«Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας»

«Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)»

Διπλωματική Εργασία

«Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων Μαγνητικού Δίπολου Χαμηλών Συχνοτήτων από Σφαιρικά Μεταλλικά Αντικείμενα σε Περιβάλλον Χωρίς Απώλειες»

Ελένη Στεφανίδου

Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Βαφέας

Πάτρα, Ιούνιος 2021

«Σκέδαση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων Μαγνητικού Δίπολου Χαμηλών Συχνοτήτων σπό Σφαιρικά Μεταλλικά Αντικείμενα σε Περιβάλλον Χωρίς Απώλειες»

Ελένη Στεφανίδου

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Παναγιώτης Βαφέας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Φωτεινή Καριώτου
Επίκουρη Καθηγήτρια
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Πάτρα, Ιούνιος 2021

«Ευχαριστίες & Αφιέρωση»

Με την παρούσα εργασία ολοκληρώνονται οι μεταπτυχιακές μου σπουδές στα Μαθηματικά στο Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο και ταυτόχρονα κλείνει ένας μεγάλος κύκλος για εμένα, καθώς επιτυγχάνεται ένας πολύ σημαντικός μου στόχος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Κο. Παναγιώτη Βαφέα, Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου Πατρών, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το τόσο ενδιαφέρον θέμα, για τη λεπτομερή καθοδήγησή του κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, για τη συνεχή και άμεση ανταπόκρισή του στις απορίες μου, αλλά και για την υποστήριξη και ενθάρρυνσή του σε αυτή την άψογη συνεργασία μας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα την συνεπιβλέπουσα καθηγήτριά μου, Κα. Φωτεινή Καριώτου, Επίκουρη Καθηγήτρια του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου, για την καθοριστική συμβολή της στην εργασία αυτή, καθώς επίσης και για τη σημαντική της βοήθεια και τις συμβουλές της κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ, θα ήθελα να πω στο σύζυγό μου Αντώνη Αβραμίδη, Δρ. Μαθηματικό, για την ουσιαστική του βοήθεια και τις επισημάνσεις του καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, καθώς και για την αμέριστη ηθική στήριξή του, την υπομονή, την ειλικρινή εμψύχωση και συμπαράστασή του.

Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Παναγιώτη και Μαρία, για όλα όσα μου έχουν προσφέρει, την παρότρυνση και ενθάρρυνσή τους στη συνέχιση των σπουδών μου, καθώς και για την έμπρακτη βοήθειά τους στην πορεία αυτού του μεταπτυχιακού.

Στον σύζυγό μου Αντώνη,
την κόρη μου Μαρία Κωνσταντίνα,
και το γιο μου που σε λίγο θα έρθει στη ζωή

Περίληψη

Στην εργασία αυτή διερευνώνται τα διανυσματικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία, που σκεδάζονται από μία τέλεια αγώγιμη σφαίρα ενσωματωμένη σε ένα μέσο χωρίς απώλειες. Μια χρονικά αρμονική μαγνητική διπολική πηγή, που βρίσκεται αρκετά μακριά και λειτουργεί σε χαμηλές συχνότητες, χρησιμεύει ως το προσπίπτον πεδίο διέγερσης, προσανατολισμένο αυθαίρετα στον τρισδιάστατο χώρο. Κύρια ιδέα είναι να βρεθεί μια αναλυτική λύση αυτού του προβλήματος σκέδασης, χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων, όπως μια πιθανή αριθμητική εκτίμηση των σκεδαζόμενων πεδίων που θα μπορούσε να είναι χρήσιμη για την αντιστροφή δεδομένων.
Για το σκοπό αυτό, τα προσπίπτοντα και τα σκεδαζόμενα καθώς και τα συνολικά πεδία γράφονται εφαρμόζοντας τη θεωρία χαμηλών συχνοτήτων ως άθροισμα όρων θετικών ακέραιων δυνάμεων του κυματικού αριθμού του εξωτερικού περιβάλλοντος. Έτσι, το πρόβλημα τύπου Maxwell μετατρέπεται σε διασυνδεδεμένες εξισώσεις Laplace ή Poisson πλαισιωμένες από τις συνοριακές συνθήκες της τέλεια αγώγιμης σφαίρας και τις απαραίτητες συνθήκες ακτινοβολίας στο άπειρο. Η προσέγγιση του στατικού όρου και των πρώτων τριών δυναμικών όρων είναι αρκετή για την παρούσα μελέτη, αφού οι όροι υψηλότερων τάξεων παραλείπονται στο καθεστώς χαμηλών συχνοτήτων διότι είναι αμελητέοι. Από εδώ και έπειτα, τα συνοριακά προβλήματα σκέδασης τριών διαστάσεων λύνονται σταδιακά, ενώ ο καθορισμός των άγνωστων σταθερών συντελεστών οδηγεί είτε σε σαφείς εκφράσεις είτε σε άπειρα γραμμικά αλγεβρικά συστήματα, τα οποία μπορούν εύκολα να επιλυθούν εφαρμόζοντας γνωστές τεχνικές αποκοπής. Τα μη συμμετρικά ως προς άξονα σκεδαζόμενα μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία λαμβάνονται με αναλυτικό και συμπαγή τρόπο μέσω αναπτυγμάτων σειρών άπειρων όρων σφαιρικών ιδιοσυναρτήσεων. Προκειμένου να αποδειχθεί η εγκυρότητα της αναλυτικής μας προσέγγισης, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της σφαιροειδούς περίπτωσης τα οποία εκφυλίζονται έτσι ώστε να ανακτηθεί η σφαιρική περίπτωση δηλ. η περίπτωσή μας.

Λέξεις – Κλειδιά

Ηλεκτρομαγνητικά πεδία, σκέδαση χαμηλών συχνοτήτων, μαγνητικό δίπολο, σφαιρικές συντεταγμένες

«Low–frequency electromagnetic scattering by a metal spherical body embedded in a lossless medium with magnetic dipolar excitation»

Eleni Stefanidou

Abstract

The electromagnetic vector fields, which are scattered off a highly conductive sphere that is embedded within an otherwise lossless medium, are investigated in this contribution. A time–harmonic magnetic dipolar source, located nearby and operating at low frequencies, serves as the excitation primary field, being arbitrarily orientated in the three–dimensional space. The main idea is to obtain an analytical solution of this scattering problem, using the appropriate system of spherical coordinates, such as a possibly fast numerical estimation of the scattered fields could be useful for real data inversion. To this end, incident and scattered, as well total fields are written in a rigorous low–frequency manner in terms of positive integral powers of the real–valued wave number of the exterior environment. Then, the Maxwell–type problem is converted to interconnected either Laplace's or Poisson's equations, complemented by the perfectly conducting boundary conditions on the spherical object and the necessary radiation behavior at infinity. The static approximation and the three first dynamic contributors are sufficient for the present study, while terms of higher orders are neglected at the low–frequency regime. Henceforth, the 3–D scattering boundary value problems are solved incrementally, whereas the determination of the unknown constant coefficients leads either to concrete expressions or to infinite linear algebraic systems, which can be readily solved by implementing standard cut–off techniques. The non–axisymmetric scattered magnetic and electric fields are obtained in an analytical compact fashion via infinite series expansions in spherical eigenfunctions. In order to demonstrate the validity of our analytical approach, we use the results of spheroidal case that are degenerated so as to recover the spherical case, which is our case.

Keywords

Electromagnetic fields; Low–frequency scattering; Magnetic dipole; Spheroidal coordinates

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

1. Παρουσίαση, μοντελοποίηση και επίλυση του προβλήματος

Το πρώτο κεφάλαιο είναι το κυριότερο κομμάτι της εργασίας αυτής. Αποτελείται από δύο βασικές ενότητες. Την πρώτη ενότητα που έχει στόχο αφενός να εισάγει τον αναγνώστη στο πρόβλημα που μελετάται αφού γίνεται μία λεπτομερής περιγραφή αυτού και αφετέρου να δείξει αναλυτικά τη διαδικασία μοντελοποίησής του και τη δεύτερη ενότητα που αποτελεί το κεντρικότερο μέρος της μελέτης μας αφού σε αυτή δίνεται η επίλυση του προβλήματος.

1.1 Παρουσίαση και μοντελοποίηση του προβλήματος

Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να δώσει μία συνολική και πλήρη εικόνα του προβλήματος που θα μελετηθεί, του τρόπου αντιμετώπισης που θα ακολουθηθεί καθώς και όλων εκείνων των εργαλείων φυσικής και μαθηματικών που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή του. Δίνεται αναλυτικά η φυσική και μαθηματική ερμηνεία όλων των στοιχείων που θα συναντήσουμε στη μελέτη μας, ώστε στο τέλος η ενότητα αυτή να καταλήξει στην ακριβή μοντελοποίηση του προβλήματος δηλ. στον καθορισμό όλων εκείνων των διαφορικών εξισώσεων που θα πρέπει να λύσουμε συνοδευόμενες από τις κατάλληλες συνθήκες ώστε να προκύψουν τα ζητούμενα αποτελέσματα.

1.1.1 Εισαγωγή

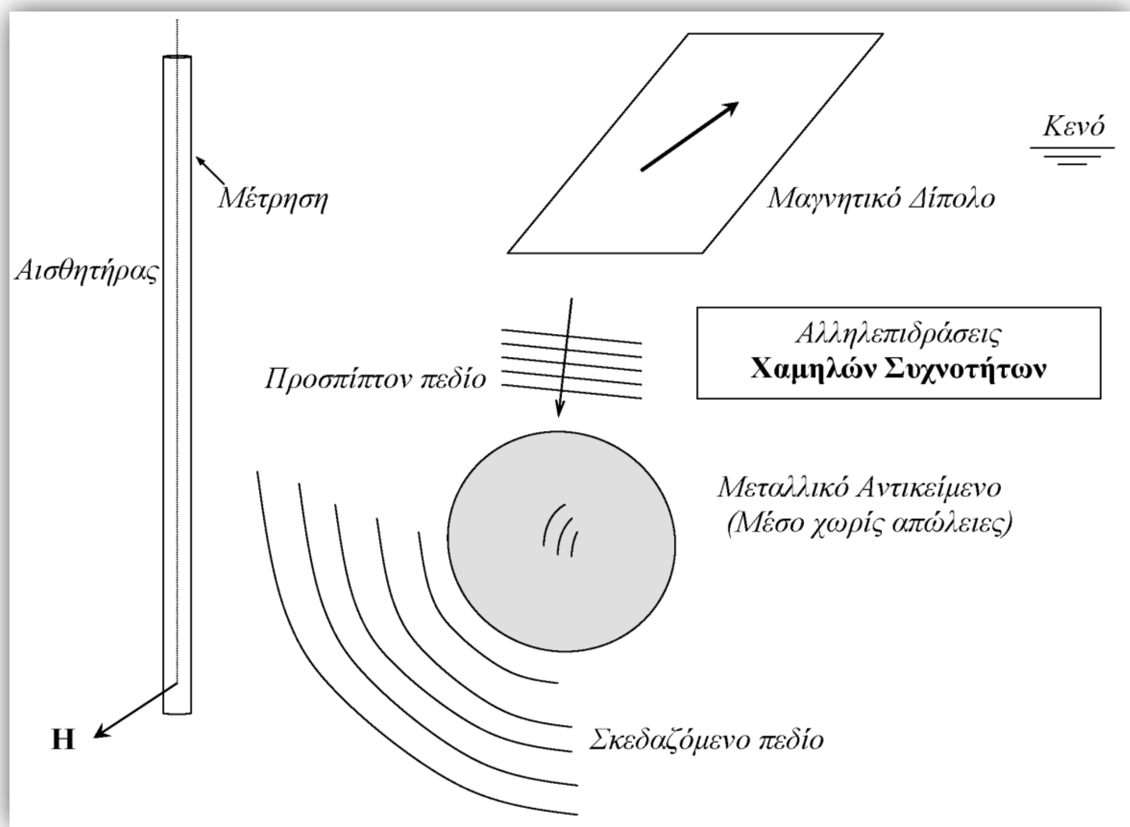
Οι θεμελιώδεις αρχές του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού (Stratton, 1941) που εισήχθησαν αρχικά από τον πρωτοπόρο στον τομέα αυτόν James Clerk Maxwell, αντιπροσωπεύουν τη σημαντική βάση της θεωρίας σκέδασης χαμηλών συχνοτήτων (Dassios & Kleinman, 2000). Πολλές φυσικές εφαρμογές που σχετίζονται με την απόκριση των δεκτών με αυθαίρετο σχήμα, ενσωματωμένων σε διάφορα μέσα, όταν διεγείρονται από διάφορες πρωτογενείς πηγές, εξακολουθούν να βρίσκονται στην πρώτη γραμμή της επιστημονικής έρευνας. Πράγματι, ας δώσουμε έμφαση σε ορισμένα από αυτά, όπως σύνθετα δύο φάσεων, ανίχνευση υπογείων της Γης για εκμετάλλευση ορυκτών, αναγνώριση κοιλοτήτων ή άλλες υπόγειες ανιχνεύσεις, όπως μη εκραγέντα πυρομαχικά (π.χ. νάρκες) και θαμμένα αντικείμενα, καθώς και σκέδαση από χειρόμορφο υλικό είτε σε χειρόμορφα είτε σε μη χειρόμορφα περιβάλλοντα. Προφανώς, το εύρος των εφαρμοζόμενων συχνοτήτων ποικίλλει ανάλογα με την κάθε περίπτωση. Ωστόσο, οι αλληλεπιδράσεις χαμηλής συχνότητας παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για πολλά προβλήματα της πραγματικής ζωής που εμφανίζονται σε φυσικές περιοχές, τα οποία σχετίζονται με την παρούσα μελέτη. Με την αποκωδικοποίηση των εμπλεκόμενων πεδίων σε κάθε περίπτωση, οι πληροφορίες σχετικά με τις κύριες παραμέτρους όπως οι προσανατολισμοί, τα μεγέθη, τα σχήματα, οι μαγνητικές και ηλεκτρικές ιδιότητες των ανωμαλιών φέρνουν μια εικόνα της συμπεριφοράς του πεδίου. Ωστόσο, αυτό δεν είναι καθόλου εύκολο έργο, δεδομένου ότι η κατάσταση ενός σχήματος αντιστροφής (Ammari & Kang, 2007) δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί με ασφαλή τρόπο, εκτός εάν διατίθενται αποτελεσματικά μοντέλα κατανομής πεδίου και ισχυρά αποτελεσματικά μαθηματικά εργαλεία (Ammari, Garnier, Jing, Kang, Lim, Solna & Wang, 2013), δεδομένου ότι στην πράξη απαιτείται η ταυτόχρονη μέτρηση και ταυτοποίηση του σκεδαστή.

Η μεγάλη ποσότητα διανυσματικών δεδομένων, η ηλεκτρομαγνητική και γεωμετρική πολυπλοκότητα των διάφορων μέσων που εμπλέκονται, οι πολλές διαμορφώσεις πηγών και δεκτών και η αβεβαιότητα που προκύπτει από σύνολα δεδομένων που περιέχουν τόσο τη συμβολή του προσπίπτοντος, όσο και του σκεδαζόμενου πεδίου, εξηγούν το ενδιαφέρον της επίλυσης προβλημάτων προς τα εμπρός και αντίστροφης ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης, πρώτα στο στάδιο μοντελοποίησης και έπειτα στο στάδιο αντιστροφής. Επομένως, η ήδη άφθονη βιβλιογραφία που αφορά τη σκέδαση με απλά σχήματα χρησιμοποιώντας αναλυτικές μεθόδους είναι ανοιχτή για προσθήκη νέων και χρήσιμων ημι-αναλυτικών και γιατί όχι, αναλυτικών αποτελεσμάτων. Την τελευταία δεκαετία, πολλά άρθρα δημοσιεύτηκαν προς αυτή την κατεύθυνση και πολλές αναφορές είναι διαθέσιμες στη βιβλιογραφία. Υπάρχει μελέτη που αφορά τη σκέδαση χαμηλής συχνότητας από μια τέλεια ηλεκτρικά αγώγιμη σφαίρα σε ένα αγώγιμο περιβάλλον, που φωτίζεται από ένα αυθαίρετα προσανατολισμένο και σταθερό μαγνητικό πεδίο πηγής διπόλου (Vafeas, Perrusson & Lesselier, 2004). Σε αυτά, τα τρισδιάστατα σκεδαζόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία έχουν λάβει έναν πλήρη αναλυτικό φορμαλισμό όσον αφορά λύσεις κλειστού τύπου, ενώ μια αριθμητική εφαρμογή έχει επιβεβαιώσει σχεδόν τέλεια τα αποτελέσματα μέσω σύγκρισης με το ακριβές αμάπτυγμα της σειράς Mie (Mie, 1908). Ωστόσο, αυτή η μελέτη ήταν μια πρώτη εισαγωγή στη σκέδαση από μεταλλικά αντικείμενα που αντανακλούν την πλήρη ισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου. Προχωρώντας σε πιο περίπλοκες γεωμετρίες όπως τα σφαιροειδή (Vafeas, Perrusson & Lesselier, 2009) ή τα ελλειψοειδή (Perrusson, Vafeas & Lesselier, 2010 και Vafeas, 2020), για την ίδια φυσική σκέψη, μπορεί κανείς να συνειδητοποιήσει ότι ο προσανατολισμός του σώματος, εκτός από τη θέση ή το μέγεθος, παίζει καθοριστικό ρόλο όχι μόνο στη μαθηματική αντιμετώπιση αλλά επίσης και στην υπολογιστική επεξεργασία των αντίστοιχων πεδίων. Επιπλέον, είναι προφανές ότι όσο πιο γενικό γίνεται το σχήμα, τόσο μεγαλύτερη δυσκολία προστίθεται σε μια πιθανή αντιστροφή, η οποία, παρεμπιπτόντως, είναι ο τελικός στόχος όταν ασχολούμαστε με τις πραγματικές εφαρμογές. Για το σκοπό αυτό είναι αναπόφευκτη η χρήση περίπλοκων αριθμητικών τεχνικών, όπως αποδεικνύεται σε άλλη μελέτη (Perrusson, Vafeas, Chatjigeorgiou & Lesselier, 2015) για τον εντοπισμό ενός ορυκτού σώματος με σχεδόν άπειρη αγωγιμότητα, το οποίο είναι θαμμένο στη Γη, χρησιμοποιώντας ένα ισοδύναμο άριστα αγώγιμο τριαξονικό μοντέλο ελλειψοειδούς. Περιπτώσεις υψηλής αντίθεσης, όπου ο στόχος έχει εξαιρετικά μεγάλη αγωγιμότητα σε σχέση με το περιβάλλον που τον περιβάλει, και ως εκ τούτου θεωρείται ότι είναι μη διαπερατοί, παρακινούν τους ερευνητές να ξεκινήσουν πολύ πιο πολύπλοκα μοτίβα, όπως την περίπτωση δύο σφαιρών για δύο γειτονικά μεταλλικά αντικείμενα (Vafeas, Papadopoulos & Lesselier, 2012) ή την περίπτωση ενός μη διαπερατού, δηλαδή τέλεια αγώγιμου, δακτυλίου (Vafeas, Papadopoulos, Ding & Lesselier, 2016), όπου και τα δύο άρθρα υποθέτουν ένα αγώγιμο μέσο. Αυτές οι αναφορές, καθεμία από τις οποίες περιέχει μια επαρκή λίστα αναφοράς, είναι ένα μικρό αλλά αντιπροσωπευτικό δείγμα της αναστάτωσης που προκαλείται κατά την εκτέλεση αναλυτικών τεχνικών κατά την ενσωμάτωση με διαφορετικά γεωμετρικά μοντέλα (Moon & Spencer, 1971 και Morse & Feshbach, 1953). Στην πραγματικότητα, η δυσκολία αυξάνεται λόγω της εμφάνισης περίπλοκων ιδιοσυναρτήσεων (Hobson, 1965 και dlmf.nist.gov), που αντιμετωπίζονται με τα εμπλεκόμενα δυναμικά.

Τώρα αυτή η μελέτη επικεντρώνεται στην προσαρμογή της θεωρίας σκέδασης διάχυσης χαμηλών συχνοτήτων για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος εντοπισμού μη διαπερατών μεταλλικών σωμάτων σε ένα χωρίς απώλειες, δηλαδή τέλεια διηλεκτρικό, μέσο, με στόχο να ακολουθήσει την παρόμοια επιτυχημένη πορεία άλλων μελετών στο πεδίο. Έχοντας κατά νου τις λίγες, αλλά με αρκετά καλά αποτελέσματα, προσπάθειες προσομοίωσης του περιβάλλοντος ως χωρίς απώλειες και μη αγώγιμου, π.χ. βλ. για παράδειγμα (Vafeas, Lesselier & Kariotou, 2015) την περίπτωση δύο μεγάλων σφαιρών που σχεδόν αγγίζονται, την τοροειδή περίπτωση (Vafeas,2016), καθώς και την ελλειψοειδή (Vafeas, 2020) αλλά και την σφαιροειδή (Vafeas, 2018) περίπτωση, συνειδητοποιούμε την ανάγκη αντιμετώπισης τέτοιων αναλυτικών μοντέλων. Αναζητώντας διαφορετικές δομές σώματος προκειμένου να επιτευχθεί η αναπαράσταση όλων των ειδών ανωμαλιών σε μέσα χωρίς απώλειες, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αποτελεσματικότητα, το παρόν έγγραφο ασχολείται με τη σφαιρική περίπτωση. Έτσι, εδώ επεκτείνουμε την έρευνα σε μία απόλυτα ανακλαστική σφαίρα, ενσωματωμένη σε ένα περιβάλλον χωρίς απώλειες, όπου το καταλληλότερο και καλύτερο σύστημα προσαρμογής για τους συγκεκριμένους σκοπούς μοντελοποίησης είναι το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (Moon et al., 1971 και Morse et al., 1953). Από την άλλη πλευρά, μια χρονικά αρμονική μαγνητική διπόλη πηγή, που ενεργεί ως η κύρια πηγή, λειτουργεί σε καθεστώς χαμηλών συχνοτήτων και δημιουργεί τα τρισδιάστατα προσπίπτοντα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, τα οποία μεταδίδονται προς τον σκεδαστή. Στη συνέχεια, το σφαιρικό σώμα ανταποκρίνεται στην διέγερση και δημιουργεί τα σκεδαζόμενα μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία, όπου το άθροισμά τους αποτελεί τα συνολικά πεδία (βλ. Σχ. 1).

Η φυσική του προβλήματος μας ωθεί να ακολουθήσουμε την ακόλουθη τεχνική σε χαμηλές συχνότητες, όπου προσπίπτοντα, σκεδαζόμενα και συνολικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία αναπτύσσονται σε όρους θετικών ακέραιων δυνάμεων του (ik), όπου k ο πραγματικός κυματικός αριθμός του εξωτερικού μέσου στη συχνότητα λειτουργίας. Εδώ, επεξεργαζόμαστε τα τρισδιάστατα διανυσματικά πεδία σε κάθε όρο $(ik)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ το πρόβλημα τελικά μετατρέπεται σε μια ακολουθία συζευγμένων προβλημάτων σκέδασης συνοριακών τιμών. Το μοντέλο διατυπώνεται μαθηματικά με διαφορικές εξισώσεις Laplace και Poisson δεύτερης τάξης, που συνοδεύονται από απόλυτα ηλεκτρικά αγώγιμες συνοριακές συνθήκες, δηλαδή την ακύρωση των κάθετων μαγνητικών και εφαπτόμενων ηλεκτρικών πεδίων, που αντικατοπτρίζουν τον αδιαπέραστο χαρακτήρα του συνόρου του μεταλλικού στόχου τύπου σφαίρας. Εφαρμόζονται επίσης οι συνθήκες ακτινοβολίας Silver – Müller στο άπειρο. Στην ανάλυσή μας, περιοριζόμαστε στους σημαντικούς όρους των αναπτυγμάτων, που αποτελούνται από τον στατικό όρο Rayleigh για $n=0$ και τους δυναμικούς όρους για $n=1,2,3$, δεδομένου ότι οι όροι υψηλότερων τάξεων, δηλαδή για $n \geq 4$, είναι πολύ μικροί επομένως θεωρούνται αμεληταίοι λόγω των χαμηλών συχνοτήτων στις οποίες λειτουργεί η πηγή οπότε και παραλείπονται. Η αναλυτική διαδικασία που σκιαγραφείται παραπάνω οδηγεί είτε σε κλειστές σχέσεις είτε σε άπειρα γραμμικά αλγεβρικά συστήματα για τον προσδιορισμό των άγνωστων σταθερών συντελεστών των συναρτήσεων δυναμικού που εμφανίζονται, όπου τα τελευταία μπορούν να επιλυθούν με την εφαρμογή συνήθων μεθόδων αποκοπής. Τα τρισδιάστατα σκεδαζόμενα μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία για κάθε ένα από τα $n = 0,1,2,3$ δέχονται μορφές κλειστού τύπου μέσω άπειρων αναπτυγμάτων σειρών σε σφαιρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις (Hobson, 1965 και dlmf.nist.gov). Το κλειδί για να διαπιστωθεί η εγκυρότητα της προσέγγισης μας είναι ο εκφυλισμός των αντίστοιχων τύπων της σφαιροειδούς περίπτωσης (Vafeas, 2018) για την ανάκτηση της σφαιρικής υπόθεσης δηλ. της περίπτωσης της εργασίας αυτής.

Η υπόλοιπη εργασία είναι δομημένη ως εξής. Στην υποενότητα 1.1.2, περιγράφεται μια λεπτομερής φυσική ερμηνεία και η θεωρητική βάση μέσω μιας αναλυτικής μαθηματικής διατύπωσης, η οποία ενσωματώνει τα γενικά χαρακτηριστικά, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε γεωμετρία. Στη συνέχεια, στην υποενότητα 1.1.3, δίνεται αναλυτικά ο τρόπος με τον οποίο χειριζόμαστε τα μαθηματικά εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας σε συνδυασμό με τα εργαλεία της φυσικής ώστε να καταλήξουμε στις μερικές διαφορικές εξισώσεις με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που θα πρέπει να λύσουμε ώστε να έχουμε τα ζητούμενα αποτελέσματα. Στην ενότητα 1.2 δίνεται αναλυτικά η επίλυση του προβλήματος. Αρχικά, στην υποενότητα 1.2.1 παρουσιάζονται όλες οι σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν κατά τη διαδρομή της επίλυσής μας προσαρμοσμένες στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων αλλά και σύμφωνα με το καθεστώς χαμηλών συχνοτήτων στο οποίο εκπέμπει η πηγή ενώ οι υποενότητες 1.2.2 και 1.2.3 αφιερώνονται στον αναλυτικό υπολογισμό των μαγνητικών και των ηλεκτρικών σκεδαζόμενων πεδίων αντίστοιχα. Τέλος, το κεφάλαιο 2 στόχο έχει να επαληθεύσει όλα τα αποτελέσματα της επίλυσης βάσει των αποτελεσμάτων της σφαιροειδούς περίπτωσης. Αρχικά, στην υποενότητα 2.1.1 γίνεται μία παρουσίαση του σφαιροειδούς συστήματος και των αντίστοιχων αποτελεσμάτων των πεδίων που έχουν υπολογιστεί σε προηγούμενη μελέτη (Vafeas, 2018) ώστε αυτά να εκφυλιστούν και να μας δώσουν τις χρήσιμες για την επίλυση σχέσεις της σφαιρικής μας περίπτωσης στην υποενότητα 2.1.2 και τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας που αφορούν τα μαγνητικά σκεδαζόμενα πεδία και τα ηλεκτρικά σκεδαζόμενα πεδία στις υποενότητες 2.1.3 και 2.1.4 αντίστοιχα.



Σχήμα 1 Η εφαρμογή της παρούσας μελέτης

Στο Σχήμα 1 βλέπουμε την εφαρμογή της μελέτης αυτής, δηλ. μία σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος στην πράξη. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε το σφαιρικό μεταλλικό αντικείμενο και το μαγνητικό δίπολο που βρίσκεται αρκετά μακριά από τη σφαίρα. Αυτό εκπέμπει το προσπίπτον πεδίο σε χαμηλές συχνότητες, το οποίο σκεδάζεται από τη σφαίρα και έτσι δημιουργείται το σκεδαζόμενο πεδίο. Τέλος, το περιβάλλον είναι το κενό και επιπλέον υπάρχει ένας αισθητήρας ο οποίος μετρά το μαγνητικό πεδίο. Να σημειώσουμε εδώ ότι στην πράξη είναι δυνατόν να μετρηθεί μόνο το μαγνητικό πεδίο.

1.1.2 Φυσική και μαθηματική ερμηνεία

Έστω μη-διαπερατό, σφαιρικό, μεταλλικό αντικείμενο ακτίνας α που έχει αγωγιμότητα $\sigma_b \to +\infty$ σε σχέση με το περιβάλλον το οποίο είναι ένα ομογενές, ισοτροπικό και μη μαγνητικό μέσο χωρίς απώλειες με αγωγιμότητα $\sigma \cong 0$. Το σύστημα σώμα-μέσο βρίσκεται στον τρισδιάστατο χώρο $V\left(\mathbb{R}^3\right)$. Η επαφή σώματος-μέσου διακρίνει τον χώρο αυτό σε δύο περιοχές που καθορίζονται από την ομαλή επιφάνεια S του τέλεια ηλεκτρικά αγώγιμου αντικειμένου. Έτσι, η περιοχή ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης εξαπλώνεται σε απεριόριστη περιοχή διηλεκτρικής σταθεράς ε και μαγνητικής διαπερατότητας μ, η οποία προσεγγίζει την μ_0 του κενού, έξω από τη σφαίρα, προκαλώντας προβλήματα εξωτερικού τύπου.

Στο πρόβλημα που μελετάμε η κύρια βάση είναι οι εξισώσεις του Maxwell οι οποίες στη γενική τους μορφή για ένα μεταλλικό μη διαπερατό αντικείμενο με άπειρη αγωγιμότητα επιφάνειας S, για τυχαία θέση $\mathbf{r}\in\Omega$ (όπου Ω ο χώρος σκέδασης) και για χρόνο $t\geq 0$ δίνονται από:

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \qquad \textit{(Νόμος Faraday)}, \tag{1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t)=\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}+\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{r},t) \qquad \textit{(Νόμος Ampère)}, \tag{2}$$

όπου $\nabla\equiv\nabla_{\mathbf{r}}$, $\Delta\equiv\Delta_{\mathbf{r}}$ και $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)$ το ηλεκτρικό πεδίο, $\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)$ η μαγνητική επαγωγή, $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t)$ το μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbf{r},t)$ η ηλεκτρική μετατόπιση και $\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{r},t)$ η πυκνότητα του ρεύματος. Επίσης, έχουμε αναφέρει πως η διπολική πηγή που εκπέμπει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα έχει χρονική αρμονική εξάρτηση από το χρόνο κάτι που επιτυγχάνεται για τα πεδία μέσω του πολλαπλασιασμού του χωρικού τους τμήματος με $\exp(-i\omega t)$ (όπου $i=\sqrt{-1}$ η φανταστική μονάδα). Πιο συγκεκριμένα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \tag{7}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (3), (4), (5), (6) και (7) στις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\Leftrightarrow\nabla\times\left(\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\right)=-\frac{\partial\left(\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\right)}{\partial t}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\omega t}\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{B}(\mathbf{r})\frac{\partial\left(e^{-i\omega t}\right)}{\partial t} \Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r})$$

και

$$(2) \Leftrightarrow \nabla\times\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{J}}(\mathbf{r},t) \Leftrightarrow \nabla\times\left(\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\right) = \frac{\partial\left(\mathbf{D}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\right)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\omega t}\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r})\frac{\partial\left(e^{-i\omega t}\right)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Έτσι, οι εξισώσεις Maxwell μετατρέπονται τελικά σε:

$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}(\mathbf{r})$ (*Νόμος Faraday*), (8)

$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r})$ (*Νόμος Ampère),* (9)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι συνέπεια της χρονικής αρμονικής εξάρτησης είναι το γεγονός ότι το πρόβλημά μας καταλήγει να είναι μόνο χωρικό αφού στις εξισώσεις Maxwell απαλείφεται η μεταβλητή t του χρόνου. Έτσι, είναι επόμενο τα πεδία να δέχονται εκφράσεις όπως $\mathbf{r} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3$ όπου $\hat{\boldsymbol{x}}_\kappa$, $\kappa = 1,2,3$ η Καρτεσιανή βάση και (x_1, x_2, x_3) οι Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ακόμη, για ένα γραμμικό, ομογενές και ισοτροπικό μέσο Ω και για $\mathbf{r}\in\Omega$ ισχύουν τα εξής:

$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ($\mu =$μαγνητική διαπερατότητα), (10)

$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ($\varepsilon =$διηλεκτρική σταθερά), (11)

$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ($\sigma =$ηλεκτρική αγωγιμότητα), (12)

Αφού λοιπόν η μεταλλική σφαίρα είναι τέλεια αγώγιμη δηλ. $\sigma_b \to +\infty$ άρα μη διαπερατή τότε στο εσωτερικό της δε θα υπάρχουν καθόλου πεδία δηλ. $\mathbf{E}_b(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_b(\mathbf{r}) \cong \mathbf{0}$. Άρα, εδώ αποδεικνύεται ότι το πρόβλημά μας είναι εξωτερικού τύπου. Από την άλλη πλευρά, όσον αφορά το περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται η σφαίρα όπως αναφέραμε νωρίτερα αυτό είναι το κενό που είναι ένα μέσο χωρίς απώλειες δηλ. με μηδενική αγωγιμότητα ($\sigma \cong 0$). Έτσι, από τη σχέση (12) προκύπτει ότι:

$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$, (13)

και τελικά σύμφωνα με τις σχέσεις (10), (11) και (13) οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν τη μορφή:

$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r})$ (*Νόμος Faraday*), (14)

$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (*Νόμος Ampère*), (15)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα μοναδικά πεδία που παρέμειναν είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό. Επιπλέον, πρέπει να αναφέρουμε ότι οι αποκλίσεις των πεδίων αυτών δηλ. ηλεκτρικού και μαγνητικού είναι 0. Έτσι, θα ισχύει η σχέση:

$\nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, (16)

Συνεχίζουμε με σκοπό να υπολογίσουμε τον κυματικό αριθμό του μέσου. Επίσης, στην πορεία αυτού θα διαπιστώσουμε ότι και το ηλεκτρικό $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ αλλά και το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz $(\Delta + k^2)\mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0$ (όπου $\mathbf{f}$ τυχαία διανυσματική συνάρτηση). Παίρνοντας τον στροβιλισμό στις σχέσεις (14) και (15) αλλά και χρησιμοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) - \Delta\mathbf{f}$ έχουμε:

$$(14) \Leftrightarrow \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})) = i\omega\mu\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})) - \Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r}) \overset{(15),(16)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu(-i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r})) \Leftrightarrow (\Delta + \omega^2\mu\varepsilon)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

Όπου η τελευταία είναι η εξίσωση Helmholtz με $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \Leftrightarrow k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ να εκφράζει τον κυματικό αριθμό. Ομοίως, έχουμε:

$$(15) \Leftrightarrow \nabla\times(\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})) = -i\omega\varepsilon\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \nabla(\nabla\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r})) - \Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r}) \overset{(14),(16)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow -\Delta\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon(i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r})) \Leftrightarrow (\Delta + \omega^2\mu\varepsilon)\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$$

Όπου και πάλι η τελευταία σχέση είναι η εξίσωση Helmholtz και $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \Leftrightarrow k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ ο κυματικός αριθμός.

Τελικά, δεδομένου και της χαμηλής κυκλικής συχνότητας ω, ο πραγματικός κυματικός αριθμός του μέσου είναι:

$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, (17)

Έτσι, η εξίσωση (17) εξασφαλίζει την υπόθεση των χαμηλών συχνοτήτων.

Όσον αφορά τη μη διαπερατή σφαίρα, αυτή διεγείρεται από ένα πρωτεύον πεδίο πηγής, το οποίο για τους σκοπούς της εργασίας αυτής είναι το μαγνητικό δίπολο $\mathbf{m}$ με αυθαίρετο προσανατολισμό και δεδομένης της Καρτεσιανής βάσης $(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3)$ δίνεται από:

$\mathbf{m} = \sum_{j=1}^{3} m_j\hat{\mathbf{x}}_j$, (18) Επίσης, αυτό είναι τοποθετημένο στη θέση $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$. Το σταθερό σημείο $\mathbf{r}_0$ εξαιρείται από το χώρο $V\left(\mathbb{R}^3\right)$ της σκέδασης, αφού η περιοχή ενδιαφέροντός μας είναι σε αρκετά μεγάλη απόσταση από την πηγή. Έτσι, υιοθετούμε τον ορισμό $\Omega \equiv V\left(\mathbb{R}^3\right)-\{\mathbf{r}_0\}$ για την περιοχή της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας που προκαλείται.

Σύμφωνα με την ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία (Dassios et al., 2000) και με δεδομένο το συμβολισμό $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ και $R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|$, η μαγνητική διπολική πηγή εκπέμπει τα πρωτεύοντα πεδία:

$$\mathbf{H}^p\left(\mathbf{r};\mathbf{r}_0\right)=\frac{1}{4\pi}\left[\left(k^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\mathbf{m}-\left(k^2+\frac{3ik}{R}-\frac{3}{R^2}\right)\frac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}}{R^2}\right]\frac{e^{ikR}}{R} \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{19}$$

και

$$\mathbf{E}^p\left(\mathbf{r};\mathbf{r}_0\right)=\left[\frac{\omega\mu k}{4\pi}\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R}\right]\frac{e^{ikR}}{R} \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{20}$$

όπου το σύμβολο $\otimes$ υποδηλώνει το δυαδικό γινόμενο. Χρησιμοποιώντας για το e^{ikR} το ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin που είναι:

$$e^{ikR}=\sum_{\mu=0}^{+\infty}\frac{(ikR)^\mu}{\mu!} \Leftrightarrow e^{ikR}=1+R(ik)+\frac{R^2}{2!}(ik)^2+\frac{R^3}{3!}(ik)^3+\ldots \tag{21}$$

και δεδομένου της σχέσης (17), δίνονται παρακάτω όλοι οι αλγεβρικοί υπολογισμοί με σκοπό να γραφούν τα πεδία (19) και (20) ως άθροισμα όρων ακέραιων δυνάμεων του (ik). Οπότε από τη (19) για το μαγνητικό πεδίο έχουμε:

$$\mathbf{H}^p\left(\mathbf{r};\mathbf{r}_0\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\left(k^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\mathbf{m}-\left(k^2+\frac{3ik}{R}-\frac{3}{R^2}\right)\frac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}}{R^2}\right]\frac{e^{ikR}}{R}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\left(k^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\mathbf{m}-\left(k^2+\frac{3ik}{R}-\frac{3}{R^2}\right)\frac{\mathbf{R}\left(\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}\right)}{R^2}\right]\frac{e^{ikR}}{R}\overset{\text{θέτουμε } \mathbf{A}=\frac{\mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{m})}{R^2}}{=}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\left(k^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\mathbf{m}-\left(k^2+\frac{3ik}{R}-\frac{3}{R^2}\right)\mathbf{A}\right]\frac{e^{ikR}}{R}=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\left[\left(-(ik)^2+\frac{ik}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\mathbf{m}+\left((ik)^2-\frac{3ik}{R}+\frac{3}{R^2}\right)\mathbf{A}\right]e^{ikR}=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\left[(\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^2+\frac{1}{R}(\mathbf{m}-3\mathbf{A})ik+\frac{1}{R^2}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})\right]e^{ikR}\overset{(21)}{=}$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{1}{R^2}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})+\frac{1}{R}(\mathbf{m}-3\mathbf{A})ik+(\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^2\right]\left[1+R(ik)+\frac{R^2}{2!}(ik)^2+\frac{R^3}{3!}(ik)^3+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{1}{R^2}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})+\frac{1}{R}(\mathbf{m}-3\mathbf{A})ik+(\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^2+\frac{1}{R}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})ik+(\mathbf{m}-3\mathbf{A})(ik)^2+\right.$$
$$+R(\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^3+\frac{1}{2}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^2+\frac{R}{2}(\mathbf{m}-3\mathbf{A})(ik)^3+\frac{R^2}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^4+$$
$$\left.+\frac{R}{6}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^3+\frac{R^2}{6}(\mathbf{m}-3\mathbf{A})(ik)^4+\frac{R^3}{6}(\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^5+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{1}{R^2}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})+\frac{1}{R}(\mathbf{m}-3\mathbf{A}+3\mathbf{A}-\mathbf{m})ik+\left(\mathbf{A}-\mathbf{m}+\mathbf{m}-3\mathbf{A}+\frac{3\mathbf{A}-\mathbf{m}}{2}\right)(ik)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{R}{6}(\mathbf{6A}-6\mathbf{m}+3\mathbf{m}-9\mathbf{A}+3\mathbf{A}-\mathbf{m})(ik)^3+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{1}{R^2}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})+\left(\frac{3\mathbf{A}-\mathbf{m}-4\mathbf{A}}{2}\right)(ik)^2+\frac{-4R\mathbf{m}}{6}(ik)^3+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{4\pi R^3}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})+\frac{1}{4\pi R}\left(\frac{-\mathbf{m}-\mathbf{A}}{2}\right)(ik)^2+\frac{1}{4\pi}\frac{-4\mathbf{m}}{6}(ik)^3+O\left((ik)^4\right)$$

όπου $\mathbf{A}=\dfrac{\mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{m})}{R^2}=\dfrac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}}{R^2}$ το οποίο θέσαμε για ευκολία στις πράξεις και το συμβολισμό. Άρα, για το προσπίπτον μαγνητικό πεδίο καταλήξαμε στη σχέση:

$$\mathbf{H}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)=\frac{1}{4\pi R^3}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})+\frac{1}{4\pi R}\left(\frac{-\mathbf{m}-\mathbf{A}}{2}\right)(ik)^2+\frac{1}{4\pi}\frac{-4\mathbf{m}}{6}(ik)^3+O\left((ik)^4\right), \tag{22}$$

η οποία είναι στη ζητούμενη μορφή:

$$\mathbf{H}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)=\left[\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\frac{\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{2}(ik)^2+\frac{\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right), \tag{23}$$

όπου

- $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)=\dfrac{1}{4\pi R^3}(3\mathbf{A}-\mathbf{m})=\dfrac{1}{4\pi}\left(3\dfrac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}}{R^2}-\mathbf{m}\right)\dfrac{1}{R^3}\Leftrightarrow$

$$\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)=\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{3\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}}{R^2}-\tilde{\mathbf{I}}\right)\frac{1}{R^3}, \tag{24}$$

- $\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)=\dfrac{1}{4\pi R}(-\mathbf{m}-\mathbf{A})=-\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{R}\left(\mathbf{m}+\dfrac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}}{R^2}\right)=-\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\cdot\mathbf{m}}{R^2}+\mathbf{m}\right)\dfrac{1}{R}\Leftrightarrow$

$$\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}}{R^2}+\tilde{\mathbf{I}}\right)\frac{1}{R} \tag{25}$$

- $$\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}(-4\mathbf{m}) \Leftrightarrow \mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{\pi}, \tag{26}$$

με $\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{j=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_j\otimes\hat{\mathbf{x}}_j$ το μοναδιαίο δυαδικό και $\mathbf{H}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = 0$.

Αντίστοιχα, για το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο από την (20) έχουμε:

$$\mathbf{E}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) =$$

$$= \left[\frac{\omega\mu k}{4\pi}\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R}\right]\frac{e^{ikR}}{R} \overset{(17)\Leftrightarrow\omega=\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}{=}$$

$$= \left[\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\mu k}{4\pi}\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R}\right]\frac{e^{ikR}}{R} \overset{\text{θέτουμε}\,\mathbf{a}=\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R}}{=} \left[\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k^2}{4\pi}\left(1+\frac{i}{kR}\right)\mathbf{a}\right]\frac{e^{ikR}}{R} \overset{\text{θέτουμε}\,\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{=}$$

$$= \left[\frac{\beta}{4\pi}k^2\left(1+\frac{i}{kR}\right)\mathbf{a}\right]\frac{e^{ikR}}{R} = \left[\frac{\beta}{4\pi}k^2\mathbf{a}+\frac{\beta}{4\pi}\frac{ki}{R}\mathbf{a}\right]\frac{e^{ikR}}{R} = \left[-\frac{\beta}{4\pi R}\mathbf{a}(ik)^2+\frac{\beta}{4\pi R^2}\mathbf{a}ik\right]e^{ikR} =$$

$$= \frac{\beta}{4\pi R}\left(-\mathbf{a}(ik)^2+\frac{\mathbf{a}}{R}ik\right)e^{ikR} \overset{(21)}{=} \frac{\beta}{4\pi R}\left(\frac{\mathbf{a}}{R}ik-\mathbf{a}(ik)^2\right)\left(1+R(ik)+\frac{R^2}{2!}(ik)^2+\frac{R^3}{3!}(ik)^3+\ldots\right) =$$

$$= \frac{\beta}{4\pi R}\left[\frac{\mathbf{a}}{R}ik-\mathbf{a}(ik)^2+\mathbf{a}(ik)^2-\mathbf{a}R(ik)^3+\frac{R\mathbf{a}}{2}(ik)^3-\frac{R^2\mathbf{a}}{2}(ik)^4+\frac{R^2\mathbf{a}}{2}(ik)^4+\frac{R^3\mathbf{a}}{6}(ik)^5+\ldots\right] =$$

$$= \frac{\beta}{4\pi R}\left[\frac{\mathbf{a}}{R}ik-\frac{R\mathbf{a}}{2}(ik)^3+\ldots\right] = \frac{\beta}{4\pi R^2}\mathbf{a}ik-\frac{1}{6}\frac{3\beta\mathbf{a}}{4}(ik)^3+\bigcirc\left((ik)^4\right)$$

όπου $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R}$ και $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ τα οποία και εδώ θέσαμε για ευκολία στις πράξεις και το συμβολισμό. Οπότε, καταλήξαμε στη σχέση:

$$\mathbf{E}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\beta}{4\pi R^2}\mathbf{a}ik-\frac{1}{6}\frac{3\beta\mathbf{a}}{4}(ik)^3+\bigcirc\left((ik)^4\right), \tag{27}$$

η οποία είναι και αυτή στη μορφή που θέλαμε, δηλ. στη μορφή:

$$\mathbf{E}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \left[\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)(ik)+\frac{\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{6}(ik)^3\right]+\bigcirc\left((ik)^4\right), \tag{28}$$

όπου

- $$\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\beta}{4\pi R^2}\mathbf{a} = \frac{\beta}{4\pi R^2}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times\mathbf{R}\frac{1}{R^3} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \times \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \tag{29}$$

- $$\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{3\beta\mathbf{a}}{4\pi} = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{R}}{R} \Leftrightarrow \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \times \frac{3\mathbf{R}}{R}, \tag{30}$$

και $\mathbf{E}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = 0$.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε κάποια από τα παραπάνω προσπίπτοντα πεδία και πιο συγκεκριμένα τα $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$, $\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ και $\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ με τη βοήθεια του $\nabla\frac{1}{R}$ το οποίο θα είναι πιο εύχρηστο στην πορεία της επίλυσης. Θα χρησιμοποιήσουμε τους πολύ χρήσιμους τύπους $\nabla\otimes\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{I}}$ και $\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ (για αποδείξεις βλ. Παράρτημα Α). Για το $\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ θα μας χρειαστεί επιπλέον και η ταυτότητα: $\nabla\otimes(f\mathbf{g}) = f(\nabla\otimes\mathbf{g}) + \nabla f\otimes\mathbf{g} \Leftrightarrow f(\nabla\otimes\mathbf{g}) = \nabla\otimes(f\mathbf{g}) - \nabla f\otimes\mathbf{g}$.

Οπότε έχουμε:

$$(24) \Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{3\mathbf{R}}{R^2}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \tilde{\mathbf{I}}\frac{1}{R^3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(-\frac{3\mathbf{R}}{R^2}\otimes\nabla\frac{1}{R} - (\nabla\otimes\mathbf{R})\frac{1}{R^3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2} - (\nabla\otimes\mathbf{R})\frac{1}{R^3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2} + \nabla\otimes\left(\mathbf{R}\frac{1}{R^3}\right) - \nabla\frac{1}{R^3}\otimes\mathbf{R}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2} + \nabla\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \nabla\frac{1}{R^3}\otimes\mathbf{R}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2} - \nabla\otimes\nabla\frac{1}{R} - \nabla\frac{1}{R^3}\otimes\mathbf{R}\right) \overset{\nabla\frac{1}{R^3}=\nabla\left(\frac{1}{R}\right)^3=3\left(\frac{1}{R}\right)^2\nabla\frac{1}{R}=3\frac{1}{R^2}\nabla\frac{1}{R}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2} - \nabla\otimes\nabla\frac{1}{R} - 3\frac{1}{R^2}\nabla\frac{1}{R}\otimes\mathbf{R}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2} - \nabla\otimes\nabla\frac{1}{R} - 3\nabla\frac{1}{R}\otimes\frac{\mathbf{R}}{R^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\nabla\otimes\nabla\frac{1}{R}\right), \tag{31}$$

Επίσης, για το $\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ θα έχουμε:

$$(25) \Leftrightarrow \mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(-\frac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{R}\right) \Leftrightarrow \mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3}\otimes\mathbf{R} - \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{R}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\otimes\mathbf{R} - \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{R}\right) \tag{32}$$

Και για το $\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$ έχουμε:

$$(29) \Leftrightarrow \mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\times\nabla\frac{1}{R}, \tag{33}$$

Έτσι, συγκεντρωτικά πλέον καταλήγουμε για τα προσπίπτοντα μαγνητικά πεδία στις σχέσεις:

$$\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{3\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}}{R^2} - \tilde{\mathbf{I}}\right)\frac{1}{R^3} = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\nabla\otimes\nabla\frac{1}{R}\right) \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{34}$$

$$\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\mathbf{R}\otimes\mathbf{R}}{R^2} + \tilde{\mathbf{I}}\right)\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\otimes\mathbf{R} - \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{R}\right) \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{35}$$

$$\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{\pi} \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{36}$$

και για τα προσπίπτοντα ηλεκτρικά πεδία στις σχέσεις:

$$\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\times\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\times\nabla\frac{1}{R} \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{37}$$

$$\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\times\frac{3\mathbf{R}}{R} \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \tag{38}$$

Ενώ παράλληλα ισχύει $\mathbf{H}_1^p = \mathbf{E}_0^p = \mathbf{E}_2^p = 0$ όπως είδαμε παραπάνω. Έτσι, λοιπόν, οι εκφράσεις (34) – (35) δίνονται βάσει του μοναδιαίου δυαδικού $\tilde{\mathbf{I}} = \sum_{j=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_j\otimes\hat{\mathbf{x}}_j$, ενώ οι μορφές που διατυπώνονται στη δεξιά πλευρά των (34), (35) και (37) βασίζονται όπως είδαμε στους παραπάνω απλούς υπολογισμούς με τη βοήθεια των διαφορικών ταυτοτήτων που αναφέραμε νωρίτερα. Επίσης, θα πρέπει να πούμε σε αυτό το σημείο ότι χρήσιμη στην επίλυσή μας θα φανεί και η σχέση:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{R} \equiv \nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{R} \text{ για } \mathbf{r} \in \Omega, \tag{39}$$

δεδομένης της σχέσης $\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{R} \equiv \nabla \frac{1}{R} = -\nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{R}$ (για απόδειξη βλ. Παράστημα Α).

Στη συνέχεια, τα προσπίπτοντα πεδία που αναλύσαμε παραπάνω σκεδάζονται από το σφαιρικό αντικείμενο και δημιουργούν τα σκεδαζόμενα πεδία $\mathbf{H}^s$ και $\mathbf{E}^s$, ενώ τα συνολικά πεδία δίνονται από τα αθροίσματα:

$$\mathbf{H}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) + \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) \text{ και } \mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \text{ για } \mathbf{r} \in \Omega, \tag{40}$$

όπου αφού το σφαιρικό αντικείμενο είναι μεταλλικό τότε είναι μη–διαπερατό, επομένως η κυματική διάδοση δεν είναι δυνατή στο εσωτερικό της σφαίρας. Ορίζοντας τον απλό συμβολισμό $x = p,s,t$, με τα προσπίπτοντα (p), σκεδαζόμενα (s) και συνολικά (t) ηλεκτρομαγνητικά πεδία, όλα τα ζεύγη $(\mathbf{H}^x, \mathbf{E}^x)$ ικανοποιούν τις γνωστές εξισώσεις Maxwell (Dassios et al., 2000). Έτσι, όσον αφορά τα σκεδαζόμενα πεδία που μας αφορούν για την αναζητούμενη λύση στο Ω, αυτά δίνουν σύμφωνα με τις (14) και (15) ότι:

$$\nabla \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = i\omega\mu \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) \text{ και } \nabla \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \text{ για } \mathbf{r} \in \Omega, \tag{41}$$

οι οποίες αντιπροσωπεύουν μία μορφή που έχει προκύψει για τη δική μας περίπτωση. Επίσης, τα πεδία έχουν μηδενικές αποκλίσεις και σύμφωνα με την (16) άρα:

$$\nabla \cdot \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = 0 \text{ για } \mathbf{r} \in \Omega, \tag{42}$$

γεγονός που υποδηλώνει τη σωληνοειδή συμπεριφορά των πεδίων.

Η αλληλεπίδραση χαμηλών συχνοτήτων σε περιπτώσεις υψηλής αντίθεσης, όπως υποδεικνύει και η φυσική του προβλήματος που μελετάμε εδώ, κληρονομείται στα σκεδαζόμενα πεδία και έτσι διατυπώνονται και αυτά μέσω των σειρών:

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) \frac{(ik)^n}{n!} \text{ και } \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) \frac{(ik)^n}{n!} \text{ για κάθε } \mathbf{r} \in \Omega, \tag{43}$$

όπου η μορφή αυτή αναφέρεται στην έρευνα των Dassios και Kleinmann (2000). Αντικαθιστώντας τις σειρές (43) στις εξισώσεις Maxwell (41) συνοδευόμενες και από τις (42) έχουμε τα εξής:

$$\nabla\times\mathbf{E}^s(\mathbf{r})=i\omega\mu\mathbf{H}^s(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nabla\times\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}=i\omega\mu\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\overset{(17)\Leftrightarrow\omega=\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\nabla\times\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}=i\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\mu\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}=ik\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nabla\times\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^0}{0!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{E}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=0\overset{\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r})=0\text{ αφού }\mathbf{E}_0^p(\mathbf{r})=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{E}_{n+1}^s(\mathbf{r})-(n+1)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}=0\overset{\text{για } n\to n-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})-n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^n}{n!}=0$$

Άρα, τελικά προκύπτει η σχέση $\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})=n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})$ για $n\geq 0$ και ομοίως για τη 2η σχέση της (41) έχουμε:

$$\nabla\times\mathbf{H}^s(\mathbf{r})=-i\omega\varepsilon\mathbf{E}^s(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nabla\times\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}=-i\omega\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\overset{(17)\Leftrightarrow\omega=\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\nabla\times\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}=-i\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}=-ik\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^0}{0!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{H}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{H}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{H}_{n+1}^s(\mathbf{r})+(n+1)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}=0\overset{\text{για } n\to n-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})+n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^n}{n!}=0$$

Οπότε και από εδώ προκύπτει ότι $\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})=-n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r})$ για $n\geq 0$.

Έτσι, λοιπόν συγκεντρώνουμε όλες τις παραπάνω σχέσεις που αναφέραμε και αποδείξαμε ως εξής:

$$\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})=n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})\ \text{και}\ \nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})=-n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r})\ \text{με}\ n\geq 0\ \text{και για}\ \mathbf{r}\in\Omega, \tag{44}$$

και

$$\nabla\cdot\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})=0\ \text{και}\ \nabla\cdot\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})=0\ \text{με}\ n\geq 0\ \text{και για}\ \mathbf{r}\in\Omega, \tag{45}$$

οι οποίες μάλιστα αντιπροσωπεύουν τις ισοδύναμες εκφράσεις σε χαμηλές συχνότητες. Ωστόσο, για όλους τους λόγους που περιγράψαμε νωρίτερα, η συμπεριφορά των προσπίπτοντων πεδίων (23) και (28) με τις (34)–(38) κληρονομεί ακριβώς την ίδια φυσική και μαθηματική αντιμετώπιση και στα σκεδαζόμενα πεδία (43) με τις (44) και (45). Δηλ. διατηρούμε τους αντίστοιχους μη–απαλειφόμενους όρους, κρατώντας τα πεδία έως και 3ης τάξης, καθώς οι υπόλοιποι όροι μεγαλύτερων τάξεων έχουν αμεληταία επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια, το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο δίνεται από:

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\frac{\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})}{2}(ik)^2+\frac{\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})}{6}(ik)^3\right]+\bigcirc\left((ik)^4\right)\ \text{για}\ \mathbf{r}\in\Omega, \tag{46}$$

ενώ το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι το:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})(ik)+\frac{\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})}{6}(ik)^3\right]+\bigcirc\left((ik)^4\right)\ \text{για}\ \mathbf{r}\in\Omega, \tag{47}$$

δεδομένου ότι $\mathbf{H}_1^s=\mathbf{E}_0^s=\mathbf{E}_2^s=\mathbf{0}$, λόγω της απουσίας των αντίστοιχων προσπίπτοντων πεδίων. Προφανώς, λαμβάνοντας υπόψιν όλα αυτά, οι θεμελιώδεις σχέσεις (44) και (45) πληρούνται αμέσως από τα πεδία χαμηλών συχνοτήτων που επιβιώνουν $\mathbf{H}_0^s$, $\mathbf{H}_2^s$, $\mathbf{H}_3^s$, $\mathbf{E}_1^s$ και $\mathbf{E}_3^s$ που προκύπτουν από τις (46) και (47) για $n=0,1,2,3$, των οποίων ο υπολογισμός καθορίζει τον τελικό μας στόχο. Με σκοπό να κατανοήσουμε τη συνεισφορά κάθε όρου χαμηλών συχνοτήτων στις (46) και (47), αντικαθιστούμε την (17) και διαχωρίζουμε το πραγματικό από το φανταστικό μέρος. Οπότε έχουμε:

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\frac{\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})}{2}(ik)^2+\frac{\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\overset{k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\frac{\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})}{2}i^2\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^2+\frac{\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})}{6}i^3\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})-\frac{\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})}{2}\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^2-i\frac{\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})}{6}\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})-\frac{\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^2}{2}\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})\right]+\left[-\frac{\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^3}{6}\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\right]i+O\left((ik)^4\right) \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \quad (48)$$

και

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})(ik)+\frac{\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\overset{k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}^s(\mathbf{r})=\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})i\omega\sqrt{\varepsilon\mu}+\frac{\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})}{6}i^3\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}^s(\mathbf{r})=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})-\frac{\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})}{6}\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^2\right]i+O\left((ik)^4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}^s(\mathbf{r})=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})-\frac{\left(\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)^2}{6}\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})\right]i+O\left((ik)^4\right) \text{ για } \mathbf{r}\in\Omega, \quad (49)$$

και παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι καθαρά φανταστικό, ενώ το μαγνητικό που είναι πρακτικά μετρήσιμο είναι μία μιγαδική συνάρτηση.

Προκειμένου να προχωρήσουμε στη λύση, είμαστε υποχρεωμένοι να ολοκληρώσουμε την προαναφερθείσα ανάλυση με την παράθεση των σχετικών με το πρόβλημα συνοριακών και οριακών συνθηκών. Υπό αυτήν τη άποψη, οι καταλληλότερες συνοριακές συνθήκες που αντιστοιχούν στην τέλεια ηλεκτρικά αγώγιμη επιφάνεια S του σφαιρικού στόχου και δεδομένου του αντίστοιχου κάθετου μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\boldsymbol{n}}$ και συμπεριλανανομένων των συνολικών πεδίων δίνονται από:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{H}^t(\mathbf{r})=0 \text{ και } \hat{\boldsymbol{n}}\times\mathbf{E}^t(\mathbf{r})=\mathbf{0} \text{ για κάθε } \mathbf{r}\in S, \tag{50}$$

οι οποίες δηλώνουν ότι το συνολικό μαγνητικό πεδίο δεν έχει κάθετες συνιστώσες στην επιφάνεια S και το συνολικό ηλεκτρικό δεν έχει εφαπτόμενες συνιστώσες στην επιφάνεια S. Λαμβάνοντας τώρα υπόψιν τις σχέσεις (40) για τα συνολικά πεδία σε συνδυασμό με τις ανάλογες σχέσεις χαμηλών συχνοτήτων (43) και (23), (28), (46), (47) έχουμε τα εξής:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\mathbf{H}^t(\mathbf{r})=0\overset{(40)}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\mathbf{H}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}^s(\mathbf{r})\right]=0\overset{(23),(46)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left\{\left[\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\frac{\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{2}(ik)^2+\frac{\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\frac{\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})}{2}(ik)^2+\frac{\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left\{\left[\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\frac{(ik)^2}{2}+\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\frac{(ik)^3}{6}\right]+O\left((ik)^4\right)\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^2}{2}+\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^3}{6}\right]+O\left((ik)^4\right)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left\{\left[\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})\right]+\left[\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^3}{6}+O\left((ik)^4\right)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})\right]+\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^2}{2}+$$

$$+\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^3}{6}+O\left((ik)^4\right)=0$$

Άρα, λοιπόν, προκύπτει ότι: $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\right]=0$ για $n=0,2,3$.

Επίσης, με όμοιο τρόπο έχουμε και για το ηλεκτρικό πεδίο ότι:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\mathbf{E}^t(\mathbf{r})=\mathbf{0}\overset{(40)}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\mathbf{E}^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}^s(\mathbf{r})\right]=0\overset{(28),(47)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{n}}\times\left\{\left[\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)(ik)+\frac{\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})(ik)+\frac{\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})}{6}(ik)^3\right]+O\left((ik)^4\right)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\times\left\{\left[\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)(ik)+\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\frac{(ik)^3}{6}\right]+\bigcirc\left((ik)^4\right)\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})(ik)+\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^3}{6}\right]+\bigcirc\left((ik)^4\right)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\times\left\{\left[\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})\right](ik)+\left[\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^3}{6}+\bigcirc\left((ik)^4\right)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})\right](ik)+\hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^3}{6}+\bigcirc\left((ik)^4\right)=0$$

Άρα, και από εδώ προκύπτει ότι: $\hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\right]=0$ για $n=1,3$.

Επομένως, τελικά οι συνοριακές συνθήκες στην S είναι οι:

$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\right]=0 \text{ για } n=0,2,3 \text{ και } \hat{\boldsymbol{n}}\times\left[\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\right]=0 \text{ για } n=1,3. \quad (51)$$

Επισημαίνουμε εδώ ότι οι σχέσεις (51) αναφέρονται μόνο στους ηλεκτρομαγνητικούς όρους που επιβιώνουν καθώς ισχύει $\mathbf{H}_1^x=\mathbf{E}_0^x=\mathbf{E}_2^x=\mathbf{0}$ για όλα τα $x=p,s,t$. Επιπρόσθετα για τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις ισχύουν οι συνθήκες ακτινοβολίας Silver–Müller στο άπειρο, δηλ.

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\begin{pmatrix}\mathbf{H}^s(\mathbf{r})\\ \mathbf{E}^s(\mathbf{r})\end{pmatrix}+ik|\mathbf{r}|\begin{pmatrix}\mathbf{H}^s(\mathbf{r})\\ \mathbf{E}^s(\mathbf{r})\end{pmatrix}\right]=\mathbf{0} \text{ για κάθε } \mathbf{r}\in\Omega \quad (52)$$

οπότε έχουμε την:

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}^s(\mathbf{r})+ik|\mathbf{r}|\mathbf{H}^s(\mathbf{r})\right]=\mathbf{0} \text{ για κάθε } \mathbf{r}\in\Omega \quad (53)$$

και την:

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}^s(\mathbf{r})+ik|\mathbf{r}|\mathbf{E}^s(\mathbf{r})\right]=\mathbf{0} \text{ για κάθε } \mathbf{r}\in\Omega \quad (54)$$

Οπότε σύμφωνα και πάλι με τις σχέσεις (43) και (23), (28), (46), (47) έχουμε ότι:

$$(53)\overset{(43)}{\Leftrightarrow}\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+ik|\mathbf{r}|\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+ik\sum_{n=0}^{+\infty}|\mathbf{r}|\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}|\mathbf{r}|\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+|\mathbf{r}|\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^0}{0!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}+|\mathbf{r}|\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]\right\}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}+(n+1)|\mathbf{r}|\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\right\}=\mathbf{0}\overset{n\to n-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+n|\mathbf{r}|\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\right]\right\}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})+n|\mathbf{r}|\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^n}{n!}\right]\right\}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})+n|\mathbf{r}|\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})\right]=\mathbf{0}$$

Οπότε προκύπτει ότι: $\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})+n|\mathbf{r}|\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r})\right]=\mathbf{0}$.

Ομοίως έχουμε παρακάτω:

$$(54)\overset{(43)}{\Leftrightarrow}\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+ik|\mathbf{r}|\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+ik\sum_{n=0}^{+\infty}|\mathbf{r}|\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}|\mathbf{r}|\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+|\mathbf{r}|\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^0}{0!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}+|\mathbf{r}|\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{n!}\right]\right\}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_{n+1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}+(n+1)|\mathbf{r}|\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\right\}=\mathbf{0}\overset{n\to n-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}+n|\mathbf{r}|\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r})\frac{(ik)^n}{n!}\right]\right\}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty}\left\{\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r})+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left[\mathbf{r}\times\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})+n|\mathbf{r}|\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r})\right]\frac{(ik)^n}{n!}\right]\right\}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\mathbf{r}\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) + n|\mathbf{r}|\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{0}$$

Οπότε και από εδώ προκύπτει: $\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \left[\mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) + n|\mathbf{r}|\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{0}$.

Επομένως, οι συνθήκες ακτινοβολίας Silver–Müller στο άπειρο υπό το καθεστώς των χαμηλών συχνοτήτων δίνονται από:

$$\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \left[\mathbf{r} \times \nabla \times \begin{pmatrix} \mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + n|\mathbf{r}| \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \\ \mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \right] = \mathbf{0} \text{ με } n = 1,2,3 \text{ για κάθε } \mathbf{r} \in \Omega \tag{55}$$

αφού για $n = 0$ ισχύει $\mathbf{E}_0^s = 0$ και $\lim_{|\mathbf{r}|\to+\infty} \left(\mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{H}_0^s \right) = \mathbf{0}$, όπως επαληθεύεται και από την (44). Οι λύσεις προβλημάτων εξωτερικού τύπου όπως είναι η δική μας περίπτωση ικανοποιούν την (52) αυτόματα, ως συνέπεια της δομής που διαθέτουν τα δυναμικά μέσω των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων (Hobson, 1965 και dlmf.nist.gov).

Κατά την ανάλυσή μας, θεωρούμε ότι η αγωγιμότητα της σφαίρας τείνει στο άπειρο. Παρ' όλα αυτά, σ' αυτό το σημείο θα ήταν χρήσιμο να συμπεριλάβουμε και μία μικρή συζήτηση σχετικά με τη ζώνη μετάβασης, δηλ. τη συμπεριφορά υλικών με μεγάλη, ή ακόμη και συγκρίσιμη σε σχέση με το εξωτερικό περιβάλλον αγωγιμότητα, αλλά όχι άπειρη. Σε μια τέτοια περίπτωση, το πρόβλημα γίνεται ελαφρώς πιο πολύπλοκο, καθώς το σώμα καθίσταται διαπερατό και εσωτερικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία υπάρχουν και βέβαια συμβάλλουν στην τελική λύση μέσω των συνθηκών μετάδοσης, που εφαρμόζονται στην επιφάνεια του αντικειμένου αντί για τις (50) (βλ. Dassios et al., 2000 για περισσότερες λεπτομέρειες). Εδώ, φαίνεται ότι τα αγώγιμα ή ακόμη και τα διηλεκτρικά σώματα μπορούν να αλληλεπιδρούν με ένα προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα με ένα μεγάλο εύρος τρόπων που σχετίζονται με την επιφάνεια διέγερσης. Αυτό οφείλεται στο υπερβολικό επιφανειακό φορτίο το οποίο προκαλεί στα σωματίδια οποιασδήποτε τυχαίας σύστασης να αποκτούν μεταλλικές ιδιότητες, γεγονός σημαντικό για σφαίρες και σφαιροειδή. Ωστόσο, πρόκειται για μία εντελώς διαφορετική περίπτωση σε σχέση με αυτήν της παρούσας μελέτης που αφορά εφαρμογές οι οποίες έχουν σημασία σε άλλους τομείς της φυσικής, όπως π.χ. στην οπτική.

Συνοψίζοντας, θα πρέπει να επεξεργαστούμε λίγο περισσότερο τις μερικές διαφορικές εξισώσεις (44) και (45) ώστε να πάρουν τη μορφή πιο εύχρηστων μορφών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε τη γεωμετρία και ανάλυση των σφαιρικών συντεταγμένων, των οποίων η εφαρμογή στις συνθήκες (51) και (55) θα μας οδηγήσει να φτάσουμε στην τελική επιθυμητή λύση.

1.1.3 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Σκοπεύουμε να αντλήσουμε κλειστούς αναλυτικούς τύπους για τα κύρια σκεδαζόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που επιβιώνουν $\mathbf{H}_0^s$, $\mathbf{H}_2^s$, $\mathbf{H}_3^s$, $\mathbf{E}_1^s$ και $\mathbf{E}_3^s$, αφού $\mathbf{H}_1^s = \mathbf{E}_0^s = \mathbf{E}_2^s = \mathbf{0}$. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να αποκτήσουν οι (44), δεδομένων των (45), μορφές γνωστών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, προς αυτήν την κατεύθυνση, εφαρμόζουμε στροβιλισμό ($curl$) και στα δύο μέλη των εξισώσεων Maxwell (44) και χρησιμοποιούμε επανειλημμένα την πολύ χρήσιμη ταυτότητα $\nabla\times\nabla\times \boldsymbol{f} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f}) - \Delta\,\boldsymbol{f}$ (όπου $\boldsymbol{f}$ τυχαία διανυσματική συνάρτηση), όπου σε συνδυασμό με την (45), φτάνουμε σε ένα σύνολο συνοριακών προβλημάτων, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους, από το στατικό για $n=0$ μέχρι όλα τα δυναμικά υψηλότερων τάξεων έως και $n=3$. Αυτή η διαδικασία που σκιαγραφήσαμε παραπάνω έχει ως εξής:

$$
\begin{aligned}
(44) &\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r})\right) - \Delta\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \overset{(45)}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \Delta\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = -n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \overset{(44)\Rightarrow\nabla\times\mathbf{H}_{n-1}^s(\mathbf{r}) = -(n-1)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_{n-2}^s(\mathbf{r})}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \Delta\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = -n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[-(n-1)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_{n-2}^s(\mathbf{r})\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \Delta\mathbf{E}_n^s(\mathbf{r}) = n(n-1)\mathbf{E}_{n-2}^s(\mathbf{r}),
\end{aligned} \tag{56}
$$

και

$$
\begin{aligned}
(44) &\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = -n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \nabla\times\nabla\times\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = -n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\nabla\times\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r})\right) - \Delta\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = -n\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \overset{(45)}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \Delta\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\nabla\times\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) \overset{(44)\Rightarrow\nabla\times\mathbf{E}_{n-1}^s(\mathbf{r}) = (n-1)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_{n-2}^s(\mathbf{r})}{\Leftrightarrow}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \Delta\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = n\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[(n-1)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{H}_{n-2}^s(\mathbf{r})\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\mathbf{H}_n^s(\mathbf{r}) = n(n-1)\mathbf{H}_{n-2}^s(\mathbf{r}), \tag{57}$$

Επομένως, γνωρίζοντας ότι $\mathbf{H}_1^s = \mathbf{E}_0^s = \mathbf{E}_2^s = \mathbf{0}$ θέτοντας στις (56) και (57) $n = 0,1,2,3$ έχουμε τα εξής:

- Για $n = 0$
  - Δεν έχει νόημα να θέσουμε στην (56)
  - $(57) \Rightarrow \Delta\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = 0$, (58)
- Για $n = 1$
  - $(56) \Rightarrow \Delta\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) = 0$, (59)
  - Δεν έχει νόημα να θέσουμε στην (57)
- Για $n = 2$
  - $(56) \Rightarrow \Delta\mathbf{E}_2^s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{E}_0^s(\mathbf{r}) \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει,
  - $(57) \Rightarrow \Delta\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})$, (60)
- Για $n = 3$
  - $(56) \Rightarrow \Delta\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = 6\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})$, (61)
  - $(57) \Rightarrow \Delta\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = 6\mathbf{H}_1^s(\mathbf{r}) \overset{\mathbf{H}_1^s(\mathbf{r})=\mathbf{0}}{\Leftrightarrow} \Delta\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = 0$, (62)

Τώρα για να φτάσουμε στις τελικές εξισώσεις που θα πρέπει να λύσουμε θα επεξεργαστούμε καθεμία από τις (58) – (62). Αρχικά όσον αφορά τις (58) και (62) θα τις χειριστούμε με τον ίδιο τρόπο αφού είναι παρόμοιες. Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό <u>*θεώρημα αποσύνθεσης του Helmholtz*</u> το οποίο λέει ότι:

Κάθε διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{f}$ γράφεται ως άθροισμα ενός αστρόβιλου και ενός σωληνοειδούς πεδίου. Δηλ.: $\boldsymbol{f} = -\nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{A}$ όπου Φ: βαθμωτό και $\mathbf{A}$: διανυσματικό πεδίο για τα οποία ισχύουν: $\nabla\times\nabla\Phi = \mathbf{0}$ (αστρόβιλο) και $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0$ (σωληνοειδές).

Επομένως, αν επιπλέον για το τυχαίο $\boldsymbol{f}$ ισχύουν και τα εξής: $\nabla\times\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$ και $\nabla\cdot\boldsymbol{f} = 0$, δηλ. είναι και το ίδιο και αστρόβιλο και σωληνοειδές, τότε θα έχουμε τα εξής:

- $\nabla\times\boldsymbol{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla\times(-\nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Rightarrow -\nabla\times\nabla\Phi + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0} \overset{\nabla\times\nabla\Phi=\mathbf{0}}{\Rightarrow}$
  $\Rightarrow \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$

Άρα, τελικά, $\boldsymbol{f} = -\nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{A} \Rightarrow \boldsymbol{f} = -\nabla\Phi$, (63)

και επίσης

- $\nabla\cdot\boldsymbol{f} = 0 \overset{(63)}{\Rightarrow} \nabla\cdot\nabla\Phi = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = 0$. (64)

Έτσι, λοιπόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για κάθε αστρόβιλο και σωληνοειδές διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{f}$ υπάρχει μία βαθμωτή συνάρτηση Φ για την οποία ισχύει $\Delta\Phi = 0$. Δηλ., η γνωστή μερική διαφορική εξίσωση Laplace. Επομένως, σύμφωνα με αυτό θα έχουμε τα εξής για τις $\mathbf{H}_0^s$ και $\mathbf{H}_3^s$:

- Για την $\mathbf{H}_0^s$ γνωρίζουμε από τις (44) και (45) ότι ισχύουν $\nabla\times\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ και $\nabla\cdot\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = 0$, άρα θα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\Phi_0^s(\mathbf{r})$ με $\Delta\Phi_0^s(\mathbf{r}) = 0$ τέτοια ώστε:

  $$\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \nabla\Phi_0^s(\mathbf{r}), \tag{65}$$

- Για την $\mathbf{H}_3^s$ επίσης από τις (44) και (45) ισχύουν $\nabla\times\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ και $\nabla\cdot\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = 0$, οπότε θα υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\Phi_3^s(\mathbf{r})$ με $\Delta\Phi_3^s(\mathbf{r}) = 0$ τέτοια ώστε:

  $$\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \nabla\Phi_3^s(\mathbf{r}). \tag{66}$$

Άρα, για την εύρεση των μαγνητικών πεδίων $\mathbf{H}_0^s$ και $\mathbf{H}_3^s$ αρκεί να λύσουμε τις δύο εξισώσεις Laplace $\Delta\Phi_0^s(\mathbf{r}) = 0$ και $\Delta\Phi_3^s(\mathbf{r}) = 0$ και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τις Φ_0^s και Φ_3^s στις σχέσεις (65) και (66).

Συνεχίζοντας τώρα για το $\mathbf{H}_2^s$ είδαμε νωρίτερα ότι προέκυψε η σχέση (60), δηλ. η $\Delta\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})$ η οποία είναι μία εξίσωση Poisson της οποίας η λύση θα δίνεται από το άθροισμα μίας γενικής λύσης $\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})$ με $\Delta\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ και μίας ειδικής $\mathbf{H}_{2,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r})$. Δηλ.: θα είναι:

$$\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_{2,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r}), \tag{67}$$

Είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να προσδιορίσουμε την $\mathbf{H}_{2,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r})$, η οποία αφού θα είναι λύση της (60) τότε θα την επαληθεύει, άρα θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta\mathbf{H}_{2,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r}) = 2\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) \overset{\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=\nabla\Phi_0^s(\mathbf{r})}{\Rightarrow} \Delta\mathbf{H}_{2,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r}) = 2\nabla\Phi_0^s(\mathbf{r}). \tag{68}$$

Έστω ότι αυτή η μερική λύση είναι η $\mathbf{H}^s_{2,\mathrm{p}}(\mathbf{r})=\mathbf{r}\Phi^s_0(\mathbf{r})$. Θα δείξουμε ότι πράγματι είναι αυτή χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\Delta(\mathbf{F}\cdot f)=(\Delta\mathbf{F})\cdot f+\mathbf{F}\cdot(\Delta f)+2(\nabla\otimes\mathbf{F})^{\mathrm{T}}\cdot\nabla f$. Οπότε έχουμε τα εξής:

$$(68)\overset{\mathbf{H}^s_{2,\mathrm{p}}(\mathbf{r})=\mathbf{r}\Phi^s_0(\mathbf{r})}{\Leftrightarrow}\Delta\left[\mathbf{r}\Phi^s_0(\mathbf{r})\right]=2\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[\Delta\mathbf{r}]\cdot\Phi^s_0(\mathbf{r})+\mathbf{r}\cdot\left[\Delta\Phi^s_0(\mathbf{r})\right]+2(\nabla\otimes\mathbf{r})\cdot\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})=2\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})\underset{\nabla\otimes\mathbf{r}=\tilde{\mathbf{I}}}{\overset{\Delta\mathbf{r}=0,\Delta\Phi^s_0(\mathbf{r})=0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow 0+0+2\tilde{\mathbf{I}}\cdot\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})=2\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})=2\nabla\Phi^s_0(\mathbf{r})$$ που ισχύει.

Άρα, πράγματι η $\mathbf{H}^s_{2,\mathrm{p}}(\mathbf{r})=\mathbf{r}\Phi^s_0(\mathbf{r})$ είναι μία μερική λύση της (60), όπου η $\Phi^s_0(\mathbf{r})$ θα είναι γνωστή από την επίλυση για την εύρεση του $\mathbf{H}^s_0$. Έτσι, τελικά για την εύρεση του πεδίου $\mathbf{H}^s_2$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Laplace $\Delta\mathbf{X}^s_2(\mathbf{r})=\mathbf{0}$ και να αντικαταστήσουμε τη διανυσματική $\mathbf{X}^s_2$ που θα βρούμε στη σχέση:

$$(67)\Rightarrow\mathbf{H}^s_2(\mathbf{r})=\mathbf{X}^s_2(\mathbf{r})+\mathbf{r}\Phi^s_0(\mathbf{r}). \tag{69}$$

Στη συνέχεια, όσον αφορά το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}^s_1$ από τη 2η σχέση της (44) και για $n=2$ έχουμε ότι:

$$\nabla\times\mathbf{H}^s_2(\mathbf{r})=-2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}^s_{2-1}(\mathbf{r})\Leftrightarrow\mathbf{E}^s_1(\mathbf{r})=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}^s_2(\mathbf{r}). \tag{70}$$

Επομένως, έχοντας βρει το $\mathbf{H}^s_2$ μπορούμε με απλή αντικατάσταση στη σχέση (70) να έχουμε το $\mathbf{E}^s_1$.

Τέλος, το πεδίο που απομένει είναι το $\mathbf{E}^s_3$ για το οποίο προέκυψε νωρίτερα η σχέση (61), δηλ. $\Delta\mathbf{E}^s_3(\mathbf{r})=6\mathbf{E}^s_1(\mathbf{r})$, η οποία είναι επίσης εξίσωση Poisson και της οποίας η λύση δίνεται ως άθροισμα μίας γενικής λύσης $\mathbf{X}^s_3(\mathbf{r})$ με $\Delta\mathbf{X}^s_3(\mathbf{r})=\mathbf{0}$ και μίας ειδικής. Εδώ, την ειδική λύση θα τη βρούμε μέσω της θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace για την οποία στη γενική μορφή ισχύει:

$$\Delta u(\mathbf{r})=f(\mathbf{r})\Rightarrow u(\mathbf{r})=\iiint\limits_{\Omega(\mathbb{R}^3)}\mathrm{E}(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')d\Omega$$

όπου $\mathrm{E}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\dfrac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ (με u, f τυχαίες συναρτήσεις).

Άρα, και στην περίπτωσή μας αφού στη θέση της $u(\mathbf{r})$ έχουμε την $\mathbf{E}^s_3(\mathbf{r})$ και στη θέση της $f(\mathbf{r})$ έχουμε την $6\mathbf{E}^s_1(\mathbf{r})$, τότε η θεμελιώδης λύση θα είναι η $\mathbf{E}^s_{3,\mathrm{p}}(\mathbf{r})=\iiint\limits_{\Omega}-\dfrac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}6\mathbf{E}^s_1(\mathbf{r}')d\Omega'\Leftrightarrow\mathbf{E}^s_{3,\mathrm{p}}(\mathbf{r})=6\left[-\dfrac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathbf{E}^s_1(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right]$ την οποία μπορούμε εύκολα να βρούμε αντικαθιστώντας την $\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})$ που θα έχουμε ήδη βρει στο προηγούμενο βήμα της επίλυσης μας. Επομένως, τελικά, θα είναι $\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{3,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r})$. Έτσι, για να βρούμε το πεδίο $\mathbf{E}_3^s$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση Laplace $\Delta\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ και να αντικαταστήσουμε τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{X}_3^s$ στη σχέση:

$$\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{3,\mathrm{p}}^s(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + 6\left[-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right], \tag{71}$$

πράγμα που αποδεικνύεται εύκολα αφού:

$$\Delta\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \Delta\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + 6\Delta\left[-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right] \overset{\Delta\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r})=\mathbf{0}}{\Leftrightarrow} \Delta\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = 6\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})$$ που παρατηρούμε ότι είναι η (61) άρα την επαληθεύει.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, όλα τα παραπάνω για να βρούμε τα επιθυμητά αποτελέσματα στο πρόβλημά μας αρκεί τελικά να λύσουμε τέσσερις εξισώσεις Laplace. Αυτές είναι οι:

- $\Delta\Phi_0^s(\mathbf{r}) = 0$, (72)
- $\Delta\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, (73)
- $\Delta\Phi_3^s(\mathbf{r}) = 0$, (74)
- $\Delta\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, (75)

εκ των οποίων στις δύο αναζητούμε βαθμωτές συναρτήσεις (Φ_0^s, Φ_3^s) ενώ στις άλλες δύο διανυσματικές ($\mathbf{X}_2^s$, $\mathbf{X}_3^s$) ώστε να τις αντικαταστήσουμε στις σχέσεις (65), (66), (69), (70) και (71). Δηλ. στις:

- $\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \nabla\Phi_0^s(\mathbf{r})$
- $\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}) + \mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})$
- $\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \nabla\Phi_3^s(\mathbf{r})$
- $\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})$
- $\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + 6\left[-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right].$

Εδώ, πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ζητούμενα σκεδαζόμενα πεδία $\mathbf{H}_0^s$, $\mathbf{H}_2^s$, $\mathbf{H}_3^s$, $\mathbf{E}_1^s$ και $\mathbf{E}_3^s$ πρέπει να καθοριστούν στην περιορισμένη περιοχή της κυματικής διάδοσης $\Omega \equiv V(\mathbb{R}^3) - \{\mathbf{r}_0\}$.

Η παραπάνω, λοιπόν, ανάλυση μας δείχνει ότι ο όρος για $n=0$, που αντιστοιχεί στον προσεγγιστικό στατικό όρο Rayleigh, αντιστοιχεί σε μία ανεξάρτητη (από όρους άλλων τάξεων) εξίσωση Laplace η οποία πρέπει να λυθεί και αφορά μόνο το μαγνητικό πεδίο, αφού το ηλεκτρικό πεδίο αυτής της τάξης δεν υπάρχει, δεδομένης της απουσίας του αντίστοιχου προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου. Αντιθέτως, ο δυναμικός όρος τάξης $n=1$ μας αποκαλύπτει την ύπαρξη ενός αρμονικού διανυσματικού ηλεκτρικού πεδίου με μηδενικό το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο της τάξης αυτής. Όσο για την περίπτωση τάξης $n=2$, αυτή περιλαμβάνει μία εξίσωση Poisson για το μαγνητικό πεδίο η οποία συνδυάζει και τον στατικό όρο. Έτσι, εκμεταλλευόμενοι κατάλληλα το πρόβλημα τάξης $n=0$, λύνουμε την εξίσωση Poisson εισάγοντας μία ειδική λύση, η οποία επιβεβαιώνεται με τη χρήση γνωστής ταυτότητας αλλά και σύμφωνα με τις σχέσεις $\Delta\mathbf{r}=\mathbf{0}$ και $\nabla\otimes\mathbf{r}=\tilde{\mathbf{I}}$, που δείξαμε νωρίτερα. Σημειώνουμε ότι το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο δεν υπάρχει και εδώ, κληρονομώντας την ίδια ιδιότητα και στο αντίστοιχο σκεδαζόμενο. Τέλος, στην περίπτωση τάξης $n=3$ εμφανίζεται και μαγνητικό αλλά και ηλεκτρικό πεδίο. Όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο της τάξης αυτής, έχουμε να λύσουμε απλά μία ανεξάρτητη (από άλλους όρους) εξίσωση Laplace. Όμως, δε συμβαίνει το ίδιο για το αντίστοιχο πρόβλημα του ηλεκτρικού πεδίου για το οποίο εισάγεται ειδική λύση με τη μορφή μίας ολοκληρωτικής αναπαράστησης που προκύπτει από τη θεμελιώση λύση του τελεστή Laplace (Hobson, 1965). Συνεπώς, με αυτόν τον τρόπο, προκύπτουν τα προβλήματα (65), (66), (67), (70) και (71) σε συνδυασμό με τις (72) – (75) πλαισιωμένα από τις τέλεια αντανακλαστικές συνοριακές συνθήκες (51) και τις κατάλληλη οριακή συμπεριφορά στο άπειρο (55).

1.2 Επίλυση του προβλήματος

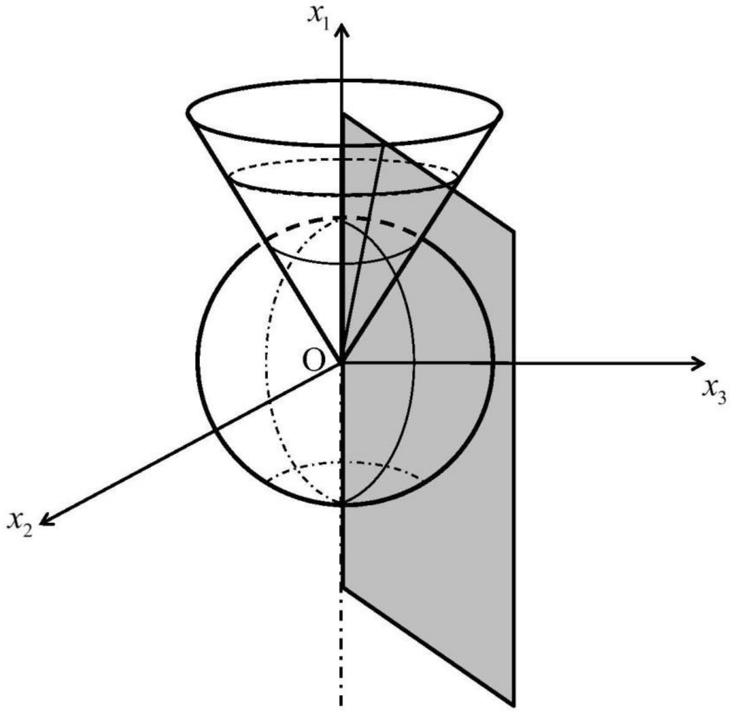
Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ουσιαστικά όλο το κύριο μέρος της εργασίας αυτής. Αρχικά στην 1η υποενότητα περιγράφεται λεπτομερώς το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων και παρουσιάζονται αναλυτικά όλες εκείνες οι σχέσεις που θα είναι χρήσιμες για τον υπολογισμό των ζητούμενων πεδίων όπως για παράδειγμα οι τελεστές Ανάδελτα και Laplace στις σφαιρικές, οι ιδιολύσεις της μερικής διαφορικής εξίσωσης του Laplace, οι σχέσεις ορθογωνιότητας, κα. Παρακάτω, στη 2η υποενότητα υπολογίζονται τα μαγνητικά σκεδαζόμενα πεδία και στην 3η υποενότητα τα ηλεκτρικά. Σε αυτές τις υποενότητες λύνονται αναλυτικά οι αντίστοιχες εξισώσεις λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες που τους αναλογούν κάθε φορά.

1.2.1 Καθορισμός σχέσεων στο σφαιρικό σύστημα

Χάριν πληρότητος, σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε μία σύντομη ανάλυση της σφαιρικής γεωμετρίας. Γνωρίζουμε ότι οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι οι (r,θ,φ) (βλ. Σχήμα 2) με $r\in[0,+\infty)$ την ακτινική απόσταση (απόσταση του τυχαίου σημείου από το σημείο αναφοράς $\mathrm{O}(0,0,0)$), $\theta\in[0,\pi]$ την πολική γωνία (γωνία που μετράται από τη σταθερή κατεύθυνση του x_1) και $\varphi\in[0,2\pi]$ το αζιμούθιο (γωνία που σχηματίζει η προβολή του τυχαίου σημείου στο επίπεδο $x_2\mathrm{O}x_3$ με τον άξονα x_2). Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις:

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta\cos\varphi \quad \text{και} \quad x_3 = r\sin\theta\sin\varphi \tag{76}$$

με τυχαίο διάνυσμα θέσης το $\mathbf{r}=(x_1,x_2,x_3)$. Επίσης, με $\mathbf{r}_0=(x_{10},x_{20},x_{30})$ ορίζουμε την καθορισμένη θέση της πηγής που εκπέμπει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Βασικό στοιχείο είναι η εκμετάλλευση της συμμετρίας ως προς τον x_1–άξονα του εφαρμοστέου συστήματος συντεταγμένων και του σφαιρικού αντικειμένου που βρίσκεται υπό διερεύνηση. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι μία αρκετά πρακτική τεχνική, η οποία απλοποιεί τη μαθηματική επεξεργασία, διατηρώντας τη γενικότητα αναλλοίωτη αφού εξακολουθούμε να αντιμετωπίζουμε ένα γνήσια τρισδιάστατο πρόβλημα και με τον αυθαίρετο προσανατολισμό του μαγνητικού διπόλου που υπονοείται από την (18) να παίζει σημαντικό ρόλο στην τρισδιάστατη διαμόρφωση της τελικής λύσης. Ωστόσο στην πολύ ειδική περίπτωση όπου το μαγνητικό δίπολο βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας της προτεινόμενης γεωμετρίας, δηλ. στον x_1–άξονα, πράγμα που σημαίνει ότι $\mathbf{r}_0=(x_{10},0,0)$ και ότι προσανατολίζεται κατά την x_1–κατεύθυνση, δίνοντας $\mathbf{m}=m_1\hat{\mathbf{x}}_1$, το πρόβλημα μετατρέπεται σε αξισυμμετρικό. Η αζιμουθιακή γωνία $\varphi\in[0,2\pi]$ απαλείφεται και έτσι απαλείφεται και κάθε εξάρτηση από αυτήν. Επιπλέον, αυτός ο περιορισμός της εξαφάνισης των δύο δομικών στοιχείων του μαγνητικού δίπολου ($m_2=m_3=0$) και της θέσης του ($x_{20}=x_{30}=0$) επιβάλλεται σε κάθε πεδίο και στα αναλυτικά του αποτελέσματα. Εντούτοις, εδώ εξετάζεται η γενική μη–αξισυμμετρική περίπτωση που αφορά πηγή αυθαίρετης θέσης και προσανατολισμού.



Σχήμα 2 Η σφαιρική γεωμετρία με τις τρεις συντεταγμένες επιφάνειες.

Στο Σχήμα 2 βλέπουμε τη σφαιρική γεωμετρία με τις τρεις συντεταγμένες επιφάνειες. Δηλ. τη σφαίρα (όταν $r = \sigma\tau\alpha\theta.$), τον κώνο (όταν $\theta = \sigma\tau\alpha\theta.$) και το μεσημβρινό επίπεδο (όταν $\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$).

Στην πορεία της μελέτης μας όμως, όπως βλέπουμε και στο Παράρτημα Β με την επίλυση της Λαπλασιανής σε σφαιρικές, η μεταβλητή θ εμφανίζεται μόνο μέσα σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις, έτσι για λόγους ευκολίας στις πράξεις έχουμε θέσει $\zeta = \cos\theta$, με:

$\theta \in [0,\pi] \Leftrightarrow 0 \le \theta \le \pi \Leftrightarrow -1 \le \cos\theta \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \zeta \le 1 \Leftrightarrow \zeta \in [-1,1]$.

Έτσι, στην παρούσα μελέτη θα ορίσουμε και θα χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες (r,ζ,φ) με $r \in [0,+\infty)$, $\zeta \in [-1,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$ και

$$x_1 = r\zeta\ ,\ x_2 = r\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi \text{ και } x_2 = r\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi \tag{77}$$

οι οποίες προκύπτουν από τις (76) αφού:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \overset{\theta\in[0,\pi] \text{ άρα } \sin\theta\ge 0}{\Leftrightarrow} \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} \Leftrightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}\ .$$

Στη συνέχεια, θα πρέπει να ορίσουμε τους βασικούς διαφορικούς τελεστές, στις σφαιρικές συντεταγμένες (r,ζ,φ) που ορίσαμε. Αρχικά, για τον τελεστή Ανάδελτα γνωρίζουμε ότι αυτός στις σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ) είναι:

$\nabla_{\mathbf{r}} \equiv \nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} + \dfrac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ όπου θέτοντας $\zeta = \cos\theta$ θα έχουμε:

- $\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}$
- $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial(\cos\theta)} = -\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial(\cos\theta)} = -\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$

Άρα, τελικά, ο τελεστής Ανάδελτα για $r\in[0,+\infty)$, $\zeta\in[-1,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ θα είναι:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \equiv \nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{78}$$

Επίσης, ο τελεστής Laplace στις σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ) είναι:

$$\Delta_{\mathbf{r}} \equiv \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

όπου θέτοντας $\zeta = \cos\theta$ θα έχουμε:

- $\sin^2\theta = 1-\zeta^2$
- $\sin\theta = \sqrt{1-\zeta^2}$
- $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = -\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$
- $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) = \dfrac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta}\dfrac{\partial}{\partial(\cos\theta)}\left(-\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right) =$

$$= -\sin\theta\frac{\partial}{\partial(\cos\theta)}\left(-\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) = \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) =$$

$$= \sqrt{1-\zeta^2}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}(-2\zeta)\frac{\partial}{\partial\zeta} + \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right] = \sqrt{1-\zeta^2}\left[-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right] =$$

$$= -\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} + \left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

Άρα, τελικά ο τελεστής Laplace για $r\in[0,+\infty)$, $\zeta\in[-1,1]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ γίνεται:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - \zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right) - \frac{\zeta}{r^2\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{r^2\left(1-\zeta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - 2\zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{1}{r^2\left(1-\zeta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_{\mathbf{r}} \equiv \Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}\right) + \frac{1}{r^2\left(1-\zeta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{79}$$

Παρακάτω, θα υπολογίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος. Έστω, λοιπόν, το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{r} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3$ στο Καρτεσιανό επίπεδο $\left(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3\right)$ το οποίο σύμφωνα με τις (76) και (77) γίνεται αντίστοιχα:

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + r\sin\theta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3, \tag{80}$$

στις σφαιρικές $\left(r, \theta, \varphi\right)$ στο Καρτεσιανό και

$$\mathbf{r} = r\zeta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + r\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + r\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3, \tag{81}$$

στις σφαιρικές $\left(r, \zeta, \varphi\right)$ στο Καρτεσιανό.

Επομένως, όσον αφορά τα μοναδιαία διανύσματά έχουμε:

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|} \overset{(80)}{=} \frac{\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sin\theta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}} =$$

$$= \frac{\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sin\theta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} =$$

$$= \cos\theta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sin\theta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sin\theta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3 \underset{\sin\theta=\sqrt{1-\zeta^2}}{\overset{\zeta=\cos\theta}{=}}$$

$$= \zeta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

Επιπλέον, να σημειώσουμε εδώ, ότι το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}}$ συμπίπτει με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S της σφαίρας $\hat{\boldsymbol{n}}$. Τελικά, αυτό είναι:

$$\hat{\boldsymbol{r}}\left(r, \zeta, \varphi\right) \equiv \hat{\boldsymbol{n}}\left(r, \zeta, \varphi\right) = \zeta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3, \tag{82}$$

Επίσης, για το μοναδιαίο $\hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv \hat{\boldsymbol{\zeta}}$ έχουμε:

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \equiv \hat{\boldsymbol{\zeta}} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|} \overset{\frac{\partial}{\partial\theta} = -\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}}{=} \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}}{\left|-\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}\right|} \overset{(81)}{=}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}\, r\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2}\,\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, r\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2}\,\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, r\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3}{\left|-\sqrt{1-\zeta^2}\,\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\zeta}\right|} =$$

$$= \frac{-\sqrt{1-\zeta^2}\, r\hat{\boldsymbol{x}}_1 + r\zeta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + r\zeta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3}{\sqrt{r^2\left(1-\zeta^2\right)+r^2\zeta^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}} = \frac{r\left[-\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right]}{r} =$$

$$= -\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

Άρα, αυτό είναι:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(\zeta,\varphi) \equiv \hat{\boldsymbol{\zeta}}(\zeta,\varphi) = -\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3, \tag{83}$$

Και τέλος, για το μοναδιαίο $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ έχουμε:

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}}{\left|\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right|} \overset{(80)}{=} \frac{-r\sin\theta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + r\sin\theta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3}{\sqrt{r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}} = -\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3$$

Άρα, και αυτό είναι:

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) = -\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3. \tag{84}$$

Επίσης, σημειώνουμε εδώ ότι το μοναδιαίο δυαδικό γινόμενο στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}} + \hat{\boldsymbol{\zeta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Ορίζουμε εδώ την ακτίνα του σφαιρικού αντικειμένου ως $r = r_s \equiv \alpha$ και άρα θα είναι $\mathbf{r}_s = (r_s,\zeta,\varphi) \equiv (\alpha,\zeta,\varphi)$ το διάνυσμα θέσης με αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος στην επιφάνεις S της σφαίρας. Όσον αφορά τώρα, την περιοχή της κυματικής διάδοσης αυτή ορίζεται στο σφαιρικό σύστημα ως:

$$\Omega \equiv V\left(\mathbb{R}^3\right) - \{\mathbf{r}_0\} = \left\{(r,\zeta,\varphi) : r\in[r_s\equiv\alpha,+\infty),\ \zeta\in[-1,1],\ \varphi\in[0,2\pi)\right\} - \left\{(r_0,\zeta_0,\varphi_0)\right\}, \tag{85}$$

όπου το (r_0,ζ_0,φ_0) αντιστοιχεί στο (x_{10},x_{20},x_{30}) μέσω της (77), δίνοντας έτσι τον εξωτερικό χώρο. Προφανώς, εφόσον το σφαιρικό αντικείμενο είναι μη–διαπερατό, τότε δεν θα υπάρχει κανένα εσωτερικό της σφαίρας πεδίο. Επομένως, θα ισχύει:

$$\mathbf{H}^x(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^x(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ για } \mathbf{r}\in\left\{r\in(1,r_s\equiv\alpha),\ \zeta\in[-1,1],\ \varphi\in[0,2\pi)\right\} \text{ και με } x=p,s,t, \tag{86}$$

ενώ για $r = r_s \equiv \alpha$ και καθώς $r \to +\infty$, οι συνοριακές συνθήκες (50) ή (51) και οι συνθήκες ακτινοβολίας στο άπειρο (52) ή (55), πρέπει να υπολογιστούν αντίστοιχα.

Προχωρώντας, θα μιλήσουμε για την λύση της εξίσωσης Laplace που θα χρειαστούμε στην εργασία μας. Έτσι λοιπόν η γενική της λύση (βλ. Παράρτημα Β) είναι:

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\left[A_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + A_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,\text{ex}}^{m/q}(\mathbf{r})\right], \tag{87}$$

για $\mathbf{r} \in \{r \in [0,+\infty),\ \zeta \in [-1,1],\ \varphi \in [0,2\pi)\}$ με $A_{n,in}^{m/q}$, $A_{n,ex}^{m/q}$ αυθαίρετες σταθερές όπου $A_{\ell,ex}^{m/q} = 0$ στο εσωτερικό πρόβλημα και $A_{\ell,in}^{m/q} = 0$ στο εξώτερικό πρόβλημα όπως στη δική μας περίπτωση και με τις ιδιολύσεις:

$$u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) = r^{\ell}P_{\ell}^{m}(\zeta)\,f_{m}^{q}(\varphi) = r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{88}$$

και

$$u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) = r^{-(\ell+1)}P_{\ell}^{m}(\zeta)\,f_{m}^{q}(\varphi) = r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{89}$$

όπου

$$Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) = P_{\ell}^{m}(\zeta)\,f_{m}^{q}(\varphi),\ \text{με}\ f_{m}^{q}(\varphi) = \begin{cases}\cos m\varphi, & q = e\\ \sin m\varphi, & q = o\end{cases}. \tag{90}$$

και με P_{ℓ}^{m} τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre 1^{ου} είδους.

Όμως, αφού στην περίπτωσή μας έχουμε εξωτερικό πρόβλημα θα ισχύει $A_{n,in}^{m/q} = 0$. Έτσι, η γενική λύση που θα μας χρειαστεί κυρίως θα είναι η

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}A_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\ \text{για}\ \mathbf{r} \in \{r \in [\alpha,+\infty),\ \zeta \in [-1,1],\ \varphi \in [0,2\pi)\}. \tag{91}$$

Συνεχίζοντας, θα πρέπει να ορίσουμε τα παρακάτω εσωτερικά γινόμενα και έχουμε:

$$\left(P_{\ell}^{m}(\zeta), P_{\ell'}^{m}(\zeta)\right) = \int_{-1}^{+1}P_{\ell}^{m}(\zeta)P_{\ell'}^{m}(\zeta)d\zeta = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\ \ \text{όπου}\ \ \ell,\ell' \geq 0, \tag{92}$$

και $\delta_{\ell\ell'} = \begin{cases}0, & \ell \neq \ell'\\ 1, & \ell = \ell'\end{cases}$ το δέλτα του Kronecker και $(m,m') = 0,1,2,\ldots,(\ell,\ell')$, ενώ για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις για $\ell,\ell' \geq 0$ και $q,q' = e,o$, ισχύει ότι είναι ορθογώνιες με:

$$\left(f_{m}^{q}(\varphi), f_{m'}^{q'}(\varphi)\right) = \int_{0}^{2\pi}f_{m}^{q}(\varphi)\,f_{m'}^{q'}(\varphi)\,d\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon_{m}}\delta_{mm'}\delta_{qq'}, \tag{93}$$

όπου $(m,m')=0,1,2,\ldots,(\ell,\ell')$ και $\varepsilon_m=\begin{cases}1, & m=0\\ 2, & m\geq 1\end{cases}$.

Επίσης, η σχέση ορθογωνιότητας για τις σφαιρικές αρμονικές είναι:

$$\left(Y_\ell^{m/q}(\theta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\theta,\varphi)\right)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_\ell^{m/q}(\theta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\theta,\varphi)\mathrm{si}d\theta d\theta d\varphi \tag{94}$$

όπου αφού $\zeta=\cos\theta$ άρα και $d\zeta=-\sin\theta d\theta$ και επίσης για $\theta=0$ είναι $\zeta=1$ ενώ για $\theta=\pi$ είναι $\zeta=-1$ θα είναι,

$$(94)\Leftrightarrow\left(Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\right)=\int_0^{2\pi}\int_1^{-1}-Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\zeta d\varphi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\right)=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\zeta d\varphi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\right)=\frac{1}{\varepsilon_m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{qq'}, \tag{95}$$

με $(m,m')=0,1,2,\ldots,(\ell,\ell')$ και $(q,q')=(e,o)$.

Επιπλέον, μία πολύ χρήσιμη πληροφορία για τις προσεχείς αναλυτικές υποενότητες, ενσωματώνει τη θέση του δίπολου $\mathbf{r}_0$ με το πολύ χρήσιμο ανάπτυγμα της συνάρτησης Green στη σφαιρική γεωμετρία (Hobson, 1965). Για το ανάπτυγμα $\frac{1}{R}$ (βλ. Παράρτημα Β) ισχύει:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}=\begin{cases}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0)u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}), & \mathbf{r}>\mathbf{r}_0\\ \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}), & \mathbf{r}<\mathbf{r}_0\end{cases}. \tag{96}$$

όπου

$$\rho_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0)=\frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\ \text{με}\ y=in,ex. \tag{97}$$

Στο πρόβλημά μας όμως όπου έχουμε $\mathbf{r}<\mathbf{r}_0$ θα ισχύει μόνο ο 2[ος] κλάδος της (96). Δηλ.

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}), \tag{98}$$

Τέλος, υπολογίσαμε την απόκλιση και το στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου στις σφαιρικές συντεταγμένες (r,ζ,φ) (βλ. Παράρτημα Α) διότι είναι πιθανό να μας χρειαστούν στην πορεία. Έτσι, για τυχούσα διανυσματική συνάρτηση
$\mathbf{g}(r,\zeta,\varphi)=g_r(r,\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{r}}+g_\zeta(r,\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+g_\varphi(r,\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ έχουμε:

$$\nabla\cdot\mathbf{g}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 g_r\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,g_\zeta\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\varphi}, \tag{99}$$

και

$$\nabla\times\mathbf{g}=\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,g_\varphi\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_\zeta}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(r g_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\left(r g_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial g_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]. \tag{100}$$

Εδώ τελειώνει η γνωστή αλλά και απαραίτητη συλλογή όλων των προκαταρκτικών σχέσεων που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

1.2.2 Υπολογισμός μαγνητικών σκεδαζόμενων πεδίων

Υπολογισμός του $\mathbf{H}_0^s$

Θα ξεκινήσουμε την επίλυση με το στατικό όρο Rayleigh $\mathbf{H}_0^s$, όπου το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών αποτελείται από τις σχέσεις (65) δηλ. $\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=\nabla\Phi_0^s(\mathbf{r})$ και (72) δηλ. $\Delta\Phi_0^s(\mathbf{r})=0$, με τη συνοριακή συνθήκη:

$$(51)\overset{n=0}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\left[\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}_s)\right]=0,\ \text{όπου}\ \mathbf{r}_s=(r_s,\zeta,\varphi)\equiv(\alpha,\zeta,\varphi). \tag{101}$$

Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι η (72) είναι μία εξίσωση Laplace με άγνωστη τη βαθμωτή συνάρτηση $\Phi_0^s(\mathbf{r})$. Σύμφωνα, λοιπόν, με την επίλυση της εξίσωσης Laplace και τη σχέση (91) στην οποία καταλήξαμε, η λύση της (72) θα είναι της μορφής:

$$\Phi_0^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\overset{(89)}{\Leftrightarrow}\Phi_0^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{102}$$

όπου $a_{\ell,ex}^{m/q}$ αυθαίρετες σταθερές για $\ell\geq 0$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$.

Οπότε, και το ζητούμενο πεδίο θα είναι:

$$(65)\overset{(102)}{\Leftrightarrow}\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right], \tag{103}$$

Έτσι, για να βρούμε τελικά το πεδίο $\mathbf{H}_0^s$ αρκεί να προσδιορίσουμε τις σταθερές $a_{\ell,ex}^{m/q}$, κάτι που θα γίνει μέσω της συνοριακής συνθήκης (101). Είναι:

$$(101) \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}_s)=0\,. \tag{104}$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο της (104) και μετά θα τους αντικαταστήσουμε σ' αυτή. Επομένως, έχοντας επιπλέον υπόψιν ότι το δυαδικό $\nabla\otimes\nabla\frac{1}{R}$ είναι συμμετρικό, έχουμε:

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\overset{\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})}{=}\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\overset{(31)}{=}\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\nabla\otimes\nabla\frac{1}{R}\right)=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\nabla\otimes\nabla\frac{1}{R}\right)\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\overset{(39)}{=}$$

$$=-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\nabla\otimes\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\right)\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}=-(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla)\left(\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\right)=$$

$$=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}\right)=-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}\overset{(98)}{=}-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\right)\overset{(88)}{=}$$

$$=-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^{\ell}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\ell r^{\ell-1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Άρα, για $\mathbf{r}(r,\zeta,\varphi)=\mathbf{r}_s(\alpha,\zeta,\varphi)$ είναι:

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_0^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)=-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\ell\alpha^{\ell-1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{105}$$

και επίσης,

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})\overset{\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})}{=}\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})\overset{(103)}{=}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}\frac{\partial\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}{\partial r}=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)r^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Άρα, $$\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}_s)=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\,. \tag{106}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (105) και (106) στην (104) έχουμε:

$$-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\ell\alpha^{\ell-1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}a_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\ell\alpha^{\ell-1}+a_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=0,\qquad(107)$$

και από την (107) λόγω ορθογωνιότητας θα έχουμε:

$$\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\ell\alpha^{\ell-1}+a_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\ell\alpha^{\ell-1}=-a_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{\ell,ex}^{m/q}=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell}{\ell+1}\frac{\alpha^{\ell-1}}{\alpha^{-(\ell+2)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{\ell,ex}^{m/q}=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1},\qquad(108)$$

που είναι οι ζητούμενοι συντελεστές. Επομένως, η βαθμωτή συνάρτηση Φ_0^s είναι:

$$(102)\overset{(108)}{\Leftrightarrow}\Phi_0^s(\mathbf{r})=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),\qquad(109)$$

για κάθε $\mathbf{r}\in\Omega$ και $\ell\geq0$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$.

Έτσι, για το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο τάξης $n=0$ που θέλουμε να καταλήξουμε έχουμε:

$$(103)\underset{(109)}{\overset{(108)}{\Leftrightarrow}}\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\overset{(97)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\overset{(89)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right],\qquad(110)$$

που είναι το ζητούμενο σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο για κάθε $\mathbf{r}\in\Omega$, ενώ $u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})$ και $u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$ δίνονται από τον τύπο (89) για $\ell\geq 0$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$.

Υπολογισμός του $\mathbf{H}_2^s$

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το μαγνητικό πεδίο τάξης $n=2$, το οποίο παρουσιάζει μία ιδιαίτερη δυσκολία, κυρίως λόγω της σύζευξής του με τον στατικό όρο, όπως φαίνεται και από την (69). Επίσης, δημιουργείται και μία επιπλέον πολυπλοκότητα λόγω του ότι το $\mathbf{H}_2^s$ είναι καθαρά διανυσματικό, οπότε και χρειαζόμαστε ένα σύνολο τριών ξεχωριστών συνοριακών συνθηκών ώστε να καθοριστούν οι τρεις του συνιστώσες. Έτσι, πέρα από την εφαρμογή της βαθμωτής συνθήκης στο πρώτο μέρος της (51) για $n=2$, θα χρησιμοποιήσουμε και τη διανυσματική συνθήκη που σχετίζεται με το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_1^t$ της συνοριακής συνθήκης στο δεύτερο μέρος της (51), που αφορά τις (37) και (70) από την οποία θα προκύψουν δύο συνθήκες. Έτσι λοιπόν, το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε για την εύρεση του $\mathbf{H}_2^s$ αποτελείται από τη σχέση (69) δηλ. την $\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})=\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+\mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})$, την (73) δηλ. την $\Delta\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})=\mathbf{0}$ και τις συνθήκες:

$$(51)\overset{n=2}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\left[\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)\right]=0,\ \text{όπου }\mathbf{r}_s=(r_s,\zeta,\varphi)\equiv(\alpha,\zeta,\varphi), \tag{111}$$

και

$$(51)\overset{n=1}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\times\left[\mathbf{E}_1^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}_s)\right]=\mathbf{0},\ \text{όπου }\mathbf{r}_s=(r_s,\zeta,\varphi)\equiv(\alpha,\zeta,\varphi). \tag{112}$$

Αρχικά, τη συνάρτηση $\Phi_0^s(\mathbf{r})$ τη γνωρίζουμε από τη διαδικασία εύρεσης του $\mathbf{H}_0^s$ προηγουμένως και δίνεται από τη σχέση (109). Οπότε, για να βρούμε το $\mathbf{H}_2^s$ αρκεί να βρούμε τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{X}_2^s$, η οποία όπως είδαμε παραπάνω θα είναι λύση της εξίσωσης Laplace (73). Έτσι, η $\mathbf{X}_2^s$ σύμφωνα με την (91) και την (89) δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{113}$$

όπου $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$ αυθαίρετοι διανυσματικοί συντελεστές για $\ell\geq 0$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$.

Επομένως, πρέπει να βρούμε τους $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$ οι οποίοι δεδομένης της Καρτεσιανής βάσης $(\hat{\boldsymbol{x}}_1,\hat{\boldsymbol{x}}_2,\hat{\boldsymbol{x}}_3)$ θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} = \sum_{j=1}^{3} b_{\ell,j}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_j = b_{\ell,1}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + b_{\ell,2}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + b_{\ell,3}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_3. \tag{114}$$

Από την (114) παρατηρούμε ότι οι άγνωστοι που πρέπει να προσδιορίσουμε είναι οι τρεις συνιστώσεις των $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$, δηλ. οι $b_{\ell,1}^{m/q}$, $b_{\ell,2}^{m/q}$, $b_{\ell,3}^{m/q}$, έτσι επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι θα χρειαστούμε τρεις συνθήκες για την εύρεσή τους. Όπως ήδη αναφέραμε η μία συνθήκη είναι η (111) ενώ η άλλη είναι η (112) από την οποία θα προκύψουν δύο ξεχωριστές συνθήκες. Όμως, για να γίνει εύχρηστη η (112) θα πρέπει να την επεξεργαστούμε κατάλληλα χρησιμοποιώντας τις (37) και (70). Έτσι, έχουμε:

$$(112)\underset{(70)}{\overset{(37)}{\Leftrightarrow}}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\times\left[-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\times\nabla\frac{1}{R}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\times\left[\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla\frac{1}{R}+\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\times\left[\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla\frac{1}{R}+\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)\right]=\mathbf{0}. \tag{115}$$

Ακόμη, υπάρχει και η συνθήκη:

$$(45)\overset{n=2}{\Rightarrow}\nabla\cdot\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})=0\Leftrightarrow\nabla\cdot\left(\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+\mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})\right)=0\Leftrightarrow\nabla\cdot\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+\nabla\cdot\left(\mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nabla\cdot\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+\nabla\Phi_0^s(\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}+\Phi_0^s(\mathbf{r})\nabla\cdot\mathbf{r}=0\overset{\nabla\cdot\mathbf{r}=3\ (\text{Παράρτημα A})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\nabla\cdot\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+3\Phi_0^s(\mathbf{r})+\mathbf{r}\cdot\nabla\Phi_0^s(\mathbf{r})=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nabla\cdot\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+(3+\mathbf{r}\cdot\nabla)\Phi_0^s(\mathbf{r})=0, \tag{116}$$

η οποία δε θα μας χρειαστεί κατά την επίλυση αλλά θα πρέπει να ικανοποιείται.

Τώρα, για να προχωρήσουμε στην επίλυσή μας είναι σημαντικό να εκφράσουμε τους συντελεστές $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$ στη βάση του σφαιρικού συστήματος. Η μετατροπή από το Καρτεσιανό στο σφαιρικό γίνεται μέσω του τύπου:

$$\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}=\left(\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\right)\hat{\boldsymbol{r}}+\left(\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{117}$$

Για τα εσωτερικά γινόμενα της (117) έχουμε:

- $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi$ (118)
- $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}=-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi$ (119)
- $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}=-b_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi$ (120)

Άρα, η (117) γίνεται:

$$\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} = \left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta + b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi \right)\hat{\boldsymbol{r}} +$$

$$+\left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2} + b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi \right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \left(-b_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi \right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{121}$$

Ακόμη, επισημαίνουμε εδώ ότι το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3$ στις σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται $\mathbf{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}$.

Παρακάτω, θα προχωρήσουμε στο κύριο κομμάτι της διαδικασίας εύρεσης του ζητούμενου $\mathbf{H}_2^s$. Θα χειριστούμε τις συνοριακές συνθήκες (111) και (115) με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους τις συνιστώσες $b_{\ell,1}^{m/q}$, $b_{\ell,2}^{m/q}$, $b_{\ell,3}^{m/q}$. Η μορφή των τριών αυτών σχέσεων του συστήματος που θα καταλήξουμε είναι η επόμενη:

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi\right) b_{\ell,j}^{m/q} - g_{\ell}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right) \right] = 0, \text{ για κάθε } \kappa = 1,2,3, \tag{122}$$

όπου $\zeta \in [-1,1]$, $\varphi \in [0,2\pi)$, $\mathbf{r}_0 = (r_0,\zeta_0,\varphi_0)$ και με $\kappa = 1,2,3$ να αντιστοιχούν στην κάθε εξίσωση. Έτσι, σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του συστήματος $f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi\right)$ και τους όρους $g_{\ell}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)$.

Κατ' αρχάς, θα ασχοληθούμε με τη συνθήκη (111). Έχουμε:

$$(111) \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0) + \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s) = 0. \tag{123}$$

Θα υπολογίσουμε κάθε όρο της (123) ξεχωριστά και έπειτα θα αντικαταστήσουμε τα αποτελέσματα σ' αυτήν. Είναι:

- $$\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \overset{\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})}{=} \hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \overset{(35)}{=} \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\nabla\frac{1}{R}\otimes\mathbf{R} - \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{R}\right)\right] =$$

$$= \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left[\left(\nabla\frac{1}{R}\otimes\mathbf{R} - \frac{\tilde{\mathbf{I}}}{R}\right)\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right] = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left[\nabla\frac{1}{R}\left(\mathbf{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right) - \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\frac{1}{R}\right] =$$

$$= \left(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\frac{1}{R}\right)\left(\mathbf{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right) - \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}\left(\mathbf{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right) - \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{m}}{4\pi}\frac{1}{R} \underset{(98)}{\overset{(88)}{=}}$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\left(\mathbf{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right)-\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{m}}{4\pi}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\ell r^{\ell-1}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\left(\mathbf{R}\cdot\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\right)-\frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{m}}{4\pi}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\ell r^{\ell-1}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\mathbf{R}\right)-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{r}}\right)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\ell}{r}\mathbf{R}-\hat{\boldsymbol{r}}\right)r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\ell}{r}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-\hat{\boldsymbol{r}}\right)r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]$$

Οπότε, για $\mathbf{r}(r,\zeta,\varphi)=\mathbf{r}_s(\alpha,\zeta,\varphi)$ θα είναι:

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_2^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)-\hat{\boldsymbol{r}}\right)\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]. \tag{124}$$

Επίσης,

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})\overset{\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})}{=}\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})\overset{(69)}{=}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left(\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+\mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})\right)=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})\overset{\mathbf{r}=r\hat{\boldsymbol{r}}}{=}$$

$$=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r})+r\Phi_0^s(\mathbf{r})\underset{(113)}{\overset{(109)}{=}}$$

$$=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)-$$

$$-r\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\right)\left[r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(118)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\left[r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

όπου $M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)=\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$. (125)

Επομένως, για $\mathbf{r}(r,\zeta,\varphi)=\mathbf{r}_s(\alpha,\zeta,\varphi)$ είναι:

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\left[\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+1}}{\ell+1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi). \quad (126)$$

Επομένως, τελικά, η πρώτη συνθήκη μας δίνει:

$$(123)\overset{(124)}{\underset{(125)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)-\hat{\mathbf{r}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]+$$

$$+\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\left[\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+1}}{\ell+1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\left[\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]-$$

$$-\left\{-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)-\hat{\mathbf{r}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+1}}{\ell+1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\left[\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha}{\ell+1}\right]\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=0. \quad (127)$$

Έτσι, με την (127) μπορούμε να ορίσουμε τους συντελεστές $f_{\ell,j}^{m/q,1}(r_s,\zeta,\varphi)$ των αγνώστων $b_{\ell,1}^{m/q}$, $b_{\ell,2}^{m/q}$, $b_{\ell,3}^{m/q}$ και τον σταθερό όρο $g_\ell^{m/q,1}(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)$ της πρώτης εξίσωσης του συστήματος, δηλ. της εξίσωσης για $\kappa=1$. Αυτοί είναι:

$$f_{\ell,1}^{m/q,1}=\alpha^{-(\ell+1)}\zeta Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,1}=\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,1}=\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

και

$$g_\ell^{m/q,1}=\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\boldsymbol{r}}\right)+M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha}{\ell+1}\right]\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

Συνεχίζοντας, θα ασχοληθούμε με την άλλη συνθήκη που έχουμε στη διάθεσή μας, η οποία είναι η σχέση (115) και η οποία θα μας δώσει τις άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος. Δηλ., αυτές που αντιστοιχούν στις περιπτώσεις $\kappa=2$ και $\kappa=3$. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

$$
\begin{aligned}
(115)\ &\overset{\hat{n}(\mathbf{r})\equiv\hat{r}(\mathbf{r})}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r}_s)\times\left[\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)+\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla\frac{1}{R}\right]=\mathbf{0}\overset{(39)}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}_s)-\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\
&\overset{(69)}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\left(\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}_s)+\mathbf{r}_s\Phi_0^s(\mathbf{r}_s)\right)-\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}_s)+\nabla\times\left(\mathbf{r}_s\Phi_0^s(\mathbf{r}_s)\right)-\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\underbrace{\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\mathbf{X}_2^s(\mathbf{r}_s)\right]}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\left(\mathbf{r}_s\Phi_0^s(\mathbf{r}_s)\right)\right]}_{\mathrm{II}}-\underbrace{\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}\right)}_{\mathrm{III}}=\mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{128}
$$

Ονομάσαμε κάθε όρο της (128) με I, II, III αντίστοιχα για ευκολία στο συμβολισμό και θα τα υπολογίσουμε ξεσωριστά και στη συνέχεια θα τα αντικαταστήσουμε στην (128). Πρώτο θα υπολογίσουμε το III, διότι είναι το πιο απλό. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III}&\underset{(98)}{\overset{(88)}{=}}\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\right)=\\
&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\right)=\\
&=\hat{\boldsymbol{r}}\times\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=\\
&=2\hat{\boldsymbol{r}}\times\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left[\left(2\hat{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \right) r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \right]$$

όπου $\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \dfrac{\mathbf{m}}{2\pi} \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$, (129)

Επομένως, καταλήξαμε ότι για $r = r_s \equiv \alpha$:

$$\mathrm{III} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left[\left(2\hat{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \right) \alpha^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \right]$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του I. Εδώ θα είναι:

$$\mathrm{I} \overset{(113)}{=} \hat{\boldsymbol{r}} \times \left[\nabla \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \right]. \tag{130}$$

Για να χειριστούμε ευκολότερα την (130) θέτουμε:

$$\mathbf{B}_{\ell,ex}^{m/q} = \mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \overset{(121)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{B}_{\ell,ex}^{m/q} = \left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta + b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi \right) r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\mathbf{r}} +$$
$$+ \left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2} + b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi \right) r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}} +$$
$$+ \left(-b_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi \right) r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Επομένως, οι συνιστώσες του $\mathbf{B}_{\ell,ex}^{m/q}$ είναι:

$$B_r = \left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta + b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi \right) r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

$$B_\zeta = \left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2} + b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi \right) r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \ \text{και}$$

$$B_\varphi = \left(-b_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi + b_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi \right) r^{-(\ell+1)} \mathrm{Y}_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Οπότε, από την (130) το I γράφεται:

$$\mathrm{I} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \left[\nabla \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \mathbf{B}_{\ell,ex}^{m/q} \right] = \hat{\boldsymbol{r}} \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left(\nabla \times \mathbf{B}_{\ell,ex}^{m/q} \right) \overset{(100)}{=}$$

$$= \hat{\boldsymbol{r}} \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \frac{1}{r} \left[-\left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}B_\varphi\right)}{\partial\zeta} + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial B_\zeta}{\partial\varphi} \right)\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial B_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} \right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial(rB_\zeta)}{\partial r} + \sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta} \right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] =$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}B_\varphi\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_\zeta}{\partial\varphi}\right)\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rB_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\left(rB_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(rB_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rB_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

αφού επιπλέον ισχύουν $\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}=\mathbf{0}$, $\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\zeta}}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}=-\hat{\boldsymbol{\zeta}}$. Άρα, τελικά το Ι για $r=r_s\equiv\alpha$ είναι:

$$\mathrm{I}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(rB_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rB_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]_{r=\alpha}.$$

Θα ολοκληρώσουμε τους υπολογισμούς μας για την (128) με την εύρεση του ΙΙ. Έχουμε:

$$\mathrm{II}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\left(\mathbf{r}\Phi_0^s(\mathbf{r})\right)\right]=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\left(\Phi_0^s(\mathbf{r})\mathbf{r}\right)\right]\overset{\mathbf{r}=r\hat{\mathbf{r}}}{=}\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\left(\Phi_0^s(\mathbf{r})r\hat{\mathbf{r}}\right)\right]\overset{(109)}{=}$$

$$=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left\{\nabla\times\left[\left(-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)r\hat{\mathbf{r}}\right]\right\}\overset{(125)}{=}$$

$$=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left\{\nabla\times\left[\left(-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)r\hat{\mathbf{r}}\right]\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{II}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left\{\nabla\times\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}-\left(M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\hat{\boldsymbol{r}}\right]\right\}. \tag{131}$$

Θέτουμε:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\ell,ex}^{m/q}=-\left(M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\hat{\boldsymbol{r}}$$

που έχει μόνο r – συνιστώσα, οπότε οι συνιστώσες του $\boldsymbol{\Gamma}_{\ell,ex}^{m/q}$ είναι:

$$\Gamma_r=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

$\Gamma_\zeta=0$ και $\Gamma_\varphi=0$

Επομένως, από την (131) το ΙΙ γράφεται:

$$\mathrm{II}=\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\nabla\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\boldsymbol{\Gamma}_{\ell,ex}^{m/q}\right]=\hat{\boldsymbol{r}}\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\nabla\times\boldsymbol{\Gamma}_{\ell,ex}^{m/q}\right)\overset{(100)}{=}$$

$$=\hat{\boldsymbol{r}}\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\Gamma_\varphi\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_\zeta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(r\Gamma_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\left(r\Gamma_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\overset{\Gamma_\zeta=\Gamma_\varphi=0}{=}$$

$$=\hat{\boldsymbol{r}}\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\underset{\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}=-\hat{\boldsymbol{\zeta}}}{\overset{\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\zeta}}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{=}}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

Έτσι, καταλήγουμε ότι για $r=r_s\equiv\alpha$:

$$\mathrm{II}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]_{r=\alpha}$$

Άρα, εφόσον βρήκαμε τα Ι, ΙΙ και ΙΙΙ προχωράμε στην αντικατάστασή τους στη σχέση (128) οπότε:

(128) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(rB_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rB_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]_{r=\alpha}+$$

$$+\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{r}\left[-\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]_{r=\alpha}-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(2\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]_{r=\alpha}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_\zeta\right)}{\partial r}-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta}\right)_{r=\alpha}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_\varphi\right)}{\partial r}\right)_{r=\alpha}\hat{\boldsymbol{\varphi}}+\right.$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\zeta}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\Gamma_r}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)_{r=\alpha}-$$

$$\left.-\left(2\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\zeta}\right)}{\partial r}-\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{r}\frac{\partial B_{r}}{\partial\zeta}\right)+\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{r}\frac{\partial\Gamma_{r}}{\partial\zeta}\right)\right]_{r=\alpha}\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\right.$$

$$+\left[\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^{2}}}\frac{\partial B_{r}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\varphi}\right)}{\partial r}\right)+\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^{2}}}\frac{\partial\Gamma_{r}}{\partial\varphi}\right)\right]_{r=\alpha}\hat{\boldsymbol{\varphi}}-$$

$$\left.-\left(2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_{0}\right)\right)\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right\}=\mathbf{0}. \quad (132)$$

Σε αυτό το σημείο θα πάρουμε δύο περιπτώσεις καθεμία από τις οποίες θα καταλήξει στις δύο ζητούμενες εξισώσεις του συστήματος, αυτές για $\kappa=2$ και $\kappa=3$. Για να προκύψουν αυτές θα πρέπει στην μία περίπτωση (για $\kappa=2$) να πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά την (132) με $\hat{\zeta}$ ενώ στην άλλη (για $\kappa=3$) να πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά την (132) με $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$.

- ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\kappa=2$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά την (132) με $\hat{\zeta}$ οπότε αφού $\hat{\zeta}\cdot\hat{\zeta}=1$ και $\hat{\zeta}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}=0$ τότε η (132) γίνεται:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\zeta}\right)}{\partial r}-\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{r}\frac{\partial B_{r}}{\partial\zeta}\right)_{r=\alpha}+\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{r}\frac{\partial\Gamma_{r}}{\partial\zeta}\right)_{r=\alpha}-\right.$$

$$\left.-\left(2\hat{\mathbf{r}}\times M_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_{0}\right)\cdot\hat{\zeta}\right)\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\zeta}\right)}{\partial r}-\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{r}\frac{\partial B_{r}}{\partial\zeta}\right)_{r=\alpha}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^{2}}}{r}\frac{\partial\Gamma_{r}}{\partial\zeta}+\left(2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_{0}\right)\cdot\hat{\zeta}\right)\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right)_{r=\alpha}\right]=0. \quad (133)$$

Παρακάτω, θα υπολογίσουμε τους όρους με τις μερικές παραγώγους:

- $$-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rB_{\zeta}\right)}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^{2}}+b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]}{\partial r}=$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{\partial\left[\left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^{2}}+b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-\ell}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]}{\partial r}=$$

$$=\ell\frac{1}{r}\left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^{2}}+b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)=$$

$$=\ell\left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^{2}}+b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-(\ell+2)}Y_{\ell}^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)$$

- $$-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \zeta}=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial\left[\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}{\partial\zeta}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial\left[\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta P_\ell^m(\zeta)+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}f_m^q(\varphi)\right]}{\partial\zeta}=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\left[b_{\ell,1}^{m/q}\left(P_\ell^m(\zeta)+\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)+b_{\ell,2}^{m/q}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}P_\ell^m(\zeta)+\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+b_{\ell,3}^{m/q}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}P_\ell^m(\zeta)+\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sin\varphi\right]r^{-(\ell+1)}f_m^q(\varphi)=$$

$$=\left\{b_{\ell,1}^{m/q}\left[-\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]+b_{\ell,2}^{m/q}\left[\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+b_{\ell,3}^{m/q}\left[\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\sin\varphi\right\}r^{-(\ell+2)}f_m^q(\varphi)$$

Επομένως, ο όρος της (133) που περιέχει τις άγνωστες σταθερές $b_{\ell,j}^{m/q}$ $(j=1,2,3)$ θα είναι:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\zeta)}{\partial r}-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial B_r}{\partial\zeta}=$$

$$=\ell\left(-b_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+b_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)+$$

$$+\left\{b_{\ell,1}^{m/q}\left[-\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]+b_{\ell,2}^{m/q}\left[\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\cos\varphi+\right.$$

$$\left.+b_{\ell,3}^{m/q}\left[\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\sin\varphi\right\}r^{-(\ell+2)}f_m^q(\varphi)=$$

$$=\left\{b_{\ell,1}^{m/q}\left[-(\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]+\right.$$

$$+b_{\ell,2}^{m/q}\left[(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\cos\varphi+$$

$$\left.+b_{\ell,3}^{m/q}\left[(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\sin\varphi\right\}r^{-(\ell+2)}f_m^q(\varphi)$$

Επομένως, τώρα έχουμε τους συντελεστές των $b_{\ell,j}^{m/q}$ $(j=1,2,3)$ για $\kappa=2$. Αυτοί είναι:

$$f_{\ell,1}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi),$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\cos\varphi f_m^q(\varphi),$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\sin\varphi f_m^q(\varphi),$$

Στη συνέχεια θα βρούμε τους υπόλοιπους όρους της σχέσης (133) που δεν περιέχουν $b_{\ell,j}^{m/q}$ $(j=1,2,3)$ ώστε να ορίσουμε τις $g_\ell^{m/q,2}$. Έχουμε:

$$\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta}=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=$$

$$=-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-\ell}P_\ell^{m\prime}(\zeta)f_m^q(\varphi)=$$

$$=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)f_m^q(\varphi)$$

Επομένως, η $g_\ell^{m/q,2}$ θα είναι:

$$g_\ell^{m/q,2}=\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta}+\left(2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)_{r=\alpha}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta}\right)_{r=\alpha}+\left(2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}\alpha^{-(\ell+1)}P_\ell^{m\prime}(\zeta)f_m^q(\varphi)+2\left(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell}}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)f_m^q(\varphi)+2\left(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Οπότε συνοψίζοντας όλους του συντελεστές και όρους της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa=2$ έχουμε:

$$f_{\ell,1}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi),$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-(1-\zeta^2)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\cos\varphi f_m^q(\varphi),$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-(1-\zeta^2)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]\sin\varphi f_m^q(\varphi)$$

και

$$g_\ell^{m/q,2}=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell}}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)f_m^q(\varphi)+2\left(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi).$$

- ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\kappa=3$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά την (132) με $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ και αφού $\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}=1$ και $\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}=0$ τότε η (132) γίνεται:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right)_{r=\alpha}+\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial\varphi}\right)_{r=\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left(2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\right)_{r=\alpha}-\right.$$

$$-\left.\left(-\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial \varphi}+\left(2\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)_{r=\alpha}\right]=0\,. \tag{134}$$

Παρακάτω θα υπολογίσουμε τους όρους με τις μερικές παραγώγους:

- $$\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial \varphi}=\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\left[\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}P_{\ell}^{m}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\right]}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial\left[\left(b_{\ell,1}^{m/q}\zeta\, f_m^q(\varphi)+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi f_m^q(\varphi)+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi f_m^q(\varphi)\right)r^{-(\ell+1)}P_{\ell}^{m}(\zeta)\right]}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\Big[b_{\ell,1}^{m/q}\zeta\, f_m^{q\prime}(\varphi)+b_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\left(-\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right)+$$
$$+b_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\left(\cos\varphi f_m^q(\varphi)+\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right)\Big]r^{-(\ell+1)}P_{\ell}^{m}(\zeta)=$$

$$=\Big\{b_{\ell,1}^{m/q}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)+b_{\ell,2}^{m/q}\left[-\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]+$$
$$+b_{\ell,3}^{m/q}\left[\cos\varphi f_m^q(\varphi)+\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\Big\}r^{-(\ell+2)}P_{\ell}^{m}(\zeta)$$

- $$-\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\left[\left(-b_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)r^{-\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}{\partial r}=$$
$$=\ell\left(-b_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi+b_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)r^{-(\ell+2)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Επομένως, ο όρος της (134) που περιέχει τις άγνωστες σταθερές $b_{\ell,j}^{m/q}$ $(j=1,2,3)$ θα είναι:

$$\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial B_r}{\partial \varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}=$$

$$=\Big\{b_{\ell,1}^{m/q}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)+b_{\ell,2}^{m/q}\left[-\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]+$$
$$+b_{\ell,3}^{m/q}\left[\cos\varphi f_m^q(\varphi)+\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\Big\}r^{-(\ell+2)}P_{\ell}^{m}(\zeta)+$$
$$+\left[-b_{\ell,2}^{m/q}\ell\sin\varphi f_m^q(\varphi)+b_{\ell,3}^{m/q}\ell\cos\varphi f_m^q(\varphi)\right]r^{-(\ell+2)}P_{\ell}^{m}(\zeta)=$$

$$=\Big\{b_{\ell,1}^{m/q}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)+b_{\ell,2}^{m/q}\left[-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]+$$
$$+b_{\ell,3}^{m/q}\left[(\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi)+\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\Big\}r^{-(\ell+2)}P_{\ell}^{m}(\zeta)$$

Επομένως, έχουμε τους συντελεστές των $b_{\ell,j}^{m/q}$ $(j=1,2,3)$ για $\kappa=3$. Αυτοί είναι:

$$f_{\ell,1}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q\prime}(\varphi) P_\ell^m(\zeta),$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)} \left[-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi) + \cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] P_\ell^m(\zeta),$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)} \left[(\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi) + \sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] P_\ell^m(\zeta),$$

Και στη συνέχεια θα βρούμε τους υπόλοιπους όρους της σχέσης (134) που δεν περιέχουν $b_{\ell,j}^{m/q}$ $(j=1,2,3)$ ώστε να ορίσουμε τις $g_\ell^{m/q,3}$. Έχουμε:

$$-\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \frac{\ell \alpha^{2\ell+1}}{\ell+1} r^{-\ell} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \right] =$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \frac{\ell \alpha^{2\ell+1}}{\ell+1} r^{-\ell} P_\ell^m(\zeta) f_m^{q\prime}(\varphi) = M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \frac{\ell \alpha^{2\ell+1}}{\ell+1} r^{-(\ell+1)} \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q\prime}(\varphi)$$

Επομένως, η $g_\ell^{m/q,3}$ θα είναι:

$$g_\ell^{m/q,3} = \left(-\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \varphi} + \left(2\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \right)_{r=\alpha} =$$

$$= \left(-\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \varphi} \right)_{r=\alpha} + \left(2\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) =$$

$$= M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \frac{\ell \alpha^{2\ell+1}}{\ell+1} \alpha^{-(\ell+1)} \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q\prime}(\varphi) + \left(2\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) =$$

$$= M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \frac{\ell \alpha^\ell}{\ell+1} \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q\prime}(\varphi) + \left(2\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Επομένως, για τους συντελεστές και όρους της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa=3$ έχουμε:

$$f_{\ell,1}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q\prime}(\varphi) P_\ell^m(\zeta),$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)} \left[-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi) + \cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] P_\ell^m(\zeta),$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)} \left[(\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi) + \sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] P_\ell^m(\zeta),$$

και

$$g_\ell^{m/q,3} = M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \frac{\ell \alpha^\ell}{\ell+1} \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q\prime}(\varphi) + 2\left(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

Τελικά, συγκεντρωτικά από όλα τα παραπάνω και από όλες τις προηγούμενες συνθήκες καταλήξαμε στο ζητούμενο σύστημα που αποτελείται από τις σχέσεις (122) δηλ. τις:

$\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi)b_{\ell,j}^{m/q}-g_{\ell}^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0$, για κάθε $\kappa=1,2,3$ δηλ. το σύστημα:

$$\begin{cases}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[f_{\ell,1}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,1}^{m/q}+f_{\ell,2}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,2}^{m/q}+f_{\ell,3}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,3}^{m/q}-g_{\ell}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\\ \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[f_{\ell,1}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,1}^{m/q}+f_{\ell,2}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,2}^{m/q}+f_{\ell,3}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,3}^{m/q}-g_{\ell}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\\ \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[f_{\ell,1}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,1}^{m/q}+f_{\ell,2}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,2}^{m/q}+f_{\ell,3}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi)b_{\ell,3}^{m/q}-g_{\ell}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\end{cases}, \quad (135)$$

όπου για $\kappa=1$:

$$f_{\ell,1}^{m/q,1}=\alpha^{-(\ell+1)}\zeta Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \quad (136)$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,1}=\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \quad (137)$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,1}=\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \quad (138)$$

και

$$g_{\ell}^{m/q,1}=\left[\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left(-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}\right)+M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha}{\ell+1}\right]\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \quad (139)$$

για $\kappa=2$:

$$f_{\ell,1}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_{\ell}^{m}(\zeta)-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi), \quad (140)$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\zeta P_{\ell}^{m}(\zeta)-(1-\zeta^2)P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)\right]\cos\varphi f_m^q(\varphi), \quad (141)$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\zeta P_{\ell}^{m}(\zeta)-(1-\zeta^2)P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)\right]\sin\varphi f_m^q(\varphi), \quad (142)$$

και

$$g_{\ell}^{m/q,2}=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell}}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)f_m^q(\varphi)+2\left(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right)\alpha^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \quad (143)$$

και για $\kappa=3$:

$$f_{\ell,1}^{m/q,3}=\alpha^{-(\ell+2)}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)P_{\ell}^{m}(\zeta), \quad (144)$$

$$f_{\ell,2}^{m/q,3}=\alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]P_{\ell}^{m}(\zeta), \quad (145)$$

$$f_{\ell,3}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[(\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi) + \sin\varphi f_m^{q'}(\varphi)\right]P_\ell^m(\zeta), \tag{146}$$

και

$$g_\ell^{m/q,3} = M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^\ell}{\ell+1}\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} f_m^{q'}(\varphi) + 2\left(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi). \tag{147}$$

Στη συνέχεια, προκειμένου να επιτευχθεί ένας εύχρηστος αναλυτικός τύπος αυτών των παραπάνω συνθηκών, θα αναπτύξουμε τις πλέον γνωστές συναρτήσεις των σχέσεων (136) – (147) σε σφαιρικές αρμονικές βάσει της ορθογωνιότητας ώστε να προκύψουν σχέσεις της μορφής:

$$f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi) \equiv f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi) = \sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{148}$$

και

$$g_\ell^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0) \equiv g_\ell^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0) = \sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi). \tag{149}$$

όπου $\kappa, j = 1,2,3$ και για κάθε $\ell \geq 0,\ m = 0,1,2,\ldots,\ell$ και $q = e,o$.

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (148) με $Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)$ έχουμε:

$$(148) \Rightarrow f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) = \sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) \underset{\text{και από } -1 \text{ έως } 1}{\overset{\text{ολοκληρώνουμε από } 0 \text{ έως } 2\pi}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta =$$

$$= \sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta =$$

$$= \sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)\left(Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(95)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta =$$

$$= \sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)\frac{1}{\varepsilon_m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{qq'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta = \lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)\frac{1}{\varepsilon_{m'}}\frac{4\pi}{2\ell'+1}\frac{(\ell'+m')!}{(\ell'-m')!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)=\varepsilon_{m'}\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} f_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta\,. \tag{150}$$

Ομοίως, έχουμε και από τη σχέση (149):

$$(149)\Rightarrow g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\underset{\text{και από }-1\text{ έως }1}{\overset{\text{ολοκληρώνουμε από 0 έως }2\pi}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\left(Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi),Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(95)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\frac{1}{\varepsilon_m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{qq'}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta=\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\frac{1}{\varepsilon_{m'}}\frac{4\pi}{2\ell'+1}\frac{(\ell'+m')!}{(\ell'-m')!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)=\varepsilon_{m'}\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\,d\varphi d\zeta\,. \tag{151}$$

Έτσι, η σχέση (122) σύμφωνα με τις (150) και (151) μας δίνει:

$$(122)\underset{(151)}{\overset{(150)}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)b_{\ell,j}^{m/q}-\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\sum_{j=1}^{3}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)b_{\ell,j}^{m/q}-\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\right)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\lambda_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)b_{\ell,j}^{m/q}-\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\right]=0\,, \tag{152}$$

για $\mathbf{r}_0=(\tau_0,\zeta_0,\varphi_0)$, ενώ $\kappa=1,2,3$ καθώς $\ell'\geq 0$, $m'=0,1,2,\ldots,\ell'$ και $q'=e,o$.

Με αυτόν τον τρόπο, καταφέραμε να μεταφέρουμε τη δυσκολία που προκύπτει από τις συνοριακές συνθήκες (122) στον απλό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων (150) και (151), οι οποίες ενσωματώνουν απλώς τριγωνομετρικές και συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre. Στη συνέχεια, οι (152) αντιπροσωπεύουν συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, τα οποία μπορούν να επιλυθούν μέσω συνηθισμένων τεχνικών αποκοπής με την επιβολή ενός απαραίτητου άνω ορίου στους βαθμούς των δύο πινάκων, για παράδειγμα ας υποθέσουμε $\ell=\ell'=0,1,2,....,L$, ώστε να λάβουμε μορφές τετραγωνισμού, όπως

$$\mathbb{A}_L\left(r_s\right)\mathbf{x}_L=\mathbf{z}_L\left(r_s;\mathbf{r}_0\right) \Rightarrow \mathbf{x}_L=\mathbb{A}_L^{-1}\left(r_s\right)\mathbf{z}_L\left(r_s;\mathbf{r}_0\right) \text{ για } \mathbf{r}_0=\left(r_0,\zeta_0,\varphi_0\right). \tag{153}$$

όπου για $m=m'=0,1,2,...,\ell$ και $q=q'=e,o$ καθώς επίσης και για $\kappa, j=1,2,3$, έχουμε τους πίνακες:

$$\mathbb{A}_L\left(\alpha\right)=\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \lambda_{(\ell,\ell),j}^{(m,m)/(q,q),\kappa}\left(\alpha\right) & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_L=\begin{bmatrix} \vdots \\ b_{\ell,j}^{m/q} \\ \vdots \end{bmatrix},\ \mathbf{z}_L\left(\alpha;\mathbf{r}_0\right)=\begin{bmatrix} \vdots \\ \mu_{(\ell,\ell),j}^{(m,m)/(q,q),\kappa}\left(\alpha;\mathbf{r}_0\right) \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{154}$$

οι οποίοι είναι ένας $3(L+1)\times m\times q$ τετράγωνος αντιστρέψιμος πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, ένας πίνακας των άγνωστων συντελεστών των διανυσμάτων και ένας πίνακας των άγνωστων σταθερών των διανυσμάτων αντίστοιχα. Το διάνυσμα $\mathbf{x}_L$ καθορίζει τη λύση του συστήματος μέσω της (153), έχοντας τη δυνατότητα να υπολογιστούν οι άγνωστοι σταθεροί συντελεστές $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}=b_{\ell,1}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_1+b_{\ell,2}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_2+b_{\ell,3}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_3$ για κάθε $\ell=0,1,2,...,L$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$ έως και ένα συγκεκριμένο επίπεδο , ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.

Τελικά, με την αντικατάσταση των (109) και (113) στην (69) έχουμε την αναλυτική μορφή του σκεδαζόμενου μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}_2^s$ για αυτή την περίπτωση. Δηλαδή, για $\mathbf{r}\in\Omega$,

$$(69)\overset{(109)}{\underset{(113)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_2^s\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)-$$

$$-\mathbf{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} - \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi). \qquad (155)$$

Υπολογισμός του $\mathbf{H}_3^s$

Προχωράμε τώρα, στην απλούστερη περίπτωση υπολογισμού πεδίου αυτής της εργασίας η οποία αφορά το σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο τάξης $n=3$. Η περίπτωση αυτή είναι απλούστερη λόγω του σταθερού χαρακτήρα του αντίστοιχου προσπίπτοντος πεδίου όπως φαίνεται και από τη σχέση (36). Παρόμοια με την προσέγγιση του όρου Rayleigh παραπάνω, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα που αποτελείται από τις σχέσεις (66) δηλ. την $\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \nabla\Phi_3^s(\mathbf{r})$, την (74) δηλ. την $\Delta\Phi_3^s(\mathbf{r}) = 0$ και τη συνοριακή συνθήκη:

$$(51)\overset{n=3}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\left[\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}_s)\right]=0,\ \text{όπου}\ \mathbf{r}_s=(r_s,\zeta,\varphi)\equiv(\alpha,\zeta,\varphi). \qquad (156)$$

Η εξίσωση (74) είναι εξίσωση Laplace με άγνωστη τη βαθμωτή συνάρτηση $\Phi_3^s(\mathbf{r})$. Έτσι, από την επίλυση της εξίσωσης Laplace και έχοντας κατά νου τη σχέση (91), η λύση της (74) θα είναι:

$$\Phi_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} c_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \overset{(89)}{\Leftrightarrow} \Phi_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} c_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \qquad (157)$$

όπου $c_{\ell,ex}^{m/q}$ αυθαίρετες σταθερές για $\ell \geq 0$, $m = 0,1,2,...,\ell$ και $q = e,o$.

Συνεπώς, το ζητούμενο πεδίο θα είναι:

$$(66)\overset{(157)}{\Leftrightarrow}\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} c_{\ell,ex}^{m/q}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right], \qquad (158)$$

Έτσι, για να βρούμε τελικά το $\mathbf{H}_3^s$ αρκεί να προσδιορίσουμε τις σταθερές $c_{\ell,ex}^{m/q}$. Αυτό θα γίνει μέσω της συνοριακής συνθήκης (156). Είναι:

$$(156)\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}_s)=0. \qquad (159)$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον κάθε όρο της (159) και μετά θα τους αντικαταστήσουμε σ' αυτή. Θα βρούμε λοιπόν, τα δύο εσωτερικά γινόμενα. Οπότε, έχουμε:

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \overset{\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})}{=} \hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) \overset{(36)}{=} \hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\left(-\frac{\mathbf{m}}{\pi}\right) = -\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\mathbf{m}}{\pi} \underset{(82)}{\overset{(18)}{=}}$$

$$= -\frac{m_1}{\pi}\zeta - \frac{m_2}{\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi - \frac{m_3}{\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi$$

Άρα, και για $\mathbf{r}(r,\zeta,\varphi) = \mathbf{r}_s(\alpha,\zeta,\varphi)$ είναι:

$$\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_3^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)=-\frac{m_1}{\pi}\zeta-\frac{m_2}{\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi-\frac{m_3}{\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi, \tag{160}$$

Επίσης,

$$\bullet\ \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\overset{\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r})\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})}{=}\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\overset{(158)}{=}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}\frac{\partial\left[r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}{\partial r}=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)r^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Άρα, $\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\cdot\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}_s)=-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi).$ (161)

Επομένως, αντικαθιστώντας τις (160) και (161) στην (159) έχουμε:

$$-\frac{m_1}{\pi}\zeta-\frac{m_2}{\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi-\frac{m_3}{\pi}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=0\ \underset{P_\ell^m(\zeta)\text{ πολυώνυμα Legendre}}{\overset{f_m^q(\varphi)=\begin{cases}\cos m\varphi,\ q=e\\ \sin m\varphi,\ q=o\end{cases}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{m_1}{\pi}P_1^0(\zeta)\,f_0^e(\varphi)-\frac{m_2}{\pi}P_1^1(\zeta)\,f_1^e(\varphi)-\frac{m_3}{\pi}P_1^1(\zeta)\,f_1^o(\varphi)-$$

$$-\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c_{\ell,ex}^{m/q}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=-\frac{m_1}{\pi}Y_1^{0/e}(\zeta,\varphi)-\frac{m_2}{\pi}Y_1^{1/e}(\zeta,\varphi)-\frac{m_3}{\pi}Y_1^{1/o}(\zeta,\varphi), \tag{162}$$

και από την (162) λόγω ορθογωνιότητας προκύπτουν τα εξής:

- Για $\ell=1,\ m=0$ και $q=e$:

$$c_{1,ex}^{0/e}(1+1)\alpha^{-(1+2)}Y_1^{0/e}(\zeta,\varphi)=-\frac{m_1}{\pi}Y_1^{0/e}(\zeta,\varphi)\Leftrightarrow 2c_{1,ex}^{0/e}\alpha^{-3}=-\frac{m_1}{\pi}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{1,ex}^{0/e}=-\frac{m_1\alpha^3}{2\pi},$$

- Για $\ell=1,\ m=1$ και $q=e$:

$$c_{1,ex}^{1/e}(1+1)\alpha^{-(1+2)}Y_1^{1/e}(\zeta,\varphi)=-\frac{m_2}{\pi}Y_1^{1/e}(\zeta,\varphi)\Leftrightarrow 2c_{1,ex}^{1/e}\alpha^{-3}=-\frac{m_2}{\pi}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{1,ex}^{1/e} = -\frac{m_2 \alpha^3}{2\pi},$$

- Για $\ell = 1,\ m = 1$ και $q = o$:

$$c_{1,ex}^{1/o}(1+1)\alpha^{-(1+2)} Y_1^{1/o}(\zeta,\varphi) = -\frac{m_3}{\pi} Y_1^{1/o}(\zeta,\varphi) \Leftrightarrow 2c_{1,ex}^{1/o}\alpha^{-3} = -\frac{m_3}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_{1,ex}^{1/o} = -\frac{m_3 \alpha^3}{2\pi},$$

και βέβαια παρατηρούμε από την (162) ότι $c_{0,ex}^{0/e} = 0$ και $c_{\ell,ex}^{m/q} = 0$ για κάθε $\ell \geq 2,\ m = 0,1,\ldots,\ell$ και $q = e,o$ που είναι τελικά όλοι οι ζητούμενοι συντελεστές. Επομένως, από όλο το άθροισμα της (158) που δίνει το $\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})$ θα μείνουν μόνο οι όροι των οποίων δε μηδενίζονται. Αυτό θα είναι:

$$\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = c_{1,ex}^{0/e}\nabla\left(r^{-2}P_1^0(\zeta)\, f_0^e(\varphi)\right) + c_{1,ex}^{1/e}\nabla\left(r^{-2}P_1^1(\zeta)\, f_1^e(\varphi)\right) + c_{1,ex}^{1/o}\nabla\left(r^{-2}P_1^1(\zeta)\, f_1^o(\varphi)\right), \quad (163)$$

Επομένως, έχουμε:

- $\nabla\left(r^{-2}P_1^0(\zeta)\, f_0^e(\varphi)\right) = \nabla\left(r^{-2}\zeta\right) = -2r^{-3}\zeta\hat{\mathbf{r}} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} r^{-2}\hat{\boldsymbol{\zeta}} = -2r^{-3}\zeta\hat{\mathbf{r}} - r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{\zeta}}$

- $\nabla\left(r^{-2}P_1^1(\zeta)\, f_1^e(\varphi)\right) = \nabla\left(r^{-2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\right) =$

$$= -2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} r^{-2}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} r^{-2}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= -2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\,\hat{\mathbf{r}} - r^{-3}\zeta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} - r^{-3}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

- $\nabla\left(r^{-2}P_1^1(\zeta)\, f_1^o(\varphi)\right) = \nabla\left(r^{-2}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right) =$

$$= -2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,\hat{\mathbf{r}} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r} r^{-2}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}} r^{-2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} =$$

$$= -2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,\hat{\mathbf{r}} - r^{-3}\zeta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} - r^{-3}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Άρα, μετά από όλους τους παραπάνω υπολογισμούς η (163) γράφεται για $\mathbf{r} \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = &-\frac{m_1\alpha^3}{2\pi}\left(-2r^{-3}\zeta\hat{\mathbf{r}} - r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right) - \\ &-\frac{m_2\alpha^3}{2\pi}\left(-2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\,\hat{\mathbf{r}} - r^{-3}\zeta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} - r^{-3}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) - \\ &-\frac{m_3\alpha^3}{2\pi}\left(-2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,\hat{\mathbf{r}} - r^{-3}\zeta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{\zeta}} - r^{-3}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \left(\frac{m_1\alpha^3}{2\pi}2r^{-3}\zeta + \frac{m_2\alpha^3}{2\pi}2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + \frac{m_3\alpha^3}{2\pi}2r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$$
$$+\left(\frac{m_1\alpha^3}{2\pi}r^{-3}\sqrt{1-\zeta^2} - \frac{m_2\alpha^3}{2\pi}r^{-3}\zeta\cos\varphi - \frac{m_3\alpha^3}{2\pi}r^{-3}\zeta\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} -$$
$$+\left(\frac{m_2\alpha^3}{2\pi}r^{-3}\sin\varphi - \frac{m_3\alpha^3}{2\pi}r^{-3}\cos\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{\alpha^3}{\pi r^3}\left(m_1\zeta + m_2\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + m_3\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$$
$$+\frac{\alpha^3}{2\pi r^3}\left(m_1\sqrt{1-\zeta^2} - m_2\zeta\cos\varphi - m_3\zeta\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} +$$
$$+\frac{\alpha^3}{2\pi r^3}\left(m_2\sin\varphi - m_3\cos\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left[\left(2m_1\zeta + 2m_2\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + 2m_3\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{r}} +\right.$$
$$\left.+\left(m_1\sqrt{1-\zeta^2} - m_2\zeta\cos\varphi - m_3\zeta\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}} + \left(m_2\sin\varphi - m_3\cos\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right], \qquad (164)$$

που είναι το ζητούμενο σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο το οποίο μπορεί, επίσης, να γραφεί και στη μορφή:

$$(164) \Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left[(2\mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} - (\mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}})\hat{\boldsymbol{\zeta}} - (\mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}})\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right], \qquad (165)$$

αλλά και στη μορφή:

$$(165) \Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left[2\mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}} - \mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\zeta}} - \mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left[3\mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}} - \mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}} - \mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\zeta}} - \mathbf{m}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\left[3\hat{\boldsymbol{r}}\otimes\hat{\boldsymbol{r}} - \tilde{\mathbf{I}}\right]. \qquad (166)$$

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνεται η υποενότητα 1.2.2 που αφορά τον υπολογισμό των σκεδαζόμενων μαγνητικών πεδίων $\mathbf{H}_0^s$, $\mathbf{H}_2^s$ και $\mathbf{H}_3^s$. Οπότε, παρακάτω θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό των ηλεκτρικών σκεδαζόμενων πεδίων, δηλ. στην υποενότητα 1.2.3.

1.2.3 Υπολογισμός ηλεκτρικών σκεδαζόμενων πεδίων

Υπολογισμός του $\mathbf{E}_1^s$

Θα ξεκινήσουμε αυτή την υποενότητα με το εύκολο κομμάτι της που είναι η εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_1^s$. Αυτό θα προκύψει απλά, από την αντικατάσταση του αποτελέσματος του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}_2^s$ που βρήκαμε στην προηγούμενη υποενότητα στη σχέση (70), δηλ. στην $\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})$. Αρχικά, θα βρούμε το $\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})$.

Έχουμε:

$$\nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) \overset{(155)}{=}$$

$$= \nabla\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} - \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) =$$

$$= \nabla\times\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) - \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\times\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] - \right.$$

$$\left. -\nabla\times\left[\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\right\}$$

$$\Leftrightarrow \nabla\times\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\times\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\nabla\times\left[\mathbf{r}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\right\}, \quad (167)$$

Και έχουμε:

- $\nabla\times\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] = r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\times\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} + \nabla r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\times\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} \underset{(89)}{\overset{\nabla\times\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}=0}{=}}$
  $= \nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$
- $\nabla\times\left[\mathbf{r}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] = r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\times\mathbf{r} + \nabla r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\times\mathbf{r} \underset{(89)}{\overset{\nabla\times\mathbf{r}=0\ (\text{Παράρτημα A})}{=}}$
  $= \nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\mathbf{r}$

Άρα, θα είναι:

$(167) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \times \mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} - \left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \times \mathbf{r}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} - \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]\right\}, \tag{168}$$

Επομένως, τελικά το ηλεκτρικό σκεδαζόμενο πεδίο $\mathbf{E}_1^s$ για $\mathbf{r} \in \Omega$ είναι:

$(70) \overset{(168)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} - \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]\right\}, \tag{169}$$

Υπολογισμός του $\mathbf{E}_3^s$

Το τελευταίο στάδιο των υπολογισμών της παρούσας εργασίας είναι και το πιο πολύπλοκο και είναι αυτό που θα μας οδηγήσει στην εύρεση του ηλεκτρικού σκεδαζόμενου πεδίου τάξης $n=3$. Η κύρια δυσκολία της περίπτωση αυτής έχει να κάνει με την ολοκληρωτική εμπλοκή του πεδίου $\mathbf{E}_1^s$, όπως φαίνεται και από τη σχέση (71). Επίσης, όπως και στην περίπτωση του υπολογισμού του $\mathbf{H}_2^s$ χρειαζόμαστε και εδώ ένα σύνολο τριών ξεχωριστών συνοριακών συνθηκών ώστε να καθοριστούν οι τρεις του συνιστώσες του $\mathbf{E}_3^s$ αφού και αυτό είναι καθαρά διανυσματικό. Ως εκ τούτου, το πρόβλημα που πρέπει να λύσουμε για τον τελικό υπολογισμό του $\mathbf{E}_3^s$ και έχει αφετηρία τη σχέση (61), δηλ. την $\Delta\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = 6\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})$ αποτελείται από τη σχέση (71) δηλ. την $\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) + 6\left[-\frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right] \Leftrightarrow \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) - \frac{3}{2\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'$, την (75) δηλ. την $\Delta\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ και τις συνθήκες:

$$(45) \overset{n=3}{\Leftrightarrow} \nabla \cdot \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}_s) = 0, \text{ όπου } \mathbf{r}_s = (r_s, \zeta, \varphi) \equiv (\alpha, \zeta, \varphi), \tag{170}$$

για την οποία χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = \nabla f \cdot \mathbf{g} + f\nabla \cdot \mathbf{g}$ όπου f τυχαία βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{g}$ τυχαία διανυσματική ισχύει:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}_s) = 0 \overset{(71)}{\Leftrightarrow} \nabla \cdot \left[\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) - \frac{3}{2\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r})+\nabla\cdot\left[-\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r})-\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\nabla\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\right]d\Omega'=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r})-\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\left[\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')+\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla\cdot\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\right]d\Omega'=0\overset{\nabla\cdot\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')=0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \nabla\cdot\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r})-\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')d\Omega'=0$$

και

$$(51)\overset{n=3}{\Leftrightarrow}\hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}_s)\times\left[\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)+\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}_s)\right]=\mathbf{0}\text{, όπου } \mathbf{r}_s=(r_s,\zeta,\varphi)\equiv(\alpha,\zeta,\varphi). \tag{171}$$

Αρχικά, το $\mathbf{E}_1^s$ το έχουμε ήδη βρεί νωρίτερα και δίνεται από τη σχέση (169). Όμως, αυτό που θα πρέπει να κάνουμε σε επόμενα βήματα σε σχέση με το $\mathbf{E}_1^s$ είναι να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα $\iiint_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'$ που εμφανίζεται στη σχέση (71) ως άπειρο άθροισμα ώστε να γίνει η μορφή του πιο εύχρηστη για την επίλυση. Ακόμη, θα πρέπει βρούμε τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{X}_3^s$, η οποία θα είναι λύση της εξίσωσης Laplace (75). Έτσι, η $\mathbf{X}_3^s$ σύμφωνα με την (91) και την (89) δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{X}_3^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{172}$$

όπου $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$ αυθαίρετοι διανυσματικοί συντελεστές για $\ell\geq 0$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$.

Επομένως, πρέπει να βρούμε τους $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$ οι οποίοι θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}=\sum_{j=1}^{3}d_{\ell,j}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_j=d_{\ell,1}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_1+d_{\ell,2}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_2+d_{\ell,3}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_3. \tag{173}$$

Η διαδικασία εδώ είναι όμοια με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε για την εύρεση του $\mathbf{X}_2^s$. Έτσι, από την (173) παρατηρούμε ότι οι άγνωστοι που πρέπει να βρούμε είναι οι τρεις συνιστώσεις των $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$, δηλ. οι $d_{\ell,1}^{m/q}$, $d_{\ell,2}^{m/q}$, $d_{\ell,3}^{m/q}$, έτσι καταλαβαίνουμε και εδώ ότι θα χρειαστούμε τρεις συνθήκες για την εύρεσή τους. Η μία συνθήκη είναι η (170) ενώ η άλλη είναι η (171) από την οποία θα προκύψουν δύο ξεχωριστές συνθήκες.

Αρχικά όπως ήδη είπαμε νωρίτερα θα εκφράσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα της (71) ως άθροισμα άπειρων όρων. Για το στοιχειώδη όγκο στις σφαιρικές συντεταγμένες θα έχουμε ότι για $\mathbf{r}'=\left(r',\theta',\varphi'\right)$ είναι $d\Omega'=r'^2\sin\theta' dr'd\theta'd\varphi'$. Επομένως, θέτοντας $\zeta'=\cos\theta' \Leftrightarrow d\zeta'=d\left(\cos\theta'\right)\Leftrightarrow d\zeta'=-\sin\theta' d\theta'$ προκύπτει:

$$d\Omega'=-r'^2dr'd\zeta'd\varphi'. \tag{174}$$

Έτσι, το τριπλό ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως:

$$-\frac{3}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}d\Omega'=-\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2\sin\theta' dr'd\theta'd\varphi' \underset{\text{Για }\theta=\pi:\,\zeta=-1}{\overset{\text{Για }\theta=0:\,\zeta=1}{=}}$$

$$=\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^{-1}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi'=-\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi'$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}d\Omega'=&-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\alpha}^{r_0-e}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi'-\\
&-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi'-\\
&-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0+e}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi',\ \text{για } \mathbf{r}\in\Omega
\end{aligned} \tag{175}$$

Η σχέση (175) προκύπτει έχοντας υιοθετήσει μία συγκεκριμένη τεχνική για να δεσμέυσουμε το μοναδικό σημείο $\mathbf{r}_0$, εισάγοντας έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό $0<e<<1$, ενώ για λόγους απλότητας και χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\left(\zeta',\varphi'\right)\neq\left(\zeta_0,\varphi_0\right)$. Για το 1ο και 3ο ολοκλήρωμα της σχέσης (175) θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (96) για $\mathbf{r}_0\to\mathbf{r}'$, ώστε να γραφούν ως αθροίσματα.

Το 1ο όριο – ολοκλήρωμα θα είναι της μορφής:

$$-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\alpha}^{r_0-e}\frac{\mathbf{E}_1^s\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi'=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right), \tag{176}$$

όπου $\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}$ σταθερές που θα πρέπει να προσδιορίσουμε. Σύμφωνα με τον 2ο κλάδο της σχέση (96) διότι $\alpha\le r'\le r_0-e$, θα έχουμε:

$$(176)\overset{(96)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\alpha}^{r_0-e} r'^2\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}')u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})dr'd\zeta'd\varphi' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\alpha}^{r_0-e} r'^2\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}')u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})dr'd\zeta'd\varphi' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} = -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{\alpha}^{r_0-e} r'^2\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}')\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')dr'd\zeta'd\varphi', \tag{177}$$

Επίσης, το 3$^{\text{ο}}$ όριο – ολοκλήρωμα θα είναι της μορφής:

$$-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0+e}^{+\infty}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}r'^2dr'd\zeta'd\varphi' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}), \tag{178}$$

όπου $\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}$ σταθερές που θα προσδιορίσουμε. Σύμφωνα με το 1$^{\text{ο}}$ κλάδο της σχέσης (96) αφού $r_0+e\le r'\le+\infty$, θα έχουμε:

$$(178)\overset{(96)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0+e}^{+\infty} r'^2\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}')u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})dr'd\zeta'd\varphi' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0+e}^{+\infty} r'^2\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}')u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})dr'd\zeta'd\varphi' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} = -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0+e}^{+\infty} r'^2\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}')\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')dr'd\zeta'd\varphi'. \tag{179}$$

Τώρα, όσον αφορά το 2$^{\text{ο}}$ όριο – ολοκλήρωμα της σχέσης (175), αυτό θα το χειριστούμε βάσει της θεμελιώδους λύσης του τελεστή Laplace διότι τα όρια ολοκλήρωσης ως προς τη μεταβλητή r' είναι από r_0-e έως r_0+e, που σημαίνει ότι περιέχουν το r_0. Γνωρίζουμε ότι για τη θεμελιώδη λύση $\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\dfrac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ ισχύει:

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Rightarrow\Delta\left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\Rightarrow\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)=-4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{180}$$

όπου $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ η συνάρτηση «δέλτα» του Dirac για την οποία ισχύει γενικά:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\alpha) f(x) dx = f(\alpha). \tag{181}$$

Επομένως, σύμφωνα με την (180), για το 2ο όριο – ολοκλήρωμα της (175) έχουμε:

$$\Delta\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\Omega' \right) = -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}') d\Omega' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\Omega' \right) = 6\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}') d\Omega' \overset{(181)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\Omega' \right) = 6\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}). \tag{182}$$

Οπότε, καταλήγουμε ότι το 2ο όριο – ολοκλήρωμα είναι μία ειδική λύση της (61) αφού την επαληθεύει. Στη συνέχεια, πρέπει να το αναπτύξουμε και αυτό σε άθροισμα σφαιρικών αρμονικών. Έστω ότι αυτό θα είναι της μορφής:

$$-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} \mathbf{S}_{\ell,in}^{m/q}(r) Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{183}$$

όπου $\mathbf{S}_{\ell,in}^{m/q}(r)$ διανυσματικές συναρτήσεις που πρέπει να προσδιορίσουμε. Έχουμε:

$$(183) \overset{\text{πολ/ζω με } Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' \right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) \overset{\substack{\text{ολοκληρώνω} \\ \text{από 0 έως } 2\pi \text{ και} \\ \text{από } -1 \text{ έως } 1}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} -\frac{3}{2\pi}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' \right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) d\zeta d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) d\zeta d\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi' \right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) d\zeta d\varphi =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi) d\zeta d\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}r'^2 dr' d\zeta' d\varphi'\right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\, d\zeta d\varphi =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\left(Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\right) \overset{(95)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}r'^2 dr' d\zeta' d\varphi'\right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\, d\zeta d\varphi =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\frac{1}{\varepsilon_m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{qq'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}r'^2 dr' d\zeta' d\varphi'\right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\, d\zeta d\varphi =$$

$$= \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\frac{1}{\varepsilon_{m'}}\frac{4\pi}{2\ell'+1}\frac{(\ell'+m')!}{(\ell'-m')!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) =$$

$$= -\frac{3}{2\pi}\varepsilon_{m'}\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}r'^2 dr' d\zeta' d\varphi'\right] Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)\, d\zeta d\varphi \overset{\substack{\ell'\to\ell \\ m'\to m \\ q'\to q}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) =$$

$$= -\frac{3(2\ell+1)}{8\pi^2}\varepsilon_m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\int_{r_0-e}^{r_0+e}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}r'^2 dr' d\zeta' d\varphi'\right] Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\, d\zeta d\varphi, \qquad (184)$$

Εντέλει, συγκεντρώνοντας όλα τα προηγούμενα για το ολοκλήρωμα $-\dfrac{3}{2\pi}\iiint_\Omega \dfrac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'$ έχουμε:

$$(175) \overset{(176),\,(178),\,(183)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega' = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o}\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right] \underset{(89)}{\overset{(88)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\iiint_\Omega \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega' =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r) Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega' = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} r^{\ell} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r) + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)}\right] Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{185}$$

Ως εκ τούτου, το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}_3^s$ από τη σχέση (71) γράφεται:

$$\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \mathbf{X}_3^s(\mathbf{r}) - \frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega' \overset{(172),(185)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) + \left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} r^{\ell} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r) + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)}\right] Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} + \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} r^{\ell} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r) + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)}\right] Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}. \tag{186}$$

Επιπλέον, από τη σχέση (38) για το αντίστοιχο προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο έχουμε:

$$\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \times \frac{3\mathbf{R}}{R} \Leftrightarrow \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times\mathbf{R}\frac{1}{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\frac{1}{R} \overset{(98),(88)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right], \tag{187}$$

όπου $\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) = -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$. (188)

Τώρα, όπως και στην περίπτωση υπολογισμού του $\mathbf{H}_2^s$ για να προχωρήσουμε στην επίλυσή μας θα εκφράσουμε τους συντελεστές $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$ με βάση το σφαιρικό σύστημα. Έτσι, σύμφωνα και όμοια με τις σχέσεις (117) – (120) της περίπτωσης $\mathbf{H}_2^s$, οι $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$ γράφονται:

$$\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} = \left(d_{\ell,1}^{m/q}\zeta + d_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi + d_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$$

$$+\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(-d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \qquad (189)$$

Επειδή, όπως και στο $\mathbf{H}_2^s$, θα πρέπει να χειριστούμε τις συνοριακές συνθήκες (170) και (171) έτσι ώστε να προκύψει και εδώ σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους τις συνιστώσες $d_{\ell,1}^{m/q}$, $d_{\ell,2}^{m/q}$, $d_{\ell,3}^{m/q}$ του $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$. Η μορφή του συστήματος αυτού θα είναι:

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi\right)d_{\ell,j}^{m/q}-\overline{g}_{\ell}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)\right]=0\,,\ \text{για κάθε}\ \kappa=1,2,3\,, \qquad (190)$$

όπου $\zeta\in[-1,1]$, $\varphi\in[0,2\pi)$, $\mathbf{r}_0=\left(r_0,\zeta_0,\varphi_0\right)$ και με $\kappa=1,2,3$ να προσδιορίζει την κάθε εξίσωση. Έτσι, σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τους συντελεστές του συστήματος $\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi\right)$ και τους $\overline{g}_{\ell}^{m/q,\kappa}\left(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)$.

Κατ' αρχάς θα ασχοληθούμε με τη συνθήκη (170). Έχουμε:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})=0\overset{(186)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\nabla\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}\mathbf{s}+{}_{\ell,in}^{m/q}\,r^{\ell}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r)+\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\underbrace{\nabla\cdot\left[\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\nabla\cdot\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^{\ell}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}_{\mathrm{II}}+\right.$$

$$\left.+\underbrace{\nabla\cdot\left[\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}_{\mathrm{III}}+\underbrace{\nabla\cdot\left[\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]}_{\mathrm{IV}}\right\}=0\,, \qquad (191)$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τις αποκλίσεις I, II, III και IV της σχέσης (191).

- $$\mathrm{I}=\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}+r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\overset{\nabla\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}=0}{=}\nabla\left[r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\overset{(78)}{=}$$

$$=\left[\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\left(r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)}{\partial r}-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial\left(r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)}{\partial\zeta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial\left(r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)}{\partial\varphi}\right]\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}=$$

$$=\left[-(\ell+1)r^{-(\ell+2)}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\hat{\mathbf{r}}-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}r^{-(\ell+1)}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}r^{-(\ell+1)}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}=$$

$$=r^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\hat{\mathbf{r}}-\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\cdot\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\overset{(189)}{=}$$

$$=r^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\left(d_{\ell,1}^{m/q}\zeta+d_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)-\right.$$

$$-\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)+$$

$$\left.+\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)\left(-d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)\right]=$$

$$=r^{-(\ell+2)}\left\{d_{\ell,1}^{m/q}\left[-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\zeta+\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\right]+\right.$$

$$+d_{\ell,2}^{m/q}\left[-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi-\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\zeta\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)\sin\varphi\right]+$$

$$+d_{\ell,3}^{m/q}\left[-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi-\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\sin\varphi+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)\cos\varphi\right]\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{I}=r^{-(\ell+2)}\left\{d_{\ell,1}^{m/q}\left[-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)+\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)+\right.$$

$$+d_{\ell,2}^{m/q}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)-\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\,f_m^q(\varphi)-\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)\sin\varphi\right]+$$

$$\left.+d_{\ell,3}^{m/q}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)-\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,f_m^q(\varphi)+\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\varphi\,f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\right\},\quad(192)$$

• $$\mathrm{II}=\nabla\cdot\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\overset{(88)}{=}\nabla\cdot\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\right]=$$

$$=\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\nabla\cdot\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\overset{\nabla\cdot\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}=0}{\Leftrightarrow}\mathrm{II}=\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\cdot\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}),\quad(193)$$

• $\mathrm{III} = \nabla\cdot\left[\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] = \nabla Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) + Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\cdot\mathbf{S}_{\ell,in}^{m/q}(r) =$

$$= Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\cdot\left(\nabla\frac{1}{r^\ell}r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(88)}{=}$$

$$= Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\cdot\left(\nabla\frac{1}{r^\ell}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\right) =$$

$$= Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\cdot\left[\left(\nabla\frac{1}{r^\ell}\right)u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + \frac{1}{r^\ell}\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\right] =$$

$$= Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\nabla\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r) + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\cdot\left[-\ell\hat{\mathbf{r}}r^{-\ell-1}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + \frac{1}{r^\ell}\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\right] =$$

$$= Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(r) - \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\ell\frac{1}{r^{\ell+1}}r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) + \frac{1}{r^\ell}\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\cdot\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{III} = Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(r) - \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\frac{\ell}{r}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) + \frac{1}{r^\ell}\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\cdot\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}), \qquad (194)$$

• $\mathrm{IV} = \nabla\cdot\left[\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] \overset{(89)}{=} \nabla\cdot\left[\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right] =$

$$= \nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} + u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\nabla\cdot\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \overset{\nabla\cdot\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}=0}{\Leftrightarrow} \mathrm{IV} = \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\cdot\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}), \qquad (195)$$

Παρατηρούμε ότι ο μόνος όρος της (191) που περιέχει τις άγνωστες σταθερές $d_{\ell,j}^{m/q}$, $(j=1,2,3)$ είναι ο όρος I δηλ. ο $\nabla\cdot\left[\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]$. Έτσι, από τη σχέση (192) και για $\mathbf{r}=\mathbf{r}_s$ προκύπτουν οι συντελεστές $\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,1}(r_s,\zeta,\varphi)$ των αγνώστων $d_{\ell,1}^{m/q}$, $d_{\ell,2}^{m/q}$, $d_{\ell,3}^{m/q}$ της πρώτης εξίσωσης, δηλ. για $\kappa=1$ του συστήματος των σχέσεων (190). Ο υπολογισμός των υπόλοιπων όρων της (191) οδηγεί στον σταθερό όρο της 1ης σχέσης του συστήματος (190). Οπότε, από την (192) με το δεδομένο ότι $r_s\equiv\alpha$ έχουμε:

$$\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta) + (1-\zeta^2)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi),$$

$$\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta) - \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi f_m^q(\varphi) - \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right],$$

$$\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta) - \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi f_m^q(\varphi) + \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right].$$

και από τις σχέσεις (193) – (195) και σύμφωνα με τις σχέση (190) και (191) για $\mathbf{r}=\mathbf{r}_s$ έχουμε:

$$\bar{g}_{\ell}^{m/q,2} = -\mathrm{II} - \mathrm{III} - \mathrm{IV} =$$

$$= -\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} \cdot \nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s) - Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathbf{S}_{\ell}^{m/q\prime}(\alpha) + \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\frac{\ell}{\alpha}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) -$$

$$- \frac{1}{\alpha^{\ell}}\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha) \cdot \nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s) - \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \cdot \nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{g}_{\ell}^{m/q,2} = -\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \frac{1}{\alpha^{\ell}}\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right] \cdot \nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s) - \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \cdot \nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s) -$$

$$- \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \left[\mathbf{S}_{\ell}^{m/q\prime}(\alpha) - \frac{\ell}{\alpha}\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Άρα, συνοπτικά όλοι οι συντελεστές και όροι της εξίσωσης του (190) για $\kappa = 1$ είναι:

$$\bar{f}_{\ell,1}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\zeta P_{\ell}^{m}(\zeta) + (1-\zeta^2)P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)\right] f_m^q(\varphi),$$

$$\bar{f}_{\ell,2}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_{\ell}^{m}(\zeta) - \zeta P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi f_m^q(\varphi) - \frac{P_{\ell}^{m}(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right],$$

$$\bar{f}_{\ell,3}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_{\ell}^{m}(\zeta) - \zeta P_{\ell}^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi f_m^q(\varphi) - \frac{P_{\ell}^{m}(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right].$$

και

$$\bar{g}_{\ell}^{m/q,2} = -\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \frac{1}{\alpha^{\ell}}\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right] \cdot \nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s) - \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \cdot \nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s) -$$

$$- \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \left[\mathbf{S}_{\ell}^{m/q\prime}(\alpha) - \frac{\ell}{\alpha}\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Συνεχίζοντας, θα δουλέψουμε με την άλλη συνθήκη που έχουμε στη διάθεσή μας, τη σχέση (171), η οποία θα μας οδηγήσει στις άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος παρόμοια με την περίπτωση εύρεσης του $\mathbf{H}_2^s$. Δηλ., αυτές που αντιστοιχούν στις σχέσεις του συστήματος (190) για $\kappa = 2$ και $\kappa = 3$. Έχουμε:

$$(171) \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{n}}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})\right] = \mathbf{0} \overset{\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \hat{\boldsymbol{r}}}{\Leftrightarrow} \hat{\boldsymbol{r}} \times \left[\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\right] = \mathbf{0} \overset{(186),\,(187)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}} \times \left[\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_3^p(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\right] = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{r}} \times \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big\{\Big[\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} + \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} r^{\ell} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r) + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} +$$

$$+ \mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0) r^{\ell}\Big]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\Big\} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big\{&\left(\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)-\\
&-\left(-\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\right)r^{\ell}+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\Big\}=\mathbf{0},
\end{aligned}
\tag{196}
$$

και αφού

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}=&\left(d_{\ell,1}^{m/q}\zeta+d_{\ell,2}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\right)\underset{0}{\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}}+\\
&+\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)\underset{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\zeta}}}+\left(-d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)\underset{-\hat{\boldsymbol{\zeta}}}{\hat{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{\varphi}}}=\\
&=\left(d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi-d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}
\end{aligned}
$$

τότε

$$
\begin{aligned}
(196)\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big\{&\left(d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi-d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\\
&+\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\
&-\left(-\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\right)r^{\ell}+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\Big\}=\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Επομένως, η συνθήκη που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η ακριβώς προηγούμενη σχέση για $\mathbf{r}=\mathbf{r}_s$. Δηλ. η

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big\{&\left(d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi-d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\\
&+\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\\
&-\left(-\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\right)r^{\ell}+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\Big\}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\\
\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big\{&\left(d_{\ell,2}^{m/q}\sin\varphi-d_{\ell,3}^{m/q}\cos\varphi\right)\alpha^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\\
&+\left(-d_{\ell,1}^{m/q}\sqrt{1-\zeta^2}+d_{\ell,2}^{m/q}\zeta\cos\varphi+d_{\ell,3}^{m/q}\zeta\sin\varphi\right)\alpha^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}-\\
&-\left(-\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\right)\alpha^{\ell}+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\Big\}=\mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{197}
$$

Σε αυτό το σημείο, θα πάρουμε δύο περιπτώσεις καθεμία από τις οποίες θα καταλήξει στις δύο ζητούμενες εξισώσεις του συστήματος (190), αυτές για $\kappa=2$ και $\kappa=3$. Για να προκύψουν αυτές θα εργαστούμε και πάλι όμοια με την περίπτωση του $\mathbf{H}_2^s$ όπως φαίνεται και παρακάτω.

➢ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\kappa = 2$

Θα πολλαπλασιάσουμε εσωτερικά την (197) με $\hat{\zeta}$ και αφού $\hat{\zeta} \cdot \hat{\zeta} = 1$ και $\hat{\zeta} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 0$ παίρνουμε:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \Big\{ \Big(d_{\ell,2}^{m/q} \sin\varphi - d_{\ell,3}^{m/q} \cos\varphi \Big) \alpha^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) +$$

$$- \Big(-\hat{\mathbf{r}} \times \Big[\Big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0) \Big) \alpha^{\ell} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha) \Big] \cdot \hat{\zeta}\, Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Big) \Big\} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \Big\{ \Big(d_{\ell,2}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} \sin\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) - d_{\ell,3}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} \cos\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Big) +$$

$$- \Big(-\hat{\mathbf{r}} \times \Big[\Big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}\big((\alpha,\zeta,\varphi);\mathbf{r}_0\big) \Big) \alpha^{\ell} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha) \Big] \cdot \hat{\zeta}\, Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Big) \Big\} = \mathbf{0}. \qquad (198)$$

Επομένως, από τη (198) έχουμε τους συντελεστές των $d_{\ell,j}^{m/q}$ $(j = 1,2,3)$ αλλά και τον σταθερό όρο της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa = 2$. Αυτοί είναι:

$\bar{f}_{\ell,1}^{m/q,2} = 0$,

$\bar{f}_{\ell,2}^{m/q,2} = \alpha^{-(\ell+1)} \sin\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$,

$\bar{f}_{\ell,3}^{m/q,2} = -\alpha^{-(\ell+1)} \cos\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)$,

και

$$\bar{g}_{\ell}^{m/q,2} = -\hat{\mathbf{r}} \times \Big[\Big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}\big((\alpha,\zeta,\varphi);\mathbf{r}_0\big) \Big) \alpha^{\ell} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha) \Big] \cdot \hat{\zeta}\, Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi).$$

➢ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ $\kappa = 3$

Θα πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά την (197) με $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ και αφού $\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 1$ και $\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\zeta} = 0$ παίρνουμε:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \Big\{ \Big(-d_{\ell,1}^{m/q} \sqrt{1-\zeta^2} + d_{\ell,2}^{m/q} \zeta \cos\varphi + d_{\ell,3}^{m/q} \zeta \sin\varphi \Big) \alpha^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) -$$

$$- \Big(-\hat{\mathbf{r}} \times \Big[\Big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0) \Big) \alpha^{\ell} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha) \Big] \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}\, Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Big) \Big\} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \Big\{ \Big(-d_{\ell,1}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} \sqrt{1-\zeta^2} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) + d_{\ell,2}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} \zeta \cos\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) +$$

$$+ d_{\ell,3}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} \zeta \sin\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Big) -$$

$$- \Big(-\hat{\mathbf{r}} \times \Big[\Big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} + \mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0) \Big) \alpha^{\ell} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} \alpha^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha) \Big] \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}\, Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \Big) \Big\} = \mathbf{0}. \quad (199)$$

Έτσι, η (199) μας δίνει τους συντελεστές των $d_{\ell,j}^{m/q}$ $(j = 1,2,3)$ και το σταθερό όρο της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa = 3$. Αυτοί είναι:

$$\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,3} = -\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

$$\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+1)}\zeta\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

$$\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,3} = \alpha^{-(\ell+1)}\zeta\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

και

$$\overline{g}_\ell^{m/q,3} = -\hat{\mathbf{r}}\times\left[\left(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\right)\alpha^\ell+\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi),$$

Τελικά, συγκεντρωτικά από όλα τα παραπάνω και από όλες τις προηγούμενες συνθήκες καταλήξαμε στο ζητούμενο σύστημα που αποτελείται από τις σχέσεις (190) δηλ. τις:

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi)d_{\ell,j}^{m/q}-\overline{g}_\ell^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0,$$ για κάθε $\kappa=1,2,3$ δηλ. το σύστημα:

$$\begin{cases}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,1}^{m/q}+\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,2}^{m/q}+\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,3}^{m/q}-\overline{g}_\ell^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\\ \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,1}^{m/q}+\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,2}^{m/q}+\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,3}^{m/q}-\overline{g}_\ell^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0,\\ \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,1}^{m/q}+\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,2}^{m/q}+\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,3}^{m/q}-\overline{g}_\ell^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\end{cases}\quad(200)$$

όπου για $\kappa=1$:

$$\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)+(1-\zeta^2)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi),\quad(201)$$

$$\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)-\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi f_m^q(\varphi)-\right.$$
$$\left.-\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}(\varphi)\sin\varphi\right],\quad(202)$$

$$\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,1} = \alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)-\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\right.$$
$$\left.+\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right],\quad(203)$$

και

$$\overline{g}_\ell^{m/q,1} = -\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+\frac{1}{\alpha^\ell}\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\right]\cdot\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s)-\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s)-$$

$$-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left[\mathbf{S}_{\ell}^{m/q\prime}(\alpha)-\frac{\ell}{\alpha}\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{204}$$

για $\kappa=2$:

$$\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,2}=0, \tag{205}$$

$$\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,2}=\alpha^{-(\ell+1)}\sin\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{206}$$

$$\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,2}=-\alpha^{-(\ell+1)}\cos\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{207}$$

και

$$\overline{g}_{\ell}^{m/q,2}=-\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}\left((\alpha,\zeta,\varphi);\mathbf{r}_0\right)\right)\alpha^{\ell}+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{208}$$

και για $\kappa=3$:

$$\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,3}=-\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{209}$$

$$\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,3}=\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\cos\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{210}$$

$$\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,3}=\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\sin\varphi Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{211}$$

και

$$\overline{g}_{\ell}^{m/q,3}=-\hat{\boldsymbol{r}}\times\left[\left(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\right)\alpha^{\ell}+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(\alpha)\right]\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi). \tag{212}$$

Οι παραπάνω σχέσεις (201) – (212) δρουν για $\alpha\equiv r_s\neq r_0$, $\zeta\in[-1,1]$, $\varphi\in[0,2\pi)$ και $\mathbf{r}_0=(r_0,\zeta_0,\varphi_0)$. Επίσης, $\hat{\boldsymbol{r}}\equiv\hat{\boldsymbol{r}}(r_s,\zeta,\varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\zeta}}\equiv\hat{\boldsymbol{\zeta}}(r_s,\zeta,\varphi)$ και $\hat{\boldsymbol{\varphi}}\equiv\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)$. Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε τις συναρτήσεις των σχέσεων (201) – (212) σε σφαιρικές αρμονικές βάσει της ορθογωνιότητας ώστε να προκύψουν σχέσεις της μορφής:

$$\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi)\equiv\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\overline{\lambda}_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{213}$$

και

$$\overline{g}_{\ell}^{m/q,\kappa}(r_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\equiv\overline{g}_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\overline{\mu}_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi). \tag{214}$$

όπου $\kappa, j=1,2,3$ και για κάθε $\ell\geq 0$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$.

Ακριβώς όπως και στο αντίστοιχο στάδιο του $\mathbf{H}_2^s$, πολλαπλασιάζοντας τις (213) και (214) με $Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)$ αλλά και ολοκληρώνοντας από 0 έως 2π στη φ – μεταβλητή και από -1 έως 1 στη ζ – μεταβλητή έχουμε:

$$(213)\Rightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\overline{\lambda}_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\overline{\lambda}_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)\frac{1}{\varepsilon_m}\frac{4\pi}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}\delta_{qq'}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overline{\lambda}_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)=\varepsilon_{m'}\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta\,. \qquad (215)$$

Ομοίως,

$$(214)\Rightarrow\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta=$$

$$=\sum_{\ell'=0}^{+\infty}\sum_{m'=0}^{\ell'}\sum_{q'=e,o}\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mu_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)=\varepsilon_{m'}\frac{2\ell'+1}{4\pi}\frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}g_{\ell}^{m/q,\kappa}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)Y_{\ell'}^{m'/q'}(\zeta,\varphi)d\varphi d\zeta\,. \quad (216)$$

Έτσι, η σχέση (190) σύμφωνα με τις (213) και (214) μας δίνει:

$$(190)\underset{(214)}{\overset{(213)}{\Rightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\sum_{j=1}^{3}\overline{\lambda}_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)d_{\ell,j}^{m/q}-\overline{\mu}_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\right)Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{\lambda}_{(\ell,\ell'),j}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha)d_{\ell,j}^{m/q}-\overline{\mu}_{(\ell,\ell')}^{(m,m')/(q,q'),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0)\right]=0, \qquad (217)$$

για $\mathbf{r}_0=(\tau_0,\zeta_0,\varphi_0)$, ενώ $\kappa=1,2,3$ καθώς $\ell'\geq 0$, $m'=0,1,2,...,\ell'$ και $q'=e,o$.

Έτσι, η (217) σε μορφή πινάκων θα μας δώσει:

$$\overline{\mathbb{A}}_L(r_s)\overline{\mathbf{x}}_L=\overline{\mathbf{z}}_L(r_s;\mathbf{r}_0)\ \Rightarrow\ \overline{\mathbf{x}}_L=\overline{\mathbb{A}}_L^{-1}(r_s)\overline{\mathbf{z}}_L(r_s;\mathbf{r}_0)\ \text{για}\ \mathbf{r}_0=(r_0,\zeta_0,\varphi_0)\,. \qquad (218)$$

που είναι γραμμικό αλγεβρικό σύστημα όπου $m=m'=0,1,2,...,\ell$ και $q=q'=e,o$ καθώς επίσης και $\kappa, j=1,2,3$, όπως και

$$\bar{\mathbb{A}}_L(\alpha)=\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \iddots \\ \cdots & \bar{\lambda}_{(\ell,\ell),j}^{(m,m)/(q,q),\kappa}(\alpha) & \cdots \\ \iddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{x}}_L=\begin{bmatrix} \vdots \\ d_{\ell,j}^{m/q} \\ \vdots \end{bmatrix},\ \bar{\mathbf{z}}_L(\alpha;\mathbf{r}_0)=\begin{bmatrix} \vdots \\ \bar{\mu}_{(\ell,\ell),j}^{(m,m)/(q,q),\kappa}(\alpha;\mathbf{r}_0) \\ \vdots \end{bmatrix},\quad (219)$$

οι οποίοι είναι ένας $3(L+1)\times m\times q$ τετράγωνος αντιστρέψιμος πίνακας των συντελεστών των αγνώστων, ένας πίνακας των άγνωστων συντελεστών των διανυσμάτων και ένας πίνακας των άγνωστων σταθερών των διανυσμάτων αντίστοιχα. Το διάνυσμα $\bar{\mathbf{x}}_L$ καθορίζει τη λύση του συστήματος μέσω της (218), έχοντας τη δυνατότητα να υπολογιστούν οι άγνωστοι σταθεροί συντελεστές $\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}=d_{\ell,1}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_1+d_{\ell,2}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_2+d_{\ell,3}^{m/q}\hat{\mathbf{x}}_3$ για κάθε $\ell=0,1,2,...,L$, $m=0,1,2,...,\ell$ και $q=e,o$ έως και ένα συγκεκριμένο επίπεδο , ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια. Έτσι, τελικά, με την αντικατάσταση των (172) και (185) στην (75) και λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς όλων των συντελεστών που δώσαμε παραπάνω έχουμε την αναλυτική μορφή του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}_3^s$ για αυτή την περίπτωση. Δηλαδή για $\mathbf{r}\in\Omega$,

$$(75)\underset{(185)}{\overset{(172)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\left(\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)r^{-(\ell+1)}+\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^{\ell}+\mathbf{S}_{\ell}^{m/q}(r)\right]Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}. \quad (220)$$

Με την εύρεση του $\mathbf{E}_3^s$ ολοκληρώνεται η επίλυση του προβλήματός μας αφού έχουμε βρεί όλα τα ζητούμενα σκεδαζόμενα πεδία. Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας αυτής που θα λειτουργήσει ως επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.

2. Επαλήθευση των αποτελεσμάτων

Στο 2ο κεφάλαιο της εργασίας αυτής σκοπός και στόχος είναι να επαληθεύσουμε όλες τις σχέσεις και τα αποτελέσματα της διαδικασίας επίλυσης που βρήκαμε στη 2η ενότητα του 1ου κεφαλαίου, δηλ. στην 1.2, ώστε να τα επιβεβαιώσουμε.

2.1 Επαλήθευση με χρήση της περίπτωσης του σφαιροειδούς

Η επαλήθευση και επιβεβαίωση των σχέσεων και αποτελεσμάτων που βρήκαμε νωρίτερα στην εργασία μας, θα γίνει με χρήση των αντίστοιχων σχέσεων και αποτελεσμάτων που υπολογίστηκαν στην περίπτωση του αντίστοιχου προβλήματος με σφαιροειδές αντικείμενο (Vafeas, 2018) και αυτό γιατί η σφαιρική περίπτωση είναι οριακή περίπτωση της σφαιροειδούς. Ως εκ τούτου, εφαρμόζοντας στα αποτελέσματα του σφαιροειδούς τα κατάλληλα όρια και τις κατάλληλες σχέσεις, που θα παρουσιαστούν παρακάτω, αναμένουμε να προκύψουν τα αποτελέσματα που έχουμε βρει εμείς στη σφαιρική μας περίπτωση. Έτσι, αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή η διαδικασία θα είναι κατάλληλη να λειτουργήσει ως επαλήθευση της μελέτης μας.

2.1.1 Παρουσίαση του σφαιροειδούς συστήματος και των αποτελεσμάτων του

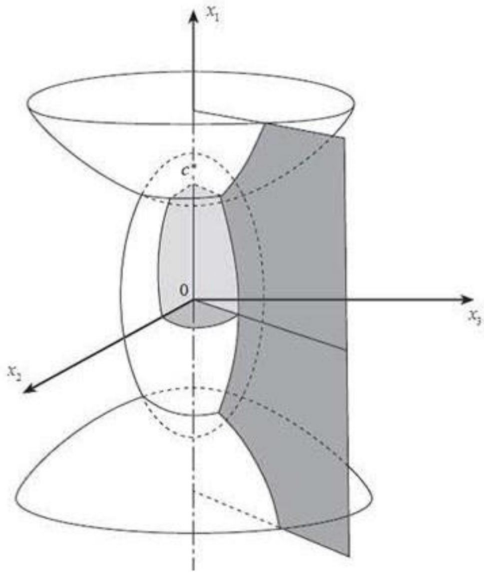
Σε αυτήν την υποενότητα θα παρουσιάσουμε το σφαιροειδές σύστημα συντεταγμένων καθώς επίσης και τα αποτελέσματα που βρέθηκαν στη μελέτη του σφαιροειδούς (Vafeas, 2018). Αρχικά, θα πρέπει να πούμε ότι όταν μιλάμε για σφαιροειδείς συντεταγμένες έχουμε υπόψιν μας δύο είδη, αυτές του επιμήκους και αυτές του πεπλατυσμένου σφαιροειδούς. Οι περιπτώσεις αυτές στην επίλυσή τους είναι παρόμοιες, όμως εμείς εδώ θα παρουσιάσουμε και θα ασχοληθούμε με το επίμηκες σφαιρεοειδές αφού τα αποτελέσματα που έχουμε στη διάθεσή μας είναι υπολογισμένα πάνω σε αυτό.

Κατ’ αρχάς, πριν ξεκινήσουμε την παρουσίαση του σφαιροειδούς θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για όλες τις σχέσεις και για όλα τα αποτελέσματά του θα χρησιμοποιούμε στο συμβολισμό τους ένα *s* κάτω στα αριστερά όλων των στοιχείων που το αφορούν. Για παράδειγμα, το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο τάξης $n=3$ στη σφαίρα το συμβολίσαμε $\mathbf{E}_3^s$, ενώ το αντίστοιχο του σφαιροειδούς θα το ονομάζουμε ${}_s\mathbf{E}_3^s$. Η ίδια λογική θα ακολουθηθεί σε όλα τα σύμβολα που αφορούν το σφαιροειδές. Χωρίς αυτό το *s* κάτω αριστερά θα εννοούνται όλα τα αντίστοιχα στο σφαιρικό, όπως άλλωστε τα ορίσαμε και σε όλη τη διαδικασία επίλυσης του κεφαλαίου 1.

Δεδομένου ενός σταθερού θετικού αριθμού $c>0$, τον οποίο θεωρούμε ως ημιεστιακή απόσταση του συστήματός μας, ορίζουμε τις μετασχηματισμένες σφαιροειδείς συντεταγμένες (τ,ζ,φ), για κάθε $1\le\tau\equiv\cosh\eta<+\infty$, $-1\le\zeta\equiv\cos\theta\le 1$ και $0\le\varphi\le 2\pi$ (βλ. Σχήμα 3) ως

$$ {}_s x_1 = c\tau\zeta\,,\ {}_s x_2 = c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi \ \text{ και } \ {}_s x_3 = c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,, \tag{221} $$

όπου $\mathbf{r}=\left({}_s x_1, {}_s x_2, {}_s x_3\right)$ το διάνυσμα θέσης και $\mathbf{r}_0=\left({}_s x_{10}, {}_s x_{20}, {}_s x_{30}\right)$ η καθορισμένη θέση της πηγής.



Σχήμα 3 Η γεωμετρία του επιμήκους σφαιροειδούς με τις τρεις συντεταγμένες επιφάνειες.

Στο Σχήμα 3 βλέπουμε τη γεωμετρία του επιμήκους σφαιροειδούς με τις τρεις συντεταγμένες επιφάνειες. Δηλ. το επίμηκες σφαιροειδές (για $\tau = \sigma\tau\alpha\theta.$), τα υπερβολοειδή δύο κλάδων (για $\zeta = \sigma\tau\alpha\theta.$) και το μεσημβρινό επίπεδο (για $\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$) με c να είναι η ημιεστιακή απόσταση του συστήματος συντεταγμένων.

Η γεωμετρία του επιμήκους σφαιροειδούς εκφυλίζεται στη σφαιρική (Moon et al., 1971) όταν $c \to 0^+$. Για τη διαδικασία εκφυλισμού, που θα μας δώσει την επιθυμητή επαλήθευση της μελέτης μας, θα ακολουθηθεί μία οριακή μέθοδος που περιλαμβάνει έναν κατάλληλο συνδυασμό της ημιεστιακής απόστασης με την μεταβλητή συντεταγμένων $\tau > 1$, ως

$$\lim_{c\to 0^+} c\tau = r \text{ και } \lim_{c\to 0^+} \frac{1}{2c}\ln\frac{\tau+1}{\tau-1} = \frac{1}{r}, \text{ όπου } r \equiv \|\mathbf{r}\| = c\sqrt{\tau^2+\zeta^2-1} \text{ για } |\zeta| \le 1, \tag{222}$$

όπου $r \ge 0$ είναι η ακτινική απόσταση του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων. Επιπλέον, αυτή η οριακή μέθοδος, είναι και μία συνέπεια του ορισμού των συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre 1^{ου} και 2^{ου} είδους. Συνεπώς, ισχύουν:

$$\lim_{c\to 0^+} c^{\ell} P_{\ell}^{m}(\tau) = p_{\ell}\frac{\ell!}{(\ell-m)!} r^{\ell} \text{ και } \lim_{c\to 0^+} c^{-(\ell+1)} Q_{\ell}^{m}(\tau) = q_{\ell}(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} r^{-(\ell+1)}, \tag{223}$$

για $r \ge 0$ και όπου για κάθε τιμή $\ell \ge 0$ είναι:

$$p_\ell = \frac{(2\ell)!}{2^\ell (\ell!)^2} \quad \text{και} \quad q_\ell = \frac{1}{2^\ell} \sum_{k=0}^{[\ell/2]} \frac{(-1)^\kappa (2\ell - 2k)!}{k!(\ell-k)!(\ell-2k)!(2\ell-2k+1)}, \tag{224}$$

με $(2\ell+1)\, p_\ell q_\ell = 1$. (225)

Στη συνέχεια, θα δώσουμε όλες εκείνες τις σχέσεις και τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν στην αντίστοιχη με τη δική μας μελέτη του επιμήκους σφαιροειδούς (Vafeas, 2018) τα οποία είναι και αυτά που θα χρησιμοποιήσουμε στην πορεία της επαλήθευσής μας. Η πρώτη σχέση που θα χρειαστούμε δόθηκε ακριβώς παραπάνω. Είναι η σχέση (221) που αφορά τις σφαιροειδείς (επιμήκεις) συντεταγμένες. Επίσης, δίνουμε τα μοναδιαία διανύσματα που αντιστοιχούν αυτό το σύστημα. Αυτά δεδομένης της Καρτεσιανήε βάσης $(\hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ είναι:

$${}_s\hat{\boldsymbol{n}} \equiv {}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}(\tau,\zeta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left(\zeta\sqrt{\tau^2-1}\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right), \tag{226}$$

$${}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}(\tau,\zeta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left(-\tau\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\sqrt{\tau^2-1}\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sqrt{\tau^2-1}\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}}_3\right), \tag{227}$$

$${}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) = -\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}}_3 . \tag{228}$$

Ακόμη, οι τελεστές Ανάδελτα και Laplace στις σφαιροειδείς συντεταγμένες είναι αντίστοιχα:

$${}_s\nabla_{\mathbf{r}} \equiv {}_s\nabla = \frac{1}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\sqrt{\tau^2-1}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\frac{\partial}{\partial\tau} - \sqrt{1-\zeta^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{229}$$

$${}_s\Delta_{\mathbf{r}} \equiv {}_s\Delta = \frac{1}{c^2(\tau^2-\zeta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(\tau^2-1)\frac{\partial}{\partial\tau}\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{c^2(\tau^2-1)(1-\zeta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \tag{230}$$

Ο χώρος της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας δίνεται από τη σχέση:

$${}_s\Omega \equiv V(\mathbb{R}^3) - \{\mathbf{r}_0\} = \{(\tau,\zeta,\varphi) : \tau\in[\tau_s,+\infty),\ \zeta\in[-1,1],\ \varphi\in[0,2\pi)\} - \{(\tau_0,\zeta_0,\varphi_0)\}, \tag{231}$$

Προχωρώντας, εισάγουμε την εσωτερική ${}_s u_{\ell,in}^{m/q}$ (όταν $\tau \to 1^+$) και την εξωτερική ${}_s u_{\ell,ex}^{m/q}$ (όταν $\tau \to +\infty$) επιμήκεις σφαιροειδείς αρμονικές ιδιολύσεις βαθμού $\ell \geq 0$ και τάξης

$m = 0,1,2,...,\ell$, με όρους συσχετισμένων συναρτήσεων Legendre 1^{ου} είδους P_ℓ^m και 2^{ου} είδους Q_ℓ^m και f_m^q όπως την ορίσαμε στη σχέση (90) και για την περίπτωση της σφαίρας ως:

$${}_s u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) = P_\ell^m(\tau) P_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi) \text{ και } {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) = Q_\ell^m(\tau) P_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi). \tag{232}$$

Συνεπώς, κάθε αρμονική συνάρτηση u στη γεωμετρία επιμήκους σφαιροειδούς που είναι λύση της εξίσωσης Laplace $\Delta u = 0$ δίνεται από:

$${}_s u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left[{}_s A_{\ell,in}^{m/q} \, {}_s u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + {}_s A_{\ell,ex}^{m/q} \, {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \right], \tag{233}$$

για $\mathbf{r} \in \{\tau \in [1,+\infty), \zeta \in [-1,1], \varphi \in [0,2\pi)\}$ όπου ${}_s A_{\ell,in}^{m/q}$, ${}_s A_{\ell,ex}^{m/q}$ αυθαίρετες σταθερές όπου ${}_s A_{\ell,ex}^{m/q} = 0$ στο εσωτερικό πρόβλημα και ${}_s A_{\ell,in}^{m/q} = 0$ στο εξώτερικό πρόβλημα όπως στη δική μας περίπτωση. Ακόμη στο επίμηκες σφαιροειδές το ανάπτυγμα του $\dfrac{1}{R}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{{}_s R} \equiv \frac{1}{{}_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} {}_s \rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \, {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \text{ για } \mathbf{r} > \mathbf{r}_0 \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} {}_s \rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \, {}_s u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) \text{ για } \mathbf{r} < \mathbf{r}_0 \end{cases}, \tag{234}$$

όπου για $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = (\tau_0, \zeta_0, \varphi_0)$ επιτυγχάνουμε μοναδικότητα και επίσης

$${}_s \rho_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \frac{(2\ell+1)}{c} \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^2 (-1)^m \varepsilon_m \, {}_s u_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0), \tag{235}$$

με $y = in, ex$ και $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \geq 1 \end{cases}$. Εδώ ολοκληρώνεται η παράθεση των σχέσεων που χρειάστηκαν στη μελέτη του επιμήκους σφαιροειδούς τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στην πορεία της επαλήθευσής μας.

Συνεχίζοντας, αφού έχουμε δώσει τις παραπάνω σχέσεις θα προχωρήσουμε παρουσιάζοντας εν τάχει και τα αποτελέσματα της επίλυσης του προβλήματος του επιμήκους σφαιροειδούς που θα χρησιμοποιηθούν για την επιβεβαίωση των δικών μας αποτελεσμάτων. Έτσι, όσον αφορά το ${}_s \mathbf{H}_0^s$, αυτό υπολογίστηκε πως για $\mathbf{r} \in \Omega$ είναι:

$$
{}_s\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi c}\cdot
$$

$$
\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}(2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\left[{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right], \quad (236)
$$

καθώς επίσης και

$$
{}_s\Phi_0^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\left[Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\right]. \quad (237)
$$

Παρακάτω, για το ${}_s\mathbf{H}_2^s$, αυτό βρέθηκε πως για $\mathbf{r}\in\Omega$ είναι:

$$
{}_s\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) = ,
$$

$$
= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\right]Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\right\}, \quad (238)
$$

όπου ${}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} = {}_sb_{\ell,1}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + {}_sb_{\ell,2}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + {}_sb_{\ell,3}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_3$ οι διανυσματικές σταθερές.

Επίσης, το προβλημα αυτό, λύθηκε ακριβώς όπως και στην περίπτωση της σφαίρας. Δηλ. οι συνθήκες οδήγησαν στο σύστημα της μορφής:

$$
\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}{}_sf_{\ell,j}^{m/q,\kappa}(\tau_s,\zeta,\varphi)\,{}_sb_{\ell,j}^{m/q}-{}_sg_\ell^{m/q,\kappa}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0,\ \text{για}\ \kappa=1,2,3 \quad (239)
$$

με αγνώστους τις συνιστώσες ${}_sb_{\ell,j}^{m/q}$, $j=1,2,3$ των ${}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$. Οι συντελεστές του συστήματος υπολογίστηκαν:

- Για $\kappa=1$:

$$
{}_sf_{\ell,1}^{m/q,1} = c\sqrt{\tau_s^2-1}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi), \quad (240)
$$

$$
{}_sf_{\ell,2}^{m/q,1} = c\tau_sQ_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi\,f_m^q(\varphi), \quad (241)
$$

$$
{}_sf_{\ell,3}^{m/q,1} = c\tau_sQ_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi\,f_m^q(\varphi) \quad (242)
$$

και

$$
{}_sg_\ell^{m/q,1} = \left\{{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\left(\mathbf{r}(\tau_s,\zeta,\varphi)-\mathbf{r}_0\right)+c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}P_\ell^m(\tau_s)\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]\right.
$$

$$
\left.-c^2\,{}_sM_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right\}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi), \quad (243)
$$

- Για $\kappa = 2$:

$$ {}_s f_{\ell,1}^{m/q,2} = c\sqrt{\tau_s^2-1}\left(Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)-\tau_s Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right)f_m^q(\varphi), \tag{244} $$

$$ {}_s f_{\ell,2}^{m/q,2} = c\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\right)\cos\varphi\, f_m^q(\varphi), \tag{245} $$

$$ {}_s f_{\ell,3}^{m/q,2} = c\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\right)\sin\varphi\, f_m^q(\varphi) \tag{246} $$

και

$$ \begin{aligned} {}_s g_\ell^{m/q,2} = &-c^2\, {}_s M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2} \\ &\left\{\tau_s\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\zeta)-\zeta P_\ell^m(\zeta)\right\} f_m^q(\varphi) \\ &-2c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)\left[{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right]P_\ell^m(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi), \end{aligned} \tag{247} $$

- Για $\kappa = 3$:

$$ {}_s f_{\ell,1}^{m/q,3} = c\sqrt{\tau_s^2-1}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi), \tag{248} $$

$$ {}_s f_{\ell,2}^{m/q,3} = c\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\cos\varphi\, f_m^{q\prime}(\varphi)+\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\sin\varphi\, f_m^q(\varphi)\right), \tag{249} $$

$$ {}_s f_{\ell,3}^{m/q,3} = c\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\sin\varphi\, f_m^{q\prime}(\varphi)-\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\cos\varphi\, f_m^q(\varphi)\right) \tag{250} $$

και

$$ \begin{aligned} {}_s g_\ell^{m/q,3} = &-c^2\, {}_s M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi) \\ &+2c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\left[{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi), \end{aligned} \tag{251} $$

όπου

$$ {}_s M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\, {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) \text{ και } {}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\, {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0). \tag{252} $$

όμοια με τη σφαιρική περίπτωση και με τις σχέσεις (236) – (247) να ισχύουν για $\tau_s \neq \tau_0$, $\zeta \in [-1,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ και $\mathbf{r}_0 = (\tau_0, \zeta_0, \varphi_0)$.

Παρακάτω, όσον αφορά το ${}_s\mathbf{H}_3^s$, αυτό υπολογίστηκε:

$$ \begin{aligned} {}_s\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m}}{\pi}\cdot&\left\{\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\frac{\partial\mathbf{f}(\tau)}{\partial\tau}\zeta+\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}\sqrt{1-\zeta^2}\right]\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right. \\ &\left.+\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[-\mathbf{f}(\tau)\sqrt{1-\zeta^2}+\mathbf{g}(\tau,\varphi)\zeta\right]\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right\}, \end{aligned} \tag{253} $$

όπου

$$\mathbf{f}(\tau)=\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{Q_1(\tau)}{Q_1'(\tau_s)} \text{ και } \mathbf{g}(\tau,\varphi)=(\hat{\boldsymbol{x}}_2\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{x}}_3\sin\varphi)\frac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2-1}}\frac{Q_1^1(\tau)}{Q_1^{1'}(\tau_s)}, \tag{254}$$

συναρτήσεις για κάθε $\tau\in[\tau_s,+\infty)$ και $\varphi\in[0,2\pi)$.

Ακόμη, για το ${}_s\mathbf{E}_1^s$, αυτό στην περίπτωση του επιμήκους σφαιροειδούς είναι για $\mathbf{r}\in\Omega$:

$${}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r})=.$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{{}_s\nabla\,{}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\right]\right\}, \tag{255}$$

Τέλος, όσον αφορά και το τελευταίο πεδίο προς υπολογισμό, δηλ. το ${}_s\mathbf{E}_3^s$, αυτό για $\mathbf{r}\in\Omega$ είναι:

$${}_s\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left({}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}+{}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)Q_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}P_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)\right]P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi), \tag{256}$$

όπου ${}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}={}_s d_{\ell,1}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_1+{}_s d_{\ell,2}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_2+{}_s d_{\ell,3}^{m/q}\hat{\boldsymbol{x}}_3$ οι διανυσματικοί συντελεστές και όπου

$${}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}=-\frac{3c^3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_s}^{\tau_0-e}\left(\tau'^2-\zeta'^2\right){}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}')\,{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,d\tau'd\zeta'd\varphi', \tag{257}$$

$${}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}=-\frac{3c^3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_0+e}^{+\infty}\left(\tau'^2-\zeta'^2\right){}_s\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}')\,{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,d\tau'd\zeta'd\varphi', \tag{258}$$

$${}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)=-\frac{3(2\ell+1)}{8\pi^2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_0-e}^{\tau_0+e}\frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right\}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\,d\varphi\,d\zeta \tag{259}$$

και όσον αφορά το τριπλό ολοκλήρωμα για αυτό έχουμε:

$$-\frac{3}{2\pi}\iiint_\Omega\frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}P_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}Q_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)\right]P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi), \tag{260}$$

όπου

$$d\Omega'=c^3\left(\tau'^2-\zeta'^2\right)d\tau'd\zeta'd\varphi' \text{ για } \tau'\in[\tau_s,+\infty),\ \zeta'\in[-1,1] \text{ και } \varphi'\in[0,2\pi). \tag{261}$$

Ακόμη, για τη διανυσματική ποσότητα ${}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)$ αυτή είναι:

$${}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)=-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times\left[\mathbf{r}(\tau,\zeta,\varphi)-\mathbf{r}_0\right]{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0), \text{ με } \mathbf{r}_0=(\tau_0,\zeta_0,\varphi_0). \tag{262}$$

Επίσης, και εδώ το προβλημα λύθηκε όπως και στην περίπτωση της σφαίρας. Οι συνθήκες οδήγησαν στο σύστημα:

$$\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} {}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,\kappa}\left(\tau_s,\zeta,\varphi\right){}_s d_{\ell,j}^{m/q} - {}_s\overline{g}_{\ell}^{m/q,\kappa}\left(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)\right]=0,\ \text{για}\ \kappa=1,2,3 \tag{263}$$

με αγνώστους τις συνιστώσες ${}_s d_{\ell,j}^{m/q}$, $j=1,2,3$ των ${}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}$. Οι συντελεστές του συστήματος είναι:

- Για $\kappa=1$:

$${}_s\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,1}=\frac{1}{c\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left[\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)+\tau_s Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)\right]f_m^q\left(\varphi\right), \tag{264}$$

$$\begin{aligned}{}_s\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,1}=\Bigg[&\frac{\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}{c\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left(\tau_s Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)-Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)\right)\cos\varphi f_m^q\left(\varphi\right)-\\&-\frac{1}{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)\sin\varphi f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{265}$$

$$\begin{aligned}{}_s\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,1}=\Bigg[&\frac{\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}{c\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left(\tau_s Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)-Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)\right)\sin\varphi f_m^q\left(\varphi\right)+\\&+\frac{1}{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)\cos\varphi f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)\Bigg]\end{aligned} \tag{266}$$

και

$$\begin{aligned}{}_s\overline{g}_{\ell}^{m/q,1}=&-\sqrt{\tau_s^2-1}\left(c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\right)^{-1}{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\\&\cdot\left\{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}\left(\tau_s\right)-\left[{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}\left(\tau_s\right)/P_\ell^m\left(\tau_s\right)\right]P_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\right\}P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)-\\&-\left\{{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}\left(\tau_s\right)/P_\ell^m\left(\tau_s\right)\right]\right\}\cdot\nabla{}_s u_{\ell,in}^{m/q}\left(\tau_s,\zeta,\varphi\right)-{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\nabla{}_s u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\tau_s,\zeta,\varphi\right),\end{aligned} \tag{267}$$

- Για $\kappa=2$:

$${}_s\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,2}=0, \tag{268}$$

$${}_s\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,2}=-Q_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)\sin\varphi f_m^q\left(\varphi\right), \tag{269}$$

$${}_s\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,2}=Q_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)\cos\varphi f_m^q\left(\varphi\right) \tag{270}$$

και

$$ {}_s\bar{g}_\ell^{m/q,2} = {}_s\hat{\boldsymbol{\tau}} \times \Big[\big({}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q} + {}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0) \big) P_\ell^m(\tau_s) + $$
$$ + {}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q} Q_\ell^m(\tau_s) + {}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s) \Big] \cdot {}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\, P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi), \qquad (271) $$

- Για $\kappa = 3$:

$$ {}_s\bar{f}_{\ell,1}^{m/q,3} = \tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}\, P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi), \qquad (272) $$

$$ {}_s\bar{f}_{\ell,2}^{m/q,3} = -\sqrt{\tau_s^2-1}\, Q_\ell^m(\tau_s)\,\zeta P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi\, f_m^q(\varphi), \qquad (273) $$

$$ {}_s\bar{f}_{\ell,3}^{m/q,3} = -\sqrt{\tau_s^2-1}\, Q_\ell^m(\tau_s)\,\zeta P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi\, f_m^q(\varphi) \qquad (274) $$

και

$$ {}_s\bar{g}_\ell^{m/q,3} = \sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\; {}_s\hat{\boldsymbol{\tau}} \times \Big[\big({}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q} + {}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0) \big) P_\ell^m(\tau_s) + $$
$$ + {}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q} Q_\ell^m(\tau_s) + {}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s) \Big] \cdot {}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\, P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi). \qquad (275) $$

όπου οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για $\tau_s \neq \tau_0$, $\zeta \in [-1,1]$, $\varphi \in [0,2\pi)$ και $\mathbf{r}_0 = (\tau_0,\zeta_0,\varphi_0)$.

Εδώ ολοκληρώνεται η παράθεση όλων των σχέσεων που θα χρησιμοποιήσουμε για την επαλήθευση των δικών μας σχέσεων και αποτελεσμάτων. Ο εκφυλισμός των προαναφερθέντων σχέσεων, ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων χαμηλών συχνοτήτων προκειμένου να ανακτηθεί η περίπτωση του σφαιρικού μεταλλικού σώματος ακτίνας $c\tau_s \to r_s \equiv \alpha$, ενσωματωμένο σε ένα μέσο χωρίς απώλειες, είναι μία σχετικά απλή ακολουθία βημάτων καθώς. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται αναλυτικά στις επόμενες υποενότητες.

2.1.2 Επαλήθευση χρήσιμων για την επίλυση σχέσεων

Θα ξεκινήσουμε τη διαδικασία εκφυλισμού με τη σχέση (221) που αφορά τον ορισμό των συντεταγμένων του συστήματος. Έχουμε:

- $\lim\limits_{c\to 0^+} {}_s x_1 = \lim\limits_{c\to 0^+} c\tau\zeta = r\zeta \overset{(77)}{=} x_1,$
- $\lim\limits_{c\to 0^+} {}_s x_2 = \lim\limits_{c\to 0^+} c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi = \lim\limits_{c\to 0^+} \sqrt{c^2\tau^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi =$

$= \lim\limits_{c\to 0^+} \sqrt{(c\tau)^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi = r\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi \overset{(77)}{=} x_2,$

- $\lim\limits_{c\to 0^+} {}_s x_3 = \lim\limits_{c\to 0^+} c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi = \lim\limits_{c\to 0^+} \sqrt{c^2\tau^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi =$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sqrt{(c\tau)^2}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi = r\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi \overset{(77)}{=} x_3 .$$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι προέκυψαν οι συντεταγμένες του συστήματος στο σφαιρικό σύστημα. Δηλ.:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s x_1 = x_1,\ \lim_{c\to 0^+} {}_s x_2 = x_2 \text{ και } \lim_{c\to 0^+} {}_s x_2 = x_2 . \tag{276}$$

Παρακάτω θα ασκοληθούμε με τις σχέσεις (226) – (228) που εκφράζουν τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος. Έχουμε:

• $\lim_{c\to 0^+} {}_s\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}(\tau,\zeta,\varphi) =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left(\zeta\sqrt{\tau^2-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{c}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left(\zeta\sqrt{\tau^2-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-(c\zeta)^2}}c\left(\zeta\sqrt{\tau^2-1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \tau\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-(c\zeta)^2}}\left(\zeta\sqrt{(c\tau)^2-c^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + c\tau\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + c\tau\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r^2}}\left(\zeta\sqrt{r^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + r\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + r\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\zeta r\hat{\boldsymbol{x}}_1 + r\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + r\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) =$$

$$= \zeta\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3 \overset{(82)}{=} \hat{\boldsymbol{r}}(r,\zeta,\varphi) \equiv \hat{\boldsymbol{n}}(r,\zeta,\varphi)$$

• $\lim_{c\to 0^+} {}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}(\tau,\zeta,\varphi) = \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left(-\tau\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\sqrt{\tau^2-1}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sqrt{\tau^2-1}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{c}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left(-\tau\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\sqrt{\tau^2-1}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sqrt{\tau^2-1}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-(c\zeta)^2}}\left(-c\tau\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\sqrt{(c\tau)^2-c^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sqrt{(c\tau)^2-c^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\left(-r\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta r\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta r\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) =$$

$$= -\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \zeta\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \zeta\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3 \overset{(83)}{=} \hat{\boldsymbol{\zeta}}(r,\zeta,\varphi)$$

- ${}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi) \overset{(84)}{=} \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)$

Άρα,

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\hat{\boldsymbol{n}} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}(\tau,\zeta,\varphi) = \hat{\boldsymbol{\tau}}(r,\zeta,\varphi) \equiv \hat{\boldsymbol{n}} \text{ και} \lim_{c\to 0^+} {}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}(\tau,\zeta,\varphi) = \hat{\boldsymbol{\zeta}}(r,\zeta,\varphi), \tag{277}$$

ενώ το μοναδιαίο στη φ – μεταβλητή παραμένει το ίδιο.

Θα προχωρήσουμε τώρα με τους τελεστές Ανάδελτα και Laplace που δίνονται στο σφαιροειδές από τις σχέσεις (229) και (230) αντίστοιχα. Για τον τελεστή Ανάδελτα έχουμε:

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s\nabla_{\mathbf{r}} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\nabla =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left\{\frac{1}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\sqrt{\tau^2-1}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\frac{\partial}{\partial\tau} - \sqrt{1-\zeta^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{c\sqrt{\tau^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left\{\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-(c\zeta)^2}}\left[c\sqrt{\tau^2-1}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\frac{\partial}{\partial c\tau} - \sqrt{1-\zeta^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left\{\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-(c\zeta)^2}}\left[\sqrt{(c\tau)^2-c^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\frac{\partial}{\partial(c\tau)} - \sqrt{1-\zeta^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} =$$

$$= \frac{1}{r}\left[r\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} - \sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] + \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi} =$$

$$= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{r}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\varphi} \overset{(78)}{=} \nabla_{\mathbf{r}} \equiv \nabla$$

Και για τον τελεστή Laplace έχουμε:

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s\Delta_{\mathbf{r}} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\Delta =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{c^2(\tau^2-\zeta^2)}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(\tau^2-1)\frac{\partial}{\partial\tau}\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2(\tau^2-1)(1-\zeta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\left[(c\tau)^2-(c\zeta)^2\right]}\left\{\frac{c^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(\tau^2-1)\frac{\partial}{\partial\tau}\right] + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1-\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\right\} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left[(c\tau)^2-c^2\right](1-\zeta^2)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\frac{1}{\left[(c\tau)^2-(c\zeta)^2\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial(c\tau)}\left[\left((c\tau)^2-c^2\right)\frac{\partial}{\partial(c\tau)}\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left[(c\tau)^2-c^2\right]\left(1-\zeta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\right\}+\frac{1}{r^2\left(1-\zeta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]+\frac{1}{r^2\left(1-\zeta^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\overset{(79)}{=}\Delta_{\mathbf{r}}\equiv\Delta$$

Επομένως, πράγματι

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\nabla_{\mathbf{r}} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\nabla = \nabla_{\mathbf{r}} \equiv \nabla \text{ και } \lim_{c\to 0^+} {}_s\Delta_{\mathbf{r}} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\Delta = \Delta_{\mathbf{r}} \equiv \Delta . \tag{278}$$

Επίσης, για το χώρο ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας έχουμε:

$${}_s\Omega \equiv V\left(\mathbb{R}^3\right)-\left\{\mathbf{r}_0\right\}=\left\{(\tau,\zeta,\varphi):\tau\in\left[\tau_s,+\infty\right),\ \zeta\in[-1,1],\ \varphi\in[0,2\pi)\right\}-\left\{(\tau_0,\zeta_0,\varphi_0)\right\}=$$

$$=\left\{(c\tau,\zeta,\varphi):c\tau\in\left[c\tau_s,+\infty\right),\ \zeta\in[-1,1],\ \varphi\in[0,2\pi)\right\}-\left\{(c\tau_0,\zeta_0,\varphi_0)\right\}=$$

$$=\left\{(r,\zeta,\varphi):r\in\left[r_s,+\infty\right),\ \zeta\in[-1,1],\ \varphi\in[0,2\pi)\right\}-\left\{(r_0,\zeta_0,\varphi_0)\right\}\overset{(85)}{=}\Omega.$$

Άρα,

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\Omega=\Omega . \tag{279}$$

Ακόμη, όσον αφορά την εσωτερική και εξωτερική ιδιολύση του επιμήκους σφαιροειδούς που δίνονται από τις σχέσεις (232) έχουμε:

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})=\lim_{c\to 0^+} P_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)=$

$$=\lim_{c\to 0^+} c^{-\ell}\left[c^\ell P_\ell^m(\tau)\right]P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{-\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}r^\ell P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)=c^{-\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(88)}{=}$$

$$=c^{-\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})\underset{\bar{A}_{\ell,in}^m=c^{-\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}}{\overset{\text{θέτουμε}}{=}}\bar{A}_{\ell,in}^m u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r})$$

και

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})=\lim_{c\to 0^+} Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)$

$$=\lim_{c\to 0^+} c^{\ell+1}\left[c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)\right]P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)=c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\overset{(89)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\underset{\bar{A}_{\ell,ex}^m=c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}}{\overset{\text{θέτουμε}}{=}}\bar{A}_{\ell,ex}^m u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{c\to0^+}{}_su_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)=\bar{A}_{\ell,in}^m u_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\text{ και }\lim_{c\to0^+}{}_su_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)=\bar{A}_{\ell,ex}^m u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right),\tag{280}$$

οπότε θεωρώντας τις $\bar{A}_{l,in}^m$, $\bar{A}_{\ell,ex}^m$ ως σταθερές βλέπουμε ότι προκύπτουν οι αντίστοιχες ιδιολύσεις όπως τις ορίσαμε στο σφαιρικό σύστημα με τις σχέσεις (88) και (89). Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να επιβεβαιώσουμε και την αρμονική συνάρτηση *u* λύση της εξίσωσης Laplace. Είναι:

$$\lim_{c\to0^+}{}_su\left(\mathbf{r}\right)=\lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_sA_{\ell,in}^{m/q}\,{}_su_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)+{}_sA_{\ell,ex}^{m/q}\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\right]\overset{(280)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\underbrace{{}_sA_{\ell,in}^{m/q}\bar{A}_{\ell,in}^m}_{A_{\ell,in}^{m/q}}u_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)+\underbrace{{}_sA_{\ell,ex}^{m/q}\bar{A}_{\ell,ex}^m}_{A_{\ell,ex}^{m/q}}u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\right]=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[A_{\ell,in}^{m/q}u_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)+A_{\ell,ex}^{m/q}u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\right]\overset{(87)}{=}u\left(\mathbf{r}\right)$$

Οπότε, και εδώ ισχύει:

$$\lim_{c\to0^+}{}_su\left(\mathbf{r}\right)=u\left(\mathbf{r}\right).\tag{281}$$

Συνεχίζοντας, θα πάμε στις σχέσεις (234) και (235). Πρώτον, για την (234) και για $\mathbf{r}>\mathbf{r}_0$ έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}\frac{1}{{}_sR}\equiv\lim_{c\to0^+}\frac{1}{{}_s\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\right|}=\lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}{}_s\rho_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right){}_su_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\overset{(232),\,(235)}{=}$$

$$=\lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{\left(2\ell+1\right)}{c}\left[\frac{\left(\ell-m\right)!}{\left(\ell+m\right)!}\right]^2\left(-1\right)^m\varepsilon_m\,{}_su_{\ell,in}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)Q_\ell^m\left(\tau\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\overset{(232)}{=}$$

$$=\lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\frac{\left(2\ell+1\right)}{c}\right.$$

$$\left.\left[\frac{\left(\ell-m\right)!}{\left(\ell+m\right)!}\right]^2\left(-1\right)^m\varepsilon_mP_\ell^m\left(\tau_0\right)P_\ell^m\left(\zeta_0\right)f_m^q\left(\varphi_0\right)Q_\ell^m\left(\tau\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\right\}=$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ c^{-\ell} c^{\ell+1} \frac{(2\ell+1)}{c} \right.$$

$$\left. \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 (-1)^m \varepsilon_m c^{\ell} P_\ell^m(\tau_0) Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0) c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau) Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \right\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ (2\ell+1) \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 \right.$$

$$\left. (-1)^m \varepsilon_m \left(c^{\ell} P_\ell^m(\tau_0)\right) Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0) \left(c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau)\right) Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \right\} \overset{(223)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ (2\ell+1) \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 \right.$$

$$\left. (-1)^m \varepsilon_m p_\ell \frac{\ell!}{(\ell-m)!} r_0^{\ell} Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0) q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} r^{-(\ell+1)} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \right\} \overset{(88),\,(89)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} (2\ell+1) p_\ell q_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} (-1)^{2m} \varepsilon_m u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \overset{(225)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \varepsilon_m u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) \overset{(96),\,(97)}{=} \frac{1}{R} \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

όπου $\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \varepsilon_m u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$

ενώ για $\mathbf{r} < \mathbf{r}_0$ έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\frac{1}{R} \equiv \lim_{c\to 0^+} {}_s\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\, {}_s u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) \overset{(232),\,(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \frac{(2\ell+1)}{c} \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 (-1)^m \varepsilon_m\, {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) P_\ell^m(\tau)_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi) \overset{(232)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ \frac{(2\ell+1)}{c} \right.$$

$$\left. \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 (-1)^m \varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0) P_\ell^m(\zeta_0) f_m^q(\varphi_0) P_\ell^m(\tau) P_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi) \right\} =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ c^{-\ell} c^{\ell+1} \frac{(2\ell+1)}{c} \right.$$

$$\left. \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^2 (-1)^m \varepsilon_m c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_0) Y_\ell^{m/q}(\zeta_0, \varphi_0) c^\ell P_\ell^m(\tau) Y_\ell^{m/q}(\zeta, \varphi) \right\} =$$

$$= \lim_{c \to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ (2\ell+1) \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^2 \right. \overset{(223)}{=}$$

$$\left. (-1)^m \varepsilon_m \left(c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_0) \right) Y_\ell^{m/q}(\zeta_0, \varphi_0) \left(c^\ell P_\ell^m(\tau) \right) Y_\ell^{m/q}(\zeta, \varphi) \right\} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \left\{ (2\ell+1) \left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^2 \right. =$$

$$\left. (-1)^m \varepsilon_m q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} r_0^{-(\ell+1)} Y_\ell^{m/q}(\zeta_0, \varphi_0) p_\ell \frac{\ell!}{(\ell-m)!} r^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta, \varphi) \right\} \overset{(88),\,(89)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} (2\ell+1) p_\ell q_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} (-1)^{2m} \varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) \overset{(225)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{q=e,o} \rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) \overset{(96),\,(97)}{=} \frac{1}{R} \equiv \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$$

όπου $\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$

Επομένως πράγματι,

$$\lim_{c \to 0^+} {}_s\frac{1}{R} \equiv \lim_{c \to 0^+} {}_s\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \equiv \frac{1}{R}\,, \tag{282}$$

με $\rho_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \dfrac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \varepsilon_m u_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0)$, για $y = in, ex$. (283)

Εδώ, ολοκληρώνεται η επιβεβαίωση των σχέσεων που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του προβλήματός μας μέσω του εκφυλισμού της σφαιροειδούς περίπτωσης.

2.1.3 Επαλήθευση των μαγνητικών σκεδαζόμενων πεδίων

Σε αυτήν την υποενότητα γίνεται η επαλήθευση όλων των αποτελεσμάτων που βρήκαμε για τα μαγνητικά σκεδαζόμενα πεδία. Θα ξεκινήσουμε τη διαδικασία εκφυλισμού για το μαγνητικό ${}_s\mathbf{H}_0^s$ που στο σφαιροειδές δίνεται από τη σχέση (236). Οπότε, έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}) = \lim_{c\to 0^+}\left\{\frac{\mathbf{m}}{4\pi c}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[(2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla\,{}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]\right]\right\}, \tag{284}$$

Για ευκολία στις πράξεις θα υπολογίσουμε το παραπάνω όριο σπάζοντάς το σε δύο ξεχωριστά τα όρια. Άρα,

- $$\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi c}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}(2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\right)=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,\frac{\dfrac{dP_\ell^m(\tau_s)}{d\tau_s}}{\dfrac{dQ_\ell^m(\tau_s)}{d\tau_s}}\right)=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,\frac{\dfrac{c}{c^\ell}\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right)=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(2\ell+1)}{c^{2(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,\frac{\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(2\ell+1)}{c^{2(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,\frac{p_\ell\dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}=$$

$$=\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}-\frac{(2\ell+1)}{c^{2(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2\varepsilon_m\,\frac{p_\ell}{q_\ell}\,\frac{(\ell!)^2}{(\ell+m)!(\ell-m)!}\,\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}$$

και

- $$\lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes{}_s\nabla\,{}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]\overset{(232)}{=}$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\,f_m^q(\varphi_0)\right)\otimes{}_s\nabla\left(Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\right)\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)}{c^{-(\ell+1)}}\otimes{}_s\nabla\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)}{c^{-(\ell+1)}}\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{1}{c^{-2(\ell+1)}}\left[{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\otimes{}_s\nabla\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\frac{1}{c^{-2(\ell+1)}}\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\otimes\right.$$

$$\left.\otimes\nabla\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\right]=$$

$$=\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c^{2(\ell+1)}\left[q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\right]^2\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\otimes\nabla\left(r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\right]\overset{(89)}{=}$$

$$=\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c^{2(\ell+1)}\left[q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\right]^2\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]=$$

$$=\sum_{\ell}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}c^{2(\ell+1)}q_\ell^2\frac{\left[(\ell+m)!\right]^2}{(\ell!)^2}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]$$

Επομένως, αντικαθιστώντας αυτά τα δύο όρια που βρήκαμε στην (284) έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+}{}_s\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(-\frac{(2\ell+1)}{c^{2(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2\varepsilon_m\frac{p_\ell}{q_\ell}\frac{(\ell!)^2}{(\ell+m)!(\ell-m)!}\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right.$$

$$\left.c^{2(\ell+1)}q_\ell^2\frac{\left[(\ell+m)!\right]^2}{(\ell!)^2}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]\right)=$$

$$=-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left((2\ell+1)p_\ell q_\ell\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2\varepsilon_m\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]\right)\overset{(225)}{=}$$

$$=-\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\left[\nabla_{\mathbf{r}_0}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\otimes\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right]\overset{(110)}{=}\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})$$

Επομένως, καταλήξαμε ότι:

$$\lim_{c\to 0^+}{}_s\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r})=\mathbf{H}_0^s(\mathbf{r}), \tag{285}$$

οπότε επιβεβαιώθηκε το αποτέλεσμα του μαγνητικού σκεδαζόμενου πεδίου τάξης $n=0$. Για να ολοκληρωθεί η περίπτωση αυτού του πεδίου θα πρέπει να κάνουμε την ίδια διαδικασία και για η συνάρτηση ${}_s\Phi_0^s$ που δίνεται από τη σχέση (237). Είναι:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\Phi_0^s(\mathbf{r}) = \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\, {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\left[Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right] \overset{(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m\, {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\left[Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right]\right\} \overset{(232)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m\left(Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)f_m^q(\varphi_0)\right)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{\dfrac{dP_\ell^m(\tau_s)}{d\tau_s}}{\dfrac{dQ_\ell^m(\tau_s)}{d\tau_s}}\left[Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\frac{\dfrac{c}{c^\ell}\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\left[c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^m(\zeta,\varphi)\right]\right\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\left[c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^m(\zeta,\varphi)\right]\right\} \overset{(223)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{p_\ell \dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}\left[q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]\right\}\overset{(89)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{p_\ell\dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}}{\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right\}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{-\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)p_\ell q_\ell\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^{2m}\,\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right]\right.$$

$$\left.\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right\}\overset{(225)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{-\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right]\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right\}\overset{(97)}{=}$$

$$=-\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\overset{(109)}{=}\Phi_0^s(\mathbf{r})$$

Έτσι, προκύπτει το ζητούμενο που είναι:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\Phi_0^s(\mathbf{r})=\Phi_0^s(\mathbf{r}). \tag{286}$$

Ολοκληρώνεται εδώ η διαδικασία επιβεβ;ίωσης του $\mathbf{H}_0^s$.

Προχωράμε τώρα στην επαλήθευση του σκεδαζόμενο μαγνητικό πεδίο τάξης $n=2$. Το αποτέλεσμα του πεδίου αυτού στο σύστημα του επιμήκους σφαιροειδούς δίνεται από τη σχέση (238). Όμως, η διαδικασία εύρεσής του και στο σφαιρικό αλλά και στο σφαιροειδές σύστημα έγινε μέσω περίπλοκων συστημάτων. Έτσι, για να μπορέσουμε να το επαληθεύσουμε το αποτέλεσμά μας με πλήρη εγκυρότητα θα πρέπει να επαληθεύσουμε και όλες τις σχέσεις που προέκυψαν κατά την επίλυσή του. Έτσι, αρχικά θα υπολογίσουμε το $\lim_{c\to0^+}{}_s\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})$ και έπειτα θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα όρια των συντελεστών του συστήματος που δίνεται από τη σχέση (239). Επομένως, έχοντας υπόψιν τη (238), έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r}) =$$

$$= \lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\, {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\right]Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi)\right\} \overset{(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\, {}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\dfrac{c}{c^{\ell}}\dfrac{d\left(c^{\ell}P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}\overset{(232)}{=}$$

$$= \lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\, f_m^q(\varphi_0)\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{c^{-(\ell+1)}\dfrac{d\left(c^{\ell}P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{c^{\ell}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=$$

$$= \lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{c^{\ell+1}\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{c^{-(\ell+1)}\dfrac{d\left(c^{\ell}P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{c^{\ell}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=$$

$$= \lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}\,{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\dfrac{d\left(c^{\ell}P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}\overset{(223)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right]\frac{p_\ell\dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}\left]q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2\varepsilon_m q_\ell\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right]\frac{p_\ell\dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{2\ell+1}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell+1)}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\left]r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m q_\ell r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.p_\ell\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\,p_\ell q_\ell\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right\}\overset{(89),\,(225)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left[\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right]\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right\}\overset{(97)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right\}$$

Άρα προκύπτει:

$$\lim_{c\to0^+}{}_{s}\mathbf{H}_2^s(\mathbf{r})=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\right\},\quad(287)$$

και παρατηρούμε σύμφωνα με τη σχέση (155) ότι το όριο του μαγνητικού πεδίου είναι ακριβώς ίδιο με αυτό του σφαιρικού με τη μόνη διαφορά ότι οι άγνωστοι συντελεστές στην (287) είναι πολλαπλασιασμένοι με την ποσότητα $c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\dfrac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}$, την οποία θα θέσουμε με C_ℓ^m. Δηλ.:

$$C_\ell^m = c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}, \tag{288}$$

οπότε η (287) γράφεται:

$$\lim_{c\to0^+} {}_s\mathbf{H}_2^s\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[C_\ell^m\, {}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\right\}$$

και θέτοντας

$$\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}=C_\ell^m\, {}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}\ , \tag{289}$$

έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+} {}_s\mathbf{H}_2^s\left(\mathbf{r}\right)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]u_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}\right)\right\}, \tag{290}$$

που είναι η (155) οπότε έχουμε το ζητούμενο. Τώρα, θα προχωρήσουμε τον εκφυλισμό που αφορά το συγκεκριμένο πεδίο με τους συντελεστές του συστήματος της επίλυσής του. Πρέπει να προκύπτουν τέτοιοι που οι $\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}$ που θέσαμε στη (288) και (289) να επαληθεύουν τις εξισώσεις του συστήματος που θα προκύψει από τον εκφυλισμό. Οι συντελεστές του συστήματος στο επίμηκες σφαιροειδές δίνονται από τις σχέσεις (240) – (251) δεδομένων των (252) με το σύστημα να είναι αυτό που δίνεται από τη (239). Για την $\kappa=1$ περίπτωση του συστήματος έχουμε:

- $$\lim_{c\to0^+} {}_s f_{\ell,1}^{m/q,1}=\lim_{c\to0^+}\left[c\sqrt{\tau_s^2-1}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[\sqrt{\left(c\tau_s\right)^2-c^2}\,\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[c^{\ell+1}\sqrt{\left(c\tau_s\right)^2}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}\alpha q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)=$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}\alpha\alpha^{-(\ell+1)}\zeta Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha\alpha^{-(\ell+1)}\zeta Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\overset{(136)}{=}C_\ell^m\alpha\, f_{\ell,1}^{m/q,1}$$

- $\lim\limits_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,2}^{m/q,1} = \lim\limits_{c\to 0^+}\left[c\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\right]=$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[c^{\ell+1}c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi P_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$= c^{\ell+1}\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$= c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$= C_\ell^m\alpha\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(137)}{=} C_\ell^m\alpha f_{\ell,2}^{m/q,1}$$

- $\lim\limits_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,3}^{m/q,1} = \lim\limits_{c\to 0^+}\left[c\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi f_m^q(\varphi)\right]=$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[c^{\ell+1}c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi P_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$= c^{\ell+1}\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$= c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$= C_\ell^m\alpha\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(138)}{=} C_\ell^m\alpha f_{\ell,3}^{m/q,1}$$

Άρα, για τους συντελεστές των αγνώστων προέκυψαν:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,j}^{m/q,1} = C_\ell^m\alpha f_{\ell,j}^{m/q,1} \text{ για κάθε } j=1,2,3. \qquad (291)$$

Ακόμη, για τη σχέση (243) έχουμε:

$${}_s g_\ell^{m/q,1} = \left\{ {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\left(\mathbf{r}(\tau_s,\zeta,\varphi)-\mathbf{r}_0\right)+c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]-\right.$$
$$\left. -c^2\,{}_sM_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right\}P_\ell^m(\zeta) f_m^q(\varphi)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow {}_s g_\ell^{m/q,1} = \left\{\underbrace{{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\left(\mathbf{r}(\tau_s,\zeta,\varphi)-\mathbf{r}_0\right)+c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]}_{\mathrm{I}}-\right.$$
$$\left.\underbrace{-c^2\,{}_sM_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}_{\mathrm{II}}\right\}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Για ευκολία στις πράξεις θα υπολογίσουμε τα όρια της I και II ξεχωριστά. Είναι:

- $$\lim_{c\to 0^+} \mathrm{I} = \lim_{c\to 0^+}\left\{ {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\left(\mathbf{r}(\tau_s,\zeta,\varphi)-\mathbf{r}_0\right)+c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]\right\} \overset{(232),\,(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\,f_m^q(\varphi_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}\frac{dP_\ell^m(\tau_s)}{d\tau_s}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}\frac{c}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{(2\ell+1)}{c^{-\ell}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{c^\ell}\left[-\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\left[-\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\left[-\alpha p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\alpha p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell\hat{\mathbf{r}}\right]=$$

$$=\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^{2m}\,\varepsilon_m q_\ell\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot$$

$$\cdot\, p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\left[-\ell\alpha^\ell(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\alpha^{\ell+1}\hat{\mathbf{r}}\right]\overset{(89)}{=}$$

$$=\left((2\ell+1)\,p_\ell q_\ell\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\ell\alpha^\ell(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\alpha^{\ell+1}\hat{\mathbf{r}}\right]\overset{(97),\,(225)}{=}$$

$$=\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\alpha^{\ell+1}\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}\right]$$

και επίσης,

- $\lim\limits_{c\to 0^+} \mathrm{II} = \lim\limits_{c\to 0^+} c^2\, {}_sM^{m/q}_{\ell,ex}(\mathbf{r}_0)\,\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\,\dfrac{Q_\ell^m(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}P_\ell^{m\prime}(\tau_s) \overset{(252)}{=}$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\, {}_s\rho^{m/q}_{\ell,ex}(\mathbf{r}_0)\right) c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\, c^{\ell+1}\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{c}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right] \overset{(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\, {}_su^{m/q}_{\ell,ex}(\mathbf{r}_0)\right)\right) c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{1}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right] \overset{(232)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)f_m^q(\varphi_0)\right)\right) c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{1}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right) c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{1}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot {}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right) c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\alpha\sqrt{\alpha^2}$$

$$\frac{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell=\alpha^{\ell-1}=$$

$$=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)p_\ell q_\ell\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^{2m}\varepsilon_m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{(\ell+1)}\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\overset{(225)}{=}$$

$$=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{(\ell+1)}\overset{(97)}{=}-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{(\ell+1)}\overset{(125)}{=}$$

$$=-M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{(\ell+1)}$$

Οπότε τελικά είναι:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s g_\ell^{m/q,1}=\left(\lim_{c\to0^+}\mathrm{I}-\lim_{c\to0^+}\mathrm{II}\right)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\left\{\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\alpha^{\ell+1}\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}\right]+M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{(\ell+1)}\right\}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\left\{\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}\right]+M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha}{(\ell+1)}\right\}\alpha^{\ell+1}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\alpha\left\{\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\left[-\frac{\ell}{\alpha}(\mathbf{r}_s-\mathbf{r}_0)+\hat{\mathbf{r}}\right]+M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha}{(\ell+1)}\right\}\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(139)}{=}$$

$$=\alpha g_\ell^{m/q,1}$$

Έτσι, και για τον άλλο όρο της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa=1$ έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s g_\ell^{m/q,1}=\alpha g_\ell^{m/q,1}. \tag{292}$$

Έτσι, για τη σχέση του συστήματος (239) για $\kappa=1$ έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}{}_s f_{\ell,j}^{m/q,1}(\tau_s,\zeta,\varphi)\,{}_s b_{\ell,j}^{m/q}-{}_s g_\ell^{m/q,1}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\lim_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,j}^{m/q,1}\right){}_s b_{\ell,j}^{m/q} - \lim_{c\to 0^+} {}_s g_{\ell}^{m/q,1}\right] = 0 \overset{(291),\,(292)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(C_\ell^m \alpha f_{\ell,j}^{m/q,1}\right){}_s b_{\ell,j}^{m/q} - \alpha g_{\ell}^{m/q,1}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha f_{\ell,j}^{m/q,1} C_\ell^m \, {}_s b_{\ell,j}^{m/q} - \alpha g_{\ell}^{m/q,1}\right] = 0 \underset{\text{διαιρώμε}\,\alpha}{\overset{(289)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} f_{\ell,j}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi) b_{\ell,j}^{m/q} - g_{\ell}^{m/q,1}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right] = 0$$

που είναι η 1η εξίσωση ($\kappa=1$) του συστήματος (122).

Συνεχίζοντας τώρα για την $\kappa=2$ περίπτωση του συστήματος έχουμε:

- $$\lim_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,1}^{m/q,2} = \lim_{c\to 0^+}\left[c\sqrt{\tau_s^2-1}\left(Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta) - \tau_s Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right) f_m^q(\varphi)\right] =$$

$$\lim_{c\to 0^+}\left[\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}} c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\tau_s \frac{c}{c^{-(\ell+1)}} \frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right) f_m^q(\varphi)\right] =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\,\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -c\tau_s \frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right) f_m^q(\varphi)\right] \overset{(223)}{=}$$

$$= c^{\ell+1}\alpha\left(q_\ell(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta) + \right.$$

$$\left. +\alpha q_\ell(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right) f_m^q(\varphi) =$$

$$= c^{\ell+1}\alpha q_\ell(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\left(\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta) + (\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right) f_m^q(\varphi) =$$

$$= c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-\ell}\left(\zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta) + (\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\right) f_m^q(\varphi) \overset{(288)}{=}$$

$$= -\alpha^2 C_\ell^m \alpha^{-(\ell+2)}\left(-(\ell+1)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta) - \zeta\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right) f_m^q(\varphi) \overset{(140)}{=} -C_\ell^m \alpha^2 f_{\ell,1}^{m/q,2}$$

- $$\lim_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,2}^{m/q,2} = \lim_{c\to 0^+}\left[c\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)(1-\zeta^2)P_\ell^{m\prime}(\zeta) + (\tau_s^2-1)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\right)\cos\varphi\, f_m^q(\varphi)\right] =$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\Bigg[\Bigg(c\tau_s\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+$$
$$+c\left(\tau_s^2-1\right)\frac{c}{c^{-(\ell+1)}}\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta)\Bigg)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\Bigg[c^{\ell+1}\Bigg(c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+$$
$$+c^2\left(\tau_s^2-1\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta)\Bigg)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\Bigg[c^{\ell+1}\Bigg(c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+$$
$$+\left((c\tau_s)^2-c^2\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta)\Bigg)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg]\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}\Bigg(\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)-$$
$$-\alpha^2 q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}\zeta P_\ell^m(\zeta)\Bigg)\cos\varphi f_m^q(\varphi)=$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-\ell}\left(\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\overset{(288)}{=}$$
$$=C_\ell^m\alpha^{-\ell}\left(\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)=$$
$$=-C_\ell^m\alpha^2\alpha^{-(\ell+2)}\left((\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\overset{(141)}{=}-C_\ell^m\alpha^2 f_{\ell,2}^{m/q,2}$$

- $$\lim_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,3}^{m/q,2}=\lim_{c\to 0^+}\left[c\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\right)\sin\varphi f_m^q(\varphi)\right]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\Bigg[\Bigg(c\tau_s\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+$$
$$+c\left(\tau_s^2-1\right)\frac{c}{c^{-(\ell+1)}}\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta)\Bigg)\sin\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\Bigg[c^{\ell+1}\Bigg(c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+$$
$$+c^2\left(\tau_s^2-1\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta)\Bigg)\sin\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\Bigg[c^{\ell+1}\Bigg(c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)+$$

$$+\left(\left(c\tau_s\right)^2-c^2\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\right)}{d\left(c\tau_s\right)}\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\Bigg)\sin\varphi\, f_m^q\left(\varphi\right)\Bigg]\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}\Bigg(\alpha q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-$$

$$-\alpha^2 q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}\left(\ell+1\right)\alpha^{-(\ell+2)}\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\Bigg)\sin\varphi\, f_m^q\left(\varphi\right)=$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}\alpha^{-\ell}\left(\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-\left(\ell+1\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\right)\sin\varphi\, f_m^q\left(\varphi\right)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha^{-\ell}\left(\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-\left(\ell+1\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\right)\sin\varphi\, f_m^q\left(\varphi\right)=$$

$$=-C_\ell^m\alpha^2\alpha^{-(\ell+2)}\left(\left(\ell+1\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)-\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)\right)\sin\varphi\, f_m^q\left(\varphi\right)\overset{(141)}{=}-C_\ell^m\alpha^2\, f_{\ell,3}^{m/q,2}$$

Άρα, για τους συντελεστές των αγνώστων ισχύει:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s f_{\ell,j}^{m/q,2}=-C_\ell^m\alpha^2 f_{\ell,j}^{m/q,2},\ \text{για κάθε}\ j=1,2,3. \tag{293}$$

Επίσης, για τη σχέση (247) έχουμε:

$${}_s g_\ell^{m/q,2}=-c^2\,{}_sM_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\sqrt{1-\zeta^2}\left\{\tau_s\frac{Q_\ell^m\left(\tau_s\right)}{Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)}P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\right\}f_m^q\left(\varphi\right)-$$

$$-2c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right]P_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow{}_s g_\ell^{m/q,2}=\underbrace{-c^2\,{}_sM_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\sqrt{1-\zeta^2}\left\{\tau_s\frac{Q_\ell^m\left(\tau_s\right)}{Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)}P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\right\}f_m^q\left(\varphi\right)-}_{\mathrm{I}}$$

$$\underbrace{-2c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)\left[\hat{\boldsymbol{\tau}}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right]P_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)}_{\mathrm{II}}$$

και θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα όρια των I και II. Είναι:

- $$\lim_{c\to0^+}\mathrm{I}=\lim_{c\to0^+}\Bigg[-c^2\,{}_sM_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\left\{\tau_s\frac{Q_\ell^m\left(\tau_s\right)}{Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)}P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\right\}f_m^q\left(\varphi\right)\Bigg]\overset{(252)}{=}$$

$$=\lim_{c\to0^+}\Bigg[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\right)\sqrt{\left(c\tau_s\right)^2-c^2}P_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\left\{c\tau_s\frac{Q_\ell^m\left(\tau_s\right)}{Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)}P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)-c\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)\right\}f_m^q\left(\varphi\right)\Bigg]\overset{(232),(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\,f_m^q(\varphi_0)\right)\right)\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}\left\{c\tau_s\frac{Q_\ell^m(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}P_\ell^{m\prime}(\zeta)-c\zeta P_\ell^m(\zeta)\right\}f_m^q(\varphi)\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.\frac{c}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\sqrt{1-\zeta^2}\left\{c\tau_s\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}P_\ell^{m\prime}(\zeta)-c\zeta P_\ell^m(\zeta)\right\}f_m^q(\varphi)\right]=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.$$

$$\left.\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\sqrt{1-\zeta^2}\left\{c\tau_s\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}P_\ell^{m\prime}(\zeta)-c\zeta P_\ell^m(\zeta)\right\}f_m^q(\varphi)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)$$

$$\alpha p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}\sqrt{1-\zeta^2}\left[-\alpha\frac{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)=$$

$$=\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}(-1)^{2m}\,\varepsilon_m q_\ell r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)$$

$$p_\ell\ell\alpha^\ell\sqrt{1-\zeta^2}\left(\frac{\alpha^2}{\ell+1}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)f_m^q(\varphi)\overset{(89)}{=}$$

$$=\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\,p_\ell q_\ell\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\ell\alpha^\ell\sqrt{1-\zeta^2}\left(\frac{\alpha^2}{\ell+1}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)f_m^q(\varphi)\overset{(97),\,(129),\,(225)}{=}$$

$$=\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}(\zeta)\,f_m^q(\varphi)$$

και επίσης,

- $$\lim_{c\to0^+}\mathrm{II}=\lim_{c\to0^+}\left[-2c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)\left[{}_s\hat{\boldsymbol\tau}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol\zeta}\right]P_\ell^m\left(\tau_s\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)\right]\overset{(232),\,(235),\,(252)}{=}$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[-2\left(\left(c\tau_s\right)^2-c^2\zeta^2\right)\right.$$

$$\left.\left[{}_s\hat{\boldsymbol\tau}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_mQ_\ell^m\left(\tau_0\right)P_\ell^m\left(\zeta_0\right)f_m^q\left(\varphi_0\right)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]P_\ell^m\left(\tau_s\right)Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[-2\left(\left(c\tau\right)^2-c^2\zeta^2\right)\right.$$

$$\left.\left[{}_s\hat{\boldsymbol\tau}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}c^\ell}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_mc^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_0\right)Y_\ell^m\left(\zeta_0,\varphi_0\right)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]c^\ell P_\ell^m\left(\tau_s\right)Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left\{-2\left(\left(c\tau\right)^2-c^2\zeta^2\right)\right.$$

$$\left.\left[{}_s\hat{\boldsymbol\tau}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_mc^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_0\right)Y_\ell^m\left(\zeta_0,\varphi_0\right)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]c^\ell P_\ell^m\left(\tau_s\right)Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right\}\overset{(223)}{=}$$

$$=-2\alpha^2\left[\hat{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_mq_\ell\left(-1\right)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^m\left(\zeta_0,\varphi_0\right)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]$$

$$p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)=$$

$$=-2\alpha^2\left[\hat{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\,p_\ell q_\ell\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_mr_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^m\left(\zeta_0,\varphi_0\right)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\overset{(89),\,(97),\,(129),\,(225)}{=}$$

$$=-2\left[\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]\alpha^{\ell+2}Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)$$

Οπότε τελικά είναι:

$$\lim_{c\to0^+}{}_sg_\ell^{m/q,2}=\lim_{c\to0^+}\mathrm{I}+\lim_{c\to0^+}\mathrm{II}=$$

$$=\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)-2\left[\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right]\alpha^{\ell+2}Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)=$$

$$=-\alpha^2\left[-\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\frac{\ell\alpha^\ell}{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^{m\prime}\left(\zeta\right)f_m^q\left(\varphi\right)+2\left(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}\left(\mathbf{r}_0\right)\cdot\hat{\boldsymbol\zeta}\right)\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}\left(\zeta,\varphi\right)\right]\overset{(143)}{=}$$

$$=-\alpha^2g_\ell^{m/q,2}$$

Έτσι, και για τον άλλο όρο της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa=2$ ισχύει:

$$\lim_{c\to0^+}{}_sg_\ell^{m/q,2}=-\alpha^2g_\ell^{m/q,2}\,. \tag{294}$$

Έτσι, για τη σχέση του συστήματος (239) για $\kappa=2$ έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}{}_s f_{\ell,j}^{m/q,2}\left(\tau_s,\zeta,\varphi\right){}_s b_{\ell,j}^{m/q}-{}_s g_{\ell}^{m/q,2}\left(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\lim_{c\to 0^+}{}_s f_{\ell,j}^{m/q,2}\right){}_s b_{\ell,j}^{m/q}-\lim_{c\to 0^+}{}_s g_{\ell}^{m/q,2}\right]=0\overset{(293),\,(294)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(-C_\ell^m\alpha^2 f_{\ell,j}^{m/q,2}\right){}_s b_{\ell,j}^{m/q}+\alpha^2 g_{\ell}^{m/q,2}\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}-\alpha^2 f_{\ell,j}^{m/q,2}C_\ell^m\,{}_s b_{\ell,j}^{m/q}+\alpha^2 g_{\ell}^{m/q,2}\right]=0\underset{\text{διαιρώμε}\,-\alpha^2}{\overset{(289)}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}f_{\ell,j}^{m/q,2}\left(\alpha,\zeta,\varphi\right)b_{\ell,j}^{m/q}-g_{\ell}^{m/q,2}\left(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)\right]=0$$

που είναι η $2^{η}$ εξίσωση ($\kappa=2$) του συστήματος (122).

Προχωράμε τώρα στην τελευταία εξίσωση του συστήματος (239), αυτή για $\kappa=3$ όπου έχουμε:

- $$\lim_{c\to 0^+}{}_s f_{\ell,1}^{m/q,3}=\lim_{c\to 0^+}\left[c\sqrt{\tau_s^2-1}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left[\sqrt{\left(c\tau_s\right)^2-c^2}\,\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}\alpha q_\ell\left(-1\right)^m\frac{\left(\ell+m\right)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha^{-\ell}\zeta P_\ell^m\left(\zeta\right)f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)=\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}C_\ell^m\alpha^{-(\ell+2)}\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)P_\ell^m\left(\zeta\right)\overset{(144)}{=}$$

$$=\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}C_\ell^m f_{\ell,1}^{m/q,3}$$

- $$\lim_{c\to 0^+}{}_s f_{\ell,2}^{m/q,3}=\lim_{c\to 0^+}\left[c\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m\left(\zeta\right)\left(\tau_s Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\cos\varphi f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)+\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}\left(\tau_s\right)\sin\varphi f_m^{q}\left(\varphi\right)\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left[\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m\left(\zeta\right)\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\cos\varphi f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+c\left(\tau_s^2-1\right)\frac{c}{c^{-(\ell+1)}}\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\right)}{d\left(c\tau_s\right)}\sin\varphi f_m^{q}\left(\varphi\right)\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left[c^{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m\left(\zeta\right)\left(c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m\left(\tau_s\right)\cos\varphi f_m^{q\prime}\left(\varphi\right)+\right.\right.$$

$$+\left((c\tau_s)^2-c^2\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\sin\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg)\Bigg]\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\Bigg(\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)-$$

$$-\alpha^2 q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}\sin\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg)=$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-\ell}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\left(\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi)\right)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha^{-\ell}\sqrt{1-\zeta^2}\left(-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right)P_\ell^m(\zeta)=$$

$$=C_\ell^m\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\alpha^{-(\ell+2)}\left(-(\ell+1)\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right)P_\ell^m(\zeta)\overset{(145)}{=}C_\ell^m\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\,f_{\ell,2}^{m/q,3}$$

- $$\lim_{c\to0^+}{}^s f_{\ell,3}^{m/q,3}=\lim_{c\to0^+}\left[c\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\left(\tau_sQ_\ell^m(\tau_s)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)-(\tau_s^2-1)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\right)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\Bigg[\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\Bigg(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c\tau_sc^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)+$$

$$-c(\tau_s^2-1)\frac{c}{c^{-(\ell+1)}}\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\cos\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg)\Bigg]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\Bigg[c^{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\Bigg(c\tau_sc^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)+$$

$$-\left((c\tau_s)^2-c^2\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\cos\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg)\Bigg]\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{\ell+1}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\Bigg(\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)+$$

$$+\alpha^2 q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}(\ell+1)\alpha^{-(\ell+2)}\cos\varphi f_m^q(\varphi)\Bigg)=$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-\ell}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\left(\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)+(\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\right)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha^{-\ell}\sqrt{1-\zeta^2}\left((\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi)+\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right)P_\ell^m(\zeta)=$$

$$=C_\ell^m\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\alpha^{-(\ell+2)}\left((\ell+1)\cos\varphi f_m^q(\varphi)+\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right)P_\ell^m(\zeta)\overset{(146)}{=}C_\ell^m\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\,f_{\ell,3}^{m/q,3}$$

Άρα, για τους συντελεστές των αγνώστων ισχύει:

$$\lim_{c\to0^+}{}^s f_{\ell,j}^{m/q,3}=C_\ell^m\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\,f_{\ell,j}^{m/q,3},\ \text{για κάθε}\ j=1,2,3. \tag{295}$$

Επίσης, για τη σχέση (251) έχουμε:

$$
{}_s g_\ell^{m/q,3} = -c^2\, {}_s M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)+
$$

$$
+2c^2\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\left[{}_s\hat{\boldsymbol\tau}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol\varphi}\right]\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow {}_s g_\ell^{m/q,3} = \underbrace{-c^2\, {}_s M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\left[Q_\ell^m(\tau_s)/Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)}_{\mathrm{I}}+
$$

$$
\underbrace{+2c^2\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\left[{}_s\hat{\boldsymbol\tau}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol\varphi}\right]\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)}_{\mathrm{II}}
$$

και θα υπολογίσουμε και εδώ όπως προηγουμένως ξεχωριστά τα όρια των I και II. Είναι:

- $$\lim_{c\to0^+}\mathrm{I}=\lim_{c\to0^+}\left[-c^2\, {}_s M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\tau_s\sqrt{\tau_s^2-1}\frac{Q_\ell^m(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\overset{(252)}{=}$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\,{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\,\frac{Q_\ell^m(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\overset{(232),\,(235)}{=}
$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\,f_m^q(\varphi_0)\right)\right)c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.
$$

$$
\left.\frac{Q_\ell^m(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}P_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)\right]=
$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.
$$

$$
\left.\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{c}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)\right]=
$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left[-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)c\tau_s\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\right.
$$

$$
\left.\frac{c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\overset{(223)}{=}
$$

$$
=-\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\alpha^2
$$

$$\frac{q_\ell (-1)^m \dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}}{q_\ell (-1)^m \dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}} p_\ell \frac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi) \overset{(89)}{=}$$

$$= \left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\, p_\ell q_\ell \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{\ell+1}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi) \overset{(97),\,(125),\,(225)}{=}$$

$$= M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{\ell+1}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi)$$

και επίσης,

- $$\lim_{c\to 0^+}\mathrm{II} = \lim_{c\to 0^+}\left[2c^2\sqrt{\tau_s^{\,2}-\zeta^2}\left[{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times{}_s\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\sqrt{\tau_s^2-1}P_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi)\right] \overset{(232),\,(235),\,(252)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\Bigg\{2\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}$$

$$\left[{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\, f_m^q(\varphi_0)\right)\right)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

$$\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}P_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi)\Bigg\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\Bigg\{2\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}$$

$$\left[{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}c^\ell}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^m(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

$$\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi)\Bigg\} \overset{(223)}{=}$$

$$= 2\alpha\left[\hat{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^m(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

$$\alpha\, p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi) =$$

$$= 2\left[\hat{\mathbf{r}}\times\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\times\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\, p_\ell q_\ell\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^m(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

$$\alpha^{\ell+2}\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi) \overset{(89),\,(97),\,(129),\,(225)}{=}$$

$$= 2\left[\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\alpha^{\ell+2}\sqrt{1-\zeta^2}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

Οπότε τελικά είναι:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0^+} {}_s g_\ell^{m/q,3} = \lim_{c\to 0^+} \mathrm{I} + \lim_{c\to 0^+} \mathrm{II} = \\
&= M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell+2}}{\ell+1} P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi) + 2\left[\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\alpha^{\ell+2}\sqrt{1-\zeta^2}\,\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) = \\
&= \alpha^2\left[M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell}}{\ell+1} P_\ell^m(\zeta)\, f_m^{q\prime}(\varphi) + 2\left[\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\alpha^{\ell}\sqrt{1-\zeta^2}\,\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] = \\
&= \alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\left[M_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\frac{\ell\alpha^{\ell}}{\ell+1}\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, f_m^{q\prime}(\varphi) + 2\left[\hat{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{M}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]\alpha^{\ell}\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] \overset{(147)}{=} \\
&= \alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\, g_\ell^{m/q,3}
\end{aligned}
$$

Έτσι, και για τον άλλο όρο της εξίσωσης του συστήματος για $\kappa = 3$ ισχύει:

$$
\lim_{c\to 0^+} {}_s g_\ell^{m/q,3} = \alpha^2 g_\ell^{m/q,3}. \tag{296}
$$

Έτσι, για τη σχέση του συστήματος (239) για $\kappa = 3$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} {}_s f_{\ell,j}^{m/q,3}(\tau_s,\zeta,\varphi)\, {}_s b_{\ell,j}^{m/q} - {}_s g_\ell^{m/q,3}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right] = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\lim_{c\to 0^+} {}_s f_{\ell,j}^{m/q,3}\right) {}_s b_{\ell,j}^{m/q} - \lim_{c\to 0^+} {}_s g_\ell^{m/q,3}\right] = 0 \overset{(295),\,(296)}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(C_\ell^m\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\, f_{\ell,j}^{m/q,3}\right) {}_s b_{\ell,j}^{m/q} - \alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\, g_\ell^{m/q,3}\right] = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\, f_{\ell,j}^{m/q,2} C_\ell^m\, {}_s b_{\ell,j}^{m/q} - \alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}\, g_\ell^{m/q,2}\right] = 0 \underset{\text{διαιρούμε με } \alpha^2\sqrt{1-\zeta^2}}{\overset{(289)}{\Leftrightarrow}} \\
&\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} f_{\ell,j}^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi) b_{\ell,j}^{m/q} - g_\ell^{m/q,3}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right] = 0
\end{aligned}
$$

που είναι η 3^{η} εξίσωση ($\kappa = 3$) του συστήματος (122). Και εδώ ολοκληρώνεται ο εκφυλισμός που στόχο έχει την επιβεβαίωση του αποτελέσματος του $\mathbf{H}_2^s$. Επαληθεύτηκαν όλες οι σχέσεις που προέκυψαν κατά την επίλυσή του καθώς επίσης και το ίδιο το αποτέλεσμά του. Παρατηρήσαμε ότι στον εκφυλισμό του $\mathbf{H}_2^s$ οι άγνωστες διανυσματικές σταθερές πολλαπλασιάζονταν με μία ποσότητα που ονομάσαμε C_ℓ^m. Αυτό όμως δεν αποτέλεσε πρόβλημα αφού και στον εκφυλισμό του συστήματος οι σταθερές πολλαπλασιάζονταν με την ίδια ακριβώς ποσότητα. Και έτσι ο εκφυλισμός μας έδωσε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Προχωράμε τώρα στην επαλήθευση του τελευταίου σκεδαζόμενου μαγνητικού πεδίου, του $\mathbf{H}_3^s$. Εδώ τα πράγματα είναι πιο απλά καθώς η διαδικασία επίλυσής του ήταν πολύ πιο απλή. Θα αρκεστούμε, λοιπόν, μόνο στην επιβεβαίωση του αποτελέσματός του. Αυτό το πεδίο στο σφαιροειδές σύστημα δίνεται από τη σχέση (253) με τη βοήθεια των σχέσεων (254). Είναι:

$$
{}_s\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})=\frac{\mathbf{m}}{\pi}\cdot\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\frac{\partial\mathbf{f}(\tau)}{\partial\tau}\zeta+\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}\sqrt{1-\zeta^2}\right]}_{\mathrm{I}}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}+\right.
$$

$$
\left.+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[-\mathbf{f}(\tau)\sqrt{1-\zeta^2}+\mathbf{g}(\tau,\varphi)\zeta\right]}_{\mathrm{II}}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi}}_{\mathrm{III}}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right\}
$$

και θα υπολογίσουμε αρχικά τα όρια των I, II και III ξεχωριστά. Έχουμε:

- $$\lim_{c\to0^+}\mathrm{I}=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\frac{\partial\mathbf{f}(\tau)}{\partial\tau}\zeta+\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}\sqrt{1-\zeta^2}\right]\right)\overset{(254)}{=}$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\frac{\partial\left(\hat{\mathbf{x}}_1\dfrac{Q_1(\tau)}{Q_1'(\tau_s)}\right)}{\partial\tau}\zeta+\frac{\partial\left((\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi)\dfrac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2-1}}\dfrac{Q_1^1(\tau)}{Q_1^{1\prime}(\tau_s)}\right)}{\partial\tau}\sqrt{1-\zeta^2}\right]\right)=
$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{c\sqrt{\tau^2-1}}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\frac{\partial Q_1(\tau)}{\partial\tau}\hat{\mathbf{x}}_1\frac{\zeta}{\dfrac{dQ_1(\tau_s)}{d\tau_s}}+\frac{\partial Q_1^1(\tau)}{\partial\tau}(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi)\frac{c\tau_s}{c\sqrt{\tau_s^2-1}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\dfrac{dQ_1^1(\tau_s)}{d\tau_s}}\right]\right)=
$$

$$
=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{\sqrt{(c\tau)^2-c^2}}{\sqrt{(c\tau)^2-c^2\zeta^2}}\left[\frac{c}{c^{-2}}\frac{\partial\left(c^{-2}Q_1(\tau)\right)}{\partial(c\tau)}\hat{\mathbf{x}}_1\frac{\zeta}{\dfrac{c}{c^{-2}}\dfrac{d\left(c^{-2}Q_1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{c}{c^{-2}}\frac{\partial\left(c^{-2}Q_1^1(\tau)\right)}{\partial(c\tau)}(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi)\frac{c\tau_s}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\dfrac{c}{c^{-2}}\dfrac{\partial\left(c^{-2}Q_1^1(\tau_s)\right)}{\partial(c\tau_s)}}\right]\right)=
$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{(c\tau)^2-c^2}}{\sqrt{(c\tau)^2-c^2\zeta^2}}\left[\frac{\partial\left(c^{-2}Q_1(\tau)\right)}{\partial(c\tau)}\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{\zeta}{\dfrac{d\left(c^{-2}Q_1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\left(c^{-2}Q_1^1(\tau)\right)}{\partial(c\tau)}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_2\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{c\tau_s}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\dfrac{\partial\left(c^{-2}Q_1^1(\tau_s)\right)}{\partial(c\tau_s)}}\right]\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{r}{r}\left[q_1(-1)^0\frac{1!}{1!}(-2)r^{-3}\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{\zeta}{q_1(-1)^0\dfrac{1!}{1!}(-2)\alpha^{-3}}+\right.$$

$$\left.+q_1(-1)^1\frac{2!}{2!}(-2)r^{-3}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_2\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{\alpha}{\alpha}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{q_1(-1)^1\dfrac{2!}{2!}(-2)\alpha^{-3}}\right]=$$

$$=r^{-3}\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{\zeta}{\alpha^{-3}}+r^{-3}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_2\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha^{-3}}=$$

$$=\frac{r^{-3}}{\alpha^{-3}}\zeta\hat{\boldsymbol{x}}_1+\frac{r^{-3}}{\alpha^{-3}}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2+\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left(\zeta\hat{\boldsymbol{x}}_1+\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_2+\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi\hat{\boldsymbol{x}}_3\right)\overset{(82)}{=}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{r}}$$

Επομένως,

$$\lim_{c\to 0^+}\mathrm{I}=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{297}$$

Επίσης,

- $$\lim_{c\to 0^+}\mathrm{II}=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[-\mathbf{f}(\tau)\sqrt{1-\zeta^2}+\mathbf{g}(\tau,\varphi)\zeta\right]\right)\overset{(254)}{=}$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[-\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{Q_1(\tau)}{Q_1'(\tau_s)}\sqrt{1-\zeta^2}+\left(\hat{\boldsymbol{x}}_2\cos\varphi+\hat{\boldsymbol{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2-1}}\frac{Q_1^1(\tau)}{Q_1^{1\prime}(\tau_s)}\zeta\right]\right)=$$

$$=\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{c}{c\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[-\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{1}{c^{-2}}\frac{c^{-2}Q_1(\tau)}{\dfrac{c}{c^{-2}}\dfrac{d\left(c^{-2}Q_1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\sqrt{1-\zeta^2}+\right.\right.$$

$$+\left(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{c\tau_s}{c\sqrt{\tau_s^2-1}}\frac{1}{c^{-2}}\frac{c^{-2}Q_1^1(\tau)}{\dfrac{c}{c^{-2}}\dfrac{d\left(c^{-2}Q_1^1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\zeta\Bigg]\Bigg)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-c^2\zeta^2}}\left[-\hat{\mathbf{x}}_1\frac{c^{-2}Q_1(\tau)}{\dfrac{d\left(c^{-2}Q_1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\sqrt{1-\zeta^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{c\tau_s}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}}\frac{c^{-2}Q_1^1(\tau)}{\dfrac{d\left(c^{-2}Q_1^1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\zeta\right]\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{1}{r}\left[-\hat{\mathbf{x}}_1\frac{q_1(-1)^0\frac{1!}{1!}r^{-2}}{q_1(-1)^0\frac{1!}{1!}(-2)\alpha^{-3}}\sqrt{1-\zeta^2}+\left(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{\alpha}{\alpha}\frac{q_1(-1)^1\frac{2!}{1!}r^{-2}}{q_1(-1)^1\frac{2!}{1!}(-2)\alpha^{-3}}\zeta\right]=$$

$$=-\hat{\mathbf{x}}_1\frac{r^{-3}}{(-2)\alpha^{-3}}\sqrt{1-\zeta^2}+\left(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi\right)\frac{r^{-3}}{(-2)\alpha^{-3}}\zeta=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left(-\sqrt{1-\zeta^2}\,\hat{\mathbf{x}}_1+\zeta\cos\varphi\,\hat{\mathbf{x}}_2+\zeta\sin\varphi\,\hat{\mathbf{x}}_3\right)\overset{(83)}{=}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{\zeta}}$$

Οπότε

$$\lim_{c\to0^+}\mathrm{II}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{\zeta}}, \tag{298}$$

Και για το όριο του III έχουμε:

- $\lim\limits_{c\to0^+}\mathrm{III}=\lim\limits_{c\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\dfrac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi}\right)\overset{(254)}{=}$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\frac{\partial\left(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi\right)\dfrac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2-1}}\dfrac{Q_1^1(\tau)}{Q_1^{1\prime}(\tau_s)}}{\partial\varphi}\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{c}{c\sqrt{\tau^2-1}}\frac{\partial\left(\hat{\mathbf{x}}_2\cos\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\sin\varphi\right)}{\partial\varphi}\frac{c\tau_s}{c\sqrt{\tau_s^2-1}}\frac{1}{c^{-2}}\frac{c^{-2}Q_1^1(\tau)}{\frac{c}{c^{-2}}\frac{d\left(c^{-2}Q_1^1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{(c\tau)^2-c^2}}\left(-\hat{\mathbf{x}}_2\sin\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\cos\varphi\right)\frac{c\tau_s}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}}\frac{c^{-2}Q_1^1(\tau)}{\frac{d\left(c^{-2}Q_1^1(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{1}{r}\left(-\hat{\mathbf{x}}_2\sin\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\cos\varphi\right)\frac{\alpha}{\alpha}\frac{q_1(-1)^1\frac{2!}{1!}r^{-2}}{q_1(-1)^1\frac{2!}{1!}(-2)\alpha^{-3}}=\frac{1}{r}\left(-\hat{\mathbf{x}}_2\sin\varphi+\hat{\mathbf{x}}_3\cos\varphi\right)\frac{r^{-2}}{(-2)\alpha^{-3}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\left(-\sin\varphi\hat{\mathbf{x}}_2+\cos\varphi\hat{\mathbf{x}}_3\right)\overset{(84)}{=}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Επομένως.

$$\lim_{c\to0^+}\mathrm{III}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{299}$$

Συνεπώς, τελικά έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})=\lim_{c\to0^+}\left[\frac{\mathbf{m}}{\pi}\cdot\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{\tau^2-1}}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[\frac{\partial\mathbf{f}(\tau)}{\partial\tau}\zeta+\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\tau}\sqrt{1-\zeta^2}\right]}_{\mathrm{I}}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\tau^2-\zeta^2}}\left[-\mathbf{f}(\tau)\sqrt{1-\zeta^2}+\mathbf{g}(\tau,\varphi)\zeta\right]}_{\mathrm{II}}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\zeta}}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{\tau^2-1}}\frac{\partial\mathbf{g}(\tau,\varphi)}{\partial\varphi}}_{\mathrm{III}}\otimes{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right\}\right]\overset{(297),\,(298),\,(299)}{=}$$

$$=\frac{\mathbf{m}}{\pi}\cdot\left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\mathbf{r}}\otimes\hat{\mathbf{r}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{\zeta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\zeta}}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\hat{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\cdot\left[2\hat{\mathbf{r}}\otimes\hat{\mathbf{r}}-\hat{\boldsymbol{\zeta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\zeta}}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\cdot\left[3\hat{\mathbf{r}}\otimes\hat{\mathbf{r}}-\hat{\mathbf{r}}\otimes\hat{\mathbf{r}}-\hat{\boldsymbol{\zeta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\zeta}}-\hat{\boldsymbol{\varphi}}\otimes\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]=$$

$$=\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3\frac{\mathbf{m}}{2\pi}\cdot\left[3\hat{\mathbf{r}}\otimes\hat{\mathbf{r}}-\tilde{\mathbf{I}}\right]\overset{(166)}{=}\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})$$

Και έτσι καταλήξαμε στο ζητούμενο που είναι:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})=\mathbf{H}_3^s(\mathbf{r})\,, \tag{300}$$

και έτσι ολοκληρώθηκε η διαδικασία εκφυλισμού άρα και επιβεβαίωσης όλων των αποτελεσμάτων των σκεδαζόμενως μαγνητικών πεδίων της εργασίας μας. Συνεπώς, αυτή η υποενότητα τελειώνει εδώ.

2.1.4 Επαλήθευση των ηλεκτρικών σκεδαζόμενων πεδίων

Σε αυτήν την υποενότητα γίνεται η επαλήθευση όλων των αποτελεσμάτων που βρήκαμε σχετικά με τα ηλεκτρικά σκεδαζομενα πεδία, δηλ. το $\mathbf{E}_1^s$ και το $\mathbf{E}_3^s$. Θα ξεκινήσουμε με το $\mathbf{E}_1^s$ του οποίου η διαδικασία υπολογισμού του ήταν η απλούστερη όλων αφού αυτό βρέθηκε από μια απλή αντικατάσταση του μαγνητικού σκεδαζόμενου $\mathbf{H}_2^s$ στον τύπο του Maxwell που προέκυψε για αυτό. Έτσι, αφού στο σφαιροειδές σύστημα το αποτέλεσμά του δίνεται από τη σχέση (255) έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\, {}_s u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\, {}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\right]\right\}\right)\overset{(232),\,(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\left(Q_\ell^m(\tau)P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)\,f_m^q(\varphi_0)\right)\right)\frac{P_\ell^{m\prime}(\tau_s)}{Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)}\right]\right\}\right)=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\dfrac{c}{c^\ell}\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{c}{c^{-(\ell+1)}}\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]\right\}\right)=$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{c^{\ell+1}\,{}_s\nabla\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(2\ell+1)}{c^{-\ell}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{c^{-(2\ell+1)}\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]\right\}\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{{}_s\nabla\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[c^{\ell+1}{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+c^{\ell+1}\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{c^{-(2\ell+1)}}{c^{-\ell}}(2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]\right\}\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{{}_s\nabla\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[c^{\ell+1}{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+c^{\ell+1}\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot{}_s\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{c^{-(2\ell+1)}}{c^{-\ell}}(2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\dfrac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}{\dfrac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}}\right]\right\}\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\times\right.$$

$$\times\left[c^{\ell+1}{}_s\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\ \nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.\frac{p_\ell\dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}}{q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}\right]\right\}\overset{(89)}{=}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla\left(r^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\times\right.$$

$$\times\left[c^{\ell+1}q_{\ell}(-1)^{m}\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\,{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}+\right.$$

$$+q_{\ell}(-1)^{m}\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^{2}(-1)^{m}\,\varepsilon_{m}r_{0}^{-(\ell+1)}Y_{\ell}^{m/q}(\zeta_{0},\varphi_{0})\right)\right)$$

$$\left.\left.\frac{p_{\ell}\dfrac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}}{\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}}\right]\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\right.$$

$$\left.\times\left[c^{\ell+1}q_{\ell}(-1)^{m}\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\,{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left((2\ell+1)\,p_{\ell}q_{\ell}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_{m}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]\right\}\overset{(225),\,(288)}{=}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\right.$$

$$\left.\times\left[C_{\ell}^{m}\,{}_{s}\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\left(\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_{m}u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]\right\}\overset{(97),\,(289)}{=}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left\{\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r})\times\left[\mathbf{b}_{\ell,ex}^{m/q}-\mathbf{r}\left(\frac{\mathbf{m}}{4\pi}\cdot\nabla_{\mathbf{r}_0}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\frac{\ell\alpha^{2\ell+1}}{\ell+1}\right]\right\}\overset{(169)}{=}\mathbf{E}_{1}^{s}(\mathbf{r})$$

Άρα,

$$\lim_{c\to 0^{+}}{}_{s}\mathbf{E}_{1}^{s}(\mathbf{r})=\mathbf{E}_{1}^{s}(\mathbf{r}). \tag{301}$$

Έτσι, έχει επιτευχθεί και η επιβεβαίωση του αποτελέσματος του πεδίου $\mathbf{E}_1^s$.

Προχωράμε τώρα στον εκφυλισμό που αφορά το $\mathbf{E}_3^s$, δηλ. στο αποτέλεσμα του πεδίου αυτού αλλά και όλων των σχέσεων που προέκυψαν στην πορεία υπολογισμού του. Είδαμε ότι η διαδικασία επίλυσής του ήταν παρόμοια με τη διαδικασία επίλυσης του $\mathbf{H}_2^s$, οπότε και ο εκφυλισμός του αντίστοιχου ηλεκτρικού σκεδαζόμενου στο σφαιροειδές θα γίνει με τον ίδιο περίπου τρόπο που έγινε και για το μαγνητικό σκεδαζόμενο ${}_s\mathbf{H}_2^s$. Συνεπώς, θα ξεκινήσουμε πρώτα με τον εκφυλισμό του αποτελέσματός του, δηλ. με τις σχέσεις (256) – (260) και (262) και έπειτα με τις σχέσεις που αφορούν το σύστημα που προέκυψε κατά την επίλυσή του, δηλ. με τις σχέσεις (263) – (275). Θα ξεκινήσουμε με τη σχέση (257), όπου θα έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} = \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3c^3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_s}^{\tau_0-e}\left(\tau'^2-\zeta'^2\right){}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}')\,{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,d\tau' d\zeta' d\varphi'\right) \overset{(232),\,(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_s}^{\tau_0-e}\left((c\tau')^2-(c\zeta')^2\right)\frac{(2\ell+1)}{c}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau')P_\ell^m(\zeta')\,f_m^q(\varphi')\,{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,dc\tau' d\zeta' d\varphi'\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_s}^{\tau_0-e}\left((c\tau')^2-(c\zeta')^2\right)\frac{(2\ell+1)}{c}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m \frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau')Y_\ell^m(\zeta',\varphi')\,{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,dc\tau' d\zeta' d\varphi'\right) \overset{(223),\,(301)}{=}$$

$$= -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{r_s}^{r_0-e} r'^2\frac{(2\ell+1)}{c^{-\ell}}$$

$$\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r'^{-(\ell+1)}Y_\ell^m(\zeta',\varphi')\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,dr' d\zeta' d\varphi' \overset{(89),\,(97)}{=}$$

$$= \frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell q_\ell(2\ell+1)\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{r_s}^{r_0-e} r'^2\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}')\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,dr' d\zeta' d\varphi'\right) \overset{(177)}{=}$$

$$= \frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell q_\ell(2\ell+1)\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}$$

Άρα, προέκυψε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q} = \frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell q_\ell(2\ell+1)\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\,. \tag{302}$$

Επίσης, όσον αφορά τη σχέση (258) έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} = \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3c^3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_0+e}^{+\infty}\left(\tau'^2-\zeta'^2\right){}_s\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}')\,{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\,d\tau' d\zeta' d\varphi'\right) \overset{(232),\,(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_0+e}^{+\infty}\left((c\tau')^2-(c\zeta')^2\right)\frac{(2\ell+1)}{c}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 (-1)^m \varepsilon_m P_\ell^m(\tau') P_\ell^m(\zeta')\, f_m^q(\varphi')\, {}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\, d\tau' d\zeta' d\varphi' \right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_0+e}^{+\infty} \left((c\tau')^2-(c\zeta')^2\right)\frac{(2\ell+1)}{c}\right.$$

$$\left.\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 (-1)^m \varepsilon_m \frac{1}{c^\ell} c^\ell P_\ell^m(\tau') Y_\ell^m(\zeta',\varphi')\, {}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\, d\tau' d\zeta' d\varphi' \right) \overset{(223),(301)}{=}$$

$$= -\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{r_0+e}^{+\infty} r'^2 \frac{(2\ell+1)}{c^{\ell+1}}$$

$$\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2 (-1)^m \varepsilon_m p_\ell \frac{\ell!}{(\ell-m)!} r'^\ell Y_\ell^m(\zeta',\varphi')\, \mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\, dr' d\zeta' d\varphi' \overset{(88),(97)}{=}$$

$$= \frac{\ell!}{(\ell+m)!} c^{-(\ell+1)} (2\ell+1)\, p_\ell (-1)^m \left(-\frac{3}{2\pi}\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{r_0+e}^{+\infty} r'^2 \rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}')\, \mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')\, dr' d\zeta' d\varphi'\right) \overset{(179)}{=}$$

$$= \frac{\ell!}{(\ell+m)!} c^{-(\ell+1)} p_\ell (2\ell+1)(-1)^m \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}$$

Επομένως, ισχύει:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q} = \frac{\ell!}{(\ell+m)!} c^{-(\ell+1)} p_\ell (2\ell+1)(-1)^m \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}. \tag{303}$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau) = \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3(2\ell+1)}{8\pi^2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{\tau_0-e}^{\tau_0+e} \frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, d\Omega'\right\} P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi)\, d\varphi\, d\zeta\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3(2\ell+1)}{8\pi^2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{c\tau_0-e}^{c\tau_0+e} \frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} c^3\left(\tau'^2-\zeta'^2\right) d\tau' d\zeta' d\varphi'\right\} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\, d\varphi\, d\zeta\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3(2\ell+1)}{8\pi^2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\right.$$

$$\left.\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{c\tau_0-e}^{c\tau_0+e} \frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\left((c\tau')^2-(c\zeta')^2\right) d\tau' d\zeta' d\varphi'\right\} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\, d\varphi\, d\zeta\right) \overset{(282)}{\underset{(301)}{=}}$$

$$= -\frac{3(2\ell+1)}{8\pi^2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\left\{\lim_{e\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{r_0-e}^{r_0+e} \frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} r'^2 dr' d\zeta' d\varphi'\right\} Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\, d\varphi\, d\zeta \overset{(184)}{=}$$

$$= \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)$$

Άρα, καταλήξαμε ότι:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau) = \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r). \tag{304}$$

Συνεπώς, για το τριπλό ολοκλήρωμα από τη σχέση (260) έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right) = \lim_{c\to 0^+}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}P_\ell^m(\tau) + {}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}Q_\ell^m(\tau) + {}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)\right]P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau) + {}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau) + {}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \underset{(303),\,(304)}{\overset{(223),\,(302)}{=}}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell q_\ell(2\ell+1)\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\frac{1}{c^\ell}\left(p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}r^\ell\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\ell!}{(\ell+m)!}c^{-(\ell+1)}p_\ell(2\ell+1)(-1)^m\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}\right) + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[(2\ell+1)p_\ell q_\ell \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^\ell + (2\ell+1)p_\ell q_\ell\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \overset{(225)}{=}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^\ell + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)} + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) \overset{(185)}{=} -\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'$$

Άρα, τελικά,

$$\lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{{}_s\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{{}_s|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega'\right) = -\frac{3}{2\pi}\iiint_{\Omega}\frac{\mathbf{E}_1^s(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\Omega', \tag{305}$$

Επιπλέον, όσον αφορά τον εκφυλισμό της σχέσης (262) έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0) = \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times\left[\mathbf{r}(\tau,\zeta,\varphi)-\mathbf{r}_0\right]{}_s\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right) \overset{(235)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right) \overset{(232)}{=}$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\frac{(2\ell+1)}{c}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m Q_\ell^m(\tau_0)P_\ell^m(\zeta_0)f_m^q(\varphi_0)\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\frac{(2\ell+1)}{cc^{-(\ell+1)}}\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_0)Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right) \overset{(223)}{=}$$

$$= -\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)c^\ell(2\ell+1)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\right]^2(-1)^m\,\varepsilon_m q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0) =$$

$$= \frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell(2\ell+1)q_\ell\left(-\frac{3}{4\pi}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\left[\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m r_0^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right] \overset{(89),\,(97)}{=}$$

$$=\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^{\ell}(2\ell+1)q_{\ell}\left(-\frac{3}{4\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\mathbf{m}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\right)\overset{(188)}{=}$$

$$=\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^{\ell}(2\ell+1)q_{\ell}\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)$$

Δηλ., προέκυψε ότι:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)=\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^{\ell}(2\ell+1)q_{\ell}\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0). \tag{306}$$

Συνεπώς, τελικά, για το αποτέλεσμα του $\mathbf{E}_3^s$ έχουμε σύμφωνα και με τη σχέση (256):

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})=\lim_{c\to0^+}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left({}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}+{}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)Q_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}P_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)\right]P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+{}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\frac{1}{c^{\ell}}c^{\ell}P_\ell^m(\tau)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\underset{(303),\,(304)}{\overset{(223),\,(302)}{=}}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}+\right.$$

$$+\frac{\ell!}{(\ell+m)!}c^{-(\ell+1)}p_\ell(2\ell+1)(-1)^m\,\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}+$$

$$\left.+\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^{\ell}q_\ell(2\ell+1)\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}\frac{1}{c^{\ell}}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}r^{\ell}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}r^{-(\ell+1)}+(2\ell+1)p_\ell q_\ell\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}r^{-(\ell+1)}+\right.$$

$$\left.+(2\ell+1)p_\ell q_\ell\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^{\ell}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(225)}{=}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)r^{-(\ell+1)}+\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^{\ell}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

οπότε τελικά,

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r})=$$

$$=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}+\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)r^{-(\ell+1)}\right.$$

$$\left.+\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^{\ell}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{307}$$

και παρατηρούμε, όμοια με τον εκφυλισμό του ${}_s\mathbf{H}_2^s$, και έχοντας υπόψιν τη σχέση (220) ότι το όριο του πεδίου είναι ακριβώς ίδιο με αυτό που βρήκαμε στο σφαιρικό με τη μόνη διαφορά ότι οι άγνωστοι συντελεστές στην (307) πολλαπλασιάζονται και εδώ με την ποσότητα $c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\dfrac{(\ell+m)!}{\ell!}$, που θέσουμε με C_ℓ^m στη σχέση (288). Έτσι, η (307) γράφεται:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(C_\ell^m\,{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)r^{-(\ell+1)} + \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^\ell + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)$$

και θέτοντας

$$\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} = C_\ell^m\,{}_s\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q}\,, \tag{308}$$

έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\mathbf{E}_3^s(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\left(\mathbf{d}_{\ell,ex}^{m/q} + \mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\right)r^{-(\ell+1)} + \mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}r^\ell + \mathbf{S}_\ell^{m/q}(r)\right]Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi), \tag{309}$$

που συμπίπτει με το αποτέλεσμα της (220). Έτσι, πραγματοποιείται η επιθυμητή επαλήθευση του αποτελέσματός μας με τη μόνη εκκρεμότητα να πρέπει και στον εκφυλισμό του συστήματος (263) να πολλαπλασιάζονται οι άγνωστοι με την ίδια ποσότητα C_ℓ^m. Προχωράμε λοιπόν, στον εκφυλισμό των συντελεστών του συστήματος (263), δηλ. τις σχέσεις (264) – (275). Για την περίπτωση $\kappa=1$ έχουμε:

- $\lim\limits_{c\to 0^+} {}_s\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,1} =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{c\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left[\left(\tau_s^2-1\right)Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta) + \tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{c}{c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left[\frac{1}{c^2}c^2\left(\tau_s^2-1\right)\frac{c}{c^{-(\ell+1)}}\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{c}c\tau_s\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{c^{\ell+1}}{(c\tau_s)^2 - c^2\zeta^2}\left[\left((c\tau_s)^2 - c^2\right)\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\zeta P_\ell^m(\zeta) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + c\tau_s c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)\right) \overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{c^{\ell+1}}{\alpha^2}\left[\alpha^2 q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}\zeta P_\ell^m(\zeta)+\right.$$

$$\left.+\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)=$$

$$=c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)+\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha^{-(\ell+2)}\left[-(\ell+1)\zeta P_\ell^m(\zeta)+\left(1-\zeta^2\right)P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right]f_m^q(\varphi)\overset{(201)}{=}C_\ell^m\,\overline{f}_{\ell,1}^{m/q,1}$$

- $\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{f}_{\ell,2}^{m/q,1}=$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[\frac{\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}{c\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left(\tau_s Q_\ell^{m\prime}(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)-Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}Q_\ell^m(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[\frac{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}{c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)}\left(\frac{1}{c}c\tau_s\frac{c}{c^{-(\ell+1)}}\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}P_\ell^m(\zeta)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)-$$

$$\left.-\frac{1}{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[\frac{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}}{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c\tau_s\frac{d\left(c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}P_\ell^m(\zeta)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)-$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{\alpha\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha^2}\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\alpha q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\left[-(\ell+1)\right]\alpha^{-(\ell+2)}P_\ell^m(\zeta)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\cos\varphi f_m^q(\varphi)-$$

$$-\frac{1}{\alpha\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)=$$

$$= q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} \alpha^{-(\ell+2)} \left(\left[-(\ell+1) \right] P_\ell^m(\zeta) - \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta) \right) \sqrt{1-\zeta^2} \cos\varphi f_m^q(\varphi) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} \alpha^{-(\ell+2)} P_\ell^m(\zeta) \sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) =$$

$$= q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} \alpha^{-(\ell+2)} \left[\left(\left[-(\ell+1) \right] P_\ell^m(\zeta) - \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta) \right) \sqrt{1-\zeta^2} \cos\varphi f_m^q(\varphi) - \right.$$

$$\left. - \frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] \overset{(202),\,(288)}{=} C_\ell^m \overline{f}_{\ell,2}^{m/q,1}$$

- $\lim\limits_{c\to0^+} {}_s\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,1} =$

$$= \lim_{c\to0^+} \left[\frac{\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}{c\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)} \left(\tau_s Q_\ell^{m\prime}(\tau_s) P_\ell^m(\zeta) - Q_\ell^m(\tau_s) \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta) \right) \sin\varphi f_m^q(\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}} Q_\ell^m(\tau_s) P_\ell^m(\zeta) \cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] =$$

$$= \lim_{c\to0^+} \left[\frac{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}}{c^2\left(\tau_s^2-\zeta^2\right)} \left(\frac{1}{c} c\tau_s \frac{c}{c^{-(\ell+1)}} \frac{d\left(c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)} P_\ell^m(\zeta) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s) \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta) \right) \sin\varphi f_m^q(\varphi) +$$

$$\left. + \frac{1}{c\sqrt{\tau_s^2-1}\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s) P_\ell^m(\zeta) \cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] =$$

$$= \lim_{c\to0^+} \left[\frac{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}}{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2} \left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}} c\tau_s \frac{d\left(c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)} P_\ell^m(\zeta) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s) \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta) \right) \sin\varphi f_m^q(\varphi) +$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} c^{-(\ell+1)} Q_\ell^m(\tau_s) P_\ell^m(\zeta) \cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi) \right] \overset{(223)}{=}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{1-\zeta^2}}{\alpha^2} \left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}} \alpha q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} \left[-(\ell+1) \right] \alpha^{-(\ell+2)} P_\ell^m(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^{-(\ell+1)}} q_\ell (-1)^m \frac{(\ell+m)!}{\ell!} \alpha^{-(\ell+1)} \zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta) \right) \sin\varphi f_m^q(\varphi) +$$

$$+\frac{1}{\alpha\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)=$$

$$=q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\alpha^{-(\ell+2)}\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)-\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi f_m^q(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+2)}P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)=$$

$$=q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}\alpha^{-(\ell+2)}\left[\left(-(\ell+1)P_\ell^m(\zeta)-\zeta P_\ell^{m\prime}(\zeta)\right)\sqrt{1-\zeta^2}\sin\varphi f_m^q(\varphi)+\right.$$

$$\left.+\frac{P_\ell^m(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\varphi f_m^{q\prime}(\varphi)\right]\overset{(203),\,(288)}{=}C_\ell^m\,\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,1}$$

Άρα, για τους συντελεστές των αγνώστων προέκυψαν:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,1}=C_\ell^m\,\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,1}\ \text{για κάθε}\ \ j=1,2,3. \tag{310}$$

Συνεχίζουμε τώρα με τη σχέση (267) όπου:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,1}=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[-\sqrt{\tau_s^2-1}\left(c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\right)^{-1}{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left\{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(\tau_s)-\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{P_\ell^m(\tau_s)}\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right\}P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)-\right.$$

$$\left.-\left\{{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{P_\ell^m(\tau_s)}\right]\right\}\cdot{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,in}^{m/q}(\tau_s,\zeta,\varphi)-{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\tau_s,\zeta,\varphi)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[-\frac{\sqrt{\tau_s^2-1}}{c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left\{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(\tau_s)-\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{P_\ell^m(\tau_s)}\right]P_\ell^{m\prime}(\tau_s)\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)-\right.$$

$$\left.-\left\{{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{P_\ell^m(\tau_s)}\right]\right\}\cdot{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s)-{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s)\right]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[-\frac{1}{c}\frac{c\sqrt{\tau_s^2-1}}{c\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left\{c\frac{d\left({}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}-\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)}\right]\frac{c}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)-\right.$$

$$\left.-\left\{{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{P_\ell^m(\tau_s)}\right]\right\}\cdot{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s)-{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot{}_s\nabla\,{}_su_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s)\right]\overset{(232)}{=}$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left[-\frac{1}{c}\frac{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left\{c\frac{d\left({}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}-\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)}\right]\frac{c}{c^\ell}\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)-\right.$$

$$-\left\{{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{P_\ell^m(\tau_s)}\right]\right\}\cdot{}_s\nabla\left(P_\ell^m(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right)-{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot{}_s\nabla\left(Q_\ell^m(\tau_s)P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right)\Bigg]=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\Bigg[-\frac{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}}{\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\left\{\frac{d\left({}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}-\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{c^\ell P_\ell^m(\tau_s)}\right]\frac{d\left(c^\ell P_\ell^m(\tau_s)\right)}{d(c\tau_s)}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)-$$

$$-\left\{{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)}{\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)}\right]\right\}\cdot{}_s\nabla\left(\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)$$

$$-{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot{}_s\nabla\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\Bigg]\overset{(223),\,(302),\,(303),\,(304)}{=}$$

$$=-\frac{\alpha}{\alpha}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left\{\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(\alpha)-\left[\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell}\right]p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\ell\alpha^{\ell-1}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)$$

$$-\left\{\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell q_\ell(2\ell+1)\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}\frac{1}{c^\ell}+\left[\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell}\right]\right\}\cdot\nabla\left(p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)-$$

$$-\frac{\ell!}{(\ell+m)!}p_\ell(2\ell+1)(-1)^m\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\nabla\left(q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left\{\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(\alpha)-\left[\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{\alpha^\ell}\right]\ell\alpha^{\ell-1}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)$$

$$-\left\{\frac{(\ell-m)!}{\ell!}q_\ell(2\ell+1)p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\right]\right\}\cdot\nabla\left(\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)-$$

$$-(2\ell+1)p_\ell q_\ell\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\nabla\left(\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left\{\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(\alpha)-\left[\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{\alpha^\ell}\right]\ell\alpha^{\ell-1}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)$$

$$-\left\{(2\ell+1)p_\ell q_\ell\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\left[\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{\alpha^\ell}\right]\right\}\cdot\nabla\left(\alpha^\ell Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)+$$

$$-(2\ell+1)p_\ell q_\ell\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\nabla\left(\alpha^{-(\ell+1)}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(88),\,(89),\,(225)}{=}$$

$$=-\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\left\{\mathbf{S}_\ell^{m/q\prime}(\alpha)-\ell\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{\alpha}\right\}Y_\ell^m(\zeta,\varphi)-\left\{\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+\frac{\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)}{\alpha^\ell}\right\}\cdot\nabla u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_s)-\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\cdot\nabla u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s)=$$

$$= -\left[\mathbf{s}^{m/q}_{\ell,in} + \frac{1}{\alpha^{\ell}}\mathbf{S}^{m/q}_{\ell}(\alpha)\right]\cdot\nabla u^{m/q}_{\ell,in}(\mathbf{r}_s) - \mathbf{s}^{m/q}_{\ell,ex}\cdot\nabla u^{m/q}_{\ell,ex}(\mathbf{r}_s) -$$

$$-\hat{\mathbf{r}}\cdot\left[\mathbf{S}^{m/q\prime}_{\ell}(\alpha) - \frac{\ell}{\alpha}\mathbf{S}^{m/q}_{\ell}(\alpha)\right]Y^m_{\ell}(\zeta,\varphi) \overset{(204)}{=} \overline{g}^{m/q,1}_{\ell}$$

Οπότε, τελικά, είναι:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{g}^{m/q,1}_{\ell} = \overline{g}^{m/q,1}_{\ell}. \tag{311}$$

Έτσι, για τη σχέση του συστήματος (263) για $\kappa = 1$ έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3} {}_s\overline{f}^{m/q,1}_{\ell,j}(\tau_s,\zeta,\varphi)\,{}_sd^{m/q}_{\ell,j} - {}_s\overline{g}^{m/q,1}_{\ell}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{f}^{m/q,1}_{\ell,j}\right){}_sd^{m/q}_{\ell,j} - \lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{g}^{m/q,1}_{\ell}\right] = 0 \overset{(310),\,(311)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(C^m_{\ell}\,\overline{f}^{m/q,1}_{\ell,j}\right){}_sd^{m/q}_{\ell,j} - \overline{g}^{m/q,1}_{\ell}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}^{m/q,1}_{\ell,j}C^m_{\ell}\,{}_sd^{m/q}_{\ell,j} - \overline{g}^{m/q,1}_{\ell}\right] = 0 \overset{(308)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}^{m/q,1}_{\ell,j}(\alpha,\zeta,\varphi)\,d^{m/q}_{\ell,j} - \overline{g}^{m/q,1}_{\ell}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right] = 0$$

που είναι η 1η εξίσωση ($\kappa = 1$) του συστήματος (190).

Προχωράμε τώρα και στην περίπτωση $\kappa = 2$ του συστήματος (263). Έχουμε:

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{f}^{m/q,2}_{\ell,1} = \lim_{c\to 0^+} 0 = 0 \overset{(205)}{=} \overline{f}^{m/q,2}_{\ell,1}$

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{f}^{m/q,2}_{\ell,2} = \lim_{c\to 0^+}\left(-Q^m_{\ell}(\tau)P^m_{\ell}(\zeta)\sin\varphi\, f^q_m(\varphi)\right) =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(-\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q^m_{\ell}(\tau_s)\sin\varphi Y^{m/q}_{\ell}(\zeta,\varphi)\right) \overset{(223)}{=}$$

$$= -\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_{\ell}(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\sin\varphi Y^{m/q}_{\ell}(\zeta,\varphi) \overset{(288)}{=}$$

$$= -C^m_{\ell}\alpha^{-(\ell+1)}\sin\varphi Y^{m/q}_{\ell}(\zeta,\varphi) \overset{(206)}{=} -C^m_{\ell}\,\overline{f}^{m/q,2}_{\ell,2}$$

- $\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{f}^{m/q,2}_{\ell,3} = \lim_{c\to 0^+}\left(Q^m_{\ell}(\tau)P^m_{\ell}(\zeta)\cos\varphi\, f^q_m(\varphi)\right) =$

$$= \lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q^m_{\ell}(\tau_s)\cos\varphi Y^{m/q}_{\ell}(\zeta,\varphi)\right) \overset{(223)}{=}$$

$$=\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\alpha^{-(\ell+1)}\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(207)}{=}-C_\ell^m\,\overline{f}_{\ell,3}^{m/q,2}$$

Άρα, για τους συντελεστές των αγνώστων έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,2}=-C_\ell^m\,\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,2}\ \text{ για κάθε }\ j=1,2,3. \tag{312}$$

Για τη σχέση (271) έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,2}=\lim_{c\to0^+}\Big\{\hat{\boldsymbol{\tau}}\times\Big[\big({}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+{}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\big)P_\ell^m(\tau_s)+$$
$$+{}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}Q_\ell^m(\tau_s)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\Big\}$$

$$=\lim_{c\to0^+}\Big\{\hat{\boldsymbol{\tau}}\times\Big[\big({}_s\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+{}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\big)\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)+$$
$$+{}_s\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\Big\}\underset{(303),\,(304),\,(306)}{\overset{(223),\,(302)}{=}}$$

$$=\hat{\mathbf{r}}\times\Big[\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell(2\ell+1)q_\ell\big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\big)\frac{1}{c^\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell+$$
$$+(2\ell+1)p_\ell q_\ell\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\hat{\mathbf{r}}\times\Big[(2\ell+1)p_\ell q_\ell\big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\big)\alpha^\ell+(2\ell+1)p_\ell q_\ell\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(225)}{=}$$

$$=\hat{\mathbf{r}}\times\Big[\big(\mathbf{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\big)\alpha^\ell+\mathbf{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(208)}{=}-\overline{g}_\ell^{m/q,2}$$

Επομένως,

$$\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,2}=-\overline{g}_\ell^{m/q,2}. \tag{313}$$

Έτσι, για τη σχέση του συστήματος (263) για $\kappa=2$ έχουμε:

$$\lim_{c\to0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}{}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,2}(\tau_s,\zeta,\varphi)\,{}_sd_{\ell,j}^{m/q}-{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,2}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\Big(\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,2}\Big){}_sd_{\ell,j}^{m/q}-\lim_{c\to0^+}{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,2}\right]=0\overset{(312),\,(313)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\Big(-C_\ell^m\,\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,2}\Big){}_sd_{\ell,j}^{m/q}+\overline{g}_\ell^{m/q,2}\right]=0\overset{\text{πολ/ζω με }-1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,2}C_\ell^m\,{}_sd_{\ell,j}^{m/q}-\overline{g}_\ell^{m/q,2}\right]=0\overset{(308)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\bar{f}_{\ell,j}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi)d_{\ell,j}^{m/q}-\bar{g}_{\ell}^{m/q,2}(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\right]=0$$

που είναι η 2^{η} εξίσωση ($\kappa=2$) του συστήματος (190).

Συνεχίζουμε τώρα και στην περίπτωση $\kappa=3$ του συστήματος (263), δηλ. στην τελευταία σχέση του συστήματος. Έχουμε:

- $\lim_{c\to0^+} {}_s\bar{f}_{\ell,1}^{m/q,3}=\lim_{c\to0^+}\left(\tau_s Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right)=$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(\frac{1}{c}c\tau_s\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\sqrt{1-\zeta^2}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=c^{(\ell+1)}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\frac{\alpha}{c}\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$=C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\alpha^{-(\ell+1)}\sqrt{1-\zeta^2}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(209)}{=}-C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\bar{f}_{\ell,1}^{m/q,3}$$

- $\lim_{c\to0^+} {}_s\bar{f}_{\ell,2}^{m/q,3}=\lim_{c\to0^+}\left(-\sqrt{\tau_s^2-1}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\cos\varphi f_m^q(\varphi)\right)=$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{1}{c}c\sqrt{\tau_s^2-1}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{1}{c}\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=-\frac{1}{c}\alpha\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=-c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\frac{\alpha}{c}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$=-C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\cos\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(210)}{=}-C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\bar{f}_{\ell,2}^{m/q,3}$$

- $\lim_{c\to0^+} {}_s\bar{f}_{\ell,3}^{m/q,3}=\lim_{c\to0^+}\left(-\sqrt{\tau_s^2-1}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta P_\ell^m(\zeta)\sin\varphi f_m^q(\varphi)\right)=$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{1}{c}c\sqrt{\tau_s^2-1}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)=$$

$$=\lim_{c\to0^+}\left(-\frac{1}{c}\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)\zeta\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right)\overset{(223)}{=}$$

$$=-\frac{1}{c}\alpha\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=-c^{\ell+1}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\frac{\alpha}{c}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(288)}{=}$$

$$=-C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\alpha^{-(\ell+1)}\zeta\sin\varphi Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(211)}{=}-C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\bar{f}_{\ell,3}^{m/q,3}$$

Οπότε, για τους συντελεστές έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3} = -C_\ell^m \frac{\alpha}{c}\,\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3} \text{ για κάθε } j=1,2,3. \tag{314}$$

Τέλος, για τη σχέση (275) έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{g}_\ell^{m/q,3} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\Big\{\sqrt{\tau_s^2-\zeta^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times\Big[\big({}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q} + {}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\big)P_\ell^m(\tau_s)+$$

$$+{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}Q_\ell^m(\tau_s)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\Big]\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,P_\ell^m(\zeta)\,f_m^q(\varphi)\Big\} =$$

$$= \lim_{c\to 0^+}\Big\{\frac{1}{c}\sqrt{(c\tau_s)^2-c^2\zeta^2}\,{}_s\hat{\boldsymbol{\tau}}\times\Big[\big({}_s\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q} + {}_s\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_s;\mathbf{r}_0)\big)\frac{1}{c^\ell}c^\ell P_\ell^m(\tau_s)+$$

$$+{}_s\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}c^{-(\ell+1)}Q_\ell^m(\tau_s)+{}_s\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\tau_s)\Big]\cdot{}_s\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\Big\} \overset{(223),\,(302)}{\underset{(303),\,(304),\,(306)}{=}}$$

$$=\frac{1}{c}\alpha\hat{\mathbf{r}}\times\Big[\Big(\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell q_\ell(2\ell+1)\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell(2\ell+1)q_\ell\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\Big)\frac{1}{c^\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell+$$

$$+\frac{\ell!}{(\ell+m)!}c^{-(\ell+1)}p_\ell(2\ell+1)(-1)^m\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\frac{1}{c^{-(\ell+1)}}q_\ell(-1)^m\frac{(\ell+m)!}{\ell!}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\frac{\alpha}{c}\hat{\mathbf{r}}\times\Big[\frac{(\ell-m)!}{\ell!}c^\ell(2\ell+1)q_\ell\big(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\big)\frac{1}{c^\ell}p_\ell\frac{\ell!}{(\ell-m)!}\alpha^\ell+$$

$$+(2\ell+1)p_\ell q_\ell\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)=$$

$$=\frac{\alpha}{c}\hat{\mathbf{r}}\times\Big[(2\ell+1)p_\ell q_\ell\big(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\big)\alpha^\ell+(2\ell+1)p_\ell q_\ell\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(225)}{=}$$

$$=\frac{\alpha}{c}\hat{\mathbf{r}}\times\Big[\big(\boldsymbol{s}_{\ell,in}^{m/q}+\mathbf{I}_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r};\mathbf{r}_0)\big)\alpha^\ell+\boldsymbol{s}_{\ell,ex}^{m/q}\alpha^{-(\ell+1)}+\mathbf{S}_\ell^{m/q}(\alpha)\Big]\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\overset{(212)}{=}-\frac{\alpha}{c}\overline{g}_\ell^{m/q,3}$$

Επομένως,

$$\lim_{c\to 0^+} {}_s\overline{g}_\ell^{m/q,3} = -\frac{\alpha}{c}\overline{g}_\ell^{m/q,3}. \tag{315}$$

Επομένως, και για την τελευταία σχέση του συστήματος (263) δηλ. αυτή για $\kappa=3$ έχουμε:

$$\lim_{c\to 0^+}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big[\sum_{j=1}^{3}{}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3}(\tau_s,\zeta,\varphi)\,{}_sd_{\ell,j}^{m/q}-{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,3}(\tau_s,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0)\Big]=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big[\sum_{j=1}^{3}\Big(\lim_{c\to 0^+}{}_s\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3}\Big){}_sd_{\ell,j}^{m/q}-\lim_{c\to 0^+}{}_s\overline{g}_\ell^{m/q,3}\Big]=0\overset{(314),\,(315)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\Big[\sum_{j=1}^{3}\Big(-C_\ell^m\frac{\alpha}{c}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3}\Big){}_sd_{\ell,j}^{m/q}+\frac{\alpha}{c}\overline{g}_\ell^{m/q,3}\Big]=0\overset{\text{πολ/ζω με } -\frac{c}{\alpha}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3}C_{\ell\ s}^{m}d_{\ell,j}^{m/q}-\overline{g}_{\ell}^{m/q,3}\right]=0\overset{(308)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\left[\sum_{j=1}^{3}\overline{f}_{\ell,j}^{m/q,3}\left(\alpha,\zeta,\varphi\right)d_{\ell,j}^{m/q}-\overline{g}_{\ell}^{m/q,3}\left(\alpha,\zeta,\varphi;\mathbf{r}_0\right)\right]=0$$

που είναι η 3η εξίσωση ($\kappa=3$) του συστήματος (190). Επομένως, επαληθεύεται τελικά και το σύστημα που αφορά το ηλεκτρικό σκεδαζόμενο πεδίο $\mathbf{E}_3^s$ έχοντας καταλήξει στις επιθυμητές σχέσεις.

Σε αυτό το σημείο, ολοκληρώνεται ο εκφυλισμός των σχέσεων και αποτελεσμάτων του επίλμηκους σφαιροειδούς και ως εκ τούτου ολοκληρώνεται και η ζητούμενη επιβεβαίωση της μελέτης μας στο σφαιρικό σύστημα. Με την ολοκλήρωση αυτή τελειώνει και όλη αυτή η εργασία. Επιτεύχθηκε ο υπολογισμός όλων των σκεδαζόμενων πεδίων καθώς και η επαλήθευσή τους.

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε ένα πρόβλημα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από μία μεταλλική σφαίρα στο περιβάλλον του κενού. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα εκπέμπονταν από ένα μαγνητικό δίπολο προσανατολισμένο αυθαίρετα που βρισκόταν αρκετά μακριά από το υπό μελέτη αντικείμενο, δηλ. τη σφαίρα. Σημαντικό ήταν το γεγονός ότι η διπολική πηγή ήταν χρονικά αρμονική και επιπλέον εξέπεμπε τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε χαμηλές συχνότητες. Σκοπός ήταν να υπολογιστούν τα άγνωστα σκεδαζόμενα πεδία.

Πρώτο στάδιο της μελέτης αυτής ήταν να επιτευχθεί η ορθή μοντελοποίηση του προβλήματος ώστε να δημιουργηθούν οι κατάλληλες διαφορικές εξισώσεις μαζί με τον καθορισμό των αντίστοιχων συνθηκών. Αφετηρία αυτών των εξισώσεων αποτέλεσαν οι εξισώσεις Maxwell του ηλεκτρομαγνητισμού οι οποίες πέρασαν από κάποιες μετατροπές σύμφωνα με βασικά στοιχεία του προβλήματος όπως τη χρονική αρμονική εξάρτηση του δίπολου, το γεγονός ότι η σφαίρα ήταν μεταλλική δηλ. τέλεια αγώγιμη ενώ το περιβάλλον ήταν το κενό δηλ. ένα μέσο χωρίς απώλειες, καθώς και τις χαμηλές συχνότητες στις οποίες εξέπεμπε το δίπολο. Το καθεστώς χαμηλών συχνοτήτων επέβαλε να γραφούν όλα τα πεδία του προβλήματος ως άθροισμα όρων θετικών ακέραιων δυνάμεων του κυματικού αριθμού του εξωτερικού περιβάλλοντος. Επίσης, όσον αφορά τις συνθήκες, αυτές αναφέρονταν στην επιφάνεια της σφαίρας επομένως είχαμε συνοριακές συνθήκες. Συγχρόνως, έπρεπε να ικανοποιούνται και οι συνθήκες ακτινοβολίας στο άπειρο. Έτσι, καταλήξαμε σε μία ακολουθία αλληλοσυνδεδεμένων προβλημάτων δυναμικού με εξισώσεις Laplace ή Poisson συνοδευόμενες από τις παραπάνω συνθήκες. Τα προβλήματα αυτά αφορούσαν το στατικό και τους πρώτους τρεις δυναμικούς όρους των αναπτυγμάτων, αφού οι όροι υψηλότερων τάξεων παραλείπονταν στο καθεστώς χαμηλών συχνοτήτων ως αμελητέοι.

Επόμενο στάδιο της έρευνας ήταν η επίλυση των προβλημάτων που καθορίστηκαν κατά τη μοντελοποίηση. Παρατηρήσαμε ότι ο προσδιορισμός των άγνωστων σταθερών συντελεστών οδήγησε είτε σε σαφείς εκφράσεις όπως στην περίπτωση του $\mathbf{H}_0^s$ αλλά και του $\mathbf{H}_3^s$ είτε σε άπειρα γραμμικά αλγεβρικά συστήματα όπως στις περιπτώσεις των $\mathbf{H}_2^s$ και $\mathbf{E}_3^s$. Αποτέλεσμα της επίλυσης ήταν να ληφθούν τα μη συμμετρικά ως προς άξονα σκεδαζόμενα πεδία με αναλυτικό και συμπαγή τρόπο μέσω αναπτυγμάτων σειρών άπειρων όρων σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων.

Τελευταίο μέρος της μελέτης αυτής ήταν να γίνει μία πλήρης επαλήθευση όλων των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν κατά την επίλυση με στόχο να αποδειχθεί η ορθότητα της προσέγγισής μας. Αυτό έγινε βάσει των αποτελεσμάτων της επιμήκους σφαιροειδούς περίπτωσης που βρέθηκαν σε παρόμοια με αυτή μελέτη. Λάβαμε υπόψιν το γεγονός ότι το σφαιρικό σύστημα είναι μία οριακή περίπτωση του επιμήκους σφαιροειδούς συστήματος καθώς η ημιεστιακή απόσταση τείνει να μηδενιστεί. Έτσι, με τον εκφυλισμού των αποτελεσμάτων του σφαιροειδούς ανέκυψαν τα αποτελέσματα της σφαίρας, επομένως επαληθεύτηκε η εγκυρότητα της έρευνάς μας.

Παράρτημα Α: «Αποδείξεις χρήσιμων τύπων»

1) Απόδειξη των τύπων $\nabla \otimes \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{I}}$ και $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Στον Καρτεσιανό χώρο θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{r} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3$ και τον τελεστή αναδελτα ο οποίος είναι ο $\nabla = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{\boldsymbol{x}}_j$ (σημειώνουμε εδώ ότι ο τελεστής Laplace είναι ο $\Delta \equiv \Delta_{\mathbf{r}} = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ όπως επίσης ότι και οι δύο αυτοί τελεστές μπορούν να εφαρμοστούν και στην κατεύθυνση του σταθερού $\mathbf{r}_0 = x_{10}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_{20}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_{30}\hat{\boldsymbol{x}}_3$).

Επομένως, έχουμε:

$$\nabla \otimes \mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3 \right) \otimes \left(x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3 \right) =$$

$$= \frac{\partial x_1}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_3 + \frac{\partial x_1}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_2 +$$

$$+ \frac{\partial x_3}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_3 + \frac{\partial x_1}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_3 =$$

$$= \hat{\boldsymbol{x}}_1 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \hat{\boldsymbol{x}}_2 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_2 + \hat{\boldsymbol{x}}_3 \otimes \hat{\boldsymbol{x}}_3 = \tilde{\mathbf{I}} \quad (\tilde{\mathbf{I}} : \text{το μοναδιαίο δυαδικό γινόμενο})$$

- Εάν $\otimes \to \cdot$ (εσωτερικό γινόμενο) :

  $\nabla \cdot \mathbf{r} = \hat{\boldsymbol{x}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \hat{\boldsymbol{x}}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_2 + \hat{\boldsymbol{x}}_3 \cdot \hat{\boldsymbol{x}}_3 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{r} = 3$

- Εάν $\otimes \to \times$ (εξωτερικό γινόμενο) :

  $\nabla \times \mathbf{r} = \hat{\boldsymbol{x}}_1 \times \hat{\boldsymbol{x}}_1 + \hat{\boldsymbol{x}}_2 \times \hat{\boldsymbol{x}}_2 + \hat{\boldsymbol{x}}_3 \times \hat{\boldsymbol{x}}_3 \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{r} = 0$

και επίσης,

$$\nabla \frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \nabla \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}} = \nabla \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{\partial \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2}}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \frac{\partial \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2}}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{\partial \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-1/2}}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{-3/2}\left(2x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + 2x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + 2x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) =$$

$$= -\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right)^{-3}\left(x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3\right) = -r^{-3}\mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

2) Απόδειξη του τύπου $\nabla_{\mathbf{r}} \dfrac{1}{R} \equiv \nabla \dfrac{1}{R} = -\nabla_{\mathbf{r_0}} \dfrac{1}{R}$.

Στον Καρτεσιανό χώρο για το τυχαίο $\mathbf{r} = x_1\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{x}}_3$ και το σταθερό $\mathbf{r}_0 = x_{10}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + x_{20}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + x_{30}\hat{\boldsymbol{x}}_3$ και με $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3$. Έχουμε:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{R} = \nabla \frac{1}{R} = \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \nabla \frac{1}{\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \nabla\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-1/2}}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 +$$

$$+ \frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-1/2}}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 +$$

$$+ \frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-1/2}}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-3/2}\left\{\frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]}{\partial x_1}\hat{\boldsymbol{x}}_1 +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]}{\partial x_2}\hat{\boldsymbol{x}}_2 + \frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]}{\partial x_3}\hat{\boldsymbol{x}}_3\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-3/2}\left[2(x_1-x_{10})\hat{\boldsymbol{x}}_1 + 2(x_2-x_{20})\hat{\boldsymbol{x}}_2 + 2(x_3-x_{30})\hat{\boldsymbol{x}}_3\right]$$

και

$$\nabla_{\mathbf{r_0}} \frac{1}{R} = \nabla_{\mathbf{r_0}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \nabla_{\mathbf{r_0}} \frac{1}{\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{1/2}} =$$

$$= \nabla_{\mathbf{r_0}}\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-1/2} =$$

$$= \frac{\partial\left[(x_1-x_{10})^2+(x_2-x_{20})^2+(x_3-x_{30})^2\right]^{-1/2}}{\partial x_{10}}\hat{\boldsymbol{x}}_1 +$$

$$+\frac{\partial\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]^{-1/2}}{\partial x_{20}}\hat{\boldsymbol{x}}_2+$$

$$+\frac{\partial\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]^{-1/2}}{\partial x_{30}}\hat{\boldsymbol{x}}_3=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]^{-3/2}\left\{\frac{\partial\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]}{\partial x_{10}}\hat{\boldsymbol{x}}_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]}{\partial x_{20}}\hat{\boldsymbol{x}}_2+\frac{\partial\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]}{\partial x_{30}}\hat{\boldsymbol{x}}_3\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]^{-3/2}\left[-2\left(x_1-x_{10}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_1-2\left(x_2-x_{20}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_2-2\left(x_3-x_{30}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_3\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+\left(x_3-x_{30}\right)^2\right]^{-3/2}\left[2\left(x_1-x_{10}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_1+2\left(x_2-x_{20}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_2+2\left(x_3-x_{30}\right)\hat{\boldsymbol{x}}_3\right]$$

Επομένως, πράγματι ισχύει $\nabla_{\mathbf{r}}\frac{1}{R}\equiv\nabla\frac{1}{R}=-\nabla_{\mathbf{r}_0}\frac{1}{R}$ για κάθε $\mathbf{r}\in\Omega$.

3) Υπολογισμός *div* και *rot* στις σφαιρικές.

Έστω $\mathbf{g}(r,\zeta,\varphi)=g_r(r,\zeta,\varphi)\hat{\mathbf{r}}+g_\zeta(r,\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\zeta}}+g_\varphi(r,\zeta,\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ τυχούσα διανυσματική συνάρτηση όπου $\zeta=\cos\theta$.

Όσον αφορά το *div* έχουμε:

$$\nabla\cdot\mathbf{g}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2g_r\right)}{\partial r}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta g_\zeta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\varphi}=$$

και αφού $\zeta=\cos\theta$ οπότε και $\sin\theta=\sqrt{1-\zeta^2}$ και $\frac{\partial}{\partial\theta}=-\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}$ θα έχουμε:

$$\nabla\cdot\mathbf{g}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2g_r\right)}{\partial r}-\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}g_\zeta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2g_r\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}g_\zeta\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{r\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Επίσης, όσον αφορά το *rot* έχουμε ότι στο γενικό σύστημα συντ/νων (u,v,w) είναι:

$$\nabla\times\mathbf{g}=\frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\mathbf{u}} & h_v\hat{\mathbf{v}} & h_w\hat{\mathbf{w}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_u g_u & h_v g_v & h_w g_w \end{vmatrix}$$ οπότε στις σφαιρικές συντ/νες (r,ζ,φ) που θα

είναι: $u\to r,\quad v\to\zeta,\quad w\to\varphi$ και $h_u=h_r=1,\quad h_v=h_\zeta=r,\quad h_w=h_\varphi=r\sqrt{1-\zeta^2}$ και

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}=-\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$ θα έχουμε:

$$\nabla\times\mathbf{g}=\frac{1}{r^2\sqrt{1-\zeta^2}}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\boldsymbol{\zeta}} & r\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & -\sqrt{1-\zeta^2}\dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ g_r & rg_\zeta & r\sqrt{1-\zeta^2}g_\varphi \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{r^2\sqrt{1-\zeta^2}}\left[-\hat{\mathbf{r}}\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial\left(r\sqrt{1-\zeta^2}g_\varphi\right)}{\partial\zeta}+r\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial g_r}{\partial\varphi}+r\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial\left(rg_\zeta\right)}{\partial r}+r\left(1-\zeta^2\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial g_r}{\partial\zeta}-\right.$$

$$\left.-\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\left(rg_\zeta\right)}{\partial\varphi}-r\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial\left(r\sqrt{1-\zeta^2}g_\varphi\right)}{\partial r}\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[-\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}g_\varphi\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial g_r}{\partial\varphi}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial\left(rg_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\frac{\partial g_r}{\partial\zeta}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial\left(rg_\zeta\right)}{\partial\varphi}-\hat{\boldsymbol{\zeta}}\frac{\partial\left(rg_\varphi\right)}{\partial r}\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\left[-\left(\frac{\partial\left(\sqrt{1-\zeta^2}g_\varphi\right)}{\partial\zeta}+\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_\zeta}{\partial\varphi}\right)\hat{\mathbf{r}}+\left(\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\partial g_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial\left(rg_\varphi\right)}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\zeta}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\left(rg_\zeta\right)}{\partial r}+\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial g_r}{\partial\zeta}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right]$$

Παράρτημα Β: «Επίλυση εξίσωσης Laplace – Υπολογισμός χρήσιμου αναπτύγματος»

1) Επίλυση εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντ/νες με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε την πορεία επίλυσης της εξίσωσης Laplace στις σφαιρικές συντεταγμένες (r,θ,φ) που είναι η βασική μερική διαφορική εξίσωση της οποίας τη λύση χρησιμοποιούμε στην παρούσα μελέτη. Άρχικά, η εξίσωση Laplace στο σφαιρικό σύστημα είναι η:

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0, \tag{1}$$

όπου $u \equiv u(r,\theta,\varphi)$ η άγνωστη συνάρτηση.

Θα εργαστούμε με τη μέθοδο του χωρισμού μεταβλητών. Ζητάμε μη – τετριμμένες λύσεις της μορφής $u \equiv u(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Τότε θα είναι:

- $\dfrac{\partial u}{\partial r} = R'(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = R(r)\Theta'(\theta)\Phi(\varphi)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = R(r)\Theta(\theta)\Phi'(\varphi)$

όπου με τόνο συμβολίζουμε τις παραγώγους των συναρτήσεων ως προς τις αντίστοιχες μεταβλητές τους. Οπότε, η (1) γράφεται:

$$\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\left(r^2R'(r)\right)'+\frac{R(r)\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\left(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\right)'+\frac{R(r)\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\Phi''(\varphi)=0 \overset{\text{πολ/ζουμε με}}{\underset{\frac{\sin^2\theta}{R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\theta}{R(r)}\left(r^2R'(r)\right)'+\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\left(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\right)'+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0 \Leftrightarrow \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\theta}{R(r)}\left(r^2R'(r)\right)'+\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\left(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\right)'=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\mu \tag{3}$$

όπου μ : η $1^{η}$ σταθερά χωρισμού μεταβλητών.

<u>Επίλυση της φ–εξάρτησης</u>

Από τη $2^{η}$ ισότητα της (3) έχουμε:

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\mu \Leftrightarrow \Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0 \tag{4}$$

Η λύση στην φ–μεταβλητή πρέπει να είναι 2π–περιοδική στη γωνία $\varphi\in[0,2\pi)$. Επομένως, παίρνουμε περιπτώσεις:

1) Αν $\mu>0\Rightarrow\mu=\kappa^2,\ \ \kappa\in\mathbb{R}^*$

Ζητάμε λύσεις της μορφής $e^{p\varphi}$ αφού η (4) είναι ομογενής γραμμική συνη΄θης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Οπότε αντικαθιστώντας στην (4) προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που είναι:

$1p^2+0p+\kappa^2=0\Leftrightarrow p=-\kappa^2\Leftrightarrow p=\pm i\kappa$.

Έτσι, οι λύσεις είναι οι $\Phi(\varphi)=e^{p\varphi}=\begin{cases}e^{i\kappa\varphi}\\ e^{-i\kappa\varphi}\end{cases}$ και επειδή $e^{\pm i\kappa\varphi}=\cos\kappa\varphi\pm i\sin\kappa\varphi$,

τότε έχουμε $\Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos\kappa\varphi\\ \sin\kappa\varphi\end{cases}$ οι οποίες για να είναι αποδεκτές πρέπει $\kappa=m\in\mathbb{N}^+$.

Επομένως, τελικά $\Phi(\varphi)=\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases}\equiv\Phi_m(\varphi),\ m\geq 1$.

2) Αν $\mu=0$ τότε $(4)\Rightarrow\Phi''(\varphi)=0\Leftrightarrow\Phi'(\varphi)=c_1\Leftrightarrow\Phi(\varphi)=c_1\varphi+c_2$. Άρα, έχουμε:

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{(Αποδεκτή)}\\ \varphi, & \text{(Μη αποδεκτή)}\end{cases}$$

Άρα, $\Phi(\varphi)=1$

3) Αν $\mu<0\Rightarrow\mu=-\kappa^2,\ \ \kappa\in\mathbb{R}^*$

Ανάλογα με την περίπτωση 1), το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (4) είναι:

$1p^2+0p-\kappa^2=0\Leftrightarrow p=\kappa^2\Leftrightarrow p=\pm\kappa$.

Άρα, οι λύσεις είναι οι $\Phi(\varphi)=e^{p\varphi}=\begin{cases}e^{\kappa\varphi}\\ e^{-\kappa\varphi}\end{cases}$ που είναι μη αποδεκτές για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}^*$.

Τελικά, από τις τρεις περιπτώσεις ότι οι φ–ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$\Phi(\varphi)\equiv\Phi_m(\varphi)=\begin{cases}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{cases},\ m\geq 0\ . \tag{5}$$

Οπότε, για $\mu=m^2,\ m\geq 0$ η 1^{η} ισότητα της (3) δίνει:

$$\frac{\sin^2\theta}{R(r)}\left(r^2R'(r)\right)' + \frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\left(\sin\theta\Theta'(\theta)\right)' = m^2 \overset{\text{διαιρούμε με } \sin^2\theta}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R(r)}\left(r^2R'(r)\right)' + \frac{1}{\sin\theta\Theta(\theta)}\left(\sin\theta\Theta'(\theta)\right)' = \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Leftrightarrow \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(r^2R'(r)\right)'}{R(r)} = -\frac{\left(\sin\theta\Theta'(\theta)\right)'}{\sin\theta\Theta(\theta)} + \frac{m^2}{\sin^2\theta} = \nu \tag{7}$$

όπου ν : η 2^{η} σταθερά χωρισμού μεταβλητών.

<u>Επίλυση της *r*–εξάρτησης</u>

Από την 1^{η} ισότητα της (7) έχουμε:

$$\frac{\left(r^2R'(r)\right)'}{R(r)} = \nu \Leftrightarrow \frac{1}{R(r)}2rR'(r) + \frac{1}{R(r)}r^2R''(r) = \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2rR'(r) + r^2R''(r) = \nu R(r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2R''(r) + 2rR'(r) - \nu R(r) = 0 \quad \text{(Εξίσωση Euler)} \tag{8}$$

Στην εξίσωση Euler αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$R(r) = r^{\lambda} \tag{9}$$

Οπότε

$$(8) \overset{(9)}{\Rightarrow} r^2\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2} + 2r\lambda r^{\lambda-1} - \nu r^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow r^{\lambda}\left[\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - \nu\right] = 0 \overset{r^{\lambda}\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - \nu = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - \nu = 0$$

όπου η τελευταία είναι η χαρακτηριστική εξίσωση και η διακρίνουσα αυτής είναι $\Delta = 1 + 4\nu$ επομένως και οι λύσεις της θα είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\nu}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4\nu}}{2} \\ \lambda_2 = -(\lambda_1 + 1) \end{cases}, \text{ για κάθε } \lambda_1.$$

Άρα, οι λύσεις της *r*–εξάρτησης είναι:

$$(96) \Rightarrow R(r) = \begin{cases} r^{\lambda_1} \\ r^{-(\lambda_1+1)} \end{cases}, \text{ για κάθε } \lambda_1. \tag{10}$$

<u>Επίλυση της *θ*–εξάρτησης</u>

Από τη 2^{η} ισότητα της (7) έχουμε:

$$-\frac{\left(\sin\theta\,\Theta'(\theta)\right)'}{\sin\theta\,\Theta(\theta)}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\nu\,. \tag{11}$$

Όπως είδαμε και πριν το τριώνυμο $\lambda^2+\lambda-\nu=0$ έχει ρίζες τις λ_1 και λ_2. Οπότε,

$\lambda^2+\lambda-\nu=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda+1)=\nu\overset{\text{για }\lambda=\lambda_1}{\Rightarrow}\nu=\lambda_1(\lambda_1+1)$. Επομένως,

$$(11)\Leftrightarrow-\frac{\cos\theta\,\Theta'(\theta)+\sin\theta\,\Theta''(\theta)}{\sin\theta\,\Theta(\theta)}+\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\lambda_1(\lambda_1+1)\overset{\text{πολ/ζουμε με }\Theta(\theta)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'(\theta)-\Theta''(\theta)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta(\theta)=\lambda_1(\lambda_1+1)\Theta(\theta)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\Theta''(\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta'(\theta)+\left[\lambda_1(\lambda_1+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0\,, \tag{12}$$

Και από την επίλυση της θ–εξάρτησης παρατηρούμε ότι η μεταβλητή θ εμφανίζεται μόνο μέσα σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οπότε κάνουμε τον μετασχηματισμό $\zeta=\cos\theta$ και επιπλέον $\Theta(\theta)=P(\zeta)$ οπότε θα έχουμε:

- $\sin^2\theta=1-\zeta^2$
- $\sin\theta=\sqrt{1-\zeta^2}$
- $\dfrac{\partial}{\partial\theta}=-\sqrt{1-\zeta^2}\,\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$
- $\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}=-\zeta\dfrac{\partial}{\partial\zeta}+\left(1-\zeta^2\right)\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$

Άρα, η (12) γράφεται:

$$(12)\Leftrightarrow\frac{\partial^2\Theta(\theta)}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}+\left[\lambda_1(\lambda_1+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\zeta^2\right)\frac{\partial^2P(\zeta)}{\partial\zeta^2}-\zeta\frac{\partial P(\zeta)}{\partial\zeta}-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sqrt{1-\zeta^2}\frac{\partial P(\zeta)}{\partial\zeta}+\left[\lambda_1(\lambda_1+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P(\zeta)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\zeta^2\right)P''(\zeta)-2\zeta P'(\zeta)+\left[\lambda_1(\lambda_1+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P(\zeta)=0\,, \tag{13}$$

όπου για να είναι η (13) η συσχετισμένη εξίσωση Legendre πρέπει $\lambda_1\equiv\ell$ για $\ell\geq0$.

Επομένως, βρίσκουμε από την (10) ότι οι r–ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$R(r)\equiv R_\ell(r)=\begin{cases}r^\ell\\ r^{-(\ell+1)}\end{cases},\ \ell\geq0 \tag{14}$$

και τελικά η (13) γίνεται:

$$\left(1-\zeta^2\right)P''(\zeta)-2\zeta P'(\zeta)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\zeta^2}\right]P(\zeta)=0\,. \tag{15}$$

Έτσι, η (13) είναι η συσχετισμένη εξίσωση Legendre η οποία έχει λύσεις τις συναρτήσεις Legendre 1ου και 2ου είδους. Δηλ. $\begin{cases} P_\ell^m(\zeta),\ 1^{\text{ου}} \text{ είδους} & (\text{Αποδεκτές}) \\ Q_\ell^m(\zeta),\ 2^{\text{ου}} \text{ είδους} & (\text{Μη αποδεκτές}) \end{cases}$

για κάθε $\ell \geq 0$ και $m \leq \ell$. Έτσι, οι θ–ιδιοσυναρτήσεις είναι:

$$\Theta(\theta) \equiv \Theta_\ell^m(\theta) = P_\ell^m(\cos\theta) \equiv P_\ell^m(\zeta) \text{ με } n \geq 0 \text{ και } m = 0,1,2,\ldots,\ell. \tag{16}$$

(Το m πρέπει να σταματά στο n διότι $P_\ell^\kappa(\zeta) \equiv 0,\ \kappa > \ell$)

Επομένως, η λύση της Laplace θα είναι η $u \equiv u_\ell^m(r,\theta,\varphi) = R_\ell(r)\Theta_\ell^m(\theta)\Phi_m(\varphi) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow u_\ell^m(r,\theta,\varphi) = \begin{Bmatrix} r^\ell \\ r^{-(\ell+1)} \end{Bmatrix} \left[P_\ell^m(\cos\theta)\right] \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_\ell^m(r,\zeta,\varphi) = \begin{Bmatrix} r^\ell \\ r^{-(\ell+1)} \end{Bmatrix} \left[P_\ell^m(\zeta)\right] \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \text{ για } \ell \geq 0 \text{ και } m = 0,1,2,\ldots,\ell \tag{17}$$

αφού η συνολική λύση δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων (17) επειδή ο τελεστής Laplace είναι γραμμικός. Άρα, τελικά,

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\left(a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-(\ell+1)}\right)\left(c_{\ell m}\cos m\varphi + d_{\ell m}\sin m\varphi\right)P_\ell^m(\zeta), \tag{18}$$

όπου a_ℓ, b_ℓ, $c_{\ell m}$, $d_{\ell m}$ αυθαίρετες σταθερές.

Για εσωτερικό πρόβλημα ισχύει $b_\ell = 0$ επομένως ορίζουμε την εσωτερική λύση

$$(18) \Leftrightarrow u_{in}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell} b_\ell r^{-(\ell+1)}\left(c_{\ell m}\cos m\varphi + d_{\ell m}\sin m\varphi\right)P_\ell^m(\zeta), \tag{19}$$

Ενώ για εξωτερικό πρόβλημα ισχύει $a_n = 0$ άρα ορίζουμε και την εξωτερική λύση

$$(18) \Leftrightarrow u_{ex}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell} a_\ell r^{\ell}\left(c_{\ell m}\cos m\varphi + d_{\ell m}\sin m\varphi\right)P_\ell^m(\zeta). \tag{20}$$

Εδώ, για ευκολία στο συμβολισμό θα ορίσουμε τις σφαιρικές αρμονικές οι οποίες θα είναι:

$$Y_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi) = P_\ell^m(\zeta)\, f_m^q(\varphi), \text{ όπου } f_m^q(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi,\ q = e \\ \sin m\varphi,\ q = o \end{cases}, \tag{21}$$

όπου το q αναφέρεται στην άρτια ιδιοσυνάρτηση ($q = (even)e$) ή στην περιττή ιδιοσυνάρτηση ($q = (odd)o$) έτσι και οι ιδιολύσεις θα είναι:

$$u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) = r^{\ell} P_{\ell}^{m}(\zeta)\, f_m^q(\varphi) = r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \text{ και} \tag{22}$$

$$u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}) = r^{-(\ell+1)} P_{\ell}^{m}(\zeta)\, f_m^q(\varphi) = r^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) \tag{23}$$

και τελικά η γενική λύση της εξίσωσης Laplace δίνεται από

$$(18) \overset{(21),(22)}{\underset{(23)}{\Leftrightarrow}} u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\left(a_\ell r^{\ell} + b_\ell r^{-(\ell+1)}\right)\left[c_{\ell m} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) + d_{\ell m} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right] \overset{\text{θέτουμε } A_{\ell,in}^{m/q} = \begin{cases} a_\ell c_{\ell m} \\ a_\ell d_{\ell m}\end{cases}}{\underset{\text{και } A_{\ell,ex}^{m/q} = \begin{cases} b_\ell c_{\ell m} \\ b_\ell d_{\ell m}\end{cases}}{\Leftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\left(A_{\ell,in}^{m/q} r^{\ell} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi) + A_{\ell,ex}^{m/q} r^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^{m/q}(\zeta,\varphi)\right) \Leftrightarrow,$$

$$\Leftrightarrow u(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\left[A_{\ell,in}^{m/q} u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}) + A_{\ell,ex}^{m/q} u_{\ell,\mathrm{ex}}^{m/q}(\mathbf{r})\right] \tag{24}$$

για $\mathbf{r} \in \{r \in [0,+\infty),\ \zeta \in [-1,1],\ \varphi \in [0,2\pi)\}$ και $A_{n,in}^{m/q}$, $A_{n,ex}^{m/q}$ αυθαίρετες σταθερές.

2) Υπολογισμός χρήσιμου αναπτύγματος $\dfrac{1}{R}$.

Για
$$\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} = \begin{cases} \dfrac{r^{\ell}}{r_0^{\ell+1}}, & r < r_0 \\[2ex] \dfrac{r_0^{\ell}}{r^{\ell+1}}, & r > r_0 \end{cases}, \tag{1}$$

έχουμε:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} P_{\ell}^{m}(\cos\theta) P_{\ell}^{m}(\cos\theta_0)\cos\left[m(\varphi-\varphi_0)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell} \frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} P_{\ell}^{m}(\zeta) P_{\ell}^{m}(\zeta_0)\left(\cos m\varphi_0 \cos m\varphi + \sin m\varphi_0 \sin m\varphi\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o} \frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m \frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} P_{\ell}^{m}(\zeta) P_{\ell}^{m}(\zeta_0)\, f_m^q(\varphi_0)\, f_m^q(\varphi), \tag{2}$$

όπου για διευκόλυνση ενσωματώνουμε τη δίκλαδη (1) στη σχέση:

$$\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}} = r^{\nu} r_0^{-(\nu+1)} \text{ , όπου } \nu = \begin{cases} \ell, & r < r_0 \\ -(\ell+1), & r > r_0 \end{cases}, \tag{3}$$

Επομένως,

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\left[r_0^{-(\nu+1)}P_\ell^m(\zeta_0)f_m^q(\varphi_0)\right]\left[r^\nu P_\ell^m(\zeta)f_m^q(\varphi)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\left[r_0^{-(\nu+1)}\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right]\left[r^\nu\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta,\varphi)\right]. \tag{4}$$

Επίσης, σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να ορίσουμε την

$$\rho_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m\left[r_0^{-(\nu+1)}\mathrm{Y}_\ell^{m/q}(\zeta_0,\varphi_0)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0) = \frac{(\ell+m)!}{(\ell+m)!}\varepsilon_m u_{\ell,y}^{m/q}(\mathbf{r}_0)\ \text{με}\ y = in, ex \tag{5}$$

έτσι η (119) γράφεται:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}_0)u_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} > \mathbf{r}_0 \\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{q=e,o}\rho_{\ell,ex}^{m/q}(\mathbf{r}_0)u_{\ell,in}^{m/q}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} < \mathbf{r}_0 \end{cases}. \tag{6}$$

Βιβλιογραφία

Ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές (πηγές) της Εργασίας.

Stratton, J.A. (1941). *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw–Hill.

Dassios, G. & Kleinman, R.E. (2000). *Low Frequency Scattering*. Oxford: Oxford University Pass.

Ammari, H. & Kang, H. (2007). Polarization and Moments Tensors: with Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory. *Applied Mathematical Sciences Series (vol. 2098)*. New York: Springer–Verlag.

Ammari, H., Garnier, J., Jing, W., Kang, H., Lim, M., Solna, K. & Wang, H. (2013). *Mathematical and Statistical Methods for Multistatic Imaging*. Lecture Note in Mathematics (vol. 2098). Switzerland: Springer–Verlag.

Vafeas, P., Perrusson, G. & Lesselier, D. (2004). Low–frequency solution for a perfectly conductive medium with dipolar excitation. *Progress in Electromagnetics Research*, 49, 87–111.

Mie, G. (1908). Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annals of Physics*, 330, 377–445.

Vafeas, P., Perrusson, G. & Lesselier, D. (2009). Low–frequency scattering from perfectly condustive medium with magnetic dipole excitation. *International Journal of Engineering Science*, 47, 372–390.

Perrusson, G., Vafeas, P. & Lesselier, D. (2010). Low–frequency dipolar excitation of a perfectly ellipsoidal conductor. *Quarterly of AppliedMathematics*, 68, 513–536.

Perrusson, G., Vafeas, P., Chatjigeorgiou I.K. & Lesselier, D. (2015). Low–frequency on–site identification of a highly conductive body buried in Earth from a model ellipsoid. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 80, 963–980.

Vafeas, P., Papadopoulos, P.K. & Lesselier, D. (2012). Electromagnetic low–frequency dipolar excitation of two metal spheres in a conductive medium. *Journal of Applied Mathematics*, ID 628261, 1–37.

Vafeas, P., Papadopoulos, P.K., Ding, P.–P. & Lesselier, D. (2016). Mathematical and numerical analysis of low–frequency scattering from a PEC ring torus in a conductive medium, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 6477–6500.

Moon, P. & Spencer, E. (1971). *Field Theory Handbook.* Berlin: Springer–Verlag.

Morse P.M. & Feshbach H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*, *Volumes I and II.* New York: McGraw–Hill.

Hobson, E.W. (1965). *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* New York: Chelsea Publishing Company.

Vafeas, P., Lesselier, D. & Kariotou, F. (2015). Estimates for the low–frequency electromagnetic fields scattered by two adjacent metal spheres in a lossless medium. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38, 4210–4237.

Vafeas, P. (2016). Low–frequency electromagnetic scattering by a metal torus in a lossless medium with magnetic dipolar illumination. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 4268–4292.

Vafeas, P. (2017). Revisiting the Low–Frequency Dipolar Perturbation by an Inpenetrable Ellipsoid in a Conductive Surrounding. *Mathematical Problems in Engineering*, ID 9420658, 1–16.

Vafeas, P. (2020). Low–Frequency dipolar electromagnetic scattering by a solid ellipsoid in lossless environment. *Studies in Applied Mathematics*, 217–246.

Vafeas, P. (2018). Dipolar Excitation of a Perfectly Electrically Conducting Spheroid in a Lossless Medium at the Low–Frequency Regime. *Advances in Mathematical Physics*, ID 9587972, 1–20.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.