



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

«Τα Ιδιοδιανύσματα Navier στη Δισδιάστατη

Γραμμική Ελαστικότητα και

Σύνδεση αυτών με τις Ελαστικές Συναρτήσεις Herglotz»

Κυπριωτέλης Παναγιώτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλειος Σεβρόγλου

Χίος, Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Παναγιώτη Κυπριωτέλη, που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο τα πολιτικής ανοικτής πρόσβασης, ο συγγραφέας εκχωρεί στο ΕΑΠ μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο τον χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα, ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκθεση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς την ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα. Ο συγγραφέας διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



«Τα Ιδιοδιανύσματα Navier στη Δισδιάστατη
Γραμμική Ελαστικότητα και
Σύνδεση αυτών με τις Ελαστικές Συναρτήσεις Herglotz»

Κυπριωτέλης Παναγιώτης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Βασίλειος Σεβρόγλου
Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Τσίτσας Νικόλαος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χίος, Σεπτέμβριος 2023

Ευχαριστίες

Λίγο πριν την ολοκλήρωση της παρούσης διπλωματικής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους εκείνους, που στάθηκαν δίπλα μου στο «ταξίδι» αυτό, που ήταν δύσκολο και ταυτόχρονα άκρως συναρπαστικό.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Πειραιώς. Αφενός, από την πρώτη κιόλας ομαδική συμβουλευτική συνάντηση, μου κίνησε το ενδιαφέρον για την ενότητα των μερικών διαφορικών εξισώσεων και τις εφαρμογές τους. Αφετέρου, καθ' όλη την διάρκεια της συγγραφής, ήταν πάντοτε πρόθυμος να απαντά με υπομονή και κατανόηση στις απορίες μου και με υποστήριζε, ώστε να φτάσω στο καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον συν-επιβλέποντα κύριο Νικόλαο Τσίτσα, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης για τις πολύ χρήσιμες υποδείξεις του, αλλά και την αείμνηστη Φωτεινή Καριώτου, που βοήθησε τα μέγιστα στην σωστή δομή της εργασίας και στην παρουσίασή της.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην σύζυγό μου Ράνια και στον γιο μου Θοδωρή για την αμέριστη κατανόηση που έδειξαν, όσον αφορά τον σημαντικά λιγότερο χρόνο, που απέμενε για αυτούς, αλλά και για την υποστήριξή τους σε όλες τις δυσκολίες, που αντιμετώπιζα.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία γίνεται παρουσίαση των λύσεων της φασματικής εξίσωσης Navier, στη δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα, που επιπλέον ικανοποιούν την συνθήκη Herglotz. Εισάγονται τα ιδιοδιανύσματα Navier σε πολικό σύστημα συντεταγμένων και αποδεικνύεται ότι αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητο και πλήρες σύνολο με την L^2 – έννοια. Αποδεικνύεται ότι οι κλασικές λύσεις της φασματικής εξίσωσης Navier μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων Navier και μάλιστα η έκφραση αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^2 . Επίσης εισάγεται η έννοια του πλάτους σκέδασης, διαμήκους και εγκάρσιου και αποδεικνύεται η σύνδεσή τους με τις ελαστικές λύσεις Herglotz. Από το θεώρημα αναπαράστασης προκύπτει ότι οι ελαστικές λύσεις Herglotz μπορούν να εκφραστούν ως υπέρθεση επίπεδων κυμάτων, επί του μοναδιαίου κύκλου. Τέλος, αποδεικνύεται η πυκνότητα του συνόλου των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz, στον χώρο των κλασικών λύσεων της φασματικής εξίσωσης Navier και παρουσιάζονται εφαρμογές και παρατηρήσεις.

Λέξεις-Κλειδιά

Δισδιάστατη Γραμμική Ελαστικότητα, Φασματική Εξίσωση Navier, Σκέδαση Ελαστικών Κυμάτων, Προβλήματα Σκέδασης, Ελαστικές Συναρτήσεις Herglotz, Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

The Navier Eigenvectors in two-Dimensional Linear Elasticity and their Linchpin to Elastic Herglotz Functions

Kipriotelis Panagiotis

ABSTRACT

This work features solutions to the spectral Navier equation of the two-dimensional linear elasticity, which verify the Herglotz boundness condition. Navier eigenvectors in polar coordinates are introduced and it is proven that they consist a linearly independent and complete set in the L^2 –sense. Moreover, it is established that the classical solutions of the spectral Navier equation are correlated to Navier eigenvectors and this expansion converge uniformly over compact sets of \mathbb{R}^2 . Far-field pattern (longitudinal and transverse) is discussed, as well as it's connection to elastic Herglotz solutions. Based on the representation theorem, it is proven that elastic Herglotz solutions can be expressed as superposition of plane waves, over the unit circle. Lastly, the density of elastic Herglotz functions is established, in the space of classical solutions of the spectral Navier equation.

Keywords

Two-Dimensional Linear Elasticity, Spectral Navier Equation, Elastic Wave Scattering, Scattering Problems, Elastic Herglotz Functions, Inverse Scattering Problem

Πίνακας περιεχομένων

1	Βασικές Έννοιες-Εξισώσεις της Γραμμικής Ελαστικότητας.....	3
1.1	Η φασματική εξίσωση Navier.....	3
1.2	Η θεμελιώδης λύση της φασματικής εξίσωσης Navier.....	7
1.3	Προβλήματα συννοριακών τιμών στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα	9
1.4	Ολοκληρωτικές αναπαράστασεις εσωτερικής και εξωτερικής λύσης	14
1.4.1	Ολοκληρωτική αναπαράσταση εσωτερική λύσης.....	14
1.4.2	Ολοκληρωτική αναπαράσταση εξωτερική λύσης.....	16
2	Εισαγωγή στην Θεωρία Σκέδασης Κυματικών Πεδίων.....	17
2.1	Ορισμός των προβλημάτων σκέδασης.....	17
2.2	Βασικά ευθέα προβλήματα σκέδασης	18
2.3	Πλάτη σκέδασης (μακρινό πεδίο).....	23
2.4	Δυναμικό απλού και διπλού στρώματος.....	27
2.5	Καλή τοποθέτηση προβλήματος.....	29
2.5.1	Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet	29
2.5.2	Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann.....	31
3	Τα Ιδιοδιανύσματα Navier-Ελαστικές Συναρτήσεις Herglotz.....	33
3.1	Η συνθήκη Herglotz- Ελαστική συνάρτηση Herglotz	33
3.2	Τα ιδιοδιανύσματα Navier και ιδιότητές τους	34
3.3	Βασικές ιδιότητες ελαστικών συναρτήσεων Herglotz.....	42
3.3.1	Η ασυμπτωτική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων Navier.....	42
3.3.2	Πλάτη σκέδασης	43
3.3.3	Ορισμός της Herglotz-norm.....	44
3.3.4	Αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των λύσεων Herglotz και των πλατών σκέδασής τους..	47
3.3.5	Θεώρημα αναπαράστασης	48
3.4	Πυκνότητα του συνόλου των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz	50
3.5	Εφαρμογή στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης	51

3.6 Συμπεράσματα.....	55
Βιβλιογραφία.....	57

Κατάλογος σχημάτων

- Σχήμα 1 Διαμήκη κύματα (Σελ. 7)
- Σχήμα 2 Εγκάρσια κύματα (Σελ. 7)
- Σχήμα 3 Οι μετατοπίσεις λόγω της μοναδιαίας τασικής δύναμης F (Σελ. 8)
- Σχήμα 4 Το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα (Σελ. 11)
- Σχήμα 5 Σκέδαση ελαστικού κύματος (Σελ. 20)

Συμβολισμοί

λ, μ : ελαστικές σταθερές Lamé

ρ : πυκνότητα μάζας του μέσου διάδοσης

∇ : τελεστής κλίσης

ω : κυκλική συχνότητα

c_p : φασική ταχύτητα διαμήκους κύματος

c_s : φασική ταχύτητα εγκάρσιου κύματος

Δ^* : τελεστής Kupradze

$\mathbf{u}^p(\mathbf{r})$: αστροβίλη συνιστώσα του πεδίου μετατοπίσεων (ή P-κύμα)

$\mathbf{u}^s(\mathbf{r})$: σωληνοειδής συνιστώσα του πεδίου μετατοπίσεων (ή S-κύμα)

k_p : κυματάριθμος διαμήκους κύματος

k_s : κυματάριθμος εγκάρσιου κύματος

F_j : τασική δύναμη

$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$: πίνακας Kupradze

$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$: συναρτησιακό του Dirac

$\tilde{\mathbf{I}}$: μοναδιαίος ταυτοτικός πίνακας

i : φανταστική μονάδα

$H_0^{(1)}$: συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης

J_n : συναρτήσεις Bessel n-τάξης

Y_n : συναρτήσεις Neumann n-τάξης

$T^{(n)}$: επιφανειακός τελεστής τάσεων

\hat{n} : μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα

$W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$: ενεργειακό συναρτησοειδές

\hat{d} : μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος

$\hat{\theta}_a$: διάνυσμα πόλωσης

$\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r})$: προσπίπτον κυματικό πεδίο

$\mathbf{u}^{scf}(\mathbf{r})$: σκεδασμένο κυματικό πεδίο

$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r})$: ολικό κυματικό πεδίο

$\mathbf{u}_\infty(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}})$: πλάτος σκέδασης (ή μακρινό πεδίο) των προβλημάτων σκέδασης

$S\Phi(\mathbf{r})$: δυναμικό απλού στρώματος

$D\Phi(\mathbf{r})$: δυναμικό διπλού στρώματος

$\mathbf{P}_m(\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{B}_m(\hat{\mathbf{r}})$: διανυσματικές αρμονικές

δ_{nm} : το δέλτα του Kronecker

$\Phi_m^{e,i}$: εξωτερικό- εσωτερικό ιδιοδιάνυσμα Navier του διαμήκους κυματικού πεδίου

$\Psi_m^{e,i}$: εξωτερικό- εσωτερικό ιδιοδιάνυσμα Navier του εγκάρσιου κυματικού πεδίου

$\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$: τα μοναδιαία διανύσματα στο πολικό σύστημα συντεταγμένων

$\hat{\mathbf{e}}_3$: μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της αρχής των αξόνων στο δισδιάστατο επίπεδο

$\psi_m^{e,i}(k_a r, \varphi) = Z_m^{e,i}(k_a r) e^{im\varphi}$, $a = p, s$: πολικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz

$Z_m^e(k_a r) := H_m^{(1)}(k_a r)$, $a = p, s$: συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους, m-τάξης

$Z_m^i(k_a r) := J_m(k_a r)$, $a = p, s$: οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, m-τάξης

$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}})$: διαμήκες πλάτος σκέδασης

$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})$: εγκάρσιο πλάτος σκέδασης

$\mathbf{w}^a(\mathbf{r})$, $a = p, s$: συναρτήσεις ταλάντωσης πλατών σκέδασης

1. Βασικές Έννοιες-Εξισώσεις της Γραμμικής Ελαστικότητας

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά περιγράφεται το πρόβλημα διάδοσης κύματος στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα και δίνεται η φασματική εξίσωση Navier, καθώς και η θεμελιώδης λύση της. Στην συνέχεια, ορίζεται ο επιφανειακός τελεστής τάσεων, η ομαλή εσωτερική και εξωτερική λύση της εξίσωσης και γίνεται αναφορά στα βασικότερα προβλήματα συνοριακών τιμών. Τέλος δίνονται οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των εσωτερικών και εξωτερικών λύσεων της φασματικής εξίσωσης στην γραμμική ελαστικότητα.

1.1 Η φασματική εξίσωση Navier

Θεωρούμε στο επίπεδο \mathbb{R}^2 ένα ομογενές και ισότροπο υλικό σώμα. Ομογενές χαρακτηρίζεται αυτό, που διατηρεί σταθερές τις ιδιότητές του σε όλα τα σημεία του και ισότροπο αυτό, που οι ελαστικές ιδιότητές του είναι ίδιες, ως προς οποιαδήποτε διεύθυνση. Γενικά, οι ελαστικές ιδιότητες ενός σώματος περιγράφονται από τις λεγόμενες **ελαστικές σταθερές Lamé λ και μ** και έχουν διαστάσεις πίεσης¹. Στην περίπτωση του δισδιάστατου ισοτροπικού υλικού ισχύει

$$\lambda > 0 \text{ και } \lambda + 2\mu > 0 \quad (1)$$

όπως έχει προκύψει πειραματικά. Ουσιαστικά οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τις ισχυρές συνθήκες ελλειπτικότητας για το κυματικό πρόβλημα στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα, ώστε να επιτρέπεται η διάδοση των διαμηκών και των εγκάρσιων κυμάτων, χωρίς να υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους (δηλαδή καθένα από αυτά θα κινείται με την δική του φασική ταχύτητα).

Ας θεωρήσουμε ότι στο παραπάνω υλικό διαδίδεται ελαστικό κύμα και έστω το διανυσματικό πεδίο $U(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, το οποίο προσδιορίζει για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , την μετατόπιση κάθε σημείου \mathbf{r} , σε σχέση με την αρχική του θέση.

¹ Η σταθερά μ εκφράζει ένα μέτρο της ικανότητας του υλικού σώματος να μην αλλάζει σχήμα, όταν ασκούνται σε αυτό εξωτερικές δυνάμεις. Λέγεται και μέτρο διάτμησης (shear modulus). Η σταθερά λ δεν έχει φυσική ερμηνεία, ωστόσο είναι σημαντική, διότι μετέχει στον προσδιορισμό άλλων βασικών σταθερών, όπως το μέτρο συμπίεσης (bulk modulus), ο λόγος Poisson κ.α.

Με τις παραπάνω υποθέσεις και επιπλέον αν απουσιάζουν εξωτερικές δυνάμεις, η διανυσματική εξίσωση που θα περιγράφει την συμπεριφορά του κυματικού πεδίου είναι η **δυναμική εξίσωση του Navier (Navier equation)** και έχει την μορφή [16]

$$\mu \nabla^2 U(\mathbf{r}, t) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot U(\mathbf{r}, t) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι τα ελαστικά κύματα. Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Fourier και υποθέτοντας ότι για το πεδίο U υπάρχει αρμονική χρονική εξάρτηση της μορφής

$$U(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα, η (1) μετατρέπεται στην σχέση

$$e^{-i\omega t} \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + e^{-i\omega t} (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = -e^{-i\omega t} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

και διαγράφοντας τον εκθετικό όρο, θα προκύψει

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5)$$

Διαιρώντας την παραπάνω με ρ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla (\nabla \cdot) - \Delta \quad (6)$$

έπεται

$$\mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{\mu}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

Αν τώρα ορίσουμε

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{και} \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (9)$$

τις φασικές ταχύτητες του διαμήκους και του εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα, θα πάρουμε

$$c_p^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

$$c_p^2 \Delta \mathbf{u} + c_p^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

οπότε η (5) μετατρέπεται στην **φασματική εξίσωση Navier (spectral Navier equation)**² [18], [19]

$$c_s^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (c_p^2 - c_s^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (12)$$

Μια εναλλακτική μορφή της προηγούμενης είναι η παρακάτω

$$(\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (13)$$

όπου

$$\Delta^* = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot) \quad (\text{λέγεται τελεστής Kupradze}) \quad (14)$$

Από το Θεώρημα Ανάλυσης του Helmholtz, το πεδίο $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^2$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας αστρόβιλης συνιστώσας \mathbf{u}^p και μιας σωληνοειδούς συνιστώσας \mathbf{u}^s , δηλαδή

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \quad (15)$$

και από την σχέση (12) έπεται ότι

$$\mathbf{u}^p = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}), \text{ με } \nabla \times \mathbf{u}^p = 0 \quad (16)$$

και

$$\mathbf{u}^s = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}), \text{ με } \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0 \quad [11] \quad (17)$$

Με αντικατάσταση της (15) στην (12) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (6) έπεται:

$$c_p^2 \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s)) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s)) + \omega^2 (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s) = 0 \quad (18)$$

$$c_p^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^p) + c_p^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^s) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^p) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^s) + \omega^2 (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s) = 0 \quad (19)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (16), (17) θα πάρουμε

$$c_p^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^p) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^s) + \omega^2 (\mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s) = 0 \quad (20)$$

² Εφαρμόζοντας την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών (η οποία λέγεται και φασματική μέθοδος) για την (1), θα προκύψει η εξίσωση (4). Ζητώντας τιμές της παραμέτρου ω της εξίσωσης αυτής, που να οδηγούν σε μη μηδενικές λύσεις, θα πάρουμε ένα σύνολο τιμών του ω , που λέγεται φάσμα, απ' όπου προέρχεται και ο χαρακτηρισμός <<φασματική εξίσωση>> Navier.

$$c_p^2 \left(\nabla (\nabla \cdot) + \frac{\omega^2}{c_p^2} \right) \mathbf{u}^p + c_s^2 \left(\nabla \times (\nabla \times) + \frac{\omega^2}{c_s^2} \right) \mathbf{u}^s = 0 \quad (21)$$

και αν

$$k_p = \frac{\omega}{c_p}, \quad k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (22)$$

η σχέση (21) θα πάρει την μορφή

$$c_p^2 (\Delta + k_p^2) \mathbf{u}^p + c_s^2 (\Delta + k_s^2) \mathbf{u}^s = 0 \quad (23)$$

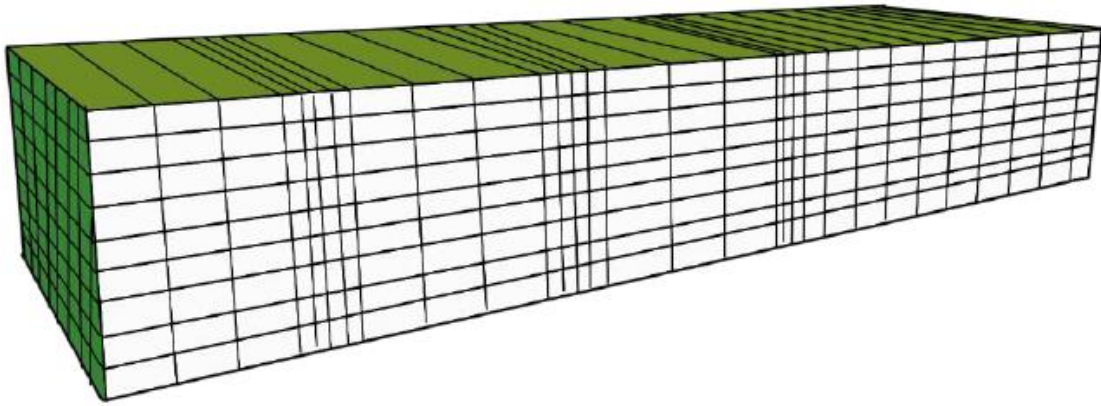
Είναι φανερό ότι για να ισχύει η προηγούμενη, θα πρέπει

$$(\Delta + k_p^2) \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{και} \quad (\Delta + k_s^2) \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) = 0 \quad (24)$$

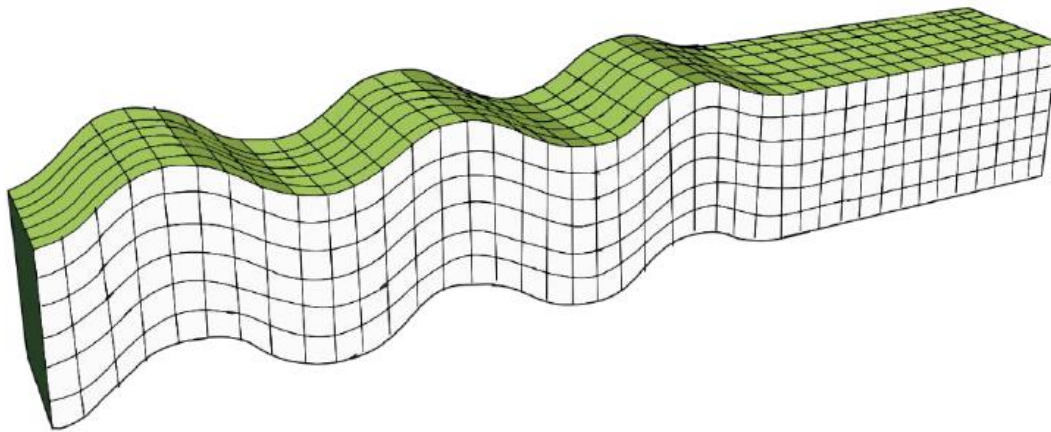
Οι παραπάνω σχέσεις λέγονται **διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz**.

Ανακεφαλαιώνοντας και με βάση την (24) μπορούμε, να πούμε τα εξής:

- στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα και δια μέσου ομογενούς και ισότροπου υλικού διαδίδονται δύο είδη κυμάτων, ταυτόχρονα και ανεξάρτητα μεταξύ τους: τα διαμήκη κύματα (longitudinal) u^p , που καλούνται επίσης και P-κύματα ή αστρόβιλα (irrotational) και τα εγκάρσια κύματα (transverse) u^s , που είναι γνωστά και ως S-κύματα ή σωληνοειδή (solenoid)
- οι συνιστώσες $\mathbf{u}^p, \mathbf{u}^s$ ικανοποιούν την διανυσματική εξίσωση Helmholtz
- οι φασικές ταχύτητες των παραπάνω κυμάτων συνδέονται με τους αντίστοιχους κυματάριθμους (ή κυματικούς αριθμούς) c_p, c_s με την σχέση $\omega = k_p c_p = k_s c_s$. Επίσης, από την σχέση (9) προκύπτει $c_s < c_p$, δηλαδή τα εγκάρσια κύματα διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα, σε σύγκριση με τα διαμήκη



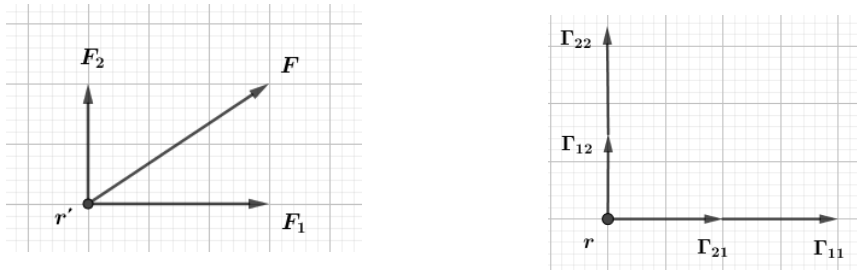
Σχήμα 1: Διαμήκη κύματα



Σχήμα 2: Εγκάρσια κύματα

1.2 Η θεμελιώδης λύση της φασματικής εξίσωσης Navier

Έστω Ox_1x_2 ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και μια μοναδιαία δύναμη τάσης \mathbf{F} (αίτιο), που ασκείται στο σημείο \mathbf{r}' του ελαστικού μέσου. Η \mathbf{F} αναλύεται σε 2 συνιστώσες \mathbf{F}_j , $j=1,2$, παράλληλες προς τους άξονες Ox_1 , Ox_2 αντίστοιχα. Οι συνιστώσες αυτές προκαλούν μετατόπιση $\mathbf{\Gamma}_j$, $j=1,2$ σε ένα άλλο σημείο \mathbf{r} του μέσου, που επίσης μπορεί να αναλυθεί σε 2 συνιστώσες $\mathbf{\Gamma}_{1j}, \mathbf{\Gamma}_{2j}$, κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_1, Ox_2 (η $\mathbf{\Gamma}_{ij}$ είναι η \mathbf{i} -συνιστώσα της μετατόπισης επί του σημείου \mathbf{r} , με συνιστώσα στην \mathbf{j} διεύθυνση του παραπάνω συστήματος συντεταγμένων)



Σχήμα 3: Οι μετατοπίσεις λόγω της μοναδιαίας τασικής δύναμης \mathbf{F}

Έτσι θα έχουμε συνολικά τέσσερις μετατοπίσεις, οι οποίες μπορούν να σχηματίσουν ένα 2×2 πίνακα $[\Gamma_{ij}]_{i,j=1,2}$, που ονομάζεται **πίνακας Kupradze** και στην βιβλιογραφία συναντάται και ως $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Επομένως, αν λάβουμε υπόψη τα P και S κύματα θα ισχύει

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [\Gamma_{ij}]_{i,j=1,2} = \tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (25)$$

Ο πίνακας Kupradze είναι συμμετρικός, ικανοποιεί την αρχή της αμοιβαιότητας και αποτελεί την θεμελιώδη λύση της φασματικής εξίσωσης Navier (13), ικανοποιεί δηλαδή την εξίσωση

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\tilde{\mathbf{I}}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (26)$$

όπου $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ είναι το συναρτησιακό του Dirac και $\tilde{\mathbf{I}}$ ο μοναδιαίος ταυτοτικός πίνακας.

Η θεμελιώδης λύση της τελευταίας για την περίπτωση της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας, η οποία θα προκύψει αν χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες, δίνεται από τον τύπο [23]

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} \tilde{\mathbf{I}} H_0^{(1)}(k_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - \frac{1}{\rho\omega^2} \nabla_r \nabla_r [H_0^{(1)}(k_p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - H_0^{(1)}(k_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)] \right\} \quad (27)$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων Bessel J_n n-τάξης και των συναρτήσεων Neumann Y_n n-τάξης, δηλαδή $H_0^{(1)} := J_n + Y_n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.3 Προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα

Προτού γίνει αναφορά στα βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας, θα δοθούν κάποιοι απαραίτητοι ορισμοί, που θα βοηθήσουν στην περιγραφή αυτών.

Έστω D ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , το οποίο θα ονομάζεται **θεμελιώδες πεδίο**.

Ορισμός 1.3.1: Το θεμελιώδες πεδίο θα λέγεται **εσωτερικό**, αν επιπλέον είναι και φραγμένο και τότε θα συμβολίζεται ως D_i . Αντίθετα, το θεμελιώδες πεδίο θα λέγεται **εξωτερικό**, αν το συμπλήρωμα του $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_i}$, όπου $\overline{D_i} = D_i \cup \partial D$, είναι φραγμένο. Στην περίπτωση αυτή θα συμβολίζεται ως D_e . Το σύνορο ∂D του πεδίου πρέπει να είναι λείο³ και να αποτελεί μια επιφάνεια Lyapunov [14].

Ορισμός 1.3.2: Μια επιφάνεια θα καλείται **επιφάνεια Lyapunov**, όταν ορίζεται ως μια λεία επιφάνεια του επιπέδου \mathbb{R}^2 και επιπλέον ικανοποιεί τα εξής χαρακτηριστικά:

- ✚ είναι πεπερασμένη και κλειστή
- ✚ σε κάθε σημείο της μπορούμε να βρούμε μοναδικό εφαπτόμενο επίπεδο
- ✚ για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της \mathbf{r}, \mathbf{r}' υπάρχουν σταθεροί αριθμοί c, δ , ώστε να ισχύει $\theta < c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\delta$, $0 < \delta \leq 1$, όπου θ είναι η γωνία, που σχηματίζουν οι κάθετες που φέρουμε στα σημεία αυτά, πάνω στην επιφάνεια
- ✚ για κάθε σημείο \mathbf{r} , υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε οποιαδήποτε παράλληλη ευθεία προς την κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο \mathbf{r}
 - i. να τέμνει το πολύ σε ένα σημείο, το τμήμα της επιφάνειας που περιέχει το \mathbf{r}
 - ii. να περιέχεται στον κύλινδρο με ακτίνα ε και άξονα την κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο της \mathbf{r}

³ Δεν έχει πυκνές πτυχώσεις και επομένως το κύμα δεν βρίσκει σημαντικό εμπόδιο κατά την κίνησή του, εντός του χώρου διάδοσης του

Ορισμός 1.3.3: *Εσωτερική ομαλή λύση της φασματικής εξίσωσης Navier θα λέγεται κάθε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} , ορισμένη στο εσωτερικό πεδίο D_i , που είναι $C^2(D_i) \cap C^1(\overline{D_i})$ και ικανοποιεί σημειακά την εξίσωση (13).*

Στο σημείο αυτό θα γίνει αναφορά στις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze (αντίστοιχες των συνθηκών ακτινοβολίας του Sommerfeld για την ακουστική), οι οποίες περιγράφουν την συμπεριφορά του σκεδασμένου κυματικού πεδίου και συγκεκριμένα εξασφαλίζουν την διάδοση του κύματος από τον σκεδαστή (λειτουργεί ως πηγή) και την ασυμπτωτική εξασθένισή του μακριά από αυτόν, προς το άπειρο.

Αναλυτικότερα για την περίπτωση της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας, οι συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze δίνονται από τα όρια [13]

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_p \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0 \quad (28)$$

και

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^s(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_s \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0 \quad (29)$$

όπου $\mathbf{u}^p, \mathbf{u}^s$ η αστρόβιλη και η σωληνοειδής συνιστώσα του σκεδασμένου πεδίου αντίστοιχα. Τα παραπάνω όρια λαμβάνονται ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις του δισδιάστατου επιπέδου \mathbb{R}^2 .

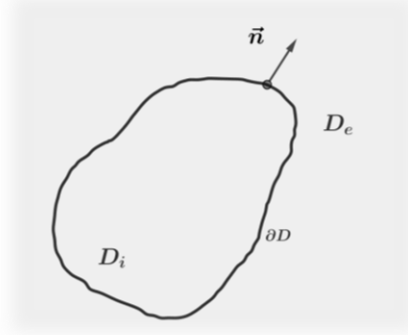
Ορισμός 1.3.4: *Εξωτερική ομαλή λύση της φασματικής εξίσωσης Navier θα λέγεται κάθε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} , ορισμένη στο εξωτερικό πεδίο D_e , που είναι $C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D_e})$, ικανοποιεί σημειακά την εξίσωση (13) και επιπλέον ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας (28) και (29).*

Ορισμός 1.3.5: *Ο επιφανειακός τελεστής τάσεων συμβολίζεται με $T_{e,i}^{(\hat{n})}$ και ορίζεται από την σχέση*

$$T_{e,i}^{(\hat{n})} = 2\mu_{e,i} \hat{\mathbf{n}}_r \cdot \nabla + \lambda_{e,i} \hat{\mathbf{n}}_r \nabla \cdot + \mu_{e,i} \hat{\mathbf{n}}_r \times \nabla \times \quad (30)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}_r$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα, κάθετο σε μια στοιχειώδη επιφάνεια του

συνόρου, στο σημείο του \mathbf{r} και οι δείκτες \mathbf{e}, i παριστάνουν το εξωτερικό και το εσωτερικό πεδίο αντίστοιχα.



Σχήμα 4: το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$,

Ο επιφανειακός τελεστής τάσεων είναι γραμμικός τελεστής και εξαρτάται από το υλικό του μέσου διάδοσης, δεδομένου ότι εκφράζεται συναρτήσει των σταθερών Lamé λ, μ . Επίσης συνδέεται με τον τελεστή Kupradze Δ^* μέσω των τύπων του Betti [15] (είναι ανάλογοι των τύπων του Green στην ακουστική θεωρία), που θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια και είναι οι εξής:

$$\int_{D_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{v} \, ds - \int_{D_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \, dv \quad (31)$$

$$\int_{D_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial D} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{u} \, ds - \int_{D_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \, dv \quad (32)$$

$$\int_{D_i} (\mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \Delta^* \mathbf{u}) \, dv = \int_{\partial D} (\mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot T^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{u}) \, ds \quad (33)$$

όπου το $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ είναι ένα ενεργειακό συναρτησοειδές, ορίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & (2\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \frac{\partial v_1}{\partial r_1} + \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \frac{\partial v_2}{\partial r_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial v_1}{\partial r_2} + \frac{\partial u_2}{\partial r_1} \frac{\partial v_2}{\partial r_1} \right) \\ & + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \frac{\partial v_2}{\partial r_2} + \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \frac{\partial v_1}{\partial r_1} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial v_2}{\partial r_1} + \frac{\partial u_2}{\partial r_1} \frac{\partial v_1}{\partial r_2} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

με $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ διανυσματικά πεδία στον \mathbb{R}^2 . Το συναρτησοειδές $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

παριστάνει την δυναμική ενέργεια, που παράγεται από την εφαρμοζόμενη τασική δύναμη για τα σημεία \mathbf{r}, \mathbf{r}' .

Παρακάτω ακολουθεί αναφορά στα βασικότερα εσωτερικά και εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών, που συναντάμε στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα και έχουν να κάνουν με την φασματική εξίσωση Navier:

i) Εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Ζητάμε να βρεθεί μια εσωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης (13), για την οποία να ισχύει

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho\omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, & \text{στο } D_i \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{f} & , \text{ στο } \partial D \end{cases} \quad (35)$$

όπου $\mathbf{f} \in C^1(\partial D)$ είναι γνωστή συνάρτηση.

ii) Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Ζητάμε να βρεθεί μια εξωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης (13), για την οποία να ισχύει

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho\omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, & \text{στο } D_i \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{f} & , \text{ στο } \partial D \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - \iota k_\alpha \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0, \quad \alpha = p, s \end{cases} \quad (36)$$

όπου $\mathbf{f} \in C^1(\partial D)$ είναι γνωστή συνάρτηση.

iii) Εσωτερικό πρόβλημα Neumann

Ζητάμε να βρεθεί μια εσωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης (13), για την οποία να ισχύει

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho\omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, & \text{στο } D_i \\ \mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{g} & , \text{ στο } \partial D \end{cases} \quad (37)$$

όπου $\mathbf{g} \in C^1(\partial D)$ είναι γνωστή συνάρτηση και \mathbf{T} ο επιφανειακός τελεστής τάσης.

iv) Εξωτερικό πρόβλημα Neumann

Ζητάμε να βρεθεί μια εξωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης (13), για την οποία να ισχύει

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } D_i \\ \mathbf{T}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}, \text{ στο } \partial D \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_\alpha \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0, \alpha = p, s \end{cases} \quad (38)$$

όπου $\mathbf{g} \in C^1(\partial D)$ είναι γνωστή συνάρτηση και \mathbf{T} ο επιφανειακός τελεστής τάσης.

v) Εσωτερικό πρόβλημα Robin

Ζητάμε να βρεθεί μια εσωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης (13), για την οποία να ισχύει

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } D_i \\ (\mathbf{T} + i\omega \mathbf{c}) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}, \text{ στο } \partial D \end{cases} \quad (39)$$

όπου $\mathbf{h} \in C^1(\partial D)$ είναι γνωστή συνάρτηση, η παράμετρος \mathbf{c} είναι συνάρτηση στο σύνορο ∂D και \mathbf{T} ο επιφανειακός τελεστής τάσης.

vi) Εξωτερικό πρόβλημα Robin

Ζητάμε να βρεθεί μια εξωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} της φασματικής εξίσωσης (13), για την οποία να ισχύει

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } D_i \\ (\mathbf{T} + i\omega \mathbf{c}) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}, \text{ στο } \partial D \\ \lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{|\mathbf{r}|} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r})}{\partial |\mathbf{r}|} - ik_\alpha \mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r}) \right] \right\} = 0, \alpha = p, s \end{cases} \quad (40)$$

όπου $\mathbf{h} \in C^1(\partial D)$ είναι γνωστή συνάρτηση, η παράμετρος \mathbf{c} είναι συνάρτηση στο σύνορο ∂D και \mathbf{T} ο επιφανειακός τελεστής τάσης.

vii) Διαπερατό σώμα

Ζητάμε να βρεθούν δύο διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$, που εκφράζουν το ολικό εξωτερικό και εσωτερικό πεδίο αντίστοιχα και για αυτές θα ισχύουν

$$\begin{cases} (\Delta_e^* + \rho_e \omega^2) \mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_e \\ (\Delta_i^* + \rho_i \omega^2) \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in D_i \\ \mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \text{ στο } \partial D \\ T_e \mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = T_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \text{ στο } \partial D \end{cases} \quad (41)$$

όπου T είναι ο επιφανειακός τελεστής (οι δείκτες e, i δηλώνουν τον ορισμό του τελεστή στο εξωτερικό και στο εσωτερικό πεδίο αντίστοιχα).

Σχετικά με την μοναδικότητα της λύσης των παραπάνω προβλημάτων, ο Kupradze [15] αναφέρει ότι τα εξωτερικά προβλήματα έχουν πάντοτε μοναδική λύση, ανεξάρτητα από τις τιμές του ω^2 , ενώ τα εσωτερικά προβλήματα έχουν μοναδική λύση, μόνο όταν το ω^2 δεν ανήκει στο φάσμα των ιδιοτιμών του ομογενούς προβλήματος.

1.4 Ολοκληρωτική Αναπαράσταση εσωτερικής και εξωτερικής λύσης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις της εσωτερικής και εξωτερικής λύσης της φασματικής εξίσωσης Navier, οι οποίες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην μελέτη των προβλημάτων σκέδασης, διότι ενσωματώνουν και τις συνοριακές συνθήκες.

1.4.1 Ολοκληρωτική αναπαράσταση εσωτερικής λύσης

Θεώρημα 1.4.A:

Η εσωτερική ομαλή λύση της φασματικής εξίσωσης δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \left[\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot T^{(r')} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - T^{(r')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \right] ds(\mathbf{r}'), \mathbf{r} \in D_i \quad (42)$$

Απόδειξη:

Ξεκινώντας από τον τρίτο τύπο του Betti (33) και αν θέσουμε $\mathbf{u} = \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ και $\mathbf{v} = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}')$ έπεται

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \left(\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \Delta^* \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot \Delta^* \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) dV \\ = \int_{\partial D} \left(\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) ds \end{aligned} \quad (43)$$

Η συνάρτηση $\mathbf{u}_i(\mathbf{r}')$ ικανοποιεί την φασματική εξίσωση Navier (13), δηλαδή ισχύει

$$\Delta^* \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') + \rho \omega^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') = 0 \quad (44)$$

και ο πίνακας του Kupradze $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ είναι η θεμελιώδης λύση της φασματικής εξίσωσης Navier (26), δηλαδή ισχύει

$$\Delta^* \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \rho \omega^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\tilde{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (45)$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις δύο προηγούμενες στην (43) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \int_{D_i} \left(-\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \rho \omega^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') + \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot \rho \omega^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot \tilde{\mathbf{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) dV \\ = \int_{\partial D} \left(\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) ds \end{aligned} \quad (46)$$

$$\tilde{\mathbf{I}} \cdot \int_{D_i} \left(\mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) dV = \int_{\partial D} \left(\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) ds \quad (47)$$

και από τον ορισμό του συναρτησιακού του Dirac

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \left(\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') - \mathbf{u}_i(\mathbf{r}') \cdot T^{(\hat{n})} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) ds \quad (48)$$

Προφανώς, η παραπάνω λύση θα μηδενίζεται στο εξωτερικό χωρίο. \square

1.4.2 Ολοκληρωτική αναπαράσταση εξωτερικής λύσης

Θεώρημα 1.4.B:

Η εξωτερική ομαλή λύση της φασματικής εξίσωσης δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = - \int_{\partial D} \left(\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \cdot \mathcal{T}^{(\hat{n})} \mathbf{u}_e(\mathbf{r}') - \mathbf{u}_e(\mathbf{r}') \cdot \mathcal{T}^{(\hat{n})} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) ds, \mathbf{r} \in D_e \quad (49)$$

Η απόδειξη της τελευταίας σχέσης γίνεται όπως και για την εσωτερική λύση, ακολουθώντας παρόμοια βήματα [15].

Προφανώς, η παραπάνω λύση θα μηδενίζεται στο εσωτερικό χωρίο.

2. Εισαγωγή στη Θεωρία Σκέδασης Κυματικών Πεδίων

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά γίνεται μια σύντομη περιγραφή των κυματικών προβλημάτων και ακολουθεί ιδιαίτερη αναφορά στα προβλήματα σκέδασης. Στην συνέχεια ορίζονται τα βασικότερα ευθέα προβλήματα σκέδασης και συγκεκριμένα οι περιπτώσεις του σκληρού σκεδαστή (rigid body), της κοιλότητας (cavity), του διαπερατού σώματος ή μετάδοσης (transmission problem) και το πρόβλημα της εμπέδησης (impedence problem). Επίσης ορίζονται τα πλάτη σκέδασης για τα παραπάνω προβλήματα, με την βοήθεια της ασυμπτωτικής μορφής της εξωτερικής λύσης και δίνονται οι έννοιες του δυναμικού απλού και διπλού στρώματος, που είναι ολοκληρωτικές εξισώσεις επί του συνόρου. Πλέον το σκεδασμένο πεδίο θα μπορεί να γράφεται ως συνδυασμός των παραπάνω δυναμικών. Τέλος αποδεικνύεται η καλή τοποθέτηση των προβλημάτων σκέδασης

2.1 Ορισμός των προβλημάτων σκέδασης

Τα κυματικά προβλήματα, που συναντώνται στις περιοχές της ακουστικής, του ηλεκτρομαγνητισμού, της ελαστικότητας, της θερμοελαστικότητας κ.α., χωρίζονται σε τρεις μεγάλης κατηγορίες: τα προβλήματα διάδοσης, τα προβλήματα ακτινοβολίας και τα προβλήματα σκέδασης.

Τα προβλήματα διάδοσης μελετούν τα διάφορα είδη κυμάτων και πώς αυτά συμπεριφέρονται εντός του χώρου διάδοσής τους, ανάλογα με την γεωμετρία και τις φυσικές ιδιότητες του μέσου. Αξίζει να σημειωθεί ότι στα προβλήματα αυτά, η πηγή των κυμάτων δεν βρίσκεται εντός του μέσου, άρα δεν επηρεάζει το κυματικό πεδίο.

Αντίθετα, στα προβλήματα ακτινοβολίας, η πηγή των κυμάτων βρίσκεται εντός του χώρου διάδοσης και ζητούμενο αποτελεί η συμπεριφορά και ο τρόπος με τον οποίο διαδίδεται το κύμα, ανάλογα με τις γεωμετρικές και φυσικές ιδιότητες του χώρου, αλλά και την πηγή, που το παράγει κάθε φορά.

Τα προβλήματα σκέδασης αποτελούν την πιο σύνθετη κατηγορία κυματικών προβλημάτων

και προκύπτουν όταν μέσα στον χώρο διάδοσης του κύματος βρίσκεται τοποθετημένος ένας σκεδαστής (εμπόδιο), που μπορεί να αφορά χωρική ανομοιογένεια ή αλλαγή των φυσικών ιδιοτήτων του μέσου. Εξαιτίας αυτού, το αρχικό κύμα (ονομάζεται **προσπίπτον κύμα**) ανακλάται στον σκεδαστή (που παίρνει τον ρόλο της πηγής κύματος) και έτσι δημιουργείται ένα δευτερογενές κύμα (ονομάζεται **σκεδασμένο κύμα ή πεδίο**). Είναι φανερό ότι, ενώ το αρχικό κύμα φέρει πληροφορία μόνο για την πηγή διάδοσης του, στην συνέχεια το σκεδασμένο κύμα φέρει πληροφορία για την γεωμετρία και τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή.

Τα συγκεκριμένα προβλήματα χωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες, τα ευθέα και τα αντίστροφα. Στα ευθέα προβλήματα, γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα και τον σκεδαστή και ζητείται να προσδιοριστεί το σκεδασμένο πεδίο. Στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης, που γενικά λύνονται δυσκολότερα από τα ευθέα, γνωρίζουμε τόσο το προσπίπτον κύμα, όσο και το σκεδασμένο και ζητείται να προσδιοριστούν το γεωμετρικό σχήμα και τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή.

Με τα προβλήματα σκέδασης έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές, από τις αρχές της δεκαετίας του 1960. Ωστόσο καθοριστική συμβολή στην διατύπωση, στην καλή τοποθέτηση και στην επίλυση τους είχε ο V.D.Kupradze [16], [14], [15], του οποίου οι εργασίες αποτέλεσαν βάση, για μεταγενέστερες έρευνες. Ενδεικτικά τέτοιες είναι των Barratt και Collins [4], του Lawrence [17], του Banauch [3], των Wheller και Sternberg [26], των Pao και Varatharajulu [22], του Twersky [24], [25], των Δάσιου και Ρίγου [8] κ.α.

2.2 Βασικά ευθέα προβλήματα σκέδασης

Ας επανέλθουμε στο πρόβλημα, που περιεγράφηκε στην ενότητα 1.1, για το οποίο είχαμε αναφέρει εν συντομία τα εξής: στο δισδιάστατο επίπεδο θεωρούμε ομογενές και ισότροπο υλικό σώμα με πυκνότητα ρ_i , για το οποίο οι ελαστικές ιδιότητες του λ_i, μ_i παραμένουν αμετάβλητες. Οι συνθήκες ελλειπτικότητας στο εσωτερικό του μέσου $\mu_i > 0, \lambda_i + 2\mu_i > 0$, επιτρέπουν στα προσπίπτοντα ελαστικά κύματα, διαμήκη και εγκάρσια, να κινούνται χωρίς να υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους (δηλαδή με διαφορετική φασική ταχύτητα). Ας υποθέσουμε τώρα, ότι εντός του μέσου τοποθετείται σκεδαστής, ο οποίος έχει διαφορετικές σταθερές Lamé από το υλικό μέσο, έστω λ_e, μ_e και διαφορετική πυκνότητα, έστω ρ_e .

Ο σκεδαστής παριστάνεται από ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο D_i , που έχει λείο και φραγμένο σύνορο ∂D και αποτελεί επιφάνεια Lyapunov. Έστω επίσης D_e το συμπλήρωμα του $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_i}$, όπου $\overline{D_i} = D_i \cup \partial D$. Οι συνθήκες $\mu_e > 0$, $\lambda_e + 2\mu_e > 0$, που ισχύουν για το εξωτερικό πεδίο, επιτρέπουν και εδώ την ανεξάρτητη διάδοση διαμηκών και εγκάρσιων κυμάτων.

Η παρουσία του συνόρου έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία σκεδασμένου πεδίου, που αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικός συνδυασμός εγκάρσιου και διαμήκους κύματος, ανεξάρτητα από το είδος του αρχικού πεδίου [23]. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ανάλυσης του Helmholtz για το πεδίο μετατοπίσεων $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, θα πάρουμε

$$(\Delta_l^* + \rho_l \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \text{ όπου } l = e, i \quad (50)$$

όπου Δ^* ο τελεστής Kupradze και δίνεται από την σχέση (14).

Ας υποθέσουμε ότι το προσπίπτον κύμα είναι ένα επίπεδο κύμα, το οποίο θα έχει την μορφή είτε διαμήκους P-κύματος, είτε εγκάρσιου S-κύματος. Στην πρώτη περίπτωση, το προσπίπτον κυματικό πεδίο θα είναι της μορφής

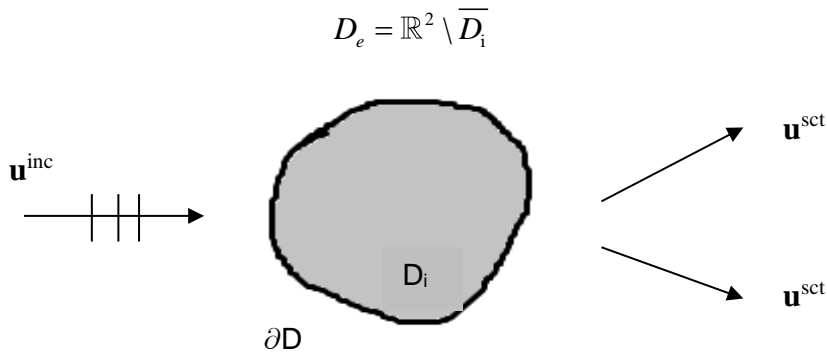
$$\mathbf{u}^{inc,p}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{d}} e^{ik_e^p \cdot \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in D_e \quad (51)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}} = (\cos \theta, \sin \theta)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος και $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Στην δεύτερη περίπτωση, το προσπίπτον κυματικό πεδίο θα είναι της μορφής

$$\mathbf{u}^{inc,s}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_d e^{ik_e^s \cdot \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in D_e \quad (52)$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$ είναι το διάνυσμα πόλωσης και είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος, δηλαδή ισχύει $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$. Κατά την πρόσπτωση του αρχικού κύματος στον σκεδαστή δημιουργείται ένα νέο κυματικό πεδίο, το σκεδασμένο. Η υπέρθεση του προσπίπτοντος κυματικού πεδίου $\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r})$ και του σκεδασμένου $\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})$ θα δώσει το ολικό πεδίο μετατοπίσεων $\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r})$, δηλαδή

$$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_e^{sct}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D_e \quad (53)$$



Σχήμα 5: Σκέδαση ελαστικού κύματος

Ο ορισμός των ευθέων προβλημάτων σκέδασης γίνεται με την βοήθεια των εξωτερικών προβλημάτων συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) για την ελλειπτικού τύπου εξίσωση του Helmholtz, που παρουσιάστηκαν στο πρώτο κεφάλαιο. Για τον σκοπό αυτό θα πρέπει να καθοριστούν οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο του σκεδαστή, υποθέτοντας ότι σκεδαστής και υλικό μέσο έχουν τέλεια επαφή (firm or welded contact).

Τα βασικότερα ευθέα προβλήματα σκέδασης περιγράφουν την **σκέδαση σε σκληρό σκεδαστή** (rigid body), την **σκέδαση από κοιλότητα** (cavity), το **πρόβλημα διαπερατού σώματος** ή πρόβλημα της μετάδοσης (transmission problem) και το **πρόβλημα εμπέδησης** (impedence problem).

- i) Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν μετατοπίσεις κατά την πρόσπτωση του κύματος πάνω στην επιφάνεια του σκεδαστή, αυτός θα χαρακτηρίζεται ως σκληρός σκεδαστής. Τότε λόγω της συνέχειας του πεδίου μετατοπίσεων επί του συνόρου του σκεδαστή, έπεται ότι το ολικό πεδίο μετατοπίσεων στο σύνορο θα είναι ίσο με μηδέν

$$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (54)$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κυματικό πεδίο εντός του σκεδαστή. Επομένως το πρόβλημα του σκληρού σκεδαστή μπορεί συνολικά να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D_e})$, η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } D_e \\ \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } \partial D \\ \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) & \text{στο } \mathbb{R}^2 \setminus D_i \\ \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_p^{sct}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_s^{sct}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (55)$$

- ii) Το πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα είναι εντελώς διαφορετικό σε σχέση με τον σκληρό σκεδαστή, αφού στην συγκεκριμένη περίπτωση δημιουργείται παραμόρφωση, κατά τέτοιο τρόπο όμως που οι τάσεις επί του συνόρου να είναι μηδέν. Έτσι λόγω της συνέχειας στο σύνορο, θα πρέπει το συνολικό τασικό πεδίο, που οφείλεται στο προσπίπτον και στο σκεδασμένο πεδίο να μηδενίζεται, δηλαδή

$$\mathbf{T}_e^{(r)} \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (56)$$

Είναι προφανές ότι και στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κυματικό πεδίο εντός του σκεδαστή. Επομένως το πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα μπορεί συνολικά να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D_e})$, η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } D_e \\ \mathbf{T}_e^{(r)} \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } \partial D \\ \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) & \text{στο } \mathbb{R}^2 \setminus D_i \\ \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_p^{sct}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_s^{sct}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (57)$$

- iii) Στην περίπτωση του διαπερατού σκεδαστή έχουμε διάδοση του κυματικού πεδίου και στο εσωτερικό του, η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι ο σκεδαστής έχει διαφορετικές σταθερές Lamé, σε σχέση με αυτές του χώρου κυματικής διάδοσης. Λόγω της συνέχειας του πεδίου μετατοπίσεων και του τασικού πεδίου πάνω στο σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες, που πρέπει να ικανοποιούνται είναι:

$$\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (58)$$

$$\mathbf{T}_e \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (59)$$

Επομένως το πρόβλημα σκέδασης με διαπερατό σκεδαστή μπορεί συνολικά να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D_e})$, η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } D_e \\ (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } D_i \\ \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}) & \text{στο } \mathbf{r} \in \partial D \\ T_e \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = T_i \mathbf{u}_i^{tot}(\mathbf{r}) & \text{στο } \mathbf{r} \in \partial D \\ \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) & \text{στο } \mathbb{R}^2 \setminus D_i \\ \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_p^{sct}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_s^{sct}(\mathbf{r}) & \end{cases} \quad (60)$$

- iv) Αν ο σκεδαστής είναι μη διαπερατός και επικαλυμμένος, τότε μπορεί να παρασταθεί από σκεδαστή, του οποίου στο σύνορο ισχύει μια συνοριακή συνθήκη εμπέδησης, τύπου Robin:

$$T \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (61)$$

Επομένως το πρόβλημα σκέδασης στην περίπτωση αυτή μπορεί συνολικά να διατυπωθεί ως εξής:

Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(D_e) \cap C^1(\overline{D_e})$, η οποία να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{cases} (\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } D_e \\ T \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} & \text{στο } \partial D \\ \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) & \text{στο } \mathbb{R}^2 \setminus D_i \\ \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_p^{sct}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_s^{sct}(\mathbf{r}) & \end{cases} \quad (62)$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει κυματικό πεδίο εντός του σκεδαστή.

- v) Τέλος υπάρχουν και τα μεικτά προβλήματα συνοριακών τιμών, που όμως δεν θα αποτελέσουν αντικείμενο μελέτης στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Επιπλέον, η καλή τοποθέτηση των ΠΣΤ απαιτεί να οριστούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και στην περιοχή του 'απειρού', που όπως αναφέρθηκε ονομάζεται μακρινό πεδίο ή περιοχή

ακτινοβολίας. Οι συνθήκες αυτές είναι γνωστές ως συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze, δίνονται από τις σχέσεις (28) και (29) και ισχύουν τόσο για το εγκάρσιο, όσο και για το διαμήκες μέρος του σκεδασμένου πεδίου. Ζητούμενο είναι να εξασφαλιστεί η ασυμπτωτική εξασθένιση του σκεδασμένου κύματος, καθώς αυξάνεται η απόσταση του από τον σκεδαστή και μάλιστα προς όλες τις διευθύνσεις. Επίσης, η καλή τοποθέτηση εξασφαλίζεται και από το γεγονός ότι το σύνορο του σκεδαστή είναι επιφάνεια Lyapunov, δηλαδή μια λεία επιφάνεια, η οποία δεν εμποδίζει την διάδοση του σκεδασμένου κύματος, αμέσως μετά την πρόσπτωση του αρχικού κύματος στον σκεδαστή.

2.3 Πλάτος σκέδασης (Μακρινό πεδίο)

Για να προσδιοριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου για την εξωτερική λύση \mathbf{u} που δίνεται από την σχέση (49), θα πρέπει πρώτα να προσδιοριστούν οι ασυμπτωτικές σχέσεις για την θεμελιώδη λύση $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ της εξίσωσης Navier και συγκεκριμένα για τις συνιστώσες $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, καθώς και για τον τανυστή $T^{(r)}\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ (το πρώτο όρισμα αναφέρεται στο διάνυσμα στο σημείο παρατήρησης και το δεύτερο όρισμα στο διάνυσμα στο σημείο της πηγής).

Αν χρησιμοποιηθούν τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των συναρτήσεων Hankel $H_{(0)}^{(1)}$, τότε θα πάρουμε τις σχέσεις [23], [12]

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}' \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (63)$$

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}') \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (64)$$

όπου $\tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι το ταυτοτικό δυαδικό. Ο δυαδικός πίνακας $\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}$ εκφράζει την ακτινική συμπεριφορά του διαμήκους τμήματος $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ της θεμελιώδους λύσης, ενώ ο πίνακας $\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}$ δηλώνει τον εφαπτομενικό χαρακτήρα του εγκάρσιου τμήματος $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ της θεμελιώδους λύσης, μακριά από τον σκεδαστή.

Τώρα, όσον αφορά τον προσδιορισμό των ασυμπτωτικών σχέσεων του τελεστή επιφανειακής τάσης $T^{(r)}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, θα πρέπει αρχικά να υπολογιστούν οι ασυμπτωτικές μορφές των $\nabla_{\mathbf{r}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot (\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$ και $\nabla_{\mathbf{r}'} \times (\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$. Κάνοντας πράξεις, προκύπτει

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{-ik_p r}}{\sqrt{r}} - \\ &\quad \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{-ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (65)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\hat{\mathbf{r}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} \frac{e^{-ik_p r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (66)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} \frac{e^{-ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (67)$$

Με βάση τα παραπάνω και από την σχέση (25), η ασυμπτωτική μορφή του τελεστή επιφανειακής τάσης θα δίνεται από:

$$\begin{aligned} T^{(r)}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= 2\mu\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \lambda\hat{\boldsymbol{\eta}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &\quad + \mu\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &= -\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot (\lambda\tilde{\mathbf{I}} + 2\mu\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \otimes \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} ik_p e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} \\ &\quad - \mu \left[2(\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}' \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} ik_s e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'} \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (68)$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας από αριστερά συστολή για τον τελεστή της επιφανειακής τάσης με το ολικό πεδίο μετατοπίσεων $\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r})$, επί του συνόρου ∂D θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}') \cdot T^{(r')} \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= k_p (\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}}') : \left(\frac{\lambda \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}}{4\mu} \right) \\
&e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} H_0^{(1)}(k_p r) \hat{\mathbf{r}} \\
&+ k_s [2(\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}') \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}}') : (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
&+ (\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}') \times \hat{\boldsymbol{\eta}}') \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] \\
&e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}} H_0^{(1)}(k_s r) \hat{\boldsymbol{\theta}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (69)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τους τύπους (63), (64) και (69) στον τύπο (49) της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της εξωτερικής λύσης και κάνοντας πράξεις, προκύπτει η ασυμπτωτική μορφή του σκεδασμένου πεδίου

$$\mathbf{u}^{scat}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = \mathbf{u}_\infty^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + \mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}) \quad (70)$$

για $r \rightarrow \infty$, όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο, που γίνεται η παρατήρηση του πεδίου, $\hat{\mathbf{d}}$ το διάνυσμα διάδοσης και $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{d}}$ ή $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$ το διάνυσμα πόλωσης. Στην τελευταία σχέση, οι συντελεστές $\mathbf{u}_\infty^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}})$, $\mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}})$ είναι τα αντίστοιχα πλάτη σκέδασης (scattering amplitudes) ή μακρινά πεδία (far field patterns) των κυμάτων p και s, αντίστοιχα.

Ειδικότερα, τα πλάτη σκέδασης για το πρόβλημα Dirichlet, όπου $\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \in \partial D$ είναι:

$$\mathbf{u}_\infty^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^p}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\partial D} e^{-ik_e^p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} T_e^{(r')} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (71)$$

και

$$\mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = \frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^s}} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_{\partial D} e^{-ik_e^s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} T_e^{(r')} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (72)$$

Για το πρόβλημα Neumann, όπου $T_e^{(r')} \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \in \partial D$, οι σχέσεις για τα πλάτη σκέδασης είναι:

$$\mathbf{u}_\infty^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^p}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\partial D} e^{-ik_e^p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (73)$$

και

$$\mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^s}} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_{\partial D} e^{-ik_e^s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (74)$$

Για το πρόβλημα Robin, όπου ισχύει $T \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \in \partial D$, τα πλάτη σκέδασης θα προκύπτουν από τους τύπους

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\infty^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = & -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^p}} \int_{\partial D} e^{-ik_e^p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}') \cdot \left[-i\omega c (\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \right. \\ & \left. + \hat{\mathbf{n}}' \cdot (\lambda \tilde{\mathbf{I}} + 2\mu \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) i k_e^p \right] ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (75)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = & -\frac{i+1}{4\mu_e \sqrt{\pi k_e^s}} \int_{\partial D} e^{-ik_e^s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}') \cdot \left[-i\omega c (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) + \right. \\ & \left. \mu \left[2(\hat{\mathbf{n}}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\mathbf{n}}' \times (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} i k_e^s \right] ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (76)$$

Στην περίπτωση του διαπερατού σκεδαστή, τα πλάτη σκέδασης για το διαμήκες και εγκάρσιο τμήμα του σκεδασμένου πεδίου δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\infty^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = & \frac{1}{\sqrt{\pi k_e^s}} \left\{ \frac{(i+1) \left\{ \omega^2 \rho_e (\mu_e - \mu_i) + (\lambda_i \mu_e - \lambda_e \mu_i) (k_e^p)^2 \right\}}{4\mu_e^2} (l_p \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right. \\ & + (1-i) \left\{ k_e^p \tilde{\mathbf{H}}_p : \left[\frac{\lambda_i}{4\mu_e} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\mu_i}{2\mu_e} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \right. \\ & \left. \left. - k_e^p \tilde{\mathbf{H}}_p : \left[\frac{\lambda_e}{4\mu_e} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\mu_e}{2\mu_e} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \right] \right\} \right\} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (77)$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{a}}) = & \frac{1}{\sqrt{\pi k_e^s}} \left\{ \frac{(i+1) \omega^2 \rho_e (\mu_e - \mu_i)}{4\mu_e^2} (l_s \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right. \\ & + (1-i) \left\{ \frac{\mu_i}{\mu_e} k_e^s [2\tilde{\mathbf{H}}_s : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + h_s(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] \right. \\ & \left. \left. - k_e^s [2\tilde{\mathbf{H}}_s : \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + h_s(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] \right\} \right\} \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (78)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{H}}_\alpha = \int_{\partial D} u_i(\mathbf{r}') \otimes \hat{n}_r, e^{-ik_e^a \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}'), \quad \alpha = p, s \quad (79)$$

$$\mathbf{h}_s = \int_{\partial D} u_i(\mathbf{r}') \times \hat{n}_r, e^{-ik_e^s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}') \quad (80)$$

$$\mathbf{l}_\alpha = \int_{D_i} u_i(\mathbf{r}') e^{-ik_e^a \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}'), \quad \alpha = p, s \quad (81)$$

2.4 Δυναμικό απλού και διπλού στρώματος

Το πρόβλημα της σκέδασης μπορεί να περιγραφεί και με την βοήθεια ολοκληρωτικών εξισώσεων επί του συνόρου. Χρήσιμοι είναι οι παρακάτω ορισμοί:

Ορισμός 2.4.1: Μια διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} θα λέγεται ***a-Hölder* συνεχής**, εάν υπάρχουν σταθερές $C, \alpha > 0$, ώστε να ισχύει

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}')\| = C \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^\alpha \quad (82)$$

Στην περίπτωση που $\alpha = 1$, η συνάρτηση αυτή θα λέγεται *Hölder* συνεχής ή *Lipschitz* συνεχής.

Ορισμός 2.4.2: Έστω φ μια *Hölder* συνεχής συνάρτηση, ορισμένη επί του συνόρου ∂D . Τότε, η διανυσματική συνάρτηση

$$(\mathbf{S}_{e,i} \varphi)(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \varphi(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (83)$$

θα καλείται **δυναμικό απλού στρώματος** ($\Delta A\Sigma$) με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}$.

Το δυναμικό απλού στρώματος αποτελεί μια συνεχή παντού λύση της φασματικής εξίσωσης, η οποία επιπλέον ικανοποιεί και τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze (28), (29) για τα P και S κύματα αντίστοιχα. Ωστόσο, η δράση του τελεστή επιφανειακής τάσης επί του δυναμικού απλού στρώματος παρουσιάζει ασυνέχειες στο σύνορο και ισχύει η σχέση διαπήδησης [20]

$$\left[T_{e,i}^{(r')}(\mathbf{S}_{e,i}\mathbf{f}) \right]_{\pm}(\mathbf{r}) = \left[(\mp I + K_{e,i})\mathbf{f} \right](\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (84)$$

όπου έχουμε ορίσει τον τελεστή

$$(K_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} T_{e,i}^{(r')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \quad (85)$$

και το + (-) δηλώνει ότι $\mathbf{r} \rightarrow \partial D$ ‘από έξω’, (‘από μέσα’ αντίστοιχα) και ο εκθέτης r δηλώνει την δράση του διαφορικού τελεστή T επί της συνάρτησης $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, στο σημείο \mathbf{r} .

Ορισμός 2.4.3: Έστω $\boldsymbol{\varphi}$ μια Hölder συνεχής συνάρτηση, ορισμένη επί του συνόρου ∂D . Τότε, η διανυσματική συνάρτηση

$$(D_{e,i}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} T_{e,i}^{(r')} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (86)$$

θα καλείται **δυναμικό διπλού στρώματος** ($\Delta D\Sigma$) με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}$.

Το δυναμικό διπλού στρώματος αποτελεί λύση της φασματικής εξίσωσης, ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze, όμως δεν είναι παντού συνεχής επί του συνόρου. Η συνθήκη διαπήδησης, που ισχύει, είναι

$$\left[(D_{e,i}\mathbf{f}) \right]_{\pm}(\mathbf{r}) = \left[(\pm I + \bar{K}_{e,i}^*)\mathbf{f} \right](\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (87)$$

Στις σχέσεις αυτές, το ‘+’ αντιστοιχεί για $\mathbf{r} \rightarrow \partial D$ από D_e και το ‘-’ για $\mathbf{r} \rightarrow \partial D$ από D_i . Επίσης, η πάνω παύλα ‘ $\bar{}$ ’ παριστάνει τον συζυγή μιγαδικό και το ‘*’ παριστάνει τον L^2 -συζυγή.

Κάνοντας πράξεις στους παραπάνω τελεστές, μπορούν να προκύψουν οι σχέσεις:

$$(D_{e,i}\mathbf{f})(\mathbf{r}) = (\bar{K}_{e,i}^*\mathbf{f})(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (88)$$

$$\left[T(D\mathbf{f}) \right]_{+} = \left[T(D\mathbf{f}) \right]_{-} \quad (89)$$

2.5 Καλή τοποθέτηση προβλήματος

Με την βοήθεια του δυναμικού απλού και διπλού στρώματος θαδειχθεί η ύπαρξη και η μοναδικότητα λύσης για τα προβλήματα σκέδασης (55), (57), (60), (62), που αναφέρθηκαν σε προηγούμενη ενότητα.

2.5.1. Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

Θεώρημα 2.5.A:

Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει ακριβώς μία λύση.

Απόδειξη:

Εκφράζοντας το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{u}^{scf}(\mathbf{r})$ ως γραμμικό συνδυασμό των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος

$$\mathbf{u}^{scf}(\mathbf{r}) = (D_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + in(S_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \quad (90)$$

(με $n \neq 0$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός) και με την βοήθεια της σχέσης διαπήδησης (88), η συνοριακή συνθήκη του προβλήματος

$$\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{scf}(\mathbf{r}) = 0 \quad (91)$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$\left[(I + \bar{K}_{e,i}^* + inS_e) \boldsymbol{\varphi} \right](\mathbf{r}) = -\mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (92)$$

απ' όπου προκύπτει ότι η πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}$ είναι λύση της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Επιπλέον, η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση για όλες τις τιμές του ω^2 . Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θα γίνει με την βοήθεια της θεωρίας Fredholm:

Ας θεωρήσουμε $\boldsymbol{\varphi}$ την λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης

$$\left[(I + \bar{K}_{e,i}^* + inS_e) \boldsymbol{\varphi} \right](\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (93)$$

Τότε η $\mathbf{u}_e^{scf}(\mathbf{r})$, όπως ορίζεται από την σχέση (90), αποτελεί λύση του εξωτερικού

προβλήματος Dirichlet, άρα θα ισχύει $\mathbf{u}_e^{scr} = 0$, για $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus D_i$. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις διαπήδησης για το $\Delta\Delta\Sigma$ και την σχέση (84) για την δράση του επιφανειακού τελεστή τάσης \mathbf{T} στο $\Delta\Delta\Sigma$, θα προκύψουν

$$\mathbf{u}_i = 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (94)$$

και

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_i = -2in\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (95)$$

όπου \mathbf{u}_i είναι τι κυματικό πεδίο στο χωρίο D_i .

Αν τώρα οι σχέσεις (94) και (95) αντικατασταθούν στον 2^ο τύπο του Betti (32), τότε για

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_i \text{ στο } D_i \\ \mathbf{u}_i = 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \\ \mathbf{T}\mathbf{u}_i = -2in\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \end{cases} \quad (96)$$

θα πάρουμε

$$\int_{D_i} \mathbf{u}_i \cdot \Delta^* \mathbf{u}_i \, dv = \int_{\partial D} 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \cdot (-2in\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})) \, ds - \int_{D_i} W(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \, dv \quad (97)$$

$$4 \int_{\partial D} in|\boldsymbol{\varphi}|^2 \, ds = - \int_{D_i} \mathbf{u}_i \cdot \rho\omega^2 \mathbf{u}_i \, dv - \int_{D_i} W(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \, dv \quad (98)$$

$$4 \int_{\partial D} in|\boldsymbol{\varphi}|^2 \, ds = - \int_{D_i} \rho\omega^2 |\mathbf{u}_i|^2 \, dv - \int_{D_i} W(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \, dv \quad (99)$$

Για το φανταστικό μέρος της τελευταίας εξίσωσης έχουμε:

$$-4 \int_{\partial D} n|\boldsymbol{\varphi}|^2 \, ds = -2\rho \operatorname{Re}(w) \operatorname{Im}(w) \int_{D_i} |\mathbf{u}_i|^2 \, dv \quad (100)$$

απ' όπου υποθέτοντας ότι $\operatorname{Re}(w) \geq 0$ και $\operatorname{Im}(w) \geq 0$, έπεται ότι η ομογενής εξίσωση έχει ως μοναδική λύση την τετριμμένη. Συνέπεια της θεωρίας Fredholm είναι ότι η μη ομογενής εξίσωση (93) θα έχει μοναδική λύση.

Όσον αφορά την ύπαρξη λύσης: ας υποθέσουμε τιμή ω_0^2 , η οποία δεν είναι ιδιοτιμή του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet. Ορίζουμε επίσης τον τελεστή

$$M_0^{-1} = -S_0 (I - \bar{K}^*)_0^{-1} (I + \bar{K}^*)_0^{-1} \quad (101)$$

, ο οποίος είναι συμπαγής και τον εφαρμόζουμε στην σχέση (92):

$$M_0^{-1} \left[I + \bar{K}_{e,i}^* + in(S_e - S_0) \right] \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) = -M_0^{-1} \mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}) \quad (102)$$

Στην τελευταία σχέση, όλοι οι τελεστές είναι συμπαγείς. Από την θεωρία Riesz-Fredholm, έπεται ότι η εξίσωση αυτή έχει λύση, συνεπώς θα έχει λύση και το αρχικό πρόβλημα. \square

2.5.2 Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann

Θεώρημα 2.5.B:

Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει ακριβώς μία λύση.

Απόδειξη:

Το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{u}^{scf}(\mathbf{r})$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των δυναμικών διπλού και απλού στρώματος

$$\mathbf{u}^{scf}(\mathbf{r}) = (S_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) + in(D_e \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) \quad (103)$$

(με $n \neq 0$ αυθαίρετος πραγματικός αριθμός). Αν επιπλέον χρησιμοποιήσουμε την συνοριακή συνθήκη (56) και την συνθήκη διαπήδησης (87) και κάνοντας πράξεις, θα καταλήξουμε στην εξίσωση

$$\left[(I - K_e - in M_e) \boldsymbol{\varphi} \right](\mathbf{r}) = T_e^{(r)} \mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial D \quad (104)$$

δηλαδή η $\boldsymbol{\varphi}$ αποτελεί λύση της. Ο τελεστής $M_{e,i}$ ορίζεται ως

$$(M_{e,i} \boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = T_{e,i}^{(r)} \int_{\partial D} T_e^{(r')} \tilde{\Gamma}_{e,i}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (105)$$

Για την απόδειξη της ύπαρξης μιας λύσης: ας υποθέσουμε τιμή ω_0^2 , η οποία δεν είναι ιδιοτιμή του εσωτερικού προβλήματος Neumann. Εφαρμόζοντας τον τελεστή M_0^{-1} της σχέσης (101) στην σχέση (104) θα πάρουμε:

$$M_0^{-1} \left[I - K - in(M_e - M_0) \right] \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) - in \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) = M_0^{-1} \left(T_e^{(r)} \mathbf{u}_e^{inc}(\mathbf{r}) \right) \quad (106)$$

Για την παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση, η θεωρία Fredholm μπορεί να εφαρμοστεί, όπως αποδεικνύεται από τον Σεβρόγλου [23], άρα αποδείχτηκε η ύπαρξη λύσης της.

Επιπλέον, η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση για όλες τις τιμές του ω^2 . Η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θα γίνει με την βοήθεια της θεωρίας Fredholm, όπως και στο αντίστοιχο πρόβλημα Dirichlet:

Ας θεωρήσουμε $\boldsymbol{\varphi}$ την λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης:

$$\left[(I - K_e - in M_e) \boldsymbol{\varphi} \right] (\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (107)$$

Τότε το σκεδασμένο πεδίο, όπως ορίζεται στην (103), αποτελεί λύση του εξωτερικού ομογενούς προβλήματος Neumann, άρα θα ισχύει $\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 / D_i$. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις διαπήδησης για το $\Delta\Delta\Sigma$ και την σχέση (84) για την δράση του επιφανειακού τελεστή τάσης \mathbf{T} στο $\Delta\Delta\Sigma$, θα προκύψουν

$$\mathbf{u}_i = -2in\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (108)$$

και

$$\mathbf{T}\mathbf{u}_i = 2\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (109)$$

όπου \mathbf{u}_i είναι το κυματικό πεδίο στο χωρίο D_i .

Αν τώρα οι σχέσεις (108) και (109) αντικατασταθούν στον 2^ο τύπο του Betti (32), τότε προκύπτει

$$-4 \int_{\partial D} in |\boldsymbol{\varphi}|^2 ds = - \int_{D_i} \rho \omega^2 |\mathbf{u}|^2 dv - \int_{D_i} W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dv \quad (110)$$

Για το φανταστικό μέρος της τελευταίας εξίσωσης έχουμε:

$$-4 \int_{\partial D} n |\boldsymbol{\varphi}|^2 ds = -2\rho \operatorname{Re}(w) \operatorname{Im}(w) \int_{D_i} |\mathbf{u}|^2 dv \quad (111)$$

απ' όπου υποθέτοντας ότι $\operatorname{Re}(w) \geq 0$ και $\operatorname{Im}(w) \geq 0$, έπεται ότι η ομογενής εξίσωση έχει ως μοναδική λύση την τετριμμένη. Συνέπεια της θεωρίας Fredholm είναι ότι η μη ομογενής εξίσωση (93) θα έχει μοναδική λύση. \square

3. Τα Ιδιοδιανύσματα Navier-Ελαστικές Συναρτήσεις Herglotz

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά αναφέρεται η συνθήκη Herglotz και δίνεται ο ορισμός της ελαστικής συνάρτησης Herglotz. Στην συνέχεια εισάγονται οι έννοιες των διανυσματικών αρμονικών και των ιδιοδιανυσμάτων Navier και αποδεικνύονται οι ιδιότητες τους, που αφορούν πληρότητα, γραμμική ανεξαρτησία και ομοιόμορφη σύγκλιση σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^2 . Επίσης, γίνεται αναφορά στην ασυμπτωτική μορφή μιας ελαστικής συνάρτησης Herglotz και πως αυτή συνδέεται με τα πρότυπα ακτινοβολίας, που παράγει. Ορίζεται η νόρμα Herglotz, αποδεικνύεται ότι τα πλάτη σκέδασης είναι καλά ορισμένα και παρουσιάζεται η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ αυτών και των λύσεων Herglotz. Στην συνέχεια διατυπώνονται με απόδειξη το Θεώρημα της αναπαράστασης μιας ελαστικής λύσης της φασματικής εξίσωσης Navier και αυτό της πυκνότητας των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz. Τέλος αναφέρεται ένας αλγόριθμος ανακατασκευής του άγνωστου σκεδαστή, που στηρίζεται στις ιδιότητες των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz.

3.1 Η συνθήκη Herglotz- Ελαστική συνάρτηση Herglotz

Θεωρούμε στον χώρο \mathbb{R}^2 τον κυκλικό δίσκο $C(\mathbf{r}_0; R) = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < R\}$ κέντρου \mathbf{r}_0 και ακτίνας R και έστω $\partial C(\mathbf{r}_0; R) = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R\}$ το σύνορό του.

Ορισμός 3.1.1: Αν \mathbf{u} είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο, ορισμένο στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^2 , τότε αυτό θα λέμε ότι ικανοποιεί την **συνθήκη Herglotz**, αν ισχύει

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{C(0,r)} |\mathbf{u}(\mathbf{r}')|^2 r' dr' d\theta < +\infty \quad (112)$$

Ορισμός 3.1.2: Η ελαστική συνάρτηση Herglotz ορίζεται ως η κλασική λύση της φασματικής εξίσωσης Navier (12), που ορίζεται στο δισδιάστατο επίπεδο, η οποία επιπλέον ικανοποιεί την συνθήκη Herglotz (112).

3.2 Τα ιδιοδιανύσματα Navier και οι ιδιότητές τους

Πριν να γίνει η παρουσίαση των ιδιοδιανυσμάτων Navier και των ιδιοτήτων τους, θα γίνει αναφορά στην έννοια των διανυσματικών αρμονικών στον χώρο \mathbb{R}^2 . Συγκεκριμένα, οι διανυσματικές αρμονικές [23] δίνονται από τις διανυσματικές σχέσεις

$$\mathbf{P}_m(\hat{\mathbf{r}}) = e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} \quad (113)$$

$$\mathbf{B}_m(\hat{\mathbf{r}}) = e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (114)$$

και ορίζουν ένα δεξιόστροφο και ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στο δισδιάστατο επίπεδο.

Οι συναρτήσεις αυτές, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι ορθογώνιες, δηλαδή

$$\mathbf{P}_m \cdot \mathbf{B}_m = \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{P}_m = 0 \quad (115)$$

αφού $\mathbf{P}_m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{B}_m(\hat{\mathbf{r}}) = (e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}}) \cdot (e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}}) = 0$, δεδομένου ότι $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0$

και επιπλέον ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$(\mathbf{P}_m, \mathbf{P}_n)_\alpha = (\mathbf{B}_m, \mathbf{B}_n)_\alpha = 2\pi \alpha \delta_{nm} \quad (116)$$

για κάθε $m, n = 0, 1, 2, \dots$, όπου

$(\cdot, \cdot)_\alpha$: είναι το εσωτερικό γινόμενο σε κύκλο ακτίνας $\alpha > 0$ και

δ_{nm} : το Δέλτα του Kronecker.

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι το σύνολο των διανυσματικών αρμονικών συναρτήσεων είναι ένα πλήρες σύνολο στον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, σε κυκλικό δίσκο, ακτίνας α .

Έστω τώρα κυκλικός δίσκος $C(0, R) = \{\mathbf{r} : r = |\mathbf{r}| < R\}$, με κέντρο την αρχή των αξόνων. Τότε το διάνυσμα θέσης σε πολικές συντεταγμένες θα είναι $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, με $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Τα ιδιοδιανύσματα Navier $\Phi_m^{e,i}, \Psi_m^{e,i}$ της διανυσματικής εξίσωσης του Navier, εφαρμόζοντας

ανάλυση κατά Helmholtz, θα εκφράζονται με την βοήθεια των διανυσματικών αρμονικών και για το διαμήκες και εγκάρσιο κυματικό πεδίο δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$\mathbf{\Phi}_m^{e,i}(\mathbf{r}) = \nabla \left(\psi_m^{e,i}(k_p r, \varphi) \right) = k_p Z_m^{e,i'}(k_p r) e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} + \frac{im}{r} Z_m^{e,i}(k_p r) e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (117)$$

και

$$\mathbf{\Psi}_m^{e,i}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left(\psi_m^{e,i}(k_s r, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_3 \right) = \frac{im}{r} Z_m^{e,i}(k_s r) e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} - k_s Z_m^{e,i'}(k_s r) e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (118)$$

για $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, όπου $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στο πολικό σύστημα συντεταγμένων, $\hat{\mathbf{e}}_3$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα επί της αρχής των αξόνων στο καρτεσιανό σύστημα, ο τόνος δηλώνει παραγωγή και τα e, i συμβολίζουν τα εξωτερικά και εσωτερικά ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα.

Στις δύο παραπάνω σχέσεις, οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\psi_m^{e,i}(k_a r, \varphi) = Z_m^{e,i}(k_a r) e^{im\varphi}, \quad a = p, s \quad (119)$$

είναι οι πολικές λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, όπου οι συναρτήσεις

$$Z_m^e(k_a r) = H_m^{(1)}(k_a r), \quad a = p, s \quad (120)$$

είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους, m τάξης και οι συναρτήσεις

$$Z_m^i(k_a r) = J_m^{(1)}(k_a r), \quad a = p, s \quad (121)$$

είναι οι συναρτήσεις Bessel πρώτου είδους, m τάξης.

Επίσης, αποδεικνύεται μετά από εκτέλεση πράξεων, ότι τα ιδιοδιανύσματα Navier ικανοποιούν τις εξής σχέσεις ορθογωνιότητας:

$$\left(\mathbf{\Phi}_n^{e,i}, \mathbf{\Phi}_m^{e,i} \right)_R = \frac{2\pi}{R} \left[k_p^2 R^2 Z_n^{e,i'}(k_p R) \bar{Z}_m^{e,i'}(k_p R) + n^2 Z_n^{e,i}(k_p R) \bar{Z}_m^{e,i}(k_p R) \right] \delta_{nm} \quad (122)$$

$$\left(\mathbf{\Psi}_n^{e,i}, \mathbf{\Psi}_m^{e,i} \right)_R = \frac{2\pi}{R} \left[k_s^2 R^2 Z_n^{e,i'}(k_s R) \bar{Z}_m^{e,i'}(k_s R) + n^2 Z_n^{e,i}(k_s R) \bar{Z}_m^{e,i}(k_s R) \right] \delta_{nm} \quad (123)$$

$$\left(\Phi_n^{e,i}, \Psi_m^{e,i} \right)_R = -\frac{2in\pi}{R} \left[(k_p R) Z_n^{e,i'}(k_p R) \bar{Z}_m^{e,i}(k_s R) + (k_s R) Z_n^{e,i}(k_p R) \bar{Z}_m^{e,i'}(k_s R) \right] \delta_{nm} \quad (124)$$

όπου

δ_{nm} : το δέλτα του Kronecker

$\bar{}$: δηλώνει συζυγή μιγαδικό

$(,)_R$: δηλώνει το L^2 -εσωτερικό γινόμενο στον κυκλικό δίσκο C

Επιπλέον, τα ιδιοδιανύσματα Navier $\Phi_m^{e,i}, \Psi_m^{e,i}$ αποτελούν λύσεις της διανυσματικής εξίσωσης Helmholtz, με κυματικούς αριθμούς k_p, k_s αντίστοιχα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\left(\Delta + k_p^2 \right) \Phi_m(\mathbf{r}) = \left(\Delta + k_s^2 \right) \Psi_m(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (125)$$

Αν τώρα για τις πολικές λύσεις χρησιμοποιηθεί το ανάπτυγμα

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m\varphi) J_m(kr) \quad (126)$$

όπου $\hat{\mathbf{r}} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\hat{\mathbf{k}} = (\cos \theta, \sin \theta)$ και $\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & \text{αν } m = 0 \\ 1, & \text{αν } m \neq 0 \end{cases}$

τότε θα προκύψει η σχέση

$$Y_m(\hat{\mathbf{r}}) J_m(kr) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} Y_m(\hat{\mathbf{k}}) ds(\hat{\mathbf{k}}) \quad (127)$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$ και $Y_m(\hat{\mathbf{r}}) = e^{im\varphi}$. Η σχέση αυτή δίνει την ολοκληρωτική αναπαράσταση των πολικών λύσεων, οι οποίες ταυτόχρονα εκφράζονται με την βοήθεια επίπεδων κυμάτων.

Με την βοήθεια της σχέσης (127) και των διανυσματικών αρμονικών (113), τα ιδιοδιανύσματα Φ_m θα προκύπτουν από την

$$\Phi_m^i(\mathbf{r}) = \frac{ik_p}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ik_p \hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{P}_m(\hat{\mathbf{k}}) ds(\hat{\mathbf{k}}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (128)$$

και αντίστοιχα για τα ιδιοδιανύσματα Ψ_m , με την βοήθεια των σχέσεων (114) και (127), προκύπτει

$$\Psi_m^i(\mathbf{r}) = \frac{ik_s}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} e^{ik_s \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{B}_m(\hat{\mathbf{k}}) ds(\hat{\mathbf{k}}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (129)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, βλέπουμε ότι τα ιδιοδιανύσματα αναλύονται με την βοήθεια επίπεδων κυμάτων, πολωμένων στις διευθύνσεις, που έχουν οι αντίστοιχες διανυσματικές αρμονικές συναρτήσεις και μάλιστα μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια «1-1» αντιστοιχία μεταξύ των Φ_m, Ψ_m και των $\mathbf{P}_m, \mathbf{B}_m$ αντίστοιχα. Συνέπεια του τελευταίου είναι ότι κάθε έκφραση, που δίνει την λύση της φασματικής εξίσωσης Navier με την βοήθεια ιδιοδιανυσμάτων Navier, θα μπορεί να γραφεί ισοδύναμα με την βοήθεια των διανυσματικών αρμονικών.

Στην συνέχεια θα γίνει απόδειξη της πληρότητας και της γραμμικής ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων Navier.

Έστω $\sigma(D_i)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του ομογενούς προβλήματος Dirichlet στο D_i και $L^2(\partial D)$ ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων διανυσματικών συναρτήσεων στο ∂D . Τότε

ΛΗΜΜΑ 3.2.1:

Το σύνολο των εσωτερικών ιδιοδιανυσμάτων $\{\Phi_m^i, \Psi_m^i\}$ είναι πλήρες στον $L^2(\partial D)$, αν $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$, ενώ το σύνολο των εξωτερικών ιδιοδιανυσμάτων $\{\Phi_m^e, \Psi_m^e\}$ είναι πλήρες στον $L^2(\partial D)$ για οποιαδήποτε τιμή του ω^2

Απόδειξη:

Για την απόδειξη της πληρότητας, αρκεί να δείξουμε ότι αν το εσωτερικό γινόμενο μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \in L^2(\partial D)$ με το τυχαίο στοιχείο $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ των παραπάνω συνόλων ισούται με μηδέν, τότε θα ισχύει ότι $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) = 0$.

Έστω ότι

$$\int_{\partial D} \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') = 0 \quad (130)$$

και έστω επιπλέον το δυναμικό απλού στρώματος (ΔΑΣ) $S\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$, με πυκνότητα $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$, που

ορίζεται από την σχέση (83). Στην έκφραση αυτή, ο πίνακας $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ είναι η θεμελιώδης συνάρτηση Green στον \mathbb{R}^2 και ικανοποιεί την εξίσωση (26), ενώ με την βοήθεια της σχέσης (27) μπορεί να γραφτεί και ως συνάρτηση των ιδιοδιανυσμάτων Navier:

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{\mu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \Psi_m^e(k_s r_{>}) \otimes \bar{\Psi}_m^i(k_s r_{<}) + \left(\frac{k_p}{k_s}\right)^2 \Phi_m^e(k_p r_{>}) \otimes \bar{\Phi}_m^i(k_p r_{<}) \right\} \quad (131)$$

όπου

$$r_{>} := \begin{cases} r, & \text{αν } r > r' \\ r', & \text{αν } r < r' \end{cases}, \quad r_{<} := \begin{cases} r, & \text{αν } r < r' \\ r', & \text{αν } r > r' \end{cases} \quad \text{και } r := |\mathbf{r}| \text{ και } r' := |\mathbf{r}'|$$

Η συνάρτηση της θεμελιώδους λύσης συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα με $r > r'$ και σε συνδυασμό με την (130), προκύπτει ότι $(S\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ στο εξωτερικό κυκλικού χωρίου, που περιέχει το D_i . Επιπλέον, δεδομένου ότι η $S\boldsymbol{\varphi}$ είναι μια λύση της εξίσωσης Navier και το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση, έπεται ότι $(S\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \in D_e$. Τότε γράφουμε

$$[S\boldsymbol{\varphi}]_+(\mathbf{r}') = \mathbf{0} \quad (132)$$

για $\mathbf{r}' \rightarrow \partial D$, 'από έξω', δηλαδή από το D_e . Αφού το δυναμικό απλού στρώματος είναι παντού συνεχής συνάρτηση, άρα θα είναι και στο σύνορο, οπότε

$$[S\boldsymbol{\varphi}]_-(\mathbf{r}') = \mathbf{0}, \quad (133)$$

για $\mathbf{r}' \rightarrow \partial D$, 'από μέσα', δηλαδή από το D_i . Με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα και αφού $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$, παίρνουμε

$$(S\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in D_i \quad (134)$$

Επειδή, όπως έχει αναφερθεί, η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσης T (σχέση (30)) επί του $\Delta A\Sigma$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνορο ∂D , έχουμε τις συνθήκες διαπήδησης (84). Ο μηδενισμός του δυναμικού απλού στρώματος στο \mathbb{R}^2 συνεπάγεται

$$[T S\boldsymbol{\varphi}]_+(\mathbf{r}) = [T S\boldsymbol{\varphi}]_-(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \partial D \quad (134)$$

απ' όπου έπεται ότι $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ για $\mathbf{r} \in \partial D$. Έτσι αποδείχθηκε ότι το σύνολο $\{\boldsymbol{\Phi}_m^i, \boldsymbol{\Psi}_m^i\}$ των εσωτερικών ιδιοδιανυσμάτων είναι πλήρες στον $L^2(\partial D)$. Θα πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι στην περίπτωση που το ω^2 αποτελεί ιδιοτιμή, το σύνολο $\{\boldsymbol{\Phi}_m^i, \boldsymbol{\Psi}_m^i\}$ δεν θα είναι πάντα πλήρες στον $L^2(\partial D)$.

Παρόμοια αποδεικνύεται η πληρότητα του συνόλου $\{\boldsymbol{\Phi}_m^e, \boldsymbol{\Psi}_m^e\}$ στον $L^2(\partial D)$ για οποιαδήποτε τιμή του ω^2 □

ΛΗΜΜΑ 3.2.2:

Το σύνολο των εσωτερικών ιδιοδιανυσμάτων $\{\boldsymbol{\Phi}_m^i, \boldsymbol{\Psi}_m^i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στον $L^2(\partial D)$, αν $\omega^2 \notin \sigma(D_1)$, όπου το σύνορο ∂D είναι κλειστή και ομαλή καμπύλη τύπου Lyapunov του \mathbb{R}^2 , που περιέχει το χωρίο D_1 .

Το ίδιο ισχύει και για το σύνολο $\{\boldsymbol{\Phi}_m^e, \boldsymbol{\Psi}_m^e\}$ των εξωτερικών ιδιοδιανυσμάτων Navier, για οποιαδήποτε όμως τιμή του ω^2 .

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν συντελεστές $\{a_m, b_m\}, m = 0, 1, \dots, N$, όχι όλοι μηδέν, για τους οποίους ισχύει

$$\sum_{m=0}^N \{a_m \boldsymbol{\Phi}_m^i(\mathbf{r}) + b_m \boldsymbol{\Psi}_m^i(\mathbf{r})\} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{r} \in \partial D \quad (135)$$

και έστω η συνάρτηση

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^N \{a_m \boldsymbol{\Phi}_m^i(\mathbf{r}) + b_m \boldsymbol{\Psi}_m^i(\mathbf{r})\}, \mathbf{r} \in D_1 \quad (136)$$

Τότε, από την σχέση (135) έπεται ότι η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί μια λύση της φασματικής εξίσωσης Navier (12), η οποία μηδενίζεται στο σύνορο ∂D . Δεδομένου ότι έχουμε ως υπόθεση ότι $\omega^2 \notin \sigma(D_1)$, προκύπτει ότι $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{r} \in D_1$. Έτσι έχουμε μια

συνάρτηση \mathbf{u} , που μηδενίζεται σε κάθε κύκλο $C(0, a)$, που περιέχεται στο σύνορο ∂D και αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{m=0}^N \{a_m \Phi_m^i(\mathbf{r}) + b_m \Psi_m^i(\mathbf{r})\} = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in C(0, a) \quad (137)$$

Αν τώρα πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο της (137), πρώτα με το Φ_m^i και έπειτα με το Ψ_m^i και ταυτόχρονα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας (122) - (124), προκύπτουν οι σχέσεις

$$a_m \|\Phi_m^i\|_a^2 + b_m (\Phi_m^i, \Psi_m^i)_a = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (138)$$

και

$$a_m (\Phi_m^i, \Psi_m^i)_a + b_m \|\Psi_m^i\|_a^2 = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (139)$$

Η ορίζουσα του παραπάνω ομογενούς γραμμικού συστήματος (138), (139) θα είναι θετική (δείχνεται εύκολα με την βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwartz), άρα η λύση του συστήματος θα είναι η μηδενική, δηλαδή $a_m = b_m = 0, m = 0, 1, \dots, N$, που είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι ένας τουλάχιστον από τους παραπάνω συντελεστές είναι μη μηδενικός. Έτσι αποδείχθηκε η γραμμική ανεξαρτησία των $\{\Phi_m^i, \Psi_m^i\}$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η γραμμική ανεξαρτησία για τα εξωτερικά ιδιοδιανύσματα, για οποιαδήποτε τιμή του ω^2 □

Το παρακάτω λήμμα αποδεικνύει την ομοιόμορφη σύγκλιση των ιδιοδιανυσμάτων Navier σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^2 :

ΛΗΜΜΑ 3.2.3:

Έστω \mathbf{u} συνάρτηση, που αποτελεί κλασική λύση της φασματικής εξίσωσης Navier. Αν γνωρίζουμε ότι $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$, τότε κάθε τέτοια λύση \mathbf{u} , που επιπλέον παίρνει συνεχείς τιμές φ στο σύνορο, μπορεί να γραφτεί στην μορφή σειράς εσωτερικών ιδιοδιανυσμάτων Navier

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^N \{a_m \Phi_m^i(\mathbf{r}) + b_m \Psi_m^i(\mathbf{r})\} \quad (140)$$

η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $D_i \subseteq \mathbb{R}^2$. Παρόμοια συμπεράσματα ισχύουν και για τα εξωτερικά ιδιοδιανύσματα, για οποιαδήποτε όμως τιμή του ω^2 .

Απόδειξη:

Η απόδειξη στηρίζεται σε ιδέα των Aydin and Hizal [2]. Ειδικότερα, ως συνέπεια του λήμματος 3.2.1, μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οποιαδήποτε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διανυσματική συνάρτηση, ορισμένη σε επιφάνεια Lyapunov, μπορεί να προσεγγιστεί καλά από ένα γραμμικό συνδυασμό των εσωτερικών ιδιοδιανυσμάτων $\{\Phi_m^i, \Psi_m^i\}$, αν και μόνο αν $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$.

Αν λοιπόν είναι

$$\mathbf{u}_M(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^M \{a_m \Phi_m^i(\mathbf{r}) + b_m \Psi_m^i(\mathbf{r})\} \quad (141)$$

τότε από την πληρότητα του συνόλου των ιδιοδιανυσμάτων στον χώρο $L^2(\partial D)$ έχουμε

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\partial D} |\varphi(\mathbf{r}') - \varphi_M(\mathbf{r}')|^2 ds(\mathbf{r}') = 0 \quad (142)$$

όπου

$$\varphi_M(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^M \{a_m \Phi_m^i(\mathbf{r}) + b_m \Psi_m^i(\mathbf{r})\}, \mathbf{r} \in \partial D \quad (143)$$

Δεδομένου ότι έχουμε εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet και $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$, η λύση $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ εκφράζεται ως δυναμικό διπλού στρώματος, από την σχέση

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') \cdot T^{(r')} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (144)$$

και το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε ότι συμβαίνει και για την διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}_M(\mathbf{r})$. Έπεται ότι

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}_M(\mathbf{r}) = \int_{\partial D} [\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}') - \varphi_M(\mathbf{r}')] \cdot T^{(r')} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') \quad (145)$$

Αν επιπλέον λάβουμε υπόψη για την προηγούμενη σχέση και τις καρτεσιανές συντεταγμένες $u_j, u_{Mj}, j=1,2$ των $\mathbf{u}(\mathbf{r}), \mathbf{u}_M(\mathbf{r})$ αντίστοιχα και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_j(\mathbf{r}) - \mathbf{u}_{M_j}(\mathbf{r})| \leq & \left[\int_{\partial D} |\varphi_j(\mathbf{r}') - \varphi_{M_j}(\mathbf{r}')|^2 ds(\mathbf{r}') \right]^{1/2} \\ & \times \left[\int_{\partial D} |T^{(r')} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 ds(\mathbf{r}') \right]^{1/2}, \mathbf{r} \in D_i \end{aligned} \quad (146)$$

Επειδή η $|T^{(r')} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο σύνορο ∂D και με βάση τις σχέσεις (142) και (146), έπεται ότι

$$\lim_{M \rightarrow \infty} |\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}_M(\mathbf{r})| = 0 \quad (147)$$

οπότε η \mathbf{u}_M συγκλίνει ομοιόμορφα στην \mathbf{u} , σε κλειστά υποσύνολα του D_i , καθώς $M \rightarrow \infty$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Παρόμοια ισχύουν και για τα εξωτερικά ιδιοδιανύσματα Navier $\{\Phi_m^e, \Psi_m^e\}$, με την μόνη διαφορά ότι η σειρά συγκλίνει για οποιαδήποτε τιμή του ω^2 . \square

3.3 Βασικές ιδιότητες ελαστικών συναρτήσεων Herglotz

3.3.1. Η ασυμπτωτική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων Navier

Έστω \mathbf{u} μια ελαστική συνάρτηση Herglotz. Ως συνέπεια της πληρότητας των ιδιοδιανυσμάτων Navier (Λήμμα 3.2.1) και από τις σχέσεις (117)-(119), έχουμε ότι αυτή γράφεται με την μορφή σειράς:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m \Phi_m^i(\mathbf{r}) + b_m \Psi_m^i(\mathbf{r})\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ a_m \left\{ k_p J_m'(k_p r) e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} + \frac{im}{r} J_m(k_p r) e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} + \right. \\ &\quad \left. b_m \left\{ \frac{im}{r} J_m(k_s r) e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} - k_s J_m'(k_s r) e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (148)$$

και η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^2 [8].

Από τις ασυμπτωτικές σχέσεις για τις συναρτήσεις Bessel [21]:

$$J_m(k_a r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_a r}} \cos \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_a r \right] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (149)$$

$$J_m'(k_a r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_a r}} \sin \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_a r \right] + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (150)$$

και από τις εξισώσεις (117), (118), προκύπτει ότι τα ιδιοδιανύσματα παίρνουν τις εξής ασυμπτωτικές μορφές:

$$\Phi_m^i(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2k_p}{\pi r}} \sin \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_p r \right] \cdot e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} + O(r^{-3/2}) \quad (151)$$

$$\Psi_m^i(\mathbf{r}) = -\sqrt{\frac{2k_s}{\pi r}} \sin \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_s r \right] e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + O(r^{-3/2}) \quad (152)$$

καθώς $r \rightarrow \infty$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ασυμπτωτικές σχέσεις (151), (152), θα ορίσουμε τα πλάτη σκέδασης [9]

3.3.2 Πλάτη σκέδασης

Το διαμήκες πλάτος σκέδασης ορίζεται [9] στον μοναδιαίο κύκλο από την σειρά

$$\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}}) \cong \frac{1}{2} k_p \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m+1} a_m e^{im\varphi} \hat{\mathbf{r}} \quad (153)$$

και αντίστοιχα το εγκάρσιο πλάτος σκέδασης από την σειρά

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}}) \cong -\frac{1}{2} k_s \sum_{m=0}^{\infty} i^{-m+1} b_m e^{im\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (154)$$

Ειδικότερα, το διαμήκες πλάτος σκέδασης \mathbf{L} ταυτίζεται με το ακτινικό πλάτος, ενώ το εγκάρσιο \mathbf{T} ταυτίζεται με το εφαπτομενικό πλάτος.

Από τις σχέσεις (148) έως (154) έπεται η ασυμπτωτική μορφή της \mathbf{u}

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) \cong & \mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}}) H_0^{(1)}(k_p r) + \mathbf{L}(-\hat{\mathbf{r}}) H_0^{(2)}(k_p r) \\ & + \mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}}) H_0^{(1)}(k_s r) + \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{r}}) H_0^{(2)}(k_s r) \end{aligned} \quad (155)$$

καθώς $r \rightarrow \infty$.

Στην παραπάνω σχέση, οι όροι της που εκφράζονται με τις συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους $H_0^{(1)}$ παριστάνουν τα αποκλίνοντα κύματα και εκείνοι που εκφράζονται με τις συναρτήσεις Hankel δευτέρου είδους $H_0^{(2)}$ παριστάνουν τα συγκλίνοντα κύματα. Επιπλέον, τα συγκλίνοντα πλάτη σκέδασης $\mathbf{L}(-\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{T}(-\hat{\mathbf{r}})$ μπορούν να οριστούν από τα αποκλίνοντα πλάτη σκέδασης $\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}}), \mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})$ αντίστοιχα, κάνοντας απλά μια αντιστροφή στην διεύθυνση της παρατήρησης. Αν επιπλέον ισχύει η συνθήκη Herglotz (112), τότε έπεται ότι οι σειρές (153) και (154), που ορίζουν τα πλάτη σκέδασης, συγκλίνουν με την L^2 -έννοια στον μοναδιαίο κύκλο.

3.3.3 Ορισμός της νόρμας Herglotz

Έστω \mathbf{u} μια ελαστική συνάρτηση Herglotz. Τότε από τον ορισμό της, θα υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Herglotz

$$\frac{1}{R} \int_{C(0,R)} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 r dr d\varphi < c, \quad \forall R > 0 \quad (156)$$

Ας θεωρήσουμε επίσης ότι $R > R_0$, με R_0 να είναι το σημείο εκκίνησης της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων Bessel, που περιγράφονται στις εξισώσεις (149) και (150). Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_{C(0,R)} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 r dr d\varphi &= \frac{1}{R} \int_0^R \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 r dr \\ &= \frac{1}{R} \int_0^{R_0} \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 r dr + \frac{1}{R} \int_{R_0}^R \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 r dr \end{aligned}$$

Με την βοήθεια σχέσεων ορθογωνιότητας και ασυμπτωτικής ανάλυσης για τις συναρτήσεις Bessel, την συνθήκη (156), καθώς και την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς στην σχέση (148), συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{R} \int_{C(0,R)} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 r dr d\varphi = \frac{1}{R} \int_0^R \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2(0,2\pi)}^2 r dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{R} \int_0^{R_0} \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2(0,2\pi)}^2 r dr + \frac{1}{R} \int_{R_0}^R \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2(0,2\pi)}^2 r dr \\
&= \frac{1}{R} \int_0^{R_0} \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2(0,2\pi)}^2 r dr + \\
&\quad + \frac{2}{R} \sum_{m=0}^N \left\{ 2|a_m|^2 k_p \int_{R_0}^R \sin^2 \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_p r \right] dr \right. \\
&\quad \left. + 2|b_m|^2 k_s \int_{R_0}^R \sin^2 \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_s r \right] dr + O(r^{-1}) \right\} < c \\
&= \frac{1}{R} \int_0^{R_0} \|\mathbf{u}(r\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 r dr + \\
&\quad + \frac{2}{R} \sum_{m=0}^N \left\{ 2|a_m|^2 k_p \int_{R_0}^R \sin^2 \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_p r \right] dr \right. \\
&\quad \left. + 2|b_m|^2 k_s \int_{R_0}^R \sin^2 \left[(2m+1) \frac{\pi}{4} - k_s r \right] dr + O(\ln R) \right\} < c
\end{aligned} \tag{157}$$

Παίρνοντας τώρα όρια κατά μέλη, πρώτα για $R \rightarrow \infty$ και μετά για $N \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (156) θα πάρουμε:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[2k_p |a_m|^2 + 2k_s |b_m|^2 \right] < c \tag{158}$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Herglotz (112), θα πάρουμε

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{C(0,r)} |\mathbf{u}(\mathbf{r}')|^2 dr' = \sum_{m=0}^{\infty} \left[2k_p |a_m|^2 + 2k_s |b_m|^2 \right] < c \tag{159}$$

και οι (153), (154) μετατρέπονται

$$\|\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 k_p^2 \tag{160}$$

και

$$\|\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 k_s^2 \tag{161}$$

Στο σημείο αυτό, θα πρέπει να σημειωθεί ότι από την σχέση (159), σε συνδυασμό με το θεώρημα αναπαράστασης των Reisz-Fisher, προκύπτει ότι τα πλάτη σκέδασης \mathbf{L} και \mathbf{T} στις σχέσεις (153) και (154) είναι καλά ορισμένα ως προς την ορθοκανονική βάση $e^{im\phi}\hat{\mathbf{r}}, e^{im\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ με την L^2 -έννοια στον μοναδιαίο κύκλο.

Συνεχίζοντας, έπεται ότι

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{C(0,r)} |\mathbf{u}(\mathbf{r}')|^2 dr' = \frac{4}{\pi \cdot k_p} \|\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2(0,2\pi)}^2 + \frac{4}{\pi \cdot k_s} \|\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2(0,2\pi)}^2 \quad (162)$$

όπου το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης είναι η νόρμα Herglotz στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα, η οποία στην βιβλιογραφία συμβολίζεται ως $\|\mathbf{u}\|_H^2$.

Είναι δηλαδή

$$\|\mathbf{u}\|_H^2 = \frac{4}{\pi \cdot k_p} \|\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 + \frac{4}{\pi \cdot k_s} \|\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 \quad (163)$$

Ο αριθμός 4 στο δεξί μέλος δηλώνει ότι τα συγκλίνοντα και τα αποκλίνοντα πλάτη σκέδασης συνεισφέρουν το ίδιο στην νόρμα Herglotz της συνάρτησης \mathbf{u} . Το παραπάνω εξηγείται από το γεγονός ότι τα συγκλίνοντα και τα αποκλίνοντα πλάτη σκέδασης συνδέονται άμεσα, αφού το καθένα προσδιορίζεται από το άλλο, κάνοντας απλά μια αντιστροφή στην διεύθυνση παρατήρησης. Επίσης έχει αποδειχθεί [13] η ισοδυναμία μεταξύ των ισχυρισμών “μια λύση \mathbf{u} είναι Herglotz” και “τα οριζόμενα πλάτη σκέδασης είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις”.

Στο σημείο αυτό γίνεται αναφορά στις συναρτήσεις ταλάντωσης των πλατών σκέδασης [9] και συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι αυτές ορίζονται από την σχέση:

$$\mathbf{w}^a(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(+\hat{\mathbf{r}}) \cdot e^{ik_a r} + \mathbf{K}(-\hat{\mathbf{r}}) \cdot e^{-ik_a r} \quad (164)$$

όπου $\mathbf{K}(\pm\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{L}(\pm\hat{\mathbf{r}})$, όταν $a = p$ ή $\mathbf{K}(\pm\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{T}(\pm\hat{\mathbf{r}})$, όταν $a = s$.

Οι σχέσεις που συνδέουν τα πλάτη σκέδασης και τις συναρτήσεις ταλάντωσης είναι

$$\mathbf{K}(\pm\hat{\mathbf{r}}) = \frac{e^{\mp ik_a r}}{2} \left[\mathbf{w}^a(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{ik_a} \mathbf{w}_r^a(\mathbf{r}) \right] \quad (165)$$

όπου $\mathbf{w}_r^a = \frac{\partial \mathbf{w}^a}{\partial r}$ και $a = p, s$

Έστω \mathbf{u} συνάρτηση Herglotz, λύση της φασματικής εξίσωσης Navier. Τότε μπορεί να δειχθεί [9] ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \left\| \sqrt{r'} \mathbf{u}^a(\mathbf{r}') - \mathbf{w}^a(\mathbf{r}') \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 dr' = 0 \quad (166)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r \left\| \sqrt{r'} \mathbf{u}_{r'}^a(\mathbf{r}') - \mathbf{w}_{r'}^a(\mathbf{r}') \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 dr' = 0 \quad (167)$$

3.3.4 Αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των λύσεων Herglotz και των πλατών σκέδασης τους

Η σπουδαιότητα του θεωρήματος, που ακολουθεί, είναι ότι τα πλάτη σκέδασης \mathbf{L} και \mathbf{T} προκύπτουν άμεσα από το αστρόβιλο πεδίο u^p και το σωληνοειδές πεδίο u^s αντίστοιχα, χωρίς να χρειάζεται να γραφούν με την βοήθεια των ιδιοδιανυσμάτων Navier

Θεώρημα 3.3.A : Αν \mathbf{u} είναι μια ελαστική λύση Herglotz της φασματικής εξίσωσης Navier (12) και \mathbf{L}, \mathbf{T} είναι τα αντίστοιχα πλάτη σκέδασης, τότε

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{K}(\pm \hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{2r} \int_0^r \frac{e^{\mp i k_a r'}}{i k_a} \sqrt{r'} \left[i k_a \mathbf{u}^a(r' \hat{\mathbf{r}}) \pm \mathbf{u}_{r'}^a(r' \hat{\mathbf{r}}) \right] dr' \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 = 0 \quad (168)$$

όπου $\mathbf{K}(\pm \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{L}(\pm \hat{\mathbf{r}})$, όταν $a = p$ ή $\mathbf{K}(\pm \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{T}(\pm \hat{\mathbf{r}})$, όταν $a = s$.

Απόδειξη:

Ορίζουμε

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}') = \mathbf{f}(r' \hat{\mathbf{r}}) = \frac{e^{\mp i k_a r'}}{i k_a} \sqrt{r'} \left[i k_a \mathbf{u}^a(r' \hat{\mathbf{r}}) \pm \mathbf{u}_{r'}^a(r' \hat{\mathbf{r}}) \right] - 2\mathbf{K}(\pm \hat{\mathbf{r}}) \quad (169)$$

Με την βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwartz, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\left\| \frac{1}{r} \int_0^r \frac{e^{\mp i k_a r'}}{i k_a} \sqrt{r'} \left[i k_a \mathbf{u}^a(r' \hat{\mathbf{r}}) \pm \mathbf{u}_{r'}^a(r' \hat{\mathbf{r}}) \right] dr' - 2\mathbf{K}(\pm \hat{\mathbf{r}}) \right\|_{L^2[0, 2\pi]}^2$$

$$\leq \frac{1}{r} \int_0^r \|\mathbf{f}(r'\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 dr' \quad (170)$$

Αν επιπλέον εισάγουμε και τις συναρτήσεις ταλάντωσης (164), μπορούμε να εκτιμήσουμε την L^2 -νόρμα της συνάρτησης $\mathbf{f}(r'\hat{\mathbf{r}})$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(r'\hat{\mathbf{r}})\|^2 &= \left\| \frac{e^{\mp ik_a r'}}{ik_a} \sqrt{r'} [ik_a \mathbf{u}^a(r'\hat{\mathbf{r}}) \pm \mathbf{u}_{r'}^a(r'\hat{\mathbf{r}})] - 2\mathbf{K}(\pm\hat{\mathbf{r}}) \right\|_{L^2[0,2\pi]}^2 \\ &\leq 2 \left\| \sqrt{r'} \mathbf{u}^a(r'\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{w}^a(r'\hat{\mathbf{r}}) \right\|^2 + \frac{2}{k_a^2} \left\| \sqrt{r'} \mathbf{u}_{r'}^a(r'\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{w}_{r'}^a(r'\hat{\mathbf{r}}) \right\| \end{aligned} \quad (171)$$

Στην παραπάνω σχέση μπορεί να γίνει εκτίμηση κάθε όρου της, αν χρησιμοποιηθούν τα αντίστοιχα αποτελέσματα για την εξίσωση Helmholtz [10]. Έτσι, από την σχέση (170) παίρνοντας το όριο καθώς $r \rightarrow \infty$, το δεξί μέλος της μηδενίζεται, όπως προκύπτει από την σχέση (171), εξαιτίας των ορίων (166), (167). \square

3.3.5 Θεώρημα αναπαράστασης

Το θεώρημα αναπαράστασης αποδεικνύει ότι οποιαδήποτε ελαστική συνάρτηση Herglotz μπορεί να εκφραστεί ως υπέρθεση επίπεδων κυμάτων, που διαδίδονται προς όλες τις διευθύνσεις, επί του μοναδιαίου κύκλου και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης.

Θεώρημα 3.3.B: *Αν μια συνάρτηση \mathbf{u} είναι ελαστική λύση Herglotz της φασματικής εξίσωσης Navier (12), τότε υπάρχουν συναρτήσεις $\mathbf{L}, \mathbf{T} \in L^2[0, 2\pi]$, τέτοιες ώστε*

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \mathbf{L}(\hat{\mathbf{d}}) e^{ik_p \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} d\theta + \int_0^{2\pi} \mathbf{T}(\hat{\mathbf{d}}) e^{ik_s \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}} d\theta \quad (172)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}} = (\cos \theta, \sin \theta)$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα και αντίστροφα, αν μια συνάρτηση \mathbf{u} γράφεται στην μορφή (172), τότε αυτή θα είναι ελαστική συνάρτηση Herglotz.

Απόδειξη:

Από την πληρότητα του συνόλου $\Phi_m^{e,i}, \Psi_m^{e,i}$ των ιδιοδιανυσμάτων Navier, θα έχουμε

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \{a_m \Phi_m^i(\mathbf{r}) + b_m \Psi_m^i(\mathbf{r})\} \quad (173)$$

Οι σχέσεις (128) και (129) δίνουν την αναπαράσταση του συνόλου των εσωτερικών ιδιοδιανυσμάτων Navier ως υπέρθεση επίπεδων κυμάτων και αν αυτές αντικατασταθούν στην (173) και μετά από εκτέλεση πράξεων, θα προκύψει η (172), όπου \mathbf{L}, \mathbf{T} δίνονται στις σχέσεις (153) και (154).

Για το αντίστροφο, η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} της σχέσης (172), με \mathbf{L}, \mathbf{T} να δίνονται στις σχέσεις (153) και (154), επαληθεύει την φασματική εξίσωση και την συνθήκη Herglotz: το ανάπτυγμα (173) συγκλίνει ομοιόμορφα (Λήμμα 3.2.3) και με επιχειρήματα ορθογωνιότητας θα προκύψει η σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \int_{C(0,R)} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 r dr d\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^R \left| a_m k_p J_n'(k_p r) + b_m \frac{im}{r} J_n(k_s r) \right|^2 r dr + \right. \\ \left. \frac{1}{R} \int_0^R \left| a_m \frac{im}{r} J_m(k_p r) + b_m k_s J_n'(k_s r) \right|^2 r dr \right\} \quad (174) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις για τις συναρτήσεις Bessel:

$$J_m'(x) = \frac{1}{2} J_{m-1}(x) - \frac{1}{2} J_{m+1}(x)$$

$$\frac{J_m(x)}{x} = \frac{1}{2m} J_{m-1}(x) + \frac{1}{2m} J_{m+1}(x)$$

(όπου ο τόνος στον πρώτο τύπο δηλώνει παραγωγήιση)

τότε θα μπορούν να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα του δευτέρου μέλους της σχέσης (174), συναρτήσει της σταθεράς

$$M = \sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_0^R [J_m(kr)]^2 r dr < +\infty \quad (175)$$

Κάνοντας πράξεις, θα προκύψει:

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{C(0,R)} |\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2 r dr d\varphi \leq 4M \left(k_p \|\mathbf{L}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 + k_s \|\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})\|_{L^2[0,2\pi]}^2 \right) \quad (176)$$

και δεδομένου ότι $\mathbf{L}, \mathbf{T} \in L^2[0, 2\pi]$ έπεται ότι η συνάρτηση \mathbf{u} θα ικανοποιεί την συνθήκη Herglotz. □

3.4 Πυκνότητα του συνόλου των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz

Για την πυκνότητα του συνόλου των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz υπάρχει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.A: Έστω $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ μια κλασική λύση της φασματικής εξίσωσης Navier (12) σε φραγμένο και συνεκτικό χωρίο D_1 , με λείο σύνορο $\partial D \in C^{2,\alpha}$, όπου με $C^{2,\alpha}$ ο χώρος των δύο φορές Hölder συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων με εκθέτη α , όπου $0 < \alpha \leq 1$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\mathbf{u}(\mathbf{r}) \in C^{2,\alpha}(\bar{D}_1)$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, θα υπάρχει μια ελαστική συνάρτηση Herglotz $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, τέτοια ώστε

$$\max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_1} |\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})| \leq \varepsilon \quad (177)$$

Αντίστοιχη σχέση ισχύει και για τον τελεστή τάσεων T , δηλαδή

$$\max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_1} |T\mathbf{u}(\mathbf{r}) - T\mathbf{v}(\mathbf{r})| < \varepsilon \quad (178)$$

Απόδειξη:

Από το θεώρημα ανάλυσης του Helmholtz (15), το κυματικό πεδίο \mathbf{u} γράφεται

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{r})$$

όπου \mathbf{u}^p είναι η αστρόβιλη συνιστώσα και \mathbf{u}^s η σωληνοειδής.

Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις Herglotz είναι πυκνές στον χώρο των κλασικών λύσεων μιας εξίσωσης Helmholtz [7], έπεται ότι για κάθε $\varepsilon_\alpha > 0$ θα υπάρχουν κυματικές συναρτήσεις Herglotz $\mathbf{v}^p(\mathbf{r})$ και $\mathbf{v}^s(\mathbf{r})$, τέτοιες ώστε

$$\max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_1} |u_i^\alpha(\mathbf{r}) - v_i^\alpha(\mathbf{r})| \leq \varepsilon_\alpha, \quad \alpha = p, s \quad (179)$$

με $\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{u}_i^\alpha(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i$, $\mathbf{v}^\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{v}_i^\alpha(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{x}}_i$, $\alpha = p, s$ και $\hat{\mathbf{x}}_i$, $i = 1, 2$ είναι τα μοναδιαία

διανύσματα.

Από τις σχέσεις (177), (179) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_i} |\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})| &= \max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_i} |\mathbf{u}^p(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{r}) - \mathbf{v}^p(\mathbf{r}) - \mathbf{v}^s(\mathbf{r})| \\ &\leq \max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_i} |\mathbf{u}^p(\mathbf{r}) - \mathbf{v}^p(\mathbf{r})| + \max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_i} |\mathbf{u}^s(\mathbf{r}) - \mathbf{v}^s(\mathbf{r})| \\ &= \sum_{i=1}^2 \max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_i} |u_i^p(\mathbf{r}) - v_i^p(\mathbf{r})| + \sum_{i=1}^2 \max_{\mathbf{r} \in \bar{D}_i} |u_i^s(\mathbf{r}) - v_i^s(\mathbf{r})| \\ &\leq \varepsilon_p + \varepsilon_s = \varepsilon \end{aligned} \quad (180)$$

□

3.5 Εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή θα γίνει εφαρμογή των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz σε αντίστροφα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων. Ιδιαίτερα γίνεται παρουσίαση ενός αλγορίθμου αντιστροφής, για τον προσδιορισμό του σχήματος του σκεδαστή και η ιδέα παρουσιάστηκε στην εργασία [5] και στην συνέχεια επεκτάθηκε στην εργασία [23], για την περίπτωση της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας. Συγκεκριμένα, στην μέθοδο αυτή θα πρέπει να γνωρίζουμε τα πλάτη σκέδασης (διαμήκες και εγκάρσιο) και την εξίσωση του κοντινού πεδίου (συνάρτηση της θεμελιώδους λύσης). Δεδομένου ότι το σύνολο των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz είναι πυκνό στον χώρο των κλασικών λύσεων Navier, έπεται ότι οι κυματικές συναρτήσεις Herglotz προσεγγίζουν την εσωτερική λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών. Άρα το πρόβλημα προσδιορισμού του σχήματος του σκεδαστή ανάγεται στην εύρεση ενός ζεύγους πυκνοτήτων $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις του μακρινού πεδίου. Τότε, η επιφάνεια του σκεδαστή θα μπορεί να προσδιοριστεί από τα σημεία εκείνα, έστω y_0 , που πλησιάζουν ‘από μέσα’ το σύνορο του σκεδαστή⁴ και στα οποία η νόρμα L^2 των πυκνοτήτων απειρίζεται.

⁴ Τα σημεία αυτά ανήκουν στα λεγόμενα ‘χωρία Herglotz’

Πιο αναλυτικά για τον αλγόριθμο αντιστροφής, οι Colton and Kirsch ασχολήθηκαν με την περίπτωση μη διαπερατού σκεδαστή στην ακουστική και προσδιόρισαν τα πλάτη σκέδασης

$\mathbf{u}_\infty(\hat{x}; \mathbf{d})$ για $\hat{x}, \mathbf{d} \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$, αφού έλυσαν την ολοκληρωτική εξίσωση του μακρινού πεδίου

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_\infty(\hat{x}; \mathbf{d}) g(\mathbf{d}) ds(\mathbf{d}) = e^{-ik\hat{x} \cdot y_0}, \hat{x} \in \Omega \quad (181)$$

όπου

k : κυματικός αριθμός

y_0 : εσωτερικό σημείο του σκεδαστή και

$g = g(\cdot ; y_0)$: συνάρτηση της οποίας η νόρμα L^2 απειρίζεται, καθώς $y_0 \rightarrow \partial D^-$.

Έτσι πέτυχαν την ανακατασκευή του σχήματος του σκεδαστή, προσδιορίζοντας τα πλάτη σκέδασης για αρκετές γωνίες, είτε πρόσπτωσης, είτε παρατήρησης, ομοιόμορφα κατανομημένες γύρω από αυτόν.

Όσον αφορά στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα, ανάλογα με τα παραπάνω, θα πρέπει αρχικά να δοθούν οι εξισώσεις του μακρινού πεδίου και αυτή του κοντινού πεδίου. Έτσι για τα προβλήματα συνοριακών τιμών με συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann, οι εξισώσεις του μακρινού πεδίου δίνονται από τις σχέσεις [23]:

$$\frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} \hat{r} \otimes \hat{r} e^{-ik_p \hat{r} \cdot y_0} = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^p(\hat{r}; \hat{d}) \cdot [\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0)] ds(\hat{d}) \quad (182)$$

$$\frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{r} \otimes \hat{r}) e^{-ik_s \hat{r} \cdot y_0} = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^s(\hat{r}; \hat{d}) \cdot [\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0)] ds(\hat{d}) \quad (183)$$

όπου

$$\frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} \hat{r} \otimes \hat{r} e^{-ik_p \hat{r} \cdot y_0} \quad (184)$$

και

$$\frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} (\tilde{\mathbf{I}} - \hat{r} \otimes \hat{r}) e^{-ik_s \hat{r} \cdot y_0} \quad (185)$$

είναι τα πλάτη σκέδασης για το διαμήκες και για το εγκάρσιο τμήμα της θεμελιώδους λύσης $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, y_0)$ στο σημείο $y_0 \in D_i$ αντίστοιχα.

Έπεται ότι η εξίσωση του κοντινού πεδίου θα είναι [23]:

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, y_0) = \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^{sc}(\hat{r}; \hat{d}) \cdot \left[\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0) \right] ds(\hat{d}) \quad (186)$$

Εδώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι τιμές των πυκνοτήτων $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}$ δεν είναι σταθερές, αλλά εξαρτώνται από την θέση των σημείων $y_0 \in D_i$ και $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus D_i$.

Η ύπαρξη ζεύγους λύσεων $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}$, που ικανοποιούν τις εξισώσεις (182) και (183), εξασφαλίζεται από το παρακάτω θεώρημα, που αφορά την περίπτωση προβλημάτων, με συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Neumann.

Θεώρημα 3.5.A: Έστω D_i ένα απλό και συνεκτικό χωρίο και έστω επίσης ότι $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$, όπου $\sigma(D_i)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του ομογενούς προβλήματος, με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann. Αν επιπλέον η δυαδική λύση $\tilde{\mathbf{u}}^{tot}$ ⁵ της (13) ικανοποιεί μία από τις συνθήκες του σκληρού σκεδαστή ή της κοιλότητας, επί του συνόρου ∂D , τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $y_0 \in D_i$, θα υπάρχει ζευγάρι δυαδικών συναρτήσεων $\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0), \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0) \in L^2[0, 2\pi]$, έτσι ώστε να ισχύουν οι προσεγγιστικές εξισώσεις του μακρινού πεδίου, δηλαδή

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^p(\hat{r}; \hat{d}) \cdot \left[\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0) \right] ds(\hat{d}) - \tilde{\Gamma}_\infty^p(\mathbf{r}, y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} + \\ & \left\| \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^s(\hat{r}; \hat{d}) \cdot \left[\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0) \right] ds(\hat{d}) - \tilde{\Gamma}_\infty^s(\mathbf{r}, y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} < \varepsilon \end{aligned} \quad (187)$$

και

$$\left\| \tilde{\mathbf{L}}(\cdot; y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} \rightarrow +\infty \quad (188)$$

$$\left\| \tilde{\mathbf{T}}(\cdot; y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} \rightarrow +\infty \quad (189)$$

για $y_0 \rightarrow \partial D$, όπου τα $\tilde{\Gamma}_\infty^p(\mathbf{r}, y_0), \tilde{\Gamma}_\infty^s(\mathbf{r}, y_0)$ δίνονται από τις σχέσεις (184) και (185).

⁵ Η δυαδική λύση της φασματικής εξίσωσης Navier προκύπτει από την δυαδική μορφή της θεμελιώδους συνάρτησης Green

Απόδειξη:

Έστω ότι $\omega^2 \notin \sigma(D_i)$, όπου $\sigma(D_i)$ το φάσμα των ιδιοτιμών του ομογενούς προβλήματος.

Επομένως, είτε πρόκειται για πρόβλημα Dirichlet, δηλαδή

$$\begin{cases} (\Delta^* + \omega^2) \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{0}}, & \mathbf{r} \in D_i \\ \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, y_0) = \tilde{\mathbf{0}}, & \mathbf{r} \in \partial D \end{cases} \quad (190)$$

είτε πρόκειται για πρόβλημα Neumann, δηλαδή

$$\begin{cases} (\Delta^* + \omega^2) \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{0}}, & \mathbf{r} \in D_i \\ T\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) + T\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, y_0) = \tilde{\mathbf{0}}, & \mathbf{r} \in \partial D \end{cases} \quad (191)$$

θα έχει μοναδική λύση.

Δεδομένου ότι το σύνολο των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz είναι πυκνό στον χώρο των κλασικών λύσεων Navier, έπεται ότι η λύση $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r})$ της εξίσωσης Navier του εσωτερικού συνοριακού προβλήματος τιμών μπορεί να προσεγγιστεί με την maximum-norm μιας δυαδικής κυματικής συνάρτησης Herglotz και παρόμοια ισχύουν για την δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων πάνω στην λύση.

Τότε, για την $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r})$ θα υπάρχουν δυαδικές συναρτήσεις $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}} \in L^2[0, 2\pi]$, που αποτελούν πυρήνες για τις κυματικές συναρτήσεις Herglotz $\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r})$ και για το πρόβλημα Dirichlet θα ισχύει

$$\max_{\mathbf{r} \in \tilde{D}_i} \left| \tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r}) - \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) \right| < \varepsilon, \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \quad (192)$$

και αντίστοιχα για το πρόβλημα Neumann θα ισχύει

$$\max_{\mathbf{r} \in \tilde{D}_i} \left| T\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r}) - T\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{r}) \right| < \varepsilon, \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \quad (193)$$

Αν τώρα στις σχέσεις (192) και (193) εισάγουμε και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες των προβλημάτων (190) και (191), αυτές θα δώσουν

$$\max_{\mathbf{r} \in \partial D} \left\| \tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, y_0) \right\| < \varepsilon \quad (194)$$

$$\max_{\mathbf{r} \in \partial D} \left\| T\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r}) + T\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, y_0) \right\| < \varepsilon \quad (195)$$

Χρησιμοποιώντας τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα (63) και (64) του διαμήκους και του εγκάρσιου τμήματος της θεμελιώδους λύσης, θα προκύψει η σχέση (187).

Αν επιπλέον $y_0 \rightarrow \partial D$ και δεδομένου ότι η θεμελιώδης λύση είναι μη φραγμένη πάνω στο σύνορο, οι σχέσεις (194) και (195) δίνουν ότι και οι συναρτήσεις $\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r}), T\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r})$ απειρίζονται επί του συνόρου και άρα και οι δυαδικές $\tilde{\mathbf{L}}, \tilde{\mathbf{T}}$ θα είναι μη φραγμένες επί του συνόρου. Μόλις αποδείχθηκαν και οι σχέσεις (188), (189). \square

Στην περίπτωση του διαπερατού προβλήματος, το παραπάνω θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3.5.B: Έστω D_1 συνεκτικό χωρίο. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $y_0 \in D_1$, θα υπάρχει ζευγάρι δυαδικών συναρτήσεων $\tilde{\mathbf{L}}(\cdot; y_0), \tilde{\mathbf{T}}(\cdot; y_0) \in L^2[0, 2\pi]$, έτσι ώστε να ισχύουν οι προσεγγιστικές εξισώσεις του μακρινού πεδίου, δηλαδή

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^p(\hat{r}; \hat{d}) \cdot \left[\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0) \right] ds(\hat{d}) - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_\infty^p(\mathbf{r}, y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} + \\ & \left\| \int_0^{2\pi} \tilde{\mathbf{u}}_\infty^s(\hat{r}; \hat{d}) \cdot \left[\tilde{\mathbf{L}}(\hat{d}; y_0) + \tilde{\mathbf{T}}(\hat{d}; y_0) \right] ds(\hat{d}) - \tilde{\mathbf{\Gamma}}_\infty^s(\mathbf{r}, y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} < \varepsilon \end{aligned} \quad (196)$$

$$\text{με} \quad \lim_{y_0 \rightarrow \partial D} \left\| \tilde{\mathbf{L}}(\cdot; y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} = \infty \quad (197)$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow \partial D} \left\| \tilde{\mathbf{T}}(\cdot; y_0) \right\|_{L^2[0, 2\pi]} = \infty \quad (198)$$

και αν $\tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r})$ είναι μια ελαστική συνάρτηση Herglotz, τότε

$$\lim_{y_0 \rightarrow \partial D} \left\| \tilde{\mathbf{v}}_{\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\mathbf{T}}}(\mathbf{r}) \right\|_{L^2[D_1]} = \infty \quad (199)$$

3.6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία δίνεται η φασματική εξίσωση Navier, που αποτελεί την βασική εξίσωση της γραμμικής ελαστικότητας στο δισδιάστατο επίπεδο, καθώς επίσης και η θεμελιώδης λύση της. Γίνεται αναφορά στον επιφανειακό τελεστή τάσεων, στα σημαντικότερα προβλήματα συνοριακών τιμών και στις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze. Επίσης παρουσιάζονται οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις της εσωτερικής και της εξωτερικής λύσης

της εξίσωσης της ελαστικότητας. Στην συνέχεια, ορίζονται τα βασικά ευθέα προβλήματα σκέδασης και με την βοήθεια των παραπάνω ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων, δίνονται οι τύποι του μακρινού πεδίου για τα προβλήματα Dirichlet, Neumann, Robin και του διαπερατού σκεδαστή. Το σκεδασμένο πεδίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος. Μάλιστα, οι συγκεκριμένες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις αποτελούν μοναδική λύση του προβλήματος σκέδασης.

Στην επόμενη ενότητα γίνεται αναφορά στις ελαστικές συναρτήσεις Herglotz και στην συνθήκη χωρικής εξασθένισης της, στις διανυσματικές αρμονικές και στα ιδιοδιανύσματα Navier για την δισδιάστατη ελαστικότητα. Αποδεικνύεται ότι αποτελούν σύνολο πλήρες και γραμμικά ανεξάρτητο στον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων επί του συνόρου ενός χωρίου και επιπλέον συγκλίνουν ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^2 . Ακολουθεί η ασυμπτωτική μορφή των ιδιοδιανυσμάτων Navier και των ελαστικών συναρτήσεων Herglotz και η σύνδεσή τους με τα πρότυπα ακτινοβολίας, που παράγουν. Επιπλέον δίνεται ο ορισμός της νόρμας Herglotz και αποδεικνύεται η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των λύσεων Herglotz και των πλατών σκέδασης. Το θεώρημα αναπαράστασης εξηγεί ότι μια ελαστική συνάρτηση Herglotz μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση επίπεδων κυμάτων και οι συναρτήσεις αυτές είναι πυκνές στον χώρο των κλασικών λύσεων της εξίσωσης του Navier. Τέλος δίνεται μια εφαρμογή για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης και συγκεκριμένα αναφέρεται ότι η ανακατασκευή της άγνωστης επιφάνειας του σκεδαστή επιτυγχάνεται μέσω του προσδιορισμού ζεύγους πυκνοτήτων, που ικανοποιούν κατά προσέγγιση τις εξισώσεις του μακρινού πεδίου και το κοντινό πεδίο.

Βιβλιογραφία

- [1] Arens T., *The Scattering of plane elastic waves by a one-dimensional periodic surface*, Math Methods Appl. Sci. 22 (1999) 55-72
- [2] Aydin K. and Hizal A., *On the completeness of the spherical vector wave functions*, J. Math. Anal. Appl. 117 (1986) 428-440
- [3] Banaugh R.P. *Application of integral representations of displacement potentials in elastodynamics*, Bull. Seism. Soc. Amer. 54, 1073 (1964)
- [4] Barratt P.J. and Collins W.D., *The scattering cross-section of an obstacle in an electric solid for plane harmonic waves*, Proc. Camb. Philos. Soc. 61, 969 (1965)
- [5] Colton D. and A. Kirsch A., *A simple method for solving the inverse scattering problems in the resonance region*, Inverse Problems 12 (1996) 383-393
- [6] Colton D. and Kress R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer, New York (1992)
- [7] Colton D. and Monk P., *A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic acoustic waves in the resonance region*, SIAM J. Appl. Math. 45 (1985) 1039-1053
- [8] Dasio G. and Rigou Z., *Elastic Herglotz functions*, SIAM J. Appl. Math. 55 (1995) 1345-1361
- [9] Hartman P., *On the solutions of $\Delta V + V = 0$ in an exterior region*, Math. Z. 71 (1959) 251-257
- [10] Hartman P. and Wilcox C., *On solutions of the Helmholtz equation in exterior domains*, Math. Z. 75 (1961) 228-255
- [11] Καρβέλη Αικατερίνη, *Μέθοδοι Σκέδασης σφαιρικών ελαστικών κυμάτων*, Διδακτορική Διατριβή, Πάτρα (2001)
- [12] K. Kiriaki and Sevroglou V., *“Integral Equations Methods in Obstacle Elastic Scattering”*, Bulletin of the Greek Mathematical Society, 2000

- [13] Kiriaki K. and Sevroglou V., *On Herglotz functions in two-dimensional linear elasticity*.
In: Scattering Theory and Biomedical Engineering Modeling and Applications, Proc. Of the
4th Internat. Workshop (1999) pp. 151-158
- [14] Kupradze V. D., *Dynamical problems in elasticity*, In: Progress in Solid Mechanics. North
Holland, Amsterdam (1979)
- [15] Kupradze V.D., *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, North Holland,
Amsterdam, (1963)
- [16] Kupradze V.D., *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and
Thermo-elasticity*, North-Holland, Amsterdam (1979)
- [17] Lawrence E. G., *Diffraction of elastic waves by a rigid inclusion*, Quart. J. Mech. Appl.
Math. XXV, 161 (1972)
- [18] Lax P.D. and Phillips R.S., “*Scattering Theory*”, Academic Press, New-York, (1967)
- [19] Mardesen J. E. and Hughens T. J. R., “*Mathematical Foundations of Elasticity*”, Prendice-
Hall, Englewood Cliffs, (1983)
- [20] Martin P. A., *On the scattering of elastic waves by an elastic inclusion in two dimensions*,
Quart. J. Mech. Appl.Math.43 (1990) 275-292
- [21] Morse P.M. and Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics*, Vols. I, II. McGraw-Hill,
New York (1953)
- [22] Pao Y. H. and Varatharajulu, *Huygens’ principle, radiation conditions and integral
formulas for the scattering of elastic waves*, J. Acoust. Soc. Amer. 59, 1361 (1976)
- [23] Σεβρόγλου Βασίλειος, *Οι συναρτήσεις Herglotz στην δισδιάστατη ελαστικότητα- Εφαρμογές
στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης*, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα (2000)
- [24] Twersky V., *Certain transmission and reflection theorems*, J. Appl. Phys. 25, 859 (1954)
- [25] Twersky V., *Rayleigh scattering*, Appl. Opt. 3 1150 (1964)
- [26] Wheeler L. T. and Sternberg E., *Some theorems in classical elastodynamics*, Arch. Rat.
Mech. Anal. 31, 51 (1968)