



**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ  
ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία  
ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΗΣ  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ**

**ΤΣΟΛΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ**

**Επιβλέπων καθηγητής: ΚΕΧΑΓΙΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ**

**Πάτρα, Μάιος 2024**

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή/φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



## Μελανές οπές και το παράδοξο της πληροφορίας

ΤΣΟΛΗΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Αλέξανδρος Κεχαγιάς

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Αντώνιος Λείσος

Αν. Καθηγητης Ε.Α.Π.

Πάτρα, Μάιος 2024

## **Ευχαριστίες - αφιερώσεις**

*Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω, πρώτα και κύρια τον καθηγητή κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά, που ως Επιβλέπων Α΄ της μεταπτυχιακής μου εργασίας με καθοδήγησε και με συμβούλεψε από την αρχή στο πως να στηθεί, να διορθωθεί και τελικά να ολοκληρωθεί η εργασία.*

*Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την σύζυγο μου Μαρία, για την στήριξη, την ανοχή και την κατανόηση, όχι μόνο κατά την διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αλλά σε όλο το χρονικό διάστημα των μεταπτυχιακών μου σπουδών.*

*Την μεταπτυχιακή μου εργασία θα ήθελα να την αφιερώσω στους καθηγητές ιδίως των φυσικών επιστημών, όλων των βαθμίδων, που ενώ ζούμε σε μια εποχή που θριαμβεύει η επιστήμη, ένας όλο και μεγαλύτερος αριθμός ανθρώπων παρασύρεται στους κόλπους του ανορθολογισμού, της συνομοσιολογίας και της ψευδοεπιστήμης, γι' αυτό η εθύνη που έχουν είναι πολύ μεγάλη, ιδιαίτερα καθώς διδάσκουν σε νέους ανθρώπους. Καθώς και στη μνήμη του πατέρα μου που έφυγε στο ξεκίνημα του ταξιδιού μου σε αυτό το μεταπτυχιακό πρόγραμμα.*

## Περίληψη

Οι μελανές οπές αποτελούν ένα από τα πιο μυστηριώδη και συναρπαστικά φαινόμενα στο σύμπαν. Παρά την επιβεβαίωση τους από παρατηρήσεις και τη θεωρητική τους προσέγγιση από την γενική θεωρία της σχετικότητας, εξακολουθούν να περιβάλλονται από αρκετά μυστήρια, από τα οποία σίγουρα ξεχωρίζει το Παράδοξο της Πληροφορίας. Αυτή η εργασία θα εξετάσει το παράδοξο αυτό, εμβαθύνοντας στην προέλευση, τις επιπτώσεις και τις προτεινόμενες λύσεις αυτού του παραδόξου. Για την καλύτερη κατανόηση του Παραδόξου της Πληροφορίας είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τις θεμελιώδεις ιδιότητες των μελανών οπών. Γι' αυτό αρχικά γίνεται μια παρουσίαση των μελανών οπών από τον σχηματισμό τους μέχρι την δομή και την συμπεριφορά τους μέσα στον χωρόχρονο.

### Λέξεις – Κλειδιά

Μελανές οπές, Schwarzschild, ακτινοβολία Hawking, απώλεια της πληροφορίας, το παράδοξο της πληροφορίας.

# BLACK HOLES AND THE INFORMATION PARADOX

TSOLIS PANAGIOTIS

## **Abstract**

Black holes are one of the most mysterious and fascinating phenomena in the universe. Despite their confirmation through observations and their theoretical approach from the general theory of relativity, they are still surrounded by many mysteries among which the Information Paradox certainly stands out. This article will examine this paradox, delving into its origin, implications, and proposed solutions. For a better understanding of the Information Paradox, it is necessary to understand the fundamental properties of black holes. Therefore, an initial presentation of black holes from their formation to their structure and behavior in spacetime is given.

## **Keywords**

Black Holes, Schwarzschild, Hawking Radiation, loss of information, the Black Hole information paradox.

# Περιεχόμενα

Περίληψη.....	5
Abstract .....	6
Περιεχόμενα .....	7
1. ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΝΕΥΤΩΝΑ .....	9
1.1 Επιτυχίες της Νευτώνειας θεωρίας.....	10
1.2 Αποτυχίες της Νευτώνειας θεωρίας .....	11
2. ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ .....	12
2.1 Εξισώσεις πεδίου του Einstein .....	13
3. ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ.....	18
3.1. Τι είναι οι μελανές οπές .....	18
3.2 Ιστορική αναδρομή .....	19
3.3 Η λύση Schwarzschild .....	24
3.4 Συντεταγμένες Kruskal - Szekeres .....	32
3.5 Διαγράμματα Penrose .....	34
3.6 Η μετρική Kerr - Newman .....	35
3.7 Η μελανή οπή Kerr.....	38
4. ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ HAWKING .....	42
4.1 Θερμοδυναμική των μελανών οπών .....	42
4.2 Νόμοι της Μηχανικής των μελανών οπών.....	42
4.3 Παραγωγή σωματιδίων λόγω βαρυτικής κατάρρευσης .....	44
4.3.1 Συνοπτικά η απόδειξη της ακτινοβολίας Hawking.....	45
4.4 Ακτινοβολία Hawking.....	48
5. ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ .....	56
5.1 Καθαρές Καταστάσεις (Pure States).....	56
5.1.2 Διαφορές και Σημασία .....	58
5.2 Εντροπία Von Neumann .....	59
5.3 Entanglement.....	60
5.3.1 Μαθηματική Περιγραφή .....	60
6. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ.....	62
6.1 Εισαγωγή.....	62
6.2 Χάσιμο πληροφορίας .....	63
6.3 Τρόποι επίλυσης του Παράδοξου .....	67
7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ .....	78
Βιβλιογραφία.....	79

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλές φορές λέγεται ότι η πραγματικότητα ξεπερνά τη φαντασία, αυτή η έκφραση δεν είναι πουθενά πιο εύστοχη από την περίπτωση των μαύρων τρυπών. Ίσως τίποτα να μην συναρπάξει περισσότερο το ανθρώπινο μυαλό από τις μαύρες τρύπες, οι οποίες θεωρούνται εδώ και καιρό ένα από τα πιο συναρπαστικά αλλά και αινιγματικά φαινόμενα της αστροφυσικής. Τα ουράνια αυτά αντικείμενα έχουν προέλθει από την βαρυτική κατάρρευση τεράστιων αστερών και διαθέτουν βαρυτικά πεδία τόσο ισχυρά που ακόμα και το φως είναι αδύνατο να ξεφύγει από αυτά. Κεντρικό σημείο, έχοντας και μεγάλη σημασία στην προσπάθεια του ανθρώπου να κατανοήσει τις μαύρες τρύπες και την φύση τους, αποτελεί το «Παράδοξο της Πληροφορίας». Εδώ και περίπου 45 χρόνια, από τότε που ο Stephen Hawking κατάφερε να αποδείξει, θεωρητικά μιας και δεν έχει διαπιστωθεί πειραματικά, ότι οι μαύρες τρύπες εκπέμπουν σωματίδια και ακτινοβολία, η γνωστή τώρα πια ως «Ακτινοβολία Hawking», σαν να ήταν ένα συνηθισμένο θερμό σώμα και ότι η εξάχνωση μιας μαύρης τρύπας οδηγεί στην εξαφάνιση της μνήμης της, των πληροφοριών που περιέχει, στην αδυναμία δηλαδή να επιστραφεί στο σύμπαν, μέσω του φωτός της εξάχνωσης, η ιστορία του σχηματισμού της μαύρης τρύπας, γεννήθηκε το πρόβλημα που είναι γνωστό ως το «Παράδοξο της Πληροφορίας». Ένα πρόβλημα, άλυτο μέχρι σήμερα, που ξεπερνά τα όρια της αστροφυσικής και φέρνει σε μεγάλη αντίθεση την κβαντική φυσική και τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Σύμφωνα με την Γ.Θ.Σ. το μόνο που μπορούμε να γνωρίζουμε για μια μαύρη τρύπα είναι η μάζα της, το φορτίο της και η στροφορμή της. Οτιδήποτε άλλο, οποιαδήποτε πληροφορία, εξαφανίζεται για πάντα πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων. Σύμφωνα όμως με τις αρχές της κβαντικής φυσικής η πληροφορία δεν γίνεται να καταστραφεί ποτέ και θα πρέπει να διατηρείται πάντα.

Στην παρούσα εργασία μελετάμε αρχικά τις μελανές οπές και στην συνέχεια το παράδοξο της πληροφορίας στις μελανές οπές ακολουθώντας την ημι-κλασική μέθοδο.

Περιγράφονται παρακάτω τα περιεχόμενα της εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η βαρυτική θεωρία του Νεύτωνα με τις επιτυχίες και της αποτυχίες της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια μικρή εισαγωγή στην γενική θεωρία της σχετικότητας, εστιασμένη στις εξισώσεις Einstein.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση των μελανών οπών. Ιστορική αναδρομή και περιγραφή. Από τις πεδιακές εξισώσεις Einstein εστιάζουμε στις τρεις ακριβείς λύσεις αυτών των εξισώσεων: τις μετρικές Schwarzschild, Reissner – Nordstrom και Kerr.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την ημι-κλασική μέθοδο του Hawking για την μελέτη εκπομπής της ομώνυμης ακτινοβολίας.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε αρκετά σύντομα κάποιες έννοιες που η εισαγωγή τους είναι απαραίτητη για την μετέπειτα παρουσίαση του Παράδοξου της Πληροφορίας.

Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε αναλυτικά το Παράδοξο της Πληροφορίας, τις προσπάθειες επίλυσης καθώς και τις συνέπειες του παράδοξου.



# 1. ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΝΕΥΤΩΝΑ

Σχεδόν όλοι οι άνθρωποι γνωρίζουν από την γέννηση τους, ενστικτωδώς, την βαρύτητα. Η έλξη της στον ανθρώπινο νου είναι ακαταμάχητη.

Τι είναι όμως η βαρύτητα και πως λειτουργεί; Σύμφωνα με την σύγχρονη φυσική υπάρχουν τέσσερις τύποι θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων που περιγράφουν τις διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στο σύμπαν. Η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, η ισχυρή αλληλεπίδραση, η ασθενής αλληλεπίδραση και η βαρυτική αλληλεπίδραση.

Από αυτές τις 4 την βαρύτητα την βιώνουμε άμεσα με αποτέλεσμα να μοιάζει ότι είναι η σημαντικότερη από τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις. Ουσιαστικά βρίσκεται παρούσα σε όλες τις εκφάνσεις της ζωής του ανθρώπου, κάθε χρονική στιγμή. Ακόμα και πριν κάποιος πάει στο σχολείο ή στο πανεπιστήμιο, όπου έρχεται σε επαφή με την φυσική και τους νόμους της, την συναντούμε στην κίνηση των σωμάτων που πέφτουν από κάποιο ύψος ελεύθερα προς τη Γη, στην τροχιά της Γης γύρω από τον Ήλιο που παρ' ότι έχει ταχύτητα δεν απομακρύνεται από αυτόν, στην δυσκολία διαφυγής των σωμάτων από την Γη αλλά και στην διαστολή του σύμπαντος.

Από την αρχαιότητα ξεκίνησε η προσπάθεια του ανθρώπου για να κατανοήσει και να περιγράψει την βαρύτητα. Από τον Έλληνα φιλόσοφο Αριστοτέλη (348 – 322 π.χ.) αρχίζει το ταξίδι του ανθρώπινου νου προς την γνώση της βαρύτητας με την έννοια της δύναμης.

Στην συνέχεια ο Αρίσταρχος (310 – 250 π.χ.) βγάζει τη Γη από το κέντρο του κόσμου, προτείνοντας το ηλιοκεντρικό μοντέλο. Βέβαια αυτό που επικρατεί για σχεδόν 1400 χρόνια είναι το γεωκεντρικό μοντέλο του Κλαύδιου Πτολεμαίου (100 – 170 μ.χ.), στηριζόμενος στην θεωρία του Αριστοτέλη.

Το 1514 ο Νικόλαος Κοπέρνικος (1473 – 1543 μ.χ) δημοσιεύει το έργο του για την ηλιοκεντρική θεωρία. Στην συνέχεια ο Γαλιλαίος (1564 – 1642 μ.χ.), σε πλήρη αντίθεση με την Αριστοτελική φυσική, εισάγει την επιστημονική μέθοδο και υιοθετώντας την εξήγαγε την αρχή της αδράνειας, η οποία έγινε αξίωμα της μηχανικής από τον Ισαάκ Νεύτωνα, έναν αιώνα πιο μετά.

Ουσιαστικά όμως η πρώτη μαθηματική διατύπωση μιας θεωρίας για την βαρύτητα προήλθε από τον Νεύτωνα (1642 – 1726 μ.χ.). Τεράστια η συμβολή του στην κατανόηση της βαρύτητας μέσω του βασικού του έργου «Οι μαθηματικές αεχές της Φυσικής Φιλοσοφίας» (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) που εκδόθηκε το 1687. Σε αυτό το τρίτομο έργο ο Νεύτωνα έθεσε τις τρεις αρχές της δυναμικής των σωμάτων, που ουσιαστικά αποτελούν την βάση της φυσικής του Νεύτωνα και είναι περισσότερο γνωστές ως οι τρεις νόμοι του Νεύτωνα.

1. Αρχή της αδράνειας (1ος νόμος του Νεύτωνα): Όταν σε ένα σώμα η συνισταμένη των δυνάμεων που αλληλοεπιδρούν είναι μηδενική, τότε το σώμα διατηρεί την κατάσταση ηρεμίας του ή κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.
2. Αρχή της διατήρησης της ορμής (2ος νόμος του Νεύτωνα): Με την παρουσία δύναμης ή δυνάμεων, η μεταβολή στην κίνηση (η επιτάχυνση) είναι ανάλογη με την δύναμη ή την συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται και η κατεύθυνση στην οποία συμβαίνει είναι η κατεύθυνση της δύναμης ή της συνισταμένης των δυνάμεων. Ισχύει ο τύπος:  $\Sigma F = m \cdot a$

3. Αρχή της δράσης και της αντίδρασης (3ος νόμος του Νεύτωνα): Για κάθε δράση στην φύση υπάρχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση.

Εκτός από αυτές τις αρχές ο Νεύτωνας διατύπωσε και τον νόμο της παγκόσμιας έλξης. Οι σημαντικότερες ιδιότητες της βαρυτικής δύναμης κατά Νεύτωνα συνοψίζονται στα εξής:

1. Είναι μια δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο συμπαγών σωμάτων. Ουσιαστικά πρόκειται για την έλξη ανάμεσα σε δυο σώματα με μάζα, στην κατεύθυνση που ενώνει τα σώματα.
2. Πρόκειται για δύναμη που δρα ακαριαία.
3. Είναι δύναμη ανάλογη με τις μάζες που έχουν τα σώματα που αλληλεπιδρούν. Συνέπεια αυτού είναι ότι αν ένα σώμα δεν έχει μάζα τότε δεν υφίσταται την βαρυτική δύναμη.
4. Είναι δύναμη που μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με το τετράγωνο της απόστασης που απέχουν τα δυο σώματα.

Τα παραπάνω συνοψίζονται με την βοήθεια της μαθηματικής εξίσωσης:

$$F = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (1.1)$$

Μέσω αυτής της απλής εξίσωσης ο Νεύτωνας κατάφερε να διατυπώσει μια ακριβή περιγραφή για την βαρύτητα. Παρ' ότι σήμερα η γενική σχετικότητα του Αϊνστάϊν έχει αντικαταστήσει τη θεωρία του Νεύτωνα, αυτή εξακολουθεί να χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις ασθενών πεδίων και όταν οι ταχύτητες των σωμάτων είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός μιας και είναι πιο απλό να εργαστεί κάποιος με αυτή και δίνει αποτελέσματα με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

## 1.1 Επιτυχίες της Νευτώνειας θεωρίας

Μέσω αυτού του μαθηματικού εργαλείου (σχέση 1.1) κατέστη εφικτό να εξηγηθεί κάθε φαινόμενο που σχετίζεται με την βαρύτητα. Να εξηγηθεί γιατί ένα μήλο πέφτει από ένα δέντρο ή γιατί η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο. Μεγάλη επιτυχία πάντως και από τις πρώτες της θεωρίας είναι η ερμηνεία των νόμων του Kepler. Μέσω των νόμων του Kepler περιγράφεται η κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο. Πρόκειται για τροχιακές κινήσεις που είναι ελλειπτικές, με τον Ήλιο να βρίσκεται σε μια από τις δυο εστίες. Οι νόμοι όμως δεν μπορούσαν να εξηγήσουν γιατί οι πλανήτες κινούνται σύμφωνα με τον τρόπο αυτό.

Επίσης ο τρίτος νόμος του Kepler είχε εφαρμογή σε πλανήτες που βρίσκονταν σε κίνηση γύρω από τον Ήλιο, χωρίς όμως να εφαρμόζονται στην περίπτωση της Σελήνης που κινείται γύρω από την Γη αλλά και των δορυφόρων του Δία. Ο παγκόσμιος νόμος της βαρύτητας του Νεύτωνα κατάφερε να εξηγήσει τις διάφορες αστρονομικές παρατηρήσεις της τότε εποχής. Μέσω αυτού μπόρεσαν να γίνουν πολύ ακριβείς προβλέψεις σε σχέση με την κίνηση των ουράνιων σωμάτων μέσα στο ηλιακό μας σύστημα.

Μια άλλη επιτυχία του νόμου της Παγκόσμιας Έλξης αποτελεί η «καθολικότητα» της. Μέσω αυτού και μόνου εξηγείται κάθε βαρυτικό φαινόμενο στη Γη αλλά βρίσκει και εφαρμογή σε οποιοδήποτε σύστημα αστρικών σωμάτων.

Την μεγαλύτερη πάντως επιτυχία της η Νευτώνεια θεωρία την σημείωσε το 1846, κατά την ανακάλυψη του Ποσειδώνα, από τον διευθυντή του αστεροσκοπείου του Βερολίνου, Galle,

αξιοποιώντας τους θεωρητικούς υπολογισμούς που είχε κάνει ο Γάλλος αστρονόμος La Verrier. Ο La Verrier επειδή είχαν παρατηρηθεί μικρές αποκλίσεις στην τροχιά της κίνησης του Ουρανού σε σχέση με ότι υπολογιζόταν θεωρητικά, είχε κάνει την υπόθεση της ύπαρξης ενός ακόμα πλανήτη, του όγδοου, στο ηλιακό μας σύστημα και είχε υπολογίσει θεωρητικά και την θέση του.

## 1.2 Αποτυχίες της Νευτώνειας θεωρίας

Η εξίσωση του νόμου της παγκόσμιας έλξης και οι έννοιες πάνω στις οποίες στηρίζεται εδώ και 100 χρόνια περίπου θεωρούνται λανθασμένες. Τώρα πια γνωρίζουμε ότι:

1. Η βαρύτητα δεν δρα ακαριαία. Το αντίθετο μάλιστα ισχύει. Κάθε αλληλεπίδραση διαδίδεται όχι ακαριαία αλλά με πεπερασμένη ταχύτητα που έχει ανώτερο όριο την ταχύτητα του φωτός.
2. Η μάζα δεν είναι αρκετή από μόνη της για να μπορέσει να περιγράψει την βαρύτητα. Πρέπει εκτός από το μέγεθος που έχει η μάζα να ληφθεί στα υπόψη και πως κατανέμεται στον χώρο.

Ακόμα και ο ίδιος ο Νεύτωνας δεν ένιωθε «καλά» με την έννοια της δράσης από απόσταση που απόρρεε από τις εξισώσεις της θεωρίας του. Η στιγμιαία δράση δύναμης από απόσταση μεταξύ δυο σωμάτων που δεν βρίσκονται σε επαφή εμπειρείχε ένα μυστήριο.

Αν όμως αποκλειστεί η ακαριαία δράση και γίνει δεκτό ότι μεσολαβεί κάποιος χρόνος για να διαδοθεί η αλληλεπίδραση χωρίς την αλλαγή στις έννοιες του χώρου και του χρόνου που ίσχυαν την εποχή του Νεύτωνα αυτό αυτόματα οδηγεί σε ένα μη σταθερό πλανητικό μοντέλο.

Για παραπάνω από δυο αιώνες η χρήση του νόμου της βαρύτητας του Νεύτωνα ήταν καθολική μιας και η εγκυρότητα της είχε επιβεβαιωθεί με μεγάλη επιτυχία από πάρα πολλά πειράματα, όμως μια αστρονομική παρατήρηση ήταν ικανή να προκαλέσει μεγάλη αμφισβήτηση και να αναδείξει τις αδυναμίες στη θεωρία του Νεύτωνα. Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή προκάλεσε μια μικρή ρωγμή στο οικοδόμημα της θεωρίας του Νεύτωνα που οδήγησε όμως στην κατάρρευση του.

Ανά 88 ημέρες περίπου ο πλανήτης Ερμής εκτελεί μια πλήρη τροχιά γύρω από τον Ήλιο, φτάνοντας σε εκείνο το σημείο, της τροχιάς του, ώστε η απόσταση του από τον Ήλιο να είναι η μικρότερη δυνατή, πρόκειται για το περιήλιο. Σύμφωνα με την θεωρία του Νεύτωνα το σημείο θα έπρεπε να είναι σταθερό, πάντα το ίδιο, εκτός αν και υπεισέρχονται εξωτερικοί παράγοντες. Δηλαδή πολύ απλά θα έπρεπε να είναι «κλειστή» η τροχιά του Ερμή γύρω από τον Ήλιο. Αυτό φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

Οι αστρονομικές παρατηρήσεις όμως έδειχναν κάτι τελείως διαφορετικό. Το περιήλιο του Ερμή φαινόταν να αλλάζει πιο πολύ από αυτό που προέβλεπε η θεωρία του Νεύτωνα και πιο συγκεκριμένα κατά 0,1035 δευτερόλεπτα τόξου σε κάθε περίοδο της τροχιάς. Σε ένα έτος αυτό αντιστοιχεί σε 0,4297 δευτερόλεπτα. Για κάμποσες δεκαετίες οι αστρονόμοι προσπαθούσαν να βρουν μια εξήγηση για αυτή την ανωμαλία στην κίνηση του Ερμή που να είναι όμως σύμφωνη με την βαρυτική θεωρία του Νεύτωνα. Τελικά κατέληξαν στην υπόθεση της ύπαρξης ενός μικρού πλανήτη που η παρουσία του έχει ως αποτέλεσμα να επηρεάζεται η τροχιά του Ερμή και να προκαλείται έτσι η απόκλιση που είχε παρατηρηθεί. Βέβαια αυτός ο πλανήτης θα έπρεπε να είναι τόσο πολύ μικρός που να ήταν άρατος από τα τηλεσκόπια της εποχής. Η εκτίμηση στην βαρυτική θεωρία του Νεύτωνα αλλά και η μη

ύπαρξη μιας άλλης καλύτερης θεωρίας για την βαρύτητα είχε οδηγήσει τους επιστήμονες να καλύπτονται από την υπόθεση της παρουσίας ενός αόρατου πλανήτη.

## 2. ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η Γενική Σχετικότητα είναι ίσως η πιο όμορφη θεωρία της φυσικής που έχει ποτέ ανακαλυφθεί. Περιγράφει ένα από τα πιο διάχυτα χαρακτηριστικά του κόσμου που βιώνουμε, την βαρύτητα, μέσω μιας κομψής μαθηματικής δομής, της διαφορικής γεωμετρίας του καμπυλωμένου χωροχρόνου, που οδηγεί σε σαφείς προβλέψεις που έχουν λάβει θεαματική πειραματική επιβεβαίωση.

Η Γενική Σχετικότητα είναι η θεωρία του Albert Einstein, που δημοσιεύτηκε το 1915, για τον χώρο, τον χρόνο και την βαρύτητα. Ουσιαστικά είναι μια αρκετά απλή θεωρία, σε σύγκριση για παράδειγμα με οτιδήποτε αφορά την κβαντική μηχανική. Η κεντρική ιδέα είναι απολύτως ευθύς: ενώ οι περισσότερες δυνάμεις της φύσης αντιπροσωπεύονται από πεδία που ορίζονται στον χωρόχρονο (όπως για παράδειγμα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο), η βαρύτητα είναι εγγενής στον ίδιο τον χωρόχρονο. Ειδικότερα αυτό που βιώνουμε ως βαρύτητα είναι μια εκδήλωση της καμπυλότητας του χωροχρόνου.

Η καμπυλότητα του χωροχρόνου έχει άμεση σχέση με την ορμή και την ενέργεια της ύλης που περιέχεται σε αυτόν. Από τις εξισώσεις του Einstein, που ουσιαστικά είναι ένα σύστημα 10 διαφορικών εξισώσεων, περιγράφεται η σχέση ανάμεσα στην καμπυλότητα και την ενέργεια.

«Ο χωρόχρονος λέει στην ύλη πως να κινείται και η ύλη στον χωρόχρονο πως να παραμορφώνεται» όπως το έθεσε πολύ σωστά ο φυσικός John Wheeler.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) στηρίζεται στις εξής αρχές:

1. Στην Αρχή του Mach που διατυπώθηκε το 1893 από τον Mach. Σύμφωνα με αυτήν δεν μπορεί να έχει αδράνεια ένα σώμα μέσα σε ένα άδειο Σύμπαν, οπότε δεν μπορεί να γίνει μελέτη της κίνησης του μιας και δεν θα υπάρχει ένα σημείο αναφοράς.
2. Στην Αρχή του Συναλλοιώτου. Σύμφωνα με την αρχή αυτή οι νόμοι της Φυσικής θα πρέπει να μπορούν να εκφράζονται μέσω συναλλοιώτων εξισώσεων, δηλαδή εξισώσεων των οποίων η μορφή γεν γίνεται να αλλάζει μετά τον μετασχηματισμό των συντεταγμένων.
3. Στην Αρχή της Γενικής Αμεταβλητότητας. Σύμφωνα με την αρχή αυτή καθώς μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες, η συναρτησιακή μορφή που έχει η εξίσωση, η αριθμητική τιμή των σταθερών και γενικά όλων των ποσοτήτων που είναι ανεξάρτητες της κατάστασης της ύλης, παραμένουν χωρίς μεταβολή.
4. Στην Αρχή της Ισοδυναμίας. Σύμφωνα με την αρχή και πιο συγκεκριμένα στην ασθενή της εκδοχή λέει ότι υπάρχει ισότητα ανάμεσα στην αδρανειακή και την βαρυτική μάζα. Στην δε ισχυρή εκδοχής της, είναι ισοδύναμοι οι νόμοι της φυσικής που ισχύουν στο βαρυτικό πεδίο με τους νόμους που ισχύουν στο επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς και ουσιαστικά αυτοί οι της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

## Αξιώματα της Γ.Θ.Σ.

1. Ο χωροχρόνος είναι μια 4-D Lorentzian πολλαπλότητα που είναι εφοδιασμένη με ένα σύνδεσμο.
2. Τα ελεύθερα σωμάτια ακολουθούν τις χρονοειδείς γεωδαισιακές.
3. Η ορμή, η ενέργεια και οι τάσεις της ύλης περιγράφονται με την βοήθεια ενός συμμετρικού τανυστή  $T_{\mu\nu}$  ο οποίος διατηρείται.
4. Μέσω των εξισώσεων του Einstein υπάρχει σύνδεση της καμπυλότητας του χωροχρόνου με τον τανυστή ενέργειας – ορμής της ύλης.

### 2.1 Εξισώσεις πεδίου του Einstein

Όπως οι εξισώσεις του Μάξγουελ περιγράφουν το πως το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο καθορίζονται από τα φορτία και τα ρεύματα, έτσι και οι εξισώσεις πεδίου του Αϊνστάιν ρυθμίζουν πως η μετρική (γεωμετρία του χώρου) καθορίζεται από την ενέργεια και την ορμή. Οι εξισώσεις πεδίου μπορούν να προκύψουν με δυο τρόπους. Πρώτα με κάποια άτυπη συλλογιστική κοντά σε αυτό που σκεφτόταν ο Αϊνστάιν και στη συνέχεια ξεκινώντας από μια δράση και εξάγοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις κινήσεις.

Ουσιαστικά η ιδέα ήταν να βρεθεί μια εξίσωση η οποία θα αντικαταστήσει την εξίσωση του Poisson στην Νευτώνεια Βαρύτητα.

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.1)$$

Όπου  $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$  είναι ο τελεστής Laplace στο χώρο,  $\rho$  η πυκνότητα μάζας,  $G$  η σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης και  $\Phi$  το δυναμικό του Νευτώνιου βαρυτικού πεδίου

$$\Phi = -\frac{Gm}{r} \quad (2.2)$$

όπου  $m$  η μάζα-πηγή του βαρυτικού πεδίου.

Στο αριστερό μέλος της (2) έχουμε ένα διαφορικό δεύτερης τάξης που ενεργεί στο βαρυτικό δυναμικό και στο δεξιό μέλος έχουμε ένα μέτρο της κατανομής της μάζας. Μια σχετικιστική γενίκευση θα πρέπει να έχει τη μορφή μιας εξίσωσης μεταξύ τανυστών. Γνωρίζουμε ότι η γενίκευση του τανυστή μάζας είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής  $T_{\mu\nu}$ . Εν τω μεταξύ το βαρυτικό δυναμικό, πρέπει να αντικατασταθεί από τον μετρικό τανυστή, Θα μπορούσαμε επομένως να υποθέσουμε ότι η νέα μας εξίσωση θα πρέπει να έχει τον  $T_{\mu\nu}$  ανάλογο με κάποιον τανυστή, ο οποίος είναι δεύτερης τάξης παράγωγος της μετρικής

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

Αλλά η εξίσωση αυτή θέλουμε να είναι πλήρως τανυστική.

Το αριστερό μέλος της (3) δεν είναι ένας τανυστής, είναι απλώς ένας προτεινόμενος συμβολισμός για να δείξουμε ότι θα θέλαμε έναν συμμετρικό (0,2) τανυστή δεύτερης τάξης στις παραγώγους της μετρικής. Η πρώτη επιλογή είναι να ενεργήσουμε νταλαμπερτ  $= \nabla^\mu \nabla_\mu$  πάνω στην μετρική  $g_{\mu\nu}$ , αλλά αυτόματα μηδενίζεται από την μετρική

συμβατότητα. Ευτυχώς υπάρχει όμως μια προφανής ποσότητα η οποία δεν είναι μηδέν και κατασκευάζεται από δεύτερες αλλά και πρώτες τάξης παραγώγους της μετρικής και αυτή είναι ο τανυστής Riemann  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ . Ο οποίος είναι συνάρτηση των συμβόλων Christoffel και των παραγώγων τους και κατά συνέπεια του μετρικού τανυστή και των παραγώγων του, πρώτης και δεύτερης τάξης. Φαίνεται όμως να μην έχει τον ακριβή αριθμό δεικτών, αλλά η συστολή του τανυστή Riemann οδηγεί σε έναν τανυστή δεύτερης τάξης, τον τανυστή Ricci  $R_{\mu\nu}$  ο οποίος είναι συμμετρικός δηλαδή  $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ . Τώρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις του βαρυτικού πεδίου είναι:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Για κάποια σταθερά  $\kappa$ . Στην πραγματικότητα ο Αϊνστάιν δεν πρότεινε αυτή την εξίσωση κατευθείαν, υπάρχει ένα θέμα με την ενέργεια. Για την διατήρηση του

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.5)$$

Σύμφωνα με την (5) θα πρέπει να έχουμε:

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.6)$$

Αυτό σίγουρα δεν ισχύει σε μια αυθαίρετη γεωμετρία. Ξέρουμε ότι ισχύει:

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R \quad (2.7)$$

Αλλά για το προτεινόμενο πεδίο μας συνεπάγεται ότι:  $gR = \kappa^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa T$ , παίρνοντας τώρα αυτά θα έχουμε ότι:

$$\nabla^{\mu} T = 0 \quad (2.8)$$

Η (8) μας λέει ότι το  $T$  είναι σταθερό σε όλο τον χωρόχρονο. Αυτό όμως είναι εξαιρετικό απίθανο αφού  $T = 0$  στο κενό,  $T \neq 0$  στην ύλη. Άρα βλέπουμε ότι η προσπάθεια πρέπει να συνεχιστεί.

Γνωρίζουμε όμως έναν συμμετρικό τανυστή (0,2), ο οποίος προκύπτει από τον τανυστή Ricci, από τον συνδυασμό του τανυστή Ricci και της βαθμωτής καμπυλότητας Ricci και αυτός είναι ο τανυστής Αϊνστάιν

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

ο οποίος πάντα υπακούει στο  $\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$ . Άρα οδηγούμαστε να προτείνουμε

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

ως μια εξίσωση πεδίου για την μετρική. Πιο συνηθισμένο όμως είναι να γράφεται  $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  παρά να χρησιμοποιείται η συντομογραφία  $G_{\mu\nu}$ . Αυτή η εξίσωση ικανοποιεί όλες τις προφανείς απαιτήσεις, το δεξιό μέλος είναι μια συναλλοίωτη έκφραση

της ενέργειας και της πυκνότητας ορμής με την μορφή ενός συμμετρικού και διατηρούμενου (0,2) τανυστή, ενώ το αριστερό μέλος είναι ένα συμμετρικός και διατηρήσιμος (0,2) τανυστής που προκύπτει από την μετρική και την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της. Το μόνο που μένει τώρα είναι να καθοριστεί η σταθερά αναλογίας  $\kappa$ , και να δούμε αν το αποτέλεσμα αναπαράγει την βαρύτητα όπως την γνωρίζουμε. Με άλλα λόγια να δούμε αν αυτή η εξίσωση προβλέπει την εξίσωση Poisson βαρυτικό δυναμικό στο Νευτώνειο όριο;

Χρησιμοποιώντας  $R = -\kappa T$  η (10) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.11)$$

Αυτή είναι η ίδια εξίσωση λίγο διαφορετικά γραμμένη.

Θεωρούμε μια τέλεια ρευστή-πηγή ενέργειας-ορμής για την οποία θα υποθέσουμε ότι περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας – ορμής και είναι της μορφής

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Όπου  $\rho$  η πυκνότητα του ρευστού. Στο Νευτώνειο όριο μπορούμε να αμελήσουμε την πίεση, μιας και η πίεση ενός σώματος γίνεται σημαντική όταν τα σωματίδια που το αποτελούν ταξιδεύουν με ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Έτσι τον τανυστή ενέργειας-ορμής  $T_{\mu\nu}$  μπορούμε να τον γράψουμε ως εξής:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu \quad (2.13)$$

Το ρευστό που εξετάζουμε είναι συμπαγές σώμα, όπως η Γη ή ο Ήλιος. Δουλεύοντας στο ρευστό σε κατάσταση ηρεμίας, στην οποία

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0) \quad (2.14)$$

Η χρονική συνιστώσα μπορεί να καθοριστεί μέσω της συνθήκης κανονικοποίησης

$$g_{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1 \quad (2.15)$$

Στην περίπτωση ενός ασθενούς βαρυτικού πεδίου θα έχουμε ένα σχεδόν επίπεδο χωροχρόνο. Ο οποίος ορίζεται ως μια πολλαπλότητα που έχει συντεταγμένες, στις οποίες η μετρική έχει τις ακόλουθες συνιστώσες

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

με  $|h| \ll 1$  σε κάθε σημείο του χωροχρόνου.

Από τον ορισμό της μετρικής του σύμπαντος μπορούμε να βρούμε

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Όπου  $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$  και  $\eta_{\mu\nu}$  η μετρική του επίπεδου χωροχρόνου Minkowski.

Στο όριο του του ασθενούς πεδίου και σύμφωνα με τις (16) και (17) θα έχουμε

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00} \\ g^{00} &= -1 - h_{00} \quad (2.18) \end{aligned}$$

Τότε σε πρώτη τάξη στο  $h_{\mu\nu}$  έχουμε

$$U^{00} = 1 + \frac{1}{2}h_{00} \quad (2.19)$$

Στο δικό μας επίπεδο προσέγγισης μπορούμε  $U^0 = 1$  και αντίστοιχα  $U_0 = -1$ . Τότε:

$$T_{00} = \rho \quad (2.20)$$

και όλες οι άλλες συνιστώσες εξαφανίζονται.

Σε αυτό το όριο η ενέργεια ηρεμίας  $\rho = T_{00}$  θα είναι πολύ μεγαλύτερη από τους άλλους όρους  $T_{\mu\nu}$ , θέλοντας να εστιάσουμε στα  $\mu = 0$  και  $\nu = 0$  της (11) και με

$$T = g^{00} = T_{00} = -T_{00} = -\rho$$

Από την (2.11) θα έχουμε:

$$R_{00} = \kappa(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T) = \kappa(\rho - \frac{1}{2}(-\rho)(\eta_{00} + h_{00})) = \kappa\frac{1}{2}\rho \quad (2.21)$$

Μέσω του τανυστή Ricci που προκύπτει με συστολή του τανυστή Riemann από 4<sup>ης</sup> τάξης σε 2<sup>ης</sup> τάξης

$$R_{\kappa\alpha} = R_{\kappa\mu\alpha}^{\mu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\nu}^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho}$$

παίρνουμε:

$$R_{00} = R_{0\mu 0}^{\mu} = \partial_{\mu} \Gamma_{00}^{\mu} + \partial_0 \Gamma_{\mu 0}^{\mu} + \Gamma_{\tau\rho}^{\rho} \Gamma_{00}^{\mu} - \Gamma_{\tau 0}^{\rho} \Gamma_{\rho 0}^{\tau} \Rightarrow$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \partial_j (g^{i\mu} (\partial_0 g_{0\mu} + \partial_0 g_{\mu 0} - \partial_{\mu} g_{00})) \Rightarrow$$

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \partial_j \delta^{ij} \partial_i g_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (2.22)$$

Συγκρίνοντας την με την (2.21), βλέπουμε ότι η συνιστώσα 00 στο Νευτώνειο όριο προβλέπει:

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} = \frac{1}{2} \kappa \rho \Rightarrow$$

$$-\nabla^2 h_{00} = \kappa \rho \Rightarrow$$

$$\nabla^2 2\Phi = \kappa \rho \Rightarrow \kappa = 8\pi G$$



Όπου έγινε χρήση της (1). Τελικά η (9) και η (10) γράφονται στη μορφή:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

Η (23) αποτελεί τις εξισώσεις πεδίου Einstein της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Όπου:

$R_{\mu\nu}$  είναι ο τανυστής καμπυλότητας Ricci και μας περιγράφει την γεωμετρία ή την καμπυλότητα του χωρόχρονου

$R$  η μονοδιάστατη καμπυλότητα

$g_{\mu\nu}$  είναι ο μετρικός τανυστής και ουσιαστικά πρόκειται για τον χάρακα που έχουμε για να μετράμε αποστάσεις στο σύμπαν

$G$  η σταθερά παγκόσμιας έλξης

$T_{\mu\nu}$  είναι ο τανυστής της ενέργειας- ορμής και περιγράφει το πως κατανέμεται η ενέργεια – μάζα στο χώρο

Μέσω της εξίσωσης Einstein συνδέεται η καμπυλότητα Ricci με την τάση – ενέργεια της ύλης. Οι συνιστώσες της αποτελούνται από δέκα μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για τους συντελεστές της μετρικής  $g_{\mu\nu}$ , που καθορίζουν τις πηγές καμπυλότητας  $T_{\mu\nu}$ . Αυτή η μη γραμμικότητα τους τις κάνει δύσκολα επιλύσιμες. Δεν είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους, επειδή συνδέονται μέσω των τεσσάρων ταυτοτήτων Bianchi, απομένουν έξι ανεξάρτητες εξισώσεις. Υπάρχουν όμως μερικές περιπτώσεις στις οποίες είναι δυνατή η ακριβής επίλυση των εξισώσεων. Μια τέτοια είναι η σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση Schwarzschild, που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Βέβαια η παραπάνω εξίσωση, στην περίπτωση προβλημάτων κοσμολογίας δεν είναι πλήρης μιας και λείπει η κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  η οποία μια δύναμη απωστική και ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης. Τότε η (2.23) γίνεται

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

Τον κοσμολογικό όρο  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , εισήγαγε ο ίδιος ο Einstein έτσι ώστε να μπορούν οι εξισώσεις να δώσουν ως λύση ένα στατικό σύμπαν, αργότερα όμως και αφού ανακαλύφθηκε ότι το σύμπαν διαστέλλεται ο Einstein εγκατέλειψε εντελώς την ιδέα της ύπαρξης στατικού σύμπαντος άρα και της κοσμολογικής σταθεράς. Γνωρίζοντας όμως ότι σύμφωνα με την Κβαντική θεωρία πεδίου το κενό θα πρέπει να έχει μια ελάχιστη ποσότητα ενέργειας, ο κοσμολογικός όρος μπορεί να μην παραληφθεί μιας και μπορεί να ερμηνευτεί ως η πυκνότητα ενέργειας του κενού. Ας αναφερθεί όμως ότι οι παρατηρήσεις στο σύμπαν σε μεγάλες κλίμακες δίνουν ένα πολύ μικρό άνω όριο για την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς, κάτι όμως που δεν είναι σύμφωνο με τις προβλέψεις που γίνονται από την Κβαντική θεωρία πεδίου.

Στο κενό, δηλαδή όταν δεν υπάρχει παρουσία ύλης και ενέργειας, όπου  $T_{\mu\nu} = 0$ , οι εξισώσεις Einstein γράφονται στην παρακάτω πολύ πιο απλή μορφή και έχει και σημαντική φυσική χρησιμότητα.

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.24)$$

### 3. ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ

#### 3.1. Τι είναι οι μελανές οπές

Έχει ειπωθεί ότι κάποιες φορές η πραγματικότητα ξεπερνά την οποιαδήποτε ανθρώπινη φαντασία. Ίσως αυτή η ρήση δεν είναι πουθενά περισσότερο εύστοχη από την περίπτωση των μελανών οπών, μιας και είναι πιο παράξενες και από οτιδήποτε έχει σκεφτεί ένας συγγραφέας βιβλίων επιστημονικής φαντασίας. Οι μελανές οπές ή μαύρες τρύπες είναι τα πιο εξωτικά αντικείμενα που υπάρχουν στο σύμπαν. Γύρω από αυτές, στην γειτονιά τους, η συμπεριφορά του χώρου και του χρόνου ξεφεύγει από κάθε ανθρώπινη εμπειρία. Γι' αυτό πήρε πολύ χρόνο στην επιστημονική κοινότητα να κατανοήσει ότι ένα μεγάλης μάζας άστρο μπορεί να καταρρεύσει με την επίδραση της βαρύτητας του. Για κάποιον, μικρό πάντως, διάστημα υπήρξε ένας ανταγωνισμός ανάμεσα στο όνομα «μελανή οπή» και στο όνομα «παγωμένο αστέρι», που επινοήθηκε για να τονισθεί ότι καθώς καταρρέει ένα αστέρι και προκύπτει μια μελανή οπή, για έναν εξωτερικό παρατηρητή φαίνεται να παγώνει στον χρόνο. Τελικά υιοθετήθηκε ο πραγματικά αποτελεσματικός και συνάμα επιβλητικός όρος «μελανή οπή» που δόθηκε από τον Αμερικανό θεωρητικό φυσικό John Wheeler.

Ας δούμε τι είναι μια μελανή οπή. Πρόκειται για μια περιοχή του διαστήματος από την οποία, λόγω της πανίσχυρης βαρύτητας της, είναι αδύνατο να δραπετεύσει το οτιδήποτε αν εισέλθει στο βαρυτικό της πεδίο, ούτε και το φως. Φως και ύλη μπορούν να εισέλθουν αλλά δεν πρόκειται να καταφέρουν ποτέ να εξέλθουν. Ο John Wheeler τις έχει αποκαλέσει πολιτισμικό σύμβολο: «Σχεδόν όλοι αντιλαμβάνονται τον συμβολισμό μιας μαύρης τρύπας, μοιάζει με ένα ορθάνοιχτο στόμα που καταπίνει τα πάντα χωρίς να αφήνει τίποτα να μπορέσει να ξεφύγει». Λέγεται «μαύρη» επειδή απορροφά όλο το φως το οποίο πέφτει σε αυτή χωρίς να ανακλάται τίποτα. Η μελανή οπή περιβάλλεται από μια σφαιρική περιοχή χώρου που αποτελεί ένα όριο και από την οποία δεν μπορεί τίποτα να διαφύγει, ούτε κάποιο σήμα, ούτε ένα απειροελάχιστο κομμάτι ύλης, αλλά ούτε ακόμα και μια ακτίνα φωτός. Για πολλές δεκαετίες το όριο αυτής της περιοχής ονομαζόταν «σφαίρα Schwarzschild». Τώρα πια αυτό το όριο λέγεται «ορίζοντας γεγονότων». Εδώ ο χωρόχρονος παύει να είναι ένα απλό κοίλωμα και είναι ένα απύθμενο πηγάδι. Η ύλη και το φως συνθλίβονται μέχρι που καταλήγουν σε ένα ιδιόμορφο σημείο, σε μια κατάσταση που έχει μηδενικό όγκο και άπειρη πυκνότητα και καλείται «ιδιομορφία». Εκεί η κατάρρευση των γνωστών νόμων της φυσικής είναι ολοκληρωτική.

Μια μελανή οπή είναι ότι έχει απομείνει από ένα σώμα που έχει υποστεί συνολική βαρυτική κατάρρευση.

Συνοπτικά μπορούμε να αναφέρουμε ότι καθώς συγκεντρώνεται η μεσοαστρική ύλη και σχηματίζονται άστρα που έχουν μάζα από  $0,1M_{\odot}$  μέχρι  $50M_{\odot}$  ( $M_{\odot}=2 \cdot 10^{30}$  Kg, η μάζα του Ήλιου). Με συστολή θα επέλθει σταθεροποίηση του άστρου στην κύρια ακολουθία, κατά την οποία για μερικά δισεκατομμύρια χρόνια θα καίει το υδρογόνο του. Τα άστρα μεγαλύτερης μάζας είναι θερμότερα, φωτεινότερα και η εξέλιξη τους θα είναι γρήγορη. Βέβαια επειδή καταναλώνουν γρήγορα τα καύσιμα τους, αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα σε σχέση με τα άστρα μικρότερης μάζας να φωτοβολούν για λιγότερο χρονικό διάστημα. Ένα άστρο που έχει μάζα οκτώ φορές την μάζα του Ήλιου θα ζήσει για περίπου 20 εκατομμύρια χρόνια, ενώ ένα άστρο με μάζα ίση με το ένα δέκατο της μάζας του Ήλιου θα ζήσει για περίπου 20 δισεκατομμύρια χρόνια.

Αφού έχει καεί περίπου το 10% της μάζας του Η του άστρου, ξεκινάει η καύση του He και το άστρο διογκώνεται σε ερυθρό γίγαντα και η θερμοκρασία της επιφάνειάς του μειώνεται

στους 3000 K. Το άστρο όμως επειδή έχει μεγάλη επιφάνεια παρότι η θερμοκρασία του έχει μειωθεί εξακολουθεί να φωτοβολεί έντονα. Σε αυτή την κατάσταση, του ερυθρού γίγαντα, το άστρο μένει για χρόνο μικρότερο από ένα δισεκατομμύριο χρόνια. Η μάζα όμως του άστρου ουσιαστικά καθορίζει την εξέλιξη του.

Όταν ένα άστρο έχει μάζα που είναι μικρότερη από  $4M_{\odot}$  και αφού περάσει το στάδιο του ερυθρού γίγαντα, απαλλάσσεται από την εξωτερική του μάζα και παραμένει η κεντρική του μάζα. Συνήθως αυτή η κεντρική του μάζα είναι μικρότερη του  $1,44M_{\odot}$  (όριο Chandrasekhar) και καταλήγει πρώτα σε λευκό νάνο και μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα όπου εκπέμπει θερμική ακτινοβολία καταλήγει σε μαύρο νάνο. Ο χρόνος που απαιτείται όμως για να συμβεί αυτό είναι μεγαλύτερος από την εκτιμώμενη ηλικία του σύμπαντος, περίπου 14 δισεκατομμύρια χρόνια, μάλλον δεν πρέπει μέχρι σήμερα να έχουν σχηματιστεί μαύροι νάνοι.

Όταν η μάζα του άστρου βρεθεί μεταξύ των  $4M_{\odot}$  και  $10M_{\odot}$ , τότε η μάζα που θα του έχει απομείνει, μετά από την έκρηξη ως supernova, θα είναι μέχρι  $3M_{\odot}$  και το άστρο καταλήγει σε άστρο νετρονίων. Στην περίπτωση ενός σώματος σφαιρικά συμμετρικού, αυτό θα συμβεί όταν η μάζα του σώματος θα έχει συμπιεστεί σε μια ακτίνα που θα είναι ίση με:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ Km} \quad (3.1)$$

Η πυκνότητα αυτής της συμπιεσμένης ύλης θα έχει τιμή

$$\rho_s = \frac{3c^6}{32\pi G^3 M^2} \approx 10^{16} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-2} \frac{g}{cm^3} \quad (3.2)$$

### 3.2 Ιστορική αναδρομή

Ας δούμε λίγο την ιστορία που και μεγάλη είναι και άκρως ενδιαφέρουσα για την έννοια της μελανής οπής. Το γενεαλογικό της δέντρο ξεκινάει από πολύ παλιά. Από την αρχαιότητα και από το ερώτημα των ανθρώπων «γιατί οι πατούσες παραμένουν σταθερά πάνω στο έδαφος». Ουσιαστικά αναρωτιόντουσαν για την βαρύτητα. Ο Αριστοτέλης τοποθέτησε την Γη στο κέντρο του σύμπαντος, οπότε ήταν φυσιολογικό τα πάντα να πέφτουν προς την Γη. Αυτό μέχρι την εμφάνιση του Κοπέρνικου ο οποίος άλλαξε για πάντα το κοσμικό τοπίο, το 1543, τοποθετώντας τον Ήλιο στο κέντρο και την Γη καθώς και τους υπόλοιπους πλανήτες να περιστρέφονται γύρω από αυτών. Αμέσως διατυπώθηκαν πολλές ιδέες για τη βαρύτητα που ανατράπηκαν όμως με την έλευση του Νεύτωνα, το 1687 και την δημοσίευση του μνημειώδες έργο του «Μαθηματικές αρχές της φυσικής φιλοσοφίας», γνωστό ως *Principia*. Με τους νόμους του Νεύτωνα οι επιστήμονες τον 18ο αιώνα θεωρούσαν ότι μπορούν να κατανοήσουν την φύση του σύμπαντος. Εφάρμοζαν τους νόμους για τον προσδιορισμό των κινήσεων των πλανητών αλλά και να μπορέσουν να προβλέψουν τις παλίρροιας. Αλλά και τα άστρα έγιναν εργαλεία μέσω των οποίων θα μπορούσαν να ελεγχθούν οι νόμοι της βαρύτητας. Πάνω σε αυτές τις μελέτες έκανε για πρώτη φορά την εμφάνιση της μια πρόδρομη εκδοχή της μελανής οπής. Η πιθανότητα της ύπαρξης ενός τόσο παράδοξου αντικειμένου προτάθηκε πρώτη φορά από τον Άγγλο αστρονόμο και ιερέα J. Michel το 1784, όπου γράφοντας μια εργασία υπαινίχθηκε τη δυνατότητα μιας μελανής οπής ή πιο σωστά μιας νευτώνειας εκδοχής της μελανής οπής τον 18ο αιώνα. Ο Michel γράφει στο *Philosophical Transactions of the Royal Society*, ότι αν

είχαμε ένα άστρο πολύ μαζικό και συμπαγές η βαρυτική του έλξη θα ήταν τόσο πολύ ισχυρή που ότε καν το φως θα μπορούσε να διαφύγει από την επιφάνεια του και ονόμασε αυτά τα αντικείμενα ως «σκοτεινά άστρα». Το 1796 ο Laplace κατέληξε σε ένα παρόμοιο συμπέρασμα με αυτό του Michel. Βέβαια το αποτέλεσμα του Laplace ήταν διαφορετικό από του Michel γιατί πήρε ως δεδομένο ότι τα ουράνια σώματα που μοιάζουν με τον Ήλιο έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από αυτόν. Βέβαια σε όλους, εκείνη την εποχή, έμοιαζε παράξενο το να ασχολούνται και να προβλέπουν άστρα που δεν καταφέρει ποτέ να δει ο άνθρωπος. Ο Michel και ο Laplace όμως χρησιμοποιούσαν τον νόμο του Νεύτωνα για την βαρύτητα που δεν ήταν πλήρης και για το φως μια θεωρία που δεν ήταν σωστή. Θα έπρεπε να προκύψουν, σχεδόν έναν αιώνα μετά, οι καινούργιες και πιο προηγμένες θεωρίες για την βαρύτητα, την ύλη και το φως ώστε οι επιστήμονες να αρχίσουν να αντιλαμβάνονται την έννοια της μελανής οπής όπως την αντιλαμβανόμαστε τώρα πια, ως μια «τρύπα» στον χωροχρόνο και όχι ως έναν πολύ μεγάλο και σκοτεινό όγκο αστρικής ύλης.

Η επιστημονική κοινότητα χρειάστηκε αρκετό χρόνο μέχρις ότου συνειδητοποιήσει ότι άστρο μεγάλης μάζας γίνεται να καταρρεύσει μόνο την επίδραση της βαρύτητας του, καθώς επίσης να εξετάσει ποια θα ήταν η συμπεριφορά που θα είχε το κατάλοιπο μιας τέτοιας διαδικασίας. Ο Einstein το 1939 είχε δημοσιεύσει ένα επιστημονικό άρθρο στο οποίο ισχυρίστηκε ότι τα άστρα δεν δύναται να καταρρεύσουν με την επίδραση της ίδιας της βαρύτητας τους, γιατί η ύλη είναι αδύνατον να συμπιεστεί πέραν κάποιου συγκεκριμένου ορίου. Πολλοί επιστήμονες τότε, συμφωνούσαν με την άποψη του Einstein. Σημαντική εξαίρεση αποτελούσε ο Wheeler που έχει τον κεντρικό ρόλο στο ζήτημα των μελανών οπών. Οι εργασίες του τις δεκαετίες του 1950 και του 1960 στις οποίες τόνιζε ότι όντως πολλά άστρα θα υποστούν βαρυτική κατάρρευση αλλά υπογράμμισε και τα προβλήματα που θα δημιουργούσε αυτό στην θεωρητική φυσική.

Καθώς ο Α΄ παγκόσμιος πόλεμος βρισκόταν σε εξέλιξη, ο Γερμανός αστρονόμος Karl Schwarzschild ευρισκόμενος στο πεδίο της μάχης, το 1916 και αφού στις 18 Νοεμβρίου του 1915 ο Albert Einstein είχε δημοσιεύσει την εργασία του για την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και αφού καταφέρνει να του στείλουν το άρθρο του Einstein, βρήκε μια ακριβή λύση των πεδιακών εξισώσεων του Einstein, την επονομαζόμενη μετρική Schwarzschild, η οποία περιγράφει έναν σφαιρικό και στατικό χωρόχρονο. Η λύση αυτή έθεσε τις βάσεις για την περιγραφή των τελικών σταδίων της βαρυτικής κατάρρευσης. Ο ίδιος ταχυδρόμησε την λύση στον Einstein, για να την παρουσιάσει, εκ μέρους του στην Πρωσική Ακαδημία των Επιστημών του Βερολίνου στις 13 Ιανουαρίου του 1916, χωρίς κανείς τους τότε να μπορεί να φανταστεί ότι αυτή η κομψή μαθηματική διατύπωση κρύβει πίσω της μια καινούρια τάξη ουράνιων σωμάτων. Ο Einstein στην επιστολή που έστειλε στον Schwarzschild έγραψε: «Δεν περίμενα ότι θα ήταν δυνατή μια ακριβής λύση. Η αναλυτική προσέγγιση σας είναι εξαιρετικά όμορφη». Δυστυχώς όμως ο Schwarzschild πολύ λίγο αργότερα πέθανε στο Ρωσικό μέτωπο. Η λύση που διατύπωσε ήταν η παρακάτω:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

Το 1930 ο Ινδοαμερικανός αστροφυσικός Subrahmanyan Chandrasekhar απέδειξε ότι η μέγιστη μάζα ενός λευκού νάνου είναι ακριβώς ίση με 1,4 φορές την μάζα του Ήλιου  $M = 1,4M_{\odot}$ . Μετά την ανακάλυψη του νετρονίου μια παρόμοια τιμή είχε υπολογιστεί και από τον Σοβιετικό φυσικό Lev Landau για άστρα που αποτελούνταν αποκλειστικά από νετρόνια, οι λεγόμενοι αστέρες νετρονίων, τα απομεινάρια μιας έκρηξης supernova, όπως υποστήριξαν οι Baade και Zwicky. Οι Robert Oppenheimer και George Volkoff μπόρεσαν

να υπολογίσουν το μέγιστο όριο για την τιμή της μάζας ενός αστέρα νετρονίων και το βρήκαν  $M_n = 0,75M_\odot$ . Μεταγενέστεροι υπολογισμοί το όριο αυτό το ανεβάζουν στην τιμή  $M_n \simeq 3M_\odot$ . Για ένα αστροφυσικό σώμα που έχει μάζα μεγαλύτερη από την τιμή  $3M_\odot$  ποιο θα είναι το τελικό στάδιο της εξέλιξης του; Το 1949 οι Oppenheimer και Hartland Snyder αφού μελέτησαν για ένα τέτοιο σώμα την βαρυτική του κατάρρευση έδειξαν ότι για ένα τέτοιο άστρο η «προς τα έξω πίεση» δεν θα ήταν ικανή να το υποβαστάξει και ότι, αν παραλειφθεί ο παράγοντας πίεση από τους υπολογισμούς, τότε ένα ομογενές και σφαιρικό συμμετρικό άστρο θα συστέλλοταν σε ένα μοναδικό σημείο με άπειρη πυκνότητα. Ένα τέτοιο σημείο έχει την ονομασία χωροχρονική ανωμαλία ή πολύ απλά ανωμαλία. Στην πραγματικότητα αυτή η χωροχρονική ανωμαλία αποτελεί το όριο του τέλους του χρόνου, αυτό δηλαδή που ο Einstein θεωρούσε εντελώς απαράδεκτο.

Στην συνέχεια και λόγω του Β΄ Παγκόσμιου Πολέμου το θέμα της βαρυτικής κατάρρευσης ατόνησε μιας και οι περισσότεροι επιστήμονες ασχολήθηκαν με το πεδίο της πυρηνικής φυσικής. Το ενδιαφέρον για το θέμα της βαρυτικής κατάρρευσης επανήλθε, περίπου 25 χρόνια αργότερα, μετά την ανακάλυψη κάποιων πολύ απομακρυσμένων αντικειμένων στο Σύμπαν, που ονομάστηκαν κβάζαρ. Πιο συγκεκριμένα η ανακάλυψη των γαλαξιακών πηγών ακτινών X το 1962, των κβάζαρ το 1963 και των αστέρων νετρονίων αναθέρμαναν το ενδιαφέρον και το 1967 ο John Wheeler εισαγάγει για πρώτη φορά τον όρο «μαύρη τρύπα» που αντικατέστησε την προηγούμενη ονομασία «παγωμένο άστρο». Η νέα ονομασία γνώρισε αμέσως πολύ μεγάλη επιτυχία και ξεκίνησε η «χρυσή περίοδος» για «τα τελειότερα μακροσκοπικά αντικείμενα που υπάρχουν στο σύμπαν» όπως δήλωσε ο Subrahmanyan Chandrasekhar το 1983, καθώς παραλάμβανε το Νόμπελ φυσικής. Οι μελανές οπές μπορούσαν να προσφέρουν όλα όσα κάθε φυσικός λαχταρούσε σ' ένα θεωρητικό αποτέλεσμα, την απλότητα και την ομορφιά.

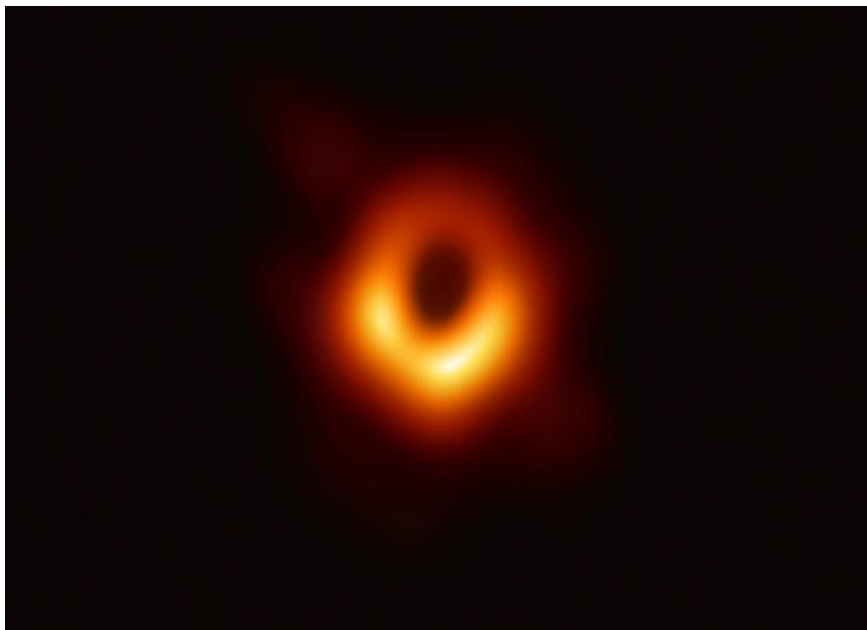
Χρειάστηκαν σχεδόν 200 χρόνια, από την αρχή της ιδέας της μελανής οπής, μέχρι τις παρατηρήσεις, στις τελευταίες δεκαετίες του 20ου αιώνα, που ουσιαστικά απέδειξαν την ύπαρξη της. Αφού βέβαια προηγήθηκε όλα αυτά τα χρόνια μεγάλη μάχη μεταξύ των επιστημόνων και αφού κάποιοι φυσικοί πήγαν κόντρα στο ρεύμα για να προωθήσουν την ιδέα της μαύρης τρύπας.

Η πρώτη εικόνα προσομοίωσης μιας μελανής οπής έγινε το 1978 με την βοήθεια ενός υπολογιστή IBM 7040 από τον Γάλλο Jean-Pierre Luminet, αστροφυσικό και ερευνητή. Επρόκειτο για μια προσομοίωση που βασίζεται στις τότε υποτιθέμενες φυσικές ιδιότητες μιας μαύρης τρύπας και του δίσκου του αερίου της, όπως ο ρυθμός περιστροφής και η θερμοκρασία της, αλλά και στη Γ.Θ.Σ.



**Εικόνα 1:** Η πρώτη εικόνα προσομοίωσης δημοσιεύτηκε το 1979 © Jean-Pierre Luminet/CNRS Phototheque

Τον Απρίλιο του 2019, από την συνεργασία ενός παγκόσμιου δικτύου επίγειων τηλεσκοπίων (Event Horizon Telescope) αλλά και πλήθους επιστημών, προέκυψε η πρώτη εικόνα μια μελανής οπής, ύστερα από παρατηρήσεις για το σκοτεινό και ογκώδες αντικείμενο στο κέντρο του Messier 87 ή M87. Αυτή η μελανή οπή έχει μάζα περίπου 6,5 δισεκατομμύρια φορές εκείνη του ήλιου και βρίσκεται 55 εκατομμύρια έτη φωτός μακριά από τη Γη. Η μελανή οπή έχει ονομαστεί M87.



**Εικόνα 2:** Φωτογραφία Μελανής Οπής M87  
(<https://www.nasa.gov/universe/what-are-black-holes/>)

Με βάση το μέγεθος των μελανών οπών μπορούμε να τις κατατάξουμε σε τέσσερες κατηγορίες:

1. **Αστρικές Μαύρες Οπές:** Αυτές οι οποίες δημιουργήθηκαν κατά το τελικό στάδιο της εξέλιξης των άστρων που έχουν μάζα  $M = 3 - 100M_{\odot}$ . Είναι δυνατόν να βρεθούν ως μεμονωμένα αντικείμενα ή σε έχοντας σχηματίσει διπλά συστήματα με άλλους συνηθισμένους αστέρες παντού στους γαλαξιακούς δίσκους.
2. **Μαύρες Οπές Σμηγνών:** Αυτές οι Οπές προκύπτουν από την βαρυτική κατάρρευση των άστρων που έχουν μάζα περίπου ίση με  $M \simeq 1000M_{\odot}$ . Αυτά τα άστρα κατά την διαδικασία της καύσης του οξυγόνου γίνονται πολύ ασταθείς, με αποτέλεσμα αυτή η οποιαδήποτε αστάθεια να οδηγήσει στην βαρυτική κατάρρευση ή στην έκρηξη του άστρου. Βρίσκονται στα κέντρα των σφαιρικών σμηγνών και στην γαλαξιακή άλω.
3. **Γαλαξιακές Μαύρες Οπές:** Αστέρες που έχουν μάζα  $M = 10^6 - 10^9M_{\odot}$  παρουσιάζουν μεγάλη αστάθεια σε όλες τις διακυμάνσεις του χωροχρόνου. Υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να υποστούν βαρυτική κατάρρευση αμέσως μόλις δημιουργηθούν και ουσιαστικά πριν ακόμα ξεκινήσει στο εσωτερικό τους η θερμοπυρηνική σύντηξη. Επίσης οι μελανές οπές τέτοιου μεγέθους μπορούν να δημιουργηθούν ύστερα από την συνένωση μικρότερων μελανών οπών. Είναι δυνατόν να βρεθούν στο κέντρο των γαλαξιών, στο κέντρο των κβάζαρ (quasar) και ίσως στον μεσογαλαξιακό χώρο.
4. **Αρχέγονες Μαύρες Οπές:** Μελανές Οπές που έχουν μάζα πολύ μικρότερη της ηλιακής μάζας είναι να δυνατόν να σχηματιστούν μόνο υπό συνθήκες πολύ μεγάλης πυκνότητας. Οι συνθήκες αυτές επικρατούσαν αμέσως μετά την Μεγάλη Έκρηξη, κάτι που πιθανολογείται ότι οδήγησε στο να δημιουργηθούν οι αρχέγονες μελανές οπές. Η μάζα τους και η ακτίνα τους αντίστοιχα θα είναι περίπου ίσες με  $M \simeq 10^{-5} - 10^{15}g$  και ακτίνα  $R \simeq 10^{-33} - 10^{-13}cm$  και είναι πολύ πιθανών να έχουν δημιουργηθεί είτε από τις αρχικές ανομοιογένειες της πυκνότητας του σύμπαντος είτε κατά την διάρκεια των κοσμολογικών μεταβολών της φάσης. Κυρίως βρίσκονται στον μεσογαλαξιακό χώρο ή στην γαλαξιακή άλω.

Ας δούμε τώρα τα φυσικά χαρακτηριστικά μιας μελανής οπής. Σύμφωνα με το θεώρημα «No hair theorem» κάθε μελανή οπή χαρακτηρίζεται πλήρως από τρεις ποσότητες: τη μάζα, το ηλεκτρικό φορτίο και τη στροφορμή. Δύο μελανές οπές που έχουν ίδιες και τις τρεις αυτές φυσικές ποσότητες είναι δύσκολα διακριτές σύμφωνα με την κλασσική μηχανική. Ανάλογα με το ποιες από τις ποσότητες που αναφέρθηκαν, χαρακτηρίζουν μια μελανή οπή, θα υπάρχουν και οι αντίστοιχες λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Einstein, η μετρική δηλαδή που περιγράφει τον χώρο γύρω από μια μελανή οπή. Η πιο απλή περίπτωση μελανής οπής είναι η Schwarzschild, που έχει μόνο μάζα και δεν έχει φορτίο και στροφορμή. Οι μελανές οπές που έχουν μάζα και φορτίο περιγράφονται από την μετρική Reissner – Nordstrom, ενώ εκείνες που έχουν μάζα και στροφορμή ικανοποιείται από την μετρική Kerr. Ενώ μια μελανή οπή που περιγράφεται από την μάζα, το φορτίο και την στροφορμή ικανοποιείται από την μετρική Kerr – Newman. Αυτό όμως που διαχωρίζει τις μελανές οπές από τα υπόλοιπα αστροφυσικά αντικείμενα είναι ο ορίζοντας γεγονότων. Πρόκειται για μια

φανταστική σφαίρα, για το όριο των γεγονότων που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν από έναν εξωτερικό αδρανειακό παρατηρητή. Μπορούμε να τον φανταστούμε σαν μια συμπαντική φυλακή από την οποία ότι εισέλθει δε πρόκειται να διαφύγει ποτέ. Επειδή είναι αδύνατο να παρατηρήσουμε το εσωτερικό του ορίζοντα γεγονότων μας είναι άγνωστο το τι συμβαίνει εκεί. Η ακτίνα του ορίζοντα γεγονότων καλείται ακτίνα Schwarzschild. Στο κέντρο μιας μελανής οπής υπάρχει η επονομαζόμενη «μοναδικότητα», ένα σημείο του χωρόχρονου με άπειρη πυκνότητα και καμπυλότητα και με τον χρόνο να έχει παγώσει. Η περιοχή αυτή δεν μπορεί να περιγραφεί με την μέχρι τώρα φυσική που γνωρίζουμε. Κάτι ακόμα που διαφοροποιεί τις μελανές οπές είναι η ύπαρξη «της τελευταίας ευσταθούς τροχιάς». Σε αντίθεση με ένα άστρο, στο οποίο υπάρχουν ευσταθείς τροχιές σε όλη την περιοχή των αποστάσεων από την επιφάνεια του, σε μια μελανή οπή υπάρχει ένα όριο, μετά το οποίο οι τροχιές των σωματιδίων γίνονται ασταθείς. Με μια μικρή διαταραχή, η τροχιά τους θα καταλήξει μέσα στην μελανή οπή. Η Φωτόσφαιρα αποτελεί ένα σφαιρικό όριο με μηδενικό πάχος στην οποία όλα τα φωτόνια που κινούνται εφαπτομενικά της παγιδεύονται σε κυκλικές τροχιές γύρω από την μελανή οπή. Η ακτίνα της φωτόσφαιρας είναι μεγαλύτερη της ακτίνας Schwarzschild. Η Εργόσφαιρα αποτελεί μια περιοχή που βρίσκεται έξω από μια περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα. Η ονομασία της προκύπτει από το γεγονός ότι, θεωρητικά, είναι δυνατή η εξαγωγή ενέργειας αλλά και μάζας από αυτή την περιοχή.

### 3.3 Η λύση Schwarzschild

Η λύση Schwarzschild, περιγράφει το βαρυτικό πεδίο που βρίσκεται έξω από μια σφαιρική μάζα που δεν περιστρέφεται, όπως είναι ένα μη περιστρεφόμενο όμως αστέρι, ή ένας πλανήτης ή μια μελανή οπή. Επίσης είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση για το βαρυτικό ακόμα και ενός αργά όμως περιστρεφόμενου σώματος, όπως είναι η Γη και ο Ήλιος μας. Ουσιαστικά η λύση Schwarzschild αποτελεί την πιο γενική σφαιρικά συμμετρική λύση κενού ( $T_{\mu\nu}=0$ ), των πεδιακών εξισώσεων του Einstein. Σε αυτή την λύση η κοσμολογική σταθερά υποτίθεται πως παίρνει την μηδενική τιμή.

Μια λύση των πεδιακών εξισώσεων Einstein που περιγράφει σφαιρικά συμμετρικούς χώρους έχει την παρακάτω μορφή

$$ds^2 = e^{v(t,r)} dt^2 + e^{\lambda(t,r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.4)$$

$\lambda(t,r)$  και  $v(t,r)$  είναι άγνωστες συναρτήσεις οι οποίες και θα προσδιορισθούν από την λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό, δηλαδή από την λύση της εξίσωσης

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.5)$$

Τα σύμβολα Christoffel για τη μετρική (4.4.1) θα είναι:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{v}}{2}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{v'}{2} e^{v-\lambda}, \quad \Gamma_{01}^0 = \frac{v'}{2} \quad (3.6)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2}, \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-v}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2} \quad (3.7)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda} \quad (3.8)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \cot\theta, \quad \Gamma_{33}^1 = -r e^{-\lambda} \sin^2\theta, \quad \Gamma_{33}^2 = \sin\theta \cos\theta \quad (3.9)$$



Για τις ζητούμενες συνιστώσες του ταυνοστή Ricci θα έχουμε:

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} - \frac{v'^2}{4} + \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} + e^{\lambda-\nu} \left[ \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \right] \quad (3.10)$$

$$R_{00} = e^{\nu-\lambda} \left[ \frac{v''}{2} + \frac{v'^2}{4} - \frac{v'\lambda'}{4} + \frac{v'}{r} \right] - \frac{\ddot{\lambda}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} + \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{4} \quad (3.11)$$

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (3.12)$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[ 1 + \frac{r}{2}(v' - \lambda') \right] + 1 \quad (3.13)$$

$$R_{33} = \sin^2\theta R_{22} \quad (3.14)$$

Προσπαθώντας να βρούμε την συναρτησιακή μορφή που θα έχουν οι  $v(t,r)$  και  $\lambda(t,r)$  σε ένα χωρόχρονο στον οποίο απουσιάζει η ύλη ( $R_{\mu\nu}=0$ ), από το άθροισμα

$$R_{11} + e^{\lambda-\nu} R_{00} = 0$$

θα καταλήξουμε στην σχέση

$$v' + \lambda' = 0 \quad (3.15)$$

Επίσης από την συνιστώσα  $\{01\}$  του ταυνοστή Ricci

$$R_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{r} = 0 \quad (3.16)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι  $\lambda = \lambda(r)$ . Από την εξίσωση  $R_{22} = 0$  (3.13) θα έχουμε

$$v' - \lambda' = \frac{2}{r}(e^\lambda - 1) \quad (3.14)$$

Άρα

$$v' = \frac{1}{r}(e^\lambda - 1) \quad (3.15)$$

$$\lambda' = -\frac{1}{r}(e^\lambda - 1) \quad (3.16)$$

Αφού στο δεξιό μέλος των παραπάνω εξισώσεων φαίνεται ότι είναι μόνο συνάρτηση του  $r$  για να ισχύει η πρώτη, τότε η συνάρτηση  $v = v(t,r)$  γίνεται να γραφεί στη μορφή

$$v(t,r) = a(t) + \tilde{v}(r) \quad (3.17)$$

κάτι όμως που μας οδηγεί στο να ορίσουμε μια νέα μεταβλητή για τον χρόνο. Έστω  $\tilde{t}$ , για την οποία θα ισχύει

$$d\tilde{t} = e^{a/2} dt \quad (3.18)$$

Δηλαδή η χρονική εξάρτηση της  $v(r,t)$  έχει «απορροφηθεί» μέσω της αλλαγής από την μεταβλητή  $t$  σε  $\tilde{t}$ .

Αρα από την (3.12) καταλήγουμε στην

$$\lambda(r) = -\tilde{v}(r) \quad (3.19)$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι οι δυο άγνωστες συνιστώσες του μετρικού τανυστή δεν έχουν εξάρτηση από τον χρόνο.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Birkhoff αν η γεωμετρία του χωροχρόνου σε μια περιοχή του είναι σφαιρικά συμμετρική και αποτελεί λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein στο κενό, τότε θα αποτελεί, υποχρεωτικά, τμήμα της γεωμετρίας Schwarzschild.

Το εξωτερικό πεδίο ενός αστέρα σφαιρικά συμμετρικού και ηλεκτρικά ουδέτερου μπορεί να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος του Birkhoff, ανεξάρτητα του αν αστέρας είναι στατικός ή πάλλεται ή καταρρέει. Άρα το εξωτερικό πεδίο του αστέρα θα αποτελεί τμήμα της γεωμετρίας Schwarzschild.

Από την λύση της εξίσωσης (3.16) μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση  $\lambda(r)$ . Αντικαθιστούμε  $f = e^{-\lambda}$  άρα η εξίσωση (4.16) γράφεται

$$rf' + f = 1 \quad (3.20)$$

που έχει προφανή λύση

$$f = e^{-\lambda} = e^v = 1 - \frac{k}{r} \quad (3.21)$$

Με  $k$  μια σταθερά της ολοκλήρωσης που θα καθορισθεί από τις οριακές συνθήκες. Στην περίπτωση όπου  $r \rightarrow \infty$ , θα πρέπει η λύση που έχουμε βρει να ανάγεται στην Νευτώνεια η οποία είναι

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2}U(r) \quad (3.22)$$

όπου  $U(r)$  είναι το Νευτώνειο δυναμικό που στην περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας έχουμε

$$U(r) = -\frac{GM}{r} \quad (3.23)$$

οπότε θα είναι

$$k = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.24)$$

Και τότε η λύση του Schwarzschild θα έχει την παρακάτω μορφή

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.25)$$

Οι συγκεκριμένες συντεταγμένες ονομάζονται συντεταγμένες Schwarzschild και η αντίστοιχη μετρική  $g_{\alpha\beta}(x)$  μετρική Schwarzschild

Η παραπάνω μετρική περιγράφει μια στατική, σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein στον κενό χώρο, π.χ. έναν μη περιστρεφόμενο αστέρα ή μια μελανή οπή.

Ο όρος  $\frac{2GM}{rc^2}$  ουσιαστικά προσδιορίζει το βαθμό της απόκλισης του χωροχρόνου Schwarzschild από το χωρόχρονο Minkowski. Στην περίπτωση του Ήλιου με μάζα  $M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33} \text{ g}$  και με ακτίνα  $R_{\odot} = 696000 \text{ Km}$ , ο όρος  $\frac{2GM}{rc^2}$  θα πάρει την τιμή  $\simeq 4 \times 10^{-6}$ , οπότε οι διορθώσεις, στην επιφάνεια του Ήλιου, της ΓΘΣ είναι μικρές. Σε αντίθετη περίπτωση όμως, σε πολύ πυκνά σώματα, όπως είναι οι αστέρες νετρονίων ( $R \simeq 10 \text{ Km}$  και  $M = 1,4M_{\odot}$ ) οι διορθώσεις της ΓΘΣ είναι της τάξης του  $\sim 0,3 - 0,5$ .

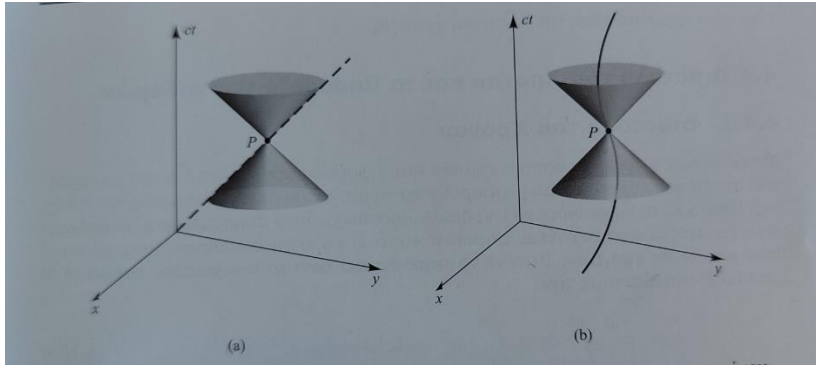
Ο χώρος, με την εισαγωγή του μετρικού τανυστή  $g_{\mu\nu}$  μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιοχές:

- $ds^2 > 0 \rightarrow$  χρονοειδής περιοχή
- $ds^2 = 0 \rightarrow$  φωτοειδής περιοχή, στην οποία τα σωματίδια κινούνται με την ταχύτητα του φωτός
- $ds^2 < 0 \rightarrow$  χωροειδής περιοχή.

Μιας και ο χωροχρόνος χωρίζεται στις τρεις παραπάνω περιοχές, για να αναπαρασταθεί, σύμφωνα με την ΕΘΣ, χρειάζονται τέσσερις συντεταγμένες, τρεις χωρικές και μια χρονική και χρησιμοποιούμε τον κώνο φωτός, όπου οι φωτοειδείς καμπύλες ( $ds^2 = 0$ ), τέμνονται σε ορθή γωνία. Στη ΓΘΣ, ο χωρόχρονος καμπυλώνεται, δεν είναι επίπεδος, οπότε οι φωτοειδείς καμπύλες του κώνου φωτός δε σχηματίζουν γωνίες  $90^\circ$ , αλλά μικρότερες μιας και συγκλίνουν. Ο ίδιος ο κώνος έχει ένα μελλοντικό και ένα παρελθοντικό χρόνο. Μεγάλης σημασίας η δομή του κώνου, με σημαντικές συνέπειες για την αιτιότητα. Ένας κώνος φωτός κατασκευάζεται από όλες τις τροχιές των φωτονίων τα οποία εκπέμπονται από ένα τυχαίο σημείο του χωρόχρονου.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία είναι φωτοειδώς χωρισμένα από ένα σημείο P στο χωρόχρονο ονομάζεται κώνος φωτός του σημείου. Πρόκειται για μια τρισδιάστατη επιφάνεια στον τετραδιάστατο χωροχρόνο. Μέρος αυτού παράγεται από φωτεινές ακτίνες που εξέρχονται από το σημείο P (μελλοντικός κώνος), ενώ το υπόλοιπο μέρος παράγεται από ακτίνες που συγκλίνουν στο σημείο P.

Κάθε σημείο του χωροχρόνου έχει και ένα κώνο φωτός. Για την γεωμετρία του χωροχρόνου οι κώνοι φωτός αποτελούν σημαντικό χαρακτηριστικό. Οι κώνοι φωτός οριοθετούν τις αιτιακές σχέσεις των σημείων του χωροχρόνου.



**Εικόνα 3:** α.) Η διαδρομή μιας ακτίνας φωτός, σε κάθε σημείο της τροχιάς της, θα πρέπει να εφάπτεται στον κώνο φωτός. β.) Η χρονοειδής διαδρομή ενός σωματιδίου θα πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό του κώνου φωτός, σε οποιαδήποτε σημείο της τροχιάς του. Εικόνα παρμένη από το [2]

Το σημαντικό για να αντιληφθεί κάποιος ότι η γεωμετρία Schwarzschild ουσιαστικά είναι μια μαύρη τρύπα αποτελεί το πως συμπεριφέρονται οι ακτίνες φωτός κατά την ακτινική διεύθυνση. Αυτές κινούνται κατά μήκος κοσμικών γραμμών (η τροχιά που περιγράφει την κίνηση ενός αντικειμένου στο διάγραμμα Minkowski (μια τετραδιάστατη δομή που έχει αποκτήσει μετρική όπως ονομάζεται), για τις οποίες ισχύει  $d\theta = d\phi = 0$  (ακτινικές) και  $ds^2=0$  (φωτοειδείς). Δηλαδή σύμφωνα με την (4.4.24) θα έχουμε:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dr^2}{dt^2} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (3.26)$$

Στην παραπάνω σχέση μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

$r \rightarrow \infty$ ,  $\frac{dr}{dt} = \pm c$ , οι γενέτειρες του κώνου φωτός θα τέμνονται σε ορθή γωνία και η μετρική ταυτίζεται ασυμπτωτικά με τη μετρική Minkowski

$r = \frac{2GM}{c^2}$ ,  $\frac{dr}{dt} = 0$ , οι γενέτειρες του κώνου φωτός ταυτίζονται οπότε τα φωτόνια εγκλωβίζονται και δεν μπορούν να διαφύγουν προς μεγαλύτερα  $r$   $r < \frac{2GM}{c^2}$ , τα πρόσημα στην εξίσωση της μετρικής αντιστρέφονται, η χωρική συντεταγμένη γίνεται χρονική και η χρονική γίνεται χωρική, οπότε ο κώνος φωτός αλλάζει διεύθυνση και αποτέλεσμα αυτού είναι ότι κανένα σωματίδιο, άρα και τα φωτόνια, δεν μπορούν να κινηθούν προς μεγαλύτερα  $r$ , αλλά θα κινούνται προς  $r = 0$ , κάτι που αποτελεί ουσιαστική ανωμαλία του χωροχρόνου.

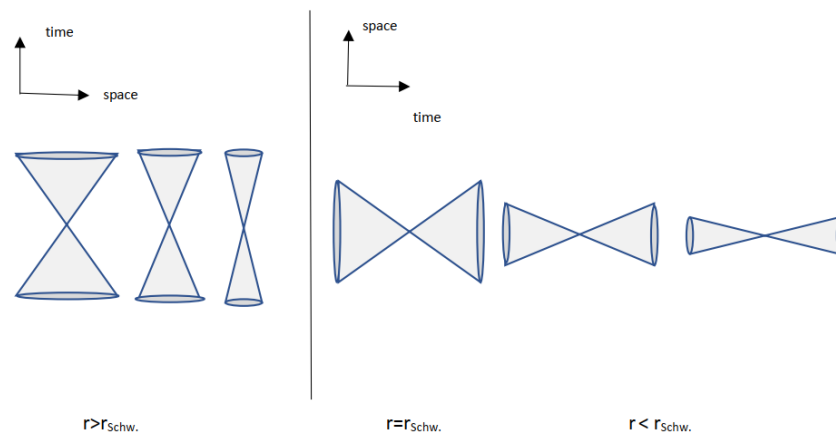
Η επιφάνεια  $r = \frac{2GM}{c^2} = r_{schw}$  καλείται ορίζοντας γεγονότων (event horizon). Η ύπαρξη του ορίζοντα γεγονότων υπακούει στην Υπόθεση του Penrose, σύμφωνα με την οποία είναι αδύνατον να υπάρξει οποιαδήποτε γυμνή ιδιομορφία στο σύμπαν. Πάντοτε θα την

περιβάλλει ένα οριζόντας γεγονότων που θα την καθιστά αόρατη από εξωτερικούς παρατηρητές.

Στην αδυναμία διαφυγής των σωμάτων αλλά και των φωτονίων από την περιοχή που ονομάζεται οριζόντας γεγονότων οφείλουμε τον όρο μελανή οπή.

Ας αναφερθεί εδώ ότι η ΓΘΣ, η κλασική φυσική δηλαδή, προβλέπει ότι τίποτα δεν μπορεί να καταφέρει να διαφύγει από μια μελανή οπή. Οπότε οι υπολογισμοί του Hawking που είχαν ως αποτέλεσμα να δείξουν ότι οι μελανές οπές ακτινοβολούν ήρθε σε μεγάλη αντίθεση με τις επιστημονικές πεποιθήσεις.

Στο παρακάτω σχήμα, εικόνα 4, οι κώνοι φωτός στην περιοχή  $r > \frac{2GM}{c^2} > r_{Schw}$  έχουν συνηθισμένη μορφή. Καθώς όμως πλησιάζουμε στην περιοχή  $r = r_{Schw}$  παρατηρείτε οι γεννέτριες των κώνων φωτός να συγκλίνουν. Μετά όμως και καθώς εισερχόμαστε στην περιοχή  $r < \frac{2GM}{c^2}$  γίνεται αντιστροφή της χωρικής και της χρονικής συντεταγμένης, με αποτέλεσμα οι κώνοι φωτός να έχουν αλλάξει κατεύθυνση και να εμφανίζονται στο σχήμα αντεστραμμένοι. Στην συνέχεια του σχήματος και προς τα  $r$  τα οποία μειώνονται θα συμβεί σύγκλιση των γεννέτριων των κώνων φωτός.



**Εικόνα 4:** κώνοι φωτός του χωροχρόνου Schwarzschild παρμένη από [9]

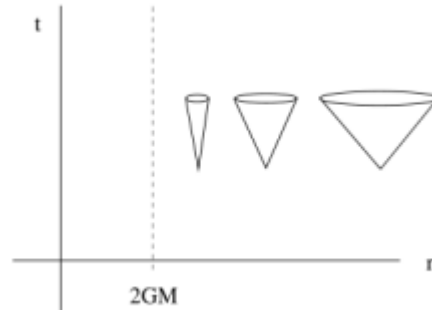
Μιας και μελέτη μέχρι τώρα ήταν καθαρά αλγεβρική καλό είναι να έχουμε και μια γεωμετρική εικόνα. Αρχικά θα πρέπει να σχεδιαστεί ένα διάγραμμα στις συντεταγμένες Schwarzschild και τους κώνους φωτός.

Οι κώνοι φωτός δύναται να προσδιοριστούν λύνοντας την  $ds^2 = 0$  για σταθερά  $\theta$  και  $\varphi$ :

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (3.27)$$

Σε ένα διάγραμμα  $t-r$  αυτές οι γραμμές σε μεγάλη απόσταση από τον αστέρα θα έχουν εφαπτομένη  $\pm 1$ , καθώς όμως το  $r \rightarrow 2M$  εφαπτομένη αυτών των γραμμών θα τείνει στο  $\pm \infty$ . Δηλαδή οι γραμμές γίνονται περισσότερο κατακόρυφες («κλείνουν» οι γενέτριες του κώνου). Αφού οι κοσμικές γραμμές θα βρίσκονται στο εσωτερικό του τοπικού κώνου φωτός και εξαιτίας του «κλεισίματος» των κώνων θα αναγκάζονται, σε σχέση με πριν, να μετατραπούν σε περισσότερο κατακόρυφες (όταν θα είναι το  $t = \infty$  το  $r$  θα πάρει την τιμή  $2M$ ). Εικ.5) Αυτή η εικόνα αποτυπώνει το αλγεβρικό αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο ένα σωματίδιο για να φτάσει στον οριζόντα χρειάζεται άπειρο χρόνο. Βέβαια καμιά κοσμική

γραμμή σωματιδίου δεν φτάνει στη γραμμή  $r = 2M$  για κάθε τιμή του  $t$ . Άρα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η γραμμή ( $r = 2M, -\infty < t < +\infty$ ), είναι ένα σημείο στο χωρόχρονο και όχι πραγματικά μια γραμμή. Αυτό το διάγραμμα συντεταγμένων ουσιαστικά δεν στοχεύει στην αναπαράσταση της γεωμετρίας αλλά μόνο των συντεταγμένων.



**Εικόνα 5:** Οι κώνοι φωτός «κλείνουν» καθώς πλησιάζουν την επιφάνεια  $r=2M$ , σε συντεταγμένες Schwarzschild. Εικόνα παρμένη από [4]

Η μετρική Schwarzschild παρουσιάζει δυο ιδιομορφίες. Την μια για  $r = 0$  και την άλλη  $r = 2GM$ .

Στην ακτίνα  $r = 0$  υπάρχει πραγματική φυσική ιδιομορφία (singularity), που δεν γίνεται να αφαιρεθεί κάνοντας αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Στην ακτίνα αυτή απειρίζεται η καμπυλότητα του χωρόχρονου (το τετράγωνο του τανυστή Riemann απειρίζεται, μιας και είναι βαθμωτό, σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων θα απειρίζεται) και απειρίζονται και οι βαρυτικές δυνάμεις. Δηλαδή μια γνήσια φυσική ιδιομορφία.

Στην ακτίνα  $r = 2GM$  η ιδιομορφία δεν είναι πραγματική, αλλά είναι ιδιομορφία των συντεταγμένων Schwarzschild ειδικότερα. Αυτή η φαινομενική ανωμαλία γίνεται να αποφευχθεί με την χρήση ενός άλλου, εναλλακτικού, συστήματος συντεταγμένων, το οποίο προτάθηκε από τους Eddington – Finkelstein.

Εισάγουμε αρχικά μια νέα συντεταγμένη  $r^*$ , η συντεταγμένη «tortoise» (χελώνας) Regge - Wheeler ώστε:

$$dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-2} dr^2 = dr^{*2} \Rightarrow$$

$$t = \pm r^* + \text{σταθ.} \quad (3.28)$$

$$\text{Όπου } r^* = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|, \quad -\infty < r^* < \infty$$

Οπότε θα έχουμε:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2 \quad (3.29)$$

Τώρα φαίνεται ότι η ιδιομορφία έχει εξαλειφθεί, μιας και καμία από τις συνιστώσες της μετρικής δεν απειρίζεται όταν είναι  $r = 2GM$ .

Συνεχίζουμε ορίζοντας μια νέα συντεταγμένη:

$$u = t + r^*$$

Στην (3.25) θα αντικαταστήσουμε τη συντεταγμένη  $t$  με την  $u$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (du - dr^*)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + 2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr \\ &\quad - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned}$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} du^2 + 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.30)$$

Η (4.4.27) δεν είναι μια νέα γεωμετρία αλλά είναι η ίδια χρονικά ανεξάρτητη, σφαιρικά συμμετρική γεωμετρία που αναπαρίσταται από τη μετρική Schwarzschild, σε διαφορετικό όμως σύστημα συντεταγμένων δηλαδή σε συντεταγμένες Eddington – Finkelstein ( $u, r, \theta, \varphi$ ). Η μη ύπαρξη οποιαδήποτε μορφής ιδιομορφίας δείχνει ότι οι παρατηρητές καθώς πέφτουν και διαπερνούν την ακτίνα  $r = 2GM$  δεν θα βλέπουν κάτι το ιδιαίτερο σε σχέση με τον τοπικό χωροχρόνο.

Θέτουμε  $d\theta = d\varphi = 0$  και  $ds^2 = 0$ , οπότε:

$$\begin{aligned} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) du^2 + 2dudr &= 0 \Rightarrow \\ \frac{du}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} &\Rightarrow \frac{du}{dr} = \frac{2}{1 - \frac{2GM}{r}} \Rightarrow \\ u - 2 \left(r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right| \right) &= \text{σταθ.} \Rightarrow \\ t - r - 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right| &= \text{σταθ.} \quad (3.31) \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτουν οι λύσεις:

$$u = \text{σταθ.}$$

$$u = 2 \left( r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right| \right) + \text{σταθ.} \quad r > 2GM \quad (3.32)$$

$$u = 2 \left( r + 2GM \ln \left| 1 - \frac{r}{2GM} \right| \right) + \text{σταθ.} \quad r < 2GM \quad (3.33)$$

### 3.4 Συντεταγμένες Kruskal - Szekeres

Από τους Kruskal – Szekeres προτάθηκε το πιο κατάλληλο σύστημα για να αρθεί η ανωμαλία που εμφανίζεται στο σημείο  $r = \frac{2GM}{c^2}$ . Η αναζήτηση τους ήταν επίπονη αλλά και μακρόχρονη, μέχρι την περάτωση τους το 1960.

Οι συντεταγμένες Kruskal – Szekeres συμβολίζονται ως (V, U, θ, φ). Οι συντεταγμένες φ, θ ταυτίζονται με τις πολικές γωνίες Schwarzschild, ενώ τα t και r των συντεταγμένων Schwarzschild, μετασχηματίζονται στα V και U όπως φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις.

Για  $r > \frac{2GM}{c^2}$

$$U = \left(\frac{rc^2}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{rc^2/4M} \cosh\left(\frac{tc^2}{4GM}\right) \quad (3.34)$$

και

$$V = \left(\frac{rc^2}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{rc^2/4M} \sinh\left(\frac{tc^2}{4GM}\right) \quad (3.35)$$

Ενώ για  $r < \frac{2GM}{c^2}$

$$U = \left(\frac{rc^2}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{rc^2/4M} \sinh\left(\frac{tc^2}{4GM}\right) \quad (3.36)$$

$$V = \left(\frac{rc^2}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{rc^2/4M} \cosh\left(\frac{tc^2}{4GM}\right) \quad (3.37)$$

Με τους παραπάνω μετασχηματισμούς, η μετρική Schwarzschild στην περιοχή  $r > \frac{2GM}{c^2}$  αλλά και στην περιοχή  $r < \frac{2GM}{c^2}$  θα είναι:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dV^2 + dU^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.38)$$

Γεωμετρία Schwarzschild σε συντεταγμένες Kruskal – Szekeres.

Η μετρική Kruskal – Szekeres δεν έχει ιδιομορφία στην περιοχή  $r = \frac{2GM}{c^2}$ , αποδεικνύοντας ξανά ότι η ιδιομορφία που εμφανίζεται στις συντεταγμένες Schwarzschild προέρχεται καθαρά από τις συγκεκριμένες συντεταγμένες.

Εδώ, το r θεωρείται συνάρτηση του V και U,  $r = r(V, U)$  και ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

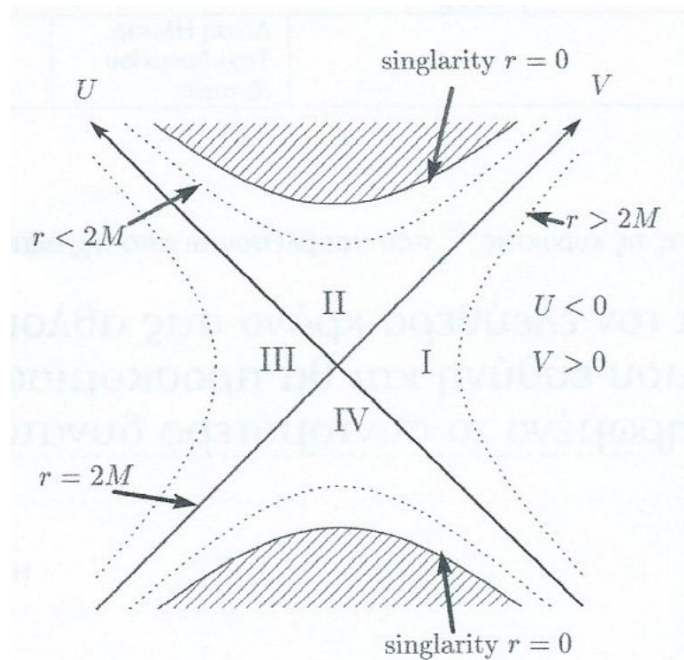
$$\left(\frac{rc^2}{2GM} - 1\right) e^{rc^2/2M} = U^2 - V^2 \quad (3.39)$$

η οποία προκύπτει από τις σχέσεις που ορίζονται τα V και U και από το

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad (3.40)$$



Για την καλύτερη κατανόηση της γεωμετρίας Schwarzschild σε συντεταγμένες Kruskal σχεδιάζουμε στο επίπεδο UV επιφάνειες σταθερού r και t. Οπότε προκύπτει ένα διάγραμμα το οποίο λέγεται διάγραμμα Kruskal.



**Εικόνα 6:** Το διάγραμμα Kruskal περιλαμβάνει όλο τον χωρόχρονο της μετρικής Schwarzschild. Εικόνα παρμένη από [4]

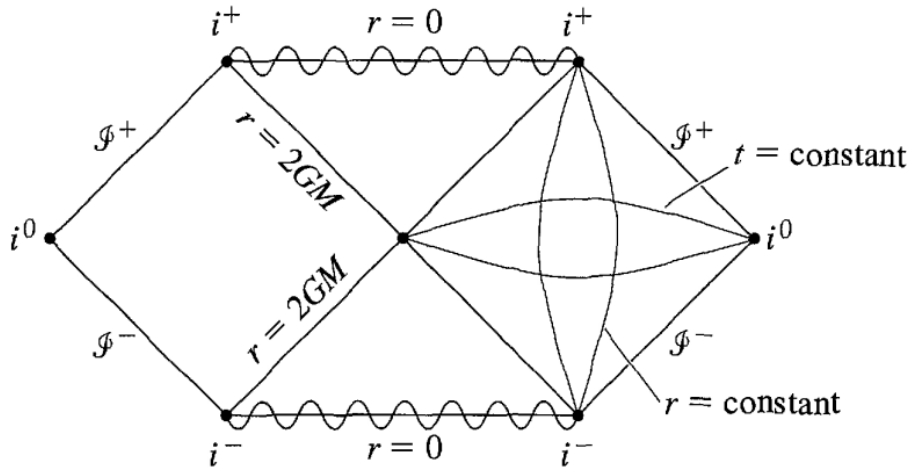
Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα (εικόνα 6) ο χωρόχρονος χωρίζεται σε τέσσερις περιοχές. Στο εσωτερικό, περιοχή I,  $r > 2GM$ ,  $-\infty < t < +\infty$ , δηλαδή η περιοχή στην οποία ζούμε, στο εξωτερικό μιας μελανής οπής, περιοχή II,  $0 < r < 2GM$ ,  $-\infty < u < +\infty$ , αλλά και σε δυο περιοχές III και IV, που αποτελούν «επεκτάσεις» του χωροχρόνου με αμφίβολη φυσική σημασία. Η περιοχή III είναι μια περιοχή που δεν έχει ακόμα εξερευνηθεί ενώ η περιοχή IV,  $0 < r < 2GM$ ,  $-\infty < v < +\infty$ , είναι το εσωτερικό μιας λευκής τρύπας. Ουσιαστικά στο διάγραμμα αυτό κάθε σημείο είναι μια δισδιάστατη (2D) σφαίρα. Οι επιφάνειες με σταθερό r είναι υπερβολές  $U^2 - V^2 = \text{σταθ.}$  στο επίπεδο UV. Αν  $r = 0$  θα έχουμε δυο υπερβολές που αντιστοιχούν σε δυο φυσικές ιδιομορφίες, μια μελλοντική (η πάνω) και παρελθοντική (η κάτω). Για  $r = 2GM$ , υπάρχουν, στο διάγραμμα, δυο ευθείες που τέμνονται στην αρχή των αξόνων. Οι ευθείες αυτές αναπαριστούν τον παρελθοντικό και μελλοντικό ορίζοντα γεγονότων. Οι επιφάνειες με σταθερό t είναι ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για  $t = 0$  υπάρχουν δυο ευθείες  $V=0$ ,  $r > 2GM$  και  $U=0$ ,  $r < 2GM$ , ενώ για  $t = \infty$  θα είναι  $U = V$  και για  $t = -\infty$  θα είναι  $U = -V$ . Για την μεταφορά από την περιοχή I στην περιοχή III απαιτείται να ακολουθήσουμε χωροειδείς ακτινικές καμπύλες.

### 3.5 Διαγράμματα Penrose

Τα διαγράμματα Penrose αποτελούν ένα είδος χωροχρονικών διαγραμμάτων που είναι διατεταγμένα για να καταστήσουν σαφές την πλήρη αιτιακή δομή οποιαδήποτε γεωμετρίας. Αποτελούν έναν απαραίτητο χάρτη για την πλοήγηση μέσα σε μια μαύρη τρύπα. Συμπαγοποιούν τη γεωμετρία του χωροχρόνου για να μπορέσει να αναπαρασταθεί σε ένα πεπερασμένο επίπεδο. Ο Penrose σχεδίασε μόνο δυο διαστάσεις χώρου και μια διάσταση χρόνος λόγω της ανθρώπινης αδυναμίας να οπτικοποιηθούν οι τέσσερις διαστάσεις του χωροχρόνου. Παρότι το διάγραμμα Penrose για μια μαύρη τρύπα Schwarzschild δεν προσφέρει περισσότερες πληροφορίες από αυτές που παίρνουμε από το διάγραμμα Kruskal, είναι όμως ότι καλύτερο διαθέτουμε για να μελετήσουμε καλύτερα μια πολύπλοκη δομή όπως είναι η περίπτωση μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής.

Σε ένα διάγραμμα Penrose οι ακτίνες φωτός κινούνται σε γωνία  $45^\circ$  μοιρών και περιέχονται σημεία στο άπειρο (σε άπειρη απόσταση ή στο άπειρο παρελθόν ή άπειρο μέλλον).

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το διάγραμμα Penrose για τη γεωμετρία Schwarzschild.



**Εικόνα 7:** Διάγραμμα Penrose για τη μελανή οπή Schwarzschild. Εικόνα παρμένη από [14]

Στο παραπάνω διάγραμμα είναι σημαντικό να κατανοηθεί ότι τα  $i^+$  και  $i^-$  (μελλοντικό και παρελθοντικό άπειρο) διακρίνονται από το  $r=0$ , υπάρχουν πολλές διαδρομές που δεν πλήττουν τη μοναδικότητα. Όπως στο διάγραμμα Kruskal, οι φωτεινοί κώνοι στο σύμμορφο διάγραμμα είναι στις  $45$  μοίρες. η κύρια διαφορά είναι ότι ολόκληρος ο χωροχρόνος αναπαρίσταται σε μια πεπερασμένη περιοχή. Παρατηρούμε επίσης ότι η δομή του σύμμορφου απείρου είναι ακριβώς όπως αυτή του χώρου Minkowski. σύμφωνα με τον ισχυρισμό ότι το Schwarzschild είναι ασυμπτωτικά επίπεδο.

Η ανάλυση των διαγραμμάτων Kruskal και Penrose μας δείχνει ότι για έναν παρατηρητή που περνάει την επιφάνεια  $r=2M$  είναι αδύνατο να μην συναντήσει την ανωμαλία που υπάρχει στο  $r=0$ . Ούτε όμως θα μπορεί να επικοινωνήσει με τον έξω κόσμο ( $r > 2M$ ), στέλνοντας κάποιο μήνυμα. Άρα κάποιος εξωτερικός παρατηρητής δεν μπορεί να έχει γνώση του τι συμβαίνει μέσα στον εσωτερικό χώρο ( $r < 2M$ ).

### 3.6 Η μετρική Kerr - Newman

Όπως είδαμε στα προηγούμενα η λύση των εξισώσεων Einstein που περιγράφει το εξωτερικό ενός απομονωμένου σφαιρικά συμμετρικού αντικείμενου (λύση Schwarzschild) είναι σχετικά απλή. Όταν όμως πρόκειται για ένα περιστρεφόμενο αντικείμενο το πρόβλημα γίνεται πιο δύσκολο. Δεν υπάρχει γνώση ακριβής λύσης που να δύναται να περιγράψει το εξωτερικό γύρω από ένα περιστρεφόμενο αντικείμενο. Υπάρχει όμως λύση, η λύση Kerr όπως λέγεται, για περιστρεφόμενη και αξονικά συμμετρική μελανή οπή. Η μετρική Kerr – Newman αποτελεί μια λύση των εξισώσεων Einstein, η οποία περιγράφει τη γεωμετρία του χωροχρόνου σε περιοχή γύρω από περιστρεφόμενο φορτισμένο σώμα. Οι μελανές οπές Kerr αποτελούν μια γενίκευση των μελανών οπών Schwarzschild όπου λαμβάνεται όμως υπόψη και η περιστροφή τους. Πριν δούμε όμως την μετρική Kerr – Newman, ας δούμε μια άλλη λύση των εξισώσεων Einstein, η οποία διατυπώθηκε χρονικά πιο πριν και βοήθησε στο να διατυπωθεί αργότερα η μετρική Kerr – Newman. Πρόκειται για την μετρική Reissner – Nordstrom η οποία όπως και η μετρική Schwarzschild είναι στατική και είναι η εξής:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.41)$$

Χρήσιμο είναι να γραφεί η μετρική αφού ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (3.42)$$

Οπότε η μετρική γράφεται:

$$ds^2 = -\Delta dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.43)$$

Ο επιπλέον όρος  $\Delta(r)$  στην μετρική σε σχέση με την μετρική έχει Schwarzschild έχει ως αποτέλεσμα η δομή των ανωμαλιών αλλά και του ορίζοντα γεγονότων να είναι πιο πολύπλοκη.

Για  $r = 0$  στην μετρική Reissner – Nordstrom υπάρχει πραγματική ανωμαλία (Carrol) ενώ η περίπτωση της  $r = 2M$  θα είναι σε ακτίνα στην οποία  $\Delta = 0$ .

Οπότε πρέπει:

$$1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0 \quad (3.44)$$

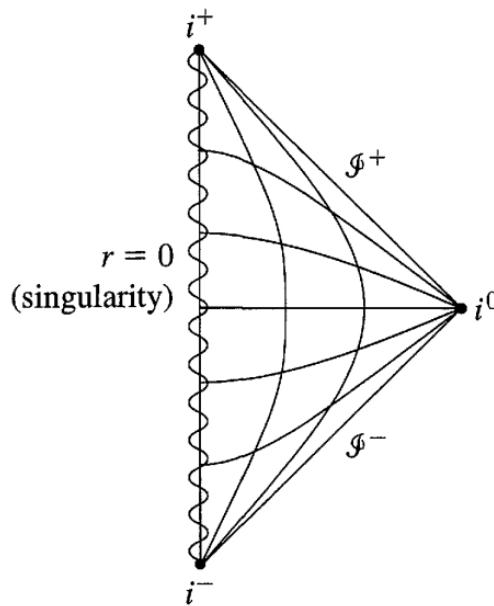
και προκύπτει ότι ουσιαστικά ο ορίζοντας γεγονότων θα βρίσκεται από την σχέση:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (3.45)$$

Στην παραπάνω σχέση ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν η μάζα  $M$  και το φορτίο  $Q$  μπορούμε να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

1η Περίπτωση:  $M^2 < Q^2$

Εδώ η ποσότητα  $1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} > 0$ . Στο  $r = 0$  υπάρχει πραγματική ανωμαλία. Άρα η μετρική εδώ περιγράφει την ύπαρξη ανωμαλίας, χωρίς όμως την ύπαρξη ενός ορίζοντα ο οποίος και θα την καλύψει. Δηλαδή πολύ απλά πρόκειται για μια γυμνή ανωμαλία, που έρχεται όμως σε αντίθεση με την υπόθεση της κοσμικής λογοκρισίας σύμφωνα με την οποία σε μια βαρυτική κατάρρευση δεν γίνεται να δημιουργηθούν γυμνές ανωμαλίες. Για  $r \rightarrow \infty$  η λύση θα προσεγγίζει τον επίπεδο χωρόχρονο και το διάγραμμα Penrose θα είναι ακριβώς όπως αυτό για το χώρο Minkowski με την διαφορά όμως ότι θα υπάρχει ανωμαλία στο  $r = 0$ , όπως φαίνεται στην εικόνα.



**Εικόνα 8:** Διάγραμμα Penrose για τη λύση Reissner – Nordstrom. Υπάρχει μια γυμνή ανωμαλία στην προέλευση. Εικόνα παρμένη από [14]

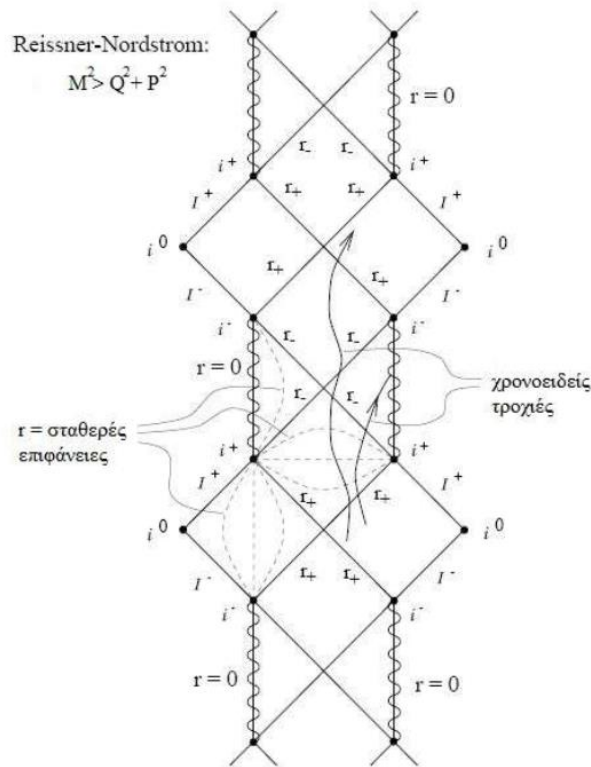
2η Περίπτωση:  $M^2 > Q^2$

Στην περίπτωση αυτή, η συνάρτηση  $\Delta(r) = 0$  θα έχει δυο πραγματικές ρίζες στα σημεία  $r_+$  και  $r_-$ . Στα σημεία αυτά, η μετρική παρουσιάζει ανωμαλία η οποία όμως δεν είναι πραγματική, όπως και στη μετρική Schwarzschild, αλλά φαινομενική και με κατάλληλη επιλογή ενός συστήματος συντεταγμένων θα μπορεί να εξαλειφθεί. Οι δύο ρίζες χωρίζουν σε τρεις διαφορετικές περιοχές τον χωρόχρονο. Δυο εσωτερικές περιοχές και μια εξωτερική.

- (A):  $\Delta > 0$  όταν  $r > r_+$
- (B):  $\Delta < 0$  όταν  $r_- < r < r_+$
- (C):  $\Delta > 0$  όταν  $r < r_-$

Η μεγαλύτερη από τις δυο ρίζες η  $r = r_+$ , αποτελεί τον ορίζοντα των γεγονότων, η μικρότερη,  $r = r_-$ , καλείται ορίζοντας Cauchy.

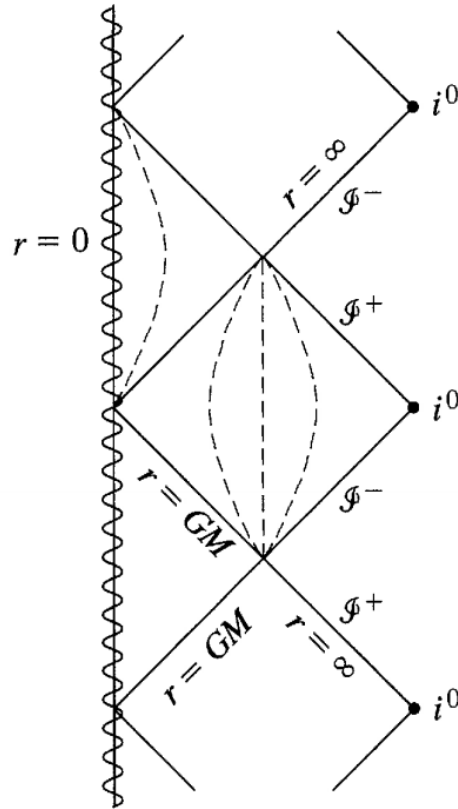
Στην περιοχή A ο χωρόχρονος έχει την ίδια ακριβώς μορφή σε σχέση με αυτόν της εξωτερικής περιοχής στην μετρική Schwarzschild. Η δομή του χωρόχρονου, στο εσωτερικό και στο εξωτερικό, μιας μελανής οπής Reissner – Nordstrom, φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Εικόνα 9:** Η δομή του χωροχρόνου μιας μελανής οπής Reissner-Nordstrom. Εικόνα παρμένη από [14]

### 3η Περίπτωση: $M^2 = Q^2$

Σε αυτή την περίπτωση, που είναι γνωστή ως ακραία λύση, ισχύει  $\Delta(r) = 0$  στην ακτίνα  $r = M$ . Αυτή η επιφάνεια παριστάνει ένα οριζόντιο γεγονός αλλά η ακτίνα  $r$  δεν γίνεται χρονοειδής, παραμένει συνεχώς χωροειδής και όταν είναι  $r = \frac{2GM}{c^2}$  γίνεται φωτοειδής. Σε αυτή την περίπτωση η μάζα της μελανής οπής εξισορροπείται από το φορτίο που έχει, είναι όμως μια ασταθής περίπτωση αφού με αν προστεθεί ύλη θα ανάγεται στην δεύτερη περίπτωση.



*Εικόνα 10: Διάγραμμα Penrose για τη λύση Reissner-Nordstrom με  $M^2 = Q^2$ . Εικόνα παρμένη από [14]*

### 3.7 Η μελανή οπή Kerr

Ο Roy Kerr το 1963 διατύπωσε την γεωμετρία που αφορά μια περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα που δεν έχει φορτίο σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο.

Η εργασία του Kerr συνεχίστηκε από τον Ted Newman το 1965 με την προσθήκη του ηλεκτρικού φορτίου και τελικά γεννήθηκε η γεωμετρία Kerr – Newmann για μια περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα.

Η λύση του Kerr περιγράφει έναν χωρόχρονο που έχει αξονική συμμετρία και είναι χρονικά στάσιμος. Η μετρική θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - \alpha \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + \alpha^2) d\varphi - \alpha dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.46)$$

Όπου:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + \alpha^2 \quad \text{και} \quad \rho^2 = r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta$$

Και  $\alpha = \frac{J}{M} = \frac{GJ}{Mc^3}$  είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας. Καλείται παράμετρος Kerr και όπως συμβαίνει και στη μάζα σε γεωμετροποιημένες μονάδες έχει διαστάσεις μήκους. Για  $\alpha = 0$  η μετρική Kerr ανάγεται στην μετρική Schwarzschild. Επίσης  $M$  είναι η μάζα της μελανής οπής.

Αν στην εξίσωση αντικατασταθεί το  $2Mr$  με την ποσότητα  $2Mr - (Q^2 + P^2)$  θα προκύψει η μετρική Kerr- Newman.

Οι συντεταγμένες  $(t, r, \theta, \varphi)$  που χρησιμοποιούνται στην σχέση ονομάζονται συντεταγμένες Boyer – Lindquist, δεν είναι σφαιρικές αλλά ημι-σφαιροειδείς και είναι ανάλογες των συντεταγμένων Schwarzschild για μια μελανή οπή μη περιστρεφόμενη. Οι συντεταγμένες αυτές σαν συνάρτηση των καρτεσιανών συντεταγμένων γράφονται όπως παρακάτω:

$$x = (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \cos[\varphi - f(r)] \quad (3.47)$$

$$y = (r^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin[\varphi - f(r)] \quad (3.48)$$

$$z = r \cos\theta \quad (3.49)$$

όπου

$$f(r) = a \int_{\infty}^r \Delta \arctan\left(\frac{a}{r}\right) dr \quad (3.50)$$

Για  $a = 0$  θα έχουμε  $f = 0$  και οι ημι-σφαιροειδείς συντεταγμένες ανάγονται σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Ο χωρόχρονος Kerr είναι πολύ περισσότερος περίπλοκος σε σχέση τον χωρόχρονο Schwarzschild.

Από την εξίσωση προκύπτουν οι εξής ιδιότητες για την μετρική Kerr:

- Είναι στατική και αξονικά συμμετρική. Η μετρική δεν εξαρτάται από τον χρόνο (στατική) και συγχρόνως είναι ανεξάρτητη του  $\varphi$  (αξονικά συμμετρική). Σε αυτές τις δυο συμμετρίες αντιστοιχούν δυο διανύσματα Killing τα  $\xi$  και  $\eta$ :

$$\xi^{\alpha} = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{στατική}) \quad (3.51)$$

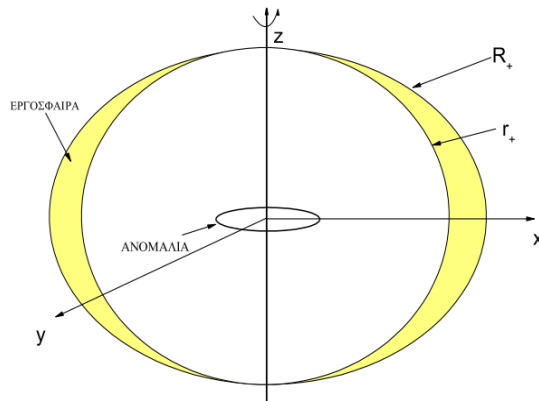
$$\eta^{\alpha} = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{αξονικά συμμετρική}) \quad (3.52)$$

- Ασυμπτωτικά επίπεδη. Μακριά από την μελανή οπή η γεωμετρία Kerr τείνει στην γεωμετρία ενός επίπεδου χωροχρόνου.
- Όταν  $a = 0$  η μετρική Kerr ανάγεται στη μετρική Schwarzschild.
- Είναι αναλλοίωτη σε ταυτόχρονη αναστροφή των  $t$  και  $\varphi$
- Ιδιομορφίες Συντεταγμένων, Πραγματικές Ιδιομορφίες και Ορίζοντες, Η μετρική Kerr γίνεται ιδιόμορφη, όταν θα μηδενιστούν τα  $\rho$  και  $\Delta$ . Η ιδιομορφία στο  $\rho = 0$  είναι μια πραγματική ιδιομορφία. Η ποσότητα  $\Delta$  μηδενίζεται στις ακτίνες

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (3.53)$$

Σε αυτές τις δυο ακτίνες οι ιδιομορφίες της μετρικής αποδεικνύεται ότι πρόκειται για ιδιομορφίες συντεταγμένων.

Η επιφάνεια  $r_{\pm}$  ορίζει τον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής Kerr.



**Εικόνα 11:** Εργόσφαιρα. Διάγραμμα της θέσης του ορίζοντα  $r = r_+$  και του συνόρου της εργόσφαιρας. Ο άξονας περιστροφής της μελανής οπής συμπίπτει με την κατακόρυφο. Την εργόσφαιρα αποτελεί η χρωματισμένη περιοχή. Στο εσωτερικό της εργόσφαιρας δεν μπορεί κανείς παρατηρητής να παραμείνει ακίνητος ως προς το άπειρο. Εικόνα παρμένη από [8]

Η περιοχή  $r_+ \leq r \leq R_+$  ονομάζεται εργόσφαιρα, από την δυνατότητα που παρέχει στην εξαγωγή ενέργειας από μια μελανή οπή Kerr. Στην εργόσφαιρα τα σωματίδια και τα φωτόνια κινούνται σύμφωνα με την φορά περιστροφής της μελανής οπής. Η εργόσφαιρα εμφανίζει αρκετές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Μια πολύ σημαντική, από αυτές, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να πάρουμε ενέργεια από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή δείχθηκε το 1969 από τον Roger Penrose.

Αν ένα σώμα που έχει θετική ενέργεια  $E$  (στην ενέργεια αυτή περιλαμβάνεται η κινητική ενέργεια και η ενέργεια της μάζας ηρεμίας) εισέλθει στην εργόσφαιρα με την κατάλληλη τροχιά, θα χωρισθεί σε δύο κομμάτια. Το ένα, αυτό που θα έχει αρνητική ενέργεια (κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί γιατί το βαρυτικό πεδίο είναι πολύ ισχυρό και η δυναμική ενέργεια, που είναι αρνητική, μπορεί να είναι μεγαλύτερη κατά απόλυτη τιμή από την ενέργεια  $E$ ) εκτοξεύεται αντίθετα με την φορά περιστροφής της μελανής οπής, αλλά παρασύρεται κατά την φορά περιστροφής με αποτέλεσμα την πτώση του μέσα από τον εξωτερικό ορίζοντα. Το άλλο κομμάτι εκτοξεύεται προς τα έξω, με την φορά που περιστρέφεται η μελανή οπή με αποτέλεσμα να φτάσει μακριά με ενέργεια μεγαλύτερη της  $E$ .

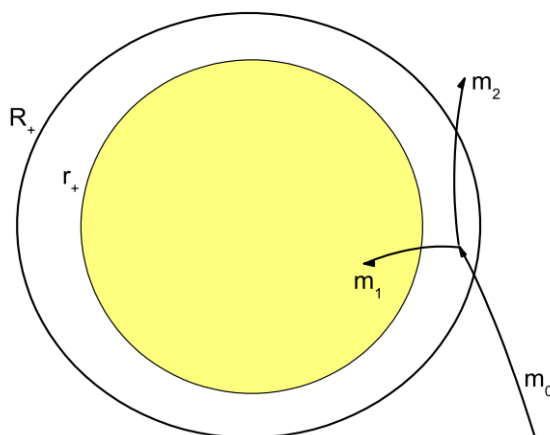
Το ίδιο όμως ισχύει και στην περίπτωση που στη εργόσφαιρα παράγονται δύο φωτόνια, το ένα από αυτά, που έχει αρνητική ενέργεια, θα πέσει μέσα στην μελανή οπή και το άλλο που έχει θετική ενέργεια θα φτάσει στο άπειρο.

Έτσι μεγάλες ποσότητες ενέργειας, είναι δυνατόν να ληφθούν από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή. Βέβαια αυτό το ενεργειακό κέρδος γίνεται εις βάρος της ενέργειας και της στροφορμής που έχει η μελανή οπή. Αυτή η μεταβίβαση



ενέργειας και στροφορμής από την μελανή οπή στο σώμα, προκαλείται μείωση της ταχύτητας, της κινητικής ενέργειας και της στροφορμής της μελανής οπής. Αυτή όμως η ελάττωση της στροφορμής έχει ως αποτέλεσμα και την ελάττωση της εργόσφαιρας. Έτσι όμως τελικά εξαφανίζεται η εργόσφαιρα και η μελανή οπή καταλήγει σε μελανή οπή Schwarzschild και ουσιαστικά σταματά η δυνατότητα να παρθεί άλλη ενέργεια από την μελανή οπή.

Η απόδοση του φαινομένου φτάνει ως και το 20% της ενέργειας που είχε το αρχικό σώμα.



**Εικόνα 12:** Σχηματική περιγραφή του μηχανισμού Penrose. Ένα σωματίδιο μάζας  $m_0$  εισέρχεται στην εργόσφαιρα και χωρίζεται σε δυο τμήματα μάζας  $m_1$  και  $m_2$ . Αν φροντίσουμε αυτό που έχει μάζας  $m_1$  να ακολουθήσει μια τροχιά αρνητικής ενέργειας και να πέσει στην μελανή οπή, τότε το άλλο που έχει μάζας  $m_2$  θα διαφύγει μεταφέροντας ενέργεια που θα είναι μεγαλύτερη από αυτή που είχε το αρχικό σωματίδιο. Εικόνα παρμένη από [8]

Ο παραπάνω τρόπος εξαγωγής ενέργειας από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή καλείται μηχανισμός Penrose.

Το όριο πέραν του οποίου είναι αδύνατη η αφαίρεση ενέργειας από μια μελανή οπή Kerr υπολογίστηκε το 1970 και ονομάστηκε μη-ελαττούμενη μάζα της μελανής οπής ( $M_{ir}$ ) που δίνετε από την παρακάτω εξίσωση:

$$4M_{ir}^2 = r_+^2 + a^2 \equiv (M + \sqrt{M^2 - a^2}) + a^2 = 2Mr_+ \quad (3.54)$$

## 4. ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ HAWKING

### 4.1 Θερμοδυναμική των μελανών οπών

Το 1973 από τους Stephen Hawking, Jim Bardeen και Brandon Carter διατυπώθηκαν οι νόμοι σύμφωνα με τους οποίους καθορίζεται η συμπεριφορά των μελανών οπών (B, C, H). Πρόκειται για νόμους που εμφανίζουν πολύ μεγάλη ομοιότητα με τους νόμους που διέπουν την θερμοδυναμική, κάτι που στην αρχή είχε θεωρηθεί ως κάτι το εντελώς συμπτωματικό. Βέβαια δεν πέρασε πολύς χρόνος για να κατανοηθεί ότι οι μελανές συμπεριφέρονται όπως συμπεριφέρεται ένα θερμοδυναμικό σύστημα. Αυτό συνέβη αρχικά και κυρίως το 1974 με την διαπίστωση που προήλθε από την εργασία του Hawking, σύμφωνα με την οποία οι μελανές οπές παρουσιάζουν θερμική εκπομπή σωματιδίων ως αποτέλεσμα κβαντικών διεργασιών. Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι μπορεί μια μελανή οπή να βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας με κάποια άλλα θερμοδυναμικά συστήματα και οι νόμοι που έχουν διατυπωθεί για τις μελανές οπές, πολύ απλά να περιγράφουν την θερμοδυναμική τους.

### 4.2 Νόμοι της Μηχανικής των μελανών οπών

Καλό είναι να πούμε ότι στις μελανές οπές συναντώνται η Κβαντομηχανική (υπάρχει η σταθερά του Planck  $h$ ), η Σχετικότητα ( $E = m \cdot c^2$ ) και η θερμοδυναμική (εντροπία  $S$  και η απόλυτη θερμοκρασία  $T$ ). Σε κάθε νόμο της θερμοδυναμικής υπάρχει και ένας αντίστοιχος νόμος την μηχανικής των μελανών οπών. Οι νόμοι αυτοί είναι οι παρακάτω:

- **Μηδενικός νόμος**

Σύμφωνα με τον μηδενικό νόμο της θερμοδυναμικής, είναι σταθερή η απόλυτη θερμοκρασία ενός συστήματος το οποίο βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Ο μηδενικός νόμος της Μηχανικής των μελανών οπών είναι:

Η επιφανειακή βαρύτητα (δηλαδή η ένταση του πεδίου βαρύτητας που αισθάνεται ένα παρατηρητής που είναι ακίνητος σε ένα αστροφυσικό αντικείμενο) σε οποιαδήποτε σημείο του ορίζοντα γεγονότων μιας χρονικά αμετάβλητης μελανής οπής έχει σταθερή τιμή.

- **Πρώτος νόμος**

Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής αποτελεί μια έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Σε ένα θερμοδυναμικό σύστημα που προσφέρεται ενέργεια  $dQ$ , θα ισχύει:

$$dQ = dE - dW \quad \text{ή} \quad dE = dQ + dW \quad (4.1)$$

Αν υποθέσουμε μια στάσιμη μαύρη τρύπα που έχει μάζα  $M$ , τροχιακή στροφορμή  $J$  και επιφάνεια  $A$ , η οποία μετά από μια διαταραχή μεταπίπτει σε μια γειτονική κατάσταση που έχει παραμέτρους  $M + \delta M$ ,  $J + \delta J$ , και  $A + \delta A$ .

Στην περίπτωση αυτή η παρακάτω σχέση εκφράζει τον πρώτο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών. Η σχέση αυτή συνδέει τη μεταβολή μάζας μιας μελανής οπής με την μεταβολή της στροφορμής και της επιφάνειας

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J + \Phi \delta Q \quad (4.2)$$

$\kappa$  είναι η επιφανειακή βαρύτητα και  $\Omega_H$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής που έχει μια μελανή οπή.

- **Δεύτερος νόμος**

Η εντροπία ενός συστήματος είναι μια ποσότητα που δεν μεταβάλλεται στις αντιστρεπτές μεταβολές, ενώ αυξάνεται σε μεταβολές που γίνονται αυθόρμητα. Γενικά η εντροπία είναι μια ποσότητα που ποτέ δεν μειώνεται, σχετίζεται με την φορά που έχει ο χρόνος και δείχνει την τάση προς την μεγαλύτερη αταξία.

Ο δεύτερος νόμος της μηχανικής των μελανών οπών οφείλεται στον Stephen Hawking και έχει σχέση με την αφαίρεση ενέργειας από μια μελανή οπή Kerr.

Σύμφωνα με τον νόμο αυτό, η επιφάνεια μιας μελανής οπής δεν γίνεται ποτέ να ελαττωθεί,  $\delta A > 0$ . Αυτός ο νόμος είναι σε αντιστοιχία με τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, σύμφωνα με τον οποίο, ποτέ δεν μειώνεται η εντροπία ενός μονωμένου συστήματος.

Αυτό επιτρέπει την δυνατότητα της αυθόρμητης συνένωσης δυο μελανών οπών, αλλά όχι την δυνατότητα διαχωρισμού μιας μελανής οπής σε άλλες δυο. Αν προκύψει ένωση δυο μελανών οπών, τότε η επιφάνεια της μελανής οπής θα είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των επιφανειών των δυο μελανών οπών. Το αντίστροφο όμως δεν γίνεται να συμβεί. Δηλαδή ο δεύτερος νόμος απαγορεύει να συμβεί διάσπαση μιας μελανής οπής σε δυο μικρότερες, γιατί αυτό θα είχε σαν αποτέλεσμα στο να μειωθεί το συνολικό εμβαδό του ορίζοντα.

- **Τρίτος νόμος**

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο της θερμοδυναμικής δεν μπορεί να επιτευχθεί η θερμοκρασία απόλυτο μηδέν (στην κλίμακα θερμοκρασιών του Kelvin). Μόνο ασυμπτωτικά μπορεί να προσεγγιστεί το απόλυτο μηδέν.

Σύμφωνα με τον τρίτο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών η επιφανειακή βαρύτητα μιας μελανής οπής ποτέ δεν μηδενίζεται. Σύμφωνα με τον νόμο αυτό μέσω πεπερασμένου αριθμού μεταβολών δεν μπορούμε να εξαφανίσουμε τον ορίζοντα μιας μελανής οπής.

Οι τέσσερις παραπάνω νόμοι είδαμε ότι είναι σε αντιστοιχία με τους νόμους της θερμοδυναμικής. Πιο συγκεκριμένα η επιφανειακή βαρύτητα  $\kappa$  αντιστοιχεί στην απόλυτη θερμοκρασία  $T$ , το εμβαδό της επιφάνειας  $A$  αντιστοιχεί στην εντροπία  $S$  και η μάζα  $M$  στην εσωτερική ενέργεια ενός θερμοδυναμικού συστήματος. Αυτή η ομοιότητα στην αρχή θεωρήθηκε ως μια απλή αναλογία, στην συνέχεια όμως αποδείχθηκε ότι είναι κάτι πιο βαθύ. Θεωρώντας ότι η εντροπία μιας μελανής οπής μηδενικής μάζας είναι μηδέν, καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα που ονομάζεται εξίσωση ή τύπος των Bekenstein-Hawking.

$$S = \frac{k_B}{4h} A \quad (4.3)$$

όπου  $k_B$  η σταθερά του Boltzmann.

Βλέπουμε δηλαδή ότι η εντροπία στις μελανές οπές παίρνει μορφή επιφάνειας. Σύμφωνα και με την κλασική θεώρηση οποιαδήποτε διαδικασία προκαλεί μεταβολή στην μάζα μιας σφαιρικής μελανής οπής, θα έχει ως αποτέλεσμα να αυξάνεται η επιφάνεια της μελανής οπής. Άρα ο προσδιορισμός της επιφάνειας μέσω της εντροπίας του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου είναι συνεπής και με τον δεύτερο νόμο μιας και η εντροπία τελικά αυξάνεται. Σύμφωνα όμως με την κβαντομηχανική η μάζα μιας μελανής οπής, μπορεί μεν να μειωθεί (διαδικασία Hawking), αλλά αυτή η μείωση γίνεται εις βάρος της παραγωγής θερμικής ακτινοβολίας, οπότε η ολική εντροπία της μελανής οπής αθροιστικά με την εκπεμπόμενη ακτινοβολία αυξάνεται, παραμένοντας με αυτό τον τρόπο συνεπής με τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο.

### 4.3 Παραγωγή σωματιδίων λόγω βαρυτικής κατάρρευσης

Στην κλασική θεωρία, οι μελανές οπές μπορούν μόνο να απορροφούν και όχι να εκπέμπουν σωματίδια. Ωστόσο αποδεικνύεται ότι οι κβαντομηχανικές επιδράσεις προκαλούν τις μελανές οπές να δημιουργούν και να εκπέμπουν σωματίδια σαν να είναι θερμά σώματα, με θερμοκρασία  $\frac{\hbar\kappa}{2\pi k} \simeq 10^{-6} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^\circ K$  που μεταβάλλεται ανάλογα με την επιφανειακή βαρύτητα της μελανής οπής. Αυτή η θερμική εκπομπή οδηγεί σε αργή μείωση της μάζας της μελανής οπής: οποιαδήποτε αρχέγονη μελανή οπή με μάζα μικρότερη από  $10^{15}g$ , θα είχε εξατμιστεί μέχρι τώρα. Αν και αυτές οι κβαντικές επιδράσεις παραβιάζουν τον κλασικό νόμο που λέει ότι η περιοχή του ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής δεν μπορεί να μειωθεί, σύμφωνα όμως με τον γενικευμένο δεύτερο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών  $S + \frac{1}{4}A$ , όπου  $S$  η εντροπία της ύλης έξω από τις μελανές οπές και  $A$  το εμβαδό της επιφάνειας της μελανής οπής.

### 4.3.1 Συνοπτικά η απόδειξη της ακτινοβολίας Hawking

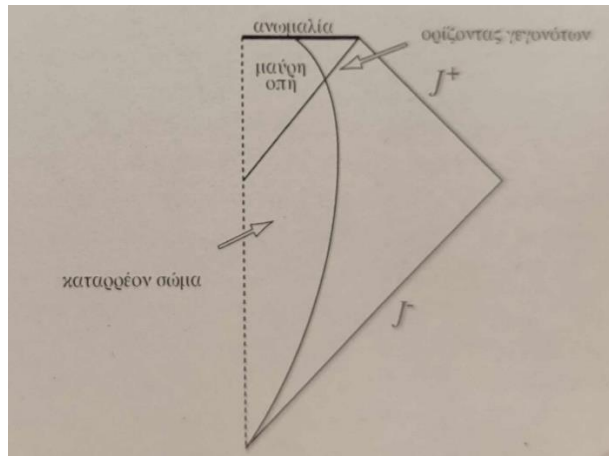
Ο Hawking ουσιαστικά χρησιμοποίησε την κβαντική φυσική και την θεωρία της σχετικότητας για να καταλήξει στην θεωρητική πρόβλεψη της ακτινοβολίας.

Συνοπτικά η απόδειξη, την οποία παρακάτω θα δούμε αναλυτικά, είναι η εξής:

1. **Κβαντικές διακυμάνσεις.** Σύμφωνα με τη κβαντική μηχανική, το κενό δεν είναι απολύτως κενό αλλά γεμάτο από εικονικά σωματίδια που δημιουργούνται και καταστρέφονται. Οι κβαντικές διακυμάνσεις μπορούν να δημιουργήσουν ζεύγη σωματιδίων.
2. **Ορίζοντας γεγονότων.** Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, ουσιαστικά το όριο πέρα από το οποίο τίποτα, ούτε καν το φως, μπορεί να διαφύγει.
3. **Ενεργειακή ισορροπία.** Το σωματίδιο που πέφτει στην μελανή οπή έχει αρνητική ενέργεια σε σχέση με έναν παρατηρητή που βρίσκεται εκτός της μελανής οπής. Για την διατήρηση της ενεργειακής ισορροπίας απαιτείται η μελανή οπή να χάσει μάζα ισοδύναμη με την ενέργεια που έχει αυτό το σωματίδιο.
4. **Εκπομπή ακτινοβολίας.** Το σωματίδιο που διαφεύγει θα εμφανίζεται στον παρατηρητή, εκτός μελανής οπής, ως ακτινοβολία (γνωστή ως ακτινοβολία Hawking) που εκπέμπεται από την μελανή οπή.
5. **Θερμοδυναμική των μελανών οπών.** Η ακτινοβολία Hawking, έχει άμεση σύνδεση με την θερμοδυναμική των μελανών οπών. Δείχνει ότι οι μελανές οπές δεν είναι απόλυτα μαύρες αλλά εκπέμπουν ακτινοβολία, μέχρι τελικά να εξατμιστούν πλήρως.
6. **Διασύνδεση κβαντικής μηχανικής και σχετικότητας.** Ένας βασικός παράγοντας είναι η κατανόηση ότι το κενό κοντά στον ορίζοντα γεγονότων δεν είναι σταθερό, αλλά δυναμικό λόγω των κβαντικών διακυμάνσεων. Ο Hawking έδειξε ότι οι κυματικές συναρτήσεις που περιγράφουν τα σωματίδια και αντισωματίδια επηρεάζονται από την καμπυλότητα του χωροχρόνου κοντά στην μελανή οπή.
7. **Υπολογισμός της θερμοκρασίας Hawking.** Η θερμοκρασία της ακτινοβολίας μπορεί να υπολογιστεί και είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας της μελανής οπής.
8. **Το παράδοξο της πληροφορίας.** Η πρόβλεψη ότι η μελανή οπή εκπέμπει ακτινοβολία και τελικά εμφανίζεται έφερε στην επιφάνεια το παράδοξο της απώλειας της πληροφορίας.
9. **Πειραματική επαλήθευση.** Η άμεση παρατήρηση της ακτινοβολίας Hawking είναι εξαιρετικά δύσκολη, καθώς η θερμοκρασίας της είναι πολύ χαμηλή και πρακτικά με μετρήσιμη με την σημερινή ανθρώπινη τεχνολογία.

Αρκετά βοηθητικά είναι τα διαγράμματα Penrose. Σε μια σφαιρική κατάρρευση δεν εξαρτάται ο χωροχρόνος από τις γωνίες  $\phi$  και  $\theta$ . Στο επίπεδο  $r-t$  είναι τοποθετημένη όλη η γεωμετρία. Μιας και κάθε διδιάστατο επίπεδο είναι σύμμορφο με τον επίπεδο χώρο, είναι δυνατόν να παρασταθεί η αιτιακή δομή με ένα διάγραμμα στο οποίο οι μηδενικές γραμμές του επιπέδου  $r-t$  σχηματίζουν γωνία  $\pm 45^\circ$  με την κατακόρυφο.

Στον επίπεδο χώρο Minkowski, το διάγραμμα Penrose είναι ένα τρίγωνο. Το διάγραμμα όμως γίνεται διαφορετικό, στην περίπτωση ενός καταρρέοντος σφαιρικού σώματος.



Εικόνα 11: Διάγραμμα Carter-Penrose για ένα άστρο που καταρρέει σχηματίζοντας μια μελανή οπή. Εικόνα παρμένη από [5]

Το παραπάνω διάγραμμα ενώ είναι για το παρελθόν, η κορυφή του τριγώνου αποκόπτεται και γίνεται αντικατάσταση από ένα οριζόντιο περιθώριο. Αυτό αποτελεί την ανωμαλία η οποία προβλέπεται από το θεώρημα Hawking-Penrose. Στο διάγραμμα φαίνεται η ύπαρξη σημείων κάτω από την οριζόντια γραμμή που δεν ανήκουν στο παρελθόν του μελλοντικού μηδενικού απείρου  $J^+$ . Πολύ απλά υπάρχει μια μελανή οπή. Θεωρώντας τον χωροχρόνο ότι ήταν χρονικά ανεξάρτητος, κάθε λύση της κυματικής εξίσωσης που θα περιέχει μόνο θετικές συχνότητες στο  $J^-$ , τότε θα είχε και συχνότητες στο  $J^+$ . Αυτό όμως δείχνει ότι δεν θα μπορούσε να συμβεί δημιουργία σωματιδίων και επίσης δεν θα υπήρχαν σωματίδια εξερχόμενα σε scri plus, αν εξ αρχής δεν υπήρχαν βαθμωτά σωματίδια.

Κατά την κατάρρευση όμως, υπάρχει εξάρτηση της μετρικής από τον χρόνο. Αυτό όμως έχει ως αποτέλεσμα, υποχρεωτικά μια λύση με θετική συχνότητα στο  $J^-$  όταν περάσει στο  $J^+$  να γίνει εν μέρη με αρνητική συχνότητα. Ο υπολογισμός αυτής της μίξης μπορεί να γίνει αν θεωρηθεί ένα κύμα, που έχει εξάρτηση  $e^{-i\omega v}$  στο  $J^+$  και διαδίδεται πίσω στο  $J^-$ . Η μίξη αυτή από ένα χρονικό όριο και μετά δεν έχει εξάρτηση από τις λεπτομέρειες της κατάρρευσης, αλλά μόνο από την επιφανειακή βαρύτητα και αυτή η ανάμιξη θετικών και αρνητικών συχνοτήτων έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία σωματιδίων.

Ας κάνουμε τώρα μια παρουσίαση του φαινομένου της παραγωγής σωματιδίων λόγω βαρυτικής κατάρρευσης, όπως θεωρητικά έχει υπολογιστεί από τον Hawking.

Η προσέγγιση θα γίνει στην απλούστερη βαρυτική κατάρρευση μιας μη περιστρεφόμενης και αφόρτιστης μελανής οπής. Η τελική στατική κατάσταση για μια τέτοια μελανή οπή θα περιγράφεται από την λύση Schwarzschild. Για μεγαλύτερη απλοποίηση θα θεωρήσουμε ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο  $\hat{\phi}$  που υπακούει στην κυματική εξίσωση:

$$\Phi_{;ab}g^{ab} = 0 \quad (4.4)$$

Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν, θα είναι τα ίδια αν χρησιμοποιηθεί η αναλλοίωτη κυματική εξίσωση:

$$\Phi_{;ab}g^{ab} + \frac{1}{6}R\Phi = 0. \quad (4.4)$$

Ο τελεστής  $\hat{\phi}$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i |\hat{a}_i f_i(x) + \hat{a}_i^\dagger f_i^*(x)| \quad (4.5)$$

Όπου  $f_i$  οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης

$$\Phi_{i;ab}g^{ab} = 0 \quad (4.6)$$

που έχουν επιλεγεί έτσι στο μηδενικό άπειρο στο παρελθόν  $\mathcal{J}^-$  να ικανοποιούν τις συνθήκες ορθοκανονικότητας και να αποτελούν σύνολο λύσεων θετικής συχνότητας. Οι τελεστές  $\hat{a}_i$  και  $\hat{a}_i^\dagger$  έχουν τη φυσική ερμηνεία ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας για εισερχόμενα σωματίδια στο  $\mathcal{J}^-$ .

Επειδή τα άμαζα πεδία καθορίζονται πλήρως από τα δεδομένα τους στο  $\mathcal{J}^-$  ο τελεστής πεδίου  $\hat{\phi}(x)$  μπορεί επίσης να εκφραστεί:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i |\hat{b}_i p_i(x) + \hat{b}_i^\dagger p_i^*(x) + \hat{c}_i p_i(x) + \hat{c}_i^\dagger q_i^*(x)| \quad (4.7)$$

όπου  $\{p_i\}$  είναι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης που είναι καθαρά εξερχόμενες, δηλαδή έχουν μηδενικά δεδομένα Cauchy στο  $\mathcal{J}^+$  και οι  $\{q_i\}$  είναι οι λύσεις που δεν περιέχουν εξερχόμενα συστατικά. Τα  $\{q_i\}$  έχουν επιλεγεί αυθαίρετα μιας και δεν υπάρχει κάποια φυσική επιλογή συντεταγμένης για την οποία μπορούν να οριστούν  $q_i$  με θετική συχνότητα. Οι τελεστές  $\hat{b}_i, \hat{b}_i^\dagger$  με τη συνθήκη της θετικής συχνότητας, ερμηνεύονται ως τελεστές καταστροφής και δημιουργίας για τα σωματίδια που εξέρχονται.

Επειδή τα άμαζα πεδία καθορίζονται πλήρως από τα δεδομένα στο  $\mathcal{J}^-$  μπορούμε να εκφράσουμε πλήρως τις λύσεις  $\{p_i\}$  και  $\{q_i\}$  ως γραμμικός συνδυασμός των  $\{f_i\}$  και  $\{f_i^*\}$ :

$$p_i = \sum_j (a_{ij} f_j + \beta_{ij} f_j^*) \quad (4.7)$$

$$q_i = \sum_j (\gamma_{ij} f_j + \eta_{ij} f_j^*) \quad (4.8)$$

Οι προηγούμενες σχέσεις ( πρόκειται για τους μετασχηματισμούς Bogolubov από τα  $p_i$  και  $q_i$ ) οδηγούν σε αντίστοιχες σχέσεις μεταξύ των τελεστών  $\hat{b}_i, \hat{c}_i, \hat{a}_i, a_i^\dagger$  είναι:

$$\hat{b}_i = \sum_j (a_{ij}^* \hat{a}_j + \beta_{ij}^* a_j^\dagger) \quad (4.9)$$

$$\hat{c}_i = \sum_j (\gamma_{ij}^* \hat{a}_j + \eta_{ij}^* a_j^\dagger) \quad (4.10)$$

Η αρχική κατάσταση κενού  $|0\rangle$ , η κατάσταση που δεν περιέχει εισερχόμενα σωματίδια, δηλαδή χωρίς σωματίδια στο  $\mathcal{J}^-$ , ορίζεται από:

$$a_i |0\rangle = 0 \text{ για κάθε } i \quad (4.11)$$

Ωστόσο, επειδή οι συντελεστές  $\beta_{ij}$  δεν θα είναι γενικά μηδενικοί, η αρχική κατάσταση κενού δεν θα εμφανίζεται ως κατάσταση κενού σε έναν παρατηρητή στο  $\mathcal{J}^+$ . Αντιθέτως θα διαπιστώσει ότι η αναμενόμενη τιμή του αριθμού σωματιδίων στο  $\mathcal{J}^+$  θα είναι:

$$\langle 0 | \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i | 0 \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2 \quad (4.12)$$

Δηλαδή εάν είναι μη μηδενικοί κάποιοι από τους συντελεστές, αν θα προκύψουν πιο απλά θετικής και αρνητικής συχνότητας λύσεις, τότε στο κενό γεννιούνται σωματίδια τα οποία θα παρατηρήσει ένας παρατηρητής.

Άρα καταλήγοντας, για να προσδιοριστεί ο αριθμός των σωματιδίων που δημιουργούνται από την βαρυτική κατάρρευση και εκπέμπονται στο άπειρο, αρκεί να υπολογιστούν οι συντελεστές Bogolubov  $\beta_{ij}$ .

## 4.4 Ακτινοβολία Hawking

Τελικά φάνηκε ότι ο υπολογισμός του αριθμού των σωματιδίων που δημιουργούνται από την βαρυτική κατάρρευση δεν είναι τόσο περίπλοκος όπως θα περίμενε κάποιος, θεωρώντας ότι αυτός θα εξαρτιόταν από την λεπτομερή φύση της βαρυτικής κατάρρευσης.

Ας δούμε τώρα πως περιγράφεται το φαινόμενο της ακτινοβολίας Hawking, το οποίο εξηγεί το πως μελανές σπές ακτινοβολούν σωματίδια με την θερμική κατανομή του Planck, Μιας και ο χωρόχρονος είναι σφαιρικά συμμετρικός, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης  $\square\varphi = 0$  θα είναι της μορφής:

$$\varphi \sim r^{-1} R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega\tau} \quad (4.13)$$

Όπου  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  είναι οι γνωστές σφαιρικές αρμονικές, ενώ η ακτινική συνάρτηση  $R_{\omega l}(r)$  ικανοποιεί την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^{*2}} + \left\{ \omega^2 - \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \right\} R_{\omega l} = 0 \quad (4.14)$$



και  $r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$  είναι η συντεταγμένη χελώνας (turtle).

Για  $r \rightarrow \infty$ , η εξίσωση (4.14) γίνεται

$$\frac{d^2 R_{\omega l}}{dr^{*2}} + \omega^2 R_{\omega l} = 0 \quad (4.15)$$

οι λύσεις της οποίας είναι  $e^{\pm i\omega r^*}$ .

Άρα οι λύσεις θα είναι:

$$r^{-1} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega\tau \pm i\omega r^*}$$

και αφού χρησιμοποιήσουμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$U = t + r^* \quad \text{και} \quad u = t + r$$

που είναι οι φωτοειδής συντεταγμένες, οι λύσεις  $f$  και  $p$  θα γράφονται ως εξής:

$$f_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r\sqrt{4\pi\omega}} x \begin{cases} e^{-i\omega u}, & \text{στον } \mathcal{J}^- \\ e^{-i\omega G(u)}, & \text{στον } \mathcal{J}^+ \end{cases}$$

$$p_{\omega lm} \sim \frac{Y_{lm}(\theta, \varphi)}{r\sqrt{4\pi\omega}} x \begin{cases} e^{-i\omega u}, & \text{στον } \mathcal{J}^- \\ e^{-i\omega g(u)}, & \text{στον } \mathcal{J}^+ \end{cases}$$

Θα χρειαστούμε την ανάπτυξη του  $\hat{\phi}$  σε  $f$  και  $f^*$  που θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$\hat{\phi} = \sum_{lm} \int_0^\infty d\omega [\hat{\alpha}_{\omega lm} f_{\omega lm} + \hat{\alpha}_{\omega lm}^\dagger f_{\omega lm}^*] \quad (4.16)$$

Ως γραμμικός συνδυασμός των  $f_{\omega lm}$  και  $f_{\omega lm}^*$  θα μπορέσουν να εκφραστούν οι λύσεις  $p_{\omega lm}$ :

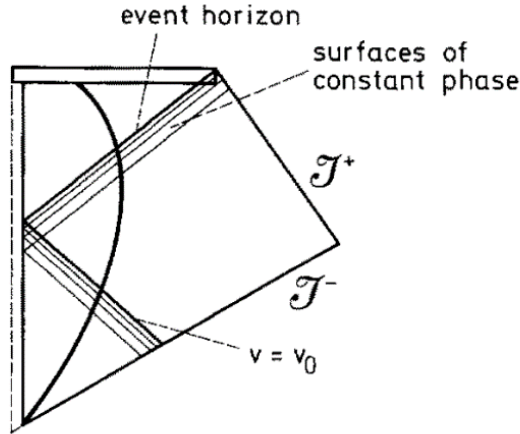
$$p_\omega = \int_0^\infty d\omega' (a_{\omega\omega'} f_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} f_{\omega'}^*) \quad (4.17)$$

Όπου  $a_{\omega\omega'}$  και  $\beta_{\omega\omega'}$  είναι οι συντελεστές Bogoliubov των θετικών και αρνητικών τρόπων ταλάντωσης, οι οποίοι θα μπορούν να υπολογιστούν από τις παρακάτω σχέσεις:

$$a_{\omega\omega'} = c \int_{-\infty}^0 dv e^{i\omega'v} e^{-i\omega u(v)} \quad (4.17)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = c \int_{-\infty}^0 dv e^{-i\omega'v} e^{-i\omega u(v)} \quad (4.18)$$

όπου  $c$  είναι μια σταθερά.



**Εικόνα 13:** Οι λύσεις  $\mathbf{p}_\omega$  της κυματικής εξίσωσης κοντά στον ορίζοντα γεγονότων θα εμφανίζουν άπειρο αριθμό κύκλων αλλά και στην επιφάνεια  $v = v_0$ . Στην κατακόρυφο  $r = 0$  η ανάκλαση δεν είναι πραγματική και οι φωτεινίδες ακτίνες θα είναι ευθείες γραμμές με κατεύθυνση από το  $\mathcal{J}^-$  στο  $\mathcal{J}^+$ . Εικόνα παρμένη από [19]

Χρησιμοποιώντας την σχέση για τα  $u$  και  $v$ :  $u = -\frac{1}{k} \ln(-v)$  (4.19)

θα έχουμε:

$$a_{\omega\omega'} = c \int_{-\infty}^0 dv e^{i\omega'v} \exp\left[i\frac{\omega}{k} \ln(-v)\right] \quad (4.20)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = c \int_{-\infty}^0 dv e^{-i\omega'v} \exp\left[i\frac{\omega}{k} \ln(-v)\right] \quad (4.21)$$

αν κάνουμε στα πιο πάνω ολοκληρώματα την αλλαγή  $-v \rightarrow v$  θα έχουμε:

$$a_{\omega\omega'} = c \int_{-\infty}^0 dv e^{-i\omega'v} \exp\left[i\frac{\omega}{k} \ln(v)\right] \quad (4.22)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = c \int_{-\infty}^0 dv e^{i\omega'v} \exp\left[i\frac{\omega}{k} \ln(v)\right] \quad (4.23)$$

Αυτό που επιζητείται από τα παραπάνω ολοκληρώματα, τα οποία αποκλίνουν, δεν είναι ο υπολογισμός τους αλλά να βρεθεί μια σχέση μεταξύ τους που θα ικανοποιεί και την σχέση κανονικοποίησης των συντελεστών Bogoludov.

Ασχολούμαστε αρχικά με το πρώτο:

$$a_{\omega\omega'} = c \int_0^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} v^{i\frac{\omega}{k}} \Rightarrow$$

$$a_{\omega\omega'} = -c \frac{1}{i\omega'} \int_0^{+\infty} dv (e^{-i\omega'v})' v^{i\frac{\omega}{k}} \Rightarrow$$

$$a_{\omega\omega'} = c \frac{\omega}{\omega'k} \int_0^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} v^{i\frac{\omega}{k}-1} \quad (4.24)$$

Συνεχίζοντας ως θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{+\infty} dx e^{-bx} x^{s-1}$  με τα  $b, s$  μιγαδικούς αριθμούς με το πραγματικό τους μέρος θετικό.

$$\int_0^{+\infty} \frac{d(bx)}{b} e^{-bx} \frac{(bx)^{s-1}}{b^{s-1}} = b^{-s} \int_0^{+\infty} dy e^{-y} y^{s-1} = e^{-s \ln b} \Gamma(s) \quad (4.25)$$

Όπου  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} dy e^{-y} y^{s-1}$  με την παράμετρο  $b$  να είναι μιγαδικός αριθμός.

Έστω  $b = w + iz = re^{i\theta}$  οπότε:

$$\begin{aligned} \ln b &= \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln \sqrt{w^2 + z^2} + i \arctan\left(\frac{z}{w}\right) = \\ &= \ln \sqrt{w^2 + z^2} + i \arctan\left|\frac{z}{w}\right| \operatorname{sign}\left(\frac{z}{w}\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Αν γυρίσουμε στο αρχικό ολοκλήρωμα και θέσουμε  $b = i\omega' + \epsilon$  και  $s = i\frac{\omega}{\kappa} + \epsilon$  με  $\epsilon$  να είναι μια μικρή θετική σταθερά η οποία χρειάζεται ώστε να εξασφαλιστεί η θετικότητα για το πραγματικό μέρος των παραμέτρων  $b$  και  $s$ , για να πάρουμε  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+}$  Με τα παραπάνω θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \ln b &= \ln \sqrt{\omega'^2 + \epsilon^2} + i \arctan\left|\frac{\omega'}{\epsilon}\right| \left(\frac{\omega'}{\epsilon}\right) \Rightarrow \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln b &= \ln|\omega'| + i \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\omega') \end{aligned} \quad (4.27)$$

Και τελικά μιας και  $\omega' > 0$  θα πάρουμε:

$$\alpha_{\omega\omega'} = c \frac{\omega}{\kappa\omega'} e^{-i\frac{\omega}{\kappa} \ln|\omega'|} e^{\frac{\omega\pi}{2\kappa}} \Gamma\left(i\frac{\omega}{\kappa}\right) \quad (4.28)$$

Αν δουλέψουμε ομοίως και για το άλλο ολοκλήρωμα θέτοντας όμως  $b = -i\omega' + \epsilon$  Θα πάρουμε:

$$\beta_{\omega\omega'} = -c \frac{\omega}{\kappa\omega'} e^{-i\frac{\omega}{\kappa} \ln|\omega'|} e^{-\frac{\omega\pi}{2\kappa}} \Gamma\left(i\frac{\omega}{\kappa}\right) \quad (4.29)$$

Διαιρώντας τις (4.28) και (4.29) θα πάρουμε:

$$\frac{\alpha_{\omega\omega'}}{\beta_{\omega\omega'}} = -e^{\frac{\omega\pi}{\kappa}} \Rightarrow$$

$$|\alpha_{\omega\omega'}|^2 = e^{\frac{2\omega\pi}{\kappa}} |\beta_{\omega\omega'}|^2 \quad (4.30)$$

Λαμβάνοντας από τους μετασχηματισμούς Bogoludon, υπόψη την σχέση για τους συντελεστές  $\alpha_\kappa$  και  $\beta_\kappa$   $|\alpha_\kappa|^2 - |\beta_\kappa|^2 = 1$  θα πάρουμε:

$$\int |\beta_{\omega\omega'}|^2 d\omega' = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \quad (4.31)$$

Από την σχέση (4.12)

$$\langle 0|N_b|0 \rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} \quad (4.32)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα γίνεται να ερμηνευτεί ως εξής: Ένας παρατηρητής της περιοχής  $\mathcal{J}^+$  θα βλέπει σωματίδια, στην κατάσταση του κενού της περιοχής  $\mathcal{J}^-$ , για τα οποία το φάσμα τους ακολουθεί την κατανομή Planck, κάτι που σημαίνει ότι είναι θερμικό. Η θερμική αυτή εκπομπή οφείλεται στο ότι υπάρχει μελανή οπή. Αποτέλεσμα αυτών και μιας και η μελανή οπή εκπέμπει θερμικά, είναι να αποδοθεί στην μελανή οπή θερμοκρασία.

Από την σύγκριση με την κατανομή Planck που εκπέμπονται από το μέλαν σώμα.

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} \quad (4.33)$$

θα προκύψει η θερμοκρασία της μελανής οπής σύμφωνα με τον Hawking (εργασία)

$$T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M} \quad (4.34)$$

Επειδή η παραπάνω σχέση έχει εκφραστεί με γεωμετροποιημένες μονάδες ( $c=G=1$ ), με το γινόμενο  $k_B T_H = \frac{\hbar}{8\pi k_B M}$  ενέργεια να έχει διαστάσεις μήκους, οπότε καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$k_B T_H = \frac{c^3 \hbar}{8\pi G M} \Rightarrow$$

$$T_H = \frac{c^3 \hbar}{8\pi k_B G M} \quad (4.35)$$

Εδώ θα πρέπει να αναφερθεί ότι αυτή η θερμοκρασία, η λεγόμενη ως θερμοκρασία Hawking, είναι πάρα πολύ χαμηλή, κάτι που την καθιστά, μαζί βέβαια και με το ίδιο το φαινόμενο, πρακτικά να μην μπορούν να μετρηθούν μέχρι και σήμερα με την τεχνολογία που υπάρχει.

Εκφράζοντας τη θερμοκρασία της μελανής οπής σε συνάρτηση με την ηλιακή μάζα, θα καταλήξουμε στην σχέση:

$$T = 6,2 \times 10^{-8} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) K \quad (4.36)$$

Στον παραπάνω τύπο φαίνεται ότι η θερμοκρασία μιας μελανής οπής είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας της. Δηλαδή προκύπτουν τα εξής:

- Στην περίπτωση που η θερμοκρασία της μελανής οπής γίνει μικρότερη από την θερμοκρασία του περιβάλλοντος, τότε η μελανή οπή θα απορροφήσει ενέργεια και η θερμοκρασία της θα μειωθεί επιπλέον.
- Στην περίπτωση που η θερμοκρασία της μελανής οπής γίνει μεγαλύτερη από του περιβάλλοντος, τότε ακτινοβολεί και χάνει μάζα, άρα γίνεται θερμότερη και θα εκπέμπει ταχύτερα, οπότε γίνεται περισσότερο θερμή και θα εκπέμπει ακόμα ταχύτερα κτλ κτλ.

Για μια μελανή οπή που μετά από χρόνο  $t_*$  θα εξαχνώνεται εντελώς, θα ισχύει:

$$M(t) = [3\nu\hbar(t_* - t)]^{1/3} \quad (4.37)$$

φαίνεται ότι ο ρυθμός εκπομπής, μεγαλώνει πολύ λίγο πιο πριν από το χρόνο  $t_*$  στον οποίο πραγματοποιείται η ολική εξάχνωση της μελανής οπής.

Η εντροπία μιας μελανής οπής, σύμφωνα με τους νόμους της θερμοδυναμικής και αφού προστεθεί μια ποσότητα θερμότητας σε αυτήν θα δίνετε:

$$dS = \frac{dQ}{T_H} = 8\pi M dQ \quad (4.38)$$

Σε μονάδες Planck ( $G = c = \hbar = k_B = 1$ ) και θερμότητα η οποία μεταφέρεται και προκαλεί αύξηση της μάζας της μελανής οπής  $dQ = dM$ .

$$dS = d(4\pi M^2) \quad (4.39)$$

Από την εξάρτηση της ακτίνας της μελανής οπής από την μάζα

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Οπότε καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$S_H = \frac{1}{4}A \quad (4.40)$$

που αποκαλείται εξίσωση ή τύπος των Bekenstein-Hawking. Η εντροπία δηλαδή στις μελανές οπές παίρνει μορφή επιφάνειας.

Βλέπουμε ότι η εντροπία στην επιφάνεια μια μελανής οπής μεταβάλλεται ανάλογα με το εμβαδό της.

Η ενέργεια της μελανής οπής είναι ανάλογη με την μάζα της και επειδή η ακτινοβολία μας παρέχεται από μια σχέση που είναι ίδια με την σχέση του Planck, γίνεται να θεωρήσουμε

για τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας της μελανής οπής, ότι θα δίνεται από τον νόμο των Stefan-Boltzmann.

Άρα:

$$E \sim M$$

$$\frac{dE}{dt} \approx -\sigma A T_H^4, \quad \left( \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} \right)$$

Επειδή όμως:

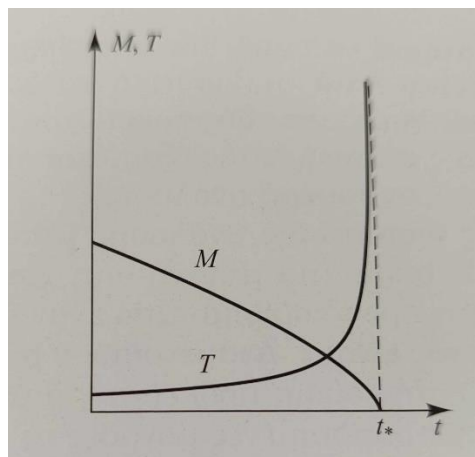
$$E = M c^2, \quad A = \left( \frac{MG}{c^2} \right)^2, \quad k_B T_H \sim \frac{\hbar c^3}{GM}$$

Τελικά θα έχουμε:

$$\frac{dM}{dt} \sim \frac{\hbar c^4}{G^2 M^2}$$

Όπου φαίνεται ότι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η μάζα της μελανής οπής είναι αντιστρόφως ανάλογος με το τετράγωνο της μάζας της,

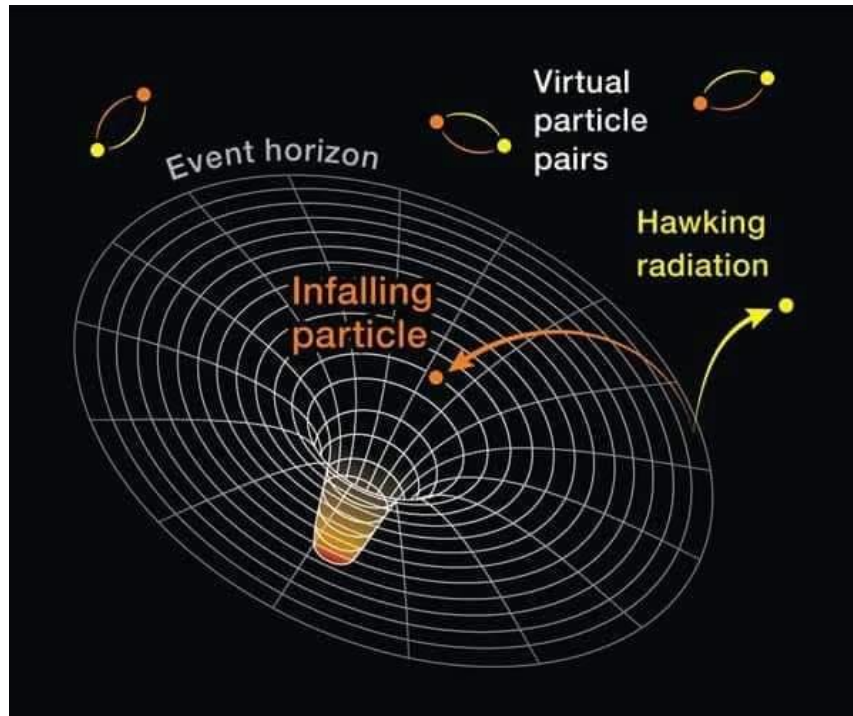
Άρα φαίνεται ότι μέσω των κβαντικών φαινομένων η μελανή οπή δεν μπορεί να είναι αιώνια, χάνει ενέργεια, θα χάσει όλη της την μάζα και θα εξατμιστεί.



**Εικόνα 14:** Εξάχνωση μιας μελανής οπής. Μέσω της ακτινοβολίας Hawking μια μελανή οπή θα εξαερώνεται σε πεπερασμένο χρόνο. Η μείωση της μάζας προκαλεί αύξηση της θερμοκρασίας. Άρα η μελανή οπή θα ακτινοβολεί με ρυθμό που διαρκώς θα αυξάνεται καθώς θα μειώνεται το μέγεθος της, με αποτέλεσμα την κατάληξη σε ένα εκρηκτικό τέλος. Εικόνα παρμένη από [5]

Η απόδειξη του Hawking χρησιμοποιεί κβαντική θεωρία πεδίου σε καμπύλο χωροχρόνο.

Η παρακάτω εικόνα που δείχνει την διαδικασία ανάδυσης εικονικών ζεύγων σωματιδίων που είναι εναγκαλισμένα μεταξύ τους και διαχωρίζονται από τον ορίζοντα γεγονότων οπότε το ένα σωματίδιο (ακτινοβολία Hawking) διαφεύγει στο άπειρο, ενώ το άλλο σωματίδιο πέφτει μέσα στην μελανή οπή, αποτελεί ουσιαστικά μια προσπάθεια αντικειμενικοποίησης μαθηματικών όρων.



**Εικόνα 15:** Δημιουργία ζεύγους εικονικών σωματιδίων στον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής. (<https://www.secretsofuniverse.in/hawking-radiation-from-black-holes/>)

## 5. ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώθηκε η ακτινοβολία Hawking για μια μελανή οπή Schwarzschild και είδαμε ότι είναι ίδια με την κατανομή Planck για ένα μέλαν σώμα με

$$\text{θερμοκρασία: } T_H = \frac{\hbar k}{8\pi M} \quad (G = c = 1).$$

Ένα κρίσιμο γεγονός στην ανάλυση της απώλειας πληροφορίας στις μαύρες τρύπες είναι ότι η μειωμένη κβαντική κατάσταση του πεδίου μακριά από τον ορίζοντα είναι ασυμπτωτικά Gibbsian στη θερμοκρασία Hawking  $T_H$ . Αυτό είναι το περιεχόμενο του **θεωρήματος Hawking-Wald (HW)**. Το θεώρημα αυτό υποδεικνύει ότι οι τιμές όλων των φυσικών παρατηρήσιμων μεγεθών έξω από τη μαύρη τρύπα κατανέμονται θερμικά σε μεγάλα χρονικά διαστήματα και δεν υπάρχουν συσχετισμοί μεταξύ των κβάντων διαφορετικών τρόπων του πεδίου. Αυτή η παρατήρηση είναι σημαντική, διότι συνεπάγεται ότι όταν η μαύρη τρύπα εξατμιστεί εντελώς, αφήνει πίσω της μόνο την ακτινοβολία Hawking, η οποία περιγράφεται από μια Gibbsian κβαντική κατάσταση. Αυτή είναι μια μικτή κατάσταση, που σημαίνει ότι η διαδικασία σχηματισμού και εξάτμισης της μαύρης τρύπας φαινομενικά περιλαμβάνει τεράστια απώλεια πληροφορίας.

Το γεγονός ότι φαίνεται η ακτινοβολία να είναι θερμική θέτει ορισμένα πολύ σοβαρά ερωτήματα, όπως το τι συμβαίνει με την πληροφορία που έπεσε μέσα σε μια μελανή οπή;

Λίγο πριν διατυπώσουμε το Παράδοξο της Πληροφορίας θα γίνει μια μικρή αναφορά σε κάποιες έννοιες από την Κβαντική Θεωρία της Πληροφορίας, που κρίνονται απαραίτητες και εξαιρετικά κρίσιμες για την κατανόηση του Παράδοξου.

Αρχικά θα δούμε τις «pure» και «mixed» κβαντικές καταστάσεις.

Στην κβαντική μηχανική, οι καταστάσεις ενός συστήματος μπορούν να είναι είτε καθαρές (pure states) είτε μικτές (mixed states). Η κατανόηση της διαφοράς μεταξύ αυτών των δύο τύπων καταστάσεων είναι θεμελιώδης για την κατανόηση της κβαντικής θεωρίας και των εφαρμογών της.

### 5.1 Καθαρές Καταστάσεις (Pure States)

Σύμφωνα με τον Dirac οποιαδήποτε κβαντική κατάσταση μπορεί να περιγραφεί από δυο αφηρημένα διάνυσματα ταυτοχρόνως. Το πρώτο είναι το διάνυσμα στήλης  $|\psi\rangle$  και το διάνυσμα γραμμής  $\langle\psi|$ , τα οποία αποκαλούνται bra και ket αντίστοιχα. Μια καθαρή κατάσταση στην κβαντική μηχανική περιγράφεται από ένα μοναδικό διάνυσμα καταστάσεων σε έναν χώρο Hilbert. Αυτές οι καταστάσεις είναι πλήρως καθορισμένες και δεν υπάρχει καμία αβεβαιότητα σχετικά με την κατάσταση του συστήματος όταν αυτό είναι σε μια καθαρή κατάσταση.



### 5.1.1 Μαθηματική Περιγραφή

Μια καθαρή κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος συμβολίζεται με ένα διάνυσμα (ket)  $|\Psi\rangle$  με μοναδιαίο μήκος ( $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ ) σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert.

Μια καθαρή διανυσματική κατάσταση  $|\varphi\rangle$  έχει ένα διπλό διάνυσμα  $\langle\varphi|$  (bra). Το εσωτερικό γινόμενο για δυο καταστάσεις  $|\varphi\rangle$  και  $|\psi\rangle$  θα είναι:

$$\text{Εσωτερικό γινόμενο} = (\varphi, \psi) = \langle\varphi|\psi\rangle$$

Αν θεωρήσουμε την πλήρη βάση  $\{|n\rangle\}$  του  $\mathbb{H}$ , τότε ο ταυτοτικός τελεστής

$$\hat{I} |\Psi\rangle = \sum_n \langle n|\hat{I}|\Psi\rangle |n\rangle$$

ο οποίος αν δράσει πάνω σε ένα ket  $|\Psi\rangle$  αντιστοιχίζεται πάλι στο ίδιο ket.

Ο θεμελιώδης κβαντικός τύπος της μέσης τιμής  $\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$  που ισχύει μόνο για καθαρές συλλογές που έχουν κοινή κατάσταση την  $|\psi\rangle$  για όλα τα μέλη τους, ας δούμε πως επεκτείνεται σε μια mixed κβαντική κατάσταση.

$$\langle A \rangle = \sum_{i,n} \langle n|\rho A|n\rangle \quad (1)$$

$$\text{όπου } \rho = \sum_i \rho_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (2)$$

Με  $|\psi_i\rangle$  μια pure κατάσταση στην οποία είναι δυνατόν να βρεθεί το σύστημα και  $\rho_i$  η πιθανότητα που μπορεί να εμφανιστεί το  $|\psi_i\rangle$ .

Η σχέση (1) ουσιαστικά είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του τελεστή  $\rho A$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό  $Tr A (\equiv Trace A) = \sum_n A_{nn}$  θα είναι:

$$\langle A \rangle = Tr(\rho A)$$

όπου  $\rho$  ο τελεστής πυκνότητας ή μήτρα πυκνότητας.

Η μήτρα πυκνότητα (που δεν είναι παρά ο προβολικός τελεστής πάνω στην κατεύθυνση του διανύσματος  $|\psi\rangle$ ) για μια καθαρή κατάσταση θα είναι:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$$

Ως προβολικός τελεστής θα ικανοποιεί την σχέση:  $\rho^2 = \rho$  (3)

και θα ισχύει επίσης  $Tr \rho = 1$  (4)

Λόγω της (4) θα ισχύει επίσης  $Tr \rho^2 = 1$

Βέβαια τα παραπάνω ισχύουν για τη μήτρα πυκνότητας που αντιστοιχεί σε μια pure κατάσταση. Για μια τυχούσα μήτρα πυκνότητας (2) η ιδιότητα (3) δεν ισχύει, ενώ για τις άλλες θα έχουμε:

$$\text{Τυχόν } \rho \quad \begin{cases} \text{Tr} \rho = 1 \\ \text{Tr} \rho^2 < 1 \end{cases}$$

### 5.1.2 Διαφορές και Σημασία

#### 1. Πληροφορία και Αβεβαιότητα:

- **Καθαρές Καταστάσεις:** Περιγράφουν συστήματα με πλήρη πληροφορία και χωρίς αβεβαιότητα.
- **Μικτές Καταστάσεις:** Περιγράφουν συστήματα με αβεβαιότητα και είναι στατιστικές υπερθέσεις πολλών καθαρών καταστάσεων.

#### 2. Μέτρηση και Παρατηρήσεις:

- Σε μια καθαρή κατάσταση, η μέτρηση ενός παρατηρητή δίνει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα με καθορισμένη πιθανότητα.
- Σε μια μικτή κατάσταση, η μέτρηση ενός παρατηρητή δίνει αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε μια κατανομή πιθανοτήτων των διαφόρων καθαρών καταστάσεων.

#### 3. Εντροπία:

- Η εντροπία Von Neumann για μια καθαρή κατάσταση είναι μηδέν, καθώς υπάρχει πλήρης πληροφορία.
- Η εντροπία για μια μικτή κατάσταση είναι θετική, αντανakλώντας την αβεβαιότητα και την απώλεια πληροφορίας.

Αυτή η διάκριση μεταξύ καθαρών και μικτών καταστάσεων είναι θεμελιώδης στην κβαντική μηχανική και έχει σημαντικές επιπτώσεις σε πεδία όπως η κβαντική πληροφορική, η κβαντική κρυπτογραφία και η κατανόηση της θερμοδυναμικής των κβαντικών συστημάτων.

Ας δούμε ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της διαφοράς των δυο περιπτώσεων pure και mixed.

### Παράδειγμα

Έστω μια pure κατάσταση  $|\psi\rangle$  η οποία αποτελεί υπέρθεση δυο καταστάσεων  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$  ως εξής:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)$$

Δηλαδή εάν γίνει μια μέτρηση στο σύστημα, θα υπάρχει 50% να μετρηθεί η  $|\psi_1\rangle$  και 50% πιθανότητα να μετρηθεί η  $|\psi_2\rangle$ . Πριν όμως την μέτρηση η κατάσταση του συστήματος είναι η υπέρθεση των δυο καταστάσεων.

Έστω τώρα ότι έχουμε ένα σύστημα το οποίο βρίσκεται είτε στην κατάσταση  $|\psi_1\rangle$ , είτε στην κατάσταση  $|\psi_2\rangle$ , χωρίς όμως να γνωρίζουμε σε ποια από αυτές τις δυο καταστάσεις βρίσκεται. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα σε κάθε μια από αυτές τις καταστάσεις είναι 50%. Η κατάσταση του συστήματος αποτελεί στατιστική συλλογή καθαρών (pure) καταστάσεων. Η

πιθανότητα 50% έχει το νόημα της κλασικής κι όχι της κβαντομηχανικής πιθανότητας. Δηλαδή η μέτρηση ως προς τις  $|\psi_1\rangle$  και  $|\psi_2\rangle$  θα δώσει τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα. Αυτές όμως οι κβαντικές καταστάσεις διαφέρουν εντελώς. Αυτό μπορεί να φανεί με το εξής:

Θέλουμε να κάνουμε μέτρηση στα δυο συστήματα ως προς κάποιο άλλο μέγεθος  $\varphi$  για το οποίο έχουμε:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle)$$

Για την pure κατάσταση θα είναι:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \Rightarrow$$

$$|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle$$

Αν τώρα μετρήσουμε το σύστημα θα είναι 100% η πιθανότητα να βρεθεί η  $|\varphi_1\rangle$ .

Για την mixed κατάσταση θα είναι:

πιθανότητα 50% για την  $|\psi_1\rangle$  και 50% πιθανότητα για την  $|\psi_2\rangle$ . Η πιθανότητα όμως της μέτρησης  $|\varphi_1\rangle$  στο  $|\psi_1\rangle$  θα είναι  $50\% \times 50\% = 25\%$ . Το ίδιο και για την πιθανότητα της μέτρησης  $|\varphi_2\rangle$  στο  $|\psi_2\rangle$ . Δηλαδή  $50\% \times 50\% = 25\%$ .

Αθροίζοντας τώρα τις δυο προηγούμενες πιθανότητες θα βρούμε την συνολική πιθανότητα  $|\varphi_1\rangle$  στη mixed κατάσταση δηλαδή θα είναι 50%, ενώ στην pure κατάσταση είδαμε ότι η αντίστοιχη πιθανότητα ήταν 100%.

## 5.2 Εντροπία Von Neumann

Η **εντροπία Von Neumann** είναι η κβαντική αναλογία της κλασικής εντροπίας στην πληροφορία, όπως ορίστηκε από τον Claude Shannon. Είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας ή της τυχαιότητας που σχετίζεται με μια κβαντική κατάσταση. Ειδικότερα, η εντροπία Von Neumann μετρά την αβεβαιότητα για την κατάσταση ενός κβαντικού συστήματος όταν περιγράφεται από μια πυκνότητα καταστάσεων (density matrix).

Η μαθηματική της μορφή είναι:

$$S_{vN} = -tr(\rho \ln \rho)$$

όπου:

- $S_{vN}$  είναι η εντροπία Von Neumann,
- $\rho$  είναι η πυκνότητα της κατάστασης (density matrix) που περιγράφει το κβαντικό σύστημα,
- $tr$  είναι το ίχνος της μήτρα

Η πυκνότητα καταστάσεων  $\rho$  περιγράφει το κβαντικό σύστημα, το οποίο μπορεί να βρίσκεται σε μια μικτή κατάσταση, δηλαδή σε υπέρθεση (entanglement) με άλλα συστήματα. Η εντροπία Von Neumann είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας ή του πόσο «μικτή» είναι η κατάσταση του συστήματος.

- Αν η κατάσταση είναι καθαρή (δηλαδή γνωρίζουμε πλήρως την κατάστασή της), τότε η εντροπία Von Neumann είναι μηδέν.
- Αν η κατάσταση είναι πλήρως μικτή (δηλαδή υπάρχει πλήρης αβεβαιότητα για την κατάσταση), τότε η εντροπία είναι μέγιστη.

Η εντροπία Von Neumann συνδέεται άμεσα με τη θεωρία της κβαντικής πληροφορίας, καθώς μετράει πόση πληροφορία «χάνεται» ή είναι «κρυμμένη» λόγω της αβεβαιότητας που εισάγεται από την κβαντική φύση των καταστάσεων. Αυτό είναι κρίσιμο σε τομείς όπως η κβαντική κρυπτογραφία, όπου το επίπεδο της εντροπίας σχετίζεται με την ασφάλεια των πληροφοριών.

## 5.3 Entanglement

Η κβαντική σύμπλεξη (entanglement) είναι ένα από τα πιο παράξενα και θεμελιώδη φαινόμενα στην κβαντική μηχανική. Περιγράφει μια κατάσταση όπου δύο ή περισσότερα σωματίδια είναι αλληλοσυσχετισμένα με τέτοιο τρόπο ώστε η κατάσταση του ενός σωματιδίου δεν μπορεί να περιγραφεί ανεξάρτητα από την κατάσταση του άλλου, ακόμη και αν τα σωματίδια βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους.

### 5.3.1 Μαθηματική Περιγραφή

Για να περιγράψουμε μαθηματικά το κβαντικό μπλέξιμο, ας εξετάσουμε δύο κβαντικά bit (qubits). Το σύστημα δύο qubits μπορεί να περιγραφεί από τον χώρο Hilbert,  $H = H_a \otimes H_b$  όπου  $H_a$  και  $H_b$  είναι οι χώροι Hilbert των δύο μερών.

#### Καθαρή Συμπλεκόμενη Κατάσταση

Μια τυπική καθαρή συμπλεκόμενη κατάσταση για δύο qubits είναι η κατάσταση Bell:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Αυτή η κατάσταση δεν μπορεί να διαχωριστεί σε γινόμενο δύο καθαρών καταστάσεων για κάθε qubit.

#### Μικτή Συμπλεκόμενη Κατάσταση

Όπως είδαμε και πιο πριν οι μικτές καταστάσεις περιγράφονται από μήτρες πυκνότητας (density matrices). Μια μικτή συμπλεκόμενη κατάσταση είναι μια κατανομή πιθανοτήτων πολλών καθαρών συμπλεκόμενων καταστάσεων.

## Εντροπία Σύμπλεξης

### Ιδιότητες

1. Η εντροπία von Neumann δεν είναι ποτέ αρνητική, δηλαδή  $S \geq 0$
2. **Μηδενική Εντροπία για Καθαρές Καταστάσεις:** Αν ο  $\rho$  περιγράφει μια καθαρή κατάσταση, τότε  $S = 0$ .
3. **Θετική Εντροπία για Μικτές Καταστάσεις:** Αν ο  $\rho$  περιγράφει μια μικτή κατάσταση, τότε  $S > 0$ .

## 6. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει η παρουσίαση του παράδοξου της πληροφορίας στις μελανές οπές, ως αποτέλεσμα του γεγονότος σύμφωνα με το οποίο οι μελανές οπές εκπέμπουν θερμική ακτινοβολία (ακτινοβολία Hawking), οπότε θα εξατμίζονται μέχρι να εξαερωθούν και να εξαφανιστούν πλήρως, αφήνοντας όμως μόνο θερμική ακτινοβολία. Δηλαδή οι αρχικές κβαντικές καταστάσεις, οι οποίες καταλήγουν στην μελανή οπή και ήταν «καθαρές» pure, μετατρέπονται τελικά σε «μικτές» mixed. Κάτι όμως το οποίο απαγορεύεται από τους νόμους της κβαντομηχανικής και ουσιαστικά έτσι οδηγούμαστε στην απώλεια της πληροφορίας δηλαδή στο παράδοξο της πληροφορίας στις μελανές οπές.

### 6.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε γενικά για τις μελανές οπές, καθώς και ότι αυτές εκπέμπουν σωματίδια μέσω της ακτινοβολίας Hawking, οπότε τώρα φτάσαμε στο σημείο να δούμε τι ακριβώς εννοούμε λέγοντας «το παράδοξο της πληροφορίας μιας μελανής οπής».

Στην ιστορία της φυσικής τα Παράδοξα υπήρξαν πάντα οι αιτίες για να προκύψουν μεγάλες αλλαγές. Το «παράδοξο» έλεγε ο Richard Feynman είναι απλά η διαμάχη της πραγματικότητας και της αίσθησης μας για το πως αυτή έπρεπε να είναι, μια σύγκυση δηλαδή όσο αφορά αυτό που καταλαβαίνουμε. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν δυο είδη Παραδόξων στις θεωρίες της φυσικής.

Το πρώτο είδος προκύπτει όταν από τις υπάρχουσες θεωρίες στην φυσική, ορισμένες ακραίες συνθήκες δίνουν ανωμαλίες (απειρισμούς) που πιθανώς δεν είναι δυνατόν να περιγράφουν την πραγματικότητα. Πιθανώς γιατί ποτέ δεν πρέπει να προκαθορίζουμε πως θα είναι τελικά η πραγματικότητα. Αυτές όμως οι ανωμαλίες αποτελούν ισχυρές ενδείξεις ότι η φυσική θεωρία δεν είναι πλήρης, είναι ελλιπείς και θα πρέπει να συμπληρωθεί.

Υπάρχουν πολλά τέτοια παραδείγματα, ένα πολύ σημαντικό είναι το πρόβλημα της υπεριώδους καταστροφής, η οποία ήταν μια πρόβλεψη της κλασικής φυσικής, ότι ένα ιδανικό μέλαν σώμα σε θερμική ισορροπία θα εκπέμπει ακτινοβολία με άπειρη ισχύς. Κάποια όμως από τα παράδοξα όπως η υπεριώδης καταστροφή, οδήγησαν σε «επαναστάσεις» όσον αφορά στην κατανόηση της φύσης (κβαντομηχανική), ενώ κάποια άλλα παραμένουν μέχρι και σήμερα άλυτα και αποτελούν τεράστιες προκλήσεις για τους επιστήμονες.

Το δεύτερο είδος παραδόξων προκύπτει όταν δυο ή περισσότερες θεωρίες ή αρχές στην φυσική δεν συμφωνούν, δεν συνάδουν θα λέγαμε, μεταξύ τους. Είναι πολύ ισχυρή η πεποίθηση στους φυσικούς ότι υπάρχει μια και μόνο φυσική θεωρία η οποία περιγράφει τη φύση. Άρα αποτέλεσμα αυτού είναι η απαίτηση της τροποποίησης ή της συμπλήρωσης ή και ακόμα της αντικατάστασης των θεωριών ώστε να μην υπάρχει ασυνέπεια μεταξύ τους. Έχει συμβεί άλλωστε αρκετές φορές μέχρι τώρα στην ιστορία της φυσικής. Κάπως έτσι έχουν τα πράγματα και στην περίπτωση της διαδικασίας εξάτμισης μια μελανής οπής, όπου οι γνωστές αρχές της φυσικής είναι ασύμβατες μεταξύ τους. Οπότε μπορούμε να πούμε ότι αυτή η «σύγκρουση» ονομάζεται το Παράδοξο της πληροφορίας.

Το παράδοξο της πληροφορίας στις μαύρες τρύπες είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και αμφιλεγόμενα θέματα στη θεωρητική φυσική. Εμφανίζεται από την φαινομενική αντίφαση ανάμεσα στην κβαντομηχανική και την γενική θεωρία της σχετικότητας, δύο από τις πιο θεμελιώδεις θεωρίες της φυσικής.

Στην κβαντομηχανική, μια βασική αρχή είναι η διατήρηση της πληροφορίας. Αυτό σημαίνει ότι αν ξέρουμε την πλήρη κατάσταση ενός συστήματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, μπορούμε θεωρητικά, να υπολογίσουμε την κατάσταση του συστήματος σε οποιαδήποτε άλλη στιγμή, είτε στο παρελθόν είτε στο μέλλον. Η πληροφορία δεν χάνεται ποτέ.

Το 1976 ο Stephen Hawking υποστήριξε ότι οι μαύρες τρύπες προκαλούν την εξέλιξη καθαρών κβαντικών καταστάσεων σε μικτές καταστάσεις. Με άλλα λόγια, η κβαντική πληροφορία που πέφτει σε μια μελανή οπή δεν διαφεύγει με τη μορφή ακτινοβολίας. Αντίθετα μάλιστα, εξαφανίζεται εντελώς από το σύμπαν, παραβιάζοντας έτσι την μοναδιαία λειτουργία της κβαντομηχανικής. Τα επιχειρήματα του Hawking βασίζονταν στις συγκεκριμένες ιδιότητες των μελανών οπών.

Οι υπολογισμοί του υπέθεταν ένα ημικλασικό υπόβαθρο χωροχρόνου, δεν αντιμετώπιζαν τον ίδιο τον χωρόχρονο με κβαντομηχανικό τρόπο, γιατί αυτό θα απαιτούσε μια θεωρία για την κβαντική βαρύτητα.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, σύμφωνα με τη γενική θεωρία της σχετικότητας, η ύπαρξη μια μελανής οπής, καθορίζεται από την ύπαρξη ενός ορίζοντα γεγονότων, ένα νοητό όριο πέρα από το οποίο η πληροφορία δεν μπορεί να φτάσει σε έναν εξωτερικό παρατηρητή,

Παρ' όλο πάντως που έχει επικρατήσει να λέγεται «παράδοξο της πληροφορίας», το πρόβλημα που έχει προκύψει στην πραγματικότητα δεν επικεντρώνεται στην πληροφορία, αλλά μάλλον πολύ περισσότερο στη μικτή φύση της κατάστασης της ακτινοβολίας. Στην πραγματικότητα μπορεί κάποιος να φτιάξει καταστάσεις ακτινοβολίας που να έχουν πλήρη πληροφορία για μια μελανή οπή, αλλά να είναι ακόμα μικτές (οπότε θα παραβιάζεται η μοναδιαιότητα στην κβαντομηχανική, δηλαδή παραβίαση του αξιώματος που λέει ότι η χρονική εξέλιξη ενός συστήματος πρέπει να γίνεται με την δράση ενός μοναδιαίου τελεστή) και αντίστροφα μπορεί κανείς να έχει την κατάσταση ακτινοβολίας μια αμιγώς καθαρή κατάσταση και να μην φέρει καμία πληροφορία για την μελανή οπή.

Αυτό που είναι σημαντικό να κρατήσουμε είναι ότι η μοναδιακή εξέλιξη από μια pure (καθαρή) κατάσταση σε μια mixed (μικτή) απαγορεύεται σύμφωνα με τους νόμους της κβαντομηχανικής. Άρα οι μοναδιακές μεταβάσεις, ούτε τις πιθανότητες αλλά ούτε και την πληροφορία διατηρούν.

## 6.2 Χάσιμο πληροφορίας

Οι μελανές οπές έχουμε δει ότι εκπέμπουν σωματίδια μέσω της ακτινοβολίας Hawking. Ας υπολογίσουμε τώρα την κατάσταση της ακτινοβολίας, ξεκινώντας από την εικόνα που μας περιγράφει τον τρόπο εξάτμισης μιας μελανής οπής, γιατί θα μας βοηθήσει να καταλήξουμε στην κατάσταση της ακτινοβολίας. Στο κενό συνεχώς δημιουργούνται και εξαφανίζονται ζεύγη σωματιδίων και αντισωματιδίων. Για παράδειγμα ζεύγη ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων δημιουργούνται και καταστρέφονται ακόμη και στο κενό. Με την βοήθεια τώρα ενός ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου είναι δυνατόν να διαχωριστούν και ανιχνεύονται στο

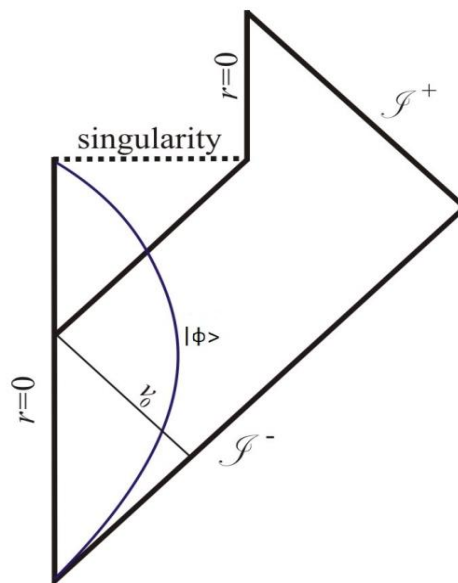
εργαστήριο δυο ρεύματα αντίθετου φορτίου να καταστούν υπό αυτή την έννοια πραγματικά (φαινόμενο Schwinger).

Αυτό το φαινόμενο θα μπορούσε να συμβεί και κοντά στον ορίζοντα μιας μελανής οπής, βέβαια εδώ αντί για ηλεκτρικό πεδίο θα είχαμε το βαρυτικό πεδίο της μελανής οπής. Αν τώρα είχε συμβεί να δημιουργηθεί ένα σωματίδιο μέσα στον ορίζοντα γεγονότων και το αντισωματίδιο του έξω από αυτόν, τότε το ένα θα έπεφτε μέσα στην ιδιομορφία (singularity) ενώ το άλλο θα μπορούσε να διαφύγει στο άπειρο και να ανιχνευθεί από έναν παρατηρητή ως ακτινοβολία Hawking. Στην συνέχεια θα δούμε ότι η κατάσταση της ακτινοβολίας είναι μικτή (mixed) παρ' όλο που ξεκίνησε καθαρή (pure). Αυτό δεν είναι παράλογο γιατί η εξέταση αφορούσε τα σωματίδια που διέφυγαν στο άπειρο και όχι τα «εσωτερικά» σωματίδια τα οποία είναι entangled μεταξύ τους. Αν λάβουμε υπόψιν τόσο το εσωτερικό όσο και το εξωτερικό της μελανής οπής η κατάσταση της ακτινοβολίας θα είναι καθαρή.

Το πρόβλημα όμως ανακύπτει όταν η μελανή οπή έχει εξατμιστεί εντελώς οπότε το «εσωτερικό» σύστημα δεν υφίσταται πια και μένει μόνο η ακτινοβολία Hawking, η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί από μια καθαρή κατάσταση. Με τον τρόπο αυτό όμως φαίνεται να υπάρχει παραβίαση της unitarity στην κβαντομηχανική, όπου pure καταστάσεις εξελίσσονται μόνο σε pure καταστάσεις. Αυτό καλείται απώλεια πληροφορίας κατά την εξάτμιση της μελανής οπής. Ο Hawking ισχυρίστηκε ότι θα πρέπει η περιγραφή της κβαντομηχανικής να γίνει μέσω πινάκων πυκνότητας και όχι μέσω καθαρών καταστάσεων, όταν λαμβάνουμε υπόψη την βαρύτητα. Οπωσδήποτε μια πολύ ριζοσπαστική άποψη.

Ας θεωρήσουμε τον σχηματισμό και την πλήρη εξάτμιση μιας μελανής οπής από ένα σφαιρικό κέλυφος με μάζα  $M$  που καταρρέει. Η μελανή οπή ακτινοβολεί αργά και τελικά εξατμίζεται πλήρως. Επίσης υποθέτουμε ότι η αρχική κατάσταση της μάζας που καταρρέει είναι στην καθαρή (pure) κατάσταση  $|\phi\rangle$ .

Ας δούμε παρακάτω το διάγραμμα Penrose που αναφέρετε στον σχηματισμό και στην εξάτμιση μιας μελανής οπής:

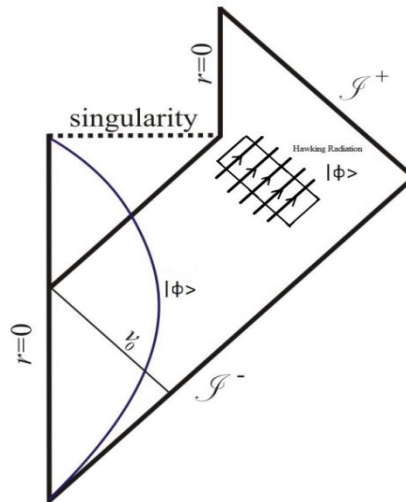


**Εικόνα 16:** Διάγραμμα Penrose για μελανή οπή που εξατμίζεται Εικόνα παρμένη από [27]



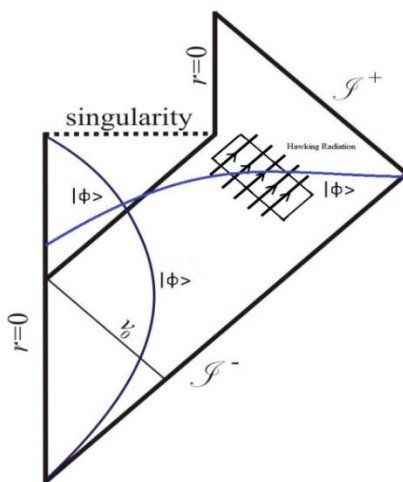
Υπάρχουν δυο υποθετικά αξιώματα:

- Το πρώτο αποτελεί την υπόθεση ότι ο σχηματισμός και η εξάτμιση μιας μελανής οπής περιγράφεται από έναν μοναδιαίο πίνακα  $S$ . Τότε προκύπτει το συμπέρασμα ότι η κατάσταση της ακτινοβολίας Hawking μετά την πλήρη εξάτμιση της μελανής οπής θα εξακολουθήσει να βρίσκεται στην κατάσταση  $|\phi\rangle$  χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες Heisenberg. Τότε η ακτινοβολία Hawking θα απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα:



*Εικόνα 17: Διάγραμμα Penrose με την ακτινοβολία Hawking. Εικόνα παρμένη από [27]*

- Το δεύτερο αξίωμα είναι η αρχή της ισοδυναμίας που βρίσκεται στην γενική θεωρία της σχετικότητας. Σύμφωνα με αυτή σε κλίμακα τάξης σημαντικά μικρότερη από την ακτίνα της μελανής οπής, ο ορίζοντας γεγονότων γίνεται να προσεγγιστεί από τον κλασικό επίπεδο χώρο. Άρα η ύλη που πέφτει μέσα δεν υφίσταται κάτι το ασυνήθιστο καθώς διασχίζει τον ορίζοντα. Δηλαδή η κατάσταση  $|\phi\rangle$  είναι άθικτη σε μια περιοχή που βρίσκεται μέσα στον ορίζοντα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα:



**Εικόνα 18:** Spacelike Slice που περιέχει και τις δυο καταστάσεις  $|\phi\rangle$ . Εικόνα παρμένη από [27]

Εδώ όμως έγκειται και το πρόβλημα. Αν και τα δυο αξιώματα είναι αληθή, τότε θα είναι δυνατή η κατασκευή μιας spacelike slice (η μπλέ γραμμή στην εικόνα) που θα περιέχει και την κατάσταση της ύλης που πέφτει μέσα και την κατάσταση της ακτινοβολίας Hawking. Σύμφωνα όμως με το θεώρημα no-cloning theorem (Wootters, Zurek και Dieks) δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε όμοια αντίγραφα μιας άγνωστης κβαντικής κατάστασης. Απαιτείται να υποθέσουμε ότι η «κλωνοποίηση» γίνεται με έναν μοναδιαίο τελεστή. Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι αν η κατάσταση της εισερχόμενης ύλης είναι πλήρως καταγεγραμμένη μέσα στον ορίζοντα, όπως προβλέπεται από την αρχή της ισοδυναμίας, τότε δεν μπορεί στην ακτινοβολία Hawking και το αντίστροφο.

Αν θέλουμε να συνοψίσουμε το Παράδοξο της πληροφορίας σε έναν πίνακα θα είχαμε:

Εξάτμιση Μελανής Οπής →	{	<p style="text-align: center;">Οι πληροφορίες διατηρούνται: Παραβίαση του No – cloning theorem και παραβίαση Unitarity</p> <p style="text-align: center;">□ □</p> <p style="text-align: center;">Οι πληροφορίες δεν διατηρούνται: Παραβίαση Unitarity</p>
-------------------------	---	---

Φάνηκε ξεκάθαρα η σύγκρουση ανάμεσα σε δυο πολύ καλά εδραιωμένες αρχές της φυσικής. Από τη μεριά ενός μακρινού παρατηρητή οτιδήποτε πέφτει μέσα σε μια μελανή οπή θερμαίνεται και τελικά εξέρχεται μέσω της ακτινοβολίας Hawking. Από την πλευρά όμως ενός παρατηρητή εντός της μελανής οπής τίποτα το σημαντικό δεν συμβαίνει κοντά στον ορίζοντα γεγονότων και όλες οι πληροφορίες μπορούν να περάσουν στο εσωτερικό της μελανής οπής, άθικτες και σε πεπερασμένο χρόνο. Όμως και οι δυο απόψεις δείχνουν ότι υπάρχει παραβίαση του θεωρήματος no-cloning και εδώ εύλογα δημιουργείται το ερώτημα, πως γίνεται να είναι αληθής και οι δυο εκδοχές.

Με βάση τους υπολογισμούς του Hawking το φως που εκπέμπεται κοντά στον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής είναι «καθαρό», pure. Έτσι δεν φαίνεται να μεταφέρει κάποιο στοιχείο που να δείχνει ότι ήταν κλεισμένο μέσα στον ορίζοντα γεγονότων. Από την μελανή οπή που προήλθε, που το γέννησε, θυμίζει μόνο τη μάζα. Η μελανή οπή εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, κατά την διάρκεια της εξάτμισης της, με αποτέλεσμα να γίνεται πιο θερμή μέχρι την στιγμή που θα εξαφανιστεί εντελώς σε μια μεγάλη λάμψη σωματιδίων γάμμα.

Μέσα στον ορίζοντα γεγονότων δεν παραμένει τίποτα, ούτε ύλη, ούτε ενέργεια, δηλαδή ο ίδιος ο ορίζοντας γεγονότων εξατμίζεται. Είναι σαν να παραμένει, κατά την διάρκεια της εξάτμισης, η πληροφορία κρυμμένη μέσα στην μελανή οπή και τελικά να εξαφανίζεται, μόλις αυτή εξατμιστεί ορστικά.

Δεν φαίνεται να υπάρχουν «τρίχες» (no hair), νήματα ώστε να υπάρξει σύνδεση με τον κόσμο ακόμα και αν μιλάμε για το εκπεμπόμενο φως από την μελανή οπή. Κατά την εξάτμιση επιστρέφεται ακτινοβολία χωρίς όμως μνήμη. Αν αντιστρέψαμε το βέλος του χρόνου, ώστε να βλέπαμε το φως από την εξάτμιση να ανασυντίθεται στον ορίζοντα γεγονότων και η μελανή οπή να ξαναπαίρνει την μάζα της, που αφαιρέθηκε, αλλά και αν επιστρέψουμε ακόμα πιο πίσω για να δούμε την δημιουργία της μελανής οπής, δεν θα έχουμε κανένα στοιχείο που θα μπορούσε να μας δώσει την δυνατότητα να γνωρίσουμε την πορεία σχηματισμού της. Οδηγούμαστε σε αδιέξοδο καθώς η «αιτιώδης» αλληλουχία των γεγονότων μηδενίζεται. Ο Hawking μας οδηγεί στο παράδοξο υποθέτωντας αρχικά ότι προς τον ορίζοντα γεγονότων μια σχηματισμένης μελανής οπής στέλνουμε σωματίδια σε «καθαρές κβαντικές καταστάσεις» και κατόπιν παρατηρώντας την μελανή οπή κατά στην διάρκεια της εξάτμισης της, ανακαλύπτει ότι τα εξατμιζόμενα σωματίδια βρίσκονται σε μορφή «μεικτής κβαντικής κατάστασης». Σύμφωνα με τον Hawking η μελανή οπή μετέτρεψε μια καθαρή κατάσταση (με μνήμη) σε μια μεικτή κατάσταση (χωρίς μνήμη). Άρα η αναστρεψιμότητα ανάμεσα στην αρχική και στην τελική κατάσταση παραβιάστηκε και η πληροφορία καταστράφηκε.

Η αποκάλυψη της ακτινοβολίας θα μπορούσε να δώσει την δυνατότητα να παρατηρήσουμε την αληθινή τους φύση. Δυστυχώς όμως, οι μελανές οπές έχουν τόσο πυκνή μάζα που εξατμίζονται πολύ αργά εκπέμποντας φως που δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό από τους ανιχνευτές μας. Το φως αυτό διαπερνά το σύμπαν χωρίς όμως να μας αφήνει κάποιο παρατηρήσιμο ίχνος.

Άρα απομένει μόνο η θεωρητική διερεύνηση του παράδοξου, για την προσπάθεια επίλυσης του.

### **6.3 Τρόποι επίλυσης του Παράδοξου**

Υπάρχουν πολλές θεωρίες που έχουν προταθεί από τους φυσικούς για την επίλυση του Παράδοξου της πληροφορίας. Οι προσπάθειες για την εξεύρεση λύσης είναι πολύ μεγάλες, αλλά πολλές από αυτές κατέρρευσαν είτε γιατί ήταν πολύ περίπλοκες είτε και το κυριότερο, παραβιάζουν κάποιες θεμελιώδεις πτυχές της φυσικής. Ας εξετάσουμε μερικές από τις εναλλακτικές λύσεις.

#### *1. Μπορεί η πληροφορία να εξέλθει με την ακτινοβολία Hawking;*

Για έναν ρεαλιστή φυσικό, το πιθανότερο μέρος που μπορεί να κρύβεται η πληροφορία είναι η ακτινοβολία Hawking, που εκπέμπεται από μια μελανή οπή. Άλλωστε, αν ρίξουμε έναν τόμο της εγκυκλοπαίδειας στον ήλιο, τότε για πρακτικούς σκοπούς, η πληροφορία καταστρέφεται. Αλλά δεν πιστεύουμε πραγματικά ότι η πληροφορία για την αρχική κβαντική κατάσταση έχει χαθεί κατ' αρχήν. Ακόμα και όταν η εγκυκλοπαίδεια καίγεται πέραν της αναγνώρισης, όλη η πληροφορία που περιέχει προφανώς αποθηκεύεται σε λεπτές και περίπλοκες συσχετίσεις μεταξύ των κβάντων της ακτινοβολίας που εκπέμπει ο ήλιος, ή

στις συσχετίσεις των εκπέμψιμων κβάντων με την εσωτερική κατάσταση του ήλιου. Η πληροφορία χάνεται στην πράξη επειδή δεν μπορούμε να παρακολουθήσουμε όλες αυτές τις συσχετίσεις.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι προσπαθούμε να διαβάσουμε την εγκυκλοπαίδεια μετρώντας το ηλιακό φως. Ακόμα κι αν μετρήσουμε τις ιδιότητες της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας με αυθαίρετη ακρίβεια, λίγη πληροφορία βγαίνει στην αρχή. Η ακτινοβολία βρίσκεται σε μια σχεδόν θερμική μικτή κατάσταση επειδή έχει πολύπλοκες συσχετίσεις με την εσωτερική κατάσταση του ήλιου (την οποία δεν μετράμε). Αλλά αν περιμένουμε αρκετά ώστε ο «ήλιος» να κατασταλάξει στην μοναδική του κβαντική βασική κατάσταση και να σταματήσει να ακτινοβολεί, τότε μόνο οι συσχετίσεις μεταξύ των εκπεμπόμενων κβάντων μπορούν να μεταφέρουν την πληροφορία. Υπάρχουν σίγουρα πολλοί τρόποι για να κωδικοποιηθεί η πληροφορία στις συσχετίσεις μεταξύ των κβάντων που εκπέμπονται από το σύστημα σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Αν μετρήσουμε αυτές τις συσχετίσεις με αρκετή ακρίβεια (και γνωρίζουμε την ακριβή αρχική κβαντική κατάσταση του ήλιου πριν ρίξουμε την εγκυκλοπαίδεια), μπορούμε να ανακτήσουμε την εγκυκλοπαίδεια.

Άρα γιατί να είναι θεμελιωδώς διαφορετική μια μαύρη τρύπα; Η ρεαλιστική άποψη υποστηρίζει ότι, με παρόμοιο τρόπο, η ακτινοβολία Hawking που εκπέμπεται από μια μαύρη τρύπα φαίνεται στην αρχή να είναι σε μικτή κατάσταση. Αλλά μέχρι τη στιγμή που η μαύρη τρύπα έχει εκπέμψει το μεγαλύτερο μέρος της μάζας της, υπάρχουν λεπτομερείς και περίπλοκες συσχετίσεις μεταξύ των κβάντων που εκπέμφθηκαν νωρίς και των κβάντων που εκπέμφθηκαν αργότερα. Αυτές οι συσχετίσεις, κατ' αρχήν, μεταφέρουν όλη την πληροφορία για την κβαντική κατάσταση του αρχικού καταρρέοντος σώματος.

Δεδομένου ότι μια μαύρη τρύπα δεν έχει (ή έχει λίγα) «μαλλιά», η πραγματιστική άποψη μας προκαλεί να εξηγήσουμε πώς η μαύρη τρύπα καταφέρνει να καταγράψει την πληροφορία για τα κβάντα που έχει ήδη εκπέμψει, ώστε να μπορεί να προκαλέσει αυτές τις συσχετίσεις. Αλλά υπάρχει ένας πιο έντονος τρόπος να εκφράσουμε γιατί η πραγματιστική άποψη είναι απίθανη και δύσκολη να συμβιβαστεί με την αιτιότητα. Στον χωροχρόνο μιας εξατμιζόμενης μαύρης τρύπας, είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε μια μοναδική χωροειδική φέτα που διασχίζει το μεγαλύτερο μέρος της εξερχόμενης ακτινοβολίας Hawking, και επίσης διασχίζει το καταρρέον σώμα, καλά μέσα στον (φαινομενικό) ορίζοντα. (Μπορούμε επίσης να επιλέξουμε αυτή τη φέτα να μείνει μακριά από τη μοναδικότητα, σε περιοχές χαμηλής καμπυλότητας, έτσι είμαστε βέβαιοι ότι γνωρίζουμε την αιτιακή δομή με μεγάλη αξιοπιστία.)

Τώρα, ξέρουμε ότι αν η εξερχόμενη ακτινοβολία από μόνη της είναι σε σχεδόν καθαρή κατάσταση, δεν πρέπει να είναι ισχυρά συσχετισμένη με την κατάσταση του σώματος μέσα στον ορίζοντα. Το πρόβλημα προκύπτει επειδή, αν η κβαντική κατάσταση έξω από τον ορίζοντα είναι πραγματικά ασυσχέτιστη με την κατάσταση μέσα στον ορίζοντα, τότε προκύπτει από την αρχή της υπέρθεσης ότι η κατάσταση μέσα στον ορίζοντα πρέπει να είναι μια μοναδική κατάσταση που δεν μεταφέρει καμία πληροφορία. Το επιχείρημα πάει ως εξής: Ας συμβολίσουμε με  $|i\rangle$  μια βάση για την αρχική κβαντική κατάσταση του καταρρέοντος σώματος και ας πάρουμε την ακραία άποψη ότι καθέ μια από αυτές τις καταστάσεις εξελίσσεται σε μια κατάσταση στη χωροειδική φέτα που κατασκευάστηκε παραπάνω, έτσι ώστε η ακτινοβολία και το καταρρέον σώμα να είναι τελείως ασυσχέτιστα. Έχουμε

$$|i\rangle \rightarrow |i\rangle_{\text{εντός}} \otimes |i\rangle_{\text{εκτός}}$$

η τελική κατάσταση είναι το τανυστικό γινόμενο μιας καθαρής κατάστασης μέσα στον ορίζοντα και μιας καθαρής κατάστασης έξω. Αλλά μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε μια υπέρθεση αυτών των βασικών καταστάσεων, η οποία εξελίσσεται ως

$$\sum_i c_i |i\rangle \rightarrow \sum_i c_i (|i\rangle_{\text{εντός}} \otimes |i\rangle_{\text{εκτός}})$$

Γενικά, η κατάσταση μέσα και έξω θα είναι συσχετισμένη, εκτός αν όλες οι καταστάσεις  $|i\rangle_{\text{εντός}}$  είναι πραγματικά η ίδια κατάσταση. Έτσι, η ακτινοβολία θα είναι πάντα σε καθαρή κατάσταση μόνο αν το σώμα είναι σε μια μοναδική κατάσταση. (Αυτό θυμίζει πώς ο «ήλιος» καταστάλαξε στη μοναδική βασική του κατάσταση στο παραπάνω παράδειγμα.) Πιο γενικά, αν η κατάσταση της ακτινοβολίας είναι σχεδόν καθαρή, τότε η κατάσταση του σώματος πρέπει να είναι σχεδόν μοναδική. Συμπεραίνουμε ότι, αν η πληροφορία πραγματικά διαδίδεται κωδικοποιημένη στην ακτινοβολία Hawking, τότε πρέπει να υπάρχει ένας μηχανισμός που αφαιρεί (σχεδόν) όλη την πληροφορία για το καταρρέον σώμα καθώς το σώμα πέφτει μέσα από τον φαινομενικό ορίζοντα (και πολύ πριν το σώμα φτάσει στη μοναδικότητα). Είναι σαν να υπάρχει μια μυστηριώδης δύναμη η οποία να «καθαρίσει» την εγκυκλοπαίδεια καθώς αυτή κατακυλά στη μαύρη τρύπα, αφαιρώντας το μήνυμα που περιέχει. Είναι δύσκολο πάντως να φανταστεί κανείς οποιονδήποτε λογικό τρόπο για να επιτευχθεί αυτό.

Αν αυτό το καθάρισμα της πληροφορίας στον ορίζοντα δεν συμβαίνει, τότε φαίνεται να απαιτείται μακροσκοπική παραβίαση της αιτιότητας για να μεταφερθεί η πληροφορία από το καταρρέον σώμα στην εξερχόμενη ακτινοβολία. Τουλάχιστον, η ημικλασική εικόνα της αιτιακής δομής πρέπει να είναι πολύ παραπλανητική.

## 2. Μπορούν οι πληροφορίες να διατηρηθούν από ένα σταθερό υπόλειμμα μελανής τρύπας;

Η ρεαλιστική άποψη είναι ότι μικρές διορθώσεις στην ημικλασική θεωρία συσσωρεύονται με την πάροδο του χρόνου, έτσι ώστε μέχρι η μαύρη τρύπα να έχει εκπέμψει το μεγαλύτερο μέρος της μάζας της, το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας να έχει ανακτηθεί. Ένα πλεονέκτημα αυτού του σεναρίου είναι ότι μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα το κατανοήσουμε και θα το αναλύσουμε χωρίς να επικαλούμαστε τη φυσική της κλίμακας Planck. Οι περισσότερες άλλες προτεινόμενες τρόποι διαφυγής από την απώλεια πληροφορίας βασίζονται σε εικασίες για το πώς συμπεριφέρεται μια μαύρη τρύπα μάζας Planck.

Αν η ημικλασική θεωρία δεν είναι παραπλανητική, τότε η ακτινοβολία Hawking που εκπέμπεται από μια μεγάλη μαύρη τρύπα αποκαλύπτει ελάχιστες πληροφορίες για το σώμα που καταρρέει. Αν η πληροφορία δεν χάνεται, αυτό πρέπει να σημαίνει ότι η πληροφορία παραμένει μέσα στη μαύρη τρύπα. Όταν η μαύρη τρύπα έχει εξατμιστεί μέχρι το μέγεθος Planck, η τυπική ημικλασική θεωρία της εξάτμισης της μαύρης τρύπας δεν είναι πλέον εφαρμόσιμη, καθώς ο χωροχρόνος υπόκειται σε βίαιες κβαντικές διακυμάνσεις σε αυτή την κλίμακα. Δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το τι συμβαίνει μετά χωρίς μια βαθύτερη κατανόηση της κβαντικής βαρύτητας.

Ίσως τα φαινόμενα της κβαντικής βαρύτητας σταματούν τη διαδικασία εξάτμισης, αφήνοντας πίσω ένα σταθερό υπόλειμμα μαύρης τρύπας. Με την πρώτη ματιά, αυτό φαίνεται να επιλύει το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας, επειδή όλη η πληροφορία για το αρχικό σώμα που καταρρέει μπορεί κατ' αρχήν να βρίσκεται στο υπόλειμμα. Αλλά μετά από περαιτέρω σκέψη, η λύση αυτή μπορεί να είναι χειρότερη από το πρόβλημα. Δεδομένου

ότι η αρχική μαύρη τρύπα θα μπορούσε να ήταν αυθαίρετα μεγάλη, το υπόλειμμα πρέπει να είναι ικανό να φέρει αυθαίρετα μεγάλο ποσό πληροφορίας (περίπου  $M^2/M_{Planck}^2$  bits, αν η αρχική μάζα ήταν  $M$ ).

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ειδών σταθερών υπολειμμάτων, όλα με μάζα συγκρίσιμη με την  $M_{Planck}$ .

Φαίνεται δύσκολο να συμφιλιωθεί αυτού του είδους ο άπειρος εκφυλισμός με τις βασικές αρχές της κβαντικής θεωρίας πεδίου, δηλαδή, με την αιτιότητα και την μοναδιαία διάταξη. Η σύζευξη των υπολειμμάτων με σκληρά κβάντα μπορεί να κατασταλεί από παράγοντες μορφής, αλλά η σύζευξη με μαλακά κβάντα (μήκος κύματος  $\gg L_{Planck}$ ) θα πρέπει να περιγράφεται καλά από μια αποτελεσματική θεωρία πεδίου στην οποία το υπόλειμμα να θεωρείται ως σημειακό αντικείμενο.

Η εκπομπή υπολειμμάτων μεγέθους Planck κατά την εξάτμιση μιας μεγάλης μαύρης τρύπας είναι απλώς ένα παράδειγμα μιας διαδικασίας στην οποία μπορούν να παραχθούν βαριά σωματίδια, μια διαδικασία που αναμένεται να επιτρέψει την περιγραφή μιας αποτελεσματικής θεωρίας πεδίου. Αν τέτοιες διαδικασίες έχουν πραγματικά άπειρους ρυθμούς, τότε αυτές οι απειρίες θα δημιουργούσαν γενικότερο πρόβλημα και θα κατέστρεφαν τη συνοχή της θεωρίας.

Έτσι, αν τα σταθερά υπολείμματα είναι πραγματικά, η απάντηση, μια περιγραφή της αποτελεσματικής θεωρίας πεδίου της σύζευξης των υπολειμμάτων με μαλακά κβάντα δεν μπορεί να είναι έγκυρη, η σύζευξη πρέπει να εξαρτάται από το κρυμμένο περιεχόμενο πληροφορίας του υπολείμματος. Παλαιότερα κάποιοι φυσικοί έδωσαν μια εξήγηση για το πώς αυτό μπορεί να είναι δυνατό. Για αυτούς, η πληροφορία που βρίσκεται σε ένα υπόλειμμα μαύρης τρύπας περιέχεται σε έναν μακρύ, στενό λαιμό που είναι προσαρτημένος στον χωροχρόνο. Η παραγωγή υπολειμμάτων καταστέλλεται έντονα επειδή είναι απαραίτητο να προστεθεί ένας μεγάλος όγκος (ο όγκος του λαιμού) στο υπόβαθρο του χωροχρόνου, και αυτή η διαδικασία απαιτεί μεγάλη Ευκλείδια δράση.

Για διάφορους λόγους, τα παραπάνω επιχειρήματα δεν είναι πολύ πειστικά. Το σημαντικό πίσω από το κίνητρο που διέπει την πρόταση ότι ένα υπόλειμμα μαύρης τρύπας έχει έναν μακρύ λαιμό προέρχεται από μελέτες της βαρύτητας dilaton, η οποία προκύπτει ως ένα χαμηλής ενέργειας όριο της θεωρίας χορδών. Οι ακραία μαγνητικά φορτισμένες μαύρες τρύπες σε αυτή τη θεωρία πραγματικά έχουν άπειρα μακριούς λαιμούς (αν το μήκος μετριέται από τη «μετρική των χορδών» που καθορίζει πώς οι χορδές διαδίδονται στον υπόβαθρο). Αλλά ενώ ο λαιμός της μαγνητικά φορτισμένης μαύρης τρύπας είναι περασμένος με μαγνητική ροή που αποτρέπει το σφίξιμο του λαιμού, δεν είναι σαφές τι θα αποτρέψει το σφίξιμο του λαιμού μιας αφόρτιστης μαύρης τρύπας. Αν το σφίξιμο συμβεί, η πληροφορία που αποθηκεύεται στον λαιμό θα χαθεί σε ένα «baby universe» αποσυνδεδεμένο από το δικό μας σύμπαν.

Ο Giddings έχει προτείνει μια παραλλαγή της ιδέας του σταθερού υπολείμματος ότι μια μαύρη τρύπα που περιέχει πολλή πληροφορία σταματά να εξατμίζεται όταν είναι ακόμα μεγάλη σε σύγκριση με το  $L_{Planck}$ . Όσο περισσότερη πληροφορία, τόσο μεγαλύτερο το υπόλειμμα. Το παράξενο εδώ είναι ότι πρέπει να υπάρχουν αυθαίρετα μεγάλες μαύρες τρύπες που δεν εκπέμπουν ακτινοβολία Hawking, αντίθετα με την ημικλασική θεωρία. Αυτή η αποτυχία της ημικλασικής θεωρίας πρέπει να συμβαίνει ακόμα και αν η καμπυλότητα στον ορίζοντα είναι αυθαίρετα μικρή.

Μια άλλη καθόλου ευχάριστη πτυχή της ιδέας του υπολείμματος είναι ότι μας αφήνει χωρίς μια λογική ερμηνεία για την εντροπία Hawking-Bekenstein. Αν η πληροφορία είναι πραγματικά κωδικοποιημένη στην ακτινοβολία Hawking, τότε φαίνεται λογικό να πούμε ότι το  $e^{S(M)}$  μετρά τον αριθμό των προσβάσιμων εσωτερικών καταστάσεων της μαύρης τρύπας, για μια μαύρη τρύπα μάζας  $M$ . Αλλά αν η πληροφορία παραμένει μέσα στη μαύρη τρύπα, τότε ο αριθμός των εσωτερικών καταστάσεων δεν έχει καμία σχέση με τη μάζα της μαύρης τρύπας. Πράγματι (αν τα υπολείμματα έχουν μέγεθος Planck), μπορούμε να προετοιμάσουμε μια μαύρη τρύπα μάζας  $M$  που κρατά μια αυθαίρετα μεγάλη ποσότητα πληροφορίας, φτιάχνοντας αρχικά μια πολύ μεγαλύτερη τρύπα και στη συνέχεια αφήνοντάς την να εξατμιστεί για μεγάλο χρονικό διάστημα. Έτσι, ο αριθμός των πιθανών εσωτερικών καταστάσεων για μια μαύρη τρύπα μάζας  $M$  πρέπει πραγματικά να είναι άπειρος. Αυτό όμως θα έδειχνε ότι το οικοδόμημα της θερμοδυναμικής των μαύρων τρυπών θα ήταν σαν να έχει προκύψει από μια ανεξήγητη σύμπτωση.

(Αν μια μαύρη τρύπα πραγματικά καταστρέφει πληροφορίες, τότε η ερμηνεία της εγγενούς εντροπίας πρέπει να είναι κάπως διαφορετική, αλλά ίσως ακόμα λογική. Η εντροπία της μαύρης τρύπας μετρά την ποσότητα της απρόσιτης πληροφορίας. Καθώς η μαύρη τρύπα εξατμίζεται, η εντροπία μεταφέρεται στην εξερχόμενη ακτινοβολία).

Αν όμως απορρίψουμε την ιδέα των σταθερών υπολειμμάτων μαύρης τρύπας, υπάρχει μια πολύ σημαντική συνέπεια, δεν μπορεί να υπάρχουν ακριβείς συνεχείς παγκόσμιες συμμετρίες στη φύση. Ας υποθέσουμε ότι το  $Q$  είναι ένα υποτιθέμενο διατηρούμενο φορτίο και ότι  $m > 0$  είναι η μάζα του σωματιδίου με τον μικρότερο λόγο μάζας προς φορτίο. (Θα θεωρήσουμε ότι το φορτίο του είναι ένα.) Συγκεντρώνοντας  $N$  σωματίδια, μπορούμε να δημιουργήσουμε μια μαύρη τρύπα με φορτίο  $Q = N$  και μάζα  $M$  της τάξης του  $Nm$ . Αν το  $N$  είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε  $M \gg M_{Planck}$ , έτσι ώστε η ημικλασική θεωρία να μπορεί να εφαρμοστεί με ασφάλεια σε αυτή τη μαύρη τρύπα. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να κάνουμε το  $M$  τόσο μεγάλο ώστε η θερμοκρασία Hawking να είναι μικρή σε σύγκριση με τις μάζες όλων των φορτισμένων σωματιδίων. Τότε η μαύρη τρύπα θα ακτινοβολήσει το μεγαλύτερο μέρος της μάζας της με τη μορφή ελαφρών μη φορτισμένων σωματιδίων, χωρίς να ακτινοβολήσει πολύ από το φορτίο της. Σε αυτό το σημείο, δεν υπάρχει τρόπος να συνεχιστεί η εξάτμιση της μαύρης τρύπας χωρίς να παραβιάζεται η διατήρηση του  $Q$ . Δεν υπάρχει διαθέσιμος κανάλι διάσπασης με φορτίο  $Q = N$  και επαρκώς μικρή μάζα. Ο μόνος τρόπος να σωθεί ο νόμος διατήρησης είναι η μαύρη τρύπα να σταματήσει να εξατμίζεται και να σταθεροποιηθεί σε ένα υπόλειμμα που φέρει το διατηρούμενο φορτίο. Δεδομένου ότι αυτό δεν συμβαίνει στην ημικλασική θεωρία, φαίνεται ότι είμαστε αναγκασμένοι είτε στα υπολείμματα μεγέθους Planck είτε στην εκπληκτική κατάρρευση της ημικλασικής θεωρίας για μεγάλες μαύρες τρύπες. Και θα υπήρχε ένας άπειρος αριθμός ειδών, επειδή το  $N$  θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Αν αποδεχτούμε όμως τις αντιρρήσεις για την ύπαρξη ενός άπειρου αριθμού ειδών υπολειμμάτων, τότε, πρέπει να αποδεχτούμε τη συνέπεια ότι ο νόμος διατήρησης παραβιάζεται.

Δημιουργείται όμως έτσι μια ασυνήθιστη ανωμαλία. Δηλαδή υπάρχει ένας νόμος διατήρησης που μεγάλη ακρίβεια σε κλασικό επίπεδο, αλλά παραβιάζεται από κβαντικά φαινόμενα. Δεδομένου ότι η μαύρη τρύπα «ξεχνά» την τιμή του φορτίου που καταναλώνει, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί αν η απώλεια πληροφορίας είναι αναπόφευκτη σε θεωρίες στις οποίες ο νόμος διατήρησης παραβιάζεται «μόνο» από διαδικασίες που αφορούν μαύρες τρύπες. Αυτό βέβαια είναι ένα συμπέρασμα που δεν είναι κατ' ανάγκη να γίνει αποδεκτό, μιας και υπάρχει η πιθανότητα όλες οι πληροφορίες για το αρχικό σώμα που καταρρέει να

διατηρούνται όπως περιγράφεται παραπάνω. Το ότι το φορτίο δεν διατηρείται (αντίθετα με την αρχική προσδοκία) δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι η πληροφορία καταστρέφεται.

Επίσης αυτό το επιχείρημα για τη μη διατήρηση καταρρέει αν υπάρχουν αβαρή σωματίδια που φέρουν το διατηρούμενο φορτίο. Επίσης, δεν εφαρμόζεται (ή τουλάχιστον, δεν είναι απόλυτα πειστικό) για διακριτές παγκόσμιες συμμετρίες.

### 3. Μπορούν όλες οι πληροφορίες να βγουν «στο τέλος»;

Αυτό που γράφηκε παραπάνω ότι «η πληροφορία βγαίνει με την ακτινοβολία Hawking», σημαίνει ότι μετά από την εξάτμιση του μεγαλύτερου μέρους της μάζας της μαύρης τρύπας, η κατάσταση της ακτινοβολίας που έχει εκπέμψει δεν είναι πραγματικά θερμική, αλλά είναι σχεδόν καθαρή. Μια άλλη λογική πιθανότητα είναι ότι η ακτινοβολία παραμένει πραγματικά θερμική μέχρι πολύ αργότερα (όπως υποδεικνύει η ημικλασική θεωρία). Τέλος, όταν η μαύρη τρύπα εξατμίζεται μέχρι το μέγεθος της Planck και η ημικλασική θεωρία καταρρέει, η πληροφορία αρχίζει να διαρρέει. Κωδικοποιείται σε συσχετίσεις μεταξύ των θερμικών κβάντων που εκπέμφθηκαν νωρίτερα και των κβάντων που εκπέμφθηκαν «στο τέλος».

Αλλά αν η μαύρη τρύπα ήταν αρχικά πολύ μεγάλη, έτσι ώστε η ποσότητα της πληροφορίας να είναι πολύ μεγάλη, τότε η πληροφορία δεν μπορεί να βγει ξαφνικά. Το τελικό στάδιο της διαδικασίας εξάτμισης πρέπει να διαρκέσει πολύ χρόνο. Για να πάρουμε μια ιδέα πόσος χρόνος πρέπει να χρειαστεί, θα πρέπει να μετρήσουμε τον αριθμό των κβαντικών καταστάσεων που είναι διαθέσιμες για την ακτινοβολία ενέργειας Planck που εκπέμπεται στο τελευταίο στάδιο. Αυτά τα κβάντα έχουν όλα μήκη κύματος που είναι πολύ μεγαλύτερα από το μέγεθος του εξατμιζόμενου αντικειμένου, έτσι είναι μια εξαιρετική προσέγγιση να υποθέσουμε ότι όλα καταλαμβάνουν το χαμηλότερο μερικό κύμα. Έτσι, για τον σκοπό της καταμέτρησης καταστάσεων, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα μονοδιάστατο (ακτινικό) ιδανικό αέριο.

Στην πραγματικότητα, το ίδιο ισχύει σε λογική προσέγγιση και για μια μεγάλη μαύρη τρύπα, καθώς τα εκπέμπόμενα κβάντα έχουν μήκος κύματος συγκρίσιμο με το μέγεθος της τρύπας. Αρχικά ας εξετάσουμε την περίπτωση μιας μεγάλης μαύρης τρύπας και να ελέγξουμε ότι η εντροπία Hawking–Bekenstein μετρά τον αριθμό των καταστάσεων ακτινοβολίας από τις οποίες μπορεί να συναρμολογηθεί η μαύρη τρύπα. Αν η μάζα της μαύρης τρύπας είναι  $M$ , τότε η κατάσταση της ακτινοβολίας από την οποία σχηματίστηκε πρέπει να περιέχει ενέργεια  $M$  μέσα σε μια σφαίρα με ακτίνα συγκρίσιμη με το χρόνο εξάτμισης Hawking, χρόνος  $t_{Hawking} \sim M^3$ . (σε μονάδες με  $(M_{Planck} = 1)$ ). Η εντροπία  $S$  ενός μονοδιάστατου ιδανικού αερίου με ενέργεια  $E$  και «όγκο»  $L$  είναι, κατά τάξη μεγέθους,

$$S^2 \sim EL$$

Έτσι, για  $E \sim M$  και  $L \sim M^3$ , βρίσκουμε  $S \sim M^2$ , την εντροπία Hawking–Bekenstein.

Ένας τρόπος για να πούμε τι συμβαίνει είναι ότι το υπόλειμμα πρέπει να εκπέμψει περίπου  $S \sim M^2$  κβάντα για να αποκαταστήσει την πληροφορία. Δεδομένου ότι η συνολική ενέργεια είναι της τάξης του ενός, ένα τυπικό κβάντο έχει ενέργεια  $M^{-2}$  και μήκος κύματος  $M^2$ . Επιπλέον, για να μεταφέρουν την απαιτούμενη πληροφορία, αυτά τα κβάντα πρέπει να είναι



μόνο ασθενώς συσχετισμένα μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει, ότι πρέπει να βγαίνουν ένα-ένα, ως μη επικαλυπτόμενα πακέτα κύματος. Δεδομένου ότι ο χρόνος για την εκπομπή κάθε κβάντου είναι  $M^2$  και υπάρχουν  $M^2$  κβάντα, ο συνολικός χρόνος είναι  $M^4$ .

Αν η πληροφορία βγαίνει στο τέλος, τότε, το σενάριο είναι ότι μια μαύρη τρύπα με αρχική μάζα  $M$  εξατμίζεται μέχρι το μέγεθος Planck σε χρόνο  $M^3$ , αλλά ο χρόνος για να εξαφανιστεί το υπόλειμμα μεγέθους Planck είναι πολύ μεγαλύτερος (τουλάχιστον  $M^4$ ). Το πρόβλημα είναι ότι, δεδομένου ότι το  $M$  μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο, πρέπει να υπάρχουν υπολείμματα μαύρης τρύπας μεγέθους Planck που είναι αυθαίρετα με μεγάλο χρόνο ζωής, ακόμα κι αν κανένα είδος δεν είναι απολύτως σταθερό. Αν υπάρχουν άπειρα είδη με μάζα της τάξης του μεγέθους Planck, όλα με διάρκεια ζωής μεγαλύτερη από googolplex, τότε έχουμε όλα τα ίδια προβλήματα σαν να ήταν τα υπολείμματα απολύτως σταθερά.

Ίσως η εξάτμιση μιας μαύρης τρύπας που περιέχει μεγάλη ποσότητα πληροφορίας να αποκλίνει σημαντικά από την ημικλασική θεωρία, ενώ η τρύπα είναι ακόμα μεγάλη σε σύγκριση με το μέγεθος Planck, και αρχίζει να εκπέμπει κβάντα που έχουν μήκος κύματος πολύ μεγαλύτερο από το προβλεπόμενο θερμικό μήκος κύματος. Όσο περισσότερη είναι η πληροφορία, τόσο μεγαλύτερη η μαύρη τρύπα όταν αυτό αρχίζει να συμβαίνει. Τότε όμως θα είχαμε έναν άπειρο αριθμό με μεγάλη διάρκεια ζωής, αλλά μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό με μάζα κάτω από μια δεδομένη ενέργεια, που μπορεί να είναι αποδεκτός. Πάλι όμως θα ερχόμαστε αντιμέτωποι με την πρόκληση να κατανοήσουμε πώς η ημικλασική θεωρία μπορεί να αποτυγχάνει σε μεγάλο βαθμό για πολύ μεγάλες μελανές οπές.

#### 4. Μπορεί η πληροφορία να κωδικοποιηθεί σε "quantum hair";

Ένα σημαντικό κομμάτι του θέματος της απώλειας πληροφορίας προέρχεται από τα θεώρημα μοναδικότητας των μαύρων τρυπών στην κλασική γενική σχετικότητα. Επειδή η γεωμετρία έξω από τον ορίζοντα δεν συμβαδίζει με τις λεπτομερείς ιδιότητες του καταρρέοντος σώματος, η ακτινοβολία Hawking δεν είναι συσχετισμένη με την κατάσταση του καταρρέοντος σώματος, σύμφωνα με την ημικλασική θεωρία. Όπως έχει αναφερθεί και προηγουμένως, το να υποστηρίξει κάποιος ότι η πληροφορία είναι κωδικοποιημένη στην ακτινοβολία Hawking, θα πρέπει να εξηγήσει πώς οι διορθώσεις στην ημικλασική θεωρία επιτρέπουν στη μαύρη τρύπα να αποθηκεύει ένα, ας πούμε, ακριβές αρχείο του πώς σχηματίστηκε και τι έχει ήδη ακτινοβολήσει.

Πάντως οι "quantum hair" στις μαύρες τρύπες μπορούμε να πούμε ότι πρόσθετες δυνατότητες για "hair", που παραβλέπονται στην ανάλυση των λύσεων μαύρης τρύπας των κλασικών εξισώσεων πεδίου. Αυτό επιτρέπει στη μαύρη τρύπα να καταγράφει περισσότερες πληροφορίες από ό,τι θα περιμέναμε, πληροφορίες που επηρεάζουν την ακτινοβολία Hawking, σε έναν αρκετά υπολογίσιμο βαθμό. Δηλαδή καταλήγουμε ότι η αρχή "no-hair" έχει περιορισμούς και πρέπει να είναι κάποιος πολύ προσεκτικός καθώς διατυπώνει συμπεράσματα με βάση αυτήν.

Από την άλλη πλευρά, η ανακάλυψη της "quantum hair" φαίνεται αρχικά να μας προσφέρει σημαντική βοήθεια όσον αφορά το πρόβλημα της απώλειας πληροφορίας. Ο τύπος της "quantum hair" που έχει αναλυθεί λεπτομερώς συνδέεται με φορτία που μπορούν να ανιχνευθούν μέσω του φαινομένου Aharonov-Bohm.

Η πρώτη αντίρρηση στα παραπάνω, δηλαδή ότι η "quantum hair" προκύπτει μόνο σε θεωρίες με ειδικό περιεχόμενο ύλης, δεν φαίνεται να είναι πολύ πειστική. Πράγματι, μια πολύ ενδιαφέρουσα αλλά και συναρπαστική δυνατότητα είναι ότι η προσπάθεια να αποφευχθεί η απώλεια πληροφορίας θα μας οδηγήσει σε μια πολύ ειδική κατηγορία θεωριών, ή ακόμα και σε μία μοναδική (ίσως στη θεωρία των υπερχορδών). Παρ' όλα αυτά, είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς ότι η "quantum hair" (του τύπου Aharonov–Bohm) μπορεί πραγματικά να επιλύσει το παράδοξο. Φαίνεται ότι η ιδέα να πρέπει να υπάρχει άπειρος αριθμός, ακριβώς διατηρούμενων φορτίων (συνδεδεμένα με άπειρες μη σπασμένες συμμετρίες βαθμίδας), ώστε η μέτρηση των τιμών όλων των φορτίων να αρκεί για να καθορίσει μοναδικά την εσωτερική κατάσταση μιας αυθαίρετα μεγάλης μαύρης τρύπας. Αυτοί οι νόμοι διατήρησης θα πρέπει να είναι αρκετά διαφορετικοί από τους νόμους διατήρησης που συνήθως σκεφτόμαστε και ξέρουμε. Οι νόμοι διατήρησης επιβάλλουν εξαιρετικά ισχυρούς περιορισμούς στην εξέλιξη ενός συστήματος, τόσο ισχυρούς που είναι δύσκολο να κατανοηθεί πώς έχουν διαφύγει της προσοχής σε πειράματά χαμηλών ενεργειών. Αν η "quantum hair", πραγματικά επιτρέπει σε μια μαύρη τρύπα να διατηρεί τεράστιες ποσότητες πληροφορίας, η μεγάλη η πρόκληση να δοθεί απάντηση στο πώς η τοπική κβαντική θεωρία πεδίου φαίνεται να περιγράφει τόσο καλά τη φυσική χαμηλής ενέργειας. Βέβαια ως έχουμε στα υπόψη ότι υπάρχει ένας ισχυρισμός ότι η θεωρία χορδών μας παρέχει ακριβώς το είδος των μη τοπικών νόμων διατήρησης που απαιτούνται.

#### 5. Μπορεί η πληροφορία να διαφύγει σε ένα "baby universe";

Ίσως η πιο ικανοποιητική εξήγηση για την απώλεια πληροφορίας των μαύρων τρυπών προσφέρθηκε από τους Dyson, Zeldovich και Hawking. Αυτό που περιγράφουν, σύμφωνα με την κλασική γλώσσα στην φυσική, γι' αυτό και ίσως να είναι λίγο παραπλανητικό, είναι ότι οι επιδράσεις της κβαντικής βαρύτητας εμποδίζουν στο σώμα που αρχικά καταρρέει να παράγει μια πραγματική μοναδικότητα μέσα στη μαύρη τρύπα. Αντίθετα, η κατάρρευση προκαλεί τη δημιουργία ενός κλειστού «baby universe». Αυτό το νέο σύμπαν μεταφέρει στο καταρρέον σώμα και με μεγάλη λεπτομέρεια όλες τις πληροφορίες για την κβαντική του κατάσταση. Το *baby universe* είναι αιτιακά αποσυνδεδεμένο από το δικό μας και έτσι εντελώς απρόσιτο για εμάς. Δεν έχουμε καμία ελπίδα να ανακτήσουμε την χαμένη πληροφορία. Ωστόσο, υπάρχει μια ευρύτερη έννοια στην οποία η πληροφορία διατηρείται. Το κατάλληλο πλαίσιο για την κβαντική θεωρία, σε αυτή την εικόνα, είναι ένα «πολυσύμπαν» που περιλαμβάνει τις κβαντομηχανικές αλληλεπιδράσεις όλων των συμπάντων που είναι αιτιακά αποσυνδεδεμένα σε κλασικό επίπεδο. Τότε για έναν «υπερπαρατηρητή» που (σε αντίθεση με εμάς) είναι ικανός να αντιλαμβάνεται την κατάσταση του όλου πολυσύμπαντος, καμία πληροφορία δεν χάνεται. Απλώς μεταφέρεται από ένα σύμπαν σε ένα άλλο. Στην γλώσσα της κβαντομηχανικής θα μπορούσαμε να πούμε ότι, οι μαύρες τρύπες παράγουν συσχετίσεις μεταξύ της κατάστασης του *parent universe* και της κατάστασης του *baby universe* και εξαιτίας αυτών των συσχετίσεων, τόσο το *parent universe* όσο και το *baby universe* περιγράφονται ως μικτές κβαντικές καταστάσεις.

Ουσιαστικά η ιδέα ότι ένας υπερπαρατηρητής μπορεί να κατανοήσει τι συμβαίνει δεν μας προσφέρει μια κάποια λύση. Θέλουμε να γνωρίζουμε πώς να περιγράψουμε τη φυσική στο σύμπαν που έχουμε πρόσβαση. Από αυτή την άποψη, είναι αρκετά σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι, δεδομένου ότι το *baby universe* είναι κλειστό, η ενέργεια που μεταφέρει μακριά είναι ακριβώς μηδέν. Καθώς η ενέργειά του και η ορμή του, είναι ακριβώς γνωστές, η θέση του στο χωροχρόνο είναι εντελώς απροσδιόριστη. Έτσι, η κυματοσυνάρτηση του *baby universe* είναι πραγματικά μια παγκόσμια ποσότητα στο σύμπαν μας, χωρίς καμία εξάρτηση από το χωροχρόνο.

Η ιδέα του *baby universe*, λοιπόν, φαίνεται να μας οδηγεί στην εξής εικόνα: Όταν μια καθαρή κατάσταση καταρρέει για να σχηματίσει μια μαύρη τρύπα και στη συνέχεια εξατμίζεται, εξελίσσεται σε μια καθαρή κατάσταση. Αυτή η κατάσταση είναι προβλέψιμη με την έννοια ότι αν εκτελέσουμε το πείραμα πολλές φορές με την ίδια αρχική κατάσταση, πάντα θα έχουμε την ίδια τελική κατάσταση. Αλλά το αποτέλεσμα του πειράματος μπορεί να μην είναι προβλέψιμο από τους θεμελιώδεις νόμους της φυσικής δηλαδή μπορεί να εξαρτάται από την κατάσταση επιλογής στην οποία βρισκόμαστε. Η εξαίρεση θα ήταν αν υπάρχει μια αρχή, μια μεγάλη διόρθωση, που επιλέγει μια μοναδική κατάσταση.) Μπορεί να υπάρχουν πολλοί, πάρα πολλοί παράμετροι που πρέπει να μετρήσουμε πριν μπορέσουμε να προβλέψουμε με σαφήνεια πώς θα εξατμιστεί μια μαύρη τρύπα με αρχική μάζα  $M$ .

Αυτό το συμπέρασμα εξακολουθεί να μας δείχνει ότι δεν έχουμε μια ικανοποιητική λύση στο πρόβλημα της απώλειας πληροφορίας. Από την στιγμή που έχουμε μετρήσει όλες τις σχετικές παραμέτρους και μπορέσουμε να κάνουμε προβλέψεις, εξακολουθούμε να θέλουμε να μάθουμε τον μηχανισμό με τον οποίο η μαύρη τρύπα θυμάται την αρχική κατάσταση, έτσι ώστε να γνωρίζει πώς να εξατμιστεί. Αυτό όμως μας οδηγεί πίσω στην εξέταση ξανά των περιπτώσεων-λύσεων 1. και 4. που διατυπώθηκαν παραπάνω.

## 6. Η θεωρία Fuzzballs

Οι σχετικά νεότερες εξελίξεις στην επίλυση του Παράδοξου περιλαμβάνουν τη θεωρία των χορδών (fuzzball). Με τη βοήθεια του θεωρήματος μικρών διορθώσεων, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι υπάρχει ανάγκη για διορθώσεις order unity στη φυσική χαμηλών ενεργειών στον ορίζοντα γεγονότων και το fuzzball μπορεί να παρουσιαστεί ως λογικό επιχείρημα για αυτό. Η θεωρία "bubble of nothing" του Witten δηλώνει ότι ο χώρος Minkowski που διεισδύει σε μια νέα τοπολογία υποδεικνύει ότι ένα καταρρέον κέλυφος μπορεί να διεισδύσει σε μια κατάσταση fuzzball. Οι θεωρητικοί των χορδών βρήκαν τις μεμονωμένες μικροκαταστάσεις των μαύρων τρυπών και σε κάθε περίπτωση αποδείχθηκε ότι έχουν μια δομή fuzzball. Τα fuzzballs θεωρούνται ότι αντικαθιστούν την ιδιαιτερότητα με μια μπάλα από χορδές. Η κεντρική ιδέα είναι ότι τα κβαντικά δεδομένα του fuzzball εξέρχονται από τη μαύρη τρύπα με τη μορφή της ακτινοβολίας Hawking. Πολλοί επιστήμονες το θεωρούν ως λύση στο παράδοξο, αλλά αποτυγχάνει να εξηγήσει την ιδιομορφία (singularity) στην αρχή του σύμπαντος.

## 7. Holographic Principle (ολογραφική αρχή)

Το Ολογραφικό Αξίωμα είναι μια θεωρία στη θεωρητική φυσική που προτάθηκε τη δεκαετία του 1990 από τον Gerard 't Hooft και αργότερα αναπτύχθηκε από τον Leonard Susskind. Η θεωρία αυτή υποστηρίζει ότι η περιγραφή της φυσικής σε έναν τρισδιάστατο χώρο μπορεί να κωδικοποιηθεί σε μια δισδιάστατη επιφάνεια. Ειδικότερα, υποστηρίζει ότι οι πληροφορίες που περιέχονται σε έναν όγκο χωροχρόνου μπορούν να κωδικοποιηθούν στο όριο αυτού του όγκου, όπως ο ορίζοντας γεγονότων μιας μαύρης τρύπας.

Η αρχή αυτή απορρέει από μελέτες που συνδυάζουν τη Γενική Σχετικότητα του Einstein με την κβαντική θεωρία. Σύμφωνα με το ολογραφικό αξίωμα, η μέγιστη εντροπία ή πληροφορία που μπορεί να περιέχεται σε μια περιοχή του χώρου είναι ανάλογη της επιφάνειας του ορίου της περιοχής, όχι του όγκου της. Αυτή η θεώρηση εισάγει μια εντελώς νέα προοπτική για την κατανόηση της φύσης του χωροχρόνου και της βαρύτητας.

Μια σημαντική εφαρμογή του ολογραφικού αξιώματος είναι η αντιστοιχία AdS/CFT, που προτάθηκε από τον Juan Maldacena το 1997. Αυτή η θεωρία, ουσιαστικά αποτελεί μια εφαρμογή του ολογραφικού αξιώματος, συνδέει μια θεωρία χορδών σε έναν πενταδιάστατο αντι-Σίττερ χώρο (AdS) με μια κβαντική θεωρία πεδίου σε έναν τετραδιάστατο χωροχρόνο (CFT) χωρίς βαρύτητα. Η αντιστοιχία αυτή παρέχει έναν τρόπο με τον οποίο οι θεωρητικοί φυσικοί μπορούν να μελετήσουν την κβαντική βαρύτητα μέσω της κατανόησης μιας πιο κατανοητής κβαντικής θεωρίας πεδίου.

Το ολογραφικό αξίωμα έχει σημαντικές επιπτώσεις για την κατανόηση της βαρύτητας και του χωροχρόνου. Εάν αποδειχθεί ότι είναι αληθές, τότε θα μπορούσε να μας οδηγήσει σε μια βαθύτερη κατανόηση του σύμπαντος και των θεμελιωδών νόμων που το διέπουν. Η ιδέα ότι οι πληροφορίες μπορούν να αποθηκευτούν στην επιφάνεια ενός αντικειμένου και όχι στον όγκο του μπορεί να αλλάξει την κατανόησή μας για τη φύση της πραγματικότητας, όπως την αντιλαμβανόμαστε. Παρά το γεγονός ότι το ολογραφικό αξίωμα είναι μια θεωρία που βρίσκεται ακόμη υπό διερεύνηση, έχει ήδη επηρεάσει σημαντικά την ανάπτυξη της θεωρητικής φυσικής και συνεχίζει να αποτελεί ένα πεδίο έντονης ερευνητικής δραστηριότητας.

#### 8. *Black hole complementarity (Συμπληρωματικότητα της μελανής οπής)*

Η ιδέα της συμπληρωματικότητας της μαύρης τρύπας (black hole complementarity) προτάθηκε το 1993 από τον φυσικό Leonard Susskind, μαζί με τους Lars Thorlacius και John Uglum.

Σύμφωνα με την λύση αυτή η πληροφορία δεν χάνεται αλλά αντίθετα παραμένει διαθέσιμη και διατηρείται, ανάλογα με το σημείο που βρίσκεται ο παρατηρητής. Ουσιαστικά, η λύση υποστηρίζει ότι δύο φαινομενικά αντιφατικές περιγραφές μιας μαύρης τρύπας μπορούν να είναι αληθινές ταυτόχρονα, αλλά για διαφορετικούς παρατηρητές.

Για έναν εξωτερικό παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται μακριά από τη μαύρη τρύπα, η πληροφορία φαίνεται να κωδικοποιείται στη θερμική ακτινοβολία Hawking που εκπέμπεται από την επιφάνεια του ορίζοντα γεγονότων, χωρίς ποτέ να διασχίζει τον ορίζοντα. Δηλαδή από την οπτική γωνία του εξωτερικού παρατηρητή, η πληροφορία διατηρείται και κωδικοποιείται στον ορίζοντα της μαύρης τρύπας. Από την πλευρά του παρατηρητή που πέφτει στη μαύρη τρύπα, όμως, η πληροφορία φαίνεται να περνάει μέσα από τον ορίζοντα γεγονότων και συνεχίζει να υπάρχει εντός της μαύρης τρύπας.

Το κλειδί στη λύση αυτή είναι ότι αυτοί οι δύο παρατηρητές δεν μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους και να συγκρίνουν τις παρατηρήσεις τους, ώστε να φανεί αντίφαση και άρα δεν υπάρχει το παράδοξο.

#### 9. *Firewall hypothesis (τοίχος φωτιάς)*

Η Firewall hypothesis προτάθηκε το 2012 από τους φυσικούς Almheiri, Marolf, Polchinski και Sully (συχνά αναφέρονται ως AMPS). Σύμφωνα με την λύση αυτή πρόβλημα, στον ορίζοντα γεγονότων μιας μαύρης τρύπας υπάρχει ένας τοίχος φωτιάς (firewall), μια περιοχή ακραίας ενέργειας που καταστρέφει οποιονδήποτε παρατηρητή πέσει μέσα στη μαύρη τρύπα. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, όταν κάποιος διασχίζει τον ορίζοντα, συναντά αυτόν τον τοίχο φωτιάς και καταστρέφεται αμέσως.

Η υπόθεση της παρουσίας ενός τέτοιου τοίχου φωτιάς σημαίνει ότι η πληροφορία διατηρείται οπότε επιλύει μεν το παράδοξο αλλά έρχεται σε σύγκρουση με την Γ.Θ.Σ. μιας και παραβιάζεται. Η υπόθεση του τοίχου φωτιάς είναι μια πολύ τολμηρή αλλά και αμφιλεγόμενη πρόταση που προσπαθεί να επιλύσει το παράδοξο της πληροφορίας στις μαύρες τρύπες, αλλά ταυτόχρονα θέτει σοβαρά ερωτήματα για τη θεμελιώδη φυσική.

Όλες οι προτεινόμενες λύσεις έχουν σοβαρά μειονεκτήματα. Ο ίδιος ο Hawking, ήταν απόλυτα σίγουρος, ότι η πληροφορία μέσα σε μια μελανή οπή χάνεται για πάντα, που δεν δίστασε το 1977 να βάλει στοίχημα με τον συνάδελφο του Kip Thorne, ο οποίος πίστευε το ίδιο και τον επίσης θεωρητικό φυσικό John Preskill, ο οποίος είχε υποστηρίξει το αντίθετο.

Το 2004 όμως σε ένα συνέδριο στο Δουβλίνο ο Hawking παραδέχθηκε ότι είχε κάνει λάθος και παρουσίασε τους υπολογισμούς του, σύμφωνα με τους οποίους η πληροφορία βρίσκεται διέξοδο κατά τη διάρκεια του σχηματισμού αλλά και της εξάτμισης της μελανής οπής, γιατί τροποποιείται ο χωροχρόνος και χαρακτηρίζεται από διακυμάνσεις και παίρνει μόνο «φυσικές μορφές», αποφεύγοντας με τον τρόπο αυτό παράξενες τοπολογίες που επιτρέπουν να διαμορφωθούν χωροχρονικές σήραγγες μέσω των οποίων ρέει η πληροφορία για να μαζευτεί σε μέρη του σύμπαντος που είναι απροπέλαστα. Σύμφωνα πάντα με τον ίδιο και τους υπολογισμούς του, η κβαντική βαρύτητα μπορεί να αναγνωρίσει μόνο χωροχρονικές διακυμάνσεις στις οποίες η αιτιώδης δομή παραμένει ακέραιη.

Οι πολύπλοκοι υπολογισμοί του Hawking δεν κατάφεραν να πείσουν τους υπόλοιπους φυσικούς, ο ίδιος είχε δηλώσει ότι δεν θεωρεί ότι έχασε το στοίχημα και έτσι το παράδοξο εξακολουθεί να παραμένει.

## 7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Σχεδόν εδώ και 50 χρόνια, από τότε δηλαδή που το ανακάλυψε ο Hawking, το Παράδοξο δείχνει να είναι άλυτο, χωρίς ουσιαστικά να έχει κάποιος πλησιάσει την επίλυση του. Αυτό γιατί είναι αρκετά δύσκολο ώστε να βρεθεί ένας μηχανισμός που από την μια να δείχνει πως η πληροφορία μπορεί να διαφύγει από μια μελανή οπή και από την άλλη να είναι συνεπής με την ημι-κλασική προσέγγιση που χρησιμοποίησε ο Hawking.

Ίσως πάντως ο σημαντικότερος λόγος που παραμένει χωρίς λύση το παράδοξο να είναι το γεγονός ότι μέχρι τώρα δεν έχει διατυπωθεί μια ικανοποιητική κβαντική θεωρία βαρύτητας. Ανεξάρτητα όμως αν όλες αυτές οι προσπάθειες αποδειχθούν τελικά λανθασμένες, ακόμα και τότε το κέρδος θα είναι τεράστιο, μιας και θα έχουν όχι μόνο συμβάλλει στην καλύτερη και πληρέστερη κατανόηση των μελανών οπών και της εξέλιξης των άστρων σε τελικό στάδιο, αλλά μπορεί και να αποδειχτούν πολύ σημαντικά βήματα στην μεγάλη πρόκληση που είναι η ενοποίηση των θεωριών που περιγράφουν τον μικρόκοσμο των στοιχειωδών σωματιδίων με τον μακρόκοσμο του σύμπαντος.

Στην διάλεξη του το 1992 για το θέμα που σχετίζεται με το παράδοξο, ο John Preskill ανέφερε: (do black holes destroy information)

*«Καταλήγω στο συμπέρασμα ότι το παράδοξο της απώλειας πληροφορίας μπορεί κάλλιστα να προμηνύει μια επανάσταση στη θεμελιώδη φυσική».*

## Βιβλιογραφία

- [1] Στέφανος Τραχανάς, Κβαντομηχανική II. Θεμελιώδεις αρχές και μέθοδοι . Κβαντικοί υπολογιστές, ΠΕΚ 2008
- [2] James. B. Hartle, Βαρύτητα. Εισαγωγή στην Γενική Σχετικότητα του Einstein, Εκδόσεις Τζιόλα 2016
- [3] J.L.Martin, Γενική Σχετικότητα. Μια βασική εισαγωγή για φυσικούς, ΠΕΚ 1999
- [4] Bernard. F. Schutz, Γενική Σχετικότητα, Εκδόσεις Τραυλός 1994
- [5] Stephen Hawking, Roger Penrose, Η φύση του χώρου και του χρόνου, Εκδόσεις Γκοβόστη 1996
- [6] Luciano Rezzalla, Η ακαταμάχητη έλξη της βαρύτητας, Εκδόσεις Σοφία 2023
- [7] Δημήτρης Ε. Κρέτζας, Γενική θεωρία της Σχετικότητας, Εκδόσεις Ζήτη 2005
- [8] Κόκκοτας Κ.Δ.: Γενικλη Θεωρία της Σχετικότητας –Σημειώσεις για τους φοιτητές-2018
- [9] Ν. Κ. Σπύρου, Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, Εκδόσεις Γαρταγάνης 1989.
- [10] Stephen Hawking, Μαύρες τρύπες. Οι διαλέξεις Reith του BBC. Εκδόσεις Κάτοπτρο 2016.
- [11] Marcia Bartusiak, Μαύρες τρύπες. ΠΕΚ 2020.
- [12] F. Mandl, Statistikhή Fusikhή, G. Pneumatikhού, 1999.
- [13] Thorne S. Kip, Μαύρες τρύπες και στρεβλώσεις του χρόνου, Εκδόσεις Κάτοπτρο
- [14] Sean M. Carroll, An Introduction to General Relativity Spacetime and Geometry, Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley 2004
- [15] R. Penrose, Rev. del Nuovo Cim 1 (1969)
- [16] Jacob D. Benkestein. Black holes and entropy. Phys. Rev., D7:2333-2346, 1973.
- [17] Samir D. Mathur: What Exactly is the Information Paradox : <http://arxiv.org/abs/0803.2030>
- [18] Samir D. Mathur: The Information Paradox: A pedagogical introduction: <http://arxiv.org/pdf/0909.1038>
- [19] S.W. Hawking, Particle Creation by Black Holes, Cambridge U, Aug (1975)
- [20] S. B. Giddings, Phys. Rev. D46 (1992) 1347.

- [21] Xavier Calmet and Stephen D. H. Hsu, Quantum Hair, and Black Hole Information <http://arxiv.org/pdf/2112.05171>
- [22] B. Kashi, Resolving Black Hole Information Paradox: Revisited <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1690/1/012145>
- [23] Leonard Susskind and James Lindesay, An introduction to black holes, information and the string theory revolution, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd 2005
- [24] John Preskill, Do Black Holes Destroy Information? <https://arxiv.org/abs/hep-th/9209058v1>
- [25] Giddings S., Constraints on Black Hole Remnants <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9304027v3>
- [26] Stephen W. Hawking, Malcolm J. Perry and Andrew Strominger, Soft hair on black holes <https://arxiv.org/pdf/1601.00921>
- [27] Karydas M, (2014), The Black Hole Information Paradox.
- [28] R. Bousso. The Holographic Principle. Reviews of Modern Physics (2002) <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9711200v3>
- [29] J. Maldacena. The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0203101>
- [30] L. Susskind. The World as a Hologram. <https://arxiv.org/pdf/hep-th/9409089>
- [31] R.M.Wald. On Particle Creation by Black Holes, Comm. Math. Phys. 45, 9 (1975)
- [32] C. Anastopoulos and K. Savvidou. How black holes store information in high-order correlations <https://arxiv.org/pdf/2005.07516>
- [33] J. D. Benkestein. Information in the Holographic Universe. Scientific American (2003)



Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.