



Σχολή θετικών επιστημών και τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

**ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

Χαραλάμπης Καψαλιάρης

Πάτρα Ιούνιος 2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του μεταπτυχιακού φοιτητή Χαραλάμπη Καψαλιάρη που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Διπλωματική Εργασία

**ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

Χαραλάμπης Καψαλιάρης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής :

Σωτηρόπουλος Δημήτριος,

Επικ. Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και  
Μηχανικών Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο

Πελοποννήσου

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής :

Σεβρόγλου Βασίλειος

Καθηγητής

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης, Πανεπιστήμιο

Πειραιώς

Πάτρα Ιούνιος 2023

### ***Ευχαριστίες***

*Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους επιβλέποντες καθηγητές μου κ. Σωτηρόπουλο Δημήτριο και κ. Σεβρόγλου Βασίλειο, καθηγητές Μαθηματικών του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, για την άμεση και επιστημονική βοήθεια και στήριξη που μου προσέφεραν, προκειμένου να ολοκληρωθεί η παρούσα Διπλωματική.*

*Επιπλέον ευχαριστώ θερμά την σύζυγό μου και τα δύο μου παιδιά, για την συμπαράσταση και τη συνεχή τους υποστήριξη σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.*

## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιείται μία εισαγωγή στις βασικές έννοιες του λογισμού μεταβολών, με την μελέτη προβλημάτων μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά γίνεται μία προσπάθεια προσδιορισμού και επεξήγησης των συναρτησιακών (ή συναρτησοειδών). Στην συνέχεια, ακολουθεί η διαδικασία διαχωρισμού και επίλυσης βασικών προβλημάτων ακρότατων τιμών καθώς και η περιγραφή της μεθόδου (κατασκευή εξισώσεων Euler-Lagrange) για την εύρεση αναγκαίων συνθηκών που ελαχιστοποιούν ή μεγιστοποιούν τα συναρτησοειδή.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας αναπτύσσονται το ισοπεριμετρικό πρόβλημα, η χαμιλτονιανή θεωρία καθώς και οι ικανές συνθήκες για τις άκρες τιμές των συναρτησοειδών.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος της εργασίας εξετάζουμε την εφαρμογή των συναρτησοειδών και των άκρων τιμών τους στους διάφορους κλάδους της επιστήμης, όπως οικονομία, τεχνικές κατασκευές, γεωφυσική, σεισμολογία.

### Λέξεις – Κλειδιά

Συναρτησιακό, Εξισώσεις Euler-Lagrange, Άκρες τιμές.

## **Abstract**

In this thesis, an introduction to the basic concepts of the calculus of variation is carried out, with the study of problems of partial differential equations.

Initially an attempt is made to define and explain the functionals.

Then follows the process of separating and solving basic finite value problems as well as the description of the method (construction of Euler-Lagrange equations) to find necessary conditions that minimize or maximize the functionals.

In the second part of the paper, the isoperimetric problem, the Hamiltonian theory as well as the sufficient conditions for the extreme values of the functionals are developed.

In the third and last part of the paper, we examine the application of functionals and their extreme values in the various branches of science, such as economics, technical constructions, geophysics, seismology.

### **Keywords**

Functional, Euler-Lagrange equations, Extreme values (or extremals).

## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	5
Abstract .....	6
<b>Περιεχόμενα .....</b>	<b>7</b>
Πίνακας Σχημάτων .....	10
Πίνακας Εικόνων .....	11
<b>1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ .....</b>	<b>13</b>
1.1 Βασικές έννοιες του Λογισμού Μεταβολών .....	13
1.2 Ορισμός Συναρτησιακού ή Συναρτησοειδούς (Functional) .....	14
1.3 Το μεταβολικό πρόβλημα .....	15
1.4 Ένα πρόβλημα γεωμετρικού-μηχανικού τύπου .....	16
1.5 Ισότητα Συναρτησιακών .....	17
<b>2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ .....</b>	<b>19</b>
2.1 Η εξίσωση Euler-Lagrange .....	19
2.2 Άλλες μορφές της εξίσωσης Euler - Lagrange .....	24
2.3 Περιπτώσεις της εξίσωσης Euler Lagrange .....	26
2.3.1 1 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange .....	26
2.3.2 Εφαρμογή στην 1 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό χωρίς αρχικές συνθήκες) .....	27
2.3.3 2 <sup>η</sup> Εφαρμογή στην 1 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό με αρχικές συνθήκες).....	27
2.3.4 3 <sup>η</sup> Εφαρμογή στην 1 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό με αρχικές συνθήκες).....	29
2.3.5 2 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler- Lagrange.....	31
2.3.6 1 <sup>η</sup> Εφαρμογή στην 2 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό με αρχικές συνθήκες).....	32
2.3.7 2 <sup>η</sup> Εφαρμογή στην 2 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (το μεταβολικό πρόβλημα εύρεσης καμπύλης ελαχίστου μήκους).....	33
2.3.8 Εύρεση καμπύλης ελάχιστου μήκους σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα .....	37
2.3.9 3 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange .....	38
2.3.10 Εφαρμογή στην 3 <sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange.....	39
2.3.11 Η αρχή του Fermat .....	40
2.3.12 Το Βραχυστόχρονο πρόβλημα (Brachis to Chrono's Problem, Johann Bernoulli 1966).....	41
2.3.13 Εύρεση ελάχιστης επιφάνειας περιστροφής τμήματος καμπύλης. ....	48
2.4 Το Πρόβλημα διάδοσης μιας φωτεινής ακτίνας σε ένα μέσο .....	50
2.4.1 Εύρεση της μέγιστης διαδρομής της φωτεινής ακτίνας .....	53
<b>3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΑ .....</b>	<b>57</b>
3.1 Γεωδαισιακές Καμπύλες (Γεωδαισιακά ή Γεωδαιτικές καμπύλες) .....	57
3.2 Εύρεση Γεωδαιτικής καμπύλης.....	58
3.3 Γεωδαιτικές γραμμές μιας σφαίρας.....	61
3.4 Γεωδαιτικές καμπύλες ενός δεξιόστροφου κυκλικού κυλίνδρου.....	62
3.5 Γεωδαιτικές καμπύλες ενός δεξιόστροφου κυκλικού κώνου .....	63

4	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΑΝΩΤΕΡΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ .....	65
4.1	Ειδικές περιπτώσεις.....	65
4.2	Εφαρμογή σε συναρτησιακό εξαρτώμενο από ανώτερες παραγώγους μέχρι και 2 <sup>η</sup> παράγωγο .....	66
4.3	Εφαρμογή σε συναρτησιακό εξαρτώμενο από ανώτερες παραγώγους μέχρι και 3 <sup>η</sup> παράγωγο .....	67
5	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΜΕ ΠΟΛΛΕΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ 69	
5.1	Ειδικές Περιπτώσεις.....	69
5.2	Εφαρμογή σε συναρτησιακό με δύο εξαρτημένες μεταβλητές μέχρι και πρώτη παράγωγο.....	70
5.3	Συναρτησιακά που εξαρτώνται από ανεξάρτητες μεταβλητές .....	73
5.3.1	Εφαρμογή στο πρόβλημα Dirichlet.....	73
5.3.2	Δύο Εφαρμογές της Εξίσωσης Euler - Ostrogradsky.....	74
6	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (Ακρότατα υπό όρους).....	77
6.1	Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή Lagrange .....	77
6.2	Προβλήματα με έναν περιορισμό.....	77
6.2.1	Μέγιστο περικλειόμενο εμβαδό περιοχής με σταθερή περίμετρο .....	78
6.2.2	Εύρεση μέγιστου όγκου στερεού λόγω περιστροφής μιας επιφάνειας .....	80
6.3	Πρόβλημα με πολλαπλούς περιορισμούς.....	83
7	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΘΕΩΡΙΑ .....	85
7.1	Εισαγωγή στην θεωρία του Hamilton .....	85
7.1.1	Η Αρχή της ελάχιστης δράσης (Principle of Least Action).....	88
7.1.2	Εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή .....	88
7.2	Κανονικός φορμαλισμός.....	91
7.3	Το αντίστροφο πρόβλημα.....	92
7.3.1	Απλός αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση .....	93
8	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ .....	97
8.1	Ορισμοί.....	97
8.1.1	Το κατάλληλο πεδίο (Proper field) .....	97
8.1.2	Το κεντρικό πεδίο (Central field).....	98
8.1.3	Πεδίο ακρότατων .....	98
8.1.4	Ορισμός ενσωμάτωσης σε κεντρικό πεδίο .....	99
8.1.5	Δύο εφαρμογές κατάλληλου και κεντρικού πεδίου για τα ακρότατα συναρτησιακού .....	100
9	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ JACOBI - LEGENDRE .....	103
9.1	Συνθήκη Jacobi .....	103
9.1.1	Μαθηματικός ορισμός.....	104
9.2	Επαρκής συνθήκη για ακρότατο (Legendre condition).....	105
9.3	Ασθενές και ισχυρό ακρότατο .....	107
9.3.1	Ασθενές ακρότατο.....	107
9.3.2	Ισχυρό ακρότατο .....	108
9.3.3	Εφαρμογή σε ισχυρό μέγιστο .....	108
9.3.4	Εφαρμογή σε ισχυρό ελάχιστο.....	110
10	ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ .....	111
10.1	Εφαρμογές στη Μηχανική.....	111



10.2	Εφαρμογές στη Σεισμολογία.....	113
10.3	Εφαρμογές στη Φυσική – Γεωφυσική .....	113
10.4	Εφαρμογές στην Οικονομία .....	116
10.4.1	Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους.....	116
10.4.2	Προβλήματα βέλτιστου ελέγχου .....	117
11	Βιβλιογραφία.....	125

## Πίνακας Σχημάτων

ΣΧΗΜΑ 1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟ $J(Y)$	14
ΣΧΗΜΑ 2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΟ ΜΕ ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΑΒ	15
ΣΧΗΜΑ 3 ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΤΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΤΟ ΣΑΠΟΥΝΙ	16
ΣΧΗΜΑ 4 ΕΥΡΕΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΑΒ.	33
ΣΧΗΜΑ 5 ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΓΙΑ $\epsilon = 0.2, 0.4, \dots, 0.8$ .	36
ΣΧΗΜΑ 6 ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΣΩΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΑΧΥΤΗΤΑ $X$ Μ/SEC.	37
ΣΧΗΜΑ 7 ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΜΑΖΑΣ $M$ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ Α, Β.	42
ΣΧΗΜΑ 8 ΚΥΚΛΟΕΙΔΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗ	45
ΣΧΗΜΑ 9 Η ΚΥΚΛΟΕΙΔΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΧΡΟΝΗ	46
ΣΧΗΜΑ 10 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΟΝ $X'X$ ΑΞΟΝΑ.	48
ΣΧΗΜΑ 11 (SINGH, MAY 28, 2021)	57
ΣΧΗΜΑ 12 Όγκος από περιστροφή επιφάνειας	80
ΣΧΗΜΑ 13 Απλός αρμονικός ταλαντώτης	90
ΣΧΗΜΑ 14 ΣΩΜΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΣΤΑΘΕΡΑΣ $K$ , ΜΕΣΑ ΣΕ ΥΓΡΟ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ $B$	94
ΣΧΗΜΑ 15 ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΠΕΔΙΟ	97
ΣΧΗΜΑ 16 ΜΗ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΠΕΔΙΟ	98
ΣΧΗΜΑ 17 ΑΚΡΟΤΑΤΟ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΟ ΣΕ ΠΕΔΙΟ ΑΚΡΟΤΑΤΩΝ.	99
ΣΧΗΜΑ 18 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥ ΤΗΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΛΙΣΗ.	100
ΣΧΗΜΑ 19 ΤΟ ΑΚΡΟΤΑΤΟ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΣΤΟ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟ ΠΕΔΙΟ	102
ΣΧΗΜΑ 20 ΔΕΣΜΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΜΕ ΚΕΝΤΡΟ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ	103
ΣΧΗΜΑ 21 ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ	111
ΣΧΗΜΑ 22 ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ	114
ΣΧΗΜΑ 23 ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΝΟΜΟΥ ΤΗΣ ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ	114
ΣΧΗΜΑ 24 ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ	115
ΣΧΗΜΑ 25 ΚΑΜΠΥΛΗ ΤΡΟΧΙΑΣ ΠΥΡΑΥΛΟΥ – CONTROL SYSTEMS MAGAZINE	118

## Πίνακας Εικόνων

ΕΙΚΟΝΑ 1 ΚΙΝΗΤΟΣ ΠΥΡΑΥΛΟΣ – HAWK MOBILE .....	118
ΕΙΚΟΝΑ 2 ΚΙΝΗΣΗ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΥ ΣΕ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΔΡΟΜΟ .....	119



# 1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

## 1.1 Βασικές έννοιες του Λογισμού Μεταβολών

Με τα προβλήματα του Απειροστικού Λογισμού τα οποία αναφέρονται στην μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση των πραγματικών συναρτήσεων μιας ή περισσότερων μεταβλητών, καθώς και στην αναζήτηση των τιμών αυτών για τις οποίες οι εξεταζόμενες συναρτήσεις λαμβάνουν τις άκρες αυτές τιμές, ασχολείται ο κλάδος των Μαθηματικών που ονομάζεται Λογισμός Μεταβολών.

Τέτοια προβλήματα ανάγονται στην μελέτη παραστάσεων, με μια ή περισσότερες άγνωστες πραγματικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων πραγματικών μεταβλητών.

Έτσι αντί να αναζητούμε έναν αριθμό ψάχνουμε για εκείνη την συνάρτηση, η οποία δίνει στην δοσμένη παράσταση την μέγιστη ή ελάχιστη δυνατή τιμή.

Οι παραστάσεις αυτές ονομάζονται **συναρτησιακά ή συναρτησοειδή**.

Ο Λογισμός μεταβολών είναι ένα ειδικό κεφάλαιο της θεωρίας των συναρτησιακών και σκοπεύει στην εύρεση της βέλτιστης συνάρτησης και των ακρότατων τιμών. Συνήθως στην εύρεση ενός ελαχίστου για διάφορα μοντέλα τα οποία υπόκεινται σε κάποιες συνθήκες.

Η εύρεση των ακρότατων τιμών αυτών των συναρτησιακών είναι που καθιστά το ρόλο του λογισμού μεταβολών τόσο σημαντικό, λόγω της σύνδεσής του με προβλήματα της φυσικής, μηχανικής. Υπάρχουν ποσοτικοί νόμοι της φυσικής και της μηχανικής που συχνά μας οδηγούν σε διαφορετικές εξισώσεις και έτσι η εύρεση βέλτιστων συναρτήσεων να εξυπηρετεί ένα μεγαλύτερο φάσμα επιστημών.

Μερικά απλά παραδείγματα συναρτησιακών έχουμε:

- Κατά την μέτρηση των βιβλίων σε μία βιβλιοθήκη, όπου κάθε βιβλίο αντιστοιχεί σε έναν φυσικό αριθμό.
- Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ,όπου κάθε σημείο του χώρου (διάνυσμα θέσης) απεικονίζει το διάνυσμα της έντασης.

Οι εφαρμογές του Λογισμού μεταβολών καλύπτουν όλους τους κλάδους της επιστήμης.

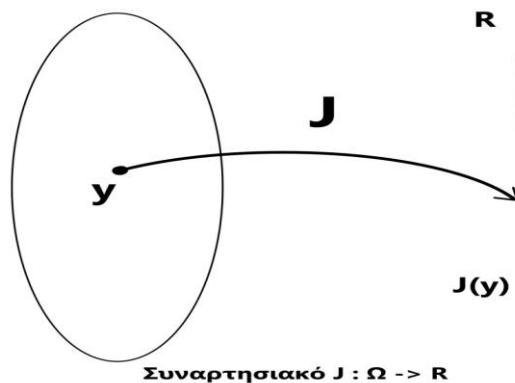
- **Στην οικονομία** έχουμε σκοπό την ελαχιστοποίηση του κόστους.
- **Στις Τεχνικές κατασκευές** αναζητούμε την βελτιστοποίησή τους έτσι ώστε μέσω προσδιορισμού του σχήματος τους να ελαχιστοποιούνται οι τάσεις και οι τριβές της κατασκευής.  
Ακόμη θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την ελαχιστοποίηση της μάζας μιας κατασκευής για δοσμένα όρια αντοχής.
- **Στη Σεισμολογία** όπου μπορούμε να υπολογίσουμε το τοπικό μέγεθος ML του σεισμού, με την μέτρηση της μέσης τιμής του μέγιστου πλάτους ταλάντωση, στις δύο οριζόντιες συνιστώσες σεισμομέτρων Wood–Anderson ενός σταθμού και με την σύγκρισή της με το αντίστοιχο πλάτος ενός πρότυπου σεισμού.
- **Στην Γεωφυσική** με τις γεωφυσικές διασκοπήσεις ,για προσδιορισμό μεγίστων και ελαχίστων μεταβολών της πυκνότητας του υπεδάφους.

## 1.2 Ορισμός Συναρτησιακού ή Συναρτησοειδούς (Functional)

Συναρτησιακό ή Συναρτησοειδές  $J(y(t))$  ονομάζουμε έναν κανόνα αντιστοίχισης

$J : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε, σε κάθε συνάρτηση  $y(t) \in \Omega$ , μιας καλά ορισμένης κλάσης συναρτήσεων  $\Omega$  (σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων  $\Omega$  ή το σύνολο των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων), αντιστοιχεί ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός.

Σκοπός μας είναι να προσδιοριστούν εκείνες οι συναρτήσεις του  $\Omega$  οι οποίες μεγιστοποιούν ή ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό  $J(y(t))$ .



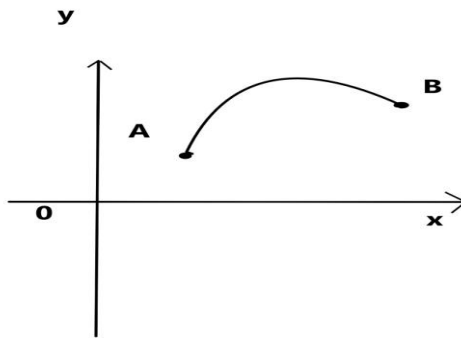
Σχήμα 1 Συναρτησιακό  $J(y)$

Στο Λογισμό μεταβολών ένα συναρτησιακό μιας συνάρτησης  $f$  μιας μεταβλητής, για  $\Omega = [a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , παριστάνεται ως το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx, \text{ με } y = y' = \frac{dy}{dx}$$

### 1.3 Το μεταβολικό πρόβλημα

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης ενός συναρτησιακού  $J$  επί του  $\Omega$  λέγεται **μεταβολικό πρόβλημα**. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα ενός συναρτησιακού σε ένα μικρό μήκος μιας καμπύλης  $AB$  με  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ .



Σχήμα 2 Συναρτησιακό με μήκος καμπύλης  $AB$

Έστω  $y = y(x)$  η καμπύλη  $AB$  στο επίπεδο  $xy$  και  $ds$  στοιχειώδες μήκος καμπύλης τόξου  $AB$ .

$$\text{Τότε θα έχουμε: } ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds^2 = dx^2 \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + (y')^2} .$$

Άρα για το συνολικό μήκος της καμπύλης θα πάρουμε το συναρτησιακό:

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx .$$

Συνήθως απαιτείται να βρούμε την καμπύλη  $y = y(x)$  για  $y(x_1) = y_1$  και  $y(x_2) = y_2$ , έτσι ώστε για την δεδομένη συνάρτηση  $f(x, y, y')$ , να έχουμε το τελικό ολοκλήρωμα :

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad ,$$

το οποίο και καλείται συναρτησιακό.

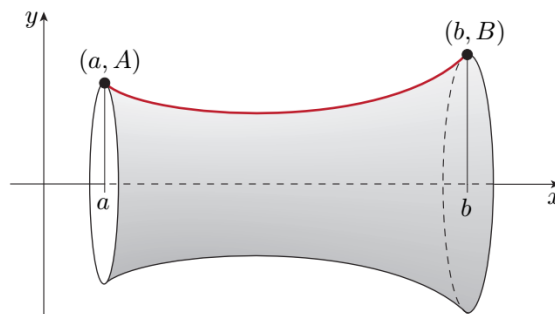
#### 1.4 Ένα πρόβλημα γεωμετρικού-μηχανικού τύπου

Υπάρχει ακόμη ένα πρόβλημα του λογισμού των μεταβολών, γεωμετρικού - μηχανικού τύπου, όπου οι αρχές του λογισμού μας επιτρέπουν να το εκφράσουμε εύκολα και σε αναλυτική μορφή.

Όταν ένας συρμάτινος κύκλος βυθίζεται μέσα σε διάλυμα σαπουνιού και αποσύρεται, τότε ένας κυκλικός δίσκος με φιλμ σαπουνιού δεσμεύεται από το συρμάτινο κύκλο. Εάν σχηματιστεί ένας δεύτερος μικρότερος κύκλος για να αγγίξει αυτόν τον δίσκο και στη συνέχεια μετακινηθεί μακριά, οι δύο κύκλοι θα ενωθούν με μία επιφάνεια μεμβράνης που είναι μία επιφάνεια περιστροφής. Έχουμε δηλαδή την περίπτωση όπου οι κύκλοι είναι παράλληλοι μεταξύ τους και έχουν τα κέντρα τους στον ίδιο άξονα κάθετα στα επίπεδα τους.

Είναι αποδεδειγμένο από τις αρχές της μηχανικής όπως μπορεί κανείς να υποθέσει διαισθητικά από τις ελαστικές ιδιότητες του, ότι σε ένα φιλμ σαπουνιού η επιφάνεια της περιστροφής που σχηματίζεται πρέπει να είναι ελάχιστη.

Επομένως το πρόβλημα του προσδιορισμού του σχήματος του φιλμ, είναι ισοδύναμο με αυτό του προσδιορισμού της ελάχιστης επιφάνειας περιστροφής που διέρχεται από δύο κύκλους, των οποίων οι σχετικές θέσεις υποτίθεται ότι δίνονται όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 3 Επιφάνεια περιστροφής στο παράδειγμα με το σαπούνι  
(Keynes, First published 2016)



## 1.5 Ισότητα Συναρτησιακών

Έστω το σύνολο  $K$  των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με  $f(1) = 0$ . Ορίζουμε το συναρτησιακό  $T: K \rightarrow R$ , τέτοιο ώστε  $T(f) = \int_0^1 x f'(x) dx$ . Για την συνάρτηση

$g(x) \in K$ , με  $g(x) = x^3 - x$ , θα έχουμε:

$$T(g) = \int_0^1 x g'(x) dx = \int_0^1 x(3x^2 - 1) dx = \int_0^1 (3x^3 - x) dx = \left[ \frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \text{ Επίσης θα}$$

έχουμε :  $J(g) = -\int_0^1 g(x) dx = -\int_0^1 (x^3 - x) dx = -\left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$ . Για να πάρουμε τελικά:

$T(g) = J(g)$ . Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω για την τυχαία συνάρτηση  $h(x) \in K$ , δηλαδή θα δείξουμε ότι  $J(h) = T(h)$ . Πράγματι θα έχουμε :

$$T(h) = \int_0^1 x h'(x) dx = [x h(x)]_0^1 - \int_0^1 h(x) dx = h(1) - \int_0^1 h(x) dx \stackrel{h(x) \in K}{=} 0 - \int_0^1 h(x) dx = J(h).$$

Κατά συνέπεια **δύο συναρτησιακά θα λέμε ότι είναι ίσα**, αν η τιμή η οποία βρίσκουμε για κάθε συνάρτησή του από πριν προσδιορισμένου συνόλου συναρτήσεων είναι η ίδια.



## 2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

### 2.1 Η εξίσωση Euler-Lagrange

Εφαρμογή της Euler–Lagrange είναι ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ δύο σημείων  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  στον ευκλείδειο χώρο (όπως αναφέρθηκε παραπάνω), η οποία

είναι ίση με  $\int_A^B ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ . Η ζητούμενη καμπύλη

$y(x) = d_{\min}(A, B)$  αναλογικά με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, καταλήγει στην εξίσωση Euler – Lagrange, όπου η συνάρτηση αυτή προσδιορίζεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \quad \text{με } L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε το συναρτησιακό  $J(y(x)) = J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ , με  $y = y(x)$  το

ακρότατο του  $J(y)$  και έστω  $y(x)$  στην ίδια οικογένεια καμπυλών, έτσι ώστε με

ασυμπτωτική προσέγγιση για τους πρώτους δύο όρους να έχουμε:  $y(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$

με  $\varepsilon \ll 1$  και  $\eta(x)$  αυθαίρετη συνάρτηση τέτοια ώστε  $\eta(x_2) = \eta(x_1) = 0$ .

$$\text{Τότε } J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx \quad \xrightarrow{y(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)} \quad J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx \Rightarrow$$

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[ f(x, y, y') + \varepsilon\eta \frac{\partial f}{\partial y} + \varepsilon\eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + O(\varepsilon^2) \right] dx$$

(λόγω θεωρήματος Taylor για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών).

Το παραπάνω συναρτησιακό παρατηρούμε ότι είναι συνάρτηση της πολύ μικρής ποσότητας  $\varepsilon$ .

Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ 0 + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} + O(\varepsilon) \right] dx.$$

Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του ακροτάτου θα είναι :

$$\left( \frac{dJ}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} \right] dx = 0 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dx + \int_{x_1}^{x_2} \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} dx = 0$$

και με παραγοντική ολοκλήρωση θα έχουμε :

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{\partial f}{\partial y} dx + \left[ \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 \quad \eta(x_2) = \eta(x_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y} dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = 0$$

και αφού το  $\eta(x)$  είναι αυθαίρετο, παίρνουμε τελικά την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Ας προσπαθήσουμε να δώσουμε λύση στο πρόβλημα που αναφέρθηκε παραπάνω, δηλαδή στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού που δίνει το ελάχιστο τόξο μιας τυχαίας καμπύλης μήκους AB με  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  στο  $R^2$  και έτσι ορίζουμε το

συναρτησιακό  $J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$  επί του συνόλου των συνεχών

διαφορίσιμων συναρτήσεων, στο διάστημα  $x \in [x_1, x_2]$  , με  $y(x_1) = y_0$ ,  $y(x_2) = y_1$ .

Για να έχει το  $J$  ελάχιστο στο  $y$ , αναγκαία συνθήκη είναι να ισχύει για το  $y$  η εξίσωση

$$\text{Euler Lagrange, δηλαδή: } \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

Η Λανγκραζιανή  $L$  θα είναι ίση με  $L = \sqrt{1 + (y'(x))^2} = f$

Επομένως θα έχουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \text{ και}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{2} [1 + y'(x)^2]^{-\frac{1}{2}} 2y'(x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}$$

Επομένως :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) =$$

$$= \frac{d}{dx} \left( y'(x) (1 + y'(x)^2)^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \frac{y''(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} - \frac{(y'(x))^2 y''(x)}{\sqrt{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{y''(x)(1 + y'(x)^2 - y'(x)^2)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Άρα η εξίσωση Euler – Lagrange θα γίνει :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$\Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2$  και λόγω των  $y(x_1) = y_0$ ,  $y(x_2) = y_1$ , θα πάρουμε :

$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} x + \frac{x_1 y_1 - x_2 y_0}{x_1 - x_2}.$$

Επειδή όμως  $c_2 = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_0}{x_1 - x_2} \Rightarrow c_2 = \frac{x_1 y_1 - x_1 y_0 + x_1 y_0 - x_2 y_0}{x_1 - x_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_2 = -x_1 \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} + y_0 \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} \Rightarrow c_2 = -c_1 x_1 + y_0.$$

Τελικά θα έχουμε ότι :

$$y(x) = c_1 x + c_2 \Rightarrow y(x) = c_1 x - c_1 x_1 + y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 (x - x_1) + y_0 \Rightarrow y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_0 \Rightarrow y - y_0 = \lambda_{AB} (x - x_1) .$$

Επομένως πρόκειται για μία εξίσωση ευθείας η οποία παρατηρούμε ότι διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

Ας επαληθεύσουμε τα παραπάνω με το πρόγραμμα mathematica.

```

In[1]:= Clear["Global`*"]

In[2]:= << VariationalMethods`

In[3]:= J = Integral[(1 + D[y[x], x]^2)^(1/2), {x, x1, x2}];

In[4]:= L[y_, x_] := (1 + D[y[x], x]^2)^(1/2);

In[5]:= ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];

In[6]:= Print["Εξίσωση Euler:", Simplify[ode]]

Εξίσωση Euler:  $\frac{y''[x]}{(1 + y'[x]^2)^{3/2}} == 0$ 

In[7]:= sol = DSolve[ode, y[x], x];

In[8]:= sol = Flatten[sol];
y[x_] = y[x] /. sol /. {C[1] -> c1, C[2] -> c2};

In[10]:= Print["Λύση της ODE (εξίσωσης Euler): y(x) = ", y[x]]
Λύση της ODE (εξίσωσης Euler): y(x) = c1 + x c2

In[11]:= Print["(a) Τα ακρότατα είναι: y(x) = ", y[x]]
(a) Τα ακρότατα είναι: y(x) = c1 + x c2

In[18]:= y[x_] = c1 * x + c2
Out[18]= x c1 + c2

In[19]:= cond1 = y[x1] == y0;
cond2 = y[x2] == y1;

In[21]:= sys = Flatten[Solve[{cond1, cond2}, {c1, c2}]]
ya[x_] = y[x] /. sys;
Print["Το ακρότατο είναι: y(x) = ", FullSimplify[ya[x]]]

Out[21]=  $\left\{ c_1 \rightarrow -\frac{-y_0 + y_1}{x_1 - x_2}, c_2 \rightarrow -\frac{x_2 y_0 - x_1 y_1}{x_1 - x_2} \right\}$ 

Το ακρότατο είναι:  $y(x) = \frac{(x - x_2) y_0 + (-x + x_1) y_1}{x_1 - x_2}$ 

```

## 2.2 Άλλες μορφές της εξίσωσης Euler - Lagrange

- 1<sup>η</sup> μορφή :  $\frac{d}{dx} \left( f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση

$$\frac{d}{dx} f(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''$$

και

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \left( f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = y' \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = y' \cdot 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( f - \frac{\partial f}{\partial y'} y' \right) - \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$



- 2<sup>η</sup> μορφή :  $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση, θεωρώντας γνωστό ότι ο όρος  $\frac{\partial f}{\partial y'}$  αποτελεί επίσης συνάρτηση των  $x, y, y'$  και ας την ονομάσουμε:

$$g(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y'}$$

Τότε θα έχουμε :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} g(x, y, y') =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \frac{\partial g}{\partial y'} y'' =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y' + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) y'' =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' .$$

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση Euler – Lagrange , η οποία θα γίνει

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = 0$$

### ➤ Επισήμανση

Έστω  $J(y(x))$  συναρτησιακό της μορφής :  $J(y(x)) = \int_a^b L(x, y, y') dx$ , με  $y \in C^2[a, b]$

και  $y(a) = y_0$ ,  $y(b) = y_1$ . Αν η συνάρτηση  $y(x)$  είναι σημείο, όταν το συναρτησιακό παρουσιάζει ακρότατο, τότε θα έχουμε ως αναγκαία συνθήκη, την εξίσωση Euler – Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, y') - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, y') + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x, y, y') y' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2}(x, y, y') y'' = 0 .$$

## 2.3 Περιπτώσεις της εξίσωσης Euler Lagrange

### 2.3.1 1<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange

Η Λανγκρανζιανή  $L$  δεν εξαρτάται από την μεταβλητή  $y'$ , δηλαδή:

$\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$ . Τότε η εξίσωση Euler – Lagrange θα έχει την μορφή:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y} = 0 .$$

Το συναρτησιακό μας τώρα θα είναι της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_a^b L(x, y) dx$$

### 2.3.2 Εφαρμογή στην 1<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό χωρίς αρχικές συνθήκες)

Έστω το συναρτησιακό :  $J(y(x)) = \int_a^b ((e^x + 1)y^2 - y) dx$ .

Η Λανγκρανζιανή μας θα είναι :  $L = (e^x + 1)y^2 - y$  και επομένως θα πάρουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y(e^x + 1) - 1 = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{2(e^x + 1)}$$

Ας επαληθεύσουμε τα παραπάνω με το mathematica...

```
In[ ]:= Clear["Global`*"]

In[ ]:= << VariationalMethods`
J = Integral[(Exp[x] + 1) * y[x]^2 - y[x], {x, a, b}];
L[y_, x_] := (Exp[x] + 1) * y[x]^2 - y[x];
ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];

In[ ]:=
Print["Εξίσωση Euler:", Simplify[ode]]
Εξίσωση Euler: 2 (1 + ex) y[x] == 1
```

### 2.3.3 2<sup>η</sup> Εφαρμογή στην 1<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό με αρχικές συνθήκες)

Έστω το συναρτησιακό :  $J(y(x)) = \int_0^1 (x \sin y + \cos y) dx$ , με αρχικές συνθήκες

$y(0) = 0$ ,  $y(1) = \frac{\pi}{2}$ , τότε θα έχουμε την Λανγκρανζιανή:

$L = x \sin y + \cos y$ . Από την εξίσωση Euler – Lagrange θα πάρουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cos y - \sin y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \tan y \Rightarrow y(x) = \tan^{-1} x$$

Και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες ,τελικά να πάρουμε ότι:

$$y(0) = \tan^{-1}(0) = 0, \quad y(1) = \tan^{-1} \frac{\pi}{2} = 1$$

Επαλήθευση με mathematica ...

```
In[48]:= Clear["Global`*"]

In[49]:= << VariationalMethods`
J = Integral[(x * Sin[y[x]] + Cos[y[x]]), {x, 0, 1}];
L[y_, x_] := x * Sin[y[x]] + Cos[y[x]]
ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];

In[53]:= Print["Εξίσωση Euler:", Simplify[ode]]
Εξίσωση Euler: x Cos[y[x]] == Sin[y[x]]

In[54]:= sol = DSolve[ode, y[x], x];
sol = Flatten[sol];
y[x_] = y[x] /. sol /. {C[1] -> c1, C[2] -> c2};

In[57]:= y[x_] = c1 + x * c2
Out[57]= c1 + x c2

In[58]:= cond1 = y[0] == 0;
cond2 = y[1] == Pi / 2;

In[60]:= sys = Flatten[Solve[{cond1, cond2}, {c1, c2}]]
ya[x_] = y[x] /. sys;

Out[60]= {c1 -> 0, c2 -> Pi/2}

In[62]:= Print["Το ακρότατο είναι: y(x) = ", FullSimplify[ya[x]]]
Το ακρότατο είναι: y(x) =  $\frac{\pi x}{2}$ 
```

### 2.3.4 3<sup>η</sup> Εφαρμογή στην 1<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό με αρχικές συνθήκες)

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τα ακρότατα για το συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_1^e (x e^y - y e^x) dx \quad , \quad y(1) = 1, \quad y(e) = e - 1.$$

Παρατηρούμε ότι η Λανγκρανζιανή θα είναι η  $L = x e^y - y e^x$  και από την εξίσωση Euler–Lagrange θα πάρουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x e^y - e^x - \frac{d}{dx}(0) &= 0 \Rightarrow x e^y = e^x \Rightarrow \\ \Rightarrow e^y &= \frac{e^x}{x} \Rightarrow \ln(e^y) = \ln \left( \frac{e^x}{x} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow y(x) &= x - \ln x, \quad \forall x > 0, \end{aligned}$$

$$\text{με } \begin{cases} y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1 - 0 \\ \text{και} \\ y(e) = e \Rightarrow e - 1 = e - 1 \end{cases}, \text{ τα οποία ισχύουν.}$$

### ➤ **Επισήμανση**

Αν κάποιες από τις οριακές συνθήκες δεν επαληθευόταν, τότε η  $y(x) = x - \ln x$ , δεν θα αποτελούσε ακραία τιμή, για το αρχικό μας συναρτησιακό  $J(y)$ .

και με mathematica...

```

In[26]:= Clear["Global`*"]

In[27]:= << VariationalMethods`

In[28]:= J = Integral[x * Exp[y[x]] - y[x] * Exp[x], {x, 1, e}];

In[29]:= L[y_, x_] := x * Exp[y[x]] - y[x] * Exp[x]

In[30]:= ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];

In[31]:= Simplify[ode]

Out[31]= e^x == e^y[x] x

In[32]:= sol = DSolve[ode, y[x], x]

Out[32]= {{y[x] -> Log[e^x/x]}}

In[33]:= sol = Flatten[sol];

In[34]:= y[x_] = y[x] /. sol /. {C[1] -> c1, C[2] -> c2};

In[35]:= Print["Λύση της ODE (εξίσωσης Euler): y(x) = ", y[x] ]

Λύση της ODE (εξίσωσης Euler): y(x) = Log[e^x/x]

```

### 2.3.5 2<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler- Lagrange

Η Λανγκρανζιανή δεν εξαρτάται από την μεταβλητή  $y$ , δηλαδή  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ . Τότε η εξίσωση

$$\text{Euler - Lagrange θα έχει την μορφή: } \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial y'} = \text{σταθερό}$ . Το συναρτησιακό μας εδώ θα είναι της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_a^b L(x, y') dx.$$

### 2.3.6 1<sup>η</sup> Εφαρμογή στην 2<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (συναρτησιακό με αρχικές συνθήκες)

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω για το συναρτησιακό :

$$J(y(x)) = \int_a^b e^x \sqrt{1+(y')^2} dx, \quad y(1)=1, \quad y(e)=e-1.$$

Έτσι θα έχουμε την Λανγκρανζιανή μας  $L = e^x \sqrt{1+(y')^2}$  και λόγω της εξίσωσης Euler – Lagrange θα πάρουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c \Rightarrow 1 \geq \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c e^{-x} \stackrel{c \leq e^x}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (y')^2 = c^2 e^{-2x} (1+(y')^2) \Rightarrow (y')^2 e^{2x} = c^2 + c^2 (y')^2$$

$$\Rightarrow (y')^2 (e^{2x} - c^2) = c^2 \Rightarrow y'(x) = \frac{c}{\sqrt{e^{2x} - c^2}}, \text{ από όπου τελικά με ολοκλήρωση}$$

θα πάρουμε το ακρότατο μας , το οποίο θα είναι η καμπύλη :

$$y(x) = \text{τοξεφ}\left(\frac{e^x}{c}\right) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

και με mathematica...

```
In[42]:= << VariationalMethods`
```

```
In[43]:= J = Integral[Exp[x] * (1 + D[y[x], x]^2)^(1/2), {x, a, b}];
```

```
In[44]:= L[y_, x_] := Exp[x] * (1 + D[y[x], x]^2)^(1/2);
```

```
In[45]:= ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];
```



In[46]:= **Simplify[ode]**

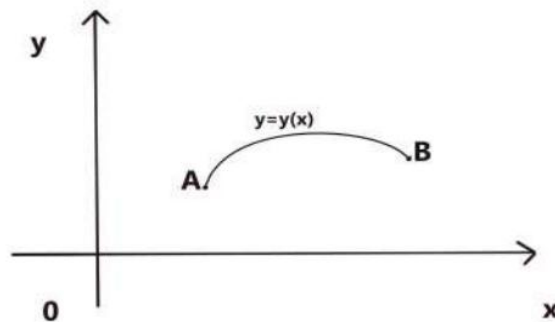
$$\text{Out[46]} = \frac{e^x (y'[x] + y'[x]^3 + y''[x])}{(1 + y'[x]^2)^{3/2}} == 0$$

In[47]:= **sol = DSolve[ode, y[x], x]**

$$\text{Out[47]} = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\text{ArcTan} \left[ e^{-c_1} \sqrt{e^{2x} - e^{2c_1}} \right] + c_2 \right\}, \left\{ y[x] \rightarrow \text{ArcTan} \left[ e^{-c_1} \sqrt{e^{2x} - e^{2c_1}} \right] + c_2 \right\} \right\}$$

### 2.3.7 2<sup>η</sup> Εφαρμογή στην 2<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange (το μεταβολικό πρόβλημα εύρεσης καμπύλης ελαχίστου μήκους)

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης ενός συναρτησιακού **J** λέγεται και μεταβολικό πρόβλημα. Θα βρούμε δηλαδή την καμπύλη ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο σημείων  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ .



Σχήμα 4. Εύρεση καμπύλης ελαχίστου μήκους AB.

Θα έχουμε λοιπόν το συναρτησοειδές :  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2} dx$ .

Με την Λανγκρανζιανή μας να είναι ίση με :  $L = \sqrt{1+(y')^2}$ . Επομένως θα έχουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \text{ και } \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{2} [1 + y'(x)^2]^{-\frac{1}{2}} 2y'(x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}, \text{ κατά συνέπεια ,θα πάρουμε}$$

από την εξίσωση Euler – Lagrange ότι :  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 - \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = c \sqrt{1+y'(x)^2} \Rightarrow y'(x)^2 = c^2 (1+y'(x)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x)^2 (1-c^2) = c^2 \Rightarrow y'(x)^2 = \frac{c^2}{1-c^2} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(x) = c_1 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Επομένως το ακρότατο μας θα είναι τελικά μία ευθεία γραμμή .

Επαλήθευση με mathematica....

```
In[6]:= Clear["Global`*"]
In[7]:= << VariationalMethods`
In[8]:= J = Integral[(1 + D[y[x], x]^2)^(1/2), {x, a, b}];
In[9]:= L[y_, x_] := (1 + D[y[x], x]^2)^(1/2);
In[10]:= ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];
In[11]:= Simplify[ode]
Out[11]= y''[x] / (1 + y'[x]^2)^(3/2) == 0
In[12]:= sol = DSolve[ode, y[x], x]
Out[12]= {{y[x] -> c1 + x c2}}
```

Ας επιχειρήσουμε τώρα να βρούμε μία προσεγγιστική λύση στο πρόβλημά μας χρησιμοποιώντας κανονική μέθοδο διαταραχών με δύο όρους.

Αν θεωρήσουμε  $y(x_1)=0$  και  $y(x_2)=1$ , κάνοντας χρήση του mathematica , θα υπολογίσουμε την συνάρτηση γραμμικής μεταβολής  $J(\varepsilon) = J(y_0 + \varepsilon h)$ ,

την πρώτη μεταβολή  $\delta J(y_0, h)$ , την ολική μεταβολή  $\Delta J$  και την δεύτερη μεταβολή  $\delta^2 J(y_0, h)$  για  $y_0(x) = x$  και  $h(x) = x - x^2$ .

```

Clear["Global`*"]

In[92]:= J = Integral[(1 + D[y[x], x]^2)^(1/2), {x, 0, 1}];

In[93]:= ye[x] = y0[x] + ε * h[x];

In[94]:= Je = J /. {y[x] → ye[x], y'[x] → D[ye[x], x]};

In[95]:= rules = {y[x] → y0[x], D[y[x], x] → D[y0[x], x]};
Jy0 = J /. rules;

In[97]:= δJ = D[Je, ε] /. ε → 0;

In[98]:= ΔJ = Je - Jy0;

In[99]:= δ2J = D[Je, {ε, 2}] /. ε → 0;

n[100]:= a = 0; b = 1;
y0[x_] := x
h[x_] := x (1 - x)

```

```

In[103]:= Print["Η συνάρτηση J(ε) ≡ J(y0+εh)=", Je]
Print["Η συνάρτηση J'(θ) ≡ δJ(y0,h)=", δJ]
Print["Ολική μεταβολή ΔJ ≡ J(y0+εh)-J(y0)= ", ΔJ]
Print["Η δεύτερη μεταβολή δ2J(y0,h)= ", δ2J]
Print["Η οικογένεια καμπυλών y0+εh≡ ", ye[x] ]

Η συνάρτηση J(ε) ≡ J(y0+εh)=Integral[√(1+(1+(1-2x)ε)2), {x, 0, 1}]

Η συνάρτηση J'(θ) ≡ δJ(y0,h)=
$$\frac{(1-2x) \text{Integral}^{(1, \{\theta, \theta, \theta\})}[\sqrt{2}, \{x, \theta, 1\}]}{\sqrt{2}}$$


Ολική μεταβολή ΔJ ≡ J(y0+εh)-J(y0)=
-Integral[√2, {x, 0, 1}] + Integral[√(1+(1+(1-2x)ε)2), {x, 0, 1}]

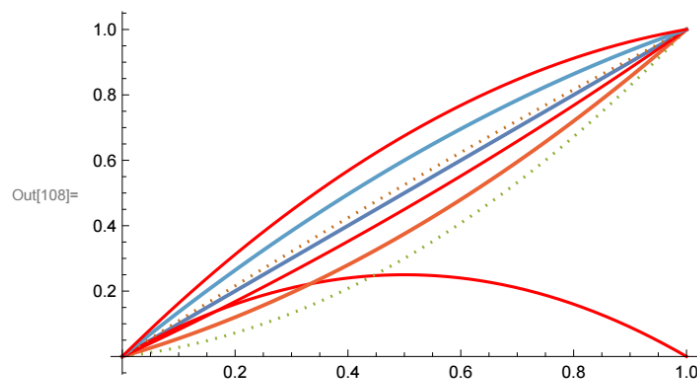
Η δεύτερη μεταβολή δ2J(y0,h)=

$$\frac{(1-2x)^2 \text{Integral}^{(1, \{\theta, \theta, \theta\})}[\sqrt{2}, \{x, \theta, 1\}]}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} (1-2x)^2 \text{Integral}^{(2, \{\theta, \theta, \theta\})}[\sqrt{2}, \{x, \theta, 1\}]$$


Η οικογένεια καμπυλών y0+εh≡ x + (1-x) x ε

In[108]:= Plot[{y0[x], h[x], Evaluate[Table[y0[x] + ε * h[x], {ε, -0.8, 0.8, .3}]]},
{x, 0, 1}, PlotStyle → {Thick, Red, {Dotted}}, ImageSize → {320, 240}]

```

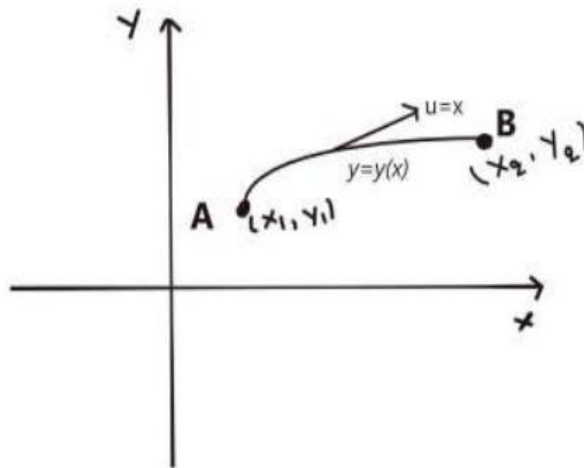


Σχήμα 5 Μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών για  $\epsilon = 0.2, 0.4, \dots, 0.8$ .

Παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό  $J(y)$  είναι στάσιμο στο  $y_0(x) = x$  ως προς την κατεύθυνση  $h(x) = x - x^2$

### 2.3.8 Εύρεση καμπύλης ελάχιστου μήκους σώματος που κινείται με σταθερή ταχύτητα

Θα βρούμε την καμπύλη ελάχιστου μήκους που διανύει ένα σώμα ,όταν η ταχύτητα σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς είναι  $u = x$  m/sec .



Σχήμα 6 Καμπύλη ελάχιστου μήκους σώματος με ταχύτητα  $x$  m/sec.

Έχουμε το συναρτησιακό  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{u} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y(x)')^2}}{x} dx$ . Με την

Λανγκρανζιανή μας να ισούται με :  $L(x, y') = \frac{\sqrt{1+(y(x)')^2}}{x}$ .

Επομένως θα πρέπει να ισχύουν :  $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$  και  $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'(x)}{x\sqrt{1+y'(x)^2}}$ .

Άρα για την εξίσωση Euler – Lagrange θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 - \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{x\sqrt{1+y'(x)^2}} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{x\sqrt{1+y'(x)^2}} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{y'(x)}{x\sqrt{1+y'(x)^2}} = c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας με  $y'(x) = \tan t = \frac{dy}{dx}$ , (1), παίρνουμε :

$$\frac{\tan t}{x \sec t} = c \Rightarrow x = \frac{1}{c} \sin t \Rightarrow x = c_1 \sin t, (2),$$

$$\frac{1}{c} = c_1, c \in \mathbb{R} \text{ και } \frac{dx}{dt} = c_1 \cos t, (3).$$

Επειδή όμως  $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \stackrel{(1)}{=} \tan t \cdot c_1 \cdot \cos t = c_1 \sin t$ , τελικά θα πάρουμε ότι :

$$\frac{dy}{dt} = c_1 \sin t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int y'(t) dt = \int c_1 \sin t dt \Rightarrow y(t) = -c_1 \cos t + c_2, (4), c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Αν γράψουμε (4)  $\Rightarrow y(t) - c_2 = -c_1 \cos t$ , (5), τότε υψώνοντας στο τετράγωνο τις

σχέσεις (2), (5), θα έχουμε :

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow x^2 = c_1^2 \sin^2 t & (+) \\ (5) \Rightarrow (y(t) - c_2)^2 = c_1^2 \cos^2 t & \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + (y(t) - c_2)^2 = c_1^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \Rightarrow x^2 + (y(t) - c_2)^2 = c_1^2$ , για να πάρουμε τελικά ότι οι άκρες τιμές του συναρτησιακού, μας δίνουν περιφέρεια κύκλου, με κέντρο  $K(0, c_2)$  και ακτίνα  $c_1$ .

### 2.3.9 3<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange

Αν η Λανγκρανζιανή δεν εξαρτάται από την μεταβλητή  $x$ , τότε θα έχουμε ότι :

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \Rightarrow \frac{dL}{dx} = y' \frac{\partial L}{\partial y} + y'' \frac{\partial L}{\partial y'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} L = \left( y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} \right) L \quad \mu\epsilon \quad \frac{d}{dx} = y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Άρα για την εξίσωση Euler – Lagrange θα έχουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow L_y - \left( y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} \right) L_{y'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_y - y' \frac{\partial}{\partial y} (L_{y'}) - y'' \frac{\partial}{\partial y'} (L_{y'}) = 0 \Rightarrow L_y - y' L_{y y'} - y'' L_{y' y'} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της παραπάνω εξίσωσης με  $y'$ , θα έχουμε :

$$y' L_y - y'^2 L_{y,y'} - y' y'' L_{y',y'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} (L - y' L_{y'}) = 0 \Rightarrow L - y' L_{y'} = \text{σταθερό} .$$

Το συναρτησιακό μας εδώ, θα είναι της μορφής :

$$J(y(x)) = \int_a^b L(y, y') dx$$

### 2.3.10 Εφαρμογή στην 3<sup>η</sup> Περίπτωση εξίσωσης Euler Lagrange

Έστω ότι έχουμε το συναρτησιακό  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'^2 - u^2 y^2}{2} dx$  .

Τότε θα πάρουμε :  $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{2} 2y' = y'$  . Θα δείξουμε ότι για την εξίσωση Euler-

Lagrange, θα πάρουμε ότι:

$$L - y' L_{y'} = \text{σταθερό} \Rightarrow \frac{y'^2 - u^2 y^2}{2} - y'^2 = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} u^2 y^2 - y'^2 = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} y'^2 - \frac{1}{2} u^2 y^2 = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} u^2 y^2 = c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'^2 + u^2 y^2 = c_3 \quad (1) , \text{ με } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} .$$

Η γενική λύση της θα είναι η  $y(x) = A \cos(ux) + B \sin(ux)$ , με  $A, B \in \mathbb{R}$  και παραγωγίζοντας θα πάρουμε  $y'(x) = -u A \sin(ux) + u B \cos(ux)$ .

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow (-u A \sin(ux) + u B \cos(ux))^2 + u^2 (A \cos(ux) + B \sin(ux))^2 = c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 A^2 (\sin^2(ux) + \cos^2(ux)) + u^2 B^2 (\sin^2(ux) + \cos^2(ux)) = c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^2 (A^2 + B^2) = c_3 = \text{σταθερό.}$$

Τελικά επαληθεύτηκε ο αρχικός ισχυρισμός, για το πρώτο ολοκλήρωμα να είναι σταθερό.

### 2.3.11 Η αρχή του Fermat

Η αρχή του Fermat της γεωμετρικής οπτικής αναφέρει ότι :

μία ακτίνα φωτός (ας υποθέσουμε στο  $x-y$  επίπεδο), που συνδέει δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , ενός μέσου με δείκτη διάθλασης  $u = u(r)$ , έπεται στο δρόμο του ελάχιστου χρόνου φωτεινής διαδρομής.

Αν ο δείκτης διάθλασης είναι συνάρτηση μόνο του  $y$  τότε σύμφωνα με την αρχή του Fermat θα έχουμε του συναρτησιακό :

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} n(y) \sqrt{1 + (y(x)')^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} L(y, y') dx.$$

Η Λανγκρανζιανή θα είναι ίση με :  $L(y, y') = n(y) \sqrt{1 + (y(x)')^2}$ .

Έτσι για την εξίσωση Euler – Lagrange θα έχουμε :

$$L - y' L_{y'} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n(y) \sqrt{1 + (y(x)')^2} - y'(x) n(y) \frac{2 y'(x)}{2 \sqrt{1 + (y(x)')^2}} = c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{n(y) (1+(y(x)')^2) - n(y) y'(x)^2}{\sqrt{1+(y(x)')^2}} = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(y)}{\sqrt{1+(y(x)')^2}} = c_1 .$$

### 2.3.12 Το Βραχυστόχρονο πρόβλημα (Brachis to Chrono's Problem, Johann Bernoulli 1666)

Μεταξύ δύο σημείων  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$ , σώμα μάζας  $m$ , αφήνεται να ολισθήσει χωρίς αρχική ταχύτητα κατά μήκος μιας καμπύλης  $y = y(x)$ , στο επίπεδο  $x, y$ .

Θα βρούμε εκείνη την καμπύλη η οποία δίνει τον ταχύτερο χρόνο καθόδου, δηλαδή την καμπύλη που πρέπει να διαγράψει το σώμα μόνο με την επίδραση του βάρους (τριβές και αντίσταση του αέρα θεωρούνται αμελητέες), έτσι ώστε η διαδρομή  $AB$  να γίνεται ελάχιστη

Αν  $y = y(x)$  η καμπύλη που συνδέει τα σημεία  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$ , με  $x_1 > x_0$ ,  $y_0 > y_1$  έχουμε να υπολογίσουμε πρώτα το χρόνο καθόδου  $T$  του σώματος.

Η ταχύτητα κατά μήκος της καμπύλης  $y = y(x)$ , την οποία και ονομάζουμε  $u$ , θα είναι για ένα μήκος τόξου  $s$  επί της καμπύλης:

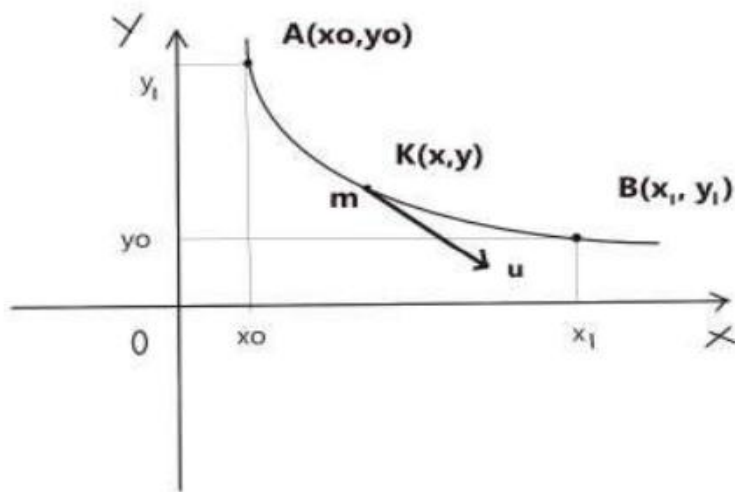
$$u = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{\sqrt{dx^2 \left( 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)}}{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{u} \Rightarrow dt = dx \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{u}.$$

$$\text{Άρα } T_{\text{ολικό}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y(x)')^2}}{u} dx, \text{ με } y(x_0) = y_0 \text{ και } y(x_1) = y_1, y_0 > y_1.$$



Σχήμα 7 Ολίσθηση μάζας  $m$  μεταξύ δύο σημείων A,B.

Επειδή όμως έχουμε κίνηση χωρίς τριβή και συντηρητικό πεδίο δυνάμεων, αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια διατηρείται και έτσι η μηχανική ενέργεια του συστήματός μας παραμένει σταθερή.

$$\begin{aligned} \text{Άρα : } E_{\text{μηχανική}(t=0)} &= E_{\text{μηχανική}(t>0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{\text{δυναμική}(t=0)} + E_{\text{κινητική}(t=0)} &= E_{\text{δυναμική}(t>0)} + E_{\text{κινητική}(t>0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow m g y_0 + 0 &= m g y + \frac{1}{2} m u^2 \Rightarrow g y_0 - g y = \frac{u^2}{2} \Rightarrow u = \sqrt{2 g (y_0 - y)} \Rightarrow \\ \Rightarrow u(y) &= \sqrt{2 g (y_0 - y(x))}. \end{aligned}$$

Επομένως ο χρόνος που απαιτείται για την κάθοδο του σώματος θα είναι :

$$T(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y(x)')^2}}{u(y)} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y(x)')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y(x))}} dx, \text{ με το } T \text{ να εξαρτάται από}$$

την καμπύλη  $y$ .

Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου συνίσταται στην εύρεση ελάχιστου ακροτάτου για το

συναρτησιακό :  $T(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(y(x)')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y(x))}} dx$ . Παρατηρούμε ότι η Λανγκρανζιανή ,

είναι ανεξάρτητη του  $x$  , με  $L(y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}$  .

Έτσι η εξίσωση Euler – Lagrange θα είναι :

$$\begin{aligned} L - y' L_{y'} &= \text{σταθερό} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2g(y_0-y)} \sqrt{1+y'^2}} &= c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2g(y_0-y)}} \left( \sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} \right) &= c_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \sqrt{2g(y_0-y)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = c_1 \sqrt{2g} \sqrt{(y_0-y)} \stackrel{\sqrt{2g} c_1 = c \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} &= c \sqrt{(y_0-y)} \Rightarrow \frac{1}{c^2 (y_0-y)} = 1+y'^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{c^2 (y_0-y)} - 1 &= y'^2 \Rightarrow \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{1-c^2 (y_0-y)}{c^2 (y_0-y)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \pm \sqrt{\frac{1-c^2 (y_0-y)}{c^2 (y_0-y)}} . \end{aligned}$$

Κατά μήκος της καμπύλης  $y(x)$  , έχουμε ότι  $y(x) < y_0$  , για κάθε  $x \in [x_0, x_1]$  και έτσι

θα έχουμε ότι :  $\frac{dy}{dx} < 0$  . Άρα η προηγούμενη μας σχέση θα γίνει:

$$\frac{dy}{dx} = - \sqrt{\frac{1-c^2 (y_0-y)}{c^2 (y_0-y)}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \sqrt{\frac{c^2 \left( \frac{1}{c^2} - y_0 + y \right)}{c^2 (y_0-y)}} \stackrel{\text{Θέτουμε } \frac{1}{c^2} = A}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{A-y_0+y}{y_0-y}} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sqrt{\frac{y_0-y}{A-y_0+y}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\sqrt{\frac{y_0-y}{A-(y_0-y)}} \Rightarrow dx = -\sqrt{\frac{y_0-y}{A-(y_0-y)}} dy, (1).$$

Και τελικά αντικαθιστώντας τριγωνομετρικά θα έχουμε :

$$y_0 - y = A \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \Rightarrow d(y_0 - y) = d\left(A \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -dy = 2A \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} d\phi \Rightarrow dy = -A \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi, (2).$$

$$\text{Άρα (1)} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} dx = -\frac{\sqrt{A \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}{\sqrt{A - A \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}} dy \Rightarrow dx = -\frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}} dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)} A \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi \Rightarrow dx = A \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) d\phi, (3).$$

Με τους γνωστούς τύπους αποτετραγωνισμού της τριγωνομετρίας θα έχουμε :

$$\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\phi)}{2}, (4)$$

Και έτσι η προηγούμενη σχέση (3) θα γίνει :

$$(3) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} dx = A \frac{1 - \cos(\phi)}{2} d\phi \Rightarrow dx = \frac{A}{2} (1 - \cos(\phi)) d\phi$$

και με ολοκλήρωση θα έχουμε :

$$\int dx = \int \frac{A}{2} (1 - \cos(\phi)) d\phi \Rightarrow$$

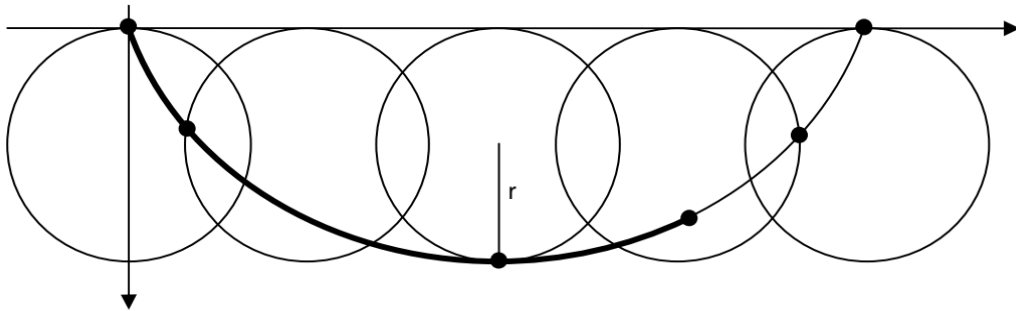
$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} (\phi - \sin(\phi)) + B, B \in \mathbb{R}.$$

Θα έχουμε λοιπόν τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} y_0 - y = A \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \text{και} \quad x = \frac{A}{2} (\phi - \sin(\phi)) + B \end{cases}$$

Οι οποίες και αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις του κυκλοειδούς, δηλαδή την λύση του βραχυστόχρονου.

*Η κυκλοειδής καμπύλη είναι «ισόχρονη» και «βραχυστόχρονη»*

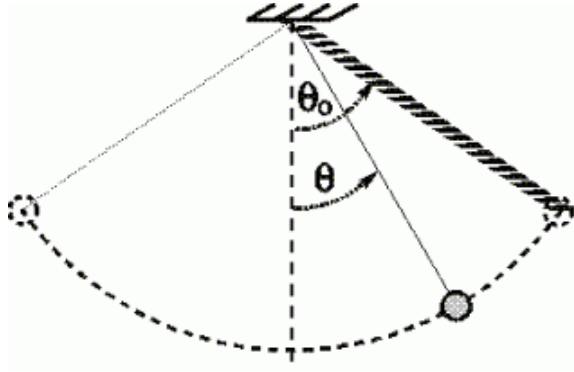


**Σχήμα 8 Κυκλοειδής καμπύλη**  
(Ηλιοπούλου, 2009)

Το 1696 ο Johann Bernoulli έθεσε στους μαθηματικούς της εποχής του το εξής πρόβλημα:

Έστω ότι έχουμε δυο δεδομένα σημεία A και B σε ένα κατακόρυφο επίπεδο. Ζητείται να βρεθεί η καμπύλη την οποία πρέπει να διαγράψει μια σημειακή μάζα υπό την επίδραση της βαρύτητας, έτσι ώστε ξεκινώντας από το A και χωρίς αρχική ταχύτητα να φτάσει χωρίς τριβές στο B στον ελάχιστο χρόνο.

Λύσεις στο πρόβλημα Bernoulli έδωσαν οι Leibniz, de l' Hospital, Jacob Bernoulli (αδερφός του Johann) και πιθανώς ο ίδιος ο Νεύτωνας με ψευδώνυμο.



Σχήμα 9 η κυκλοειδής καμπύλη είναι ισόχρονη

(<https://physicsgg.me>)

Η λύση δόθηκε από τον ίδιο τον Johann Bernoulli ο οποίος ξεκινώντας από ένα πρόβλημα μηχανικής έφτασε σε ένα πρόβλημα οπτικής, χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat. Δηλαδή ότι το φως όταν κινείται μεταξύ δυο σημείων διασχίζει τη διαδρομή που απαιτεί το ελάχιστο χρονικό διάστημα (πηγή: <https://physicsgg.me>).

Το πρόβλημα της βραχυστόχρονης που οδηγεί στην κυκλοειδή καμπύλη, καθοδήγησε την ανάπτυξη του λογισμού των μεταβολών και την διατύπωση της κλασικής μηχανικής μέσω των εξισώσεων Lagrange και Hamilton, που αποτέλεσαν την βάση για τη μαθηματική θεμελίωση της κβαντομηχανικής.

Θα προσπαθήσουμε με την βοήθεια του mathematica να πλησιάσουμε το παραπάνω σχήμα:

In[1]= **Clear["Global`\*"]**

In[2]= **solut = DSolve[{D[#, y[x]] - D[D[#, y'[x]], x] == 0}, y[x], x] &@Sqrt[(1 + y'[x]^2) / (y[x])]**  
**slt = ((y[x] /. solut) /. {C[1] -> 0, C[2] -> 0})**

Out[2]=  $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \text{InverseFunction} \left[ e^{2c_1} \text{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{e^{2c_1} - 1}} \right] - \sqrt{e^{2c_1} - 1} \sqrt{1} \right] [x + c_2] \right\}, \right.$

$\left. \left\{ y[x] \rightarrow \text{InverseFunction} \left[ -e^{2c_1} \text{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{e^{2c_1} - 1}} \right] + \sqrt{e^{2c_1} - 1} \sqrt{1} \right] [x + c_2] \right\} \right\}$

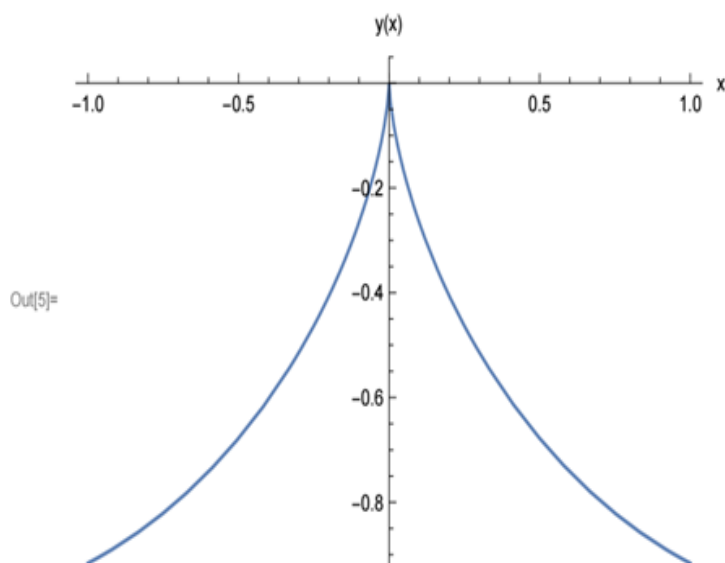
Out[3]=  $\left\{ \text{InverseFunction} \left[ e^{2\theta} \text{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{e^{2\theta} - 1}} \right] - \sqrt{e^{2\theta} - 1} \sqrt{1} \right] [x], \right.$

$\left. \text{InverseFunction} \left[ -e^{2\theta} \text{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{e^{2\theta} - 1}} \right] + \sqrt{e^{2\theta} - 1} \sqrt{1} \right] [x] \right\}$

In[4]= **ArcTan[Sqrt[y] / Sqrt[1 - y]] - Sqrt[1 - y] × Sqrt[y]**

Out[4]=  $-\sqrt{1-y} \sqrt{y} + \text{ArcTan} \left[ \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1-y}} \right]$

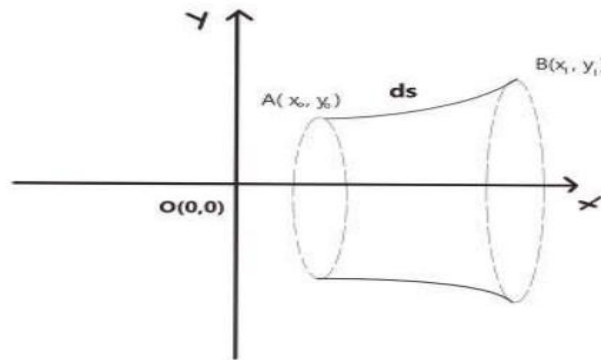
In[5]= **Plot[-slt, {x, -1, 1}, AxesLabel -> {"x", "y(x)"}, PerformanceGoal -> "Speed"]**



### 2.3.13 Εύρεση ελάχιστης επιφάνειας περιστροφής τμήματος καμπύλης.

Θα δείξουμε ότι η ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής, η οποία ορίζεται από δύο σημεία κατά μήκος μιας καμπύλης  $y = y(x)$ , ενός ημιεπιπέδου (θεωρώντας ότι το όριο του ημιεπιπέδου είναι ο άξονας περιστροφής της επιφάνειας), είναι :

$$2 \pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx .$$



Σχήμα 10 Περιστροφή της επιφάνειας γύρω από τον x'x άξονα.

Για το εμβαδό της επιφάνειας της καμπύλης  $y = f(x)$  μεταξύ των δύο σημείων

$$A(x_0, y_0) \text{ και } B(x_1, y_1) \text{ είναι : } J(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} 2 \pi y ds = 2 \pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx .$$

Η Λανγκρανζιανή θα είναι  $L = 2 \pi y \sqrt{1 + y'^2}$

Γνωρίζουμε ότι απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη άκρων τιμών είναι :

$$L - y' L_{y'} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \pi y \sqrt{1 + y'^2} - y' 2 \pi y \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow y \sqrt{1+y'^2} - y \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y(1+y'^2) - y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{σταθερό} = c, (1). \text{ Θέτουμε : } \sinh(t) = \frac{dy}{dx} = y' \text{ και έτσι η σχέση (1)}$$

θα γίνει :

$$\frac{y}{\cosh(t)} = c \Rightarrow y = c \cdot \cosh(t), (2) .$$

Επειδή όμως  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\sinh(t)} \cdot c \cdot \sinh(t) = c$  , έτσι θα έχουμε :

$$\frac{dx}{dt} = c \Rightarrow dx = c dt \text{ και με ολοκλήρωση } x = c t + c_1, \quad c, c_1 \in \mathbb{R}, \text{ από όπου και}$$

παίρνουμε :  $t = \frac{x-c_1}{c}, (3) .$  Τελικά λόγω της σχέσης (2)  $\Rightarrow y = c \cdot \cosh\left(\frac{x-c_1}{c}\right)$  , που

είναι και το ζητούμενο .

Επαλήθευση με mathematica...

```
Clear["Global`*"]
```

```
<< VariationalMethods`
```

```
J = Integral[2 * Pi * y[x] * (1 + D[y[x], x]^2)^(1/2), {x, a, b}];
```

```
L[y_, x_] := 2 * Pi * y[x] * (1 + D[y[x], x]^2)^(1/2);
```

```
ode = EulerEquations[L[y, x], y[x], x];
```

```
Print["Εξίσωση Euler:", Simplify[ode]]
```

Εξίσωση Euler: 
$$\frac{1 + y'[x]^2 - y[x] y''[x]}{(1 + y'[x]^2)^{3/2}} = 0$$

```
D[y[x], x] == Sinh[t];
```

```
Print["Εξίσωση Euler:", Simplify[ode]]
```

Εξίσωση Euler: 
$$\frac{1 + y'[x]^2 - y[x] y''[x]}{(1 + y'[x]^2)^{3/2}} = 0$$

```
D[y[x], x] == Sinh[t]
```

```
y'[x] == Sinh[t]
```

```
sol = DSolve[ode, y[x], x];
```

```
sol = Flatten[sol];
```

```
y[x_] = y[x] /. sol /. {C[1] -> c1, C[2] -> c};
```

```
Print["Λύση της ODE (εξίσωσης Euler): y(x) = ", y[x] ]
```

Λύση της ODE (εξίσωσης Euler): 
$$y(x) = -\frac{e^{-c_1} \operatorname{Tanh}[e^{c_1} (c + x)]}{\sqrt{-1 + \operatorname{Tanh}[e^{c_1} (c + x)]^2}}$$

## 2.4 Το Πρόβλημα διάδοσης μιας φωτεινής ακτίνας σε ένα μέσο

Κατά την διάδοση μιας φωτεινής ακτίνας σε ένα μέσο , από ένα σημείο σε ένα άλλο, έχουμε τον χρόνο μετάδοσης της ακτίνας να δίνεται:

$$\int \frac{ds}{v(x, y)}, \quad \text{έτσι ώστε} \quad \begin{cases} s = \text{μήκος τόξου} \\ \text{και} \\ v(x, y) = \eta \text{ ταχύτητα του φωτός στο μέσο} \end{cases}$$

Αν η  $v(x, y)$  είναι η μέγιστη, τότε θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι η διαδρομή της φωτεινής ακτίνας θα δίνεται από την εξίσωση:

$$v \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{dy}{dx} \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Έχουμε το συναρτησιακό μας :  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v(x, y)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x, y)} dx$

και την Λανγκρανζιανή  $L = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}$ . Θα έχουμε λοιπόν  $\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y}$

και  $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}}$ . Άρα η εξίσωση Euler – Lagrange θα είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v^2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y'' v \sqrt{1+y'^2} - y' \frac{d}{dx} (v \sqrt{1+y'^2})}{v^2 (1+y'^2)} \Rightarrow$$

$$\stackrel{v^2 > 0}{\Rightarrow} -\sqrt{1+y'^2} (1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial y} = y'' v \sqrt{1+y'^2} - y' \frac{d}{dx} (v \sqrt{1+y'^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} = y'' v \sqrt{1+y'^2} - y' \frac{d}{dx} (v \sqrt{1+y'^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} = y'' v \sqrt{1+y'^2} - y' \left[ \frac{dv}{dx} \sqrt{1+y'^2} + v \frac{y' y''}{\sqrt{1+y'^2}} \right] \Rightarrow$$

$$\stackrel{\cdot \sqrt{1+y'^2}}{\Rightarrow} -\sqrt{1+y'^2} (1+y'^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\partial v}{\partial y} = y'' v (1+y'^2) - y' \frac{dv}{dx} (1+y'^2) - v y'^2 y'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - (1+y'^2)^2 \frac{\partial v}{\partial y} = y'' v + v y'^2 y'' - y' \frac{dv}{dx} (1+y'^2) - v y'^2 y'' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - (1+y'^2)^2 \frac{\partial v}{\partial y} = v y'' - y' \frac{dv}{dx} (1+y'^2), (1).$$

Επειδή όμως  $v = v(x, y)$ , θα έχουμε ότι :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y', (2)$$

Άρα λόγω των σχέσεων (1), (2), παίρνουμε :

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} - (1+y'^2)^2 \frac{\partial v}{\partial y} = v y'' - y' (1+y'^2) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v y'' - y' (1+y'^2) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' \right] + (1+y'^2)^2 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v y'' - y'(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} - y'^2(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial y} + (1+y'^2)^2 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v y'' - y'(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} + (1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial y} [1+y'^2 - y'^2] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v y'' - y'(1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial x} + (1+y'^2) \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v y'' + (1+y'^2) \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - y' \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Έτσι αποδείξαμε το ζητούμενο.

#### 2.4.1 Εύρεση της μέγιστης διαδρομής της φωτεινής ακτίνας

Στο προηγούμενο πρόβλημα της παραγράφου 2.4, θα δείξουμε ότι η μορφή της καμπύλης για  $v(x,y) = y$ , καταλήγει σε κύκλο.

Για  $v = y = v(x,y)$ , θα έχουμε :  $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$  και  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Επομένως η τελική διαφορική

εξίσωση του προβλήματος διάδοσης του φωτός της παραγράφου 2.4, θα μας δώσει :

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 0 \quad \begin{matrix} \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{dy}{dx} \cdot 0 \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0, \quad (1).$$

Η διαφορική εξίσωση (1), είναι Clairaut – Lagrange και για να βρούμε την λύση της θα

καλέσουμε :  $\frac{dy}{dx} = y' = p$  και  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = y' \frac{dp}{dy} = p \frac{dp}{dy}$  και στη

συνέχεια θα παραγωγίσουμε ως προς την μεταβλητή  $x$ .

Άρα θα έχουμε : (1)  $\Rightarrow y p \frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0 \Rightarrow y p \frac{dp}{dy} = -(p^2 + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{p}{p^2 + 1} dp = -\frac{1}{y} dy \quad \text{και έτσι η χωριζομένων μεταβλητών διαφορική μας}$$

εξίσωση, θα γίνει:

$$\int \frac{p}{p^2 + 1} dp = - \int \frac{1}{y} dy \quad \overset{p > 0}{\Rightarrow} \quad \ln(p^2 + 1) = -2 \ln y + 2c, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(p^2 + 1) = -2 \ln y + 2c, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow \quad \ln(p^2 + 1) + 2 \ln y = 2c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln [y^2 (p^2 + 1)] = 2c \Rightarrow \Rightarrow e^{2c} = y^2 (p^2 + 1) \quad \begin{matrix} c_1^2 = 2c \\ c_1 \in \mathbb{R} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 (p^2 + 1) = c_1^2 \Rightarrow \Rightarrow y^2 p^2 + y^2 = c_1^2 \Rightarrow y^2 p^2 = c_1^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 p^2 + y^2 = c_1^2 \Rightarrow y^2 p^2 = c_1^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{c_1^2 - y^2}{y^2} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{c_1^2 - y^2}}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{c_1^2 - y^2}}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} dy = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} dy = \int dx, (1).$$

Θέτουμε:

$$c_1^2 - y^2 = z \Rightarrow \begin{cases} d(c_1^2 - y^2) = dz \Rightarrow -2y dy = dz \Rightarrow y dy = \frac{-1}{2} dz, (2). \\ \text{και} \\ y = \sqrt{c_1^2 - z^2}, (3). \end{cases}$$

Επομένως

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \int \frac{\frac{-1}{2} dz}{\sqrt{z}} = x + b, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \frac{dz}{2\sqrt{z}} = x + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{z} = x + b \Rightarrow z = (x + b)^2 \Rightarrow c_1^2 - y^2 = (x + b)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + b)^2 + y^2 = c_1^2.$$

Άρα τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μορφή της αρχικής μας καμπύλης για  $v(x,y) = y$ , θα είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(-b, 0)$  και ακτίνα  $R = c_1$ .





### 3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΑ

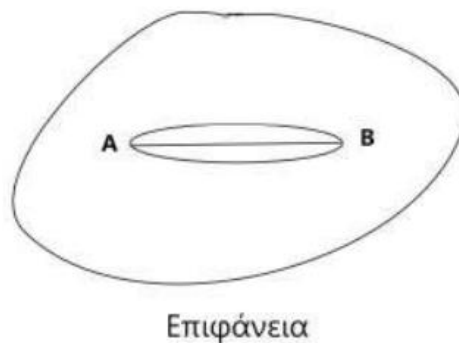
#### 3.1 Γεωδαισιακές Καμπύλες (Γεωδαισιακά ή Γεωδαιτικές καμπύλες)

Γεωδαισιακή καμπύλη ονομάζουμε την καμπύλη η οποία ενώνει δύο σημεία A και B της επιφάνειας και έχει την ιδιότητα να ελαχιστοποιεί το μήκος της .

Τις Γεωδαισιακές καμπύλες μπορούμε να τις χαρακτηρίσουμε με δύο ισοδύναμους τρόπους με τους οποίους χαρακτηρίζουμε τις ευθείες στο επίπεδο .

- Σε ευθείες καμπύλες της επιφάνειας, δηλαδή καμπύλες στις οποίες τα εφαπτόμενα διανύσματά τους παραμένουν σταθερά .
- Σε επιφανειακές καμπύλες που ελαχιστοποιούν τοπικά το μήκος . Η Εύρεση ενός γεωδαισιακού σε μία επιφάνεια (συνήθως είναι ευθείες γραμμές , σχήμα 11) αποτελεί ένα μεταβολικό πρόβλημα .
- Η έκφρασή της ως συναρτησιακό θα είναι της μορφής :

$$J(y) = \int_A^B L(u, v, v') du$$



Σχήμα 11 (Singh, May 28, 2021)

### 3.2 Εύρεση Γεωδαιτικής καμπύλης

Η εύρεση μιας γεωδαιτικής καμπύλης σε μία επιφάνεια αποτελεί ένα κλασικό πρόβλημα της διαφορικής γεωμετρίας. Ο Λογισμός μεταβολών φαίνεται να εφαρμόζεται αποκλειστικά στο πρόβλημα αυτό.

Ας εξετάσουμε μία παραμετρικά δοσμένη επιφάνεια με τα δύο σημεία της επιφάνειας να είναι:

$$r_0 = x(u_0, v_0) \cdot i + y(u_0, v_0) \cdot j + z(u_0, v_0) \cdot k$$

και 
$$r_1 = x(u_1, v_1) \cdot i + y(u_1, v_1) \cdot j + z(u_1, v_1) \cdot k$$

Η συντομότερη διαδρομή στην επιφάνεια μεταξύ των δύο σημείων είναι η γεωδαιτική καμπύλη.

Για το τετράγωνο του μήκους τόξου της καμπύλης

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

θα υπολογίσουμε τις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες σχετίζονται με τις παραμέτρους

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2 F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2,$$

όπου οι λεγόμενες πρώτες θεμελιώδεις ποσότητες  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ , ορίζονται ως εξής :

$$E(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = |r_u'|^2, \quad ,$$

$$F(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = r_u' \cdot r_v', \quad ,$$

$$G(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = |r_v'|^2. \quad .$$

Ας υποθέσουμε ότι εξίσωση της γεωδαιτικής καμπύλης περιγράφεται από την  $v = v(u)$ . Τότε η γεωδαιτική καμπύλη θα είναι η λύση του ισοδύναμου μας μεταβολικού προβλήματος εύρεσης των άκρων τιμών του συναρτησιακού :

$$J(v) = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E(u, v) + 2 F(u, v) \frac{dv}{du} + G(u, v) \left( \frac{dv}{du} \right)^2} du, \quad \text{με}$$

συνοριακές συνθήκες  $v(u_0) = v_0$  και  $v(u_1) = v_1$ .

Έτσι, θα έχουμε την Λανγκρανζιανή

$$L = \sqrt{E(u, v) + 2 F(u, v) \frac{dv}{du} + G(u, v) \left( \frac{dv}{du} \right)^2}.$$

Θα έχουμε επίσης:  $\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{E_v + 2v' F_v + v'^2 G_v}{2\sqrt{E(u, v) + 2v' F(u, v) + v'^2 G(u, v)}}$  και

$$\frac{\partial L}{\partial v'} = \frac{F + G v'}{\sqrt{E(u, v) + 2v' F(u, v) + v'^2 G(u, v)}}.$$

Άρα για  $E_v = \frac{\partial E}{\partial v}$ ,  $F_v = \frac{\partial F}{\partial v}$ ,  $G_v = \frac{\partial G}{\partial v}$ ,  $v' = \frac{dv}{du}$ , η εξίσωση Euler – Lagrange

θα γίνει :

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial L}{\partial v'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_v + 2v' F_v + v'^2 G_v}{2\sqrt{E(u, v) + 2v' F(u, v) + v'^2 G(u, v)}} - \frac{d}{du} \left( \frac{F + G v'}{\sqrt{E(u, v) + 2v' F(u, v) + v'^2 G(u, v)}} \right) = 0, (1).$$

Όταν οι πρώτες θεμελιώδεις ποσότητες  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$  αποτελούν μόνο συναρτήσεις της παραμέτρου  $u$ , τότε μπορούμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση (1) με το να καλέσουμε

$$\frac{F + G v'}{\sqrt{E(u, v) + 2v' F(u, v) + v'^2 G(u, v)}} = c_1, c_1 \in \mathbb{R}, (2).$$

Η εξίσωση (1) μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο, αν βασιστούμε στην πρακτική περίπτωση, όπου οι παραμετρικές γραμμές των  $u$ ,  $v$ , που ορίζουν επιφάνεια είναι ορθογώνιες.

Τότε θα έχουμε  $F = 0$  και έτσι η απλοποιημένη πλέον εξίσωση (1) θα πάρει τη μορφή

$$(1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \frac{G v'^2}{\sqrt{E(u, v) + v'^2 G(u, v)}} - \sqrt{E(u, v) + v'^2 G(u, v)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = c_1 \int \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G^2 - c_1^2 G}} du + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v = c_1 \int \frac{\sqrt{EG^2 - c_1^2 EG}}{\sqrt{G}} du + c_2 .$$

### 3.3 Γεωδαιτικές γραμμές μιας σφαίρας

Έστω ότι έχουμε την σφαίρα :

$$\begin{cases} x(u, v) = r \sin v \cos u \\ y(u, v) = r \sin v \sin u \\ z(u, v) = r \cos v \end{cases}$$

Τα πρώτα θεμελιώδη μεγέθη τα οποία μας δίνουν πληροφορίες για την επιφάνεια είναι τα:

$$E = r^2 \sin^2 v, \quad F = 0 \quad \text{και} \quad G = r^2.$$

Στην περίπτωση μας έχουμε τις πρώτες θεμελιώδεις ποσότητες  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(u, v)$ , να αποτελούν μόνο συναρτήσεις της παραμέτρου  $v$ , άρα αντίστοιχα με την προηγούμενη παράγραφο 3.2, θα έχουμε :

$$u = c_1 \int \frac{r}{\sqrt{r^4 \sin^4 v - c_1^2 r^2 \sin^2 v}} dv + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

όπου μετά από ολοκλήρωση και αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στο

$$u = -a \sin \left( \frac{\cot v}{\sqrt{\left(\frac{r}{c_1}\right)^2 - 1}} \right) + c_2, \quad a, c_2 \in \mathbb{R},$$

για να πάρουμε ότι :

$$\sin c_2 \cdot [r \sin v \cos u] - \cos c_2 [r \sin v \sin u] - \frac{r \cos v}{\sqrt{\left(\frac{r}{c_1}\right)^2 - 1}} = 0$$

από όπου αντικαθιστώντας στον επιφανειακό ορισμό της σφαίρας, τελικά θα έχουμε :

$$x \cdot \sin c_2 - y \cos c_2 - \frac{z}{\sqrt{\left(\frac{r}{c_1}\right)^2 - 1}} = 0, (3).$$

Η εξίσωση (3) παριστάνει την τομή μιας σφαίρας με ένα επίπεδο.

Με την βοήθεια των συνοριακών συνθηκών τελικά διαπιστώνουμε ότι το πραγματικό επίπεδο περιέχει την αρχή και ορίζει τον μεγάλο κύκλο που διέρχεται από δύο δεδομένα σημεία.

### 3.4 Γεωδαιτικές καμπύλες ενός δεξιόστροφου κυκλικού κυλίνδρου

Για το μήκος ενός τόξου στον κυκλικό κύλινδρο, θα έχουμε:

$ds^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + dz^2$ , (1), με  $r = a =$  ακίνα του κυλίνδρου. Επομένως συνεχίζοντας από την σχέση (1) θα πάρουμε :

$$(1) \Rightarrow ds^2 = 0 + a^2 d\theta^2 + dz^2 \Rightarrow ds^2 = \left[ a^2 + \left( \frac{dz}{d\theta} \right)^2 \right] d\theta^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z' &= \frac{dz}{d\theta} \\ \Rightarrow ds &= \sqrt{a^2 + z'^2} d\theta. \end{aligned}$$

Η Λανγκρανζιανή μας τώρα θα είναι η  $L = \sqrt{a^2 + z'^2}$ . Θα έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} \quad \text{και έτσι η εξίσωση Euler - Lagrange θα μας δώσει :}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{d}{dx} \left( \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{z'}{\sqrt{a^2 + z'^2}} = c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow z'^2 = (a^2 + z'^2) \cdot c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'^2 (1 - c^2) = a^2 \Rightarrow z' = \frac{a}{\sqrt{1 - c^2}} = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow z' = c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = c_1 \Rightarrow \int dz = c_1 \int d\theta \Rightarrow z = c_1 \theta + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R} .$$

Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η καμπύλη η οποία πήραμε αρχικά ως μήκος ενός τόξου, στον κυκλικό κύλινδρο δίνει ως ακραία τιμή, κυκλικό έλικα.

### 3.5 Γεωδαιτικές καμπύλες ενός δεξιόστροφου κυκλικού κώνου

Για τον δεξιόστροφο κυκλικό κώνο, χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ , για το μήκος ενός τόξου, θα έχουμε:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 a d\varphi^2 \Rightarrow ds = \left[ r^2 \sin^2 a + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{1/2} d\varphi \quad r' = \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2} d\varphi .$$

Το μήκος μιας γραμμής στον κώνο, μεταξύ δύο σημείων A και B, θα είναι:

$$l = \int_A^B ds \Rightarrow l = \int_A^B \sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2} d\varphi .$$

Θα πάρουμε έτσι την Λανγκρανζιανή  $L = \sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2}$ .

Επομένως η εξίσωση Euler – Lagrange θα μας δώσει:

$$L - r' \left( \frac{\partial L}{\partial r'} \right) = c = \text{σταθερό}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2} - r' \left( \frac{r'}{\sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2}} \right) = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \sin^2 a + r'^2 - r'^2 = c \sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 \sin^2 a = c \sqrt{r^2 \sin^2 a + r'^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^4 \sin^4 a = c^2 (r^2 \sin^2 a + r'^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^4 \sin^4 a - c^2 r^2 \sin^2 a = c^2 r'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r' = \frac{1}{c} r \sin a \sqrt{r^2 \sin^2 a - c^2} \Rightarrow$$

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{c} r \sin a \sqrt{r^2 \sin^2 a - c^2} \Rightarrow \frac{dr}{r \sin a \sqrt{r^2 \sin^2 a - c^2}} = \frac{1}{c} d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dr}{r \sin a \sqrt{r^2 \sin^2 a - c^2}} = \int \frac{1}{c} d\varphi \Rightarrow \int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 \sin^2 a - c^2}} = \sin a \frac{1}{c} \int d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \sin a \stackrel{\frac{1}{c} = c_1, c_1 \in \mathbb{R}}{=} c_1 \sec(\varphi \sin a + c_2), c_2 \in \mathbb{R},$$

το οποίο αποτελεί και το ζητούμενο γεωδαιτικό.



## 4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΑ ΑΠΟ ΑΝΩΤΕΡΟΥΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Συναρτησιακά της μορφής  $J(y(x)) = \int_a^b L(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) dx$ .

Η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακραίων τιμών σε συναρτησιακά εξαρτώμενα από ανώτερους παραγώγους είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial L}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}} \right) = 0$$

Η οποία είναι γνωστή ως **εξίσωση Euler – Poisson**.

### 4.1 Ειδικές περιπτώσεις

#### ❖ 1<sup>η</sup> Περίπτωση

Αν το συναρτησιακό μας είναι της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y', y'') dx, \text{ τότε αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακραίων}$$

τιμών είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial L}{\partial y''} \right) = 0 .$$

#### ❖ 2<sup>η</sup> Περίπτωση

Αν το συναρτησιακό μας είναι της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y', y'', y''') dx, \text{ τότε αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη}$$

ακραίων τιμών είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial L}{\partial y'''} \right) = 0 .$$

## 4.2 Εφαρμογή σε συναρτησιακό εξαρτώμενο από ανώτερες παραγώγους μέχρι και 2<sup>η</sup> παράγωγο

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τώρα τις άκρες τιμές για το συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_a^b (y''^2 - 2y'^2 + y^2) dx .$$

Γνωρίζουμε ότι η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακραίων τιμών θα είναι :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial L}{\partial y''} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2y - \frac{d}{dx}(-4y') + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') &= 0 \stackrel{2>0}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow y + 2 \frac{d}{dx}(y') + \frac{d^2}{dx^2}(y'') &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 2 \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^4 y}{dx^4} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y &= 0 , (1) . \end{aligned}$$

Η ομογενής διαφορική εξίσωση (1) , θα έχει χαρακτηριστική λύση :

$$p^4 + 2p^2 + 1 = 0 \Rightarrow (p^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow p = \pm i .$$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς και κατά συνέπεια το ακρότατο του αρχικού μας συναρτησιακού , θα είναι :

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x \quad , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} .$$

### 4.3 Εφαρμογή σε συναρτησιακό εξαρτώμενο από ανώτερες παραγώγους μέχρι και 3<sup>η</sup> παράγωγο

Ας δοκιμάσουμε να βρούμε τα ακρότατα για το συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_a^b (y'''^2 + 2xy) dx .$$

Για την Λανγκρανζιανή θα έχουμε:

$$L = y'''^2 + 2xy .$$

Γνωρίζουμε, ότι η συνθήκη για την ύπαρξη ακραίων τιμών θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial L}{\partial y'''} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - \frac{d}{dx}(0) + \frac{d^2}{dx^2}(0) - \frac{d^3}{dx^3}(2y''') &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 2 \frac{d^3}{dx^3}(y''') &= 0 \stackrel{2>0}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow x - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{d^3 y}{dx^3} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x - \frac{d^6 y}{dx^6} = 0 \Rightarrow \frac{d^6 y}{dx^6} &= x \end{aligned}$$

και τελικά με ολοκλήρωση θα πάρουμε το ακρότατο του αρχικού μας συναρτησιακού:

$$y = \frac{x^7}{7!} + c_1 x^5 + c_2 x^4 + c_3 x^3 + c_4 x^2 + c_5 x + c_6 .$$



## 5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΜΕ ΠΟΛΛΕΣ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Απαραίτητη προϋπόθεση έτσι ώστε το συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_a^b L(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx$$

να έχει ακραίες τιμές, αποτελεί η εξίσωση:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

### 5.1 Ειδικές Περιπτώσεις

#### ❖ 1<sup>η</sup> Περίπτωση

Αν το συναρτησιακό μας είναι της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx,$$

τότε η αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακραίων τιμών είναι οι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y_1'} \right) = 0 \\ \text{και} \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y_2'} \right) = 0 \end{array} \right.$$

## ❖ 2<sup>η</sup> Περίπτωση

Αν το συναρτησιακό μας είναι της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3') dx ,$$

τότε η αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακραίων τιμών είναι οι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y_1'} \right) = 0 \quad \text{και} \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y_2'} \right) = 0 \quad \text{και} \\ \frac{\partial L}{\partial y_3} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y_3'} \right) = 0 \end{array} \right.$$

## 5.2 Εφαρμογή σε συναρτησιακό με δύο εξαρτημένες μεταβλητές μέχρι και πρώτη παράγωγο

Ας δούμε το παράδειγμα εύρεσης άκρων τιμών για το συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 2xy + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right) dx ,$$

με αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Θα έχουμε λοιπόν την Λανγκρανζιανή

$$L = 2xy + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2xy + x'^2 + y'^2$$

και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτου:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0 \\ \text{και} \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - \frac{d}{dt} (2x') = 0 \\ \text{και} \\ 2x - \frac{d}{dt} (2y') = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\stackrel{2>0}{\Rightarrow} \begin{cases} y = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad (1) \\ \text{και} \\ x = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad (2) \end{cases}.$$

Επομένως λόγω των σχέσεων (1), (2), θα πάρουμε:

$$(2) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^4 x}{dt^4} = x \Rightarrow \frac{d^4 x}{dt^4} - x = 0, \quad (3)$$

Η διαφορική εξίσωση (3), θα έχει χαρακτηριστική λύση :

$$p^4 - 1 = 0 \Rightarrow p = \pm 1, p = \pm i .$$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης θα είναι :

$$x(t) = a e^t + b e^{-t} + c \cos t + d \sin t, (4), a, b, c, d \in \mathbb{R} .$$

Έχουμε :

$$\frac{dx}{dt} = a e^t - b e^{-t} - c \sin t + d \cos t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = a e^t + b e^{-t} - c \cos t - d \sin t, (4) .$$

Λόγω της σχέσης (4), θα πάρουμε :

$$(4) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} y(t) = a e^t + b e^{-t} - c \cos t - d \sin t, (5) .$$

$$(4) \stackrel{x(0)=0}{\Rightarrow} 0 = a + b + c, (6) \quad \text{και} \quad (4) \stackrel{x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1}{\Rightarrow} -1 = a e^{\frac{\pi}{2}} + b e^{-\frac{\pi}{2}} + d, (7) .$$

Λόγω της σχέσης (5), θα πάρουμε :

$$(5) \stackrel{y(0)=0}{\Rightarrow} a + b - c = 0, (8) \quad \text{και} \quad (5) \stackrel{y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1}{\Rightarrow} -1 = a e^{\frac{\pi}{2}} + b e^{-\frac{\pi}{2}} - d, (8) .$$

Λύνοντας το σύστημα των σχέσεων (6), (7), (8), (9), παίρνουμε ότι :

$$a = b = c = 0, \quad d = -1 .$$

Για να πάρουμε τελικά ότι οι ακραίες τιμές του αρχικού μας συναρτησιακού θα είναι :

$$(4) \Rightarrow x(t) = -\sin t \quad \text{και} \quad (5) \Rightarrow y(t) = \sin t .$$



### 5.3 Συναρτησιακά που εξαρτώνται από ανεξάρτητες μεταβλητές

Αν το συναρτησιακό μας είναι της μορφής :

$$J(u(x, y)) = \iint_D L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy ,$$

τότε η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακραίων τιμών θα είναι :

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) = 0 , \text{ γνωστή και ως } \mathbf{\text{εξίσωση Euler - Ostrogradsky}},$$

Όπου η  $u(x, y)$ , είναι συνεχής, έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης και ορίζεται στην  $D$  περιοχή.

Αν το συναρτησιακό  $J(u(x, y))$  περιέχει παραγώγους μέχρι δεύτερης τάξης, δηλαδή είναι της μορφής :

$$J(u(x, y)) = \iint_D L(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy , \text{ τότε η}$$

εξίσωση Euler - Ostrogradsky , θα γίνει:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{yy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{xy}} \right) = 0 .$$

#### 5.3.1 Εφαρμογή στο πρόβλημα Dirichlet

Θα βρούμε την εξίσωση Euler - Ostrogradsky για το συναρτησιακό

$$J(u(x, y)) = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy .$$

Από την εξίσωση Euler - Ostrogradsky, θα έχουμε :

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 0 - \frac{\partial}{\partial x} (2u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (2u_y) = 0 \stackrel{-2 < 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y) = 0 \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \nabla^2 u = 0 .$$

Όπως παρατηρούμε, καταλήγουμε στο τέλος στην εξίσωση Laplace, όπου από την επίλυσή της, παίρνουμε τα ακρότατα για το αρχικό μας συναρτησιακό.

### 5.3.2 Δύο Εφαρμογές της Εξίσωσης Euler - Ostrogradsky

#### ➤ Εφαρμογή με δύο μεταβλητές

Ας εφαρμόσουμε τα παραπάνω, δηλαδή να προσπαθήσουμε να βρούμε τις άκρες τιμές για το συναρτησιακό:

$$J(z(x, y)) = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z f(x, y) \right] dx dy$$

με  $f(x, y)$ , γνωστή συνάρτηση. Για την Λαγκρανζιανή μας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} L &= L(x, y, z_x, z_y) = \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z f(x, y) = \\ &= z_x^2 + z_y^2 + 2z f(x, y), \quad (1) \end{aligned}$$

και λόγω Euler – Ostrogradsky θα πάρουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial z_y} \right) &= 0 \quad (1) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2f(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} (2z_x) - \frac{\partial}{\partial y} (2z_y) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} (z_x) - \frac{\partial}{\partial y} (z_y) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y) &= z_{xx} + z_{yy} \end{aligned}$$

Από τη τελευταία σχέση παίρνουμε και τις άκρες τιμές του αρχικού μας συναρτησιακού.

➤ Εφαρμογή με τρεις μεταβλητές

Θα βρούμε με την βοήθεια της εξίσωσης Euler – Ostrogradsky, τις άκρες τιμές για το συναρτησιακό

$$J(u(x, y, z)) = \iiint_D \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2f(x, y, z) \right] dx dy dz$$

με  $f(x, y, z)$  γνωστή συνάρτηση. Για την Λαγκρανζιανή μας θα έχουμε :

$$\begin{aligned} L &= L(x, y, z, u_x, u_y, u_z) = \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2f(x, y, z) = \\ &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 2u f(x, y, z) \quad , \quad (1) \end{aligned}$$

Από την της εξίσωσης Euler – Ostrogradsky , θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial u_z} \right) &= 0 \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow 2f(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} (2u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (2u_y) - \frac{\partial}{\partial z} (2u_z) &= 0 \quad \stackrel{2>0}{\Rightarrow} \\ \Rightarrow f(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} (u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (u_y) - \frac{\partial}{\partial z} (u_z) &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x, y, z) &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad . \end{aligned}$$

Από τη τελευταία σχέση παίρνουμε και τις άκρες τιμές του αρχικού μας συναρτησιακού.



## 6 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ (Ακρότατα υπό όρους)

### 6.1 Η μέθοδος του πολλαπλασιαστή Lagrange

Υπάρχουν ορισμένα προβλήματα τα οποία υπόκεινται σε ολοκληρωτικό περιορισμό και για τον λόγο αυτό κάποιος πρέπει να βρει γεωμετρικό σχήμα, δηλ. ακρότατο (όπου συνήθως πρόκειται για προβλήματα μεγιστοποίησης), κάτω από δεδομένες συνθήκες, Τέτοια προβλήματα ονομάζονται ισοπεριμετρικά προβλήματα και λύνονται με την μέθοδο του πολλαπλασιαστή Lagrange.

Έτσι για να βρούμε τις άκρες τιμές ενός συναρτησιακού της μορφής:

$$J(y(x)) = \int_a^b L_1(x, y, y') dx, \quad (1)$$

το οποίο υπόκειται στη συνθήκη :  $I(y(x)) = \int_a^b L_2(x, y, y') dx = \text{σταθερό}$  , (2),

θέτουμε  $L = L_1 + m L_2$  , όπου  $m = \text{πολλαπλασιαστής Lagrange}$  .

Τότε από την εξίσωση Euler – lagrange θα πάρουμε :  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$  .

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει τις άκρες τιμές του συναρτησιακού (1) , το οποίο υπόκειται στη συνθήκη (2).

### 6.2 Προβλήματα με έναν περιορισμό

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός προβλήματος, υπό μία συνθήκη, βρίσκοντας τις άκρες τιμές για το συναρτησιακό:

$$J(y(x)) = \int_a^b y'^2 dx, \quad (1), \quad \text{με συνθήκη} \quad \int_a^b y dx = c \in \mathbb{R} = \text{σταθερό}, \quad (2).$$

Θα έχουμε  $L_1 = y'^2$  και  $L_2 = y$  .

Άρα :  $L = L_1 + m L_2 \Rightarrow L = y'^2 + m y$  , με  $m = \text{πολλαπλασιαστής Lagrange}$ .

Τότε από την εξίσωση Euler – lagrange θα πάρουμε :  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0, (3) .$

Η τελευταία εξίσωση (3) , δίνει τις άκρες τιμές του συναρτησιακού της σχέσης (1), το οποίο υπόκειται στη συνθήκη (2) . Επομένως λόγω της σχέσης (3) θα έχουμε:

$$(3) \Rightarrow m - \frac{d}{dx} (2y') = 0 \Rightarrow m - 2 \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{mx}{2} + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{mx^2}{4} + c_1 x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad (4) .$$

Επομένως η προσπάθεια εύρεσης ακροτάτου για το αρχικό μας συναρτησιακό , κατέληξε στην παραβολή που προσδιορίζεται από την σχέση (4).

### 6.2.1 Μέγιστο περικλειόμενο εμβαδό περιοχής με σταθερή περίμετρο

Θα εξετάσουμε τώρα το πρόβλημα του μεγίστου περικλειόμενου εμβαδού μιας περιοχής με σταθερή περίμετρο.

Ανάμεσα στις κλειστές επίπεδες καμπύλες , που έχουν το ίδιο μήκος περιμέτρου, θα βρούμε την επίπεδη καμπύλη, που περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Έχουμε λοιπόν  $x = x(t)$  ,  $y = y(t)$  , με  $a \leq t \leq b$  ,  $x(a) = x(b) = x_0$  και  $y(a) = y(b) = y_0$  , τις παραμετρικές εξισώσεις της κλειστής καμπύλης .

Έτσι το εμβαδό της καμπύλης θα είναι :

$$J = \iint_S dx dy = \int_a^b \left[ x(t) \frac{dy}{dt} - y(t) \frac{dx}{dt} \right] dt = \frac{1}{2} \int_a^b [x \dot{y} - y \dot{x}] dt ,$$

με το μήκος της καμπύλης να υπόκειται στον ολοκληρωτικό περιορισμό

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = C = \text{σταθερό.}$$

Για την εύρεση των άκρων τιμών του προβλήματός μας, θα έχουμε :

$$L_1 = \frac{1}{2} (x \dot{y} - y \dot{x}), \quad L_2 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Θέτουμε  $L = L_1 + m L_2$ , με  $m = \text{πολλαπλασιαστής Lagrange}$  και επομένως θα έχουμε

$$L = \frac{1}{2} (x \dot{y} - y \dot{x}) + m \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \quad (1),$$

με  $x, y$ , εξαρτημένες μεταβλητές, ενώ  $t$  ανεξάρτητη.

Απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη ακραίων τιμών είναι να ισχύουν :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{y} - \frac{d}{dt} \left( -\frac{y}{2} + \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{2} + \frac{m \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left( y - \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( x - \frac{m \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0 \end{cases} \stackrel{\text{με ολοκλήρωση}}{\Rightarrow} \begin{cases} \int \left( y - \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) dt = 0 \\ \int \left( x - \frac{m \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) dt = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1 \\ x - \frac{m \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2 \end{cases} \stackrel{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - c_1 = \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ x - c_2 = \frac{m \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y - c_1)^2 = \left( \frac{m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)^2 \\ (x - c_2)^2 = \left( \frac{m \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right)^2 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$

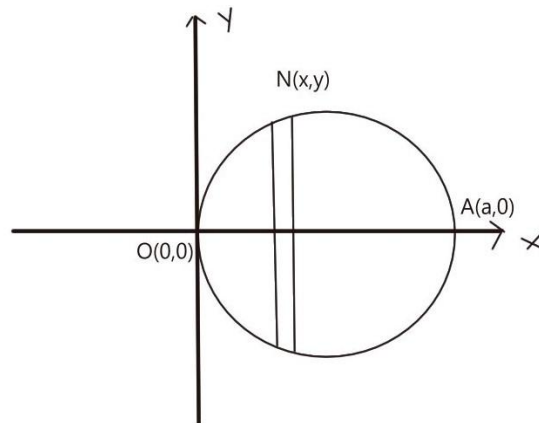
$$\Rightarrow (x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = m^2 \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = m^2, \quad c_1, c_2, \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Επομένως από όλες τις κλειστές καμπύλες ίδιου μήκους, η καμπύλη που περικλείει το μέγιστο εμβαδό, θα είναι ο κύκλος.

### 6.2.2 Εύρεση μέγιστου όγκου στερεού λόγω περιστροφής μιας επιφάνειας

Θα βρούμε λοιπόν το στερεό μέγιστου όγκου που σχηματίστηκε από την περιστροφή μιας δεδομένης επιφάνειας.



Σχήμα 12 Όγκος από περιστροφή επιφάνειας

Έστω η καμπύλη  $OA$  η οποία περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $x'x$ .

Το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη  $y = y(x)$ , θα είναι:

$$S = \int_0^a 2\pi y ds \Rightarrow S = \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (1).$$



Ο Όγκος  $V$  θα είναι ίσος με :  $V = \int_0^a \pi y^2 dx$ , (2). Επομένως το πρόβλημά μας ανάγεται

τόρα στο να βρούμε τις άκρες τιμές του όγκου, με ολοκληρωτικό περιορισμό ο οποίος προκύπτει από την σχέση (2).

Άρα θα έχουμε :  $L_1 = \pi y^2$  ,  $L_2 = 2\pi y \sqrt{1+y'^2}$  .

Θέτουμε  $L = L_1 + m L_2$  , με  $m =$  πολλαπλασιαστικής Lagrange και επομένως θα έχουμε

$$L = \pi y^2 + m 2\pi y \sqrt{1+y'^2} , (3).$$

Παρατηρούμε ότι η Λανγκρανζιανή της σχέσης (3) , είναι ανεξάρτητη του  $x$  και επομένως απαραίτητη προϋπόθεση για την ύπαρξη ακροτάτου στο πρόβλημά μας θα είναι, η εξίσωση Euler – Lagrange να έχει την μορφή:

$$L - y' L_{y'} = \text{σταθερό} \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \pi y^2 + m 2\pi y \sqrt{1+y'^2} - y' \frac{2\pi m y y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi y^2 + m 2\pi y \sqrt{1+y'^2} - \frac{2\pi m y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{σταθερό} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi y^2 + \frac{m 2\pi y \left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2 - 2\pi m y y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{σταθερό} = c \stackrel{c \in \mathbb{R}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \pi y^2 + \frac{2\pi m y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \stackrel{\pi > 0}{\Rightarrow} y^2 + \frac{2 m y}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 m y}{\sqrt{1+y'^2}} = c - y^2 , (4).$$

Επειδή όμως η καμπύλη ΟΑ διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ , στην παραπάνω σχέση θα πάρουμε :  $c = 0$ . Άρα λόγω της σχέσης (4) θα έχουμε :

$$\begin{aligned}
 (4) &\Rightarrow \frac{2 m y}{\sqrt{1+y'^2}} = -y^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{2 m}{\sqrt{1+y'^2}} = -y \Rightarrow y\sqrt{1+y'^2} = -2m \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \frac{-2m}{y} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1+y'^2 = \frac{4m^2}{y^2} \Rightarrow y'^2 = \frac{4m^2-y^2}{y^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow y' = \frac{\sqrt{4m^2-y^2}}{y} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4m^2-y^2}}{y} \Rightarrow \frac{y dy}{\sqrt{4m^2-y^2}} = dx \quad \text{ολοκλήρωση} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \int \frac{y dy}{\sqrt{4m^2-y^2}} = x + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -\sqrt{4m^2-y^2} = x + c_1, (5).
 \end{aligned}$$

Επειδή όμως η καμπύλη μας περνά από την αρχή των αξόνων, θα έχουμε:

$$(5) \Rightarrow \overset{O(0,0)}{-2 m} = c_1.$$

Άρα  $(5) \Rightarrow -\sqrt{4m^2-y^2} = x - 2 m \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - 2m)^2 = 4m^2 - y^2 \Rightarrow (x - 2m)^2 + y^2 = 4m^2.$$

Επομένως το ακρότατο του αρχικού μας συναρτησιακού, υπό ολοκληρωτική συνθήκη, θα είναι ο κύκλος με κέντρο το  $K(2m, 0)$  και ακτίνα  $R = 2m$ .

### 6.3 Πρόβλημα με πολλαπλούς περιορισμούς

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση εύρεσης άκρων τιμών στο συναρτησιακό

$$J(y(x)) = \int_0^1 y'^2 dx, \quad (1),$$

το οποίο όμως υπόκειται στους περιορισμούς:

$$\int_0^1 y dx = 2, \quad (2) \quad \text{και} \quad \int_0^1 xy dx = 1, \quad (3).$$

Έτσι είναι λογικό ότι θα έχουμε πλέον τρεις Λαγκρανζιανές, δηλαδή

Θα έχουμε  $L_1 = y'^2$  και  $L_2 = y$ ,  $L_3 = xy$ .

Άρα  $L = L_1 + m_1 L_2 + m_2 L_3 \Rightarrow L = y'^2 + m_1 y + m_2 xy$ , (5),

όπου  $m_1, m_2 = \text{πολ/στές Lagrange}$ .

Τότε από την εξίσωση Euler Lagrange θα πάρουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0, \quad (4).$$

Έχουμε λοιπόν την εξίσωση (4), από την οποία θα βρούμε και τις άκρες τιμές για το συναρτησιακό της σχέσης (1), η οποία και υπόκειται στους περιορισμούς (2) και (3).

Επομένως θα πάρουμε:

$$(5) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} m_1 + m_2 x - \frac{d}{dx} (2y') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 x - 2 \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 x - 2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m_1 + m_2 x}{2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{m_2 x}{2} + \frac{m_1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{m_2 x^2}{4} + \frac{m_1 x}{2} + c_1 \quad c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{m_2 x^3}{12} + \frac{m_1 x^2}{4} + c_1 x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}, \quad (4).$$

Τελικά καταλήγουμε σε πολυώνυμο τρίτου βαθμού, με  $m_1, m_2 = \text{πολ/στές Lagrange}$ .

## 7 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΑΜΙΛΤΟΝΙΑΝΗ ΘΕΩΡΙΑ

### 7.1 Εισαγωγή στην θεωρία του Hamilton

Μια από τις σημαντικότερες περιοχές στις οποίες συναντάται ο Λογισμός των μεταβολών είναι αυτή της κλασσικής μηχανικής, ειδικότερα στη θεμελίωση που οφείλεται στον Lagrange και τον Hamilton. Τον δέκατο ένατο αιώνα ο W.R. Hamilton (1805-1865) διατύπωσε την μεταβολική αρχή, που μπορεί να γενικευθεί ώστε να περιλαμβάνει πολλές περιοχές της φυσικής και είναι το κεντρικό σημείο της λεγόμενης θεωρίας του Hamilton (Χαμιλτονιανή θεωρία).

Σύμφωνα με την κλασική δυναμική, σε ένα σύστημα που θέλουμε να περιγράψουμε αντιστοιχεί ένα σύνολο ποσοτήτων ή δυναμικών μεταβλητών καθεμιά από τις οποίες έχει μια καλώς ορισμένη τιμή, σε κάθε χρονική στιγμή και οι οποίες καθορίζουν πλήρως την κατάσταση του δυναμικού συστήματος σε εκείνη τη στιγμή. Υποτίθεται επιπλέον ότι η χρονική εξέλιξη του συστήματος προσδιορίζεται πλήρως αν η κατάσταση του είναι γνωστή σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή. Αναλυτικά αυτό εκφράζεται με το γεγονός ότι οι δυναμικές μεταβλητές πληρούν, ως συναρτήσεις χρόνου, ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων (τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος), καθώς και κάποιες αρχικές συνθήκες.

Το πρόγραμμα της κλασσικής δυναμικής συνίσταται, συνεπώς, στην καταγραφή των δυναμικών μεταβλητών και τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης που προβλέπουν τη χρονική εξέλιξη του συστήματος. Θα βρούμε ένα νέο σύστημα διαφορικών εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν την κίνηση του συστήματος. Μια μέθοδος για την εξαγωγή αυτών των εξισώσεων είναι από μια μεταβολική αρχή και βασίζεται στην ιδέα ότι ένα σύστημα θα πρέπει να εξελίσσεται χρονικά πάνω στη διαδρομή ελάχιστης αντίδρασης.

*Η αρχή του Hamilton αναφέρει ότι η χρονική εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος γίνεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς μεταξύ κινητικής και δυναμικής ενέργειας να είναι στάσιμο.*

Θα προχωρήσουμε στη διατύπωση της αρχής του Hamilton.

Για να περιγράψουμε την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος χρειαζόμαστε έναν ελάχιστο αριθμό  $n$  ανεξάρτητων συντεταγμένων (καθορίζεται με αυτές η κατάσταση του συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή). Οι συντεταγμένες αυτές (είναι συναρτήσεις

που μπορεί να συμβολίζουν μήκη, γωνίες, μάζες κ.λ.π. ), τις ονομάζουμε γενικευμένες συντεταγμένες και γράφουμε

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t).$$

Οι παράγωγοι ως προς τον χρόνο των  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  , ονομάζονται γενικευμένες ταχύτητες  $\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \dots, \dot{y}_n(t)$ . Η κινητική ενέργεια του συστήματος μπορεί να γράφει σαν μία τετραγωνική μορφή ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες

$$T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_n) \dot{y}_i \dot{y}_j, \text{ με } a_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (1),$$

δηλαδή γνωστές συναρτήσεις των γενικευμένων συντεταγμένων  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  .

Σε μηχανικά συστήματα όπου σχέση (1) είναι διαθέσιμη, η αρχή του Χάμιλτον μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

Έστω το μηχανικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από τις γενικευμένες συντεταγμένες  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$  , με τη σχέση (1) σε ισχύ. Τότε η κίνηση του συστήματος από τη χρονική στιγμή  $t_0$  με χρονική στιγμή  $t_1$  είναι τέτοια ώστε το συναρτησοειδές

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) dt, \quad (2),$$

να είναι στάσιμο.

Έχουμε υποθέσει ότι η Λαγκρανζιανή  $L$  είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και ότι  $y_i \in C^2[t_0, t_1]$ .

Θεωρώντας το σύνολο των γενικευμένων συντεταγμένων  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , ως συντεταγμένες ενός  $n$  – διάστατου χώρου , μπορούμε τότε αυτές να τις ορίσουμε ως παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης ή διαδρομής  $C$  στο χώρο αυτό που ενώνει τις δύο καταστάσεις  $S_0 (y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0))$  και  $S_1 (y_1(t_1), y_2(t_1), \dots, y_n(t_1))$  .

Σύμφωνα με την αρχή του Χάμιλτον μεταξύ όλων των διαδρομών στο χώρο αναπαραστάσεων, που συνδέουν την αρχική κατάσταση  $S_0$  με την τελική κατάσταση  $S_1$ , η πραγματική κίνηση θα λάβει χώρα κατά μήκος εκείνης της διαδρομής για τον οποίο το ολοκλήρωμα

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, y_1, y_2, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) dt \quad , \text{ της σχέσης (2)}$$

και κατά συνέπεια το συναρτησιακό  $J(y_1, y_2, \dots, y_n)$  , να παίρνει άκρες τιμές.

Η αρχή του Χάμιλτον διατυπώνεται συχνά και ως:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 .$$

Αφού το συναρτησιακό της σχέσης (2) θα παίρνει στάσιμη τιμή, τότε για τις γενικευμένες συντεταγμένες  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ , θα πρέπει να ισχύει το θεώρημα Euler – Lagrange.

$$\text{Δηλαδή : } \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = 0, \quad i=1,2,\dots,n$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος. Προέρχονται από μία μεταβολική αρχή, αν μπορούμε να βρούμε μία Λανγκρανζιανή  $L$ , τέτοια ώστε η  $\delta \int L dt = 0$

να μας δίνει αυτές τις εξισώσεις κίνησης, ως αναγκαίες συνθήκες για το ακρότατο.

Αν θεωρήσουμε ότι η Λανγκρανζιανή  $L$  δεν έχει σχέση με το χρόνο και επομένως θα ισχύει ότι το  $L_t = 0$ , τότε το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$L - \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = c = \text{σταθερό},$$

λέγεται ο **νόμος διατήρησης**.

Επομένως αν ισχύει ότι  $L_t = 0 \Rightarrow$  η ενέργεια διατηρείται.

Η ποσότητα  $-L + \sum_{i=1}^n \dot{y}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}$ , λέγεται χαμιλτονιανή του συστήματός μας και συχνά

αναπαριστά την ολική ενέργεια.

Έτσι η παραπάνω σχέση  $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$  ισοδυναμεί με την  $\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-V) dt = 0$

όπου  $V =$  η δυναμική ενέργεια του συστήματος.

Άρα να μπορούμε να πούμε ότι σε συντηρητικό πεδίο, ένα σύστημα μετακινείται από το

$t_1$  στο  $t_2$ , με τέτοιο τρόπο ώστε το συναρτησιακό  $\int_{t_1}^{t_2} (T-V) dt$ , να παρουσιάζει

ακραίες τιμές, στην πραγματικότητα ελάχιστο.

### 7.1.1 Η Αρχή της ελάχιστης δράσης (Principle of Least Action)

Αν  $T$  η κινητική ενέργεια την χρονική στιγμή  $t$  ενός συντηρητικού συστήματος, τότε θα δείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} 2T \, dt = 0$$

Και έτσι το πρόβλημά μας μετατοπίζεται στο να βρούμε τις άκρες τιμές για το συναρτησιακό:

$$\int_{t_1}^{t_2} 2T \, dt$$

Γνωρίζοντας, ότι η Λανγκρανζιανή είναι ίση με:

$L = T - V$ , (1) και  $T + V = \text{σταθερό} = C \in \mathbb{R}$ , (2), όπου  $T = \text{κινητική ενέργεια}$  και  $V = \text{δυναμική ενέργεια του συστήματος}$

λόγω της αρχής του Hamilton θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = 0 &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) \, dt = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \delta[T - (C - T)] \, dt = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T - C) \, dt = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T) \, dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta(C) \, dt = 0 \quad \begin{array}{l} C = \text{σταθερό,} \\ \text{άρα } \delta C = 0 \end{array} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T) \, dt - 0 = 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \delta(2T) \, dt = 0 \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} 2T \, dt = 0 . \end{aligned}$$

### 7.1.2 Εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή

Θα βρούμε την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή, χρησιμοποιώντας την αρχή του Hamilton. Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα το οποίο εκτελεί απλή αρμονική κίνηση μπορεί να αναφέρεται και ως απλός αρμονικός ταλαντωτής.

Θεωρούμε έτσι την κίνηση μάζας ενός σώματος που είναι στερεωμένη σε ένα ελατήριο και υπακούει στον νόμο του Hook :

$$F = -k y \quad .$$

Θα έχουμε λοιπόν:



$$\left\{ \begin{array}{l} F: \text{δύναμη ελατηρίου} \\ y: \text{απομάκρυνση (γενικευμένη συντεταγμένη)} \\ k: \text{σταθερά του ελατηρίου, } k > 0 \end{array} \right.$$

Η κινητική ενέργεια  $T$  θα είναι :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2, \text{ ενώ η δυναμική ενέργεια θα είναι : } V = \frac{1}{2} k y^2.$$

Επειδή η δύναμη  $F$  προέρχεται από το δυναμικό, θα έχουμε :

$$F = \frac{-dV}{dy} \Rightarrow V = -\int dy \Rightarrow V = -\int -k y dy \Rightarrow$$

$$V = \int k y dy \Rightarrow V = k \frac{y^2}{2}.$$

Τότε η Λανγκρανζιανή θα γίνει:

$$L = T - V \Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - k \frac{y^2}{2}.$$

Άρα λόγω Hamilton, θα πρέπει το συναρτησοειδές

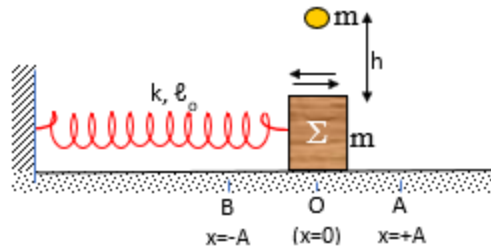
$$J(y) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2 \right) dt, \text{ να είναι στάσιμο.}$$

Από την εξίσωση Euler – Lagrange, θα έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k y - \frac{d}{dt} (m \dot{y}) = 0 \Rightarrow k y + m \ddot{y} = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k y}{m} = 0 .$$

Η τελευταία εξίσωση μας δίνει την εξίσωση κίνησης για την απλή αρμονική ταλάντωση.



Σχήμα 13 Απλός αρμονικός ταλαντωτής  
(Tzanopoulos, 2018)

Η τελευταία εξίσωση  $\ddot{y} + \frac{k y}{m} = 0$ , (1), αποτελεί ουσιαστικά την διατύπωση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, για την αρμονική ταλάντωση.

Η γενική λύση της (1), όπως γνωρίζουμε από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, θα

είναι:

$$y(t) = c_1 \cdot \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + c_2 \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) ,$$

με  $c_1, c_2$ , αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες και υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες τόσο της απομάκρυνσης  $y(t)$  όσο και της ταχύτητας  $\dot{y}(t)$ .

## 7.2 Κανονικός φορμαλισμός

Οι εξισώσεις του Euler για το μεταβολικό πρόβλημα:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dt, \quad (1),$$

αποτελούν ένα σύστημα από  $n$  συνήθειες διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Θα αναγάγουμε τις εξισώσεις αυτές σε ένα σύστημα από  $2n$  διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

❖ Η περίπτωση  $n=1$ :  $J(y) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, y') dt$ , με εξίσωση Euler – Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0, \quad (2). \text{ Ονομάζουμε κανονική ορμή, μία νέα μεταβλητή } p,$$

την οποία και ορίζουμε:  $p = \frac{\partial L(t, y, y')}{\partial y'}$ , (3). Αν  $L_{y',y'} \neq 0$ , λόγω

θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης, η σχέση (3) μπορεί να λυθεί ως προς  $y'$  και έτσι θα έχουμε την εξίσωση:  $y' = g(t, y, p)$ , (4). Ορίζουμε την

Χαμιλτονιανή τέτοια, ώστε:  $H(t, y, p) = g(t, y, p) p - L(t, y, g(t, y, p))$ , (5),

η οποία είναι η  $y' L_{y'} - L$ . Λόγω των σχέσεων (3), (4), θα έχουμε:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = g + p \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial p} = g = y', \quad (6).$$

Άρα λόγω των (2),(3), θα πάρουμε:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial y'} \frac{\partial g}{\partial y} + p \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y} = -L_y = -\frac{d}{dt}(L_{y'}) = -p'.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση Euler – Lagrange, μπορεί να γραφεί σαν ένα ισοδύναμο σύστημα ( $2n$  με  $n = 1$ ), με δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, δηλαδή τις:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = y' \text{ και } \frac{\partial H}{\partial y} = -p', \text{ οι οποίες ονομάζονται κανονικές εξισώσεις του Hamilton.}$$

❖ Η περίπτωση  $n$  μεταβλητών:

$$J(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dt, (1), \text{ με εξίσωση}$$

$$\text{Euler - Lagrange } \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i'} \right) = 0, (7). \text{ Ορίζουμε ως κανονικές ορμές τις}$$

$$p_i = \frac{\partial L(t, y_i, y_i')}{\partial y_i'}, (8). \text{ Αν } L_{y_i' y_i'} \neq 0, \text{ λόγω θεωρήματος της πεπλεγμένης}$$

συνάρτησης, η σχέση (8) μπορεί να λυθεί ως προς  $y_i'$  και έτσι θα έχουμε την εξίσωση:  $y_i' = g_i(t, y_i, p_i)$ , (9).

Ορίζουμε την Χαμιλτονιανή  $H$ , τέτοια ώστε :

$$H(t, y, p) = \sum_{i=1}^n g_i(t, y_i, p_i) p_i - L(t, y, g(t, y, p)) = \sum_{i=1}^n y_i' L_{y_i'} - L, (10) \text{ και τελικά}$$

καταλήγουμε με παρόμοια διαδικασία, στην δεύτερη περίπτωση των κανονικών εξισώσεων του Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = y_i' \quad \text{και} \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} = -p_i'.$$

### 7.3 Το αντίστροφο πρόβλημα

Είδαμε στην παράγραφο 7.1 ότι η αρχή του Hamilton διατυπώνεται συχνά και ως

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0.$$

Με την Λανγκρανζιανή να δίνεται από την σχέση  $L = T - V$  και να ισχύει το θεώρημα

$$\text{Euler - Lagrange } \frac{\partial L}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{με τις εξισώσεις του να}$$

είναι ίδιες με τις εξισώσεις του συστήματος.

Το πρόβλημά μας εδώ προσδιορίζεται στο να βρούμε τον τύπο της Λανγκρανζιανής  $L$ , όταν είναι γνωστές οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Θεωρώντας  $n = 1$  και ότι οι εξισώσεις κίνησης του προβλήματός μας δίνονται από την διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης  $y'' = L(t, y, y')$ , (1), θα προσπαθήσουμε να βρούμε

τον τύπο της Λανγκρανζιανής  $L(t, y, y')$ , έτσι ώστε η εξίσωση (1) να είναι η αντίστοιχη εξίσωση Euler – Lagrange.

Έτσι θα έχουμε :  $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$ , η οποία μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά

$$L_y - L_{y't} - L_{y'y} \cdot y' - L_{y'y'} \cdot y'' = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} L_y - L_{y't} - L_{y'y} \cdot y' - L_{y'y'} \cdot L = 0 \stackrel{\text{παραγωγίζουμε ως προς } y'}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow L_{y'y't} + L_{y'y'y} \cdot y' + L_{y'y'y'} \cdot L + L_{y'y'} \cdot L_{y'} = 0, (2).$$

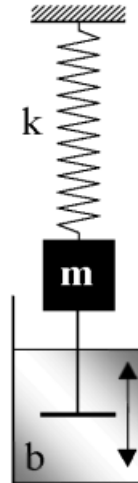
Δεχόμενοι ότι η  $L$  είναι τρεις φορές διαφορίσιμη και καλώντας  $u(t, y, y') = L_{y'y'}(t, y, y')$ , (3), λόγω της (2), θα έχουμε την διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς  $u$ :

$$(2) \Rightarrow u_t + u_y \cdot y' + u_{y'} \cdot L + u \cdot L_{y'} = 0, (4).$$

Η επίλυση της εξίσωσης (4), ως προς  $u$ , με την χρήση της (3), με διπλή ολοκλήρωση ως προς  $y'$ , θα μας δώσει τις άπειρες σε αριθμό λύσεων της Λανγκρανζιανής  $L$ , λόγω των αυθαίρετων σταθερών, οι οποίες θα προκύψουν μέσω των ολοκληρώσεων.

### 7.3.1 Απλός αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση

Στο σύστημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, θα προσπαθήσουμε να βρούμε την Λανγκρανζιανή  $L$ . Έχουμε λοιπόν σώμα μάζας  $m$  να βρίσκεται στο άκρο ενός ελατηρίου σταθεράς  $k$ , ενώ υπάρχει και αποσβεστήρας ταλάντωσης, ο οποίος αντιστέκεται στην κίνηση με δύναμη  $F = a y'$ , όπου  $a =$  σταθερά και  $y = \eta$  μετατόπιση του σώματος από την θέση ισορροπίας, όπως φαίνεται στο σχήμα 14.



Σχήμα 14 Σώμα ελατηρίου σταθεράς  $k$ , μέσα σε υγρό πυκνότητας  $b$   
(Αποσβεστήρας ταλαντώσεων)

Με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα θα έχουμε:

$$F_{oz} = m \cdot y'' \Rightarrow -k \cdot y - a \cdot y' = m \cdot y'' \Rightarrow 0 = m \cdot y'' + k \cdot y + a \cdot y', (1).$$

Η (1) αποτελεί την εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση. Το σύστημά μας δεν είναι συντηρητικό και δεν υπάρχει βαθμωτό δυναμικό.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να φέρουμε την σχέση (1) στην αντίστοιχη μορφή της Euler-Lagrange, πολλαπλασιάζοντάς την με μία αρνητική συνάρτηση  $g(t)$ .

Έτσι η σχέση (1) θα γίνει:

$$(1) \Rightarrow m \cdot g(t) \cdot y'' + a \cdot g(t) \cdot y' + k \cdot g(t) \cdot y = 0, (2),$$

$$\text{και} \quad L_y - L_{y't} - L_{y'y} \cdot y' - L_{y'y'} \cdot y'' = 0, (3)$$

Άρα λόγω των σχέσεων (2),(3), μία επιλογή θα είναι:

$$m g(t) = L_{y'y'} \Rightarrow L_{y'} = m g(t) y' + A(t, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = m g(t) \frac{y'^2}{2} + A(t, y) y' + B(t, y), (4), \text{ με } A, B, \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Επομένως λόγω των σχέσεων (2),(3), θα πάρουμε:

$$-L_y + L_{y't} + L_{y'y} \cdot y' = a \cdot g(t) \cdot y' + k \cdot g(t) \cdot y \Rightarrow$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow} -(A_y y' + B_y) + m g'(t) y' + A_t + A_y y' = a g(t) y' + k g(t) y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m g'(t) = a g(t) \Rightarrow g'(t) - \frac{a}{m} g(t) = 0 \stackrel{m>0}{\Rightarrow} g(t) = e^{\frac{a}{m} t}.$$

$$\text{Άρα : } A_t - B_y = k g(t) y \Rightarrow A_t - B_y = k e^{\frac{a}{m} t} y \stackrel{\text{για } A_t=0}{\Rightarrow} B_y = -k e^{\frac{a}{m} t} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{-k y^2}{2} e^{\frac{a}{m} t}.$$

Έχουμε λοιπόν για την Λανγκρανζιανή ότι:

$$L(t, y, y') = \left( \frac{m y'^2}{2} - \frac{k y^2}{2} \right) e^{\frac{a}{m} t},$$

η οποία φυσικά δεν αποτελεί μοναδική λύση, λόγω των αυθαίρετων τιμών των συναρτήσεων A και B.





## 8 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΚΑΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

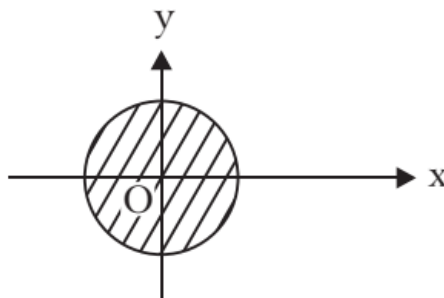
### 8.1 Ορισμοί

#### 8.1.1 Το κατάλληλο πεδίο (Proper field)

Μία οικογένεια καμπυλών  $y = y(x, c)$ , με  $c =$  παράμετρος, λέγεται ότι σχηματίζει το **κατάλληλο πεδίο**, σε μία δοσμένη περιοχή  $D$  στο  $x y$  επίπεδο, αν μία και μόνο μία καμπύλη της οικογένειας πέρνα από κάθε σημείο της περιοχής  $D$ .

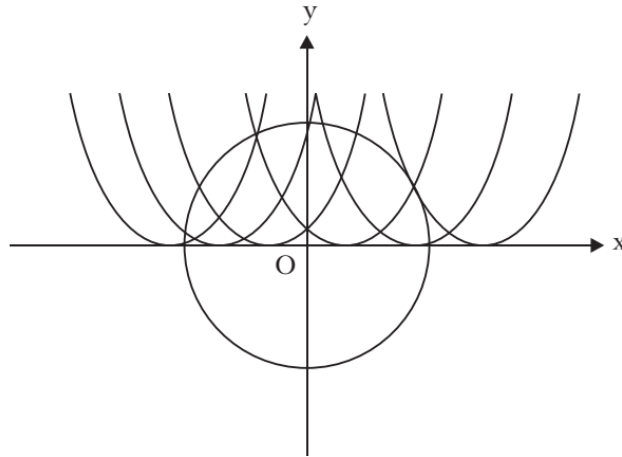
Ας δούμε τα παρακάτω δύο παραδείγματα:

- στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1,  $x^2 + y^2 = 1$ , το ερώτημα που τίθεται είναι αν η οικογένεια των παράλληλων ευθειών  $y = x + c$ , με  $c =$  αυθαίρετη σταθερά, σχηματίζει το **κατάλληλο πεδίο**; Η απάντηση είναι καταφατική διότι από οποιοδήποτε σημείο του κύκλου διέρχεται μία και μόνο μία γραμμή της οικογένειας, όπως και φαίνεται στο σχήμα 15.



Σχήμα 15 Κατάλληλο πεδίο  
(Singh, May 28, 2021)

- Η οικογένεια των παραβόλων  $y = (x + a)^2$ , μέσα στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$ , **δεν σχηματίζουν ένα κατάλληλο πεδίο**, διότι οι παραβολές αυτής της οικογένειας τέμνονται μέσα στον κύκλο όπως φαίνεται στο σχήμα 16.



Σχήμα 16 Μη Κατάλληλο πεδίο  
(Singh, May 28, 2021)

### 8.1.2 Το κεντρικό πεδίο (Central field)

Αν όλες οι καμπύλες της οικογένειας  $y = y(x, c)$ , με  $c =$  παράμετρος, διέρχονται από ένα μόνο σημείο  $(x_0, y_0)$ , της περιοχής  $D$ , τότε μία τέτοια οικογένεια λέγεται ότι σχηματίζει ένα **κεντρικό πεδίο** πάνω από την περιοχή  $D$ , αν αυτές οι καμπύλες καλύπτουν την περιοχή  $D$  χωρίς να τέμνονται μεταξύ τους και το σημείο  $(x_0, y_0)$  βρίσκεται εκτός της περιοχής  $D$ .

➤ Σημείωση:

Αν οι καμπύλες της οικογένειας  $y = y(x, c)$ , διέρχονται από ένα μόνο σημείο  $(x_0, y_0)$ , το οποίο βρίσκεται εκτός της περιοχής  $D$ , τότε το σημείο  $(x_0, y_0)$  ονομάζεται **το κέντρο της δέσμης των καμπυλών**.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την περιοχή  $D = (0, +\infty)$  και το σημείο  $O(0,0) \notin D$ . Αφού η οικογένεια των ευθειών  $y = xc$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε αυτό σημαίνει ότι το σημείο  $O(0,0)$  αποτελεί **το κέντρο της δέσμης των ευθειών**  $y = xc$ .

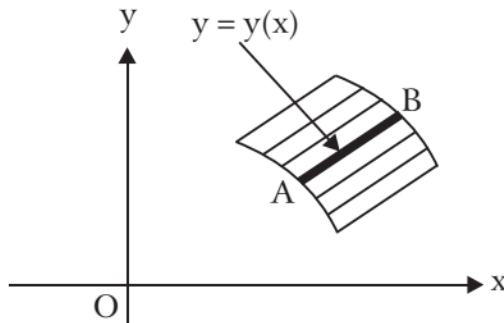
Κατά συνέπεια η οικογένεια των ευθειών  $y = xc$ , να σχηματίζει ένα **κεντρικό πεδίο** στον τομέα  $D = (0, +\infty)$ .

### 8.1.3 Πεδίο ακρότατων

Ένα **κατάλληλο πεδίο (proper field)** ή ένα **κεντρικό πεδίο (Central field)** που σχηματίζεται από μία οικογένεια ακροτάτων ενός δοσμένου μεταβολικού προβλήματος, θα λέγεται **πεδίο ακροτάτων** ή **πεδίο άκρων τιμών**.

### Ορισμός ενσωμάτωσης σε ένα πεδίο ακροτάτων

Έστω  $y = y(x)$  το ακρότατο του συναρτησιακού  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ , με οριακά σημεία τα  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . Είναι δυνατόν να βρεθεί οικογένεια ακροτάτων  $y = y(x, c)$ , με τέτοιο τρόπο ώστε η οικογένεια να σχηματίζει ένα σταθερό και το  $y = y(x)$  να είναι μέλος της οικογένειας αυτής για κάποια τιμή στο  $c$ , με τα ακρότατα να μην βρίσκονται στο όριο του τομέα, στον οποίο οικογένεια σχηματίζει πεδίο ακροτάτων. Τότε λέμε ότι το ακρότατο  $y = y(x)$  μπορεί να ενσωματωθεί σε ένα **πεδίο ακροτάτων**.

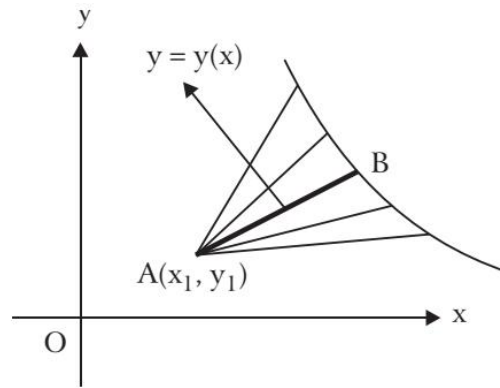


Σχήμα 17 Ακρότατο ενσωματωμένο σε πεδίο ακροτάτων.  
(Singh, May 28, 2021)

#### 8.1.4 Ορισμός ενσωμάτωσης σε κεντρικό πεδίο

Αν η δέσμη ακροτάτων που προέρχεται από σημείο  $(x_1, y_1)$ , σχηματίζει κεντρικό πεδίο που περιέχει το ακρότατο  $y = y(x)$ , τότε η καμπύλη του ακροτάτου  $y = y(x)$ , θα λέμε ότι είναι ενσωματωμένη στο **κεντρικό πεδίο**.

Σε αυτή την περίπτωση η παράμετρος της οικογένειας των καμπυλών μπορεί να ληφθεί από την κλίση της εφαπτομένης καμπύλης στο A, όπως φαίνεται στο σχήμα 18.



Σχήμα 18 Υπολογισμός της παραμέτρου της οικογένειας καμπυλών από την κλίση.  
(Singh, May 28, 2021)

### 8.1.5 Δύο εφαρμογές κατάλληλου και κεντρικού πεδίου για τα ακρότατα συναρτησιακού

#### ➤ 1<sup>η</sup> Εφαρμογή

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε το κατάλληλο και το κεντρικό πεδίο για τις άκρες τιμές του συναρτησιακού:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2 + 2x^2 + 4) dx ,$$

Για την Λανγκρανζιανή μας θα έχουμε:  $L = y'^2 - y^2 + 2x^2 + 4$  . Τότε η εξίσωση Euler-Lagrange θα έχει την μορφή:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow -2y - \frac{d}{dx} (2y') = 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{-2 < 0}{\Rightarrow} y + \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow y + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 , (1).$$

Η ομογενής διαφορική εξίσωση (1) , θα έχει την χαρακτηριστική λύση:

$$1 + \rho^2 = 0 \Rightarrow \rho = \pm i .$$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς και κατά συνέπεια το ακρότατο του αρχικού μας συναρτησιακού, θα είναι:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad (2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Για την τιμή  $c_2 = 0$ , θα έχουμε ότι:  $(2) \Rightarrow y = c_1 \cos x$ , που αποτελεί ένα **κατάλληλο πεδίο** ακροτάτων για τον τομέα  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .
- Για την τιμή  $c_1 = 0$ , θα έχουμε ότι:  $(2) \Rightarrow y = c_2 \sin x$ , που αποτελεί ένα **κεντρικό πεδίο** ακροτάτων για τον τομέα  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ .

### ➤ 2<sup>η</sup> Εφαρμογή

Θα δείξουμε τώρα ότι οι άκρες τιμές του μεταβολικού προβλήματος  $\int_0^2 (y'^2 + x^2) dx$ , με συνθήκες  $y(0) = 1, y(2) = 3$ , περιλαμβάνονται σε ένα **κατάλληλο πεδίο ακροτάτων** του παραπάνω συναρτησιακού. Έχουμε λοιπόν το συναρτησιακό  $J(y(x)) = \int_0^2 (y'^2 + x^2) dx$ , με Λανγκρανζιανή  $L = y'^2 + x^2$ .

Τότε η εξίσωση Euler – Lagrange θα έχει την μορφή:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - \frac{d}{dx} (2y') = 0 \stackrel{-2 < 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 \stackrel{c_1 \in \mathbb{R}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 \stackrel{c_1 \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} y(x) = c_1 x + c_2, \quad (1), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Και λόγω συνθηκών παίρνουμε:

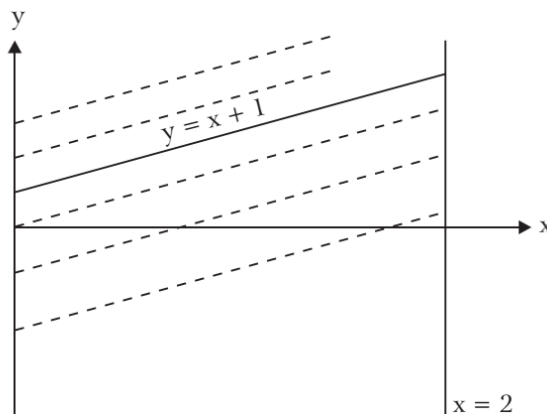
$$y(0) = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} c_2 = 1 \quad \text{και} \quad y(2) = 3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Rightarrow 2c_1 + 1 = 3 \Rightarrow c_1 = 1 .$$

Άρα τελικά έχουμε λόγω της σχέσης (1) καταλήγουμε στην ευθεία:

$$(1) \Rightarrow y(x) = x + 1 ,$$

η οποία και αποτελεί το ακρότατο του αρχικού μας συναρτησιακού.

- Για την τιμή  $c_1 = 1$ , θα έχουμε ότι :  $(1) \Rightarrow y = x + c_2$ , που αποτελεί ένα **κατάλληλο** πεδίο ακροτάτων για τον τομέα  $x \in [0, 2]$ .
- Για την τιμή  $c_2 = 1$ , θα έχουμε ότι :  $(1) \Rightarrow y = c_1 x + 1$ , που δείχνει ότι το ακρότατο  $y(x) = x + 1$ , περιλαμβάνεται στο **κατάλληλο πεδίο** ακροτάτων  $y = x + c_2$ , για τον τομέα  $x \in [0, 2]$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 19.



Σχήμα 19 Το ακρότατο περιλαμβάνεται στο κατάλληλο πεδίο  
(Singh, May 28, 2021)

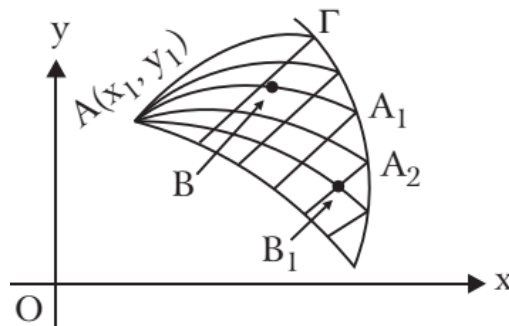
## 9 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ JACOBI - LEGENDRE

### 9.1 Συνθήκη Jacobi

Έστω ή μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών  $g(x, y, c) = 0$ , στο επίπεδο, με  $c =$  παράμετρος. Για αυτή την οικογένεια το  $c$  είναι ο τύπος του σημείου τομής των

$$g(x, y, c) = 0 \text{ και } \frac{\partial g}{\partial c} = 0.$$

Έστω ότι έχουμε τη δέσμη καμπυλών με κέντρο το σημείο  $A(x_1, y_1)$  και έστω ότι η δέσμη των ακροτάτων διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$ , έτσι ώστε η καμπύλη  $g(x, y) = 0$  να είναι το  $c$ . Τότε ο φάκελος  $\Gamma$  της δέσμης των ακροτάτων θα ανήκει στο  $g(x, y) = 0$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 20.



Σχήμα 20 Δέσμη καμπυλών με κέντρο το σημείο  
(Singh, May 28, 2021)

Κάθε ακρότατο της οικογένειας θα αγγίζει το φάκελο  $\Gamma$ . Το σημείο  $A_1$  όπου το ακρότατο  $y = y(x)$  αγγίζει το φάκελο  $\Gamma$ , λέγεται **συζυγής** του  $A$ . Αν ένα σημείο  $B(x_2, y_2)$ , βρίσκεται μεταξύ των σημείων  $A$  και  $A_1$ , τότε τα ακρότατα της δέσμης κοντά στο  $AB$  δεν τέμνονται. Ως εκ τούτου προκύπτει ότι τα ακρότατα που βρίσκονται κοντά στην καμπύλη  $AB$  σχηματίζουν έναν κεντρικό πεδίο που περιλαμβάνει το τόξο  $AB$ . Τώρα για το ακρότατο  $AB_1$  προκύπτει ότι το συζυγές σημείο  $A_2$  του  $A$  βρίσκεται μεταξύ  $A$  και  $B_1$  και η δέσμη των καμπυλών κοντά στο  $AB_1$  τέμνονται.

Επομένως το ακρότατο  $AB_1$  δεν μπορεί να ενσωματωθεί σε κεντρικό πεδίο.

**Άρα για να ενσωματώσουμε ένα τόξο  $AB$  του ακροτάτου σε ένα κεντρικό πεδίο ακροτάτων, αρκεί το συζυγές σημείο του  $A$  να μη βρίσκεται στην καμπύλη.**

Το παραπάνω αποτελεί τη συνθήκη Jacobi.

### 9.1.1 Μαθηματικός ορισμός

Έστω  $y = y(x, c)$  η εξίσωση της δέσμης ακροτάτων, με  $c$  = παράμετρο, με κέντρο το σημείο  $A$ .

Η παράμετρος  $c$  θεωρείται ως η κλίση  $y' = \frac{dy}{dx}$  των ακροτάτων στο σημείο  $A$ .

Η παράμετρος  $c$  δίνεται από τις σχέσεις  $y = y(x, c)$  και  $\frac{\partial g}{\partial c} = 0$ . (έγινε αναφορά στην προηγούμενη παράγραφο 8.1).

Καλούμε  $u$  μία συνάρτηση του  $x$ , σταθερή για κάθε καμπύλη της οικογένειας, με

$$u = \frac{\partial y(x, c)}{\partial c}.$$

Για το ακρότατο του συναρτησιακού  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ , η  $y = y(x, c)$ , αποτελεί τη λύση της εξίσωσης Euler, δηλαδή

$$L_y[x, y(x, c), y_x'(x, c)] - \frac{d}{dx} [L_{y'}[x, y(x, c), y_x'(x, c)]] = 0.$$

και διαφορίζοντας θα πάρουμε τελικά την εξίσωση του Jacobi :

$$\left[ L_{yy} - \frac{d}{dx} L_{yy'} \right] \cdot u - \frac{d}{dx} [L_{y'y'} \cdot u'] = 0.$$

Έστω  $y(x)$  η λύση της εξίσωσης Euler με  $c = c_0$  για το ακρότατο  $AB$ . Αν η λύση

$u = \frac{\partial y}{\partial c}$  εξαφανίζεται στο  $A$ , τότε το κέντρο της δέσμης ανήκει στην καμπύλη  $c$  και αν

επίσης εξαφανίζεται σε κάποιο σημείο στο εσωτερικό του  $x \in (x_1, x_2)$ , τότε το σημείο

που είναι συζυγής με το  $A$  θα δίνεται από τις σχέσεις



$y = y(x, c_0)$  και  $\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_{c=c_0} = 0$  και θα βρίσκεται στο τόξο AB του ακροτάτου με

το B να βρίσκεται στο σημείο  $(x_2, y_2)$ .

Αν υπάρχει λύση της εξίσωσης Jacobi που εξαφανίζεται για  $x = x_1$  και δεν εξαφανίζεται σε οποιοδήποτε σημείο για  $x \in (x_1, x_2)$ , τότε δεν υπάρχουν σημεία συζυγή με το A τα οποία βρίσκονται στο τόξο AB.

Έτσι συνθήκη Jacobi ικανοποιείται και το τόξο στο ακρότατο μπορεί να είναι ενσωματωμένο σε ένα κεντρικό πεδίο ακροτάτων με κέντρο το A.

## 9.2 Επαρκής συνθήκη για ακρότατο (Legendre condition)

Η συνθήκη Legendre είναι μία επαρκής συνθήκη για την φύση του ακροτάτου.

Ας δούμε την περίπτωση του συναρτησιακού  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$ , (1), με συνθήκες  $y(x_1) = y_1$ ,  $y(x_2) = y_2$ .

Έστω η καμπύλη  $C_1$  του ακροτάτου, για το συναρτησιακό της σχέσης (1) και  $C_2$  μία γειτονική καμπύλη.

Θεωρούμε ως  $I_1 = \int_{C_1} L(x, y, y') dx$ ,  $I_2 = \int_{C_2} L(x, y, y') dx$ ,  $p = \frac{dy}{dx}$  στο  $C_1$

και το βοηθητικό συναρτησιακό  $\int_{C_2} \left[ L(x, y, p) + \left( \frac{dy}{dx} - p \right) \cdot L_p(x, y, p) \right] dx$ . (2).

Το ολοκλήρωμα μας εδώ είναι μία ακριβής διαφοροποίηση της συνάρτησης και έτσι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Λόγω της σχέσης (2) θα έχουμε:

$$(2) \Rightarrow \int_{C_2} \left[ L(x, y, p) + (y' - p) \cdot L_p(x, y, p) \right] dx = \int_{C_1} L(x, y, y') dx, \quad (3).$$

$$\begin{aligned} \text{Επιπλέον θα πάρουμε: } \Delta I &= I_2 - I_1 = \int_{C_2} L(x, y, y') dx - \int_{C_1} L(x, y, y') dx \stackrel{(3)}{=} \\ &= \int_{C_2} L(x, y, y') dx - \int_{C_2} \left[ L(x, y, p) + (y' - p) \cdot L_p(x, y, p) \right] dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{c_2} \left[ L(x, y, y') - L(x, y, p) - (y' - p) \cdot L_p(x, y, p) \right] dx$$

και τελικά 
$$\Delta I = \int_{c_2} E(x, y, p, y') dx$$

για 
$$E(x, y, p, y') = L(x, y, y') - L(x, y, p) - (y' - p) \cdot L_p(x, y, p).$$

Το  $E(x, y, p, y')$  ονομάζεται **συνάρτηση Weirstrass** και έχουμε τις περιπτώσεις :

- Αν  $E \leq 0$  , τότε θα έχουμε μέγιστο ακρότατο (maximum).
- Αν  $E \geq 0$  , τότε θα έχουμε ελάχιστο ακρότατο (minimum).

Αυτή είναι η απαραίτητη συνθήκη Legendre .

Ας εξετάσουμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της παραπάνω συνθήκης :

Θα βρούμε την συνάρτηση *Weirstrass* και θα εξετάσουμε ως προς τα ακρότατα το συναρτησιακό :

$$J(y(x)) = \int_0^a y'^2 dx , \text{ για } y(0) = 0 , y(a) = b , a, b > 0 .$$

Παρατηρούμε ότι η Λανγκρανζιανή μας θα είναι η  $L = y'^2$  .

Τότε η εξίσωση Euler – Lagrange θα έχει την μορφή :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \text{ και αντικαθιστώντας θα έχουμε :}$$

$$0 - \frac{d}{dx} (2y') = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 , c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Λόγω των συνθηκών θα πάρουμε :

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ και } y(a) = b \Rightarrow b = a \cdot c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{b}{a} .$$

Και έτσι καταλήγουμε τελικά στο ακρότατο μας

$$y = \frac{b}{a} x .$$

Για την συνάρτηση *Weirstrass* , σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε:

$$\begin{aligned} E(x, y, p, y') &= L(x, y, y') - L(x, y, p) - (y' - p) \cdot L_p(x, y, p) = \\ &= y'^2 - p^2 - (y' - p) \cdot 2p = (y' - p) \cdot (y' + p) - (y' - p) \cdot 2p = \\ &= (y' - p) \cdot (y' + p - 2p) = (y' - p)^2 \geq 0 . \end{aligned}$$

Δηλαδή πήραμε στο τέλος, ότι  $E(x, y, p, y') \geq 0$  και επομένως η ευθεία  $y = \frac{b}{a} x$  αποτελεί ελάχιστο ακρότατο.

### 9.3 Ασθενές και ισχυρό ακρότατο

Έστω το συναρτησιακό  $J(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx$  , (1), με συνθήκες  $y(x_1) = y_1$  ,  $y(x_2) = y_2$  και έστω  $C_1$  η καμπύλη του ακροτάτου για το αρχικό μας συναρτησιακό. Ας υποθέσουμε ότι το άκρο της καμπύλης  $C_1$  περιλαμβάνεται σε μία δέσμη ακροτάτων. Τότε η **συνθήκη Legendre για ασθενή και ισχυρά ακρότατα** θα διατυπωθεί ως εξής:

#### 9.3.1 Ασθενές ακρότατο

- Η καμπύλη  $C_1$  αποτελεί ακρότατο ικανοποιώντας την οριακή συνθήκη.
- Πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη Jacobi , δηλαδή το ακρότατο της καμπύλης  $C_1$  , θα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στην δέσμη των ακροτάτων.

- Η συνάρτηση Weirstrass (  $E(x, y, p, y')$  ), δεν αλλάζει πρόσημο σε κανένα σημείο  $(x, y)$  κοντά στην καμπύλη  $C_1$  και για αυθαίρετες τιμές του  $y'$  κοντά στο  $p(x, y)$  του ακροτάτου.
- Για ασθενές ελάχιστο θα έχουμε  $E \geq 0$  ή  $L_{y',y'} > 0$ , στην  $C_1$ .

### 9.3.2 Ισχυρό ακρότατο

- Η καμπύλη  $C_1$  αποτελεί ακρότατο ικανοποιώντας την δεδομένη οριακή συνθήκη.
- Πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη Jacobi , δηλαδή το ακρότατο της καμπύλης  $C_1$  , θα πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στην δέσμη των ακροτάτων.
- Η συνάρτηση Weirstrass (  $E(x, y, p, y')$  ), δεν αλλάζει πρόσημο σε κανένα σημείο  $(x, y)$  κοντά στην καμπύλη  $C_1$  και για αυθαίρετες τιμές του  $y'$  κοντά στο  $p(x, y)$  του ακροτάτου.
- Για ισχυρό ελάχιστο έχουμε  $E \geq 0$  ή  $L_{y',y'} > 0$  κοντά στην καμπύλη  $C_1$  και επίσης για αυθαίρετη τιμή του  $y'$  , ενώ για ισχυρό μέγιστο έχουμε  $E \leq 0$  ή  $L_{y',y'} < 0$  για σημεία κοντά στην καμπύλη  $C_1$  και επίσης για αυθαίρετη τιμή του  $y'$  .

### 9.3.3 Εφαρμογή σε ισχυρό μέγιστο

Ας εξετάσουμε τώρα ένα παράδειγμα ως προς την εύρεση του τύπου του ακροτάτου για το

συναρτησιακό: 
$$J(y(x)) = \int_0^1 \left( x + 2y - \frac{y'^2}{2} \right) dx , \quad \text{με συνθήκες}$$

$$y(0) = 0 , \quad y(1) = 0 .$$

Θα έχουμε λοιπόν την Λανγκρανζιανή  $L = x + 2y - \frac{y'^2}{2}$  και έτσι από την εξίσωση

Euler – Lagrange θα πάρουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{d}{dx}(y') = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + c_1 \Rightarrow y = x^2 + x c_1 + c_2, \quad (1) .$$

Για  $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$  και για  $y(1) = 0 \Rightarrow 1 + c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = -1$ .

Τελικά η σχέση (1) θα μας δώσει το ακρότατο του αρχικού συναρτησιακού  $y = x^2 - x$ , το οποίο περιλαμβάνεται στο κεντρικό πεδίο των ακροτάτων  $y = x^2 + c_1 x$ , των οποίων το κέντρο βρίσκεται στο σημείο  $O(0,0)$ .

Είδαμε προηγουμένως την Λανγκρανζιανή  $L = x + 2y - \frac{y'^2}{2}$  και έτσι θα πάρουμε

$$L_{y'} = -y', \text{ καθώς και } L_{y'y'} = -1 < 0.$$

Άρα από την συνθήκη Legendre για το αρχικό μας συναρτησιακό θα έχουμε τελικά ότι το ακρότατο  $y = x^2 - x$ , αποτελεί ισχυρό μέγιστο.

### 9.3.4 Εφαρμογή σε ισχυρό ελάχιστο

Ένα ωραίο παράδειγμα εύρεσης ισχυρού ελαχίστου σε ακρότατο έχουμε για το συναρτησιακό :  $J(y(x)) = \int_0^2 (e^{y'} + 3) dx$  , με συνθήκες  $y(0) = 0$  ,  $y(2) = 1$  .

Θα έχουμε λοιπόν την Λανγκρανζιανή  $L = e^{y'} + 3$  και έτσι από την εξίσωση Euler – Lagrange θα πάρουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 - \frac{d}{dx} (e^{y'}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{y'} \cdot y'' &= 0 \quad \begin{matrix} e^{y'} > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c_1 \Rightarrow y = x c_1 + c_2, (1) .$$

Για  $y(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$  και για  $y(2) = 1 \Rightarrow 2 c_1 + 0 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$  .

Τελικά η σχέση (1) θα μας δώσει το ακρότατο του αρχικού συναρτησιακού  $y = \frac{x}{2}$  ,

το οποίο περιλαμβάνεται στο κεντρικό πεδίο των ακροτάτων  $y = c_1 x$  .

Είδαμε προηγουμένως την Λανγκρανζιανή  $L = e^{y'} + 3$  και έτσι θα πάρουμε  $L_{y'} = e^{y'}$  , καθώς και  $L_{y'y'} = e^{y'} > 0$  , για κάθε  $y'$  .

Άρα από την συνθήκη Legendre για το αρχικό μας συναρτησιακό θα έχουμε τελικά ότι το ακρότατο  $y = \frac{x}{2}$  , αποτελεί ισχυρό ελάχιστο.

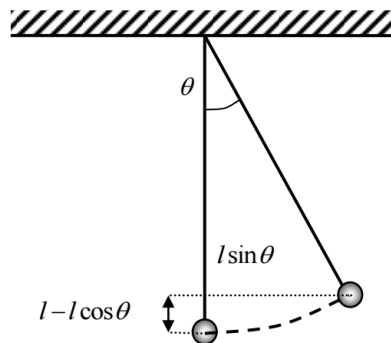
## 10 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

### 10.1 Εφαρμογές στη Μηχανική

Ο Λογισμός μεταβολών συναντάται στην κλασική μηχανική καλύπτοντας μία σημαντική περιοχή. Ένα ωραίο παράδειγμα γεωμετρικού μηχανικού τύπου είναι το:

- Το απλό εκκρεμές.

Η αιώρηση δηλαδή χωρίς τριβή, σφαιριδίου μάζας  $m$ , το οποίο αναρτάται από ακλόνητο σημείο με αβαρές και μη εκτατό νήμα. Για τον προσδιορισμό της μάζας της σφαίρας σε κάποιο χρόνο  $t$  επιλέγουμε ως γενικευμένη συντεταγμένη την γωνία εκτροπής του νήματος, την οποία και ονομάσαμε  $\theta$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 21.



Σχήμα 21 Απλό εκκρεμές  
(Τριπιντής, 2008)

Έχουμε ως  $l\theta = s$ , την μετατόπιση του σφαιριδίου που διαγράφει κυκλικό τόξο και μετρείται από τη θέση ισορροπίας.

Έτσι για την κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος θα έχουμε αντίστοιχα :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{και}$$

$$V = m g h = m g (l - l \cos(\theta))$$

Επομένως για την Λανγκρανζιανή θα έχουμε :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g (l - l \cos(\theta))$$

Και επομένως σύμφωνα με την αρχή του Χάμιλτον η κίνηση του εκκρεμούς γίνεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το συναρτησιακό

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} L d\theta = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g (l - l \cos(\theta)) \right] d\theta$$

να είναι στάσιμο.

Άρα η εξίσωση Euler – Lagrange θα έχει την μορφή :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \Rightarrow l \ddot{\theta} = g \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 .$$

Παίρνουμε έτσι μία μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης , η οποία αποτελεί και την εξίσωση της κίνησης του εκκρεμούς. Για μικρές μετατοπίσεις έχουμε  $\sin(\theta) \approx \theta$  και έτσι η εξίσωση του εκκρεμούς προσεγγίζεται από την εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 .$$

Ας δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά **παραδείγματα γεωμετρικού - μηχανικού τύπου**, τα οποία έχουν αναπτυχθεί στις προηγούμενες παραγράφους της παρούσης εργασίας:

- Υπολογισμός της καμπύλης ελάχιστου μήκους μεταξύ δύο σημείων A και B
- Υπολογισμός της καμπύλης ελάχιστου μήκους που διανύει ένα σώμα με ταχύτητα

$$x \frac{m}{\text{sec}}$$

- Η αρχή του Χάμιλτον
- Η αρχή της ελάχιστης δράσης
- Απλός αρμονικός ταλαντωτής
- Επιφάνεια περιστροφής από βύθιση συρμάτινου κύκλου σε διάλυμα σαπουνιού
- Η αρχή του Fermat της γεωμετρικής οπτικής
- Βραχυστόχρονο πρόβλημα
- Το πρόβλημα του μέγιστου περικλειόμενου εμβαδού περιοχής με σταθερή περίμετρο ,όπου ανάμεσα στις κλειστές επίπεδες καμπύλες που έχουν το ίδιο



- μήκος περιμέτρου ψάχνουμε εκείνη την επίπεδη καμπύλη που περικλείει το μεγαλύτερο εμβαδό.
- Η ελάχιστη επιφάνεια περιστροφής η οποία ορίζεται από δύο σημεία κατά μήκος μιας καμπύλης  $y = y(x)$  ενός ημιεπίπεδου, θεωρώντας ότι το όριο του ημιεπίπεδου είναι ο άξονας περιστροφής της επιφάνειας.
  - Εύρεση του στερεού μέγιστου όγκου που σχηματίστηκε από την περιστροφή μιας δεδομένης επιφάνειας.

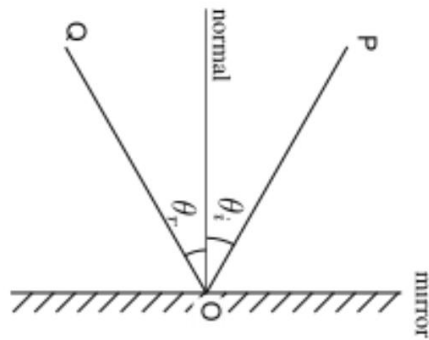
## 10.2 Εφαρμογές στη Σεισμολογία

- Στην θεωρία των ακραίων τιμών που αναφέρεται τόσο στις μέγιστες όσο και στις ελάχιστες τιμές εύρεσης πιθανοτήτων τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες χρησιμοποιούνται, για την επίλυση των προβλημάτων σεισμικότητας μιας περιοχής. Έτσι ενδιαφερόμαστε πρωτίστως για τις ακραίες τιμές οι οποίες είναι συνήθως μέγιστες. Έχει αποδειχθεί ότι αυτές οι ακραίες μέγιστες τιμές τείνουν προς κάποιο συγκεκριμένο όριο με ασυμπτωτική συμπεριφορά.
- Στον υπολογισμό του τοπικού μεγέθους ML του σεισμού, με τη μέτρηση της μέσης τιμής του μέγιστου πλάτους ταλάντωσης στις δύο οριζόντιες συνιστώσες των σεισμομέτρων Wood – Anderson, ενός σεισμολογικού σταθμού και με τη σύγκριση αυτής της μέσης τιμής με το αντίστοιχο πλάτος ενός πρότυπου σεισμού.

## 10.3 Εφαρμογές στη Φυσική – Γεωφυσική

- Νόμος της ανάκλασης (Ηρων της Αλεξάνδρειας).  
“Το φως ταξιδεύει στο ίδιο μέσο στο συντομότερο δυνατό δρόμο”

Η γωνία πρόσπτωσης είναι ίδια με τη γωνία ανάκλασης ( $\theta_1 = \theta_2$ ), όπως και φαίνεται στο σχήμα 22.

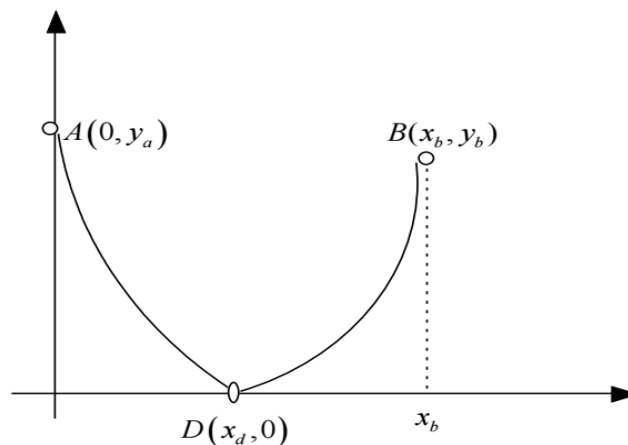


**Σχήμα 22 Νόμος της Ανάκλασης**  
(Καραμπετάκης, 2013-2014)

Αν προσπαθούσαμε να ανάγουμε το πρόβλημα αυτό στην μελέτη των συναρτησιακών και την εύρεση των άκρων τιμών τους, τότε θα λέγαμε ότι έχουμε μία σύγχρονη μαθηματική διατύπωση του παραπάνω προβλήματος η οποία αποσκοπεί στην εύρεση των ακροτάτων για το συναρτησιακό :

$$J(y) = \int_0^{x_b} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx ,$$

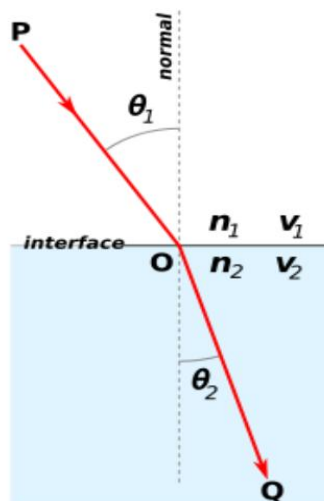
με αρχικές συνθήκες:  $y(0) = y_a$  ,  $y(x_d) = 0$  ,  $y(x_b) = y_b$  , όπως αποτυπώνονται καλύτερα στο σχήμα 23.



**Σχήμα 23 Σύγχρονη Μαθηματική διατύπωση Νόμου της Ανάκλασης**  
(Καραμπετάκης, 2013-2014)

- Νόμος της διάθλασης (Pierre de Fermat).  
“Το φως ταξιδεύει διαμέσου μιας ακολουθίας οπτικών μέσα στον ελάχιστο δυνατό χρόνο”.  
Ισχύουν ότι:

- ▷  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \Rightarrow \frac{1}{n_2} \sin \theta_1 = \frac{1}{n_1} \sin \theta_2$
- ▷ ο νόμος της διάθλασης από ένα μέσο με δείκτη  $n_1$  σε ένα άλλο μέσο με δείκτη  $n_2$
- ▷ δείκτης διάθλασης  $n_i = \frac{\text{ταχύτητας του φωτός στο κενό}}{\text{ταχύτητας του φωτός } v_i \text{ στο μέσο}}$
- ▷ η φύση ακολουθεί πάντοτε τον ευκολότερο και γρηγορότερο δρόμο και όχι κατ' ανάγκη τον συντομότερο



Σχήμα 24 Νόμος της διάθλασης  
(Καραμπετάκης, 2013-2014)

- Στην γεωφυσική με τις γεωφυσικές δημοσκοπήσεις για τον προσδιορισμό μεγίστων και ελάχιστων μεταβολών της πυκνότητας του υπεδάφους . Οι μεταβολές αυτές της πυκνότητας χρησιμοποιούνται σε μεγάλα τεχνικά έργα, είτε για την καλύτερη και ασφαλέστερη θεμελίωση των έργων ( π.χ. φράγματα, σήραγγες , γέφυρες ), είτε για την προστασία από παράγοντες όπως , η σεισμική επικινδυνότητα, ο κίνδυνος των κατολισθήσεων και η επίδραση τεχνικών εκρήξεων πριν από την κατασκευή μεγάλων έργων.

Χρησιμοποιούνται επίσης για την παρακολούθηση φαινομένων μόλυνσης των υδάτων, διαρροών των υγρών σε φράγματα και δεξαμενές, καθώς και για τον εντοπισμό υπόγειων στοών και εγκοίλων.

## 10.4 Εφαρμογές στην Οικονομία

Πριν αναφέρουμε μερικά παραδείγματα με σκοπό την εφαρμογή του λογισμού μεταβολών σε προβλήματα οικονομικής φύσεως θα ήταν καλό να αναφέρουμε λίγα λόγια για το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου.

Ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου είναι να προσδιορίσει τα σήματα εισόδου τα οποία θα εξαναγκάσουν μία διαδικασία να ικανοποιήσει φυσικούς περιορισμούς και ταυτόχρονα να μεγιστοποιήσει ( ή να ελαχιστοποιήσει ) κάποια κριτήρια απόδοσης.

$$\overline{u_t \in \Omega_u} \quad \begin{cases} x'(t) = a(t, x(t), u(t)) \\ x(t) \in \Omega_x \end{cases} \quad \overline{y(t) = f(t, x(t), u(t))}$$

$$J(x, u) = (x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt .$$

Ως βέλτιστο έλεγχο εννοούμε την είσοδο  $u(t)$  που ελαχιστοποιεί ( ή μεγιστοποιεί ) το κριτήριο απόδοσης.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα με μεγιστοποίηση της συνάρτησης του κέρδους.

### 10.4.1 Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους

Θα βρούμε τον έλεγχο  $u : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος για τα:

$$J = \varphi(x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), x'(t)) dt ,$$

με περιορισμούς  $x'(t) = f(x(t), u(t), t)$ , (1),  $x(t_0) = x_0$ , (2)

Για την καλύτερη περιγραφή του προβλήματος, ας προσδιορίσουμε αρχικά τις μεταβλητές του:

- $[t_0, t_f]$  : ο χρονικός ορίζοντας ενδιαφέροντος
- $x$  :  $[t_0, t_f] \mapsto \mathbb{R}^n$  : το διάνυσμα κατάστασης
- $\varphi$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  : το τερματικό κόστος
- $F$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  : το στιγμιαίο κόστος
- $f$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$  : ένα διανυσματικό πεδίο

Η εξίσωση (1) περιγράφει τη δυναμική του συστήματος και την αρχική του κατάσταση.

Το παραπάνω πρόβλημα όπως ορίστηκε περιγράφεται ως **πρόβλημα Bolza**.

#### 10.4.2 Προβλήματα βέλτιστου ελέγχου

Αν  $F(x(t), u(t), t) = 0$ , τότε το αντίστοιχο βέλτιστο πρόβλημα ελέγχου είναι γνωστό ως **πρόβλημα Mayer**, ενώ αν  $\varphi(x(t_f)) = 0$ , τότε είναι γνωστό ως **πρόβλημα Lagrange**.

Εδώ το συνολικό κόστος  $J = J(u)$  είναι ένα συναρτησιακό, δηλαδή μια απεικόνιση που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση  $u$  έναν πραγματικό αριθμό.

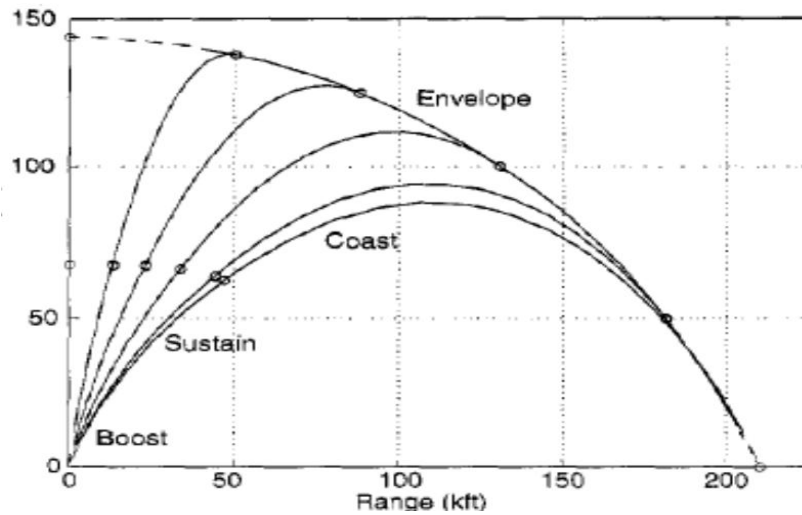
Οι συναρτήσεις ελέγχου  $u$  ανήκουν συνήθως σε κάποιο σύνολο και ανάλογα με το πρόβλημα, ικανοποιούν κάποιους περιορισμούς. Είναι αυτές που ελέγχουν (καθορίζουν) τη δυναμική του προβλήματος, δηλαδή τον χρόνο απόκρισης  $x(t)$ .

Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα που συνδέονται με το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου είναι :

- η εύρεση της εισόδου που θα μεταφέρει έναν πύραυλο με συγκεκριμένα καύσιμα σε μεγαλύτερη απόσταση.
- η εύρεση της εισόδου που θα μεταφέρει έναν πύραυλο με συγκεκριμένα καύσιμα στο μεγαλύτερο ύψος.



Εικόνα 1 Κινητός Πύραυλος – Hawk mobile  
(Καραμπετάκης, 2013-2014)

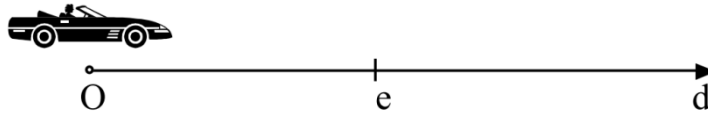


Σχήμα 25 Καμπύλη τροχιάς πυραύλου – Control systems magazine  
(Καραμπετάκης, 2013-2014)

Ας εξετάσουμε τώρα την κίνηση ενός αυτοκινήτου σε ευθύγραμμο δρόμο, χωρίς αρχική ταχύτητα και ότι το αυτοκίνητο θέλει να φτάσει και να σταματήσει στο σημείο  $e$ .

Θα έχουμε :

- ▷  $d(t)$  = απόσταση
- ▷  $a(t)$  = επιτάχυνση από πεντάλ γκαζιού
- ▷  $b(t)$  = επιβράδυνση από πεντάλ φρένου



**Εικόνα 2 Κίνηση αυτοκινήτου σε ευθύγραμμο δρόμο**  
(Καραμπετάκης, 2013-2014)

και επομένως θα ισχύουν:

$$d''(t) = a(t) + b(t),$$

$$x_1(t) = d(t) \Rightarrow x_1'(t) = d'(t) = x_2(t)$$

και άρα  $x_2'(t) = a(t) + b(t)$ , με εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ d'(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Επειδή όμως μας ενδιαφέρει άμεσα η ελάχιστη κατανάλωση των καυσίμων, αν υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο δεν προσπερνά το σημείο  $e$  και μετά επιστρέφει στο ίδιο σημείο, τότε θα ισχύουν :  $0 \leq x_1(t) \leq e$ ,  $x_2(t) \geq 0$ .

Οι φυσικοί περιορισμοί για είσοδο θα είναι :

- η επιτάχυνση που περιορίζεται από τις φυσικές επιδόσεις της μηχανής και έστω  $M_1$  η μέγιστη τιμή της, δηλαδή :  $0 \leq u_1(t) \leq M_1$
- η επιβράδυνση που περιορίζεται από τις παραμέτρους των φρένων και έστω  $M_2$  η μέγιστη τιμή της, δηλαδή:  $-M_2 \leq u_2(t) \leq 0$ .

Όταν ο ρυθμός κατανάλωσης των καυσίμων είναι ανάλογος της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα καύσιμα, τότε ελαχιστοποιούμε την ποσότητα:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [k_1 x_2(t)^2 + k_2 u_1(t)^2] dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left[ \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u_1^T(t) k_2 u_1(t) \right] dt .$$

Επίσης , επειδή μας ενδιαφέρει άμεσα και ο ελάχιστος χρόνος μετάβασης του αυτοκινήτου, αν θέλουμε το παραπάνω αυτοκίνητο να φτάσει στο συντομότερο δυνατό χρόνο , τότε πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα:

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt .$$

- Προβλήματα ελέγχου τελικής τιμής (terminal control problems), όπου πρέπει να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία ελαχιστοποιεί την απόκλιση της τελικής τιμής του διανύσματος καταστάσεως από μία επιθυμητή τιμή.

Έχουμε κριτήριο απόδοσης:

$$J = [x(t_f) - r(t_f)]^T \cdot H [x(t_f) - r(t_f)] ,$$

με  $H =$  θετικά ημιορισμένος πίνακας

Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε την πορεία ενός βαλλιστικού πυραύλου για να πετύχει τον στόχο του.

- Προβλήματα ελάχιστης ενέργειας (minimum control effort problem), όπου πρέπει να βρεθεί η επιτρεπτή είσοδος η οποία μεταφέρει το σύστημα από μία αρχική κατάσταση σε μία τελική, καταβάλλοντας την ελάχιστη δυνατή ενέργεια . Έχουμε κριτήριο απόδοσης:

$$\otimes \text{ Ελάχιστα κάυσμα : } J = \sum_{i=1}^n [b_i |u_i(t)|] , b_i > 0 .$$

ή

$$\otimes \text{ Ελάχιστη ενέργεια : } J = \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R u(t)] dt = J = \int_{t_0}^{t_f} \|u(t)\|_R^2 dt ,$$

με  $R =$  συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας .



Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τα ελάχιστα καύσιμα για την κίνηση κάποιου μεταφορικού μέσου.

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει σημαντική πρόοδος όσον αφορά την δυναμική συμπεριφορά των οικονομικών υποδειγμάτων τα οποία χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

- Η πρώτη κατηγορία είναι εκείνη όπου ένας κοινωνικός σχεδιαστής ή λήπτης απόφασης μετέχει σε προβλήματα λήψης βέλτιστων αποφάσεων.
- Η δεύτερη κατηγορία είναι εκείνη η κατάσταση όπου μετέχουν περισσότεροι του ενός οικονομικά και καθένας προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητά του. Τίθεται δηλαδή αρχικά το πλαίσιο ενός προβλήματος βέλτιστου ελέγχου και εκθέτονται οι ικανές συνθήκες μεγιστοποίησης, ενώ στη συνέχεια εξετάζεται η διασύνδεση που υπάρχει μεταξύ ικανών συνθηκών και των κρίσιμων μεταβλητών του προβλήματος.
- Κατά την επίλυση ενός προβλήματος δυναμικής βελτιστοποίησης με την μέθοδο του βέλτιστου ελέγχου σκοπός είναι να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή της μεταβλητής ελέγχου και στη συνέχεια, εφόσον έχει υπάρξει συσχέτιση μεταξύ μεταβλητής αυτής και της μεταβλητής κατάστασης, είναι εύκολο να προσδιοριστεί η βέλτιστη διαδρομή της τελευταίας. Το κύριο ερώτημα σε τέτοια προβλήματα είναι ποιο είναι εκείνο το χαρακτηριστικό το οποίο κάνει μία μεταβλητή «μεταβλητή ελέγχου». Για την κατανόηση ενός τέτοιου προβλήματος αναφέρουμε το **υπόδειγμα Hotelling της εξαγωγής ενός εξαντλούμενου πόρου**.

Αν  $S(t=0) = S_0$  είναι το αρχικό απόθεμα του πόρου αυτού, τότε η εξαγωγή μειώνει το απόθεμα σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -E(t), \quad (1),$$

Όπου  $E(t) =$  ο ρυθμός εξαγωγής σε χρόνο  $t$ . Η μεταβλητή  $E(t)$  είναι μία μεταβλητή ελέγχου, διότι επηρεάζει άμεσα τη μεταβλητή κατάσταση, (δηλαδή το απόθεμα του πόρου), λόγω της σχέσης (1) και επιπλέον επειδή ανά πάσα χρονική στιγμή γίνεται δείκτης του αποθέματος, μπορούμε να επεμβαίνουμε στη διαχείριση του.

Έμμεσα η βελτιστοποίηση της χρονικής διαδρομής της μεταβλητής ελέγχου  $E(t)$  σημαίνει βελτιστοποίηση της χρονικής διαδρομής, της μεταβλητής κατάστασης  $S(t)$ .

Κατά συνέπεια η μεταβλητή ελέγχου είναι παράμετρος της συνάρτησης χρησιμότητας  $U$ , δηλαδή, **μπορεί να εισαχθεί στο προς μεγιστοποίηση αντικείμενο συναρτησιακό.**

Ο περιορισμός του υποδείγματος αποτελεί την εξίσωση εξάντλησης του αποθέματος. Επομένως το πρόβλημα της βέλτιστης κοινωνικά εξαγωγής του αποθέματος μπορεί να εκφραστεί ως εξής.

$$\text{Μεγιστοποίηση του συναρτησιακού} \quad : \quad \int_0^T U(E) e^{-rt} dt ,$$

$$\text{με περιορισμούς} \quad : \quad \frac{dS(t)}{dt} = \dot{S} = -E(t) \text{ και } S(0) = S_0 .$$

Έτσι σύμφωνα με την παραπάνω θεώρηση , ένα απλό πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου μπορεί να εκφραστεί στην γενική του μορφή ως εξής :

$$\text{Μεγιστοποίηση του συναρτησιακού} \quad \int_0^T F(t, x, u) dt , (2) ,$$

με περιορισμούς :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \text{ και } x(0) = A , \quad x(T) \text{ ελεύθερο και } A, T , \text{ δεδομένα,}$$

$$x = \text{ μεταβλητή κατάστασης , } u = \text{ μεταβλητή ελέγχου ,}$$

$F$  = το προς μεγιστοποίηση αντικείμενο συναρτησιακό, όπου συνήθως σε οικονομικές εφαρμογές, είναι μία συνάρτηση χρησιμότητας ή μία συνάρτηση κερδών.

Η συνάρτηση  $f$  η οποία και εισάγεται στον περιορισμό , είναι αυτή που περιγράφει την κίνηση της μεταβλητής  $x$  .

Θα πρέπει σε αυτό το σημείο να κάνουμε μία σύντομη αναφορά στην οικονομική ερμηνεία της **αρχής του μέγιστου του Pontryagin** (όταν υπάρχουν περιορισμοί).

$$J(x, u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), u(t)) dt , \quad \dot{x}(t) = a(t, x(t), u(t)) ,$$

$$H' = \langle p, \dot{x}(t) \rangle - F(t, x(t), u(t)) .$$

Έστω ότι έχουμε μία συνάντηση  $g$  για την οποία ισχύει  $\nabla g = 0$  . Τότε η  $g$  παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα αλλά και άλλα ακρότατα σημεία και μόνο αν υπάρχει επιπλέον πληροφορία για την καμπυλότητα της  $g$  ( κυρτότητα). Δηλαδή μόνο τότε μπορούμε να αποφασίσουμε μέσω της συνθήκης  $g'(x) = 0$  , ότι το  $x$  είναι καθολικό μέγιστο. Η κατάσταση αυτή είναι παρόμοια με την κατάσταση του βέλτιστου ελέγχου.

Δηλαδή ακόμη και αν μία διαδρομή ελέγχου  $u$ , ικανοποιεί την αρχή του μεγίστου, αυτό δεν σημαίνει ότι πρόκειται για τη βέλτιστη διαδρομή. Επομένως θα πρέπει το πρόβλημά μας να είχε ιδιότητες κοιλότητας και τότε μόνο μία διαδρομή ελέγχου θα αποτελεί μία βέλτιστη διαδρομή.



## 11 Βιβλιογραφία

- Giuseppe Buttazzo και Aldo Frediani. (2012). *Variational Analysis and Aerospace Engineering*. Springer.
- Stephen Childress. (2015). *An Introduction to Theoretical Fluid Dynamics*. American Mathematical society. Κεφ. Variational Principles and the Dynamics of Fluids.
- Richard Courant και David Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Vol. II*. Interscience Publishers, (1953). Κεφ. Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations.
- M.C. Delfour και J.-P. Zolesio. *Shapes and Geometries: Metrics, Analysis, Differential Calculus, and Optimization*, Second Edition. SIAM, (2010). Κεφ. Variational Methods for Shape Analysis.
- Lev Elsgolts. *Differential Equations and the Calculus of Variations*. Dover Publications, (First published 1970).
- Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. Though primarily about PDEs, it covers the variational approach to PDEs often relevant in geology and engineering. American Mathematical Society, (2010).
- Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Soc., (2010). Κεφ. Variational Problems.
- Wendell H. Fleming. *Functions of Several Variables*. Springer, (2015). Κεφ. Variational Methods in  $R^n$ .
- I. M. Gelfand και S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Dover Publications, (2000).
- David Kinderlehrer και Guido Stampacchia. *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. SIAM, (2000).
- Cornelius Lanczos. *Variational Principles of Mechanics*. Classic book that deals with the principles of mechanics using variational methods. Dover Publications, (1986).
- J.N. Reddy. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics*. Provides a basis in the variational methods used in engineering. Oxford University Press, (2017).
- Hans Sagan. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. Dover Publications, (2012). Κεφ. Variational Methods.

- Gilbert Strang. *Computational Science and Engineering*. Covers the computational aspects of variational methods and their applications in engineering. Wellesley-Cambridge Press, (2008).
- Robert Weinstock. *Calculus of Variations with Applications*. Dover Publications, (1974).
- Robert Weinstock. *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*. A clear introduction to the calculus of variations with applications. Dover Publications, (1974).
- Båth, M. (1968). *Mathematical Aspects of Seismology: Developments in Solid Earth Geophysics* .
- Burns, J. A. (2013). *Introduction to the Calculus of Variations and Control with Modern Applications (Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science Book 28)*. Kindle Edition.
- Dacorogna, B. (2004). *Introduction to the calculus of variations*. Imperial College Press.
- Dacorogna, B. (2010). *Direct Methods in the Calculus of Variations (Applied Mathematical Sciences)*. Springer.
- Dazhong Lao, S. Z. (2021). *Fundamental Theories and Their Applications of the Calculus of Variations* . Springer.
- Kielhöfer, H. (2018). *Calculus of Variations: An Introduction to the One-Dimensional Theory with Examples and Exercises* . Springer .
- Komzsik, L. (2019). *Applied Calculus of Variations for Engineers, Third edition*. Boca Raton: CRC Press.
- Liberzon, D. (2012). *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press.
- Lowrie, W. (2012). *A Student's Guide to Geophysical Equations*. Cambridge University Press .
- Michel, V. (2022). *Geomathematics: Modelling and Solving Mathematical Problems in Geodesy and Geophysics*. Cambridge University Press.
- Singh, M. K. (May 28, 2021). *Calculus of Variations* . Kindle Edition.
- Tzanopoulos, T. (2018, Δεκέμβριος 8). Απώλεια ενέργειας ταλάντωσης σε μια ιδιαίτερη πλαστική κρούση. Ποσοτική και ποιοτική μελέτη. Retrieved from <https://httpmyphysics.blogspot.com/2018/12/blog-post.html>

Wan, F. (First published 1995). *Introduction To The Calculus of Variations And Its Applications*.

Ευσταθίου, Β. (2022, Μάρτιος 21). ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ, Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΧΑΜΙΛΤΟΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ. Retrieved from <http://hdl.handle.net/11610/23387>

Ηλιοπούλου, Ο. Ι. (2009, Δεκέμβριος). Η συμβολή της επίλυσης του προβλήματος του βραχυστόχρονου στη γεννηση του λογισμού των μεταβολών. (ΑΠΘ). Θεσσαλονίκη. Retrieved from <http://ikee.lib.auth.gr/record/115811/files/iliopoulou.pdf>

Θωμάς, Κ. (1994). *Λογισμός μεταβολών*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, 2η έκδοση.

Καραμπετάκης, Ν. (2013-2014). Από τον Λογισμό των Μεταβολών στην Θεωρία Βέλτιστου Ελέγχου. Θεσσαλονίκη. Retrieved from <https://opencourses.auth.gr/modules/units/?course=OCRS288&id=3005>

Κοσιώρης, Γ. (n.d.). Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Κρήτη. Retrieved from <http://users.math.uoc.gr/~kosioris/MEM295/index.html#Eq-3>

ΜΑΔΕΝΤΖΟΓΛΟΥ, Δ. (2015, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ). Λογισμός των Μεταβολών και Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις. ΠΑΤΡΑ. Retrieved from <https://apothesis.eap.gr/archive/item/75192>

Μαδεντζόγλου, Δ. (n.d.). *Λογισμός Μεταβολών και Μ.Δ.Ε.* Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.

Παλιμέρης, Θ.-Δ. (2008). Λογισμός μεταβολών και εφαρμογές στη μαθηματική μοντελοποίηση. Σάμος. Retrieved from <http://hdl.handle.net/11610/7992>

Παπαγεωργίου, Γ. (2009). Ο Βέλτιστος Έλεγχος στα Οικονομικά των Φυσικών Πόρων. Λάρισα. Retrieved from [http://mibes.teilar.gr/esdo\\_proceedings/proceedings/2009/ORAL/PAPAGEORGIOU.pdf](http://mibes.teilar.gr/esdo_proceedings/proceedings/2009/ORAL/PAPAGEORGIOU.pdf)

Τριπιντής, Δ. (2008). Εισαγωγή στο Λογισμό των Μεταβολών. Σάμος. Retrieved from <http://hdl.handle.net/11610/12175>

