



**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**Πρόγραμμα Σπουδών  
"Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά"**

**Διπλωματική Εργασία**

**Μη γραμμική δυναμική και εφαρμογές: Θεωρία  
Κυκλωμάτων και Συστήματα Ανταγωνισμού**

**Φοιτήτρια: Ευθυμία Μπαλάφα  
ΑΜ: 159172**

**Επιβλέπων Καθηγητής**

**Νικόλαος Καραχάλιος  
Καθηγητής**

**ΠΑΤΡΑ, Δεκέμβριος 2025**

Η Διπλωματική Εργασία έγινε αποδεκτή και βαθμολογήθηκε από την εξής τριμελή επιτροπή:

<b>Καραχάλιος Νικόλαος</b> Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής
(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Καραχάλιο Νικόλαο για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, καθώς επίσης για τις συμβουλές και την καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω εκ βάθους καρδιάς την οικογένειά μου, η οποία συνέβαλε σε προσωπικό επίπεδο και σε μεγάλο βαθμό στην προσπάθεια να υλοποιήσω την παρούσα εργασία και μου έδωσε τη δυνατότητα να σπουδάσω και να αποκτήσω εφόδια για το υπόλοιπο της ζωής μου, καθώς επίσης και για συνεχή υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια.

## **Περίληψη**

Η παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρεται στη μελέτη με αυστηρές μαθηματικές μεθόδους από την ποιοτική θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, συστημάτων τα οποία απαντώνται στη θεωρία κυκλωμάτων, τη θεωρία ανταγωνισμού ή ακόμη και την Κλασσική Μηχανική. Τα συστήματα αυτά διαθέτουν έναν χαρακτήρα καθολικότητας καθώς τα μηχανικά ανάλογα και τα συστήματα με αλληλεπιδράσεις ανταγωνισμού συναντώνται σε μια πληθώρα εφαρμογών σε επιστημονικά πεδία σχετικά με τη μαθηματική βιολογία και τη δυναμική οικονομικών μεγεθών. Οι συστηματικές μαθηματικές θεωρήσεις θα συνοδευτούν από αριθμητικές προσομοιώσεις.

## **Λέξεις – κλειδιά**

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Δυναμικά Συστήματα, Ποιοτική Ανάλυση, Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Μη Γραμμικά Κυκλώματα, Μηχανικές Ταλαντώσεις, Αριθμητικές Μέθοδοι

## **Abstract**

This thesis refers to the study with rigorous mathematical methods from the qualitative theory of ordinary differential equations, systems which are found in circuit theory, competition theory or even Classical Mechanics. These systems have a universal character as mechanical analogues and systems with competition interactions are found in a multitude of applications in scientific fields related to mathematical biology and the dynamics of economic quantities. The systematic mathematical considerations will be accompanied by numerical simulations.

## **Key words**

Ordinary Differential Equations, Dynamical Systems, Qualitative Analysis, Electrical Circuits, Nonlinear Circuits, Mechanical Oscillations, Numerical Methods

# Πίνακας Περιεχομένων

## Κεφάλαιο 1: Ποιοτική γεωμετρική θεωρία

- 1.1. Αυτόνομα συστήματα
- 1.2. Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων
- 1.3. Ευστάθεια σχεδόν γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο, γραμμικοποίηση

## Κεφάλαιο 2: Ηλεκτρικά κυκλώματα

- 2.1. Βασικές έννοιες ηλεκτρισμού
- 2.2. Κύκλωμα RLC
- 2.3. Κύκλωμα LC σε σειρά
- 2.4. Κύκλωμα RLC σε σειρά
- 2.5. Κύκλωμα RC σε σειρά
- 2.6. Παράλληλο κύκλωμα RC
- 2.7. Κύκλωμα RL σε σειρά
- 2.8. Παράλληλο κύκλωμα RL
- 2.9. Παράλληλο κύκλωμα LC

## Κεφάλαιο 3: Μη γραμμικά κυκλώματα

- 3.1. Εισαγωγή
- 3.2. Μοντέλα φυσικών στοιχείων κυκλώματος
  - 3.2.1. Μη γραμμικά στοιχεία αντίστασης δύο ακροδεκτών
  - 3.2.2. Μη γραμμικά δυναμικά στοιχεία δύο ακροδεκτών
  - 3.2.3. Τριπολικά μη γραμμικά στοιχεία αντίστασης
  - 3.2.4. Πολυτερματικά μη γραμμικά στοιχεία αντίστασης
  - 3.2.5. Ποιοτικές ιδιότητες των στοιχείων κυκλώματος
- 3.3. Τάσεις και ρεύματα σε μη γραμμικά κυκλώματα
  - 3.3.1. Γραφική μέθοδος για την ανάλυση απλών μη γραμμικών κυκλωμάτων
  - 3.3.2. Εργαλεία με τη βοήθεια υπολογιστή για την ανάλυση μη γραμμικών κυκλωμάτων
  - 3.3.3. Ποιοτικές ιδιότητες λύσεων κυκλωμάτων
- 3.4. Ανοιχτά προβλήματα

## Κεφάλαιο 4: Μηχανικές ταλαντώσεις

- 4.1. Γενικές παρατηρήσεις
- 4.2. Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή
- 4.3. Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με τριβή
- 4.4. Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση

## Κεφάλαιο 5: Η δεύτερη μέθοδος του Liapunov

- 5.1. Εισαγωγή
- 5.2. Η δεύτερη μέθοδος του Liapunov

## Κεφάλαιο 6: Εξισώσεις Lotka-Volterra

- 6.1. Εισαγωγή
- 6.2. Περιγραφή μαθηματικού μοντέλου
- 6.3. Καμπύλες μηδενικής κλίσης
- 6.4. Καμπύλες μηδενικής κλίσης για το σύστημα Lotka-Volterra

## **Κεφάλαιο 7:** Ανάλυση του συστήματος Lotka-Volterra

### 7.1. Κατασκευή της συνάρτησης Liapunov

## **Κεφάλαιο 8:** Αριθμητικές μελέτες

8.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

8.2. Γενική μέθοδος απλού βήματος

8.3. Μέθοδος Euler

8.3.1. Κατασκευή με ολοκλήρωση

8.3.2. Κατασκευή με ανάπτυγμα Taylor

8.4. Γενίκευση μεθόδου Euler

8.5. Τάξη ακρίβειας μεθόδου Euler

8.6. Ευστάθεια μεθόδου Euler

8.7. Υλοποίηση της μεθόδου στον υπολογιστή

## **Βιβλιογραφικές αναφορές**

# Κεφάλαιο 1

## Ποιοτική γεωμετρική θεωρία

### 1.1. Αυτόνομα συστήματα

Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε διαφορικά συστήματα της γενικής μορφής:

$$x'(t) = f(t, x), \quad (1)$$

όπου η συνάρτηση  $f(t, x)$  είναι ορισμένη και συνεχής και με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα πεδίο  $\Omega = \{(t, x): t \in J, x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , όπου  $J \subset \mathbb{R}$  και  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Με τις προϋποθέσεις αυτές είναι γνωστό ότι για κάθε σημείο  $(t_0, x^0) \in \Omega$  υπάρχει ένα διάστημα  $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset J$ , στο οποίο το σύστημα (1) δέχεται μοναδική λύση  $x(t, t_0, x^0)$ , η οποία εξαρτάται συνεχώς από το  $(t_0, x^0)$  και ισχύει  $x(t_0, t_0, x^0) = x^0$  (βλέπε σχετικά Θεωρήματα Ύπαρξης Μονοσημάντου και συνεχούς εξάρτησης).

Υπάρχουν δύο ειδών δυσκολίες, οι οποίες παρουσιάζονται στο σημείο αυτό, και αφορούν ακόμα και πολύ «απλές» μορφές του διανυσματικού πεδίου. Η μία περίπτωση αφορά εκείνη όπου η εύρεση της ακριβούς μορφής της αναλυτικής λύσης είναι ιδιαίτερα δύσκολα, αν όχι αδύνατη. Η δεύτερη περίπτωση αναφέρεται στα προβλήματα εκείνα όπου υπολογίζεται μεν η ακριβής μορφή της λύσης, αλλά ή δίδεται σε μη λυμένη μορφή ή είναι αρκετά σύνθετη για να προσφέρεται για περαιτέρω μελέτη. Για παράδειγμα, η απλή διαφορική εξίσωση:

$$x'(t) = \sin x, \quad (2)$$

επιλύεται με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών και δίδει τη γενική λύση:

$$t + c = \ln|\csc x - \cot x|, \quad (3)$$

της οποίας η επίλυση ως προς  $x$  δεν είναι καθόλου φανερή. Οι διαπιστώσεις αυτές οδήγησαν ανεξάρτητα δύο επιφανείς μαθηματικούς, τους Lyapunov και H. Poincaré, να διαμορφώσουν μια νέα θεωρία για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, χωρίς απαραίτητα τη χρήση των λύσεων αυτών. Αυτή η θεωρία φέρει το όνομα **Γεωμετρική Θεωρία** ή **Θεωρία Ευστάθειας**, αποτελεί δε τμήμα της **Ποιοτικής Θεωρίας** των διαφορικών εξισώσεων. Το τελευταίο ερώτημα αποτελεί το αντικείμενο της **Θεωρίας Ευστάθειας**.

**Ορισμός 1.** Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών ονομάζεται *καλά τοποθετημένο* αν δέχεται μοναδική ευσταθή λύση.

Η έννοια της καλής τοποθέτησης έχει καθοριστική σημασία ιδιαίτερα στο χώρο των εφαρμογών (θεωρία σφαλμάτων, προσεγγιστικές διαδικασίες, γενικότερα αριθμητικές μέθοδοι κ.λπ.). Για λόγους απλότητας θα ασχοληθούμε με εξισώσεις και συστήματα, στα οποία το διανυσματικό πεδίο  $f(t, x)$  δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, δηλαδή  $f(t, x) = f(x)$ . Επομένως, έχουμε το σύστημα:

$$x'(t) = f(x), \quad (4)$$

όπου  $t \in J \subset \mathbb{R}$ ,  $x \in D$ ,  $D$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  και  $f \in C^1(D)$ . Συστήματα της μορφής (4) ονομάζονται **αυτόνομα**, σε αντιδιαστολή με τα συστήματα της μορφής (1), τα οποία ονομάζονται **μη αυτόνομα**. Σε αυτά τα συστήματα, η λύση  $x(t, t_0, x^0)$  έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα.

**Θεώρημα 2.** Για όλα τα  $t, t_0 \in \mathbb{R}$  και  $x^0 \in D$ , για τα οποία υπάρχει η λύση  $x(t, t_0, x^0)$  του συστήματος (4), ισχύει:  $x(t, t_0, x^0) = x(t - t_0, 0, x^0)$ .

**Απόδειξη.** Η συνάρτηση  $y = x(t, t_0, x^0)$  είναι λύση του προβλήματος:

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x^0. \quad (5)$$

Επομένως, η  $x_1 = x(t - t_0, 0, x^0)$  θα είναι λύση του:

$$x'_1 = x'(t - t_0, 0, x^0) = f[x(t - t_0, 0, x^0)] = f(x_1),$$

και:

$$x_1(t_0) = x(t - t_0, 0, x^0) = x(0, 0, x^0) = x^0,$$

δηλαδή η  $x_1$  θα είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (5). Λόγω της μοναδικότητας της λύσης, θα ισχύει:  $x(t, t_0, x^0) = x_1 = x(t - t_0, 0, x^0)$ .  $\square$

Το συμπέρασμα του **Θεωρήματος 2** είναι ότι για αυτόνομα συστήματα, ο αρχικός χρόνος  $t_0$  δεν έχει καμιά ιδιαίτερη σημασία, δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $t_0 = 0$ .

**Παρατήρηση 3. (α)** (Χώρος λύσεων – χώρος φάσεων). Ο αυτόνομος χαρακτήρας του διανυσματικού πεδίου  $f(x)$  επιτρέπει να κάνουμε τη μελέτη του προβλήματος (4) στο πεδίο  $D$  των  $n$ -διαστάσεων και όχι στο *χώρο των λύσεων*, που είναι  $(n + 1)$ -διαστάσεων. Για παράδειγμα, αν το σύστημα (4) παριστάνει την κίνηση ενός σωματιδίου στο  $J \times D$ , τότε το  $f(x)$  είναι η ταχύτητα στο σημείο  $x$ , η οποία είναι ανεξάρτητη του  $t$ . Στην περίπτωση αυτή, η λύση  $x = x(t, t_0, x^0)$  παριστάνει την κίνηση του σωματιδίου, που περνά από το  $x^0$  κατά τη χρονική στιγμή  $t_0$  και ικανοποιεί το σύστημα (4). Για παράδειγμα, θεωρούμε το (δυναμικό) σύστημα (με ένα βαθμό ελευθερίας):

$$x' = y, \quad y' = g(x, y), \quad (6)$$

που περιγράφει την κίνηση ενός εκκρεμούς ( $x$  η μετατόπιση,  $y$  η ταχύτητα), όπου  $(x, y) \in D$ ,  $t > 0$ ,  $g \in C^1(D)$ . Τότε οι λύσεις αυτού του αυτόνομου συστήματος μπορούν να παρασταθούν στο επίπεδο  $D$ , δηλαδή το επίπεδο μετατόπισης – ταχύτητας. Γενικότερα, ένα δυναμικό σύστημα  $n$ -βαθμών ελευθερίας μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως με την παράστασή του σε ένα χώρο  $2n$ -διαστάσεων.

**(β)** (Τροχιές) Με βάση το **Θεώρημα 2**, οι δύο λύσεις  $[x(t, t_0, x^0), y(t, t_0, x^0)]$  και  $[x(t, 0, x^0), y(t, 0, x^0)]$  του συστήματος (6) παριστάνονται από την ίδια καμπύλη  $C$  του  $D$  και διαφέρουν μόνο κατά τη φάση  $t_0$ . Γενικότερα, για κάθε σταθερά  $a \in \mathbb{R}$ , η  $[x(t, a, x^0), y(t, a, x^0)]$  παριστάνεται επίσης από την καμπύλη  $C$ , δηλαδή για κάθε

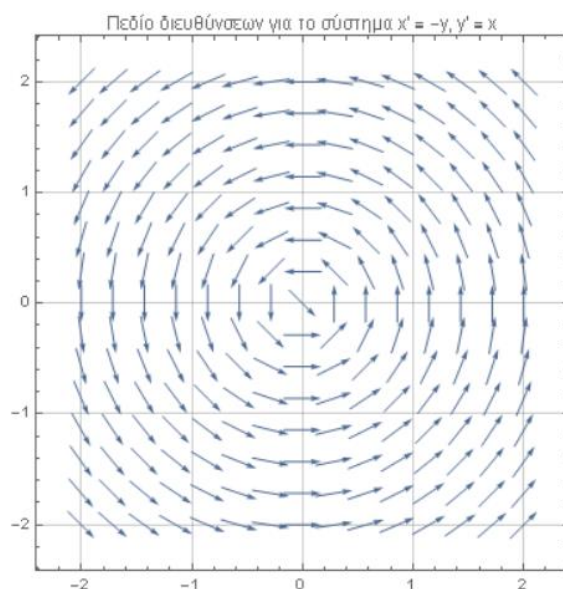
τέτοια καμπύλη  $C$  υπάρχει μια *μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων* του συστήματος (6), που γεωμετρικά παριστάνεται από αυτήν.

**Ορισμός 4.** Μια τέτοια καμπύλη  $C$  ονομάζεται **τροχιά** (orbit) του (6), το σύνολο των τροχιών ενός συστήματος αποτελεί την **εικόνα** (ή **χώρο**) **φάσεων** (ή **χώρο Poincaré**) αυτού. Η γραφική παράσταση της λύσης ονομάζεται **διαδρομή** (trajectory) ή **ολοκληρωτική καμπύλη**.

Γενικότερα, για το σύστημα (4) θα πρέπει να τονισθεί ότι η τροχιά δεν παριστάνει την αντίστοιχη λύση  $x(t, t_0, x^0)$  αυτού, αλλά την *προβολή* της διαδρομής αυτής από το χώρο των λύσεων, που είναι  $(n + 1)$ -διαστάσεων, στο χώρο των φάσεων, ο οποίος είναι  $n$ -διαστάσεων.

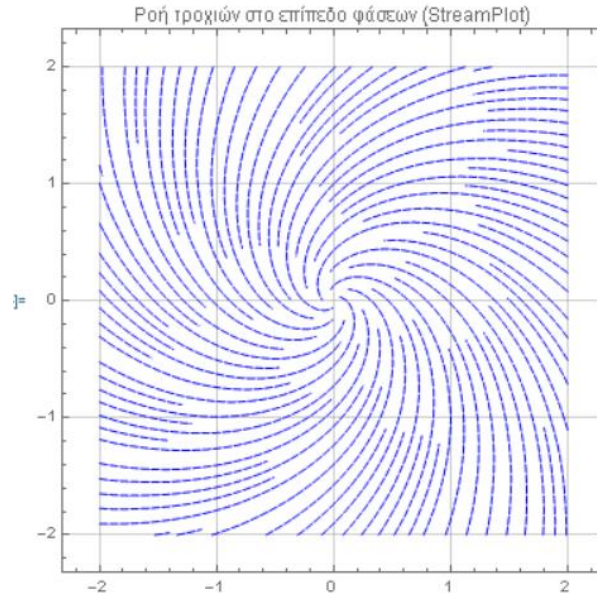
**Σχήμα 2.** Χώρος λύσεων και χώρος φάσεων μιας αυτόνομης διαφορικής εξίσωσης στο  $\mathbb{R}^2$ .

**Παράδειγμα 5.** Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων  $x' = -y, y' = x$ . Εύκολα διαπιστώνεται ότι το σύστημα αυτό έχει λύσεις της μορφής  $x = \cos t, y = \sin t$ . Καθώς το  $t$  διαγράφει το  $[0, 2\pi]$ , το σύνολο των σημείων  $(\cos t, \sin t)$  διαγράφει το μοναδιαίο κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ , στο επίπεδο φάσεων  $(x, y)$ . Επομένως, ο μοναδιαίος κύκλος αποτελεί την τροχιά της λύσης  $(x = \cos t, y = \sin t)$ , στο  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Καθώς  $t \rightarrow +\infty$ , ο μοναδιαίος κύκλος διαγράφεται άπειρες φορές (**Σχήμα 1**).



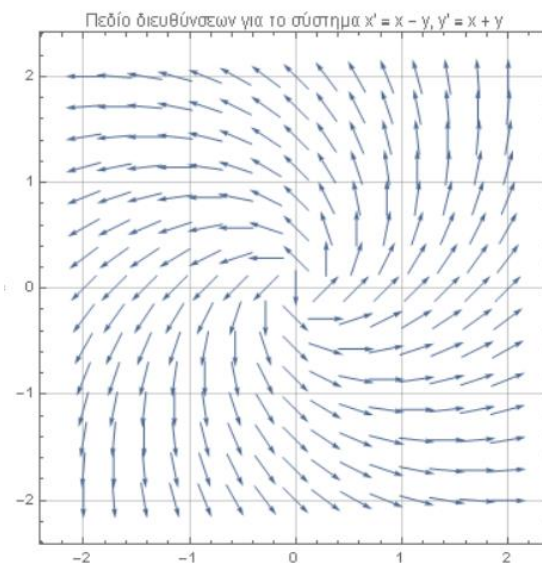
**Σχήμα 1**

**Παράδειγμα 6.** Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων  $\{x' = -x - y, y' = x - y\}$  δέχεται λύση της μορφής  $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, t \in \mathbb{R}$ . Καθώς το  $t$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ , το σύνολο των σημείων διαγράφει μια έλικα  $E$  στο επίπεδο φάσεων  $(x, y)$  (**Σχήμα 2**).



**Σχήμα 2**

**Παράδειγμα 7.** Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων  $\{x' = x - y, y' = x + y\}$  δέχεται λύση της μορφής  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t \in \mathbb{R}$ . Καθώς το  $t$  διατρέχει το  $\mathbb{R}$ , το σύνολο των σημείων  $(e^t \cos t, e^t \sin t)$  διαγράφει μια έλικά  $E$  στο επίπεδο φάσεων  $(x, y)$  (Σχήμα 3).



**Σχήμα 3**

**Ορισμός 8.** Ένα σημείο  $x_0$ , στο οποίο ισχύει  $f(x_0) = 0$ , ονομάζεται **κρίσιμο σημείο** του συστήματος (4). Για το αντίστοιχο φυσικό πρόβλημα χρησιμοποιούνται οι όροι **σημείο ισορροπίας** ή **στάσιμο σημείο**.

**Παρατήρηση 9. (1) (Κρίσιμα Σημεία).** Η σημασία των κρίσιμων σημείων έγκειται όχι τόσο στο γεγονός ότι αυτά αποτελούν λύση του (4), αλλά κυρίως στο ότι η (γεωμετρική) συμπεριφορά όλων των άλλων τροχιών στο χώρο φάσεων καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τη φύση και τη θέση αυτών. Συνοψίζοντας, σχετικά με το

αυτόνομο σύστημα (4) μπορούμε να διατυπώσουμε τις ακόλουθες διαπιστώσεις: (i) Από κάθε σημείο  $x_0$  του χώρου φάσεων περνά μοναδική τροχιά. (ii) Τροχιά που ξεκινά από ένα σημείο, το οποίο δεν είναι κρίσιμο, δεν μπορεί να φτάσει σε ένα κρίσιμο σημείο σε πεπερασμένο χρόνο (Παράδειγμα 6). (iii) Τροχιά που περνά από ένα μη κρίσιμο σημείο μία τουλάχιστον φορά, δεν μπορεί να ξαναπεράσει, εκτός και αν η τροχιά είναι κλειστή. Τότε, η τροχιά αντιστοιχεί σε περιοδική λύση (Παράδειγμα 5).

(2) (Τροχιές) Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, για μια τροχιά ενός αυτόνομου συστήματος υπάρχουν οι παρακάτω δυνατότητες: (α) Είναι κρίσιμο σημείο, (β) πλησιάζει ένα κρίσιμο σημείο, καθώς  $t \rightarrow +\infty$  (Σχήμα 2), (γ) κινείται σε κλειστή καμπύλη (περιοδική λύση) (Σχήμα 1), (δ) πλησιάζει μια κλειστή τροχιά, (ε) τείνει στο άπειρο, καθώς  $t \rightarrow +\infty$  (μη φραγμένη) (Σχήμα 3).

(3) (Ευστάθεια) Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το φαινόμενο της κίνησης ενός σωματιδίου. Ένα ερώτημα ιδιαίτερης σημασίας είναι αν η μετατόπιση από το σημείο ισορροπίας του σωματιδίου προκαλεί απομάκρυνση, επαναφορά ή περιφορά γύρω από την αρχική θέση. Οι τρεις αυτές δυνατότητες περιγράφονται από τις έννοιες της αστάθειας, της ασυμπτωτικής ευστάθειας και της ευστάθειας αντίστοιχα. Για το μαθηματικό πρότυπο, που περιγράφει το φαινόμενο (διαφορική εξίσωση), οι έννοιες αυτές περιλαμβάνουν τις ποιοτικές πληροφορίες για την ασυμπτωτική (μακροχρόνια) συμπεριφορά της λύσης. Οι μαθηματικοί ορισμοί αυτών των εννοιών δίδονται στη συνέχεια.

**Ορισμός 10** (Ευστάθεια κατά Lyapunov). Έστω  $x^0$  ένα κρίσιμο σημείο του αυτόνομου συστήματος  $x' = f(x)$ . Τότε το  $x^0$  ονομάζεται: (i) **ευσταθές** αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , ώστε η σχέση  $|x(0) - x^0| < \delta$  να συνεπάγεται ότι  $|x(t) - x^0| < \varepsilon$  για κάθε  $t \geq 0$ , (ii) **ασυμπτωτικά ευσταθές**, αν είναι ευσταθές και επιπλέον  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x^0| = 0$ , (iii) **ασταθές**, αν δεν είναι ευσταθές. Τα παραπάνω συσυστοιούν τον ορισμό της **ευστάθειας κατά Lyapunov**.

**Παρατήρηση 11** (Ανάλυση προσήμου). Συχνά παρουσιάζονται προβλήματα στις εφαρμογές, τα οποία οδηγούν σε συστήματα της μορφής (4), όπου ενώ η συνάρτηση  $f(x)$  είναι άγνωστη, υπάρχουν πληροφορίες που αφορούν το πρόσημο αυτής σε διάφορα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού αυτής. Η μέθοδος που εξετάζει τη συμπεριφορά των λύσεων σε προβλήματα αυτής της μορφής ονομάζεται **ανάλυση προσήμου**. Η γενική διαδικασία της ανάλυσης προσήμου παρατίθεται στη συνέχεια. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι  $n = 1$ . Επίσης, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $f \in C^1(J, \mathbb{R})$ , όπου  $J \subset \mathbb{R}$ , και για κάποια σημεία  $a, b \in J$  έχουμε:

$$[a, b] \subset J, f(a) = 0, f(b) = 0, \text{ και } f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b),$$

δηλαδή τα  $a, b$  αποτελούν δύο διαδοχικά σημεία ισορροπίας της (4).

**Θεώρημα 12.** Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις ισχύουν τα ακόλουθα: (i) Αν  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in (a, b)$ , τότε η λύση  $x(t)$  θα είναι αύξουσα από το  $a$  στο  $b$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Συγκεκριμένα, θα ισχύει:  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = a$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = b$ . (ii) Αν  $f(x) < 0$ , για κάθε  $x \in (a, b)$ , τότε η λύση  $x(t)$  θα είναι φθίνουσα από το  $a$  στο  $b$ , καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Συγκεκριμένα, θα ισχύει:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a$  και  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = b$ .

**Παράδειγμα 13.** Να ευρεθούν τα σημεία ισορροπίας και το είδος ευστάθειας αυτών στη διαφορική εξίσωση:

$$x' = x^2(x + 1)(x - 1)(x - 2). \quad (\alpha)$$

**Απάντηση.** Εύκολα βρίσκεται ότι τα σημεία  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = 2$  αποτελούν τα στάσιμα σημεία της (α). Ακολουθώντας τη διαδικασία της ανάλυσης προσήμου έχουμε:

- (i) αν  $x < -1$ , τότε  $x' < 0$ . Επομένως,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = -1$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$ .
- (ii) αν  $-1 < x < 0$ , τότε  $x' > 0$ . Επομένως,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -1$ .
- (iii) αν  $0 < x < 1$ , τότε  $x' > 0$ . Επομένως,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .
- (iv) αν  $1 < x < 2$ , τότε  $x' < 0$ . Επομένως,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 2$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$ .
- (v) αν  $2 < x < +\infty$ , τότε  $x' > 0$ . Επομένως,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$  και  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 2$ .

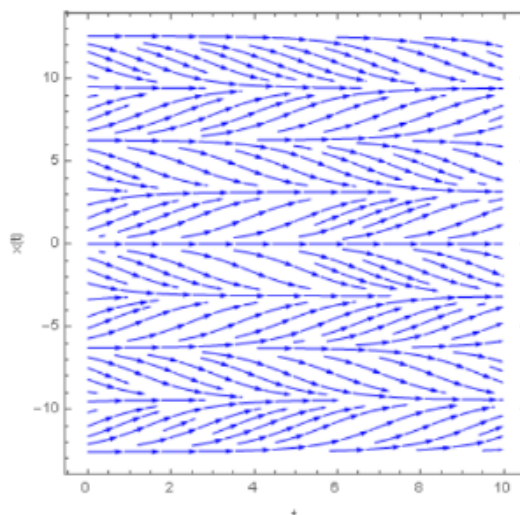
Επομένως, τα σημεία  $-1$  και  $2$  είναι ασταθή και το σημείο  $1$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Το σημείο  $0$  είναι (πλευρικά) δεξιά ασταθές και αριστερά ασυμπτωτικά ευσταθές. Αυτό συμβαίνει διότι το  $x = 0$  είναι διπλό (εκφυλισμένο) στάσιμο σημείο. □

Στο επόμενο παράδειγμα θα εφαρμόσουμε την ανάλυση προσήμου στην εξίσωση (2), της οποίας η λύση δίδεται στη σύνθετη μορφή (3).

**Παράδειγμα 14.** Να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης:

$$x'(t) = \sin x. \quad (\alpha)$$

**Απάντηση.** Τα σημεία ισορροπίας της (α) δίδονται από την εξίσωση  $\sin x = 0$  και είναι  $x = k\pi$ , με  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (**Σχήμα 4**). Το πρόσημο του  $\sin x$  είναι θετικό στα διαστήματα  $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$ , ενώ είναι αρνητικό στα υπόλοιπα. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία ισορροπίας  $\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$ , είναι *ασυμπτωτικά ευσταθή*, ενώ τα  $\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ , είναι *ασταθή*. Παρατηρούμε ότι ενώ η λύση (3) της εξίσωσης (2), λόγω της μορφής της, δεν μας δίνει απάντηση σε στοιχειώδη ερωτήματα συμπεριφοράς, η ανάλυση προσήμου με μια πολύ σύντομη διαδικασία δίδει πλήρη εικόνα του πεδίου φάσεων (κατ' επέκταση και του πεδίου λύσεων) της (2). □



Σχήμα 4

## 1.2. Ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

### A. Γενική θεωρία

Θεωρούμε το γραμμικό αυτόνομο σύστημα με σταθερούς συντελεστές:

$$x'(t) = Ax(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

όπου  $A$  πίνακας σταθερών  $n \times n$ , με  $|A| \neq 0$ . Είναι φανερό ότι η αρχή είναι κρίσιμο σημείο του συστήματος (1).

**Θεώρημα 1.** Το κρίσιμο σημείο  $x^0 = 0$  είναι: (i) ασυμπτωτικά ευσταθές αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του  $A$  είναι όλα αρνητικά, (ii) ευσταθές, αν ο  $A$  έχει ένα τουλάχιστον ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών πολλαπλότητας 1 και για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ισχύει ο χαρακτηρισμός της περίπτωσης (i), (iii) ασταθές σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

**Απόδειξη.** Από τη θεωρία των γραμμικών συστημάτων είναι γνωστό ότι οι θεμελιώδεις λύσεις του (1) έχουν τη γενική μορφή:

$$x_1 = Pt^k e^{at} \cos(\beta t), \quad x_2 = Qt^k e^{at} \sin(\beta t),$$

όπου  $P$  και  $Q$  σταθερά διανύσματα  $n \times 1$ ,  $a, \beta$  τα πραγματικά και φανταστικά μέρη αντίστοιχα των μιγαδικών ιδιοτιμών του πίνακα  $A$  και το  $k$  είναι ένας θετικός ακέραιος, που παριστάνει την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών. Επομένως, για την απόδειξη του θεωρήματος έχουμε κατά περίπτωση:

(i) Από την υπόθεση ισχύει ότι  $a < 0$ . Επειδή  $x^0 = 0$ , θα πρέπει να αποδειχθεί ότι για  $|x(0) - 0| = |x(0)| < \delta$ , ισχύει  $|x(t)| \rightarrow 0$ , καθώς  $t \rightarrow +\infty$ . Επειδή η λύση  $x(t)$  είναι συνδυασμός των  $x_1, x_2$ , αρκεί να αποδειχθούν τα παραπάνω για αυτές τις ειδικές λύσεις. Επιλέγοντας  $|P| < \delta, |Q| < \delta$ , έχουμε ότι:

$$|Pt^k e^{at} \cos(\beta t)| < |P|t^k e^{at} < \varepsilon, \quad |Qt^k e^{at} \sin(\beta t)| < |Q|t^k e^{at} < \varepsilon,$$

για  $t$  αρκετά μεγάλο (αφού  $a < 0$ ) και  $\delta = \varepsilon$ . Επομένως, αποδεικνύεται η ευστάθεια του  $x^0 = 0$ . Για την ασυμπτωτική ευστάθεια παρατηρούμε ότι επειδή  $a < 0$  ισχύουν:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |Pt^k e^{at} \cos(\beta t)| = 0 \text{ και } \lim_{t \rightarrow +\infty} |Qt^k e^{at} \sin(\beta t)| = 0.$$

Άρα η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

(ii) Έστω ότι ο  $A$  έχει τις φανταστικές ιδιοτιμές  $\pm \beta i$ . Τότε οι συναρτήσεις  $P \cos(\beta t)$ ,  $Q \sin(\beta t)$  είναι στοιχεία του συνόλου των θεμελιωδών λύσεων του συστήματος (1). Επομένως, για  $|P| < \delta$ ,  $|Q| < \delta$  έχουμε  $|P \cos(\beta t)| < \delta$ ,  $|Q \sin(\beta t)| < \delta$  για κάθε  $t$ . Επομένως, η αρχή είναι ευσταθής. Επειδή δε τα  $\sin(\beta t)$ ,  $\cos(\beta t)$  δεν τείνουν στο μηδέν καθώς το  $t \rightarrow +\infty$ , η ευστάθεια δεν μπορεί να είναι ασυμπτωτική.

(iii) Αν η (1) έχει ιδιοτιμές το ζεύγος  $a \pm \beta i$ , όπου  $a > 0$ , τότε για κάθε  $P$ ,  $Q$  (αρχικές συνθήκες), δηλαδή για κάθε  $\delta$ , καθώς το  $t \rightarrow +\infty$ , έχουμε:

$$|Pt^k e^{at} \cos(\beta t)| \rightarrow +\infty, \quad |Qt^k e^{at} \sin(\beta t)| \rightarrow +\infty,$$

δηλαδή η λύση είναι μη φραγμένη και η αρχή είναι ασταθής.  $\square$

**Πρόβλημα 2.** Να μελετηθεί η ευστάθεια της αρχής (0,0) για την εξίσωση με απόσβεση:  $x'' + 2x' + 2x = 0$ .

**Απάντηση.** Το αντίστοιχο σύστημα στο επίπεδο φάσεων είναι:  $x' = y$ ,  $y' = -2x - 2y$ . Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

με ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ . Σύμφωνα με το **Θεώρημα 1**, η αρχή (0,0), που αποτελεί προφανώς το μοναδικό στάσιμο σημείο για την αρχική εξίσωση, θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.  $\square$

**Παράδειγμα 3.** Να μελετηθεί η ευστάθεια του κρίσιμου σημείου (0,0) της διαφορικής εξίσωσης  $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ .

**Απάντηση.** Το αντίστοιχο στο χώρο φάσεων είναι:  $\{y' = z, z' = u, u' = v, v' = -y - 2u\}$ , ή:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ρίζες τα  $\lambda_{1,3} = i$ ,  $\lambda_{2,4} = -i$  με πολλαπλότητα 2. Επομένως, το (0,0) είναι ασταθές. Πράγματι, εύκολα διαπιστώνεται ότι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:  $A = \{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}$ . Παρατηρούμε δε ότι η λύση είναι μη φραγμένη, καθώς  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

## B. Επίπεδα αυτόνομα γραμμικά συστήματα

Από τη Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι όλοι οι πίνακες  $n \times n$  είναι ταξινομημένοι με τη *σχέση της ομοιότητας* σε κλάσεις ισοδυναμίας, πεπερασμένες το πλήθος, που αντιστοιχούν στους  $n \times n$  πίνακες τύπου Jordan. Συγκεκριμένα, για πίνακες τύπου  $2 \times 2$  ισχύουν τα ακόλουθα.

**Πρόταση 4.** Έστω ένας πραγματικός πίνακας  $A$  τύπου  $2 \times 2$ . Τότε υπάρχει ένας πίνακας  $M$ , με  $|M| \neq 0$ , ώστε ο πίνακας  $J = M^{-1}AM$  να είναι ένας από τους παρακάτω:

$$(α) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (β) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad (γ) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad (δ) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

όπου οι  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$  είναι πραγματικοί αριθμοί,  $\beta > 0$  και  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

**Παρατήρηση 5.** Συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι κάθε σύστημα  $2 \times 2$ :  $x' = Ax$ , με τη βοήθεια της σχέσης  $x = My$ , μετασχηματίζεται σε ένα ισοδύναμο κανονικό σύστημα  $y' = Jy$ , όπου οι πίνακες  $M$  και  $J$  έχουν ορισθεί στην **Πρόταση 4**. Επομένως, η λύση του συστήματος  $x' = Ax$  βρίσκεται με την επίλυση του συστήματος  $y' = Jy$  και τη χρήση του μετασχηματισμού  $x = My$ .

**Παρατήρηση 6** (εικόνες φάσεων στο επίπεδο). Στη συνέχεια θα μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων του συστήματος  $2 \times 2$ :  $x' = Ax$ . Διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) **Ιδιοτιμές πραγματικές και άνισες:**  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Το σύστημα  $y' = Jy$  έχει τη μορφή:

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2. \quad (5)$$

Επομένως, οι λύσεις είναι:

$$y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \text{όπου } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

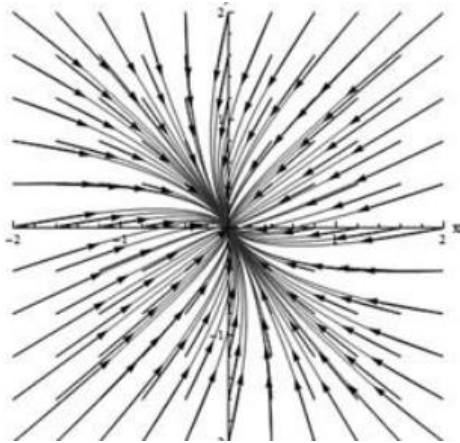
(i) Αν  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , τότε η αρχή  $(0,0)$  στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται **κόμβος** (node) και είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής* όταν  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , ενώ είναι *ασταθής* όταν  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ . Το σχήμα των τροχιών ορίζεται από το λόγο  $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ . Πράγματι, παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις (5) και (6) δίδουν:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = k y_1^{(\gamma-1)}, \quad \text{όπου } k = \frac{\gamma c_2}{c_1^\gamma}.$$

Επομένως, καθώς  $y_1 \rightarrow 0$ , έχουμε:

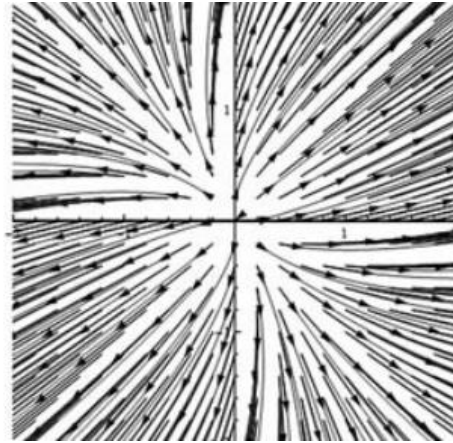
$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} \frac{dy_2}{dy_1} = \begin{cases} 0, & \text{για } \gamma > 1 \\ \infty, & \text{για } \gamma < 1 \end{cases}$$

Στα **Σχήματα 2** και **3** απεικονίζονται αυτές οι δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 2

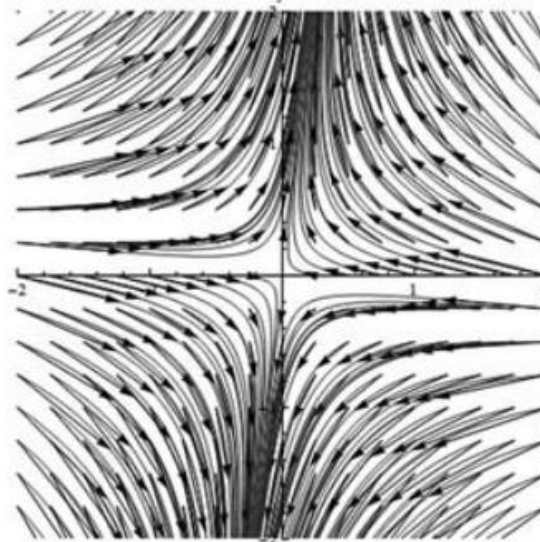
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ : ασυμπτωτικά ευσταθής κόμβος



Σχήμα 3

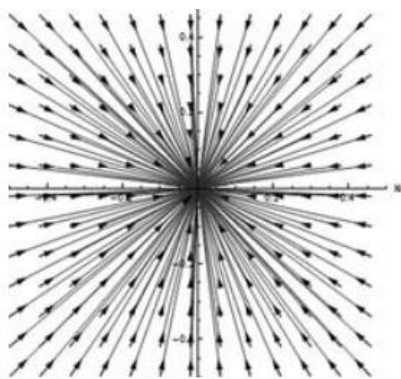
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ : ασταθής κόμβος

(ii) Αν  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ , τότε η αρχή  $(0,0)$  στο επίπεδο φάσεων ονομάζεται **σημείο σάγματος** (saddle point) και είναι ασταθής. Οι άξονες των συντεταγμένων αποτελούν την ένωση ειδικών τροχιών, που ονομάζονται **διαχωρίζουσες** (separatrices). Οι διαχωρίζουσες αποτελούν τις μοναδικές ευθύγραμμες ακτινωτές τροχιές της εικόνας φάσεων. Αποτελούν δε τις ασύμπτωτες όλων των άλλων τροχιών (βλέπε Σχήμα 4).

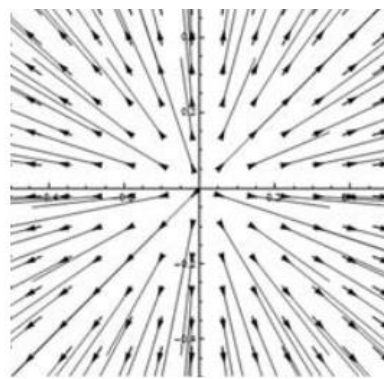


Σχήμα 4.  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ : σημείο σάγματος

(β) **Ίσες ιδιοτιμές:**  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ . (i) Ο  $J$  είναι διαγώνιος. Τότε οι λύσεις δίδονται από τη σχέση (6). Επομένως, ο πίνακας:  $J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$  αντιστοιχεί σε έναν ειδικό κόμβο, ο οποίος ονομάζεται **άστρο** (star). Το άστρο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν  $\lambda_0 < 0$ , και ασταθές αν  $\lambda_0 > 0$ . Οι μη τετριμμένες τροχιές είναι ακτινωτές ημιευθείες γραμμές (βλέπε Σχήματα 5 και 6).

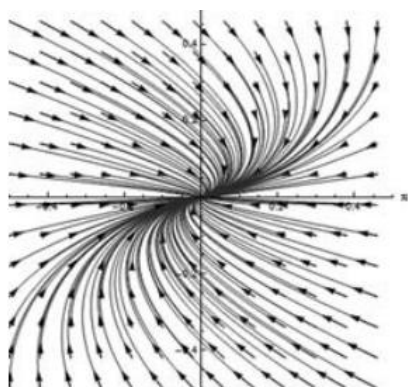


**Σχήμα 5**  
 ασυμπτωτικά ευσταθές άστρο:  $\lambda_0 < 0$ .



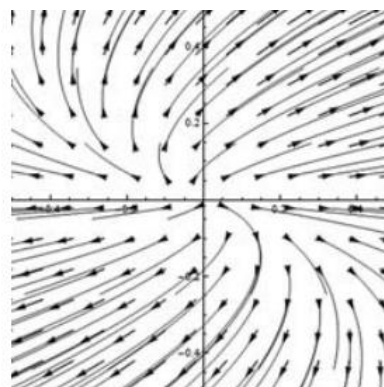
**Σχήμα 6**  
 ασταθές άστρο:  $\lambda_0 > 0$ .

(ii) Ο  $J$  δεν είναι διαγώνιος. Τότε το σύστημα έχει τη μορφή  $y_1' = \lambda_0 y_1 + y_2$ ,  $y_2' = \lambda_0 y_2$ , οπότε οι λύσεις είναι  $y_1(t) = (c_1 + tc_2)e^{\lambda_0 t}$ ,  $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_0 t}$ . Η αρχή ονομάζεται **νόθος κόμβος** (improper node). Είναι δε ασυμπτωτικά ευσταθής για  $\lambda_0 < 0$ , ενώ για  $\lambda_0 > 0$  είναι ασταθής. Η γραμμή, όπου αλλάζουν κατεύθυνση οι τροχιές, είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση  $y_1' = 0$ , δηλαδή  $y_2 = -\lambda_0 y_1$  (βλέπε **Σχήματα 7 και 8**).



**Σχήμα 7**

ασυμπτωτικά ευσταθής νόθος κόμβος:  $\lambda_0 < 0$ .



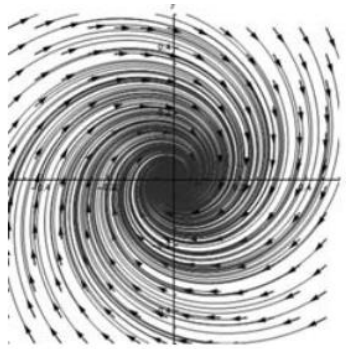
**Σχήμα 8**

ασταθής νόθος κόμβος:  $\lambda_0 > 0$ .

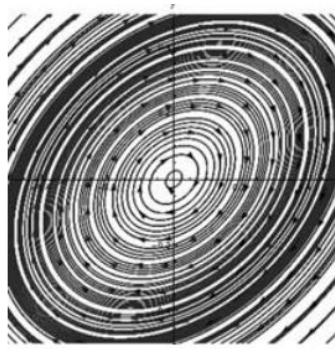
(γ) **Μιγαδικές ιδιοτιμές**  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ,  $\beta > 0$ . Στην περίπτωση αυτή το κανονικό σύστημα (4) έχει τη μορφή  $y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2$ ,  $y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2$ . Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα  $r' = \alpha r$ ,  $\theta' = \beta$ , το οποίο έχει λύσεις τις συναρτήσεις  $r(t) = r_0 e^{\alpha t}$ ,  $\theta(t) = \beta t + \theta_0$ . Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Έστω  $\alpha \neq 0$ . Τότε η αρχή ονομάζεται **εστία** (focus) ή **σπειροειδές σημείο** (spiral point) και είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν  $\alpha < 0$  και ασταθής, αν  $\alpha > 0$ . Το  $\beta$  καθορίζει τη γωνιακή ταχύτητα διαγραφής του σπειροειδούς (βλέπε **Σχήματα 9 και 11**).

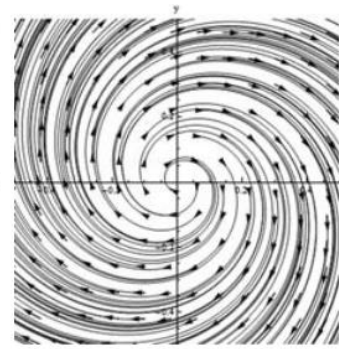
(ii) Έστω  $\alpha = 0$ . Τότε η αρχή ονομάζεται **κέντρο** (centre). Οι δε τροχιές συνίστανται από ομόκεντρους κύκλους αφού  $r' = 0$  (βλέπε **Σχήμα 10**).



Σχήμα 9.  $a < 0$ .

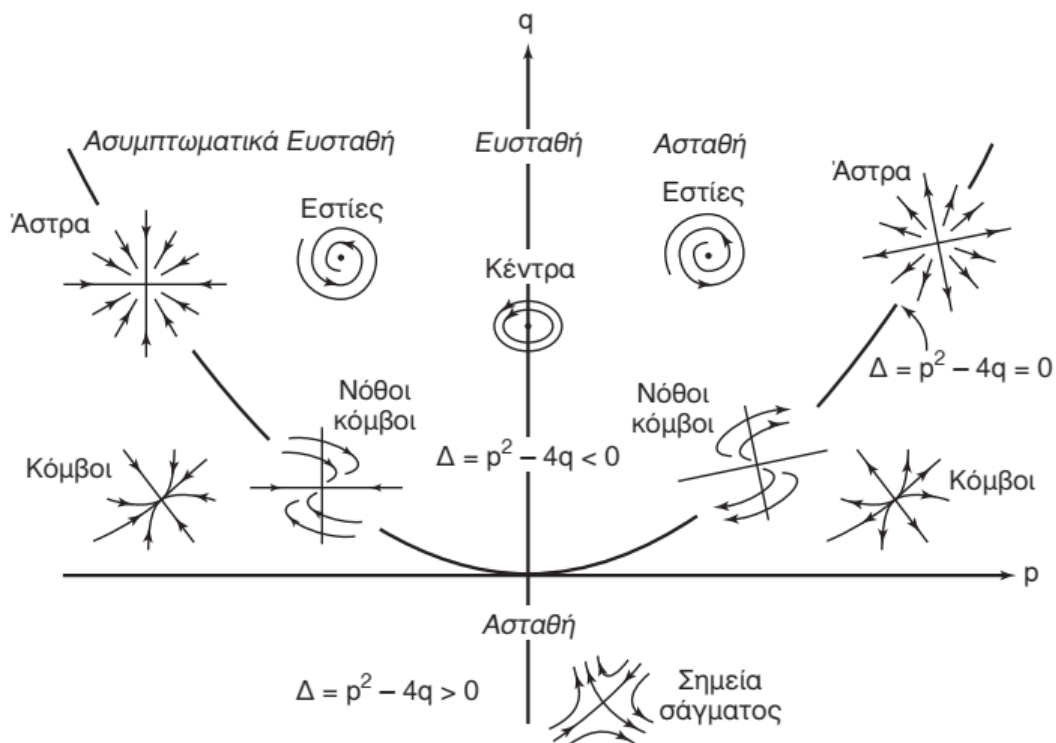


Σχήμα 10.  $a = 0$ .



Σχήμα 11.  $a > 0$ .

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η περίπτωση (ii) αποτελεί τη μοναδική μη τετριμμένη περιοδική συμπεριφορά που συναντάται στα γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές. Κάθε σημείο εκτός της αρχής συναντάται ξανά άπειρες φορές με περίοδο  $T = \frac{2\pi}{\beta}$ . Η περίπτωση αυτή, μόνη μεταξύ όλων των άλλων, είναι «δομικά ασταθής», διότι η απειροελάχιστη διαταραχή οδηγεί το σύστημα σε μια από τις άλλες δύο καταστάσεις της περίπτωσης (i) (βλέπε παρακάτω **Ενότητα 8.4**). Τέλος, στο ακόλουθο **Σχήμα 12** παρουσιάζονται συγκεντρωτικά όλες οι προηγούμενες περιπτώσεις, που αφορούν την ευστάθεια των γραμμικών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές.

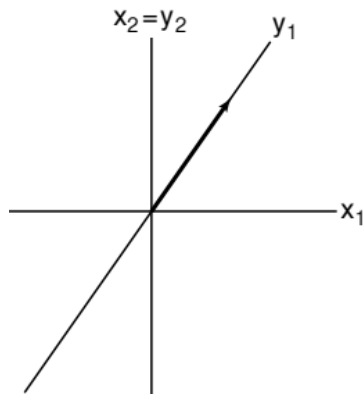


$$x' = Ax, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, p = a + d, q = ad - bc, P_A(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda + q = 0.$$

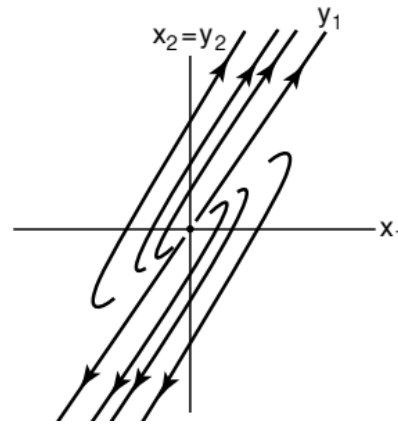
Σχήμα 12. Γενική Ταξινόμηση Ευστάθειας Γραμμικών Συστημάτων

**Παράδειγμα 7.** Να σχεδιασθεί το επίπεδο φάσεων του συστήματος:  $x'_1 = -10x_1 + 8x_2$ ,  $x'_2 = -19x_1 + 14x_2$ .

**Απάντηση.** Η αρχή  $(0,0)$  αποτελεί το στάσιμο σημείο του συστήματος. Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι  $\lambda_{1,2} = 2$  (διπλή) με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα  $[2 \ 3]^T$ . Επομένως, μπορούμε να πάρουμε τον πίνακα:  $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , οπότε:  $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$  και  $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Το ισοδύναμο κανονικό σύστημα είναι:  $y'_1 = 2y_1 + 4y_2$ ,  $y'_2 = 2y_2$ . Οι νέοι άξονες  $y_1, y_2$  φαίνονται στο **Σχήμα 13** και το επίπεδο φάσεων φαίνεται στο **Σχήμα 14**. Το  $(0,0)$  αποτελεί ασταθή νόθο κόμβο.



**Σχήμα 13**

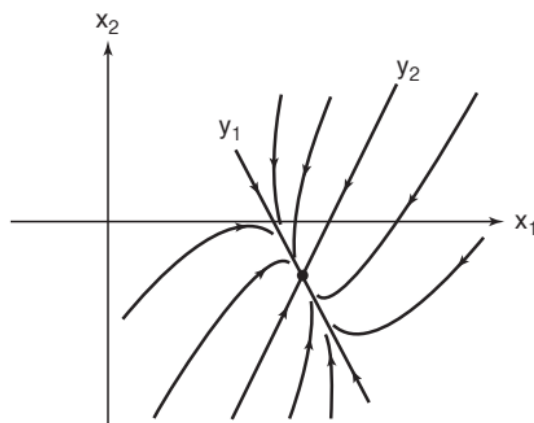
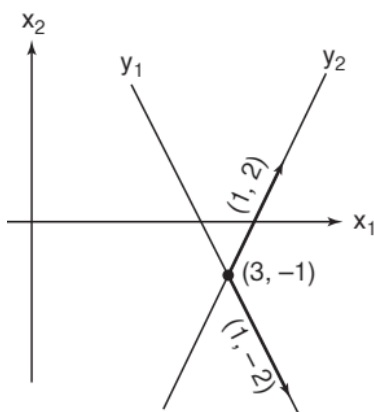


**Σχήμα 14**

**Παράδειγμα 8.** Να σχεδιασθεί το επίπεδο φάσεων του μη-ομογενούς συστήματος:  $x'_1 = -4x_1 - x_2 + 11$ ,  $x'_2 = -4x_1 - 4x_2 + 8$ .

**Απάντηση.** Τα στάσιμα σημεία αποτελούν τις λύσεις του συστήματος  $-4x_1 - x_2 + 11 = 0$ ,  $-4x_1 - 4x_2 + 8 = 0$ . Μοναδική λύση του συστήματος αυτού είναι η  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$ , δηλαδή μοναδικό στάσιμο σημείο είναι το  $(3, -1)$ . Επομένως, αν θεωρήσουμε τις καινούριες μεταβλητές  $y_1 = x_1 - 3$  και  $y_2 = x_2 + 1$ , προκύπτει το ομογενές σύστημα:  $y'_1 = -4y_1 - y_2$ ,  $y'_2 = -4y_1 - 4y_2$ .

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -6$ . Επομένως, σύμφωνα με την περίπτωση (α), (i) το στάσιμο σημείο  $(3, -1)$  αποτελεί ασυμπτωτικά ευσταθή κόμβο. Οι άξονες  $y_1, y_2$  του κανονικού συστήματος δίδονται από τα ιδιοδιανύσματα  $v_1 = [1 \ -2]^T$  και  $v_2 = [1 \ 2]^T$ , που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2$ . Τα παραπάνω απεικονίζονται στο **Σχήμα 16**.



**Σχήμα 16**

### 1.3. Ευστάθεια σχεδόν γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο, γραμμικοποίηση

Θεωρούμε το μη γραμμικό αυτόνομο σύστημα στο επίπεδο:

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y), \quad (1)$$

του οποίου η αρχή  $(0,0)$  αποτελεί ένα κρίσιμο σημείο, δηλαδή  $f(0,0) = g(0,0) = 0$ . Υποθέτουμε ότι το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + f_1(x, y), \quad a, b \in \mathbb{R}, \\ y' &= cx + dy + g_1(x, y), \quad c, d \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_1(x, y)}{r} = 0, \quad \text{όπου } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

**Ορισμός 1.** Όταν πληρούνται οι προϋποθέσεις (2), (3), το (1) ονομάζεται **σχεδόν γραμμικό σύστημα γύρω από το σημείο**  $(0,0)$ . Το δε γραμμικό σύστημα:

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy, \quad (4)$$

αποτελεί τη **γραμμικοποίηση** του (1) (ή το **γραμμικοποιημένο σύστημα** αντίστοιχο του (1)) γύρω από την αρχή  $(0,0)$ .

**Παράδειγμα 2.** Γύρω από το  $(0,0)$  να βρεθεί η γραμμικοποίηση του συστήματος  $x' = x + x^2 + xy^2, y' = y + y^{3/2}$ .

**Απάντηση.** Κατ' αρχήν βλέπουμε ότι το  $(0,0)$  είναι στάσιμο σημείο του συστήματος. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του συστήματος (2) διαπιστώνουμε εύκολα ότι  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$  και  $f_1(x, y) = x^2 + xy^2 = r^2(\cos^2 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta), g_1(x, y) = y^{3/2} = r^{3/2}(\sin \theta)^{3/2}$  όπου  $r, \theta$  οι πολικές συντεταγμένες. Ισχύει δε ότι:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^2 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta) = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_1(x, y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2}(\sin \theta)^{3/2} = 0.$$

Επομένως, το αρχικό σύστημα είναι σχεδόν γραμμικό με αντίστοιχη γραμμικοποίηση  $\{y' = x, y' = y\}$  γύρω από την αρχή  $(0,0)$ .  $\square$

**Παράδειγμα 3.** Να εξετασθεί αν το σύστημα  $x' = 2x + x^p - 3y, y' = 5x - y^q$ , είναι γραμμικοποιήσιμο γύρω από το σημείο  $(0,0)$ , όταν ένα τουλάχιστον από τα  $p, q$  ανήκει στο  $(-\infty, 1)$ .

**Απάντηση.** Κατ' αρχήν βλέπουμε ότι το  $(0,0)$  είναι στάσιμο σημείο του συστήματος. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του συστήματος (2) διαπιστώνουμε εύκολα ότι  $f_1(x, y) = x^p = r^p(\cos \theta)^p, g_1(x, y) = y^q = r^q(\sin \theta)^q$ , όπου  $r, \theta$  οι πολικές συντεταγμένες. Ισχύει δε ότι:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f_1(x,y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\cos^p \theta}{r^{1-p}} = \infty, \quad \text{αν } p \in (-\infty, 1),$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{g_1(x,y)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin^q \theta}{r^{1-q}} = \infty, \quad \text{αν } q \in (-\infty, 1).$$

Επομένως, το αρχικό σύστημα δεν είναι γραμμικοποιήσιμο γύρω από την αρχή  $(0,0)$ . □

**Παρατήρηση 4.** Οι παραπάνω έννοιες μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που το στάσιμο σημείο είναι διάφορο του  $(0,0)$  με χρήση τοπικών συντεταγμένων. Έστω λοιπόν  $(\xi, \eta)$  ένα στάσιμο σημείο του (1). Τότε με το μετασχηματισμό των μεταβλητών  $x_1 = x - \xi$ ,  $y_1 = y - \eta$ , το σύστημα (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} x_1' &= f(x_1 + \xi, y_1 + \eta) = F(x_1, y_1), \\ y_1' &= g(x_1 + \xi, y_1 + \eta) = G(x_1, y_1), \end{aligned} \quad (5)$$

του οποίου το  $(0,0)$  είναι στάσιμο σημείο. Επομένως, μπορεί να εφαρμοσθεί η προηγούμενη διαδικασία στο σύστημα (5).

**Παρατήρηση 5** (ανάπτυγμα Taylor και γραμμικοποίηση). Το παραπάνω παράδειγμα μας υποδεικνύει έναν τρόπο κατευθείαν προσδιορισμού της γραμμικοποίησης ενός σχεδόν γραμμικού συστήματος με τη χρήση του αναπτύγματος Taylor. Αν οι συναρτήσεις  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  του συστήματος (1) είναι διαφορίσιμες σε μια γειτονιά του στάσιμου σημείου  $(\xi, \eta)$ , τότε γύρω από αυτό το σημείο θα ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\xi, \eta) + (x - \xi)f_x(\xi, \eta) + (y - \eta)f_y(\xi, \eta) + R_1(x, y), \\ g(x, y) &= g(\xi, \eta) + (x - \xi)g_x(\xi, \eta) + (y - \eta)g_y(\xi, \eta) + R_2(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Τα υπόλοιπα  $R_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , ικανοποιούν τη σχέση:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R_i(x,y)}{r} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

όπου τώρα  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ . Επειδή δε το  $(\xi, \eta)$  είναι στάσιμο σημείο του (1) θα ισχύει  $f(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) = 0$ . Επομένως, το σύστημα (1) με την εισαγωγή του τοπικού συστήματος συντεταγμένων  $x_1 = x - \xi$ ,  $y_1 = y - \eta$ , λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 f_x(\xi, \eta) + y_1 f_y(\xi, \eta) + R_1(x_1 + \xi, y_1 + \eta), \\ y_1' &= x_1 g_x(\xi, \eta) + y_1 g_y(\xi, \eta) + R_2(x_1 + \xi, y_1 + \eta). \end{aligned} \quad (8)$$

Λόγω της (7) συνάγουμε ότι το σύστημα (1) είναι σχεδόν γραμμικό και σύμφωνα με τον αρχικό συμβολισμό θα έχουμε  $a = f_x(\xi, \eta)$ ,  $b = f_y(\xi, \eta)$ ,  $c = g_x(\xi, \eta)$ ,  $d =$

$g_y(\xi, \eta)$  και  $f_1(x, y) = R_1(x, y)$ ,  $g_1(x, y) = R_2(x, y)$ . Επομένως, το αντίστοιχο του (1) γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από το στάσιμο σημείο  $(\xi, \eta)$  θα είναι:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(\xi, \eta) & f_y(\xi, \eta) \\ g_x(\xi, \eta) & g_y(\xi, \eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

**Ορισμός 6.** Αν για το στάσιμο σημείο  $(\xi, \eta)$  του συστήματος (1) ισχύει:

$$J[f, g](\xi, \eta) \equiv \begin{vmatrix} f_x(\xi, \eta) & f_y(\xi, \eta) \\ g_x(\xi, \eta) & g_y(\xi, \eta) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (10)$$

τότε αυτό ονομάζεται **υπερβολικό (ή απλό) στάσιμο σημείο** του (1).

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο **Θεώρημα των Hartman (1964) - Grobman (1959)**, που αφορά το είδος ευστάθειας των υπερβολικών στάσιμων σημείων ενός σχεδόν γραμμικού συστήματος.

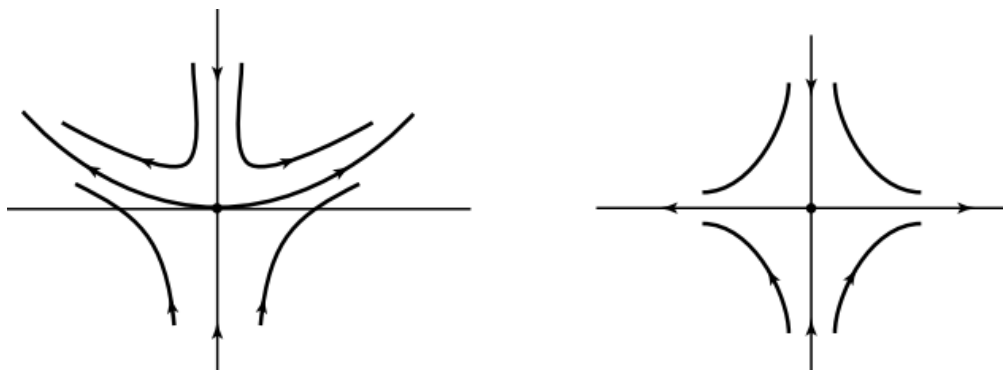
**Θεώρημα 7** (γραμμικοποίησης). Έστω ότι το  $(\xi, \eta)$  αποτελεί υπερβολικό στάσιμο σημείο του σχεδόν γραμμικού συστήματος:

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y). \quad (1)$$

Τότε, σε μια γειτονιά του  $(\xi, \eta)$ , το (1) και το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα (9) έχουν τοπολογικά ισοδύναμα επίπεδα φάσεων, δηλαδή το ίδιο είδος ευστάθειας, εκτός της περίπτωσης που το  $(\xi, \eta)$  αποτελεί κέντρο για το γραμμικοποιημένο σύστημα (9).

**Απόδειξη.** Για την απόδειξη και άλλα σχόλια παραπέμπουμε στα βιβλία των J. Hale and H. Koçak [HK], Chapter 9 και J. Palis and W. de Melo [PM].□

Στο **Σχήμα 2** φαίνεται ένα σημείο σάγματος σε ένα σχεδόν γραμμικό σύστημα και στο αντίστοιχο γραμμικοποιημένο αυτού.



**Σχήμα 2.** Τοπολογικά ισοδύναμα επίπεδα φάσεων

Δεν θα προχωρήσουμε στον ορισμό της έννοιας «τοπολογικά ισοδύναμα επίπεδα φάσεων», γιατί απαιτούνται γνώσεις από την τοπολογία των δυναμικών συστημάτων.

Πάντως το **Σχήμα 2** και τα παραδείγματα που ακολουθούν βοηθούν αρκετά για μια ικανοποιητική διαισθητική κατανόηση της έννοιας αυτής.

**Παράδειγμα 10.** Να ορισθεί γύρω από το σημείο  $(0,0)$  το τοπικό επίπεδο φάσεων του μη γραμμικού συστήματος:

$$x' = x + 4y + e^x - 1 \equiv f(x, y), \quad y' = -y - ye^x \equiv g(x, y). \quad (\alpha)$$

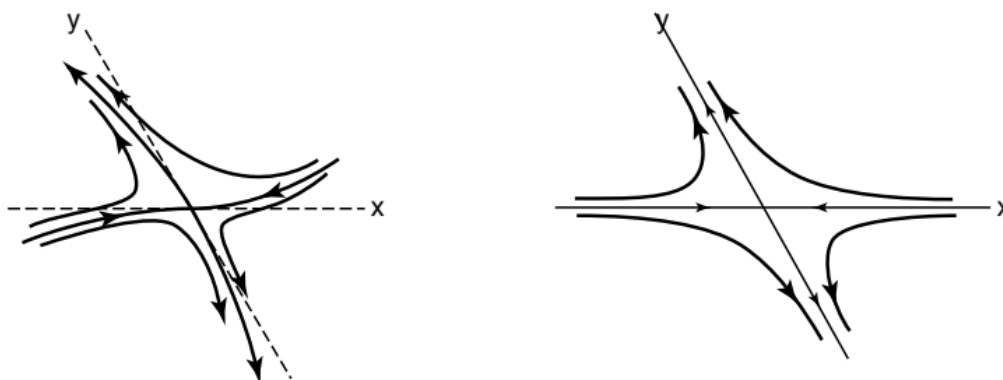
**Απάντηση.** Το  $(0,0)$  είναι προφανώς στάσιμο σημείο του  $(\alpha)$ . Οι συναρτήσεις του διανυσματικού πεδίου είναι διαφορίσιμες. Επομένως, το σύστημα είναι σχεδόν γραμμικό και η ορίζουσα γραμμικοποίησης γύρω από την αρχή  $(0,0)$  θα είναι:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(0,0)}{\partial x} & \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + e^x & 4 \\ -ye^x & -1 - e^x \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα είναι:

$$x' = 2x + 4y, \quad y' = -2y, \quad (\beta)$$

του οποίου το  $(0,0)$  είναι υπερβολικό στάσιμο σημείο, αφού ισχύει η (10). Επειδή οι ιδιοτιμές του  $(\beta)$  είναι  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 2$  η αρχή  $(0,0)$  είναι σημείο σάγγατος για το  $(\beta)$ , επομένως και για το  $(\alpha)$ . Τα παραπάνω φαίνονται στο **Σχήμα 3**.



**Σχήμα 3.** Το μη-γραμμικό σύστημα  $(\alpha)$  και το γραμμικοποιημένο σύστημα  $(\beta)$

**Παράδειγμα 11.** Να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα μη-γραμμικά συστήματα:

$$x' = -y + x(x^2 + y^2), \quad y' = x + y(x^2 + y^2), \quad (\alpha)$$

$$x' = -y - (x^2 + y^2), \quad y' = x - y(x^2 + y^2), \quad (\beta)$$

έχουν το ίδιο γραμμικοποιημένο σύστημα στην αρχή  $(0,0)$ , αλλά έχουν ποιοτικά διαφορετικά επίπεδα φάσεων γύρω από το σημείο  $(0,0)$ .

**Απάντηση.** Οι συναρτήσεις του διανυσματικού πεδίου των συστημάτων  $(\alpha)$  και  $(\beta)$  είναι διαφορίσιμες. Επίσης, παρατηρούμε ότι:

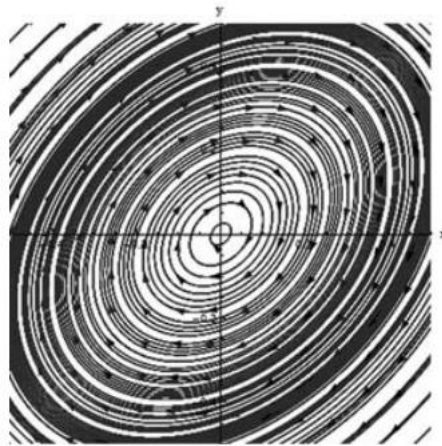
$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{x(x^2+y^2)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} (rx) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{y(x^2+y^2)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} (ry) = 0.$$

Για αμφότερα τα συστήματα (α) και (β) το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι:

$$x' = -y, \quad y' = x. \quad (\gamma)$$

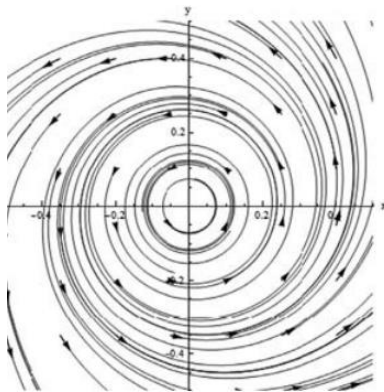
Επειδή ισχύει:  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , το  $(0,0)$  είναι υπερβολικό κρίσιμο σημείο του συστήματος  $(\gamma)$ . Το σύστημα  $(\gamma)$  έχει φανταστικές ιδιοτιμές  $\lambda_1 = +i$ ,  $\lambda_2 = -i$ , δηλαδή η αρχή αποτελεί (ευσταθές) κέντρο για το γραμμικό σύστημα  $(\gamma)$  (βλέπε **Σχήμα 5**). Εκφράζοντας σε πολικές συντεταγμένες τα συστήματα (α) και (β) παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} r' &= r^3, & \theta' &= 1, & (\alpha^*) \\ r' &= -r^3, & \theta' &= 1. & (\beta^*) \end{aligned}$$

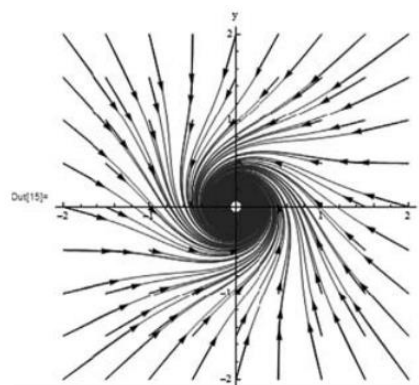


**Σχήμα 5.** Σύστημα  $(\gamma)$ , η περίπτωση του κέντρου

Επειδή πάντα  $r > 0$ , οι τροχιές του  $(\alpha^*)$  θα είναι ελικοειδείς, οι οποίες απομακρύνονται από την αρχή, καθώς το  $t \rightarrow +\infty$  ( $r' > 0$ ), ενώ οι τροχιές του  $(\beta^*)$  θα είναι ελικοειδείς, οι οποίες κινούνται προς την αρχή, καθώς το  $t \rightarrow +\infty$  ( $r' < 0$ ). Επομένως, το  $(0,0)$  αποτελεί ασταθή εστία για το σύστημα (α) (**Σχήμα 6**) και ασυμπτωτικά ευσταθή εστία για το σύστημα (β) (**Σχήμα 7**).



**Σχήμα 6.** Ασταθής εστία



**Σχήμα 7.** Ασυμπτωτικά ευσταθής εστία

**Παρατήρηση 12.** Όλα τα παραπάνω γενικεύονται κατά φυσικό τρόπο για συστήματα με περισσότερες εξισώσεις και αντίστοιχα μεταβλητές.

Στον επόμενο πίνακα (βλέπε **Σχήμα 8**) συνοψίζονται όλες οι παραπάνω περιπτώσεις, τόσο για τα γραμμικά συστήματα  $2 \times 2$  με σταθερούς συντελεστές, όσο και για τις διαταραχές αυτών 2ης τουλάχιστον τάξης ως προς  $x, y$ .

$p = a + d$ $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$ $q = ad - bc \neq 0$	Γραμμικό Σύστημα $x' = ax + by$ $y' = cx + dy$	Σχεδόν Γραμμικό Σύστημα $x' = ax + by + P(x, y)$ $y' = cx + dy + Q(x, y)$
1. $p < 0, \Delta < 0$	ΑΕ, εστία	ΑΕ, εστία
2. $p < 0, \Delta = 0$	ΑΕ, άστρο ή νόθος κόμβος	ΑΕ, κόμβος ή εστία
3. $p < 0, \Delta > 0$ $q > 0$	ΑΕ, κόμβος	ΑΕ, νόθος κόμβος
4. $p = 0, \Delta < 0$	Ε, κέντρο	Όλα πιθανά
5. $p = 0, \Delta < 0,$ $p \neq 0, \Delta > 0,$ και $q < 0$	Α, σημείο σάγματος	Α, σημείο σάγματος
6. $p > 0, \Delta < 0$	Α, εστία	Α, εστία
7. $p > 0, \Delta = 0$	ΑΕ, άστρο ή νόθος κόμβος	ΑΕ, κόμβος ή εστία
8. $p > 0, \Delta > 0$ και $q > 0$	ΑΕ, κόμβος	ΑΕ, νόθος κόμβος

ΑΕ: ασυμπτωτικά ευσταθής, Ε: ευσταθής, Α: ασταθής.

Οι συναρτήσεις  $P, Q$  είναι τουλάχιστον 2ης τάξης κοντά στην αρχή.

**Σχήμα 8.** Ταξινόμηση Ευστάθειας Γραμμικών και Σχεδόν Γραμμικών Συστημάτων

## Κεφάλαιο 2

### Ηλεκτρικά κυκλώματα

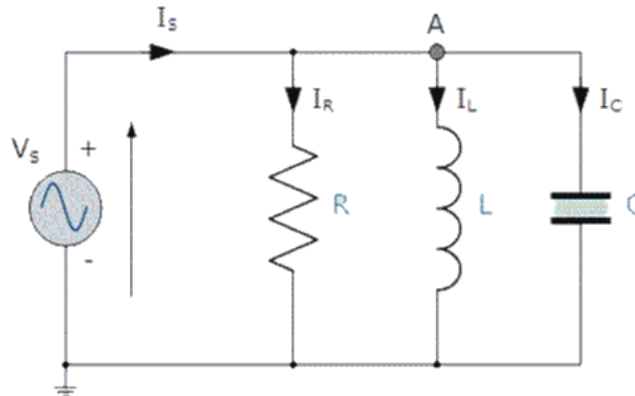
#### 2.1. Βασικές έννοιες ηλεκτρισμού

Η παρούσα εργασία θα εξετάσει τα βασικά στοιχεία της γραμμικής μοντελοποίησης διακριτών στοιχείων, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει τρία στοιχεία: 1) δημιουργία μοντέλων για τα επιμέρους στοιχεία των συστημάτων, 2) συνδυασμός αυτών των μοντέλων στοιχείων σε μοντέλα δικτύου για να αναπαραστήσουν ένα

σύστημα, και 3) επίλυση των εξισώσεων του μοντέλου που προκύπτουν σε συγκεκριμένες περιπτώσεις ενδιαφέροντος. Θα ληφθούν υπόψη τα γραμμικά ηλεκτρικά κυκλώματα, επειδή αυτά είναι συνήθως η βάση για μοντέλα νευρωνικών μεμβρανών (neuralmembranemodels).

## 2.2. Κύκλωμα RLC

Θεωρείται ένα παράλληλο κύκλωμα RLC, όπως στο **Σχήμα 2.1**. Έστω πως  $I_C$ ,  $I_R$  και  $I_L$  είναι τα ρεύματα που διαρρέουν τον πυκνωτή, την αντίσταση και το πηνίο αντίστοιχα. Ομοίως, έστω  $V_C$ ,  $V_R$  και  $V_L$  είναι οι αντίστοιχες πτώσεις τάσης



**Σχήμα 2.1:** Ένα παράλληλο κύκλωμα RLC

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Kirchhoff και τη σχέση έντασης – τάσης σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος, τότε λαμβάνεται το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{dI_L}{dt} = \frac{V}{L} \\ \frac{dV}{dt} = -\frac{I_L}{C} - \frac{V}{RC} \end{cases}, \quad (2.1)$$

το οποίο αποτελεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων της έντασης του ρεύματος και της διαφοράς δυναμικού.

## 2.3. Κύκλωμα LC σε σειρά

Σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο, για το συγκεκριμένο ηλεκτρικό κύκλωμα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = E(t). \quad (2.2)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:  $Q(t_0) = Q_0$  και  $\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=t_0} = I(t_0) = I_0$ . Η γενική λύση  $Q_{om}(t)$  της αντίστοιχης ομογενούς της διαφορικής εξίσωσης (2.2):

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = 0, \quad (2.3)$$

δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$Q_{om}(t) = c_1 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \quad (2.4)$$

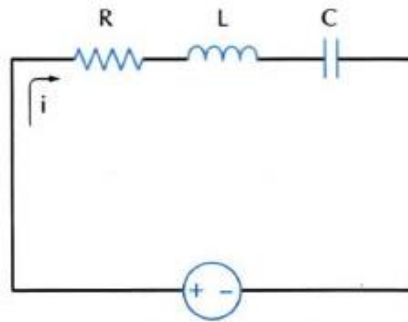
Η ειδική λύση  $Q_{\mu}(t)$  της διαφορικής εξίσωσης (2.2) δίδεται από την έκφραση:

$$Q_{\mu}(t) = \sqrt{LC} \left[ \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \int E(t) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) dt - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \int E(t) \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) dt \right]. \quad (2.5)$$

#### 2.4. Κύκλωμα RLC σε σειρά

Στην παρούσα παράγραφο θα περιγραφεί ένα μοντέλο της ροής ηλεκτρικού ρεύματος στο απλό, εν σειρά, κύκλωμα του **Σχήματος 2.2**. Η μαθηματική έκφραση μεταξύ του φορτίου  $Q$  και του ρεύματος  $I$  δίδεται από την ακόλουθη σχέση

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.6)$$



**Σχήμα 2.2:** Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RLC σε σειρά

Επομένως, από το νόμο του Kirchhoff λαμβάνεται η ακόλουθη εξίσωση

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{c} = E(t), \quad (2.7)$$

ή:

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c} Q = E(t), \quad (2.8)$$

για το φορτίο  $Q(t)$ . Εναλλακτικά, μπορεί να ληφθεί μια διαφορική εξίσωση για το ρεύμα  $I$  παραγωγίζοντας τη σχέση (2.9) ως προς το χρόνο  $t$  και κατόπιν αντικαθιστώντας το  $\frac{dQ}{dt}$  από την εξίσωση (2.6). Με τον τρόπο αυτό έχουμε:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{c} I = \frac{dE}{dt}, \quad (2.9)$$

με αρχικές συνθήκες:  $I(t_0) = I_0$  και  $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_0} = I_{01}$ . Η εξίσωση (2.7) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t I(x) dx = E(t). \quad (2.10)$$

Επίσης, από τη εξίσωση (2.7) προκύπτει:

$$I_{01} = \frac{1}{L} \left[ E(t_0) - RI_0 - \frac{Q_0}{c} \right]. \quad (2.11)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς  $Q_{om}(t)$  της σχέσης (2.8) δίδεται από την ακόλουθη έκφραση:

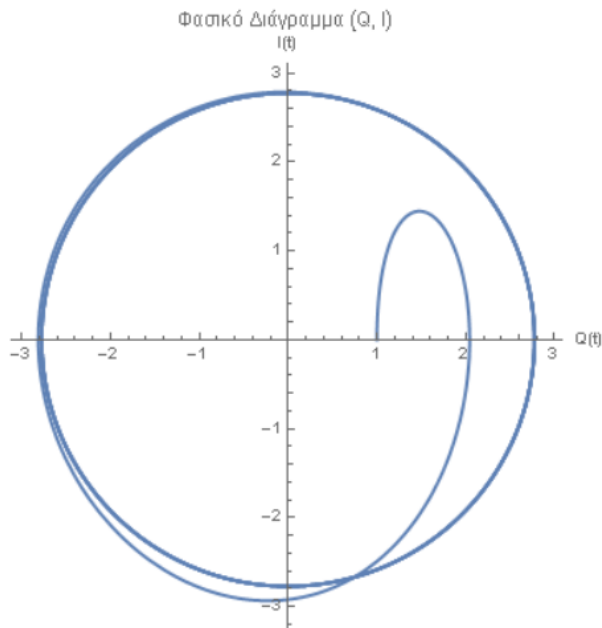
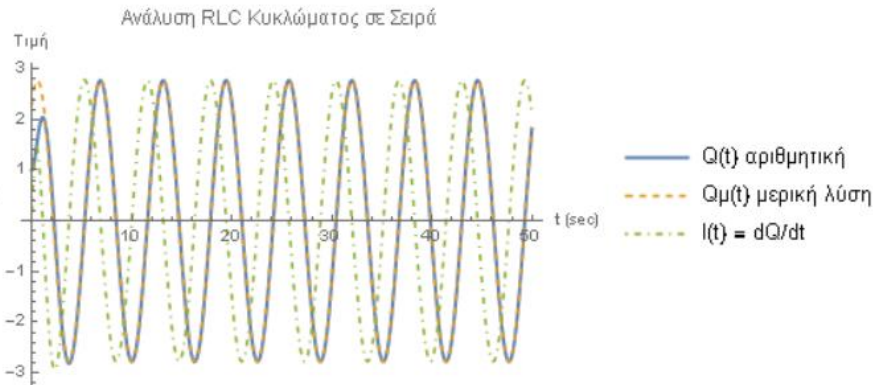
$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0. \quad (2.12)$$

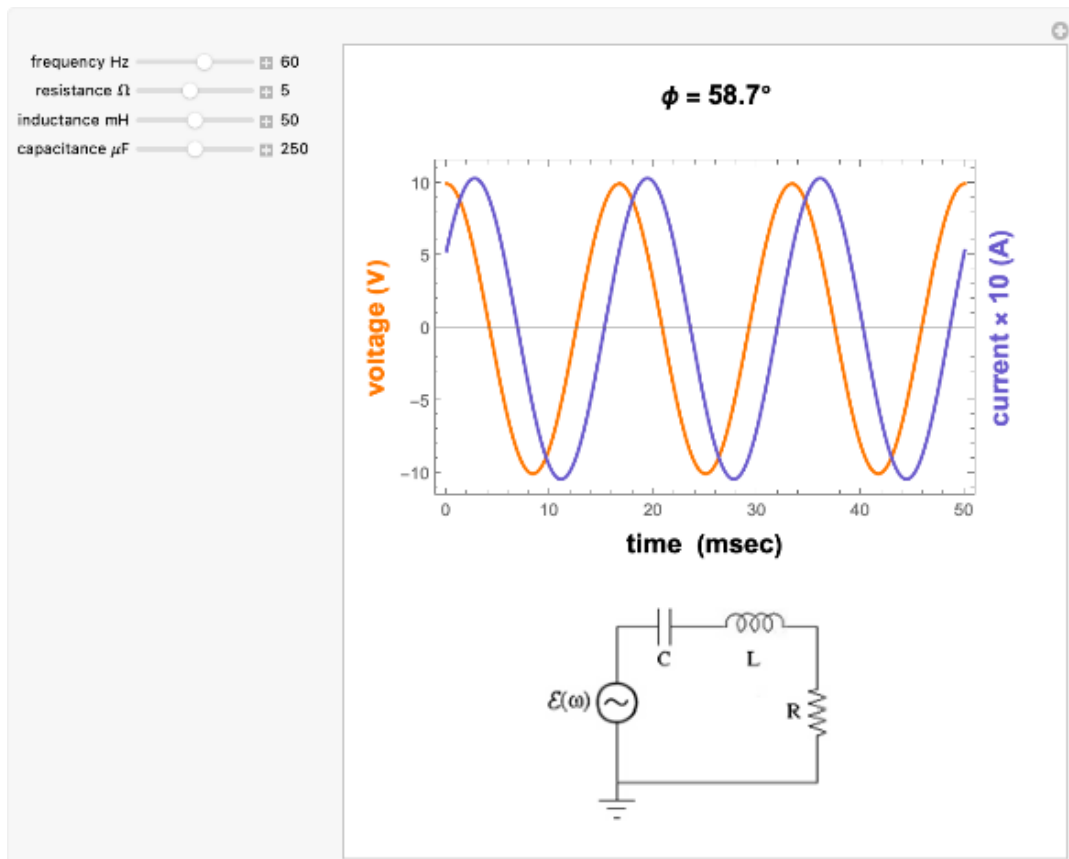
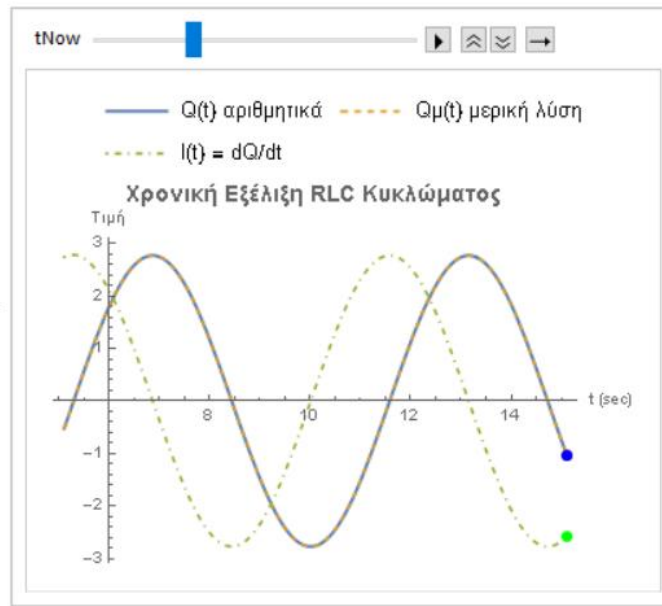
Εάν θεωρήσουμε την εξίσωση (2.8) όταν η ηλεκτρεγερτική δύναμη  $E = E(t)$  είναι μια περιοδική συνάρτηση του χρόνου, δηλαδή ισχύει πως:  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$ , τότε η προκύπτουσα διαφορική εξίσωση είναι:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_0 \cos(\omega t). \quad (2.13)$$

Η μερική λύση  $Q_{\mu}(t)$  θα είναι:

$$Q_{\mu}(t) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 + \omega^2 R^2}} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.14)$$





## 2.5. Κύκλωμα RC σε σειρά

Σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, για το συγκεκριμένο ηλεκτρικό κύκλωμα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$RI + \frac{Q}{c} = E(t). \quad (2.15)$$

Αντικαθιστώντας την ένταση  $I(t)$  από την εξίσωση (2.7) λαμβάνεται η ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

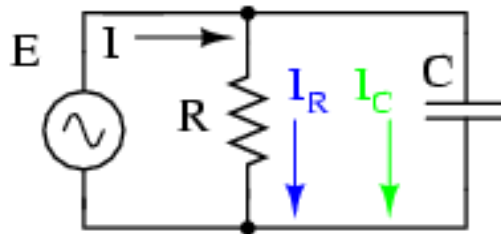
$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c} Q = E(t), \quad (2.16)$$

για το φορτίο  $Q = Q(t)$ . Οι αρχικές συνθήκες είναι:  $Q(t_0) = Q_0$  και  $\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{t=t_0} = I(t_0) = I_0$ . Επομένως, έχουμε πως:  $c = Q_0$  και καταλήγουμε στην ακόλουθη γενική λύση:

$$Q(t) = Q_0 + e^{-\frac{t}{RC}} \int_{t_0}^t e^{\frac{x}{RC}} E(x) dx. \quad (2.17)$$

## 2.6. Παράλληλο κύκλωμα RC

Θεωρείται ένα παράλληλο κύκλωμα RC, όπως στο **Σχήμα 2.3**.



**Σχήμα 2.3:** Ένα παράλληλο κύκλωμα RC

Λαμβάνεται η ακόλουθη γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC} V = 0. \quad (2.18)$$

Με βάση την αρχική συνθήκη:  $V(t_0) = V_0$ , η γενική λύση της εξίσωσης (2.18) είναι:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t-t_0}{RC}}. \quad (2.19)$$

## 2.7. Κύκλωμα RL σε σειρά

Σύμφωνα με όσα εκτέθηκαν σε προηγούμενη παράγραφο, για το συγκεκριμένο ηλεκτρικό κύκλωμα ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t). \quad (2.20)$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι:  $I(t_0) = I_0$  και  $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=t_0} = I(t_0) = I_0$ . Επομένως, καταλήγουμε στην ακόλουθη γενική λύση:

$$I(t) = I_0 + e^{-\frac{Rt}{L}} \int_{t_0}^t e^{\frac{Rx}{L}} E(x) dx. \quad (2.21)$$

### 2.8. Παράλληλο κύκλωμα RL

Θεωρείται ένα παράλληλο κύκλωμα RL και έχουμε την ακόλουθη γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως:

$$\frac{dI_L}{dt} + \frac{R}{L} I_L = 0. \quad (2.22)$$

Με βάση την αρχική συνθήκη:  $I_L(t_0) = I_{L0}$ , η γενική λύση της εξίσωσης (2.22) είναι:

$$I_L(t) = -I_R(t) = I_{L0} e^{\frac{R}{L}(t_0-t)}. \quad (2.23)$$

### 2.9. Παράλληλο κύκλωμα LC

Θεωρείται ένα παράλληλο κύκλωμα LC και λαμβάνεται:

$$\frac{d^2 I_L}{dt^2} + \frac{1}{LC} I_L = 0. \quad (2.24)$$

Με βάση τις αρχικές συνθήκες:  $I_L(0) = -I_C(0) = I_0$  και  $\left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$  η γενική λύση είναι:

$$I_L(t) = \sqrt{\frac{C}{L}} V_0 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + I_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \quad (2.25)$$

## Κεφάλαιο 3

### Μη γραμμικά κυκλώματα

#### 3.1. Εισαγωγή

Η μη γραμμικότητα παίζει κρίσιμο ρόλο σε πολλά συστήματα και επηρεάζει ποιοτικά τη συμπεριφορά τους. Για παράδειγμα, τα περισσότερα κυκλώματα που προέρχονται από τα σχέδια ολοκληρωμένων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων και συστημάτων είναι μη γραμμικά. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι η πλειονότητα των ενδιαφερόντων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων και συστημάτων είναι μη γραμμικά.

Η μη γραμμικότητα των κυκλωμάτων είναι συχνά ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό σχεδιασμού. Πολλά ηλεκτρονικά κυκλώματα έχουν σχεδιαστεί για να χρησιμοποιούν τη μη γραμμική συμπεριφορά των εξαρτημάτων τους. Η μη γραμμικότητα των στοιχείων των κυκλωμάτων αξιοποιείται για να παρέχει λειτουργικότητα που δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί με γραμμικά στοιχεία κυκλωμάτων. Για παράδειγμα, τα μη γραμμικά στοιχεία κυκλωμάτων είναι απαραίτητα δομικά στοιχεία σε πολλά γνωστά ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως δισταθή κυκλώματα, flipflops, στατικά κελιά RAM, ταλαντωτές και ενεργοποιητές Schmitt: όλα απαιτούν μη γραμμικά στοιχεία για να λειτουργήσουν σωστά. Η συνολική συμπεριφορά αυτών των κυκλωμάτων διαφέρει από τη συμπεριφορά των ενισχυτών ή των λογικών πυλών με έναν θεμελιώδη τρόπο: πρέπει να διαθέτουν πολλαπλά, αλλά απομονωμένα, σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος (dc) (που

ονομάζονται επίσης σημεία ισορροπίας). Αυτό είναι δυνατό μόνο εάν χρησιμοποιείται ένα μη γραμμικό στοιχείο (όπως ένα τρανζίστορ).

Ένα μη γραμμικό κύκλωμα ή δίκτυο (ένα κύκλωμα με σχετικά μεγάλο αριθμό στοιχείων) αποτελείται από τουλάχιστον ένα μη γραμμικό στοιχείο, χωρίς να υπολογίζονται οι ανεξάρτητες πηγές τάσης και ρεύματος. Ένα στοιχείο κυκλώματος ονομάζεται *μη γραμμικό* εάν η συστατική του σχέση μεταξύ της τάσης του (που δημιουργείται στα άκρα) και του ρεύματος του (που ρέει διαμέσου) είναι μια μη γραμμική συνάρτηση ή μια μη γραμμική σχέση. Όλα τα φυσικά κυκλώματα είναι μη γραμμικά. Κατά την ανάλυση κυκλωμάτων, συχνά απλοποιούμε τη συμπεριφορά των στοιχείων κυκλώματος και τα μοντελοποιούμε ως γραμμικά στοιχεία. Αυτό απλοποιεί το μοντέλο του κυκλώματος σε ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο στη συνέχεια περιγράφεται από ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων που είναι πιο εύκολο να λυθούν. Σε πολλές περιπτώσεις, αυτή η απλοποίηση δεν είναι δυνατή και τα μη γραμμικά στοιχεία διέπουν τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η προσέγγιση σε ένα γραμμικό κύκλωμα είναι δυνατή μόνο σε ένα περιορισμένο εύρος μεταβλητών κυκλώματος (τάσεις και ρεύματα), σε ένα περιορισμένο εύρος παραμέτρων κυκλώματος (αντίσταση, χωρητικότητα ή επαγωγή) ή σε ένα περιορισμένο εύρος περιβαλλοντικών συνθηκών (θερμοκρασία, υγρασία ή γήρανση) που μπορεί να επηρεάσουν τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Εάν επιδιώκεται η καθολική συμπεριφορά ενός κυκλώματος, η γραμμικοποίηση συχνά δεν είναι δυνατή και ο σχεδιαστής πρέπει να αντιμετωπίσει τη μη γραμμική συμπεριφορά του κυκλώματος (Chuaetal., 1987; HaslerandNeirynck, 1986; Mathis, 1987; Willson, 1975).

Όπως και στην περίπτωση ενός γραμμικού κυκλώματος, οι νόμοι τάσης και ρεύματος του Kirchhoff και το θεώρημα Tellegen ισχύουν για μη γραμμικά κυκλώματα. Ασχολούνται μόνο με την τοπολογία ενός κυκλώματος (τον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία του κυκλώματος συνδέονται μεταξύ τους). Οι νόμοι τάσης και ρεύματος του Kirchhoff εκφράζουν γραμμικές σχέσεις μεταξύ των τάσεων ή των ρευμάτων ενός κυκλώματος. Οι μη γραμμικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του κυκλώματος πηγάζουν από τις συστατικές σχέσεις των στοιχείων. Ως αποτέλεσμα, οι εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά ενός μη γραμμικού κυκλώματος είναι μη γραμμικές. Σε περιπτώσεις όπου αναζητείται μια απόκριση συνεχούς ρεύματος του κυκλώματος, οι εξισώσεις που διέπουν είναι μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις. Σε περιπτώσεις όπου εξετάζεται η μεταβατική συμπεριφορά ενός κυκλώματος, οι εξισώσεις που διέπουν είναι μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Η ανάλυση των μη γραμμικών κυκλωμάτων είναι πιο δύσκολη από την ανάλυση των γραμμικών κυκλωμάτων. Διάφορα εργαλεία έχουν χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση και την καταγραφή της μη γραμμικής συμπεριφοράς των κυκλωμάτων. Ορισμένες προσεγγίσεις χρησιμοποιούν ποσοτικές (αριθμητικές) τεχνικές και τη χρήση προσομοιωτών κυκλωμάτων για την εύρεση της κατανομής των ρευμάτων και των τάσεων ενός κυκλώματος για μια ποικιλία κυματομορφών που παρέχονται από πηγές. Άλλα εργαλεία χρησιμοποιούν μεθόδους ποιοτικής ανάλυσης, όπως αυτές που ασχολούνται με τη θεωρία για τον προσδιορισμό του αριθμού των σημείων λειτουργίας συνεχούς ρεύματος που μπορεί να διαθέτει ένα κύκλωμα ή με την ανάλυση της σταθερότητας του σημείου λειτουργίας ενός κυκλώματος.

### **3.2. Μοντέλα φυσικών στοιχείων κυκλώματος**

Τα στοιχεία κυκλώματος είναι μοντέλα φυσικών στοιχείων. Κάθε φυσικό στοιχείο είναι μη γραμμικό. Τα μοντέλα που καταγράφουν τη συμπεριφορά αυτών των στοιχείων σε ένα ευρύ φάσμα τιμών τάσεων και ρευμάτων είναι μη γραμμικά. Σε

κάποιο βαθμό απλοποίησης, τα στοιχεία κυκλώματος μπορούν να μοντελοποιηθούν ως γραμμικά στοιχεία που επιτρέπουν μια ευκολότερη ανάλυση και πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός κυκλώματος. Αυτά τα γραμμικά μοντέλα είναι βολικές απλοποιήσεις που συχνά ισχύουν μόνο σε ένα περιορισμένο εύρος τάσεων και ρευμάτων του στοιχείου.

Μια άλλη απλοποίηση που χρησιμοποιείται συχνά όταν επιδιώκεται ο υπολογισμός της κατανομής των τάσεων και των ρευμάτων του κυκλώματος, είναι μια τμηματικά γραμμική προσέγγιση των χαρακτηριστικών του μη γραμμικού στοιχείου. Η τμηματικά γραμμική προσέγγιση αντιπροσωπεύει μια μη γραμμική συνάρτηση με ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων γραμμικών τμημάτων που μοιάζουν πολύ με το μη γραμμικό χαρακτηριστικό. Για παράδειγμα, αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό τάσεων και ρευμάτων κυκλώματος για μάλλον απλά μη γραμμικά ηλεκτρονικά κυκλώματα ή κατά την εφαρμογή ορισμένων εργαλείων σχεδιασμού λογισμικού με τη βοήθεια υπολογιστή. Τα μη γραμμικά στοιχεία κυκλώματος μπορούν να ταξινομηθούν με βάση τις συστατικές τους σχέσεις (ωμικές και δυναμικές) και με βάση τον αριθμό των ακροδεκτών του στοιχείου.

### 3.2.1. Μη γραμμικά στοιχεία αντίστασης δύο ακροδεκτών

Το πιο συνηθισμένο μη γραμμικό στοιχείο δύο ακροδεκτών είναι μια μη γραμμική αντίσταση. Η σχέση είναι:

$$f(i, v) = 0, \quad (3.1)$$

όπου  $f$  είναι μια μη γραμμική απεικόνιση. Σε ειδικές περιπτώσεις, η απεικόνιση μπορεί να εκφραστεί ως:

$$i = g(v), \quad (3.2)$$

όταν ονομάζεται αντίσταση ελεγχόμενης τάσης ή:

$$v = h(i), \quad (3.3)$$

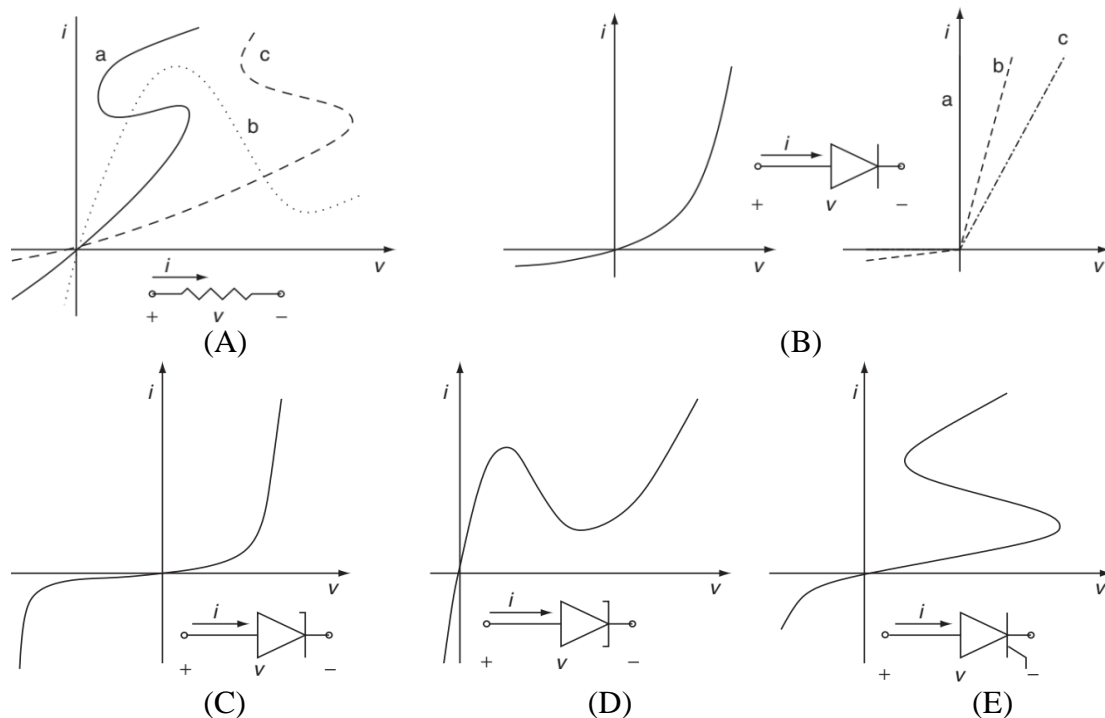
όταν είναι αντίσταση ελεγχόμενης ρεύματος. Παραδείγματα μη γραμμικών χαρακτηριστικών μη γραμμικών αντιστάσεων δύο ακροδεκτών φαίνονται στο **Σχήμα 3.1(A)**. Οι μη γραμμικές αντιστάσεις που χρησιμοποιούνται συνήθως σε ηλεκτρονικά κυκλώματα είναι οι δίοδοι: εκθετικές, zener και tunnel (Esaki). Είναι κατασκευασμένες από υλικά ημιαγωγών και χρησιμοποιούνται συχνά στο σχεδιασμό ηλεκτρονικών κυκλωμάτων μαζί με γραμμικά στοιχεία που παρέχουν κατάλληλη πόλωση για τα μη γραμμικά εξαρτήματα. Ένα σύμβολο κυκλώματος για μια εκθετική δίοδο και τα χαρακτηριστικά της δίνονται στο **Σχήμα 3.1(B)**. Το μοντέλο της διόδου συχνά απλοποιείται και το ρεύμα που ρέει μέσω της διόδου στην αντίστροφα πολωμένη περιοχή θεωρείται μηδέν. Περαιτέρω απλοποίηση οδηγεί σε ένα μοντέλο διακόπτη: η δίοδος είναι είτε ενεργοποιημένη (η τάση στους ακροδέκτες της διόδου είναι μηδέν) είτε απενεργοποιημένη (το ρεύμα που ρέει μέσω της διόδου είναι μηδέν). Αυτά τα απλοποιημένα μοντέλα διόδων είναι επίσης μη γραμμικά. Τρία τέτοια χαρακτηριστικά φαίνονται στο **Σχήμα 3.1(B)**. Η δίοδος Zener, που φαίνεται στο **Σχήμα 3.1(C)**, είναι ένα άλλο συνήθως χρησιμοποιούμενο ηλεκτρικό εξάρτημα. Οι δίοδοι σήραγγας έχουν πιο σύνθετα μη γραμμικά χαρακτηριστικά, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3.1(D)**. Αυτό το μη γραμμικό στοιχείο είναι ποιοτικά διαφορετικό από τις εκθετικές δίοδους. Επιτρέπει πολλαπλές τιμές τάσεων στη δίοδο για την ίδια τιμή ρεύματος που ρέει μέσω αυτής. Το χαρακτηριστικό του έχει μια περιοχή όπου η παράγωγός του (διαφορική αντίσταση) είναι αρνητική. Ο ανορθωτής ελεγχόμενος

από πυρίτιο, που χρησιμοποιείται σε πολλά κυκλώματα μεταγωγής, είναι ένα μη γραμμικό στοιχείο δύο ακροδεκτών με παρόμοια συμπεριφορά. Είναι μια αντίσταση ελεγχόμενη από ρεύμα που επιτρέπει πολλαπλές τιμές ρευμάτων που ρέουν μέσω αυτής για την ίδια τιμή τάσης στους ακροδέκτες της. Ένα σύμβολο για τον ανορθωτή ελεγχόμενο από πυρίτιο και το χαρακτηριστικό του που ελέγχεται από το ρεύμα φαίνονται στο **Σχήμα 3.1(E)**.

Δύο απλά μη γραμμικά στοιχεία, που ονομάζονται μηδενιστής και νορμαντήρας, έχουν εισαχθεί κυρίως για θεωρητική ανάλυση μη γραμμικών κυκλωμάτων. Ο μηδενιστής είναι ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών που ορίζεται από τις συστατικές σχέσεις:

$$v = i = 0. \quad (3.4)$$

Το ρεύμα και η τάση ενός νορμαντήρα δεν υπόκεινται σε κανέναν περιορισμό. Συνδυασμοί μηδενιστών και νορμαντήρων έχουν χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση πολυτεματικών μη γραμμικών στοιχείων, όπως τρανζίστορ και λειτουργικοί ενισχυτές. Οι πηγές ανεξάρτητες από τάση και ρεύμα θεωρούνται επίσης ότι ανήκουν στην οικογένεια των μη γραμμικών αντιστάσεων. Σε αντίθεση με τις περιγραφόμενες μη γραμμικές αντιστάσεις, οι οποίες είναι όλες παθητικές για την επιλογή των χαρακτηριστικών τους που παρουσιάζονται εδώ, οι πηγές ανεξάρτητες από τάση και ρεύμα είναι ενεργά στοιχεία κυκλώματος.



**Σχήμα 3.1.** Στοιχεία Μη Γραμμικού Κυκλώματος Δύο Ακροδεκτικών: (A) Μη γραμμική αντίσταση και παραδείγματα τριών μη γραμμικών συστατικών χαρακτηριστικών (α. γενικά, β. ελεγχόμενης τάσης και γ. ελεγχόμενης έντασης). (B) Εκθετική διάοδος και τα τρία απλοποιημένα χαρακτηριστικά της. (C) Δίοδος Zener και η χαρακτηριστική της με περιοχή διάσπασης για αρνητικές τιμές της τάσης της διάόδου. (D) Δίοδος σήραγγας και η χαρακτηριστική της με ελεγχόμενη τάση. (E) Ανορθωτής ελεγχόμενος από πυρίτιο και η χαρακτηριστική του με ελεγχόμενη ένταση.

### 3.2.2. Μη γραμμικά δυναμικά στοιχεία δύο ακροδεκτών

Οι μη γραμμικές αντιστάσεις έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό ότι οι συστατικές τους σχέσεις περιγράφονται από μη γραμμικές εξισώσεις. Τα δυναμικά μη γραμμικά στοιχεία, όπως οι μη γραμμικοί επαγωγείς και οι πυκνωτές, περιγράφονται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Η συστατική σχέση ενός μη γραμμικού πυκνωτή είναι:

$$f(v, q) = 0, \quad (3.5)$$

όπου το φορτίο  $q$  και το ρεύμα  $i$  σχετίζονται με:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (3.6)$$

Η συστατική σχέση για έναν μη γραμμικό επαγωγέα είναι:

$$f(\varphi, i) = 0, \quad (3.7)$$

όπου η ροή  $\varphi$  και η τάση  $v$  σχετίζονται με:

$$v = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.8)$$

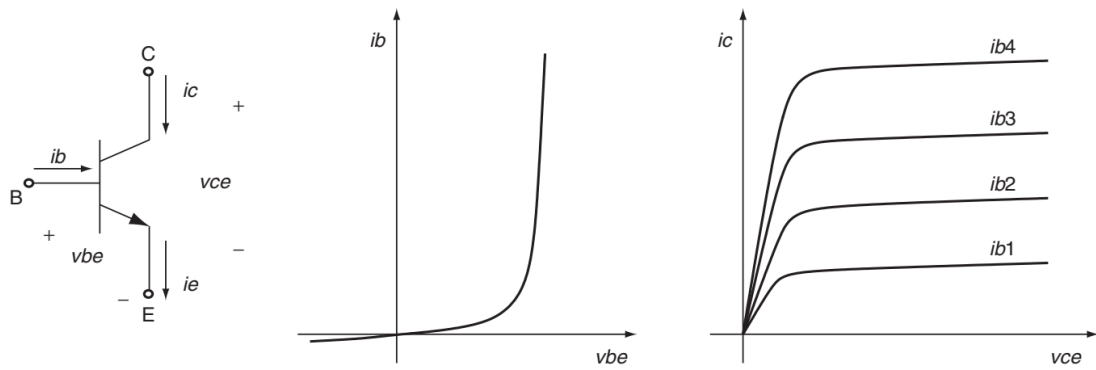
Μια γενίκευση της μη γραμμικής αντίστασης που έχει μνήμη, που ονομάζεται memristor, είναι ένα στοιχείο μίας θύρας που ορίζεται από μια συστατική σχέση:

$$f(\varphi, q) = 0, \quad (3.9)$$

όπου η ροή  $\varphi$  και το φορτίο  $q$  ορίζονται με τη συνήθη έννοια. Σε ειδικές περιπτώσεις, το στοιχείο μπορεί να μοντελοποιήσει μια μη γραμμική αντίσταση, πυκνωτή ή επαγωγέα.

### 3.2.3. Τριπολικά μη γραμμικά στοιχεία αντίστασης

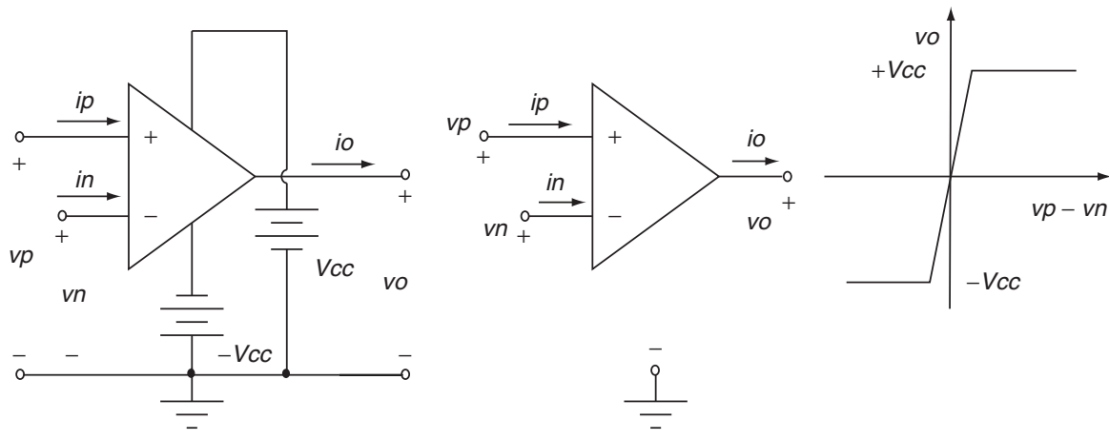
Ένα τριπολικό μη γραμμικό στοιχείο κυκλώματος που χρησιμοποιείται συνήθως στο σχεδιασμό ηλεκτρονικών κυκλωμάτων είναι ένα διπολικό τρανζίστορ σύνδεσης (Ebers and Moll, 1954; Getreu, 1976). Είναι ένα μη γραμμικό στοιχείο ελεγχόμενο από ρεύμα που χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό διαφόρων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Χρησιμοποιείται σε σχεδιασμούς κυκλωμάτων που βασίζονται στην γραμμική περιοχή του χαρακτηριστικού του στοιχείου (λογικές πύλες και αριθμητικά κυκλώματα) έως σχεδιασμούς που βασίζονται στη μη γραμμική συμπεριφορά του στοιχείου (σαγιονάρες, στατικά κελιά μνήμης και ενεργοποιητές Schmitt). Ένα σύμβολο κυκλώματος του διπολικού τρανζίστορ σύνδεσης και τα απλοποιημένα χαρακτηριστικά του φαίνονται στο **Σχήμα 3.2**. Η συμπεριφορά μεγάλου σήματος ενός διπολικού τρανζίστορ σύνδεσης συνήθως καθορίζεται γραφικά από ένα ζεύγος γραφημάτων με οικογένειες καμπυλών. Μια ποικιλία τρανζίστορ πεδίου-αποτελέσματος (το πιο δημοφιλές είναι ένας ημιαγωγός μετάλλου-οξειδίου) είναι μη γραμμικά στοιχεία ελεγχόμενα από τάση που χρησιμοποιούνται με παρόμοιο τρόπο σχεδίασης όπως τα διπολικά τρανζίστορ σύνδεσης (Massobrio and Antognetti, 1993).



**Σχήμα 3.2.** Τριπολικό Μη Γραμμικό Στοιχείο Αντίστασης: Σύμβολο και Χαρακτηριστικά Κυκλώματος ενός Διπολικού Τρανζίστορ Σύνδεσης n-p-n

### 3.2.4. Πολυτεματικά μη γραμμικά στοιχεία αντίστασης

Ένα συνήθως χρησιμοποιούμενο στοιχείο πολυτεματικού κυκλώματος είναι ένας λειτουργικός ενισχυτής (op-amp). Συνήθως κατασκευάζεται από γραμμικές αντιστάσεις και διπολικά τρανζίστορ σύνδεσης ή τρανζίστορ φαινομένου αρχείου. Η συμπεριφορά ενός λειτουργικού ενισχυτή συχνά απλοποιείται και το κύκλωμά του μοντελοποιείται ως γραμμικό πολυτεματικό στοιχείο. Στο περιορισμένο εύρος της τάσης εισόδου του op-amp, η σχέση μεταξύ των τάσεων εισόδου και εξόδου του op-amp θεωρείται γραμμική. Η μη γραμμικότητα των στοιχείων κυκλώματος του op-amp χρησιμοποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε η συμπεριφορά του op-amp να μπορεί να προσεγγιστεί με ένα απλό γραμμικό χαρακτηριστικό. Παρ' όλα αυτά, ακόμη και στην περίπτωση μιας τέτοιας απλοποίησης, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ο κορεσμός του χαρακτηριστικού του op-amp για μεγαλύτερες τιμές τάσεων εισόδου. Αυτό καθιστά τον op-amp μη γραμμικό στοιχείο. Το σύμβολο του κυκλώματος op-amp και το απλοποιημένο χαρακτηριστικό του φαίνονται στο **Σχήμα 3.3**.



**Σχήμα 3.3.** Πολυτεματικό Μη Γραμμικό Στοιχείο Κυκλώματος: Ένας Τελικός Ενισχυτής με Πέντε Ακροδέκτες, το Απλοποιημένο Σύμβολο Κυκλώματος και ένα Ιδανικό Χαρακτηριστικό

### 3.2.5. Ποιοτικές ιδιότητες των στοιχείων κυκλώματος

Δύο απλά αλλά θεμελιώδη χαρακτηριστικά των στοιχείων κυκλώματος είναι η παθητικότητα και η μηδενική απολαβή. Και τα δύο έχουν αποδειχθεί χρήσιμα στην εφαρμογή ορισμένων σύγχρονων μαθηματικών τεχνικών για την ανάλυση και επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων κυκλώματος. Ένα στοιχείο κυκλώματος είναι παθητικό εάν απορροφά ισχύ (δηλαδή, εάν σε οποιοδήποτε σημείο λειτουργίας, η

καθαρή ισχύς που παρέχεται στο στοιχείο είναι μη αρνητική). Μια μη γραμμική αντίσταση είναι παθητική εάν για οποιοδήποτε ζεύγος  $(v, i)$  τάσης και ρεύματος, η συστατική της σχέση ικανοποιεί:

$$vi = 0. \quad (3.10)$$

Διαφορετικά, το στοιχείο είναι ενεργό. Επομένως, μια μη γραμμική αντίσταση είναι παθητική εάν το χαρακτηριστικό της βρίσκεται στο πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. Ένα κύκλωμα είναι παθητικό εάν όλα τα στοιχεία του είναι παθητικά.

Ένα πολυτεματικό στοιχείο είναι ένα στοιχείο χωρίς κέρδος εάν κάθε συνδεδεμένο κύκλωμα που περιέχει αυτό το στοιχείο, θετικούς αντιστάτες και ανεξάρτητες πηγές διαθέτει την ιδιότητα χωρίς κέρδος. Ένα κύκλωμα διαθέτει την ιδιότητα χωρίς κέρδος εάν, για κάθε λύση στις εξισώσεις δικτύου dc, το μέγεθος της τάσης μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κόμβων δεν είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μεγεθών των τάσεων που εμφανίζονται στις ανεξάρτητες πηγές του δικτύου. Επιπλέον, το μέγεθος του ρεύματος που ρέει μέσω οποιουδήποτε στοιχείου του δικτύου δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μεγεθών των ρευμάτων που ρέουν μέσω των ανεξάρτητων πηγών του δικτύου. Για παράδειγμα, όταν εξετάζεται η συμπεριφορά μεγάλου σήματος dc ενός πολυτεματικού, τα τρανζίστορ διπολικής σύνδεσης, τα τρανζίστορ φαινομένου πεδίου, οι ανορθωτές ελεγχόμενοι από πυρίτιο και πολλές άλλες συσκευές τριών ακροδεκτών είναι παθητικά και ανέκιστα να παράγουν κέρδη τάσης ή ρεύματος (Gopinath και Mitra, 1971; Willson, 1975).

Σαφώς, το κριτήριο μηδενικού κέρδους είναι πιο περιοριστικό από το παθητικό. Δηλαδή, η παθητικότητα ακολουθεί πάντα ως συνέπεια του μηδενικού κέρδους, αν και είναι αρκετά πιθανό να αναφέρουμε παραδείγματα (π.χ., ο ιδανικός μετασχηματιστής) παθητικών στοιχείων ικανών να παρέχουν κέρδη τάσης ή ρεύματος.

### 3.3. Τάσεις και ρεύματα σε μη γραμμικά κυκλώματα

Οι τάσεις και τα ρεύματα κυκλώματος είναι λύσεις σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά των κυκλωμάτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα σημεία ισορροπίας κυκλώματος, τα οποία είναι λύσεις σε σχετικές μη γραμμικές εξισώσεις. Επομένως, τα σημεία ισορροπίας κυκλώματος σχετίζονται με τα σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος ενός κυκλώματος αντίστασης, αφού αφαιρεθούν όλοι οι πυκνωτές και οι επαγωγείς. Εάν οι τάσεις των πυκνωτών και τα ρεύματα των επαγωγέων επιλεγθούν ως μεταβλητές κατάστασης, υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των σημείων ισορροπίας του κυκλώματος και των σημείων λειτουργίας συνεχούς ρεύματος (Chua et al., 1987).

Η ανάλυση μη γραμμικών κυκλωμάτων είναι συχνά δύσκολη. Μόνο λίγα απλά κυκλώματα περιγράφονται επαρκώς από εξισώσεις που έχουν λύση κλειστής μορφής. Σε αντίθεση με τα γραμμικά κυκλώματα, τα οποία αποτελούνται μόνο από γραμμικά στοιχεία (εξαιρουμένων των ανεξάρτητων πηγών ρεύματος και τάσης), τα μη γραμμικά κυκλώματα μπορεί να έχουν πολλαπλές λύσεις ή να μην έχουν καθόλου λύση (Willson, 1994). Ένα απλό παράδειγμα είναι ένα κύκλωμα που αποτελείται από μια πηγή ρεύματος και μια εκθετική δίοδο, όπου η τιμή του συνεχούς ρεύματος που παρέχεται από την πηγή ρεύματος είναι πιο αρνητική από την ασυμπτωτική τιμή του ρεύματος που επιτρέπεται από το χαρακτηριστικό της δίοδου όταν η δίοδος είναι αντίστροφα πολωμένη. Είναι επίσης δυνατή η κατασκευή κυκλωμάτων που χρησιμοποιούν τα διπολικά τρανζίστορ σύνδεσης Ebers-Moll (Ebers and Moll, 1954)

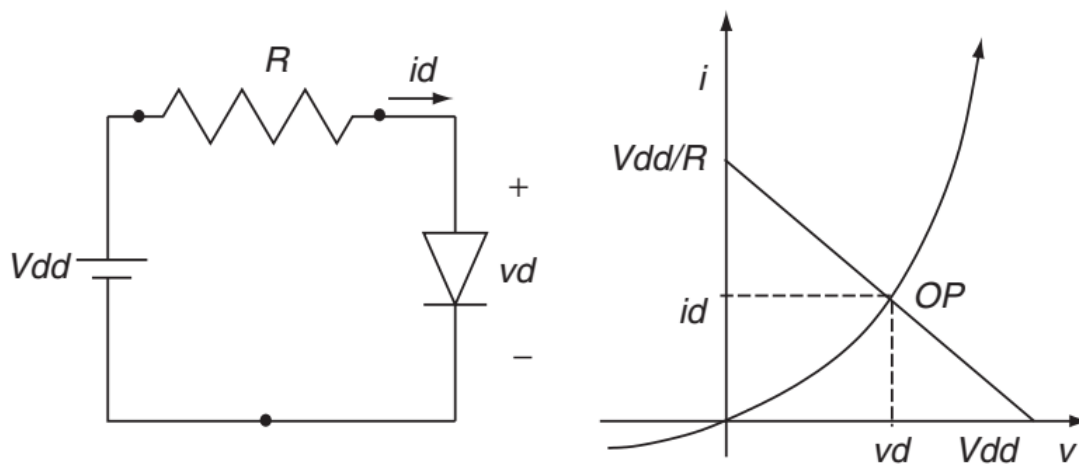
των οποίων οι εξισώσεις συνεχούς ρεύματος μπορεί να μην έχουν λύση (Willson, 1995).

### 3.3.1. Γραφική μέθοδος για την ανάλυση απλών μη γραμμικών κυκλωμάτων

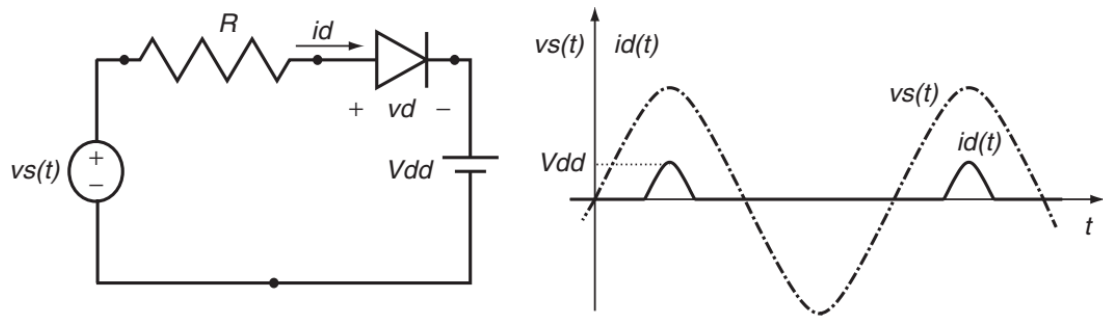
Οι τάσεις και τα ρεύματα σε κυκλώματα που περιέχουν μόνο λίγα μη γραμμικά στοιχεία κυκλώματος μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας γραφικές μεθόδους για την επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων που περιγράφουν τη συμπεριφορά του κυκλώματος. Ένα απλό μη γραμμικό κύκλωμα που αποτελείται από μια πηγή σταθερής τάσης, μια γραμμική αντίσταση και μια εκθετική διάοδο φαίνεται στο **Σχήμα 3.4**. Οι εξισώσεις κυκλώματος μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας μια γραφική μέθοδο. Η λύση είναι το σημείο λειτουργίας dc του κυκλώματος, που βρίσκεται ως η τομή των χαρακτηριστικών της διάόδου και της «γραμμής φορτίου». Η γραμμή φορτίου λαμβάνεται εφαρμόζοντας τον νόμο τάσης του Kirchhoff στον βρόχο του μοναδικού κυκλώματος.

Ένα άλλο απλό μη γραμμικό κύκλωμα, που φαίνεται στο **Σχήμα 3.5**, χρησιμοποιείται για την ανόρθωση ενός ημιτονοειδούς σήματος. Εάν η διάδος είναι ιδανική, το ημιτονοειδές σήμα διαδίδεται αμετάβλητο και το ρεύμα που ρέει μέσω της διάόδου είναι ένα ιδανικά ανορθωμένο ημιτονοειδές σήμα. Η απόκριση σταθερής κατάστασης του κυκλώματος μπορεί να βρεθεί γραφικά. Η διάδος είναι απενεργοποιημένη κάτω από την τιμή  $v_s(t) = V_{dd}$ . Για τιμές  $v_s(t) \geq V_{dd}$  η διάδος είναι ενεργοποιημένη. Επομένως:

$$\begin{aligned} i_d(t) &= 0 \text{ για } v_s(t) \leq V_{dd}, \\ i_d(t) &= \frac{v_s(t) - V_{dd}}{R} \text{ για } v_s(t) > V_{dd}. \end{aligned} \quad (3.11)$$



**Σχήμα 3.4.** Απλό μη γραμμικό κύκλωμα και μια γραφική προσέγγιση για την εύρεση του σημείου λειτουργίας DC (OP): Η γραμμή φορτίου του κυκλώματος λαμβάνεται εφαρμόζοντας τον νόμο τάσης του Kirchhoff. Η τομή της εκθετικής χαρακτηριστικής της διάόδου και της γραμμής φορτίου παρέχει το σημείο λειτουργίας DC του κυκλώματος.



**Σχήμα 3.5.** Ένα απλό κύκλωμα ανορθωτή με ιδανική δίοδο: Η λύση σταθερής κατάστασης μπορεί να βρεθεί γραφικά.

### 3.3.2. Εργαλεία με τη βοήθεια υπολογιστή για την ανάλυση μη γραμμικών κυκλωμάτων

Στις περισσότερες περιπτώσεις, χρησιμοποιείται ένα πρόγραμμα υπολογιστή για την αριθμητική επίλυση μη γραμμικών διαφορικών-αλγεβρικών εξισώσεων κυκλωμάτων. Το πιο δημοφιλές πρόγραμμα ανάλυσης κυκλωμάτων είναι το SPICE (Massobrio and Antognetti, 1993; Quarles et al., 1994; Vladimirescu, 1994). Ο αρχικός κώδικας SPICE έχει τροποποιηθεί και βελτιωθεί σε πολλά εργαλεία αυτοματισμού ηλεκτρονικού σχεδιασμού που χρησιμοποιούν προγράμματα υπολογιστών για την ανάλυση σύνθετων ολοκληρωμένων κυκλωμάτων που περιέχουν χιλιάδες μη γραμμικά στοιχεία, όπως διπολικά τρανζίστορ σύνδεσης και τρανζίστορ πεδίου-αποτελέσματος.

Ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα κατά το σχεδιασμό ενός κυκλώματος τρανζίστορ είναι η εύρεση του/των σημείου/ων λειτουργίας συνεχούς ρεύματος (δηλαδή, τάσεις και ρεύματα σε ένα κύκλωμα όταν όλες οι πηγές είναι πηγές συνεχούς ρεύματος). Το μαθηματικό πρόβλημα της εύρεσης των σημείων λειτουργίας συνεχούς ρεύματος ενός μη γραμμικού κυκλώματος περιγράφεται από ένα σύνολο μη γραμμικών εξισώσεων που κατασκευάζονται εφαρμόζοντας τους νόμους τάσης και ρεύματος του Kirchhoff και χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό των στοιχείων του κυκλώματος. Μια κοινή αριθμητική προσέγγιση για την εύρεση αυτών των σημείων λειτουργίας είναι η μέθοδος Newton-Raphson και οι παραλλαγές της. Αυτές οι μέθοδοι απαιτούν ένα καλό σημείο εκκίνησης και μερικές φορές αποτυγχάνουν. Αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα σύγκλισης dc. Την τελευταία δεκαετία, έχουν προταθεί αρκετές αριθμητικές τεχνικές που βασίζονται σε μεθόδους συνέχειας, ενσωμάτωσης παραμέτρων ή ομοτοπίας για την επιτυχή επίλυση προβλημάτων σύγκλισης που εμφανίζονται συχνά σε κυκλώματα που διαθέτουν περισσότερα από ένα σημεία λειτουργίας dc (Melville et al., 1993; Trajkovic, 1999; Wolf and Sanders, 1996; Yamamura and Horiuchi, 1990; Yamamura et al., 1999).

### 3.3.3. Ποιοτικές ιδιότητες λύσεων κυκλωμάτων

Πολλά θεμελιώδη ζητήματα προκύπτουν στην περίπτωση μη γραμμικών κυκλωμάτων σχετικά με την ύπαρξη, τη μοναδικότητα, τη συνέχεια, την οριοθέτηση και τη σταθερότητα μιας λύσης. Τα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση αυτών των ζητημάτων και την εξέταση ιδιοτήτων των μη γραμμικών κυκλωμάτων κυμαίνονται από καθαρά αριθμητικά έως γεωμετρικά (Smale, 1972). Εδώ εξετάζονται εν συντομία οι λύσεις των εξισώσεων ενός κυκλώματος. Περιγράφονται αρκετά θεμελιώδη αποτελέσματα σχετικά με τις ιδιότητές τους.

### **Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων**

Τα κυκλώματα με μη γραμμικά στοιχεία μπορεί να έχουν πολλαπλά διακριτά σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος (ισορροπίες). Αντίθετα, τα κυκλώματα που αποτελούνται από θετικές γραμμικές αντιστάσεις διαθέτουν είτε ένα σημείο λειτουργίας συνεχούς ρεύματος είτε, σε ειδικές περιπτώσεις, μια συνεχή οικογένεια σημείων λειτουργίας συνεχούς ρεύματος. Πολλά κυκλώματα αντίστασης που αποτελούνται από ανεξάρτητες πηγές τάσης και αντιστάσεις ελεγχόμενης τάσης, των οποίων τα χαρακτηριστικά σχέσης  $v-i$  είναι συνεχείς αυστηρά μονότονες συναρτήσεις αύξησης, έχουν το πολύ μία λύση (Duffin, 1947; Minty, 1960; Willson, 1975). Πολλά κυκλώματα τρανζίστορ διαθέτουν την ίδια ιδιότητα με βάση μόνο την τοπολογία τους. Άλλα κυκλώματα, όπως τα flip-flops και τα στοιχεία μνήμης, διαθέτουν δομές ανάδρασης (Nielsen και Willson, 1980). Αυτά τα κυκλώματα μπορεί να διαθέτουν πολλαπλά σημεία λειτουργίας με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων κυκλώματος και πόλωση των τρανζίστορ (Trajkovic και Willson, 1992). Για παράδειγμα, ένα κύκλωμα που περιέχει δύο διπολικά τρανζίστορ διαθέτει το πολύ τρία απομονωμένα σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος (Lee και Willson, 1983). Η εκτίμηση του αριθμού των σημείων λειτουργίας συνεχούς ρεύματος ή ακόμα και των άνω ορίων τους για ένα αυθαίρετο μη γραμμικό κύκλωμα εξακολουθεί να αποτελεί ανοιχτό πρόβλημα (Lagarias και Trajkovic, 1999).

### **Συνέχεια και οριοθέτηση λύσεων**

Ιδιότητες όπως η συνέχεια και η οριοθέτηση των λύσεων είναι συχνά επιθυμητές σε περιπτώσεις κυκλωμάτων με καλή συμπεριφορά. Θα ήταν αναμενόμενο ότι «μικρές» αλλαγές στην έξοδο του κυκλώματος θα προκύψουν από τη «μικρή» αλλαγή στην είσοδο του κυκλώματος και ότι η είσοδος του οριοθετημένου κυκλώματος οδηγεί στην έξοδο του οριοθετημένου κυκλώματος. Αυτές σχετίζονται στενά με τη σταθερότητα των λύσεων του κυκλώματος.

### **Σταθερότητα λύσεων**

Μόλις βρεθεί μια λύση για τα ρεύματα και τις τάσεις ενός κυκλώματος, προκύπτει ένα θεμελιώδες ερώτημα σχετικά με τη σταθερότητά της. Μια λύση μπορεί να είναι σταθερή ή ασταθής, και η σταθερότητα είναι τόσο τοπική όσο και καθολική έννοια (Hasler και Neirynck, 1986). Η τοπική σταθερότητα συνήθως αναφέρεται στη λύση που, με επαρκώς κοντινές αρχικές συνθήκες, παραμένει κοντά σε άλλες λύσεις καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Μια ισχυρότερη έννοια σταθερότητας είναι η ασυμπτωτική σταθερότητα: εάν οι αρχικές συνθήκες είναι κοντινές, οι λύσεις συγκλίνουν η μία προς την άλλη καθώς ο χρόνος πλησιάζει το άπειρο. Αν και δεν υπονοείται ρυθμός σύγκλισης στην περίπτωση της ασυμπτωτικής σταθερότητας, μια ισχυρότερη έννοια της εκθετικής σταθερότητας υπονοεί ότι ο ρυθμός σύγκλισης προς μια σταθερή λύση οριοθετείται από πάνω από μια εκθετική συνάρτηση. Σημειώστε ότι η εκθετική σύγκλιση σε μια λύση δεν συνεπάγεται απαραίτητα τη σταθερότητά της. Σε αντίθεση με τα μη γραμμικά κυκλώματα, η σταθερότητα (εάν υπάρχει) των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων κυκλωμάτων είναι πάντα εκθετική. Τα γραμμικά χρονικά αμετάβλητα κυκλώματα των οποίων οι φυσικές συχνότητες έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη έχουν σταθερές λύσεις. Μια καθολική ασυμπτωτική (πλήρης) σταθερότητα υπονοεί ότι ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες, οι λύσεις συγκλίνουν η μία προς την άλλη. Επομένως, ένα πλήρως σταθερό κύκλωμα έχει ακριβώς μία λύση.

Μπορεί να γίνει μια θεμελιώδης παρατήρηση ότι υπάρχουν σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος (dc) των κυκλωμάτων τρανζίστορ που είναι ασταθή:

εάν το κύκλωμα είναι πολωμένο σε ένα τέτοιο σημείο λειτουργίας και εάν το κύκλωμα εμπλουτιστεί με οποιαδήποτε διαμόρφωση πυκνωτών παράλληλης ροής θετικής τιμής ή/και επαγωγέων σε σειρά, το σημείο ισορροπίας του προκύπτοντος δυναμικού κυκλώματος θα είναι πάντα ασταθές (Green and Willson, 1992, 1994). Ένα απλό παράδειγμα είναι το κύκλωμα κοινού μανδάλου που, για κατάλληλες τιμές παραμέτρων, διαθέτει τρία σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος: δύο σταθερά και ένα ασταθές.

### 3.4. Ανοιχτά προβλήματα

Στον τομέα της ανάλυσης των κυκλωμάτων αντίστασης, ενδιαφέροντα και ακόμη άλυτα ζητήματα είναι: Διαθέτει ένα δεδομένο κύκλωμα τρανζίστορ ακριβώς ένα ή περισσότερα από ένα σημεία λειτουργίας συνεχούς ρεύματος; Πόσα σημεία λειτουργίας μπορεί να διαθέτει; Ποιες απλές τεχνικές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να διακρίνουμε μεταξύ αυτών των κυκλωμάτων που έχουν ένα μοναδικό σημείο λειτουργίας και εκείνων που είναι ικανά να διαθέτουν περισσότερα από ένα; Τι μπορούμε να πούμε για τη σταθερότητα ενός σημείου λειτουργίας; Πώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν προσομοιωτές κυκλωμάτων για να βρεθούν όλες οι λύσεις ενός δεδομένου κυκλώματος; Αυτά και άλλα ζητήματα αποτέλεσαν και εξακολουθούν να αποτελούν κεντρικό σημείο έρευνας στον τομέα των μη γραμμικών κυκλωμάτων. Οι παρατιθέμενες αναφορές παρέχουν πιο λεπτομερείς συζητήσεις για τα πολλά θέματα που εξετάζονται σε αυτήν την στοιχειώδη ανασκόπηση των μη γραμμικών κυκλωμάτων.

## Κεφάλαιο 4 Μηχανικές ταλαντώσεις

### 4.1. Γενικές παρατηρήσεις

Γενικά, ταλαντώσεις εμφανίζονται όταν ένα φυσικό σύστημα, που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, διαταράσσεται από δυνάμεις που τείνουν να το απομακρύνουν από τη θέση ισορροπίας. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετηθεί η ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή και με τριβή, καθώς και την εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή και με τριβή. Σύμφωνα με το νόμο του Hooke αυτή η δύναμη  $F_S$ , που καλείται *δύναμη επαναφοράς*, είναι ανάλογη της επιμήκυνσης  $y$ , δηλαδή:

$$F_S = -ky\mathbf{j}, \quad (4.1)$$

όπου  $k$  είναι η σταθερά του ελατηρίου. Γενικά, η δύναμη τριβής  $F_R$  είναι ανάλογη της ταχύτητας και θα ισχύει:

$$F_R = -c \frac{dy}{dt} \mathbf{j}, \quad (4.2)$$

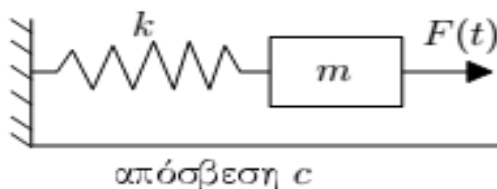
όπου  $c$  είναι ο συντελεστής τριβής. Εάν  $F(t)$  είναι μία εξωτερική δύναμη, τότε σύμφωνα με το Δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα λαμβάνεται:

$$m \frac{d^2(y\mathbf{j})}{dt^2} = F_{ολ} = [F(t) + F_R + F_S]\mathbf{j}. \quad (4.3)$$

Εάν αντικατασταθούν οι μαθηματικές εκφράσεις των δυνάμεων  $F_S$  και  $F_R$  με βάση τις σχέσεις (3.1) και (3.2) αντίστοιχα, τότε λαμβάνεται:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F(t). \quad (4.4)$$

Η εξίσωση (4.4) αποτελεί μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση

#### 4.2. Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση χωρίς τριβή

Πρόκειται για την κίνηση που εκτελεί ένα σώμα μάζας  $m$  συνδεδεμένο με ένα ελατήριο, όταν η τριβή είναι μηδέν και δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση (4.4) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0, \quad (4.5)$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad (4.6)$$

όπου  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$  είναι η *κυκλική ιδιοσυχνότητα*. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (4.6) είναι:

$$y(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t), \quad (4.7)$$

και

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = \omega [c_1 \cos(\omega t) - c_2 \sin(\omega t)], \quad (4.8)$$

όπου  $v = v(t)$  είναι η ταχύτητα του σώματος και  $c_1$  και  $c_2$  είναι δύο αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, οι οποίες θα υπολογιστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες. Καταλήγουμε:

$$y(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + y_0^2} \sin(\omega t + \varphi). \quad (4.9)$$

Το πλάτος  $A$  αυτής της ελεύθερης αρμονικής ταλάντωσης είναι:  $A = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + y_0^2}$ .

#### 4.3. Ελεύθερη αρμονική ταλάντωση με τριβή

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση (4.4) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = 0, \quad (4.10)$$

η οποία γράφεται στην ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0, \quad (4.11)$$

όπου  $b = \frac{c}{2m} > 0$  και  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Υπάρχουν τρεις διακριτές περιπτώσεις και θα παρουσιαστούν ακολούθως.

(α) **Ισχυρή απόσβεση:**  $b > \omega$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει πως:  $\Delta > 0$ . Επομένως, οι πραγματικές ρίζες  $r_1$  και  $r_2$  είναι:

$$r_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \quad (4.12)$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad (4.13)$$

και

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = r_1 c_1 e^{r_1 t} + r_2 c_2 e^{r_2 t}, \quad (4.14)$$

όπου  $v = v(t)$  είναι η ταχύτητα του σώματος και  $c_1$  και  $c_2$  είναι δύο αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, οι οποίες θα υπολογιστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες. Επομένως, καταλήγουμε πως η γενική λύση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$y(t) = \frac{1}{(r_1 - r_2)} [(v_0 - y_0 r_2) e^{r_1 t} + (y_0 r_1 - v_0) e^{r_2 t}]. \quad (4.15)$$

(β) **Κρίσιμη απόσβεση:**  $b = \omega$ . Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-bt}, \quad (4.16)$$

και:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = (c_2 - bc_1 - bc_2 t) e^{-bt}, \quad (4.26)$$

όπου  $v = v(t)$  είναι η ταχύτητα του σώματος και  $c_1$  και  $c_2$  είναι δύο αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, οι οποίες θα υπολογιστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες. Επομένως, έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$$y(t) = [y_0 + (v_0 + by_0)t] e^{-bt}, \quad (4.17)$$

που έχει τα ίδια φυσικά χαρακτηριστικά και ανάλογο γράφημα με την περίπτωση της ισχυρής απόσβεσης. Επισημαίνεται πως ούτε εδώ έχουμε ταλάντωση.

(γ) **Ασθενής απόσβεση:**  $b < \omega$ . Η γενική λύση είναι:

$$y(t) = e^{-bt} [c_1 \cos(\gamma t) + c_2 \sin(\gamma t)], \quad (4.18)$$

και

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = e^{-bt}[(\gamma c_2 - bc_1) \cos(\gamma t) - (bc_2 + \gamma c_1) \sin(\gamma t)], \quad (4.19)$$

όπου  $v = v(t)$  είναι η ταχύτητα του σώματος και  $c_1$  και  $c_2$  είναι δύο αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, οι οποίες θα υπολογιστούν με βάση τις αρχικές συνθήκες.

#### 4.4. Εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση

Θεωρούμε την περίπτωση που στο σώμα, εκτός των δυνάμεων επαναφοράς του ελατηρίου και της τριβής, εξασκείται μια χρονικά μεταβαλλόμενη περιοδική εξωτερική δύναμη της μορφής:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4.20)$$

Η εξίσωση κίνησης του σώματος είναι:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos(\omega_0 t). \quad (4.21)$$

Συνεπώς, η ειδική λύση είναι:

$$y_\mu(t) = \frac{F_0}{(k - \omega_0^2 m)^2 + \omega_0^2 c^2} [\omega_0 c \sin(\omega_0 t) + (k - \omega_0^2 m) \cos(\omega_0 t)]. \quad (4.22)$$

Θέτοντας  $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega_0 c}{k - \omega_0^2 m}\right)$ , η (4.22) γράφεται στη μορφή:

$$y_\mu(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega_0^2 m)^2 + \omega_0^2 c^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (4.23)$$

Εάν θεωρήσουμε την περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης ( $b < \omega$ ), η γενική λύση είναι:

$$y(t) = \frac{y_0 \sqrt{\gamma^2 + b^2}}{\gamma} e^{-bt} \cos(\gamma t - \theta) + \frac{F_0}{\sqrt{(k - \omega_0^2 m)^2 + \omega_0^2 c^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (4.24)$$

## Κεφάλαιο 5

### Η δεύτερη μέθοδος του Liapunov

#### 5.1. Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή, θα εφαρμόσουμε την μέθοδο Liapunov σε ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα μη-γραμμικών συστημάτων στο επίπεδο, που προέρχεται από την δυναμική πληθυσμών. Το σύστημα λέγεται Lotka-Volterra και περιγράφει την αλληλεπίδραση δύο ειδών, όπου το ένα είδος χρησιμοποιεί το άλλο

είδος ως τροφή. Η παραγωγή αυτού του συστήματος οφείλεται στον βιοφυσικό Alfred J. Lotka και στον μαθηματικό Vito Volterra. Το κίνητρο των δύο επιστημόνων για την παραγωγή και μελέτη του συστήματος ήταν ανεξάρτητο. Για τον μεν Volterra προήλθε από τα δεδομένα που είχε συγκεντρώσει ο φίλος του και θαλάσσιος βιολόγος Umberto d' Ancona σχετικά με τις αυξομειώσεις πληθυσμών ψαριών κατά την περίοδο 1914-1918. Από την άλλη μεριά, ο Lotka είχε κατασκευάσει το σύστημα από την χημική κινητική και ειδικότερα την μελέτη των λεγόμενων αυτοκαταλυτικών αντιδράσεων-ενδεικτικό της ευρύτητας του πεδίου εφαρμογών. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την απόδειξη της ύπαρξης περιοδικής λύσης.

Το συγκεκριμένο σύστημα ανταγωνισμού, είναι ένα μοντέλο κυνηγού-θηράματος και θα περιοριστούμε στην αλληλεπίδραση δύο ειδών. Στη φύση βέβαια, η κατάσταση είναι ιδιαίτερα σύνθετη, με πολλά είδη να εμπλέκονται και να αλληλεπιδρούν με πολύπλοκο τρόπο. Ωστόσο μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα ακόμα και από σχετικά απλά μοντέλα.

Η δεύτερη μέθοδος του Liapunov ή άμεση μέθοδος, αναφέρεται ως άμεση επειδή δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε τη λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Μας δίνει αποτελέσματα για την ευστάθεια ή αστάθεια ενός κρίσιμου σημείου από την κατασκευή μιας κατάλληλης βοηθητικής συνάρτησης. Η τεχνική αυτή είναι αρκετά ισχυρή και μας εξασφαλίζει μια πιο γενική μορφή πληροφοριών, όπως για παράδειγμα μια εκτίμηση της έκτασης του πεδίου έλξης ενός κρίσιμου σημείου. Ακόμη η δεύτερη μέθοδος του Liapunov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη συστημάτων εξισώσεων τα οποία δεν είναι σχεδόν γραμμικά. Ωστόσο, δεν θα εξετάσουμε τέτοιου είδους προβλήματα.

Βασικά, η δεύτερη μέθοδος του Liapunov είναι μία γενίκευση δύο φυσικών αρχών για διατηρητικά συστήματα, δηλαδή: μία θέση ισορροπίας είναι ευσταθής αν η δυναμική ενέργεια είναι ένα τοπικό ελάχιστο, διαφορετικά είναι ασταθής, και η ολική ενέργεια είναι σταθερή κατά τη διάρκεια κάθε είδους κίνησης. Για να διευκρινίσουμε αυτές τις έννοιες θα θεωρήσουμε το παρακάτω αυτόνομο σύστημα.

## 5.2. Η δεύτερη μέθοδος του Liapunov

Θεωρούμε το αυτόνομο σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, y), \\ \dot{y} &= G(x, y),\end{aligned}\tag{5.1}$$

με σημείο ισορροπίας  $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$ , όπου  $F(x, y), G(x, y)$  είναι  $C^1$  συναρτήσεις ορισμένες σε ένα χωρίο  $\Omega$ . Επειδή η μέθοδος Liapunov βασίζεται στην χρήση κατάλληλων συναρτήσεων  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , υπενθυμίζουμε τον ορισμό μίας θετικά ορισμένης συνάρτησης  $V$ .

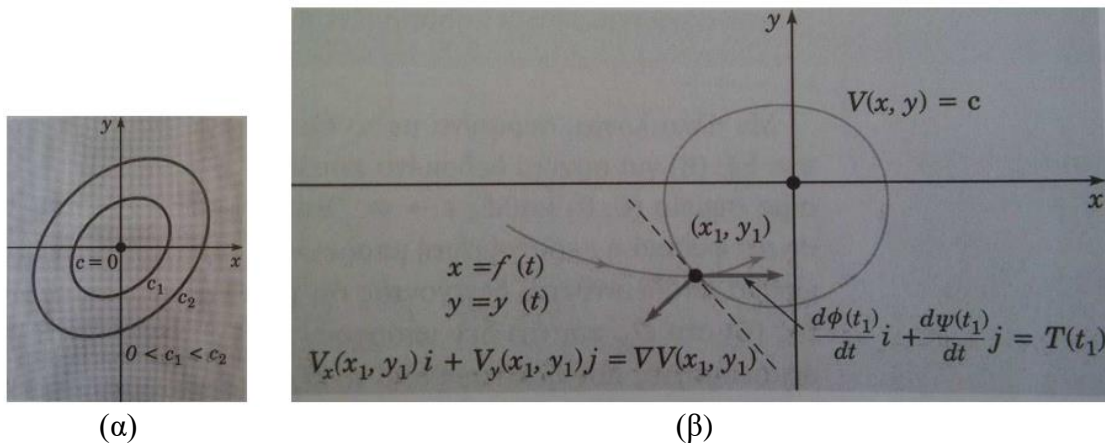
**Ορισμός:** Έστω  $(x^*, y^*)$  σημείο ισορροπίας του συστήματος (1.1). Μία θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V$ , κλάσης  $C^1$ , ορισμένη σε ανοικτή περιοχή  $U$  του  $(x^*, y^*)$  λέγεται συνάρτηση Liapunov αν ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις:

- είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στην ανοικτή περιοχή  $U$ .
- $V(x, y) > 0$  για κάθε  $x, y \in U$  και  $V(x^*, y^*) = 0$ .
- Ισχύει ότι  $\dot{V}(x, y) \leq 0$ .

**Θεώρημα 5.2.1** (Θεώρημα Ευστάθειας Liapunov). Έστω ότι το  $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$  είναι σημείο ισορροπίας του αυτόνομου συστήματος (1.1) και η  $V$  είναι μια

συνάρτηση Liapunov, δηλαδή ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω υποθέσεις του ορισμού, σε περιοχή  $U$  του  $(x^*, y^*)$ . Τότε το  $(x^*, y^*)$  είναι ευσταθές. Εάν η  $V$  είναι θετικά ορισμένη στο  $U$  και η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ορισμένη τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για την γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος Liapunov εργαζόμαστε ως εξής. Θεωρούμε ότι  $\dot{V}(x, y) \leq 0$ . Έστω  $c \geq 0$  μία σταθερά και ας θεωρήσουμε την καμπύλη στο επίπεδο  $xy$ , που δίνεται από τη σχέση  $V(x, y) = c$ . Για  $c = 0$ , η καμπύλη ανάγεται στο σημείο  $x = 0, y = 0$ . Υποθέτουμε ότι αν  $0 < c_1 < c_2$ , τότε η καμπύλη  $V(x, y) = c_1$  περιέχει την αρχή των αξόνων και βρίσκεται εντός της καμπύλης  $V(x, y) = c_2$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.1α**.



**Σχήμα 5.1.** Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Liapunov για το θεώρημα ευστάθειας.

Θα δείξουμε ότι μία τροχιά που ξεκινά από το εσωτερικό μίας κλειστής καμπύλης  $V(x, y) = c$  δεν μπορεί να εξέλθει. Έτσι, δοθέντος ενός κύκλου ακτίνας  $\epsilon$  με κέντρο την αρχή, αν πάρουμε ένα  $c$  αρκετά μικρό, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι κάθε τροχιά που ξεκινά από το εσωτερικό της κλειστής μας καμπύλης  $V(x, y) = c$  παραμένει μέσα στον κύκλο ακτίνας  $\epsilon$  και μάλιστα παραμένει εντός της κλειστής καμπύλης  $V(x, y) = c$ . Άρα η τροχιά των αξόνων είναι ένα ευσταθές κρίσιμο σημείο. Για να δειχθεί αυτό, υπενθυμίζουμε από τη διανυσματική ανάλυση ότι το διάνυσμα:

$$\nabla V(x, y) = V_x(x, y)i + V_y(x, y)j, \quad (5.2)$$

γνωστό και ως κλίση του  $V$ , είναι κάθετο στην καμπύλη  $V(x, y) = c$  με φορά κατά την διεύθυνση αύξησης του  $V$ . Σε αυτή την περίπτωση, το  $V$  αυξάνεται από την αρχή των αξόνων, έτσι το  $\nabla V$  έχει φορά αυτή της απομάκρυνσης από την αρχή, όπως φαίνεται από το σχήμα (5.1). Στη συνέχεια θεωρούμε μία τροχιά  $x = \phi(t), y = \psi(t)$  του συστήματος (5.1) και υπενθυμίζουμε ότι το διάνυσμα  $T(t) = \dot{\phi}(t)i + \dot{\psi}(t)j$  είναι εφαπτόμενο στην τροχιά σε κάθε σημείο, όπως βλέπουμε και στο σχήμα. Έστω ότι  $x_1 = \phi(t_1), y_1 = \psi(t_1)$  ένα σημείο τομής της τροχιάς με μία κλειστή καμπύλη  $V(x, y) = c$ . Σε αυτό το σημείο  $\dot{\phi}(t_1) = F(x_1, y_1), \dot{\psi}(t_1) = G(x_1, y_1)$ . Έτσι από την:

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y),$$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, y_1) &= V_x(x_1, y_1)\dot{\phi}(t_1) + V_y(x_1, y_1)\dot{\psi}(t_1) \\
&= [V_x(x_1, y_1)i + V_y(x_1, y_1)j][\dot{\phi}(t_1)i + \dot{\psi}(t_1)j] \\
&= \nabla V(x_1, y_1)T(t_1).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Άρα  $\dot{V}(x_1, y_1)$  είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος  $= \nabla V(x_1, y_1)$  επί του διανύσματος  $T(t_1)$ . Αφού  $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$ , έπεται ότι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ  $= \nabla V(x_1, y_1)$  και  $T(t_1)$  είναι επίσης μικρότερο ή ίσο του μηδενός, άρα αυτή η γωνία θα είναι αμβλεία. Έτσι η διεύθυνση της κίνησης στην τροχιά θα είναι προς τα μέσα ως προς τη  $V(x, y) = c$ , ή στην χειρότερη περίπτωση, εφαπτόμενη σε αυτή την καμπύλη. Οι τροχιές οι οποίες ξεκινούν από το εσωτερικό μίας κλειστής καμπύλης  $V(x_1, y_1) = c$ , όσο μικρό και αν είναι το  $c$ , δεν μπορούν να διαφύγουν, οπότε η αρχή είναι ένα ευσταθές σημείο. Αν  $\dot{V}(x_1, y_1) < 0$ , τότε οι τροχιές οι οποίες διέρχονται από τα σημεία της καμπύλης, κατευθύνονται προς τα μέσα. Συνεπώς, μπορεί να δειχθεί ότι οι τροχιές οι οποίες ξεκινούν αρκετά κοντά στην αρχή των αξόνων πρέπει να προσεγγίζουν την αρχή, και επομένως ότι η αρχή είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο.

**Απόδειξη:** Θα δείξουμε ότι αν η συνάρτηση  $V$  ικανοποιεί τις τρεις υποθέσεις, που αναφέρθηκαν προηγουμένως, τότε το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}^* = (x^*, y^*)$  είναι ευσταθές. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε αν  $\|\bar{x}_0 - \bar{x}^*\| < \delta$ , τότε  $\|\bar{x}(t) - \bar{x}^*\| < \epsilon$  για κάθε  $t \geq 0$ . Επειδή η  $U$  είναι ανοικτή περιοχή, θεωρώ τον δίσκο  $B_\epsilon(\bar{x}^*) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2: \|\bar{x} - \bar{x}^*\| < \epsilon\} \in U$ . Καθώς η  $V(x, y)$  είναι συνεχής στην περιοχή  $U$  και το  $\partial B_\epsilon(\bar{x}^*)$  είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, υπάρχει  $K = \max V(x, y)$  με  $\bar{x} \in B_\epsilon(\bar{x}^*)$ . Ισχύει ότι  $K > 0$ , αφού η  $V(x, y)$  είναι θετική για κάθε  $(x, y) \in U \setminus \{\bar{x}^*\}$ . Επιλέγουμε  $\delta < \epsilon$  και θεωρούμε  $B_\delta(\bar{x}^*) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2: \|\bar{x} - \bar{x}^*\| < \delta\}$  για τα οποία ισχύει  $V(x, y) < K$  αν  $\bar{x} = (x, y) \in B_\delta(\bar{x}^*)$ . Έστω  $\bar{x}_0 = (x_0, y_0) \in B_\delta(\bar{x}^*)$ , δηλαδή  $V(x(0), y(0)) < K$ . Επειδή η  $V(x(t), y(t))$  είναι φθίνουσα συνάρτηση θα ισχύει  $V(x(t), y(t)) < K$ . Από την τρίτη υπόθεση του ορισμού συνεπάγεται ότι η  $\bar{x}(t)$  δεν θα μπορέσει να τμήσει ποτέ το σύνορο  $\partial B_\epsilon(\bar{x}^*)$ , και συνεπώς θα παραμείνει εντός του  $B_\epsilon(\bar{x}^*)$  για  $t \geq 0$ . Για να δείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \bar{x}^*. \tag{5.4}$$

Για να αποδείξουμε την τελευταία σχέση θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει και με αυτό τον τρόπο θα καταλήξουμε σε άτοπο. Υποθέτουμε δηλαδή ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) \neq \bar{x}^*. \tag{5.5}$$

Αφού λοιπόν ισχύει η (5.5), υπάρχει αρκετά μικρό  $\delta_0 > 0$  και πεπερασμένος χρόνος  $T^* > 0$  έτσι ώστε η τροχιά  $\bar{x}(t)$  να βρίσκεται παγιδευμένη εντός του δακτυλίου  $D = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2: \delta_0 \leq \|\bar{x}(t) - \bar{x}^*\| < \epsilon\}$  για κάθε  $t > T^*$ . Δηλαδή για κάθε  $t \geq T^*$  η τροχιά  $\bar{x}(t)$  βρίσκεται εντός του δακτυλίου (5.5). Μάλιστα αν θεωρήσουμε τον κλειστόδακτύλιο, συμπεριλαμβανομένου των συνόρων  $\partial B_\delta(\bar{x}^*)$  και  $\partial B_\epsilon(\bar{x}^*)$ , καθώς ο κλειστός πλέον δακτύλιος είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο και η συνάρτηση  $\dot{V}(x(t), y(t))$  είναι συνεχής και θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Θεωρούμε τώρα  $\gamma = \max \dot{V}(x(t), y(t)) < 0$ . Παρατηρούμε ότι το  $\gamma$  υπάρχει λόγω συνέχειας της

$\dot{V}(x(t), y(t))$  και λόγω συμπίεσης του συνόλου  $B_\epsilon(\bar{x}^*)$ , όπως επίσης και από το γεγονός ότι  $\gamma < 0$  διότι η  $\dot{V}(x(t), y(t)) < 0$  στο σύνολο  $B_\epsilon(\bar{x}^*)$ . Με το ίδιο επιχείρημα θεωρούμε  $\gamma^* = \max \dot{V}(\bar{x})$ , το οποίο συνεπάγεται ότι:

$$\dot{V}(x(t), y(t)) \leq \gamma, \quad (5.6)$$

το οποίο ισχύει για κάθε  $\bar{x} = (x(t), y(t))$ . Ολοκληρώνοντας την (5.6) ως προς  $t$ , στο διάστημα  $[T^*, t]$  θα έχουμε:

$$\int_{T^*}^t \dot{V}(x(s), y(s)) ds \leq \int_{T^*}^t \gamma ds,$$

ή:

$$V(x(t), y(t)) - V(x(T^*), y(T^*)) \leq \gamma(t - T^*), \quad (5.7)$$

με  $\gamma < 0$ . Παίρνοντας τώρα το όριο καθώς  $t \rightarrow \infty$  καταλήγουμε σε άτοπο διότι το δεξιό μέλος τείνει στο  $-\infty$ , ενώ το αριστερό μέλος είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το  $-V(x(t), y(t))$ .

**Θεώρημα 5.2.2** (Θεώρημα αστάθειας Liapunov). Υποθέτουμε ότι το  $\bar{x}^*$  είναι σημείο ισορροπίας του αυτόνομου συστήματος (1.1). Θεωρούμε επίσης την τροχιά  $B_\kappa(\bar{x}^*) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2: \|\bar{x} - \bar{x}^*\| \leq \kappa\}$  και υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί τις παρακάτω υποθέσεις:

- Η  $V$  είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, δηλαδή  $C^1$ .
- $V(\bar{x}^*) = 0$ .
- Για κάθε ανοικτή γειτονιά  $B_\delta(\bar{x}^*) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2: \|\bar{x} - \bar{x}^*\| < \delta\}$  υπάρχει σημείο  $\bar{x}_\delta$  τέτοιο ώστε  $V(\bar{x}_\delta) > 0$ .
- $\dot{V} > 0$  για κάθε  $\bar{x} = (x, y) \in B_\kappa(\bar{x}^*)$ . Τότε το συμπέρασμα είναι ότι το  $\bar{x}^*$  είναι ασταθές.

Μία γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος αστάθειας του Liapunov έπεται κατά κάποιον τρόπο με παρόμοια επιχειρήματα με αυτά του θεωρήματος ευστάθειας. Έστω ότι η  $\dot{V}(x, y) > 0$  και ακόμα ότι δοθέντος οποιουδήποτε κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, υπάρχει ένα εσωτερικό σημείο  $(x_1, y_1)$  στο οποίο  $V(x_1, y_1) > 0$ . Θεωρούμε μία τροχιά η οποία ξεκινά από το  $(x_1, y_1)$ . Κατά μήκος αυτής της τροχιάς έπεται από την εξίσωση (1.2) ότι το  $V$  πρέπει να αυξάνει, εφόσον  $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$ . Επιπλέον, αφού  $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$ , η τροχιά είναι αδύνατο να προσεγγίζει την αρχή, επειδή  $V(0,0) = 0$ . Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι η αρχή δεν μπορεί να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο.

**Απόδειξη:** Για την απόδειξη του θεωρήματος αστάθειας του Liapunov θα υποθέσω το αντίθετο και θα καταλήξω σε άτοπο. Για να το καταφέρουμε αυτό, θα πρέπει να υποθέσουμε ότι κάθε τροχιά που ξεκινά εντός της  $B_\kappa(\bar{x}^*)$  παραμένει εντός αυτής. Από την τρίτη υπόθεση που κάναμε προηγουμένως υπάρχει  $\bar{x}_\delta \in B_\delta(\bar{x}^*)$ , τέτοιο ώστε  $V(\bar{x}_\delta) > 0$  για κάθε  $\delta > 0$ , όπου  $\delta < \kappa$ .

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1) με αρχική συνθήκη  $(x(t_0), y(t_0)) = \bar{x}(t_0) = \bar{x}_\delta$ . Έστω ότι  $\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)$  είναι η λύση του παραπάνω προβλήματος, δηλαδή ότι  $\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)$  λύση του προβλήματος και τη χρονική στιγμή  $t_0$ ,

$\bar{x}(t_0, \bar{x}_\delta) = \bar{x}_\delta$ . Από την τέταρτη υπόθεση γνωρίζουμε ότι  $\dot{V}(\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)) \geq m > 0$  για κάθε  $t \geq t_0$ . Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο διάστημα  $[t_0, t]$  προκύπτει:

$$V(\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)) - V(\bar{x}_\delta) \geq m(t - t_0). \quad (5.8)$$

Επειδή η  $V$  είναι συνεχής συνάρτηση με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους στον δίσκο  $B_\kappa(\bar{x}^*)$  η ποσότητα  $V(\bar{x}(t, \bar{x}_\delta))$  είναι φραγμένη για κάθε  $t \geq t_0$ , αφού έχουμε υποθέσει ότι  $\eta\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)$  παραμένει εντός της  $B_\kappa(\bar{x}^*)$  για κάθε  $t \geq t_0$ . Όμως από την (1.8), επειδή  $V(\bar{x}_\delta) > 0$  συνεπάγεται ότι  $V(\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)) \geq m(t - t_0)$  και καθώς  $t \rightarrow +\infty$  η  $V(\bar{x}(t, \bar{x}_\delta)) \rightarrow +\infty$  το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι  $V(\bar{x}(t, \bar{x}_\delta))$  είναι φραγμένη ποσότητα. Άρα συνεπάγεται ότι το σημείο ισορροπίας  $\bar{x}^*$  είναι ασταθές.

**Παράδειγμα 1:** Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = -2x^2y - y^3 \end{cases}$ . Να εξετάσετε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $\bar{x}^* = (0,0)$  με τη μέθοδο Liapunov.

**Λύση:** Δοκιμάζουμε τη συνάρτηση  $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ , με  $\alpha, \beta > 0$ . Πρέπει να εξετάσουμε αν ικανοποιούνται οι τρεις υποθέσεις του θεωρήματος ευστάθειας. Η  $V(x, y)$  είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, δηλαδή ικανοποιείται η πρώτη υπόθεση. Επίσης είναι θετικά ορισμένη και  $V(0,0) = 0$ , δηλαδή ικανοποιείται και η δεύτερη υπόθεση. Εξετάζουμε τώρα αν ικανοποιείται και η τρίτη υπόθεση.

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)\dot{x} + V_y(x, y)\dot{y} = 2\alpha x(-x^3 + xy^2) + 2\beta y(-2x^2y - y^3) = -2\alpha x^4 + 2\alpha x^2y^2 - 4\beta x^2y^2 - 2\beta y^4.$$

Αν επιλέξουμε  $2\alpha = 4\beta$ , τότε  $\alpha = 2\beta$ . Οπότε  $\dot{V}(x, y) = -2\alpha x^4 - 2\beta y^4 < 0$ . Άρα για κάθε  $(x, y) \in U$  ικανοποιείται και η τρίτη υπόθεση, άρα το  $\bar{x}^*$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

**Παράδειγμα 2:** Δίνεται η διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης  $\ddot{x} - \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ , γνωστή και ως εξίσωση Van Der Pol.

(α) Να γραφεί ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

(β) Να δειχθεί ότι το  $\bar{x}^* = (0,0)$  είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος.

(γ) Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος με τη μέθοδο Liapunov.

**Λύση:** (α) Θέτουμε  $\dot{x} = y$ . Η εξίσωση μας γράφεται:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \epsilon(x^2 - 1)y - x \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \epsilon x^2 y - \epsilon y - x \end{cases}$$

(β) Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι το  $\bar{x}^* = (0,0)$  είναι σημείο ισορροπίας.

(γ) Δοκιμάζουμε τη συνάρτηση  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος Liapunov. Η συνάρτηση είναι συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Ακόμα είναι θετικά ορισμένη και  $V(0,0) = 0$ ,

δηλαδή ικανοποιούνται η πρώτη και η δεύτερη υπόθεση. Εξετάζουμε την παράγωγο για να δούμε αν ικανοποιείται και η τρίτη υπόθεση.

$$\dot{V}(x, y) = 2\epsilon y^2(x^2 - 1) < 0 \text{ όταν } x^2 < 1.$$

Άρα  $\dot{V}(x, y) < 0$  για  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  και  $-1 < x < 1$ . Συμπεραίνουμε ότι οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται στο ανοικτό σύνολο  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in \mathbb{R} \text{ και } -1 < x < 1\}$ . Άρα το  $\bar{x}^* = (0, 0)$  είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισοροπίας.

**Ορισμός:** Έστω ότι η  $V$  είναι ορισμένη σε κάποιο πεδίο ορισμού  $U$  με σημείο ισοροπίας  $(x^*, y^*)$ . Τότε τη  $V$  θα την ονομάζουμε **θετικά ορισμένη** στο  $U$  αν  $V(x^*, y^*) = 0$  και  $V(x, y) > 0$  για όλα τα άλλα σημεία του  $U$ . Ομοίως, η  $V$  καλείται **αρνητικά ορισμένη** στο  $U$  αν  $V(x^*, y^*) = 0$  και  $V(x, y) < 0$  για όλα τα άλλα σημεία του  $U$ . Αν οι ανισότητες  $>$  και  $<$  αντικατασταθούν από τις  $\geq$  και  $\leq$ , τότε η  $V$  θα ονομάζεται **θετικά ημιορισμένη** και **αρνητικά ημιορισμένη** αντίστοιχα.

## Κεφάλαιο 6

### Εξισώσεις Lotka-Volterra

#### 6.1. Εισαγωγή

Συχνό φαινόμενο στη φύση είναι ένα είδος να χρησιμοποιεί κάποιο άλλο ως τροφή. Για παράδειγμα, θεωρήστε αλεπούδες και λαγούς σε ένα πυκνό δάσος. Οι αλεπούδες κυνηγούν τους λαγούς, ενώ οι λαγοί επιβιώνουν από τη βλάστηση του δάσους. Άλλα παραδείγματα είναι ο άνθρωπος ως κυνηγός και το ψάρι στη θάλασσα ως θήραμα, ή η πασχαλίτσα ως κυνηγός και η μελίγκρα ως θήραμα. Η μελέτη τέτοιων δυναμικών αλληλεπιδράσεων είναι το θέμα αυτού του κεφαλαίου. Για απλότητα θα περιοριστούμε σε δύο είδη, αν και πρέπει να γίνει κατανοητό ότι στη φύση η κατάσταση είναι συχνά περίπλοκη, με πολλά είδη να εμπλέκονται και να αλληλεπιδρούν με πολύπλοκο τρόπο. Ωστόσο μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα ακόμα και από σχετικά απλά μοντέλα. Συνήθως το είδος που θεωρείται ως τροφή ονομάζεται θήραμα, ενώ το είδος που καταναλώνει ονομάζεται κυνηγός. Θα συμβολίζουμε με  $x$  τον πληθυσμό του θηράματος και με  $y$  τον πληθυσμό του κυνηγού στον χρόνο  $t$ . Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης θα πρέπει να κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

- Το θήραμα είναι η μοναδική τροφή για τον κυνηγό. Στην απουσία κυνηγού ο πληθυσμός του θηράματος αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του πληθυσμού που ήδη υπάρχει, δηλαδή  $\dot{x} = ax$ ,  $a > 0$ , όταν  $y = 0$ .
- Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει θήραμα, ο πληθυσμός του κυνηγού βαθμιαία εξαφανίζεται, δηλαδή  $\dot{y} = -cy$ ,  $c > 0$  όταν  $x = 0$ .
- Ο αριθμός των συναντήσεων μεταξύ κυνηγού και θηράματος είναι ανάλογος του γινομένου των αντίστοιχων πληθυσμών. Κάθε μία από αυτές τις συναντήσεις τείνει να αυξήσει τον πληθυσμό των κυνηγών και να εμποδίσει την αύξηση των θηραμάτων. Έτσι, ο ρυθμός αύξησης των κυνηγών μεγαλώνει

με έναν όρο της μορφής  $dxy$ , ενώ ο ρυθμός αύξησης του αριθμού των θηραμάτων με ένα όρο της μορφής  $-bxy$ , όπου  $b$  και  $d$  θετικές σταθερές.

## 6.2. Περιγραφή μαθηματικού μοντέλου

Ως επακόλουθο των υποθέσεων της προηγούμενης ενότητας είναι οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy = x(a - by) \\ \dot{y} = -cy + dxy = y(-c + dx) \end{cases} \quad (6.1)$$

οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις Lotka-Volterra και αφού ασχολούμαστε με πληθυσμούς θεωρούμε  $x, y \geq 0$ . Επίσης οι σταθερές  $a, b, c, d$  είναι όλες θετικές με  $a$  και  $c$  να είναι ρυθμός αύξησης των θηραμάτων και ο ρυθμός μείωσης των κυνηγών, αντίστοιχα, και  $b, d$  τα μέτρα για την επίπτωση της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο ειδών. Οι εξισώσεις αυτές παρόλο που είναι αρκετά απλές, χαρακτηρίζουν μία ευρεία κατηγορία προβλημάτων. Ως συνήθως η πρώτη μας δουλειά είναι να εντοπίσουμε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος, τα οποία θα είναι ουσιαστικά οι λύσεις των αλγεβρικών εξισώσεων:

$$x(a - by) = 0, \quad y(-c + dx) = 0,$$

δηλαδή τα σημεία  $(0,0)$  και  $(x,y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Πρώτα εξετάζουμε τις λύσεις του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος κοντά σε κάθε σημείο ισορροπίας. Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{bmatrix} x. \quad (6.2)$$

Οπότε στο σημείο  $(0,0)$ , δηλαδή στην αρχή των αξόνων, το γραμμικοποιημένο σύστημα γίνεται:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix} x. \quad (6.3)$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$r_1 = a, \quad \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_2 = -c, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα η γενική λύση είναι ένα σαγματικό σημείο, οπότε είναι ασταθές. Η κίνηση προς το σαγματικό σημείο γίνεται κατά μήκος τη ευθείας  $x = 0$ , ενώ όλες οι άλλες τροχιές απομακρύνονται από την περιοχή του κρίσιμου σημείου. Ακολουθώντας, θεωρούμε το κρίσιμο σημείο  $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  του οποίου το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{bmatrix} x. \quad (6.4)$$

Οι ιδιοτιμές του γραμμικοποιημένου συστήματος (6.4) είναι καθαρά φανταστικές, δηλαδή  $r = \pm i\sqrt{ac}$ , και έτσι δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα με τη μέθοδο γραμμικοποίησης όπως κάναμε για το  $(0,0)$ .

### 6.3. Καμπύλες μηδενικής κλίσης

Ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία για την ανάλυση μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων για συστήματα στο επίπεδο είναι οι καμπύλες μηδενικής κλίσης (nullclines). Για ένα σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Το  $x_j$ -σύνολο μηδενικής κλίσης είναι το σύνολο των σημείων όπου το  $\dot{x}_j$  μηδενίζεται, οπότε τα  $x_j$ -σύνολα μηδενικής κλίσης είναι τα σύνολα των σημείων που καθορίζονται από την  $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ . Τα  $x_j$ -σύνολα μηδενικής κλίσης συνήθως χωρίζουν τον  $\mathbb{R}^n$  σε μία συλλογή περιοχών στις οποίες οι  $x_j$  συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου έχουν θετική ή αρνητική κατεύθυνση. Ανκαθορίσουμε όλα τα σύνολα μηδενικής κλίσης, τότε αυτό μας επιτρέπει να αναλύσουμε τον  $\mathbb{R}^n$  σαν μια συλλογή ανοικτών συνόλων σε κάθε μία από τις οποίες το διανυσματικό πεδίο "δείχνει" σε μία συγκεκριμένη κατεύθυνση. Αυτό είναι πιο εύκολο να το κατανοήσουμε στην περίπτωση ενός συστήματος στο επίπεδο:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y).$$

Σε αυτή την περίπτωση τα σύνολα μηδενικής κλίσης είναι καμπύλες. Στις  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης, έχουμε  $\dot{x} = 0$ , οπότε το διανυσματικό πεδίο "δείχνει" προς τα πάνω ή προς τα κάτω (κάθετα) και μάλιστα οι  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης είναι τα μόνα σημεία στα οποία συμβαίνει αυτό. Συνεπώς οι  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης διαιρούν τον  $\mathbb{R}^2$  σε περιοχές όπου το διανυσματικό πεδίο "δείχνει" δεξιά, είτε αριστερά. Παρόμοια στις  $y$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης, το διανυσματικό πεδίο είναι οριζόντιο, έτσι ώστε να χωρίζουν τον  $\mathbb{R}^2$  σε περιοχές όπου το διανυσματικό πεδίο να "δείχνει" προς τα πάνω, είτε προς τα κάτω. Τα σημεία τομής των καμπυλών μηδενικής κλίσης μας δίνουν το σημείο ισορροπίας. Σε οποιαδήποτε περιοχή μεταξύ των καμπυλών, το διανυσματικό πεδίο δεν είναι κάθετο ούτε οριζόντιο, επομένως πρέπει να "δείχνει" σε μία από τις παρακάτω 4 διευθύνσεις: βορειοανατολικά, βορειοδυτικά, νοτιοανατολικά ή νοτιοδυτικά. (ή πάνω και δεξιά, πάνω και αριστερά, κάτω και αριστερά και κάτω και δεξιά). Αυτές τις περιοχές τις ονομάζουμε βασικές περιοχές. Συχνά ένα απλό σκίτσο των βασικών περιοχών μας επιτρέπει να κατανοήσουμε εντελώς το πορτραίτο φάσεων, τουλάχιστον από ποιοτικής άποψης.

**Παράδειγμα 1:** Για το σύστημα

$$\dot{x} = y - x^2, \quad \dot{y} = x - 2,$$

ορίζονται δύο καμπύλες μηδενικής κλίσης. Η  $x$ -καμπύλη μηδενικής κλίσης είναι η παραβολή  $y = x^2$  ή  $y - x^2 = 0$  και η  $y$ -καμπύλη μηδενικής κλίσης είναι η κάθετη γραμμή  $x = 2$  ή  $x - 2 = 0$ . Το σημείο τομής των δύο καμπυλών μηδενικής κλίσης, δηλαδή το σημείο  $(2, 4)$ , είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Μελετώντας τις καμπύλες μηδενικής κλίσης παίρνουμε πληροφορίες για την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου  $\vec{F} = (f(x, y), g(x, y))$ . Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης

διαιρούν τον  $\mathbb{R}^2$  σε τέσσερις βασικές περιοχές. Πρώτα διαλέγουμε ένα σημείο σε κάθε μία από αυτές τις περιοχές, και στη συνέχεια προσδιορίζουμε την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου σε αυτό το σημείο. Στην περίπτωση όπου  $y - x^2 > 0$  βρισκόμαστε πάνω από την παραβολή του σχήματος (2.1). Εκεί είναι  $\dot{x} > 0$ , άρα το διανυσματικό πεδίο, δείχνει στην κατεύθυνση αύξησης του  $x$ . Τώρα αν δούμε και την περιοχόπου  $x - 2 > 0$  ή  $x > 2$ , βρισκόμαστε στα δεξιά της  $x = 2$ . Σε αυτή την περιοχή  $\dot{y} > 0$ , άρα το διανυσματικό πεδίο δείχνει και προς την κατεύθυνση αύξησης του  $y$ . Επομένως, στην περιοχή  $y > x^2$  και  $x > 2$  το διανυσματικό πεδίο έχει την κατεύθυνση ↗.

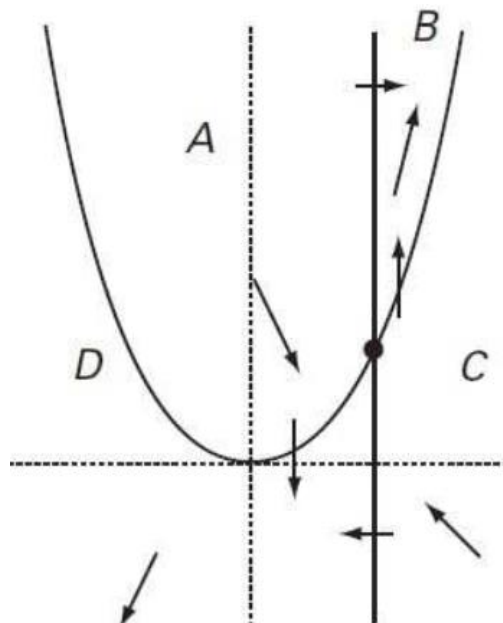
**Παρατήρηση:** Επειδή η κλίση των τροχιών δίνεται από την εξίσωση  $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$  και το διανυσματικό πεδίο είναι πάντα εφαπτόμενο στην τροχιά, θα ισχύει ότι:

- Το διανυσματικό πεδίο θα είναι παράλληλο στον  $x$ -άξονα, δηλαδή  $\frac{dy}{dx} = 0$  στα σημεία όπου  $g(x, y) = 0$  (καμπύλη  $y$ -μηδενικής κλίσης).
- Το διανυσματικό πεδίο θα είναι παράλληλο στον  $y$ -άξονα, δηλαδή  $\frac{dy}{dx} = \infty$  στα σημεία όπου  $f(x, y) = 0$  (καμπύλη  $x$ -μηδενικής κλίσης).

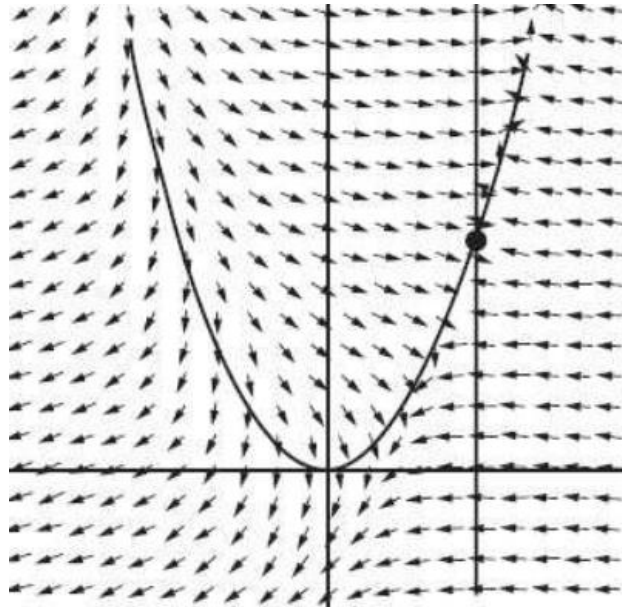
Χρησιμοποιώντας αυτές τις πληροφορίες μπορούμε να σχεδιάσουμε με λεπτομέρεια το διανυσματικό πεδίο, αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο για τις υπόλοιπες περιοχές. Από το πεδίο κατευθύνσεων και μόνο, φαίνεται ότι το σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό. Πράγματι, αφού το γραμμικοποιημένο σύστημα στο σημείο (2,4) είναι:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

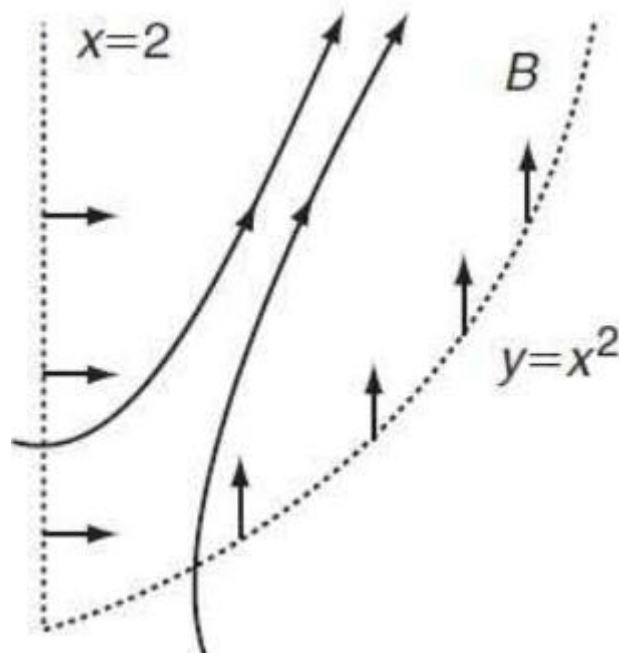
με ιδιοτιμές  $-2 \pm \sqrt{5}$ , μία από τις οποίες είναι θετική και η άλλη αρνητική.



**Σχήμα 6.1.** Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης.

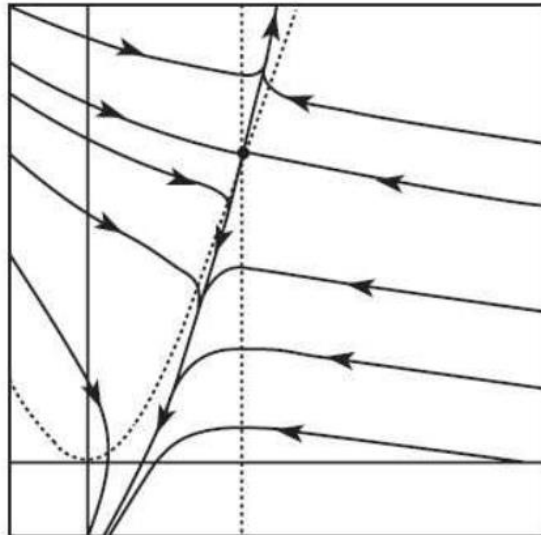


Σχήμα 6.2. Το διανυσματικό πεδίο.



Σχήμα 6.3. Οι λύσεις της βασικής περιοχής B και στην συνέχεια τείνουν στο άπειρο.

Το πιο σημαντικό είναι ότι μπορούμε να προβλέψουμε την προσεγγιστική συμπεριφορά των λύσεων παντού στο επίπεδο. Για παράδειγμα, για την περιοχή B που μελετήσαμε προηγουμένως, οποιαδήποτε λύση στην περιοχή αυτή πρέπει να παραμείνει στην περιοχή B καθώς το  $t$  τείνει στο  $\infty$ . Ομοίως οι λύσεις στην περιοχή D μένουν στην περιοχή αυτή και τείνουν στο  $\infty$  κατά τη φορά μείωσης του  $y$  (δηλαδή στη νοτιοδυτική κατεύθυνση). Λύσεις που αρχίζουν από τις περιοχές A και C θα πρέπει να διασχίσουν μία από τις καμπύλες μηδενικής κλίσης και να μουν στις περιοχές B και D (και επομένως γνωρίζουμε την τελική συμπεριφορά τους) ή αλλιώς να τείνουν προς το σημείο ισορροπίας. Ωστόσο υπάρχει μόνο μία καμπύλη τέτοιων λύσεων σε κάθε περιοχή, η ευσταθής (2,4). Έτσι καταλαβαίνουμε πλήρως το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα αυτό, τουλάχιστον από ποιοτική άποψη.

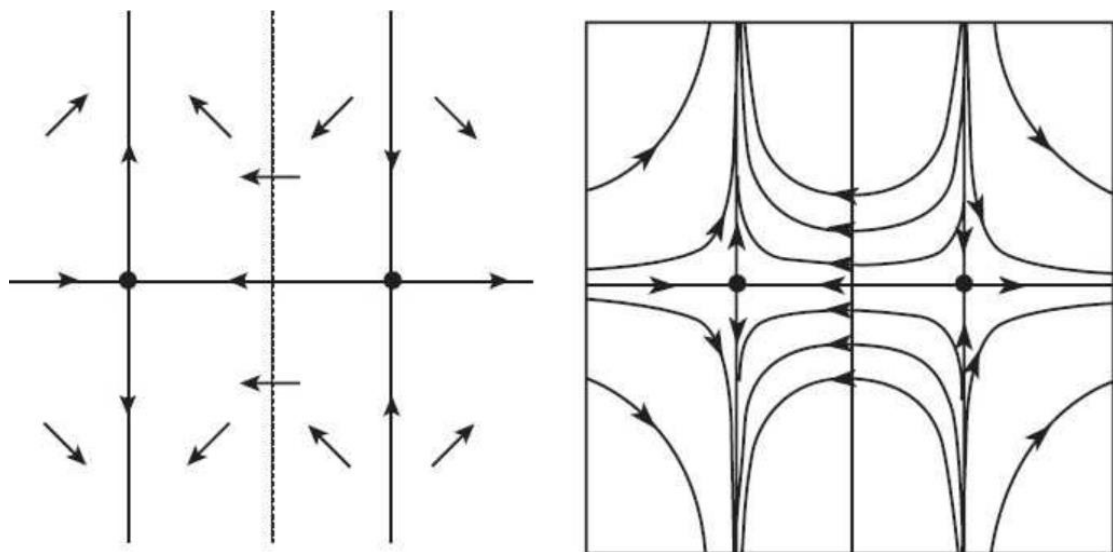


**Σχήμα 6.4.** Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης και το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα  $\dot{x} = y - x^2$ ,  $\dot{y} = x - 2$ .

**Παράδειγμα 2.** Θεωρούμε το σύστημα που εξαρτάται από την παράμετρο  $a$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 1, \\ \dot{y} &= -xy + a(x^2 - 1).\end{aligned}$$

Οι  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης δίνονται από την ευθεία  $x = \pm 1$ , ενώ οι  $y$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης είναι οι  $xy = a(x^2 - 1)$ . Τα σημεία ισορροπίας είναι τα  $(-1,0)$  και  $(1,0)$ . Εφόσον  $\dot{x} = 0$  για  $x = \pm 1$ , το διανυσματικό πεδίο θα είναι στην πραγματικότητα εφαπτόμενο στις καμπύλες μηδενικής κλίσης. Επιπλέον, έχουμε  $\dot{y} = -y$  στο  $x = 1$  και  $\dot{y} = y$  στο  $x = -1$ . Έτσι οι λύσεις τείνουν στο  $(1,0)$  κατά μήκος της κατακόρυφης γραμμής  $x = 1$  και απομακρύνονται από το  $(-1,0)$  κατά μήκος της  $x = -1$ . Αυτό συμβαίνει για όλες τις τιμές του  $a$ .



**Σχήμα 6.5.** Αριστερά: οι καμπύλες μηδενικής κλίσης. Δεξιά: Το πορτραίτο φάσεων για το σύστημα  $\dot{x} = x^2 - 1$  και  $\dot{y} = -xy + a(x^2 - 1)$ .

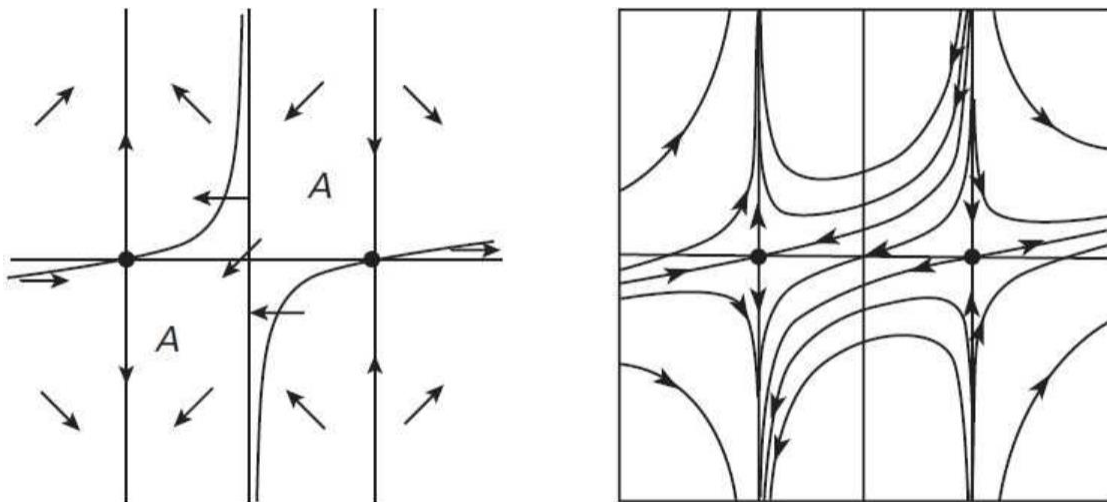
Τώρα ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου το  $a$  να είναι 0. Το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 1, \\ \dot{y} &= -xy,\end{aligned}$$

οπότε  $\dot{y} = 0$  κατά μήκος των αξόνων. Ειδικότερα, το διανυσματικό πεδίο είναι εφαπτόμενο προς τον  $x$ -άξονα και δίνεται από την εξίσωση  $\dot{x} = x^2 - 1$  σε αυτή τη γραμμή. Οπότε έχουμε  $\dot{x} > 0$  αν  $|x| > 1$  και  $\dot{x} < 0$  αν  $|x| < 1$ . Έτσι, σε κάθε σημείο ισορροπίας έχουμε μία ευθεία-γραμμή λύση, που τείνει προς το σημείο ισορροπίας και μία η οποία απομακρύνεται από αυτό. Έτσι φαίνεται ότι κάθε σημείο ισορροπίας είναι σαγματικό σημείο.

Υπάρχει μία δεύτερη  $y$ -καμπύλη μηδενικής κλίσης κατά μήκος του  $x = 0$ , αλλά το διανυσματικό πεδίο δεν είναι εφαπτόμενο σε αυτή την καμπύλη. Ο υπολογισμός της κατεύθυνσης του διανυσματικού πεδίου σε κάθε μία από τις περιοχές καθορίζεται από τις καμπύλες μηδενικής κλίσης όπως φαίνεται στο σχήμα, από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε αμέσως την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων. Να σημειώσουμε ότι αν  $a = 0$ , ένας κλάδος της ασταθούς καμπύλης που περνά από το  $(1,0)$ , ταυτίζεται με ένα κομμάτι (κλάδο) της ευσταθούς καμπύλης στο  $(-1,0)$ . Όλες οι λύσεις σε αυτή την καμπύλη κινούνται από το ένα σαγματικό σημείο στο άλλο. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται ετεροκλινείς λύσεις ή σαγματικές συνδέσεις. Στην πραγματικότητα, για τα επίπεδα συστήματα, οι ευσταθείς και οι ασταθείς καμπύλες πολύ σπάνια τέμνονται για να σχηματίσουν τέτοιες ετεροκλινείς “συνδέσεις”. Ωστόσο, όταν το κάνουν, μπορεί κανείς να περιμένει μία διακλάδωση.

Τώρα θεωρούμε την περίπτωση όπου  $a = 0$ . Οι  $x$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης παραμένουν ίδιες στο  $x = \pm 1$ . Αλλά οι  $y$ -καμπύλες μηδενικής κλίσης αλλάζουν δραστηκά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται από τη σχέση  $y = \frac{a(x^2-1)}{x}$ .



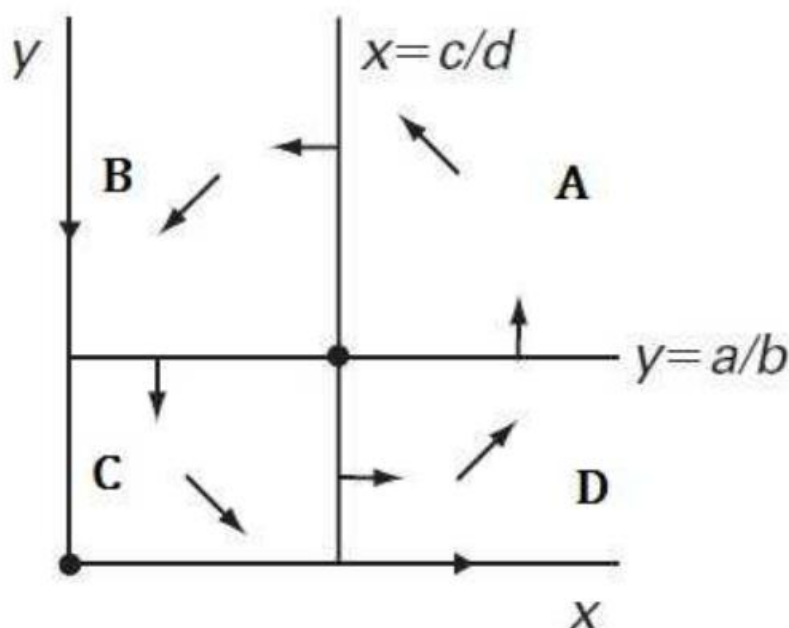
**Σχήμα 6.6.** Αριστερά: Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης Δεξιά: πορτραίτο φάσεων όταν  $a > 0$ .

Όταν  $a > 0$ , εξετάζουμε τη βασική περιοχή (που συμβολίζουμε με) A. Εδώ το διανυσματικό πεδίο έχει φορά προς τα κάτω και αριστερά. Ειδικότερα, το διανυσματικό πεδίο έχει φορά προς την κατεύθυνση κατά μήκος του  $x$ -άξονα μεταξύ του  $x = -1$  και  $x = 1$ . Αυτό χωρίζει την ετεροκλινή σύνδεση: Το δεξί τμήμα της ευσταθούς καμπύλης που σχετίζεται με το  $(-1,0)$ , πρέπει να έρχεται τώρα από το  $y = \infty$  στο πάνω μισό επίπεδο, ενώ το αριστερό τμήμα της ασταθούς καμπύλης που σχετίζεται με το  $(1,0)$  κατεβαίνει τώρα στο  $y = -\infty$  στο χαμηλότερο μισό επίπεδο.

Αυτό ανοίγει μία λεωφόρο για ορισμένες λύσεις ώστε να ταξιδέψουν από το  $y = +\infty$  στο  $y = -\infty$  μεταξύ δύο γραμμών  $x = +1$ . Ενώ όταν  $a = 0$  όλες οι λύσεις παραμένουν περιορισμένες για όλο το χρόνο είτε στο άνω είτε στο κάτω ημιεπίπεδο, ηετεροκλινής για  $a = 0$  ανοίγει το δρόμο για ορισμένες λύσεις να κάνουν αυτή τη μετάβαση. Παρόμοια είναι η περίπτωση όταν  $a < 0$ .

#### 6.4. Καμπύλες μηδενικής κλίσης για το σύστημα Lotka-Volterra

Για το σύστημα (6.1) οι καμπύλες μηδενικής κλίσης είναι ως εξής: Υπάρχουν δύο καμπύλες  $x$ -μηδενικής κλίσης οι οποίες είναι η  $x = 0$  ή η  $y = \frac{a}{b}$ . Και δύο καμπύλες  $y$ -μηδενικής κλίσης η  $y = 0$  ή η  $x = \frac{c}{d}$ . Σχεδιάζοντας τις καμπύλες μηδενικής κλίσης, όπως φαίνονται από το **Σχήμα 6.7** δημιουργούνται τέσσερις περιοχές. Για να βρούμε την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου στην περιοχή D θα χρειαστεί να βρούμε τα πρόσημα των  $\dot{x}$  και  $\dot{y}$  στην περιοχή αυτή.



**Σχήμα 6.7.** Οι καμπύλες μηδενικής κλίσης και το διανυσματικό πεδίο για το σύστημα Κυνηγός-Θήραμα.

Έχουμε ότι  $x > 0$  και βρισκόμαστε κάτω από την ευθεία  $y = \frac{a}{b}$  οπότε θα έχουμε ότι  $-\frac{a}{b} < 0$ , δηλαδή  $a - by > 0$ . Άρα  $\dot{x} = x(a - by) > 0$  στην περιοχή D, συνεπώς το διανυσματικό πεδίο θα δείχνει προς την κατεύθυνση αύξησης του  $x$ . Επιπλέον,  $y > 0$  και βρισκόμαστε στα δεξιά της ευθείας  $x = \frac{c}{d}$  οπότε θα έχουμε ότι  $x - \frac{c}{d} > 0$ , δηλαδή  $\dot{y} = y(-c + dx) > 0$ . Επομένως το διανυσματικό πεδίο θα δείχνει προς την μεριά αύξησης του  $y$ . Άρα στην περιοχή αυτή το διανυσματικό πεδίο έχει κατεύθυνση αυτή του **Σχήματος 6.7**. Ακριβώς πάνω στην ευθεία  $y = \frac{a}{b}$  έχουμε ότι  $\frac{dy}{dx} = \infty$  καθώς  $\dot{x} = 0$  με αποτέλεσμα το διανυσματικό πεδίο να είναι κάθετο στην ευθεία  $y = \frac{a}{b}$ . Και όπως δείξαμε παραπάνω  $\dot{y} > 0$ , άρα το διανυσματικό πεδίο είναι κατακόρυφο και με κατεύθυνση αυτή της αύξησης του  $y$  ακριβώς πάνω στην ευθεία  $y = \frac{a}{b}$ . Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να σχεδιάσουμε το διανυσματικό πεδίο και στις υπόλοιπες περιοχές του σχήματός μας.

## Κεφάλαιο 7

### Ανάλυση του συστήματος Lotka-Volterra

#### 7.1. Κατασκευή της συνάρτησης Liapunov

Όπως είδαμε και από τα προηγούμενα κεφάλαια το σύστημα (6.1) έχει ένα σημείο ισορροπίας το  $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ . Επίσης, μελετήσαμε με τη μέθοδο της καμπύλης μηδενικής κλίσης το διανυσματικό πεδίο και είδαμε ότι κινείται προς την αριστερόστροφη κατεύθυνση όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.7**. Δηλαδή, στροβιλίζεται γύρω από το σημείο ισορροπίας. Από αυτό όμως δεν μπορούμε να καθορίσουμε την ακριβή συμπεριφορά των λύσεων. Έχουμε απλά ορισμένες ενδείξεις ότι το σημείο ισορροπίας θα μπορούσε να περιτριγυρίζεται από κλειστές τροχιές είτε από σπείρες. Για να μπορέσουμε να το προσδιορίσουμε με ακρίβεια, θα πρέπει να αναλύσουμε την δομή των τροχιών γύρω από το σημείο ισορροπίας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Liapunov. Θα αναζητήσουμε δηλαδή μία συνάρτηση  $L$  που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ευστάθειας Liapunov. Αν ικανοποιούνται και οι τρεις υποθέσεις τότε το σημείο ισορροπίας θα είναι ευσταθές. Ξεκινώντας από την τρίτη υπόθεση, δηλαδή ότι  $\dot{L}(x, y) \leq 0$  γνωρίζουμε ότι:

$$\dot{L}(x, y) = L_x(x, y)\dot{x} + L_y(x, y)\dot{y}. \quad (7.1)$$

Αναζητούμε πρώτα από όλα αν υπάρχει συνάρτηση για το σύστημα (6.1) τέτοια ώστε:

$$\dot{L}(x, y) = 0. \quad (7.2)$$

Χρησιμοποιώντας το τέχνασμα των χωριζομένων μεταβλητών, θα αναζητήσουμε την συνάρτηση  $L(x, y)$  στην πιο απλή της μορφή, δηλαδή

$$L(x, y) = F(x) + G(y). \quad (7.3)$$

Η (7.3) μας διευκολύνει διότι παρατηρούμε ότι η παραγώγιση ως προς  $x$  και ως προς  $y$  είναι η εξής:

$$L_x(x, y) = \dot{F}(x), \quad L_y(x, y) = \dot{G}(y).$$

Καθώς ζητάμε να βρούμε την συνάρτηση  $L(x, y)$  από τη σχέση (7.2), τότε λόγω της (7.1), υπολογίζουμε ότι:

$$\dot{L}(x, y) = L_x(x, y)\dot{x} + L_y(x, y)\dot{y} = \dot{L}(x, y) = \frac{dF}{dx}\dot{x} + \frac{dG}{dy}\dot{y} = 0. \quad (7.4)$$

Αντικαθιστώντας τα  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  από το (6.1) σύστημα, η (7.4) γίνεται:

$$\frac{dF}{dx}x(a - by) + \frac{dG}{dy}(-c + dx) = 0,$$

που γράφεται και ως:

$$\frac{dF}{dx} \frac{x}{(dx-c)} = \frac{dG}{dy} \frac{y}{(by-a)}. \quad (7.5)$$

Για να ισχύει η σχέση (7.5), θα πρέπει υποχρεωτικά, αφού το δεξί μέλος είναι συνάρτηση μόνο του  $y$  και το αριστερό μέλος μόνο του  $x$ :

$$\frac{dF}{dx} \frac{x}{(dx-c)} = \frac{dG}{dy} \frac{y}{(by-a)} = c.$$

Δηλαδή έχουμε να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{dF}{dx} = d - \frac{c}{x}, \quad \frac{dG}{dy} = b - \frac{a}{y}, \quad (7.6)$$

οι οποίες έχουν λύση:

$$F(x) = dx - c \log x \quad \text{και} \quad G(y) = by - a \log y.$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση (7.2) είναι η:

$$L(x, y) = dx - c \log x + by - a \log y. \quad (7.7)$$

Η συνάρτηση (7.7), είναι η συνάρτηση που ικανοποιεί την (7.2) σχέση, αλλά βρέθηκε να είναι με φυσικό τρόπο η συνάρτηση που έχει αυτή την ιδιότητα. Θα μπορούσε κάποιος ενδεχομένως να δοκιμάσει μία συνάρτηση  $L(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ , αλλά αυτή δεν θα προέκυπτε με φυσικό τρόπο από το σύστημα.

Είναι πολύ σημαντικό που ικανοποιείται η εξίσωση (7.2), αλλά αυτό δεν είναι αρκετό για να χρησιμοποιήσουμε την  $L(x, y)$  σαν συνάρτηση Liapunov. Θα πρέπει επιπλέον, αφού γνωρίζουμε ότι είναι σίγουρα συνεχής συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, να προσδιορίσουμε μία γειτονιά του σημείου ισορροπίας, στο οποίο η  $L(x, y)$  να είναι θετικά ορισμένη.

Εξετάζοντας τα κριτήρια για την ύπαρξη τοπικού ελαχίστου για την συνάρτηση  $L(x, y)$  εύκολα φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι το σημείο ισορροπίας  $(x, y) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  είναι τοπικόελάχιστο.

**Παρατήρηση:** Αν  $(x, y)$  είναι σημείο στο οποίο η  $L(x, y)$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, θα πρέπει:

- (i)  $L_x(x, y) = 0, L_y(x, y) = 0.$
- (ii)  $L_{xx}(x, y) > 0.$
- (iii)  $L_{xx}(x, y)L_{yy}(x, y) - [L_{xy}(x, y)]^2 > 0.$

**Απόδειξη παρατήρησης:** Εύκολα παρατηρούμε ότι τα παραπάνω κριτήρια ισχύουν καθώς:

$$(i) L_x(x, y) = d - \frac{c}{x} = 0, L_y(x, y) = b - \frac{a}{y} = 0.$$

$$\text{Άρα } L_x(x, y) = L_y(x, y) = 0.$$

$$(ii) L_{xx}(x, y) = \frac{c}{x^2} = \frac{d^2}{c} > 0.$$

$$(iii) L_{xx}(x, y)L_{yy}(x, y) - [L_{xy}(x, y)]^2 = \frac{d^2}{c} \frac{b^2}{a} - 0 = \frac{d^2 b^2}{ac} > 0.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι (ελέγχοντας τα παραπάνω κριτήρια) το σημείο  $\bar{x}^* = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  είναι τοπικό ελάχιστο για την συνάρτηση  $L(x, y)$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μία γειτονιά  $B_\delta(\bar{x}^*) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2: \|\bar{x} - \bar{x}^*\| < \delta\}$ , για την οποία ισχύει ότι:

$$L(x, y) - L(x^*, y^*) > 0.$$

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\hat{L}(x, y) = L(x, y) - L(x^*, y^*). \quad (7.8)$$

Η  $\hat{L}(x, y)$ , ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος ευστάθειας κατά Liapunov ως εξής:

- (i)  $\hat{L}(x^*, y^*) = L(x^*, y^*) - L(x^*, y^*) = 0$  και  $\hat{L}(x, y) > 0$  για κάθε  $\bar{x} = (x, y) \in B_\delta(\bar{x}^*)$ .
- (ii) Είναι συνεχής συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στην γειτονιά  $B_\delta(\bar{x}^*)$ .
- (iii)  $\dot{\hat{L}}(x, y) = \dot{L}(x, y) - \dot{L}(x^*, y^*) = 0$ , αφού  $\dot{L}(x, y) = 0$ .

Επομένως αποδείξαμε ότι το  $\bar{x}^* = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$  είναι ευσταθές. Θα ολοκληρώσουμε, αποδεικνύοντας ότι οι τροχιές είναι κλειστές. Η δομή του διανυσματικού πεδίου, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 6.7**, μας υποδεικνύει ότι είτε έχουμε μία κλειστή τροχιά είτε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, οπότε θα έχουμε σπειροειδή τροχιά, όπως φαίνεται και από το **Σχήμα 7.1**.

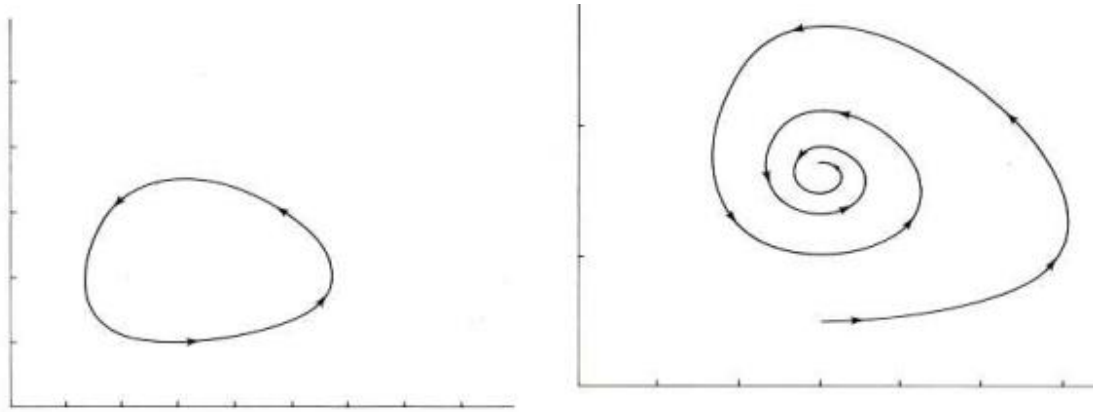
Θα αποκλείσουμε το δεύτερο σενάριο ως εξής: Αν συμβαίνει το συγκεκριμένο σενάριο τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία χρονικών στιγμών  $t_n$ , με  $t_n \rightarrow \infty$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ , όπως επίσης και μία ακολουθία σημείων  $(x(t_n), y(t_n))$  στις σπειροειδείς τροχιές με την ακόλουθη ιδιότητα. Τα  $(x(t_n), y(t_n))$  είναι σημεία της τροχιάς αλλά και της ευθείας  $x = \frac{c}{d}$  και:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x(t_n), y(t_n)) = \bar{x}^* = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right), \quad (7.9)$$

και  $\hat{L}(x(t_n), y(t_n)) > 0$ , αν περιοριστούμε στα σημεία  $(x(t_n), y(t_n)) \in B_\delta(\bar{x}^*)$ . Όμως η συνάρτηση  $\hat{L}(x, y)$  είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα αφού ισχύει η (3.9) θα πρέπει να ισχύει και για τις εικόνες ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{L}(x(t_n), y(t_n)) = \hat{L}(\bar{x}^*) = 0.$$

Αυτό όμως για να συμβαίνει, αφού  $\hat{L}(x(t_n), y(t_n)) > 0$  και  $\hat{L}(\bar{x}^*) = 0$ , θα πρέπει η  $\hat{L}(x(t_n), y(t_n))$  να είναι φθίνουσα. Άτοπο διότι είδαμε ότι κατά μήκος των τροχιών, άρα και σε κάθε σημείο της τροχιάς έχουμε ότι  $\dot{L}(x, y)$ .



**Σχήμα 7.1.** Αριστερά έχουμε το σενάριο το διανυσματικό πεδίο να είναι κλειστή τροχιά. Δεξιά, έχουμε το σενάριο το διανυσματικό πεδίο να σχηματίζει σπειροειδή τροχιά.

## Κεφάλαιο 8

### Αριθμητικές μελέτες

#### 8.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων αποτελεί κεντρικό αντικείμενο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Διαφορικές εξισώσεις εμφανίζονται πολύ συχνά σε μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν προβλήματα των φυσικών, τεχνολογικών, βιοϊατρικών, αλλά και οικονομικών επιστημών.

Σε διάφορα φυσικά φαινόμενα εμφανίζονται μεγέθη, των οποίων ο ρυθμός μεταβολής (παράγωγος) μπορεί να επηρεάζει τη μεταβολή κάποιου άλλου μεγέθους. Η προσέγγιση των παραπάνω προβλημάτων και φαινομένων μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη χρήση των Διαφορικών Εξισώσεων, έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο το οποίο να τα περιγράφει και στη συνέχεια να μπορούν αυτά να μελετηθούν με τη βοήθεια των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης. Ο βασικός λόγος που οι διαφορικές εξισώσεις έχουν καταστεί το πιο δημοφιλές εργαλείο μοντελοποίησης είναι ότι σε πάρα πολλά προβλήματα περιγράφεται πιο εύκολα η μεταβολή κάποιου μεγέθους σε σχέση με τη στιγμιαία τιμή του, παρά ο καθορισμός των χαρακτηριστικών της συνολικής εξέλιξης του μεγέθους αυτού (Butcher, 2008).

Δυστυχώς, λίγες διαφορικές εξισώσεις λύνονται αναλυτικά ή και αν ακόμη λύνονται έχουν τόσο πολύπλοκη λύση που στην πράξη δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Για αυτόν τον λόγο, ήδη από τις αρχές του 20ου αιώνα, έγιναν προσπάθειες να βρεθούν αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης των διαφορικών εξισώσεων. Η ανάπτυξη της αριθμητικής ανάλυσης είναι συνυφασμένη με τους υπολογιστές. Ένας από τους σκοπούς της Αριθμητικής Επίλυσης των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων είναι η μετατροπή προβλημάτων των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων σε ισοδύναμα προβλήματα επεξεργάσιμα από υπολογιστή, έτσι ώστε να μπορούν να επιλυθούν αριθμητικά για την απόκτηση αριθμητικών τιμών. Για τη μετατροπή των διαφόρων προβλημάτων των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων σε επεξεργάσιμα από

υπολογιστή προβλήματα, η Αριθμητική Επίλυση αναπτύσσει κατάλληλες μεθόδους. Μια μέθοδος χαρακτηρίζεται ως κατάλληλη, κυρίως, όταν μας παρέχει με ακρίβεια και με βεβαιότητα το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα με το μικρότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος σε συνδυασμό με τον μικρότερο δυνατό απαιτούμενο χώρο αποθήκευσης ενδιάμεσων αποτελεσμάτων (μνήμης).

**Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις** ονομάζονται οι διαφορικές εξισώσεις των οποίων η άγνωστη συνάρτηση είναι μιας μεταβλητής, δηλαδή είναι της **γενικής ή πεπλεγμένης μορφής**:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

όπου η  $F$  είναι συνάρτηση  $(n + 2)$  μεταβλητών,  $n \in \mathbb{N}$  με  $F: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  και  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  η άγνωστη (προσδιοριστέα) συνάρτηση. Εάν ισχύουν οι αναγκαίες προϋποθέσεις του *Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων* για την επίλυση της εξίσωσης (1) ως προς  $y^{(n)}(x)$ , τότε προκύπτει η **κανονική ή λυμένη μορφή** των συνήθως διαφορικών εξισώσεων:

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in I. \quad (2)$$

**Τάξη** μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης, που εμφανίζεται στην εξίσωση.

**Γραμμική** ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1), όταν η συνάρτηση  $F$  είναι γραμμική ως προς τις  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Η γενική μορφή μιας γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης, τάξης  $n$ , είναι:

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x)y(x) = f(x). \quad (3)$$

**Ομογενής** ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (3), αν ισχύει  $f(x) = 0$ , άλλως ονομάζεται **μη ομογενής**. Οι συναρτήσεις  $a_i(x)$ , με  $i \in \mathbb{N}^*$  και  $i \leq n$ , αποτελούν τους συντελεστές της συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που δεν είναι γραμμικές έχουμε την ακόλουθη ταξινόμηση.

**Σχεδόν γραμμική (semilinear)** ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) όταν είναι μη γραμμική ως προς το  $y(x)$  και γραμμική ως προς  $y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ .

**Ημιγραμμική (quasilinear)** ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) όταν είναι μη γραμμική ως προς  $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$  και γραμμική ως προς την παράγωγο ανώτερης τάξης  $y^{(n)}(x)$ .

**Πλήρως μη Γραμμική (Fullynonlinear)** ονομάζεται η συνήθης διαφορική εξίσωση (1) όταν είναι μη γραμμική τουλάχιστον ως προς  $y^{(n)}(x)$ .

Μια ειδική κατηγορία μη γραμμικών εξισώσεων αποτελούν οι **πολυωνομικές εξισώσεις**, στις οποίες η συνάρτηση  $F$  είναι πολυώνυμο των  $y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)$ . Για παράδειγμα, η εξίσωση:

$$3(y'')^3 + 4(y')^4 + y^3 = 0,$$

είναι μια πολυωνυμική συνήθης διαφορική εξίσωση. **Βαθμός** μιας πολυωνυμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η παράγωγος ανώτερης τάξης.

Συχνά στις εφαρμογές παρουσιάζονται διαφορικές εξισώσεις με περισσότερες της μιας άγνωστες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Στις περιπτώσεις αυτές, ο αριθμός των εξισώσεων συμπίπτει συνήθως με αυτόν των αγνώστων συναρτήσεων. Μια τέτοια συλλογή εξισώσεων συνιστά ένα σύστημα (συνήθων) διαφορικών εξισώσεων. Όλες οι έννοιες, όπως *τάξη*, *βαθμός*, *γραμμικότητα* κ.λπ., που ορίστηκαν προηγουμένως για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, μεταφέρονται κατά προφανή τρόπο στα συστήματα διαφορικών εξισώσεων (Hairer, Nørset and Wanner, 1993).

**Μερική διαφορική εξίσωση** είναι η διαφορική εξίσωση που περικλείει μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης, η οποία βέβαια θα είναι δύο ή περισσότερων μεταβλητών. Η μελέτη των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων διαφέρει σε αρκετά σημεία από των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων. Είναι περισσότερο πολύπλοκη και εν γένει συναντάμε πληθώρα δυσκολιών, ακόμα και στην περίπτωση των απλών γραμμικών προβλημάτων. Βέβαια, επιβάλλεται να σημειωθεί πως σχεδόν όλες οι βασικές ιδέες και μέθοδοι τόσο της ποιοτικής, όσο και της ποσοτικής θεωρίας των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων έχουν μεταφερθεί και χρησιμοποιηθεί στην ανάπτυξη της θεωρίας των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Οι έννοιες της *τάξης*, *γραμμικότητας*, *βαθμού*, *ομογένειας* κ.ά. που ορίστηκαν στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις δίδονται ανάλογα και για τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.

## 8.2. Γενική μέθοδος απλού βήματος

Είναι ήδη γνωστό ότι μια μέθοδος απλού βήματος προσεγγίζει τη λύση του προβλήματος στο σημείο  $x_{n+1}$ , όταν έχει υπολογιστεί η προσέγγιση  $y_n$  στο σημείο  $x_n$ , έχει επιλεγεί το βήμα  $h$  και δίνεται ο τύπος της διαφορικής εξίσωσης.

Έστω  $y(x)$  η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης  $y' = f(x, y)$ . Η τιμή της λύσης στο σημείο  $x_{n+1} = x_n + h$  είναι  $y(x_{n+1})$ , και από το θεώρημα Taylor έχουμε:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \dots \\ &= y(x_n) + h \left[ y'(x_n) + \frac{h}{2!}y''(x_n) + \frac{h^2}{3!}y'''(x_n) + \dots \right], \end{aligned}$$

ή αν ορίσουμε τη συνάρτηση:

$$\Delta(x_n, y(x_n), h) = y'(x_n) + \frac{h}{2!}y''(x_n) + \frac{h^2}{3!}y'''(x_n) + \dots$$

θα προκύψει η σχέση:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Delta(x_n, y(x_n), h). \quad (1)$$

Η παράσταση  $\Delta(x_n, y(x_n), h)$  ονομάζεται ακριβής σχετική αύξηση και αν η ακριβής λύση είναι ένα πολυώνυμο δεδομένου βαθμού, τότε η σειρά τερματίζεται, αλλά αυτό εν γένει δεν συμβαίνει.

Συνεπώς, μια μέθοδος απλού βήματος προκύπτει αν υπολογιστεί μια προσέγγιση της ακριβούς σχετικής αύξησης  $\Delta$ , δηλαδή μια συνάρτηση  $\Phi$  όπου:

$$\Phi(x, y(x_n), h) \approx \Delta(x_n, y(x_n), h).$$

Τότε η (1) γράφεται:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n), h). \quad (2)$$

Η (2) δεν είναι ακριβής για τη θεωρητική λύση, αλλά γίνεται ακριβής για την αντίστοιχη προσεγγιστική. Συνεπώς, η γενική μορφή μιας μεθόδου απλού βήματος μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\Phi(x_n, y_n, h), \\ y_0 &\text{δοθέν, } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Η προσέγγιση της  $\Delta(x_n, y(x_n), h)$  με την  $\Phi(x_n, y_n, h)$  εισάγει το τυπικό σφάλμα αποκοπής, οπότε γενικά ισχύει:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\Phi(x_n, y(x_n), h) \\ &= y(x_n) + h\Delta(x_n, y(x_n), h) - [y(x_n) + h\Phi(x_n, y(x_n), h)], \end{aligned}$$

ή:

$$T_{n+1} = h[\Delta(x_n, y(x_n), h) - \Phi(x_n, y(x_n), h)]. \quad (4)$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε απλές μεθόδους απλού βήματος, θα περιγράψουμε τον τρόπο κατασκευής τους, θα συζητήσουμε τις βασικές ιδιότητες αυτών και θα αποδείξουμε μερικά χρήσιμα αποτελέσματα.

### 8.3. Μέθοδος Euler

Η μέθοδος Euler αντιπροσωπεύει την απλούστερη μέθοδος απλού βήματος και χρησιμοποιείται κυρίως σαν μοντέλο μεθόδου για την ανάπτυξη και ανάλυση βασικών εννοιών και ιδιοτήτων της θεωρίας των αριθμητικών μεθόδων απλού βήματος. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0,$$

και τη διαμέριση του διαστήματος  $[a, b]$  με τα σημεία που ορίζονται με τη σχέση  $x_n = a + nh$ , με  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , όπου  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $N$  θετικός ακέραιος.

Η πιο απλή μέθοδος απλού βήματος, η οποία μπορεί να υπολογίζει διαδοχικά τις προσεγγίσεις  $y_1, y_2, \dots, y_N$  στα σημεία της διαμέρισης  $x_1, x_2, \dots, x_N$  της λύσης  $y(x)$  του παραπάνω προβλήματος, έχει προταθεί από τον Euler και μπορεί να υπολογιστεί με διάφορους απλούς τρόπους.

#### 8.3.1. Κατασκευή με ολοκλήρωση

Ολοκληρώνουμε την  $y' = f(x, y)$  στο διάστημα  $[x_n, x_{n+1}]$ , οπότε προκύπτει:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx,$$

και ισχύει για κάθε  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ . Σύμφωνα με τη θεωρία της ολοκλήρωσης έχουμε:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx,$$

ή:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx, \text{ με } n = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της (5) το προσεγγίζουμε με τον κανόνα του ορθογωνίου, ή η  $f(x, y(x))$  προσεγγίζεται με πολυώνυμο βαθμού μηδέν. Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx f(x_n, y(x_n)),$$

οπότε προκύπτει η σχέση:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)), \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, y(a) = y_0.$$

Η σχέση αυτή δεν είναι ακριβής για τις τιμές της θεωρητικής λύσης στα σημεία της διαμέρισης, αλλά γίνεται ακριβής για τις αντίστοιχες προσεγγίσεις. Συνεπώς, η μέθοδος Euler, που προκύπτει, γράφεται:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n), \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, y(a) = y_0, \quad (6)$$

και ονομάζεται άμεση μέθοδος Euler.

### 8.3.2. Κατασκευή με ανάπτυγμα Taylor

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor για τη συνάρτηση  $y(x)$  στο σημείο  $x + h$ , οπότε έχουμε:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots$$

και κρατάμε τους δύο πρώτους όρους. Τότε προκύπτει η προσεγγιστική σχέση:

$$y(x + h) \approx y(x) + hy'(x),$$

ή:

$$y(x + h) \approx y(x) + hf(x, y(x)).$$

Αν θεωρήσουμε τα διαδοχικά σημεία  $x_n, x_{n+1}$  της διαμέρισης, η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$y(x + h) \approx y(x) + hf(x_n, y(x_n)),$$

η οποία γίνεται ακριβής για τις αντίστοιχες προσεγγίσεις και έτσι προκύπτει η μέθοδος (6).

**Παράδειγμα 8.3.1:** Θεωρούμε την απλή διαφορική εξίσωση  $y' = y$ , η οποία έχει την λύση  $y(x) = ce^x$ . Θα εφαρμόσουμε την άμεση μέθοδο Euler για να την επιλύσουμε αριθμητικά.

**Απάντηση.** Για κάποιο  $h$  θα προωθήσουμε τη λύση από το σημείο  $x_0 = 0$ , στο σημείο  $x_1 = x_0 + h$ , οπότε προκύπτει η σχέση:

$$y_1 = y_0 + hy'_0 = y_0 + hy_0 = (1 + h)y_0.$$

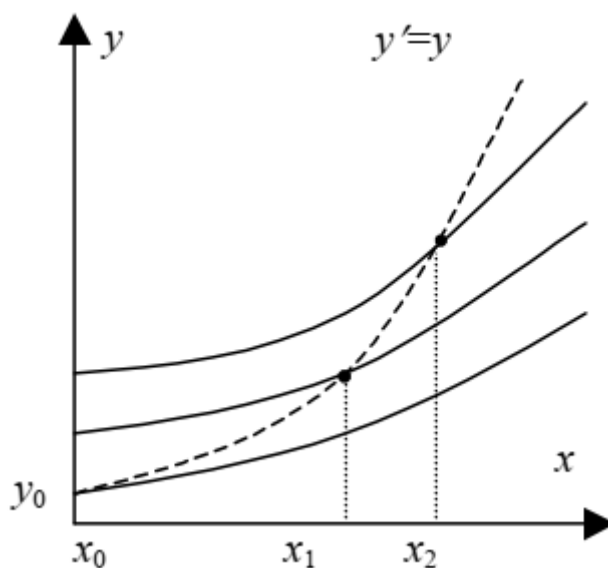
Η τιμή της λύσης στο σημείο  $x_1$  δεν είναι ακριβής, δηλαδή  $y_1 \neq y(x_1)$ . Έτσι, αν  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$  και  $h = 0.5$ , τότε υπολογίζουμε ότι  $y_1 = 1.5$ , ενώ η ακριβής λύση είναι  $y(x_1) = y(0.5) \approx 1.649$ .

Από τον υπολογισμό της μεθόδου με τη σειρά Taylor μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το σφάλμα της προσέγγισης είναι ανάλογο του  $h^2$ . Επομένως, αν μειώσουμε το βήμα κατά  $\frac{1}{2}$ , το σφάλμα θα μειωθεί κατά  $\frac{1}{4}$  αν θεωρήσουμε ότι το σφάλμα στρογγύλευσης είναι αμελητέο. Για κάθε μη μηδενικό σφάλμα, η προσέγγιση  $y_1$  βρίσκεται σε διαφορετικό μέλος της οικογένειας των λύσεων από εκείνο από το οποίο ξεκινήσαμε.

Για να συνεχίσουμε τη διαδικασία επίλυσης, παίρνουμε το επόμενο σημείο  $x_2 = 1.0$ . μετά τις πράξεις θα πάρουμε:

$$y_2 = y_1 + hy_1 = 1.5 + 1.5 \cdot 0.5 = 2.25.$$

Η ακριβής λύση στο  $x_2 = 1.0$  είναι  $y(x_2) = y(1.0) \approx 2.718$ . Η προσέγγιση  $y_2 = 2.25$  διαφέρει από την  $y(x_2)$ , αλλά διαφέρει επίσης και από την καμπύλη της λύσης, η οποία διέρχεται από το προηγούμενο σημείο  $(x_1, y_1)$ , η οποία στο σημείο  $x = 1$  έχει την προσεγγιστική τιμή  $y = 2.473$ . Έτσι, μετακινούμεθα σε ένα ακόμη μέλος της οικογένειας των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης.



Σχήμα 8.1

Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία εκτελώντας και άλλα βήματα, θα δημιουργήσουμε έναν πίνακα διακεκριμένων τιμών της προσεγγιστικής λύσης. Έτσι, όμως, σε κάθε βήμα θα πηγαίνουμε από το ένα μέλος της οικογένειας των λύσεων στο άλλο. Για τη συγκεκριμένη ασταθή διαφορική εξίσωση, τα σφάλματα που γίνονται στην αριθμητική μέθοδο, μεγαλώνουν από βήμα σε βήμα, σαν αποτέλεσμα της απόκλισης των καμπύλων της λύσης.

#### 8.4. Γενίκευση μεθόδου Euler

Η διαδικασία υπολογισμού της μεθόδου Euler με ολοκλήρωση μπορεί να γενικευθεί αντικαθιστώντας τον κανόνα του ορθογωνίου για την προσέγγιση του

ολοκληρώματος με μια μονοπαραμετρική οικογένεια κανόνων ολοκλήρωσης της μορφής (Ακρίβης και Δουγαλής, 2015):

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \approx h(1 - \theta)f(x_n, y(x_n)) + h\theta f(x_n, y(x_n)), \quad (7)$$

με  $\theta \in [0,1]$  την παράμετρο. Τότε η σχέση:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx, \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

γράφεται:

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h[(1 - \theta)f(x_n, y(x_n)) + \theta f(x_n, y(x_n))], \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, y(a) = y_0,$$

από την οποία προκύπτει η ονομαζόμενη  $\theta$ -μέθοδος της μορφής:

$$y_{n+1} \approx y_n + h[(1 - \theta)f(x_n, y(x_n)) + \theta f(x_n, y(x_n))], \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, y(a) = y_0, \theta \in [0,1]. \quad (8)$$

Για συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς  $\theta$  προκύπτει και μια αντίστοιχη μέθοδος της οικογένειας αυτής.

(α) Για  $\theta = 0$  προκύπτει η απλή ή άμεση μέθοδος Euler(6).

(β) Για  $\theta = 1$  προκύπτει η μέθοδος:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, y(a) = y_0, \quad (9)$$

η οποία ονομάζεται *έμμεση μέθοδος Euler*. Η εφαρμογή αυτής της μεθόδου απαιτεί την επίλυση μιας έμμεσης εξίσωσης για τον υπολογισμό του  $y_{n+1}$ , δοθέντος του  $y_n$ , το οποίο συνεπάγεται ενδιάμεσες διαδικασίες απαραίτητες σε τέτοιες περιπτώσεις.

Η μέθοδος (9) είναι έμμεση επειδή πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή της  $f$  στο σημείο  $y_{n+1}$  πριν το υπολογίσουμε. Αυτό σημαίνει ότι μια τιμή για το  $y_{n+1}$ , η οποία ικανοποιεί την (9), πρέπει να υπολογιστεί. Αν η  $f$  είναι μια μη γραμμική συνάρτηση ως προς  $y$ , όπως είναι συνήθως, τότε θα πρέπει να εφαρμόσουμε μια επαναληπτική μέθοδο, όπως η μέθοδος σταθερού σημείου ή η μέθοδος Newton. Μια καλή αρχική τιμή για την επαναληπτική μέθοδο μπορεί να υπολογιστεί από μια άμεση μέθοδο, όπως η απλή μέθοδος Euler, ή από την λύση στο προηγούμενο βήμα.

(γ) Για  $\theta = \frac{1}{2}$  προκύπτει μια ενδιαφέρουσα επίσης μέθοδος της μορφής:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})], \\ n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, y(a) = y_0, \quad (10)$$

η οποία ονομάζεται *μέθοδος τραπεζίου*. Είναι φανερό ότι η μέθοδος του τραpezίου υπολογίζει τις προσεγγίσεις της λύσης στα διάφορα σημεία της διαμέρισης με μεγαλύτερη ακρίβεια από την άμεση μέθοδο Euler. Όμως, είναι ολιγότερο εύχρηστη, επειδή απαιτεί την επίλυση μιας έμμεσης μεθόδου σε κάθε σημείο  $x_{n+1}$  για τον

υπολογισμό της προσέγγισης  $y_{n+1}$ . Μια εύκολη αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας είναι να χρησιμοποιήσουμε την άμεση μέθοδο Euler για μια πρώτη προσέγγιση της τιμής  $y(x_{n+1})$ , και εν συνεχεία να χρησιμοποιήσουμε αυτή την προσέγγιση μέσα στον τύπο του τραπεζίου για να υπολογίσουμε μια περισσότερο ακριβή προσέγγιση για το  $y(x_{n+1})$ . Τότε προκύπτει η μέθοδος:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))],$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1, y(a) = y_0, \quad (11)$$

η οποία ονομάζεται *βελτιωμένη μέθοδος Euler*. Η προηγούμενη μέθοδος μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad (12)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1, y(a) = y_0,$$

και είναι μια έκφραση συμβατή με την οικογένεια των μεθόδων Runge-Kutta.

Συμπερασματικά, η  $\theta$ -μέθοδος για  $\theta = 0$  ορίζει μια άμεση μέθοδο, και για  $0 < \theta \leq 1$  ορίζει έμμεσες μεθόδους απλού βήματος. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε βασικές έννοιες της ποιοτικής θεωρίας των αριθμητικών μεθόδων απλού βήματος βασιζόμενοι σε μερικά απλά μέλη αυτής της οικογένειας, κυρίως στη μέθοδο Euler.

### 8.5. Τάξη ακρίβειας μεθόδου Euler

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την τάξη ακρίβειας της απλής μεθόδου Euler. Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor της μορφής:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + O(h^2), \quad (13)$$

όπου το  $O(h^2)$  συμβολίζει ότι παραλείπουμε από τη σειρά Taylor όλους τους όρους που εξαρτώνται από δυνάμεις του  $h^2$  και πάνω. Για  $x = x_k$ , η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + O(h^2),$$

ή:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + O(h^2). \quad (14)$$

Η μέθοδος Euler ως γνωστόν ορίζεται από τη σχέση:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (15)$$

και αφαιρώντας από την (15) την (14) προκύπτει η σχέση:

$$y_{k+1} - y(x_{k+1}) = [y_k - y(x_k)] + h[f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))] - O(h^2).$$

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν σφάλματα στα προηγούμενα σημεία, θα ισχύει η σχέση  $y_k = y(x_k)$ , οπότε:

$$y_k - y(x_k) = 0 \quad \text{και} \quad f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k)) = 0,$$

άρα προκύπτει ότι:

$$y_{k+1} - y(x_{k+1}) = O(h^2), \quad \text{ή} \quad T_{k+1} = O(h^2),$$

με  $T_{k+1}$  το τοπικό σφάλμα αποκοπής, άρα η μέθοδος Euler είναι πρώτης τάξης.

### 8.6. Ευστάθεια μεθόδου Euler

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ευστάθεια μιας αριθμητικής μεθόδου, δηλαδή τη συμπεριφορά της μετάδοσης του σφάλματος από βήμα σε βήμα, θεωρώντας την άμεση μέθοδο Euler (Ακρίβης και Δουγαλής, 2015). Το ολικό σφάλμα είναι το άθροισμα των τοπικών σφαλμάτων σε κάθε βήμα και μπορεί να αποκαλείται το *μεταδιδόμενο σφάλμα* (propagated error). Για να μελετήσουμε την ευστάθεια μιας αριθμητικής μεθόδου, θα πρέπει να εξετάσουμε το αντίστοιχο μεταδιδόμενο σφάλμα. Για την περίπτωση της μεθόδου Euler θεωρούμε τη σχέση:

$$y_{k+1} - y(x_{k+1}) = [y_k - y(x_k)] + h[f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k))] - O(h^2). \quad (16)$$

Ο δείκτης  $k$  στο βήμα υποδηλώνει ότι το βήμα μπορεί να είναι μεταβλητό και όχι σταθερό από σημείο σε σημείο. Με βάση το θεώρημα της μέσης τιμής ισχύει η σχέση:

$$f(x_k, y_k) - f(x_k, y(x_k)) = J(\xi)[y_k - y(x_k)],$$

όπου  $J$  γενικά μπορεί να είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης  $f$  και ειδικότερα η παράγωγος της  $f$  σε κάποιο άγνωστο σημείο  $\xi$ . Τότε η σχέση (16) γράφεται:

$$y_{k+1} - y(x_{k+1}) = [y_k - y(x_k)] + h_k J(\xi)[y_k - y(x_k)] - O(h^2),$$

ή:

$$E_{k+1} = [1 + h_k J(\xi)]E_k + T_{k+1}, \quad (17)$$

όπου  $E_k$  σημαίνει ολικό σφάλμα και  $T_k$  τοπικό σφάλμα αποκοπής. Η σχέση (17) υποδεικνύει ότι το ολικό σφάλμα πολλαπλασιάζεται σε κάθε βήμα με τον παράγοντα  $1 + h_k J(\xi)$ , ο οποίος ονομάζεται *παράγοντας αύξησης* του σφάλματος (growth or amplification factor). Επομένως, αν:

$$1 + h_k J < 1,$$

τότε τα σφάλματα δεν θα αυξάνουν, και η μέθοδος λέμε ότι είναι *ευσταθής*. Αν αυτό δεν ισχύει, τα σφάλματα θα αυξάνουν από βήμα σε βήμα, και τότε θα λέμε ότι η μέθοδος είναι *ασταθής*. Η προηγούμενη ανισότητα ισοδυναμεί με:

$$-1 < 1 + h_k J < 1 \Leftrightarrow h_k J \in (-2, 0).$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι για να έχουμε ομαλή μετάδοση του σφάλματος από βήμα σε βήμα, θα πρέπει να χρησιμοποιούμε κατάλληλο βήμα  $h_k$ , ώστε το  $h_k J$  να βρίσκεται πάντα μέσα στο διάστημα  $(-2, 0)$ , το οποίο ονομάζεται *διάστημα ευστάθειας* της μεθόδου. Είναι προφανές ότι η τιμή του  $h_k$  εξαρτάται και από την τιμή του  $J$ , η οποία εξαρτάται από την ίδια τη διαφορική εξίσωση. Σημειώνουμε ότι αυτού του είδους η αστάθεια μπορεί να συμβεί όταν η διαφορική εξίσωση είναι ασταθής

( $J > 0$ ), αλλά μπορεί επίσης να συμβεί για ευσταθή διαφορική εξίσωση ( $J < 0$ ), αν  $h_k > -2/J$ .

Για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, ο παράγοντας αύξησης του σφάλματος ορίζεται από τον πίνακα,  $I + h_k J$ , όπου  $J$  είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης  $f$ , και  $I$  ο αντίστοιχος μοναδιαίος. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι η αριθμητική μέθοδος είναι ευσταθής αν ισχύει η συνθήκη:

$$\rho(I + h_k J) < 1,$$

η οποία ικανοποιείται αν οι ιδιοτιμές του πίνακα  $h_k J$ , βρίσκονται μέσα στον κύκλο του μιγαδικού επιπέδου  $K(-1,1)$ . Το διάστημα  $(-2,0)$  που υπολογίσαμε στην περίπτωση μιας απλής διαφορικής εξίσωσης, θα είναι η τομή του παραπάνω μοναδιαίου κύκλου με τον αρνητικό ημιάξονα. Το χωρίο το οποίο ορίζεται με τον κύκλο αυτόν συνήθως ονομάζεται *χωρίο ευστάθειας* της μεθόδου.

Γενικά, ο παράγοντας αύξησης του σφάλματος εξαρτάται από την διαφορική εξίσωση η οποία ορίζει τον Ιακωβιανό πίνακα, την αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιούμε η οποία ορίζει την μορφή του παράγοντα, και το βήμα  $h_k$ .

Ένας εναλλακτικός τρόπος ανάλυσης για την μελέτη της ακρίβειας και της ευστάθειας μιας αριθμητικής μεθόδου, βασίζεται στην εφαρμογή της μεθόδου σε ένα γραμμικό πρόβλημα μοντέλο της μορφής:

$$y' = \lambda y, y(0) = y_0, \quad (18)$$

του οποίου η ακριβής λύση είναι η συνάρτηση  $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$ .

Για να εξετάσουμε την ακρίβεια μιας μεθόδου θα πρέπει να συγκρίνουμε τις προσεγγιστικές λύσεις με τις αντίστοιχες αναλυτικές βασιζόμενοι στο ανάπτυγμα Taylor αυτών. Για να μελετήσουμε την ευστάθεια μιας μεθόδου, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον παράγοντα αύξησης του σφάλματος της αριθμητικής λύσης, και να επιβάλλουμε σε αυτόν τις κατάλληλες συνθήκες ώστε η αριθμητική λύση να συμπεριφέρεται με τρόπο ανάλογο της αναλυτικής. Τα συμπεράσματα που προκύπτουν με βάση το γραμμικό μοντέλο θεωρούμε ότι ισχύουν και για την περίπτωση της επίλυσης μιας οποιασδήποτε διαφορικής εξίσωσης.

Θα εφαρμόσουμε την ανάλυση αυτή για να μελετήσουμε την ευστάθεια και ακρίβεια της απλής μεθόδου Euler. Αν εφαρμόσουμε την μέθοδο αυτή στο πρόβλημα (18), θα προκύψει ότι:

$$y_{k+1} = y_k + h(\lambda y_k) = (1 + h\lambda)y_k, k \geq 0. \quad (19)$$

Αν εφαρμόσουμε την (19) διαδοχικά για τις διάφορες τιμές του  $k$ , θα προκύψει η σχέση:

$$y_k = (1 + h\lambda)^k y_0, k = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Αν  $\lambda < 0$ , η ακριβής λύση συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν όταν το  $x \rightarrow \infty$ . Για να ισχύει κάτι ανάλογο και για την προσεγγιστική λύση, θα πρέπει λόγω της (20) να ισχύει η ανισότητα  $|1 + h\lambda| < 1$ . Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με την προηγούμενη ανάλυση της μεθόδου Euler, επειδή για την διαφορική εξίσωση (18),  $J = \lambda$ . Με βάση την παραπάνω συνθήκη η ευστάθεια της μεθόδου είναι εξασφαλισμένη αν  $h\lambda \in (-2,0)$ .

Για να εξετάσουμε την τάξη ακρίβειας της μεθόδου, συγκρίνουμε τον παράγοντα αύξησης του σφάλματος της προσεγγιστικής λύσης με το ανάπτυγμα

Taylor του όρου  $e^{h\lambda}$  της αναλυτικής λύσης. Ο παράγοντας αύξησης του σφάλματος της μεθόδου είναι  $1 + h\lambda$ , και μπορεί να συμφωνήσει με το ανάπτυγμα της σειράς:

$$e^{h\lambda} = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \dots$$

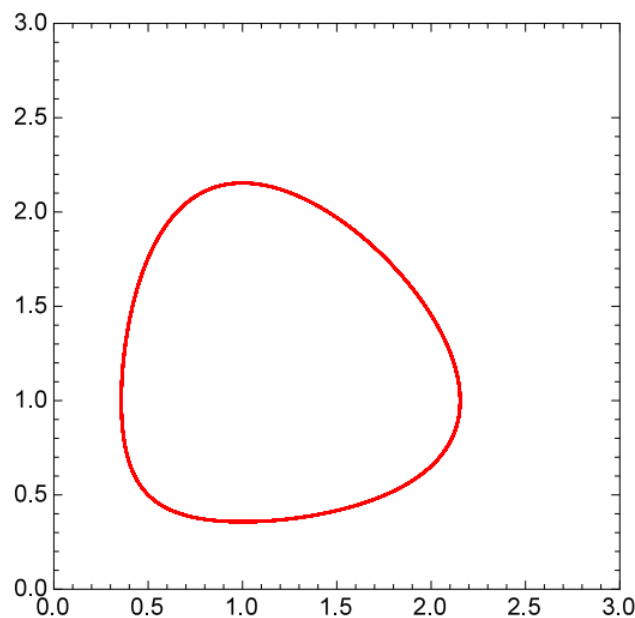
μόνο στους δύο πρώτους όρους, δηλαδή όρους που εξαρτώνται από την πρώτη δύναμη του  $h$ , και επομένως συνάγεται εύκολα ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι 1.

### 8.7. Υλοποίηση της μεθόδου στον υπολογιστή

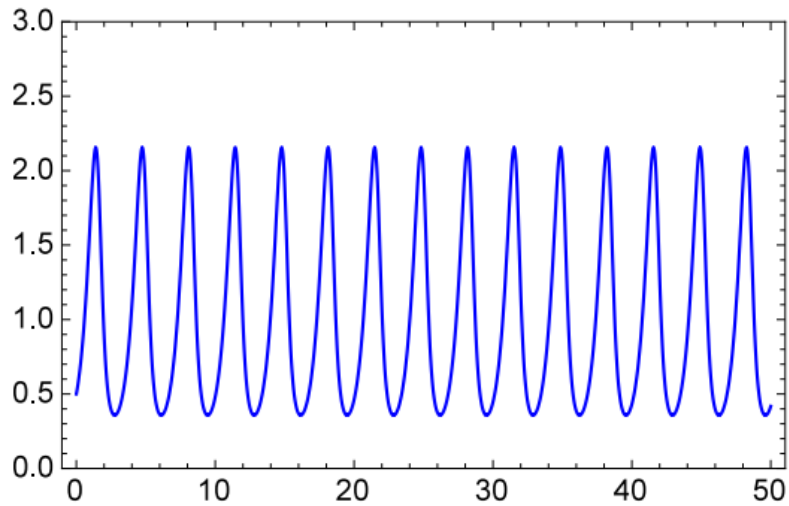
Το διάστημα στο οποίο θα επιλύσουμε το σύστημα, δηλαδή το  $[0, T]$ , το διαμερίζουμε σε  $n$ -πλήθος σημείων, απόστασης  $h = \frac{T}{n}$ . Κάθε σημείο της διαμέρισης  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ , όπου  $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh$  και  $t_j = jh$ . Για παράδειγμα, αν  $j = 0$  τότε  $t_0 = 0$  και για  $j = n$  τότε  $t_n = nh = n \frac{T}{n} = T$ . Οπότε και οι τιμές της συνάρτησης  $x(t)$  στα σημεία της διαμέρισης είναι  $x(t_j)$  και η τιμή στο επόμενο σημείο θα είναι  $x(t_{j+1})$ . Θα συμβολίζουμε την  $x(t_j)$  με  $x_j$  και την  $x(t_{j+1})$  με  $x_{j+1}$ . Άρα καταλήγουμε στο αριθμητικό σχήμα του Euler:

$$x_{j+1} = x_j + hF \left[ x_j + \frac{h}{2}F(x_j, y_j), y_j + \frac{h}{2}G(x_j, y_j) \right],$$

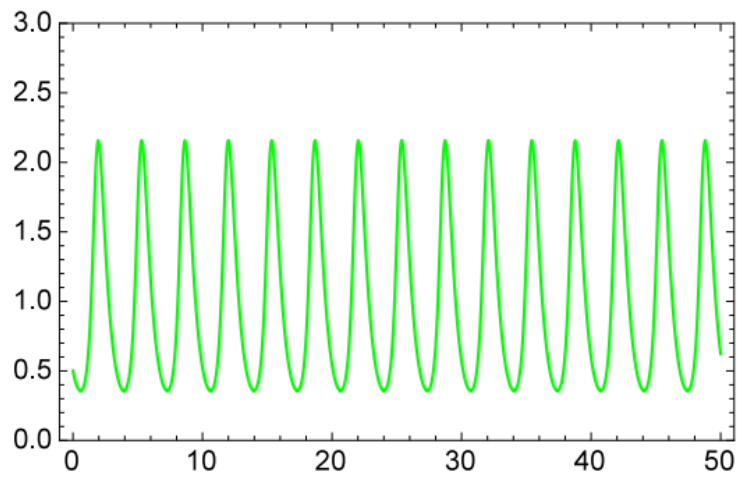
$$y_{j+1} = y_j + hF \left[ x_j + \frac{h}{2}F(x_j, y_j), y_j + \frac{h}{2}G(x_j, y_j) \right].$$



**Σχήμα 8.2.** Οι περιοδικές τροχιές για το σύστημα Lotka-Volterra, στην περίπτωση των παραμέτρων  $a = b = c = d = 2$ . Η τροχιά αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες  $x_0 = y_0 = 0.5$ .

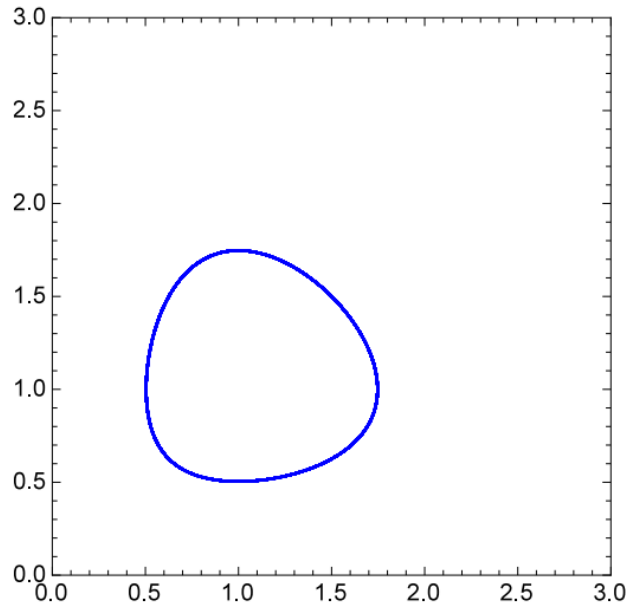


**Σχήμα 8.3.** Λύσεις  $x(t)$ , που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές του **Σχήματος 8.2**.

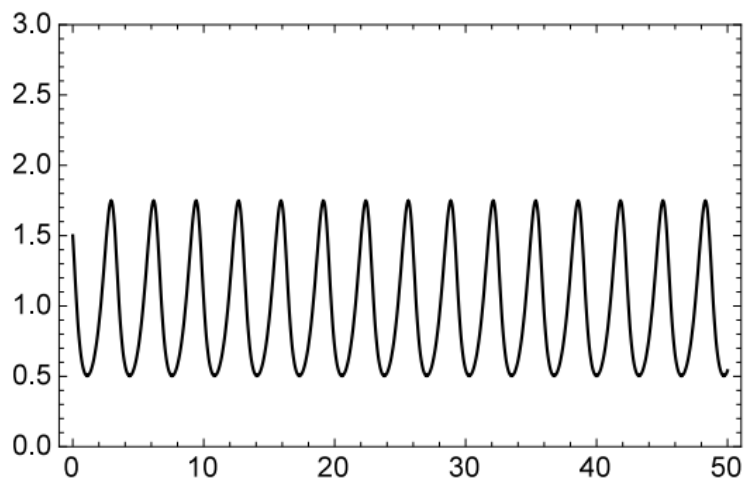


**Σχήμα 8.4.** Λύσεις  $y(t)$ , που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές του **Σχήματος 8.2**.

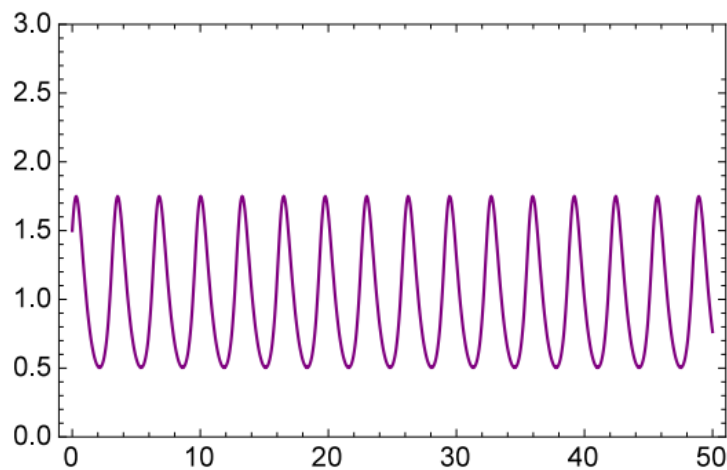
Το βασικό αποτέλεσμα των παραπάνω είναι, βεβαίως, η ύπαρξη κλειστών τροχιών, δηλαδή περιοδικής μεταβολής των πληθυσμών, ακόμα και για μεγάλες απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας.



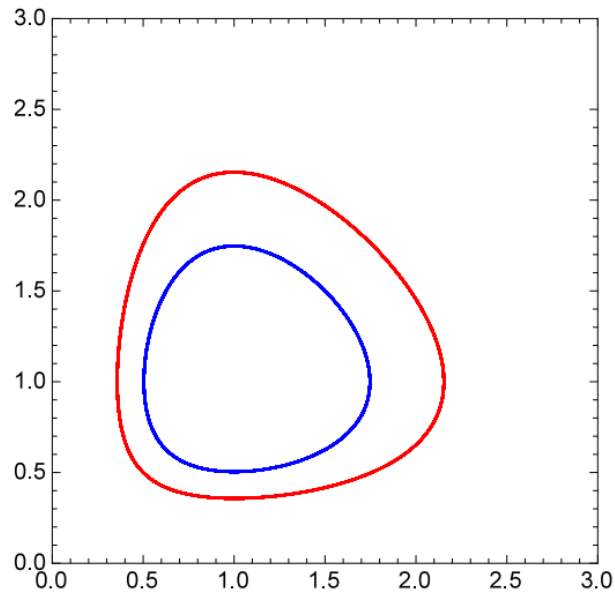
**Σχήμα 8.5.** Οι περιοδικές τροχιές για το σύστημα Lotka-Volterra, στην περίπτωση των παραμέτρων  $a = b = c = d = 2$ . Η τροχιά αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες  $x_0 = 1.5$  και  $y_0 = 1$ .



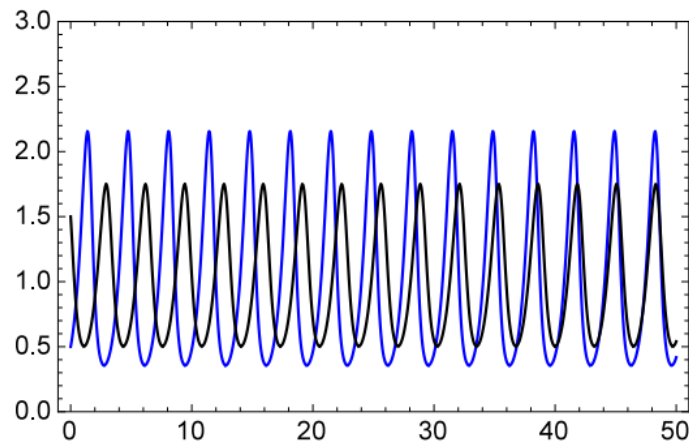
**Σχήμα 8.6.** Λύσεις  $x(t)$ , που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές του Σχήματος 8.5.



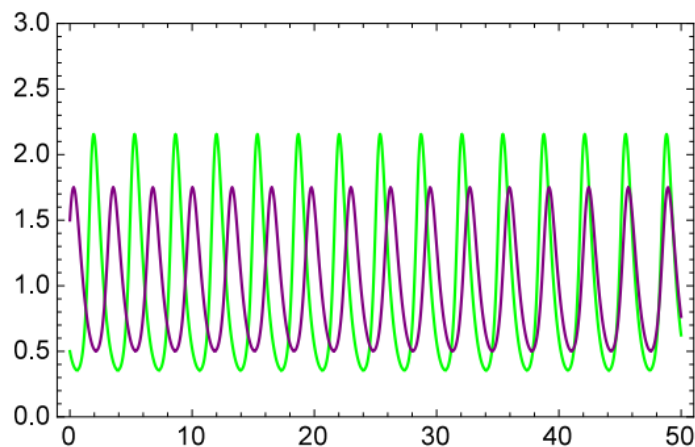
**Σχήμα 8.7.** Λύσεις  $y(t)$ , που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές του Σχήματος 8.5.



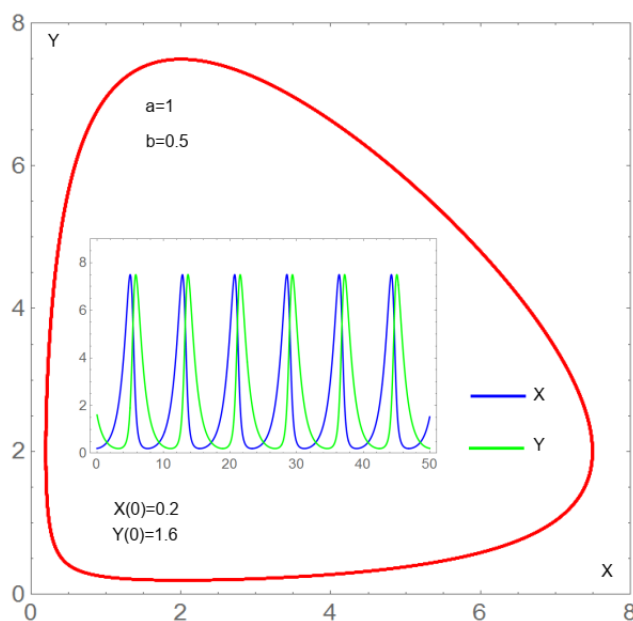
**Σχήμα 8.8.** Οι περιοδικές τροχιές για το σύστημα Lotka-Volterra, στην περίπτωση των παραμέτρων  $a = b = c = d = 2$ . Η εξωτερική τροχιά αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες  $x_0 = y_0 = 0.5$ , και η εσωτερική, σε αρχικές συνθήκες  $x_0 = 1.5$  και  $y_0 = 1$ .



**Σχήμα 8.9.** Λύσεις  $x(t)$  που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές του Σχήματος 8.8. Οι μεγάλες ταλαντώσεις αντιστοιχούν στην τροχιά με αρχικές συνθήκες  $x_0 = y_0 = 0.5$  και οι μικρότερες στην τροχιά με αρχικές συνθήκες  $x_0 = 1.5$  και  $y_0 = 1$ .



**Σχήμα 8.10.** Λύσεις  $y(t)$  που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές του **Σχήματος 8.8**. Οι μεγάλες ταλαντώσεις αντιστοιχούν στην τροχιά με αρχικές συνθήκες  $x_0 = y_0 = 0.5$  και οι μικρότερες στην τροχιά με αρχικές συνθήκες  $x_0 = 1.5$  και  $y_0 = 1$ .



**Σχήμα 8.11.** Οι περιοδικές τροχιές για το σύστημα Lotka-Volterra και οι λύσεις  $x(t)$  και  $y(t)$  για αρχικές συνθήκες  $x_0 = 0.2$  και  $y_0 = 1.6$ .

Στο **Σχήμα 8.2** παρατηρούμε ότι εκεί που γίνεται μέγιστος ο πληθυσμός των θηραμάτων  $x$ , ο πληθυσμός των κυνηγών  $y$  γίνεται σχεδόν ελάχιστος. Ας σκεφτούμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό με σαρδέλες και έναν άλλο με σκυλόψαρα. Είναι λογικό τα σκυλόψαρα να τρέφονται από τις σαρδέλες. Άρα όταν θα έχει αυξηθεί ο αριθμός των κυνηγών, ο αριθμός των θηραμάτων, δηλαδή των σαρδελών, θα είναι σχεδόν ελάχιστος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα σκυλόψαρα να μην βρίσκουν τροφή οπότε σταδιακά θα μειώνεται ο πληθυσμός τους. Σε αντίθεση με τον πληθυσμό των σαρδελών που θα αυξάνεται λόγω της απουσίας του κυνηγού, δηλαδή των σκυλόψαρων.

### Προγραμματισμός στο Mathematica

Ακολουθεί το πρόγραμμα στο Mathematica, για την επίλυση συστήματος διαφορικών εξισώσεων με την αριθμητική μέθοδο του Euler. Αρχικά έχουμε την αναδρομική σχέση του Euler και στη συνέχεια με την εντολή Solve επιλύει το σύστημα Lotka-Volterra και βρίσκει τα σημεία ισορροπίας. Εισάγοντας τιμές για τις παραμέτρους και τις αρχικές τιμές, από τη fig παίρνω τις περιοδικές τροχιές για το σύστημά μου. Από την EXX και την EXY παίρνω τις λύσεις  $x(t)$  και  $y(t)$  αντίστοιχα, που αντιστοιχούν στις περιοδικές τροχιές της fig. Τέλος με την εντολή Show μπορώ να εμφανίσω σε ένα κοινό σχήμα τις περιοδικές τροχιές ή τις λύσεις που αντιστοιχούν σε δύο ή περισσότερες αρχικές συνθήκες.

```
Clear["Global`*"]

S[A_, B_, h_, N_] := (x[0] = A;

y[0] = A;
```

```

Do[{x[n + 1] = x[n] + h*F[x[n], y[n]] +
    h^2/2*F[x[n], y[n]] . y[n] + h^2/2*O[x[n], y[n]],

    y[n + 1] = y[n] + h*G[x[n], y[n]] +
    h^2/2*F[x[n], y[n]] . y[n] + h^2/2 *O[x[n], y[n]]},
{n, 0, N}]
)

Clear[F]

Clear[G]

FAB[x_, y_, a_, b_] = a*x - b*x*y

GAB[x_, y_, c_, d_] = -c*y + d*x*y

Solve[FAB[x, y, a, b] == 0 && GAB[x, y, c, d] == 0, {x, y}]

F[x_, y_] = FAB[x, y, 2, 2]

G[x_, y_] = GAB[x, y, 2, 2]

S[1.5, 1, 0.01, 10000]

X = Interpolation@Table[{0.01 n, x[n]}, {n, 0, 10000}]

Y = Interpolation@Table[{0.01 n, y[n]}, {n, 0, 10000}]

fig1 = ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 100},
    PlotRange -> {{0, 3}, {0, 3}},
    PlotPoints -> 9000, PlotStyle -> {Red},
    LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],
    AxesLabel -> {X, Y}, Frame -> True]

EXX = Plot[X[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3},
    AxesLabel -> {t, X},
    LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],
    Frame -> True, PlotPoints -> 3000,
    PlotStyle -> {Blue, AbsoluteThickness[1.5]}]

EXY = Plot[Y[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3},
    AxesLabel -> {t, Y},
    LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],
    Frame -> True, PlotPoints -> 3000,
    PlotStyle -> {Green, AbsoluteThickness[1.5]}]

fig2 = ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 100},
    PlotRange -> {{0, 3}, {0, 3}},
    PlotPoints -> 9000, PlotStyle -> {Blue},
    LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],

```

```
AxesLabel -> {X, Y}, Frame -> True]
```

```
Show[{fig1, fig2}]
```

```
EXX1 = Plot[X[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3},  
  AxesLabel -> {t, X},  
  LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],  
  Frame -> True, PlotPoints -> 3000,  
  PlotStyle -> {Black, AbsoluteThickness[1.5]}]
```

```
EXY1 = Plot[Y[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3},  
  AxesLabel -> {t, Y},  
  LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],  
  Frame -> True, PlotPoints -> 3000,  
  PlotStyle -> {Purple, AbsoluteThickness[1.5]}]
```

```
Show[EXX, EXX1]
```

```
Show[EXY, EXY1]
```

Διαφορετικά, έχουμε:

```
Clear["Global`*"]
```

```
(*----ΣΥΣΤΗΜΑ LOTKA-VOLTERRA----*)
```

```
FAB[x_, y_, a_, b_] := a*x - b*x*y;  
GAB[x_, y_, c_, d_] := -c*y + d*x*y;
```

```
(*Παράμετροι*)
```

```
F[x_, y_] := FAB[x, y, 2, 2];  
G[x_, y_] := GAB[x, y, 2, 2];
```

```
(*----ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ (RK2-Heun)----*)
```

```
S[A_, B_, h_, N_] := (x[0] = A;  
  y[0] = B;  
  Do[k1x = F[x[n], y[n]];  
    k1y = G[x[n], y[n]];  
    k2x = F[x[n] + h*k1x, y[n] + h*k1y];  
    k2y = G[x[n] + h*k1x, y[n] + h*k1y];  
    x[n + 1] = x[n] + (h/2) (k1x + k2x);  
    y[n + 1] = y[n] + (h/2) (k1y + k2y);, {n, 0, N}];)
```

```
(*Εκτέλεση προσομοίωσης*)
```

```
S[1.5, 1, 0.01, 10000];
```

```
(*Παρεμβολές*)
```

```
X = Interpolation@Table[{0.01 n, x[n]}, {n, 0, 10000}];  
Y = Interpolation@Table[{0.01 n, y[n]}, {n, 0, 10000}];
```

(\*----ΓΡΑΦΙΚΑ----\*)

```
fig1 = ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 100},  
PlotRange -> {{0, 3}, {0, 3}}, PlotPoints -> 9000,  
PlotStyle -> {Red},  
LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],  
AxesLabel -> {X, Y}, Frame -> True];
```

```
EXX = Plot[X[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3}, AxesLabel -> {t, X},  
LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"], Frame -> True,  
PlotPoints -> 3000, PlotStyle -> {Blue, AbsoluteThickness[1.5]}];
```

```
EXY = Plot[Y[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3}, AxesLabel -> {t, Y},  
LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"], Frame -> True,  
PlotPoints -> 3000, PlotStyle -> {Green, AbsoluteThickness[1.5]}];
```

```
fig2 = ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 100},  
PlotRange -> {{0, 3}, {0, 3}}, PlotPoints -> 9000,  
PlotStyle -> {Blue},  
LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"],  
AxesLabel -> {X, Y}, Frame -> True];
```

```
Show[{fig1, fig2}];
```

```
EXX1 = Plot[X[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3},  
AxesLabel -> {t, X},  
LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"], Frame -> True,  
PlotPoints -> 3000, PlotStyle -> {Black, AbsoluteThickness[1.5]}];
```

```
EXY1 = Plot[Y[t], {t, 0, 50}, PlotRange -> {0, 3},  
AxesLabel -> {t, Y},  
LabelStyle -> Directive[14, FontFamily -> "Arial"], Frame -> True,  
PlotPoints -> 3000, PlotStyle -> {Purple, AbsoluteThickness[1.5]}];
```

```
Show[EXX, EXX1];
```

```
Show[EXY, EXY1];
```

### **Βιβλιογραφικές αναφορές**

- [1] Γ.Δ. Ακρίβης και Β. Δουγαλής, Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, ΠΕΚ, 2015.
- [2] Griffiths, D. and Higham, D. J., Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Springer, 2010.
- [3] K. Atkinson, W. Han and D. Steward, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Wiley, 2009
- [4] J. Butcher, Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Wiley, 2008
- [5] A. Iserles, A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations, Cambridge University Press, 2008

- [6] E. Hairer, S. Nørset and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff problems, Springer, 1993
- [7] E. Hairer and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and differential-algebraic problems, Springer, 1996
- [8] K.W. Morton, D.F. Mayers, Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction, Cambridge University Press (2nd edition), 2005.
- [9] J. C. Strikwerda. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. Wadsworth & Brooks/Cole, 1989.
- [10] Bruce Liu, Mark Guo (2016), "RL Series Circuit" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/RLSeriesCircuit/](https://demonstrations.wolfram.com/RLSeriesCircuit/)
- [11] Gregory Rothmeier (2011), "Parallel Plate Capacitors and RC Circuits" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/ParallelPlateCapacitorsAndRCCircuits/](https://demonstrations.wolfram.com/ParallelPlateCapacitorsAndRCCircuits/)
- [12] Michael R. Braunstein (2011), "Phasor Model for RC Filter Electronic Circuit" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/PhasorModelForRCFilterElectronicCircuit/](https://demonstrations.wolfram.com/PhasorModelForRCFilterElectronicCircuit/)
- [13] Hope Flaxman (2012), "RC Flashing Bulb Circuit" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/RCFlashingBulbCircuit/](https://demonstrations.wolfram.com/RCFlashingBulbCircuit/)
- [14] Whashington Silvestre (2023), "Basic Parameters of an RC Circuit" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/BasicParametersOfAnRCCircuit/](https://demonstrations.wolfram.com/BasicParametersOfAnRCCircuit/)
- [15] Michael R. Braunstein (2012), "RLC Tank Circuit Bandpass Filter: Triangle Waveform Input" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/RLCTankCircuitBandpassFilterTriangleWaveformInput/](https://demonstrations.wolfram.com/RLCTankCircuitBandpassFilterTriangleWaveformInput/)
- [16] Alexander Frank, Alec Jamosmos, Christian Garcia, Christopher Spezzano, Miguel Borquez, Nicholas Clark, Joshua Paul Steimel (2022), "Series RLC Circuit Solver" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/SeriesRLCCircuitSolver/](https://demonstrations.wolfram.com/SeriesRLCCircuitSolver/)
- [17] Kallol Das (2009), "Frequency Response of an LCR Circuit" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/FrequencyResponseOfAnLCRCircuit/](https://demonstrations.wolfram.com/FrequencyResponseOfAnLCRCircuit/)
- [18] James Burgess (2011), "Damping in RLC Circuits" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/DampingInRLCCircuits/](https://demonstrations.wolfram.com/DampingInRLCCircuits/)
- [19] S. M. Blinder (2008), "Series RLC Circuits" Wolfram Demonstrations Project. [demonstrations.wolfram.com/SeriesRLCCircuits/](https://demonstrations.wolfram.com/SeriesRLCCircuits/)
- [20] Chua, L.O., Desoer, C.A., and Kuh, E.S. (1987). Linear and nonlinear circuits. New York: McGraw-Hill.
- [21] Duffin, R.J. (1947). Nonlinear networks IIa. Bulletin of the American Mathematical Society 53, 963-971.
- [22] Ebers, J.J., and Moll, J.L. (1954). Large-signal behavior of junction transistors. Proceedings IRE 42, 1761-1772.
- [23] Getreu, I. (1976). Modeling the bipolar transistor. Beaverton, OR: Tektronix, 9-23.
- [24] Gopinath, B., and Mitra, D. (1971). When are transistors passive? Bell Systems Technological Journal 50, 2835-2847.
- [25] Green, M., and Willson, A.N. Jr. (1992). How to identify unstable dc operating points. IEEE Trans. Circuits System-I 39, 820-832.
- [26] Green, M., and Willson, A.N. Jr. (1994). (Almost) half of any circuit's operating points are unstable. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I 41, 286-293.

- [27] Hasler, M., and Neiryneck, J. (1986). Nonlinear circuits. Norwood, MA: Artech House.
- [28] Lagarias, J.C., and Trajkovic', Lj. (1999). Bounds for the number of dc operating points of transistor circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 46(10), 1216-1221.
- [29] Lee, B.G., and Willson, A.N. Jr. (1983). All two-transistor circuits possess at most three dc equilibrium points. *Proceedings of the 26th Midwest Symposium Circuits and Systems*, 504-507.
- [30] Massobrio, G. and Antognetti, P. (1993). Semiconductor device modeling with spice. (2d Ed.). New York: McGraw-Hill.
- [31] Mathis, W. (1987). *Theorie nichtlinearer netzwerke*. Berlin: SpringerVerlag.
- [32] Melville, R.C., Trajkovic', Lj., Fang, S.C., and Watson, L.T. (1993). Artificial parameter homotopy methods for the dc operating point problem. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 12(6), 861-877.
- [33] Minty, G.J. (1960). Monotone networks. *Proceedings of the Royal Society (London), Series A* 257, 194-212.
- [34] Nielsen, R.O., and Willson, A.N., Jr. (1980). A fundamental result concerning the topology of transistor circuits with multiple equilibria. *Proceedings of IEEE* 68, 196-208.
- [35] Quarles, T.L., Newton, A.R., Pederson, D.O., and Sangiovanni Vincentelli, A. (1994). SPICE 3 version 3F5 user's manual. Berkeley: Department of EECS, University of California.
- [36] Smale, S. (1972). On the mathematical foundations of electrical circuit theory. *Journal of Differential Geometry* 7, 193-210.
- [37] Trajkovic, Lj., and Willson, A.N., Jr. (1992). Theory of dc operating points of transistor networks. *International Journal of Electronics and Communications* 46(4), 228-241.
- [38] Trajkovic, Lj. (1999). Homotopy methods for computing dc operating points. In J.G. Webster (Ed.), *Encyclopedia of electrical and electronics engineering*, New York: John Wiley & Sons.
- [39] Vladimirescu, A. (1994). *The SPICE book*. New York: John Wiley & Sons.
- [40] Willson, A.N., Jr. (1975). *Nonlinear networks*. New York: IEEE Press.
- [41] Willson, A.N., Jr. (1975). The no-gain property for networks containing three-terminal elements. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 22, 678-687.
- [42] Wolf, D., and Sanders, S. Multiparameter homotopy methods for finding dc operating points of nonlinear circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 43, 824-838.
- [43] Yamamura, K., and Horiuchi, K. (1990). A globally and quadratically convergent algorithm for solving nonlinear resistive networks (1990). *IEEE Transactions of Computer-Aided Design* 9(5), 487-499.
- [44] Yamamura, K., Sekiguchi, T., and Inoue, T. (1999). A fixed-point homotopy method for solving modified nodal equations. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 46, 654-665.