



Σχολή Ανθρωπιστικών και Κοινωνικών Επιστημών

Φιλοσοφία και Τέχνες

Διπλωματική Εργασία

Η Έννοια του Ωραίου στα Μαθηματικά και η έκφρασή της στην
Ευρωπαϊκή Αρχιτεκτονική: Διδακτική Προσέγγιση της
Συμμετρίας σε μαθητές Δημοτικού

Μαρία Κοκοτσή

Επιβλέπων καθηγητής: Εμμανουήλ Β. Περάκης

Πάτρα, Ιούνιος 2026



Η Έννοια του Ωραίου στα Μαθηματικά και η έκφρασή της στην
Ευρωπαϊκή Αρχιτεκτονική: Διδακτική Προσέγγιση της
Συμμετρίας σε μαθητές Δημοτικού

Μαρία Κοκοτσή

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Δρ. Εμμανουήλ Β. Περάκης

Μέλος Σ.Ε.Π του Ε.Α.Π

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Δρ. Παναγιώτης Χρήστος Αλεξόπουλος

Μέλος Σ.Ε.Π του Ε.Α.Π

Πάτρα, Ιούνιος 2026

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στους καθηγητές μου κ. Εμμανουήλ Περάκη και κ. Παναγιώτη Χρήστο Αλεξόπουλο για τη βοήθειά τους και τις πολύτιμες συμβουλές τους. Ιδιαίτερως, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα Μυρτώ Μαρκοπούλου, πρώην διευθύντριά μου, η οποία πίστεψε στις δυνατότητές μου και με ενθάρρυνε να προχωρήσω. Ξεχωριστά, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον κ. Παναγιώτη Κακαβά, διευθυντή μου, ο οποίος μου έδειξε νέους δρόμους γνώσης και συνέβαλε ουσιαστικά στην επαγγελματική και προσωπική μου εξέλιξη. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για τη στήριξη και την αγάπη που μου παρείχε όλο αυτό το διάστημα.

Αφιερώνω αυτήν την εργασία στην κόρη μου, Μάγια, το θαύμα της ζωής μου!

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Μαρίας Κοκοτσή που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση της συγγραφέα/δημιουργού. Η συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία διερευνά τη σχέση μεταξύ της έννοιας του Ωραίου στα Μαθηματικά και της έκφρασής της στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, εστιάζοντας ιδιαίτερα στον ρόλο της συμμετρίας ως βασικού στοιχείου αισθητικής οργάνωσης και μαθηματικής δομής. Η εργασία στηρίζεται στη θέση ότι η συμμετρία δεν αποτελεί μόνο μια γεωμετρική έννοια, αλλά και ένα θεμελιώδες χαρακτηριστικό που συνδέεται με την αντίληψη της αρμονίας, της ισορροπίας και της ομορφιάς τόσο στα μαθηματικά όσο και στην αρχιτεκτονική.

Στο θεωρητικό μέρος εξετάζονται οι φιλοσοφικές και αισθητικές προσεγγίσεις της μαθηματικής ομορφιάς από την αρχαιότητα έως τη σύγχρονη εποχή, με αναφορές σε φιλοσόφους, μαθηματικούς και θεωρητικούς της αισθητικής. Παράλληλα, αναλύεται η έννοια της συμμετρίας και η παρουσία της στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική μέσα από χαρακτηριστικά παραδείγματα διαφορετικών ιστορικών περιόδων, αναδεικνύοντας τη συμβολή της στη διαμόρφωση της αισθητικής εμπειρίας.

Στο ερευνητικό μέρος παρουσιάζεται μια διδακτική παρέμβαση που υλοποιήθηκε σε δεκατρείς μαθητές της Γ' τάξης Δημοτικού Σχολείου. Η παρέμβαση είχε συνολική διάρκεια έξι διδακτικών ωρών και βασίστηκε στη σύνδεση της συμμετρίας με πραγματικά παραδείγματα ευρωπαϊκών αρχιτεκτονικών κτιρίων. Για τη συλλογή των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν φύλλα αξιολόγησης πριν και μετά την παρέμβαση (pre-test και post-test), τα οποία περιλάμβαναν δραστηριότητες αναγνώρισης αξόνων συμμετρίας, ερωτήσεις ανοιχτού τύπου και δραστηριότητες σχεδίασης και αιτιολόγησης.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε ουσιαστικά στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές, στη βελτίωση της ικανότητάς τους να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια, καθώς και στη διαμόρφωση αντιλήψεων που συνδέουν τη συμμετρία με την αισθητική αρμονία και το Ωραίο. Παράλληλα, αναδείχθηκε η εκπαιδευτική αξία μιας διαθεματικής προσέγγισης που συνδέει τα Μαθηματικά με την αρχιτεκτονική, την τέχνη και τον πολιτισμό.

Συμπερασματικά, η έρευνα υποστηρίζει ότι η αξιοποίηση της ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής ως πλαισίου διδασκαλίας της συμμετρίας μπορεί να ενισχύσει τόσο την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας όσο και την αισθητική ευαισθητοποίηση των μαθητών, προσφέροντας ουσιαστικότερες και περισσότερο νοηματοδοτημένες μαθησιακές εμπειρίες.

Λέξεις – Κλειδιά

Μαθηματική ομορφιά, συμμετρία, Ωραίο, ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, αισθητική, γεωμετρία, μαθηματική εκπαίδευση, Δημοτικό Σχολείο, διδακτική παρέμβαση.

The Concept of Beauty in Mathematics and its Expression in European Architecture: A Teaching Approach to Symmetry for Elementary School Students

Maria Kokotsi

Abstract

This thesis explores the relationship between the concept of beauty in mathematics and its expression in European architecture, focusing particularly on symmetry as a fundamental element of both aesthetic organization and mathematical structure. The study is based on the premise that symmetry is not merely a geometric concept but also a key characteristic associated with harmony, balance, and beauty in both mathematics and architecture.

The theoretical part examines philosophical and aesthetic approaches to mathematical beauty from antiquity to the modern era, drawing on the work of philosophers, mathematicians, and aesthetic theorists. At the same time, the concept of symmetry and its presence in European architecture are analyzed through representative examples from different historical periods, highlighting its contribution to the formation of aesthetic experience.

The empirical part presents a teaching intervention implemented with thirteen third-grade primary school students. The intervention lasted six teaching hours and was based on connecting symmetry with authentic examples of European architectural buildings. Data were collected through pre-test and post-test assessment sheets, which included activities involving the identification of axes of symmetry, open-ended questions, and drawing and justification tasks.

The findings revealed that the teaching intervention contributed significantly to students' understanding of the concept of symmetry, improved their ability to recognize and identify axes of symmetry in European architectural buildings, and influenced their perceptions regarding the relationship between symmetry, aesthetic harmony, and beauty. Furthermore, the study

highlighted the educational value of an interdisciplinary approach that connects mathematics with architecture, art, and culture.

In conclusion, the research suggests that the use of European architecture as a context for teaching symmetry can enhance both the understanding of mathematical concepts and students' aesthetic awareness, providing richer and more meaningful learning experiences.

Keywords

mathematical beauty, symmetry, beauty, European architecture, aesthetics, geometry, mathematics education, primary education, teaching intervention

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iv
Περίληψη	vi
Abstract.....	viii
Περιεχόμενα.....	x
Κατάλογος	Εικόνων/Γραφημάτων
.....	xii
Κατάλογος Πινάκων	xiii
Εισαγωγή	1
A' ΜΕΡΟΣ	3
ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	3
1. Το Ωραίο στα Μαθηματικά	3
1.1 Η έννοια της ομορφιάς στα μαθηματικά	3
1.2 Συμμετρία και γεωμετρία στα μαθηματικά και στην αισθητική	6
2. Αρχιτεκτονική και συμμετρία.....	9
2.1 Η σχέση μαθηματικών και ομορφιάς στη φιλοσοφία και την αρχιτεκτονική.....	9
2.2 Συμμετρία και γεωμετρία στη γοτθική αρχιτεκτονική	11
2.3 Η μαθηματική αρμονία στην αρχιτεκτονική της Αναγέννησης	17
2.4 Η χρυσή τομή και οι μαθηματικές αναλογίες στην αρχιτεκτονική	23
3. Μελέτες περίπτωσης: Συμμετρία και μαθηματική ομορφιά σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά μνημεία.....	29
3.1 Ο Ναός του Απόλλωνα Επικούριου στις Βάσες και η γεωμετρική επινόηση της κλασικής αρχιτεκτονικής.....	30
3.2 Η Notre-Dame de Paris και η γεωμετρία της γοτθικής ανύψωσης	31
3.3 Η Santa Maria del Fiore και η μαθηματική συνείδηση της Αναγέννησης	33
3.4 Συγκριτική θεώρηση: τρεις εκδοχές μαθηματικής ομορφιάς.....	34
4. Η έννοια της συμμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο	36
4.1 Η έννοια της συμμετρίας στο Ισχύον (2003) και στα Νέα Προγράμματα Σπουδών (2021) του δημοτικού.....	36
4.2 Διδακτικές αρχές που υποστηρίζουν τα Νέα Προγράμματα Σπουδών	37
4.2.1 Κονστрукτιβιστική και ανακαλυπτική μάθηση.....	37
4.2.2 Διερευνητική και βιωματική μάθηση	37
4.2.3 Ομαδοσυνεργατική μέθοδος.....	38
4.2.4 Κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση της μάθησης.....	38
4.2.5 Διαθεματικότητα και αισθητική διάσταση	39
4.3 Η προσέγγιση της συμμετρίας στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Δημοτικού... ..	39
4.4 Βιβλιογραφική ανασκόπηση για τη διδασκαλία της συμμετρίας, τη μαθηματική αισθητική και τη σύνδεση των Μαθηματικών με την τέχνη και την αρχιτεκτονική..	42
4.5 Καινοτομία και συμβολή της παρούσας έρευνας	46
B' ΜΕΡΟΣ	49

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ.....	49
5. Μεθοδολογία της έρευνας.....	49
5.1 Σκοπός της έρευνας.....	49
5.2 Ερευνητικά ερωτήματα	49
5.3 Ερευνητικός σχεδιασμός	50
5.3.1 Ερευνητική προσέγγιση.....	50
5.3.2 Δείγμα.....	51
5.3.3 Ερευνητικά εργαλεία	52
5.3.4 Διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας.....	53
5.4 Σχεδιασμός και υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης.....	54
5.4.1 Θεωρητικό πλαίσιο σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης.....	54
5.4.2 Σκοπός και στόχοι της διδακτικής παρέμβασης	55
5.4.3 Προαπαιτούμενες γνώσεις.....	56
5.4.4 Περιγραφή των διδακτικών φάσεων.....	57
5.5 Ηθικές και δεοντολογικές διαστάσεις της έρευνας	58
6. Αποτελέσματα.....	60
6.1 Αποτελέσματα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας (EE1). 60	
6.2 Αποτελέσματα σχετικά με την αναγνώριση αξόνων συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια (EE2)	62
6.3 Αποτελέσματα σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο (EE3).....	65
6.3.1 Αισθητική αξιολόγηση του Θεάτρου Μπολσόι.....	65
6.3.2 Σχεδίαση και αιτιολόγηση ενός «ωραίου κτιρίου».....	67
7. Συζήτηση των αποτελεσμάτων	69
8. Συμπεράσματα της έρευνας	73
9. Βιβλιογραφία - Ελληνική.....	76
9. Βιβλιογραφία - Ξενόγλωσση	77
10. Παράρτημα Α: «Φύλλο Αρχικής/Τελικής Αξιολόγησης (Pre/Post)»	82
11. Παράρτημα Β: «Φύλλα Εργασίας».....	88

Κατάλογος Εικόνων / Γραφημάτων

Εικόνα 1. Θέατρο Μπολσόι - Μόσχα	82
Εικόνα 2. Το Μουσείο του Πράδο - Μαδρίτη	84
Εικόνα 3. Teatro alla Scala - Μιλάνο	85
Εικόνα 4. Φωτογραφία (Εικόνα 1 – Εικόνα 2).....	88
Εικόνα 5. Μισή φωτογραφία πεταλούδας	90
Εικόνα 6. Σχήματα	92
Εικόνα 7. Παρθενώνας.....	93
Εικόνα 8. Καθεδρικός Ναός Παναγίας Των Παρισίων	94
Εικόνα 9. Παλάτι των Βερσαλλιών.....	95
Εικόνα 10. Εικονογραφημένος μαθητής.....	97
Εικόνα 11. Καθεδρικός Ναός Παναγίας των Παρισίων.....	98
Εικόνα 12. Εικονογραφημένη κάμερα.....	100
Εικόνα 13. Αστικό τοπίο (εικονογράφηση).....	100
Γράφημα 1. Αναγνώριση αξόνων συμμετρίας στα δύο αρχιτεκτονικά κτίρια πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (N=13).....	63
Γράφημα 2. Κριτήρια αισθητικής αξιολόγησης του Θεάτρου Μπολσόι πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (N=13).....	66

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1. Απαντήσεις μαθητών σχετικά με την αναγνώριση μαθηματικών στοιχείων σε αρχιτεκτονικό κτίριο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (N=13)	60
--	----

Εισαγωγή

Η έννοια του Ωραίου αποτελεί ένα από τα διαχρονικότερα ζητήματα της φιλοσοφίας, της αισθητικής και της ανθρώπινης σκέψης γενικότερα. Από την αρχαιότητα έως σήμερα, η αναζήτηση των χαρακτηριστικών που καθιστούν ένα αντικείμενο, μια μορφή ή μια ιδέα όμορφη έχει απασχολήσει φιλοσόφους, καλλιτέχνες, επιστήμονες και μαθηματικούς. Ιδιαίτερα στον χώρο των Μαθηματικών, η ομορφιά δεν συνδέεται μόνο με την εξωτερική μορφή ή την αισθητηριακή εμπειρία, αλλά και με έννοιες όπως η τάξη, η απλότητα, η αρμονία, η συμμετρία και η εσωτερική συνοχή των μαθηματικών δομών.

Η σχέση ανάμεσα στα Μαθηματικά και στην αισθητική έχει βαθιές ιστορικές ρίζες. Ήδη από την πυθαγόρεια φιλοσοφία, η ομορφιά θεωρήθηκε άρρηκτα συνδεδεμένη με τους αριθμούς, τις αναλογίες και την αρμονική οργάνωση του κόσμου. Ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης συνέδεσαν το Ωραίο με τη συμμετρία, το μέτρο και την τάξη, ενώ στη νεότερη εποχή μαθηματικοί όπως ο Hardy και ο Weyl ανέδειξαν τη σημασία της αισθητικής διάστασης της μαθηματικής σκέψης. Η ομορφιά στα Μαθηματικά δεν θεωρείται απλώς ένα υποκειμενικό συναίσθημα, αλλά συνδέεται με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των μαθηματικών δομών που προκαλούν αίσθηση αρμονίας και νοητικής πληρότητας.

Ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία που συνδέουν τα Μαθηματικά με την αισθητική είναι η συμμετρία. Η συμμετρία εμφανίζεται στη φύση, στην τέχνη, στην επιστήμη και στην αρχιτεκτονική, αποτελώντας διαχρονικά σύμβολο ισορροπίας και αρμονίας. Ιδιαίτερα στην αρχιτεκτονική, η συμμετρία λειτουργεί ως βασική αρχή οργάνωσης του χώρου και της μορφής, συμβάλλοντας στη δημιουργία κτιρίων που γίνονται αντιληπτά ως αισθητικά ευχάριστα και αρμονικά. Από τους αρχαίους ελληνικούς ναούς έως τα γοτθικά μνημεία, τα αναγεννησιακά κτίρια και τη σύγχρονη ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, η συμμετρία αποτελεί σταθερό στοιχείο της αρχιτεκτονικής σύνθεσης.

Η παρούσα εργασία επιχειρεί να διερευνήσει τη σχέση ανάμεσα στη μαθηματική ομορφιά και στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, αναδεικνύοντας τον ρόλο της συμμετρίας ως κοινού σημείου συνάντησης των δύο πεδίων. Παράλληλα, εξετάζει τις

δυνατότητες αξιοποίησης της συγκεκριμένης σχέσης στη μαθηματική εκπαίδευση, μέσα από μια διδακτική παρέμβαση που σχεδιάστηκε για μαθητές της Γ΄ Δημοτικού.

Η επιλογή του θέματος βασίστηκε στην ανάγκη υπέρβασης μιας παραδοσιακής αντίληψης της διδασκαλίας της συμμετρίας, η οποία συχνά περιορίζεται στην αναγνώριση γεωμετρικών σχημάτων και στην εκτέλεση τυπικών δραστηριοτήτων στα σχολικά εγχειρίδια. Αντίθετα, η παρούσα εργασία προσεγγίζει τη συμμετρία ως έννοια που συνδέεται με πραγματικά πολιτισμικά και αισθητικά συμφραζόμενα, επιτρέποντας στους μαθητές να αντιληφθούν τη σημασία της πέρα από τα στενά όρια του σχολικού μαθήματος.

Η εργασία οργανώνεται σε δύο βασικά μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας. Εξετάζονται η έννοια του Ωραίου στα Μαθηματικά, η αισθητική διάσταση της συμμετρίας, η παρουσία της στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, καθώς και η θέση της στη μαθηματική εκπαίδευση, στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, στα σχολικά εγχειρίδια και στη σχετική ερευνητική βιβλιογραφία. Παράλληλα, αναδεικνύεται η καινοτομία της παρούσας έρευνας.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται η εμπειρική έρευνα. Περιγράφονται ο σκοπός, τα ερευνητικά ερωτήματα, η μεθοδολογία, η διδακτική παρέμβαση και η διαδικασία συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, ακολουθεί η συζήτησή τους σε συνάρτηση με το θεωρητικό πλαίσιο και ολοκληρώνεται με τα συμπεράσματα και τις προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Η βασική θέση που διατρέχει ολόκληρη την εργασία είναι ότι η συμμετρία μπορεί να αποτελέσει μια γέφυρα ανάμεσα στα Μαθηματικά, την αισθητική και τον πολιτισμό, συμβάλλοντας όχι μόνο στην κατανόηση μιας σημαντικής μαθηματικής έννοιας, αλλά και στην ανάπτυξη μιας βαθύτερης και ουσιαστικότερης σχέσης των μαθητών με τη μαθηματική γνώση.

Α΄ ΜΕΡΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

1. Το Ωραίο στα Μαθηματικά

1.1 Η έννοια της ομορφιάς στα μαθηματικά

Η έννοια της ομορφιάς στα μαθηματικά αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα ζητήματα της φιλοσοφίας των μαθηματικών και της αισθητικής θεωρίας. Παρότι τα μαθηματικά συνδέονται συνήθως με τη λογική αυστηρότητα, την ακρίβεια και την αντικειμενικότητα, η ιστορία της μαθηματικής σκέψης δείχνει ότι η αισθητική εμπειρία κατέχει ουσιαστική θέση στη διαμόρφωση και αξιολόγηση των μαθηματικών θεωριών (Hardy 1940, σ. 85–90; Rota 1997, σ. 25–30). Η μαθηματική ομορφιά δεν αφορά μόνο την οπτική αρμονία ενός σχήματος, αλλά ιδιότητες όπως η απλότητα, η συμμετρία, η εσωτερική συνοχή και η κομψότητα μιας απόδειξης ή θεωρίας (Atiyah 2009, σ. 12–15).

Η διερεύνηση της μαθηματικής ομορφιάς αποκτά ιδιαίτερη σημασία στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, καθώς αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση της αισθητικής εμπειρίας στην αρχιτεκτονική. Προτού εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικές δομές μετασχηματίζονται σε αρχιτεκτονικές μορφές, είναι αναγκαίο να διευκρινιστεί τι σημαίνει «ομορφιά» στα μαθηματικά. Η εμπειρία αυτή δεν ταυτίζεται με την αισθητική εντύπωση που προκαλεί ένα έργο τέχνης, αλλά συνδέεται με τη διανοητική ικανοποίηση που προκύπτει από την αναγνώριση τάξης, αναλογίας και αναγκαιότητας (Tatarkiewicz 1980, σ. 90–95).

Ήδη από την αρχαιότητα, η ελληνική φιλοσοφία συνέδεσε το ωραίο με την αρμονία, το μέτρο και την τάξη. Στην πυθαγόρεια παράδοση, οι αριθμοί θεωρούνται θεμελιώδεις αρχές οργάνωσης της πραγματικότητας. Οι Πυθαγόρειοι υποστήριζαν ότι η μουσική, η φύση και η κοσμική τάξη διέπονται από μαθηματικές αναλογίες και ότι η αρμονία του κόσμου μπορεί να εκφραστεί μέσω αριθμητικών σχέσεων (Burkert 1972, σ. 44–50). Η ομορφιά, επομένως, δεν αντιμετωπίζεται ως υποκειμενική εντύπωση, αλλά ως έκφραση μιας αντικειμενικής δομής.

Η σύνδεση ανάμεσα στην ομορφιά και στις μαθηματικές σχέσεις συνεχίζεται στον Πλάτωνα. Στον *Φίληβο*, ο φιλόσοφος συνδέει το ωραίο με τη συμμετρία και την αναλογία, ενώ στο *Συμπόσιο* παρουσιάζει την ομορφιά ως πορεία από το αισθητό προς το νοητό (Plato, *Philebus* 64e–65a; *Symposium* 210e–211b). Τα μαθηματικά αποκτούν ιδιαίτερη σημασία, επειδή εκφράζουν σταθερές και αιώνιες σχέσεις που υπερβαίνουν τη μεταβλητότητα του αισθητού κόσμου.

Παρόμοια αντίληψη διατυπώνει και ο Αριστοτέλης, ο οποίος στα *Μεταφυσικά* αναφέρει ότι τα κύρια χαρακτηριστικά του ωραίου είναι η τάξη, η συμμετρία και το ορισμένο μέγεθος (Aristotle, *Metaphysics* 1078a; Ross 1924, σ. 245–248). Η αισθητική αξία συνδέεται έτσι με μορφολογικές σχέσεις που μπορούν να περιγραφούν λογικά και μαθηματικά.

Στη νεότερη εποχή, η αισθητική διάσταση των μαθηματικών αναδεικνύεται ιδιαίτερα στο έργο του G. H. Hardy. Στο *A Mathematician's Apology* υποστηρίζει ότι τα μεγάλα μαθηματικά αποτελέσματα οφείλουν να είναι όμορφα και ότι η αξία τους δεν διαχωρίζεται από την αισθητική τους ποιότητα (Hardy 1940, σ. 85–90). Η θέση αυτή αποκαλύπτει ότι η μαθηματική δημιουργία δεν βασίζεται μόνο στην ορθότητα, αλλά και σε αισθητικά κριτήρια.

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η έννοια της κομψότητας. Μια μαθηματική απόδειξη θεωρείται κομψή όταν επιτυγχάνει ένα σύνθετο αποτέλεσμα με τρόπο απλό, διαυγή και αναγκαίο, χωρίς περιττές διαδικασίες (Rota 1997, σ. 30–35). Η κομψότητα δεν ταυτίζεται με την ευκολία, αλλά με τη βαθιά κατανόηση μιας δομής. Συχνά, οι πιο κομψές λύσεις είναι εκείνες που αποκαλύπτουν μια κρυμμένη συμμετρία ή μια απροσδόκητη ενότητα.

Η συμμετρία αποτελεί επίσης βασικό στοιχείο της μαθηματικής ομορφιάς. Σύγχρονες προσεγγίσεις της αισθητικής θεωρίας, όπως εκείνες της Starikova, υπογραμμίζουν ότι η μαθηματική δομή και η γεωμετρική τάξη λειτουργούν ως βασικοί μηχανισμοί αισθητικής πρόσληψης, ιδιαίτερα στην αρχιτεκτονική και στις οπτικές τέχνες. Ο Hermann Weyl, στο έργο του *Symmetry*, υποστηρίζει ότι η συμμετρία συνδέει τα μαθηματικά, τη φύση και την τέχνη, καθώς εκφράζει την ιδέα της αμεταβλητότητας κάτω από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς (Weyl 1952, σ. 1–10). Η σταθερότητα

αυτή δημιουργεί αίσθηση τάξης και εσωτερικής συνοχής, η οποία βιώνεται αισθητικά.

Ωστόσο, η μαθηματική ομορφιά δεν εξαντλείται στη συμμετρία. Ένα ακόμη βασικό χαρακτηριστικό της είναι η γενικότητα, δηλαδή η ικανότητα μιας θεωρίας να ενοποιεί διαφορετικά φαινόμενα κάτω από ένα κοινό πλαίσιο. Όπως επισημαίνει ο Atiyah, η ομορφιά στα μαθηματικά συνδέεται συχνά με τη δύναμη μιας θεωρίας να εξηγεί πολλά με λίγα μέσα (Atiyah 2009, σ. 15–18).

Η μαθηματική ομορφιά σχετίζεται επίσης με την έννοια της αναγκαιότητας. Ένα μαθηματικό αποτέλεσμα γίνεται αισθητικά ισχυρό όταν φαίνεται αναπόφευκτο, όταν δηλαδή προκύπτει ως φυσική συνέπεια της ίδιας της δομής του προβλήματος (Scruton 2009, σ. 78–82). Η αίσθηση αυτή ενισχύει τη σύνδεση ανάμεσα στην αλήθεια και στην ομορφιά.

Ο Henri Poincaré υπογράμμισε ότι η μαθηματική δημιουργία καθοδηγείται όχι μόνο από τη λογική, αλλά και από αισθητικά κριτήρια, όπως η απλότητα, η αρμονία και η κομψότητα (Poincaré 1952, σ. 59–65). Σύμφωνα με τον Poincaré, οι μαθηματικοί επιλέγουν εκείνες τις ιδέες που αποκαλύπτουν βαθύτερη τάξη και ενότητα.

Η σχέση αυτή μεταξύ μαθηματικής δομής και αισθητικής εμπειρίας αποκτά ιδιαίτερη σημασία στην αρχιτεκτονική. Η αρχιτεκτονική μετασχηματίζει αφηρημένες μαθηματικές αρχές σε υλικές μορφές, αξιοποιώντας τη γεωμετρία, τη συμμετρία και την αναλογία ως βασικά εργαλεία σύνθεσης (Wittkower 1971, σ. 60–70; Kostof 1995, σ. 120–130). Η μαθηματική ομορφιά αποκτά έτσι χωρική και αισθητηριακή διάσταση.

Συνοψίζοντας, η ομορφιά στα μαθηματικά αποτελεί πολυδιάστατη έννοια που περιλαμβάνει την απλότητα, τη συμμετρία, τη γενικότητα και την αναγκαιότητα. Οι ιδιότητες αυτές συνδυάζονται για να δημιουργήσουν μορφές που βιώνονται ως αισθητικά αρμονικές. Η μαθηματική ομορφιά δεν βρίσκεται έξω από τη γνώση, αλλά ενσωματώνεται στον ίδιο τον τρόπο οργάνωσης και κατανόησης της πραγματικότητας.

1.2 Συμμετρία και γεωμετρία στα μαθηματικά και στην αισθητική

Η συμμετρία αποτελεί μία από τις θεμελιώδεις έννοιες τόσο στα μαθηματικά όσο και στην αισθητική θεωρία. Συνδέεται με την ισορροπία, την τάξη και την αρμονία, στοιχεία που ήδη από την αρχαιότητα θεωρούνται βασικά χαρακτηριστικά της ομορφιάς (Tatarkiewicz 1980, σ. 132–135). Στα μαθηματικά, η συμμετρία περιγράφει την ιδιότητα ενός αντικειμένου να παραμένει αμετάβλητο υπό συγκεκριμένους μετασχηματισμούς, όπως η αντανάκλαση, η περιστροφή και η μεταφορά (Weyl 1952, σ. 3–8).

Η σημασία της συμμετρίας υπερβαίνει το στενά μαθηματικό πεδίο. Ο Hermann Weyl υποστήριξε ότι αποτελεί θεμελιώδη αρχή μέσω της οποίας ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται την τάξη της φύσης και της τέχνης (Weyl 1952, σ. 5–10). Η συμμετρία λειτουργεί έτσι όχι μόνο ως γεωμετρική ιδιότητα αλλά και ως αισθητική εμπειρία.

Η έννοια της συμμετρίας περιλαμβάνει διαφορετικές μορφές. Η αξονική συμμετρία εμφανίζεται όταν ένα σχήμα διαιρείται από έναν άξονα σε δύο ίσα και κατοπτρικά μέρη. Η μορφή αυτή είναι η πιο άμεσα αντιληπτή και συνδέεται έντονα με την αίσθηση ισορροπίας και οπτικής αρμονίας (Weyl 1952, σ. 12–18).

Η περιστροφική συμμετρία εμφανίζεται όταν ένα σχήμα παραμένει αμετάβλητο μετά από περιστροφή γύρω από συγκεκριμένο σημείο. Η μορφή αυτή συναντάται συχνά σε γεωμετρικά μοτίβα και διακοσμητικές αρχιτεκτονικές συνθέσεις (Stewart 2007, σ. 60–68).

Εξίσου σημαντική είναι η μεταφορική συμμετρία, κατά την οποία ένα σχήμα επαναλαμβάνεται σε ίσα διαστήματα κατά μήκος μιας κατεύθυνσης. Η μορφή αυτή εμφανίζεται σε διακοσμητικά μοτίβα και επαναλαμβανόμενες αρχιτεκτονικές δομές (Weyl 1952, σ. 20–25).

Στην παρούσα εργασία, ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην αξονική συμμετρία, καθώς συνδέεται άμεσα με την ανθρώπινη αντίληψη της ομορφιάς και της ισορροπίας (Ramachandran & Hirstein 1999, σ. 15–18). Η μορφή αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και για τη διδακτική προσέγγιση της αισθητικής εμπειρίας, επειδή γίνεται

εύκολα αντιληπτή μέσα από οπτικά και χωρικά παραδείγματα. Επιπλέον, η μορφή αυτή είναι ευκολότερα αναγνωρίσιμη και μπορεί να προσεγγιστεί αποτελεσματικά στο πλαίσιο διδακτικών δραστηριοτήτων.

Η αισθητική σημασία της συμμετρίας έχει απασχολήσει πολλούς θεωρητικούς της τέχνης. Παράλληλα, ο νευροεπιστήμονας Semir Zeki υποστηρίζει ότι η αισθητική εμπειρία συνδέεται με τον τρόπο με τον οποίο ο εγκέφαλος οργανώνει και αναγνωρίζει πρότυπα τάξης και αρμονίας, γεγονός που εξηγεί την ιδιαίτερη ελκυστικότητα των συμμετρικών μορφών (Zeki 1999, σ. 70–78). Ο Tatarkiewicz επισημαίνει ότι η συμμετρία και η αναλογία εμφανίζονται διαρκώς στην ιστορία της αισθητικής θεωρίας ως βασικά στοιχεία της ομορφιάς (Tatarkiewicz 1980, σ. 136–140). Παράλληλα, η γνωστική ψυχολογία δείχνει ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος αναγνωρίζει εύκολα τα συμμετρικά μοτίβα και τα συνδέει με την τάξη και τη σταθερότητα (Ramachandran & Hirstein 1999, σ. 18–20).

Η συμμετρία εμφανίζεται εκτεταμένα και στη φύση. Τα κρύσταλλα, τα φυτά και πολλά ζωικά είδη παρουσιάζουν μορφές συμμετρίας που μπορούν να περιγραφούν μαθηματικά (Stewart 2007, σ. 90–95). Η παρουσία της στη φυσική οργάνωση ενισχύει την αντίληψη ότι αποτελεί βασική αρχή δομής.

Στην αρχιτεκτονική, η συμμετρία λειτουργεί ως κεντρικό εργαλείο σχεδιασμού. Πολλά από τα σημαντικότερα αρχιτεκτονικά έργα χαρακτηρίζονται από αυστηρή συμμετρική οργάνωση τόσο στην κάτοψη όσο και στις όψεις των κτιρίων (Wittkower 1971, σ. 15–20).

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η Villa Rotonda του Palladio, κοντά στη Βιτσέντσα της Ιταλίας, η οποία παρουσιάζει αυστηρή αξονική συμμετρία και γεωμετρική οργάνωση βασισμένη σε σαφείς αναλογίες (Wittkower 1971, σ. 48–52). Αντίστοιχα, στον Καθεδρικό Ναό της Σαρτρ η πρόσοψη οργανώνεται γύρω από ισχυρό κεντρικό άξονα, ενισχύοντας την αίσθηση ιεραρχίας και πνευματικής τάξης (Kostof 1995, σ. 210–215).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η Αλάμπρα, όπου η συμμετρία εκφράζεται μέσω επαναλαμβανόμενων γεωμετρικών μοτίβων και συνδυασμών περιστροφικής

και μεταφορικής συμμετρίας (Stewart 2007, σ. 90–95). Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει τον πολιτισμικό και αισθητικό πλούτο της συμμετρίας.

Κατά την Αναγέννηση, οι αρχιτέκτονες επηρεάζονται βαθιά από τις αρχές της αρχαίας ελληνικής και ρωμαϊκής αρχιτεκτονικής, εφαρμόζοντας συστηματικά μαθηματικές αναλογίες και γεωμετρικές δομές (Wittkower 1971, σ. 40–50). Η συμμετρία θεωρείται πλέον βασική προϋπόθεση της αρχιτεκτονικής αρμονίας.

Η σύνδεση συμμετρίας και αρχιτεκτονικής δεν περιορίζεται μόνο στη μορφή των κτιρίων, αλλά επεκτείνεται και στην οργάνωση του χώρου. Οι συμμετρικές κατόψεις δημιουργούν σαφείς και κατανοητές χωρικές δομές, διευκολύνοντας την ανθρώπινη αντίληψη και κίνηση (Kostof 1995, σ. 30–35).

Συνοψίζοντας, η συμμετρία αποτελεί βασική έννοια που συνδέει τα μαθηματικά, την αισθητική και την αρχιτεκτονική. Η παρουσία της σε μαθηματικές δομές, φυσικά φαινόμενα και αρχιτεκτονικά έργα αποκαλύπτει τον καθοριστικό ρόλο της στην ανθρώπινη αντίληψη της ομορφιάς και της αρμονίας.

2. Αρχιτεκτονική και συμμετρία

2.1 Η σχέση μαθηματικών και ομορφιάς στη φιλοσοφία και την αρχιτεκτονική

Η σχέση μεταξύ μαθηματικών και αρχιτεκτονικής αποκτά ήδη από την αρχαιότητα ιδιαίτερα συστηματικό χαρακτήρα. Η αρχιτεκτονική μορφή συνδέεται άμεσα με τις έννοιες της συμμετρίας, της αναλογίας και του μέτρου, ενώ η αισθητική αξία του κτιρίου θεωρείται αποτέλεσμα οργανωμένης γεωμετρικής και αριθμητικής σκέψης (Tatarkiewicz 1970, σ. 45–52).

Η αρχαία ελληνική φιλοσοφία συνέδεσε στενά την ομορφιά με την τάξη και την αρμονία. Για τον Πλάτωνα, η αισθητή ομορφιά αποτελεί αντανάκλαση μιας ανώτερης μορφής του Ωραίου. Στον *Φίληβο* υποστηρίζει ότι το ωραίο προκύπτει από τη σωστή συμμετρία και την αναλογία των μερών (Plato, *Philebus* 64e–65a), ενώ στο *Συμπόσιο* περιγράφει την άνοδο από την αισθητή προς τη νοητή ομορφιά (Plato, *Symposium* 210e–211b).

Ο Αριστοτέλης, παρότι κινείται σε διαφορετικό φιλοσοφικό πλαίσιο, συνδέει επίσης την ομορφιά με την τάξη, τη συμμετρία και την ορισμένη διάταξη των μερών (Aristotle, *Metaphysics* 1078a). Η αισθητική εμπειρία βασίζεται επομένως σε αντικειμενικές μορφολογικές σχέσεις.

Ιδιαίτερα σημαντική υπήρξε η συμβολή των Πυθαγορείων, οι οποίοι υποστήριζαν ότι το σύμπαν οργανώνεται μέσω αριθμητικών σχέσεων και ότι οι αριθμοί αποτελούν θεμελιώδη αρχή της κοσμικής τάξης (Kirk, Raven & Schofield 1983, σ. 228–235). Η ανακάλυψη των μουσικών αρμονιών ενίσχυσε την ιδέα ότι η φύση διέπεται από μαθηματικές αναλογίες (Kline 1972, σ. 45–50).

Η σύνδεση μαθηματικών και αισθητικής επηρέασε καθοριστικά την αρχιτεκτονική θεωρία. Ο Βιτρούβιος υποστήριξε ότι η ομορφιά ενός κτιρίου εξαρτάται από τη σωστή αναλογία των μερών του και από τη σχέση τους με το σύνολο (*De Architectura*, III.1). Οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος θεωρούνται πρότυπο συμμετρίας και αρμονίας.

Οι αρχές αυτές επηρέασαν βαθιά την αρχιτεκτονική της Αναγέννησης. Οι αρχιτέκτονες της περιόδου επιδίωξαν να αναβιώσουν τη γεωμετρική τάξη της αρχαιότητας, θεωρώντας τις αριθμητικές αναλογίες φορείς αισθητικής αρμονίας (Wittkower 1971, σ. 40–50).

Η εφαρμογή μαθηματικών αρχών είναι εμφανής τόσο στους αρχαίους ελληνικούς ναούς όσο και στους γοθτικούς καθεδρικούς ναούς της μεσαιωνικής Ευρώπης, όπου η γεωμετρία λειτουργεί ως βασική αρχή οργάνωσης του χώρου (Kostof 1995, σ. 200–215).

Η σχέση μαθηματικών και αισθητικής απασχόλησε και σύγχρονους στοχαστές. Ο G. H. Hardy υποστήριξε ότι τα μαθηματικά διαθέτουν αισθητική αξία αντίστοιχη με εκείνη της τέχνης και ότι τα σημαντικά θεωρήματα χαρακτηρίζονται από κομψότητα, απλότητα και συμμετρία (Hardy 1940, σ. 85–90).

Ανάλογη έμφαση στη συμμετρία δίνει και ο Hermann Weyl, ο οποίος θεωρεί ότι αποτελεί θεμελιώδη αρχή που συνδέει τα μαθηματικά με τη φύση και την τέχνη (Weyl 1952, σ. 5–10).

Μία από τις σημαντικότερες μαθηματικές αναλογίες που συνδέθηκαν με την αισθητική αρμονία είναι η χρυσή τομή:

$$\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1,618$$

Η αναλογία αυτή, γνωστή ήδη από τα Στοιχεία του Ευκλείδη ως «άκρος και μέσος λόγος», θεωρήθηκε από πολλούς θεωρητικούς της τέχνης ως ιδανική μορφή ισορροπίας και αρμονίας (Euclid, *Elements VI*; Kline 1972, σ. 120–125).

Παρότι η ακριβής χρήση της σε συγκεκριμένα μνημεία παραμένει αντικείμενο επιστημονικής συζήτησης, η χρυσή τομή αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της σύνδεσης μαθηματικής δομής και αισθητικής εμπειρίας.

Συνολικά, η σχέση μαθηματικών και ομορφιάς αποτελεί διαχρονικό θέμα της φιλοσοφικής και αρχιτεκτονικής σκέψης. Από την πυθαγόρεια θεωρία μέχρι τις σύγχρονες θεωρίες της συμμετρίας, η μαθηματική τάξη εμφανίζεται ως βασική αρχή οργάνωσης τόσο της φύσης όσο και της τέχνης. Η αρχιτεκτονική λειτουργεί ως το πεδίο όπου οι αφηρημένες μαθηματικές σχέσεις μετατρέπονται σε υλικές μορφές και αισθητικές εμπειρίες.

2.2 Συμμετρία και γεωμετρία στη γοτθική αρχιτεκτονική

Εάν στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική η μαθηματική τάξη εκφράζεται κυρίως μέσω της ισορροπίας, της αναλογικής καθαρότητας και της μορφολογικής σταθερότητας, στη γοτθική αρχιτεκτονική η ίδια θεμελιώδης σχέση ανάμεσα στη γεωμετρία και στην αισθητική αποκτά διαφορετική, περισσότερο δυναμική και πολυεπίπεδη μορφή. Η γοτθική περίοδος δεν εγκαταλείπει τα μαθηματικά ως αρχή σύνθεσης· αντίθετα, τα επαναπροσδιορίζει μέσα από την κατακόρυφη ανάπτυξη, τη δομική πολυπλοκότητα και τη ρυθμική οργάνωση του χώρου. Έτσι, η συμμετρία και η γεωμετρία δεν λειτουργούν πλέον αποκλειστικά ως φορείς ηρεμίας και μέτρου, αλλά και ως μέσα δημιουργίας πνευματικής έντασης, χωρικής συνέχειας και αισθητικής ανύψωσης. Η γοτθική αρχιτεκτονική δεν επιδιώκει απλώς την ισορροπία· επιδιώκει τη μετατροπή της γεωμετρικής τάξης σε βιωματική εμπειρία, όπου η μαθηματική δομή γίνεται αισθητή μέσα από το φως, το ύψος και τον ρυθμό του χώρου (Kostof 1995, σ. 210–215; Panofsky 1951, σ. 25–30).

Η γοτθική αρχιτεκτονική, η οποία αναπτύχθηκε στη δυτική Ευρώπη από τον 12ο αιώνα και κυριάρχησε για αιώνες στους μεγάλους καθεδρικούς ναούς, στα αββαεία και σε άλλα εκκλησιαστικά συγκροτήματα, αποτελεί μία από τις πιο σύνθετες και εντυπωσιακές περιόδους στην ιστορία της αρχιτεκτονικής. Παρά την εντύπωση ελευθερίας, έντονης διακοσμητικότητας και μορφολογικού πλούτου που προκαλούν οι γοτθικές μορφές, η αρχιτεκτονική αυτή δεν είναι προϊόν αυθαιρεσίας. Αντίθετα, βασίζεται σε αυστηρές αρχές γεωμετρικής οργάνωσης, σε μαθηματικά υπολογισμένες αναλογίες και σε μια συστηματική λογική κατανομής των φορτίων, γεγονός που αποδεικνύει ότι η μορφή προκύπτει από δομική αναγκαιότητα και όχι από επιφανειακή διακοσμητική πρόθεση (Kostof 1995, σ. 200–205; Bony 1983, σ. 15–22). Τα βασικά τεχνικά και μορφολογικά γνωρίσματά της —το οξυκόρυφο τόξο, ο νευρωτός θόλος και οι ιπτάμενες αντηρίδες— συνδέονται άμεσα με τη δυνατότητα δημιουργίας ιδιαίτερα υψηλών κτιρίων με μεγάλα ανοίγματα και εκτεταμένες επιφάνειες υαλογραφημάτων, μετασχηματίζοντας ριζικά τόσο την εμπειρία του εσωτερικού χώρου όσο και τη σχέση ανάμεσα στη δομή και στο φως.

Σε αντίθεση με την αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική, όπου η έμφαση δίνεται συχνότερα στην οριζόντια ισορροπία, στο σαφές περίγραμμα και στη μετρημένη

αναλογία των μερών, η γοτθική αρχιτεκτονική οργανώνεται γύρω από μια διαφορετική αισθητική επιδίωξη: την κατακόρυφη έξαρση, τη διάχυση του φωτός και την αίσθηση ότι ο αρχιτεκτονικός χώρος υπερβαίνει το ανθρώπινο μέτρο. Αυτή η κατακόρυφη τάση δεν αποτελεί απλώς μορφολογική επιλογή, αλλά συνδέεται με μια βαθύτερη μεσαιωνική θεολογική και κοσμολογική αντίληψη, σύμφωνα με την οποία ο ναός όφειλε να λειτουργεί ως εικόνα μιας υπερβατικής τάξης. Η γεωμετρία, επομένως, δεν εξυπηρετεί μόνο τη στατική επίλυση, αλλά και τη συμβολική οργάνωση του χώρου: ο χώρος μετατρέπεται σε φορέα πνευματικής εμπειρίας ακριβώς επειδή είναι αυστηρά μετρημένος και οργανωμένος σύμφωνα με αρχές αναλογίας και συμμετρίας (Panofsky 1951, σ. 30–35).

Η γοτθική αρχιτεκτονική διατηρεί, συνεπώς, μια βαθιά σχέση με τα μαθηματικά, αλλά η σχέση αυτή λαμβάνει διαφορετική μορφή από εκείνη της αρχαιότητας. Εδώ η μαθηματική σκέψη δεν περιορίζεται στην αναλογία μιας πρόσοψης ή στην αρμονία ενός περιγράμματος: εκδηλώνεται ως γενεσιουργός αρχή του ίδιου του σχεδιασμού. Οι αρχιτέκτονες της εποχής χρησιμοποιούσαν βασικά γεωμετρικά σχήματα, κυρίως τον κύκλο, το τετράγωνο και τα παράγωγά τους, προκειμένου να οργανώσουν κατόψεις, όψεις, υψομετρικές σχέσεις και συστήματα θόλων (Wittkower 1971, σ. 25–30). Η χρήση κανόνα και διαβήτη δεν αποτελούσε απλώς πρακτική τεχνική, αλλά τρόπο σύλληψης της μορφής: το κτίριο «γεννιόταν» ως γεωμετρική κατασκευή. Έτσι, η συνοχή των γοτθικών ναών προκύπτει από την ικανότητα των γεωμετρικών σχημάτων να οργανώνουν την πολυπλοκότητα σε ένα ενιαίο και αντιληπτό σύνολο, καθιστώντας τη γεωμετρία θεμελιώδη αρχή αρχιτεκτονικής σύνθεσης.

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά στοιχεία αυτής της αρχιτεκτονικής είναι το οξυκόρυφο τόξο. Σε αντίθεση με το ημικυκλικό τόξο της ρωμανικής παράδοσης, το γοτθικό τόξο σχηματίζεται από δύο κυκλικά τμήματα που συναντώνται σε αιχμηρή κορυφή. Η διαφορά αυτή έχει άμεσες στατικές συνέπειες: το φορτίο κατευθύνεται αποτελεσματικότερα προς τα κάτω και προς τα πλάγια στηρίγματα, γεγονός που επιτρέπει μεγαλύτερα ύψη και αυξημένη δομική ευελιξία (Kostof 1995, σ. 215–220; Bony 1983, σ. 30–35). Το οξυκόρυφο τόξο αποτελεί επομένως ταυτόχρονα τεχνική λύση και αισθητική χειρονομία. Η μορφή του συμπυκνώνει εκείνο ακριβώς που καθιστά τη γοτθική αρχιτεκτονική τόσο ιδιαίτερη: η ομορφιά δεν προστίθεται εκ των

υστέρων στη δομή, αλλά αναδύεται από την ίδια τη δομική λογική ως άμεση έκφραση γεωμετρικών και στατικών αρχών.

Στην ίδια λογική εντάσσεται και ο νευρωτός θόλος, όπου οι νευρώσεις λειτουργούν ως σαφές φέρον σύστημα πάνω στο οποίο αναπτύσσεται η υπόλοιπη θολοδομία. Με αυτή τη μέθοδο, το βάρος δεν διαχέεται ομοιόμορφα σε βαρείς συνεχείς τοίχους, αλλά συγκεντρώνεται σε συγκεκριμένα σημεία στήριξης. Αυτό επιτρέπει αφενός την ελάφρυνση των τοίχων και αφετέρου την αντικατάστασή τους από μεγάλα ανοίγματα και υαλογραφήματα (Bony 1983, σ. 40–46). Ο γοθικός ναός μετατρέπεται έτσι σε χώρο φωτός, όχι επειδή απλώς διακοσμείται με παράθυρα, αλλά επειδή η ίδια η γεωμετρία της δομής επιτρέπει την απούλοποίηση του τοίχου. Η αισθητική εμπειρία που παράγεται είναι βαθιά μαθηματική: η αίσθηση ανύψωσης, επανάληψης και ρυθμού οφείλεται στην κανονικότητα με την οποία οι δομικές γραμμές οργανώνουν τον χώρο.

Εξίσου αποφασιστικής σημασίας είναι οι ιπτάμενες αντηρίδες (flying buttresses), οι οποίες αποτελούν ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο η γεωμετρία μετατρέπεται σε αισθητική μορφή. Οι αντηρίδες μεταφέρουν την πλευρική ώθηση των θόλων προς εξωτερικά στηρίγματα, επιτρέποντας στους εσωτερικούς τοίχους να ανοίξουν και να ελαφρύνουν. Χωρίς αυτές, τα μεγάλα ύψη και οι εκτεταμένες γυάλινες επιφάνειες των ώριμων γοθικών ναών δεν θα ήταν εφικτά (Robert Mark 1984, σ. 52–60). Ωστόσο, οι αντηρίδες δεν λειτουργούν μόνο ως «αόρατο» μηχανικό σύστημα. Στη γοθική αρχιτεκτονική καθίστανται ορατό μέρος της σύνθεσης, συμμετέχουν στον ρυθμό του εξωτερικού όγκου και προσδίδουν στο κτίριο την αίσθηση ότι αποτελεί πλέγμα δυνάμεων και ισορροπιών. Η αισθητική τους αξία προκύπτει ακριβώς από το γεγονός ότι αποκαλύπτουν, αντί να αποκρύπτουν, τη μαθηματική λογική της κατασκευής.

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτής της σχέσης συμμετρίας, γεωμετρίας και αισθητικής είναι η Notre-Dame de Paris. Η κατασκευή της ξεκίνησε στα μέσα του 12ου αιώνα, ενώ η δυτική πρόσοψη ολοκληρώθηκε κυρίως μεταξύ 1200 και 1250. Η πρόσοψη περιγράφεται συχνά ως «αρμονική πρόσοψη», δηλαδή ως μια τριμερής και αυστηρά συμμετρική διάταξη, όπου οι δύο πύργοι πλαισιώνουν τον κεντρικό άξονα και οργανώνουν ολόκληρη τη σύνθεση (Kostof 1995, σ. 210–215). Η

πρόσοψη έχει πλάτος περίπου 43,5 μέτρα και ύψος περίπου 45 μέτρα, ενώ οι πύργοι φτάνουν περίπου τα 69 μέτρα. Η αυστηρή συμμετρία της όψης δεν εξουδετερώνει την πολυπλοκότητα της διακόσμησης· αντίθετα, την καθιστά αναγνώσιμη και οργανωμένη. Πύλες, παράθυρα, γλυπτοί διάκοσμοι και η Γαλαρία των Βασιλέων εντάσσονται σε ένα σαφές γεωμετρικό σύστημα που παράγει αίσθηση ισορροπίας και συνοχής.

Η περίπτωση της Notre-Dame δείχνει ότι η συμμετρία στη γοτθική αρχιτεκτονική δεν αποτελεί απλή επανάληψη της κλασικής συμμετρίας της αρχαιότητας. Ενώ στην κλασική αρχιτεκτονική η συμμετρία συνδέεται κυρίως με τη σταθερότητα, την καθαρότητα και την ηρεμία της μορφής, στη γοτθική αρχιτεκτονική λειτουργεί ως μηχανισμός οργάνωσης μιας ιδιαίτερα σύνθετης και δυναμικής σύνθεσης. Η συμμετρία δεν καταργεί την πολυπλοκότητα, αλλά την καθιστά αντιληπτή, επιτρέποντας στον θεατή να αναγνωρίσει τάξη μέσα σε ένα πλήθος μορφολογικών στοιχείων. Με τον τρόπο αυτό λειτουργεί και ως γνωστικό εργαλείο που διευκολύνει την κατανόηση της αρχιτεκτονικής δομής και ενισχύει την αισθητική εμπειρία (Kostof 1995, σ. 215–218).

Εξίσου σημαντικό παράδειγμα αποτελεί ο Καθεδρικός Ναός της Σαρτρ, ένας από τους καλύτερα διατηρημένους γοτθικούς ναούς της Ευρώπης και από τα πλέον χαρακτηριστικά δείγματα ώριμης γοτθικής αρχιτεκτονικής. Ο ναός της Σαρτρ διακρίνεται για την ενότητα της σύνθεσής του, όπου η δομή, το φως και το υαλογράφημα λειτουργούν ως αλληλένδετα στοιχεία ενός ενιαίου αισθητικού και συμβολικού συστήματος. Τα 176 βιτρό παράθυρα του ναού δεν αποτελούν απλώς διακοσμητικά στοιχεία, αλλά ενσωματώνονται οργανικά στη γεωμετρική και αρχιτεκτονική λογική του κτιρίου, συμβάλλοντας στη διαμόρφωση μιας συνολικής αισθητικής εμπειρίας (Kostof 1995, σ. 220–225).

Τα βιτρό παράθυρα των γοτθικών ναών αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα πεδία συνάντησης γεωμετρίας και αισθητικής. Οι ρόδακες, τα πολυγωνικά σχήματα και τα επαναλαμβανόμενα γεωμετρικά μοτίβα οργανώνονται με αυστηρή μαθηματική πειθαρχία, μετατρέποντας το φως σε βασικό δομικό και αισθητικό στοιχείο της αρχιτεκτονικής εμπειρίας. Το φως, διηθούμενο μέσα από τα έγχρωμα υαλογράφημα, δεν φωτίζει απλώς τον χώρο, αλλά τον ανασυνθέτει, δημιουργώντας

μια ατμόσφαιρα που συνδυάζει αισθητική ένταση και πνευματικότητα (Panofsky 1951, σ. 35–40). Η γεωμετρική διάταξη των βιτρό ενισχύει την αίσθηση τάξης, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει την ανάπτυξη σύνθετων εικαστικών αφηγήσεων που οργανώνονται μέσα σε αυστηρά συμμετρικά πλαίσια.

Η γεωμετρική οργάνωση δεν περιορίζεται στα επιμέρους στοιχεία, αλλά διατρέχει ολόκληρο το εσωτερικό του ναού. Οι επαναλαμβανόμενες καμάρες, οι σειρές των κίωνων και οι νευρώσεις των θόλων συγκροτούν ένα σύστημα ρυθμού και επανάληψης που βασίζεται σε αρχές κανονικότητας και συμμετρίας. Η επανάληψη αυτή δεν είναι απλώς διακοσμητική, αλλά αποτελεί θεμελιώδη μορφολογική αρχή που επιτρέπει την αντίληψη ενότητας μέσα από την πολυπλοκότητα. Ο θεατής, κινούμενος στον χώρο, αντιλαμβάνεται ένα συνεχές σύστημα μορφών που επαναλαμβάνονται και μετασχηματίζονται, δημιουργώντας μια εμπειρία ταυτόχρονα οπτική, χωρική και ρυθμική. Η αισθητική συνοχή προκύπτει επομένως όχι από την απλότητα, αλλά από την αυστηρή οργάνωση ενός σύνθετου συστήματος γεωμετρικών σχέσεων.

Σε αυτό το πλαίσιο, η γεωμετρία συνδέεται άμεσα με τη μεσαιωνική αντίληψη της κοσμικής τάξης. Κατά τον Μεσαίωνα, η γεωμετρία αποτελούσε βασικό μέρος του quadrivium, μαζί με την αριθμητική, τη μουσική και την αστρονομία, και θεωρούνταν επιστήμη που αποκαλύπτει τη θεϊκή αρμονία του σύμπαντος (Panofsky 1951, σ. 40–45). Ο γοτθικός ναός μπορεί, επομένως, να ιδωθεί ως μορφή «ενσώματης γεωμετρίας», όπου η μαθηματική τάξη, η αισθητική αρμονία και η θεολογική σημασία συγκλίνουν σε ένα ενιαίο αρχιτεκτονικό σύνολο. Η αρχιτεκτονική μορφή δεν λειτουργεί μόνο ως υλική κατασκευή, αλλά και ως συμβολική απεικόνιση μιας ανώτερης κοσμικής τάξης.

Η γεωμετρική σκέψη στη γοτθική αρχιτεκτονική δεν λειτουργεί μόνο σε επίπεδο μορφής, αλλά και σε επίπεδο σύλληψης και σχεδιασμού. Οι αρχιτέκτονες χρησιμοποιούσαν γεωμετρικές κατασκευές για να καθορίσουν αναλογίες, ύψη, πλάτη και σχέσεις μεταξύ των επιμέρους στοιχείων. Η διαδικασία αυτή, που βασιζόταν σε απλά γεωμετρικά εργαλεία όπως ο κανόνας και ο διαβήτης, αποδεικνύει ότι η αρχιτεκτονική δεν ήταν απλώς τεχνική δραστηριότητα, αλλά και μορφή μαθηματικής σκέψης. Η γεωμετρία λειτουργούσε ως κοινή γλώσσα που συνέδεε τη θεωρία με την

πράξη, επιτρέποντας τη μετατροπή αφηρημένων αναλογιών σε υλικές μορφές. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, η μαθηματική λογική αποκτούσε υλική υπόσταση και μετατρέποταν σε αισθητικά βιώσιμο χώρο.

Για μια διπλωματική εργασία που εξετάζει τη σχέση μαθηματικών και αισθητικής, η γοτθική αρχιτεκτονική αποτελεί εξαιρετικά γόνιμο πεδίο ανάλυσης. Δεν πρόκειται απλώς για ένα ιστορικό αρχιτεκτονικό στυλ, αλλά για ένα ολοκληρωμένο σύστημα σκέψης, όπου τα μαθηματικά λειτουργούν ταυτόχρονα ως εργαλείο κατασκευής, ως αρχή σύνθεσης και ως βάση αισθητικής εμπειρίας. Η μορφή, η δομή και το νόημα συνδέονται άρρηκτα μέσω της γεωμετρίας, καθιστώντας τον γοτθικό ναό ένα από τα πιο ολοκληρωμένα παραδείγματα της ενότητας μαθηματικής και αισθητικής σκέψης στην ιστορία της τέχνης και της αρχιτεκτονικής.

Η γοτθική αρχιτεκτονική αποδεικνύει ότι η μαθηματική σκέψη μπορεί να παραγάγει αισθητική αρμονία ακόμη και μέσα από μορφές σύνθετες, δυναμικές και κατακόρυφα ανεπτυγμένες. Σε αντίθεση με την κλασική αρχιτεκτονική, όπου η ομορφιά συνδέεται κυρίως με την απλότητα και τη μορφολογική καθαρότητα, εδώ η αισθητική εμπειρία προκύπτει από την οργανωμένη πολυπλοκότητα, τη ρυθμική επανάληψη και τη διαρκή αλληλεπίδραση φωτός, δομής και γεωμετρίας. Η γοτθική μορφή δεν αναιρεί τη μαθηματική τάξη· αντίθετα, αποδεικνύει ότι η τάξη μπορεί να εκφραστεί και μέσα από τη δυναμική κίνηση, τη χωρική ένταση και τη δομική πολυπλοκότητα.

Ωστόσο, από τον 15ο αιώνα και εξής, με την εμφάνιση της Αναγέννησης, παρατηρείται σταδιακά μια στροφή προς την επαναφορά της σαφούς αναλογίας, της γεωμετρικής καθαρότητας και της συμμετρικής ισορροπίας σύμφωνα με τα πρότυπα της αρχαιότητας. Η μεταβολή αυτή σηματοδοτεί έναν νέο τρόπο κατανόησης της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και αρχιτεκτονικής μορφής, ο οποίος θα οδηγήσει σε διαφορετικές μορφές έκφρασης της αισθητικής αρμονίας και θα αποτελέσει το θεωρητικό και ιστορικό υπόβαθρο για τις εξελίξεις που θα εξεταστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

2.3 Η μαθηματική αρμονία στην αρχιτεκτονική της Αναγέννησης

Η μετάβαση από τη γοτθική αρχιτεκτονική στην αρχιτεκτονική της Αναγέννησης δεν συνιστά απλώς μια αλλαγή μορφολογικού ύφους, αλλά μια βαθύτερη μεταβολή στον τρόπο με τον οποίο νοείται η σχέση ανάμεσα στον χώρο, την αισθητική, τη φύση και τη γνώση. Ενώ η γοτθική αρχιτεκτονική οργανώνει τον χώρο μέσα από την κατακόρυφη ένταση, τη διάχυση του φωτός και τη σύνθετη γεωμετρική πλέξη των δομών, η Αναγέννηση επαναφέρει στο προσκήνιο την αρχή της μετρημένης αναλογίας, της σαφούς συμμετρίας και της μορφολογικής καθαρότητας. Η μεταβολή αυτή συνδέεται άμεσα με το πνευματικό κλίμα του ανθρωπισμού και με την αναβίωση του ενδιαφέροντος για την αρχαιότητα, ιδίως για τη ρωμαϊκή αρχιτεκτονική θεωρία και, μέσω αυτής, για την ελληνική αντίληψη περί μέτρου και αρμονίας (Wittkower 1971, σ. 1–10; Kostof 1995, σ. 300–305).

Η περίοδος της Αναγέννησης, από τον 14ο έως τον 16ο αιώνα, σηματοδότησε μια ριζική ανανέωση της καλλιτεχνικής, φιλοσοφικής και επιστημονικής σκέψης στην Ευρώπη. Στο πλαίσιο αυτό, η αρχιτεκτονική δεν αντιμετωπίστηκε πλέον μόνο ως τέχνη οικοδόμησης, αλλά ως γνωστικό πεδίο που στηρίζεται σε ορθολογικές αρχές, μαθηματική τάξη και θεωρητική θεμελίωση. Οι αρχιτέκτονες της Αναγέννησης επιδίωξαν να ανασυνδέσουν την οικοδομική πράξη με τη γεωμετρία, την αριθμητική και τη φιλοσοφία, θεωρώντας ότι η ομορφιά ενός κτιρίου δεν προκύπτει από την υπερβολή ή τη διακοσμητική αφθονία, αλλά από τη σωστή σχέση των μερών προς το όλο (Roth 2007, σ. 320–330; Trachtenberg & Hyman 2002, σ. 410–420). Η αισθητική ισορροπία, επομένως, δεν αποτελεί για την Αναγέννηση ένα εξωτερικό ή επιφανειακό αποτέλεσμα, αλλά το ορατό ίχνος μιας εσωτερικής μαθηματικής λογικής που διέπει τη σύνθεση και καθορίζει τη μορφή.

Σε αντίθεση με τη γοτθική αρχιτεκτονική, όπου η γεωμετρία υπηρετεί σε μεγάλο βαθμό τη δυναμική της κατακόρυφης ανύψωσης και της δομικής ελάφρυνσης, στην Αναγέννηση η γεωμετρία αποκτά περισσότερο συνθετικό και θεωρητικό χαρακτήρα. Το τετράγωνο, ο κύκλος, το ορθογώνιο και οι απλοί αριθμητικοί λόγοι δεν λειτουργούν μόνο ως πρακτικά σχήματα σχεδιασμού, αλλά ως φορείς μιας νέας αντίληψης για την ομορφιά και τη μορφή. Η αναγεννησιακή αρχιτεκτονική επιδιώκει να δώσει στο κτίριο τη μορφή ενός ολοκληρωμένου, ευανάγνωστου και

αυτοσυνεπούς οργανισμού, όπου κάθε μέρος συνδέεται με το σύνολο μέσω σαφών αναλογικών σχέσεων (Summerson 1963, σ. 25–35). Η έμφαση μετατίθεται έτσι από τη δραματικότητα και την ένταση της γοτθικής κατασκευής στην καθαρότητα της αναλογίας και στην πειθαρχημένη μορφή, η οποία καθίσταται άμεσα αντιληπτή από τον θεατή.

Κεντρική μορφή αυτής της νέας θεωρητικής συνείδησης υπήρξε ο Leon Battista Alberti, του οποίου το έργο *De re aedificatoria* αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη κείμενα της αναγεννησιακής αρχιτεκτονικής θεωρίας. Ο Alberti όρισε την ομορφιά ως μια κατάσταση αρμονικής συναρμογής των μερών, τέτοια ώστε τίποτε να μη μπορεί να προστεθεί, να αφαιρεθεί ή να μεταβληθεί χωρίς να διαταραχθεί η συνοχή του συνόλου (Alberti 1988, σ. 156–160). Στην αντίληψή του, η αρχιτεκτονική ομορφιά βασίζεται σε μια έννοια που συγγενεύει με τη μουσική αρμονία: οι αριθμητικοί λόγοι και οι αναλογίες που παράγουν ευχάριστα ακουστικά διαστήματα μπορούν, κατ' αναλογία, να αποτελέσουν πρότυπο και για τις χωρικές σχέσεις της αρχιτεκτονικής. Η σύλληψη αυτή αποκαλύπτει τη βαθιά πεποίθηση της Αναγέννησης ότι η αισθητική εμπειρία διαθέτει μαθηματικό υπόβαθρο και ότι το ωραίο μπορεί να θεμελιωθεί θεωρητικά και όχι μόνο εμπειρικά.

Η σύνδεση αρχιτεκτονικής και μαθηματικών στην Αναγέννηση δεν εξαντλείται, ωστόσο, στο έργο του Alberti. Ολόκληρη η περίοδος χαρακτηρίζεται από την πεποίθηση ότι η τάξη του κόσμου είναι προσπελάσιμη μέσω των αριθμών και της γεωμετρίας. Η μελέτη του Βιτρούβιου, η ανάπτυξη της προοπτικής, η ενασχόληση με την ανθρώπινη ανατομία και η αναβίωση της ευκλείδειας γεωμετρίας συνθέτουν ένα πνευματικό πλαίσιο μέσα στο οποίο η αρχιτεκτονική νοείται ως μορφή εφαρμοσμένης μαθηματικής σκέψης (Trachtenberg & Hyman 2002, σ. 420–430). Σε αυτό το πλαίσιο, το κτίριο δεν είναι απλώς κατασκευή αλλά λογική σύνθεση· η αρχιτεκτονική πράξη γίνεται πεδίο όπου η γνώση μετασχηματίζεται σε μορφή και η μορφή μετατρέπεται σε φορέα γνώσης.

Εμβληματική έκφραση αυτής της αντίληψης αποτελεί το σχέδιο του Leonardo da Vinci, γνωστό ως Βιτρούβιος Άνθρωπος. Το ανθρώπινο σώμα, εγγεγραμμένο ταυτόχρονα σε κύκλο και τετράγωνο, δεν λειτουργεί μόνο ως ανατομική μελέτη, αλλά ως συμβολική εικόνα της αναγεννησιακής σχέσης ανάμεσα στον άνθρωπο, τη

γεωμετρία και το κοσμικό μέτρο (Kemp 2006, σ. 110–115). Η ιδέα ότι το σώμα αποτελεί πρότυπο αναλογιών μετέφερε στην αρχιτεκτονική ένα ανθρωποκεντρικό ιδεώδες: όπως το σώμα συγκροτείται από εύλογες και αρμονικές σχέσεις, έτσι και το κτίριο οφείλει να διαθέτει εσωτερική αναλογική συνοχή. Η αναγεννησιακή αρχιτεκτονική δεν μιμείται απλώς τη φύση· επιδιώκει να ανακαλύψει μέσα στη φύση τις αριθμητικές και γεωμετρικές αρχές που καθιστούν τη μορφή εύρυθμη και αισθητικά ισορροπημένη.

Η συμμετρία αποτελεί ένα από τα κατεξοχήν γνωρίσματα της αναγεννησιακής αρχιτεκτονικής και συνδέεται άμεσα με την επιδίωξη για σαφήνεια, ισορροπία και ορθολογική οργάνωση της μορφής. Οι αναγεννησιακές προσόψεις οργανώνονται συνήθως γύρω από έναν κεντρικό άξονα, ο οποίος λειτουργεί ως σημείο αναφοράς για την κατανομή των αρχιτεκτονικών στοιχείων. Τα ανοίγματα, οι κίονες, τα τόξα και τα διακοσμητικά στοιχεία τοποθετούνται με τέτοιον τρόπο ώστε να δημιουργούν ένα σύστημα επανάληψης και ισορροπίας, βασισμένο σε σαφείς μαθηματικές αναλογίες. Σε αντίθεση με τη γοτθική συμμετρία, η οποία συχνά λειτουργεί ως μέσο οργάνωσης μιας ιδιαίτερα σύνθετης μορφής, η αναγεννησιακή συμμετρία επιδιώκει την καθαρότητα και την άμεση αναγνωσιμότητα της σύνθεσης, καθιστώντας τη μορφή εύληπτη και κατανοητή από τον θεατή (Summerson 1963, σ. 30–40).

Σημαντικότατο ρόλο στη διαμόρφωση αυτής της νέας αρχιτεκτονικής αντίληψης έπαιξε ο Filippo Brunelleschi, ο οποίος θεωρείται ένας από τους θεμελιωτές της αναγεννησιακής αρχιτεκτονικής. Το έργο του χαρακτηρίζεται από την αυστηρή χρήση γεωμετρικών μορφών και από τη συστηματική εφαρμογή μαθηματικών αναλογιών. Στο Ospedale degli Innocenti στη Φλωρεντία, η πρόσοψη οργανώνεται μέσω μιας επαναλαμβανόμενης σειράς τόξων που στηρίζονται σε κίονες, δημιουργώντας έναν ρυθμικό και ισορροπημένο χώρο. Η απόσταση μεταξύ των κιόνων, το ύψος των τόξων και οι αναλογίες των επιμέρους στοιχείων καθορίζονται από ένα ενιαίο γεωμετρικό σύστημα, το οποίο προσδίδει στο κτίριο σαφήνεια και αρμονία (Saalman 1993, σ. 60–70). Η επανάληψη δεν είναι μηχανική, αλλά οργανωμένη μέσω μαθηματικής κανονικότητας, γεγονός που ενισχύει την αισθητική συνοχή του συνόλου.

Το σημαντικότερο ίσως έργο του Brunelleschi είναι ο τρούλος του Santa Maria del Fiore, ένα από τα πιο εντυπωσιακά επιτεύγματα της αναγεννησιακής αρχιτεκτονικής και μηχανικής. Η κατασκευή του βασίστηκε σε μια σύνθετη γεωμετρική σύλληψη, η οποία επέτρεψε την ανύψωση μιας τεράστιας δομής χωρίς τη χρήση παραδοσιακών ξυλοτύπων. Η διπλή κατασκευή του θόλου, η χρήση νευρώσεων και η εφαρμογή καινοτόμων τεχνικών λύσεων αποδεικνύουν ότι τα μαθηματικά δεν αποτελούν μόνο εργαλείο αισθητικής οργάνωσης, αλλά και βασικό μέσο επίλυσης τεχνικών προβλημάτων (King 2001, σ. 80–95). Το έργο αυτό αναδεικνύει με ιδιαίτερη σαφήνεια τη σύνδεση μεταξύ γεωμετρίας, τεχνολογίας και αισθητικής.

Η αρχή της γεωμετρικής καθαρότητας εκφράζεται επίσης στις εκκλησίες του Brunelleschi, όπως ο San Lorenzo και ο Santo Spirito. Στα έργα αυτά, η οργάνωση του εσωτερικού χώρου βασίζεται σε επαναλαμβανόμενες μονάδες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους μέσω απλών και σαφών αναλογιών. Οι κίονες, τα τόξα και οι οροφές ακολουθούν ένα ενιαίο σύστημα μέτρησης, το οποίο δημιουργεί αίσθηση τάξης και ισορροπίας (Davies & Hemsoll 2013, σ. 85–95). Η γεωμετρική αυτή οργάνωση καθιστά τον χώρο εύληπτο και επιτρέπει στον θεατή να αντιληφθεί τη συνοχή της σύνθεσης μέσα από την επανάληψη και τη συμμετρία.

Ανάλογη είναι και η συμβολή του Leon Battista Alberti στην αρχιτεκτονική πράξη. Στην πρόσοψη της Santa Maria Novella, ο Alberti επιτυγχάνει να ενοποιήσει διαφορετικά αρχιτεκτονικά στοιχεία μέσω ενός συστήματος γεωμετρικών αναλογιών. Η χρήση τετραγώνων και κύκλων, καθώς και η ένταξη της πρόσοψης σε ένα ενιαίο γεωμετρικό πλαίσιο, επιτρέπουν τη σύνθεση ενός αρμονικού συνόλου, στο οποίο τα επιμέρους στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους με σαφή και αναγνώσιμο τρόπο (Alberti 1988, σ. 170–175). Η μορφή δεν προκύπτει από τη συσσώρευση διακοσμητικών στοιχείων, αλλά από τη γεωμετρική τους οργάνωση και από την πειθαρχία των αναλογιών.

Η αναγεννησιακή αναζήτηση της μαθηματικής αρμονίας κορυφώνεται στο έργο του Andrea Palladio, ο οποίος ανέπτυξε ένα ιδιαίτερα συστηματικό και επιδραστικό σύστημα αρχιτεκτονικών αναλογιών. Στη Villa Rotonda, ένα από τα πιο γνωστά έργα του, η κάτοψη βασίζεται σε ένα κεντρικό τετράγωνο, το οποίο εγγράφεται σε κύκλο, ενώ οι τέσσερις όψεις είναι απολύτως συμμετρικές. Η γεωμετρική αυτή οργάνωση

δημιουργεί ένα κτίριο που μπορεί να ιδωθεί από κάθε πλευρά ως ισότιμο, καταργώντας την έννοια της «κύριας» όψης και ενισχύοντας την ιδέα της καθολικής αρμονίας (Palladio 1997, σ. 25–40; Wittkower 1971, σ. 70–75). Η Villa Rotonda δεν αποτελεί απλώς κατοικία, αλλά αρχιτεκτονική έκφραση μιας ιδεατής γεωμετρικής τάξης.

Η ανάπτυξη της προοπτικής κατά την Αναγέννηση συνέβαλε καθοριστικά στη διαμόρφωση μιας νέας αντίληψης για τον χώρο, η οποία συνδέεται άμεσα με τη μαθηματική οργάνωση και τη γεωμετρική αναπαράσταση. Η γραμμική προοπτική, η οποία συστηματοποιήθηκε θεωρητικά και εφαρμόστηκε στην πράξη από καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες της περιόδου, βασίζεται σε αυστηρούς γεωμετρικούς κανόνες που επιτρέπουν την απόδοση του τρισδιάστατου χώρου σε δισδιάστατη επιφάνεια. Η ανακάλυψη αυτή δεν επηρέασε μόνο τη ζωγραφική, αλλά και την αρχιτεκτονική, καθώς προσέφερε ένα νέο εργαλείο κατανόησης και σχεδιασμού του χώρου (Edgerton 1975, σ. 40–55). Η προοπτική δεν αποτελεί απλώς τεχνική αναπαράστασης, αλλά και τρόπο σκέψης: ο χώρος γίνεται μετρήσιμος, υπολογίσιμος και, κατά συνέπεια, ελέγξιμος.

Στο πλαίσιο αυτό, η αρχιτεκτονική της Αναγέννησης συνδέεται στενά με την έννοια του «ιδανικού χώρου», δηλαδή ενός χώρου που οργανώνεται σύμφωνα με μαθηματικές αρχές και αντανakλά μια ανώτερη τάξη. Η έννοια αυτή εκφράζεται, μεταξύ άλλων, στην επιδίωξη για κεντρικά οργανωμένες κατόψεις, όπου ο χώρος διατάσσεται γύρω από έναν κεντρικό άξονα ή σημείο. Το ιδανικό του κεντρικού σχεδίου συνδέεται με τη γεωμετρική τελειότητα του κύκλου και του τετραγώνου, τα οποία θεωρούνται σχήματα που ενσωματώνουν την έννοια της αρμονίας και της ισορροπίας (Ackerman 1986, σ. 50–60). Η επιλογή αυτών των σχημάτων δεν είναι τυχαία, αλλά βασίζεται στην πεποίθηση ότι η γεωμετρική καθαρότητα οδηγεί σε αισθητική τελειότητα.

Η μαθηματική αρμονία στην αναγεννησιακή αρχιτεκτονική δεν περιορίζεται μόνο στη μορφή των κτιρίων, αλλά επεκτείνεται και στον τρόπο με τον οποίο αυτά εντάσσονται στο περιβάλλον τους. Οι πλατείες, οι δρόμοι και τα αστικά σύνολα οργανώνονται σύμφωνα με αρχές συμμετρίας και αναλογίας, δημιουργώντας χώρους που χαρακτηρίζονται από τάξη και συνοχή. Η πολεοδομία της Αναγέννησης

επιδιώκει να εφαρμόσει τις ίδιες μαθηματικές αρχές που διέπουν το μεμονωμένο κτίριο σε μεγαλύτερη κλίμακα, μετατρέποντας την πόλη σε οργανωμένο και αρμονικό σύνολο (Roth 2007, σ. 330–340). Η αντίληψη αυτή ενισχύει τη σχέση μεταξύ αρχιτεκτονικής και μαθηματικής σκέψης, καθώς η γεωμετρία λειτουργεί ως κοινή γλώσσα για την οργάνωση τόσο του κτιρίου όσο και του αστικού χώρου.

Επιπλέον, η αναγεννησιακή αρχιτεκτονική επηρεάζεται βαθιά από τη φιλοσοφική αντίληψη ότι το σύμπαν διέπεται από μαθηματική τάξη. Η ιδέα αυτή, η οποία έχει τις ρίζες της στην αρχαία ελληνική σκέψη και ιδιαίτερα στην πυθαγόρεια παράδοση, επανέρχεται δυναμικά κατά την Αναγέννηση και επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι αρχιτέκτονες αντιλαμβάνονται τη μορφή και τη δομή. Η αρχιτεκτονική γίνεται έτσι μέσο έκφρασης της κοσμικής αρμονίας, όπου οι αναλογίες και οι γεωμετρικές σχέσεις αντανakλούν μια βαθύτερη τάξη (Wittkower 1971, σ. 50–60). Η σύνδεση ανάμεσα στο μικρόκοσμο του κτιρίου και τον μακρόκοσμο του σύμπαντος αποτελεί βασικό στοιχείο της αναγεννησιακής σκέψης και ενισχύει τον θεωρητικό χαρακτήρα της αρχιτεκτονικής δημιουργίας.

Η έννοια της αναλογίας, η οποία αποτελεί θεμελιώδη αρχή της αναγεννησιακής αρχιτεκτονικής, συνδέεται επίσης με την αντίληψη της μουσικής αρμονίας. Όπως στη μουσική οι ευχάριστοι ήχοι προκύπτουν από συγκεκριμένους αριθμητικούς λόγους, έτσι και στην αρχιτεκτονική οι αρμονικές μορφές προκύπτουν από αντίστοιχες αναλογικές σχέσεις μεταξύ των μερών ενός κτιρίου. Η μεταφορά αυτή δεν είναι απλώς θεωρητική, αλλά επηρεάζει άμεσα τον σχεδιασμό, καθώς οι αρχιτέκτονες χρησιμοποιούν αριθμητικούς λόγους για να καθορίσουν τις διαστάσεις και τις σχέσεις των επιμέρους στοιχείων (Wittkower 1971, σ. 60–65). Η αρχιτεκτονική μορφή γίνεται έτσι «ορατή μουσική», όπου η αρμονία εκφράζεται μέσω της γεωμετρίας και των αναλογιών.

Συνολικά, η αρχιτεκτονική της Αναγέννησης συνιστά ένα από τα πιο ολοκληρωμένα παραδείγματα της σύνδεσης μεταξύ μαθηματικών και αισθητικής. Η γεωμετρία, οι αναλογίες και οι αριθμητικοί λόγοι δεν αποτελούν απλώς εργαλεία σχεδιασμού, αλλά βασικές αρχές που καθορίζουν τη μορφή, τη δομή και την αισθητική εμπειρία. Η αναγεννησιακή αρχιτεκτονική επιδιώκει να αποδώσει στον χώρο μια μορφή που

αντανακλά την τάξη και την αρμονία του κόσμου, καθιστώντας την αρχιτεκτονική πεδίο όπου η μαθηματική σκέψη μετασχηματίζεται σε αισθητική μορφή.

Η σημασία της περιόδου αυτής για τη μελέτη της σχέσης μεταξύ μαθηματικών και αρχιτεκτονικής είναι καθοριστική, καθώς προσφέρει ένα πρότυπο στο οποίο η θεωρία και η πράξη συνδέονται άμεσα. Η αρχιτεκτονική της Αναγέννησης δεν αποτελεί απλώς ιστορικό φαινόμενο, αλλά ένα σύστημα σκέψης που συνεχίζει να επηρεάζει την αρχιτεκτονική μέχρι σήμερα. Οι αρχές της συμμετρίας, της αναλογίας και της γεωμετρικής οργάνωσης παραμένουν βασικά εργαλεία για την κατανόηση και τον σχεδιασμό του χώρου, αποδεικνύοντας τη διαχρονική σημασία της μαθηματικής σκέψης στην αρχιτεκτονική δημιουργία.

2.4 Η χρυσή τομή και οι μαθηματικές αναλογίες στην αρχιτεκτονική

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάστηκε ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματική σκέψη εκφράστηκε στην αρχαία ελληνική, στη γοτθική και στην αναγεννησιακή αρχιτεκτονική μέσω της συμμετρίας, της γεωμετρίας και των συστημάτων αναλογιών. Στο πλαίσιο αυτό, η χρυσή τομή καταλαμβάνει ιδιαίτερη θέση, καθώς αποτελεί ίσως την πιο γνωστή μαθηματική αναλογία που συνδέθηκε ιστορικά με την ιδέα της αισθητικής αρμονίας. Η σημασία της δεν περιορίζεται μόνο στις μαθηματικές της ιδιότητες, αλλά επεκτείνεται και στον τρόπο με τον οποίο λειτούργησε ως θεωρητικό και συμβολικό σημείο συνάντησης ανάμεσα στη γεωμετρία, στη φιλοσοφία της ομορφιάς και στην αρχιτεκτονική πράξη. Για τον λόγο αυτό, η χρυσή τομή αναδείχθηκε διαχρονικά σε μία από τις σημαντικότερες έννοιες της αισθητικής θεωρίας και της αρχιτεκτονικής σκέψης (Kline 1972, 120–125; Livio 2002, 15–25).

Η χρυσή τομή ορίζεται ως μια ιδιαίτερη αναλογία ανάμεσα σε δύο άνισα μέρη ενός ευθύγραμμου τμήματος. Εάν ένα τμήμα διαιρεθεί σε ένα μεγαλύτερο και ένα μικρότερο μέρος, τότε η διαίρεση θεωρείται ότι ακολουθεί τη χρυσή τομή όταν ο λόγος του όλου προς το μεγαλύτερο μέρος είναι ίσος με τον λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο. Η αναλογία αυτή εκφράζεται αλγεβρικά μέσω του άρρητου αριθμού ϕ (phi), του οποίου η τιμή προσεγγίζει το 1,6180339 (Euclid, Elements, VI;

Kline 1972, 120–125). Η μαθηματική ιδιαιτερότητα της χρυσής τομής έγκειται στην ιδιότητα της αυτοομοιότητας, καθώς το όλο και τα μέρη του συνδέονται μέσω της ίδιας αναλογικής σχέσης. Η εσωτερική αυτή συνοχή συνέβαλε στο να θεωρηθεί η συγκεκριμένη αναλογία ως πρότυπο γεωμετρικής αρμονίας και μορφολογικής ισορροπίας.

Η χρυσή τομή δεν αποτελεί μια απομονωμένη μαθηματική έννοια, αλλά συνδέεται με ένα ευρύτερο σύνολο γεωμετρικών και αριθμητικών φαινομένων. Εμφανίζεται στην κατασκευή του κανονικού πενταγώνου και του πενταγράμμου, σε σπειροειδείς γεωμετρικές μορφές, καθώς και στη θεωρία των συνεχών αναλογιών (Livio 2002, 45–60). Η στενή της σχέση με το κανονικό πεντάγωνο της προσέδωσε ήδη από την αρχαιότητα ιδιαίτερο φιλοσοφικό και συμβολικό βάρος, κυρίως σε παραδόσεις που συνέδεαν τη γεωμετρία με την έννοια της κοσμικής τάξης. Σε αυτό ακριβώς το σημείο γίνεται φανερό ότι η χρυσή τομή δεν λειτούργησε ιστορικά μόνο ως τεχνικό μαθηματικό αποτέλεσμα, αλλά και ως αναλογία με έντονη αισθητική και φιλοσοφική δυναμική, καθώς συνδέθηκε με την αναζήτηση της αρμονίας τόσο στη φύση όσο και στην τέχνη.

Ιδιαίτερα σημαντική υπήρξε και η σύνδεση της χρυσής τομής με την ακολουθία Fibonacci. Στην ακολουθία αυτή κάθε όρος προκύπτει από το άθροισμα των δύο προηγούμενων, ενώ όσο οι όροι αυξάνονται, ο λόγος δύο διαδοχικών αριθμών προσεγγίζει ολοένα περισσότερο τον αριθμό ϕ (Livio 2002, 90–100). Η σχέση αυτή δεν σημαίνει ότι κάθε φυσικό ή αισθητικό φαινόμενο που συνδέεται με την ακολουθία Fibonacci υπακούει αυτόματα σε κάποιον καθολικό «νόμο ομορφιάς». Ωστόσο, εξηγεί γιατί η χρυσή τομή αντιμετωπίστηκε συχνά ως γέφυρα ανάμεσα στην αριθμητική, στη γεωμετρία και στη μορφολογική οργάνωση. Η σημασία της στην ιστορία των ιδεών οφείλεται ακριβώς στο ότι επέτρεψε να νοηθεί η αισθητική αρμονία ως κάτι που δύναται να εκφραστεί μέσω μαθηματικών σχέσεων, χωρίς όμως να εξαντλείται αποκλειστικά σε αυτές.

Η αισθητική πρόσληψη της χρυσής τομής υπήρξε εξαιρετικά ισχυρή, ιδιαίτερα από τους νεότερους χρόνους και εξής. Πολλοί θεωρητικοί υποστήριξαν ότι η συγκεκριμένη αναλογία παράγει μορφές που γίνονται αντιληπτές ως ισορροπημένες, ευχάριστες ή «φυσικές» στο ανθρώπινο βλέμμα. Η αντίληψη αυτή συνδέεται με την

ευρύτερη ιδέα ότι ο ανθρώπινος νους ανταποκρίνεται θετικά σε μορφές που παρουσιάζουν εσωτερική τάξη και αναλογική συνοχή (Tatarkiewicz 1970, 70–75). Παρ' όλα αυτά, η σύνδεση της χρυσής τομής με μια καθολική αισθητική εμπειρία δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται άκριτα. Η σύγχρονη έρευνα αντιμετωπίζει με επιφύλαξη κάθε ουσιοκρατική θεώρηση που επιχειρεί να αναγάγει την ομορφιά σε μία μόνο μαθηματική αναλογία. Η αισθητική εμπειρία επηρεάζεται από ιστορικούς, πολιτισμικούς και αντιληπτικούς παράγοντες και δεν μπορεί να περιοριστεί σε έναν καθολικό μαθηματικό τύπο. Παρά τις επιφυλάξεις αυτές, η χρυσή τομή εξακολουθεί να αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν για να θεμελιώσουν θεωρητικά την έννοια της αισθητικής αρμονίας.

Η σχέση της χρυσής τομής με την αρχιτεκτονική έχει απασχολήσει εκτενώς την ιστοριογραφία της τέχνης και της αρχιτεκτονικής. Συχνά υποστηρίζεται ότι η αναλογία αυτή χρησιμοποιήθηκε ήδη στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική και ειδικότερα στον Παρθενώνα. Ορισμένοι μελετητές υποστήριξαν ότι η πρόσοψη του ναού ή επιμέρους διαστάσεις του προσεγγίζουν τη χρυσή αναλογία (Livio 2002, 150–160). Η άποψη αυτή έγινε ιδιαίτερα δημοφιλής, επειδή συνδέθηκε με τη γενικότερη αντίληψη που θεωρεί την αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική ως το κατεξοχήν πρότυπο μαθηματικής και αισθητικής τελειότητας. Ωστόσο, η σύγχρονη επιστημονική έρευνα εμφανίζεται περισσότερο επιφυλακτική. Πολλοί ιστορικοί της αρχιτεκτονικής επισημαίνουν ότι, παρόλο που οι Έλληνες αρχιτέκτονες χρησιμοποιούσαν συστηματικά αναλογίες και γεωμετρικές σχέσεις, δεν υπάρχουν αδιάσειστα τεκμήρια που να αποδεικνύουν ότι ο Παρθενώνας σχεδιάστηκε βάσει συνειδητής εφαρμογής της χρυσής τομής (Kostof 1995, 120–130).

Η επισήμανση αυτή έχει ιδιαίτερη σημασία, καθώς επιτρέπει την αποφυγή μιας απλουστευτικής ή σχεδόν μυθολογικής προσέγγισης της χρυσής τομής. Η αξία της δεν έγκειται στο να αποδειχθεί ότι «βρίσκεται παντού», αλλά στο ότι αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης ιστορίας μαθηματικών αναλογιών στην αρχιτεκτονική. Ακόμη και όταν δεν μπορεί να τεκμηριωθεί άμεση χρήση της, η συζήτηση γύρω από αυτήν αποκαλύπτει τη σταθερή επιθυμία θεωρητικών και αρχιτεκτόνων να ερμηνεύσουν την αισθητική τάξη μέσω αριθμητικών σχέσεων. Υπό αυτή την έννοια, η χρυσή τομή

λειτουργεί όχι μόνο ως γεωμετρική αναλογία, αλλά και ως ιστορικό σύμβολο της σύνδεσης ανάμεσα στα μαθηματικά και στην έννοια του ωραίου (Livio 2002, 180–190).

Κατά την Αναγέννηση, το ενδιαφέρον για τη χρυσή τομή αναζωπυρώθηκε δυναμικά μέσα στο γενικότερο πλαίσιο της αναβίωσης της αρχαίας γνώσης. Η επιστροφή στα μαθηματικά και φιλοσοφικά κείμενα της αρχαιότητας, η ανανέωση του ενδιαφέροντος για τον Βιτρούβιο, η ανάπτυξη της προοπτικής και η μελέτη των κανονικών σωμάτων δημιούργησαν ένα πνευματικό περιβάλλον ιδιαίτερα ευνοϊκό για την ανάδειξη των μαθηματικών αναλογιών ως θεμελίου της αισθητικής τάξης (Wittkower 1971, 40–50). Στο πλαίσιο αυτό, η χρυσή τομή αντιμετωπίστηκε όχι απλώς ως αριθμητική σχέση, αλλά ως προνομιακή μορφή κοσμικής και καλλιτεχνικής αρμονίας, ενταγμένη σε ένα ευρύτερο φιλοσοφικό και αισθητικό σύστημα.

Καθοριστικό ρόλο στη διάδοση αυτής της αντίληψης διαδραμάτισε το έργο του Luca Pacioli, *De divina proportione*, το οποίο εκδόθηκε το 1509. Στο έργο αυτό η χρυσή αναλογία παρουσιάζεται ως «θεία αναλογία», δηλαδή ως αναλογία που αντανακλά τη σοφία και την αρμονία της δημιουργίας (Pacioli 1509/1991, 10–20). Η ονομασία αυτή αποκαλύπτει τον τρόπο με τον οποίο η Αναγέννηση συνέδεσε τη μαθηματική τάξη με μεταφυσικές και αισθητικές σημασίες. Το έργο συνοδεύεται από σχέδια που αποδίδονται στον Leonardo da Vinci και απεικονίζουν πολύεδρα και γεωμετρικές μορφές, υπογραμμίζοντας τη στενή σχέση ανάμεσα στα μαθηματικά, στη γεωμετρία και στην καλλιτεχνική δημιουργία. Η σημασία του έργου του Pacioli δεν περιορίζεται στη διάδοση μιας μαθηματικής θεωρίας· έγκειται κυρίως στο ότι ενίσχυσε την αντίληψη πως η ομορφιά μπορεί να περιγραφεί μέσω αναλογιών που θεωρούνται εγγενείς στη δομή της πραγματικότητας.

Η επιρροή αυτών των ιδεών στην αναγεννησιακή αρχιτεκτονική υπήρξε ουσιαστική, ακόμη και όταν δεν είναι πάντοτε δυνατό να αποδειχθεί άμεση εφαρμογή της χρυσής τομής σε συγκεκριμένα κτίρια. Οι αναγεννησιακοί αρχιτέκτονες επιδίωκαν γενικότερα τη σαφή γεωμετρική οργάνωση, τη συμμετρία και τη χρήση αριθμητικών λόγων που εξασφάλιζαν μορφολογική καθαρότητα και συνθετική ενότητα (Wittkower 1971, 60–70). Η χρυσή τομή εντάχθηκε σε αυτό το ευρύτερο θεωρητικό

σύστημα ως μία από τις πιθανές ιδανικές αναλογίες. Η σημασία της, επομένως, δεν συνδέεται μόνο με τη συχνότητα της πρακτικής εφαρμογής της, αλλά και με την ιδεολογική και θεωρητική της λειτουργία, καθώς συνέβαλε στη μαθηματικοποίηση της αρχιτεκτονικής σκέψης και στη διαμόρφωση μιας νέας αντίληψης περί αισθητικής τάξης.

Η χρήση μαθηματικών αναλογιών συνεχίστηκε και στους νεότερους χρόνους, αποκτώντας νέα διάσταση στη μοντέρνα αρχιτεκτονική. Στον 20ό αιώνα, ο Le Corbusier ανέπτυξε το σύστημα Modulor, ένα αναλογικό εργαλείο βασισμένο στις διαστάσεις του ανθρώπινου σώματος, στη σειρά Fibonacci και στη χρυσή τομή (Le Corbusier 1950, 25–40). Στόχος του δεν ήταν απλώς η αναπαραγωγή μιας παλαιότερης θεωρίας αισθητικής αρμονίας, αλλά η διαμόρφωση ενός καθολικού συστήματος μέτρησης που θα συνέδεε την ανθρώπινη κλίμακα με τη βιομηχανική παραγωγή και τον αρχιτεκτονικό σχεδιασμό. Το Modulor αποδεικνύει ότι η χρυσή τομή δεν παρέμεινε εγκλωβισμένη στις θεωρητικές αναζητήσεις της Αναγέννησης ή στη ρομαντική αισθητική του 19ου αιώνα, αλλά επανεμφανίστηκε ως λειτουργικό εργαλείο σύνθεσης σε ένα εντελώς διαφορετικό ιστορικό και τεχνολογικό πλαίσιο. Στη μοντέρνα αρχιτεκτονική η μαθηματική αναλογία δεν παρουσιάζεται πλέον ως μυστικιστικό σύμβολο, αλλά ως εργαλείο σχεδιασμού προσαρμοσμένο στις ανάγκες της σύγχρονης κατασκευαστικής πραγματικότητας.

Παρά τη διαχρονική γοητεία που άσκησε, η χρυσή τομή δεν μπορεί να θεωρηθεί μοναδικό ή απόλυτο κριτήριο αισθητικής επιτυχίας. Πολλοί σύγχρονοι μελετητές επισημαίνουν ότι η σημασία της έχει συχνά υπερτονιστεί και ότι πολλές από τις αποδιδόμενες «ανακαλύψεις» της σε έργα αρχιτεκτονικής αποτελούν εκ των υστέρων ερμηνείες και όχι ιστορικά τεκμηριωμένες διαπιστώσεις (Livio 2002, 200–210). Η παρατήρηση αυτή δεν αναιρεί τη θεωρητική της αξία· αντιθέτως, επιτρέπει μια πιο ώριμη και επιστημονικά θεμελιωμένη κατανόηση του ζητήματος. Η σημασία της χρυσής τομής δεν έγκειται στο ότι εξηγεί από μόνη της την ομορφιά, αλλά στο ότι αποκαλύπτει τη διαχρονική ανθρώπινη επιθυμία να αποδοθεί η αισθητική εμπειρία σε μορφές τάξης, μέτρου και αναλογίας.

Υπό αυτή την έννοια, η χρυσή τομή αποτελεί προνομιακό παράδειγμα για τη μελέτη της σχέσης ανάμεσα στη μαθηματική σκέψη και στην αρχιτεκτονική μορφή.

Επιτρέπει να κατανοηθεί πώς μια αφηρημένη αριθμητική σχέση μπορεί να αποκτήσει αισθητική, φιλοσοφική και αρχιτεκτονική βαρύτητα. Από την αρχαιότητα και την Αναγέννηση έως τη μοντέρνα αρχιτεκτονική, η αναλογία αυτή λειτουργεί ως θεωρητικό πεδίο στο οποίο διασταυρώνονται η γεωμετρία, η αισθητική και η έννοια της αρμονίας. Για τον λόγο αυτό, η μελέτη της δεν αφορά απλώς ένα ειδικό μαθηματικό θέμα, αλλά συμβάλλει ουσιαστικά στην κατανόηση ενός ευρύτερου προβλήματος: του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά μπορούν να λειτουργήσουν όχι μόνο ως εργαλείο κατασκευής, αλλά και ως γλώσσα της ομορφιάς και της αισθητικής εμπειρίας στον αρχιτεκτονικό χώρο.

3. Μελέτες περίπτωσης: Συμμετρία και μαθηματική ομορφιά σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά μνημεία

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάστηκε η σχέση μεταξύ μαθηματικής σκέψης και αρχιτεκτονικής αισθητικής μέσα από ιστορικές και θεωρητικές προσεγγίσεις. Αναλύθηκε η μαθηματική ομορφιά ως κατηγορία που συνδέεται με τη συμμετρία, την αναλογία, τη γεωμετρική οργάνωση και τη μορφολογική συνοχή, ενώ διερευνήθηκε ο τρόπος με τον οποίο οι αρχές αυτές εκφράστηκαν στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική, στη γοτθική παράδοση, στην Αναγέννηση και στη θεωρία της χρυσής τομής (Wittkower 1971, 60–70; Kostof 1995, 120–130). Το παρόν κεφάλαιο επιχειρεί να μεταφέρει τη θεωρητική αυτή συζήτηση στο επίπεδο της αρχιτεκτονικής πράξης, εξετάζοντας συγκεκριμένα ευρωπαϊκά μνημεία ως πεδία όπου η μαθηματική σκέψη μετασχηματίζεται σε χωρική εμπειρία και αισθητική μορφή. Σκοπός του είναι να καταδείξει ότι οι μαθηματικές αρχές δεν λειτουργούν ως αφηρημένα θεωρητικά σχήματα, αλλά ως ενεργοί μηχανισμοί οργάνωσης του χώρου, της δομής και της αισθητικής εμπειρίας (Frampton 2007, 15–20).

Η στροφή στις μελέτες περίπτωσης είναι μεθοδολογικά αναγκαία. Εάν στα προηγούμενα κεφάλαια η έμφαση δόθηκε στις έννοιες της συμμετρίας, της γεωμετρικής πειθαρχίας και της αναλογικής αρμονίας, εδώ εξετάζεται η ενσάρκωσή τους σε ιστορικά οικοδομήματα που προέρχονται από διαφορετικές αρχιτεκτονικές παραδόσεις. Η επιλογή των μνημείων αποσκοπεί ακριβώς στην ανάδειξη αυτής της ιστορικής διαχρονίας: ο Ναός του Απόλλωνα Επικούριου στις Βάσες αντιπροσωπεύει μια σύνθετη εκδοχή της κλασικής αρχιτεκτονικής· η Notre-Dame de Paris εκφράζει τη γεωμετρία της γοτθικής κατακόρυφης σύνθεσης· και η Santa Maria del Fiore στη Φλωρεντία συμπυκνώνει τη μαθηματική συνείδηση της Αναγέννησης μέσα από το επίτευγμα του Filippo Brunelleschi (Trachtenberg & Hyman 2002, 210–220). Τα τρία αυτά μνημεία δεν επιλέγονται μόνο λόγω της ιστορικής τους σημασίας, αλλά και επειδή αποκαλύπτουν διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικές αρχές μετασχηματίζονται σε αρχιτεκτονική ομορφιά.

3.1 Ο Ναός του Απόλλωνα Επικούριου στις Βάσσεις και η γεωμετρική επινόηση της κλασικής αρχιτεκτονικής

Για την κατανόηση της σχέσης μεταξύ γεωμετρίας και αισθητικής στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική, ο Ναός του Απόλλωνα Επικούριου στις Βάσσεις αποτελεί ιδιαίτερα γόνιμο παράδειγμα. Το μνημείο βρίσκεται στα ορεινά της Αρκαδίας και χρονολογείται στα μέσα του 5ου αιώνα π.Χ. Η UNESCO το χαρακτηρίζει μνημείο που συνδυάζει τον αρχαϊκό χαρακτήρα και τη «γαλήνη» του δωρικού ρυθμού με τολμηρές αρχιτεκτονικές καινοτομίες, ενώ επισημαίνει ότι περιλαμβάνει το αρχαιότερο γνωστό κορινθιακό κιονόκρανο (UNESCO 1986; Kostof 1995, 135–140). Η ιστορική θέση του μνημείου, ανάμεσα στην παράδοση και στην αρχιτεκτονική επινόηση, το καθιστά εξαιρετικά σημαντικό για τη μελέτη της σχέσης ανάμεσα στη συμμετρία, στη γεωμετρική οργάνωση και στην αισθητική πρωτοτυπία.

Σε αντίθεση με την αντίληψη που αντιμετωπίζει την κλασική αρχιτεκτονική ως απολύτως κλειστό και αυστηρά τυποποιημένο σύστημα, οι Βάσσεις αποδεικνύουν ότι η αρχιτεκτονική τάξη μπορούσε να συνδυάζει αυστηρότητα και δημιουργική ελευθερία. Ο ναός οργανώνεται εξωτερικά μέσω σαφούς δωρικής πειθαρχίας, γεγονός που εξασφαλίζει ρυθμική κανονικότητα, σταθερότητα και αναλογική καθαρότητα (Wittkower 1971, 20–25). Ωστόσο, στο εσωτερικό του αναπτύσσεται ένα περισσότερο σύνθετο μορφολογικό σύστημα, στο οποίο συνυπάρχουν ιωνικά και κορινθιακά στοιχεία. Το μνημείο, επομένως, δεν περιορίζεται στην αναπαραγωγή ενός ενιαίου μορφολογικού τύπου, αλλά λειτουργεί ως τόπος συνάντησης διαφορετικών αρχιτεκτονικών γλωσσών, οι οποίες οργανώνονται μέσα σε ένα συνεκτικό γεωμετρικό και αισθητικό σύνολο.

Η σημασία του ναού για την παρούσα έρευνα έγκειται ακριβώς σε αυτή τη σύνθετη λογική. Η γεωμετρική τάξη δεν εμφανίζεται εδώ ως μηχανική επανάληψη αναλογιών, αλλά ως σύστημα που επιτρέπει τη συνύπαρξη πολλαπλών μορφολογικών αρχών χωρίς απώλεια συνοχής. Η συμμετρία παραμένει θεμελιώδης, όπως συμβαίνει γενικότερα στη δωρική παράδοση, αλλά η αισθητική αξία του μνημείου δεν εξαρτάται αποκλειστικά από τη σταθερή ισορροπία του περιγράμματος. Συνδέεται επίσης με την ικανότητα της γεωμετρίας να οργανώνει τη διαφοροποίηση και να μετατρέπει τη μορφολογική πολυπλοκότητα σε συνθετική ενότητα, στοιχείο που έχει

επισημανθεί και στη σύγχρονη ιστοριογραφία της αρχιτεκτονικής (Kostof 1995, 140–145).

Η παρατήρηση αυτή επιτρέπει μια βαθύτερη κατανόηση της κλασικής αρχιτεκτονικής. Η αισθητική αρμονία δεν πρέπει να ερμηνεύεται αποκλειστικά ως αποτέλεσμα τυπικής κανονικότητας, αλλά και ως μορφή ελεγχόμενης επινόησης. Οι Βάσσεις καθιστούν εμφανές ότι η αναλογία και η γεωμετρία λειτουργούν όχι μόνο ως κανόνες περιορισμού, αλλά και ως προϋποθέσεις δημιουργικής ελευθερίας. Η μαθηματική σκέψη καθιστά δυνατή την αρχιτεκτονική καινοτομία ακριβώς επειδή παρέχει ένα σταθερό μορφολογικό υπόβαθρο.

Αισθητικά, το μνημείο παράγει ένα ιδιαίτερο αποτέλεσμα ισορροπίας ανάμεσα στην αυστηρότητα και στην εκλέπτυνση. Η εξωτερική δωρική μορφή δημιουργεί αίσθηση μέτρου, αντοχής και σταθερότητας, ενώ η εσωτερική διαφοροποίηση προσδίδει στο οικοδόμημα λεπτότερη και περισσότερο στοχαστική ποιότητα. Υπό αυτή την έννοια, ο ναός των Βασσών αποκαλύπτει ότι η μαθηματική ομορφιά στην κλασική αρχιτεκτονική δεν ταυτίζεται αποκλειστικά με την κανονικότητα ή τη στατική ισορροπία, αλλά και με την ικανότητα της γεωμετρικής οργάνωσης να ενσωματώνει δημιουργικά τη μορφολογική διαφοροποίηση χωρίς απώλεια συνοχής.

3.2 Η Notre-Dame de Paris και η γεωμετρία της γοθικής ανύψωσης

Εάν οι Βάσσεις αποκαλύπτουν τη σχέση ανάμεσα στη γεωμετρική πειθαρχία και στην ελεγχόμενη μορφολογική διαφοροποίηση της κλασικής αρχιτεκτονικής, η γοθική παράδοση μετασχηματίζει τις ίδιες μαθηματικές αρχές σε ένα εντελώς διαφορετικό αισθητικό και χωρικό σύστημα. Ο καθεδρικός ναός της Notre-Dame de Paris αποτελεί μία από τις πιο χαρακτηριστικές εκφράσεις αυτής της μετατόπισης. Η κατασκευή του άρχισε στα μέσα του 12ου αιώνα και διήρκεσε περίπου δύο αιώνες, γεγονός που αποτυπώνει τη μακρόχρονη εξέλιξη της γοθικής αρχιτεκτονικής παράδοσης (Trachtenberg & Hyman 2002, 230–235). Η κάτοψή του ακολουθεί τον τύπο του λατινικού σταυρού, ενώ το δυτικό μέτωπο οργανώνεται μέσω αυστηρής

συμμετρικής λογικής, αποδεικνύοντας ότι ακόμη και σε ένα εξαιρετικά σύνθετο μορφολογικό σύστημα η γεωμετρία παραμένει θεμελιώδης αρχή χωρικής οργάνωσης.

Η δυτική πρόσοψη αποτελεί το πλέον χαρακτηριστικό σημείο όπου η συμμετρία λειτουργεί ως μηχανισμός μορφολογικής συνοχής. Σύμφωνα με την αρχιτεκτονική τεκμηρίωση του μνημείου, η πρόσοψη περιλαμβάνει τρεις πύλες, τη γαλαρία των βασιλέων, μία ροζέτα διαμέτρου περίπου 9,60 μέτρων και δύο τετράγωνους πύργους ύψους περίπου 69 μέτρων (Bony 1983, 145–150). Όλα τα στοιχεία οργανώνονται γύρω από έναν ισχυρό κατακόρυφο άξονα, ο οποίος καθιστά αναγνώσιμη τη σύνθεση παρά τον πυκνό γλυπτικό και διακοσμητικό χαρακτήρα της. Η συμμετρία δεν παράγει εδώ την ήρεμη ισορροπία της κλασικής αρχαιότητας, αλλά λειτουργεί ως μηχανισμός συγκράτησης της πολυπλοκότητας, επιτρέποντας στο βλέμμα να αντιληφθεί μια εσωτερική τάξη πίσω από τη μορφολογική αφθονία.

Η αισθητική δύναμη της Notre-Dame δεν περιορίζεται, ωστόσο, στην όψη. Η ουσία της γοτθικής γεωμετρίας βρίσκεται στον τρόπο με τον οποίο η μορφή, η στατική λύση και η εμπειρία του χώρου συγκροτούν ένα ενιαίο σύστημα. Το οξυκόρυφο τόξο, οι νευρώσεις των θόλων και η συνολική κατακόρυφη οργάνωση επιτρέπουν στο οικοδόμημα να αποκτήσει ύψος, ελαφρότητα και φωτιστική διαφάνεια, στοιχεία που δεν θα ήταν δυνατά χωρίς την ακριβή γεωμετρική οργάνωση των φορτίων και των δομικών σχέσεων (Fitchen 1961, 80–95). Η γεωμετρική λογική του γοτθικού συστήματος δεν είναι απλώς διακοσμητική, αλλά βαθύτατα λειτουργική και ταυτόχρονα αισθητική: μέσω της σωστής κατανομής των δυνάμεων καθίσταται δυνατή η μείωση της μάζας των τοίχων και η μετατροπή τους σε φορείς φωτός.

Το στοιχείο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την παρούσα εργασία, διότι αποδεικνύει ότι η μαθηματική ομορφιά δεν συνδέεται πάντοτε με τη μορφολογική λιτότητα. Στη Notre-Dame, η αισθητική ποιότητα προκύπτει από την ικανότητα της γεωμετρίας να οργανώνει ένα εξαιρετικά σύνθετο σύστημα μορφών, ανοιγμάτων, υψών και ρυθμικών επαναλήψεων σε ένα συνεκτικό όλο. Η πρόσοψη, η κάτοψη και ο εσωτερικός χώρος λειτουργούν μαζί ως πεδίο όπου η συμμετρία και η γεωμετρική πειθαρχία καθιστούν δυνατή μια εμπειρία ανύψωσης, φωτός και πνευματικής συγκέντρωσης, όπως έχει επισημανθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία της γοτθικής αρχιτεκτονικής (Bony 1983, 150–160).

Στη γοτθική αρχιτεκτονική, η γεωμετρία δεν υπηρετεί πλέον αποκλειστικά τη σταθερότητα και το μέτρο, αλλά μετατρέπεται σε μηχανισμό πνευματικής έντασης και χωρικής υπέρβασης. Η Notre-Dame καθιστά εμφανές ότι η μαθηματική αρμονία στη γοτθική παράδοση δεν ταυτίζεται πλέον με τη στατική ισορροπία της κλασικής αρχαιότητας, αλλά με τη δυναμική οργάνωση του χώρου, του φωτός και της κατακόρυφης κίνησης. Η μετατόπιση αυτή επιβεβαιώνει ότι η γεωμετρία παραμένει θεμελιώδης για την αρχιτεκτονική αισθητική, ενώ το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεταβάλλεται ιστορικά ανάλογα με το πολιτισμικό και ιδεολογικό πλαίσιο (Trachtenberg & Hyman 2002, 240–245).

3.3 Η Santa Maria del Fiore και η μαθηματική συνείδηση της Αναγέννησης

Η αναγεννησιακή αρχιτεκτονική σηματοδοτεί μια νέα φάση στη σχέση μεταξύ μαθηματικών και αισθητικής, καθώς η γεωμετρία και οι αναλογίες αποκτούν πλέον σαφή θεωρητική θεμελίωση και συνειδητή εφαρμογή. Ο καθεδρικός ναός της Santa Maria del Fiore στη Φλωρεντία αποτελεί ένα από τα πλέον εμβληματικά παραδείγματα αυτής της εξέλιξης, κυρίως λόγω του θόλου που σχεδίασε ο Filippo Brunelleschi. Το έργο αυτό δεν συνιστά μόνο τεχνικό επίτευγμα, αλλά και βαθιά μαθηματική σύλληψη, η οποία συνδυάζει γεωμετρική ακρίβεια, κατασκευαστική καινοτομία και αισθητική αρμονία (King 2001, 90–110).

Ο θόλος της Santa Maria del Fiore αποτελείται από δύο κελύφη και βασίζεται σε ένα οκταγωνικό σύστημα οργανωμένο μέσω αυστηρών γεωμετρικών σχέσεων. Η απουσία παραδοσιακών ικριωμάτων κατά την κατασκευή του, καθώς και η χρήση τεχνικών όπως η «ψαροκόκαλη» τοιχοποιία, αποδεικνύουν ότι η μαθηματική σκέψη λειτουργεί όχι μόνο σε επίπεδο μορφής, αλλά και σε επίπεδο δομικής λογικής (King 2001, 120–135). Η γεωμετρία δεν περιορίζεται στην εξωτερική εμφάνιση, αλλά διαπερνά ολόκληρη τη διαδικασία σχεδιασμού και υλοποίησης.

Σε αντίθεση με τη γοτθική αρχιτεκτονική, όπου η γεωμετρία συχνά παραμένει ενσωματωμένη στην κατασκευαστική πρακτική χωρίς ρητή θεωρητική διατύπωση, στην Αναγέννηση παρατηρείται σαφής τάση συστηματοποίησης. Οι αρχιτέκτονες της εποχής επιδιώκουν να θεμελιώσουν την αρχιτεκτονική σε μαθηματικές αρχές που

μπορούν να περιγραφούν, να διδαχθούν και να εφαρμοστούν με συνέπεια (Wittkower 1971, 75–85). Ο Brunelleschi, παρότι δεν άφησε εκτενή θεωρητικά κείμενα, ενσωματώνει στο έργο του αυτή τη νέα αντίληψη σύμφωνα με την οποία η αρχιτεκτονική συνιστά εφαρμοσμένη γεωμετρία.

Αισθητικά, ο θόλος της Santa Maria del Fiore εκφράζει μια μορφή ομορφιάς βασισμένη στην καθαρότητα της γεωμετρικής σύλληψης και στη συνοχή της μορφής. Η συμμετρία, η αναλογία και η ρυθμική επανάληψη των δομικών στοιχείων δημιουργούν αποτέλεσμα που γίνεται αντιληπτό ως ισορροπημένο και ολοκληρωμένο. Η αισθητική ποιότητα δεν προκύπτει εδώ από διακοσμητική υπερβολή, αλλά από τη σαφήνεια της δομής και την ακρίβεια των σχέσεων που τη συγκροτούν, στοιχείο που επιβεβαιώνει τη θεωρία της αναγεννησιακής αρχιτεκτονικής περί «αρμονικής συναρμογής των μερών» (Alberti 1988, 156–160).

Η Santa Maria del Fiore καθιστά εμφανή τη μετάβαση σε μια νέα αντίληψη της αρχιτεκτονικής, όπου η γεωμετρία δεν αποτελεί πλέον μόνο εργαλείο κατασκευής, αλλά συνειδητό θεωρητικό θεμέλιο της αισθητικής μορφής. Η αναγεννησιακή αρχιτεκτονική αντιμετωπίζει πλέον τον χώρο ως αποτέλεσμα ορθολογικού σχεδιασμού, στον οποίο η μαθηματική σκέψη λειτουργεί ως καθολική γλώσσα σύνθεσης. Η ομορφιά δεν αποτελεί πλέον απλώς προϊόν παράδοσης ή εμπειρικής πρακτικής, αλλά αποτέλεσμα συστηματικού σχεδιασμού που βασίζεται σε αφηρημένες αρχές αναλογίας, συμμετρίας και γεωμετρικής πειθαρχίας.

3.4 Συγκριτική θεώρηση: τρεις εκδοχές μαθηματικής ομορφιάς

Η συγκριτική εξέταση των τριών μνημείων αποκαλύπτει ότι η μαθηματική ομορφιά στην αρχιτεκτονική δεν αποτελεί ενιαία και αμετάβλητη κατηγορία, αλλά μετασχηματίζεται ανάλογα με το ιστορικό και πολιτισμικό πλαίσιο. Στον Ναό του Απόλλωνα Επικούριου στις Βάσσειες, η αισθητική αρμονία εκφράζεται μέσω της συνύπαρξης αυστηρής συμμετρίας και ελεγχόμενης μορφολογικής ποικιλίας, όπου η γεωμετρία λειτουργεί ως βάση τόσο της σταθερότητας όσο και της επινόησης. Στη Notre-Dame de Paris, η ίδια γεωμετρική λογική μετασχηματίζεται σε σύστημα που εξυπηρετεί την κατακόρυφη ανύψωση, τη φωτεινότητα και τη σύνθετη χωρική εμπειρία. Αντίστοιχα, στη Santa Maria del Fiore, η μαθηματική σκέψη αποκτά σαφή

θεωρητικό χαρακτήρα και συνδέεται με την επιδίωξη μορφολογικής σαφήνειας και αναλογικής τελειότητας.

Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει ότι οι έννοιες της συμμετρίας, της αναλογίας και της γεωμετρίας παραμένουν σταθερές ως συνθετικές αρχές, ενώ το αισθητικό τους αποτέλεσμα μεταβάλλεται ιστορικά. Η ομορφιά μπορεί να εκφράζεται ως ισορροπία, ως δυναμική ανύψωση ή ως γεωμετρική καθαρότητα, χωρίς να παύει να βασίζεται σε μαθηματικές σχέσεις. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνει ότι η αρχιτεκτονική αποτελεί πεδίο όπου η μαθηματική σκέψη δεν εφαρμόζεται μηχανικά, αλλά προσαρμόζεται δημιουργικά στις αισθητικές και ιδεολογικές ανάγκες κάθε εποχής.

Καταληκτικά, τα παραδείγματα αυτά δείχνουν ότι η μαθηματική ομορφιά δεν αποτελεί αφηρημένη θεωρητική έννοια, αλλά ζωντανή αρχή που διαμορφώνει την αρχιτεκτονική μορφή. Η ιστορική διαφοροποίηση των παραδειγμάτων αυτών αποδεικνύει ότι, παρά τις μεταβολές των αισθητικών ιδεωδών και των αρχιτεκτονικών μορφών, η συμμετρία, η γεωμετρία και οι μαθηματικές αναλογίες παραμένουν διαχρονικά θεμελιώδεις μηχανισμοί μέσω των οποίων η αρχιτεκτονική επιχειρεί να αποδώσει τάξη, νόημα και αισθητική αρμονία στον ανθρώπινο χώρο.

4. Η έννοια της συμμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο

4.1 Η έννοια της συμμετρίας στο Ισχύον (2003) και στα Νέα Προγράμματα Σπουδών (2021) του δημοτικού

Σύμφωνα με το Ισχύον ΑΠΣ (2003), βασικός στόχος της διδασκαλίας των Μαθηματικών είναι η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, η κατανόηση βασικών εννοιών του χώρου και η σύνδεση της μαθηματικής γνώσης με καταστάσεις της καθημερινής ζωής (ΥΠΕΠΘ, 2003). Ειδικότερα, στη Γ' Δημοτικού προβλέπεται οι μαθητές να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα, να παρατηρούν ιδιότητες του χώρου και να έρχονται σε πρώτη επαφή με τη συμμετρία, μέσα από εποπτικά και χειραπτικά μέσα, χωρίς τυπική μαθηματική αυστηρότητα (ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ Μαθηματικών, 2003). Η παρούσα διδακτική πρόταση ανταποκρίνεται στις κατευθύνσεις αυτές, καθώς εισάγει την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα με βιωματικό και διερευνητικό τρόπο.

Σύμφωνα με τα Νέα Προγράμματα Σπουδών, η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό στοχεύει (ΙΕΠ, 2021):

- στην ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και επιχειρηματολογίας,
- στην κατανόηση βασικών εννοιών μέσω διερεύνησης και ανακάλυψης,
- και στη σύνδεση των μαθηματικών με αυθεντικά πολιτισμικά και κοινωνικά συμφραζόμενα.

Στο πλαίσιο αυτό, η συμμετρία αντιμετωπίζεται όχι ως απομονωμένη γεωμετρική δεξιότητα, αλλά ως δομική ιδέα που διατρέχει τον χώρο, τη φύση, την τέχνη και την αρχιτεκτονική. Έτσι, στα Νέα Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών για τη Γ' Δημοτικού, η συμμετρία εντάσσεται:

- στη γεωμετρική κατανόηση του χώρου,
- στη χρήση οπτικών και χειραπτικών αναπαραστάσεων, και
- στη διερεύνηση γεωμετρικών μετασχηματισμών σε διαισθητικό επίπεδο.

Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται:

- στον εντοπισμό αξόνων συμμετρίας,
- στη χρήση της συμμετρίας ως εργαλείου αναγνώρισης μοτίβων και κανονικοτήτων,
- και στη σύνδεση της μαθηματικής έννοιας με πραγματικά αντικείμενα και πολιτισμικά δημιουργήματα (ΙΕΠ, 2021).

4.2 Διδακτικές αρχές που υποστηρίζουν τα Νέα Προγράμματα Σπουδών

4.2.1. Κονστρουκτιβιστική και ανακαλυπτική μάθηση

Τα Νέα Προγράμματα Σπουδών υιοθετούν ρητά τη θέση ότι η μαθηματική γνώση οικοδομείται μέσα από ενεργή διερεύνηση, ανακάλυψη και νοηματοδότηση (ΙΕΠ, 2021). Η παρούσα διδασκαλία στηρίζεται στις αρχές της ανακαλυπτικής μάθησης, σύμφωνα με τις οποίες οι μαθητές οδηγούνται στην κατανόηση εννοιών μέσω πειραματισμού και αναζήτησης σχέσεων (Bruner, 1961; Prince & Felder, 2006).

Η έννοια της συμμετρίας δεν εισάγεται ως έτοιμος ορισμός, αλλά αναδύεται μέσα από:

- δραστηριότητες συμπλήρωσης του μισού,
- χρήση καθρέφτη,
- παρατήρηση αρχιτεκτονικών μορφών, επιτρέποντας στους μαθητές να ανακαλύψουν μόνοι τους τη σχέση «ίδιου – κατοπτρικού».

4.2.2. Διερευνητική και βιωματική μάθηση

Η έμφαση των ΝΠΣ στη διερευνητική μάθηση (inquiry-based learning) αποτυπώνεται στην παρούσα πρόταση μέσα από ερωτήσεις, συγκρίσεις και πειραματισμό (Hmelo-Silver et al., 2007). Παράλληλα, η βιωματική διάσταση της μάθησης, όπως περιγράφεται από τον Kolb (1984), ενισχύει την κατανόηση αφηρημένων εννοιών, όπως ο άξονας συμμετρίας, μέσω της πράξης και της εμπειρίας. Έτσι, και στην

παρούσα διδασκαλία, οι μαθητές μαθαίνουν με βιωματικό τρόπο την έννοια της συμμετρίας και τις ευρύτερες διαστάσεις στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική.

4.2.3. Ομαδοσυνεργατική μέθοδος

Τα Νέα Προγράμματα Σπουδών δίνουν ιδιαίτερη βαρύτητα στη συνεργατική μάθηση, αναγνωρίζοντας τη συμβολή της στη μαθηματική επικοινωνία και στην ανάπτυξη κοινωνικών δεξιοτήτων (ΙΕΠ, 2021). Στην παρούσα διδασκαλία, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες για την επίλυση προβλημάτων, τον εντοπισμό αξόνων συμμετρίας σε σχήματα, εικόνες, ευρωπαϊκά κτίρια και κτίρια της γειτονιάς τους, γεγονός που (Johnson & Johnson, 2014):

- ενισχύει τη διαπραγμάτευση εννοιών,
- προάγει την επιχειρηματολογία,
- και υποστηρίζει τη συλλογική οικοδόμηση γνώσης.

4.2.4. Κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση της μάθησης

Η κοινωνικοπολιτισμική θεωρία του Vygotsky υποστηρίζει ότι η μάθηση αποτελεί πρωτίστως κοινωνική διαδικασία και προηγείται της γνωστικής ανάπτυξης, καθώς οι νέες γνώσεις οικοδομούνται μέσα από την αλληλεπίδραση του μαθητή με τον εκπαιδευτικό και τους συνομηλίκους του (Vygotsky, 1978). Κεντρική έννοια της θεωρίας είναι η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Zone of Proximal Development – ZPD), δηλαδή η απόσταση ανάμεσα σε όσα ο μαθητής μπορεί να επιτύχει αυτόνομα και σε όσα μπορεί να κατακτήσει με την κατάλληλη καθοδήγηση ή συνεργασία (Vygotsky, 1978). Στην παρούσα διδακτική παρέμβαση οι αρχές αυτές αξιοποιούνται μέσα από ομαδοσυνεργατικές δραστηριότητες, συζήτηση, ανταλλαγή ιδεών και καθοδηγούμενη διερεύνηση, κατά τις οποίες οι μαθητές διατυπώνουν υποθέσεις, εντοπίζουν άξονες συμμετρίας, αιτιολογούν τις επιλογές τους και συνδιαμορφώνουν τη νέα γνώση, ενώ ο εκπαιδευτικός λειτουργεί ως διαμεσολαβητής της μαθησιακής διαδικασίας, παρέχοντας υποστήριξη ανάλογα με τις ανάγκες κάθε μαθητή. Η προσέγγιση αυτή είναι σύμφωνη με τις αρχές των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών, τα

οποία δίνουν έμφαση στη συνεργατική οικοδόμηση της γνώσης και στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών στη μαθησιακή διαδικασία (ΙΕΠ, 2021).

4.2.5. Διαθεματικότητα και αισθητική διάσταση

Η σύνδεση των Μαθηματικών με την Τέχνη και την Αρχιτεκτονική ανταποκρίνεται στη διαθεματική φιλοσοφία των ΝΠΣ, τα οποία προωθούν τη μαθηματική παιδεία ως πολιτισμική πρακτική και όχι ως απομονωμένο γνωστικό αντικείμενο (ΙΕΠ, 2021). Η συμμετρία προσεγγίζεται ως μαθηματική δομή που συνδέεται με την έννοια του ωραίου, της αρμονίας και της ισορροπίας, στοιχεία που έχουν διαχρονική παρουσία στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική (Weyl, 1952; Livio, 2002). Στη φιλοσοφία αυτή είναι σχεδιασμένη και η παρούσα διδασκαλία, έτσι ώστε η έννοια της συμμετρίας να προσεγγιστεί διαθεματικά, προσφέροντας στους μαθητές την ευκαιρία διερεύνησης της έννοιας σε διάφορα αρχιτεκτονικά κτίρια που έχουν μακρόχρονη ιστορία και έχουν αναδείξει τον πολιτισμικό θησαυρό της Ευρώπης σε παγκόσμιο επίπεδο.

4.3 Η προσέγγιση της συμμετρίας στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Δημοτικού

Η έννοια της συμμετρίας εμφανίζεται στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Δημοτικού με κλιμακωτό τρόπο, ξεκινώντας από απλές οπτικές και χειραπτικές δραστηριότητες και οδηγώντας σταδιακά σε πιο συστηματικές γεωμετρικές διατυπώσεις. Η πορεία αυτή συνδέεται με την ανάγκη οι μαθητές να οικοδομήσουν τη γεωμετρική σκέψη μέσα από παρατήρηση, σύγκριση, κατασκευή και σταδιακή μαθηματοποίηση των εμπειριών τους.

Στη Β' Δημοτικού, η συμμετρία εισάγεται μέσα από την ενότητα «Ανακαλύπτω τη συμμετρία γύρω μου». Η προσέγγιση είναι κυρίως διαισθητική και βιωματική. Οι μαθητές καλούνται να φέρουν άξονες συμμετρίας όπου μπορούν, να χρωματίσουν συμμετρικά σχέδια και να αναγνωρίσουν ότι ένα σχήμα είναι συμμετρικό όταν, αν διπλωθεί στη μέση, τα δύο μισά του συμπίπτουν. Στο ίδιο πλαίσιο εισάγεται και ο άξονας συμμετρίας ως η γραμμή που χωρίζει ένα συμμετρικό σχήμα σε δύο ίδια μισά (ΙΤΥΕ «Διόφαντος», χ.χ.-α). Η συμμετρία, επομένως, παρουσιάζεται αρχικά μέσα

από απλές εικόνες και δραστηριότητες χρωματισμού ή αναγνώρισης, με έμφαση στην οπτική αντίληψη και όχι σε τυπική γεωμετρική αυστηρότητα.

Στη Γ' Δημοτικού, η έννοια επανέρχεται με πιο οργανωμένο τρόπο στην ενότητα «Η συμμετρία». Οι μαθητές ασκούνται στο να διακρίνουν συμμετρικά σχήματα, να βρίσκουν τον άξονα συμμετρίας και να χαράσσουν συμμετρικά σχήματα. Το σχολικό εγχειρίδιο αξιοποιεί δραστηριότητες κοπής και δημιουργίας συμμετρικών σχημάτων, καθώς και εικόνες όπως ο κύκνος στο νερό, όπου η συμμετρία συνδέεται με την αντανάκλαση. Παράλληλα, ζητείται από τους μαθητές να εντοπίσουν συμμετρικές εικόνες που έχουν συναντήσει στο μάθημα της Ιστορίας και να χαράξουν τον άξονα συμμετρίας με τον χάρακα (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-β). Η Γ' Δημοτικού, επομένως, αποτελεί βασικό σημείο για την πρώτη πιο συστηματική διδασκαλία της έννοιας, καθώς οι μαθητές δεν περιορίζονται μόνο στην αναγνώριση, αλλά καλούνται να αιτιολογήσουν οπτικά και να σχεδιάσουν.

Στο τετράδιο εργασιών της Γ' Δημοτικού η συμμετρία εμφανίζεται και μέσα από δραστηριότητες εμπέδωσης, όπως το χρωμάτισμα πεταλούδων με συμμετρικό τρόπο και η χάραξη του άξονα συμμετρίας (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-γ). Οι δραστηριότητες αυτές είναι συμβατές με το ηλικιακό επίπεδο των μαθητών, καθώς αξιοποιούν οικείες αναπαραστάσεις, όπως ζώα, απλά σχέδια και εικόνες. Ωστόσο, η έννοια παραμένει κυρίως συνδεδεμένη με δισδιάστατες αναπαραστάσεις, στατικές εικόνες και έτοιμα σχήματα, τα οποία οι μαθητές καλούνται να παρατηρήσουν ή να συμπληρώσουν.

Στη Δ' Δημοτικού, η συμμετρία επανέρχεται στην ενότητα «Επεξεργάζομαι συμμετρικά σχήματα». Εδώ η έννοια αποκτά πιο σύνθετο γεωμετρικό χαρακτήρα. Οι μαθητές συμπληρώνουν σχέδια ώστε μια δοσμένη ευθεία να λειτουργεί ως άξονας συμμετρίας και διερευνούν τι συμβαίνει όταν το χαρτί διπλωθεί κατά μήκος αυτής της ευθείας. Το σχολικό εγχειρίδιο οδηγεί τους μαθητές στο συμπέρασμα ότι ένα σχήμα μπορεί να έχει περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας και ότι δύο σχήματα συμμετρικά ως προς άξονα είναι ίσα, άρα έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-δ). Στο επίπεδο αυτό, η συμμετρία δεν παρουσιάζεται μόνο ως οπτική ομοιότητα, αλλά συνδέεται με ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων.

Στην Ε' Δημοτικού, η συμμετρία εντάσσεται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο γεωμετρικής μελέτης. Στην ενότητα «Συμμετρία», οι μαθητές ασχολούνται με τον άξονα συμμετρίας και με τη δημιουργία συμμετρικού σχήματος ως προς μια ευθεία. Η διαδικασία περιλαμβάνει τον εντοπισμό της απόστασης σημείων από τον άξονα συμμετρίας και τη σχεδίαση των αντίστοιχων συμμετρικών σημείων σε ίση απόσταση από αυτόν (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-ε). Παράλληλα, τονίζεται ότι ένα σχήμα μπορεί να έχει κανέναν, έναν, δύο ή περισσότερους άξονες συμμετρίας (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-στ). Η προσέγγιση εδώ γίνεται πιο αναλυτική και γεωμετρικά ακριβής, καθώς η συμμετρία συνδέεται με σημεία, αποστάσεις και κατασκευή συμμετρικού σχήματος.

Στη ΣΤ' Δημοτικού, η έννοια εμφανίζεται ως «Αξονική συμμετρία». Η διδασκαλία αποκτά πλέον πιο αφαιρετικό και αναστοχαστικό χαρακτήρα. Οι μαθητές καλούνται να εξετάσουν προτάσεις όπως αν μόνο τα γεωμετρικά σχήματα έχουν άξονα συμμετρίας, αν ο άξονας συμμετρίας τέμνει πάντοτε ένα σχήμα και αν τα δύο μέρη ενός συμμετρικού σχήματος είναι μεταξύ τους ίσα (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-ζ). Έτσι, η συμμετρία δεν αντιμετωπίζεται μόνο ως διαδικασία σχεδίασης, αλλά και ως έννοια που απαιτεί έλεγχο, συζήτηση και επιχειρηματολογία. Επιπλέον, στο τετράδιο εργασιών γίνεται αναφορά στη συμμετρία ως στοιχείο που υπάρχει στην ανθρώπινη δημιουργία, στη λαϊκή τέχνη και στα μοτίβα, γεγονός που δείχνει μια πρώτη διεύρυνση της έννοιας πέρα από τα καθαρά γεωμετρικά σχήματα (ITYE «Διόφαντος», χ.χ.-η).

Από την παραπάνω επισκόπηση προκύπτει ότι η συμμετρία διδάσκεται στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού με σαφή κλιμάκωση. Στις πρώτες τάξεις κυριαρχεί η οπτική και βιωματική αναγνώριση, ενώ στις μεγαλύτερες τάξεις ενισχύεται η γεωμετρική ακρίβεια, η κατασκευή συμμετρικών σχημάτων και η διατύπωση γενικότερων συμπερασμάτων. Η πορεία αυτή είναι παιδαγωγικά εύλογη, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να περάσουν σταδιακά από την εμπειρική παρατήρηση στη μαθηματική κατανόηση.

Ωστόσο, η συνολική προσέγγιση των εγχειριδίων παραμένει σε μεγάλο βαθμό στατική και σχηματική. Η συμμετρία παρουσιάζεται κυρίως μέσα από έτοιμες εικόνες, γεωμετρικά σχήματα, ζωγραφιές, μοτίβα ή δραστηριότητες συμπλήρωσης του μισού. Οι μαθητές καλούνται κυρίως να εντοπίσουν άξονες συμμετρίας, να

συμπληρώσουν συμμετρικά σχέδια ή να αναγνωρίσουν αν μια μορφή είναι συμμετρική. Αν και οι δραστηριότητες αυτές συμβάλλουν στην ανάπτυξη της οπτικοχωρικής σκέψης, η έννοια της συμμετρίας συνδέεται περιορισμένα με αυθεντικές καταστάσεις, με το δομημένο περιβάλλον και με πραγματικά πολιτισμικά παραδείγματα.

Ιδιαίτερα περιορισμένη είναι και η ανάδειξη της αισθητικής διάστασης της συμμετρίας. Στα σχολικά εγχειρίδια η συμμετρία παρουσιάζεται κυρίως ως γεωμετρική σχέση και λιγότερο ως χαρακτηριστικό που συνδέεται με την αρμονία, την ισορροπία, την αναλογία και την αντίληψη του Ωραίου. Ακόμη και όταν γίνεται αναφορά στη φύση, στα μοτίβα ή στη λαϊκή τέχνη, η σύνδεση αυτή δεν αναπτύσσεται συστηματικά ως πεδίο προβληματισμού για τη σχέση των Μαθηματικών με την αισθητική εμπειρία.

Συμπερασματικά, τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού παρέχουν μια συνεπή και παιδαγωγικά οργανωμένη διδασκαλία της συμμετρίας, η οποία εξελίσσεται από τη διαισθητική αναγνώριση έως την αξονική συμμετρία και τη γεωμετρική κατασκευή. Παράλληλα, όμως, η έννοια παραμένει κυρίως εγκλωβισμένη σε δισδιάστατες και στατικές αναπαραστάσεις, ενώ η σύνδεσή της με την πραγματική ζωή, την αρχιτεκτονική και την αισθητική διάσταση του χώρου δεν αποτελεί κεντρικό άξονα της σχολικής προσέγγισης.

4.4 Βιβλιογραφική ανασκόπηση για τη διδασκαλία της συμμετρίας, τη μαθηματική αισθητική και τη σύνδεση των Μαθηματικών με την τέχνη και την αρχιτεκτονική

Η συμμετρία αποτελεί μία από τις βασικές έννοιες της γεωμετρίας στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και συνδέεται άμεσα με την ανάπτυξη της οπτικοχωρικής αντίληψης, της γεωμετρικής σκέψης και της κατανόησης των μετασχηματισμών. Στη διεθνή βιβλιογραφία επισημαίνεται ότι, στο επίπεδο του Δημοτικού, η συμμετρία προσεγγίζεται κυρίως ως κατοπτρική ή αξονική συμμετρία, δηλαδή ως η δυνατότητα ενός σχήματος ή αντικειμένου να χωριστεί σε δύο μέρη που αντιστοιχούν μεταξύ τους ως προς έναν άξονα (Leikin, Berman, & Zaslavsky, 2000; Hoyles & Healy,

1997). Στην ελληνική βιβλιογραφία, η συμμετρία αντιμετωπίζεται επίσης ως θεμελιώδης γεωμετρική έννοια, η οποία συμβάλλει στην ανάπτυξη της χωρικής αντίληψης και της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, ενώ η διδασκαλία της προτείνεται να βασίζεται σε δραστηριότητες διερεύνησης, χειρισμού αντικειμένων και οπτικοποίησης (Κολέζα, 2000; Φιλίππου & Χρίστου, 2001). Η συγκεκριμένη επιλογή θεωρείται παιδαγωγικά κατάλληλη για τις μικρές ηλικίες, καθώς οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τη συμμετρία μέσα από οπτικές, χειραπτικές και βιωματικές δραστηριότητες, όπως η δίπλωση χαρτιού, η χρήση καθρέφτη, η συμπλήρωση μισών σχημάτων και η αναγνώριση συμμετρικών μορφών.

Παρά τη φαινομενική απλότητα της έννοιας, αρκετές έρευνες δείχνουν ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση της αξονικής συμμετρίας. Οι Moravcová, Roboná, Hromadoná και Halas (2021), διερευνώντας την κατανόηση της αξονικής και κεντρικής συμμετρίας από μαθητές διαφορετικών ηλικιών, έδειξαν ότι οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν μη παραδείγματα συμμετρικών σχημάτων, να προσδιορίσουν σωστά τον αριθμό των αξόνων συμμετρίας και να κατασκευάσουν συμμετρικές εικόνες. Η έρευνα αυτή αναδεικνύει ότι η συμμετρία δεν είναι μια έννοια που κατακτάται αυτόματα μέσω της απλής οπτικής παρατήρησης, αλλά απαιτεί συστηματική διδακτική επεξεργασία και ευκαιρίες αιτιολόγησης (Moravcová et al., 2021).

Ανάλογες διαπιστώσεις προκύπτουν και από έρευνες που εστιάζουν στη διδακτική αξιοποίηση ψηφιακών και δυναμικών περιβαλλόντων. Οι Gutiérrez, Jaime και Gutiérrez (2021) παρουσίασαν διδακτική ενότητα για τις συμμετρίες στο επίπεδο, βασισμένη σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, με στόχο την υποστήριξη μαθητών με διαφορετικές ανάγκες μάθησης. Η έρευνα αυτή δείχνει ότι τα δυναμικά ψηφιακά περιβάλλοντα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να διερευνήσουν σχέσεις, να ελέγξουν υποθέσεις και να κατανοήσουν τη συμμετρία όχι ως στατική εικόνα, αλλά ως γεωμετρικό μετασχηματισμό. Παρόμοια, οι Crisci, Dello Iacono και Ferrara Dentice (2024) σχεδίασαν διδακτική ακολουθία για την αξονική συμμετρία στο Δημοτικό, αξιοποιώντας οπτικό προγραμματισμό και δραστηριότητες σε χαρτί. Η έρευνά τους έδειξε ότι ο συνδυασμός ψηφιακών εργαλείων και χειραπτικών

δραστηριοτήτων μπορεί να υποστηρίξει τους μαθητές στη διατύπωση και επικύρωση στρατηγικών για την κατασκευή συμμετρικών εικόνων.

Η διδασκαλία της συμμετρίας έχει επίσης συνδεθεί με την τέχνη και τη δημιουργική έκφραση. Στο πεδίο της μαθηματικής τέχνης, ο Hall (2010) υποστηρίζει ότι η συμμετρία προσφέρει έναν φυσικό σύνδεσμο ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Τέχνη, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να διερευνούν μοτίβα, πλακοστρώσεις, διακοσμητικές μορφές και εικαστικές κατασκευές. Η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει ιδιαίτερη σημασία για τις μικρές ηλικίες, καθώς η καλλιτεχνική δραστηριότητα μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα ανάμεσα στην αφηρημένη μαθηματική έννοια και στη βιωματική εμπειρία των μαθητών. Αντίστοιχα, εκπαιδευτικές εφαρμογές που αξιοποιούν τη συμμετρία μέσα από έργα τέχνης, μοτίβα ή δημιουργικές κατασκευές δείχνουν ότι η έννοια μπορεί να γίνει περισσότερο προσιτή όταν συνδεθεί με οπτικά και αισθητικά ερεθίσματα.

Η σχέση των Μαθηματικών με την αισθητική έχει αναδειχθεί και σε θεωρητικό επίπεδο. Ο Brinkmann (2009) υποστηρίζει ότι η εμπειρία της μαθηματικής ομορφιάς μπορεί να επηρεάσει θετικά τα κίνητρα και τις στάσεις των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, καθώς τους επιτρέπει να δουν το μάθημα όχι μόνο ως σύνολο κανόνων και διαδικασιών, αλλά ως πεδίο δημιουργίας, αρμονίας και νοητικής απόλαυσης. Παράλληλα, η Sinclair (2011) αναδεικνύει τη σημασία της αισθητικής διάστασης στα Μαθηματικά και υποστηρίζει ότι η μαθηματική σκέψη δεν είναι αποκομμένη από αισθητικές κρίσεις, όπως η απλότητα, η αρμονία, η κομψότητα και η δομική συνοχή. Στο ίδιο πλαίσιο, σύγχρονες έρευνες για τη σχέση τέχνης, τεχνολογίας και μαθηματικής μάθησης δείχνουν ότι οι αισθητικές εμπειρίες μπορούν να συμβάλουν στη νοηματοδότηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές (Karavakou, 2023).

Η αισθητική διάσταση των Μαθηματικών έχει ιδιαίτερη σχέση με την έννοια της συμμετρίας. Η συμμετρία συνδέεται ιστορικά με έννοιες όπως η τάξη, η ισορροπία, η κανονικότητα, η αρμονία και το Ωραίο. Ο Weyl (1952) ανέδειξε τη συμμετρία ως κεντρική έννοια που διατρέχει τα Μαθηματικά, τη φύση, την τέχνη και την επιστήμη, ενώ ο Livio (2002) συνέδεσε τη μαθηματική δομή, την αναλογία και τη γεωμετρική τάξη με την ανθρώπινη αναζήτηση της ομορφιάς. Στο εκπαιδευτικό πεδίο, η αξιοποίηση αυτής της σχέσης μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αντιληφθούν ότι

τα Μαθηματικά δεν περιορίζονται στην επίλυση ασκήσεων, αλλά αποτελούν τρόπο κατανόησης και ερμηνείας μορφών που συναντώνται στη φύση, στην τέχνη και στο ανθρώπινο περιβάλλον.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι έρευνες και οι εκπαιδευτικές πρακτικές που συνδέουν τα Μαθηματικά με την αρχιτεκτονική. Η αρχιτεκτονική αποτελεί πεδίο στο οποίο οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν ορατή, υλική και πολιτισμική μορφή. Η γεωμετρία, η αναλογία, η συμμετρία, η κλίμακα και τα μοτίβα αποτελούν βασικά στοιχεία του αρχιτεκτονικού σχεδιασμού. Εκπαιδευτικές προσεγγίσεις που αξιοποιούν την αρχιτεκτονική δείχνουν ότι οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τη χρησιμότητα των Μαθηματικών όταν τα συνδέουν με πραγματικές κατασκευές, σχέδια και χώρους. Για παράδειγμα, σε εκπαιδευτικά προγράμματα γεωμετρίας και αρχιτεκτονικού σχεδιασμού, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν κατόψεις, μοντέλα, σχέδια και προτάσεις που αξιοποιούν γεωμετρικές γνώσεις σε αυθεντικά προβλήματα σχεδιασμού (Edutoria, 2001). Παρότι τέτοιες προσεγγίσεις αναδεικνύουν τη δυναμική σύνδεση Μαθηματικών και αρχιτεκτονικής, συχνά απευθύνονται σε μεγαλύτερες ηλικίες και όχι ειδικά σε μαθητές των μικρών τάξεων του Δημοτικού.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν επίσης παραδείγματα αξιοποίησης της αρχιτεκτονικής ειδικά για τη διδασκαλία της συμμετρίας. Οι Hourigan και Leavy (2017) προτείνουν τη χρήση αρχιτεκτονικών εικόνων για τη διερεύνηση της συμμετρίας, επισημαίνοντας ότι η συμμετρία είναι ορατή στην καθημερινή ζωή, στην τέχνη, στον σχεδιασμό και στα κτίρια. Η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς μεταφέρει τη συμμετρία από το επίπεδο του απομονωμένου γεωμετρικού σχήματος σε ένα αυθεντικό οπτικό περιβάλλον. Παράλληλα, πρόσφατες εκπαιδευτικές δράσεις, όπως το «Symmetry in Mathematics» της Europeana, αξιοποιούν παιχνίδια, έργα τέχνης, τεχνολογία και ομαδική εργασία, ώστε οι μαθητές να αναγνωρίσουν συμμετρικά αντικείμενα και να δημιουργήσουν συμμετρικές μορφές (Europeana, 2024). Ωστόσο, οι δράσεις αυτές έχουν κυρίως χαρακτήρα εκπαιδευτικού σεναρίου ή εφαρμογής και δεν εστιάζουν πάντοτε σε συστηματική ερευνητική διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Σημαντική είναι και η βιβλιογραφία που υποστηρίζει τη διαθεματική σύνδεση Μαθηματικών και Τέχνης. Η έρευνα των Schoevers και συνεργατών (2020) για το πρόγραμμα Mathematics, Arts, and Creativity in Education έδειξε ότι η σύνδεση μαθηματικών και καλλιτεχνικών δραστηριοτήτων μπορεί να έχει θετική επίδραση στις γεωμετρικές ικανότητες και στη δημιουργικότητα μαθητών του Δημοτικού. Η μελέτη αυτή ενισχύει την άποψη ότι οι μαθηματικές έννοιες μπορούν να γίνουν πιο ουσιαστικές όταν διδάσκονται μέσα από δημιουργικά και αισθητικά πλούσια περιβάλλοντα. Παράλληλα, οι σύγχρονες προσεγγίσεις STEM/STEAM υπογραμμίζουν τη σημασία της ένταξης της τέχνης και της δημιουργικότητας στη μαθηματική εκπαίδευση, καθώς βοηθούν τους μαθητές να συνδέσουν τη γνώση με την εμπειρία, την έκφραση και την επίλυση προβλημάτων.

Από τη συνολική επισκόπηση της βιβλιογραφίας προκύπτει ότι η συμμετρία έχει μελετηθεί σε αρκετές κατευθύνσεις: ως γεωμετρική έννοια στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, ως αντικείμενο δυσκολιών και παρανοήσεων των μαθητών, ως πεδίο αξιοποίησης ψηφιακών εργαλείων και ως γέφυρα ανάμεσα στα Μαθηματικά και την Τέχνη. Παράλληλα, έχει αναδειχθεί θεωρητικά η σχέση των Μαθηματικών με την αισθητική, καθώς και η σημασία της αρχιτεκτονικής ως αυθεντικού πεδίου εφαρμογής γεωμετρικών εννοιών. Ωστόσο, δεν φαίνεται να έχει διερευνηθεί επαρκώς μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές Γ' Δημοτικού που να συνδυάζει συστηματικά: α) τη διδασκαλία της αξονικής συμμετρίας, β) την έννοια του Ωραίου στα Μαθηματικά, γ) την ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική ως πεδίο παρατήρησης και εφαρμογής, και δ) τη σύγκριση των αντιλήψεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση μέσω ανοιχτών απαντήσεων, αιτιολογήσεων και σχεδιαστικών δραστηριοτήτων. Το σημείο αυτό συνιστά το ερευνητικό κενό πάνω στο οποίο μπορεί να στηριχθεί η περαιτέρω τεκμηρίωση της παρούσας εργασίας.

4.5 Καινοτομία και συμβολή της παρούσας έρευνας

Από την ανάλυση των Προγραμμάτων Σπουδών, των σχολικών εγχειριδίων και της σχετικής βιβλιογραφίας προκύπτει ότι η συμμετρία αποτελεί μια έννοια με σταθερή παρουσία στη μαθηματική εκπαίδευση του Δημοτικού σχολείου. Τα σύγχρονα Προγράμματα Σπουδών υπογραμμίζουν τη σημασία της διερεύνησης, της σύνδεσης

των μαθηματικών εννοιών με την καθημερινή ζωή και της ανάπτυξης βιωματικών μαθησιακών εμπειριών. Παράλληλα, τα σχολικά εγχειρίδια προσεγγίζουν τη συμμετρία με τρόπο συστηματικό και παιδαγωγικά κλιμακούμενο, δίνοντας έμφαση στην αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων, στον εντοπισμό αξόνων συμμετρίας και στη γεωμετρική επεξεργασία δισδιάστατων αναπαραστάσεων.

Ωστόσο, από τη μελέτη των εγχειριδίων διαπιστώθηκε ότι η συμμετρία παρουσιάζεται κυρίως ως γεωμετρική ιδιότητα σχημάτων και εικόνων. Οι περισσότερες δραστηριότητες επικεντρώνονται σε έτοιμες αναπαραστάσεις, σε ασκήσεις συμπλήρωσης σχημάτων ή σε δραστηριότητες αναγνώρισης αξόνων συμμετρίας. Αντίθετα, η σύνδεση της συμμετρίας με αυθεντικά πολιτισμικά συμφραζόμενα, με το δομημένο περιβάλλον και με την αισθητική εμπειρία των μαθητών εμφανίζεται περιορισμένη.

Αντίστοιχα, η διεθνής και ελληνική βιβλιογραφία έχει αναδείξει τη σημασία της συμμετρίας για την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, έχει μελετήσει τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόησή της και έχει προτείνει ποικίλες διδακτικές προσεγγίσεις, όπως η αξιοποίηση χειραπτικών υλικών, ψηφιακών περιβαλλόντων, καλλιτεχνικών δραστηριοτήτων και αρχιτεκτονικών παραδειγμάτων. Παράλληλα, έχει αναπτυχθεί σημαντικός θεωρητικός προβληματισμός σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με την αισθητική, την αρμονία και το Ωραίο (Weyl, 1952; Livio, 2002; Sinclair, 2011). Παρ' όλα αυτά, εντοπίζονται περιορισμένες έρευνες που να συνδέουν συστηματικά τη διδασκαλία της συμμετρίας με την έννοια του Ωραίου και με συγκεκριμένα παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Η καινοτομία της παρούσας έρευνας έγκειται ακριβώς σε αυτή τη σύνθεση διαφορετικών πεδίων γνώσης. Η συμμετρία δεν αντιμετωπίζεται αποκλειστικά ως γεωμετρική έννοια, αλλά ως στοιχείο που συνδέει τα Μαθηματικά με την αισθητική εμπειρία, την αρχιτεκτονική και τον πολιτισμό. Η διδακτική παρέμβαση αξιοποιεί χαρακτηριστικά παραδείγματα της ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής, μεταφέροντας τη συμμετρία από το επίπεδο του αφηρημένου γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο πραγματικών πολιτισμικών δημιουργημάτων, τα οποία οι μαθητές παρατηρούν, αναλύουν και ερμηνεύουν.

Παράλληλα, η παρούσα έρευνα διαφοροποιείται από πολλές προηγούμενες προσεγγίσεις, καθώς δεν εστιάζει αποκλειστικά στην κατάκτηση γεωμετρικών δεξιοτήτων. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο, στην ανάπτυξη αισθητικών κριτηρίων και στη δυνατότητά τους να αναγνωρίζουν μαθηματικές δομές σε αρχιτεκτονικά έργα. Με τον τρόπο αυτό, η συμμετρία λειτουργεί όχι μόνο ως μαθηματικό αντικείμενο διδασκαλίας, αλλά και ως μέσο προσέγγισης της αισθητικής διάστασης των Μαθηματικών.

Επιπλέον, η έρευνα διαφοροποιείται ως προς τον τρόπο αξιολόγησης της παρέμβασης. Αντί να περιορίζεται σε κλειστού τύπου δοκιμασίες ή σε ποσοτική αποτίμηση της επίδοσης των μαθητών, διερευνά τις αντιλήψεις και τους συλλογισμούς τους μέσω ανοιχτών ερωτήσεων, αιτιολογήσεων και σχεδιαστικών δραστηριοτήτων. Η προσέγγιση αυτή επιτρέπει την ανάδειξη των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές νοηματοδοτούν τη συμμετρία, την αισθητική και την αρχιτεκτονική, προσφέροντας μια βαθύτερη εικόνα της μαθησιακής διαδικασίας.

Συνεπώς, η συμβολή της παρούσας έρευνας δεν περιορίζεται στη διδασκαλία μιας γεωμετρικής έννοιας. Αντίθετα, επιχειρεί να αναδείξει τη δυνατότητα μιας διαθεματικής προσέγγισης που συνδέει τα Μαθηματικά με την Τέχνη, την Αρχιτεκτονική και τον Πολιτισμό, προτείνοντας έναν διαφορετικό τρόπο κατανόησης της συμμετρίας ως στοιχείου που βρίσκεται στον πυρήνα τόσο της μαθηματικής σκέψης όσο και της ανθρώπινης αναζήτησης του Ωραίου.

B' ΜΕΡΟΣ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

5. Μεθοδολογία της έρευνας

5.1 Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας μιας διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία της συμμετρίας σε μαθητές της Γ' Δημοτικού, η οποία βασίστηκε στη σύνδεση της μαθηματικής έννοιας της συμμετρίας με την έννοια του Ωραίου και με χαρακτηριστικά παραδείγματα της ευρωπαϊκής αρχιτεκτονική.

Ειδικότερα, η έρευνα αποσκοπούσε στη διερεύνηση της συμβολής της παρέμβασης στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές, στην ικανότητά τους να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια, καθώς και στη διαμόρφωση των αντιλήψεών τους σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με την αισθητική, την αρμονία και το Ωραίο.

Παράλληλα, επιδιώχθηκε να διερευνηθεί κατά πόσο μια διαθεματική και βιωματική προσέγγιση της συμμετρίας μπορεί να συμβάλει στη σύνδεση των Μαθηματικών με την αρχιτεκτονική και την αισθητική εμπειρία, ενισχύοντας την ουσιαστικότερη κατανόηση της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές.

5.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας έρευνας ήταν τα ακόλουθα:

1. Σε ποιο βαθμό η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές της Γ' Δημοτικού;
2. Σε ποιο βαθμό η διδακτική παρέμβαση βελτίωσε την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια;

3. Σε ποιο βαθμό η διδακτική παρέμβαση επηρέασε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με την έννοια του Ωραίου στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική;

5.3 Ερευνητικός σχεδιασμός

5.3.1. Ερευνητική προσέγγιση

Η παρούσα έρευνα υιοθέτησε ποιοτική ερευνητική προσέγγιση, καθώς στόχος της δεν ήταν η στατιστική μέτρηση της επίδοσης των μαθητών, αλλά η διερεύνηση των αντιλήψεων, των ιδεών και των τρόπων με τους οποίους κατανοούν και ερμηνεύουν την έννοια της συμμετρίας, καθώς και τη σχέση της με την αισθητική και το Ωραίο στην αρχιτεκτονική. Η ποιοτική προσέγγιση κρίθηκε καταλληλότερη, καθώς επέτρεψε τη διερεύνηση των νοημάτων που αποδίδουν οι μαθητές στις μαθηματικές έννοιες, των ερμηνειών τους και των μεταβολών που παρατηρήθηκαν στις αντιλήψεις τους κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης.

Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε με βάση τις αρχές της κοινωνικοπολιτισμικής και κονστρουκτιβιστικής προσέγγισης της μάθησης, σύμφωνα με τις οποίες η γνώση οικοδομείται ενεργά από τους μαθητές μέσα από τη διερεύνηση, την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον και τη συνεργασία με τους συμμαθητές τους. Παράλληλα, αξιοποιήθηκαν στοιχεία βιωματικής και ομαδοσυνεργατικής μάθησης, καθώς οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες, παρατήρησαν αυθεντικά αρχιτεκτονικά παραδείγματα, συζήτησαν τις παρατηρήσεις τους, συμμετείχαν σε δραστηριότητες αναγνώρισης συμμετρικών στοιχείων και πραγματοποίησαν φωτογράφιση κτιρίων του τοπικού περιβάλλοντος. Μέσα από τις δραστηριότητες αυτές οι μαθητές δεν λειτούργησαν ως παθητικοί δέκτες γνώσης αλλά ως ενεργοί συμμετέχοντες στη μαθησιακή διαδικασία, οικοδομώντας σταδιακά την κατανόησή τους για τη συμμετρία και τη σχέση της με την αρχιτεκτονική και την αισθητική.

Επιπλέον, η έρευνα μπορεί να χαρακτηριστεί ως μελέτη περίπτωσης (case study), καθώς επικεντρώνεται στη διερεύνηση ενός συγκεκριμένου εκπαιδευτικού πλαισίου, δηλαδή μιας τάξης Γ' Δημοτικού, μέσα στο φυσικό σχολικό της περιβάλλον. Σύμφωνα με τον Yin (2018), η μελέτη περίπτωσης αποτελεί κατάλληλη ερευνητική

στρατηγική όταν το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην εις βάθος κατανόηση ενός σύγχρονου φαινομένου μέσα στο πραγματικό του πλαίσιο. Στην παρούσα έρευνα το φαινόμενο που διερευνάται είναι η ανάπτυξη της κατανόησης της συμμετρίας και η σύνδεσή της με την έννοια του Ωραίου μέσω μιας καινοτόμου διδακτικής παρέμβασης.

Η επιλογή της μελέτης περίπτωσης κρίθηκε κατάλληλη, καθώς επέτρεψε την αναλυτική εξέταση των αντιλήψεων των μαθητών, των διαδικασιών μάθησης που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της παρέμβασης και των μεταβολών που παρατηρήθηκαν στις απαντήσεις τους πριν και μετά την εφαρμογή της. Παράλληλα, η συγκεκριμένη ερευνητική στρατηγική συνδέεται άμεσα με το θεωρητικό μέρος της εργασίας, στο οποίο παρουσιάστηκαν αντίστοιχες μελέτες περίπτωσης που διερευνούν τη σχέση των μαθηματικών εννοιών με την αρχιτεκτονική και την αισθητική εμπειρία.

Για τη συλλογή των δεδομένων αξιοποιήθηκαν φύλλα αρχικής (pre-test) και τελικής αξιολόγησης (post-test), τα οποία περιλάμβαναν ανοιχτού τύπου ερωτήσεις, δραστηριότητες εντοπισμού αξόνων συμμετρίας σε αρχιτεκτονικά κτίρια, καθώς και δραστηριότητες σχεδίασης και αιτιολόγησης. Η χρήση των εργαλείων αυτών επέτρεψε την καταγραφή όχι μόνο των απαντήσεων των μαθητών αλλά και των συλλογισμών, των ερμηνειών και των αισθητικών τους κριτηρίων.

Η ανάλυση των δεδομένων βασίστηκε στη συγκριτική μελέτη των απαντήσεων των μαθητών πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, με στόχο τη διερεύνηση πιθανών μεταβολών στην κατανόηση της συμμετρίας, στην αναγνώριση συμμετρικών στοιχείων σε αρχιτεκτονικές μορφές και στις αντιλήψεις τους σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο.

5.3.2. Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν δεκατρείς (13) μαθητές της Γ' τάξης ενός δημόσιου Δημοτικού Σχολείου του Ν. Αχαΐας, εκ των οποίων δέκα (10) ήταν αγόρια και τρεις (3) κορίτσια.

Η επιλογή του δείγματος πραγματοποιήθηκε με δειγματοληψία ευκολίας (convenience sampling), καθώς η έρευνα διεξήχθη στο φυσικό σχολικό περιβάλλον στο οποίο η ερευνήτρια είχε πρόσβαση. Οι μαθητές συμμετείχαν στη διδακτική παρέμβαση στο πλαίσιο της σχολικής τους φοίτησης και κατά τη διάρκεια του μαθήματος των Μαθηματικών.

Για τη διεξαγωγή της έρευνας τηρήθηκαν οι βασικές αρχές της ερευνητικής δεοντολογίας. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν ανώνυμα, χωρίς να καταγραφούν προσωπικά στοιχεία των μαθητών, ενώ οι πληροφορίες χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας.

5.3.3. Ερευνητικά εργαλεία

Για τη συλλογή των δεδομένων της παρούσας έρευνας χρησιμοποιήθηκαν τρία βασικά ερευνητικά εργαλεία: α) το φύλλο αρχικής αξιολόγησης (pre-test), β) τα φύλλα εργασίας της διδακτικής παρέμβασης και γ) το φύλλο τελικής αξιολόγησης (post-test).

Το pre-test και το post-test σχεδιάστηκαν ειδικά για τις ανάγκες της έρευνας και είχαν κοινή δομή, ώστε να καταστεί δυνατή η συγκριτική διερεύνηση των αντιλήψεων και των γνώσεων των μαθητών πριν και μετά την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης. Τα δύο φύλλα αξιολόγησης περιλάμβαναν δραστηριότητες που σχετίζονταν με τρεις βασικούς άξονες της έρευνας: α) την κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας, β) την αναγνώριση και τον εντοπισμό αξόνων συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια και γ) τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο.

Ειδικότερα, το φύλλο αξιολόγησης περιλάμβανε δραστηριότητες παρατήρησης και σχολιασμού αρχιτεκτονικών κτιρίων, ερωτήσεις σχετικά με την παρουσία μαθηματικών στοιχείων στις εικόνες που παρουσιάζονταν, δραστηριότητες εντοπισμού αξόνων συμμετρίας σε χαρακτηριστικά παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής, καθώς και δραστηριότητες σχεδίασης ενός «ωραίου» κτιρίου συνοδευόμενες από αιτιολόγηση των επιλογών των μαθητών. Οι ανοιχτού τύπου

ερωτήσεις επέτρεψαν την καταγραφή όχι μόνο των γνώσεων των μαθητών αλλά και των προσωπικών τους αντιλήψεων, ερμηνειών και αισθητικών κριτηρίων.

Παράλληλα, κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης αξιοποιήθηκαν τέσσερα φύλλα εργασίας, τα οποία σχεδιάστηκαν με βάση τις αρχές της διερευνητικής και βιωματικής μάθησης. Οι δραστηριότητές τους περιλάμβαναν συζήτηση γύρω από την έννοια του Ωραίου, παρατήρηση συμμετρικών και μη συμμετρικών μορφών, χρήση καθρέφτη για τη διερεύνηση του άξονα συμμετρίας, εντοπισμό αξόνων συμμετρίας σε γεωμετρικά σχήματα και αρχιτεκτονικά μνημεία, καθώς και δραστηριότητες παρατήρησης συμμετρικών στοιχείων στο άμεσο περιβάλλον των μαθητών.

Η επιλογή των συγκεκριμένων εργαλείων κρίθηκε κατάλληλη για τους σκοπούς της έρευνας, καθώς επέτρεψε τη διερεύνηση τόσο της κατανόησης της μαθηματικής έννοιας της συμμετρίας όσο και των αισθητικών και πολιτισμικών διαστάσεων που συνδέονται με αυτήν. Επιπλέον, η χρήση φύλλων αξιολόγησης πριν και μετά την παρέμβαση παρείχε τη δυνατότητα εντοπισμού πιθανών μεταβολών στις γνώσεις, στις αντιλήψεις και στους συλλογισμούς των μαθητών σχετικά με τη συμμετρία, την αρχιτεκτονική και την έννοια του Ωραίου.

5.3.4. Διαδικασία διεξαγωγής της έρευνας

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το σχολικό έτος 2025-2026 ενός δημόσιου Δημοτικού Σχολείου του Ν. Αχαΐας, και αναπτύχθηκε σε τρεις διαδοχικές φάσεις: την αρχική αξιολόγηση, τη διδακτική παρέμβαση και την τελική αξιολόγηση.

Κατά την πρώτη φάση χορηγήθηκε στους μαθητές το φύλλο αρχικής αξιολόγησης (pre-test), με σκοπό τη διερεύνηση των αρχικών γνώσεων, αντιλήψεων και ιδεών τους σχετικά με την έννοια της συμμετρίας, την αναγνώριση συμμετρικών στοιχείων σε αρχιτεκτονικές μορφές και τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο. Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ανοιχτού τύπου ερωτήσεις, να εντοπίσουν άξονες συμμετρίας σε εικόνες κτιρίων και να αιτιολογήσουν τις αισθητικές τους επιλογές.

Μία εβδομάδα μετά την ολοκλήρωση της αρχικής αξιολόγησης ξεκίνησε η εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης. Η παρέμβαση είχε συνολική διάρκεια έξι (6) διδακτικών ωρών και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών. Οι

δραστηριότητες οργανώθηκαν με βάση τις αρχές της διερευνητικής και βιωματικής μάθησης και περιλάμβαναν την προσέγγιση της έννοιας του Ωραίου, τη διερεύνηση της συμμετρίας μέσω κατάλληλων φύλλων εργασίας, την παρατήρηση χαρακτηριστικών παραδειγμάτων ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής, καθώς και δραστηριότητες στο άμεσο περιβάλλον των μαθητών. Στο πλαίσιο αυτό πραγματοποιήθηκε και φωτογράφιση κτιρίων της γειτονιάς και του σχολικού περιβάλλοντος, με στόχο τον εντοπισμό και τη μελέτη συμμετρικών στοιχείων σε αυθεντικά αρχιτεκτονικά παραδείγματα.

Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης χορηγήθηκε στους μαθητές το φύλλο τελικής αξιολόγησης (post-test), το οποίο ήταν ταυτόσημο με το φύλλο της αρχικής αξιολόγησης. Η χρήση του ίδιου εργαλείου επέτρεψε τη συγκριτική μελέτη των απαντήσεων των μαθητών πριν και μετά την παρέμβαση και τη διερεύνηση πιθανών μεταβολών στην κατανόηση της συμμετρίας, στην ικανότητα αναγνώρισης αξόνων συμμετρίας σε αρχιτεκτονικά κτίρια και στις αντιλήψεις τους σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με την αισθητική, την αρμονία και το Ωραίο.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τα φύλλα αξιολόγησης αναλύθηκαν ποιοτικά, με έμφαση στις απαντήσεις, στις αιτιολογήσεις και στα σχέδια των μαθητών, προκειμένου να διερευνηθούν οι τρόποι με τους οποίους νοηματοδότησαν την έννοια της συμμετρίας και τη σύνδεσή της με την αρχιτεκτονική και την αισθητική εμπειρία.

5.4 Σχεδιασμός και υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης

5.4.1. Θεωρητικό πλαίσιο σχεδιασμού της διδακτικής παρέμβασης

Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε με βάση το μοντέλο οργάνωσης της διδασκαλίας που προτείνουν οι Καραντζή και Μάνεσης (2013), σύμφωνα με το οποίο η μαθησιακή διαδικασία αναπτύσσεται μέσα από διαδοχικά στάδια που ευνοούν την ενεργητική συμμετοχή των μαθητών, τη διερεύνηση, τη διατύπωση συμπερασμάτων και τον αναστοχασμό. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο μοντέλο, η διδασκαλία οργανώνεται στα ακόλουθα στάδια: α) προετοιμασία – εισαγωγική δραστηριότητα, β) επαφή με τα νέα δεδομένα, επεξεργασία δεδομένων και εξαγωγή συμπερασμάτων, γ)

εφαρμογή και εμπέδωση της νέας γνώσης, δ) αναστοχασμός και ανακεφαλαίωση και ε) αξιολόγηση της διδασκαλίας.

Η επιλογή του συγκεκριμένου διδακτικού μοντέλου κρίθηκε κατάλληλη για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να προσεγγίσουν τη μαθηματική έννοια της συμμετρίας όχι ως μια απομονωμένη γεωμετρική έννοια, αλλά ως στοιχείο που συνδέεται με την αισθητική εμπειρία, την αρχιτεκτονική και το πολιτισμικό περιβάλλον. Παράλληλα, δίνει τη δυνατότητα αξιοποίησης βιωματικών και διερευνητικών δραστηριοτήτων, οι οποίες ενισχύουν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών και συμβάλλουν στην ουσιαστική οικοδόμηση της γνώσης.

Η διδακτική παρέμβαση είχε συνολική διάρκεια έξι (6) διδακτικών ωρών και υλοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος των Μαθηματικών. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με γνώμονα τη σταδιακή μετάβαση των μαθητών από την προσωπική και διαισθητική αντίληψη του Ωραίου στη διερεύνηση της συμμετρίας ως μαθηματικής έννοιας και, στη συνέχεια, στη σύνδεσή της με χαρακτηριστικά παραδείγματα της ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής.

Πιο συγκεκριμένα, η παρέμβαση ξεκίνησε με δραστηριότητες προβληματισμού σχετικά με την έννοια του Ωραίου και την αισθητική κρίση. Στη συνέχεια οι μαθητές οδηγήθηκαν στη διερεύνηση της συμμετρίας μέσω παρατήρησης εικόνων, χρήσης καθρέφτη και αναγνώρισης αξόνων συμμετρίας σε γεωμετρικά σχήματα και μορφές. Ακολούθως, η έννοια μεταφέρθηκε σε αυθεντικά παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής, όπου οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν συμμετρικά στοιχεία και να συσχετίσουν τη συμμετρία με την αρμονία και την αισθητική των κτιρίων. Τέλος, πραγματοποιήθηκαν δραστηριότητες παρατήρησης και φωτογράφισης κτιρίων στο άμεσο περιβάλλον των μαθητών, ώστε να αναγνωρίσουν τη συμμετρία σε πραγματικές κατασκευές και να συνδέσουν τη μαθηματική γνώση με την καθημερινή τους εμπειρία.

5.4.2. Σκοπός και στόχοι της διδακτικής παρέμβασης

Σκοπός της διδακτικής παρέμβασης ήταν η προσέγγιση της έννοιας της συμμετρίας μέσα από τη σύνδεσή της με την αισθητική διάσταση των Μαθηματικών και την

ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική, ώστε οι μαθητές να κατανοήσουν ότι οι μαθηματικές έννοιες δεν αποτελούν αφηρημένες και απομονωμένες γνώσεις, αλλά συνδέονται με τον κόσμο που τους περιβάλλει, με την τέχνη, τον πολιτισμό και την ανθρώπινη δημιουργία.

Ειδικότερα, οι γνωστικοί στόχοι της παρέμβασης ήταν οι μαθητές:

- να κατανοήσουν την έννοια της συμμετρίας,
- να αναγνωρίζουν συμμετρικά και μη συμμετρικά σχήματα,
- να εντοπίζουν και να σχεδιάζουν άξονες συμμετρίας,
- να αναγνωρίζουν τη συμμετρία σε αρχιτεκτονικά κτίρια,
- να συνδέσουν τη συμμετρία με την έννοια της αρμονίας και του Ωραίου,
- να αναγνωρίζουν την παρουσία μαθηματικών στοιχείων σε πολιτισμικά δημιουργήματα.

Παράλληλα, επιδιώχθηκε οι μαθητές:

- να αναπτύξουν δεξιότητες παρατήρησης και διερεύνησης,
- να εκφράζουν και να αιτιολογούν τις απόψεις τους,
- να συνεργάζονται αποτελεσματικά με τους συμμαθητές τους,
- να αναπτύξουν θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά,
- να αντιληφθούν τη σύνδεση των Μαθηματικών με την καθημερινή ζωή, την τέχνη και την αρχιτεκτονική.

5.4.3. Προαπαιτούμενες γνώσεις

Πριν από την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί βασικές γεωμετρικές έννοιες, όπως τα επίπεδα σχήματα και ορισμένες στοιχειώδεις γεωμετρικές ιδιότητές τους. Επιπλέον, είχαν έρθει σε μια πρώτη επαφή με την έννοια της συμμετρίας μέσα από τις δραστηριότητες του σχολικού εγχειριδίου της Γ' Δημοτικού.

Ωστόσο, η προηγούμενη αυτή γνώση αφορούσε κυρίως την αναγνώριση συμμετρικών σχημάτων και τον εντοπισμό αξόνων συμμετρίας σε απλές δισδιάστατες

αναπαραστάσεις. Δεν είχε προηγηθεί συστηματική σύνδεση της συμμετρίας με την αρχιτεκτονική, την αισθητική εμπειρία ή την έννοια του Ωραίου. Για τον λόγο αυτό, η παρέμβαση σχεδιάστηκε ώστε να αξιοποιήσει τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών και ταυτόχρονα να διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της συμμετρίας σε αυθεντικά πολιτισμικά και αρχιτεκτονικά συμφραζόμενα.

5.4.4. Περιγραφή των διδακτικών φάσεων

➤ **Φάση 1: Προετοιμασία – Εισαγωγική δραστηριότητα**

Η παρέμβαση ξεκίνησε με συζήτηση γύρω από την έννοια του Ωραίου. Οι μαθητές κλήθηκαν να εκφράσουν τις προσωπικές τους απόψεις σχετικά με το τι θεωρούν όμορφο και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν εικόνες συμμετρικών και μη συμμετρικών προσώπων και ζητήθηκε από τους μαθητές να σχολιάσουν ποια θεωρούν πιο όμορφα και για ποιους λόγους. Μέσα από τη διαδικασία αυτή επιχειρήθηκε να δημιουργηθεί ένας αρχικός προβληματισμός σχετικά με τη σχέση ανάμεσα στη συμμετρία και την αισθητική.

➤ **Φάση 2: Επαφή με τα νέα δεδομένα – Επεξεργασία και εξαγωγή συμπερασμάτων**

Στη δεύτερη φάση οι μαθητές διερεύνησαν την έννοια της συμμετρίας μέσα από βιωματικές δραστηριότητες. Αξιοποιήθηκαν εικόνες, σχήματα και καθρέφτες, ώστε οι μαθητές να ανακαλύψουν εμπειρικά τον άξονα συμμετρίας και να διαπιστώσουν τότε δύο μέρη ενός σχήματος είναι συμμετρικά. Στη συνέχεια εργάστηκαν με γεωμετρικά σχήματα και παραδείγματα από τη φύση και οδηγήθηκαν σταδιακά στη διατύπωση συμπερασμάτων σχετικά με τα χαρακτηριστικά των συμμετρικών μορφών.

➤ **Φάση 3: Εφαρμογή και εμπέδωση της νέας γνώσης**

Αφού οι μαθητές κατανόησαν τη βασική έννοια της συμμετρίας, η διδασκαλία μεταφέρθηκε σε παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής. Μέσα από φωτογραφίες χαρακτηριστικών κτιρίων κλήθηκαν να εντοπίσουν άξονες συμμετρίας, να αναγνωρίσουν γεωμετρικά στοιχεία και να συζητήσουν τον ρόλο της συμμετρίας στην αισθητική των κτιρίων. Η εφαρμογή της γνώσης επεκτάθηκε και στο άμεσο

περιβάλλον των μαθητών μέσω δραστηριοτήτων παρατήρησης και φωτογράφισης κτιρίων της γειτονιάς και του σχολικού περιβάλλοντος.

➤ **Φάση 4: Αναστοχασμός και ανακεφαλαίωση**

Στην τέταρτη φάση πραγματοποιήθηκε συζήτηση και αναστοχασμός σχετικά με όσα είχαν διδαχθεί οι μαθητές. Κλήθηκαν να αναφέρουν παραδείγματα συμμετρίας που εντόπισαν στο περιβάλλον τους και να εξηγήσουν με ποιον τρόπο η συμμετρία συνδέεται με την έννοια της αρμονίας και του Ωραίου. Η διαδικασία αυτή συνέβαλε στην ανακεφαλαίωση των βασικών εννοιών και στη σύνδεση της νέας γνώσης με τις προσωπικές εμπειρίες των μαθητών.

➤ **Φάση 5: Αξιολόγηση**

Η τελευταία φάση περιλάμβανε τη χορήγηση του φύλλου τελικής αξιολόγησης (post-test). Οι μαθητές απάντησαν στις ίδιες δραστηριότητες που είχαν συμπληρώσει κατά την αρχική αξιολόγηση, γεγονός που επέτρεψε τη συγκριτική μελέτη των απαντήσεών τους πριν και μετά την παρέμβαση. Μέσα από τη διαδικασία αυτή διερευνήθηκαν πιθανές μεταβολές στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας, στην αναγνώριση αξόνων συμμετρίας σε αρχιτεκτονικά κτίρια και στις αντιλήψεις τους σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο.

5.5 Ηθικές και δεοντολογικές διαστάσεις της έρευνας

Η παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε σύμφωνα με τις βασικές αρχές της ερευνητικής δεοντολογίας που διέπουν τις εκπαιδευτικές έρευνες και ιδιαίτερα εκείνες που αφορούν ανήλικους μαθητές. Πριν από την έναρξη της έρευνας εξασφαλίστηκε η έγκριση του Διευθυντή του σχολείου για την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης και τη διεξαγωγή της έρευνας στο σχολικό περιβάλλον.

Παράλληλα, οι γονείς και κηδεμόνες των μαθητών ενημερώθηκαν σχετικά με τον σκοπό, τη διαδικασία και τους στόχους της έρευνας και έδωσαν τη συγκατάθεσή τους για τη συμμετοχή των παιδιών τους. Η συμμετοχή των μαθητών ήταν εθελοντική και πραγματοποιήθηκε αποκλειστικά στο πλαίσιο της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Κατά τη συλλογή και ανάλυση των δεδομένων τηρήθηκε η αρχή της ανωνυμίας και της εμπιστευτικότητας. Δεν καταγράφηκαν ονοματεπώνυμα ή άλλα προσωπικά στοιχεία των μαθητών, ενώ όλα τα δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν αποκλειστικά για ερευνητικούς σκοπούς. Οι απαντήσεις των μαθητών κωδικοποιήθηκαν με τρόπο που να μην επιτρέπει την ταυτοποίησή τους.

Επιπλέον, η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε με σεβασμό στις εκπαιδευτικές ανάγκες και τα δικαιώματα των μαθητών, χωρίς να διαταράσσεται η ομαλή λειτουργία της σχολικής τάξης και χωρίς να προκαλείται οποιαδήποτε μορφή διάκρισης ή αποκλεισμού. Η συμμετοχή των μαθητών στις δραστηριότητες αποσκοπούσε αποκλειστικά στη μαθησιακή τους ενίσχυση και στην επίτευξη των στόχων της έρευνας.

6. Αποτελέσματα

6.1 Αποτελέσματα σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας (EE1)

Το *πρώτο ερευνητικό ερώτημα* της παρούσας έρευνας αφορούσε τη διερεύνηση του βαθμού στον οποίο η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές της Γ' Δημοτικού.

Για τη διερεύνηση του συγκεκριμένου ερωτήματος αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση Δ1.2 του pre-test και του post-test, στην οποία καλούνταν να εντοπίσουν και να περιγράψουν μαθηματικά στοιχεία σε ένα αρχιτεκτονικό κτίριο (βλ. Πίνακα 1).

Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν αν υπάρχουν «κρυμμένα» μαθηματικά σε μια φωτογραφία εξωτερικά από το Θέατρο Μπολσόι της Μόσχας που τους δινόταν (βλ. Παράρτημα Α, δραστηριότητα 1.2).

Κατηγορία απάντησης	Pre-test	Post-test
Δεν αναγνωρίζει μαθηματικά στοιχεία	8	0
Δηλώνει αβεβαιότητα ή άγνοια	2	0
Αναφέρει μόνο αριθμητικά στοιχεία (κολόνες, άλογα κ.ά.)	3	0
Αναφέρει γεωμετρικά σχήματα	1	11
Αναφέρει τη συμμετρία	0	9
Αναφέρει άξονα συμμετρίας	0	6

Πίνακας 1. Απαντήσεις μαθητών σχετικά με την αναγνώριση μαθηματικών στοιχείων σε αρχιτεκτονικό κτίριο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (N=13)

Να σημειωθεί ότι στον παραπάνω πίνακα ορισμένοι μαθητές αναφέρθηκαν σε περισσότερες από μία κατηγορίες απαντήσεων, επομένως οι συχνότητες δεν είναι αθροιστικές.

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τις κατηγορίες απαντήσεων των μαθητών σχετικά με την ύπαρξη μαθηματικών στοιχείων σε ένα αρχιτεκτονικό κτίριο πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση. Από τα δεδομένα προκύπτει σαφής μεταβολή στον τρόπο με

τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τα μαθηματικά στοιχεία της αρχιτεκτονικής. Ενώ πριν από την παρέμβαση οι περισσότεροι μαθητές είτε δεν αναγνώριζαν μαθηματικά στοιχεία είτε τα συνέδεαν αποκλειστικά με την καταμέτρηση αντικειμένων, μετά την παρέμβαση η πλειονότητα αναγνώριζε γεωμετρικά σχήματα, συμμετρικές μορφές και άξονες συμμετρίας.

Η ανάλυση των απαντήσεων του pre-test έδειξε ότι οι μαθητές δυσκολεύονταν να συνδέσουν τα μαθηματικά με την αρχιτεκτονική. Οι περισσότερες απαντήσεις εστίαζαν σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των εικόνων ή στην καταμέτρηση στοιχείων του κτιρίου. Χαρακτηριστικά, ο Μαθητής 2 ανέφερε ότι στο κτίριο υπάρχουν «8 κολόνες και 4 άλογα», ενώ ο Μαθητής 5 απάντησε ότι «δεν υπάρχουν μαθηματικά». Αντίστοιχα, ο Μαθητής 8 δήλωσε ότι «δεν ξέρω», γεγονός που δείχνει ότι η αναγνώριση μαθηματικών στοιχείων στο δομημένο περιβάλλον δεν αποτελούσε μέρος της προηγούμενης εμπειρίας των μαθητών.

Οι απαντήσεις αυτές υποδηλώνουν ότι πριν από την παρέμβαση οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τα μαθηματικά κυρίως ως διαδικασία μέτρησης ή υπολογισμού και όχι ως τρόπο ερμηνείας μορφών και δομών που υπάρχουν στην καθημερινή ζωή και στην αρχιτεκτονική.

Η εικόνα διαφοροποιήθηκε σημαντικά μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης. Στο post-test οι μαθητές αναγνώρισαν με μεγαλύτερη ευκολία την παρουσία μαθηματικών στοιχείων στα κτίρια και χρησιμοποίησαν όρους που σχετίζονται με τη γεωμετρία και τη συμμετρία. Ενδεικτικά, ο Μαθητής 1 ανέφερε ότι «υπάρχουν μαθηματικά. Υπάρχουν γεωμετρικά σχήματα και άξονας συμμετρίας», ενώ ο Μαθητής 3 σημείωσε ότι «βλέπω τρίγωνα, ορθογώνια και συμμετρία». Αντίστοιχα, ο Μαθητής 7 απάντησε ότι «υπάρχουν γεωμετρικά σχήματα και συμμετρία στο κτίριο».

Ιδιαίτερα χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις μαθητών που χρησιμοποίησαν ρητά την έννοια του άξονα συμμετρίας. Ο Μαθητής 8 ανέφερε ότι «υπάρχει άξονας συμμετρίας στη μέση του κτιρίου», ο Μαθητής 11 σημείωσε ότι «το κτίριο έχει συμμετρία και άξονες συμμετρίας», ενώ ο Μαθητής 13 παρατήρησε ότι «οι δύο πλευρές του κτιρίου είναι ίδιες επειδή υπάρχει άξονας συμμετρίας».

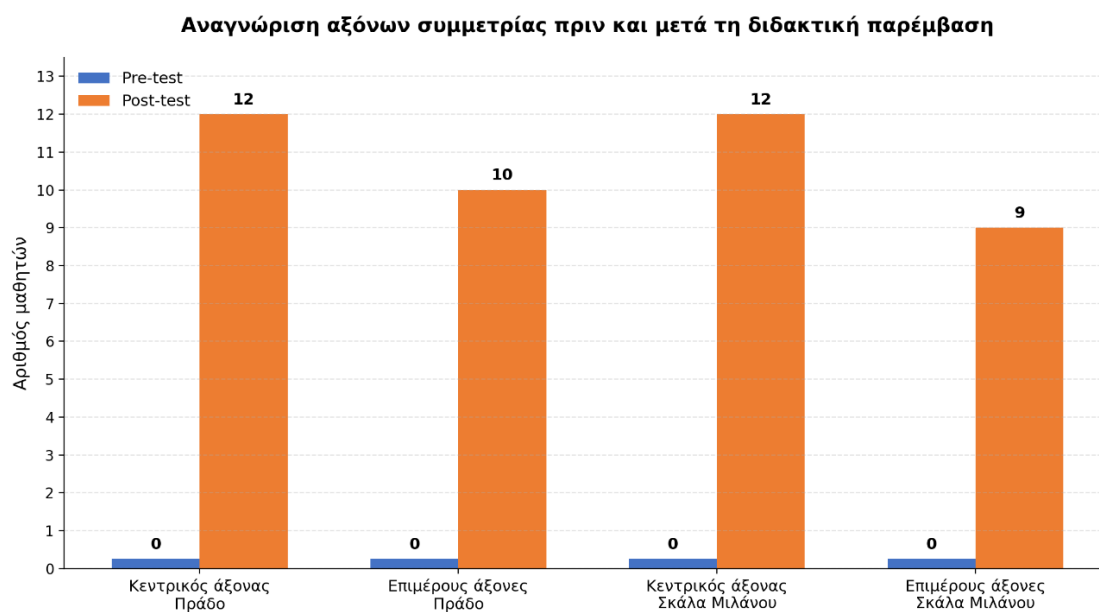
Παράλληλα, αρκετοί μαθητές χρησιμοποίησαν όρους που δεν εμφανίζονταν καθόλου στις αρχικές τους απαντήσεις, όπως «συμμετρία», «άξονας συμμετρίας», «γεωμετρικά σχήματα» και «ίδιες πλευρές». Η μεταβολή αυτή δείχνει ότι οι μαθητές δεν περιορίστηκαν στην απομνημόνευση μιας νέας μαθηματικής έννοιας, αλλά ανέπτυξαν την ικανότητα να την αναγνωρίζουν και να την εφαρμόζουν στην παρατήρηση πραγματικών αρχιτεκτονικών μορφών.

Συνολικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε ουσιαστικά στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές της Γ' Δημοτικού. Μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης οι μαθητές ήταν σε θέση να αναγνωρίζουν μαθηματικά στοιχεία σε αρχιτεκτονικά κτίρια, να χρησιμοποιούν κατάλληλη μαθηματική ορολογία και να συνδέουν τη συμμετρία με πραγματικά παραδείγματα του δομημένου περιβάλλοντος. Η μετατόπιση αυτή υποδηλώνει ότι η συμμετρία έπαψε να αποτελεί μια αφηρημένη γεωμετρική έννοια και μετατράπηκε σε εργαλείο παρατήρησης και ερμηνείας της αρχιτεκτονικής πραγματικότητας. Τα αποτελέσματα αυτά απαντούν θετικά στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα, καθώς δείχνουν ότι η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε ουσιαστικά στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές

6.2 Αποτελέσματα σχετικά με την αναγνώριση αξόνων συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια (EE2)

Το *δεύτερο ερευνητικό ερώτημα* της παρούσας έρευνας αφορούσε τη διερεύνηση του βαθμού στον οποίο η διδακτική παρέμβαση βελτίωσε την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια.

Για τη διερεύνηση του συγκεκριμένου ερωτήματος αξιοποιήθηκαν δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής, το Μουσείο Πράδο της Ισπανίας και η Σκάλα του Μιλάνου στην Ιταλία. Οι μαθητές κλήθηκαν να παρατηρήσουν τα κτίρια και για κάθε εικόνα να βρουν και να χαράξουν άξονες συμμετρίας στις όψεις των κτιρίων -εφόσον υπάρχουν- και να εξηγήσουν τις επιλογές τους (βλ. Παράρτημα Α, δραστηριότητα 2).



Γράφημα 1. Αναγνώριση αξόνων συμμετρίας στα δύο αρχιτεκτονικά κτίρια πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση (N=13)

Όπως προκύπτει από τα δεδομένα του Γραφήματος 1, πριν από την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης κανένας μαθητής δεν αναγνώρισε τον κεντρικό ή επιμέρους άξονα συμμετρίας ούτε στο Μουσείο Πράδο ούτε στη Σκάλα του Μιλάνου. Οι περισσότεροι μαθητές είτε άφησαν τη δραστηριότητα αναπάντητη είτε δεν κατάφεραν να εντοπίσουν τα συμμετρικά χαρακτηριστικά των κτιρίων. Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι, παρόλο που οι μαθητές είχαν προηγουμένως διδαχθεί τη συμμετρία στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος, δυσκολεύονταν να εφαρμόσουν τη γνώση αυτή σε πραγματικά αρχιτεκτονικά παραδείγματα.

Μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης παρατηρήθηκε σημαντική βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών. Συγκεκριμένα, δώδεκα από τους δεκατρείς μαθητές αναγνώρισαν τον κεντρικό άξονα συμμετρίας τόσο στο Μουσείο Πράδο όσο και στη Σκάλα του Μιλάνου. Παράλληλα, δέκα μαθητές αναγνώρισαν επιμέρους άξονες συμμετρίας στο Μουσείο Πράδο και εννέα μαθητές στη Σκάλα του Μιλάνου.

Οι απαντήσεις των μαθητών δείχνουν ότι μετά την παρέμβαση δεν περιορίστηκαν μόνο στον εντοπισμό ενός κεντρικού άξονα, αλλά άρχισαν να παρατηρούν τη συνολική συμμετρική οργάνωση των κτιρίων. Χαρακτηριστικά, ο Μαθητής 3

ανέφερε ότι «το κτίριο έχει έναν μεγάλο άξονα στη μέση και άλλους μικρότερους στα παράθυρα», ενώ ο Μαθητής 7 σημείωσε ότι «οι δύο πλευρές του κτιρίου είναι ίδιες και γι' αυτό υπάρχει άξονας συμμετρίας». Αντίστοιχα, ο Μαθητής 11 παρατήρησε ότι «όταν χωρίσουμε το κτίριο στη μέση, τα δύο μέρη ταιριάζουν ακριβώς».

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές αναγνώρισαν περισσότερους από έναν επιμέρους άξονες συμμετρίας σε αρχιτεκτονικά στοιχεία των κτιρίων, όπως στα παράθυρα, στις πόρτες και στα διακοσμητικά στοιχεία των όψεων. Το εύρημα αυτό υποδηλώνει ότι οι μαθητές δεν αρκέστηκαν στην εφαρμογή μιας μηχανικής διαδικασίας εντοπισμού γραμμών συμμετρίας, αλλά ανέπτυξαν βαθύτερη κατανόηση της έννοιας και μπόρεσαν να την εφαρμόσουν σε σύνθετες αρχιτεκτονικές μορφές.

Παράλληλα, οι μαθητές χρησιμοποίησαν στις απαντήσεις τους όρους όπως «άξονας συμμετρίας», «ίδιες πλευρές», «χωρίζεται στη μέση» και «συμμετρικά μέρη», γεγονός που δείχνει ότι η αναγνώριση της συμμετρίας συνοδεύτηκε και από την ανάπτυξη κατάλληλης μαθηματικής ορολογίας. Σε αντίθεση με το pre-test, όπου η έννοια της συμμετρίας δεν εμφανιζόταν στις απαντήσεις των μαθητών, στο post-test οι μαθητές ήταν σε θέση να αιτιολογούν τις επιλογές τους με βάση συγκεκριμένα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των κτιρίων.

Συνολικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε ουσιαστικά στη βελτίωση της ικανότητας των μαθητών να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια. Η μετάβαση από την πλήρη αδυναμία αναγνώρισης αξόνων συμμετρίας στο pre-test στην επιτυχή αναγνώριση τόσο κεντρικών όσο και επιμέρους αξόνων στο post-test υποδηλώνει σημαντική ενίσχυση της γεωμετρικής κατανόησης των μαθητών και της δυνατότητάς τους να εφαρμόζουν τη μαθηματική γνώση σε αυθεντικά παραδείγματα του δομημένου περιβάλλοντος. Επομένως, τα αποτελέσματα απαντούν θετικά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, καθώς οι μαθητές εμφάνισαν σημαντική βελτίωση στην αναγνώριση και τον εντοπισμό αξόνων συμμετρίας σε διαφορετικά παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής

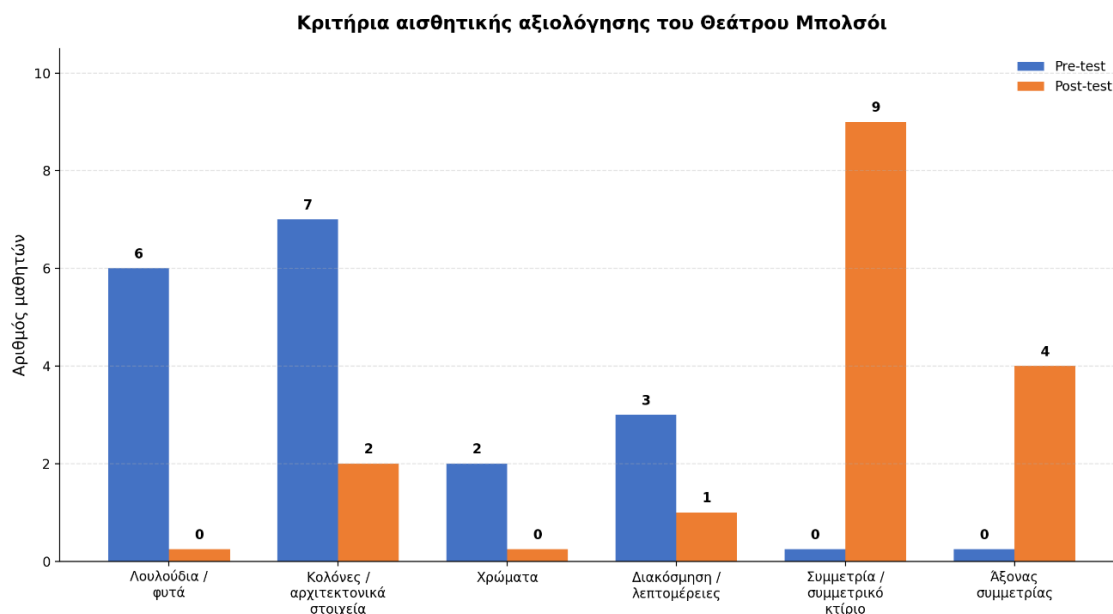
6.3 Αποτελέσματα σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο (ΕΕ3)

Το *τρίτο ερευνητικό ερώτημα* της παρούσας έρευνας αφορούσε τη διερεύνηση του βαθμού στον οποίο η διδακτική παρέμβαση επηρέασε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με την έννοια του Ωραίου στην ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική.

Για τη διερεύνηση του συγκεκριμένου ερωτήματος αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών: (α) στη δραστηριότητα Δ1.1 των φύλλων αξιολόγησης (πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση), στην οποία κλήθηκαν να παρατηρήσουν το κτίριο του Θεάτρου Μπολσόι στη Μόσχα και να αιτιολογήσουν εάν το θεωρούν όμορφο (ερώτ. Σας αρέσει αυτό το κτίριο; Εξηγήστε.) (βλ. Παράρτημα Α, δραστηριότητα 1.1), καθώς και (β) στη δραστηριότητα 3 των φύλλων αξιολόγησης (πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση), όπου αναλύθηκαν οι ζωγραφιές ενός «Ωραίου» κτιρίου που δημιούργησαν οι μαθητές και οι αιτιολογήσεις που συνόδευαν τα σχέδιά τους (ερώτ. Στο παρακάτω πλαίσιο, να σχεδιάσετε ένα δικό σας «Ωραίο» κτίριο. Εν συνεχεία, να εξηγήσετε γιατί το θεωρείτε «Ωραίο». Τι είναι αυτό που το κάνει να είναι όμορφο;) (βλ. Παράρτημα Α, δραστηριότητα 3).

6.3.1. Αισθητική αξιολόγηση του Θεάτρου Μπολσόι

Το Γράφημα 2 παρουσιάζει τα κριτήρια που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν γιατί θεωρούν όμορφο το Θέατρο Μπολσόι τόσο πριν όσο και μετά τη διδακτική παρέμβαση.



Γράφημα 2. Κριτήρια αισθητικής αξιολόγησης του Θεάτρου Μπολσόι πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση

Όπως προκύπτει από τα δεδομένα του Γραφήματος 2, πριν από τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές αξιολογούσαν την αισθητική του κτιρίου κυρίως με βάση εξωτερικά και διακοσμητικά χαρακτηριστικά. Οι συχνότερες αναφορές αφορούσαν τα λουλούδια, τις κολόνες, τα χρώματα και διάφορες διακοσμητικές λεπτομέρειες της πρόσοψης.

Χαρακτηριστικά, ο Μαθητής 3 ανέφερε ότι το κτίριο του αρέσει «γιατί έχει πολλά λουλούδια με κόκκινο και άσπρο», ενώ ο Μαθητής 8 σημείωσε ότι του αρέσει «γιατί έχει λουλούδια, παγκάκια και άλογα». Αντίστοιχα, ο Μαθητής 10 τόνισε ότι το κτίριο είναι όμορφο επειδή «τα χρώματα είναι ωραία και τα λουλούδια τέλεια».

Στο pre-test δεν καταγράφηκε καμία αναφορά στη συμμετρία ή στον άξονα συμμετρίας ως στοιχείο αισθητικής αξιολόγησης.

Αντίθετα, μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης παρατηρήθηκε σαφής μεταβολή στα κριτήρια που χρησιμοποιούσαν οι μαθητές για να αιτιολογήσουν την ομορφιά του κτιρίου. Οι περισσότεροι μαθητές αναφέρθηκαν πλέον στη συμμετρία και στη συμμετρική οργάνωση του κτιρίου, ενώ αρκετοί χρησιμοποίησαν ρητά τον όρο «άξονας συμμετρίας».

Ενδεικτικά, ο Μαθητής 2 ανέφερε ότι το κτίριο είναι όμορφο «γιατί έχει συμμετρία», ο Μαθητής 6 σημείωσε ότι πρόκειται για «ένα όμορφο κτίριο με συμμετρία», ενώ ο Μαθητής 11 δήλωσε ότι του αρέσει «γιατί είναι συμμετρικό». Παράλληλα, ο Μαθητής 3 ανέφερε ότι το κτίριο είναι όμορφο «γιατί έχει άξονα συμμετρίας».

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές άρχισαν να χρησιμοποιούν τη συμμετρία ως αισθητικό κριτήριο αξιολόγησης της αρχιτεκτονικής μορφής και όχι μόνο ως μια μαθηματική έννοια που διδάσκεται στο σχολείο.

6.3.2. Σχεδίαση και αιτιολόγηση ενός «ωραίου κτιρίου»

Η διερεύνηση της σχέσης της συμμετρίας με το Ωραίο πραγματοποιήθηκε και μέσω της δραστηριότητας σχεδίασης ενός «ωραίου κτιρίου» (Δραστηριότητα 3 του Φύλλου Αξιολόγησης). Οι μαθητές κλήθηκαν να σχεδιάσουν ένα κτίριο που θεωρούσαν όμορφο και να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους.

Η ανάλυση των σχεδίων και των αιτιολογήσεων του pre-test έδειξε ότι οι μαθητές συνέδεαν την ομορφιά κυρίως με στοιχεία όπως τα λουλούδια, οι κολόνες, τα παράθυρα, οι διακοσμητικές λεπτομέρειες ή η προσωπική τους προτίμηση. Χαρακτηριστικά, ο Μαθητής 8 ανέφερε ότι το κτίριό του είναι όμορφο «γιατί το έφτιαξα εγώ και είναι από τη φαντασία μου», ενώ ο Μαθητής 9 σημείωσε ότι το θεωρεί όμορφο επειδή «έχει λουλούδια και παγκάκια».

Μετά τη διδακτική παρέμβαση παρατηρήθηκε μια αξιοσημείωτη μεταβολή στις αιτιολογήσεις των μαθητών. Οι περισσότεροι αναφέρθηκαν ρητά στη συμμετρία ή στον άξονα συμμετρίας ως βασικό λόγο για τον οποίο θεωρούσαν όμορφο το κτίριο που σχεδίασαν.

Ενδεικτικά, ο Μαθητής 2 ανέφερε ότι το κτίριό του είναι όμορφο «γιατί το έφτιαξα με άξονα συμμετρίας», ο Μαθητής 4 σημείωσε ότι το σχεδίασε «να έχει κεντρικό και επιμέρους άξονες συμμετρίας», ενώ ο Μαθητής 12 δήλωσε ότι το θεωρεί όμορφο «γιατί έχει συμμετρία».

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα σχέδια των μαθητών δεν ήταν πάντοτε γεωμετρικά ακριβή ή πλήρως συμμετρικά. Ωστόσο, οι αιτιολογήσεις τους έδειξαν ότι είχαν κατανοήσει

τη βασική ιδέα της συμμετρικής οργάνωσης ενός κτιρίου και προσπαθούσαν συνειδητά να ενσωματώσουν τη συμμετρία στις δημιουργίες τους. Το εύρημα αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς οι μαθητές της Γ' Δημοτικού δεν διαθέτουν ακόμη τις σχεδιαστικές δεξιότητες που απαιτούνται για την ακριβή γεωμετρική αποτύπωση σύνθετων συμμετρικών μορφών. Παρ' όλα αυτά, η λεκτική τους τεκμηρίωση αποδεικνύει ότι είχαν κατανοήσει τη σημασία της συμμετρίας ως χαρακτηριστικού που συμβάλλει στην αισθητική ποιότητα ενός κτιρίου.

Συνολικά, τα αποτελέσματα του τρίτου ερευνητικού ερωτήματος δείχνουν ότι η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε ουσιαστικά στη διαμόρφωση μιας νέας αντίληψης για τη σχέση μεταξύ συμμετρίας και Ωραίου. Ενώ πριν από την παρέμβαση οι μαθητές αξιολογούσαν την ομορφιά κυρίως με βάση διακοσμητικά ή προσωπικά κριτήρια, μετά την ολοκλήρωσή της άρχισαν να αναγνωρίζουν τη συμμετρία ως σημαντικό παράγοντα αισθητικής αρμονίας και αρχιτεκτονικής ομορφιάς. Αυτό το εύρημα συνδέεται άμεσα με τον κεντρικό σκοπό της παρούσας έρευνας και αναδεικνύει τη δυναμική της διαθεματικής προσέγγισης που συνδέει τα Μαθηματικά με την αρχιτεκτονική και την αισθητική εμπειρία. Κατά συνέπεια, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διδακτική παρέμβαση επηρέασε ουσιαστικά τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο, καθώς η συμμετρία αναδείχθηκε σε βασικό κριτήριο αισθητικής αξιολόγησης της αρχιτεκτονικής μορφής.

7. Συζήτηση των αποτελεσμάτων

Σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας μιας διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία της συμμετρίας σε μαθητές της Γ' Δημοτικού, η οποία βασίστηκε στη σύνδεση της μαθηματικής έννοιας της συμμετρίας με την έννοια του Ωραίου και με χαρακτηριστικά παραδείγματα της ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής. Η παρέμβαση σχεδιάστηκε με στόχο να υπερβεί την παραδοσιακή προσέγγιση της συμμετρίας ως μιας απομονωμένης γεωμετρικής έννοιας και να αναδείξει τη σύνδεσή της με την αρχιτεκτονική, την αισθητική και τον πολιτισμό. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η συγκεκριμένη προσέγγιση συνέβαλε ουσιαστικά τόσο στην κατανόηση της συμμετρίας όσο και στη διαμόρφωση νέων αντιλήψεων σχετικά με τη σχέση των Μαθηματικών με το Ωραίο.

Αναφορικά με το *πρώτο ερευνητικό ερώτημα*, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η διδακτική παρέμβαση συνέβαλε σημαντικά στην κατανόηση της έννοιας της συμμετρίας από τους μαθητές. Η σύγκριση των απαντήσεων πριν και μετά την παρέμβαση ανέδειξε μια σαφή μεταβολή στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονταν τα μαθηματικά στοιχεία που υπάρχουν στα αρχιτεκτονικά κτίρια. Πριν από την παρέμβαση οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονταν να αναγνωρίσουν μαθηματικές δομές και περιόριζαν τις παρατηρήσεις τους κυρίως σε αριθμητικά χαρακτηριστικά ή σε εξωτερικά στοιχεία των κτιρίων. Αντίθετα, μετά την ολοκλήρωση της παρέμβασης ήταν σε θέση να αναγνωρίζουν γεωμετρικά σχήματα, να χρησιμοποιούν τον όρο «συμμετρία» και να αναφέρονται σε άξονες συμμετρίας ως βασικά χαρακτηριστικά της αρχιτεκτονικής μορφής.

Το εύρημα αυτό φαίνεται να επιβεβαιώνει τη θέση ότι η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ενισχύεται όταν αυτές συνδέονται με αυθεντικά και νοηματοδοτημένα περιβάλλοντα μάθησης. Η Sinclair (2011) υποστηρίζει ότι η αισθητική διάσταση των Μαθηματικών μπορεί να λειτουργήσει ως ισχυρό μέσο οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να αντιλαμβάνονται τις μαθηματικές έννοιες όχι ως αφηρημένα σύμβολα αλλά ως δομές που υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο. Στην παρούσα έρευνα, η σύνδεση της συμμετρίας με την ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική φαίνεται ότι βοήθησε τους μαθητές να

προσδώσουν νόημα στη συγκεκριμένη έννοια και να την αναγνωρίσουν σε πραγματικά παραδείγματα.

Το *δεύτερο ερευνητικό ερώτημα* αφορούσε την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια. Τα αποτελέσματα έδειξαν εντυπωσιακή βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών, καθώς πριν από την παρέμβαση κανένας μαθητής δεν εντόπισε κεντρικούς ή επιμέρους άξονες συμμετρίας στα κτίρια που χρησιμοποιήθηκαν ως παραδείγματα, ενώ μετά την ολοκλήρωσή της η μεγάλη πλειονότητα των μαθητών ήταν σε θέση να αναγνωρίζει με επιτυχία τόσο τον κεντρικό όσο και επιμέρους άξονες συμμετρίας.

Το εύρημα αυτό αποκτά ιδιαίτερη σημασία εάν ληφθεί υπόψη ότι οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τη συμμετρία στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος. Παρά τη σχετική διδασκαλία, δεν ήταν σε θέση να μεταφέρουν τη γνώση τους σε πραγματικά παραδείγματα αρχιτεκτονικής. Η διαπίστωση αυτή συνδέεται άμεσα με τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη των σχολικών εγχειριδίων και της σχετικής βιβλιογραφίας. Όπως αναδείχθηκε στο θεωρητικό μέρος της εργασίας, η συμμετρία στο Δημοτικό Σχολείο διδάσκεται κυρίως μέσα από γεωμετρικά σχήματα και στατικές εικόνες, χωρίς ουσιαστική σύνδεση με το πραγματικό περιβάλλον. Αντίθετα, στην παρούσα παρέμβαση οι μαθητές εργάστηκαν με πραγματικά αρχιτεκτονικά έργα, γεγονός που φαίνεται ότι διευκόλυνε τη μεταφορά της γνώσης σε αυθεντικά συμφραζόμενα.

Το αποτέλεσμα αυτό αναδεικνύει και την καινοτομία της παρούσας έρευνας. Ενώ οι περισσότερες διδακτικές προσεγγίσεις επικεντρώνονται στην αναγνώριση συμμετρίας σε απλά γεωμετρικά σχήματα, η συγκεκριμένη παρέμβαση αξιοποίησε πραγματικά παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής, επιτρέποντας στους μαθητές να προσεγγίσουν τη συμμετρία ως χαρακτηριστικό του δομημένου περιβάλλοντος και όχι αποκλειστικά ως σχολική μαθηματική έννοια.

Το *τρίτο ερευνητικό ερώτημα* αφορά το σημαντικότερο ίσως εύρημα της παρούσας έρευνας, καθώς σχετίζεται άμεσα με τον βασικό θεωρητικό της άξονα: τη σχέση ανάμεσα στη συμμετρία και στην έννοια του Ωραίου. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών σχετικά με το Θέατρο Μπολσόι καθώς και η μελέτη των σχεδίων που

δημιούργησαν έδειξαν ότι η παρέμβαση επηρέασε ουσιαστικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνονταν την αρχιτεκτονική ομορφιά.

Πριν από την παρέμβαση οι μαθητές συνέδεαν την ομορφιά κυρίως με διακοσμητικά στοιχεία, χρώματα, λουλούδια, αγάλματα ή άλλες εξωτερικές λεπτομέρειες των κτιρίων. Μετά την παρέμβαση παρατηρήθηκε σαφής μετατόπιση των αισθητικών τους κριτηρίων. Αρκετοί μαθητές αναφέρθηκαν στη συμμετρία, στον άξονα συμμετρίας και στην ύπαρξη δύο ίδιων πλευρών ως βασικούς λόγους για τους οποίους ένα κτίριο είναι όμορφο. Η αλλαγή αυτή δείχνει ότι η συμμετρία δεν αντιμετωπιζόταν πλέον μόνο ως μαθηματική έννοια αλλά και ως αισθητικό χαρακτηριστικό.

Το εύρημα αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον, καθώς συνδέεται με τις κλασικές θεωρίες για την αισθητική και την ομορφιά. Ο Weyl (1952) υποστήριξε ότι η συμμετρία αποτελεί μία από τις σημαντικότερες εκφράσεις της αρμονίας στη φύση, στην τέχνη και στην αρχιτεκτονική. Αντίστοιχα, ο Livio (2002) θεωρεί ότι η συμμετρία λειτουργεί ως ένα από τα θεμελιώδη στοιχεία της ανθρώπινης αντίληψης της ομορφιάς. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας φαίνεται να επιβεβαιώνουν τις παραπάνω θέσεις, καθώς οι μαθητές άρχισαν να αναγνωρίζουν τη συμμετρία ως χαρακτηριστικό που συμβάλλει στην αισθητική αξία ενός κτιρίου.

Παράλληλα, τα αποτελέσματα συνδέονται με τις φιλοσοφικές προσεγγίσεις του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη, οι οποίοι συνέδεσαν την ομορφιά με την τάξη, το μέτρο, την αναλογία και τη συμμετρία. Παρότι οι μαθητές δεν είχαν άμεση επαφή με τις συγκεκριμένες φιλοσοφικές θεωρίες, οι απαντήσεις τους μετά την παρέμβαση φαίνεται να προσεγγίζουν βιωματικά τις ίδιες βασικές αρχές. Η αναγνώριση της συμμετρίας ως στοιχείου που καθιστά ένα κτίριο όμορφο συνιστά μια έμπρακτη σύνδεση ανάμεσα στη μαθηματική δομή και στην αισθητική εμπειρία.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και τα σχέδια των μαθητών. Παρότι πολλά από αυτά δεν ήταν γεωμετρικά ακριβή ή πλήρως συμμετρικά, οι μαθητές ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας όρους όπως «συμμετρία», «άξονας συμμετρίας» και «ίδιες πλευρές». Το στοιχείο αυτό δείχνει ότι η εννοιολογική κατανόηση είχε ήδη αναπτυχθεί, ακόμη και όταν οι σχεδιαστικές δεξιότητες των μαθητών δεν επέτρεπαν την πλήρη αποτύπωση των ιδεών τους. Με άλλα λόγια, οι

μαθητές φαίνεται να είχαν κατανοήσει τη σημασία της συμμετρίας ως χαρακτηριστικού της αρχιτεκτονικής ομορφιάς, ακόμη και αν δεν μπορούσαν πάντοτε να την αποδώσουν με απόλυτη γεωμετρική ακρίβεια.

Τα αποτελέσματα της έρευνας συνδέονται επίσης με τις θεωρίες για τη μαθηματική ομορφιά που παρουσιάστηκαν στο θεωρητικό μέρος της εργασίας. Ο Hardy (1940) υποστήριξε ότι η αισθητική διάσταση αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο των Μαθηματικών, ενώ στη σχετική βιβλιογραφία επισημαίνεται ότι η μαθηματική ομορφιά συνδέεται με χαρακτηριστικά όπως η τάξη, η απλότητα, η αρμονία και η συμμετρία. Στην παρούσα έρευνα οι μαθητές φαίνεται να προσέγγισαν βιωματικά αυτές τις διαστάσεις της μαθηματικής ομορφιάς μέσα από την παρατήρηση και τη μελέτη πραγματικών αρχιτεκτονικών έργων.

Συνολικά, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας δείχνουν ότι η σύνδεση της συμμετρίας με την ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική και με την έννοια του Ωραίου μπορεί να αποτελέσει ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό πλαίσιο διδασκαλίας στο Δημοτικό Σχολείο. Η συγκεκριμένη προσέγγιση φαίνεται ότι ενισχύει όχι μόνο την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας της συμμετρίας αλλά και την ανάπτυξη αισθητικών, πολιτισμικών και γνωστικών δεξιοτήτων. Παράλληλα, αναδεικνύει τη δυνατότητα των Μαθηματικών να λειτουργήσουν ως γέφυρα ανάμεσα στη γνώση, στην τέχνη και στον πολιτισμό, προσφέροντας στους μαθητές μια περισσότερο ουσιαστική και νοηματοδοτημένη μαθησιακή εμπειρία.

8. Συμπεράσματα της έρευνας

Η παρούσα έρευνα διερεύνησε την αποτελεσματικότητα μιας διδακτικής παρέμβασης για τη διδασκαλία της συμμετρίας σε μαθητές της Γ' Δημοτικού, η οποία βασίστηκε στη σύνδεση της μαθηματικής έννοιας της συμμετρίας με την έννοια του Ωραίου και με χαρακτηριστικά παραδείγματα της ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής. Βασικός στόχος της παρέμβασης ήταν να αναδείξει τη συμμετρία όχι μόνο ως γεωμετρική έννοια, αλλά και ως στοιχείο αισθητικής αρμονίας και αρχιτεκτονικής ομορφιάς.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η παρέμβαση συνέβαλε ουσιαστικά στην κατανόηση της συμμετρίας από τους μαθητές. Μετά την ολοκλήρωσή της, οι μαθητές ήταν σε θέση να αναγνωρίζουν μαθηματικά στοιχεία σε αρχιτεκτονικά κτίρια, να χρησιμοποιούν σχετική μαθηματική ορολογία και να συνδέουν τη συμμετρία με πραγματικά παραδείγματα του δομημένου περιβάλλοντος. Η συμμετρία έπαψε να αποτελεί μια απομονωμένη σχολική έννοια και μετατράπηκε σε εργαλείο παρατήρησης και ερμηνείας της αρχιτεκτονικής μορφής.

Παράλληλα, διαπιστώθηκε σημαντική βελτίωση στην ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε ευρωπαϊκά αρχιτεκτονικά κτίρια. Η δυνατότητα εφαρμογής της γνώσης σε αυθεντικά παραδείγματα δείχνει ότι η συμμετρία δεν αντιμετωπίστηκε ως μια τυπική σχολική δεξιότητα, αλλά ως εργαλείο κατανόησης και ερμηνείας του πραγματικού κόσμου. Το εύρημα αυτό αποκτά ιδιαίτερη σημασία, καθώς οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί τη συμμετρία στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος, χωρίς όμως να μπορούν να την αναγνωρίσουν σε πραγματικά αρχιτεκτονικά έργα.

Το σημαντικότερο εύρημα της έρευνας αφορά τη μεταβολή των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με τη σχέση της συμμετρίας με το Ωραίο. Μετά τη διδακτική παρέμβαση οι μαθητές άρχισαν να αναγνωρίζουν τη συμμετρία ως παράγοντα αισθητικής αρμονίας και αρχιτεκτονικής ομορφιάς, γεγονός που αποτυπώθηκε τόσο στις λεκτικές απαντήσεις τους όσο και στις δημιουργικές τους εργασίες. Η μετατόπιση από διακοσμητικά και εξωτερικά κριτήρια αισθητικής προς κριτήρια που σχετίζονται με τη συμμετρία, την ισορροπία και την οργάνωση της μορφής αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης.

Η έρευνα ανέδειξε επίσης τη δυναμική που μπορεί να έχει μια διαθεματική προσέγγιση των Μαθηματικών, στην οποία η μαθηματική γνώση συνδέεται με την τέχνη, την αρχιτεκτονική και τον πολιτισμό. Η αξιοποίηση αυθεντικών παραδειγμάτων ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής φαίνεται ότι ενίσχυσε το ενδιαφέρον των μαθητών και συνέβαλε στη δημιουργία ουσιαστικότερων μαθησιακών εμπειριών, στις οποίες η μαθηματική γνώση συνδέθηκε με πραγματικά πολιτισμικά και αισθητικά συμφραζόμενα.

Η βασική καινοτομία της παρούσας έρευνας έγκειται στο γεγονός ότι η συμμετρία προσεγγίστηκε μέσα από πραγματικά παραδείγματα ευρωπαϊκής αρχιτεκτονικής και συνδέθηκε συστηματικά με την έννοια του Ωραίου. Σε αντίθεση με τις συνήθειες σχολικές προσεγγίσεις, οι οποίες περιορίζονται κυρίως σε γεωμετρικά σχήματα και στατικές εικόνες, η παρούσα παρέμβαση αξιοποίησε αυθεντικά αρχιτεκτονικά έργα, επιτρέποντας στους μαθητές να αντιληφθούν τη συμμετρία ως στοιχείο του πραγματικού κόσμου και ως παράγοντα αισθητικής αρμονίας. Η προσέγγιση αυτή διαφοροποιείται τόσο από τον τρόπο παρουσίασης της συμμετρίας στα σχολικά εγχειρίδια όσο και από τη μεγάλη πλειονότητα των ερευνητικών προσεγγίσεων που έχουν καταγραφεί στη σχετική βιβλιογραφία.

Τα ευρήματα της έρευνας υποδηλώνουν ότι η συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση μπορεί να αξιοποιηθεί δημιουργικά στη μαθηματική εκπαίδευση του Δημοτικού Σχολείου, εμπλουτίζοντας τη διδασκαλία της Γεωμετρίας με πολιτισμικές, αισθητικές και διαθεματικές διαστάσεις. Παράλληλα, αναδεικνύουν τη σημασία της σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών με αυθεντικά παραδείγματα του πραγματικού κόσμου, τα οποία επιτρέπουν στους μαθητές να αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα και το νόημα της μαθηματικής γνώσης.

Παρά τους περιορισμούς της έρευνας, όπως το μικρό μέγεθος του δείγματος και η υλοποίησή της σε μία μόνο σχολική τάξη, τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι η συγκεκριμένη διδακτική προσέγγιση παρουσιάζει σημαντικές δυνατότητες αξιοποίησης στη μαθηματική εκπαίδευση. Μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε μεγαλύτερα δείγματα μαθητών, σε διαφορετικές ηλικιακές ομάδες ή να διερευνήσουν τη σύνδεση και άλλων μαθηματικών εννοιών με την αρχιτεκτονική και την αισθητική. Επιπλέον, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η εφαρμογή παρόμοιων

παρεμβάσεων σε διαφορετικά εκπαιδευτικά πλαίσια ή η διερεύνηση της μακροχρόνιας επίδρασής τους στις αντιλήψεις των μαθητών για τα Μαθηματικά και την αισθητική.

Συμπερασματικά, η παρούσα μελέτη ανέδειξε ότι η σύνδεση της συμμετρίας με την ευρωπαϊκή αρχιτεκτονική και με την έννοια του Ωραίου μπορεί να λειτουργήσει ως ένα ισχυρό παιδαγωγικό πλαίσιο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο. Η προσέγγιση αυτή δεν συμβάλλει μόνο στην κατανόηση μιας βασικής μαθηματικής έννοιας, αλλά και στην ανάπτυξη αισθητικής ευαισθησίας, πολιτισμικής συνείδησης και ουσιαστικότερης σχέσης των μαθητών με τα Μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας υποστηρίζουν ότι η μαθηματική εκπαίδευση μπορεί να αποτελέσει πεδίο συνάντησης της γνώσης, της αισθητικής και του πολιτισμού, προσφέροντας στους μαθητές πλουσιότερες και βαθύτερα νοηματοδοτημένες μαθησιακές εμπειρίες.

9. Βιβλιογραφία

Ελληνική

- Καραντζής, Ι. & Μάνεσης, Ν. (2013). *Σχέδια μαθήματος στο Δημοτικό Σχολείο. Από τη Θεωρία στην Πράξη*. Πάτρα: Gotsis.
- Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις εκπαιδευτικές εφαρμογές των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών.
- ΙΕΠ (2021). *Νέα Προγράμματα Σπουδών Μαθηματικών Δημοτικού Σχολείου*. Αθήνα.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-α). *Μαθηματικά Β' Δημοτικού: Ανακαλύπτω τη συμμετρία γύρω μου*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-β). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού: 43. Η συμμετρία*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-γ). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού: Τετράδιο εργασιών*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-δ). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού: 34. Επεξεργάζομαι συμμετρικά σχήματα*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-ε). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού: Συμμετρία*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-στ). *Μαθηματικά Ε' Δημοτικού: Βιβλίο μαθητή, τεύχος Β'*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-ζ). *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού: 60. Αξονική συμμετρία*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- ΙΤΥΕ «Διόφαντος». (χ.χ.-η). *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού: Τετράδιο εργασιών*. Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία.
- Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και διδακτική προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών*. Ελληνικά Γράμματα.

- ΥΠΕΠΘ (2003). *ΔΕΠΠΣ – ΑΠΣ Μαθηματικών για το Δημοτικό*. Αθήνα
- Φιλίππου, Γ., & Χρίστου, Κ. (2001). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Ατραπός.

Ξενόγλωσση

- Ackerman, J. S. (1986). *The architecture of Michelangelo* (2nd Eds.). University of Chicago Press.
- Alberti, L. B. (1988). *On the art of building in ten books* (J. Rykwert, N. Leach, & R. Tavernor, Trans.). MIT Press.
- Aristotle. (1924). *Metaphysics* (W. D. Ross, Trans.). Oxford University Press.
- Atiyah, M. F. (2006). Mathematics, art and science. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43(1), 85–88.
- Bony, J. (1983). *French Gothic architecture of the 12th and 13th centuries*. University of California Press.
- Brinkmann, A. (2009). Mathematical beauty and its characteristics: A study on the students' point of view. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 365–380.
- Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31(1), 21–32.
- Burkert, W. (1972). *Lore and science in ancient Pythagoreanism* (E. L. Minar Jr., Trans.). Harvard University Press.
- Crisci, R., Dello Iacono, U., & Ferrara Dentice, E. (2024). Axial symmetry in primary school through a milieu based on visual programming. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 352–381.
- Davies, P., & Hemsoll, D. (2013). *Renaissance architecture and the classical tradition*. Yale University Press.
- Edgerton, S. Y. (1975). *The Renaissance rediscovery of linear perspective*. Basic Books.

- Euclid. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (T. L. Heath, Trans.; 2nd Eds.). Dover Publications.
- Europeana. (2024). *Symmetry in mathematics*. Teaching with Europeana.
- Fitchen, J. (1961). *The construction of Gothic cathedrals: A study of medieval vault erection*. University of Chicago Press.
- Frampton, K. (2007). *Modern architecture: A critical history* (4th Eds.). Thames & Hudson.
- Gutiérrez, Á., Jaime, A., & Gutiérrez, P. (2021). Networked analysis of a teaching unit for primary school symmetries in the form of an e-book. *Mathematics*, 9(8), 832.
- Hall, A., Martins, R. A., & Simões, C. (2010). Exploring symmetry in elementary schools. In G. W. Hart & R. Sarhangi (Eds.), *Proceedings of Bridges 2010: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (pp. 423–426). Tessellations Publishing.
- Hardy, G. H. (1940). *A mathematician's apology*. Cambridge University Press.
- Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007). *Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner, Sweller, and Clark*. *Educational Psychologist*, 42(2), 99–107.
- Hourigan, M., & Leavy, A. (2017). Using architecture as a context to enhance students' understanding of symmetry. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 22(2), 8–13.
- Hoyles, C., & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(1), 27–59.
- Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2014). Cooperative learning in 21st century. *Anales de Psicología*, 30(3), 841–851.
- Karavakou, M., Kynigos, C., & Sinclair, N. (2023). Bridging disciplinary aesthetics: When mathematics meets art through educational technology. *Frontiers in Education*, 8, Article 1284718.

- Kemp, M. (2006). *Leonardo da Vinci: The marvellous works of nature and man* (Rev. Eds.). Oxford University Press.
- King, R. (2001). *Brunelleschi's dome: How a Renaissance genius reinvented architecture*. Penguin Books.
- Kirk, G. S., Raven, J. E., & Schofield, M. (1983). *The Presocratic philosophers: A critical history with a selection of texts* (2nd Eds.). Cambridge University Press.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.
- Kolb, D. A. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Prentice Hall.
- Kostof, S. (1995). *A history of architecture: Settings and rituals* (2nd Eds.). Oxford University Press.
- Le Corbusier. (1950). *The Modulor: A harmonious measure to the human scale universally applicable to architecture and mechanics*. Harvard University Press.
- Leikin, R., Berman, A., & Zaslavsky, O. (2000). Applications of symmetry to problem solving. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 799–809.
- Livio, M. (2002). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. Broadway Books.
- Mark, R. (1984). *Experiments in Gothic structure*. MIT Press.
- Moravcová, V., Robová, J., Hromadová, J., & Halas, Z. (2021). Students' understanding of axial and central symmetry. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 14(1), 28–40.
- Pacioli, L. (1991). *De divina proportione*. Silvana Editoriale. (Original work published 1509)
- Palladio, A. (1997). *The four books on architecture* (R. Tavernor & R. Schofield, Trans.). MIT Press.
- Panofsky, E. (1951). *Gothic architecture and scholasticism*. Meridian Books.

- Plato. (1997). *Complete works* (J. M. Cooper, Ed.). Hackett Publishing.
- Poincaré, H. (1952). *Science and method* (F. Maitland, Trans.). Dover Publications.
- Prince, M. J., & Felder, R. M. (2006). Inductive teaching and learning methods: Definitions, comparisons, and research bases. *Journal of Engineering Education*, 95(2), 123–138.
- Ramachandran, V. S., & Hirstein, W. (1999). The science of art: A neurological theory of aesthetic experience. *Journal of Consciousness Studies*, 6(6–7), 15–51.
- Rota, G.-C. (1997). The phenomenology of mathematical beauty. *Synthese*, 111(2), 171–182.
- Roth, L. M. (2007). *Understanding architecture: Its elements, history, and meaning* (2nd Eds.). Westview Press.
- Saalman, H. (1993). *Filippo Brunelleschi: The buildings*. Pennsylvania State University Press.
- Schoevers, E. M., Leseman, P. P. M., & Kroesbergen, E. H. (2020). Enriching mathematics education with visual arts: Effects on elementary school students' ability in geometry and visual arts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(8), 1613–1634.
- Scruton, R. (2009). *Beauty*. Oxford University Press.
- Sinclair, N. (2011). Aesthetic considerations in mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 2–32.
- Starikova, I. (2017). Aesthetic preferences in mathematics: A case study. *Philosophia Mathematica*, 25(3), 324–345.
- Stewart, I. (2007). *Why beauty is truth: A history of symmetry*. Basic Books.
- Summerson, J. (1963). *The classical language of architecture*. MIT Press.
- Tatarkiewicz, W. (1980). *A history of six ideas: An essay in aesthetics* (C. Kasparek, Trans.). Martinus Nijhoff.

- Trachtenberg, M., & Hyman, I. (2002). *Architecture: From prehistory to postmodernity* (2nd Eds.). Prentice Hall.
- UNESCO World Heritage Centre. (1986). Temple of Apollo Epicurius at Bassae.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Vitruvius. (1960). *The ten books on architecture* (M. H. Morgan, Trans.). Dover Publications.
- Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton University Press.
- Wittkower, R. (1971). *Architectural principles in the age of humanism* (4th Eds.). W. W. Norton.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and applications: Design and methods* (6th ed.). Sage.
- Zeki, S. (1999). *Inner vision: An exploration of art and the brain*. Oxford University Press.
- Zeki, S., Romaya, J. P., Benincasa, D. M. T., & Atiyah, M. F. (2014). The experience of mathematical beauty and its neural correlates. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, Article 68.

10. Παράρτημα Α: «Φύλλο Αρχικής/Τελικής Αξιολόγησης (Pre/Post)»

Να απαντήσετε στα ερωτήματα των δραστηριοτήτων που σας δίνονται:

Δραστηριότητα 1. Παρακάτω βλέπετε μια φωτογραφία από το Θέατρο Μπολσόι, ένα από τα μεγαλύτερα θέατρα όπερας και μπαλέτου στη Ρωσία και ένα από τα σημαντικότερα στον κόσμο.

Θέατρο Μπολσόι - Μόσχα



Εικόνα 1. Πηγή: https://visitrussia.com/theaters/bolshoi_theatre

1. Σας αρέσει αυτό το κτίριο; Εξηγήστε.

2. Υπάρχουν «κρυμμένα» μαθηματικά σε αυτή την εικόνα;

Δραστηριότητα 2. Παρακάτω σας δίνονται οι φωτογραφίες δύο ευρωπαϊκών ιστορικών κτιρίων, του μουσείου Πράδο της Μαδρίτης στην Ισπανία και του Θεάτρου της «Σκάλας του Μιλάνο» στην Ιταλία. Για κάθε εικόνα να βρείτε και να χαράξετε άξονες συμμετρίας -εφόσον υπάρχουν- και να εξηγήσετε τις επιλογές σας.

1. Το Μουσείο του Πράδο - Μαδρίτη



Εικόνα 2. Πηγή: <https://www.mycitycards.com/en/madrid/754-prado-museum-entrance-and-audioguide.html>

Εξήγηση:

Δραστηριότητα 3. Στο παρακάτω πλαίσιο, να σχεδιάσετε ένα δικό σας «Ωραίο» κτίριο. Εν συνεχεία, να εξηγήσετε γιατί το θεωρείτε «Ωραίο». Τι είναι αυτό που το κάνει να είναι όμορφο;

Εξήγηση:

11. Παράρτημα Β: «Φύλλα Εργασίας»

Φύλλο εργασίας 1

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

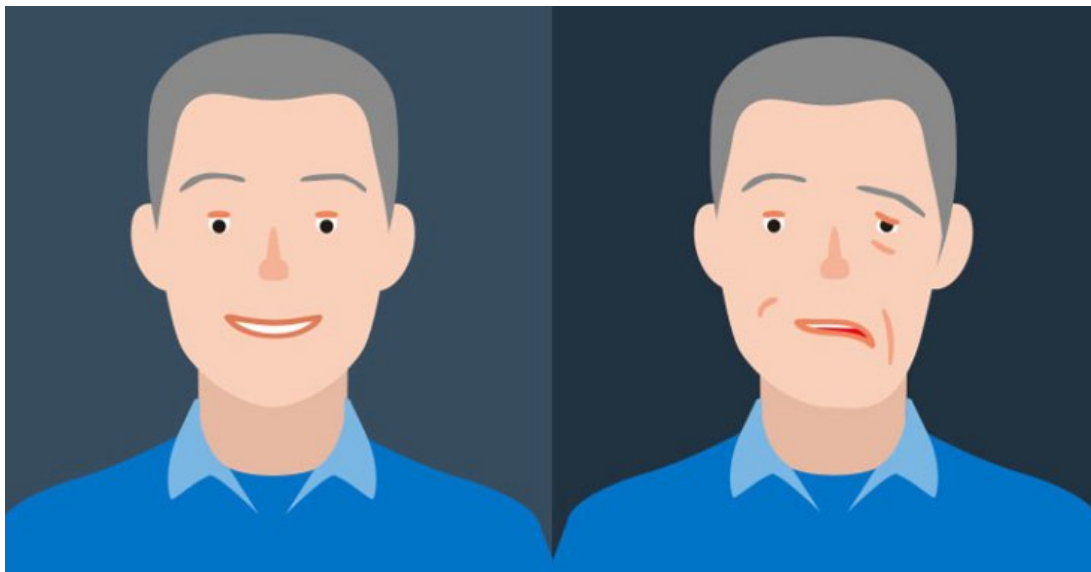
Α. Τι σημαίνει για εσάς κάτι να είναι όμορφο;

Β. Σας φαίνονται όλα τα πράγματα εξίσου όμορφα; Γιατί;

Γ. Παρακάτω παρουσιάζεται η φωτογραφία του ίδιου άντρα. Να αναφέρετε ποια φωτογραφία του άντρα είναι πιο «όμορφη» και γιατί.

Εικόνα 1

Εικόνα 2

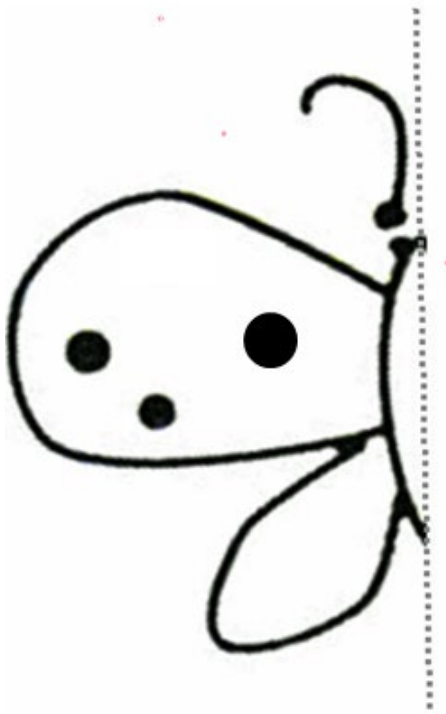


Εικόνα 4. Πηγή: <https://mumbaineurospine.com/service/bells-palsy-treatment/>

Φύλλο εργασίας 2

Α. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Παρακάτω σας δίνεται η εικόνα μισής πεταλούδας. Μπορείτε να σχεδιάσετε την άλλη μισή πεταλούδα ώστε να είναι ομοιόμορφη;



Εικόνα 5

2. Πώς πρέπει να είναι το άλλο μισό;

3. Τι θα συμβεί αν το κάνω πιο μεγάλο ή πιο μικρό;

4. Να πάρετε τον καθρέφτη που σας δίνεται και να τον τοποθετήσετε εκεί που θα σχηματιστεί ολόκληρη η πεταλούδα. Ποιο είναι το σημείο αυτό;

5. Τι θα γινόταν αν τοποθετούσα τον καθρέφτη σε διαφορετικό σημείο (π.χ. πάνω σε κάποια τελεία στα φτερά);

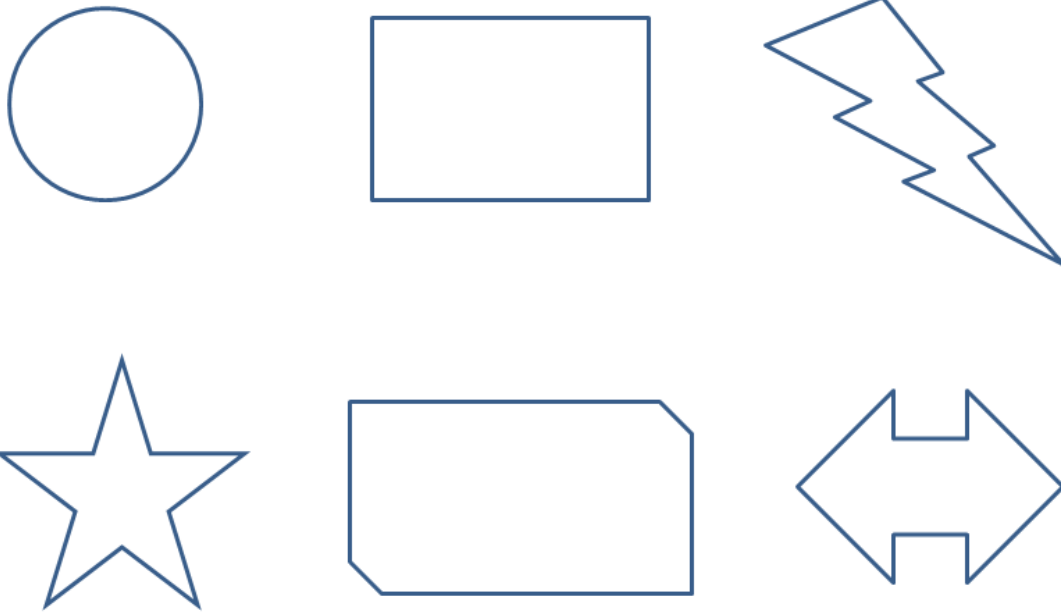
6. Να γράψετε το συμπέρασμά σας σχετικά με τα όσα παρατηρήσατε;

Τελικό συμπέρασμα

[illegible]

Β. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι συμμετρικά; Βρες και χάραξε τους άξονες συμμετρίας.



Εικόνα 6

2. Τι παρατηρείτε ως προς τους άξονες συμμετρίας;

Τελικό συμπέρασμα

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The paper has a thick blue border around its edges. There are ten sets of horizontal lines across the page, each consisting of a solid top line, a dashed middle line, and a solid bottom line, providing a guide for handwriting practice.

Γ. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Να χαράξετε με το μολύβι σας (αν υπάρχουν) τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω ευρωπαϊκά κτίρια.

Παρθενώνας



Εικόνα 7. Πηγή: <https://greekworldhistory.blogspot.com/2013/07/blog-post.html>

Καθεδρικός Ναός Παναγίας Των Παρισίων - Παλάτι των Βερσαλλιών



Εικόνα 8. Πηγή:

https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%B3%CE%AF%CE%B1%CF%84%CF%89%CE%BD%CE%A0%CE%B1%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%AF%CF%89%CE%BD#/media/%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B5%CE%AF%CE%BF:Notre-Dame_de_Paris_2013-07-24.jpg



Εικόνα 9. Πηγή: <https://www.ffagh.org/visite/visita.php?idvisita=119>

«Μαρία Κοκοτσή», «Η Έννοια του Ωραίου στα Μαθηματικά και η έκφρασή της στην Ευρωπαϊκή Αρχιτεκτονική: Διδακτική Προσέγγιση της Συμμετρίας σε μαθητές Δημοτικού»

2. Υπάρχουν οριζόντιοι άξονες συμμετρίας στις παραπάνω φωτογραφίες; Αν όχι, γιατί πιστεύετε ότι δεν υπάρχουν;

Τελικό συμπέρασμα

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines, similar to notebook paper. The paper is oriented vertically and has a thin black border around its edges. There are approximately 20 evenly spaced horizontal lines across the page.

Δ. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Ο Παύλος στην παρακάτω εικόνα έγραψε κάτι που θεώρησε σημαντικό να μας ενημερώσει.



Εικόνα 10.

Συμφωνείτε μαζί του; Αν ναι, εξηγήστε και σχεδιάστε στην εικόνα που σας δίνεται (Παναγία των Παρισίων) περισσότερους άξονες συμμετρίας με βάση τα λεγόμενα του Παύλου.



Εικόνα 11. Πηγή:

https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B1%CE%BD%CE%B1%CE%B3%CE%AF%CE%B1%CF%84%CF%89%CE%BD_%CE%A0%CE%B1%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%AF%CF%89%CE%BD#/media/%CE%91%CF%81%CF%87%CE%B5%CE%AF%CE%BF:Notre-Dame de Paris 2013-07-24.jpg

Τελικό συμπέρασμα

Φύλλο εργασίας 3

A. Να σχηματίσετε τρεις ομάδες των 4-5 ατόμων. Εν συνεχεία, με τη συνοδεία της δασκάλας σας ή/και άλλων δασκάλων που θα έρθουν μαζί σας, να βγείτε στη γειτονιά του σχολείου σας με σκοπό:

(α) να παρατηρήσετε προσόψεις κτιρίων,

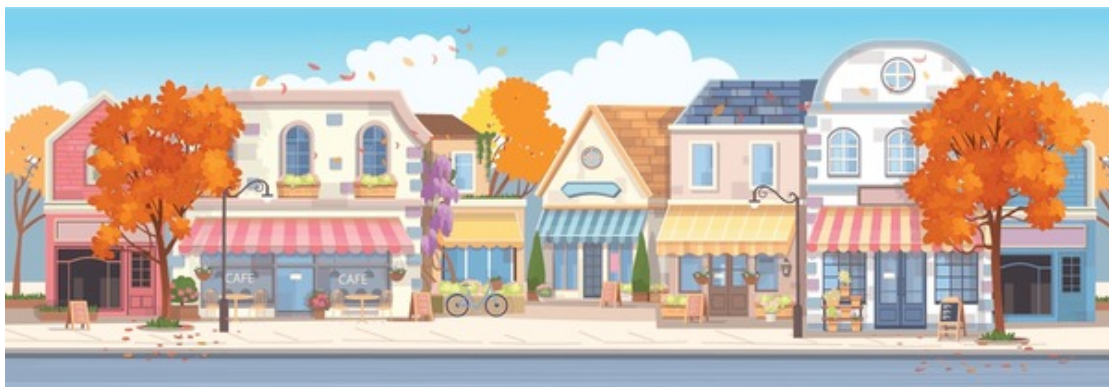
(β) να εντοπίσετε αν υπάρχουν άξονες συμμετρίας, και

(γ) να φωτογραφίσετε κτίρια που παρουσιάζουν που πληρούν το κριτήριο της συμμετρίας (3-5 κτίρια).



Εικόνα 12. Πηγή: <https://depositphotos.com/gr/photos/clipart-camera.html>

B. Όταν επιστρέψετε, η κάθε ομάδα θα παρουσιάσει με τη βοήθεια το βιντεοπροβολέα τις φωτογραφίες που τράβηξε στους υπόλοιπους μαθητές στην τάξη, αιτιολογώντας την επιλογή της, υποδεικνύοντας, ταυτόχρονα, τον/τους άξονα/ες συμμετρίας.



Εικόνα 13. Πηγή: https://www.shutterstock.com/el/search/cartoon-town?dd_referrer=https%3A%2F%2Fwww.google.com%2F

Φύλλο εργασίας 4

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

Α. Τι μάθαμε σήμερα για τη συμμετρία και τον άξονα συμμετρίας;

Β. Πού συναντάμε τη συμμετρία εκτός από τα μαθηματικά;

Γ. Γιατί νομίζετε ότι οι άνθρωποι χρησιμοποιούν τη συμμετρία στα κτίρια;

Δ. Τι παρατηρήσαμε για τα κτίρια της γειτονιάς μας;

Ε. Πώς νιώθουμε όταν βλέπουμε ένα συμμετρικό κτίριο;

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.