



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

**ΣΕΙΣΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΕΣ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΠΕΡΙΟΔΩΝ
ΠΟΛΥΩΡΟΦΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΑΠΟ ΚΑΤΑΓΡΑΦΕΣ
ΧΡΟΝΟΪΣΤΟΡΙΩΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΕΝΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ**

ΙΩΑΝΝΗΣ ΝΤΑΛΙΑΚΟΥΡΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΣ ΜΑΚΑΡΙΟΣ, Αναπλ. Καθηγητής Α.Π.Θ.

**ΠΑΤΡΑ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ, 2023**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	6
ABSTRACT	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	8
1.1 Εισαγωγή.....	8
1.2 Στόχος διπλωματικής.....	9
1.3 Δομή και οργάνωση διπλωματικής	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ	11
2.1 Γενικά στοιχεία	11
2.2 Μονοβάθμια συστήματα	11
2.3 Πολυβάθμια συστήματα	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ.....	16
3.1 Εισαγωγικές έννοιες – Ορισμοί	16
3.2 Η έννοια και η διαδικασία της δειγματοληψίας.....	17
3.3 Στοιχεία στατιστικής με εφαρμογές στη θεωρία σημάτων.....	18
3.4 Ισχύς και ενέργεια σημάτων	20
3.5 Συσχέτιση σημάτων.....	21
3.6 Ανάλυση Fourier και εφαρμογή στη θεωρία σημάτων	22
3.7 Φάσμα πλατών της σειράς Fourier.....	24
3.8 Φάσμα φάσεων της σειράς Fourier.....	25
3.9 Πυκνότητα φάσματος ενέργειας σήματος.....	26
3.10 Πυκνότητα φάσματος ισχύος σήματος	27
3.11 Οι συναρτήσεις αυτοφασματικής και ετεροφασματικής πυκνότητας	27
3.12 Διαδικασία ανασύνθεσης σήματος.....	28
3.13 Εύρεση της εκθετικής μιγαδικής μορφής σειράς Fourier ψηφιακών σημάτων.....	28
3.14 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)	29
3.15 Η συνάρτηση δέλτα $\delta(t)$ Dirac.....	31
3.16 Συστήματα αλλοίωσης σημάτων – Φίλτρα.....	32
3.16.1 Το άνω διαβατό φίλτρο (high-pass filter)	33
3.16.2 Το κάτω διαβατό φίλτρο (low-pass filter).....	34
3.16.3 Το ζωνο-διαβατό φίλτρο (band-pass filter).....	34
3.16.4 Το ζωνο-αδιάβατο φίλτρο (band-stop filter)	35
3.16.5 Το φίλτρο Butterworth (Butterworth filter)	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.....	37
4.1 Εισαγωγή.....	37

4.2 Μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου (<i>Time domain methods</i>).....	38
4.2.1 Αλγόριθμος πραγματοποίησης ιδιοσυστήματος (<i>Eigensystem Realization Algorithm</i>)	38
4.2.2 Η μέθοδος ARMA (<i>Auto Regressive Moving Average – ARMA Method</i>).....	39
4.2.3 Η μέθοδος ευθείας αναγνώρισης παραμέτρων (<i>Direct System Parameter Identification Method – DSPI</i>)	40
4.3 Μέθοδοι στο πεδίο των συχνοτήτων (<i>Frequency domain methods</i>).....	42
4.3.1 Η μέθοδος μεγέθους κορυφής (<i>Peak Amplitude Method</i>)	42
4.3.2 Η αντίστροφη μέθοδος (<i>Inverse Method</i>).....	44
4.3.3 Η φασματική μέθοδος (<i>Spectral Method</i>)	45
4.4 Ειδικές μέθοδοι αναγνώρισης δυναμικών συστημάτων.....	46
4.4.1 Μετασχηματισμός Wavelet (<i>Wavelet Transform</i>).....	46
4.4.2 Αναγνώριση με εφαρμογή φίλτρων Kalman (<i>Kalman Filters</i>)	47
4.4.3 Αναγνώριση με τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης (<i>Artificial Intelligence – AI</i>).....	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΪΣΤΟΡΙΩΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ	49
5.1 Εισαγωγή.....	49
5.2 Επιλογή σχήματος ενοργάνωσης.....	49
5.3 Ισοδύναμο μητρώο μάζας.....	50
5.3 Ισοδύναμο μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας K.....	51
5.4 Εξίσωση κίνησης μονώροφου ασύμμετρου κτιρίου υπό σεισμική φόρτιση.....	52
5.5 Ανάλυση δεδομένων ενοργάνωσης	56
5.6 Περιγραφή της μεθόδου	56
5.7 Εφαρμογή προσομοιωμένων δεδομένων	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΦΟΡΕΑ	61
6.1 Περιγραφή φορέα	61
6.2 Εύρεση ιδιομορφών επίπεδου φορέα	61
6.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων.....	75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΦΟΡΕΑ.....	76
7.1 Περιγραφή φορέα	76
7.2 Εύρεση ιδιομορφών χωρικού φορέα	76
7.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων.....	101
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ – ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΚΑΠΝΟΔΟΧΟΥ.....	102
8.1 Περιγραφή προβλήματος.....	102
8.2 Αναγνώριση με τη μέθοδο χρονοϊστοριών επιτάχυνσης	103
8.3 Επίλυση καπνοδόχου με τη μέθοδο συνεχών συστημάτων	116

8.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα και σύγκριση μεθόδων	121
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	130
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	131
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.....	132
Α.1 Εισαγωγή	132
Α.2 Εφαρμογή της ΜΠΣ στη δυναμική ανάλυση κατασκευών.....	132
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΒΑΣΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ SAP2000.....	134
Β.1 Εισαγωγή βασικών στοιχείων φορέα	134
Β.2 Επίλυση φορέα και αποτελέσματα	138
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. ΒΑΣΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ SeismoSignal.....	140
Γ.1 Εισαγωγή επιταχυνσιογράμματος και βασική επεξεργασία	140
Γ.2 Επεξεργασία σήματος και εξαγωγή αποτελεσμάτων	141
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. ΤΕΧΝΗΤΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΙΟΓΡΑΜΜΑΤΑ	143
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	256
Ελληνική	256
Ξενόγλωσση	257

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία πραγματεύεται το αντικείμενο της αναγνώρισης των δυναμικών χαρακτηριστικών κύριως κτιριακών κατασκευών με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων. Υπενθυμίζονται κάποιες βασικές έννοιες τις δυναμικής των κατασκευών καθώς επίσης γίνεται και μια εισαγωγή στη θεωρία επεξεργασίας σημάτων και στη συνέχεια αναλύονται με βάση τη βιβλιογραφία οι διάφορες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αναγνώριση δυναμικών χαρακτηριστικών στις κατασκευές. Στη συνέχεια επεξηγείται αναλυτικά η Μέθοδος Ιδιομορφικών Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης όπου φαίνεται πως γίνεται η σύζευξη των αντικειμένων της δυναμικής των κατασκευών και της θεωρίας επεξεργασίας σήματος για την εύρεση δυναμικών χαρακτηριστικών δηλαδή τις ιδιοσυχνότητες, τις ιδιοπεριόδους, τις ιδιομορφές ταλάντωσης. Στη συνέχεια εφαρμόζεται η μέθοδος βήμα προς βήμα για δισδιάστατους πλαισιωτούς φορείς καθώς επίσης και για χωρικούς φορείς κατάλληλα προσομοιωμένα με χρήση του αντίστοιχου λογισμικού πεπερασμένων στοιχείων SAP2000 χρησιμοποιώντας προσομοιωμένα δεδομένα καθώς με αυτά είναι δυνατή η επαλήθευση και ο έλεγχος ακρίβειας της μεθόδου. Επιπλέον, εξετάζεται μια ειδική περίπτωση κατασκευής αυτή της μεταλλικής καπνοδόχου για την εύρεση των δυναμικών χαρακτηριστικών της όπου η υπόψη μελέτη γίνεται σε κατάλληλα επιλεγμένους κόμβους της που ο καθένας απέχει από τον προηγούμενο κατά 25% του συνολικού ύψους της. Παράλληλα αξιολογήθηκε και η επίδοση των πεπερασμένων στοιχείων στη προσομοίωση της μεταλλικής καπνοδόχου αφού συγκρίθηκαν με τις ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές αυτής που προκύπτουν από τη θεωρία των συνεχών συστημάτων. Τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία καθώς επίσης γίνονται πρότασεις για μελλοντική έρευνα.

Λέξεις Κλειδιά: Δυναμικά χαρακτηριστικά, επεξεργασία σήματος, προσομοιωμένα δεδομένα, μέθοδος ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιτάχυνσης.

ABSTRACT

The current postgraduate thesis examines the subject of the identification of dynamic characteristics mainly of building structures using simulated data. A review of some basic concepts of structural dynamics and then an introduction to the theory and techniques of signal processing following with the analysis of different dynamic system identification methods via literature review. Then the new 'modal-time histories method' is explained thoroughly where it is shown how the coupling of two different disciplines that of structural dynamics and that of signal processing theory is achieved in order to find to dynamic characteristics namely the eigenfrequencies, eigenperiods, eigenmodes. After that the aforementioned method is applied step by step on to two-dimensional and three-dimensional frames simulated with the appropriate finite element software namely SAP2000 using simulated data because it is possible with their application to validate and check the accuracy of the method. Additionally, a special case is examined of a steel chimney in order to find it's dynamic characteristics where the system analysis is performed in selected nodes of the structure in such a way where the distance between each one of them is 25% of the chimney's total height. Also, the performance of the surface finite element is checked by comparing the values of eigenfrequencies and eigenmodes that resulted from FEM with those resulting from the theory continuous systems. Lastly, the conclusions that come of, from this postgraduate thesis as well as some propositions for future research are presented.

Keywords: Dynamic characteristics signal processing, simulated data, modal-time histories method.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

1.1 Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην εξέταση του προβλήματος ανίχνευσης δυναμικών χαρακτηριστικών σε κατασκευές ήτοι οι ιδιοπερίοδοι, οι ιδιοσυχνότητες, οι ιδιομορφές και τα ιδιομορφικά ποσοστά απόσβεσης αναλύοντας επιταχυνσιογράμματα απόκρισης σε σεισμικές ή και σε διαφορετικού δυναμικές διεγέρσεις (π.χ. φορτία εκρήξεων, ανεμοπιέσεις κ.λπ.). Για την επίτευξη της αναγνώρισης αυτών των χαρακτηριστικών πλέον γίνεται ένας συνδυασμός διαφορετικών αντικειμένων αυτών της **δυναμικής των κατασκευών** και της **θεωρίας των σήματων** γεγονός που υποδεικνύει πόσο γρήγορα εξελίσσεται η επιστήμη του πολιτικού μηχανικού καθώς πλέον ήδη αντλεί και χρησιμοποιεί εργαλεία και από άλλες ειδικότητες. Η προαναφερθείσα σύζευξη είναι απόρροια των αυξημένων απαιτήσεων πλέον στον αντισεισμικό σχεδιασμό νέων κατασκευών καθώς επίσης και στα υφιστάμενα κτίρια αφού οι περισσότεροι κανονισμοί επεμβάσεων (π.χ. ΚΑΝ.ΕΠΕ.) απαιτούν την αναγνώριση των δυναμικών χαρακτηριστικών και ιδιαίτερα των πρώτων ιδιομορφών τους [Ε13]. Τα χαρακτηριστικά αυτά καταγράφονται ενόργανα και συνεπώς **ψηφιακά** από χρονοϊστορίες επιταχύνσεων μέσω πολυκάναλων δίκτυων επιταχυνσιόμετρων εγκατεστημένων σε κατάλληλες θέσεις των κατασκευών.



Εικόνα 1.1: Τυπικά ψηφιακά επιταχυνσιόμετρα

Τονίζεται η διαφορά μεταξύ **επιταχυνσιογράμματος** και **επιταχυνσιογραφήματος** καθώς το πρώτο είναι ένα σήμα που αποτελεί κάθε χρονοϊστορία επιτάχυνσης και συνίσταται σε ζεύγη τιμών χρόνου και επιτάχυνσης, ενώ το δεύτερο αποτελεί την αντίστοιχη γραφική παράσταση του πρώτου.

Ανατρέχοντας στη βιβλιογραφία είναι γνωστό ότι οι χρονοϊστορίες επιταχύνσεων απόκρισης των κατασκευών εμπεριέχουν και τις ιδιομορφικές αποκρίσεις αυτών και με βάση αυτό το γεγονός αναπτύχθηκαν διάφορες μεθοδολογίες με σκόπο την ανίχνευση των δυναμικών χαρακτηριστικών. Η παρούσα εργασία εφαρμόζει μια σχετικά νέα μέθοδο τη **μέθοδο των ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** [Ε13] η οποία έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε αρκετές περιπτώσεις κατασκευών [Ε5, Ε12, Ε13] η οποία βασίζεται στην επαλληλία των ιδιομορφών και στην χρήση του **ταχέως μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)**, μετατρέποντας τα δεδομένα καταγραφής από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων.

1.2 Στόχος διπλωματικής

Στο παρόν πόνημα τίθεται το θέμα της αναγνώρισης των δυναμικών χαρακτηριστικών σε κατασκευές πολιτικού μηχανικού κάνοντας χρήση **προσομοιωμένων δεδομένων**. Η ανίχνευση των δυναμικών χαρακτηριστικών στις κατασκευές αποσκοπεί τόσο στη βαθμονόμηση των ασαφών παραμέτρων κατά τη διάρκεια προσομοίωσης υφιστάμενων κατασκευών, όσο και στον έλεγχο συμβατότητας αυτών με τα αντίστοιχα προσομοιώματα τους, ενώ θέτονται και οι βάσεις έρευνας στον τομέα **ανίχνευσης βλαβών (damage detection)** στις κατασκευές.

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην εφαρμοζόμενη μέθοδο του παρόντος ήτοι η **μέθοδος των ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιτάχυνσης**, η οποία είναι σχετικά πρόσφατη και έχει εφαρμοστεί με επιτυχία σε πολυώροφες κατασκευές και δύναται να ελεγχθεί η ακρίβεια της με τη χρήση **προσομοιωμένων δεδομένων**. Οι φορείς που εξετάστηκαν, επιλύθηκαν με χρήση έτοιμων **συνθετικών επιταχυνσιογραμμάτων διέγερσης** όπως αυτά επισυνάπτονται στο Παράρτημα Δ. Εφόσον δεν ήταν δυνατή η χρήση καταγραφών επιταχυνσιομέτρων, έγινε χρήση **προσομοιωμένων δεδομένων** σε επιλεγμένους κόμβους των υπό εξέταση φορέων που προέκυψαν από την επίλυση τους σε αντίστοιχο **κώδικα πεπερασμένων στοιχείων** για τις χρονοϊστορίες των συνθετικών επιταχυνσιογραμμάτων. Επίσης, από τον αντίστοιχο **κώδικα πεπερασμένων στοιχείων** με **ιδιομορφική ανάλυση** ελήφθησαν τα δυναμικά χαρακτηριστικά των φορέων τα οποία συγκρίθηκαν με αυτά που προέκυψαν από τη **μέθοδο ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιταχύνσεως** προκειμένου να ελεγχθεί η ακρίβεια της μεθόδου.

1.3 Δομή και οργάνωση διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική αποτελείται από δέκα κεφάλαια και τέσσερα παραρτήματα. Ξεκινούμε από τα κεφάλαια τα οποία επεξηγούνται παρακάτω:

- Στο **Κεφάλαιο 1** γίνεται μια γενική εισαγωγή στο αντικείμενο της διπλωματικής στα προβλήματα που εξετάζονται και στη μέθοδο επίλυσης τους.
- Στο **Κεφάλαιο 2** γίνεται μια γενική ανασκόπηση στη δυναμική των κατασκευών ώστε να αποκτηθεί ένα υπόβαθρο για τη συνέχεια της διπλωματικής.
- Στο **Κεφάλαιο 3** εισάγεται η θεωρία επεξεργασίας σήματος. Επεξηγούνται βασικές έννοιες καθώς επίσης αναλύονται και μεθοδολογίες επεξεργασίας σήματος και η χρήση τους στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού.
- Στο **Κεφάλαιο 4** γίνεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα στην αναγνώριση δυναμικών χαρακτηριστικών στις κατασκευές.
- Στο **Κεφάλαιο 5** αναλύεται και εξηγείται η εφαρμόζομενη μέθοδος για την ανίχνευση των δυναμικών χαρακτηριστικών σε μια κατασκευή ήτοι η μέθοδος των ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιταχύνσεων αλλά επίσης εξετάζεται και η προσαρμογή της μεθόδου με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων.
- Στο **Κεφάλαιο 6** γίνεται εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου σε διαφορετικούς φορείς στο επίπεδο δηλαδή στις δύο διαστάσεις (2D).

- Στο **Κεφάλαιο 7** η εφαρμογή της μεθόδου επεκτείνεται και σε φορείς στο χώρο (3D).
- Στο **Κεφάλαιο 8** εξετάζεται η εφαρμογή της μεθόδου σε μια κελυφωτή κατασκευή η οποία είναι μια μεταλλική καπνοδόχος. Τα αποτελέσματα της μεθόδου που προκύπτουν με τη χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από τη θεώρηση συνεχών συστημάτων.
- Στο **Κεφάλαιο 9** συνοψίζονται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη παρούσα διπλωματική εργασία.
- Στο **Κεφάλαιο 10** γίνονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα στο αντικείμενο της ανίχνευσης-αναγνώρισης δυναμικών χαρακτηριστικών στις κατασκευές αλλά και για την εφαρμογή της μεθόδου ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιτάχυνσης.

Τέλος, η διπλωματική όπως προαναφέρθηκε αποτελείται από τέσσερα παραρτήματα τα οποία κρίθηκε σκόπιμο να είναι μέρος αυτής της διπλωματικής:

- Στο **Παράρτημα Α** γίνεται μια χονδρική και γρήγορη επισκόπηση της **μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων** και πως αυτή χρησιμοποιείται για την αντιμετώπιση προβλημάτων δυναμικής των κατασκευών σε προβλήματα πολιτικού μηχανικού καθώς το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε στη παρούσα εργασία **SAP2000** χρησιμοποιεί αυτή τη μέθοδο.
- Στο **Παράρτημα Β** επεξηγούνται οι εντολές που χρησιμοποιούνται στο λογισμικό **SAP2000** για την προσομοίωση μιας κατασκευής, την επιβολή φορτίσεων σε αυτήν καθώς επίσης την δυναμική ανάλυση αυτής και εξαγωγή αποτελεσμάτων.
- Στο **Παράρτημα Γ** γίνεται επεξήγηση του λογισμικού **SeismoSignal** όσον αφορά την εισαγωγή δεδομένων που ελήφθησαν από το **SAP2000** την μετατροπή από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνότητων, την εξαγωγή των αποτελεσμάτων για περαιτέρω επεξεργασία καθώς επίσης και την εφαρμογή φίλτρων.
- Στο **Παράρτημα Δ** επισυνάπτονται τα συνθετικά επιταχυνσιογράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στη παρούσα διπλωματική εργασία τα οποία προέκυψαν κατά EN 1998-1 με κατηγορία εδάφους D και επιτάχυνση $A_{eff}=1,0g$ με το χρονικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε να είναι 0,005 sec.

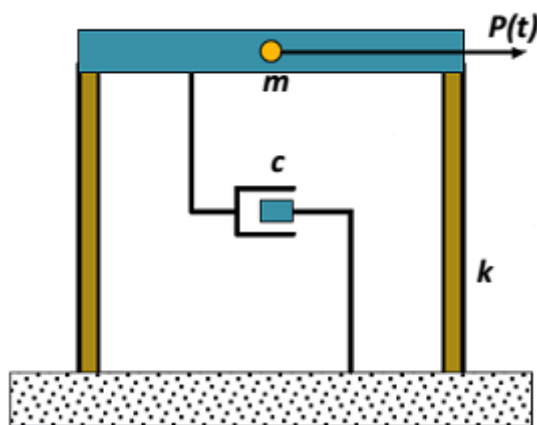
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

2.1 Γενικά στοιχεία

Η δυναμική των κατασκευών [Ξ4, Ξ18] είναι ένα από τα πιο σημαντικά αντικείμενα στο πεδίο του δομοστατικού πολιτικού μηχανικού καθώς μελετά την απόκριση των κατασκευών σε καταπονήσεις που μεταβάλλονται στο χρόνο όπως είναι οι σεισμοί, τα φορτία εκρήξεων κ.λπ. Στο παρόν κεφάλαιο κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια περιληπτική ανασκόπηση της δυναμικής ανάλυσης μονοβάθμιων και πολυβάθμιων συστημάτων ώστε έννοιες και νέες μέθοδοι που παρουσιάζονται σε επόμενα κεφάλαια στην παρούσα εργασία να είναι πιο κατανοητά.

2.2 Μονοβάθμια συστήματα

Μια καλή κατανόηση της συμπεριφοράς των κατασκευών σε δυναμικές φορτίσεις μπορεί να επιτευχθεί αναλύοντας ένα **μονοβάθμιο σύστημα (single degree of freedom system – SDOF system)**. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να καταπονηθεί είτε με μια δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα του (που αποτελεί ουσιαστικά συνάρτηση ως προς το χρόνο) είτε από δυναμικές κινήσεις στη βάση τους που για τη περίπτωση των πολιτικών μηχανικών είναι η κίνηση του εδάφους. Ένα τυπικό μονοβάθμιο σύστημα αποτελείται από τη συγκεντρωμένη μάζα του m τη δυσκαμψία του k και έναν αποσβεστήρα c όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.1: Πλασιωτός φορέας που θεωρείται μονοβάθμιο σύστημα

Η εξίσωση κίνησης του συστήματος θεωρώντας ότι ασκείται σε αυτό μια εξωτερική δύναμη $P(t)$ είναι:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (2.1)$$

Όπου η δυσκαμψία k εξαρτάται από τη περίπτωση που η δοκός είναι άκαμπτη ή όχι αντίστοιχα και ο συντελεστής απόσβεσης δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$k = \begin{cases} \sum \frac{12EI}{h^3} & (\text{αμφίπακτο}) \\ \quad \quad \quad \text{ή} \\ \sum \frac{3EI}{h^3} & (\text{μονόπακτο}) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$c = 2\zeta m\omega_n, \quad c_{cr} = 2m\omega_n, \quad \zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad (2.3)$$

Με το μέγεθος ζ να καλείται λόγος απόσβεσης και c_{cr} να λέγεται συντελεστής κρίσιμης απόσβεσης. Υπενθυμίζεται ότι κρίσιμη απόσβεση έχουμε για $\zeta = 1$ ή όταν $c = c_{cr}$. Η φυσική κυκλική ιδιοσυχνότητα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

Η ανάλυση εκτελείται στο πεδίο των συχνότητων καθώς η ανάλυση στο πεδίο του χρόνου πραγματεύεται σχεδόν απ'όλα τα βιβλία δυναμικής των κατασκευών αλλά και λόγω της χρησιμότητας της για τη συνέχεια της διπλωματικής (βλ. Κεφάλαια 3 και 5). Έστω ότι το σύστημα υπόκειται σε αρμονική δύναμη εύρους p_0 και συχνότητας Ω :

$$p(t) = p_0 e^{i\Omega t} \quad (2.5)$$

Υποθέτουμε μια λύση της μορφής:

$$u(t) = u_0 e^{i\Omega t} \quad (2.6)$$

Όπου προκύπτει η ακόλουθη λύση για το u_0 :

$$u_0 = \frac{p_0}{(k - \Omega^2 m) + i(\Omega c)} = p_0 H(\Omega) \quad (2.7)$$

Όπου:

$$H(\Omega) = \frac{1}{(k - \Omega^2 m) + i(\Omega c)} \quad (2.8)$$

Η παραπάνω μιγαδική έκφραση καλείται συνάρτηση μεταφοράς και δείχνει ότι υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ της δύναμης καταπόνησης και της μετατόπισης. Χρησιμοποιώντας κλασσικές μεθόδους επίλυσης προκύπτει η απόλυτη τιμή της μετατόπισης u_0 :

$$|u_0| = \frac{p_0}{m\omega_n^2 \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \zeta^2 \right]^{1/2}} = \frac{p_0}{m} H_m(\Omega) \quad (2.9)$$

Όπου:

$$H_m(\Omega) = \frac{1}{m\omega_n^2 \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \zeta^2 \right]^{1/2}} \quad (2.10)$$

Η γωνία διαφοράς φάσης μεταξύ της μετατόπισης και της δύναμης:

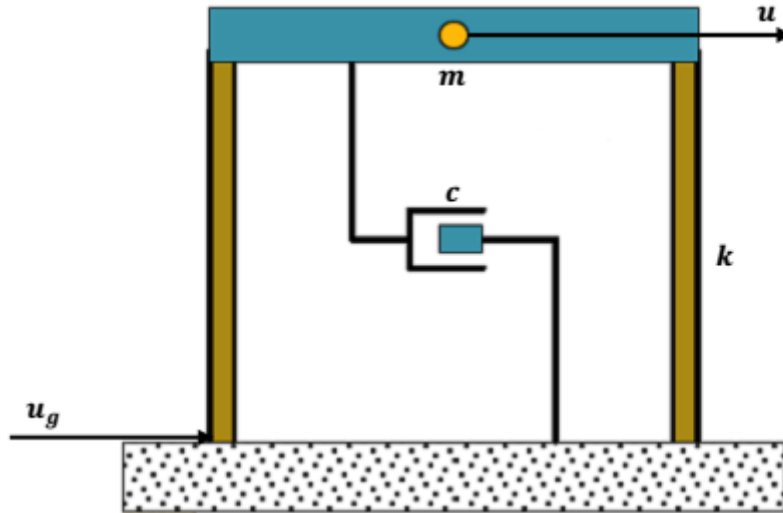
$$\theta = \arctan \left[\frac{2\zeta \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right)} \right] \quad (2.11)$$

Σημειώνεται ότι στην εξίσωση (2.9) το μέγεθος $p_0/m\omega_n^2 = p_0/k$ καλείται στατική μετακίνηση u_{st} του μονοβάθμιου συστήματος λόγω στατικής δύναμης μεγέθους p_0 και ορίζεται ένας δυναμικός παράγοντας απόκρισης που αποτελεί το λόγο $|u_0|/u_{st}$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{|u_0|}{u_{st}} = \frac{1}{\left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \zeta^2 \right]^{1/2}} \quad (2.12)$$

Εξετάζοντας την (2.12) προκύπτει ότι σε πολύ μικρές συχνότητες διέγερσης $\Omega/\omega_n \ll 1$ ο συγκεκριμένος παράγοντας είναι λίγο μεγαλύτερος του 1 και ουσιαστικά δεν υπάρχουν δυναμικές επιδράσεις. Όταν $\Omega/\omega_n = 1$ δηλαδή η συχνότητα διέγερσης είναι κοντά στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος τότε ο συγκεκριμένος παράγοντας είναι πολύ ευαίσθητος στην απόσβεση, και για τις μικρότερες τιμές απόσβεσης, αυτός μπορεί να είναι πολλαπλάσιος της μονάδας, το οποίο σημαίνει ότι το εύρος της δυναμικής απόκρισης μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερο από αυτό της στατικής παραμόρφωσης. Τέλος αν $\Omega/\omega_n \gg 1$ τότε ο παράγοντας τείνει στο μηδέν και είναι ουσιαστικά ανεξάρτητος από την απόσβεση.

Σε αρκετές όμως εφαρμογές πολιτικού μηχανικού έχουμε την περίπτωση διέγερσης λόγω δυναμικών κινήσεων στη βάση τους που όπως προαναφέρθηκε η περίπτωση που μας ενδιαφέρει είναι η κίνηση του εδάφους λόγω σεισμικής διέγερσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.2: Μονοβάθμιο σύστημα πλασιστού φορέα που υπόκειται σε εδαφική διέγερση

Η εξίσωση κίνησης του συστήματος θεωρώντας ότι ασκείται σε αυτό μια εδαφική διέγερση $u_g(t)$ είναι:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (2.13)$$

Η εξίσωση (2.13) είναι παρόμοια με την εξίσωση (2.1) της εξωτερικής δύναμης διέγερσης όπου εδώ μια ισοδύναμη δύναμη που είναι ίση με τη μάζα πολλαπλασιασμένη με την εδαφική επιτάχυνση με κατεύθυνση αντίθετη από αυτή της διέγερσης στη βάση. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν έχουμε:

$$|u| = \frac{(\ddot{u}_{g0})}{\omega_n^2 \left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2 \zeta^2 \right]^{1/2}} \quad (2.14)$$

Όταν η στήριξη του συστήματος μετακινείται λόγω αρμονικής μετατόπισης μεγέθους u_{g0} και σε συχνότητα Ω ,

$$u_{g0} = u_{g0} e^{i\Omega t} \quad (2.15)$$

Η επιτάχυνση βρίσκεται παραγωγίζοντας δύο φορές την παραπάνω εξίσωση:

$$u_{g0} = -\Omega^2 u_{g0} e^{i\Omega t} \quad (2.16)$$

Και συνεπώς προκύπτει:

$$\frac{|u|}{u_{g0}} = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + 4 \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2 \zeta^2 \right]^{1/2}} \quad (2.17)$$

Από την εξίσωση (2.17) προκύπτει ότι όταν η συχνότητα διέγερσης είναι μικρή $\Omega/\omega_n \rightarrow 0$ δεν υπάρχει σχετική μετατόπιση μεταξύ της στήριξης και της μάζας που σημαίνει ότι η μάζα κινείται όσο κινείται και η στήριξη. Όταν όμως ισχύει $\Omega/\omega_n \rightarrow \infty$ τότε η μετατόπιση $u \rightarrow u_{g0}$ και προκύπτει $-u_{g0}$ που πρακτικά αυτό σημαίνει ότι όλη η σχετική μετακίνηση μεταξύ της μάζας και της στήριξης είναι εξαιτίας της εδαφικής διέγερσης στη βάση.

2.3 Πολυβάθμια συστήματα

Ένα σύστημα πολλών βαθμών ελευθερίας περιέχει πολλές μάζες που συνδέονται με συστήματα απόβεσης και δυσκαμψίας και υποκείται σε πολλαπλές διεγέρσεις είτε αυτές είναι εξωτερικές δυνάμεις είτε διεγέρσεις στη βάση του συστήματος. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας για τα πολυβάθμια συστήματα καθορίζεται από τον αριθμό των μαζών n καθώς κάθε μαζα m_i κινείται με μια μετακίνηση u_i .

Η διαφορική εξίσωση κίνησης για ένα πολυβάθμιο σύστημα θα είναι της παρακάτω μητρωϊκής μορφής:

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [c]\{\dot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{p(t)\} \quad (2.18)$$

Όπου $[m]$, $[c]$ και $[k]$ είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας αντίστοιχα και τα $\{\ddot{u}(t)\}$, $\{\dot{u}(t)\}$, $\{u(t)\}$ και $\{p(t)\}$ είναι τα διανύσματα των επιταχύνσεων, των ταχυτήτων, των μετατοπίσεων και των εξωτερικών δυνάμεων αντίστοιχα. Ο ορθός σχηματισμός αυτών των μητρώων είναι φυσικά το κύριο σημείο που πρέπει να δίνεται προσοχή κατά την επίλυση ενός πολυβάθμιου συστήματος.

Για ένα ελεύθερο σύστημα χωρίς απόσβεση ισχύει η εξίσωση:

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = 0 \quad (2.19)$$

Υποθέτοντας μια λύση της μορφής:

$$\{u(t)\} = \{u\} e^{i\Omega t} \quad (2.20)$$

Και αντικαθιστώντας την στην εξίσωση (2.19) προκύπτει:

$$([k] - \omega_n^2 [m])\{u\} e^{i\Omega t} = \{0\} \quad (2.21)$$

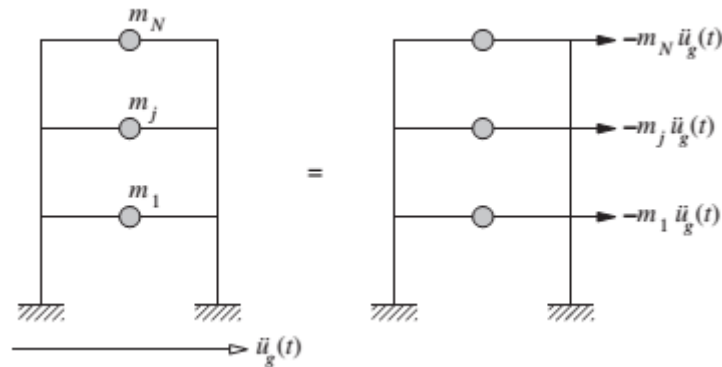
Η παραπάνω εξίσωση έχει πάντα τετριμμένη λύση για $\{u\} e^{i\Omega t} = 0$ που δεν είναι όμως χρήσιμη καθώς δηλώνει ότι στο σύστημα δεν υπάρχει κίνηση. Τετριμμένη λύση έχει όταν:

$$\det|[k] - \omega_n^2[m]| = 0 \quad (2.22)$$

Το ανάπτυγμα της ορίζουσας αποτελεί ένα πολυώνυμο N βαθμού ως προς ω_n^2 . Η εξίσωση αυτή έχει N πραγματικές και θετικές ρίζες για το ω_n^2 επειδή τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας $[m]$, $[k]$ του συστήματος είναι συμμετρικά και θετικώς ορισμένα. Η ιδιότητα του θετικώς ορισμένου $[k]$ είναι εξασφαλισμένη για όλες τις κατασκευές που στηρίζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εμποδίζεται η κίνηση στερεού σώματος πράγμα που συμβαίνει για τις κατασκευές ενός πολιτικού μηχανικού. Η ιδιότητα του θετικώς ορισμένου $[m]$ είναι επίσης εξασφαλισμένη επειδή οι συγκεντρωμένες μάζες είναι μη μηδενικές σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας που παραμένουν στην ανάλυση μετά από στατική συμπίκνωση των βαθμών ελευθερίας με μηδενική συγκεντρωμένη μάζα. Αντικαθιστώντας οποιαδήποτε από τις προκύπτουσες τιμές ω_n^2 στην (2.21) προκύπτει η τιμή του διανύσματος της σχετικής (όχι απόλυτης) μετακίνησης $\{u\}$. Αυτή είναι η N -οστή ιδιομορφή του συστήματος και γενικότερα όλες οι ιδιομορφές περιγράφονται από με το ιδιομορφικό μητρώο που είναι της μορφής:

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & \dots & \varphi_{n,1} \\ \varphi_{1,2} & \varphi_{2,2} & \dots & \varphi_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{1,n} & \varphi_{2,n} & \dots & \varphi_{n,n} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Όπου ο πρώτος όρος στον δείκτη είναι ο αριθμός της ιδιομορφής και ο δεύτερος όρος στον δείκτη υποδεικνύει τη συντεταγμένη του συστήματος (βαθμός ελευθερίας).



Σχήμα 2.3: Πολυβάθμιο σύστημα που υπόκειται σε σεισμική διέγερση λόγω εδαφικής επιτάχυνσης στη βάση του

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΘΕΩΡΙΑ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

3.1 Εισαγωγικές έννοιες – Ορισμοί

Στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού και ειδικότερα στον τομέα της δομοστατικής και αντισεισμικής μηχανικής έχει αρχίσει και κερδίζει έδαφος η χρήση της θεωρίας επεξεργασίας σημάτων που προέρχονται συνήθως από τις χρονοϊστορίες είτε επιταχύνσεων είτε ταχυτήτων είτε μετατοπίσεων, οι οποίες καταγράφονται ενόργανα πάνω στην ίδια την κατασκευή ή στο έδαφος εξαιτίας σεισμικών διεγέρσεων ή άλλων δυναμικών φορτίσεων. Έτσι επειδή ως γνωστόν οι κατασκευές υπόκεινται σε σύνθετες ταλαντωτικές κινήσεις λόγω των παραπάνω αιτιών και εξαιτίας της ανάγκης να μην χαθεί σημαντική πληροφορία σχετικά με τη δυναμική συμπεριφορά των κατασκευών επιλέγονται συνήθως με ορθολογικά κριτήρια διάφορα χαρακτηριστικά σημεία πάνω σε αυτές στα οποία είναι δυνατή η μέτρηση των χρονοϊστοριών και η επεξεργασία των μετρήσεων αυτών. Από τα παραπάνω προκύπτει η σπουδαιότητα και ίσως και η αναγκαιότητα της εφαρμογής της θεωρίας επεξεργασίας σημάτων στην ειδικότητα του πολιτικού μηχανικού και γι' αυτό το λόγο στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή σε διάφορες έννοιες και διαφόρων εργαλείων από τη θεωρία σημάτων που θα αποτελέσουν τη θεωρητική βάση που απαιτείται για τα επόμενα κεφάλαια.

Ως **σήμα** ορίζεται ένα φυσικό μέγεθος, το οποίο μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο, το χώρο ή οποιαδήποτε άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή [Ε8]. Αυτό μαθηματικά σημαίνει ότι ένα σήμα συμβολίζεται ως συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών με το χρόνο t να αποτελεί συνήθως την ανεξάρτητη μεταβλητή και το φυσικό φαινόμενο που μετράται να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή $x(t)$. Με βάση τη βιβλιογραφία [Ε3, Ε4, Ε7, Ε8] αναλόγως των μαθηματικών αναπαραστάσεων των σημάτων προκύπτουν τα παρακάτω είδη αυτών:

- Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. ο χρόνος) αλλά και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνουν συνεχείς τιμές τότε αυτό καλείται **αναλογικό σήμα**.
- Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει συνεχείς τιμές αλλά η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει διακριτές τιμές τότε αυτό καλείται **διακριτό σήμα συνεχούς χρόνου**.
- Στην περίπτωση που τόσο η ανεξάρτητη μεταβλητή όσο και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνουν διακριτές τιμές τότε αυτό καλείται **ψηφιακό σήμα**.
- Τα φαινόμενα που επαναλαμβάνονται ανά σταθερά χρονικά διαστήματα και μπορούν να παρασταθούν μαθηματικά με μια ημιτονοειδή εξίσωση (π.χ. μια μάζα ενός μονοβάθμιου συστήματος που υπόκειται σε ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση) συνιστούν τα **περιοδικά (periodic) σήματα**.
- Τα φαινόμενα που παράγουν απροσδιόριστα δεδομένα με αποτέλεσμα αυτά να μην μπορούν να εκφραστούν ως σήματα με ρητή μαθηματική έκφραση (π.χ η δυναμική συμπεριφορά μιας κατασκευής λόγω σεισμικής καταπόνησης) συνιστούν τα **τυχαία ή στοχαστικά (random) σήματα**.

Η μελέτη των περιοδικών σημάτων συνεισφέρει στη μαθηματική ανάλυση και επεξεργασία των τυχαίων – στοχαστικών σημάτων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι για την πληρέστερη κατανόηση της θεωρίας σημάτων ένα από τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που είναι της μορφής $z = a + bi$ με το a να καλείται πραγματικό μέρος και συμβολίζεται $Re(z)$ και το bi να καλείται φανταστικό μέρος $Im(z)$. Για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη η προτεινόμενη βιβλιογραφία [Ε8], [Ξ5] αποτελεί καλό οδηγό για περαιτέρω εμβάθυνση και κατανόηση.

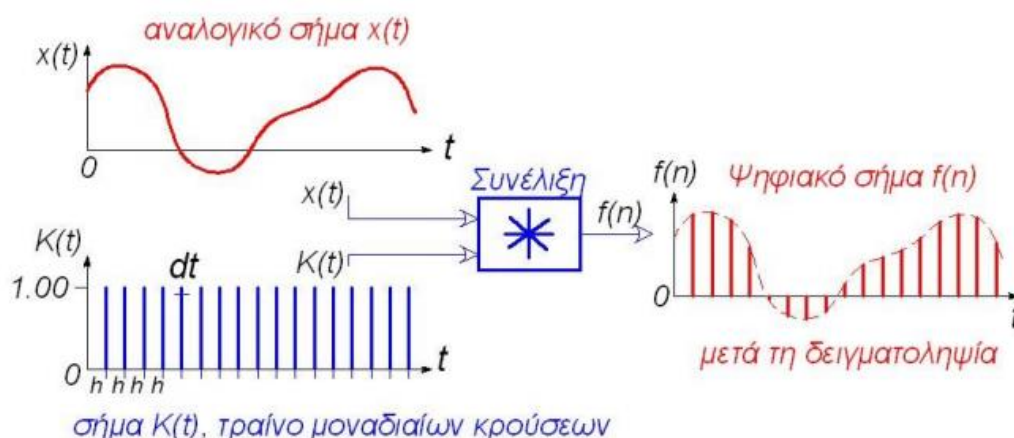
3.2 Η έννοια και η διαδικασία της δειγματοληψίας

Ορίζεται ως **δειγματοληψία** η διαδικασία μετατροπής ενός αναλογικού σήματος $x(t)$ σε ψηφιακό σήμα $f(n)$, απομακρύνοντας το θόρυβο και αφαιρώντας από το πρώτο τη συντρυπτική πλειονότητα τιμών στα σημεία του χρόνου εκτός από κάποιες συγκεκριμένες τιμές οι οποίες θα πρέπει να αποδίδουν το φυσικό φαινόμενο του αρχικού αναλογικού σήματος με επαρκή ακρίβεια χωρίς να χάνονται σημαντικές πληροφορίες [Ε8].

Από μαθηματικής άποψης, η δειγματοληψία γίνεται με τη θεωρούμενη **συνέλιξη (convolution)** του υπό εξέταση αναλογικού σήματος $x(t)$ με το σήμα $K(t)$ των πολλαπλών περιοδικών μοναδιαίων στιγμιαίων κρούσεων (που αποκαλείται αλλιώς «τρένο» ή «χτένα» των μοναδιαίων στιγμιαίων κρούσεων), που δίνεται από τη σχέση [Ε8]:

$$x(t) \cdot K(t) = f(n) \quad (3.1)$$

Το σήμα του **τρένου μοναδιαίων στιγμιαίων κρούσεων** είναι ένα περιοδικό σήμα, με περίοδο ίση με το χρονικό βήμα της δειγματοληψίας που επιθυμούμε και αποτελείται από μοναδιαίες κρούσεις απειροστής χρονικής διάρκειας dt η κάθε μία, στα επιθυμητά χρονικά βήματα της δειγματοληψίας όπως φαίνεται και γραφικά στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.4: Γραφική αναπαράσταση της συνέλιξης

Το προκύπτων ψηφιακό σήμα από τη δειγματοληψία έχει τις ίδιες τιμές με το αρχικό αναλογικό σήμα μόνο στα σημεία δειγματολήψιας. Επιλέγοντας N χρονικά βήματα διάρκειας h τότε ο συνολικός αξιόπιστος χρόνος καταγραφής του σήματος $T = N \cdot h$ καθορίζει την ελάχιστη δυνατή συχνότητα κύκλων επανάληψης που μπορεί να ανιχνευτεί στο ψηφιακό σήμα. Υποθέτοντας ότι η περίοδος των τυχαίων σημάτων είναι ίση με το συνολικό χρόνο καταγραφής του σήματος T , προκύπτει ότι η ελάχιστη δυνατή συχνότητα των κύκλων επανάληψης που μπορεί να ανιχνευτεί στο ψηφιακό σήμα δίνεται από τη σχέση [Ε8]:

$$f_{min} = \frac{1}{T} \quad (3.2)$$

Για λόγους αξιοπιστίας της δειγματοληψίας πρέπει το χρονικό βήμα h να είναι τέτοιο ώστε να επιτυγχάνεται πρακτικά γραμμική κατανομή του σήματος $x(t)$ μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών. Η επιλογή του χρονικού βήματος h καθορίζει μονοσήμαντα τη μέγιστη δυνατή συχνότητα f_{max} που είναι δυνατό να ανιχνευτεί στο ψηφιακό σήμα, καθότι είναι προφανές ότι η μικρότερη δυνατή περίοδος T_{min} αρμονικού όρου που είναι δυνατό να

ορισθεί στο ψηφιοποιημένο σήμα είναι $2h$ και άρα η μέγιστη δυνατή προσδιορίσιμη συχνότητα f_{max} , που ονομάζεται **συχνότητα Nyquist** προκύπτει από τη σχέση [E8]:

$$f_{max} = \frac{1}{T_{min}} = \frac{1}{2h} \quad (3.3)$$

3.3 Στοιχεία στατιστικής με εφαρμογές στη θεωρία σημάτων

Παρουσιάζονται επιγραμματικά κάποιοι στατιστικοί όροι που χρησιμοποιούνται στην επεξεργασία τυχαίων σημάτων. Απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή των παρακάτω στατιστικών όρων στα σήματα είναι ότι αυτά δεν θα πρέπει να είναι αλλοιωμένα (π.χ. με προσθήκη μηδενικών ή πολύ μικρών όρων στην αρχή ή στο πέρας των σημάτων, αφαίρεση άλλων όρων κ.λπ.) διαφορετικά θα οδηγηθούμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα [E8].

Ορίζεται ως **δειγματικό εύρος (sample range) R** των δεδομένων, η διαφορά της ελάχιστης από τη μέγιστη τιμή του δείγματος και εξαρτάται πάντοτε από τις ακραίες παρατηρήσεις τη μέγιστη x_{max} και την ελάχιστη x_{min} :

$$R = x_{max} - x_{min} \quad (3.4)$$

Ορίζεται η **δειγματική μέση τιμή (sample mean value) \bar{x}** ενός αναλογικού περιοδικού σήματος $x(t)$ για μια περίοδο T :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (3.5)$$

Επίσης, η **δειγματική μέση τιμή** ενός τυχαίου ψηφιακού σήματος $x(n)$ ορίζεται για το συνολικό χρονικό διάστημα καταγραφής του σήματος στο οποίο με δειγματοληψία έχουν σημειωθεί n ζεύγη τιμών $(n, x(n))$, ως εξής:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^n x(n)}{n} = \frac{x(1) + x(2) + \dots + x(n)}{n} \quad (3.6)$$

Η **θετική ρίζα μέσης τετραγωνικής τιμής (root mean square value ή rms value) \bar{x}_{rms}** ενός αναλογικού περιοδικού σήματος δίνεται:

$$\bar{x}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \quad (3.7)$$

Η **θετική ρίζα μέσης τετραγωνικής τιμής \bar{x}_{rms}** ενός τυχαίου ψηφιακού σήματος $x(n)$ ορίζεται για το συνολικό χρονικό διάστημα καταγραφής του σήματος στο οποίο με δειγματοληψία έχουν σημειωθεί n ζεύγη τιμών $(n, x(n))$, ως εξής:

$$\bar{x}_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^n x^2(n)}{n}} = \sqrt{\frac{x^2(1) + x^2(2) + \dots + x^2(n)}{n}} \quad (3.8)$$

Η **δειγματική διασπορά ή διακύμανση (sample variance) s^2** ενός τυχαίου ψηφιακού σήματος το οποίο έχει καταγραφεί με δειγματοληψία, δίνεται από μια από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$s^2 = \frac{[x(1) - \bar{x}]^2 + [x(2) - \bar{x}]^2 + \dots + [x(n) - \bar{x}]^2}{n-1} = \sum_{n=1}^n \frac{[x(n) - \bar{x}]^2}{n-1} \quad (3.9a)$$

ή

$$s^2 = \frac{1}{n-1} [(x^2(1) + x^2(2) + \dots + x^2(n)) - n\bar{x}^2] = \frac{1}{n-1} \left[\left(\sum_{n=1}^n x^2(n) \right) - n\bar{x}^2 \right] \quad (3.9\beta)$$

Η **δειγματική τυπική απόκλιση (standard deviation)** s ενός ψηφιακού σήματος είναι η τετραγωνική ρίζα της δειγματικής διασποράς s^2 :

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^n \frac{[x(n) - \bar{x}]^2}{n-1}} \quad (3.10)$$

Ο δειγματικός συντελεστής συσχέτισης r που εξετάζει πως δύο μεταβλητές X, Y μεταβάλλονται μεταξύ τους ορίζεται από τη σχέση:

$$r = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} \quad (3.11)$$

όπου,

$$S_X = \sqrt{\sum_{n=1}^n \frac{[x(n) - \bar{x}]^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{n=1}^n x^2(n) \right) - n\bar{x}^2} \quad (3.12)$$

$$S_Y = \sqrt{\sum_{n=1}^n \frac{[y(n) - \bar{y}]^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{n=1}^n y^2(n) \right) - n\bar{y}^2} \quad (3.13)$$

$$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{n=1}^n [x(n) - \bar{x}][y(n) - \bar{y}] \right) = \frac{1}{n-1} \left[\left(\sum_{n=1}^n x(n) \cdot y(n) \right) - n\bar{x}\bar{y} \right] \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.11) τις σχέσεις (3.12), (3.13), (3.14) προκύπτει:

$$r = \frac{(\sum_{n=1}^n x(n) \cdot y(n)) - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{[(\sum_{n=1}^n x^2(n)) - n\bar{x}^2][(\sum_{n=1}^n y^2(n)) - n\bar{y}^2]}} \quad (3.15)$$

Για τις εξεταζόμενες μεταβλητές X, Y υπάρχει **απόλυτη συσχέτιση** μεταξύ τους όταν $r = \pm 1$ καθότι αν γνωρίζουμε την τιμή της μιας γνωρίζουμε την τιμή της άλλης. Όταν $|r| > 0,90$ τότε λέμε ότι υπάρχει **ισχυρή συσχέτιση** μεταξύ των δύο μεταβλητών. Για $|r| < 0,10$, τότε λέμε ότι οι εξεταζόμενες μεταβλητές είναι **στατιστικά σχεδόν ασυσχέτιστες** και για $r = 0$ τότε οι εξεταζόμενες μεταβλητές **τελείως στατιστικά ασυσχέτιστες**.

3.4 Ισχύς και ενέργεια σημάτων

Η **στιγμιαία ισχύς** $P(t)$ ενός αναλογικού σήματος $x(t)$ ισούται με το τετράγωνο αυτού:

$$P(t) = x^2(t) \quad (3.16)$$

ενώ η **στιγμιαία ισχύς** $P(n)$ ενός ψηφιακού σήματος θα είναι:

$$P(n) = x^2(n) \quad (3.17)$$

Η **μέση ισχύς** $\bar{P}(t)$ ενός αναλογικού σήματος $x(t)$ ορίζεται σε μια περίοδο T , ως εξής:

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt \quad (3.18)$$

ενώ η **μέση ισχύς** $\bar{P}(n)$ ενός ψηφιακού σήματος $x(n)$ ορίζεται:

$$\bar{P}(n) = \frac{\sum_{n=1}^n P(n)}{n} = \frac{\sum_{n=1}^n x^2(n)}{n} \quad (3.19)$$

Όταν ισχύει $\bar{P}(t) > 0$ και $T \rightarrow \infty$ τότε καλούμε τα σήματα αυτά **σήματα ισχύος** όπως είναι για παράδειγμα ένα περιοδικό σήμα. Επίσης προκύπτει ότι η **μέση ισχύς** $\bar{P}(t)$ ισούται αριθμητικά με το τετράγωνο της **θετικής ρίζας μέσης τιμής** \bar{x}_{rms} του ψηφιακού σήματος $x(n)$.

Αν ολοκληρώσουμε τη σχέση (3.16) στη διάρκεια μιας περιόδου T τότε λαμβάνουμε την ενέργεια του αναλογικού σήματος δηλαδή:

$$W = \int_0^T P(t) dt = \int_0^T x^2(t) dt \quad (3.20)$$

ενώ η **ενέργεια** W ενός ψηφιακού σήματος $x(n)$ ορίζεται από το άθροισμα της στιγμιαίας ισχύος στη διάρκεια του σήματος:

$$W = \sum_{n=1}^n x^2(n) \quad (3.21)$$

Όταν η **ενέργεια** W δεν τείνει στο άπειρο για $T \rightarrow \infty$ ή $n \rightarrow \infty$ τότε το σήμα αυτό καλείται **σήμα ενέργειας** τα οποία ορίζονται ως εκείνα τα σήματα που μειώνονται εκθετικά και τείνουν ασυμπτωματικά στο μηδέν καθώς επίσης και όλα τα σήματα πεπερασμένου χρόνου.

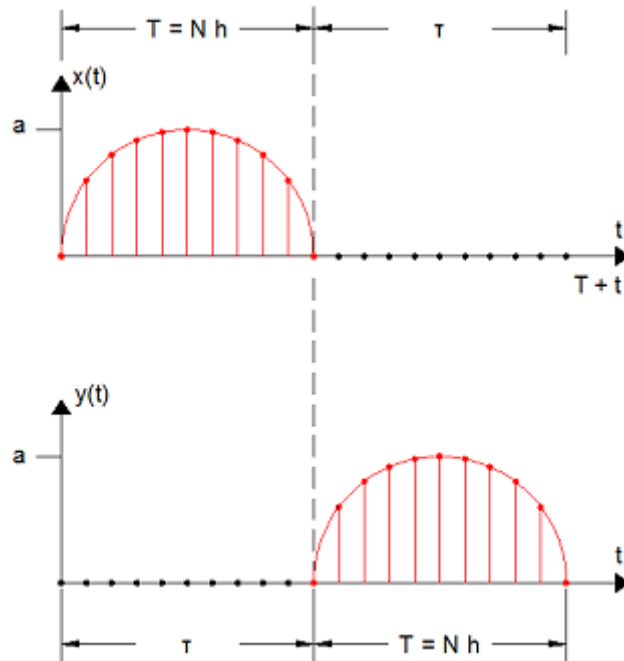
Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού της **μέσης ισχύος** ενός ψηφιακού σήματος δείχνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$\bar{P}(n) = \frac{\sum_{n=1}^1 x^2(n)}{n} = \frac{W}{n} = (\bar{x}_{rms})^2 \quad (3.22)$$

Παρατηρώντας τη παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι γίνεται η χρήση της **ενέργειας** και της **θετικής ρίζας μέσης τιμής** και πως συνδεόμαστε αυτά τα μεγέθη με τη **μέση ισχύ**. Εξαιτίας η (3.22) καθίσταται ιδιαίτερα σημαντική καθώς στις εφαρμογές επεξεργασίας σημάτων η εύρεση της \bar{x}_{rms} εκφράζει έμμεσα τόσο την **ενέργεια** όσο και την **μέση ισχύ** του σήματος.

3.5 Συσχέτιση σημάτων

Έστω ότι έχουμε δύο ψηφιακά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ με το δεύτερο σήμα να είναι μετατοπισμένο χρονικά κατά $\tau = T$ σε σχέση με το πρώτο και θέλουμε να εξετάσουμε πόσο όμοια είναι μεταξύ τους [E3, E4, E8].



Σχήμα 3.5: Απεικόνιση δύο όμοιων σημάτων με χρονική διαφορά τ

Για να εξετάσουμε την ομοιότητα των δύο σημάτων υπολογίζεται το εσωτερικό τους γινόμενο $R_{xy}(\tau)$ για όλες τις τιμές **χρονικής καθυστέρησης** τ που είναι δυνατόν να λάβει [E3, E4, E8]:

$$R_{xy}(\tau) = x(t) \cdot y(t + \tau) \quad (3.23)$$

Η **χρονική καθυστέρηση** μαθηματικά εκφράζεται ως $\tau = r \cdot h$, όπου το r παίρνει θετικές ακέραιες τιμές (0, 1, 2, 3, ... m) και ονομάζεται **lag number**. Το εσωτερικό γινόμενο $R_{xy}(\tau)$ καλείται **χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** και δείχνει την **ομοιότητα** μεταξύ δύο σημάτων οποιουδήποτε είδους, με μοναδική προϋπόθεση αυτά να έχουν το ίδιο βήμα ψηφιοποίησης. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του εσωτερικού γινομένου $R_{xy}(\tau)$ για κάποιο τ τόσο μεγαλύτερη είναι η **ομοιότητα – συσχέτιση** μεταξύ των εξεταζόμενων σημάτων. Στη περίπτωση που το εσωτερικό γινόμενο λάβει μηδενική τιμή τότε τα εξεταζόμενα σήματα είναι **ασυσχέτιστα** μεταξύ τους [], [].

Αντιστοίχως η **χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης** ενός σήματος $R_{xx}(\tau)$ δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο:

$$R_{xx}(\tau) = x(t) \cdot x(t + \tau) \quad (3.24)$$

Οι παραπάνω σχέσεις (3.23), (3.24) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την ανίχνευση παρεμβολών στα σήματα οι οποίες στη βιβλιογραφία [E3, E4, E7, E8] αναφέρονται ως **θόρυβος**. Πιο συγκεκριμένα:

- Όταν απομακρύνεται ο **θόρυβος** το **καθαρό φιλτραρισμένο σήμα** που απομένει και ο **θόρυβος** πρέπει να είναι σήματα μεταξύ τους **ασυσχέτιστα** δηλαδή να ισχύει $R_{xy}(\tau) \approx 0$.
- Αν ο **θόρυβος** μετατοπιστεί ελάχιστα χρονικά τότε η **αυτοσυσχέτιση** $R_{xx}(\tau)$ του **θορύβου** είναι πάρα πολύ περιορισμένη.
- Το εσωτερικό γινόμενο της **αυτοσυσχέτισης** $R_{xx}(\tau)$ για $\tau = 0$ εκφράζει την **ενέργεια** του σήματος.

3.6 Ανάλυση Fourier και εφαρμογή στη θεωρία σημάτων

Από αυστηρά μαθηματική προσέγγιση η ανάλυση Fourier ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο γενικές συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν ή να προσεγγιστούν από αλγεβρικά αθροίσματα απλών τριγωνομετρικών συναρτήσεων που είναι γνωστά ως σειρές Fourier. Η ανάλυση Fourier έχει εφαρμογές σε πολλά επιστημονικά παιδιά όπως στη φυσική στην ακουστική και σε πολλές άλλες, αλλά έχει επίσης εφαρμογή και στη θεωρία σημάτων.

Στη θεωρία επεξεργασίας σημάτων όπως έχει ήδη προαναφερθεί ένα σήμα είναι μια σύναρτηση χρόνου αλλά χωρίς καμία πληροφορία για τη συχνότητα ενώ ο **μετασχηματισμός Fourier** είναι συναρτήσεως της συχνότητας χωρίς καμία πληροφορία για τον χρόνο. Ουσιαστικά πρόκειται για μια μετατροπή από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων. Πέρα από τον **μετασχηματισμό Fourier** υπάρχουν και άλλες εναλλακτικές μέθοδοι όπως για παράδειγμα ο **μετασχηματισμός Gabor**, **μετασχηματισμοί τύπου wavelet** κ.α.

Έστω ότι μια σύναρτηση (περιοδική) σήματος $x(t)$ που έχει την ιδιότητα $x(t) = x(t + T)$ (όπου T η περίοδος επανάληψης της) η οποία με χρήση τριγωνομετρικής σειράς θα έχει τη μορφή:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (3.25)$$

Πρέπει να υπολογιστούν οι συντελεστές a_k, b_k . Ξεκινώντας από τον πρώτο αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης (3.25) με $\cos \lambda t$ και ολοκληρώνοντας τα για διάστημα μιας περιόδου προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \cdot \cos \lambda t \cdot dt &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \cos \lambda t \cdot dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \cos kt \cdot \cos \lambda t \cdot dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \sin kt \cdot \cos \lambda t \cdot dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

Όλα τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέρους είναι ίσα με μηδέν πλην του ολοκληρώματος που πολλαπλασιάζει τον άγνωστο συντελεστή δηλαδή το a_k που για $k = \lambda$ αυτό δίνει π . Άρα:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \cdot \cos kt \cdot dt \quad \mu\epsilon \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (3.27)$$

Για $t_0 = 0$ και $t_0 + 2\pi = T$ θα έχουμε:

$$a_k = \frac{1}{T/2} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos \frac{k\pi t}{T/2} \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt \quad \mu\epsilon \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (3.28)$$

Ομοίως υπολογίζεται και ο άγνωστος συντελεστής b_k πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.25) με $\sin \lambda t$ και ολοκληρώνοντας τα για διάστημα μιας περιόδου προκύπτει:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \cdot \sin \lambda t \cdot dt &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \sin \lambda t \cdot dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \cos k t \cdot \sin \lambda t \cdot dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \sin k t \cdot \sin \lambda t \cdot dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέρους είναι όλα με μηδέν εκτός αυτού πολλαπλασιάζει τον άγνωστο συντελεστή δηλαδή το b_k που για $k = \lambda$ αυτό δίνει π . Άρα:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{t_0}^{t_0+2\pi} x(t) \cdot \sin k t \cdot dt \quad \mu\epsilon \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (3.30)$$

Όμοίως πάλι για $t_0 = 0$ και $t_0 + 2\pi = T$ θα έχουμε:

$$b_k = \frac{1}{T/2} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin \frac{k\pi t}{T/2} \cdot dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt \quad \mu\epsilon \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (3.31)$$

Παρατηρείται ότι όταν τυγχάνει η περίπτωση που η συνάρτηση $x(t)$ είναι **άρτια** δηλαδή ισχύει $x(t) = x(-t)$ τότε $b_k = 0$ και το ανάπτυγμα της θα περιέχει μόνο όρους **συνημιτόνων**, ενώ αν είναι **περιττή** δηλαδή $x(t) = -x(-t)$ τότε $a_k = 0$ και το ανάπτυγμα της θα περιέχει όρους **ημιτόνων**.

Η σχέση (3.25) καλείται **τριγωνομετρική σειρά Fourier μορφής A** με τις σχέσεις (3.29), (3.31) να υπολογίζουν τους άγνωστους συντελεστές a_k, b_k , με $k = 1, 2, 3, \dots, \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1$ να είναι η **κυκλική συχνότητα** σε rad/s και $f_1 = 1/T$ η **συχνότητα** σε Hertz (Hz).

Η **τριγωνομετρική σειρά Fourier μορφής B** μπορεί να εκφράσει τη $x(t)$ ως άθροισμα μιας στατικής συνιστώσας $a_0/2$ και ενός απείρου αριθμού τριγωνομετρικών όρων που έχουν πλάτη A_k και φάσεις $\varphi_{c,k}$ ή $\varphi_{s,k}$ αναλόγως την περίπτωση. Εκφράζοντας τη σειρά Fourier ως έκφραση συνημιτόνου προκύπτει:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega k t + \varphi_{c,k}) \quad (3.32)$$

Όπου $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ το **ισοδύναμο πλάτος** δύο αρμονικών όρων που έχουν την ίδια συχνότητα ωk , $\varphi_{c,k} = -\tan^{-1}(b_k/a_k)$ η **διαφορά φάσης** μεταξύ των δύο αρμονικών όρων, $k = 1, 2, 3, \dots$ και οι συντελεστές a_k, b_k να υπολογίζονται από (3.29), (3.31).

Ομοίως, εκφράζοντας τη σειρά Fourier ως έκφραση ημιτόνου προκύπτει:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_{s,k}) \quad (3.33)$$

Όπου $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ το **ισοδύναμο πλάτος** δύο αρμονικών όρων που έχουν την ίδια συχνότητα ω_k , $\varphi_{s,k} = \tan^{-1}(a_k/b_k)$ η **διαφορά φάσης** μεταξύ των δύο αρμονικών όρων, $k = 1, 2, 3, \dots$ και οι συντελεστές a_k, b_k να υπολογίζονται από (3.29), (3.31).

Η **τριγωνομετρική σειρά εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier** εκφράζει τη συνάρτηση $x(t)$, στο χρονικό διάστημα της περιόδου T επανάληψης των δεδομένων σε εκθετική μιγαδική μορφή με χρήση του **τύπου του Euler** για θετικές συχνότητες:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{k=+\infty} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2j} \right) e^{jk\omega t} = \sum_{k=1}^{k=+\infty} |F_k| e^{jk\omega t} \quad (3.34)$$

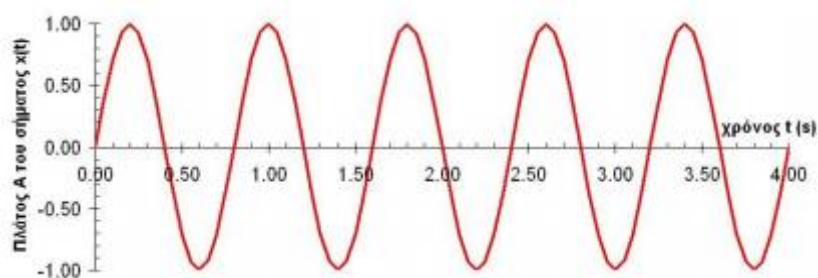
Όπου $|F_k| = 0.50 \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ το **μέτρο Fourier**, το οποίο δίνει το ήμισυ του πλάτους της πραγματικής τιμής του k αρμονικού όρου.

3.7 Φάσμα πλάτων της σειράς Fourier

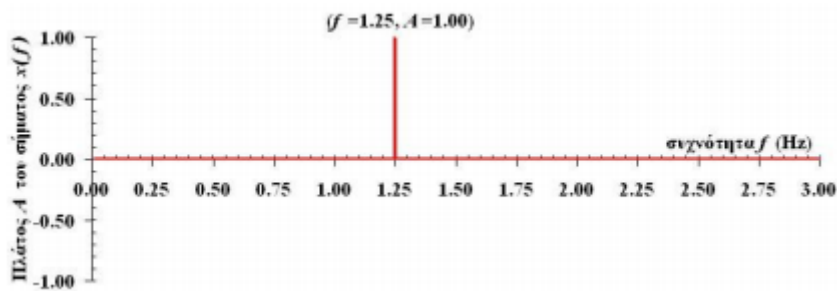
Έστω ότι έχουμε την παρακάτω εξίσωση που περιγράφει ένα ημιτονοειδές σήμα $x(t)$:

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi f t) \quad (3.35)$$

Αν αναπαρασταθεί αυτό το σήμα συναρτήσει του χρόνου t τότε αυτή η γραφική παράσταση καλείται **χρονοϊστορία** σήματος ενώ αν αναπαρασταθεί συναρτήσει της συχνότητας τότε καλείται **φάσμα πλάτους** του σήματος όπως φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα [].



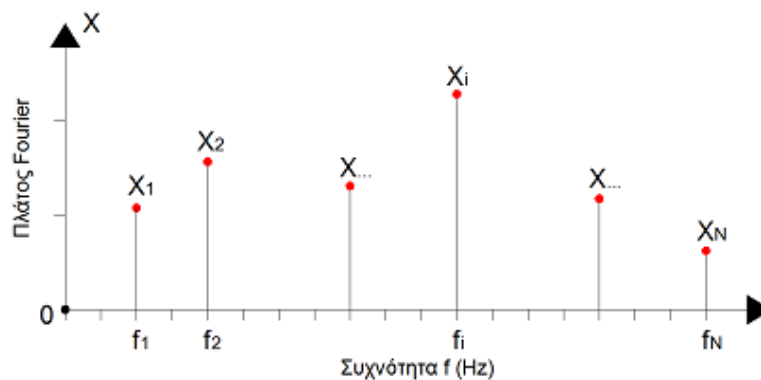
Σχήμα 6.3: Απεικόνιση χρονοϊστορίας σήματος



Σχήμα 3.7: Απεικόνιση φάσματος πλάτους σήματος

Αν έχουμε ένα σήμα $x(t)$ το οποίο είναι ένα άθροισμα πολλών διαφορετικών όρων τότε το φάσμα πλάτων Fourier του παραπάνω σήματος για συνεχείς τιμές της συχνότητας f είναι της παρακάτω μορφής με τις τιμές στον άξονα x να παριστάνουν το ήμισυ των πραγματικών πλάτων των αρμονικών όρων [Ε8]:

$$x(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t) + \dots + A_N \cdot \sin(2\pi f_N t) \quad (3.36)$$



Σχήμα 3.8: Συνεχές φάσμα πλάτων Fourier εκθετικής μιγαδικής μορφής σύνθετης συνεχούς περιοδικής συνάρτησης $x(t)$

Σημειώνεται ότι το σήμα της εξίσωσης (3.36) είναι περιοδικό αφού παράγεται από απλή επαλληλία αρμονικών όρων. Η θεμελιώδης συχνότητα f_0 του σήματος ισούται με το μέγιστο κοινό διαιρέτη των συχνοτήτων των N αρμονικών όρων, συνεπώς η θεμελιώδης περίοδος του σήματος είναι $T = 1/f_0$.

3.8 Φάσμα φάσεων της σειράς Fourier

Έστω ότι έχουμε το παρακάτω σήμα που εκφράζεται με τη παρακάτω σχέση:

$$x(t) = a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t) \quad (3.37)$$

Χρησιμοποιώντας τη **τριγωνομετρική σειρά Fourier μορφής B** ως έκφραση ημιτόνου προκύπτει:

$$x(t) = A_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi_{s,k}) \quad (3.38)$$

Όπου $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ το **ισοδύναμο πλάτος** δύο αρμονικών όρων και $\varphi_{s,k} = \tan^{-1}(a_k/b_k)$ η **διαφορά φάσης** μεταξύ των δύο αρμονικών όρων.

Χρησιμοποιώντας τη **τριγωνομετρική σειρά Fourier μορφής B** ως έκφραση συνημιτόνου προκύπτει:

$$x(t) = A_k \cdot \cos(k\omega t + \varphi_{c,k}) \quad (3.39)$$

Όπου $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ το **ισοδύναμο πλάτος** δύο αρμονικών όρων και $\varphi_{c,k} = -\tan^{-1}(b_k/a_k)$ η **διαφορά φάσης** μεταξύ των δύο αρμονικών όρων.

Τέλος, χρησιμοποιώντας τη **τριγωνομετρική σειρά εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier** προκύπτει:

$$x(t) = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\right) \cdot e^{j\varphi_k} = |F_k|e^{j\varphi_k} \quad (3.40)$$

Όπου $|F_k| = 0.50\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ το **μέτρο Fourier**, το οποίο δίνει το ήμισυ του πλάτους της πραγματικής τιμής του k αρμονικού όρου και $\varphi_k = -\tan^{-1}(b_k/a_k)$ η **γωνία φάσεως** του σήματος.

Ορίζεται ως **φάσμα φάσεων** ενός σήματος η γραφική παράσταση της ανά περίπτωσης γωνίας φάσεως $\varphi_{s,k}$, $\varphi_{c,k}$, φ_k συναρτήσει της συχνότητας f ή της κυκλικής συχνότητας ω .

3.9 Πυκνότητα φάσματος ενέργειας σήματος

Ισχύει το **θέωρημα του Parseval** σύμφωνα με το οποίο $[\cdot]$, $[\cdot]$: η **ενέργεια του σήματος μπορεί να δοθεί ισοδύναμα είτε στο πεδίο του χρόνου t είτε στο πεδίο των κυκλικών συχνοτήτων ω** . Εφαρμοζόντας το στην εξίσωση (3.21) προκύπτει:

$$W = \sum_{n=1}^n x^2(n) = \int_0^T x^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.41)$$

Ο όρος $|F(\omega)|^2$ είναι πάντα θετικός, καλείται **πυκνότητα φάσματος ενέργειας (energy density spectrum)** και είναι ίσος με το τετράγωνο των **πλατών Fourier**. Επιπλέον ο όρος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η ενέργεια ενός σήματος σε μια ζώνη συχνοτήτων μεταξύ ω_1 και ω_2 σύμφωνα με τη παρακάτω σχέση:

$$W(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |F(\omega)|^2 d\omega \right) + \left(\frac{1}{2\pi} \int_{+\omega_1}^{+\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \right) \quad (3.42)$$

Επειδή ο όρος $|F(\omega)|^2$ σύμφωνα με τα παραπάνω είναι πάντα θετικός, αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον υπολογισμό της ενέργειας του σήματος στην περιοχή των θετικών κυκλικών συχνοτήτων διπλασιάζοντας την τιμή της ενέργειας της ζώνης αυτής στις θετικές κυκλικές συχνότητες συνεπώς προκύπτει:

$$W(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{1}{\pi} \int_{+\omega_1}^{+\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega \right) \quad (3.43)$$

Γνωρίζοντας την ενέργεια του σήματος εντός μιας συγκεκριμένης ζώνης αρμονικών όρων, μπορεί να υπολογιστεί το ποσοστό της ενέργειας που περιέχει η ζώνη αυτή, συγκριτικά με τη συνολική ενέργεια του σήματος [E8].

3.10 Πυκνότητα φάσματος ισχύος σήματος

Συνδυάζοντας τις (3.18) και (3.22) λαμβάνουμε τον όρο $|F(\omega)|^2/T$ ο οποίος ορίζεται ως **πυκνότητα φάσματος ισχύος (power density spectrum)**, όπου T η συνολική και πεπερασμένη χρονική διάρκεια του σήματος.

Αν η **ισχύς** του σήματος σε κάποιον αρμονικό όρο είναι γνωστή μπορεί να υπολογιστεί το **ποσοστό ισχύος** αυτού του όρου συγκριτικά με τη **συνολική ισχύ** του σήματος.

Γενικά, για να υπολογιστεί η **πυκνότητα φάσματος ισχύος** ή η **πυκνότητα φάσματος ενέργειας** θα πρέπει να διερευνηθεί αν το εξεταζόμενο σήμα είναι σήμα ισχύος ή σήμα ενέργειας. Γι' αυτό το λόγο γίνεται χρήση του **θεωρήματος των Wiener – Khintchine** σύμφωνα με το οποίο [],[]:

Τόσο η **πυκνότητα φάσματος ενέργειας** ενός **σήματος ενέργειας** όσο και η **πυκνότητα φάσματος ισχύος** ενός **σήματος ισχύος** ισούνται με το φάσμα πλατών της **εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier** της χρονικής συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$.

Αυτό το φάσμα πλατών Fourier ονομάζεται και στις δύο περιπτώσεις **συνάρτηση αυτοφασματικής πυκνότητας (autospectral density function ή power spectral density)**, όπου ο υπολογισμός της γίνεται σε δύο βήματα:

- Στο πρώτο βήμα υπολογίζεται η χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος.
- Στο δεύτερο βήμα γίνεται χρήση του **ταχύ μετασχηματισμού Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)** στη χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης όπου προκύπτει το διάγραμμα φασματικής πυκνότητας ισχύος.

3.11 Οι συναρτήσεις αυτοφασματικής και ετεροφασματικής πυκνότητας

Στα τυχαία σήματα είναι σημαντικό να υπολογιστεί για κάθε σήμα ξεχωριστά το διάγραμμα της συνάρτησης αυτοφασματικής πυκνότητας η οποία θα συμβολίζεται με $S_{xx}(f)$ όταν αναφερόμαστε σε διάγραμμα δύο πλευρών (δηλαδή για αρνητικές και θετικές συχνότητες) και με $G_{xx}(f)$, όταν αναφερόμαστε σε διάγραμμα μιας πλευράς (δηλαδή για θετικές συχνότητες μόνο) [Ε8]. Η συνάρτηση αυτοφασματικής πυκνότητας δίνει ένα μέτρο για την ισχύ που εμπεριέχεται σε κάθε αρμονικό όρο [Ε8].

Για να υπολογιστούν οι παραπάνω συναρτήσεις $G_{xx}(f)$ και $S_{xx}(f)$ γίνεται χρήση του προαναφερθέντος **θεωρήματος των Wiener – Khintchine** υπολογίζοντας αρχικά τη χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xx}(\tau)$ με βήμα ψηφιοποίησης ίσο με αυτό του αρχικού εξεταζόμενου σήματος και στη συνέχεια υπολογίζεται το φάσμα πλατών της εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier του σήματος $R_{xx}(\tau)$ και έπειτα αναλόγως την περίπτωση προκύπτει είτε το διάγραμμα $G_{xx}(f)$ όταν έχουμε θετικές συχνότητες είτε το διάγραμμα $S_{xx}(f)$ όταν έχουμε αρνητικές και θετικές συχνότητες τα οποία ορίζονται αντίστοιχα από τις παρακάτω σχέσεις:

$$G_{xx}(f) = 2 \cdot S_{xx}(f), \quad 0 < f < +\infty \quad (3.44)$$

Και

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad -\infty < f < +\infty \quad (3.45)$$

Στην περίπτωση που εξετάζονται δύο διαφορετικά σήματα έστω $x(t)$ και $y(t)$, τότε η συνάρτηση ετεροφασματικής πυκνότητας θα υπολογιστεί με αντίστοιχο τρόπο χρησιμοποιώντας τη χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_{xy}(\tau)$ των δύο σημάτων [].

3.12 Διαδικασία ανασύνθεσης σήματος

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στα σήματα υπάρχουν παρεμβολές που καλούνται **θόρυβοι**. Η ανασύνθεση ενός σήματος είναι αυτή ακριβώς η διαδικασία σύμφωνα με την οποία απομακρύνεται ο θόρυβος με χρήση ειδικών **μαθηματικών φίλτρων** για την απομόνωση της πληροφορίας που μας ενδιαφέρει. Στην παρούσα περίπτωση γίνεται ανασύνθεση για την απομόνωση των ιδιομορφικών χρονοϊστοριών απόκρισης για την εύρεση των δυναμικών χαρακτηριστικών μιας κατασκευής. Μαθηματικά αυτό επιτυγχάνεται μετατρέποντας ένα σήμα που είναι συνάρτηση του χρόνου σε συνάρτηση συχνότητας τύπου της **εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier** έχοντας γνωστά τα πλάτη και τη διαφορά φάσης των αρμονικών όρων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η υπόψη ανασύνθεση του σήματος δεν δίδει το 100% του αρχικού σήματος αλλά μια ικανοποιητική προσέγγιση αυτού διατηρώντας τα βασικά χαρακτηριστικά πληροφορίας που μεταφέρονται από αυτό.

Συνοψίζοντας, μας ενδιαφέρει η απομάκρυνση του θορύβου όπως προαναφέρθηκε και πριν. Αυτό επιτυγχάνεται υπολογίζοντας πρώτα το φάσμα πλατών Fourier του σήματος, έπειτα κάνοντας χρήση την έννοια της συνέλιξης πολλαπλασιάζουμε το φάσμα πλατών Fourier με το επιθυμητό μαθηματικό φίλτρο (ουσιαστικά υπολογίζονται τα νέα διορθωμένα πλάτη), και τέλος ακολουθεί η ανασύνθεση του σήματος χρησιμοποιώντας τα νέα διορθωμένα πλάτη και τις γνωστές από πριν γωνίες διαφοράς φάσεων ενώ το νέο προκύπτων σήμα καλείται πλέον **φιλτραρισμένο**.

3.13 Εύρεση της εκθετικής μιγαδικής μορφής σειράς Fourier ψηφιακών σημάτων

Από τα παραπάνω κρίνεται αναγκαίο ο υπολογισμός της εκθετικής μιγαδικής μορφής σειράς Fourier. Για να αναπτυχθεί μια συνάρτηση σε σειρά Fourier πρέπει να είναι ορισμένη και περιοδική καθώς η ανάπτυξη της σε σειρά Fourier λαμβάνει χώρα εντός του διαστήματος της περιόδου και αυτό είναι σημαντικό καθώς αν και στη πλειονότητα τους τα σήματα είναι ορισμένα δεν χαρακτηρίζονται πάντα από περιοδικότητα ή συμμετρία συνεπώς γίνεται η παραδοχή ότι το σήμα διαθέτει περιοδικότητα T ίση με το συνολικό χρόνο καταγραφής του εντός της οποίας αναπτύσσεται η συνάρτηση σε σειρά Fourier [E7, E8].

Έστω ένα τυχαίο ψηφιακό σήμα με συνολικό χρόνο καταγραφής ίσο με T το οποίο έχει ψηφιοποιηθεί σε άρτιο αριθμό N ίσων χρονικών διαστημάτων διάρκειας h , ισχύει η σχέση:

$$x_n = x(n \cdot h), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.46)$$

Η τελική μορφή της σειράς Fourier που λαμβάνει υπόψη όλα τα δεδομένα των N χρονικών διαστημάτων, είναι η εξής:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} B_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}\right) \quad (3.47)$$

Όπου $t = n \cdot h$ οι διακριτές χρονικές στιγμές ψηφιοποίησης του σήματος, $n = 1, 2, 3, \dots, N$, $T = N \cdot h$ ο συνολικός χρόνος καταγραφής και k ο συντελεστής αύξησης της συχνότητας.

Στις διακριτές χρονικές τιμές $t = n \cdot h$ με βάση τις εκφράσεις των T και n η σειρά Fourier θα είναι της μορφής:

$$x_n = A_0 + \sum_{k=1}^{N/2} A_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right) + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} B_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right) \quad (3.48)$$

Με

$$A_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n = \bar{x} \quad (3.49)$$

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.50)$$

$$A_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cdot \cos(n \cdot \pi) \quad (3.51)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N x_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot k \cdot n}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.52)$$

3.14 Ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)

Όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός δειγματοληψίας προκειμένου να μειωθεί ο υπολογιστικός φόρτος χρησιμοποιείται ο **ταχύς μετασχηματισμός Fourier (Fast Fourier Transform – FFT)** ο οποίος σε συγκεκριμένες διακριτές συχνότητες δίνει τα πλάτη εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier.

Έστω ότι το τυχαίο ψηφιακό σήμα $x(t)$ είναι ψηφιοποιημένο σε N ίσα χρονικά διαστήματα μήκους h το καθένα. Ο συνολικός χρόνος καταγραφής του είναι $T = N \cdot h$ ενώ η κάθε χρονική στιγμή είναι $t_n = n \cdot h$. Αν η μέτρηση του χρόνου αρχίζει για $n = 0$, τότε το σήμα $x(t)$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$x_n = x(n \cdot h), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.53)$$

Ο μετασχηματισμός του ψηφιακού σήματος στην **εκθετική μιγαδική μορφή Fourier** θα είναι:

$$X(f, T) = h \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi f n h} \quad (3.54)$$

Τα πλάτη του FFT υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις διακριτές συχνότητες που δίνονται από τη σχέση:

$$f_k = \frac{k}{T} = \frac{k}{N \cdot h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.55)$$

Ισοδύναμα για τις διακριτές συχνότητες ο **ταχύς μετασχηματισμός Fourier** γράφεται:

$$X_k = \frac{X(f_k)}{h} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{\frac{-j2\pi k n}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.56)$$

Φυσικό νόημα έχουν οι τιμές όταν ισχύει $k \leq N/2$ καθώς για $k = N/2$ επιτυγχάνεται η **συχνότητα Nyquist**. Επίσης η (3.56) αναφέρεται επίσης και ως **διακεκριμένος**

μετασχηματισμός Fourier (discrete Fourier transform). Παριστάνοντας γραφικά τον όρο $e^{-j2\pi kn/N}$ για κάθε διακριτή συχνότητα f_k , προκύπτει το διάγραμμα πλατών του **ταχέως μετασχηματισμού Fourier**.

Ο υπολογισμός των πλατών Fourier $|F_k|$ και των φάσεων φ_k της εκθετικής μιγαδικής μορφής μέσου του FFT μπορεί να επιτευχθεί κάνοντας χρήση του παρακάτω αλγορίθμου (αλγόριθμος FFT).

- **1° Βήμα:** Υπολογίζεται η ελάχιστη δυνατή ανιχνεύσιμη συχνότητα στο σήμα κάνοντας χρήση της σχέσης $f_{min} = 1/T$.
- **2° Βήμα:** Υπολογίζεται η μέγιστη δυνατή ανιχνεύσιμη συχνότητα (Nyquist) στο σήμα κάνοντας χρήση της σχέσης $f_{max} = 1/2h$.
- **3° Βήμα:** Υπολογίζονται οι διακριτές τιμές των συχνοτήτων $\lambda \cdot \Delta f$ ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$) για τις οποίες θα υπολογιστούν τα φάσματα πλατών και φάσεων Fourier. Στο παρόν βήμα πρέπει να δοθεί προσοχή στο βήμα αύξησης των συχνοτήτων Δf καθώς αυτό θα πρέπει να είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με την ελάχιστη δυνατή συχνότητα. Επιπλέον, πρέπει ο ελάχιστος αριθμός των διακριτών συχνοτήτων να προκύπτει άμεσα από το λόγο f_{max}/f_{min} . Για λόγους ακριβείας και ευστάθειας στους υπολογισμούς προτείνεται μεγαλύτερη πύκνωση των διακριτών συχνοτήτων f_i , οπότε λαμβάνεται διπλάσιος ή πολλαπλάσιος αριθμός διακριτών συχνοτήτων f_i του λόγου f_{max}/f_{min} . Κάποιες φορές το στοιχειώδες βήμα συχνοτήτων Δf δίνεται από τη σχέση $\Delta f = f_{max}/2^v$ (όπου v ο μικρότερος θετικός ακέραιος έτσι ώστε να ισχύει $f_{max}/2^v \leq f_{min}$) ή σε ειδικές περιπτώσεις (π.χ. κατά την εφαρμογή της μεθόδου των ιδιομορφικών χρονοϊστοριών απόκρισης επιταχύνσεων), από τη σχέση $\Delta f = f_{max}/2^{v+3}$.
- **4° Βήμα:** Υπολογισμός των k_i από τη σχέση $k_i = f_i \cdot T$. Σημειώνεται ότι πρέπει να ελέγχεται αν $k_i < 0.5 N$ ώστε να μην παραβιάζεται η **συχνότητα Nyquist**.
- **5° Βήμα:** Υπολογίζεται η γωνία $2\pi kn/N$ για κάθε n με τιμή εκκίνησης τη μικρότερη τιμή του k .
- **6° Βήμα:** Υπολογίζονται το συνημίτονο $\cos(2\pi kn/N)$ και το ημίτονο $\sin(2\pi kn/N)$ για κάθε n .
- **7° Βήμα:** Υπολογίζονται οι όροι $x_n \cdot \cos(2\pi kn/N)$ και $x_n \cdot \sin(2\pi kn/N)$ για κάθε n .
- **8° Βήμα:** Υπολογίζονται τα αθροίσματα C_k και S_k για όλα τα δεδομένα $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

$$C_k = \sum_{n=1}^N x_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (3.57)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^N x_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad (3.58)$$

- **9° Βήμα:** Υπολογισμός του πλάτους $|F_k|$ του k αρμονικού όρου, σύμφωνα με την ισοδύναμη εκθετική μιγαδική μορφή από τη σχέση:

$$|F_k| = h \sqrt{C_k^2 + S_k^2} \quad (3.59)$$

- **10° Βήμα:** Υπολογισμός της διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο αρμονικών όρων, σύμφωνα με την ισοδύναμη εκθετική μιγαδική μορφή της σειράς Fourier, από τη σχέση:

$$|\varphi_k| = -\tan^{-1} \left(\frac{S_k}{C_k} \right) \quad (3.60)$$

- **11° Βήμα:** Αύξηση του k και επανάληψη των υπολογισμών. Το πλάτος και η γωνία φάσης μπορούν να υπολογιστούν σε οποιαδήποτε επιθυμητή συχνότητα, πέρα από τις προκαθορισμένες διακριτές τιμές, δίνοντας στο k συγκεκριμένη τιμή ρητού αριθμού.

3.15 Η συνάρτηση δέλτα $\delta(t)$ Dirac

Η συνάρτηση δέλτα $\delta(t)$ Dirac αποτελεί ένα από τα πιο βασικά στοιχεία στη θεωρία σημάτων. Από αυστηρή μαθηματική άποψη η $\delta(t)$ δεν αποτελεί συνάρτηση με την κλασική έννοια αλλά μια **γενικευμένη συνάρτηση** ή **κατανομή** αλλά για πρακτικούς λόγους καλείται συνάρτηση [E3, E4, E8].

Έστω μια μοναδιαία κρούση η οποία συμβαίνει ακαριαία τη χρονική στιγμή $t = 0$, και διαρκεί απειροστό χρονικό διάστημα dt , τότε η μορφή της συνάρτησης $\delta(t)$ θα είναι:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0 \quad (3.61)$$

$$\delta(t) = 1, \quad t = 0 \quad (3.62)$$

Ισχύει η παρακάτω ιδιότητα λόγω της μορφής της συνάρτησης $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (3.63)$$

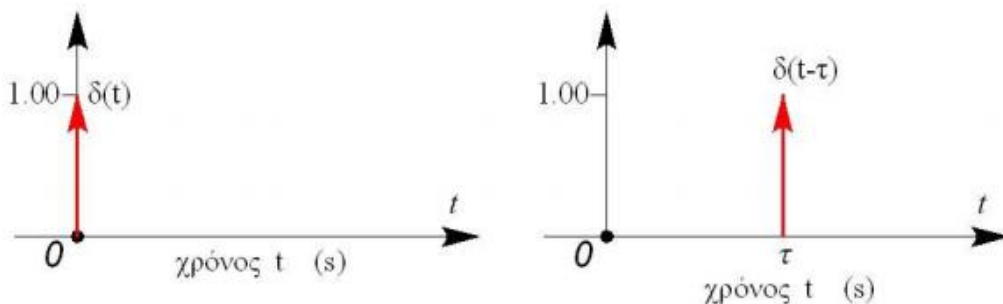
Αν η συνάρτηση $\delta(t)$ μετατοπισθεί κατά χρόνο τ σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα τότε ισχύει:

$$\delta(t - \tau) = 0, \quad t \neq \tau \quad (3.64)$$

$$\delta(t - \tau) = 1, \quad t = \tau \quad (3.65)$$

Και η παραπάνω ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα παίρνει τη μορφή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (3.66)$$



Σχήμα 3.9: Η συνάρτηση δέλτα Dirac

Μια από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα είναι η κάτωθι: Η συνέλιξη της συνάρτησης δέλτα $\delta(t - \tau)$ με ένα σήμα $x(t)$ δίνει την τιμή του σήματος $x(t)$ στη χρονική στιγμή τ δηλαδή ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) \cdot x(t) dt = x(\tau) \quad (3.67)$$

Ειδικότερα για τα ψηφιακά σήματα αποτελούμενα από $n = 1, 2, 3, \dots N$ παρατηρήσεις η συνάρτηση δέλτα θα είναι της μορφής:

$$\delta(n) = 0, \quad n \neq 0 \quad (3.68)$$

$$\delta(n) = 1, \quad n = 0 \quad (3.69)$$

Η εξίσωση (3.67) αποτελεί τη θεωρητική βάση της δειγματοληψίας που συμβαίνει κατά τη μετατροπή ενός συνεχούς σήματος σε ψηφιακό όπως περιγράφηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Το τραίνο των μοναδιαίων κρούσεων που θεωρείται ότι χρησιμοποιείται στη δειγματοληψία, προκειμένου να μετατραπεί ένα συνεχές σήμα σε ψηφιακό, είναι μια σειρά ακαριαίων μοναδιαίων κρούσεων, απειροστής χρονικής διάρκειας, ανά σταθερά χρονικά διαστήματα h της δειγματοληψίας.

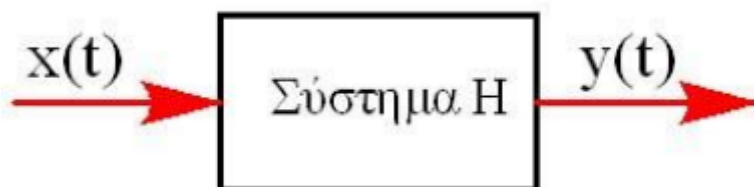
Μια επίσης σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα είναι ότι ο μετασχηματισμός αυτής στην εκθετική μιγαδική μορφή Fourier δίνει σταθερό φάσμα πλατών (FFT) για όλες τις συχνότητες. Με άλλα λόγια η συνάρτηση δέλτα ισοδυναμεί με σήμα **λευκού θορύβου (white noise)** δηλαδή το διάγραμμα του φάσματος πλατών Fourier και των συνακόλουθων **συναρτήσεων αυτοφασματικής πυκνότητας (auto – spectral density function ή power spectral density)** παριστάνουν μια οριζόντια γραμμή στο πεδίο των συχνοτήτων.

3.16 Συστήματα αλλοίωσης σημάτων – Φίλτρα

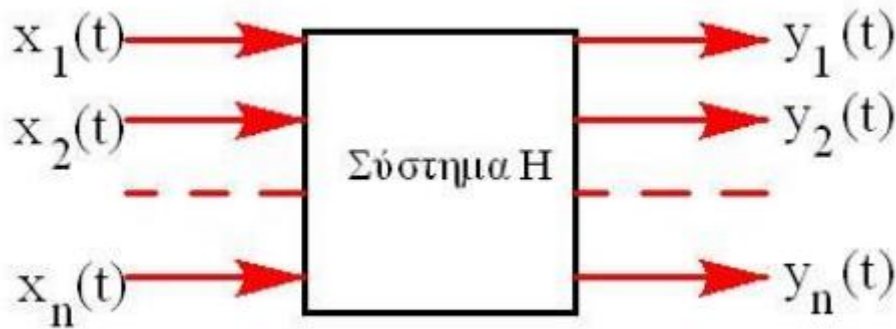
Ένα σήμα εισόδου που παράγεται από μια πηγή, εξαιτίας των διαύλων που εισέρχεται, αλλοιώνεται και μετατρέπεται σε ένα καταγεγραμμένο σήμα εξόδου. Το φαινόμενο προσομοιώνεται μαθηματικά σύμφωνα με την παρακάτω σχέση :

$$y(t) = H \cdot x(t) \quad (3.70)$$

Όπου $y(t)$ το σήμα εξόδου, H το σύστημα αλλοίωσης του σήματος εισόδου, και $x(t)$ το σήμα εισόδου. Η παραπάνω σχέση παίρνει μητρική μορφή (τα σήματα $y(t)$ και $x(t)$ γράφονται σε μορφή πίνακα) όταν υπάρχουν συστήματα πολλών μεταβλητών. Σχηματικά η παραπάνω σχέση γίνεται πιο κατανοητή με βάση τα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 3.10: Σχηματική απεικόνιση συστήματος μιας μεταβλητής



Σχήμα 3.11: Σχηματική απεικόνιση συστήματος πολλών μεταβλητών

Ένα σύστημα H μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι γραμμικό αν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό έστω και προσεγγιστικά η αρχή της επαλληλίας ενώ σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα θεωρείται μη-γραμμικό. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το σήμα εξόδου $y(t)$ δίνεται από τη συνέλιξη του σήματος εισόδου $x(t)$ και τη κρουστική απόκριση $h(t)$ δηλαδή ισχύει:

$$y(t) = x(t) \cdot h(t) \quad (3.71)$$

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Fourier στα σήματα της παραπάνω σχέσης θα έχουμε:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f) \rightarrow |Y(f)|^2 = |X(f)|^2 \cdot |H(f)|^2 \quad (3.72)$$

Υπό ορισμένες συνθήκες το σήμα εξόδου $y(t)$ μπορεί να πάρει και τη μορφή ενός αναπτύγματος σειράς Fourier:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} X_k \cdot H(f) \cdot e^{-j2\pi kt} \quad (3.73)$$

Ουσιαστικά η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι για κάθε συχνότητα f , το σήμα εξόδου $y(t)$ ισούται με το γινόμενο του πλάτους X_k της εκθετικής μιγαδικής μορφής Fourier του σήματος εισόδου $x(t)$ επί το πλάτος $H(f)$ της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος H δηλαδή το σύστημα H παίζει το ρόλο του **φίλτρου** για το σήμα εισόδου.

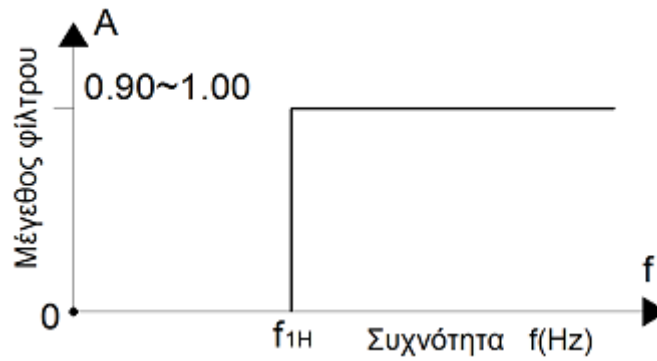
Ορίζεται ως **μαθηματικό φίλτρο** ή **φίλτρο (filter)** τα γραμμικά συστήματα τα οποία αλλοιώνουν το σήμα εισόδου $x(t)$ απομακρύνοντας από αυτό τους ανεπιθύμητους αρμονικούς όρους. Γενικά, απαιτείται το φίλτρο να μην παραμορφώνει τη πληροφορία που μεταδίδεται από το σήμα εισόδου $x(t)$ και να απομακρύνει το θόρυβο που έχει εισέλθει στο σήμα εξόδου $y(t)$. Παρακάτω αναφέρονται τα πιο γνωστά φίλτρα.

3.16.1 Το άνω διαβατό φίλτρο (high-pass filter)

Το άνω διαβατό φίλτρο (HPF) επιτρέπει τη διέλευση όλων των αρμονικών όρων ενός σήματος εισόδου που διαθέτουν μια συχνότητα μεγαλύτερη από μια χαρακτηριστική συχνότητα f_{1H} , που ονομάζεται συχνότητα αποκοπής. Το φίλτρο αυτό εκφράζεται με τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:

$$H(f) = A \cdot e^{-j2\pi ft}, \quad |f| > f_{1H} \quad (3.74)$$

$$H(f) = 0, \quad |f| < f_{1H} \quad (3.75)$$



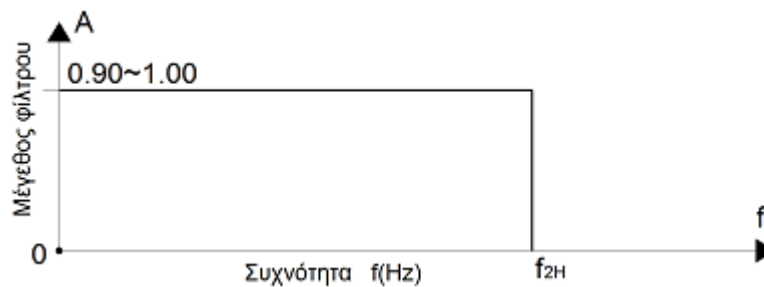
Σχήμα 3.12: Το άνω διαβατό φίλτρο (HPF)

3.16.2 Το κάτω διαβατό φίλτρο (low-pass filter)

Το κάτω διαβατό φίλτρο (LPF) επιτρέπει τη διέλευση όλων των αρμονικών όρων ενός σήματος εισόδου που διαθέτουν συχνότητα μικρότερη από μια χαρακτηριστική συχνότητα συχνότητα f_{2H} , που ονομάζεται **συχνότητα αποκοπής**. Το φίλτρο αυτό εκφράζεται με τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:

$$H(f) = A \cdot e^{-j2\pi ft}, \quad |f| < f_{2H} \quad (3.76)$$

$$H(f) = 0, \quad |f| > f_{2H} \quad (3.77)$$



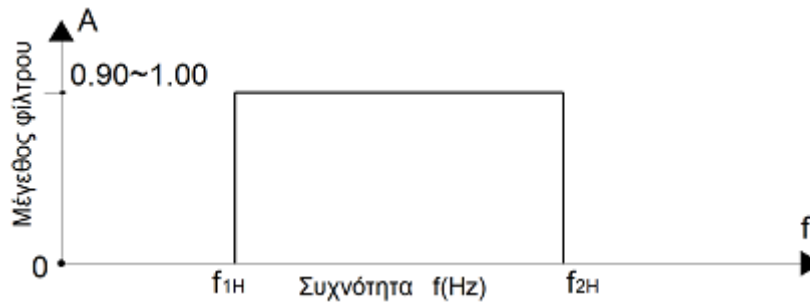
Σχήμα 3.13: Το κάτω διαβατό φίλτρο (LPF)

3.16.3 Το ζωνο-διαβατό φίλτρο (band-pass filter)

Το ζωνο-διαβατό φίλτρο (BPF) επιτρέπει τη διέλευση όλων των αρμονικών όρων ενός σήματος εισόδου που διαθέτουν μια συχνότητα μεγαλύτερη από μια χαρακτηριστική συχνότητα f_{1H} και μικρότερη από μια χαρακτηριστική συχνότητα f_{2H} . Το φίλτρο αυτό εκφράζεται με τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:

$$H(f) = A \cdot e^{-j2\pi ft}, \quad f_{1H} < |f| < f_{2H} \quad (3.78)$$

$$H(f) = 0, \quad |f| > f_{2H} \text{ ή } |f| < f_{1H} \quad (3.79)$$



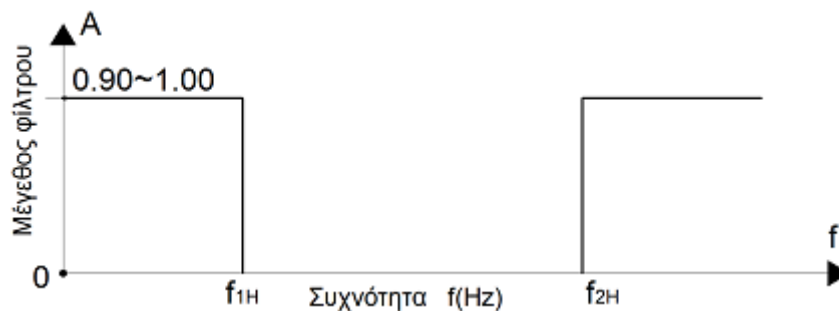
Σχήμα 3.14: Το ζωνοδιαβατό φίλτρο (BPF)

3.16.4 Το ζωνο-αδιάβατο φίλτρο (band-stop filter)

Το ζωνο-αδιάβατο φίλτρο (BSF) επιτρέπει τη διέλευση όλων των αρμονικών όρων ενός σήματος εισόδου που διαθέτουν μια συχνότητα μεγαλύτερη από μια χαρακτηριστική συχνότητα f_{2H} και μικρότερη από μια χαρακτηριστική συχνότητα f_{1H} . Το φίλτρο αυτό εκφράζεται με τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:

$$H(f) = A \cdot e^{-j2\pi f t}, \quad |f| < f_{1H} \text{ ή } |f| > f_{2H} \quad (3.80)$$

$$H(f) = 0, \quad f_{1H} < |f| < f_{2H} \quad (3.81)$$



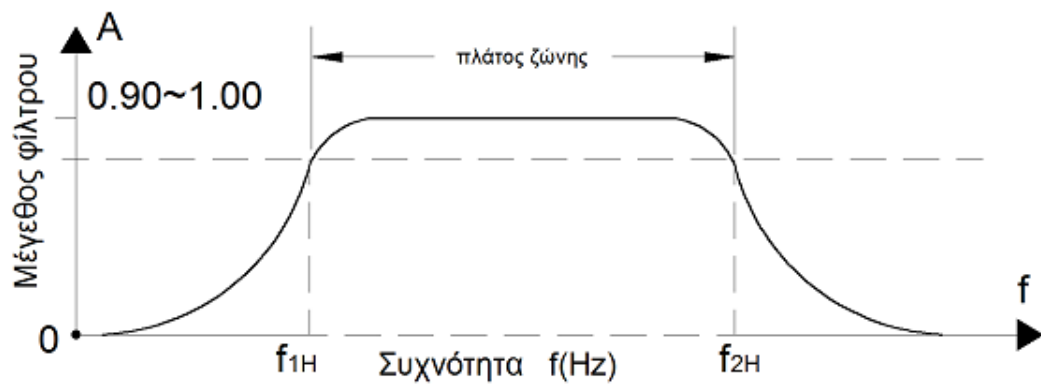
Σχήμα 3.15: Το ζωνο-αδιάβατο φίλτρο (BSF)

3.16.5 Το φίλτρο Butterworth (Butterworth filter)

Το φίλτρο Butterworth (Butterworth filter) [E8, Ξ2] είναι μια ειδική περίπτωση ενός ζωνοδιαβατού φίλτρου κάνοντας χρήση του όρου πλάτος ζώνης, δηλαδή ορίζεται μια ζώνη συχνοτήτων τέτοια ώστε οι αρμονικοί όροι, οι οποίοι εμπεριέχονται σε ένα τυχαίο σήμα και οι συχνότητες τους εμπίπτουν στην προαναφερθείσα ζώνη να διέρχονται από το φίλτρο ενώ οι υπόλοιποι όροι να απορρίπτονται. Το μέγεθος A του συγκεκριμένου φίλτρου ορίζεται για τιμές που κυμαίνονται $A = 0.9 \sim 1.0$ για το κεντρικό τμήμα του πλάτους ζώνης, ενώ στις συχνότητες f_{1H} και f_{2H} το μέγεθος του φίλτρου ορίζεται από τη τιμή $A/\sqrt{2}$, με τετραγωνισμένη καμπύλη που περιγράφεται από τη σχέση:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_i}{f_{2H}}\right)^{2N}}} \quad (3.82)$$

Με τις τιμές του N να κυμαίνονται από 1 έως 8. Το φίλτρο Butterworth απεικονίζεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.16: Το φίλτρο Butterworth

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ ΔΟΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

4.1 Εισαγωγή

Το πεδίο της αναγνώρισης δυναμικών συστημάτων έχει γίνει πολύ σημαντικό στον τομέα της δομοστατικής μηχανικής και ειδικότερα στην πρόβλεψη της απόκρισης μιας κατασκευής σε ποικίλα φορτία όπως οι σεισμοί, οι ανέμοι και οι κυματικές δυνάμεις αλλά επίσης είναι σημαντικό και στην αξιολόγηση των υπάρχουσων συνθηκών μιας κατασκευής για την εκτίμηση των βλαβών και πιθανής κατάρρευσης [Ξ9]. Το γενικό αντικείμενο της αναγνώρισης συστημάτων ξεκίνησε από την **ηλεκτρολογία** και στη συνέχεια επεκτάθηκε στη **μηχανολογία** και τη **θεωρία ελέγχου** [Ε3, Ε4] με διάφορες τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί με τη πάροδο του χρόνου. Ωστόσο αυτές οι τεχνικές δεν είναι εφαρμόσιμες απευθείας σε **προβλήματα δομοστατικής και πολιτικού μηχανικού** γενικότερα για τους παρακάτω λόγους [Ξ9]:

- Τα συστήματα που εξετάζονται από αυτές τις τεχνικές είναι πολύ μεγαλύτερα και πιο πολύπλοκα στη συμπεριφορά τους με αποτέλεσμα η μαθηματική διατύπωση τους να μην είναι εύκολη.
- Οι επιλογές για δεδομένα εισαγωγής – εξαγωγής από παρατηρήσεις συνήθως είναι πολύ περιορισμένη.
- Τα παρατηρούμενα δεδομένα συνήθως συνοδεύονται από πολλές μετρήσεις θορύβου.
- Στη περίπτωση που το σύστημα έχει παρουσιάσει βλάβη ή κατάρρευση η συμπεριφορά του θα είναι κυρίως μη – γραμμική.

Συνεπώς έπρεπε να αναπτυχθούν αποτελεσματικές τεχνικές αναγνώρισης συστημάτων για την περίπτωση εφαρμογών στη δομική μηχανική [Ξ9]. Γενικά οι μέθοδοι αναγνώρισης διαχωρίζονται σε **παραμετρικές και μη παραμετρικές μεθόδους**, με τη πρώτη κατηγορία να ασχολείται με την ταυτοποίηση των παραμέτρων του συστήματος, ενώ η δεύτερη ασχολείται με τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος σε όρους μαθηματικής – αναλυτικής προσομοίωσης. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν επίσης σαν **μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου (time domain methods)** και σαν μέθοδοι στο **πεδίο των συχνοτήτων (frequency domain methods)**, όπου στην πρώτη περίπτωση προσδιορίζονται οι παράμετροι του συστήματος από δεδομένα που μεταβάλλονται στο χρόνο και στην άλλη περίπτωση προσδιορίζονται ιδιομορφικές ποσότητες, όπως οι συχνότητες, ο συντελεστής απόσβεσης και οι ιδιομορφές όπου αυτά τα μεγέθη προσδιορίζονται από μετρήσεις που γίνονται στο πεδίο των συχνοτήτων. Ένας επιπλέον διαχωρισμός μεταξύ των μεθόδων [Ε13] που έχει προκύψει είναι εξαιτίας της αύξησης των υπολογιστικών δυνατοτήτων των τελευταίων ετών με αποτέλεσμα να υπάρχει η δυνατότητα επεξεργασίας μεγάλου όγκου δεδομένων, με εφαρμογές που εκτείνονται από πειραματικά συστήματα μιας εισόδου και μιας εξόδου (**Single Input Single Output – SISO**), μέχρι και πολυκάναλα δίκτυα πολλών εισόδων και εξόδων (**Multiple Input Multiple Output – MIMO**). Στο παρόν κεφάλαιο ο διαχωρισμός γίνεται στη βάση της λογικής των μεθόδων το πεδίο του χρόνου και του πεδίου των συχνοτήτων και επιπλέον γίνεται μια ειδική αναφορά σε άλλες πιο εξειδικευμένες τεχνικές που αναπτύχθηκαν με την πάροδο του χρόνου και την πρόοδο της τεχνολογίας σε διάφορους τομείς όπως π.χ η **τεχνητή νοημοσύνη (Artificial Intelligence – AI)** [Ξ1], **επεξεργασία σήματος** κ.λπ.

4.2 Μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου (Time domain methods)

Οι μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου (time domain methods) όπως προαναφέρθηκε προσδιορίζουν τις παραμέτρους του συστήματος από δεδομένα που μεταβάλλονται στο χρόνο. Παρακάτω αναλύονται κάποιες επιλεγμένες μέθοδοι στο πεδίο του χρόνου οι οποίες συναντιούνται πιο συχνά στην βιβλιογραφία.

4.2.1 Αλγόριθμος πραγματοποίησης ιδιοσυστήματος (Eigensystem Realization Algorithm)

Ο **αλγόριθμος πραγματοποίησης ιδιοσυστήματος (Eigensystem Realization Algorithm)** είναι μια τεχνική αναγνώρισης συστημάτων που προέρχεται από τη θεωρία ελέγχου και αποτελεί σαν μέθοδο αναγνώρισης χαρακτηριστικών κατηγορίας **MIMO**. Έχει τύχει ευρέας εφαρμογής στην **μηχανολογία** και στην **αεροναυπηγική** [E13] αλλά και σε πολλές περιπτώσεις σε **προβλήματα πολιτικού μηχανικού** [E13]. Έστω ο πίνακας απόκρισης $[X(k)]_{m \times n}$ στο χρονικό σημείο k , με τη διάσταση m να είναι ο αριθμός των καταγραφών των αποκρίσεων της κατασκευής και n ο αριθμός διεγέρσεων. Σχηματίζεται ο πίνακας αποκρίσεων $[H(K-1)]$, ο οποίος καλείται και **πίνακας Hankel** των πινάκων αποκρίσεων $[X(k)]$:

$$\underbrace{[H(k-1)]}_{m \times n \times p} = \begin{bmatrix} X(k) & \cdots & X(k+p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X(k+r) & \cdots & X(k+p+r) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Όπου οι διαστάσεις r, p επιλέγονται μεγαλύτερες από την εκτιμώμενη τιμή $2N$, με N τον βαθμό ελευθερίας του εξεταζόμενου δυναμικού συστήματος. Στη συνέχεια από την (4.1) υπολογίζουμε τον πίνακα $H[(0)]$:

$$\underbrace{[H(0)]}_{m \times n \times p} = \begin{bmatrix} X(1) & \cdots & X(p+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X(k+r) & \cdots & X(p+r+1) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ο παραπάνω πίνακας $H[(0)]$ αναλύεται σε ιδιάζουσες τιμές παίρνοντας τη μορφή:

$$H[(0)] = [P][D][Q]^T \quad (4.3)$$

Ο πίνακας $H[(0)]$ θα έχει $2N$ μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές (η τάξη του πίνακα θα είναι επίσης $2N$), οι οποίες θα αντιστοιχούν στους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος. Επιλέγοντας τις μη μηδενικές γραμμές και στήλες του πίνακα που αντιστοιχούν στις ιδιάζουσες τιμές προκύπτει ένας νέος πίνακας $H[(0)]'$ ο οποίος αναλύοντας τον με την **μέθοδο SVD (Singular Value Decomposition)** παίρνει τη μορφή:

$$H[(0)]' = [P_n][D_n][Q_n]^T \quad (4.4)$$

Οι πίνακες πραγματοποίησης του ιδιοσυστήματος θα είναι της μορφής:

$$[\hat{A}] = [D_n]^{-\frac{1}{2}}[P_n]^T[H(1)][Q_n][D_n]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.5)$$

$$[\hat{B}] = [D_n]^{\frac{1}{2}}[Q_n]^T[E_m] \quad (4.6)$$

$$[\hat{C}] = [E_n]^T[P_n][D_n]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

Με τους πίνακες $[E_m]$ και $[E_n]$ να είναι της μορφής:

$$[E_q] = \begin{bmatrix} [I] \\ [0] \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Για την εύρεση των δυναμικών χαρακτηριστικών του εξεταζόμενου συστήματος πρέπει να επιλυθεί το παρακάτω πρόβλημα ιδιοτιμών:

$$[\hat{A}]\{\Psi\} = \lambda\{\Psi\} \quad (4.9)$$

Ο υπολογισμός των δυναμικών χαρακτηριστικών γίνεται εφόσον βρεθούν οι ιδιοτιμές από την παραπάνω σχέση.

4.2.2 Η μέθοδος ARMA (Auto Regressive Moving Average – ARMA Method)

Η **μέθοδος ARMA** πηγάζει από το συνδυασμό δύο αντικειμένων αυτών της θεωρίας ελέγχου και της στατιστικής και δημιουργήθηκε για την αναγνώριση δυναμικών συστημάτων. Έστω ένα διακριτό γραμμικό σύστημα με μια είσοδο διέγερσης $f(t)$ και μια έξοδο διέγερσης $y(t)$ για σταθερά χρονικά δείγματα n η σχέση γραμμικών διαφορών που συνδέει τη διέγερση με την απόκριση έχει τη μορφή:

$$\begin{aligned} a_n \cdot y(t-n) + a_{n-1} \cdot y(t-n+1) + \dots + a_1 \cdot y(t-1) + a_0 \cdot y(t) = \\ = \beta_m \cdot f(t-m) + \beta_{m-1} \cdot f(t-m+1) + \dots + \beta_1 \cdot f(t-1) + \beta_0 \cdot f(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ή αλλιώς:

$$\sum_{k=0}^n a_k \cdot y(t-k) = \sum_{k=0}^m \beta_k \cdot f(t-k) \quad (4.11)$$

Όπου οι συντελεστές a_k και β_k , είναι οι συντελεστές **αυτοπαλινδρόμησης (Auto Regressive – AR)**, και **κινητού μέσου (Moving Average – MA)**, που είναι και οι άγνωστοι της παραπάνω εξίσωσης. Σημειώνεται ότι $a_0 = \beta_0 = 1$. Θεωρώντας σταθερό χρονικό βήμα Δt και κάνοντας χρήση μετασχηματισμού z στην (4.11) με $z = e^{s\Delta t}$, προκύπτει:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot z^{-k} \right) \cdot Y(z) = \left(\sum_{k=0}^m \beta_k \cdot z^{-k} \right) \cdot F(z) \quad (4.12)$$

Με τη συνάρτηση μεταφοράς να είναι:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = \frac{\sum_{k=0}^m \beta_k \cdot z^{-k}}{\sum_{k=0}^n a_k \cdot z^{-k}} \quad (4.13)$$

Οι ρίζες που προκύπτουν από το πολυώνυμο του παρανομαστή της **συνάρτησης μεταφοράς** να σχετίζονται με τους **συντελεστές απόσβεσης** και τις **ιδιοσυχνότητες** του δυναμικού συστήματος. Για ένα σύστημα N βαθμών ελευθερίας αυτές οι ρίζες προκύπτουν από τη λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$\sum_{k=0}^{2N} a_k \cdot u^{2N-k} = 0 \quad (4.14)$$

Για να βρεθούν οι συντελεστές a_k η εξίσωση (4.11) γράφεται:

$$a_0 \cdot y(t) + \sum_{k=1}^{2N} a_k \cdot y(t-k) = \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_k \cdot f(t-k) \quad (4.15)$$

Και επειδή ισχύει $a_0 = 1$ λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς $y(t)$ προκύπτει:

$$y(t) = - \sum_{k=1}^{2N} a_k \cdot y(t-k) = \sum_{k=0}^{2N-1} \beta_k \cdot f(t-k) \quad (4.16)$$

Συνεπώς προκύπτει ότι η απόκριση $y(t)$ γράφεται ως το άθροισμα των προηγούμενων χρονικά αποκρίσεων (αυτοπαλινδρόμηση) και έναν γραμμικό συνδυασμό μη σχετιζόμενων όρων (κινητός μέσος). Λαμβάνοντας υπόψη και ένα σφάλμα $e(t)$ προκύπτει:

$$y(t) = \{-y(t-1) \dots -y(t-2N) \ f(t) \dots f(t-2N+1)\} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2N} \\ \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{2N-1} \end{Bmatrix} + e(t) \quad (4.17)$$

Σχηματίζοντας τους όρους για $t = 2N+1, 2N+2, \dots, 2N+L$ προκύπτει η παρακάτω εξίσωση πινάκων:

$$\underbrace{\{y\}}_{L \times 1} = \underbrace{[X]}_{L \times 4N} \underbrace{\{\theta\}}_{4N \times 1} + \underbrace{\{e\}}_{L \times 1} \quad (4.18)$$

Επιλύοντας την (4.18) ως προς $\{e\}$ και με ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος $\{e\}^T \{e\}$, μπορεί να υπολογιστεί το $\{\theta\}$:

$$\{e\} = \{y\} - [X]\{\theta\} \quad (4.19)$$

$$\{\theta\} = ([X]^T [X])^{-1} [X]^T \{y\} \quad (4.20)$$

Με το $\{\theta\}$ γνωστό υπολογίζονται οι συντελεστές a_k και η σχέση (4.14) γράφεται:

$$\sum_{k=0}^{2N} a_k \cdot u^{2N-k} = \prod_{k=1}^N (u - u_k)(u - u_k^*) \quad (4.21)$$

$$u_k = e^{s_R \Delta t} \quad (4.22a)$$

$$u_k^* = e^{s_R^* \Delta t} \quad (4.22\beta)$$

Όπου τα u_k, u_k^* είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου και από τις οποίες προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες και οι συντελεστές απόσβεσης.

4.2.3 Η μέθοδος ευθείας αναγνώρισης παραμέτρων (Direct System Parameter Identification Method – DSPI)

Η **μέθοδος ευθείας αναγνώρισης παραμέτρων συστήματος (Direct System Parameter Identification Method – DSPI)**, υπάγεται και αυτή στις μεθόδους αναγνώρισης στο πεδίο του χρόνου αλλά και στην κατηγορία **MIMO** λόγω των προβλημάτων που μπορεί να αντιμετωπίσει. Έστω N_0 βαθμοί ελευθερίας για την εξίσωση ισορροπίας ενός συστήματος N βαθμών ελευθερίας:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = [\Gamma]\{f(t)\} \quad (4.23)$$

Όπου τα $[M], [C], [K]$ είναι τα μητρώα μάζας, απόσβεσης και δυσκαμψίας αντίστοιχα διαστάσεων $N_0 \times N_0$ το $\{f(t)\}$ είναι το $qx1$ διάνυσμα διέγερσης και $[\Gamma]$ ο πίνακας $N_0 \times q$ του οποίου τα στοιχεία e_{ij} είναι 1 όταν η τοποθεσία διέγερσης j αντιστοιχεί στην τοποθεσία απόκρισης i και 0, στις υπόλοιπες περιπτώσεις. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με $[M]^{-1}$ έχουμε:

$$\{\ddot{u}(t)\} + [C]'\{\dot{u}(t)\} + [K]'\{u(t)\} = [\Gamma]'\{f(t)\} \quad (4.24)$$

$$[C]' = [M]^{-1}[C] \quad (4.25\alpha)$$

$$[K]' = [M]^{-1}[K] \quad (4.25\beta)$$

$$[\Gamma]' = [M]^{-1}[\Gamma] \quad (4.25\gamma)$$

Με αντίστοιχη μεθοδολογία όπως και στη **μέθοδο ARMA** η απόκριση $u(t)$ του συστήματος μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} [u(t)] &= [A_1][u(t-1)] + \dots + [A_p][u(t-p)] + [B_0][f(t)] + \dots \\ &+ [B_{p-1}][f(t-p+1)] + [e(t)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Όπου

$$\underbrace{[u(t)]}_{N_0 \times m} = [\{u(t)\}_1 \dots \{u(t)\}_m] \quad (4.27\alpha)$$

$$\underbrace{[f(t)]}_{q \times m} = [\{f(t)\}_1 \dots \{f(t)\}_m] \quad (4.27\beta)$$

$$\underbrace{[e(t)]}_{N_0 \times m} = [\{e(t)\}_1 \dots \{e(t)\}_m] \quad (4.27\gamma)$$

Η (4.26) μπορεί να γραφεί:

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] & \dots & [A_p] & [B_0] & [B_1] & \dots & [B_{p-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u(t-1)] \\ [u(t-2)] \\ \vdots \\ [u(t-p)] \\ [f(t)] \\ [f(t-1)] \\ \vdots \\ [f(t-p+1)] \end{bmatrix} + [e(t)] \quad (4.28)$$

Με αντίστοιχο τρόπο όπως και στην **μέθοδο ARMA** προκύπτει η παρακάτω εξίσωση πινάκων:

$$[u] = [\theta][X] + [e] \quad (4.29)$$

Από την (4.29) με ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος $[e]^T [e]$ έχουμε:

$$[\theta] = [u][X]^T ([X][X]^T)^{-1} \quad (4.30)$$

Υπολογίζοντας τον πίνακα $[\theta]$ από την (4.30) προκύπτουν οι πίνακες $[A_k]$, $[B_k]$, και με αντίστοιχη μεθοδολογία μετασχηματισμού z όπως στην **μέθοδο ARMA**, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

$$[A]_{N_0 P \times N_0 P} = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_2] & \dots & [A_P] \\ [I] & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [I] & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [I] \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

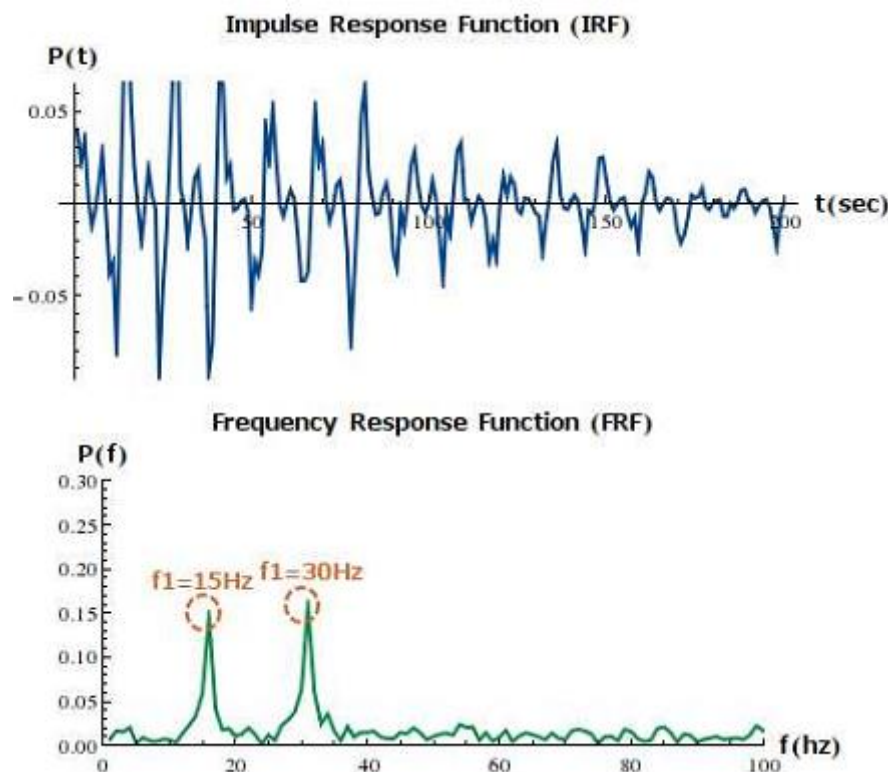
Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες και οι αποσβέσεις του εξεταζόμενου συστήματος.

4.3 Μέθοδοι στο πεδίο των συχνοτήτων (Frequency domain methods)

Οι μέθοδοι στο πεδίο των συχνοτήτων (frequency domain methods) όπως είναι ήδη γνωστό προσδιορίζουν ιδιομορφικές ποσότητες, όπως οι συχνότητες, ο συντελεστής απόσβεσης και οι ιδιομορφές όπου αυτά τα μεγέθη προσδιορίζονται από μετρήσεις που γίνονται στο πεδίο των συχνοτήτων.

4.3.1 Η τεχνική μεγέθους κορυφής (Peak Amplitude Technique)

Η **μέθοδος μεγέθους κορυφής** αποτελεί την πιο απλή και γνωστή μέθοδο για την αναγνώριση δυναμικών χαρακτηριστικών σε ένα σύστημα όπου οι **ιδιοσυχνότητες** εντοπίζονται παρατηρώντας τα σημεία των κορυφών των γραφημάτων, του μεγέθους αποκρίσεων των συχνοτήτων. Από την οξύτητα του γραφήματος εκτιμώνται οι συντελεστές απόσβεσης και οι ιδιομορφές από την αναλογία του μεγέθους των κορυφών των αποκρίσεων διαφόρων βαθμών ελευθερίας της κατασκευής, στη θέση που εμφανίζονται οι ιδιοσυχνότητες της. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο μετασχηματισμός της απόκρισης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων με χρήση **FFT**.



Σχήμα 4.17: Μετατροπή απόκρισης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων

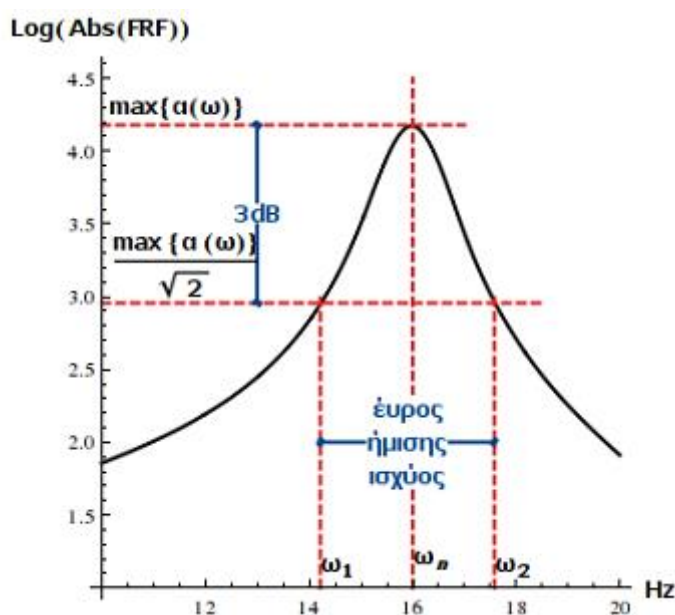
Οι κορυφές στο δεύτερο γράφημα του παραπάνω σχήματος εντοπίζονται ημιεμπειρικά και αντιστοιχούν στις ιδιοσυχνότητες του συστήματος. Η επιρροή της διέγερσης στη μέθοδο αυτή εξαλείφεται με χρήση προεπεξεργασμένων **συναρτήσεων απόκρισης συχνότητας FRF**. Τα νέα τροποποιημένα γραφήματα από τον **FFT** δίνουν το μέγεθος της απόκρισης της κατασκευής σε ένα σημείο της, για διέγερση εισόδου για κάθε συχνότητα. Για το σχηματισμό της **συνάρτησης απόκρισης συχνότητας FRF** χρησιμοποιείται η σχέση:

$$FRF(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (4.32)$$

Όπου $FRF(\omega)$ η απόκριση συχνότητας της κατασκευής, $Y(\omega)$ η απόκριση ενός σημείου της κατασκευής, $X(\omega)$ η διέγερση εισόδου. Επίσης χρησιμοποιείται και από την στατιστική η σχέση:

$$FRF(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \quad (4.33)$$

Με το $S_{xx}(\omega)$ να είναι η φασματική συσχέτιση της διέγερσης $X(\omega)$ με τον εαυτό της (auto spectral density) και το $S_{xy}(\omega)$ η φασματική συσχέτιση της διέγερσης $X(\omega)$ με την απόκριση $Y(\omega)$. Οι συντελεστές απόσβεσης υπολογίζονται συνήθως με τη **μέθοδο της ήμισης ισχύος**. Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση του μέτρου της απόκρισης FRF, σε λογαριθμικό σύστημα συντεταγμένων, ως προς τη συχνότητα f , στα σημεία που βρίσκονται κοντά σε μια ιδιοσυχνότητα του συστήματος όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.18: Εύρεση απόσβεσης με τη μέθοδο ήμισης ισχύος

Στη λογαριθμική κλίμακα ο άξονας y εκφράζει την τάξη μεγέθους για την ισχύ της ταλάντωσης στην συγκεκριμένη συχνότητα. Εντοπίζονται γραφικά τα σημεία ω_1 και ω_2 τα οποία βρίσκονται αριστερά και δεξιά της ιδιοσυχνότητας ω_n , στα οποία η ισχύς της ταλάντωσης έχει ελαττωθεί στο ήμισυ και να ισοδυναμεί κατά $1/\sqrt{2}$ της μέγιστης τιμής της απολαβής $\alpha(\omega)$. Ισχύει η σχέση:

$$\eta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} \quad (4.34)$$

Ο συντελεστής απόσβεσης είναι:

$$\xi = \frac{\eta}{2} \quad (4.35)$$

Συνδυάζοντας τις (4.34) και (4.35) για μικρούς συντελεστές απόσβεσης προκύπτει:

$$\eta = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} = \underbrace{\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}_{\approx \omega_n} \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n^2} \Rightarrow \xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \quad (4.36)$$

Η μέθοδος μεγέθους κορυφής είναι σχετικά ακριβής για κατασκευές με ιδιοσυχνότητες που απέχουν πολύ ή μια από την άλλη και για σχετικά μικρούς συντελεστές απόσβεσης, ενώ ο μη αυτόματος ημιεμπειρικός εντοπισμός των κορυφών που επηρεάζεται σημαντικά από την καθαρότητα των καταγραφών μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

4.3.2 Η αντίστροφη μέθοδος (Inverse Method)

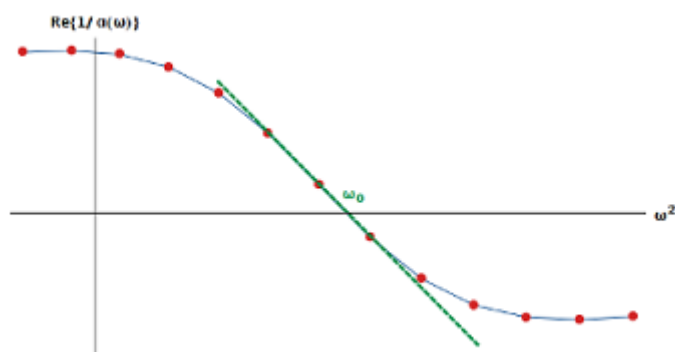
Η **αντίστροφη μέθοδος** [Ε13] βασίζεται στο γεγονός ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αντίστροφης απόκρισης FRF στο πεδίο του τετραγώνου των συχνотήτων αντίστοιχα, στην εγγύτητα των σημείων όπου το δυναμικό σύστημα παρουσιάζει ιδιοσυχνότητες είναι ευθείες γραμμές. Έστω ένα σύστημα με απολαβή που εκφράζεται με βάση τη παρακάτω σχέση:

$$a(\omega) = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega \cdot c} \quad (4.37)$$

Η αντίστροφη συνάρτηση απόκρισης θα είναι:

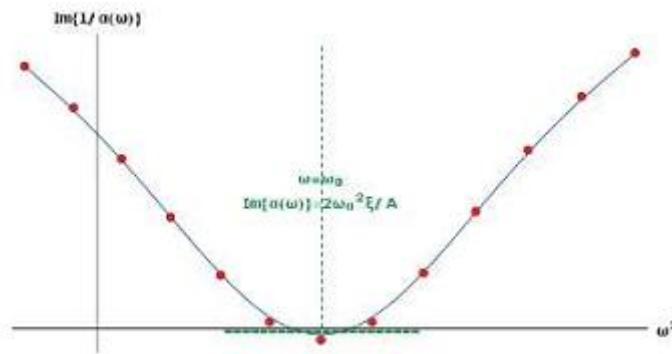
$$\frac{1}{a(\omega)} = k - \omega^2 m + i\omega \cdot c \quad (4.38)$$

Το πραγματικό μέρος της (4.38) στην περιοχή εγγύτητας με την ω_0^2 είναι μια ευθεία όπως φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 4.19: Απεικόνιση του $Re(1/a(\omega))$ στο πεδίο ω^2

Η ακριβή τιμή της ιδιοσυχνότητας ω_0 υπολογίζεται εύκολα εντοπίζοντας το σημείο όπου μηδενίζεται η ευθεία στον άξονα των ω^2 . Όπως και το πραγματικό έτσι και το φανταστικό μέρος της (4.38) στην περιοχή εγγύτητας με την ιδιοσυχνότητα ω_0^2 είναι μια ευθεία παράλληλη με τον άξονα των ω^2 όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 20.4: Απεικόνιση του $\text{Im}(1/a(\omega))$ στο πεδίο ω^2

Υπολογίζοντας το μέτρο του φανταστικού μέρους βρίσκεται ο συντελεστής απόσβεσης όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Η αντίστροφη μέθοδος είναι ιδανική για συστήματα στα οποία η προσαρμογή ευθείας στα δεδομένα της απόκρισης στην εγγύτητα των ιδιοσυχνοτήτων είναι εύκολη. Επίσης προσφέρει ικανοποιητική ακρίβεια σε συστήματα με μικρή απόσβεση, αλλά επίσης προκρίνεται η χρήση της για αποκρίσεις που εμπεριέχουν μεγάλο σφάλμα ή θόρυβο, καθώς είναι πιο εύκολη η εκτίμηση των χαρακτηριστικών της ευθείας από εκείνων του κύκλου.

4.3.3 Η φασματική μέθοδος (Spectral Method)

Μια διαφορετική προσέγγιση του δυναμικού προβλήματος δίνει η **φασματική μέθοδος** [Ε13] η οποία ανήκει επίσης και στην κατηγορία **MIMO**. Έστω ένα σύστημα με N βαθμούς ελευθερίας το οποίο εκφράζεται από τη παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$[K] + [C]i - \omega^2 [M]\{\bar{u}\} = \{\bar{F}\} \quad (4.39)$$

Με $[K], [C], [M]$ τα μητρώα δυσκαμψίας, απόσβεσης και μάζας αντίστοιχα. Ο πίνακας απόκρισης – απολαβής $[\alpha]$ θα είναι:

$$[\alpha] = ([K] + i[C] - \omega^2 [M])^{-1} \quad (4.40)$$

Με τον αντίστροφο του να είναι:

$$[\alpha]^{-1} = [K] + i[C] - \omega^2 [M] \quad (4.41)$$

Ή αλλιώς:

$$[\alpha]^{-1} = [K'] - \omega^2 [M] \quad (4.42)$$

Με τον πίνακα $[K']$ να εκφράζεται από τη μητρωική σχέση:

$$[K'] = [K] + i[C] \quad (4.43)$$

Στη σχέση (4.42) οι πίνακες $[K'], [M]$ είναι άγνωστοι όποτε για την επίλυση της απαιτούνται δύο εξισώσεις. Θεωρώντας ότι γνωρίζουμε τις αποκρίσεις για δύο συχνότητες έστω ω_1, ω_2 προκύπτει:

$$[\alpha]_{\omega_1}^{-1} = [K'] - \omega_1^2 [M] \quad (4.44\alpha)$$

$$[\alpha]_{\omega_2}^{-1} = [K'] - \omega_2^2 [M] \quad (4.44\beta)$$

Αφαιρώντας κατά μέρη στις σχέσεις (4.44) θα έχουμε:

$$[\alpha]_{\omega_1}^{-1} - [\alpha]_{\omega_2}^{-1} = (\omega_2^2 - \omega_1^2)[M] \quad (4.45)$$

Από την (4.45) υπολογίζεται το μητρώο μάζας:

$$[M] = \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} [[\alpha]_{\omega_1}^{-1} - [\alpha]_{\omega_2}^{-1}] \quad (4.46)$$

Με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία στις σχέσεις (4.44) υπολογίζεται και το μιγαδικό μητρώο δυσκαμψίας $[K']$:

$$[K'] = \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} [\omega_2^2 \cdot [\alpha]_{\omega_1}^{-1} - \omega_1^2 \cdot [\alpha]_{\omega_2}^{-1}] \quad (4.47)$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα μητρώα δυσκαμψίας και απόσβεσης:

$$[K] = Re([K']) \quad (4.48a)$$

$$[C] = Im([K']) \quad (4.48\beta)$$

Με γνωστούς τους παραπάνω πίνακες επιλύεται το γενικευμένο ιδιομορφικό πρόβλημα του οποίου οι ιδιοτιμές και οι αποσβέσεις αντιστοιχούν σε αυτές του δυναμικού συστήματος:

$$([K'] - \lambda_r [M])\{\psi_r\} = \{0\} \quad (4.49)$$

Η παραπάνω σχέση είναι εφικτό να επεκταθεί με χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων ως προς την ελαχιστοποίηση του σφάλματος της εκτίμησης των μητρώων του δυναμικού συστήματος, όταν υπάρχουν μητρώα απόκρισης για περισσότερες από δύο συχνότητες ω_i .

4.4 Ειδικές μέθοδοι αναγνώρισης δυναμικών συστημάτων

Με την πάροδο των χρόνων έχουν αναπτυχθεί πάρα πολλές μέθοδοι στον τομέα της αναγνώρισης συστημάτων που εκτείνονται από τις βασικές μεθόδους που αναλύσαμε παραπάνω σε πιο εξειδικευμένες περιπτώσεις όπως π.χ νευρωνικών δικτύων [Ξ1]. Παρακάτω αναλύονται επιγραμματικά κάποιες από αυτές [Ξ1, Ξ3, Ξ8, Ξ10, Ξ11, Ξ12, Ξ19, Ξ21].

4.4.1 Μετασχηματισμός Wavelet (Wavelet Transform)

Η μέθοδος αυτή πηγάζει από τη θεωρία επεξεργασίας σήματος. Ο χαρακτήρας χρόνου συχνότητας των **μετασχηματισμών wavelet** [Ξ8, Ξ11, Ξ12, Ξ21] επιτρέπουν την αναγνώριση συστημάτων και με μεθόδους στο πεδίο των συχνοτήτων αλλά και με μεθόδους στο πεδίο του χρόνου. Ο μετασχηματισμός wavelet είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που αποσυνθέτει ένα σήμα $x(t)$ με χρήση βασικών συναρτήσεων σε απλές εκφράσεις της γενικής έκφρασης του wavelet $g(t)$ με συνέλιξη του σήματος και της γενικής έκφρασης του wavelet σύμφωνα με την παρακάτω σχέση [Ξ11]:

$$W(a, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g\left(\frac{t - \tau}{a}\right) d\tau \quad (4.50)$$

Ενίσχυση με κλίμακα a , αντιστρόφως ανάλογη της συχνότητας, εκφράζει την περιοδικότητα ή την αρμονικότητα του σήματος. Με αυτήν την προσέγγιση μια χρόνου-συχνότητας αναγνώριση είναι εφικτή αφού η $g(t)$ λειτουργεί 'ως συνάρτηση παραθύρου' σε αντίθεση με τις τριγωνομετρικές μορφές του **μετασχηματισμού Fourier**. Οι συντελεστές $W(a, t)$ αντιπροσωπεύουν μια μέτρηση της ομοιότητας της μεταβαλλόμενης **συνάρτησης wavelet**

και του σήματος για συγκεκριμένη τιμή t και κλίμακα (συχνότητα) a . Στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού οι τεχνικές **wavelet** έχουν υιοθετηθεί σε αρκετές περιπτώσεις όπου οι **μετασχηματισμοί Fourier** δεν επαρκούν. Η εφαρμογή των **μετασχηματισμών wavelet** ποικιλεί από τον εντοπισμό βλαβών $[\Xi 12, \Xi 21]$ αλλά και στην αναγνώριση χαρακτηριστικών $[\Xi 8, \Xi 11, \Xi 12, \Xi 21]$.

4.4.2 Αναγνώριση με εφαρμογή φίλτρων Kalman (Kalman Filters)

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μια εκτενής χρήση των **φίλτρων Kalman** $[\Xi 10]$ στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού και ειδικότερα στην **ενόργανη παρακολούθηση της δομικής ακεραιότητας των κατασκευών (structural health monitoring – SHM)**. Ειδικότερα γίνεται και χρήση του **εκτεταμένου φίλτρου Kalman (Extended Kalman Filter – EKF)** στη δομική μηχανική όπως αναλύεται παρακάτω. Έστω ένα μη-γραμμικό δυναμικό σύστημα που περιγράφεται με τις παρακάτω εξισώσεις;

$$x_{i+1} = f_i(x_i) + v_i \quad (4.51)$$

$$y_i = h_i(x_i) + w_i \quad (4.52)$$

Όπου οι δείκτες i και $i + 1$ δηλώνουν ποσότητες που σχετίζονται με τη παράμετρο του χρόνου t_i, t_{i+1} με $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Η πρώτη εξίσωση δηλώνει την εξέλιξη σε σχέση με το χρόνο του διανύσματος x μέσω του διανύσματος f , ενώ η δεύτερη εξίσωση στη χρονική στιγμή t_i δηλώνει τη μη γραμμική σχέση μεταξύ των παρατηρήσεων στο διάνυσμα y και στο διάνυσμα x . Τα διανύσματα v και w είναι οι θόρυβοι μέτρησης και επεξεργασίας αντίστοιχα που θεωρούνται **λευκοί θόρυβοι** και **θόρυβοι Gauss** με μηδενική μέση τιμή και με πίνακα συνδιακύμανσης $V_i = E[v_i v_i^T]$, $W_i = E[w_i w_i^T]$. Προκειμένου να εφαρμοστεί το **εκτεταμένο φίλτρο Kalman** οι συναρτήσεις f_i και h_i γραμμικοποιούνται ως προς τη πιο πρόσφατη εκτίμηση του x . Οι κλίσεις αυτών των συναρτήσεων μετατροπής είναι της μορφής:

$$F_i = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x^T} \Big|_{x=\hat{x}_i}, \quad H_i = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x^T} \Big|_{x=\hat{x}_i} \quad (4.53\alpha, \beta)$$

Η εκκίνηση τη χρονική στιγμή t_0 του διανύσματος x και του σχετικού πίνακα συνδιακύμανσης $P = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$, και η βελτίωση στη χρονική στιγμή t_i των εκτιμήσεων που δίνονται από το **εκτεταμένο φίλτρο Kalman** συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Εκτεταμένο φίλτρο Kalman

Εκκίνηση τη χρονική στιγμή t_0 :

$$\hat{x}_0 = E[x_0]$$

$$P_0 = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T],$$

Στο t_i , για $i=1, \dots, N$

(1) Φάση πρόβλεψης

$$\hat{x}_{i+1}^- = f_i(\hat{x}_i)$$

$$P_{i+1}^- = F_i P_i F_i^T + V_i$$

(2) Φάση διόρθωσης

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i^- + G_i(y_i - h_i(\hat{x}_i^-))$$

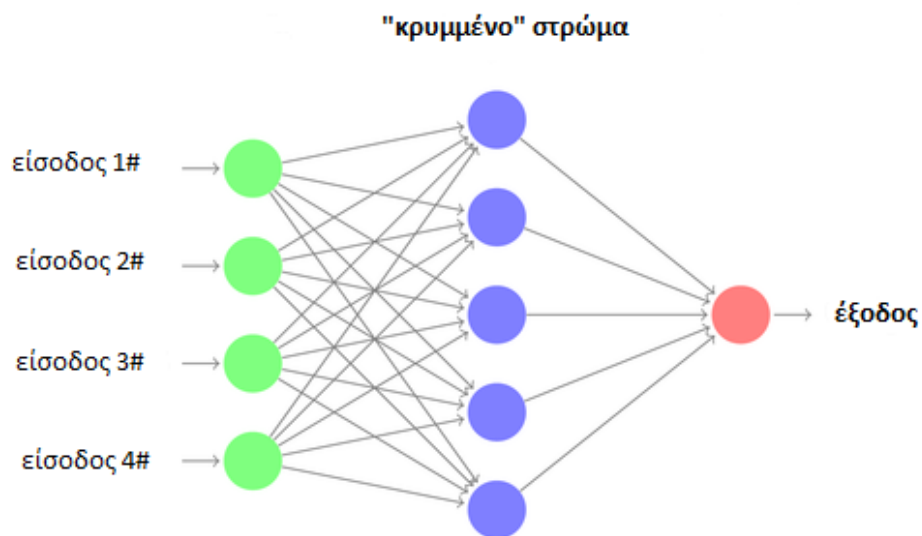
$$P_i = (I - G_i H_i) P_i^-$$

$$G_i = P_i^- H_i^T (H_i P_i^- H_i^T + W_i)^{-1}$$

Πίνακας 1: Σύνοψη του αλγόριθμου του εκτεταμένου φίλτρου Kalman

4.4.3 Αναγνώριση με τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης (Artificial Intelligence – AI)

Τεχνικές αναγνώρισης συστημάτων που βασίζονται σε συμβατικές μεθόδους προσομοίωσης των κατασκευών δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά για μεγάλες και περίπλοκες κατασκευές που παρουσιάζουν μη γραμμική συμπεριφορά. Για τέτοιες περιπτώσεις έχουν προταθεί τεχνικές όπως είναι τα **νευρωνικά δίκτυα (neural networks)**, **γενετικοί αλγόριθμοι (genetic algorithms)**, ή **μέθοδοι βελτιστοποίησης σμήνους σωματιδίων (particle swarm optimization)** [Ξ1]. Η ακρίβεια αυτών των τεχνικών εξαρτάται από το πως το μοντέλο νευρωνικού δικτύου εκπαιδεύεται στην επίλυση νέων προβλημάτων. Ένα τυπικό νευρωνικό δίκτυο απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4.21: Σχηματική απεικόνιση νευρωνικού δικτύου

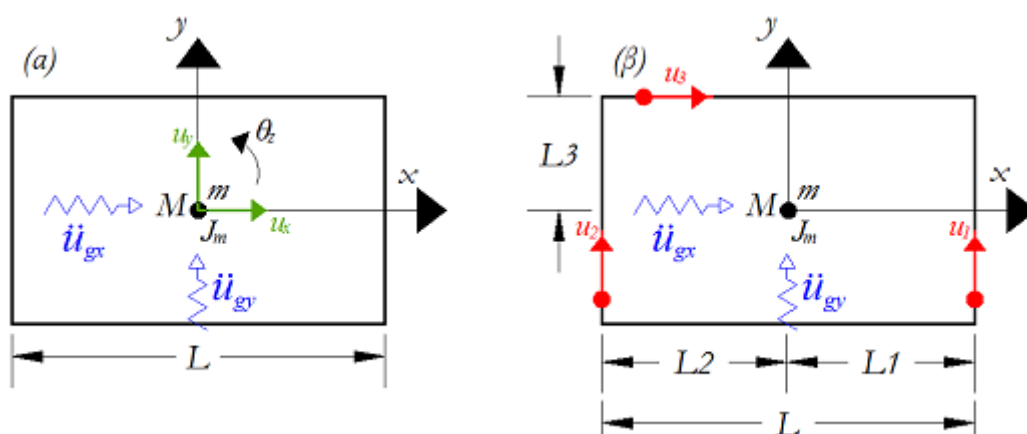
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΜΕΘΟΔΟΣ ΙΔΙΟΜΟΡΦΙΚΩΝ ΧΡΟΝΟΪΣΤΟΡΙΩΝ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

5.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια η παρακολούθηση της δομικής ακεραιότητας των κατασκευών χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο πολυκάναλο δίκτυο για την μέτρηση των επιταχύνσεων απόκρισης είναι ένα πεδίο έρευνας που αναπτύσσεται με πολύ γρήγορο ρυθμό. Είναι γνωστόν, ότι οι χρονοϊστορίες επιτάχυνσης απόκρισης μιας κατασκευής εμπεριέχουν και την ιδιομορφική της απόκριση. Για τις σεισμικές διεγέρσεις οι χρονοϊστορίες επιτάχυνσης ολικής απόκρισης και όχι σχετικής αποκρίσης σε συγκεκριμένα σημεία των κατασκευών πρέπει να αναγνωριστούν. Έχουν αναπτυχθεί και προταθεί πολλές μέθοδοι για την αναγνώριση δυναμικών χαρακτηριστικών αλλά στο συγκεκριμένο κεφάλαιο εξετάζουμε την μέθοδο ιδιομορφικών χρονοϊστοριών η οποία είναι μια μέθοδος που αναπτύχθηκε σχετικά πρόσφατα [Ξ13].

5.2 Επιλογή σχήματος ενοργάνωσης

Για συμβατικά κτίρια λαμβάνεται υπόψιν η διαφραγματική λειτουργία των πλάκων στη στάθμη κάθε ορόφου έτσι ώστε το σχήμα ενοργάνωσης που επιλέγεται να εξασφαλίσει τη πλήρη καταγραφή της κίνησης των διαφραγμάτων χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο δυνατό αριθμό επιταχυνσιομέτρων [Ξ13, Ξ19]. Ως γνωστόν η κίνηση τους εκφράζεται με τρεις βαθμούς ελευθερίας δύο οριζόντιες μετατοπίσεις κατά x και y και μια στροφή περί του άξονα z . Αν τα επιταχυνσιόμετρα έχουν εγκατασταθεί με τέτοιο τρόπο ώστε οι κινήσεις που καταγράφουν έστω u_1, u_2, u_3 εκφράζουν την πλήρη κίνηση του διαφράγματος ισόδυναμα με τις κινήσεις στους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας u_x, u_y, θ_z τότε το επιλεγμένο σχήμα ενοργάνωσης τεκμηριώνεται μαθηματικά αφού οι μετρήσεις των επιταχυνσιομέτρων δίνουν απευθείας τις ιδιομορφικές συνιστώσες του διαφράγματος.



Σχήμα 5.22: (α) Απεικόνιση των 3 βαθμών ελευθερίας στο κέντρο μάζας του διαφράγματος (β) Απεικόνιση των 3 βαθμών ελευθερίας του διαφράγματος στις τρεις θέσεις εγκατάστασης των επιταχυνσιομέτρων

5.3 Ισοδύναμο μητρώο μάζας

Αναλύεται η σεισμική συμπεριφορά ενός ασύμμετρου μονώροφου κτιρίου για τις κινήσεις u_1, u_2, u_3 όπου τα προκύπτοντα συμπεράσματα μπορούν να επεκταθούν και για πολυόροφες κτιριακές κατασκευές. Αρχικά, υπολογίζεται το ισοδύναμο μητρώο μάζας \mathbf{M} ως προς u_1, u_2, u_3 . Έστω ότι η κατασκευή έχει τη κάτοψη του παραπάνω σχήματος (Σχήμα 5.1), στηρίζεται σε αβαρή υποστηλώματα και παρουσιάζει γραμμική ελαστική συμπεριφορά. Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι η συνολική μάζα της κατασκευής είναι συγκεντρωμένη στο γεωμετρικό κέντρο του διαφράγματος και διαθέτει 3 βαθμούς ελευθερίας u_x, u_y, θ_z . Επίσης στο γεωμετρικό κέντρο υπάρχει και η μαζική ροπή αδράνειας J_m . Με βάση τις παραπάνω παραδοχές η κινητική ενέργεια T εκφράζεται ως εξής:

$$T = \frac{1}{2} (m \cdot \dot{u}_x^2 + m \cdot \dot{u}_y^2 + J_m \cdot \dot{\theta}_z^2) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_M^T \mathbf{M}_M \dot{\mathbf{u}}_M \quad (5.1)$$

Όπου \mathbf{M}_M και $\dot{\mathbf{u}}_M$ εκφράζονται με μητρική μορφή ως εξής:

$$\mathbf{M}_M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_m \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}_M = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix}$$

Έπειτα εκφράζουμε τις κινηματικές συνθήκες των ταχυτήτων των βαθμών ελευθερίας του διαφράγματος συναρτήσει των κινήσεων u_1, u_2, u_3 σύμφωνα με τις θέσεις εγκατάστασης των επιταχυνσιομέτρων με τα μήκη να λαμβάνονται από το Σχήμα 5.1. Συνεπώς θα έχουμε:

$$\dot{u}_y = \dot{u}_1 - L_1 \cdot \dot{\theta}_z \quad (5.2)$$

$$\dot{u}_y = \dot{u}_2 - L_2 \cdot \dot{\theta}_z \quad (5.3)$$

$$\dot{u}_x = \dot{u}_3 - L_3 \cdot \dot{\theta}_z \quad (5.4)$$

$$\dot{\theta}_z = \frac{\dot{u}_1 - \dot{u}_2}{L} \quad (5.5)$$

Αντικαθιστώντας το $\dot{\theta}_z$ στις σχέσεις (5.2) έως (5.4) προκύπτει:

$$\dot{u}_y = \dot{u}_1 - L_1 \cdot \left(\frac{\dot{u}_1 - \dot{u}_2}{L} \right) = \left(1 - \frac{L_1}{L} \right) \dot{u}_1 + \left(\frac{L_1}{L} \right) \dot{u}_2 \quad (5.6)$$

$$\dot{u}_y = \dot{u}_2 + L_2 \cdot \left(\frac{\dot{u}_1 - \dot{u}_2}{L} \right) = \left(1 - \frac{L_2}{L} \right) \dot{u}_2 + \left(\frac{L_2}{L} \right) \dot{u}_1 \quad (5.7)$$

$$\dot{u}_x = \dot{u}_3 + L_3 \cdot \left(\frac{\dot{u}_1 - \dot{u}_2}{L} \right) = \left(\frac{L_3}{L} \right) \dot{u}_1 - \left(\frac{L_3}{L} \right) \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \quad (5.8)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω εκφράσεις στο διάνυσμα ταχυτήτων $\dot{\mathbf{u}}_M$ η νέα του μητρική μορφή θα είναι:

$$\dot{\mathbf{u}}_M = L \dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} L_3/L & -L_3/L & 1 \\ 1 - L_1/L & L_1/L & 0 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Το μητρώο του διανύσματος $\dot{\mathbf{u}}_M^T$ προκύπτει αντιστοίχως:

$$\dot{u}_M^T = \dot{u}^T L^T = [\dot{u}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{u}_3] \begin{bmatrix} L_3/L & 1 - L_1/L & 1/L \\ -L_3/L & L_1/L & -1/L \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.9) και (5.10) στην (5.1) θα έχουμε:

$$T = \frac{1}{2} \dot{u}_M^T M_M \dot{u}_M = \frac{1}{2} \dot{u}^T L^T M_M L \dot{u} = \frac{1}{2} \dot{u}^T M \dot{u} \quad (5.11)$$

Όπου $M = L^T M_M L$ το ισοδύναμο μητρώο μάζας συναρτήσει των u_1, u_2, u_3 . Σημειώνεται ότι το μητρώο είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο:

$$M = L^T M_M L = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M = \begin{bmatrix} \left(\frac{L_3^2}{L^2} m + \left(1 - \frac{L_1}{L} \right)^2 m + \frac{J_m}{L^2} \right) & \left(-\frac{L_3^2}{L^2} m + \left(1 - \frac{L_1}{L} \right) \frac{L_1}{L} m - \frac{J_m}{L^2} \right) & \frac{L_3}{L} m \\ \left(-\frac{L_3^2}{L^2} m + \left(1 - \frac{L_1}{L} \right) \frac{L_1}{L} m - \frac{J_m}{L^2} \right) & \left(\frac{L_3^2}{L^2} m + \frac{L_1^2}{L} m + \frac{J_m}{L^2} \right) & \frac{L_3}{L} m \\ \frac{L_3}{L} m & -\frac{L_3}{L} m & m \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

5.3 Ισοδύναμο μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας K

Η ενέργεια παραμόρφωσης U του διαφράγματος συναρτήσει των τριών βαθμών ελευθερίας u_x, u_y, θ_z του συστήματος M_{xyz} δίνεται από τη παρακάτω σχέση:

$$U = \frac{1}{2} u_M^T K_M u_M = \frac{1}{2} [u_x \quad u_y \quad \theta_z] \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Όπου K το μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας του μονώροφου κτιρίου συναρτήσει u_x, u_y, θ_z του συστήματος M_{xyz} . Εργαζόμενοι αναλόγως όπως και στη περίπτωση του μητρώου μάζας και εκφράζοντας τους βαθμούς ελευθερίας με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν με τους βαθμούς ελευθερίας στις θέσεις των επιταχυνσιομέτρων θα έχουμε:

$$u_y = u_1 - L_1 \cdot \theta_z \quad (5.14)$$

$$u_y = u_2 - L_2 \cdot \theta_z \quad (5.15)$$

$$u_x = u_3 - L_3 \cdot \theta_z \quad (5.16)$$

$$\theta_z = \frac{u_1 - u_2}{L} \quad (5.17)$$

Ομοίως όπως και στη περίπτωση του μητρώου μάζας αντικαθιστώντας το θ_z στις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν:

$$u_y = u_1 - L_1 \cdot \left(\frac{u_1 - u_2}{L} \right) = \left(1 - \frac{L_1}{L} \right) u_1 + \left(\frac{L_1}{L} \right) u_2 \quad (5.18)$$

$$u_y = u_2 + L_2 \cdot \left(\frac{u_1 - u_2}{L} \right) = \left(1 - \frac{L_2}{L} \right) u_2 + \left(\frac{L_2}{L} \right) u_1 \quad (5.19)$$

$$u_y = u_2 + L_2 \cdot \left(\frac{u_1 - u_2}{L} \right) = \left(1 - \frac{L_2}{L} \right) u_2 + \left(\frac{L_2}{L} \right) u_1 \quad (5.20)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των u_x, u_y, θ_z από τις (5.20), (5.18) και (5.17) αντίστοιχα στο διάνυσμα μετακινήσεων u_M θα λάβει τη παρακάτω μητρική μορφή:

$$u_M = Lu = \begin{bmatrix} L_3/L & -L_3/L & 1 \\ (1 - L_1/L) & L_1/L & 0 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Όπου L το μητρώο μετατροπής. Η μητρική μορφή του διανύσματος u_M^T θα είναι:

$$u_M^T = u^T L^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3] \begin{bmatrix} L_3/L & (1 - L_1/L) & 1/L \\ -L_3/L & L_1/L & -1/L \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας τα u_M και u_M^T στην εξίσωση της ενέργειας παραμόρφωσης προκύπτει:

$$U = \frac{1}{2} u_M^T K_M u_M = \frac{1}{2} u^T L^T K_M L u = \frac{1}{2} u^T K u \quad (5.23)$$

Όπου $K = L^T K_M L$ το **ισοδύναμο μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας** του μονώροφου κτιρίου εκφρασμένο συναρτήσει των u_1, u_2, u_3 που συμπίπτουν με τις θέσεις των επιταχυνσιομέτρων. Το μητρώο K είναι συμμετρικό και θετικά ορισμένο:

$$K = L^T K_M L = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

5.4 Εξίσωση κίνησης μονώροφου ασύμμετρου κτιρίου υπό σεισμική φόρτιση

Έστω το ασύμμετρο μονώροφο κτίριο που εξετάζουμε υπόκειται σε σεισμικό φορτίο, το οποίο αποτελείται από δυο χρονοϊστορίες επιτάχυνσης στους άξονες x και y και συμβολίζονται με $\ddot{u}_{gx}(t)$ και $\ddot{u}_{gy}(t)$ αντίστοιχα όπως φαίνονται στο Σχήμα 5.1. Οι ολικές μετακινήσεις των τριών βαθμών ελευθερίας που συμπίπτουν με τις θέσεις των επιταχυνσιομέτρων είναι:

$$v_1(t) = u_{gy}(t) + u_1(t) \quad (5.25)$$

$$v_2(t) = u_{gy}(t) + u_2(t) \quad (5.26)$$

$$v_3(t) = u_{gx}(t) + u_3(t) \quad (5.27)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν την παρακάτω μητρική μορφή:

$$v = u_g + u \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{gy}(t) \\ u_{gy}(t) \\ u_{gx}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Η εξίσωση κίνησης για το μονώροφο κτίριο που υπόκειται σε σεισμική διέγερση αποτελούμενη από δύο συνιστώσες δίνεται από τη σχέση:

$$M\ddot{v} + C\dot{v} + Ku = 0 \quad (5.29)$$

Και αντικαθιστώντας το v από την (5.28) στην (5.29) προκύπτει:

$$M(\ddot{u}_g + \ddot{u}) + C\dot{u} + Ku = 0 \Rightarrow M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\ddot{u}_g \quad (5.30)$$

Έστω το ιδιομορφικό μητρώο Φ της εξεταζόμενης κατασκευής, όπου οι συνιστώσες φ_{ij} των ιδιομορφών αναφέρονται στις θέσεις που είναι τοποθετημένα τα επιταχυνσιόμετρα:

$$\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Για τις ταλαντώσεις των ιδιομορφών $i = 1, 2, 3$ εκφράζονται οι μετακινήσεις $u(t)$ συναρτήσει των ιδιομορφών φ_i και των ιδιομορφικών χρονικών συναρτήσεων $q_i(t)$ ως εξής:

$$u(t) = \varphi_1 q_1(t) + \varphi_2 q_2(t) + \varphi_3 q_3(t) = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = \Phi q \quad (5.32)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του μητρώου $u(t)$ στην (5.30) προκύπτει:

$$M\Phi\ddot{q} + C\Phi\dot{q} + K\Phi q = -M\delta(t) \cdot \ddot{u}_{gy}(t) \quad (5.33)$$

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ddot{u}_{gx}(t)/\ddot{u}_{gy}(t) \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Έπειτα πολλαπλασιάζοντας την (5.34) με τον ανάστροφο πίνακα του ιδιομορφικού μητρώου Φ^T προκύπτει:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q} + \Phi^T C \Phi \dot{q} + \Phi^T K \Phi q = -\Phi^T M \delta(t) \cdot \ddot{u}_{gy}(t) \quad (5.35)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας M, K αντίστοιχα είναι συμμετρικά και θετικά ορισμένα, καθώς επίσης ότι ισχύουν έμμεσες συνθήκες ορθογωνικότητας των ιδιομορφών μέσω των M, K οπότε θα έχουμε:

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T M \varphi_1 & \varphi_1^T M \varphi_2 & \varphi_1^T M \varphi_3 \\ \varphi_2^T M \varphi_1 & \varphi_2^T M \varphi_2 & \varphi_2^T M \varphi_3 \\ \varphi_3^T M \varphi_1 & \varphi_3^T M \varphi_2 & \varphi_3^T M \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T K \varphi_1 & \varphi_1^T K \varphi_2 & \varphi_1^T K \varphi_3 \\ \varphi_2^T K \varphi_1 & \varphi_2^T K \varphi_2 & \varphi_2^T K \varphi_3 \\ \varphi_3^T K \varphi_1 & \varphi_3^T K \varphi_2 & \varphi_3^T K \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 M_3 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Γίνεται η παραδοχή ότι οι ιδιομορφές ταλάντωσης είναι ορθογωνικές μέσω του μητρώου απόσβεσης C , το οποίο λαμβάνεται ανάλογο είτε προς το μητρώο μάζας M είτε προς το μητρώο οριζόντιας δυσκαμψίας K είτε και προς τα δύο, και γι' αυτό καλείται **αναλογικό μητρώο απόσβεσης**. Από τη παραπάνω παραδοχή προκύπτει ότι το αναλογικό μητρώο απόσβεσης μπορεί να διαγωνιοποιηθεί αν πολλαπλασιαστεί με τα Φ^T, Φ από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα:

$$\varphi_i^T C \varphi_j = 0 \quad \text{για } i \neq j \quad (5.38)$$

$$\varphi_i^T C \varphi_i = C_i \quad (5.39)$$

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T C \varphi_1 & \varphi_1^T C \varphi_2 & \varphi_1^T C \varphi_3 \\ \varphi_2^T C \varphi_1 & \varphi_2^T C \varphi_2 & \varphi_2^T C \varphi_3 \\ \varphi_3^T C \varphi_1 & \varphi_3^T C \varphi_2 & \varphi_3^T C \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Αντικαθιστώντας τις (5.36), (5.37), (5.40) στην (5.35) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \ddot{q}_2(t) \\ \ddot{q}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 M_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} = \\ = - \begin{bmatrix} \varphi_1^T M \\ \varphi_2^T M \\ \varphi_3^T M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ddot{u}_{gx}(t)/\ddot{u}_{gy}(t) \end{bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Από την (5.41) προκύπτει ότι τα μητρώα γενικευμένης μάζας, οριζόντιας δυσκαμψίας και απόσβεσης διαγωνιοποιούνται ταυτόχρονα με αποτέλεσμα την αποσύζευξη των γενικευμένων ιδιομορφικών συντεταγμένων $q_i(t)$ και τη διάσπαση του συστήματος των εξισώσεων (5.41) σε τρεις ανεξάρτητες εξισώσεις:

$$M_i \ddot{q}_i(t) + C_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 M_i q_i(t) = -\varphi_i^T M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ddot{u}_{gx}(t)/\ddot{u}_{gy}(t) \end{bmatrix} \ddot{u}_{gy}(t) \quad (5.42)$$

Με $i = 1, 2, 3$. Η εξίσωση (5.42) περιγράφει τη ταλάντωση του i ιδεατού μονοβάθμιου ταλαντωτή, με μάζα $M_i = \varphi_i^T M \varphi_i$, απόσβεση C_i και δυσκαμψία $K_i = \omega_i^2 M_i$. Η ύπαρξη υποκρίσιμης απόσβεσης είναι αναγκαία για να υπάρξει ταλάντωση με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση:

$$C_i = 2\zeta_i M_i \omega_i \quad (5.43)$$

Αντικαθιστώντας την (5.43) στην (5.42) για $i = 1, 2, 3$ θα έχουμε:

$$M_i \ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i M_i \omega_i \dot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = -\varphi_i^T M \delta(t) \ddot{u}_{gy}(t) \quad (5.44)$$

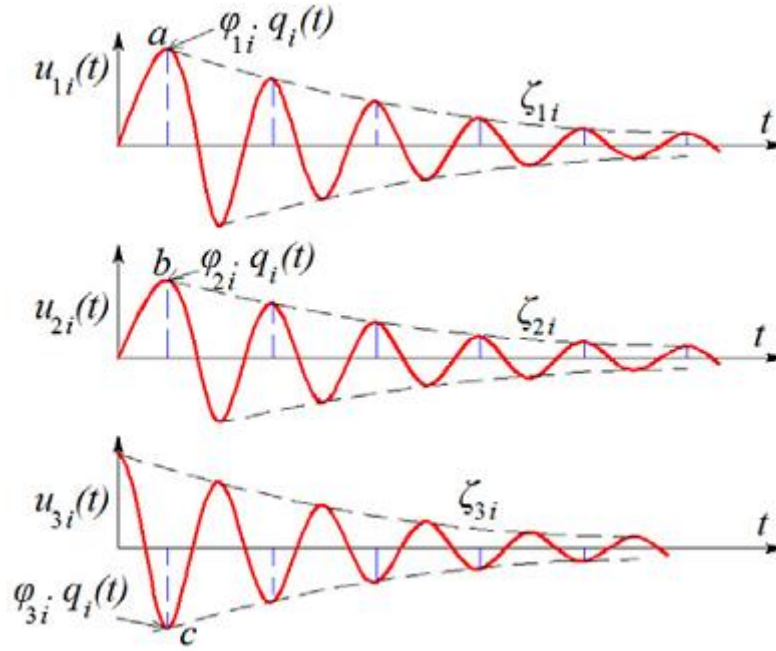
Διαιρώντας και τα δύο μέλη της (5.44) με την ιδιομορφική μάζα $M_i = \varphi_i^T M \varphi_i$ προκύπτει:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = -\frac{\varphi_i^T M \delta(t)}{\varphi_i^T M \varphi_i} \cdot \ddot{u}_{gy}(t) \quad (5.45)$$

Όπου ο λόγος $\Gamma_i(t) = \varphi_i^T M \delta(t) / \varphi_i^T M \varphi_i$ καλείται ιδιομορφικός συντελεστής συμμετοχής και είναι γνωστός αλλά μεταβαλλόμενος για κάθε χρονικό βήμα, λόγω της ταυτόχρονης εφαρμογής των δύο συνιστωσών $\ddot{u}_{gx}(t)$ και $\ddot{u}_{gy}(t)$. Η απόκριση $q_i(t)$ μπορεί να υπολογιστεί είτε με χρήση του **ολοκληρώματος Duhamel** είτε με απευθείας αριθμητική ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης όπως για παράδειγμα με τη **μέθοδο Newmark**. Αφού υπολογιστούν οι ζητούμενες χρονοϊστορίες στη συνέχεια από την (5.32) λαμβάνεται το ζητούμενο διάνυσμα μετακινήσεων για κάθε θέση εγκατάστασης των επιταχυνσιομέτρων σύμφωνα με τη παρακάτω εξίσωση:

$$u_i(t) = \varphi_i q_i(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{1i}(t) \\ u_{2i}(t) \\ u_{3i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1i} q_i(t) \\ \varphi_{2i} q_i(t) \\ \varphi_{3i} q_i(t) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5.2) φαίνεται η φυσική ερμηνεία της (5.46) για την ελεύθερη ταλάντωση της εξεταζόμενης κατασκευής.



Σχήμα 5.23: Ιδιομορφικές αποκρίσεις της i ιδιομορφής του κτιρίου κατά την ελεύθερη ταλάντωση του στις θέσεις ενοργάνωσης

Από την (5.46) βρίσκεται η χρονοϊστορία απόκρισης μετακινήσεων $u_{ni}(t)$ της i ιδιομορφής για τη θέση $n = 1, 2, 3$ του επιταχυνσιόμετρου:

$$u_{ni}(t) = \varphi_{ni} q_i(t) \Rightarrow q_i(t) = \frac{u_{ni}(t)}{\varphi_{ni}} \quad (5.47)$$

Για να υπολογιστεί η ιδιομορφική απόκριση μετατοπίσεων $u_{ni}(t)$ της i ιδιομορφής στη θέση που έχει εγκατασταθεί το επιταχυνσιόμετρο n αντικαθιστούμε την (5.47) στην (5.45) και προκύπτει:

$$\ddot{u}_{ni}(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{u}_{ni}(t) + \omega_i^2 u_{ni}(t) = -\frac{\varphi_i^T M \delta(t)}{\varphi_i^T M \varphi_i} \cdot \ddot{u}_{gy}(t) \quad (5.48)$$

Επιδύοντας την παραπάνω εξίσωση (5.48) προκύπτουν οι ιδιομορφικές αποκρίσεις μετατοπίσεων $u_{ni}(t)$, οι ιδιομορφικές αποκρίσεις ταχυτήτων $\dot{u}_{ni}(t)$ και οι ιδιομορφικές αποκρίσεις επιταχύνσεων $\ddot{u}_{ni}(t)$ του κτιρίου για $n = 1, 2, 3$, με την προϋπόθεση ότι είναι γνωστά οι ιδιομορφές του κτιρίου φ_i , οι κυκλικές ιδιοσυχνότητες ω_i , τα αντίστοιχα ποσοστά ισοδύναμης ιξώδους απόσβεσης ζ_i , οι οριζόντιες σεισμικές συνιστώσες $\ddot{u}_{gx}(t)$ και $\ddot{u}_{gy}(t)$ και το μητρώο μάζας M από την (5.12).

Από τα παραπάνω μεγέθη, οι ιδιομορφικές αποκρίσεις επιταχύνσεων $\ddot{u}_{ni}(t)$, οι ιδιομορφές του κτιρίου φ_i , οι κυκλικές ιδιοσυχνότητες ω_i και τα αντίστοιχα ποσοστά ισοδύναμης ιξώδους απόσβεσης ζ_i υπολογίζονται από τη μέθοδο ιδιομορφικών χρονοϊστοριών απόκρισης επιταχύνσεων που θα παρουσιαστεί στη συνέχεια του κεφαλαίου. Οι ιδιομορφικές αποκρίσεις μετατοπίσεων $u_{ni}(t)$ και οι ιδιομορφικές αποκρίσεις ταχυτήτων $\dot{u}_{ni}(t)$ υπολογίζονται έμμεσα από τις ιδιομορφικές αποκρίσεις επιταχύνσεων $\ddot{u}_{ni}(t)$ με διπλή και αριθμητική ολοκλήρωση αντίστοιχα. Εφόσον βρεθούν όλα τα παραπάνω μεγέθη είναι δυνατόν να εφαρμοστούν στην (5.48) τεχνικές βελτιστοποίησης για τη μέγιστη δυνατή σύγκλιση τους.

5.5 Ανάλυση δεδομένων ενοργάνωσης

Από το σύστημα επιταχυνσιομέτρων που είναι εξοπλισμένο το κτίριο προκύπτουν δύο είδη δεδομένων [Ξ13]:

- Οι χρονοϊστορίες των ολικών επιταχύνσεων $\ddot{u}_n(t) = \ddot{u}_{gs}(t) + \ddot{u}_n(t)$, $s = x, y$ ανάλογα τον προσανατολισμό και τη θετική φορά της θέσης του επιταχυνσιομέτρου.
- Οι χρονοϊστορίες των δύο οριζόντιων εδαφικών σεισμικών συνιστωσών $\ddot{u}_{gx}(t)$ και $\ddot{u}_{gy}(t)$.

Απομακρύνοντας το θόρυβο (βλ. Κεφάλαιο 3) από τα παραπάνω δεδομένα και με κατάλληλη μαθηματική επεξεργασία μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

- Οι ιδιοσυχνότητες του υπο εξέταση κτιρίου καθώς επίσης και τα παράγωγα μεγέθη που προκύπτουν από αυτές ήτοι οι κυκλικές ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοπερίοδοι.
- Η ιδιομορφική χρονοϊστορία επιταχύνσεων απόκρισης $\ddot{u}_{ni}(t)$ για κάθε i ιδιομορφή στη θέση του επιταχυνσιομέτρου n . Επισημαίνεται ότι οι ιδιομορφικές χρονοϊστορίες απόκρισης μετατοπίσεων και ταχυτήτων προκύπτουν έμμεσα από αυτές της επιτάχυνσης.
- Οι ιδιομορφικές συνιστώσες φ_{ni} των ιδιομορφών που προκύπτουν από τις ιδιομορφικές χρονοϊστορίες των επιταχύνσεων απόκρισης $\ddot{u}_{ni}(t)$ σύμφωνα με την σχέση $\varphi_{ni} = \ddot{u}_{ni}(t)/\ddot{q}_i(t)$ και οι ιδιομορφικές συνιστώσες σύμφωνα με το Σχήμα 5.2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\varphi_{1i} = \alpha/\alpha, \quad \varphi_{2i} = b/\alpha, \quad \varphi_{3i} = c/\alpha \quad (5.49)$$

- Το ποσοστό ισοδύναμης ιξώδους απόσβεσης ζ_i που υπολογίζεται ως ο αριθμητικός μέσος όρος των επιμέρους ποσοστών απόσβεσης ζ_i των ιδιομορφικών συνιστωσών όλων των επιταχυνσιομέτρων. Τα ποσοστά αυτά προκύπτουν υπολογίζοντας το 50% για κάθε ιδιομορφή του χρόνου μετά τη δράση της σεισμικής διέγερσης όπου η κατασκευή εκτελεί ελεύθερη ταλάντωση.

5.6 Περιγραφή της μεθόδου

Η εφαρμοζόμενη μέθοδος της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποσκοπεί στην απομόνωση των ιδιομορφικών χρονοϊστοριών απόκρισης επιταχύνσεων από τα αρχικά καταγεγραμμένα επιταχυνσιογράμματα απόκρισης με χρήση κατάλληλης αριθμητικής επεξεργασίας και αποσκοπεί επίσης στον υπολογισμό των ιδιομορφών φ_i του κτιρίου, των κυκλικών ιδιοσυχνοτήτων ω_i αυτού και των αντίστοιχων ιδιομορφικών ποσοστών απόσβεσης ζ_i .

Η βασική ιδέα της μεθόδου βασίζεται στο γεγονός ότι κάθε χρονοϊστορία απόκρισης επιταχύνσεων που καταγράφεται σε κάποιο σημείο μιας κατασκευής αποτελείται από επαλληλία πολλών αρμονικών χρονοϊστοριών όπου κάποιες από αυτές αποτελούν τις ζητούμενες αποκρίσεις ιδιομορφών της εξεταζόμενης κατασκευής.

Αναλυτικά η μέθοδος συνοψίζεται σε εννέα βήματα τα οποία εξηγούνται παρακάτω:

1. **Επιλογή σχήματος ενοργάνωσης** που σημαίνει ότι αυτή πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να καταγράφονται τα μέγιστα πλάτη των αναπτυσσόμενων επιταχύνσεων στη περίμετρο κάθε ορόφου.

2. **Επιλογή διάρκειας καταγραφής** που σημαίνει ότι η έναρξη και η διάρκεια καταγραφής της σεισμικής διέγερσης θα πρέπει να είναι η ίδια για όλα τα επιταχυνσιόμετρα. Σύμφωνα με [E8] προτείνεται η καταγραφή να ξεκινάει 10 sec πριν και να ολοκληρώνεται τουλάχιστον 20 sec μετά το τέλος της σεισμικής διέγερσης.
3. **Απομάκρυνση θορύβου από τις καταγεγραμμένες χρονοϊστορίες επιτάχυνσης** η οποία επιτυγχάνεται με χρήση **φίλτρου Butterworth** το οποίο επιτρέπει τη διέλευση ενός εύρους συχνοτήτων μεταξύ **0.50** και **40 Hz** για τυπικά κτίρια από οπλισμένο σκυρόδεμα ενώ για πιο εύκαμπτες κατασκευές το εύρος διευρύνεται από **0.25** έως **40 Hz**. Πάντοτε γίνεται γραμμική διόρθωση της γραμμής αναφοράς όλων των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης. Τονίζεται ότι απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά την απομάκρυνση του θορύβου ώστε να μην αποκόπτονται συχνότητες οι οποίες μπορεί να είναι σημαντικές.
4. **Υπολογισμός χρονοϊστορίας στρεπτικών επιταχύνσεων για κάθε επίπεδο της κατασκευής** δηλαδή για κάθε διάφραγμα i υπολογίζεται η χρονοϊστορία $\ddot{\theta}_{zi}(t)$ των στρεπτικών επιταχύνσεων από τις επιμέρους χρονοϊστορίες των ολικών μεταφορικών επιταχύνσεων των δύο παράλληλων επιταχυνσιομέτρων A και B σύμφωνα με τη σχέση:

$$\ddot{\theta}_{zi}(t) = \frac{\ddot{u}_{A,i}(t) - \ddot{u}_{B,i}(t)}{L_i} \quad (5.50)$$

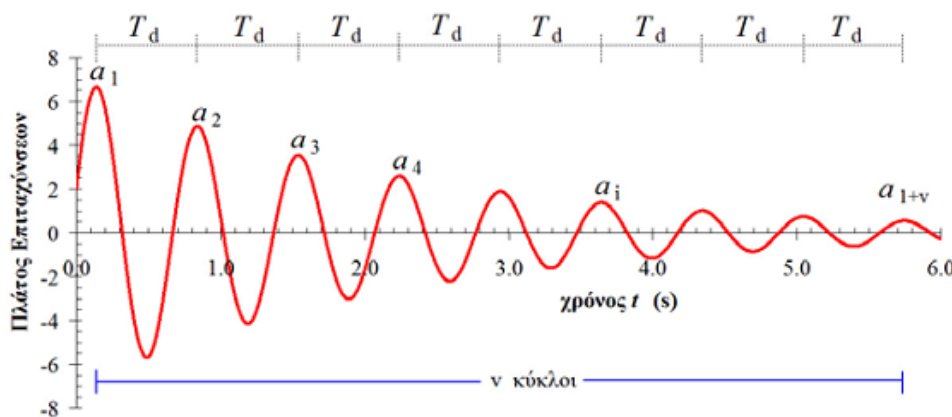
5. **Υπολογισμός των διαγραμμάτων Ταχέως Μετασχηματισμού Fourier για όλες τις χρονοϊστορίες επιτάχυνσης** για όλους τους ορόφους της κατασκευής δηλαδή υπολογίζονται και για μεταφορικές και για στρεπτικές καθώς επίσης και για τις οριζόντιες σεισμικές διεγέρσεις στη βάση του κτιρίου και γίνεται κοινή γραφική παράστασή τους.
6. **Αναγνώριση ιδιοσυχνοτήτων από τα FFT διαγράμματα και τα PSD φάσματα χρονοϊστοριών απόκρισης.** Επισημαίνονται όλες οι συχνότητες για τις οποίες εμφανίζονται ταυτόχρονα τοπικά ακρότατα πλατών FFT στα FFT διαγράμματα των στρεπτικών επιταχύνσεων και στη συνέχεια γίνεται έλεγχος και για τις μεταφορικές αποκρίσεις στις θέσεις των επιταχυνσιομέτρων. Στις περιπτώσεις των συχνοτήτων όπου αυτό συμβαίνει εξετάζεται κατά πόσο αυτές αποτελούν τις πιθανές πραγματικές ιδιοσυχνότητες του κτιρίου. Η επαλήθευση γίνεται κάνοντας χρήση της ίδιας τεχνικής στα διαγράμματα φασματικής πυκνότητας ισχύος των χρονοϊστοριών και επιλέγονται τελικώς οι συχνότητες που προκύπτουν και από τις δύο διαδικασίες. Η ορθότητα επιλογής τους κατοχυρώνεται από τη διαδικασία που περιγράφεται στο 8^ο βήμα.
7. **Υπολογισμός των χρονοϊστοριών ιδιομορφικών μεταφορικών επιταχύνσεων απόκρισης** που γίνεται με βάση τις υποψήφιες ιδιοσυχνότητες από το προηγούμενο βήμα με χρήση κατάλληλου φίλτρου στη συγκεκριμένη περίπτωση φίλτρο τύπου Butterworth που επιτρέπει την ανάκτηση της αρμονικής ιδιομορφικής χρονοϊστορίας μεταφορικής επιτάχυνσης για την ιδιομορφή που μας ενδιαφέρει. Αυτά εφαρμόζονται στην εγγύτητα της υποψήφιας ιδιοσυχνότητας για εύρος 1 – 2% εκατέρωθεν αυτής. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τις υπόλοιπες υποψήφιες ιδιοσυχνότητες που προέκυψαν από το προηγούμενο βήμα τροποποιώντας αναλόγως το εύρος του φίλτρου.
8. **Υπολογισμός των ιδιομορφικών συνιστωσών των ιδιομορφών** όπου δημιουργείται μια γραφική παράσταση για κάθε ιδιομορφή με υπέρθεση των φιλτραρισμένων ιδιομορφικών χρονοϊστοριών μεταφορικής απόκρισης που αντιστοιχούν στη

συγκεκριμένη ιδιομορφή, από την οποία προκύπτουν το μέγιστο ιδιομορφικό πλάτος απόκρισης σε κάθε θέση και η διαφορά φάσης μεταξύ τους. Στο παρόν βήμα γίνεται ο έλεγχος της ορθότητας των υποψήφιων ιδιοσυχνότητων που επιλέχθηκαν στο 6^ο βήμα εξετάζοντας αν οι αρμονικές χρονοϊστορίες που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη συχνότητα έχουν διαφορά φάσης 0 ή π . Αν αυτό δεν συμβαίνει τότε η υποψήφια ιδιοσυχνότητα απορρίπτεται. Στη περίπτωση που αυτή είναι αποδεκτή τότε γίνεται κανονικοποίηση των ακραίων ιδιομορφικών πλατών απόκρισης (a , b , c , d , ...) από τις αντίστοιχες χρονοϊστορίες (A , B , C , D , ...) των ιδιομορφικών αποκρίσεων, λαμβάνοντας τις αναλογίες a/a , b/a , c/a , d/a , οι οποίες αποδίδουν τις ιδιομορφικές συνιστώσες της συγκεκριμένης ιδιομορφής. Τα ακραία ιδιομορφικά πλάτη μπορούν να λαμβάνονται είτε από το κομμάτι της ελεύθερης ταλάντωσης του κτιρίου είτε από ολόκληρη την ιδιομορφική χρονοϊστορία αρκεί οι τελικές τιμές των ιδιομορφικών συνιστωσών να είναι κανονικοποιημένες. Επίσης από τη γραφική παράσταση προκύπτουν και τα πρόσημα των ιδιομορφικών συνιστωσών της ιδιομορφής αναλόγως της διαφοράς φάσης μεταξύ δύο αποκρίσεων δηλαδή αν αυτή είναι ίση με μηδέν τότε οι συνιστώσες είναι ομόσημες ενώ αν είναι ίση με π τότε είναι ετερόσημες.

9. **Υπολογισμός του συντελεστή ιξώδους απόσβεσης** γίνεται για κάθε ιδιομορφική χρονοϊστορία απόκρισης από τη λογαριθμητική απομείωση του πλάτους της ταλάντωσης κατά τη φάση ελεύθερης ταλάντωσης, την οποία εκτελεί η κατασκευή, μετά το τέλος της διέγερσης. Η απομείωση του πλάτους με απόσβεση μονοβάθμιου ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_{1+\nu}} = e^{\zeta \cdot \omega \cdot \nu \cdot T_d} \Rightarrow \ln(\alpha_1/\alpha_{1+\nu}) = \zeta \cdot \omega \cdot \nu \cdot T_d \Rightarrow \ln(\alpha_1/\alpha_{1+\nu}) = \zeta \cdot \omega \cdot \nu \cdot \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta \approx \frac{\ln(\alpha_1/\alpha_{1+\nu})}{2\pi \cdot \nu} \quad (5.51)$$

Όπου ν ο αριθμός των κύκλων, $\omega = 2\pi/T$ η κυκλική συχνότητα χωρίς απόσβεση και T_d η περίοδος της αρμονικής ταλάντωσης με απόσβεση. Η τελική έκφραση του ζ από την (5.51) προκύπτει από τη παραδοχή για μικρές τιμές του το μέγεθος $\sqrt{1-\zeta^2}$ τείνει στη μονάδα [E8]. Από το Σχήμα 5.3 προκύπτει ότι α_1 είναι το πλάτος του πρώτου εξεταζόμενου κύκλου ταλάντωσης και $\alpha_{1+\nu}$ το πλάτος του $\nu + 1$ εξεταζόμενου κύκλου ταλάντωσης.

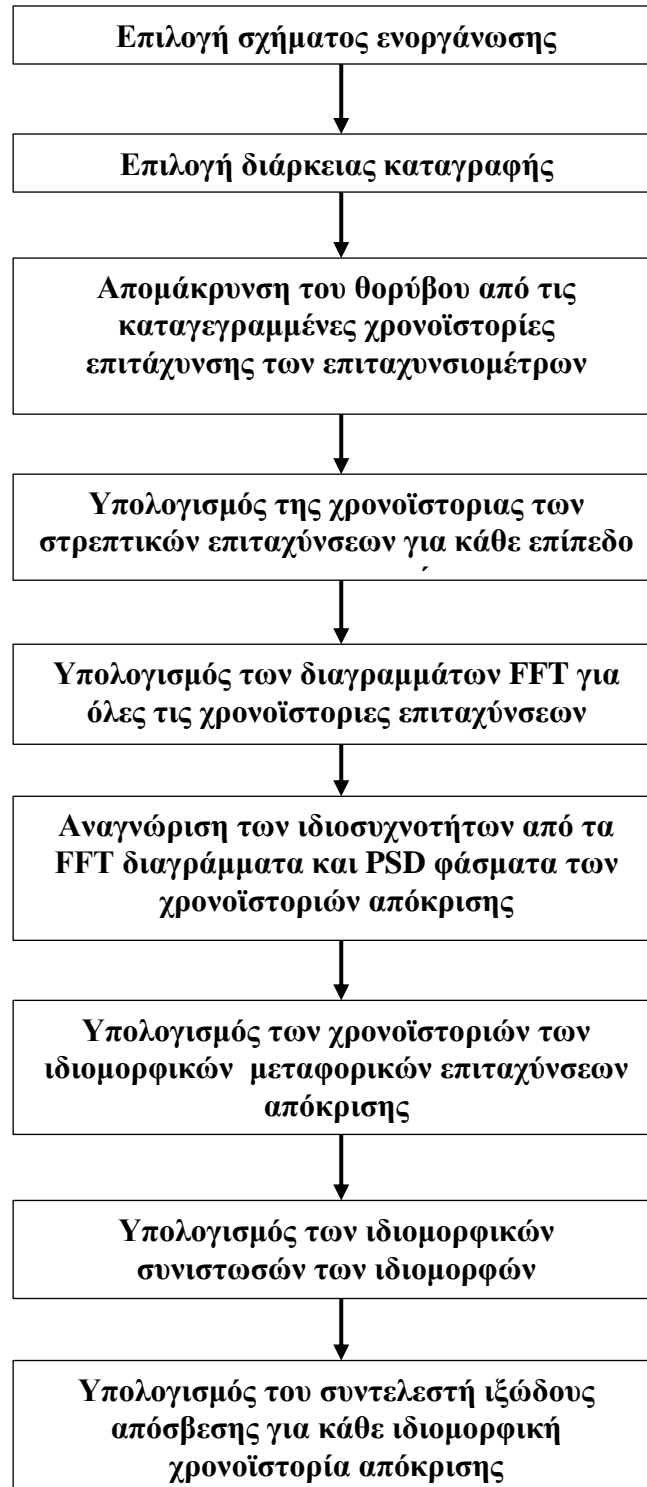


Σχήμα 5.24: Ιδιομορφική χρονοϊστορία απόκρισης επιταχύνσεων κατά την ελεύθερη ταλάντωση κτιρίου με απόσβεση

Το ποσοστό ζ_n της ιξώδους απόσβεσης υπολογίζεται για κάθε n χρονοϊστορία ιδιομορφικής απόσβεσης που ανήκει στην ίδια ιδιομορφή i ταλάντωσης. Το μέσο ισοδύναμο ποσοστό απόσβεσης ζ_i της ιδιομορφής i προκύπτει από τον αριθμητικό μέσο όρο των ποσοστών ζ_{ni} δηλαδή:

$$\zeta_i = \frac{\zeta_{1i} + \zeta_{2i} + \zeta_{3i} + \dots + \zeta_{ni}}{n} \quad (5.52)$$

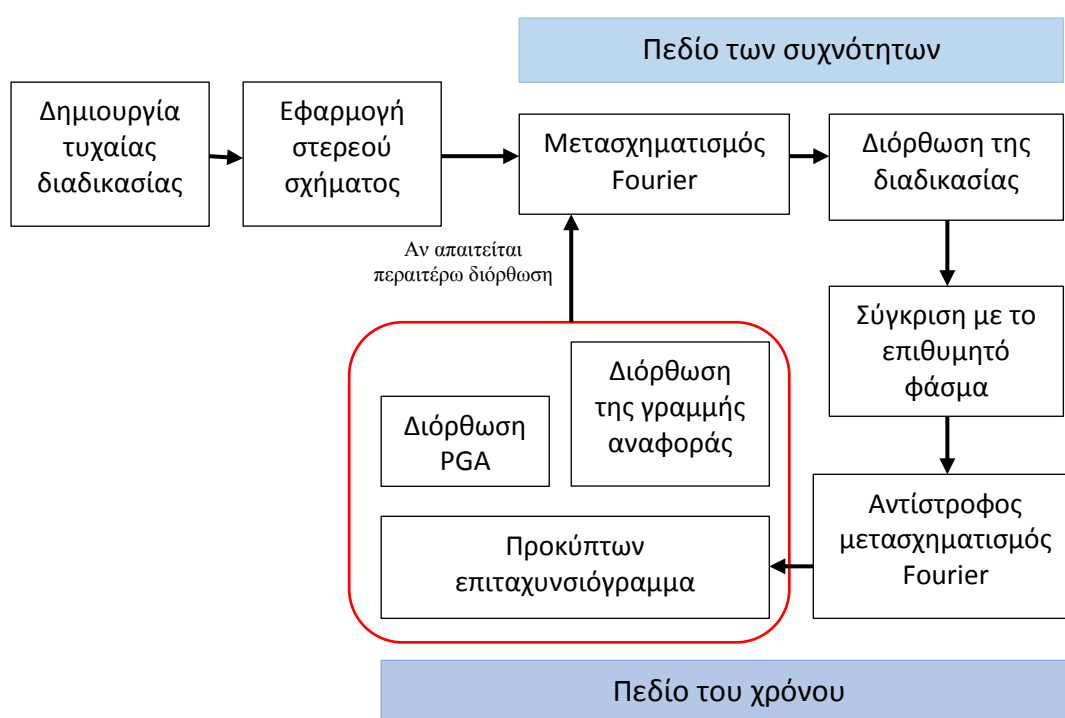
Παρακάτω συνοψίζεται σχηματικά η διαδικασία της μεθόδου που περιγράφηκε αναλυτικά στα προαναφερθέντα βήματα.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα ροής μεθόδου ιδιομορφικών χρονοϊστοριών επιτάχυνσης

5.7 Εφαρμογή προσομοιωμένων δεδομένων

Ο βασικός γενικός ορισμός της **προσομοίωσης δεδομένων (data simulation)** είναι η απόκτηση ενός μεγάλου πλήθους δεδομένων για την προσομοίωση ή μίμηση πραγματικών συνθηκών για την πρόβλεψη ενός μελλοντικού συμβάντος, την επιλογή της βέλτιστης απόφασης ή την επικύρωση ενός μοντέλου που ισχύει στην περίπτωση μας καθώς γίνεται χρήση συνθετικών χρονοϊστοριών επιτάχυνσεων διέγερσης. Τα δεδομένα αυτών χρονοϊστοριών έχουν επισυναπτεί στο Παράρτημα Δ της παρούσας εργασίας. Σύμφωνα με [Ε5] ένα κατάλληλο λογισμικό για την σύνθεση τέτοιων συνθετικών διεγέρσεων είναι το λογισμικό **SeismoArtif** το οποίο εφαρμόζει τον αλγόριθμο των Halldorson & Parageorgiou [Ξ7]. Σχηματικά η μέθοδος που χρησιμοποιεί το λογισμικό απεικονίζεται παρακάτω

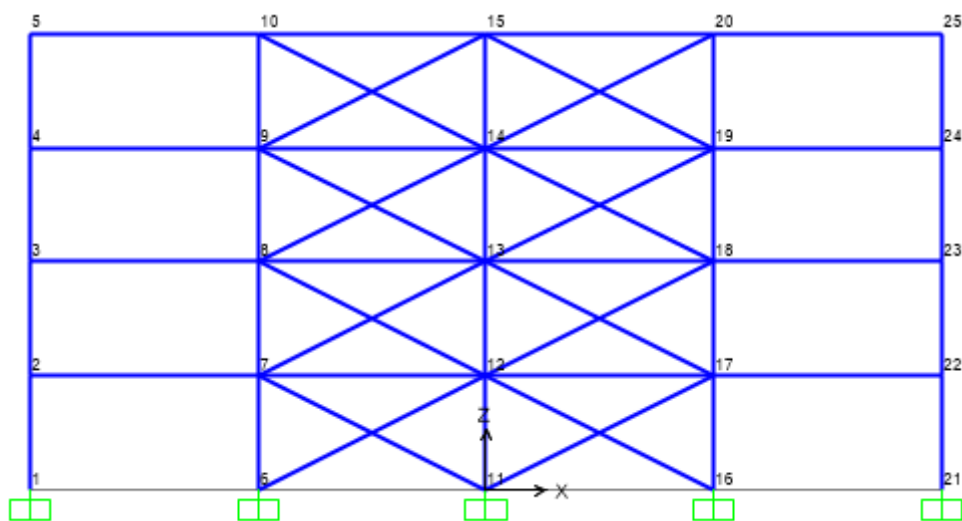


Σχήμα 5.5: Διαγραμμά ροής αλγορίθμου δημιουργίας συνθετικών επιταχυνσιογραμμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΦΟΡΕΑ

6.1 Περιγραφή φορέα

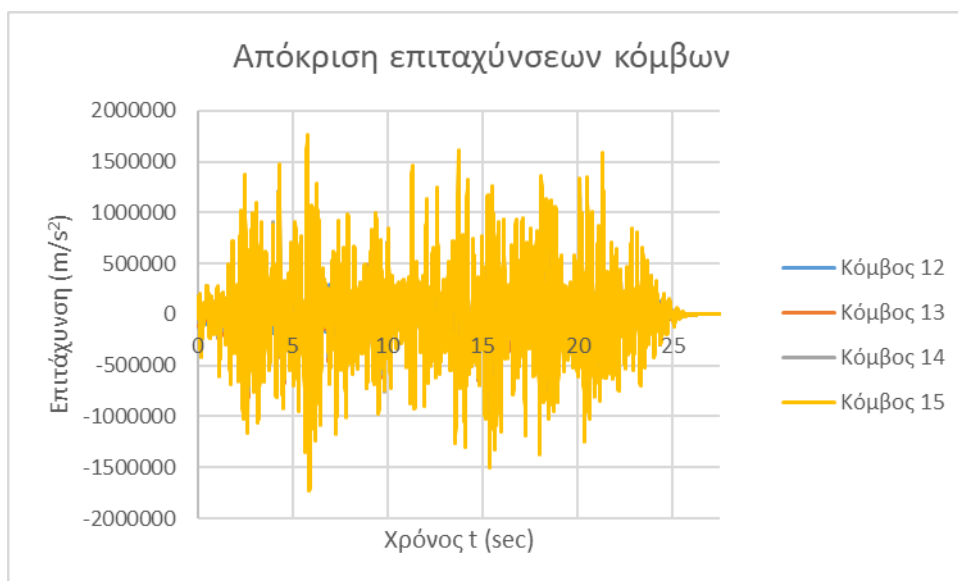
Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται ένα επίπεδο μεταλλικό πλαίσιο καθώς σε προηγούμενες εργασίες [Ε5, Ε12, Ε13], υπάρχουν αρκετές εφαρμογές από οπλισμένο σκυρόδεμα. Οι διαστάσεις του πλαισίου είναι $L = 24m$, και ύψος $H = 12m$. Στο πλαίσιο ασκούνται μόνιμα φορτία $G = 20kN/m$ και $Q = 30 kN/m$. Τα υποστηλώματα είναι διατομής **HEB 650**, οι δοκοί **HEA 500** και οι διαγώνιοι σύνδεσμοι δυσκαμψίας είναι κιβωτιοειδούς διατομής τύπου **TUBO 90x63x4,5**. Εφαρμόστηκε η μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης για την εύρεση των ιδιομορφών για τρεις τεχνητές διεγέρσεις Α1, Α5, Α7 (βλ. Παράρτημα Δ).



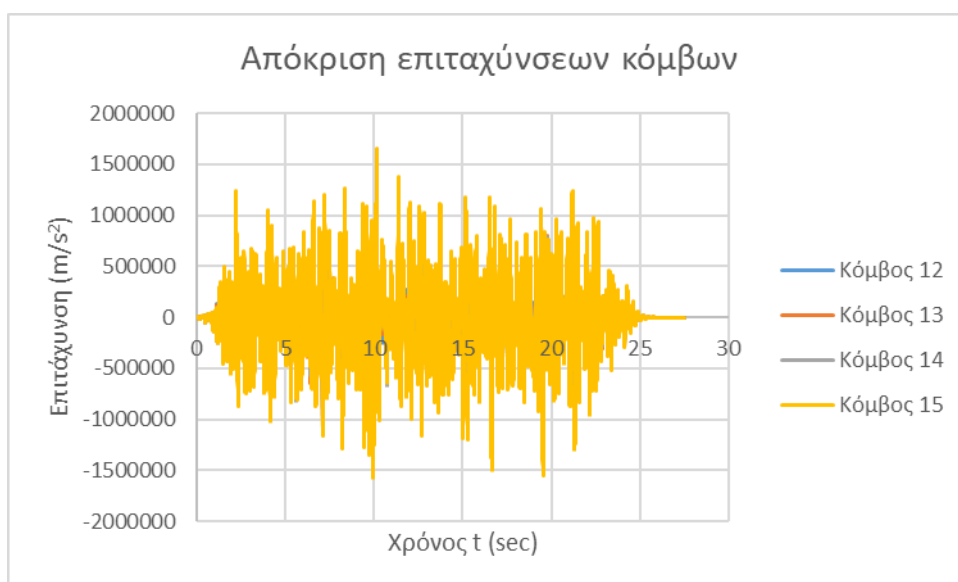
Εικόνα 6.1: Απεικόνιση φορέα μεταλλικού πλαισίου.

6.2 Εύρεση ιδιομορφών επίπεδου φορέα

Ξεκινώντας την εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 5 επιλέγουμε τα σημεία ενοργάνωσης της κατασκευής τα οποία είναι ο **κόμβος 12** σε ύψος $h = 3m$, **κόμβος 13** σε ύψος $h = 6m$, **κόμβος 14** σε ύψος $h = 9m$, και ο **κόμβος 12** σε ύψος $h = 12m$. Έπειτα εκτελώντας δυναμική γραμμική ανάλυση χρονοϊστορίας λαμβάνουμε τις αποκρίσεις επιτάχυνσης των επιλεγμένων κόμβων για τα τρία επιλεγμένα τεχνητά επιταχυνσιογράμματα που χρησιμοποιήσαμε (βλ. Παράρτημα Δ) όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 6.1: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων για την τεχνητή διέγερση A1

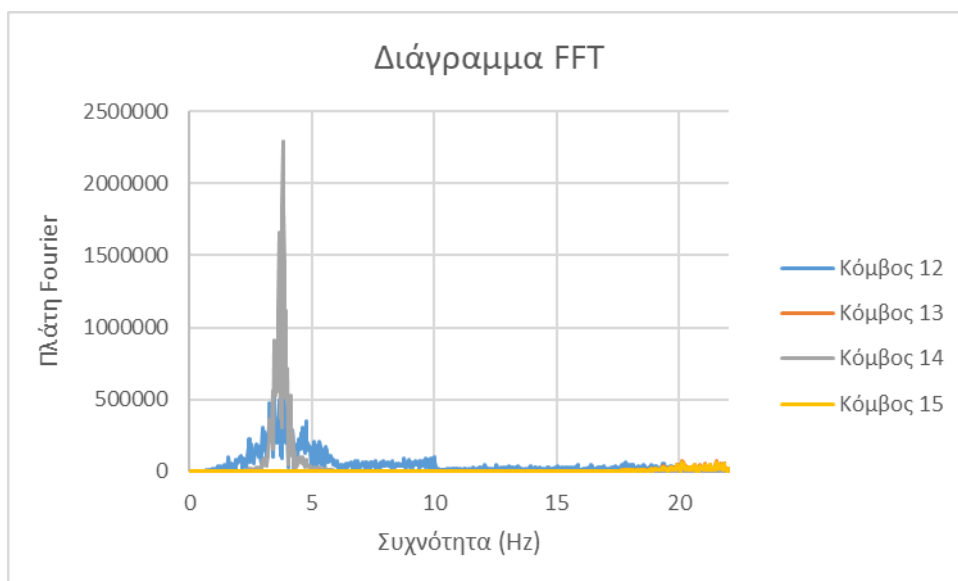


Σχήμα 6.2: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων για την τεχνητή διέγερση A5

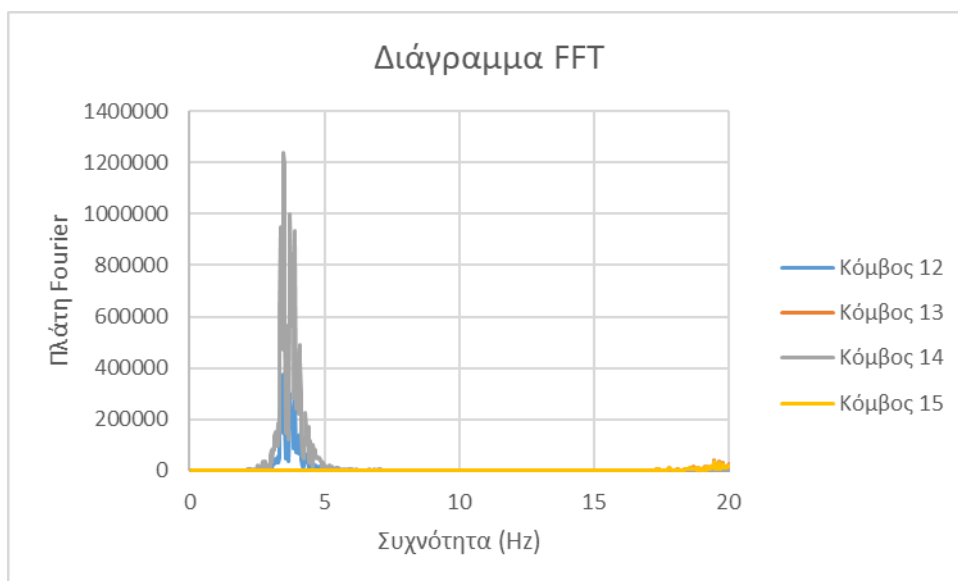


Σχήμα 6.3: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων για την τεχνητή διέγερση A7

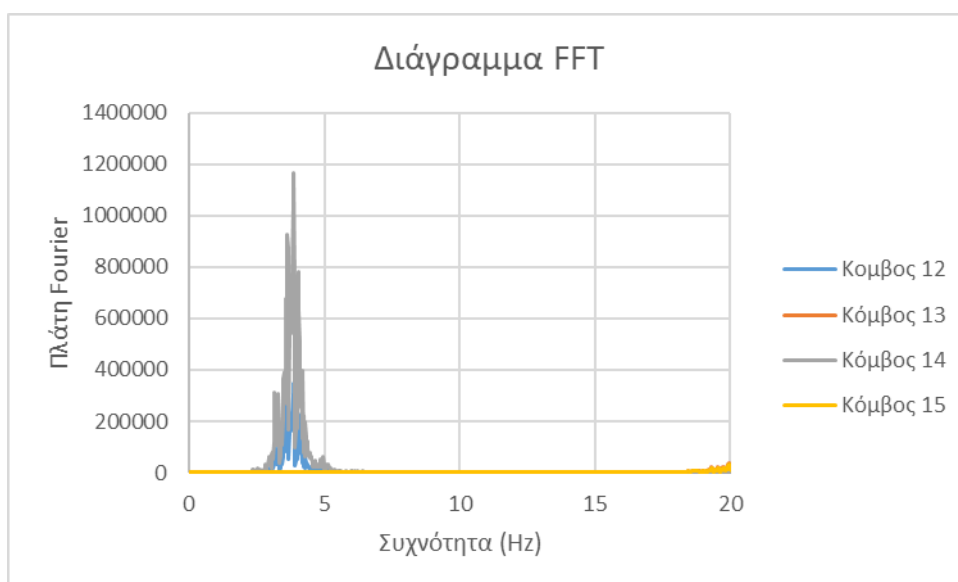
Στη συνέχεια με χρήση του λογισμικού **SeismoSignal** γίνεται κατάλληλη επεξεργασία των παραπάνω καταγραφών ώστε να υπολογιστούν τα πλάτη Fourier και να γίνουν τα διαγράμματα φασμάτων FFT όπως αυτά φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 6.4: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A1

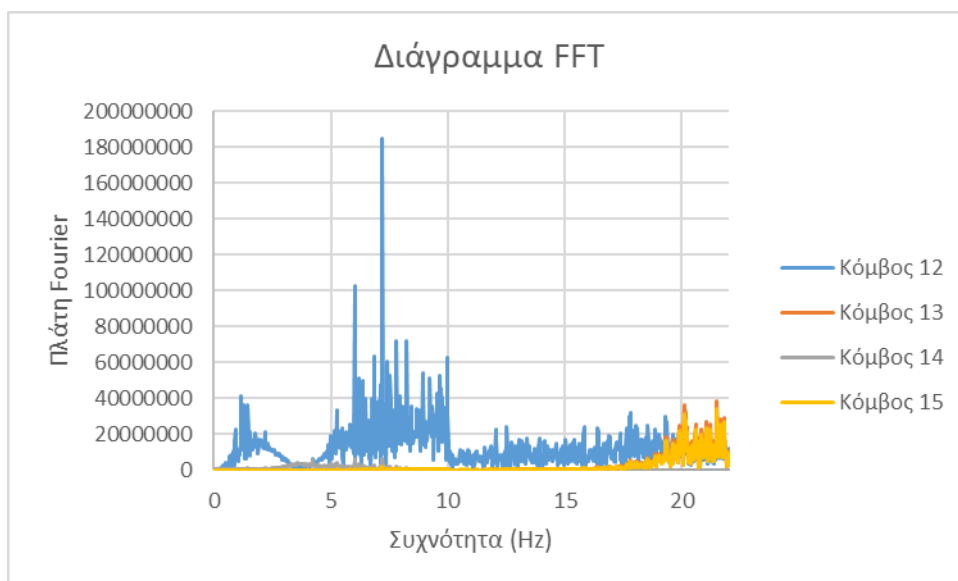


Σχήμα 6.5: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A5

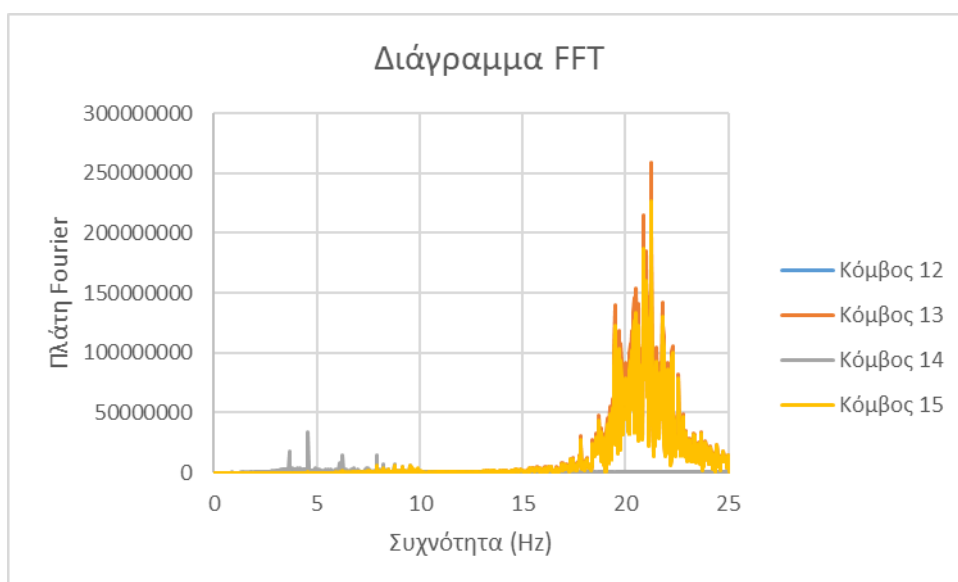


Σχήμα 6.6: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A7

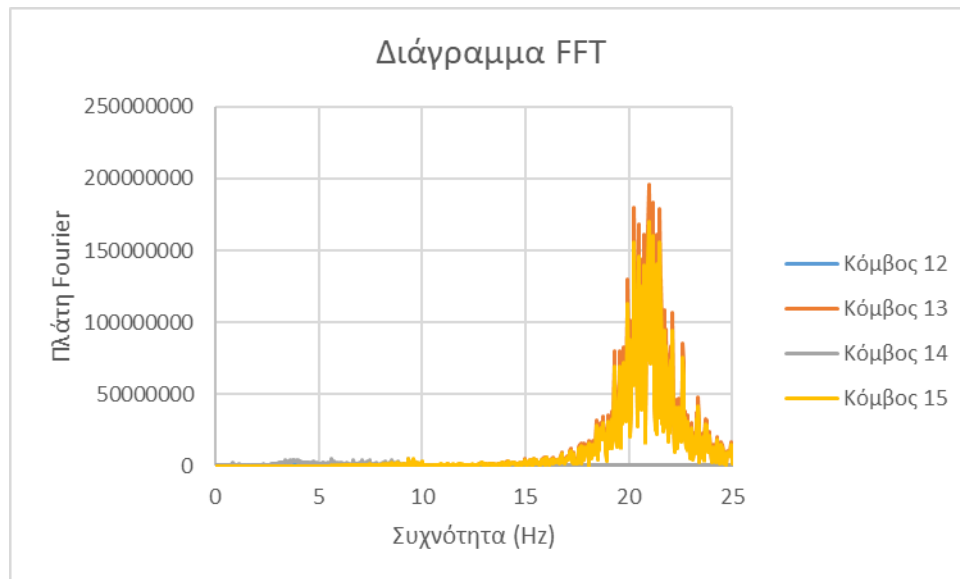
Τα παραπάνω διαγράμματα βελτιστοποιούνται διαιρώντας τα **πλάτη Fourier** των επιταχύνσεων απόκρισης των κόμβων με τα **πλάτη Fourier** των τεχνητών διεγέρσεων. Τα νέα διαγράμματα FFT φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 6.7: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A1

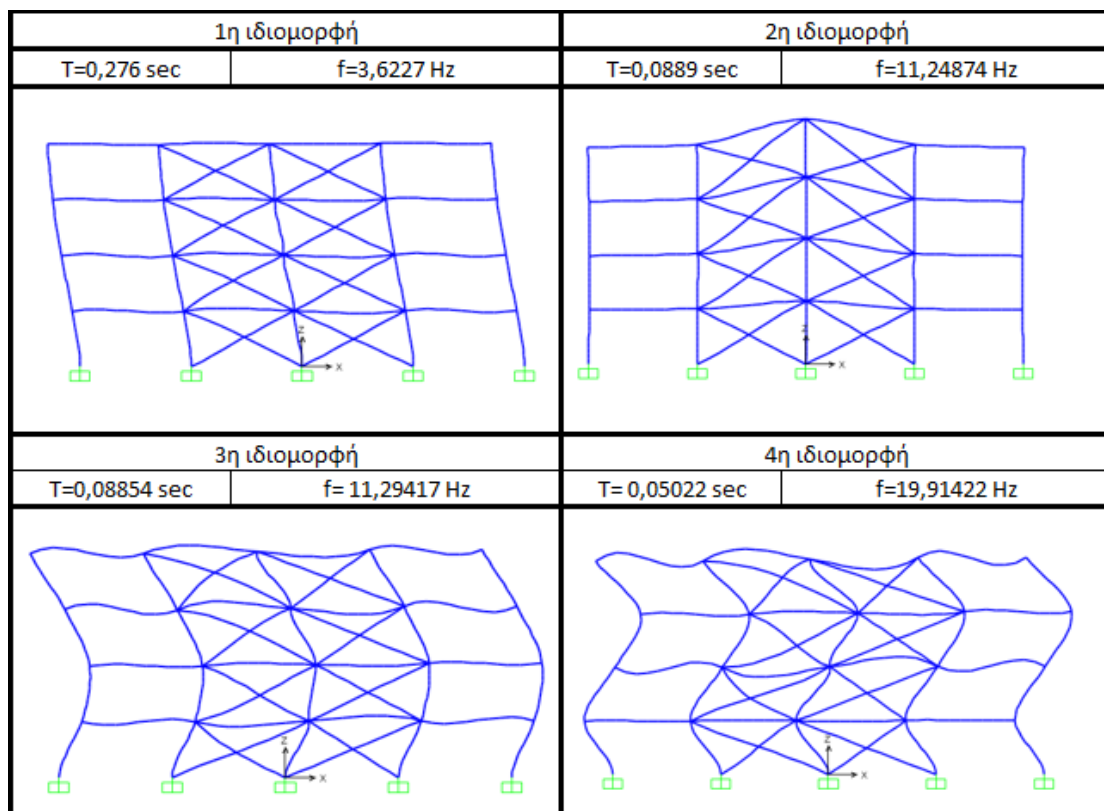


Σχήμα 6.8: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A5



Σχήμα 6.9: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A7

Έχοντας τα παραπάνω διαγράμματα FFT εξετάζουμε τις υποψήφιες ιδιοσυχνότητες για την εύρεση των ιδιομορφών του μεταλλικού πλαισίου. Το πλαίσιο εξετάζεται για τις τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της όποτε μας ενδιαφέρει αν τα αποτελέσματα της **μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** συμπίπτουν με αυτά από το κώδικα **πεπερασμένων στοιχείων**. Οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές του πλαισίου απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:

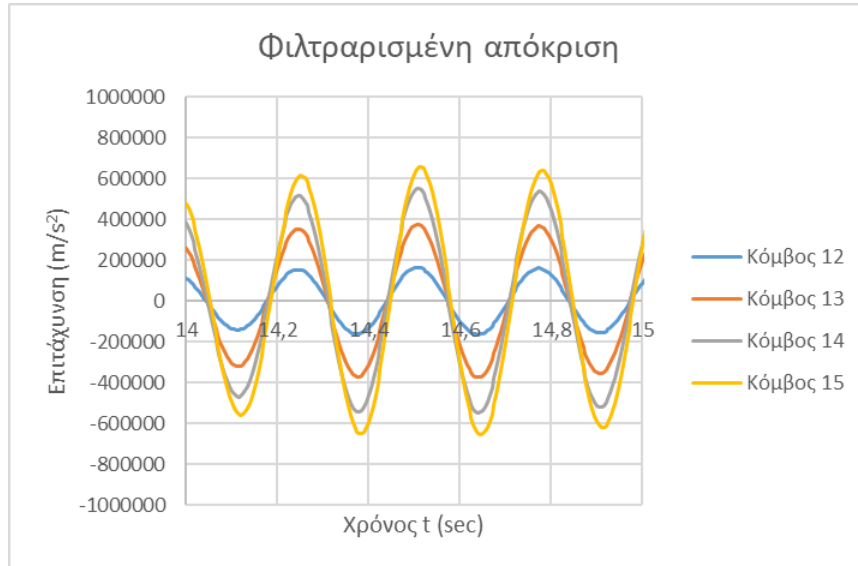


Εικόνα 6.2: Απεικόνιση των τεσσάρων πρώτων ιδιομορφών του μεταλλικού πλαισίου.

Για τις εξεταζόμενες συχνότητες που προκύπτουν από τις ιδιομορφές των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και για αυτές από τα διαγράμματα FFT θα χρησιμοποιηθεί **φίλτρο τύπου**

Butterworth μέσω του λογισμικού **Seismosignal** στις αποκρίσεις επιτάχυνσης που ευρέθηκαν πριν ώστε να ελεγχθεί η σύγκλιση μεταξύ τους.

Ξεκινώντας από την **τεχνητή διέγερση A1** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιείται **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,5 \div 3,98 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



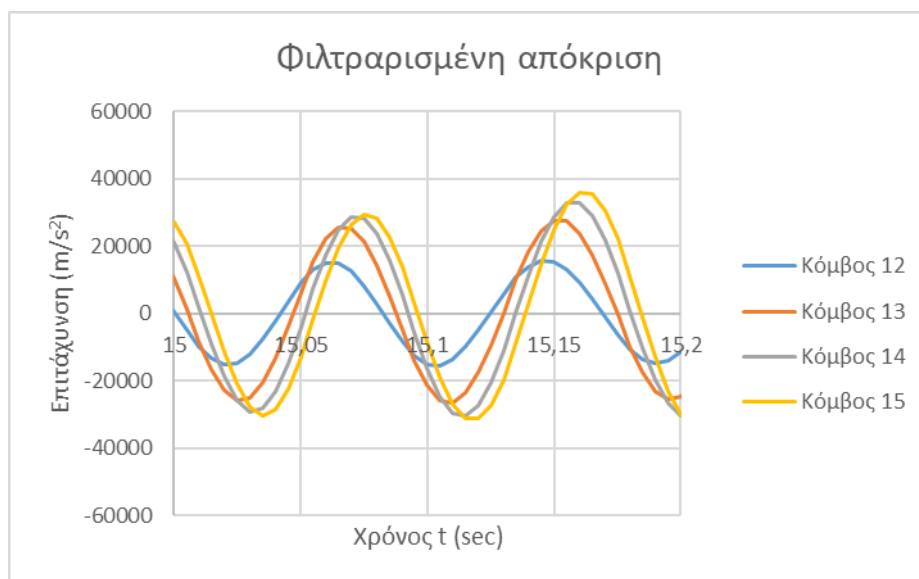
Σχήμα 6.10: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 14,525 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=14,525		SAP	
12	0,243917	148119,2	0,25	-0,0221
13	0,565899	343643,5	0,572398	-0,0506
14	0,834785	506925,1	0,838235	-0,0741
15	1	607252,2	1	-0,0884

Πίνακας 6.1: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 11,1 \div 12,37 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



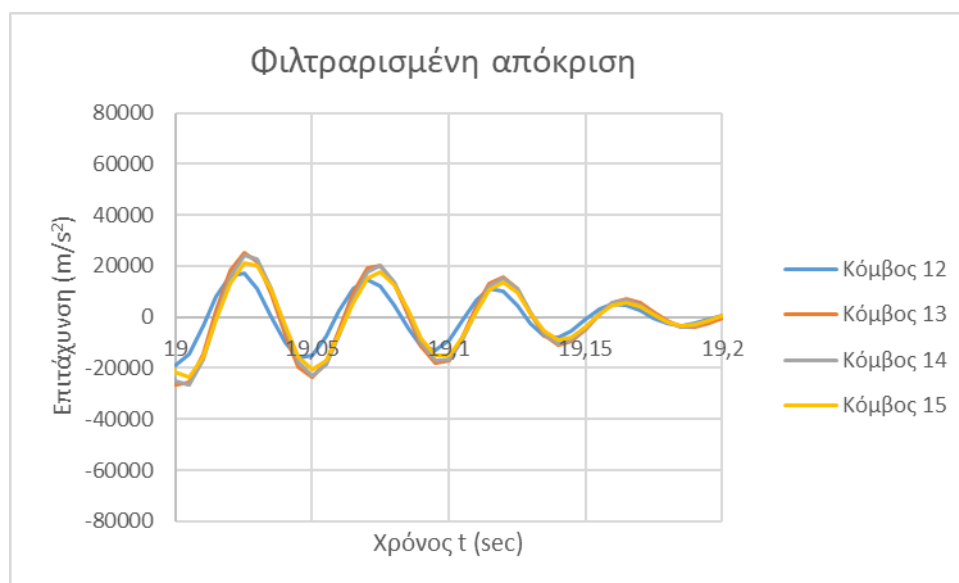
Σχήμα 6.11: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 15,135 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της δεύτερης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=15,135		SAP	
12	-1,15928	10623,35	-0,84443	3,69E-05
13	-1,07481	9849,3	-1,09677	4,79E-05
14	-0,01041	95,40395	-0,18762	8,2E-06
15	1	-9163,74	1	-4,4E-05

Πίνακας 6.2: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 11,1 \div 12,42 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



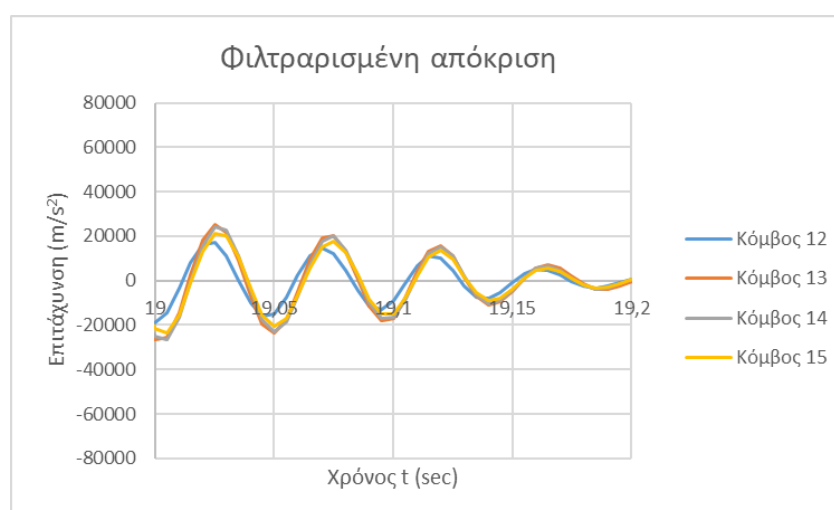
Σχήμα 6.12: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 4,03 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της τρίτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=4,03		SAP	
12	-1,45376	5594,492	-0,81398	0,0617
13	-1,36906	5268,526	-1,06201	0,0805
14	-0,14682	564,9978	-0,18338	0,0139
15	1	-3848,29	1	-0,0758

Πίνακας 6.3: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας για την πρώτη **τεχνητή διέγερση A1** για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 19,8 \div 21,91 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



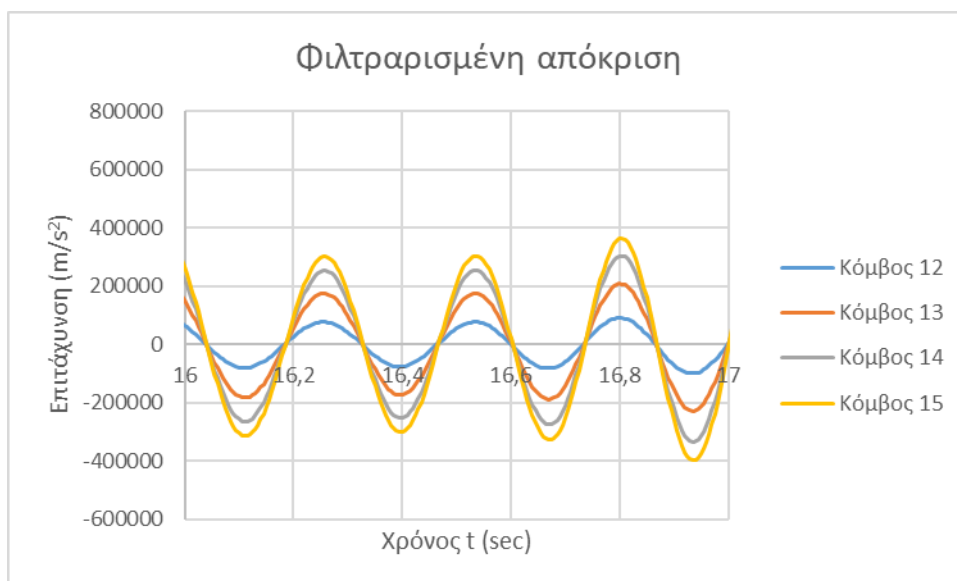
Σχήμα 6.13: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=19,13		SAP	
12	-1,47735	-2640,76	1,756286	-0,0908
13	0,884997	1581,927	-0,08124	0,0042
14	1,131445	2022,452	-1,58027	0,0817
15	1	1787,495	1	-0,0517

Πίνακας 6.4: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της πρώτης **τεχνητής διέγερσης A1** προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** είναι ικανοποιητικές.

Το μεταλλικό πλαίσιο τώρα εξετάζεται για την **τεχνητή διέγερση A5** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιώντας **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,5 \div 3,98 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Όπως και πριν οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



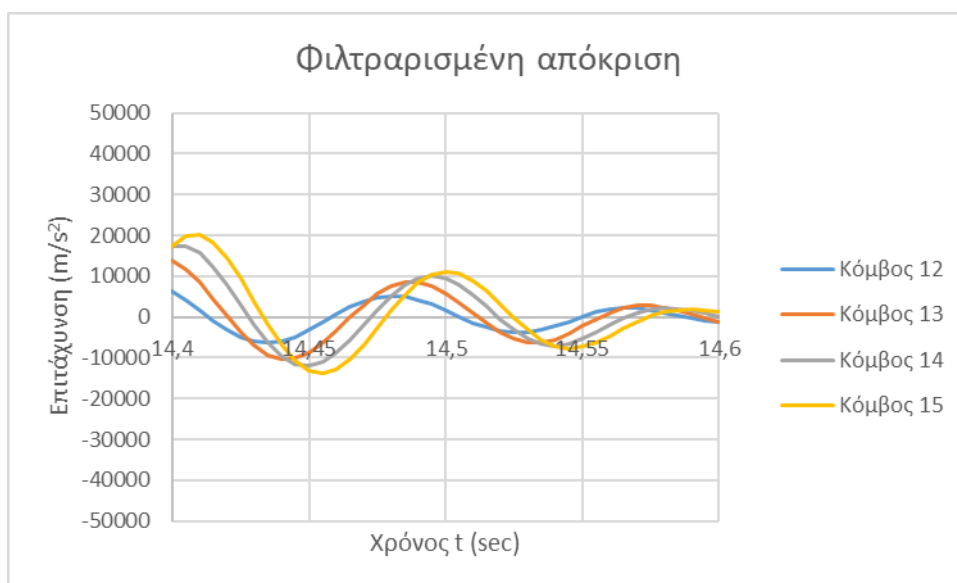
Σχήμα 6.14: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 16,39 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=16,39		SAP	
12	0,25579	-75681,6	0,25	-0,0221
13	0,579665	-171508	0,572398	-0,0506
14	0,84196	-249114	0,838235	-0,0741
15	1	-295874	1	-0,0884

Πίνακας 6.5: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την δεύτερη εξαταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 11,1 \div 12,37 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



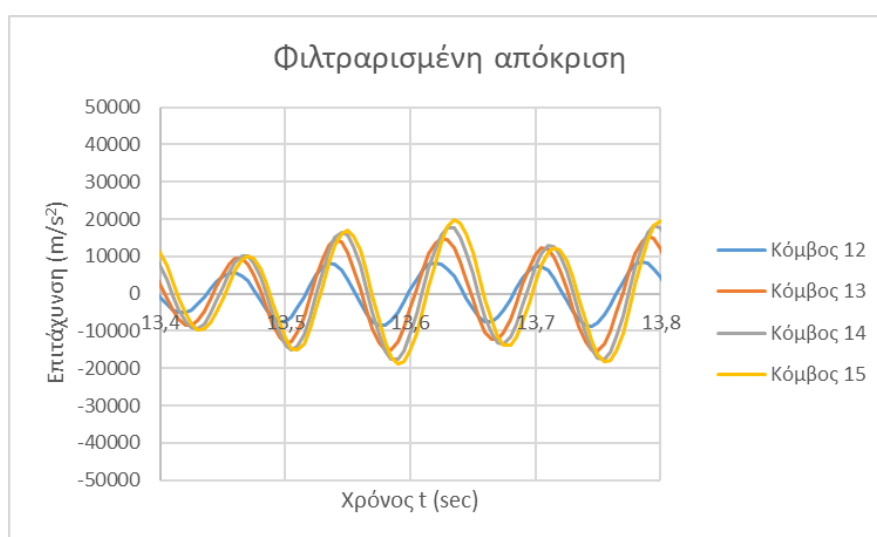
Σχήμα 6.15: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 14,52 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της δεύτερης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=14,52		SAP	
12	-1,14373	-3496,11	-0,84443	3,69E-05
13	-1,22289	-3738,1	-1,09677	4,79E-05
14	-0,15809	-483,26	-0,18762	8,2E-06
15	1	3056,776	1	-4,4E-05

Πίνακας 6.6: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 11,1 \div 12,42 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



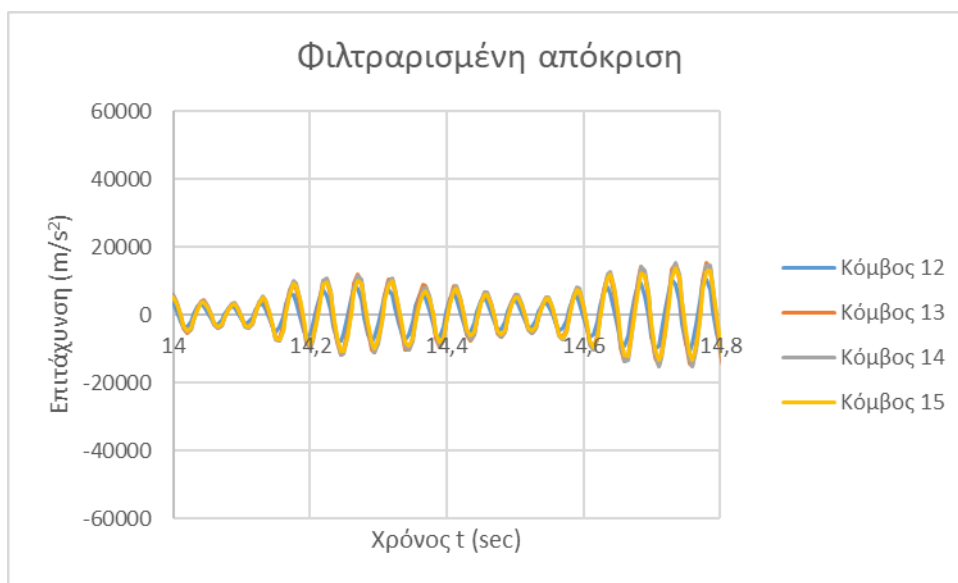
Σχήμα 6.16: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 13,61 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της τρίτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=13,61		SAP	
12	-1,38457	6251,441	-0,81398	0,0617
13	-1,42643	6440,434	-1,06201	0,0805
14	-0,18326	827,4139	-0,18338	0,0139
15	1	-4515,08	1	-0,0758

Πίνακας 6.6: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας για την **τεχνητή διέγερση A5** για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 19,8 \div 21,91 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 6.17: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

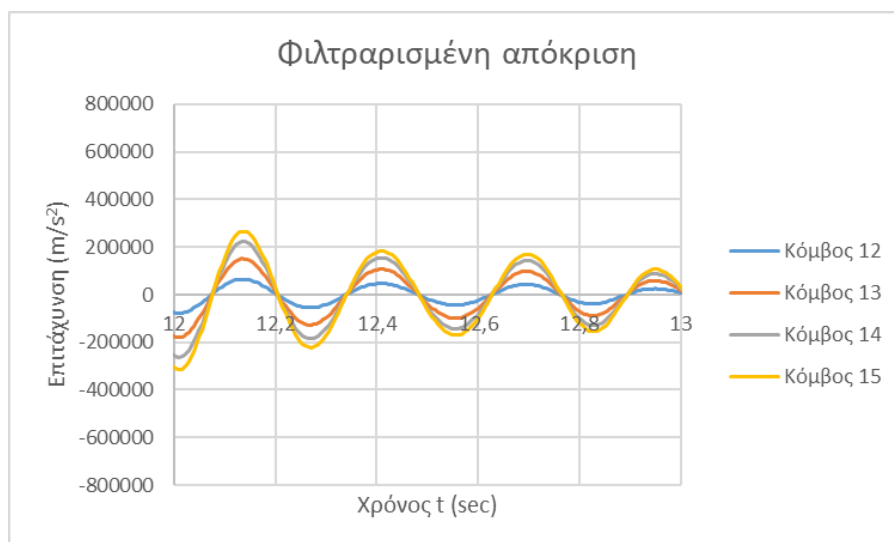
Για $t = 14,3 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της τέταρτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=14,3		SAP	
12	-1,07157	-2444,13	1,756286	-0,0908
13	0,123462	281,6024	-0,08124	0,0042
14	0,847559	1933,187	-1,58027	0,0817
15	1	2280,887	1	-0,0517

Πίνακας 6.7: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της **τεχνητής διέγερσης A5** προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** είναι ικανοποιητικές.

Η ανάλυση για το μεταλλικό πλαίσιο ολοκληρώνεται με την **τεχνητή διέγερση A7** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιώντας **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,5 \div 3,98 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Όπως και πριν οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



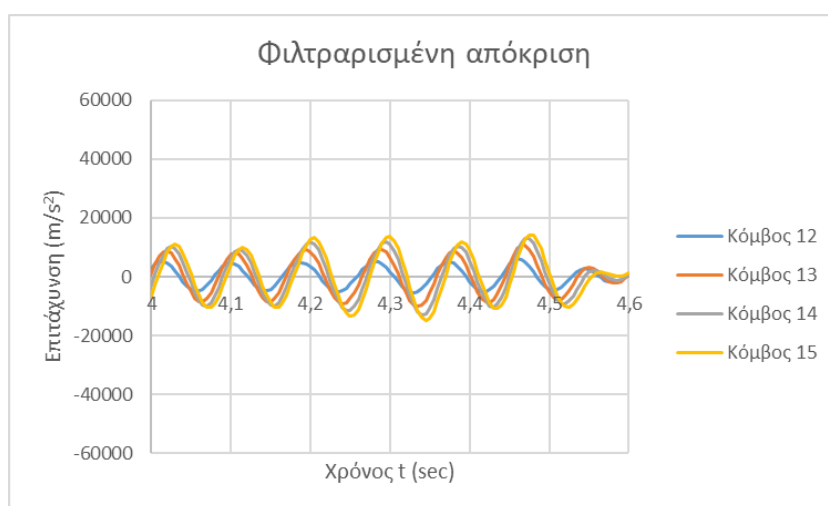
Σχήμα 6.18: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 12,43 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=12,43		SAP	
12	0,252141	42154,77	0,25	-0,0221
13	0,575548	96224,29	0,572398	-0,0506
14	0,839856	140413,3	0,838235	-0,0741
15	1	167187,3	1	-0,0884

Πίνακας 6.8: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 11,1 \div 12,37 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



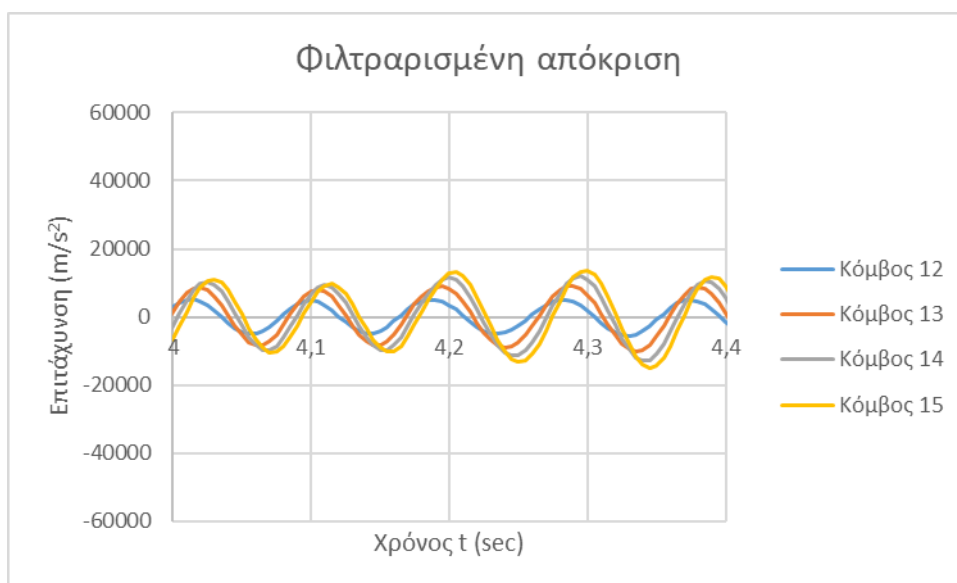
Σχήμα 6.19: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 4,595 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της δεύτερης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=4,595		SAP	
12	-0,51374	-265,457	-0,84443	3,69E-05
13	-1,48492	-767,278	-1,09677	4,79E-05
14	-0,70921	-366,455	-0,18762	8,2E-06
15	1	516,7124	1	-4,4E-05

Πίνακας 6.9: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 11,1 \div 12,42 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



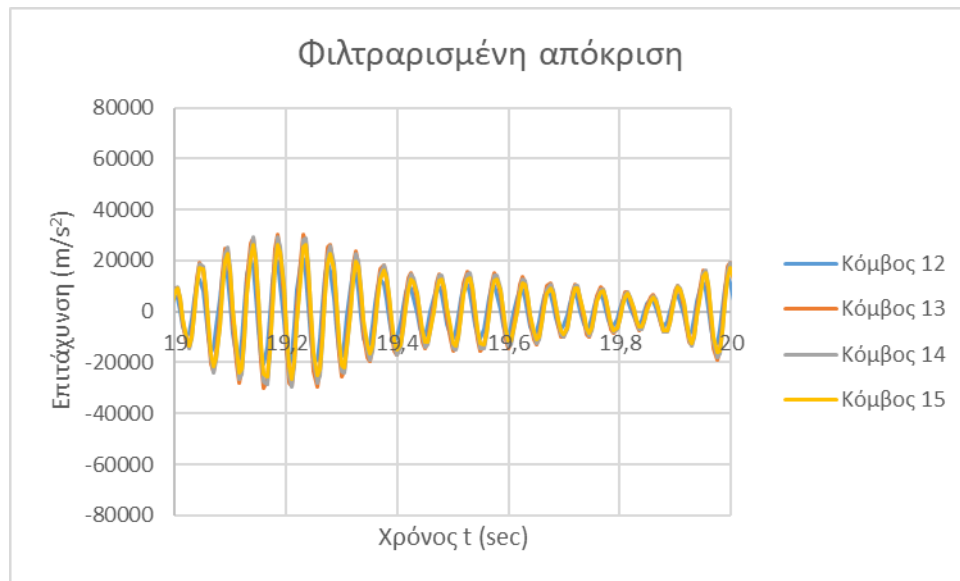
Σχήμα 6.20: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 4,090 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της τρίτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=4,09		SAP	
12	-1,32926	3669,928	-0,81398	0,0617
13	-1,32766	3665,513	-1,06201	0,0805
14	-0,16354	451,5021	-0,18338	0,0139
15	1	-2760,88	1	-0,0758

Πίνακας 6.10: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας για την **τεχνητή διέγερση A7** για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 19,8 \div 21,91 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 6.21: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

Για $t = 19,825 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της τέταρτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=19,825		SAP	
12	-1,89658	-2091,21	1,756286	-0,0908
13	-0,28405	-313,197	-0,08124	0,0042
14	0,952312	1050,039	-1,58027	0,0817
15	1	1102,621	1	-0,0517

Πίνακας 6.11: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της **τεχνητής διέγερσης A7** προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** είναι ικανοποιητικές.

6.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Για το επίπεδο μεταλλικό πλαίσιο χρησιμοποιήθηκε η **μέθοδος των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** για τρεις διαφορετικές τεχνητές διεγέρσεις ήτοι **A1, A5, A7**. Και στις τρεις διεγέρσεις η πρώτη ιδιομορφή αποτυπώνεται με μεγάλη ακρίβεια καθώς και οι δύο επόμενες ιδιομορφές δεν έχουν πολύ μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ τους. Στη τελευταία ιδιομορφή υπάρχει μια διαφοροποίηση ως προς το πρόσημο των ιδιομορφών αλλά η τάξη μεγέθους είναι η ίδια συνεπώς η επίδοση της **μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** σε σύγκριση με τα αποτελέσματα από το προσομοίωμα **πεπερασμένων στοιχείων** είναι ικανοποιητική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΦΟΡΕΑ

7.1 Περιγραφή φορέα

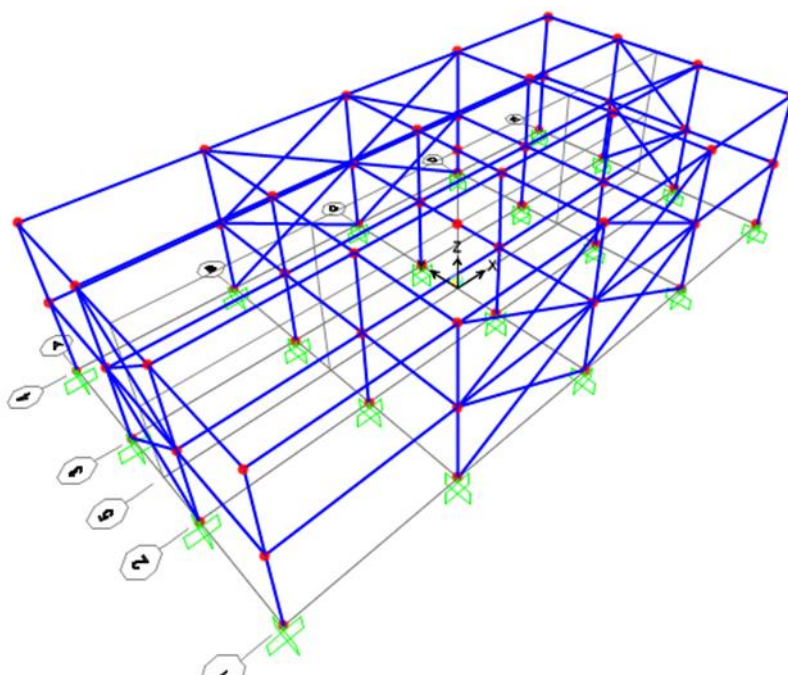
Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται ένα χωρικό μεταλλικό πλαίσιο καθώς σε προηγούμενες εργασίες [Ε5, Ε12, Ε13], υπάρχουν αρκετές εφαρμογές από οπλισμένο σκυρόδεμα. Οι διαστάσεις του πλαισίου είναι $L_1 = 24m$, $L_2 = 12m$ και ύψος $H = 6m$. Οι δοκοί είναι διατομής τύπου **HEA 450**, τα υποστηλώματα **HEB 600** και οι ράβδοι για τους συνδέσμους δυσκαμψίας είναι κιβωτιοειδούς διατομής τύπου **TUBO 100x50x4** με ποιότητα χάλυβα **S355**. Έστω ότι ασκείται φορτίο σε κάθε στάθμη του ορόφου με $15kN/m^2$ η μάζα του ορόφου θα είναι:

$$M = \frac{15 \cdot 24 \cdot 12}{9,81} = 440,367 \text{ tn}$$

$$J = \frac{24^2 + 12^2}{12} = 60$$

$$M_{rot} = M \cdot J = 440,367 \cdot 60 = 26422,018 \text{ tn}$$

Οι παραπάνω υπολογισθείσες μάζες τοποθετήθηκαν στον φορέα και στη συνέχεια εφαρμόστηκε η μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης για την εύρεση των ιδιομορφών για τρεις τεχνητές διεγέρσεις **A1, A5, A7** (βλ. Παράρτημα Δ).

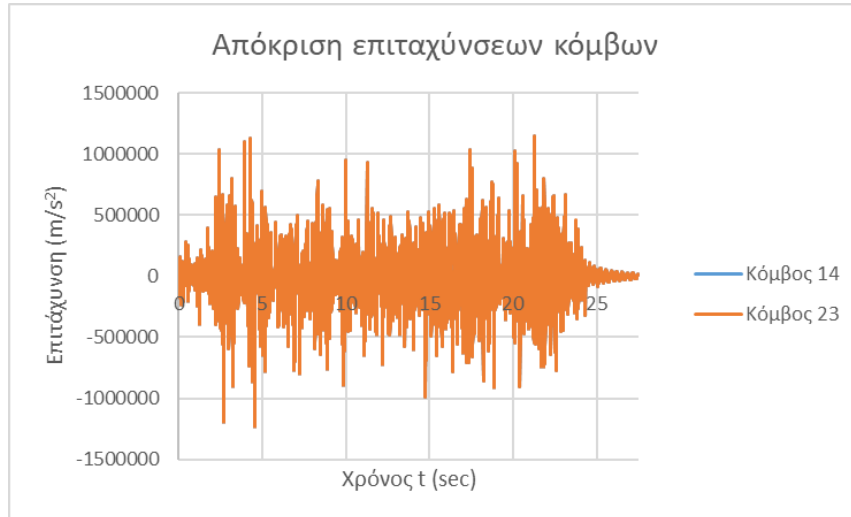


Εικόνα 7.2:Απεικόνιση χωρικού πλαισίου προς επίλυση

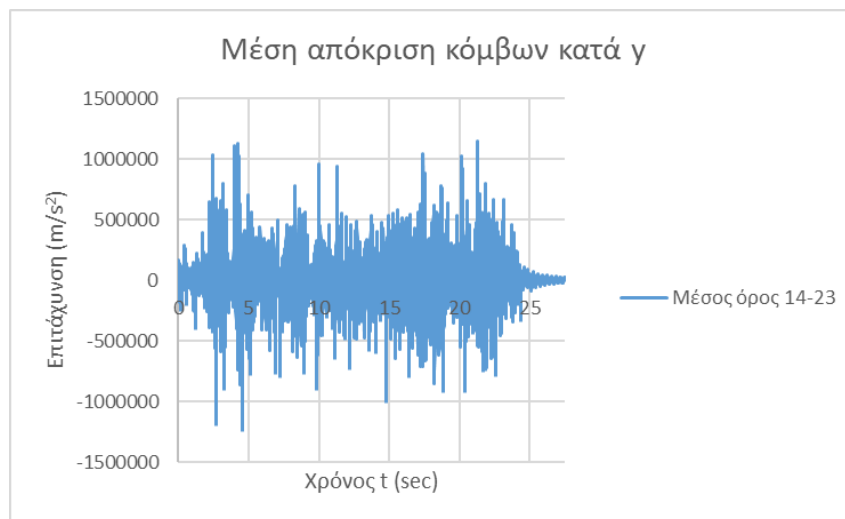
7.2 Εύρεση ιδιομορφών χωρικού φορέα

Ξεκινώντας την εφαρμογή της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 5 επιλέγουμε τα σημεία ενοργάνωσης της κατασκευής τα οποία είναι ο **κόμβος 14 κατά y**, ο **κόμβος 23 κατά y** και ο **κόμβος 2 κατά x** για τον πρώτο όροφο σε ύψος $h = 3m$, και στον δεύτερο όροφο

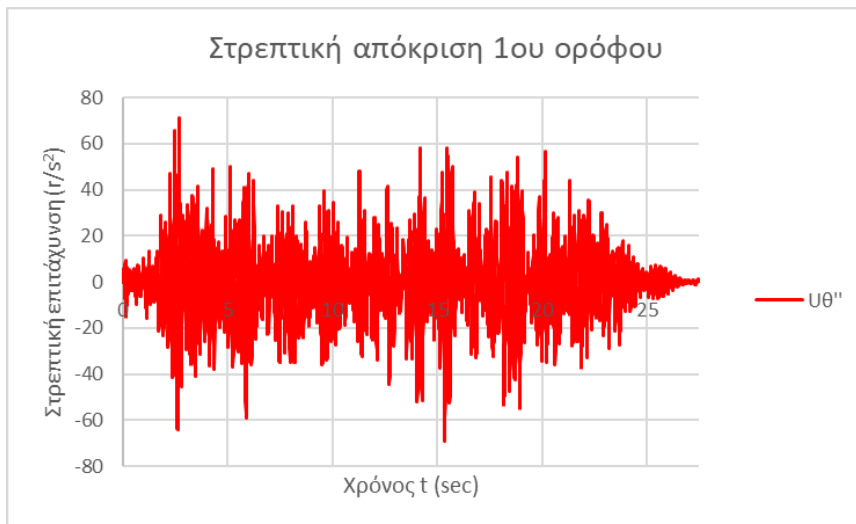
επιλέχθηκαν **κόμβος 15 κατά y , ο κόμβος 24 κατά y και ο κόμβος 3 κατά x** σε ύψος $h = 6m$. Έπειτα εκτελώντας δυναμική γραμμική ανάλυση ιστορίας λαμβάνουμε τις αποκρίσεις επιτάχυνσης των επιλεγμένων κόμβων κατά x , y τις μέσες αποκρίσεις κατά y και τη στρεπτική απόκριση κάθε ορόφου σύμφωνα με τη σχέση (5.50) για τα τρία επιλεγμένα τεχνητά επιταχυνσιογράμματα που χρησιμοποιήσαμε (βλ. Παράρτημα Δ). Για την **τεχνητή διέγερση A1** προκύπτουν οι εξής αποκρίσεις:



Σχήμα 7.2: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 1^{ου} ορόφου



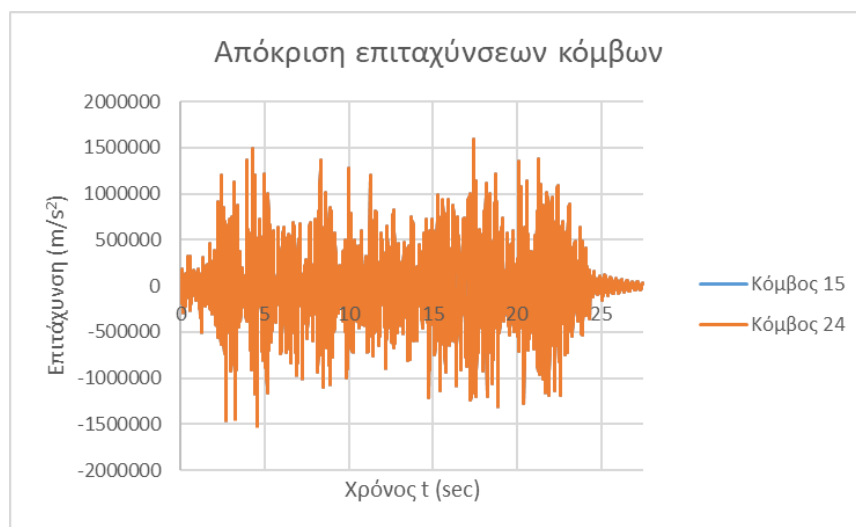
Σχήμα 7.2: Μέση απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 1^{ου} ορόφου



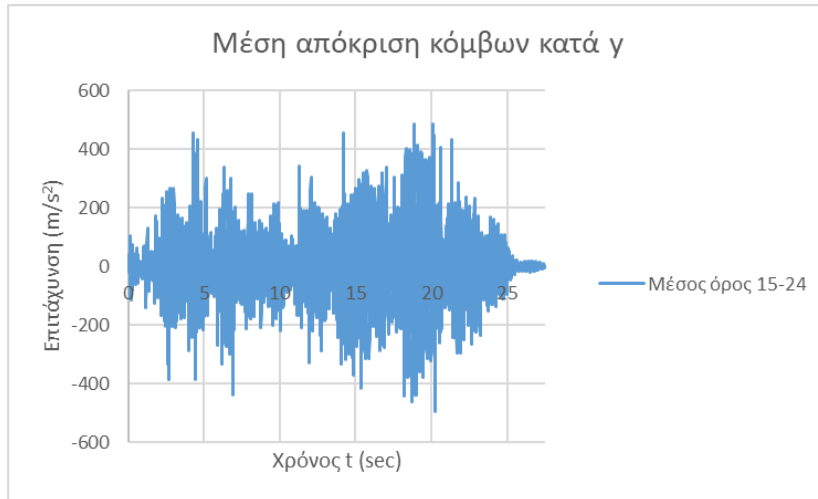
Σχήμα 7.3: Στρεπτική απόκριση 1^{ου} ορόφου



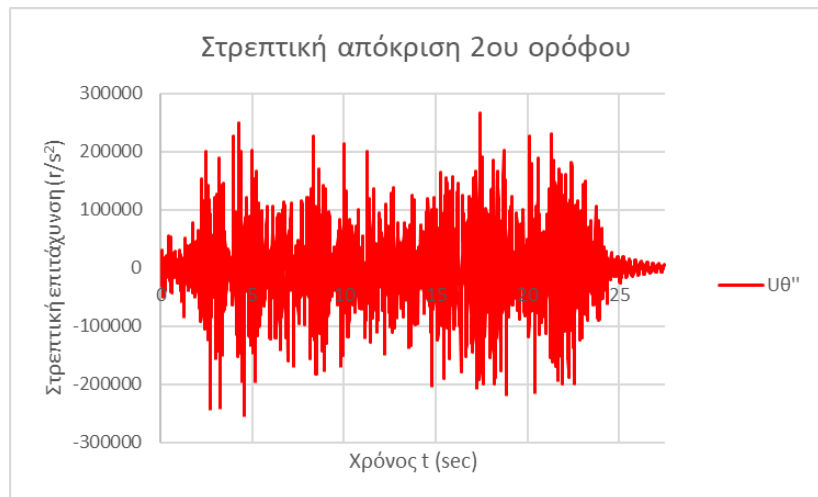
Σχήμα 7.4: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβου κατά x 1^{ου} ορόφου



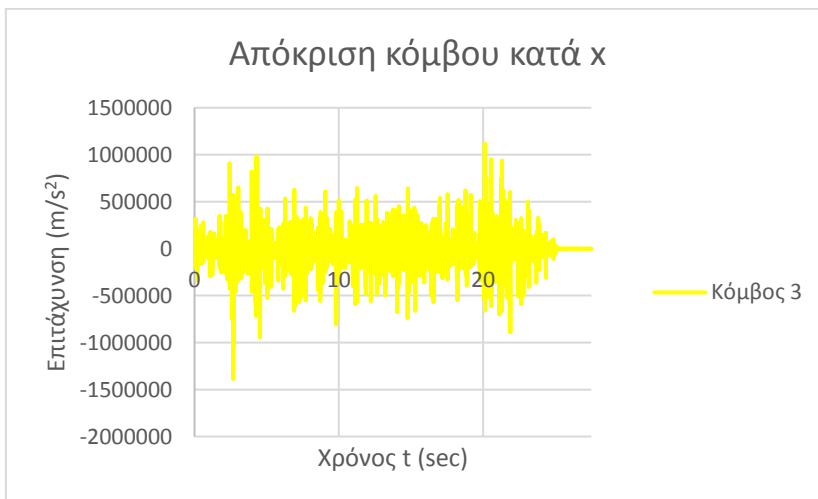
Σχήμα 7.5: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 2^{ου} ορόφου



Σχήμα 7.6: Μέση απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά γ 2^{ου} ορόφου

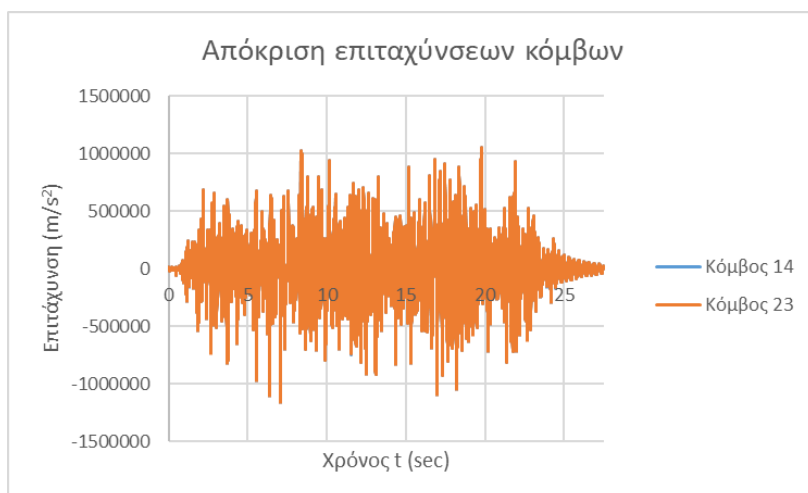


Σχήμα 7.7: Στρεπτική απόκριση 2^{ου} ορόφου

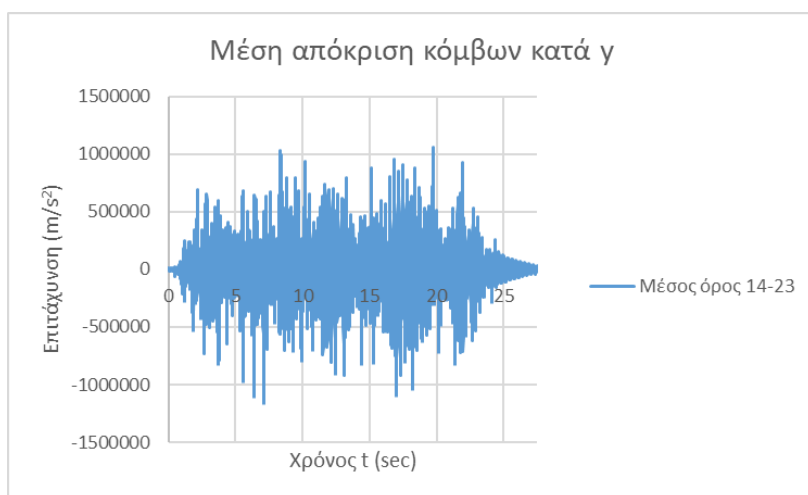


Σχήμα 7.8: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβου κατά χ 2^{ου} ορόφου

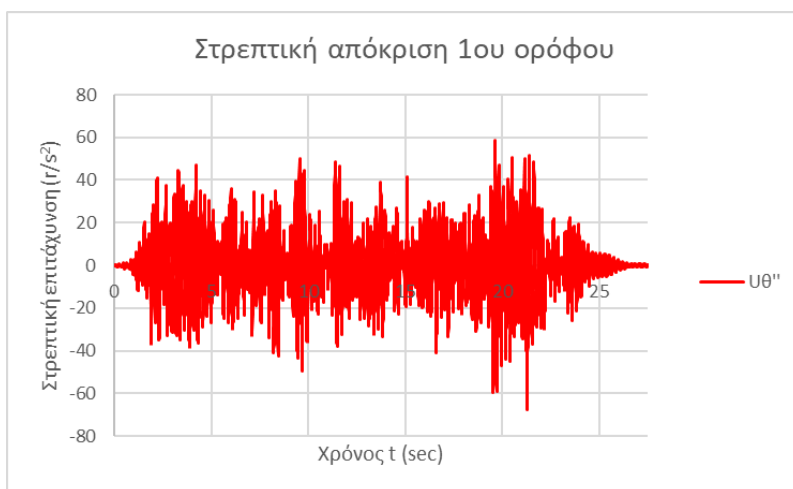
Ομοίως για την **τεχνητή διέγερση A5** προκύπτουν οι εξής αποκρίσεις:



Σχήμα 7.9: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 1^{ου} ορόφου



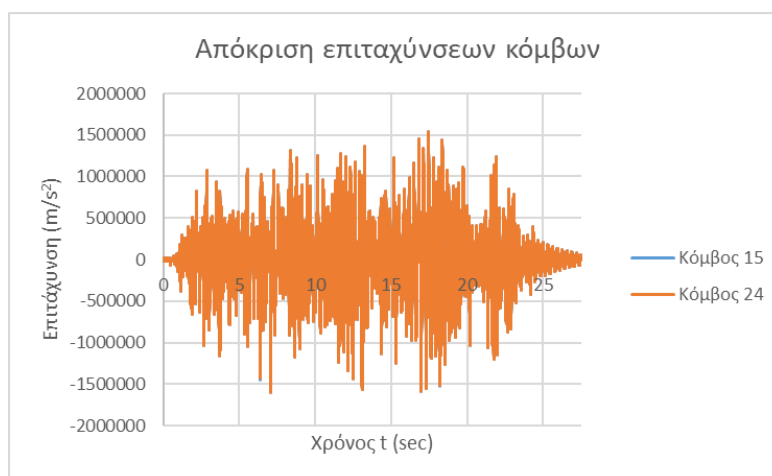
Σχήμα 7.10: Μέση απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 1^{ου} ορόφου



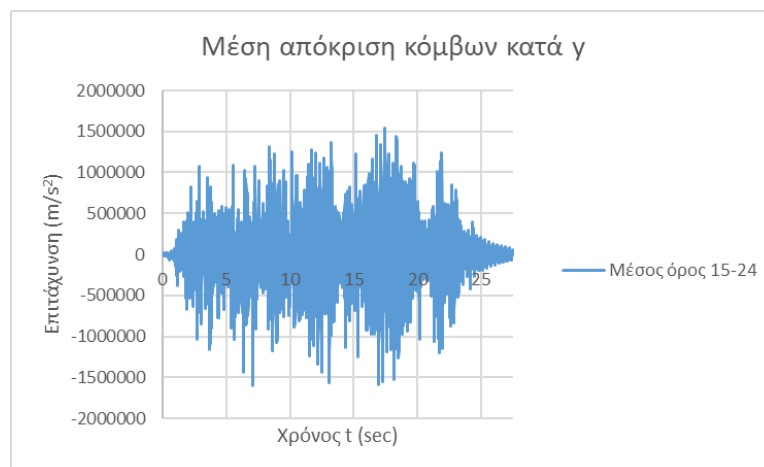
Σχήμα 7.11: Στρεπτική απόκριση 1^{ου} ορόφου



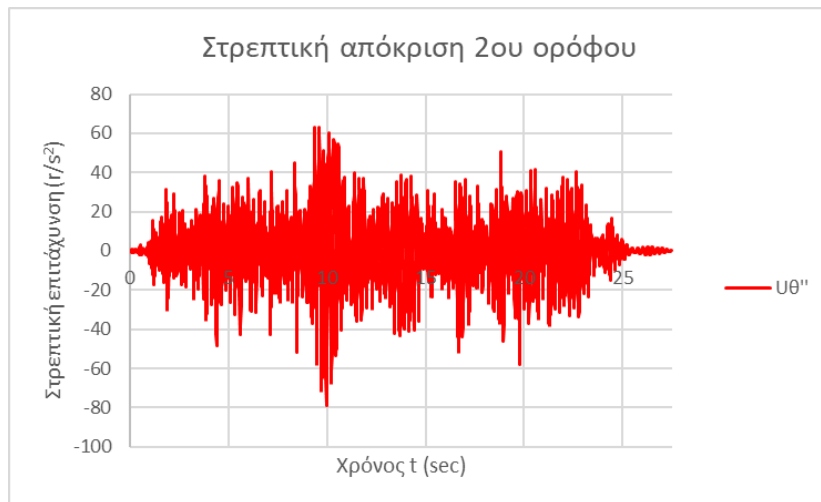
Σχήμα 7.12: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβου κατά x 1^{ου} ορόφου



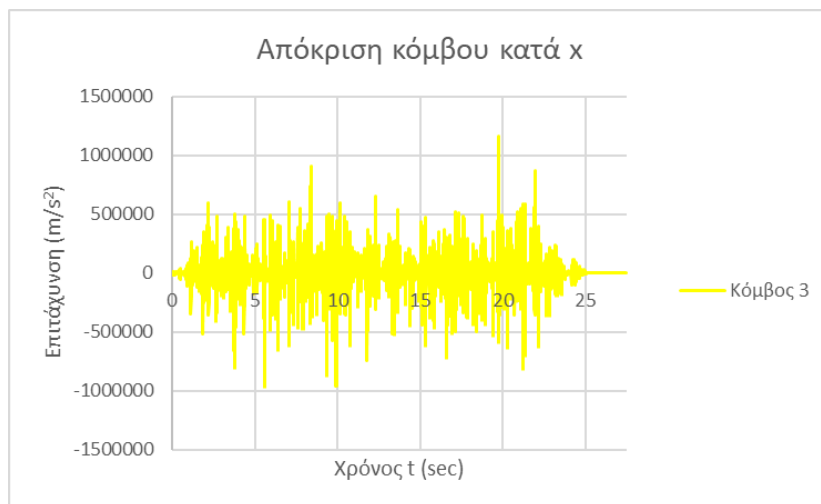
Σχήμα 7.13: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 2^{ου} ορόφου



Σχήμα 7.14: Μέση απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 2^{ου} ορόφου

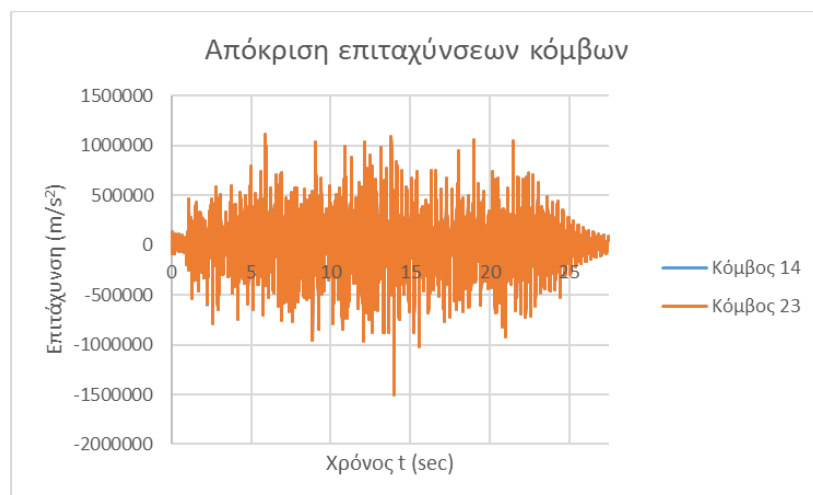


Σχήμα 7.15: Στρεπτική απόκριση 2^{ου} ορόφου

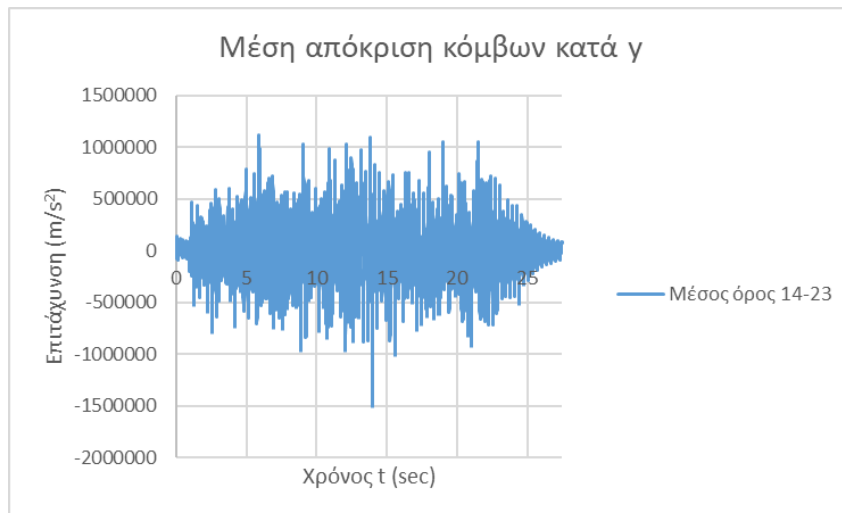


Σχήμα 7.16: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβου κατά x 2^{ου} ορόφου

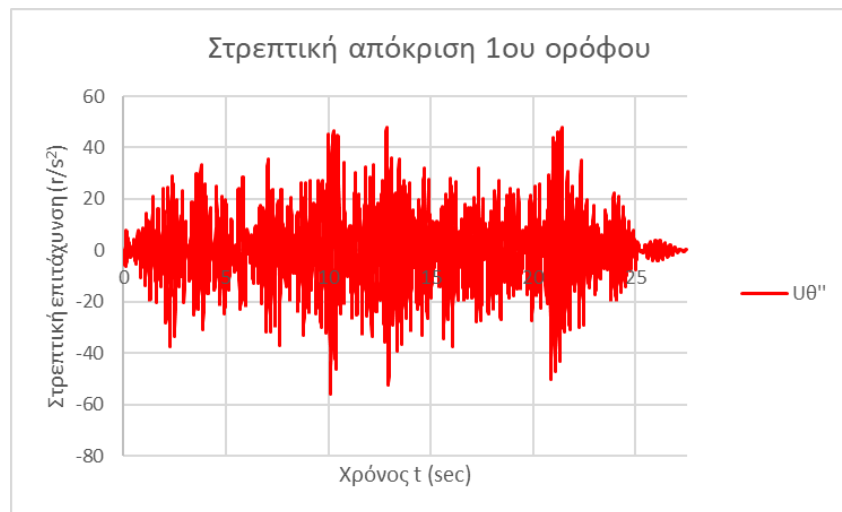
Τέλος με την ίδια διαδικασία που ακολουθήθηκε και πριν για την **τεχνητή διέγερση A7** προκύπτουν οι εξής αποκρίσεις:



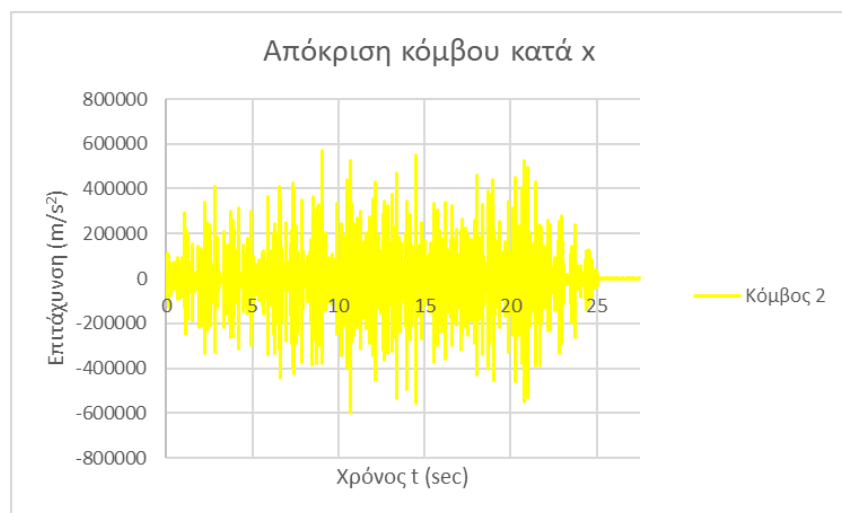
Σχήμα 7.17: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 1^{ου} ορόφου



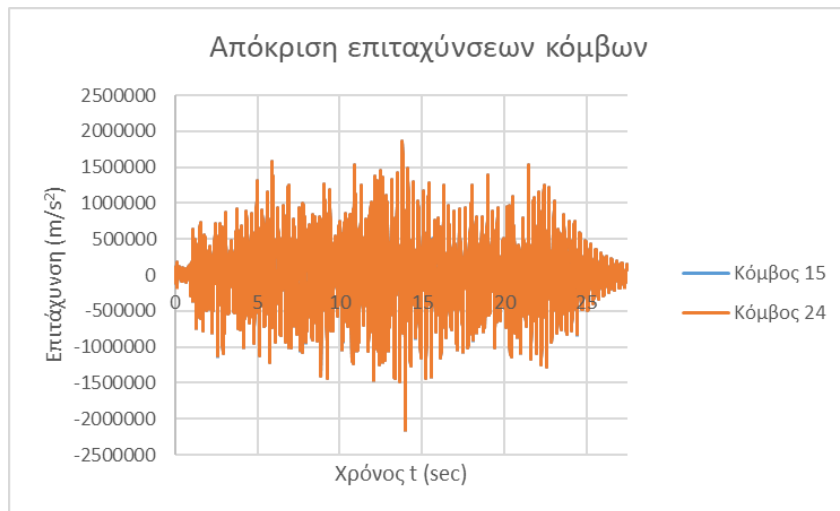
Σχήμα 7.18: Μέση απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά γ 1^{ου} ορόφου



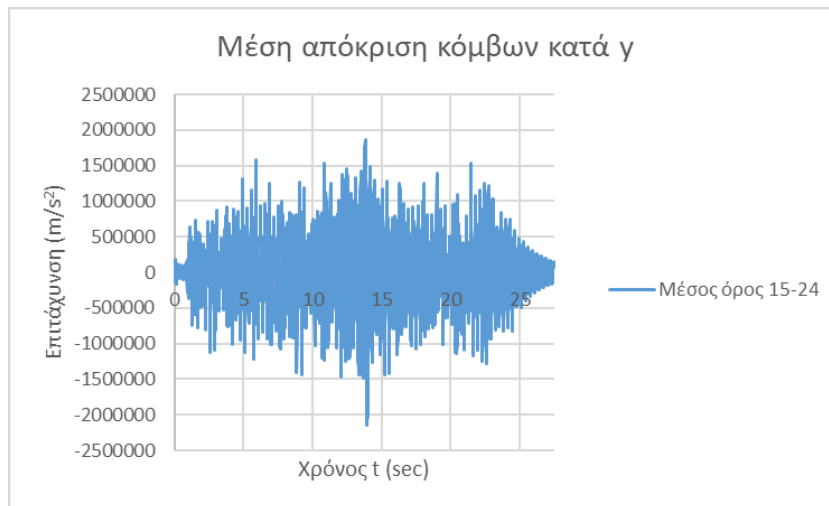
Σχήμα 7.19: Στρεπτική απόκριση 1^{ου} ορόφου



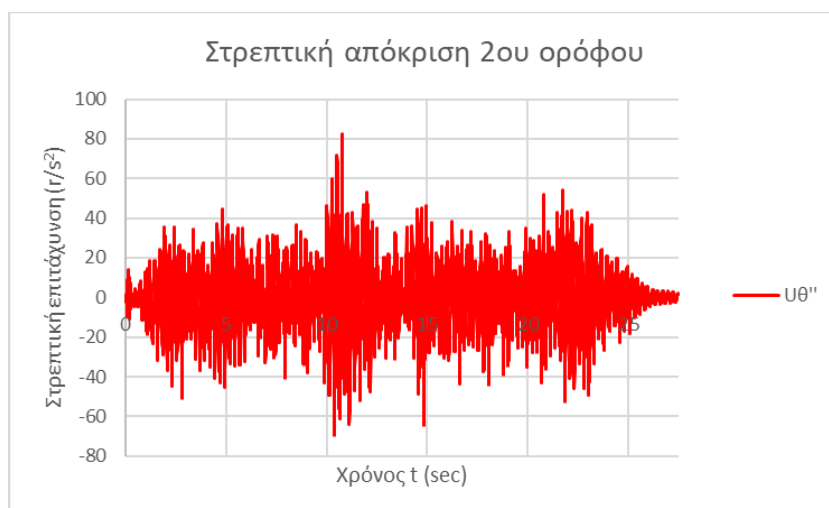
Σχήμα 7.20: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβου κατά χ 1^{ου} ορόφου



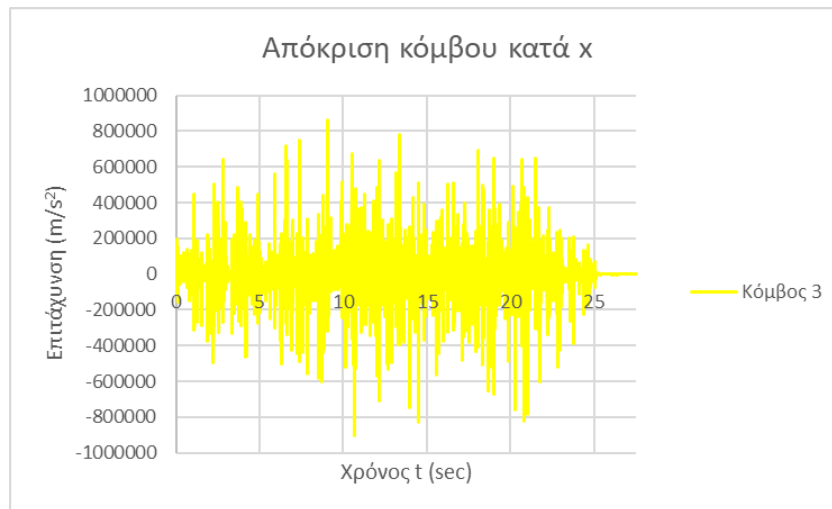
Σχήμα 7.21: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 2^{ου} ορόφου



Σχήμα 7.22: Μέση απόκριση επιταχύνσεων κόμβων κατά y 2^{ου} ορόφου

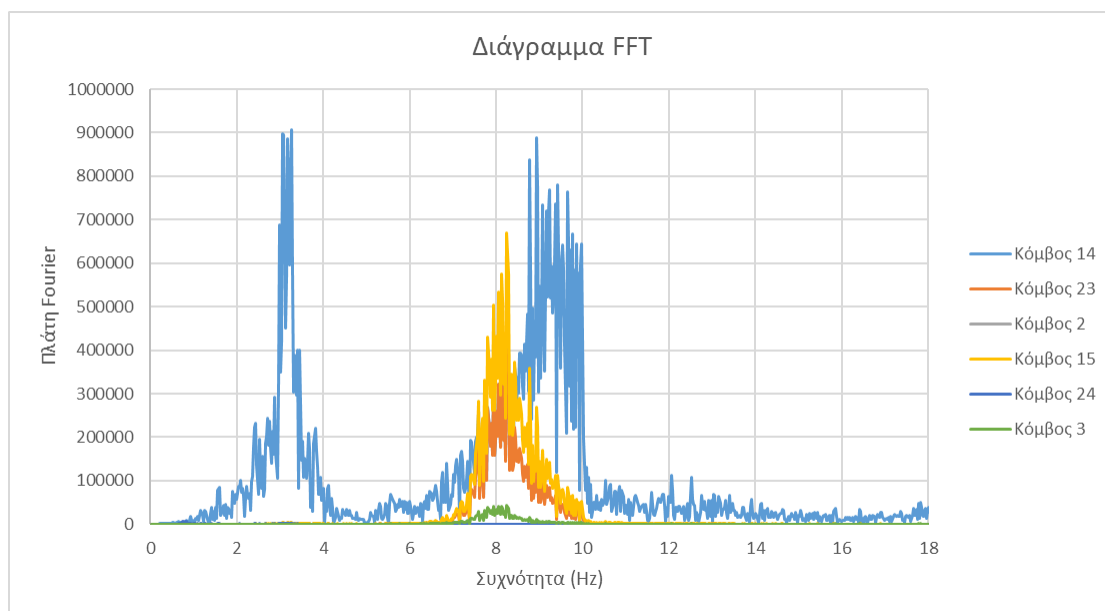


Σχήμα 7.23: Στρεπτική απόκριση 2^{ου} ορόφου

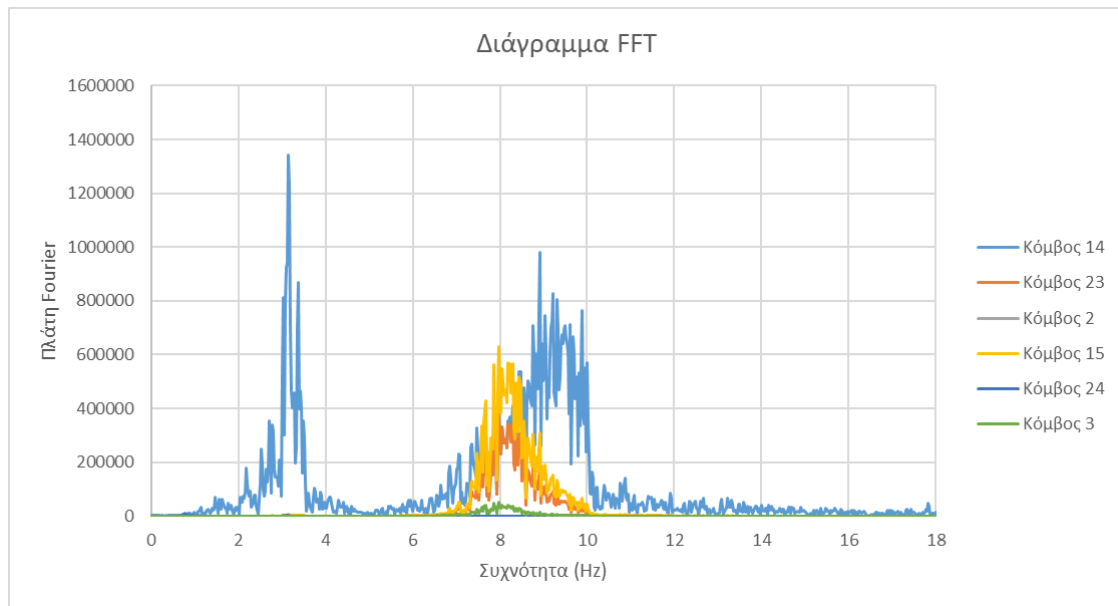


Σχήμα 7.24: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβου κατά x 2^{ου} ορόφου

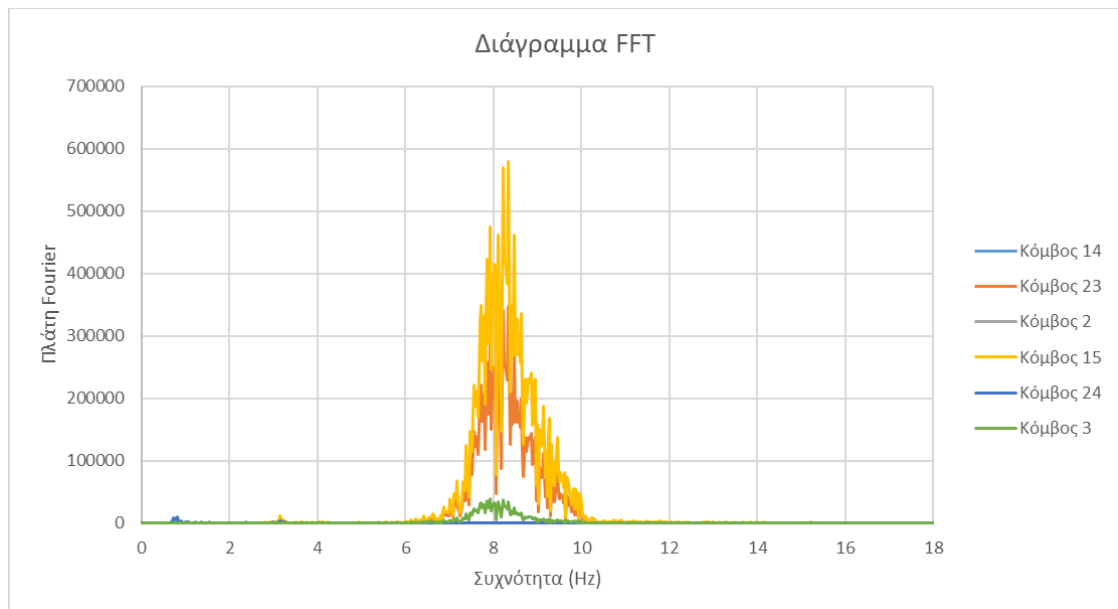
Στη συνέχεια με χρήση του λογισμικού **SeismoSignal** γίνεται κατάλληλη επεξεργασία των παραπάνω καταγραφών ώστε να υπολογιστούν τα πλάτη Fourier και να γίνουν τα διαγράμματα φασμάτων FFT όπως αυτά φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 7.25: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A1

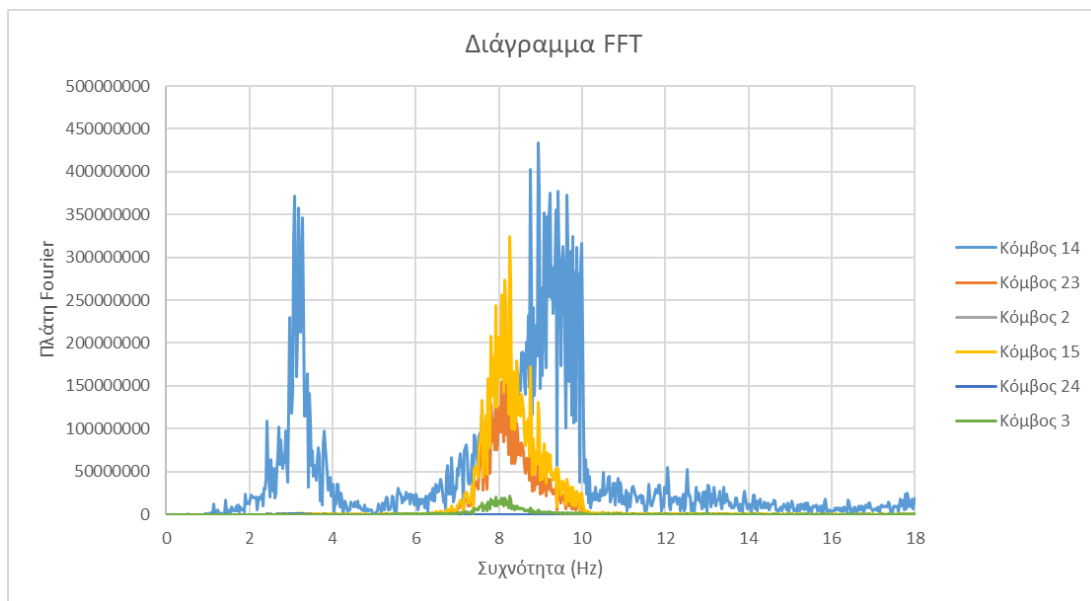


Σχήμα 7.26: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A5

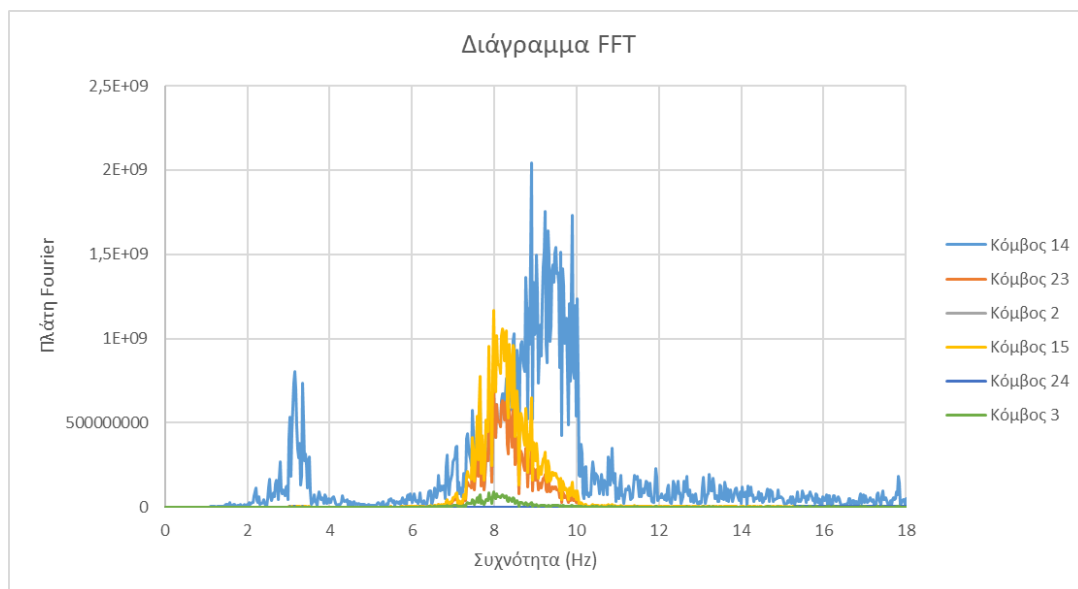


Σχήμα 7.27: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A7

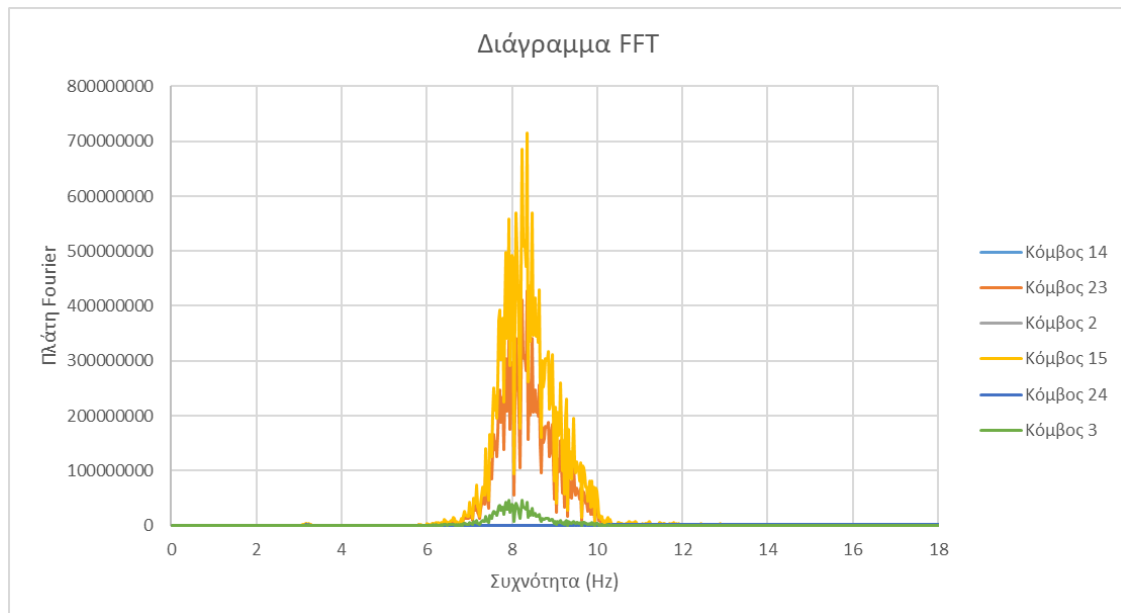
Τα παραπάνω διαγράμματα βελτιστοποιούνται διαιρώντας τα **πλάτη Fourier** των επιταχύνσεων απόκρισης των κόμβων με τα **πλάτη Fourier** των τεχνητών διεγέρσεων. Τα νέα διαγράμματα FFT φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 7.28: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A1



Σχήμα 7.29: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A5



Σχήμα 7.30: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A7

Έχοντας τα παραπάνω διαγράμματα FFT εξετάζουμε τις υποψήφιες ιδιοσυχνότητες για την εύρεση των ιδιομορφών του χωρικού μεταλλικού πλαισίου. Το χωρικό πλαίσιο εξετάζεται για τις τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της όποτε μας ενδιαφέρει αν τα αποτελέσματα της **μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** συμπίπτουν με αυτά από το κώδικα **πεπερασμένων στοιχείων**. Οι έξι πρώτες ιδιομορφές του πλαισίου απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:

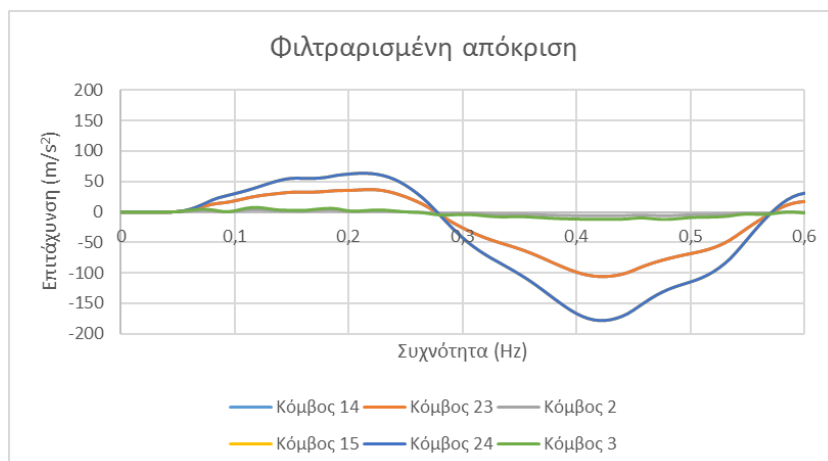
1η ιδιομορφή	T=1,347	f=0,74221	2η ιδιομορφή	T=1,269	f=0,78742	3η ιδιομορφή	T=0,318	f=3,14515
4η ιδιομορφή	T=0,253	f=3,94931	5η ιδιομορφή	T=0,225	f=4,43761	6η ιδιομορφή	T=0,131	f=7,60883

Εικόνα 7.2: Απεικόνιση των έξι πρώτων ιδιομορφών του χωρικού μεταλλικού πλαισίου.

Για τις εξεταζόμενες συχνότητες που προκύπτουν από τις ιδιομορφές των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και για αυτές από τα διαγράμματα FFT θα χρησιμοποιηθεί **φίλτρο τύπου Butterworth** μέσω του λογισμικού **Seismosignal** στις αποκρίσεις επιτάχυνσης που ευρέθηκαν πριν ώστε να ελεγχθεί η σύγκλιση μεταξύ τους.

Ξεκινώντας από την **τεχνητή διέγερση A1** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιείται **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 0,73 \div 0,81 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη

ιδιομορφή. Οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



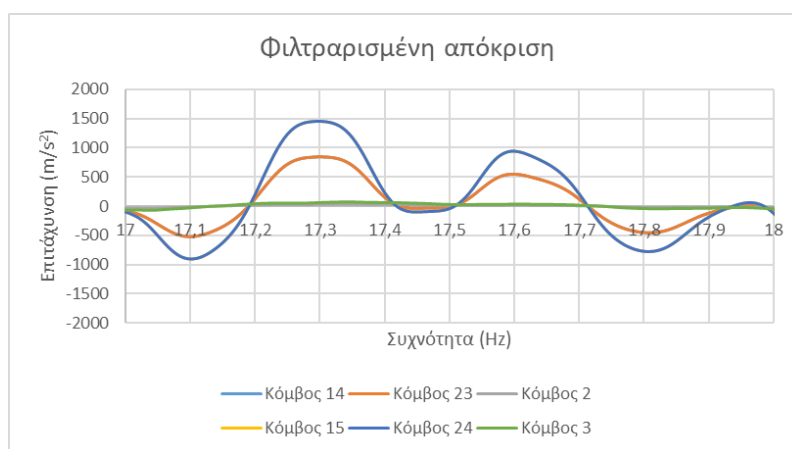
Σχήμα 7.31: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 0,285 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=0,285		SAP	
14y	1	-10,2632	1	-0,0004
23y	0,997896	-10,2416	1	-0,0004
2x	0,248961	-2,55512	0,25	-0,0001
15y	1,437107	-14,7492	1,45	-0,00058
24y	1,435685	-14,7347	1,425	-0,00057
3x	0,507886	-5,21251	0,75	-0,0003

Πίνακας 7.1: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 0,77 \div 0,86 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



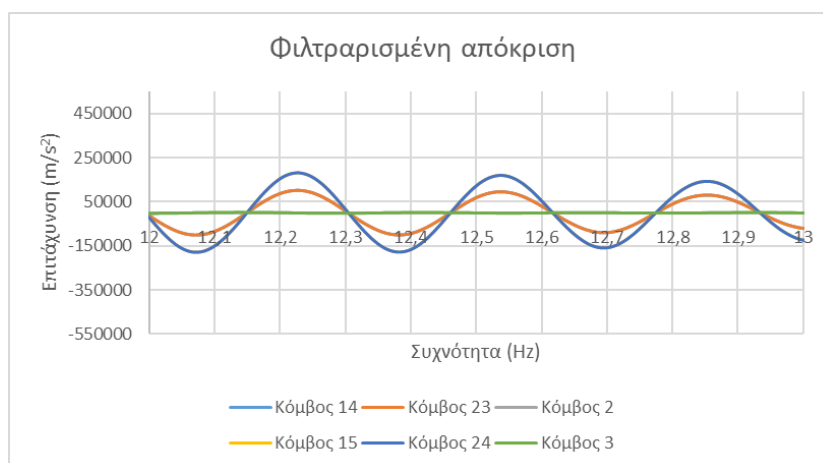
Σχήμα 7.32: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 17,4 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=17,4		SAP	
14γ	1	-403,753	1	-0,0002
23γ	1,00016436	-403,819	1	-0,0002
2x	-0,0038537	1,55595	-0,0339	6,78E-06
15γ	1,77559889	-716,903	0,0223	-4,46E-06
24γ	1,77604914	-717,085	0,0223	-4,46E-06
3x	-0,0106933	4,31746	-0,01213	2,425E-06

Πίνακας 7.2: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,13 \div 3,45 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



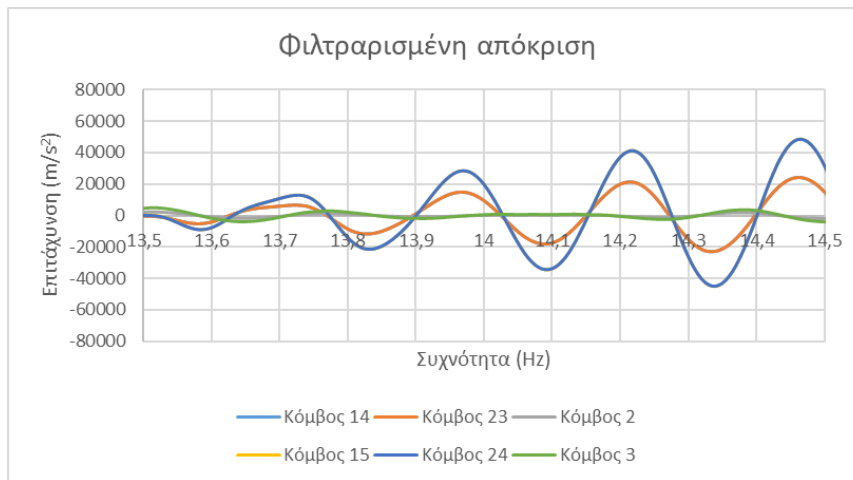
Σχήμα 7.33: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 12,21 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=12,21		SAP	
14γ	1	96439,2	1	-0,0146
23γ	1,000134	96452,11	1	-0,0146
2x	0,002832	273,1097	0,005975	-8,7E-05
15γ	1,772113	170901,2	1,767123	-0,0258
24γ	1,77213	170902,8	1,767123	-0,0258
3x	0,003522	339,6877	0,006849	-0,0001

Πίνακας 7.3: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,8 \div 4,33 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



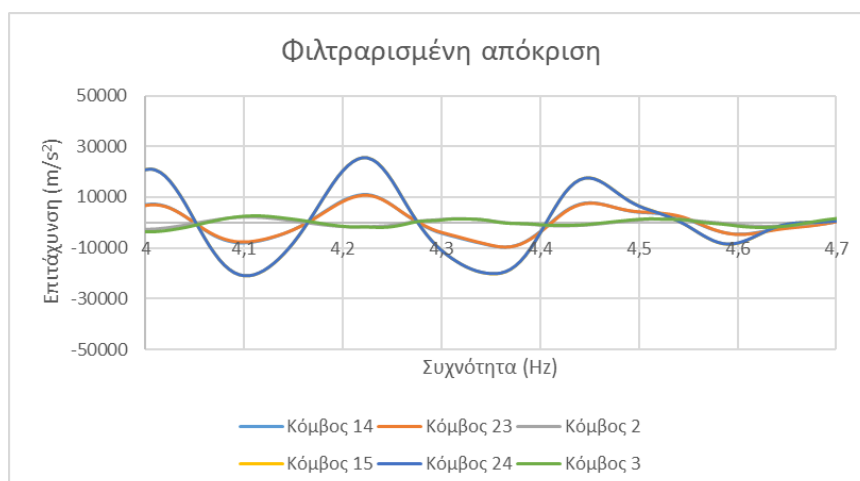
Σχήμα 7.34: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

Για $t = 13,685\text{sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=13,685		SAP	
14y	1	2,13861	1	-6,627E-06
23y	1,05379195	2,25365	-1	6,627E-06
2x	-0,4069325	-0,87027	0,603591	-0,000004
15y	1,55304614	3,32136	2,249887	-1,491E-05
24y	1,60633309	3,43532	-2,24989	1,491E-05
3x	-1,1797102	-2,52294	1,358081	-0,000009

Πίνακας 7.4: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την πέμπτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 4,42 \div 4,87\text{Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



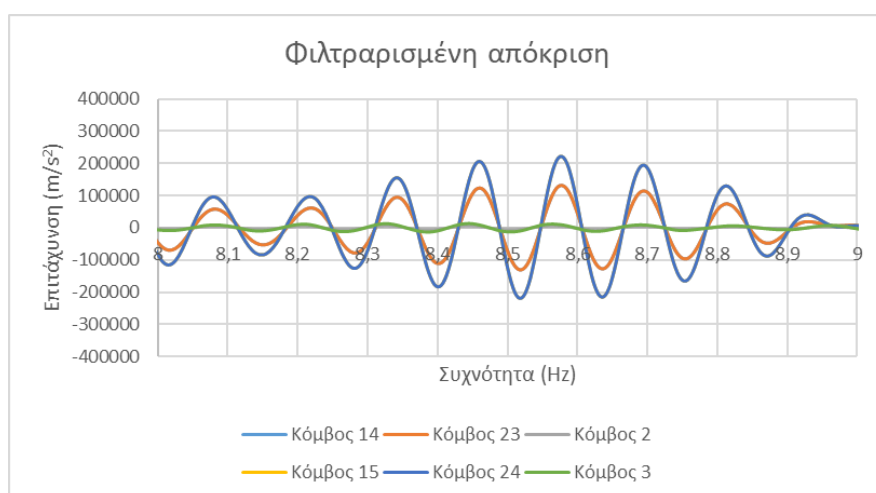
Σχήμα 7.35: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πέμπτη ιδιομορφή

Για $t = 4,685\text{sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

5η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=4,685		SAP	
14γ	1	-621,776	1	2,74E-05
23γ	1,129523	-702,311	-1	-2,7E-05
2x	-0,31012	192,8267	-3,64697	-0,0001
15γ	-0,36327	225,872	-0,18811	-5,2E-06
24γ	-0,2915	181,2468	-0,18811	-5,2E-06
3x	-1,35727	843,9187	-0,62144	-1,7E-05

Πίνακας 7.5: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πέμπτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας την **τεχνητή διέγερση A1** για την έκτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 7,50 \div 8,36\text{Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 7.36: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την έκτη ιδιομορφή

Για $t = 8,905\text{sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

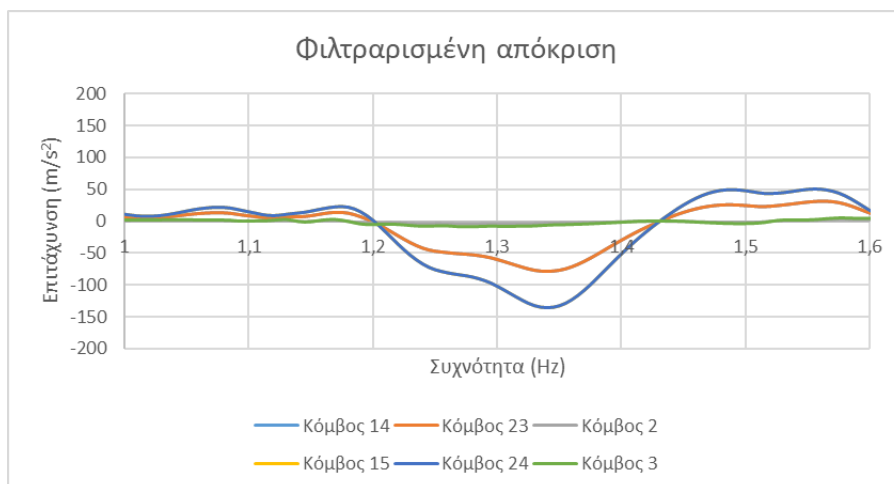
6η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=8,905		SAP	
14γ	1	-2510,83	1	-0,0045
23γ	1,00640329	-2526,91	1	-0,0045
2x	1,17856283	-2959,18	0,007233	-3,255E-05
15γ	-0,8432071	2117,154	-0,62222	0,0028
24γ	-0,8394887	2107,817	-0,62222	0,0028
3x	2,25485902	-5661,58	-0,00465	2,092E-05

Πίνακας 7.6: Υπολογισμός αποκρίσεων για την έκτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της πρώτης **τεχνητής διέγερσης A1** προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** είναι ικανοποιητικές.

Το μεταλλικό χωρικό πλαίσιο τώρα εξετάζεται για την **τεχνητή διέγερση A5** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιώντας **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 0,73 \div 0,81\text{ Hz}$ όσον

αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



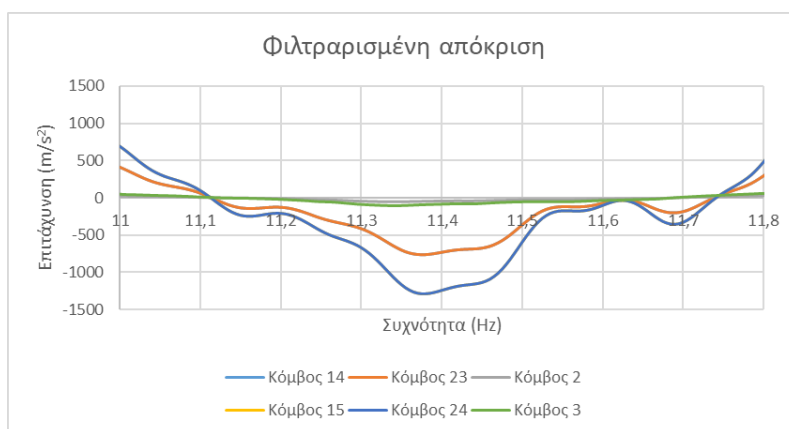
Σχήμα 7.37: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 1,645 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=1,645		SAP	
14y	1	20,69365	1	-0,0004
23y	0,995302	20,59644	1	-0,0004
2x	0,257724	5,33325	0,25	-0,0001
15y	1,509388	31,23475	1,45	-0,00058
24y	1,506824	31,18169	1,425	-0,00057
3x	0,521328	10,78818	0,75	-0,0003

Πίνακας 7.7: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 0,77 \div 0,86 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



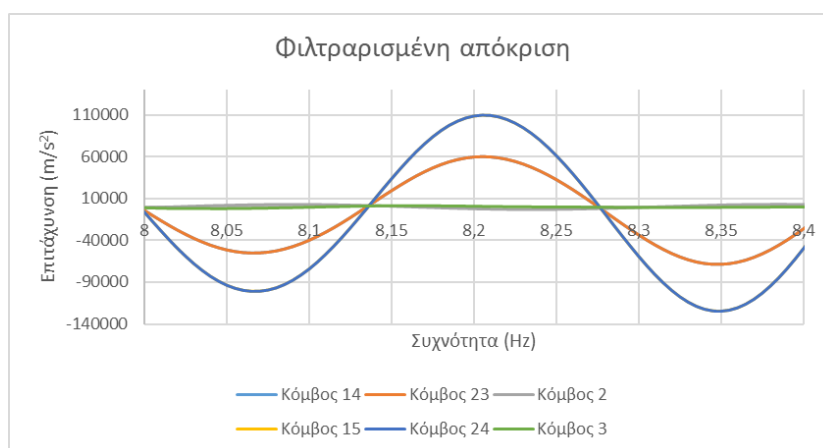
Σχήμα 7.37: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 11,69 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=11,69		SAP	
14y	1	-200,986	1	-0,0002
23y	1,000631	-201,113	1	-0,0002
2x	-0,00469	0,94211	-0,0339	6,78E-06
15y	1,763692	-354,477	0,0223	-4,5E-06
24y	1,763823	-354,504	0,0223	-4,5E-06
3x	-0,01332	2,67708	-0,01213	2,43E-06

Πίνακας 7.8: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,13 \div 3,45 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



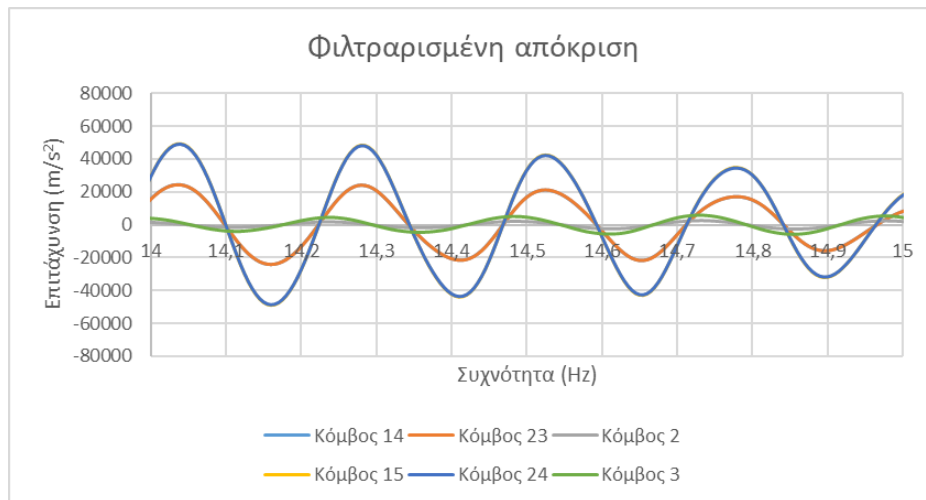
Σχήμα 7.38: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 8,305 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=8,305		SAP	
14y	1	-39619,5	1	-0,0146
23y	0,999634	-39605	1	-0,0146
2x	0,008023	-317,854	0,005975	-8,72E-05
15y	1,775135	-70330	1,767123	-0,0258
24y	1,774832	-70318	1,767123	-0,0258
3x	0,017472	-692,24	0,006849	-0,0001

Πίνακας 7.9: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,8 \div 4,33 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



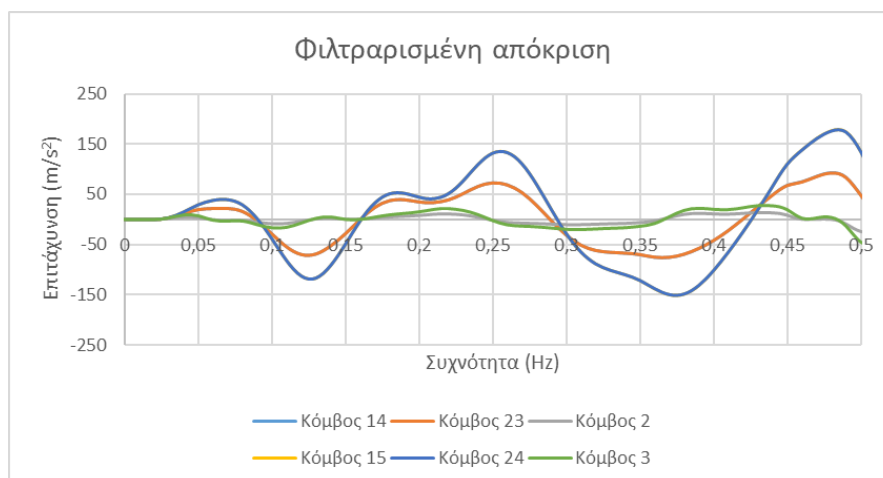
Σχήμα 7.39: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

Για $t = 14,995 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή					
Κόμβος	t=14,995		SAP		
14y	1	7290,173	1	-6,6E-06	
23y	0,997779	7273,978	-1	6,63E-06	
2x	0,29987	2186,103	0,603591	-4E-06	
15y	2,256788	16452,37	2,249887	-1,5E-05	
24y	2,214926	16147,19	-2,24989	1,49E-05	
3x	0,662445	4829,342	1,358081	-9E-06	

Πίνακας 7.10: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την πέμπτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 4,42 \div 4,87 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



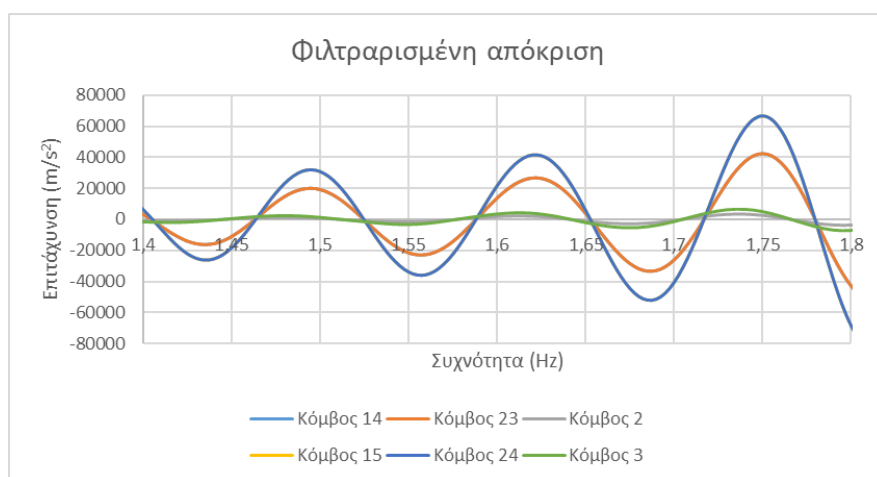
Σχήμα 7.40: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πέμπτη ιδιομορφή

Για $t = 0,425 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

5η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=0,425		SAP	
14y	1	12,90623	1	2,742E-05
23y	0,990289	12,7809	-1	-2,74E-05
2x	1,008832	13,02022	-3,64697	-0,0001
15y	-0,27246	-3,51637	-0,18811	-5,16E-06
24y	-0,27053	-3,49152	-0,18811	-5,16E-06
3x	1,985151	25,62082	-0,62144	-1,7E-05

Πίνακας 7.11: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πέμπτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας την **τεχνητή διέγερση A5** για την έκτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 7,50 \div 8,36\text{Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 7.41: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την έκτη ιδιομορφή

Για $t = 1,705\text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

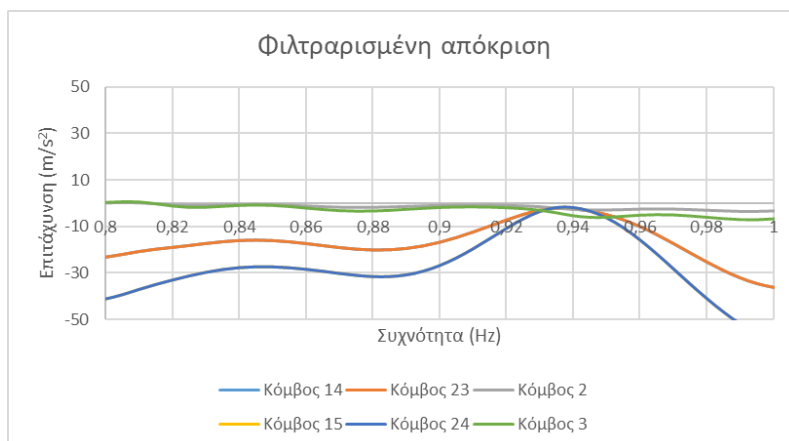
6η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=1,705		SAP	
14y	1	-19922,3	1	-0,0045
23y	0,999774	-19917,8	1	-0,0045
2x	-0,00383	76,34197	0,007233	-3,3E-05
15y	1,554287	-30965	-0,62222	0,0028
24y	1,55419	-30963	-0,62222	0,0028
3x	-0,00679	135,1957	-0,00465	2,09E-05

Πίνακας 7.12: Υπολογισμός αποκρίσεων για την έκτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της πρώτης **τεχνητής διέγερσης A5** προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** είναι ικανοποιητικές.

Η ανάλυση για το μεταλλικό χωρικό πλαίσιο ολοκληρώνεται εξετάζοντας το για την **τεχνητή διέγερση A7** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιώντας **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 0,73 \div 0,81\text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Οι νέες

αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



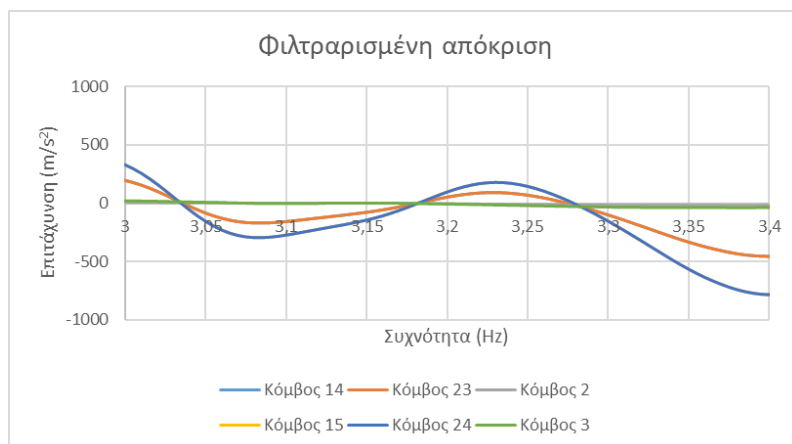
Σχήμα 7.42: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 0,96 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=0,96		SAP	
14γ	1	-10,0167	1	-0,0004
23γ	0,995328	-9,96986	1	-0,0004
2x	0,253349	-2,53771	0,25	-0,0001
15γ	1,571734	-15,7435	1,45	-0,00058
24γ	1,567819	-15,7043	1,425	-0,00057
3x	0,512124	-5,12977	0,75	-0,0003

Πίνακας 7.13: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την δεύτερη εξαταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 0,77 \div 0,86 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



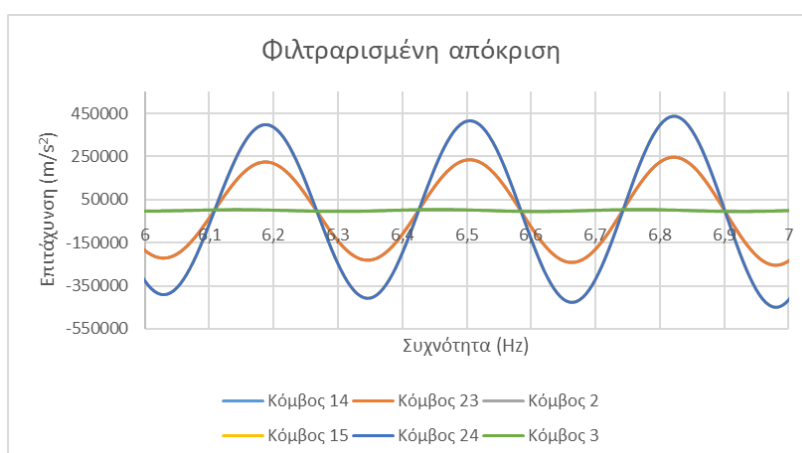
Σχήμα 7.43: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 3,075 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=3,075		SAP	
14γ	1	-164,933	1	-0,0002
23γ	0,999996	-164,932	1	-0,0002
2x	-0,00276	0,45564	-0,0339	6,78E-06
15γ	1,745126	-287,829	0,0223	-4,5E-06
24γ	1,745788	-287,938	0,0223	-4,5E-06
3x	-0,0072	1,18779	-0,01213	2,43E-06

Πίνακας 7.14: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,13 \div 3,45\text{Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



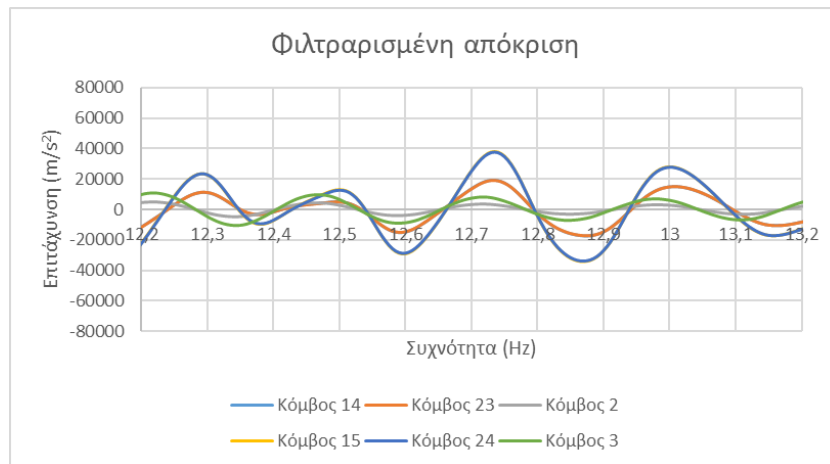
Σχήμα 7.44: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 6,84\text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=6,84		SAP	
14γ	1	231092,8	1	-0,0146
23γ	1,000075	231110,1	1	-0,0146
2x	0,002007	463,706	0,005975	-8,7E-05
15γ	1,772409	409591	1,767123	-0,0258
24γ	1,772486	409608,7	1,767123	-0,0258
3x	0,002047	473,1023	0,006849	-0,0001

Πίνακας 7.15: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 3,8 \div 4,33\text{Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



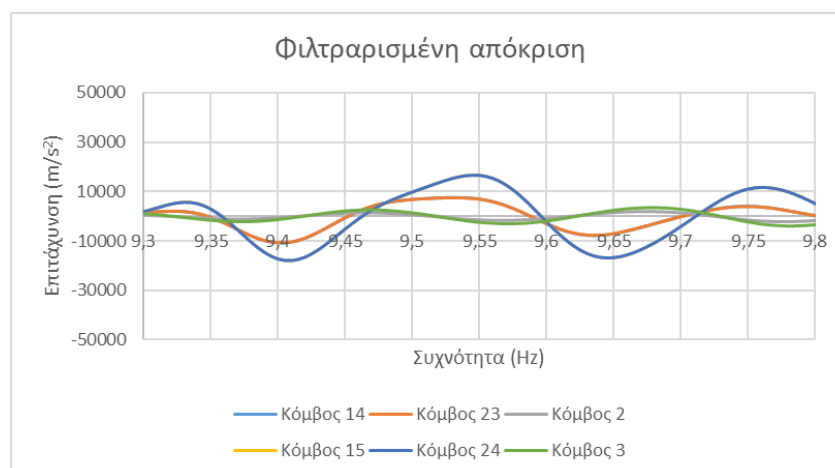
Σχήμα 7.45: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

Για $t = 12,98 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=12,98		SAP	
14γ	1	12500,61	1	-6,6E-06
23γ	0,993506	12419,44	-1	6,63E-06
2x	0,247915	3099,087	0,603591	-4E-06
15γ	1,994685	24934,78	2,249887	-1,5E-05
24γ	1,968384	24606	-2,24989	1,49E-05
3x	0,555507	6944,171	1,358081	-9E-06

Πίνακας 7.16: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την πέμπτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 4,42 \div 4,87 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



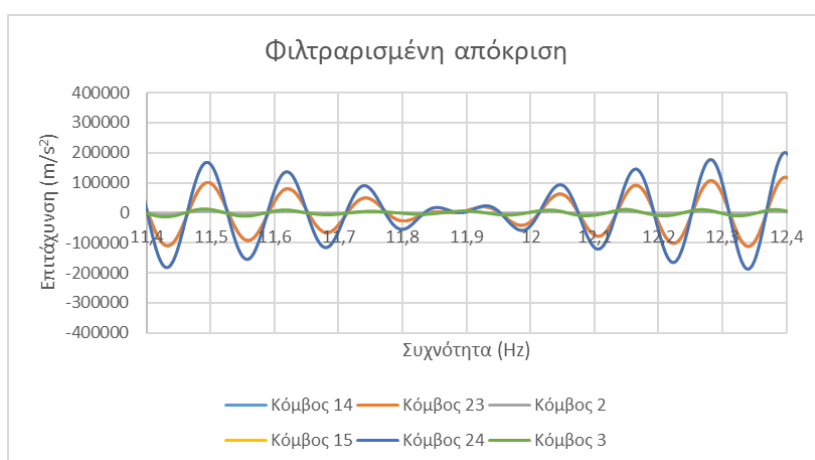
Σχήμα 7.46: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πέμπτη ιδιομορφή

Για $t = 9,465 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

5η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=9,465		SAP	
14γ	1	3119,084	1	2,74E-05
23γ	1,000778	3121,512	-1	-2,7E-05
2x	0,454133	1416,477	-3,64697	-0,0001
15γ	0,248511	775,1254	-0,18811	-5,2E-06
24γ	0,271649	847,2965	-0,18811	-5,2E-06
3x	0,837088	2610,947	-0,62144	-1,7E-05

Πίνακας 7.17: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πέμπτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας την **τεχνητή διέγερση A7** για την έκτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 7,50 \div 8,36\text{Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις που απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 7.47: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την έκτη ιδιομορφή

Για $t = 11,9\text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

6η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=11,9		SAP	
14γ	1	7153,854	1	-0,0045
23γ	1,002482	7171,611	1	-0,0045
2x	0,475219	3399,645	0,007233	-3,3E-05
15γ	0,441931	3161,507	-0,62222	0,0028
24γ	0,443302	3171,321	-0,62222	0,0028
3x	0,906609	6485,751	-0,00465	2,09E-05

Πίνακας 7.18: Υπολογισμός αποκρίσεων για την έκτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της **τεχνητής διέγερσης A7** προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** είναι ικανοποιητικές.

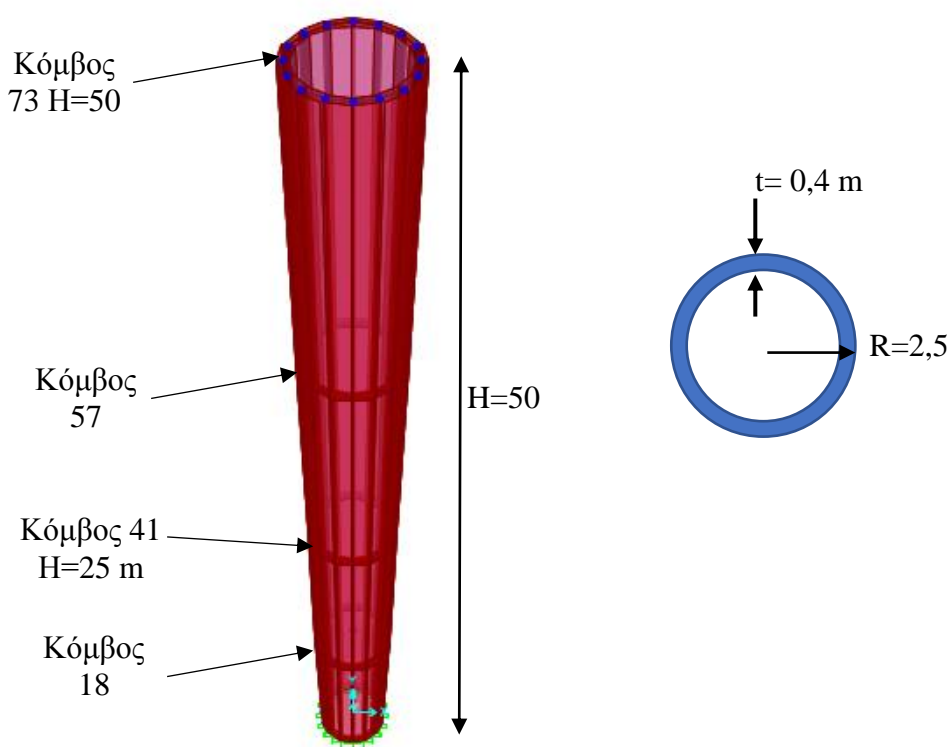
7.3 Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Για το χωρικό μεταλλικό πλαίσιο χρησιμοποιήθηκε η **μέθοδος των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** για τρεις διαφορετικές τεχνητές διεγέρσεις ήτοι **A1, A5, A7**. Και στις τρεις διεγέρσεις η πρώτη ιδιομορφή αποτυπώνεται με μεγάλη ακρίβεια. Στις επόμενες ιδιομορφές παρατηρούνται αποκλίσεις μεταξύ των δύο μεθόδων τόσο στα πρόσημα αλλά και σε ορισμένες περιπτώσεις και στις τιμές τους αλλά δικαιολογείται λόγω διαφορετικής μεθοδολογίας υπολογισμού των ζητούμενων ιδιομορφών. Η επίδοση της **μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** σε σύγκριση με τα αποτελέσματα από το προσομοίωμα **πεπερασμένων στοιχείων** κρίνεται ικανοποιητική αλλά με μικρότερη σύγκλιση των τιμών από το επίπεδο πλαίσιο αλλά και για αντίστοιχους χωρικούς πλαισιωτούς φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα που έχουν μελετηθεί σύμφωνα με τη βιβλιογραφία [E5, E12, E13].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ – ΜΕΛΕΤΗ ΜΕΤΑΛΛΙΚΗΣ ΚΑΠΝΟΔΟΧΟΥ¹

8.1 Περιγραφή προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο αφού εξετάστηκαν και επιλύθηκαν πλαισιωτοί φορείς κτιρίων στο επίπεδο (βλ. Κεφάλαιο 6) και στο χώρο (βλ. Κεφάλαιο 7) εφαρμόζεται η μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης για την επίλυση ενός κελυφωτού φορέα όπως είναι μια καπνοδόχος. Αφού βρεθούν τα δυναμικά χαρακτηριστικά της συγκρίνεται η επίδοση των επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων με τις ιδιοσυχνότητες και ιδιομορφές που προκύπτουν από την θεωρία των συνεχών συστημάτων της δυναμικής των κατασκευών. Τα τεχνητά επιταχυνσιογράμματα είναι τα ίδια που χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια (βλ. Παράρτημα Δ). Η καπνοδόχος έχει ύψος $H = 50\text{ m}$ ακτίνα $r = 2,5\text{ m}$ και πάχος κελύφους $t = 0,4\text{ m}$. Η ποιότητα του χάλυβα είναι **S355** και έχει μελετηθεί εμπειρικά σύμφωνα με [E1, E2, Ξ20]. Η καπνοδόχος στηρίζεται στη βάση της με πάκτωση.



Εικόνα 8.3: Απεικόνιση της υπό μελέτη μεταλλικής καπνοδόχου

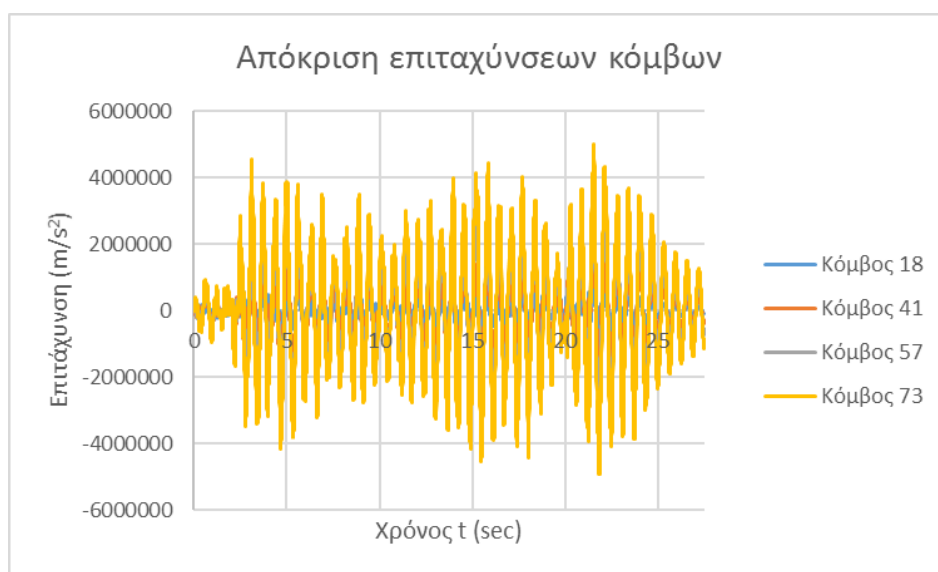
¹ Το παρόν κεφάλαιο αποτελεί εργασία η οποία θα παρουσιαστεί υπό μορφή πρακτικού συνεδρίου στο 10^ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μεταλλικών Κατασκευών.

8.2 Αναγνώριση με τη μέθοδο χρονοϊστοριών επιτάχυνσης

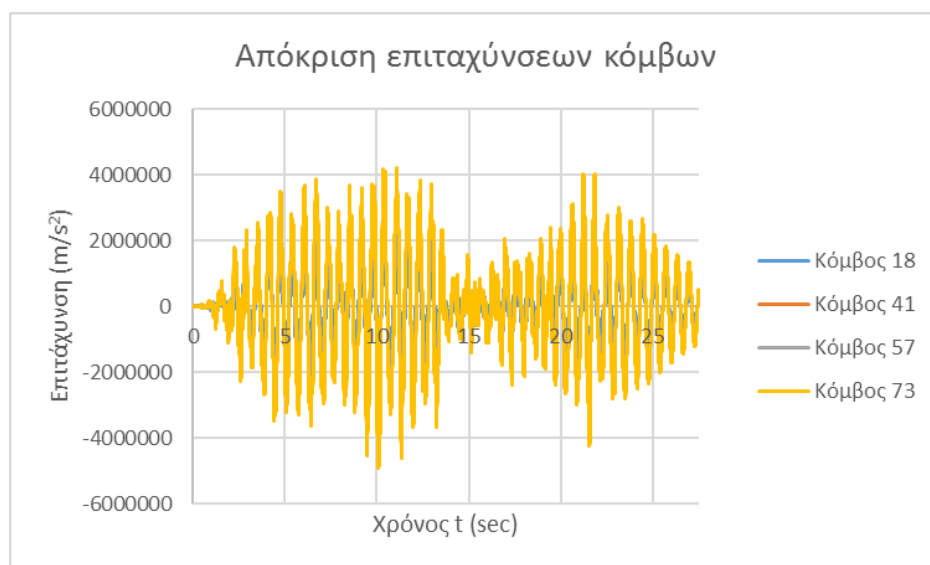
Στη παρούσα παράγραφο γίνεται αναγνώριση των ιδιομορφών της κατασκευής κάνοντας χρήση της **μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** όπως αυτή αναλύθηκε και επεξηγήθηκε στο Κεφάλαιο 5.

Αρχικά, επιλέγουμε τα σημεία ενοργάνωσης της κατασκευής τα οποία επιλέχθηκαν να απέχουν μεταξύ τους κατά 25% από το συνολικό ύψος της καπνοδόχου άρα οι επιλεγμένοι κόμβοι από το προσομοίωμα των πεπερασμένων στοιχείων είναι ο **κόμβος 18** σε ύψος $H = 12,5\text{ m}$, ο **κόμβος 41** σε ύψος $H = 25\text{ m}$, ο **κόμβος 57** σε ύψος $H = 37,5\text{ m}$ και ο **κόμβος 73** σε ύψος $H = 50\text{ m}$.

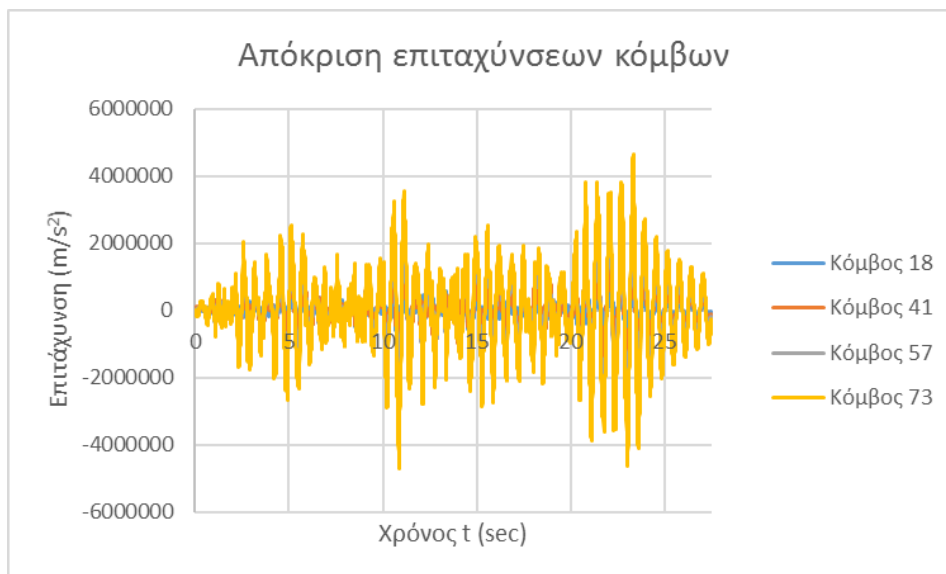
Στη συνέχεια εκτελώντας στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων δυναμική γραμμική ανάλυση χρονοϊστορίας λαμβάνουμε τις αποκρίσεις επιτάχυνσης στους κόμβους που επιλέξαμε για τα τρία επιλεγμένα τεχνητά επιταχυνσιογράμματα που χρησιμοποιήσαμε (βλ. Παράρτημα Δ) όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 8.25: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων για τη τεχνητή διέγερση A1

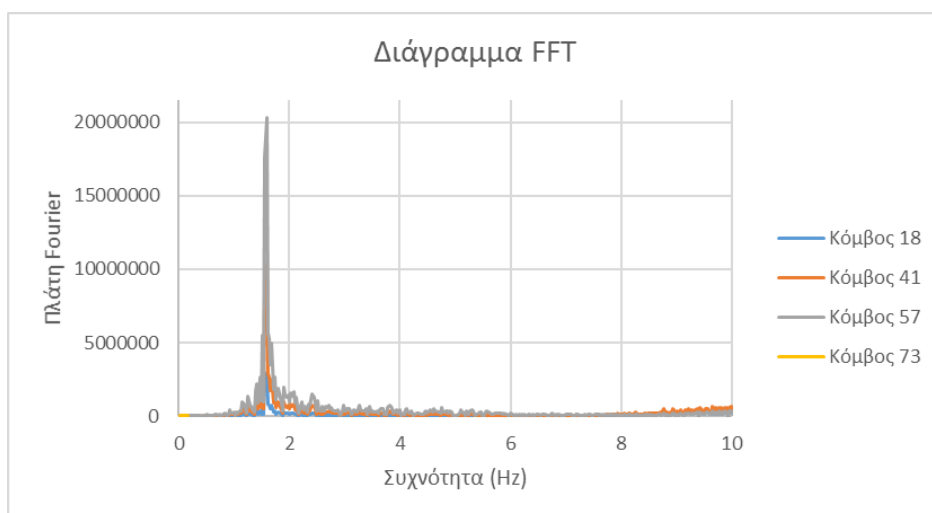


Σχήμα 8.2: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων για τη τεχνητή διέγερση A5

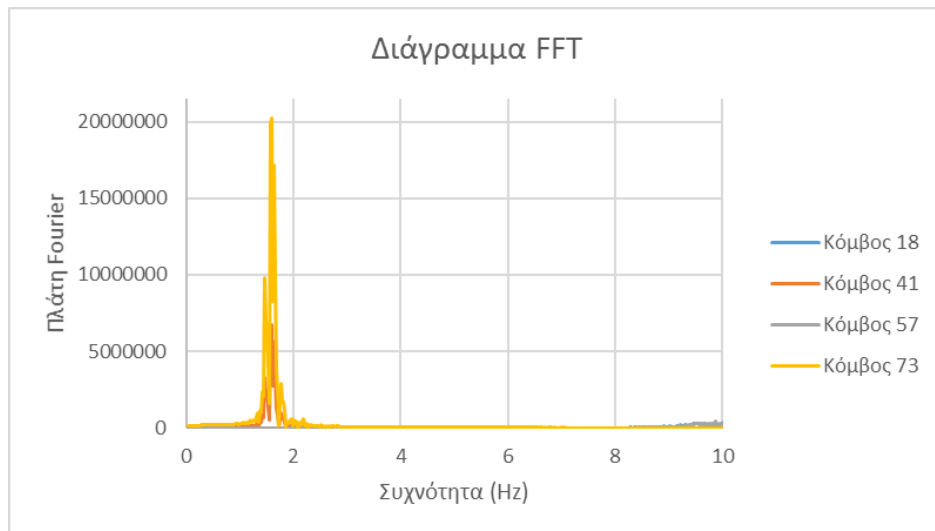


Σχήμα 8.3: Απόκριση επιταχύνσεων κόμβων για τη τεχνητή διέγερση A7

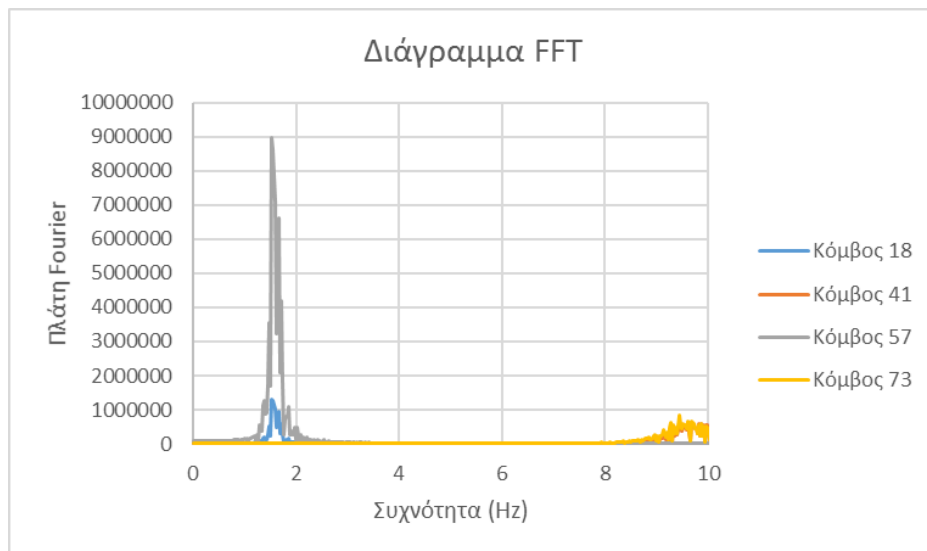
Στη συνέχεια με χρήση του λογισμικού **SeismoSignal** γίνεται κατάλληλη επεξεργασία των παραπάνω καταγραφών ώστε να υπολογιστούν τα πλάτη Fourier και να γίνουν τα διάγραμμα φασμάτων FFT όπως αυτά φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 8.4: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A1

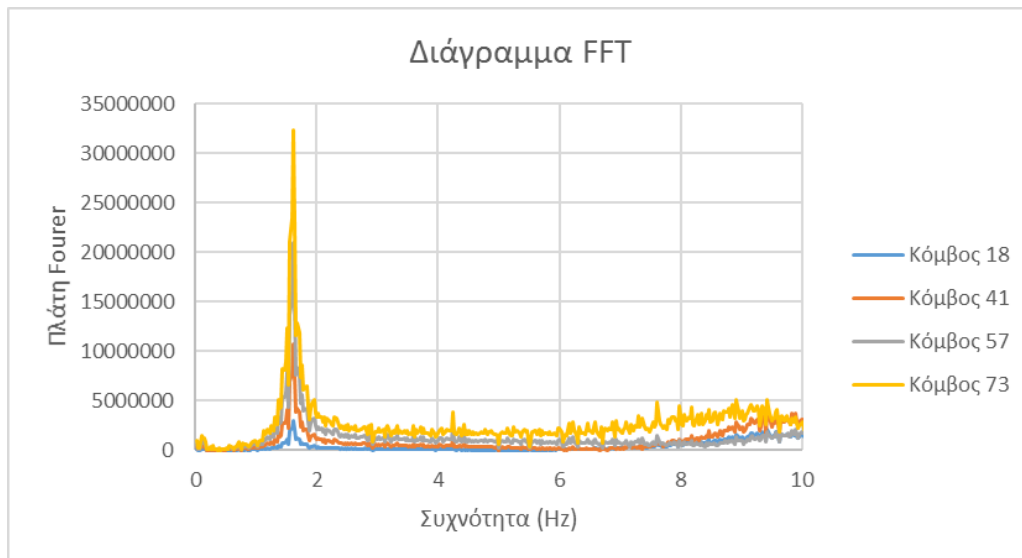


Σχήμα 8.5: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A5

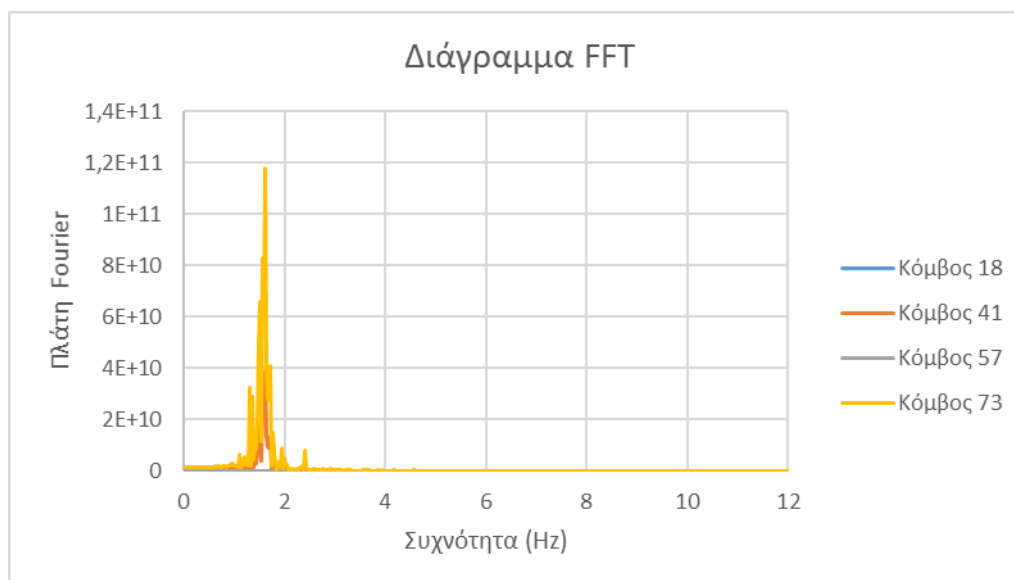


Σχήμα 8.6: Διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A7

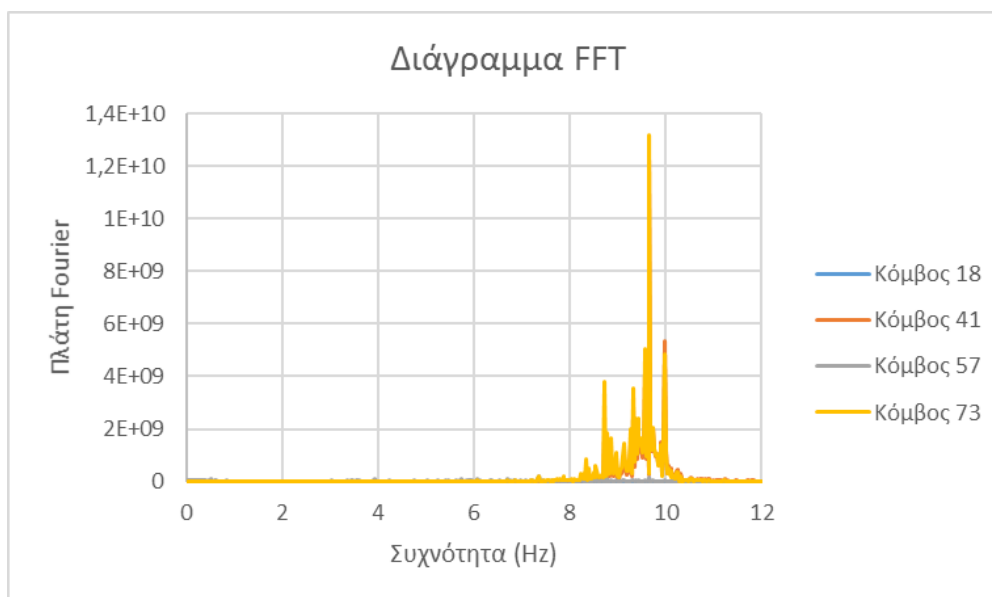
Τα παραπάνω διαγράμματα βελτιστοποιούνται διαιρώντας τα πλάτη Fourier των επιταχύνσεων απόκρισης των κόμβων με τα πλάτη Fourier των τεχνητών διεγέρσεων. Τα νέα διαγράμματα FFT φαίνονται παρακάτω:



Σχήμα 8.7: Βελτιστοποιήμενο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A1

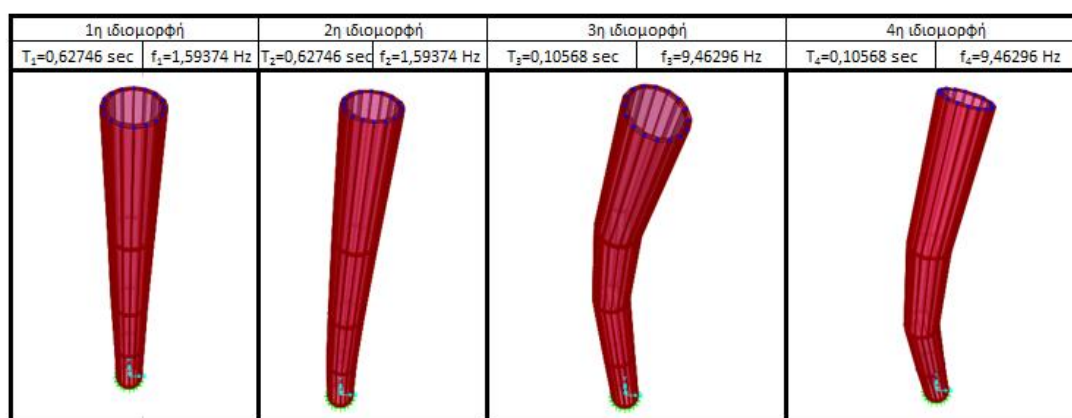


Σχήμα 8.8: Βελτιστοποιήμενο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A5



Σχήμα 8.9: Βελτιστοποιημένο διάγραμμα FFT των αποκρίσεων για τεχνητή διέγερση A10

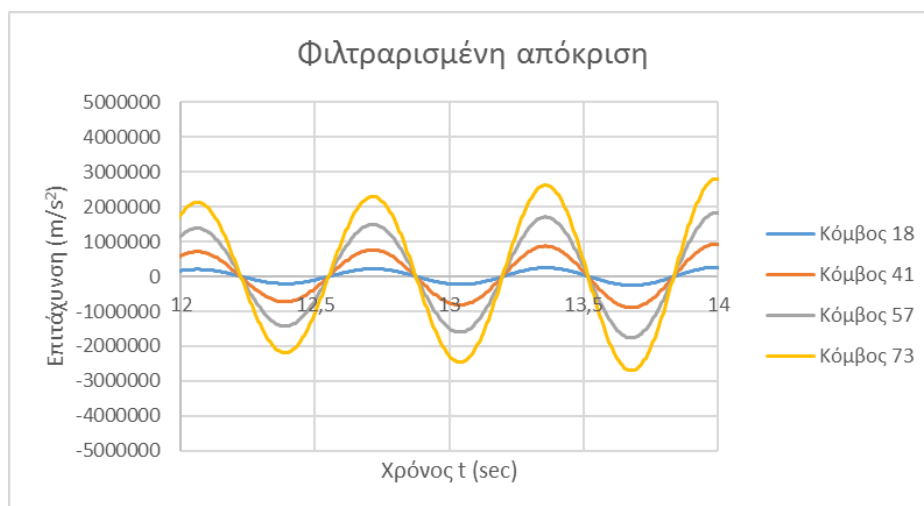
Έχοντας τα παραπάνω διαγράμματα FFT εξετάζουμε τις υποψήφιες ιδιοσυχνότητες για την εύρεση των ιδιομορφών της καπνοδόχου. Η καπνοδόχος εξετάζεται για τις τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της όπου μας ενδιαφέρει αν τα αποτελέσματα της μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης συμπίπτουν με αυτά από τον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων. Οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές της κατασκευής απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:



Εικόνα 8.4: Απεικόνιση των τεσσάρων πρώτων ιδιομορφών της εξεταζόμενης καπνοδόχου

Για τις εξεταζόμενες συχνότητες που προκύπτουν από τις ιδιομορφές των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και για αυτές από τα διαγράμματα FFT θα χρησιμοποιηθεί **φίλτρο τύπου Butterworth** μέσω του λογισμικού **Seismosignal** στις αποκρίσεις επιτάχυνσης που ευρέθηκαν πριν έτσι ώστε να ελεγχθεί η σύγκλιση μεταξύ τους.

Ξεκινώντας από την **τεχνητή διέγερση A1** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιείται φίλτρο **Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 1,4 \div 1,749 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



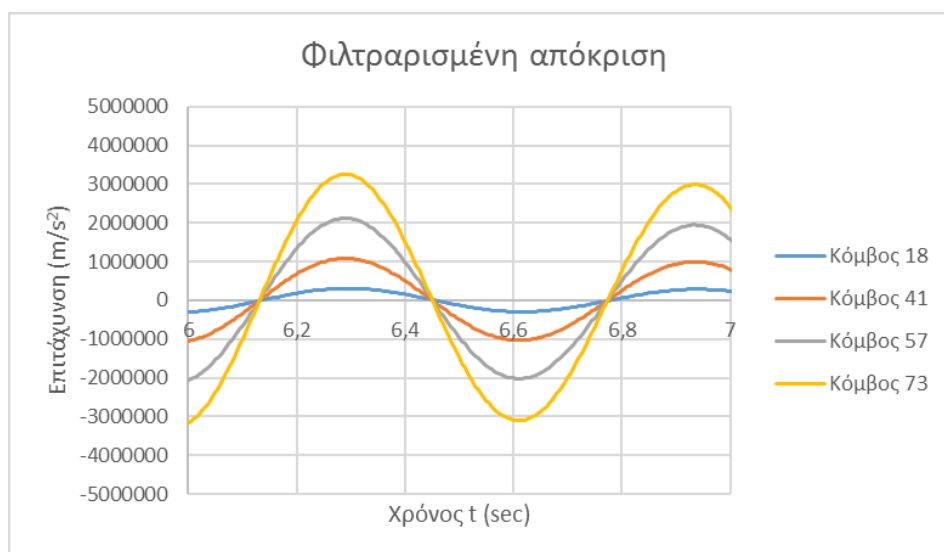
Σχήμα 8.10: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 12,4 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=12,4		SAP	
73	1	-2175907,36	1	0,0059
57	0,651816	-1418291,63	0,644068	0,0038
41	0,332682	-723885,539	0,338983	0,002
18	0,095151	-207039,1158	0,101695	0,0006

Πίνακας 8.2: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Ομοίως για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 1,4 \div 1,749 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



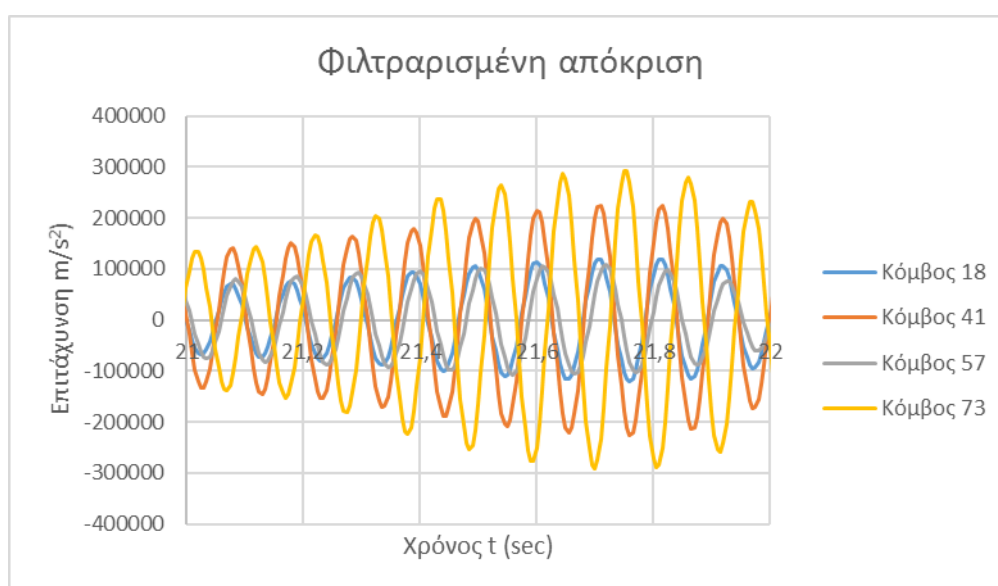
Σχήμα 8.11: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 6,295 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την δεύτερη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=6,295		SAP	
73	1	3254610,848	1	0,0438
57	0,651291	2119700,343	0,650685	0,0285
41	0,331993	1080507,738	0,33105	0,0145
18	0,094554	307737,6161	0,093607	0,0041

Πίνακας 8.2: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 9,3 \div 10,41 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



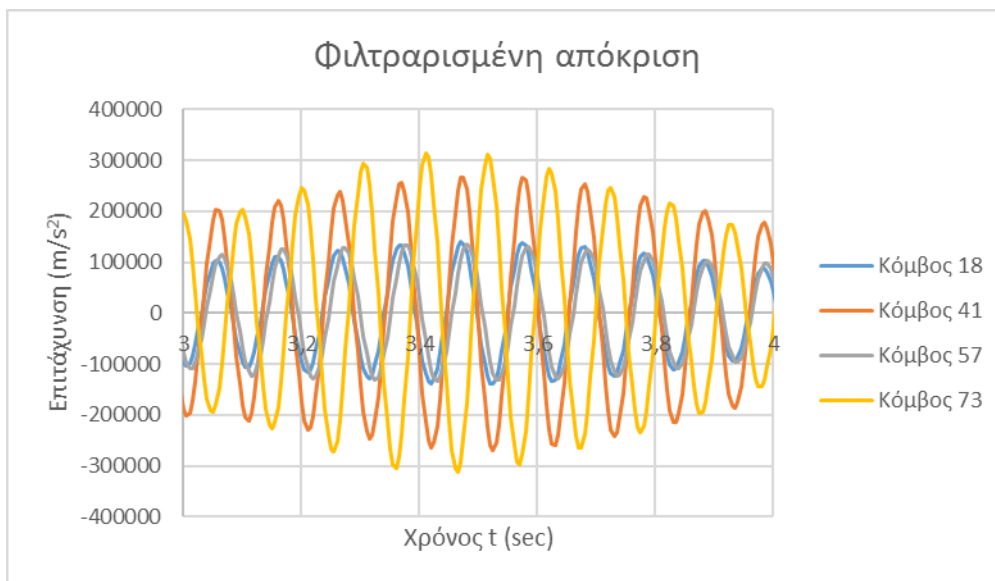
Σχήμα 8.12: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 21,6 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την τρίτη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=21,6		SAP	
73	1	211360,3166	1	0,0245
57	-0,11837	-25019,4595	-0,2898	-0,0071
41	-0,61709	-130427,467	-0,82041	-0,0201
18	-0,34939	-73847,5434	-0,43673	-0,0107

Πίνακας 8.3: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας για την πρώτη **τεχνητή διέγερση A1** για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 9,3 \div 10,41 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 8.13: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

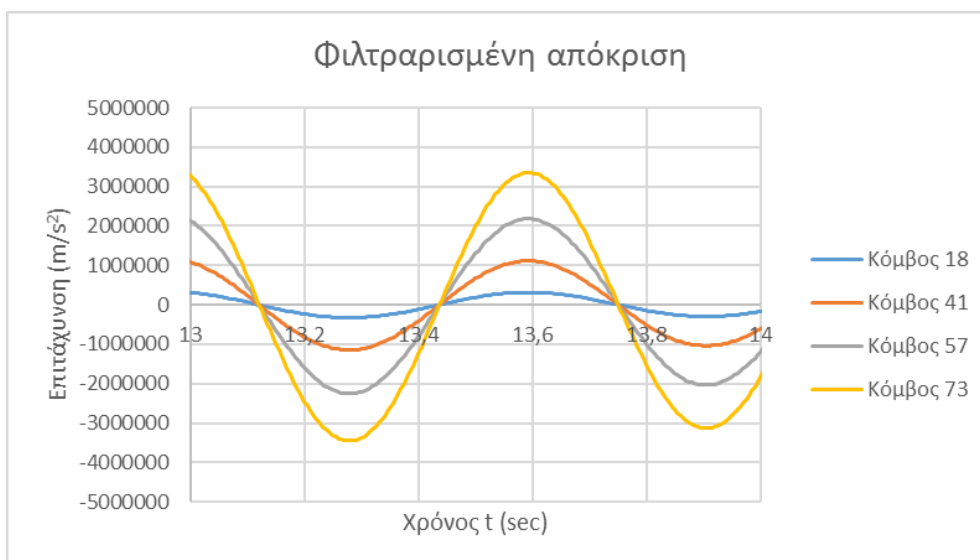
Για $t = 3,165 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την τέταρτη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t= 3,165		SAP	
73	1	-133160,145	1	0,0278
57	-0,93538	124554,8805	-0,29137	-0,0081
41	-1,58373	210889,3001	-0,82014	-0,0228
18	-0,77164	102751,3022	-0,43885	-0,0122

Πίνακας 8.4: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της πρώτης τεχνητής διέγερσης A1 προκύπτει ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης είναι ικανοποιητικές. Ειδικότερα για τις δύο πρώτες ιδιομορφές η σύγκλιση των τιμών απόκρισης τους είναι εξαιρετική καθώς τείνουν να ταυτιστούν οι τιμές που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους. Για την τρίτη και τέταρτη ιδιομορφή οι αποκλίσεις αυξάνονται αλλά η τάξη μεγέθους των τιμών των δύο μεθόδων παραμένει η ίδια.

Η καπνοδόχος εξετάζεται τώρα για την **τεχνητή διέγερση A5** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιώντας **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 1,4 \div 1,749 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Όπως και πριν οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



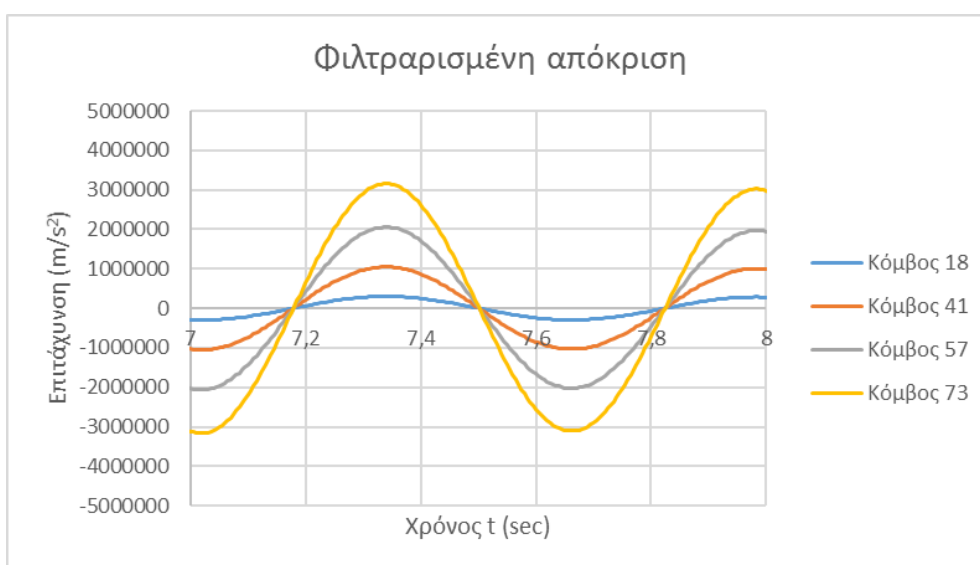
Σχήμα 8.14: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 13,595 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος		t=13,595	SAP	
73	1	3357220,414	1	0,0059
57	0,651115	2185937,636	0,644068	0,0038
41	0,331748	1113750,07	0,338983	0,002
18	0,094412	316960,2275	0,101695	0,0006

Πίνακας 8.5: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Ομοίως για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 1,4 \div 1,749 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



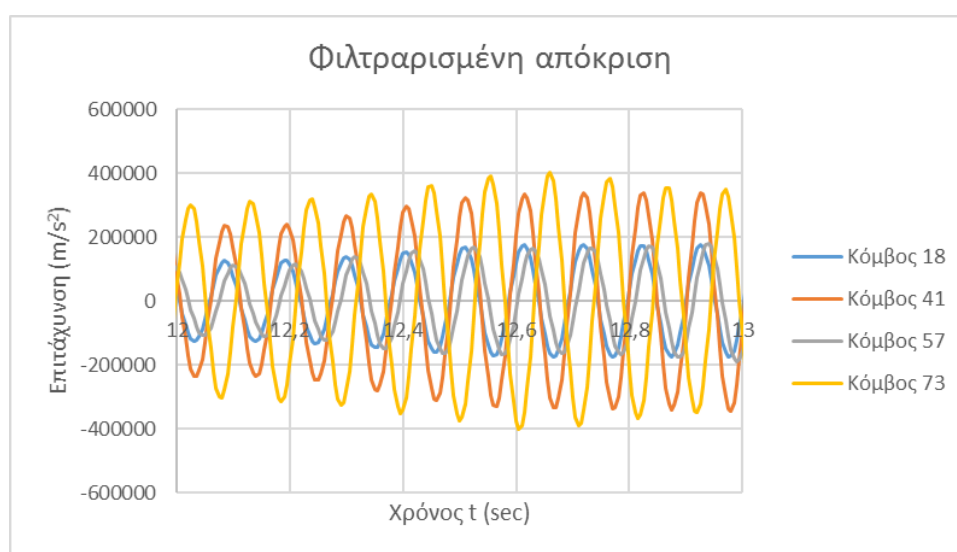
Σχήμα 8.15: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για τη δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 7,345 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την δεύτερη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=7,345		SAP	
73	1	3149158,416	1	0,0438
57	0,651717	2052358,61553	0,650685	0,0285
41	0,332554	1047266,613	0,33105	0,0145
18	0,094839	298663,1801	0,093607	0,0041

Πίνακας 8.6: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 9,3 \div 10,41 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



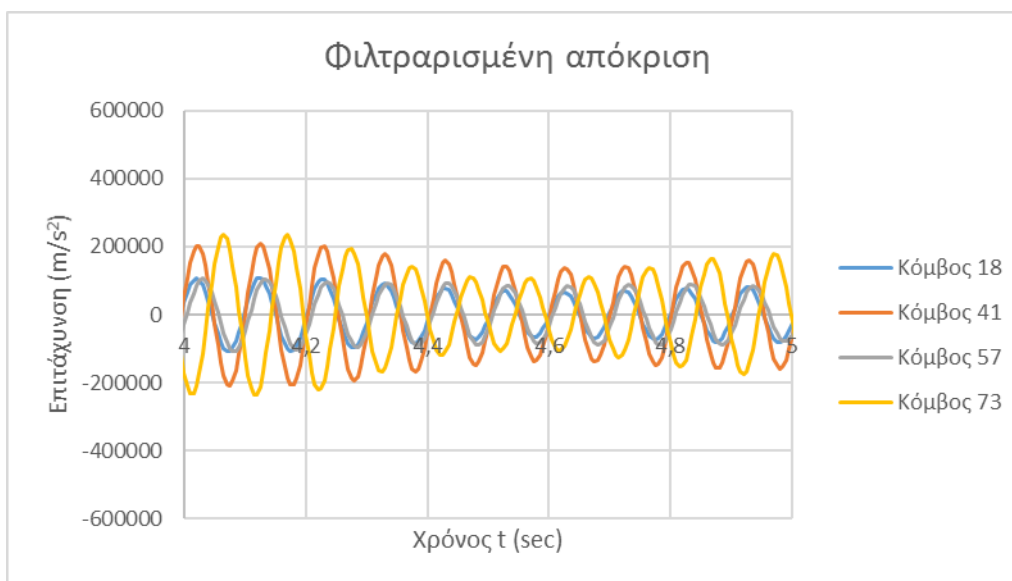
Σχήμα 8.16: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για τη τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 12,31 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την τρίτη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=12,31		SAP	
73	1	-137347,3209	1	0,0245
57	-0,99783	137049,8898	-0,2898	-0,0071
41	-1,65716	227606,955	-0,82041	-0,0201
18	-0,80363	110377,0992	-0,43673	-0,0107

Πίνακας 8.7: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας και για την δεύτερη τεχνητή διέγερση A5 για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 9,3 \div 10,41 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 8.17: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

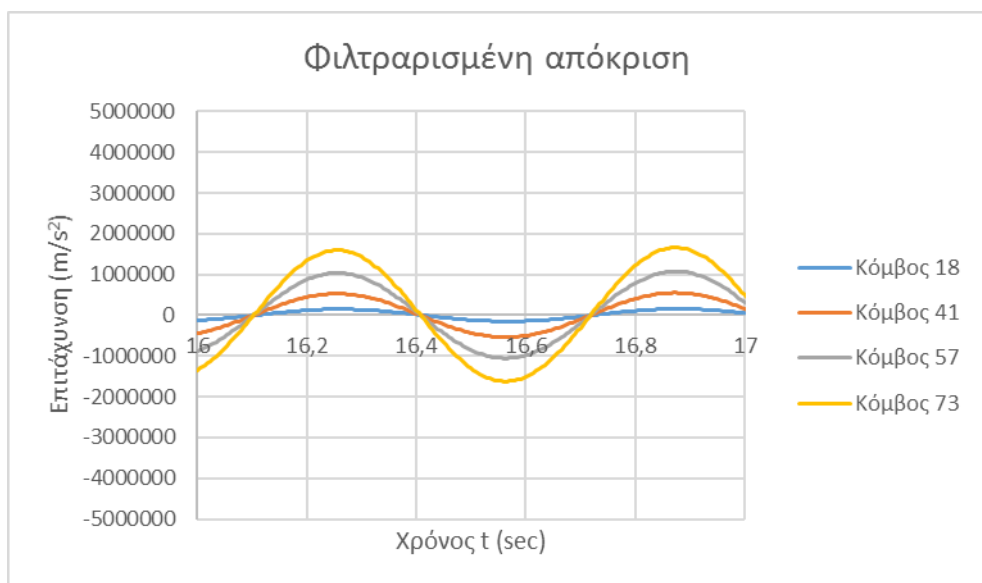
Για $t = 4,175 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την τέταρτη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=4,175		SAP	
73	1	220161,4725	1	0,0278
57	-0,38825	-85477,49865	-0,29137	-0,0081
41	-0,9379	-206489,5212	-0,82014	-0,0228
18	-0,49055	-108000,5491	-0,43885	-0,0122

Πίνακας 8.8: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της δεύτερης **τεχνητής διέγερσης A5** προκύπτουν ανάλογα συμπεράσματα με αυτά όταν έγινε η χρήση της **τεχνητής διέγερσης A1** δηλαδή ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης είναι ικανοποιητικές. Ειδικότερα για τις δύο πρώτες ιδιομορφές η σύγκλιση των τιμών απόκρισης τους είναι εξαιρετική καθώς τείνουν να ταυτιστούν οι τιμές που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους. Για την τρίτη και τέταρτη ιδιομορφή οι αποκλίσεις αυξάνονται αλλά η τάξη μεγέθους των τιμών των δύο μεθόδων παραμένει η ίδια.

Τέλος, η καπνοδόχος εξετάζεται τώρα για την **τεχνητή διέγερση A7** (βλ. Παράρτημα Δ) χρησιμοποιώντας **φίλτρο Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 1,4 \div 1,749 \text{ Hz}$ όσον αφορά την πρώτη εξεταζόμενη ιδιομορφή. Όπως και πριν οι νέες αποκρίσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα που δείχνουν ένα μέρος της συνολικής απόκρισης:



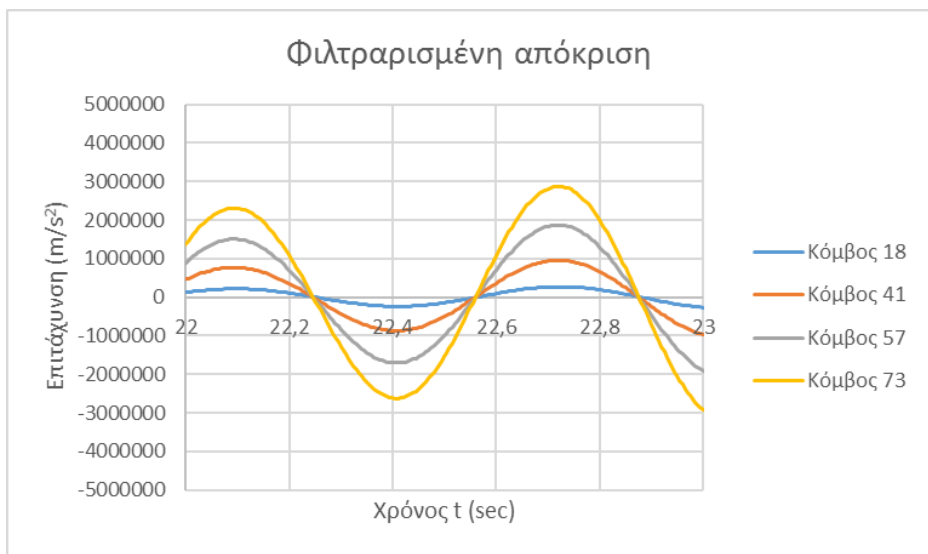
Σχήμα 8.18: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την πρώτη ιδιομορφή

Για $t = 16,26 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές της πρώτης ιδιομορφής όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

1η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=16,26		SAP	
73	1	1593935,8	1	0,0059
57	0,65054	1036918,5	0,644068	0,0038
41	0,330947	527508,37	0,338983	0,002
18	0,092409	147293,92	0,101695	0,0006

Πίνακας 8.9: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή

Ομοίως για την δεύτερη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 1,4 \div 1,749 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



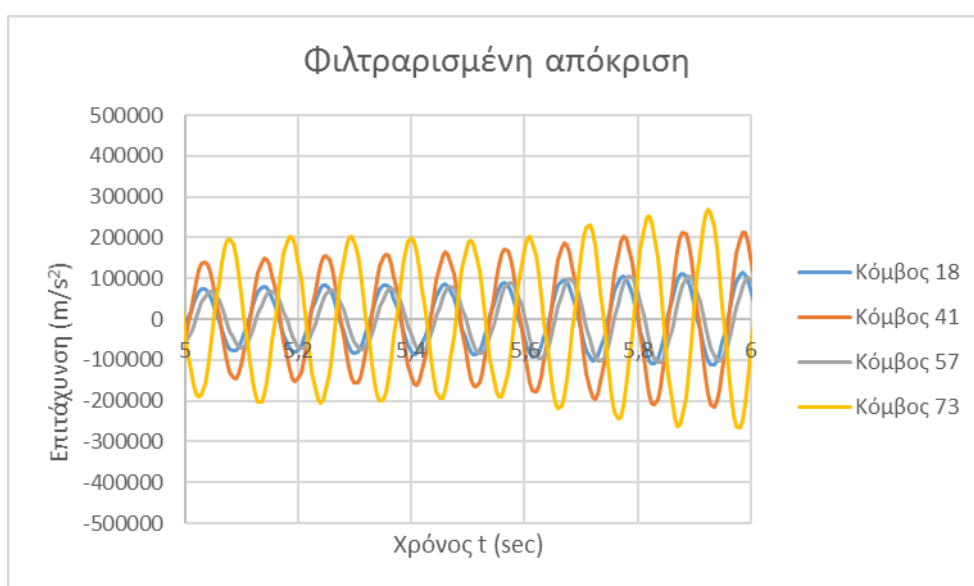
Σχήμα 8.19: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την δεύτερη ιδιομορφή

Για $t = 22,405 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την δεύτερη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

2η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=22,405		SAP	
73	1	-2623311	1	0,0438
57	0,651176	-1708238	0,650685	0,0285
41	0,331813	-870448,8	0,33105	0,0145
18	0,09244	-242497,9	0,093607	0,0041

Πίνακας 8.9: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή

Συνεχίζοντας για την τρίτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 9,3 \div 10,41 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



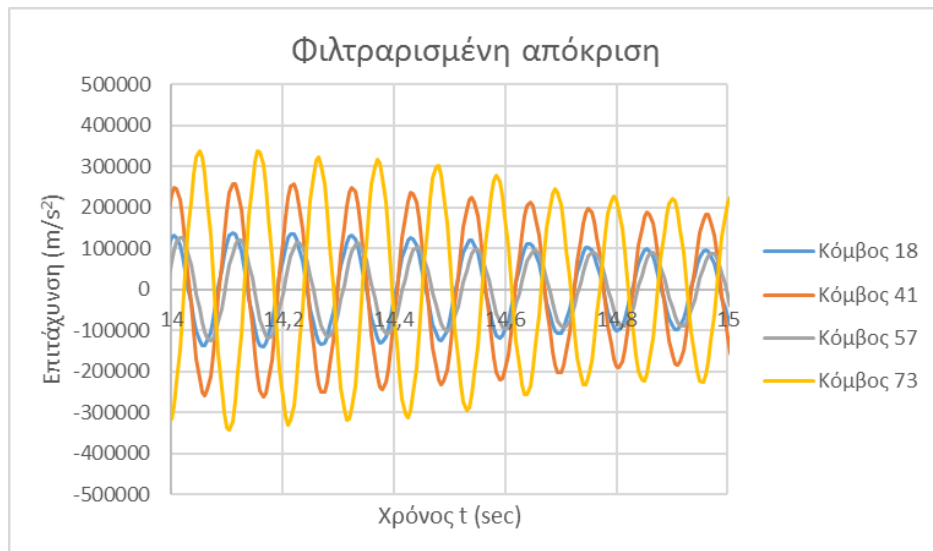
Σχήμα 8.20: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για τη τρίτη ιδιομορφή

Για $t = 5,405 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την τρίτη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

3η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=5,405		SAP	
73	1	188579,84	1	0,0245
57	-0,30445	-57412,722	-0,2898	-0,0071
41	-0,84134	-158659,5	-0,82041	-0,0201
18	-0,45026	-84910,23	-0,43673	-0,0107

Πίνακας 8.10: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή

Ολοκληρώνοντας και για την τελευταία **τεχνητή διέγερση A7** για την τέταρτη εξεταζόμενη ιδιομορφή και κάνοντας χρήση του **φίλτρου Butterworth** για συχνότητες μεταξύ $f = 9,3 \div 10,41 \text{ Hz}$ προκύπτουν οι νέες αποκρίσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 8.21: Φιλτραρισμένη απόκριση κόμβων για την τέταρτη ιδιομορφή

Για $t = 14,59 \text{ sec}$ από το παραπάνω διάγραμμα υπολογίζουμε τις τιμές για την τέταρτη ιδιομορφή όπως αυτές προκύπτουν κανονικοποιημένες στον παρακάτω πίνακα:

4η ιδιομορφή				
Κόμβος	t=14,59		SAP	
73	1	264134,62	1	0,0278
57	-0,29542	-78030,98	-0,29137	-0,0081
41	-0,82896	-218956,6	-0,82014	-0,0228
18	-0,44363	-117178,7	-0,43885	-0,0122

Πίνακας 8.11: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή

Όπως προκύπτει από τα παραπάνω κάνοντας χρήση της τελευταίας **τεχνητής διέγερσης A7** προκύπτουν ανάλογα συμπεράσματα με αυτά όταν έγινε η χρήση της **τεχνητών διεγέρσεων A1 και A5** δηλαδή ότι οι τιμές των ιδιομορφών που προκύπτουν κάνοντας χρήση της μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης είναι ικανοποιητικές. Όμως σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες όπου οι δύο πρώτες ιδιομορφές είχαν πολύ μεγάλη σύγκλιση και οι δύο επόμενες μικρότερη σύγκλιση, στην περίπτωση της **τεχνητής διέγερσης A7** προκύπτει ότι και στις τέσσερις εξεταζόμενες ιδιομορφές οι συγκλίσεις είναι εξαιρετικές σε τέτοιο βαθμό που τείνουν οι τιμές των αποκρίσεων των ιδιομορφών να ταυτιστούν.

8.3 Επίλυση καπνοδόχου με τη μέθοδο συνεχών συστημάτων

Από την δυναμική των κατασκευών είναι γνωστό ότι για συνεχή συστήματα για την περίπτωση της ελεύθερης ταλάντωσης η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή [Ξ4]:

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (8.1)$$

Όπου επιχειρείται μια λύση της μορφής:

$$u(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (8.2)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x και ως προς το χρόνο t προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(x)\ddot{q}(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x)q(t) \quad (8.3a, \beta)$$

Όπου οι τελείες συμβολίζουν την παραγωγή ως προς το χρόνο t και οι τόνοι την παραγωγή ως προς x . Επομένως $\dot{q}(t) = \partial q / \partial t$, $\ddot{q}(t) = \partial^2 q / \partial t^2$, και $\varphi''(x) = \partial^2 \varphi / \partial x^2$. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (8.1) προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$m(x)\varphi(x)\ddot{q}(t) + q(t)[EI(x)\varphi(x)']'' = 0 \quad (8.4)$$

Διαιρώντας με $m(x)\varphi(x)q(t)$, γίνεται

$$\frac{-\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{[EI(x)\varphi(x)']''}{m(x)\varphi(x)} \quad (8.5)$$

Το αριστερό μέρος της παραπάνω έκφρασης εξαρτάται μόνο από το χρόνο ενώ το δεξιό μέρος μόνο από τη μεταβλητή x . Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για όλες τις τιμές των x και t , οι δύο εκφράσεις πρέπει να είναι σταθερές. Έστω ω^2 η μερική διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, που η μια προσδιορίζει τη συνάρτηση του χρόνου $q(t)$ και η άλλη τη συνάρτηση του χώρου $\varphi(x)$:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (8.6)$$

$$[EI(x)\varphi''(x)]'' - \omega^2 m(x)\varphi(x) = 0 \quad (8.7)$$

Η () έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση που προσδιορίζει την ελεύθερη ταλάντωση ενός μονοβάθμιου συστήματος με ιδιοσυχνότητα ω . Για οποιεσδήποτε δεδομένες συναρτήσεις δυσκαμψίας $EI(x)$ και μάζας $m(x)$, αντιστοίχως υπάρχει ένα άπειρο σύνολο συχνοτήτων ω και σχετικών ιδιομορφών $\varphi(x)$ που ικανοποιούν το πρόβλημα ιδιοτιμών που καθορίζεται από την () και τις συνοριακές συνθήκες μιας δοκού. Ειδικά για την ομοιόμορφη δοκό όπου ισχύει $EI(x) = EI$ και $m(x) = m$ η (8.7) γίνεται

$$EI\varphi''''(x) - \omega^2 m\varphi(x) = 0 \quad (8.8)$$

$$\varphi''''(x) - \beta^4 \varphi(x) = 0 \quad (8.9)$$

Όπου

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (8.10)$$

Η γενική λύση της εξίσωσης () είναι της παρακάτω μορφής:

$$\varphi(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (8.11)$$

Όπως φαίνεται αυτή η λύση περιέχει τέσσερις άγνωστες σταθερές C_1, C_2, C_3, C_4 και την παράμετρο ιδιοτιμών β . Η εφαρμογή των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών για μια δοκό ενός ανοίγματος δύο σε κάθε άκρο της, θα παρέχει μια λύση για τη β και επομένως και για την ιδιοσυχνότητα ω από την σχέση (8.10) και για τρεις σταθερές συναρτήσεως της τέταρτης με αποτέλεσμα την ιδιομορφή της εξίσωσης (8.11). Η παραπάνω διαδικασία πρόκειται να εφαρμοστεί για την εξεταζόμενη περίπτωση της καπνοδόχου. Με βάση τα δεδομένα που παρουσιάστηκαν στην αρχή η καπνοδόχος μπορεί να θεωρηθεί ως ομοιόμορφη δοκός πρόβλος όποτε οι συνοριακές συνθήκες θα είναι οι αντίστοιχες. Στο πακτωμένο άκρο της καπνοδόχου για $x = 0$ η μετατόπιση και η στροφή θα είναι μηδέν. Συνεπώς θα έχουμε:

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_2 \quad (8.12)$$

$$u'(0, t) = 0 \Rightarrow \varphi'(0) = 0 \Rightarrow \beta(C_1 + C_3) = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 \quad (8.13)$$

Στο ελεύθερο άκρο $x = H$, της καπνοδόχου η καμπτική ροπή και η τέμνουσα είναι και οι δύο μηδέν. Οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned} M(H, t) = 0 &\Rightarrow EI\varphi''(H) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_1(\sin\beta H + \sinh\beta H) + C_2(\cos\beta H + \cosh\beta H) = 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} V(H, t) = 0 &\Rightarrow EI\varphi'''(H) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_1(\cos\beta H + \cosh\beta H) + C_2(-\sin\beta H + \sinh\beta H) = 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφτούν σε μητρωική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sin\beta H + \sinh\beta H & \cos\beta H + \cosh\beta H \\ \cos\beta H + \cosh\beta H & -\sin\beta H + \sinh\beta H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.16)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ικανοποιηθεί αν θεωρήσουμε τις σταθερές ίσες με μηδέν όμως αυτό θα έδινε μια τετριμμένη λύση μηδενικής κίνησης. Για να είναι κάποια από τις σταθερές ή και οι δύο μη μηδενικές πρέπει το μητρώο συντελεστών να είναι ιδιάζον δηλαδή η ορίζουσα του να είναι ίση με μηδέν. Όποτε προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση ιδιοσυχνότητων:

$$1 + \cos\beta H \cosh\beta H = 0 \quad (8.17)$$

Επιλύοντας αριθμητικά τη παραπάνω εξίσωση προκύπτουν οι τιμές $\beta_n H$:

$$\beta_1 H = 1,8751, \quad \beta_2 H = 4,6941, \quad \beta_3 H = 7,8548, \quad \beta_4 H = 10,996$$

Για $n = 1, 2, 3, 4$. Για $n > 4$, $\beta_n H = (2n - 1)\pi/2$. Η εξίσωση δίνει ακολούθως τις τέσσερις πρώτες ιδιοσυχνότητες:

$$\omega_1 = \frac{3,516}{H^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{22,03}{H^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_3 = \frac{61,70}{H^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \omega_4 = \frac{120,9}{H^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

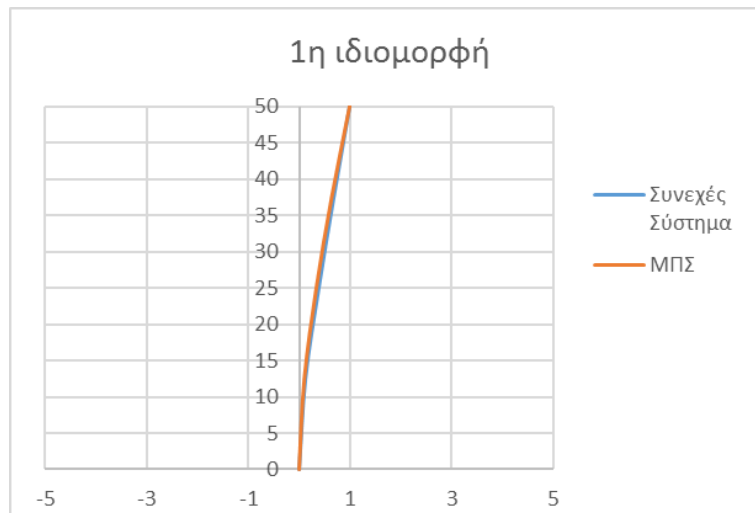
Αντίστοιχη σε κάθε του $\beta_n H$, η ιδιομορφή ταλάντωσης είναι:

$$\varphi_n(x) = C_1 \left[\cosh\beta_n x - \cos\beta_n x - \frac{\cosh\beta_n H + \cos\beta_n H}{\sinh\beta_n H + \sin\beta_n H} (\sinh\beta_n x + \sin\beta_n x) \right] \quad (8.18)$$

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζονται οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές τις καπνοδόχου. Αρχικά υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας που είναι $I = \pi (R^4 - r^4)/4 = 15,405 \text{ m}^4$, τη μάζα της καπνοδόχου που είναι ίση με $M = 2771,59 \text{ tn}$, τη δυσκαμψία $EI = 3235073885 \text{ kNm}$. Στη συνέχεια υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες $\omega_1 = 1,519, \omega_2 = 9,520, \omega_3 = 26,6638, \omega_4 = 52,2473$. Τέλος οι υπολογίζονται αριθμητικά οι ιδιομορφές όπως προκύπτουν οι τιμές τους στους παρακάτω πίνακες με χρήση της παραπάνω σχέσης και κανονικοποιώντας τις σχεδιάζονται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήματα:

1η ιδιομορφή			
Συνεχές σύστημα		SAP	
1	0,701068	1	0,0059
0,684561	0,479924	0,644068	0,0038
0,387295	0,27152	0,338983	0,002
0,124661	0,087396	0,101695	0,0006

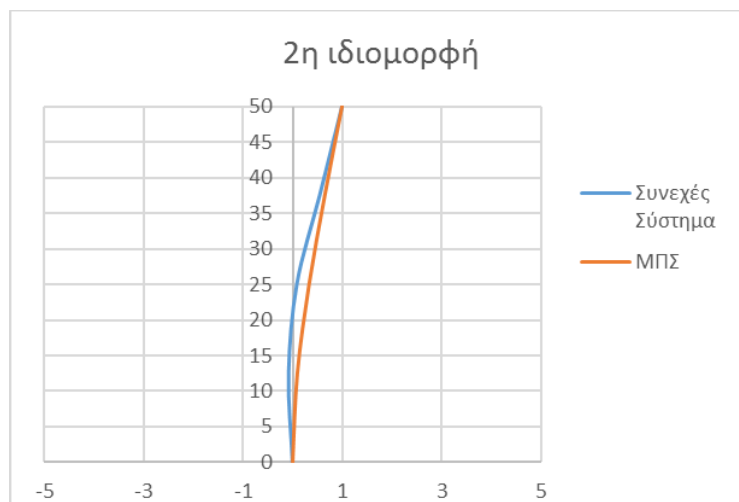
Πίνακας 8.12: Υπολογισμός αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή με θεώρηση συνεχούς συστήματος



Σχήμα 8.22: Απεικόνιση της προκύπτουσας πρώτης ιδιομορφής για θεώρηση συνεχούς συστήματος και πεπερασμένων στοιχείων

2η ιδιομορφή			
Συνεχές σύστημα		SAP	
1	-3,0139	1	0,0438
0,549016	-1,65468	0,650685	0,0285
0,089187	-0,2688	0,33105	0,0145
-0,07493	0,225828	0,093607	0,0041

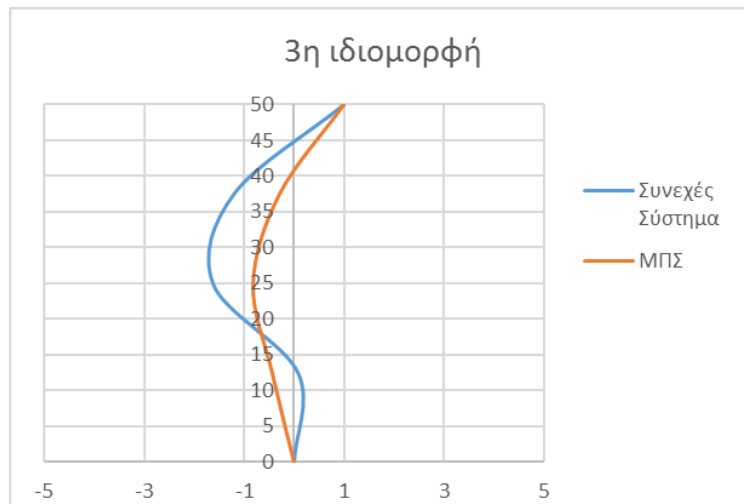
Πίνακας 8.13: Υπολογισμός αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή με θεώρηση συνεχούς συστήματος



Σχήμα 8.23: Απεικόνιση της προκύπτουσας δεύτερης ιδιομορφής για θεώρηση συνεχούς συστήματος και πεπερασμένων στοιχείων

3η ιδιομορφή			
Συνεχές σύστημα		SAP	
1	1,011581	1	0,0245
-1,21241	-1,22645	-0,2898	-0,0071
-1,63621	-1,65516	-0,82041	-0,0201
0,077548	0,078446	-0,43673	-0,0107

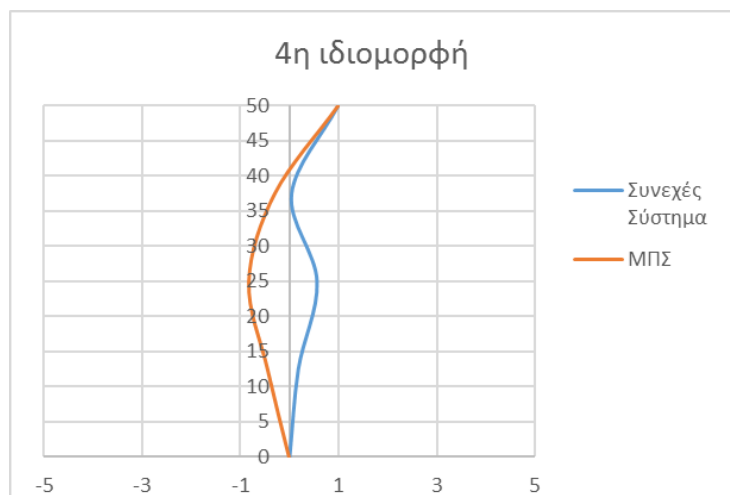
Πίνακας 8.14: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή με θεώρηση συνεχούς συστήματος



Σχήμα 8.24: Απεικόνιση της προκύπτουσας τρίτης ιδιομορφής για θεώρηση συνεχούς συστήματος και πεπερασμένων στοιχείων

4η ιδιομορφή			
Συνεχές σύστημα		SAP	
1	-2,97641	1	0,0278
0,038935	-0,11589	-0,29137	-0,0081
0,565412	-1,6829	-0,82014	-0,0228
0,177928	-0,52959	-0,43885	-0,0122

Πίνακας 8.15: Υπολογισμός αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή με θεώρηση συνεχούς συστήματος



Σχήμα 8.25: Απεικόνιση της προκύπτουσας τέταρτης ιδιομορφής για θεώρηση συνεχούς συστήματος και πεπερασμένων στοιχείων

8.4 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα και σύγκριση μεθόδων

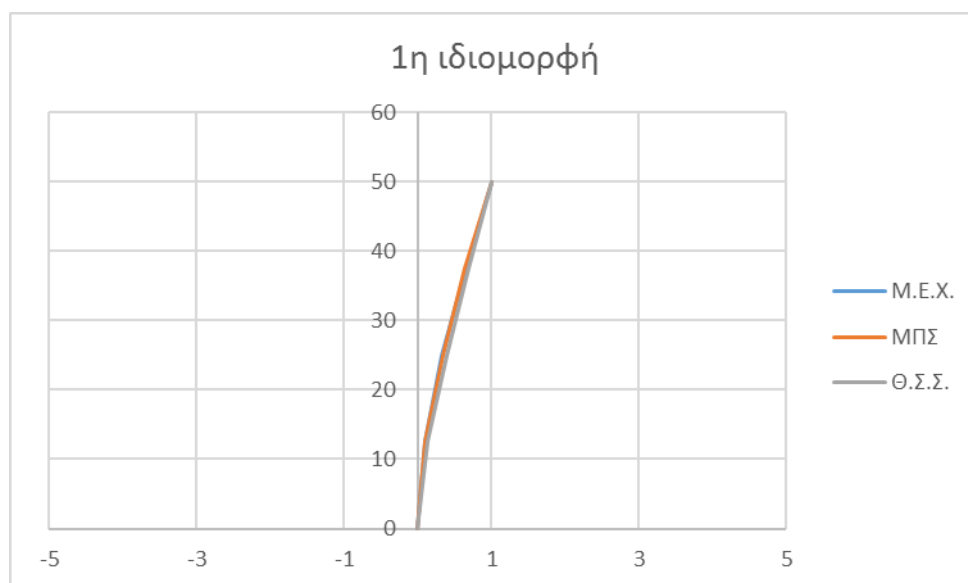
Για την εξεταζόμενη καπνοδόχο χρησιμοποιήθηκαν τρεις μέθοδοι και τρεις τεχνητές διεγέρσεις για τον υπολογισμό των ιδιομορφών ήτοι:

- Η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων** κάνοντας χρήση του λογισμικού **SAP2000** όπου δημιουργήθηκε το προσομοίωμα και υπολογίστηκαν οι τέσσερις πρώτες ιδιομορφές κάνοντας **ιδιομορφική ανάλυση (Modal Analysis)**.
- Η **μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** όπου συνδυάζοντας τεχνικές **δυναμικής των κατασκευών** και **θεωρίας επεξεργασίας σημάτων** προσδιορίστηκαν οι τέσσερις πρώτες μορφές της κατασκευής.
- Τέλος, χρησιμοποιήθηκε η **θεώρηση των συνεχών συστημάτων** όπου θεωρώντας τη καπνοδόχο ως ομοιόμορφη πρόβολο υπολογίστηκαν οι ζητούμενες ιδιομορφές επιλύοντας αριθμητικά τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Για κάθε τεχνητή διεγέρση συγκεντρώθηκαν σε πίνακα οι τιμές των αποκρίσεων των ιδιομορφών για κάθε χρησιμοποιούμενη μέθοδο και απεικονίζονται γραφικά. Ξεκινώντας από τη **τεχνητή σεισμική διεγέρση A1** τα τελικά αποτελέσματα συνοψίζονται στους παρακάτω πίνακες και στα παρακάτω σχήματα για τις τέσσερις πρώτες ιδιομορφές.

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	-2175907	1	0,0059	1	0,701068
57	0,651816	-1418292	0,644068	0,0038	0,684561	0,479924
41	0,332682	-723886	0,338983	0,002	0,387295	0,27152
18	0,095151	-207039	0,101695	0,0006	0,124661	0,087396

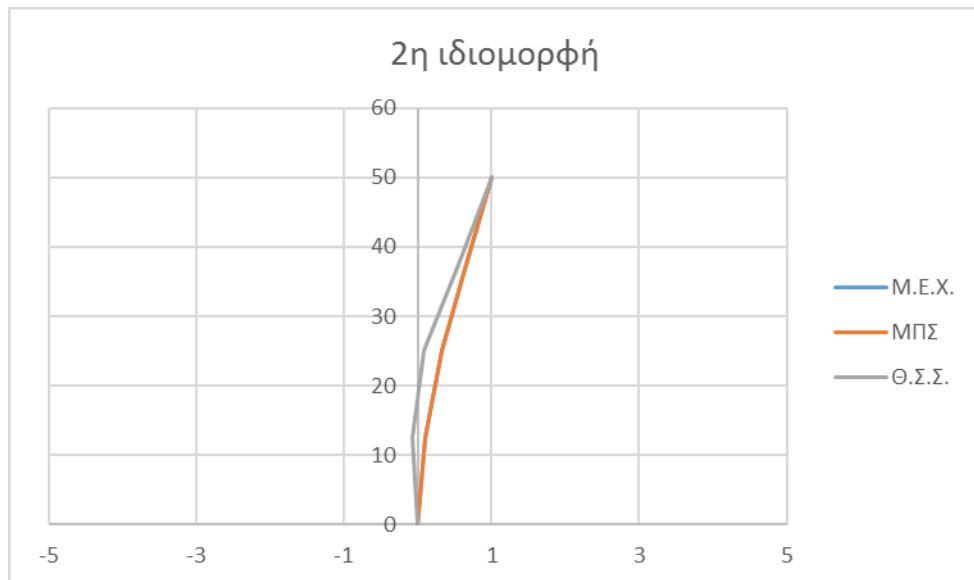
Πίνακας 8.16: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.26: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την πρώτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	3254611	1	0,0438	1	-3,0139
57	0,651291	2119700	0,650685	0,0285	0,549016	-1,65468
41	0,331993	1080508	0,33105	0,0145	0,089187	-0,2688
18	0,094554	307737,6	0,093607	0,0041	-0,07493	0,225828

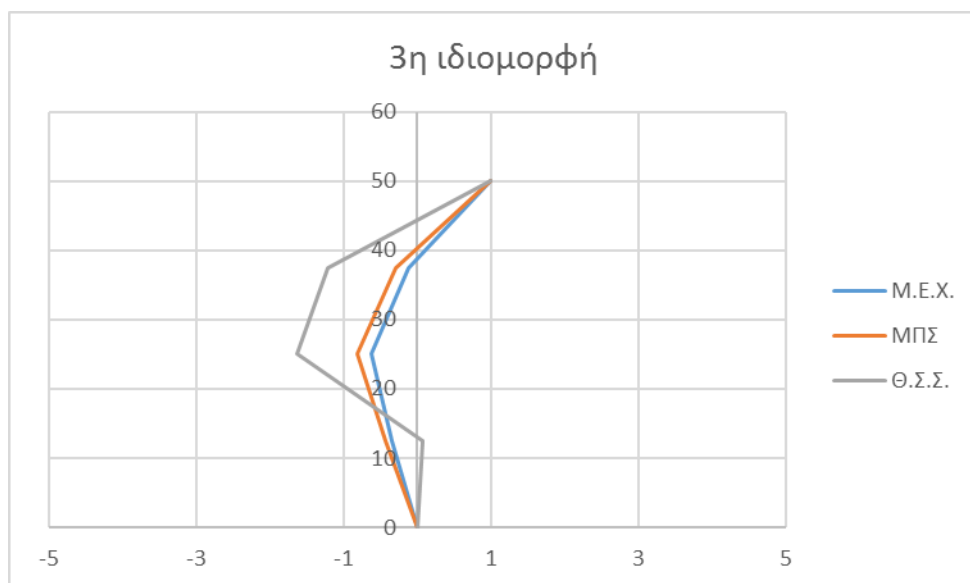
Πίνακας 8.17: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.27: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την δεύτερη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	211360,3	1	0,0245	1	1,011581
57	-0,11837	-25019,5	-0,2898	-0,0071	-1,21241	-1,22645
41	-0,61709	-130427	-0,82041	-0,0201	-1,63621	-1,65516
18	-0,34939	-73847,5	-0,43673	-0,0107	0,077548	0,078446

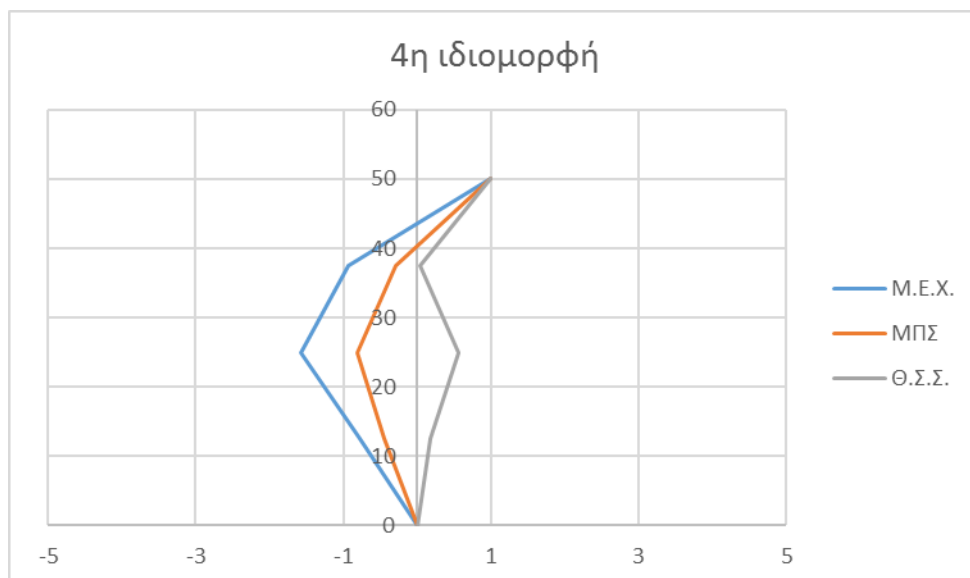
Πίνακας 8.18: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.28: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την Τρίτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	-133160	1	0,0278	1	-2,97641
57	-0,93538	124554,9	-0,29137	-0,0081	0,038935	-0,11589
41	-1,58373	210889,3	-0,82014	-0,0228	0,565412	-1,6829
18	-0,77164	102751,3	-0,43885	-0,0122	0,177928	-0,52959

Πίνακας 8.19: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

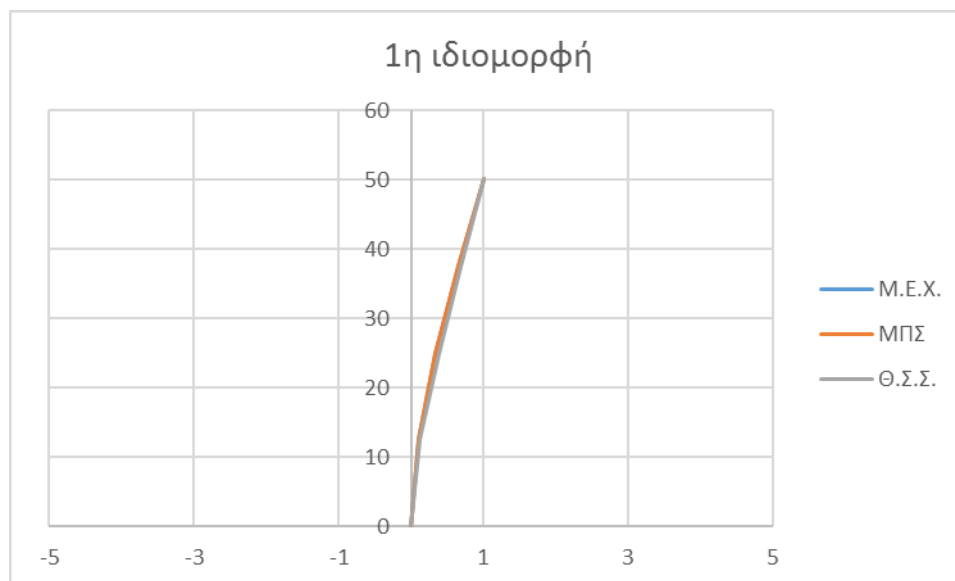


Σχήμα 8.29: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την τέταρτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Στη συνέχεια συνοψίζονται τα τελικά αποτελέσματα για τη **τεχνητή διέγερση A5** που χρησιμοποιήθηκε στην υπό μελέτη καπνόδοχο όπως αυτά φαίνονται στους παρακάτω πίνακες και στα παρακάτω σχήματα:

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	3357220	1	0,0059	1	0,701068
57	0,651115	2185938	0,644068	0,0038	0,684561	0,479924
41	0,331748	1113750	0,338983	0,002	0,387295	0,27152
18	0,094412	316960,2	0,101695	0,0006	0,124661	0,087396

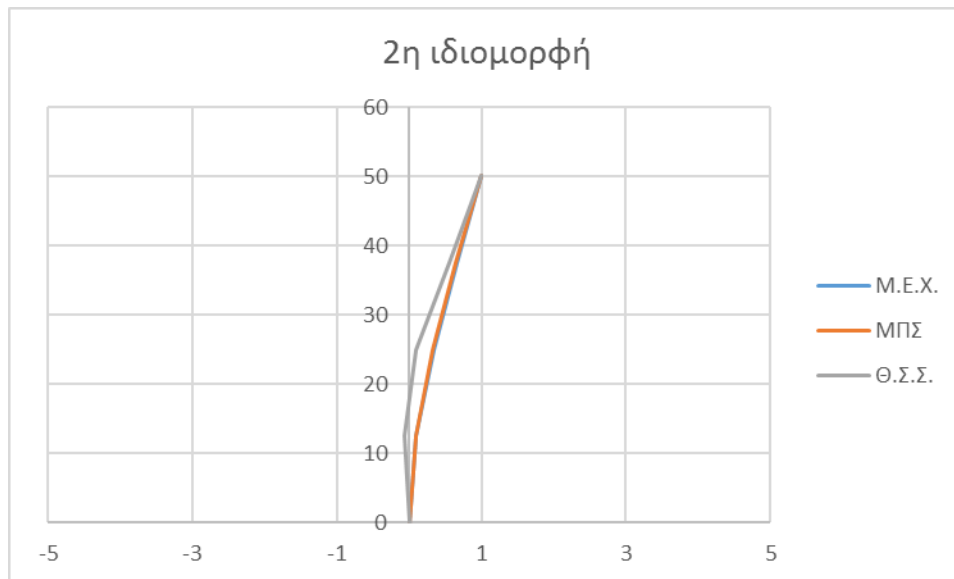
Πίνακας 8.20: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.30: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την πρώτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	3149158	1	0,0438	1	-3,0139
57	0,651717	2052359	0,650685	0,0285	0,549016	-1,65468
41	0,332554	1047267	0,33105	0,0145	0,089187	-0,2688
18	0,094839	298663,2	0,093607	0,0041	-0,07493	0,225828

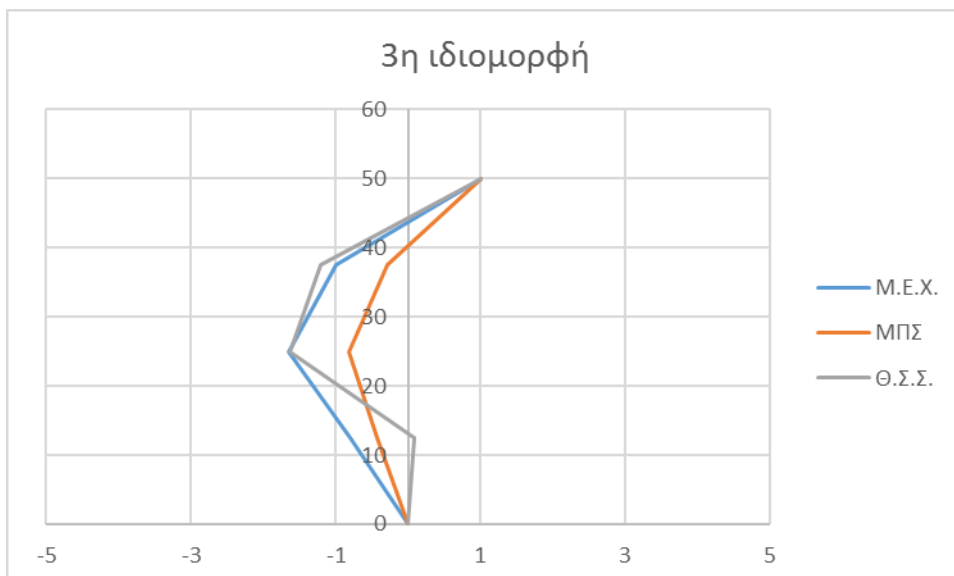
Πίνακας 8.21: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.31: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την δεύτερη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	-137347	1	0,0245	1	1,011581
57	-0,99783	137049,9	-0,2898	-0,0071	-1,21241	-1,22645
41	-1,65716	227607	-0,82041	-0,0201	-1,63621	-1,65516
18	-0,80363	110377,1	-0,43673	-0,0107	0,077548	0,078446

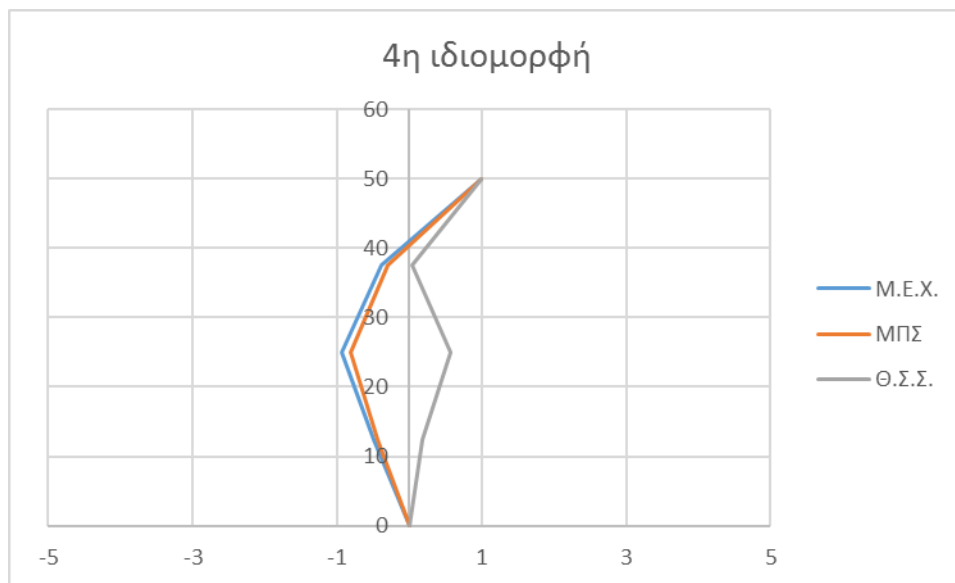
Πίνακας 8.22: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.32: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την τρίτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	220161,5	1	0,0278	1	-2,97641
57	-0,38825	-85477,5	-0,29137	-0,0081	0,038935	-0,11589
41	-0,9379	-206490	-0,82014	-0,0228	0,565412	-1,6829
18	-0,49055	-108001	-0,43885	-0,0122	0,177928	-0,52959

Πίνακας 8.23: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

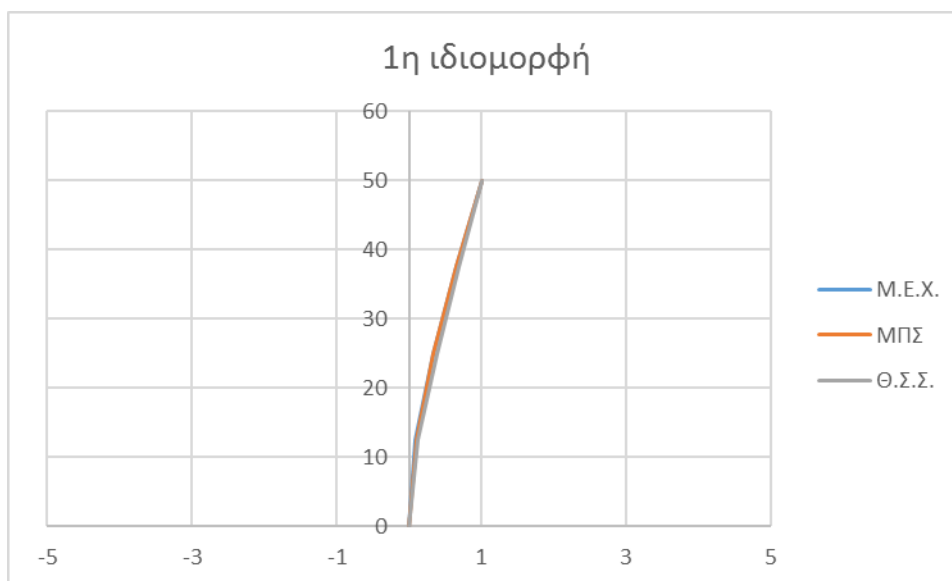


Σχήμα 8.33: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την τέταρτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Τέλος, συνοψίζονται τα τελικά αποτελέσματα για τη **τεχνητή διέγερση Α7** που χρησιμοποιήθηκε στην υπό μελέτη καπνοδόχο όπως αυτά φαίνονται στους παρακάτω πίνακες και στα παρακάτω σχήματα:

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	1593936	1	0,0059	1	0,701068
57	0,65054	1036919	0,644068	0,0038	0,684561	0,479924
41	0,330947	527508,4	0,338983	0,002	0,387295	0,27152
18	0,092409	147293,9	0,101695	0,0006	0,124661	0,087396

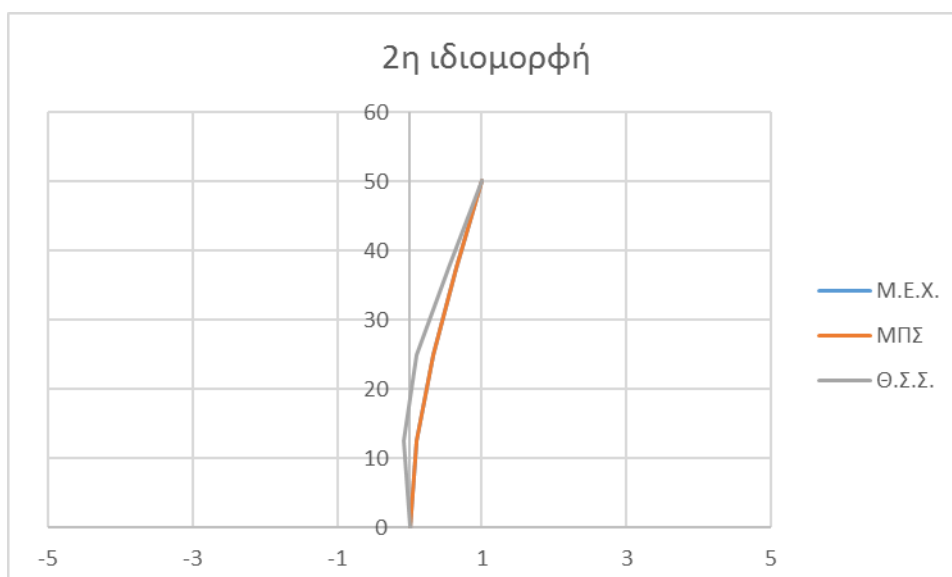
Πίνακας 8.24: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την πρώτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.34: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την πρώτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	-2623311	1	0,0438	1	-3,0139
57	0,651176	-1708238	0,650685	0,0285	0,549016	-1,65468
41	0,331813	-870449	0,33105	0,0145	0,089187	-0,2688
18	0,09244	-242498	0,093607	0,0041	-0,07493	0,225828

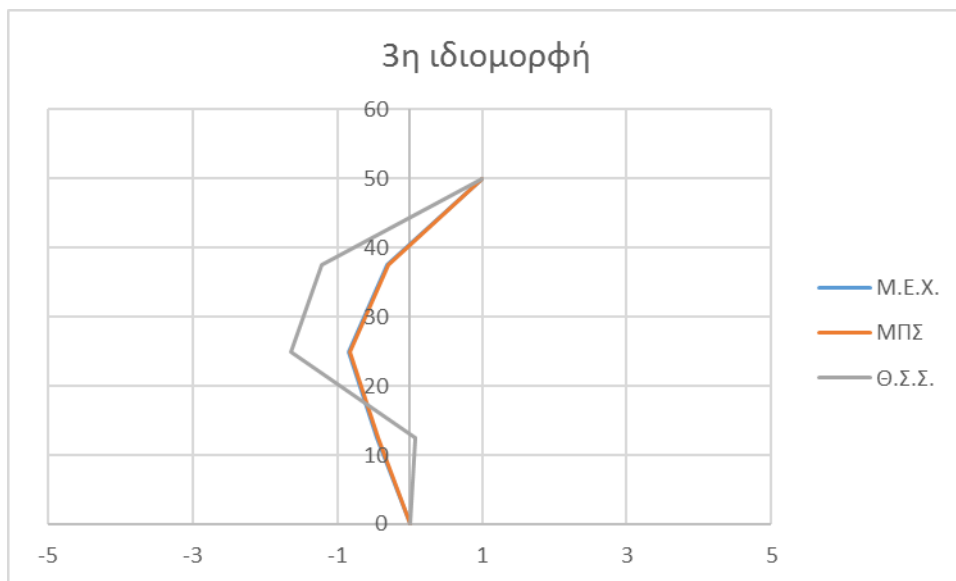
Πίνακας 8.25: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την δεύτερη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.35: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την δεύτερη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	188579,8	1	0,0245	1	1,011581
57	-0,30445	-57412,7	-0,2898	-0,0071	-1,21241	-1,22645
41	-0,84134	-158660	-0,82041	-0,0201	-1,63621	-1,65516
18	-0,45026	-84910,2	-0,43673	-0,0107	0,077548	0,078446

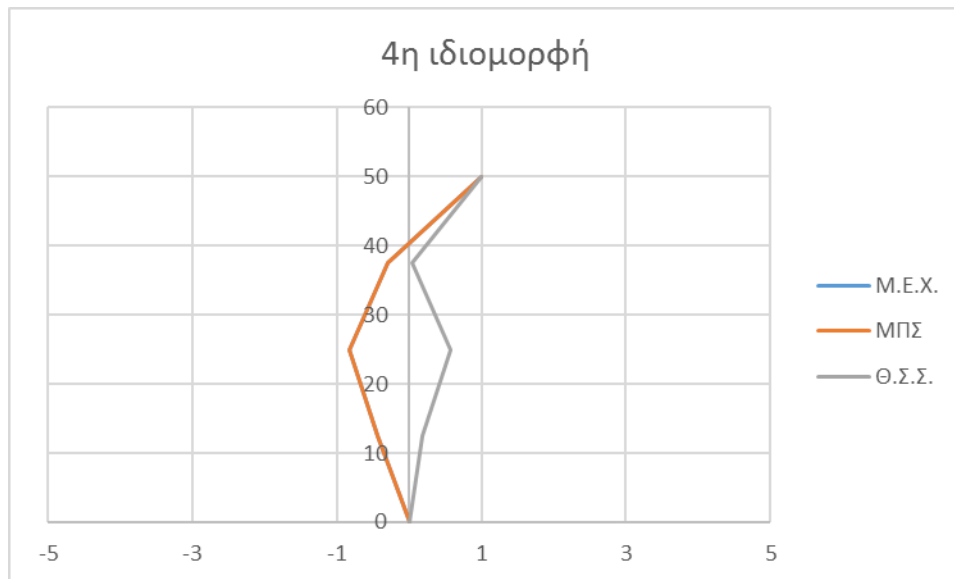
Πίνακας 8.26: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την τρίτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.36: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την τρίτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Κόμβος	Μέθοδος Χρονοϊστοριών Επιτάχυνσης		Πεπερασμένα Στοιχεία		Θεώρηση Συνεχών Συστημάτων	
73	1	264134,6	1	0,0278	1	-2,97641
57	-0,29542	-78031	-0,29137	-0,0081	0,038935	-0,11589
41	-0,82896	-218957	-0,82014	-0,0228	0,565412	-1,6829
18	-0,44363	-117179	-0,43885	-0,0122	0,177928	-0,52959

Πίνακας 8.27: Συγκεντρωτικά αποτελέσματα αποκρίσεων για την τέταρτη ιδιομορφή της καπνοδόχου



Σχήμα 8.37: Σύγκριση των αποκρίσεων που προκύπτουν από τις χρησιμοποιηθέντες μεθόδους για την τέταρτη ιδιομορφή της καπνοδόχου

Με την παραπάνω προσθήκη πινάκων και διαγραμμάτων ολοκληρώνεται η σύνοψη των αποτελεσμάτων που προέκυψαν και από τις τρεις μεθόδους. Πρόκύπτει κατ'αρχάς ότι η **μέθοδος των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** μπορεί να χρησιμοποιηθεί επιτυχώς σε κελυφωτές κατασκευές όπως είναι η μεταλλική καπνοδόχος που εξετάστηκε στο παρόν κεφάλαιο. Και οι τρεις μέθοδοι για όλες τις τεχνητές διεγέρσεις ταυτίζονται για την πρώτη ιδιομορφή ενώ στη δεύτερη ιδιομορφή η **μέθοδος της θεώρησης συνεχών συστημάτων** τείνει να αποκλείει με πολύ μικρή απόκλιση από τις άλλες δύο μεθόδους. Για την τρίτη ιδιομορφή στις δύο πρώτες τεχνητές διεγέρσεις ήτοι **A1** και **A5** η **μέθοδος των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** και η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων** παρουσιάζουν μια μικρή απόκλιση μεταξύ τους ενώ για την τρίτη **τεχνητή διεγέρση A7** η σύγκλιση που παρουσιάζουν αυτές οι δύο μέθοδοι είναι η ίδια όπως και στις δύο πρώτες ιδιομορφές. Αντιθέτως η **θεώρηση συνεχών συστημάτων** για την τρίτη ιδιομορφή εμφανίζει αποκλίσεις σχετικά με τις άλλες δύο μεθόδους και για τις τρεις τεχνητές διεγέρσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή. Τέλος, ολοκληρώνοντας την αξιολόγηση των μεθόδων για την τέταρτη ιδιοπερίοδο και στις τρεις τεχνητές διεγέρσεις η **μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης** και η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων** εμφανίζουν μικρές αποκλίσεις αλλά τείνουν να συμβαδίζουν μεταξύ τους σε αντίθεση με τη **θεώρηση συνεχών συστημάτων** όπου παρατηρείται μεγαλύτερη απόκλιση της σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διερευνήθηκε η εφαρμογή της μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης για την εύρεση των ιδιομορφών διαφορετικών κατασκευών πολιτικού μηχανικού στο επίπεδο και στο χώρο. Εξετάστηκε ένα επίπεδο τετραώροφο μεταλλικό πλαίσιο, ένα δώροφο μεταλλικό κτίριο στο χώρο αλλά και μια ειδική κατασκευή αυτή της μεταλλικής καπνοδόχου. Οι φορείς που εξετάστηκαν μοντελοποιήθηκαν και επιλύθηκαν στον κώδικα πεπερασμένων στοιχείων SAP2000 όπου εκτελέστηκαν γραμμικές δυναμικές αναλύσεις χρονοϊστορίας κάνοντας χρήση τριών τεχνητών διεγέρσεων. Ακολουθώντας την πορεία της μεθόδου των χρονοϊστοριών επιτάχυνσης που αναλύθηκε και περιγράφηκε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 5 εντοπίσαμε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές των φορέων που μελετήθηκαν στην παρούσα διπλωματική επεξεργασία. Σαν γενικό συμπέρασμα προκύπτει ότι η μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία και σε μεταλλικές κατασκευές όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα των αναλύσεων. Για κάθε έναν φορέα προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

- Για το επίπεδο μεταλλικό πλαίσιο και για τις τρεις τεχνητές διεγέρσεις που εφαρμόστηκαν προκύπτει ότι οι πρώτες ιδιομορφές τείνουν να ταυτίζονται μεταξύ τους ενώ στις επόμενες ιδιομορφές παρατηρείται μικρή απόκλιση μεταξύ τους αλλά ίδιας τάξης μεγέθους καθώς δεν παρατηρούνται πολύ μεγάλες διαφορές μεταξύ τους.
- Για το χωρικό μεταλλικό πλαίσιο τα συμπεράσματα είναι ανάλογα με τον επίπεδο φορέα που εξετάστηκε δηλαδή παρατηρείται μια ταύτιση στις πρώτες ιδιομορφές και στις τρεις διεγέρσεις όμως οι αποκλίσεις στις επόμενες ιδιομορφές τείνουν να είναι πιο έντονες αλλά όπως και στη προηγούμενη περίπτωση να είναι ίδιας τάξης μεγέθους.
- Η μεταλλική καπνοδόχος εξεταστήκε με χρήση τριών μεθόδων, των πεπερασμένων στοιχείων, της μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης αλλά επιπλέον κάνοντας χρήση και της θεώρησης συνεχών συστημάτων. Καταρχάς προκύπτει ότι η μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς σε ειδικές κελυφωτές κατασκευές όπως η υπό μελέτη καπνοδόχος. Για τις τεχνητές διεγέρσεις οι δύο πρώτες ιδιομορφές λαμβάνουν πολύ κοντινές τιμές μεταξύ τους στις επόμενες δύο ιδιομορφές οι τιμές τους τείνουν να διαφοροποιούνται με την πιο έντονη διαφοροποίηση να παρατηρείται στη μέθοδο συνεχών συστημάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10. ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Το ενδιαφέρον αντικείμενο της αναγνώρισης συστημάτων προσφέρει ένα μεγάλο εύρος πλήθους έρευνας στο μέλλον. Αυτό προκύπτει και από την πληθώρα μεθόδων που χρησιμοποιούνται ως τώρα για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων με αρκετές από αυτές να προέρχονται από πεδία που είναι εντελώς διαφορετικά από το υπόβαθρο που απαιτείται και αποκτάται στην επιστήμη του πολιτικού μηχανικού. Στο μέλλον η έρευνα θα μπορούσε να επικεντρωθεί στα εξής:

- Η εφαρμογή της μεθόδου χρονοϊστοριών επιτάχυνσης μέχρι στιγμής έχει χρησιμοποιηθεί για γραμμικούς – ελαστικούς φορείς χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν η μη γραμμική – πλαστική συμπεριφορά των κατασκευών [Ε9]. Η υιοθέτηση μη γραμμικής – πλαστικής συμπεριφοράς στην προσομοίωση των κατασκευών που θα εξετάζονται από τη μέθοδο είναι ένα πεδίο μελέτης.
- Επίσης η μέθοδος χρονοϊστοριών επιτάχυνσης μέχρι στιγμής έχει χρησιμοποιηθεί σε πλαισιωτές κτιριακές κατασκευές. Η χρήση της μεθόδου σε κτιριακές κατασκευές από φέρουσα τοιχοποιία που είναι ειδικού τύπου κατασκευές που προσομοιώνονται με επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία ή και διακριτά στοιχεία (αναλόγως την περίπτωση) θα μπορούσε επίσης να είναι μια περίπτωση έρευνας.
- Στη παρούσα διπλωματική μελετήθηκε επιτυχώς μια μεταλλική καπνοδόχος. Πέρα από τη μελέτη παρόμοιων κελυφωτών κατασκευών ιδίου ή και διαφορετικού υλικού θα μπορούσε να επεκταθεί η χρήση της μεθόδου και σε άλλες ειδικές κατασκευές όπως για παράδειγμα, υδατόπυργοι, σιλό, πύργοι τηλεπικοινωνίας, ανεμογεννήτριες κ.λπ.
- Πιθανή επέκταση της μεθόδου σε πολυεπίπεδες υπόγειες κατασκευές όπως π.χ σταθμοί μετρό, υπόγειες διαβάσεις κ.λπ θα μπορούσε επίσης να διερευνηθεί.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

A.1 Εισαγωγή

Η **μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων – ΜΠΣ (Finite Element Method – FEM)** είναι μια αριθμητική μέθοδος για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων σε προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από θέματα μαθηματικής μοντελοποίησης και θέματα μηχανικού [Ξ4].

Για την επίλυση ενός προβλήματος η ΜΠΣ υποδιαιρεί ένα σύστημα σε μικρότερα και απλούστερα μέρη τα οποία καλούνται πεπερασμένα στοιχεία. Η διαδικασία αυτή καλείται **διακριτοποίηση** του συστήματος που γίνεται με την κατασκευή ενός κανάβου του αντικειμένου: το αριθμητικό πεδίο για την λύση το οποίο έχει ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων. Η προσομοίωση ενός προβλήματος συννοριακών τιμών με την ΜΠΣ οδηγεί τελικά σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο να προσεγγίζει την άγνωστη συνάρτηση στο πεδίο. Οι απλές αυτές εξισώσεις που μοντελοποιούν αυτά τα πεπερασμένα στοιχεία συγκεντρώνονται σε ένα μεγαλύτερο σύστημα εξισώσεων που προσομοιώνει ολόκληρο το πρόβλημα. Η ΜΠΣ τότε προσεγγίζει τη λύση του προβλήματος ελαχιστοποιώντας τη συνάρτηση σφάλματος με τεχνικές που πηγάζουν από το **λογισμό των μεταβολών**.

Η ΜΠΣ είναι μια εξέλιξη των μητρωϊκών μεθόδων αριθμητικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί μια γενίκευση των μεθόδων που αναπτύχθηκαν από τους Ritz, Galerkin, Argyris και άλλων []. Για αυτό το λόγο αποτελεί μια από τις πλέον σημαντικότερες εξελίξεις στην εφαρμοσμένη και υπολογιστική μηχανική καθώς τυγχάνει εφαρμογής σε πληθώρα προβλημάτων όπως π.χ. στη στατική και δυναμική ανάλυση κατασκευών, στη ρευστομηχανική, στη μεταφορά θερμότητας κ.λπ.

A.2 Εφαρμογή της ΜΠΣ στη δυναμική ανάλυση κατασκευών

Η διατύπωση των εξισώσεων για μια κατασκευή με τη ΜΠΣ μπορεί να συνοψισθεί ως μια αλληλουχία των ακόλουθων βημάτων σύμφωνα με [Ξ4]:

- Προσομοιώνουμε την κατασκευή ως μια σύνθεση πεπερασμένων στοιχείων που συνδέονται μεταξύ τους μόνο στους κόμβους. Καθορίζουμε τους βαθμούς ελευθερίας έστω u σε αυτούς τους κόμβους.
- Για κάθε πεπερασμένο στοιχείο σχηματίζουμε το μητρώο δυσκαμψίας των στοιχείων k_e , το μητρώο μάζας των στοιχείων m_e , και το διάνυσμα των (επιβαλλόμενων) δυνάμεων των στοιχείων $p_e(t)$ σε σχέση με το βαθμό ελευθερίας για το στοιχείο. Για κάθε στοιχείο η σχέση δύναμης-μετατόπισης και η σχέση αδρανειακής δύναμης-επιτάχυνσης είναι:

$$(f_s)_e = k_e u_e \quad (f_I)_e = m_e \ddot{u}_e \quad (A.1)$$

Στη κατάστρωση με πεπερασμένα στοιχεία οι σχέσεις αυτές προκύπτουν υποθέτοντας το πεδίο μετατοπίσεων για το στοιχείο, εκφρασμένο συναρτήσει επικόμβιων μετατοπίσεων.

- Σχηματίζουμε το μητρώο μετασχηματισμού a_e που συνδέει τις μετατοπίσεις u_e και τις δυνάμεις p_e για το στοιχείο με τις μετατοπίσεις u και τις δυνάμεις p για το μόρφωμα των πεπερασμένων στοιχείων:

$$u_e = a_e u \quad p(t) = a_e^T p_e(t) \quad (A.2)$$

Όπου a_e είναι ένα μητρώο Boole που αποτελείται από μηδενικά και μονάδες. Απλά τοποθετεί τα στοιχεία των k_e , m_e και p_e στις σωστές θέσεις μέσα στο μητρώο δυσκαμψίας και μάζας αντίστοιχα καθώς επίσης και στο διάνυσμα εφαρμοζόμενων δυνάμεων στο μόρφωμα των πεπερασμένων στοιχείων. Επομένως δεν είναι αναγκαίο να εκτελεστούν οι μετασχηματισμοί: $\hat{k}_e = a_e^T k_e a_e$, $\hat{m}_e = a_e^T m_e a_e$ ή $\hat{p}_e(t) = a_e^T p_e$ για να μετασχηματισθούν τα μητρώα δυσκαμψίας και μάζας των στοιχείων και το διάνυσμα των εφαρμοζόμενων δυνάμεων ως προς τις επικόμβιες μετατοπίσεις του μορφώματος.

- Μορφώνουμε τα μητρώα των στοιχείων για να προσδιορίσουμε τα μητρώα δυσκαμψίας και μάζας και το διάνυσμα των εφαρμοζόμενων δυνάμεων για το μόρφωμα των πεπερασμένων στοιχείων:

$$k = A_{e=1}^{N_e} k_e \quad m = A_{e=1}^{N_e} m_e \quad p(t) = A_{e=1}^{N_e} p_e(t) \quad (A.3)$$

Ο τελεστής A συμβολίζει τη διαδικασία άμεσης σύνθεσης για σύνθεση σύμφωνα με το μητρώο a_e , του μητρώου μάζας του στοιχείου, του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου, και του διανύσματος εφαρμοζόμενων δυνάμεων για το στοιχείο για κάθε στοιχείο $e = 1$ έως N_e , όπου το N_e είναι ο αριθμός των στοιχείων στο μητρώο δυσκαμψίας του μορφώματος, στο μητρώο μάζας του μορφώματος και στο διάνυσμα των δυνάμεων του μορφώματος αντίστοιχα.

- Καταστρώνονται οι εξισώσεις για το μόρφωμα των πεπερασμένων στοιχείων:

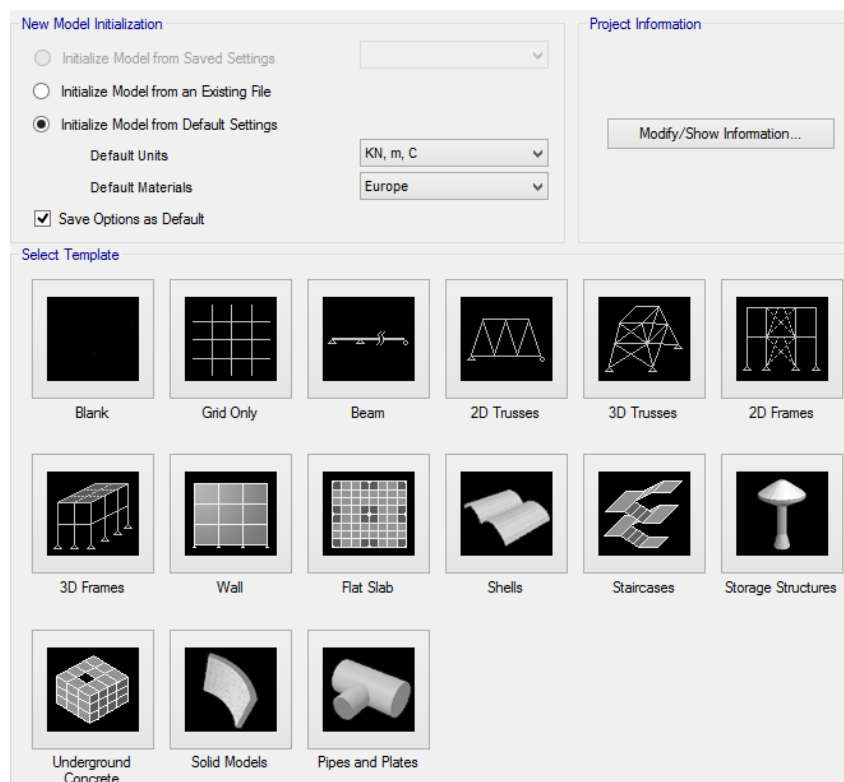
$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \quad (A.4)$$

Όπου το μητρώο απόσβεσης c καθορίζεται με τις μεθόδους που πηγάζουν από την δυναμική των κατασκευών όπως αυτές περιγράφονται σύμφωνα με [Ξ4].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΒΑΣΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΧΡΗΣΗΣ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ SAP2000

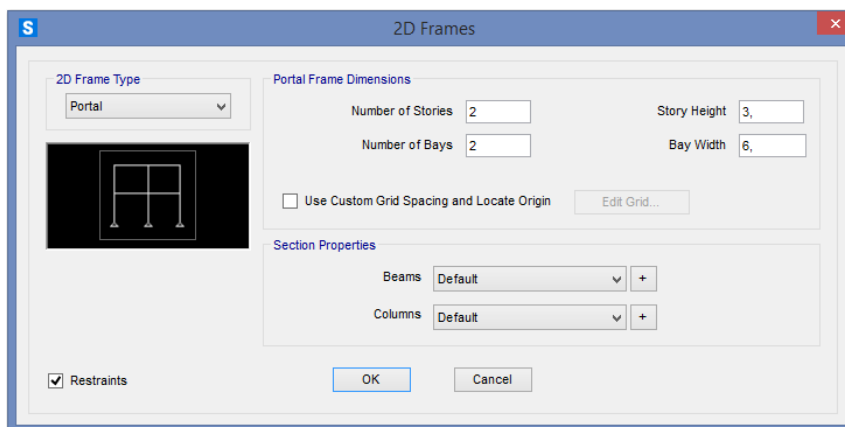
Β.1 Εισαγωγή βασικών στοιχείων φορέα

Το συγκεκριμένο λογισμικό έχει έτοιμες επιλογές φορέων που προσφέρει για να αναλύσει και να σχεδιάσει κάποιος μια κατασκευή όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



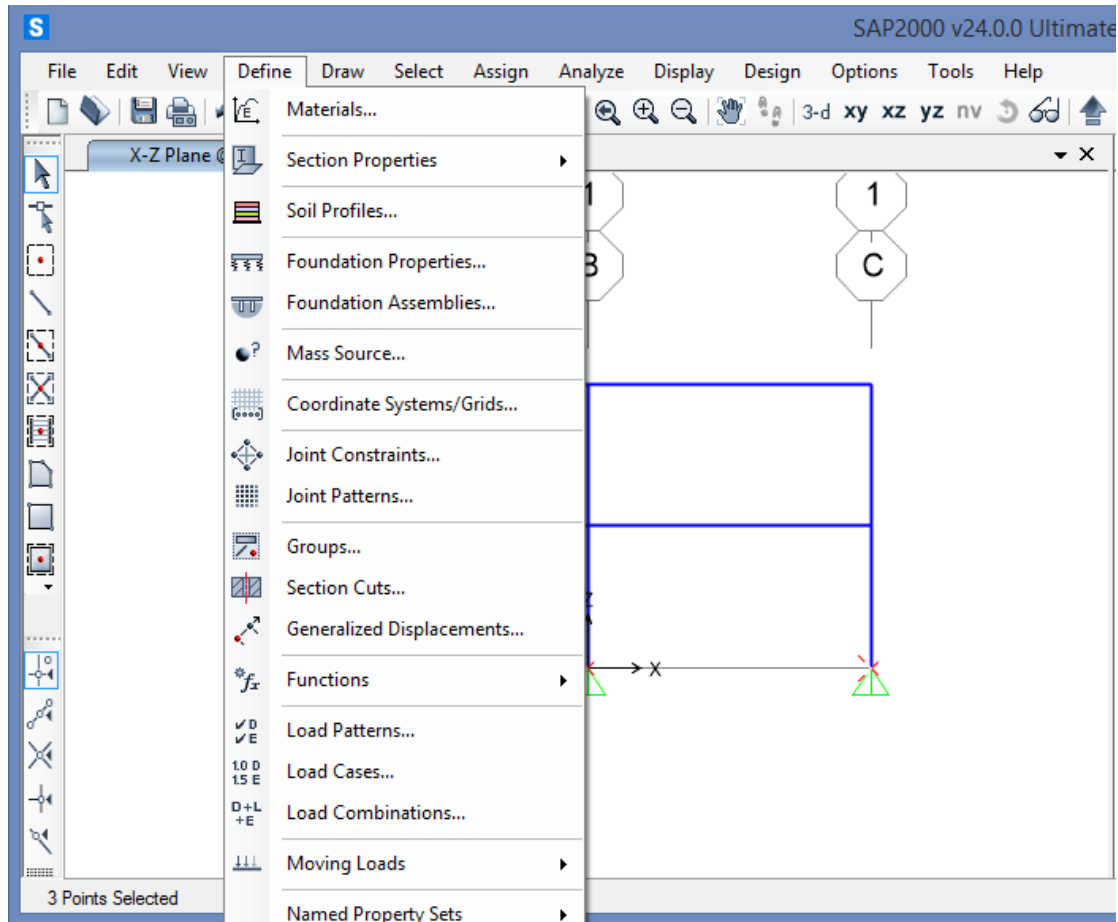
Εικόνα Β.5: Απεικόνιση προσφερόμενων επιλογών του SAP2000

Για την παρούσα διπλωματική εργασία επιλέχθηκαν οι επιλογές **2D Frames** για το επίπεδο πλαίσιο στο Κεφάλαιο 6, **3D Frames** για το χωρικό πλαίσιο στο Κεφάλαιο 7, **Shells** για την καπνοδόχο στο Κεφάλαιο 8. Αφού επιλέξουμετο φορέα που θέλουμε να φτιάξουμε το λογισμικό μας ζητάει να εισάγουμε κάποια γενικά χαρακτηριστικά. Για παράδειγμα για την επιλογή ενός φορέα στο επίπεδο **2D Frames** ζητείται να εισαχθούν τα παρακάτω δεδομένα:



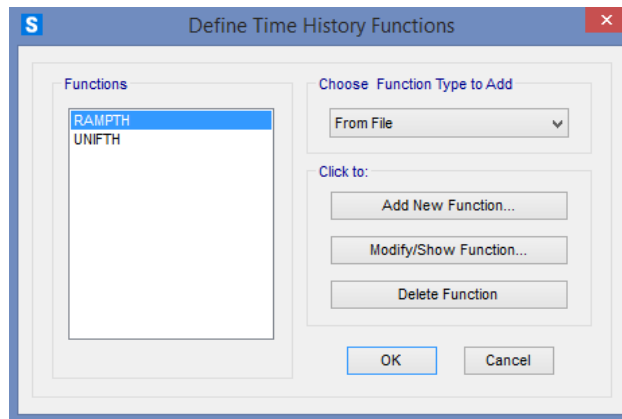
Εικόνα Β.2: Παράθυρο εισαγωγής δεδομένων για επίπεδο πλαίσιο στο SAP2000

Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράθυρο ζητείται να εισαχθούν ο αριθμός και το ύψος των ορόφων, ο αριθμός και το μήκος των φανωμάτων, καθώς επίσης και οι διατομές των δοκών και των υποστηλωμάτων. Στη συνέχεια για τον φορέα που κατασκευάσαμε στο λογισμικό στο παραθυρό εργασιών που εμφανίζεται με τον φορέα που ορίσαμε πηγαίνουμε στην εντολή όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



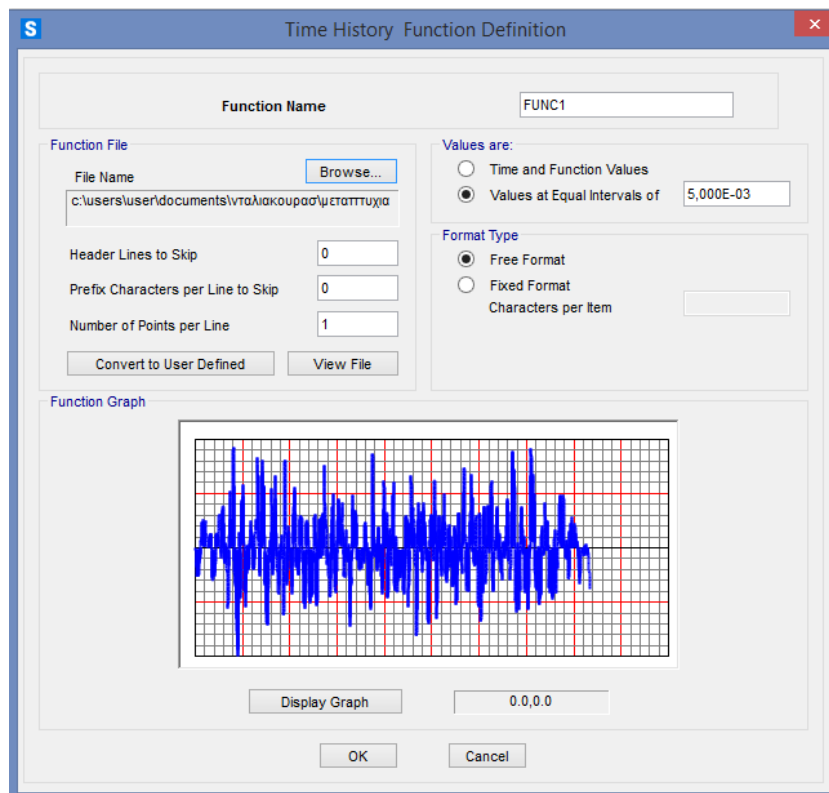
Εικόνα Β.3: Παράθυρο εισαγωγής παραμέτρων για επίπεδο πλαίσιο στο SAP2000

Από τη παραπάνω εντολή μπορούν να οριστούν τα υλικά από τα οποία θα είναι κατασκευασμένο το πλαίσιο αλλά και η ποιότητα/κατηγορία του υλικού π.χ κατασκευή από σκυρόδεμα με κατηγορία σκυροδέματος C30/37, μπορούν να οριστούν οι διατομές του φορέα καθώς επίσης και οι φορτίσεις που θα υπόκειται ο φορέας. Ειδικότερα στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής θα επεξηγηθεί η διαδικασία εισαγωγής των τεχνητών διεγέρσεων που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση των φορέων. Όπως φαίνεται στην εικόνα Β.3 πηγαίνοντας στην επιλογή **functions** και επιλέγοντας την εντολή **Time History** εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο:



Εικόνα Β.4: Παράθυρο εισαγωγής επιταχυνσιογράμματος στο SAP2000

Επιλέγοντας την επιλογή From File όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα και επιλέγοντας την εντολή Add New Function εισάγουμε το αρχείο (συνήθως είναι σε μορφή text.txt) στο λογισμικό όπως φαίνεται στη παρακάτω εικόνα:



Εικόνα Β.5: Παράθυρο εισαγωγής επιταχυνσιογράμματος στο SAP2000

Στην παραπάνω εικόνα έχει εισαχθεί η τεχνητή διέγερση A1. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τις υπόλοιπες τεχνητές διεγέρσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Συνεχίζοντας πατώντας την εντολή **define** και επιλέγοντας την εντολή **Load Patterns** ορίζονται τα είδη των φορτίων που θέλουμε να επιβάλλουμε στην κατασκευή π.χ μόνιμα κινητά, ανεμοπιέσεις σεισμικές φορτίσεις κ.λπ. Για να επιβάλλουμε τις εισαχθείσες τεχνητές διεγέρσεις στο φορέα πηγαίνουμε στην εντολή **define** στη συνέχεια πηγαίνουμε στην εντολή **Load Cases** και αφού έχουμε ορίσει από την εντολή Functions τη χρονοϊστορία ορίζουμε την τεχνητή διέγερση όπως φαίνεται στο παρακάτω παράθυρο.

Load Case Data - Linear Direct Integration History

Load Case Name: TH_A1 [Set Def Name] [Modify/Show...]

Notes: [Modify/Show...]

Load Case Type: Time History [Design...]

Stiffness to Use: ☒ Zero Initial Conditions - Unstressed State
☐ Stiffness at End of Nonlinear Case []
 Important Note: Loads from the Nonlinear Case are NOT included in the current case

Modal Load Case: [Use Modes from Case] MODAL []

Loads Applied:

Load Type	Load Name	Function	Scale Factor
Accel	U1	FUNC1	1.

[Add] [Modify] [Delete]

☐ Show Advanced Load Parameters

Time Step Data:

Number of Output Time Steps: 5500

Output Time Step Size: 5,000E-03

Other Parameters:

Damping: [None] [Modify/Show...]

Time Integration: [Hilber-Hughes-Taylor] [Modify/Show...]

Mass Source: MSSSRC1

Analysis Type: ☒ Linear ☐ Nonlinear

Solution Type: ☐ Modal ☒ Direct Integration ☐ Frequency Domain

History Type: ☒ Transient ☐ Periodic

[OK] [Cancel]

Εικόνα Β.6: Παράθυρο εισαγωγής φόρτισης χρονοϊστορίας στο SAP2000

Στο παραπάνω παράθυρο απεικονίζεται το είδος της φόρτισης που στη δική μας περίπτωση είναι επιτάχυνση στην εντολή **Function** επιλέγουμε την συνάρτηση που ορίσαμε προηγουμένως της τεχνητής διέγερσης και στην επιλογή **Scale Factor** αντί για 1 βάζουμε την τιμή 9,81. Τα συνολικά βήματα τα ορίζουμε να είναι στα 5500 και το βήμα που θα ακολουθείται θα είναι 0,005. Στην μέθοδο επίλυσης παραμένει η επιλογή που έχει το λογισμικό των **Hilber – Hughes – Taylor** ορίζουμε όμως ως **Alpha** την τιμή -0,23. Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι πρέπει να προηγηθεί μια ιδιομορφική επίλυση των φορέων προς επίλυση καθώς όταν ορίζουμε μια φόρτιση χρονοϊστορίας μας ζητείται και ορισμός της απόσβεσης (damping).

Direct Integration Damping

Viscous Proportional Damping:

☐ Direct Specification

☒ Specify Damping by Period

☐ Specify Damping by Frequency

Mass Proportional Coefficient: [0] 1/sec

Stiffness Proportional Coefficient: [0] sec

Period: First [1] sec Second [0,1] sec

Frequency: [0] cyc/sec [0] cyc/sec

Damping: [0] [Recalculate Coefficients]

Additional Modal Damping:

☐ Include Additional Modal Damping

Modal Load Case: []

☐ Maximum Considered Modal Frequency: []

[Modify/Show Modal Damping Parameters...]

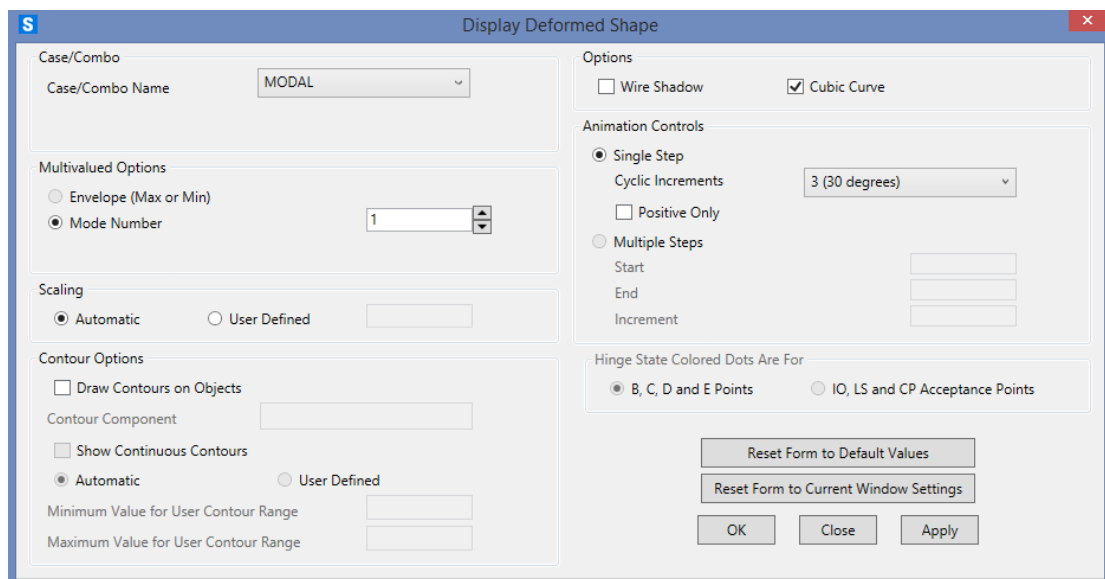
[OK] [Cancel]

Εικόνα Β.7: Παράθυρο ορισμού απόσβεσης χρονοϊστορίας στο SAP2000

Όπως φαίνεται στην παραπάνω εικόνα επιλέγουμε τον ορισμό της απόσβεσης ανά περίοδο που υπολογίζονται από την ιδιομορφική ανάλυση που προαναφέραμε. Για τις 2 πρώτες ιδιοπεριόδους της κατασκευής ορίζουμε για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής απόσβεση 0,02. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για τις άλλες τεχνητές διεγέρσεις που χρησιμοποιήθηκαν.

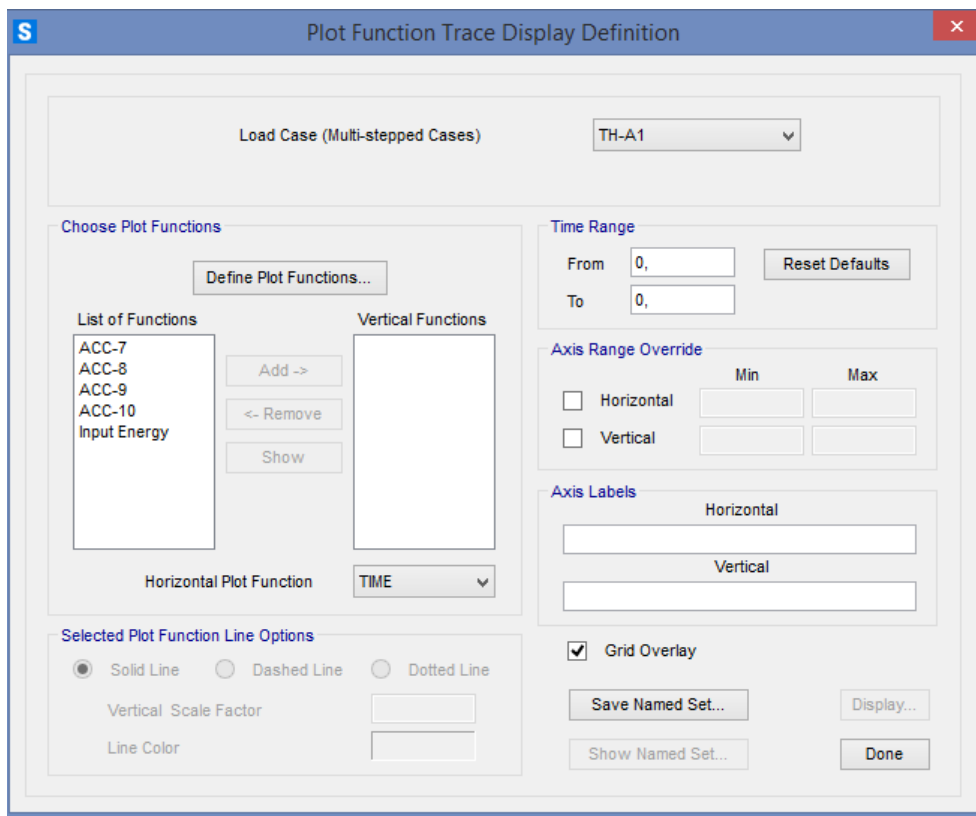
B.2 Επίλυση φορέα και αποτελέσματα

Αφού έχουν οριστεί τα πάντα προχωρούμε στην επίλυση του φορέα επιλέγοντας την εντολή **Run Analysis**. Τα ζητούμενα είναι οι παραμορφώσεις των φορέων από την ιδιομορφική τους ανάλυση και οι αποκρίσεις των κόμβων που έχουμε επιλέξει σαν σχήμα ενοργάνωσης στις τεχνητές διεγέρσεις που ορίσαμε πριν. Το πρώτο ζητούμενο είναι απλό επιλέγοντας την εντολή **Display Deformed Shape** εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο.



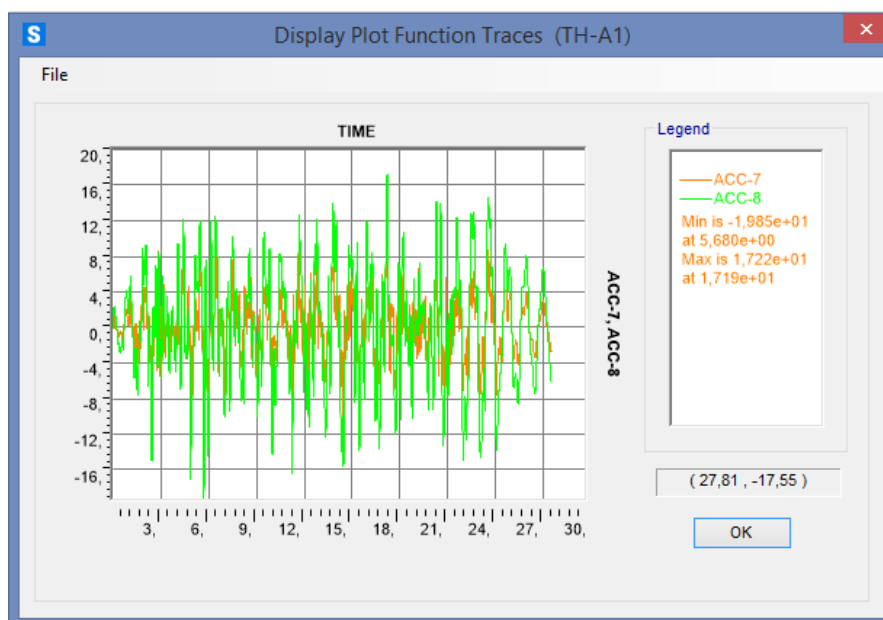
Εικόνα B.8: Παράθυρο επιλογών απεικόνισης παραμορφωμένου φορέα στο SAP2000

Ορίζοντας τον τύπο φόρτισης ως **Modal** μπορούμε να δούμε για κάθε ιδιομορφή (**Mode Number**) την παραμόρφωση των κόμβων που μας ενδιαφέρουν. Τώρα μας ενδιαφέρουν οι αποκρίσεις των κόμβων σε κάθε τεχνητή διέγερση που ορίσαμε προκειμένου να τις επεξεργαστούμε με τεχνικές επεξεργασίας σήματος και στη συνέχεια να κάνουμε αναγνώριση των δυναμικών χαρακτηριστικών του φορέα που μελετάμε. Επιλέγοντας από το παράθυρο εργασιών την εντολή **Display** και στη συνέχεια την εντολή **Show Plot Functions** μπορούμε να πάρουμε τις αποκρίσεις που μας ενδιαφέρουν.



Εικόνα Β.9: Παράθυρο επιλογών απεικόνισης αποκρίσεων κόμβων στο SAP2000

Επιλέγοντας τις συναρτήσεις που έχουμε ορίσει (ως επιταχύνσεις) και πατώντας την εντολή **add** και στην συνέχεια την εντολή Display παραλαμβάνουμε το παρακάτω γράφημα.



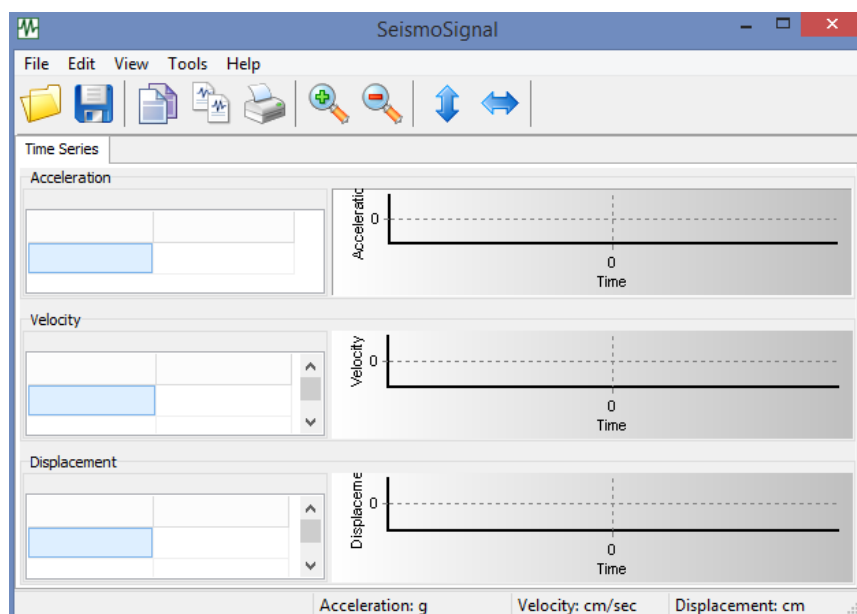
Εικόνα Β.10: Γραφική απεικόνιση αποκρίσεων κόμβων στο SAP2000

Στην συνέχεια στην επιλογή **File** επιλέγουμε την εντολή **Print Tables to File** για να αποθηκεύσουμε τις αποκρίσεις των κόμβων και να τις επεξεργαστούμε αργότερα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. ΒΑΣΙΚΗ ΧΡΗΣΗ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ *SeismoSignal*

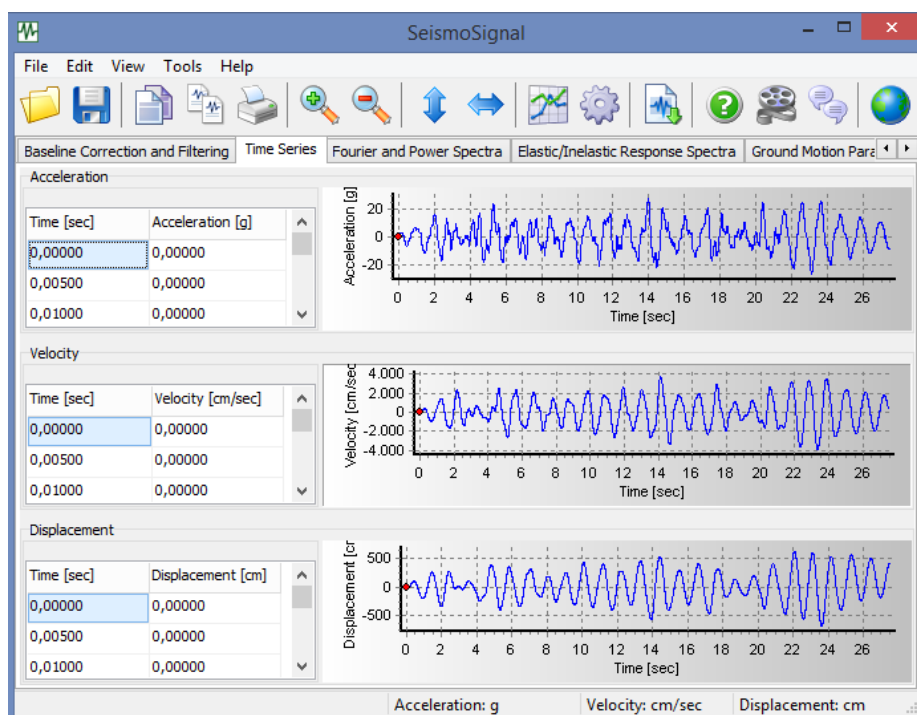
Γ.1 Εισαγωγή επιταχυνσιογράμματος και βασική επεξεργασία

Το γενικό περιβάλλον του *SeismoSignal* απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα Γ.6: Γενικό περιβάλλον εργασίας του *Seimosignal*

Πηγαίνοντας στις στήλες του πίνακα acceleration και πατώντας δεξί κλικ και επιλέγοντας την εντολή *Paste Selection* εισάγουμε το επιταχυνσιόγραμμα που θέλουμε στο λογισμικό και το περιβάλλον εργασίας επεκτείνεται όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

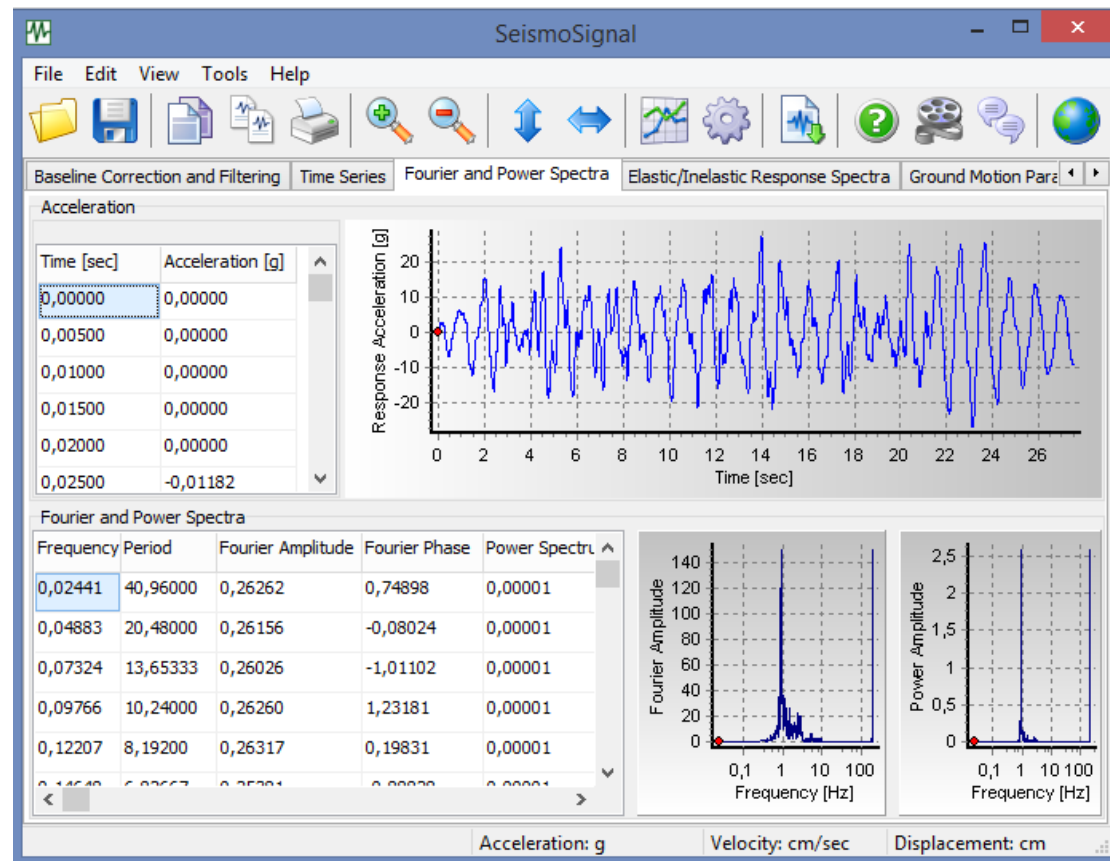


Εικόνα Γ.2: Περιβάλλον εργασίας του *Seimosignal* με εισαγμένο επιταχυνσιόγραμμα

Όπως φαίνεται από την παραπάνω εικόνα έχουν εισαχθεί νέες καρτέλες για τα φάσματα και για τα πλάτη Fourier του σήματος του επιταχυνσιογράμματος αλλά και επιλογές διόρθωσης και φιλτραρίσματος του σήματος.

Γ.2 Επεξεργασία σήματος και εξαγωγή αποτελεσμάτων

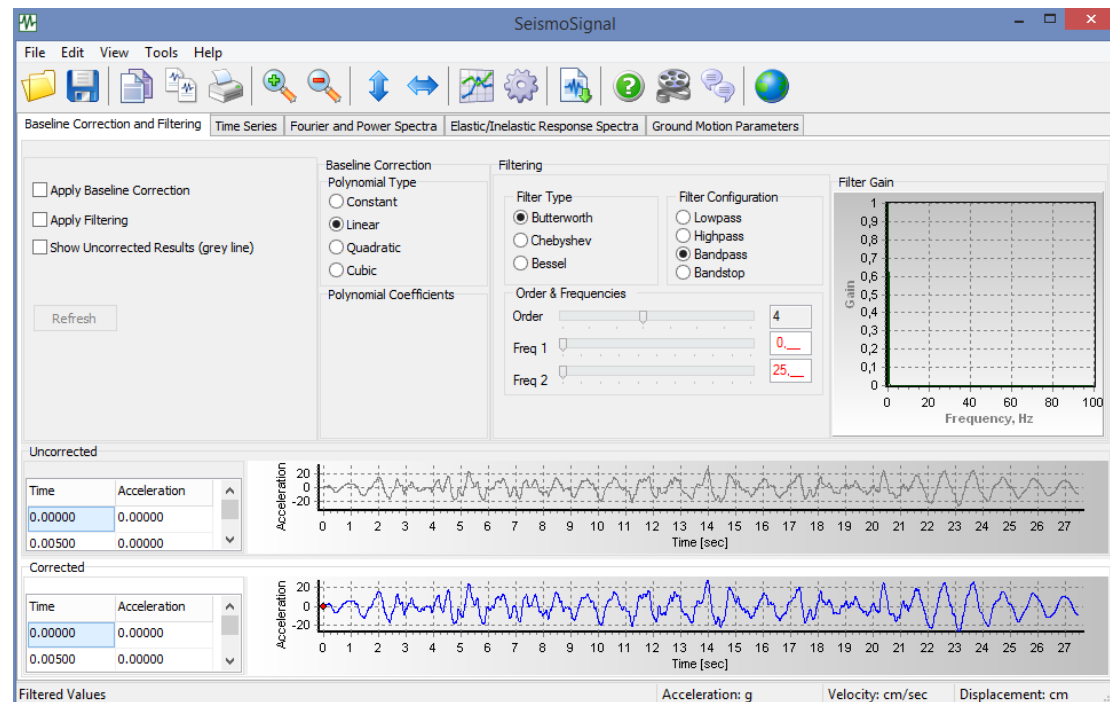
Αρχικά πηγαίνουμε στην καρτέλα με τα φάσματα Fourier, και εμφανίζεται το παρακάτω παράθυρο εργασίας:



Εικόνα Γ.3: Απεικόνιση τιμών και φασμάτων Fourier στο SeismoSignal

Πηγαίνοντας στον πίνακα **Fourier and Power Spectra** και πατώντας δεξί κλικ και επιλέγοντας την εντολή **Select All** επιλέγονται όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του προγράμματος. Στη συνέχεια πατώντας πάλι δεξί κλικ και επιλέγοντας την εντολή **Copy Selection** αντιγράφουμε τις τιμές σε έναν υπολογιστικό φύλλο excel όπου από εκεί συνεχίζεται η επεξεργασία τους βάσει της μεθόδου που αναπτύχθηκε στο Κεφάλαιο 5. Τα επιταχυνσιογράμματα αυτά που εισαγονται είναι οι αποκρίσεις των κόμβων που προέκυψαν σύμφωνα με τις διαδικασίες που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 5 και στο Παράρτημα Β όσον αφορά τη χρήση του λογισμικού. Επίσης, στο SeismoSignal λαμβάνουμε τις τιμές Fourier και για τις τεχνητές διεγέρσεις που χρησιμοποιήσαμε στην ανάλυση των φορέων.

Στη συνέχεια πηγαίνουμε στην καρτέλα **Baseline Correction and Filtering** για να εφαρμόσουμε το φίλτρο Butterworth όπως φαίνεται στη παρακάτω εικόνα:



Εικόνα Γ.4: Απεικόνιση παραθύρου επεξεργασίας και φιλτραρίσματος σήματος στο *SeismoSignal*

Επιλέγουμε τις συχνότητες που θέλουμε να είναι τα όρια του φίλτρου Butterworth τα οποία προκύπτουν αναλόγως των συχνοτήτων των ιδιομορφών που έχουν οι εξεταζόμενοι φορείς και στην συνέχεια επιλέγουμε την επιλογή **Apply Filtering**. Αφού γίνει το φιλτράρισμα του σήματος πηγαίνουμε στον πίνακα **Corrected** και πατώντας δεξί κλικ και επιλέγοντας την εντολή **Select All** επιλέγονται όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του προγράμματος. Στη συνέχεια πατώντας πάλι δεξί κλικ και επιλέγοντας την εντολή **Copy Selection** αντιγράφουμε τις τιμές σε έναν υπολογιστικό φύλλο excel ώστε να συνεχίσει η περαιτέρω ανάλυση που χρειάζεται.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. ΤΕΧΝΗΤΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΙΟΓΡΑΜΜΑΤΑ

Παρακάτω παρατίθενται τα τεχνητά επιταχυνσιογράμματα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αυτά προέκυψαν κατά EN 1998-1 με κατηγορία εδάφους D και επιτάχυνση $A_{eff}=1,0g$. Το χρονικό βήμα που χρησιμοποιήθηκε είναι 0,005 sec.



Σχήμα Δ.1: Επιταχυνσιογράφημα τεχνητής διέγερσης A1



Σχήμα Δ.2: Επιταχυνσιογράφημα τεχνητής διέγερσης A5



Σχήμα Δ.3: Επιταχυνσιογράφημα τεχνητής διέγερσης A7

t (sec)	Επιταχυνσιόγραμμα A1 (g)	Επιταχυνσιόγραμμα A5 (g)	Επιταχυνσιόγραμμα A7 (g)
0	0,00098	-0,01122	0,00004
0,005	0,00098	-0,01122	0,00004
0,01	0,00098	-0,01121	0,00004
0,015	-0,1816	-0,01121	0,06442
0,02	-0,1672	-0,01143	0,09611
0,025	-0,15566	-0,0123	0,12141
0,03	-0,14876	-0,01358	0,13623
0,035	-0,14765	-0,01488	0,13086
0,04	-0,15223	-0,01522	0,11712
0,045	-0,16377	-0,01473	0,0956
0,05	-0,17994	-0,01305	0,07332
0,055	-0,1972	-0,0105	0,05463
0,06	-0,2159	-0,00751	0,04881
0,065	-0,23168	-0,00518	0,0531
0,07	-0,24417	-0,00368	0,06465
0,075	-0,25297	-0,00301	0,0879
0,08	-0,25899	-0,00446	0,11177
0,085	-0,26217	-0,00658	0,13404
0,09	-0,25785	-0,00911	0,14784
0,095	-0,25254	-0,01103	0,15672
0,1	-0,24597	-0,01243	0,15906
0,105	-0,23843	-0,01283	0,15617
0,11	-0,23125	-0,01203	0,15173
0,115	-0,22621	-0,0106	0,1476
0,12	-0,22348	-0,00867	0,14507
0,125	-0,2227	-0,00658	0,14395
0,13	-0,22813	-0,00448	0,14523
0,135	-0,23551	-0,00278	0,14694
0,14	-0,24428	-0,00119	0,14869
0,145	-0,25279	0,00024	0,14933
0,15	-0,26005	0,00124	0,14992
0,155	-0,26474	0,00194	0,15081
0,16	-0,26531	0,00206	0,15268
0,165	-0,2633	0,00123	0,15536
0,17	-0,25818	-0,00018	0,15895
0,175	-0,25162	-0,00235	0,16239
0,18	-0,24479	-0,00476	0,16505
0,185	-0,23819	-0,00711	0,16366
0,19	-0,23297	-0,0083	0,15977
0,195	-0,22906	-0,00866	0,15361
0,2	-0,22374	-0,00816	0,14305
0,205	-0,21866	-0,00585	0,13206

0,21	-0,21339	-0,00318	0,12143
0,215	-0,20701	-0,00044	0,11299
0,22	-0,19988	0,00162	0,10622
0,225	-0,19169	0,00307	0,10204
0,23	-0,18274	0,0034	0,09954
0,235	-0,17333	0,0028	0,09762
0,24	-0,1622	0,0017	0,09552
0,245	-0,1503	0,00019	0,0927
0,25	-0,13775	-0,00132	0,08922
0,255	-0,1224	-0,00275	0,08514
0,26	-0,10625	-0,00407	0,0811
0,265	-0,08937	-0,00534	0,07747
0,27	-0,0732	-0,00661	0,07512
0,275	-0,05772	-0,00797	0,07316
0,28	-0,04415	-0,00927	0,07142
0,285	-0,03315	-0,01029	0,06924
0,29	-0,0239	-0,01084	0,06651
0,295	-0,01726	-0,01102	0,06257
0,3	-0,01168	-0,01051	0,05824
0,305	-0,00646	-0,00984	0,05388
0,31	0,00003	-0,00921	0,04963
0,315	0,00744	-0,00912	0,04644
0,32	0,01604	-0,00965	0,04454
0,325	0,02724	-0,0109	0,04416
0,33	0,03941	-0,01316	0,04415
0,335	0,05299	-0,01566	0,04395
0,34	0,06828	-0,01808	0,04268
0,345	0,08434	-0,01991	0,04056
0,35	0,10212	-0,02121	0,03731
0,355	0,12074	-0,02156	0,03364
0,36	0,13973	-0,02138	0,03001
0,365	0,15766	-0,02095	0,02938
0,37	0,17488	-0,02106	0,0299
0,375	0,19093	-0,02151	0,03177
0,38	0,20181	-0,02238	0,03817
0,385	0,21098	-0,02436	0,04527
0,39	0,21797	-0,02663	0,05282
0,395	0,22274	-0,02913	0,06043
0,4	0,22697	-0,03174	0,06769
0,405	0,23092	-0,03442	0,0742
0,41	0,23539	-0,03718	0,08014
0,415	0,24041	-0,04013	0,08561
0,42	0,2452	-0,04322	0,08852
0,425	0,24975	-0,0462	0,09073
0,43	0,25374	-0,04905	0,09215

0,435	0,25531	-0,05165	0,08767
0,44	0,25579	-0,05231	0,0816
0,445	0,25499	-0,05219	0,07301
0,45	0,25309	-0,05097	0,06017
0,455	0,25098	-0,04824	0,04587
0,46	0,24871	-0,04499	0,03009
0,465	0,24646	-0,0414	0,01413
0,47	0,24415	-0,03798	-0,00137
0,475	0,23997	-0,03487	-0,01469
0,48	0,23479	-0,03246	-0,02703
0,485	0,22865	-0,03031	-0,03868
0,49	0,21727	-0,02827	-0,04285
0,495	0,20531	-0,02615	-0,04649
0,5	0,19307	-0,02372	-0,04918
0,505	0,18168	-0,02088	-0,04876
0,51	0,1713	-0,01781	-0,04719
0,515	0,16296	-0,01469	-0,04349
0,52	0,15671	-0,01185	-0,03772
0,525	0,15162	-0,00953	-0,03096
0,53	0,14855	-0,00751	-0,02259
0,535	0,14557	-0,00626	-0,01373
0,54	0,1423	-0,00516	-0,00463
0,545	0,14336	-0,00408	0,00388
0,55	0,1447	-0,00351	0,01246
0,555	0,14705	-0,003	0,02116
0,56	0,15419	-0,0027	0,02988
0,565	0,16317	-0,0032	0,03898
0,57	0,17457	-0,00419	0,04865
0,575	0,18787	-0,00582	0,05882
0,58	0,2016	-0,00788	0,06906
0,585	0,21476	-0,00995	0,07904
0,59	0,22664	-0,01135	0,08849
0,595	0,23728	-0,01196	0,09744
0,6	0,24214	-0,01187	0,10467
0,605	0,24595	-0,00934	0,11152
0,61	0,24877	-0,00635	0,11803
0,615	0,24733	-0,00315	0,12289
0,62	0,24511	-0,00041	0,12737
0,625	0,24127	0,00184	0,13082
0,63	0,23417	0,00312	0,13181
0,635	0,22522	0,00313	0,13136
0,64	0,21258	0,00252	0,1276
0,645	0,19765	0,00107	0,12171
0,65	0,18156	-0,00074	0,11465
0,655	0,16402	-0,0027	0,10511

0,66	0,14696	-0,00534	0,09544
0,665	0,13085	-0,00818	0,08604
0,67	0,11964	-0,01119	0,08005
0,675	0,10981	-0,01483	0,07479
0,68	0,10168	-0,01857	0,07049
0,685	0,09579	-0,02218	0,06757
0,69	0,09044	-0,02501	0,06478
0,695	0,08599	-0,02727	0,06222
0,7	0,08217	-0,02821	0,05962
0,705	0,07876	-0,02801	0,05692
0,71	0,07748	-0,02719	0,05416
0,715	0,07728	-0,02489	0,0517
0,72	0,07796	-0,0225	0,04959
0,725	0,07916	-0,02022	0,04405
0,73	0,08027	-0,01849	0,03795
0,735	0,08062	-0,01709	0,03021
0,74	0,07801	-0,01611	0,01723
0,745	0,07379	-0,01605	0,00213
0,75	0,06709	-0,01621	-0,01597
0,755	0,05861	-0,01689	-0,03579
0,76	0,04955	-0,0182	-0,05579
0,765	0,04027	-0,01989	-0,07369
0,77	0,03168	-0,02319	-0,08977
0,775	0,02377	-0,0272	-0,10426
0,78	0,01974	-0,03171	-0,10267
0,785	0,01606	-0,0383	-0,0994
0,79	0,01272	-0,04512	-0,0939
0,795	0,01083	-0,05208	-0,08274
0,8	0,00909	-0,0585	-0,07047
0,805	0,00814	-0,06472	-0,05685
0,81	0,0089	-0,07033	-0,04216
0,815	0,01097	-0,07509	-0,02736
0,82	0,01641	-0,07939	-0,01342
0,825	0,02384	-0,08246	0,00015
0,83	0,03247	-0,08495	0,0134
0,835	0,04351	-0,08708	0,01828
0,84	0,05436	-0,08781	0,02144
0,845	0,06454	-0,08829	0,02187
0,85	0,07186	-0,08864	0,01031
0,855	0,07806	-0,08953	-0,00413
0,86	0,08285	-0,09071	-0,02196
0,865	0,08643	-0,09248	-0,04249
0,87	0,08986	-0,09512	-0,06318
0,875	0,0933	-0,09819	-0,08193
0,88	0,09708	-0,10175	-0,09804

0,885	0,10108	-0,10536	-0,11174
0,89	0,10516	-0,1088	-0,11344
0,895	0,10877	-0,11052	-0,11291
0,9	0,11176	-0,11175	-0,11076
0,905	0,11373	-0,11252	-0,1016
0,91	0,11536	-0,11129	-0,092
0,915	0,11691	-0,10973	-0,08193
0,92	0,11905	-0,10773	-0,07128
0,925	0,1218	-0,10497	-0,06083
0,93	0,12541	-0,10187	-0,05158
0,935	0,12944	-0,09832	-0,04338
0,94	0,13338	-0,0945	-0,03596
0,945	0,1349	-0,09062	-0,03363
0,95	0,13502	-0,08834	-0,03274
0,955	0,13367	-0,08676	-0,03302
0,96	0,12304	-0,08602	-0,0419
0,965	0,11088	-0,09326	-0,05118
0,97	0,09681	-0,10179	-0,06005
0,975	0,07965	-0,11189	-0,06539
0,98	0,06178	-0,12409	-0,06821
0,985	0,04312	-0,13654	-0,06465
0,99	0,0241	-0,14845	-0,05376
0,995	0,00502	-0,15896	-0,03806
1	-0,01493	-0,16825	-0,00876
1,005	-0,0352	-0,17427	0,02452
1,01	-0,05573	-0,17934	0,05951
1,015	-0,07836	-0,18412	0,10348
1,02	-0,10137	-0,18482	0,14664
1,025	-0,12474	-0,18578	0,1882
1,03	-0,14807	-0,18681	0,22374
1,035	-0,17123	-0,18667	0,25636
1,04	-0,19356	-0,18614	0,28296
1,045	-0,21447	-0,18504	0,30216
1,05	-0,23437	-0,18363	0,31722
1,055	-0,25148	-0,18228	0,321
1,06	-0,26713	-0,1825	0,31956
1,065	-0,2817	-0,18391	0,31489
1,07	-0,28761	-0,18642	0,293
1,075	-0,29235	-0,19667	0,2692
1,08	-0,29557	-0,2079	0,24399
1,085	-0,29268	-0,21984	0,21936
1,09	-0,28814	-0,23166	0,19597
1,095	-0,28085	-0,24261	0,17652
1,1	-0,26978	-0,25134	0,16473
1,105	-0,25695	-0,2563	0,15733

1,11	-0,24094	-0,2591	0,15934
1,115	-0,22349	-0,25717	0,16572
1,12	-0,20547	-0,25285	0,17389
1,125	-0,1882	-0,24712	0,18536
1,13	-0,17161	-0,23375	0,19566
1,135	-0,15629	-0,21883	0,20377
1,14	-0,14943	-0,20213	0,19907
1,145	-0,14469	-0,17694	0,19074
1,15	-0,14313	-0,14967	0,17661
1,155	-0,14664	-0,12	0,15299
1,16	-0,15229	-0,08816	0,12553
1,165	-0,16168	-0,05587	0,09056
1,17	-0,17335	-0,02475	0,05079
1,175	-0,18618	0,00437	0,00855
1,18	-0,20182	0,03171	-0,04091
1,185	-0,21806	0,05192	-0,09151
1,19	-0,23449	0,07017	-0,14242
1,195	-0,24566	0,08711	-0,18574
1,2	-0,25553	0,09775	-0,22656
1,205	-0,26242	0,10797	-0,26191
1,21	-0,26127	0,11757	-0,28319
1,215	-0,25634	0,12541	-0,29818
1,22	-0,2446	0,1326	-0,30225
1,225	-0,22734	0,13835	-0,29793
1,23	-0,20728	0,14271	-0,28965
1,235	-0,18101	0,14621	-0,27383
1,24	-0,15368	0,14751	-0,25659
1,245	-0,12616	0,1481	-0,239
1,25	-0,09697	0,14832	-0,22563
1,255	-0,06827	0,14448	-0,21287
1,26	-0,04014	0,1402	-0,20099
1,265	-0,0135	0,13513	-0,19127
1,27	0,01291	0,12794	-0,18161
1,275	0,03833	0,11987	-0,17196
1,28	0,06183	0,1106	-0,16217
1,285	0,08386	0,10047	-0,15208
1,29	0,10062	0,09015	-0,14061
1,295	0,11461	0,08022	-0,12899
1,3	0,1267	0,07071	-0,11745
1,305	0,12959	0,0616	-0,0986
1,31	0,13148	0,05517	-0,07876
1,315	0,13253	0,04899	-0,05697
1,32	0,13159	0,04312	-0,02755
1,325	0,13089	0,03833	0,0038
1,33	0,13043	0,0336	0,03677

1,335	0,1296	0,02887	0,06943
1,34	0,12823	0,02405	0,10072
1,345	0,12447	0,0191	0,12595
1,35	0,11865	0,01362	0,14631
1,355	0,11129	0,00762	0,16283
1,36	0,09938	0,00112	0,15969
1,365	0,08682	-0,00766	0,15346
1,37	0,07419	-0,01687	0,14492
1,375	0,06362	-0,02616	0,12987
1,38	0,05452	-0,03252	0,11486
1,385	0,04791	-0,03736	0,10088
1,39	0,04506	-0,0389	0,08957
1,395	0,04386	-0,03396	0,08012
1,4	0,04551	-0,02554	0,07523
1,405	0,04861	-0,01021	0,07315
1,41	0,05246	0,00929	0,07254
1,415	0,06127	0,03097	0,0794
1,42	0,07149	0,05936	0,08765
1,425	0,08321	0,08862	0,09692
1,43	0,1035	0,11832	0,11101
1,435	0,12563	0,14935	0,12476
1,44	0,14985	0,18026	0,13655
1,445	0,17583	0,21009	0,14137
1,45	0,20174	0,23547	0,14204
1,455	0,22574	0,25832	0,13282
1,46	0,24674	0,27409	0,11391
1,465	0,26526	0,28209	0,08885
1,47	0,27694	0,28455	0,04618
1,475	0,28628	0,26899	-0,00097
1,48	0,29435	0,24766	-0,05012
1,485	0,29699	0,22299	-0,10405
1,49	0,29979	0,1831	-0,15627
1,495	0,30284	0,14307	-0,20486
1,5	0,30583	0,10375	-0,2417
1,505	0,30883	0,06809	-0,27331
1,51	0,31124	0,03441	-0,29471
1,515	0,31241	0,00488	-0,30539
1,52	0,31259	-0,02033	-0,31017
1,525	0,30986	-0,04322	-0,29874
1,53	0,30575	-0,05889	-0,28095
1,535	0,30074	-0,07172	-0,25944
1,54	0,28765	-0,08267	-0,21389
1,545	0,27368	-0,07648	-0,16659
1,55	0,25829	-0,06818	-0,11801
1,555	0,23696	-0,0577	-0,07033

1,56	0,21374	-0,04534	-0,02439
1,565	0,18717	-0,03358	0,01626
1,57	0,15631	-0,02507	0,04773
1,575	0,12332	-0,02316	0,07342
1,58	0,08683	-0,02566	0,08567
1,585	0,0492	-0,03768	0,09152
1,59	0,01152	-0,05403	0,09401
1,595	-0,0203	-0,07229	0,08476
1,6	-0,0497	-0,09333	0,07455
1,605	-0,07556	-0,11285	0,06386
1,61	-0,08557	-0,1299	0,05279
1,615	-0,09121	-0,13824	0,04228
1,62	-0,09055	-0,14423	0,0331
1,625	-0,08144	-0,14718	0,02627
1,63	-0,0691	-0,14649	0,02045
1,635	-0,05106	-0,14463	0,0172
1,64	-0,03039	-0,13991	0,01575
1,645	-0,00853	-0,13325	0,0155
1,65	0,01996	-0,12514	0,01948
1,655	0,04975	-0,11114	0,02445
1,66	0,08066	-0,09544	0,02997
1,665	0,11501	-0,07866	0,03356
1,67	0,15007	-0,06509	0,03652
1,675	0,18522	-0,05306	0,03781
1,68	0,21812	-0,0447	0,03504
1,685	0,24906	-0,04481	0,03051
1,69	0,27535	-0,04886	0,0232
1,695	0,2972	-0,05908	0,01441
1,7	0,31625	-0,07284	0,00527
1,705	0,32952	-0,08771	-0,00334
1,71	0,34175	-0,10311	-0,01115
1,715	0,3538	-0,11754	-0,0182
1,72	0,36189	-0,13088	-0,0203
1,725	0,37022	-0,13782	-0,02179
1,73	0,37773	-0,14457	-0,02252
1,735	0,37942	-0,15152	-0,02193
1,74	0,37771	-0,15939	-0,02121
1,745	0,36869	-0,16825	-0,02041
1,75	0,35159	-0,17873	-0,01962
1,755	0,32977	-0,1907	-0,01888
1,76	0,29711	-0,20351	-0,01825
1,765	0,262	-0,21928	-0,01738
1,77	0,22644	-0,23555	-0,01621
1,775	0,18344	-0,25191	-0,0138
1,78	0,14137	-0,27872	-0,01081

1,785	0,10006	-0,30661	-0,00686
1,79	0,05903	-0,3363	0,00075
1,795	0,01751	-0,37046	0,00972
1,8	-0,02382	-0,40544	0,02136
1,805	-0,06306	-0,43944	0,03641
1,81	-0,10024	-0,46953	0,05321
1,815	-0,12772	-0,49625	0,0743
1,82	-0,14817	-0,51196	0,09713
1,825	-0,1627	-0,52104	0,12079
1,83	-0,14503	-0,52521	0,14867
1,835	-0,1219	-0,49743	0,17638
1,84	-0,09424	-0,4653	0,2035
1,845	-0,05946	-0,42904	0,2273
1,85	-0,0259	-0,38034	0,2497
1,855	0,0033	-0,32976	0,26918
1,86	0,0243	-0,2781	0,28348
1,865	0,04023	-0,22724	0,29501
1,87	0,04719	-0,1781	0,30018
1,875	0,05004	-0,13534	0,30149
1,88	0,05135	-0,09752	0,30057
1,885	0,04565	-0,06325	0,29187
1,89	0,03989	-0,04833	0,28178
1,895	0,03379	-0,03789	0,27067
1,9	0,01834	-0,03207	0,25511
1,905	0,00054	-0,05348	0,23898
1,91	-0,02051	-0,0795	0,22189
1,915	-0,04524	-0,11127	0,2026
1,92	-0,07079	-0,15067	0,18198
1,925	-0,09453	-0,19246	0,15848
1,93	-0,114	-0,2355	0,1324
1,935	-0,12935	-0,277	0,10461
1,94	-0,13294	-0,31608	0,07081
1,945	-0,13213	-0,34279	0,03621
1,95	-0,12874	-0,36491	0,00153
1,955	-0,12886	-0,38353	-0,03556
1,96	-0,13217	-0,37987	-0,07185
1,965	-0,14175	-0,37373	-0,10692
1,97	-0,16549	-0,36391	-0,139
1,975	-0,19531	-0,34555	-0,16941
1,98	-0,23323	-0,32461	-0,1954
1,985	-0,27557	-0,29917	-0,21625
1,99	-0,31854	-0,26944	-0,23355
1,995	-0,36058	-0,23702	-0,23777
2	-0,40018	-0,1972	-0,23701
2,005	-0,43768	-0,1542	-0,23318

2,01	-0,46306	-0,10911	-0,1909
2,015	-0,48789	-0,05405	-0,14643
2,02	-0,51185	0,00159	-0,09922
2,025	-0,52996	0,0573	-0,04717
2,03	-0,54654	0,11233	0,00419
2,035	-0,55829	0,16668	0,05142
2,04	-0,56178	0,21984	0,09066
2,045	-0,55969	0,27176	0,12369
2,05	-0,54327	0,323	0,13942
2,055	-0,51935	0,37214	0,14718
2,06	-0,49095	0,42025	0,15041
2,065	-0,45272	0,46745	0,12367
2,07	-0,41463	0,50492	0,09308
2,075	-0,37831	0,54005	0,05721
2,08	-0,35049	0,57195	-0,00098
2,085	-0,32593	0,59281	-0,06406
2,09	-0,30488	0,61096	-0,13285
2,095	-0,28516	0,62592	-0,20641
2,1	-0,26424	0,63809	-0,28075
2,105	-0,23775	0,64963	-0,35204
2,11	-0,2057	0,66019	-0,41899
2,115	-0,16925	0,67039	-0,48167
2,12	-0,11753	0,68019	-0,52041
2,125	-0,06394	0,68565	-0,55376
2,13	-0,00987	0,68906	-0,58256
2,135	0,04688	0,68997	-0,59542
2,14	0,10208	0,68031	-0,60636
2,145	0,15553	0,66764	-0,61521
2,15	0,20835	0,65039	-0,62133
2,155	0,26176	0,62564	-0,62692
2,16	0,3156	0,59759	-0,63153
2,165	0,37005	0,5628	-0,63476
2,17	0,42411	0,52307	-0,63667
2,175	0,46324	0,48032	-0,63521
2,18	0,49587	0,42651	-0,63196
2,185	0,52115	0,3698	-0,62713
2,19	0,49383	0,31112	-0,61543
2,195	0,45677	0,24748	-0,60226
2,2	0,40805	0,18447	-0,58632
2,205	0,34536	0,12392	-0,56258
2,21	0,281	0,07159	-0,53518
2,215	0,22042	0,02383	-0,49954
2,22	0,16909	-0,01416	-0,4555
2,225	0,12579	-0,04242	-0,4063
2,23	0,10238	-0,0646	-0,34424

2,235	0,08447	-0,06924	-0,2783
2,24	0,0681	-0,06845	-0,21052
2,245	0,07211	-0,06487	-0,14259
2,25	0,07367	-0,04095	-0,07632
2,255	0,07405	-0,01613	-0,01362
2,26	0,08149	0,0096	0,03789
2,265	0,09276	0,03458	0,08518
2,27	0,11177	0,05814	0,12559
2,275	0,13937	0,07732	0,15942
2,28	0,17123	0,08999	0,19022
2,285	0,20534	0,09844	0,21405
2,29	0,2369	0,09546	0,23507
2,295	0,26437	0,08753	0,25444
2,3	0,2671	0,07667	0,26875
2,305	0,2642	0,04574	0,28171
2,31	0,25721	0,01325	0,29333
2,315	0,25455	-0,02071	0,30433
2,32	0,25802	-0,05741	0,31479
2,325	0,27556	-0,09423	0,32506
2,33	0,31441	-0,12976	0,3354
2,335	0,36488	-0,16125	0,34538
2,34	0,43382	-0,18957	0,35301
2,345	0,50786	-0,20863	0,35867
2,35	0,58148	-0,22172	0,36257
2,355	0,65019	-0,23079	0,35344
2,36	0,71256	-0,22171	0,34123
2,365	0,76849	-0,20941	0,32542
2,37	0,80812	-0,19429	0,29254
2,375	0,84571	-0,16799	0,25714
2,38	0,87995	-0,14032	0,21944
2,385	0,90461	-0,1111	0,18065
2,39	0,92372	-0,07945	0,14302
2,395	0,92344	-0,04669	0,11029
2,4	0,90424	-0,01192	0,08286
2,405	0,87028	0,02406	0,05989
2,41	0,78361	0,06034	0,05763
2,415	0,683	0,09392	0,06004
2,42	0,57366	0,12597	0,06566
2,425	0,44723	0,15615	0,09199
2,43	0,32427	0,17416	0,12031
2,435	0,20986	0,18961	0,15152
2,44	0,11383	0,20142	0,18766
2,445	0,02649	0,2069	0,22439
2,45	-0,04755	0,21077	0,25923
2,455	-0,11363	0,21208	0,29057

2,46	-0,1768	0,21156	0,3188
2,465	-0,22786	0,20986	0,33202
2,47	-0,27606	0,20115	0,33998
2,475	-0,32187	0,18908	0,34433
2,48	-0,32693	0,17421	0,30006
2,485	-0,32562	0,1478	0,2516
2,49	-0,31598	0,12016	0,1969
2,495	-0,29527	0,09276	0,12962
2,5	-0,27336	0,07349	0,05991
2,505	-0,25576	0,05988	-0,00999
2,51	-0,24863	0,05842	-0,07566
2,515	-0,25	0,07154	-0,1364
2,52	-0,26789	0,0933	-0,18126
2,525	-0,29211	0,13413	-0,21882
2,53	-0,31845	0,18089	-0,25219
2,535	-0,33736	0,22989	-0,25977
2,54	-0,34996	0,28728	-0,26545
2,545	-0,35423	0,34295	-0,26836
2,55	-0,34364	0,39569	-0,25959
2,555	-0,32934	0,43722	-0,2485
2,56	-0,31392	0,47439	-0,23416
2,565	-0,30275	0,50226	-0,21601
2,57	-0,2963	0,51532	-0,19616
2,575	-0,3007	0,51921	-0,17423
2,58	-0,31156	0,49878	-0,15194
2,585	-0,32638	0,46403	-0,12999
2,59	-0,35906	0,41943	-0,11339
2,595	-0,39329	0,32882	-0,0982
2,6	-0,42908	0,23263	-0,08413
2,605	-0,47739	0,13339	-0,06953
2,61	-0,5287	0,03331	-0,05391
2,615	-0,58483	-0,06273	-0,03543
2,62	-0,64738	-0,14928	-0,0115
2,625	-0,7119	-0,21782	0,01516
2,63	-0,77619	-0,27656	0,0453
2,635	-0,83766	-0,3138	0,07591
2,64	-0,89576	-0,33754	0,10539
2,645	-0,93594	-0,35311	0,12588
2,65	-0,9706	-0,33198	0,14216
2,655	-0,99999	-0,3024	0,15411
2,66	-0,99593	-0,26531	0,14218
2,665	-0,98644	-0,1859	0,12688
2,67	-0,96887	-0,10104	0,10733
2,675	-0,9358	-0,01172	0,08063
2,68	-0,89618	0,07785	0,05225

2,685	-0,84588	0,16405	0,02102
2,69	-0,78893	0,23758	-0,01182
2,695	-0,72961	0,29612	-0,04483
2,7	-0,66613	0,34341	-0,07325
2,705	-0,60443	0,35385	-0,10064
2,71	-0,54493	0,3543	-0,12726
2,715	-0,48617	0,34942	-0,12294
2,72	-0,42672	0,30586	-0,1134
2,725	-0,3646	0,26088	-0,09341
2,73	-0,2952	0,21347	-0,04506
2,735	-0,22156	0,15928	0,01303
2,74	-0,1439	0,10356	0,08413
2,745	-0,06682	0,04769	0,16336
2,75	0,00679	-0,00588	0,24431
2,755	0,06359	-0,05674	0,32279
2,76	0,10957	-0,09424	0,39803
2,765	0,14734	-0,12513	0,47021
2,77	0,13105	-0,15111	0,49265
2,775	0,11083	-0,12595	0,5099
2,78	0,08696	-0,09663	0,51888
2,785	0,05189	-0,063	0,49791
2,79	0,01629	-0,0219	0,46805
2,795	-0,02193	0,01848	0,42302
2,8	-0,06696	0,05448	0,35986
2,805	-0,11707	0,08217	0,28852
2,81	-0,17942	0,10398	0,20319
2,815	-0,24956	0,11197	0,11315
2,82	-0,32369	0,11381	0,02178
2,825	-0,38103	0,11242	-0,05661
2,83	-0,4305	0,08925	-0,13031
2,835	-0,46651	0,06352	-0,19619
2,84	-0,44381	0,0346	-0,22154
2,845	-0,40457	-0,01186	-0,23661
2,85	-0,34482	-0,06208	-0,23649
2,855	-0,26557	-0,11657	-0,21625
2,86	-0,18246	-0,17425	-0,18783
2,865	-0,09817	-0,23195	-0,14525
2,87	-0,01829	-0,28505	-0,09582
2,875	0,05734	-0,33245	-0,04354
2,88	0,12234	-0,37461	0,01197
2,885	0,18897	-0,39062	0,0672
2,89	0,25862	-0,40022	0,12125
2,895	0,31602	-0,40443	0,15788
2,9	0,37229	-0,38516	0,19033
2,905	0,42017	-0,36239	0,21428

2,91	0,4398	-0,33482	0,2193
2,915	0,44267	-0,29896	0,21605
2,92	0,41564	-0,26008	0,19813
2,925	0,36787	-0,21649	0,17052
2,93	0,31129	-0,17	0,13836
2,935	0,25386	-0,12228	0,097
2,94	0,20434	-0,0748	0,05431
2,945	0,16517	-0,02809	0,01149
2,95	0,1959	0,01744	-0,02159
2,955	0,23706	0,04671	-0,05243
2,96	0,28835	0,07323	-0,07925
2,965	0,34822	0,09558	-0,09572
2,97	0,40474	0,10948	-0,10831
2,975	0,4517	0,12065	-0,11335
2,98	0,48781	0,12776	-0,11101
2,985	0,51768	0,13191	-0,10457
2,99	0,53776	0,13469	-0,08655
2,995	0,55964	0,13294	-0,06495
3	0,58537	0,12959	-0,04155
3,005	0,57717	0,1252	-0,00891
3,01	0,56575	0,10966	0,02401
3,015	0,5432	0,09241	0,05685
3,02	0,47444	0,07267	0,0873
3,025	0,38732	0,04713	0,11609
3,03	0,27534	0,02016	0,14097
3,035	0,14519	-0,00814	0,16034
3,04	0,01162	-0,03671	0,17636
3,045	-0,11274	-0,06476	0,18339
3,05	-0,22295	-0,09103	0,18595
3,055	-0,31974	-0,11581	0,18558
3,06	-0,35171	-0,13939	0,16368
3,065	-0,37423	-0,156	0,13887
3,07	-0,38984	-0,17131	0,11068
3,075	-0,38925	-0,18496	0,07018
3,08	-0,39053	-0,19185	0,02679
3,085	-0,39413	-0,19687	-0,02064
3,09	-0,39584	-0,19874	-0,07235
3,095	-0,39514	-0,19584	-0,12525
3,1	-0,38501	-0,19059	-0,17831
3,105	-0,36599	-0,18056	-0,23047
3,11	-0,34101	-0,16787	-0,28149
3,115	-0,31627	-0,15369	-0,32268
3,12	-0,29382	-0,13531	-0,36122
3,125	-0,27725	-0,11619	-0,39665
3,13	-0,29799	-0,09657	-0,41152

3,135	-0,32875	-0,0759	-0,42233
3,14	-0,3705	-0,05486	-0,42676
3,145	-0,41957	-0,03311	-0,42021
3,15	-0,4673	-0,00975	-0,40903
3,155	-0,50441	0,0148	-0,38961
3,16	-0,52806	0,0418	-0,36465
3,165	-0,54147	0,07078	-0,33683
3,17	-0,52695	0,10089	-0,30283
3,175	-0,50689	0,13387	-0,26696
3,18	-0,48491	0,16673	-0,22979
3,185	-0,44858	0,19901	-0,19258
3,19	-0,41371	0,22791	-0,15498
3,195	-0,37905	0,2553	-0,11749
3,2	-0,33827	0,28041	-0,08237
3,205	-0,2936	0,30041	-0,04816
3,21	-0,24217	0,31856	-0,01608
3,215	-0,1854	0,33264	0,01377
3,22	-0,12671	0,34256	0,04216
3,225	-0,07277	0,34961	0,06657
3,23	-0,02321	0,34537	0,08906
3,235	0,02225	0,33655	0,11022
3,24	0,02741	0,32467	0,12582
3,245	0,02797	0,28186	0,13982
3,25	0,02335	0,23685	0,15134
3,255	0,01195	0,18958	0,15679
3,26	0,00103	0,14179	0,15944
3,265	-0,00711	0,09591	0,15696
3,27	-0,01103	0,0563	0,14838
3,275	-0,01225	0,02669	0,13607
3,28	-0,01146	0,00379	0,11505
3,285	-0,01111	-0,00189	0,09017
3,29	-0,01206	-0,00078	0,06316
3,295	-0,02174	0,00382	0,02678
3,3	-0,03438	0,03282	-0,01028
3,305	-0,05023	0,06375	-0,0479
3,31	-0,07153	0,09731	-0,08676
3,315	-0,0939	0,14182	-0,12507
3,32	-0,11665	0,1886	-0,16183
3,325	-0,13855	0,23705	-0,19589
3,33	-0,15933	0,28436	-0,22813
3,335	-0,17697	0,32939	-0,25563
3,34	-0,192	0,3647	-0,27978
3,345	-0,20484	0,39177	-0,3014
3,35	-0,20593	0,41206	-0,31076
3,355	-0,2044	0,39897	-0,31707

3,36	-0,2004	0,37974	-0,32042
3,365	-0,18612	0,35594	-0,31393
3,37	-0,17031	0,32105	-0,30538
3,375	-0,15255	0,28668	-0,29423
3,38	-0,13195	0,25514	-0,27978
3,385	-0,11044	0,23004	-0,26437
3,39	-0,08734	0,20886	-0,24699
3,395	-0,06309	0,19533	-0,22829
3,4	-0,03815	0,18635	-0,20862
3,405	-0,01397	0,17955	-0,18393
3,41	0,00969	0,18262	-0,15746
3,415	0,03229	0,18735	-0,12932
3,42	0,0441	0,19343	-0,09203
3,425	0,05333	0,21118	-0,05379
3,43	0,05937	0,22997	-0,01491
3,435	0,06223	0,24868	0,02363
3,44	0,06506	0,26229	0,06114
3,445	0,07068	0,27206	0,09574
3,45	0,08131	0,27096	0,12702
3,455	0,09604	0,25757	0,15583
3,46	0,12049	0,23578	0,17507
3,465	0,14803	0,18988	0,19188
3,47	0,17677	0,13714	0,20764
3,475	0,20194	0,08126	0,2004
3,48	0,22393	0,01341	0,1906
3,485	0,24088	-0,05224	0,17527
3,49	0,24685	-0,11382	0,14344
3,495	0,24932	-0,16372	0,10626
3,5	0,24732	-0,20872	0,0623
3,505	0,24229	-0,24461	0,01409
3,51	0,23641	-0,27048	-0,03474
3,515	0,22581	-0,2907	-0,0807
3,52	0,21285	-0,29416	-0,12384
3,525	0,1977	-0,29013	-0,16436
3,53	0,16794	-0,28104	-0,17535
3,535	0,13476	-0,23699	-0,18305
3,54	0,09857	-0,18914	-0,18641
3,545	0,06372	-0,13818	-0,17315
3,55	0,03118	-0,08658	-0,15589
3,555	0,00603	-0,03734	-0,13184
3,56	-0,00596	0,00428	-0,09878
3,565	-0,00978	0,03213	-0,06183
3,57	0,00215	0,05133	-0,01798
3,575	0,02118	0,05151	0,02865
3,58	0,04306	0,0423	0,07623

3,585	0,06765	0,02819	0,11774
3,59	0,08943	-0,00428	0,15681
3,595	0,10715	-0,038	0,19187
3,6	0,11038	-0,07233	0,20411
3,605	0,11006	-0,11086	0,21124
3,61	0,10536	-0,14957	0,21161
3,615	0,09509	-0,18802	0,20374
3,62	0,08306	-0,22523	0,19357
3,625	0,06654	-0,26151	0,1809
3,63	0,04668	-0,29401	0,16836
3,635	0,02432	-0,32286	0,15695
3,64	-0,00818	-0,34872	0,15297
3,645	-0,04378	-0,36221	0,15053
3,65	-0,08147	-0,37259	0,1492
3,655	-0,1162	-0,38091	0,16109
3,66	-0,14916	-0,38572	0,1751
3,665	-0,17737	-0,3913	0,19346
3,67	-0,19343	-0,39907	0,22214
3,675	-0,2034	-0,41196	0,2549
3,68	-0,20318	-0,42736	0,29294
3,685	-0,19601	-0,44655	0,33323
3,69	-0,18589	-0,46771	0,37341
3,695	-0,17109	-0,48922	0,4066
3,7	-0,15701	-0,51008	0,43597
3,705	-0,14436	-0,5297	0,46197
3,71	-0,13423	-0,54815	0,44844
3,715	-0,12518	-0,56084	0,43067
3,72	-0,11669	-0,57303	0,40681
3,725	-0,1065	-0,58471	0,36937
3,73	-0,09447	-0,59517	0,32841
3,735	-0,07862	-0,60552	0,28287
3,74	-0,05862	-0,61522	0,23434
3,745	-0,03631	-0,6237	0,1853
3,75	-0,00975	-0,63114	0,1374
3,755	0,01742	-0,63518	0,09026
3,76	0,04432	-0,6372	0,04364
3,765	0,07246	-0,63768	0,01552
3,77	0,09979	-0,6302	-0,00949
3,775	0,12636	-0,62119	-0,02844
3,78	0,15131	-0,61009	-0,0235
3,785	0,17636	-0,59217	-0,01111
3,79	0,20089	-0,57194	0,01208
3,795	0,22328	-0,54735	0,04611
3,8	0,24382	-0,51658	0,08432
3,805	0,25645	-0,48229	0,12837

3,81	0,26307	-0,4391	0,17346
3,815	0,26485	-0,39105	0,21802
3,82	0,24641	-0,33986	0,25434
3,825	0,22414	-0,27348	0,2888
3,83	0,19969	-0,20521	0,32114
3,835	0,18022	-0,13576	0,34277
3,84	0,16521	-0,06621	0,36201
3,845	0,16015	0,00217	0,37651
3,85	0,17283	0,06724	0,38231
3,855	0,19516	0,12535	0,38389
3,86	0,23489	0,17934	0,37701
3,865	0,28328	0,22369	0,36515
3,87	0,33514	0,26158	0,3508
3,875	0,39688	0,29538	0,33138
3,88	0,45778	0,31317	0,31184
3,885	0,51718	0,32728	0,29303
3,89	0,57321	0,33831	0,28014
3,895	0,62843	0,33503	0,26889
3,9	0,68173	0,32981	0,25954
3,905	0,72823	0,32269	0,25208
3,91	0,77129	0,31408	0,2448
3,915	0,80298	0,30562	0,23686
3,92	0,82191	0,29888	0,22768
3,925	0,83095	0,29448	0,21745
3,93	0,80621	0,29188	0,20449
3,935	0,77018	0,29428	0,1907
3,94	0,7269	0,29801	0,17644
3,945	0,65937	0,30232	0,15843
3,95	0,59225	0,30463	0,1397
3,955	0,52802	0,30549	0,11955
3,96	0,47263	0,30364	0,09578
3,965	0,42273	0,295	0,07033
3,97	0,38108	0,28339	0,0426
3,975	0,34492	0,26684	0,01336
3,98	0,31029	0,24606	-0,0164
3,985	0,27606	0,22322	-0,04546
3,99	0,23962	0,19564	-0,07375
3,995	0,20108	0,16685	-0,10131
4	0,16002	0,1376	-0,12482
4,005	0,11926	0,10665	-0,14813
4,01	0,07974	0,07616	-0,17165
4,015	0,04338	0,04667	-0,19731
4,02	0,00891	0,02157	-0,22421
4,025	-0,02387	-0,00172	-0,25353
4,03	-0,05688	-0,02119	-0,28581

4,035	-0,0911	-0,0353	-0,31953
4,04	-0,12743	-0,0463	-0,35635
4,045	-0,16571	-0,04901	-0,39389
4,05	-0,20473	-0,04785	-0,43149
4,055	-0,22775	-0,04434	-0,46994
4,06	-0,2456	-0,02593	-0,50796
4,065	-0,25557	-0,00524	-0,54531
4,07	-0,23698	0,01823	-0,57847
4,075	-0,21016	0,05203	-0,61008
4,08	-0,17392	0,08797	-0,63821
4,085	-0,13078	0,12621	-0,65992
4,09	-0,08762	0,16618	-0,67797
4,095	-0,04922	0,2061	-0,68703
4,1	-0,01753	0,24431	-0,69007
4,105	0,00858	0,2803	-0,68917
4,11	0,01806	0,31408	-0,67171
4,115	0,02536	0,3338	-0,65117
4,12	0,03252	0,35019	-0,62836
4,125	0,04028	0,36305	-0,59776
4,13	0,05128	0,35287	-0,56625
4,135	0,0666	0,33749	-0,53397
4,14	0,08628	0,31317	-0,50167
4,145	0,1069	0,27183	-0,46983
4,15	0,12841	0,22311	-0,4398
4,155	0,14922	0,16185	-0,41133
4,16	0,1695	0,09303	-0,38383
4,165	0,19824	0,02099	-0,36024
4,17	0,23051	-0,05592	-0,33746
4,175	0,26692	-0,13243	-0,31514
4,18	0,33527	-0,20746	-0,2967
4,185	0,4092	-0,25961	-0,27799
4,19	0,4885	-0,30801	-0,25849
4,195	0,56888	-0,35013	-0,23664
4,2	0,64613	-0,37646	-0,21361
4,205	0,71133	-0,39674	-0,18805
4,21	0,75982	-0,40545	-0,15998
4,215	0,79616	-0,40317	-0,13051
4,22	0,80184	-0,39458	-0,09734
4,225	0,79777	-0,36945	-0,06347
4,23	0,78957	-0,33868	-0,02951
4,235	0,75745	-0,30479	0,00188
4,24	0,728	-0,26995	0,03181
4,245	0,70173	-0,23682	0,05902
4,25	0,67838	-0,20831	0,07747
4,255	0,65598	-0,19806	0,09228

4,26	0,63408	-0,19504	0,10052
4,265	0,61175	-0,20381	0,10134
4,27	0,5888	-0,22423	0,09827
4,275	0,56878	-0,24972	0,08599
4,28	0,55152	-0,28361	0,06982
4,285	0,53735	-0,3193	0,05145
4,29	0,54314	-0,35487	0,01981
4,295	0,5532	-0,38185	-0,01322
4,3	0,56617	-0,40654	-0,04761
4,305	0,5729	-0,42784	-0,08494
4,31	0,5744	-0,43307	-0,12257
4,315	0,56297	-0,43352	-0,15955
4,32	0,52948	-0,42494	-0,19386
4,325	0,48326	-0,4021	-0,22599
4,33	0,41394	-0,3717	-0,25195
4,335	0,33429	-0,32602	-0,27369
4,34	0,25097	-0,2723	-0,29256
4,345	0,16304	-0,21463	-0,29949
4,35	0,07925	-0,15192	-0,30373
4,355	0,00088	-0,09045	-0,30524
4,36	-0,06028	-0,03214	-0,29276
4,365	-0,11772	0,00472	-0,27731
4,37	-0,17066	0,03605	-0,25713
4,375	-0,21664	0,05943	-0,22864
4,38	-0,26026	0,07143	-0,19614
4,385	-0,29612	0,0796	-0,15605
4,39	-0,32436	0,0819	-0,11075
4,395	-0,34649	0,08153	-0,06265
4,4	-0,34602	0,0802	-0,00766
4,405	-0,3381	0,07405	0,04803
4,41	-0,32504	0,06667	0,10353
4,415	-0,30838	0,05826	0,15486
4,42	-0,29396	0,0495	0,2043
4,425	-0,28588	0,04069	0,25014
4,43	-0,29413	0,03312	0,28685
4,435	-0,31047	0,03098	0,31935
4,44	-0,33874	0,03189	0,34292
4,445	-0,37431	0,03837	0,35787
4,45	-0,41191	0,04928	0,36742
4,455	-0,44985	0,06216	0,35955
4,46	-0,48487	0,07628	0,34551
4,465	-0,51704	0,0895	0,32776
4,47	-0,53828	0,10149	0,27654
4,475	-0,55841	0,10446	0,22351
4,48	-0,57776	0,10644	0,16837

4,485	-0,59593	0,108	0,11072
4,49	-0,6148	0,11247	0,05411
4,495	-0,63403	0,11943	0,00173
4,5	-0,65234	0,13179	-0,04358
4,505	-0,66962	0,15049	-0,08367
4,51	-0,68277	0,17267	-0,10933
4,515	-0,69312	0,20155	-0,12931
4,52	-0,70139	0,23172	-0,14634
4,525	-0,7044	0,26177	-0,1432
4,53	-0,70641	0,29132	-0,13834
4,535	-0,70755	0,31919	-0,1311
4,54	-0,70531	0,34482	-0,11543
4,545	-0,70232	0,36268	-0,09861
4,55	-0,69703	0,37813	-0,08189
4,555	-0,68686	0,38857	-0,06785
4,56	-0,67357	0,39061	-0,05637
4,565	-0,65094	0,38757	-0,05382
4,57	-0,62192	0,37094	-0,05774
4,575	-0,58805	0,34574	-0,0666
4,58	-0,53272	0,31468	-0,10255
4,585	-0,47281	0,25917	-0,14281
4,59	-0,40927	0,20007	-0,18638
4,595	-0,34136	0,13898	-0,23892
4,6	-0,27436	0,0791	-0,29152
4,605	-0,21166	0,0218	-0,34249
4,61	-0,15977	-0,02933	-0,38823
4,615	-0,11479	-0,06838	-0,43013
4,62	-0,08376	-0,10104	-0,46236
4,625	-0,0618	-0,12077	-0,48773
4,63	-0,04444	-0,13233	-0,50889
4,635	-0,03867	-0,13942	-0,51175
4,64	-0,03309	-0,13095	-0,51031
4,645	-0,02662	-0,11944	-0,50507
4,65	-0,02105	-0,10581	-0,47329
4,655	-0,01535	-0,08234	-0,43812
4,66	-0,0105	-0,05819	-0,39906
4,665	-0,00875	-0,03422	-0,35548
4,67	-0,00949	-0,01322	-0,31141
4,675	-0,01282	0,00561	-0,26974
4,68	-0,01613	0,01883	-0,2328
4,685	-0,01767	0,02617	-0,20009
4,69	-0,01064	0,02965	-0,18229
4,695	0,00284	0,02282	-0,16919
4,7	0,02161	0,01322	-0,1586
4,705	0,04067	0,00235	-0,16258

4,71	0,05817	-0,00692	-0,16662
4,715	0,06971	-0,01436	-0,17072
4,72	0,06106	-0,01819	-0,17543
4,725	0,04235	-0,01191	-0,17972
4,73	0,01023	-0,00173	-0,18296
4,735	-0,02958	0,01474	-0,1853
4,74	-0,06971	0,03671	-0,18732
4,745	-0,09881	0,06101	-0,18719
4,75	-0,11736	0,09036	-0,18622
4,755	-0,12673	0,12082	-0,18458
4,76	-0,08147	0,15154	-0,17652
4,765	-0,03107	0,18299	-0,16743
4,77	0,0231	0,21376	-0,15743
4,775	0,08414	0,24322	-0,14822
4,78	0,14256	0,26649	-0,13992
4,785	0,197	0,28742	-0,13455
4,79	0,24921	0,30361	-0,13423
4,795	0,30136	0,31287	-0,13679
4,8	0,35495	0,31821	-0,14437
4,805	0,41214	0,31485	-0,15333
4,81	0,47151	0,30717	-0,1621
4,815	0,50474	0,29711	-0,16361
4,82	0,52984	0,27915	-0,16171
4,825	0,54144	0,26043	-0,15516
4,83	0,48935	0,24139	-0,12904
4,835	0,41967	0,22216	-0,09817
4,84	0,32897	0,20329	-0,06071
4,845	0,22015	0,18505	-0,01454
4,85	0,10948	0,16762	0,03479
4,855	0,00701	0,1506	0,08992
4,86	-0,08129	0,1343	0,14802
4,865	-0,15708	0,11851	0,20737
4,87	-0,19229	0,10314	0,26727
4,875	-0,22	0,08976	0,32644
4,88	-0,24424	0,07697	0,384
4,885	-0,24439	0,06464	0,42215
4,89	-0,24523	0,05423	0,45477
4,895	-0,24379	0,04416	0,47683
4,9	-0,2275	0,03453	0,47647
4,905	-0,20222	0,02566	0,46619
4,91	-0,15932	0,01715	0,43908
4,915	-0,10208	0,00938	0,40062
4,92	-0,03792	0,00238	0,35694
4,925	0,02601	-0,004	0,30274
4,93	0,08435	-0,00906	0,24669

4,935	0,13489	-0,01354	0,1901
4,94	0,12367	-0,0177	0,14143
4,945	0,10209	-0,02322	0,09408
4,95	0,0702	-0,02887	0,04945
4,955	0,03247	-0,03473	0,01374
4,96	-0,00076	-0,04067	-0,01843
4,965	-0,01882	-0,04638	-0,04317
4,97	-0,01669	-0,05116	-0,05971
4,975	-0,00142	-0,05431	-0,07145
4,98	0,03908	-0,05607	-0,07242
4,985	0,08456	-0,05342	-0,06924
4,99	0,12953	-0,04916	-0,06378
4,995	0,18431	-0,04403	-0,05922
5	0,23449	-0,02939	-0,0556
5,005	0,28135	-0,01391	-0,0545
5,01	0,33167	0,00303	-0,06409
5,015	0,3857	0,02483	-0,07702
5,02	0,44498	0,04817	-0,09452
5,025	0,5067	0,07318	-0,11593
5,03	0,56749	0,09896	-0,13845
5,035	0,61217	0,12448	-0,1619
5,04	0,64247	0,14705	-0,18493
5,045	0,65984	0,1669	-0,20725
5,05	0,60934	0,18435	-0,22153
5,055	0,54632	0,18744	-0,23465
5,06	0,47328	0,18806	-0,24621
5,065	0,38633	0,1866	-0,24912
5,07	0,30251	0,18149	-0,24992
5,075	0,22813	0,17704	-0,24689
5,08	0,16977	0,17488	-0,23781
5,085	0,12055	0,17723	-0,22602
5,09	0,08514	0,18239	-0,21002
5,095	0,05425	0,19278	-0,19214
5,1	0,0237	0,20564	-0,17364
5,105	-0,00164	0,21942	-0,15677
5,11	-0,02887	0,23652	-0,14062
5,115	-0,05692	0,2534	-0,12549
5,12	-0,07176	0,26989	-0,11792
5,125	-0,08263	0,28367	-0,11129
5,13	-0,088	0,29665	-0,10575
5,135	-0,08776	0,30733	-0,10161
5,14	-0,08635	0,31083	-0,09757
5,145	-0,08854	0,31008	-0,0932
5,15	-0,09789	0,29844	-0,08812
5,155	-0,11375	0,27645	-0,08239

5,16	-0,14777	0,24736	-0,07383
5,165	-0,18756	0,19483	-0,06456
5,17	-0,23026	0,13676	-0,05491
5,175	-0,27025	0,07592	-0,04262
5,18	-0,30604	0,00926	-0,03053
5,185	-0,33453	-0,05505	-0,01899
5,19	-0,34926	-0,11433	-0,00931
5,195	-0,35861	-0,16006	-0,00094
5,2	-0,36179	-0,19994	0,00464
5,205	-0,36264	-0,22871	0,00735
5,21	-0,36398	-0,24727	0,00839
5,215	-0,36742	-0,26022	0,00515
5,22	-0,37303	-0,25515	0,00053
5,225	-0,38013	-0,24385	-0,00482
5,23	-0,39077	-0,22873	-0,01376
5,235	-0,40044	-0,17343	-0,02283
5,24	-0,40848	-0,11526	-0,03192
5,245	-0,41376	-0,05433	-0,03982
5,25	-0,41775	0,00648	-0,04714
5,255	-0,42037	0,06442	-0,05266
5,26	-0,42212	0,11327	-0,05522
5,265	-0,42352	0,14731	-0,05589
5,27	-0,42225	0,17159	-0,05202
5,275	-0,41985	0,17398	-0,04595
5,28	-0,41638	0,16725	-0,0387
5,285	-0,39623	0,15626	-0,03163
5,29	-0,3725	0,13308	-0,02533
5,295	-0,34384	0,11158	-0,02078
5,3	-0,29902	0,09302	-0,02552
5,305	-0,25018	0,08337	-0,0329
5,31	-0,19755	0,07656	-0,04405
5,315	-0,14382	0,07396	-0,05928
5,32	-0,09141	0,07671	-0,07558
5,325	-0,04572	0,08156	-0,09319
5,33	-0,00658	0,09266	-0,11046
5,335	0,02693	0,10792	-0,1269
5,34	0,03429	0,12616	-0,13895
5,345	0,03638	0,15772	-0,15014
5,35	0,03444	0,19208	-0,16051
5,355	0,01818	0,22789	-0,16257
5,36	0,00116	0,25686	-0,16296
5,365	-0,01602	0,28213	-0,15961
5,37	-0,03304	0,29923	-0,14789
5,375	-0,04914	0,29982	-0,13235
5,38	-0,06327	0,29231	-0,11034

5,385	-0,07637	0,27122	-0,08474
5,39	-0,08905	0,24246	-0,05805
5,395	-0,09667	0,21073	-0,03242
5,4	-0,10347	0,17524	-0,00878
5,405	-0,10907	0,14079	0,0124
5,41	-0,09346	0,10802	0,0158
5,415	-0,07431	0,09058	0,01662
5,42	-0,05031	0,07498	0,01451
5,425	-0,01921	0,06207	0,00866
5,43	0,01387	0,05572	0,00271
5,435	0,0466	0,05163	-0,00207
5,44	0,07522	0,05217	-0,00459
5,445	0,09934	0,05702	-0,00507
5,45	0,10946	0,06417	0,00212
5,455	0,11332	0,07483	0,01096
5,46	0,11347	0,08678	0,0201
5,465	0,09453	0,09943	0,04991
5,47	0,07585	0,08901	0,0816
5,475	0,05743	0,07512	0,11791
5,48	0,03663	0,0542	0,16899
5,485	0,01562	0,01171	0,22457
5,49	-0,00757	-0,03772	0,28448
5,495	-0,03548	-0,09649	0,34506
5,5	-0,06716	-0,16223	0,40371
5,505	-0,10845	-0,22988	0,45141
5,51	-0,15467	-0,29896	0,49171
5,515	-0,20378	-0,3667	0,52604
5,52	-0,26251	-0,4326	0,51244
5,525	-0,31984	-0,48087	0,49274
5,53	-0,37427	-0,52609	0,46609
5,535	-0,42018	-0,56712	0,41654
5,54	-0,46263	-0,59146	0,36216
5,545	-0,50013	-0,61093	0,30088
5,55	-0,53186	-0,62215	0,23153
5,555	-0,56116	-0,622	0,1595
5,56	-0,58225	-0,61627	0,08496
5,565	-0,59877	-0,59952	0,01022
5,57	-0,61143	-0,57737	-0,06368
5,575	-0,58954	-0,55232	-0,12165
5,58	-0,55841	-0,51867	-0,17482
5,585	-0,51618	-0,48371	-0,22146
5,59	-0,42473	-0,44786	-0,23274
5,595	-0,32292	-0,41146	-0,23632
5,6	-0,20937	-0,37512	-0,22985
5,605	-0,08416	-0,33934	-0,21067

5,61	0,04281	-0,30516	-0,1875
5,615	0,16783	-0,27193	-0,15989
5,62	0,28716	-0,24088	-0,13156
5,625	0,40078	-0,21144	-0,10416
5,63	0,49239	-0,18301	-0,08415
5,635	0,57847	-0,15845	-0,06554
5,64	0,66053	-0,13442	-0,0477
5,645	0,70875	-0,11072	-0,0407
5,65	0,75279	-0,09304	-0,03469
5,655	0,78853	-0,07649	-0,03112
5,66	0,80218	-0,06236	-0,03445
5,665	0,80661	-0,05442	-0,04041
5,67	0,79462	-0,04931	-0,04955
5,675	0,76977	-0,04895	-0,06009
5,68	0,73843	-0,05195	-0,07056
5,685	0,69321	-0,05628	-0,07571
5,69	0,64566	-0,06216	-0,07825
5,695	0,59783	-0,06772	-0,07872
5,7	0,54808	-0,07264	-0,05316
5,705	0,49921	-0,0672	-0,02573
5,71	0,45057	-0,06098	0,00397
5,715	0,39908	-0,05382	0,03709
5,72	0,34527	-0,04427	0,06981
5,725	0,28689	-0,03444	0,10011
5,73	0,22371	-0,02416	0,12634
5,735	0,15812	-0,01322	0,14942
5,74	0,08985	-0,0019	0,16406
5,745	0,02194	0,01035	0,17562
5,75	-0,04477	0,02343	0,18569
5,755	-0,10085	0,03708	0,18294
5,76	-0,15404	0,04429	0,17907
5,765	-0,20344	0,05028	0,17326
5,77	-0,24083	0,05377	0,16046
5,775	-0,27544	0,04749	0,14618
5,78	-0,30514	0,03831	0,13112
5,785	-0,3273	0,02591	0,11724
5,79	-0,34515	0,01196	0,105
5,795	-0,34951	-0,00146	0,09932
5,8	-0,34498	-0,01052	0,09837
5,805	-0,33378	-0,01559	0,10113
5,81	-0,29109	-0,01729	0,12495
5,815	-0,24198	-0,00032	0,15201
5,82	-0,18763	0,01973	0,18171
5,825	-0,12497	0,04255	0,21976
5,83	-0,06268	0,07654	0,25857

5,835	-0,00395	0,11218	0,29766
5,84	0,04576	0,15012	0,33597
5,845	0,08964	0,19147	0,37305
5,85	0,122	0,23393	0,40606
5,855	0,14736	0,27724	0,43584
5,86	0,16911	0,32023	0,46329
5,865	0,17909	0,36215	0,47906
5,87	0,18777	0,39513	0,49159
5,875	0,19567	0,42482	0,5009
5,88	0,19257	0,45094	0,48774
5,885	0,18768	0,45615	0,47093
5,89	0,17987	0,45786	0,44902
5,895	0,16702	0,45552	0,41851
5,9	0,15203	0,4481	0,385
5,905	0,13516	0,43957	0,34717
5,91	0,11865	0,4311	0,30695
5,915	0,10356	0,42402	0,26603
5,92	0,09464	0,4183	0,22349
5,925	0,08862	0,41716	0,18112
5,93	0,08451	0,41717	0,13902
5,935	0,08272	0,41761	0,09799
5,94	0,07978	0,42301	0,05731
5,945	0,07427	0,42817	0,01745
5,95	0,06283	0,43314	-0,01913
5,955	0,04867	0,43828	-0,05408
5,96	0,03164	0,44311	-0,08555
5,965	0,01425	0,44712	-0,11286
5,97	-0,00177	0,44985	-0,13743
5,975	-0,01222	0,45161	-0,15461
5,98	-0,01848	0,4502	-0,1687
5,985	-0,02165	0,44735	-0,18093
5,99	-0,01713	0,44361	-0,17692
5,995	-0,01252	0,43421	-0,17166
6	-0,00883	0,42423	-0,16463
6,005	-0,00919	0,41364	-0,15182
6,01	-0,01211	0,40209	-0,13764
6,015	-0,01861	0,39024	-0,12159
6,02	-0,02808	0,37815	-0,10388
6,025	-0,03833	0,366	-0,08588
6,03	-0,05	0,35382	-0,06844
6,035	-0,06131	0,34169	-0,05161
6,04	-0,07237	0,32961	-0,0354
6,045	-0,09283	0,31746	-0,02555
6,05	-0,11615	0,30328	-0,01694
6,055	-0,1436	0,2884	-0,01007

6,06	-0,18428	0,27243	-0,01189
6,065	-0,22853	0,25231	-0,01531
6,07	-0,27538	0,231	-0,02062
6,075	-0,32064	0,2086	-0,02789
6,08	-0,36262	0,18622	-0,03557
6,085	-0,39394	0,16475	-0,04327
6,09	-0,41597	0,14703	-0,05039
6,095	-0,43116	0,13307	-0,05679
6,1	-0,42051	0,12205	-0,05786
6,105	-0,40544	0,12209	-0,058
6,11	-0,3876	0,12427	-0,05736
6,115	-0,35223	0,12761	-0,05107
6,12	-0,31488	0,13174	-0,04412
6,125	-0,27349	0,13435	-0,03614
6,13	-0,2223	0,13388	-0,02621
6,135	-0,16621	0,12719	-0,016
6,14	-0,10236	0,11764	-0,0064
6,145	-0,03356	0,10239	0,00177
6,15	0,0369	0,08312	0,00856
6,155	0,10317	0,06154	0,00898
6,16	0,16579	0,0288	0,00701
6,165	0,22426	-0,00714	0,0031
6,17	0,24811	-0,04568	-0,01836
6,175	0,26756	-0,10471	-0,04194
6,18	0,28223	-0,1653	-0,06861
6,185	0,29066	-0,22617	-0,1014
6,19	0,29912	-0,28104	-0,13596
6,195	0,30908	-0,33086	-0,17249
6,2	0,3214	-0,36761	-0,20967
6,205	0,33522	-0,38822	-0,24645
6,21	0,34993	-0,39809	-0,27988
6,215	0,36275	-0,37983	-0,3118
6,22	0,37321	-0,35271	-0,34283
6,225	0,38363	-0,3215	-0,36049
6,23	0,39271	-0,26779	-0,37657
6,235	0,40195	-0,21554	-0,38966
6,24	0,41828	-0,16572	-0,39206
6,245	0,43806	-0,12332	-0,39121
6,25	0,46245	-0,08423	-0,3853
6,255	0,48968	-0,05264	-0,37411
6,26	0,51687	-0,03197	-0,36045
6,265	0,5379	-0,01808	-0,34226
6,27	0,55301	-0,0255	-0,32222
6,275	0,56271	-0,0449	-0,30134
6,28	0,54031	-0,07296	-0,28078

6,285	0,51299	-0,15225	-0,26024
6,29	0,48114	-0,23847	-0,23987
6,295	0,43602	-0,32993	-0,22148
6,3	0,38946	-0,42505	-0,20337
6,305	0,34084	-0,51679	-0,18579
6,31	0,28809	-0,59816	-0,1691
6,315	0,23316	-0,65936	-0,15266
6,32	0,17318	-0,70843	-0,13693
6,325	0,10968	-0,73189	-0,12167
6,33	0,04436	-0,74138	-0,10674
6,335	-0,0166	-0,74349	-0,09335
6,34	-0,07504	-0,71814	-0,08058
6,345	-0,12896	-0,68944	-0,06844
6,35	-0,1528	-0,65836	-0,05754
6,355	-0,16932	-0,6142	-0,04698
6,36	-0,17605	-0,56843	-0,03679
6,365	-0,16975	-0,52185	-0,02704
6,37	-0,15972	-0,47775	-0,01744
6,375	-0,14559	-0,43614	-0,00838
6,38	-0,13097	-0,40372	0,00006
6,385	-0,11704	-0,38111	0,00795
6,39	-0,10232	-0,36582	0,01421
6,395	-0,08701	-0,37336	0,01986
6,4	-0,07072	-0,38695	0,0252
6,405	-0,0562	-0,40354	0,03181
6,41	-0,04138	-0,41395	0,03923
6,415	-0,02823	-0,41969	0,04828
6,42	-0,02447	-0,41534	0,06126
6,425	-0,02609	-0,38662	0,07605
6,43	-0,03789	-0,34757	0,09351
6,435	-0,05859	-0,29231	0,11273
6,44	-0,08354	-0,22547	0,13249
6,445	-0,1135	-0,15396	0,15261
6,45	-0,14259	-0,07263	0,17241
6,455	-0,16969	0,00992	0,19187
6,46	-0,18395	0,09249	0,20612
6,465	-0,19525	0,16838	0,22005
6,47	-0,20346	0,24297	0,23336
6,475	-0,20853	0,31418	0,24401
6,48	-0,21423	0,3695	0,25362
6,485	-0,22163	0,41823	0,261
6,49	-0,23052	0,45281	0,26535
6,495	-0,23967	0,46861	0,26794
6,5	-0,24594	0,47329	0,26749
6,505	-0,2488	0,45194	0,26555

6,51	-0,24851	0,41986	0,26292
6,515	-0,23881	0,38221	0,26537
6,52	-0,22716	0,32691	0,26927
6,525	-0,21443	0,27155	0,27585
6,53	-0,20205	0,21758	0,2941
6,535	-0,19141	0,17085	0,31526
6,54	-0,18289	0,12671	0,33995
6,545	-0,17469	0,08672	0,3677
6,55	-0,16545	0,05177	0,39595
6,555	-0,1498	0,01903	0,42394
6,56	-0,12814	-0,00884	0,45093
6,565	-0,10166	-0,03393	0,47669
6,57	-0,05833	-0,05703	0,4916
6,575	-0,01222	-0,07063	0,50476
6,58	0,03497	-0,08214	0,51589
6,585	0,08027	-0,092	0,5107
6,59	0,12255	-0,09846	0,50164
6,595	0,15966	-0,10452	0,48524
6,6	0,18914	-0,11039	0,45481
6,605	0,21539	-0,1161	0,41833
6,61	0,23664	-0,12176	0,3723
6,615	0,25573	-0,12589	0,32177
6,62	0,2739	-0,12806	0,27014
6,625	0,28435	-0,12854	0,22155
6,63	0,29261	-0,12059	0,17571
6,635	0,29845	-0,10994	0,13325
6,64	0,28752	-0,09714	0,12153
6,645	0,27352	-0,07543	0,11476
6,65	0,25646	-0,05296	0,11559
6,655	0,23808	-0,03015	0,13251
6,66	0,22087	-0,00872	0,15525
6,665	0,20881	0,0114	0,18846
6,67	0,20361	0,02785	0,2302
6,675	0,2034	0,04013	0,27615
6,68	0,21454	0,04956	0,33115
6,685	0,2289	0,0497	0,38824
6,69	0,2444	0,04697	0,44615
6,695	0,25936	0,04277	0,48755
6,7	0,27161	0,02982	0,52504
6,705	0,27969	0,01716	0,55425
6,71	0,27909	0,00544	0,55674
6,715	0,27539	-0,00205	0,54941
6,72	0,26743	-0,00728	0,52626
6,725	0,25619	-0,00789	0,48846
6,73	0,24377	-0,00346	0,44409

6,735	0,22765	0,00343	0,38617
6,74	0,21008	0,0166	0,32409
6,745	0,19147	0,03159	0,26034
6,75	0,16558	0,04733	0,19275
6,755	0,13793	0,07289	0,12561
6,76	0,10855	0,09925	0,0599
6,765	0,07855	0,12667	0,00359
6,77	0,04904	0,1567	-0,04905
6,775	0,02206	0,1874	-0,09372
6,78	0,00035	0,21808	-0,12571
6,785	-0,01779	0,24697	-0,15072
6,79	-0,02926	0,27422	-0,16152
6,795	-0,03729	0,29697	-0,16565
6,8	-0,04392	0,31692	-0,16671
6,805	-0,05397	0,33539	-0,16357
6,81	-0,06664	0,35241	-0,16161
6,815	-0,08322	0,37049	-0,16227
6,82	-0,11645	0,39042	-0,17782
6,825	-0,15379	0,41655	-0,19737
6,83	-0,19577	0,44411	-0,22259
6,835	-0,24176	0,47181	-0,25544
6,84	-0,2879	0,49563	-0,29105
6,845	-0,33232	0,51551	-0,33116
6,85	-0,37393	0,52472	-0,37346
6,855	-0,41316	0,52458	-0,41647
6,86	-0,44455	0,51767	-0,45778
6,865	-0,47484	0,48672	-0,49815
6,87	-0,50464	0,45092	-0,53702
6,875	-0,5226	0,41202	-0,55587
6,88	-0,5391	0,35378	-0,56976
6,885	-0,55161	0,29348	-0,57396
6,89	-0,55233	0,22978	-0,55597
6,895	-0,54718	0,15878	-0,52843
6,9	-0,5317	0,085	-0,48466
6,905	-0,50854	0,00893	-0,42944
6,91	-0,48197	-0,06648	-0,3689
6,915	-0,45199	-0,13942	-0,29693
6,92	-0,4233	-0,19635	-0,2228
6,925	-0,39683	-0,24558	-0,14801
6,93	-0,38791	-0,28841	-0,07763
6,935	-0,38164	-0,27433	-0,00864
6,94	-0,37771	-0,25514	0,05737
6,945	-0,37459	-0,23056	0,1132
6,95	-0,36966	-0,20043	0,16479
6,955	-0,36009	-0,17189	0,20707

6,96	-0,34499	-0,15033	0,23815
6,965	-0,32664	-0,13948	0,26232
6,97	-0,30257	-0,13629	0,26826
6,975	-0,27791	-0,15266	0,26714
6,98	-0,25384	-0,17522	0,26219
6,985	-0,22234	-0,20054	0,24013
6,99	-0,1907	-0,25598	0,21679
6,995	-0,15735	-0,31299	0,19228
7	-0,11418	-0,37302	0,16584
7,005	-0,06693	-0,44546	0,13942
7,01	-0,01442	-0,52067	0,11353
7,015	0,04149	-0,59635	0,0885
7,02	0,09744	-0,66679	0,06388
7,025	0,14758	-0,73126	0,04088
7,03	0,19143	-0,77391	0,0188
7,035	0,22965	-0,80092	-0,00248
7,04	0,2423	-0,81547	-0,01728
7,045	0,25004	-0,76106	-0,03078
7,05	0,25388	-0,69545	-0,04285
7,055	0,24889	-0,62013	-0,05074
7,06	0,24407	-0,5179	-0,05752
7,065	0,24009	-0,4131	-0,06282
7,07	0,23632	-0,30783	-0,06627
7,075	0,2326	-0,20553	-0,06885
7,08	0,22687	-0,10682	-0,06946
7,085	0,21864	-0,01836	-0,06854
7,09	0,20837	0,06269	-0,06648
7,095	0,19344	0,13824	-0,05996
7,1	0,17745	0,18271	-0,05209
7,105	0,16115	0,21893	-0,04306
7,11	0,14522	0,24643	-0,03029
7,115	0,12983	0,21824	-0,01734
7,12	0,11433	0,18049	-0,00481
7,125	0,09591	0,13104	0,00587
7,13	0,07527	0,06657	0,01512
7,135	0,04919	-0,00135	0,02093
7,14	0,01816	-0,06958	0,0233
7,145	-0,01582	-0,13315	0,0232
7,15	-0,05645	-0,19126	0,01463
7,155	-0,0977	-0,2297	0,0034
7,16	-0,13851	-0,26232	-0,00954
7,165	-0,17847	-0,29166	-0,03337
7,17	-0,21742	-0,29458	-0,0584
7,175	-0,25542	-0,29631	-0,08519
7,18	-0,29265	-0,29532	-0,11541

7,185	-0,33015	-0,28416	-0,14627
7,19	-0,36735	-0,26929	-0,1771
7,195	-0,40318	-0,24835	-0,20687
7,2	-0,43749	-0,22223	-0,2355
7,205	-0,46427	-0,19396	-0,25967
7,21	-0,48718	-0,16461	-0,28146
7,215	-0,50723	-0,13622	-0,30151
7,22	-0,50115	-0,10947	-0,30624
7,225	-0,4928	-0,10856	-0,30851
7,23	-0,48147	-0,11111	-0,30723
7,235	-0,46099	-0,11803	-0,297
7,24	-0,43813	-0,13473	-0,28392
7,245	-0,41094	-0,15351	-0,26682
7,25	-0,37781	-0,17433	-0,24588
7,255	-0,34142	-0,1965	-0,22329
7,26	-0,29748	-0,21884	-0,19715
7,265	-0,2503	-0,24239	-0,16925
7,27	-0,20177	-0,26678	-0,14009
7,275	-0,15513	-0,29183	-0,1034
7,28	-0,11057	-0,31668	-0,06484
7,285	-0,06962	-0,34136	-0,02396
7,29	-0,04621	-0,36479	0,02531
7,295	-0,02743	-0,37711	0,07622
7,3	-0,01576	-0,3854	0,12898
7,305	-0,01419	-0,38674	0,18346
7,31	-0,01714	-0,37774	0,23798
7,315	-0,03111	-0,36374	0,29253
7,32	-0,05257	-0,34035	0,34656
7,325	-0,07944	-0,31211	0,39994
7,33	-0,12891	-0,28139	0,4489
7,335	-0,18384	-0,23948	0,49644
7,34	-0,24248	-0,19625	0,5421
7,345	-0,30131	-0,15232	0,57189
7,35	-0,35725	-0,10623	0,59716
7,355	-0,40516	-0,06074	0,6139
7,36	-0,43411	-0,01743	0,6134
7,365	-0,45287	0,01908	0,60523
7,37	-0,45329	0,05133	0,58366
7,375	-0,4418	0,07354	0,55389
7,38	-0,42485	0,08734	0,5206
7,385	-0,39412	0,09597	0,47942
7,39	-0,36218	0,08785	0,4375
7,395	-0,33012	0,07587	0,39631
7,4	-0,28856	0,06156	0,36558
7,405	-0,24572	0,02746	0,33667

7,41	-0,20129	-0,00766	0,31136
7,415	-0,15702	-0,04399	0,29693
7,42	-0,11355	-0,08218	0,28703
7,425	-0,07613	-0,12043	0,28697
7,43	-0,04898	-0,15683	0,29703
7,435	-0,03023	-0,18933	0,31284
7,44	-0,03458	-0,21822	0,34259
7,445	-0,04834	-0,23368	0,37592
7,45	-0,06722	-0,24363	0,41044
7,455	-0,09255	-0,25031	0,43533
7,46	-0,11389	-0,23011	0,45584
7,465	-0,12767	-0,20813	0,46812
7,47	-0,12132	-0,18346	0,45342
7,475	-0,10709	-0,15077	0,42844
7,48	-0,08286	-0,11652	0,38799
7,485	-0,05211	-0,08001	0,33203
7,49	-0,02049	-0,04079	0,26913
7,495	0,01164	0	0,19128
7,5	0,04183	0,04443	0,10819
7,505	0,07066	0,09092	0,02282
7,51	0,10367	0,13854	-0,06935
7,515	0,13881	0,18242	-0,16017
7,52	0,17647	0,22494	-0,24751
7,525	0,21305	0,26493	-0,31425
7,53	0,24872	0,29395	-0,3725
7,535	0,27883	0,31938	-0,41376
7,54	0,2958	0,33921	-0,42757
7,545	0,30403	0,35193	-0,42657
7,55	0,29457	0,3616	-0,39521
7,555	0,27535	0,36452	-0,34821
7,56	0,25159	0,3639	-0,29336
7,565	0,22258	0,3609	-0,2158
7,57	0,19633	0,34302	-0,13637
7,575	0,17428	0,32122	-0,0569
7,58	0,16391	0,2954	0,01615
7,585	0,15614	0,25546	0,08559
7,59	0,1496	0,21359	0,14781
7,595	0,14031	0,17135	0,19547
7,6	0,12755	0,13303	0,23563
7,605	0,10778	0,09851	0,25881
7,61	0,08286	0,07367	0,26804
7,615	0,05536	0,05749	0,26802
7,62	0,02241	0,047	0,23703
7,625	-0,0093	0,05612	0,19816
7,63	-0,03922	0,06884	0,15432

7,635	-0,07477	0,08343	0,09782
7,64	-0,11094	0,11516	0,04154
7,645	-0,14985	0,14836	-0,01231
7,65	-0,19694	0,1841	-0,05729
7,655	-0,24833	0,22554	-0,09725
7,66	-0,30462	0,26895	-0,12747
7,665	-0,36246	0,31299	-0,14929
7,67	-0,41925	0,35509	-0,16652
7,675	-0,46472	0,39427	-0,17185
7,68	-0,5036	0,42006	-0,17355
7,685	-0,53728	0,43994	-0,17323
7,69	-0,5255	0,4558	-0,15411
7,695	-0,50931	0,42457	-0,1332
7,7	-0,48775	0,39071	-0,10986
7,705	-0,45735	0,35345	-0,08266
7,71	-0,42645	0,30995	-0,05443
7,715	-0,39704	0,26638	-0,02644
7,72	-0,37136	0,22474	-0,00065
7,725	-0,34886	0,18704	0,02301
7,73	-0,33166	0,15249	0,0406
7,735	-0,31622	0,12634	0,05511
7,74	-0,30106	0,10328	0,06765
7,745	-0,28386	0,08176	0,07173
7,75	-0,26394	0,07813	0,07431
7,755	-0,24052	0,07594	0,0748
7,76	-0,20969	0,07618	0,06695
7,765	-0,17687	0,08833	0,05588
7,77	-0,142	0,10296	0,03908
7,775	-0,10601	0,12006	0,01409
7,78	-0,07036	0,13826	-0,01556
7,785	-0,03425	0,15595	-0,05474
7,79	0,00236	0,16961	-0,09916
7,795	0,0398	0,17968	-0,14655
7,8	0,08126	0,18663	-0,20364
7,805	0,125	0,17408	-0,26145
7,81	0,17029	0,15784	-0,31912
7,815	0,20611	0,13799	-0,37286
7,82	0,23796	0,10298	-0,42403
7,825	0,25989	0,06502	-0,46979
7,83	0,26069	0,02292	-0,5043
7,835	0,24974	-0,02506	-0,53223
7,84	0,21757	-0,07509	-0,54571
7,845	0,17294	-0,12761	-0,54865
7,85	0,12307	-0,18062	-0,54502
7,855	0,06688	-0,23321	-0,51989

7,86	0,01381	-0,28139	-0,48924
7,865	-0,03452	-0,32758	-0,45451
7,87	-0,05817	-0,37158	-0,40318
7,875	-0,07717	-0,39898	-0,35041
7,88	-0,09058	-0,4231	-0,29698
7,885	-0,0947	-0,44177	-0,24543
7,89	-0,09675	-0,44875	-0,19589
7,895	-0,09297	-0,45064	-0,15275
7,9	-0,08214	-0,44282	-0,1173
7,905	-0,06544	-0,42662	-0,08779
7,91	-0,0275	-0,40547	-0,07811
7,915	0,02033	-0,36886	-0,07529
7,92	0,07523	-0,3285	-0,07671
7,925	0,13658	-0,28638	-0,10005
7,93	0,196	-0,22718	-0,12542
7,935	0,24822	-0,16724	-0,15308
7,94	0,27496	-0,1061	-0,1835
7,945	0,2895	-0,04279	-0,21409
7,95	0,28612	0,02078	-0,24359
7,955	0,26971	0,0826	-0,27152
7,96	0,24981	0,14037	-0,29868
7,965	0,23022	0,19464	-0,32287
7,97	0,21647	0,23589	-0,34625
7,975	0,20848	0,27023	-0,36901
7,98	0,22012	0,29936	-0,38228
7,985	0,23305	0,28613	-0,39387
7,99	0,24519	0,26789	-0,40318
7,995	0,25341	0,244	-0,40771
8	0,25743	0,20681	-0,41006
8,005	0,25719	0,16768	-0,41023
8,01	0,25691	0,12773	-0,40896
8,015	0,25914	0,08912	-0,40696
8,02	0,26926	0,05245	-0,40353
8,025	0,28628	0,02024	-0,39889
8,03	0,30734	-0,00978	-0,39295
8,035	0,318	-0,03881	-0,37577
8,04	0,32266	-0,0629	-0,35499
8,045	0,31748	-0,08715	-0,32972
8,05	0,27354	-0,11149	-0,28676
8,055	0,21879	-0,13302	-0,24047
8,06	0,15366	-0,15401	-0,19085
8,065	0,0856	-0,17443	-0,13935
8,07	0,02222	-0,19499	-0,08929
8,075	-0,02358	-0,21613	-0,04378
8,08	-0,05207	-0,2404	-0,00336

8,085	-0,06801	-0,26794	0,03258
8,09	-0,04565	-0,29795	0,04983
8,095	-0,01822	-0,33562	0,0623
8,1	0,01054	-0,37458	0,07135
8,105	0,05837	-0,41336	0,05769
8,11	0,10581	-0,43875	0,03998
8,115	0,156	-0,45872	0,01534
8,12	0,21949	-0,46895	-0,02313
8,125	0,29111	-0,45849	-0,06644
8,13	0,37554	-0,43894	-0,11518
8,135	0,46808	-0,40349	-0,16518
8,14	0,56254	-0,35719	-0,21359
8,145	0,64071	-0,30574	-0,25103
8,15	0,70774	-0,23917	-0,28265
8,155	0,76353	-0,16942	-0,30916
8,16	0,73169	-0,09799	-0,28918
8,165	0,68836	-0,01899	-0,26366
8,17	0,63248	0,06028	-0,23053
8,175	0,56167	0,13817	-0,18205
8,18	0,49177	0,20577	-0,1291
8,185	0,42906	0,26778	-0,07089
8,19	0,37759	0,31604	-0,00975
8,195	0,33395	0,34702	0,05153
8,2	0,30356	0,36692	0,10885
8,205	0,27445	0,35876	0,16417
8,21	0,24356	0,3407	0,21808
8,215	0,22406	0,31791	0,24816
8,22	0,20226	0,28252	0,27451
8,225	0,18089	0,2493	0,29427
8,23	0,17477	0,22097	0,29173
8,235	0,17569	0,21033	0,28207
8,24	0,18716	0,20614	0,26304
8,245	0,20771	0,21228	0,23541
8,25	0,23087	0,22997	0,20418
8,255	0,24933	0,25301	0,16975
8,26	0,26012	0,28873	0,13487
8,265	0,26304	0,33021	0,10052
8,27	0,22604	0,37537	0,07925
8,275	0,18161	0,43681	0,0603
8,28	0,13182	0,50044	0,04424
8,285	0,07684	0,56457	0,03901
8,29	0,02519	0,61631	0,03651
8,295	-0,0188	0,66238	0,03782
8,3	-0,0512	0,69596	0,04414
8,305	-0,07764	0,70682	0,05286

8,31	-0,0952	0,70561	0,06498
8,315	-0,11034	0,68116	0,07938
8,32	-0,12559	0,6446	0,09553
8,325	-0,13506	0,60273	0,11403
8,33	-0,14487	0,55049	0,13403
8,335	-0,15392	0,49963	0,15589
8,34	-0,14747	0,45199	0,1796
8,345	-0,13673	0,42496	0,20374
8,35	-0,12065	0,40268	0,22789
8,355	-0,10014	0,38754	0,2512
8,36	-0,07937	0,38564	0,27353
8,365	-0,06388	0,38908	0,29377
8,37	-0,05701	0,40353	0,31176
8,375	-0,05755	0,42684	0,32765
8,38	-0,07935	0,45551	0,33569
8,385	-0,10816	0,4987	0,34068
8,39	-0,14088	0,54568	0,34308
8,395	-0,17748	0,59441	0,32289
8,4	-0,21075	0,62327	0,29755
8,405	-0,23776	0,64627	0,26423
8,41	-0,25221	0,65713	0,21012
8,415	-0,26137	0,6352	0,14769
8,42	-0,26411	0,59996	0,07339
8,425	-0,26411	0,54365	-0,00915
8,43	-0,26437	0,47121	-0,09455
8,435	-0,26581	0,39213	-0,18166
8,44	-0,26913	0,30079	-0,26748
8,445	-0,27365	0,20776	-0,35157
8,45	-0,28035	0,11502	-0,40402
8,455	-0,28534	0,03431	-0,45216
8,46	-0,28807	-0,04417	-0,49316
8,465	-0,29011	-0,11823	-0,51141
8,47	-0,29216	-0,17346	-0,5218
8,475	-0,29725	-0,22171	-0,51843
8,48	-0,30915	-0,2553	-0,49843
8,485	-0,32606	-0,26874	-0,46944
8,49	-0,35267	-0,27045	-0,4213
8,495	-0,38375	-0,24514	-0,36498
8,5	-0,41637	-0,20769	-0,3044
8,505	-0,43534	-0,16411	-0,23779
8,51	-0,44819	-0,10789	-0,17177
8,515	-0,45184	-0,05315	-0,10839
8,52	-0,42389	-0,00252	-0,06098
8,525	-0,38744	0,02794	-0,02061
8,53	-0,3413	0,05191	0,01203

8,535	-0,28753	0,06619	0,03542
8,54	-0,23317	0,06848	0,05499
8,545	-0,17989	0,06587	0,06867
8,55	-0,12943	0,0536	0,07969
8,555	-0,08124	0,03626	0,08944
8,56	-0,04015	0,0159	0,09794
8,565	0,00178	-0,01662	0,10517
8,57	0,04488	-0,05215	0,1112
8,575	0,07581	-0,08975	0,1183
8,58	0,10414	-0,12283	0,12512
8,585	0,12465	-0,15385	0,13252
8,59	0,12518	-0,17882	0,14225
8,595	0,11477	-0,18913	0,15316
8,6	0,08557	-0,19186	0,16419
8,605	0,04488	-0,18113	0,17447
8,61	-0,00013	-0,16233	0,18342
8,615	-0,04335	-0,14033	0,17939
8,62	-0,08095	-0,11449	0,17111
8,625	-0,11144	-0,09038	0,15896
8,63	-0,09514	-0,06885	0,11129
8,635	-0,07131	-0,06507	0,061
8,64	-0,03888	-0,06429	0,00609
8,645	0,00597	-0,06749	-0,05707
8,65	0,05263	-0,07839	-0,12216
8,655	0,1012	-0,09177	-0,18779
8,66	0,15084	-0,10986	-0,2521
8,665	0,20123	-0,1324	-0,31462
8,67	0,25638	-0,15778	-0,36911
8,675	0,3156	-0,18948	-0,42152
8,68	0,37842	-0,22386	-0,47345
8,685	0,4236	-0,25988	-0,4993
8,69	0,466	-0,27834	-0,52318
8,695	0,49988	-0,29316	-0,54188
8,7	0,50139	-0,30037	-0,54124
8,705	0,48961	-0,28343	-0,53518
8,71	0,45821	-0,2579	-0,52135
8,715	0,41051	-0,22031	-0,50137
8,72	0,35735	-0,17378	-0,47974
8,725	0,29975	-0,12409	-0,45631
8,73	0,24536	-0,07073	-0,43402
8,735	0,19512	-0,01792	-0,41273
8,74	0,16184	0,03358	-0,39948
8,745	0,13057	0,07172	-0,38732
8,75	0,10008	0,10845	-0,37652
8,755	0,07193	0,14311	-0,37285

8,76	0,04203	0,16448	-0,37096
8,765	0,01148	0,18227	-0,37277
8,77	-0,01508	0,19229	-0,3807
8,775	-0,03762	0,18905	-0,39134
8,78	-0,04912	0,1803	-0,4079
8,785	-0,05238	0,15624	-0,42636
8,79	-0,0507	0,12433	-0,44485
8,795	-0,04807	0,08845	-0,46357
8,8	-0,04823	0,04568	-0,47977
8,805	-0,05407	0,00346	-0,49325
8,81	-0,087	-0,03673	-0,49847
8,815	-0,12781	-0,06401	-0,50043
8,82	-0,17709	-0,09002	-0,49774
8,825	-0,23161	-0,11167	-0,48752
8,83	-0,2847	-0,12741	-0,47281
8,835	-0,32968	-0,14038	-0,44908
8,84	-0,36516	-0,14913	-0,418
8,845	-0,39368	-0,15449	-0,38182
8,85	-0,40395	-0,15722	-0,32853
8,855	-0,41179	-0,15444	-0,27135
8,86	-0,41943	-0,14941	-0,21215
8,865	-0,41701	-0,1433	-0,14679
8,87	-0,41513	-0,14175	-0,08234
8,875	-0,41156	-0,14306	-0,02131
8,88	-0,39813	-0,14958	0,0318
8,885	-0,3788	-0,16635	0,0801
8,89	-0,34931	-0,18844	0,11953
8,895	-0,31221	-0,21622	0,15151
8,9	-0,27222	-0,24592	0,17875
8,905	-0,23473	-0,27444	0,19279
8,91	-0,20154	-0,29267	0,20167
8,915	-0,17294	-0,30462	0,20678
8,92	-0,17756	-0,31108	0,18744
8,925	-0,18592	-0,27764	0,16538
8,93	-0,19723	-0,23922	0,14108
8,935	-0,20751	-0,19487	0,11872
8,94	-0,21392	-0,13873	0,09867
8,945	-0,21153	-0,08044	0,08725
8,95	-0,19888	-0,01987	0,08876
8,955	-0,18048	0,04128	0,0987
8,96	-0,15181	0,10055	0,1311
8,965	-0,12165	0,15677	0,17091
8,97	-0,0921	0,21014	0,21386
8,975	-0,05289	0,26121	0,2744
8,98	-0,01397	0,29157	0,3335

8,985	0,02627	0,31882	0,39103
8,99	0,07634	0,34154	0,44346
8,995	0,1303	0,34335	0,49295
9	0,18883	0,34129	0,53517
9,005	0,24942	0,33276	0,56556
9,01	0,30916	0,31699	0,589
9,015	0,36092	0,29904	0,59122
9,02	0,40508	0,27573	0,58026
9,025	0,44274	0,2499	0,56007
9,03	0,4508	0,22183	0,48934
9,035	0,45357	0,19318	0,41162
9,04	0,45246	0,16152	0,32915
9,045	0,44196	0,12708	0,23724
9,05	0,43178	0,09564	0,14845
9,055	0,42286	0,06365	0,0679
9,06	0,41526	0,03374	0,00454
9,065	0,40854	0,00985	-0,04767
9,07	0,40214	-0,00928	-0,07735
9,075	0,39501	-0,02073	-0,09197
9,08	0,38699	-0,02585	-0,09815
9,085	0,37769	-0,02617	-0,07549
9,09	0,36766	-0,02399	-0,04616
9,095	0,35733	-0,02071	-0,01127
9,1	0,34947	-0,01836	0,05186
9,105	0,34191	-0,02946	0,11892
9,11	0,33423	-0,04536	0,18885
9,115	0,32487	-0,06784	0,25712
9,12	0,31432	-0,09867	0,32259
9,125	0,3007	-0,13487	0,37604
9,13	0,28395	-0,17527	0,41491
9,135	0,26517	-0,21715	0,44284
9,14	0,24191	-0,25834	0,43667
9,145	0,21736	-0,29223	0,42051
9,15	0,19223	-0,32105	0,39892
9,155	0,16969	-0,34415	0,35621
9,16	0,14826	-0,3455	0,31395
9,165	0,12895	-0,33989	0,27346
9,17	0,11531	-0,32649	0,23936
9,175	0,10419	-0,30004	0,20794
9,18	0,09725	-0,26925	0,18273
9,185	0,09418	-0,23436	0,16346
9,19	0,09297	-0,19834	0,14675
9,195	0,09566	-0,1653	0,14114
9,2	0,09917	-0,13495	0,13935
9,205	0,10281	-0,10994	0,13977

9,21	0,1101	-0,08996	0,16368
9,215	0,11768	-0,08154	0,18857
9,22	0,12614	-0,07495	0,21384
9,225	0,13894	-0,06824	0,23302
9,23	0,15391	-0,06644	0,24747
9,235	0,17249	-0,06179	0,25111
9,24	0,19515	-0,05635	0,2385
9,245	0,21959	-0,05265	0,21638
9,25	0,24639	-0,04895	0,17454
9,255	0,27292	-0,05364	0,1247
9,26	0,29849	-0,06386	0,07166
9,265	0,32105	-0,07986	0,00949
9,27	0,34213	-0,12081	-0,05148
9,275	0,36179	-0,17056	-0,11021
9,28	0,37671	-0,22968	-0,15981
9,285	0,39104	-0,30852	-0,20601
9,29	0,40359	-0,39316	-0,24612
9,295	0,41108	-0,48143	-0,27558
9,3	0,41529	-0,56953	-0,29914
9,305	0,40936	-0,65416	-0,30856
9,31	0,39491	-0,72995	-0,30749
9,315	0,37399	-0,7963	-0,29914
9,32	0,32839	-0,85381	-0,26431
9,325	0,27728	-0,88338	-0,22376
9,33	0,22254	-0,90417	-0,17947
9,335	0,1592	-0,91782	-0,12897
9,34	0,09693	-0,89432	-0,07894
9,345	0,03777	-0,86522	-0,03145
9,35	-0,01475	-0,82687	0,00929
9,355	-0,06365	-0,76867	0,0466
9,36	-0,1061	-0,70498	0,07718
9,365	-0,1442	-0,62927	0,10318
9,37	-0,18008	-0,54643	0,12686
9,375	-0,20707	-0,46061	0,14293
9,38	-0,23161	-0,36486	0,15702
9,385	-0,25411	-0,26636	0,16959
9,39	-0,25697	-0,16532	0,16975
9,395	-0,25668	-0,07091	0,16837
9,4	-0,25236	0,02462	0,16526
9,405	-0,24301	0,11872	0,16002
9,41	-0,23311	0,20139	0,15435
9,415	-0,22529	0,27893	0,14908
9,42	-0,22241	0,34382	0,14489
9,425	-0,22369	0,39384	0,14142
9,43	-0,23348	0,43337	0,1388

9,435	-0,24697	0,44859	0,13614
9,44	-0,26222	0,4534	0,13318
9,445	-0,26812	0,45171	0,12533
9,45	-0,27019	0,42928	0,11641
9,455	-0,26576	0,4054	0,10606
9,46	-0,24336	0,38161	0,09455
9,465	-0,21493	0,3612	0,08276
9,47	-0,17908	0,34411	0,06987
9,475	-0,13801	0,33274	0,056
9,48	-0,09608	0,32845	0,04119
9,485	-0,05389	0,32895	0,02552
9,49	-0,01318	0,33796	0,00897
9,495	0,0261	0,35118	-0,00817
9,5	0,05726	0,36647	-0,0269
9,505	0,08807	0,39046	-0,04567
9,51	0,11824	0,41331	-0,06268
9,515	0,13778	0,4335	-0,07533
9,52	0,15447	0,44398	-0,08491
9,525	0,16414	0,44899	-0,09085
9,53	0,16009	0,44545	-0,09344
9,535	0,14813	0,42965	-0,09421
9,54	0,12027	0,40801	-0,09346
9,545	0,08327	0,37526	-0,09276
9,55	0,04175	0,33791	-0,09315
9,555	-0,00503	0,29941	-0,09128
9,56	-0,04999	0,25173	-0,09075
9,565	-0,09113	0,2047	-0,09127
9,57	-0,1108	0,15847	-0,08264
9,575	-0,1249	0,11203	-0,07369
9,58	-0,13208	0,06654	-0,06268
9,585	-0,13106	0,0234	-0,04702
9,59	-0,12851	-0,01243	-0,02872
9,595	-0,12487	-0,04453	-0,00619
9,6	-0,12217	-0,06562	0,02
9,605	-0,12044	-0,07673	0,04921
9,61	-0,11692	-0,08088	0,08095
9,615	-0,1117	-0,05897	0,11428
9,62	-0,1043	-0,02857	0,148
9,625	-0,09198	0,00622	0,17369
9,63	-0,07773	0,06174	0,19589
9,635	-0,06268	0,11914	0,21177
9,64	-0,05143	0,17829	0,21452
9,645	-0,04362	0,23874	0,20999
9,65	-0,04243	0,29956	0,19634
9,655	-0,04713	0,35802	0,17643

9,66	-0,05449	0,41101	0,15458
9,665	-0,06119	0,4609	0,13143
9,67	-0,06475	0,4967	0,11153
9,675	-0,06473	0,52681	0,09659
9,68	-0,04476	0,55319	0,09453
9,685	-0,02142	0,53134	0,09883
9,69	0,00401	0,50603	0,10954
9,695	0,02373	0,47603	0,1291
9,7	0,03772	0,43677	0,15192
9,705	0,03878	0,39693	0,17763
9,71	0,02315	0,35884	0,20498
9,715	-0,00203	0,32543	0,23057
9,72	-0,0456	0,29593	0,25483
9,725	-0,09416	0,27542	0,27553
9,73	-0,14373	0,25832	0,29256
9,735	-0,20433	0,24258	0,29893
9,74	-0,26374	0,239	0,30172
9,745	-0,32269	0,23557	0,30122
9,75	-0,38515	0,23298	0,28583
9,755	-0,45006	0,23856	0,26988
9,76	-0,51692	0,24599	0,25197
9,765	-0,58136	0,25564	0,23125
9,77	-0,64213	0,26631	0,21216
9,775	-0,6857	0,27612	0,19124
9,78	-0,71369	0,28032	0,16964
9,785	-0,72886	0,27876	0,14618
9,79	-0,69196	0,27186	0,12204
9,795	-0,64401	0,23761	0,09295
9,8	-0,58855	0,19739	0,05819
9,805	-0,5221	0,15204	0,02901
9,81	-0,45922	0,08909	-0,00315
9,815	-0,40504	0,02351	-0,03277
9,82	-0,36632	-0,045	-0,04992
9,825	-0,33544	-0,11754	-0,05908
9,83	-0,31628	-0,19166	-0,05118
9,835	-0,30177	-0,26738	-0,02867
9,84	-0,28807	-0,34406	0,00558
9,845	-0,28135	-0,42084	0,05779
9,85	-0,27473	-0,49079	0,11794
9,855	-0,26887	-0,55814	0,18268
9,86	-0,27903	-0,6224	0,24712
9,865	-0,29261	-0,65651	0,30813
9,87	-0,30909	-0,68567	0,3614
9,875	-0,32246	-0,70798	0,40134
9,88	-0,33172	-0,71843	0,42943

9,885	-0,32672	-0,72567	0,44246
9,89	-0,30349	-0,72892	0,44126
9,895	-0,26723	-0,7304	0,43018
9,9	-0,1975	-0,73144	0,40335
9,905	-0,11821	-0,72847	0,3748
9,91	-0,0352	-0,72371	0,35007
9,915	0,05586	-0,71727	0,31006
9,92	0,1412	-0,69346	0,27719
9,925	0,21787	-0,66641	0,24883
9,93	0,27671	-0,6348	0,21515
9,935	0,32951	-0,59417	0,18151
9,94	0,37383	-0,55125	0,14194
9,945	0,41103	-0,50574	0,09263
9,95	0,44522	-0,45827	0,03379
9,955	0,46639	-0,40989	-0,04217
9,96	0,48093	-0,35719	-0,13046
9,965	0,48984	-0,30183	-0,22859
9,97	0,45125	-0,24423	-0,34332
9,975	0,405	-0,17587	-0,46075
9,98	0,35116	-0,10584	-0,57667
9,985	0,28757	-0,03498	-0,68156
9,99	0,22478	0,0312	-0,77696
9,995	0,16858	0,09456	-0,85721
10	0,12616	0,15142	-0,91737
10,005	0,09313	0,19825	-0,96347
10,01	0,07772	0,23978	-0,98618
10,015	0,07019	0,27024	-0,99624
10,02	0,06564	0,29602	-1
10,025	0,06806	0,31965	-0,97448
10,03	0,06782	0,33162	-0,94677
10,035	0,06475	0,34227	-0,91763
10,04	0,0635	0,35155	-0,86538
10,045	0,06315	0,35403	-0,81335
10,05	0,06595	0,35521	-0,76023
10,055	0,07551	0,35556	-0,70552
10,06	0,089	0,35712	-0,65109
10,065	0,10753	0,36047	-0,59907
10,07	0,12754	0,36955	-0,54876
10,075	0,14703	0,38397	-0,49828
10,08	0,16249	0,40224	-0,46442
10,085	0,17469	0,43143	-0,43036
10,09	0,18412	0,46228	-0,39565
10,095	0,19317	0,49323	-0,37733
10,1	0,20331	0,51701	-0,36053
10,105	0,21641	0,5375	-0,34802

10,11	0,23564	0,55226	-0,3438
10,115	0,25797	0,55548	-0,34481
10,12	0,28287	0,55412	-0,34979
10,125	0,3073	0,54471	-0,35683
10,13	0,32974	0,52945	-0,36492
10,135	0,34128	0,51116	-0,36375
10,14	0,34751	0,48198	-0,3587
10,145	0,34964	0,4496	-0,34939
10,15	0,32129	0,41513	-0,30239
10,155	0,29064	0,36485	-0,24963
10,16	0,2574	0,31386	-0,19035
10,165	0,21942	0,26321	-0,12324
10,17	0,18123	0,21823	-0,0542
10,175	0,14338	0,17707	0,01254
10,18	0,10658	0,14481	0,07258
10,185	0,07086	0,12356	0,12571
10,19	0,03779	0,10903	0,16016
10,195	0,00532	0,11059	0,18473
10,2	-0,02709	0,11748	0,20215
10,205	-0,04901	0,12661	0,1878
10,21	-0,07023	0,14731	0,1678
10,215	-0,08956	0,16727	0,14136
10,22	-0,09905	0,18591	0,09698
10,225	-0,10554	0,20079	0,04905
10,23	-0,10767	0,21374	-0,00225
10,235	-0,10528	0,22295	-0,05493
10,24	-0,1011	0,22655	-0,10555
10,245	-0,09493	0,2267	-0,15101
10,25	-0,08903	0,21791	-0,19123
10,255	-0,08414	0,20387	-0,22691
10,26	-0,08561	0,18614	-0,23917
10,265	-0,08871	0,15231	-0,24734
10,27	-0,09312	0,11623	-0,25214
10,275	-0,09931	0,07899	-0,2428
10,28	-0,10491	0,04423	-0,23194
10,285	-0,10893	0,01131	-0,21804
10,29	-0,1104	-0,01692	-0,19887
10,295	-0,11044	-0,03596	-0,17751
10,3	-0,10869	-0,05025	-0,14927
10,305	-0,10671	-0,05412	-0,11682
10,31	-0,10521	-0,05173	-0,08161
10,315	-0,10546	-0,04589	-0,04161
10,32	-0,10689	-0,02657	0,00092
10,325	-0,10917	-0,00488	0,0454
10,33	-0,11169	0,01864	0,08963

10,335	-0,11359	0,05137	0,13379
10,34	-0,11451	0,08499	0,17476
10,345	-0,11483	0,11923	0,21221
10,35	-0,11515	0,15311	0,24783
10,355	-0,11728	0,18624	0,2803
10,36	-0,12232	0,21668	0,30996
10,365	-0,12977	0,24412	0,33755
10,37	-0,14317	0,26944	0,35891
10,375	-0,15868	0,28868	0,37805
10,38	-0,17522	0,30595	0,39544
10,385	-0,18725	0,32221	0,40155
10,39	-0,1969	0,33781	0,40522
10,395	-0,20242	0,35432	0,40534
10,4	-0,19895	0,37266	0,39877
10,405	-0,19214	0,39589	0,38963
10,41	-0,18112	0,42161	0,37832
10,415	-0,16769	0,45065	0,36663
10,42	-0,15374	0,4821	0,35534
10,425	-0,13823	0,51447	0,34919
10,43	-0,12231	0,54632	0,34542
10,435	-0,10597	0,5773	0,34326
10,44	-0,08812	0,60737	0,36557
10,445	-0,06919	0,62224	0,38953
10,45	-0,04955	0,63538	0,41582
10,455	-0,03303	0,64579	0,44832
10,46	-0,01856	0,64692	0,48148
10,465	-0,00935	0,64579	0,51422
10,47	-0,00814	0,64071	0,54415
10,475	-0,01167	0,63071	0,57129
10,48	-0,02464	0,61835	0,5881
10,485	-0,04122	0,59942	0,59969
10,49	-0,05912	0,57742	0,60811
10,495	-0,08001	0,55357	0,58847
10,5	-0,09999	0,52079	0,56442
10,505	-0,11872	0,48677	0,53425
10,51	-0,13405	0,45182	0,47433
10,515	-0,14898	0,41535	0,40841
10,52	-0,16322	0,3792	0,33446
10,525	-0,17544	0,34394	0,2518
10,53	-0,18619	0,30993	0,16721
10,535	-0,19147	0,27645	0,08191
10,54	-0,19177	0,24337	-0,00082
10,545	-0,18811	0,21	-0,07995
10,55	-0,16954	0,17621	-0,14052
10,555	-0,14781	0,14248	-0,19646

10,56	-0,12429	0,10863	-0,24871
10,565	-0,09967	0,07505	-0,28601
10,57	-0,0767	0,04793	-0,32166
10,575	-0,05699	0,02274	-0,35546
10,58	-0,04296	0,00118	-0,38631
10,585	-0,0312	-0,01335	-0,4167
10,59	-0,02275	-0,0251	-0,44706
10,595	-0,01552	-0,03195	-0,47736
10,6	-0,00852	-0,03613	-0,50766
10,605	-0,00614	-0,03939	-0,54077
10,61	-0,00515	-0,03877	-0,57455
10,615	-0,00577	-0,03779	-0,60918
10,62	-0,02297	-0,03674	-0,65109
10,625	-0,0428	-0,03716	-0,69348
10,63	-0,06521	-0,03833	-0,73486
10,635	-0,08838	-0,04144	-0,76857
10,64	-0,11012	-0,05171	-0,79799
10,645	-0,1264	-0,06593	-0,81552
10,65	-0,13524	-0,08858	-0,81895
10,655	-0,13893	-0,1203	-0,8133
10,66	-0,12979	-0,15755	-0,78087
10,665	-0,11766	-0,20797	-0,74049
10,67	-0,10497	-0,26229	-0,69685
10,675	-0,07938	-0,31818	-0,63172
10,68	-0,05472	-0,37402	-0,56791
10,685	-0,02995	-0,42773	-0,50603
10,69	0,00034	-0,47748	-0,44995
10,695	0,03309	-0,51405	-0,39735
10,7	0,06931	-0,54594	-0,352
10,705	0,10795	-0,56973	-0,31593
10,71	0,14677	-0,58416	-0,2851
10,715	0,18077	-0,59359	-0,2697
10,72	0,20994	-0,58988	-0,26188
10,725	0,23446	-0,57971	-0,25894
10,73	0,22912	-0,56524	-0,28575
10,735	0,2192	-0,52867	-0,3153
10,74	0,20526	-0,489	-0,34628
10,745	0,18249	-0,44726	-0,37379
10,75	0,15989	-0,40637	-0,39694
10,755	0,1385	-0,36732	-0,40983
10,76	0,11855	-0,33383	-0,40459
10,765	0,09952	-0,31083	-0,38856
10,77	0,08055	-0,29378	-0,35063
10,775	0,06035	-0,28878	-0,30116
10,78	0,0389	-0,28951	-0,24584

10,785	0,01852	-0,29259	-0,17384
10,79	-0,0016	-0,30027	-0,10023
10,795	-0,02013	-0,30649	-0,02625
10,8	-0,02273	-0,31019	0,04419
10,805	-0,02116	-0,30163	0,11278
10,81	-0,01417	-0,28968	0,17695
10,815	-0,00104	-0,27249	0,23065
10,82	0,01345	-0,24614	0,27902
10,825	0,02738	-0,21587	0,31396
10,83	0,03857	-0,17746	0,3373
10,835	0,04706	-0,13296	0,35184
10,84	0,04809	-0,08485	0,34079
10,845	0,04725	-0,02655	0,3229
10,85	0,04552	0,03408	0,30071
10,855	0,03632	0,09556	0,27189
10,86	0,02695	0,14627	0,24368
10,865	0,01613	0,1933	0,21858
10,87	-0,00158	0,23262	0,20381
10,875	-0,02289	0,25257	0,19349
10,88	-0,05097	0,26403	0,19114
10,885	-0,08477	0,26141	0,19428
10,89	-0,12132	0,24807	0,19923
10,895	-0,16084	0,22986	0,20838
10,9	-0,19977	0,20183	0,21737
10,905	-0,23746	0,17204	0,2257
10,91	-0,26319	0,14181	0,22974
10,915	-0,28656	0,11835	0,23249
10,92	-0,30671	0,09559	0,2329
10,925	-0,31983	0,07448	0,22613
10,93	-0,33119	0,06062	0,21632
10,935	-0,33932	0,04908	0,2003
10,94	-0,343	0,04284	0,17666
10,945	-0,34369	0,04359	0,1497
10,95	-0,33507	0,04834	0,11386
10,955	-0,32173	0,06249	0,07482
10,96	-0,30542	0,08046	0,03449
10,965	-0,2793	0,10021	-0,00563
10,97	-0,25301	0,11568	-0,04421
10,975	-0,22777	0,12859	-0,08026
10,98	-0,20856	0,13667	-0,10812
10,985	-0,19242	0,1247	-0,13322
10,99	-0,18129	0,10644	-0,15485
10,995	-0,17586	0,07905	-0,17332
11	-0,17276	0,04217	-0,19056
11,005	-0,17431	0,00186	-0,20676

11,01	-0,17803	-0,04323	-0,22255
11,015	-0,18346	-0,08924	-0,23813
11,02	-0,20351	-0,13479	-0,25685
11,025	-0,22724	-0,17476	-0,27494
11,03	-0,25485	-0,21382	-0,29212
11,035	-0,29397	-0,25178	-0,3078
11,04	-0,33528	-0,27952	-0,3221
11,045	-0,37767	-0,30506	-0,33492
11,05	-0,41778	-0,32596	-0,34339
11,055	-0,45503	-0,33711	-0,34924
11,06	-0,48518	-0,34324	-0,34876
11,065	-0,50985	-0,34048	-0,34346
11,07	-0,53135	-0,33231	-0,33507
11,075	-0,54407	-0,32172	-0,31437
11,08	-0,55575	-0,31118	-0,29055
11,085	-0,56677	-0,30225	-0,2643
11,09	-0,56295	-0,29596	-0,22381
11,095	-0,5559	-0,31276	-0,18225
11,1	-0,54246	-0,33338	-0,13992
11,105	-0,5144	-0,35873	-0,0977
11,11	-0,47945	-0,39066	-0,05675
11,115	-0,43366	-0,42354	-0,01933
11,12	-0,3809	-0,45614	0,01378
11,125	-0,32564	-0,48639	0,04361
11,13	-0,26451	-0,51439	0,0651
11,135	-0,20472	-0,53624	0,08325
11,14	-0,14679	-0,55605	0,09922
11,145	-0,07409	-0,57483	0,11215
11,15	0,00123	-0,57754	0,12487
11,155	0,0824	-0,57862	0,13836
11,16	0,17871	-0,57603	0,15732
11,165	0,28105	-0,56135	0,17812
11,17	0,38893	-0,54202	0,20281
11,175	0,49657	-0,51556	0,23127
11,18	0,60061	-0,48314	0,26112
11,185	0,68839	-0,44851	0,29517
11,19	0,76561	-0,41182	0,33006
11,195	0,83483	-0,37592	0,36503
11,2	0,84947	-0,34128	0,39842
11,205	0,85866	-0,31157	0,43098
11,21	0,86154	-0,2823	0,46203
11,215	0,84119	-0,25232	0,48518
11,22	0,81546	-0,21559	0,50573
11,225	0,77952	-0,17517	0,52081
11,23	0,72799	-0,12777	0,52755

11,235	0,66796	-0,07139	0,53006
11,24	0,58958	-0,01074	0,52282
11,245	0,502	0,05789	0,51159
11,25	0,4099	0,12861	0,49875
11,255	0,31547	0,19942	0,48046
11,26	0,22374	0,27258	0,46294
11,265	0,13745	0,34432	0,44694
11,27	0,07999	0,41416	0,43711
11,275	0,03011	0,47485	0,4299
11,28	-0,00937	0,53242	0,42644
11,285	-0,03534	0,58312	0,42797
11,29	-0,0565	0,61898	0,43184
11,295	-0,06848	0,64609	0,43918
11,3	-0,07506	0,65166	0,44854
11,305	-0,07812	0,64073	0,45919
11,31	-0,06506	0,61848	0,47194
11,315	-0,04691	0,55415	0,48543
11,32	-0,02458	0,48118	0,49944
11,325	0,00414	0,40282	0,51072
11,33	0,03298	0,30795	0,52199
11,335	0,05899	0,21343	0,53249
11,34	0,07462	0,12167	0,54023
11,345	0,08405	0,03833	0,54708
11,35	0,08283	-0,04023	0,55196
11,355	0,07438	-0,10775	0,55551
11,36	0,06311	-0,16558	0,55854
11,365	0,04969	-0,21718	0,56051
11,37	0,03843	-0,24541	0,56254
11,375	0,02978	-0,26618	0,56468
11,38	0,0314	-0,28159	0,56365
11,385	0,03439	-0,24953	0,56207
11,39	0,03801	-0,21332	0,55904
11,395	0,04059	-0,17282	0,55105
11,4	0,04141	-0,1291	0,54031
11,405	0,03971	-0,08675	0,52421
11,41	0,03657	-0,0515	0,50198
11,415	0,03331	-0,02747	0,47581
11,42	0,03137	-0,01142	0,44074
11,425	0,03117	-0,01626	0,40222
11,43	0,03237	-0,02816	0,36167
11,435	0,02667	-0,04303	0,31819
11,44	0,01908	-0,07241	0,27458
11,445	0,00757	-0,09942	0,2319
11,45	-0,01658	-0,12287	0,19716
11,455	-0,04501	-0,13796	0,16467

11,46	-0,07797	-0,14928	0,13723
11,465	-0,11255	-0,15458	0,11651
11,47	-0,14587	-0,15304	0,09869
11,475	-0,173	-0,14802	0,08951
11,48	-0,19481	-0,13398	0,08395
11,485	-0,2125	-0,11511	0,08016
11,49	-0,21206	-0,09289	0,08752
11,495	-0,20933	-0,05402	0,09514
11,5	-0,20466	-0,01256	0,10211
11,505	-0,18994	0,03025	0,10294
11,51	-0,17338	0,06683	0,10052
11,515	-0,15277	0,09967	0,09129
11,52	-0,12417	0,12353	0,0699
11,525	-0,09124	0,13055	0,04199
11,53	-0,05036	0,12845	0,00137
11,535	-0,00524	0,10866	-0,04599
11,54	0,04146	0,07955	-0,09625
11,545	0,0851	0,04624	-0,15253
11,55	0,12587	0,00432	-0,20796
11,555	0,16266	-0,03673	-0,26132
11,56	0,17739	-0,07564	-0,3002
11,565	0,18745	-0,09989	-0,33456
11,57	0,1914	-0,12098	-0,36196
11,575	0,18599	-0,13712	-0,37644
11,58	0,17748	-0,14323	-0,38502
11,585	0,16323	-0,14556	-0,38225
11,59	0,1446	-0,13902	-0,37024
11,595	0,12314	-0,12491	-0,35251
11,6	0,09179	-0,10603	-0,31959
11,605	0,05693	-0,07117	-0,2819
11,61	0,01967	-0,03172	-0,24118
11,615	-0,01859	0,01031	-0,20083
11,62	-0,05569	0,0493	-0,16128
11,625	-0,08921	0,08541	-0,12534
11,63	-0,1112	0,11499	-0,10265
11,635	-0,12764	0,12614	-0,08528
11,64	-0,13484	0,12891	-0,07708
11,645	-0,13454	0,1185	-0,07589
11,65	-0,13094	0,09782	-0,07717
11,655	-0,12087	0,07272	-0,08298
11,66	-0,10984	0,0413	-0,08844
11,665	-0,09872	0,00934	-0,09337
11,67	-0,08123	-0,02225	-0,08814
11,675	-0,06285	-0,04223	-0,0807
11,68	-0,04313	-0,06176	-0,07003

11,685	-0,02254	-0,08076	-0,04899
11,69	-0,00186	-0,09674	-0,02485
11,695	0,01643	-0,11288	0,00542
11,7	0,02864	-0,1286	0,04386
11,705	0,036	-0,14307	0,0866
11,71	0,03095	-0,15673	0,13779
11,715	0,01924	-0,16899	0,19215
11,72	0,00372	-0,18012	0,24757
11,725	-0,02141	-0,19082	0,29691
11,73	-0,04605	-0,21405	0,34291
11,735	-0,06907	-0,24029	0,38343
11,74	-0,0873	-0,27143	0,40105
11,745	-0,10392	-0,32293	0,41156
11,75	-0,11944	-0,37942	0,41185
11,755	-0,13588	-0,44084	0,40012
11,76	-0,15421	-0,50388	0,38333
11,765	-0,17593	-0,56497	0,358
11,77	-0,1998	-0,61655	0,32851
11,775	-0,22435	-0,6588	0,29695
11,78	-0,24582	-0,69318	0,26089
11,785	-0,26408	-0,69176	0,22354
11,79	-0,2787	-0,6827	0,18533
11,795	-0,28721	-0,66729	0,15218
11,8	-0,29451	-0,62454	0,12044
11,805	-0,30246	-0,57771	0,09324
11,81	-0,31533	-0,52535	0,07696
11,815	-0,33213	-0,46381	0,06581
11,82	-0,35454	-0,39882	0,06406
11,825	-0,37966	-0,32982	0,06823
11,83	-0,4046	-0,25924	0,07498
11,835	-0,41743	-0,18872	0,08625
11,84	-0,42337	-0,12689	0,09721
11,845	-0,42231	-0,06863	0,1073
11,85	-0,377	-0,01396	0,11085
11,855	-0,32523	0,00924	0,11287
11,86	-0,26586	0,02868	0,11286
11,865	-0,19489	0,04377	0,10885
11,87	-0,12187	0,05371	0,10359
11,875	-0,04657	0,06402	0,09529
11,88	0,02993	0,07762	0,08339
11,885	0,1069	0,09656	0,06892
11,89	0,18666	0,11954	0,04618
11,895	0,26889	0,15113	0,02028
11,9	0,35332	0,18495	-0,00742
11,905	0,422	0,21923	-0,04205

11,91	0,48841	0,24477	-0,07643
11,915	0,54832	0,2665	-0,10999
11,92	0,58314	0,2818	-0,14068
11,925	0,60802	0,27893	-0,16989
11,93	0,61772	0,26972	-0,19726
11,935	0,61373	0,25016	-0,22379
11,94	0,60446	0,21977	-0,25048
11,945	0,58741	0,18403	-0,27831
11,95	0,57014	0,13396	-0,30713
11,955	0,55402	0,07778	-0,3366
11,96	0,53595	0,01783	-0,36691
11,965	0,51747	-0,05986	-0,39632
11,97	0,49735	-0,13918	-0,42423
11,975	0,47115	-0,21843	-0,44831
11,98	0,44171	-0,28462	-0,4709
11,985	0,40868	-0,34474	-0,4915
11,99	0,37424	-0,39094	-0,50991
11,995	0,34067	-0,41348	-0,52716
12	0,31136	-0,42283	-0,53978
12,005	0,28626	-0,40373	-0,54901
12,01	0,26407	-0,37015	-0,55577
12,015	0,24529	-0,32915	-0,54168
12,02	0,22584	-0,26377	-0,52121
12,025	0,2046	-0,19697	-0,49327
12,03	0,17932	-0,13063	-0,4315
12,035	0,15215	-0,07013	-0,36283
12,04	0,1247	-0,01258	-0,28538
12,045	0,10283	0,03957	-0,1967
12,05	0,0861	0,0817	-0,10468
12,055	0,08265	0,11903	-0,00825
12,06	0,09087	0,14537	0,0895
12,065	0,10671	0,16291	0,18675
12,07	0,14188	0,17435	0,27613
12,075	0,17999	0,16488	0,36314
12,08	0,21838	0,14937	0,44776
12,085	0,25188	0,12985	0,50123
12,09	0,28145	0,10831	0,54779
12,095	0,30484	0,08838	0,58096
12,1	0,31651	0,07372	0,58226
12,105	0,32388	0,07427	0,57036
12,11	0,32309	0,08235	0,537
12,115	0,31527	0,10271	0,4882
12,12	0,30304	0,13142	0,43268
12,125	0,27221	0,16307	0,36478
12,13	0,23415	0,196	0,29478

12,135	0,19087	0,22659	0,22444
12,14	0,10545	0,25453	0,17477
12,145	0,01626	0,25431	0,12718
12,15	-0,07623	0,25154	0,08363
12,155	-0,16696	0,24566	0,05415
12,16	-0,25381	0,23372	0,02941
12,165	-0,32903	0,22175	0,01416
12,17	-0,38717	0,2105	0,01007
12,175	-0,43375	0,20057	0,01204
12,18	-0,45207	0,19182	0,02724
12,185	-0,4593	0,186	0,04743
12,19	-0,46091	0,18061	0,06999
12,195	-0,42876	0,17526	0,08713
12,2	-0,39524	0,1882	0,10151
12,205	-0,35981	0,20431	0,11023
12,21	-0,31374	0,22617	0,09493
12,215	-0,26528	0,26953	0,0725
12,22	-0,21353	0,31929	0,04041
12,225	-0,15829	0,37564	-0,00054
12,23	-0,10157	0,43428	-0,04378
12,235	-0,04539	0,49102	-0,08809
12,24	0,00897	0,53531	-0,13022
12,245	0,06065	0,56868	-0,16941
12,25	0,09102	0,59292	-0,18791
12,255	0,116	0,56769	-0,20216
12,26	0,13571	0,5344	-0,21185
12,265	0,14121	0,49456	-0,19825
12,27	0,14453	0,43188	-0,17946
12,275	0,14658	0,36737	-0,1516
12,28	0,14916	0,30144	-0,10844
12,285	0,15351	0,23416	-0,05878
12,29	0,16012	0,16742	0,00014
12,295	0,16742	0,10364	0,06317
12,3	0,17394	0,04255	0,12692
12,305	0,17053	-0,01611	0,18032
12,31	0,16174	-0,05511	0,22902
12,315	0,14749	-0,08811	0,27202
12,32	0,11401	-0,11481	0,27033
12,325	0,07728	-0,09874	0,26157
12,33	0,0381	-0,07646	0,24347
12,335	-0,00093	-0,04784	0,2106
12,34	-0,03735	-0,01417	0,17406
12,345	-0,06792	0,01846	0,13391
12,35	-0,09303	0,04337	0,09394
12,355	-0,11511	0,05773	0,05593

12,36	-0,13068	0,06403	0,0276
12,365	-0,14656	0,04812	0,00198
12,37	-0,16374	0,02639	-0,02242
12,375	-0,16672	0,00222	-0,02232
12,38	-0,16798	-0,03148	-0,02026
12,385	-0,16407	-0,06271	-0,01327
12,39	-0,14353	-0,0899	0,00996
12,395	-0,11523	-0,1081	0,03829
12,4	-0,07618	-0,12267	0,07322
12,405	-0,03015	-0,13	0,11199
12,41	0,01716	-0,12941	0,15105
12,415	0,05904	-0,12399	0,18531
12,42	0,09443	-0,1019	0,21538
12,425	0,12387	-0,07261	0,24165
12,43	0,11993	-0,03845	0,23497
12,435	0,11271	0,03268	0,22456
12,44	0,1038	0,10668	0,21043
12,445	0,09633	0,1823	0,19018
12,45	0,09293	0,25293	0,1702
12,455	0,09669	0,3186	0,1532
12,46	0,1082	0,37207	0,14229
12,465	0,12305	0,40639	0,13568
12,47	0,14246	0,42894	0,14006
12,475	0,16104	0,42541	0,14909
12,48	0,17803	0,40955	0,16028
12,485	0,20427	0,38703	0,18567
12,49	0,23212	0,33607	0,21227
12,495	0,26369	0,28233	0,24037
12,5	0,31451	0,22627	0,27535
12,505	0,37071	0,16047	0,31086
12,51	0,43124	0,09341	0,34477
12,515	0,48984	0,02556	0,37216
12,52	0,5437	-0,04157	0,39479
12,525	0,58025	-0,10752	0,40287
12,53	0,60065	-0,16871	0,39891
12,535	0,60876	-0,22536	0,38618
12,54	0,57184	-0,27829	0,33753
12,545	0,52679	-0,31553	0,28103
12,55	0,47712	-0,34875	0,21905
12,555	0,40427	-0,37885	0,13986
12,56	0,33119	-0,39868	0,05979
12,565	0,25686	-0,41728	-0,0199
12,57	0,17621	-0,43453	-0,0962
12,575	0,09211	-0,44921	-0,16983
12,58	0,00294	-0,46299	-0,2364

12,585	-0,08938	-0,47376	-0,29758
12,59	-0,18209	-0,48114	-0,35554
12,595	-0,26067	-0,48564	-0,40053
12,6	-0,33178	-0,47829	-0,4417
12,605	-0,39516	-0,46602	-0,47999
12,61	-0,3855	-0,44966	-0,49403
12,615	-0,366	-0,40882	-0,50503
12,62	-0,3344	-0,36452	-0,51214
12,625	-0,2839	-0,31659	-0,51353
12,63	-0,2305	-0,26522	-0,51349
12,635	-0,1768	-0,21393	-0,51311
12,64	-0,12693	-0,16617	-0,51388
12,645	-0,08106	-0,12474	-0,51567
12,65	-0,04181	-0,08829	-0,51869
12,655	-0,00377	-0,06723	-0,52135
12,66	0,03482	-0,05135	-0,52311
12,665	0,0602	-0,038	-0,5099
12,67	0,08595	-0,04693	-0,49283
12,675	0,10912	-0,05633	-0,46971
12,68	0,11206	-0,06642	-0,42915
12,685	0,10695	-0,07939	-0,38333
12,69	0,08819	-0,09245	-0,33037
12,695	0,05456	-0,10396	-0,27109
12,7	0,01422	-0,11193	-0,20964
12,705	-0,03558	-0,11688	-0,14475
12,71	-0,08671	-0,11172	-0,07909
12,715	-0,13681	-0,09943	-0,01351
12,72	-0,18086	-0,08135	0,04382
12,725	-0,22238	-0,03092	0,09896
12,73	-0,26153	0,02429	0,15053
12,735	-0,29441	0,08276	0,18253
12,74	-0,32662	0,14075	0,20831
12,745	-0,35672	0,19493	0,22269
12,75	-0,38075	0,23917	0,21926
12,755	-0,40054	0,26494	0,20723
12,76	-0,40871	0,27971	0,17831
12,765	-0,40831	0,27274	0,14096
12,77	-0,40224	0,25393	0,09949
12,775	-0,38034	0,22909	0,04567
12,78	-0,35597	0,18657	-0,00975
12,785	-0,3307	0,14261	-0,06607
12,79	-0,30484	0,09844	-0,12395
12,795	-0,28085	0,0552	-0,18134
12,8	-0,25951	0,01259	-0,23689
12,805	-0,24095	-0,02735	-0,28741

12,81	-0,22294	-0,05868	-0,33497
12,815	-0,20538	-0,08499	-0,37528
12,82	-0,18808	-0,09744	-0,40889
12,825	-0,17141	-0,09623	-0,43783
12,83	-0,16162	-0,08507	-0,45104
12,835	-0,15496	-0,04221	-0,45988
12,84	-0,15117	0,00946	-0,46598
12,845	-0,1601	0,0659	-0,4555
12,85	-0,17083	0,12337	-0,44312
12,855	-0,18285	0,17591	-0,42743
12,86	-0,19448	0,21784	-0,40342
12,865	-0,20443	0,23315	-0,37662
12,87	-0,21101	0,23628	-0,34546
12,875	-0,21487	0,22028	-0,31118
12,88	-0,21782	0,18989	-0,27592
12,885	-0,2217	0,15325	-0,23967
12,89	-0,22754	0,10458	-0,20426
12,895	-0,23523	0,05407	-0,16998
12,9	-0,24617	0,00429	-0,1487
12,905	-0,2573	-0,04019	-0,12976
12,91	-0,26762	-0,08311	-0,1142
12,915	-0,27381	-0,12281	-0,10743
12,92	-0,27745	-0,14729	-0,10343
12,925	-0,27757	-0,16497	-0,10385
12,93	-0,27534	-0,16844	-0,10909
12,935	-0,27281	-0,15285	-0,11667
12,94	-0,27148	-0,12625	-0,12959
12,945	-0,27207	-0,0773	-0,14489
12,95	-0,27417	-0,0199	-0,16147
12,955	-0,2751	0,0404	-0,17981
12,96	-0,27488	0,08935	-0,1978
12,965	-0,27232	0,13115	-0,21455
12,97	-0,26232	0,16164	-0,22448
12,975	-0,2496	0,14926	-0,23185
12,98	-0,23435	0,1247	-0,23534
12,985	-0,21895	0,08397	-0,23445
12,99	-0,20502	0,02589	-0,23196
12,995	-0,19633	-0,038	-0,22765
13	-0,19204	-0,11096	-0,22329
13,005	-0,19076	-0,18618	-0,21937
13,01	-0,19746	-0,26106	-0,21765
13,015	-0,20436	-0,32875	-0,21583
13,02	-0,2104	-0,39373	-0,21328
13,025	-0,2136	-0,45487	-0,20629
13,03	-0,21504	-0,48221	-0,19698

13,035	-0,21445	-0,50044	-0,18376
13,04	-0,21221	-0,50169	-0,16384
13,045	-0,2099	-0,47027	-0,14065
13,05	-0,20735	-0,42395	-0,11096
13,055	-0,20485	-0,35196	-0,07709
13,06	-0,2021	-0,26533	-0,04084
13,065	-0,19388	-0,17293	0,00596
13,07	-0,18338	-0,07252	0,05557
13,075	-0,17062	0,02592	0,10747
13,08	-0,14716	0,12058	0,17211
13,085	-0,12258	0,18034	0,23746
13,09	-0,09801	0,2341	0,30188
13,095	-0,07739	0,27903	0,35925
13,1	-0,05983	0,30541	0,41171
13,105	-0,04941	0,3254	0,45157
13,11	-0,04653	0,33375	0,47733
13,115	-0,04852	0,33218	0,49361
13,12	-0,06373	0,32532	0,4812
13,125	-0,08238	0,30379	0,46085
13,13	-0,10239	0,27756	0,43689
13,135	-0,13718	0,24865	0,38278
13,14	-0,1719	0,22197	0,32846
13,145	-0,20687	0,19655	0,27321
13,15	-0,24288	0,17484	0,21565
13,155	-0,27873	0,16786	0,15891
13,16	-0,31309	0,16632	0,10575
13,165	-0,34462	0,17343	0,05847
13,17	-0,37404	0,18823	0,01534
13,175	-0,39619	0,20601	-0,0141
13,18	-0,4145	0,22817	-0,0366
13,185	-0,42992	0,2505	-0,05463
13,19	-0,42325	0,27204	-0,04268
13,195	-0,41343	0,28555	-0,02786
13,2	-0,40013	0,29697	-0,01109
13,205	-0,37848	0,30565	0,00465
13,21	-0,35543	0,30481	0,01764
13,215	-0,33178	0,30146	0,02316
13,22	-0,3094	0,29382	0,01557
13,225	-0,28899	0,28007	0,00029
13,23	-0,27243	0,26336	-0,0315
13,235	-0,25845	0,23939	-0,07064
13,24	-0,24563	0,21163	-0,11286
13,245	-0,23006	0,18151	-0,16314
13,25	-0,21203	0,14061	-0,21228
13,255	-0,19053	0,09761	-0,25882

13,26	-0,15642	0,0526	-0,28868
13,265	-0,1189	0,00029	-0,31313
13,27	-0,07787	-0,05301	-0,32731
13,275	-0,03474	-0,10669	-0,3224
13,28	0,00751	-0,15951	-0,30831
13,285	0,04663	-0,21121	-0,27327
13,29	0,08244	-0,25941	-0,22307
13,295	0,11606	-0,30434	-0,16348
13,3	0,14505	-0,34656	-0,07129
13,305	0,17476	-0,37519	0,02741
13,31	0,20585	-0,40036	0,12963
13,315	0,23223	-0,42237	0,23275
13,32	0,25849	-0,419	0,3327
13,325	0,28206	-0,41073	0,42437
13,33	0,295	-0,39424	0,49339
13,335	0,30181	-0,3608	0,55125
13,34	0,29771	-0,32069	0,58725
13,345	0,28541	-0,27112	0,6055
13,35	0,2696	-0,21635	0,61432
13,355	0,25166	-0,16043	0,59758
13,36	0,2361	-0,10671	0,574
13,365	0,22366	-0,05576	0,54676
13,37	0,23082	-0,00753	0,49609
13,375	0,24003	0,0047	0,44428
13,38	0,24989	0,01299	0,39066
13,385	0,25515	0,01499	0,33648
13,39	0,25572	0,0005	0,28218
13,395	0,24716	-0,01869	0,23057
13,4	0,2292	-0,04614	0,18422
13,405	0,20652	-0,08141	0,14142
13,41	0,17558	-0,1203	0,1094
13,415	0,14462	-0,16737	0,08159
13,42	0,1152	-0,21707	0,05594
13,425	0,07274	-0,26799	0,0337
13,43	0,02938	-0,31143	0,01028
13,435	-0,01768	-0,35261	-0,01566
13,44	-0,08207	-0,38921	-0,05038
13,445	-0,15309	-0,40687	-0,08775
13,45	-0,23144	-0,4184	-0,12761
13,455	-0,31231	-0,42059	-0,16729
13,46	-0,39089	-0,41255	-0,20467
13,465	-0,45459	-0,4003	-0,23382
13,47	-0,50462	-0,38095	-0,25607
13,475	-0,54318	-0,35924	-0,27272
13,48	-0,52964	-0,33675	-0,262

13,485	-0,50699	-0,31549	-0,24667
13,49	-0,47725	-0,29435	-0,22732
13,495	-0,42742	-0,27362	-0,19309
13,5	-0,37694	-0,25859	-0,15698
13,505	-0,32602	-0,24503	-0,11833
13,51	-0,2723	-0,23451	-0,07644
13,515	-0,21709	-0,22974	-0,03426
13,52	-0,15739	-0,22786	0,00561
13,525	-0,09348	-0,23019	0,04259
13,53	-0,02709	-0,23433	0,0767
13,535	0,03562	-0,23854	0,09051
13,54	0,09562	-0,23391	0,09786
13,545	0,15101	-0,22547	0,09852
13,55	0,17467	-0,21236	0,05887
13,555	0,19111	-0,16717	0,01354
13,56	0,19937	-0,11603	-0,03771
13,565	0,20037	-0,05688	-0,09427
13,57	0,20154	0,01517	-0,14948
13,575	0,20804	0,09137	-0,19771
13,58	0,22263	0,17322	-0,23611
13,585	0,2433	0,25759	-0,26636
13,59	0,27747	0,34221	-0,2697
13,595	0,31369	0,42576	-0,26553
13,6	0,34943	0,5081	-0,25739
13,605	0,38519	0,58922	-0,21992
13,61	0,41769	0,64977	-0,1806
13,615	0,44697	0,70688	-0,13781
13,62	0,47491	0,75714	-0,08688
13,625	0,50405	0,78726	-0,03408
13,63	0,53567	0,80964	0,01888
13,635	0,56936	0,81869	0,06899
13,64	0,60352	0,81531	0,11573
13,645	0,63012	0,80563	0,14621
13,65	0,65113	0,78063	0,16859
13,655	0,66692	0,75064	0,1851
13,66	0,64167	0,71803	0,14705
13,665	0,61082	0,66769	0,10455
13,67	0,57443	0,61618	0,0578
13,675	0,53177	0,56361	0,00619
13,68	0,49044	0,51134	-0,04329
13,685	0,45419	0,46014	-0,08502
13,69	0,42589	0,41283	-0,11299
13,695	0,40253	0,37253	-0,13157
13,7	0,387	0,33705	-0,12733
13,705	0,37326	0,31327	-0,11348

13,71	0,35933	0,29546	-0,09497
13,715	0,34919	0,28107	-0,05021
13,72	0,33799	0,27878	-0,0039
13,725	0,32675	0,27742	0,04417
13,73	0,32392	0,27637	0,10187
13,735	0,32416	0,27562	0,15972
13,74	0,3289	0,27413	0,21456
13,745	0,33834	0,27114	0,26021
13,75	0,34915	0,26568	0,29896
13,755	0,35916	0,25891	0,31811
13,76	0,36638	0,24861	0,32162
13,765	0,37075	0,23564	0,31373
13,77	0,36538	0,22067	0,26085
13,775	0,35795	0,1963	0,19923
13,78	0,34962	0,16982	0,13225
13,785	0,34035	0,14194	0,05516
13,79	0,33266	0,11237	-0,01929
13,795	0,32707	0,08359	-0,0866
13,8	0,32266	0,05727	-0,13702
13,805	0,31822	0,03703	-0,17789
13,81	0,31192	0,02012	-0,19959
13,815	0,30295	0,00954	-0,20742
13,82	0,29198	0,00335	-0,20754
13,825	0,27703	-0,00063	-0,18208
13,83	0,26112	0,00137	-0,15027
13,835	0,24498	0,0043	-0,11435
13,84	0,23071	0,00761	-0,05025
13,845	0,21702	0,01444	0,0151
13,85	0,20358	0,02153	0,07951
13,855	0,18867	0,02874	0,1345
13,86	0,1725	0,03478	0,18263
13,865	0,1535	0,04003	0,2133
13,87	0,13166	0,04248	0,22268
13,875	0,10829	0,04104	0,21767
13,88	0,08175	0,03683	0,1736
13,885	0,05492	0,02493	0,11701
13,89	0,02831	0,01014	0,05464
13,895	-0,00692	-0,0062	-0,03775
13,9	-0,04343	-0,0255	-0,12907
13,905	-0,08295	-0,04391	-0,21822
13,91	-0,13315	-0,06046	-0,3002
13,915	-0,18755	-0,07077	-0,37743
13,92	-0,24771	-0,07863	-0,44446
13,925	-0,31227	-0,08278	-0,49812
13,93	-0,37792	-0,08335	-0,54376

13,935	-0,44279	-0,0824	-0,56713
13,94	-0,50535	-0,07823	-0,5789
13,945	-0,56562	-0,07298	-0,58253
13,95	-0,61455	-0,06719	-0,53701
13,955	-0,66127	-0,05743	-0,48507
13,96	-0,70547	-0,04707	-0,42759
13,965	-0,73817	-0,03613	-0,3603
13,97	-0,76801	-0,02504	-0,29341
13,975	-0,79177	-0,01412	-0,23087
13,98	-0,80428	-0,00422	-0,17884
13,985	-0,81029	0,00315	-0,1342
13,99	-0,80126	0,00888	-0,10562
13,995	-0,78305	0,01092	-0,08602
14	-0,75941	0,01074	-0,07118
14,005	-0,71739	0,00928	-0,07236
14,01	-0,67277	0,0033	-0,0754
14,015	-0,6264	-0,00336	-0,07982
14,02	-0,57028	-0,01063	-0,09299
14,025	-0,51286	-0,02286	-0,10705
14,03	-0,45316	-0,03618	-0,12162
14,035	-0,38877	-0,05161	-0,1354
14,04	-0,32176	-0,07144	-0,14819
14,045	-0,25095	-0,09355	-0,15642
14,05	-0,1784	-0,12015	-0,15932
14,055	-0,10585	-0,14998	-0,15778
14,06	-0,03765	-0,18153	-0,14067
14,065	0,02714	-0,21683	-0,11858
14,07	0,08853	-0,2524	-0,09309
14,075	0,13585	-0,28751	-0,0581
14,08	0,18089	-0,31381	-0,0228
14,085	0,22338	-0,3375	0,01205
14,09	0,26134	-0,35627	0,04522
14,095	0,2987	-0,36271	0,0771
14,1	0,3335	-0,36394	0,10747
14,105	0,36455	-0,35549	0,13733
14,11	0,39233	-0,33858	0,16735
14,115	0,40535	-0,31701	0,19895
14,12	0,41159	-0,28224	0,23115
14,125	0,41302	-0,24332	0,26356
14,13	0,37313	-0,20213	0,29866
14,135	0,33014	-0,14723	0,33227
14,14	0,2837	-0,09207	0,36347
14,145	0,23276	-0,0377	0,3888
14,15	0,18253	0,00892	0,41129
14,155	0,13555	0,05117	0,42869

14,16	0,09382	0,08312	0,44005
14,165	0,05588	0,10091	0,44779
14,17	0,02681	0,10984	0,44392
14,175	0,00097	0,09745	0,43513
14,18	-0,02325	0,07631	0,42335
14,185	-0,02848	0,05073	0,38528
14,19	-0,03172	0,01022	0,34309
14,195	-0,03143	-0,02975	0,29517
14,2	-0,01356	-0,06751	0,2285
14,205	0,00916	-0,09402	0,15812
14,21	0,03869	-0,11625	0,08492
14,215	0,0756	-0,13093	0,01209
14,22	0,11533	-0,13492	-0,05853
14,225	0,15796	-0,13358	-0,12024
14,23	0,20044	-0,11942	-0,17485
14,235	0,24159	-0,09794	-0,22379
14,24	0,27186	-0,07171	-0,23862
14,245	0,29894	-0,02423	-0,2473
14,25	0,32259	0,02649	-0,25019
14,255	0,33133	0,07872	-0,22659
14,26	0,33694	0,12375	-0,19795
14,265	0,33772	0,1643	-0,16197
14,27	0,33016	0,19442	-0,11541
14,275	0,31915	0,20281	-0,06545
14,28	0,30102	0,19969	-0,01288
14,285	0,27811	0,17445	0,03945
14,29	0,25226	0,13551	0,0904
14,295	0,21512	0,08988	0,12846
14,3	0,1748	0,02694	0,16227
14,305	0,13199	-0,0374	0,19185
14,31	0,07971	-0,10139	0,18549
14,315	0,02687	-0,16138	0,17414
14,32	-0,02529	-0,21919	0,15592
14,325	-0,073	-0,27286	0,12561
14,33	-0,11751	-0,31569	0,09152
14,335	-0,15469	-0,35365	0,05297
14,34	-0,1845	-0,37986	0,01274
14,345	-0,20953	-0,39355	-0,02727
14,35	-0,21921	-0,39866	-0,06236
14,355	-0,22555	-0,3774	-0,09616
14,36	-0,23069	-0,34726	-0,12954
14,365	-0,20525	-0,31208	-0,1501
14,37	-0,17714	-0,26197	-0,17035
14,375	-0,14311	-0,21319	-0,18928
14,38	-0,09094	-0,16824	-0,20301

14,385	-0,032	-0,13643	-0,21518
14,39	0,03577	-0,11047	-0,22633
14,395	0,10906	-0,09376	-0,23741
14,4	0,18309	-0,08468	-0,24879
14,405	0,25215	-0,07836	-0,26404
14,41	0,31569	-0,07639	-0,28098
14,415	0,37403	-0,07457	-0,29923
14,42	0,39257	-0,07229	-0,33792
14,425	0,40615	-0,07199	-0,37832
14,43	0,41459	-0,07235	-0,42069
14,435	0,40895	-0,07365	-0,46813
14,44	0,40155	-0,07477	-0,51579
14,445	0,39164	-0,07597	-0,56247
14,45	0,37769	-0,07554	-0,60551
14,455	0,3616	-0,07075	-0,64546
14,46	0,33918	-0,06295	-0,67712
14,465	0,31202	-0,04945	-0,704
14,47	0,28159	-0,03324	-0,72804
14,475	0,24984	-0,01631	-0,73762
14,48	0,21851	-0,00863	-0,74497
14,485	0,1899	-0,00504	-0,74971
14,49	0,18164	-0,00702	-0,73925
14,495	0,17954	-0,03111	-0,72551
14,5	0,18539	-0,05994	-0,70657
14,505	0,19901	-0,0933	-0,67937
14,51	0,21408	-0,12896	-0,64833
14,515	0,22716	-0,16344	-0,61032
14,52	0,23536	-0,19272	-0,56827
14,525	0,23901	-0,21678	-0,52415
14,53	0,22799	-0,2368	-0,47206
14,535	0,2143	-0,23939	-0,41902
14,54	0,19968	-0,23919	-0,36543
14,545	0,17842	-0,2371	-0,30502
14,55	0,1584	-0,21366	-0,24337
14,555	0,13887	-0,18709	-0,17972
14,56	0,11537	-0,15457	-0,11287
14,565	0,08889	-0,10894	-0,04512
14,57	0,05634	-0,05839	0,0219
14,575	0,01856	-0,00152	0,08661
14,58	-0,02164	0,057	0,14884
14,585	-0,05921	0,11467	0,19948
14,59	-0,09347	0,16167	0,24571
14,595	-0,12369	0,20313	0,28875
14,6	-0,11672	0,23989	0,29745
14,605	-0,10421	0,22929	0,30323

14,61	-0,0856	0,21443	0,30458
14,615	-0,06063	0,19398	0,29546
14,62	-0,03666	0,16228	0,28356
14,625	-0,01791	0,12843	0,26796
14,63	-0,007	0,09261	0,25008
14,635	-0,00141	0,05652	0,23191
14,64	-0,00573	0,02137	0,21607
14,645	-0,01203	-0,01069	0,20085
14,65	-0,01821	-0,04167	0,18579
14,655	-0,03739	-0,07169	0,18526
14,66	-0,05673	-0,08368	0,18601
14,665	-0,07875	-0,09337	0,18953
14,67	-0,11796	-0,09885	0,20498
14,675	-0,1641	-0,08854	0,2231
14,68	-0,22071	-0,07355	0,24398
14,685	-0,28705	-0,05222	0,26606
14,69	-0,35646	-0,02494	0,28751
14,695	-0,42555	0,00458	0,30451
14,7	-0,49024	0,0366	0,31796
14,705	-0,54994	0,06899	0,32837
14,71	-0,58635	0,1011	0,31613
14,715	-0,61787	0,12794	0,30088
14,72	-0,64532	0,15412	0,28292
14,725	-0,66147	0,17963	0,25521
14,73	-0,67693	0,20139	0,22685
14,735	-0,69052	0,22274	0,19867
14,74	-0,69788	0,24402	0,17235
14,745	-0,70096	0,26427	0,14836
14,75	-0,6922	0,28423	0,13088
14,755	-0,67393	0,30372	0,11809
14,76	-0,6494	0,32297	0,10831
14,765	-0,61073	0,34204	0,1128
14,77	-0,57001	0,36066	0,1203
14,775	-0,52933	0,37889	0,13061
14,78	-0,49486	0,39661	0,15774
14,785	-0,46345	0,41133	0,18674
14,79	-0,43551	0,42528	0,21725
14,795	-0,40958	0,43806	0,24767
14,8	-0,3828	0,44863	0,27662
14,805	-0,35248	0,45832	0,2997
14,81	-0,31839	0,46606	0,3157
14,815	-0,28225	0,47223	0,32612
14,82	-0,24481	0,47744	0,31681
14,825	-0,20944	0,47645	0,30172
14,83	-0,17683	0,47283	0,28315

14,835	-0,14952	0,46701	0,24914
14,84	-0,12369	0,44882	0,21488
14,845	-0,09758	0,42828	0,18107
14,85	-0,06492	0,40458	0,15005
14,855	-0,02744	0,37528	0,1213
14,86	0,018	0,34422	0,09762
14,865	0,06929	0,31068	0,079
14,87	0,1222	0,27501	0,06319
14,875	0,1711	0,23805	0,05609
14,88	0,21477	0,19666	0,05195
14,885	0,25356	0,15308	0,04953
14,89	0,26355	0,10792	0,06534
14,895	0,2704	0,05577	0,08282
14,9	0,27481	0,00337	0,10226
14,905	0,27697	-0,04816	0,12372
14,91	0,28126	-0,09232	0,14498
14,915	0,28863	-0,13262	0,16357
14,92	0,29731	-0,16469	0,17659
14,925	0,3054	-0,1855	0,18564
14,93	0,30771	-0,19977	0,18577
14,935	0,3043	-0,19788	0,18196
14,94	0,29646	-0,18901	0,1764
14,945	0,28286	-0,17607	0,17019
14,95	0,26921	-0,1359	0,16572
14,955	0,25785	-0,09159	0,16414
14,96	0,25931	-0,04218	0,17341
14,965	0,2657	0,02533	0,18548
14,97	0,2772	0,09682	0,2008
14,975	0,29001	0,17167	0,21865
14,98	0,30054	0,24646	0,23637
14,985	0,30144	0,31892	0,25287
14,99	0,29332	0,38157	0,26763
14,995	0,27871	0,43536	0,28078
15	0,24489	0,48218	0,28362
15,005	0,20984	0,49741	0,28474
15,01	0,17581	0,50689	0,28405
15,015	0,1428	0,51238	0,26522
15,02	0,11274	0,50116	0,24231
15,025	0,0852	0,48922	0,21156
15,03	0,05706	0,47677	0,16542
15,035	0,02671	0,46303	0,11296
15,04	-0,00726	0,44944	0,05173
15,045	-0,04383	0,4367	-0,01306
15,05	-0,08063	0,42492	-0,07783
15,055	-0,10187	0,41415	-0,13407

15,06	-0,11504	0,412	-0,18552
15,065	-0,11962	0,4128	-0,23215
15,07	-0,06598	0,41648	-0,23606
15,075	-0,00339	0,44577	-0,23446
15,08	0,0689	0,47768	-0,22494
15,085	0,1514	0,51176	-0,19903
15,09	0,23337	0,54516	-0,16823
15,095	0,30948	0,57614	-0,1298
15,1	0,37634	0,59913	-0,08585
15,105	0,43635	0,61182	-0,03996
15,11	0,48161	0,61717	0,00711
15,115	0,52378	0,60118	0,05449
15,12	0,56583	0,57877	0,10213
15,125	0,58518	0,55349	0,12567
15,13	0,60457	0,49551	0,14564
15,135	0,62094	0,43611	0,15793
15,14	0,62002	0,37352	0,14443
15,145	0,61203	0,3002	0,12259
15,15	0,59318	0,22374	0,08946
15,155	0,56477	0,14453	0,04742
15,16	0,53298	0,06535	0,00266
15,165	0,50005	-0,01216	-0,04337
15,17	0,47026	-0,0799	-0,08783
15,175	0,44421	-0,14101	-0,13007
15,18	0,43312	-0,1968	-0,14703
15,185	0,42431	-0,21453	-0,16027
15,19	0,41578	-0,22736	-0,16881
15,195	0,39843	-0,23545	-0,15855
15,2	0,3751	-0,23141	-0,14341
15,205	0,34075	-0,22645	-0,1201
15,21	0,29156	-0,22159	-0,08534
15,215	0,23515	-0,21815	-0,04544
15,22	0,16689	-0,21638	0,00275
15,225	0,09493	-0,21803	0,05437
15,23	0,0224	-0,22129	0,10706
15,235	-0,05574	-0,22542	0,15427
15,24	-0,13308	-0,23715	0,19893
15,245	-0,20983	-0,25018	0,23969
15,25	-0,28555	-0,26492	0,25666
15,255	-0,36149	-0,2908	0,26827
15,26	-0,43577	-0,31878	0,27206
15,265	-0,50168	-0,34876	0,26407
15,27	-0,562	-0,37917	0,25141
15,275	-0,60546	-0,40845	0,23071
15,28	-0,63292	-0,43255	0,20505

15,285	-0,64842	-0,45094	0,1768
15,29	-0,62279	-0,4647	0,14136
15,295	-0,58588	-0,46041	0,10422
15,3	-0,54156	-0,4518	0,06605
15,305	-0,47352	-0,44029	0,02837
15,31	-0,40528	-0,41142	-0,00883
15,315	-0,33898	-0,38073	-0,04432
15,32	-0,27898	-0,34724	-0,07407
15,325	-0,22309	-0,30768	-0,10112
15,33	-0,17445	-0,26569	-0,12306
15,335	-0,13115	-0,22074	-0,14072
15,34	-0,09022	-0,17424	-0,15608
15,345	-0,0561	-0,12758	-0,16538
15,35	-0,02302	-0,08513	-0,173
15,355	0,00971	-0,0448	-0,1798
15,36	0,0265	-0,00615	-0,17569
15,365	0,04151	0,00334	-0,17071
15,37	0,0539	0,01068	-0,16421
15,375	0,06287	0,01482	-0,1542
15,38	0,0712	0,01186	-0,14326
15,385	0,08137	0,0077	-0,13162
15,39	0,09689	0,00259	-0,12038
15,395	0,11699	-0,00245	-0,10996
15,4	0,14776	-0,00678	-0,1024
15,405	0,18352	-0,00975	-0,09623
15,41	0,22164	-0,01237	-0,09081
15,415	0,25379	-0,01503	-0,08982
15,42	0,28135	-0,01194	-0,08893
15,425	0,3014	-0,00837	-0,08825
15,43	0,29869	-0,00337	-0,08939
15,435	0,28834	0,01044	-0,09097
15,44	0,26878	0,02685	-0,09356
15,445	0,24241	0,04711	-0,09772
15,45	0,21537	0,0713	-0,10277
15,455	0,1896	0,09671	-0,1093
15,46	0,16705	0,12269	-0,11641
15,465	0,14692	0,14755	-0,12314
15,47	0,1285	0,17072	-0,13197
15,475	0,1087	0,18225	-0,14091
15,48	0,08653	0,19094	-0,15019
15,485	0,0609	0,19661	-0,16474
15,49	0,03341	0,18877	-0,18111
15,495	0,0057	0,17767	-0,20115
15,5	-0,01732	0,16119	-0,22803
15,505	-0,03615	0,13543	-0,25808

15,51	-0,04634	0,1052	-0,29322
15,515	-0,0504	0,06674	-0,33043
15,52	-0,05168	0,02318	-0,36792
15,525	-0,05521	-0,02299	-0,40354
15,53	-0,06255	-0,07392	-0,43734
15,535	-0,07483	-0,12516	-0,46889
15,54	-0,10686	-0,17572	-0,48251
15,545	-0,14276	-0,21587	-0,4927
15,55	-0,18084	-0,25363	-0,49686
15,555	-0,21468	-0,28754	-0,48791
15,56	-0,2432	-0,31351	-0,47367
15,565	-0,25897	-0,33637	-0,44877
15,57	-0,26219	-0,35329	-0,41478
15,575	-0,25769	-0,36517	-0,37571
15,58	-0,23521	-0,37394	-0,32292
15,585	-0,21027	-0,37176	-0,26723
15,59	-0,18568	-0,36607	-0,21061
15,595	-0,14686	-0,3581	-0,15943
15,6	-0,10853	-0,33559	-0,1116
15,605	-0,06883	-0,31149	-0,07036
15,61	-0,02154	-0,28544	-0,04844
15,615	0,02985	-0,25675	-0,03454
15,62	0,0857	-0,22769	-0,03445
15,625	0,14252	-0,19911	-0,04747
15,63	0,19756	-0,17169	-0,06702
15,635	0,2385	-0,14504	-0,10206
15,64	0,26975	-0,1204	-0,14213
15,645	0,29302	-0,09627	-0,18468
15,65	0,2655	-0,07225	-0,23761
15,655	0,23249	-0,05484	-0,29048
15,66	0,1953	-0,03787	-0,34227
15,665	0,15569	-0,02206	-0,38624
15,67	0,1197	-0,01238	-0,42668
15,675	0,09235	-0,0048	-0,45927
15,68	0,07723	-0,00113	-0,47983
15,685	0,06922	-0,00252	-0,49343
15,69	0,07447	-0,00641	-0,49168
15,695	0,08414	-0,01603	-0,48237
15,7	0,09526	-0,02804	-0,46898
15,705	0,12131	-0,04134	-0,44471
15,71	0,14815	-0,06285	-0,4195
15,715	0,17676	-0,08574	-0,39434
15,72	0,21934	-0,11019	-0,37351
15,725	0,26525	-0,13955	-0,35414
15,73	0,31438	-0,16999	-0,33731

15,735	0,36386	-0,20096	-0,32365
15,74	0,41164	-0,23076	-0,31059
15,745	0,45024	-0,25914	-0,29818
15,75	0,47922	-0,28289	-0,28528
15,755	0,50017	-0,3026	-0,27155
15,76	0,48897	-0,31933	-0,25369
15,765	0,46986	-0,32505	-0,23472
15,77	0,44495	-0,32868	-0,2147
15,775	0,39909	-0,33121	-0,18597
15,78	0,35182	-0,33098	-0,15562
15,785	0,30357	-0,33165	-0,12219
15,79	0,25366	-0,33405	-0,08203
15,795	0,20409	-0,3399	-0,03915
15,8	0,15512	-0,34756	0,00745
15,805	0,10649	-0,35831	0,05586
15,81	0,05798	-0,37121	0,10452
15,815	0,01109	-0,38511	0,14935
15,82	-0,03553	-0,4027	0,19209
15,825	-0,08171	-0,42116	0,23286
15,83	-0,11532	-0,44018	0,25285
15,835	-0,14699	-0,4626	0,27039
15,84	-0,17558	-0,48477	0,2845
15,845	-0,19778	-0,50565	0,29185
15,85	-0,21762	-0,52053	0,29787
15,855	-0,23442	-0,53229	0,30257
15,86	-0,2495	-0,53688	0,30697
15,865	-0,26431	-0,53311	0,3117
15,87	-0,27813	-0,52412	0,31648
15,875	-0,29248	-0,50146	0,32088
15,88	-0,30727	-0,47443	0,32462
15,885	-0,31339	-0,44548	0,32265
15,89	-0,31765	-0,40609	0,31881
15,895	-0,31857	-0,36743	0,31215
15,9	-0,30993	-0,33012	0,29704
15,905	-0,2979	-0,29754	0,27903
15,91	-0,28204	-0,26706	0,25599
15,915	-0,26436	-0,24079	0,22659
15,92	-0,24729	-0,22022	0,19369
15,925	-0,2339	-0,20281	0,15154
15,93	-0,22427	-0,19448	0,10437
15,935	-0,2176	-0,191	0,05391
15,94	-0,21917	-0,19087	-0,00749
15,945	-0,22107	-0,21085	-0,06997
15,95	-0,22201	-0,23353	-0,13208
15,955	-0,21752	-0,25828	-0,18332

15,96	-0,20971	-0,28491	-0,22981
15,965	-0,19706	-0,31038	-0,26602
15,97	-0,17919	-0,33204	-0,28404
15,975	-0,15955	-0,34579	-0,2926
15,98	-0,13773	-0,35464	-0,28111
15,985	-0,11596	-0,35329	-0,25884
15,99	-0,09453	-0,34608	-0,23112
15,995	-0,06848	-0,33578	-0,18419
16	-0,0406	-0,31594	-0,13461
16,005	-0,01026	-0,29508	-0,08343
16,01	0,0293	-0,27376	-0,03011
16,015	0,07097	-0,24961	0,02219
16,02	0,11329	-0,22518	0,071
16,025	0,15054	-0,20054	0,10997
16,03	0,18306	-0,17625	0,14357
16,035	0,2031	-0,15226	0,16407
16,04	0,2112	-0,13017	0,17301
16,045	0,21132	-0,11062	0,17451
16,05	0,18933	-0,09313	0,15282
16,055	0,16317	-0,0817	0,12571
16,06	0,13567	-0,07287	0,09588
16,065	0,09868	-0,06561	0,06348
16,07	0,06305	-0,05368	0,03332
16,075	0,02872	-0,03989	0,00838
16,08	-0,00528	-0,02185	-0,00148
16,085	-0,03988	0,00715	-0,00454
16,09	-0,07449	0,0407	0,0049
16,095	-0,1079	0,08069	0,0252
16,1	-0,13953	0,12435	0,051
16,105	-0,15895	0,16839	0,09123
16,11	-0,17176	0,21025	0,13574
16,115	-0,17939	0,24955	0,18244
16,12	-0,14297	0,2866	0,24284
16,125	-0,10257	0,29493	0,30342
16,13	-0,05853	0,30046	0,36327
16,135	-0,01256	0,30166	0,41642
16,14	0,03051	0,28876	0,46638
16,145	0,06577	0,27152	0,50848
16,15	0,08989	0,24663	0,53927
16,155	0,10705	0,21264	0,56338
16,16	0,11018	0,17396	0,57115
16,165	0,10861	0,12511	0,57246
16,17	0,1053	0,07219	0,57071
16,175	0,08503	0,01749	0,55651
16,18	0,06358	-0,03556	0,54223

16,185	0,03955	-0,08686	0,52841
16,19	0,00049	-0,13449	0,51626
16,195	-0,04305	-0,16422	0,50539
16,2	-0,09217	-0,18865	0,49678
16,205	-0,14545	-0,20511	0,4911
16,21	-0,19907	-0,21155	0,48666
16,215	-0,24822	-0,21353	0,48488
16,22	-0,29159	-0,2074	0,48449
16,225	-0,32963	-0,19723	0,48489
16,23	-0,34337	-0,18486	0,48845
16,235	-0,35242	-0,16572	0,49207
16,24	-0,35818	-0,14506	0,49529
16,245	-0,35227	-0,12336	0,49419
16,25	-0,34594	-0,10318	0,49139
16,255	-0,33903	-0,08347	0,48542
16,26	-0,32948	-0,06559	0,47349
16,265	-0,31862	-0,05263	0,45861
16,27	-0,30486	-0,0421	0,43855
16,275	-0,28855	-0,03591	0,41514
16,28	-0,27084	-0,03215	0,38993
16,285	-0,25428	-0,02911	0,36082
16,29	-0,23869	-0,02504	0,33079
16,295	-0,22488	-0,01942	0,30011
16,3	-0,23094	-0,01195	0,26658
16,305	-0,24009	0,00656	0,23265
16,31	-0,2529	0,02739	0,1984
16,315	-0,27038	0,05082	0,16405
16,32	-0,28848	0,07803	0,12973
16,325	-0,3058	0,10591	0,09613
16,33	-0,32094	0,13435	0,06375
16,335	-0,33415	0,16231	0,03244
16,34	-0,34178	0,18953	0,00574
16,345	-0,34812	0,21574	-0,01923
16,35	-0,35417	0,2413	-0,04326
16,355	-0,3429	0,26643	-0,05273
16,36	-0,33009	0,29246	-0,06033
16,365	-0,31328	0,31868	-0,0641
16,37	-0,28185	0,34539	-0,05564
16,375	-0,24491	0,37406	-0,04312
16,38	-0,19978	0,40324	-0,02431
16,385	-0,14772	0,43327	0,00026
16,39	-0,09307	0,46398	0,02716
16,395	-0,03622	0,49472	0,05831
16,4	0,01971	0,52569	0,09032
16,405	0,07399	0,55622	0,12225

16,41	0,11159	0,58611	0,14689
16,415	0,14605	0,60921	0,1698
16,42	0,17627	0,63046	0,18996
16,425	0,19	0,64868	0,19803
16,43	0,19901	0,65402	0,20229
16,435	0,19949	0,65481	0,19939
16,44	0,18716	0,64731	0,18609
16,445	0,16809	0,62762	0,16776
16,45	0,13398	0,60143	0,13939
16,455	0,09206	0,56094	0,10657
16,46	0,04581	0,51319	0,07197
16,465	-0,01513	0,46148	0,03588
16,47	-0,07767	0,39388	0,00129
16,475	-0,14086	0,3243	-0,03045
16,48	-0,20271	0,25346	-0,04464
16,485	-0,26322	0,17963	-0,05383
16,49	-0,32063	0,10607	-0,05518
16,495	-0,37151	0,0338	-0,04425
16,5	-0,41884	-0,03494	-0,02799
16,505	-0,45741	-0,10149	-0,00188
16,51	-0,48878	-0,16241	0,03039
16,515	-0,51489	-0,21845	0,06587
16,52	-0,51946	-0,27078	0,11011
16,525	-0,51849	-0,30882	0,15621
16,53	-0,5134	-0,34259	0,20331
16,535	-0,48828	-0,37304	0,2465
16,54	-0,46094	-0,39186	0,28832
16,545	-0,43095	-0,40938	0,32638
16,55	-0,39632	-0,42609	0,35336
16,555	-0,36061	-0,44266	0,37515
16,56	-0,3234	-0,46027	0,38719
16,565	-0,2852	-0,47891	0,39141
16,57	-0,24656	-0,4977	0,39154
16,575	-0,20715	-0,51583	0,382
16,58	-0,16759	-0,52777	0,37007
16,585	-0,12808	-0,53645	0,35706
16,59	-0,09555	-0,54243	0,33773
16,595	-0,0637	-0,5217	0,31788
16,6	-0,03282	-0,49833	0,29704
16,605	-0,00376	-0,47152	0,27395
16,61	0,02519	-0,43807	0,24946
16,615	0,05451	-0,4037	0,22312
16,62	0,08465	-0,36885	0,19542
16,625	0,11545	-0,33452	0,1672
16,63	0,1465	-0,30106	0,13886

16,635	0,17704	-0,26934	0,11076
16,64	0,20677	-0,23797	0,08291
16,645	0,22988	-0,20668	0,05511
16,65	0,25125	-0,18372	0,02712
16,655	0,27049	-0,16193	-0,0012
16,66	0,28443	-0,14258	-0,0295
16,665	0,29731	-0,13327	-0,05769
16,67	0,30835	-0,12721	-0,08434
16,675	0,31645	-0,12454	-0,10717
16,68	0,3227	-0,12331	-0,127
16,685	0,32228	-0,1214	-0,1381
16,69	0,31694	-0,11365	-0,14336
16,695	0,30767	-0,10069	-0,14444
16,7	0,27904	-0,08334	-0,12582
16,705	0,24664	-0,04285	-0,10385
16,71	0,21116	0,00121	-0,07895
16,715	0,16975	0,04794	-0,04477
16,72	0,12843	0,1014	-0,00908
16,725	0,08849	0,15444	0,02843
16,73	0,05175	0,20577	0,06788
16,735	0,0169	0,2536	0,10777
16,74	-0,01401	0,29922	0,14698
16,745	-0,04289	0,33918	0,18525
16,75	-0,07065	0,37535	0,22252
16,755	-0,08927	0,40888	0,2521
16,76	-0,10546	0,42491	0,27924
16,765	-0,11875	0,43626	0,30386
16,77	-0,11101	0,44284	0,31256
16,775	-0,09909	0,41952	0,31884
16,78	-0,08214	0,39189	0,32219
16,785	-0,05973	0,35997	0,32144
16,79	-0,03667	0,3251	0,31973
16,795	-0,01593	0,29183	0,31706
16,8	0,00001	0,2652	0,31426
16,805	0,01172	0,2472	0,31174
16,81	0,01064	0,23579	0,31037
16,815	0,00634	0,24308	0,30887
16,82	0,00085	0,25505	0,30704
16,825	-0,0163	0,26902	0,30573
16,83	-0,03258	0,29217	0,3042
16,835	-0,04852	0,31364	0,30263
16,84	-0,06761	0,33226	0,30152
16,845	-0,0885	0,34427	0,30062
16,85	-0,1126	0,35379	0,29928
16,855	-0,13969	0,35753	0,29686

16,86	-0,16804	0,35461	0,29349
16,865	-0,19357	0,34747	0,28618
16,87	-0,21613	0,32374	0,27699
16,875	-0,23541	0,29273	0,26647
16,88	-0,22065	0,25665	0,24387
16,885	-0,20021	0,17436	0,22016
16,89	-0,17313	0,08815	0,19506
16,895	-0,13377	-0,00156	0,1663
16,9	-0,09279	-0,09244	0,13657
16,905	-0,05214	-0,18032	0,10555
16,91	-0,01458	-0,25877	0,07319
16,915	0,02004	-0,32105	0,04022
16,92	0,05054	-0,37288	0,00694
16,925	0,0801	-0,3999	-0,02627
16,93	0,11031	-0,41561	-0,05922
16,935	0,14581	-0,42536	-0,08671
16,94	0,18467	-0,40308	-0,11268
16,945	0,22681	-0,37796	-0,13641
16,95	0,27237	-0,34974	-0,1496
16,955	0,31756	-0,30477	-0,15993
16,96	0,36066	-0,2568	-0,16589
16,965	0,3997	-0,20552	-0,16578
16,97	0,43618	-0,15207	-0,16296
16,975	0,47008	-0,09908	-0,15483
16,98	0,50395	-0,05125	-0,14348
16,985	0,5389	-0,00976	-0,13023
16,99	0,57757	0,0259	-0,11087
16,995	0,61827	0,03669	-0,0904
17	0,65987	0,04081	-0,06935
17,005	0,68951	0,03987	-0,0507
17,01	0,71428	0,02722	-0,03328
17,015	0,72941	0,01426	-0,01895
17,02	0,72538	0,00282	-0,012
17,025	0,71254	-0,00419	-0,00878
17,03	0,68601	-0,00877	-0,01301
17,035	0,65207	-0,00993	-0,02271
17,04	0,61577	-0,01019	-0,03538
17,045	0,57405	-0,01125	-0,05658
17,05	0,53318	-0,01673	-0,07982
17,055	0,49327	-0,02514	-0,10429
17,06	0,45096	-0,03605	-0,13659
17,065	0,40685	-0,06274	-0,16949
17,07	0,35999	-0,09074	-0,20292
17,075	0,31049	-0,12056	-0,2359
17,08	0,26029	-0,15519	-0,26818

17,085	0,21278	-0,19129	-0,29777
17,09	0,17187	-0,23048	-0,32333
17,095	0,13675	-0,27281	-0,34594
17,1	0,11633	-0,31662	-0,35983
17,105	0,10284	-0,36148	-0,3703
17,11	0,09326	-0,40637	-0,37888
17,115	0,08101	-0,45083	-0,37822
17,12	0,06496	-0,4648	-0,37716
17,125	0,0418	-0,4731	-0,37566
17,13	-0,00037	-0,47128	-0,37302
17,135	-0,04925	-0,43828	-0,37013
17,14	-0,10518	-0,39536	-0,36639
17,145	-0,16354	-0,33938	-0,36103
17,15	-0,22014	-0,27281	-0,35438
17,155	-0,2691	-0,20299	-0,3446
17,16	-0,31185	-0,13053	-0,33301
17,165	-0,34995	-0,05924	-0,32025
17,17	-0,36465	0,01007	-0,29901
17,175	-0,37766	0,05607	-0,27661
17,18	-0,38903	0,09916	-0,25264
17,185	-0,38592	0,1383	-0,22057
17,19	-0,37913	0,15517	-0,18618
17,195	-0,36375	0,16663	-0,1475
17,2	-0,33247	0,16809	-0,1023
17,205	-0,29232	0,15356	-0,0543
17,21	-0,23636	0,13156	-0,0021
17,215	-0,17277	0,09626	0,05095
17,22	-0,10672	0,055	0,10327
17,225	-0,04897	0,01191	0,14848
17,23	0,00232	-0,02428	0,1902
17,235	0,04488	-0,05615	0,22762
17,24	0,04569	-0,08169	0,24209
17,245	0,03785	-0,06842	0,25123
17,25	0,01964	-0,04728	0,25229
17,255	-0,01138	-0,01565	0,2396
17,26	-0,04548	0,03076	0,22103
17,265	-0,08418	0,08161	0,19131
17,27	-0,12518	0,138	0,15359
17,275	-0,16741	0,19581	0,11131
17,28	-0,21422	0,25294	0,05638
17,285	-0,26385	0,30427	-0,00118
17,29	-0,31563	0,35363	-0,05991
17,295	-0,35071	0,40123	-0,11506
17,3	-0,38191	0,4206	-0,16798
17,305	-0,40344	0,43511	-0,21592

17,31	-0,39751	0,44013	-0,25049
17,315	-0,37919	0,42107	-0,27901
17,32	-0,34117	0,39191	-0,29673
17,325	-0,28894	0,34724	-0,30546
17,33	-0,23123	0,29136	-0,30949
17,335	-0,16625	0,23099	-0,3024
17,34	-0,10257	0,16742	-0,29197
17,345	-0,0412	0,10507	-0,27977
17,35	0,00268	0,0445	-0,25887
17,355	0,04497	0,02365	-0,23756
17,36	0,08568	0,00644	-0,21619
17,365	0,12173	-0,00535	-0,19739
17,37	0,15732	-0,00329	-0,17979
17,375	0,19036	0,00155	-0,16588
17,38	0,21791	0,00984	-0,15751
17,385	0,24129	0,02077	-0,15248
17,39	0,2531	0,03223	-0,15615
17,395	0,25866	0,04505	-0,16339
17,4	0,26055	0,05883	-0,17234
17,405	0,26088	0,07329	-0,18735
17,41	0,26304	0,07841	-0,20223
17,415	0,26952	0,08214	-0,21647
17,42	0,29368	0,08248	-0,22813
17,425	0,32374	0,06399	-0,23866
17,43	0,36112	0,03992	-0,24757
17,435	0,40444	0,00803	-0,25469
17,44	0,44883	-0,0317	-0,26114
17,445	0,49242	-0,07368	-0,266
17,45	0,53356	-0,11594	-0,27002
17,455	0,57239	-0,15539	-0,27342
17,46	0,60218	-0,19123	-0,27321
17,465	0,63019	-0,20727	-0,27143
17,47	0,65634	-0,21862	-0,26812
17,475	0,66773	-0,22571	-0,2595
17,48	0,67557	-0,2159	-0,24931
17,485	0,67613	-0,20325	-0,23662
17,49	0,66179	-0,18623	-0,2197
17,495	0,64013	-0,16099	-0,20079
17,5	0,60492	-0,13175	-0,17679
17,505	0,56161	-0,09481	-0,14884
17,51	0,5146	-0,05226	-0,11831
17,515	0,45909	-0,00649	-0,07539
17,52	0,40328	0,04418	-0,02909
17,525	0,34802	0,09537	0,02006
17,53	0,2945	0,14594	0,09008

17,535	0,24177	0,18431	0,16205
17,54	0,19041	0,2199	0,23618
17,545	0,14297	0,25172	0,31266
17,55	0,09739	0,27809	0,38838
17,555	0,05705	0,30313	0,46068
17,56	0,02295	0,3272	0,52773
17,565	-0,00657	0,35151	0,59022
17,57	-0,02188	0,37617	0,63701
17,575	-0,03259	0,39923	0,67819
17,58	-0,0409	0,42119	0,71614
17,585	-0,03629	0,44192	0,72211
17,59	-0,03203	0,44808	0,72455
17,595	-0,02838	0,45136	0,72034
17,6	-0,02538	0,45041	0,69699
17,605	-0,02297	0,4407	0,66757
17,61	-0,02145	0,42852	0,62935
17,615	-0,02073	0,41338	0,58367
17,62	-0,02046	0,39603	0,53508
17,625	-0,02277	0,37759	0,48205
17,63	-0,02671	0,3558	0,42845
17,635	-0,03216	0,33197	0,37535
17,64	-0,05067	0,30655	0,32991
17,645	-0,07062	0,28007	0,28597
17,65	-0,09157	0,25316	0,24364
17,655	-0,11202	0,22694	0,20441
17,66	-0,13078	0,20945	0,16568
17,665	-0,1456	0,1958	0,12692
17,67	-0,15453	0,18958	0,08722
17,675	-0,16021	0,19347	0,04683
17,68	-0,1594	0,20222	0,00429
17,685	-0,15617	0,2196	-0,03867
17,69	-0,15193	0,23974	-0,08147
17,695	-0,13743	0,26045	-0,12555
17,7	-0,12119	0,28074	-0,16893
17,705	-0,10216	0,29953	-0,21152
17,71	-0,06691	0,31613	-0,2516
17,715	-0,02749	0,32078	-0,29061
17,72	0,01699	0,32254	-0,32718
17,725	0,06591	0,31892	-0,35812
17,73	0,11511	0,30471	-0,38582
17,735	0,16107	0,28491	-0,40476
17,74	0,20203	0,25225	-0,41656
17,745	0,23858	0,21026	-0,42336
17,75	0,25995	0,16249	-0,41067
17,755	0,27779	0,095	-0,39383

17,76	0,29344	0,02459	-0,37449
17,765	0,29518	-0,04673	-0,34895
17,77	0,29555	-0,11658	-0,32441
17,775	0,29249	-0,18372	-0,30279
17,78	0,27911	-0,24585	-0,28899
17,785	0,26044	-0,29732	-0,27922
17,79	0,23203	-0,3439	-0,27748
17,795	0,19612	-0,38096	-0,28182
17,8	0,15676	-0,41002	-0,28923
17,805	0,11372	-0,43403	-0,30582
17,81	0,07206	-0,44066	-0,32459
17,815	0,03268	-0,44124	-0,34458
17,82	0,00895	-0,43745	-0,37156
17,825	-0,01253	-0,39927	-0,39858
17,83	-0,03219	-0,35817	-0,42455
17,835	-0,05154	-0,3143	-0,44369
17,84	-0,07282	-0,26914	-0,45923
17,845	-0,09755	-0,22553	-0,46558
17,85	-0,12485	-0,18767	-0,46018
17,855	-0,15268	-0,15794	-0,44745
17,86	-0,1783	-0,13363	-0,41566
17,865	-0,2002	-0,12249	-0,3773
17,87	-0,21869	-0,11551	-0,33602
17,875	-0,23607	-0,11016	-0,28468
17,88	-0,25376	-0,11595	-0,23479
17,885	-0,27414	-0,12118	-0,18774
17,89	-0,30691	-0,12591	-0,15096
17,895	-0,34504	-0,13083	-0,11829
17,9	-0,38905	-0,13561	-0,09233
17,905	-0,43466	-0,13922	-0,07408
17,91	-0,47804	-0,13983	-0,05944
17,915	-0,50929	-0,13818	-0,0532
17,92	-0,53026	-0,12797	-0,05094
17,925	-0,54303	-0,11212	-0,05099
17,93	-0,51683	-0,09235	-0,05953
17,935	-0,48595	-0,04954	-0,06859
17,94	-0,45175	-0,00445	-0,07687
17,945	-0,40209	0,04217	-0,07409
17,95	-0,35081	0,0884	-0,06644
17,955	-0,29516	0,13172	-0,04869
17,96	-0,22879	0,16865	-0,01316
17,965	-0,15597	0,19417	0,03161
17,97	-0,07167	0,21331	0,093
17,975	0,01931	0,21955	0,16292
17,98	0,11234	0,21821	0,23657

17,985	0,18948	0,21249	0,31416
17,99	0,25786	0,18859	0,39028
17,995	0,31465	0,16081	0,46361
18	0,30292	0,12957	0,51411
18,005	0,27763	0,0817	0,55919
18,01	0,23564	0,03143	0,59483
18,015	0,17112	-0,02019	0,6109
18,02	0,10116	-0,06892	0,61844
18,025	0,02451	-0,11437	0,60793
18,03	-0,05462	-0,1494	0,58211
18,035	-0,13449	-0,17317	0,547
18,04	-0,22021	-0,18898	0,48361
18,045	-0,31021	-0,17962	0,41262
18,05	-0,40424	-0,16386	0,33741
18,055	-0,48363	-0,14498	0,25191
18,06	-0,56065	-0,11379	0,16754
18,065	-0,62853	-0,08417	0,08674
18,07	-0,66243	-0,05765	0,01816
18,075	-0,68046	-0,03924	-0,04432
18,08	-0,67228	-0,02436	-0,09555
18,085	-0,64265	-0,01642	-0,13621
18,09	-0,60398	-0,01537	-0,17125
18,095	-0,55326	-0,01831	-0,19198
18,1	-0,50336	-0,03505	-0,20768
18,105	-0,45647	-0,05729	-0,22052
18,11	-0,42981	-0,08311	-0,20973
18,115	-0,40571	-0,14389	-0,19625
18,12	-0,38368	-0,20683	-0,17917
18,125	-0,36661	-0,27087	-0,15442
18,13	-0,34898	-0,32957	-0,12772
18,135	-0,33262	-0,38331	-0,09956
18,14	-0,32208	-0,42457	-0,07202
18,145	-0,31662	-0,44673	-0,04566
18,15	-0,3256	-0,45696	-0,02158
18,155	-0,3437	-0,44003	0,00111
18,16	-0,36725	-0,41134	0,02307
18,165	-0,38951	-0,3767	0,04737
18,17	-0,4081	-0,31688	0,0725
18,175	-0,41875	-0,25611	0,09888
18,18	-0,39395	-0,19518	0,12897
18,185	-0,35761	-0,13344	0,15902
18,19	-0,30647	-0,07254	0,18761
18,195	-0,2415	-0,01462	0,21217
18,2	-0,1735	0,03645	0,23348
18,205	-0,10485	0,08324	0,24748

18,21	-0,04009	0,11662	0,25624
18,215	0,02091	0,13935	0,26133
18,22	0,07558	0,15368	0,2505
18,225	0,12935	0,13315	0,23634
18,23	0,18322	0,10506	0,21908
18,235	0,23093	0,07157	0,18447
18,24	0,27833	0,0283	0,14588
18,245	0,32231	-0,01373	0,10081
18,25	0,35364	-0,05086	0,0446
18,255	0,37743	-0,07569	-0,01599
18,26	0,3858	-0,0937	-0,08184
18,265	0,38269	-0,09938	-0,14932
18,27	0,37368	-0,09738	-0,21639
18,275	0,3537	-0,0921	-0,27719
18,28	0,33357	-0,07931	-0,33488
18,285	0,31477	-0,06646	-0,38966
18,29	0,29239	-0,05435	-0,41734
18,295	0,27073	-0,04711	-0,44117
18,3	0,24821	-0,04108	-0,45866
18,305	0,21888	-0,03747	-0,46075
18,31	0,18521	-0,04192	-0,45675
18,315	0,14381	-0,04999	-0,44131
18,32	0,09612	-0,06666	-0,415
18,325	0,04589	-0,09301	-0,3826
18,33	-0,00677	-0,12545	-0,33578
18,335	-0,05788	-0,1732	-0,28473
18,34	-0,10702	-0,22602	-0,23175
18,345	-0,14673	-0,28121	-0,17837
18,35	-0,18466	-0,32806	-0,1267
18,355	-0,22034	-0,37104	-0,07877
18,36	-0,24922	-0,4064	-0,04471
18,365	-0,27676	-0,41762	-0,01579
18,37	-0,30086	-0,42027	0,0039
18,375	-0,31924	-0,41008	0,01325
18,38	-0,33373	-0,38803	0,0174
18,385	-0,33556	-0,36098	0,00809
18,39	-0,33033	-0,32397	-0,00704
18,395	-0,32017	-0,28434	-0,02555
18,4	-0,28696	-0,24372	-0,06407
18,405	-0,25078	-0,1968	-0,10395
18,41	-0,21252	-0,14912	-0,1443
18,415	-0,17388	-0,10105	-0,18129
18,42	-0,13678	-0,05737	-0,21496
18,425	-0,10394	-0,0154	-0,24095
18,43	-0,07881	0,02169	-0,25351

18,435	-0,05834	0,04935	-0,25805
18,44	-0,04712	0,07136	-0,24554
18,445	-0,04057	0,08183	-0,22398
18,45	-0,03611	0,08591	-0,19773
18,455	-0,03542	0,08674	-0,15554
18,46	-0,03326	0,08256	-0,11158
18,465	-0,02855	0,07883	-0,06671
18,47	-0,01273	0,07644	-0,01991
18,475	0,0066	0,08034	0,02589
18,48	0,03073	0,08534	0,06875
18,485	0,0611	0,09063	0,10442
18,49	0,09329	0,09348	0,13576
18,495	0,12816	0,09385	0,15606
18,5	0,16421	0,08809	0,16655
18,505	0,20089	0,07703	0,17009
18,51	0,23986	0,06243	0,15017
18,515	0,27998	0,03592	0,12417
18,52	0,32084	0,00771	0,09442
18,525	0,34956	-0,02108	0,05733
18,53	0,37494	-0,05776	0,02109
18,535	0,3925	-0,09442	-0,01192
18,54	0,38909	-0,13121	-0,03446
18,545	0,37535	-0,16789	-0,05193
18,55	0,34445	-0,20429	-0,0597
18,555	0,30082	-0,23757	-0,05987
18,56	0,25197	-0,26609	-0,05655
18,565	0,19704	-0,29063	-0,04328
18,57	0,14399	-0,29837	-0,028
18,575	0,0939	-0,29924	-0,012
18,58	0,0642	-0,2954	0,0118
18,585	0,03751	-0,24441	0,03485
18,59	0,01416	-0,19034	0,05589
18,595	-0,00253	-0,1326	0,06763
18,6	-0,01879	-0,07042	0,07479
18,605	-0,03315	-0,00927	0,0714
18,61	-0,04291	0,04685	0,05392
18,615	-0,04867	0,09434	0,0278
18,62	-0,04037	0,13555	-0,01916
18,625	-0,02319	0,16124	-0,0742
18,63	0,00023	0,18052	-0,13309
18,635	0,03773	0,1965	-0,20356
18,64	0,07593	0,19495	-0,27301
18,645	0,11228	0,19292	-0,34
18,65	0,13698	0,19059	-0,39678
18,655	0,15603	0,18669	-0,44937

18,66	0,16803	0,18316	-0,49482
18,665	0,1758	0,18114	-0,531
18,67	0,18406	0,18213	-0,56266
18,675	0,19864	0,185	-0,58346
18,68	0,22013	0,19388	-0,59795
18,685	0,247	0,20669	-0,60819
18,69	0,28981	0,22232	-0,59911
18,695	0,33315	0,25106	-0,58569
18,7	0,37483	0,28192	-0,56842
18,705	0,4104	0,31372	-0,54311
18,71	0,44187	0,3399	-0,51639
18,715	0,46874	0,363	-0,48915
18,72	0,49293	0,37891	-0,4633
18,725	0,51779	0,38007	-0,43849
18,73	0,54401	0,37356	-0,41505
18,735	0,57183	0,35192	-0,39148
18,74	0,59965	0,32112	-0,36689
18,745	0,60999	0,28585	-0,3357
18,75	0,61251	0,2383	-0,30142
18,755	0,60597	0,18983	-0,2641
18,76	0,5452	0,1417	-0,21246
18,765	0,47478	0,09816	-0,15904
18,77	0,39379	0,0564	-0,10417
18,775	0,30161	0,01776	-0,04871
18,78	0,20898	-0,01345	0,00576
18,785	0,12012	-0,04153	0,05704
18,79	0,03793	-0,06242	0,10454
18,795	-0,03912	-0,07624	0,14914
18,8	-0,10542	-0,08539	0,182
18,805	-0,17003	-0,08038	0,21147
18,81	-0,23493	-0,07059	0,239
18,815	-0,28022	-0,05793	0,24041
18,82	-0,32481	-0,04237	0,23851
18,825	-0,36523	-0,02819	0,23052
18,83	-0,38651	-0,01773	0,2073
18,835	-0,3998	-0,01961	0,17931
18,84	-0,39997	-0,027	0,14639
18,845	-0,38873	-0,04287	0,1116
18,85	-0,37285	-0,06564	0,07727
18,855	-0,35025	-0,0909	0,0493
18,86	-0,32787	-0,11867	0,02483
18,865	-0,30679	-0,14549	0,00295
18,87	-0,28409	-0,17087	0,01387
18,875	-0,26134	-0,18696	0,02789
18,88	-0,23737	-0,20198	0,0463

18,885	-0,20799	-0,21615	0,08033
18,89	-0,17589	-0,22861	0,11825
18,895	-0,14078	-0,24174	0,16209
18,9	-0,10493	-0,2559	0,2123
18,905	-0,07022	-0,27052	0,26466
18,91	-0,04072	-0,2851	0,31925
18,915	-0,0154	-0,29882	0,37389
18,92	0,00701	-0,31123	0,42784
18,925	0,02119	-0,32264	0,47214
18,93	0,03488	-0,3358	0,51399
18,935	0,04857	-0,34941	0,55244
18,94	0,05803	-0,36402	0,57329
18,945	0,06698	-0,3817	0,58979
18,95	0,07383	-0,39973	0,59966
18,955	0,07485	-0,41598	0,59926
18,96	0,07213	-0,42472	0,59379
18,965	0,06196	-0,42785	0,57831
18,97	0,04729	-0,41534	0,556
18,975	0,03065	-0,39023	0,5294
18,98	0,01269	-0,35627	0,48819
18,985	-0,00389	-0,28812	0,44379
18,99	-0,01848	-0,21352	0,39712
18,995	-0,02398	-0,13502	0,34101
19	-0,02784	-0,04134	0,28368
19,005	-0,02961	0,0523	0,22473
19,01	-0,02708	0,14475	0,16326
19,015	-0,02303	0,23411	0,10137
19,02	-0,01489	0,32161	0,03985
19,025	-0,00239	0,40099	-0,02022
19,03	0,01338	0,47209	-0,0785
19,035	0,03982	0,53681	-0,12768
19,04	0,06993	0,57638	-0,17295
19,045	0,10227	0,60603	-0,21486
19,05	0,14105	0,62852	-0,22786
19,055	0,17853	0,59425	-0,23704
19,06	0,21342	0,55682	-0,24108
19,065	0,24263	0,51594	-0,23556
19,07	0,26958	0,47089	-0,22752
19,075	0,29357	0,42781	-0,21697
19,08	0,3157	0,39093	-0,2057
19,085	0,33718	0,36318	-0,1949
19,09	0,35458	0,34096	-0,18746
19,095	0,37054	0,33627	-0,18041
19,1	0,38525	0,33584	-0,17299
19,105	0,37904	0,33697	-0,17487

19,11	0,369	0,35656	-0,17684
19,115	0,35353	0,37652	-0,18001
19,12	0,32462	0,39741	-0,19037
19,125	0,29293	0,41916	-0,20243
19,13	0,25897	0,44187	-0,21563
19,135	0,22445	0,46206	-0,22771
19,14	0,19063	0,47579	-0,23763
19,145	0,15671	0,48351	-0,23823
19,15	0,12207	0,47512	-0,23204
19,155	0,08641	0,45536	-0,22033
19,16	0,04946	0,42679	-0,17474
19,165	0,01102	0,36123	-0,12447
19,17	-0,02794	0,29139	-0,07047
19,175	-0,05784	0,22031	-0,00766
19,18	-0,08333	0,14811	0,05456
19,185	-0,09988	0,08174	0,11375
19,19	-0,10208	0,02421	0,16617
19,195	-0,09713	-0,02084	0,21369
19,2	-0,08061	-0,06012	0,24903
19,205	-0,05945	-0,08876	0,27618
19,21	-0,03705	-0,11424	0,29861
19,215	-0,01153	-0,14054	0,29684
19,22	0,013	-0,15392	0,28936
19,225	0,03653	-0,16637	0,27601
19,23	0,0565	-0,17522	0,23192
19,235	0,07682	-0,16443	0,183
19,24	0,09708	-0,14518	0,12975
19,245	0,11368	-0,11653	0,07539
19,25	0,12757	-0,07992	0,02313
19,255	0,13279	-0,04063	-0,01906
19,26	0,12878	-0,00499	-0,04947
19,265	0,11815	0,02199	-0,07088
19,27	0,08864	0,03873	-0,059
19,275	0,05465	0,03548	-0,03914
19,28	0,01882	0,02229	-0,01519
19,285	-0,01939	0,0037	0,03493
19,29	-0,05489	-0,02182	0,08535
19,295	-0,08624	-0,04224	0,13631
19,3	-0,11044	-0,05468	0,18873
19,305	-0,13257	-0,0573	0,24025
19,31	-0,15236	-0,05271	0,28768
19,315	-0,17129	-0,04472	0,3295
19,32	-0,19009	-0,03897	0,36709
19,325	-0,20484	-0,04008	0,38702
19,33	-0,21735	-0,05333	0,40001

19,335	-0,22773	-0,07767	0,40861
19,34	-0,21796	-0,1107	0,36133
19,345	-0,20564	-0,16029	0,31006
19,35	-0,19123	-0,20827	0,25409
19,355	-0,17799	-0,25119	0,19042
19,36	-0,1674	-0,29351	0,12726
19,365	-0,16352	-0,33058	0,06888
19,37	-0,16873	-0,36777	0,01998
19,375	-0,17921	-0,41	-0,02191
19,38	-0,19812	-0,45831	-0,04628
19,385	-0,21885	-0,51813	-0,0634
19,39	-0,23919	-0,58681	-0,077
19,395	-0,25599	-0,66244	-0,06973
19,4	-0,26987	-0,73744	-0,06096
19,405	-0,28073	-0,81128	-0,04993
19,41	-0,28563	-0,87918	-0,02645
19,415	-0,28964	-0,92799	-0,00051
19,42	-0,29236	-0,96592	0,02791
19,425	-0,29221	-0,99034	0,05743
19,43	-0,29021	-0,99893	0,08643
19,435	-0,28141	-0,99997	0,11058
19,44	-0,26699	-0,98727	0,12986
19,445	-0,24837	-0,96869	0,14498
19,45	-0,21435	-0,94856	0,14166
19,455	-0,17763	-0,89971	0,1348
19,46	-0,13967	-0,84833	0,12562
19,465	-0,10253	-0,79307	0,11246
19,47	-0,06769	-0,71698	0,10036
19,475	-0,03702	-0,63449	0,09084
19,48	-0,0129	-0,54439	0,086
19,485	0,00838	-0,44668	0,08371
19,49	0,02509	-0,34558	0,08576
19,495	0,03926	-0,24545	0,09025
19,5	0,05209	-0,14973	0,09588
19,505	0,0572	-0,06037	0,10562
19,51	0,05955	0,00746	0,11632
19,515	0,0592	0,06497	0,12783
19,52	0,04258	0,11368	0,14579
19,525	0,02324	0,10893	0,16484
19,53	0,00121	0,09802	0,18445
19,535	-0,02232	0,08002	0,20203
19,54	-0,04483	0,04825	0,21805
19,545	-0,06352	0,01481	0,22925
19,55	-0,07735	-0,02178	0,23481
19,555	-0,0879	-0,05923	0,23662

19,56	-0,09094	-0,09674	0,22788
19,565	-0,09247	-0,13123	0,21612
19,57	-0,09385	-0,16686	0,20312
19,575	-0,08759	-0,20467	0,17758
19,58	-0,0813	-0,21752	0,15138
19,585	-0,07393	-0,22915	0,12328
19,59	-0,06154	-0,23501	0,08807
19,595	-0,04675	-0,21893	0,0505
19,6	-0,02884	-0,19332	0,0096
19,605	-0,00921	-0,15429	-0,03378
19,61	0,01031	-0,10303	-0,0776
19,615	0,02581	-0,04673	-0,12035
19,62	0,03773	0,01575	-0,16116
19,625	0,04658	0,07761	-0,19993
19,63	0,03829	0,13686	-0,22418
19,635	0,02824	0,18593	-0,24576
19,64	0,0172	0,23206	-0,26411
19,645	0,00576	0,27729	-0,27155
19,65	-0,00415	0,31994	-0,27612
19,655	-0,01139	0,36364	-0,27551
19,66	-0,01557	0,40915	-0,26705
19,665	-0,01848	0,4564	-0,25462
19,67	-0,019	0,50462	-0,2332
19,675	-0,01923	0,55127	-0,20712
19,68	-0,01941	0,59524	-0,17866
19,685	-0,00924	0,63745	-0,14371
19,69	0,00371	0,67575	-0,10882
19,695	0,0208	0,71261	-0,07497
19,7	0,05924	0,74847	-0,0475
19,705	0,10284	0,78151	-0,0226
19,71	0,1522	0,81434	-0,00151
19,715	0,20617	0,84583	0,01428
19,72	0,2602	0,87177	0,02795
19,725	0,31035	0,8939	0,038
19,73	0,35501	0,90471	0,04585
19,735	0,39493	0,90521	0,05236
19,74	0,41651	0,89817	0,05406
19,745	0,43447	0,86312	0,05379
19,75	0,45033	0,82139	0,0517
19,755	0,44459	0,7754	0,04412
19,76	0,4367	0,71265	0,03524
19,765	0,42381	0,64939	0,02502
19,77	0,39624	0,58638	0,01336
19,775	0,36181	0,52494	0,00143
19,78	0,31561	0,46489	-0,01145

19,785	0,2604	0,40822	-0,02558
19,79	0,20108	0,35493	-0,04089
19,795	0,13803	0,30405	-0,06264
19,8	0,0762	0,2629	-0,08698
19,805	0,01664	0,22561	-0,11319
19,81	-0,01181	0,19109	-0,15831
19,815	-0,03614	0,18488	-0,20422
19,82	-0,05537	0,18158	-0,25051
19,825	-0,06582	0,1818	-0,29518
19,83	-0,07543	0,1869	-0,33749
19,835	-0,08514	0,19237	-0,37405
19,84	-0,09598	0,19632	-0,40277
19,845	-0,10777	0,19692	-0,42627
19,85	-0,11841	0,19501	-0,4355
19,855	-0,1269	0,18897	-0,43939
19,86	-0,13301	0,18202	-0,44055
19,865	-0,13451	0,17534	-0,4208
19,87	-0,13419	0,17798	-0,39911
19,875	-0,13354	0,18396	-0,37463
19,88	-0,14062	0,19458	-0,34075
19,885	-0,15203	0,21757	-0,30525
19,89	-0,17051	0,24379	-0,26919
19,895	-0,19639	0,27372	-0,23504
19,9	-0,22505	0,30626	-0,20307
19,905	-0,25342	0,33892	-0,17911
19,91	-0,27808	0,37086	-0,16075
19,915	-0,29831	0,40135	-0,14645
19,92	-0,29763	0,43035	-0,15294
19,925	-0,29165	0,44841	-0,16226
19,93	-0,28138	0,46404	-0,17337
19,935	-0,26267	0,47648	-0,1865
19,94	-0,24472	0,47041	-0,19788
19,945	-0,22883	0,4593	-0,2047
19,95	-0,21486	0,43953	-0,20188
19,955	-0,20149	0,40575	-0,19328
19,96	-0,18594	0,36581	-0,17232
19,965	-0,16642	0,31561	-0,14357
19,97	-0,14327	0,2603	-0,11059
19,975	-0,11151	0,20318	-0,06334
19,98	-0,07741	0,14615	-0,01361
19,985	-0,04246	0,09054	0,03761
19,99	-0,00922	0,03724	0,09176
19,995	0,02144	0,00545	0,14518
20	0,04929	-0,02281	0,19587
20,005	0,07759	-0,0459	0,23801

20,01	0,10803	-0,05918	0,27572
20,015	0,14699	-0,06894	0,30244
20,02	0,19643	-0,07288	0,31842
20,025	0,25329	-0,07305	0,32738
20,03	0,32735	-0,07168	0,31423
20,035	0,4051	-0,06823	0,29495
20,04	0,4834	-0,06416	0,27236
20,045	0,55331	-0,05981	0,24131
20,05	0,61779	-0,06713	0,21157
20,055	0,6745	-0,07588	0,18549
20,06	0,71701	-0,08798	0,17221
20,065	0,75598	-0,11099	0,16483
20,07	0,79069	-0,13804	0,16796
20,075	0,82264	-0,17112	0,18056
20,08	0,85335	-0,20897	0,19735
20,085	0,87263	-0,24865	0,22331
20,09	0,885	-0,2896	0,25121
20,095	0,89113	-0,32978	0,27952
20,1	0,85171	-0,36868	0,30864
20,105	0,805	-0,38897	0,33668
20,11	0,75171	-0,40604	0,3627
20,115	0,69635	-0,41855	0,37931
20,12	0,64553	-0,41805	0,39255
20,125	0,60782	-0,41385	0,39843
20,13	0,59061	-0,40439	0,39314
20,135	0,58581	-0,38933	0,38144
20,14	0,60262	-0,37189	0,35596
20,145	0,62612	-0,34921	0,3239
20,15	0,65053	-0,3244	0,28853
20,155	0,67551	-0,29833	0,25021
20,16	0,69524	-0,26668	0,21311
20,165	0,70956	-0,23418	0,17892
20,17	0,71505	-0,20116	0,15976
20,175	0,72009	-0,16926	0,14433
20,18	0,72457	-0,13857	0,1333
20,185	0,72517	-0,1108	0,12569
20,19	0,7229	-0,08857	0,11753
20,195	0,70586	-0,06951	0,10605
20,2	0,67412	-0,05704	0,09031
20,205	0,63007	-0,04885	0,07078
20,21	0,53792	-0,04342	0,03475
20,215	0,43427	-0,05117	-0,00433
20,22	0,32337	-0,06134	-0,04557
20,225	0,20329	-0,0737	-0,1026
20,23	0,08789	-0,10205	-0,1619

20,235	-0,01718	-0,13384	-0,22543
20,24	-0,10279	-0,17114	-0,29723
20,245	-0,17944	-0,21819	-0,37186
20,25	-0,24274	-0,26903	-0,44764
20,255	-0,29979	-0,32432	-0,5213
20,26	-0,35517	-0,38078	-0,59157
20,265	-0,39953	-0,43649	-0,64037
20,27	-0,44176	-0,48493	-0,68038
20,275	-0,48137	-0,52964	-0,7128
20,28	-0,48287	-0,57087	-0,67861
20,285	-0,47716	-0,5789	-0,63684
20,29	-0,46267	-0,58281	-0,58507
20,295	-0,43951	-0,58038	-0,51496
20,3	-0,41659	-0,56322	-0,44058
20,305	-0,40177	-0,54097	-0,36232
20,31	-0,40159	-0,51024	-0,28378
20,315	-0,41264	-0,47195	-0,20697
20,32	-0,44681	-0,42993	-0,1397
20,325	-0,48834	-0,37894	-0,0751
20,33	-0,53202	-0,32503	-0,01128
20,335	-0,56353	-0,26958	0,02109
20,34	-0,58664	-0,21355	0,05077
20,345	-0,59785	-0,15789	0,07401
20,35	-0,58418	-0,10362	0,07202
20,355	-0,56376	-0,05662	0,06283
20,36	-0,53641	-0,01215	0,04459
20,365	-0,5052	0,0281	0,01986
20,37	-0,47387	0,06371	-0,00606
20,375	-0,43765	0,09704	-0,02868
20,38	-0,39793	0,12594	-0,04717
20,385	-0,35448	0,15308	-0,06164
20,39	-0,2891	0,17931	-0,04509
20,395	-0,21835	0,20283	-0,0241
20,4	-0,14398	0,22587	0,00132
20,405	-0,07846	0,24836	0,04173
20,41	-0,01955	0,26932	0,08465
20,415	0,0237	0,28947	0,13092
20,42	0,04017	0,30815	0,18135
20,425	0,04204	0,32443	0,23311
20,43	0,01804	0,33929	0,28555
20,435	-0,01751	0,35068	0,3379
20,44	-0,05727	0,35982	0,38974
20,445	-0,10891	0,36743	0,43173
20,45	-0,15887	0,36759	0,47087
20,455	-0,2069	0,36591	0,50645

20,46	-0,25628	0,36248	0,52028
20,465	-0,30694	0,3516	0,52974
20,47	-0,35943	0,33945	0,53348
20,475	-0,4119	0,32586	0,52932
20,48	-0,4635	0,3113	0,52249
20,485	-0,50742	0,29689	0,51216
20,49	-0,54113	0,28417	0,50018
20,495	-0,56619	0,27375	0,48758
20,5	-0,56273	0,26526	0,47304
20,505	-0,55012	0,26347	0,45774
20,51	-0,53171	0,26373	0,44172
20,515	-0,49796	0,26533	0,42358
20,52	-0,4653	0,27001	0,40485
20,525	-0,4353	0,27454	0,38573
20,53	-0,4098	0,2783	0,36725
20,535	-0,38632	0,27926	0,34934
20,54	-0,36387	0,27885	0,33297
20,545	-0,33986	0,27576	0,3183
20,55	-0,31373	0,27031	0,30466
20,555	-0,28234	0,26368	0,29463
20,56	-0,24863	0,25351	0,2857
20,565	-0,21376	0,24241	0,27726
20,57	-0,17396	0,23085	0,28212
20,575	-0,13493	0,21211	0,28823
20,58	-0,09658	0,19277	0,29666
20,585	-0,05673	0,17257	0,31168
20,59	-0,01573	0,1509	0,32848
20,595	0,02806	0,12897	0,34754
20,6	0,07523	0,10728	0,36789
20,605	0,12391	0,0866	0,38805
20,61	0,17309	0,06683	0,40717
20,615	0,22083	0,04891	0,4253
20,62	0,26657	0,03184	0,44277
20,625	0,29754	0,01505	0,45713
20,63	0,32511	-0,00362	0,47125
20,635	0,34869	-0,02341	0,48506
20,64	0,35974	-0,04481	0,49693
20,645	0,36841	-0,0704	0,50797
20,65	0,3736	-0,0972	0,51729
20,655	0,37354	-0,12491	0,5238
20,66	0,37062	-0,15213	0,52863
20,665	0,36008	-0,17832	0,53021
20,67	0,34442	-0,2008	0,52982
20,675	0,32531	-0,2202	0,52814
20,68	0,29363	-0,23719	0,51883

20,685	0,26063	-0,24326	0,50755
20,69	0,22743	-0,24702	0,49363
20,695	0,19495	-0,24873	0,46245
20,7	0,16378	-0,24175	0,42611
20,705	0,13427	-0,2332	0,38024
20,71	0,10601	-0,22235	0,31677
20,715	0,07751	-0,20795	0,24541
20,72	0,04861	-0,19221	0,15972
20,725	0,01908	-0,17438	0,06604
20,73	-0,0104	-0,15548	-0,03096
20,735	-0,03221	-0,13608	-0,13689
20,74	-0,05056	-0,11615	-0,24312
20,745	-0,06503	-0,09608	-0,34863
20,75	-0,0532	-0,07586	-0,44504
20,755	-0,03763	-0,05404	-0,53818
20,76	-0,01832	-0,03135	-0,62483
20,765	0,00455	-0,00696	-0,69454
20,77	0,02661	0,02145	-0,7561
20,775	0,04569	0,05192	-0,80004
20,78	0,06114	0,08608	-0,82647
20,785	0,07431	0,12334	-0,84183
20,79	0,08239	0,16219	-0,82503
20,795	0,09121	0,20433	-0,79877
20,8	0,10175	0,24687	-0,76782
20,805	0,09446	0,28923	-0,70997
20,81	0,0857	0,32351	-0,65165
20,815	0,07162	0,35577	-0,59289
20,82	0,03682	0,3841	-0,53472
20,825	-0,00678	0,40001	-0,47816
20,83	-0,06301	0,41113	-0,42612
20,835	-0,12868	0,41366	-0,38011
20,84	-0,19684	0,40681	-0,33786
20,845	-0,26264	0,3949	-0,30705
20,85	-0,32294	0,37004	-0,28153
20,855	-0,37758	0,33985	-0,2596
20,86	-0,39527	0,30644	-0,2673
20,865	-0,40798	0,25364	-0,27832
20,87	-0,41588	0,19875	-0,29314
20,875	-0,41054	0,14196	-0,31853
20,88	-0,40398	0,08385	-0,34601
20,885	-0,39499	0,0262	-0,37584
20,89	-0,3804	-0,02855	-0,40758
20,895	-0,36208	-0,07673	-0,4396
20,9	-0,3334	-0,12042	-0,47216
20,905	-0,29741	-0,15275	-0,50482

20,91	-0,25675	-0,1784	-0,53753
20,915	-0,21223	-0,19991	-0,57059
20,92	-0,16882	-0,20592	-0,60376
20,925	-0,12937	-0,20968	-0,63669
20,93	-0,1142	-0,2117	-0,66465
20,935	-0,1067	-0,20755	-0,69104
20,94	-0,10884	-0,20271	-0,71405
20,945	-0,11999	-0,19689	-0,73057
20,95	-0,13236	-0,18897	-0,74392
20,955	-0,14191	-0,17977	-0,74987
20,96	-0,14558	-0,16773	-0,75068
20,965	-0,14432	-0,15345	-0,74821
20,97	-0,13217	-0,13774	-0,7302
20,975	-0,1189	-0,11771	-0,70898
20,98	-0,10665	-0,0968	-0,68542
20,985	-0,1001	-0,07526	-0,64743
20,99	-0,09772	-0,04869	-0,60776
20,995	-0,10009	-0,02122	-0,56583
21	-0,1061	0,00811	-0,52025
21,005	-0,11153	0,04151	-0,47425
21,01	-0,11466	0,07682	-0,42835
21,015	-0,11478	0,11473	-0,38318
21,02	-0,11349	0,15384	-0,33852
21,025	-0,11988	0,19288	-0,29472
21,03	-0,13149	0,22903	-0,25071
21,035	-0,14859	0,2629	-0,2062
21,04	-0,20753	0,29473	-0,1587
21,045	-0,27281	0,31457	-0,1104
21,05	-0,34393	0,33286	-0,06125
21,055	-0,4149	0,34961	-0,01101
21,06	-0,48086	0,36462	0,03936
21,065	-0,53194	0,37995	0,08962
21,07	-0,56277	0,39616	0,13949
21,075	-0,5804	0,41316	0,18887
21,08	-0,56922	0,43027	0,23564
21,085	-0,54954	0,44527	0,28135
21,09	-0,52715	0,4583	0,32631
21,095	-0,48179	0,46947	0,35461
21,1	-0,43805	0,46558	0,37954
21,105	-0,39479	0,45854	0,39844
21,11	-0,34381	0,447	0,39477
21,115	-0,28905	0,42076	0,38406
21,12	-0,22899	0,39013	0,36311
21,125	-0,16541	0,35212	0,33181
21,13	-0,10182	0,30464	0,2967

21,135	-0,04826	0,25223	0,25593
21,14	-0,00517	0,18793	0,21418
21,145	0,02812	0,11759	0,17301
21,15	0,01451	0,04373	0,13991
21,155	-0,00812	-0,04373	0,10843
21,16	-0,03672	-0,13223	0,07888
21,165	-0,06539	-0,22045	0,06118
21,17	-0,08763	-0,30087	0,04622
21,175	-0,09547	-0,37767	0,03686
21,18	-0,07919	-0,44708	0,03797
21,185	-0,05034	-0,5031	0,04419
21,19	-0,00109	-0,55207	0,05987
21,195	0,05629	-0,586	0,08113
21,2	0,11562	-0,61049	0,10509
21,205	0,18558	-0,62937	0,13048
21,21	0,25432	-0,62775	0,1553
21,215	0,32259	-0,6218	0,17852
21,22	0,40459	-0,61261	0,18614
21,225	0,49049	-0,59112	0,1916
21,23	0,58046	-0,56861	0,19493
21,235	0,66939	-0,54601	0,19689
21,24	0,7554	-0,52572	0,20023
21,245	0,82619	-0,50726	0,20803
21,25	0,87712	-0,49355	0,22123
21,255	0,91224	-0,4844	0,23861
21,26	0,89878	-0,47817	0,26914
21,265	0,87039	-0,48087	0,30259
21,27	0,83384	-0,48589	0,33718
21,275	0,77271	-0,49208	0,38369
21,28	0,7158	-0,50292	0,42999
21,285	0,66669	-0,51357	0,47637
21,29	0,63234	-0,52349	0,52326
21,295	0,60431	-0,53063	0,56926
21,3	0,58392	-0,53612	0,61108
21,305	0,5669	-0,53813	0,64635
21,31	0,54965	-0,53642	0,67649
21,315	0,53543	-0,53254	0,68816
21,32	0,52161	-0,52376	0,69119
21,325	0,50889	-0,5135	0,68831
21,33	0,52524	-0,5027	0,63901
21,335	0,54742	-0,48559	0,58583
21,34	0,57621	-0,46848	0,52877
21,345	0,61013	-0,45088	0,46752
21,35	0,6427	-0,42921	0,40777
21,355	0,66632	-0,4056	0,35457

21,36	0,67229	-0,37803	0,31328
21,365	0,66585	-0,34507	0,28007
21,37	0,63526	-0,30917	0,26817
21,375	0,59428	-0,26782	0,26559
21,38	0,54942	-0,22473	0,26781
21,385	0,50725	-0,18129	0,29722
21,39	0,47196	-0,14105	0,32905
21,395	0,44589	-0,10267	0,36339
21,4	0,44333	-0,06709	0,40684
21,405	0,44602	-0,0443	0,45058
21,41	0,45276	-0,02473	0,49207
21,415	0,46011	-0,01068	0,52645
21,42	0,46504	-0,00573	0,55581
21,425	0,46696	-0,00563	0,56992
21,43	0,46775	-0,01735	0,5725
21,435	0,46901	-0,03735	0,56667
21,44	0,47455	-0,06289	0,52327
21,445	0,48431	-0,10657	0,47253
21,45	0,49726	-0,15352	0,4166
21,455	0,49633	-0,20153	0,34694
21,46	0,48998	-0,23667	0,27724
21,465	0,4708	-0,26595	0,21005
21,47	0,42351	-0,28299	0,15126
21,475	0,36217	-0,27469	0,09781
21,48	0,27931	-0,25447	0,05588
21,485	0,18517	-0,21278	0,02226
21,49	0,08819	-0,15739	-0,00698
21,495	-0,00588	-0,09568	-0,02276
21,5	-0,09355	-0,01681	-0,03584
21,505	-0,17447	0,06426	-0,04739
21,51	-0,21774	0,14579	-0,04811
21,515	-0,25694	0,22408	-0,04778
21,52	-0,29167	0,30018	-0,04635
21,525	-0,31704	0,37092	-0,04457
21,53	-0,34069	0,42281	-0,0424
21,535	-0,35879	0,46558	-0,04129
21,54	-0,36906	0,48771	-0,04218
21,545	-0,37343	0,48705	-0,04432
21,55	-0,35958	0,47193	-0,04912
21,555	-0,33722	0,41836	-0,05485
21,56	-0,30937	0,35263	-0,061
21,565	-0,28002	0,28105	-0,05192
21,57	-0,25303	0,19179	-0,03954
21,575	-0,23238	0,10608	-0,02084
21,58	-0,23373	0,02762	0,01701

21,585	-0,2438	-0,02678	0,06089
21,59	-0,26519	-0,07154	0,11183
21,595	-0,29435	-0,10006	0,1664
21,6	-0,32475	-0,11116	0,22033
21,605	-0,35252	-0,11385	0,26708
21,61	-0,37561	-0,09675	0,30763
21,615	-0,39445	-0,07141	0,34276
21,62	-0,39295	-0,04113	0,33521
21,625	-0,3892	0,01423	0,32149
21,63	-0,38352	0,0726	0,30057
21,635	-0,3681	0,13246	0,253
21,64	-0,35093	0,18367	0,1996
21,645	-0,32927	0,22997	0,13718
21,65	-0,2984	0,26403	0,06329
21,655	-0,26198	0,2761	-0,01469
21,66	-0,21516	0,27575	-0,09697
21,665	-0,16275	0,25049	-0,18004
21,67	-0,10824	0,2125	-0,26217
21,675	-0,06212	0,16877	-0,32562
21,68	-0,02123	0,11539	-0,38333
21,685	0,01216	0,06409	-0,43363
21,69	0,00852	0,01705	-0,4407
21,695	-0,00372	-0,00603	-0,43938
21,7	-0,0266	-0,02342	-0,42753
21,705	-0,06214	-0,03293	-0,40256
21,71	-0,10067	-0,03065	-0,37418
21,715	-0,14243	-0,02418	-0,34376
21,72	-0,18435	-0,00963	-0,31509
21,725	-0,2257	0,01036	-0,28936
21,73	-0,26841	0,0333	-0,27843
21,735	-0,31263	0,06506	-0,27064
21,74	-0,35863	0,09966	-0,26439
21,745	-0,39979	0,13583	-0,27196
21,75	-0,44044	0,15751	-0,27943
21,755	-0,47748	0,17525	-0,287
21,76	-0,50044	0,18417	-0,29559
21,765	-0,51599	0,17017	-0,30373
21,77	-0,51846	0,14627	-0,30875
21,775	-0,51049	0,1072	-0,30975
21,78	-0,4978	0,0581	-0,30786
21,785	-0,47935	0,00562	-0,29183
21,79	-0,46169	-0,0486	-0,27085
21,795	-0,44594	-0,10043	-0,24693
21,8	-0,44589	-0,1496	-0,18607
21,805	-0,44778	-0,16226	-0,1236

21,81	-0,4512	-0,17142	-0,05954
21,815	-0,455	-0,1749	0,0035
21,82	-0,45703	-0,16332	0,06339
21,825	-0,456	-0,14764	0,11404
21,83	-0,4525	-0,12519	0,15091
21,835	-0,44829	-0,09544	0,17865
21,84	-0,44472	-0,06197	0,18358
21,845	-0,44351	-0,01916	0,17973
21,85	-0,44435	0,02773	0,17167
21,855	-0,4376	0,07692	0,14467
21,86	-0,42899	0,12916	0,11764
21,865	-0,41565	0,18135	0,09132
21,87	-0,38039	0,23225	0,06902
21,875	-0,33731	0,27471	0,04904
21,88	-0,28377	0,31437	0,03394
21,885	-0,22116	0,34989	0,02644
21,89	-0,15653	0,38099	0,02274
21,895	-0,09335	0,41037	0,02986
21,9	-0,03484	0,43758	0,04316
21,905	0,01908	0,46438	0,06034
21,91	0,05595	0,491	0,09468
21,915	0,08995	0,51478	0,13117
21,92	0,12215	0,53745	0,16841
21,925	0,14456	0,5584	0,1985
21,93	0,16643	0,56937	0,22491
21,935	0,18558	0,57691	0,24303
21,94	0,19506	0,57866	0,24459
21,945	0,19834	0,57077	0,23797
21,95	0,188	0,5584	0,21656
21,955	0,16749	0,53764	0,18709
21,96	0,14138	0,51172	0,15451
21,965	0,10748	0,48304	0,11765
21,97	0,07443	0,44524	0,08226
21,975	0,04429	0,4055	0,04944
21,98	0,03205	0,36449	0,03727
21,985	0,02427	0,32221	0,02948
21,99	0,02095	0,27995	0,02803
21,995	0,02042	0,23868	0,03871
22	0,01809	0,20189	0,05344
22,005	0,01072	0,1674	0,07494
22,01	-0,00189	0,13835	0,10119
22,015	-0,01724	0,11453	0,12939
22,02	-0,03301	0,09392	0,15857
22,025	-0,04572	0,0818	0,18831
22,03	-0,05463	0,07212	0,21857

22,035	-0,05245	0,06363	0,22521
22,04	-0,04753	0,05274	0,22858
22,045	-0,04123	0,04047	0,22437
22,05	-0,03852	0,02521	0,19634
22,055	-0,03991	0,00053	0,16005
22,06	-0,04745	-0,02784	0,11195
22,065	-0,05881	-0,06213	0,05501
22,07	-0,07023	-0,10152	-0,00461
22,075	-0,07169	-0,14301	-0,06466
22,08	-0,0644	-0,18794	-0,12279
22,085	-0,04935	-0,23317	-0,17859
22,09	0,00664	-0,27805	-0,20283
22,095	0,06759	-0,31879	-0,22393
22,1	0,13159	-0,35846	-0,24125
22,105	0,19378	-0,39666	-0,24628
22,11	0,25075	-0,43024	-0,24967
22,115	0,29749	-0,46268	-0,25133
22,12	0,33179	-0,49336	-0,25183
22,125	0,36014	-0,52159	-0,25275
22,13	0,37878	-0,54852	-0,25632
22,135	0,39584	-0,57295	-0,26077
22,14	0,41316	-0,5957	-0,26543
22,145	0,41265	-0,61736	-0,28059
22,15	0,40863	-0,63912	-0,29663
22,155	0,39831	-0,66087	-0,31425
22,16	0,35555	-0,68299	-0,3427
22,165	0,30349	-0,70711	-0,37197
22,17	0,24097	-0,73144	-0,39996
22,175	0,17192	-0,75465	-0,42163
22,18	0,10417	-0,77319	-0,43788
22,185	0,04779	-0,78813	-0,43897
22,19	0,00509	-0,79257	-0,42694
22,195	-0,02654	-0,78802	-0,40534
22,2	-0,02255	-0,77656	-0,34579
22,205	-0,01199	-0,73705	-0,27831
22,21	0,00134	-0,69093	-0,20581
22,215	0,02653	-0,63996	-0,116
22,22	0,04905	-0,56866	-0,02651
22,225	0,06871	-0,49545	0,0607
22,23	0,08909	-0,42045	0,14057
22,235	0,11129	-0,34365	0,21545
22,24	0,13802	-0,26717	0,27841
22,245	0,16932	-0,19297	0,33087
22,25	0,20283	-0,12154	0,37693
22,255	0,22954	-0,05237	0,39936

22,26	0,25131	0,00679	0,41455
22,265	0,2674	0,06247	0,42478
22,27	0,23479	0,11545	0,39396
22,275	0,19512	0,14012	0,35945
22,28	0,14831	0,16189	0,3206
22,285	0,09704	0,18001	0,27709
22,29	0,04892	0,192	0,23374
22,295	0,01146	0,20299	0,19476
22,3	-0,01137	0,21429	0,16356
22,305	-0,02457	0,22775	0,13804
22,31	-0,01985	0,24315	0,12794
22,315	-0,0111	0,26256	0,1231
22,32	-0,00229	0,28283	0,12052
22,325	0,00854	0,30283	0,12429
22,33	0,0152	0,31395	0,12641
22,335	0,01774	0,32126	0,12563
22,34	0,01706	0,32297	0,11569
22,345	0,01692	0,31005	0,10263
22,35	0,01812	0,29251	0,08467
22,355	0,01999	0,26897	0,06182
22,36	0,02165	0,24038	0,0374
22,365	0,0158	0,21041	0,00892
22,37	0,00327	0,17782	-0,02094
22,375	-0,0153	0,14483	-0,05135
22,38	-0,06464	0,11185	-0,08077
22,385	-0,11969	0,07997	-0,11007
22,39	-0,17871	0,04772	-0,13846
22,395	-0,23796	0,01557	-0,15481
22,4	-0,29364	-0,00822	-0,16787
22,405	-0,34071	-0,0296	-0,17374
22,41	-0,37309	-0,04507	-0,16675
22,415	-0,3975	-0,04908	-0,15378
22,42	-0,40788	-0,04702	-0,12991
22,425	-0,41162	-0,03313	-0,10079
22,43	-0,41258	-0,01262	-0,06963
22,435	-0,40298	0,0109	-0,03877
22,44	-0,39266	0,03768	-0,00929
22,445	-0,38161	0,06354	0,01783
22,45	-0,36246	0,08731	0,0256
22,455	-0,34117	0,09438	0,03024
22,46	-0,3173	0,09831	0,03062
22,465	-0,29164	0,09805	0,02459
22,47	-0,26604	0,09139	0,01722
22,475	-0,24403	0,08279	0,00898
22,48	-0,22758	0,0714	0,00193

22,485	-0,2159	0,0585	-0,00317
22,49	-0,21819	0,04508	0,00354
22,495	-0,22591	0,03327	0,01366
22,5	-0,23717	0,02119	0,02613
22,505	-0,25251	0,009	0,06632
22,51	-0,26656	0,01241	0,11027
22,515	-0,27723	0,01872	0,1611
22,52	-0,27937	0,03062	0,22796
22,525	-0,27712	0,05586	0,29972
22,53	-0,26925	0,08629	0,37626
22,535	-0,25853	0,12225	0,45347
22,54	-0,24777	0,15951	0,52891
22,545	-0,2422	0,19505	0,59268
22,55	-0,24128	0,21847	0,64991
22,555	-0,24445	0,23454	0,70259
22,56	-0,2712	0,24502	0,70149
22,565	-0,30105	0,20234	0,69534
22,57	-0,33364	0,15519	0,68196
22,575	-0,36765	0,10291	0,64964
22,58	-0,39963	0,04056	0,61302
22,585	-0,42632	-0,02197	0,57121
22,59	-0,44551	-0,08231	0,52573
22,595	-0,4601	-0,1377	0,47972
22,6	-0,46558	-0,18901	0,43437
22,605	-0,46834	-0,23049	0,38919
22,61	-0,47034	-0,26766	0,34387
22,615	-0,45952	-0,30239	0,30543
22,62	-0,448	-0,3146	0,26711
22,625	-0,43441	-0,32392	0,22983
22,63	-0,40671	-0,32888	0,20224
22,635	-0,37433	-0,3119	0,17705
22,64	-0,33562	-0,28978	0,15502
22,645	-0,29132	-0,26138	0,13623
22,65	-0,24599	-0,22756	0,11864
22,655	-0,20457	-0,19282	0,10054
22,66	-0,16967	-0,16076	0,08092
22,665	-0,1411	-0,13294	0,05965
22,67	-0,13599	-0,10925	0,0292
22,675	-0,13678	-0,10685	-0,00312
22,68	-0,14128	-0,10847	-0,0365
22,685	-0,14785	-0,11297	-0,06956
22,69	-0,15075	-0,12835	-0,10104
22,695	-0,14633	-0,1439	-0,12908
22,7	-0,1298	-0,15911	-0,15026
22,705	-0,10773	-0,17401	-0,16816

22,71	-0,07869	-0,18847	-0,18036
22,715	-0,04806	-0,20184	-0,18951
22,72	-0,01851	-0,21472	-0,19762
22,725	0,00934	-0,22725	-0,20251
22,73	0,03512	-0,23422	-0,2071
22,735	0,05973	-0,23946	-0,21156
22,74	0,08215	-0,24285	-0,2188
22,745	0,10604	-0,22967	-0,22592
22,75	0,13052	-0,21415	-0,23347
22,755	0,14813	-0,19643	-0,24467
22,76	0,16112	-0,17833	-0,25753
22,765	0,16005	-0,16163	-0,27482
22,77	0,14136	-0,15033	-0,29689
22,775	0,11041	-0,14624	-0,32168
22,78	0,04892	-0,14725	-0,35128
22,785	-0,02249	-0,16176	-0,38207
22,79	-0,09834	-0,18028	-0,41313
22,795	-0,17734	-0,20045	-0,42801
22,8	-0,25083	-0,22814	-0,43951
22,805	-0,31492	-0,25454	-0,44449
22,81	-0,355	-0,27892	-0,42945
22,815	-0,38666	-0,29817	-0,4079
22,82	-0,40629	-0,31546	-0,37683
22,825	-0,41543	-0,32889	-0,33734
22,83	-0,42038	-0,33743	-0,29453
22,835	-0,41262	-0,3429	-0,24566
22,84	-0,39914	-0,33841	-0,19496
22,845	-0,38133	-0,32857	-0,14365
22,85	-0,33454	-0,31489	-0,10021
22,855	-0,28212	-0,27634	-0,05855
22,86	-0,22482	-0,23451	-0,0204
22,865	-0,16781	-0,18981	-0,00078
22,87	-0,11401	-0,14125	0,01248
22,875	-0,07075	-0,09331	0,01389
22,88	-0,04758	-0,04827	-0,00204
22,885	-0,03686	-0,009	-0,02651
22,89	-0,04981	0,02658	-0,06711
22,895	-0,074	0,05455	-0,11489
22,9	-0,10264	0,07895	-0,16568
22,905	-0,13631	0,10159	-0,22092
22,91	-0,16569	0,11589	-0,27537
22,915	-0,18905	0,12939	-0,32775
22,92	-0,19316	0,14204	-0,364
22,925	-0,19266	0,14747	-0,39579
22,93	-0,18713	0,15142	-0,41978

22,935	-0,17606	0,15349	-0,42927
22,94	-0,16409	0,1535	-0,43179
22,945	-0,14881	0,15302	-0,41936
22,95	-0,13037	0,15307	-0,39582
22,955	-0,10901	0,15448	-0,36538
22,96	-0,07399	0,15727	-0,31247
22,965	-0,03364	0,16564	-0,25472
22,97	0,01086	0,17497	-0,1942
22,975	0,05674	0,18462	-0,12727
22,98	0,10138	0,19537	-0,06086
22,985	0,14123	0,20534	0,00346
22,99	0,16712	0,21414	0,0609
22,995	0,18572	0,22148	0,11464
23	0,19316	0,22842	0,16038
23,005	0,19349	0,23489	0,19868
23,01	0,19168	0,24125	0,23246
23,015	0,19065	0,24762	0,25167
23,02	0,19297	0,25154	0,26591
23,025	0,19867	0,25464	0,27701
23,03	0,22322	0,25693	0,25819
23,035	0,24989	0,24663	0,23702
23,04	0,27835	0,23506	0,21271
23,045	0,30788	0,22183	0,18306
23,05	0,33596	0,20605	0,15271
23,055	0,36113	0,19006	0,1232
23,06	0,38332	0,17463	0,09672
23,065	0,40402	0,16068	0,07294
23,07	0,42252	0,14799	0,05721
23,075	0,44135	0,13823	0,0446
23,08	0,46093	0,1296	0,03355
23,085	0,47234	0,12155	0,03457
23,09	0,4828	0,1199	0,03659
23,095	0,49077	0,11902	0,0403
23,1	0,48763	0,11967	0,05112
23,105	0,48048	0,12788	0,06363
23,11	0,46812	0,13845	0,07793
23,115	0,45174	0,15255	0,09308
23,12	0,43466	0,17054	0,10796
23,125	0,41978	0,18997	0,11968
23,13	0,40847	0,2112	0,12864
23,135	0,4005	0,23237	0,13511
23,14	0,40294	0,25289	0,12608
23,145	0,40757	0,2707	0,11472
23,15	0,41301	0,28727	0,10167
23,155	0,41366	0,30252	0,08351

23,16	0,41091	0,31224	0,06566
23,165	0,40181	0,32065	0,04903
23,17	0,38265	0,32657	0,03519
23,175	0,35862	0,32749	0,0233
23,18	0,32725	0,32571	0,0161
23,185	0,29282	0,31786	0,01178
23,19	0,25779	0,30577	0,00911
23,195	0,22212	0,29114	0,01529
23,2	0,18781	0,2679	0,0233
23,205	0,1551	0,24299	0,03303
23,21	0,13242	0,21691	0,05655
23,215	0,11142	0,18335	0,08137
23,22	0,09368	0,14927	0,10692
23,225	0,08514	0,11456	0,13112
23,23	0,081	0,07866	0,15333
23,235	0,08706	0,04243	0,16921
23,24	0,10311	0,00615	0,17765
23,245	0,12572	-0,02937	0,18056
23,25	0,1668	-0,06373	0,16518
23,255	0,21328	-0,09276	0,14463
23,26	0,26255	-0,11939	0,12143
23,265	0,31484	-0,14419	0,07912
23,27	0,36476	-0,1546	0,03611
23,275	0,40966	-0,16319	-0,00845
23,28	0,44041	-0,16892	-0,05737
23,285	0,46491	-0,16726	-0,10699
23,29	0,47914	-0,16339	-0,15642
23,295	0,48412	-0,15573	-0,20436
23,3	0,48477	-0,14432	-0,25078
23,305	0,47546	-0,13083	-0,29001
23,31	0,46334	-0,11134	-0,32564
23,315	0,44987	-0,08939	-0,35857
23,32	0,42212	-0,06604	-0,36442
23,325	0,39284	-0,03576	-0,36724
23,33	0,36154	-0,00535	-0,36638
23,335	0,32633	0,02466	-0,35634
23,34	0,29004	0,05186	-0,34456
23,345	0,25363	0,07747	-0,33118
23,35	0,21935	0,1	-0,31714
23,355	0,18737	0,11831	-0,30344
23,36	0,16116	0,13417	-0,29034
23,365	0,13881	0,14417	-0,27711
23,37	0,11884	0,15128	-0,26341
23,375	0,10211	0,15655	-0,24741
23,38	0,08479	0,15024	-0,22991

23,385	0,06594	0,14175	-0,21079
23,39	0,04212	0,13073	-0,18834
23,395	0,01612	0,10955	-0,16487
23,4	-0,01161	0,08639	-0,13991
23,405	-0,03827	0,06101	-0,11291
23,41	-0,06279	0,03363	-0,08495
23,415	-0,07971	0,00603	-0,05459
23,42	-0,08949	-0,02134	-0,02233
23,425	-0,09392	-0,04789	0,0112
23,43	-0,08077	-0,07354	0,04697
23,435	-0,06415	-0,09519	0,08339
23,44	-0,04573	-0,11606	0,11992
23,445	-0,02349	-0,13625	0,1502
23,45	-0,00287	-0,15045	0,17856
23,455	0,0149	-0,16345	0,20306
23,46	0,02836	-0,17419	0,21936
23,465	0,04012	-0,17992	0,23194
23,47	0,04931	-0,18338	0,23856
23,475	0,05734	-0,18292	0,24141
23,48	0,06491	-0,17974	0,24261
23,485	0,06638	-0,17522	0,24042
23,49	0,0656	-0,16793	0,23752
23,495	0,0625	-0,1601	0,23425
23,5	0,03989	-0,15212	0,2354
23,505	0,01397	-0,14554	0,23667
23,51	-0,01518	-0,139	0,2385
23,515	-0,04484	-0,13263	0,24327
23,52	-0,0724	-0,12711	0,24901
23,525	-0,09223	-0,12194	0,25689
23,53	-0,10098	-0,11766	0,26699
23,535	-0,10193	-0,11451	0,27814
23,54	-0,0855	-0,1121	0,29125
23,545	-0,06333	-0,11161	0,30471
23,55	-0,039	-0,11176	0,31814
23,555	-0,01413	-0,11218	0,32587
23,56	0,00675	-0,1119	0,33239
23,565	0,02172	-0,11113	0,33672
23,57	0,02305	-0,10947	0,33361
23,575	0,02028	-0,10509	0,32821
23,58	0,01256	-0,09979	0,31954
23,585	0,00105	-0,09315	0,30781
23,59	-0,0114	-0,08527	0,29489
23,595	-0,02859	-0,07692	0,28004
23,6	-0,04851	-0,06763	0,26464
23,605	-0,07097	-0,05805	0,24905

23,61	-0,1084	-0,04833	0,23477
23,615	-0,14947	-0,0373	0,22038
23,62	-0,19305	-0,02624	0,20583
23,625	-0,23013	-0,01527	0,19101
23,63	-0,26285	-0,00507	0,17564
23,635	-0,28453	0,00472	0,15916
23,64	-0,28595	0,01371	0,14066
23,645	-0,27576	0,02133	0,12086
23,65	-0,2443	0,02821	0,09751
23,655	-0,20234	0,03358	0,07198
23,66	-0,15617	0,03812	0,04515
23,665	-0,10293	0,04219	0,01104
23,67	-0,05238	0,04386	-0,02451
23,675	-0,0057	0,04508	-0,06141
23,68	0,02799	0,04572	-0,10559
23,685	0,05903	0,0421	-0,15042
23,69	0,08693	0,03771	-0,19534
23,695	0,10971	0,03224	-0,23872
23,7	0,13094	0,025	-0,28051
23,705	0,14653	0,01715	-0,31747
23,71	0,15582	0,00842	-0,3494
23,715	0,1599	-0,00065	-0,37747
23,72	0,14571	-0,00971	-0,39104
23,725	0,12489	-0,01845	-0,40044
23,73	0,09964	-0,02693	-0,40704
23,735	0,07297	-0,03512	-0,39773
23,74	0,04884	-0,03889	-0,38668
23,745	0,03123	-0,0419	-0,37301
23,75	0,03076	-0,04332	-0,35409
23,755	0,03845	-0,04017	-0,33371
23,76	0,05803	-0,03521	-0,31162
23,765	0,08524	-0,02692	-0,28835
23,77	0,11457	-0,01585	-0,26476
23,775	0,145	-0,00348	-0,24188
23,78	0,17293	0,01195	-0,21925
23,785	0,19835	0,02796	-0,19681
23,79	0,21431	0,04403	-0,18237
23,795	0,22961	0,06026	-0,16841
23,8	0,2445	0,07583	-0,15507
23,805	0,25724	0,09024	-0,14254
23,81	0,26996	0,10081	-0,12981
23,815	0,28086	0,10974	-0,11596
23,82	0,28732	0,11542	-0,09999
23,825	0,29034	0,11688	-0,08253
23,83	0,28426	0,11578	-0,06178

23,835	0,27326	0,10865	-0,03992
23,84	0,25942	0,09887	-0,01778
23,845	0,24217	0,08771	0,00339
23,85	0,226	0,07237	0,02336
23,855	0,21219	0,05716	0,04157
23,86	0,20593	0,04261	0,05372
23,865	0,20217	0,03128	0,06397
23,87	0,20062	0,02131	0,07119
23,875	0,19904	0,01352	0,07445
23,88	0,19596	0,00854	0,07597
23,885	0,18805	0,00477	0,0733
23,89	0,17619	0,00346	0,06814
23,895	0,16163	0,00337	0,06138
23,9	0,13994	0,00418	0,04846
23,905	0,11788	0,00876	0,03433
23,91	0,09638	0,01391	0,01949
23,915	0,07769	0,01936	0,00645
23,92	0,06063	0,02378	-0,00548
23,925	0,04587	0,02755	-0,01464
23,93	0,03421	0,02962	-0,01768
23,935	0,02373	0,02776	-0,01763
23,94	0,01587	0,02381	-0,01187
23,945	0,01	0,01568	-0,0027
23,95	0,00555	0,00484	0,00795
23,955	0,00952	-0,00728	0,02192
23,96	0,01624	-0,02272	0,03601
23,965	0,02545	-0,03832	0,04985
23,97	0,04949	-0,05377	0,06077
23,975	0,0754	-0,06966	0,07105
23,98	0,10291	-0,08523	0,08027
23,985	0,13084	-0,10032	0,08662
23,99	0,15787	-0,11442	0,09174
23,995	0,18149	-0,12798	0,09402
24	0,20071	-0,14018	0,09333
24,005	0,21667	-0,15059	0,09077
24,01	0,22371	-0,15957	0,08388
24,015	0,22778	-0,16436	0,07541
24,02	0,23036	-0,16742	0,06604
24,025	0,22311	-0,16938	0,05961
24,03	0,21591	-0,16767	0,05414
24,035	0,20866	-0,16604	0,05078
24,04	0,20044	-0,16472	0,0542
24,045	0,19235	-0,16451	0,06002
24,05	0,18439	-0,16489	0,0691
24,055	0,17638	-0,16601	0,0806

24,06	0,16817	-0,16735	0,09277
24,065	0,15957	-0,16851	0,1055
24,07	0,15052	-0,16867	0,11791
24,075	0,14119	-0,16804	0,12989
24,08	0,1329	-0,16681	0,13614
24,085	0,12496	-0,16326	0,14165
24,09	0,11754	-0,15945	0,14594
24,095	0,11083	-0,15539	0,14427
24,1	0,10447	-0,15026	0,14078
24,105	0,09815	-0,14483	0,13382
24,11	0,09111	-0,13863	0,12181
24,115	0,0833	-0,13114	0,10733
24,12	0,07403	-0,12294	0,08839
24,125	0,06377	-0,11321	0,06774
24,13	0,05306	-0,10301	0,04658
24,135	0,0446	-0,0926	0,02679
24,14	0,03741	-0,08137	0,00812
24,145	0,03205	-0,07032	-0,00893
24,15	0,03351	-0,05942	-0,01792
24,155	0,03686	-0,04801	-0,02504
24,16	0,04222	-0,03637	-0,0295
24,165	0,04886	-0,02417	-0,03011
24,17	0,05517	-0,01096	-0,02927
24,175	0,05963	0,00269	-0,02571
24,18	0,06194	0,01683	-0,02046
24,185	0,0626	0,03094	-0,01434
24,19	0,05799	0,0447	-0,00611
24,195	0,05257	0,05674	0,00254
24,2	0,04688	0,068	0,01132
24,205	0,03729	0,07851	0,0169
24,21	0,02761	0,08615	0,02151
24,215	0,01734	0,09322	0,0241
24,22	0,00474	0,09949	0,02206
24,225	-0,00914	0,10412	0,01804
24,23	-0,02521	0,10799	0,01085
24,235	-0,0428	0,11044	0,00157
24,24	-0,06096	0,11163	-0,0086
24,245	-0,07876	0,11212	-0,02023
24,25	-0,0956	0,11121	-0,03206
24,255	-0,11136	0,11	-0,04388
24,26	-0,12154	0,10876	-0,05355
24,265	-0,13097	0,10964	-0,06307
24,27	-0,13999	0,11091	-0,07224
24,275	-0,15003	0,11273	-0,08019
24,28	-0,16132	0,11555	-0,08762

24,285	-0,17536	0,11845	-0,09401
24,29	-0,19243	0,12125	-0,09919
24,295	-0,21112	0,12375	-0,10371
24,3	-0,23233	0,12595	-0,10721
24,305	-0,25377	0,12783	-0,11037
24,31	-0,27481	0,12968	-0,11342
24,315	-0,2909	0,1316	-0,1182
24,32	-0,30546	0,13273	-0,12338
24,325	-0,31787	0,13386	-0,12923
24,33	-0,32394	0,13468	-0,13729
24,335	-0,32823	0,13324	-0,14576
24,34	-0,32971	0,13095	-0,15446
24,345	-0,32762	0,12718	-0,16297
24,35	-0,32372	0,12176	-0,17111
24,355	-0,31494	0,11568	-0,1782
24,36	-0,30343	0,10883	-0,18451
24,365	-0,29004	0,102	-0,19022
24,37	-0,26727	0,09546	-0,19261
24,375	-0,24306	0,09061	-0,19425
24,38	-0,21783	0,08616	-0,19499
24,385	-0,19232	0,08207	-0,19206
24,39	-0,16745	0,07924	-0,18817
24,395	-0,14457	0,07658	-0,18279
24,4	-0,12591	0,07431	-0,17535
24,405	-0,10971	0,07307	-0,16719
24,41	-0,09838	0,0725	-0,15807
24,415	-0,09001	0,07352	-0,14881
24,42	-0,08317	0,07571	-0,1397
24,425	-0,08052	0,07856	-0,13125
24,43	-0,07818	0,0824	-0,12319
24,435	-0,07581	0,0861	-0,11552
24,44	-0,07536	0,08939	-0,10998
24,445	-0,07479	0,09034	-0,10492
24,45	-0,07417	0,09048	-0,10078
24,455	-0,07391	0,08971	-0,09862
24,46	-0,07391	0,08807	-0,0975
24,465	-0,07407	0,08636	-0,09841
24,47	-0,07409	0,08501	-0,10108
24,475	-0,07378	0,08425	-0,1048
24,48	-0,07148	0,08392	-0,11085
24,485	-0,06809	0,08422	-0,11753
24,49	-0,06379	0,08457	-0,12452
24,495	-0,05859	0,08484	-0,13207
24,5	-0,05321	0,08446	-0,13959
24,505	-0,04815	0,08387	-0,14701

24,51	-0,04485	0,08314	-0,15399
24,515	-0,04267	0,08233	-0,16075
24,52	-0,04215	0,08161	-0,1669
24,525	-0,04285	0,08095	-0,17217
24,53	-0,0439	0,08012	-0,17673
24,535	-0,04465	0,07901	-0,17919
24,54	-0,0445	0,07668	-0,18055
24,545	-0,0435	0,07362	-0,18116
24,55	-0,04109	0,07001	-0,17814
24,555	-0,03835	0,06447	-0,17484
24,56	-0,03564	0,05902	-0,17132
24,565	-0,03405	0,05391	-0,16741
24,57	-0,03341	0,05003	-0,16362
24,575	-0,03426	0,04693	-0,15997
24,58	-0,03653	0,04494	-0,15631
24,585	-0,03929	0,04387	-0,15257
24,59	-0,04271	0,0431	-0,1486
24,595	-0,04583	0,0424	-0,1443
24,6	-0,04857	0,04136	-0,13977
24,605	-0,05177	0,03997	-0,13619
24,61	-0,05517	0,03812	-0,13286
24,615	-0,05894	0,03613	-0,13
24,62	-0,06282	0,03412	-0,12956
24,625	-0,06708	0,03234	-0,12972
24,63	-0,07127	0,0307	-0,13063
24,635	-0,07395	0,02915	-0,13225
24,64	-0,07531	0,02748	-0,13402
24,645	-0,0732	0,02573	-0,13593
24,65	-0,0683	0,02366	-0,13786
24,655	-0,06152	0,02154	-0,13981
24,66	-0,04932	0,01951	-0,14175
24,665	-0,03639	0,01784	-0,14383
24,67	-0,0233	0,01655	-0,14595
24,675	-0,01079	0,01566	-0,14677
24,68	0,00087	0,01556	-0,14691
24,685	0,01106	0,01543	-0,14567
24,69	0,0185	0,01508	-0,14167
24,695	0,02474	0,01426	-0,13622
24,7	0,02842	0,01309	-0,12851
24,705	0,03	0,01154	-0,11951
24,71	0,03021	0,01001	-0,1101
24,715	0,02655	0,0087	-0,10029
24,72	0,02136	0,00854	-0,09093
24,725	0,01505	0,0091	-0,08205
24,73	0,00628	0,01024	-0,07316

24,735	-0,00221	0,01242	-0,06426
24,74	-0,0098	0,01471	-0,05506
24,745	-0,01512	0,01688	-0,04491
24,75	-0,01907	0,01839	-0,0343
24,755	-0,02112	0,01952	-0,0232
24,76	-0,02203	0,02001	-0,01203
24,765	-0,02267	0,02	-0,00104
24,77	-0,02309	0,01973	0,00896
24,775	-0,02421	0,01904	0,01866
24,78	-0,02602	0,01814	0,02828
24,785	-0,02838	0,01705	0,03681
24,79	-0,03081	0,01533	0,04549
24,795	-0,0332	0,01347	0,05411
24,8	-0,0357	0,01155	0,06126
24,805	-0,03835	0,00995	0,06729
24,81	-0,04154	0,00884	0,07093
24,815	-0,04577	0,00866	0,07134
24,82	-0,05088	0,00968	0,06972
24,825	-0,0567	0,0114	0,06484
24,83	-0,0624	0,01403	0,05879
24,835	-0,0675	0,01674	0,0525
24,84	-0,07026	0,01921	0,04769
24,845	-0,07079	0,02023	0,04428
24,85	-0,06902	0,02043	0,04245
24,855	-0,06541	0,01977	0,04283
24,86	-0,06176	0,01781	0,04361
24,865	-0,0596	0,01561	0,04406
24,87	-0,06123	0,01344	0,04314
24,875	-0,06596	0,01171	0,04118
24,88	-0,07604	0,01042	0,03756
24,885	-0,08925	0,00989	0,03304
24,89	-0,10392	0,00986	0,02808
24,895	-0,12034	0,01015	0,02303
24,9	-0,13555	0,01095	0,0175
24,905	-0,14914	0,01198	0,01125
24,91	-0,15893	0,0132	0,00284
24,915	-0,16779	0,01497	-0,00689
24,92	-0,17583	0,01674	-0,01799
24,925	-0,18351	0,01843	-0,029
24,93	-0,19148	0,01963	-0,03838
24,935	-0,20025	0,0202	-0,04243
24,94	-0,20894	0,01957	-0,03999
24,945	-0,21696	0,01792	-0,03258
24,95	-0,22752	0,01573	-0,01599
24,955	-0,23823	0,0128	0,00269

24,96	-0,24965	0,01022	0,02123
24,965	-0,26249	0,00826	0,02992
24,97	-0,27904	0,00814	0,03186
24,975	-0,30022	0,0088	0,02415
24,98	-0,32474	0,01027	0,0036
24,985	-0,35126	0,01238	-0,02082
24,99	-0,37767	0,0141	-0,04525

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

- [E1] Βάγιας Κ. Ι., Ερμόπουλος Χ. Ι., Ιωαννίδης Ι. Γ., (2013), *Σχεδιασμός Δομικών Έργων από Χάλυβα με Παραδείγματα Εφαρμογής*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- [E2] Βάγιας Ι., Γαντές Χ., Ερμόπουλος Ι., Ιωαννίδης Γ., (2013), *Παραδείγματα Εφαρμογής σε Ειδικά Θέματα Μεταλλικών Κατασκευών*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- [E3] Βαρδουλάκης Α. Ι., (2020), *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία, Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου Τόμος Α': Κλασσική Θεωρία Ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- [E4] Βαρδουλάκης Α. Ι., (2020), *Εισαγωγή στη Μαθηματική Θεωρία, Σημάτων, Συστημάτων και Ελέγχου Τόμος Β': Μοντέρνα Θεωρία Ελέγχου*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- [E5] Δώδου Μ., (2016), *Αναγνώριση δυναμικών χαρακτηριστικών των κατασκευών από επιταχυνσιογράμματα απόκρισης με χρήση προσομοιωμένων δεδομένων*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.
- [E6] Θεοδώρου Γ. Α., (2012), *Εισαγωγή στην Ασαφή Λογική (Fuzzy Logic)*, Εκδόσεις Τζιόλα.
- [E7] Καραμπόγιας Σ., (2015), *Σήματα και Συστήματα*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, www.kallipos.gr
- [E8] Μακάριος Τ., (2015), *Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Αναγνώριση Δυναμικών Χαρακτηριστικών των Κατασκευών*, Σημειώσεις διδακτικής ενότητας Β για το μάθημα Υπολογιστική Μηχανική των Κατασκευών στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών «Αντισεισμικός Σχεδιασμός Τεχνικών Έργων», Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- [E9] Παπαδρακάκης Μ., (2013), *Μαθήματα Στατικής V Πλαστική Ανάλυση Ραβδωτών Φορέων Σύγχρονες Μέθοδοι*, Εκδόσεις Τσότρας.
- [E10] Σταυρίδης Θ. Λ., (2006), *Στατική των Δομικών Φορέων – Μέρος Α'*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- [E11] Σταυρίδης Θ. Λ., (2016), *Στατική των Δομικών Φορέων – Μέρος Β'*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος.
- [E12] Τζιότζιου Α., (2019), *Αναγνώριση ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών κτιρίων από επιταχυνσιογράμματα απόκρισης, χρησιμοποιώντας προσομοιωμένα δεδομένα*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πολυτεχνική Σχολή, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- [E13] Τούσης Ε., (2014), *Αναγνώριση δυναμικών χαρακτηριστικών κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος με προσομοιωμένα δεδομένα*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Ξενόγλωσση

- [Ξ1] Blachowski B., Pnevmatikos N., (2018), *Neural Network Based Vibration Control of Seismically Excited Civil Structures*, Periodica Polytechnica Civil Engineering.
- [Ξ2] Butterworth S., (1930), *On the Theory of Filter Amplifiers*, Experimental Wireless and the Wireless Engineer, 7: 536-541.
- [Ξ3] Chen G.W., Chen X., Omenzetter P., (2020), Modal parameter identification of a multiple-span post-tensioned concrete bridge using hybrid vibration testing data, Elsevier, Engineering Structures 219 (2020), 110953.
- [Ξ4] Chopra A. K., (2007), *Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Pearson Prentice Hall.
- [Ξ5] Cohen H., (2006), *Complex Analysis with Applications in Science and Engineering 2nd Edition*, Springer.
- [Ξ6] Dragos K., Makarios T., Karetso I., Manolis G., Smarsly K., (2020), *Detection and Correction of Synchronization-induced Errors in Operational Modal Analysis*, Journal of Archive of Applied Mechanics, Springer, 90, pp.1547-1567, DOI: 10.1007/s00419-020-01683-6.
- [Ξ7] Halldorson B., Papageorgiou A. S., (2005), *Calibration of the specific barrier model to earthquake of different tectonic regions*, Bulletin of the Seismological Society of America 95(4): 1276-1300.
- [Ξ8] Huang C.S., Hung S. L., Su W. C., (2004), *System Identification of Structures from Seismic Response Data via Wavelet Packet Method*, 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, B.C., Canada, August 1-6, 2004, Paper No. 2272.
- [Ξ9] Imai H., Yun C. B., Maruyama O., Shinozuka M., (1989), *Fundamentals of system identification in structural dynamics*, Probabilistic Engineering Mechanics Vol. 4, No 4, Computational Mechanics Publications.
- [Ξ10] Kalman, R. E., (1960), *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Journal of Basic Engineering, 82: 35-45.
- [Ξ11] Kijewski T., Kareem A., (2003), *Wavelet Transforms for System Identification in Civil Engineering*, Computer – Aided Civil and Infrastructure Engineering 18 (2003) 339-355.
- [Ξ12] Liew K., Wang Q., (1998), *Application of wavelet theory for crack identification in structures*, Journal of Engineering Mechanics, 124(2), pp. 157-157.
- [Ξ13] Makarios T., (2012), *Identification of the mode shapes of spatial tall multi-storey buildings due to earthquakes. The new “modal time-histories” method*, Journal of the Structural Design of Tall & Special Buildings, DOI:10.1002/tal.630. Volume 21, 9, September 2012: 621-641.
- [Ξ14] Makarios T., (2020), *Identification of Mode-Shapes and Eigen-Frequencies of bi-hinge Beam with Distributed Mass and Stiffness*, Journal of Civil Engineering and Construction, 9(3): pages 119-126, doi.org/10.32732/jcec.2020.9.3.119
- [Ξ15] Makarios K. T. and Baniotopoulos C. C., (2012), *Wind energy structures: modal analysis by the continuous model approach*, Journal of Vibration and Control, 0 (0): pages 1-11, doi: 10.1177/1077546312463761.
- [Ξ16] Makarios T., Lekidis V., (2022), *Developing Model of Bridge to Identification Eigen-Frequencies of Bridges Using the Theory of Continuous Systems*, PriMera Scientific Engineering, Volume 1 Issue 1 September. pp 4-11; <https://doi.org/10.56831/PSEN-01-002>

- [Ξ17] Manolis G.D., Makarios T.K., Katakalos K., Dadoulis G., Tziotziou A., Charalambidou E., (2021), *Field Measurements and Numerical Modeling of a Flexible Pylon. A pilot study on Structural Health Monitoring*, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.51,3, (2021), pp 352-367.
- [Ξ18] Maymon G., (2008), *Structural Dynamics and Probabilistic Analysis for Engineers*, Elsevier.
- [Ξ19] Moussas C. V., Pnevmatikos N., (2019), *Sensor Placement Selection for SHM of Buildings*, Proceedings of 7th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Crete, Greece 24-26 June 2019.
- [Ξ20] Patidar S., Rode V., Yadav K. K., Chandra M., (2021), *Interrelation Between Geometric Ratios of Steel Chimney and Deflection by Static and Dynamic Analysis*, International Journal of Engineering Research & Technology, Vol. 10 Issue 02, February 2021, pages: 349-356.
- [Ξ21] Pnevmatikos N., Konstadakopoulou F., Blachowski B., Papavasileiou G., Broukos P., (2020), *Multifractal analysis and wavelet leaders for structural damage detection of structures subjected to earthquake excitation*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering 139 (2020) 106328.
- [Ξ22] Tziotziou A. Makarios T., (2022), *Influence of two orthogonal and horizontal seismic excitation components of strong ground motion on the identification of eigen-frequencies of asymmetric buildings*, Trends in Civil Engineering and its Architecture (TCEIA), Volume 4, Issue 3, September. 678-685.