



Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

**Αλγόριθμοι μη γραμμικής βελτιστοποίησης και εφαρμογές σε  
μελέτες περιπτώσεων (case studies)**

Στέφανος Διαμαντόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Τσίτσας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Αλγόριθμοι μη γραμμικής βελτιστοποίησης και εφαρμογές σε  
μελέτες περιπτώσεων (case studies)

Στέφανος Διαμαντόπουλος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Τσίτσας

Αναπ. Καθηγητής

Τμήμα Πληροφορικής

ΑΠΘ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Δημήτριος Σωτηρόπουλος

Επικ. Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και  
Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022



## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικόλαο Τσίτσα για την επιστημονική του καθοδήγηση, τις υποδείξεις του, την επιμονή του, τη συμπαράστασή του, τη συνεχή του υποστήριξη και το αμείωτο ενδιαφέρον που έδειξε από την αρχή μέχρι το τέλος.

Επίσης, ευχαριστώ τον συνεπιβλέποντα καθηγητή κ. Δημήτριο Σωτηρόπουλο, της Επιτροπής Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας, για τις εποικοδομητικές του υποδείξεις και την πολύτιμη συμβολή του στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην οικογένειά μου για όλη τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή τους, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

## Περίληψη

Βασικό αντικείμενο των υπολογιστικών μαθηματικών αποτελεί η βελτιστοποίηση μη γραμμικών προβλημάτων. Σε αυτή την κατηγορία περιλαμβάνονται προβλήματα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης μιας συνάρτησης, που πιθανόν να υπόκεινται σε περιορισμούς εξισώσεων ή ανισώσεων. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται η βασική θεωρία του μη γραμμικού προγραμματισμού και οι βασικοί αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται προκειμένου να επιλυθούν τα αντίστοιχα προβλήματα. Δίνεται έμφαση στην μελέτη περιπτώσεων, με σκοπό την εισαγωγή του αναγνώστη στην μη γραμμική βελτιστοποίηση και τις εφαρμογές της σε προβλήματα του «πραγματικού κόσμου».

**Λέξεις κλειδιά:** Μη γραμμικός προγραμματισμός, βελτιστοποίηση, αλγόριθμοι, μελέτη περιπτώσεων.

## Abstract

A main branch of computational mathematics is the optimization of nonlinear problems. This category includes problems concerning the minimization or maximization of a function, which may be subject to equality and/or inequality constraints. This dissertation presents the fundamental theory of nonlinear programming as well as the basic algorithms employed to solve the above-mentioned problems. Special emphasis is given to case studies, in order to introduce the readers to nonlinear optimization and its applications in “real-world” problems.

**Key words:** Non-linear programming, optimization, algorithms, case studies.

## Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη.....	vi
Abstract .....	vii
Κατάλογος Εικόνων .....	ix
Εισαγωγή.....	9
1 Θεωρία βελτιστοποίησης.....	11
1.1 Βασικές αρχές βελτιστοποίησης .....	11
1.2 Κλασικοί Αλγόριθμοι βελτιστοποίησης .....	12
2 Μη γραμμικός προγραμματισμός .....	14
2.1 Τοποθέτηση προβλήματος.....	14
2.2 Προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς. ....	15
2.3 Αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς. ....	21
2.4 Προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού με εξισωτικούς περιορισμούς. ....	24
2.5 Προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού με ανισωτικούς περιορισμούς. ....	31
3 Εφαρμογές σε μελέτες περιπτώσεων.....	37
3.1 Πολυμεταβλητή παλινδρόμηση.....	37
3.2 Μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους .....	48
3.3 Παραγωγή χαμηλού κόστους με περιορισμούς παραγωγικής ικανότητας .....	61
3.4 Βέλτιστη δρομολόγηση δικτύου δεδομένων.....	66
3.5 Βέλτιστη ροή ισχύος.....	81
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	90



## Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1. Παραγωγή τριών μηχανών .....	50
Εικόνα 2. Μέρος του εφικτού συνόλου $S$ για τη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους .....	52
Εικόνα 3. Το μέσο κόστος παραγωγής για μια τυπική μηχανή .....	54
Εικόνα 4. Κόστος παραγωγής για μια τυπική μηχανή. ....	55
Εικόνα 5. Εφικτό σύνολο για μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους (ανισοτικοί περιορισμοί). ....	63
Εικόνα 6. Γραφική αναπαράσταση δικτύου επικοινωνιών δεδομένων με οκτώ κόμβους και 12 συνδέσμους. ....	68
Εικόνα 7. Ένα δίκτυο με ένα ζεύγος προορισμού προέλευσης που ενώνεται με μια διαδρομή που αποτελείται από δύο συνδέσμους. ....	74

## Εισαγωγή

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης στον μη γραμμικό προγραμματισμό διαφοροποιούνται αρκετά ως προς τον γραμμικό προγραμματισμό, ωστόσο κάποιες από τις αρχές και το θεωρητικό τους υπόβαθρο παραμένουν ίδια. Η βελτιστοποίηση αφορά στην ελαχιστοποίηση ή την μεγιστοποίηση μιας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, και πιο συγκεκριμένα, στην αναζήτηση ενός διανύσματος, του οποίου οι τιμές, είτε ελαχιστοποιούν την τιμή της (οπότε και ονομάζεται ελαχιστοποιητής), είτε την μεγιστοποιούν (οπότε και ονομάζεται μεγιστοποιητής). Πολλά από τα προβλήματα βελτιστοποίησης στον μη γραμμικό προγραμματισμό δεν υπόκεινται σε κάποιον περιορισμό, ενώ άλλα περιορίζονται υπό συνθήκες εξισώσεων ή ανισώσεων.

Σχετικά με τις κυριότερες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων βελτιστοποίησης στον μη γραμμικό προγραμματισμό, εάν πρόκειται για προβλήματα με περιορισμούς, είναι οι μέθοδοι μειωμένης κλίσης, οι διαδοχικές, γραμμικές και τετραγωνικές μέθοδοι και οι μέθοδοι που βασίζονται σε επαυξημένες παραμέτρους Langrange. Ορισμένοι από τους πιο γνωστούς αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης στον μη γραμμικό προγραμματισμό, είναι η βελτιστοποίηση με βάση εξισωτικούς περιορισμούς, ο κυρτός προγραμματισμός, ο διαχωρίσιμος προγραμματισμός, ο κλασματικός προγραμματισμός κ.ά.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να παρουσιάσει τις βασικές αρχές του μη γραμμικού προγραμματισμού, τους βασικούς αλγόριθμους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης, καθώς επίσης και εφαρμογές τους σε μελέτες περιπτώσεων.

Η εργασία χωρίζεται σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιείται εννοιολογική αποσαφήνιση των όρων, όπου παρουσιάζεται συνοπτικά η θεωρία βελτιστοποίησης καθώς επίσης και το μαθηματικό υπόβαθρο. Ο αναγνώστης εισάγεται στις βασικές αρχές βελτιστοποίησης και στους αλγόριθμους που χρησιμοποιεί ο μη γραμμικός προγραμματισμός. Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται ταξινόμηση των προβλημάτων βελτιστοποίησης στον μη γραμμικό προγραμματισμό, και πιο συγκεκριμένα, τα προβλήματα χωρίζονται σε αυτά που δεν περιέχουν περιορισμούς και σε αυτά που περιέχουν είτε εξισωτικούς είτε ανισοτικούς περιορισμούς. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές, μέσω μελέτης περιπτώσεων, της θεωρίας βελτιστοποίησης στον μη γραμμικό προγραμματισμό, και πιο συγκεκριμένα η πολυμεταβλητή παλινδρόμηση, που αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς, το πρόβλημα παραγωγής χαμηλού κόστους, που αποτελεί πρόβλημα με περιορισμούς εξισώσεων, το πρόβλημα παραγωγής χαμηλού κόστους, που υπόκειται σε (ανισοτικούς) περιορισμούς παραγωγικής ικανότητας, το πρόβλημα βέλτιστης δρομολόγησης δικτύου δεδομένων και το πρόβλημα βέλτιστης ροής ισχύος.

# 1 Θεωρία βελτιστοποίησης

## 1.1 Βασικές αρχές βελτιστοποίησης

Η γενική μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, το οποίο χαρακτηρίζεται από μια αντικειμενική συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι η εξής:

$$\min [f(x)] \quad (1.1)$$

$$g_i(x) \leq a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα των μεταβλητών βελτιστοποίησης,  $g_i(x)$  είναι πραγματικές συναρτήσεις και  $a_i$  είναι πραγματικές σταθερές. Αυτού του είδους τα προβλήματα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: χωρίς περιορισμούς (unconstrained) και με περιορισμούς (constrained), ανάλογα με το εάν οι μεταβλητές βελτιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς ή όχι. Στην περίπτωση που οι μεταβλητές βελτιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης υπακούουν σε περιορισμούς, αυτοί μπορεί να είναι περιορισμοί ισοτήτων ή ανισοτήτων. Στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g_i(x)$  είναι γραμμικές, τότε έχουμε πρόβλημα γραμμικής βελτιστοποίησης ενώ εάν είναι μη γραμμικές τότε έχουμε πρόβλημα μη γραμμικής βελτιστοποίησης.

Μια διαδικασία βελτιστοποίησης αναζητά τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών  $x$ , μέσα σε έναν (εφικτό) χώρο αναζήτησης λύσεων, οι οποίες ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση και ταυτόχρονα ικανοποιούν τους περιορισμούς του προβλήματος. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι δυνατό να μετατραπεί στην μορφή (1.1) είτε αντιστρέφοντας την αντικειμενική συνάρτηση, είτε αλλάζοντας το πρόσημό της.

Σημαντικό ρόλο στην επίλυση προβλήματος βελτιστοποίησης παίζει η κυρτότητα της αντικειμενικής συνάρτησης, καθώς το ελάχιστο μιας κυρτής συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της αποτελεί ολικό και όχι μόνο τοπικό ελάχιστο, οπότε η λύση του προβλήματος είναι και η βέλτιστη.

Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπως αυτό ορίστηκε στη σχέση (1.1), είναι δυνατό να επεκταθεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει και άλλες αντικειμενικές συναρτήσεις. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης πολλαπλών στόχων, του οποίου η επίλυση είναι σημαντικά πιο περίπλοκη καθώς είναι δυνατό να περιλαμβάνει συναρτήσεις που βρίσκονται σε αντίφαση, δηλαδή, η βελτίωση της μιας να συνεπάγεται επιδείνωση της άλλης. Επίσης, υπάρχουν προβλήματα βελτιστοποίησης όπου οι συναρτήσεις έχουν περισσότερα από ένα (ίσα μεταξύ τους) ολικά ακρότατα, που βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία του χώρου λύσεων.

Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης αποτελεί σημαντικό και συνεχώς εξελισσόμενο πεδίο έρευνας που βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε εφαρμογές της μη γραμμικής βελτιστοποίησης σε μελέτες περιπτώσεων του πραγματικού κόσμου (real-world case studies).

## 1.2 Κλασσικοί Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης

Οι κλασσικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης είναι κυρίως επαναληπτικοί αλγόριθμοι κατάβασης και έχουν τη γενική μορφή:

$$x_{m+1} = x_m + k\Delta x_m$$

όπου  $m = 0, 1, \dots$  είναι ο αριθμός επαναλήψεων του αλγόριθμου και  $x_m, x_{m+1}$  είναι οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης κατά την  $m$  και  $m + 1$  επανάληψη, αντίστοιχα. Η παράμετρος  $k$  είναι το μέγεθος του βήματος κατά την επανάληψη, ενώ ο όρος  $\Delta x_m$  ονομάζεται κατεύθυνση αναζήτησης. Στους επαναληπτικούς αλγόριθμους κατάβασης κάθε επανάληψη πρέπει να μειώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή, πρέπει να ισχύει:

$$f(x_{m+1}) < f(x_m)$$

Όταν η κατεύθυνση αναζήτησης ορίζεται από την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης, δηλαδή, ισχύει  $\Delta x_m = -\nabla f(x_m)$ , τότε ο αλγόριθμος ονομάζεται αλγόριθμος κατάβασης βαθμίδα. Βασικοί κλασσικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης είναι ο αλγόριθμος Newton και οι αλγόριθμοι συζυγούς κατάβασης.

Οι κλασσικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης υπόκεινται σε τρεις κύριες παραδοχές: (α) για την εφαρμογή τους θα πρέπει να υπάρχει αντικειμενική συνάρτηση, ωστόσο δεν υπάρχει πάντα, ειδικότερα σε περιπτώσεις σύνθετων προβλημάτων, (β) όταν μας δίνεται αντικειμενική συνάρτηση, η ιδιότητα της κυρτότητας οδηγεί στην αναζήτηση ύπαρξης ολικού ελάχιστου. Ωστόσο, αφενός μεν πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις δεν είναι κυρτές και αφετέρου, η πρώτη παράγωγος της αντικειμενικής συνάρτησης που χρησιμοποιείται σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να οδηγήσει σε τοπικό ελάχιστο στο οποίο όμως ο επαναληπτικός αλγόριθμος τερματίζει χωρίς να έχει φτάσει σε ολικό ελάχιστο και επομένως οδηγούμαστε σε μη βέλτιστες λύσεις του προβλήματος και (γ) μια τελευταία παραδοχή είναι, μετά τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου, ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου, ωστόσο δεν είναι δεδομένη η δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού τους κατά την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης.

## 2 Μη γραμμικός προγραμματισμός

### 2.1 Τοποθέτηση προβλήματος

Η βελτιστοποίηση στον μη γραμμικό προγραμματισμό αφορά είτε στην ελαχιστοποίηση ή στην μεγιστοποίηση μιας αντικειμενικής συνάρτησης, έστω  $f$ , που δεν είναι γραμμική, είτε εμφανίζονται μη γραμμικές συναρτήσεις στους περιορισμούς του προβλήματος. Σε κάθε περίπτωση, εφόσον ισχύει:

$$\max[f(x)] = -\min[-f(x)]$$

το πρόβλημα βελτιστοποίησης ανάγεται σε μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση της συνάρτησης  $f$ . Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , στην οποία υπεισέρχεται ένα άγνωστο διάνυσμα  $x$ , το πρόβλημα έγκειται στην αναζήτηση τιμών του  $x$  οι οποίες ελαχιστοποιούν (ελαχιστοποιητές) ή μεγιστοποιούν (μεγιστοποιητές) την συνάρτηση [4]. Επομένως, το πρόβλημα τοποθετείται ως εξής:

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Να βρεθεί, αν υπάρχει,  $x_0 \in \Omega$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \max f(x)$ . Η εφικτή περιοχή  $\Omega$  μπορεί να περιέχει και μη γραμμικές σχέσεις, ή η συνάρτηση  $f$  μπορεί να μην είναι γραμμική. Πιο συγκεκριμένα, ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού, μπορεί να έχει τη μορφή:

$$\max f(x)$$

$$h_1(x) = 0$$

$$h_2(x) = 0$$

...

$$h_m(x) = 0$$

$$g_1(x) \leq 0$$

...

$$g_k(x) \leq 0$$

όπου  $f, g, h \in C^2(\mathbb{R}^n)$ .

Συνοπτικά, ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς γράφεται:

$$\max f(x)$$

$$h(x) = 0$$

$$g(x) \leq 0$$

Γενικά, για τα προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού, δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος επίλυσής τους, ωστόσο υπάρχουν τεχνικές και αλγόριθμοι, προσεγγιστικοί ή μη, οι οποίοι εφαρμόζονται αποδοτικά σε μεγάλες κατηγορίες προβλημάτων.

## 2.2 Προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς.

Τα προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς αποτελούν την πιο απλή κατηγορία μη γραμμικής βελτιστοποίησης. Για την εύρεση λύσης στην παραπάνω κατηγορία προβλημάτων αναζητούμε τις μέγιστες (ή ελάχιστες) τιμές της συνάρτησης  $f$  [5].

**Ορισμός 2.1.** Μια συνάρτηση  $f$  έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο  $x_0$ , αν υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) \geq f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ , με  $\|x - x_0\| < \varepsilon$ . (Αντίστοιχα ορίζεται το τοπικό ελάχιστο).



**Ορισμός 2.2.** Μια συνάρτηση  $f$  έχει ολικό μέγιστο στο σημείο  $x_0$ , αν ισχύει  $f(x_0) \geq f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ . (Αντίστοιχα ορίζεται το ολικό ελάχιστο).

**Ορισμός 2.3.** Έστω μια συνάρτηση  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , όπου  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ονομάζουμε κλίση της  $f$  στο σημείο  $x \in \Omega$ , το διάνυσμα:

$$\nabla f(x) = \text{grad} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

**Ορισμός 2.4.** Εσσιανός πίνακας της συνάρτησης  $f$ , ονομάζεται ο τετραγωνικός πίνακας:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Ο Εσσιανός πίνακας περιγράφει την τοπική καμπυλότητα της συνάρτησης  $f$ , δηλαδή προσδιορίζει το αν η συνάρτηση  $f$  είναι τοπικά κοίλη ή κυρτή, μέσω του ελέγχου της καμπυλότητας του συνόλου  $\Omega$ .

**Θεώρημα 2.1.** Έστω  $x \in \mathbb{R}^n$  και η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη, με  $x_0$  τοπικό μέγιστο. Τότε ισχύουν τα εξής:

- 1)  $\nabla f(x_0) = 0$
- 2) Ο Εσσιανός πίνακας της  $f$  στο  $x_0$  είναι αρνητικά ημιορισμένος

### Απόδειξη

- 1) Έστω  $y(t) = x_0 + at$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης  $a$  και  $x_0$  είναι σημείο αυτής. Από το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης, έχουμε:

$$f(x_0 + at) - f(x_0) = \nabla f(x_0)at + o(t), \quad t \rightarrow 0$$

Αν  $\nabla f(x_0)a > 0$  τότε η διαφορά  $f(x_0 + at) - f(x_0)$  είναι θετική επομένως ισχύει  $f(x_0 + at) > f(x_0)$ . Αυτό είναι άτοπο γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το  $x_0$  είναι

τοπικό μέγιστο. Επομένως ισχύει  $\nabla f(x_0)a \leq 0$ . Επιλέγουμε  $k = \pm e_i$ , όπου  $e_i = (0, 0, 0, \dots, i, 0, \dots, 0)$ , το μοναδιαίο διάνυσμα, με μονάδα στην  $i$ -οστή θέση, οπότε θα έχουμε:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \leq 0$  ή  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \geq 0$ , επομένως προκύπτει ότι  $\nabla f(x_0) = 0$ .

2) Από το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης, έχουμε ότι:

$$f(x_0 + at) - f(x_0) = \nabla f(x_0)at + \frac{a'Hf(x_0)at^2}{2} + o(t^2)$$

Όμως, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι  $\nabla f(x_0) = 0$ , επομένως η παραπάνω ισότητα γίνεται:

$$f(x_0 + at) - f(x_0) = \frac{a'Hf(x_0)at^2}{2} + o(t^2)$$

Εάν ισχύει  $a'Hf(x_0)a > 0$  τότε θα είναι  $f(x_0 + at) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0 + at) > f(x_0)$ , το οποίο είναι άτοπο εφόσον το  $x_0$  είναι τοπικό μέγιστο. Επομένως θα ισχύει  $a'Hf(x_0)a \leq 0$ , γεγονός που σημαίνει ότι ο Εσσιανός πίνακας της  $f$  στο  $x_0$  είναι αρνητικά ημιορισμένος.

**Θεώρημα 2.2.** Έστω  $x \in \mathbb{R}^n$  και η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν ισχύουν τα εξής:

- 1)  $\nabla f(x_0) = 0$
- 2) Ο Εσσιανός πίνακας της  $f$  στο  $x_0$  είναι αρνητικά ορισμένος

Τότε το σημείο  $x_0$  είναι τοπικό μέγιστο.

**Θεώρημα 2.3.** Έστω  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  κοίλη συνάρτηση και  $\Omega$  κυρτό σύνολο. Τότε κάθε τοπικό μέγιστο  $x_0$  της  $f$  είναι και ολικό μέγιστο.

### Απόδειξη

Το σημείο  $x_0$  είναι τοπικό μέγιστο, επομένως από τον ορισμό του τοπικού μεγίστου θα έχουμε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) \geq f(x)$  για κάθε  $\|x - x_0\| < \delta$  με  $x \in \Omega$ . Εάν το σημείο  $x_0$  δεν είναι ολικό μέγιστο τότε θα υπάρχει  $t \in \Omega$  τέτοιο ώστε  $f(t) > f(x_0)$ . Θεωρούμε  $s = kx_0 + (1 - k)y \in \Omega$ , με  $k \in (0, 1)$  σημείο του ευθύγραμμου τμήματος τέτοιο ώστε  $\|s - x_0\| < \varepsilon$  με  $\varepsilon$  αρκετά μικρό. Εφόσον το  $x_0$  είναι τοπικό μέγιστο, θα ισχύει  $f(x_0) \geq f(s)$ . Εφόσον η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη, θα ισχύει ότι:

$$f(s) = f(kx_0 + (1 - k)y) \geq kf(x_0) + (1 - k)f(y) = f(x_0)$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι  $f(s) \geq f(x_0)$ , που είναι άτοπο, επομένως το σημείο  $x_0$  είναι και ολικό μέγιστο. [7]

**Θεώρημα 2.4.** Έστω ότι οι  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κυρτές συναρτήσεις, τότε το σύνολο  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n: f_i \leq 0, i = 1, 2, \dots, p\}$  είναι κυρτό.

### Απόδειξη

Θεωρούμε  $s_1, s_2 \in \Omega$ . Τότε, από την υπόθεση έχουμε ότι  $f_i(s_1) \leq 0, f_i(s_2) \leq 0$ . Από τον ορισμό της κυρτότητας, ισχύει ότι:

$$f_i(ks_1 + (1 - k)s_2) \leq kf_i(s_1) + (1 - k)f_i(s_2) \leq 0$$

Επομένως  $ks_1 + (1 - k)s_2 \in \Omega$ , συνεπώς, από τον ορισμό της κυρτότητας, το σύνολο  $\Omega$  είναι κυρτό.

**Θεώρημα 2.5.** Έστω ότι η  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή/κοίλη αν και μόνο αν οι Εσσιανοί πίνακες είναι θετικά/αρνητικά ημιορισμένοι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ .

### Απόδειξη

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή. Από το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης θα έχουμε ότι:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h'Hf(x_0) + o(\|h\|^2)$$

Εφόσον η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή, τότε θα ισχύει  $f(x_0 + h) > f(x_0) + \nabla f(x_0)h$  οπότε θα ισχύει:

$$\frac{1}{2}h'Hf(x_0) + o(\|h\|^2) > 0$$

δηλαδή, οι Εσσιανοί πίνακες  $Hf(x)$  είναι θετικά ημιορισμένοι.

Αντιστρόφως, εάν ο Εσσιανός πίνακας  $Hf(z)$  είναι θετικά ημιορισμένος, από το ανάπτυγμα Taylor θα έχουμε ότι:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h'Hf(z)h$$

όπου  $z = x_0 + kh$ , με  $k \in (0,1)$ . Αφού ο πίνακας  $Hf(z)$  είναι θετικά ημιορισμένος θα έχουμε ότι  $f(x_0 + h) > f(x_0) + \nabla f(x_0)h$  γεγονός που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

## Εφαρμογή 1

Να λυθεί το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού  $\min \{f(x)\}$ , χωρίς περιορισμούς, όπου

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 12x_2^2 + x_3^2 - 12x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1 + 2022, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

### Λύση

Το πρόβλημα  $\min \{f(x)\}$  είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα  $-\max \{-f(x)\}$ . Θέλουμε να διαπιστώσουμε εάν υπάρχει μέγιστη τιμή της συνάρτησης (τοπικό ή ολικό μέγιστο).

Παραγωγίζουμε ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x_1, x_2, x_3$ , οπότε προκύπτουν:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow 8x_1 - 12x_2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 3x_2 - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow -12x_1 + 24x_2 - 2x_3 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0 \Leftrightarrow -2x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_3 \quad (3)$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος προκύπτει:

$$x_1 = \frac{11}{4} \text{ και } x_2 = x_3 = \frac{3}{2}.$$

Ο Εσσιανός πίνακας είναι:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

Για το πρόβλημά μας, γίνεται:

$$H\{-f(x^*)\} = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ 12 & -24 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Ο Εσσιανός πίνακας έχει θετική ορίζουσα, επομένως είναι αρνητικά ορισμένος, δηλαδή η συνάρτηση είναι κοίλη, συνεπώς στο σημείο  $(x_1, x_2, x_3) = -(\frac{11}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  η συνάρτηση έχει ολικό μέγιστο και αποτελεί λύση του παραπάνω προβλήματος.

### 2.3 Αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού χωρίς περιορισμούς.

Οι αλγόριθμοι για βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς είναι επαναληπτικές μέθοδοι που δημιουργούν μια ακολουθία σημείων με σταδιακά μικρότερες τιμές στη συνάρτηση  $f$  που πρόκειται να ελαχιστοποιηθεί. Ο κυριότερος αλγόριθμος στη βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς, είναι ο αλγόριθμος Newton – Raphson, ο οποίος ανάγεται στις μεθόδους γραμμικής αναζήτησης, όπου επιλέγουμε πρώτα μια κατεύθυνση αναζήτησης  $d_k$ , από το τρέχον σημείο  $x_k$ , χρησιμοποιώντας πληροφορίες για τη συνάρτηση  $f$ . Στη συνέχεια επιλέγει κανείς ένα μήκος βήματος  $a_k$  έτσι ώστε το νέο σημείο:

$$x_{k+1} = x_k + a_k d_k$$

να έχει μια μικρή, ίσως μικρότερη δυνατή, τιμή στην ημιευθεία  $\{x_k + a d_k : a \geq 0\}$ . Το  $a_k$  περιγράφει πόσο μακριά πρέπει να πάει κάποιος κατά μήκος της κατεύθυνσης αναζήτησης. Το πρόβλημα της επιλογής  $a_k$  είναι ένα μονοδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Μερικές φορές μπορούμε να βρούμε το  $a_k$  ακριβώς, και σε τέτοιες περιπτώσεις αναφερόμαστε στη μέθοδο ως ακριβής αναζήτηση γραμμής. Σε περιπτώσεις όπου το  $a_k$  δεν μπορεί να βρεθεί αναλυτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν αλγόριθμοι για να προσεγγίσουμε πώς μπορούμε να πλησιάσουμε το ελάχιστο στην ημιευθεία. Έτσι, αν κινηθούμε σε κατεύθυνση καθόδου από το  $x$  και κάνουμε ένα αρκετά μικρό βήμα, το νέο σημείο έχει μικρότερη τιμή  $f$ . Με αυτό το υπόβαθρο θα εστιάσουμε στη συνέχεια στις μεθόδους κλίσης που δίνονται από τον τύπο:

$$x_{k+1} = x_k + a_k d_k$$

όπου η κατεύθυνση  $d_k$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$\nabla f(x_k)^T d_k < 0.$$

Στη μέθοδο Newton:

$$x_{k+1} = x_k - a_k (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Το διάνυσμα  $d_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ , ονομάζεται βήμα Newton, και προκύπτει από τη 2<sup>ης</sup> τάξης προσέγγιση Taylor, της συνάρτησης  $f$ , στο  $x_k$ :

$$f(x_k + h) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T h + \left(\frac{1}{2}\right) h^T \nabla^2 f(x_k) h.$$

Εάν ελαχιστοποιήσουμε την τετραγωνική συνάρτηση στο  $h$ , υποθέτοντας ότι η  $\nabla^2 f(x_k)$  είναι θετικά ορισμένη, θα έχουμε  $h = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ , το οποίο ερμηνεύει το βήμα Newton. Συνοψίζοντας, η μέθοδος Newton πραγματοποιείται σε 4 βήματα:

1) Βήμα Newton:

$$d_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k), \quad \eta = \nabla f(x_k)^T d_k$$

το οποίο ελαχιστοποιεί την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της συνάρτησης  $f$ , στην τρέχουσα επανάληψη  $x_k$ . Έτσι, αν η συνάρτηση που ελαχιστοποιούμε είναι τετραγωνική, τελειώνουμε σε ένα βήμα. Ομοίως, εάν η συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί καλά με μια τετραγωνική συνάρτηση, τότε μπορούμε να περιμένουμε γρήγορη σύγκλιση.

2) Εφόσον  $\frac{\eta}{2} < \varepsilon$ , σταματάμε την διαδικασία

3) Γραμμική αναζήτηση για να βρεθεί το μέγεθος του βήματος  $a_k$

4) Επανάληψη:

$$x_{k+1} = x_k + a_k d_k.$$

Εξετάζοντας τη σύγκλιση της μεθόδου Newton, αρχικά υποθέτουμε ότι  $x_0$  είναι το αρχικό σημείο της μεθόδου και έστω ακόμη, ότι:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}.$$

Υποθέτουμε, επίσης ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και κυρτή, επομένως και το σύνολο  $S$  είναι κλειστό και κυρτό. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ελάχιστο  $x^*$ , το οποίο πρέπει να είναι και ολικό ελάχιστο. Τέλος, το ελάχιστο θα είναι μοναδικό, λόγω της υπόθεσης για την κυρτότητα της συνάρτησης  $f$ , οπότε  $f^* = f(x^*)$  είναι η βέλτιστη τιμή της  $f$ . Με τις παραπάνω προϋποθέσεις, προχωρούμε στην διατύπωση του παρακάτω λήμματος:

**Λήμμα.** Έστω κυρτή συνάρτηση  $f$  και  $\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) \geq m$  για κάθε  $x \in S$ . Τότε:  $f(x) - f^* \leq \frac{1}{2m} \|\nabla f(x)\|^2$ .

Σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα, για μια κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις, ένα σημείο είναι ελάχιστο οποτεδήποτε η κλίση στο σημείο αυτό είναι αρκετά μικρή. Εάν στα παραπάνω υποθέσουμε επιπλέον ότι ο εσσιανός πίνακας είναι συνεχής κατά Lipschitz στο  $S$ , με τη χρήση του παραπάνω λήμματος, αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.6.** Έστω  $f$  κυρτή συνάρτηση και δύο φορές παραγωγίσιμη και έστω:

- 1)  $\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x)) \geq m$ , για κάθε  $x \in S$ ,
- 2)  $\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\|_2 \leq \|x - y\|$ , για κάθε  $x, y \in S$ .

Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ελάχιστο σημείο  $x^*$ , τότε η μέθοδος Newton παράγει μια ακολουθία σημείων  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  η οποία συγκλίνει στο  $x^*$ . [6],[7]



## 2.4 Προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού με εξισωτικούς περιορισμούς.

Η απλούστερη αντιμετώπιση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που υπόκειται σε εξισωτικούς περιορισμούς μπορεί να γίνει με τη μέθοδο της απαλοιφής (όταν αυτό όμως είναι εφικτό). Λύνουμε δηλαδή τις περιοριστικές συνθήκες ως προς οποιεσδήποτε  $m$  από τις  $n$  ανεξάρτητες μεταβλητές τις οποίες στη συνέχεια απαλείφουμε από τη συνάρτηση βελτιστοποίησης  $f(x)$ . Έτσι η  $f(x)$  γίνεται συνάρτηση  $(n-m)$  μεταβλητών. Στη νέα τροποποιημένη  $f$  εφαρμόζουμε τις μεθόδους ελαχιστοποίησης μέσω εύρεσης ελαχίστων που ικανοποιούν και τις περιοριστικές συνθήκες ισότητας [8]. Βασικό μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η απαίτηση για τη λύση του συστήματος των περιοριστικών συνθηκών, που όμως δεν αποτελεί εύκολη διαδικασία.

Ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού με εξισωτικούς περιορισμούς, έχει τη μορφή:

$$\max f(x)$$

$$h_1(x) = 0$$

$$h_2(x) = 0$$

...

$$h_m(x) = 0$$

όπου  $f$  και  $h$  είναι συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ , με  $i=1, \dots, m$  και  $\Omega$  μια λεία υπερεπιφάνεια που ορίζεται από τους περιορισμούς  $h_i$ .

**Θεώρημα 2.6.** Έστω ένα κανονικό σημείο  $x_0$  των συναρτήσεων  $h_i$ . Το εφαπτόμενο επίπεδο  $M$  της επιφάνειας  $\Omega$  στο σημείο  $x_0$  είναι ίσο με:  $M = \{y \in \mathbb{R}^n: \nabla h(x)y = 0\}$ .

### Απόδειξη

Έστω  $K$  το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας  $\Omega$  στο σημείο  $x_0$ . Ισχύει  $K \subset M$  ανεξάρτητα από το αν το σημείο  $x_0$  είναι κανονικό. Για κάθε διαφορίσιμη καμπύλη  $x(t)$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $x_0$  στο  $t = t_0$  υπάρχει παράγωγος  $\dot{x}(t_0) = \frac{d}{dt}x(t)$  τέτοια ώστε το  $\nabla h(x)\dot{x}(t_0) \neq 0$  να μην βρίσκεται στην επιφάνεια  $\Omega$ . Στη συνέχεια, για να δείξουμε ότι  $M \subset K$ , πρέπει να αποδείξουμε ότι  $y \in M$  τότε υπάρχει καμπύλη που διέρχεται από το σημείο  $x_0$  και έχει παράγωγο  $y$ . Μια τέτοια καμπύλη μπορεί να κατασκευαστεί θεωρώντας τις εξισώσεις:

$$h(x_0 + ty + \nabla h(x_0)^T u(t)) = 0, \quad \text{με } t = c \text{ και } u(t) \text{ άγνωστη συνάρτηση.}$$

Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ένα *mxm* μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων με παράμετρο  $t$ . Όταν  $t=0$  θα υπάρχει μια λύση  $u(0) = 0$ . Ο Ιακωβιανός πίνακας του παραπάνω συστήματος ως προς  $u$ , στο σημείο  $t=0$ , είναι ο πίνακας της μορφής  $\nabla h(x_0)\nabla h(x_0)^T$ , και το  $\nabla h(x_0)$  είναι πλήρους τάξης καθώς το  $x_0$  είναι κανονικό σημείο. Συνεπώς υπάρχει συνεχώς διαφορίσιμη λύση  $u(t)$  σε μια περιοχή του  $x_0$ . Επομένως, η καμπύλη της μορφής  $x(t) = x_0 + ty + \nabla h(x_0)^T u(t)$  ανήκει στην επιφάνεια  $\Omega$ . Παραγωγίζοντας την  $h(x_0 + ty + \nabla h(x_0)^T u(t)) = 0$  ως προς  $t$  και δίνοντας την τιμή  $t=0$ , προκύπτει:

$$\nabla h(x_0)y + \nabla h(x_0)\nabla h(x_0)^T \dot{u}(0) = 0.$$

Εφόσον  $y \in M$ , θα ισχύει  $\nabla h(x_0)y = 0$  και επομένως ο πίνακας  $\nabla h(x_0)\nabla h(x_0)^T$  δεν είναι μοναδιαίος, συνεπώς  $\dot{x}(0) = 0$  και  $\dot{x}(0) = y + \nabla h(x_0)^T \dot{x}(0) = y$ . Επομένως η καμπύλη  $x(t) = x_0 + ty + \nabla h(x_0)^T u(t)$  έχει παράγωγο  $y$  στο σημείο  $x_0$ .

**Θεώρημα 2.7.** Αν  $x_0$  είναι ένα κανονικό σημείο των περιορισμών  $h_i$  και ταυτόχρονα αποτελεί τοπικό μέγιστο της συνάρτησης  $f$  υπό τους συγκεκριμένους περιορισμούς τότε για κάθε  $y \in M^h$  και που ικανοποιεί τη συνθήκη  $\nabla h(x_0)y = 0$ , θα πρέπει να ικανοποιεί και την συνθήκη  $\nabla f(x_0)y = 0$ .

### Απόδειξη

Θεωρούμε  $y \in M^h$ , δηλαδή ένα στοιχείο του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο  $x_0$ . Τότε θα υπάρχει παραμετρική καμπύλη  $x(t)$ , η οποία διέρχεται από το σημείο  $x_0$  και έχει παράγωγο  $y$ , δηλαδή ισχύει:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y, \quad h(x(t)) = 0.$$

Εφόσον το σημείο  $x_0$  είναι κανονικό σημείο, το εφαπτόμενο επίπεδο είναι ταυτοτικά ίσο με το σύνολο των  $y$  για τα οποία ισχύει ότι  $\nabla h(x_0)y = 0$ . Όμως, το σημείο  $x_0$  είναι και τοπικό μέγιστο της  $f$ , επομένως  $\frac{df(x(t))}{dt} = 0$  όταν  $t=0$ . Επομένως ισχύει  $\nabla f(x_0)y = 0$ .

### Θεώρημα 2.8 (αναγκαία συνθήκη τοπικού μεγίστου).

Δίνονται συναρτήσεις  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  δύο φορές παραγωγίσιμες και  $\Omega$  η επιφάνεια που ορίζεται από τους περιορισμούς  $h_i = 0$ . Έστω ότι το σημείο  $x_0$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$  και κανονικό σημείο της επιφάνειας  $\Omega$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

- 1) Υπάρχει  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  τέτοιο ώστε  $\nabla h(x_0) - \lambda^T \nabla h(x_0) = 0$
- 2) Ο πίνακας  $L(x_0) = Hf(x_0) - H(\lambda^T h)(x_0)$  είναι αρνητικά ημιορισμένος στο εφαπτόμενο επίπεδο  $M^h$ , δηλαδή ισχύει  $y^T L(x_0)y \leq 0$  .[5]

**Θεώρημα 2.9 (ικανή συνθήκη τοπικού μεγίστου).** Δίνονται συναρτήσεις  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  δύο φορές παραγωγίσιμες και  $\Omega$  η επιφάνεια που ορίζεται από τους περιορισμούς  $h_i = 0$ . Έστω  $x_0 \in \Omega$  και  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ , τότε ισχύουν τα εξής:

1)  $\nabla f(x_0) - \lambda^T \nabla h(x_0) = 0$

2) Ο πίνακας  $L(x_0) = Hf(x_0) - H(\lambda^T h)(x_0)$  είναι αρνητικά ημιορισμένος στο εφαπτόμενο επίπεδο  $M^h$ , δηλαδή ισχύει  $y^T L(x_0) y < 0$  για κάθε  $y \in M^h - \{0\}$ .

Τότε το σημείο  $x_0$  θα είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης  $f$ , υπό τους περιορισμούς

$h_i = 0$  .[5]

Η προηγούμενη διανυσματική-γεωμετρική προσέγγιση του προβλήματος της μεγιστοποίησης συνάρτησης υπό συνθήκες μας οδήγησε στη διατύπωση κάποιων αναγκαίων συνθηκών ορθογωνιότητας. Η κλίση της  $f(x)$  οφείλει να είναι συγγραμική προς το γραμμικό συνδυασμό όλων των κλίσεων των  $h_i$ . Άρα θα υπάρχει πάντα ένα σύνολο πραγματικών αριθμών  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  που θα ικανοποιούν την εξίσωση  $\nabla^T f(x) - \lambda^T \nabla h(x) = 0$ .

Η πρώτη αναγκαία και ικανή συνθήκη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα πιθανά μέγιστα της  $f$  είναι τα ίδια με αυτά της συνάρτησης, με τύπο:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T h(x), \quad h(x) = 0 \quad \text{και} \quad \nabla L(x_0, \lambda_0) = 0.$$

Η συνάρτηση  $L(x, \lambda)$  ονομάζεται **συνάρτηση Lagrange**, ενώ ο  $\lambda$  ονομάζεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**. Στόχος μας είναι η επίλυση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων ώστε να προκύψουν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής: 1) γράφουμε την Lagrangian συνάρτηση  $L(x, \lambda)$ ,

2) λύνουμε την εξίσωση  $\nabla L(x_0, \lambda_0) = 0$ , 3) αν ο πίνακας  $L(x_0)$  είναι αρνητικά ορισμένος για τις λύσεις που βρήκαμε, τότε το σημείο  $x_0$  είναι τοπικό μέγιστο ενώ αν ο πίνακας  $L(x_0)$  είναι θετικά ορισμένος για τις λύσεις που βρήκαμε, τότε το σημείο  $x_0$  είναι τοπικό ελάχιστο. Η λογική είναι να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι και τα κρίσιμα σημεία της Lagrangian συνάρτησης .[3],[5]

## Εφαρμογή

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x + y + 2z$$

υπό τη συνθήκη  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

## Λύση

Η συνάρτηση Langrage για το δοθέν πρόβλημα είναι η εξής:

$$l(x, y, z) = x + y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 3).$$

Πρέπει:

$$\nabla l(x, y, z, \lambda) = 0$$

Οπότε, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{\partial l}{\partial x} = 1 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial y} = 1 - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial z} = 2 - 2\lambda z = 0$$

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = -x^2 - y^2 - z^2 + 3 = 0$$

Λύνοντας το σύστημα των τριών πρώτων εξισώσεων, προκύπτουν τα εξής:

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{2\lambda}$$

$$z = \frac{1}{\lambda}$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$  και έχουμε:

$$-x^2 - y^2 - z^2 = -3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 3$$

Επομένως:

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{6}{4\lambda^2} = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Όταν  $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$  το κρίσιμο σημείο είναι το  $(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ ,

ενώ όταν  $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  το κρίσιμο σημείο είναι το  $(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$ .

Αρχικά εξετάζουμε το κρίσιμο σημείο  $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ . Ισχύει:

$$\nabla h(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0, y_0, z_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

Από τα παραπάνω, προκύπτουν τα εξής:

$$M_{x_0}^h = \{y = (y_1, y_2, y_3)' \in \mathbb{R}^3 : \nabla h(x_0, y_0, z_0)(y_1, y_2, y_3)' = 0\}$$

$$= \{(y_1, y_2, y_3)' \in \mathbb{R}^3 : \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \sqrt{2}y_3 = 0\}$$

$$= \{(y_1, y_2, y_3)' \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + 2y_3 = 0\}.$$

Επιπλέον ισχύει η σχέση:

$$l(x, y, z, \lambda_0) = x + y + 2z - \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 3)$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης και προκύπτουν τα εξής:

$$L(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 l}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 l}{\partial z^2} \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Επομένως, θα είναι:

$$\begin{aligned} M_{x_0}^h &= \{y = (y_1, y_2, y_3)' \in \mathbb{R}^3 : y_1 = -y_2 - y_3\} = \{(-y_2 - y_3, y_2, y_3)'\} : y_2, y_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y_2(-1, 1, 0)' + y_3(-2, 0, 1)'\} : y_2, y_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Τα διανύσματα  $(-1, 1, 0)$  και  $(-2, 0, 1)$  αποτελούν βάση του  $M_{x_0}^h$ .

Για να είναι ο πίνακας  $L(x_0)$  αρνητικά ορισμένος στον  $M_{x_0}^h$  θα πρέπει για κάθε ζεύγος  $(y_2, y_3) \neq (0, 0)$ , να ισχύει ότι:

$$\sqrt{2}(-y_2 - y_3, y_2, y_3) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} < 0.$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\sqrt{2}(-(y_2 + 2y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2)$$

Είναι πάντοτε αρνητική καθώς οι όροι της παρένθεσης είναι αρνητικοί. Συνεπώς, το σημείο που εξετάσαμε  $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$  αποτελεί ολικό μέγιστο του προβλήματος καθώς είναι και το μοναδικό τοπικό μέγιστο σε φραγμένη εφικτή περιοχή. Ακολουθώντας όμοια διαδικασία, δείχνουμε ότι και το δεύτερο κρίσιμο σημείο  $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$  αποτελεί το ολικό ελάχιστο του προβλήματος.

## 2.5 Προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού με ανισοτικούς περιορισμούς.

Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα ορίζεται ως η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης πολλών μεταβλητών  $f(x)$  που ταυτόχρονα ικανοποιεί την περιοριστική συνθήκη  $g(x) \leq 0$ .

Σε σχέση με την περίπτωση του εξισωτικού περιορισμού, ο ανισοτικός περιορισμός αποτελεί μια πολύ ασθενέστερη συνθήκη που μόνον ορίζει τον υποχώρο μέσα στον οποίο πρέπει να αναζητηθεί η λύση. Έτσι δεν χρειάζεται τώρα να ισχύει  $m \leq n$ .

Το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί πάρα πολύ διακρίνοντας τις εξής περιπτώσεις:

(α) Τα τοπικά μέγιστα/ ελάχιστα της  $f(x)$  χωρίς περιορισμούς, αν υπάρχουν, εξετάζονται ως προς το αν ικανοποιούν τον ανισοτικό περιορισμό  $g(x) \leq 0$ .

(β) Εξετάζεται η συνάρτηση  $f(x)$  για τοπικά ελάχιστα σε κάποια ή σε όλα από όρια του υποχώρου που ορίζει η  $g(x) \leq 0$ , δηλαδή στις περιοχές που ισχύει  $g^k(x) \leq 0$  όπου η  $g^k(x)$  αποτελεί οποιοδήποτε υποσύνολο  $k$  στοιχείων του  $g(x)$ , δηλαδή:

$$g^k(x) \subseteq g(x), \text{ όπου } g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad \dots \quad g_m(x)]^T, \text{ για κάθε } k: 1 \leq k \leq \{\min(m, n)\}.$$

Τότε λέμε ότι  $k$  από τους  $m$  ανισοτικούς περιορισμούς είναι **ενεργοί**. Οι υπόλοιποι  $m-k$  περιορισμοί θα πρέπει τότε να ικανοποιούνται ως ανισότητες. Αν το συμπλήρωμα του  $g$  ως προς το  $g^k$  το ονομάσουμε  $g^{m-k}$  θα πρέπει να ισχύει  $g^{m-k}(x) \leq 0$ . Γενικά, ένας περιορισμός  $g_i(x) \leq 0$  λέγεται ενεργός σε ένα εφικτό σημείο  $x$  όταν ισχύει  $g_i(x) = 0$ . Αν ισχύει  $g_i(x) < 0$  τότε ο περιορισμός λέγεται ανενεργός.

Η λύση του προβλήματος στην περίπτωση (α) δεν παρουσιάζει καμία ιδιαιτερότητα και βρίσκεται από τις γνωστές συνθήκες:

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{που ικανοποιούν τις σχέσεις } \nabla^2 f(x) > 0 \text{ και } g(x) \leq 0.$$



Στην περίπτωση (β), για να εντοπίσουμε τις λύσεις, έχουμε τη δυνατότητα να εξετάσουμε όλους τους συνδυασμούς ενεργών περιορισμών. Αν ένα σημείο  $x_0$  ικανοποιεί τους παραπάνω περιορισμούς, τότε μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο των ενεργών περιορισμών ως εξής:

$$J = \{j: g_j(x_0) = 0\}.$$

Το σημείο  $x_0$  ονομάζεται κανονικό σημείο των περιορισμών  $g_j$  εφόσον τα  $\nabla h_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) και  $\nabla g_i(x)$ , ( $i \in J$ ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.[7]

**Θεώρημα 2.10.** Έστω ότι το σημείο  $x_0$  αποτελεί ένα τοπικό ελάχιστο του προβλήματος και έστω ότι είναι κανονικό σημείο των περιορισμών. Τότε θα υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^p$ , με  $\mu \geq 0$  τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\nabla f(x_0) + \lambda' \nabla h(x_0) + \mu' g(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad \mu' g(x_0) = 0.$$

Όσον αφορά τις συνθήκες δεύτερης τάξης, ισχύει ότι: Αν οι συναρτήσεις  $f, g, h$  έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, τότε ο πίνακας

$$L(x_0) = Hf(x_0) + \lambda' Hh(x_0) + \mu' Hg(x_0)$$

Είναι θετικά ημιορισμένος στο εφαπτόμενο επίπεδο των ενεργών περιορισμών στο  $x_0$ :

$$\{y: \nabla h(x_0) \cdot y = 0, \nabla g_j(x_0) \cdot y = 0, j \in J\}.$$

Συνοψίζοντας, τα παραπάνω θεωρήματα ορίζονται σαν αναγκαίες συνθήκες εύρεσης τοπικού ακροτάτου και είναι γνωστές ως συνθήκες **Karush – Kuhn – Tucker** (KKT):

$$\mu_i \geq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) - \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0) \leq 0$$

$$x_{0j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) - \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$g_j(x_0) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\mu_i g_j(x_0) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$x_{0j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Οι συνθήκες KKT μπορούν να επιλύσουν προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού εντοπίζοντας τοπικά ακρότατα, όταν το πρόβλημα έχει λίγους περιορισμούς. Γενικά, η χρήση των παραπάνω συνθηκών αφορά περισσότερο σε θεωρητικές εφαρμογές και κυρίως στις περιπτώσεις εύρεσης τοπικών μεγίστων. Μια ιδιαίτερη κατηγορία προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού με ανισοτικούς περιορισμούς είναι περιπτώσεις όπου η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη, ενώ οι συναρτήσεις των περιορισμών  $g_j$  είναι κυρτές<sup>1</sup>. Τα προβλήματα αυτής της κατηγορίας ονομάζονται προβλήματα κυρτού προγραμματισμού.[7]

Συμπερασματικά, μπορούμε να πούμε πως δεν υπάρχει μια ενιαία μέθοδος αντιμετώπισης προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού και επομένως δεν υπάρχει ένας αλγόριθμος που να καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Ωστόσο, υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι επίλυσης προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού, όπως: (α) ο αλγόριθμος βαθμίδας: στηρίζεται στο γεγονός ότι η κατεύθυνση που οδηγεί σε ρυθμό αύξησης μιας συνάρτησης  $f$  βρίσκεται μέσω της  $\nabla f(x)$ . Με τον τρόπο αυτό μπορούν να εντοπιστούν τοπικά ακρότατα, τα οποία επιπλέον είναι και ολικά στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f$  είναι και κοίλη. Συνεπώς, οι αλγόριθμοι αυτοί δεν μπορούν να λειτουργήσουν όταν το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού είναι μη κυρτό, (β) αλγόριθμοι βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς: αυτοί οι αλγόριθμοι μετατρέπουν ένα πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς σε ανάλογο πρόβλημα αλλά χωρίς

---

<sup>1</sup> Κυρτή ονομάζεται μια συνάρτηση αν και μόνον αν η πρώτη της παράγωγος είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

περιορισμούς, οι οποίοι απαλείφονται και ενσωματώνονται στην συνάρτηση  $f$ , ως συναρτήσεις – ποινές, και (γ) αλγόριθμοι βελτιστοποίησης γραμμικής προσέγγισης: αυτοί οι αλγόριθμοι αντικαθιστούν τις μη γραμμικές συνθήκες και έτσι το πρόβλημα μετατρέπεται σε γραμμικό. Κύριο πλεονέκτημα αυτών των αλγόριθμων είναι πως έχουν μεγάλη ταχύτητα εφαρμογής και αποδίδουν καλά σε κυρτά προβλήματα (π.χ. Αλγόριθμος Frank – Wolfe).

### Εφαρμογή

Να λυθεί το πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού:

$$\max f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2,$$

υπό τις ανισοτικές συνθήκες:

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4$$

$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 1.$$

### Λύση

Από τις πρώτες μερικές παραγώγους έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3 - 2\mu_1 x_1 + \mu_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4 - 2\mu_1 x_2 = 0 \quad (2)$$

$$\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 4) = 0 \quad (3)$$

$$\mu_2(-x_1 + 1) = 0 \quad (4).$$

Διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις για τις παραμέτρους  $\mu_1$  και  $\mu_2$ , οπότε:

A) έστω  $\mu_1, \mu_2 > 0$  και  $x_1^2 + x_2^2 = 4, x_1 = 1$ . Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ότι:

$$1 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$

i) Αν  $x_2 = \sqrt{3}$  τότε η σχέση (2) γράφεται ως εξής:

$$4 - 2\mu_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\sqrt{3}\mu_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$$

Ενώ η σχέση (1) γράφεται ως εξής:

$$3 - 2\mu_1 x_1 + \mu_2 = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} + \mu_2 = 0 \Leftrightarrow \mu_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} - 3 > 0, \quad \text{άτοπο.}$$

Συνεπώς για  $x_2 = \sqrt{3}$  το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ii) Αν  $x_2 = -\sqrt{3}$  τότε η σχέση (2) γράφεται ως εξής:

$$4 + 2\sqrt{3}\mu_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0, \quad \text{άτοπο.}$$

Συνεπώς για  $x_2 = -\sqrt{3}$  το πρόβλημα δεν έχει λύση

B) έστω  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 = 0$  και  $x_1^2 + x_2^2 = 4$ ,  $x_1 > 1$ . Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει:

$$x_1 = \sqrt{4 - x_2^2}.$$

Η σχέση (1) γράφεται ως εξής:

$$3 - 2\mu_1 x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{2\mu_1} \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{4 - x_2^2}\mu_1 = 0 \Leftrightarrow \mu_1 = \frac{3}{2\sqrt{4 - x_2^2}}$$

Η σχέση (2) γράφεται ως εξής:

$$4 - 2\mu_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{3x_2}{\sqrt{4 - x_2^2}} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{4 - x_2^2} = 3x_2.$$

Από την τελευταία ισότητα, υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε:

$$16(4 - x_2^2) = 9x_2^2 \Leftrightarrow 25x_2^2 = 64 \Leftrightarrow x_2^2 = \frac{64}{25} \Leftrightarrow x_2 = \frac{8}{5} \text{ ή } x_2 = -\frac{8}{5}.$$

Συνεπώς θα είναι:

$$\mu_1 = \frac{3}{2\sqrt{4 - \frac{64}{25}}} = \dots = \frac{5}{4} > 0,$$

επομένως:

$$x_1 = \frac{3}{2\mu_1} = \frac{3}{2 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{6}{5}.$$

Άρα προκύπτουν οι λύσεις του προβλήματος, οι οποίες είναι:

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) \text{ ή } (x_1, x_2) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right).$$

Γ) έστω  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 > 0$  και  $x_1^2 + x_2^2 < 4$ ,  $x_1 > 1$ . Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει:

$$4 - 2\mu_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0, \text{ άτοπο.}$$

Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Δ) έστω  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 0$ . Σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει:

$$4 - 2\mu_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0, \text{ άτοπο.}$$

Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα δεν έχει λύση.

### 3 Εφαρμογές σε μελέτες περιπτώσεων

#### 3.1 Πολυμεταβλητή παλινδρόμηση

Σε πολλές εφαρμογές έχουμε μια υποθετική σχέση μεταξύ μεταβλητών. Η απλούστερη σχέση που μπορούμε να φανταστούμε είναι μια γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών. Σε αυτή τη μελέτη περίπτωσης, θα εξετάσουμε μια γενική προσέγγιση για τον χαρακτηρισμό μιας σχέσης μεταξύ των εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών. Αυτό ονομάζεται πρόβλημα πολυμεταβλητής παλινδρόμησης ή γραμμικής παλινδρόμησης πολλών μεταβλητών [1],[11]. Είναι επίσης δυνατό να χαρακτηριστούν πιο σύνθετες σχέσεις μεταξύ εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών που δεν θα εξεταστούν στην συγκεκριμένη εργασία.

Αρχικά υποθέτουμε ότι υπάρχει μια εξαρτημένη μεταβλητή στο πρόβλημά μας την οποία ονομάζουμε  $\zeta$ , και  $(n-1)$  ανεξάρτητες μεταβλητές οι οποίες ορίζουν ένα διάνυσμα  $\psi \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Η περίπτωση πολλαπλών εξαρτημένων μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση.

Θεωρούμε ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στις μεταβλητές  $\zeta$  και  $\psi$ , δηλαδή, έστω ότι υπάρχουν άγνωστες σταθερές  $\beta \in \mathbb{R}^{n-1}$  και  $\gamma \in \mathbb{R}$ , τέτοιοι ώστε:

$$\text{για κάθε } \psi \in \mathbb{R}^{n-1}, \zeta = \beta\psi + \gamma \quad (3.1)$$

όπου οι  $\beta, \gamma$  ορίζουν το διάνυσμα:

$$x = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Στη συνέχεια προχωρούμε σε έναν αριθμό δοκιμών, δίνοντας διάφορες τιμές στις ανεξάρτητες μεταβλητές  $\psi$ . Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε την τιμή του διανύσματος  $x$ , η οποία προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα, δηλαδή, θέλουμε να εκτιμήσουμε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων  $\beta, \gamma$  της σχέσης (3.1). Έστω ότι προχωρούμε σε  $l = 1, 2, 3, \dots, m$  δοκιμές και συμβολίζουμε με  $\psi(l)$  και  $\zeta(l)$  τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών  $\psi$ , και την αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής  $\zeta$ , για την δοκιμή  $l$ .

Σε πολλές περιπτώσεις, είναι δυνατό η μετρηθείσα τιμή της  $\zeta(l)$ , που αντιστοιχεί στην  $l$ -οστή δοκιμή, να μην είναι ίση με  $\beta\psi + \gamma$ , αλλά να έχει την εξής μορφή:

$$\zeta(l) = \beta\psi(l) + \gamma + e_l \quad (3.2)$$

όπου  $e_l$  εκφράζει το σφάλμα που παρουσιάζεται κατά την  $l$ -οστή δοκιμή. Η ίδια ποσότητα ονομάζεται διαφορετικά και ως υπόλοιπο, καθώς εκφράζει την υπολειπόμενη απόκλιση ανάμεσα στην μετρήσιμη τιμή  $\zeta(l)$  και την προβλεπόμενη τιμή  $l$ , όπως αυτή προκύπτει από την σχέση (3.1). Η εξαρτημένη μεταβλητή  $\zeta(l)$  και η ανεξάρτητη  $\psi(l)$  μπορούν να παρασταθούν στο επίπεδο σαν διατεταγμένα ζεύγη. Γενικά, δεν αναμένεται να υπάρχει ευθεία η οποία να διέρχεται από όλα τα σημεία, και πιο συγκεκριμένα δεν υπάρχει συνάρτηση που οι τιμές της να συμπίπτουν με τις τιμές των διατεταγμένων ζευγών  $(\psi(l), \zeta(l))$ . Επιπλέον, στην παραπάνω σχέση (3.2), έχουμε υποθέσει ότι το σφάλμα  $e_l$  εμφανίζεται κατά την μέτρηση της εξαρτημένης μεταβλητής  $\zeta(l)$ , ωστόσο είναι πιθανό να υπάρχουν σφάλματα και στις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής  $\psi(l)$ . Για την συγκεκριμένη μελέτη περίπτωσης υποθέτουμε ότι οι τιμές των  $\psi(l)$  έχουν μετρηθεί με εξαιρετική ακρίβεια.

Υπάρχουν τρεις τύποι λαθών κατά την μέτρηση της εξαρτημένης μεταβλητής  $\zeta(l)$ :

- Σφάλμα βαθμονόμησης: αυτός ο τύπος σφάλματος οφείλεται σε λάθος βαθμονόμησης κατά τη μέτρηση. Δηλαδή, υπάρχει μια συνάρτηση  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (συνάρτηση βαθμονόμησης) τέτοια ώστε σε κάθε δοκιμή  $l$ , το σφάλμα να δίνεται από τον τύπο:

$$e_l = c(\zeta(l))$$

Αν η συνάρτηση βαθμονόμησης είναι γνωστή, τότε υπολογίζουμε:

$$\beta\psi(l) + \gamma = \zeta(l) - c\zeta(l)$$

και εκτιμούμε τις παραμέτρους  $\beta, \gamma$  που σχετίζονται με την μεταβλητή  $\psi$ , ως προς την βαθμονομημένη συνάρτηση  $\zeta(l) - c\zeta(l)$ .

- Λειτουργικό σφάλμα: αυτός ο τύπος σφάλματος μπορεί να εμφανιστεί όταν η σχέση (3.1) δεν εκφράζει την ακριβή σχέση μεταξύ των  $\psi$  και  $\zeta$ . Για παράδειγμα, η ακριβής σχέση μπορεί να είναι της μορφής:

$$\zeta = \beta\psi + \gamma + \psi\Gamma\psi \quad (3.3)$$

όπου  $\Gamma \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  είναι ένας πίνακας αγνώστων παραμέτρων που αναπαριστούν την αλληλεπίδραση ανάμεσα στις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών  $\psi$  (αυτή η περίπτωση μπορεί να εμφανιστεί σε πρόβλημα αποτελεσματικότητας ενός φαρμάκου, αν υπάρχουν αλληλεπιδράσεις με άλλα φάρμακα).

- Τυχαίο σφάλμα: το σφάλμα αυτού του τύπου μπορεί να έχει αναμενόμενη τιμή, για παράδειγμα, η αναμενόμενη τιμή του να είναι ίση με το 0. Πιο συγκεκριμένα, τυχαίο σφάλμα μπορεί να εμφανιστεί σε αυτού του τύπου τα μοντέλα, εφόσον η μεταβλητή  $\zeta$  εξαρτάται και από άλλες μεταβλητές εκτός της  $\psi$ , οι οποίες δεν μπορούν ούτε να ελεγχθούν, ούτε να μετρηθούν. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, είναι δυνατό να εκφράσουμε σφάλματα αυτού του τύπου, ως τυχαίες μεταβλητές που ποικίλουν ανεξάρτητα από τις δοκιμές που θα πραγματοποιηθούν. Για παράδειγμα, η αποκατάσταση ενός ασθενούς μπορεί να εξαρτάται από άλλες μεταβλητές εκτός των συμπτωμάτων, άλλων φαρμάκων ή/και της θεραπευτικής αγωγής που λαμβάνει ο ασθενής. Αυτές οι μεταβλητές μπορεί να περιλαμβάνουν συγκεκριμένες ιδιότητες προερχόμενες από το ανοσοποιητικό σύστημα του κάθε ασθενούς. Αν διεξαχθεί ένας αριθμός δοκιμών σε μεγάλο αριθμό ασθενών, τότε αναμένουμε να βρούμε ένα εύρος ιδιοτήτων που αφορούν στο ανοσοποιητικό σύστημα των ασθενών, οι οποίες



κατανέμονται τυχαία από ασθενή σε ασθενή και είναι ανεξάρτητες από τα συμπτώματα που έχουν, την φαρμακευτική και θεραπευτική αγωγή που λαμβάνουν.

Προκειμένου να συζητηθεί η μοντελοποίηση της κατανομής των τυχαίων σφαλμάτων γίνεται χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (ΚΟΘ). Πιο συγκεκριμένα, θέλουμε να μοντελοποιήσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $e_l$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας αριθμός παραγόντων που αθροίζονται για να παράξουν το σφάλμα  $e_l$ , κατά την  $l$  δοκιμή. Σύμφωνα με το ΚΟΘ, το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έχει κατανομή περίπου κανονική. Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του σφάλματος  $e_l$ , εκφράζεται μέσω του τύπου:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp\left(-\frac{(e_l - \mu_l)^2}{2(\sigma_l)^2}\right) \quad (3.4)$$

όπου  $\mu_l$  είναι η αναμενόμενη τιμή του σφάλματος  $e_l$  και  $\sigma_l$  είναι η τυπική του απόκλιση.

Σε άλλες περιπτώσεις, ένα διαφορετικό μοντέλο μπορεί να είναι πιο κατάλληλο. Για παράδειγμα, το σφάλμα μέτρησης μπορεί να οφείλεται στο άθροισμα: (α) ενός σχετικά μικρού τυχαίου σφάλματος κατανομής που προσεγγίζεται καλά από μια κανονική κατανομή ή (β) ενός μεγάλου σφάλματος εξαιτίας μεγάλης βλάβης του μετρητή που συμβαίνει με μικρή πιθανότητα. Σε αυτή την περίπτωση, η προκύπτουσα κατανομή σφαλμάτων θα ήταν πιο πολύπλοκη από την κανονική.

Η έκφραση(3.4) ισχύει για μια συγκεκριμένη δοκιμή, ωστόσο πρέπει να εξεταστεί η συσχέτιση μεταξύ των σφαλμάτων σε διάφορες δοκιμές. Για παράδειγμα: (α) τα σφάλματα που προκύπτουν από 2 δοκιμές  $l$  και  $l'$  μπορεί να σχετίζονται, έτσι ώστε το σφάλμα  $e_l$  να είναι θετικό, όταν το σφάλμα  $e_{l'}$  είναι θετικό ή το  $e_l$  να είναι αρνητικό όταν το  $e_{l'}$  είναι αρνητικό ή (β) τα σφάλματα σε διαφορετικές δοκιμές μπορεί να είναι ασυσχέιστα.

Θεωρούμε πως υπάρχει μόνο μηδενικό μέσο τυχαίο σφάλμα και ότι, επιπλέον, τα σφάλματα σε διαφορετικές δοκιμές είναι ασυσχέτιστα. Σε αυτή την περίπτωση, μοντελοποιούμε τη μέτρηση σύμφωνα με την σχέση (3.2), με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των σφαλμάτων να δίνεται από τη σχέση (3.4), με αναμενόμενη τιμή  $\mu_l = 0$  και τα σφάλματα σε διαφορετικές δοκιμές είναι ασυσχέτιστα.

Εφόσον το σφάλμα  $e_l$  είναι μια τυχαία μεταβλητή τότε και η  $\zeta(l) = \beta\psi(l) + \gamma + e_l$  είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή. Η αρχική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (πριν την εκτέλεση των δοκιμών) του σφάλματος  $e_l$  δίνεται από τον τύπο (3.4), με αναμενόμενη τιμή  $\mu_l = 0$  ενώ η αρχική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εξαρτημένης μεταβλητής  $\zeta(l)$  είναι η συνάρτηση  $\varphi_l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία έχει παραμετροποιηθεί από τις  $\psi(l)$  και  $x$  και ορίζεται ως εξής:

$$\text{για κάθε } \zeta(l) \in \mathbb{R}, \varphi_l(\zeta(l); \psi(l), x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp\left(-\frac{(\zeta(l) - \beta\psi(l) - \gamma)^2}{2(\sigma_l)^2}\right).$$

Υποθέσαμε ότι τα σφάλματα  $e_l$  και  $e_{l'}$  είναι ασυσχέτιστα για διαφορετικές δοκιμές. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι και οι κατανομές τους είναι κανονικές τότε θα είναι και ανεξάρτητα. Συνεπώς, η κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , είναι το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας:

$$\text{για κάθε } \zeta(1), \dots, \zeta(m) \in \mathbb{R}, \varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x) =$$

$$\prod_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp\left(-\frac{(\zeta(l) - \beta\psi(l) - \gamma)^2}{2(\sigma_l)^2}\right) \quad (3.5)$$

Η παραπάνω κατανομή είναι παραμετροποιημένη ως προς  $\psi(1), \dots, \psi(m)$  και  $x$ . Μετά την διεξαγωγή των δοκιμών, οι τιμές των  $\psi(l)$  και  $\zeta(l)$  είναι πλέον γνωστές και θα τις επαναπροσδιορίσουμε ως σταθερές. Άγνωστες τιμές πια αποτελούν οι παράμετροι  $\beta$  και  $\gamma$  που εμφανίζονται στη σχέση (3.1). Έχουμε ήδη εκφράσει τις παραμέτρους  $\beta$  και  $\gamma$ ,

μέσω του διανύσματος  $x$  και πλέον θα αποτελέσουν τις μεταβλητές του προβλήματος, εφόσον οι τιμές τους πρέπει να προσδιοριστούν με σκοπό να λυθεί το πρόβλημα της παλινδρόμησης.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ήδη διεξάγει τις δοκιμές και θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε τις  $\beta$  και  $\gamma$ . Πρέπει να αποφασίσουμε τη χρήση κάποιου κριτηρίου με σκοπό να επιλεγεί η βέλτιστη τιμή τους. Έχοντας διαθέσιμα: (α) ένα σύνολο μετρήσεων  $\zeta(1), \dots, \zeta(m) \in \mathbb{R}$ , (β) τιμές για τις παραμέτρους  $x \in \mathbb{R}^n$  και (γ) μια απόσταση  $\delta \in \mathbb{R}_+$ , παίρνουμε νέες μετρήσεις  $\check{\zeta}(1), \dots, \check{\zeta}(m)$  χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές για τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Λαμβάνουμε υπόψη την πιθανότητα ότι για όλες τις δοκιμές, η τιμή της νέας μέτρησης  $\check{\zeta}(l)$  βρίσκεται σε απόσταση  $\delta$  από την προηγούμενη μέτρηση  $\zeta(l)$ , για κάθε δοκιμή  $l$ . Η πιθανότητα για τις νέες μετρήσεις  $\check{\zeta}(1), \dots, \check{\zeta}(m)$  ανήκει στο σύνολο:

$$\mathcal{S}(x) = \{\check{\zeta}(1), \dots, \check{\zeta}(m) \in \mathbb{R} \mid \zeta(l) - \delta \leq \check{\zeta}(l) \leq \zeta(l) + \delta, \forall l = 1, \dots, m\}$$

Αυτή η πιθανότητα είναι ίση με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, επί του συνόλου  $\mathcal{S}(x)$ . Επιλέγοντας  $\delta$  αρκετά μικρό, αυτό το ολοκλήρωμα είναι περίπου ίσο με

$$\varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x)(2\delta)^n$$

Επιλέγουμε κατάλληλο  $x \in \mathbb{R}^n$  ώστε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα οι νέες μετρήσεις να βρίσκονται μέσα στο σύνολο  $\mathcal{S}(x)$ . Δηλαδή, θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την πιθανότητα να παρατηρήσουμε παρόμοια αποτελέσματα με αυτά που θα είχαμε εάν επαναλαμβάναμε το πείραμα. Πιο συγκεκριμένα, αναζητούμε την τιμή του  $x$  που μεγιστοποιεί την:

$$\varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x)(2\delta)^n, \text{ επί του συνόλου } \mathcal{S}(x)$$

που είναι ισοδύναμο πρόβλημα με την μεγιστοποίηση της:

$$\varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x), \text{ επί του συνόλου } \mathbb{R}^n.$$

Συνοψίζοντας, αποσκοπούμε στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης  $\varphi$ , η οποία ορίζεται ως:

για κάθε  $\zeta(1), \dots, \zeta(m) \in \mathbb{R}, \varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x) =$

$$\prod_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp\left(-\frac{(\zeta(l) - \beta\psi(l) - \gamma)^2}{2(\sigma_l)^2}\right)$$

$$\prod_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_l} \exp\left(-\frac{(\psi(l)\beta + \gamma - \zeta(l))^2}{2(\sigma_l)^2}\right) \quad (3.6)$$

όπου  $x = \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ .

Το παραπάνω κριτήριο βελτιστοποίησης καλείται εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

### **Τοποθέτηση προβλήματος**

Γράφουμε το πρόβλημα μέγιστης πιθανότητας με τη μορφή ενός προβλήματος βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς:

$$\max \varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x) \quad (3.7)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

Είναι δυνατό να διαπιστώσουμε ότι μετά την επίλυση του προβλήματος, κάνοντας  $m$  δοκιμές, μπορεί να χρειαστούν περαιτέρω δοκιμές ή πως κάποια από τα δεδομένα ενδέχεται να είναι λανθασμένα και πρέπει να διορθωθούν. Επομένως, θέλουμε να έχουμε μια ενημερωμένη εκτίμηση χωρίς να ξεκινάμε από το μηδέν.

### **Χαρακτηριστικά του προβλήματος**

Ερμηνεύσαμε εκ νέου τις παραμέτρους  $\beta$  και  $\gamma$  της πυκνότητας πιθανότητας, όπως δίνεται από τη σχέση (3.5), ως μεταβλητές στο (νέο) πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θεωρήσαμε τις τιμές των  $\psi(l)$  και  $\zeta(l)$  ως γνωστές, μετά την εκτέλεση των δοκιμών. Υποθέσαμε ότι τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα για διαφορετικές δοκιμές και ακολουθούν

την κανονική κατανομή. Γενικά, ο αριθμός των παραμέτρων ( $n$ ) μπορεί να είναι μικρότερος, ίσος ή μεγαλύτερος από τον αριθμό των δοκιμών ( $m$ ). Αν ο αριθμός των δοκιμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό των παραμέτρων τότε υπάρχει περίσσεια μετρήσεων και επομένως υποβιβασμός των επιπτώσεων που οφείλονται σε τυχαία σφάλματα. Αν ο αριθμός των δοκιμών είναι μικρότερος από τον αριθμό των παραμέτρων τότε δεν υπάρχει περίσσεια μετρήσεων και επομένως δεν υπάρχει τρόπος να ελεγχθούν οι επιπλοκές που προέρχονται από τυχαία σφάλματα. Πρακτικά, θα πρέπει να έχουμε περισσότερες δοκιμές από τον αριθμό των παραμέτρων που θέλουμε να εκτιμήσουμε, έτσι ώστε να μειωθούν οι επιπτώσεις των τυχαίων σφαλμάτων κατά την επίλυση του προβλήματος.

### ***Επίλυση του προβλήματος***

Το πρόβλημα (3.7)

$$\max \varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

όπου η  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ορίστηκε στην σχέση (3.6), δηλαδή:

$$\varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m); x), \text{ επί του συνόλου } \mathbb{R}^n$$

αποτελεί πρόβλημα μεγιστοποίησης. Ωστόσο, όπως αναφέραμε σε προηγούμενη ενότητα, μπορεί να μετασχηματιστεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μέσω του τύπου:

$$\max[\varphi(x)] = -\min[-\varphi(x)].$$

Αρχικά ορίζουμε την συνάρτηση  $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ως εξής:

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{f}(x) = -\ln(\varphi(\zeta(1), \dots, \zeta(m); \psi(1), \dots, \psi(m), x))$ . Τότε:

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(x) &= -\ln \left( \prod_{l=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \exp \left( -\frac{(\psi(l)^\dagger \beta + \gamma - \zeta(l))^2}{2(\sigma_l)^2} \right) \right) \\
 &= -\sum_{l=1}^m \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \right) - \left( -\frac{(\psi(l)^\dagger \beta + \gamma - \zeta(l))^2}{2(\sigma_l)^2} \right) \right] \\
 &= \sum_{l=1}^m \left[ -\frac{(\psi(l)^\dagger \beta + \gamma - \zeta(l))^2}{2(\sigma_l)^2} \right] - \sum_{l=1}^m \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \right) \right]
 \end{aligned}$$

όπου  $x = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ . Ο όρος:

$$-\sum_{l=1}^m \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \right) \right]$$

στον ορισμό της συνάρτησης  $\hat{f}$  είναι ανεξάρτητος από τις μεταβλητές  $\beta$  και  $\gamma$  και επομένως δεν επηρεάζει το σύνολο των ελαχιστοποιητών της συνάρτησης  $\hat{f}$ . Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι  $\sigma_l = \sigma$ , για κάθε  $l = 1, 2, \dots, m$  μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση  $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ως εξής:

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(x) &= \sigma^2 [\hat{f}(x) + \sum_{l=1}^m \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} \right) \right]] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (\psi(l)^\dagger \beta + \gamma - \zeta(l))^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^m (A_l - b_l)^2
 \end{aligned}$$

όπου

$$A_l = \frac{1}{2} (Ax - b)^\dagger (Ax - b)$$

$$\text{με } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι ίση με το μισό του αθροίσματος τετραγώνων των συναρτήσεων της μορφής:

$$\psi(l)^\dagger \beta + \gamma - \zeta(l)$$

Επιπλέον, οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $f$  συσχετίζονται σύμφωνα με έναν αυστηρά γνησίως φθίνοντα μετασχηματισμό και επομένως οι δύο συναρτήσεις θα έχουν το ίδιο σύνολο βελτιστοποιητών και εφόσον η συνάρτηση  $f$  είναι ίση με το μισό του αθροίσματος τετραγώνων (κάποιων όρων) το αρχικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων. Επομένως η συνάρτηση είναι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.[1],[12]

Υπολογίζουμε την 1<sup>η</sup> και 2<sup>η</sup> παράγωγο, οπότε προκύπτει:

$$\nabla f(x) = A^\dagger(Ax - b)$$

$$\nabla^2 f(x) = A^\dagger A$$

Ο πίνακας  $\nabla^2 f(x)$  είναι θετικά ημιορισμένος και επομένως η συνάρτηση είναι κυρτή. Συνεπώς, οι συνθήκες πρώτης τάξης  $\nabla f(x) = 0$  είναι ικανές για την βελτιστοποίηση του προβλήματος. Εάν η εξίσωση  $\nabla f(x) = 0$  έχει λύσεις, τότε το πρόβλημα έχει ελάχιστο, και οι βελτιστοποιητές ορίζονται από αυτές τις λύσεις. Θέτουμε  $\nabla f(x) = 0$  και αναδιατυπώνοντας θα έχουμε τη σχέση:

$$A^\dagger Ax = A^\dagger b$$

η οποία μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

όπου  $\mathbf{A} = A^\dagger A$  και  $\mathbf{B} = A^\dagger b$ . Η παραπάνω σχέση είναι μια γραμμική εξίσωση και επομένως μπορεί να λυθεί με παραγοντοποίηση του όρου  $\mathbf{A}$ . Γράφουμε  $\mathbf{A} = QR$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $R = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  άνω τριγωνικοί. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 & \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^n, \\
 f(x) &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}x - b)^\dagger (\mathbf{A}x - b) \\
 &= \frac{1}{2} (x^\dagger \mathbf{A}^\dagger - b^\dagger) (\mathbf{A}x - b) \\
 &= \frac{1}{2} (x^\dagger R^\dagger Q^\dagger - b^\dagger) (QRx - b) \\
 &= \frac{1}{2} (x^\dagger R^\dagger Q^\dagger - b^\dagger Q Q^\dagger) (QRx - Q Q^\dagger b) \\
 &= \frac{1}{2} (x^\dagger R^\dagger - b^\dagger Q) Q^\dagger Q (Rx - Q^\dagger b) \\
 &= \frac{1}{2} \left( x^\dagger \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}^\dagger - b^\dagger Q \right) \left( \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} x - Q^\dagger b \right), \text{ όπου } R = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} x - Q^\dagger b \right\|_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} [Q^\parallel]^\dagger \\ [Q^\perp]^\dagger \end{bmatrix} b \right\|_2^2, \text{ όπου } Q = \begin{bmatrix} Q^\parallel & Q^\perp \end{bmatrix} \\
 & \text{ με } Q^\parallel \in \mathbb{R}^{m \times n'} \text{ και } Q^\perp \in \mathbb{R}^{m \times (m-n')} \\
 &= \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} U_x - [Q^\parallel]^\dagger b \\ 0_x - [Q^\perp]^\dagger b \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left\| U_x - [Q^\parallel]^\dagger b \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| [Q^\perp]^\dagger b \right\|_2^2, \text{ από τον ορισμό της νόρμας } L_2
 \end{aligned}$$



Η τελευταία έκφραση ελαχιστοποιείται όταν  $U_x = [Q^{\parallel}]^{\dagger} b$  εφόσον η ποσότητα  $\frac{1}{2} \|[Q^{\perp}]^{\dagger} b\|_2^2$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ . Γεωμετρικά, μπορούμε να αναλύσουμε το διάνυσμα  $Ax - b$  σε άθροισμα δύο διανυσμάτων:

- $U_x - [Q^{\parallel}]^{\dagger} b$ , το οποίο εξαρτάται από το  $x$ , και
- $O_x - [Q^{\perp}]^{\dagger} b$ , το οποίο είναι ανεξάρτητο του  $x$ .

Η λύση  $x^* = \begin{pmatrix} \beta^* \\ \gamma^* \end{pmatrix}$  αποτελεί εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας της σχέσης μεταξύ εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\forall \psi \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \zeta = [\beta^*]^{\dagger} \psi + \gamma^*.$$

### 3.2 Μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους

Θεωρούμε ένα μηχάνημα που κατασκευάζει ένα συγκεκριμένο προϊόν, το οποίο απαιτεί κάποια δαπανηρή εισροή για να παραχθεί. Σε πολλές βιομηχανίες είναι δυνατό να αποθηκεύεται το προϊόν με χαμηλό κόστος από μέρα σε μέρα, από εβδομάδα σε εβδομάδα ή ακόμα και από εποχή σε εποχή. Σε αυτήν την περίπτωση, θέλουμε λειτουργία του μηχανήματος με σταθερή ισχύ. Ιδανικά, η σταθερή τιμή της εξόδου της μηχανής θα αντιστοιχούσε είτε στο σημείο της μέγιστης απόδοσης λειτουργίας του μηχανήματος, ή σε κάποιο άλλο επιθυμητό σημείο λειτουργίας του μηχανήματος.

Όταν η ζήτηση είναι χαμηλότερη από την παραγωγή, μέρος της παραγωγής πηγαίνει στο απόθεμα. Όταν η ζήτηση είναι μεγαλύτερη από την παραγωγή, τα αποθέματα χρησιμοποιούνται για να βοηθήσουν στην κάλυψη της ζήτησης. Ωστόσο, εάν η συσσώρευση αποθεμάτων είναι δαπανηρή ή εάν οι απαιτήσεις ζήτησης για το προϊόν μεταβάλλονται γρήγορα, τότε για να αποφευχθούν οι υπερβολικές προμήθειες όπως επίσης

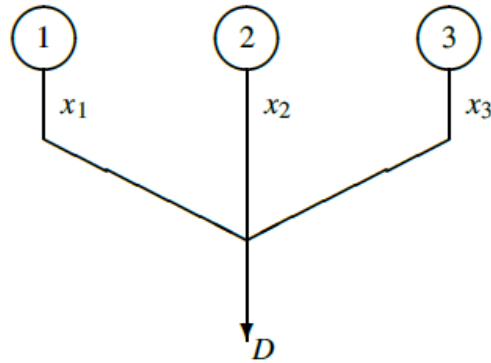
και οι ελλείψεις πρέπει να αλλάξουμε την παραγωγή για να ακολουθήσουμε τις διακυμάνσεις της ζήτησης. Εάν έχουμε μόνο ένα μηχάνημα για να κατασκευάσουμε το προϊόν, είναι εύκολο να αποφασίσουμε για το επίπεδο παραγωγής. Ωστόσο, εάν υπάρχουν πολλά μηχανήματα, και ιδιαίτερα εάν οι αποδόσεις λειτουργίας των μηχανών ποικίλλουν ανάλογα με την έξοδο και διαφέρουν από μηχανή σε μηχανή, τότε το πρόβλημα αλλάζει.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε  $n$  μηχανές ή εγκαταστάσεις που παράγουν ένα εμπόρευμα ή ένα προϊόν. Θεωρούμε την παραγωγή για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Το μήκος  $T$  αυτής της χρονικής περιόδου θα πρέπει να επιλέγεται ώστε να είναι αρκετά μικρό, ώστε η παραγωγή ανά μονάδα χρόνου για το εμπόρευμα ή το προϊόν από κάθε μηχανή να μπορεί να προσεγγιστεί καλά με μια σταθερά κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου  $T$ . Δηλαδή, υποθέτουμε ότι το εργοστάσιο είναι σε σχεδόν σταθερή κατάσταση. Κατά συνέπεια, η συνολική ποσότητα εμπορευμάτων που παράγεται από μια μηχανή κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου προσδιορίζει πλήρως την παραγωγή ανά μονάδα χρόνου καθ' όλη τη διάρκεια της χρονικής περιόδου [1]. Στην πράξη, αυτή η υπόθεση μπορεί να ισχύει μόνο κατά προσέγγιση.

Έστω  $x_k \in \mathbb{R}$  το συνολικό ποσό του εμπορεύματος που παράγεται από τη μηχανή  $k$ , κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου. Συγκεντρώνουμε τις ποσότητες παραγωγής των  $k = 1, 2, \dots, n$  μηχανών, σε ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$ , έτσι ώστε:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Η παραγωγή για 3 μηχανές παρουσιάζεται στην Εικόνα 1, όπου οι τρεις αυτές μηχανές αναπαριστώνται ως κύκλοι και παράγουν, αντίστοιχα, ποσότητες  $x_1, x_2$  και  $x_3$  του εμπορεύματος κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου.



Εικόνα 1. Παραγωγή τριών μηχανών

Έστω ότι για  $k = 1, 2, \dots, n$  υπάρχουν συναρτήσεις  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιες ώστε  $f_k(x_k)$  να είναι το κόστος παραγωγής  $x_k$  ποσότητας για την μηχανή  $k$  κατά την δεδομένη χρονική περίοδο. Υποθέτουμε ακόμη ότι μπορούμε να επιλέξουμε να θέσουμε μια μηχανή εκτός λειτουργίας και αν κάποια μηχανή τεθεί εκτός λειτουργίας τότε το κόστος παραγωγής είναι μηδενικό, δηλαδή,  $f_k(0) = 0$ . Προφανώς, σε μη μηδενικά επίπεδα παραγωγής, όταν δηλαδή το μηχάνημα είναι σε λειτουργία, το κόστος παραγωγής θα είναι μη μηδενικό.

Για να μπορέσουμε να επιλέξουμε τα κατάλληλα επίπεδα παραγωγής, θα αναζητήσουμε τις τιμές των  $x_k, k = 1, 2, \dots, n$  οι οποίες ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος παραγωγής, δηλαδή θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την αντικειμενική συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x_k) \quad (3.8)$$

Όσον αφορά τους περιορισμούς, υποθέτουμε ότι η μηχανή έχει μέγιστη παραγωγική ικανότητα  $\bar{x}_k$  και ελάχιστη παραγωγική ικανότητα  $\underline{x}_k \geq 0$ , που αντικατοπτρίζει τον τρόπο σχεδιασμού της μηχανής. Εάν η μηχανή βρίσκεται σε λειτουργία, τότε οι περιορισμοί χωρητικότητας απαιτούν ότι:

$$\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k \quad (3.9),$$

ενώ όταν η μηχανή είναι εκτός λειτουργία τότε  $x_k = 0$ . Τυπικά, η σχέση  $\underline{x}_k \neq 0$  υποδηλώνει ότι υπό κανονικές συνθήκες μια μηχανή δεν μπορεί να λειτουργήσει σε αυθαίρετα μικρά μη μηδενικά επίπεδα παραγωγής (για παράδειγμα, στις ηλεκτρικές γεννήτριες που λειτουργούν με ορυκτά καύσιμα, αυτό οφείλεται στην σταθερότητα της φλόγας στον κλίβανο και στις επιτρεπόμενες θερμοκρασίες στους σωλήνες του λέβητα). Επομένως το εφικτό σύνολο λειτουργίας για τη μηχανή  $k$  είναι:

$$S_k = \{0\} \cup [\underline{x}_k, \bar{x}_k].$$

Το σύνολο  $S_k$  δεν είναι κυρτό εάν  $x_k > 0$ . Καθορίζοντας την συνάρτηση (3.8) υποθέσαμε ότι κάθε συνάρτηση  $f_k$  ορίστηκε στο σύνολο  $\mathbb{R}$ . Ωστόσο, μόνο οι τιμές της  $f_k$  στο  $S_k$  σχετίζονται με τη λύση του προβλήματος. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό της  $f$ , έχουμε επεκτείνει την συνάρτηση κόστους της κάθε μηχανής από το εύρος λειτουργίας της στο σύνολο  $S_k$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$ .

Όσον αφορά την παραγωγή, υποθέτουμε ότι κατά την χρονική περίοδο  $T$  έχουμε συνολική ζήτηση για το εμπόρευμα ποσότητα  $D$ . Για να καλυφθεί η ζήτηση πρέπει να ικανοποιηθεί ο περιορισμός:

$$D = \sum_{k=1}^n x_k \quad (3.10),$$

ο οποίος μπορεί να γραφτεί στη μορφή  $Ax = b$ , με δύο τρόπους για το  $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  και  $b \in \mathbb{R}$ :

- $A = 1^\dagger$ ,  $b = [D]$ , ή
- $A = -1^\dagger$ ,  $b = [-D]$ .

Συνδυάζοντας την λειτουργία της μηχανής και το επίπεδο παραγωγής, προκύπτει ότι το εφικτό σύνολο λειτουργίας για όλες τις μηχανές είναι:

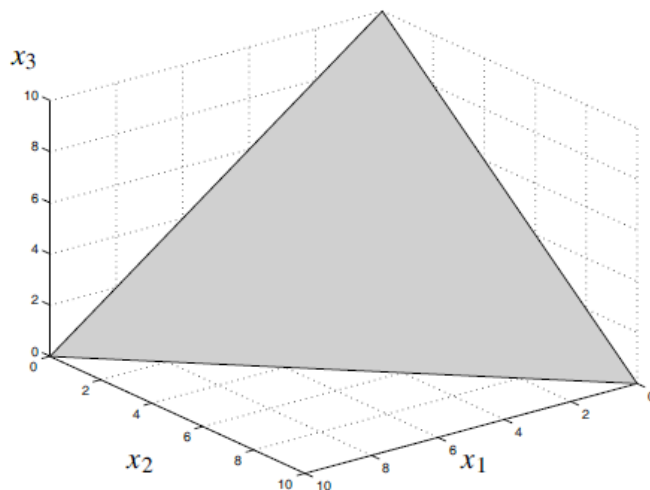
$$\left( \prod_{k=1}^n S_k \right) \subset \mathbb{R}^n,$$

όπου ο παραπάνω συμβολισμός αφορά στο καρτεσιανό γινόμενο, έτσι ώστε το εφικτό σύνολο για το πρόβλημα να είναι:

$$\underline{S} = \left( \prod_{k=1}^n S_k \right) \cap \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}.$$

«Χαλαρώνοντας» τις συνθήκες, υποθέτουμε ότι κάθε μηχανήμα βρίσκεται σε λειτουργία και αγνοούμε τους περιορισμούς ελάχιστης και μέγιστης παραγωγικής ικανότητας. Δηλαδή, προσαρμόζουμε κατάλληλα το σύνολο των εφικτών σημείων λειτουργίας για τη μηχανή  $k$ , από το σύνολο  $S_k$  στο σύνολο  $\mathbb{R}$  και αντίστοιχα θα «χαλαρώσουμε» το εφικτό σύνολο για το πρόβλημα από το σύνολο  $\underline{S}$  στο σύνολο:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\}.$$



**Εικόνα 2.** Μέρος του εφικτού συνόλου  $S$  για τη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους

Μέρος του εφικτού συνόλου  $S$  που βρίσκεται στο μη αρνητικό άξονα απεικονίζεται στην Εικόνα 2 για  $n = 3$  και  $D = 10$ . Γενικά, το  $S$  είναι ένα υπερεπίπεδο στο  $\mathbb{R}^n$  [14].

## Τοποθέτηση προβλήματος

Υπό τις παραπάνω συνθήκες το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι:

$$\min\{f(x) \mid Ax = b, x \in \mathbb{R}^n,$$

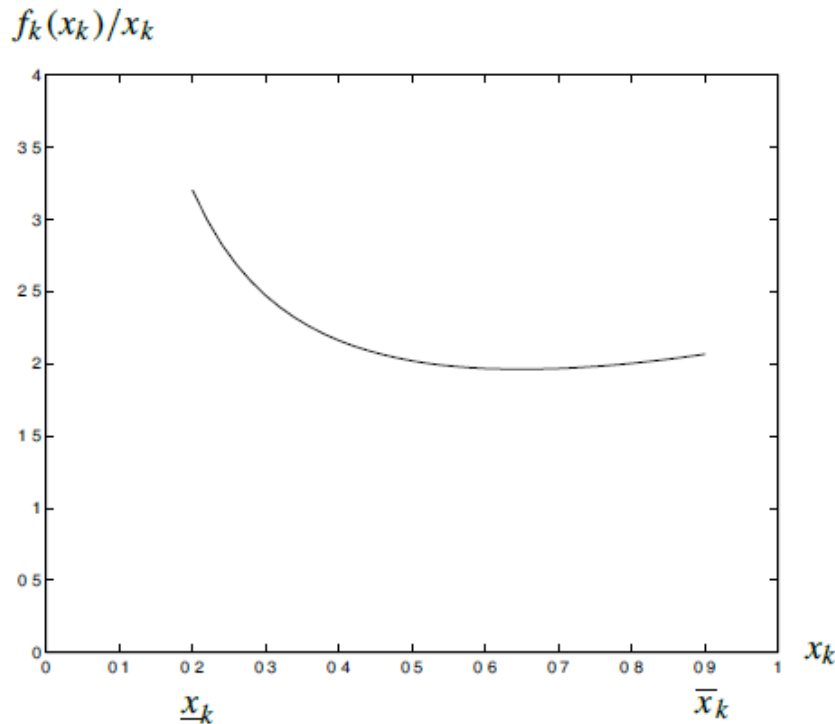
το οποίο αποτελεί πρόβλημα βελτιστοποίησης με εξισωτικό περιορισμό.

Παρατηρούμε ότι αν και η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση (3.8) είναι μη γραμμική, εκφράζεται ως το άθροισμα των συναρτήσεων  $f_k$ , κάθε μια από τις οποίες εξαρτάται μόνο από μια καταχώρηση  $x_k$  του  $x$ . Δηλαδή, η αντικειμενική συνάρτηση είναι προσθετικά διαχωρίσιμη. Επιπλέον, θεωρούμε το μέσο κόστος ανά μονάδα παραγωγής  $\frac{f_k(x_k)}{x_k}$ , για την παραγωγή ποσότητας  $x_k$  από την μηχανή  $k$ , δηλαδή είναι ο λόγος:

$$\frac{\text{κόστος για την δεδομένη χρονική περίοδο}}{\text{παραγωγή για την δεδομένη χρονική περίοδο}}$$

Σε χαμηλά επίπεδα παραγωγής, δηλαδή για σχετικά μικρές τιμές  $x_k$ , θα περιμέναμε το μέσο κόστος παραγωγής να είναι σχετικά υψηλό. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι συνήθως υπάρχουν κόστη που πρέπει να πραγματοποιούνται κάθε φορά που η μονάδα βρίσκεται σε λειτουργία και παράγει μη μηδενικά επίπεδα παραγωγής. Αυτές οι δαπάνες περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, το κόστος λειτουργίας βοηθητικού εξοπλισμού όπως αντλίες, φωτισμός, υπολογιστές και κλιματισμός. Εάν απενεργοποιήσουμε το μηχάνημα, τότε μπορούμε επίσης να απενεργοποιήσουμε (κατά το μεγαλύτερο μέρος) τον βοηθητικό εξοπλισμό και έτσι το κόστος βοηθητικής λειτουργίας θα είναι μηδενικό. Ωστόσο, εάν το μηχάνημα βρίσκεται σε λειτουργία, ο βοηθητικός εξοπλισμός πρέπει να λειτουργεί και, επιπλέον, το κόστος λειτουργίας αυτού του βοηθητικού εξοπλισμού ενδέχεται να μην εξαρτάται από το  $x_k$ . Για χαμηλές αλλά μη μηδενικές τιμές του  $x_k$ , το κόστος λειτουργίας του βοηθητικού εξοπλισμού υπολογίζεται κατά μέσο όρο σε μια σχετικά μικρή ποσότητα παραγωγής και έτσι το μέσο κόστος είναι υψηλό. Η εικόνα 3 απεικονίζει το μέσο κόστος για  $\underline{x}_k \leq x_k \leq$

$\bar{x}_k$ . Για  $x_k \approx \underline{x}_k$ , το μέσο κόστος είναι υψηλό. (Στην πράξη, το κόστος είναι συνήθως λιγότερο ομαλό από αυτό που φαίνεται στην Εικόνα 3).

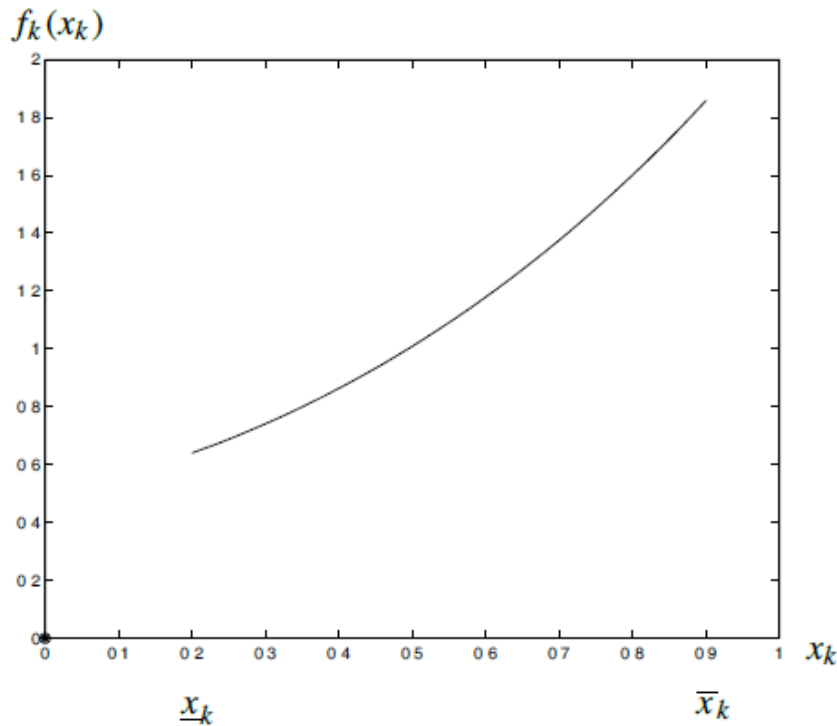


Εικόνα 3. Το μέσο κόστος παραγωγής  $\frac{f_k(x_k)}{x_k}$  για μια τυπική μηχανή για  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$ .

Καθώς το  $x_k$  αυξάνεται από τα χαμηλά επίπεδα, το μέσο κόστος παραγωγής τυπικά μειώνεται επειδή το κόστος λειτουργίας του βοηθητικού εξοπλισμού υπολογίζεται κατά μέσο όρο σε μεγαλύτερη ποσότητα παραγωγής. Ωστόσο, δεν αναμένουμε ότι το μέσο κόστος παραγωγής θα μειωθεί επ' αόριστον, έτσι ώστε για ορισμένα  $x_k$ , το μέσο κόστος  $\frac{f_k(x_k)}{x_k}$  να φτάσει στο ελάχιστο και μετά να αρχίσει να αυξάνεται ξανά για μεγαλύτερες τιμές του  $x_k$ . Το σημείο όπου το  $\frac{f_k(x_k)}{x_k}$  γίνεται ελάχιστο είναι το σημείο μέγιστης απόδοσης της μηχανής.

Αν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές του  $\frac{f_k(x_k)}{x_k}$  επί  $x_k$ , λαμβάνουμε το κόστος παραγωγής

$f_k(x_k)$  όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4).



Εικόνα 4. Κόστος παραγωγής  $f_k(x_k)$  έναντι παραγωγής  $x_k$  για μια τυπική μηχανή.

Παρατηρούμε ότι εάν το μηχάνημα είναι εκτός λειτουργίας τότε το κόστος παραγωγής είναι μηδενικό. Παρουσία επικουρικών λειτουργικών δαπανών, υπάρχει ένα άλμα στο κόστος μεταξύ της τιμής  $f_k(0) = 0$  στο  $x_k = 0$  και των τιμών  $f_k(x_k) > 0$  για  $x_k > 0$ . Δηλαδή, αν υπολογίζαμε το  $f_k$  από  $\underline{x}_k$  στις τιμές  $x_k < \underline{x}_k$  τότε θα βρίσκαμε ότι στο  $x_k = 0$  η τιμή της συνάρτησης κόστους παραγωγής θα ήταν μεγαλύτερη από το μηδέν λόγω του κόστους βοηθητικής λειτουργίας.

Σχετικά με την κυρτότητα, από την Εικόνα 4, παρατηρούμε ότι αν  $x_k > 0$ , τότε το σύνολο λειτουργίας του μηχανήματος,  $S_k = \{0\} \cup [\underline{x}_k, \bar{x}_k]$ , δεν είναι κυρτό. Εφόσον ο



ορισμός της κυρτότητας μιας συνάρτησης απαιτούσε να καθορίσουμε ένα σύνολο δοκιμών στο οποίο θα ελέγξουμε τη συνάρτηση για κυρτότητα υποθέτουμε αρχικά ότι  $x_k = 0$ , έτσι ώστε το εφικτό σύνολο  $\{0\} \cup [\underline{x}_k, \bar{x}_k] = [\underline{x}_k, \bar{x}_k] = [0, \bar{x}_k]$  είναι κυρτό. Ακόμα και σε αυτήν την περίπτωση, ωστόσο, εάν υπάρχουν μη μηδενικά βοηθητικά λειτουργικά κόσθη, τότε η  $f_k$  δεν είναι μια κυρτή συνάρτηση στο  $[0, \bar{x}_k]$  λόγω της ασυνέχειας στο  $f_k$ .

Για να προσδιορίσουμε το σύνολο δοκιμών στο οποίο η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να είναι κυρτή μπορούμε να υποθέσουμε:

- $\underline{x}_k = 0$  και να θεωρήσουμε το σύνολο  $\underline{S}_k = \{x_k \in \mathbb{R} | 0 < x_k \leq \bar{x}_k\} \subset S_k$
- $\underline{x}_k > 0$  και να θεωρήσουμε το σύνολο  $\underline{S}_k = \{x_k \in \mathbb{R} | \underline{x}_k < x_k \leq \bar{x}_k\} \subset S_k$ .

Και στις δύο περιπτώσεις, το  $\underline{S}_k$  είναι ένα κυρτό σύνολο. Επιπλέον, και για τις δύο αυτές περιπτώσεις, από την εικόνα 5 φαίνεται ότι η  $f_k$  είναι το κυρτή στο  $\underline{S}_k$ . Η κυρτότητα της  $f_k$  στο  $S_k$  προκύπτει από τα χαρακτηριστικά λειτουργίας τυπικών μηχανών. Θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση κόστους κάθε μηχανής έχει προεκταθεί σε μια συνάρτηση που είναι κυρτή σε όλο το  $\mathbb{R}$ . [9]

Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι το  $f_k : S_k \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τετραγωνική και της μορφής:

$$\forall x_k \in \underline{S}_k, f_k(x_k) = \frac{1}{2} Q_{kk}(x_k)^2 + c_k x_k + d_k,$$

οπότε θα έχουμε:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \frac{1}{2} x^\dagger Q x + c^\dagger x + d,$$

όπου

- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , ένας διαγώνιος πίνακας με την  $k$ -οστή διαγώνιο να είναι ίση με  $Q_{kk}$ ,
- $c \in \mathbb{R}^n$ , έχει  $k$ -οστή είσοδο ίση με  $c_k$ ,
- $d = \sum_{k=1}^n d_k \in \mathbb{R}$ .

Ο περιορισμός του προβλήματος (3.10) είναι γραμμικός οπότε εξαιτίας της γραμμικότητας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον περιορισμό ισότητας  $Ax = b$  για να απαλείψουμε μια από τις μεταβλητές, έστω τη  $x_1$ , γράφοντας:

$$x_1 = D - x_2 - \dots - x_n.$$

Εκφράζοντας την αντικειμενική συνάρτηση με όρους  $x_2, \dots, x_n$  καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς με αντικειμενική συνάρτηση  $f(\tilde{x})$ , όπου:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \begin{bmatrix} D - x_2 - \dots - x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1^+ \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \hat{x} + Z\xi \\ &= \tau_\xi, \end{aligned}$$

με

- $\hat{x} = \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix} \in S$
- $Z = \begin{bmatrix} -1^+ \\ I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}$
- $\xi = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$

και όπου  $\tau: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S$  και ορίζεται από τον τύπο:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \tau(\xi) = \hat{x} + Z\xi.$$

Η συνάρτηση  $\tau$  βρίσκεται στο σύνολο  $S$ , το σημείο  $\hat{x}$  είναι συγκεκριμένη λύση των εξισώσεων  $Ax = b$  ενώ ο πίνακας  $Z$  έχει στήλες που αποτελούν βάση για τον μηδενικό χώρο του  $A$ . Η αντικειμενική συνάρτηση  $f(\tilde{x})$  εξαρτάται μόνο από το  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Με τον

παραπάνω τρόπο μετασχηματίσαμε το μη γραμμικό πρόβλημα με περιορισμούς ισότητας σε ένα πρόβλημα χωρίς περιορισμούς με αντικειμενική συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \varphi(\xi) = f(\tilde{x}) = f \begin{bmatrix} D^{-1} \xi \\ \xi \end{bmatrix} = f(\tau(\xi)),$$

επομένως το πρόβλημα χωρίς περιορισμούς της μορφής:

$$\min f(\tilde{x}) = \min \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$$

είναι επιλύσιμο.

Η απαλοιφή των μεταβλητών είναι συχνά ένας αποτελεσματικός τρόπος επίλυσης ενός προβλήματος με γραμμικούς περιορισμούς. Ο αριθμός των μεταβλητών θα μειωθεί κατά τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων περιορισμών. Στην μελέτη περίπτωσης που παρουσιάσαμε, η χρήση ενός περιορισμού μειώνει τον αριθμό των μεταβλητών σε  $(n-1)$ . Εάν υπήρχαν, ας πούμε,  $m$  περιορισμοί ισότητας, τότε θα υπήρχαν  $(n-m)$  μεταβλητές στο μετασχηματισμένο πρόβλημα που θα προκύψει, υποθέτοντας ότι οι αντίστοιχες σειρές του  $A$  ήταν γραμμικά ανεξάρτητες. Η αντικειμενική συνάρτηση,  $\varphi$ , του προκύπτοντος χωρίς περιορισμούς προβλήματος δεν διαχωρίζεται προσθετικά. Μερικές φορές, η απώλεια της δυνατότητας διαχωρισμού μπορεί να κάνει το πρόβλημα πιο δύσκολο να λυθεί, έτσι ώστε η απαλοιφή των μεταβλητών να μην είναι πάντα η καλύτερη προσέγγιση.

### Επίλυση του προβλήματος

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης προς επίλυση, είναι:

$$\min \{f(x) \mid Ax = b\}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Υποθέτουμε ότι  $n=3$ . Τότε ο πίνακας  $A$  και το δεύτερο μέλος, είναι:

$$A = [-1 \quad -1 \quad -1], \quad b = [-D].$$

Συνοπτικά, αυτό το πρόβλημα έχει μια κυρτή και διαχωρίσιμη αντικειμενική συνάρτηση, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, και μόνο έναν εξισωτικό περιορισμό. Επιπλέον, ο περιορισμός ισότητας είναι γραμμικός. Δηλαδή, το πρόβλημα είναι κυρτό .[1]

Για την επίλυση του προβλήματος δίνουμε μια αρχική τιμή  $x^{(0)}$  που είναι εφικτή για τον περιορισμό ισότητας, για παράδειγμα:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $Z$  με στήλες που αποτελούν τη βάση για τον μηδενικό χώρο του  $A$ , είναι:

$$Z = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Γράφοντας καθεμία από τις καταχωρήσεις στις απαραίτητες προϋποθέσεις πρώτης τάξης, λαμβάνουμε:

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \frac{df_k}{dx_k}(x_k^*) - \lambda^* = 0, \quad D - \sum_{k=1}^n x_k^* = 0.$$

Μπορούμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας αλγόριθμο Newton–Raphson ή κάποια προσέγγιση του αλγόριθμου Newton–Raphson. Αν κάθε συνάρτηση  $f_k$  είναι τετραγωνική και κυρτή, τότε οι απαραίτητες συνθήκες είναι γραμμικές και επομένως μπορούν να λυθούν άμεσα. Εάν κάθε συνάρτηση  $f_k$  είναι αυστηρά κυρτή τότε θα υπάρχει ένας μοναδικός ελαχιστοποιητής.

Ο αναδρομικός τύπος είναι:

$$\forall k = 1, \dots, n, x^{(v)} \in \operatorname{argmin}\{f_k(x_k) - \lambda^{(v)} x_k\}, \quad x_k \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

$$\Delta\lambda^{(v)} = Ax^{(v)} - b = D - \sum_{k=1}^n x_k^{(v)}.$$

$$\lambda^{(v+1)} = \lambda^{(v)} + \alpha^{(v)} \Delta\lambda^{(v)}.$$

Εάν η συνάρτηση  $f_k$  είναι τετραγωνική, τότε, σε κάθε επανάληψη  $v$ , το  $k$ -οστό υποπρόβλημα στο δεύτερο μέλος του (3.11) μπορεί να λυθεί απευθείας σε ένα βήμα επιλύοντας τις γραμμικές απαραίτητες συνθήκες. Εάν η  $f_k$  δεν είναι τετραγωνική, τότε η (3.11) μπορεί να λυθεί εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Newton–Raphson μέχρι να ληφθεί μια τιμή  $x_k^{(v)}$  που να ικανοποιεί τις απαραίτητες προϋποθέσεις. Δηλαδή, αν η  $f_k$  δεν είναι τετραγωνική, τότε σε κάθε επανάληψη  $v$  και για κάθε  $k$  πρέπει να κάνουμε πολλές εσωτερικές επαναλήψεις για να ικανοποιήσουμε τις απαραίτητες συνθήκες του προβλήματος.

Συνοψίζοντας, οι τιμές  $\lambda^{(v)}$  είναι δοκιμαστικές τιμές που προτείνονται σε κάθε επανάληψη, ενώ κύριος στόχος είναι να επιλεγθούν οι τιμές με τέτοιο τρόπο ώστε η προσφορά να ταιριάζει με τη ζήτηση, και επομένως, ο πολλαπλασιαστής Langrange  $\lambda^*$  είναι η τελική τιμή που ταιριάζει μεταξύ προσφοράς και ζήτησης. Κάθε συνάρτηση κόστους  $f_k$  σχετίζεται με έναν παράγοντα λήψης αποφάσεων που λαμβάνει αποφάσεις με βάση τη δική του συνάρτηση κόστους και τις ενδεικτικές τιμές. Κάθε παράγοντας λήψης αποφάσεων θέλει να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του, που είναι η διαφορά μεταξύ των εσόδων του και του κόστους παραγωγής του. Ομοίως, κάθε πράκτορας θέλει να ελαχιστοποιήσει τη διαφορά μεταξύ του κόστους παραγωγής και των εσόδων του. (Η διαφορά μεταξύ κόστους και εσόδων ελπίζουμε να είναι αρνητική, έτσι ώστε τα κέρδη να είναι θετικά). Δηλαδή, ο αντιπρόσωπος πουλάει μια ποσότητα προϊόντος  $x_k$  με βάση την ελαχιστοποίηση της διαφοράς μεταξύ του κόστους παραγωγής  $f_k(x_k)$  της ποσότητας  $x_k$ , μείον τα έσοδα  $x_k \lambda^{(v)}$ , με βάση την τρέχουσα τιμή της μεταβλητής  $\lambda^{(v)}$ . Η τιμή του  $\lambda^{(v)}$  είναι η προτεινόμενη δοκιμαστική τιμή ανά μονάδα παραγωγής στη  $v$ -ιοστή επανάληψη. Για οποιαδήποτε δεδομένη τιμή  $\lambda^{(v)}$ , κάθε αντιπρόσωπος προσφέρει προς πώληση ένα ποσό που δίνεται από τη λύση του (3.11). Η λύση του (3.11) μεγιστοποιεί το κέρδος, δηλαδή τα έσοδα μείον το

κόστος, για τη δεδομένη τιμή της μεταβλητής. Η τιμή προσαρμόζεται έως ότου η παραγωγή που αθροίζεται σε όλους τους αντιπροσώπους ισούται με τη ζήτηση.

Σε κάθε επανάληψη, ο κεντρικός αγοραστής προσαρμόζει τις δοκιμαστικές τιμές με βάση τη σύγκριση του αθροίσματος των προσφερόμενων παραγωγών από τους πράκτορες με την τιμή στόχο  $D$ . Εάν δεν υπάρχει αρκετή παραγωγή, τότε η τιμή αυξάνεται για την επόμενη επανάληψη για να ενθαρρύνει περισσότερη παραγωγή. Αντίθετα, εάν η παραγωγή υπερβεί τον στόχο, τότε η τιμή μειώνεται στην επόμενη επανάληψη για να αποθαρρύνει την παραγωγή. Στις βέλτιστες συνθήκες, όταν η μεταβλητή  $\lambda^{(v)}$  έχει συγκλίνει στον πολλαπλασιαστή Lagrange  $\lambda^*$ , αυτή η τιμή ενθαρρύνει ακριβώς τη σωστή ποσότητα παραγωγής. Επιπλέον, στο βέλτιστο σημείο, το «οριακό κόστος παραγωγής» για κάθε παράγοντα, δηλαδή την παράγωγο της συνάρτησης κόστους, είναι η ίδια για όλους τους πράκτορες.

### **3.3 Παραγωγή χαμηλού κόστους με περιορισμούς παραγωγικής ικανότητας**

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάσαμε τη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους στο οποίο αγνοήσαμε τους περιορισμούς ελάχιστης και μέγιστης χωρητικότητας μηχανής και γι αυτό τον λόγο το διατυπώσαμε ως πρόβλημα βελτιστοποίησης με εξισωτικούς περιορισμούς, δηλαδή, αγνοήσαμε τους περιορισμούς της ανισότητας. Σε αυτή την ενότητα, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η λύση του προβλήματος παραγωγής χαμηλού κόστους δεν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς ελάχιστης και μέγιστης χωρητικότητας μηχανής, έτσι ώστε αυτοί οι περιορισμοί ανισότητας θα πρέπει να ληφθούν ρητά υπόψη [1]. Θυμίζουμε πως το πρόβλημα βελτιστοποίησης προς επίλυση, είναι:

$$\min\{f(x) \mid Ax = b\}, x \in \mathbb{R}^n,$$

με αντικειμενική συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x_k)$$

υπό τον εξισωτικό περιορισμό:

$$D = \sum_{k=1}^n x_k \quad (3.10),$$

Η σχέση μπορεί να γραφτεί στη μορφή  $Ax = b$ , με  $A \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  και  $b \in \mathbb{R}$ :  $A = -1^{\dagger}$ ,  $b = [-D]$ .

Σε αυτή τη μελέτη περίπτωσης συμπεριλαμβάνουμε επίσης τους περιορισμούς ελάχιστης και μέγιστης χωρητικότητας μηχανής, για κάθε μηχανή, δηλαδή:

$$\forall l = 1, 2, \dots, n, \quad \underline{x}_l \leq x_l \leq \bar{x}_l.$$

Συνοψίζουμε αυτούς τους περιορισμούς γράφοντας  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ , όπου τα  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  και  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι σταθερά διανύσματα με  $l$ -ιοστές εγγραφές  $\underline{x}_l$  και  $\bar{x}_l$ , αντίστοιχα.

Γράφουμε το πλήρες πρόβλημα ως εξής:

$$\min\{f(x) \mid Ax = b, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, x \in \mathbb{R}^n$$

Αναζητούμε την ελάχιστη τιμή της  $f$  έναντι του  $x$  στο  $\mathbb{R}^n$  έτσι ώστε το άθροισμα

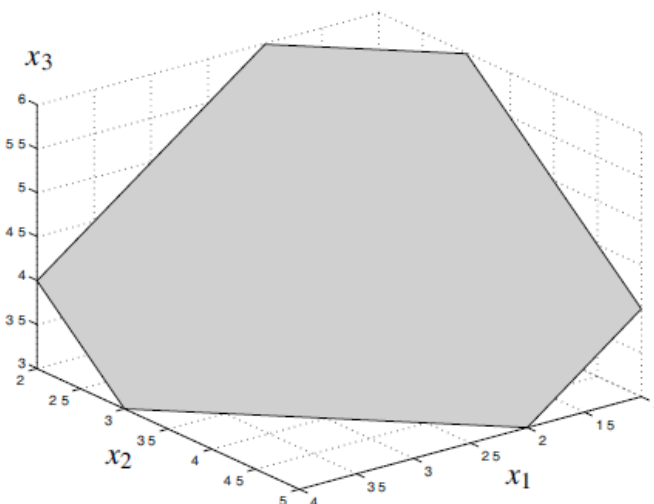
$$\sum_{k=1}^n x_k$$

να ισούται με  $D$  και τέτοιο ώστε  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ .

Όπως και στη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους, η ζήτηση θα αλλάξει με την πάροδο του χρόνου. Κατά συνέπεια, είναι σημαντικό να μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μεταβολή του κόστους λόγω μιας αλλαγής στη ζήτηση από  $D$  σε  $D + \Delta D$ . Επιπλέον, εάν η χωρητικότητα μιας μηχανής  $k$  αλλάξει ή αποτύχει, τότε θα αλλάξουν οι αντίστοιχες εγγραφές  $\underline{x}_l$  και  $\bar{x}_l$  των  $\underline{x}$  και  $\bar{x}$  αντίστοιχα.

Από την ανάλυση του προβλήματος στην προηγούμενη ενότητα προέκυψε ότι για τη μηχανή  $k$  εάν  $x_k > 0$ , τότε, για τυπικές συναρτήσεις κόστους, η  $f_k$  είναι κυρτή στο  $[\underline{x}_k, \bar{x}_k]$ . Επιπλέον, υποθέσαμε ότι κάθε συνάρτηση  $f_k$  έχει προεκταθεί σε μια συνάρτηση που είναι κυρτή σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Τέλος, ο περιορισμός παραγωγής  $D = \sum_{k=1}^n x_k$  είναι ένα υπερεπίπεδο στον  $\mathbb{R}^n$ . Οι περιορισμοί κάτω και άνω ορίου στο  $x$  ορίζουν ένα «πλαίσιο» στον χώρο  $\mathbb{R}^n$ . Η τομή του «πλαισίου» με τον περιορισμό ισότητας περιορίζει την εφικτή περιοχή σε μια επίπεδη τομή μέσα από το πλαίσιο. Η επίπεδη τομή καθορίζεται από τον περιορισμό ισότητας  $D = \sum_{k=1}^n x_k$  παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 5).



Εικόνα 5. Εφικτό σύνολο για μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους (ανισοτικοί περιορισμοί).

Το πρόβλημα παραγωγής χαμηλού κόστους, όπως είδαμε, είναι κυρτό. Όπως και στη μελέτη για βελτιστοποίηση του προβλήματος με περιορισμούς ισότητας, κι εδώ ισχύει ότι για κυρτά προβλήματα που διαθέτουν λύση, υπάρχουν απαραίτητες και επαρκείς προϋποθέσεις για βελτιστοποίηση που βασίζονται μόνο στις παραγώγους πρώτης τάξης.

### Επίλυση του προβλήματος



Το πρόβλημα:

$$\min\{f(x) \mid Ax = b, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}, x \in \mathbb{R}^n,$$

όπου οι εξισωτικοί περιορισμοί έχουν την μορφή:

$$A \in \mathbb{R}^{1 \times n} \text{ και } b \in \mathbb{R}: A = -1^\dagger, b = [-D],$$

έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Η αντικειμενική συνάρτηση είναι κυρτή και διαχωρίσιμη,
- Υπάρχει ένας περιορισμός εξίσωσης και
- Υπάρχουν δύο ανισωτικοί περιορισμοί για κάθε μεταβλητή.

Για την επίλυση του προβλήματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν αλγόριθμο εσωτερικού σημείου [17]. Για κάθε μεταβλητή  $x_l$ , προκειμένου να επιβληθούν τα όρια  $\underline{x}_l \leq x_l \leq \bar{x}_l$ , ο αντίστοιχος όρος στο σύνορο, είναι:

$$-t(\ln(x_l - \underline{x}_l) + \ln(\bar{x}_l - x_l)).$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να αναλύσουμε το πρόβλημα σε ένα σύνολο υποπροβλημάτων, ένα για κάθε μηχανή  $k$ , το καθένα με δύο δεσμευμένους περιορισμούς  $\underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k$ . Η αντικειμενική συνάρτηση κάθε υποπροβλήματος είναι κυρτή και (τουλάχιστον κατά προσέγγιση) τετραγωνική που αποτελείται από τη συνάρτηση κόστους για την αντίστοιχη μηχανή, μαζί με έναν όρο που περιλαμβάνει την τελευταία εκτίμηση του πολλαπλασιαστή Lagrange.

Υποθέτουμε πως για κάθε  $k$ , το κόστος  $f_k$  της μηχανής  $k$  είναι τετραγωνική συνάρτηση της μορφής:

$$\forall x_k \in \underline{S}_k, f_k(x_k) = \frac{1}{2} Q_{kk}(x_k)^2 + c_k x_k + d_k,$$

Τότε για κάθε τιμή της μεταβλητής  $\lambda$ , θα πάρουμε υποπροβλήματα (με περιορισμούς) της μορφής:

$$\forall k = 1, \dots, n, \min \left\{ \frac{1}{2} Q_{kk}(x_k)^2 + c_k x_k + d_k - \lambda x_k \mid \underline{x}_k \leq x_k \leq \bar{x}_k \right\}.$$

Ο μη περιορισμένος ελαχιστοποιητής της αντικειμενικής συνάρτησης κάθε υποπροβλήματος, δίνεται θέτοντας την παράγωγο της αντικειμενικής συνάρτησης ίση με το μηδέν. Δηλαδή, ο χωρίς περιορισμούς ελαχιστοποιητής της αντικειμενικής συνάρτησης είναι:

$$x_k = \frac{1}{Q_{kk}} (\lambda - c_k).$$

Εάν ο μη περιορισμένος ελαχιστοποιητής είναι εντός του εύρους που επιτρέπουν το άνω και κάτω άκρο των περιορισμών, τότε αυτός είναι ο ελαχιστοποιητής του υποπροβλήματος (με περιορισμούς). Εάν ο μη περιορισμένος ελαχιστοποιητής είναι εκτός του εύρους που επιτρέπουν το άνω και κάτω άκρο των περιορισμών, τότε ο ελαχιστοποιητής του υποπροβλήματος είναι το πλησιέστερο όριο.

Συνοπτικά, για μια δεδομένη τιμή της μεταβλητής  $\lambda$ , ο αντίστοιχος ελαχιστοποιητής του υποπροβλήματος είναι:

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad x_k^{(\lambda)} = \min \left\{ \bar{x}_k, \max \left\{ \underline{x}_k, \frac{1}{Q_{kk}} (\lambda - c_k) \right\} \right\}.$$

Με αντικατάσταση της λύσης  $x_k^{(\lambda)}$  έχουμε:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad D(\lambda) = \sum_{k=1}^n f_k(x_k^{(\lambda)}) + \lambda \left( D - \sum_{k=1}^n x_k^{(\lambda)} \right).$$

Εναλλακτικά, μπορεί να χρησιμοποιηθεί αλγόριθμος απότομης ανόδου, ο οποίος βασίζεται στην ικανοποίηση του περιορισμού της ισότητας, σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Delta\lambda = \nabla D(\lambda) = Ax^{(\lambda)} - b = D - \sum_{k=1}^n x_k^{(\lambda)}.$$

Δεδομένου ότι κάθε συνάρτηση κόστους μηχανής είναι αυστηρά κυρτή, ο ελαχιστοποιητής μπορεί να βρεθεί μέσω της λύσης του παραπάνω αλγόριθμου και τέλος, όπως και στην προηγούμενη μελέτη περίπτωσης με τους περιορισμούς ισότητας, το  $\lambda$  είναι δυνατό να ερμηνευτεί ως δοκιμαστική τιμή ανά μονάδα παραγωγής [1].

### 3.4 Βέλτιστη δρομολόγηση δικτύου δεδομένων

Θεωρούμε ένα δίκτυο επικοινωνιών που αποτελείται από συνδέσμους επικοινωνίας που ενώνονται μεταξύ των κόμβων. Οι χρήστες επιθυμούν να στείλουν δεδομένα από κόμβους προέλευσης σε κόμβους προορισμού μέσω συνδέσμων μεταξύ των κόμβων. Κάθε σύνδεσμος έχει μέγιστη χωρητικότητα για μετάδοση δεδομένων. Έστω ότι τα δεδομένα αποστέλλονται από τους χρήστες στο δίκτυο, σε συλλογές που ονομάζονται πακέτα, όπου κάθε πακέτο αποτελείται από τον ίδιο αριθμό bit, δηλαδή τα πακέτα είναι ίσου μήκους. Επιπλέον υποθέτουμε ότι ο χρόνος μεταξύ της άφιξης κάθε πακέτου σε έναν κόμβο θεωρείται τυχαίος, με εκθετική κατανομή. Η παράμετρος της εκθετικής κατανομής πιθανότητας που χαρακτηρίζει τους χρόνους μεταξύ των αφίξεων μπορεί να διαφέρει από κόμβο σε κόμβο, αλλά υποθέτουμε ότι οι υποκείμενες κατανομές πιθανοτήτων των χρόνων μεταξύ άφιξης δεν ποικίλλουν με την πάροδο του χρόνου.

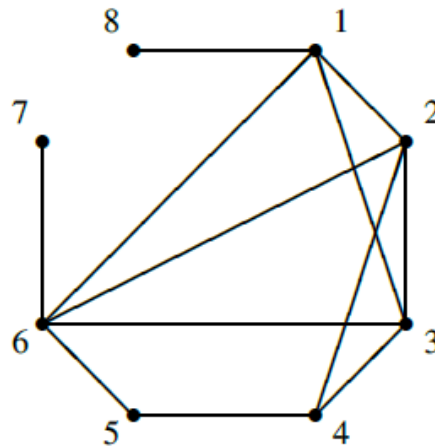
Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός ζητημάτων που σχετίζονται με ένα δίκτυο επικοινωνιών δεδομένων, όπως: κωδικοί διόρθωσης σφαλμάτων, επιβεβαίωση λήψης μηνύματος, αρχικοποίηση, συγχρονισμός υλικού, αξιοπιστία και επέκταση ενός υπάρχοντος δικτύου. Θα επικεντρωθούμε σε ένα μόνο από αυτά τα ζητήματα: στην επιλογή των συνδέσμων μέσω των οποίων θα σταλεί κάθε μήνυμα από μια προέλευση σε έναν προορισμό. Αναφερόμαστε

στην επιλογή των συνδέσεων, σε σχέση με ένα δεδομένο κριτήριο και για δεδομένα επίπεδα κίνησης μεταξύ ζευγών προέλευσης-προορισμού, ως βέλτιστη δρομολόγηση.

Θα δούμε ότι ο ορισμός της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος εξυπηρετεί μόνο κατά προσέγγιση το παραπάνω κριτήριο. Ωστόσο, είναι χρήσιμη για την αποφυγή μη ικανοποιητικών αποφάσεων δρομολόγησης. Όπως και στην περίπτωση της μη γραμμικής παλινδρόμησης που συζητήθηκε σε προηγούμενη ενότητα, θα μπορούσαμε καλύτερα να αναφερθούμε στο πρόβλημά μας ως αναζήτηση ικανοποιητικής δρομολόγησης.

Επιπλέον, τα επίπεδα κίνησης σε ένα δίκτυο στην πράξη αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, λόγω των προτύπων ανθρώπινης δραστηριότητας και των αστοχιών σύνδεσης. Θα αποφύγουμε αυτό το ζήτημα υποθέτοντας ότι τα επίπεδα κυκλοφορίας είναι σε σχεδόν σταθερή κατάσταση. Στην πράξη, η συνέπεια είναι ότι πρέπει περιστασιακά να ενημερώνουμε τη δρομολόγηση καθώς αλλάζουν οι συνθήκες. Θα εξετάσουμε πώς οι αλλαγές στις συνθήκες επηρεάζουν τη λύση.

Περαιτέρω, απομακρυνόμαστε από την τυχαία φύση των αφίξεων υποθέτοντας ότι οι αποκλίσεις της κίνησης στους συνδέσμους είναι αρκετά μικρές, ώστε η ροή κυκλοφορίας να μπορεί να χαρακτηριστεί καλά από την αναμενόμενη μέση τιμή της. Θα δούμε ότι αυτό έχει συνέπειες για τον προσδιορισμό της έννοιας της «χωρητικότητας» ενός συνδέσμου [1].



Εικόνα 6. Γραφική αναπαράσταση δικτύου επικοινωνιών δεδομένων με οκτώ κόμβους και 12 συνδέσμους.

### Διατύπωση του προβλήματος

Όπως και με άλλες μελέτες περίπτωσης, μπορούμε να αναπαραστήσουμε το δίκτυο επικοινωνιών ως γράφημα. Ένα παράδειγμα δικτύου φαίνεται στην Εικόνα 6. Καθένας από τους οκτώ κόμβους παρουσιάζεται ως κουκκίδα, ενώ καθένας από τους 12 συνδέσμους εμφανίζεται ως γραμμή.

### Συνδέσεις

Οι τυπικές συνδέσεις επικοινωνίας είναι αμφίδρομες. Δηλαδή, μπορούν να μεταδώσουν δεδομένα και προς τις δύο κατευθύνσεις. Χρησιμοποιούμε μια ενιαία γραμμή για να αναπαραστήσουμε τις συνδέσεις δεδομένων και στις δύο κατευθύνσεις μεταξύ των άκρων κάθε συνδέσμου, ερμηνεύοντας κάθε γραμμή ως συμβολισμό μιας αμφίδρομης σύνδεσης. Υποθέτουμε ότι η μέγιστη χωρητικότητα ενός συνδέσμου είναι η ίδια σε κάθε κατεύθυνση.

Ονομάζουμε  $\mathbb{L}$  το σύνολο όλων των συνδέσμων στο δίκτυο, όπου κάθε σύνδεσμος αντιπροσωπεύεται από ένα διατεταγμένο ζεύγος  $(i, j)$  αριθμών κόμβου, με τον πρώτο κόμβο  $i$  να είναι ο κόμβος εκπομπής και ο δεύτερος κόμβος  $j$  να είναι ο κόμβος λήψης.

Δεδομένου ότι οι σύνδεσμοι είναι αμφίδρομοι, για κάθε σύνδεσμο  $(i, j) \in \mathbb{L}$ , υπάρχει επίσης ένας σύνδεσμος  $(j, i) \in \mathbb{L}$  που μπορεί να μεταφέρει δεδομένα προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για το δίκτυο επικοινωνιών δεδομένων που απεικονίζεται στην Εικόνα 6, έχουμε:

$$\mathbb{L} = \{(1, 8), (8, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 7), (7, 6)\}.$$

Η χωρητικότητα του συνδέσμου  $(i, j)$  συμβολίζεται με  $\bar{y}_{ij} \in \mathbb{R}^{++}$  και αντιπροσωπεύει τον μέγιστο αριθμό πακέτων που μπορούν να μεταδοθούν ανά δευτερόλεπτο στη ζεύξη. Λόγω της παραδοχής μας για τις χωρητικότητες συμμετρικού συνδέσμου, για κάθε σύνδεσμο  $(i, j) \in \mathbb{L}$ , έχουμε ότι  $\bar{y}_{ij} = \bar{y}_{ji}$ .

### Κόμβοι

Για τους σκοπούς μας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι έχουν τρεις ρόλους, ως εξής.

- Οι χρήστες τοποθετούν δεδομένα στο δίκτυο σε κόμβους. Αυτοί οι κόμβοι μπορούν να θεωρηθούν ως η προέλευση των δεδομένων.
- Ένας κόμβος αλλάζει δεδομένα άφιξης σε έναν από τους συνδέσμους που προσπίπτουν σε αυτόν.
- Οι χρήστες αφαιρούν δεδομένα από το δίκτυο σε κόμβους. Αυτοί οι κόμβοι μπορούν να θεωρηθούν ως οι προορισμοί των δεδομένων. Ο εξοπλισμός που εκτελεί αυτούς τους ρόλους ονομάζεται δρομολογητής.

### Ζεύγη προέλευσης-προορισμού

Μερικά συγκεκριμένα ζεύγη κόμβων αντιπροσωπεύουν ζεύγη προέλευσης-προορισμού. Για παράδειγμα, ένας χρήστης που βρίσκεται κοντά στον κόμβο 7 μπορεί να βάλει δεδομένα στο δίκτυο στον κόμβο 7 και να επιθυμεί να τα μεταδώσει σε κάποιον που βρίσκεται κοντά στον κόμβο 5, έτσι ώστε ο κόμβος 7 να είναι η αρχή για τα δεδομένα και ο κόμβος 5 να είναι ο προορισμός για τα δεδομένα. Άλλοι χρήστες μπορεί να επιθυμούν να μεταδώσουν δεδομένα από τον κόμβο 2 στον κόμβο 5. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν  $m$  ζεύγη προορισμού προέλευσης και συμβολίζουμε  $\mathbb{W}$  το σύνολο όλων των ζευγών προέλευσης-προορισμού. Στο παράδειγμά μας, εάν τα  $(7, 5)$  και  $(2, 5)$  είναι τα μόνα ζεύγη προορισμού προέλευσης, τότε:

$$\mathbb{W} = \{(7, 5), (2, 5)\},$$

με  $m = 2$ . Γενικά, ένα ζεύγος αρχής-προορισμού  $(l, l') \in \mathbb{W}$  μπορεί ή δεν μπορεί να ενωθεί απευθείας με έναν σύνδεσμο. Στο παράδειγμά μας, κανένα από τα ζεύγη προέλευσης-προορισμού  $(7, 5), (2, 5)$  δεν συνδέεται απευθείας με σύνδεσμο. Εάν δεν υπάρχει σύνδεσμος που να ενώνει ένα τέτοιο ζεύγος προέλευσης-προορισμού, τότε είναι απαραίτητο τα δεδομένα μεταξύ αυτού του ζεύγους να διασχίζουν αρκετούς διαδοχικούς συνδέσμους.

### **Μονοπάτια**

Μια συλλογή διαδοχικών συνδέσμων που ενώνει ένα ζεύγος προέλευσης-προορισμού ονομάζεται μονοπάτι. Συνήθως θα υπάρχουν πολλά εναλλακτικά μονοπάτια που ενώνονται μεταξύ κάθε ζεύγους προέλευσης-προορισμού. Παρατηρώντας ξανά την κίνηση για το ζεύγος αρχής-προορισμού  $(7, 5)$  και με δεδομένο ότι υπάρχει μόνο μια σύνδεση στον κόμβο 7, τα δεδομένα που εισάγονται στο δίκτυο στον κόμβο 7 θα αποστέλλονται μέσω αυτής της σύνδεσης, η οποία ενώνει τον κόμβο 7 στον κόμβο 6. Στη συνέχεια πρέπει να ληφθεί μια απόφαση δρομολόγησης ως προς το ποια σύνδεση θα λάβει τα δεδομένα από τον κόμβο 6. Δεδομένου ότι ο προορισμός για τα δεδομένα είναι ο κόμβος 5, τότε μια φυσική επιλογή θα

ήταν να στείλουμε τα δεδομένα κατά μήκος του συνδέσμου που ενώνει τον κόμβο 6 στον κόμβο 5. Ωστόσο, εάν αυτός ο σύνδεσμος είχε ήδη σημαντική κίνηση, τότε μια διαφορετική επιλογή θα ήταν να χρησιμοποιηθούν σύνδεσμοι όπως, για παράδειγμα, από 6 έως 3 έως 4 έως 5.

Ακόμα κι αν ένα ζεύγος προέλευσης-προορισμού ενωνόταν απευθείας με έναν σύνδεσμο, θα μπορούσαμε να εξετάσουμε πολλές εναλλακτικές διαδρομές για τη δρομολόγηση μεταξύ των ζευγών προέλευσης-προορισμού για να διατηρήσουμε τη ροή σε κάθε σύνδεσμο σε ένα αποδεκτό επίπεδο.

Συνοπτικά, δύο μονοπάτια για το ζεύγος προέλευσης-προορισμού  $(7, 5)$  είναι:

- σύνδεσμοι  $(7, 6)$  και  $(6, 5)$  και
- σύνδεσμοι  $(7, 6)$ ,  $(6, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$ .

Για κάθε ζεύγος αρχής-προορισμού  $(l, l') \in \mathbb{W}$ , συμβολίζουμε με  $\mathbb{P}_{(l,l')}$  το σύνολο όλων των επιτρεπόμενων διαδρομών που συνδέουν το  $l$  με το  $l'$ . Αντιστοιχίζουμε τα μονοπάτια με διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς. Για παράδειγμα, για το ζεύγος αρχής-προορισμού  $(7, 5) \in \mathbb{W}$ , θα συμβολίσουμε:

- τη διαδρομή που αποτελείται από συνδέσμους  $(7, 6)$  και  $(6, 5)$  ως διαδρομή 1, και
- τη διαδρομή που αποτελείται από συνδέσμους  $(7, 6)$ ,  $(6, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$  ως διαδρομή 2.

Για το ζεύγος αρχής-προορισμού  $(2, 5) \in \mathbb{W}$ , θα συμβολίσουμε:

- τη διαδρομή που αποτελείται από συνδέσμους  $(2, 4)$  και  $(4, 5)$  ως διαδρομή 3, και
- τη διαδρομή που αποτελείται από συνδέσμους  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 5)$  ως διαδρομή 4.

Συνοψίζουμε αυτές τις αναθέσεις με  $\mathbb{P}_{(7,5)} = \{1, 2\}$ ,  $\mathbb{P}_{(2,5)} = \{3, 4\}$ .



Εκχωρούμε διαφορετικό δείκτη  $k$  για κάθε επιτρεπόμενη διαδρομή στο δίκτυο και υποθέτουμε ότι υπάρχουν  $n$  μονοπάτια σε κάθε διαδρομή. Στο παράδειγμά μας, αν έχουμε περιγράψει όλες τις επιτρεπόμενες διαδρομές, τότε  $n = 4$ .

## Μεταβλητές

Δεδομένου ότι οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων είναι τυχαίοι, κατά τον ίδιο τρόπο θα είναι και ο αριθμός των πακέτων στο δίκτυο, ο αριθμός των πακέτων σε οποιαδήποτε σύνδεση και ο αριθμός των πακέτων σε οποιαδήποτε διαδρομή. Για να χαρακτηρίσουμε τη συμπεριφορά του δικτύου, λαμβάνουμε υπόψη την αναμενόμενη ή μέση ροή των πακέτων και αγνοούμε τη διακύμανση της κατανομής της ροής. Ορίζουμε  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , να είναι η μέση ροή κίνησης, σε πακέτα ανά δευτερόλεπτο, στη διαδρομή  $k$ . Αυτή η ροή αντιπροσωπεύει τη μέση ποσότητα ροής για ένα συγκεκριμένο ζεύγος αρχής-προορισμού που έχει εκχωρηθεί στη διαδρομή  $k$ . Συλλέγουμε το σύνολο όλων των αναθέσεων κυκλοφορίας για όλα τα ζεύγη προέλευσης-προορισμού μαζί σε ένα διάνυσμα  $x \in \mathbb{R}^n$ .

## Περιορισμοί ισότητας

Θεωρούμε οποιοδήποτε ζεύγος αρχής-προορισμού  $(l, l') \in \mathbb{W}$ . Υποθέτουμε ότι η διαδικασία κίνησης για το ζεύγος προέλευσης-προορισμού  $(l, l')$  έχει αναμενόμενο ρυθμό άφιξης  $b_{(l,l')}$ , σε πακέτα ανά δευτερόλεπτο. Γενικά, πρέπει να επιλέξουμε τον τρόπο κοινής χρήσης της επισκεψιμότητας μεταξύ όλων των μονοπατιών που συνδέουν το  $l$  με το  $l'$ . Για να μεταφερθεί όλη η εισερχόμενη κίνηση για κάθε ζεύγος προέλευσης-προορισμού  $(l, l')$ , πρέπει να κατανεύουμε τη ροή έτσι ώστε:

$$\forall (l, l') \in \mathbb{W}, \sum_{k \in \mathbb{P}_{(l,l')}} b_{(l,l')}.$$

Στο παράδειγμά μας, οι περιορισμοί για τα ζεύγη προέλευσης-προορισμού (7, 5) και (2, 5) είναι, αντίστοιχα:

$$x_1 + x_2 = b_{(7,5)},$$

$$x_3 + x_4 = b_{(2,5)}.$$

Συλλέγουμε τις καταχωρήσεις  $b_{(l,l')}$  για  $(l, l') \in \mathbb{W}$  σε ένα διάνυσμα  $b \in \mathbb{R}^m$ . Επίσης, ορίζουμε το  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ως τη διαδρομή προς τον πίνακα συχνότητας ζεύγους προέλευσης-προορισμού. Δηλαδή, ορίζουμε:

$$\forall (l, l') \in \mathbb{W}, \forall k = 1, \dots, n, A_{(l,l')k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k \in \mathbb{P}_{(l,l')} \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Οι καταχωρήσεις του  $A$  είναι 1 ή 0. Στο παράδειγμά μας, ισχύει:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

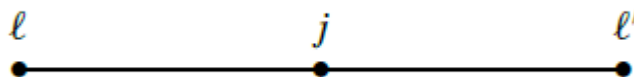
$$b = \begin{pmatrix} b_{(7,5)} \\ b_{(2,5)} \end{pmatrix},$$

όπου οι γραμμές του πίνακα  $A$  και οι καταχωρήσεις του  $b$  αντιστοιχούν στα ζεύγη αρχής-προορισμού (7, 5) και (2, 5), αντίστοιχα. Με αυτούς τους ορισμούς, μπορούμε να γράψουμε τους περιορισμούς ισότητας ως:

$$Ax = b.$$

Υπάρχουν πολλά κριτήρια που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό μιας αντικειμενικής συνάρτησης. Σε αντίθεση με τη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους, όπου το κόστος παραγωγής εξαρτιόταν από την ποσότητα παραγωγής, το λειτουργικό κόστος ενός δικτύου δεδομένων είναι γενικά σχετικά σταθερό. Ειδικότερα, το κόστος λειτουργίας του δικτύου είναι σχετικά ανεξάρτητο από τη φόρτωση σε

δρομολογητές και συνδέσμους. Κατά την παροχή υπηρεσιών στους πελάτες, ωστόσο, η ποιότητα της υπηρεσίας εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, συμπεριλαμβανομένης της καθυστέρησης μεταξύ της αποστολής δεδομένων και της λήψης τους. Σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να είμαστε σε θέση να διακρίνουμε μεταξύ των υπηρεσιών, δηλαδή, περιπτώσεις όπου ακόμη και οι μικρές καθυστερήσεις δημιουργούν προβλήματα, και περιπτώσεις, για τις οποίες μεγάλες καθυστερήσεις μπορεί να μην είναι προβληματικές. Για παράδειγμα, ορισμένοι πελάτες μπορεί να έχουν συμβόλαιο για υπηρεσίες υψηλής ποιότητας, ενώ άλλοι μπορεί να έχουν εγγραφεί σε μια υπηρεσία που προσφέρει μόνο την καλύτερη δυνατή προσπάθεια χωρίς εγγυήσεις για μέγιστη καθυστέρηση. Σε αυτή τη μελέτη περίπτωσης θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοια διάκριση μεταξύ πελατών. Δηλαδή, θεωρούμε όλους τους πελάτες εξίσου και θεωρούμε ότι όλη η επισκεψιμότητα έχει την ίδια προτεραιότητα. Στόχος μας θα είναι να ελαχιστοποιήσουμε τη μέση καθυστέρηση που αντιμετωπίζει η κίνηση μέσα στο δίκτυο.



Εικόνα 7: Ένα δίκτυο με ένα ζεύγος προορισμού προέλευσης που ενώνεται με μια διαδρομή που αποτελείται από δύο συνδέσμους.

## Καθυστέρηση

Η καθυστέρηση σε έναν σύνδεσμο εξαρτάται από το πόση κίνηση υπάρχει στον σύνδεσμο. Όταν η κίνηση είναι σχεδόν τόσο μεγάλη όσο η χωρητικότητα του συνδέσμου, η καθυστέρηση είναι μεγαλύτερη. Λέμε ότι ο σύνδεσμος έχει συμφόρηση. Είναι δύσκολο να αποκτήσουμε ένα αναλυτικό μοντέλο της καθυστέρησης σε ένα δίκτυο. Ο λόγος είναι ότι

τα πακέτα αλληλεπιδρούν καθώς διασχίζουν τους συνδέσμους, με αποτέλεσμα η ανάλυση των στατιστικών τους να είναι περίπλοκη. Για παράδειγμα, θεωρούμε ένα ζεύγος αρχής-προορισμού  $(l, l')$  που ενώνεται με ένα μονοπάτι, το οποίο αποτελείται από δύο διαδοχικούς συνδέσμους  $(l, j)$  και  $(j, l')$  όπως φαίνεται στην Εικόνα 7.

Υποθέσαμε ότι ο χρόνος ενδιάμεσης άφιξης στην αρχή κατανέμεται εκθετικά. Ο χρόνος μεταξύ άφιξης στον κόμβο  $j$  δεν μπορεί να κατανεμηθεί εκθετικά. Ο λόγος είναι ότι τα διαδοχικά πακέτα που φτάνουν στο  $j$  πρέπει να διαχωρίζονται χρονικά με τουλάχιστον τον χρόνο μετάδοσης του πακέτου για την πρώτη ζεύξη και αυτό παραβιάζει την υπόθεση της εκθετικής κατανομής. Θα μπορούσαμε, καταρχήν, να υπολογίσουμε την κατανομή των χρόνων μεταξύ αφίξεων στον κόμβο  $j$ , αλλά η κατάσταση γίνεται πιο περίπλοκη καθώς προσπαθούμε να αναλύσουμε μεγαλύτερα δίκτυα λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των πακέτων που ρέουν πάνω από διαδοχικές ζεύξεις. Γενικά, η κατανομή πιθανοτήτων των χρόνων μεταξύ άφιξης των πακέτων στους κόμβους είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά. Κατά συνέπεια, η καθυστέρηση που παρουσιάζουν τα πακέτα είναι δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά.

**Μοντέλο συμφόρησης.** Ως μεσολάβηση για τον υπολογισμό της καθυστέρησης που παρουσιάζουν τα πακέτα στο δίκτυο, ορίζουμε ένα μέτρο της συμφόρησης σε κάθε σύνδεση. Για λόγους ευκολίας, θα αναπτύξουμε ένα μέτρο συμφόρησης για κάθε σύνδεση που είναι κυρτό στη ροή σε μια σύνδεση και υποθέτουμε ότι ένας εύλογος αντιπρόσωπος της μέσης καθυστέρησης που παρουσιάζουν όλα τα πακέτα στο δίκτυο είναι το άθροισμα του μέτρου συμφόρησης σε όλες τις συνδέσεις.

Υποθέτουμε ότι ένας σύνδεσμος  $(i, j) \in \mathbb{L}$  μεταξύ των κόμβων  $i$  και  $j$  έχει χωρητικότητα  $\bar{y}_{ij}$  έτσι ώστε η αναμενόμενη ροή  $y_{ij}$  σε αυτόν τον σύνδεσμο να μην μπορεί ποτέ να υπερβεί το  $\bar{y}_{ij}$ . Στην πραγματικότητα, δεδομένου ότι η στιγμιαία ροή στη σύνδεση διαφέρει από την

αναμενόμενη τιμή της  $y_{ij}$ , πρέπει να ισχύει ότι η αναμενόμενη ροή είναι πάντα αυστηρά μικρότερη από  $\bar{y}_{ij}$ . Αυτό θα επηρεάσει τη διατύπωση της συνάρτησης που αντιπροσωπεύει τη συμφόρηση σε αυτήν την ενότητα και επίσης θα επηρεάσει τη διατύπωση των περιορισμών ανισότητας.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι όταν αποστέλλονται δεδομένα στον σύνδεσμο, τα δεδομένα βρίσκονται στην ουρά στο τέλος αποστολής ενός συνδέσμου μέχρι να σταλούν στον σύνδεσμο. Θα θέσουμε ένα μέτρο συμφόρησης που εξαρτάται από την αναμενόμενη ροή  $y_{ij}$  μέσω του συνδέσμου. Ειδικότερα, θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi_{ij} : [0, \bar{y}_{ij}) \rightarrow \mathbb{R}^+$  που ορίζεται ως εξής:

$$\forall y_{ij} \in [0, \bar{y}_{ij}), \varphi_{ij}(y_{ij}) = \frac{y_{ij}}{\bar{y}_{ij} - y_{ij}} + \delta_{ij} y_{ij} \quad (3.11),$$

όπου:

- Ο όρος  $\delta_{ij}$  είναι το άθροισμα της καθυστέρησης επεξεργασίας και της καθυστέρησης διάδοσης μέσω δρομολογητή και σύνδεσης, και
- Ο όρος  $\frac{y_{ij}}{\bar{y}_{ij} - y_{ij}}$  οφείλεται στην ουρά στο τέλος αποστολής τους συνδέσμου.

Η ταχεία αύξηση της συνάρτησης συμφόρησης καθώς η ροή πλησιάζει τη χωρητικότητα μοντελοποιεί την αύξηση της καθυστέρησης καθώς επιτυγχάνεται η χωρητικότητα του συνδέσμου. Αυτή η ταχεία άνοδος μπορεί να εξηγηθεί από την άποψη της τυχαίας άφιξης πακέτων. Ακόμη και με υψηλούς αναμενόμενους ρυθμούς ροής, λόγω τυχαίων διακυμάνσεων, θα υπάρξουν περιστασιακά στιγμές που δεν υπάρχουν πακέτα στην ουρά και κανένα στη σύνδεση. Δυστυχώς, τέτοιες «χαμένες ευκαιρίες» χάνονται για πάντα. Επομένως, εάν ο αναμενόμενος ρυθμός άφιξης για τη σύνδεση ήταν ίσος με τη χωρητικότητα του συνδέσμου, τότε η ουρά στο τέλος αποστολής του συνδέσμου θα γινόταν

αυθαίρετα μεγάλη, με αποτέλεσμα το μέσο μήκος ουράς (και η μέση καθυστέρηση) να είναι απεριόριστη. Για αναμενόμενες ροές μικρότερες από τη χωρητικότητα, η καθυστέρηση αυξάνεται με την αύξηση της αναμενόμενης ροής. Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της (3.11) αποτυπώνει ποιοτικά αυτές τις παρατηρήσεις.

**Ροή.** Η ροή  $y_{ij}$  στον σύνδεσμο είναι ίση με το άθροισμα των ροών σε όλες τις διαδρομές που περιλαμβάνουν σύνδεσμο  $(i, j)$ . Συμβολίζουμε  $F(i, j)$  το σύνολο των μονοπατιών που περιλαμβάνουν τον σύνδεσμο  $(i, j)$ , έτσι ώστε η ροή  $y_{ij}$  να μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{L}, y_{ij} = \sum_{k \in F(i, j)} x_k.$$

Ορίζουμε τον πίνακα  $C \in \mathbb{R}^{\mathbb{L} \times n}$ , ως εξής:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{L}, \forall k = 1, \dots, n, C_{(i, j)k} = \begin{cases} 1, & \text{αν } k \in F(i, j), \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για κάθε  $(i, j) \in \mathbb{L}$ , έστω ότι η  $C_{(i, j)}$  είναι η  $(i, j)$ -οστή γραμμή του πίνακα  $C$ . Τότε η ροή  $y_{ij}$  μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{L}, y_{ij} = C_{(i, j)}x.$$

Επιπλέον, θεωρώντας ότι  $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$  είναι το διάνυσμα με καταχωρήσεις τις  $y_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathbb{L}$ , τότε θα ισχύει:

$$y = Cx.$$

Έστω ότι:

$$\mathbb{P} = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}} \mid 0 \leq y_{ij} < \bar{y}_{ij}, \forall (i, j) \in \mathbb{L}\},$$

τότε η αντικειμενική συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\forall y \in \mathbb{P}, \varphi(y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{L}} \varphi_{ij}(y_{ij}) \quad (3.12).$$

Για να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η παραπάνω σχέση, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, για παράδειγμα, και τα δύο μονοπάτια για το ζεύγος προέλευσης-προορισμού (7, 5) πρέπει να χρησιμοποιούν τη σύνδεση (7, 6). Η ροή σε οποιαδήποτε από αυτές τις διαδρομές θα συμβάλει στη συμφόρηση στη σύνδεση (7, 6).

Επιπλέον, τα μονοπάτια μεταξύ των διαφόρων ζευγών προέλευσης-προορισμού θα έχουν συνήθως κάποιους κοινούς δεσμούς. Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- Η διαδρομή 3 αποτελείται από τους συνδέσμους (2, 4), (4, 5) και
- Η διαδρομή 4 αποτελείται από τους συνδέσμους (2, 3), (3, 4), (4, 5),

και τα δύο αυτά μονοπάτια είναι για το ζεύγος προέλευσης-προορισμού (2, 5). Η κίνηση σε αυτά τα μονοπάτια πρέπει να μοιράζεται τη χωρητικότητα του συνδέσμου (4, 5) με την κυκλοφορία στη διαδρομή 2, η οποία αποτελείται από συνδέσμους (7, 6), (6, 3), (3, 4), (4, 5) για ζεύγος προέλευσης-προορισμού (7, 5). Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει αλληλεπίδραση κατά τη διάρκεια της κυκλοφορίας μεταξύ των διαφόρων ζευγών προέλευσης-προορισμού. Η αντικειμενική συνάρτηση που ορίσαμε, εξασφαλίζει ότι η αύξηση της ροής σε μια διαδρομή που προσπίπτει σε μια συγκεκριμένη σύνδεση θα αυξήσει τη μέση καθυστέρηση για όλες τις διαδρομές που προσπίπτουν σε αυτήν τη σύνδεση.

Παρατηρούμε ότι η αντικειμενική συνάρτηση που έχουμε ορίσει δεν αποτυπώνει ακριβώς τη μέση καθυστέρηση λόγω των ροών στα μονοπάτια. Αντιπροσωπεύει ωστόσο τη μέση καθυστέρηση που έχει σχεδιαστεί για να εκφράζει την ποιοτική εξάρτηση της μέσης καθυστέρησης από την επιλογή της δρομολόγησης. Μπορεί να είναι αρκετά ακριβής

ώστε να αποφεύγονται κακές αποφάσεις δρομολόγησης, δηλαδή, διευκολύνει την εύρεση ικανοποιητικών λύσεων στο πρόβλημα δρομολόγησης.

### Περιορισμοί ανισότητας και εφικτό σύνολο

Όλες οι ροές κυκλοφορίας πρέπει να είναι μη αρνητικές. Επομένως, πρέπει να συμπεριλάβουμε και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας:  $x \geq 0$ .

Εφόσον η χωρητικότητα κάθε συνδέσμου  $(i, j) \in \mathbb{L}$  είναι  $\bar{y}_{ij}$ , η στιγμιαία ροή στο σύνδεσμο  $(i, j)$  δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί το  $\bar{y}_{ij}$ . Κατά συνέπεια, η μέση ροή δεν μπορεί ποτέ να υπερβεί το  $\bar{y}_{ij}$ , υποδηλώνοντας ανισωτικούς περιορισμούς της μορφής:

$$y_{ij} < \bar{y}_{ij}, \forall (i, j) \in \mathbb{L}.$$

Αναδιατυπώνοντας τους παραπάνω αυστηρούς περιορισμούς, με όρους  $x$ , θα έχουμε:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{L}, y_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{F}(i, j)} x_k = C_{(i, j)} x.$$

Εάν ορίσουμε  $\bar{y} \in \mathbb{R}^{\mathbb{L}}$  ως διάνυσμα με καταχωρήσεις  $\bar{y}_{ij}$ ,  $(i, j) \in \mathbb{L}$  τότε μπορούμε να γράψουμε τους (αυστηρούς) ανισωτικούς περιορισμούς, ως εξής:

$$Cx < \bar{y}.$$

Επομένως, οι ανισωτικοί περιορισμοί του προβλήματος, ορίζουν το εφικτό σύνολο που είναι της μορφής:

$$\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0, Cx < \bar{y}\}.$$

Συνεπώς, το πρόβλημα για βέλτιστη δρομολόγηση είναι το εξής:

$$\min\{f(x) | Ax = b, x \geq 0, Cx < \bar{y}\}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.13)$$



όπου η συνάρτηση  $f: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , ορίζεται ως εξής:

$$\forall x \in \bar{S}, f(x) = \varphi(Cx) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{L}} \varphi_{ij}(C_{(i,j)}x). \quad (3.14)$$

### Αλλαγές στους συνδέσμους

Μπορούμε να φανταστούμε ότι μια χωρητικότητα ζεύξης μπορεί να αλλάξει λόγω, για παράδειγμα, αστοχίας εξοπλισμού που σχετίζεται με τη σύνδεση ή υποβάθμισης των συνθηκών μετάδοσης σε ένα μέσο. Στην πρώτη περίπτωση αστοχίας εξοπλισμού, θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι ο σύνδεσμος έχει αφαιρεθεί εντελώς από το δίκτυο. Εναλλακτικά, μια μερική αποτυχία ή μια υποβάθμιση της επικοινωνίας μπορεί να μειώσει τη χωρητικότητα της σύνδεσης αλλά να μην την αφαιρέσει από το δίκτυο. Αντίθετα, μια σύνδεση που επιστρέφει στην υπηρεσία ή μια βελτίωση των συνθηκών μετάδοσης θα αύξανε τη χωρητικότητα. Θα θέλαμε να μπορούμε να αλλάξουμε τη δρομολόγηση για να ανταποκρινόμαστε σε αλλαγές στη χωρητικότητα της ζεύξης. Με την πάροδο του χρόνου, αναμένουμε επίσης ότι η κίνηση στο δίκτυο θα αλλάξει. Θα θέλαμε επίσης να μπορούμε να αλλάξουμε τη δρομολόγηση για να ανταποκρινόμαστε στις αλλαγές στην κίνηση [1],[3].

Η αντικειμενική συνάρτηση όπως αυτή ορίζεται στην (3.14) του βέλτιστου προβλήματος δρομολόγησης είναι κυρτή και διαφορίσιμη στο  $\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0, Cx < \bar{y}\}$ , αφού είναι η σύνθεση μιας γραμμικής συνάρτησης με το άθροισμα των συναρτήσεων  $\varphi_{ij}$ , οι οποίες είναι επίσης κυρτές. Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης γίνονται αυθαίρετα μεγάλες καθώς η ροή σε οποιονδήποτε σύνδεσμο πλησιάζει την χωρητικότητά του. Όσον αφορά την επιλυσιμότητα του προβλήματος, παρατηρούμε ότι είναι δυνατό να μην υπάρχει εφικτή λύση εάν δεν υπάρχει αρκετή χωρητικότητα στο δίκτυο. Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο εσωτερικού σημείου, αρκεί να

διασφαλίσουμε ότι το μέγεθος βημάτων που επιλέγεται σε κάθε επανάληψη να ικανοποιεί τον αυστηρό περιορισμό ανισότητας  $Cx < \bar{y}$ .

### 3.5 Βέλτιστη ροή ισχύος

Σε αυτή τη μελέτη περίπτωσης θα εξετάσουμε το πρόβλημα βέλτιστης ροής ισχύος, το οποίο γενικεύει την περιπτωσιολογική μελέτη παραγωγής με το μικρότερο κόστος. Στο δοθέν πρόβλημα, ο περιορισμός ισότητας απαιτεί η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας να είναι ίση με τη ζήτηση. Ωστόσο, αυτό δεν χαρακτηρίζει πλήρως την κατάσταση σε ένα δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας. Για παράδειγμα, εάν οι γεννήτριες είναι απομακρυσμένες από τα κέντρα ζήτησης, τότε θα υπάρξουν απώλειες στην κινούμενη ισχύ κατά μήκος των γραμμών μεταφοράς. Οι γραμμές μεταφοράς μεταξύ παραγωγής και ζήτησης μπορούν επίσης να περιορίσουν τις εφικτές επιλογές παραγωγής. Ειδικότερα, οι γραμμές μεταφοράς έχουν όρια χωρητικότητας ως προς το πόση πραγματική ισχύς μπορεί να μεταδοθεί κατά μήκος τους. Εάν υπάρχει περιορισμένη χωρητικότητα μεταφοράς μεταξύ μιας συγκεκριμένης γεννήτριας και της ζήτησης, τότε οι εφικτές επιλογές για την παραγωγή περιορίζονται από τους περιορισμούς ροής της γραμμής μεταφοράς [1]

#### Εξισώσεις ροής ισχύος

Για να ελέγξουμε εάν ικανοποιούνται ή όχι οι περιορισμοί ροής και τάσης γραμμής, πρέπει να επεκτείνουμε τη λεπτομέρεια της αναπαράστασης του δικτύου ενσωματώνοντας ρητά τους νόμους του Kirchhoff, ή τουλάχιστον ενσωματώνοντας κάποια προσέγγιση των νόμων του Kirchhoff. Σε αυτό το πλαίσιο, η προσέγγιση αυτή ονομάζεται υποκατάστατος περιορισμός επειδή δρα στη θέση του πλήρους συνόλου των εξισώσεων ροής ισχύος.

### Άλλα στοιχεία ελέγχου

Εκτός από τις πραγματικές παραγωγές ενέργειας, μπορούμε επίσης να εξετάσουμε το ενδεχόμενο προσαρμογής τυχόν ελεγχόμενων στοιχείων στο σύστημα έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος και να τηρηθούν οι περιορισμοί. Τυπικά, η παραγωγή ισχύος των γεννητριών και των πυκνωτών με δυνατότητα μεταγωγής και άλλων ελεγχόμενων ποσοτήτων περιλαμβάνονται στο πρόβλημα βέλτιστης ροής ισχύος. Στην πραγματικότητα, στοιχεία όπως οι πυκνωτές μεταγωγής μπορούν να αλλάξουν μόνο σε διακριτές ποσότητες. Θα αγνοήσουμε τη διακριτή φύση της ισχύος από τους εναλλασσόμενους πυκνωτές και θα υποθέσουμε ότι μπορούν να αναπαρασταθούν με συνεχείς μεταβλητές.

### Μεταβλητές

Στο διάνυσμα «απόφασης», πρέπει να αναπαραστήσουμε:

- γεννήτριες ισχύος, τις οποίες θα συγκεντρώσουμε μαζί στα διανύσματα  $P$  και  $Q$ ,
- οποιεσδήποτε άλλες ελεγχόμενες ποσότητες στο σύστημα, όπως οι ρυθμίσεις των μετασχηματιστών αλλαγής φάσης και των πυκνωτών,
- τα μεγέθη τάσης σε κάθε δίαυλο του συστήματος, τα οποία καταχωρούμε σε διάνυσμα  $u$ , και
- τις γωνίες τάσης σε κάθε δίαυλο του συστήματος εκτός από το δίαυλο αναφοράς, που καταχωρούμε σε διάνυσμα  $\theta$  (Η γωνία τάσης στο δίαυλο αναφοράς είναι σταθερή αφού αντιπροσωπεύει μια αυθαίρετη χρονική αναφορά). Συλλέγουμε όλες τις μεταβλητές στο διάνυσμα:

$$x = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ u \\ \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Όπως και στη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους, ένας τυπικός στόχος για βέλτιστη ροή ισχύος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Έστω ότι η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  αντιπροσωπεύει αυτό το κόστος.

Τυπικά:

- Η  $f$  εξαρτάται μόνο από τις καταχωρήσεις του  $x$  που αντιστοιχούν σε πραγματικές παραγωγές ενέργειας. Ωστόσο, σε ορισμένες διατυπώσεις η  $f$  εξαρτάται επίσης κάπως από τις τιμές του  $x$  που αντιστοιχούν σε παραγωγές ισχύος, και
- Η  $f$  είναι διαχωρίσιμη, καθώς οι «αποφάσεις» σε μία γεννήτρια συνήθως δεν επηρεάζουν το κόστος σε καμία άλλη γεννήτρια.

### Περιορισμοί ισότητας

Οι περιορισμοί ισότητας για τη βέλτιστη ροή ισχύος είναι οι νόμοι του Kirchhoff που εκφράζονται ως προς τα μεγέθη τάσης και τις γωνίες. Πιο συγκεκριμένα:

$$\forall l, \sum_{k \in \mathbb{J}(l) \cup \{l\}} u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k)] - P_l = 0,$$

$$\forall l, \sum_{k \in \mathbb{J}(l) \cup \{l\}} u_l u_k [G_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k)] - Q_l = 0.$$

όπου  $\mathbb{J}(l)$  είναι το σύνολο των διαύλων που ενώνονται απευθείας από μια γραμμή στον δίαυλο  $l$ . Αυτές οι εξισώσεις αντιπροσωπεύουν το γεγονός ότι, σύμφωνα με τους νόμους του Kirchhoff, οι δυνάμεις που ρέουν από έναν κόμβο στο υπόλοιπο σύστημα πρέπει να είναι μηδενικές. Εκφράζουμε τις παραπάνω εξισώσεις, στη μορφή:

$$\forall l, p_l(x) = 0,$$

$$\forall l, q_l(x) = 0,$$

όπου  $p_l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και  $q_l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , δίνονται από τους τύπους:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, p_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{J}(l) \cup \{l\}} u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k)] - P_l,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{J}(l) \cup \{l\}} u_l u_k [G_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k)] - Q_l. \quad (3.15)$$

Τέλος, συλλέγουμε τις παραπάνω εξισώσεις σε μια διανυσματική εξίσωση της μορφής:

$$g(x) = 0.$$

### Περιορισμοί ανισότητας

Οι περιορισμοί ανισότητας εκφράζονται με τη μορφή:

$$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}.$$

Υπάρχουν επίσης περιορισμοί που αφορούν συναρτήσεις του  $x$ . Για παράδειγμα, υπάρχουν συνήθως περιορισμοί διαφοράς γωνίας της μορφής:

$$\forall l, \forall k \in \mathbb{J}(l), -\frac{\pi}{4} \leq \theta_l - \theta_k \leq \frac{\pi}{4}. \quad (3.16)$$

και μπορεί να υπάρχουν όρια στις διαφορές γωνίας μεταξύ διαύλων που δεν συνδέονται απευθείας με γραμμή. Επιπλέον, οι περιορισμοί ροής της γραμμής μεταφοράς μπορούν να εκφραστούν μέσω των εξισώσεων ροής ισχύος ως  $x$ . Δηλαδή, θα έχουμε και λειτουργικούς περιορισμούς της μορφής:

$$\underline{h} \leq h(x) \leq \bar{h}.$$

Αν εξετάσουμε τους όρους στις σχέσεις (3.15) που αντιστοιχούν στην ισχύ που ρέει κατά μήκος μιας συγκεκριμένης γραμμής που ενώνει τον δίαυλο  $l$  με τον δίαυλο  $k$ , τότε μπορούμε να αξιολογήσουμε τη ροή σε αυτήν τη γραμμή. Συγκεκριμένα, εάν αγνοήσουμε οποιαδήποτε στοιχεία διακλάδωσης στη γραμμή ροής, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις ροής ισχύος για τη γραμμή που ενώνει το δίαυλο  $l$  με το δίαυλο  $k$ , ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, p_{lk}(x) = u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk}(\theta_l - \theta_k)] - (u_l)^2 G_{lk},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q_{lk}(x) = u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk}(\theta_l - \theta_k)] - (u_l)^2 B_{lk}, \quad (3.17)$$

όπου  $p_{lk}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και  $q_{lk}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Παρατηρούμε ότι τα  $p_{lk}$  και  $q_{lk}$  εξαρτώνται μόνο από τα  $u_l$ ,  $u_k$ ,  $\theta_l$  και  $\theta_k$  και όχι από ολόκληρο το διάνυσμα  $x$ . Εάν υπάρχει όριο ροής ισχύος  $\bar{p}_{lk}$ , στη γραμμή που ενώνει το δίαυλο  $l$  και τον δίαυλο  $k$  τότε αυτό το όριο εκφράζεται ως περιορισμός ανισότητας ως εξής:

$$p_{lk}(x) \leq \bar{p}_{lk}$$

στους περιορισμούς ανισότητας  $h(x) \leq \bar{h}$ .

### Διατύπωση προβλήματος

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ροής ισχύος, έχει τη μορφή:

$$\min\{f(x) \mid g(x) = 0, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{h} \leq h(x) \leq \bar{h}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.18)$$

το οποίο περιλαμβάνει μη γραμμικούς περιορισμούς ισότητας και ανισότητας.

### Αλλαγές στη ζήτηση, τους διαύλους και τις γεννήτριες

Μπορούμε να εξετάσουμε αλλαγές στη ζήτηση, στους διαύλους, καθώς επίσης και στο σύστημα. Οι δύο βασικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να αλλάξει το σύστημα είναι:

- αστοχία ή επιστροφή σε λειτουργία γραμμής μεταφοράς και
- αστοχία ή επιστροφή σε λειτουργία γεννήτριας.

Όταν μια γραμμή μεταφοράς αποτύχει, οι ροές ισχύος ανακατανέμονται μέσω των υπόλοιπων γραμμών μεταφοράς. Ένα σημαντικό ζήτημα είναι εάν οι προκύπτουσες ανακατανεμημένες ροές είναι εντός των χαρακτηριστικών των υπόλοιπων γραμμών μεταφοράς. Εάν οι νέες ροές υπερβαίνουν κάποιες τιμές, τότε ο εξοπλισμός προστασίας θα

αποσυνδέσει τις γραμμές μεταφοράς από το σύστημα έτσι ώστε να αποφευχθεί η ζημιά τους. Δυστυχώς, αυτό συνήθως θα οδηγήσει σε ακόμα μεγαλύτερες ροές στις υπόλοιπες γραμμές και περαιτέρω αποσυνδέσεις, οι οποίες μπορούν γρήγορα να οδηγήσουν σε πλήρη διακοπή λειτουργίας του συστήματος.

Ομοίως, εάν μια γεννήτρια αποτύχει, οι υπόλοιπες γεννήτριες θα αναπληρώσουν συνήθως τη διαφορά στην ισχύ. Ωστόσο, εάν δεν υπάρχει επαρκής χωρητικότητα για να καλυφθεί η διαφορά, τότε περισσότερες γεννήτριες ενδέχεται να αποσυνδεθούν από το σύστημα. Και πάλι, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε ένα blackout [13],[15].

Στην περίπτωση και των δύο τύπων αστοχιών, είναι σημαντικό να μπορείτε να αξιολογηθεί η επίδραση της αστοχίας. Ένα σύστημα που λειτουργεί έτσι ώστε να μπορεί να αντέξει οποιαδήποτε μεμονωμένη αστοχία ονομάζεται ασφαλές και οι πρόσθετοι περιορισμοί για να διασφαλιστεί ότι οποιαδήποτε μεμονωμένη αστοχία δεν οδηγεί σε υπερφόρτωση ονομάζονται περιορισμοί ασφαλείας. Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν από την αρχή να συμπεριληφθούν στους περιορισμούς ανισότητας.

### **Χαρακτηριστικά του προβλήματος**

**Κυρτότητα.** Όπως και στη μελέτη περίπτωσης παραγωγής χαμηλού κόστους η αντικειμενική συνάρτηση αυτού του προβλήματος είναι συνήθως κυρτή.

**Περιορισμοί ισότητας** Επειδή η συνάρτηση  $g$  είναι μη γραμμική, το σύνολο  $\{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$  δεν είναι γενικά κυρτό. Μπορούμε να υποστηρίξουμε από δύο οπτικές γωνίες ότι αυτή η μη κυρτότητα δεν δημιουργεί απαραίτητα πολλαπλά τοπικά ελάχιστα του προβλήματος της βέλτιστης ροής ισχύος.

Πρώτον, παρατηρούμε ότι η Ιακωβιανή  $J$  της  $g$  μπορεί να προσεγγιστεί καλά με μια σταθερά, δηλαδή οι εξισώσεις είναι περίπου γραμμικές. Εφόσον οι εξισώσεις είναι περίπου

γραμμικές, το εφικτό σύνολο  $\{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$  δεν διαφέρει πολύ από ένα σύνολο που ορίζεται από έναν περιορισμό γραμμικής ισότητας. Κατά συνέπεια, η κυρτή αντικειμενική συνάρτηση θα έχει τυπικά μόνο ένα τοπικό ελάχιστο σε ένα τέτοιο σύνολο.

Ωστόσο, μπορούμε να κάνουμε ένα δεύτερο, ισχυρότερο επιχείρημα, εξετάζοντας μια χαλάρωση του εφικτού συνόλου. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να εξετάσουμε το ενδεχόμενο χαλάρωσης των περιορισμών ισότητας για τη ροή ισχύος σε κάθε δίαυλο  $l$  με:

$$p_l(x) \leq 0 \quad (3.19)$$

$$q_l(x) \leq 0. \quad (3.20)$$

Δηλαδή, έχουμε χαλαρώσει τους περιορισμούς στην απαίτηση ότι η καθαρή ισχύς που ρέει από έναν κόμβο είναι το πολύ μηδέν. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με περιορισμούς ανισότητας όπως καθορίζονται στις σχέσεις (3.19) και (3.20) σε κάθε δίαυλο  $l$ , αλλά με όλους τους άλλους περιορισμούς όπως παρουσιάζονται στο αρχικό πρόβλημα (3.18). Δηλαδή, έχουμε το εξής πρόβλημα:

$$\min\{f(x) | g(x) \leq 0, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{h} \leq h(x) \leq \bar{h}\}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.21)$$

το οποίο έχει ως εφικτό σύνολο το εξής:

$$\bar{S} = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) \leq 0, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{h} \leq h(x) \leq \bar{h}\},$$

και αποτελεί μια «χαλαρωμένη» εκδοχή του εφικτού συνόλου του αρχικού προβλήματος (3.18):  $S = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0, \underline{x} \leq x \leq \bar{x}, \underline{h} \leq h(x) \leq \bar{h}\}$ . Συνοπτικά, το πρόβλημα με περιορισμό ανισότητας (3.21) που περιγράψαμε έχει ουσιαστικά την ίδια λύση με το πρόβλημα (3.18).

Τώρα, θα δείξουμε ότι το εφικτό σύνολο που ορίζεται από τους χαλαρούς περιορισμούς (3.19) είναι κυρτό με την υπόθεση ότι όλα τα μεγέθη τάσης είναι σταθερά. Δεν θα



εξετάσουμε τους περιορισμούς ισχύος (3.20) ούτε την περίπτωση όπου τα μεγέθη τάσης μπορεί να ποικίλλουν, γεγονός που μπορεί να εισάγει πολλαπλά τοπικά βέλτιστα. Από τη σχέση (3.15) για την  $p_l(x)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^n, p_l(x) &= \sum_{k \in \mathbb{J}(l) \cup \{l\}} u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k)] - P_l \\ &= \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k)] + (u_l)^2 G_{ll} - P_l \\ &= \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} \{u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_l - \theta_k) + B_{lk} \sin(\theta_l - \theta_k)] - (u_l)^2 G_{lk}\} + (u_l)^2 (G_{ll} + \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} G_{lk}) \\ &\quad - P_l, \end{aligned}$$

με προσθαφαίρεση του όρου

$$(u_l)^2 \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} G_{lk}$$

προκύπτει:

$$= \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} p_{lk}(x) + (u_l)^2 \left( G_{ll} + \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} G_{lk} \right) - P_l.$$

Επιπλέον, με δεδομένο ότι όλα τα μεγέθη τάσης είναι σταθερά, μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις της μορφής  $\hat{p}_{lk}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ως εξής:

$$\forall k \in \mathbb{J}(l), \forall \theta_{lk} \in \mathbb{R}, \hat{p}_{lk}(\theta_{lk}) = u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_{lk}) + B_{lk} \sin(\theta_{lk})] - (u_l)^2 \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} G_{lk}$$

και επομένως, ισχύει ότι:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, p_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} \hat{p}_{lk}(\theta_l - \theta_k) + (u_l)^2 \left( G_{ll} + \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} G_{lk} \right) - P_l,$$

Δηλαδή, το  $p_l(x)$  είναι ίσο με το άθροισμα του  $(u_l)^2(G_{ll} + \sum_{k \in \mathbb{J}(l)} G_{lk}) - P_l$ , και του αθροίσματος των όρων  $\hat{p}_{lk}(\theta_l - \theta_k)$ , κάθε ένας από τους οποίους εξαρτάται μόνο από μια γραμμική συνάρτηση δυο καταχωρήσεων του διανύσματος  $x$ .

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης  $\hat{p}_{lk}$  είναι ίση με:

$$\forall \theta_{lk} \in \mathbb{R}, \frac{d^2 \hat{p}_{lk}}{d\theta_{lk}^2}(\theta_{lk}) = -u_l u_k [G_{lk} \cos(\theta_{lk}) + B_{lk} \sin(\theta_{lk})].$$

Εφόσον ισχύει  $G_{lk} < 0$  και  $B_{lk} > 0$ , για  $k \in \mathbb{J}(l)$ , η συνθήκη για να είναι θετική η δεύτερη παράγωγος ( και επομένως να είναι κυρτή η συνάρτηση  $\hat{p}_{lk}$ , είναι:

$$\forall k \in \mathbb{J}(l), |G_{lk}| \cos(\theta_{lk}) - |B_{lk}| \sin(\theta_{lk}) \geq 0.$$

Η παραπάνω σχέση θα είναι αληθής όταν ισχύει:

$$-\pi + \arctan\left(\frac{|G_{lk}|}{|B_{lk}|}\right) \leq (\theta_l - \theta_k) \leq \arctan\left(\frac{|G_{lk}|}{|B_{lk}|}\right).$$

Συνοψίζοντας, το πρόβλημα έχει μη γραμμική αντικειμενική συνάρτηση και περιορισμούς ισότητας και ανισότητας [1],[18]. Ωστόσο, κάτω από ορισμένες παραδοχές, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με ένα κυρτό πρόβλημα το οποίο μπορεί να επιλυθεί με τη χρήση αλγόριθμου διπλού εσωτερικού σημείου.

## Βιβλιογραφικές Αναφορές

- [1] R. Baldick. *Applied Optimization. Formulation and Algorithms for Engineering Systems*. Cambridge University Press ,2006.
- [2] Τσίτσας, Ν.Α . *Βελτιστοποίηση*, Θεσσαλονίκη, Ακαδημαϊκές σημειώσεις ΑΠΘ,2017
- [3] Bertsekas, D. P. *Nonlinear Programming*, 2nd, ed. Athena Scientific, Boston,1999
- [4] Fletcher, R. *Practical Methods of Optimization*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York,1987
- [5] Luenberger, D. and Ye, Y. *Linear and Nonlinear Programming*. 4th ed. Stanford: Springer, pp.115-125,179-188,2016
- [6] Skaflestad, B. *Newton's method for systems of non-linear equations*. 1st ed. [ebook] pp.1-6,2006
- [7] Φακίνος, Δ. and Οικονόμου, Α. *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. 1st ed. ΑΘΗΝΑ: ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, pp.213-362,2003
- [8] R.J. Vanderbei. *Linear Programming. Foundations and Extensions*. 5<sup>th</sup> edition. Springer, 2020.
- [9] A. J. Wood and B. F. Wollenberg. *Power Generation, Operation, and Control*. New York: Wiley, Second Edition, 1996.
- [10] J. Momoh. *Electric Power System Applications of Optimization*. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 2001.
- [11] S. G. Nash and A. Sofer. *Linear and Nonlinear Programming*. New York: McGraw-Hill, 1996.
- [12] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Practical Optimization*. London: Academic Press, Inc., 1981.
- [13] H. Chao and S. Peck. A market mechanism for electric power transmission. *Journal of Regulatory Economics*, 10(1):25–59, 1996.

- [14] E. Castillo, A. J. Conejo, P. Pedregal, R. Garcia, and N. Alguacil. *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*. New York: John Wiley and Sons, Inc., 2002.
- [15] J. Carpentier. Contribution a l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Societe FrancEaise Electriciens*, 3:431–437, 1962.
- [16] D. Bertsekas and R. Gallager. *Data Networks*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Second Edition, 1992.
- [17] A. R. Bergen and V. Vittal. *Power Systems Analysis*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, Second Edition, 2000.
- [18] Y.-C. Wu, A. S. Debs, and R. E. Marsten. A direct nonlinear predictor-corrector primal-dual interior point algorithm for optimal power flows. *IEEE Transactions on Power Systems*, 9(2):876–883, 1994.
- [19] Γεώργιος Καραναστάσης, *Αλγόριθμοι μη Γραμμικής Βελτιστοποίησης και Αριθμητικές Υλοποιήσεις με Mathematica*, Διπλωματική Εργασία, 2018.