



Σχολή Θετικών Επιστημών & Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Μαθηματική Μοντελοποίηση Ανώμαλης Περίθλασης του Φωτός  
από Διηλεκτρικές Γραμμοσειρές

Χριστίνα Κοκκίνου

Επιβλέπων καθηγητής: *Νικόλαος Τσίτσας*

Πάτρα, Μάιος 2024

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της φοιτήτριας Χριστίνας Κοκκίνου που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Μαθηματική Μοντελοποίηση Ανώμαλης Περίθλασης του Φωτός  
από Διηλεκτρικές Γραμμοσειρές

Χριστίνα Κοκκίνου

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Τσίτσας

Καθηγητής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Πληροφορικής

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο

Θεσσαλονίκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Χρήστος Νικολόπουλος

Καθηγητής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Πάτρα, Μάιος 2024

*Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικόλαο Τσίτσα, για την καθοδήγηση και τη βοήθειά του, καθώς και την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την ηθική τους υποστήριξη.*

## Περίληψη

Οι διηλεκτρικές γραμμοσειρές ενσωματώνονται σε κυματοδηγούς διηλεκτρικών πλακών δημιουργώντας διατάξεις με περιοδικά μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης. Οι διατάξεις αυτές χρησιμοποιούνται στην ολοκληρωμένη οπτοηλεκτρονική ως βασικά δομικά στοιχεία κυκλωμάτων, καθώς με κατάλληλη σχεδίαση των χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών είναι εφικτή η οδήγηση του φωτός σε επιθυμητές κατευθύνσεις διάδοσης. Στα πρώτα κεφάλαια της παρούσας διπλωματικής εργασίας εξετάζονται κυματοδηγοί διηλεκτρικών πλακών με χαραγμένες γραμμοσειρές οι οποίοι διεγείρονται από επίπεδο προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Σκοπός είναι να υπολογίσουν με ακρίβεια τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε όλες τις περιοχές του χώρου επιλύοντας το πρόβλημα συνοριακών τιμών που προκύπτει. Το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους και κατόπιν επιλύεται εφαρμόζοντας τεχνικές Galerkin ολικού χώρου.

Στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας επιδιώκεται, μέσω αριθμητικών βελτιστοποιήσεων, η εύρεση των βέλτιστων χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών για τα οποία το ανακλώμενο και διαθλώμενο πεδίο οδεύει σε κατευθύνσεις διαφορετικές από εκείνες που προβλέπει ο κλασικός νόμος Snell. Συγκεκριμένα, μελετώνται τα φαινόμενα ανώμαλης ανάκλασης - όπου το φως ανακλάται προς τη διεύθυνση της γωνίας πρόσπτωσης - και ανώμαλης διάθλασης - όπου το φως διαθλάται κατά την αντίθετη κατεύθυνση από εκείνη που αντιστοιχεί σε ένα υλικό με συνηθισμένο δείκτη διάθλασης.

### Λέξεις – Κλειδιά

κυματοδηγοί, γραμμοσειρές, ολοκληρωτικές εξισώσεις, τεχνικές Galerkin, ανώμαλη ανάκλαση, ανώμαλη διάθλαση

## **Abstract**

Dielectric gratings are etched on slab waveguides creating devices with periodically varying refractive index. These devices are used as basic building blocks of circuits in integrated optoelectronics, since with proper design of the grating characteristics it is possible to steer light toward desired propagation directions.

In the first chapters of this master thesis, dielectric slab waveguides with etched gratings that are excited by a plane incident electromagnetic wave are considered. The aim is to accurately calculate the electromagnetic fields in all areas of space by solving the resulting boundary value problem. The problem is reformulated as a Fredholm integral equation of second kind and then solved by applying entire domain Galerkin techniques.

In the subsequent chapters of the master thesis, numerical optimizations are sought to find the optimal characteristics of the gratings for which the reflected and refracted fields propagate toward directions different from those predicted by Snell's law. In particular, the phenomena of anomalous reflection - where light is reflected toward the direction of the angle of incidence - and anomalous refraction - where light is refracted in the opposite direction to that corresponding to a material with ordinary refractive index - are studied.

## **Keywords**

waveguides, gratings, integral equations, Galerkin techniques, anomalous reflection, anomalous refraction

## Περιεχόμενα

Περιεχόμενα . . . . .	vii
<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>viii</b>
<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	<b>ix</b>
0.1 Εισαγωγή . . . . .	1
<b>1 ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ</b>	<b>3</b>
1.1 Εξισώσεις Maxwell . . . . .	3
1.2 Καταστατικές σχέσεις-Συνοριακές συνθήκες . . . . .	6
1.3 Εξισώσεις Maxwell σε ανομοιογενή ιστροπικό χώρο . . . . .	8
1.4 Αποσύζευξη εξισώσεων Maxwell . . . . .	11
<b>2 ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ</b>	<b>13</b>
2.1 Κυματοδηγοί επίπεδων διηλεκτρικών πλακών . . . . .	13
2.1.1 Γεωμετρική αναπαράσταση κυματοδηγού . . . . .	13
2.1.2 Απλοποίηση διάταξης . . . . .	13
2.2 Διέγερση κυματοδηγού από επίπεδο κύμα . . . . .	16
2.3 Εισαγωγή γραμμοσειρών σε κυματοδηγούς . . . . .	18
<b>3 ΕΥΡΕΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟ ΜΕ ΠΕ- ΡΙΟΔΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ</b>	<b>24</b>
3.1 Συνάρτηση Green . . . . .	24
3.2 Ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου . . . . .	27
3.3 Επίλυση ολοκληρωτικής εξίσωσης ηλεκτρικού πεδίου . . . . .	29
<b>4 ΑΝΩΜΑΛΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΦΩΤΟΣ</b>	<b>38</b>
4.1 Κυματοδηγός με δυαδικές γραμμοσειρές . . . . .	38
4.2 Επιλογή παραμέτρων . . . . .	40
4.2.1 Επιλογή προσπίπτουσας γωνίας, μήκους κύματος και κύκλου λει- τουργίας . . . . .	40
4.2.2 Βέλτιστες παράμετροι περιόδου και πάχους γραμμοσειρών . . . . .	42
<b>5 ΑΝΩΜΑΛΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΦΩΤΟΣ</b>	<b>52</b>
5.1 Κυματοδηγός με δυαδικές γραμμοσειρές . . . . .	52
5.2 Επιλογή παραμέτρων . . . . .	53
5.2.1 Επιλογή προσπίπτουσας γωνίας, μήκους κύματος και κύκλου λει- τουργίας . . . . .	53
5.2.2 Βέλτιστες παράμετροι περιόδου και πάχους γραμμοσειρών . . . . .	53
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>63</b>
<b>Παράρτημα Α «κώδικας MATLAB »</b>	<b>66</b>
Διπλωματική Εργασία	vii

## Κατάλογος Σχημάτων

2.1	αναπαράσταση κυματοδηγού επίπεδων διηλεκτρικών πλακών . . . . .	14
2.2	δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου λόγω προσπίπτοντος κύματος[4] . . . . .	16
2.3	αναπαράσταση διατομής κυματοδηγού με γραμμοσειρές[4] . . . . .	18
2.4	ορθογώνια διαμέριση κυματοδηγού γραμμοσειρών [4] . . . . .	20
3.1	διέγερση από άπειρη γραμμική ρευματική πηγή εντός του κυματοδηγού [4] . .	24
3.2	αναπαράσταση κυματοδηγού με χαραγμένες γραμμοσειρές που υποστηρίζει 3 τάξεις ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων [4] . . . . .	37
4.1	αναπαράσταση κυματοδηγού με χαραγμένες περιοδικές δυαδικές γραμμοσειρές διεγείρομενος από προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα [28] . . . . .	39
4.2	διάγραμμα ισοϋψών της $ \theta_{-1}^r - \theta $ . . . . .	41
4.3	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$	43
4.4	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$	44
4.5	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$	44
4.6	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$	45
4.7	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$	45
4.8	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$ , $w = 232 \text{ nm}$ . . . . .	46
4.9	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ , $w = 287 \text{ nm}$ . . . . .	46
4.10	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$ , $w = 330 \text{ nm}$ . . . . .	47
4.11	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$ , $w = 350 \text{ nm}$ . . . . .	47
4.12	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$ , $w = 388 \text{ nm}$ . . . . .	48
4.13	Διάγραμμα ισοϋψών του $m$ ως συναρτήσεις των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 497 \text{ nm}$ , $w = 232 \text{ nm}$ . . . . .	49
4.14	Διάγραμμα ισοϋψών του $m$ ως συναρτήσεις των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 575 \text{ nm}$ , $w = 287 \text{ nm}$ . . . . .	49
4.15	Διάγραμμα ισοϋψών του $m$ ως συναρτήσεις των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 614 \text{ nm}$ , $w = 330 \text{ nm}$ . . . . .	50
4.16	Διάγραμμα ισοϋψών του $m$ ως συναρτήσεις των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 644 \text{ nm}$ , $w = 350 \text{ nm}$ . . . . .	50
4.17	Διάγραμμα ισοϋψών του $m$ ως συναρτήσεις των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 729 \text{ nm}$ , $w = 388 \text{ nm}$ . . . . .	51
5.1	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$	54
5.2	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$	55
5.3	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$	55
5.4	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$	56



5.5	Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου $m$ ως συνάρτηση των $w$ και $\Lambda$ για $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$	56
5.6	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$ , $w = 163 \text{ nm}$	57
5.7	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ , $w = 269 \text{ nm}$	57
5.8	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$ , $w = 305 \text{ nm}$	58
5.9	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$ , $w = 323 \text{ nm}$	58
5.10	Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου $\Lambda$ για $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$ , $w = 380 \text{ nm}$	59
5.11	Διάγραμμα ισοϋψών του $P_{-1}^t$ ως συνάρτηση των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 409 \text{ nm}$ , $w = 163 \text{ nm}$	60
5.12	Διάγραμμα ισοϋψών του $P_{-1}^t$ ως συνάρτηση των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 415 \text{ nm}$ , $w = 269 \text{ nm}$	60
5.13	Διάγραμμα ισοϋψών του $P_{-1}^t$ ως συνάρτηση των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 462 \text{ nm}$ , $w = 305 \text{ nm}$	61
5.14	Διάγραμμα ισοϋψών του $P_{-1}^t$ ως συνάρτηση των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 486 \text{ nm}$ , $w = 323 \text{ nm}$	61
5.15	Διάγραμμα ισοϋψών του $P_{-1}^t$ ως συνάρτηση των $\theta$ και $\lambda_0$ για $\Lambda = 560 \text{ nm}$ , $w = 380 \text{ nm}$	62

## Κατάλογος Πινάκων

1.1	Εξισώσεις Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή . . . . .	4
4.1	Κεντρικό μήκος κύματος διαφορετικών χρωμάτων του ορατού φάσματος . . .	41
4.2	Βέλτιστα ζεύγη $(w, \Lambda)$ που αποδίδουν τη μέγιστη ισχύ $P_{-1}^r$ και γωνία $\theta_{-1}^r$ . .	43
5.1	Βέλτιστα ζεύγη $(w, \Lambda)$ που αποδίδουν τη μέγιστη ισχύ $P_{-1}^t$ και γωνία $\theta_{-1}^r$ . .	54

## 0.1 Εισαγωγή

Οι όροι ανώμαλη ανάκλαση και ανώμαλη διάθλαση αναφέρονται στα φαινόμενα κατά τα οποία το φως δεν ακολουθεί τους παραδοσιακούς νόμους διάδοσης του Snell και αντί αυτών υπόκειται σε ανάκλαση και διάθλαση υπό διαφορετικές γωνίες. Τα φαινόμενα αυτά έχουν πολυάριθμες εφαρμογές τόσο στη ζώνη μικροκυμάτων και τη ζώνη Terahertz (THz) όσο και στην υπέρυθη και ορατή ζώνη. Ειδικότερα, όσον αφορά την υπέρυθη και ορατή ζώνη γίνεται εκμετάλλευση αυτών των φαινομένων για την κατασκευή αντιανακλαστικών επιστρώσεων αλλά και ασφαιρικών φακών οι οποίοι βρίσκουν εφαρμογή σε συμπαγείς συσκευές ακριβείας, όπως αυτές για υπερφασματική απεικόνιση και σε λέιζερ υψηλής ενέργειας. [1]

### Αντικείμενο και μεθοδολογία μεταπτυχιακής Διατριβής

Στην παρούσα εργασία επιδιώκεται η εύρεση των βέλτιστων γεωμετρικών χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών που χαράσσονται σε άπειρο κυματοδηγό, διεγερόμενο από TE-πολωμένο επίπεδο προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα, τα οποία οδηγούν σε έντονη εμφάνιση των φαινομένων ανώμαλης ανάκλασης και διάθλασης.

Για την επίτευξη του ανωτέρω σκοπού, μελετάται αρχικά η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου σε όλες τις περιοχές του χώρου (εντός και εκτός κυματοδηγού). Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των ακόλουθων βημάτων:

- εφαρμόζοντας τη μέθοδο Sommerfeld υπολογίζεται η συνάρτηση Green του προβλήματος χωρίς γραμμοσειρές
- εκφράζεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών του ηλεκτρικού πεδίου των TE πολωμένων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ως ολοκληρωτική αναπαράσταση με πυρήνα τη συνάρτηση Green
- περιορίζοντας το διάνυσμα παρατήρησης στις γραμμοσειρές γίνεται μετατροπή της ολοκληρωτικής αναπαράστασης σε ολοκληρωτική εξίσωση
- εφαρμόζοντας τεχνικές Galerkin συνολικού χώρου οδηγούμαστε σε ένα άπειρο, τετραγωνικό μη ομογενές γραμμικό σύστημα
- θεωρώντας κολοβωμένο γραμμικό σύστημα  $4N+2$  εξισώσεων ως προς  $4N+2$  αγνώστους το σύστημα μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά και να λάβουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε όλες τις περιοχές.

Στη συνέχεια, ακολουθώντας ένα σχήμα συστηματικών βελτιστοποιήσεων και με τη βοήθεια του προγράμματος Matlab, ερευνώνται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών για τα οποία οι κυματοδηγοί μπορούν να ανακλούν περισσότερο από το 90% της ισχύος του προσπίπτοντος πεδίου πίσω στην κατεύθυνση όπου αυτό διαδίδεται. Ακολουθώντας το ίδιο σχήμα βελτιστοποιήσεων ερευνώνται επιπλέον τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών για τα οποία οι κυματοδηγοί μπορούν να διαθλούν περισσότερο από το 90% της ισχύος του προσπίπτοντος πεδίου προς το ίδιο ημιεπίπεδο με τη διεύθυνση αυτού. Τέλος παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα αναφερόμενα στη βέλτιστη σχεδίαση των χαρακτηριστικών των γραμμοσειρών.

## Δομή μεταπτυχιακής διατριβής

Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας που απαιτούνται για τη μελέτη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε οπτικούς κυματοδηγούς. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται γνωριμία με τους κυματοδηγούς επίπεδων διηλεκτρικών πλακών και τους ρυθμούς διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε αυτούς. Μελετάται επίσης η διαμόρφωση του ηλεκτρικού πεδίου σε κυματοδηγό διεγερόμενο από επίπεδο κύμα αλλά και η ολοκληρωτική αναπαράσταση που ικανοποιεί ο βαθμωτός παράγοντας του ηλεκτρικού πεδίου όταν στον εν λόγω κυματοδηγό χαράσσεται  $\Lambda$ -περιοδικό στρώμα γραμμοσειρών. Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο γίνεται μετατροπή της ολοκληρωτικής αναπαράστασης σε ολοκληρωτική εξίσωση η οποία με τη μέθοδο των ροπών οδηγείται σε ένα άπειρο τετραγωνικό μη ομογενές σύστημα που μπορεί να επιλυθεί αριθμητικά. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο ερευνώνται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών που οδηγούν σε εμφάνιση του φαινομένου την ανώμαλης ανάκλασης και παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα αυτών. Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο ερευνώνται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών που οδηγούν σε εμφάνιση του φαινομένου της ανώμαλης διάθλασης και παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα αυτών.

## Κεφάλαιο 1

# ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Η θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού περιγράφει και ερμηνεύει τα φαινόμενα της δημιουργίας και διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Βασίστηκε στις ανακαλύψεις και τις προόδους πολλών επιστημόνων και μηχανικών, αλλά η συμβολή του *Maxwell* ήταν αυτή που έπαιξε καθοριστικό ρόλο.

Ο Σκωτσέζος φυσικός *James Clerk Maxwell* κατάφερε μέσα από το έργο του να ενοποιήσει τις θεωρίες ηλεκτρισμού, μαγνητισμού και φωτός και να περιγράψει πλήρως τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Οι εξισώσεις του, που αποτελούνται από ένα σύνολο τεσσάρων σχέσεων, περιγράφουν τις ιδιότητες και τις αλληλεπιδράσεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Οι εξισώσεις μπορούν να ιδωθούν ως ζεύγη. Το πρώτο ζεύγος αποτελείται από τους νόμους του Gauss για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενώ το δεύτερο από τους νόμους των *Ampere – Maxwell* και *Faraday*.

### 1.1 Εξισώσεις Maxwell

#### Ολοκληρωτική και διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell

Στις εξισώσεις του *Maxwell* εμπλέκονται οι χωροχρονικές διανυσματικές συναρτήσεις

$$E, H, D, B, J : \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

καθώς και η χωροχρονική πραγματική συνάρτηση

$$\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

όπου:

$E(\mathbf{r}, t)$ : ένταση ηλεκτρικού πεδίου	(Volts/m)
$H(\mathbf{r}, t)$ : ένταση μαγνητικού πεδίου	(Amperes/m)
$D(\mathbf{r}, t)$ : ηλεκτρική μετατόπιση (ροή)	(Coulombs/m <sup>2</sup> )
$B(\mathbf{r}, t)$ : πυκνότητα μαγνητικής ροής	(Webers/m <sup>2</sup> )
$J(\mathbf{r}, t)$ : πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	(Amperes/m <sup>2</sup> )
$\rho(\mathbf{r}, t)$ : πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου	(Coulombs/m <sup>3</sup> )

Ακολουθεί ένας πίνακας στον οποίο συγκεντρώνουμε τις εξισώσεις του *Maxwell* σε ολοκληρωτική μορφή [2] :

Νόμος	εξίσωση	Φυσική σημασία
<i>Gauss</i> για το ηλεκτρικό πεδίο	$\int_{\partial V} D(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = Q$	Η ηλεκτρική ροή διαμέσου κλειστής επιφάνειας είναι ανάλογη με το συνολικό φορτίο $Q$ που περικλείει η επιφάνεια.
<i>Gauss</i> για το μαγνητικό πεδίο	$\int_{\partial V} B(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0$	Η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν (συνέπεια του γεγονότος ότι οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι κλειστές αφού δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα).
<i>Faraday</i>	$\oint_C E(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$	Ένα μαγνητικό πεδίο που μεταβάλλεται με το χρόνο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο τέτοιο ώστε, η ηλεκτρεγερτική δύναμη κατά μήκος ενός αυθαίρετου κλειστού δρόμου να ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής μέσα από μια επιφάνεια που ορίζεται από τον δρόμο
<i>Ampere Maxwell</i>	$\oint_C H(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S D(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S J(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$	Το ηλεκτρικό ρεύμα και το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγουν μαγνητικό πεδίο
* $S$ απλή, λεία και $C^2$ παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με γεωμετρικό σύνορο $C$ , θετικά προσανατολισμένο ως προς ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο μοναδιαίων κάθετων διανυσμάτων της $S$ και $V$ ένα κανονικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ με τμηματικά $C^1$ σύνορο $\partial V$		

Πίνακας 1.1: Εξισώσεις Maxwell σε ολοκληρωτική μορφή

Από τις ολοκληρωτικές μορφές μπορούμε να παραγάγουμε τις εξισώσεις του *Maxwell* σε διαφορική μορφή ως εξής:

Ξεκινώντας από τον νόμο *Gauss* για το ηλεκτρικό πεδίο και με χρήση του θεωρήματος απόκλισης

$$\int_{\partial V} D(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = Q \Leftrightarrow \int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \Leftrightarrow \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \int_V \rho dV$$

και αφού το  $V$  εκλέχθηκε τυχαία, τελικά

$$\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

ομοίως αν ξεκινήσουμε από τον νόμο *Gauss* για το μαγνητικό πεδίο, με χρήση του θεωρήματος απόκλισης

$$\int_{\partial V} B(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = 0 \Leftrightarrow \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0$$

τελικά, αφού  $V$  τυχόν

$$\nabla \cdot B(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.2)$$

Από τον νόμο του *Faraday* τώρα, με χρήση του θεωρήματος *Stokes*

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \Leftrightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

επομένως

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial B(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

τέλος, με χρήση του θεωρήματος *Stokes* στον νόμο των *Ampere – Maxwell* λαμβάνουμε

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S D(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \Leftrightarrow \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

συνεπώς

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial D(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1.4)$$

Οι εξισώσεις *Maxwell* συμπληρώνονται επιπλέον από την εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

η οποία εκφράζει την ιδιότητα ότι η απόκλιση της πυκνότητας ρεύματος  $J$  από έναν απειροστό όγκο, ο οποίος περιβάλλει το σημείο  $r$ , είναι ίση με το ρυθμό μείωσης της πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου  $\rho$  ως προς το χρόνο  $t$ .

### Εξισώσεις Maxwell στο πεδίο συχνοτήτων

Υποθέτοντας ότι οι πεδιακές και ρευματικές χωροχρονικές συναρτήσεις μεταβάλλονται αρμονικά ως προς το χρόνο με βάση τον παράγοντα  $e^{j\omega t}$  (όπου  $\omega$  η κυκλική συχνότητα), δηλαδή

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}], \text{ όπου } \mathbf{A}(\mathbf{r}) : V \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ ο παραστατικός μιγάς ή αλλιώς φάσορας.}$$

οι (1.1)-(1.5) ανάγονται σε χρονοανεξάρτητες εξισώσεις, τις οποίες είναι σαφώς ευκολότερο να διαχειριστούμε. Πιο συγκεκριμένα:

Για τους νόμους του *Gauss* για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, αντίστοιχα προκύπτουν

$$\nabla \cdot \text{Re}[\mathbf{D}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = \text{Re}[\rho(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \Leftrightarrow \text{Re}[(\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] = \text{Re}[\rho(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \text{ έτσι,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.6)$$

και

$$\nabla \cdot \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = 0 \Leftrightarrow \text{Re}[(\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] = 0 \text{ επομένως,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.7)$$

Για το νόμο του *Faraday*

$$\begin{aligned} \nabla \times \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] &= -\frac{\partial \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}]}{\partial t} \Leftrightarrow \text{Re}[(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] = -\text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})\frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t}] \Leftrightarrow \\ \text{Re}[(\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] &= -\text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})j\omega e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

άρα

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

Ενώ για τον νόμο των *Ampere – Maxwell*

$$\begin{aligned} \nabla \times \text{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] &= \frac{\partial \text{Re}[\mathbf{D}(\mathbf{r})e^{j\omega t}]}{\partial t} + \text{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \Leftrightarrow \\ \text{Re}[(\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] &= \text{Re}[(\mathbf{D}(\mathbf{r})j\omega + \mathbf{J}(\mathbf{r})) e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

Τέλος για την εξίσωση της συνέχειας

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \text{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{Re}[\rho(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \Leftrightarrow \text{Re}[(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] = -\text{Re}[\rho(\mathbf{r})\frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t}] \Leftrightarrow \\ \text{Re}[(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}))e^{j\omega t}] &= -\text{Re}[\rho(\mathbf{r})j\omega e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

έτσι,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = -j\omega \rho(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι ανωτέρω χρονοανεξάρτητες εξισώσεις προκύπτουν επίσης μέσω του μετασχηματισμού *Fourier* των (1.1)-(1.5) ως προς το χρόνο. Συνεπώς οι φάσορες αποτελούν τους μετασχηματισμούς *Fourier* των χωροχρονικών πεδιακών συναρτήσεων και για αυτό το λόγο, οι φάσορες, που επαληθεύουν τις (1.6)-(1.9), αναφέρονται ως λύσεις στο πεδίο συχνοτήτων (*frequency domain solutions*) των εξισώσεων *Maxwell*. Ενώ οι χωροχρονικές συναρτήσεις που επαληθεύουν τις (1.1)-(1.4) αναφέρονται ως λύσεις στο πεδίο του χρόνου (*time domain solutions*).

Εφεξής θα εργαζόμαστε μόνο με τις χρονοανεξάρτητες εξισώσεις *Maxwell* σε διαφορική μορφή.

## 1.2 Καταστατικές σχέσεις-Συνοριακές συνθήκες

Παίρνοντας την απόκλιση της (1.3):



$$\nabla \cdot (\nabla \times E(\mathbf{r}, t)) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial B(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right) \Leftrightarrow 0 = -\frac{\partial(\nabla \cdot B(\mathbf{r}, t))}{\partial t}$$

κατά συνέπεια  $\nabla \cdot B(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r})$ .

Επιπλέον η απόκλιση της (1.4) μας δίνει,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times H(\mathbf{r}, t)) &= \nabla \cdot \left(\frac{\partial D(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + J(\mathbf{r}, t)\right) \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial(\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t))}{\partial t} + \nabla \cdot J(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \\ 0 &= \frac{\partial(\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t))}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow 0 = \frac{\partial(\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) - \rho(\mathbf{r}, t))}{\partial t} \end{aligned}$$

άρα  $\nabla \cdot D(\mathbf{r}, t) - \rho(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r})$

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι οι εξισώσεις (1.1) και (1.2) εξυπηρετούν ως αρχικές συνθήκες του συστήματός των εξισώσεων *Maxwell* και έτσι απαιτούνται ακόμα 2 εξισώσεις που να συνδέουν τα  $E, B, D, H$ , ώστε να έχουμε επαρκή αριθμό για να αναζητήσουμε λύσεις αυτών. Τον σκοπό αυτό εξυπηρετούν οι καταστατικές εξισώσεις, οι οποίες καταδεικνύουν την επίδραση της ύλης στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

### Καταστατικές σχέσεις

**Ανισοτροπικά μέσα.** Για ένα ανισοτροπικό μέσο οι καταστατικές εξισώσεις έχουν την μορφή:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \bar{\mu} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

και συνδέουν τα  $E, D$  και  $H, B$  μέσω των  $3 \times 3$  τανυστών  $\bar{\epsilon}$  και  $\bar{\mu}$ . Επειδή οι  $\bar{\epsilon}$  και  $\bar{\mu}$  είναι χωρικές συναρτήσεις, το μέσο αναφέρεται ως ανομοιογενές.

**Ισοτροπικά μέσα.** Στις ειδικές περιπτώσεις των ισοτροπικών μέσων οι ανωτέρω καταστατικές σχέσεις είναι ανεξάρτητες από την πόλωση των πεδίων και ανάγονται στις μορφές

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.12)$$

όπου  $\epsilon, \mu$  μιγαδικές χωρικές βαθμωτές συναρτήσεις.

### Συνοριακές συνθήκες

Ενδιαφερόμενοι για τη διαμόρφωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, καθώς διαδίδεται από ένα μέσο σε ένα άλλο με διαφορετικά χαρακτηριστικά, απαιτείται η συμπλήρωση των εξισώσεων του *Maxwell* και των καταστατικών σχέσεων με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές πληρούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταβολής των φυσικών παραμέτρων του μέσου και υπαγορεύονται από τις ολοκληρωτικές μορφές των εξισώσεων *Maxwell*.

Συγκεκριμένα, στη διαχωριστική επιφάνεια  $S$  δύο μέσων με αντίστοιχες φυσικές παραμέτρους  $(\epsilon_1, \mu_1)$  και  $(\epsilon_2, \mu_2)$ , απουσία επιφανειακών κατανομών φορτίων ή ρευμάτων, ισχύουν οι εξής συνοριακές συνθήκες:

- Οι εφαπτομενικές συνιστώσες των  $E$  και  $H$  είναι συνεχείς κατά μήκος της επιφάνειας.
- Οι κάθετες συνιστώσες των  $D$  και  $B$  είναι συνεχείς κατά μήκος της επιφάνειας.

Οι ανωτέρω συνθήκες διατυπώνονται μαθηματικά ως εξής:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad (1.13)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \varepsilon_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

$$\mu_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) = \mu_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \quad (1.16)$$

όπου  $\hat{\mathbf{n}}$  μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$ .

### 1.3 Εξισώσεις Maxwell σε ανομοιογενή ιστροπικό χώρο

#### διανυσματικές κυματικές εξισώσεις

Θεωρώντας ανομοιογενές ιστροπικό μέσο με μαγνητική διαπερατότητα  $\mu(\mathbf{r})$  και ηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\varepsilon(\mathbf{r})$  οι εξισώσεις του *Maxwell* μέσω των καταστατικών σχέσεων μετασχηματίζονται σε

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \rho(\mathbf{r}) \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r})) = 0 \quad (1.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.20)$$

Εκφράζοντας την (1.19) ως προς  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  και αντικαθιστώντας στην (1.20) λαμβάνουμε:

$$\nabla \times \left( -\frac{\mu(\mathbf{r})^{-1}}{j\omega} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \right) = j\omega\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow$$

$$\nabla \times (\mu(\mathbf{r})^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \omega^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.21)$$

Όμοια εκφράζουμε την (1.20) ως προς  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  και αντικαθιστούμε στην (1.19) λαμβάνοντας:

$$\nabla \times \left( \frac{\varepsilon(\mathbf{r})^{-1}}{j\omega} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \frac{\varepsilon(\mathbf{r})^{-1}}{j\omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right) = -j\omega\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow$$

$$\nabla \times (\varepsilon(\mathbf{r})^{-1} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r})) = \nabla \times \varepsilon(\mathbf{r})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.22)$$

Οι εξισώσεις (1.21) και (1.22), οι οποίες εμπλέκουν μόνον το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντιστοίχως, αναφέρονται ως διανυσματικές κυματικές εξισώσεις.

Οι (1.21) και (1.22) εξειδικεύονται περαιτέρω υποθέτοντας ότι το μέσο έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα  $\mu = \mu_0$  και ηλεκτρική επιτρεπτότητα  $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})$ , όπου  $n(\mathbf{r})$  ο δείκτης διάθλασης:

Ξεκινώντας από τις εξισώσεις (1.17)-(1.20) βλέπουμε ότι ισχύουν

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \rho(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \nabla \cdot (n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})) = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.24)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.26)$$

και τότε ο συλλογισμός που ακολουθήσαμε για την παραγωγή της (1.21) μας οδηγεί:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \omega^2 \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Περαιτέρω η (1.23) βάσει της σχέσης

$$\nabla n^2(\mathbf{r}) = 2n(\mathbf{r}) \nabla n(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

και τον κανόνα υπολογισμού της απόκλισης γινομένου βαθμωτής επί διανυσματική συνάρτηση ισοδυναμεί με

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})} - 2\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}$$

Έτσι, συμβολίζοντας ως  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  τον κυματικό αριθμό του ελεύθερου χώρου και εφαρμόζοντας τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (1.29)$$

η (1.27) μας δίνει:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_0^2 n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -j\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\ (\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r})) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + 2\nabla[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\nabla n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}] &= \nabla[\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 n^2(\mathbf{r})}] + j\omega \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Παίρνουμε τώρα τον στροβιλισμό της (1.26) και χρησιμοποιώντας τον κανόνα υπολογισμού του στροβιλισμού γινομένου βαθμωτής επί διανυσματική συνάρτηση και τις (1.25),(1.28) προκύπτει:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) = j\omega\varepsilon_0 \nabla \times (n^2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
&= j\omega\varepsilon_0[n^2(\mathbf{r})\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla n^2(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \\
&= j\omega\varepsilon_0[n^2(\mathbf{r})(-j\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r})) + 2n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \\
&= \omega^2\varepsilon_0\mu_0 n^2(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) + 2j\omega\varepsilon_0 n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

περαιτέρω με χρήση των (1.29),(1.24) και (1.26) καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})) - \nabla^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= k_0^2 n^2(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) + 2j\omega\varepsilon_0 n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\
(\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - 2n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) \times j\omega\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \\
(\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - 2n(\mathbf{r})\nabla n(\mathbf{r}) \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})}{n^2(\mathbf{r})} - \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{n^2(\mathbf{r})}\right) \Leftrightarrow \\
(\nabla^2 + k_0^2 n^2(\mathbf{r}))\mathbf{H}(\mathbf{r}) + 2\frac{\nabla n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \times (\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})) &= -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) - 2\frac{\nabla n(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (1.31)
\end{aligned}$$

### Τμηματικά σταθερή κατανομή του δείκτη διάθλασης

Θεωρούμε ακόμα ειδικές περιπτώσεις μέσω των  $M$ , στα οποία ο δείκτης διάθλασης  $n(\mathbf{r})$  είναι τμηματικά σταθερός, δηλαδή το  $M$  εκφράζεται ως ένωση  $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$  υποσυνόλων  $M_i$  με  $IntM_i \cap IntM_j = \emptyset$   $i \neq j$ , όπου  $n(\mathbf{r}) = n_i$  (σταθερό) για κάθε  $\mathbf{r} \in IntM_i$ . Υπό αυτές τις προϋποθέσεις και επειδή ισχύει  $\nabla n(\mathbf{r}) = \nabla n_i = 0$  για κάθε  $\mathbf{r} \in IntM_i$ , οι διανυσματικές κυματικές εξισώσεις (1.30) και (1.31) οδηγούνται στις

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla\left[\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0 n_i^2}\right] + j\omega\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}) \stackrel{(1.10)}{=} -\frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}))}{j\omega\varepsilon_0 n_i^2} + j\omega\mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in IntM_i \quad (1.32)$$

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2)\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in IntM_i \quad (1.33)$$

Επιπλέον, στις συνοριακές επιφάνειες  $\partial M_i$  (μεταβολής του δείκτη διάθλασης) απαιτούνται οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες συνέχειας (1.13) και (1.14) των εφαπτομενικών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε διατάξεις των οποίων μέσο διάδοσης είναι ο χώρος  $\mathbb{R}^3$  εκφρασμένος ως ένωση λωρίδων, με πλευρές παράλληλες προς τον ίδιο άξονα, και στο εσωτερικό κάθε λωρίδας ο δείκτης διάθλασης προϋποτίθεται σταθερός. Έχει λοιπόν νόημα να εκφράσουμε τις εξισώσεις (1.32) και (1.33) σε καρτεσιανή μορφή.

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $Oxyz$  το τυχόν  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  εκφράζεται ως

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}},$$

όπου  $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων.

Έτσι, οι (1.32) και (1.33) (για  $u = x, y, z$ ) παίρνουν τη μορφή:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2) E_u(\mathbf{r}) = -\frac{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})))_u}{j\omega\varepsilon_0 n_i^2} + j\omega\mu_0 J_u(\mathbf{r}) \quad (1.34)$$

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2) H_u(\mathbf{r}) = -(\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}))_u \quad (1.35)$$

## 1.4 Αποσύζευξη εξισώσεων Maxwell

Οι εξισώσεις (1.25) και (1.26) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων εκφράζονται ως εξής

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu_0 H_x \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0 n^2(x, y, z) E_x + J_x \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2(x, y, z) E_y + J_y \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 n^2(x, y, z) E_z + J_z \quad (1.41)$$

Οι (1.36)-(1.41) αποτελούν ένα  $6 \times 6$  σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Θεωρώντας ακόμα ότι τα πεδιακά μεγέθη και οι ρευματικές κατανομές των διατάξεων είναι ανεξάρτητα της μεταβλητής  $y$  (άρα  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ) το σύστημά μας απλουστεύεται περαιτέρω:

$$\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial z} = j\omega\mu_0 H_x(x, z) \quad (1.42)$$

$$\frac{\partial E_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y(x, z) \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial E_y(x, z)}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_z(x, z) \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_0 n^2(x, z) E_x(x, z) - J_x(x, z) \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial H_x(x, z)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(x, z)}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2(x, z) E_y(x, z) + J_y(x, z) \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 n^2(x, z) E_z(x, z) + J_z(x, z) \quad (1.47)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη περίπτωση οι εξισώσεις του *Maxwell* αποσυζευγνύονται σε 2 ανεξάρτητα συστήματα  $3 \times 3$  εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega\mu_0 H_x & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 H_z & \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -j\omega\varepsilon_0 n^2(x, z) E_x - J_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_0 n^2(x, z) E_y + J_y & \frac{\partial H_y}{\partial x} &= j\omega\varepsilon_0 n^2(x, z) E_z + J_z \end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις (1.42),(1.44),(1.46) συνάγεται ότι το πεδίο που κυματοδηγείται παράλληλα στον  $z$  άξονα είναι εγκάρσια ηλεκτρικό ( $TE_z$  mode) καθώς η συνιστώσα  $E_z$  απουσιάζει. Ενώ από τις εξισώσεις (1.43),(1.45),(1.47) όταν το πεδίο κυματοδηγείται παράλληλα στον  $z$  άξονα συνάγεται ότι το πεδίο είναι εγκάρσια μαγνητικό ( $TM_z$  mode) καθώς η συνιστώσα  $H_z$  απουσιάζει.

Η λύση του  $TE_z$  προβλήματος ανάγεται στον προσδιορισμό της βαθμωτής συνάρτησης  $E_y$ , η οποία ικανοποιεί την (1.34) σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης, καθώς και τις συνοριακές συνθήκες που απορρέουν από την (1.13). Κατόπιν προσδιορίζονται οι  $H_x$  και  $H_z$  από τις (1.42) και (1.44).

Αντιστοίχως, η λύση του προβλήματος  $TM_z$  ανάγεται στον προσδιορισμό της  $H_y$ , η οποία ικανοποιεί την (1.35) σε κάθε περιοχή σταθερού δείκτη διάθλασης και τις συνοριακές συνθήκες (1.24). Οι  $E_x$  και  $E_z$  προσδιορίζονται έπειτα από τις (1.45) και (1.47).

## Κεφάλαιο 2

# ΚΥΜΑΤΟΔΗΓΟΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΠΛΑΚΩΝ ΜΕ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ο όρος κυματοδηγός αναφέρεται σε μια δομή που περιορίζει και καθοδηγεί τη δέσμη κύματος μέσα σε ένα μονοπάτι αξιοποιώντας, κατά το βέλτιστο δυνατό, το φαινόμενο της ολικής εσωτερικής ανάκλασης (total internal reflection -TIR, φαινόμενο κατά το οποίο ένα διαδιδόμενο κύμα ανακλάται κατά 100% καθώς προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων). Οι κυματοδηγοί επιτρέπουν στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα να διανύουν μεγάλες αποστάσεις, χωρίς ενεργειακές απώλειες λόγω διάχυσης.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διαμορφώνεται εντός του κυματοδηγού υπακούοντας τις εξισώσεις του *Maxwell* και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Οι λύσεις του συστήματος που προκύπτει από τις εξισώσεις *Maxwell* και τις καταστατικές σχέσεις περιορίζουν τη διαμόρφωση του πεδίου σε ένα διακριτό σύνολο. Κάθε λύση, που ονομάζεται ρυθμός (mode), φαίνεται διαφορετική και συμπεριφέρεται διαφορετικά μέσα στον κυματοδηγό.

### 2.1 Κυματοδηγοί επίπεδων διηλεκτρικών πλακών

#### 2.1.1 Γεωμετρική αναπαράσταση κυματοδηγού

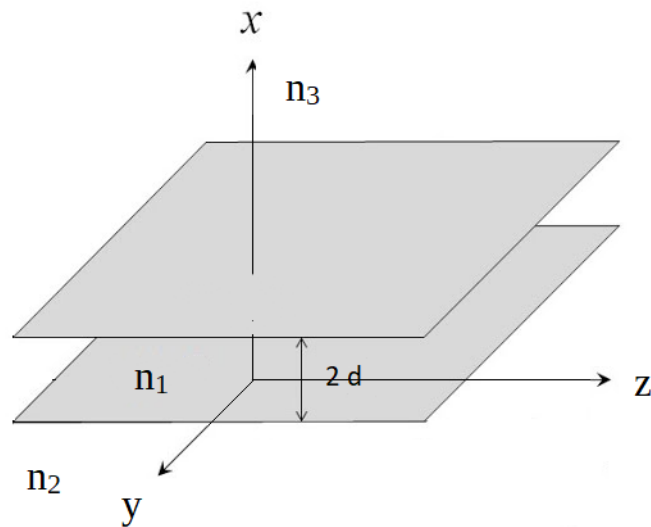
Οι κυματοδηγοί επίπεδων διηλεκτρικών πλακών (Σχ. 2.1) είναι οι απλούστεροι οπτικοί κυματοδηγοί και χρησιμοποιούνται ευρέως για την καθοδήγηση του φωτός σε ολοκληρωμένα οπτικά κυκλώματα. Λόγω της απλής γεωμετρίας τους, οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί και οι ρυθμοί ανάκλασης των επίπεδων κυματοδηγών μπορούν να περιγραφούν από απλές μαθηματικές εκφράσεις.

Ο πυρήνας του κυματοδηγού αποτελείται από μία διηλεκτρική πλάκα με δείκτη διάθλασης  $n_1$  και εναποτίθεται σε ημιάπειρο υπόστρωμα με δείκτη διάθλασης  $n_2$ . Ο δείκτης διάθλασης του ημιάπειρου μέσου πάνω από τον πυρήνα σημειώνεται ως  $n_3$  ενώ στην περίπτωση του ελεύθερου χώρου  $n_3 = n_0 = 1$ . Προκειμένου το ηλεκτρομαγνητικό κύμα να "παγιδευτεί" εντός του πυρήνα και να διαδοθεί σε μεγάλες αποστάσεις, είναι απαραίτητο να ισχύει  $n_1 > n_2, n_3$ . Όταν  $n_2 = n_3$ , ο κυματοδηγός ονομάζεται συμμετρικός ενώ για  $n_2 \neq n_3$  ο κυματοδηγός καλείται ασύμμετρος.

#### 2.1.2 Απλοποίηση διάταξης

Απλοποιούμε την περιγραφή του κυματοδηγού υποθέτοντας ότι το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του  $z$  άξονα και δεν υπάρχει υπέρθεση των πεδίων μεγεθών. Αυτή η συνθήκη μπορεί πάντα να επιτευχθεί καθώς είναι δυνατή η περιστροφή του συστήματος συντεταγμένων στο επίπεδο  $yz$  έως ότου αυτή ικανοποιηθεί. Επιπλέον θεωρούμε ότι η διάταξη έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$  και ο πυρήνας έχει πάχος  $2d$ .

Στην πραγματικότητα οι κυματοδηγοί δεν είναι ομοιόμορφοι και άπειροι στην κατεύθυνση  $y$ , όμως μπορούν να προσεγγιστούν ως κυματοδηγοί επίπεδων διηλεκτρικών πλακών όταν το πλάτος τους είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του πυρήνα. Συνεπώς η μελέτη των κυματοδηγών επίπεδων διηλεκτρικών πλακών είναι σημαντική για την κατανόηση των ιδιοτήτων



Σχήμα 2.1: αναπαράσταση κυματοδηγού επίπεδων διηλεκτρικών πλακών

πιο περίπλοκων διηλεκτρικών κυματοδηγών.

Στη συγκεκριμένη διάταξη, σύμφωνα με όσα είδαμε στην παράγραφο 1.4, οι κυματοδηγούμενοι  $TE_z$  και  $TM_z$  ρυθμοί στην κατεύθυνση  $\hat{z}$  προσδιορίζονται από το ηλεκτρικό πεδίο  $E_y(x, z)$  και το μαγνητικό πεδίο  $H_y(x, z)$ . Αναζητούμε λοιπόν λύσεις των ομογενών εξισώσεων (1.34) και (1.35) της μορφής

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_y(x, z)\hat{\mathbf{y}} = e(x) \exp[-j\beta z]\hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H} &= H_y(x, z)\hat{\mathbf{y}} = h(x) \exp[-j\beta z]\hat{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

όπου  $\beta$  η σταθερά διάδοσης.

Οι όροι  $e(x), h(x)$  αποτελούν την "εικόνα" των ρυθμών στο επίπεδο  $xy$  του κυματοδηγού, ενώ ο όρος  $\exp[-j\beta z]$  είναι υπεύθυνος για την αλλαγή φάσης των  $TE_z$  και  $TM_z$  καθώς διαδίδονται κατά μήκος του  $z$  άξονα. Αυτό μας επιτρέπει να μεταβούμε στις 2 διαστάσεις για την μελέτη των πεδιακών μεγεθών.

Από την (1.34) για την ομογενή περίπτωση έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k_0^2 n_i^2)E_y(\mathbf{r}) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n_i^2\right)E_y(x, z) = 0 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n_i^2\right)e(x) \exp[-j\beta z] &= 0\end{aligned}$$

Τελικά

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 + k_0^2 n_i^2\right)e(x) = 0 \quad (2.1)$$



ομοίως για την ομογενή περίπτωση της (1.35) καταλήγουμε:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2 + k_0^2 n_i^2\right)h(x) = 0 \quad (2.2)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι  $e(x)$ ,  $h(x)$  επιλύουν την ίδια εξίσωση (εξίσωση Helmholtz) με διαφορά όμως ως προς τις συνοριακές συνθήκες.

Αν εισάγουμε λοιπόν κατάλληλη συνάρτηση  $\Psi(x)$ , η οποία αντιπροσωπεύει την  $e(x)$  για τους  $TE_z$  ρυθμούς και την  $h(x)$  για τους  $TM_z$  ρυθμούς τότε μπορούμε να αντιμετωπίσουμε ενιαία τους δύο ρυθμούς.

Επειδή οι συναρτήσεις  $E_y(x, z)$  και  $H_y(x, z)$  στους ημιάπειρους χώρους  $x > d$  και  $x < -d$  πρέπει να πληρούν τη συνθήκη ακτινοβολίας (επομένως για  $x = \pm\infty$  εξαφανίζονται) τελικά η  $\Psi(x)$  εκφράζεται στη μορφή

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_1 \exp[-g_3(x-d)] & x \geq d \\ A_2 \cosh[g_1 x] + A_3 \sinh[g_1 x] & -d \leq x \leq d \\ A_4 \exp[g_2(x+d)] & x \leq -d \end{cases}$$

όπου

$$g_i(\beta) = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_i^2}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

και

$$\operatorname{Re}[g_3(\beta)] \geq 0, \operatorname{Re}[g_2(\beta)] \geq 0, \quad \operatorname{Im}[g_3(\beta)] \geq 0, \operatorname{Im}[g_2(\beta)] \geq 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες απαιτούν τη συνέχεια των εφαπτομενικών πεδιακών συνιστωσών στις επιφάνειες αλλαγής του δείκτη διάθλασης. Έτσι για τους  $TE_z$  ρυθμούς απαιτείται η συνέχεια των  $E_y$  και  $H_z$  ενώ για τους  $TM_z$  ρυθμούς η συνέχεια των  $H_y$  και  $E_z$ .

Από τις (1.44) και (1.47), έπεται ότι για τους  $TE_z$  ρυθμούς οι  $\Psi$  και  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  πρέπει να είναι συνεχείς ενώ για τους  $TM_z$  ρυθμούς πρέπει να είναι συνεχείς οι  $\Psi$  και  $\frac{1}{n^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$  στις επιφάνειες  $x = d$ ,  $x = -d$ .

Αυτές οι συνθήκες διαμορφώνουν ένα  $4 \times 4$  ομογενές γραμμικό σύστημα  $\mathbf{CA} = 0$ , όπου το διάνυσμα  $\mathbf{A}$  περιέχει τους συντελεστές  $A_1 - A_4$  και ο  $4 \times 4$  πίνακας  $\mathbf{C}$  στοιχεία που αποτελούν συναρτήσεις της παραμέτρου  $\beta$ . Συγκεκριμένα ο πίνακας  $\mathbf{C}$  έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cosh[g_1 d] & -\sinh[g_1 d] & 0 \\ -\frac{g_3}{m_3} & -\frac{g_1}{m_1} \sinh[g_1 d] & -\frac{g_1}{m_1} \cosh[g_1 d] & 0 \\ 0 & \cosh[g_1 d] & -\sinh[g_1 d] & -1 \\ 0 & -\frac{g_1}{m_1} \sinh[g_1 d] & \frac{g_1}{m_1} \cosh[g_1 d] & -\frac{g_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

όπου

$$m_i = \begin{cases} 1, & TEz \text{ modes} \\ n_i^2, & TMz \text{ modes} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Το ανωτέρω σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις μόνο όταν η ορίζουσά του είναι ίση με το μηδέν. Έτσι οι τιμές της παραμέτρου  $\beta$  που αποτελούν λύσεις της  $\det(\mathbf{C}) = 0$  μας δίνουν τα κυματοδηγούμενα κύματα

Για τη συνέχεια θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη διάδοση εγκάρσια ηλεκτρικών κυμάτων, καθώς αυτό θα απλουστεύσει τους υπολογισμούς μας, όμως με τις τεχνικές που θα αναπτύξουμε μπορούμε να μελετήσουμε αντίστοιχα την διάδοση εγκάρσια μαγνητικών κυμάτων.

## 2.2 Διέγερση κυματοδηγού από επίπεδο κύμα

Χάριν ευκολίας, θεωρούμε κυματοδηγό του οποίου το ημιάπειρο μέσο πάνω από τον πυρήνα έχει δείκτη διάθλασης  $n_0$ .

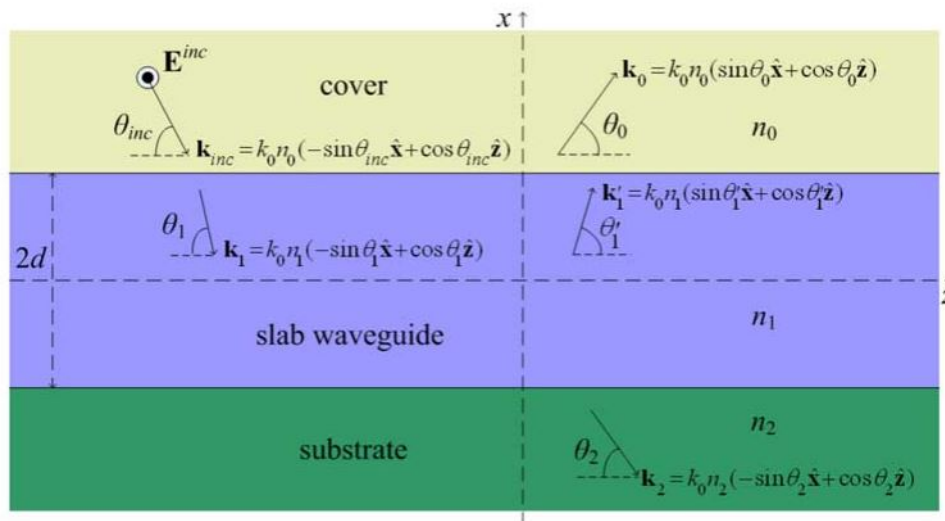
Ένας τρόπος διέγερσης του κυματοδηγού είναι μέσω προσπίπτοντος κύματος. Έστω λοιπόν ότι προσπίπτει στην επιφάνεια του πυρήνα TE-πολωμένο επίπεδο κύμα μοναδιαίου πλάτους υπό γωνία  $\theta_{inc}$  (σχήμα 2.2). Ακολουθώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης ενότητας, το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο θα έχει τη μορφή:

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \Psi^{inc}(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} = \exp[-j\mathbf{k}_{inc} \cdot \mathbf{r}]\hat{\mathbf{y}} \quad (2.3)$$

όπου  $\mathbf{k}_{inc}$  το διερχόμενο κυματικό διάνυσμα για το οποίο γνωρίζουμε ότι ισχύει  $|\mathbf{k}_{inc}| = 2\pi/\lambda$ , με  $\lambda$  το μήκος κύματος. Επιπλέον  $\lambda = \lambda_0/n$ , όπου  $\lambda_0$  το μήκος κύματος στον ελεύθερο χώρο και  $n$  ο δείκτης διάθλασης του μέσου (βλ. [3], Sec. 5.2).

Έτσι  $|\mathbf{k}_{inc}| = k_0 n_0$  και τελικά το διάνυσμα  $\mathbf{k}_{inc}$  αναλύεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως:

$$\mathbf{k}_{inc} = -k_0 n_0 \sin \theta_{inc} \hat{\mathbf{x}} + k_0 n_0 \cos \theta_{inc} \hat{\mathbf{z}}$$



Σχήμα 2.2: δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου λόγω προσπίπτοντος κύματος[4]

Εφόσον γνωρίζουμε τη μορφή του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου, μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο σε ολόκληρο τον κυματοδηγό ως γραμμική υπέρθεση των επίπεδων κυμάτων

που δημιουργούνται λόγω ανάκλασης και διάθλασης στις συνοριακές επιφάνειες.

Θα ισχύει λοιπόν

$$\mathbf{E}_0 = \Psi_0(x, z) \hat{\mathbf{y}} \quad (2.4)$$

$$\Psi_0(x, z) = \begin{cases} \exp[-jk_0 n_0 (-\sin \theta_{inc} x + \cos \theta_{inc} z)] \\ \quad + R \exp[-jk_0 n_0 (\sin \theta_0 x + \cos \theta_0 z)], & x \geq d \\ B \exp[-jk_0 n_1 (-\sin \theta_1 x + \cos \theta_1 z)] \\ \quad + C \exp[-jk_0 n_1 (\sin \theta'_1 x + \cos \theta'_1 z)], & -d \leq x \leq d \\ T \exp[-jk_0 n_2 (-\sin \theta_2 x + \cos \theta_2 z)], & x \leq -d \end{cases}$$

Με την βοήθεια των νόμων ανάκλασης και Snell (βλ. [5], Κεφ. 34) οι οποίοι μας δίνουν αντιστοίχως

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \theta_{inc}, \quad \theta_1 = \theta'_1 \text{ και} \\ n_1 \cos \theta_1 &= n_0 \cos \theta_{inc}, \quad n_2 \cos \theta_2 = n_0 \cos \theta_{inc} \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι  $\Psi_0(x, z) = \exp(-jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) \Psi_0(x)$ , όπου

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \exp[jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} x] + R \exp[-jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} x], & x \geq d \\ B \exp[jk_0 n_1 \sin \theta_1 x] + C \exp[-jk_0 n_1 \sin \theta_1 x], & -d \leq x \leq d \\ T \exp[jk_0 n_2 \sin \theta_2 x], & x \leq -d \end{cases} \quad (2.5)$$

Παρόμοια με όσα είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, οι  $R, B, C, T$  θα υπολογιστούν από την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στις επιφάνειες  $x = \pm d$  απαιτώντας τη συνέχεια των  $\Psi_0$  και  $\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}$ . Οδηγούμαστε έτσι στην επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} \exp[jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} d] + R \exp[-jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} d] = \\ \quad B \exp[jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] + C \exp[-jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] \\ jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} \exp[jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} d] - jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} R \exp[-jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} d] = \\ \quad jk_0 n_1 \sin \theta_1 B \exp[jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] - jk_0 n_1 \sin \theta_1 C \exp[-jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] \\ B \exp[-jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] + C \exp[jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] = T \exp[-jk_0 n_2 \sin \theta_2 d] \\ jk_0 n_1 \sin \theta_1 B \exp[-jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] - jk_0 n_1 \sin \theta_1 C \exp[jk_0 n_1 \sin \theta_1 d] = \\ \quad jk_0 n_2 \sin \theta_2 T \exp[-jk_0 n_2 \sin \theta_2 d] \end{cases}$$

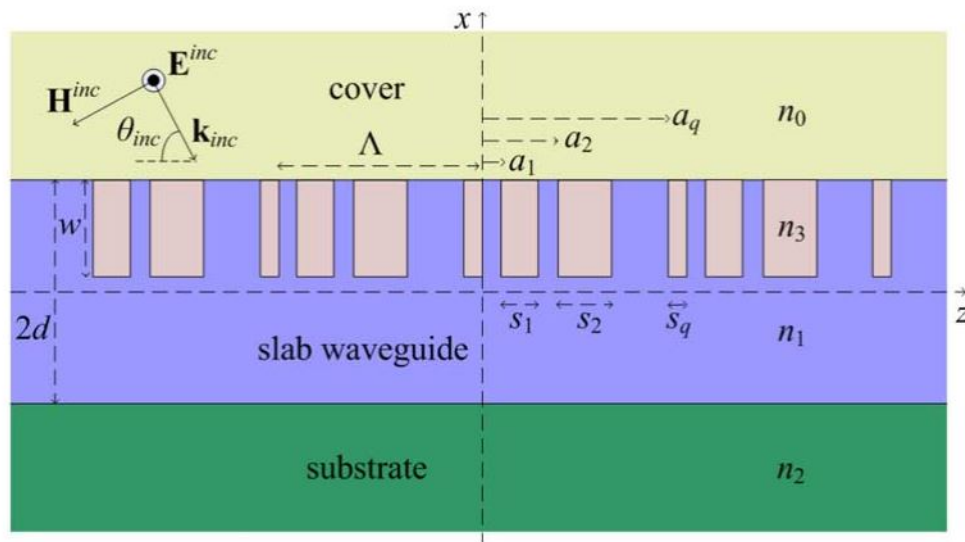
το οποίο μας δίνει τελικά

$$\begin{aligned} T &= 4 \exp(jk_0 n_0 \sin \theta_{inc} d) \exp(jk_0 n_2 \sin \theta_2 d) \\ &\cdot \left[ \exp(2jk_0 n_1 \sin \theta_1 d) \left(1 + \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1 \sin \theta_1}\right) \left(1 + \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_0 \sin \theta_{inc}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \exp(-2jk_0n_1 \sin \theta_1 d) \left(1 - \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1 \sin \theta_1}\right) \left(1 - \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_0 \sin \theta_{inc}}\right) \Big]^{-1} \\
 B &= \frac{T}{2} \exp(jk_0n_1 \sin \theta_1 d) \exp(-jk_0n_2 \sin \theta_2 d) \left(1 + \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1 \sin \theta_1}\right) \\
 C &= \frac{T}{2} \exp(-jk_0n_1 \sin \theta_1 d) \exp(-jk_0n_2 \sin \theta_2 d) \left(1 - \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1 \sin \theta_1}\right) \\
 R &= \frac{T}{4} \exp(jk_0n_0 \sin \theta_{inc} d) \exp(-jk_0n_2 \sin \theta_2 d) \\
 & \left[ \exp(2jk_0n_1 \sin \theta_1 d) \left(1 + \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1 \sin \theta_1}\right) \left(1 - \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_0 \sin \theta_{inc}}\right) \right. \\
 & \left. + \exp(-2jk_0n_1 \sin \theta_1 d) \left(1 - \frac{n_2 \sin \theta_2}{n_1 \sin \theta_1}\right) \left(1 + \frac{n_1 \sin \theta_1}{n_0 \sin \theta_{inc}}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

### 2.3 Εισαγωγή γραμμοσειρών σε κυματοδηγούς

Οι γραμμοσειρές περίθλασης (diffraction grating) αποτελούν οπτικά στοιχεία που διαιρούν το φως που αποτελείται από διαφορετικά μήκη κύματος στις επιμέρους συνιστώσες του. Η χάραξη περιοδικών γραμμοσειρών σε έναν κυματοδηγό, κατά μήκος της διεύθυνσης κυματοδηγησης, δημιουργεί διατάξεις που αποτελούν βασικά δομικά στοιχεία των οπτικών δικτύων. Παραδείγματα τέτοιων διατάξεων είναι τα οπτικά φίλτρα συχνοτήτων (optical wavelength filters), πολυπλέκτες-αποπολυπλέκτες (multiplexers- demultiplexers), μετατροπείς ρυθμών (mode converters) οπτικών παλμών πολύ μεγάλου εύρους ζώνης (ultrawide-band pulses), συντονιζόμενα (tunable) lasers, οπτικοί διακόπτες (optical switch) κ.α.



Σχήμα 2.3: αναπαράσταση διατομής κυματοδηγού με γραμμοσειρές[4]

Στον πυρήνα του κυματοδηγού που ορίσαμε στις δύο προηγούμενες ενότητες χαράσσουμε  $\Lambda$ -περιοδικό στρώμα γραμμοσειρών αποτελούμενο από ορθογώνιες αυλακώσεις (σχήμα 2.3).

Το περιοδικό στρώμα συντίθεται από  $q$  ορθογώνια με δείκτη διάθλασης  $n_3$ , πάχος  $w$ , μήκος  $s_i$  και απόσταση  $a_i$  από το  $z = 0$ ,  $i = 1, \dots, q$ . Η κατανομή του δείκτη διάθλασης στη διάταξή μας διαμορφώνεται πλέον από την περιοδική επέκταση ως προς  $z$  της τμηματικής συνάρτησης  $n(x, z)$ , η οποία ορίζεται στο  $(-\infty, \infty) \times [0, \Lambda]$  ως εξής:

$$n(x, z) = \begin{cases} n_0, & x > d, & z \in [0, \Lambda] \\ n_3, & d - w < x < d, & z \in [a_i, a_i + s_i] \\ n_1, & d - w < x < d, & z \notin [a_i, a_i + s_i] \\ n_1, & -d < x < d - w, & z \in [0, \Lambda] \\ n_2, & x < -d, & z \in [0, \Lambda] \end{cases} \quad (2.7)$$

Καθώς προσπίπτει στην επιφάνεια του πυρήνα το TE-πολωμένο επίπεδο κύμα που ορίσαμε στην ενότητα 2.2, δημιουργείται στο σύνολο της διάταξης ηλεκτρικό πεδίο της μορφής

$$\mathbf{E} = \Psi(x, z)\hat{\mathbf{y}} \quad (2.8)$$

Το πρόβλημά μας λοιπόν έγκειται στον καθορισμό του βαθμωτού παράγοντα  $\Psi(x, z)$ .

### Ολοκληρωτική αναπαράσταση βαθμωτού παράγοντα

Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι ο βαθμωτός παράγοντας  $\Psi(x, z)$  εκφράζεται μέσω ολοκληρωτικής αναπαράστασης με πυρήνα τη συνάρτηση Green του ομογενούς (χωρίς γραμμοσειρές) προβλήματος. Έτσι η εύρεση του βαθμωτού παράγοντα  $\Psi(x, z)$  ανάγεται στη μετατροπή της ολοκληρωτικής αναπαράστασης σε ολοκληρωτική εξίσωση και επίλυση αυτής.

**Θεώρημα 2.1.** *Ο βαθμωτός παράγοντας  $\Psi(x, z)$  του ηλεκτρικού πεδίου επιδέχεται την ολοκληρωτική αναπαράσταση*

$$\Psi(x, z) = \Psi_0(x, z) + k_0^2(n_3^2 - n_1^2) \iint_{S_d} G(x, z; x', z') \Psi(x', z') dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.9)$$

όπου  $S_d$  η συνολική επιφάνεια των γραμμοσειρών.

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με την (1.32) η συνάρτηση  $\Psi(x, z)$  ικανοποιεί τη βαθμωτή εξίσωση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2(x, z)) \Psi(x, z) = 0, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.10)$$

όπου  $n(x, z)$  όπως ορίστηκε στην (2.7).

Επιπλέον, όπως είδαμε νωρίτερα, οι  $\Psi$  και  $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  πρέπει να είναι συνεχείς στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταβολής του δείκτη διάθλασης.

Ομοίως η  $\Psi_0(x, z)$  είναι λύση της βαθμωτής εξίσωση Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_h^2(x)) \Psi_0(x, z) = 0 \quad (2.11)$$

όπου

$$n_h(x) = \begin{cases} n_0, & x > d \\ n_1, & -d < x < d \\ n_2, & x < -d \end{cases} \quad (2.12)$$

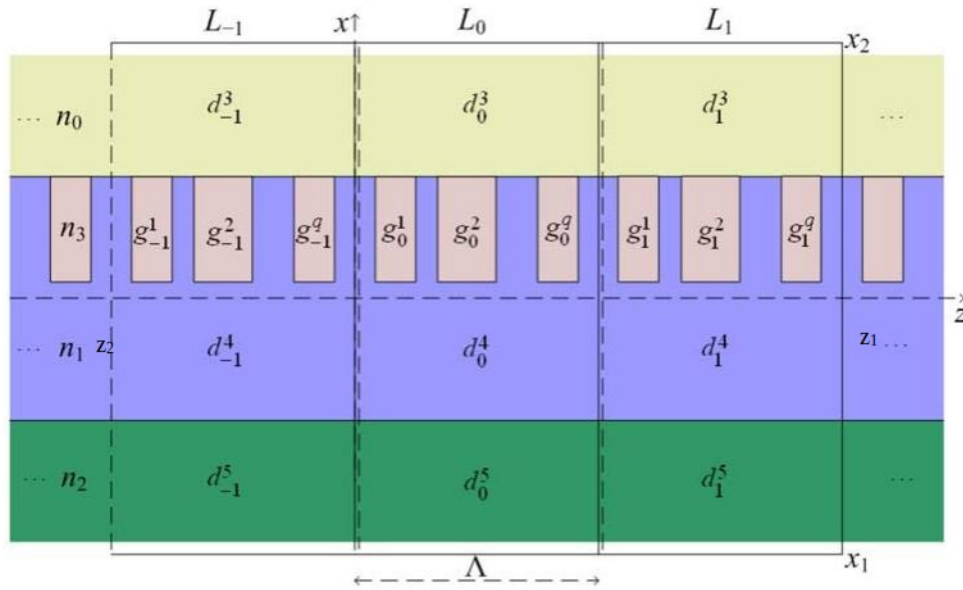
η κατανομή του δείκτη διάθλασης της ομογενούς διάταξης.

Ενώ, όπως θα δούμε αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο, η συνάρτηση Green  $G$  αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_h^2(x))G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.13)$$

και οι  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  και  $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x}$ , είναι συνεχείς στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταβολής του δείκτη διάθλασης

Θεωρούμε ορθογώνια διαμέριση  $L_i = [x_1, x_2] \times (i\Lambda, (i+1)\Lambda)$  του επιπέδου  $\mathbb{R}^2$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , η οποία περιέχει την  $i$ -οστή επανάληψη των γραμμοσειρών στον άξονα κυματοδηγής  $z$ . Συμβολίζουμε με  $d_i^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) και  $g_i^j$  ( $j = 1, \dots, q$ ) τα επίπεδα χωρία της τομής του ορθογωνίου  $L_i$  με την διάταξη του κυματοδηγού γραμμοσειρών.



Σχήμα 2.4: ορθογώνια διαμέριση κυματοδηγού γραμμοσειρών [4]

Από τον δεύτερο τύπο του Green για τις συναρτήσεις  $\Psi - \Psi_0$  και  $G$  σε κάθε χωρίο  $M_i = d_i^k \vee g_i^j$  σταθερού δείκτη διάθλασης το οποίο περιέχεται στο ορθογώνιο  $L_i$ ,  $i$  σταθερό, παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \iint_{M_i} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'}^2 (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] ds' = \\ & \oint_{\partial M_i} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' \end{aligned} \quad (2.14)$$

όπου  $\hat{\mathbf{n}}_i'$  το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του  $\partial M_i$ .

Αθροίζοντας τις (2.14) κατά μέλη και καθώς τα επικαμπύλια ολοκληρώματα αλληλοεξουδετερώνονται στα κοινά σύνορα των χωρίων (αφού όλες οι συναρτήσεις προϋποτίθενται συνεχείς στο ορθογώνιο  $M_i$  και τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των κοινών πλευρών των διαδοχικών ορθογωνίων είναι αντίθετα) οδηγούμαστε στην

$$\iint_{d_i \cup g_i} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'}^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'}^2 (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] ds' =$$

$$\oint_{\partial L_i} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' \equiv I_{L_i} \quad (2.15)$$

όπου  $g_i = \bigcup_{j=1}^q g_i^j$  και  $d_i = \bigcup_{k=1}^3 d_i^k$ .

Αντικαθιστώντας τις (2.10), (2.11), (2.13) στην (2.15)

$$\iint_{d_i^1} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))(-k_0^2 n_0^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')(-k_0^2 n_0^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_0^2 \Psi_0(\mathbf{r}'))] ds' +$$

$$\iint_{d_i^2} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))(-k_0^2 n_1^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')(-k_0^2 n_1^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_1^2 \Psi_0(\mathbf{r}'))] ds' +$$

$$\iint_{d_i^3} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))(-k_0^2 n_2^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')(-k_0^2 n_2^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_2^2 \Psi_0(\mathbf{r}'))] ds' +$$

$$\iint_{g_i} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))(-k_0^2 n_1^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')(-k_0^2 n_3^2 \Psi(\mathbf{r}') + k_0^2 n_1^2 \Psi_0(\mathbf{r}'))] ds' =$$

$$I_{L_i} \quad (2.16)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η (2.16) γράφεται ισοδύναμα

$$k_0^2 (n_3^2 - n_1^2) \iint_{g_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \iint_{d_i \cup g_i} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = I_{L_i} \quad (2.17)$$

Αθροίζοντας τις (2.17) κατά μέλη για κάθε  $i$  προκύπτει τελικά

$$k_0^2 (n_3^2 - n_1^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{g_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{d_i \cup g_i} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} \quad (2.18)$$

Το διάνυσμα παρατήρησης  $\mathbf{r}$  ανήκει σε κάποιο ορθογώνιο  $L_k$  έτσι από τον ορισμό της

συνάρτησης δέλτα

$$\iint_{d_k \cup g_k} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = \Psi(\mathbf{r}) - \Psi_0(\mathbf{r})$$

$$\iint_{d_i \cup g_i} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') ds' = 0, \quad i \neq k$$

Επομένως η (2.18) ανάγεται στην

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + k_0^2(n_3^2 - n_1^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{g_i} \Psi(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} \quad (2.19)$$

Καθώς τα επικαμπύλια ολοκληρώματα  $I_{L_i}$  αθροιζόμενα, αλληλοεξουδετερώνονται επάνω στην κοινή πλευρά των διαδοχικών ορθογωνίων  $L_i$ , συνάγεται

$$\begin{aligned} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} &= \int_{x=x_1}^{+\infty} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl' + \\ &\int_{x=x_2}^{+\infty} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl + \\ &\int_{z=z_1}^{+\infty} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl + \\ &\int_{z=z_2}^{+\infty} [(\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}')) \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} (\Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}'))] \cdot \hat{\mathbf{n}}_i' dl \\ &\equiv I(x_1) + I(x_2) + I(z_1) + I(z_2) \end{aligned}$$

Ακολουθώντας αντίστοιχες τεχνικές αυτών που παρουσιάζονται στην εργασία [6] μπορούμε να δούμε ότι:

1) λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των  $\Psi, G$

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} I(x_1) = 0 \qquad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} I(x_2) = 0$$

2) για τον υπολογισμό των  $I(z_1), I(z_2)$  εκφράζουμε αρχικά τα πεδία  $\Psi - \Psi_0, G$  ως υπέρθεση ενός πεδίου με διακριτό και ενός πεδίου με συνεχές φάσμα.

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') &= \sum_{m=1}^N A_m U_m(x) e^{-j\beta_m z} + \int_0^{+\infty} \varphi(x, \rho) A(\rho) e^{j\beta(\rho)z} d\rho \\ \Psi(\mathbf{r}') - \Psi_0(\mathbf{r}') &= \sum_{m=1}^N B_m U_m(x) e^{-j\beta_m z} + \int_0^{+\infty} \varphi(x, \rho) B(\rho) e^{j\beta(\rho)z} d\rho \end{aligned} \quad (2.20)$$

όπου  $\beta_m (m = 1, \dots, N)$  οι σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων άρτιων και περιττών



επιφανειακών ρυθμών,  $A_m, A(\rho)$  συντελεστές ανάπτυξης και  $\beta(\rho) = \sqrt{k_0^2 n_0^2 - \rho^2}$ .  
Ακόμα για τις ιδιοσυναρτήσεις  $U_m(x), \varphi(x, \rho)$  ισχύουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U_{m'}(x)U_m(x) dx = \delta_{m'm}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, \rho)\varphi(x, \rho') dx = \delta(\rho - \rho'), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} U_m(x)\varphi(x, \rho) dx = 0 \quad (2.21)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.20) στα  $I(z_1), I(z_2)$  και αξιοποιώντας τις σχέσεις (2.21) καταλήγουμε ύστερα από πράξεις

$$\lim_{z_1 \rightarrow \infty} I(z_1) = 0 \qquad \lim_{z_2 \rightarrow -\infty} I(z_2) = 0$$

και τελικά

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} I_{L_i} = 0 \quad (2.22)$$

Έτσι από τις (2.19) και (2.22) προκύπτει

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + k_0^2(n_3^2 - n_1^2) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \iint_{g_i} \Psi(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') ds' ds' \quad (2.23)$$

και καθώς  $S_d = \cup_{-\infty}^{+\infty} g_i$  οδηγούμαστε τελικά στη (2.9). □

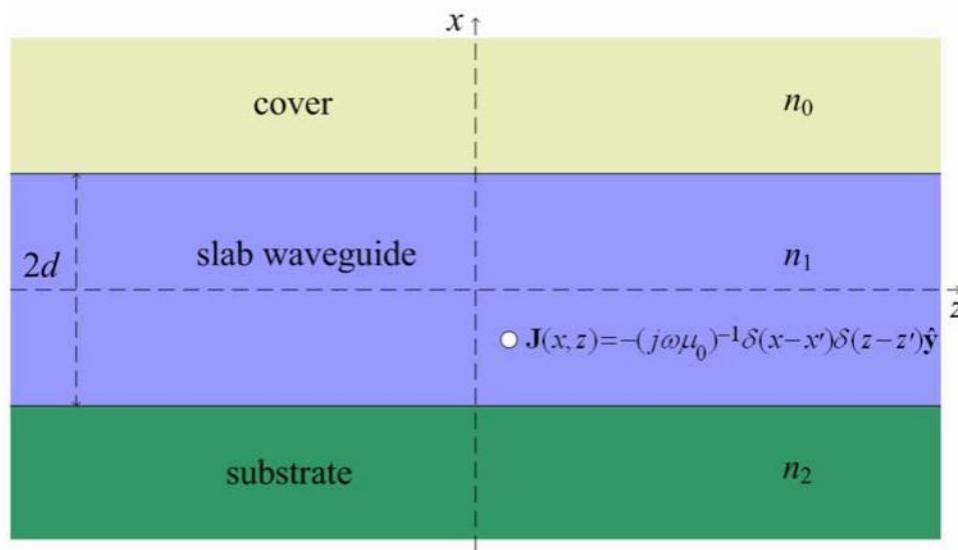
## Κεφάλαιο 3

# ΕΥΡΕΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΣΕ ΚΥΜΑ- ΤΟΔΗΓΟ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΟΣΕΙΡΕΣ

### 3.1 Συνάρτηση Green

Το πρώτο βήμα για τη μετατροπή της ολοκληρωτικής αναπαράστασης σε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεύτερου είδους είναι η εύρεση της συνάρτησης Green. Επιστρέφουμε στη διάταξη του κυματοδηγού χωρίς την παρουσία γραμμοσειρών και εξωτερικών ρευμάτων. Διεγείρουμε τον πυρήνα του κυματοδηγού στο σημείο  $(x', z')$  από διδιάστατη, άπειρη κατά μήκος του άξονα  $y$ , γραμμική ηλεκτρική ρευματική πηγή με κανονικοποιημένη πυκνότητα ρεύματος

$$\mathbf{J}(x, z) = -\frac{1}{j\omega\mu} \delta(x - x') \delta(z - z') \hat{\mathbf{y}}, \quad -d \leq x' \leq d, \quad z' \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$



Σχήμα 3.1: διεγερση από άπειρη γραμμική ρευματική πηγή εντός του κυματοδηγού [4]

Η συνάρτηση Green  $G(x, z; x', z')$  αντιπροσωπεύει το ηλεκτρικό πεδίο  $E_y(x, z)$  που παράγεται από την  $\mathbf{J}(x, z)$  και καθώς ικανοποιεί την (1.32) ισχύει:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n_h^2(x)) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.2)$$

όπου

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + z'\hat{\mathbf{z}}$$

τα διανύσματα παρατήρησης και πηγής αντίστοιχα.

Οι συνοριακές συνθήκες συνέχειας στις διαχωριστικές επιφάνειες  $x = \pm d$  επιβάλλουν την συνέχεια των  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  και  $\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial x}$ , ως εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης Green κάνουμε χρήση της μεθόδου Sommerfeld (βλέπε [7] Sec. 6.32). Σύμφωνα με αυτή το ηλεκτρικό πεδίο εντός του πυρήνα είναι υπέρθεση ενός πρωτογενούς πεδίου (primary), που αποτελεί το ανώμαλο μέρος της συνάρτησης Green οφειλόμενο στη ρευματική πηγή, και ενός δευτερογενούς πεδίου (secondary) που οφείλεται στα ανακλώμενα πεδία πάνω στις επιφάνειες  $x = \pm d$ . Στους ημιάπειρους χώρους, εκτός πυρήνα, η συνάρτηση Green οφείλεται μόνο στο δευτερογενές πεδίο που δημιουργείται από τα διαθλώμενα πεδία.

Έτσι, το συνολικό πεδίο  $G(x, z; x', z')$  της διάταξης έχει τη μορφή:

$$G(x, z; x', z') = \begin{cases} G_{sec}(x, z; x', z') + G_{pr}(x, z; x', z'), & x \in [-d, d] \\ G_{sec}(x, z; x', z'), & x \notin [-d, d] \end{cases} \quad (3.3)$$

Το πρωτογενές πεδίο  $G_{pr}$  αναπαρίσταται ως ολοκλήρωμα Fourier (βλ. [2], Sec. 2.9) με τον εξής τρόπο:

$$G_{pr}(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \frac{e^{-g_1|x-x'|}}{g_1}, \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.4)$$

όπου  $g_1(\lambda) = (\lambda^2 - k_0^2 n_1^2)^{1/2}$

Επιπλέον για να ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας καθώς  $|x| \rightarrow \infty$  πρέπει  $\text{Re}[g_1(\lambda)] > 0$  και  $\text{Im}[g_1(\lambda)] > 0$  ώστε να έχουμε κύματα οδεύοντα προς  $\pm\infty$ .

Καθώς το δευτερογενές πεδίο  $G_{sec}(x, z; x', z')$  ικανοποιεί τη κυματική εξίσωση και τη συνθήκη ακτινοβολίας, μπορεί να εκφραστεί επίσης ως ολοκλήρωμα Fourier ως εξής:

$$G_{sec}(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \gamma(\lambda, x, x'), \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.5)$$

όπου η  $\gamma(\lambda, x, x')$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 \gamma(\lambda, x, x')}{\partial x^2} - (\lambda^2 - k_0^2 n_h^2(x)) \gamma(\lambda, x, x') = 0 \quad (3.6)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν τη συνθήκη ακτινοβολίας, εκφράζεται τελικά ως γραμμικός συνδυασμός των θεμελιωδών λύσεων της (3.6) στη μορφή

$$\gamma(\lambda, x, x') = \begin{cases} A_1(\lambda) \exp[-g_0(\lambda)(x-d)], & x \geq d \\ A_2(\lambda) \cosh[g_1(\lambda)x] + A_3(\lambda) \sinh[g_1(\lambda)x], & -d \leq x \leq d \\ A_4(\lambda) \exp[g_2(\lambda)(x+d)], & x \leq -d \end{cases} \quad (3.7)$$

Όπως πριν, για να έχουμε φυσικά αποδεκτή λύση, επιλέγουμε  $\text{Re}[g_0(\lambda)] > 0$ ,  $\text{Re}[g_2(\lambda)] > 0$  και  $\text{Im}[g_0(\lambda)] > 0$ ,  $\text{Im}[g_2(\lambda)] > 0$ .

Σε συμφωνία με όσα είδαμε στην υποενότητα 2.1.2 οι συνοριακές συνθήκες στα επίπεδα  $x = \pm d$  επιβάλλουν τη συνέχεια των  $G(x, z; x', z')$ ,  $\frac{\partial G(x, z; x', z')}{\partial x}$  και επομένως

$$\begin{aligned} G_{sec}(x, z; x', z')|_{x \rightarrow \mp d^\mp} &= G_{sec}(x, z; x', z')|_{x \rightarrow \mp d^\pm} + G_{pr}(\mp d, z; x', z') \\ \frac{\partial G_{sec}(x, z; x', z')}{\partial x}|_{x \rightarrow \mp d^\mp} &= \frac{\partial G_{sec}(x, z; x', z')}{\partial x}|_{x \rightarrow \mp d^\pm} + \frac{\partial G_{pr}(\mp d, z; x', z')}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Η αντικατάσταση των (3.4), (3.5) και (3.7) στις (3.8), μας δίνει ένα  $4 \times 4$  γραμμικό σύστημα ως προς τους αγνώστους συντελεστές  $A_1(\lambda) - A_4(\lambda)$ . Επιλύοντας το σύστημα, μπορούμε μέσω των (3.4), (3.5), (3.7) να υπολογίσουμε τελικά την (3.3) [8]:

$$G(x, z; x', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-j\lambda(z-z')} \mu(\lambda, x, x') \quad (3.9)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mu(\lambda, x, x') &= [\Lambda(g_0, g_2, g_1, 2d)]^{-1} \\ &\begin{cases} P_o(g_2, g_1, 2d) P_e(g_2, g_1, 2d) \left[ \frac{\cosh(g_1 x')}{P_e(g_2, g_1, 2d)} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o(g_2, g_1, 2d)} \right] \exp[-g_0(x-d)], & x \geq d \\ g_1^{-1} P_e(g_0, g_1, 2d) P_e(g_2, g_1, 2d) P_o(g_2, g_1, 2d) P_o(g_0, g_1, 2d) \\ \left[ \frac{\cosh(g_1 x')}{P_e(g_2, g_1, 2d)} + \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o(g_2, g_1, 2d)} \right] \left[ \frac{\cosh(g_1 x)}{P_e(g_0, g_1, 2d)} - \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o(g_0, g_1, 2d)} \right], & -d \leq x' \leq x \leq d \\ g_1^{-1} P_e(g_0, g_1, 2d) P_e(g_2, g_1, 2d) P_o(g_2, g_1, 2d) P_o(g_0, g_1, 2d) \\ \left[ \frac{\cosh(g_1 x)}{P_e(g_2, g_1, 2d)} + \frac{\sinh(g_1 x)}{P_o(g_2, g_1, 2d)} \right] \left[ \frac{\cosh(g_1 x')}{P_e(g_0, g_1, 2d)} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o(g_0, g_1, 2d)} \right], & -d \leq x \leq x' \leq d \\ P_o(g_0, g_1, 2d) P_e(g_0, g_1, 2d) \left[ \frac{\cosh(g_1 x')}{P_e(g_0, g_1, 2d)} - \frac{\sinh(g_1 x')}{P_o(g_0, g_1, 2d)} \right] \exp[g_2(x+d)], & x \leq -d \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

και οι βοηθητικές συναρτήσεις  $P_e, P_o, \Lambda$  ορίζονται (για  $i = 1, 2$ ) ως

$$\begin{aligned} P_e(g_i, g_1, 2d) &= g_i \cosh(g_1 d) + g_1 \sinh(g_1 d) \\ P_o(g_i, g_1, 2d) &= g_1 \cosh(g_1 d) + g_i \sinh(g_1 d) \\ \Lambda(g_0, g_2, g_1, 2d) &= [P_e(g_0, g_1, 2d) P_o(g_2, g_1, 2d) + P_o(g_0, g_1, 2d) P_e(g_2, g_1, 2d)]/2 \end{aligned}$$

Οι πόλοι της ολοκληρωτικής συνάρτησης (3.9) αντιστοιχούν στις ρίζες της

$$\Lambda(g_0, g_2, g_1, 2d) = 0 \quad (3.11)$$

και εμπίπτουν σε δύο κατηγορίες (βλ.[9]):

1. Οι ρίζες  $\lambda = \pm\beta_s$  που ικανοποιούν τη συνθήκη  $\text{Re}(g_0) > 0$ ,  $\text{Re}(g_2) > 0$  αντιστοιχούν στις σταθερές διάδοσης των κυματοδηγούμενων επιφανειακών κυμάτων (surface waves) και αποτελούν ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών με

$$\min_{0 \leq j \leq 2} \{n_j\} \leq |\beta_s|/k_0 \leq \max_{0 \leq j \leq 2} \{n_j\}$$

2. Οι ρίζες που δεν ικανοποιούν την ανωτέρω συνθήκη ακτινοβολίας αποτελούν ένα άπειρο σύνολο μιγαδικών αριθμών γνωστό ως leaky wave.

### 3.2 Ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου

Για την μετατροπή της ολοκληρωτικής αναπαράστασης (2.9) σε ολοκληρωτική εξίσωση θα χρειαστούμε επιπλέον τη βοήθεια του θεωρήματος Floquet ([2] Ch.9)

**Θεώρημα 3.1.** Το κυματοδηγούμενο πεδίο  $\Psi(x, y, z)$  κατά τις κατευθύνσεις  $\pm \hat{z}$  σε μία  $\Lambda$ -περιοδική δομή κατά μήκος του άξονα  $z$  εκφράζεται ως εξής

$$\Psi(x, y, z) = e^{\mp \gamma z} u(x, y, z) \quad (3.12)$$

όπου  $\gamma$  η μιγαδική σταθερά διάδοσης του κυματοδηγούμενου πεδίου και  $u(x, y, z)$   $\Lambda$ -περιοδική συνάρτηση ως προς  $z$ , δηλαδή

$$u(x, y, z + r\Lambda) = u(x, y, z), \quad r \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

Ο πυρήνας του κυματοδηγού παραμένει αναλλοίωτος υπό τον μετασχηματισμό  $z \rightarrow z + m\Lambda$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Έτσι, ικανοποιείται η απαίτηση του θεωρήματος και τελικά για το βαθμωτό πεδίο που δημιουργείται από το προσπίπτον κύμα θα ισχύει

$$\Psi(x, z) = \exp(-jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) u(x, z) \quad (3.14)$$

όπου  $u(x, z)$   $\Lambda$ -περιοδική συνάρτηση.

Με εφαρμογή της (3.14) στην (2.9) :

$$u(x, z) = \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) \quad (3.15)$$

$$+ k_0^2 (n_3^2 - n_1^2) \iint_{S_d} G(x, z; x', z') u(x', z') \cdot \exp[jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} (z - z')] dx' dz' \quad (3.16)$$

Εκφράζοντας την εγκάρσια διατομή των γραμμοσειρών,  $S_d$ , ως αριθμήσιμη ένωση των

$$S_r = \bigcup_{i=1}^q [d - w, d] \times [a_i + r\Lambda, a_i + s_i + r\Lambda]$$

της  $r$ -οστής επανάληψης των γραμμοσειρών σε συνδυασμό με τη (3.9) η (3.16) γράφεται ισοδύναμα:

$$u(x, z) = \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{4\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \iint_{S_r} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-j\lambda(z - z')] \mu(\lambda, x, x') \right] \cdot u(x', z') \exp[jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} (z - z')] dx' dz' \quad (3.17)$$

Ο μετασχηματισμός  $\zeta' = z' - r\Lambda$ , μετατρέπει τα διπλά ολοκληρώματα επάνω στις  $S_r$  σε ολοκληρώματα επάνω στις πρότυπες επαναλήψεις  $S_0$ , της εγκάρσιας διατομής των γραμμοσειρών στο  $[0, \Lambda]$  και τότε η (3.17) οδηγείται στην

$$u(x, z) = \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{4\pi} \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) \cdot \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \iint_{S_0} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \exp[-j\lambda(z - \zeta' - r\Lambda)] \mu(\lambda, x, x') \right] \cdot u(x', \zeta' + r\Lambda) \exp[jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} (-\zeta' - r\Lambda)] dx' d\zeta'$$

όπου λόγω περιοδικότητας της  $u$  ως προς  $z$  λαμβάνουμε ισοδύναμα

$$u(x, z) = \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{4\pi} \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) \cdot \iint_{S_0} u(x', \zeta') \exp(-jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} \zeta') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-j\lambda(z - \zeta')] \mu(\lambda, x, x') \left[ \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp[jr\Lambda(\lambda - k_0 n_0 \cos \theta_{inc})] \right] d\lambda dx' d\zeta' \quad (3.18)$$

Από τον τύπο άθροισης του Poisson (βλέπε [10]) γνωρίζουμε ότι για μια περιοδική συνάρτηση  $f(t)$  με μετασχηματισμό Fourier  $F(w)$  ισχύει

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(t - pT) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{r}{T}\right) e^{j\frac{2\pi r t}{T}}$$

έτσι εύκολα βλέπουμε

$$\frac{2\pi}{\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\lambda - k_0 n_0 \cos \theta_{inc} - \frac{2\pi p}{\Lambda}\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \exp(jr\Lambda(\lambda - k_0 n_0 \cos \theta_{inc})) \quad (3.19)$$

Κάνοντας χρήση της (3.19) η (3.18) ισοδυναμεί με

$$\begin{aligned}
u(x, z) &= \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) \\
&\cdot \iint_{S_0} u(x', \zeta') \exp(-jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} \zeta') \\
&\cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp[-j(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda})(z - \zeta')] \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \\
&= \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j\frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\
&\cdot \left[ \iint_{S_0} u(x', \zeta') \exp(j\frac{2\pi p}{\Lambda} \zeta') \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \right] \quad (3.20)
\end{aligned}$$

### 3.3 Επίλυση ολοκληρωτικής εξίσωσης ηλεκτρικού πεδίου

Θα επιλύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (3.20) με τη μέθοδο των ροπών. Πρώτο βήμα είναι η ανάπτυξη της περιοδικής συνάρτησης  $u(x, z)$  σε σειρά Fourier επάνω στις πρότυπες επαναλήψεις  $S_0$ .

Καθώς η  $\Psi(x, z)$  είναι  $C^2$  στα χωρία σταθερού δείκτη διάθλασης και  $C^1$  στα σύνορα των χωρίων (λόγω της φυσικής του προβλήματος), κληρονομεί αυτές τις ιδιότητες στη  $u(x, z)$ . Υπό την επιπλέον προϋπόθεση ότι η δευτέρα μερική παράγωγος της  $u(x, z)$  είναι τμηματικά λεία λαμβάνουμε:

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda} z}, \quad \frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial x^2} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda} z}) \quad (3.21)$$

Επειδή τώρα η  $\Psi(x, z)$  ικανοποιεί την (2.10) παίρνουμε ισοδύναμα

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(x, z) \right] e^{-jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z} u(x, z) = 0 \quad (3.22)$$

Η αντικατάσταση των (3.21) στην (3.22) μας δίνει τελικά

$$\begin{aligned}
\varphi_n''(x) + \left[ k_0^2 n^2(x, z) - \left( k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi n}{\Lambda} \right)^2 \right] \varphi_n(x) &= 0 \\
\Leftrightarrow \varphi_n''(x) - g_{i,n}^2 \varphi_n(x) &= 0
\end{aligned} \quad (3.23)$$

όπου

$$g_{i,n} = \sqrt{\left( k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi n}{\Lambda} \right)^2 - k_0^2 n_i^2}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

Οι συναρτήσεις  $\varphi_n(x)$  εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των θεμελιωδών λύσεων της (3.23). Έτσι στα χωρία των πρότυπων επαναλήψεων  $S_0$  βλέπουμε ότι ισχύει:

$$\varphi_n(x) = c_n^+ \exp[g_{3,n}(x - d + \frac{w}{2})] + c_n^- \exp[-g_{3,n}(x - d + \frac{w}{2})] \quad (3.25)$$

Η έκφραση των θεμελιωδών λύσεων ως προς τον άξονα συμμετρίας των γραμμοσειρών  $x = d - w/2$  εξυπηρετεί στην ευστάθεια των αριθμητικών αποτελεσμάτων, καθώς λαμβάνουμε μικρότερα ορίσματα των εκθετικών συναρτήσεων.

Μέσω της (3.25) η  $u(x, z)$  στο χωρίο  $S_0$  γράφεται πλέον στη μορφή

$$u(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ c_n^+ \exp[g_{3,n}(x - d + \frac{w}{2})] + c_n^- \exp[-g_{3,n}(x - d + \frac{w}{2})] \right] e^{-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z} \quad (3.26)$$

Με τη βοήθεια της (3.26) μετασχηματίζουμε την (3.20)

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\ &\cdot \left[ \iint_{S_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ c_n^+ \exp[g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] + c_n^- \exp[-g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] \right] \right. \\ &\left. \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' d\zeta' \right] \\ &= \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2\Lambda} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\ &\left\{ \sum_{i=1}^q \int_{a_i}^{a_i+s_i} d\zeta' \int_{d-w}^d \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ c_n^+ \exp[g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] + c_n^- \exp[-g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] \right] \right. \\ &\left. \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \right\} \\ &= \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) \\ &\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^q \int_{a_i}^{a_i+s_i} \exp(j \frac{2\pi(p-n)}{\Lambda} \zeta') d\zeta' \right. \right. \\ &\left. \left. [c_n^+ \int_{d-w}^d \exp[g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \right. \right. \\ &\left. \left. + c_n^- \int_{d-w}^d \exp[-g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx'] \right\} \quad (3.27) \end{aligned}$$



Ορίζοντας τη συνάρτηση  $J : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$J_l = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^q \int_{a_i}^{a_i+s_i} \exp(j \frac{2\pi l}{\Lambda} \zeta') d\zeta' \quad (3.28)$$

η οποία υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα μας δίνει

$$J_l = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi l} \sum_{i=1}^q [e^{j2\pi l(\frac{a_i}{\Lambda})} (e^{j2\pi l(\frac{s_i}{\Lambda})} - 1)], & l \neq 0 \\ \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^q s_i, & l = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

παρατηρούμε ότι αυτή εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών στον άξονα  $z$  και συγκεκριμένα ως προς τις κανονικοποιημένες τιμές  $\frac{a_i}{\Lambda}, \frac{s_i}{\Lambda}$ .

Επιπλέον οι συναρτήσεις

$$Q_{np}^{\pm}(x) = \int_{d-w}^d \exp[\pm g_{3,n}(x' - d + \frac{w}{2})] \mu(k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \frac{2\pi p}{\Lambda}, x, x') dx' \quad (3.30)$$

οι οποίες υπολογίζονται αν διασπάσουμε το ολοκλήρωμα σε άθροισμα ολοκληρωμάτων

$$\int_{d-w}^d dx' = \int_{d-w}^x dx' + \int_x^d dx'$$

και χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους κλάδους της  $\mu$ , βλέπουμε ότι εξαρτώνται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των γραμμοσειρών στον άξονα  $x$ .

Μέσω των (3.28) και (3.30) μπορούμε να εκφράσουμε συνοπτικά την (3.27) στη μορφή:

$$u(x, z) = \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ J_{p-n} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] \right] \quad (3.31)$$

Για να προσδιορίσουμε τους άγνωστους συντελεστές  $c_n^{\pm}$  περιορίζουμε το διάνυσμα παρατήρησης στην επιφάνεια των γραμμοσειρών και τότε, σύμφωνα με την (3.21), λαμβάνουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) e^{-j \frac{2\pi n}{\Lambda} z} = \Psi_0(x, z) \exp(jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z) + \frac{k_0^2 (n_3^2 - n_1^2)}{2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ J_{p-n} \exp(-j \frac{2\pi p}{\Lambda} z) [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] \right] \quad (3.32)$$

Από εδώ, σύμφωνα με την τεχνική Galerkin, παίρνουμε τα εσωτερικά γινόμενα των δύο

μελών της (3.32) με τις δοκιμαστικές συναρτήσεις

$$\exp[\pm g_{3,m}(x - d + \frac{w}{2})] \exp[j\frac{2\pi m}{\Lambda}z], \quad (x, z) \in S_d \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (3.33)$$

Έτσι

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{d-w}^d \int_{r\Lambda+a_i}^{r\Lambda+a_i+s_i} \varphi_n(x) e^{-j\frac{2\pi n}{\Lambda}z} e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda}z} dz dx \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \int_{d-w}^d \int_{r\Lambda+a_i}^{r\Lambda+a_i+s_i} \Psi_0(x, z) e^{jk_0 n_0 \cos \theta_{inc} z} e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda}z} dz dx \\ &+ \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{d-w}^d \int_{r\Lambda+a_i}^{r\Lambda+a_i+s_i} \left[ J_{p-n} e^{-j\frac{2\pi p}{\Lambda}z} [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] \right] \\ &\cdot e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda}z} dz dx \Leftrightarrow \\ & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{r\Lambda+a_i}^{r\Lambda+a_i+s_i} e^{j\frac{2\pi(m-n)}{\Lambda}z} dz \right\} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_n(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \left\{ \int_{r\Lambda+a_i}^{r\Lambda+a_i+s_i} e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda}z} dz \right\} \left\{ \int_{d-w}^d \Psi_0(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \\ &+ \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^q \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} \left\{ \int_{r\Lambda+a_i}^{r\Lambda+a_i+s_i} e^{j\frac{2\pi(m-p)}{\Lambda}z} dz \right\} \\ &\cdot \left\{ \int_{d-w}^d [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Με τον μετασχηματισμό  $\zeta = z - r\Lambda$  (3.34) γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi r(m-n)} \left\{ \sum_{i=1}^q \int_{a_i}^{a_i+s_i} e^{j\frac{2\pi(m-n)}{\Lambda}\zeta} d\zeta \right\} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_n(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi r m} \sum_{i=1}^q \left\{ \int_{a_i}^{a_i+s_i} e^{j\frac{2\pi m}{\Lambda}\zeta} d\zeta \right\} \left\{ \int_{d-w}^d \Psi_0(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \\ &+ \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} e^{j2\pi r(m-n)} \left\{ \sum_{i=1}^q \int_{a_i}^{a_i+s_i} e^{j\frac{2\pi(m-p)}{\Lambda}\zeta} d\zeta \right\} \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \int_{d-w}^d [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \quad (3.35)$$

και κάνοντας χρήση της (3.28)

$$\begin{aligned} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_n(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_m \left\{ \int_{d-w}^d \Psi_0(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \\ + \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} J_{m-p} &\left\{ \int_{d-w}^d [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \end{aligned}$$

όπου λόγω μη εξάρτησης από το  $r$  καταλήγουμε τελικά :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ \int_{d-w}^d \varphi_n(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} &= J_m \left\{ \int_{d-w}^d \Psi_0(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \\ + \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} J_{m-p} &\left\{ \int_{d-w}^d [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \Leftrightarrow \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} \left\{ \int_{d-w}^d [c_n^+ e^{g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} + c_n^- e^{-g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})}] e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} &= \\ J_m \left\{ \int_{d-w}^d \Psi_0(x) e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} & \\ + \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} J_{m-p} &\left\{ \int_{d-w}^d [c_n^+ Q_{np}^+(x) + c_n^- Q_{np}^-(x)] e^{\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})} dx \right\} \quad (3.36) \end{aligned}$$

Ορίζοντας τις βοηθητικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} V_m^\pm &= \int_{d-w}^d \Psi_0(x) \exp[\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})] dx \\ &= \exp[\pm g_{3,m}(w/2)] \left\{ B \exp(jk_0 n_1 \sin \theta_1 d) \cdot \frac{1 - \exp[-(\pm g_{3,m} + jk_0 n_1 \sin \theta_1)w]}{(\pm g_{3,m} + jk_0 n_1 \sin \theta_1)} \right. \\ &\quad \left. + C \exp(-jk_0 n_1 \sin \theta_1 d) \cdot \frac{1 - \exp[-(\pm g_{3,m} - jk_0 n_1 \sin \theta_1)w]}{(\pm g_{3,m} - jk_0 n_1 \sin \theta_1)} \right\} \quad (3.37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{mn}^{\pm\pm} &= \int_{d-w}^d \exp[\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})] \cdot \exp[\pm g_{3,n}(x-d+\frac{w}{2})] dx \\
 &= w \begin{cases} \frac{\sinh[(\pm g_{3,m} \pm g_{3,n})w/2]}{(\pm g_{3,m} \pm g_{3,n})w/2}, & \pm g_{3,m} \pm g_{3,n} \neq 0 \\ 1, & \pm g_{3,m}, \pm g_{3,n} = 0 \end{cases} \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{mnp}^{\pm\pm} &= \frac{1}{2} \int_{d-w}^d \exp[\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})] \cdot Q_{np}^{\pm}(x) dx \\
 &= \frac{1}{g_{3,n}^2 - g_{1,p}^2} K_{mn}^{\pm\pm} + \frac{1}{g_{3,n}^2 - g_{1,p}^2} R_{mnp}^{\pm\pm} \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 R_{mnp}^{\pm\pm} &= \frac{P_e(g_{0,p} g_{1,p} 2d) P_e(g_{2,p} g_{1,p} 2d) P_o(g_{0,p} g_{1,p} 2d) P_o(g_{2,p} g_{1,p} 2d)}{2(g_{3,m}^2 - g_{1,p}^2) g_{1,p} \Lambda(g_{0,p} g_{2,p} g_{1,p} 2d)} \\
 &\cdot \left\{ \exp[(\pm g_{3,m} \pm g_{3,n}) w/2] \left( \frac{P_e(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d)}{P_e(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} + \frac{P_o(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d)}{P_o(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \right. \\
 &\cdot \left( \frac{P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} - \frac{P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \\
 &- \exp[(\pm g_{3,m} \pm g_{3,n}) w/2] \left( \frac{P_e(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} - \frac{P_o(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \\
 &\cdot \left( \frac{P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_e(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} + \frac{P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_o(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \\
 &- \exp[(\mp g_{3,m} \mp g_{3,n}) w/2] \left( \frac{P_e(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_e(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} + \frac{P_o(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_o(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \\
 &\cdot \left( \frac{P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} - \frac{P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \\
 &+ \exp[(\mp g_{3,m} \mp g_{3,n}) w/2] \left( \frac{P_e(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_e(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} - \frac{P_o(\mp g_{3,m}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_o(g_{0,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \\
 &\cdot \left. \left( \frac{P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_e(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} + \frac{P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p} 2d - 2w)}{P_o(g_{2,p}, g_{1,p} 2d)} \right) \right\} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

(ο πρώτος εκθέτης  $\pm$  των στοιχείων  $K_{mn}^{\pm\pm}$ ,  $Q_{mnp}^{\pm\pm}$  και  $R_{mnp}^{\pm\pm}$  αντιστοιχεί στους όρους  $\exp[\pm g_{3,m}(x-d+\frac{w}{2})]$  ενώ ο δεύτερος στους όρους  $\exp[\pm g_{3,\nu}(x-d+\frac{w}{2})]$ )

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n} (c_n^+ K_{mn}^{\pm\pm} + c_n^- K_{mn}^{\pm\pm}) &= \\
 J_m V_m^{\pm} + k_0^2 (n_3^2 - n_1^2) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{p-n} J_{m-p} (c_n^+ Q_{mnp}^{\pm\pm} + c_n^- Q_{mnp}^{\pm\pm}) & \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

Οι αλγεβρικές εξισώσεις της (3.41) αποτελούν ένα άπειρο τετραγωνικό μη ομογενές σύστημα ως προς τους αγνώστους συντελεστές  $c_n^\pm$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Το σύστημα επιλύεται αριθμητικά θεωρώντας το κολοβωμένο (truncated) γραμμικό σύστημα  $4N + 2$  εξισώσεων ως προς τους  $4N + 2$  αγνώστους  $c_n^\pm$  ( $n = -N \dots N$ ), το οποίο προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τις χωρικές αρμονικές συναρτήσεις στα αναπτύγματα (3.21) και τις δοκιμαστικές συναρτήσεις (3.33) με μέγιστη απόλυτη τάξη  $N$ .

Υπό μορφή block πινάκων το σύστημα γράφεται ως εξής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{++} & \mathbf{A}^{+-} \\ \mathbf{A}^{-+} & \mathbf{A}^{--} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^+ \\ \mathbf{c}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}^- \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{\pm\pm})_{mn} = & - \left[ J_{m-n} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{g_{3,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{p-n} J_{m-p} \right] \\ & \cdot K_{mn}^{\pm\pm} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{k_0^2(n_3^2 - n_1^2)}{g_{3,n}^2 - g_{1,p}^2} J_{p-n} J_{m-p} R_{mnp}^{\pm\pm} \end{aligned} \quad (3.42)$$

και

$$(\mathbf{b}^\pm)_m = -J_m V_m^\pm \quad (3.43)$$

Έχοντας βρει τους συντελεστές  $\mathbf{c}^\pm$  μπορούμε εύκολα μέσω της (3.31) να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο σύνολο της διάταξης.

Ειδικότερα βλέπουμε ότι το ανακλώμενο  $\Psi_r$  και το μεταδιδόμενο  $\Psi_t$  ηλεκτρικό πεδίο δίνονται από τους τύπους:

$$\Psi_r(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p \exp[-j(k_{x,p}^r x + k_{z,p} z)], \quad (x > d, z \in \mathbb{R}) \quad (3.44)$$

$$\Psi_t(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p \exp[-j(k_{x,p}^t x + k_{z,p} z)], \quad (x < -d, z \in \mathbb{R}) \quad (3.45)$$

όπου,

$$\begin{aligned} k_{z,p} &= k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \left( \frac{2\pi p}{\Lambda} \right) \\ k_{x,p}^r &= -j \left\{ [k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \left( \frac{2\pi p}{\Lambda} \right)]^2 - k_0^2 n_0^2 \right\}^{1/2} \\ k_{x,p}^t &= j \left\{ [k_0 n_0 \cos \theta_{inc} + \left( \frac{2\pi p}{\Lambda} \right)]^2 - k_0^2 n_2^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

ενώ οι συντελεστές  $r_p, t_p$  που ορίζουν τα πλάτη των περιθλώμενων τάξεων στις περιοχές ανάκλασης και μετάδοσης καθορίζονται ως εξής:

$$r_p = \delta_{p0} R + [k_0^2(n_3^2 - n_1^2)/2] \exp(g_{0,p}d) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [J_{p-n}(c_n^+ \rho_{np}^+ + c_n^- \rho_{np}^-)] \quad (p \in \mathbb{Z}) \quad (3.47)$$

$$t_p = \delta_{p0}T + [k_0^2(n_3^2 - n_1^2)/2] \exp(g_{2,p}d) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [J_{p-n}(c_n^+ \tau_{np}^+ + c_n^- \tau_{np}^-)] \quad (p \in \mathbb{Z}) \quad (3.48)$$

όπου  $R$ ,  $T$  όπως υπολογίστηκαν στην (2.6),  $\delta$  το σύμβολο Kronecker και οι συναρτήσεις  $\rho, \tau$  προκύπτουν από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (3.30) δίνοντας

$$\begin{aligned} \rho_{np}^{\pm} = & [(g_{1,p}^2 - g_{3,n}^2)\Lambda(g_{0,p}, g_{2,p}, g_{1,p}, 2d)]^{-1} \left\{ e^{\pm g_{3,n}w/2} [P_o(g_{2,p}, g_{1,p}, 2d)P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d) \right. \\ & + P_e(g_{2,p}, g_{1,p}, 2d)P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d)] - e^{\mp g_{3,n}w/2} [P_o(g_{2,p}, g_{1,p}, 2d) \\ & \cdot P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d - 2w) + P_e(g_{2,p}, g_{1,p}, 2d)P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d - 2w)] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \tau_{np}^{\pm} = & [(g_{1,p}^2 - g_{3,n}^2)\Lambda(g_{0,p}, g_{2,p}, g_{1,p}, 2d)]^{-1} \left\{ e^{\pm g_{3,n}w/2} [P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, 2d)P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d) \right. \\ & - P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, 2d)P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d)] - e^{\mp g_{3,n}w/2} [P_o(g_{0,p}, g_{1,p}, 2d) \\ & \cdot P_e(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d - 2w) - P_e(g_{0,p}, g_{1,p}, 2d)P_o(\mp g_{3,n}, g_{1,p}, 2d - 2w)] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Οι εξισώσεις (3.44) και (3.45) εκφράζουν τα ανακλώμενα και μεταδιδόμενα πεδία ως άπειρο σταθμισμένο άθροισμα επίπεδων κυμάτων με κοινή σταθερά διάδοσης στον άξονα  $z$  και διαφορετική στον άξονα  $x$ . Εφεξής θα αναφερόμαστε στη συνιστώσα του πεδίου με δείκτη  $p$  ως η  $p$ -ανακλώμενη ή  $p$ -μεταδιδόμενη τάξη.

Θα μελετήσουμε τώρα ποιες τάξεις διαδίδονται κατά μήκος του  $x$ -άξονα. Τα πεδία 0-τάξης διαδίδονται πάντα (αφού πληρούν τον νόμο του Snell).

Για  $p \neq 0$  ορίζουμε τις συνθήκες

$$p_r^{\pm} = \pm(\Lambda/\lambda_0)n_0(1 \mp \cos \theta_{inc}), \quad p_t^{\pm} = \pm(\Lambda/\lambda_0)n_2(1 \mp n_0 \cos \theta_{inc}) \quad (3.51)$$

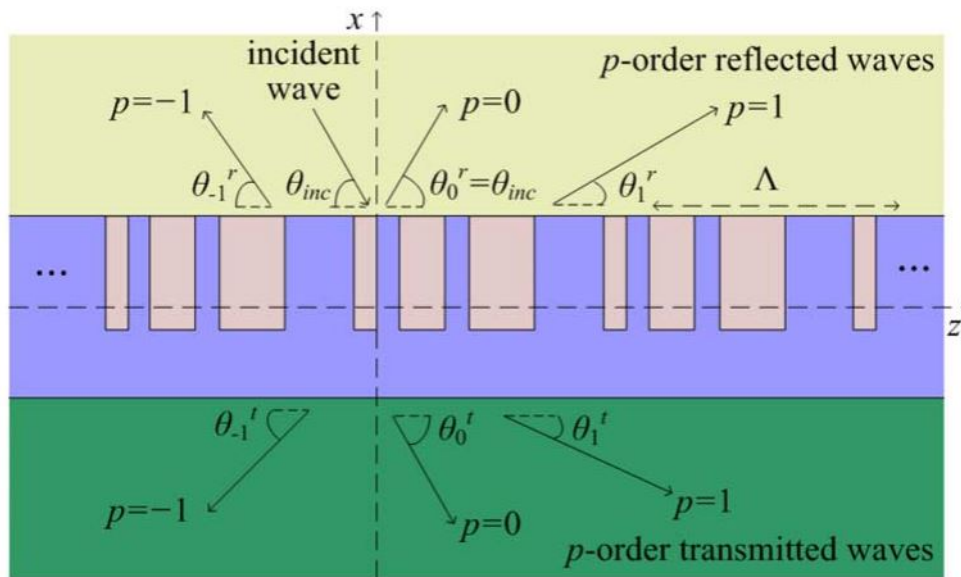
και παρατηρούμε:

όταν  $p_r^- < p < p_r^+$  ή  $p_t^- < p < p_t^+$  οι σταθερές  $k_{x,p}^r$  και  $k_{x,p}^t$  είναι πραγματικοί αριθμοί και συνεπώς οι  $p$ -τάξεις των ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων διαδίδονται κατά μήκος του  $x$ -άξονα. Αντιθέτως όταν  $p > p_r^+$  ή  $p < p_r^-$  και  $p > p_t^+$  ή  $p < p_t^-$  οι σταθερές  $k_{x,p}^r$  και  $k_{x,p}^t$  γίνονται καθαρά φανταστικοί αριθμοί και τα πεδία  $p$ -τάξεων εξαφανίζονται.

Επιπλέον οι γωνίες μεταξύ των κυματικών διανυσμάτων των  $p$ -τάξεων και του  $z$  άξονα καθορίζονται από τις σχέσεις:

$$\theta_p^r = \tan^{-1}(k_{x,p}^r/k_{z,p}), \quad \theta_p^t = \tan^{-1}(k_{x,p}^t/k_{z,p}) \quad (3.52)$$

Ένα ενδεικτικό παράδειγμα διάδοσης  $p$ -τάξεων απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα για κυματοηγό με χαραγμένες γραμμοσειρές που υποστηρίζει 3 τάξεις διάδοσης.



Σχήμα 3.2: αναπαράσταση κυματοδηγού με χαραγμένες γραμμοσειρές που υποστηρίζει 3 τάξεις ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων [4]

## Κεφάλαιο 4

### ΑΝΩΜΑΛΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΦΩΤΟΣ

Η ορολογία ανώμαλη ανάκλαση/διάθλαση χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ασυνήθιστη καθοδήγηση μιας προσπίπτουσας φωτεινής δέσμης προς κατευθύνσεις που δεν προβλέπονται από τον νόμο του Snell. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το φαινόμενο της ανώμαλης ανάκλασης κατά το οποίο η ανάκλαση του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον ελεύθερο χώρο πραγματοποιείται προς τη διεύθυνση όπου αυτό προσπίπτει, γεγονός εξαιρετικά χρήσιμο σε πολυάριθμες εφαρμογές. Ενδεικτικά, η ανώμαλη ανάκλαση χρησιμοποιείται στην κατασκευή αντιανακλαστικών επιστρώσεων [11].

Η ραγδαία ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας επιτρέπει την επίτευξη της ανώμαλης ανάκλασης μέσω των μεταεπιφανειών [11]-[13]. Η ηλεκτρομαγνητική μεταεπιφάνεια αποτελεί ένα είδος τεχνητού υλικού φύλλου με πάχος μικρότερο από το μήκος κύματος του φωτός και χρησιμοποιείται ευρέως για τον χειρισμό και τον έλεγχο της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων [14]-[18]. Ειδικότερα, στις μεταεπιφάνειες κλίσης φάσης (PGM) το ανομοιογενές προφίλ φάσης τους ευθύνεται για την έντονη εμφάνιση των φαινομένων ανώμαλης ανάκλασης και διάθλασης [19]. Ωστόσο, η κατασκευή αυτών των μεταεπιφανειών παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες και προκειμένου να ξεπεραστούν εισήχθη η ιδέα των μεταγραμμοσειρών [20]. Η ιδέα των μεταγραμμοσειρών είναι παρόμοια με αυτή των γραμμοσειρών περίθλασης και ο σχεδιασμός τους βασίζεται στη θεωρία Floquet-Bloch για τις περιοδικές δομές.

Αξιοποιώντας την ιδέα των μεταγραμμοσειρών έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα μεταεπιφανειών που οδηγούν σε ανώμαλη ανάκλαση το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (ενδεικτικά [21]-[26]). Για τη μελέτη των φαινομένων ανώμαλης ανάκλασης/διάθλασης θα ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία που προτείνεται στις εργασίες [27] και [28].

#### 4.1 Κυματοδηγός με δυαδικές γραμμοσειρές

Θεωρούμε κυματοδηγό με χαραγμένες δυαδικές (binary) γραμμοσειρές, οι οποίες περιέχουν ένα ορθογώνιο ανά επανάληψη (Σχήμα 4.1).

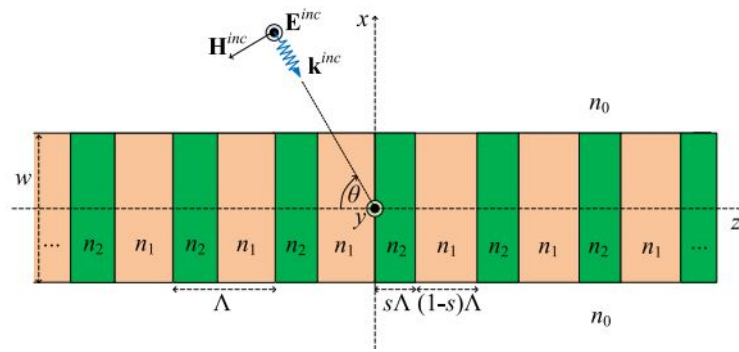
Ο πυρήνας του εν λόγω κυματοδηγού αποτελείται από μια διηλεκτρική πλάκα με δείκτη διάθλασης  $n_1$  και πάχος  $w$ , ο οποίος περιέχει  $\Lambda$ -περιοδικά ορθογώνια εγκλείσματα με δείκτη διάθλασης  $n_2$ , πλάτος  $s\Lambda$  και πάχος  $w$ .

Οι ημιάπειρες περιοχές πάνω και κάτω από τον πυρήνα έχουν δείκτη διάθλασης  $n_0$  (ελεύθερος χώρος:  $n_0 = 1$ ), ενώ ολόκληρη η δομή έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ .

Ο κυματοδηγός διεγείρεται από TE-πλωμένο επίπεδο κύμα μοναδιαίου πλάτους υπό γωνία  $\theta$  και, σύμφωνα με όσα έχουμε δει, το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο έχει μορφή:

$$\mathbf{E}^{inc}(x, z) = \Psi^{inc}(x, z)\hat{\mathbf{y}} = \exp[jk_0 n_0 (\sin \theta x - \cos \theta z)]\hat{\mathbf{y}} \quad (4.1)$$





Σχήμα 4.1: αναπαράσταση κυματοδηγού με χαραγμένες περιοδικές δυαδικές γραμμοσειρές διεγερόμενος από προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα [28]

Από το θεώρημα 2.1, ο βαθμωτός παράγοντας  $\Psi(x, z)$  εκφράζεται μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης :

$$\Psi(x, z) = \Psi_0(x, z) + k_0^2(n_2^2 - n_1^2) \iint_S G(x, z; x', z') \cdot \Psi(x', z') dx' dz', \quad (x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.2)$$

όπου  $S$  η συνολική επιφάνεια των ορθογώνιων εγκλεισμάτων.

Η μετατροπή σε ολοκληρωτική εξίσωση και η επίλυση αυτής, μέσω του κολοβωμένου γραμμικού συστήματος που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 3, μας οδηγεί στη μορφή των ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων :

$$\Psi_r(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p \exp[j(k_{x,p} x - k_{z,p} z)], \quad (x > \frac{w}{2}, z \in \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

$$\Psi_t(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p \exp[-j(k_{x,p} x + k_{z,p} z)], \quad (x < -\frac{w}{2}, z \in \mathbb{R}) \quad (4.4)$$

όπου,

$$\begin{aligned} k_{z,p} &= k_0 n_0 \cos \theta + \left(\frac{2\pi p}{\Lambda}\right) \\ k_{x,p} &= j \left\{ \left[ k_0 n_0 \cos \theta + \left(\frac{2\pi p}{\Lambda}\right) \right]^2 - k_0^2 n_0^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Οι τάξεις διάδοσης κατά μήκος του  $x$ -άξονα προκύπτουν τώρα από τη συνθήκη

$$p^\pm = \pm(\Lambda/\lambda_0)n_0(1 \mp \cos \theta_{inc}) \quad (4.6)$$

και απαιτείται  $p^- < p < p^+$ .

## 4.2 Επιλογή παραμέτρων

### 4.2.1 Επιλογή προσπίπτουσας γωνίας, μήκους κύματος και κύκλου λειτουργίας

Η επιλογή της προσπίπτουσας γωνίας πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε τα ανακλώμενα και μεταδιδόμενα πεδία να περιοριστούν στις κατευθύνσεις που βρίσκονται στην ίδια περιοχή του χώρου με το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι, το φως "θα αναγκαστεί" να διαδοθεί προς την πλευρά του προσπίπτοντος κύματος.

Απαιτούμε λοιπόν διάδοση μόνο της μηδενικής και της -1 τάξης ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων. Αυτό συνεπάγεται ότι  $p^+ < 1$  και  $-2 < p^- < -1$ , όπου μέσω της (4.6) οδηγούμαστε τελικά στην ικανοποίηση της συνθήκης:

$$\max \left\{ 1 - \cos \theta, \frac{1 + \cos \theta}{2} \right\} < \frac{\lambda_0}{\Lambda} < 1 + \cos \theta \quad (4.7)$$

Επιπλέον η διάδοση των -1-τάξεων ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων προς την κατεύθυνση του δεύτερου και τρίτου τεταρτημόριου του χώρου που ορίζεται από τους άξονες  $x$  και  $z$  επιβάλλει  $k_{z,-1} < 0$ . Έτσι από την (4.5) συνάγουμε

$$\cos \theta < \frac{\lambda_0}{\Lambda} \quad (4.8)$$

Καθώς  $\frac{1 + \cos \theta}{2} > \cos \theta$  τελικά αρκεί μόνο η συνθήκη (4.7).

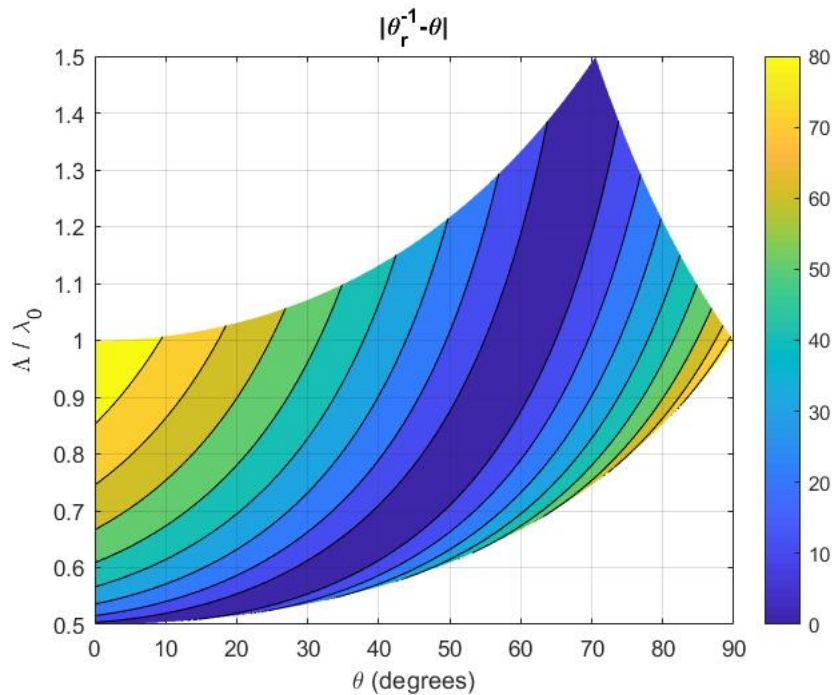
Αναφορικά με την τιμή της γωνίας του κυματικού διανύσματος της -1 ανακλώμενης τάξης με τον αρνητικό ημιάξονα  $z$ , σύμφωνα με την (3.52), έχουμε:

$$\theta_{-1}^r = \tan^{-1}(k_{x,p}^r/k_{z,p}) = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{[1 - (\cos \theta - \lambda_0/\Lambda)^2]}}{\cos \theta - \lambda_0/\Lambda} \right) \quad (4.9)$$

Στο διάγραμμα ισοϋψών του σχήματος 4.2 απεικονίζεται η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ της γωνίας  $\theta_{-1}^r$  και της προσπίπτουσας γωνίας  $\theta$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0/\Lambda$ . Οι λευκές περιοχές αντιστοιχούν στα ζεύγη των  $\theta$  και  $\lambda_0/\Lambda$  για τα οποία δε ικανοποιούνται οι συνθήκες (4.7) και (4.8).

Μέσω του διαγράμματος μπορούμε να εκλέξουμε προσπίπτουσα γωνία  $\theta$  τέτοια ώστε η διαφορά μεταξύ  $\theta_{-1}^r$  και  $\theta$  να είναι αρκετά μικρή και το εύρος τιμών  $\lambda_0/\Lambda$  σχετικά μεγάλο, δίνοντάς μας έτσι μεγάλο παραμετρικό χώρο για τις επόμενες βελτιστοποιήσεις. Έχει νόημα λοιπόν να αναζητήσουμε τη γωνία στη σκούρα μπλε περιοχή του διαγράμματος.

Βάσει των ανωτέρω προχωράμε με την εκλογή της γωνίας  $\theta = 65^\circ$



Σχήμα 4.2: διάγραμμα ισοϋψών της  $|\theta_{-1}^r - \theta|$

Ως προς το  $\lambda_0$  δεχόμαστε πέντε διαφορετικά μήκη κύματος, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε κεντρικό μήκος κύματος διαφορετικών χρωμάτων του ορατού φάσματος. Έτσι έχουμε:

Χρώμα	$\lambda_0$ (nm)
Μπλε	470
Πράσινο	532
Κίτρινο	580
Πορτοκαλί	605
Κόκκινο	685

Πίνακας 4.1: Κεντρικό μήκος κύματος διαφορετικών χρωμάτων του ορατού φάσματος

Για κάθε  $\lambda_0$  και με  $\theta=65^\circ$ , το εύρος της περιόδου  $\Lambda$  υπαγορεύεται από την (4.7).

Θεωρούμε ακόμα  $n_1 \approx 1,35$  ως τον δείκτη διάθλασης της διηλεκτρικής πλάκας του πυρήνα (αντιπροσωπευτικά υλικά με αυτό το δείκτη διάθλασης σε ολόκληρη σχεδόν την ορατή περιοχή είναι τα φθοροπολυμερή Teflon AF [29]). Τα ορθογώνια των γραμμοσειρών υποθέτουμε ότι αποτελούνται από πυρίτιο χωρίς απώλειες και ορίζουμε τις τιμές του δείκτη διάθλασης  $n_2$  για κάθε χρώμα στην ορατή περιοχή σύμφωνα με τα κλασικά μοντέλα μεταβαλλόμενης συχνότητας των ([30],[31]).

Τέλος λαμβάνουμε το  $s$  σταθερό και ίσο με  $1/2$  ώστε η μελετώμενη διάταξη να έχει την κλασική μορφή ενός κυματοδηγού με δυαδικές γραμμοσειρές.

#### 4.2.2 Βέλτιστες παράμετροι περιόδου και πάχους γραμμοσειρών

Η επιλογή των παραμέτρων των γραμμοσειρών θα γίνει ούτως ώστε οι ισχύες των  $-1$  τάξεων να ενισχύονται και ταυτόχρονα οι ισχύες μηδενικής τάξης να καταστέλλονται. Οι ισχύες των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που αντιστοιχούν στις  $p$  ανακλώμενες και μεταδιδόμενες τάξεις ορίζονται σύμφωνα με την [32] ως εξής:

$$P_p^r = \frac{|r_p|^2}{\sin \theta} \sqrt{1 - \left( \cos \theta + p \frac{\lambda_0}{\Lambda} \right)^2} \quad (4.10)$$

$$P_p^t = \frac{|t_p|^2}{\sin \theta} \sqrt{1 - \left( \cos \theta + p \frac{\lambda_0}{\Lambda} \right)^2} \quad (4.11)$$

Τα μεγέθη  $P_p^r$ ,  $P_p^t$  αναφέρονται βιβλιογραφικά ως αποδόσεις των τάξεων περίθλασης και ορίζονται ως οι λόγοι της ροής του διανύσματος Poynting των πεδίων με τάξη περίθλασης  $p$  προς την αντίστοιχη ροή του προσπίπτοντος πεδίου. Επιπλέον παρατηρούμε  $P_0^r = |r_0|^2$  και  $P_0^t = |t_0|^2$ . Συνεπώς, το ενεργειακό κριτήριο ισορροπίας λαμβάνει τη μορφή:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} (P_p^r + P_p^t) = 1 \quad (4.12)$$

όπου το  $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}$  περιλαμβάνει μόνο τις περιθλώμενες τάξεις των πεδίων που διαδίδονται (στην περίπτωση μας  $\mathcal{P} = \{-1, 0\}$ ).

Η εξίσωση (4.12) έχει τη φυσική ερμηνεία ότι η προσπίπτουσα ενέργεια είναι ίση με την περιθλώμενη ενέργεια (για μέσα χωρίς απώλειες).

Ως μέτρο του βαθμού ανώμαλης ανάκλασης και μετάδοσης, θεωρούμε την ποσότητα

$$m = \frac{P_{-1}^r + P_{-1}^t}{P_0^r + P_0^t} \quad (4.13)$$

Μεγάλες τιμές του  $m$  αποτελούν ένδειξη ότι τα ανακλώμενα και μεταδιδόμενα πεδία οδεύουν σε κατευθύνσεις διαφορετικές από αυτές που υπαγορεύει ο νόμος του Snell.

Λαμβάνουμε το διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$ , για κάθε μήκος κύματος της επιλογής μας, απαιτώντας το  $w$  να είναι αρκετά μικρό (στο εύρος ενός κλασματικού μέρους του μήκους κύματος λειτουργίας, ούτως ώστε ο κυματοδηγός να ανταποκρίνεται στον χαρακτηρισμό μεταεπιφάνεια). Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να βρούμε περιοχές της περιόδου  $\Lambda$  που αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές του  $m$ . Στη συνέχεια διερευνούμε αυτές τις περιοχές αναζητώντας το ζεύγος  $w, \Lambda$  που μεγιστοποιεί την τιμή του  $P_{-1}^r$  έναντι των  $P_0^r, P_0^t$  και  $P_{-1}^t$ . Στα σχήματα 4.3-4.7 παρουσιάζουμε τις περιοχές των διαγραμμάτων που μας οδηγούν στην εύρεση του κατάλληλου ζεύγους  $(w, \Lambda)$ .

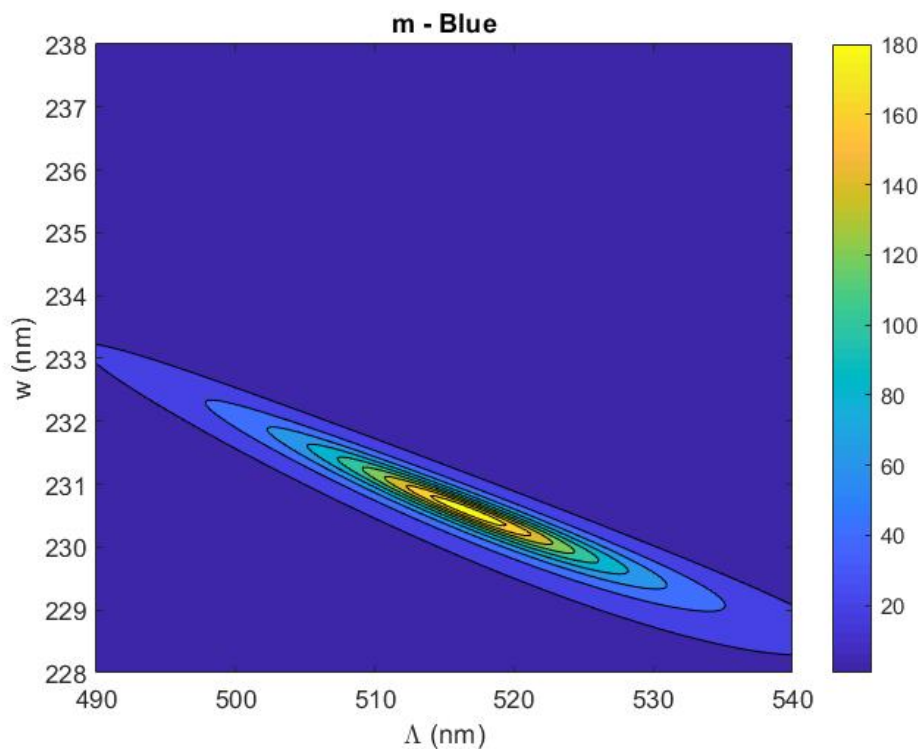
Τα ζεύγη  $w$  και  $\Lambda$  που αποδίδουν τη μέγιστη ισχύ ανακλώμενης τάξεως  $-1$  καθώς και οι γωνίες  $\theta_{-1}^-$  που αντιστοιχούν στα κυματικά διανύσματα των ανακλώμενων πεδίων (υπολογιζόμενες από τη σχέση (4.9)) συγκεντρώνονται στον ακόλουθο πίνακα για κάθε περίπτωση

που εξετάζουμε.

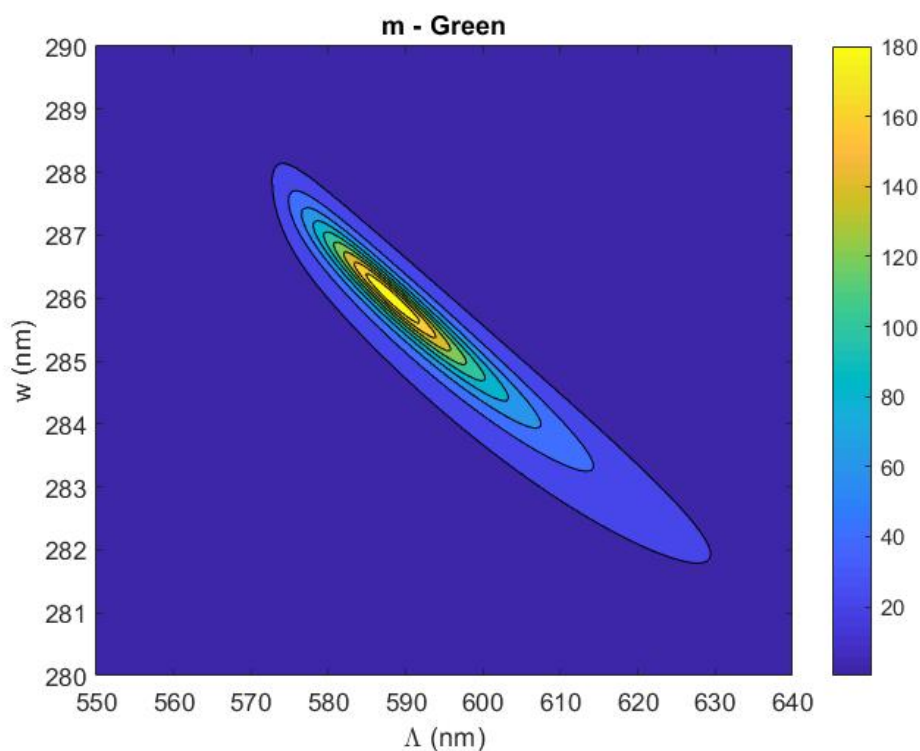
Χρώμα	$\lambda_0$ (nm)	w (nm)	$\Lambda$ (nm)	$P_{-1}^r$	$\theta_{-1}^r$
Μπλε	470	232	497	$\approx 0.94$	$\approx 58^\circ$
Πράσινο	532	288	575	$\approx 0.95$	$\approx 60^\circ$
Κίτρινο	580	330	614	$\approx 0.92$	$\approx 58^\circ$
Πορτοκαλί	605	350	644	$\approx 0.92$	$\approx 59^\circ$
Κόκκινο	685	388	729	$\approx 0.91$	$\approx 59^\circ$

Πίνακας 4.2: Βέλτιστα ζεύγη ( $w, \Lambda$ ) που αποδίδουν τη μέγιστη ισχύ  $P_{-1}^r$  και γωνία  $\theta_{-1}^r$

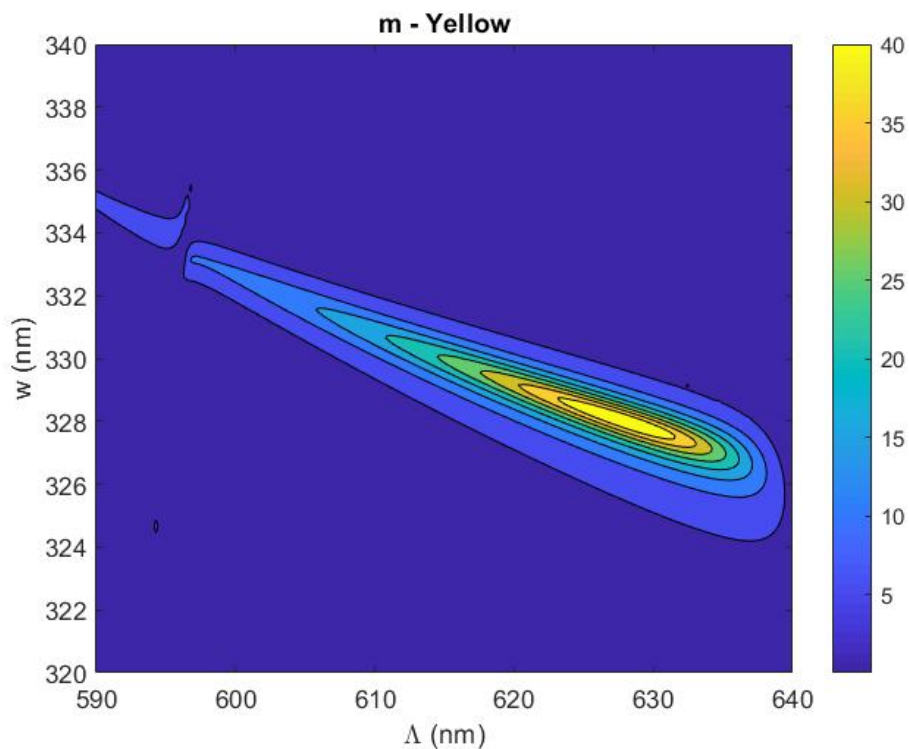
Όπως είναι φανερό από τον ανωτέρω πίνακα, οι τιμές του  $P_{-1}^r$  είναι αρκετά μεγάλες για κάθε εξεταζόμενο μήκος κύματος. Οι τιμές αυτές κυμαίνονται από 0.91 έως 0.95. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι τιμές της γωνίας  $\theta_{-1}^r$  είναι κοντά στη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης,  $\theta = 65^\circ$ , αποκλίνοντας μόνο  $5^\circ$  έως  $7^\circ$ . Ως απόρροια αυτών συμπεραίνουμε ότι, για τις επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων, η δομή του κυματοδηγού παρουσιάζει έντονη ανώμαλη ανάκλαση της προσπίπτουσας δέσμης, δηλαδή ανακλά σχεδόν ολόκληρη την ποσότητα της προσπίπτουσας ισχύος κοντά στη διεύθυνση αυτής.



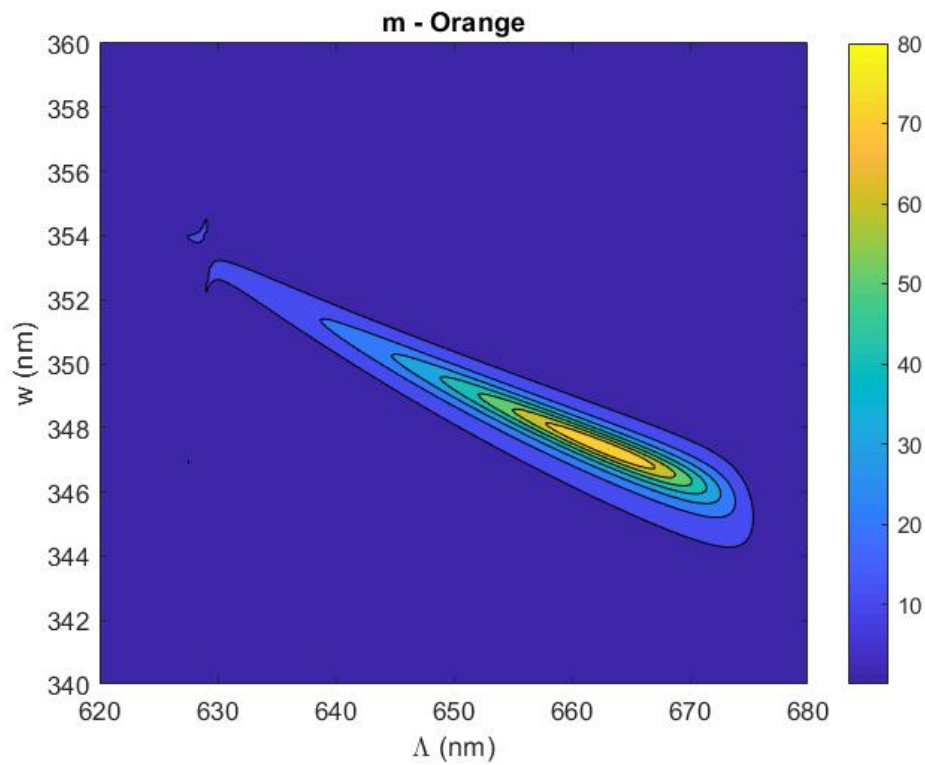
Σχήμα 4.3: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$



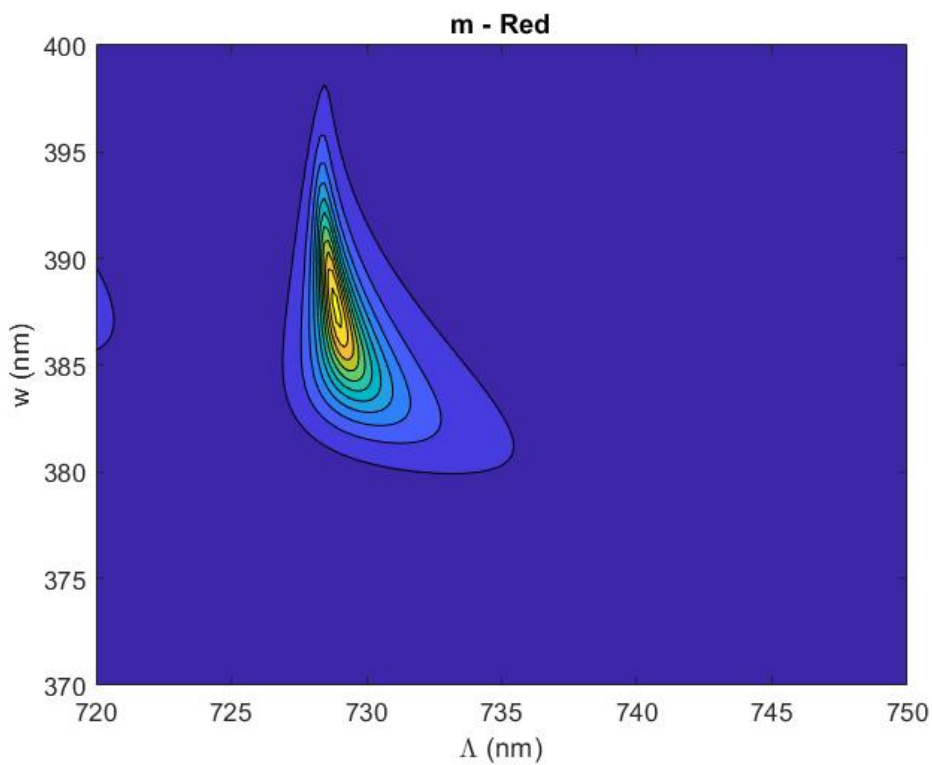
Σχήμα 4.4: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$

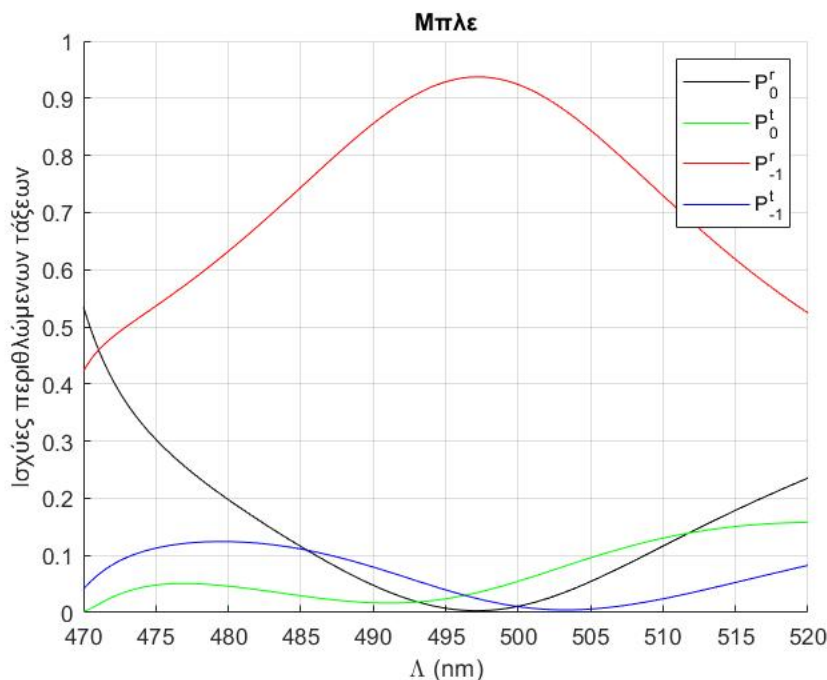


Σχήμα 4.6: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$

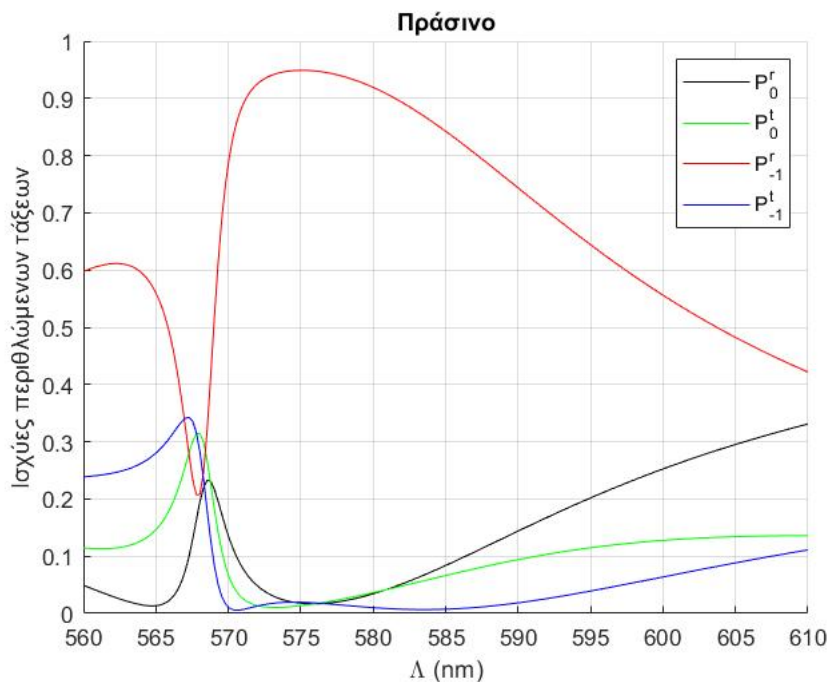


Σχήμα 4.7: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$

Θα δούμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των ισχύων  $P_{-1}^r$ ,  $P_{-1}^t$ ,  $P_0^r$  και  $P_0^t$  που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος των πέντε εξεταζόμενων χρωμάτων, με  $w$  σταθεροποιημένο στη βέλτιστη τιμή που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από αυτά, ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$ .

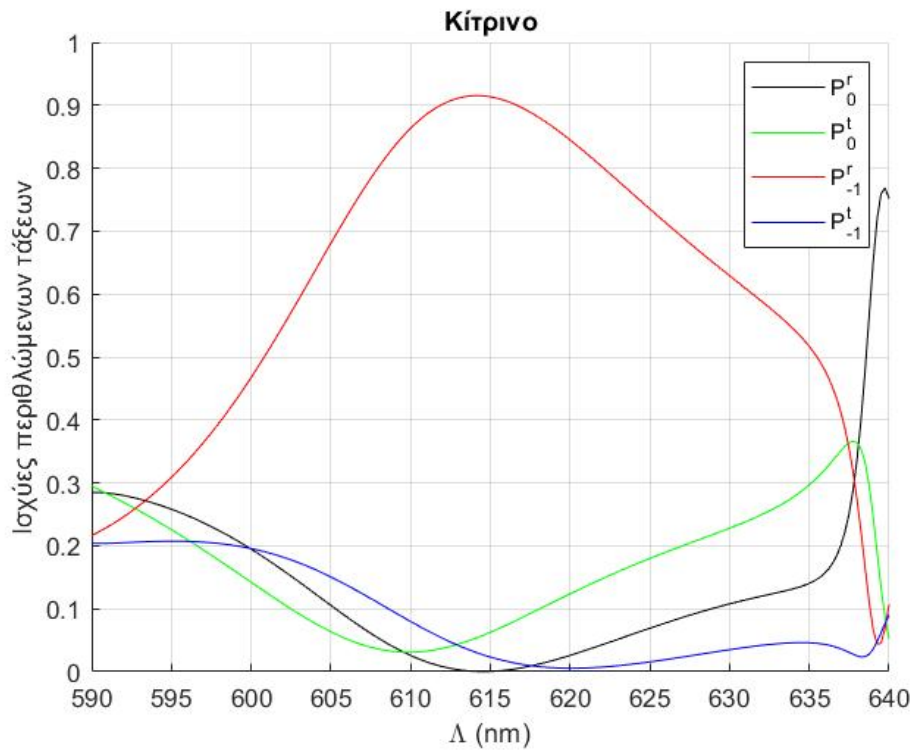


Σχήμα 4.8: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$ ,  $w = 232 \text{ nm}$

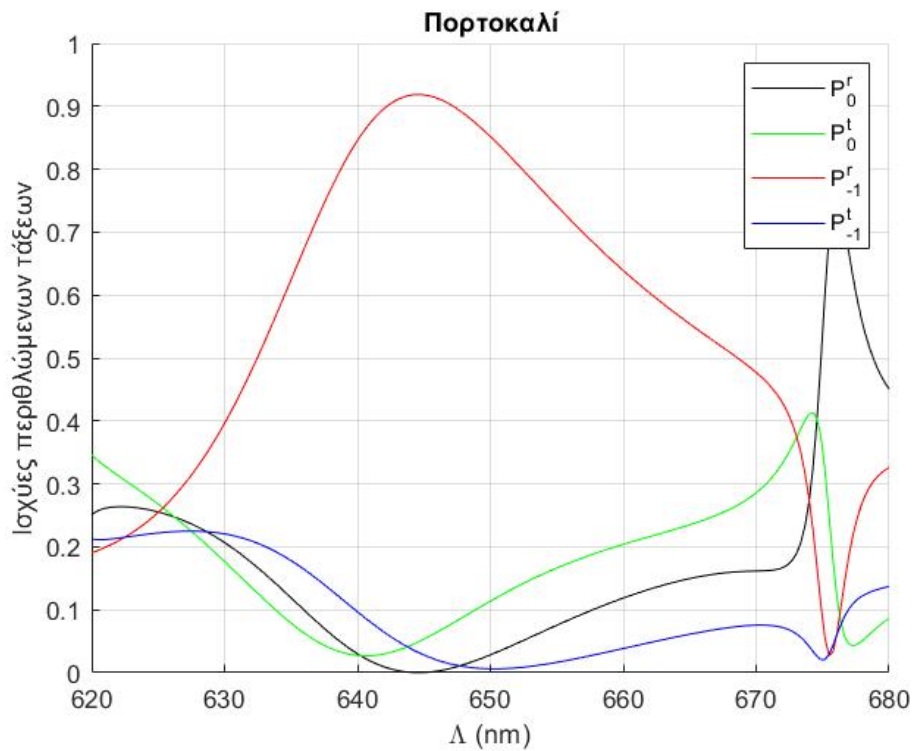


Σχήμα 4.9: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ ,  $w = 287 \text{ nm}$

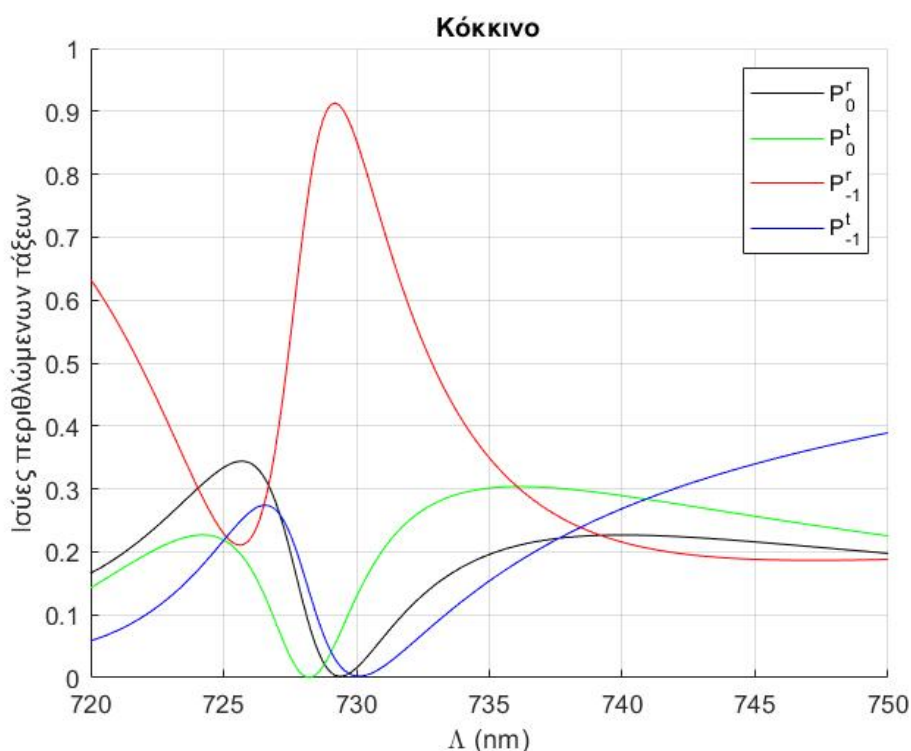




Σχήμα 4.10: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$ ,  $w = 330 \text{ nm}$



Σχήμα 4.11: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$ ,  $w = 350 \text{ nm}$



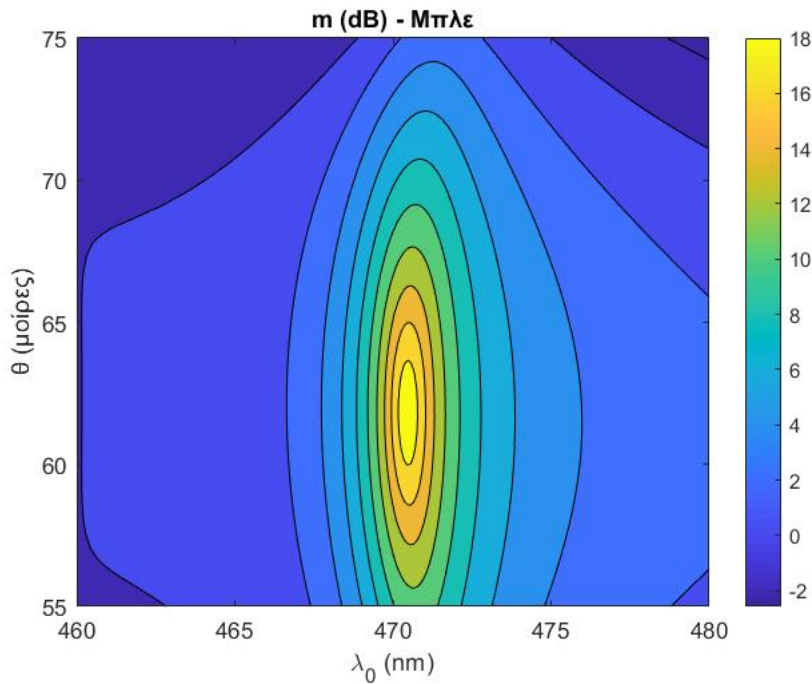
Σχήμα 4.12: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$ ,  $w = 388 \text{ nm}$

Όπως είναι φανερό, για τα μπλε, κίτρινο, πράσινο και πορτοκαλί χρώματα το εύρος  $\Lambda$  υψηλών τιμών του  $P_{-1}^r$  είναι σχετικά μεγάλο γεγονός που καθιστά τις διατάξεις που μελετάμε "ανθεκτικές" σε κατασκευαστικές ατέλειες της περιόδου. Αντίθετα για το κόκκινο χρώμα έχουμε σημαντικά μικρότερο εύρος  $\Lambda$ .

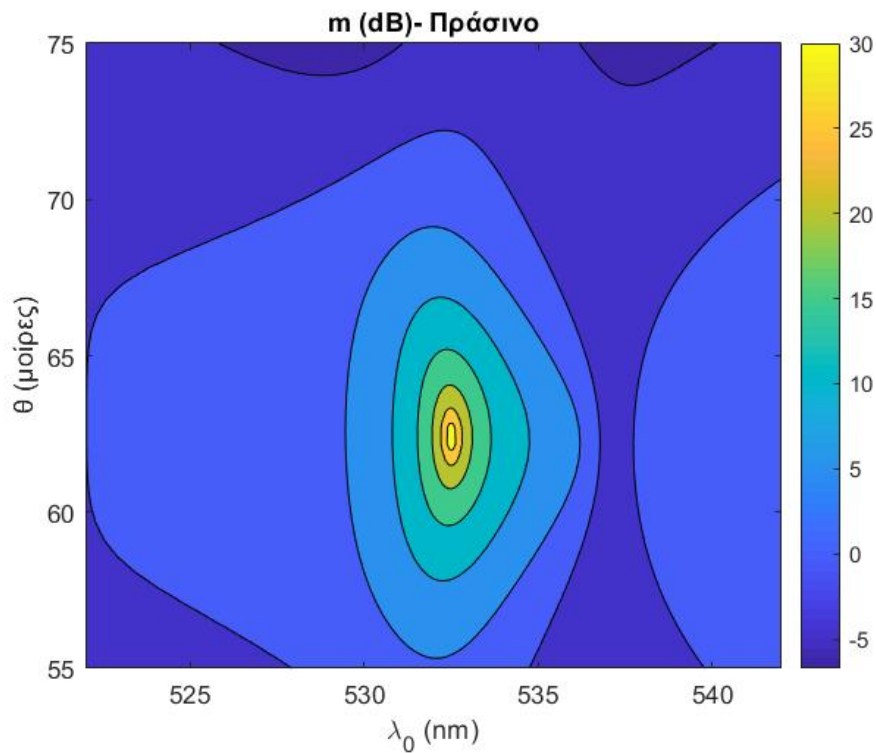
Τέλος, για τα βέλτιστα ζεύγη  $(w, \Lambda)$  που βρήκαμε, παρουσιάζουμε στα σχήματα 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 και 4.17 τα διαγράμματα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση του  $\lambda_0$  και της προσπίπτουσα γωνίας ώστε να μελετήσουμε τις μεταβολές του  $m$  κοντά στο κεντρικό μήκος κύματος λειτουργίας και της προσπίπτουσας γωνίας.

Εκ πρώτης όψεως παρατηρούμε ότι η μεγιστοποίηση του  $m$  συμβαίνει εκτός κέντρου σε όλες τις περιπτώσεις, μολονότι λάβαμε τις παραμέτρους  $w$  και  $\Lambda$  έτσι ώστε να μεγιστοποιείται το  $P_{-1}^r$  για  $\theta = 65^\circ$  και  $\lambda_0$  το αντίστοιχο κεντρικό μήκος κύματος σε κάθε περίπτωση.

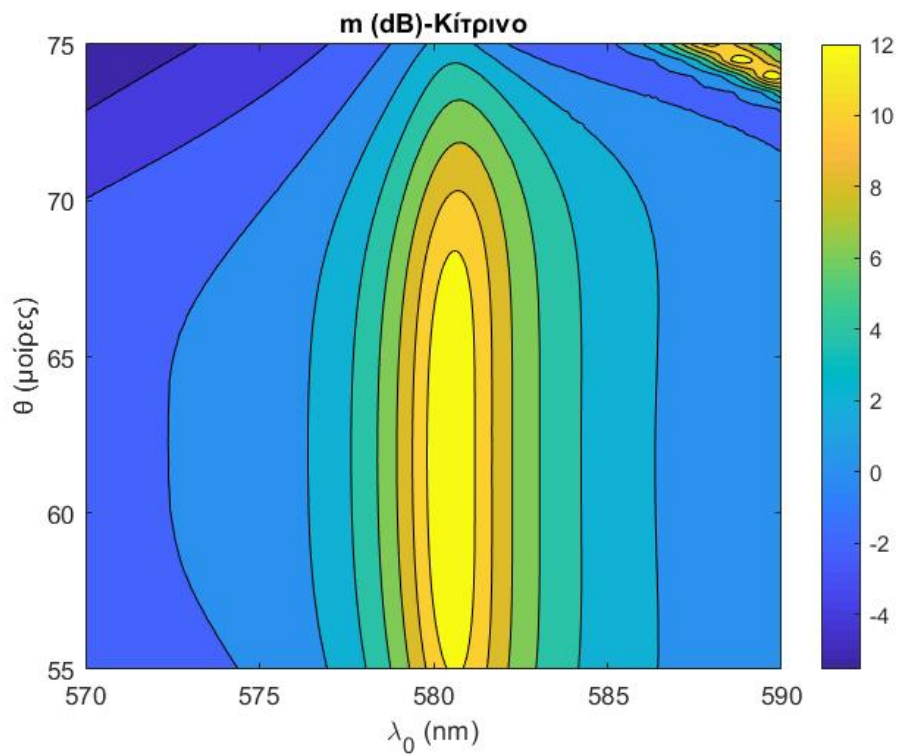
Ειδικότερα, για το μπλέ χρώμα η τιμή του  $m$  μεγιστοποιείται γύρω στις  $62^\circ$  και ελάχιστα μακριά από το  $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$ , ενώ παραμένει υψηλή για μια στενή περιοχή του επιπέδου  $\lambda_0 - \theta$ . Στην περίπτωση του πράσινου χρώματος έχουμε πάλι μεγιστοποίηση του  $m$  γύρω στις  $62^\circ$  και ελάχιστα μακριά από το  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ , ενώ η περιοχή του επιπέδου  $\lambda_0 - \theta$  για την οποία διατηρεί υψηλές τιμές είναι ακόμα στενότερη σε σχέση με το μπλε χρώμα. Το κίτρινο και το πορτοκαλί χρώμα παρουσιάζουν ενδιαφέρον καθώς υψηλές τιμές του  $m$  παρατηρούνται για μεγάλο εύρος γωνιών παραμένοντας συγκεντρωμένες σε ένα στενό διάστημα του  $\lambda_0$  (ελάχιστα μακριά από το κεντρικό μήκος κύματος). Ως προς το κόκκινο χρώμα τέλος, η θέση μεγιστοποίησης του  $m$  βρίσκεται αρκετά  $\pi\text{m}$  μακριά από το  $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$  και διατηρεί υψηλές τιμές για μια ευρεία περιοχή του επιπέδου  $\lambda_0 - \theta$ , πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί να ανακλάται με ανώμαλο τρόπο χωρικά διαμορφωμένα ευρυζωνικά σήματα.



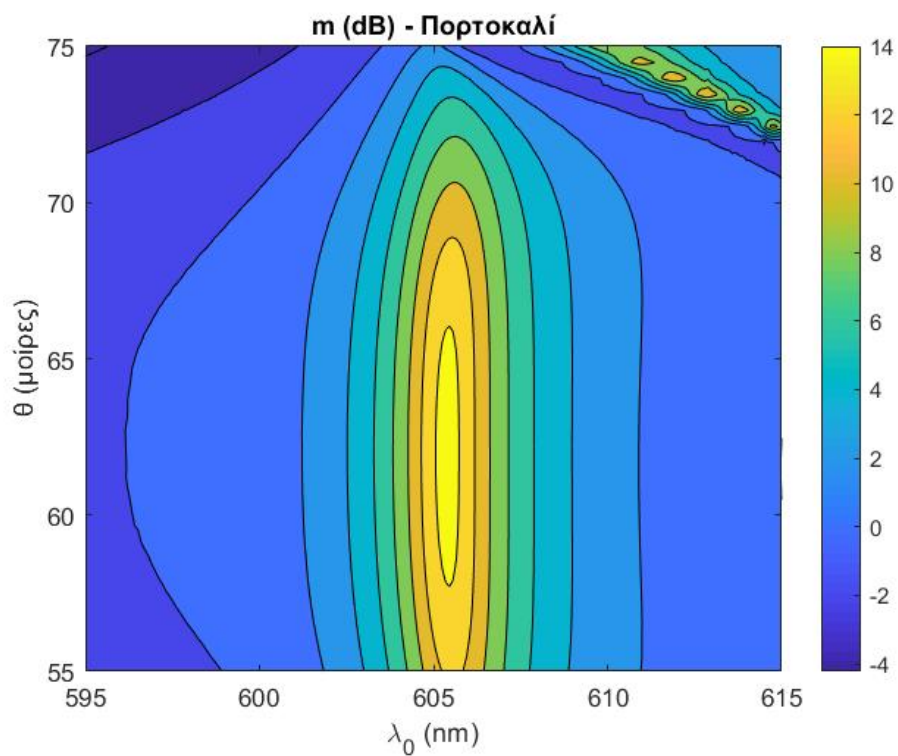
Σχήμα 4.13: Διάγραμμα ισοϋψών του  $m$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 497$  nm,  $w = 232$  nm



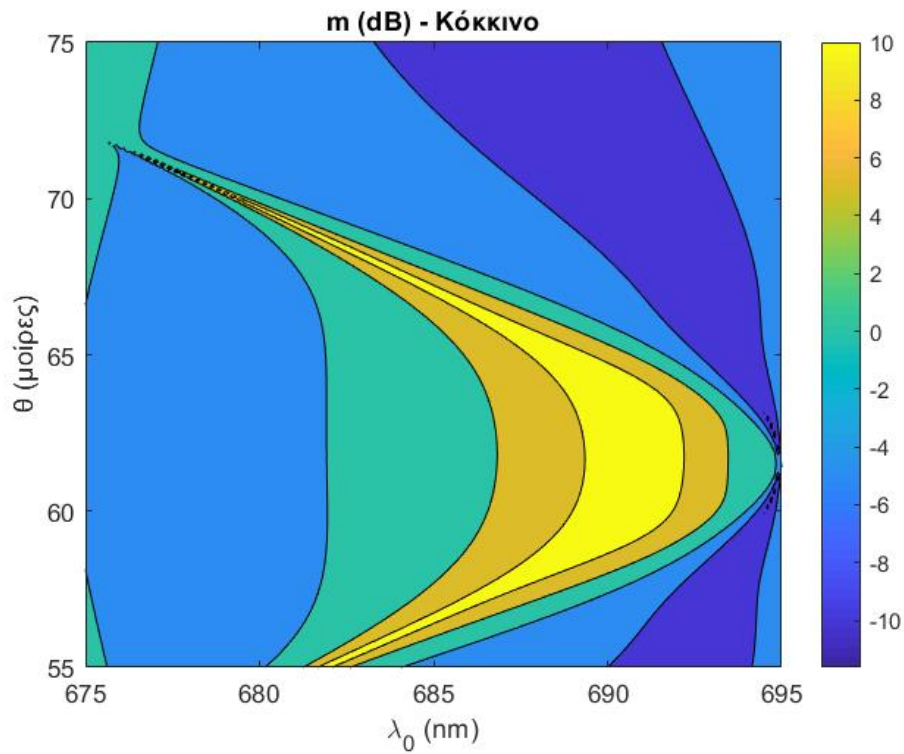
Σχήμα 4.14: Διάγραμμα ισοϋψών του  $m$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 575$  nm,  $w = 287$  nm



Σχήμα 4.15: Διάγραμμα ισοϋψών του  $m$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 614 \text{ nm}$ ,  $w = 330 \text{ nm}$



Σχήμα 4.16: Διάγραμμα ισοϋψών του  $m$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 644 \text{ nm}$ ,  $w = 350 \text{ nm}$



Σχήμα 4.17: Διάγραμμα ισοϋψών του  $m$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 729 \text{ nm}$ ,  $w = 388 \text{ nm}$

## Κεφάλαιο 5

### ΑΝΩΜΑΛΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΦΩΤΟΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ανώμαλη διάθλαση του φωτός και ειδικότερα θα μελετήσουμε κατά πόσο μπορούμε να επιτύχουμε σχεδόν τέλεια αρνητική διάθλαση βελτιστοποιώντας τις παραμέτρους των μεταγραμμοσειρών.

Η αρνητική διάθλαση είναι ένα ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο, ενάντια στη διαίσθησή μας, που για πολύ καιρό θεωρούνταν αδύνατο [33]. Με την ανάπτυξη των μεταλλικών η εκδήλωση του φαινομένου επετεύχθη σε διάφορα φωτονικά συστήματα, όπως τα διπλο-αρνητικά μεταλλικά [34]-[36], οι φωτονικοί κρύσταλλοι [37], [38], τα υπερβολικά μεταλλικά [39], [40] κ.α. Η αρνητική διάθλαση έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών καθώς έχει εγείρει προσδοκίες για κατασκευή επίπεδων φακών με δυνατότητα καλύτερης εστίασης, κεραιών με ανώτερες ιδιότητες αλλά και μανδυών που μπορούν να κάνουν τα αντικείμενα αόρατα [35].

#### 5.1 Κυματοδηγός με δυαδικές γραμμοσειρές

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο της ανώμαλης διάθλασης για κυματοδηγό όμοιο με αυτόν του προηγούμενου κεφαλαίου. Δηλαδή, κυματοδηγό με χαραγμένες δυαδικές (binary) γραμμοσειρές και ο οποίος διεγείρεται από TE-πολωμένο επίπεδο κύμα μοναδιαίου πλάτους υπό γωνία  $\theta$  της μορφής:

$$\mathbf{E}^{inc}(x, z) = \Psi^{inc}(x, z)\hat{\mathbf{y}} = \exp[jk_0 n_0 (\sin \theta x - \cos \theta z)]\hat{\mathbf{y}} \quad (5.1)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο πυρήνας αποτελείται από μια διηλεκτρική πλάκα με δείκτη διάθλασης  $n_1$  και πάχος  $w$ , ο οποίος περιέχει  $\Lambda$ -περιοδικά ορθογώνια εγκλείσματα με δείκτη διάθλασης  $n_2$ , πλάτος  $s\Lambda$  και πάχος  $w$ . Ως ανώστρωμα και υπόστρωμα θεωρούμε τον ελεύθερο χώρο και η δομή έχει σταθερή μαγνητική διαπερατότητα  $\mu_0$ .

Η μορφή των ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων :

$$\Psi_r(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p \exp[j(k_{x,p} x - k_{z,p} z)], \quad (x > \frac{w}{2}, z \in \mathbb{R}) \quad (5.2)$$

$$\Psi_t(x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p \exp[-j(k_{x,p} x + k_{z,p} z)], \quad (x < -\frac{w}{2}, z \in \mathbb{R}) \quad (5.3)$$

όπου,

$$k_{z,p} = k_0 n_0 \cos \theta + \left(\frac{2\pi p}{\Lambda}\right) \quad k_{x,p} = j \left\{ [k_0 n_0 \cos \theta + \left(\frac{2\pi p}{\Lambda}\right)]^2 - k_0^2 n_0^2 \right\}^{1/2} \quad (5.4)$$

και η συνθήκη διάδοσης των  $p$ -τάξεων κατά μήκος του  $x$ :

$$p^- < p < p^+, \quad p^\pm = \pm(\Lambda/\lambda_0)n_0(1 \mp \cos \theta_{inc}) \quad (5.5)$$

## 5.2 Επιλογή παραμέτρων

### 5.2.1 Επιλογή προσπίπτουσας γωνίας, μήκους κύματος και κύκλου λειτουργίας

Για την επιλογή της προσπίπτουσας γωνίας ισχύουν όσα είδαμε στην υποενότητα 4.2.1, καθώς απαιτούμε ξανά διάδοση μόνο της μηδενικής και της -1 τάξης ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων. Η γωνία  $\theta_{-1}^t$  έχει ίδια τιμή με την  $\theta_{-1}^r$ :

$$\theta_{-1}^t = \tan^{-1}(k_{x,p}^r/k_{z,p}^r) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{[1 - (\cos \theta - \lambda_0/\Lambda)^2]}}{\cos \theta - \lambda_0/\Lambda}\right) \quad (5.6)$$

μετράται όμως αριστερόστροφα με αρχή τον αρνητικό ημιάξονα  $z$ .

Έτσι το διάγραμμα ισοϋψών της απόλυτης τιμής της διαφοράς μεταξύ της γωνίας  $\theta_{-1}^t$  και της προσπίπτουσας γωνίας  $\theta$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0/\Lambda$  ταυτίζεται με το σχήμα 4.2.

Αυτή τη φορά θα επιλέξουμε ως γωνία πρόσπτωσης τη γωνία  $\theta = 55^\circ$  για την οποία η διαφορά με την  $\theta_{-1}^t$  είναι μικρή και το εύρος  $\lambda_0/\Lambda$  παραμένει μεγάλο.

Θα μελετήσουμε πάλι 5 διαφορετικές περιπτώσεις δεχόμενοι ως  $\lambda_0$  τις τιμές του πίνακα 4.1 που αντιστοιχούν στα κεντρικά μήκη κύματος των χρωμάτων του ορατού φάσματος.

Θα διατηρήσουμε επιπλέον τις επιλογές  $s = 1/2$ ,  $n_1 \approx 1,35$  και  $n_2$  τις τιμές του δείκτη διάθλασης που αντιστοιχούν σε κάθε χρώμα στην ορατή περιοχή για μέσο από πυρίτιο χωρίς απώλειες.

### 5.2.2 Βέλτιστες παράμετροι περιόδου και πάχους γραμμοσειρών

Αυτή τη φορά η επιλογή των παραμέτρων των γραμμοσειρών θα γίνει ούτως ώστε η ισχύς της -1 τάξης μεταδιδόμενου πεδίου να ενισχύονται και οι ισχύες των -1 τάξης ανακλώμενου πεδίου και μηδενικής τάξης ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων να καταστέλλονται.

Υπενθυμίζουμε τις ισχύς των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που αντιστοιχούν στις  $p$ -ανακλώμενες και  $p$ -μεταδιδόμενες τάξεις :

$$P_p^r = \frac{|r_p|^2}{\sin \theta} \sqrt{1 - \left(\cos \theta + p \frac{\lambda_0}{\Lambda}\right)^2} \quad P_p^t = \frac{|t_p|^2}{\sin \theta} \sqrt{1 - \left(\cos \theta + p \frac{\lambda_0}{\Lambda}\right)^2} \quad (5.7)$$

και το μέτρο του βαθμού ανώμαλης ανάκλασης και μετάδοσης:

$$m = \frac{P_{-1}^r + P_{-1}^t}{P_0^r + P_0^t} \quad (5.8)$$

Όπως και στη μελέτη της ανώμαλης ανάκλασης, λαμβάνουμε το διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$ , απαιτώντας το  $w$  να είναι αρκετά μικρό, και στη

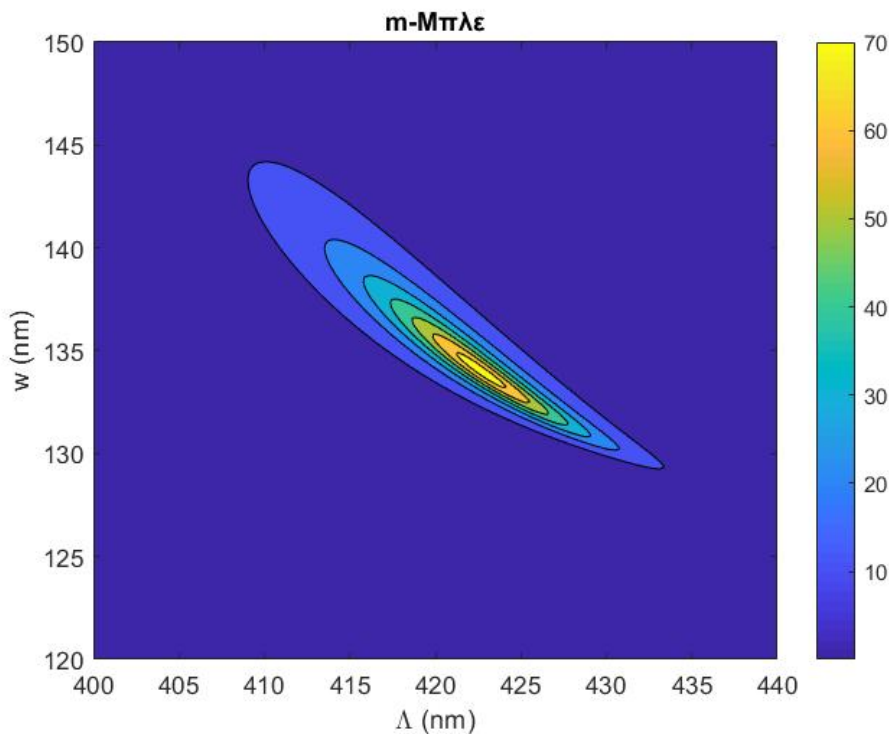
συνέχεια διερευνούμε περιοχές της περιόδου  $\Lambda$  που αντιστοιχούν σε μεγάλες τιμές του  $m$ . Βρίσκουμε έτσι το ζεύγος  $w, \Lambda$  που μεγιστοποιεί την τιμή του  $P_{-1}^t$  έναντι των  $P_0^r, P_0^t$  και  $P_{-1}^r$ . Οι περιοχές των διαγραμμάτων που μας οδηγούν στην εύρεση του κατάλληλου ζεύγους  $(w, \Lambda)$  απεικονίζονται στα σχήματα 5.1-5.5.

Τα ζεύγη  $w$  και  $\Lambda$  που αποδίδουν τη μέγιστη ισχύ μεταδιδόμενης τάξεως  $-1$  καθώς και οι γωνίες  $\theta_{-1}^t$  που αντιστοιχούν στα κυματικά διανύσματα των διαθλωμένων πεδίων (υπολογιζόμενες από τη σχέση (4.9)) συγκεντρώνονται στον ακόλουθο πίνακα :

Χρώμα	$\lambda_0$ (nm)	$w$ (nm)	$\Lambda$ (nm)	$P_{-1}^t$	$\theta_{-1}^t$
Μπλε	470	163	409	$\approx 0.91$	$\approx 55^\circ$
Πράσινο	532	269	415	$\approx 0.93$	$\approx 45^\circ$
Κίτρινο	580	305	462	$\approx 0.94$	$\approx 47^\circ$
Πορτοκαλί	605	323	486	$\approx 0.94$	$\approx 48^\circ$
Κόκκινο	685	380	560	$\approx 0.94$	$\approx 49^\circ$

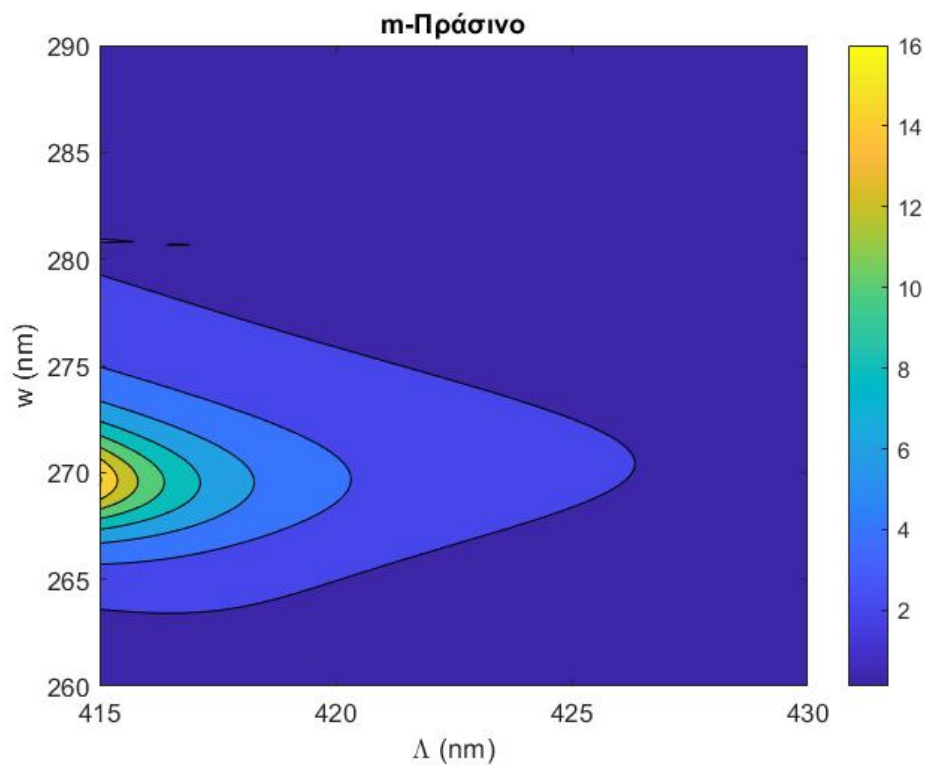
Πίνακας 5.1: Βέλτιστα ζεύγη  $(w, \Lambda)$  που αποδίδουν τη μέγιστη ισχύ  $P_{-1}^t$  και γωνία  $\theta_{-1}^t$

Οι τιμές του  $P_{-1}^t$  κυμαίνονται από 0.91 έως 0.94 για τα εξεταζόμενα μήκη κύματος. Επιπλέον, οι τιμές της γωνίας  $\theta_{-1}^t$ , αποκλίνουν από  $0^\circ$  έως  $10^\circ$  από την τιμή της γωνίας πρόσπτωσης  $\theta = 55^\circ$ . Συμπερασματικά το φαινόμενο την ανώμαλης διάθλασης στις διατάξεις που μελετάμε εμφανίζεται έντονο, καθώς το μεγαλύτερο μέρος της προσπίπτουσας ισχύος κατευθύνεται πολύ κοντά στη συμμετρική ως προς  $z$  διεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος.

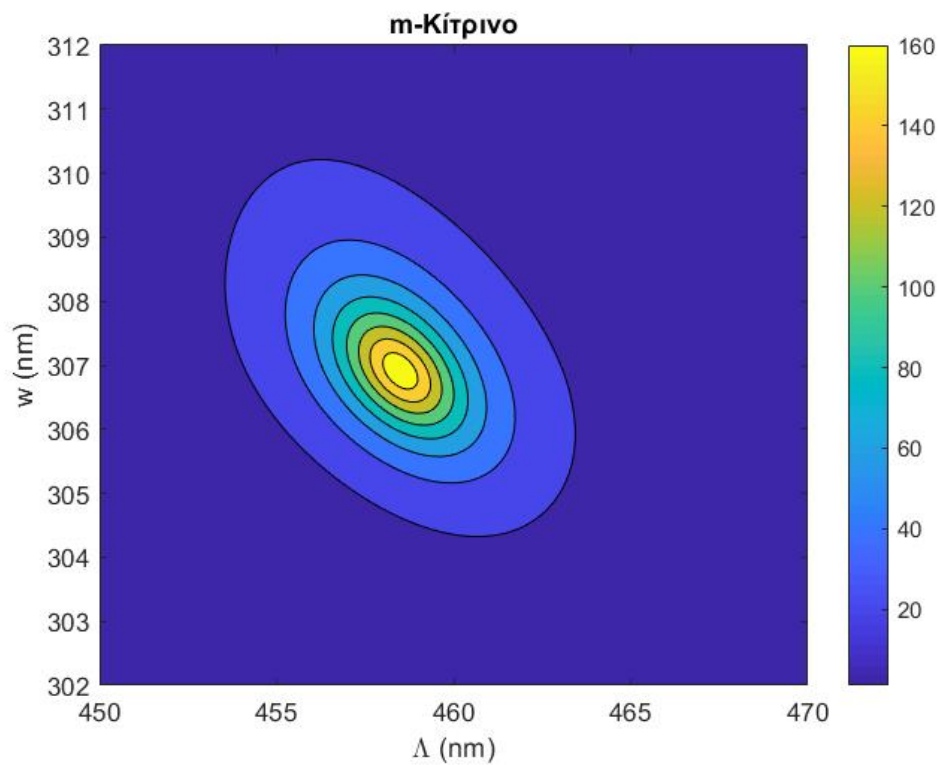


Σχήμα 5.1: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$

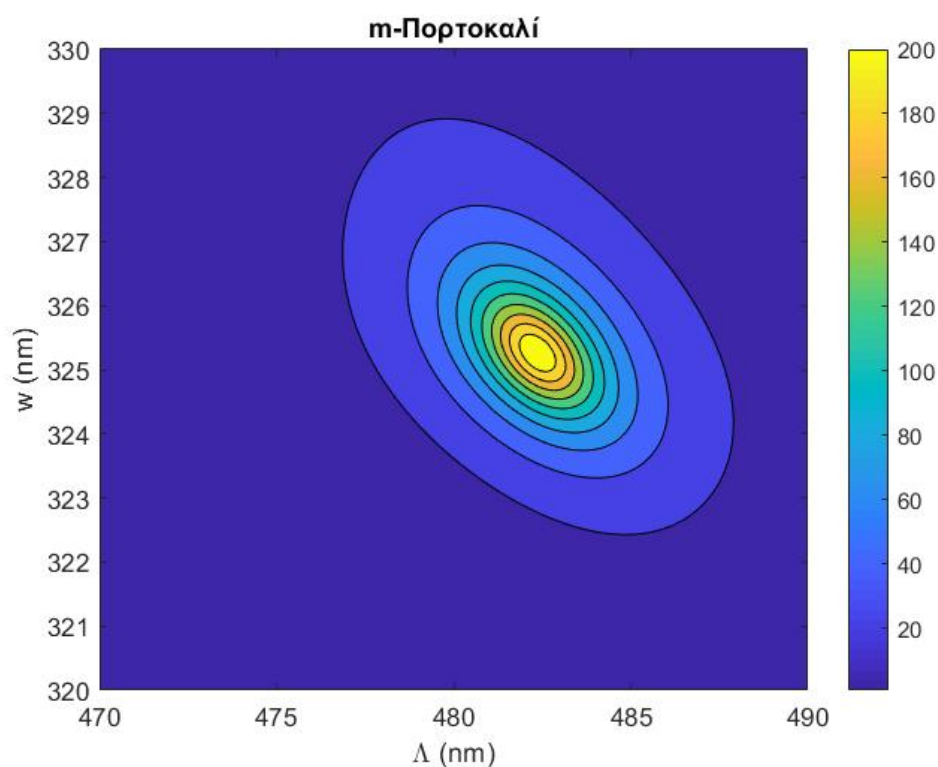




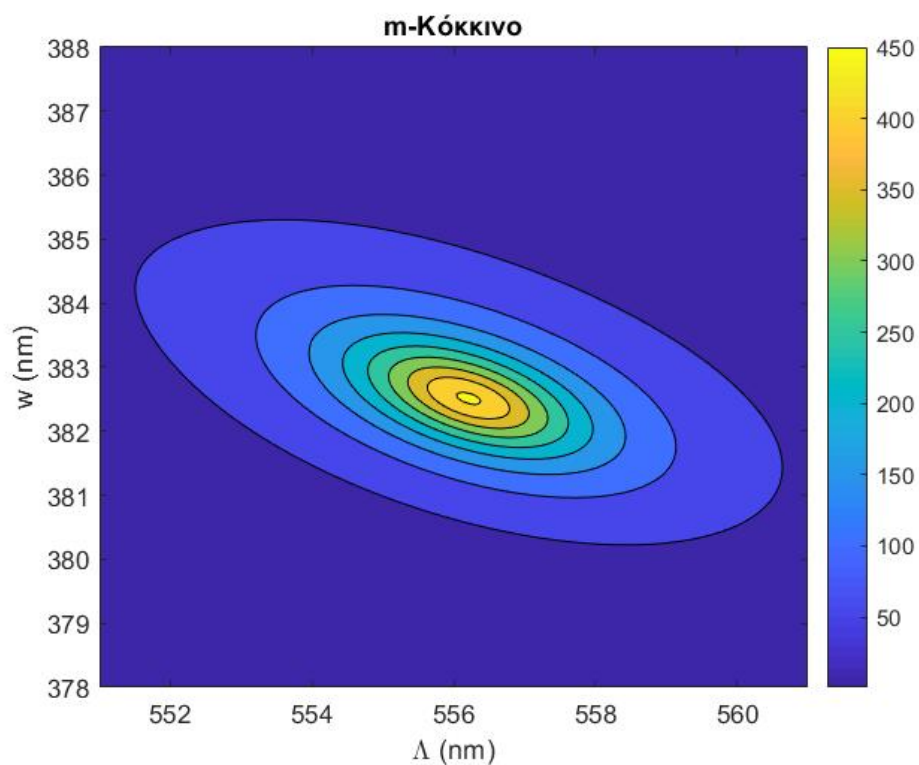
Σχήμα 5.2: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Delta$  για  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Delta$  για  $\lambda_0 = 580 \text{ nm}$

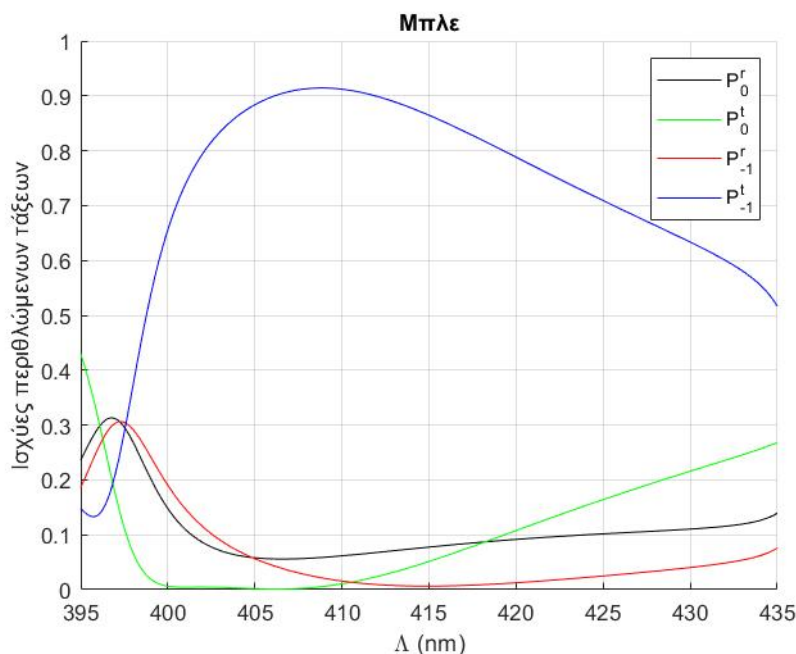


Σχήμα 5.4: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Delta$  για  $\lambda_0 = 605 \text{ nm}$

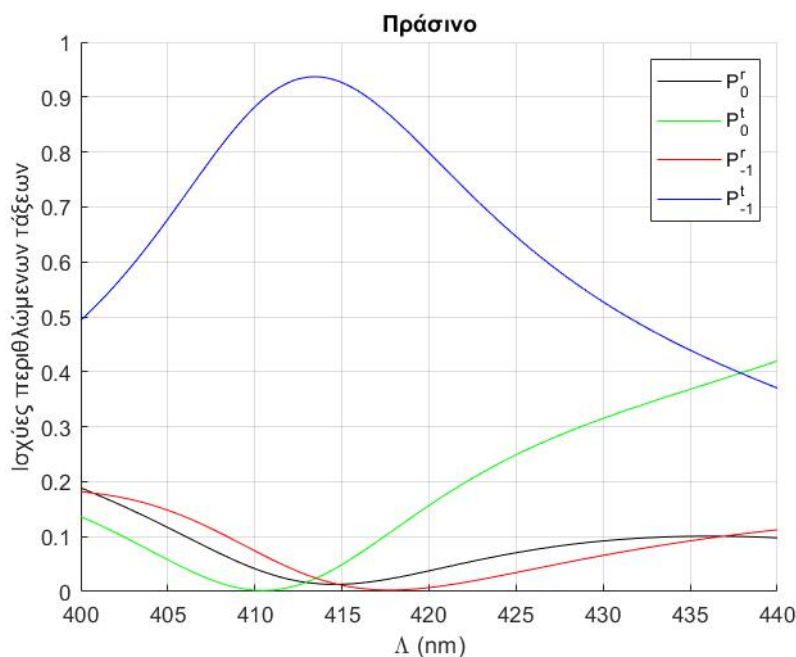


Σχήμα 5.5: Διάγραμμα ισοϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Delta$  για  $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$

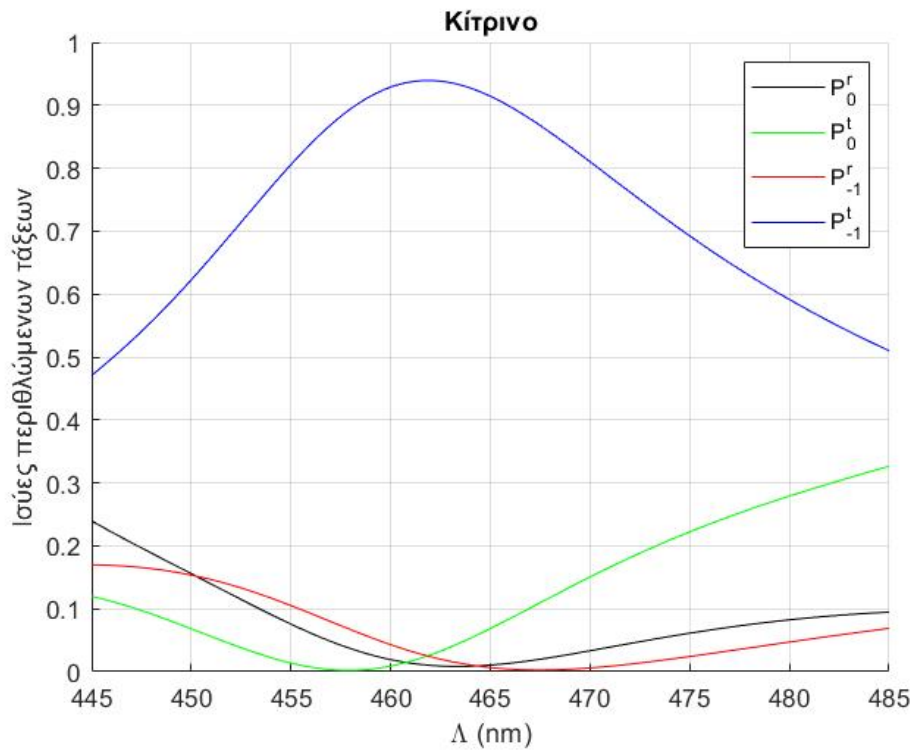
Σε αναλογία με τη μελέτη της ανώμαλης ανάκλασης, θα μελετήσουμε τις γραφικές παραστάσεις των ισχύων  $P_{-1}^r$ ,  $P_{-1}^t$ ,  $P_0^r$  και  $P_0^t$  που αντιστοιχούν στα μήκη κύματος των πέντε εξεταζόμενων χρωμάτων, με  $w$  σταθεροποιημένο στη βέλτιστη τιμή που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από αυτά, ως συνάρτηση της περιόδου  $\Lambda$ .



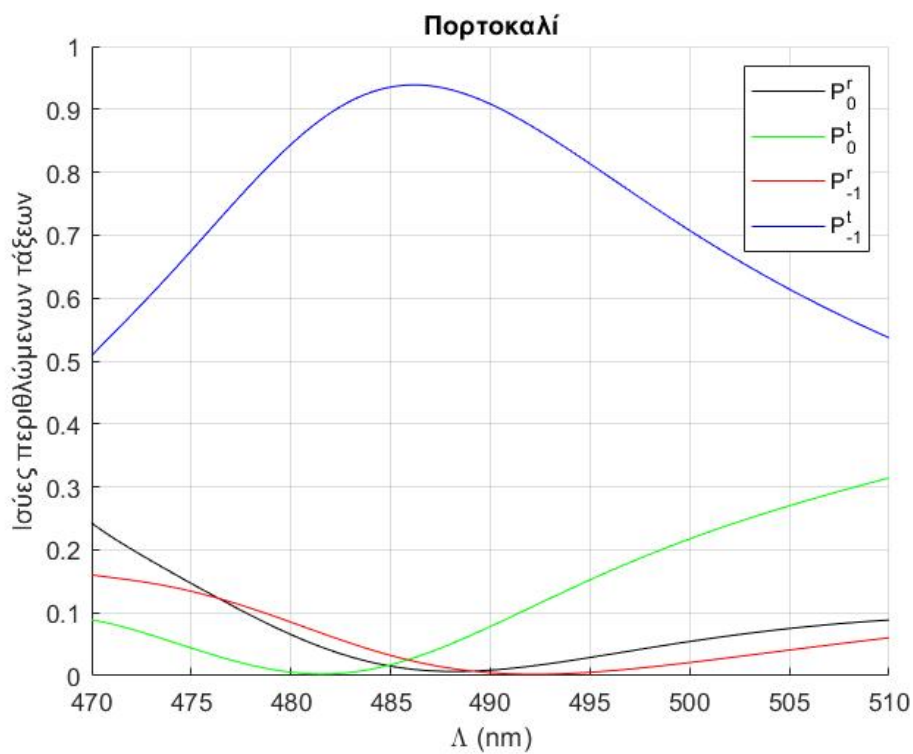
Σχήμα 5.6: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 470 \text{ nm}$ ,  $w = 163 \text{ nm}$



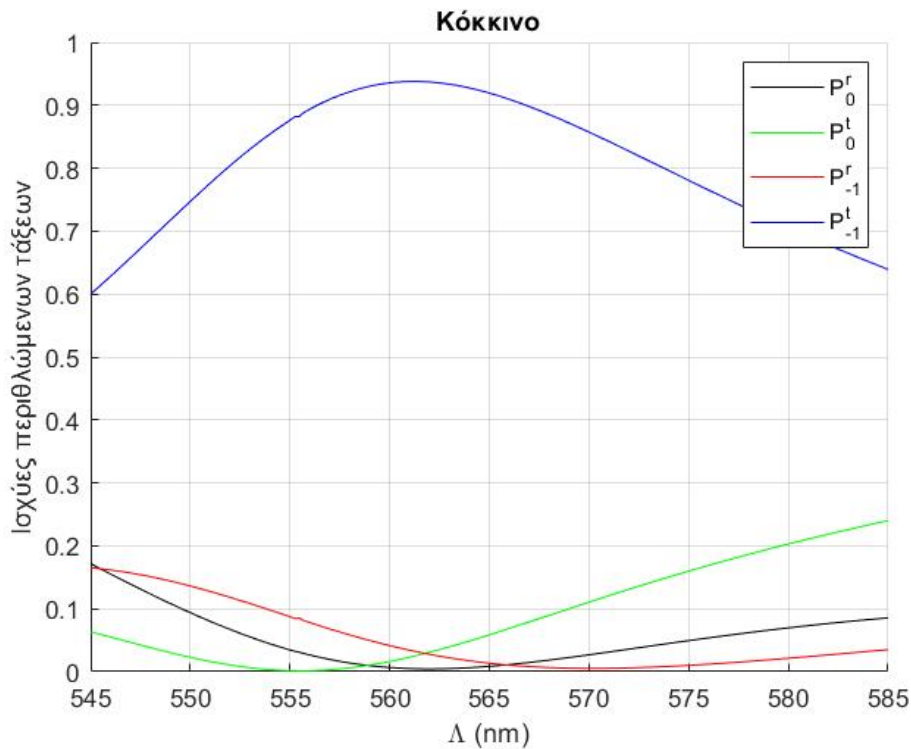
Σχήμα 5.7: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 532 \text{ nm}$ ,  $w = 269 \text{ nm}$



Σχήμα 5.8: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 580$  nm,  $w = 305$  nm



Σχήμα 5.9: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 605$  nm,  $w = 323$  nm



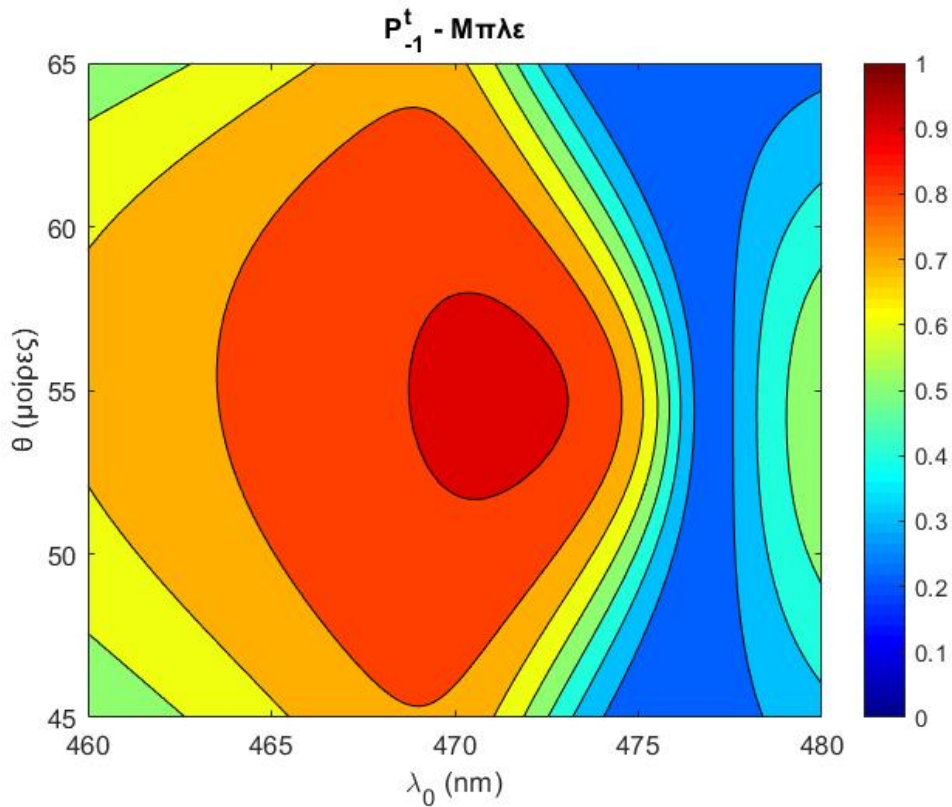
Σχήμα 5.10: Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου  $\Lambda$  για  $\lambda_0 = 685 \text{ nm}$ ,  $w = 380 \text{ nm}$

Το εύρος  $\Lambda$  υψηλών τιμών του  $P_{-1}^t$  είναι σχετικά μεγάλο για όλες τις περιπτώσεις μελέτης, γεγονός που καθιστά τις διατάξεις "ανθεκτικές" σε κατασκευαστικές ατέλειες της περιόδου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση του πράσινου χρώματος, καθώς η μέγιστη τιμή δεν είναι αυτή που καθορίστηκε από την διερεύνησή μας. Συγκεκριμένα λαμβάνουμε μέγιστη ισχύ  $\approx 0.94$  για  $\Lambda=413 \text{ nm}$ . Η απόκλιση αυτή προήλθε από το γεγονός ότι περιορίσαμε την αναζήτηση στη σκούρα μπλε περιοχή του σχήματος 4.2, προκειμένου η τιμή της διαθλώμενης γωνίας να έχει το πολύ  $10^\circ$  διαφορά από την τιμή της προσπίπτουσας γωνίας.

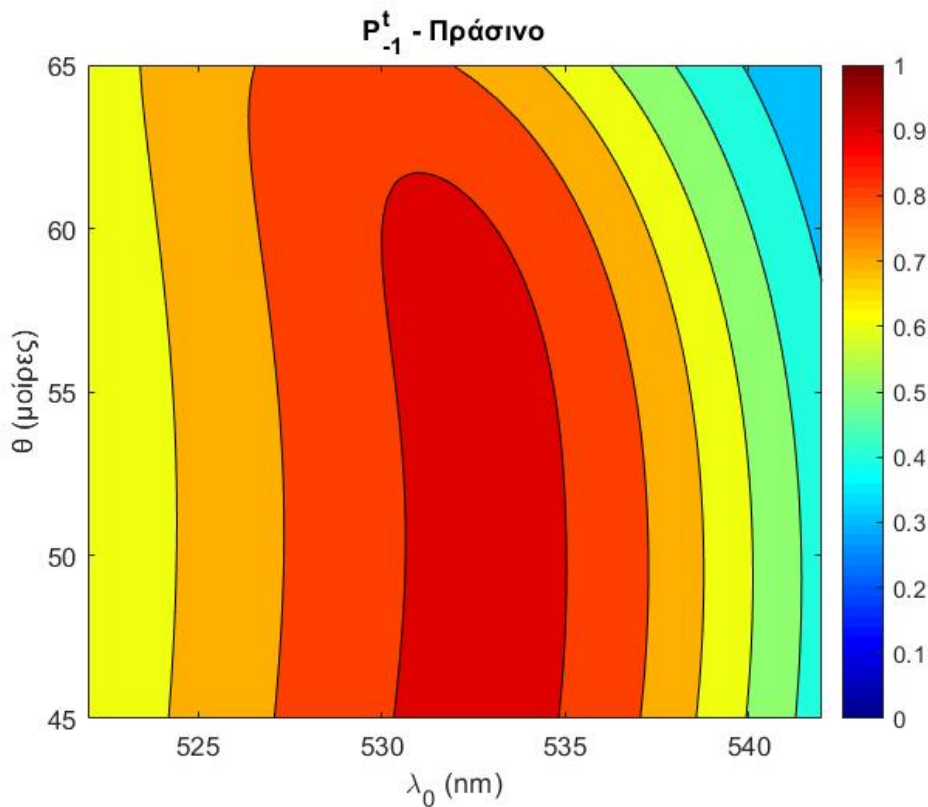
Αυτή τη φορά, για τα βέλτιστα ζεύγη  $(w, \Lambda)$  που βρήκαμε, παρουσιάζουμε στα σχήματα 5.11 έως 5.15 τα διαγράμματα ισοϋψών της ισχύος  $P_{-1}^t$  ως συνάρτηση του  $\lambda_0$  και της προσπίπτουσας γωνίας. Σκοπός είναι να μελετήσουμε τη μεταβολή της ισχύος κοντά στο κεντρικό μήκος κύματος λειτουργίας και τη προσπίπτουσα γωνία.

Στην περίπτωση του μπλε χρώματος, η  $P_{-1}^t$  διατηρεί αρκετά υψηλές τιμές (άνω του 90%) σε μια περιοχή εύρους  $6^\circ$  και  $5 \text{ nm}$  γύρω από το σημείο  $(\lambda_0, \theta) = (470 \text{ nm}, 55^\circ)$ . Ακόμα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το φαινόμενο της ανώμαλης διάθλασης εμφανίζεται σχετικά έντονο ( $P_{-1}^t$  άνω του 60%) για  $\lambda_0 < 475 \text{ nm}$ , ενώ τείνει να εξαφανιστεί για  $\lambda_0 > 475 \text{ nm}$ .

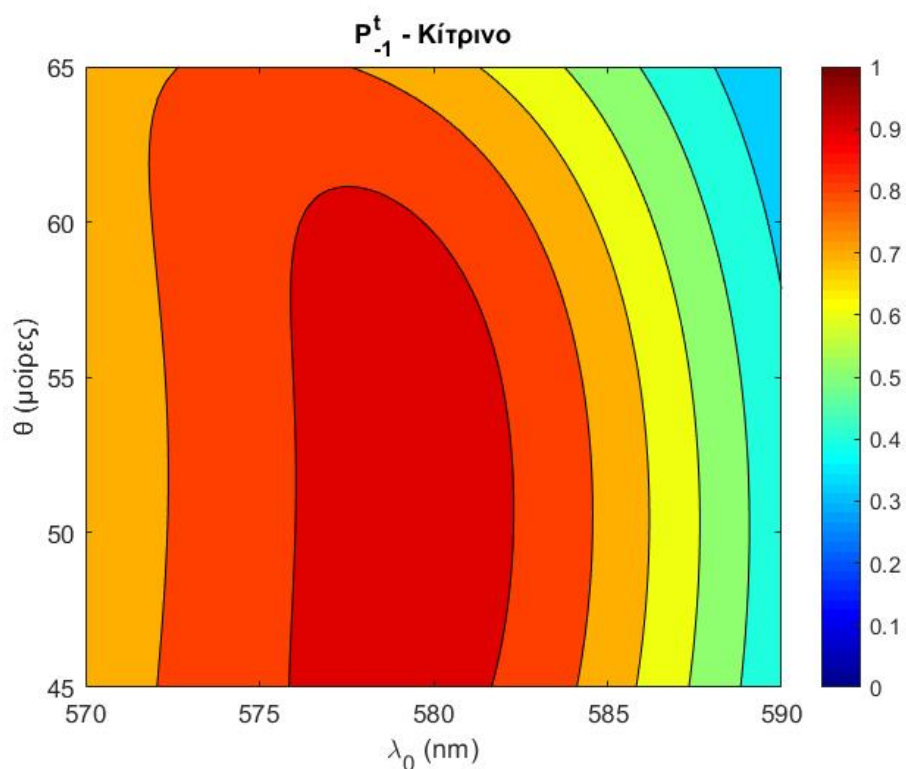
Στις περιπτώσεις του πράσινου, κίτρινου, πορτοκαλί και κόκκινου χρώματος η  $P_{-1}^t$  εμφανίζει παρόμοια συμπεριφορά. Καταρχάς υψηλές τιμές (άνω του 90%) διατηρούνται σχεδόν για όλο το εύρος των διευθύνσεων πρόσπτωσης ( $45^\circ < \theta < 62^\circ$ ). Ενώ ως προς το οπτικό φάσμα οι υψηλές τιμές συγκεντρώνονται μερικά nm γύρω από το κεντρικό μήκος κύματος και σταδιακά μειώνονται (ταχύτερα για τις τιμές  $\lambda_0 >$  κεντρικού μήκους κύματος και βραδύτερα για όσες είναι μικρότερες αυτού), μένοντας όμως ψηλότερες του 50% σχεδόν σε όλο το φάσμα.



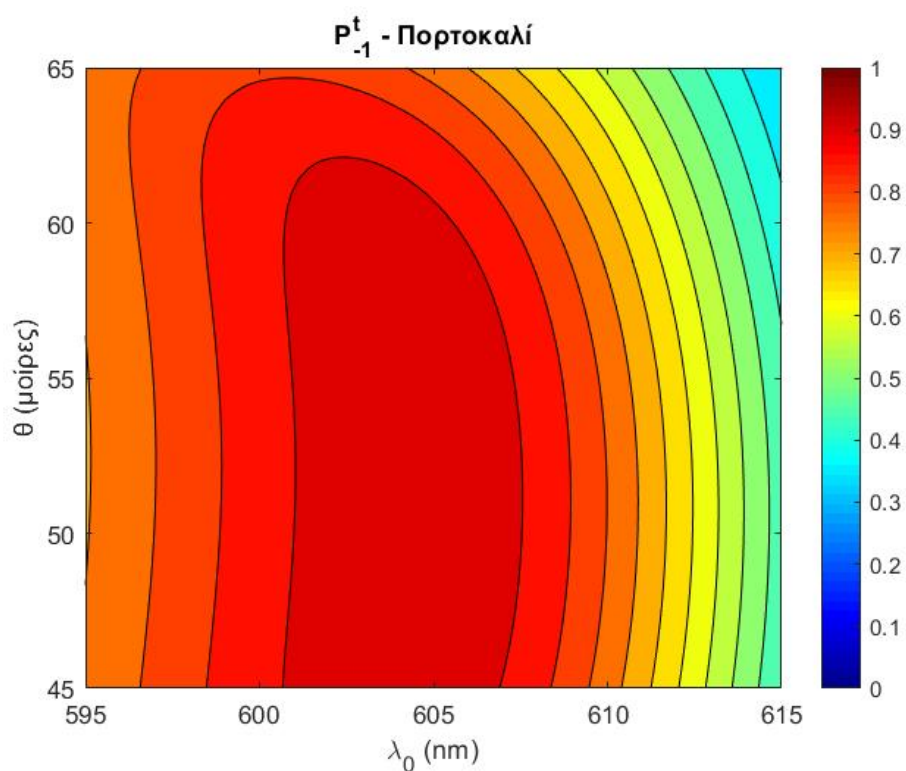
Σχήμα 5.11: Διάγραμμα ισοϋψών του  $P_{-1}^t$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 409 \text{ nm}$ ,  $w = 163 \text{ nm}$



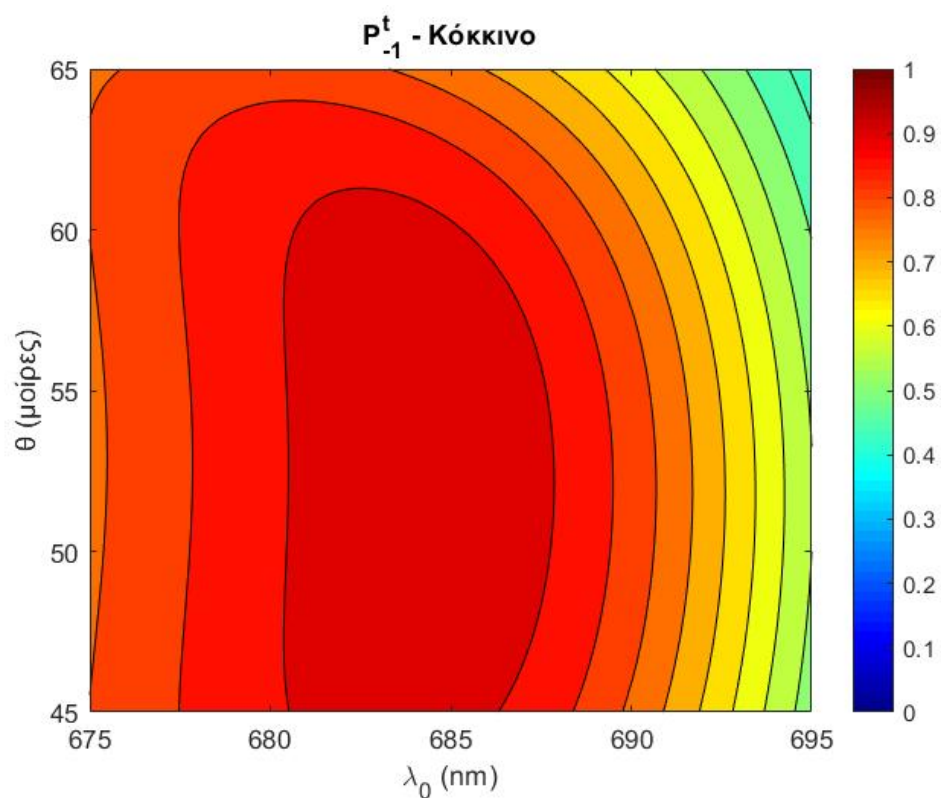
Σχήμα 5.12: Διάγραμμα ισοϋψών του  $P_{-1}^t$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 415 \text{ nm}$ ,  $w = 269 \text{ nm}$



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα ισοϋψών του  $P_{-1}^t$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 462 \text{ nm}$ ,  $w = 305 \text{ nm}$



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα ισοϋψών του  $P_{-1}^t$  ως συναρτήση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 486 \text{ nm}$ ,  $w = 323 \text{ nm}$



Σχήμα 5.15: Διάγραμμα ισοϋψών του  $P_{-1}^t$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για  $\Lambda = 560 \text{ nm}$ ,  $w = 380 \text{ nm}$



## Βιβλιογραφία

- [1] S. Liu, Z. Ma, J. Pei, Q. Jiao, L. Yang, W. Zhang, H. Li, Y. Li, Y. Zou, and X. Tan, “A review of anomalous refractive and reflective metasurfaces,” *Nanotechnol. Precis. Eng.*, vol. 5, no. 2, p. 025001, 4 2022.
- [2] R. Collin, *Field Theory of Guided Waves*. New York: IEEE Press, 1991.
- [3] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [4] N. L. Tsitsas, N. K. Uzunoglu, and D. I. Kaklamani, “Diffraction of plane waves incident on a grated dielectric slab: an entire domain integral equation analysis,” *Radio Science*, vol. 42, RS6S22, 2007.
- [5] H. D. Young, *Πανεπιστημιακή Φυσική, έκδοση συμπληρωμένη με Σύγχρονη Φυσική (Τόμος II)*. Αθήνα: Εκδόσεις Παπαζήση, 1994
- [6] N. K. Uzunoglu and J. G. Fikioris, “Scattering from an inhomogeneity inside a dielectric slab waveguide,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 72, pp. 628-637, 1982.
- [7] A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*. New York: Academic Press, 1949.
- [8] Νικόλαος Λ. Τσίτσα,(2006). *Ανάλυση Συζευκτών Γραμμοσειρών με Μεθόδους Ολοκληρωτικών Εξισώσεων (Διδακτορική διατριβή)*. Διαθέσιμο από: Εθνικό Αρχείο Διδακτορικών Διατριβών.
- [9] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*. New York: Academic Press, 1974.
- [10] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics (Part I)*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [11] S. Sun, K.-Y. Yang, C.-M. Wang, T.-K. Juan, W. T. Chen, C. Y. Liao, Q. He, S. Xiao, W.-T. Kung, G.-Y. Guo, L. Zhou, and D. P. Tsai, “High-efficiency broadband anomalous reflection by gradient metasurfaces,” *Nano Letters*, vol. 12, pp. 6223-6229, 2012.
- [12] A. M. Wong and G. V. Eleftheriades, “Perfect anomalous reflection with a bipartite Huygens’ metasurface,” *Phys. Rev. X*, vol. 8, Iss.1, p. 011036, 2018.
- [13] Z. Li, E. Palacios, S. Butun, and K. Aydin, “Visible-frequency metasurfaces for broadband anomalous reflection and high-efficiency spectrum splitting,” *Nano Letters*, vol. 15, no. 3, pp. 1615–1621, 2015.
- [14] S. B. Glybovski, S. A. Tretyakov, P. A. Belov, Y. S. Kivshar, and C. R. Simovski, “Metasurfaces: From Microwaves to Visible,” *Physics Reports*, vol. 634, pp. 1-72, 2016.

- [15] C. L. Holloway, E. F. Kuester, J. A. Gordon, J. O'Hara, J. Booth, and D. R. Smith, "An Overview of the Theory and Applications of Metasurfaces: The Two-Dimensional Equivalents of Metamaterials," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 54, no. 2, pp. 10-35, 2012.
- [16] A. V. Kildishev, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, "Planar Photonics with Metasurfaces," *Science*, vol. 339, no. 6125, 2013.
- [17] N. Yu and F. Capasso, "Flat Optics with Designer Metasurfaces," *Nature Materials*, vol.13, no.2, p. 139 ,2014.
- [18] S. A. Tretyakov, "Metasurfaces for General Transformations of Electromagnetic Fields," *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 373, no. 2049, 2015
- [19] N. Yu, P. Genevet, M. A. Kats, F. Aieta, J.-P. Tetienne, F. Capasso, and Z. Gaburro, "Light propagation with phase discontinuities: generalized laws of reflection and refraction," *Science*, vol. 334, no.6054, pp. 333–337, 2011.
- [20] Y. Ra'di, D. L. Sounas, and A. Alù, "Metagratings: Beyond the limits of graded metasurfaces for wave front control," *Physical review letters*, vol. 119, no. 6, p. 067404, 2017.
- [21] H. Chalabi, Y. Ra'Di, D. Sounas, and A. Alù, "Efficient anomalous reflection through near-field interactions in metasurfaces," *Physical Review B*, vol. 96, no. 7, p. 075432, 2017.
- [22] O. Rabinovich and A. Epstein, "Analytical design of printed circuit board (pcb) metagratings for perfect anomalous reflection," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 66, no. 8, pp. 4086–4095, 2018.
- [23] O. Rabinovich, I. Kaplon, J. Reis, and A. Epstein, "Experimental demonstration and in-depth investigation of analytically designed anomalous reflection metagratings," *Physical Review B*, vol. 99, no.12, p. 125101, 2019.
- [24] X. Dong, J. Cheng, F. Fan, and S. Chang, "Low-index second-order metagratings for large-angle anomalous reflection," *Optics Letters*, vol. 44, no. 4, pp. 939–942, 2019.
- [25] V. Neder, Y. Ra'di, A. Alù, and A. Polman, "Combined metagratings for efficient broad-angle scattering metasurface," *ACS photonics*, vol. 6, no. 4, pp. 1010–1017, 2019.
- [26] Mahdi Rahmanzadeh and Amin Khavasi, "Perfect anomalous reflection using a compound metallic metagrating," *Optics express*, vol. 28, no.11, pp. 16439-16452, 2020.
- [27] N. L. Tsitsas and C. A. Valagiannopoulos, "Anomalous refraction into free space with all-dielectric binary metagratings," *Physical Review Research*, vol. 2, no.3, p. 033526, 2020.

- [28] N. L. Tsitsas and C. A. Valagiannopoulos, “Anomalous reflection of visible light by all-dielectric gradient metasurfaces [Invited],” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 34, no.7, pp. D1–D8, 2017.
- [29] M. K. Yang, R. H. French, and E. W. Tokarsky, “Optical properties of Teflon AF amorphous fluoropolymers,” *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS and MOEMS*, vol. 7, no.3, p. 033010, 2008.
- [30] <http://refractiveindex.info/> (accessed January 1, 2024).
- [31] D. E. Aspnes and A. A. Studna, “Dielectric functions and optical parameters of Si, Ge, GaP, GaAs, GaSb, InP, InAs, and InSb from 1.5 to 6.0 eV,” *Physical review B*, vol. 27, no.2, pp. 985–1009, 1983
- [32] R. Petit, *Electromagnetic Theory of Gratings*. Berlin: Springer, 1980.
- [33] V. G. Veselago, ” Electrodynamics of substances with simultaneously negative  $\epsilon$  and  $\mu$ ,” *Usp. Fiz. Nauk*, vol. 92, no.7, p. 517, 1967.
- [34] J. Valentine, S. Zhang, T. Zentgraf, E. Ulin-Avila, D. A. Genov, G. Bartal and X. Zhang, ”Three-dimensional optical metamaterial with a negative refractive index,” *Nature*, vol. 455, no. 7211, pp. 376–379, 2008.
- [35] V. M. Shalaev, ”Optical negative-index metamaterials,” *Nature photonics*, vol.1, no.1, p. 41, 2007.
- [36] D. R. Smith, J. B. Pendry and M. C. Wiltshire, ”Metamaterials and negative refractive index,” *Science*, vol. 305, no. 5685, pp. 788–792, 2004.
- [37] E. Cubukcu, K. Aydin, E. Ozbay, S. Foteinopoulou, and C. M. Soukoulis, ”Negative refraction by photonic crystals,” *Nature*, vol.423, no.6940, pp. 604–605, 2003.
- [38] A. Berrier, M. Mulot, M. Swillo, M. Qiu, L. Thylén, A. Talneau, and S. Anand ”Negative refraction at infrared wavelengths in a two-dimensional photonic crystal,” *Physical review letters*, vol.93, no. 7, p. 073902, 2004.
- [39] A. Poddubny, I. Iorsh, P. Belov, and Y. Kivshar, ”Hyperbolic metamaterials,” *Nature photonics*, vol. 7, no. 12, pp. 948–957, 2013.
- [40] A. A. High, R. C. Devlin, A. Dibos, Ma. Polking, D. S. Wild, J. Perczel, N. P. De Leon, M. D. Lukin and H. Park. ”Visible-frequency hyperbolic metasurface,” *Nature*, vol. 522, no. 7555, pp. 192–196, 2015.

## Παράρτημα Α

### «κώδικας MATLAB »

Για τον υπολογισμό των στοιχείων  $(\mathbf{A}^{\pm\pm})_{mn}$  και  $(\mathbf{b}^{\pm})_m$  (σχέσεις 3.42 και 3.43 αντίστοιχα) καθώς επίσης και τον υπολογισμό των ανακλώμενων και μεταδιδόμενων πεδίων  $\Psi_r(x, z)$ ,  $\Psi_t(x, z)$  (σχέσεις 3.44 και 3.45), χρησιμοποιήθηκαν τα matlab script της εργασίας [4].

Ακολούθως παραθέτουμε τους κώδικες για τα σχήματα των κεφαλαίων 4 και 5.

Διάγραμμα isoϋψών  $|\theta_{-1}^r - \theta|$ :

```
clear all;

th=linspace(0,90,1000).*pi/180;
l=linspace(0.5,1.5,1000);
[TH,L] = meshgrid(th,l);

th_r=abs(atan((-sqrt(1-(cos(TH)-(1./L)).^2))./
              (cos(TH)-(1./L)))-TH);
th_r(1./L>1+cos(TH)|1./L<max(1-cos(TH),(1+cos(TH))./2))= NaN;

contourf(th*180/pi,l,th_r*180/pi)
title('| \theta_r^{-1} - \theta |')
xlabel(' \theta (degrees) ');
ylabel(' \Lambda / \lambda_0 ');

grid on
```

Διάγραμμα isoϋψών του μέτρου  $m$  ως συνάρτηση των  $w$  και  $\Lambda$ :

```
clear all;

ai=[0];
si=[0.5];
th_i=65*pi/180; %th_i=65*pi/180, 55*pi/180
n=[sqrt(1.0),sqrt(1.9),sqrt(1.0),4.4970];
    %n(4)=4.4970, 4.152, 3.9973, 3.9378, 3.8013
lam0=470; %lam0=470, 532, 580, 605, 685
N=7;

w=linspace(10,350,200);
```

```

L=linspace(490,540,200);
% (470,660,200), (532,747,200), (580,814,200), (605,850,200),
% (685,962,200) linspace for central wavelength and
% incident angle 65^\circ
% (368,472,200), (417,534,200), (455,582,200), (474,608,200),
% (537,688,200) linspace for central wavelength and
% incident angle 55^\circ

for p=1:200
    for q=1:200

        Refl_m1(p,q)=abs(refl(lam0,N,n,w(p),L(q),w(p)/2,th_i,ai,
            si,-1))^2;
        Refl_0(p,q)=(abs(refl(lam0,N,n,w(p),L(q),w(p)/2,th_i,ai,
            si,0)+refl_inc(lam0,n,w(p)/2,th_i)))^2;
        Trans_m1(p,q)=abs(trans(lam0,N,n,w(p),L(q),w(p)/2,th_i,ai,
            si,-1))^2;
        Trans_0(p,q)=(abs(trans(lam0,N,n,w(p),L(q),w(p)/2,th_i,ai,
            si,0)+trans_inc(lam0,n,w(p)/2,th_i)))^2;
        PR0(p,q)=(Refl_0(p,q).*(sqrt(1-(cos(th_i)).^2)))/sin(
            th_i);
        PT0(p,q)=(Trans_0(p,q).*(sqrt(1-(cos(th_i)).^2)))/sin(
            th_i);
        PRm1(p,q)=(Refl_m1(p,q).*(sqrt(1-(cos(th_i)-lam0./L(q))
            .^2)))/sin(th_i);
        PTm1(p,q)=(Trans_m1(p,q).*(sqrt(1-(cos(th_i)-lam0./L(q))
            .^2)))/sin(th_i);
    end
end

m=(PRm1+PTm1)./(PR0+PT0);

figure(6);
contourf(L,w,m)
title('m ')
xlabel('\Lambda (nm)');
ylabel('w (nm)');

%max(PRm1)
%max(PTm1)

    Ισχύες των -1 και 0 τάξεων ως συναρτήσεις της περιόδου Λ για βέλτιστες τιμές w:

clear all;

ai=[0];

```

```

si=[0.5];
n=[sqrt(1.0),sqrt(1.9),sqrt(1.0),4.152];
           %n(4)=4.4970, 4.152, 3.9973, 3.9378, 3.8013
th_i=65*pi/180; %th_i=65*pi/180, 55*pi/180
lam=470; %lam0=470, 532, 580, 605, 685
d=232/2; %232/2, 287/2, 330/2, 350/2, 388/2 anomalous refl.
           %163/2, 269/2, 305/2, 323/2, 380/2 anomalous trans.
L=linspace(470,520,200);
  %(470,520,200), (560,610,200), (590,640,200), (620,680,200),
  (720,750,200)      for anomalous reflection

%(395,435,200), (400,440,200), (445,485,200), (470,510,200),
  (545,585,200)      for anomalous transmission

w=2*d;
N=7;
p=0;

for q=1:200
    out_r(q)=refl(lam,N,n,w,L(q),d,th_i,ai,si,p)...
        +refl_inc(lam,n,d,th_i);
    out_t(q)=trans(lam,N,n,w,L(q),d,th_i,ai,si,p)...
        +trans_inc(lam,n,d,th_i);
    g(q)=sqrt((1-(cos(th_i)+(p*lam./L(q))).^2))./sin(th_i);
end

figure
hold on;
plot(L,abs(out_r).*abs(out_r).*g,'k');
hold on;
plot(L,abs(out_t).*abs(out_t).*g,'g');

p=-1;

for q=1:200
    out_r(q)=refl(lam,N,n,w,L(q),d,th_i,ai,si,p);
    out_t(q)=trans(lam,N,n,w,L(q),d,th_i,ai,si,p);
    g(q)=sqrt((1-(cos(th_i)+(p*lam./L(q))).^2))./sin(th_i);
end

hold on;
plot(L,abs(out_r).*abs(out_r).*g,'r');
hold on;
plot(L,abs(out_t).*abs(out_t).*g,'b');
xlabel('\Lambda (nm)');

```

```
ylabel('Powers of diffracted orders');
legend('P_{0}^r','P_{0}^t','P_{-1}^r','P_{-1}^t');
grid on
```

Διάγραμμα ισούψων του  $m$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για βέλτιστα ζεύγη  $(w,\Lambda)$ :

```
clear all;

ai=[0];
si=[0.5];
w=388; % w=232, 287, 330, 350, 388
L=729; % L=498, 575, 614, 644, 729
n=[sqrt(1.0),sqrt(1.9),sqrt(1.0),3.8013];
%n(4)=4.4970, 4.152, 3.9973, 3.9378, 3.8013

N=7;

th_i=linspace(55,75,40).*pi/180;
lam0=linspace(675,695,200);% (460,480,200), (520,540,200),
(570,590,200), (595,615,200), (675,695,200)

for q=1:40
    for p=1:200

        Refl_m1(q,p)=abs(refl(lam0(p),N,n,w,L,w/2,th_i(q),ai,si
            ,-1))^2;
        Refl_0(q,p)=(abs(refl(lam0(p),N,n,w,L,w/2,th_i(q),ai,si
            ,0)+refl_inc(lam0(p),n,w/2,th_i(q))))^2;
        Trans_m1(q,p)=abs(trans(lam0(p),N,n,w,L,w/2,th_i(q),ai,si
            ,-1))^2;
        Trans_0(q,p)=(abs(trans(lam0(p),N,n,w,L,w/2,th_i(q),ai,si
            ,0)+trans_inc(lam0(p),n,w/2,th_i(q))))^2;
        PR0(q,p)=(Refl_0(q,p).*(sqrt(1-(cos(th_i(q))).^2)))./sin(
            th_i(q));
        PT0(q,p)=(Trans_0(q,p).*(sqrt(1-(cos(th_i(q))).^2)))./sin(
            th_i(q));
        PRm1(q,p)=(Refl_m1(q,p).*(sqrt(1-(cos(th_i(q))-lam0(p)./L
            ).^2)))./sin(th_i(q));
        PTm1(q,p)=(Trans_m1(q,p).*(sqrt(1-(cos(th_i(q))-lam0(p)./
            L).^2)))./sin(th_i(q));

    end
end

m=(PRm1+PTm1)./(PR0+PT0);
```

figure (5);

```
contourf(lam0, th_i*180/pi, 10*log10(m))
xlabel('\lambda_0 (nm)');
ylabel('\theta (degrees)');
title('m (dB)');
```

Διάγραμμα ισοϋψών του  $P_{-1}^t$  ως συνάρτηση των  $\theta$  και  $\lambda_0$  για βέλτιστα ζεύγη  $(w, L)$ :

```
clear all;
```

```
ai=[0];
si=[0.5];
w=380; % w=163, 269, 305, 323, 380
L=560; % L=409, 415, 461, 486, 560
n=[sqrt(1.0), sqrt(1.9), sqrt(1.0), 3.8013];
%n(4)=4.4970, 4.152, 3.9973, 3.9378, 3.8013
```

```
N=7;
```

```
th_i=linspace(45, 65, 40).*pi/180;
lam0=linspace(675, 695, 200);% (460, 480, 200), (522, 542, 200),
(570, 590, 200), (595, 615, 200), (675, 695, 200)
```

```
for q=1:40
    for p=1:200

        Trans_m1(q,p)=abs(trans(lam0(p), N, n, w, L, w/2, th_i(q), ai, si
            , -1))^2;
        PTm1(q,p)=(Trans_m1(q,p).*(sqrt(1-(cos(th_i(q))-lam0(p))./
            L).^2))./sin(th_i(q));

    end
end
```

```
figure;
```

```
contourf(lam0, th_i*180/pi, PTm1)
xlabel('\lambda_0 (nm)');
ylabel('\theta (degrees)');
title('P_{-1}^t');
```

Εύρεση γωνίας κυματικού διανύσματος ανακλώμενων και διαθλώμενων πεδίων:



```
R=atan(-sqrt(1-(cos((13*pi)/36)-(532/575))^2)/(cos((13*pi)/36)-(532/575))) % 470/497, 532/575, 580/614, 605/644,  
685/729
```

```
D = rad2deg( R )
```

```
R=atan(-sqrt(1-(cos((11*pi)/36)-(470/409))^2)/(cos((11*pi)/36)-(470/409))) % 470/409, 532/415, 580/462, 605/486,  
685/560
```

```
D = rad2deg( R )
```

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.