Technology and Mathematics. *Philos. Technol.* **33,** 117–139.

Hashimoto Y. (1987): Classroom practice of problem solving in Japanese elementary schools. In J.P. Backer& T. Miwa (Eds.). Proceedings of the US Japan Seminar on mathematical educational studies in mathematics. 18.

Haylock, D., & Cockburn, A. (2008). Understanding Mathematics for Young Children. London: SAGE Publications.

Haylock, D.W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. Educational Studies in Mathematics, 18: 59-74 Healy, C.C. [1993] Creating miracles: a story of student discovery. Berkeley, CA: Key Curriculum Press

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2009a). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM Mathematics Education, 41*, 399–412.

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2009b). Introduction: The transformative nature of "dynamic" educational technology. *ZDM Mathematics Education, 41*, 397–398.

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics*, *30*(19), 26–31.

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2011). The emergence of mathematical structures. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 369–388.

Heid, M. K., & Blume, G. W. (2008). Algebra and function development. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, 1*, 55-108.

Henderson, K. B. & Pingry, R. E. (1953). Problem solving in mathematics. In H. F. Fehr (Ed.), The learning of mathematics: Its theory and practice (21st Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics) (pp. 228-270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hollebrands, K., Laborde, C. & Straber, R. (2008). Technology and the learning of geometry at the secondary level, M.K. Heid & G.W. Blume(Ed.) (pp.155-207). Research on technology and the teaching and learning of mathematics; Volume1, Information Age Publishing: NC.

Hoosain, E., (2004) "What Are Mathematical Problems?," *Humanistic Mathematics Network Journal*: Iss. 27, Article 12.

Huizenga, J., Admiraal, W., Akkerman, S., & ten Dam, G. (2009). Mobile game-based learning in secondary education: engagement, motivation and learning in a mobile city game. Journal of Computer Assisted Learning, 25(4), 332–344.

Hunt, E. (1968), Computer Simulation: Artificial Intelligence Studies and Their Relevance to Psychology. *Annual Review of Psychology* 19: 135-68.

Jacinto, Helia & Nobre, Sandra & Carreira, Susana & Amado, Nélia. (2018). Different Levels of Sophistication in Solving and Expressing Mathematical Problems with Digital Tools: A Focus on Technology, Creativity and Affect, In Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving (pp.15-41). Research in Mathematics Education. Springer.

Jakobsson, A., (2012). Sociokulturella perspektiv på lärande och utveckling. Lärande som begreppsmässig precisering och koordinering *Pedagogisk Forskning i Sverige, 17*(3–4), 152–170.

Johnson, D., (1944), "A Modern Account of Problem-Solving." Psychological Bulletin 41: 201-29.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 55–85.

Kamii, C. K. (with Housman, L. B.). (1989). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

Kantowski, M. G. (1974). Processes involved in mathematical problem solving. Unpublished doctoral dissertation, The University of Georgia, Athens.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163-180.

Kantowski, M.G. 1980. Some Thoughts on Teaching for Problem-Solving.In: NCTM Yearbook 1980, 195-203. Reston (VA): Council.

Kar, T., Özdemir, E., _Ipek, A. S., & Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skill of prospective elementary mathematics teachers. Innovation and Creativity in Education, 2(2), 1577–1583.

Keil, G. E. (1965). Writing and solving original problems as a means of improving verbal arithmetic problem solving ability. Doctoral dissertation, Indianan University

Kereluik, K., Mishra, P., Fahnoe, C., & Terry, L. (2013). What knowledge is of most worth: Teacher knowledge for 21st century learning. *Journal of Digital Learning in Teacher Education, 29*(4), 127–140.

Kilpatrick, J. (1969). 10: Problem Solving in Mathematics. *Review of Educational Research*, *39*(4), 523-534

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1-15).

Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick,J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A.H. Schoenfeld (Ed.) Cognitive science and mathematics education (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Kilpatrick, Jeremy. (2016). Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry, In Kilpatrick, Jeremy. (2016). Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry.

Klinshtern, M., Koichu, B., & Berman, A. (2015). Problem posing: From research to effective practice. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), What do high school teachers mean by saying "I pose my own problems"? (pp. 449–467). New York, NY: Springer

Kloosterman, P., & Stage, F. K. (1992). Measuring Beliefs About Mathematical Problem Solving. School Science and Mathematics, 92(3), 109–115.

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. International Journal of Educational Research, 102, 101428.

Kontorovich, I. (2020). Problem-posing triggers or where do mathematics competition problems come from?. *Educ Stud Math* **105,** 389–406

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2011). Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they. In *Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (pp. 120-125).

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers* (2nd ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Krutetskii, V.A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: University of Chicago Press

Kumar, D. (2000). Pedagogical dimensions of game playing. ACM Intelligence Magazine, 10(1), 9–10.

Lappan, G & Phillips, E. (1998). Teaching and learning in the Connected Mathematics Project. In L. Leutzinger (Ed.), *Mathematics In the middle* (pp.83---92). Reston, Va.:

National Council of Teachers of Mathematics.

Lavy, I., & Shriki, A. (2009). Small change – big difference. The Montana Mathematics Enthusiast, 6(3), 395–410.

Leikin, R. & Levav-Waynberg, A. (2007). Exploringmathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 349–371.

Leikin, R. (2015). Problem posing for and through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), Problem posing: From research to effective practice (pp. 373–391). Dordrecht: Springer.

Leikin, R. (2018). Openness and constraints associated with creativity-directed activities in mathematics for all students. In N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving: A Focus on Technology, Creativity and Affect (pp. 387–397). Switzerland: Springer

Lenzen, W. (2018). Leibniz and the calculus ratiocinator. In Hansson, S.O. (Ed.) *Technology and Mathematics: Philosophical and Historical Investigations* (pp. 47–78). Berlin: Springer.

Leonard, M. K., Steve, T., & Art, J. (2004). Guiding Children's Learning of Mathematics (10th eds.). USA: Thompson Learning, Inc.

Lesh, R. (1981). Applied mathematical problem solving. Educational Studies in Mathematics, 12: 235-264

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The handbook of research on mathematics education* (pp. 763–804). Charlotte, NC: Information Age Publishing and NCTM.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.) Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 264-343). New York: Academic Press

Lester, F. K. (1980). Research in mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education* (pp. 286-323). Reston, VA: NCTM.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-

1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660–675.

Lester, F. K., & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: the evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In: R. Lesh, & H. Doer (Eds.), Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 501–517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

Lester, Frank & Cai, Jinfa. (2015). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from Thirty Years of Research.

Leung, S. K., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal, 9(1), 5–24, (Australia).

Leung, S. S. (1991). Building connections to the Pythagorean Theorem: An example of teachers' treatment of textbook problems. In: M.K. Heid; G.W. Blume (Eds), Mathematics Education: Making connections (pp. 41 – 47). University Park, PA: Pennsylvania Council for the Teachers of Mathematics

Leung, S.S. (1993a). The relation of mathematical knowledge and creative thinking to the mathematical problem posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content. Unpublished doctoral dissertation, University of Pittsburgh

Leung, S. S. (1993b). Mathematical problem posing: The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K.Shigematsu, & F. Lin (Eds.). Proceedings of the 17th International conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. III (pp. 33-40). Tsukuba, Japan: Author.

Leung, S. S. (1996a). Assessing mathematics textbooks through problem posing: An example of subtraction with re-grouping. Elementary Teacher Journal, 37 (4), 23-28. (In Chinese)

Leung, S. S. (1996b). Problem Posing as Assessments: Reflections and Re-constructions. *The Mathematics Educators*, 1 (2), 159-17l

Leung, S. S. (1997a). On the role of creative thinking in problem posing. *ZDM—The*

International Journal on Mathematics Education, 97(2), 48–52.

Leung, S. S. (1997b). On the Open-ended Nature in Mathematical Problem Posing. *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom. Research Report 176. Helsinki Univ.,(Finland). Dept. of Teacher Education. ISBN-951-45-7591-1 ISSN-0359-4203*, 28.

Lowrie, T. (1999). Posing Problems and Solving Problems. APMC, V. 4, N. 4, pp. 28-31.

Maher, C. A. & Martino, A. M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A five- year case study. *Journal for Research in Mathematics Education 27*, 194–214.

Maier, N. R. F. (1933). "An Aspect of Human Reasoning." British Journal of Psychology 24: 144-55.

Mamona-Downs, J. (1993). On analyzing problem posing. – In: Hirabayashi; N. Nohda; K. Shigematsu; F. L. Lin (Eds.), Proceedings of the seventeenth annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol., (pp.41-48). Tsukuba, Japan.

Martin, U. (2015). Stumbling around in the dark: lessons from everyday mathematics. In Felty, A.P., & Middeldorp, A. (Eds.) *25th International Conference on Automated Deduction, Berlin, Germany, August 1-7, 2015, Proceedings. Lecture Notes in Artificial Intelligence 9195* (pp. 29–51). Cham: Springer.

Martin, U., & Pease, A. (2013). Mathematical practice, crowdsourcing and social machines. In Carette, J., Aspinall, D., Lange, C., Sojka, P., Windsteiger, W. (Eds.) *International Conference on Intelligent Computer Mathematics. Lecture Notes in Artificial Intelligence 7961* (pp. 98–119). Berlin: Springer.

Mason, J. (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. London, UK: RoutledgeFalmer.

Mason, J. (2014). On being stuck on a mathematical problem: What does it mean to have something come-to-mind? (in preparation following ProMath7, Helsinki).

Mason, J. (2016). When Is a Problem…? "When" Is Actually the Problem!, In P.

Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp 255–285). Research in Mathematics Education. Springer.

Mathematical Sciences Education Board (1989). Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education.Washington. D.C.: National Academy Press.

Matsko, V. J., & Thomas, J. (2015). Beyond routine: Fostering creativity in mathematics classrooms. In Mathematical Problem Posing (pp. 125–139). New York: Springer.

Mayer, Richard E. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 123-138). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McGee, M. G. (1976). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences. *Psychological Bulletin*, 86 (5), 889-917.

Mead, G. (1934). *Mind, self, and society: From the standpoint of a social behaviourist*. Chicago: University of Chicago Press.

Merriam-Webster, "Problem." *Merriam-Webster.com Dictionary*, https://www.merriam-webster.com/dictionary/problem. Accessed 13 Nov. 2021.

Mestre, J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. Journal of Applied Developmental Psychology, 23, 9–50.

Michener, E. R. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science, 2*, 361–383.

Ministry of Education (Singapore). (2012). *Primary mathematics teaching and learning Syllabus*.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108* (6), 1017–1054.

Moschkovich, J. (2002). A situated and sociocultural perspective on bilingual mathematics learners. *Mathematical Thinking and Learning, 4*(2–3), 189–212.

Moses, B., Bjork, E., & Goldcnberg, E.P. (1990). Beyond problem solving: problem posing. In T.J. Cooncy & C.R. Hirsch (Eds.) Teaching and learning mathematics in the 1990s (pp. 82-91). Reston, VA: NCTM

Munehiro, Y. (1982). The significance and method of problem posing: Through the application of What-If-not strategy. Tsukuba Journal of Educational Study inMathematics, 1, 57-68.

National Assessment of Educational Progress (1983). *The third national mathematics assessment: Results, trends, and issues* (Report No. 13-MA-01). Denver, CO: Educational Commission of the States.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1978). Position paper on basic mathematical skills. Mathematics Teacher, 71(2), 147-52. (Reprinted from position paper distributed to members January 1977.)

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An agenda for action: Recommendations for school mathematics in the 1980s. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va. Author.

National Council of Teacher of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, DC: National Academy Press

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problems. *For the Learning of Mathematics. I, 41-48.*

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Prentice-Hall.

Newell, A., Shaw, J. C, & Simon, H. A. (1957). Empirical explorations of the Logic

Theory Machine: A case study in heuristics. *Proceedings of the 1957 Western Joint Computer Conference,* February 26-28, 1957, 218-230.

Newell, A., Shaw, J. C., & Simon, H. A. (1958). Elements of a theory of human problem solving. *Psychological Review*, 65, 151-166.

Newell, A., Shaw, J.S., & Simon, H.A. (1962). The processes of creative thinking. In H.E. Gruber (Ed.) Contemporary approaches to creative thinking (pp. 63-1 19). New York: Atherton Press

Nicolaou, A. A., & Philippou, G. N. (2004). Efficacy beliefs, ability in problem posing, and mathematics achievement. In Proceedings of the 3rd International Biennial SELF Research Conference Berlin, Self-concept, motivation and identity: Where to from here? 4–7 July, 2004.

Nobre, S., & Amado, N. (2013). Combining the spreadsheet with paper and pencil: a mixed environment for learning algebraic methods. In E. Faggiano & A. Montone (Eds.), *11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching – Conference Proceedings* (pp. 226–231). Bari, Italy: Universitŭ degli Studi di Bari Aldo Moro.

Nunokawa, K. (2005). Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 325–340.

Ohio Department of Education. (1980). *Becoming a better problem solver 1 & 2*. Columbus: Ohio Department of Education.

Olive, J. (2000). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. *Ensino e Aprendizagem de Geometria. Lisboa: SPCE*, 7.

Papastergiou, M. (2009). Digital Game-Based Learning in high school Computer Science education: impact on educational effectiveness and student motivation. Computers & Education, 52(1), 1–12.

Pehkonen, E. (1986). Über die Bedeutung der Knobelaufgaben. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1986, 227-230. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.

Pehkonen, E. (1992). Using Problem Fields as a Method of Change. The Mathematics

Educator 3 (1), 3-6.

Poincare, J. (1948). Mathematical creation. Scientific American, 179: 54- 57

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Vol. 1. Induction and analogy in mathematics. Vol. 2. Patterns of plausible inference.* Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (vol. 1). New York: Wiley.

Polya, G. (1965). Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (vol. 2). New York: Wiley.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. New York: Wiley.

R. E. Reys, M. M. Lindquist, D. V. Lambdin, N. L. Smith & M. N. Suydam, (2001) “helping children learn mathematics", (6th ed.), John Wiley & Sons, Inc., New York.

Reinmann, G. (2005), Blended Learning in der Lehrerbildung. Grundlagen fur die Konzeption innovativer Lernumgebungen, Lengerich: Pabst Science Publishers

Reitman, W. R. (1965). Cognition and thought. New York: Wiley.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*,162---169.

Reusser, Kurt & Stebler, Rita (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. Learning and Instruction. 7. 309-328.

Santos-Trigo, M. (2007) Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM Mathematics Education* **39,** 523–536

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast, 1–2,* 279–302.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martinez, I., & Aguilar-Magallσn, D. (2016). Digital technologies and a modeling approach to learn mathematics and develop problem solving competencies. In L. Uden et al. (Eds.), *Learning technologies for education in cloud, Communications in computer and information science* (pp. 193–206). New York: Springer.

Santos-Trigo, Manuel & Camacho, Matías & Olvera-Martínez, María Del Carmen. (2018). High School Teachers’ Use of a Dynamic Geometry System to Formulate Conjectures and to Transit from Empirical to Geometric and Algebraic Arguments in Problem-Solving Approaches, In Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving (pp.81-100). Research in Mathematics Education. Springer.

Santos-Trigo, Manuel & Camacho, Matías & Olvera-Martínez, María Del Carmen. (2018). High School Teachers’ Use of a Dynamic Geometry System to Formulate Conjectures and to Transit from Empirical to Geometric and Algebraic Arguments in Problem-Solving Approaches, In Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving (pp.81-100). Research in Mathematics Education. Springer.

Santos-Trigo, Manuel & Moreno-Armella, Luis. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners’ Problem-Solving Experiences. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp 189–207). Research in Mathematics Education. Springer.

Sauter A. (2004), Blended Learning. Effiziente Integration von e-learning und Prasenztraining. Munchen: Luchterhand,

Schoen, H.L., & Charles, R. I., (2003), “Teaching Mathematics Through Problem Solving", NCTM catalog.

Schoenfeld, A. H. (1979a). Can heuristics be taught? In J. Lochhead & J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction* (pp. 315–338). Philadelphia, PA: Franklin Institute.

Schoenfeld, A. H. (1979b). Explicit heuristic training as a variable in problem solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10,* 173–187.

Schoenfeld, A.H. (1981). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. Paper presented at the 1981 AERA Annual Meeting, Los Angeles, Ca.

Schoenfeld, A. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. In F. K. Lester. Jr, & J. Garofalo (Eds.). *Mathematical problem solving: Issues and research* (pp. 27737). Philadelphia. PA: The Franklin Institute Press.

Schoenfeld, A. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: A report, recommendations, and an annotated bibliography*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985a). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H., (1985b). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. In E. A. Silver, Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives (pp. 361-379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1987) Pólya, Problem Solving, and Education, Mathematics Magazine, 60:5, 283-291

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

Schoenfeld, A. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving.

Schoenfeld, A. H., & Herrmann, D. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition, 8, 484-494.

Schroeder, T. L., & Lester, F. K., Jr. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P. R. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics.* (pp. 31–42). National Council of Teachers of Mathematics.

Seo, H. S. (1997). On the Use of What-If-Not Strategy for Posing Problem. *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, *176*, 85.

Shara, Jollanda. (2020). IMPACT OF NEW TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS TEACHING.

Sharigin, I. F. (1991). Otkuda berutsia zadachi? [where do problems come from?] part I, Kvant, 8, 42–48; part II, Kvant (vol. 9, pp. 42–49) (in Russian).

Shiota, N. (1991). A study of the problem-solving process emphasizing on problem generating: as a perspective for problem formulating and problem posing.Joetsu Journal of Mathematics Education, 6, 95-104.

Shriki, A. (2006). The area problem. Mathematical Spectrum, 27–33.

Shriki, A., & Lavy, I. (2004). Exploring mathematical patterns using dynamic geometry software. AMT – the Australian Mathematics Teacher, 60(3), 36–40.

Silver, E. A. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. Journal for Research in Mathematics Education, 10(3), 195-210.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 247–266). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Silver, E. A. (1993). On Mathematical Problem Posing. In: Ichiei Hirabayasi et al. (Eds.), Proceeding of the 17th International Conference for the PME, Vol. I.(pp.66-85). Tsukuba, Japan: Univ. of Tsukuba.

Silver, E. A. (1990). Contributions of research to practice: Applying findings, methods and perspectives. In T.J. Cooney & C. R. Hirsch (Eds.), Teaching and learning mathematics in the 1990s (pp. 1-11). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E.A., (1994), On mathematical problem posing, In: For the learning of mathematics 14(1), 19-28

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 97(3), 75–80.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 521–539.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing.

Teaching Children Mathematics, 12, 129–135.

Silver, E. A., Ghousseini, H., Gosen, D., Charalambous, C.,&Font Strawhun, B. T. (2005).Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. *Journal of Mathematical Behavior*, *24,* 287–301.

Silver, E. A., Kilpatrick, J., & Schlesinger, B. (1990). Thinking through mathematics: Fostering inquiry and communication in mathematics classrooms. New York, NY: The College Entrance examination Board.

Silver, E. A., & Leung, S. S. (1992). Mathematical problem posing and problem solving: An investigation of processes, products, and relationships. Paper presented at the annual meeting of American Education Research Association, 1992, San Francisco.

Silver, E. A., Leung, S. S., & Cai, J. (1995). Generating multiple solutions for a problem: A comparison of the responses of U.S. and Japanese students. *Educational Studies in Mathematics*, *28,* 35–54.

Silver, E. A., & Mamona, J., (1989). Problem posing by middle school mathematics teachers. In C.A. Maher, G.A. Goldin, & R.B. Davis (Eds.), Proceedings of the eleventh annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 263 – 269), New Brunswick: Center for Mathematics, Science, and Computer Education, Rutgers – The State University of New Jersey

Silver, E. A., & Mamona, J. (1990).Stimulating problem posing in mathematics instruction. In G. Blume & M. K. Heid (Eds.), Implementing new curriculum andevaluation standards. University park, PA: Pennsylvania Council of Teachers ofMathematics.

Silver, E.A., & Marshall, S.P. (1989). Mathematical and scientific prob-lem solving: Findings, issues and instructional implications. In B.F. Jones & L. Idol (Eds.) Dimensions of thinking and cognitive instruc-tion (pp. 265-290). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Silver, E.A., & Shapiro, L.J. (1992). Examinations of situation-based reasoning and sense-making in students' interpretations of solutions to a mathematics story problem.

In J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos, & D. Fernandes (Eds.) Mathematical problem solving and new information technologies (pp. 11 3-123). Berlin: Springer-Verlag

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (Eds.). (2015). Mathematical problem posing: From research to effective practice. New York, NY: Springer.

Solórzano, L. S. (2015). Problem posing as a didactic resource in formal mathematics courses to train future secondary school mathematics teachers. *Journal of Technology and Science Education*, *5*(2), 64-74.

Staebler-Wiseman, H. A. (2011). Problem posing as a pedagogical strategy: A teacher's perspective. Ph.D. dissertation, Illinois State University.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving (pp. 1-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Staub, F. C., & Reusser. K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. In C. A. Weaver. III., S. Marines,, & C. Fletcher (Eds.), *Discourse comprehension: Essays in honour of Walter Kintsch* (pp. 2855305) Hillsdale. NJ: Erlbaum.

Steen. L. A. 1988. The Science of Patterns.Science 240:611-616.

Stoyanova, E. (1996): Developing a Framework for Research into student's problems posing in School mathematics.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: a contemporary perspective* (pp. 164-185). Western Australia, Australia: Edith Cowan University.

Swade, D. (2011). Pre-electronic computing. In Jones, C.B., & Lloyd, J.L. (Eds.) *Dependable and Historic Computing. Essays Dedicated to Brian Randell on the Occasion of His 75th Birthday. Lecture Notes in Computer Science*, (Vol. 6875 pp. 58–83). Berlin: Springer.

Swade, D. (2018). Mathematics and mechanical computation. In Hansson, S.O. (Ed.) *Technology and Mathematics: Philosophical and Historical Investigations* (pp. 79–

106). Berlin: Springer.

Tate, Merle W. and Stanier, B. (1964). Errors in Judgment of Good and Poor Problems Solvers, *]ournal of Experimental Education* 32: 371-76.

Tartre, L. A. (1990). Spatial orientation skill and mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(3), 216-229.

Tejima, K. (1992). The strategy of problem posing. Joetsu Journal of Mathematics Education, 7, 17-30.

Tjoe, H. (2014). When understanding evokes appreciation: The effect of mathematics content knowledge on aesthetic predisposition. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 249–256). Vancouver, BC: PME.

Tjoe H. (2019) “Looking Back” to Solve Differently: Familiarity, Fluency, and Flexibility. In: Liljedahl P., Santos-Trigo M. (eds) Mathematical Problem Solving. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Tsiolis, G. (2013). Γ. Τσιώλης: Η σχέση ποιοτικής και ποσοτικής προσέγγισης στην κοινωνική έρευνα: από τη θέση περί 'ριζικής ασυμβατότητας' στο συνδυασμό ή τη συμπληρωματικότητα των προσεγγίσεων. Στο Μ. Πουρκός (Επιμ.) Δυνατότητες και όρια της μείξης των μεθοδολογιών στην κοινωνική και εκπαιδευτική έρευνα. Ίων. 2013. Σελ. 271-292.

Tsubota, E. (1987). On children’s problem posing (grades 1 to 3). (Japan: Author).

Umetsu, T., Hirashima, T., & Takeuchi, A. (2002). Fusion method for designing computer-based learning game. ICCE 2002 Proceedings of the International Conference on Computers in Education, 124–128.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Middleton, J.A., Streefland, L. (1995): Student-generated problems: easy and difficult problems on percentage. – In: For the Learning of Mathematics 15(3), pp. 21-27

van Oers, B. (1996). Learning mathematics as a meaningful activity. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, B. Sriraman, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 3–20). New York: Routledge.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39–59). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Verschaffel, L., Greer, B. and DeCorte, E. (2000). *Making sense of word problems.* Lisse, The Netherlands: Swets and Zietlinger Publishers.

Verschaffel, L.. & De Corte. E. (1996). *Teaching realistic wor(l)d problem solving in the upper elementary school.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York.

Victor, A.M. (2004). *The effects of metacognitive instruction on the planning and academic achievement of first and second grade children. (Doctoral Thesis)*. Chicago, IL: Graduate College of the Illinois Istitute of Technology.

Villarreal, M., & Borba, M. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: Notebooks, blackboards, calculators, computers and… notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education, 42*(1), 49–62.

Voss, J. F., Means, M.L., (1989): Towards a model of creativity based upon problem solving in social sciences. – In: J.A. Glover, R.R. Ronning, C.R. Reynolds (Eds), Handbook of creativity. New York: Plenum Press, p. 399 – 410.

Watson, A., & Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking*. Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Wertheimer, M. (1996). A Contemporary Perspective on the Psychology of Productive Thinking.

Whitin, P. (2004). Promoting problem-posing explorations. Teaching Children Mathematics, 11, 180–186.

Wilson, J. W. (1990). Report of the Georgia Plan problem solving workshop, 1989-90. Unpublished document, The University of Georgia, Athens.

Wilson, James W., Fernandez, Maria L., & Hadaway, Nelda (1993). Mathematical problem solving. In Wilson, Patricia S. (Hrsg.): Research ideas for the classroom: High school mathematics. Chapter 4, 57 – 77.

Wilson, K. (2006). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education, 8*, 117–132.

Wilson, K., Ainley, J., & Bills, L. (2005). Spreadsheets, pedagogic strategies and the evolution of meaning for variable. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 321–328). Melbourne, Australia: PME.

Wilson, P. (1997). Simplex creative problem solving. *Creativity and innovation management*, *6*(3), 161-167.

Winograd, K. (1991). Writing, solving and sharing original math story problems: Case studies of fifth grade children's cognitive behavior. Paper presented at theannual meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Yu, F. Y., Liu, Y. H., & Chan, T.W. (2005). AWeb-based learning system for question-posing and peer assessment: pedagogical design and preliminary evaluation. Innovations in Education and Teaching International, 42, 337–348.

Zhang, Huirong & Cai, Jinfa, (2021). Teaching mathematics through problem posing: insights from an analysis of teaching cases. ZDM - International Journal on Mathematics Education.

Zimmermann, B. (1986). From problem solving to problem finding in mathematics instruction. In P. Kupari (Ed.), Mathematics Education Research in Finland(1985Yearbook) (pp.81-104.). Jyvaskyla:Institute for Educational Research.

Ευγένιος Αυγερινός Γαλατιανή Γαλουζή Δήμητρα Ρεμούνδου., Η Χωρική Ικανότητα των Μαθητών: Βασικός Παράγοντας για τη Βελτίωση της Επίδοσης στα Μαθηματικά κατά τη Μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, Πρακτικά 34ο ΠανελλήνιοΣυνέδριοΜαθηματικήςΠαιδείας, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Λευκάδα, 3-5 Νοεμβρίου2017

Βακάλη, Α., Γιαννόπουλος, Η., Ιωαννίδης, Ν., Κοίλιας, Χ., Μάλαμας, Κ., Μανωλόπουλος, Ι. Πολίτης, Π. (1999). Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό

Περιβάλλον, Υπουργείο Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων.

Δέλλας Σ., Κέκκερης Γ., (2007). Εκπαίδευση και Νέες Τεχνολογίες. Θεωρητική προσέγγιση μεθόδου διδασκαλίας βασισμένη στη Συνδυαστική Μάθηση (Blended Learning), στον τόμο «*Θέματα Εισαγωγικής Επιμόρφωσης για νεοδιόριστους εκπαιδευτικούς*», Επιμ. Ε. Μπότσαρη, έκδοση Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, Αθήνα, σελ. 95-105

Καλλιμάνη, Ελευθερία & Κρικώνη, Μαρία. (2017). Επίλυση προβλήματος και διδασκαλία. Πανελλήνιο Συνέδριο Επιστημών Εκπαίδευσης. 2016.

Κωστίνος, (2012). Διδασκαλία των Μαθηματικών: χθες και σήμερα. *Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία, 8*(1), 44-52.

Μαμωνά-Downs, Γ., & Παπαδόπουλος, Ι. (2017). Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά. Η πορεία της σκέψης κατά την αναζήτηση της λύσης. *Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης*.

Μπαμπινιώτης Γ. (2002), Λεξικό της νέας ελληνικής γλώσσας με σχόλια για τη σωστή χρήση των λέξεων: ερμηνευτικό, ετυμολογικό, ορθρογραφικό, συνωνύμων, αντιθέτων, κυρίων ονομάτων, επιστημονικών όρων, ακρωνυμιών, Εκδότης: Κέντρο Λεξικολογίας

Μώκος, Ε. (2012). Διερεύνηση μεταγνωστικών λειτουργιών κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε μαθητές ηλικίας 10–11 ετών (Doctoral dissertation, Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Σχολή Ανθρωπιστικών Επιστημών. Τμήμα Επιστημών της Προσχολικής Αγωγής και του Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού. Τομέας της Διδακτικής των Θετικών Επιστημών και των Νέων Τεχνολογιών).

Παπαναστασίου, Ε. Κ., & Παπαναστασίου, Κ. (2014). Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής έρευνας (2η Έκδοση ed.). Λευκωσία: PrintcoLtd.

Πούλος Α., (2007), Τα ανοικτά προβλήματα ως μέσο διδασκαλίας για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων, στον τόμο «*Θέματα Εισαγωγικής Επιμόρφωσης για νεοδιόριστους εκπαιδευτικούς*», Επιμ. Ε. Μπότσαρη, έκδοση Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, Αθήνα, σελ. 399-405

Παράρτημα Α: Ερωτηματολόγιο έρευνας

Απαντήστε κατά πόσο συμφωνείτε ή διαφωνείτε σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέγοντας το αντίστοιχο γράμμα. Οι επιλογές Α, Β, Γ και Δ σημαίνουν αντιστοίχως τα εξής:

Α. Διαφωνώ **Β. Διαφωνώ λίγο** **Γ. Συμφωνώ λίγο** **Δ. Συμφωνώ**

		Α	Β	Γ	Δ
1	Αν δεν μπορώ να λύσω ένα πρόβλημα μέσα σε 10 – 15 λεπτά τότε σταματάω την προσπάθειά μου γιατί πιθανότατα δεν μπορώ να το λύσω.				
2	Όσο γρηγορότερα λύνει κάποιος ένα πρόβλημα τόσο καλύτερος είναι στα μαθηματικά.				
3	Για κάθε πρόβλημα υπάρχει μια μεθοδολογία που οδηγεί στη σωστή λύση.				
4	Η επίλυση ενός προβλήματος στηρίζεται στην εφαρμογή ενός κανόνα ή ενός τύπου.				
5	Υπάρχουν μαθηματικά προβλήματα που η λύση τους δε στηρίζεται μόνο σε μαθηματικές γνώσεις.				
6	Πρέπει να ελέγχω αν η λύση που βρήκα σε ένα πρόβλημα ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.				
7	Η σωστή απάντηση σε ένα πρόβλημα είναι το κύριο ζητούμενο.				
8	Κάθε βήμα που εκτελώ κατά την επίλυση ενός προβλήματος πρέπει να μπορώ να το δικαιολογήσω.				
9	Τα υπολογιστικά προβλήματα στα μαθηματικά είναι σημαντικότερα από τα λεκτικά.				
10	Τα λεκτικά προβλήματα προερχονται από καταστάσεις της καθημερινότητας.				
11	Ένα πρόβλημα είναι εύκολο όταν δεν περιέχει δύσκολες πράξεις.				
12	Όσο περισσότερα προβλήματα επιλύει κάποιος, τόσο καλύτερος γίνεται στα μαθηματικά.				
13	Η ενασχόληση με τα μαθηματικά βελτιώνει την κριτική σκέψη.				
14	Η ικανότητα στα μαθηματικά είναι έμφυτη.				
15	Η επίλυση προβλημάτων στηρίζεται στην αποστήθιση τύπων και κανόνων.				
16	Μελετάω τα μαθηματικά γιατί κατανοώ τη χρησιμότητά τους στην πραγματική ζωή.				
17	Οι περισσότεροι άνθρωποι δε χρειάζονται τα μαθηματικά στην καθημερινότητά τους.				

18	Τα μαθηματικά είναι ένα ανούσιο και βαρετό μάθημα.				
19	Η κατασκευή προβλημάτων είναι πιο εύκολη διαδικασία από την επίλυση.				
20	Η κατασκευή προβλημάτων είναι μια ενδιαφέρουσα και δημιουργική διαδικασία.				
21	Προβλήματα μπορούν να κατασκευάσουν όσοι έχουν άριστη γνώση των μαθηματικών.				
22	Μαθαίνουμε τα μαθηματικά για να μπορούμε να λύνουμε προβλήματα και όχι για να κατασκευάζουμε προβλήματα.				
23	Η χρήση λογισμικού οπτικοποιεί ένα πρόβλημα.				
24	Οι νέες τεχνολογίες είναι περισσότερο χρήσιμες σε υπολογιστικά προβλήματα.				
25	Η λύση ενός προβλήματος με τη χρήση ενός λογισμικού δεν απαιτεί την εις βάθος γνώση των μαθηματικών.				
26	Αξιοποιώντας τις νέες τεχνολογίες μπορώ να δημιουργήσω νέες παραλλαγές ενός προβλήματος.				
27	Οι νέες τεχνολογίες κάνουν πιο ευχάριστη την ενασχόληση με τα μαθηματικά.				
28	Η χρήση των νέων τεχνολογιών δεν έχουν ουσιαστική συμβολή στην απόκτηση της μαθηματικής γνώσης.				
29	Η διδασκαλία των μαθηματικών θα ήταν πιο ενδιαφέρουσα αν γινόταν με τη χρήση κατάλληλων λογισμικών.				

Παράρτημα Β: Δοκίμιο έργων

Απαντήστε με σαφήνεια στα παρακάτω ερωτήματα, τεκμηριώνοντας το συλλογισμό σας.

ΕΡΓΟ 1:

Να λυθούν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών οι τριγωνομετρικές εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{5}$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

ΕΡΓΟ 2:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\alpha = \kappa^2 + \lambda^2$, $\beta = \kappa\lambda\mu$ και $\gamma = \left| \kappa^2 - \lambda^2 \right|$, όπου $\kappa, \lambda, \mu > 0$.

Να βρείτε για ποια τιμή του μ, η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

(*Το έργο είναι παραλλαγμένη μορφή της Αποδεικτικής Άσκησης 1 (σελ. 47) του σχολικού βιβλίου Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου*)

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

ΕΡΓΟ 3:

Κατασκευάστε ένα σύστημα εξισώσεων 2x2 που να έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

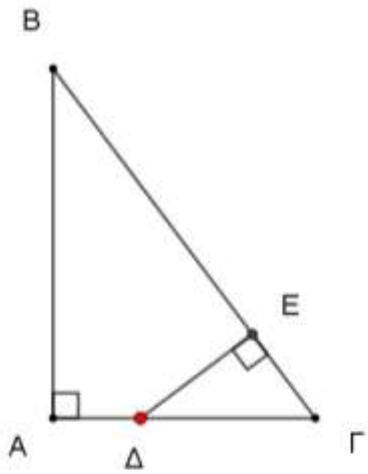
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

ΕΡΓΟ 4:



Δίνεται το πρόβλημα: «Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΑΒ = 4 και ΑΓ = 3. Θεωρούμε σημείο Δ της ΑΓ τέτοιο ώστε ΓΔ = 2 και φέρνουμε από το σημείο Δ τμήμα $ΔΕ \perp ΒΓ$ (όπου Ε σημείο της ΒΓ). Να βρείτε το μήκος του ΕΓ.»

Αλλάζοντας ένα (ή περισσότερα) από τα δεδομένα του προβλήματος ή το ζητούμενο του προβλήματος, δημιουργήστε ένα νέο τροποποιημένο πρόβλημα.

(*Το έργο βασίζεται στην Άσκηση Εμπέδωσης 1 (σελ. 39) του σχολικού βιβλίου Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου*)

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.