ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΣΑΦΗΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ - ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Γιώργος Λευκόκοιλος

Επιβλέπων καθηγητής: Παπαδόπουλος Βασίλειος

ΑΘΗΝΑ, Φεβρουάριος 2022

Ασαφής συλλογιστική διαδικασία - μέθοδοι απόδειξης

Γιώργος Λευκόκοιλος

Επιβλέπων Καθηγητής:	Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Παπαδόπουλος Βασίλειος	Μούτσιος Ρέντζος Ανδρέας
Καθηγητής	Καθηγητής

ΑΘΗΝΑ, Φεβρουάριος 2022

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι να μελετήσουμε τη σημασία του ρόλου της εξαγωγής συμπερασμάτων, ενδεχομένως σε ασαφή μορφή, με τη χρήση ασαφών κανόνων. Θα αναλυσουμε τα στάδια για τον υπολογισμό της συνάρτησης συνεπαγωγής για κάθε εμπλεκόμενο κανόνα, την παραγωγή επιμέρους αποτελεσμάτων μέσω κάποιας συλλογιστικής διαδικασίας, τη συνάθροιση των επιμέρους αποτελεσμάτων αλλά και την αποσαφήνιση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον θα αναφερθούμε στην έννοια της απόδειξη στα μαθηματικά προβλήματα και πως αυτή έχει διαμορφωθεί με το πέρασμα των χρόνων. Η απόδειξη παίζει κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη, τη δημιουργία και την επικοινωνία των μαθηματικών γνώσεων. Τα τελευταία χρόνια, έχει γίνει μεγάλη έρευνα σχετικά με την απόδειξη και την επιχειρηματολογία. Το θεώρημα είναι μια μαθηματική δήλωση που είναι αληθινή και έχει επαληθευτεί ως αληθής. Εξ' ορισμού, μια μαθηματική απόδειξη είναι ένα συμπερασματικό επιχείρημα για μια μαθηματική δήλωση, που δείχνει ότι οι δηλωμένες παραδοχές εγγυώνται λογικά το συμπέρασμα. Το επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιεί άλλες προηγούμενες δηλώσεις, όπως θεωρήματα. Ωστόσο, κάθε απόδειξη μπορεί, καταρχήν, να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας μόνο ορισμένες βασικές ή πρωτότυπες παραδοχές γνωστές ως αξιώματα, μαζί με τους αποδεκτούς κανόνες συμπερασμάτων. Οι αποδείξεις είναι παραδείγματα εξαντλητικής συλλογικής συλλογιστικής που καθιερώνουν λογική βεβαιότητα, που πρέπει να διακρίνονται από εμπειρικά επιχειρήματα ή μη εξαντλητική επαγωγική συλλογιστική που καθιερώνουν «εύλογη προσδοκία»

Λέξεις Κλειδιά: μαθηματικά προβλήματα, απόδειξη, κανόνας, επιχειρήματα

Abstract

This diploma thesis deals with to study the importance of the role of drawing conclusions, possibly in a vague form, using vague rules. We will analyze the steps for calculating the inference function for each involved rule, the production of individual results through a reasoning process, the aggregation of individual results and the clarification of results. In addition, we will refer to the concept of proof in mathematical problems and how it has been shaped over the years. Proof plays a central role in the development, creation and communication of mathematical knowledge. In recent years, much research has been done on evidence and argumentation. A theorem is a mathematical statement that is true and has been verified to be true. By definition, a mathematical proof is a conclusive argument for a mathematical statement, which shows that the stated assumptions logically guarantee the conclusion. The argument can use other previous statements, such as theorems. However, any evidence can, in principle, be constructed using only certain basic or original assumptions known as axioms, together with the accepted rules of inference. Evidence is examples of exhaustive collective reasoning that establishes logical certainty, which must be distinguished from empirical arguments or non-exhaustive inductive reasoning that establishes "reasonable expectation"

Keywords: mathematical problems, proof, rule, arguments

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

1.1 Εισαγωγή

Στην απλή καθημερινή λογική του ανθρώπου, η παρουσία ασαφών κατηγορημάτων είναι διάχυτη και κυρίως γνωστή ως «ασαφής λογική με στενή έννοια» ή «επίσημη ασαφής λογική» και υπάρχουν ως μια σειρά από προσπάθειες επισημοποίησης ενός τέτοιου είδους φαινομένου. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας θα μελετήσουμε τα όρια αυτών των προσπαθειών τόσο από τεχνική άποψη όσο και σε σχέση με την αρχική και κύρια ανάγκη να οριστεί ένα μαθηματικό μοντέλο της ασαφούς συλλογιστικής μεθόδου.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από την καθημερινότητα μας είναι η φράση «αύριο θα βρέξει αρκετά», πρόκειται για μια πληροφορία που περιέχει τόσο αβεβαιότητα όσον αφορά το «αύριο» και ασάφεια με την προσέγγιση του «αρκετά». Παρά τη φήμη της σκληρής επιστήμης, τα μαθηματικά, και ιδιαίτερα η μαθηματική λογική, διαθέτουν ισχυρά εργαλεία τα οποία είναι ικανά ώστε να μοντελοποιούν αυτά τα φαινόμενα. Βέβαια, η ικανότητά μας να δαμάζουμε την πολυπλοκότητα αυτών των καταστάσεων έχει κάνει μόνο τα πρώτα της βήματα και υπάρχουν πολλά που πρέπει να γίνουν ακόμη στο μέλλον.

Λαμβάνοντας υπόψιν ένα άλλο παράδειγμα, όπου κάποιος μπορεί να υποστηρίζει ότι, εφόσον η ασάφεια συνδέεται αναγκαστικά με τη έννοια του συνεχούς, πρέπει να εξετάσουμε την τοπολογία βάσει του κλειστού διαστήματος [1,2] και όχι τη διακριτή τοπολογία του συνόλου {1, 2}. Σύμφωνα με τη μετάβαση από την κλασική λογική σε μια λογική για τα ασαφή κατηγορήματα, δεν μπορούμε να αποφύγουμε τη χρήση των βασικών εννοιών της πραγματικής ανάλυσης όπως, για παράδειγμα, αυτές της προσέγγισης, της συνέχειας και της σύγκλισης.

Η υπάρχουσα βιβλιογραφία σχετικά με την τυπική ασαφή συλλογιστική είναι όντως εξαιρετικά σημαντική και εντυπωσιακή, ωστόσο κατά καιρούς εμφανίζονται και είναι πιθανές αρκετές κριτικές κατά των υπαρχουσών προτάσεων. Ορισμένες από αυτές τις επικρίσεις προκύπτουν κυρίως από παρεξηγήσεις. Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν επίσης καλά βασισμένες παρατηρήσεις που υποδηλώνουν την ευκαιρία κάποιου είδους αναδιατύπωσης των παραδειγμάτων που κυριαρχούν στις τρέχουσες έρευνες. Σκοπός μας στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να συζητηθεί εάν ο κύριος στόχος αυτής της λογικής έχει επιτευχθεί, αφού γίνει η παραδοχή ότι η θεωρία των ασαφών συνόλων είναι μια μαθηματική θεωρία για τη μοντελοποίηση του φαινομένου της αοριστίας, όπως είναι η θεωρία πιθανοτήτων για την αβεβαιότητα.

Σχετικά με τη χρήση της λέξης ασαφής και κατά συνέπεια ασαφής συλλογιστική, χρησιμοποιείται ώστε να δηλώσει το φαινόμενο της παρουσίας στη φυσική γλώσσα κατηγορημάτων των οποίων η αποτίμηση μπορεί να ποικίλλει από ψευδή και αληθής με συνεχή τρόπο. Αυτό σημαίνει ότι η ασάφεια σχετίζεται αυστηρά με το διάστημα πραγματικών αριθμών δεδομένου ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών θεωρείται σχεδόν καθολικά το κατάλληλο μοντέλο του συνεχούς. Ένα παράδειγμα λανθασμένης αντίληψης, θα μπορούσε να θεωρηθεί εκείνο του Pelletier ο οποίος αμφισβητεί τον ισχυρισμό του Entemann ότι δηλαδή η ασαφής λογική είναι προέκταση της κλασικής. Οι πιο σχετικές κριτικές σχετίζονται ως προς το πόσο συμπαγείς είναι αλλά και την αποτελεσματικότητα. Πράγματι, ο Pelletier τονίζει ότι ενώ η κλασική λογική είναι σημασιολογικά συμπαγής, αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση της ασαφούς λογικής όπου μπορεί να υπάρχει ένα μη ικανοποιητικό άπειρο σύνολο όπου κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι ικανοποιήσιμο. Κατά συνέπεια, δεδομένου ότι όλες οι αποδείξεις είναι εξ ορισμού πεπερασμένες, δεν μπορεί να υπάρξει γενική θεωρία απόδειξης για την ασαφή λογική.

Η ασαφής λογική προορίζεται να μοντελοποιήσει τον λογικό συλλογισμό με ασαφείς ή ανακριβείς δηλώσεις όπως "Ο Κώστας είναι νέος (πλούσιος, ψηλός, πεινασμένος κ.λπ.)". Αναφέρεται σε μια οικογένεια λογικών πολλών αξιών, όπου οι αξίες αλήθειας ερμηνεύονται ως βαθμοί αλήθειας. Η τιμή αλήθειας μιας λογικά σύνθετης πρότασης, όπως «ο Τίμος είναι ψηλός και ο Χάρης είναι πλούσιος», καθορίζεται από την τιμή αλήθειας των συστατικών της. Με άλλα λόγια, όπως στην κλασική λογική, επιβάλλει κανείς την αλήθεια-λειτουργικότητα.

Η ασαφής λογική προέκυψε στο πλαίσιο της θεωρίας των ασαφών συνόλων, που εισήγαγε ο Lotfi Zadeh το 1965. Ένα ασαφές σύνολο εκχωρεί έναν βαθμό συμμετοχής, συνήθως έναν πραγματικό αριθμό από το διάστημα [0,1], σε στοιχεία ενός σύμπαντος. Η ασαφής λογική προκύπτει με την ανάθεση βαθμών αλήθειας σε προτάσεις. Το τυπικό σύνολο τιμών αληθείας (μοίρες) είναι το πραγματικό μοναδιαίο διάστημα [0,1], όπου το 0 αντιπροσωπεύει "απόλυτα ψευδές", το 1 αντιπροσωπεύει "απόλυτα αληθές" και οι άλλες τιμές αναφέρονται σε μερική αλήθεια, δηλ., ενδιάμεσους βαθμούς του αλήθεια. Η «ασαφής λογική» γίνεται συχνά κατανοητή με μια πολύ ευρεία έννοια που περιλαμβάνει όλα τα είδη φορμαλισμών και τεχνικών που αναφέρονται στον συστηματικό χειρισμό βαθμών κάποιου είδους. Ειδικότερα σε περιβάλλοντα μηχανικής (ασαφής έλεγχος, ασαφής ταξινόμηση, μαλακός υπολογισμός) στοχεύει σε αποτελεσματικές υπολογιστικές μεθόδους ανεκτικές σε υποβέλτιστη και ανακρίβεια.

Στο πέρασμα των μαθητικών χρόνων, όλοι έχουν έρθει αντιμέτωποι με έννοιες που τους κάνουν να αναρωτιούνται εάν ίσως τα μαθηματικά είναι το μάθημά τους ή όχι. Αν και είναι το θεμέλιο των επαγγελματικών καθαρών μαθηματικών, η έννοια της μαθηματικής απόδειξης γίνεται περισσότερο αντιληπτή και κατανοητή σε πανεπιστημιακά τμήματα μαθηματικών. Το πιο κοντινό που μπορεί να έχει φτάσει ένας τυπικός απόφοιτος σχολείου σε αυτήν την ιδέα είναι αυτό που οι μαθηματικοί αποκαλούν επιχειρήματα αληθοφάνειας. Τι ακριβώς είναι λοιπόν μια μαθηματική απόδειξη και ποια η σημασία της; Μια απλή ερμηνεία θα μπορούσε να είναι ότι απόδειξη μιας πρότασης S είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ισχυρισμών S(1), S(2), … S(n) έτσι ώστε S(n) = S και κάθε S(i) είναι είτε αξίωμα είτε προκύπτει από μία ή περισσότερες από τις προηγούμενες προτάσεις S(1), …, S(i-1) με άμεση εφαρμογή ενός έγκυρου κανόνα συμπερασμάτων.

Ωστόσο, στον επαγγελματικό κόσμο των μαθηματικών, κατά τη διάρκεια των οποίων κάποιος θα γνωρίσει πολλές αποδείξεις, θα έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει μερικές δικές του, αλλά και να βοηθήσει άλλους να δημιουργήσουν τις δικές τους. Η απόδειξη που θα βρει κάποιος σε ένα βιβλίο για τη μαθηματική λογική ή θα διδαχτεί στον πίνακα σε ένα πανεπιστημιακό επιπέδου εισαγωγικό μάθημα καθαρών μαθηματικών δεν πλησιάζει την πραγματικότητα.

Ο συνήθης τρόπος με τον οποίο οι μαθηματικοί αξιοποιούν αυτή την τυπική ιδέα για να συλλάβουν τα επιχειρήματα που θεωρούν ως αποδείξεις, όπως και όλοι που βρίσκονται σε παρεμφερή επιστημονικό κλάδο, είναι ότι μια απόδειξη είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ισχυρισμών που θα μπορούσε να συμπληρωθεί σε μια από αυτές τις τυπικές δομές. Δεν αποτελεί σίγουρα κακή προσέγγιση στη περίπτωση που ο στόχος είναι να δώσει σε κάποιον μια γενική ιδέα για το τι είναι μια απόδειξη. Το πρόβλημα όμως είναι ότι κανείς δεν έχει πραγματοποιήσει ποτέ αυτή τη διαδικασία συμπλήρωσης. Είναι καθαρά υποθετικό. Και το ερώτημα που προκύπτει είναι πως μπορεί τελικά κανείς να ξέρει ότι η υποτιθέμενη απόδειξη που έχει μπροστά του είναι πραγματικά απόδειξη.

Έτσι, μία απόδειξη που έχει σχεδιαστεί για ένα προπτυχιακό μάθημα μαθηματικών είναι γενικά πολύ διαφορετική από εκείνη που έχει κατασκευαστεί για να παρουσιαστεί σε ένα ερευνητικό σεμινάριο. Σίγουρα σημαντικό ρόλο έχει παίξει ο αποδέκτης σε κάθε περίπτωση χωρίς όμως αυτό αποτελεί και το μοναδικό κριτήριο. Για έναν νέο σπουδαστή, η προσπάθεια μετάβασης από τα σχολικά μαθηματικά στο πανεπιστημιακό επίπεδο, η συμφιλίωση με πραγματικές αποδείξεις δεν είναι μόνο δύσκολη, αλλά μπορεί να είναι τραυματική, με μια κάποτε παρηγορητική ψευδαίσθηση καθαρής βεβαιότητας που δίνει γρήγορα τη θέση της σε ένα αίσθημα πανικού. της βύθισης στην κινούμενη κινούμενη άμμο. Σε αυτό το σημείο, μπορεί να είναι βολικό να αναφέρουμε ότι ο Ευκλείδης πέρασε σε ένα άλλο μονοπάτι όταν έγραψε τις περίφημες αποδείξεις της γεωμετρίας του στα Στοιχεία . Πρόκειται μεν για εμβληματικές αποδείξεις οι οποίες μπορεί να φαίνονται λογικά βάσιμες, και πράγματι για δύο χιλιάδες χρόνια θεωρήθηκαν ως πρότυπα λογικά ορθής συλλογιστικής, αλλά όπως παρατήρησε ο Ντέιβιντ Χίλμπερτ στα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα, τα επιχειρήματα του Ευκλείδη είναι γεμάτα με λογικά κενά.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το ακόλουθο, όταν συχνά ζητείται να κατασκευαστεί ένα σημείο τέμνοντας ένα τόξο κύκλου με μια ευθεία γραμμή. Αλλά πώς γνωρίζει κάποιος ότι υπάρχει διασταύρωση. Σίγουρα, όταν σχεδιάζεται το τόξο και η γραμμή σε ένα φύλλο χαρτιού, το τόξο μπορεί να διασχίσει τη γραμμή. Αλλά το ερώτημα παραμένει αν όντως τέμνονται, ή με άλλα λόγια εάν έχουν ένα πραγματικά αδιάστατο κοινό σημείο. Κάτι το οποίο αφενός δεν είναι προφανές και αφετέρου χρειάζεται πολλή δουλειά για να δοθεί μια ολοκληρωμένη απάντηση.

Φυσικά, οι καθηγητές γυμνασίου σπάνια, ακόμα και ποτέ, πληροφορούν τους μαθητές τους ότι οι αποδείξεις γεωμετρίας που παρουσιάζονται ως μοντέλα είναι στην καλύτερη περίπτωση σκίτσα του πώς μπορούν να κατασκευαστούν οι αποδείξεις. Ως αποτέλεσμα, αυτοί οι μελλοντικοί φοιτητές συνήθως εισέρχονται στο πανεπιστήμιο με μια εντελώς λανθασμένη εντύπωση για το τι τελικά είναι απόδειξη.

Συγκεκριμένα, πιστεύουν ότι οι αποδείξεις αφορούν βασικά και αποκλειστικά την αλήθεια και ότι είναι είτε σωστές είτε λάθος.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα αναλύσουμε επίσης τον τρόπο με τον οποίο η ασαφής λογική λειτουργεί στα επίπεδα των δυνατοτήτων εισόδου για την επίτευξη μιας συγκεκριμένης εξόδου. Τώρα, μιλώντας για την εφαρμογή αυτής της λογικής, μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με διαφορετικά μεγέθη και δυνατότητες όπως μικροελεγκτές, μεγάλα δικτυωμένα συστήματα ή συστήματα που βασίζονται σε σταθμούς εργασίας. Επίσης, μπορεί να εφαρμοστεί σε υλικό, λογισμικό ή συνδυασμό και των δύο. Γενικά, χρησιμοποιούμε το σύστημα ασαφούς λογικής τόσο για εμπορικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς όπως: 1) Ελέγχει μηχανήματα και καταναλωτικά προϊόντα, 2)Αν όχι ακριβής συλλογιστική, παρέχει τουλάχιστον αποδεκτή συλλογιστική, 3)Αυτό βοηθά στην αντιμετώπιση της αβεβαιότητας στη μηχανική.

Λοιπόν, τώρα που επιγραμματικά αναφέραμε χαρακτηριστικά για τη ασαφή λογική στην τεχνητή νοημοσύνη και γιατί την χρησιμοποιούμε στην πραγματικότητα, ας προχωρήσουμε και ας κατανοήσουμε την αρχιτεκτονική αυτής της λογικής στα επόμενα κεφάλαια.

1.2 Σκοπός – Στόχοι

Σε κάθε περίπτωση είναι γενικά αποδεκτό ότι υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι για την ερμηνεία της ασάφειας στη φυσική γλώσσα. Ωστόσο, υπάρχει μια μικρή ελπίδα να ξεπεραστούν οι εννοιολογικές διαφορές. Επιστημισμός, υπεραξιολόγηση, θεωρία παιγνίων, καθεμία από αυτές τις λέξεις κλειδιά αναφέρεται σε μία ή περισσότερες από μια ποικιλία ανταγωνιστικών προσεγγίσεων για τον υπολογισμό της ασάφειας των εκφράσεων στη φυσική γλώσσα. Η εξοικείωση έστω και με μία προσέγγιση είναι ένα απαιτητικό έργο. μια επεξεργασία του θέματος μπορεί να καλύπτει ολόκληρους τόμους με βιβλία. Για κάποιον αρχάριο, η ποικιλία των προσεγγίσεων και ο τεράστιος όγκος του υλικού μπορεί εύκολα να είναι αποθαρρυντικοί. Ένας κοινός στόχος πολλών προσεγγίσεων της ασάφειας είναι να βρεθεί ο σωστός τρόπος επιχειρηματολογίας με βάση αόριστες έννοιες, ιδανικά με την ίδια ακρίβεια και ορθότητα με την οποία επιχειρηματολογούμε για καθαρές έννοιες στις μαθηματικές αποδείξεις. Τίθεται το ερώτημα, ποιες προτάσεις που περιλαμβάνουν αόριστες έννοιες είναι αναμφίβολα σωστές όσο, για παράδειγμα, το γεγονός ότι για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας αριθμός μεγαλύτερος κατά ένα; Ένα ακόμα ερώτημα είναι ποια σημασιολογία είναι τόσο φυσική για αόριστες έννοιες όσο οι φυσικοί αριθμοί για την αριθμητική; Οι πιθανότητές μας να βρούμε έναν φορμαλισμό για συλλογισμό παρουσία ασάφειας είναι πολύ καλύτερες όταν οι προσπάθειές μας επικεντρώνονται στην επάρκεια.

Η ασαφής συλλογιστική αφορά συγκεκριμένα θεμελιώδη ζητήματα στα οποία, κατά τη γνώμη μου, πρέπει να σημειωθεί πρόοδος για να επιτευχθεί πρόοδος στη συζήτηση για την ασάφεια. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα αναφερθούμε στον ρόλο που κατέχει η εξαγωγή συμπερασμάτων, ενδεχομένως σε ασαφή μορφή, με τη χρήση ασαφών κανόνων. Η συνεχιζόμενη συζήτηση για την ασάφεια έχει φτάσει σε ένα στάδιο σαφώς πέρα από την απλή αρχική παρατήρηση ότι πολυάριθμες εκφράσεις στη φυσική γλώσσα δεν επιτρέπουν την απότομη οριοθέτηση της σημασίας τους όταν εξετάζουμε το πλήρες φάσμα των αντικειμένων στα οποία μπορεί να αναφέρονται.

Από την άλλη πλευρά, μια μαθηματική απόδειξη αποτελεί ένα τεκμηριωμένο επιχείρημα που πείθει άλλους ανθρώπους ότι κάτι είναι αληθές. Τα μαθηματικά δεν είναι αίθουσα δικαστικής συζήτησης, επομένως η υπεροχή των αποδεικτικών στοιχείων δεν είναι αρκετά καλή. Κατ' αρχήν, προσπαθούμε να αποδείξουμε πράγματα πέρα από κάθε αμφιβολία, αν και στην πραγματική ζωή οι άνθρωποι κάνουν λάθη και η απόλυτη αυστηρότητα μπορεί να είναι ανέφικτη για μεγάλα έργα. Στα μαθηματικά υπάρχει ένα συγκεκριμένο λεξιλόγιο και γραμματική που βρίσκεται κάτω από όλες τις μαθηματικές αποδείξεις. Το λεξιλόγιο περιλαμβάνει λογικές λέξεις όπως ‘ή’, ‘αν’ και πολλές άλλες. Αυτές οι λέξεις έχουν πολύ ακριβή σημασία στα μαθηματικά που μπορεί να διαφέρουν ελαφρώς από την καθημερινή χρήση. Με τον όρο γραμματική, αναφερόμαστε σε ορισμένες κοινές αρχές λογικής ή τεχνικές απόδειξης, τις οποίες μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει για να ξεκινήσει με δηλώσεις που γνωρίζει και να συνάγει δηλώσεις που δεν γνώριζε πριν. Αυτός ο τομέας των μαθηματικών, είναι εξίσου θεμελιώδης και θα αποτελέσει το δεύτερο σκέλος ανάλυσης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

2.1 Ορισμός της λογικής

Ενώ η λογική μπορεί να αναφέρεται απλά σε έγκυρο συλλογισμό στην καθημερινή ανθρώπινη ζωή, αποτελεί επίσης έναν από τους παλαιότερους και τους πιο θεμελιώδεις κλάδους στο τομέα των μαθηματικών, ο οποίος συχνά θολώνει τα όρια μεταξύ των μαθηματικών και της φιλοσοφίας. Η λογική είναι η μελέτη της Αλήθειας και του τρόπου με τον οποίο μπορούμε να αποκτήσουμε καθολικές Αλήθειες μέσω της μαθηματικής συναγωγής. Πρόκειται, λοιπόν, για την πιο βασική γλώσσα των μαθηματικών αλλά και για τη βασική αρχή της απόδειξης.

Η μαθηματική λογική είναι καλύτερα κατανοητή ως κλάδος της λογικής ή των μαθηματικών. Η μαθηματική λογική συχνά χωρίζεται στα υποπεδία της θεωρίας μοντέλων, της θεωρίας αποδείξεων, της θεωρίας συνόλων και της θεωρίας αναδρομής. Η έρευνα στη μαθηματική λογική έχει συμβάλει και υποκινήθηκε από τη μελέτη των θεμελίων των μαθηματικών, αλλά η μαθηματική λογική περιέχει επίσης τομείς καθαρών μαθηματικών που δεν σχετίζονται άμεσα με θεμελιώδεις ερωτήσεις. Ένα ενοποιητικό θέμα στη μαθηματική λογική είναι η μελέτη της εκφραστικής δύναμης των τυπικών λογικών και των τυπικών αποδεικτικών συστημάτων. Αυτή η ισχύς μετριέται τόσο με το τι μπορούν να αποδείξουν αυτά τα επίσημα συστήματα όσο και με το τι είναι σε θέση να ορίσουν. Έτσι μπορεί να ειπωθεί ότι η μαθηματική λογική έχει γίνει η γενική μελέτη της λογικής δομής των αξιωματικών θεωριών. Τα παλαιότερα ονόματα για τη μαθηματική λογική ήταν η συμβολική λογική, σε αντίθεση με τη φιλοσοφική λογική και τα μεταμαθηματικά. Ο πρώτος όρος εξακολουθεί να χρησιμοποιείται, αλλά ο δεύτερος όρος χρησιμοποιείται τώρα μόνο για ορισμένες πτυχές της θεωρίας της απόδειξης.

Εξερευνώντας τις ρίζες, η μαθηματική λογική ασχολείται με μαθηματικές έννοιες που εκφράζονται χρησιμοποιώντας τυπικά λογικά συστήματα. Το σύστημα λογικής πρώτης τάξης είναι το πιο ευρέως μελετημένο λόγω της δυνατότητας εφαρμογής του στα θεμέλια των μαθηματικών και λόγω των επιθυμητών ιδιοτήτων του. Ισχυρότερες κλασικές λογικές, όπως η δεύτερης τάξης λογική ή η άπειρη λογική, μελετώνται επίσης, μαζί με μη κλασικές λογικές όπως η διαισθητική λογική. Σύμφωνα με τον Barwise, η μαθηματική λογική χωρίζεται σε τέσσερα μέρη:

- Η θεωρία συνόλων είναι η μελέτη συνόλων, τα οποία είναι αφηρημένες συλλογές αντικειμένων. Οι βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων όπως το υποσύνολο και το σχετικό συμπλήρωμα ονομάζονται συχνά αφελής θεωρία συνόλων. Η σύγχρονη έρευνα βρίσκεται στον τομέα της αξιωματικής θεωρίας συνόλων, η οποία χρησιμοποιεί λογικές μεθόδους για να μελετήσει ποιες προτάσεις μπορούν να αποδειχθούν σε διάφορες τυπικές θεωρίες όπως η θεωρία συνόλων Zermelo-Frankel, γνωστή ως ZFC, ή η θεωρία συνόλων New Foundations, γνωστή ως NF.

- Η θεωρία αναδρομής, που ονομάζεται επίσης θεωρία υπολογισιμότητας, μελετά τις ιδιότητες των υπολογίσιμων συναρτήσεων και τους βαθμούς Turing, οι οποίοι διαιρούν τις μη υπολογίσιμες συναρτήσεις σε σύνολα που έχουν το ίδιο επίπεδο μη υπολογισιμότητας. Το πεδίο έχει αναπτυχθεί ώστε να περιλαμβάνει τη μελέτη της γενικευμένης υπολογισιμότητας και προσδιορισιμότητας. Σε αυτούς τους τομείς, η θεωρία της αναδρομής επικαλύπτεται με τη θεωρία απόδειξης και την αποτελεσματική περιγραφική θεωρία συνόλων.
- Η θεωρία αποδείξεων είναι η μελέτη τυπικών αποδείξεων σε διάφορα λογικά συστήματα συναγωγής. Αυτές οι αποδείξεις αναπαρίστανται ως τυπικά μαθηματικά αντικείμενα, διευκολύνοντας την ανάλυσή τους με μαθηματικές τεχνικές. Ο Frege εργάστηκε σε μαθηματικές αποδείξεις και επισημοποίησε την έννοια της απόδειξης.
- Η θεωρία μοντέλων μελετά τα μοντέλα διαφόρων τυπικών θεωριών. Το σύνολο όλων των μοντέλων μιας συγκεκριμένης θεωρίας ονομάζεται στοιχειώδης τάξη. Η κλασική θεωρία μοντέλων επιδιώκει να προσδιορίσει τις ιδιότητες των μοντέλων σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη τάξη ή να καθορίσει εάν ορισμένες κατηγορίες δομών σχηματίζουν στοιχειώδεις τάξεις. Η μέθοδος της εξάλειψης ποσοτικοποιητή χρησιμοποιείται για να δείξει ότι τα μοντέλα συγκεκριμένων θεωριών δεν μπορούν να είναι πολύ περίπλοκα.

Οι συνοριακές γραμμές μεταξύ αυτών των πεδίων, καθώς και μεταξύ της μαθηματικής λογικής και άλλων πεδίων των μαθηματικών, δεν είναι πάντα ευκρινείς. για παράδειγμα, το θεώρημα της μη πληρότητας του Gödel σηματοδοτεί όχι μόνο ένα ορόσημο στη θεωρία της αναδρομής και στη θεωρία της απόδειξης, αλλά έχει επίσης οδηγήσει στο θεώρημα του Loeb. Το μαθηματικό πεδίο της θεωρίας κατηγοριών χρησιμοποιεί πολλές τυπικές αξιωματικές μεθόδους που μοιάζουν με αυτές που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική λογική, αλλά η θεωρία κατηγοριών δεν θεωρείται συνήθως υποπεδίο της μαθηματικής λογικής.

Υπάρχουν πολλές συνδέσεις μεταξύ της μαθηματικής λογικής και της επιστήμης των υπολογιστών. Πολλοί πρώτοι πρωτοπόροι στην επιστήμη των υπολογιστών, όπως ο Άλαν Τούρινγκ, ήταν επίσης μαθηματικοί και λογικοί.

Μάλιστα, πολλά είναι τα παραδείγματα μαθηματικών δηλώσεων ή προτάσεων. Για παράδειγμα, το $1 + 1 = 2$ και το 6 είναι άρτιος είναι σαφώς αληθές, ενώ όλοι οι πρώτοι αριθμοί είναι άρτιοι είναι ψευδείς. Στη λογική συχνά δεν μας ενδιαφέρουν αυτές οι ίδιες οι δηλώσεις, αλλά κυρίως μας ενδιαφέρει το πόσο οι αληθείς και ψευδείς δηλώσεις σχετίζονται μεταξύ τους. Επομένως, αντιπροσωπεύουμε τις προτάσεις απλώς με σύμβολα θέσης όπως το P και το Q. Όλες αυτές οι προτάσεις πρέπει να είναι είτε αληθείς (T) είτε ψευδείς (F). Αν δούμε ένα απλό παράδειγμα στη συνέχεια, έστω ότι έχουμε δύο προτάσεις, P και Q, μπορούμε να σχηματίσουμε μια τρίτη $P \land Q$. Η μικρή τομή σημαίνει και, και $P \land Q$ είναι αληθής μόνο αν και τα δύο P και Q είναι αληθή. Αυτή η σχέση μπορεί να αναπαρασταθεί σε έναν πίνακα αλήθειας, όπου μπορούμε να αναζητήσουμε την τιμή του $P \land Q$ λαμβάνοντας υπόψη τις τιμές των P και Q δίνοντας τέσσερις πιθανότητες.

φ	ψ	$\neg\varphi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\varphi \leftrightarrow \psi$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α

<u>**Εικόνα 1:**</u> Η προτασιακή λογική είναι ένας φορμαλισμός κάποιων απλών μορφών συλλογιστικής. Είναι το απλούστερο λογικό σύστημα. Οι ισχυρισμοί αποτελούνται από προτάσεις οι οποίες είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς αλλά όχι και τα δύο. Πηγή: http://lpis.csd.auth.gr/prolog/Logic_Programming/node4.html

Η μελέτη της θεωρίας υπολογισιμότητας στην επιστήμη των υπολογιστών συνδέεται στενά με τη μελέτη της υπολογισιμότητας στη μαθηματική λογική. Υπάρχει όμως μια διαφορά έμφασης. Οι επιστήμονες υπολογιστών επικεντρώνονται συχνά σε συγκεκριμένες γλώσσες προγραμματισμού και σε εφικτή δυνατότητα υπολογισμού, ενώ οι ερευνητές στη μαθηματική λογική συχνά επικεντρώνονται στην υπολογισιμότητα ως θεωρητική έννοια και στη μη υπολογισιμότητα. Η μελέτη της σημασιολογίας της γλώσσας προγραμματισμού σχετίζεται με τη θεωρία μοντέλων, όπως και η επαλήθευση προγράμματος και ιδίως ο έλεγχος μοντέλων. Η διαισθητική λογική και η γραμμική λογική είναι σημαντικές εδώ. Λογισμοί όπως ο λογισμός λάμδα και η συνδυαστική λογική μελετώνται στις μέρες μας κυρίως ως εξιδανικευμένες γλώσσες προγραμματισμού. Η επιστήμη των υπολογιστών συμβάλλει επίσης στα μαθηματικά αναπτύσσοντας τεχνικές για τον αυτόματο έλεγχο ή ακόμα και την εύρεση αποδείξεων, όπως η αυτοματοποιημένη απόδειξη θεωρημάτων και ο λογικός προγραμματισμός.

2.2 Η έννοια της μαθηματικής λογικής

Προσπαθώντας να εξετάσουμε τι τελικά είναι η μαθηματική λογική μπορούμε να ανακαλύψουμε το πολυδιάστατο κόσμο των μαθηματικών. Η μαθηματική λογική είναι η εφαρμογή μαθηματικών τεχνικών στη λογική. Τι είναι όμως η λογική; Στηριζόμενοι στον αρχαίο Έλληνα φιλόσοφο Αριστοτέλη, η λογική είναι η αναδιάταξη των γεγονότων για να βρούμε τις πληροφορίες που θέλουμε. Η λογική έχει δύο όψεις: την επίσημη και την άτυπη. Κατά μία έννοια η λογική ανήκει σε όλους αν και συχνά κατηγορούμε τους άλλους ότι είναι παράλογοι. Η άτυπη λογική υπάρχει όποτε έχουμε γλώσσα. Συγκεκριμένα, η Ινδική Λογική είναι γνωστή εδώ και πολύ καιρό. Η τυπική ή αλλιώς γνωστή και ως μαθηματική λογική έχει τις ρίζες της στην αρχαία Ελλάδα στη Δύση με τον Αριστοτέλη. Η μαθηματική λογική έχει δύο όψεις: τη σύνταξη και τη σημασιολογία. Η σύνταξη είναι ο τρόπος που λέμε τα πράγματα. σημασιολογία είναι αυτό που εννοούμε. Εξετάζοντας τον τρόπο που συμπεριφερόμαστε και τον τρόπο που συμπεριφέρεται ο κόσμος, ο Αριστοτέλης μπόρεσε να αποσπάσει ορισμένους βασικούς νόμους. Το στυλ κατηγοριοποίησης της λογικής του οδήγησε στην έννοια του συλλογισμού. Το πιο διάσημο παράδειγμα συλλογισμού είναι Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, ο Σωκράτης είναι άντρας άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο Σωκράτης είναι θνητός.

Ο Ράιχενμπαχ διακρίνει την απαγωγική και τη μαθηματική λογική από την επαγωγική λογική. Η πρώτη ασχολείται με τις σχέσεις μεταξύ ταυτολογιών, ενώ η δεύτερη ασχολείται με την αλήθεια με την έννοια της αλήθειας στην πραγματικότητα. Η απαγωγική και η μαθηματική λογική βασίζονται σε ένα αξιωματικό σύστημα. Το αν τα αξιώματα ισχύουν για τον κόσμο είναι υπό αμφισβήτηση και μόνο ενδιαφέρον υπάρχει για την εξαγωγή μαθηματικών θεωρημάτων. Ο Ράιχενμπαχ παραδέχεται ότι δείχνουμε ανίκανοι να σκεφτούμε διαφορετικά από το να προσχωρούμε σε ορισμένα λογικά συμπεράσματα, αλλά αυτό δεν καθιστά την απαγωγική λογική αναγκαστικά αληθινή για τον κόσμο. Παρομοίως, δεν μπορούμε να σκεφτούμε τον πραγματικό χώρο με όρους οτιδήποτε άλλο εκτός από τον Ευκλείδειο χώρο, παρόλο που γνωρίζουμε από τον Αϊνστάιν, και τα αποτελέσματα διαφόρων κρίσιμων πειραμάτων, ότι ο πραγματικός χώρος δεν είναι Ευκλείδειος.

Υπάρχει μια σειρά από αποτελέσματα της μαθηματικής λογικής που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουν ότι υπάρχουν περιορισμοί στις δυνάμεις των μηχανών διακριτής κατάστασης. Το πιο γνωστό από αυτά τα αποτελέσματα είναι γνωστό ως θεώρημα Gödel, και δείχνει ότι σε οποιοδήποτε αρκετά ισχυρό λογικό σύστημα μπορούν να διατυπωθούν δηλώσεις που δεν μπορούν ούτε να αποδειχθούν ούτε να διαψευσθούν εντός του συστήματος, εκτός εάν πιθανώς το ίδιο το σύστημα είναι ασυνεπές. Υπάρχουν άλλα, από ορισμένες απόψεις παρόμοια, αποτελέσματα που οφείλονται στους Church, Kleene, Rosser και Turing. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι το πιο βολικό να εξεταστεί, καθώς αναφέρεται απευθείας σε μηχανές, ενώ τα άλλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο σε ένα συγκριτικά έμμεσο επιχείρημα, για παράδειγμα, εάν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Gödel, χρειαζόμαστε επιπλέον να έχουμε κάποια μέσα για την περιγραφή της λογικής συστήματα ως προς τις μηχανές και μηχανές ως προς τα λογικά συστήματα.

(1)	$(A \land B) \leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B)$	Νόμος De Morgan
(2)	$(A \lor B) \leftrightarrow \neg(\neg A \land \neg B)$	Νόμος De Morgan
(3)	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$	Νόμος της Διπλής Άρνησης
(4)	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	Νόμος της Άρνησης
(5)	$(B \rightarrow \Gamma) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$	Πρώτος Συλλογιστικός Νόμος
(6)	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$	Δεύτερος Συλλογιστικός Νόμος
(7)	$(A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma)) \leftrightarrow ((A \land B) \rightarrow \Gamma)$	Νόμος της Μεταφοράς
(8)	$A \lor \neg A$	Νόμος της του Τρίτου Αποκλείσεως

Εικόνα 5: Η άνοδος της μαθηματικής λογικής στο έργο και τις ιδέες του DeMorgan
πηγή: http://www.samos.aegean.gr/math/kornaros/images/Nomoi_pr_Logikns.jpg

Δεν θα ήταν λάθος να εντοπίσουμε την άνοδο της μαθηματικής λογικής στο έργο και τις ιδέες του DeMorgan, είτε, όπως πίστευε ο ίδιος ο DeMorgan, ως η μαθηματικοποίηση της λογικής είτε, όπως υπέθεσαν οι Frege και Russell, η λογικοποίηση των μαθηματικών. Είτε έτσι είτε αλλιώς, η νέα λογική ασχολήθηκε με ανερμήνευτες συμβολικές γλώσσες και τεχνικά αναθεωρημένες εξετάσεις των ιδιοτήτων τέτοιων γλωσσών. Οι μη ερμηνευμένες γλώσσες είναι γλώσσες μόνο κατ' όνομα. Υπάρχει λίγη ικανότητα επικοινωνίας σε αυτά και καθόλου για πραγματικές διαφωνίες.

Πάνω από λίγο περισσότερο από έναν αιώνα, η μαθηματική λογική έχει εξελιχθεί από το τίποτα σε ένα πολύ πολύπλευρο θέμα. Έριξε πολύ φως σε πολλούς τομείς της φιλοσοφίας, ιδιαίτερα μέσω της τροπικής λογικής, στα μαθηματικά ειδικά μέσω της θεωρίας συνόλων και στη πληροφορική μέσω της ανάλυσης που επέτρεψε και των προγραμμάτων που επέτρεψε να δημιουργηθούν. Έχει επίσης δείξει τα όρια της υπολογισιμότητας. Προς το παρόν, η μαθηματική λογική περιλαμβάνει τη θεωρία μοντέλων, τη θεωρία συνόλων, τη θεωρία αναδρομής και τη θεωρία αποδείξεων. Αν και οι τροπικές λογικές έχουν χρησιμοποιηθεί από καιρό, ειδικά από φιλοσόφους, στη διάρκεια της ζωής μου πιστεύω ότι η πιο σημαντική αλλαγή στη μαθηματική λογική ήταν η ανάπτυξη πολλών, πολλών άλλων ειδών λογικών, που έχουν συμπληρώσει την τυπική ή κλασική που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά.

2.3 Αναδρομή στην ιστορία της λογικής

Η μαθηματική λογική και συλλογισμός χρονολογούνται πολλές χιλιάδες χρόνια πίσω, από αρχαίους Αιγύπτιους αρχιτέκτονες και τους Βαβυλώνιους αστρονόμους. Η λογική σκέψη αναπτύχθηκε επίσης ανεξάρτητα στην Ινδία και την Κίνα. Αιώνες αργότερα, διάφορες ομάδες Ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων συζητούσαν τη φύση της αλήθειας, προσπαθώντας να αναπτύξουν ένα επίσημο σύστημα μαθηματικής λογικής και συναγωγής. Οι ιδέες του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη και πολλών άλλων μεταφέρθηκαν στον Μεσαίωνα και αναβιώθηκαν από μελετητές όπως ο Άγιος Θωμάς ο Ακινάτης και διάφοροι Άραβες μαθηματικοί. Ο Gottfried Leibniz ήταν ένας από τους πρώτους μαθηματικούς που χρησιμοποίησαν συμβολική γλώσσα για τη λογική, παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιούμε σήμερα. Από τότε, η λογική έχει γίνει στενά συνυφασμένη με έννοιες όπως αξιώματα και απόδειξη, άπειρο ή σύνολα αριθμών.

Ο όρος «λογική» μπορεί, πολύ χονδρικά και αόριστα, να συνδέεται με κάτι σαν σωστή σκέψη. Ο Αριστοτέλης καθόρισε έναν συλλογισμό ως λόγο στον οποίο, το να δηλώνονται ορισμένα πράγματα κάτι διαφορετικό από αυτό που δηλώνεται προκύπτει αναγκαστικά από το ότι είναι έτσι. Και, στην πραγματικότητα, αυτή η διαίσθηση δεν βρίσκεται μόνο στην αρχή της, περίπου το 500 π.Χ., αλλά ήταν η κύρια δύναμη που ώθησε την ανάπτυξή του από τότε μέχρι τον περασμένο αιώνα. Υπήρχε μια μεσαιωνική παράδοση σύμφωνα με την οποία ο Έλληνας φιλόσοφος Παρμενίδης, περί τον 5ο αιώνας π.Χ., εφηύρε τη λογική ζώντας σε έναν βράχο στην Αίγυπτο. Η ιστορία είναι καθαρός θρύλος, αλλά αντανακλά το γεγονός ότι ο Παρμενίδης ήταν ο πρώτος φιλόσοφος που χρησιμοποίησε ένα εκτεταμένο επιχείρημα για τις απόψεις του, αντί να προτείνει απλώς ένα όραμα της πραγματικότητας. Αλλά η χρήση επιχειρημάτων δεν είναι το ίδιο με τη μελέτη τους, και ο Παρμενίδης ποτέ δεν διατύπωσε ή μελέτησε συστηματικά αρχές. Πράγματι, δεν υπάρχει καμία απόδειξη ότι γνώριζε καν τους σιωπηρούς κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων που χρησιμοποιήθηκαν κατά την παρουσίαση του δόγματός του.

Αν ο Παρμενίδης δεν γνώριζε τους γενικούς κανόνες που διέπουν τα επιχειρήματά του, το ίδιο ίσως δεν ισχύει για τον μαθητή του Ζήνωνα από την Ελέα, ο οποίος έδρασε και αυτός τον 5ος αιώνας π.Χ. Ο Παρμενίδης δίδαξε ότι δεν υπάρχει πραγματική αλλαγή στον κόσμο και ότι όλα τα πράγματα παραμένουν, τελικά, το ίδιο ον. Για την υπεράσπιση αυτής της σκληρής κριτικής, ο Ζήνων σχεδίασε μια σειρά από έξυπνα επιχειρήματα, γνωστά με το όνομα παράδοξα του Ζήνωνα, τα οποία απέδειξαν ότι η αντίθετη υπόθεση πρέπει να οδηγήσει σε παράλογο. Μερικά από τα πιο γνωστά είναι η ιστορία του Αχιλλέα και της χελώνας που διαγωνιστείτε σε έναν αγώνα. Η χελώνα, που είναι πιο αργός δρομέας, ξεκινά λίγο πριν από τον Αχιλλέα. Σε αυτό το διάστημα, η χελώνα θα πάει κάπως προς τον στόχο. Τώρα ο Αχιλλέας αρχίζει να τρέχει αλλά για να καταλάβει τη χελώνα πρέπει πρώτα να τρέξει προς το δρόμο που θα του πάρει λίγο χρόνο t. Σε αυτό το διάστημα, η χελώνα θα περπατήσει ξανά κάποια απόσταση w μακριά από το σημείο x και πιο κοντά στον στόχο. Μετά πάλι, ο Αχιλλέας πρέπει να τρέξει πρώτα το δρόμο w για να πιάσω τη χελώνα, αλλά αυτό θα περπατήσω ταυτόχρονα κάποια απόσταση y μακριά. Εν ολίγοις, ο Achilles δεν θα πιάσει ποτέ τη χελώνα, κάτι που είναι προφανώς παράλογο. Χονδρικά, αυτό σημαίνει ότι η θέση ότι τα δύο είναι η πραγματική αλλαγή των θέσεων τους δεν μπορεί να είναι αληθινή! Η ιστορία δεν είναι αυτό που πιθανώς είναι λάθος με αυτόν τον τρόπο σκέψης, αλλά ότι η ίδια μορφή συλλογισμού εφαρμόστηκε από τον Ζήνωνα σε πολλές άλλες ιστορίες: υποθέτοντας μια διατριβή Δ, μπορούμε να την αναλύσουμε και να καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα Σ. αλλά το Π αποδεικνύεται παράλογο επομένως το Δ δεν μπορεί να είναι αληθινό. Αυτό το μοτίβο εξακολουθεί να χρησιμοποιείται συχνά τόσο σε άτυπα όσο και σε επίσημα επιχειρήματα.

Μέχρι τη δεκαετία του 1930 σχεδόν όλη η εργασία στα θεμέλια των μαθηματικών και στη συμβολική λογική γινόταν σε μια τυπική λογική κατηγορήματος πρώτης τάξης, που συχνά επεκτάθηκε με αξιώματα ή σχήματα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων ή τύπων. Αυτή η υποκείμενη λογική συνίστατο σε μια θεωρία κλασικών συναρτησιακών συνδέσεων αλήθειας, όπως ‘όχι’, ‘και’ και ‘αν... τότε’ (προτασιακή λογική) και ποσοτικοποίηση πρώτης τάξης που επιτρέπει προτάσεις που όλα και τουλάχιστον ένα άτομο ικανοποιεί έναν συγκεκριμένο τύπο. Μόνο σταδιακά στις δεκαετίες του 1920 και του '30 προέκυψε μια σύλληψη μιας λογικής πρώτης τάξης και εναλλακτικών λύσεων.

Οι τυπικές θεωρίες μπορούν να ταξινομηθούν σύμφωνα με την εκφραστική τους ισχύ, ανάλογα με τη γλώσσα καθώς και το σύστημα συλλογισμού, δηλαδή τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων που χρησιμοποιούν. Η προτασιακή λογική επιτρέπει απλώς τον χειρισμό απλών προτάσεων σε συνδυασμό με τελεστές όπως το ή και το και. Οι θεωρίες πρώτης τάξης επιτρέπουν ρητή αναφορά και ποσοτικοποίηση σε άτομα, όπως αριθμούς ή σύνολα, αλλά όχι ποσοτικοποίηση και επομένως κανόνες για τον χειρισμό των ιδιοτήτων αυτών των ατόμων.

Η Μαθηματική λογική αποτελεί το όνομα το οποίο έδωσε ο Giuseppe Peano σε αυτό που είναι επίσης γνωστό ως συμβολική λογική. Στην κλασική του εκδοχή, οι βασικές όψεις μοιάζουν με τη λογική του Αριστοτέλη, αλλά γράφονται με συμβολική σημειογραφία και όχι φυσική γλώσσα. Προσπάθειες για την αντιμετώπιση των λειτουργιών της τυπικής λογικής με συμβολικό ή αλγεβρικό τρόπο έγιναν από μερικούς από τους πιο φιλόσοφους μαθηματικούς, όπως είναι ο Leibniz και ο Lambert. αλλά οι κόποι τους παρέμειναν ελάχιστα διαδεδομένοι και γνωστοί. Στα μέσα του 19ου αιώνα, εμφανίστηκαν ο George Boole και μετά ο Augustus De Morgan, οι οποίοι παρουσίασαν έναν συστηματικό μαθηματικό τρόπο θεώρησης της λογικής. Το παραδοσιακό, αριστοτελικό δόγμα της λογικής αναμορφώθηκε και ολοκληρώθηκε και από αυτό ανέπτυξε ένα όργανο για τη διερεύνηση των θεμελιωδών εννοιών των μαθηματικών. Θα ήταν παραπλανητικό να πούμε ότι οι θεμελιώδεις διαμάχες που ήταν ζωντανές την περίοδο 1900–1925 έχουν όλες διευθετηθεί. αλλά η φιλοσοφία των μαθηματικών διευκρινίστηκε πολύ από τη νέα λογική.

Ενώ η ελληνική ανάπτυξη της λογικής έδωσε μεγάλη έμφαση σε μορφές επιχειρημάτων, η στάση της τρέχουσας μαθηματικής λογικής θα μπορούσε να συνοψιστεί ως η συνδυαστική μελέτη του περιεχομένου. Αυτό καλύπτει τόσο τη συντακτική όσο και τη σημασιολογική διάσταση. Η συντακτική έχει να κάνει με τη σωστή ή επίσημη δομή μιας συμβολοσειράς συμβόλων σε μια επίσημη γλώσσα, όπως, για παράδειγμα, η αποστολή μιας συμβολοσειράς από μια επίσημη γλώσσα σε ένα πρόγραμμα μεταγλωττιστή για να τη γράψει ως ακολουθία εντολών μηχανής. Η σημασιολογική έχει να κάνει με την ερμηνεία μιας σειράς συμβόλων, όπως, η κατασκευή συγκεκριμένων μοντέλων ή ολόκληρων συνόλων αυτών, στη θεωρία μοντέλων.

2.4 Ορισμός ασαφούς λογικής

Όταν κάποιος αναφέρεται στην έννοια της ασαφούς λογικής δεν υπονοείται ότι το νόημα ή οι προϋποθέσεις για τη σωστή χρήση της είναι ανεπαρκώς καθορισμένες ή κατά κάποιο τρόπο ελλιπείς, αλλά ότι υπάρχει ένα λίγο πολύ ανακριβές όριο μεταξύ των περιπτώσεων στις οποίες ισχύει μια δεδομένη περιγραφή και εκείνων στις οποίες δεν ισχύει. Ένα ή δύο παραδείγματα, στη συνέχεια, ίσως μας μας βοηθήσουν να ξεκαθαριστεί η σημασία αυτής της έννοιας.

Έστω, το παράδειγμα με τα κοτόπουλα και τα αυγά. Ας υποθέσουμε ότι ο Δαρβίνος είχε δίκιο για την εξέλιξη, ότι δεν συμβαίνει σε μεγάλες μεταλλάξεις αλλά με μια σταδιακή συσσώρευση μικρών. Κάθε ζώο και οι άμεσοι απόγονοί του θα ανήκουν στο ίδιο είδος και μετά από εύλογες δοκιμές: έχουν παρόμοια δομή. είναι πολύ κοντά γενετικά και είναι διασταυρούμενα γόνιμα. Τώρα κάθε ζώο του ίδιου είδους με το κοτόπουλο, είναι κοτόπουλο. Έτσι, τα κοτόπουλα μπορούν να προέρχονται μόνο από αυγά κοτόπουλου, τα οποία μπορούν να γεννηθούν μόνο από κοτόπουλα. Κατά συνέπεια, υπήρχαν πάντα κοτόπουλα, ακόμη και πριν από 200 εκατομμύρια χρόνια, πριν τα πουλιά εξελιχθούν. Το πρόβλημα σε αυτή τη περίπτωση είναι ότι το σχετικό κατηγόρημα πως ναι μεν η λογική του επιχειρήματος είναι εξαιρετικά απλή, αλλά είναι και αποτελούμενη από μεγάλο αριθμό υποθετικών σκέψεων.

Ο όρος ασαφής λογική χρησιμοποιείται από τα τέλη της δεκαετίας του εξήντα. Αρχικά, είχε το νόημα οποιασδήποτε λογικής που είχε περισσότερες από δύο τιμές αλήθειας. Αργότερα, μετά την συμβολή του Zadeh έλαβε δύο άλλες έννοιες, δηλαδή τη θεωρία του προσεγγιστικού συλλογισμού και τη θεωρία της γλωσσικής λογικής. Η τελευταία, κάπως περιθωριακή θεωρία, είναι μια από τις λογικές των οποίων οι αξίες αλήθειας είναι εκφράσεις της φυσικής γλώσσας, όπως για παράδειγμα, αληθινό, λίγο πολύ αληθινό, κ.λπ. Η πρώτη είναι η κύρια πιο συχνά χρησιμοποιούμενη έννοια. Γενικά, η ασαφής λογική μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πολύτιμη λογική με ειδικές ιδιότητες που στοχεύουν στη μοντελοποίηση του φαινομένου της ασάφειας και ορισμένων μερών της σημασίας της φυσικής γλώσσας μέσω διαβαθμισμένης προσέγγισης. Ο Zadeh διατυπώνει το παράδειγμα της ασαφούς λογικής ως εξής: με μια στενή έννοια, η ασαφής λογική, είναι ένα λογικό σύστημα που στοχεύει στην επισημοποίηση της κατά προσέγγιση συλλογιστικής. Υπό αυτή την έννοια, είναι μια επέκταση της λογικής πολλών τιμών.

Η ασαφής λογική με στενή έννοια, είναι μια ειδική λογική πολλών αξιών που στοχεύει στο να παρέχει επίσημο υπόβαθρο για τη διαβαθμισμένη προσέγγιση της ασάφειας. Η ασαφής λογική με την ευρύτερη έννοια, στοχεύει στην ανάπτυξη μαθηματικού μοντέλου φυσικού ανθρώπινου συλλογισμού, στο οποίο πρωταρχικό ρόλο παίζει η φυσική γλώσσα. Γενικά, ο ασαφής συλλογισμός είναι το αποτέλεσμα της διαβαθμισμένης προσέγγισης στα τυπικολογικά συστήματα. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι αυτό δεν είναι ένα μάταιο αποτέλεσμα της προσπάθειας για ατελείωτη γενίκευση. Λόγω της διαβαθμισμένης προσέγγισης, η ασαφής λογική παρέχει επίλυση ορισμένων, κλασικά μη επιλύσιμων προβλημάτων. Για παράδειγμα, υπάρχουν γνωστά αρχαία παράδοξα όπως ότι ένας κόκκος σιταριού δεν κάνει σωρό. Ούτε αυτό γίνεται με δύο κόκκους, τρεις κ.λπ. Ως εκ τούτου, δεν υπάρχουν σωροί. Η ουσία του παραδόξου του Φαλακρού είναι η ίδια. Ένας άντρας που δεν έχει μαλλιά ή μόνο μία τρίχα είναι προφανώς φαλακρός. Το ίδιο ισχύει και για τον άντρα με δύο τρίχες κ.λπ. Επομένως, όλοι οι άντρες είναι φαλακροί. Αυτά τα παράδοξα αυξάνονται αν κατανοήσουμε έντονα τις ιδιότητες να είναι ένας σωρός και να είναι φαλακρός, δηλαδή αν παραμελήσουμε την ασάφειά τους. Επίσης, η ασαφής λογική αποτελεί μια γενίκευση της κλασικής λογικής. Ανοίγει διαφορετικούς, πιο γενικούς δρόμους για εξήγηση, τουλάχιστον μερικών από τα κλασικά προβλήματα. Μπορεί επίσης να δημιουργηθούν νέα προβλήματα των κλασικών μαθηματικών που επηρεάζονται άμεσα από την έννοια της ασαφούς λογικής.

Το τέλος της δεκαετίας του εβδομήντα και του ογδόντα μπορεί να χαρακτηριστεί από την αλγεβρική ανάπτυξη διαφόρων πτυχών της ασαφούς λογικής. Υπήρξαν επίσης κάποιες προσπάθειες να διατυπωθεί η αρχή της ανάλυσης. Ταυτόχρονα, έχουν μελετηθεί διάφορες γενικεύσεις της κλασικής λογικής και επεκτάσεις της ασαφούς λογικής. Στα τέλη της δεκαετίας του ογδόντα, αυτός ο κλάδος της ασαφούς λογικής επεκτάθηκε στην πρώτη τάξη από τον V. Novak και αποδείχθηκε η γενίκευση του θεωρήματος πληρότητας Godel. Από τα μέσα της δεκαετίας του ογδόντα, μπορούμε να αναγνωρίσουμε το ταχέως αυξανόμενο ενδιαφέρον για την ασαφή λογική. Αυτό προκλήθηκε ιδιαίτερα από τις διάσημες εφαρμογές στην Ιαπωνία, όπως στα πλυντήρια ρούχων, το μετρό, την κάμερα κ.λπ.. Μέχρι στιγμής έχουν εκδοθεί αρκετές δεκάδες βιβλία και ο αριθμός τους εξακολουθεί να αυξάνεται συνεχώς.

Τα τελευταία χρόνια μπορούν να χαρακτηριστούν από την έντονη προσπάθεια να καθιερωθεί η ασαφής λογική ως μια αυστηρή τυπική θεωρία που βασίζεται στα βαθιά αλγεβρικά αποτελέσματα, ειδικά στη θεωρία των αλγεβρών. Η θεωρία των ασαφών συνόλων και οι λογικές πτυχές της ακολουθούν την ανάπτυξη της αφηρημένης θεωρίας συνόλων και τη γενίκευσή της πολύ στενά.

Τέλος, να σημειωθεί ότι όπως προκύπτει και από την παραπάνω αναφορά στον ορισμό της ασαφούς λογικής δε πρέπει σε καμία περίπτωση να συγχέονται η έννοια της ασαφούς λογικής με την αποδεικτική διαδικασία. Οι ασαφείς λογικές είναι λογικές πολλών αξιών που ταιριάζουν καλά στη συλλογιστική στο πλαίσιο της ασάφειας. Παρέχουν τη βάση για το ευρύτερο πεδίο της Ασαφής Λογικής, που περιλαμβάνει διάφορους τομείς όπως ο ασαφής έλεγχος, οι ασαφείς βάσεις δεδομένων και τα ασαφή μαθηματικά. Οι ασαφείς λογικές παρέχουν τη βάση για λογικά συστήματα που ασχολούνται με την ασάφεια, π.χ. για την επισημοποίηση κοινών κατηγορημάτων φυσικής γλώσσας όπως «ψηλός» ή «γρήγορος». Στην πραγματικότητα, οι λογικές που βασίζονται σε πραγματικούς αριθμούς εμφανίζονται σε διάφορους τομείς της λογικής.

Κεφάλαιο 3^{O}

3.1 Ορισμός κλασσικών συνόλων

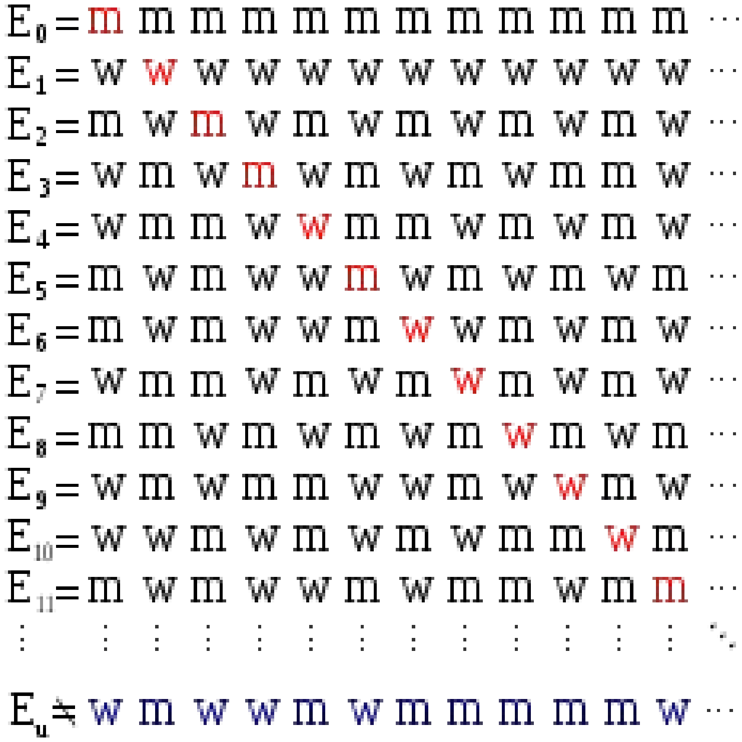
Η θεωρία συνόλων είναι η μαθηματική θεωρία καλά καθορισμένων συλλογών, που ονομάζονται σύνολα, η αντικείμενα που ονομάζονται μέλη ή στοιχεία του συνόλου. Η καθαρή θεωρία συνόλων ασχολείται αποκλειστικά με σύνολα, επομένως τα μόνα σύνολα που εξετάζονται είναι εκείνα των οποίων τα μέλη είναι επίσης σύνολα. Η θεωρία των κληρονομικά - πεπερασμένων συνόλων, δηλαδή εκείνων των πεπερασμένων συνόλων των οποίων τα στοιχεία είναι επίσης πεπερασμένα σύνολα, τα στοιχεία των οποίων είναι επίσης πεπερασμένα και ούτω καθεξής, είναι τυπικά ισοδύναμη με την αριθμητική. Άρα, η ουσία της θεωρίας συνόλων είναι η μελέτη των άπειρων συνόλων, και ως εκ τούτου μπορεί να οριστεί ως η μαθηματική θεωρία του πραγματικού, σε αντίθεση με το δυναμικό του απείρου.

Με άλλα λόγια, η κλασική θεωρία συνόλων είναι ένας μαθηματικός λογισμός για την αντιμετώπιση συλλογών αντικειμένων και ορισμένων σχέσεων μεταξύ αυτών των αντικειμένων. Στην πιο βασική του μορφή, ένα σύνολο είναι απλώς μια λίστα αντικειμένων, όπως A = {a, b, c, d, e} ή B = {πορτοκάλι, λεμόνι, λάιμ, γκρέιπφρουτ, μανταρίνι}. Ωστόσο, τα σύνολα γενικά γίνονται ενδιαφέροντα όταν συνδέονται με έναν κανόνα που καθορίζει τη συμμετοχή ή τη μη συμμετοχή στο σύνολο. Για παράδειγμα, το σύνολο A μπορεί επίσης να καθοριστεί ως ο κανόνας "πρώτα πέντε γράμματα του αλφαβήτου" και το σύνολο B μπορεί να οριστεί από τον κανόνα "κοινώς διαθέσιμα εσπεριδοειδή", υπό τον όρο, φυσικά, ότι μπορεί να δοθεί ακριβές νόημα στο "κοινό". Σαφώς, σε οποιαδήποτε χρήση συνόλων για τη μοντελοποίηση της εμπειρικής πραγματικότητας ή για τη δοκιμή πραγματικών δεδομένων, ο κανόνας που συνδέει τα αντικείμενα μεταξύ τους είναι υψίστης σημασίας και πρέπει να προσδιορίζεται με σαφήνεια. Σε μια τοποθεσία όπου τα λεμόνια και τα μανταρίνια καλλιεργούνται σε αφθονία, αλλά τα λάιμ και το γκρέιπφρουτ είναι άγνωστα, ο κανόνας "κοινά εσπεριδοειδή" δεν καθορίζει το σύνολο B.

Η έννοια του συνόλου είναι τόσο απλή που συνήθως εισάγεται ανεπίσημα και θεωρείται αυτονόητη. Στη θεωρία συνόλων, ωστόσο, όπως συνηθίζεται στα μαθηματικά, τα σύνολα δίδονται αξιωματικά, επομένως η ύπαρξη και οι βασικές ιδιότητές τους προκύπτουν από τα κατάλληλα τυπικά αξιώματα. Τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων υποδηλώνουν την ύπαρξη ενός σύμπαντος θεωρητικής συνόλων τόσο πλούσιου που όλα τα μαθηματικά αντικείμενα μπορούν να ερμηνευθούν ως σύνολα. Επίσης, η επίσημη γλώσσα της καθαρής θεωρίας συνόλων επιτρέπει σε κάποιον να επισημοποιήσει όλες τις μαθηματικές έννοιες και επιχειρήματα. Έτσι, η θεωρία συνόλων έχει γίνει το τυπικό θεμέλιο για τα μαθηματικά, καθώς κάθε μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο και κάθε θεώρημα των μαθηματικών μπορεί να συναχθεί λογικά στον Λογισμό Κατηγορήματος από τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων.

Η θεωρία συνόλων, ως ένας ξεχωριστός μαθηματικός κλάδος, ξεκινά στο έργο του Georg Cantor. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η θεωρία συνόλων γεννήθηκε στα τέλη του 1873, όταν έκανε την εκπληκτική ανακάλυψη ότι το γραμμικό συνεχές, δηλαδή η πραγματική ευθεία, δεν είναι μετρήσιμη, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία του δεν μπορούν να μετρηθούν χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς. Έτσι, παρόλο που το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι και τα δύο άπειρα, υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από ό,τι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί, γεγονός που άνοιξε την πόρτα στη διερεύνηση των διαφορετικών μεγεθών του άπειρου.

Σύμφωνα με τον Cantor, δύο σύνολα A και B έχουν το ίδιο μέγεθος, ή καρδινάλιο, εάν είναι διχοτομήσιμα, δηλαδή, τα στοιχεία του A μπορούν να τεθούν σε αντιστοιχία ένα προς ένα με τα στοιχεία του B. Έτσι, το σύνολο N των φυσικών αριθμών και το σύνολο R των πραγματικών αριθμών έχουν διαφορετικές καρδινότητες. Το 1878 ο Cantor διατύπωσε την περίφημη υπόθεση του συνεχούς (CH), η οποία βεβαιώνει ότι κάθε άπειρο σύνολο πραγματικών αριθμών είναι είτε μετρήσιμο, δηλαδή έχει την ίδια καρδινάτητα με το N ή έχει την ίδια καρδινάτητα με το R. Με άλλα λόγια, υπάρχουν μόνο δύο πιθανά μεγέθη άπειρων συνόλων πραγματικών αριθμών. Το CH είναι το πιο διάσημο πρόβλημα της θεωρίας συνόλων. Ο ίδιος ο Cantor αφιέρωσε μεγάλη προσπάθεια σε αυτό, και το ίδιο έκαναν πολλοί άλλοι κορυφαίοι μαθηματικοί του πρώτου μισού του εικοστού αιώνα, όπως ο Hilbert, ο οποίος απαριθμούσε το CH ως το πρώτο πρόβλημα στη διάσημη λίστα του με 23 άλυτα μαθηματικά προβλήματα που παρουσιάστηκαν το 1900 στο Δεύτερο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών, στο Παρίσι. Οι προσπάθειες απόδειξης του CH οδήγησαν σε σημαντικές ανακαλύψεις στη θεωρία συνόλων, όπως η θεωρία των κατασκευάσιμων συνόλων και η τεχνική εξαναγκασμού, που έδειξε ότι το CH δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί ούτε να διαψευσθεί από τα συνήθη αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Μέχρι σήμερα το CH παραμένει ανοιχτό.



<u>Εικόνα 2:</u> Μια απεικόνιση του διαγώνιου επιχειρήματος του Cantor για την ύπαρξη μη μετρήσιμων συνόλων. Η ακολουθία στο κάτω μέρος δεν μπορεί να εμφανιστεί πουθενά στην άπειρη λίστα των ακολουθιών παραπάνω. Πηγή: https://el.m.wikipedia.org/wiki/Γκέοργκ_Κάντορ

Από νωρίς, κάποιες ασυνέπειες ή παράδοξα προέκυψαν από μια αφελή χρήση της έννοιας του συνόλου. Συγκεκριμένα, από την παραπλανητικά φυσική υπόθεση ότι κάθε ιδιότητα καθορίζει ένα σύνολο, δηλαδή το σύνολο των αντικειμένων που έχουν την ιδιότητα. Για να αποφευχθούν τα παράδοξα και να τεθεί σε σταθερή βάση, έπρεπε να αξιοποιηθεί η θεωρία συνόλων. Η πρώτη αξιωματοποίηση οφειλόταν στον Zermelo και προέκυψε ως αποτέλεσμα της ανάγκης να διευκρινιστούν οι βασικές θεωρητικές αρχές συνόλων που διέπουν την απόδειξή του για την αρχή της ορθής τάξης του Cantor. Η αξιωματοποίηση του Zermelo αποφεύγει το παράδοξο του Russell μέσω του αξιώματος του διαχωρισμού, το οποίο διατυπώνεται ως ποσοτικός προσδιορισμός των ιδιοτήτων των συνόλων, και επομένως είναι μια δήλωση δεύτερης τάξης. Περαιτέρω εργασία των Skolem και Fraenkel οδήγησε στην επισημοποίηση του αξιώματος του διαχωρισμού ως προς τους τύπους πρώτης τάξης, αντί της άτυπης έννοιας της ιδιοκτησίας, καθώς και στην εισαγωγή του αξιώματος της αντικατάστασης, το οποίο επίσης διατυπώνεται ως αξίωμα. Το αξίωμα της Αντικατάστασης είναι απαραίτητο για μια σωστή ανάπτυξη της θεωρίας των διατεταγμένων και καρδιναλίων με τη χρήση της αναδρομής διαπερασμένων. Χρειάζεται επίσης να αποδειχθεί η ύπαρξη τέτοιων απλών συνόλων όπως το σύνολο των κληρονομικά πεπερασμένων συνόλων, δηλαδή εκείνων των πεπερασμένων συνόλων των οποίων τα στοιχεία είναι πεπερασμένα, τα στοιχεία των οποίων είναι επίσης πεπερασμένα κ.λπ. ή για να αποδείξουμε βασικά θεωρητικά γεγονότα όπως ότι κάθε σύνολο περιέχεται σε ένα μεταβατικό σύνολο, δηλαδή ένα σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του. Μια περαιτέρω προσθήκη, από τον von Neumann, του αξιώματος της θεμελίωσης, οδήγησε στο τυπικό σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, γνωστό ως αξιώματα Zermelo-Fraenkel συν το αξίωμα της επιλογής ή ZFC. Το ZFC είναι ένα αξιωματικό σύστημα διατυπωμένο σε λογική πρώτης τάξης με ισότητα και με ένα μόνο σύμβολο δυαδικής σχέσης ∈ για τη συμμετοχή. Έτσι, γράφουμε A∈B για να εκφράσουμε ότι το A είναι μέλος του συνόλου B.

3.2 Η έννοια των ασαφών συνόλων

Η θεωρία των ασαφών συνόλων είναι μια γενίκευση της θεωρίας συνόλων. Αν και η θεωρία συνόλων είναι το θεμέλιο της σύγχρονης προσέγγισης των μαθηματικών και θα ήταν οικία σε οποιονδήποτε γνωρίζει, ας πούμε, τη θεωρία παιγνίων ή τη θεωρία πιθανοτήτων, δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι είναι εξοικειωμένοι με αυτήν. Αν και το «ασαφές» συχνά φέρει μια υποτιμητική χροιά, τα μαθηματικά της θεωρίας ασαφών συνόλων είναι ακριβή. Ο σκοπός του είναι να μας επιτρέψει να μοντελοποιήσουμε καλύτερα φαινόμενα που παρουσιάζουν ένα συγκεκριμένο είδος αβεβαιότητας, βαθμού ασάφειας.

Όπως η κλασική θεωρία συνόλων, έτσι και η θεωρία ασαφών συνόλων περιλαμβάνει πράξεις για την ένωση, τη τομή, το συμπλήρωμα και τη συμπερίληψη, αλλά περιλαμβάνει επίσης πράξεις που δεν έχουν κλασικό αντίστοιχο, όπως η συγκέντρωση και η διαστολή τροποποιητών και η συνδετική ασαφής συσσώρευση. Τα ασαφή σύνολα εισήχθησαν από τον L. Zadeh στο 1965. Ο ορισμός ενός ασαφούς συνόλου που δόθηκε από τον L. Zadeh είναι ο εξής: Ένα ασαφές σύνολο είναι μια τάξη με μια συνέχεια βαθμών μέλους. Έτσι ένα ασαφές σύνολο A σε ένα αναφορικό (σύμπαν του λόγου) X χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση μέλους A που συσχετίζει με κάθε στοιχείο $x \in X$ έναν πραγματικό αριθμό $A(x) \in [0, 1]$, με την ερμηνεία $A(x)$ είναι ο βαθμός μέλους του x στο ασαφές σύνολο A.

Την πρώτη δεκαετία, οι εργασίες προσανατολισμένες στην εφαρμογή στο ασαφές πεδίο αφορούσαν κυρίως θεωρητικές μελέτες για πιθανές εφαρμογές και μερικές φορές με πραγματικές εφαρμογές σε εργαστηριακή κλίμακα. Η πιο γόνιμη ιδέα αρχικά ήταν η έννοια του ασαφούς ελέγχου που ξεκίνησε από την πρωτοποριακή προσέγγιση του Mamdani. Το σημείο εκκίνησης εδώ ήταν απλώς μια ποιοτική αλγοριθμική περιγραφή της συμπεριφοράς ελέγχου. Η πρώτη εφαρμογή πραγματοποίησε τον αυτόματο έλεγχο συνδυασμού ατμομηχανής - λέβητα στο εργαστήριο. Αλλά σύντομα ο έλεγχος ενός κλιβάνου τσιμέντου πραγματοποιήθηκε και πωλήθηκε στην αγορά. Πολλές αληθινές εφαρμογές έχουν πραγματοποιηθεί, αφού, ακόμη και για τον μερικό έλεγχο της συμπεριφοράς των καταναλωτικών αγαθών. Αλλά και περαιτέρω θέματα έχουν αντιμετωπιστεί με επιτυχία, όπως π.χ.

προβλήματα ταξινομήσεων, αναγνώρισης προτύπων, διαχείρισης βάσεων δεδομένων, μοντελοποίησης χημικών διεργασιών, επιχειρησιακής έρευνας κ.λπ.

Οι περισσότερες έννοιες που χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα, όπως «υψηλή θερμοκρασία», «στρογγυλό πρόσωπο» ή «υδρόβιο ζώο», δεν είναι σαφώς καθορισμένες. Το 1965 ο Lotfi Zadeh, καθηγητής μηχανικής στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια στο Μπέρκλεϋ, πρότεινε έναν μαθηματικό ορισμό εκείνων των τάξεων που στερούνται επακριβώς καθορισμένων κριτηρίων συμμετοχής. Ο Zadeh τα ονόμασε ασαφή σύνολα. Η συμμετοχή σε ένα ασαφές σύνολο μπορεί να υποδεικνύεται με οποιονδήποτε αριθμό από το 0 έως το 1, που αντιπροσωπεύει ένα εύρος από "σίγουρα όχι στο σύνολο" έως "μερικώς στο σύνολο" έως "εντελώς στο σύνολο". Για παράδειγμα, στα 45 του ένας άντρας δεν είναι ούτε πολύ νέος ούτε πολύ μεγάλος. Αυτό καθιστά δύσκολο στην παραδοσιακή λογική να πει κανείς εάν ανήκει ή όχι στο σύνολο των γηραιών προσώπων. Σαφώς είναι κάπως ηλικιωμένος, μια ποιοτική αξιολόγηση που μπορεί να ποσοτικοποιηθεί εκχωρώντας μια τιμή ή βαθμό συμμετοχής μεταξύ 0 και 1, ας πούμε 0,35, για τη συμπερίληψή του σε ένα ασαφές σύνολο ηλικιωμένων.

Οι εξαιρετικά καινοτόμες εργασίες του Zadeh άνοιξαν νέους τομείς εφαρμογής και ξεκίνησαν την επέκταση των ασαφών μεθόδων και ιδεών προς την αναπαράσταση γνώσης και την τεχνητή νοημοσύνη. Επίσης σε αυτά τα πεδία ο κύριος στόχος είναι προς μια σχεδόν άμεση αναπαράσταση και συμπερασματική αντιμετώπιση αόριστων καθώς και ποιοτικών πληροφοριών, και συνεπώς προς ορισμένες πτυχές της μοντελοποίησης φυσικής γλώσσας. Σε συνδυασμό με αυτές τις ιδέες κάποιος έχει μια ερμηνεία των ασαφών συνόλων ως «ελαστικούς περιορισμούς» για τις τιμές των κατάλληλων μεταβλητών και των βαθμών συμμετοχής τους ως ένδειξη ενός βαθμού πιθανότητας κάποια πιθανή τιμή μιας μεταβλητής να είναι η πραγματική της τιμή.

Οι πραγματικές τάσεις στις εφαρμογές ασαφών συνόλων και στη χρήση όλων αυτών των ασαφών μεθόδων επικεντρώνονται γύρω από τον ασαφή έλεγχο και τη χρήση ασαφών πληροφοριών σε βάσεις γνώσεων και έμπειρα συστήματα. Το Fuzzy Control είναι σχεδόν μια υψηλού επιπέδου εφαρμογή τώρα, τα κύρια προβλήματά του συνήθως προκύπτουν από την προβλεπόμενη εφαρμογή.

Τα ασαφή σύνολα, όπως αναφέραμε και παραπάνω, είναι μια γενίκευση των συνηθισμένων συνόλων και μπορούν να συνδυαστούν με πράξεις παρόμοιες με την ένωση συνόλων, την τομή και το συμπλήρωμα. Ωστόσο, ορισμένες ιδιότητες των πράξεων συνηθισμένων συνόλων δεν ισχύουν πλέον για ασαφή σύνολα. Για παράδειγμα, η τομή ενός ασαφούς υποσυνόλου και του συμπληρώματός του μπορεί να μην είναι κενή. Σε μια λογική που βασίζεται σε ασαφή σύνολα, η αρχή του εξαιρούμενου μέσου είναι επομένως άκυρη. Η ασάφεια, όπως ορίζεται από τον Zadeh, είναι μη στατιστικής φύσης, αντιπροσωπεύει ασάφεια που οφείλεται στην ανθρώπινη διαίσθηση, όχι αβεβαιότητα με την πιθανολογική έννοια. Η συμμετοχή σε ένα ασαφές σύνολο αναπαρίσταται συνήθως γραφικά. Οι συναρτήσεις μέλους καθορίζονται τόσο από θεωρητικές όσο και από εμπειρικές μεθόδους που εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη εφαρμογή και μπορεί να περιλαμβάνουν τη χρήση τεχνικών εκμάθησης και βελτιστοποίησης, όπως νευρωνικά δίκτυα ή γενετικούς αλγόριθμους.

Η ασαφής λογική παρέχει απλή λογική παρόμοια με την ανθρώπινη λογική. Υπάρχουν περισσότερα τέτοια πλεονεκτήματα από τη χρήση αυτής της λογικής, τα οποία αναφέρονται στη συνέχεια:

- Η δομή των Fuzzy Logic Systems είναι εύκολη και κατανοητή
- Η ασαφής λογική χρησιμοποιείται ευρέως για εμπορικούς και πρακτικούς σκοπούς
- Βοηθάει στον έλεγχο των μηχανών και των καταναλωτικών προϊόντων
- Βοηθάει να αντιμετωπιστεί η αβεβαιότητα στη μηχανική
- Εάν ο αισθητήρας ανάδρασης σταματήσει να λειτουργεί, μπορεί να τον προγραμματίσει κάποιος στην κατάσταση
- Μπορεί εύκολα να γίνουν τροποποιήσεις με σκοπό τη βελτίωση ή την αλλαγή στην απόδοση του συστήματος
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν φθηνοί αισθητήρες που βοηθούν να διατηρηθεί το συνολικό κόστος και η πολυπλοκότητα του συστήματος σε χαμηλά επίπεδα

Αυτά ήταν τα διαφορετικά πλεονεκτήματα της ασαφούς λογικής. Ωστόσο, έχει και ορισμένα μειονεκτήματα:

- Η ασαφής λογική δεν είναι πάντα ακριβής. Έτσι τα αποτελέσματα γίνονται αντιληπτά με βάση υποθέσεις και μπορεί να μην είναι ευρέως αποδεκτά
- Δεν μπορεί να αναγνωρίσει τη μηχανική μάθηση, καθώς και τα μοτίβα τύπου νευρωνικών δικτύων
- Η επικύρωση και η επαλήθευση ενός ασαφούς συστήματος βασισμένου στη γνώση απαιτεί εκτεταμένες δοκιμές με υλικό
- Ο καθορισμός ακριβών, ασαφών κανόνων και συναρτήσεων μέλους είναι μια δύσκολη εργασία
- Κατά καιρούς, η ασαφής λογική συγχέεται με τη θεωρία πιθανοτήτων

Οι έννοιες του ασαφούς συνόλου και των εφαρμογών του έχουν γίνει πεδίο μάχης αντικρουόμενων απόψεων, από τη σταθερή ανάπτυξή του κατά τη δεκαετία του '60. Από τη μια πλευρά, στο στρατόπεδο της μηχανικής, βλέπουμε συχνά μια ευφορική προσδοκία ότι με αυτήν την ιδέα μπορούν να λυθούν αρκετά εύκολα πολλά προβλήματα που είχαν αντισταθεί σε οποιαδήποτε χρήσιμη μαθηματική μοντελοποίηση και λύση μέχρι τώρα. Από την άλλη, στο στρατόπεδο των μαθηματικών, παρατηρούμε έναν απορριπτικό σκεπτικισμό ως προς το επιστημονικό υπόβαθρο.

3.3 Τομείς εφαρμογής της ασαφούς συλλογιστικής στην Τεχνολογία και στην Επιστήμη

Θα αναρωτηθεί κανείς ποιες είναι οι δυνατότητες για τη χρήση και την εφαρμογή της ασαφούς λογικής στην καθημερινή ζωή του ανθρώπου. Γενικά, χρησιμοποιούμε το σύστημα ασαφούς λογικής τόσο για εμπορικούς όσο και για πρακτικούς σκοπούς προσδιορίζεται και παρακάτω. Συγκεκριμένα:

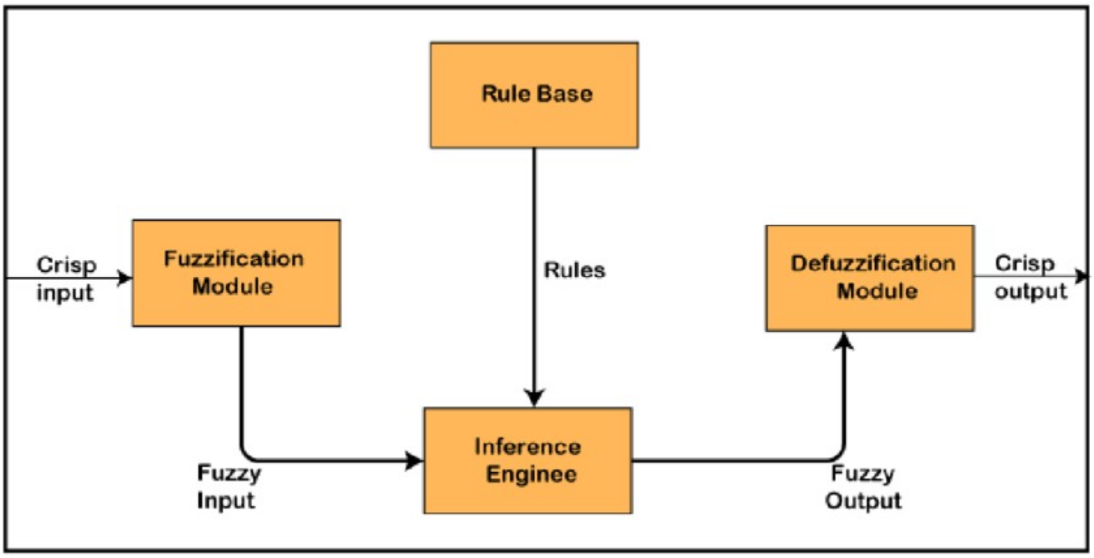
- Ελέγχει μηχανήματα και καταναλωτικά προϊόντα.
- Αν όχι ακριβή συλλογιστική, παρέχει τουλάχιστον αποδεκτή συλλογιστική.
- Αυτό βοηθά στην αντιμετώπιση της αβεβαιότητας στη μηχανική.

Λοιπόν, τώρα που γνωρίζουμε για τη ασαφή λογική στην τεχνητή νοημοσύνη και γιατί την χρησιμοποιούμε στην πραγματικότητα, ας προχωρήσουμε και ας κατανοήσουμε την αρχιτεκτονική αυτής της λογικής.

Το Fuzzy Inference System (FIS) είναι η βασική μονάδα ενός συστήματος ασαφούς λογικής που έχει ως πρωταρχικό έργο τη λήψη αποφάσεων. Αυτό το σύστημα προτάθηκε το 1975 από τον Ebhasim Mamdani. Βασικά, αναμενόταν να ελεγχθεί ένας συνδυασμός ατμομηχανής και λέβητα συνθέτοντας ένα σύνολο ασαφών κανόνων που ελήφθησαν από άτομα που εργάζονταν στο σύστημα.

Ο Mamdani, ενώ ήταν λέκτορας στο Queen Mary College του Λονδίνου, εργαζόταν στο σχεδιασμό συστημάτων μάθησης, πιστώνεται με την εφαρμογή του πρώτου ελεγκτή ασαφούς λογικής στις αρχές της δεκαετίας του 1970. Ο Mamdani και ο μαθητής του Seto Assilian έγραψαν 24 ευρετικούς κανόνες για τον έλεγχο της λειτουργίας μιας μικρής ατμομηχανής και συνδυασμού λέβητα. Στη συνέχεια χρησιμοποίησαν ασαφή σύνολα για να μεταφράσουν αυτούς τους γλωσσικούς κανόνες σε έναν αλγόριθμο που έλεγχε με επιτυχία το σύστημα, αποδεικνύοντας έτσι τη δύναμη της νέας προσέγγισης.

Η αρχιτεκτονική της ασαφούς λογικής και του FIS αποτελείται από τέσσερα κύρια μέρη, όπως απεικονίζεται και στην εικόνα 3:



Εικόνα 3:Στοιχεία Αρχιτεκτονικής Ασαφής Λογικής πηγή: https://www.researchgate.net/profile/Joao-Souza-Neto-2/publication/350471636/figure/fig3/AS:1006844923367428@1617061944388/Components-of-a-Fuzzy-Logic-Architecture.png

1. Rules: Περιλαμβάνει όλους τους κανόνες και τις προϋποθέσεις εάν-τότε που προσφέρονται από τους ειδικούς για τον έλεγχο του συστήματος λήψης αποφάσεων. Η πρόσφατη ενημέρωση της ασαφούς θεωρίας παρέχει διαφορετικές αποτελεσματικές μεθόδους για το σχεδιασμό και τον συντονισμό των ασαφών ελεγκτών. Συνήθως, αυτές οι εξελίξεις μειώνουν τον αριθμό των ασαφών κανόνων.
2. Fuzzification : Αυτό το βήμα μετατρέπει τις εισόδους ή τους ευκρινείς αριθμούς σε ασαφή σύνολα. Μπορεί κάποιος να μετρήσει τις ευκρινείς εισόδους με αισθητήρες και να τις περάσει στο σύστημα ελέγχου για περαιτέρω επεξεργασία.
3. Inference Engine: Καθορίζει τον βαθμό αντιστοιχίας μεταξύ ασαφούς εισόδου και κανόνων. Σύμφωνα με το πεδίο εισαγωγής, θα αποφασίσει τους κανόνες που πρόκειται να ενεργοποιηθούν. Συνδυάζοντας τους κανόνες πυροδότησης, σχηματίστε τις ενέργειες ελέγχου.
4. Defuzzification: Η διαδικασία Defuzzification μετατρέπει τα ασαφή σύνολα σε μια ευκρινή τιμή. Υπάρχουν διάφοροι τύποι διαθέσιμων τεχνικών και πρέπει να επιλεχθεί η πιο κατάλληλη με ένα έμπειρο σύστημα.

Οι εμπορικές εφαρμογές της ασαφούς λογικής άρχισαν να εμφανίζονται στις αρχές της δεκαετίας του 1980, ιδιαίτερα στην Ιαπωνία, η οποία σύντομα έγινε το κέντρο της ακαδημαϊκής και βιομηχανικής έρευνας για τα ασαφή συστήματα. Για παράδειγμα, η ασαφής λογική έχει χρησιμοποιηθεί στον έλεγχο της παραγωγής τσιμέντου και των διαδικασιών καθαρισμού του νερού και ένας ασαφής ελεγκτής που σχεδιάστηκε από μηχανικούς της Hitachi, Ltd., χρησιμοποιήθηκε για τη λειτουργία των αυτόματων συρμών του μετρό της ιαπωνικής πόλης Sendai. Καθ' όλη τη διάρκεια της δεκαετίας, στους Ιάπωνες καταναλωτές προσφέρθηκαν πολλά προϊόντα με στοιχεία ασαφούς λογικής. Αυτές περιελάμβαναν τηλεοράσεις που προσαρμόζουν την ένταση και την αντίθεση ανάλογα με το επίπεδο θορύβου και τις συνθήκες φωτισμού. «έξυπνα» πλυντήρια που επέλεξαν τον βέλτιστο κύκλο πλύσης με βάση την ποσότητα και την ποιότητα της βρωμιάς και το μέγεθος του φορτίου, ασαφείς φούρνοι μικροκυμάτων και κουζίνες ρυζιού που ρυθμίζονται για την υγρασία, και βιντεοκάμερες με ασαφή τσιπ που προσαρμόζουν σωστά την εστίαση και τον φωτισμό με πολλά αντικείμενα στην εικόνα. Για σκοπούς μάρκετινγκ, ο όρος fuzzy παρουσιάστηκε ως συνώνυμος με την «αποτελεσματική λειτουργία που απαιτεί ελάχιστη ανθρώπινη παρέμβαση».

Η ιαπωνική φρενίτιδα για ασαφή προϊόντα τελικά υποχώρησε, αλλά η ασαφής λογική εξακολουθεί να είναι πολύ παρούσα, αν και λιγότερο εμφανής, σε ορισμένα καταναλωτικά προϊόντα. Τα αυτόματα κιβώτια ταχυτήτων ορισμένων αυτοκινήτων, για παράδειγμα, περιέχουν ένα ασαφές εξάρτημα που ανιχνεύει το στυλ οδήγησης και το φορτίο του κινητήρα έτσι ώστε να επιλέγεται η καλύτερη σχέση.

Στις τεχνικές εφαρμογές, ο ασαφής έλεγχος αναφέρεται σε προγράμματα ή αλγόριθμους που χρησιμοποιούν ασαφή λογική για να επιτρέψουν στις μηχανές να λαμβάνουν αποφάσεις με βάση τις πρακτικές γνώσεις ενός ανθρώπινου χειριστή. Το θεμελιώδες πρόβλημα του αυτόματου ελέγχου είναι αυτό του προσδιορισμού της κατάλληλης απόκρισης του συστήματος, ή της μονάδας παραγωγής, για οποιοδήποτε δεδομένο σύνολο συνθηκών. Οι συμβατικές τεχνικές ελέγχου βασίζονται σε σαφείς μαθηματικές περιγραφές του συστήματος, συνήθως ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων που περιλαμβάνουν μικρό αριθμό μεταβλητών. Ο ασαφής έλεγχος, από την άλλη, δεν απαιτεί ένα ακριβές θεωρητικό μοντέλο αλλά μόνο την εμπειρική γνώση ενός έμπειρου χειριστή. Αυτή η γνώση εκφράζεται στη συνέχεια ως ένα σύνολο γλωσσικών κανόνων της μορφής «εάν (υπάρχουν συνθήκες), τότε (ορίζεται η ενέργεια που πρέπει να γίνει)». Για παράδειγμα, αν η θερμοκρασία είναι χαμηλή και η πυκνότητα της εικόνας υψηλή, τότε το ηλεκτρικό φορτίο θα πρέπει να είναι μεσαίο, είναι ένας από τους εννέα ευρετικούς κανόνες που διέπουν την ομαλή λειτουργία ενός φωτοτυπικού μηχανήματος. Οι διφορούμενοι όροι, δηλαδή η χαμηλή θερμοκρασία και η υψηλή πυκνότητα, αντιπροσωπεύονται ως ασαφή σύνολα και οι διάφοροι γλωσσικοί κανόνες αντιπροσωπεύονται ως μαθηματικές σχέσεις μεταξύ αυτών των συνόλων. Η στρατηγική ελέγχου μπορεί στη συνέχεια να κωδικοποιηθεί ως αλγόριθμος ή πρόγραμμα υπολογιστή. Κατά τη λειτουργία του μηχανήματος, οι αισθητήρες μετρούν τις τρέχουσες τιμές των μεταβλητών εισόδου, τη θερμοκρασία και πυκνότητα εικόνας, σε αυτήν την περίπτωση, και ένας υπολογιστής ή ηλεκτρονικό τσιπ καθορίζει στη συνέχεια τις κατάλληλες τιμές των μεταβλητών δράσης, όπως είναι το ηλεκτρικό φορτίο.

Τέλος, να σημειωθεί ότι οι πρακτικές εφαρμογές της ασαφούς λογικής δεν περιορίζονται στη μηχανική και σε συναφείς τομείς. Στην ιατρική, τα έμπειρα συστήματα που χρησιμοποιούν ασαφή συμπεράσματα μπορούν να βοηθήσουν τους γιατρούς να διαγνώσουν τον διαβήτη και τον καρκίνο του προστάτη. Η επιστήμη διαχείρισης, η χρηματιστηριακή ανάλυση, η ανάκτηση πληροφοριών, η γλωσσολογία και οι επιστήμες συμπεριφοράς είναι μόνο μερικοί από τους άλλους τομείς όπου οι έννοιες και οι τεχνικές ασαφούς λογικής έχουν χρησιμοποιηθεί επικερδώς. Στα τέλη της δεκαετίας του 1990 έγινε μάρτυρας της ανάπτυξης υβριδικών συστημάτων, τα οποία συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα δύο ή περισσότερων τεχνικών υπολογιστών. Τα λεγόμενα νευρο-ασαφή συστήματα ενσωματώνουν ασαφή λογική και τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, επιτρέποντας μια συγκεκριμένη μορφή μάθησης. Συστήματα με νευρο-ασαφή στοιχεία μπορούν να βρεθούν σε πεδία όπως η πρόβλεψη χρηματιστηρίου, τα ευφυή συστήματα πληροφοριών και η εξόρυξη δεδομένων (όπως για βάση δεδομένων).

Κεφάλαιο 4^{O}

4.1 Ορισμός της μαθηματικής απόδειξης

Η μαθηματική απόδειξη βρίσκεται στα θεμέλια των μαθηματικών, αλλά υπάρχουν αρκετές έννοιες για το τι είναι ή τι μπορεί να είναι η μαθηματική απόδειξη. Στην πραγματικότητα, η ιδέα της μαθηματικής απόδειξης συνεχίζει να εξελίσσεται. Σε αυτή την εργασία, θα εξετάσουμε το σύνολο της βιβλιογραφίας που υποστηρίζει ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο ευρέως διαδεδομένες έννοιες της απόδειξης και ότι τα πρότυπα της απόδειξης διαπραγματεύονται και συμφωνούνται από τα μέλη των μαθηματικών κοινοτήτων. Η επίσημη άποψη της απόδειξης έρχεται σε αντίθεση με την άποψη των αποδείξεων ως επιχειρήματα που προορίζονται να πείσουν τον αναγνώστη. Αυτές οι απόψεις εξετάζονται στο πλαίσιο των διαφόρων ρόλων απόδειξης. Συζητούνται οι αντιλήψεις της απόδειξης που έχουν οι μαθητές και οι κοινότητες των μαθητών, καθώς και η παιδαγωγική των εισαγωγικών μαθημάτων δοκιμιακής συγγραφής.

Τι είναι όμως η μαθηματική απόδειξη; Αυτό το ερώτημα, και οι παραλλαγές του, έχουν συζητηθεί εδώ και αρκετό καιρό και έχουν προταθεί πολλές απαντήσεις. Μια παραλλαγή αυτής της ερώτησης είναι ο τίτλος αυτού του άρθρου: "Τι εννοούμε με τον όρο μαθηματική απόδειξη;" Εδώ μπορεί να αντιπροσωπεύουμε τη διεθνή κοινότητα των μαθηματικών, μια τάξη μαθητών, την ανθρώπινη φυλή στο σύνολό της ή οποιονδήποτε αριθμό άλλων μαθηματικών κοινοτήτων. Όταν η ερώτηση διατυπώνεται με αυτόν τον τρόπο, γίνεται σαφές ότι οποιαδήποτε απάντηση σε αυτήν την ερώτηση πρέπει, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, να λαμβάνει υπόψη το γεγονός ότι τα μαθηματικά και η μαθηματική απόδειξη είναι προσπάθειες που αναλαμβάνονται από ανθρώπους, είτε μεμονωμένα είτε από κοινού.

Η απόδειξη είναι θεμελιώδης για τα μαθηματικά. δεν ξέρουμε αν μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής μέχρι να την αποδείξουμε ή να την διαψεύσουμε. Επομένως, το ερώτημα "Τι εννοούμε με τον όρο μαθηματική απόδειξη;" δεν είναι αδρανές. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα που δόθηκε από την παγκόσμια κοινότητα των μαθηματικών, των εκπαιδευτικών, των φιλοσόφων και άλλων που ενδιαφέρονται για τα μαθηματικά συνεχίζει να υφίσταται διαπραγμάτευση και να εξελίσσεται. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαδεδομένες έννοιες της απόδειξης σε αυτή την κοινότητα. Ας πάρουμε, ως σημείο εκκίνησης, την περιγραφή της απόδειξης που έδωσε ο Gian Carlo Rota: Όλοι γνωρίζουν τι είναι μαθηματική απόδειξη. Μια απόδειξη ενός μαθηματικού θεωρήματος είναι μια ακολουθία βημάτων που οδηγεί στο επιθυμητό συμπέρασμα. Οι κανόνες που πρέπει να ακολουθούνται από μια τέτοια ακολουθία βημάτων έγιναν σαφείς όταν η λογική επισημοποιήθηκε στις αρχές αυτού του αιώνα και δεν έχουν αλλάξει έκτοτε. Όπως δείχνει η αρχική πρόταση του Rota, αυτό είναι που οι περισσότεροι μαθηματικοί πιστεύουν ότι επιτυγχάνουν οι αποδείξεις τους. Αυτή η έννοια θα μπορούσε να ονομαστεί η επίσημη έννοια της απόδειξης. Ωστόσο, όπως ο Ρότα επισημαίνει αργότερα ότι αυτή η περιγραφή δεν είναι ρεαλιστική στην περιγραφή των αποδείξεων που στην πραγματικότητα, όπως γράφουν οι περισσότεροι μαθηματικοί.

Αυτή η επίσημη αντίληψη της απόδειξης, ή κάτι παρόμοιο με αυτήν, είχε ορισμένους μαθηματικούς στις αρχές του 20ού αιώνα. Τρεις σχολές σκέψης προσπάθησαν να θεμελιώσουν τα θεμέλια των μαθηματικών εκείνη την εποχή, από αυτές, ίσως η πιο γνωστή είναι η φορμαλιστική σχολή του Ντέιβιντ Χίλμπερτ. Οι φορμαλιστές προσπάθησαν να δείξουν ότι οι τομείς των μαθηματικών είναι απαλλαγμένοι από αντιφάσεις γράφοντας τις δηλώσεις τους σε μια επίσημη γλώσσα και αποδεικνύοντας τις, χρησιμοποιώντας επίσημους κανόνες συμπερασμάτων. Για τους φορμαλιστές, το νόημα μιας μαθηματικής πρότασης ήταν άσχετο, οι αποδείξεις βασίζονταν αποκλειστικά σε συντακτικά κατασκευάσματα και χειρισμούς. Ο αρχικός στόχος της φορμαλιστικής σχολής τελικά απέτυχε το 1931, όταν η δημοσίευση των θεωρημάτων ατέλειας του Godel έδειξε ότι κανένα επίσημο σύστημα που περιλαμβάνει έστω και απλή αριθμητική δεν μπορεί να είναι πλήρες και απαλλαγμένο από αντιφάσεις. Για τη σχολή των φορμαλιστών Χίλμπερτ, ο ρόλος της απόδειξης ήταν να δείξει ότι ένα συγκεκριμένο μέρος των μαθηματικών ήταν απαλλαγμένο από αντιφάσεις, και έτσι να επικυρώσει τα θεωρήματα αυτού του κλάδου των μαθηματικών. Πράγματι, σήμερα ο πιο ορατός ρόλος της απόδειξης είναι η επαλήθευση της αλήθειας των δημοσιευμένων θεωρημάτων. Μια σημερινή εκδοχή του φορμαλισμού μπορεί να φανεί σε ένα τρέχον έργο για τη χρήση υπολογιστών και εξειδικευμένων γλωσσών για την ολοκλήρωση τυπικών αποδείξεων μεγάλων μαθηματικών θεωρημάτων. Ο Hales τοποθετεί τέτοιες επίσημες αποδείξεις στο πλαίσιο ενός μεγαλύτερου έργου για την αυτοματοποίηση της επίσημης απόδειξης των θεωρημάτων.

Αυτή η επίσημη έννοια της απόδειξης έχει ορισμένους σημαντικούς περιορισμούς. Σε όλες εκτός από τις πιο ασήμαντες περιπτώσεις, μια καθαρά επίσημη απόδειξη είναι, ή θα ήταν αν καταγραφόταν, πολύ μεγάλη για να έχει οποιοδήποτε ενδιαφέρον ή αξία. Μια αναφορά σημειώνει ότι μια καθαρά επίσημη απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος, ξεκινώντας από τα αξιώματα της γεωμετρίας του Hilbert, ήταν σχεδόν 80 σελίδες. Ένα ακόμη πιο ακραίο παράδειγμα αναφέρεται από τον Hales: για να επεκταθεί πλήρως ο ορισμός του αριθμού «1», από την άποψη των πρωτόγονων της Θεωρίας των Συνόλων, θα απαιτούσε πάνω από τέσσερα τρισεκατομμύρια σύμβολα! Κατ' αρχήν, η απόδειξη οποιουδήποτε θεωρήματος μπορεί να γραφτεί με τόσο επίσημο τρόπο, αλλά τέτοιες επισημοποιήσεις αποδείξεων είναι σχεδόν πάντα πολύ μακροσκελείς για να έχουν αξία για τους αναγνώστες. Επομένως, αυτή η καθαρά τυπική έννοια της απόδειξης δεν αντανακλά την πρακτική των μαθηματικών. Οι αυτοματοποιημένες αποδείξεις που περιγράφονται από τον Hales θα μπορούσαν, πράγματι, να είναι σε θέση να αποδείξουν θεωρήματα που δεν είχαν αποδειχθεί προηγουμένως, αλλά ο Auslander αμφισβητεί αν θα ήμασταν ικανοποιημένοι με μια τέτοια απόδειξη, που δεν θα μπορούσε να διαβαστεί ή να γίνει κατανοητή από έναν άνθρωπο μαθηματικό.

Αυτές οι καθαρά τυπικές αποδείξεις αντιπροσωπεύουν μια ακραία εκδοχή της επίσημης έννοιας της απόδειξης. Συχνότερα, η έννοια των τυπικών αποδείξεων επιτρέπει τη συμπύκνωση των αποδείξεων χρησιμοποιώντας προηγουμένως αποδεδειγμένα θεωρήματα ή λήμματα. Ωστόσο, η επίσημη έννοια της απόδειξης είναι η κατανόηση ότι οι αποδείξεις μπορούν να διαβαστούν, να κατανοηθούν και να ελεγχθούν εξ ολοκλήρου μέσα στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος και επίσημων κανόνων λογικής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μερικοί ερευνητές έχουν κάνει μια διάκριση μεταξύ επιχειρήματος και απόδειξης. Ο Douek αναφέρει ότι ο Duval υποστηρίζει ότι αυτά είναι πολύ διαφορετικά, παρόλο που έχουν παρόμοιες γλωσσικές μορφές. Ωστόσο, ο Doeuk υποστηρίζει ότι η επιχειρηματολογία και η απόδειξη έχουν πολλές κοινές πτυχές και ότι η επιχειρηματολογία είναι συχνά χρήσιμη στη διαδικασία της απόδειξης. Ο Pedemonte θεωρεί ότι η απόδειξη είναι μια εξειδικευμένη μορφή επιχειρηματολογίας και περαιτέρω υποστηρίζει ότι υπάρχουν στοιχεία γνωστικής ενότητας μεταξύ της επιχειρηματολογίας που χρησιμοποιείται στην κατασκευή μιας εικασίας και της κατασκευής μιας απόδειξης της ίδιας εικασίας. Η επιχειρηματολογία, ωστόσο, μπορεί να μην σημαίνει το ίδιο πράγμα για όλους: η επιχειρηματολογία ενός μαθηματικού μπορεί να είναι αρκετά σημασιολογική, ενώ η επιχειρηματολογία ενός άλλου μπορεί να είναι πιο συντακτική.

Έχοντας ορίσει παραπάνω λεπτομερώς την έννοια της μαθηματικής απόδειξης, μπορούμε να τη διαχωρίσουμε από την αφηρηματική συλλογιστική. Η λογική είναι μια διαδικασία κατασκευής επιχειρημάτων με προσεκτική εξαγωγή. Μπορούμε να προσπαθήσουμε να το κάνουμε αυτό στην κανονική ζωή με διαφορετικά αποτελέσματα, επειδή τα πράγματα στην κανονική ζωή είναι λογικά σε διαφορετικούς βαθμούς. Θα υποστήριζα ότι τίποτα στην κανονική ζωή δεν είναι πραγματικά απόλυτα λογικό.

Για να μελετήσουμε λοιπόν οτιδήποτε λογικά πρέπει να ξεχάσουμε τις ενοχλητικές λεπτομέρειες που εμποδίζουν τα πράγματα να συμπεριφέρονται λογικά. Στην περίπτωση του παιδιού και των μπισκότων, αν τους επιτραπεί να φάνε τα μπισκότα, τότε η κατάσταση δεν θα συμπεριφερθεί απόλυτα λογικά. Επομένως, επιβάλλουμε τον όρο ότι δεν επιτρέπεται να τρώνε τα μπισκότα, οπότε αυτά τα αντικείμενα μπορεί επίσης να μην είναι μπισκότα, αλλά οτιδήποτε μη βρώσιμο, αρκεί να χωριστεί σε ξεχωριστά κομμάτια. Αυτά είναι απλώς «πράγματα», χωρίς διακριτά χαρακτηριστικά. Αυτός είναι ο αριθμός 1: είναι η ιδέα ενός ξεκάθαρα διακριτού «πράγματος».

Οι μαθηματικές αποδείξεις είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερες και πιο περίπλοκες από τα τυπικά επιχειρήματα στην κανονική ζωή. Ένα από τα προβλήματα με τα επιχειρήματα στην κανονική ζωή είναι ότι συχνά συμβαίνουν σχετικά γρήγορα και δεν υπάρχει χρόνος για να δημιουργήσετε μια σύνθετη επιχειρηματολογία. Ακόμα κι αν υπήρχε χρόνος, η διάρκεια της προσοχής έχει γίνει εμφανώς μικρή. Εάν δεν φτάσετε στο σημείο σε μια σημαντική αποκάλυψη, είναι πιθανό ότι πολλοί άνθρωποι δεν θα ακολουθήσουν.

Το πλεονέκτημα της μετάβασης στον αφηρημένο κόσμο είναι ότι βρισκόμαστε τώρα σε ένα μέρος όπου όλα συμπεριφέρονται λογικά. Αν προσθέσω επανειλημμένα ένα και ένα κάτω από ακριβώς τις ίδιες συνθήκες στον αφηρημένο κόσμο, θα παίρνω πάντα 2. Μπορώ να αλλάξω τις συνθήκες και να πάρω την απάντηση ως κάτι άλλο, αλλά μετά θα έχω πάντα την ίδια απάντηση με αυτές επίσης νέες συνθήκες.

4.2. Ιστορική αναδρομή της αποδεικτικής διαδικασίας

Η παράδοση των μαθηματικών είναι μακρά και ένδοξη. Μαζί με τη φιλοσοφία, είναι ο αρχαιότερος χώρος ανθρώπινης διανοητικής έρευνας. Είναι στη φύση της ανθρώπινης κατάστασης να θέλουμε να κατανοήσουμε τον κόσμο γύρω μας και τα μαθηματικά είναι ένα φυσικό όχημα για να το κάνουμε αυτό. Τα μαθηματικά είναι επίσης ένα μάθημα που είναι όμορφο και αξίζει από μόνο του. Μια επιστημονική ενασχόληση που είχε εγγενή αξία και αισθητική έλξη, τα μαθηματικά σίγουρα αξίζει να μελετηθούν για χάρη τους. Στις πρώτες τους μέρες, τα μαθηματικά συχνά συνδέονταν με πρακτικές ερωτήσεις. Οι Αιγύπτιοι, όπως και οι Έλληνες, ασχολούνταν με την τοπογραφία της γης. Έτσι ήταν φυσικό να εξεταστούν ερωτήματα γεωμετρίας και τριγωνομετρίας. Σίγουρα τα τρίγωνα και τα ορθογώνια εμφανίστηκαν με φυσικό τρόπο σε αυτό το πλαίσιο, έτσι η πρώιμη γεωμετρία επικεντρώθηκε σε αυτές τις κατασκευές. Και οι κύκλοι, επίσης, ήταν φυσικό να ληφθούν υπόψη, για το σχεδιασμό δεξαμενών νερού και άλλα πρακτικά έργα. Έτσι, η αρχαία γεωμετρία, και τα αξιώματα του Ευκλείδη για τη γεωμετρία ασχολήθηκαν με τους κύκλους.

Στην πραγματικότητα, η ιστορία της έννοιας της απόδειξης είναι μάλλον περίεργη. Δεν είναι σαφές πότε ακριβώς οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι συνέλαβαν την ιδέα ότι οι μαθηματικοί ισχυρισμοί απαιτούσαν αιτιολόγηση. Αυτή ήταν μια αρκετά νέα ιδέα. Τότε ήταν άλλο ένα σημαντικό άλμα να επινοηθούν μέθοδοι για την κατασκευή μιας τέτοιας αιτιολόγησης. Οι Βαβυλώνιοι μαζί με τους Κινέζους φαίνεται να γνώριζαν το Πυθαγόρειο θεώρημα πολύ πριν από τον Πυθαγόρα. Οι Βαβυλώνιοι είχαν ορισμένα διαγράμματα που υποδεικνύουν γιατί το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι αληθινό, γνώριζαν δηλαδή τον κανόνα του Πυθαγορείου και έχουν βρεθεί πινακίδες για να επικυρώσουν αυτό το γεγονός χωρίς όμως να το έχουν αποδείξει.

Ο Πυθαγόρας (569–500 π.Χ.) ήταν ταυτόχρονα άτομο και κοινωνία, δηλαδή οι Πυθαγόρειοι. Ήταν επίσης πολιτικό πρόσωπο και μυστικιστής, ξεχωριστός στην εποχή του, μεταξύ άλλων λόγων, γιατί στις δραστηριότητές του συμμετείχαν ισότιμα γυναίκες. Ένας κριτικός χαρακτήρισε τον άνδρα ως «το ένα δέκατο από αυτόν ιδιοφυΐα, τα εννέα δέκατα σκέτη φοντάν». Ο Πυθαγόρας πέθανε, σύμφωνα με το μύθο, στις φλόγες του δικού του σχολείου που πυρπολούσαν πολιτικοί και θρησκευτικοί μεγαλομανείς που ξεσήκωσαν τις μάζες για να διαμαρτυρηθούν ενάντια στον διαφωτισμό που προσπαθούσε να τους φέρει ο Πυθαγόρας.

Να σημειωθεί ότι ο Πυθαγόρας έζησε πριν από τον Ευκλείδη άρα οι συνεισφορές του θα πρέπει να θεωρηθούν ότι τροφοδοτούν τη δημιουργία του Ευκλείδη. Οι Πυθαγόρειοι μνημονεύονται για δύο αξιοσημείωτες συνεισφορές στα μαθηματικά. Το πρώτο από αυτά καθόριζε τη σημασία και την αναγκαιότητα των αποδείξεων στα μαθηματικά: ότι οι μαθηματικές προτάσεις, ειδικά οι γεωμετρικές προτάσεις, πρέπει να επαληθεύονται μέσω αυστηρής απόδειξης. Πριν από τον Πυθαγόρα, οι ιδέες της γεωμετρίας ήταν γενικά εμπειρικοί κανόνες που προέρχονταν εμπειρικά, απλώς από παρατήρηση και μέτρηση. Ο Πυθαγόρας εισήγαγε επίσης την ιδέα ότι ένα μεγάλο σώμα μαθηματικών, όπως η γεωμετρία θα μπορούσε να προέλθει από έναν μικρό αριθμό αξιωμάτων. Η δεύτερη μεγάλη συμβολή ήταν η ανακάλυψη και η απόδειξη του γεγονότος ότι δεν είναι όλοι οι αριθμοί ανάλογοι. Πιο συγκεκριμένα, οι Έλληνες πριν από τον Πυθαγόρα πίστευαν με πάθος ότι τα πάντα χτίστηκαν πάνω στους ακέραιους αριθμούς.

Ο Εύδοξος (408–355) που ξεκίνησε τη μεγάλη παράδοση της οργάνωσης των μαθηματικών σε θεωρήματα. Ο Εύδοξος ήταν ένας από τους πρώτους που χρησιμοποίησε τη λέξη θεώρημα στο πλαίσιο των μαθηματικών. Στην πραγματικότητα ο Εύδοξος ήταν άνθρωπος με πολλά ενδιαφέροντα και πολλά ταλέντα. Ήξερε πολλά για την αστρονομία και τη θεωρία αριθμών. Ανέπτυξε τη θεωρία των αναλογιών και βασίστηκε στις ιδέες του Πυθαγόρα για να επινοήσει μεθόδους σύγκρισης παράλογων αριθμών. Αυτό με τη σειρά του του έδωσε τη δυνατότητα να αναπτύξει τη μέθοδο εξαντλησής του, η οποία είναι πρόδρομος της σύγχρονης θεωρίας ολοκλήρωσης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων.

Ο Ευκλείδης (325–265) χαρακτηρίζεται ως ο πρώτος λόγιος που οργάνωσε συστηματικά τα μαθηματικά, δηλαδή ένα σημαντικό μέρος των μαθηματικών που προηγήθηκαν, διατύπωσε ορισμούς και αξιώματα και απέδειξε θεωρήματα. Αυτό ήταν ένα μνημειώδες επίτευγμα και εξαιρετικά πρωτότυπο. Παρόλο που ο Ευκλείδης δεν είναι τόσο γνωστός, όπως ο Αρχιμήδης και ο Πυθαγόρας, για τις πρωτότυπες και βαθιές μαθηματικές του γνώσεις, και παρόλο που δεν υπάρχουν πολλά θεωρήματα που ονομάζονται από τον Ευκλείδη, είχε μια αποφασιστική επίδραση στην ανθρώπινη σκέψη. Σε τελική ανάλυση, ο Ευκλείδης έγραψε μια πραγματεία με δεκατρία Βιβλία, η οποία είναι συνεχώς διαθέσιμη για περισσότερα από 2000 χρόνια και έχει περάσει από μεγάλο αριθμό εκδόσεων. Εξακολουθεί να μελετάται λεπτομερώς σήμερα, και να έχει ουσιαστική επιρροή στον τρόπο που σκεφτόμαστε τα μαθηματικά.

Η περίοδος του Μεσαίωνα ονομαζόταν επίσης Σκοτεινός Χρόνος, και όχι χωρίς λόγο. Αυτή ήταν μια μακρά περίοδος, πάνω από 1000 χρόνια, πνευματικής στασιμότητας. Είναι αλήθεια ότι οι Άραβες ανέπτυξαν μερικές από τις θεμελιώδεις ιδέες τους στην άλγεβρα κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Κάποιοι άλλοι πολιτισμοί, συμπεριλαμβανομένων των Αφρικανών και των Ίνκας και των Κινέζων, σημείωσαν κάποια μαθηματική πρόοδο κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Αλλά πολύ λίγα έγιναν για να αναπτυχθεί η ιδέα της μαθηματικής απόδειξης. Αυτή είναι μια πολύ περίπλοκη έννοια, μια από τις κορυφές της ανθρώπινης σκέψης. Και περίμενε μια γόνιμη περίοδο στην Ευρώπη για να δει τα επόμενα σημαντικά βήματα στην ανάπτυξη.

Μια γόνιμη εποχή, ήταν ο δέκατος ένατος αιώνας, για τα ευρωπαϊκά μαθηματικά και η επικοινωνία μεταξύ των μαθηματικών βρισκόταν στο υψηλότερο σημείο όλων των εποχών. Υπήρχαν πολλά εξέχοντα μαθηματικά περιοδικά και η σημαντική δουλειά διαδόθηκε ευρέως. Τα πολλά σπουδαία πανεπιστήμια στην Ιταλία, τη Γαλλία, τη Γερμανία και την Αγγλία είχαν έντονα προγράμματα μαθηματικών και πολλούς φοιτητές. Αυτή ήταν μια εποχή που τέθηκαν οι βάσεις για τα σύγχρονα μαθηματικά. Και σίγουρα οι σπόροι του αυστηρού λόγου σπέρνονταν αυτή τη στιγμή. Η γλώσσα, η ορολογία και η σημειογραφία των μαθηματικών δεν ήταν ακόμη καθολική, οι ορισμοί δεν ήταν καλά καθιερωμένοι και ακόμη και οι μέθοδοι απόδειξης ήταν υπό ανάπτυξη. Αλλά η βασική μεθοδολογία υπήρχε και τα μαθηματικά εκείνης της εποχής ταξίδεψαν αρκετά καλά μεταξύ των χωρών και στον εικοστό αιώνα και μετά. Ο Μπουρμπάκι και ο Χίλμπερτ έδωσαν τον τόνο για τα αυστηρά μαθηματικά στον εικοστό αιώνα. Αλλά το έργο πολλών μεγαλοφυιών του δέκατου ένατου αιώνα άνοιξε το δρόμο για αυτούς τους πρωτοπόρους.

4.3 Αξιωματική Θεμελίωση

Τα θεμέλια των μαθηματικών περιλαμβάνουν την αξιωματική μέθοδο. Αυτό σημαίνει ότι στα μαθηματικά, καταγράφει κανείς αξιώματα και αποδεικνύει θεωρήματα από τα αξιώματα. Τα αξιώματα ή το αξίωμα ορίζεται ως μια πρόταση που γίνεται αποδεκτή ως αληθής και σωστή, που ονομάζεται θεώρημα στα μαθηματικά. Τα αξιώματα παρουσιάζονται ως αυτονόητα στα οποία μπορεί να βασιστούν οποιαδήποτε επιχειρήματα ή συμπεράσματα. Αυτά είναι κοινώς αποδεκτά και γενική αλήθεια. Το 0 είναι ένας φυσικός αριθμός, είναι ένα παράδειγμα αξιώματος. Τι είναι το αξίωμα, η θεωρία και μια εικασία; Η αιτιολόγηση για τα αξιώματα, γιατί είναι ενδιαφέροντα, ή αληθινά υπό κάποια έννοια ή αξίζει να μελετηθούν, είναι μέρος του κινήτρου ή της φυσικής ή της φιλοσοφίας, όχι μέρος των μαθηματικών. Τα ίδια τα μαθηματικά αποτελούνται από λογικές συναγωγές από τα αξιώματα. Ακολουθούν τρία παραδείγματα της αξιωματικής μεθόδου με σκοπό να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια.

- <u>Παράδειγμα 1:</u> Γεωμετρία. Η χρήση της γεωμετρίας στη μέτρηση, την κατασκευή αλλά και άλλους τομείς είναι προϊστορική, και πιθανώς εξελίχθηκε ανεξάρτητα σε διάφορους πολιτισμούς. Η αξιωματική ανάπτυξη αναπτύχθηκε για πρώτη φορά από τους αρχαίους Έλληνες από το 500 έως το 300 π.Χ., και περιγράφηκε λεπτομερώς από τον Ευκλείδη γύρω στο 300 π.Χ. Στα Στοιχεία του, απαρίθμησε αξιώματα και εξήγαγε θεωρήματα από τα αξιώματα. Δεν θα απαριθμήσουμε όλα τα αξιώματα της γεωμετρίας, γιατί είναι αρκετά περίπλοκα. Ωστόσο, ένα τέτοιο αξίωμα είναι ότι οποιαδήποτε δύο διακριτά σημεία καθορίζουν μια μοναδική γραμμή. Πρόκειται για δηλώσεις πίστης δηλαδή, είναι προφανώς αληθινά γεγονότα για τον πραγματικό φυσικό χώρο, από τα οποία μπορεί κανείς στη συνέχεια να αντλήσει άλλα αληθινά αλλά μη προφανή γεγονότα, έτσι ώστε, μελετώντας την Ευκλείδεια γεωμετρία, μελετώντας τη δομή του πραγματικού κόσμου. Το επιδιωκόμενο σύμπαν είναι σταθερό, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως όλα τα γεωμετρικά αντικείμενα στο φυσικό σύμπαν. Φυσικά, ο Πλάτων επεσήμανε ότι τέλειες γραμμές, τρίγωνα κ.λπ. υπάρχουν μόνο σε κάποια αφηρημένη εξιδανίκευση του σύμπαντος, αλλά κανείς δεν αμφέβαλλε ότι τα αποτελέσματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας θα μπορούσαν να εφαρμοστούν με ασφάλεια για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου.

- <u>Παράδειγμα 2:</u> Θεωρία ομάδων. Η ιδέα της ομάδας, όπως εφαρμόζεται στις μεταθέσεις και τις αλγεβρικές εξισώσεις, χρονολογείται γύρω στο 1800. Η αξιωματική αντιμετώπιση συνήθως αποδίδεται στον Cayley (1854). Πρόκειται για οριστικά αξιώματα. Οι ομάδες εμφανίζονται φυσικά σε πολλούς τομείς των μαθηματικών, επομένως θα μπορούσε κανείς να συμπυκνώσει τις ιδιότητές τους και να αποδείξει θεωρήματα σχετικά με αυτές. Η ομαδική θεωρία είναι η μελέτη των ομάδων γενικά, όχι μιας συγκεκριμένης ομάδας, και ο επιδιωκόμενος τομέας του λόγου είναι η συγκεκριμένη ομάδα υπό συζήτηση. Αυτή η άποψη του Παραδείγματος 2 δεν έχει αλλάξει ποτέ από τότε που μελετήθηκε για πρώτη φορά το θέμα, αλλά η άποψή μας για τη γεωμετρία έχει εξελιχθεί. Πρώτα απ 'όλα, όπως τόνισε ο Αϊνστάιν, τα ευκλείδεια αξιώματα είναι ψευδή στον πραγματικό φυσικό χώρο και θα δώσουν εσφαλμένα αποτελέσματα όταν εφαρμοστούν σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Επιπλέον, οι περισσότερες σύγχρονες χρήσεις της γεωμετρίας δεν είναι αξιωματικές. Ορίζουμε τον τρισδιάστατο χώρο ως R^3 και συζητάμε διάφορες μετρικές σε αυτόν, συμπεριλαμβανομένης της Ευκλείδειας μετρικής, η οποία αντιστοιχεί περίπου, αλλά όχι ακριβώς, στην πραγματικότητα. Έτσι, στη σύγχρονη άποψη, η γεωμετρία είναι η μελέτη των γεωμετριών, όχι μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας, και τα ευκλείδεια αξιώματα έχουν υποβαθμιστεί σε απλά αξιώματα ορισμού ένας τρόπος περιγραφής μιας συγκεκριμένης γεωμετρίας.
- <u>Παράδειγμα 3:</u> Θεωρία Συνόλων. Για τα άπειρα σύνολα, η βασική εργασία έγινε από τον Cantor στις δεκαετίες του 1880 και του 1890, αν και η ιδέα των συνόλων, ειδικά των πεπερασμένων, εμφανίστηκε πολύ νωρίτερα. Ο Cantor εργάστηκε απλώς αφελώς, όχι αξιωματικά, αν και γνώριζε ότι η αφελής συλλογιστική μπορούσε να οδηγήσει σε αντιφάσεις. Η πρώτη αξιωματική προσέγγιση οφειλόταν στον Zermelo και βελτιώθηκε αργότερα από τους Fraenkel και von Neumann, οδηγώντας στο σημερινό σύστημα ZFC, το οποίο θεωρείται πλέον ως τα «τυποποιημένα» αξιώματα για τη θεωρία συνόλων. Μια φιλοσοφική παρατήρηση: Στη θεωρία μοντέλων, κάθε λίστα προτάσεων στην τυπική λογική σχηματίζει τα αξιώματα για κάποια, ίσως μη ενδιαφέρουσα, αξιωματική θεωρία, αλλά ανεπίσημα, υπάρχουν δύο διαφορετικές χρήσεις της λέξης «αξιώματα»: ως «δηλώσεις πίστης» και ως

«οριστικά αξιώματα». Η πρώτη χρήση είναι πιο κοντά στον ορισμό του λεξικού ενός αξιώματος ως «αληθείας» ή «δήλωσης που δεν χρειάζεται απόδειξη επειδή η αλήθεια του είναι προφανής». Η δεύτερη χρήση είναι κοινή στην άλγεβρα, όπου γίνεται λόγος για αξιώματα, για ομάδες, δακτυλίους, πεδία κ.λπ. Το ZFC είναι η θεωρία των πάντων. Τα σύγχρονα μαθηματικά μπορεί να φαίνονται να είναι ένα χάος από διάφορα συστήματα αξιωμάτων: ομάδες, δακτυλίους, πεδία, γεωμετρίες, διανυσματικά κενά, τότε από αυτά τα αξιώματα, δεν υπάρχουν περαιτέρω υποθέσεις. κάνουμε απλώς ορισμούς και αποδεικνύουμε θεωρήματα. Δουλεύοντας στο ZFC , λέμε ότι μια ομάδα είναι ένα σύνολο G μαζί με ένα προϊόν σε αυτό που ικανοποιεί τα γ1, γ2. Η λειτουργία προϊόντος είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση δύο μεταβλητών που ορίζονται στο G, αλλά μια συνάρτηση είναι επίσης ένα ειδικό είδος συνόλου δηλαδή, ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Οι πραγματικοί αριθμοί σχηματίζουν το συγκεκριμένο σύνολο R, που κατασκευάστηκε μέσα στο ZFC με μια διαδικασία θεωρητικής συνόλων την οποία θα περιγράψουμε αργότερα. Μελετάμε πρώτα τη θεωρία συνόλων γιατί είναι το θεμέλιο των πάντων. Επίσης, η συζήτηση θα παράγει ορισμένα τεχνικά αποτελέσματα σχετικά με άπειρες καρδιναλιότητες που είναι χρήσιμες σε μια σειρά από πιο αφηρημένες περιοχές των μαθηματικών. Συγκεκριμένα, αυτά τα αποτελέσματα χρειάζονται για τη θεωρία μοντέλων και είναι επίσης σημαντικά στην ανάλυση και την τοπολογία και την άλγεβρα.

Στα Μαθηματικά, μια δήλωση είναι κάτι που μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής για όλους. Για παράδειγμα, η μάζα της Γης είναι μεγαλύτερη από τη Σελήνη ή ο ήλιος ανατέλλει στην Ανατολή. Με άλλα λόγια, εάν μια πρόταση έχει την ίδια σημασία παντού και μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής, είναι μια Μαθηματική πρόταση. Μια δήλωση είναι μια μη μαθηματική πρόταση εάν δεν έχει σταθερό νόημα, ή με άλλα λόγια, είναι μια διφορούμενη πρόταση. Για παράδειγμα, «Οι υπολογιστές είναι καλοί και εύκολοι». Η δήλωση είναι μια άποψη και θα έχει διαφορετική σημασία για διαφορετικούς ανθρώπους, επομένως η σημασία της είναι διφορούμενη. Ως άλλο παράδειγμα, μια δήλωση όπως "κλείστε την πόρτα" δεν είναι επίσης μια μαθηματική πρόταση. Δεν έχει αληθή ή ψευδή τιμή. Επομένως δεν είναι Μαθηματική Δήλωση.

4.3.1 Κλασσική Αξιωματική Θεμελίωση

Οι τυπικές θεωρίες παίζουν κρίσιμο ρόλο στα μαθηματικά και ορίστηκαν ιστορικά για την κλασική κατηγώρηση, λογική πρώτης τάξης και κατά συνέπεια για άλλες λογικές πρώτης και ανώτερης τάξης, κλασικές και μη. Η ιδέα του φορμαλισμού στα μαθηματικά, η οποία κατέληξε στην έννοια των τυπικών θεωριών, ή επισημοποιημένες θεωρίες, όπως ονομάζονται επίσης. Η ιδέα τους αναπτύχθηκε σε σχέση με το Πρόγραμμα Hilbert. Ένα από τα κύρια αντικείμενα του προγράμματος ήταν η κατασκευή μιας τυπικής θεωρίας που θα κάλυπτε όλα τα μαθηματικά και να αποδείξει τη συνοχή της χρησιμοποιώντας τα απλούστερα λογικά μέσα. Αυτό το μέρος του προγράμματος ονομάστηκε Πρόγραμμα Συνέπειας, όπου μια επίσημη θεωρία λέγεται ότι είναι συνεπής εάν δεν μπορεί να υπάρξει επίσημη απόδειξη σε αυτήν τη θεωρία για έναν τύπο Α και ταυτόχρονα για την άρνησή του Α.

Εικόνα 4: Το άγαλμα με τον Ευκλείδη από το Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης, στο Μουσείο Φυσικής Ιστορίας. Πηγή: https://eranistis.net/wordpress/wp-content/uploads/2013/05/EuclidStatueOxford.jpg

Το 1930, ενώ ήταν ακόμη στα είκοσί του ο Kurt Godel έκανε μια ιστορική ανακοίνωση: το πρόγραμμα συνοχής Hilbert δεν μπορούσε να πραγματοποιηθεί. Δικαιολόγησε τον ισχυρισμό του αποδεικνύοντας το Θεώρημα ασυνέπειας του, που ονομάζεται επίσης Δεύτερο Θεώρημα Μη Πληρότητας. Σε γενικές γραμμές, το θεώρημα δηλώνει ότι μια απόδειξη της συνέπειας κάθε τυπικής θεωρίας που περιέχει αριθμητική φυσικών αριθμών μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο σε μαθηματική θεωρία που είναι πιο ολοκληρωμένη από εκείνη της οποίας η συνέπεια πρέπει να αποδειχθεί. Συγκεκριμένα, μια απόδειξη της συνέπειας της τυπικής αριθμητικής μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο στη μαθηματική θεωρία που περιέχει ολόκληρη την αριθμητική και επίσης άλλα θεωρήματα που δεν ανήκουν στην αριθμητική. Εφαρμόζεται σε μια τυπική θεωρία που θα κάλυπτε όλα τα μαθηματικά γιατί προφανώς θα περιείχε την αριθμητική των φυσικών αριθμών. Ως εκ τούτου, το πρόγραμμα συνοχής Hilbert αποτυγχάνει. Το αποτέλεσμα του μοντέλου σχετικά με τις αποδείξεις της συνέπειας των τυπικών θεωριών, οι μαθηματικές θεωρίες είχαν καθοριστικό αντίκτυπο στην έρευνα για τις ιδιότητες των τυπικών θεωριών. Αντί να αναζητούν άμεσες αποδείξεις ασυνέπειας των μαθηματικών θεωριών, οι μαθηματικοί επικεντρώθηκαν σε μεγάλο βαθμό σε σχετικές αποδείξεις που αποδεικνύουν ότι μια θεωρία που εξετάζεται είναι συνεπής εάν μια συγκεκριμένη άλλη θεωρία, για παράδειγμα μια τυπική θεωρία φυσικών αριθμών είναι συνεπής. Όλες αυτές οι αποδείξεις έχουν τις ρίζες τους σε μια βαθιά πεποίθηση, παρόλο που δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι η θεωρία των φυσικών αριθμών είναι απαλλαγμένη από ασυνέπειες. Αυτή η πεποίθηση επιβεβαιώνεται από αιώνες ανάπτυξης των μαθηματικών και εμπειρίες μαθηματικών. Μια τυπική θεωρία ονομάζεται πλήρης εάν για κάθε πρόταση της γλώσσας αυτής της θεωρίας υπάρχει επίσημη απόδειξη της ή της άρνησής της. Μια τυπική θεωρία που δεν έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται ελλιπής.

Ως εκ τούτου, μια τυπική θεωρία είναι ελλιπής εάν υπάρχει μια πρόταση A της γλώσσας αυτής της θεωρίας, έτσι ώστε ούτε το A ούτε το ¬A να μπορούν να αποδειχθούν σε αυτήν. Τέτοιες προτάσεις ονομάζονται αναποφάσιστες στην εν λόγω θεωρία ή ανεξάρτητες από τη θεωρία. Μπορεί να φαίνεται ότι κάποιος θα πρέπει να είναι σε θέση να επισημοποιήσει μια θεωρία όπως η τυπική θεωρία των φυσικών αριθμών είναι ένας τρόπος να την καταστήσουμε ολοκληρωμένη, δηλαδή απαλλαγμένη από αναποφασίσιμες προτάσεις. Αλλά δεν ισχύει εν όψει του Θεωρήματος μη πληρότητας Godel. Δηλώνει ότι κάθε συνεπής τυπική θεωρία που περιέχει την αριθμητική των φυσικών αριθμών είναι ατελής. Το θεώρημα της ασυνέπειας ακολουθεί από αυτό. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο τα Θεωρήματα Μη Πληρότητας και ασυνέπειας ονομάζονται πλέον Godel First Incompleteness Theorem. Το τρίτο μέρος του Προγράμματος Hilbert έθεσε και ασχολήθηκε με το πρόβλημα της αποφασιστικότητας των τυπικών μαθηματικών θεωριών. Μια τυπική θεωρία ονομάζεται αποφασιζόμενη εάν υπάρχει μια μέθοδος προσδιορισμού, σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων, εάν οποιοσδήποτε δεδομένος τύπος σε αυτή τη θεωρία είναι το θεώρημά της ή όχι. Εάν μια θεωρία είναι αποφασίσιμη και εάν ο αλγόριθμος απόφασης είναι γνωστός, τότε η μελέτη προβλημάτων που εκφράζονται στη γλώσσα της θεωρίας ανάγεται σε μια καθαρά μηχανική διαδικασία. Στις μη αποφασιστικές θεωρίες δεν υπάρχει μηχανική διαδικασία. Οι περισσότερες μαθηματικές θεωρίες δεν μπορούν να αποφασιστούν. Ο Godel απέδειξε το 1931 ότι η αριθμητική των φυσικών αριθμών δεν μπορεί να προσδιοριστεί.

4.3.2 Τυπική Αξιωματική Θεμελίωση

Η ανακάλυψη μιας μη Ευκλείδειας γεωμετρίας από τους Lobachevskii και Bolyai στις αρχές του 19^{ου} αιώνα υποκίνησαν την περαιτέρω ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου. Έδειξαν ότι εάν το παραδοσιακό, και προφανώς το μόνο «αντικειμενικά αληθινό», 5^{ο} αξίωμα του Ευκλείδη σχετικά με τις παράλληλες γραμμές αντικατασταθεί από την άρνησή του, τότε είναι δυνατό να αναπτυχθεί με έναν καθαρά λογικό τρόπο μια γεωμετρία που είναι εξίσου κομψή και ουσιαστική με την Ευκλείδεια γεωμετρία. Έτσι, η προσοχή των μαθηματικών του 19^{ου} αιώνα τράβηξε τον απαγωγικό τρόπο κατασκευής των μαθηματικών θεωριών. Αυτό με τη σειρά του δημιούργησε ένα νέο πρόβλημα, που συνδέεται με την έννοια της ίδιας της αξιωματικής μεθόδου και με την τυπική μαθηματική θεωρία. Με τον σταδιακά αυξανόμενο αριθμό των μαθηματικών θεωριών που είχαν προκύψει αξιωματικά, μπορεί κανείς, ειδικότερα, να αναφέρει την αξιωματική εξαγωγή της στοιχειώδους γεωμετρίας από τους Pasch και Hilbert, η οποία, σε αντίθεση με τα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι λογικά αδιαμφισβήτητη, και του Peano πρώτη προσπάθεια αξιωματικοποίησης της αριθμητικής, η έννοια ενός τυπικού αξιωματικού συστήματος έγινε πιο αυστηρή, με αποτέλεσμα μια κατηγορία συγκεκριμένων προβλημάτων που τελικά καθιέρωσαν τη θεωρία αποδείξεων ως ένα από τα κύρια κεφάλαια της σύγχρονης μαθηματικής λογικής.

Αναγνωρίστηκε ήδη από τον 19^{ο} αιώνα ότι πρέπει να δημιουργηθούν θεμέλια για τα μαθηματικά και για τα σχετικά μαθηματικά προβλήματα. Ήταν κυρίως κατά την ανάλυση που οι βασικές έννοιες αποδόθηκαν πιο ακριβείς και ότι οι πιο σύνθετες ιδέες περιορίστηκαν σε απλούστερες έννοιες με μεθόδους που περιλάμβαναν όλο και πιο αυστηρό λογικό συλλογισμό. Επίσης, η ανακάλυψη μη Ευκλείδειων γεωμετριών ώθησε την ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου, την ανάπτυξη νέων ιδεών και την τοποθέτηση γενικότερων μαθηματικών προβλημάτων, κυρίως αυτών που συνδέονται με έννοιες μιας αυθαίρετης αξιωματικής θεωρίας, όπως η συνέπεια, η πληρότητα και η ανεξαρτησία. ενός δεδομένου αξιωματικού συστήματος. Τα πρώτα αποτελέσματα προς αυτή την κατεύθυνση προέκυψαν με τη μέθοδο της ερμηνείας. Ωστόσο, το σημαντικό επίτευγμά του είναι το γεγονός ότι χρησίμευσε για να αποκαλύψει ότι η αριθμητική παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο, καθώς είναι μια μαθηματική θεωρία στη συνοχή της οποίας το πρόβλημα της συνέπειας πολλών άλλων θεωριών ανάγεται.

Η μέθοδος του λεγόμενου φορμαλισμού των θεμελίων των μαθηματικών, λόγω του Χίλμπερτ και της σχολής του, ήταν ένα περαιτέρω βήμα (και, κατά μία έννοια, κορύφωση) στην ανάπτυξη της μεθόδου. Κατέστησε την έννοια της αξιωματικής θεωρίας πιο ακριβή εισάγοντας την έννοια του τυπικού συστήματος ως το επόμενο στάδιο στην ανάπτυξη της αξιωματικής μεθόδου. Ως αποτέλεσμα, αποδείχθηκε δυνατό να αντιμετωπιστούν οι ίδιες οι μαθηματικές θεωρίες ως ακριβή μαθηματικά αντικείμενα και να κατασκευαστεί μια γενική θεωρία τέτοιων θεωριών - μια λεγόμενη μετα-θεωρία. Η δυνατότητα επίλυσης όλων των κύριων προβλημάτων στα θεμέλια των μαθηματικών με αυτόν τον τρόπο φαινόταν πολύ ελκυστική και ο ίδιος ο Χίλμπερτ μπήκε στον πειρασμό να ακολουθήσει αυτό το μονοπάτι. Η κύρια ιδέα σε αυτή την προσέγγιση ήταν αυτή του επίσημου συστήματος. Οποιοδήποτε τυπικό σύστημα κατασκευάζεται ως μια τελείως καθορισμένη κατηγορία εκφράσεων — δηλαδή, τύποι από τους οποίους μια υποκατηγορία τύπων, γνωστά ως θεωρήματα του τυπικού συστήματος, προκύπτει με έναν συγκεκριμένο καλά καθορισμένο τρόπο. Οι τύποι του επίσημου συστήματος δεν έχουν άμεσο νόημα, και γενικά μπορούν να κατασκευαστούν από σημεία ή σύμβολα που επιλέγονται απλώς για λόγους τεχνικής ευκολίας. Στην πραγματικότητα, ο τρόπος κατασκευής τύπων και η έννοια ενός θεωρήματος κάποιου τυπικού συστήματος επιλέγονται έτσι ώστε η προκύπτουσα τυπική συσκευή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πιο επαρκή έκφραση κάποιας μαθηματικής (ή ακόμα και μη μαθηματικής) θεωρίας, πιο συγκεκριμένα, όπως μια έκφραση τόσο του πραγματικού του περιεχομένου όσο και της απαγωγικής δομής του.

4.4 Μέθοδοι εφαρμογής μαθηματικών αποδείξεων

Σύμφωνα με μια παραδοσιακή άποψη, ο πρωταρχικός ρόλος μιας μαθηματικής απόδειξης είναι να εγγυάται την αλήθεια του θεωρήματος που προκύπτει. Αυτή η άποψη αποτυγχάνει να εξηγήσει γιατί συμβαίνει πολύ συχνά μια νέα απόδειξη ενός θεωρήματος να θεωρείται σημαντική. Τρεις περιπτωσιολογικές μελέτες από στοιχειώδη αριθμητική δείχνουν, ανεπίσημα, ότι υπάρχουν πολλά κριτήρια βάσει των οποίων αποτιμώνται οι συνήθεις αποδείξεις. Είναι γενικά αποδεκτό ότι τουλάχιστον ένας στόχος των μαθηματικών είναι να παρέχουν σωστές αποδείξεις αληθών θεωρημάτων. Ως εκ τούτου, οι παραδοσιακές προσεγγίσεις στη φιλοσοφία των μαθηματικών προσπάθησαν, αρκετά εύλογα, να αποσαφηνίσουν τα πρότυπα ορθότητας και να θεμελιώσουν την έννοια της αλήθειας. Αλλά ακόμη και μια άτυπη έρευνα της μαθηματικής πρακτικής δείχνει ότι χρησιμοποιείται πολύ ευρύτερο φάσμα όρων στην αξιολόγηση των μαθηματικών εξελίξεων: Οι έννοιες μπορεί να είναι γόνιμες, οι ερωτήσεις φυσικές, οι λύσεις κομψές, οι μέθοδοι ισχυρές, τα θεωρήματα βαθιά, οι αποδείξεις διορατικές, τα ερευνητικά προγράμματα πολλά υποσχόμενα. Στο βαθμό που κρίσεις σαν αυτές διοχετεύουν τις προσπάθειες και τους πόρους που αφιερώνουμε στην πρακτική, είναι τόσο φιλοσοφική όσο και πραγματιστική πρόκληση να διευκρινιστεί η έννοια τέτοιων όρων.

Επομένως, τα επιχειρήματα για να υποστηρίξουν κάτι στην πραγματική ζωή δεν είναι τόσο καθαρά όσο οι μαθηματικές αποδείξεις, και αυτή είναι μια προφανής πηγή διαφωνιών. Ωστόσο, τα λογικά επιχειρήματα θα πρέπει να έχουν πολλά κοινά με τις αποδείξεις, ακόμα κι αν δεν είναι τόσο ξεκάθαρα. Ορισμένες από τις διαφωνίες γύρω από τα επιχειρήματα στην πραγματική ζωή είναι αναπόφευκτες, καθώς πηγάζουν από την πραγματική αβεβαιότητα για τον κόσμο. Αλλά μερικές από τις διαφωνίες μπορούν να αποφευχθούν, και μπορούμε να τις αποφύγουμε χρησιμοποιώντας τη λογική. Ωστόσο, η κατανόηση της μαθηματικής λογικής μας βοηθά να κατανοήσουμε την ασάφεια και τη διαφωνία. Μας βοηθά να καταλάβουμε από πού προέρχεται η διαφωνία. Μας βοηθά να καταλάβουμε αν προέρχεται από διαφορετική χρήση λογικής ή διαφορετικά δομικά στοιχεία. Εάν δύο άτομα διαφωνούν σχετικά με την υγειονομική περίθαλψη, μπορεί να διαφωνούν για το αν όλοι πρέπει να έχουν υγειονομική περίθαλψη ή μπορεί να διαφωνούν σχετικά με τον καλύτερο τρόπο παροχής υγειονομικής περίθαλψης σε όλους. Πρόκειται για δύο εντελώς διαφορετικούς τύπους διαφωνιών.

Κεφάλαιο 5^{O}

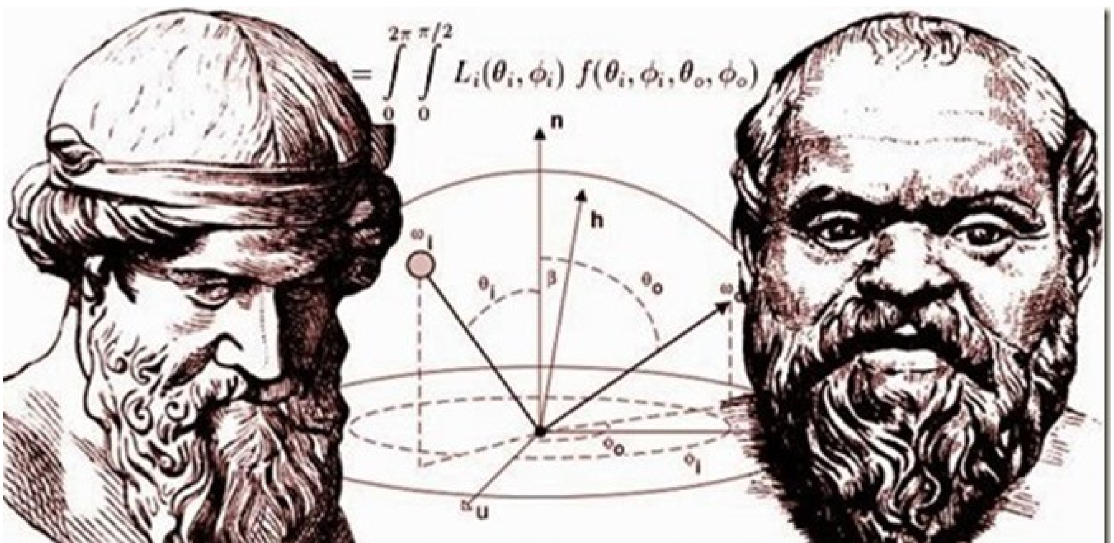
5.1 Αποδείξεις με τη χρήση της Τεχνολογίας

Όταν ο μέσος άνθρωπος μαθαίνει ότι κάποιος είναι μαθηματικός, συχνά υποθέτει ότι αυτό το άτομο εργάζεται σε υπολογιστές όλη την ημέρα. Αυτό το συμπέρασμα είναι και αληθινό και ψευδές. Οι υπολογιστές είναι μια διάχυτη πτυχή όλων των μερών της σύγχρονης ζωής. Ο πατέρας του σύγχρονου σχεδιασμού υπολογιστών ήταν ο John von Neumann, ένας σπουδαίος μαθηματικός. Συνεργάστηκε με τον Herman Goldstine, επίσης μαθηματικό. Σήμερα, οι περισσότεροι μαθηματικοί χρησιμοποιούν έναν υπολογιστή για να στέλνουν μηνύματα, να δακτυλογραφούν τις εργασίες και τα βιβλία τους και να δημοσιεύουν υλικό στον Παγκόσμιο Ιστό. Ένας σημαντικός αριθμός, αλλά πολύ λιγότεροι από τους μισούς, μαθηματικών χρησιμοποιούν τον υπολογιστή για τη διεξαγωγή πειραμάτων. Υπολογίζουν αριθμητικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων, υπολογίζουν τη διάδοση δεδομένων για δυναμικά συστήματα και διαφορικές εξισώσεις, εκτελούν έρευνα λειτουργιών, ασχολούνται με την εξέταση ερωτήσεων από τη θεωρία ελέγχου και πολλές άλλες δραστηριότητες επίσης. Αλλά η συντριπτική πλειοψηφία των ακαδημαϊκών μαθηματικών εξακολουθεί, στο τέλος, να παίρνει ένα στυλό και να καταγράφει μια απόδειξη την οποία και δημοσιεύουν.

Ο σχεδιασμός του σύγχρονου υπολογιστή βασίζεται σε μαθηματικές ιδέες, τη μηχανή Turing, τη θεωρία κωδικοποίησης, τη θεωρία ουρών, τους δυαδικούς αριθμούς και πράξεις, τις γλώσσες υψηλού επιπέδου κ.λπ. Σίγουρα τα λειτουργικά συστήματα, οι γλώσσες υπολογιστών υψηλού επιπέδου όπως C++, Java, ο σχεδιασμός κεντρικής μονάδας επεξεργασίας, ο σχεδιασμός τσιπ μνήμης, ο σχεδιασμός διαύλου, η διαχείριση μνήμης και πολλά άλλα στοιχεία του κόσμου των υπολογιστών βασίζονται στα μαθηματικά. Ο κόσμος των υπολογιστών είναι μια αποτελεσματική και σημαντική εφαρμογή της μαθηματικής θεωρίας που αναπτύσσουμε εδώ και 2500 χρόνια. Αλλά ο υπολογιστής δεν είναι μαθηματικά. Είναι μια συσκευή χειρισμού δεδομένων. Παρόλα αυτά, έχουν προκύψει νέες συναρπαστικές ιδέες που έχουν αλλάξει τον τρόπο που εξασκούνται τα μαθηματικά. Οι πρώτοι υπολογιστές ήταν κάτι περισσότερο από δοξασμένες αριθμομηχανές. δεν μπορούσαν να κάνουν τίποτα περισσότερο από την αριθμητική. Σιγά-σιγά, με την πάροδο του χρόνου, αναπτύχθηκε η ιδέα ότι ο υπολογιστής μπορούσε να εκτελέσει ρουτίνες. Τελικά, χάρη στο έργο του John von Neumann, αναπτύχθηκε η ιδέα του υπολογιστή αποθηκευμένου προγράμματος. Στη δεκαετία του 1960, μια ομάδα στο MIT ανέπτυξε την ιδέα ότι ένας υπολογιστής θα μπορούσε να εκτελέσει υψηλού επιπέδου υπολογισμούς άλγεβρας και γεωμετρίας και λογισμών. Το προϊόν τους ονομαζόταν Macsyma.

Θα μπορούσε να τρέξει μόνο σε έναν πολύ ισχυρό υπολογιστή και η γλώσσα προγραμματισμού του ήταν πολύ περίπλοκη και δύσκολη. Σήμερα, χάρη στον Stephen Wolfram και πολλούς άλλους, έχουμε συστήματα άλγεβρας υπολογιστών. Ένα σύστημα υπολογιστικής άλγεβρας είναι μια γλώσσα υπολογιστή υψηλού επιπέδου που μπορεί να κάνει λογισμούς, να λύνει διαφορικές εξισώσεις, να εκτελεί περίπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς, να γραφεί πολύ περίπλοκες συναρτήσεις και να εκτελεί μια τεράστια ποικιλία από περίπλοκες μαθηματικές πράξεις. Και αυτά τα προϊόντα λογισμικού θα τρέχουν σε έναν προσωπικό υπολογιστή. Πολλοί μαθηματικοί και μηχανικοί και άλλοι μαθηματικοί επιστήμονες διεξάγουν έρευνα υψηλού επιπέδου χρησιμοποιώντας αυτά τα προϊόντα λογισμικού. Οι διατριβές παρουσιάζουν αποτελέσματα που βασίζονται σε εξερευνήσεις χρησιμοποιώντας Mathematica ή Maple ή MatLab ενώ σημαντικές νέες ανακαλύψεις έχουν προκύψει λόγω αυτών των νέων εργαλείων.

Με τις σύγχρονες, υψηλού επιπέδου γλώσσες υπολογιστών, είναι δυνατός ο προγραμματισμός σε έναν υπολογιστή των ορισμών και των αξιωμάτων ενός λογικού συστήματος. Και με αυτό δεν εννοούμε απλώς τις λέξεις με τις οποίες μεταφέρονται οι ιδέες. Στην πραγματικότητα, η μηχανή λαμβάνει πληροφορίες σχετικά με το πώς οι ιδέες ταιριάζουν μεταξύ τους, τι σημαίνει τι, ποιοι είναι οι επιτρεπόμενοι κανόνες λογικής και ούτω καθεξής. Η γλώσσα προγραμματισμού έχει ειδική σύνταξη για την εισαγωγή όλων αυτών των πληροφοριών. Εξοπλισμένος με αυτά τα δεδομένα, ο υπολογιστής μπορεί στη συνέχεια να αναζητήσει έγκυρες αλυσίδες συλλογισμού (ακολουθώντας τους ενσύρματους κανόνες της λογικής και χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιώματα που έχουν προγραμματιστεί) που οδηγούν σε νέες, έγκυρες προτάσεις ή θεωρήματα. Αυτό το λογισμικό που αποδεικνύει τα θεωρήματα μπορεί να εκτελεστεί σε δύο λειτουργίες: (i) διαδραστική λειτουργία, στην οποία το μηχάνημα σταματά περιοδικά, ώστε ο χρήστης να μπορεί να εισάγει περαιτέρω οδηγίες, και (ii) λειτουργία παρτίδας, στην οποία το μηχάνημα εκτελεί ολόκληρη την εργασία και παρουσιάζει αποτέλεσμα στο τέλος. Σε κάθε τρόπο λειτουργίας, ο σκοπός είναι ο υπολογιστής να βρει μια νέα μαθηματική αλήθεια και να δημιουργήσει μια λογική αλυσίδα σκέψης που οδηγεί σε αυτήν.



Εικόνα 5: Η αρχαία Ελλάδα αποτέλεσε κοιτίδα της μαθηματικής σκέψης και ανάπτυξης των μαθηματικών εννοιών. πηγή: http://physics4u.gr/blog/wp-content/uploads/2016/09/ancient_maths_thumb.jpg

Ορισμένοι κλάδοι των μαθηματικών, όπως η πραγματική ανάλυση, είναι μάλλον συνθετικοί. Η πραγματική ανάλυση περιλαμβάνει εκτιμήσεις και λεπτούς συλλογισμούς που δεν προέρχονται απευθείας από τα δώδεκα αξιώματα του θέματος. Επομένως, αυτή η περιοχή δεν προσφέρεται καλά για δοκιμές υπολογιστών, και τα δοκίμια υπολογιστών έχουν περάσει αρκετά καλά από αυτήν την περιοχή. Άλλα μέρη των μαθηματικών είναι πιο φορμαλιστικά. Υπάρχει ακόμη διορατικότητα και βαθιά σκέψη, αλλά πολλά αποτελέσματα μπορούν να ληφθούν αν συναρμολογήσουμε τις ιδέες και τους ορισμούς και τα αξιώματα μαζί με τον σωστό τρόπο. Ο υπολογιστής μπορεί να δοκιμάσει εκατομμύρια συνδυασμούς σε λίγα μόνο λεπτά και η πιθανότητα να βρει κάτι που κανένας άνθρωπος δεν έχει κοιτάξει ποτέ είναι αρκετά καλή. Η εικασία Robbins από την άλγεβρα Boole είναι ένα ζωντανό παράδειγμα μιας τέτοιας ανακάλυψης. Παραμένουν ακόμα αισθητικά ερωτήματα. Αφού ο υπολογιστής ανακαλύψει μια νέα «μαθηματική αλήθεια» - πλήρης με μια απόδειξη - τότε κάποιος άνθρωπος ή ομάδα ανθρώπινων όντων θα πρέπει να την εξετάσει και να προσδιορίσει τη σημασία της. Είναι ενδιαφέρον; Είναι χρήσιμο; Πώς εντάσσεται στο πλαίσιο του θέματος; Τι νέες πόρτες ανοίγει; Κάποιος θα ήθελε επίσης να αποκαλύψει ο υπολογιστής την αλυσίδα συλλογισμών του, ώστε να καταγραφεί, να επαληθευτεί και να αναλυθεί από έναν άνθρωπο. Στα μαθηματικά, δεν αναζητούμε απλά το αποτέλεσμα. Απώτερος στόχος μας είναι η κατανόηση. Θέλουμε λοιπόν να δούμε και να μάθουμε και να κατανοήσουμε την απόδειξη. Οι υπολογιστές έχουν χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την εύρεση νέων θεωρημάτων στην άλγεβρα Boole, την προβολική γεωμετρία και άλλα κλασικά μέρη των μαθηματικών. Ακόμη και μερικά νέα θεωρήματα στην Ευκλείδεια γεωμετρία έχουν βρεθεί. Τα αποτελέσματα στην άλγεβρα έχουν ληφθεί από το Stickel [STI]. Νέα θεωρήματα έχουν επίσης βρεθεί στη θεωρία συνόλων, τη θεωρία πλέγματος και τη θεωρία δακτυλίων. Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι ο λόγος που αυτά τα αποτελέσματα δεν βρέθηκαν ποτέ από έναν άνθρωπο είναι ότι κανένας άνθρωπος δεν θα ενδιαφερόταν για αυτά. Μόνο ο χρόνος μπορεί να κρίνει αυτή την ερώτηση. Αλλά σίγουρα η θετική επίλυση της εικασίας του Robbins έχει μεγάλο ενδιαφέρον για τη θεωρητική επιστήμη των υπολογιστών και τη λογική.

5.2 Οφέλη χρήσης των μαθηματικών αποδείξεων

Γιατί οι μαθηματικοί επιμένουν να αποδεικνύουν τα πάντα; Στην κανονική ζωή, δεν είμαστε τόσο σχολαστικοί. Εάν όλα τα στοιχεία σε μια υπόθεση δολοφονίας δείχνουν έναν συγκεκριμένο ύποπτο, είμαστε στην ευχάριστη θέση να τους καταδικάσουμε και να πούμε ότι η ενοχή τους έχει αποδειχθεί "πέρα από εύλογη αμφιβολία". Αλλά τότε, δεν μπορούμε ποτέ να είμαστε πραγματικά σίγουροι. Όπως θα σας πει κάθε αθώος κατάδικος, υπάρχει πάντα περίπτωση να μην το έκανε.

Τα μαθηματικά είναι ίσως ο μόνος τομέας στον οποίο είναι δυνατή η απόλυτη βεβαιότητα, γι' αυτό οι μαθηματικοί κρατούν τόσο πολύ τις αποδείξεις. Επίσης, αν δεν επιμείνουμε σε αποδείξεις, μπορεί να υπάρξουν λάθη που διαφορετικά δεν εντοπίζονται εύκολα. Ένα διάσημο παράδειγμα προέρχεται από τα προαναφερθέντα τρίγωνα. Ένα από τα αξιώματα του Ευκλείδη είναι ισοδύναμο με το να πει ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών όλων των τριγώνων είναι 180 μοίρες, νόμιζε ότι αυτό ήταν τόσο προφανές, θα έπρεπε απλώς να το αποδεχτούμε. Οι μαθηματικοί που τον ακολούθησαν, ωστόσο, πίστευαν ότι θα μπορούσαν να τα καταφέρουν καλύτερα. Προσπάθησαν να αντλήσουν αυτό το γεγονός από τα άλλα αξιώματα του Ευκλείδη. Με αυτόν τον τρόπο, δεν χρειάζεται απλώς να το πιστέψουμε, αλλά μπορούμε να το θεωρήσουμε αποδεδειγμένο, αν υποθέσουμε ότι τα άλλα αξιώματα είναι σωστά.

Σε έναν κόσμο χωρίς αποδείξεις, θα ήμασταν πάντα δουλεύοντας σε εικασίες. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $a^2 + b^2 = c^2$. Πολλοί άνθρωποι είναι πολύ εξοικειωμένοι με αυτήν την εξίσωση, αλλά δεν έχουν σκεφτεί γιατί η δήλωση είναι αληθινή. Πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι όλη η βάση μας στη χρήση της παραπάνω εξίσωσης προέρχεται από την επικύρωση των πολλών αποδείξεών της. Χωρίς τις αποδείξεις, τίποτα που κατασκευάζουμε από το θεώρημα δεν θα μπορούσε να γίνει λογικά αποδεκτό. Τέσσερις συνήθεις τύποι αποδείξεων περιλαμβάνουν την άμεση απόδειξη, την απόδειξη με μαθηματική επαγωγή, την απόδειξη με αντίφαση και την απόδειξη με αντιθετική. Οι άμεσες αποδείξεις σχηματίζονται υποθέτοντας ότι η υπόθεση είναι αληθής και στη συνέχεια προχωρώντας μέσω μιας σειράς λογικών επιχειρημάτων, αποδεικνύοντας τελικά ότι το συμπέρασμα είναι επίσης αληθές. Για τις αποδείξεις που περιλαμβάνουν το σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλαδή $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. Αυτή η αρχή δηλώνει ότι για κάποια πρόταση που βασίζεται σε φυσικούς αριθμούς, ας πούμε $P(n)$, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλους $n \in \mathbb{N}$-$\{0\}$ αν

i) Ισχύει η θήκη βάσης, $P(1)$.

ii) Επαγωγικό βήμα: αν $P(n)$ είναι αληθές, τότε το $P(n + 1)$ είναι αληθές

Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιούμε αποδείξεις όλη την ώρα. Όταν κάποιος σκέφτεται με τον εαυτό σου ότι θα είναι φθηνότερο να αγοράσει τα μεγαλύτερα κουτάκια όσπρια, κάτι αποδεικνύει για τις αντίστοιχες τιμές. Όταν παίζει ναρκαλιευτή αυτό το τρομερά εθιστικό ηλεκτρονικό παιχνίδι, και βλέπει ότι πρέπει να υπάρχει μια νάρκη κάτω από ένα μπλοκ, έχει αποδείξει κάτι στον εαυτό του. Όταν ξέρουμε ότι δεν μπορεί κάποιος να στρίψετε δεξιά στο κόκκινο σε μια συγκεκριμένη διασταύρωση, έχει δημιουργήσει μια απόδειξη της παρανομίας αυτής της κίνησης. Τουλάχιστον, ο συλλογισμός μαθηματικού τύπου είναι μια ισχυρή προσθήκη στην εργαλειοθήκη κριτικής σκέψης οποιουδήποτε, που μπορεί να εφαρμοστεί σε μια μεγάλη ποικιλία ρυθμίσεων. Τα μαθηματικά είναι επίσης ένας ακρογωνιαίος λίθος των επιστημών, οι οποίες με τη σειρά τους παρέχουν έναν βαθιά χρήσιμο τρόπο κατανόησης και ερμηνείας του κόσμου γύρω μας.

Με άλλα λόγια οι γραπτές αποδείξεις είναι μια καταγραφή της κατανόησης και ένας τρόπος για να επικοινωνήσουν οι άνθρωποι μαθηματικές ιδέες με άλλους. Το να κάνει κάποιος μαθηματικά έχει να κάνει με την εύρεση αποδείξεων. Και η πραγματική ζωή έχει να κάνει πολύ με το να «κάνεις» μαθηματικά, ακόμα κι αν δεν φαίνεται έτσι πολύ συχνά.

Σύνοψη

Όπως αναλύσαμε ως τώρα, η ασαφής λογική βασίζεται στη θεωρία των ασαφών συνόλων, η οποία είναι μια γενίκευση της κλασικής θεωρίας συνόλων. Λέγοντας ότι η θεωρία των ασαφών συνόλων είναι μια γενίκευση της κλασικής θεωρίας συνόλων σημαίνει ότι η τελευταία είναι μια ειδική περίπτωση της θεωρίας ασαφών συνόλων. Για να γίνει μια μεταφορά στη θεωρία συνόλων, η κλασική θεωρία συνόλων είναι ένα υποσύνολο της θεωρίας των ασαφών συνόλων. Η ασαφής λογική βασίζεται στη θεωρία ασαφών συνόλων, η οποία είναι μια γενίκευση της κλασικής θεωρίας συνόλων [Zadeh, 1965]. Τα κλασικά σύνολα ονομάζονται επίσης καθαρά σύνολα, σε αντίθεση με τα ασαφή, και με την ίδια λογική η κλασική λογική είναι επίσης γνωστή ως λογική Boole ή δυαδική.

Η ασαφής λογική αποτελεί μια επέκταση της λογικής Boole από τον Lotfi Zadeh το 1965 με βάση τη μαθηματική θεωρία των ασαφών συνόλων. Εισάγοντας την έννοια του βαθμού στην επαλήθευση μιας συνθήκης, επιτρέποντας έτσι μια συνθήκη να βρίσκεται σε κατάσταση διαφορετική από αληθής ή ψευδής, η ασαφής λογική παρέχει μια πολύ πολύτιμη ευελιξία για συλλογισμό, η οποία καθιστά δυνατό να ληφθούν υπόψη ανακρίβειες και αβεβαιότητες. Ένα πλεονέκτημα της ασαφούς λογικής προκειμένου να επισημοποιήσει την ανθρώπινη λογική είναι ότι οι κανόνες τίθενται σε φυσική γλώσσα.

Εισάγοντας την έννοια του βαθμού στην επαλήθευση μιας συνθήκης, επιτρέποντας μια συνθήκη να βρίσκεται σε κατάσταση διαφορετική από την αληθή ή ψευδή, η ασαφής λογική παρέχει μια πολύ πολύτιμη ευελιξία στη χρήση συλλογισμού, η οποία καθιστά δυνατή τη λήψη υπόψη των ανακρίβειων και των αβεβαιοτήτων. Ένα από τα πλεονεκτήματα της ασαφούς λογικής για την επισημοποίηση της ανθρώπινης συλλογιστικής είναι ότι οι κανόνες τίθενται σε φυσική γλώσσα. Η ασαφής λογική μπορεί να εξηγήσει πολλά πειράματα που είχαν υπονομεύσει τα παραδοσιακά μοντέλα ανθρώπινης λογικής τον 20^{o} αιώνα.

Από την άλλη πλευρά, πριν από τις αποδείξεις, πριν από περίπου 2600 χρόνια, τα μαθηματικά ήταν ένα ευρετικό και φαινομενολογικό θέμα. Παρακινούμενοι σε μεγάλο βαθμό από πρακτικές εκτιμήσεις της τοπογραφίας, του εμπορίου και της καταμέτρησης της γης, δεν φαινόταν να υπάρχει πραγματική ανάγκη για κανενός είδους θεωρία ή αυστηρότητα. Μόνο με την εμφάνιση των αφηρημένων μαθηματικών ή των μαθηματικών για χάρη τους άρχισε να γίνεται σαφές γιατί οι αποδείξεις είναι σημαντικές. Πράγματι, οι αποδείξεις είναι βασικές στον τρόπο με τον οποίο βλέπουμε την πειθαρχία μας. Σήμερα, υπάρχουν δεκάδες χιλιάδες μαθηματικοί σε όλο τον κόσμο. Και τα αφηρημένα μαθηματικά είναι μια καθιερωμένη επιστήμη. Λίγοι είναι αυτοί που έχουν προηγμένη γνώση των μαθηματικών που θα υποστήριζαν ότι η απόδειξη δεν έχει πλέον θέση στο θέμα μας. Η απόδειξη βρίσκεται στο επίκεντρο του θέματος. είναι αυτό που κάνει τα μαθηματικά να ξεχωρίζουν. Ακριβώς όπως ο συντονισμός χεριού-ματιού βρίσκεται στο επίκεντρο του να χτυπάς ένα μπέιζμπολ, και η πρακτική τεχνική γνώση είναι στην καρδιά του να είσαι μηχανικός, και η αίσθηση του χρώματος και η αισθητική είναι στην καρδιά του να είσαι ζωγράφος, έτσι και η ικανότητα να εκτιμάς και να η δημιουργία αποδείξεων είναι στο επίκεντρο του να είσαι μαθηματικός. Οι αποδείξεις παραμένουν σημαντικές στα μαθηματικά, επειδή είναι το καμπάνα μας για το τι μπορούμε να πιστέψουμε και τι μπορούμε να βασιστούμε. Είναι διαχρονικά και άκαμπτα και αξιόπιστα. Είναι που συγκρατούν το θέμα και που το καθιστούν μια από τις δόξες της ανθρώπινης σκέψης.

Γίνεται όλο και πιο προφανές ότι οι διαχωρισμοί μεταξύ «μηχανικού» και «μαθηματικού» και «φυσικού» γίνονται όλο και πιο ασαφείς. Σήμερα η μηχανική και η φυσική χρησιμοποιούν τα μαθηματικά σε ένα πολύ περίπλοκο επίπεδο και συχνά είναι δύσκολο να πούμε πού τελειώνει το ένα μάθημα και πού αρχίζει το άλλο. Η ευρέως διαδεδομένη συνεργασία μεταξύ αυτών των διαφορετικών ομάδων συμβάλλει στην εξάλειψη των φραγμών και στο άνοιγμα των γραμμών επικοινωνίας. Αν και ο «μαθηματικός» ήταν ιστορικά ένα πολύτιμο και σεβαστό επάγγελμα, ένα επάγγελμα που αντιπροσωπεύει την κορυφή της ανθρώπινης σκέψης, μπορούμε τώρα να εντάξουμε αυτό το μοντέλο σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Έτσι, η απάντηση στο ερώτημα είναι ότι η απόδειξη θα συνεχίσει να ζει, αλλά θα έχει νέες και ποικίλες έννοιες. Η παραδοσιακή ιδέα της απόδειξης θα ευδοκιμήσει επειδή θα αλληλεπιδράσει με άλλους τύπους επαλήθευσης και επιβεβαίωσης. Και άλλοι κλάδοι, αυτοί που παραδοσιακά δεν χρησιμοποιούν μαθηματική απόδειξη, θα εκτιμήσουν την αξία αυτού του τρόπου διανοητικού λόγου. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι μια πιο πλούσια ταπετσαρία μαθηματικών και μαθηματικών εργασιών. Ως αποτέλεσμα θα ωφεληθούμε όλοι.

Έχοντας ως τώρα αναφερθεί εκτενώς στην έννοια της ασαφούς συλλογιστικής διαδικασίας και της αποδεικτικής διαδικασίας, είναι σαφής η διαχωριστική γραμμή που ορίζεται ανάμεσα τους δεδομένου ότι με τη χρήση της ασαφούς λογικής βγάζουμε εμπειρικά συμπεράσματα μέσω μιας συλλογιστικής διαδικασίας και δεν ακολουθείται καμία αποδεικτική διαδικασία. Αυτό το συμπέρασμα πρέπει να τονιστεί αφού μας επιτρέπει την βαθύτερη κατανόηση των δυο αυτών εννοιών Η ασαφής λογική μπόρεί να αξιοποιεί τις μαθηματικές αποδείξεις αλλά δεν αξιοποιείτε σε αυτές.. Η μαθηματική ασαφής λογική εστιάζει σε λογικές που βασίζονται σε μια αληθολειτουργική περιγραφή της μερικής αλήθειας και τις μελετά στο πνεύμα της κλασικής μαθηματικής λογικής, διερευνώντας τη σύνταξη, τη θεωρητική σημασιολογία μοντέλων, τα συστήματα απόδειξης, την πληρότητα κ.λπ. τόσο στο προτατικό όσο και στο κατηγορηματικό επίπεδο. Δύο από τις πιο υποδειγματικές ικανότητες του ανθρώπινου μυαλού είναι η ικανότητα χρήσης των αντιλήψεων με σκόπιμους τρόπους και η ικανότητα προσέγγισης των αντιλήψεων με δηλώσεις στη φυσική γλώσσα. Με μια στενή έννοια, η ασαφής λογική είναι ένα λογικό σύστημα που είναι μια επέκταση της λογικής πολλών τιμών και προορίζεται να χρησιμεύσει ως λογική κατά προσέγγιση συλλογισμού. Αλλά υπό μια ευρύτερη έννοια, η ασαφής λογική είναι λίγο πολύ συνώνυμη με τη θεωρία των ασαφών συνόλων. Στην κλασική λογική η προτασιακή τιμή μιας πρότασης είναι είτε αληθής (1) είτε ψευδής (0), αλλά στη λογική Lukasiewicz δώσαμε τιμή ως αληθοφάνεια σε μια συγκεκριμένη πρόταση μεταξύ [0, 1]. Ως γενίκευση πολλών πολύτιμων λογικών, η ασαφής λογική καθιερώθηκε για να αντιμετωπίσει αυτές τις ασαφείς προτάσεις και να υποστηρίξει την κατά προσέγγιση συλλογιστική.

Βιβλιογραφικές αναφορές

M. Black, Vagueness: An exercise in logical analysis, Philosophy of Science 4.
Ανακτήθηκε 15 Νοεμβρίου, 2022 από https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic

Vilem Novak, Irina Perfiljeva & Jiri Mockor. (1999). Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Εκδόσεις Kluwer

Μαθηματική λογική. Ανακτήθηκε 15 Νοεμβρίου, 2022 από https://el.wikipedia.org/wiki/Μαθηματική_λογική

Alessandro Andretta. (2021). Elements of Mathematical Logic Version of January 5, 2021. Ανακτήθηκε 24 Νοεμβρίου, 2022 από https://filippoc.people.uic.edu/2021/Spring/andretta.pdf

Struik, D.J. (2008). Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών (Α. ΦερεντίνουΝικολακοπούλου, μεταφρ.). Αθήνα: Δαίδαλος.

Hanna, G. (1991) Mathematical Proof. In: D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking. Kluwer, Dordrecht

Barwise, Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam & New York: North-Holland Pub. ARITHMETICAL COMPLEXITY OF FIRST-ORDER PREDICATE FUZZY LOGICS OVER DISTINGUISHED SEMANTICS

H´ajek P. (1997). Fuzzy logic and arithmetical hierarchy II, Studia Logica
Adelsberger S, Hetzl S, Pollak F (2014). The Cayley–Hamilton theorem. Archive of formal proofs. Formal proof development. . Ανακτήθηκε 3 Δεκεμβρίου, 2022 από http://isaafp.org/entries/Cayley_Hamilton.shtml.

M. Hellmann. (2001). Fuzzy Logic Introduction. Ανακτήθηκε 3 Δεκεμβρίου, 2022 από http://epsilon.nought.de/tutorials/fuzzy/fuzzy.pdf

Παναούρα, Α. & Φιλίππου, Γ. (2002). Η σημασία της ιστορίας στη διδασκαλία της μαθηματικής απόδειξης. Πρακτικά του Πανελληνίου συνεδρίου μαθηματικής παιδείας (σελ. 150-162).

Ronald R. Yager, Lotfi A. Zadeh, An Introduction to Fuzzy Logic Applications in Intelligent Systems

G. Chen, S. G. Krantz, D. Ma, C. E. Wayne & H. H. West. (1988). The Euler-Bernoulli beam equation with boundary energy dissipation, in Operator Methods for Optimal Control Problems

Steven G. Krantz. (2007). THE HISTORY AND CONCEPT OF MATHEMATICAL PROOF. Ανακτήθηκε 3 Δεκεμβρίου, 2022 από https://www.eolss.net/sample-chapters/c02/E6-132-37.pdf

Keith Devlin. (2019). WHAT IS A MATHEMATICAL PROOF? Ανακτήθηκε 18 Δεκεμβρίου, 2022 από https://www.mathvalues.org/masterblog/what-is-a-mathematical-proof

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. Philosophy of Mathematics Education

Katz, V. J. (2013). Ιστορία των Μαθηματικών Μια εισαγωγή (Κ. Χατζηκυριάκου). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
Vacca, G. (1909). Maurolycus, the first discoverer of the principle of mathematical induction. In Bulletin of the American Mathematical Society. American Mathematical Society.

Keith Worden, Charles R Farrar, Graeme Manson & Gyuhae Park. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. Ανακτήθηκε 19 Ιανουαρίου, 2022 από https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2007.1834

Γιώργος Μπαντές. (2013). Η αξιωματική μέθοδος. Ευκλείδης και Χίλμπερτ. Ανακτήθηκε 25 Ιανουαρίου, 2022, από https://eranistis.net/wordpress/2013/05/02/η-αξιωματικη-μεθοδοσ-ευκλειδησ-χιλμπ/

Stony Brook University, officially the State University of New York at Stony Brook. Classical Formal Theories. Ανακτήθηκε 25 Ιανουαρίου, 2022, από https://www3.cs.stonybrook.edu/~cse371/11bch11.pdf

Georgiou Dimitrios, Antoniou Efstathios & Chatzimichailidis Anestis. (2015). Mathematical Logic, Gates and Cercuits. Αθήνα: Εκδόσεις Kallipos

Lou van den Dries. (2019). Mathematical Logic. Ανακτήθηκε 12 Φεβρουαρίου, 2022, από https://faculty.math.illinois.edu/~vddries/main2.pdf

Slomson, A. (1996). Mathematical proof and its role in the classroom. Mathematics Teaching, 155 pp. 10-13.

Muhammad Naufal Faris. (2019). Using Technology in Mathematics Discover and Proof Pythagorean Theorem with GeoGebra. . Ανακτήθηκε 12 Φεβρουαρίου, 2022, από https://www.scitepress.org/Papers/2018/84072/84072.pdf

Edsel L. (2017). Proof That Proofs Belong in Geometry. Ανακτήθηκε 20 Φεβρουαρίου, 2022, από https://www.mathgiraffe.com/blog/proof-that-proofs-belong-in-geometry

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.