**ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΜΣΜ)

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# Μια ανάλυση εμπειρικών ερευνών με χρήση επεισοδίων από την Ιστορία της Άλγεβρας στη Διδασκαλία

ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ ΜΑΡΙΟΣ ΡΟΚΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΝΙΚΟΛΑΝΤΩΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2024

# Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία μελετήθηκαν διάφοροι τρόποι βελτίωσης της διδασκαλίας της Άλγεβρας μέσω διδακτικών παρεμβάσεων που αξιοποίησαν την ιστορία των Μαθηματικών και περιλάμβαναν προβλήματα που τέθηκαν στους μαθητές. Αρχικά, η μέθοδος αξιοποίησης της ιστορικής ανάπτυξης της Άλγεβρας από την Αριθμητική για τη γεφύρωση του γνωστικού χάσματος μεταξύ τους είχε θετικά αποτελέσματα. Οι μαθητές έμαθαν για τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της αριθμητικής και αλγεβρικής επίλυσης προβλημάτων, καθώς η ιστορία παρείχε πολλές προ-αλγεβρικές μεθόδους για ομαλότερη μετάβαση. Τα αλγεβρικά παιχνίδια έδειξαν ότι μπορούν να εφαρμοστούν τεχνικές αναπαράστασης και να χρησιμοποιηθούν αντικείμενα ως εναλλακτικός τρόπος διδασκαλίας της Άλγεβρας, προωθώντας την ενεργή συμμετοχή στην τάξη και τη συνεργατική μάθηση, ενώ αυξήθηκε η αυτοπεποίθηση των μαθητών στην κατανόηση της Άλγεβρας.

Έπειτα, στη σύγκριση της γενετικής και ερμηνευτικής προσέγγισης με τη συμβατική διδασκαλία μέσω χρήσης ιστορικών κειμένων, η ερμηνευτική αποδείχθηκε πιο επιτυχής στην πλειοψηφία των μαθητών, ενώ η γενετική ήταν καταλληλότερη μόνο για αυτούς που τους αρέσουν πολύ τα Μαθηματικά. Αυτή η παρέμβαση συνέβαλε στις ανθρωπιστικές, δημοκρατικές και ειρηνευτικές παραδόσεις στην εκπαίδευση και αύξησε τη δημοφιλία των Μαθηματικών. Η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία μέσω ιστορικών κειμένων ενθάρρυνε τους μαθητές να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικές καταστάσεις, παρά να αναπαράγουν τυποποιημένα αυτά που έμαθαν, προσφέροντας παράλληλα οπτική και αισθητική αξία. Επίσης, τα ιστορικά βίντεο ενίσχυσαν την εκπαίδευση βελτιώνοντας τον τρόπο απόκτησης της γνώσης, αλλά και τη στάση τους απέναντι στο μάθημα, καθώς μπορούν να παίζονται επανειλημμένα, χωρίς τον περιορισμό του χρόνου και του χώρου.

Επιπλέον, η γνώση ιστορικών στοιχείων για τους λογαρίθμους παρείχε μια ολιστική προσέγγιση στα μαθηματικά αντικείμενα, που βοήθησε στην κατανόηση των μαθητών. Φάνηκε ότι κινήθηκε το ενδιαφέρον τους και απαντήθηκαν ερωτήσεις σχετικά με την ύπαρξη και χρησιμότητα των μαθηματικών αντικειμένων. Στη διάρκεια της παρέμβασης, ξεπεράστηκαν τα εμπόδια της αυθεντικής γλώσσας των κειμένων μέσω της συνεργατικής διδασκαλίας και τα κείμενα χρησιμοποιήθηκαν ως γνωστικά εργαλεία για την κατανόηση των μαθητών. Παράλληλα, η χρήση του Geogebra βοήθησε και εκτιμήθηκε από τους μαθητές.

Τελικά, αυτό που προκύπτει είναι ότι η εφαρμογή της ιστορίας ενισχύει ποικιλοτρόπως τη διδασκαλία. Οι διαφορετικές μέθοδοι αξιοποίησης της ιστορίας οδήγησαν σε καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου της Άλγεβρας και πρόσφεραν εναλλακτικές που διέφεραν από τη συμβατική διδασκαλία. Αναγνωρίστηκε ότι η Άλγεβρα και τα Μαθηματικά γενικότερα αποτελούν ένα σπουδαίο και χρήσιμο εργαλείο της ανθρωπότητας για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων, παρά ένα μάθημα που αφορά άσκοπες ασκήσεις και προβλήματα.

An analysis of empirical studies using episodes from the History of Algebra in Teaching

Stylianos Marios Rokos

# Abstract

In this thesis, different ways to improve the teaching of Algebra through teaching interventions that utilized the history of Mathematics and included problems posed to students were studied. Firstly, the method of utilizing the historical development of Algebra from Arithmetic for bridging the cognitive gap between these two had positive results. Students learned about the advantages and disadvantages of arithmetic and algebraic problem solving, as history provided many pre-algebraic methods that facilitated a smoother transition. The algebraic games demonstrated that technical representations and material objects can be used as alternative ways of teaching Algebra, since it promoted more active participation in class and collaborative learning, while also increasing students' confidence in their ability to understand Algebra.

Next, in the comparison of the genetic and hermeneutic approach with conventional teaching using historical documents, the hermeneutic proved to be more successful for the majority of students, while the genetic was more suitable for those with a strong interest in Mathematics. This intervention contributed to humanistic, democratic and peaceful traditions in education and increased the popularity of Mathematics. Connecting Algebra and Geometry through historical documents motivated students to apply their knowledge in different situations, rather than merely reproducing what they had learned, offering visual and aesthetic value as well, aiding in the understanding of the world. Also, historical videos reinforced the educational process by improving the way knowledge is acquired and changing students' attitudes towards Mathematics, as they can be played repeatedly without the limitations of time and space.

Furthermore, knowledge of historical elements related to logarithms provided a holistic approach to mathematical concepts, which helped students with their understanding. It appears that it sparked their interest and answered a lot of questions regarding the existence and usefulness of mathematical objects. During the intervention, the challenges posed by the original language of the documents were overcome through collaborative teaching and the documents served as cognitive tools in the understanding of students. At the same time, the use of Geogebra was helpful and appreciated by the students.

Finally, the research indicates that the application of history reinforces teaching in various ways. The different methods of incorporating history led to a better understanding of Algebra and provided alternatives that differed from the conventional teaching. It was recognized that Algebra and Mathematics in general is a great and valuable tool for humanity that solves real-life problems and that it is not a subject that focuses on meaningless exercises and problems.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1 – Εισαγωγή

Διαρκώς αναζητούνται τρόποι για τη βελτίωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών και συγκεκριμένα της Άλγεβρας, αλλά και για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που εμφανίζονται σε πολλούς μαθητές. Είναι συχνό φαινόμενο στη μετάβαση από την πρωτοβάθμια στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση να υπάρχουν προβλήματα στην προσαρμογή από την αριθμητική στην Άλγεβρα. Αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια του Γυμνασίου και Λυκείου όσο αυξάνεται το επίπεδο δυσκολίας της Άλγεβρας, τα μαθησιακά εμπόδια που προκύπτουν μπορεί να αποτελέσουν τροχοπέδη για τη μετέπειτα μελέτη των Μαθηματικών στο σχολείο. Πολλοί μαθητές έχουν αρνητική στάση απέναντι στην Άλγεβρα θεωρώντας ότι δεν είναι ενδιαφέρουσα, βασίζεται σε συμβολικές πράξεις χωρίς νόημα, έχει λίγη σχέση με την καθημερινή ζωή και εκλαμβάνεται ως δύσκολη.

Μια μέθοδος που έχει τις ρίζες της δεκαετίες πριν είναι η αξιοποίηση της ιστορίας. Η πιο σημαντική ίσως διεθνής ομάδα που υποστηρίζει τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία είναι η HPM (History and Pedagogy of Mathematics) η οποία είναι μια ομάδα μελέτης της σχέσης μεταξύ της Ιστορίας και της Παιδαγωγικής των Μαθηματικών, με τα μέλη της να είναι ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση, μαθηματικοί, ιστορικοί των Μαθηματικών, καθηγητές των Μαθηματικών και υπεύθυνοι της διδακτέας ύλης. Στο πλαίσιο των δράσεων της ομάδας υπάγεται η διεξαγωγή συνεδρίων ανά τέσσερα χρόνια. Τα πρακτικά αυτών των συνεδρίων καταγράφονται και δημοσιεύονται στην ιστοσελίδα της HPM. Το υλικό της εργασίας αντλήθηκε κυρίως από τα συνέδρια αυτά, αλλά και γενικότερα από τις μελέτες των ερευνητών που συμμετέχουν ή συνεργάζονται με την HPM. Γίνεται βέβαια και μια αναδρομή στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας, με το πιο καθοριστικό ίσως έργο το *Hisab al-jabr wa-l-muqabala* του al-Khwarizmi στις αρχές του 8$^{ου}$ αιώνα, το οποίο εμφανίζεται συχνά και με πολλούς τρόπους στο κείμενο.

Δεν υπάρχει βέβαια μια συγκεκριμένη μέθοδος αξιοποίησης της ιστορίας στη διδασκαλία που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε σχολικό περιβάλλον και εγγυάται επιτυχημένα αποτελέσματα. Κάθε τάξη είναι μοναδική, έχει τις δικές της ιδιαιτερότητες και οι καθηγητές πρέπει να προσαρμόζονται με βάση τις ανάγκες και ικανότητες των μαθητών. Στόχος της εργασίας λοιπόν είναι να μελετηθούν έρευνες οι οποίες με διαφορετικούς τρόπους επιχείρησαν να εφαρμόσουν την ιστορία στο πλαίσιο του μαθήματος της Άλγεβρας στην τάξη. Έχει ενδιαφέρον να αναζητηθούν οι τεχνικές οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και να ενισχύσουν την εκπαιδευτική διαδικασία. Ιδανικά, οι καθηγητές που ενδιαφέρονται να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία τους μέσω της ιστορίας, θα μπορούν να αξιοποιήσουν ορισμένες από αυτές τις μεθόδους που θα είναι κατάλληλες στη δική τους τάξη και θα ξεφύγουν από τα τετριμμένα.

Οι παρακάτω έρευνες επιδιώκουν να κάνουν τους μαθητές: να δουν τα Μαθηματικά ως μια νοητική δραστηριότητα παρά ως μια σειρά γνώσεων ή τεχνικών, να τοποθετήσουν τα Μαθηματικά σε ένα επιστημονικό, φιλοσοφικό και πολιτισμικό πλαίσιο μιας συγκεκριμένης εποχής, να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες που έχουν ως στόχο την κατανόηση κι όχι τα τελικά αποτελέσματα και να εκτιμήσουν τον ρόλο και τη σημασία των σύγχρονων Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

Επίσης, γίνεται αναφορά στις αμφιβολίες των ίδιων των καθηγητών για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία, καθώς αρκετοί τονίζουν την πίεση χρόνου που υπάρχει στο σχολείο, την ανεπαρκή εκπαίδευσή τους στην ιστορία των Μαθηματικών, ενώ υποθέτουν ότι οι ιστορικές παρεμβάσεις δε θα είναι δημοφιλείς στην πλειοψηφία των μαθητών και ανησυχούν για το αν μπορούν να ελεγχθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα. Φαίνεται όμως ότι η εφαρμογή της ιστορίας, αλλά και η γνώση της από τον καθηγητή προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση και μπορεί να βελτιώσει τη διδασκαλία του.

Οι διδακτικές παρεμβάσεις των ερευνών στις τάξεις περιλαμβάνουν προβλήματα που τέθηκαν σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και ελέγχθηκαν οι απαντήσεις τους μέσω φύλλων εργασίας, τεστ, ερωτηματολογίων και συζητήσεων στην τάξη, που δουλεύτηκαν είτε ατομικά είτε σε ομάδες. Κάποιες δραστηριότητες μάλιστα βιντεοσκοπήθηκαν για να γίνει συνολική καταγραφή και μετέπειτα ανάλυση του εγχειρήματος. Οι μαθητές ρωτήθηκαν για τις αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά και τους ζητήθηκε να συγκρίνουν την εκάστοτε διδακτική μέθοδο με την κοινή διδασκαλία που είχαν στο σχολείο. Σε κάποιες περιπτώσεις μελετήθηκαν αυθεντικά ιστορικά κείμενα από μαθηματικούς προηγούμενων αιώνων, ενώ αξιοποιήθηκε η σύνδεση της Άλγεβρας και με τη Γεωμετρία. Επίσης, εφαρμόστηκε η τεχνική των παιχνιδιών για την ενίσχυση της μάθησης και η προβολή βίντεο ιστορικού περιεχομένου, αλλά και η χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών όπως το Geogebra.

Οι μέθοδοι που καλύφθηκαν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο βασικά μέρη. Το πρώτο αφορά τις έρευνες που προέκυψαν από τη δημιουργία σχολικών δραστηριοτήτων που βασίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας. Το δεύτερο αφορά τις έρευνες που αναπτύχθηκαν γύρω από την αξιοποίηση αυθεντικών ιστορικών κειμένων.

Αρχικά, στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία για την HPM, για τον ρόλο και τους στόχους της. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρώτο βασικό μέρος της εργασίας. Εκεί περιλαμβάνεται αρχικά το πρόγραμμα της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας, με στόχο την αντιμετώπιση των προβλημάτων στη μετάβαση από την αριθμητική του Δημοτικού στην Άλγεβρα του Γυμνάσιου. Έπειτα, μελετήθηκαν προβλήματα μέσω του ιστορικού παραλληλισμού στη Διδακτική των Μαθηματικών και τέλος εφαρμόστηκαν αλγεβρικά παιχνίδια σχεδιασμένα για την πρακτική προσέγγιση στη διδασκαλία της Άλγεβρας και για την ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στην Άλγεβρα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι έρευνες του δεύτερου βασικού μέρους της εργασίας. Εκεί αρχικά συγκρίθηκαν τα αυθεντικά κείμενα των Διόφαντου, Viete και Euler στην τάξη φανερώνοντας τα διαφορετικά στάδια εξέλιξης της Άλγεβρας. Έπειτα, αναλύεται η έρευνα στην οποία αξιοποιήθηκαν ιστορικά κείμενα από την εποχή της Αναγέννησης και της αβακιστικής Άλγεβρας. Επίσης, παρουσιάστηκε και συγκρίθηκε η γενετική και ερμηνευτική προσέγγιση με τη συμβατική διδασκαλία. Στη συνέχεια, μελετήθηκε η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία μέσω ιστορικών κειμένων. Αξιοποιήθηκαν αυθεντικές πηγές του Euler και δημιουργήθηκαν αλγεβρικά παιχνίδια με βάση αυτές. Επιπλέον, μελετήθηκε η εφαρμογή βίντεο στη διδασκαλία και η ιστορική εξέλιξη των λογαρίθμων, παράλληλα με τη χρήση του Geogebra.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της εργασίας από τις εκάστοτε έρευνες που αξιοποίησαν την ιστορία στη διδασκαλία των Μαθηματικών, όπου αποτιμάται η επιτυχία των παρεμβάσεων στις τάξεις και αποτυπώνονται οι αντιδράσεις των μαθητών.

# Κεφάλαιο 2 – History and Pedagogy of Mathematics (HPM)

Η HPM (History and Pedagogy of Mathematics) είναι μια διεθνής ομάδα μελέτης της σχέσης μεταξύ της Ιστορίας και της Παιδαγωγικής των Μαθηματικών και είναι θυγατρική της Διεθνούς Επιτροπής Μαθηματικής Διδασκαλίας – International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). Μεταξύ των μελών της ομάδας είναι ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση, μαθηματικοί, ιστορικοί των Μαθηματικών, καθηγητές των Μαθηματικών και υπεύθυνοι της διδακτικής ύλης.

Συνδυάζοντας την ιστορία με τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών η HPM είναι ο σύνδεσμος μεταξύ του παρελθόντος και του μέλλοντος των Μαθηματικών. Η ομάδα τονίζει την έννοια των Μαθηματικών ως μια ζωντανή επιστήμη, με μεγάλη ιστορία, ένα ζωντανό παρόν και ένα απρόβλεπτο μέλλον. Μέσω της ιστορίας αποδεικνύεται ότι τα Μαθηματικά:

- είναι το αποτέλεσμα συνεισφορών από διαφορετικούς πολιτισμούς
- είναι σε διαρκή επικοινωνία με άλλες επιστήμες
- είναι μια σταθερή δύναμη επιστημονικής, τεχνικής και κοινωνικής ανάπτυξης
- η φιλοσοφία των Μαθηματικών εξελίχθηκε μέσα στους αιώνες
- και αναπτύχθηκε η διδασκαλία των Μαθηματικών.

Το ενδιαφέρον για το πώς η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει στη διδασκαλία υπήρχε τουλάχιστον από τη δεκαετία του 1890, όμως ένα παγκόσμιο κίνημα ξεκίνησε μόνο από τη δεκαετία του 1970. Από το 1972 προέκυψε ένα αυξανόμενο ενδιαφέρον στην κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης και μια προθυμία διεθνών φορέων να μελετήσουν τέτοια ζητήματα. Η HPM ιδρύθηκε το 1972 από μια ομάδα των Phillip Jones και Leo Rogers που οργανώθηκε στο δεύτερο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ICME) στο Exeter της Αγγλίας. Αυτά τα συνέδρια συνέχισαν να διοργανώνονται ανά τέσσερα χρόνια από τη Διεθνή Επιτροπή Μαθηματικής Διδασκαλίας (ICMI). Όλες οι προσπάθειες που οδήγησαν στο μεταξύ στη δημιουργία τέτοιων διεθνών φορέων, οφείλονται και στην διεθνοποίηση των μαθηματικών δραστηριοτήτων του εικοστού αιώνα και συγκεκριμένα από τη θέληση των μαθηματικών της εποχής να επαναφέρουν ένα διεθνές πνεύμα αισιοδοξίας και συμφιλίωσης μετά από μεγάλους πολέμους. Οι βασικοί στόχοι της HPM, όπως διατυπώθηκαν στο συνέδριο του 1976, είναι οι εξής:

1. Να προωθήσει τις διεθνείς επαφές και ανταλλαγή πληροφοριών σχετικά με:
   (α) μαθήματα της ιστορίας των Μαθηματικών σε πανεπιστήμια και σχολεία
   (β) τη χρήση και τη σχέση της ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία
   (γ) τις απόψεις για τη σχέση μεταξύ της ιστορίας των Μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης σε όλα τα επίπεδα.
2. Να προωθήσει και να κινητοποιήσει τη διεπιστημονική έρευνα, ενώνοντας όλους αυτούς που ενδιαφέρονται και κυρίως τους μαθηματικούς, τους ιστορικούς των Μαθηματικών, τους καθηγητές και όσους σχετίζονται με τα Μαθηματικά.
3. Να προάγει μια βαθύτερη κατανόηση για το πώς εξελίσσονται τα Μαθηματικά και τις δυνάμεις που συνεισφέρουν σε αυτή την εξέλιξη.
4. Να σχετίσει τη διδασκαλία και την ιστορία των Μαθηματικών με την ανάπτυξή τους, ώστε να βελτιωθεί η ανάπτυξη και η παρουσίαση της ύλης.
5. Να παράγει υλικό που θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί από καθηγητές για να παρέχει διαφορετικές οπτικές και να συμβάλει στην κριτική συζήτηση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών.

6. Να διευκολύνει την πρόσβαση σε υλικό για την ιστορία των Μαθηματικών και σχετιζόμενων τομέων.
7. Να προωθήσει την επίγνωση για τη σχέση μεταξύ της ιστορίας και της διδασκαλίας των Μαθηματικών σε μαθηματικούς και καθηγητές.
8. Να προωθήσει την αντίληψη ότι η ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα σημαντικό κομμάτι της ανάπτυξης των πολιτισμών.

Από τα μέσα της δεκαετίας του 1980 η ICMI είχε σκοπό να προωθήσει μια σειρά μελετών πάνω σε σημαντικά θέματα της μαθηματικής εκπαίδευσης, για να παρέχει μια ενημερωμένη ανάλυση για τις εξελίξεις στον τομέα. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1990 υπήρχε ολοένα και περισσότερο η πεποίθηση ότι αυτές οι μελέτες θα πρέπει να εστιάσουν στη σχέση μεταξύ της Ιστορίας και της Παιδαγωγικής των Μαθηματικών. Αυτή η τάση της ICMI αποτύπωσε την αξία της HPM. Η μαθηματική κοινότητα διεθνώς ξεκίνησε να εστιάζει σε τέτοια θέματα, όπως οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους η ιστορία μπορεί να φανεί χρήσιμη, σε επιστημονικές μελέτες για την αποτελεσματικότητά της ως πηγή διδασκαλίας και σε πολιτικές διαδικασίες διάδοσης των πλεονεκτημάτων δια μέσου της διδακτικής ύλης. Θεωρήθηκε ότι η ICMI θα μπορούσε να είναι το μέσο στο οποίο θα συζητούνταν τέτοια θέματα και θα παρουσιάζονταν τα αποτελέσματα, ελπίζοντας ότι τα πλεονεκτήματά τους θα εφαρμόζονταν στη διδασκαλία των Μαθηματικών παγκοσμίως. Συνήθως οι μελέτες της ICMI αποτελούνται από τρία μέρη: ένα αρχείο συζήτησης για να αναγνωριστούν βασικά ζητήματα της μελέτης, ένα συνέδριο της μελέτης όπου συζητούνται τα θέματα σε μεγαλύτερο βάθος και ένα τόμο όπου συλλέγεται το έργο της μελέτης για να υπάρξει μια μόνιμη συνεισφορά στον τομέα.

Ανάμεσα στις δραστηριότητες της HPM λοιπόν, υπάρχει η οργάνωση συνεδρίων ανά 4 χρόνια στο πλαίσιο του ICMI, όπου γίνεται παραδοσιακά σε διαφορετική αλλά κοντινή χώρα από αυτή του συνεδρίου του ICMI, με την πρώτη το 1984. Ακολουθεί η λίστα των συνεδρίων:

**1984**: 24–30 Αυγούστου στην Αδελαΐδα της Αυστραλίας

**1988**: 27 Ιουλίου με 3 Αυγούστου στη Φλωρεντία της Ιταλίας

**1992**: 17–23 Αυγούστου στο Τορόντο του Καναδά

**1996**: 24–30 Ιουλίου στην Μπράγκα της Πορτογαλίας

**2000**: 9–14 Αυγούστου στο Ταϊπέι της Ταϊβάν

**2004**: 12–17 Ιουλίου στην Ουψάλα της Σουηδίας

**2008**: 6–13 Ιουλίου στην πόλη του Μεξικού

**2012**: 16–20 Ιουλίου στο Daejeon της Κορέας

**2016**: 18–22 Ιουλίου στο Μονπελιέ της Γαλλίας

**2021**: 11–18 Ιουλίου στη Σανγκάη της Κίνας (διαδικτυακά λόγω πανδημίας της Covid-19).

Το 1993 έγινε το πρώτο συνέδριο του European Summer University (ESU), το οποίο τελικά έγινε μια σειρά συνεδρίων και στα επόμενα χρόνια, που αφορά καθηγητές Μαθηματικών και όσους ασχολούνται με την έρευνα στην ιστορία και τη διδακτική των Μαθηματικών, αλλά και καθηγητές φιλοσοφίας, ιστορίας και φυσικών επιστημών. Το ESU αποτελεί μια από τις βασικές δραστηριότητες της HPM. Από το 2010 και μετά διοργανώνεται ανά τέσσερα χρόνια, ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μια διεθνής συνάντηση του HPM κάθε δύο χρόνια, δηλαδή των συνεδριών της HPM και του ESU. Το ESU είναι περισσότερο μια συλλογή ενδελεχών μαθημάτων, παρά ένα συνέδριο για ερευνητές. Είναι ένα μέρος όπου καθηγητές και ερευνητές συναντιούνται και δουλεύουν μαζί και παρουσιάζουν τις διδακτικές τους εμπειρίες, για να έχουν μια εποικοδομητική ανατροφοδότηση. Ακολουθεί η σειρά των συνεδρίων του ESU:

**1993**: 19–23 Ιουλίου στο Μονπελιέ της Γαλλίας

**1996**: 24–30 Ιουλίου στην Μπράγκα της Πορτογαλίας

**1999**: 15–21 Ιουλίου στο Leuven & Louvain-la-Neuve του Βελγίου

**2004**: 12–17 Ιουλίου στην Ουψάλα της Σουηδίας

**2007**: 19–24 Ιουλίου στην Πράγα της Τσεχίας

**2010**: 19–23 Ιουλίου στη Βιέννη της Αυστρίας

**2014**: 14–18 Ιουλίου στην Κοπεγχάγη της Δανίας

**2018**: 20–24 Ιουλίου στο Όσλο της Νορβηγίας

**2022**: 18–22 Ιουλίου στο Σαλέρνο της Ιταλίας.

# Κεφάλαιο 3 – Έρευνες σχολικών δραστηριοτήτων που βασίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρώτο μέρος της εργασίας, όπου αναλύονται οι έρευνες που προέκυψαν από τη δημιουργία σχολικών δραστηριοτήτων με μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και βασίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας. Αρχικά, περιλαμβάνεται το πρόγραμμα της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας με στόχο την αντιμετώπιση των προβλημάτων στη μετάβαση από την αριθμητική του Δημοτικού στην Άλγεβρα του Γυμνασίου. Στη συνέχεια, μελετήθηκαν προβλήματα μέσω του ιστορικού παραλληλισμού στη Διδακτική των Μαθηματικών. Τέλος, εφαρμόστηκαν αλγεβρικά παιχνίδια σχεδιασμένα για την πρακτική προσέγγιση στη διδασκαλία της Άλγεβρας και για την ανάπτυξη θετικής στάσης απέναντι στην Άλγεβρα. Παρατίθεται ένας συνοπτικός πίνακας με τα ονόματα των συγγραφέων και τις έρευνες που ακολουθούν:

| Συγγραφείς | Θέμα έρευνας | Τάξεις παρέμβασης |
|---|---|---|
| Van Amerom | Η ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας στην μετάβαση από την αριθμητική του Δημοτικού στην Άλγεβρα του Γυμνασίου | Α΄ Γυμνασίου |
| Θωμαΐδης, Τζανάκης | Πρόβλημα για τη διάταξη των αριθμών και την απόλυτη τιμή εμπνευσμένο από τα έργα του Descartes | Στις τρεις τάξεις του Λυκείου |
| Θωμαΐδης, Τζανάκης | Δύο επιπλέον προβλήματα για τη διάταξη των αριθμών και την απόλυτη τιμή | Α΄ Λυκείου |
| Irvin, Norton | Αλγεβρικά παιχνίδια με απτά αντικείμενα | Γ΄ Γυμνασίου |
| Irvin, Norton | Αλγεβρικά παιχνίδια με απτά αντικείμενα | Γ΄ Γυμνασίου |

**Πίνακας 1: Σύνοψη των ερευνών**

## 3.1 Έρευνα van Amerom: Αριθμητική και Άλγεβρα. Μπορεί η ιστορία να κλείσει το γνωστικό χάσμα; Μια προτεινομένη μαθησιακή πορεία στην εισαγωγική Άλγεβρα από μια ιστορική οπτική

### 3.1.1 Σύνοψη

Πολλές έρευνες στην Άλγεβρα, έχουν δείξει ότι υπάρχουν κακές επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων. Οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης συχνά αντιμετωπίζουν προβλήματα στην κατασκευή εξισώσεων από τον αριθμητικό κόσμο των προβλημάτων, αλλά και στην απλοποίηση και ερμηνεία των αλγεβρικών εκφράσεων. Είναι πιθανό ότι μέρος του προβλήματος είναι ότι υπάρχουν θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ της Αριθμητικής, που διδάσκεται πρώτα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση και της Άλγεβρας. Τα αριθμητικά προβλήματα φαίνονται πιο ξεκάθαρα και αφορούν πράξεις μεταξύ αριθμών, ενώ η Άλγεβρα απαιτεί συλλογισμούς σε άγνωστες ποσότητες. Στη μετάβαση αυτή φαίνεται να υπάρχει μια ανακολουθία που ονομάζεται γνωστικό χάσμα (cognitive gap).

Μια καλή αρχή για τη διερεύνηση αυτού θέματος μπορεί να είναι η επιστροφή στις ρίζες. Μια μελέτη δηλαδή πάνω στις ομοιότητες και διαφορές μεταξύ της αριθμητικής και της Άλγεβρας, μέσω της ιστορικής ανάπτυξης της Άλγεβρας. Πολλοί είναι αυτοί που ενθαρρύνουν την εφαρμογή της ιστορίας των Μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση. Ένα ερευνητικό πρόγραμμα που ονομάζεται "Reinvention of Algebra" («Επανεφεύρεση της Άλγεβρας») ξεκίνησε από την Barbara van Amerom στο Ινστιτούτο Freudenthal της Ολλανδίας το 1995 μέχρι τον Σεπτέμβριο του 2001, για να αναζητήσει διδακτικά μέσα που θα επιτρέψουν στους μαθητές να έχουν μια ομαλή μετάβαση από την αριθμητική στην Άλγεβρα. Η έρευνα συνοψίζεται σε δύο μέρη: το πρώτο αφορά το υπόβαθρο της έρευνας και το δεύτερο δίνει μια περίληψη της σειράς των μαθημάτων και των εντυπώσεων των τάξεων.

### 3.1.2 Το υπόβαθρο της έρευνας

Το σχέδιο "American Middle School" και πειράματα στην Ολλανδία ανέδειξαν πολλούς τρόπους πρόσβασης στην Άλγεβρα για μικρούς μαθητές, ηλικίας 10 και 11 ετών, οι οποίοι μπόρεσαν να επιχειρηματολογήσουν αλγεβρικά σε προβλήματα που είναι οικεία σε αυτούς. Το επίπεδο γνώσης και οι ικανότητες των μαθητών είναι οι κινητήριες δυνάμεις στην διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης. Παρόμοια, στην ιστορική ανάπτυξη της Άλγεβρας, πρακτικές ανάγκες στην κοινωνία και εσωτερικά κίνητρα οδήγησαν στην εξέλιξή της. Δεδομένου ότι η ιστορική ανάπτυξη παίζει ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, ένας στόχος του προγράμματος ήταν να ερευνηθεί αν η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να είναι ένα πραγματικά χρήσιμο διδακτικό εργαλείο. Η εφαρμογή είναι διττή: η ιστορία ως οδηγός για τη μαθησιακή πορεία και η ιστορία ως μια πλούσια πηγή μαθηματικών προβλημάτων. Επιπλέον, η ιστορική ανάπτυξη της Άλγεβρας μπορεί να εξηγήσει τη ρήξη μεταξύ της αριθμητικής και αλγεβρικής σκέψης.

Ένα παλιότερο σχέδιο, εφάρμοσε μια νέα προσέγγιση στην Άλγεβρα για τις τάξεις Γυμνασίου στην Ολλανδία, βασιζομένη στις αλγεβρικές σχέσεις. Φάνηκε όμως ότι η μάθηση αλγεβρικών εννοιών όπως ο χειρισμός των τύπων και των εξισώσεων χρειαζόταν βελτίωση. Για αυτό, στην παρούσα προσέγγιση ακολουθήθηκε διαφορετικός δρόμος, μέσω της ιστορικής ανάπτυξης της Άλγεβρας. Πριν την παρουσίαση της μεθόδου, περιγράφονται σύντομα η μαθηματική εκπαίδευση και η εκπαιδευτική έρευνα, πάνω στις οποίες βασίζεται αυτό το εγχείρημα.

Η αναπτυξιακή έρευνα είναι μια μορφή εκπαιδευτικής έρευνας με την οποία ο σχεδιασμός του εκπαιδευτικού υλικού είναι ένα ενσωματωμένο κομμάτι της ερευνητικής μεθόδου. Σε μια κυκλική διαδικασία αναμονής και δοκιμών, αναπτύσσονται και δοκιμάζονται νέες ιδέες στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων στην τάξη οδηγεί στη δημιουργία θεωρίας, η οποία χρησιμοποιείται για να βελτιώσει τον εκπαιδευτικό σχεδιασμό. Έτσι, η αναπτυξιακή έρευνα γεννά νέες μαθησιακές πτυχές ενός θέματος, αλλά και μια θεωρία για τον προτιμώμενο τρόπο με τον οποίο διδάσκεται και μαθαίνεται ένα θέμα. Ο τρόπος που ακολουθήθηκε εδώ είναι το διδακτικό όραμα της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (ΡΜΕ), που διαδίδει τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα.

Σύμφωνα και με την ΡΜΕ, οι βασικές αρχές μάθησης της εισαγωγικής Άλγεβρας είναι:

- να δημιουργήσει χρήσιμα προβλήματα για τους μαθητές, που θα είναι πραγματικά ή στο πλαίσιο της μαθηματικής τους εμπειρίας
- να κατασκευάσει δραστηριότητες που προσφέρουν ευκαιρίες για μαθηματικοποίηση, μοντελοποίηση και σχηματοποίηση, όχι μόνο ως εργαλεία επίλυσης ασκήσεων αλλά και ως μέσα επισημοποίησης της μαθηματικής σκέψης

- να επιλέξει πλαίσια με τα οποία οι μαθητές είναι οικείοι
- να ωθήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν τα δικά τους Μαθηματικά, ξεκινώντας από ανεπίσημες στρατηγικές και σταδιακά σε πιο επίσημα μαθηματικά αντικείμενα
- να δημιουργήσει διαδραστική σκέψη (μεταξύ καθηγητών-μαθητών και μαθητών-μαθητών) και συμμετοχή των μαθητών στην καθιέρωση αλγεβρικών συμβάσεων.

Η σχολική Άλγεβρα έχει τις εξής βασικές μορφές: την Άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική, την Άλγεβρα ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων, την Άλγεβρα ως τη μελέτη σχέσεων και την Άλγεβρα ως τη μελέτη δομών, όπου η κάθε μία λειτουργεί με διαφορετικό τρόπο. Αυτό το ερευνητικό εγχείρημα περιορίζεται στις γραμμικές σχέσεις, στους τύπους και στην επίλυση εξισώσεων. Οι προτεινόμενες μαθησιακές δραστηριότητες εδώ ανήκουν στις πρώτες τρεις μορφές και υποθέτουν μια διαλεκτική σχέση μεταξύ Άλγεβρας και αριθμητικής. Μια μελέτη των ομοιοτήτων και διαφορών της Άλγεβρας και της αριθμητικής ρίχνουν φως σε κάποια από τα προβλήματα των μαθητών στην Άλγεβρα. Μπορεί κάποιος να πει απλοϊκά ότι η αριθμητική ασχολείται με αριθμούς ενώ η Άλγεβρα με γράμματα, όμως η κύρια διαφορά βρίσκεται βαθύτερα. Παρά τις σημαντικές διαφορές τους πάντως, υπάρχει μια αλληλεξάρτηση μεταξύ τους, καθώς η Άλγεβρα βασίζεται σε αριθμητικές πράξεις και συχνά αριθμητικές εκφράσεις αντιμετωπίζονται αλγεβρικά. Έτσι, αξίζει να γίνει μια σύνοψη της ιστορικής ανάπτυξης της Άλγεβρας, που δείχνει ότι έχει τις ρίζες της στην αριθμητική.

Γενικά, θεωρείται ότι υπάρχουν τρεις βασικές περίοδοι στην ανάπτυξη της Άλγεβρας με βάση τις διαφορετικές μορφές συμβολισμού: η ρητορική, η συγκεκομμένη (syncopated) και η συμβολική. Από την αρχαία εποχή μέχρι περίπου πριν 500 χρόνια, με εξαίρεση τον Διόφαντο και κάποιους άλλους μαθηματικούς που χρησιμοποιούσαν συντομεύσεις και σύμβολα, τα προβλήματα και οι λύσεις τους γράφονταν κυρίως με λέξεις (ρητορική σημειογραφία). Η αρχική Άλγεβρα ήταν κυρίως μια εκλεπτυσμένη μέθοδος επίλυσης προβλημάτων με λέξεις. Ένας κλασικός τρόπος που χρησιμοποιούσαν οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι για την επίλυση προβλημάτων με αναλογίες ήταν η «μέθοδος των τριών», όπου δίνονταν τρεις αριθμοί και αναζητούταν ο τέταρτος. Τέτοια προβλήματα λέγονται αριθμητικά, αλλά όταν απαιτούνται πράξεις με άγνωστες ποσότητες γίνονται αλγεβρικά. Μια άλλη μέθοδος ήταν ο «κανόνας της εσφαλμένης θέσης», που εφαρμόστηκε πρώτη φορά από τον Διόφαντο. Αν και δε θεωρείται ακριβώς ως αλγεβρικός αλγόριθμος, η ευρεία αποδοχή του ακόμα και μετά την ανακάλυψη της συμβολικής Άλγεβρας, έδειξε ότι είναι ένα ισχυρό εργαλείο επίλυσης.

Ανάλογα με την έννοια του αριθμού σε κάθε πολιτισμό και το εκάστοτε μαθηματικό πρόβλημα, ο άγνωστος μπορεί να είναι μια ποσότητα ή ένα μέτρο που συμβολιζόταν ως «στοίβα» (στα Αιγυπτιακά), «μήκος» ή «επιφάνεια» (στα Βαβυλωνιακά και Ελληνικά), «πράγμα» ή «ρίζα» (στα αραβικά) κ.λπ. Η λύση δινόταν μέσω οδηγιών και υπολογισμών, χωρίς καμιά αναφορά σε κανόνες. Οι άγνωστοι αντιμετωπίζονταν σαν να ήταν γνωστοί, χωρίς να έχουν κάποιο νοητικό φράγμα. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα που με σύγχρονο συμβολισμό θα γραφόταν ως: $x + \frac{1}{n}x = a$, η άγνωστη ποσότητα $x$ βολικά χωριζόταν σε $n$ ίσα κομμάτια.

Ο Διόφαντος (περί το 250 π.Χ.) ανακάλυψε συντομευμένους συμβολισμούς (συγκεκομένη Άλγεβρα) για δυνάμεις αριθμών και πράξεις που του επέτρεψαν να γράψει ένα μαθηματικό πρόβλημα με μια «εξίσωση» (σε συντετμημένη μορφή). Χρησιμοποίησε ένα σύμβολο σαν το «ς» για να συμβολίσει τον άγνωστο και οι υπόλοιποι άγνωστοι προκύπταν από αυτόν. Μετά τον Διόφαντο ακολούθησαν κι άλλοι την συγκεκομένη Άλγεβρα. Στην Ινδία του 7ου αιώνα οι λέξεις για τους αγνώστους και τις δυνάμεις τους γράφονταν πιο σύντομα με το πρώτο ή τα πρώτα δύο γράμματα της λέξης, ενώ οι επιπλέον άγνωστοι ονομάζονταν με διαφορετικά χρώματα. Στην Άλγεβρα των Αράβων του 9$^{ου}$ αιώνα οι δυνάμεις των αγνώστων γραφόταν διαδοχικά, χρησιμοποιώντας τους όρους της δεύτερης και τρίτης δύναμης του αγνώστου ως βάση και σε συντομογραφία το πρώτο γράμμα αυτών των λέξεων γραφόταν πάνω από τον συντελεστή. Στη δυτική Ευρώπη του 13ου αιώνα υπήρχαν μικρές διαφορές στους τεχνικούς όρους μεταξύ της Ιταλίας και της Γερμανίας και μόνο στο δεύτερο μισό του 14ου αιώνα λέξεις όπως οι "res" και "cosa", γράφονταν πιο σύντομα με $r$ και $s$ αντίστοιχα. Στα μέσα του 16ου αιώνα ο Stifel εισήγαγε συνεχόμενα γράμματα για τους αγνώστους και δήλωσε αριθμητικούς κανόνες για αυτούς. Έπειτα, οι Buteo, Stevin, Recorde κ.ά. ανέπτυξαν ένα σύστημα συμβολισμού για τις δυνάμεις των αγνώστων και τυποποίησαν εξισώσεις. Ο Recorde ήταν αυτός που εισήγαγε το σύμβολο του ίσον τυπωμένο.

Στη ρητορική και συγκεκομένη περίοδο υπήρξε σε ένα βαθμό μια τυποποίηση. Χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι επίλυσης απροσδιόριστων, τετραγωνικών και κυβικών εξισώσεων. Ωστόσο, λόγω της απουσίας κατάλληλης γλώσσας αναπαράστασης δεδομένων αριθμών στα προβλήματα, ήταν δύσκολο να γραφούν ξεκάθαρα οι διαδικασίες. Έτσι, δεν μπορούσαν τότε οι μαθηματικοί να πάνε την Άλγεβρα σε υψηλότερο επίπεδο γενικότητας. Αυτοί οι περιορισμοί που υπήρξαν είναι χρήσιμο να τους καταλάβουν οι μαθητές ώστε να εκτιμήσουν την αξία των σύγχρονων μαθηματικών συμβολισμών.

Η ανάπτυξη του αλγεβρικού συμβολισμού στον 16ο αιώνα ήταν ακόμα μια διαδικασία που πρόκυπτε από την επίλυση προβλημάτων. Το 1591 ο Viete εισήγαγε ένα σύστημα συμβολισμού των αγνώστων και των δοθέντων αριθμών με κεφαλαία γράμματα, δημιουργώντας μια νέα αριθμητική έννοια: της αλγεβρικής αριθμητικής έννοιας. Τα πρόσημα και τα σύμβολα ξεχώρισαν από αυτά που συμβόλιζαν και η συμβολική Άλγεβρα έγινε ένα αυτόνομο μαθηματικό αντικείμενο. Μετά από μερικές δεκαετίες ο Descartes πρότεινε τη χρήση πεζών γραμμάτων όπως έχουμε σήμερα, χρησιμοποιώντας τα πρώτα γράμματα της αλφαβήτου για τους δοθέντες αριθμούς και τα τελευταία γράμματα για τους αγνώστους. Με τη δημιουργία της νέας αυτής γλώσσας, οι προηγούμενες έννοιες του «αγνώστου» έπρεπε να τροποποιηθούν. Ο πρώτος στόχος ήταν πάντα να βρεθεί η τιμή του αγνώστου, αλλά στη συμβολική Άλγεβρα ο άγνωστος είχε μεγαλύτερη σπουδαιότητα, εξέφραζε γενικότητα. Η Άλγεβρα ως γενικευμένη αριθμητική ήταν ένα γεγονός και στο νέο της ρόλο αποκόπηκε από την αριθμητική.

Η ιστορική ανάπτυξη των εξισώσεων συγκεκριμένα δείχνει ότι παρά τη σπουδαιότητα της συμβολικής Άλγεβρας, δεν ήταν απαραίτητη για την ύπαρξη των εξισώσεων. Για παράδειγμα, οι γραμμικές εξισώσεις ήταν κοινές στην Αίγυπτο και οι Βαβυλώνιοι ήξεραν ήδη πώς να λύνουν εξισώσεις πρώτου, δευτέρου και τρίτου βαθμού. Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών π.χ. (με σύγχρονο συμβολισμό):

$$x + \frac{1}{4}y = 7$$

$$x + y = 10$$

η πρώτη εξίσωση πολλαπλασιάζονταν με το 4 και έπειτα η δεύτερη αφαιρούνταν από την πρώτη, δίνοντας $3x = 18$ και άρα $x = 6$ . Από τη δεύτερη εξίσωση προκύπτει $y = 4$.

Ακόμα πιο μακριά, στην αρχαία Κίνα αναπτύχθηκε ένας συστηματικός τρόπος επίλυσης εξισώσεων. Παρόλο που και εκεί δεν υπήρχε ένα συμβολικό σύστημα γραφής προβλημάτων, χάρη στο αριθμητικό τους σύστημα κατάφεραν να ξεπέρασαν τον υπόλοιπο κόσμο στην επίλυση εξισώσεων. Το *Jiu zhang suanshu* ή *9 Κεφάλαια για την μαθηματική τέχνη* (206 π.Χ. μέχρι 220 μ.Χ.) είναι το παλαιότερο γνωστό βιβλίο που περιέχει μια μέθοδο επίλυσης συστημάτων με $n$ εξισώσεις και $n$ αγνώστους, με παραδείγματα για $n = 2,3,4$ και 5. Η μέθοδος λεγόταν "fang cheng", στην οποία γράφονταν οι συντελεστές των αγνώστων σε μορφή πίνακα και κάνοντας πράξεις στηλών, παρόμοια με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss στους πίνακες. Η μέθοδος μπορούσε να οδηγήσει και σε αρνητικές λύσεις, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την αργή αποδοχή των αρνητικών αριθμών στον υπόλοιπο κόσμο.

Ο Διόφαντος αν και επιδίωξε τη γενικότητα στις μεθόδους, το πρώτο του μέλημα ήταν να βρει μία μοναδική λύση σε κάθε πρόβλημα. Το *Αριθμητικά* είναι μια συλλογή περίπου 150 αριθμητικών προβλημάτων που αποτελούν παραδείγματα για την επίλυση εξισώσεων. Δε δεχόταν τις αρνητικές λύσεις και αν υπήρχε παραπάνω από μία λύση, ανέφερε μόνο τη μεγαλύτερη. Ακόμη, έλυσε γραμμικές εξισώσεις με ένα άγνωστο, εκφράζοντας τον άγνωστο και του δοθέντες αριθμούς με βάση το άθροισμα, τη διαφορά και την αναλογία τους και εξισώσεις δευτέρου και μεγαλύτερου βαθμού με ρητές λύσεις.

Οι Άραβες έπαιξαν επίσης σημαντικό ρόλο στην ιστορική ανάπτυξη της επίλυσης εξισώσεων. Ένα βιβλίο που είχε μεγάλη επιρροή στην αραβική Άλγεβρα ήταν του al-Khwarizmi το *Hisab al-gabr wa-l-muqabala* στις αρχές του 10$^{ου}$ αιώνα. Περιείχε μια ξεκάθαρη παρουσίαση έξι βασικών εξισώσεων και μια σειρά προβλημάτων που έδειχναν πώς όλες οι γραμμικές και τετραγωνικές εξισώσεις μπορούν να αναχθούν σε αυτές τις βασικές εξισώσεις. Επιπλέον, δόθηκαν γεωμετρικές αποδείξεις και κανόνες για τις πράξεις, ακόμη και για αριθμούς με πρόσημα, παρόλο που οι αρνητικές λύσεις δε γίνονταν τότε δέκτες. Πάντως αυτό το βιβλίο ήταν χαμηλότερου επιπέδου σε σχέση με του Διόφαντου και σε επίπεδο συμβολισμού, καθώς όλα γράφονταν με λέξεις, ακόμα και οι αριθμοί.

Οι Άραβες έφτασαν στην αλγεβρική επίλυση εξισώσεων τρίτου βαθμού τον 11$^{ο}$ αιώνα. Η αραβική Άλγεβρα έφτασε στη Δύση τον 12$^{ο}$ αιώνα, όταν η δουλειά του al-Khwarizmi μεταφράστηκε από τον Robert του Chester. Δύο αιώνες αργότερα, μαθηματικά εγχειρίδια αριθμητικής και Άλγεβρας ήταν πολύ κοινά σε μέρη της Ευρώπης και η επίλυση εξισώσεων έγινε βασικό μάθημα στα Ιταλικά σχολεία. Μετά την ανακάλυψη της συμβολικής Άλγεβρας, η επίλυση εξισώσεων αναπτύχθηκε ραγδαία και βρήκε εφαρμογές σε άλλους τομείς των Μαθηματικών.

Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να ενισχύσει την μαθηματική εκπαίδευση. Οι μαθητές μπορούν να δουν το μάθημα από άλλη οπτική, έχοντας τη γνώση των διαδικασιών και της προόδου. Οι καθηγητές μπορεί να διαπιστώσουν ότι βρίσκοντας πληροφορίες για ένα θέμα στα Μαθηματικά γίνεται πιο εύκολο να το εξηγήσουν ή να δώσουν παραδείγματα στους μαθητές, διατηρώντας παράλληλα και οι ίδιοι το ενδιαφέρον τους για τα Μαθηματικά. Ακόμη και οι επιμελητές της σχολικής ύλης και οι ερευνητές μπορούν να έχουν καλύτερη εικόνα για το αντικείμενο και ίσως για την εκπαιδευτική διαδικασία.

Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι εφαρμογής της ιστορίας στην εκπαίδευση. Αρχικά, η ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένας σχεδιαστικός οδηγός. Τα ορόσημα στην ανάπτυξη των Μαθηματικών είναι ενδείξεις των νοητικών εμποδίων. Μπορούμε να μάθουμε από τους τρόπους με τους οποίους ξεπεράστηκαν αυτά τα εμπόδια, είτε ακολουθώντας την πορεία που ακολουθήθηκε τότε είτε σκόπιμα επιλέγοντας διαφορετική προσέγγιση. Η «επανεφεύρεση» δε σημαίνει ότι ακολουθούμε τυφλά ένα μονοπάτι. Αντίθετα, οι επιμελητές της σχολικής ύλης πρέπει να προσπαθήσουν να διαμορφώσουν μια μαθησιακή πορεία όπου τα εμπόδια και η ομαλή πρόοδος βρίσκονται σε ισορροπία. Επιπλέον, μπορεί να επιλεχθεί είτε μια άμεση είτε μια έμμεση προσέγγιση, αναφέροντας την ιστορία ανοικτά ή όχι. Το εκπαιδευτικό υλικό μπορεί να εμπλουτιστεί συμπεριλαμβάνοντας ιστορικές μεθόδους επίλυσης και κομμάτια από αυθεντικές πηγές, αλλά άλλες φορές μπορεί να είναι προτιμότερο να γνωρίζει μόνο ο καθηγητής το ιστορικό υπόβαθρο.

Έχοντας αποφασίσει ότι η ιστορία των Μαθηματικών είναι μια πηγή έμπνευσης για όλους όσους βρίσκονται στην εκπαιδευτική διαδικασία, είναι σημαντικό να βρεθεί η επίδρασή της στο παρόν εγχείρημα. Στόχος είναι να βρεθεί πώς η ιστορική ανάπτυξη της Άλγεβρας συγκρίνεται με τη μαθησιακή διαδικασία του μαθητή ακολουθώντας το συγκεκριμένο πρόγραμμα και αν τα ιστορικά προβλήματα όντως βοηθούν τους μαθητές να μάθουν αλγεβρικές διαδικασίες επίλυσης ή όχι.

Για να διευκολυνθεί η «επανεφεύρεση της Άλγεβρας» στην τάξη, πρέπει να αναζητηθεί πού στην ιστορική ανάπτυξη η αριθμητική οδήγησε στην Άλγεβρα. Ιστορικά, τα προβλήματα με λέξεις συνδέουν την αριθμητική με την Άλγεβρα. Αν και η Άλγεβρα έκανε πιο εύκολη την επίλυση των προβλημάτων, είναι αξιοσημείωτο το πόσο καλά λύθηκαν κάποια προβλήματα πριν την ανακάλυψη της Άλγεβρας, με χρήση αριθμητικών διαδικασιών. Κάποια μάλιστα λύνονται πιο εύκολα χωρίς τη χρήση Άλγεβρας. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της Άλγεβρας, που είναι η δυνατότητα να επιχειρηματολογούμε για άγνωστες ή μεταβλητές ποσότητες, μπορεί να εκπαιδευτεί και σε αριθμητικό πλαίσιο. Επίσης, μπορεί να είναι χρήσιμο να συγκρίνεται η ιστορική πρόοδος στους συμβολισμούς και στη σχηματοποίηση με αυτήν των σύγχρονων μαθητών. Τέλος, μπορούν να μελετηθούν παλιά βιβλία της αρχικής Άλγεβρας ώστε να γίνει αντιληπτό πώς γινόταν κατανοητή και πώς εφαρμοζόταν όταν έγινε αποδεκτή.

Παρά τη ξεκάθαρη σύνδεση της αριθμητικής και της Άλγεβρας, στα σχολικά βιβλία φαίνονται να είναι διαφορετικοί κόσμοι, κάτι που μπορεί να δυσχεραίνει την πρώιμη μάθηση της Άλγεβρας. Ακόμη, πρέπει να εξεταστεί πώς σχετίζονται ο συμβολισμός με τον σχηματισμό μιας έννοιας. Η κατηγοριοποίηση της Άλγεβρας σε ρητορική-συγκεκομένη-συμβολική είναι το αποτέλεσμα της σύγχρονης αντίληψής μας για την εξέλιξη της Άλγεβρας κι όχι της κλιμάκωσης της μαθηματικής αφαίρεσης (Radford 1997). Από μια κοινωνικο-πολιτισμική ματιά η συγκεκομένη Άλγεβρα δεν ήταν ένα ενδιάμεσο στάδιο ωρίμανσης, αλλά ήταν ένα τεχνικό ζήτημα, λόγω των περιορισμών που υπήρχαν στη γραφή και στην έλλειψη τυπωμένων βιβλίων, που οδήγησε σε συντομεύσεις των λέξεων. Σήμερα οι μαθητές μπορεί να συντομεύουν τους συμβολισμούς τους φυσικά, αλλά δεν έχει διευκρινιστεί αν αυτό γίνεται λόγω της καλύτερης κατανόησης της χρήσης των λέξεων.

Έχουν γίνει πολλές έρευνες σχετικά με τη δυσκολία των μαθητών να μεταφράσουν προβλήματα λέξεων σε αλγεβρικές εξισώσεις. Στη μετάβαση από την αριθμητική στην Άλγεβρα υπάρχει μια ανακολουθία που λέγεται γνωστικό χάσμα (Herscovics & Linchevski 1994) ή διδακτική τομή (Filloy & Rojano 1989). Υπάρχουν διαφορές στην ερμηνεία των γραμμάτων, των συμβόλων, των εκφράσεων και την έννοια της ισότητας. Για παράδειγμα, στην αριθμητική τα γράμματα είναι συνήθως συντομογραφίες ή μονάδες, ενώ στην Άλγεβρα υποκαθιστούν μεταβλητές ή άγνωστους αριθμούς. Η έννοια της ισότητας, στην αριθμητική δίνει το αποτέλεσμα ενός προβλήματος, ενώ στην Άλγεβρα δηλώνει την ισοδυναμία μιας εξίσωσης. Η Sfard (1996) σύγκρινε το χάσμα στις αντιλήψεις των μαθητών για την Άλγεβρα, με την ιστορική ανάπτυξη της Άλγεβρας. Υποστήριξε ότι η συγκεκομένη Άλγεβρα συνδέεται με την αντίληψη των πράξεων στην Άλγεβρα, ενώ η συμβολική Άλγεβρα με την αντίληψη των δομών στην Άλγεβρα.

Συνοψίζοντας το θεωρητικό υπόβαθρο του ερευνητικού προγράμματος που περιγράφηκε, στόχος είναι να αποφασιστεί πώς μια προσέγγιση που ξεκινά από τις άτυπες μεθόδους που ήδη γνωρίζουν οι μαθητές στην Άλγεβρα, μπορεί να ελαχιστοποιήσει το χάσμα της με την αριθμητική μέσω της ιστορίας. Ιδανικά, οι μαθητές θα αποκτήσουν μια νέα στάση απέναντι στην επίλυση προβλημάτων μέσω συγκεκριμένων αλγεβρικών εργαλείων. Η μελέτη βασίστηκε σε δεδομένα που συλλέχθηκαν μέσω παρατηρήσεων στις τάξεις, δύο γραπτών διαγωνισμάτων αξιολόγησης, βιβλίων ασκήσεων και ερωτηματολογίων μαθητών και καθηγητών.

Επιπλέον, στόχος είναι να απαντηθούν ερωτήσεις όπως οι εξής:

- Υπάρχουν στιγμές στην εκπαιδευτική διαδικασία όπου οι μαθητές ξεπέρασαν μερικώς το χάσμα μεταξύ της αριθμητικής και της Άλγεβρας και γιατί;
- Ποια είναι η επίδραση της ενσωμάτωσης της ιστορίας της Άλγεβρας στην εκπαιδευτική διαδικασία από τους μαθητές;
- Ποιας μορφής σύντομων συμβολισμών χρησιμοποιούν οι μαθητές φυσικά και πώς συνδέεται με την ιστορική ανάπτυξη των αλγεβρικών συμβολισμών;
- Υπάρχει ένας αποδεκτός συμβιβασμός μεταξύ των διαισθητικών, ασυνεπών συμβολισμών και των επίσημων αλγεβρικών συμβολισμών;
- Πώς μπορούν οι μαθητές ενεργά να πάρουν μέρος στη διαδικασία βελτίωσης των συμβολισμών και καθιέρωσης (προ-) αλγεβρικών κανόνων;
- Σε ποιο βαθμό και με ποιον τρόπο οι μαθητές μπορούν να κατανοήσουν τις διαφορετικές έννοιες των γραμμάτων και συμβόλων;

### 3.1.3 Μαθησιακή πτυχή και αποτελέσματα τάξης

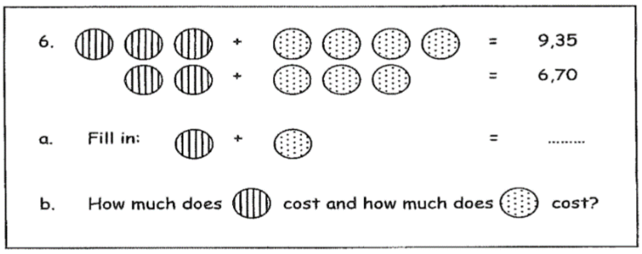
Η ιστορική ανάπτυξη της Άλγεβρας ενέπνευσε το πρόγραμμα ώστε να βασιστεί το μαθησιακό υλικό σε προβλήματα με λέξεις, που συναντάται στην αρχική ρητορική φάση της Άλγεβρας. Όπως στους Βαβυλωνίους, Αιγυπτίους, Κινέζους και στη πρώτη δυτική Άλγεβρα που αφορούσαν κυρίως προβλήματα της καθημερινότητας, αλλά και μαθηματικούς γρίφους. Η φυσική προτίμηση στην επίλυση προβλημάτων με λέξεις αποτελεί τη βάση του πρώτου μέρους του εγχειρήματος, όπου οι άτυπες διαδικασίες των μαθητών αρκούν. Η μεταφορά σε μια πιο αλγεβρική προσέγγιση γίνεται μέσω της ανάπτυξης του αλγεβρικού συμβολισμού, κυρίως από τη ρητορική στη συγκεκομένη και μιας πιο αλγεβρικής σκέψης. Έχει ενδιαφέρον αν η εξέλιξη των διαισθητικών συμβολισμών των μαθητών έχει ομοιότητες με την αντίστοιχη εξέλιξη των αλγεβρικών συμβολισμών. Χρησιμοποιήθηκαν αυθεντικά κείμενα για να φανεί πόσο κοπιαστικοί ήταν οι συγκεκομένοι συμβολισμοί, εκτιμώντας έτσι την αξία των σύγχρονων και για να συγκριθούν παλιότερες τεχνικές επίλυσης σε σχέση με τις σύγχρονες.

Σύνοψη του μαθηματικού περιεχομένου:

- Προβλήματα περιορισμών: προβλήματα με δύο μεταβλητές και μία ή δύο προϋποθέσεις.
- Αντίστροφοι υπολογισμοί: εξάσκηση με αντίστροφες πράξεις και διαγράμματα με βέλη.
- Σύγκριση ποσοτήτων: συλλογισμοί με σχέσεις ανταλλαγής.
- Προοδευτική τυποποίηση χρήσης συμβόλων: συζήτηση αντιθέσεων των συμβολισμών και ο ρόλος των συμβόλων που αλλάζει (π.χ. γράμματα, σύμβολο του ίσον).
- Ανεπίσημη Άλγεβρα: μέθοδος των τριών, συλλογισμός για τους αγνώστους, κανόνας εσφαλμένης θέσης.
- Γραμμικές εξισώσεις με έναν και δύο αγνώστους.

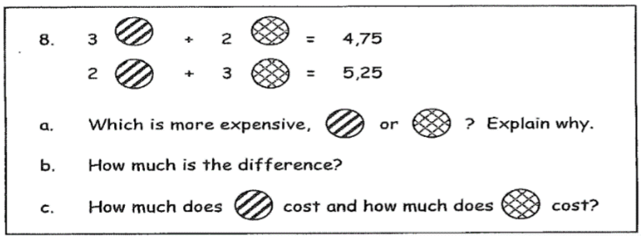
Το μαθησιακό πρόγραμμα βασίζεται σε δύο εγχειρίδια επιπέδου δημοτικού (*Change* και *Barter trade*, 25 μαθημάτων) και δύο εγχειρίδια επιπέδου δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (*Fancy Fair* και *Time travelers*, 15 μαθημάτων). Εδώ εστιάζουμε στο πρόγραμμα που αφορά τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Το καλοκαίρι του 1999, το εγχειρίδιο *Fancy Fair* δοκιμάστηκε σε δύο τάξεις Α΄ Γυμνασίου και μια από αυτές τις τάξεις δοκιμάστηκε και στο *Time travelers*. Ο καθηγητής δίδαξε όλα τα μαθήματα σύμφωνα με τις διδακτικές οδηγίες. Για το *Time travelers,* επειδή δεν είχε ξαναδοκιμαστεί ποτέ, ο καθηγητής καθοδηγήθηκε πιο στενά στα τελευταία μαθήματα. Στη συνέχεια, θα δοθεί μια σύνοψη των λύσεων και των συζητήσεων που έγιναν.

Το περιεχόμενο του *Fancy Fair* αφορά κυρίως την επίλυση συστημάτων με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους. Σε ένα παράδειγμα, με τη χρήση κυκλικών αντικειμένων σαν κέρματα, κάποια από αυτά έχουν σταθερή αξία και κάποια δεν έχουν ακόμα τιμολογηθεί. Το σχολικό εγχειρίδιο ξεκινά με εκφράσεις (εξισώσεις) για δίκαιη ανταλλαγή των κερμάτων και κατάλληλους συμβολισμούς για να αναπαραστήσουν αυτές τις ανταλλαγές. Έπειτα, οι μαθητές κάνοντας αντίστροφους υπολογισμούς υπολογίζουν την τιμή των κερμάτων. Το πρόγραμμα συνεχίζει με ζεύγη συνδυασμών κερμάτων με δεδομένη τιμή: ένα σύστημα εικόνων με εξισώσεις (βλ. Σχήμα 1α και 1β). Τα προβλήματα μπορούν να λυθούν άτυπα, συγκρίνοντας τον αριθμό των κερμάτων και επιχειρηματολογώντας για αυτά. Το πρόβλημα του Σχήματος 1α απαιτεί να καθοριστεί η διαφορά μεταξύ των δύο συνδυασμών κερμάτων και των τιμών («αφαιρώντας») και συγκρίνοντας ξανά.



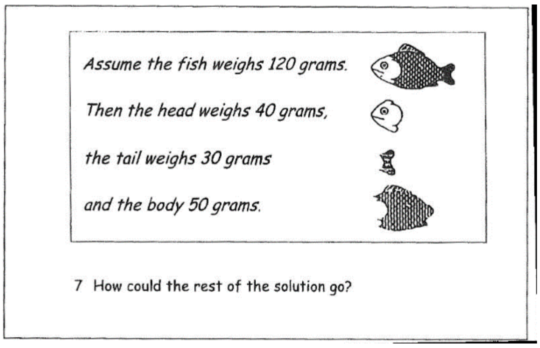

**Σχήμα 1α: Σύστημα εικόνων με εξισώσεις**

Το πρόβλημα στο Σχήμα 1β βασίζεται στην επαναλαμβανομένη εναλλαγή μεταξύ ενός ριγέ κέρματος και ενός καρό, αυξάνοντας κάθε φορά την τιμή κατά 50 cents, μέχρι να παραμείνει μόνο ενός τύπου κέρματος.




**Σχήμα 1β: Σύστημα εικόνων με εξισώσεις**

Στο τελευταίο εγχειρίδιο, ιστορικά προβλήματα ενσωματώνονται σε μια ιστορία με ένα 13χρονο παιδί που επισκέπτεται διαφορετικές χώρες σε διαφορετικές εποχές και ανακαλύπτει Μαθηματικά του παρελθόντος. Για παράδειγμα, υπάρχει μια παράγραφος για τη μέθοδο των τριών, άλλη μία για τη μέθοδο των τριών και μία για τα προβλήματα του Διόφαντου. Ο κανόνας εσφαλμένης θέσης προέκυψε από ένα γνωστό πρόβλημα για ένα ψάρι από τον Calandri (1491): Το κεφάλι ενός ψαριού ζυγίζει το 1/3 του συνολικού βάρους, η ουρά του ζυγίζει το 1/4 και το σώμα του 300 γραμμάρια. Πόσο ζυγίζει συνολικά το ψάρι; Οι μαθητές ζητήθηκαν να υπολογίσουν πρώτα το βάρος και μετά δόθηκε η λύση της μεθόδου του Calandri (βλ. Σχήμα 2).




**Σχήμα 2: Μέρος της λύσης του Calandri**

Η παράγραφος περιέχει επίσης κάποιες στοχαστικές ερωτήσεις:

- Γιατί ο Calandri επιλέγει να ξεκινήσει με το 120;
- Ποιο όνομα θα δίνατε σε αυτόν τον κανόνα εσφαλμένης θέσης;
- Τι πιστεύετε για αυτήν τη μέθοδο;

Είναι αξιοσημείωτο ότι κανένας μαθητής δεν ανέφερε ότι το 120 είναι ένα παράλογος αριθμός να ξεκινήσει κανείς, δεδομένου ότι το σώμα του ψαριού ήδη ζυγίζει 300 γραμμάρια. Επίσης, η δεύτερη ερώτηση δεν προκάλεσε ιδιαίτερες απαντήσεις στην τάξη.

Τέλος, γίνονται κάποιες πρώτες υποθέσεις για τη συμπεριφορά των μαθητών στα μαθήματα. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι μαθητές διδάσκονται να φιλτράρουν την πληροφορία, αλλά πολλές φορές δεν το κάνουν. Δυσκολεύονται να διατυπώσουν τη διαδικασία επίλυσης και συχνά είναι απρόθυμοι να γράψουν μια εξήγηση για την απάντησή τους, θεωρώντας ότι η λύση είναι πιο σημαντική κι όχι πώς τη βρήκαν. Ωστόσο, οι μαθητές αντιμετώπισαν γενικότερα θετικά την παρέμβαση, μαθαίνοντας για τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της αριθμητικής και αλγεβρικής επίλυσης προβλημάτων αντίστοιχα. Η ιστορία παρείχε αρκετές προ-αλγεβρικές μεθόδους που βοήθησαν στη μετάβαση από την αριθμητική στην Άλγεβρα. Σημειώνεται πάντως ότι τα παραπάνω αποτελέσματα αποτυπώνουν το είδος των δραστηριοτήτων που μπορεί να ενεργοποιήσει το μαθησιακό πρόγραμμα και δεν αποτελεί μια αντιπροσωπευτική επιλογή του τι θα μπορούσε να πετύχει ένας μέσος μαθητής.

## 3.2 Έρευνα Θωμαΐδη και Τζανάκη: Αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική τους

### 3.2.1 Ένα ειδικό πεδίο χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών στις έρευνες της Διδακτικής: η περίπτωση της Άλγεβρας

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα πρόσφατων ερευνών, η διδακτική προσέγγιση της ιστορικής εξέλιξης της Άλγεβρας με τους όρους των σταδίων ανάπτυξης και των μηχανισμών μετάβασης αποτελεί έναν αναχρονισμό. Ο Eon Harper χρησιμοποίησε την ιστορική ανάλυση ως βάση μιας εμπειρικής έρευνας όπου καταγράφηκε το πώς μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έλυσαν το εξής πρόβλημα: *Αν δοθεί το άθροισμα και η διαφορά δύο αριθμών να δείξετε ότι μπορείτε πάντα να βρείτε ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί*.

Το 42% των μαθητών έδωσε λύσεις που ο Harper ταξινόμησε με βάση την ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας σε τρία στάδια: το ρητορικό, το συγκεκομμένο και το συμβολικό. Το πρώτο αφορά την περίοδο μέχρι τον Διόφαντο (περί το 250 μ.Χ.), όπου τα προβλήματα δίνονταν σε φυσική γλώσσα. Το δεύτερο, είναι η περίοδος από τον Διόφαντο μέχρι τα τέλη του 16$^{ου}$ αιώνα και χαρακτηρίζεται από τη χρήση γραμμάτων για την αναπαράσταση αγνώστων και τη δημιουργία εξισώσεων. Το τρίτο στάδιο άρχισε με τον Viète και έχει επιπλέον χαρακτηριστικό τη χρήση γραμμάτων και για την αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος ώστε να μπορούν να διατυπωθούν γενικές λύσεις. Έτσι, ταξινόμησε τις λύσεις σε «Ρητορικές», «Διοφαντικές» και «Βιετιανές». Έπειτα, υποστήριξε κάποιες θέσεις σχετικές με την ιδέα του παραλληλισμού της ιστορίας των Μαθηματικών με τη μαθηματική εκπαίδευση και του θετικού ρόλου της ιστορικής γνώσης των Μαθηματικών στην ερμηνεία των δυσκολίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σήμερα. Μεταξύ των οποίων είναι ότι όταν οι μαθητές έχουν προβλήματα παρόμοια με αυτά που εμφανίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας, θα μπορούν να τα ξεπεράσουν όπως τα ξεπέρασαν παλιότερα οι μαθηματικοί.

Άλλη μία σχετική εργασία είναι αυτή της Anna Sfard (1991), όπου δημιουργήθηκε ένα μοντέλο ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών, μέσω της ιστορικής εξέλιξης του αριθμού και της συνάρτησης. Το μοντέλο αποτελείται από τρεις φάσεις: τη φάση *εσωτερίκευσης*, όπου εκτελούνται υπολογιστικές διαδικασίες με γνωστά μαθηματικά αντικείμενα, τη φάση *σύνοψης* όπου η διαδικασία συνοψίζεται σε πιο εύχρηστες ενότητες και τη φάση *αντικειμενοποίησης* όπου η διαδικασία μετασχηματίζεται σε ένα νέο και αυτόνομο αντικείμενο μελέτης. Οι δύο πρώτες φάσεις, όπου κυριαρχούν διαδικασίες και αλγόριθμοι σε υποκείμενες έννοιες ονομάζονται *εργαλειακές*, ενώ στην τρίτη όπου αναδεικνύονται οι αφηρημένες όψεις των εννοιών ονομάζεται *δομική*.

Έπειτα, το μοντέλο προβλήθηκε στην ιστορική εξέλιξη της Άλγεβρας και επιχειρήθηκε να εντοπιστούν σε αυτήν τα στάδια μετάβασης από τις εργαλειακές στις δομικές προσεγγίσεις, μέσω των τριών σταδίων εξέλιξης (ρητορικό, συγκεκομμένο και συμβολικό). Η Άλγεβρα από την αρχαιότητα και για χιλιάδες χρόνια είχε ένα εργαλειακό χαρακτήρα, στην οποία μελετώνταν μόνο οι υπολογιστικές διαδικασίες. Ακόμα και η σειρά αριθμητικών πράξεων παρουσιάζονταν με λεκτικές εντολές, που είχαν ένα επακόλουθο χαρακτήρα και δεν προκάλεσαν τη σύνοψη και αντικειμενοποίηση. Σε κάποια στάδια του σχηματισμού των γνώσεων η απουσία μιας δομικής αντίληψης μπορεί να εμποδίσει την περαιτέρω ανάπτυξη. Δεν είναι τυχαίο ότι η μετάβαση από τη ρητορική στη συμβολική Άλγεβρα, δηλαδή από την εργαλειακή στη δομική προσέγγιση, εμφανίστηκε τον 16$^{ο}$ αιώνα και ότι εφευρέθηκαν σχεδόν την ίδια περίοδο διαφορετικά συστήματα συμβολισμών, από μαθηματικούς που εργάζονταν ο ένας ανεξάρτητα του άλλου. Τότε η μεγάλη πολυπλοκότητα των υπολογιστικών διαδικασιών έφερε σε αδιέξοδο τη ρητορική Άλγεβρα και σταμάτησε η ανάπτυξή της.

Τα παραπάνω αποσπάσματα είναι ενδεικτικά για τη μεθοδολογία χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία και συγκεκριμένα στις αλγεβρικές έννοιες. Η αντίθεση του Γιάννη Θωμαΐδη δεν αφορά το θεωρητικό μοντέλο, αλλά τον τρόπο χρήσης των ιστορικών πηγών, η οποία εκτός από αποσπασματική, χαρακτηρίζεται και ως επιλεκτική. Το μοντέλο της Sfard διαδόθηκε ευρέως στο χώρο της Διδακτικής και χρησιμοποιήθηκε σε πολλές αλγεβρικές μελέτες. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τις εργασίες είναι ότι η ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης ακολουθεί μια ιεραρχική δομή, όπου αυτό που συλλαμβάνεται εργαλειακά σε ένα επίπεδο γίνεται αντιληπτό δομικά σε κάποιο ανώτερο επίπεδο, που αποτυπώνεται με ένα πίνακα σταδίων εξέλιξης της Άλγεβρας (Sfard & Linchevski 1994, σελ. 203). Σε αυτόν τον πίνακα γίνεται διάκριση σε δύο τύπους (γενικευμένη αριθμητική και αφηρημένη Άλγεβρα), καθένας από τους οποίους αποτελείται από δύο στάδια (εργαλειακό και δομικό) και για κάθε στάδιο αναγράφονται τα σημεία αιχμής, τα μέσα αναπαράστασης και χαρακτηριστικοί εκπρόσωποι. Ένας τέτοιος πίνακας με το έργο του Διόφαντου παρατίθεται παρακάτω:

| | |
|---|---|
| Τύπος: | «Γενικευμένη Αριθμητική» |
| Στάδιο: | «Εργαλειακό» |
| Σημείο αιχμής: | «Αριθμητικοί Υπολογισμοί» |
| Αναπαράσταση | «Μικτή: λεκτική και συμβολική (συγκεκομμένη)» |

**Πίνακας 2: Παράδειγμα για το έργο του Διοφάντου**

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ένα παράδειγμα αξιοποίησης της ιστορικής εξέλιξης αλγεβρικών εννοιών, που αφορά συγκεκριμένα τους αρνητικούς αριθμούς, για να φανεί η αξία της μελέτης ιστορικών κειμένων στη διδασκαλία. Οι αρνητικοί αριθμοί ξεκίνησαν να γίνονται αποδεκτοί στις αρχές του 17ου αιώνα ως χρήσιμα εργαλεία στην επίλυση εξισώσεων, αλλά οι κανόνες των πράξεων τους δε διαθέτουν καμία λογική υπόσταση και αιτιολογούνται μόνο από αυτήν τη χρησιμότητα. Ο Descartes στο *La Géométrie* έθεσε τις βάσεις για την εφαρμογή αλγεβρικών μεθόδων στη Γεωμετρία και χρησιμοποίησε τους αρνητικούς ως ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων, χωρίς να ασχολείται με την ερμηνεία των πράξεων ή τη διάταξή τους. Επίσης, ονόμαζε τις θετικές ρίζες ως «αληθινές» (vraies) και τις αρνητικές ως «ψεύτικες» (fausses), αλλά διατύπωσε κανόνες μετασχηματισμού εξισώσεων ώστε να μπορούν να διαγραφούν οι αρνητικές ρίζες. Για παράδειγμα, στην εξίσωση:

$$(x-5)(x+2)(x+4)=0 \text{ ή } x^4+4x^3-19x^2-106x-120=0$$

έχει μια αληθινή ρίζα, το 5 και τρεις ψεύτικες, τις $-2$, $-3$ και $-4$.

Έπειτα, θέτει $x=y-3$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$(y-8)(y-1)y(y+1)=0 \text{ ή } y^4-8y^3-y^2+8y=0$$

που έχει τρεις αληθινές ρίζες, τις $8$, $1$ και $0$ και μια ψεύτικη, το $-1$.

Περιγράφει το αποτέλεσμα ως εξής: «Αυξάνοντας την αληθινή ρίζα 5 κατά 3, μειώνουμε κάθε ψεύτικη ρίζα, έτσι ώστε η ρίζα που ήταν προηγουμένως 4 να είναι τώρα μόνο 1, η ρίζα που ήταν προηγουμένως 3 είναι 0 και η ρίζα που ήταν προηγουμένως 2 είναι τώρα μια αληθινή ρίζα ίση με 1».

Μετά παραθέτει τον εξής γενικό κανόνα: «Αυξάνοντας τις ρίζες κατά μία ποσότητα μεγαλύτερη από κάθε ψεύτικη ρίζα κάνουμε όλες τις ρίζες αληθινές».

Άρα, αν οι αρνητικές ρίζες είναι π.χ. $-6$, $-2$ και $-1$, τότε για να γίνουν όλες θετικές θα πρέπει να αυξηθούν τουλάχιστον κατά 7 (δηλαδή κατά ένα μεγαλύτερη από κάθε αρνητική ρίζα κατά απόλυτη τιμή). Τότε η εξίσωση:

$$(x+6)(x+2)(x+1)=0 \text{ ή } x^3+9x^2+20x+12=0$$

μέσω του μετασχηματισμού $x=y-7$ γίνεται:

$$(y-1)(y-5)(y-6)=0 \text{ ή } y^3-12y^2+41y-30=0.$$

Μια αντίστοιχη θεωρία για τις πολυωνυμικές εξισώσεις διατύπωσε και ο Isaac Newton στις πανεπιστημιακές του παραδόσεις *Lectures in Algebra*. Μελέτησε επιπλέον το πρόβλημα προσδιορισμού φραγμάτων για τις ρίζες τον εξισώσεων, που απαιτούσε τη χρήση ανισοτικών σχέσεων με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Έτσι, αναδείχθηκε το θέμα της διάταξης και μια πρώτη αντίληψη για την απόλυτη τιμή. Στους κανόνες πρόσθεσης θετικών και αρνητικών αριθμών, ο Newton αναφέρει: «Όταν η αρνητική ποσότητα είναι μεγαλύτερη από τη θετική, τότε το άθροισμα θα είναι αρνητικό». Επιπλέον, κάνει λόγο για τη μέγιστη θετική ρίζα και τη μέγιστη αρνητική ρίζα: «δηλαδή την πιο απομακρυσμένη από το μηδέν».

Φαίνεται λοιπόν ότι τον 17ο αιώνα υπήρχαν διαφορετικές αντιλήψεις για τη διάταξη των αριθμών και την απόλυτη τιμή. Με αφορμή τον κανόνα μετασχηματισμού του Descartes δημιουργήθηκε μια διδακτική δραστηριότητα με το εξής πρόβλημα:

*Αν α, β και γ είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι, να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος που πρέπει να προστεθεί σε αυτούς ώστε να γίνουν και οι τρεις θετικοί.*

Για παράδειγμα, αν οι αριθμοί είναι $\alpha = -6$ , $\beta = -2$ και $\gamma = -1$ , τότε ο επόμενος ακέραιος είναι το 7, δηλαδή η απόλυτη τιμή του μικρότερου από τους τρεις αριθμούς αυξημένη κατά ένα. Συμβολικά, η λύση είναι: $x = \max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma| + 1\}$.

Η δραστηριότητα έγινε σε μαθητές Λυκείου, που συμμετείχαν στην προετοιμασία για μαθηματικούς διαγωνισμούς στο πλαίσιο της έρευνας του Γιάννη Θωμαΐδη και του Κωνσταντίνου Τζανάκη και τους ζητήθηκε να εκφράσουν το παραπάνω συμπέρασμα με οποιονδήποτε γενικό τρόπο. Οι περισσότεροι μαθητές της Β΄ και Γ΄ Λυκείου απάντησαν ως εξής:

Έστω $x$ ο ζητούμενος αριθμός.

Σύμφωνα με το πρόβλημα θα ισχύει: $\alpha + x > 0$ , $\beta + x > 0$ και $\gamma + x > 0$ (1).

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $\alpha + \beta + \gamma + 3x > 0$ .

Λύνοντας ως προς $x$ προκύπτει: $x > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

Έτσι, κατέληξαν στο εξής συμπέρασμα: Αν α, β και γ είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι, τότε ο μικρότερος ακέραιος που μπορούμε να προσθέσουμε ώστε να γίνουν όλοι θετικοί, είναι ο πρώτος μεγαλύτερος ακέραιος μετά τον αριθμό $x > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ (2).

Η απάντηση όμως είναι λανθασμένη, καθώς οι αριθμοί $\alpha = -6$ , $\beta = -2$ και $\gamma = -1$ δίνουν από τη (2) $x > 3$ . Δηλαδή, ο ζητούμενος ακέραιος είναι το 4, που δεν αποτελεί όμως λύση του προβλήματος. Οι διδάσκοντες ζήτησαν από τους μαθητές να βρουν πού οφείλεται το λάθος, δημιουργώντας μια ενδιαφέρουσα συζήτηση για τους διαδοχικούς αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που οδήγησαν από τις ανισώσεις (1) στην ανίσωση (2) και κυρίως για την ισοδυναμία που δε διατηρείται μετά την πρόσθεση κατά μέλη.

Το ίδιο πρόβλημα δόθηκε και σε μαθητές της Α΄ Λυκείου. Οι περισσότεροι από αυτούς είχαν από το Γυμνάσιο μια ικανότητα στις απλές πράξεις με αρνητικούς αριθμούς και μια αντίληψη για την απόλυτη τιμή ως «ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του» ή «η απόσταση του αριθμού από το μηδέν». Εδώ, μελετήθηκαν πρώτα κάποια αριθμητικά παραδείγματα, ζητώντας όμως ξανά να δώσουν μια γενική απάντηση στο πρόβλημα. Οι απαντήσεις τους ήταν αρκετά διαφορετικές από των προηγούμενων μαθητών. Παρατίθενται οι σωστές (ή σχεδόν σωστές) απαντήσεις των μαθητών:

- Ο κατά μία μονάδα μεγαλύτερος από τον αντίθετο του μικρότερου από τους τρεις αριθμούς.
- Ο αντίθετος του μικρότερου αριθμού. Αν δηλαδή $\alpha > \beta > \gamma$ , τότε ο μικρότερος ακέραιος θα είναι ο $-\gamma$.
- Έναν αριθμό μεγαλύτερο από τον αντίθετο του μικρότερου.
- Ο αντίθετος του μικρότερου αριθμού.
- Τον αριθμό που είναι μεγαλύτερος κατά μία μονάδα από την απόλυτη τιμή του μικρότερου από τους τρεις αριθμούς.
- Ο αριθμός που είναι ο αμέσως μεγαλύτερος ακέραιος του πιο μικρού αρνητικού αριθμού αν τους είχαμε στους θετικούς αριθμούς.

- Αν προσθέσουμε 1 στον αντίθετο του μικρότερου αρνητικού, τότε βγαίνουν όλοι θετικοί.
- Θα βρούμε την απόλυτη τιμή του μικρότερου αρνητικού αριθμού και θα προσθέσουμε μία μονάδα.
- Πρέπει να προσθέσουμε τη θετική τιμή του αριθμού που απέχει περισσότερο από το μηδέν και μία μονάδα.

Οι απαντήσεις όλων των μαθητών οδηγούν σε κάποια συμπεράσματα για τη διδασκαλία μέσω της ιστορικής εξέλιξης. Φαίνεται ότι η εξάσκηση των μαθητών της Α΄ Λυκείου στις απόλυτες τιμές δεν εξασφαλίζει ότι μετέπειτα θα μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν σε προβλήματα αποτελεσματικά. Μαθητές που δεν έχουν μελετήσει τις απόλυτες τιμές, μπορούν να τις χρησιμοποιήσουν ή να σκεφτούν κάποιο υποκατάστατό τους που μοιάζει με κάποιες ιστορικές αντιλήψεις. Τέλος, η γνώση της ιστορικής εξέλιξης μας δίνει ιδέες για τη δημιουργία διδακτικών δραστηριοτήτων και μας διαφωτίζει για το είδος των γνώσεων που αποκτούν οι μαθητές, οι οποίες συχνά δεν έχουν μεγάλη σχέση με αυτές που ζητούνται στα προγράμματα σπουδών.

## 3.3 Έρευνα Θωμαΐδη και Τζανάκη: Η έννοια του ιστορικού παραλληλισμού. Ιστορική εξέλιξη και αντιλήψεις των μαθητών για τη σχέση διάταξης στον άξονα των αριθμών

### 3.3.1 Τρόποι αντιμετώπισης των μαθητών της σχέσης διάταξης στη γραμμή των αριθμών

Στην προηγούμενη μελέτη της έρευνας του Γιάννη Θωμαΐδη και του Κωνσταντίνου Τζανάκη η διδακτική δραστηριότητα βασίστηκε στο πρόβλημα: «Αν $\alpha$, $\beta$ και $\gamma$ είναι τρεις αρνητικοί ακέραιοι, να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος που πρέπει να προστεθεί σε αυτούς ώστε να γίνουν και οι τρεις θετικοί» που έγινε με μαθητές και των τριών τάξεων του Λυκείου. Στη συνέχεια αυτής της έρευνας, μελετήθηκαν άλλα δύο προβλήματα με μαθητές μόνο της Α΄ Λυκείου.

Η δραστηριότητα έγινε με δύο τάξεις σε σχολείο της Θεσσαλονίκης, όπου διδάχθηκε η Άλγεβρα με τον κλασικό τρόπο σε μαθήματα τριών ωρών την εβδομάδα με τον ίδιο καθηγητή σύμφωνα με την επίσημη διδακτέα ύλη. Δόθηκε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο, το οποίο σχεδιάστηκε ώστε να έχει παρόμοιο ιστορικό περιεχόμενο, με αυτό που συνδέεται με τη διάταξη στη γραμμή των αριθμών. Τους πρώτους δύο μήνες οι μαθητές και των δύο τάξεων διδάχθηκαν από το σχολικό βιβλίο το κεφάλαιο των πραγματικών αριθμών, τις ιδιότητες των ανισοτήτων, την απόλυτη τιμή, τις δυνάμεις και τις ρίζες. Ακολουθήθηκε η παραδοσιακή διδακτική μέθοδος της εξήγησης και της εξάσκησης για την επίλυση των ασκήσεων. Τους επόμενους μήνες ακολούθησε αντίστοιχα η διδασκαλία των συναρτήσεων και συγκεκριμένα της μορφής: $y = ax + b$ , $y = ax^2$ και τα 2x2 συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

Έπειτα, μελετήθηκε το κεφάλαιο με τη γενική λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, τις ιδιότητες των ριζών τους, η $y = ax^2 + bx + c$ και η γραφική της παράσταση και η λύση των τετραγωνικών ανισοτήτων που ήταν σημαντικές για το σκοπό του εγχειρήματος, καθώς υπήρχαν «αλγοριθμικά» εργαλεία για την επίλυση ανισοτήτων. Το ερωτηματολόγιο μοιράστηκε όταν η τάξη των 28 μαθητών είχε μόλις τελειώσει το παραπάνω κεφάλαιο και για αυτό η ομάδα αυτή ονομάστηκε μετα-αλγοριθμική ή G2, ενώ η πρώτη τάξη των 30 μαθητών επρόκειτο να εισαχθεί μετέπειτα σε αυτό και ονομάστηκε προ-αλγοριθμική ή G1. Επομένως, αναμενόταν ότι οι μαθητές που δεν είχαν διδαχθεί τις αλγοριθμικές διαδικασίες θα παρουσίαζαν μια μορφή παραλληλισμού, δηλαδή αυτοί της G1, και ότι θα αντιμετώπιζαν δυσκολίες με τις ιδιότητες των αρνητικών αριθμών και της διάταξής τους, που θα ήταν παρόμοιες με αυτές που εμφανίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη. Επιπλέον, αναμενόταν ότι θα υπάρξουν μόνο ποιοτικές διαφορές, λόγω του μικρού αριθμού των μαθητών που συμμετείχαν και επειδή όλοι είχαν την ίδια εκπαίδευση στα Μαθηματικά.

Εκτός λοιπόν από το πρόβλημα μελετήθηκε στην προηγούμενη εργασία, υπήρξαν ακόμα δύο ερωτήσεις (Q1, Q2) στο ερωτηματολόγιο:

Q1. Ποιες είναι οι λύσεις της ανισότητας $x^2 > 9$ (και $x^2 < 9$) όταν $x \in \mathbb{R}$;

Q2. Αν $x^2 < y^2$ (και $x^2 > y^2$) τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τους αριθμούς $x$ και $y$; ($x, y \in \mathbb{R}$).

Οι πρώτες ανισότητες δόθηκαν στη G1 και αυτές των παρενθέσεων στη G2, καθώς θεωρήθηκαν πιο δύσκολες λόγω του μη συνεκτικού συνόλου των λύσεων. Η πρώτη ερώτηση είναι τετριμμένη και οδηγεί σε λύσεις παρόμοιες με αυτές που εμφανίστηκαν ιστορικά σε διάφορα πλαίσια. Από την άλλη, δίνει την ευκαιρία για πολλές προσεγγίσεις:

(α) Τη διαισθητική (ή ανεπίσημη), δηλαδή τη διάταξη συγκεκριμένων αριθμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών και βρίσκοντας με δοκιμές τα φράγματα για το $x$, κάτι όμως που δεν ενθαρρύνεται από τους καθηγητές.

(β) Την επίσημη (ή εννοιολογική), δηλαδή με τη χρήση εργαλείων που έχουν διδαχθεί στα πρώτα κεφάλαια της ύλης. Η επιθυμητή μαθηματική λύση είναι: $x^2 > 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| > 3 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 3$. Σημειώνεται ότι αν και οι μαθητές διδάχθηκαν τη σχέση $\sqrt{x^2} = |x|$ και τη σημασία των $|x| < a$ και $|x| > a$, ώστε να μπορούν οι μαθητές και των δύο ομάδων να δώσουν την απαιτούμενη λύση, αυτού του τύπου η λύση δε δόθηκε ξεκάθαρα σε καμία ομάδα.

(γ) Αλγοριθμική (ή διαδικαστική), δηλαδή με τη χρήση μεθόδων του τελευταίου κεφαλαίου με την επίλυση των ανισοτήτων. Π.χ. $x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) > 0$, μετά με την εύρεση των ριζών της αντίστοιχης εξίσωσης, την εύρεσή τους στη γραμμή των αριθμών και την κατασκευή του πίνακα προσήμων. Μια τέτοια πλήρης απάντηση θα αναμενόταν μόνο από την μετα-αλγοριθμική ομάδα.

(δ) Οπτική (ή γεωμετρική), δηλαδή με την εύρεση του σημείου τομής των γραφημάτων των: $y = x^2$ και $y = 9$ ή των σημείων τομής του γραφήματος της $y = x^2 - 9$ με τον άξονα των $x$. Αυτή είναι διαφορετική από τις προηγούμενες τρεις, αλλά σύμφωνα με τον καθηγητή θεωρήθηκε χρονοβόρα και δε διδάχθηκε.

Η δεύτερη ερώτηση ανήκει στη μορφή των ανισοτήτων που ιστορικά οδήγησαν στην καθιέρωση της γραμμής των αριθμών και της απόλυτης τιμής ως μια ανεξάρτητη έννοια. Είναι πιο δύσκολη από την πρώτη ερώτηση επειδή δεν είναι τόσο χρήσιμες οι αλγοριθμικές διαδικασίες και οι οπτικές αναπαραστάσεις και οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν την έννοια της απόλυτης τιμής.

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν μέσω μιας εξέτασης στο μέσο της χρονιάς, όπου μοιράστηκε το ερωτηματολόγιο και οι μαθητές δούλεψαν στα θέματα για 40 λεπτά. Αναλύθηκαν οι απαντήσεις και χωρίστηκαν εκ των υστέρων σε διαφορετικές κατηγορίες ανάλογα με τις στρατηγικές επίλυσης που ακολουθήθηκαν. Κάποιες από αυτές ανταποκρίνονται στις προσδοκίες σχετικά με τις επίσημες και αλγοριθμικές διαδικασίες, ενώ άλλες φανερώνουν την αναλογία μεταξύ των δυσκολιών των μαθητών και αυτών που εμφανίστηκαν στην ιστορική εξέλιξη.

| | Q1 | | Q2 | |
|---|---|---|---|---|
| | G1 ($x^2$>9) | G2 ($x^2$<9) | G1 ($x^2$<$y^2$) | G2 ($x^2$>$y^2$) |
| Correct | 8 (27%) | 9 (32%) | 2 (7%) | 3 (11%) |
| Insufficient[a] | – | – | 6 (20%) | 2 (7%) |
| Wrong | 22 (73%) | 19 (68%) | 19 (63%) | 20 (71%) |
| No answer | – | | 3 (10%) | 3 (11%) |
| Total | 30 | 28 | 30 | 28 |

**Πίνακας 3: Γενικά αποτελέσματα επιτυχίας και αποτυχίας (σε ποσοστά %)**

| Category | Form of the answer | Number | Correct | Incorrect |
|---|---|---|---|---|
| A Square root and absolute value | 1. $x > \sqrt{9} \Rightarrow x > 3$ | 5 | | 5 |
| | 2. $x > \sqrt{9} \Rightarrow x > 3 \,\&\, x > -3$ | 1 | | 1 |
| | 3. $x > \pm\sqrt{9} \Rightarrow x > \pm 3 \Rightarrow x \in \quad (-3, +\infty)$ | 1 | | 1 |
| | 4. $\|x\| > \sqrt{9} \Rightarrow x > 3$ | 1 | | 1 |
| | 5. $\|x\| > \sqrt{9} \Rightarrow x > \pm 3 \,\&\, x > -3$ | 1 | | 1 |
| | 6. $\|x\| > \sqrt{9} \Rightarrow \|x\| > 3 \Rightarrow x > 3 \,\&\, x > -3$ | 2 | 2 | |
| B Factorisation and "product rule" | $(x-3)(x+3) > 0 \Rightarrow x - 3 > 0 \,\&$ $x + 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \& x > -3$ | 4 | | 4 |
| F Direct answers without any indication of operations | 1. $x$>3 | 3 | | 3 |
| | 2. $x$≥4 and $x$≥−4 | 3 | | 3 |
| | 3. $x$=4,5 | 1 | | 1 |
| | 4. $x$>0 | 1 | | 1 |
| | 5. $x \in R$ | 1 | | 1 |
| G Verbal answers, indicating visualization of the number line | 1. The numbers smaller than −3 and greater than 3. | 1 | 1 | |
| | 2. Numbers from −3 to 3 are not accepted, so $x$≥4 and $x$≤−4. | 1 | 1 | |
| | 3. Upwards from 3 without 3 and downwards from −3 without −3, i.e., the whole $R$ except the interval [−3, 3]. | 1 | 1 | |
| | 4. The numbers −3,−2,−1,0,1,2,3 are excluded. Every $x$≥4 and $x$≤−4 may be admitted as a solution of this inequality. | 1 | 1 | |
| | 5. Every number greater than 3 and its opposite | 1 | 1 | |
| | 6. All real numbers $x$ except −3≤$x$≤3 | 1 | 1 | |
| Total | | 30 | 8 | 22 |

**Πίνακας 4: Απαντήσεις στην Q1 από την G1**

Σχόλια:

(α) Οι απαντήσεις Α είναι επίσημες και οι B, C, D, E είναι αλγοριθμικές όπως περιγράφηκε παραπάνω.

(β) Τα G2 και G4 θεωρήθηκαν σωστά, επειδή αντιστοιχούν σε σωστές απαντήσεις στους ακέραιους αριθμούς. Επίσης, αγνοήθηκε ο λάθος σύνδεσμος στο Α6 (το &), κάτι που έγινε και στη G2.

Δεκαπέντε μαθητές της G1 έδωσαν μια επίσημη ή αλγοριθμική απάντηση και οι υπόλοιποι δεκαπέντε έδωσαν απαντήσεις τύπου F και G, χωρίς αιτιολόγηση ή κάποια ένδειξη ότι χρησιμοποιήσαν γραφήματα, καταφέρνοντας πάντως όλοι στο G να βρουν τη σωστή απάντηση. Οι τελευταίοι, αποτελούν το 75% των σωστών απαντήσεων σε αυτή την ομάδα (6 στους 8).

| Category | Form of the answer | Number | Correct | Incorrect |
|---|---|---|---|---|
| A Square root | 1. $x < \sqrt{9} \Rightarrow x < 3$ | 1 | | 1 |
| | 2. $x < \sqrt{9} \Rightarrow x < \pm 3$ | 1 | | 1 |
| | 3. $x < \pm\sqrt{9} \Rightarrow x < \pm 3$ | 1 | | 1 |
| | 4. $x < \pm\sqrt{9} \Rightarrow x < \pm 3 \Rightarrow x < 3$ or $x < -3$ | 1 | | 1 |
| B Factorisation and "product rule" | $(x-3)(x+3) < 0 \Rightarrow x - 3 < 0$ & $x + < 0 \Rightarrow x < 3$ & $x < -3$ | 5 | | 5 |
| C Factorisation and table of signs | The sign of $(x-3)(x+3)$ is studied using a table of signs and the solution is given as $-3<x<3$. | 2 | 2 | |
| D Solving the corresponding equation | 1. $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$ | 5 | | 5 |
| | 2. $x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$ | 1 | | 1 |
| | 3. $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow -3 < x < 3$ | 1 | 1 | |
| | 4. $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x > -3$ and $x < 3$ | 1 | 1 | |
| E Applying the rule for the sign of a trinomial | The rule for the sign of the trinomial $x^2-9$ is applied and the solution is given as $x \in (-3, 3)$ | 3 | 3 | |
| F Direct answers without any indication of operations | 1. $x < 3$ or $x < -3$ | 2 | | 2 |
| | 2. $x<\pm 3$ | 1 | | 1 |
| | 3. $x < \pm 3 \Rightarrow -3 < x < 3$ | 1 | 1 | |
| | 4. $-3<x<3$ | 1 | 1 | |
| | 5. $x < \sqrt{3}$ or $x < -\sqrt{3}$ | 1 | | 1 |
| | 6. $x=1$ & $x=2$ | 1 | | 1 |
| Total | | 29[a] | 9 | 20 |

**Πίνακας 5: Απαντήσεις στην Q1 από την G2**

Από την άλλη, 21 μαθητές στη G2 έδωσαν επίσημη ή αλγοριθμική απάντηση και 7 έδωσαν απαντήσεις τύπου F, χωρίς αιτιολόγηση ή χρήση γραφημάτων. Απαντήσεις τύπου G δεν υπήρχαν σε αυτή την ομάδα. Μόνο το 32% (7 από τις 22) των επίσημων ή αλγοριθμικών απαντήσεων ήταν σωστές.

Στις δύο ομάδες φαίνεται ότι κυριάρχησαν οι επίσημες και αλγοριθμικές διαδικασίες. Οι μέθοδοι των μαθητών είναι χαρακτηριστικές της διαφοράς της κάθε ομάδας, κυρίως στις σωστές απαντήσεις. Αυτές στο G1 είναι κυρίως λεκτικές, καθώς οι μαθητές δεν είχαν κάποια αλγοριθμική γνώση για αυτήν την ανισότητα, καταφέρνοντας όμως να θυμηθούν τη λύση στις γραμμικές ανισότητες και να τις προσαρμόσουν στις τετραγωνικές ανισότητες (απαντήσεις τύπου G). Αυτό δεν παρατηρήθηκε στη G2, όπου οι περισσότερες σωστές απαντήσεις βασίστηκαν σε αλγοριθμικές διαδικασίες, χωρίς όμως σημαντικά καλύτερη επιτυχία. Φάνηκε ότι αφότου οι μαθητές έμαθαν τις αλγοριθμικές διαδικασίες, εξασθένησε η ικανότητα να χρησιμοποιήσουν την διαισθητική ιδέα του άξονα των αριθμών. Αυτό βέβαια μπορεί να μην ισχύει σε άλλες περιπτώσεις, όπως στη χαμηλή επιτυχία στο Q2.

### 3.3.2 Ανάλυση των απαντήσεων

Σχόλια:

(α) Σε όλες τις σωστές απαντήσεις εφαρμόστηκε η έννοια της απόλυτης τιμής.

(β) Οι απαντήσεις B2 και C ήταν ανεπαρκείς, λόγω της ημιτελούς εξέτασης του προσήμου του *y* στο B2 και των προσήμων του *x* και του *y* στο C.

(γ) Σε αντίθεση με την Q1, οι μαθητές και στις δύο ομάδες ακολούθησαν τις ίδιες διαδικασίες με εντυπωσιακά παρόμοιες συχνότητες (εκτός από τις απαντήσεις στο C).

| Category | Form of the answer | Number | Correct | Insufficient | Incorrect |
|---|---|---|---|---|---|
| A Square root | $x^2 < y^2 \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y} \Rightarrow x < y$ | 2 | | | 2 |
| B Factorisation and "product rule" | $(x-y)(x+y) < 0 \Rightarrow x-y < 0$ and $x+y < 0 \Rightarrow x < y$ and $x < -y$ | 3 | | | 3 |
| C Distinguishing different cases | If $x, y > 0$, then $x < y$ If $x, y < 0$, then $x > y$ | 6 | | 6 | |
| F Direct answers with no indication of operations | 1. $x<y$ | 12 | | | 12 |
| | 2. $\|x\|<\|y\|$ | 2 | 2 | | |
| | 3. They are positive because they are squares. | 4 | | | 4 |
| No answer | | 3 | | | |
| Total | | 32[a] | 2 | 6 | 21 |

**Πίνακας 6: Απαντήσεις στην Q2 από την G1**

| Category | Form of the answer | Number | Correct | Insufficient | Incorrect |
|---|---|---|---|---|---|
| A Square root | 1. $x^2 > y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{y^2} \Rightarrow x > y$ | 1 | | | 1 |
| | 2. $x^2 > y^2 \Rightarrow x > \sqrt{y^2} \Rightarrow x > y$ | 1 | | | 1 |
| B Factorisation and "product rule" | 1. $(x-y)(x+y) > 0 \Rightarrow x-y > 0$ and $x+y > 0 \Rightarrow x > y$ and $x > -y$ | 3 | | | 3 |
| | 2. $(x-y)(x+y) > 0 \Rightarrow x-y > 0$ and $x+y > 0 \Rightarrow x > y$ and $x > -y$ or $x-y < 0$ and $x+y < 0 \Rightarrow x < y$ and $x < -y$ | 1 | | 1 | |
| C Distinguishing different cases | If $x, y > 0$, then $x > y$ If $x, y < 0$, then $x < y$ | 1 | | 1 | |
| F Direct answers with no indication of operations | 1. $x>y$ | 10 | | | 10 |
| | 2. $\|x\|>\|y\|$ | 3 | 3 | | |
| | 3. They are positive because they are squares. | 6 | | | 6 |
| | 4. Not necessarily $x>y$ | 1 | | | 1 |
| H Unclassified | | 1 | | | 1 |
| No answer | | 3 | | | |
| Total | | 31[a] | 3 | 2 | 23 |

**Πίνακας 7: Απαντήσεις στην Q2 από την G2**

Δύο μαθητές της G1 που χρησιμοποίησαν σωστά την απόλυτη τιμή στην Q1, έδωσαν τις απαντήσεις F2. Ήταν οι μόνοι και στις δύο ομάδες που έδωσαν σωστές απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι μια σωστή προσέγγιση στα ερωτήματα παρέχεται μέσω της απόλυτης τιμής. Από την άλλη, από τους τρεις μαθητές της G2 που απάντησαν σωστά στην Q2 (τύπου F2), στην Q1 μόνο ένας απάντησε σωστά (τύπου F3). Οι άλλοι δύο έδωσαν τις απαντήσεις A3 και A4, που δείχνει ότι δεν κατάλαβαν την ανισότητα $|x|<|y|$, παρόλο που μπορούσαν να βγάλουν το συμπέρασμα: $x^2 < y^2 \Rightarrow |x| < |y|$. Μόνο πέντε μαθητές της G1 (17%) και έξι της G2 (21%) έδωσαν μια επίσημη ή αλγοριθμική απάντηση. Οι υπόλοιποι απάντησαν χωρίς αιτιολόγηση, ενδεχομένως λόγω της γενικής μορφής των ανισοτήτων, σε σύγκριση με αυτές των ερωτημάτων, οι οποίες δεν επιτρέπουν μια αντίστοιχη «γεωμετρική» χρήση της γραμμής των αριθμών και δεν ευνοούν τη χρήση αλγοριθμικών διαδικασιών. Αυτό αποδεικνύεται από τα χαμηλά ποσοστά των σωστών απαντήσεων και στις δύο ομάδες.

Επιπλέον, το 57% των λάθος απαντήσεων στην G1 και το 43% στην G2 ήταν της μορφής $x < y$ (και $x > y$ ) χωρίς αιτιολόγηση (τύπου F1). Τρεις από αυτούς στην G2 και δύο στην G1, έδωσαν την απάντηση τύπου F3, θεωρώντας ότι τα $x$ και $y$ είναι θετικά. Αυτό φαίνεται και στο υψηλό ποσοστό των μαθητών στις δύο ομάδες που έδωσαν την απάντηση τύπου F3 «τα $x$ και $y$ είναι θετικά επειδή είναι στο τετράγωνο». Επίσης, πέντε μαθητές στην G2 και τρεις στην G1 έδωσαν την απάντηση F1 στην Q2, απάντησαν σωστά στην Q1 εφαρμόζοντας κάποια αλγοριθμική μέθοδο (τύπου C ή D) και μια λεκτική απάντηση (τύπου G) αντίστοιχα. Αυτό υποδεικνύει ότι για την απλούστερη ερώτηση Q1 οι μαθητές μπορούσαν να εφαρμόσουν σωστά κάποιες μεθόδους, αλλά απέτυχαν να το κάνουν στην πιο δύσκολη Q2, όπου απαιτούνταν μια βαθύτερη κατανόηση της διάταξης. Άρα, φαίνεται ότι όταν οι μαθητές πρέπει να σκεφτούν τη διάταξη των αριθμών και να μην χρησιμοποιήσουν αλγοριθμικές μεθόδους, πολλοί βολεύονται μόνο με τον θετικό ημιάξονα και δεν λαμβάνουν υπόψη τον αρνητικό. Αυτό μπορεί να παραλληλιστεί με την άρνηση πολλών μαθηματικών για τους αρνητικούς αριθμούς στο παρελθόν.

### 3.3.3 Σχόλια για τις απαντήσεις των μαθητών

Κάποια σχόλια για τις απαντήσεις είναι τα εξής:

(α) Στις Q1 και Q2 οι μαθητές χρησιμοποίησαν μια πληθώρα μεθόδων που οδήγησαν σε επίσημες ή αλγοριθμικές απαντήσεις. Στην Q1 το 75,9% των απαντήσεων στη G2 ήταν αυτού του τύπου, αλλά μόνο το 50% στην G1, όπου οι περισσότερες από αυτές μεθόδους δεν είχαν διδαχθεί. Φαίνεται ότι το διδακτικό πλαίσιο περιορίζει τους μαθητές μόνο σε ότι έχουν διδαχθεί και δεν υπάρχει άμεσος παραλληλισμός μεταξύ αυτών των απαντήσεων και του ιστορικού πλαισίου.

(β) Οι περισσότερες σωστές απαντήσεις στην G1 για την Q1 (6 στις 8) ήταν λεκτικές (τύπου G), ενώ αυτού του τύπου απαντήσεις απουσιάζουν από την G2, αποτυπώνοντας τη διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων. Οι μαθητές της G1 παρόλο που δεν είχαν στη διάθεσή τους τις μεθόδους που είχαν αυτοί της G2, κατάφεραν να προσαρμόσουν τις παλιότερες γνώσεις τους στις τετραγωνικές ανισότητες. Αυτό δείχνει την ύπαρξη ενός θετικού παραλληλισμού, αφού είναι παρόμοιο με το τι συνέβη ιστορικά.

(γ) Στην Q2 που είναι λιγότερο κατάλληλη για τις μεθόδους που ήδη διδάχθηκαν στους μαθητές, η επιτυχία είναι αρκετά μικρότερη και στις δύο ομάδες. Οι σωστές απαντήσεις απαιτούσαν την εφαρμογή της απόλυτης τιμής. Ένα μεγάλο ποσοστό των λανθασμένων απαντήσεων ήταν τύπου F1 και F3, που υποδεικνύει ότι οι μαθητές περιορίστηκαν σε θετικούς αριθμούς, ίσως επειδή δεν είχαν καταλάβει πλήρως την έννοια της απόλυτης τιμής, δεν μπόρεσαν να αντιμετωπίσουν τη διάταξη των πραγματικών αριθμών που απαιτούνταν στην Q2. Το εμπόδιο της αντίληψης των αριθμών ως θετικές ποσότητες, εμφανίζεται στην τάξη αλλά και στην ιστορία και είναι η αρνητική πλευρά του παραλληλισμού.

### 3.3.4 Συζήτηση και συμπέρασμα

Η παραπάνω ανάλυση σχετίζεται με τη σύγκριση δύο διαφορετικών «κόσμων» με βάση την ιστορική διαδικασία της δημιουργίας των Μαθηματικών και τη διδασκαλία τους στην τάξη, οι οποίοι φαίνονται να βρίσκονται σε μια αντιστοιχία. Ωστόσο, τα παραπάνω αποτελέσματα φανερώνουν μια πιο ήπια σχέση:

(α) Ο αυστηρός παραλληλισμός δεν είναι εφικτός, καθώς εμπλέκονται πολλοί διδακτικοί παράγοντες που περιορίζουν τις προσεγγίσεις των μαθητών.

(β) Από την άλλη είναι αξιοσημείωτο ότι εμφανίστηκαν αρκετές ομοιότητες μεταξύ των δυσκολιών των μαθητών στην κατανόηση των αρνητικών αριθμών με τα εμπόδια που προέκυψαν στην ιστορία. Αυτές οι ομοιότητες μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά, καθώς οι καθηγητές θα μπορούν να προβλέψουν τις πιθανές δυσκολίες μπορεί να προκύψουν και να είναι πιο ανεκτικοί με τα λάθη των μαθητών. Βέβαια, αυτή η διδακτική αξιοποίηση πρέπει να γίνεται με προσοχή λαμβάνοντας υπόψη τη σημασία των διδακτικών παραγόντων. Για παράδειγμα, οι μαθηματικοί στο παρελθόν κατάφεραν να ξεπεράσουν τα εμπόδια που εμφανίστηκαν, ακολουθώντας εναλλακτικές προσεγγίσεις στην αντίληψη των αριθμών, δουλεύοντας μόνο στον θετικό ημιάξονα ή εφαρμόζοντας αλγοριθμικές διαδικασίες, άσχετα αν ταίριαζαν με την ερώτηση ή όχι. Τέτοιες συμπεριφορές προκύπτουν από τη συμβατική διδασκαλία, λόγω π.χ. της ανομοιογένειας των τάξεων, την ανάγκη προετοιμασίας για τις τελικές εξετάσεις και του χρονικού περιορισμού.

(γ) Κάποιοι μαθητές είναι σε θέση να προσαρμοστούν σε νέα άγνωστα προβλήματα, δίνοντας σωστές απαντήσεις ακόμη κι αν δεν γνωρίζουν τις κατάλληλες τεχνικές. Αυτό είναι ένα παράδειγμα του θετικού παραλληλισμού, όπου οι μαθητές λειτουργούν παρόμοια με τους δημιουργικούς μαθηματικούς του παρελθόντος που ξεπέρασαν το εκάστοτε εμπόδια.

Επιπλέον, είναι σημαντικό να γίνει αντιληπτό ότι κάποιοι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίσουν νέα προβλήματα πιθανώς με έναν ιδιόμορφο τρόπο που διαφέρει αρκετά από αυτά που έχουν διδαχθεί στην τάξη. Για παράδειγμα, σε αυτήν τη μελέτη μόνο δύο μαθητές απάντησαν σωστά σε όλες τις ερωτήσεις σύμφωνα με την επίσημη διδασκαλία. Ωστόσο, και πολλοί άλλοι μαθητές έδωσαν ουσιαστικά σωστές απαντήσεις, αγνοώντας το τι είχαν διδαχθεί. Μαθητές της G1 απάντησαν εξίσου σωστά στην Q1 με αυτούς της G2, παρόλο που δεν είχαν διδαχθεί τους απαραίτητους αλγόριθμους. Φαίνεται ότι αυτοί της G1 παρουσίασαν πιο έντονα έναν θετικό παραλληλισμό, πιθανότατα επειδή δεν είχαν διδαχθεί τις απαραίτητες «συνταγές» αντιμετώπισης συγκεκριμένων προβλημάτων, είχαν περισσότερη ελευθερία στη σκέψη και ήταν πιο δημιουργικοί.

Αυτή η ικανότητα κάποιων μαθητών πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη από τους καθηγητές, ώστε: (α) να είναι πιο ανεκτικοί σε αντισυμβατικές αλλά σωστές προσεγγίσεις των μαθητών που μπορεί να στερούνται αυστηρότητας, (β) να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εκφράζονται με τον δικό τους και πιθανά ιδιόμορφο τρόπο, για να προωθήσουν την ιδέα ότι τα Μαθηματικά είναι μια ενδιαφέρουσα ανθρώπινη δραστηριότητα.

Όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα, υπάρχει ένας πολύπλευρος παραλληλισμός μεταξύ της ιστορικής ανάπτυξης και της εκπαίδευσης των Μαθηματικών. Η παρούσα έρευνα βέβαια περιορίζεται σε ένα μικρό αριθμό μαθητών και σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Για αυτό απαιτείται μεγαλύτερη μελέτη και με άλλα παραδείγματα. Τέλος, παρά τις διαφορές που υπάρχουν, προτείνεται να αξιοποιηθούν οι ομοιότητες μεταξύ της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών και της μαθησιακής διαδικασίας, για να τροποποιηθεί η συμβατική διδασκαλία. Εδώ, η διάταξη των αριθμών παρουσιάστηκε μέσω μιας πορείας μεταξύ προβλημάτων που ήταν σημαντικά για την εμφάνιση της νέας μαθηματικής γνώσης και όχι μέσω της σύγχρονης διάταξης που μπορεί να φαίνεται κόντρα στη διαίσθηση και είναι η μορφή που υπάρχει στα σύγχρονα σχολικά βιβλία. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι η σύγχρονη προσέγγιση δε βοηθάει πολύ τους μαθητές. Αν είναι εφικτό να δοκιμαστούν στην τάξη πραγματικά προβλήματα όταν εμφανίζονται νέες έννοιες και παρακινηθούν οι μαθητές ώστε να αναπτύξουν τις δικές τους εναλλακτικές ιδέες, η διδασκαλία δε θα περιορίζεται στην παρουσίαση επίσημων δομών στην τελική τους μορφή και τα Μαθηματικά θα γίνουν μια δημιουργική δραστηριότητα.

## 3.4 Έρευνα Irvin και Norton: Μια πρακτική προσέγγιση στη διδασκαλία της συμβολικής Άλγεβρας

### 3.4.1 Εισαγωγή και υπόβαθρο

Πολλοί μαθητές στην Άλγεβρα δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις μεταβλητές και τις επίσημες συμβολικές πράξεις, κάτι που δυσχεραίνει τη μελέτη των Μαθηματικών. Σε αυτό το κείμενο παρουσιάζεται μια προσέγγιση των Jane Irvin και Stephen Norton του πανεπιστημίου Griffith της Αυστραλίας για τη διδασκαλία της Άλγεβρας σε τάξη Γ΄ Γυμνασίου. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι πολλές δυσκολίες των μαθητών σχετίζονται με την έλλειψη κατανόησης αριθμητικών εννοιών, μεταξύ των οποίων της ισοδυναμίας, των πράξεων με αρνητικούς ακεραίους, της επιμεριστικής ιδιότητας και των κλασμάτων. Όταν αυτές οι δυσκολίες αντιμετωπίζονται διαμέσου της διδασκαλίας της σύνδεσης μεταξύ αντικειμένων και συμβόλων, αντικειμένων και γλώσσας, γλώσσας και συμβόλων, οι μαθητές είχαν σημαντική βελτίωση στη γραφή, στην απλοποίηση εκφράσεων και επίλυσης εξισώσεων με μεταβλητές και στα δύο μέλη.

Η Irvin σε αυτή την εργασία επιχείρησε να μελετήσει την κατανόηση των μαθητών στην Άλγεβρα και συγκεκριμένα στην επίλυση εξισώσεων μεταβλητές και στα δύο μέλη. Είναι επικεφαλής του τμήματος Μαθηματικών σε σχολείο του Brisbane της Αυστραλίας. Παρατηρήθηκε ότι λίγοι μαθητές στο σχολείο επιλέγουν τα ενδιάμεσα ή προχωρημένα Μαθηματικά. Στόχος ήταν να αυξηθεί αυτός ο αριθμός και για αυτό δημιουργήθηκε η διδακτική παρέμβαση. Σε αυτήν τη μελέτη παρουσιάζονται τα εμπόδια και οι επιτυχίες στη μάθηση της Άλγεβρας, μέσω της λεκτικής και πρακτικής προσέγγισης της διδασκαλίας.

Πολλοί μαθητές έρχονται σε πρώτη επαφή με την Άλγεβρα έχοντας ήδη μια ελλιπή κατανόηση της αριθμητικής, με μέρος του προβλήματος να είναι η χρήση των αριθμομηχανών, προσθέτοντας ένα επιπλέον γνωστικό βάρος. Σύμφωνα με την Sfard (1994) η Άλγεβρα περιγράφεται ως «γενικευμένη αριθμητική», που αποτελείται από τη λειτουργική και τη δομική φάση. Η λειτουργική Άλγεβρα συνοψίζεται ως η σύνδεση με τις αριθμητικές πράξεις, όπως π.χ. η αναδρομική επίλυση απλών γραμμικών εξισώσεων και μπορεί να θεωρηθεί ως η αντίστροφη διαδικασία των αριθμητικών πράξεων. Η δομική Άλγεβρα είναι όπως η επίλυση μιας εξίσωσης με μεταβλητές και στα δύο μέλη, όπου οι απλές αναδρομικές αριθμητικές πράξεις δεν επαρκούν. Για την επίλυση απαιτείται να ληφθεί υπόψη η συνολική δομή της εξίσωσης. Η δυνατότητα των μαθητών να λύσουν τέτοιες εξισώσεις μπορεί να φανεί ως ένα ορόσημο μεταξύ της αριθμητικής και της αλγεβρικής σκέψης.

Οι προβληματισμοί της Irvin είναι κοινοί και σε άλλους στη μαθηματική κοινότητα. Αποδεικνύεται ότι η παραδοσιακή σχολική Άλγεβρα δεν είναι κατάλληλη για μαθητές με αδυναμίες και έλλειψη αριθμητικών δυνατοτήτων και αυτοί οι μαθητές συνήθως προτιμούν να αποκτούν τη γνώση μέσω λεκτικής αλληλεπίδρασης και πρακτικών δραστηριοτήτων. Ακόμη, οι δυσκολίες στην αρχική Άλγεβρα είναι πιθανό να οδηγήσουν σε αποφυγή περαιτέρω μελέτης των Μαθηματικών. Έτσι, η Άλγεβρα λειτουργεί ως φίλτρο για τη μελέτη πιο προχωρημένων

Μαθηματικών. Αντίστοιχα, η εστιασμένη μελέτη της Irvin περιγράφεται ως καθοριστική για την Άλγεβρα.

Μερικές προτάσεις για την αντιμετώπιση των δυσκολιών στην Άλγεβρα που έχουν προταθεί και συχνά συνδέονται μεταξύ τους περιλαμβάνουν τα εξής:

- Καθιστώντας άμεσα εγγενή την αλγεβρική σκέψη στην πρώιμη αριθμητική μάθηση.
- Με την άμεση διδασκαλία των λεπτών διαφορών και διαδικασιών της Άλγεβρας σε ένα αλγεβρικό και συμβολικό πλαίσιο, ειδικά σε μετασχηματιστικές δραστηριότητες.
- Με τη χρήση αναπαραστάσεων, συμπεριλαμβανομένης και της χρήσης της τεχνολογίας.

### 3.4.2 Μέθοδος

Ο συνολικός σχεδιασμός αφορούσε μια μελέτη με βάση την έρευνα της επανάληψης κύκλων του σχήματος: σχεδιασμός–αναπαράσταση–ανάλυση. Οι συγκεκριμένες ερωτήσεις που μελετήθηκαν σε κάθε επανάληψη προέκυψαν από ανάλυση πρόσφατων αποτυχιών σε προηγούμενες επαναλήψεις. Εδώ, παρουσιάζεται η τρίτη επανάληψη της Irvin στην παρέμβαση που έγινε το 2006, αν και κάθε επανάληψη ήταν ουσιαστικά πανομοιότυπη ως προς τη διδακτική προσέγγιση. Ακόμη, η ενεργητική συμμετοχή του ερευνητή Norton στη διαδικασία έδωσε στον σχεδιασμό της έρευνας ένα συλλογικό χαρακτήρα.

Οι συμμετέχοντες ήταν η καθηγήτρια, ο ερευνητής και δεκαοκτώ μαθητές, σε ένα μάθημα Άλγεβρας έξι εβδομάδων. Οι μαθητές επιλέχθηκαν από ένα σύνολο 180 μαθητών, οι οποίοι δοκιμάστηκαν στη γενική αριθμητική και συγκεκριμένα για να φανεί ποιοι χρησιμοποιούσαν πιο άνετα σύμβολα για να περιγράψουν μοτίβα. Επιλέχθηκαν αυτοί που βρίσκονταν στο κορυφαίο 1/3 των σωστών αποτελεσμάτων.

Όλα τα μαθήματα επιτηρούνταν και βιντεοσκοπήθηκαν, μαζί με τις συζητήσεις που έγιναν στην τάξη, τα παραδείγματα των μαθητών που μελετήθηκαν σε μικρές ομάδες και αυτά της καθηγήτριας που αποτέλεσαν τη βάση του εγχειρήματος. Επίσης, συλλέχθηκε δείγμα της δουλειάς των μαθητών, όπως τα φύλλα εργασίας και τα τεστ. Ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν τις μαθηματικές αποφάσεις που έπαιρναν καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας, ενώ αναλύθηκε η δουλειά τους για πιθανά μοτίβα λαθών. Τέλος, με βάση τις ερωτήσεις που έκαναν οι μαθητές στην καθηγήτρια, αλλά και από τις μεταξύ τους συζητήσεις, ήταν εφικτό να βγουν συμπεράσματα για τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν.

### 3.4.3 Αποτελέσματα και συζήτηση

Η Irvin διατύπωσε τις προθέσεις της ως εξής: «Οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίσουν τη μελέτη των Μαθηματικών με ακαδημαϊκό και αυστηρό τρόπο». Το μάθημα βασίστηκε σε ένα θεωρητικό πλαίσιο που τέθηκε από τους Booker, Bond, Sparrow και Swan (2004, σελ. 20): «Αν και ο ρόλος των αντικειμένων και των μοτίβων που αναπτύσσουν είναι θεμελιώδης, τα αντικείμενα από μόνα τους δε μεταφέρουν νόημα κυριολεκτικά ... η γλώσσα είναι αυτή που μεταδίδει ιδέες, όχι μόνο για την περιγραφή εννοιών αλλά βοηθάει και στο να διαμορφωθούν στο μυαλό του κάθε μαθητή».

Η επιλογή των πηγών της δραστηριότητας βασίστηκε ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές να κάνουν τη σύνδεση μεταξύ των αντικειμένων, της προφορικής γλώσσας αρχικά και μετά της συμβολικής γλώσσας. Οι βασικές πηγές ήταν το *A Concrete Approach to Algebra* (Quinlan, Low, Sawyer, White, & Llewellyn, 1987) και το *Access to Algebra Book 2* (Lowe, Johnston, Kissane, & Willis, 1993). Εκεί χρησιμοποιήθηκαν κούπες χωρίς κάποιο σημάδι με κρυφά σφαιρίδια, φάκελοι με κρυφά σφαιρίδια για να βοηθήσουν στην ανάπτυξη της έννοιας των μεταβλητών και εκτενής χρήση άλλων απτών αντικειμένων συμπεριλαμβανομένων κάποιων μοτίβων από σφαιρίδια ή σπιρτόξυλα. Οι πηγές έδωσαν έμφαση στη χρήση της γλώσσας και της λογικής για να συνδέσει μοτίβα που δημιουργούνται από αντικείμενα σε λεκτικές περιγραφές των μοτίβων, τη σύνοψη των μοτίβων σε μορφή πίνακα και συμβολικές αναπαραστάσεις. Η Irvin χρησιμοποίησε τα παραπάνω για να εξετάσει γραπτές, ισοδύναμες και απλοποιημένες εκφράσεις και ισοδύναμες εξισώσεις.

Οι εξισώσεις δημιουργήθηκαν και λύθηκαν χρησιμοποιώντας το μοντέλο της ισορροπίας, αρχικά με απτά αντικείμενα και μετά συνδέοντάς τα με παραδοσιακά σύμβολα. Οι δραστηριότητες από τον Lowe (et al. 1993) επιλέχτηκαν ώστε να δοθεί έμφαση στη σύνδεση μεταξύ αντικειμένων και συμβόλων. Έτσι, οι μαθητές είδαν το νόημα του συμβόλου του ίσον στο πλαίσιο μιας αλγεβρικής εξίσωσης και έμαθαν για τους μετασχηματισμούς και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Η τρίτη πηγή βασίστηκε στη συμβολική αναγνώριση και τις πράξεις αλγεβρικών όρων που αναφέρθηκαν παραπάνω, ενσωματωμένα σε αλγεβρικά παιχνίδια που ανέπτυξε η Irvin. Τα παιχνίδια αυτά κατασκευάστηκαν σύμφωνα με τις αρχές που περιγράφηκαν από τον Booker (2000) και κάποια ήταν επιτραπέζια, στα οποία έπρεπε να ταιριάξουν τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις απτών αντικειμένων με συμβολικές εκφράσεις. Άλλα ήταν παιχνίδια εννοιών στα οποία η τυχαιότητα μιας ερώτησης εισαγόταν με τη ρίψη ζαριού διαφόρων διατάξεων.

Για παράδειγμα σε ένα παιχνίδι απαιτούνταν να γραφεί μια αλγεβρική εξίσωση από ένα σενάριο που δόθηκε με λόγια και μετά να λυθεί η εξίσωση: «Ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με Δ (ρίχνεται ένα ζάρι με δέκα έδρες για να δώσει αυτό τον αριθμό), έπειτα το προστίθεται σε αυτό (ρίχνεται ένα δεύτερο ζάρι δέκα εδρών για να δώσει αυτό τον αριθμό) και η απάντηση είναι (ρίχνεται ένα δεύτερο ζάρι 36 εδρών για να δώσει αυτό τον αριθμό), ποιος είναι αυτός ο αριθμός;» Μια τέτοια εξίσωση είναι γραμμική με μια μεταβλητή στο ένα μέλος. Μπορεί να λυθεί με το μοντέλο ισορροπίας και συχνά οι λύσεις είναι σε μορφή κλασμάτων. Τα παιχνίδια μπορούν να παιχτούν από ομάδες δύο ή τριών μαθητών, που θα τους βοηθήσουν στην κατανόηση Μαθηματικών που έμαθαν σε προηγούμενες δραστηριότητες.

Τα μονόωρα μαθήματα της δραστηριότητας χωρίστηκαν σε τρία μέρη. Στο εισαγωγικό μέρος η Irvin χρησιμοποίησε τον πίνακα της τάξης και μια δραστηριότητα επιλεγμένη από τον Quinlan et al. (1987) ή τον Lowe et al. (2001), ως βάση για μια συζήτηση σε βασικές έννοιες. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης κρατούσε σημειώσεις στον πίνακα. Εδώ, δόθηκε έμφαση στη σύνδεση μεταξύ αντικειμένων και φυσικής γλώσσας, που επεκτάθηκε στις μικροδιαφορές της αλγεβρικής γλώσσας και των συμβόλων. Στο δεύτερο μέρος, οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες των δύο ή τριών σε δραστηριότητες από τους Quinlan et al. (1987) και Lowe et al. (1993) και τους δινόταν βοήθεια όταν το ζητούσαν. Κάποιες φορές η δραστηριότητα συνεχιζόταν μέχρι το τέλος του μαθήματος. Στο τρίτο μέρος οι μαθητές έπαιξαν τα αλγεβρικά παιχνίδια, για να εφαρμοστούν οι γνώσεις που απέκτησαν προηγουμένως.

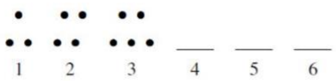
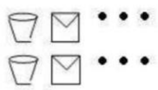
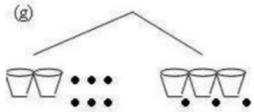
Τα αποτελέσματα του μαθήματος παρουσιάζονται σε δύο μέρη, στο πρώτο είναι τα είδη των λαθών των μαθητών και στο δεύτερο η επιτυχία ή μη των μαθητών σε ένα γραπτό τεστ και η ανάλυση των λαθών. Η ανάλυση μέσω της βιντεοσκόπησης ανέδειξε τις εξής κοινές δυσκολίες και λάθη:

1. Δυσκολίες σχετικά με τις πράξεις αρνητικών ακεραίων (π.χ. $4 - -3$, $-4 + -2$). Οι μαθητές δεν μπορούσαν να ολοκληρώσουν αυτές τις πράξεις. Επίσης, αντιμετώπισαν δυσκολίες με το πρόσημο της αφαίρεσης, π.χ. στο $2(4-5)$ αγνόησαν το μείον και το αντιμετώπισαν σαν πρόσθεση, παίρνοντας την απάντηση 18 και το $3(2x-4)$ αναπτύχθηκε ως $6x + 12$.

2. Δυσκολίες σχετικά με την επίλυση εξισώσεων της μορφής $3x + 3 = 15$ . Συγκεκριμένα, οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν το σύμβολο του ίσον ως σήμα ισοδυναμίας. Για παράδειγμα, αφαιρούσαν το 3 από την αριστερή μεριά αλλά όχι από τη δεξιά, καταλήγοντας ότι το $x$ είναι ίσο με 5. Όταν οι μαθητές αντιμετώπισαν πρώτη φορά προβλήματα με τέτοια δομή, πολλοί προσπάθησαν να τα λύσουν αναδρομικά καταλήγοντας ότι δεν ήταν εφικτό.
3. Δυσκολίες με αριθμητικά δεδομένα, όπου μαθητές δεν ήξεραν κανόνες πολλαπλασιασμού και έκαναν υπολογιστικά λάθη.
4. Δυσκολίες με τα κλάσματα, όπως λάθη στην επίλυση εξισώσεων της μορφής: $3y + 18 = 6y + 6$, όπου μαθητές απαντούσαν με: $y + 18 = 2y + 6$ δείχνοντας ότι γενίκευσαν λανθασμένα τη διαδικασία της διαγραφής.

Ένας από τους στόχους το προγράμματος ήταν να αντιμετωπίσει αυτές τις δυσκολίες στο πλαίσιο της διδασκαλίας της Άλγεβρας. Η Irvin και ο Norton επιχείρησαν να διδάξουν ξανά βασικές αριθμητικές έννοιες, να αναθεωρήσουν την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων με τη βοήθεια χάρτινων λωρίδων, πριν την συνδέσουν με τον πολλαπλασιασμό με τη μονάδα.

Στο τέλος 15 μαθητές ολοκλήρωσαν ένα γραπτό τεστ 25 ερωτήσεων. Μία από τις μαθήτριες που έχασε πολλά μαθήματα, είχε σταθερά λάθος αποτελέσματα. Παρατίθεται παρακάτω στον Πίνακα 8, ένα δείγμα των ερωτήσεων και ο αριθμός των μαθητών που απάντησαν σωστά. Όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν το μοτίβο συμπληρώνοντας τον πίνακα των διατεταγμένων ζευγών και το συμβόλισαν ως ισοδύναμο του $p + 2 = n$ . Ένας μαθητής δεν ολοκλήρωσε την εξίσωση. Επτά μαθητές μπόρεσαν να σχεδιάσουν σωστά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, παρόλο που αφιερώθηκε λίγος χρόνος στο σχεδιασμό παραστάσεων με μεταβλητές.

<table>
<tr><th>Concept</th><th>Typical question</th><th>Correct responses</th></tr>
<tr><td>Completing a pattern, table, and describing the pattern algebraically.</td><td><br><table><tr><td>P</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>20</td><td></td></tr><tr><td>N</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>102</td></tr></table></td><td>14/15<br>1 partial</td></tr>
<tr><td>Writing expressions and equations</td><td>(f)<br></td><td>14/15</td></tr>
<tr><td></td><td>(g)<br></td><td>13 /15<br>1 partial</td></tr>
<tr><td>Simplify expressions</td><td>7x – 2x +5y – 3y</td><td>14/15</td></tr>
<tr><td>Expand and simplify</td><td>3(3x – 2y)<br>b(x + 2y)</td><td>14/15<br>8/15</td></tr>
<tr><td>Solving equations with model</td><td>3y + 2 = y + 6</td><td>10/15, 2 partial answer.</td></tr>
<tr><td>Solving equations without a model</td><td>5x + 2 = 7x – 9</td><td>5/15 correct, 2 partial correct.</td></tr>
</table>

**Πίνακας 8: Σύνοψη των αποτελεσμάτων των 15 μαθητών**

Σχεδόν όλοι οι μαθητές μπόρεσαν να γράψουν τη συμβολική έκφραση όταν τους δόθηκε μια οπτική αναπαράσταση. Μόνο δύο μαθητές δεν μπόρεσαν να μετασχηματίσουν την εξίσωση με τις κούπες και τα σφαιρίδια σε αλγεβρική εξίσωση. Τα ευρήματα υποδεικνύουν ότι η κατανόηση των μαθητών για την έννοια της μεταβλητής εξελισσόταν, καθώς χρησιμοποίησαν σύμβολα για να αναπαραστήσουν μεταβλητές μέσα σε ένα άγνωστο πλαίσιο, καταφέρνοντας παράλληλα να κάνουν απλές αριθμητικές πράξεις με αυτά τα σύμβολα. Σχεδόν όλοι οι μαθητές ανέπτυξαν σωστά το $3(3x-2y)$, αλλά λιγότεροι από τους μισούς το έκαναν σωστά στο $b(x+2y)$. Αυτό υποδεικνύει ότι ίσως δεν καταλαβαίνουν τον πολλαπλασιασμό ξεχωριστά από την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Η Irvin πίστευε ότι ο τρόπος που δίδαξε την ανάπτυξη μέσω απτών αντικειμένων ώθησε τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν αρχικά την επαναλαμβανόμενη πρόσθεση. Ήλπιζε έπειτα να καθιερώσει ένα μοτίβο με το οποίο θα υπήρχε πλήρης κατανόηση για την επιμεριστική ιδιότητα κι όχι να εφαρμόζεται απλά μια επιφανειακή διαδικασία. Ωστόσο, οι μαθητές που δεν μπόρεσαν να αναπτύξουν το $b(x+2y)$, ανέπτυξαν το $3(3x-2y)$ με χρήση της επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης ως εξής:

| $3(2x-2y)=$ | $6x-6y$ |
|---|---|
| $\begin{array}{r} 2x-2y \\ +\,2x-2y \\ 2x-2y \\ \hline 6x-6y \end{array}$ | |

**Σχήμα 3: Ανάπτυξη του** $3(3x-2y)$

Όταν υπάρχει από μπροστά μια μεταβλητή όπως στο $b(x+2y)$, αυτή η πρόσθεση δεν εφαρμόζεται. Παρόλα αυτά, οι μαθητές με μια καλή κατανόηση στην επιμεριστική ιδιότητα, όπως π.χ. καταλαβαίνουν ότι το $14 \cdot 3$ είναι ίδιο με το $(10+4)$ πολλαπλασιασμένο με το 3, θα έπρεπε να μπορούν να κάνουν τη μετάβαση. Σχεδόν όλοι οι μαθητές έλυσαν μια αλγεβρική εξίσωση με αγνώστους και στα δύο μέλη χρησιμοποιώντας αντικείμενα (βλ. Πίνακας 8 – Solving equation with model) και το 1/3 των μαθητών έλυσε μια εξίσωση παρόμοιας δομής χωρίς τη χρήση αντικειμένων (βλ. Πίνακας 8 – Solving equation without model). Για τους τελευταίους μαθητές μπορεί να διατυπωθεί ότι ανέπτυξαν ένα αφηρημένο σχήμα για τις μεταβλητές, ενώ οι πρώτοι βρίσκονται σε ένα ενδιάμεσο στάδιο. Είναι θετικό πάντως ότι στο τέλος της μελέτης δε φάνηκε οι μαθητές να διατηρούν παρανοήσεις σχετικά με τον συμβολισμό και λανθασμένες αναλογίες με την κοινή γλώσσα.

### 3.4.4 Συμπεράσματα και προτάσεις

Οι δραστηριότητες στη διδακτική παρέμβαση δε συνδέθηκαν με προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Ήταν κυρίως καθαρή Άλγεβρα με εστίαση στην ανάπτυξη της σημασίας του συμβολισμού και στις συμβολικές πράξεις μέσω απτών αντικειμένων. Τα αποτελέσματα φανερώνουν ότι η ουσία στη μάθηση της Άλγεβρας μέσω της αριθμητικής, είναι να γίνεται σύνδεση μεταξύ αντικειμένων, μοτίβων και συμβολικών εννοιών διαμέσου της γλώσσας. Επίσης, τα ευρήματα αυτά μπορούν να ενθαρρύνουν τους καθηγητές να εφαρμόσουν πολλαπλές τεχνικές αναπαράστασης και να χρησιμοποιήσουν απτά αντικείμενα ως έναν εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας της Άλγεβρας στο Γυμνάσιο.

Είναι αξιοσημείωτο ότι πολλές δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές δεν συνδέονται τόσο με την Άλγεβρα, αλλά οφείλονται σε κακή κατανόηση των αριθμητικών δομών. Υπήρξαν λάθη στις πράξεις με ακεραίους (κυρίως τους αρνητικούς), δεν έγινε κατανοητό το νόημα του συμβόλου του ίσον και της επιμεριστικής ιδιότητας, διαγράφηκαν λάθος ποσότητες σε κλάσματα, τα οποία προέρχονται από παρανοήσεις στην αριθμητική και στην αδυναμία να μεταφερθούν από αριθμητικό σε αλγεβρικό πλαίσιο.

Στο πλαίσιο αυτής της μικρής τάξης οι περισσότερες παρανοήσεις συνήθως λύνονταν με την παρέμβαση της καθηγήτριας και του ερευνητή. Γίνεται εύκολα κατανοητό ότι σε μεγαλύτερες και ετερογενείς τάξεις, η περιορισμένη κατανόηση των αριθμητικών δομών και η σύνδεσή τους με την Άλγεβρα μπορεί εύκολα να οδηγήσει σε σημαντικές αδυναμίες και έλλειψη αυτοπεποίθησης στην Άλγεβρα. Για αυτό, η Irvin και ο Norton συμφωνούν ότι οι βασικές έννοιες της Άλγεβρας πρέπει να διδάσκονται από τα πρώτα σχολικά έτη. Έτσι, οι μαθητές στα πρώτα στάδια της επίσημης Άλγεβρας θα είναι σε θέση να μεταφερθούν επιτυχημένα από τις αριθμητικές δομές στις αλγεβρικές.

## 3.5 Έρευνα Irvin και Norton: Αναπτύσσοντας θετική στάση απέναντι στην Άλγεβρα

### 3.5.1 Εισαγωγή

Σε συνέχεια της προηγούμενης έρευνας οι Jane Irvin και Stephen Norton επιχείρησαν να διδάξουν βασικές αλγεβρικές έννοιες, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν θετική στάση για την ικανότητά τους να μαθαίνουν Άλγεβρα με έναν αυστηρό και συμβολικό τρόπο. Η παρέμβαση έγινε στο ίδιο σχολικό περιβάλλον με την προηγούμενη, με ίδιο τρόπο επιλογής 18 μαθητών, με το ίδιο χρονικό πλαίσιο και μεθοδολογία. Χρησιμοποιήθηκαν σπιρτόξυλα για να εισαχθεί η έννοια των μεταβλητών και κούπες με σφαιρίδια και φακέλους για να ερευνηθούν οι εκφράσεις που θα οδηγούσαν σε ισοδύναμες εξισώσεις. Δημιουργήθηκαν ξανά αλγεβρικά παιχνίδια για να εξασκηθεί η συμβολική αναγνώριση και ο χειρισμός των αλγεβρικών όρων. Επίσης, στόχευαν να ενθαρρύνουν τους μαθητές να πάρουν μέρος σε πιο προχωρημένα μαθήματα Μαθηματικών στα επόμενα σχολικά τους χρόνια. Αποδείχθηκε στη μελέτη αυτή ότι οι μαθητές εκτίμησαν τη διδακτική παρέμβαση πολύ περισσότερο σε σχέση με τα κοινά σχολικά μαθήματα των Μαθηματικών.

Η στάση των μαθητών απέναντι στην Άλγεβρα παίζει μεγάλο ρόλο, καθώς οι δυσκολίες στα πρώτα στάδια μπορούν να τους οδηγήσουν να αποφεύγουν τη μελέτη των Μαθηματικών στο μέλλον (MacGregor, 2004). Εν συντομία, οι τρεις βασικοί λόγοι που οι περισσότεροι μαθητές δυσκολεύονται στα Μαθηματικά περιγράφονται στις εξής αντιλήψεις: ότι η Άλγεβρα δε θεωρείται ενδιαφέρουσα, ότι φαίνεται να βασίζεται σε συμβολικές πράξεις με περιορισμένο νόημα και λίγη σχέση με την καθημερινή ζωή και ότι εκλαμβάνεται ως δύσκολη.

Οι καθηγητές έχουν κεντρικό ρόλο σε κάθε εκπαιδευτική μεταρρύθμιση. Για αυτό είναι σημαντικό να αναλυθούν όλες οι πλευρές των διδακτικών μεθόδων που εφαρμόζουν στην τάξη, καθώς και η διδακτέα ύλη. Έτσι, οι δύο στόχοι της έρευνας ήταν: να περιγραφεί αρχικά η διδακτική παρέμβαση που σχεδιάστηκε για να εμβαθύνουν οι μαθητές στην πρακτική μάθηση μέσω απτών αντικειμένων και προσεκτική χρήση της γλώσσας και επιπλέον να περιγραφούν οι αντιλήψεις των μαθητών για τη διδακτική παρέμβαση, δηλαδή για το αν κατάφεραν να κατανοήσουν βαθύτερα τις μαθηματικές ιδέες και αν το διασκέδασαν.

### 3.5.2 Συλλογή δεδομένων και αποτελέσματα

Τα 18 μονόωρα μαθήματα που έγιναν καταγράφηκαν και σε βίντεο. Στο τέλος της παρέμβασης οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα ερωτηματολόγιο της μορφής Likert, που αποτελούταν από 40 ερωτήσεις που ξεκινούσαν με τη φράση: *Σε σχέση με τον τρόπο συνήθως μελετώ τα Μαθηματικά* ... και είχαν τα εξής 8 βασικά χαρακτηριστικά:

1. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την κατανόηση για τη μαθηματική τους σκέψη, π.χ. ... *οι δραστηριότητες στην τάξη με βοήθησαν να σκεφτώ βαθύτερα για τις μαθηματικές ιδέες*.
2. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το πόσο διασκεδαστική και ενδιαφέρουσα φαίνεται η μάθηση της Άλγεβρας, π.χ. ... *η μάθηση σε αυτή την ενότητα ήταν πιο διασκεδαστική*.
3. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την αυτοπεποίθησή τους να αναπτύσσουν την μαθηματική κατανόηση που βασίζεται σε μαθηματικές διαδικασίες, π.χ. ... *η μάθηση σε αυτή την ενότητα με ενθάρρυνε να πιστεύω ότι μπορώ να κατανοήσω τα Μαθηματικά καλύτερα*.
4. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη βοήθεια που παρέχεται από τον καθηγητή, π.χ. ... *ο καθηγητής στην τάξη με βοηθάει περισσότερο*.
5. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το πόσο σκληρά δούλεψαν στην τάξη, π.χ. ... *δούλεψα περισσότερο σε αυτήν την ενότητα*.
6. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με το πόσο δύσκολες ήταν οι δραστηριότητες, π.χ. ... *σε αυτήν την ενότητα δυσκολεύτηκα να καταλάβω το πώς λύνονται τα προβλήματα*.
7. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη συνεργατική μάθηση, π.χ. ... *εγώ και οι συμμαθητές μου βοηθούσαμε ο ένας τον άλλον περισσότερο*.
8. Για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη φύση των Μαθηματικών, π.χ. ... *πριν θεωρούσα ότι τα Μαθηματικά αφορούσαν κυρίως πράξεις και σύμβολα, αυτή η ενότητα με βοήθησε να δω ότι αφορούν τις ιδέες*.

Έπειτα, κάθε μαθητής ρωτήθηκε για τις απαντήσεις του στο ερωτηματολόγιο, ώστε να αυξηθεί η αξιοπιστία της έρευνας και να συγκριθούν με τις απαντήσεις για τις αντιλήψεις τους σχετικά με την κοινή διδασκαλία. Τέλος, τους ζητήθηκε να σχεδιάσουν δύο εικόνες για να αναπαραστήσουν το πώς αξιολόγησαν τη διδακτική παρέμβαση, σε σχέση με τα κοινά μαθήματα που έχουν κάνει στην Άλγεβρα. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης των απαντήσεων παρουσιάζονται σε τρία μέρη. Στο πρώτο περιγράφονται οι απαντήσεις των μαθητών στο ερωτηματολόγιο, στο δεύτερο αναλύονται οι απαντήσεις τους στη συνέντευξη και στο τρίτο αναλύθηκαν τα σχέδια των μαθητών. Τα αποτελέσματα της έρευνας συνοψίζονται παρακάτω στον Πίνακα 9.

Οι απαντήσεις δείχνουν ότι οι μαθητές συμφωνούν απόλυτα (5) ή συμφωνούν (4) με κάθε από τα παραπάνω 8 χαρακτηριστικά. Οι υψηλές μέσες τιμές υποδεικνύουν ότι όλοι οι μαθητές στη διδακτική παρέμβαση αντιλήφθηκαν βαθύτερα τις μαθηματικές ιδέες, οι δραστηριότητες φάνηκαν πιο ενδιαφέρουσες, ανέπτυξαν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση για την ικανότητά τους να κατανοούν τα Μαθηματικά, θεώρησαν ότι ο καθηγητής είχε σημαντικότερο ρόλο στη βοήθειά τους, δούλεψαν πιο σκληρά και σε ομαδικό πλαίσιο, ενώ τέλος άλλαξε η αντίληψή τους ότι τα Μαθηματικά δεν έχουν να κάνουν μόνο με υπολογισμούς και συμβολισμούς, αλλά με την επίλυση προβλημάτων και με μαθηματικές ιδέες.

| Μαθησιακό χαρακτηριστικό | Μέσος όρος των 18 μαθητών | Τυπική απόκλιση |
|---|---|---|
| 1. Βάθος σκέψης | 4.48 | 0.44 |
| 2. Ενδιαφέρον | 4.48 | 0.63 |
| 3. Αυτοπεποίθηση κατανόησης | 4.57 | 0.43 |
| 4. Βοήθεια του καθηγητή | 4.62 | 0.53 |
| 5. Σκληρή δουλειά | 4.57 | 0.46 |
| 6. Δυσκολία εργασίας | 4.22 | 0.47 |
| 7. Συλλογική μάθηση | 4.39 | 0.37 |
| 8. Φύση των Μαθηματικών | 4.22 | 0.54 |

**Πίνακας 9: Σύνοψη των απαντήσεων των μαθητών στο ερωτηματολόγιο**

Τα δεδομένα των συνεντεύξεων έδειξαν τις αντιθέσεις σε σχέση με τη διδακτική παρέμβαση. Με την κοινή διδασκαλία όλοι οι μαθητές δούλευαν πολύ λιγότερο, οι δραστηριότητες στην τάξη φαίνονταν βαρετές και δύσκολες στην κατανόηση, ενώ δεν λάμβαναν πολλές φορές βοήθεια από τον καθηγητή. Οι απαντήσεις των μαθητών για το μαθησιακό περιβάλλον χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που σχετίζονται με τον τρόπο διδασκαλίας του καθηγητή και τη συλλογική μάθηση μεταξύ των μαθητών και αυτές που αφορούν τη χρήση απτών αντικειμένων και παιχνιδιών. Αποδείχθηκε και μέσω των καταγραφών βίντεο ότι όντως η συνεργατική μάθηση αυξανόταν όσο περνούσε ο χρόνος και οι μαθητές εξοικειώθηκαν με τον τρόπο που τους βοηθούσε η καθηγήτρια.

Όταν ρωτήθηκαν για το πόσο τους βοήθησαν τα απτά αντικείμενα στην κατανόηση της Άλγεβρας οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν ως εξής:

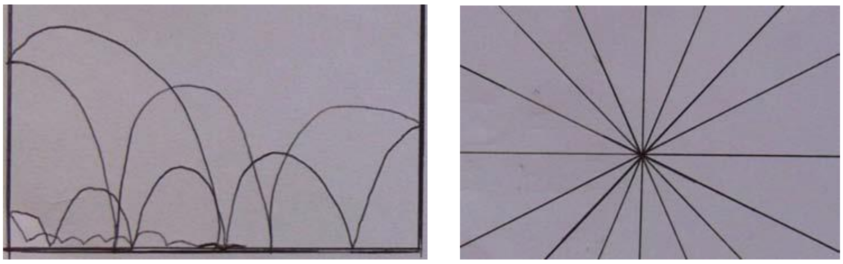
«Σου δείχνει τι συμβαίνει πραγματικά, ότι δεν είναι όλα στο μυαλό σου. Οι κούπες και τα σφαιρίδια μας βοήθησαν να καταλάβουμε το πότε να γράψουμε τα $x$ και $y$».

«Οι δραστηριότητες σε αυτήν την ενότητα ήταν πολύ πιο δύσκολες από αυτές του σχολικού βιβλίου και σε έκαναν να σκεφτείς, κάτι που ήταν διασκεδαστικό».

«Με το σχολικό βιβλίο έπρεπε να δουλέψω σκληρότερα για να βρω τις πληροφορίες. Με τις κούπες και τα σφαιρίδια είναι πιο εύκολο να καταλάβω».

Το παρακάτω σχόλιο ενός μαθητή συνοψίζει την αξιολόγηση της τάξης για τα αλγεβρικά παιχνίδια: «Κατάλαβα καλύτερα το μάθημα με τα παιχνίδια. Σου δείχνει το πώς να αξιοποιήσεις τις γνώσεις. Πρέπει να δουλέψεις πιο σκληρά για να βρεις την λύση, παρά να κάνεις απλά προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς. Πρέπει να βρεις την εξίσωση με τις κούπες και τα σφαιρίδια και κάνοντας ένα διάγραμμα».

Τα σχόλια των μαθητών επιβεβαιώνονται από την επιτήρηση των τάξεων, όπου πράγματι αφιέρωσαν αρκετό χρόνο δουλεύοντας με τα παιχνίδια και πολλές συζητήσεις τους περιστρέφονταν γύρω από τις βάσεις των Μαθηματικών. Αναφορικά με τα σχέδια των μαθητών για την διδακτική παρέμβαση προέκυψαν κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Ένα τέτοιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα παρατίθεται παρακάτω (Σχήμα 4), όπου συγκρίνονται η κλασική διδασκαλία και αυτή της παρέμβασης. Ο μαθητής εδώ ανέφερε ότι ξεκίνησε το κοινό μάθημα των Μαθηματικών με ενθουσιασμό, ο οποίος όμως εξασθένησε με τον καιρό: «ήταν σαν την πορεία μιας μπάλας που αναπηδούσε. Προσπαθούσα να δουλέψω, αλλά ήταν περίπλοκο και για αυτό έχασα το κίνητρό μου. Απλά δεν έκανα τίποτα». Η εικόνα ήταν τελείως αντίθετη στο μάθημα της παρέμβασης: «οι γραμμές εδώ είναι ευθείες, ξεκάθαρες και εύκολα κατανοητές, όπως το μάθημα».



**Σχήμα 4: Η σύγκριση της κοινής διδασκαλίας των Μαθηματικών (αριστερά) και της διδακτικής παρέμβασης (δεξιά)**

### 3.5.3 Συζήτηση και συμπεράσματα

Όλα τα δεδομένα της έρευνας δείχνουν ότι το μάθημα της Άλγεβρας οδήγησε στην πιο ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην τάξη, σε ένα παραγωγικό διάλογο μεταξύ μαθητών καθηγήτριας και σε σημαντική συνεργατική μάθηση μεταξύ των μαθητών, μέσω των δραστηριοτήτων και των παιχνιδιών. Η παρέμβαση βασίστηκε στη χρήση αντικειμένων για την κατασκευή εννοιών και έδωσε έμφαση στη σχέση μεταξύ απτών, οπτικών αναπαραστάσεων και αλγεβρικής γλώσσας. Επίσης, οι μαθητές δήλωσαν ότι αυξήθηκε η αυτοπεποίθησή τους στην ικανότητα να κατανοούν την Άλγεβρα, κάτι που είναι ενθαρρυντικό γιατί είναι πιο πιθανό να μελετήσουν πιο προχωρημένα Μαθηματικά στο μέλλον.

Ακόμη, φάνηκε ότι η κοινή διδασκαλία βασισμένη στον καθηγητή στον πίνακα και την εξάρτηση από τα σχολικά βιβλία και τις ασκήσεις που εστιάζουν σε επαναλαμβανόμενες συμβολικές πράξεις, οδήγησε στην αντίληψη ότι τα Μαθηματικά είναι βαρετά και δύσκολα και δεν προάγει τη βαθύτερη σκέψη για τις μαθηματικές ιδέες. Οι ερευνητές βέβαια γνώριζαν ότι η διδακτική παρέμβαση έγινε σε τάξη με λιγότερους μαθητές σε σχέση με μια μέση τάξη, κάτι που μπορεί να έχει επηρεάσει τις δυναμικές στη διδασκαλία, αφού έλειπαν για παράδειγμα μαθητές που προκαλούσαν προβλήματα στην τάξη με τη συμπεριφορά τους. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές θεώρησαν ότι η επιλογή των δραστηριοτήτων στην τάξη θα μπορούσε να βοηθήσει σχεδόν όλους τους μαθητές σε μια κοινή τάξη, κάτι που μπορεί να ενθαρρύνει κι άλλους ερευνητές να επεκτείνουν τα διδακτικά μοντέλα σε μικτές τάξεις. Η κοινή διδασκαλία στις μικτές τάξεις είναι πιθανό να καταδικάζει τους μαθητές σε αποτυχία στα Μαθηματικά. Οι μαθητές σε αυτή την έρευνα εξήγησαν ξεκάθαρα τι εκτίμησαν στη διδακτική παρέμβαση. Αρχικά, ήταν εμφανές ότι οι δραστηριότητες βοήθησαν να δημιουργηθεί ένα περιβάλλον στο οποίο ο καθηγητής μπορούσε να βοηθήσει τους μαθητές. Επιπλέον, τόνισαν τη σημασία της χρήσης φυσικών αντικειμένων συνδέοντας τις εικόνες, τις υλικές και συμβολικές αναπαραστάσεις.

Οι καθηγητές παίζουν βασικό ρόλο στις διδακτικές μεταρρυθμίσεις και αυτή η έρευνα υποδεικνύει ότι υπάρχουν καλές διδακτικές μέθοδοι πάνω στις οποίες μπορούν να βασιστούν συζητήσεις που θα μπορέσουν να βελτιώσουν τις αντιλήψεις των μαθητών για την Άλγεβρα. Επίσης, τα δεδομένα δείχνουν ότι οι μαθητές θεωρούν πλέον ότι η εκμάθηση των Μαθηματικών μπορεί να γίνει διασκεδαστική. Τέλος, αυτό το συμπέρασμα τονίζει τη σημασία της φύσης της διδακτικής μεθόδου που εφαρμόστηκε από την Irvin σε αυτήν τη διδακτική παρέμβαση για την επαγγελματική εξέλιξη των καθηγητών που είτε ξεκινούν τώρα τη διδασκαλία είτε είναι ήδη έμπειροι. Συγκεκριμένα, η χρήση απτών αντικειμένων, παιχνιδιών και σαφής γλώσσας θα πρέπει να υποστηρίζει τη διδασκαλία στο Γυμνάσιο, ώστε να προαχθούν οι θετικές αντιλήψεις των μαθητών για την Άλγεβρα.

# Κεφάλαιο 4 – Έρευνες που αναπτύχθηκαν μέσω της αξιοποίησης αυθεντικών ιστορικών κειμένων

Σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι έρευνες του δεύτερου μέρους της εργασίας, που αφορά τις έρευνες που αναπτύχθηκαν γύρω από την αξιοποίηση αυθεντικών ιστορικών κειμένων σε τάξεις Γυμνασίου και Λυκείου. Αρχικά, συγκρίθηκαν τα αυθεντικά κείμενα των Διόφαντου, Viete και Euler στην τάξη φανερώνοντας τα διαφορετικά στάδια εξέλιξης της Άλγεβρας. Ακόμη, αναλύθηκε η έρευνα στην οποία αξιοποιήθηκαν ιστορικά κείμενα από την εποχή της Αναγέννησης και της αβακιστικής Άλγεβρας. Έπειτα, παρουσιάστηκε και συγκρίθηκε η γενετική και ερμηνευτική προσέγγιση με τη συμβατική διδασκαλία. Επιπλέον, μελετήθηκε η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία μέσω ιστορικών κειμένων. Αξιοποιήθηκαν αυθεντικές πηγές του Euler και δημιουργήθηκαν αλγεβρικά παιχνίδια με βάση αυτές. Τέλος, μελετήθηκε η εφαρμογή βίντεο στη διδασκαλία και η ιστορική εξέλιξη των λογαρίθμων, παράλληλα με τη χρήση του Geogebra. Παρατίθεται ένας συνοπτικός πίνακας με τα ονόματα των συγγραφέων και τις έρευνες που ακολουθούν:

| Συγγραφείς | Θέμα έρευνας | Τάξεις παρέμβασης |
|---|---|---|
| Θωμαΐδης, Τζανάκης | Αυθεντικά κείμενα των Διόφαντου, Viete και Euler | Γυμνάσιο |
| Dematte | Αυθεντικά προβλήματα της Αναγέννησης | Γυμνάσιο |
| Katz, Michalowicz | Αυθεντικά προβλήματα της αβακιστικής Άλγεβρας | Γυμνάσιο |
| Glaubitz | Γενετική και ερμηνευτική προσέγγιση διδασκαλίας | Γ΄ Γυμνασίου |
| Glaubitz | Γενετική και ερμηνευτική προσέγγιση σε σύγκριση με τη συμβατική διδασκαλία | Γ΄ Γυμνασίου |
| Vallhonesta, Esteve, Casanova, Puig-Pla, Roca-Rosella | Εισαγωγή της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού μέσω ιστορικών μεθόδων και η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία | Γυμνάσιο |
| Dematte | Αυθεντικά προβλήματα του $15^{ου}$ και $16^{ου}$ αιώνα | Γ΄ Λυκείου |
| Vicentini | Αυθεντικά κείμενα του Euler | Λύκειο |
| Dematte | Αυθεντικά κείμενα των Ghaligai και Bombelli | Γυμνάσιο |
| Yan-jun, Ping | Χρήση βίντεο για την αξιοποίηση αρχαίων κινέζικων κειμένων | Γυμνάσιο |
| Λάππα | Αξιοποίηση της ιστορίας στη διδασκαλία των λογαρίθμων | Β΄ Λυκείου |
| Vallhonesta, Esteve | Αυθεντικά προβλήματα του $16^{ου}$ αιώνα | Β΄ Λυκείου |

**Πίνακας 10: Σύνοψη των ερευνών**

## 4.1 Έρευνα Θωμαΐδη και Τζανάκη: Αυθεντικά κείμενα στην τάξη

Σε αυτό το πρόγραμμα που διεξήχθη από τους Γιάννη Θωμαΐδη και Κωνσταντίνο Τζανάκη στο Πειραματικό Σχολείο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας έγινε μια έρευνα πάνω σε ένα τρίωρο εργαστήριο, που βασίστηκε σε ιστορικό υλικό που εφαρμόστηκε στη διδασκαλία της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας. Το πρώτο μέρος του εργαστηρίου αφορούσε τη Γεωμετρία και το δεύτερο, στο οποίο εστιάζουμε, αφορούσε το πλάνο για τη μελλοντική εργασία με 15χρονους μαθητές του ελληνικού Γυμνασίου, διαβάζοντας αυθεντικά κείμενα που φανερώνουν τα διαφορετικά επίπεδα γενικότητας στην Άλγεβρα. Δόθηκαν στους μαθητές φύλλα εργασιών με αυθεντικά κείμενα των Viete και Euler και συμμετείχαν σε μικρές ομάδες συζήτησης, καθοδηγούμενοι από τους καθηγητές.

### 4.1.1 Κάποια επιχειρήματα για τη χρήση αυθεντικών κειμένων στην τάξη των Μαθηματικών

Η εισαγωγή αυθεντικών κειμένων στην τάξη για τη βελτίωση της μάθησης των Μαθηματικών και της άποψής τους για τα αυτά είναι μια αρκετά παλιά μέθοδος, που στηρίζεται από πολλούς μέχρι και σήμερα. Τα αυθεντικά κείμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν: α) στην τάξη μέσω αποσπασμάτων και εργασιών βασιζόμενα σε αυτά και β) μόνο από τον καθηγητή, για να εμβαθύνει την κατανόησή του για ένα θέμα και να βελτιώσει την αντίληψή του στα μαθηματικά αποτελέσματα και δραστηριότητες. Έτσι, οι καθηγητές και οι μαθητές θα μπορούν:

- να δουν τα Μαθηματικά ως μια νοητική δραστηριότητα, παρά ως μια σειρά γνώσεων ή τεχνικών
- να τοποθετήσουν τα Μαθηματικά σε ένα επιστημονικό, τεχνολογικό, φιλοσοφικό και πολιτισμικό πλαίσιο μιας συγκεκριμένης εποχής στην ιστορία των ιδεών και των κοινωνιών
- να συμμετάσχουν σε δραστηριότητες που έχουν ως στόχο την κατανόηση κι όχι τα τελικά αποτελέσματα
- να εκτιμήσουν τον ρόλο και τη σημασία των διαφορετικών γλωσσών που εμφανίζονται σε αυτές τις πηγές, των σύγχρονων Μαθηματικών και της καθημερινής ζωής
- να κατανοήσουν το τι θεωρείται «οικείο», που γίνεται «άγνωστο».

Η εισαγωγή αυθεντικών κειμένων σε διάφορα επίπεδα της μαθηματικής εκπαίδευσης έχει εφαρμοστεί με πολλούς τρόπους. Πρωτοπόρα εργασία αποτέλεσε του Arcavi (1986), που ανέπτυξε εκπαιδευτικό υλικό βασισμένο σε ιστορικά κείμενα στη μορφή φύλλων εργασιών και τα εφάρμοσε στην εκπαίδευση των καθηγητών. Άλλη μια προσπάθεια έγινε από τον Harper (1981, 1987), που χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα ιστορικής ανάλυσης και προβλημάτων ως τη βάση για μια εμπειρική έρευνα με μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Εδώ, εστιάζουμε στην εφαρμογή αυτών των ιδεών στην περίπτωση του σχεδιασμού της μελλοντικής εργασίας με 15χρονους μαθητές ελληνικού σχολείου, αποκαλύπτοντας διαφορετικά επίπεδα γενικότητας στην Άλγεβρα.

### 4.1.2 Αυθεντικά κείμενα στη διδασκαλία της Άλγεβρας: διαβάζοντας πώς ο Διόφαντος, ο Viete και ο Euler έλυσαν το ίδιο πρόβλημα

Συχνά, μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που διδάσκονται βασικές έννοιες της Άλγεβρας (δυνάμεις, εξισώσεις, συναρτήσεις, γραμμικά συστήματα κ.λπ.) αντιμετωπίζουν δυσκολίες στη χρήση αλγεβρικών τεχνικών επίλυσης προβλημάτων και έκφρασης γενικών αποτελεσμάτων σε αφηρημένη μορφή. Η εργασία δημιουργήθηκε με αφορμή την εργασία του Harper (1981, 1987) που παρατίθεται συχνά.

Ο Harper χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα μιας ιστορικής ανάλυσης ως τη βάση για μια εμπειρική έρευνα, στην οποία εφαρμόστηκαν μέθοδοι επίλυσης επιπέδου δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για το πρόβλημα: «Αν δοθεί το άθροισμα και η διαφορά δύο αριθμών, να δειχθεί ότι πάντα μπορούν να βρεθούν ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί. Η απάντηση να είναι όσο πιο γενική γίνεται». Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τον Διόφαντο (περί το 250 μ.Χ.) στο βιβλίο του *Αριθμητικά*, από τον Viete (1540-1603) στο *Zeteticorum Libri Quinque* και από τον Euler στο *Vollständige Anleitung zur Algebra*, με διαφορετικούς τρόπους αναδεικνύοντας τα διαφορετικά στάδια της εξέλιξης της Άλγεβρας.

Η έρευνα του Harper υποδεικνύει ότι παρά τη διδασκαλία της Άλγεβρας, πολλοί μαθητές χρησιμοποιούν αριθμούς για να λύσουν ένα πρόβλημα διατυπωμένο με γενικούς όρους ή αντιμετωπίζουν μεγάλη δυσκολία να χειριστούν τις μεταβλητές που είναι απαραίτητες για να δοθεί μια γενική αλγεβρική λύση. Τα προβλήματα αυτά σχετίζονται με τα θεμελιώδη θέματα της γνωσιακής ανάπτυξης και κατανόησης. Η αντιμετώπιση των προβλημάτων είναι ένα περίπλοκο διδακτικό στάδιο, που απαιτεί ένα συνδυασμό διαφορετικών προσεγγίσεων και αποκαλύπτει τον ρόλο κλειδί του καθηγητή.

Η ιστορική ανάλυση και η ενσωμάτωση ιστορικών στοιχείων στην ανάπτυξη της Άλγεβρας στη διδασκαλία αποτελεί ένα από τα εργαλεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Τα ιστορικά κείμενα και τα φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές, μελετήθηκαν στην τάξη υπό την εποπτεία των καθηγητών των Μαθηματικών και ζητήθηκαν να απαντήσουν σε κάποιες σχετικές ερωτήσεις. Ο στόχος είναι: α) να ενσωματωθούν αυθεντικά κείμενα στη διδασκαλία της Άλγεβρας σε 15χρονους μαθητές, β) να ακολουθηθεί η ανάπτυξη των βασικών αλγεβρικών εννοιών και τα μέσα αναπαράστασής τους, γ) να αναπτυχθούν μεταγνωστικές ικανότητες που αφορούν τη φύση των βασικών αλγεβρικών εννοιών και διαδικασιών που ακολουθούνται στην επίλυση προβλημάτων.

Το πρόβλημα εμφανίζεται ως εξής:

Διόφαντος: Να διαιρεθεί ένας δοθέντας αριθμός σε δύο (αριθμούς), έχοντας μια δεδομένη διαφορά.

Viete: Δεδομένης της διαφοράς μεταξύ δύο ριζών και το άθροισμά τους, να βρεθούν οι ρίζες.

Euler: Απαιτείται να διαιρεθεί το $\alpha$ σε δύο μέρη, έτσι ώστε το μεγαλύτερο να υπερβεί το μικρότερο κατά $b$ μονάδες,

ή Απαιτείται να βρεθούν δύο αριθμοί, των οποίων το άθροισμα είναι $\alpha$ και η διαφορά $b$.

Το περιεχόμενο και η δομή των φύλλων εργασίας είναι τα εξής:

2.1 Διόφαντος

1. Πληροφορίες για τον Διόφαντο.

2. Βασικά στοιχεία για τη μέθοδο του Διόφαντου, συγκεκριμένα για την ορολογία του, η έννοια του «αγνώστου» και αλγεβρικός συμβολισμός, με παραδείγματα για να εξοικειωθούν οι μαθητές.

3. Αποσπάσματα από το Αριθμητικά του Διόφαντου:

α) Εισαγωγή: σχόλια για θέματα διδασκαλίας και μάθησης.

β) Εισαγωγή: διδακτικές οδηγίες σε κάποιους βασικούς κανόνες επίλυσης εξισώσεων.

γ) Βιβλίο Ι: Πρόβλημα Ι.

4. Ερωτήσεις για αυτά τα αποσπάσματα για τους μαθητές να δουλέψουν στην τάξη και στο σπίτι, π.χ. για:

α) Πώς εκφράζει ο Διόφαντος τη δυσκολία του θέματος που σκοπεύει να παρουσιάσει;

β) Τι μαθηματικές διαδικασίες περιγράφει ο Διόφαντος στο παραπάνω απόσπασμα;

γ) Αν λυθεί το πρόβλημα σήμερα, τι θα γράφατε διαφορετικά;

2.2 Viete

1. Πληροφορίες για τον Viete και τα βιβλία του.

2. Βασικά στοιχεία της αλγεβρικής μεθόδου του Viete («η τέχνη της ανάλυσης»), που περιέχει τρία στάδια: zetetics, δηλαδή αναζήτηση, poristics, δηλαδή παροχή και exegetics, δηλαδή εξήγηση. Επίσης, για τον συμβολισμό του που βασίστηκε στη συστηματική χρήση των γραμμάτων για την αναπαράσταση του αγνώστου και των δεδομένων του κάθε προβλήματος.

3. Αποσπάσματα από το έργο του Viete:

α) *In Artem Analyticem Isagoge*, Κεφάλαιο ΙΙ: Στους Θεμελιώδεις Κανόνες των Εξισώσεων και Αναλογιών.

β) In Artem Analyticem Isagoge, Κεφάλαιο V: Στους Κανόνες των Zetetics. Κεφάλαιο VIII: Στην ορολογία των Εξισώσεων και ένας Επίλογος στην Τέχνη.

γ) *Zeteticorum Libri Quinque*, Πρώτο Βιβλίο: Zetetic I.

4. Ερωτήσεις για τους μαθητές πάνω σε αυτά τα αποσπάσματα, για να τα δουλέψουν στην τάξη και στο σπίτι, π.χ.:

α) Χρησιμοποιώντας σύγχρονο συμβολισμό, να εξηγήσετε τους κανόνες των εξισώσεων και των αναλογιών που αναφέρονται από τον Viete στο προηγούμενο απόσπασμα από το Κεφάλαιο ΙΙ.

β) Δίνοντας παραδείγματα, να εξηγήσετε τη σημασία των κανόνων που λέγονται από τον Viete «αντίθεσις», «υποβιβασμός» και «παραβολισμός».

γ) Να συγκρίνετε τη λύση του Viete με τη λύση που δίνεται στο ίδιο πρόβλημα από τον Διόφαντο.

2.3 Euler

1. Πληροφορίες για το βιβλίο του Euler *Vollständige Anleitung zur Algebra* (*Πλήρης Εισαγωγή στην Άλγεβρα*), συγκεκριμένα για τις μοναδικές συνθήκες στις οποίες γράφτηκε, τον σύγχρονο χαρακτήρα του όσον αφορά τον συμβολισμό που χρησιμοποιήθηκε και την ποικιλία των προβλημάτων που μελετήθηκε.

2. Αποσπάσματα από την Άλγεβρα του Euler:

α) Κεφάλαιο Ι: Για τις Λύσεις των Προβλημάτων γενικότερα.

Κεφάλαιο ΙΙ: Για την Επίλυση Απλών Εξισώσεων ή Εξισώσεις Πρώτου Βαθμού.

β) Κεφάλαιο ΙΙΙ: Για τη Λύση εξισώσεων που σχετίζονται με το προηγούμενο Κεφάλαιο.

Κεφάλαιο IV: Για την Επίλυση δύο ή περισσοτέρων Εξισώσεων Πρώτου Βαθμού.

3. Ερωτήσεις για τους μαθητές για αυτά τα αποσπάσματα για να δουλέψουν στην τάξη ή στο σπίτι, π.χ. για:

α) Να γράψετε λεπτομερώς κανόνες τους κανόνες μετασχηματισμού που περιγράφονται από τον Euler στην παράγραφο 571.

β) Πόσες διαφορετικές λύσεις του προβλήματος που λύθηκαν από τον Διόφαντο και τον Viete δίνονται από τον Euler στα παραπάνω αποσπάσματα;

## 4.2 Έρευνα Dematte: Ιστορικά κείμενα στην καθημερινή εργασία της τάξης

Οι αυθεντικές πηγές βοηθούν στον σχεδιασμό νέων δραστηριοτήτων για τους μαθητές και προωθούν νέους τρόπους διδασκαλίας. Το βιβλίο που χρησιμοποιήθηκε εδώ επιμελήθηκε από τον Adriano Dematte και είναι μια συλλογή αποσπάσματων από αυθεντικά κείμενα που προσφέρεται για δραστηριότητες στους μαθητές του σήμερα. Οι συμμετέχοντες σε αυτό το εργαστήριο ανέλυσαν το βιβλίο με τη βοήθεια μεταφρασμένων σελίδων. Έγραψαν τα σχόλιά τους για την Ιστορία και την Παιδαγωγική των Μαθηματικών, συζητώντας τους λόγους που οι καθηγητές δε χρησιμοποιούν την ιστορία και εστιάζοντας στις προοπτικές νέων δραστηριοτήτων στην τάξη με τη χρήση αυθεντικών κειμένων.

### 4.2.1 Ένα βιβλίο για την τάξη

Το εργαστήριο αφορούσε την ανάλυση του βιβλίου *Fare matematica con i documenti storici* (*Κάνοντας Μαθηματικά με ιστορικά κείμενα*) *Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado* (*Μια συλλογή για την κατώτερη και ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση*). Το βιβλίο είναι το αποτέλεσμα δουλειάς δύο ετών που υλοποιήθηκε από πέντε καθηγητές που επέλεξαν να συνεργαστούν με το IPRASE – Istituto Provinciale di Ricerca, Aggiornamento e Sperimentazione Educativi del Trentino (Ινστιτούτο της Επαρχίας του Τρεντίνο Ιταλίας, για την έρευνα, διδασκαλία και πειραματισμό στο πεδίο της εκπαίδευσης). Αν και δεν υπήρξε προηγουμένως επίσημη διδασκαλία της ιστορίας των Μαθηματικών, οι μαθητές θα είναι σε θέση να αναζητήσουν την προέλευση των μαθηματικών ιδεών.

Οι πέντε καθηγητές που συμμετείχαν είχαν ο καθένας διαφορετικά κίνητρα και διαφορετικούς ρόλους. Στις προκαταρκτικές συζητήσεις μοιράστηκαν προηγούμενες εμπειρίες, οι δύο από την κατώτερη και οι άλλοι από την ανώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Έπειτα, συζήτησαν την δομή της έκδοσης του βιβλίου των μαθητών. Τρεις από αυτούς παρείχαν συγκεκριμένα μέρη του βιβλίου, ένας έχοντας μια μεγάλη βιβλιογραφία στην κατοχή του, βοήθησε στην εύρεση πηγών και βιβλίων και η άλλη συνείσφερε στη συζήτηση της δομής και ετοιμασίας του εισαγωγικού μέρους του βιβλίου.

Στόχος του βιβλίου ήταν να παρέχει στους καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης προτεινόμενες δραστηριότητες ώστε να εισαχθούν οι αυθεντικές πηγές στις εργασίες της τάξης, προσφέροντας εναλλακτικούς τρόπους διδασκαλίας. Ο διδακτικός στόχος μπορεί να συνοψιστεί στη φράση «ένα παραπάνω ιστορικό κείμενο, μια λιγότερη επαναλαμβανομένη άσκηση». Κάποιοι καθηγητές μπορεί να διαφωνήσουν με αυτήν τη φράση, καθώς κάποιες ασκήσεις Άλγεβρας σε αυτό το βιβλίο, όπως του Ιταλού μαθηματικού Rafael Bombelli, έχει δραστηριότητες που λύνονται με εξισώσεις.

Το μέρος του βιβλίου για τους καθηγητές, προσφέρει διδακτικές προτάσεις, απαντήσεις, θέματα για περαιτέρω μελέτη και βιβλιογραφία. Η κύρια πηγή του έργου ήταν η δημοσίευση των Bottazzini, Freguglia και Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica* (*Πηγές για την ιστορία των Μαθηματικών*), μια συλλογή κειμένων για την Αριθμητική, την Άλγεβρα, τη Γεωμετρία, τον Λογισμό, τη Λογική και τις Πιθανότητες, που είναι αντιπροσωπευτικά της εποχής τους. Άλλη μια πηγή ήταν του Franci (2005). Οι αυθεντικές πηγές που υπάρχουν στο βιβλίο των μαθητών περιλαμβάνουν εικόνες των κειμένων, ανατυπωμένες σελίδες στην αυθεντική τους γλώσσα, μεταφρασμένες σελίδες και επανασχεδιασμένα διαγράμματα.

### 4.2.2 Μεταφρασμένα κομμάτια του βιβλίου

**Από το βιβλίο των μαθητών**

Τα περιεχόμενα είναι:

Κεφάλαιο 1: Από την Αριθμητική στην Άλγεβρα

Κεφάλαιο 2: Πλευρές της Γεωμετρίας

Κεφάλαιο 3: Θέματα από τα σύγχρονα Μαθηματικά.

Ένα πρόβλημα στην Αναγέννηση

**... UN PROBLEMA NEL RINASCIMENTO...**

Come il padre, il nonno e il fratello, Filippo Calandri (1467-?) era un abacista (un contabile, un ragioniere o un commercialista, diremmo noi). Nacque a Firenze. La sua opera principale, pubblicata nel 1491, fu uno dei primi testi di aritmetica a stampa (non un manoscritto!).

**Per interpretare il documento**

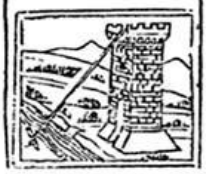
1. Ricava dal testo del problema l'altezza della torre e la larghezza del fiume che passa accanto al suo piede.
2. Qual è la lunghezza della corda che va dalla riva del fiume alla cima della torre? Ricava la risposta dai calcoli eseguiti da Calandri.
3. Calcola anche tu la lunghezza della corda con l'utilizzo del teorema di Pitagora e confronta il tuo procedimento con quello di Calandri: trovi delle diversità?

Eglie una torre che e alta 40 braccia e dappie uipassa uno fiume che e largho 30 braccia. uo sapere quanto sara lungha una fune che sia appicata alla riua del fiume e alla cima della torre

40 — 30
40 30

1600
900

la radice di 2500
sara lunga 50 braccia



Filippo Calandri, *Aritmetica*.

**Σχήμα 5: Εικόνα από το βιβλίο**

Σε μετάφραση (Σχήμα 5): Όπως ο παππούς, ο πατέρας και ο αδερφός, ο Filippo Calandri (1467–άγνωστο) ήταν ένας αβακιστής (σαν λογιστής). Γεννήθηκε στη Φλωρεντία. Το αριστούργημά του που δημοσιεύτηκε το 1491, ήταν ένα από τα πρώτα εκτυπωμένα αριθμητικά βιβλία (κι όχι χειρόγραφο).

**Να ερμηνευτεί το κείμενο**

1. Στο κείμενο του προβλήματος να βρεθεί το ύψος του πύργου και το πλάτος του ποταμού που ρέει δίπλα στη βάση του πύργου.

2. Ποιο είναι το μήκος του σκοινιού που ξεκινά από την όχθη του ποταμού και καταλήγει στην κορυφή του πύργου; Να βρεθεί η απάντηση στους υπολογισμούς του Calandri.

3. Να υπολογιστεί το μήκος του σκοινιού, μέσω του Πυθαγορείου Θεωρήματος και να συγκριθεί με τη μέθοδο του Calandri: υπάρχουν διαφορές;

**Από το βιβλίο των καθηγητών**

Ένα πρόβλημα στην Αναγέννηση

Το πρόβλημα του Calandri για το μήκος του σκοινιού δίνει μια ευκαιρία να ερμηνευτεί μια αυθεντική μαθηματική πηγή από μαθητές που έχουν μια συγκεκριμένη ικανότητα σε αριθμητικούς υπολογισμούς του θεωρήματος. Οι μαθητές θα μπορούν να συμπεράνουν το νόημα κάποιων λέξεων από τα συμφραζόμενα. Άλλες λέξεις μπορεί να μην τις γνωρίζουν, αλλά δε θα εμποδίσει την ανάλυση του κειμένου. Επίσης, το σχήμα θα βοηθήσει στα δεδομένα και στη λύση του προβλήματος. Μπορεί να δοθούν στους μαθητές συμπληρωματικές σημειώσεις για την έλλειψη συμβόλων των πράξεων.

### 4.2.3 Δραστηριότητες για τους μαθητές

Στις επόμενες δραστηριότητες κάθε κείμενο βοηθά τους μαθητές να καταλάβουν καλύτερα μαθηματικές ιδέες, όπως τα αρχικά αριθμητικά συστήματα και βελτιώνει τις ικανότητές τους στην κριτική ανάλυση. Σημειώνεται ότι στην Ιταλία πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να χρησιμοποιήσουν βιβλία Μαθηματικών. Αυτές οι δραστηριότητες βοηθούν να αναλύσουν το περιεχόμενο αλλά και να τους εισάγει στη χρήση τέτοιων βιβλίων. Ζητούνται ακόμη να υποθέσουν τους λόγους που οδήγησαν σε συγκεκριμένα ιστορικά γεγονότα.

Το έργο των καθηγητών αντλήθηκε από την διδακτική έρευνα στην ιστορία των Μαθηματικών, με χρήση αυθεντικών κειμένων, διατηρώντας παράλληλα επικοινωνία με το πανεπιστήμιο της Γένοβας. Επιπλέον, οι καθηγητές συνείσφεραν στη δημιουργία του βιβλίου, μέσω των εμπειριών τους από την καθημερινή εξάσκηση στην τάξη. Οι καθηγητές θεώρησαν ότι πρέπει να επεκταθεί η χρήση αυθεντικών κειμένων σε μεγαλύτερο αριθμό συναδέλφων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της επαρχίας. Στις ιταλικές τάξεις υπάρχει επίσης η ιδιαιτερότητα ότι μεγάλος αριθμός μαθητών δεν είναι Ιταλοί, καθώς υπάρχουν αρκετοί από Ανατολική Ευρώπη, Βόρεια Αφρική και Νότια Αμερική. Συχνά οι μαθητές αυτοί ζητούν να μάθουν για τη μαθηματική κληρονομιά των χωρών καταγωγής τους. Το γεγονός ότι τα κείμενα είναι από ευρωπαίους αλλά και μη ευρωπαίους συγγραφείς, μπορεί να είναι μια χρήσιμη πηγή διδασκαλίας με μια πολυπολιτισμική οπτική.

### 4.2.4 Βιβλίο για τους καθηγητές

Κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου έγιναν κάποιες ερωτήσεις στους συμμετέχοντες. Οι βασικότερες αφορούσαν τη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στις καθημερινές δραστηριότητες στην τάξη, τα αυθεντικά κείμενα ως πηγή εμβάθυνσης μαθηματικών εννοιών, τον ρόλο των καθηγητών και την προσοχή των μαθητών. Οι συμμετέχοντες επιβεβαίωσαν ότι σπάνια οι καθηγητές χρησιμοποιούν την ιστορία των Μαθηματικών και άρα ότι τα αυθεντικά κείμενα δε θεωρούνται ως σχετικές πηγές διδασκαλίας.

Η Furinghetti ασχολήθηκε με το θέμα της εκπαίδευσης μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών, εστιάζοντας στην ανάγκη να αναλυθούν οι οπτικές των καθηγητών σχετικά με τη διδασκαλία. Υποστηρίζει ότι οι μελλοντικοί καθηγητές χρειάζονται ένα πλαίσιο που θα τους επιτρέψει να δουν τα θέματα που διδάσκουν με διαφορετικό τρόπο, ένας από τους οποίους μπορεί να είναι μέσω της ιστορίας των Μαθηματικών. Επιπλέον, περιγράφει κάποιες δραστηριότητες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Ένα τέτοιο πρόβλημα του $14^{ου}$ αιώνα του Paolo Dell'Abbaco από το βιβλίο *Trattato d'Aritmetica* (*Διατριβή στην Αριθμητική*) που επεξεργάστηκε:

Ένας κύριος ζήτησε από τον υπηρέτη του να του φέρει επτά μήλα από τον κήπο του. Είπε: «θα συναντήσεις τρεις θυρωρούς και ο καθένας θα σου ζητήσει τα μισά όλων των μήλων και αλλά δύο από τα εναπομείναντα μήλα». Πόσα μήλα πρέπει να πάρει ο υπηρέτης αν επιθυμεί να μείνουν επτά μήλα;

Αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιήθηκε σε τάξη δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι λύσεις που συλλέχθηκαν ήταν σχετικές με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν υπερβολικά πολλά γράμματα, σε βαθμό που ήταν αδύνατη η αλγεβρική επίλυση, για παράδειγμα:

$x$: ο συνολικός αριθμός μήλων που πρέπει να μαζέψει ο υπηρέτης,

$\alpha$: ο αριθμός των μήλων που ο υπηρέτης πρέπει να δώσει στον πρώτο θυρωρό,

$y$: το σύνολο των μήλων που έμεινε στον υπηρέτη μετά τον πρώτο θυρωρό κ.τ.λ.

Αυτό το παράδειγμα από ένα ιταλικό κείμενο δείχνει ότι ένα ιστορικό πρόβλημα μπορεί να ενθαρρύνει τους καθηγητές να αναλογιστούν για τη συνήθη προσέγγιση της Άλγεβρας στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, που συνήθως αφορά την επιμονή σε αλγεβρικές πράξεις, επαναλαμβανόμενες λύσεις παρόμοιων εξισώσεων, έλλειψη χρήσης γραμμάτων για την έκφραση γενικεύσεων και σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων. Η Furinghetti παρουσίασε αποσπάσματα των γραπτών των μαθητών σε μελλοντικούς καθηγητές για να συζητηθεί ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές δίνουν νόημα στις έννοιες των αγνώστων και γενικότερα για τις μεθόδους της Άλγεβρας.

Οι συμμετέχοντες στο εργαστήριο συνείσφεραν σημαντικά με τα σχόλιά τους. Υπήρξαν κάποιες διαφορετικές απόψεις μεταξύ ερευνητών και καθηγητών σχετικά με τον ρόλο των Μαθηματικών και την ιστορία τους στη διδασκαλία. Αυτήν την στιγμή και τα δύο μέρη που επιθυμούν τη βελτίωση της σχέσης μεταξύ της ιστορίας και της διδακτικής έχουν ένα κοινό πρόβλημα, να αυξήσουν τα μέλη των συναδέλφων που συνεργάζονται με την HPM.

### 4.2.5 Συμπερασματικά σχόλια

Στα ιταλικά σχόλια η ιστορία των Μαθηματικών εμφανίζεται σχεδόν σε κάθε βιβλίο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Με εξαίρεση την Ευκλείδεια Γεωμετρία που διδάσκεται και δε διαφέρει πολύ από το αυθεντικό έργο, συνήθως ο ρόλος της ιστορίας είναι συμπληρωματικός όσον αφορά τις κλασικές δραστηριότητες, όπως η εξάσκηση μέσω των ασκήσεων και οι απεικονίσεις αρχαίων κειμένων είναι συνήθως για αισθητικούς λόγους και δεν επιτελούν κάποια λειτουργία. Το παρόν βιβλίο περιέχει κείμενα που έχουν βασικό ρόλο σε σχέση με τις δραστηριότητες. Στόχος είναι να εξεταστούν μαθηματικές έννοιες αναλύοντας διαφορετικές ιστορικές πηγές.

## 4.3 Έρευνα Katz και Michalowicz: Ιστορικές διδακτικές ενότητες για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών

### 4.3.1 Εισαγωγή

Οι ενότητες για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών αναπτύχθηκαν για να δείξουν στους καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης πώς να χρησιμοποιούν υλικό από την ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία διαφόρων θεμάτων της ύλης. Δημιουργήθηκε από την σύμπραξη καθηγητών δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και περιέχει έντεκα ενότητες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην τάξη. Σε αυτές υπάρχουν δραστηριότητες με οδηγίες για τους καθηγητές και φύλλα εργασίας για τους μαθητές.

Το εγχείρημα των ιστορικών ενοτήτων προέκυψε στο Ινστιτούτο Ιστορίας των Μαθηματικών και της Χρήσης της στη Διδασκαλία (IHMT) και εξελίχθηκε από τους καθηγητές Victor Katz και Karen Dee Michalowicz. Στόχος του IHMT ήταν να αυξήσει την παρουσία της ιστορίας των Μαθηματικών σε προπτυχιακό επίπεδο στις Η.Π.Α. Το περιεχόμενο των ενοτήτων περιέχει υλικό για όλες τις τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Κάποιες ενότητες σχεδιάστηκαν για να εισάγουν καινούρια μαθηματικά αντικείμενα και άλλες για να εμπλουτίσουν τις ήδη γνωστές μαθηματικές έννοιες. Οι ενότητες αφορούν: τους Αρνητικούς Αριθμούς, τα Μήκη, τα Εμβαδά και τους Όγκους, τη Γεωμετρική Απόδειξη, τη Στατιστική, τη Συνδυαστική, μια ειδικότερη για το έργο του Αρχιμήδη, τις Συναρτήσεις, τις Γραμμικές Εξισώσεις, τα Εκθετικά και τους Λογαρίθμους, τα Πολυώνυμα και την Τριγωνομετρία.

Οι Katz και Michalowicz πιστεύουν ότι ο βασικός λόγος που η ιστορία δεν εμφανίζεται συχνά στην τάξη είναι ότι δεν υπήρχαν πολλά διαθέσιμα διδακτικά σχέδια και δραστηριότητες που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν οι καθηγητές χωρίς να χρειάζεται να κάνουν πολλή έρευνα μόνοι τους. Ήλπιζαν λοιπόν ότι με αυτό το υλικό πλέον διαθέσιμο, οι καθηγητές θα χρησιμοποιήσουν περισσότερο την ιστορία στην τάξη και όταν θα διαπιστώσουν ότι αυξάνεται το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά, οι ίδιοι οι καθηγητές θα έχουν περισσότερο κίνητρο να αναπτύξουν περισσότερο δικό τους υλικό.

### 4.3.2 Δραστηριότητες από τις ενότητες

Ιταλική Αβακιστική Δραστηριότητα (από την ενότητα των αρνητικών αριθμών)

**Σημειώσεις καθηγητή**

**Επίπεδο**: Αυτή η δραστηριότητα σχεδιάστηκε για μαθητές όλης της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

**Υλικό**: Αντίγραφα της σελίδας του μαθητή.

**Στόχος**: Οι μαθητές θα αναλύσουν ένα απόσπασμα γραμμένο από ένα Ιταλό αβακιστή του 14$^{ου}$ αιώνα, ώστε να γίνει κατανοητό γιατί ένας αρνητικός αριθμός που πολλαπλασιάζεται με άλλο αρνητικό δίνει ένα θετικό αριθμό. Η αιτιολόγηση χρησιμοποιεί την ιδιότητα της επιμεριστικής.

**Πότε να χρησιμοποιηθεί**: Να χρησιμοποιηθεί η δραστηριότητα κατά διάρκεια της διδασκαλίας των κανόνων προσήμων στον πολλαπλασιασμό. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις είναι της επιμεριστικής ιδιότητας και η κατανόηση ότι ο πολλαπλασιασμός θετικού αριθμού με αρνητικό, δίνει αρνητικό αριθμό.

**Πώς να χρησιμοποιηθεί**: Προτείνεται ομάδες δύο ή τριών μαθητών να εργαστούν με τους υπολογισμούς του κειμένου, απαντώντας στις ερωτήσεις των Προβλημάτων 1-6. Μπορεί να αναπτυχθεί η επιμεριστική ιδιότητα μέσω Γεωμετρίας ή αλγεβρικών πλακών.

**Υπόβαθρο**: Η μεγάλη αύξηση του εμπορίου στην Ευρώπη του 14$^{ου}$ αιώνα δημιούργησε την ανάγκη για περισσότερα Μαθηματικά. Οι έμποροι χρειάζονταν αριθμητικές και αλγεβρικές ικανότητες για να κάνουν οικονομικές συναλλαγές. Έτσι, προέκυψε ένας νέος κλάδος επαγγελματιών μαθηματικών, οι αβακιστές. Αυτοί έγραφαν αριθμητικά κείμενα και δίδασκαν πρακτικά Μαθηματικά στους εμπόρους και στους γιους τους. Το απόσπασμα σε αυτήν την δραστηριότητα γράφτηκε από άγνωστο αβακιστή γύρω στο 1390.

**Λύσεις**:

1. Σημειώνεται ότι $3+\frac{3}{4}=4-\frac{1}{4}$. Άρα, $\left(3+\frac{3}{4}\right)\left(3+\frac{3}{4}\right)=\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)$.

2. Σημειώνεται ότι $\left(3+\frac{3}{4}\right)\left(3+\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{4}\cdot\frac{15}{4}=\frac{225}{16}=14+\frac{1}{16}$.

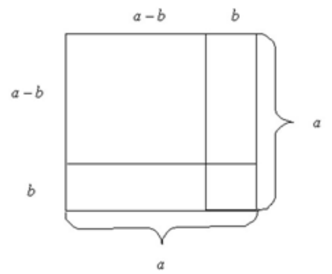
3. Ο συγγραφέας υπολόγισε τα πρώτα τρία γινόμενα με επιμεριστική στο $\left(4-\frac{1}{4}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)$ παίρνοντας $16-2=14$, που διαφέρει από την απάντηση $14\frac{1}{6}$ κατά $\frac{1}{6}$.

4. Επειδή $(4-14)(4-14)=14+116$, τότε το $(4-14)(4-14)=14+(-14)(-14)$ πρέπει να ισούται με $14+116$. Προκύπτει ότι το $(-14)(-14)$ πρέπει να ισούται με $+116$ φανερώνοντας ότι $(-)(-)=+$.

5. Αφού $(8-2)(8-2)=6\cdot 6=36$, τότε το $(8-2)(8-2)=64-16-16+(-2)(-2)=32+(-2)(-2)$ πρέπει να είναι ίσο με $36$. Άρα, το $(-2)(-2)$ πρέπει να ισούται με $4$, δείχνοντας ότι $(-)(-)=+$.

**Άλλες ιδέες**: Μπορούν οι μαθητές να σκεφτούν κι άλλα παραδείγματα της μορφής $(a-b)(a-b)$, όπου $a>b>0$ ή και της μορφής $(a-b)(c-d)$, με $a>b>0$ και $c>d>0$, παίρνοντας το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι έδειξε και ο al-Khwarizmi ότι $(-)(-)=+$, αλλά και ότι $(+)(-)=-$ και $(-)(+)=-$.

Η ταυτότητα $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$, με $a>b>0$, μπορεί επίσης να δειχθεί με τη χρήση πλακών:




**Σχήμα 6: Η ταυτότητα $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$ γεωμετρικά**

## Σελίδα μαθητών

Δίνεται ένα απόσπασμα από ένα ιταλικό χειρόγραφο κείμενο που γράφτηκε περίπου το 1390, πριν την ανακάλυψη του τυπογράφου. Το περιεχόμενό του αφορά την αριθμητική και ο συγγραφέας εξηγεί γιατί το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός.

«Πολλαπλασιάζοντας μείον επί μείον, δίνει συν. Για να το αποδείξετε κάντε το εξής: πρέπει να ξέρετε ότι πολλαπλασιάζοντας το 3 και 34 με τον εαυτό του, θα είναι το ίδιο με το να πολλαπλασιάσετε το 4 μείον το 14 με τον εαυτό του».

1. Γιατί το 3 και 34 ισούται με το 4 μείον 14. Γιατί το γινόμενο του 3 και 34 με τον εαυτό του ισούται με το γινόμενο του 4 μείον 14 με τον εαυτό του;

«Δηλαδή, πολλαπλασιάζοντας το 3 και 34 με το 3 και 34 κάνει 14 και 116 όπως και πολλαπλασιάζοντας το 4 μείον 14 επί το 4 μείον 1/4».

2. Να ελέγξετε ότι το γινόμενο των $3\frac{3}{4}$ και $3\frac{3}{4}$ ισούται με $14\frac{1}{16}$.

Ο συγγραφέας θα πολλαπλασιάσει αναλυτικά το 4 μείον 14 με τον εαυτό του μέσω της επιμεριστικής ιδιότητας: «Πολλαπλασιάζουμε 4 φορές το μείον ένα τέταρτα, δηλαδή μείον ένα και 4 φορές το μείον ένα τέταρτο κάνει μείον ένα, άρα κάνει μείον 2. Βγάζοντας το 2 από το 16, μένει 14».

3. Ποιοι παράγοντες πολλαπλασιάστηκαν μέχρι στιγμής; Γιατί το 4 φορές το μείον ένα τέταρτο ισούται με μείον ένα; Γιατί κάνει τον πολλαπλασιασμό δύο φορές; Ποιο άθροισμα έχει μέχρι στιγμής; Κατά πόσο αυτό διαφέρει από την απάντηση $14\frac{1}{16}$ που ξέρουμε ότι πρέπει να βγει;

«Τώρα μείον $\frac{1}{4}$ επί μείον $\frac{1}{4}$ δίνει $\frac{1}{16}$, που κάνει όσο κάνει και το άλλο γινόμενο».

4. Ποια είναι η αιτιολόγηση του συγγραφέα για το μείον 14 επί μείον 14 που δίνει θετικό 116;

5. Να χρησιμοποιήσετε την ίδια λογική για δείξετε ότι $-2$ επί $-2$ είναι ίσο με $+4$ στο γινόμενο $(8-2)(8-2)$.

6. Να δώσετε ένα δικό σας γινόμενο της μορφής $(a-b)(a-b)$, όπου $a > b > 0$ και να το χρησιμοποιήσετε για να δείξετε ότι γνωρίζοντας την απάντηση εκ των προτέρων, καλείστε να συμπεράνετε ότι ένας αρνητικός επί έναν αρνητικό δίνει θετικό.

## 4.4 Έρευνα Glaubitz: Η χρήση αυθεντικών πηγών στην τάξη: Θεωρητική οπτική και Εμπειρικά στοιχεία

### 4.4.1 Εισαγωγή

Πολλοί καθηγητές και εκπαιδευτικοί ερευνητές πιστεύουν στην αξία της χρήσης της ιστορίας στη διδασκαλία. Ωστόσο, δε χρησιμοποιείται τόσο συχνά στη μαθηματική εκπαίδευση και δε γνωρίζουμε πολλά για την αποτελεσματικότητά της και πιθανά μειονεκτήματά της. Σε αυτό το κείμενο αναφέρεται η παραδοσιακή γενετική μέθοδος και συγκρίνεται με την πιο ασυνήθιστη ερμηνευτική προσέγγιση, παρουσιάζοντας μια εμπειρική έρευνα του Michael R. Glaubitz που βασίστηκε στην τελευταία και περιείχε τη χρήση αυθεντικών πηγών.

Διαχρονικά έχει δοθεί μεγάλη διδακτική αξία στην ιστορία των Μαθηματικών, από καθηγητές, ερευνητές, αλλά και σπουδαίους μαθηματικούς όπως οι Clairaut, Abel, De Morgan, Poincare και Klein. Στις γερμανόφωνες χώρες συγκεκριμένα οι Klein και Toeplitz υποστήριξαν θερμά τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία. Τα Μαθηματικά εμπλουτισμένα με την ιστορία μπορούν μεταξύ άλλων:

- να επικοινωνήσουν τεχνικά περιεχόμενα με πιο κατανοητό τρόπο
- να διορθώσουν την εικόνα μια αυστηρής και «στεγνής» επιστήμης
- να τονίσουν την ανθρώπινη πλευρά του μαθήματος
- να ενισχύσουν το κίνητρο των μαθητών.

Ωστόσο, παρά τις προαναφερθείσες δυνατότητες, τα ιστορικά θέματα δεν έχουν βρει μόνιμα τη θέση τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Υπάρχουν καθηγητές που έχουν κάποιες κοινές ενστάσεις:

- αμφιβάλλουν για την πραγματική αξία των ιστορικών κειμένων στη μάθηση
- τονίζουν τη μεγάλη πίεση χρόνου που υπάρχει στο σχολείο και
- στην ανεπαρκή εκπαίδευσή τους στην ιστορία των Μαθηματικών

- υποθέτουν ότι οι ιστορικές παρεμβάσεις δεν είναι δημοφιλείς στην πλειοψηφία των μαθητών και
- ανησυχούν για το αν μπορούν να ελεγχθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα.

Τέτοιες αμφιβολίες προκαλούν κάποιες σκέψεις, καθώς πράγματι δε γνωρίζουμε πολλά για τα πραγματικά αποτελέσματα της εφαρμογής της ιστορίας στη διδασκαλία, παρά κάποιες μεμονωμένες μελέτες που είχαν γίνει. Μόλις το 2005 έγινε μια μεγάλης κλίμακα έρευνα, με συμμετέχοντες εκατοντάδες μαθητές της Ολλανδίας, σε δύο προγράμματα για τη χρήση αυθεντικών κειμένων στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η έρευνα δεν κατάφερε να συμπεραίνει την υπόθεση ότι οι μαθητές θα επηρεαστούν θετικά, κάτι που δείχνει την ανάγκη να γίνει μεγαλύτερη έρευνα και με διαφορετικές προσεγγίσεις.

Μια τέτοια έρευνα έγινε στο πλαίσιο μιας διπλωματικής εργασίας στο πανεπιστήμιο του Duisburg-Essen στη Γερμανία. Μελετήθηκαν τα αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν από μια ιστορική-μαθηματική παρέμβαση, μέσω χρήσης αυθεντικών πηγών στην τάξη και συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα της συμβατικής διδασκαλίας. Οι δύο διδακτικές ενότητες που εφαρμόστηκαν αφορούσαν τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

### 4.4.2 Το θεωρητικό υπόβαθρο της έρευνας: Η ιστορία των Μαθηματικών στην τάξη – γενετική ή ερμηνευτική προσέγγιση;

Σύμφωνα με την παράδοση των Klein και Toeplitz, στις γερμανόφωνες χώρες τα ιστορικά στοιχεία εφαρμόζονται συνήθως με τη γενετική προσέγγιση, η οποία προτάθηκε από τον Klein υποθέτοντας ότι: «εκ φύσεως, ο μαθητής θα περάσει με μικρά βήματα μέσω της ίδιας ανάπτυξης που έγινε από την επιστήμη σε μεγάλη κλίμακα». Αυτή η άποψη ήταν πολύ κοινή μεταξύ των μαθηματικών και των εκπαιδευτικών της εποχής του. Ο Toeplitz την πήγε ένα επίπεδο πιο πάνω αναφέροντας ότι: «επιθυμώ να εξάγω από την ιστορία μόνο τα κίνητρα που αποδείχτηκαν επιτυχή και να τα χρησιμοποιήσω με άμεσο ή έμμεσο τρόπο. Έχει να κάνει με τη *γένεση* των προβλημάτων, τα γεγονότα και τις αποδείξεις, όχι για την ιστορία τους».

Αυτή η προσέγγιση δεν είχε πάντως μεγάλη επιρροή. Παρόλα αυτά, επικράτησε η άποψη ότι τα ιστορικά στοιχεία ήταν κατάλληλα για την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών ή για να παρέχει στοιχεία για την ανάπτυξη των Μαθηματικών από τις αρχικές ρίζες. Η προσέγγιση αυτή παρέχει κάποια αποτελέσματα, αλλά επιδέχεται κριτικής. Πολλοί ειδικοί ανέδειξαν την έλλειψη σύνδεσής της με τη νοητική διαδικασία των μαθητών και της και της καθημερινής τους ζωής. Επίσης, δε φαίνεται να είναι εφικτό να πραγματοποιηθεί εύκολα και συχνά δεν μπορεί να πετύχει τους στόχους της.

Μια ενδιαφέρουσα εναλλακτική είναι η ιστορικο-ερμηνευτική προσέγγιση, που προτάθηκε από τον Jahnke. Αυτή εστιάζει σε τοπικές και σποραδικές ιστορικές παρεμβάσεις, που δεν προκαλούνται από την εισαγωγή εννοιών, αλλά λειτουργούν ως μέσα εμβάθυνσης και στοχασμού. Η μελέτη αυθεντικών πηγών, είναι η βασικότερη μέθοδος εφαρμογής της προσέγγισης αυτής. Οι μαθητές δουλεύουν με αυτές αφότου έχουν κατανοήσει τις σχετικές ιδέες και διαδικασίες, μέσω του συμβατικού τρόπου. Το ενδεχόμενο κάποιες πηγές να είναι αντιφατικές ή «ασυνεχείς», δε θεωρείται αρνητικό αλλά ως ευκαιρία για μάθηση.

Παρατίθεται ένας πίνακας σύγκρισης των δύο μεθόδων:

| Γενετική προσέγγιση (Toeplitz/Klein) | Ερμηνευτική προσέγγιση (Jahnke) |
|---|---|
| Καθολικό ενδιαφέρον: *ανακατασκευή ολόκληρων εξελίξεων* | *Τοπικό ενδιαφέρον: μελέτη περιορισμένων ιστορικών επεισοδίων* |
| Μελέτη και ανάλυση αυθεντικών πηγών που έχει γίνει από καθηγητές ή εκδότες και *δεν* είναι μέρος της διδασκαλίας | Η μελέτη και ανάλυση αυθεντικών πηγών είναι βασικό κομμάτι της διδασκαλίας |
| Ύφος διδασκαλίας | Οι μαθητές αναπτύσσουν ανεξάρτητες δραστηριότητες |
| Οδηγεί σε κατανόηση, εντοπίζοντας μια ομαλή και διορθωμένη ιστορική εξέλιξη | Η σύγχρονη κατανόηση είναι προϋπόθεση, τα ιστορικά επεισόδια δρουν ως μέσα εμβάθυνσης και στοχασμού |
| Το σύγχρονο επιστημονικό επίπεδο συμβολίζει την ολοκλήρωση μιας οργανικής (συνεχής, γραμμικής) εξέλιξης | Το σύγχρονο επιστημονικό επίπεδο έρχεται μερικώς σε αντίφαση με κάποια στάδια της εξέλιξης |
| Δίνει μικρή αξία στις παρακάμψεις ή ιδιαιτερότητες | Οι ασυνέχειες, οι παρακάμψεις και οι αντιφάσεις εκτιμώνται ως κλειδιά για βαθύτερη κατανόηση |
| Ασυνήθιστες εμπειρίες αποφεύγονται, η ιστορία παρέχει θετικά στοιχεία για το σημερινό επίπεδο | Ασυνήθιστες εμπειρίες είναι επιθυμητές, δίνουν λόγο για βαθύτερη σκέψη |
| Κανένα γενικό πλαίσιο | Το γενικό πλαίσιο είναι σημαντικό |
| Δηλωτικό ύφος (εξήγηση των γεγονότων, η ιστορία σαν ένα εργαλείο για να εκφραστούν τα «αληθινά» Μαθηματικά) | Ερμηνευτικό ύφος (τεχνική κατανόηση και κατανόηση της ανθρώπινης σημασίας) |

**Πίνακας 11: Σύγκριση Γενετικής και Ερμηνευτικής μεθόδου**

### 4.4.3 Εμπειρικός σχεδιασμός της μελέτης

Η ερμηνευτική προσέγγιση χρησιμεύει ως θεωρητική βάση για μια εις βάθος εμπειρική μελέτη των πιθανών αποτελεσμάτων από τη χρήση αυθεντικών πηγών. Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις επιλέχθηκαν ως ένα πλήρες αντικείμενο δύο ανάλογων διδακτικών ενοτήτων από τις οποίες αποτελείται το εγχείρημα, επιτυγχάνοντας την επιθυμητή σύγκριση μεταξύ της ιστορικής και συμβατικής διδασκαλίας. Το υλικό οργανώθηκε σε δύο ειδικά σχεδιασμένα εργαστήρια αποτελούμενα από 260 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου δέκα τάξεων, από έξι σχολεία.

Κάθε τάξη διδάχτηκε μια συμβατική εισαγωγή στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις και έμαθαν τη λύση με συμπλήρωση τετραγώνου και με χρήση του τύπου. Επτά από αυτές τις τάξεις μελέτησαν έπειτα το ιστορικό υλικό που αποτελούταν από αποσπάσματα της “al-jabr” του al-Khwarizmi (820 μ.Χ.) όπου εισάγει τη διάσημη ρητορική μέθοδο επίλυσης μαζί με τη γεωμετρική απόδειξη. Οι μαθητές μελέτησαν την πηγή σε μικρές ομάδες και έπειτα με όλη την τάξη. Στη συνέχεια, προσπάθησαν να λύσουν κάποια κλασικά προβλήματα δευτέρου βαθμού με την αρχαία μέθοδο, ανακαλύπτοντας κάποια πλεονεκτήματα, αλλά και μειονεκτήματα σε σχέση με τη σύγχρονη μέθοδο. Οι δραστηριότητες προκάλεσαν μια συζήτηση σχετικά με τους αρνητικούς αριθμούς και τη σημερινή χρήση των τύπων. Επιπλέον, οι μαθητές σύγκριναν τις διαφορές στο πλαίσιο των σύγχρονων Μαθηματικών και αυτών της μεσαιωνικής Αραβίας, μέσω της εισαγωγής του βιβλίου του al-Khwarizmi και της εισαγωγής του σύγχρονου βιβλίου.

Στο μεταξύ, τρεις τάξεις ακολούθησαν τη συμβατική μελέτη των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Οι μέθοδοι συλλογής δεδομένων ήταν: πανομοιότυπα τεστ (στο τέλος της ενότητας και έξι με οκτώ εβδομάδες αργότερα), καταγραφές βίντεο και χειρόγραφων, ερωτηματολόγια και βιβλία ασκήσεων. Στο πρώτο ερωτηματολόγιο (πριν το πείραμα) οι μαθητές ρωτήθηκαν για τα επιτεύγματά τους στα Μαθηματικά, τις αυτοαξιολογήσεις τους και την άποψή τους για τα Μαθηματικά ως επιστήμη και ως σχολικό μάθημα. Αυτές οι ερωτήσεις επαναλήφθηκαν στο δεύτερο ερωτηματολόγιο στο τέλος του πειράματος, για να βρεθούν πιθανές αλλαγές. Τα βασικότερα ερωτήματα της έρευνας ήταν:

1. Πώς συγκρίνονται τα επιτεύγματα των μαθητών της πειραματικής ομάδας με αυτά των μαθητών της ομάδας ελέγχου (της συμβατικής διδασκαλίας);
2. Με ποιον τρόπο και σε ποιον βαθμό η ιστορική ενίσχυση και η μελέτη των αυθεντικών πηγών είχε επίδραση στις απόψεις για τα Μαθηματικά και σχετικά με τη μεθοδική και γενική εστίαση στην τάξη;

### 4.4.4 Σημαντικά αποτελέσματα

Στο πείραμα συμμετείχαν 152 αγόρια (58,5%) και 95 κορίτσια (36,5%), 13 μαθητές ξέχασαν να δηλώσουν το φύλο τους. Οι ομάδες του πειράματος και του ελέγχου αποτελούνταν από 172 και 88 μαθητές αντίστοιχα. Ένας εκτεταμένος έλεγχος για σημαντικές εκ των προτέρων διαφορές μεταξύ των χαρακτηριστικών των δύο ομάδων που θα μπορούσαν να σχετίζονται με την έρευνα έδωσε αρνητικά αποτελέσματα. Έτσι, η πειραματική ομάδα και αυτή του ελέγχου ήταν ίδιες αναφορικά με τις σχετικές στατιστικές τιμές.

Τα Μαθηματικά είναι ένα δημοφιλές μάθημα μεταξύ των μαθητών και των δύο ομάδων, φτάνοντας την τιμή 3,08 σε μια κλίμακα δημοφιλίας από το 1 ως το 4 (με το 4 την υψηλότερη τιμή), έχοντας σε μεγαλύτερη εκτίμηση την εφαρμοσιμότητα τους. Όταν ρωτήθηκαν για τις ικανότητές τους στα Μαθηματικά, δήλωσαν ότι νιώθουν ικανοί στις συνήθεις δραστηριότητες, όπως τους υπολογισμούς, τον μετασχηματισμό εξισώσεων και τη σχεδίαση, αλλά θεωρούν ότι είναι αδύναμοι στην ανάλυση των μαθηματικών προβλημάτων και στην απόδειξη θεωρημάτων. Σημειώνεται ότι σπάνια υπάρχουν δραστηριότητες στην τάξη που αφορούν τη γλώσσα, όπως π.χ. τη μελέτη κειμένων και υπάρχει ελάχιστη χρήση υπολογιστών. Γενικότερα, οι μαθητές πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με την επίλυση προβλημάτων, με υπολογισμούς και χρήση συμβόλων, κάτι που δε φαίνεται να τους δυσκολεύει. Επίσης, θεωρούν ότι σε αυτό το μάθημα πρέπει να χρησιμοποιείται κυρίως η λογική και όχι τόσο η απομνημόνευση πληροφοριών.

Η ενότητα της ιστορικής διδασκαλίας εκτιμήθηκε ιδιαιτέρως και αύξησε την τιμή δημοφιλίας των Μαθηματικών από 3,08 σε 3,23 και η πλειοψηφία των μαθητών έδειξε ανοικτή σε περισσότερη διδασκαλία μέσω ιστορικών στοιχείων. Ωστόσο, αυτοί που είχαν ήδη μια θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά και δε δυσκολεύονται ιδιαίτερα στο μάθημα εκτίμησαν πολύ περισσότερο την ενότητα σε σχέση με αυτούς που δεν τους αρέσουν τόσο και δυσκολεύονται με αυτά, θεωρώντας ότι δεν μπορούν να βοηθηθούν από αυτήν την παρέμβαση.

| | Εκ των προτέρων βαθμός | 1ο τεστ | 2ο τεστ |
|---|---|---|---|
| **Πειραματικές τάξεις** | 3,16 | 2,89 | 3,04 |
| **Τάξεις ελέγχου** | 3,29 | 3,30 | 3,59 |

**Πίνακας 12: Αποτελέσματα των τεστ (κατά μέσο όρο) και μέσοι βαθμοί πριν το πείραμα. Στη Γερμανία οι βαθμοί μετρούνται από 1 μέχρι 6, με 1 το «άριστα»**

Σχετικά με την πρώτη ερώτηση της έρευνας βρέθηκε ότι:

- Οι μαθητές της πειραματικής ομάδας απέδωσαν πολύ καλύτερα από αυτούς της ομάδας ελέγχου και στα δύο τεστ.
- Ακόμα κι οι μαθητές που δεν τους άρεσε τόσο η ιστορική ενότητα, είχαν καλύτερα αποτελέσματα από αυτά που είχαν πριν. Η πιο επιφυλακτική τάξη είχε τη μεγαλύτερη άνοδο.
- Σε κάθε πειραματική τάξη η επίδραση στη μνήμη των μαθητών ήταν πολύ καλύτερη από αυτήν της ομάδας ελέγχου.

Για τη δεύτερη ερώτηση της έρευνας, το 56% των μαθητών στην πειραματική ομάδα είπαν ότι η ιστορική ενότητα τους έκανε να σκεφτούν για τα Μαθηματικά και τη δική τους στάση απέναντι στο μάθημα, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό της ομάδας ελέγχου ήταν 5%. Επιπλέον, μπορεί να αναφερθεί ότι η θετική επίδραση ήταν περιορισμένη σε μαθητές που ήδη ενδιαφέρονταν για τα Μαθηματικά.

Πολλοί μαθητές στην πειραματική ομάδα ένιωσαν ότι η εστίαση στις μεθόδους άλλαξε σε αυτήν την ενότητα. Οι κλασικές δραστηριότητες όπως των υπολογισμών, της χρήσης τύπων κ.τ.λ. έγιναν λιγότερο σημαντικές, ενώ δόθηκε περισσότερη σημασία σε ερμηνευτικές και επικοινωνιακές δραστηριότητες όπως η μελέτη μαθηματικών κειμένων ή η συζήτηση με άλλους. Συνεπώς, κάποιες απόψεις των μαθητών αμφισβητήθηκαν. Για παράδειγμα, τα Μαθηματικά δε θεωρούνται πλέον ότι είναι ένα μάθημα που κυρίως αφορά υπολογισμούς ή σχεδιασμό προβλημάτων, αλλά κατανόησαν τη σημασία του γενικότερου πλαισίου και της λογικής. Ωστόσο, δε θεώρησαν ότι το περιεχόμενο της διδακτικής ενότητας θα έχει κάποια χρησιμότητα σε επόμενα μαθήματά τους ή στην επαγγελματική τους καριέρα. Στην ομάδα ελέγχου δεν υπήρξαν μεγάλες αλλαγές σχετικά με τα προαναφερόμενα, κάτι που ήταν αναμενόμενο.

### 4.4.5 Συμπέρασμα

Η μελέτη αναδεικνύει το ενδεχόμενο ανάπτυξης και υλοποίησης μιας επιτυχούς διδακτικής ενότητας βασισμένο στη μελέτη ιστορικών πηγών του Al-Khwarizmi. Η εισαγωγή της ιστορίας στη διδασκαλία ενίσχυσε τα κίνητρα, τα επιτεύγματα και τις απόψεις των μαθητών. Από την άλλη φαίνεται ότι τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν να γενικευθούν άκριτα. Έτσι, θα ήταν ενδιαφέρον να μελετηθεί ποιοι παράγοντες καθιστούν επιτυχές ή αποτυχημένο ένα τέτοιο διδακτικό εγχείρημα. Τέλος, προτείνεται η ιστορία των Μαθηματικών και η εφαρμογή της στην τάξη να γίνει αναπόσπαστο κομμάτι της εκπαίδευσης των καθηγητών.

## 4.5 Έρευνα Glaubitz: Η χρήση αυθεντικών πηγών στην τάξη. Εμπειρικά ερευνητικά ευρήματα

### 4.5.1 Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών βρίσκει όλο και περισσότερο χώρο στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Συνήθως αυτοί που υποστηρίζουν τη χρήση της στην τάξη είναι και οι ίδιοι παθιασμένοι με την ιστορία και σαν αντικείμενο μελέτης, όπως και ο συγγραφέας του παρόντος άρθρου, Michael Glaubitz. Αναφέρει την πρώτη εμπειρία του στα σχολικά χρόνια με τα ιστορικά στοιχεία των επιστημών, με το *Mysterium Cosmographicum* του Kepler για τη μορφή του ηλιακού συστήματος, που του έμεινε ανεξίτηλη. Ως καθηγητής πλέον, έχει μεγάλη όρεξη να χρησιμοποιήσει την ιστορία στην τάξη, αλλά αναρωτιέται αν υπάρχουν αποδείξεις ότι μπορεί στην πράξη να βοηθήσει και να ενθουσιάσει τους μαθητές. Με τις λίγες εμπειρικές έρευνες που υπήρχαν, αποφάσισε να το ερευνήσει ο ίδιος, συγκρίνοντας με τη συμβατική διδασκαλία. Οι ερωτήσεις της έρευνας ήταν:

- Πώς επηρεάζει η ιστορική διδασκαλία τις μαθηματικές ικανότητες των μαθητών σε σχέση με τη συμβατική διδασκαλία;
- Πώς επηρεάζει η ιστορική διδασκαλία τις απόψεις των μαθητών για τα Μαθηματικά, τη διδασκαλία και τη σχέση τους με αυτήν;
- Με ποιον τρόπο και σε ποιο βαθμό επιτρέπει η ιστορική διδασκαλία για στοχασμό και συζήτηση μες στην τάξη;

Υπάρχουν βέβαια πολλές πιθανές προσεγγίσεις της διδασκαλίας μέσω της ιστορίας. Ο Glaubitz θεωρεί ότι το πιο δύσκολο είναι η μελέτη των αυθεντικών πηγών, τόσο για τους καθηγητές όσο και για τους μαθητές. Για τους καθηγητές, απαιτείται επιπλέον χρόνος προετοιμασίας και γενικότερα μαζί με τους μαθητές θα πρέπει να μπουν σε άγνωστα μονοπάτια σκέψης, να κατανοήσουν το πολιτισμικό και ιστορικό πλαίσιο και να δουλέψουν με προβλήματα που είναι γραμμένα εκτενέστερα σε σχέση με τα σύγχρονα. Οι αυθεντικές πηγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τη γενετική και την ερμηνευτική προσέγγιση, οι οποίες μελετήθηκαν στο πλαίσιο αυτής της τριπλής έρευνας. Τα μέρη της ήταν:

- η διδασκαλία ενός συγκεκριμένου θέματος με ιστορικές πηγές σύμφωνα με τη γενετική προσέγγιση
- η διδασκαλία του ίδιου θέματος με ιστορικές πηγές σύμφωνα με μια ερμηνευτική προσέγγιση και
- η διδασκαλία του ίδιου θέματος χωρίς καθόλου ιστορία, δηλαδή με τη συμβατική μέθοδο.

### 4.5.2 Διδασκαλία με ιστορικές πηγές σύμφωνα με τη γενετική προσέγγιση

Η διδασκαλία μαζί με την ιστορία σύμφωνα με τη γενετική προσέγγιση είναι μια παλιά μέθοδος. Ο Felix Klein υποστήριζε αυτήν την προσέγγιση και την ακολούθησε ο Otto Toeplitz, όπου η ιστορία χρησιμοποιείται ως μέσο εισαγωγής νέων θεμάτων στην τάξη. Βέβαια πολλοί ερευνητές αμφισβήτησαν αυτήν την προσέγγιση. Ο Toeplitz επέλεγε βολικά κομμάτια της ιστορίας, ώστε να παρουσιαστεί σε μια ανοδική γραμμή από στοιχειώδεις μέχρι τις πιο περίπλοκες έννοιες, με ένα συνεχές τρόπο, κάτι που δεν είναι ακριβές για την ιστορία των Μαθηματικών. Πρέπει λοιπόν να είναι γνωστό αυτό, όταν θα διδάσκεται η μέθοδος αυτή στην τάξη.

Το θέμα που επιλέχθηκε είναι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις και ο τύπος επίλυσής τους. Ο στόχος της συμβατικής μεθόδου είναι να δείξει στους μαθητές τις ιδιότητες των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, τις μεθόδους επίλυσης και να τους δώσει κάποια πραγματικά προβλήματα στα οποία θα εφαρμόσουν τις γνώσεις τους. Ο στόχος είναι ίδιος και στη γενετική μέθοδο. Η ιστορία είναι απλά ένα εργαλείο για να επιτευχθεί με έναν διαφορετικό τρόπο και ελπίζοντας να υπάρχει κάποιο επιπλέον κέρδος.

Η διδασκαλία των δευτεροβάθμιων εξισώσεων είναι ένα κλασικό αντικείμενο μελέτης, αλλά η ανάπτυξη της διδακτικής ενότητας μέσω της ιστορίας είναι κάτι διαφορετικό και απαιτεί την παρουσίαση κάποιων τουλάχιστον σταδίων στην ιστορία. Η πρώτη γνωστή λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης υπάρχει στον πάπυρο του Βερολίνου από το Μέσο Βασίλειο της Αιγύπτου, με την τότε περιγραφική και ρητορική φύση των Μαθηματικών. Ήταν ένα σύστημα εξισώσεων που λύθηκε με τη μέθοδο εσφαλμένης θέσης και με σύγχρονο συμβολισμό ήταν το σύστημα των εξισώσεων:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x = \frac{3}{4}y$$

Οι Βαβυλώνιοι άφησαν αποδείξεις σε πήλινες πλάκες για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, μέσω της συμπλήρωσης του τετραγώνου. Οι αρχαίοι Έλληνες τις έλυσαν με γεωμετρικές μεθόδους, αν θεωρηθεί ότι η εύρεση του μήκους ενός σχήματος ισοδυναμεί με τη ρίζα της εξίσωσης. Οι Ινδοί εξέλιξαν τις μεθόδους των Βαβυλωνίων, με τον Brahmagupta να δίνει μια σχεδόν σύγχρονη μέθοδο, που κάνει δεκτές και αρνητικές ποσότητες. Επίσης, χρησιμοποίησε συντομεύσεις για τον άγνωστο και συνήθως ήταν το πρώτο γράμμα του χρώματος που είχε.

Οι Άραβες δε γνώριζαν για την πρόοδο των Ινδών και για αυτό δε χρησιμοποιούσαν αρνητικές ποσότητες και συντομεύσεις για τους αγνώστους. Ωστόσο, ο Al-Khwarizmi έκανε μια φημισμένη κατηγοριοποίηση για τους διαφορετικούς τύπους των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Έδωσε τους κανόνες επίλυσης για κάθε τύπο, φτάνοντας ουσιαστικά στον γνωστό τύπο λύσης, με αριθμητικά παραδείγματα και από μια απόδειξη μέσω της γεωμετρικής ολοκλήρωσης του τετραγώνου. Αυτή η προέλευση του τύπου επίλυσης ήρθε αργότερα στην Ευρώπη και ο Al-Khwarizmi ονομάστηκε ο «πατέρας της Άλγεβρας».

Κατά τη διάρκεια της Αναγέννησης στην Ευρώπη, πολλοί μαθηματικοί συλλέξαν τα έργα που αφορούσαν τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Για παράδειγμα, ο Cardano ανέμειξε τη λύση του Al-Khwarizmi με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στο τέλος του 16ου αιώνα αναπτύχθηκε ο σύγχρονος συμβολισμός από τον François Viète και ήταν από τους πρώτους που αντικατέστησε τις γεωμετρικές μεθόδους επίλυσης με τις αναλυτικές. Το 1637 ο René Descartes δημοσίευσε το *La Géométrie*, φτάνοντας στα σύγχρονα Μαθηματικά και πλέον ο τύπος της δευτεροβάθμιας εξίσωσης υιοθετήθηκε στη μορφή που είναι και σήμερα.

Το ιστορικό υλικό πρέπει να περιοριστεί για να παρουσιαστεί στην τάξη. Για αυτό έχουν παραλειφθεί εδώ τα Μαθηματικά του Ευκλείδη, των Ινδών και της ευρωπαϊκής Αναγέννησης. Αυτή η διδακτική ενότητα αποτελείται από εννιά μαθήματα. Στα έξι από αυτά οι μαθητές διάβασαν τις αυθεντικές πηγές, στα υπόλοιπα τρία έμαθαν για τη σύγχρονη μέθοδο επίλυσης του Al-Khwarizmi. Συνέχισαν με τις συμβατικές ασκήσεις και τις εφαρμογές με τις σύγχρονες μεθόδους.

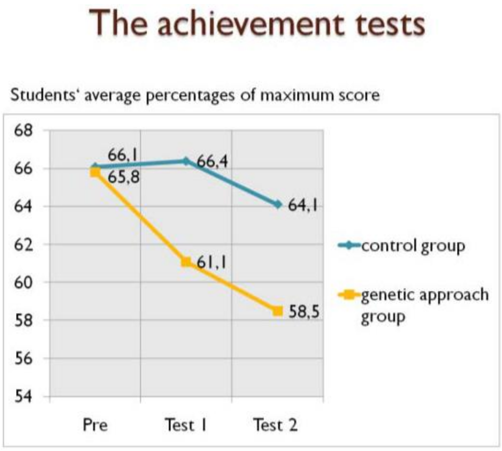
| **Η γενετική διδακτική ενότητα** | **Η συμβατική διδακτική ενότητα** |
|---|---|
| 1. Αιγυπτιακοί πάπυροι (μέθοδος εσφαλμένης θέσης) | 1. Εισαγωγικό πρόβλημα |
| 2. Βαβυλωνιακές πλάκες | 2. Συμπλήρωση του τετραγώνου |
| 3. Αραβικά Μαθηματικά (εξ. 1$^{ου}$ βαθμού) | 3. Ο τύπος της δευτεροβάθμιας |
| 4. ...συνέχεια (εξισ. 2$^{ου}$ βαθμού) | 4. Εύκολες ασκήσεις |
| 5. ...συνέχεια (εξισ. 3$^{ου}$ βαθμού) | 5. Προβλήματα με λέξεις |
| 6. ...συνέχεια (πρόλογος συγγραφέα) | 6. ...συνέχεια |
| 7. Ο σύγχρονος τύπος | 7. Εύκολες εφαρμογές |
| 8. Προβλήματα λέξεων και εφαρμογές | 8. Πιο δύσκολες εφαρμογές |
| 9. Μοντελοποίηση προβλήματος | 9. Μοντελοποίηση προβλήματος |

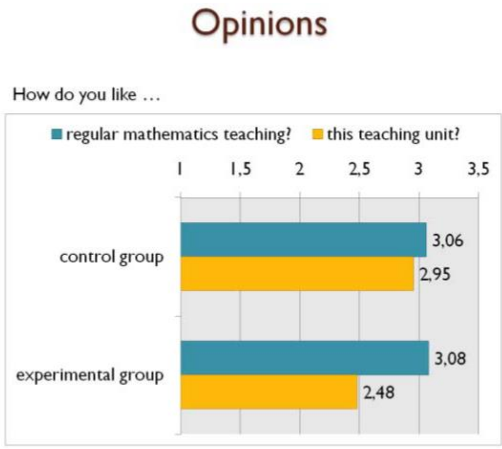
**Πίνακας 13: Η γενετική και η συμβατική διδακτική ενότητα (συνοπτικά)**

Η συμβατική ενότητα αποτελείται επίσης από εννιά μαθήματα. Το υλικό της αποτελείται από τυπικά βιβλία, με τρόπο ώστε οι μαθητές να κάνουν τα ίδια προβλήματα, αλλά χωρίς τη χρήση ιστορίας. Μια σημαντική διαφορά ήταν ότι εδώ οι μαθητές διδάχτηκαν εξ αρχής τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μέσω της συμπλήρωσης του τετραγώνου και του τύπου. Έπειτα, έλυσαν τις συνήθεις ασκήσεις, τα προβλήματα λέξεων και μοντελοποίησης. Η έρευνα έγινε με 175 μαθητές σε έξι τάξεις, με έξι καθηγητές από τρία διαφορετικά σχολεία. Τρεις πειραματικές τάξεις μελέτησαν το ιστορικό υλικό, ενώ τρεις τάξεις ελέγχου δούλεψαν με τον συμβατικό τρόπο. Έπειτα και οι δύο ομάδες έγραψαν ένα ίδιο τεστ και ένα δεύτερο έξι βδομάδες μετά, για να φανεί αν μία ομάδα έμαθε το θέμα καλύτερα από την άλλη.

Οι καθηγητές είχαν ειδικά συνοδευτικά εγχειρίδια και δέχθηκαν ειδική εκπαίδευση, όμως κανένας από αυτούς δεν τη χρησιμοποίησε τελικά στην τάξη. Επιπλέον, οι μαθητές συμπλήρωσαν δύο ερωτηματολόγια, ένα πριν το πείραμα και ένα μετά, με στόχο να συλλεχθούν πληροφορίες για αυτούς και τις απόψεις τους για τα Μαθηματικά και τη διδακτική ενότητα. Έτσι, ήταν εφικτό να συγκριθούν οι ομοιότητες των δύο ομάδων, δίνοντας πολλά δεδομένα, αλλά καταλήγοντας και στο ότι η ιστορική διδακτική ενότητα με τη γενετική προσέγγιση ήταν αποτυχημένη.

Αρχικά, τα τεστ έδωσαν πανομοιότυπα αποτελέσματα και στις δύο ομάδες. Στατιστικά φαίνεται ότι οι εκ των προτέρων ικανότητες και επιδόσεις ήταν παρόμοιες στις ομάδες.




**Σχήμα 7: Αποτελέσματα των τεστ (σε %)** **Σχήμα 8: Γνώμες για τις διδακτικές ενότητες**

Παρατηρήστε τα αποτελέσματα του πρώτου τεστ μετά το τέλος της διδακτικής ενότητας (Σχήμα 7). Αποτελούταν από προβλήματα που οι μαθητές είχαν ξαναδουλέψει. Φαίνεται ότι δεν υπάρχει μεγάλη αλλαγή στην ομάδα ελέγχου, αλλά οι μαθητές της πειραματικής ομάδας κατά κύριο λόγο απέδωσαν πολύ χειρότερα. Αντίστοιχα, στο δεύτερο τεστ έξι βδομάδες μετά, η απόδοση ήταν χειρότερη και στις δύο ομάδες, αλλά η διαφορά τους αυξήθηκε ακόμη περισσότερο. Έτσι, γίνεται αντιληπτό ότι η ιστορική ενότητα δεν έκανε πιο κατανοητό το αντικείμενο των Μαθηματικών στους μαθητές.

Σχετικά με τα πιο συχνά λάθη των μαθητών, πολλές φορές χρησιμοποίησαν λάθος τα πρόσημα και αναμίγνυαν τις παλιές με τις σύγχρονες μεθόδους. Επίσης, δυσκολεύτηκαν με τα προβλήματα λέξεων και με τις εφαρμογές, ενώ άλλοι δεν πρόλαβαν να τελειώσουν το τεστ εγκαίρως. Σχετικά με τις γνώμες για τις διδακτικές ενότητες (Σχήμα 8), τονίζεται ότι πριν την εφαρμογή τους τα Μαθηματικά θεωρούνται ένα αρκετά δημοφιλές μάθημα από τους μαθητές. Μετά την εφαρμογή τους, φάνηκε μια πολύ μικρή πτώση στη δημοφιλία στην ομάδα ελέγχου, ενώ στην πειραματική ομάδα υπήρχε μια μεγάλη πτώση. Επίσης, φαίνεται ότι η γενετική προσέγγιση είναι καταλληλότερη για τους μαθητές που δείχνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.

Για την εξήγηση των αποτελεσμάτων, είναι χρήσιμες οι απόψεις των μαθητών που συμμετείχαν:

«Αν και ήταν ενδιαφέρον, πιστεύω ότι ήταν ταυτόχρονα περίπλοκο. Δεν ήξερες τι ήταν σημαντικό και τι όχι, αφού δεν ήξερες που πρέπει να καταλήξουν όλα αυτά».

«Αφορούσε υπερβολικά την ιστορία και πολύ λίγο για τις σύγχρονες μεθόδους».

«Αν και ήταν εντυπωσιακό να βλέπεις την συνολική διαδρομή, πιστεύω ότι το θέμα είναι πολύ ελκυστικό μόνο για τους ειδικούς στα Μαθηματικά».

«Υπερβολικά πολύ υλικό, δεν ήξερα πού να εστιάσω».

«Ενδιαφέρον θεωρητικά, αλλά υπερβολικά μεγάλο».

Αυτό πιθανόν δείχνει ότι οι μαθητές δεν είχαν να βασιστούν σε μια αρχική θεωρία για να μελετήσουν τις ιστορικές μεθόδους και φαινόταν ότι οι μέθοδοι που χρησιμοποίησαν δεν είχαν κάποια σύνδεση με τις γνώσεις τους ή και μεταξύ τους. Σημειώνεται ότι οι μαθητές εδώ δεν είχαν κάποια πρότερη γνώση για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Κλείνοντας, αυτός ο τρόπος διδασκαλίας δε δούλεψε. Οι μαθητές μπερδεύτηκαν και ήταν δυσαρεστημένοι στο τέλος, ενώ δεν πέτυχαν κάποιον από τους επιπλέον στόχους.

### 4.5.3 Διδάσκοντας με ιστορικές πηγές σύμφωνα με την ερμηνευτική προσέγγιση

Στη γενετική προσέγγιση που καλύφθηκε, υπάρχει μια εναλλακτική που λέγεται ιστορικο-ερμηνευτική ή απλά ερμηνευτική προσέγγιση, που προτάθηκε από τον Niels Jahnke. Η βασική διαφορά της με τη γενετική προσέγγιση είναι ότι δεν απαιτείται από τους μαθητές να βρίσκουν την ιστορία των σκέψεων που οδηγούν από τις παλιές ρίζες μέχρι το σήμερα. Εδώ πρέπει πρώτα να γνωρίσουν ένα μαθηματικό θέμα και μετά να αναλύσουν ένα ιστορικό κείμενο με αυτό το θέμα. Σύμφωνα με τον Jahnke, το ιστορικό υλικό πρέπει να δείχνει κάτι που είναι προσιτό στον μέσο μαθητή και ταυτόχρονα περίεργο και διαφορετικό από όσα ξέρει μέχρι τώρα. Σε αυτήν την προσέγγιση κάτι ασυνήθιστο που εμφανίζεται δε σημαίνει ότι είναι αρνητικό, αλλά είναι μια ευκαιρία μάθησης. Οι μαθητές δουλεύουν με ένα αντικείμενο που γνωρίζουν, αλλά που παρουσιάζεται με άλλον τρόπο, αναπτύσσοντας μια βαθύτερη κατανόηση.

Η ερμηνευτική προσέγγιση αξιοποιεί μια στρατηγική της δυσαρμονίας, όπου οι μαθητές τη βιώνουν σε έναν βαθμό και κινείται το ενδιαφέρον τους. Είναι βασισμένη σε ευρήματα της ψυχολογίας, όπου ο άνθρωπος αντιμετωπίζει πληροφορίες που είναι μερικώς ασύμβατες με τις προηγούμενες γνώσεις και προσδοκίες του. Έχει επιβεβαιωθεί ότι έτσι επιτυγχάνεται καλύτερη απομνημόνευση πληροφοριών και ανάκληση από μνήμης. Η δομή που ακολουθείται είναι συνήθως η εξής: πρώτα οι μαθητές διδάσκονται με συμβατικό τρόπο ένα θέμα, χωρίς κανένα ιστορικό στοιχείο. Στο δεύτερο στάδιο οι μαθητές διαβάζουν την ιστορική πηγή που αφορά το ίδιο θέμα με το πρώτο στάδιο, αλλά παρουσιάζεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Σε αυτό το στάδιο ιδανικά κινείται το ενδιαφέρον των μαθητών. Στο τρίτο στάδιο οι μαθητές ζητούνται να μελετήσουν σε ακόμη μεγαλύτερο βαθμό την ιστορική πηγή και σκέφτονται τις ερωτήσεις που προκύπτουν.

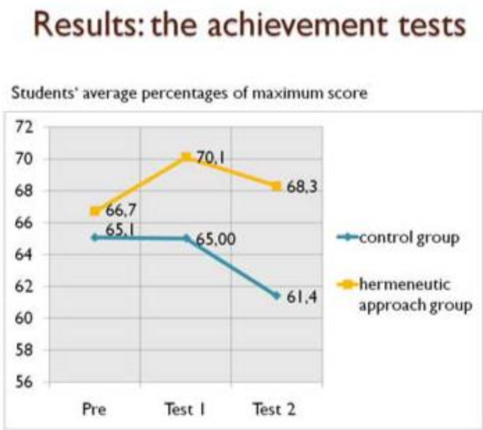
Στην ερμηνευτική διδακτική ενότητα, είμαστε ικανοποιημένοι και με λιγότερο ιστορικό υλικό. Εδώ επιλέχθηκε ένα παράδειγμα από την ιστορία, συγκεκριμένα από την Άλγεβρα του Al-Khwarizmi και μελετήθηκε λεπτομερώς. Ακολουθεί η περίληψη της ενότητας. Μετά από μια συμβατική εισαγωγή τριών μαθημάτων στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, οι μαθητές διάβασαν τα αντίστοιχα αποσπάσματα και την εισαγωγή του συγγραφέα του βιβλίου. Συζήτησαν μεταξύ τους για το υλικό και διαπίστωσαν ασυνήθιστα πράγματα, όπως η ρητορική μορφή, η έλλειψη συμβόλων και των αρνητικών αριθμών και σύγκριναν τις μεθόδους του Al-Khwarizmi με τις σύγχρονες. Επίσης, έκαναν τις ίδιες ασκήσεις με αυτές της γενετικής ενότητας και μελέτησαν για τον Al-Khwarizmi και το υπόβαθρό του, ώστε να επιτευχθεί η ισορροπία μεταξύ του κειμένου και του πλαισίου στο οποίο γράφτηκε.

Για να γίνει πιο ενδιαφέρουσα η διδακτική ενότητα ζητήθηκε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν τα ευρήματά τους με ένα δημιουργικό τρόπο:

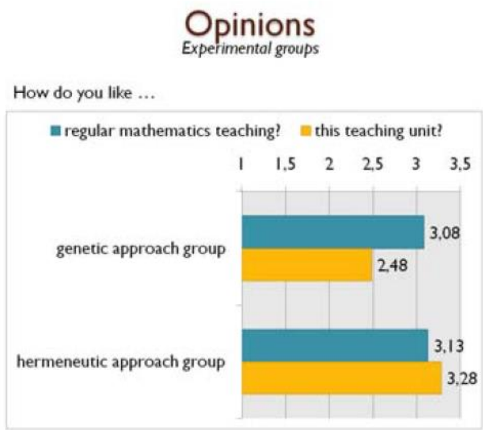
- γράφοντας μια φανταστική συνέντευξη με τον Al-Khwarizmi στην οποία θα απαντούσε αυτός για το ποιος ήταν, γιατί είχε γράψει την Άλγεβρα, από που προήλθαν οι γνώσεις του κ.τ.λ.
- γράφοντας μια περίληψη ενός βιβλίου για του συγχρόνους του Al-Khwarizmi, στο οποίο έδειχναν την εκτίμησή τους για τα επιτεύγματά του και την αξία του για την κοινωνία και το Ισλάμ
- σκεπτόμενοι μια συζήτηση μεταξύ του Al-Khwarizmi και του χαλίφη που του ζήτησε να γράψει την Άλγεβρα
- γράφοντας κάποιου είδους ιστορία επιστημονικής φαντασίας, στην οποία ο Al-Khwarizmi συναντά έναν ταξιδιώτη του χρόνου του σήμερα που του λέει για την επιρροή του ως

«πατέρα της Άλγεβρας» και ο οποίος προσπαθεί να τον πείσει να συνδυάσει τους τρεις τύπους των εξισώσεων για να πάρει μια ενιαία προσέγγιση.

Οι μαθητές δούλεψαν σε ομάδες και μπορούσαν να επιλέξουν να κάνουν ένα από τα παραπάνω ή να προτείνουν κάτι δικό τους. Όταν τα δούλευαν έπρεπε επανεξετάζουν συνεχώς την αυθεντική πηγή, εμβαθύνοντας στο αντικείμενο και διευρύνοντας τις γνώσεις τους μέσω της σκέψης με ένα διαφορετικό τρόπο από αυτό που έχουν συνηθίσει. Σε αυτό το στάδιο συμμετείχαν 250 μαθητές, σε δέκα τάξεις από τις οποίες οι επτά δούλεψαν με την ιστορική προσέγγιση ενώ οι τρεις με τη συμβατική, με έξι καθηγητές και έξι σχολεία. Χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια τεστ όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.




**Σχήμα 9: Αποτελέσματα των τεστ**




**Σχήμα 10: Γνώμες για τις διδακτικές ενότητες**

Πριν τα τεστ η ομάδα ελέγχου είχε ουσιαστικά ίδια αποτελέσματα με το πρώτο τεστ. Η πειραματική ομάδα απέδωσε πολύ καλύτερα από την ομάδα ελέγχου, ειδικά στη μέση απομνημόνευση. Σχετικά με τις γνώμες για την τυπική διδασκαλία οι δύο ομάδες είχαν παρόμοια εικόνα. Ωστόσο, για την ιστορική διδασκαλία η ομάδα ελέγχου έδειξε σημαντική πτώση στο ενδιαφέρον, ενώ η ερμηνευτική ομάδα έδειξε μεγαλύτερο ενδιαφέρον.

Αυτά μπορεί να οφείλονται στο γεγονός ότι οι μαθητές της γενετικής προσέγγισης βρήκαν την ενότητα «υπερβολική και περίπλοκη». Από την άλλη, αυτοί της ερμηνευτικής προσέγγισης είχαν περισσότερη ελευθερία στην έρευνά τους για τον Al-Khwarizmi και την αξιοποίησαν με δημιουργικό τρόπο, κάτι που πολλοί μαθητές το τόνισαν. Επιπλέον, σημειώνεται ότι συνήθως μειώνεται το ενδιαφέρον για μια διδακτική ενότητα, όταν ένας καθηγητής δε δίνει τέτοιες δημιουργικές ευκαιρίες. Όπως έχει αναφερθεί, η γενετική προσέγγιση είναι καταλληλότερη για μαθητές που τους αρέσουν πολύ τα Μαθηματικά. Στην ερμηνευτική προσέγγιση όμως η έρευνα δείχνει ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές που τους αρέσει πολύ η τυπική διδασκαλία, δεν τους άρεσε τόσο η ερμηνευτική προσέγγιση. Παρόλα αυτά ο γενικός μέσος όρος αυξήθηκε, καθώς σε πολλούς άρεσε περισσότερο η ερμηνευτική προσέγγιση. Έτσι, μπορεί να διατυπωθεί ότι η ερμηνευτική διαδικασία είναι καταλληλότερη για την πλειοψηφία των μαθητών.

Παρατίθενται κάποιες απόψεις μαθητών που συμμετείχαν στην ενότητα:

«Δε γνώριζα ότι οι Άραβες έκαναν τόσα πολλά για τα Μαθηματικά και τις επιστήμες. Σήμερα θα θεωρούσαμε ότι ήταν λίγο πίσω. Έτσι, το βρίσκω σημαντικό να μαθαίνουμε τι κατάφεραν τόσο παλιά».

«Τώρα σκέφτομαι διαφορετικά για τις αραβικές χώρες και την κουλτούρα τους, σε αντίθεση με τις προκαταλήψεις που είχα πριν».

«Μέχρι τώρα θεωρούσα ότι η επιστήμη και η θρησκεία ήταν απέναντι η μία στην άλλη και ότι οι επιστήμονες δεν ήταν θρήσκοι. Αλλά φαίνεται ότι είναι διαφορετικά στον δικό τους πολιτισμό».

«Από τις επισκέψεις στην Ισπανία με την οικογένειά μου γνώριζα ότι οι Άραβες ήταν ανώτεροι στον Μεσαίωνα. Αλλά δεν ήξερα ότι ίσχυε αυτό και για τα Μαθηματικά».

### 4.5.4 Τελευταίο σχόλιο

Στην αρχή του κειμένου ο Glaubitz είχε σχολιάσει την πρώτη του εμπειρία με το *Mysterium Cosmographicum* του Kepler και την επιρροή που είχε. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της έρευνας συμπεραίνει ότι αυτό που του κέντρισε το ενδιαφέρον ήταν η αυθεντική και πρωτάκουστη μέθοδος σκέψης, που φαινόταν πολύ περίεργη αλλά συναρπαστική. Οι μαθητές στην ερμηνευτική προσέγγιση τελικά έμαθαν για την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, γνώρισαν για τον μέχρι τότε άγνωστο κόσμο των Αράβων, τον λαό, τον πολιτισμό και τους διαφορετικούς τρόπους σκέψης του. Πολλοί από αυτούς ανέπτυξαν έναν σεβασμό για ένα πολιτισμό που είχαν μέχρι πρότινος υποτιμήσει. Από αυτήν την οπτική, η ερμηνευτική προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών μπορεί να συνεισφέρει σε ανθρωπιστικές, δημοκρατικές και ειρηνευτικές παραδόσεις στην εκπαίδευση.

## 4.6 Έρευνα Vallhonesta, Esteve, Casanova, Puig-Pla και Roca-Rosella: Εκπαίδευση καθηγητών στην ιστορία των Μαθηματικών

### 4.6.1 Εισαγωγή

Η ιστορία των Μαθηματικών είναι ένα ισχυρό εργαλείο, που μπορεί να βελτιώσει το έργο των καθηγητών, προσφέροντας επιπλέον επιλογές στη μάθηση από τους μαθητές. Οι Fàtima Romero Vallhonesta, Maria Rosa Massa Esteve, Iolanda Guevara Casanova, Carles Puig-Pla και Antoni Roca-Rosella του Universitat Politècnica της Καταλονίας σχεδίασαν ένα μάθημα για εκπαιδευόμενους καθηγητές των Μαθηματικών με στόχο να τους παρέχουν την απαραίτητη γνώση για τη χρήση ιστορικών στοιχείων στην τάξη και να αναλυθεί η εφαρμογή ιστορικών δραστηριοτήτων στα Μαθηματικά.

Η γνώση της ιστορίας των Μαθηματικών παρέχει στους καθηγητές μια βαθύτερη κατανόηση των θεμελίων και της φύσης των Μαθηματικών, αλλά και το πώς οι διαφορετικοί τομείς των Μαθηματικών πήραν τη μορφή τους και συνδέονται με άλλους κλάδους. Επιπλέον, μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να χρησιμοποιηθεί έμμεσα για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων στην τάξη για την παρουσίαση βασικών εννοιών της ύλης με ένα διαφορετικό τρόπο. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και άμεσα, με τη μελέτη ιστορικού υλικού και συνεδρίων με ιστορικά θέματα, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα οι μαθητές τις μαθηματικές έννοιες.

Σε αυτό το πρόγραμμα δόθηκαν στους καθηγητές αυθεντικές πηγές στις οποίες βασίστηκε η γνώση των Μαθηματικών του παρελθόντος. Έπρεπε να δουλέψουν με αυτές, διαβάζοντας και ερμηνεύοντας μια σειρά μαθηματικών κειμένων και μαθαίνοντας πώς να εντοπίζουν και να χρησιμοποιούν ιστορικές βιβλιογραφίες και ηλεκτρονικές πηγές. Επίσης, απαιτούνταν να αναγνωρίσουν τις πιο σημαντικές αλλαγές στα Μαθηματικά, αυτές που επηρέασαν τη δομή, τις μεθόδους και τις βασικές έννοιές τους. Κάποιες πηγές εστίασαν και στο κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο που αναπτύχθηκαν τα Μαθηματικά στις εκάστοτε χρονικές περιόδους. Το τελευταίο στάδιο του εγχειρήματος συντάχθηκε από τους ίδιους τους καθηγητές και αποτελείται από μια δραστηριότητα για τους μαθητές, που βασίστηκε στο υλικό που μελέτησαν στη διάρκεια του μαθήματος.

Τρεις βασικές δραστηριότητες ήταν οι εξής:

1. Χρήση κινεζικών προβλημάτων και διαδικασιών από ένα αρχαίο βιβλίο διδακτικής των Μαθηματικών.
2. Εισάγοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση με χρήση ιστορικών μεθόδων.
3. Άλγεβρα και Γεωμετρία στην τάξη των Μαθηματικών.

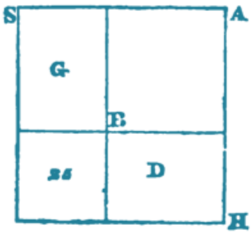
Αυτές οι δραστηριότητες εφαρμόστηκαν σε σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, με σκοπό να εμπνεύσουν τους καθηγητές να δημιουργήσουν τις δικές τους δραστηριότητες. Εδώ εστιάζουμε στη δεύτερη και την τρίτη.

### 4.6.2 Εισάγοντας την εξίσωση δευτέρου βαθμού με τη χρήση ιστορικών μεθόδων

Στις ακόλουθες δραστηριότητες προτείνεται η λύση εξισώσεων με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου του al-Khwārizmī, όπου οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από οπτικά μέσα συλλογισμού, που συνδυάζουν την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία. O al-Khwārizmī έζησε περίπου το 780-850, ήταν μαθηματικός, αστρονόμος και γεωγράφος κατά τη διάρκεια της Αυτοκρατορίας του Abbasid και ήταν ερευνητής στον Οίκο της Σοφίας στη Βαγδάτη. Το συνοπτικό βιβλίο του υπολογισμού μέσω της συμπλήρωσης και της ισορροπίας (*Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*) ήταν το διασημότερο και πιο σημαντικό από τα έργα του al-Khwārizmī. Αν και η δουλειά του βασίστηκε σε παλιότερες των Ινδών και των Ελλήνων, θεωρήθηκε ως ο εφευρέτης της Άλγεβρας. Αυτό το βιβλίο του μεταφράστηκε πρώτη φορά στα Λατινικά από τον Robert του Chester το 1145 ως *Liber algebrae et almucabala*, εξού και ο όρος Άλγεβρα. Το 1831 μεταφράστηκε στα αγγλικά από τον Frederic Rosen.

Εδώ αξιοποιήθηκαν το κείμενο και τα διαγράμματα της έκδοσης του Rosen, για να σχεδιαστούν οι δραστηριότητες της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων με οπτικά βοηθητικά μέσα. Ο συγγραφέας παρείχε μια εκτενή αναφορά στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μέχρι δευτέρου βαθμού και στις θεμελιώδεις μεθόδους της «ισορροπίας», όπου εφαρμόζεται η μεταφορά όρων από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο και η διαγραφή ίσων όρων που είναι στα δύο μέλη της εξίσωσης. Ο al-Khwārizmī ήθελε να δώσει στους αναγνώστες του γενικούς κανόνες κάθε μορφής εξισώσεων και όχι απλά την επίλυση συγκεκριμένων παραδειγμάτων. Οι κανόνες του για την επίλυση γραμμικών και δευτεροβάθμιων εξισώσεων ανάγονταν σε μια εξίσωση από έξι δυνατές μορφές. Εφαρμόστηκε η περίπτωση: «ένα τετράγωνο και δέκα ρίζες είναι ίσα με τριάντα ένα dhirem (αραβικό νόμισμα)», για να σχεδιαστούν οι δραστηριότητες. Ο al-Khwārizmī διατύπωσε το εξής (βλ. Σχήμα 11):

«Ξεκινάμε από το τετράγωνο του AB. Η επόμενη δουλειά μας είναι να προσθέσουμε σε αυτό τις δέκα ρίζες του. Για αυτόν τον σκοπό κόβουμε στη μέση το δέκα και γίνεται πέντε και κατασκευάζουμε δύο τετράπλευρα στις δύο μεριές του τετραγώνου AB, τα G και D, με μήκος πέντε το καθένα, όπως το μισό των δέκα ριζών, ενώ το πλάτος τους είναι ίσο το καθένα με μια πλευρά του τετραγώνου AB. Τότε ένα τετράγωνο βρίσκεται απέναντι από τη γωνία του τετραγώνου AB. Αυτό είναι ίσο με πέντε επί πέντε: αυτό το πέντε είναι το μισό του αριθμού των ριζών, τα οποία προστέθηκαν με την κάθε μία από τις δύο πλευρές του πρώτου τετραγώνου. Έτσι, ξέρουμε ότι το πρώτο τετράγωνο και τα δύο τετράπλευρα στις πλευρές του, που είναι οι δέκα ρίζες, κάνουν μαζί τριάντα εννιά. Για να συμπληρωθεί το μεγάλο τετράγωνο, χρειάζεται μόνο ένα τετράγωνο πέντε επί πέντε ή είκοσι πέντε. Αυτό το προσθέτουμε στο τριάντα εννιά για να συμπληρωθεί το μεγάλο τετράγωνο SH. Το άθροισμα είναι εξήντα τέσσερα. Εξάγουμε τη ρίζα του, που είναι το οχτώ και είναι μια από τις πλευρές του μεγάλου τετραγώνου. Αφαιρώντας από την ίδια ποσότητα, που πριν προσθέσαμε δηλαδή το πέντε, παίρνουμε τρία ως υπόλοιπο. Αυτή είναι η πλευρά του τετραγώνου AB, που είναι η ρίζα του τετραγώνου και το τετράγωνό του είναι εννιά».




**Σχήμα 11: Γεωμετρική απόδειξη του al-Khwārizmī (Rosen, 1831, 16)**

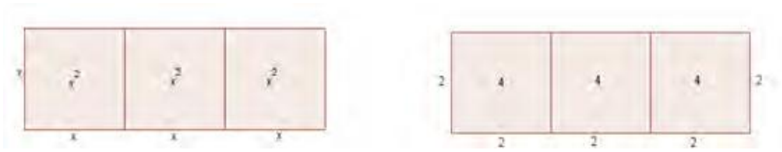
Η δραστηριότητα ξεκινά λύνοντας εξισώσεις:

α) Η αλγεβρική διαδικασία

Έγιναν κάποια μαθήματα για την επίλυση εξισώσεων με αλγεβρικές διαδικασίες. Οι μαθητές ξέρουν να λύνουν γραμμικές εξισώσεις και εφαρμόστηκε αυτή η μέθοδος για τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.

β) Η γεωμετρική διαδικασία

Έγιναν κάποια μαθήματα για την γεωμετρική οπτικοποίηση του $x^2$ και βήμα βήμα οι μαθητές εισάχθηκαν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων γεωμετρικά. Έπρεπε να καταλάβουν τα $x$ και $x^2$ ως μέτρα των πλευρών των τετραγώνων και των εμβαδών τους αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 12).



**Σχήμα 12: Η γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης** $3x^2 = 12$

Όταν έμαθαν οι μαθητές να λύνουν τέτοιου είδους εξισώσεις, τους ζητήθηκε να γράφουν τις εξισώσεις γνωρίζοντας τις λύσεις τους. Για παράδειγμα:

$$x = 3 \ \rightarrow \ x^2 = 9,\ 2x^2 = 18, \ldots$$

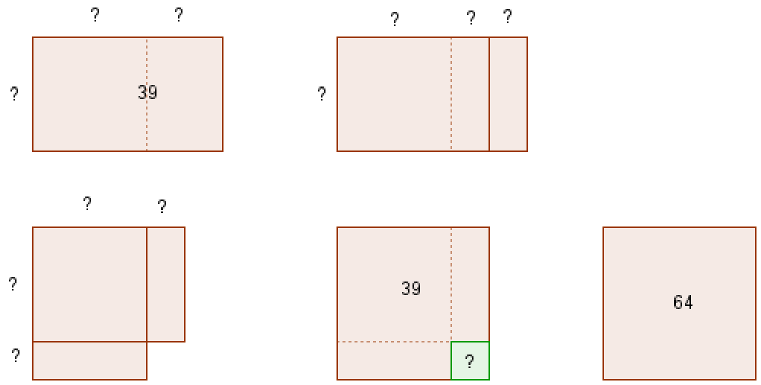
$$x = 0 \text{ και } 3 \ \rightarrow \ x^2 = 3x,\ 2x^2 = 6x, \ldots$$

Λύνουμε εξισώσεις σαν τις εξής: $ax^2 = c$ και $ax^2 = bx$.

Τώρα εισάγεται η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Το πρώτο παράδειγμα ήταν ίδιο με αυτό του al-Khwārizmī: $x^2 + 10x = 39$ (βλ. Σχήμα 13).


**Σχήμα 13: Είναι δυνατό να μετασχηματιστεί αυτό το ορθογώνιο εμβαδού 39 σε τετράγωνο;**

Όπως και στη διαδικασία του al-Khwārizmī, οδηγούνται οι μαθητές στη λύση με αυτήν την ιδέα (βλ. Σχήμα 14).




**Σχήμα 14: Τα διαγράμματα με τη σειρά των δραστηριοτήτων**

Επίσης, δούλεψαν με αρνητικούς αριθμούς, αν και ο al-Khwārizmī δούλεψε μόνο με θετικούς. Οι μαθητές ξέρουν ότι το 8 και το $-8$ στο τετράγωνο δίνουν 64 και άρα μπορούν να προκύψουν δύο λύσεις στην εξίσωση, η γεωμετρική $x = 3$ και $-8 = x + 5 \rightarrow x = -13$, στην εξίσωση $x^2 + 6x = 40$.

Με την εισαγωγή της επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη συμπλήρωση τετραγώνου κατά τη διάρκεια ενός σχολικού έτους, έπειτα περιμένοντας το επόμενο μάθημα για να εισαχθεί η επίλυση με τη χρήση του συνήθους τύπου, οδήγησε σε δύο σχετικά αποτελέσματα για τη μάθηση των μαθητών. Το ένα είναι ότι ανακάλυψαν πως τα προβλήματα που μελετούσαν προήλθαν από αρχαίες εποχές και διαφορετικούς πολιτισμούς, ενώ το δεύτερο είναι ότι συνειδητοποίησαν πως οι αλγεβρικοί τύποι μπορούν να έχουν περισσότερο νόημα όταν ερμηνεύονται γεωμετρικά.

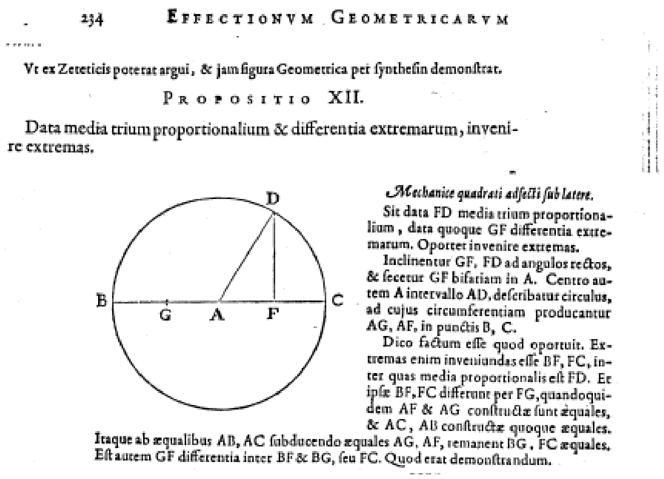
### 4.6.3 Άλγεβρα και Γεωμετρία σε μια τάξη Μαθηματικών

Αυτό το μέρος αποτελείται από δραστηριότητες που περιέχουν γεωμετρικές κατασκευές για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων στον 17$^{ο}$ αιώνα, που μπορούν να παρέχουν στους μαθητές μια ευρύτερη οπτική για τα Μαθηματικά βελτιώνοντας τη μαθησιακή διαδικασία. Η μελέτη της προέλευσης των πολυωνύμων και των σχετικών τους εξισώσεων, δίνει την ιστορία της γεωμετρικής κατασκευής της λύσης μια δευτεροβάθμιας εξίσωσης μέσω διδακτικών κειμένων για τους μαθητές. Εδώ εστιάζουμε στη διαδικασία αλγεβροποίησης των Μαθηματικών που έλαβε χώρα στα τέλη του 16$^{ου}$ και αρχές του 17$^{ου}$ αιώνα, που ήταν κυρίως αποτέλεσμα της εισαγωγής αλγεβρικών διαδικασιών για την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων.

Στο βιβλίο του *Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* ο Al-Khwārizmī περιέγραψε διαφορετικά είδη εξισώσεων με ρητορική επεξήγηση κι όχι με σύμβολα. Οι γεωμετρικές αποδείξεις των εξισώσεών του δίνονταν μέσω τετραγώνων και ορθογωνίων. Αργότερα, ο Leonardo de Pisa (γνωστός ως Fibonacci) εξέφρασε αυτούς τους αραβικούς κανόνες στο βιβλίο του *Liber Abaci* (1202) χρησιμοποιώντας τις λέξεις “radix” για να συμβολίσει μια άγνωστη ποσότητα (ή “res” από άλλους συγγραφείς) και “census” για τη δύναμη του τετραγώνου. Αυτή η ρητορική γλώσσα συνέχισε να χρησιμοποιείται σε πολλά αλγεβρικά έργα στις αρχές της Ιταλικής Αναγέννησης. Ένας από τους πρώτους που αμφισβήτησε τις γεωμετρικές αποδείξεις ήταν ο Pedro Nunes (1502-1578) στο βιβλίο *Libro de algebra en arithmética y geometría* (1567), δίνοντας νέες αποδείξεις για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Ένα σημαντικό βήμα στην ανάπτυξη της συμβολικής γλώσσας έγινε με τη δημοσίευση *In Artem Analyticen Isagoge* του François Viète το 1591. Ο Viète χρησιμοποίησε σύμβολα για να αναπαραστήσει και τις γνωστές και τις άγνωστες ποσότητες, κάτι που του έδωσε τη δυνατότητα να μελετήσει εξισώσεις στη γενική μορφή: $ax^2 + bx = c$. Εισήγαγε μια νέα αναλυτική μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο της ελληνικής Ανάλυσης, που επέτρεπε να αντιμετωπιστούν προβλήματα κάθε μεγέθους, μέσω της συμβολικής γλώσσας. Έλυσε εξισώσεις με την ευκλείδεια ιδέα της αναλογίας: οι αναλογίες μπορούν να μετατραπούν σε εξισώσεις θέτοντας το γινόμενο των ενδιάμεσων αριθμών ίσο με το γινόμενο των ακραίων. Το 1593 δημοσίευσε το *Effectionum Geometricarum canonica recensio* όπου βρήκε γεωμετρικά τις λύσεις των δευτεροβάθμιων και τεταρτοβάθμιων εξισώσεων. Έπειτα, το 1646 ο Schooten επεξεργάστηκε το βιβλίο του στο *Opera Mathematica*. Από αυτήν την έκδοση σχεδιάστηκε η δραστηριότητα στην τάξη.

Ο Viète αναφέρει: «Δεδομένου του μέσου όρου τριών ανάλογων μεγεθών και της διαφοράς των άκρων, να βρείτε τα άκρα. Αυτό περιέχει τη γεωμετρική λύση ενός τετραγώνου επηρεασμένο από ένα επίπεδο που βασίζεται σε μια ρίζα ($A^2 + BA = D^2$). Έστω *FD* είναι ο μέσος τριών αναλογιών ($= D$) και *GF* η διαφορά των άκρων ($= B$), τα άκρα μπορούν να βρεθούν. Έστω τα *GF* και *FD* βρίσκονται κάθετα και το *GF* κόβεται στη μέση στο *A*. Σχεδιάζω έναν κύκλο με κέντρο το *A* με ακτίνα *AD* και προεκτείνω τις *AG* και *AF* στην περιφέρεια του κύκλου στα σημεία *B* και *C*. Τα άκρα βρέθηκαν να είναι τα *BF* $(A + B)$ και *FC* $(= A)$ μεταξύ των οποίων το *FD* $(= D)$ είναι η μέση αναλογία. Επίσης, τα *BF* και *FC* διαφέρουν κατά *FG*, αφού τα *AF* και *AG* είναι ίσα και τα *AC* και *AB* είναι ίσα εκ κατασκευής. Άρα, αφαιρώντας τα ίσα *AG* και *AF* από τα ίσα *AB* και *AC*, μένουν τα ίσα *BG* και *FC*. Το *GF* είναι η διαφορά των *BF* και *BG* ή *FC*, όπως θέλαμε να δείξουμε».


234 EFFECTIONVM GEOMETRICARVM

Vt ex Zeteticis poterat argui, & jam figura Geometrica per synthesin demonstrat.

PROPOSITIO XII.

Data media trium proportionalium & differentia extremarum, invenire extremas.



*Mechanice quadrati adfecti sub latere.*

Sit data FD media trium proportionalium, data quoque GF differentia extremarum. Oportet invenire extremas.

Inclinentur GF, FD ad angulos rectos, & secetur GF bifariam in A. Centro autem A intervallo AD, describatur circulus, ad cujus circumferentiam producantur AG, AF, in punctis B, C.

Dico factum esse quod oportuit. Extremas enim inveniundas esse BF, FC, inter quas media proportionalis est FD. Et ipsæ BF, FC differunt per FG, quandoquidem AF & AG constructæ sunt æquales, & AC, AB constructæ quoque æquales. Itaque ab æqualibus AB, AC subducendo æquales AG, AF, remanent BG, FC æquales. Est autem GF differentia inter BF & BG, seu FC. Quod erat demonstrandum.

**Σχήμα 15: Η κατασκευή των τριών αναλογιών του Viète**

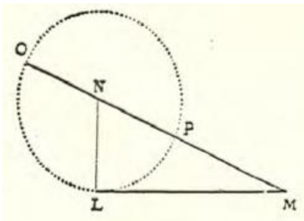
Δημιουργεί την εξίσωση $A^2 + BA = D^2$ μέσω αναλογιών, που σε σύγχρονο συμβολισμό είναι $(A + B): D = D: A$. Η γεωμετρική του κατασκευή των γραμμών *A*, *B* και *D* που ικανοποιεί την ισότητα ορίστηκε στο σχήμα 15. Σχεδιάζει το $FD = D$ και το $GF = B$, σχηματίζοντας μια ορθή γωνία και χωρίζει το *B* στη μέση ως $AF = \frac{B}{2}$. Σχεδιάζει τον κύκλο με ακτίνα *AC*, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως υποτείνουσα του τριγώνου που σχηματίζεται από τα $\frac{B}{2}$ και *D*, $AD = AC = \left[\left(\frac{B}{2}\right)^2 + D^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Οι λύσεις είναι τότε τα τμήματα $FC = AC - AF$ και $BF = BA + AF$, όπου $BA = AC =$ ακτίνα.

Στην τάξη, μετά το μάθημα των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, πραγματοποιήθηκε μια δραστηριότητα με βάση αυτές τις γεωμετρικές κατασκευές, ώστε να τονιστεί η αλγεβρική λύση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με μια άλλη οπτική. Η διαδικασία κατέληγε με τις ερωτήσεις που έθεσε ο καθηγητής στους μαθητές για να ξεκαθαριστούν κάποιες ιδέες.

1) Αναπτύξτε τη γεωμετρική κατασκευή του Viète και δώστε μια εξήγηση για τη διαδικασία. 2) Μπορεί αυτή η γεωμετρική κατασκευή να χρησιμοποιηθεί για κάθε δευτεροβάθμια εξίσωση; Αιτιολογήστε. 3) Τι γίνεται με τις αρνητικές λύσεις; 4) Πώς χρησιμοποιούνται το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το θεώρημα ύψους; Εξηγήστε τη σχέση με τη λύση της εξίσωσης. 5) Ποια είναι η βασική διαφορά μεταξύ αυτής της γεωμετρικής κατασκευής και της κλασικής κατασκευής με τη συμπλήρωση τετραγώνων;

Μετά την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών, ο καθηγητής συνεχίζει με την παρουσίαση ενός άλλου ιστορικού κειμένου με διαφορετική γεωμετρική κατασκευή. Με αφορμή το έργο του Viète, πολλοί μαθηματικοί ξεκίνησαν να χρησιμοποιούν αλγεβρικές διαδικασίες για διαφορά προβλήματα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ήταν η γεωμετρική κατασκευή σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση από το *La Géométrie* (1637) του René Descartes. Ξεκίνησε το Βιβλίο I αναπτύσσοντας την Άλγεβρα των τμημάτων, δείχνοντας πώς προστίθενται, πολλαπλασιάζονται, διαιρούνται και υπολογίζονται οι τετραγωνικές τους ρίζες με γεωμετρικές κατασκευές. Έπειτα, έδειξε πώς μια δευτεροβάθμια εξίσωση λύνεται γεωμετρικά (βλ. Σχήμα 16):

«Για παράδειγμα, αν έχω $z^2 = az + bb$, κατασκευάζω το ορθογώνιο τρίγωνο $NLM$ με μια πλευρά $LM$ ίση με $b$, την τετραγωνική ρίζα μιας άγνωστης ποσότητας $b^2$ και την άλλη πλευρά $LN$ ίση με $\frac{1}{2}a$, δηλαδή να διαιρεθεί στο μισό η άλλη άγνωστη ποσότητα που πολλαπλασιάστηκε με $z$, την οποία υπέθεσα ότι είναι η άγνωστη γραμμή. Έπειτα, προεκτείνω την $MN$, δηλαδή την υποτείνουσα του τριγώνου, μέχρι το $O$ ώστε το $NO$ να είναι ίσο με το $NL$, όλη η γραμμή $OM$ είναι η ζητούμενη γραμμή $z$».




**Σχήμα 16: Γεωμετρική κατασκευή (Descartes, 1637)**

Στην τάξη, μετά την ανάλυση της κατασκευής του Descartes, έγινε μια συζήτηση με τους μαθητές. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι ο συμβολικός τύπος εμφανίζεται αναλυτικά στο έργο του Descartes. Η γεωμετρική του κατασκευή αντιστοιχεί στην κατασκευή μιας άγνωστης γραμμής με βάση κάποιες δοσμένες γραμμές, άρα η λύση της εξίσωσης δίνεται από το άθροισμα μιας γραμμής και μια τετραγωνική ρίζα, που προέκυψε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ωστόσο, ο Descartes παρέλειψε τη δεύτερη ρίζα, που προκύπτει από τον αρνητικό αριθμό.

Οι ερωτήσεις στους μαθητές μοιάζουν με αυτές του Viète. Επίσης, οι μαθητές μπορούν να συγκρίνουν τις δύο κατασκευές. Οι διαφορές από τον Viète είναι σχετικές, επειδή ο Descartes γράφει ξεκάθαρα «πώς να λυθεί» η εξίσωση, ενώ ο Viète λύνει ένα γεωμετρικό πρόβλημα με ένα γεωμετρικό σχήμα, όπου η αναλογία ταυτίζεται με μια εξίσωση. Άλλες πιθανές ερωτήσεις είναι: ποια γεωμετρική λογική έχει χρησιμοποιήσει ο συγγραφέας; Ποιος είναι ο ρόλος του Πυθαγορείου Θεωρήματος στην επίλυση εξισώσεων δεύτερου βαθμού; Ποια είναι η σχέση μεταξύ αυτής της γεωμετρικής κατασκευής και της αλγεβρικής λύσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης; Αυτές οι ερωτήσεις βοηθούν τους καθηγητές να σκεφτούν τη λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από μια γεωμετρική σκοπιά, αλλά και τη σχέση μεταξύ Άλγεβρας και Γεωμετρίας μέσω της ιστορίας.

Αυτές οι δραστηριότητες δίνουν κίνητρο στους μαθητές να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικές καταστάσεις, παρά να αναπαράγουν τυποποιημένα αυτά που έχουν μάθει. Επιπλέον, τους βοηθούν να εκτιμήσουν τη συνεισφορά διαφορετικών πολιτισμών στη γνώση, κάτι που είναι σημαντικό στις σύγχρονες πολυπολιτισμικές τάξεις. Γνωρίζουν παράλληλα το κοινωνικό και επιστημονικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκαν τα Μαθηματικά, χωρίς να τα βλέπουν ως ένα τελικό αποτέλεσμα, αλλά ως μια επιστήμη που εξελίχθηκε μέσω της αναζήτησης απαντήσεων σε ερωτήσεις της ανθρωπότητας καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Τέλος, μεγάλο μέρος των δραστηριοτήτων σχετίζεται με τη Γεωμετρία, καθώς προσφέρει οπτική και αισθητική αξία, βοηθώντας στην κατανόηση του κόσμου. Η δομή της είναι κατάλληλη για την ανάπτυξη της κλασικής διαδικασίας του συλλογισμού και της απόδειξης από τους μαθητές και τη συνδέει με την Άλγεβρα καθιερώνοντας τη σχέση μεταξύ σχημάτων και τύπων.

## 4.7 Έρευνα Demattè: Η ιστορία στην τάξη. Ευκαιρίες και ανοικτές ερωτήσεις

### 4.7.1 Εισαγωγή

Η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στις δραστηριότητες της τάξης είναι ένα δύσκολο αλλά και ενδιαφέρον εγχείρημα. Σε αυτή την έρευνα αναφέρονται παραδείγματα με τη χρήση ιστορικών κειμένων που αναπτύχθηκαν από τον Adriano Demattè. Το κίνητρο είναι η πεποίθηση ότι η ιστορία είναι ένας φορέας πολιτισμού στις απόψεις των μαθητών για τα Μαθηματικά και ότι μπορούν να επιτευχθούν εκπαιδευτικοί στόχοι μέσω αυτής. Στον σχεδιασμό των δραστηριοτήτων ακολουθήθηκε η θεωρία του Janhke. Η έρευνα εφαρμόστηκε μέσω ομαδικών εργασιών των μαθητών και ο ρόλος του καθηγητή ήταν για τον μετασχηματισμό της γνώσης.

Ένα σημαντικό πρόβλημα μπορεί να είναι η μεταφορά των πειραμάτων σε διαφορετικές καταστάσεις με διαφορετικούς καθηγητές. Πολλοί καθηγητές είναι επιφυλακτικοί με την εισαγωγή της ιστορίας στην εκπαίδευση ή ακόμη δεν πιστεύουν ότι θα τους βοηθήσουν να πετύχουν τους διδακτικούς στόχους. Άλλοι δεν γνωρίζουν πολλά για την ιστορία των Μαθηματικών, πόσο μάλλον για τις αυθεντικές πηγές.

Μέσω της έρευνας στόχος είναι να απαντηθούν οι εξής ερευνητικές ερωτήσεις:

- ποιου είδους δραστηριότητες είναι πιο κατάλληλες για να εφαρμόσουν οι καθηγητές την ιστορία στην τάξη;
- με τη χρήση των αυθεντικών κειμένων ποιους εκπαιδευτικούς στόχους μπορούν οι καθηγητές να θεωρήσουν σχετικούς με τους στόχους της τάξης των Μαθηματικών;

### 4.7.2 Θεωρητικό υπόβαθρο

Το θεωρητικό υπόβαθρο της μελέτης εμπνεύστηκε από την έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση και συγκεκριμένα από αυτή που αφορά τη σχέση μεταξύ της ιστορίας και της παιδαγωγικής των Μαθηματικών. Ο Demattè θεωρεί την ιδανική προσέγγιση στη διδασκαλία να είναι η διευκόλυνση της αυτονομίας των μαθητών, η μάθηση με νόημα και συνείδηση. Προσπαθεί να αμφισβητήσει την πολιτισμική πεποίθηση που συνδέει τα Μαθηματικά με την ιδέα ότι πρέπει να βρεθεί η σωστή απάντηση, γρήγορα και ακολουθώντας τους κανόνες του βιβλίου ή του καθηγητή, μέσω της αλλαγής των ρόλων των καθηγητών και των μαθητών. Καθιερώθηκε η αλληλεπίδραση καθηγητή και μαθητών με το μαθηματικό περιεχόμενο, μέσω ομαδικών εργασιών, συζητήσεων, αναζητήσεων μαθηματικών φαινομένων και βγάζοντας συμπεράσματα.

Η χρήση αυθεντικών πηγών έχει βοηθήσει τη διδασκαλία των Μαθηματικών (Furinghetti, Jahnke, & van Maanen, 2006, Pengelley, 2011, Jankvist, 2014). Ο Demattè βασίστηκε στην ερμηνευτική προσέγγιση, όπου οι μαθητές χρησιμοποιούν αυθεντικά κείμενα με ένα θέμα για το οποίο ήδη έχουν μια καλή κατανόηση. Επίσης, οι μαθητές μαζεύουν πληροφορίες για τη βιογραφία των συγγραφέων και του πολιτισμικού πλαισίου.

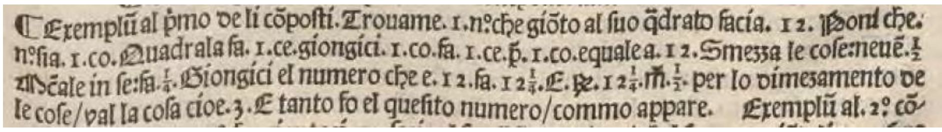
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα σχετικά με το θεωρητικό υπόβαθρο και τις πρακτικές απαιτήσεις σημειώνονται οι στόχοι του πειράματος:

- η ενίσχυση των ικανοτήτων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων
- η χρήση προηγούμενων γνώσεων για την ανακάλυψη του γνωστού μέσα στο άγνωστο (Jahnke et al., 2000)
- η χρήση κειμένου για τη συλλογή μαθηματικής πληροφορίας
- η κατανόηση των ιδιοτροπιών ενός αυθεντικού κειμένου (η ρητορική φύση, η επιλογή των όρων, η έλλειψη συμβολισμού)
- Η εξέταση των κειμένων με την ευρεία έννοια περιλαμβάνοντας τις προσωπικές συνδέσεις και σχόλια των μαθητών.

### 4.7.3 Ένα πείραμα στην τάξη χρησιμοποιώντας αυθεντικά κείμενα

Ο Demattè διδάσκει σε ένα ιταλικό λύκειο ανθρωπιστικών επιστημών (Liceo delle Scienze Umane), όπου οι μαθητές επιλέγουν ανάμεσα σε δύο κλάδους: α) ανθρωπιστικές επιστήμες, β) κοινωνικο-οικονομικές επιστήμες όπου η μελέτη των ανθρωπιστικών επιστημών μελετάται λιγότερο, δίνοντας περισσότερη βάση στα Οικονομικά και στα Μαθηματικά και διαρκεί 5 χρόνια. Οι επιδόσεις των μαθητών στα Μαθηματικά είναι αρκετά χαμηλές. Ένα εισαγωγικό διαγώνισμα δίνεται στην αρχή του πρώτου χρόνου, με τις σωστές απαντήσεις να είναι περίπου στο 60%. Στο τέλος του δεύτερου χρόνου δίνεται ένα διαγώνισμα από την εθνική οργάνωση της αξιολόγησης (INVALSI). Στο τέλος του πέμπτου χρόνου οι μαθητές δίνουν το τελικό διαγώνισμα των εθνικών εξετάσεων, μαζί με άλλα τρία ή τέσσερα σχολικά μαθήματα.

Η δραστηριότητα διεξήχθη στην τρίτη τάξη του Λυκείου (μαθητές ηλικίας 17-18 ετών). Ο μέσος όρος των μαθητών στις εθνικές εξετάσεις ήταν κάτω από το μέσο όρο. Οι μαθητές που ήταν αδύναμοι στις αλγεβρικές διαδικασίες δυσκολεύτηκαν στην επίλυση προβλημάτων. Για αυτό, αναζητήθηκε μια σειρά από καινούρια προβλήματα. Σε προηγούμενα μαθήματα γνώρισαν την ιστορία των Μαθηματικών και μερικά παραδείγματα. Ένα παράδειγμα κειμένου φαίνεται παρακάτω (Σχήμα 17). Αφορά μια άσκηση που απαιτεί πιο εύκολους υπολογισμούς από τα περισσότερα προβλήματα.


Exemplū al p̄mo de li cōposti. Trouame. 1. n°. che giōto al suo q̄drato facia. 12. Pono che n°. sia. 1. co. Quadrala fa. 1. ce. giongici. 1. co. fa. 1. ce. p̄. 1. co. equale a. 12. Smezza le cose: neuē. ½ Mcale in se: fa. ¼. Giongici el numero che e. 12. fa. 12¼. E. R. 12¼. m̄. ½. per lo dimezamento de le cose / val la cosa cioe. 3. E tanto fo el quesito numero / commo appare. Exemplū al. 2°. cō

**Σχήμα 17: Από το *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita* του Pacioli, Βενετία 1523**

Σε μετάφραση: «Να βρείτε έναν αριθμό, που μαζί με το τετράγωνό του κάνει $12$. Φανταστείτε ότι ο αριθμός είναι ένα πράγμα. Τετραγωνίστε το. Κάνει μια ποσότητα. Ενώστε το ένα πράγμα. Μια ποσότητα και ένα πράγμα ισούται με $12$. Χωρίστε στη μέση τα πράγματα. Γίνεται $\frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάστε τα με τον εαυτό τους. Κάνει $\frac{1}{4}$. Ενώστε με τον αριθμό που είναι $12$. Κάνει $12\frac{1}{4}$. Η τετραγωνική ρίζα του είναι $-\frac{1}{2}$, λόγω του χωρισμού των πραγμάτων στα δύο, ισούται με το πράγμα δηλαδή $3$. Και ο απαιτούμενος αριθμός κάνει αυτή την ποσότητα, όπως φαίνεται».

Δίνοντας στους μαθητές αυτό το κομμάτι, ζητήθηκε να το διαβάσουν και να το ερμηνεύσουν ως προς το μαθηματικό περιεχόμενο. Θεωρήθηκε ότι η ιστορία εισάγει ανθρωπιστικές πλευρές στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε μια διαφορετική εκδοχή του αυθεντικού κειμένου διατηρώντας πάντως τα εξής χαρακτηριστικά:

- τους τύπους, για να φαίνεται ότι είναι ένα αρχαίο κείμενο
- τις συντομεύσεις, γιατί εγείρουν ερωτήματα σχετικά με τις εκτυπώσεις στον 15ο και 16ο αιώνα
- τις αρχαίες ιταλικές λέξεις, για να φανεί η εξέλιξη της γλώσσας
- την απουσία διαχωρισμού μεταξύ προβλήματος και λύσης, κάτι που ήταν χαρακτηριστικό στα μαθηματικά κείμενα μέχρι τον Μεσαίωνα
- τα περιττά λόγια, γιατί άλλαξε και ο τρόπος που παρουσιάζονται τα μαθηματικά κείμενα
- ο ασυνήθιστος τρόπος γραφής των ρητών αριθμών, για να φανεί ένα παράδειγμα του «οικείου που βρίσκεται μέσα σε κάτι μη οικείο».

Οι μαθητές δούλεψαν σε ζευγάρια. Τους ζητήθηκε να μεταφράσουν το κείμενο στη σύγχρονη ιταλική γλώσσα, να υποθέσουν για το νόημα του κειμένου και να συγκρίνουν μεταξύ τους τις εξηγήσεις τους. Μετά από λίγα λεπτά έκαναν ερωτήσεις στον καθηγητή, οι οποίες απαντήθηκαν μέσω βοηθητικών στοιχείων ή με άλλες ερωτήσεις.

Η δραστηριότητα έδωσε αμφιλεγόμενα αποτελέσματα. Μετά από κάποιες εξηγήσεις από τον καθηγητή, οι μαθητές είχαν κατά μέσο όρο παρόμοιους βαθμούς με προηγούμενα τεστ, ενώ κάποιοι τα πήγαν αρκετά καλύτερα. Οι μαθητές θεώρησαν ότι ήταν μια ουσιώδης εμπειρία. Από την άλλη, στο μέρος της δραστηριότητας όπου μαθητές ζητήθηκαν να δουλέψουν αυτόνομα δεν έδειξαν καλά αποτελέσματα σχετικά με την κατανόηση της λύσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Δεν κατάφεραν να χρησιμοποιήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις για την ερμηνεία του κειμένου.

Μερικές από τις δυσκολίες των μαθητών ήταν η εξής:

1. Τα γράμματα. Για παράδειγμα: «τι σημαίνει το T στη λέξη Trouame ;» η σύγχρονη ιταλική λέξη *Trovami* υποδεικνύει τη σωστή απάντηση: *T*. Ταυτόχρονα το u εμφανίζεται με διαφορετικό τρόπο για το γράμμα *v*.
2. Οι συντομεύσεις. Στη λέξη q̈drato (quadrato), δύο γράμματα, τα *u* και *a*, παραλείπονται βάζοντας τις δύο τελείες πάνω από το *q*.

3. Η παρουσίαση της δήλωσης. «Πού είναι η ερώτηση; Πού ξεκινά η λύση; Δεν υπάρχουν σύγχρονα σύμβολα». Η διαδοχική παρουσίαση στο κείμενο αντιβαίνει στον σύγχρονο συμβολισμό που δείχνει όλες τις πράξεις μαζί.
4. Από τις λέξεις στα σύμβολα. «Να βρείτε έναν αριθμό που αν ενωθεί με το τετράγωνό του δίνει 12». Αυτό πλέον θα το γράφαμε με μια εξίσωση.
5. Άγνωστη μαθηματική διαδικασία. «Γιατί πρέπει να χωρίσω στη μέση τα “πράγματα”; δεν είναι καν ζυγά».
6. Αναζήτηση πληροφοριών για να μαντέψουν νοήματα. Κάποιοι μαθητές δυσκολεύτηκαν με τα σημεία 1 και 2. Δε σκέφτηκαν να διαβάσουν το κείμενο ξανά, ώστε να βρουν το συγκεκριμένο νόημα των γραμμάτων και λέξεων.
7. Μετα-γνωστικές ικανότητες σχετικά με τα μαθηματικά εργαλεία. Πολλοί μαθητές δεν σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν το σύγχρονο τύπο ώστε να ερμηνεύσουν το κείμενο, όπως για παράδειγμα για το γράμμα  που συμβολίζει την τετραγωνική ρίζα.

### 4.7.4 Τελευταία σχόλια

Σε αυτή την έρευνα παρουσιάστηκαν παραδείγματα δραστηριοτήτων σε τάξεις. Ο Demattè αναφέρει ότι δεν είναι πολλοί οι καθηγητές που χρησιμοποιούν την ιστορία στη διδασκαλία, αλλά πιστεύει ότι τα εκπαιδευτικά προβλήματα μπορούν να εφαρμοστούν για να εμπλακούν περισσότερο οι μαθητές και να τους βοηθήσουν στη μάθηση. Τέλος αναφέρει ότι οι καθηγητές που συμμετέχουν στις δραστηριότητες του ESU-HPM, μπορούν να παράγουν υλικό που θα επεκτείνει τη συζήτηση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, θα διευκολύνουν πρόσβαση σε στοιχεία της ιστορίας των Μαθηματικών και θα προωθήσουν την επίγνωση της σχετικότητας της ιστορίας με την εκπαίδευση.

## 4.8 Έρευνα Vicentini: Παίζοντας με τον Euler

### 4.8.1 Εισαγωγή

Αυτό το εργαστήριο βασίστηκε στο έργο της Caterina Vicentini και των μαθητών της κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2011-2012 και παρουσιάστηκε στη «Γωνιά των Μαθηματικών Αγώνων» στην τρίτη έκδοση του επιστημονικού συνεδρίου “Scienza under 18” που έγινε τον Μάιο του 2012 στο Monfalcone της Ιταλίας. Έπαιξαν ένα παιχνίδι με άλλους μαθητές και το κοινό, που δημιουργήθηκε κατά τη διάρκεια της εργασίας με αυθεντικές πηγές σε κάποια εργαστήρια εκτός διδακτέας ύλης στην ιστορία των Μαθηματικών. Οι συμμετέχοντες ήταν εθελοντές μαθητές ηλικίας 15-18 χρονών. Κατά τη διάρκεια του εργαστηρίου στην Κοπεγχάγη έπαιξαν τη δύσκολη έκδοση του παιχνιδιού και εξέτασαν αποσπάσματα της Άλγεβρας του Euler. Έπειτα, συζητήθηκε η μετατροπή των αυθεντικών πηγών σε παιχνίδια και η αξία των παιχνιδιών στην ενίσχυση του κινήτρου των μαθητών για τα Μαθηματικά.

Στα ιταλικά σχόλια η διδασκαλία των Μαθηματικών στοχεύει κυρίως στις καλύτερες δυνατές επιδόσεις των μαθητών στα διαγωνίσματα και στις εξετάσεις. Σπάνια εμφανίζεται η ιστορία των Μαθηματικών και όταν συμβαίνει αυτό υπάρχουν στις τελευταίες σελίδες των κεφαλαίων όπου συνήθως αγνοούνται από τους καθηγητές και τους μαθητές. Για αυτό η Vicentini ήθελε να δημιουργήσει να δημιουργήσει δραστηριότητες βασιζόμενες σε αυθεντικές πηγές, ώστε να κατανοήσουν οι μαθητές ότι τα Μαθηματικά έχουν μια ιστορική ανάπτυξη κι ότι είναι ένα ανθρώπινο πολιτισμικό αποτέλεσμα.

### 4.8.2 Τα εργαστήρια στο σχολείο

Η πρώτη φάση είχε έξι εξωσχολικά μαθήματα δύο ωρών με μια αυθεντική πηγή. Το βιβλίο που επιλέχθηκε ήταν *Τα Στοιχεία της Άλγεβρας* του Leonhard Euler, με την αυθεντική έκδοση *Vollstandige Anleitung zur Algebra* να χρονολογείται από το 1770. Ο κύριος λόγος για αυτή την επιλογή ήταν ότι είναι ένα αντίγραφο της δεύτερης γαλλικής έκδοσης του 1807 που διατηρείται στη βιβλιοθήκη Statale Isontina της ιταλικής πόλης Gorizia, οπότε υπήρχε η δυνατότητα να έρθουν οι μαθητές σε άμεση επαφή με αυτό το βιβλίο, που είχε σημαντική συναισθηματική επιρροή σε αυτούς. Ακόμη, κατά τη διάρκεια του συνεδρίου έγινε γνωστή η ύπαρξη της συλλογής των αρχαίων κειμένων στην πόλη και στο ευρύτερο κοινό.

Οι μαθητές αποτελούσαν μια αρκετά ετερογενή ομάδα, καθώς προερχόταν από γλωσσολογικούς, καλλιτεχνικούς και επιστημονικούς τομείς του Ινστιτούτου Statale d'Istruzione Superiore της Gorizia. Για αυτό και σε συνδυασμό με τον τελικό στόχο που ήταν να δημιουργηθεί ένα μαθηματικό παιχνίδι που θα παίζεται από μαθητές και το ευρύτερο κοινό, επιλέχθηκε ένα θέμα που θα ήταν προσιτό σε όλους, αλλά όχι τετριμμένο. Έτσι μελετήθηκε το τρίτο κομμάτι του πρώτου βιβλίου και συγκεκριμένα τα κεφάλαια 3 και 4 που αφορούν τις αριθμητικές προόδους και τα αθροίσματά τους. Αρχικά, οι μαθητές διάβασαν ένα μικρό κομμάτι, ακολούθησαν κάποιες ερωτήσεις από τον καθηγητή και μετά μοιράστηκαν τις ιδέες τους σε ζευγάρια. Στο τέλος, δύο ζευγάρια δημιούργησαν μια ομάδα τεσσάρων ατόμων για να κάνουν την εργασία. Το πρώτο κείμενο που μελετήθηκε ήταν το εξής:

**402.** We have already remarked, that a series of numbers composed of any number of terms, which always increase, or decrease, by the same quantity, is called an *arithmetical progression*.

Thus, the natural numbers written in their order, as 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, &c. form an arithmetical progression, because they constantly increase by unity; and the series 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, &c. is also such a progression, since the numbers constantly decrease by 3.

**403.** The number, or quantity, by which the terms of an arithmetical progression become greater or less, is called the *difference*; so that when the first term and the difference are given, we may continue the arithmetical progression to any length.

For example, let the first term be 2, and the difference 3, and we shall have the following increasing progression: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, &c. in which each term is found by adding the difference to the preceding one.

**404.** It is usual to write the natural numbers, 1, 2, 3, 4, 5, &c. above the terms of such an arithmetical progression, in order that we may immediately perceive the rank which any term holds in the progression, which numbers, when written above the terms, are called *indices*; thus, the above example will be written as follows:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Indices.* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| *Arith. Prog.* | 2, | 5, | 8, | 11, | 14, | 17, | 20, | 23, | 26, | 29, | &c. |

where we see that 29 is the tenth term.

**Σχήμα 18: Απόσπασμα από την αγγλική έκδοση του *Vollstandige Anleitung zur Algebra***

Εδώ ορίστηκε η έννοια της αριθμητικής προόδου και της διαφοράς της, ενώ παρουσιάστηκαν και κάποια παραδείγματα. Ακολούθησαν οι εξής ερωτήσεις:

1. Έστω $α$ να είναι ο πρώτος όρος και $d$ να είναι η διαφορά, πώς θα γράφατε τον δέκατο όρο της προόδου που είναι αύξουσα;
2. Αν η πρόοδος ήταν φθίνουσα;
3. Πώς θα γράφετε τον νιοστό όρο και στις δύο περιπτώσεις;

Οι απαντήσεις βρίσκονται στο επόμενο κείμενο (Σχήμα 19) με τον νιοστό όρο $n = a \pm (n-1)d$, άρα για τον δέκατο θα ήταν $a + 9d$ στην αύξουσα και $a - 9d$ στη φθίνουσα:

**405.** Let $a$ be the first term, and $d$ the difference, the arithmetical progression will go on in the following order:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a, & a \pm d, & a \pm 2d, & a \pm 3d, & a \pm 4d, & a \pm 5d, & a \pm 6d, \text{ \&c.} \end{array}$$

according as the series is increasing, or decreasing, whence it appears that any term of the progression might be easily found, without the necessity of finding all the preceding ones, by means only of the first term $a$ and the difference $d$; thus, for example, the tenth term will be $a \pm 9d$, the hundredth term $a \pm 99d$, and, generally, the $n$th term will be $a \pm (n-1)d$.

**406.** When we stop at any point of the progression, it is of importance to attend to the first and the last term, since the index of the last term will represent the number of terms. If, therefore, the first term be $a$, the difference $d$, and the number of terms $n$, we shall have for the last term $a \pm (n-1)d$, according as the series is increasing or decreasing, which is consequently found by multiplying the difference by the number of terms *minus* one, and adding, or subtracting, that product from the first term. Suppose, for example, in an ascending arithmetical progression of a hundred terms, the first term is 4, and the difference 3; then the last term will be $99 \times 3 + 4 = 301$.

**Σχήμα 19: Συνέχεια αποσπάσματος**

Ακολούθησαν οι ερωτήσεις:

4. Έστω ότι έχετε μια αύξουσα πρόοδο 7 όρων, της οποίας ο πρώτος είναι 2 και τελευταίος είναι 26, να βρείτε τη διαφορά.
5. Αν σε μια πεπερασμένη αύξουσα ακολουθία ξέρετε ότι οι όροι είναι $n$ και δίνονται ο πρώτος όρος $a$ και ο τελευταίος $z$, πώς θα υπολογίσετε τη διαφορά;

Έπειτα, οι μαθητές συζήτησαν το τρίτο κείμενο (Σχήμα 20) όπου βρίσκεται και η διαφορά $d = \frac{z-a}{n-1}$:

**407.** When we know the first term $a$, and the last $z$, with the number of terms $n$, we can find the difference $d$; for, since the last term $z = a \pm (n-1)d$, if we subtract $a$ from both sides, we obtain $z - a = (n-1)d$. So that by taking the difference between the first and last term, we have the product of the difference multiplied by the number of terms *minus* 1; we have therefore only to divide $z - a$ by $n - 1$ in order to obtain the required value of the difference $d$, which will be $\frac{z-a}{n-1}$. This result furnishes the following rule: Subtract the first term from the last, divide the remainder by the number of terms *minus* 1, and the quotient will be the common difference: by means of which we may write the whole progression.

**408.** Suppose, for example, that we have an increasing arithmetical progression of nine terms, whose first is 2, and last 26, and that it is required to find the difference. We must subtract the first term 2 from the last 26, and divide the remainder, which is 24, by $9 - 1$, that is, by 8; the quotient 3 will be equal to the difference required, and the whole progression will be:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

**Σχήμα 20: Συνέχεια αποσπάσματος**

Με τις ερωτήσεις:

6. Πώς βρίσκεται ο αριθμός των $n$ όρων, αν δίνονται ο πρώτος και ο τελευταίος, μαζί με τη διαφορά;
7. Η ερώτηση 6 θα έχει πάντα απάντηση;
8. Αν ναι να εξηγήσετε γιατί, αλλιώς να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Ακολούθησε το κείμενο με τις απαντήσεις όπου προκύπτει $n = \frac{z-a}{d} + 1$, αρκεί το $\frac{z-a}{d}$ να είναι ακέραιος αριθμός:

**409.** If now the first term $a$, the last term $z$, and the difference $d$, are given, we may from them find the number of terms $n$; for since $z - a = (n - 1)d$, by dividing both sides by $d$, we have $\frac{z-a}{d} = n - 1$; also $n$ being greater by 1 than $n - 1$, we have $n = \frac{z-a}{d} + 1$; consequently the number of terms is found by dividing the difference between the first and the last term, or $z - a$, by the difference of the progression, and adding unity to the quotient.

For example, let the first term be 4, the last 100, and the difference 12, the number of terms will be $\frac{100-4}{12} + 1 = 9$;

**410.** It must be observed, however, that as the number of terms is necessarily an integer, if we had not obtained such a number for $n$, in the examples of the preceding article, the questions would have been absurd.

Whenever we do not obtain an integer number for the value of $\frac{z-a}{d}$, it will be impossible to resolve the question; and consequently, in order that questions of this kind may be possible, $z - a$ must be divisible by $d$.

**Σχήμα 21: Συνέχεια αποσπάσματος**

Έπειτα, ζητήθηκε από τους μαθητές να αποδείξουν ότι το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε όρων που έχουν ίση απόσταση, ο ένας από τον πρώτο και ο άλλος από τον τελευταίο όρο, είναι πάντα ίσο με το άθροισμα του πρώτου και του τελευταίου όρου. Ακολούθησε το επόμενο απόσπασμα για επιβεβαίωση:

**412.** It is often necessary also to find the sum of an arithmetical progression. This might be done by adding all the terms together; but as the addition would be very tedious, when the progression consisted of a great number of terms, a rule has been devised, by which the sum may be more readily obtained.

**413.** We shall first consider a particular given progression, such that the first term is 2, the difference 3, the last term 29, and the number of terms 10;

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2, | 5, | 8, | 11, | 14, | 17, | 20, | 23, | 26, | 29. |

In this progression we see that the sum of the first and last term is 31; the sum of the second and the last but one 31; the sum of the third and the last but two 31, and so on: hence we conclude, that the sum of any two terms equally distant, the one from the first, and the other from the last term, is always equal to the sum of the first and the last term.

**414.** The reason of this may be easily traced; for if we suppose the first to be $a$, the last $z$, and the difference $d$, the sum of the first and the last term is $a + z$; and the second term being $a + d$, and the last but one $z - d$, the sum of these two terms is also $a + z$. Farther, the third time being $a + 2d$, and the last but two $z - 2d$, it is evident that these two terms also, when added together, make $a + z$; and the demonstration may be easily extended to any other two terms equally distant from the first and last.

**Σχήμα 22: Συνέχεια αποσπάσματος**

Στη συνέχεια, στόχος ήταν να βρεθεί ο γενικός τύπος για το άθροισμα σε δύο περιπτώσεις:

1. όταν είναι γνωστός ο πρώτος, ο τελευταίος και ο αριθμός των όρων
2. όταν είναι γνωστός ο πρώτος όρος, η διαφορά και ο αριθμός των όρων.

Για αυτό οι μαθητές διαβάζουν τη λύση του Euler:

**415.** To determine, therefore, the sum of the progression proposed, let us write the same progression term by term, inverted, and add the corresponding terms together, as follows:

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

This series of equal terms is evidently equal to twice the sum of the given progression: now, the number of those equal terms is 10, as in the progression, and their sum consequently is equal to $10 \times 31 = 310$. Hence, as this sum is twice the sum of the arithmetical progression, the sum required must be 155.

**416.** If we proceed in the same manner with respect to any arithmetical progression, the first term of which is $a$, the last $z$, and the number of terms $n$; writing under the given progression the same progression inverted, and adding term to term, we shall have a series of $n$ terms, each of which will be expressed by $a + z$; therefore the sum of this series will be $n(a + z)$, which is twice the sum of the proposed arithmetical progression; the latter, therefore, will be represented by $\frac{n(a+z)}{2}$.

**Σχήμα 23: Συνέχεια αποσπάσματος**

Έπειτα, τους ζητήθηκε να συγκεκριμενοποιήσουν τον τύπο στις περιπτώσεις που οι πρόοδοι ξεκινούν με 1, έχοντας *n* όρους και των οποίων οι διαφορές είναι μεταξύ του 1 και του 10. Ακολουθούν οι συγκεκριμένοι τύποι:

**421.** If it be required to add together all the natural numbers from 1 to $n$, we have, for finding this sum, the first term 1, the last term $n$, and the number of terms $n$; therefore the sum required is $\frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. If we make $n = 1766$, the sum of all the numbers, from 1 to 1766, will be 883, or half the number of terms, multiplied by $1767 = 1560261$.

**422.** Let the progression of uneven numbers be proposed, 1, 3, 5, 7, &c. continued to $n$ terms, and let the sum of it be required. Here the first term is 1, the difference 2, the number of terms $n$; the last term will therefore be $1 + (n - 1)2 = 2n - 1$, and consequently the sum required $= n^2$.

The whole therefore consists in multiplying the number of terms by itself; so that whatever number of terms of this progression we add together, the sum will be always a square, namely, the square of the number of terms; which we shall exemplify as follows:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Indices,* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10, | &c. |
| *Progress.* | 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | 11, | 13, | 15, | 17, | 19, | &c. |
| *Sum.* | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100, | &c. |

**423.** Let the first term be 1, the difference 3, and the number of terms $n$; we shall have the progression 1, 4, 7, 10, &c. the last term of which will be $1+(n-1)3=3n-2$; wherefore the sum of the first and the last term is $3n - 1$, and consequently the sum of this progression is equal to $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$; and if we suppose $n = 20$, the sum will be $10 \times 59 = 590$.

**424.** Again, let the first term be 1, the difference $d$, and the number of terms $n$; then the last term will be $1 + (n-1)d$; to which adding the first, we have $2 + (n-1)d$, and multiplying by the number of terms, we have $2n + n(n-1)d$; whence we deduce the sum of the progression $n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

And by making $d$ successively equal to 1, 2, 3, 4, &c., we obtain the following particular values, as shewn in the subjoined Table.

If $d = 1$, the sum is $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

$d = 2$, - - - $n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$

$d = 3$, - - - $n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$

$d = 4$, - - - $n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2n^2 - n$

$d = 5$, - - - $n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5n^2-3n}{2}$

$d = 6$, - - - $n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3n^2 - 2n$

$d = 7$, - - - $n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7n^2-5n}{2}$

$d = 8$, - - - $n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4n^2 - 3n$

$d = 9$, - - - $n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9n^2-7n}{2}$

$d = 10$, - - - $n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5n^2 - 4n$

**Σχήμα 24: Συνέχεια αποσπάσματος**

### 4.8.3 Το επιστημονικό συνέδριο επικοινωνίας

Τα τελευταία τρία εργαστήρια αφιερώθηκαν στο πώς να μοιραστεί το έργο που έγινε στην τάξη στην τρίτη έκδοση του επιστημονικού συνεδρίου “Scienza under 18” που έγινε τον Μάιο του 2012, που διήρκησε τρεις μέρες και απευθυνόταν σε όλα τα σχολεία της πόλης της Gorizia. Στις προηγούμενες εκδόσεις, φάνηκε ότι αφήνοντας τους ανθρώπους να παίξουν ένα παιχνίδι είναι ένας αποτελεσματικός τρόπος για να παρουσιαστεί ένα μαθηματικό αντικείμενο. Έτσι, προσπάθησαν να σχεδιάσουν το παιχνίδι. Οι βασικοί στόχοι ήταν:

- να κάνουν τον κόσμο να διασκεδάσει κάνοντας Μαθηματικά, ώστε να κινητοποιηθούν για να τα δοκιμάσουν και να τα καταλάβουν
- να αυξηθεί η μαθηματική αυτοεκτίμηση των συμμετεχόντων, για να πειστούν ότι αξίζει τον κόπο που απαιτείται για να πετύχει κανείς στα Μαθηματικά
- να προωθήσει τη μαθηματική λογική και τους νοητικούς υπολογισμούς
- να γνωστοποιήσει ένα σημαντικό μαθηματικό θέμα, όπως οι αριθμητικοί πρόοδοι που συχνά αμελούνται
- να γνωστοποιήσει την παρουσία μιας άγνωστης αλλά σημαντικής αρχαίας συλλογής μαθηματικών κειμένων που υπάρχει στη βιβλιοθήκη Statale Isontina.

Το παιχνίδι πρέπει συνεπώς να έχει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Αρχικά, πρέπει να είναι κοινωνικό, δηλαδή να παίζεται από ομάδες για να μπορεί να μοιραστεί η απογοήτευση της αποτυχίας ή η χαρά της νίκης. Επίσης, κάθε παιχνίδι έπρεπε να διαρκεί μέχρι μισή ώρα, για να μπορούν να συμμετέχουν όλες οι ομάδες. Υπάρχει και το στοιχείο της τύχης για να μπορούν να κερδίσουν και οι μέσοι ή οι πιο αδύναμοι μαθητές, αλλά όχι να κυριαρχήσουν. Ακόμη, μπορούν να συμμετάσχουν άτομα από ένα μεγάλο εύρος ηλικιών. Τέλος, πρέπει να παίζεται σε ένα χρωματιστό πίνακα, καθοδηγούμενα από τους μαθητές που συμμετείχαν στον σχεδιασμό.

Για να ικανοποιηθούν τα παραπάνω χαρακτηριστικά, δημιουργήθηκε η εξής δομή:

- απαιτούνται μια αφίσα και ένα ζάρι για το παιχνίδι, καθώς και ένα άτομο που κάνει τις ερωτήσεις και ελέγχει τις απαντήσεις, δίνοντας τις σωστές όταν είναι λάθος
- το ταμπλό έχει 28 κουτάκια
- κάποιος με την πρώτη ρίψη μπαίνει στο παιχνίδι και μετά τη ρίψη οι συμμετέχοντας πρέπει να απαντήσουν σε μια ερώτηση για τις προόδους σε δύο λεπτά: αν απαντήσουν σωστά θα προχωρήσουν ανάλογα τους πόντους που κέρδισαν, αλλιώς θα προχωρήσουν τρεις πόντους λιγότερους
- νικητής είναι αυτός που θα περάσει πρώτος την εικοστή όγδοη θέση
- υπάρχουν τρεις εκδοχές ερωτήσεων: οι εύκολες (για μαθητές 8-11 ετών), οι μέτριες (για μαθητές 11-15 ετών) και οι δύσκολες (για μαθητές 15 ετών και άνω)

Επιπλέον, στους τοίχους του χώρου του συνεδρίου υπήρχαν αφίσες σχετικά με την ζωή και το έργο το Euler και εικόνες από τα βιβλία του στη βιβλιοθήκη Statale Isontina και κυρίως από τα *Στοιχεία της Άλγεβρας*. Οι μαθητές καθοδηγούσαν τους συμμετέχοντες στον τομέα των αφισών και στο παιχνίδι, ενώ εξηγούσαν τη δουλειά που έγινε στα εργαστήρια.

Κάποιες από τις δύσκολες ερωτήσεις του παιχνιδιού ήταν:

1) $5/8 \quad 5/4 \quad 15/8$ ... ποιος είναι ο επόμενος όρος;
2) $7/2 \quad -1 \quad -11/2$ ... ποιος είναι ο επόμενος όρος;
3) $3/7 \quad 2 \quad 25/7$ ... ποιος είναι ο επόμενος όρος;
4) $3 \quad 8 \quad 13 \quad 18$ ... ποιος είναι ο $10^{ος}$ όρος;
5) $5 \quad 0 \quad -5 \quad -10$ ... ποιος είναι ο $8^{ος}$ όρος;
6) Σε μια αριθμητική πρόοδο με $12$ όρους, ο πρώτος είναι $7$ ο τελευταίος είναι $51$. Να βρείτε τον τρίτο.
7) Σε μια αριθμητική πρόοδο με $16$ όρους, ο πρώτος είναι $11$ και ο τελευταίος είναι $356$. Να βρείτε τον δωδέκατο.
8) $4 \quad 6 \quad 8$ ... Ποιο είναι το άθροισμα των πρώτων $10$ όρων;
9) $15 \quad 12 \quad 9$ ... Ποιο είναι το άθροισμα των πρώτων $6$ όρων;
10) Πόσες και ποιες είναι οι αριθμητικοί πρόοδοι που ξεκινούν με $3$ και τελειώνουν με $25$ και έχουν ως κοινή διαφορά έναν ακέραιο αριθμό;
11) Πόσες και ποιες είναι οι αριθμητικοί πρόοδοι που ξεκινούν με $-20$ και τελειώνουν με $17$ και έχουν ως κοινή διαφορά έναν ακέραιο αριθμό;

Οι εύκολες ερωτήσεις αφορούσαν τους πίνακες του πολλαπλασιασμού, ανεβαίνοντας και κατεβαίνοντας και πέρα από τον κλασικό δέκατο όρο, ενώ οι μέτριες εκτός από τις προαναφερθείσες πράξεις πολλαπλασιασμού με φυσικούς αριθμούς, επεκτάθηκαν σε αρνητικούς αριθμούς και σε κλάσματα και κάποιες φορές ζητήθηκε ένας ενδιάμεσος όρος έχοντας δοθεί ο πρώτος και ο τελευταίος.

### 4.8.4 Τελευταία σχόλια

Πάνω από 400 άνθρωποι επισκέφτηκαν στο συνέδριο την περιοχή που γινόταν το παιχνίδι και διασκέδασαν με τη δραστηριότητα. Κάποιοι μάλιστα το επισκέφτηκαν παραπάνω από μία φορά, φέρνοντας μαζί και τους γονείς τους. Η παρουσίαση γράφηκε και στην τοπική εφημερίδα και οι επισκέψεις στον τομέα των παλιών βιβλίων στη βιβλιοθήκη Statale Isontina αυξήθηκαν σημαντικά μετά το συνέδριο. Επιπλέον, όλοι οι μαθητές που συμμετείχαν στα εργαστήρια έδειξαν βελτίωση στις μαθηματικές τους επιδόσεις και στα κίνητρα για τη μελέτη των Μαθηματικών και ζήτησαν μαζί με τους γονείς τους να συμμετέχουν ξανά στην δραστηριότητα στα επόμενα χρόνια. Το επόμενο φθινόπωρο η πλειοψηφία των μαθητών που έλαβε μέρος σε έναν από τους πιο γνωστούς ιταλικούς μαθηματικούς διαγωνισμούς, τον "Giochi di Archimede", είχαν συμμετάσχει στα παραπάνω εργαστήρια. Τέλος, η Vicentini αναφέρει ότι πρέπει να υπάρξει η διάδοση μιας πιο ανθρωπιστικής ιδέας σχετικά με το τι είναι τα Μαθηματικά και το πώς σκεφτόμαστε μαθηματικά, με στόχο τη συνολική βελτίωση της μάθησης των Μαθηματικών.

## 4.9 Έρευνα Demattè: Ναι, χρησιμοποιώ την ιστορία των Μαθηματικών στην τάξη

### 4.9.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το άρθρο ο Adriano Demattè παρουσιάζει το διπλό εργαστήριο που έγινε κατά τη διάρκεια του έβδομου ESU στην Κοπεγχάγη το 2015. Το πρώτο μέρος αφορούσε τη συλλογή απόψεων και τη συζήτηση μεταξύ των συμμετεχόντων του συνεδρίου σχετικά με τη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη. Το βασικό αποτέλεσμα ήταν ότι η ιστορία θεωρείται ως μια πηγή για τους μαθητές που μπορεί να τους βοηθήσει να βελτιωθούν στα Μαθηματικά. Στο δεύτερο μέρος δόθηκαν στους συμμετέχοντες κάποια κείμενα από τη δουλειά των μαθηματικών Francesco Ghaligai και Rafael Bombelli και τους ζητήθηκε να τα αναλύσουν και να σχεδιάσουν κάποιες δραστηριότητες για μαθητές ηλικίας 14-16 ετών. Σύμφωνα με τον καθηγητή Man Keung Siu (2014) η χρήση της ιστορίας Μαθηματικών στην τάξη μπορεί να βασιστεί στην ιδέα ότι τα Μαθηματικά είναι μέρος του πολιτισμού μας κι όχι απλά ένα εργαλείο. Επίσης, η γνώση της ιστορίας από τον καθηγητή προσφέρει μια βαθύτερη κατανόηση και μπορεί να βελτιώσει τη διδασκαλία του.

### 4.9.2 Απαντήσεις των συμμετεχόντων

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται κάποιες βασικές ενστάσεις των συμμετεχόντων καθηγητών σχετικά με τη χρήση της ιστορίας στην τάξη:

1. Δεν υπάρχει χρόνος για αυτήν στην τάξη.
2. Αυτό δεν είναι Μαθηματικά.
3. Πώς μπορείς να βάλεις ερωτήσεις για αυτήν σε ένα τεστ;
4. Δεν μπορώ να βελτιώσω τους βαθμούς των μαθητών.
5. Οι μαθητές το βλέπουν σαν το μάθημα της Ιστορίας και δεν τους αρέσει.
6. Οι μαθητές τη θεωρούν εξίσου βαρετή με το μάθημα των Μαθηματικών.
7. Οι μαθητές δεν έχουν αρκετή γνώση για τον πολιτισμό για να το εκτιμήσουν.
8. Η πρόοδος στα Μαθηματικά έκανε δύσκολα προβλήματα να γίνουν εύκολα, άρα γιατί να κάνουμε κόπο και να κοιτάξουμε πίσω;
9. Υπάρχει έλλειψη υλικού.

Αντίστοιχα, κάποιες πιθανές απαντήσεις είναι ότι:

i. Μέσω της ιστορίας, οι μαθητές κάνουν Μαθηματικά.
ii. Η ιστορία δημιουργεί τις προϋποθέσεις για τη βελτίωση των βαθμών.

iii. Οι μαθητές εκτιμούν ότι τα Μαθηματικά αποκτούν περισσότερο νόημα.
iv. Τα αρχαία κείμενα και οι σύγχρονες εκδόσεις τους, είναι πλούσια σε ιδέες για μαθηματικές δραστηριότητες.
v. Οι καθηγητές μπορούν να βρουν και μόνοι τους υλικό από αρχαία κείμενα.
vi. Μέσω της ιστορίας, οι μαθητές αποκτούν εργαλεία για τη μαθηματική τους σκέψη.

### 4.9.3 Απόψεις των μαθητών

Επιπλέον, συζητήθηκαν οι απόψεις των μαθητών για την ιστορία των Μαθηματικών στην τάξη. Συγκρίνοντας κάποια στοιχεία από το Χονγκ Κονγκ και την Ιταλία, φαίνεται ότι οι μαθητές που έχουν καλά αποτελέσματα στα Μαθηματικά έχουν την τάση να κατακρίνουν τη χρήση της ιστορίας. Παρατίθενται οι απόψεις μιας μαθήτριας που τη λένε Άννα. Έχει ένα καλό επίπεδο στα Μαθηματικά, αλλά όχι τόσο σε άλλα μαθήματα. Της ζητήθηκε μαζί με τους συμμαθητές της να γράψουν ένα κείμενο φαντάζοντας ότι μιλούν σε κάποιον φίλο από άλλο σχολείο για την ιστορία των Μαθηματικών.

Σε αυτό ανέφερε ότι το πρόγραμμα με τη χρήση της ιστορίας δεν της ήταν χρήσιμο, γιατί δεν το έβλεπε σαν Μαθηματικά. Προέτρεψε τον καθηγητή στα επόμενα χρόνια να δουλέψει μόνο με τα «πραγματικά» Μαθηματικά, όπως τις εξισώσεις κ.τ.λ., ενώ θεωρεί ότι κάποιος μαθητής που ενδιαφέρεται για τα αρχαία Μαθηματικά μπορεί να ασχοληθεί μόνος του με τη χρήση υπολογιστή ή με άλλον τρόπο. Τέλος, κατανοεί ότι δεν της άρεσε αυτό το πρόγραμμα επειδή δεν τα πηγαίνει καλά με την Ιστορία σαν μάθημα και ότι μπορεί να είναι πιο ενδιαφέρον για κάποιον που του αρέσει η Ιστορία.

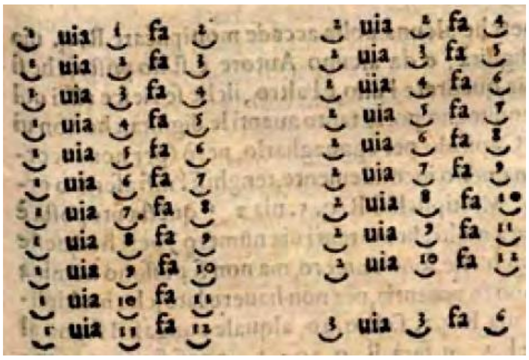
Άλλη μια μαθήτρια, η οποία δεν έχει τόσο καλά αποτελέσματα στα Μαθηματικά, έγραψε ότι η χρήση της ιστορίας είναι χρήσιμη για την κατανόηση των βάσεων των Μαθηματικών και είναι ενδιαφέρουσα, αλλά παράλληλα και δύσκολη επειδή δεν μπορούσε πάντα να εφαρμόσει τους κανόνες στα προβλήματα του σήμερα. Επίσης, ανέφερε ότι μελέτησαν μεθόδους που ανακαλύφθηκαν από διάσημους μαθηματικούς όπως οι Bombelli και Fibonacci, κείμενα, προβλήματα και εξισώσεις και το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων και των Μάγια.

### 4.9.4 Μαθηματικά με τους Ghaligai και Bombelli

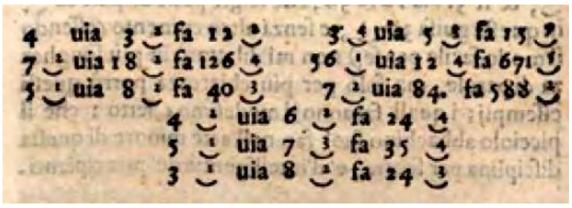
Ο Demattè θεωρεί ότι κάποιες ενστάσεις των καθηγητών για τη χρήση της ιστορίας μπορούν να αρθούν αν λυθεί το πρόβλημα της εύρεσης υλικού για την τάξη. Για αυτό προτείνονται τα επόμενα κείμενα του Ghaligai και του Bombelli. Το βιβλίο του Ghaligai *Pratica d'Arithmetica* εκδόθηκε το 1521. Όπως και τα άλλα κείμενα του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης απευθύνονταν σε εμπόρους. Χωρίζεται σε 13 κεφάλαια από τα οποία τα τελευταία τέσσερα είναι αφιερωμένα στην Άλγεβρα, που περιλαμβάνουν εξηγήσεις για τις μεθόδους εξαγωγής ριζών. Επίσης, περιλαμβάνει πράξεις διωνύμων με ρίζες, που βρίσκονται και σε άλλα έργα του 15$^{ου}$ και 16$^{ου}$ αιώνα, ενώ περιέχει αναφορές από τον Ευκλείδη, τον Fibonacci και τον Pacioli. Το βιβλίο *L'Algebra* του Bombelli δείχνει την Άλγεβρα που ήταν γνωστή εκείνη την εποχή και χωρίζεται σε 3 κεφάλαια. Στην εισαγωγή, γίνεται ειδική αναφορά στους al-Kwarizmi, Διόφαντο και Pacioli.

### 4.9.5 Υλικό των εργαστηρίων

Το *L'Algebra* του Bombelli χρησιμοποιήθηκε για να δοθούν παραδείγματα πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού πολυωνύμων.

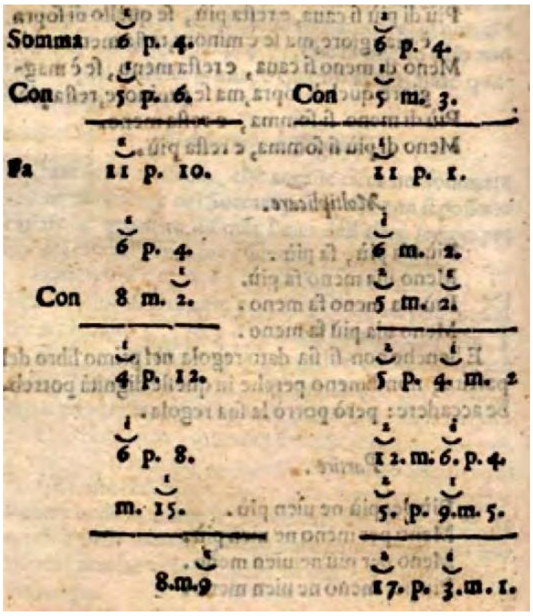


**Σχήμα 25: Παραδείγματα δυνάμεων**

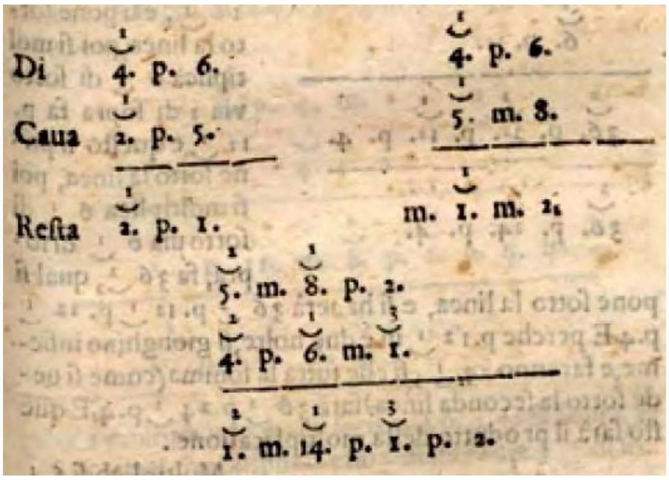


**Σχήμα 26: Παραδείγματα με μονώνυμα**

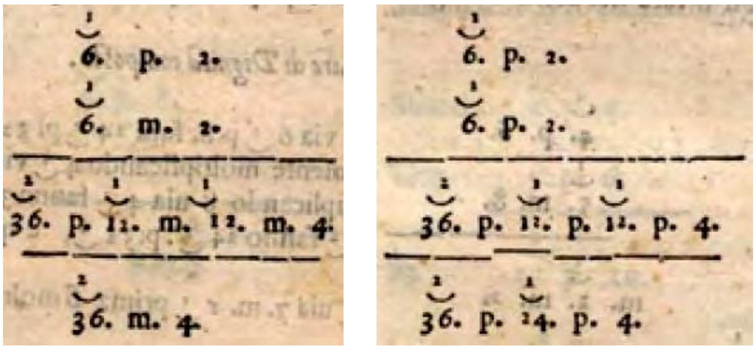
Το uia σημαίνει «πολλαπλασιάζεται με» και το fa «κάνει».



**Σχήμα 27: Παραδείγματα αθροισμάτων (Somma σημαίνει «άθροισμα» και Con «με»)**



**Σχήμα 28: Παραδείγματα διαφορών (Di σημαίνει «από», Caua «αφαιρώ» και Refta «μένει»)**

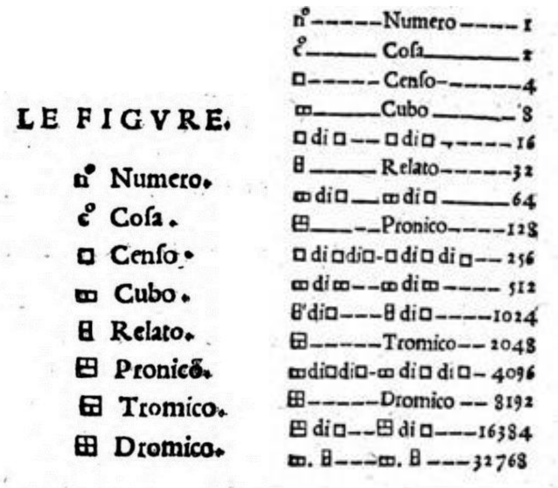



**Σχήμα 29: Παραδείγματα πολλαπλασιασμών**

Αυτό το υλικό χρησιμοποιήθηκε σε ιταλικό Λύκειο ανθρωπιστικών επιστημών σε μαθητές ηλικίας 14-15 ετών. Παρατηρήθηκε ότι μαθητές δυσκολεύονταν να διαβάσουν κάποια σύμβολα, όπως τους εκθέτες που γράφονταν σε μικρές διαστάσεις. Μπορούσαν όμως να υποθέσουν τις σωστές τιμές διαβάζοντας όλο το κείμενο. Σε αυτές τις περιπτώσεις ρωτούσαν συχνά τον καθηγητή. Ακόμα και όταν έβρισκαν τη σωστή απάντηση, πολλές φορές δεν ήταν σίγουροι και ένιωθαν περισσότερο ασφαλείς ρωτώντας τον. Αυτό δείχνει δυστυχώς ότι πρέπει να υπάρχει κάποιος «υπεύθυνος» που θα ελέγχει τη διδασκαλία.

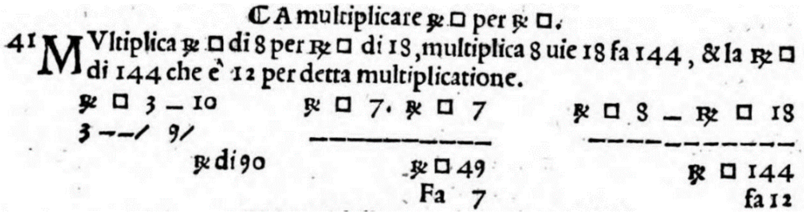
Επίσης, η δραστηριότητα δεν απαιτούσε μεγάλες μαθηματικές γνώσεις. Εδώ εστιάζεται στο πρόβλημα του πώς να συμπεριφέρεται ο καθηγητής ώστε να βελτιωθούν οι ικανότητες των μαθητών, χωρίς να χάσουν τη βούλησή τους να μάθουν. Στο Σχήμα 25 ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν την πράξη του Bombelli με βάση όσα είχαν μάθει, χωρίς όμως επιτυχία. Αυτή η έλλειψη ικανότητας να βγάλουν συμπέρασμα μπορεί να οφείλεται σε κοινωνικούς λόγους, δεδομένου ότι στην καθημερινή ζωή μια λανθασμένη διατύπωση μπορεί να έχει επίπτωση στο προσωπικό κύρος.

Το *Pratica d'Arithmetica* του Ghaligai χρησιμοποιήθηκε για να σχεδιαστούν δραστηριότητες στην τάξη. Το πρώτο μέρος "LE FIGVRE" (Οι Αριθμοί) θεωρήθηκε προφανές και αφορούσε τον διαφορετικό τρόπο που χρησιμοποιούσε ο Ghaligai για να συμβολίσει τις δυνάμεις και τις ιδιότητές τους.

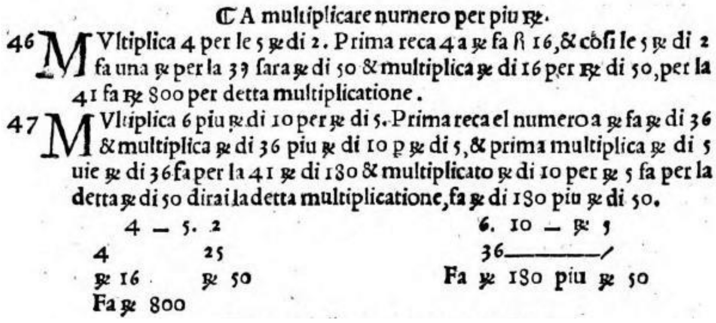



**Σχήμα 30: Συμβολισμοί**

Στο επόμενο μέρος υπήρξε μια σύντομη περιγραφή για τις πράξεις με ρίζες.


A multiplicare ℞ □ per ℞ □.
41 Multiplica ℞ □ di 8 per ℞ □ di 18, multiplica 8 uie 18 fa 144, & la ℞ □ di 144 che è 12 per detta multiplicatione.

**Σχήμα 31: «Για τον πολλαπλασιασμό τετραγωνικών ριζών. Πολλαπλασιάστε την τετραγωνική ρίζα του 8 με την τετραγωνική ρίζα του 18. Πολλαπλασιάστε το 8 με το 18, κάνει 144 και η τετραγωνική ρίζα του 144 είναι 12 για αυτόν τον πολλαπλασιασμό».**

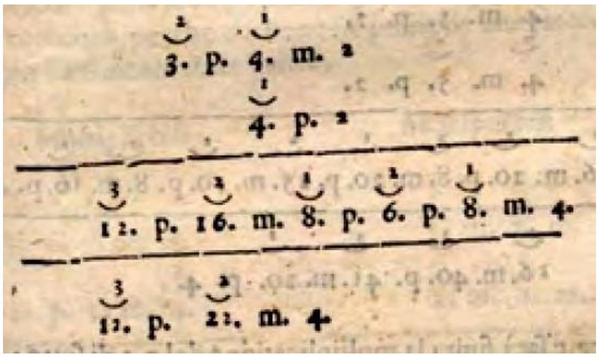

A multiplicare numero per piu ℞.
46 Multiplica 4 per le 5 ℞ di 2. Prima reca 4 a ℞ fa ℞ 16, & cosi le 5 ℞ di 2 fa una ℞ per la 37 sara ℞ di 50 & multiplica ℞ di 16 per ℞ di 50, per la 41 fa ℞ 800 per detta multiplicatione.
47 Multiplica 6 piu ℞ di 10 per ℞ di 5. Prima reca el numero a ℞ fa ℞ di 36 & multiplica ℞ di 36 piu ℞ di 10 p ℞ di 5, & prima multiplica ℞ di 5 uie ℞ di 36 fa per la 41 ℞ di 180 & multiplicato ℞ di 10 per ℞ 5 fa per la detta ℞ di 50 dirai la detta multiplicatione, fa ℞ di 180 piu ℞ di 50.

**Σχήμα 32: «Για τον πολλαπλασιασμό ενός αριθμού με αρκετές τετραγωνικές ρίζες. Πολλαπλασιάστε το 4 με 5 τετραγωνικές ρίζες του 2. Πρώτα, γράψτε το 4 σε τετραγωνική ρίζα, που είναι η τετραγωνική ρίζα του 16, όπως και οι 5 τετραγωνικές ρίζες του 2 θα είναι η τετραγωνική ρίζα του 50 και πολλαπλασιάστε την τετραγωνική ρίζα του 16 με την τετραγωνική ρίζα του 50, άρα θα είναι η τετραγωνική ρίζα του 800».**

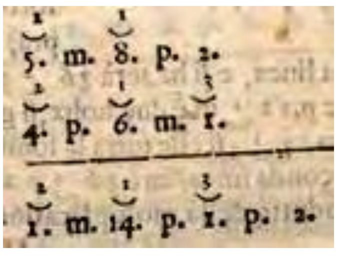
Επίσης, δόθηκε το εξής φύλλο εργασίας στις ομάδες συμμετεχόντων, από το οποίο μπορούν να επιλέξουν κάποιες ερωτήσεις-δραστηριότητες:

1. Να συγκρίνετε τον συμβολισμό του Ghaligai και του Bombelli.
2. Δύο ασκήσεις από τα κείμενα του Bombelli:

   α) Να γράψετε τον ακόλουθο πολλαπλασιασμό με σύγχρονο συμβολισμό




   β) Ποια πράξη χρησιμοποιεί ο Bombelli στον παρακάτω υπολογισμό



Σε σύγχρονο συμβολισμό τα παραπάνω κείμενα:

Από το *L'Algebra* του Bombelli

Σχήμα 25

$$x \cdot x = x^2 \qquad x^2 \cdot x^2 = x^4$$
$$x \cdot x^2 = x^3 \qquad x^2 \cdot x^3 = x^5$$
$$x \cdot x^3 = x^4 \qquad x^2 \cdot x^4 = x^6$$
$$x \cdot x^4 = x^5 \qquad x^2 \cdot x^5 = x^7$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

Σχήμα 26

$$4 \cdot 3x^2 = 12x^2 \qquad 3x^4 \cdot 5x^5 = 15x^9$$
$$7x^2 \cdot 18x^2 = 126x^4 \quad 56x \cdot 12x^4 = 671x^5$$
$$5x \cdot 8x^2 = 40x^3 \qquad 7x^2 \cdot 84 = 588x^2$$
$$4x^2 \cdot 6x^2 = 24x^4$$
$$5x \cdot 7x^3 = 35x^4$$
$$3x \cdot 8x^2 = 24x^3$$

Σχήμα 27 $(6x+4)+(5x+6)=11x+10 \qquad (6x+4)+(5x-3)=11x+1$

$$(6x+4)+(8-2x)=4x+12 \qquad (6x-2)+(5x^2-2x)=5x^2+4x-2$$
$$(6x+8)+(-15x)=8-9x, \;\; (12x^2-6x+4)+(5x^2+9x-5)=17x^2+3x-1$$

Σχήμα 28 $(4x+6)-(2x+5)=2x+1 \qquad (4x+6)-(5x-8)=-x-2$

Σχήμα 29 $(6x+2)\cdot(6x-2)=36x^2+12x-12x-4=36x^2-4$

$$(6x+2)\cdot(6x+2)=36x^2+12x+12x+4=36x^2+24x+4$$

Από το υλικό των συμμετεχόντων:

2. α) $(3x^2+4x-2)\cdot(4x+2)=12x^3+16x^2-8x+6x^2+8x-4=12x^3+22x^2-4$

2. β) Αφαίρεση: $(5x^2-8x+2)-(4x^2+6x-x^3)=x^2-14x+x^3+2$

Από το *Pratica d'Arithmetica* του Ghaligai:

Σχήμα 31 $3\sqrt{10}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{90}, \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{49}=7, \sqrt{8}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{144}=12$

Σχήμα 32 $4\cdot 5\sqrt{2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{50}=\sqrt{800}$

### 4.9.6 Συμπέρασμα

Το πιο κοινό χαρακτηριστικό των απαντήσεων των συμμετεχόντων ήταν ότι η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει να επιτευχθούν υψηλού επιπέδου εκπαιδευτικοί στόχοι. Επίσης, μπορεί να αποτελέσει μια πηγή ώστε οι μαθητές να βελτιώσουν τον τρόπο που δουλεύουν στα Μαθηματικά. Δημιουργεί μια εικόνα ότι τα Μαθηματικά είναι μια ανοιχτή επιστήμη, διευκολύνοντας σε κάποια προβλήματα που εμφανίζονται στην τάξη όταν παρουσιάζονται μόνο με έναν επίσημο τρόπο. Η ερμηνεία των κειμένων επιτυγχάνεται ξεκινώντας από ένα μη ολοκληρωμένο σύνολο πληροφοριών και ολοκληρώνεται μέσω της λογικής. Τέλος, για την καλύτερη κατανόηση χρειάζεται συμπληρωματικό ιστορικό υλικό με τις απόψεις και τις γνώσεις του συγγραφέα για το εκάστοτε κείμενο που παρουσιάζεται.

## 4.10 Έρευνα Yan-jun και Ping: Η εφαρμογή βίντεο του HPM στη μαθηματική διδασκαλία σε Γυμνάσιο. Η διδασκαλία της εφαρμογής της γραμμικής εξίσωσης με έναν άγνωστο

### 4.10.1 Εισαγωγή

Η ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να παίξει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική διδασκαλία. Για αυτό, οι μαθηματικοί Hong Yan-jun και Chen Ping του πανεπιστημίου East China Normal της Σανγκάης δημιούργησαν κάποια βίντεο που σχετίζονται με ιστορικά στοιχεία και τα χρησιμοποίησαν σε τάξη Γυμνασίου, δίνοντας έναν νέο τρόπο εφαρμογής της ιστορίας των Μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει πολλές έρευνες για την εφαρμογή της ιστορίας στη μαθηματική διδασκαλία. Η ομάδα της HPM στο πανεπιστήμιο East China Normal θεωρεί ότι τα ιστορικά στοιχεία που επιλέγονται στη διδασκαλία πρέπει να ικανοποιούν πέντε αρχές: να είναι ενδιαφέροντα, επιστημονικά, αποτελεσματικά, να μπορούν να γίνουν κατανοητά και να είναι καινοτόμα. Η ομάδα κατηγοριοποιεί όλες τις διδακτικές μεθόδους της HPM στις προσεγγίσεις της συμπλήρωσης, της αντιγραφής, της προσαρμογής και της ανακατασκευής (βλ. Πίνακα 14). Μπορούν βέβαια να επιλεχθούν παραπάνω από μία μέθοδοι, ανάλογα τις διδακτικές συνθήκες. Επίσης, δημιουργούν μια τυπική μαθησιακή διαδικασία, δηλαδή την επιλογή ενός μαθήματος διδασκαλίας – την έρευνα για τη σχετική ιστορία – την επιλογή κατάλληλων στοιχείων – την ανάλυση των απαιτήσεων της τάξης – τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων στην τάξη – την εφαρμογή σχεδίου διδασκαλίας – αξιολόγηση του μαθήματος.

| Προσεγγίσεις | Περιγραφή |
|---|---|
| Συμπλήρωσης | Παρουσίαση εικόνων μαθηματικών, για αναφορά σχετιζόμενων ιστοριών κ.τ.λ. |
| Αντιγραφής | Άμεση χρήση ιστορικών προβλημάτων, μεθόδων κ.τ.λ. |
| Προσαρμογής | Προβλήματα προσαρμοσμένα από αντίστοιχα ιστορικά ή βασισμένα σε ιστορικά στοιχεία |
| Ανακατασκευής | Γένεση γνώσης βασισμένη ή εμπνευσμένη από την ιστορία των Μαθηματικών |

**Πίνακας 14: Προσεγγίσεις χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία**

Η ανάπτυξη των ερευνών στο πλαίσιο του HPM έχει κινήσει το ενδιαφέρον των καθηγητών Γυμνασίων, οι οποίοι όμως συχνά διστάζουν να τις εφαρμόσουν στο μάθημά τους. Όσο εξελίσσεται η τεχνολογία, η χρήση βίντεο βρίσκει ολοένα και περισσότερο χώρο στην εκπαιδευτική διαδικασία, έχοντας ως σημαντικά πλεονεκτήματα τη μικρή διάρκεια, το ζωντανό και δυναμικό περιεχόμενο. Γενικότερα, η χρήση της τεχνολογίας στηρίζεται από το Κινέζικο Υπουργείο Παιδείας, ως ένα μέσο που θα βελτιώσει την κατανόηση των μαθητών για τη φύση των Μαθηματικών. Ο στόχος της παρούσας έρευνας είναι να αξιοποιήσει πλήρως τη χρήση του βίντεο, για να λύσει τα προβλήματα των καθηγητών και να βοηθήσει στην πρακτική αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη. Τα μικρά βίντεο που παρουσιάστηκαν ονομάστηκαν HPM βίντεο.

### 4.10.2 Η διδακτική εφαρμογή των HPM βίντεο στο Πρακτικά Προβλήματα και οι Γραμμικές Εξισώσεις με έναν άγνωστο

Το *Πρακτικά Προβλήματα και οι Γραμμικές Εξισώσεις με έναν άγνωστο* είναι μια διδακτική ενότητα στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών για μαθητές 12-14 ετών. Οι μαθητές έχουν ήδη διδαχθεί κάποιες αλγεβρικές εκφράσεις, απλές εξισώσεις και λύσεις γραμμικών εξισώσεων με έναν άγνωστο. Αυτό το μάθημα στόχευε στην επίλυση συνδεόμενων προβλημάτων μεταξύ του αριθμού των ανθρώπων και του φόρτου εργασίας, που θα εδραίωνε τη γνώση που είχαν ήδη οι μαθητές και θα έπαιζε τον ρόλο μιας εκτεταμένης εφαρμογής της θεωρίας στην πράξη. Το 2014 το Κινέζικο Υπουργείο Παιδείας εξέδωσε μια οδηγία ότι πρέπει να αλλάξει η έμφαση στο περιεχόμενο του μαθήματος και ο τρόπος διδασκαλίας. Σε αυτό το πλαίσιο, η έννοια της εξίσωσης εισάγεται πλέον από το Δημοτικό. Κάποιοι καθηγητές προσπαθούν να ενσωματώσουν την ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία, χωρίς να έχουν καταφέρει ακόμα όμως να το κάνουν αποτελεσματικά. Για αυτό, επιχειρήθηκε από τους συγγραφείς να εφαρμοστούν τα βίντεο στην τάξη.

Προβλήματα γραμμικών εξισώσεων με έναν άγνωστο υπήρχαν από τους αρχαίους Αιγυπτίους και Βαβυλωνίους. Στην αρχαία Κίνα ο όρος της εξίσωσης εμφανίστηκε στο *The Nine Chapters on the Mathematical Art*. Από αυτό αντλήθηκαν τα ιστορικά στοιχεία που εφαρμόστηκαν στη διδακτική παρέμβαση, καθώς μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν ένα πνεύμα εξερεύνησης και πρακτικές ικανότητες. Σε αυτό το βιβλίο υπήρχαν συνολικά 246 μαθηματικά προβλήματα, μεταξύ των οποίων ήταν πέντε μορφές γραμμικών εξισώσεων με έναν άγνωστο, δηλαδή προβλήματα με τις τέσσερις βασικές πράξεις, προβλήματα ταξιδιών, συνεργασίας, σταθερού αθροίσματος και υπολοίπου.

Για να εισαχθούν τα προβλήματα, αναθεωρήθηκε η αυθεντική άσκηση και χωρίστηκε σε δύο ερωτήσεις με το ίδιο υπόβαθρο. Αυτή η προσέγγιση αξιοποιεί τη μέθοδο της προσαρμογής για να εισάγει την ιστορία των Μαθηματικών. Το ιστορικό υλικό που επιλέχθηκε να εφαρμοστεί στη διδακτική παρέμβαση συμβαδίζει με το τρέχον σχολικό βιβλίο και είναι κατάλληλο για το επίπεδο των μαθητών. Έτσι, βελτιώνεται η εκπαιδευτική διαδικασία στην οποία προκύπτουν και λύνονται αμφιβολίες. Παρουσιάστηκαν τρία μικρά βίντεο για την ιστορία των Μαθηματικών. Το πρώτο ήταν μια εισαγωγή για το *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, ώστε να αναδειχθεί η σοφία και τα επιτεύγματα των αρχαίων μαθηματικών. Το δεύτερο αφορούσε την ιστορία των γραμμικών εξισώσεων με έναν άγνωστο και το τελευταίο ήταν για τις αυθεντικές λύσεις των προβλημάτων, ώστε να συγκριθούν με τις σύγχρονες και να αναδειχθεί η εξέλιξη των Μαθηματικών.

### 4.10.3 Διδακτικά μέρη

Ο καθηγητής δεν ξεκίνησε το μάθημα με τον συμβατικό τρόπο, αλλά δείχνοντας το βίντεο της εισαγωγής του αυθεντικού βιβλίου. Οι μαθητές έμαθαν ότι οι Κινέζοι ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν την έννοια των αρνητικών αριθμών και τον αλγόριθμο της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Επίσης, διαπίστωσαν ότι οι λύσεις των γραμμικών εξισώσεων ήταν παρόμοιες με αυτές της μεθόδου της απαλοιφής στην Άλγεβρα, που εμφανίστηκε 1500 χρόνια μετά από τους Ευρωπαίους. Όπως είναι λογικό, οι μαθητές εντυπωσιάστηκαν. Το βίντεο κατάφερε να μεταφέρει πολλές πληροφορίες σε μικρό χρονικό διάστημα και με ζωντανό τρόπο, ενισχύοντας την εκπαιδευτική διαδικασία.

Μετά το τέλος του βίντεο ο καθηγητής ρώτησε τους μαθητές γιατί μελετάμε τις εξισώσεις. Ακολούθησε μια συζήτηση μεταξύ των μαθητών και του καθηγητή.

Μαθητής: «Η εξίσωση λύνει προβλήματα».

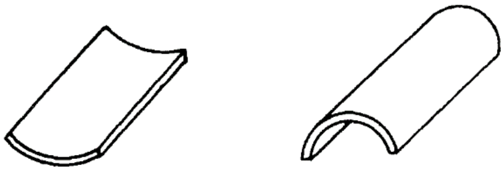
Καθηγητής: «Γιατί μπορούν να λύσουν προβλήματα; Τι προβλήματα μπορούν να λύσουν;»

Μαθητής: «Έχουμε μάθει ότι μια εξίσωση δημιουργείται από δύο εκφράσεις που είναι ίσες η μία με την άλλη και μένει να βρούμε τον άγνωστο».

Μαθητής: «Αν θέσουμε τον άγνωστο, κάθε η εξίσωση μπορεί να λυθεί».

Καθηγητής: «Μια εξίσωση είναι ένα μαθηματικό μοντέλο δημιουργείται από δύο εκφράσεις που είναι ίσες η μία με την άλλη. Είναι μια χρήσιμη προσέγγιση για να περιγράψουμε κοινωνικά και φυσικά φαινόμενα. Για αυτό θα μάθουμε πώς να δημιουργούμε εξισώσεις και να βρίσκουμε λύσεις σε προβλήματα λέξεων».

Ακολούθησε το βίντεο με την ιστορία των γραμμικών εξισώσεων με έναν άγνωστο, όπου εμφανίστηκε και ένα πρόβλημα του αυθεντικού βιβλίου: «Αν ένα άτομο φτιάχνει 38 κυρτά πλακάκια ή 76 κοίλα πλακάκια την ημέρα. Υποθέστε ότι κάνει τον ίδιο αριθμό από πλακάκια την ημέρα. Να πείτε πόσα πλακάκια του κάθε είδους μπορεί να φτιάξει;» (βλ. Σχήμα 33). Στο βίντεο παρουσιάστηκαν και εξηγήθηκαν οι εικόνες από τα πλακάκια και τα σχετικά αρχαία κτίσματα, χωρίς να δοθεί η λύση του προβλήματος.




**Σχήμα 33: Το σχήμα με τα κυρτά και κοίλα πλακάκια αντίστοιχα**

Όταν τελείωσε το βίντεο ο καθηγητής παρουσίασε το επόμενο πρόβλημα. «Τώρα υπάρχουν 34 άνθρωποι. Ο ένας μπορεί να φτιάξει 38 κυρτά πλακάκια ή 60 κοίλα πλακάκια την ημέρα. Υποθέστε ότι χρειάζονται κάποια πλακάκια, μεταξύ των οποίων τα κυρτά να είναι διπλάσια από τα κοίλα. Να πείτε πόσοι άνθρωποι χρειάζονται για να φτιάξουν τα κυρτά και κοίλα πλακάκια αντίστοιχα».

Το σχολικό βιβλίο έχει ένα παρόμοιο πρόβλημα. «Αν υπάρχουν 22 εργάτες σε ένα εργαστήριο. Ένας εργάτης μπορεί να φτιάξει 1200 βίδες ή 2000 παξιμάδια βιδών. Υποθέστε ότι μια βίδα πηγαίνει με δύο παξιμάδια για να δημιουργήσουν ένα σύνολο. Να πείτε πόσοι εργάτες θα πρέπει να δουλέψουν για να φτιάξουν βίδες και παξιμάδια αντίστοιχα, ώστε να παραχθούν ακριβή σύνολα βιδών και παξιμαδιών κάθε μέρα;»

Αναλύοντας τις πληροφορίες ο καθηγητής οδήγησε τους μαθητές να ανακαλύψουν τον λόγο των κυρτών με τα κοίλα πλακάκια που ήταν 1:2. Έστω $x$ ο αριθμός των ανθρώπων που χρειάζεται για να φτιάξουν τα κυρτά πλακάκια, τότε η εξίσωση θα ήταν: $2 \cdot 38x = 60 \cdot (34 - x)$, από όπου προκύπτει ότι το $x$ είναι 15. Άρα οι άνθρωποι που χρειάζονται για τα κοίλα πλακάκια είναι 18. Ο καθηγητής έδειξε την αναλυτική λύση στον πίνακα.

Έπειτα, παρουσιάστηκε ένα δεύτερο πρόβλημα. «Ένας αριθμός ανθρώπων χρειάζεται για να φτιάξουν τα κυρτά και κοίλα πλακάκια. Χρειάζεται ένα άτομο 10 μέρες για να τελειώσει τη δουλειά. Υποθέστε ότι στην πρώτη περίοδο κάποιοι άνθρωποι φτιάχνουν πλακάκια για 2 μέρες και μετά έρχεται άλλο ένα άτομο για να τελειώσουν μαζί τη δουλειά σε 2 μέρες. Να πείτε πόσοι άνθρωποι χρειάζονται δουλεύοντας με την ίδια αποδοτικότητα για την πρώτη περίοδο».

Ένα αντίστοιχο πρόβλημα στο σχολικό βιβλίο είναι: «Ένα άτομο χρειάζεται 40 ώρες για να οργανώσει κάποια βιβλία. Υποθέστε ότι κάποιοι άνθρωποι οργανώνουν τα βιβλία για 4 ώρες και μετά έρχονται άλλοι 2 και δουλεύουν μαζί για να τελειώσουν σε 8 ώρες. Να πείτε πόσοι άνθρωποι χρειάζονται να δουλέψουν στην πρώτη περίοδο».

Ο καθηγητής πρότεινε η συνολική δουλειά να θεωρηθεί ως 1. Με την εξίσωση: δουλειά = παραγωγικότητα · αριθμός των ανθρώπων · χρόνος, οι μαθητές υπέθεσαν ότι υπήρχαν $x$ άνθρωποι που ξεκίνησαν τη δουλειά στην πρώτη περίοδο και έγραψαν την εξίσωση: $\frac{2x}{10} + \frac{2(x+1)}{10} = 1$. Άρα $x = 2$ .

Αυτά τα δύο προβλήματα από το *The Nine Chapters on Mathematical Art* είχαν παρόμοια δομή με τα αντίστοιχα του σχολικού βιβλίου που αναφέρθηκαν. Οι συγγραφείς παρατήρησαν ότι λύνοντας προβλήματα με το ίδιο ιστορικό υπόβαθρο δημιουργήθηκε ένα πιο ζωντανό διδακτικό περιβάλλον και παρακίνησε τους μαθητές να πάρουν πρωτοβουλίες.

Στο επόμενο μέρος ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να λύσουν το αυθεντικό πρόβλημα από το *The Nine Chapters on Mathematical Art*. Οι μαθητές το βρήκαν πιο εύκολο από τα προηγούμενα προβλήματα και λύνοντάς το με εξίσωση έβγαλαν ένα απροσδόκητο αποτέλεσμα: 25,33333 πλακάκια. Ο καθηγητής τους είπε ότι το έλυσαν σωστά και στη συνέχεια τους έδειξε ένα βίντεο για να δουν πώς το έλυσαν οι αρχαίοι. Οι μαθητές διαπίστωσαν οι αρχαίοι ήταν έξυπνοι, αλλά ότι η σύγχρονη λύση είναι πιο εύκολη και πιο ξεκάθαρη.

Με τη μαγεία της αρχαίας μαθηματικής ιστορίας, το μάθημα έφτασε στο τέλος του. Ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να γενικεύσουν τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων κατασκευάζοντας γραμμικές εξισώσεις με έναν άγνωστο. Η διαδικασία που παρουσίασαν ήταν η εξής: θέτουμε έναν άγνωστο – δημιουργούμε μια εξίσωση – λύνουμε την εξίσωση – ελέγχουμε το αποτέλεσμα – οριστικοποιούμε την απάντηση. Ο καθηγητής τόνισε ιδιαίτερα ότι το κλειδί για να λυθεί το πρόβλημα ήταν να βρεθούν δύο εκφράσεις ίσες η μία με την άλλη. Στο τέλος, τους ζήτησε να μελετήσουν τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου και τους δόθηκε ένα πρόβλημα λέξεων για να εξασκηθούν μετά το μάθημα, με στόχο να μαθαίνουν κατά τη διάρκεια της εξάσκησης και να σκέφτονται όταν διαβάζουν.

Το μάθημα έγινε σε μια μέση τάξη με το 61% να είναι μαθητές μειονότητας στη Δυτική Κίνα. Οι ερευνητές διεξήγαγαν μια έρευνα μετά το τέλος του μαθήματος μεταξύ των 42 μαθητών που συμμετείχαν. Το 45% των μαθητών δήλωσε ότι κατάλαβαν πλήρως τα αρχαία προβλήματα μετά τη διάλεξη του καθηγητή. Το 22% δήλωσε ότι κατάλαβαν πλήρως τη διδασκαλία. Σχετικά με την εισαγωγή της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία, μόνο το 4% των μαθητών είπαν ότι δεν τους άρεσε. Στην ερώτηση: ποιες μορφές της εισαγωγής της ιστορίας στην τάξη προτιμάτε, απάντησαν τα βίντεο, οι ιστορίες που ειπώθηκαν από τον καθηγητή, η μελέτη ιστορικών στοιχείων και οι ασκήσεις για το σπίτι. Η πιο συχνή από τις παραπάνω απαντήσεις ήταν αυτή των βίντεο, μέσω των οποίων έμαθαν πολλά για τα αρχαία κινέζικα Μαθηματικά και ένιωσαν υπερήφανοι για τους αρχαίους Κινέζους μαθηματικούς.

### 4.10.4 Συμπέρασμα και έμπνευση

Από την απόδοση των μαθητών στην τάξη και τις απαντήσεις στην έρευνα, φαίνεται ότι τα βίντεο ενίσχυσαν σημαντικά την εκπαιδευτική διαδικασία, επεκτείνοντας τις γνώσεις των μαθητών και βελτιώνοντας τον τρόπο απόκτησης της γνώσης, αλλά και τη στάση απέναντι στο μάθημα. Επιπλέον, τα βίντεο διευκόλυναν τη δουλειά των καθηγητών με τους εξής τρόπους:

1) Η παρουσίαση ιστορικών στοιχείων με ζωντανό τρόπο, εξοικονομεί χρόνο και κόπο. Αυτά τα βίντεο μπορούν σε σύντομο χρονικό διάστημα να παρουσιάσουν πλήρως μαθηματικές

πληροφορίες και με πλούσιο τρόπο. Ενισχύει τη διδασκαλία των καθηγητών, ακόμα και αυτών που δε γνωρίζουν πολλά για την ιστορία.

2) Η διδασκαλία από διαφορετικά επίπεδα, διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών για μελέτη. Η παρουσίαση των βίντεο ταιριάζει με τα γνωστικά τους χαρακτηριστικά και τους κινητοποιεί. Καθώς μπορούν να παίζονται επανειλημμένα, χωρίς τον περιορισμό του χρόνου και του χώρου, παρέχουν μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση σε σχέση με τη συμβατική όπου όλα εξαρτώνται από αυτά που θα πει ο καθηγητής στην τάξη. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να αυτενεργήσουν, να εξερευνήσουν και να λάβουν αποφάσεις μόνοι τους.
3) Ελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών και βελτιώνει τη μελέτη τους. Ικανοποιούν την περιέργειά τους και βελτιώνουν τη δομή της σκέψης τους και τις μεθόδους που εφαρμόζουν. Μάλιστα, η επίδραση στη μελέτη και τη μνήμη διαρκεί περισσότερο.

Η πρακτική διδασκαλία με τη βοήθεια των βίντεο μπορεί να εμπνεύσει για τα εξής:

1) Την επαγγελματική παραγωγή και την προώθηση εφαρμογής. Τα βίντεο βοηθούν στην κατανόηση εννοιών και στην πραγματοποίηση περίπλοκων μαθηματικών δραστηριοτήτων. Αυτοί που θα οργανώσουν τις δραστηριότητες θα πρέπει να έχουν την κατάλληλη γνώση της ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά και τις τεχνικές γνώσεις για την παραγωγή των βίντεο. Έτσι, δε θα υπάρχουν τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν τώρα οι καθηγητές Μαθηματικών και θα μπορεί να προωθηθεί η εφαρμογή και η ανάπτυξη αυτών των βίντεο.
2) Την μάθηση από άλλους και την ευέλικτη ανάπτυξη. Προς το παρόν, η ανάπτυξη αυτών των βίντεο είναι σε αρχικό στάδιο στην Κίνα. Από τη μία, στόχος είναι να μάθουν από άλλες εμπειρίες στο εξωτερικό και να αναζητήσουν νέες ιδέες και τεχνικές, από την άλλη πρέπει να εφαρμοστεί ένα σχέδιο στα διδακτικά πλαίσια της χώρας.

Τέλος, η μελέτη της ιστορίας των Μαθηματικών με προσανατολισμό στη μαθηματική εκπαίδευση και την αναζήτηση σχετικά με τα HPM βίντεο θα αποτελέσει μια σημαντική ερευνητική κατεύθυνση στο μέλλον.

## 4.11 Έρευνα Λάππα: Η διδασκαλία των λογαρίθμων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με ιστορική προοπτική

### 4.11.1 Εισαγωγή

Οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν δυσκολίες όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με τους λογαρίθμους και τη λογαριθμική συνάρτηση στη Β΄ Λυκείου. Η έρευνα της Ελένης Λάππα εστίασε σε μια διδακτική παρέμβαση σύμφωνα με την προσέγγιση του Jankvist και αξιοποίησε την ιστορία των Μαθηματικών ως εργαλείο για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, μέσω της μελέτης ιστορικών κειμένων και τη γνώση της ιστορικής εξέλιξης, σε συνδυασμό με τη χρήση του λογισμικού Geogebra.

Από πολλούς θεωρείται ότι η αφηρημένη φύση των μαθηματικών εννοιών ευθύνεται για τις δυσκολίες στην κατανόηση των μαθητών. Στη μαθηματική εκπαίδευση απαιτείται μια πλήρης κατανόηση που δεν εστιάζει μόνο στο τι πρέπει να γίνει για να επιτευχθεί η γνώση, αλλά και στο γιατί. Στη μελέτη της μαθησιακής πορείας μιας μαθηματικής έννοιας ξεχωρίζει η διάκριση της μαθηματικής γνώσης σε δύο κατηγορίες: τη *διαδικαστική* (procedural) και τη *νοητική* (conceptual). Η διαδικαστική αφορά την εκτέλεση απλών αλγορίθμων και συνήθων πράξεων σε μαθηματικά αντικείμενα, που είναι μεν απαραίτητη για την ολοκλήρωση μαθηματικών εργασιών, αλλά δεν είναι αρκετή για την απόκτηση μιας πλήρους γνωσιακής δομής σχετικά με την εκάστοτε μαθηματική έννοια. Σε υψηλότερο επίπεδο βρίσκεται η νοητική γνώση, που μπορεί να απαντήσει στο «γιατί». Δεν είναι βέβαια ένα απομονωμένο μέρος της γνώσης, αλλά περιλαμβάνει την απαραίτητη σύνδεση ώστε να επιτευχθεί ένα δομημένο και ευέλικτο γνωσιακό σχέδιο (Gray & Tall, 1994). Η καλή επικοινωνία μεταξύ του επιστημολογικού και γνωσιακού περιεχομένου των μαθηματικών εννοιών επιτυγχάνεται από την ταυτόχρονη ανάπτυξη της διαδικαστικής και νοητικής γνώσης.

Η έννοια του λογαρίθμου είναι ένα βασικό κομμάτι της διδακτέας ύλης, με μακρά ιστορική εξέλιξη. Αρχικά, εμφανίζεται ως ένα εργαλείο για τον υπολογισμό δύσκολων πράξεων και έπειτα στη συναρτησιακή μορφή του για την εξήγηση διαφόρων επιστημονικών φαινομένων. Ωστόσο, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στη διαμόρφωση μιας εικόνας που περιλαμβάνει τη διαδικασία των εκθετικών που οδηγούν στους λογαρίθμους. Παράλληλα, οι μαθητές διδάσκονται την έννοια της λογαριθμικής συνάρτησης. Οι συναρτήσεις γενικότερα αποτελούν ένα βασικό κομμάτι των Μαθηματικών, στις οποίες όμως πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες. Έτσι, στη διδασκαλία της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτουν δύο προβλήματα, το ένα αφορά τη δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του λογαρίθμου και το δεύτερο προκύπτει από την έννοια της ίδιας της συνάρτησης. Ένας τρόπος για να ξεπεραστούν τα εμπόδια είναι η αξιοποίηση της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία.

### 4.11.2 Μεθοδολογία

Η διδακτική παρέμβαση σχεδιάστηκε με βάση την προσέγγιση του Jankvist, με χρήση PowerPoint, ένα εισαγωγικό και τρία βασικά φύλλα εργασίας. Εφαρμόστηκε σε μια τάξη με 16 μαθητές ηλικίας 17 ετών, σε ελληνικό σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών ήταν διπλός. Από τη μία, μέσω της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων η ιστορία αξιοποιήθηκε για να φανερωθεί η εξέλιξη του περιεχομένου των Μαθηματικών, η σύνδεσή τους με το κοινωνικό και πολιτισμικό περιβάλλον στο οποίο αναπτύχθηκαν και η σχέση με άλλες επιστήμες. Από την άλλη, η ιστορία χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο για να επιτευχθεί μια πιο ολιστική προσέγγιση στις μαθηματικές έννοιες, εστιάζοντας σε βασικά στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης που είναι απαραίτητα για τη δημιουργία μιας πλήρους εικόνας αυτών των εννοιών. Τα πιο σημαντικά στάδια εξέλιξης των λογαρίθμων αφορούσαν τον υπολογισμό δύσκολων αριθμητικών πράξεων στο πλαίσιο του 17$^{ου}$ αιώνα.

Επίσης, παρουσιάστηκαν οι λόγοι που οδήγησαν στην ανακάλυψή τους και στους ανθρώπους που συνέβαλαν ιστορικά, αλλά και η σημασία τους στη σύγχρονη εποχή. Μελετήθηκε η μέθοδος της προσθαφαίρεσης στις αριθμητικές-γεωμετρικές προόδους του κινηματικού μοντέλου του Napier. Ο λογάριθμος ορίστηκε ως «ο αριθμός των λόγων», στο ιστορικό πλαίσιο όπου η έννοια της δύναμης δεν είχε ξεκαθαριστεί. Ακόμη, συζητήθηκε ο τρόπος με τον οποίο ο Napier κατασκεύασε τους λογαριθμικούς πίνακες. Η ιστορική αναδρομή ολοκληρώθηκε με την παρουσίαση των εφαρμογών των λογαρίθμων σε διάφορους τομείς. Οι μαθητές μελέτησαν κείμενα από το *Introductio in analysin infinitorum* του Euler, που περιείχαν τον ορισμό του λογαρίθμου και της συνάρτησης.

Η συνεργατική μέθοδος διδασκαλίας ευνόησε την ανταλλαγή απόψεων, την ανάπτυξη επιχειρημάτων και την ενεργή συμμετοχή των μαθητών. Παράλληλα, η αξιοποίηση του λογισμικού Geogebra μαζί με τα ιστορικά κείμενα, δημιούργησαν ένα περιβάλλον πειραματισμού και εξερεύνησης, βοηθώντας στην κατανόηση της λογαριθμικής συνάρτησης ως αντίστροφη της εκθετικής. Μέσω της παρατήρησης της δουλειάς των μαθητών και των απαντήσεών τους σε δύο ερωτηματολόγια που δόθηκαν μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, στόχος ήταν να απαντηθεί αν η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών βοήθησε στην κατανόηση της έννοιας λογαρίθμων και γενικότερα στην προσέγγιση των Μαθηματικών ως ένα εξελισσόμενο πολιτισμικό προϊόν.

Το εισαγωγικό φύλλο εργασίας περιείχε δύσκολους και χρονοβόρους αριθμητικούς υπολογισμούς, οι οποίοι ζητήθηκαν να γίνουν από τους μαθητές. Μετά τις αποτυχημένες αρχικές προσπάθειές τους, κατάφεραν να κάνουν τους ίδιους υπολογισμούς με τη χρήση λογαρίθμων κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης. Το πρώτο φύλλο εργασίας περιείχε ένα κείμενο του Euler (1748) σχετικά με τον συμβολισμό των λογαρίθμων και τον ορισμό ως δύναμη και ως τιμή συνάρτησης, προσεγγίζοντας την έννοια λογαρίθμου σαν διαδικασία και σαν αποτέλεσμα: «Όπως για έναν δοθέν αριθμό $\alpha$, για κάθε τιμή του $z$, μπορούμε να βρούμε την τιμή του $y$ $(= a^z)$, έτσι και για μια δοθείσα θετική τιμή του $y$, θα θέλαμε να δώσουμε μια τιμή για το $z$, τέτοια ώστε $a^z = y$. Αυτή η τιμή του $z$, δεδομένου ότι θεωρείται ως μια συνάρτηση του $y$, λέγεται λογάριθμος του $y$».

Το κείμενο είχε ως στόχο να εμπλουτίσει το θεωρητικό υπόβαθρο της διαδικασίας. Οι επόμενες εργασίες στόχευαν στην απόκτηση μιας βαθιάς κατανόησης του ορισμού και του συμβολισμού μέσω της επεξήγησης της εκθετικής και λογαριθμικής σχέσης των μεταβλητών και της εφαρμογής του ορισμού για να αντιμετωπιστούν παρόμοιες δραστηριότητες. Επίσης, εξετάστηκαν οι γνώσεις των μαθητών στις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων, ώστε να σχεδιαστεί το τρίτο φύλλο εργασίας με βάση τις απαντήσεις που θα έδιναν, κυρίως για τις λογαριθμικές συναρτήσεις. Ζητήθηκε από τους μαθητές να εφαρμόσουν την εκθετική διαδικασία, για να ενεργοποιηθεί η διαδικαστική λειτουργία των λογαρίθμων και να γίνει η ταύτιση του λογαριθμικού συμβόλου ως ένα αυτόνομο μαθηματικό αντικείμενο.

Παρομοίως, στο δεύτερο φύλλο εργασίας περιέχεται ένα κείμενο του Euler που εστιάζει σε λογαριθμικούς κανόνες, με τις αποδείξεις να δίνονται εμμέσως: «Αν $\log y = z$, τότε $\log y^2 = 2z$, $\log y^3 = 3z$ κ.ο.κ. γενικότερα $\log y^n = nz$ ή $\log y^n = n \log y$, αφού $z = \log y$. Έπεται ότι ο λογάριθμος οποιασδήποτε δύναμης του $y$ είναι ίσος με το γινόμενο του εκθετικού και του λογαρίθμου του $y$. Αν ξέρουμε ήδη τους λογάριθμους των δύο αριθμών, π.χ. $\log y = z$ και $\log v = x$, αφού $y = a^z$ και $v = a^x$, προκύπτει ότι $\log v\, y = x + z = \log v + \log y$. Άρα, ο λογάριθμος του γινομένου δύο αριθμών ισούται με το άθροισμα των λογαρίθμων των παραγόντων».

Δόθηκε έμφαση στη χρησιμότητα των ιδιοτήτων υπολογισμού λογαρίθμων πολλών αριθμών, μέσω λιγότερων αριθμών, χωρίς την άμεση αναφορά στην ευκολία που προκύπτει από αυτές τις ιδιότητες. Οι μαθητές αναμένονταν να εμβαθύνουν στην εσωτερίκευση της έννοιας του λογαρίθμου, μέσω της χρήσης του ορισμού στις αποδείξεις των ιδιοτήτων και αιτιολογώντας στις απαντήσεις των ερωτήσεων που τέθηκαν.

Το τρίτο φύλλο εργασίας περιέχει δύο στάδια. Το πρώτο βασιζόταν σε ένα κείμενο του Euler με τον ορισμό του για τη συνάρτηση ως αναλυτική έκφραση: «Μια συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας ... ως μια αναλυτική έκφραση που αποτελείται με οποιοδήποτε τρόπο ανεξάρτητα από τη μεταβλητή ποσότητα και τους αριθμούς ή τις σταθερές ποσότητες. Μια μονότιμη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση για την οποία, όποια τιμή και να τεθεί στη μεταβλητή $z$, ορίζεται μία μοναδική τιμή της συνάρτησης. Αν $y$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση της $z$, τότε παρόμοια η $z$ είναι μια συνάρτηση της $y$».

Οι δραστηριότητες που ακολούθησαν δημιουργήθηκαν ώστε να δώσουν έμφαση οι μαθητές στις εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές και στην αντίστροφη συνάρτηση. Επίσης, εφαρμόστηκαν οι παραπάνω έννοιες σε ένα πραγματικό πρόβλημα της σεισμολογίας, κυρίως μέσω των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.

Το δεύτερο στάδιο βασίστηκε στη χρήση του λογισμικού Geogebra για τη μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης. Οι μαθητές έπρεπε να εναλλάσσονται μεταξύ των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών, βρίσκοντας τους τύπους για τις αντίστροφες συναρτήσεις, για το γράφημα της λογαριθμικής συνάρτησης, για να δημιουργήσουν γραφικές και αλγεβρικές λύσεις των λογαριθμικών εξισώσεων και για να αιτιολογήσουν τη συμμετρία των γραφημάτων των αντίστροφων συναρτήσεων με βάση τον ρόλο των μεταβλητών.

Δόθηκαν δύο ερωτηματολόγια στους μαθητές χωρίς προειδοποίηση, μία βδομάδα μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, δηλαδή ενάμιση μήνα από την αρχή του μαθήματος. Ο στόχος ήταν να εξεταστεί σε ποιο βαθμό οι μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους χωρίς ετοιμασία, για να λύσουν λογαριθμικές εξισώσεις και ανισώσεις και για να αποκτήσουν μια κατανόηση για τη λογαριθμική συνάρτηση με κατάλληλη εφαρμογή κανόνων. Σε κάθε βήμα απαιτούνταν αιτιολόγηση. Το πρώτο ερωτηματολόγιο δημιουργήθηκε για να εκφράσουν οι μαθητές τις προσωπικές τους απόψεις σχετικά με τη χρήση της ιστορίας στη διδακτική παρέμβαση, την αναγκαιότητα που οδήγησε στην ανακάλυψη των λογαρίθμων και στη χρήση τους στη σύγχρονη εποχή και τον εξελισσόμενο χαρακτήρα των μαθηματικών εννοιών. Το δεύτερο ερωτηματολόγιο εστίαζε στις γνώσεις των μαθητών στους λογαρίθμους και στην εφαρμογή τους σε σχετιζόμενες εφαρμογές.

### 4.11.3 Ανάλυση αποτελεσμάτων

Οι μαθητές αξιοποίησαν τα κείμενα αποκωδικοποιώντας τα σύμβολα που υπήρχαν και εφάρμοσαν την εκθετική διαδικασία για την επίλυση των δραστηριοτήτων. Ταυτόχρονα, ανέπτυξαν επίσημα και ανεπίσημα επιχειρήματα για τον χειρισμό των συμβόλων και των διαδικασιών. Συγκεκριμένα, σχετικά με την ερώτηση για τον ορισμό του λογαρίθμου ως μια συναρτησιακή έκφραση χρησιμοποίησαν τις ίδιες ακριβώς λέξεις με το κείμενο, χωρίς να αναφέρουν την εκθετική σχέση μεταξύ των μεταβλητών, κάτι που δείχνει ότι σε πρώτη φάση δεν μπορούσαν να αποσαφηνίσουν τον ορισμό. Όσο συνέχιζαν να δουλεύουν στις δραστηριότητες φάνηκε η αδυναμία στην αρχική, αυτοματοποιημένη προσέγγιση στον ορισμό. Επιστρέφοντας ξανά στον ορισμό χρησιμοποίησαν συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές και δούλεψαν με αλγεβρικό συμβολισμό, αναπτύσσοντας τη σημειολογία της εργασίας. Επίσης, έδωσαν μια λεκτική έκφραση του ορισμού: «Αν ένας αριθμός υψωθεί σε έναν εκθέτη, τότε ο εκθέτης είναι ο λογάριθμος του αποτελέσματος».

Ένας χαρακτηριστικός διάλογος που έγινε στην τάξη σχετικά με την πρόταση: «Όπως για έναν δοθέν αριθμό $a$, για κάθε τιμή του $z$, μπορούμε να βρούμε την τιμή του $y$ $(= a^z)$, έτσι και για μια δοθείσα θετική τιμή του $y$, θα θέλαμε να δώσουμε μια τιμή για το $z$, τέτοια ώστε $a^z = y$» ήταν ο εξής:

– «Αν ξέρω το $z$ και το $a$, τότε μπορώ να βρω το $y$. Αν ξέρω το $y$ τότε πώς μπορώ να βρω το $z$; Τι σημαίνει;»

– «Αν $z$ είναι ο λογάριθμος του $y$, είναι αποτέλεσμα εκτίμησης ή μια αντιστοιχία;»

– «Ο λογάριθμος μετρά τους λόγους. Είναι αριθμός; Είναι και τα δύο;»

Αν και η τελευταία ερώτηση δεν απαντήθηκε από τους μαθητές σε αυτό το στάδιο, ο διάλογος αυτός δείχνει την πρόοδο που γινόταν στο πλαίσιο του να φανεί ο λογάριθμος ως ένα αντικείμενο και η διπλή φύση της συνάρτησης ως μια διαδικασία και ένα αποτέλεσμα. Η ετυμολογία της λέξης λογάριθμος συνέβαλε στη δημιουργία της κατάλληλης «εικόνας της έννοιας». Επίσης, η αντιστοιχία των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων εφαρμόσθηκε για να αιτιολογηθεί η λύση των λογαριθμικών εξισώσεων όπως η $\log_2 4 = x$, η οποία λύθηκε αρχικά μέσω του ορισμού του Euler. Αν και διευκρινίστηκε ο ορισμός και εφαρμόστηκε σωστά, οι μαθητές δυσκολεύονταν να δεχτούν το $\log_5 112$ ως έναν αριθμό που ήταν η λύση της εξίσωσης $5^x = 112$. Παρόμοια, δυσκολεύτηκαν και στην ερώτηση: «με τι είναι ίσο το $a^{\log_a u}$;». Οι μαθητές συνέχισαν δοκιμάζοντας βολικές αριθμητικές τιμές στις μεταβλητές και εφάρμοσαν τον ορισμό του Euler για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων. Πάντως από το πρώτο στο δεύτερο φύλλο εργασίας φάνηκε να υπάρχει γενικά καλύτερη κατανόηση στους λογαρίθμους.

Στο δεύτερο φύλλο αναλύθηκαν οι ισότητες του κειμένου και κατασκευάστηκαν οι αποδείξεις των λογαριθμικών ιδιοτήτων μέσω του εξής ορισμού: «Αφού $\log y = z$, τότε $a^z = y$ ή $y^2 = (a^z)^2$ ή $y^2 = a^{2z}$, το $2z$ είναι ο εκθέτης στη βάση $a$ και άρα ο λογάριθμος του $y^2$. Άρα το $\log y^2$ ισούται με $2\log y$». Έτσι, αναπτύχθηκε η σημειολογία της εργασίας χωρίς προβλήματα στη χρήση των συμβόλων. Ένας μαθητής μάλιστα παρατήρησε ότι γνωρίζοντας τον λογάριθμο δύο αριθμών, τότε μπορεί να βρεθεί ο λογάριθμος του πηλίκου τους. Τονίζεται ότι οι μαθητές διέκριναν την απλοποίηση των υπολογισμών του Euler, λόγω της αναγωγής του πολλαπλασιασμού στην πρόσθεση και της διαίρεσης στην αφαίρεση, που ήταν ο βασικός λόγος που οδήγησε στην ανακάλυψη των λογαρίθμων και βασικό στοιχείο της παρουσίασης της ιστορικής εξέλιξης των λογαρίθμων. Έτσι, εμφανίστηκε άλλη μια φορά η αντιστοιχία με τις αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους.

Στο τρίτο φύλλο εργασίας, εκτός από τον ορισμό του Euler για τη συνάρτηση υπήρχε και ένα πραγματικό πρόβλημα από τη σεισμολογία, σχετικά με το μέγεθος ($R$) και την ένταση ($I$) ενός σεισμού με τον εκθετικό τύπο $I = I_0 \cdot 10^R$, $I_0 > 0$. Ζητήθηκε από τους μαθητές να αποφασίσουν αν αυτή η έκφραση είναι μια συνάρτηση σύμφωνα με τον ορισμό του Euler και να ορίσουν τις εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές. Χρησιμοποίησαν στοιχεία από την ιστορία των λογαρίθμων, προσπαθώντας να συσχετίσουν τη σημασία της συνάρτησης με τις προσεγγίσεις των Euler και Napier. Διαπίστωσαν ότι υπάρχει μια συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών και στις δύο προσεγγίσεις. Αναγνώρισαν τη σχέση μεταξύ του μεγέθους και της έντασης των σεισμών, ως μια συναρτησιακή έκφραση και διέκριναν σωστά τις ανεξάρτητες από τις εξαρτημένες μεταβλητές. Επίσης, συμπέραναν ότι η σχέση της έντασης και του μεγέθους του σεισμού ήταν σύμφωνη με τον ορισμό του Euler για τη συνάρτηση. Ο τύπος που δόθηκε εξετάστηκε ως μια συσχέτιση των μεταβλητών, όπου $R$ είναι αριθμητική πρόοδος και $I$ γεωμετρική. Βρέθηκε ότι η αριθμητική μεταβολή στις τιμές του μεγέθους οδηγούν σε μια γεωμετρική αλλαγή στην ένταση. Το αποτέλεσμα ήταν η αναμενόμενη εμφάνιση λογαρίθμων κατά την αλλαγή των μεταβλητών, που οδήγησε στην αντίστροφη συνάρτηση όπως ζητούνταν στο φύλλο εργασίας.

Έπειτα, η εργασία συνέχισε με το λογισμικό Geogebra. Οι μαθητές κατασκεύασαν γραφικές αναπαραστάσεις συνδυάζοντας ζεύγη ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών με σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο. Αντίστροφα, κατάφεραν να συνδυάσουν το γράφημα που εμφανιζόταν στην οθόνη ως μια απεικόνιση των σημείων της εκθετικής συνάρτησης, όπου τα σημεία αντιστράφηκαν στον κατάλληλο λογαριθμικό τύπο. Στη συνέχεια, έπρεπε να επιστρέψουν στο κείμενο και τον ορισμό. Σε κάθε στάδιο της εργασίας οι μαθητές συνδύασαν τα στοιχεία του ιστορικού κειμένου για την έννοια της συνάρτησης και της αντίστροφης, με την επίβλεψη των πολλαπλών αναπαραστάσεων της συνάρτησης στο Geogebra, ώστε να επιτευχθεί η γραφική και αλγεβρική επίλυση των δραστηριοτήτων. Συμπέραναν γραφικά ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι μονότονη, που όταν η βάση της $a$ είναι μεγαλύτερη του 1 είναι αύξουσα, ενώ όταν είναι μικρότερη του 1 είναι φθίνουσα και αλγεβρικά μέσω του ορισμού και κατάλληλων αριθμητικών τιμών. Επιπλέον, μελέτησαν το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της λογαριθμικής συνάρτησης ως αντίστροφης της εκθετικής και τη συμμετρία με την ευθεία $y = x$ .

### 4.11.4 Συμπέρασμα

Η γνώση ιστορικών στοιχείων για τους λογαρίθμους παρακίνησε στη χρήση του ορισμού ως ένα εργαλείο στις δραστηριότητες και για την αποκωδικοποίηση του συμβολισμού, βοηθώντας στην ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο θέμα του λογαρίθμου. Η αντιστοιχία των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων και η ετυμολογία της λέξης «λογάριθμος» χρησιμοποιήθηκε συμπληρωματικά μαζί με τον ορισμό του Euler στην εργασία. Η ιστορική εξέλιξη του λογαρίθμου παρείχε μια ολιστική προσέγγιση στα μαθηματικά αντικείμενα, που βοήθησε στην κατανόηση από τους μαθητές. Από τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια φάνηκε ότι κινήθηκε το ενδιαφέρον των μαθητών και απαντήθηκαν πολλές ερωτήσεις τους σχετικά με την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων και τη χρησιμότητά τους.

Το δεύτερο σκέλος της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών σε αυτήν τη διδακτική παρέμβαση αφορούσε τη μελέτη των ιστορικών κειμένων. Από τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες με τα κείμενα, κάτι που ήταν αναμενόμενο καθώς ήταν στην αυθεντική τους μορφή και όχι στη σύγχρονη εκλεπτυσμένη μορφή που έχουν συνηθίσει από τα σχολικά βιβλία, ενώ πολλοί δυσκολεύτηκαν με τη ρητορική γλώσσα. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης πάντως ξεπεράστηκαν αυτά τα εμπόδια μέσω της συνεργατικής διδασκαλίας και τα ιστορικά κείμενα έδρασαν ως γνωστικά εργαλεία στην κατανόηση των μαθητών για τους λογαρίθμους. Παράλληλα, η χρήση του Geogebra λειτούργησε βοηθητικά και εκτιμήθηκε θετικά από τους μαθητές. Από τις συζητήσεις στην τάξη και τις σωστές απαντήσεις στις δραστηριότητες των ερωτηματολογίων φάνηκε μια πολύ καλή ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο αντικείμενο των λογαρίθμων και τη χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης μέσω της αντίστροφης.

Ταυτόχρονα, οι μαθητές συνειδητοποίησαν ότι τα Μαθηματικά είναι ένα εξελισσόμενο προϊόν που συνδέεται με το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύσσεται και δεν είναι απλά μια σειρά από θεωρήματα, ορισμούς και ασκήσεις που δεν έχουν νόημα. Ωστόσο, η χρήση της ιστορίας συγκεκριμένα στους λογαρίθμους, δεν αρκεί να βγει συμπέρασμα για όλα τα Μαθηματικά. Αυτό φάνηκε και σε κάποιες απαντήσεις των μαθητών που συμφώνησαν μεν για την εξελικτική φύση των Μαθηματικών, είχαν όμως ακόμη αμφιβολίες για το αν η διδακτική παρέμβαση επηρέασε σημαντικά τις απόψεις τους. Παρόλο που αυτή η έρευνα έχει περιορισμούς ως προς τη γενίκευση συμπερασμάτων, μπορεί να διατυπωθεί ότι η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών βοήθησε στη διδασκαλία των λογαρίθμων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παρείχε μια εναλλακτική προσέγγιση των Μαθηματικών.

## 4.12 Έρευνα Vallhonesta και Massa-Esteve: Πηγές από τον 16ο αιώνα για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών

### 4.12.1 Εισαγωγή

Η χρήση αυθεντικών κειμένων είναι ένας τρόπος να εισαχθούν στην τάξη οι πηγές στις οποίες βασίζεται η μαθηματική γνώση. Αν τα κείμενα επιλεχθούν προσεκτικά, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν τις συλλογιστικές τους ικανότητες και να αντιληφθούν την ανθρωπιστική πλευρά των Μαθηματικών. Στην έρευνα των Fàtima Romero Vallhonesta και Rosa Massa-Esteve του πανεπιστημίου Politècnica de Catalunya της Βαρκελώνης, παρουσιάστηκαν δύο προβλήματα του 15$^{ου}$ και 16$^{ου}$ αιώνα. Για το πρώτο πρόβλημα δόθηκαν τρεις παρόμοιες διατυπώσεις από το *Arithmetica* (1484) του Pietro Borghi, το *Coss* (1525) του Christoff Rudolff, και το *Libro Primero* (1552) του Marco Aurel για το πρόβλημα της πρόσληψης ενός εργάτη. Το δεύτερο αφορούσε μια κατάσταση που τέθηκε από ένα μαθητή σε έναν άλλον από το *Arithmetica practica y speculative* (1562) του Juan Pérez de Moya. Στόχος ήταν να αναλυθούν οι όψεις της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης μέσω της επίλυσης προβλημάτων που εφαρμόστηκαν στην τάξη. Η ανάλυση διαφορετικών μαθηματικών διαδικασιών στην επίλυση ιστορικών προβλημάτων μπορεί να ωθήσει τους μαθητές να επινοήσουν δικές τους μεθόδους όταν αντιμετωπίζουν άγνωστα προβλήματα.

### 4.12.2 Η Ιστορία των Μαθηματικών στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης των μαθητών

Η χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών στην τάξη δίνει την αίσθηση στους μαθητές ότι τα Μαθηματικά είναι μια δυναμική, χρήσιμη και ανθρώπινη επιστήμη, που μπορεί να αντιληφθεί και ως μια κοινωνική δραστηριότητα. Ακόμη, αποτελεί ένα διδακτικό μέσο που μπορεί να βελτιώσει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Η ιστορία σύμφωνα με τους Vallhonesta και Massa-Esteve μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα στο πλαίσιο των ερευνητικών εργασιών των μαθητών της Καταλονίας στην τάξη της Β΄ Λυκείου.

Η έρευνα μπορεί να εξοικειώσει τους μαθητές με τη συλλογιστική παλιότερων περιόδων και άλλων πλαισίων, έχοντας μεγάλο εύρος, από πιο απλά προβλήματα μέχρι και περίπλοκες αποδείξεις. Επιπλέον, η διεξαγωγή εργαστηρίων και συνεδρίων παρέχει κι άλλους τρόπους για να εφαρμοστεί άμεσα η ιστορία των Μαθηματικών, ώστε να υπάρχει μια πιο εμπεριστατωμένη εμπειρία για τους μαθητές. Η άμεση χρήση αυθεντικών πηγών στην τάξη μπορεί κι αυτή να δώσει ένα μέσο για την καλύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

### 4.12.3 Καταλανική σχολική ύλη. Επίλυση προβλημάτων και Ιστορία των Μαθηματικών

Η ιστορία των Μαθηματικών έχει επίσημη θέση στη σχολική ύλη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Καταλονία από το 2007. Το 2015 ορίστηκαν οι βασικές ικανότητες που πρέπει να αποκτηθούν σε κάθε μάθημα, έτσι και στα Μαθηματικά, μία από αυτές αφορούσε την ιστορία των Μαθηματικών για την επίτευξη της κατανόησης μαθηματικών εννοιών. Επίσης, σημαντικό ρόλο παίζει και η επίλυση προβλημάτων, που δε στέκεται μόνο στην εύρεση απλών λύσεων ή στην απομνημόνευση τύπων. Με την επίλυση προβλημάτων οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα να προσεγγίζουν μαθηματικά προβλήματα της πραγματικής ζωής, αναπτύσσοντας την αλγεβρική σκέψη. Η επίλυση προβλημάτων απαιτεί τις εξής βασικές ικανότητες:

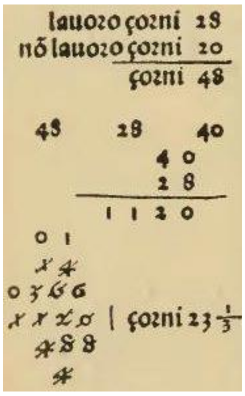
1. Τη μετάφραση ενός προβλήματος σε μαθηματική γλώσσα ή σε αναπαράσταση μέσω μεταβλητών συμβόλων, διαγραμμάτων κ.λπ.
2. Τη χρήση εννοιών, εργαλείων και μαθηματικών προσεγγίσεων για την επίλυση προβλημάτων.
3. Τη διατήρηση μιας ερευνητικής στάσης απέναντι σε ένα πρόβλημα, δοκιμάζοντας διαφορετικές στρατηγικές.
4. Την παραγωγή ερωτήσεων μαθηματικής φύσης.

Τα προβλήματα είναι προτάσεις αντιμετώπισης άγνωστων καταστάσεων, που αρχικά δεν έχουν προφανείς λύσεις, απαιτούν σκέψη και λήψη αποφάσεων. Ακόμη, τα προβλήματα διαφέρουν από τις ασκήσεις.

### 4.12.4 Περιγραφή της κατάστασης

Η ιστορική αναδρομή ξεκινά με την ανάπτυξη των αλγεβρικών εξισώσεων, που ουσιαστικά προέκυψαν από τους Άραβες μαθηματικούς. Ο al-Khwarizmi θεωρείται ο πατέρας των αλγεβρικών κανόνων στη ρητορική τους μορφή. Ο Fibonacci ήταν αυτός που έφερε τις αλγεβρικές γνώσεις στην Ευρώπη. Η πιο πρόχειρη περίοδος ανάπτυξης της Άλγεβρας ήταν ο 13ος και 14ος αιώνας, λόγω της χρήσης των Μαθηματικών σε εμπορικές συναλλαγές. Όλη η γνώση των Αράβων και η αριθμητική των εμπόρων συλλέχθηκε από τον Luca Paciol στο *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni & Proportionalità* (1494) και είχε μεγάλη επιρροή στους Ισπανούς αλγεβριστές που παρατίθενται παρακάτω στη δραστηριότητα.

Εδώ τέθηκαν δύο ιστορικά προβλήματα του 16ου αιώνα, μιας περιόδου που ξεκίνησε η επίλυση αλγεβρικών εξισώσεων ρητορικά. Για το πρώτο πρόβλημα παρουσιάστηκαν τρεις εκδοχές του από τους Pietro Borghi, Christoff Rudolff και Marco Aurel. Μετά την επίλυση των προβλημάτων συζητήθηκαν οι λύσεις των συγγραφέων αυτών και τα χαρακτηριστικά των Μαθηματικών της εποχής. Στην παρούσα έρευνα εστίασαν στην επίλυση των προβλημάτων. Στην εκδοχή του Borghi περιέχεται η διατύπωση του προβλήματος και κάποιες σκέψεις για την επίλυση και τη λύση αυτή καθαυτή (Σχήμα 34):



**Σχήμα 34: Επίλυση του Borghi**

Το πρόβλημα αυτό προσαρμοσμένο σε σύγχρονο πλαίσιο για να είναι πιο οικείο στους μαθητές, διατηρώντας όμως τις ίδιες ποσότητες είναι ως εξής: *Ένα κορίτσι ψάχνει μια δουλειά σε σπίτια και μια γυναίκα την προσλαμβάνει για 40 μέρες. Η γυναίκα ξέρει ότι το κορίτσι δεν είναι πολύ αξιόπιστο και της θέτει κάποιες προϋποθέσεις: για κάθε μέρα που δουλεύει θα λαμβάνει 20 ευρώ, αλλά αν δεν εμφανιστεί θα πρέπει να πληρώσει 28 ευρώ στην ιδιοκτήτρια. Μετά από 40 μέρες η γυναίκα δε χρωστάει τίποτα. Πόσες μέρες δούλεψε το κορίτσι;*

Η απάντηση που έδωσε σε αυτό το πρόβλημα ο Borghi ήταν: $23\frac{1}{3}$.

Στο άλλο πρόβλημα τίθενται κάποιες ερωτήσεις σε μορφή διαλόγου. Το πρώτο μέρος περιέχει ένα διάλογο μεταξύ δύο μαθητών, του Σοφρόνιου και του Αντίμαχου. Ο Σοφρόνιος υποστηρίζει την αξία της γνώσης της αριθμητικής θέτοντας κάποιες ερωτήσεις στον Αντίμαχο, ο οποίος στην αρχή δεν πιστεύει στην αξία της, αλλά στο τέλος συμφωνεί με τον Σοφρόνιο. Αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με την αναλογικότητα και τέθηκε σχεδόν αυτούσιο, απλά μεταφρασμένο στη σύγχρονη γλώσσα ως εξής:

*Ένας στρατιώτης πήγε στην αγορά για να αγοράσει σπαράγγια από έναν αγρότη και ρώτησε για την τιμή από ένα τσαμπί σπαραγγιών που θα μπορούσε να δεθεί με ένα σκοινί ίσο με το μήκος της παλάμης του. Συμφωνήθηκε ότι ο στρατιώτης θα πλήρωνε μισό νόμισμα στον αγρότη. Μετά από μερικές μέρες, ο στρατιώτης επέστρεψε στον ίδιο αγρότη και του είπε ότι ήθελε να αγοράσει ένα τσαμπί σπαράγγια που θα μπορούσαν να δεθούν με ένα σκοινί ίσο με δύο φορές το μήκος της παλάμης του. Για αυτό πρόσφερε στον αγρότη το διπλάσιο, ένα νόμισμα. Είναι δίκαιο να πληρώσει τον αγρότη με ένα νόμισμα; Είναι σωστό; Αν νομίζετε ότι δεν είναι σωστό, πόσα θα έπρεπε να πληρώσει και γιατί;*

Σε αυτήν την περίπτωση, η λύση δίνεται μέσω ρητορικής λογικής. Η ερώτηση τίθεται από τον Σοφρόνιο στον Αντίμαχο. Ο Αντίμαχος πιστεύει ότι δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ο στρατιώτης πρέπει να πληρώσει ένα νόμισμα για τα σπαράγγια που ενώνονται με το σκοινί μήκους μιας παλάμης. Ο Σοφρόνιος του ζητά να πάρει ένα σκοινί και ένα με το διπλάσιο μήκος και να ελέγξει ότι η ποσότητα των σπαραγγιών στο δεύτερο σκοινί είναι τετραπλάσια από την ποσότητα στο πρώτο. Άρα η ποσότητα που πρέπει να πληρώσει στον αγρότη είναι δύο νομίσματα.

Αυτά τα προβλήματα τέθηκαν σε 28 μαθητές της τρίτης τάξης (14ων ετών) και σε 29 μαθητές της πρώτης τάξης (12 ετών) του σχολείου Eugeni Xammar στο l’Ametlladel Valles της Καταλονίας. Στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση της Καταλονίας οι μαθητές ξεκινούν από την ηλικία των 12 και φτάνουν μέχρι τα 18, αν και η υποχρεωτική εκπαίδευση τελειώνει στα 16. Οι μαθητές της τρίτης τάξης έχουν ήδη διδαχθεί πώς να λύνουν συστήματα εξισώσεων, ενώ της πρώτης τάξης όχι. Στην παρουσίαση της δραστηριότητας, αναφέρθηκε ότι αυτή η δραστηριότητα είναι μέρος ενός ερευνητικού προγράμματος και ζητήθηκε από τους μαθητές να σημειώσουν πιθανές ιδέες ή στρατηγικές για την επίλυση των προβλημάτων, ακόμη κι αν έχουν αμφιβολίες για την ακρίβειά τους.

Στους μαθητές της τρίτης τάξης, οι μόνες σωστές απαντήσεις δόθηκαν από αυτούς που έλυσαν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σύστημα εξισώσεων, ενώ αυτοί που χρησιμοποίησαν πιο ευφάνταστες διαδικασίες δεν κατάφεραν να φτάσουν στη λύση όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| **Με τη χρήση συστήματος εξισώσεων** | **Χωρίς τη χρήση εξισώσεων** | **Χωρίς απάντηση** |
|---|---|---|
| Σωστές / Λάθος | Σωστές / Λάθος | |
| 7 / 4 | 0 / 13 | 4 |

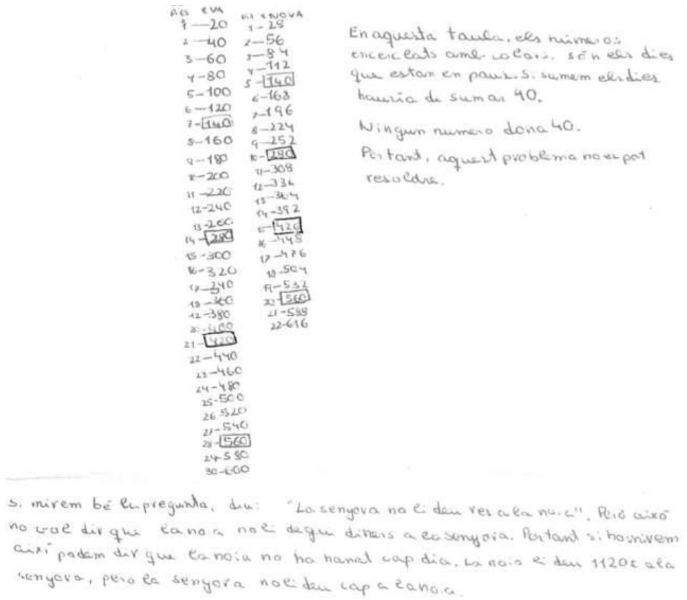
**Πίνακας 15: Επίλυση του πρώτου προβλήματος από τους μαθητές της τρίτης τάξης**

Οι λύσεις που δόθηκαν από τους μαθητές της πρώτης τάξης ήταν πιο ποικιλόμορφες. Οι περισσότεροι προσπάθησαν να βρουν τη λύση ψάχνοντας τα κοινά πολλαπλάσια του 20 και του 28, που προστιθέμενα δίνουν 40. Σε αυτήν την περίπτωση η επίλυση του προβλήματος είναι πιο ενδιαφέρουσα. Στους μαθητές της τρίτης τάξης που έλυσαν το σύστημα των εξισώσεων, φτάνοντας στη λύση θεώρησαν ως δεδομένο ότι ήταν σωστό. Ωστόσο, κάποιοι μαθητές της πρώτης τάξης θεώρησαν ότι μια λύση που δεν ήταν ακέραια δεν είχε νόημα κι έτσι ανέφεραν ότι δεν υπάρχει λύση στο πρόβλημα. Σε αυτές τις περιπτώσεις που οι διαδικασίες που εφαρμόστηκαν ήταν σωστές, θεωρήθηκε σωστή η επίλυση.

| **Σωστή επίλυση του προβλήματος** | **Χρήση μιας καλής μεθόδου αλλά όχι σωστή λύση** | **Προσπάθεια επίλυσης με μια ασαφή μέθοδο και καμία κατάληξη σε συμπέρασμα** | **Χωρίς απάντηση** |
|---|---|---|---|
| 8 (6 εκ των οποίων είπαν ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση) | 10 | 5 | 6 |

**Πίνακας 16: Επίλυση του πρώτου προβλήματος από τους μαθητές της πρώτης τάξης**

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται δύο ενδιαφέρουσες λύσεις μαθητών. Στην πρώτη (Σχήμα 35) ο μαθητής αναφέρει ότι οι κυκλωμένοι αριθμοί συμβολίζουν τις μέρες στις οποίες ούτε η γυναίκα ούτε το κορίτσι δεν χρωστούν τίποτα η μία στην άλλη. Το άθροισμα αυτών των ημερών πρέπει να είναι 40, αλλά σε καμία από αυτές τις περιπτώσεις δεν είναι αυτό το αποτέλεσμα. Άρα το πρόβλημα δεν έχει λύση. Ωστόσο, ο μαθητής μάλλον βρήκε περίεργο ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση και πρόσθεσε ότι «αν διαβάσουμε προσεκτικά την ερώτηση αναφέρεται ότι η γυναίκα δε χρωστάει τίποτα στο κορίτσι, αλλά δεν αναφέρεται αν υπάρχει πιθανό χρέος από το κορίτσι στη γυναίκα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κορίτσι δε δούλεψε καθόλου και σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να πληρώσει 1120 ευρώ στη γυναίκα, η οποία δε χρωστάει τίποτα στο κορίτσι». Πράγματι, δε διευκρινίζεται αυτό στο πρόβλημα, αλλά με βάση τη λύση του Borghi υποθέτει ότι το κορίτσι δε χρωστάει τίποτα στη γυναίκα.




**Σχήμα 35: Λύση μαθητή της πρώτης τάξης**

Στη δεύτερη λύση, μια μαθήτρια θεωρεί ότι ο λόγος των εργάσιμων ημερών με των μη εργάσιμων πρέπει να είναι 7/5 που είναι ο λόγος του 28 με το 20. Για να είναι η διαφορά μηδενική πρέπει για κάθε 12 ημέρες το κορίτσι να δούλεψε τις 7. Επειδή ο αριθμός των ημερών σύμφωνα με την μαθήτρια δεν μπορεί να είναι δεκαδικός, το σύνολο των ημερών θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 12 (δηλαδή του $7 + 5$ ). Το πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 12 στο 40 είναι το 36 (δηλαδή $3 \cdot 12$ ). Επομένως, το κορίτσι δούλεψε $7 \cdot 3 = 21$ μέρες και δε δούλεψε $5 \cdot 3 = 15$ μέρες, οπότε περισσεύουν 4 μέρες. Σκεπτόμενη για το τι μπορεί να συνέβη αυτές τις μέρες, πιστεύει ότι επειδή οι δύο μεριές δε συμφώνησαν τι θα γίνει αν το κορίτσι πάει στη δουλειά και δεν κάνει τίποτα, ότι ούτε το κορίτσι ούτε η γυναίκα θα πληρώσει κάτι η μία στην άλλη.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα με δικές τους τεχνικές αιτιολόγησαν τη λύση τους, ενώ αυτοί που έλυσαν το σύστημα εξισώσεων δε σχολίασαν κάτι για το αποτέλεσμα.

| Δηλώνουν ότι δεν είναι δίκαιο αλλά αδυνατούν να το αιτιολογήσουν ή το κάνουν λανθασμένα | Δηλώνουν ότι είναι δίκαιο | Χωρίς απάντηση |
|---|---|---|
| 9 | 16 | 3 |

**Πίνακας 17: Επίλυση του δεύτερου προβλήματος από τους μαθητές της τρίτης τάξης**

Κανένας από τους μαθητές δεν έδωσε τη σωστή λύση και δε χρησιμοποίησαν τους τύπους της περιφέρειας και του εμβαδού του κύκλου.

Στην περίπτωση των μαθητών της πρώτης τάξης:

| Δίνουν μια καλή λύση | Δηλώνουν ότι δεν είναι δίκαιο, αλλά αδυνατούν να το αιτιολογήσουν ή το κάνουν λανθασμένα | Δηλώνουν ότι είναι δίκαιο | Χωρίς απάντηση |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 9 | 17 |

**Πίνακας 18: Επίλυση του δεύτερου προβλήματος από τους μαθητές της πρώτης τάξης**

Για το δεύτερο πρόβλημα, παρουσιάζεται η μόνη σωστή απάντηση. Επειδή ο μαθητής μάλλον δεν ήξερε τους τύπους της περιφέρειας και του εμβαδού του κύκλου, σχεδίασε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1cm και ένα άλλο τετράγωνο με μήκος πλευράς 2cm. Συνειδητοποίησε ότι το εμβαδόν του δεύτερου τετραγώνου είναι τετραπλάσιο του πρώτου και συμπέρανε ότι δεν είναι δίκαιο να πληρώσει ένα  νόμισμα στον αγρότη.

Αναλογίζοντας γιατί υπήρξαν τόσοι πολλοί μαθητές που προσπάθησαν να λύσουν το πρώτο πρόβλημα μαντεύοντας και δοκιμάζοντας, ενώ υπήρξε μόνο μία ευρηματική μέθοδος για το δεύτερο μπορεί να ισχύει ότι στο πρώτο πρόβλημα είναι εύκολο να μαντέψουν και να ελέγξουν με ένα στυλό, ενώ στο δεύτερο είναι πιο πρακτικό να χρησιμοποιηθούν αντικείμενα όπως κλωστές και μολύβια για τα σπαράγγια, με τα οποία οι μαθητές δεν είναι τόσο εξοικειωμένοι για να τα αξιοποιήσουν.

### 4.12.5 Συμπερασματικά σχόλια

Οι δραστηριότητες βασίστηκαν στην ανάλυση ιστορικών κειμένων από αυθεντικές πηγές, με στόχο να βελτιωθεί η διδασκαλία και να παρέχουν στους μαθητές επιπλέον γνώση για το κοινωνικό και επιστημονικό πλαίσιο της εκάστοτε εποχής. Παρουσιάστηκαν τέσσερα κείμενα γραμμένα στα ιταλικά, τα γερμανικά και τα ισπανικά εκ των οποίων τα τρία ήταν για έναν «τεμπέλη εργάτη» και το άλλο για την αναλογία. Τα τρία λύνονται κανονικά με σύστημα εξισώσεων, αλλά προέκυψαν κι άλλες ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις από τους μαθητές, κυρίως από αυτούς που δεν τις είχαν διδαχθεί ακόμα.

Όταν έχουν μάθει για τα συστήματα εξισώσεων και ζητούνται να λύσουν το πρόβλημα, φαίνεται ότι δυσκολεύονται επειδή δεν μπορούν να μεταφράσουν το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα. Έτσι, η εισαγωγή των συστημάτων εξισώσεων μπορεί να περιορίσει την εξερεύνηση μεθόδων επίλυσης. Στο πρόβλημα με τα σπαράγγια η καλύτερη λύση δόθηκε από μαθητή που δεν ήξερε για τη σχέση αναλογίας μεταξύ του μήκους και του εμβαδού του κύκλου από το οποίο θα εξαρτώνταν ο αριθμός των σπαραγγιών, αλλά το συμπέρανε μέσω του πιο εύκολου σχήματος του τετραγώνου.

Όταν οι καθηγητές θέτουν προβλήματα στους μαθητές πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τα διαφορετικά τους υπόβαθρα και να προσαρμόζουν την προσέγγισή τους κατάλληλα. Η μελέτη των αυθεντικών κειμένων βοηθά στην κατανόηση των μαθητών στα Μαθηματικά, καθιστώντας τα ως μια επιστήμη που αναπτύχθηκε για να απαντήσει στις ερωτήσεις τις ανθρωπότητας καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Τέλος, τονίζεται η σημασία της χρήσης διαφορετικών προσεγγίσεων στη διδακτέα ύλη για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών. Σε αυτήν την εργασία φανερώθηκε από τις λύσεις των μαθητών στα ιστορικά προβλήματα ότι κάποιοι από αυτούς εμφάνισαν δυσκολίες και άλλοι βρήκαν τεχνικές για να αντιμετωπίσουν ασυνήθιστες καταστάσεις.

# Κεφάλαιο 5 – Συμπεράσματα

Σε αυτήν την εργασία μελετήθηκαν διαφορετικοί τρόποι για τη βελτίωση της διδασκαλίας της Άλγεβρας και για την αντιμετώπιση των δυσκολιών που εμφανίζονται σε πολλούς μαθητές, μέσω διδακτικών παρεμβάσεων που αξιοποίησαν την ιστορία των Μαθηματικών. Οι έρευνες που μελετήθηκαν αντλήθηκαν από τα συνέδρια της HPM και γενικότερα από τις μελέτες των ερευνητών που συμμετέχουν ή συνεργάζονται με αυτήν. Η HPM (History and Pedagogy of Mathematics) είναι μια διεθνής ομάδα μελέτης της σχέσης μεταξύ της Ιστορίας και της Παιδαγωγικής των Μαθηματικών, με τα μέλη της να είναι ερευνητές στη μαθηματική εκπαίδευση, μαθηματικοί, ιστορικοί των Μαθηματικών και υπεύθυνοι της διδακτέας ύλης.

Στόχος της εργασίας ήταν να μελετηθούν έρευνες οι οποίες με διαφορετικούς τρόπους επιχείρησαν να εφαρμόσουν την ιστορία στο πλαίσιο του μαθήματος της Άλγεβρας στην τάξη και να αναζητηθούν οι τεχνικές οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες και να ενισχύσουν την εκπαιδευτική διαδικασία. Οι παρεμβάσεις στις τάξεις περιλάμβαναν προβλήματα που τέθηκαν στους μαθητές και ελέγχθηκαν οι απαντήσεις τους μέσω φύλλων εργασίας, τεστ, ερωτηματολογίων και συζητήσεων στην τάξη, που δουλεύτηκαν είτε ατομικά είτε σε ομάδες. Οι μαθητές ρωτήθηκαν για τις αντιλήψεις τους για τα Μαθηματικά και τους ζητήθηκε να συγκρίνουν την εκάστοτε διδακτική μέθοδο με την κοινή διδασκαλία που είχαν στο σχολείο. Σε κάποιες περιπτώσεις μελετήθηκαν αυθεντικά ιστορικά κείμενα από μαθηματικούς προηγούμενων αιώνων. Επίσης, αξιοποιήθηκε η προβολή βίντεο ιστορικού περιεχομένου και η χρήση εκπαιδευτικών λογισμικών όπως το Geogebra.

Όσον αφορά τη διδακτική μέθοδο της αξιοποίησης της ιστορικής ανάπτυξης της Άλγεβρας από την αριθμητική για τη γεφύρωση του γνωστικού χάσματος από την αριθμητική του Δημοτικού στην Άλγεβρα του Γυμνασίου, φαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν θετικά την παρέμβαση μαθαίνοντας για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της αριθμητικής και αλγεβρικής επίλυσης προβλημάτων αντίστοιχα. Η ιστορία παρείχε αρκετές προ-αλγεβρικές μεθόδους που βοήθησαν στην ομαλότερη μετάβαση.

Στην έρευνα για τον παραλληλισμό μεταξύ της ιστορικής ανάπτυξης και της εκπαίδευσης των Μαθηματικών με το παράδειγμα της διάταξης των πραγματικών αριθμών σε άξονα αποδείχθηκε ότι ο αυστηρός παραλληλισμός δεν είναι εφικτός. Ωστόσο, προτείνεται να αξιοποιηθούν οι ομοιότητες μεταξύ της ιστορικής εξέλιξης των Μαθηματικών και της μαθησιακής διαδικασίας, για να τροποποιηθεί η συμβατική διδασκαλία, καθώς τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η συμβατική διδασκαλία δε βοηθάει πολύ τους μαθητές. Αν είναι εφικτό να δοκιμαστούν στην τάξη πραγματικά προβλήματα όταν εμφανίζονται νέες έννοιες και παρακινηθούν οι μαθητές ώστε να αναπτύξουν τις δικές τους εναλλακτικές ιδέες, η διδασκαλία δε θα περιορίζεται στην στείρα παρουσίαση επίσημων δομών στην τελική τους μορφή και τα Μαθηματικά θα γίνουν μια δημιουργική δραστηριότητα.

Από τις μελέτες με τα αλγεβρικά παιχνίδια τα αποτελέσματα φανερώνουν ότι οι καθηγητές μπορούν να εφαρμόσουν πολλαπλές τεχνικές αναπαράστασης και να χρησιμοποιήσουν απτά αντικείμενα ως έναν εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας της Άλγεβρας στο Γυμνάσιο. Η διδακτική παρέμβαση οδήγησε στην πιο ενεργή συμμετοχή των μαθητών στην τάξη, σε ένα παραγωγικό διάλογο μεταξύ μαθητών-καθηγήτριας και σε σημαντική συνεργατική μάθηση μεταξύ των μαθητών, ενώ φάνηκε ότι αυξήθηκε η αυτοπεποίθησή τους στην κατανόηση της Άλγεβρας, κάτι που μπορεί να ευνοήσει την περαιτέρω μελέτη σε πιο προχωρημένα Μαθηματικά μελλοντικά. Βέβαια, στο πλαίσιο της μικρής τάξης οι περισσότερες παρανοήσεις συνήθως λύνονταν με την παρέμβαση της καθηγήτριας και του ερευνητή, κάτι που μπορεί να είναι πιο δύσκολο σε μεγαλύτερες και ετερογενείς τάξεις. Τελικά όμως, οι μαθητές προτίμησαν αυτού του τύπου τη διδασκαλία σε σχέση με τη συμβατική.

Στις έρευνες του Glaubitz με τη χρήση ιστορικών κειμένων στην τάξη συγκρίθηκε η γενετική και ερμηνευτική προσέγγιση με τη συμβατική διδασκαλία. Η ερμηνευτική προσέγγιση αποδείχθηκε πιο επιτυχής στην πλειοψηφία των μαθητών, ενώ η γενετική ήταν καταλληλότερη μόνο για μαθητές που τους αρέσουν πολύ τα Μαθηματικά. Οι μαθητές της ερμηνευτικής είχαν ελευθερία στην έρευνά τους για τον Al-Khwarizmi και την αξιοποίησαν δημιουργικά. Πολλοί ανέπτυξαν σεβασμό για τον πολιτισμό των Αράβων που είχαν μέχρι πρότινος υποτιμήσει. Έτσι, αυτή η προσέγγιση συνείσφερε σε ανθρωπιστικές, δημοκρατικές και ειρηνευτικές παραδόσεις στην εκπαίδευση. Η ιστορική ενότητα τους έκανε να σκεφτούν για τα Μαθηματικά και τη δική τους στάση απέναντι στο μάθημα. Τα Μαθηματικά δε θεωρούνται πλέον ως ένα μάθημα που αφορά μόνο υπολογισμούς ή προβλήματα, αλλά κατανόησαν τη σημασία του γενικότερου πλαισίου και της λογικής. Γενικότερα, αυτή η ενότητα εκτιμήθηκε ιδιαιτέρως και αύξησε την τιμή δημοφιλίας των Μαθηματικών.

Οι δραστηριότητες στα σχολεία της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Καταλονία όπου αξιοποιήθηκε η σύνδεση της Άλγεβρας με τη Γεωμετρία μέσω ιστορικών κειμένων έδωσαν κίνητρο στους μαθητές να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε διαφορετικές καταστάσεις, παρά να αναπαράγουν τυποποιημένα αυτά που είχαν μάθει. Επιπλέον, τους βοήθησαν να εκτιμήσουν τη συνεισφορά διαφορετικών πολιτισμών στη γνώση, κάτι που είναι σημαντικό στις σύγχρονες πολυπολιτισμικές τάξεις. Γνώρισαν παράλληλα το κοινωνικό και επιστημονικό πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκαν τα Μαθηματικά, χωρίς να τα βλέπουν ως ένα τελικό αποτέλεσμα, αλλά ως μια επιστήμη που εξελίχθηκε μέσω της αναζήτησης απαντήσεων σε ερωτήσεις της ανθρωπότητας καθ' όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Η σύνδεση με τη Γεωμετρία πρόσφερε οπτική και αισθητική αξία, βοηθώντας στην κατανόηση του κόσμου. Η δομή της είναι κατάλληλη για την ανάπτυξη της διαδικασίας του συλλογισμού και της απόδειξης από τους μαθητές και τη συνδέει με την Άλγεβρα καθιερώνοντας τη σχέση μεταξύ σχημάτων και τύπων. Επίσης, η ιστορική ενότητα βοήθησε και τους καθηγητές να σκεφτούν τη λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων από μια γεωμετρική σκοπιά.

Ακόμη, στα ιστορικά προβλήματα του 15$^{ου}$ και 16$^{ου}$ αιώνα που τέθηκαν κάποια λύνονταν κανονικά με σύστημα εξισώσεων, όμως προέκυψαν από τους μαθητές κι άλλες ενδιαφέρουσες προσεγγίσεις, κυρίως από αυτούς που δεν τα είχαν ακόμα διδαχθεί. Όταν είχαν μάθει για τα συστήματα εξισώσεων και ζητούνταν να λύσουν το πρόβλημα, φάνηκαν να δυσκολεύονται επειδή δεν μπορούσαν να μεταφράσουν το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα. Έτσι, η εισαγωγή των συστημάτων εξισώσεων μπορεί να περιορίσει την εξερεύνηση μεθόδων επίλυσης. Όταν οι καθηγητές θέτουν προβλήματα στους μαθητές πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τα διαφορετικά τους υπόβαθρα και να προσαρμόζουν την προσέγγισή τους κατάλληλα. Η μελέτη των αυθεντικών κειμένων βοήθησε στην κατανόηση των μαθητών στα Μαθηματικά, καθιστώντας τα ως μια επιστήμη που αναπτύχθηκε για να απαντήσει στις ερωτήσεις τις ανθρωπότητας. Τέλος, τονίζεται η σημασία της χρήσης διαφορετικών προσεγγίσεων στη διδακτέα ύλη για την καλύτερη κατανόηση των εννοιών. Σε αυτήν την εργασία φανερώθηκε από τις λύσεις των μαθητών στα ιστορικά προβλήματα ότι κάποιοι από αυτούς εμφάνισαν δυσκολίες ενώ άλλοι βρήκαν τεχνικές για να αντιμετωπίσουν ασυνήθιστες καταστάσεις.

Στην έρευνα της Vicentini με τον σχεδιασμό παιχνιδιών και την αξιοποίησή τους σε ένα συνέδριο, όσοι συμμετείχαν διασκέδασαν με τη δραστηριότητα, ενώ δόθηκε κίνητρο για να αυξηθούν σημαντικά οι επισκέψεις στον τομέα των παλιών βιβλίων στην τοπική βιβλιοθήκη. Επιπλέον, όλοι οι μαθητές έδειξαν βελτίωση στις επιδόσεις τους, στα κίνητρα για τη μελέτη των Μαθηματικών και ζήτησαν να συμμετάσχουν ξανά στη δραστηριότητα στα επόμενα χρόνια. Το επόμενο φθινόπωρο η πλειοψηφία των μαθητών που έλαβε μέρος σε έναν γνωστό ιταλικό μαθηματικό διαγωνισμό, είχαν συμμετάσχει σε αυτά τα εργαστήρια. Τέλος, αναφέρεται ότι πρέπει να υπάρξει η διάδοση μιας πιο ανθρωπιστικής ιδέας σχετικά με το τι είναι τα Μαθηματικά και το πώς σκεφτόμαστε μαθηματικά, με στόχο τη συνολική βελτίωση της μάθησης των Μαθηματικών.

Στην έρευνα των Yan-jun και Ping φάνηκε ότι τα βίντεο ενίσχυσαν σημαντικά την εκπαιδευτική διαδικασία, βελτιώνοντας τον τρόπο απόκτησης της γνώσης, αλλά και τη στάση απέναντι στο μάθημα. Ακόμη, η διδασκαλία από διαφορετικά επίπεδα διέγειρε το ενδιαφέρον των μαθητών για μελέτη, καθώς τα βίντεο μπορούν να παίζονται επανειλημμένα, χωρίς τον περιορισμό του χρόνου και του χώρου, ενώ παρέχουν μια εναλλακτική διδακτική προσέγγιση σε σχέση με τη συμβατική όπου όλα εξαρτώνται από αυτά που θα πει ο καθηγητής στην τάξη. Έτσι, οι μαθητές μπορούν να αυτενεργήσουν, να εξερευνήσουν και να λάβουν αποφάσεις μόνοι τους. Ελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών και βελτιώνουν τη μελέτη τους, αλλά και βελτιώνουν τη δομή της σκέψης τους και τις μεθόδους που εφαρμόζουν. Τα βίντεο βοηθούν στην κατανόηση εννοιών και στην πραγματοποίηση περίπλοκων μαθηματικών δραστηριοτήτων. Επιπλέον, διευκόλυναν τη δουλειά των καθηγητών καθώς η παρουσίαση ιστορικών στοιχείων με ζωντανό τρόπο, εξοικονομεί χρόνο και κόπο, ενώ ενισχύει τη διδασκαλία τους, ακόμα και αυτών που δε γνωρίζουν πολλά για την ιστορία.

Στην έρευνα της Λάππα η γνώση ιστορικών στοιχείων για τους λογαρίθμους παρακίνησε τη χρήση του ορισμού ως ένα εργαλείο στις δραστηριότητες και για την αποκωδικοποίηση του συμβολισμού, βοηθώντας στην ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο θέμα του λογαρίθμου. Η ιστορική εξέλιξη του λογαρίθμου παρείχε μια ολιστική προσέγγιση στα μαθηματικά αντικείμενα, που βοήθησε στην κατανόηση από τους μαθητές. Από τις απαντήσεις τους φάνηκε ότι κινήθηκε το ενδιαφέρον τους και απαντήθηκαν πολλές ερωτήσεις σχετικά με την ύπαρξη των μαθηματικών αντικειμένων και τη χρησιμότητά τους.

Για το σκέλος της χρήσης της ιστορίας που αφορούσε τη μελέτη των ιστορικών κειμένων, από τις απαντήσεις φάνηκε ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες με τα κείμενα, καθώς ήταν στην αυθεντική τους μορφή και όχι στη σύγχρονη που έχουν συνηθίσει από τα σχολικά βιβλία, ενώ πολλοί δυσκολεύτηκαν με τη ρητορική γλώσσα. Κατά τη διάρκεια της παρέμβασης πάντως ξεπεράστηκαν αυτά τα εμπόδια μέσω της συνεργατικής διδασκαλίας και τα ιστορικά κείμενα έδρασαν ως γνωστικά εργαλεία στην κατανόηση των μαθητών για τους λογαρίθμους. Παράλληλα, η χρήση του Geogebra λειτούργησε βοηθητικά και εκτιμήθηκε από τους μαθητές. Από τις συζητήσεις στην τάξη και τις σωστές απαντήσεις στις δραστηριότητες φάνηκε μια πολύ καλή ενσωμάτωση της εκθετικής διαδικασίας στο αντικείμενο των λογαρίθμων και τη χρήση της λογαριθμικής συνάρτησης μέσω της αντίστροφης. Παρόλο που αυτή η έρευνα έχει περιορισμούς ως προς τη γενίκευση συμπερασμάτων, η χρήση της ιστορίας βοήθησε στη διδασκαλία των λογαρίθμων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και παρείχε μια εναλλακτική προσέγγιση των Μαθηματικών.

Τέλος, όπως έχει αναφερθεί δε γίνεται κάποιος να ισχυριστεί ότι υπάρχει μία μοναδική μέθοδος που λύνει όλα τα μαθησιακά προβλήματα που μπορεί να προκύψουν στη διδασκαλία της Άλγεβρας, αλλά και δε γίνεται να γενικευτούν τα αποτελέσματα ερευνών που έγιναν σε ένα μικρό δείγμα για το σύνολο των μαθητών σε όλο τον κόσμο. Ωστόσο, το βασικότερο συμπέρασμα που προκύπτει από όλες τις έρευνες είναι ότι η εφαρμογή της ιστορίας ενισχύει τη διδασκαλία σε πολλά επίπεδα. Όλοι οι διαφορετικοί τρόποι της αξιοποίησης της ιστορίας οδήγησαν σε καλύτερη κατανόηση του αντικειμένου της Άλγεβρας από τους μαθητές και έδωσαν εναλλακτικούς τρόπους που ξέφευγαν από τη συμβατική διδασκαλία που πολλοί τη βρίσκουν μονότονη. Εκτιμήθηκε ότι η Άλγεβρα και τα Μαθηματικά γενικότερα αποτελούν ένα σπουδαίο και χρήσιμο εργαλείο της ανθρωπότητας που έλυσε πραγματικά προβλήματα και δεν είναι ένα μάθημα που αφορά ανούσιες ασκήσεις και προβλήματα. Τέλος, οι προαναφερθείσες ιστορικές ενότητες μπορούν να δώσουν κίνητρο και στους καθηγητές για να περιλαμβάνουν την ιστορία στη διδασκαλία τους, εμπλουτίζοντας το μάθημά τους και κινητοποιώντας το ενδιαφέρον των μαθητών τους.

# Βιβλιογραφία


Demattè, A. (2007). Historical documents in everyday classroom work. *Proceedings of the fifth European Summer University*, July 19–24 2007 (pp. 251–258). Prague, Czech Republic.

Demattè, A. (2015). History in the classroom: Educational opportunities and open questions. *Proceedings of the seventh European Summer University*, 14–18 July 2015 (pp. 335-352). Copenhagen, Denmark.

Demattè, A. (2015). Yes, I do use history of Mathematics in my class. *Proceedings of the seventh European Summer University*, 14–18 July 2015 (pp. 511–525) Copenhagen, Denmark.

Glaubitz, M. (2007). The use of original sources in the classroom: Theoretical perspectives and empirical evidence. *Proceedings of the fifth European Summer University*, July 19–24 2007 (pp. 373–381). Prague, Czech Republic.

Glaubitz, M. (2010). The use of original sources in the classroom: Empirical research findings. *Proceedings of the sixth European Summer University*, 19–23 July 2010 (pp. 351–361). Wien, Austria.

Katz, V. (2007). Historical modules for the teaching and learning of Mathematics. *Proceedings of the fifth European Summer University*, July 19–24 2007 (pp. 261–270). Prague, Czech Republic.

Lappa, E. (2018). The teaching of logarithms in upper secondary school from a historical perspective. *Proceedings of the eighth European Summer University*, 20–24 July 2018 (pp. 331–341). Oslo, Norway.

Norton, S. & Irvin, J. (2007). A concrete approach to teaching symbolic Algebra. *Mathematics Essential Research, Essential Practice*. *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Vol. I*, 2–6 July 2007 (pp. 551–560). Tasmania, Australia.

Norton, S. & Irvin, J. (2007). Developing positive attitudes towards Algebra. *Mathematics Essential Research, Essential Practice*. *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Vol. I*, 2–6 July 2007 (pp. 561–570). Tasmania, Australia.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). Original texts in the classroom. *Proceedings of the fifth European Summer University*, July 19–24 2007 (pp. 49–60). Prague, Czech Republic.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). The notion of historical parallelism revisited: historical evolution and students' conception of the order relation on the number line. *Educational Studies in Mathematics Vol. 66, No. 2, The History of Mathematics Education: Theory and Practice* (pp.165–183). Springer. https://www.jstor.org/stable/27822698.

Vallhonesta, F., Esteve M., Casanova, I., Puig-Pla, C. & Roca-Rosella, A. (2015). Workshop: Teacher training in the history of Mathematics. *Proceedings of the seventh European Summer University*, 14–18 July 2015 (pp. 113–128). Copenhagen, Denmark.

Van Amerom, B. (1999). Arithmetic and Algebra: can history help to close the cognitive gap? A proposed learing trajectory on early algebra from an historical perspective.

*Proceedings of the third European Summer University Vol. I*, July 15–18 1999 (pp. 335–352). Leuven & Louvain-la-Neuve, Belgium.

Vallhonesta, F. & Esteve, R. (2018). Sources from the 16th century for the teaching and learning of Mathematics. *Proceedings of the eighth European Summer University*, 20–24 July 2018 (pp. 626–639). Oslo, Norway.

Vicentini, C. (2015). Playing with Euler. *Proceedings of the seventh European Summer University*, 14–18 July 2015 (pp. 373–387). Copenhagen, Denmark,

Yan-jun, H. & Ping, C. (2016). The application of HPM video clips in mathematical teaching in middle school: Teaching the application of linear equation with one unknown. *Proceedings of the ICME Sattelite Meeting*, 18–22 July (pp. 403–412). Montpellier, France.

Θωμαΐδης, Γ. (2023). Θεωρητικό πλαίσιο του μαθήματος: αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική τους. *Διατμηματικό - Διαπανεπιστημιακό πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών: διδακτική των μαθηματικών. Μάθημα: ιστορία και επιστημολογία των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης στη διδακτική των μαθηματικών*, σελ. 17–27.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.