



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
Μεταπτυχιακές σπουδές στα Μαθηματικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ BLOCKCHAIN

ΣΕΡΦΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

(Α.Μ:156379)

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ Α΄: ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ Β΄: ΠΟΛΙΤΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΠΑΤΡΑ
ΙΟΥΝΙΟΣ, 2024



ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η τεχνολογία blockchain έχει επεκταθεί ραγδαία στην καθημερινότητα, καθώς εφαρμόζεται σε αρκετούς τομείς ,όπως τα κρυπτονομίσματα, δημόσιες υπηρεσίες και υγειονομική περίθαλψη. Η άνθιση αυτή οφείλεται στην ασφάλεια ,στην σταθερότητα ,στην εγκυρότητα και στην ανεξαρτησία των συναλλαγών που παρέχει. Το γεγονός αυτό δημιουργεί την ανάγκη μελέτης των συστημάτων blockchain και ανάπτυξης μαθηματικών μοντέλων για την ανάλυση απόδοσης της αλυσίδας και την βελτιστοποίηση της. Η εργασία αυτή ασχολείται με την εφαρμογή μαρκοβιανών μοντέλων και θεωρίας συστημάτων εξυπηρέτησης στα συστήματα blockchain με στόχο την αποτίμηση απόδοσης τους. Δημιουργούμε ένα μοντέλο εξυπηρέτησης το οποίο αποτελείται από δυο στάδια εξυπηρέτησης ώστε να εκφράσουμε καλύτερα την διαδικασία εξόρυξης του block και την διαδικασία δημιουργίας του blockchain. Με χρήση της πινακογεωμετρικής μεθόδου παρέχουμε τα βασικά μέτρα απόδοσης την αλυσίδα τα οποία είναι ο μέσος αριθμός συναλλαγών στην ούρα, ο μέσος αριθμός συναλλαγών στο block και τέλος ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης μιας συναλλαγής. Παρέχουμε επίσης αριθμητικά παραδείγματα για να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά συμπεράσματα μας. Παρόλο που το μοντέλο που θα αναπτυχτεί είναι απλοϊκό διότι αναφέρεται σε διαδικασία αφίξεων Poisson με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης ,αποτελεί την βάση της ανάλυσης της αλυσίδας και ανοίγει τον δρόμο για την δημιουργία νέων συστημάτων εξυπηρέτησης πιο σύνθετων με στόχο την βέλτιστη χρήση του blockchain.



ABSTRACT

Nowadays Blockchain covers a wide spectrum of applications ranging from cryptocurrency, public services and healthcare. Blockchain has rapidly developed due to the stability, safety, validity and the independency of the transactions that provides. So it is very crucial to study the blockchain systems and create mathematical models for performance analysis and optimization of them. In this paper we develop queueing theory of blockchain systems and provide system performance evaluation. We design a Markovian service queueing system with two stages of service in order to express better the mining process and the creation of a new blockchain. By using the matrix-geometric method we obtain the key performance measures, which is the average number of transactions in the queue, the average number of transactions in the block and the average transaction-confirmation time. Also we use numerical examples to verify computability of our theoretical results. Finally this model may be simple only under Poisson or exponential assumptions, but it may be lead to further promising research in queueing theory of blockchain systems, in order to optimize their performance.



Περιεχόμενα

Εισαγωγή	7
1.1 Λειτουργία του συστήματος blockchain.....	7
1.2 Χρήση blockchain στην καθημερινότητα.....	9
1.2.1 Κρυπτονομίσματα.....	9
1.2.2 Υγειονομική Περίθαλψη.....	9
1.2.3 Ψηφορορία μέσω Blockchain	10
1.2.4 Gaming.....	10
1.3 Χαρακτηριστικά συστημάτων εξυπηρέτησης.....	10
1.3.1 Συντομογραφίες των συστημάτων εξυπηρέτησης.....	11
1.4 Μοντελοποίηση του blockchain	11
1.5 Βασικά μαρκοβιανά μοντέλα.....	13
1.5.1 Σύστημα Εξυπηρέτησης M/M/1	14
1.5.2 Σύστημα Εξυπηρέτησης M/G/1	16
1.5.3 Σύστημα Εξυπηρέτησης M/M/c	17
Κεφάλαιο 2	19
Μεθοδολογικό πλαίσιο	19
2.1 Διαδικασίες QBD.....	19
2.1.1 Μηχάνημα με χρόνο ενεργοποίησης	19
2.1.2 Γενικές διαδικασίες QBD (Quasi Birth-Death process).....	22
2.1.3 Συνθήκη Ευστάθειας.....	24
2.1.4 Πινακογεωμετρική μέθοδος.....	25
2.1.4.1 Παράδειγμα αναλυτικής λύσης του πίνακα R	27
2.2 Quasi-skip-free (QSF).....	28
2.2.1 Ένα μοντέλο εξυπηρέτησης κατά ομάδες που υπόκειται σε βλάβες (Batch service subject to breakdowns)	29
2.2.2 Γενικές QSF διαδικασίες	31
2.2.3 Συνθήκη Ευστάθειας QSF διαδικασιών.....	33
2.2.4 Πινακογεωμετρική μέθοδος.....	34
Κεφάλαιο 3	36
Ανάλυση του συστήματος blockchain με χρήση της πινακογεωμετρικής μεθόδου.....	36



3.1 Περιγραφή Μοντέλου	36
3.2 Μοντελοποίηση συστήματος	37
3.3 Συνθήκη ευστάθειας και η στάσιμη κατανομή	39
3.3.1 Συνθήκη ευστάθειας	39
3.3.2 Στάσιμη Κατανομή	41
3.4 Ανάλυση απόδοσης.....	42
3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα	44
Κεφάλαιο 4	48
Επεκτάσεις του συστήματος εξυπηρέτησης στην μελέτη των συστημάτων blockchain.....	48
4.1 Επεκτάσεις συστήματος.....	48
4.1.1 Σύστημα με Erlang χρόνους εξυπηρέτησης.....	48
4.1.2 Σύστημα της μορφής MAP/PH/1.....	49
4.2 Ζητήματα για περαιτέρω έρευνα	51
Βιβλιογραφικές Αναφορές.....	52



Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1-1: Απεικόνιση του blockchain ως ένα σύστημα εξυπηρέτησης.....	13
Εικόνα 1-2:Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.....	14
Εικόνα 1-3:Πίνακας ρυθμού μετάβασης.....	15
Εικόνα 1-4:Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.....	17
Εικόνα 1-5:Πίνακας ρυθμών μετάβασης	17
Εικόνα 2-1:Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης	20
Εικόνα 2-2:Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης	30
Εικόνα 3-1:Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης	37
Εικόνα 3-2:Πίνακας ρυθμών μετάβασης	38
Εικόνα 3-3:Υποπίνακες του πίνακα Q	38
Εικόνα 3-4:Πίνακας ρυθμών μετάβασης εντός του επιπέδου 0	38
Εικόνα 3-5:Υποπίνακες του πίνακα Q	39
Εικόνα 3-6:Πίνακας ρυθμών μετάβασης εντός των επιπέδων.....	39
Εικόνα 3-7: Το μέσο πλήθος καταγραφών στην ουρά συναρτήσσει του μ_1 για τις διάφορες τιμές του b	45
Εικόνα 3-8: Το μέσο πλήθος καταγραφών στο block συναρτήσσει του μ_1 για τις διάφορες τιμές του b	46
Εικόνα 3-9: Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα συναρτήσσει του μ_1 για τις διάφορες τιμές του b	47
Εικόνα 3-10: Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα συναρτήσσει του b για τις διάφορες τιμές του λ	47



Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2 -1:Πίνακας αντιστοιχίας απλής και διανυσματικής προσέγγισης	22
Πίνακας 2-2:Πίνακας ρυθμών μετάβασης	23
Πίνακας 2-3:Πίνακας ρυθμών μετάβασης	27
Πίνακας 2-4:Πίνακας ρυθμών μετάβασης QSF προς τα αριστερά.....	32
Πίνακας 2-5:Πίνακας ρυθμών μετάβασης QSF προς τα δεξιά.....	32

Κατάλογος Αλγορίθμων

Αλγόριθμος 2-1:Υπολογισμός του πίνακα R.....	27
Αλγόριθμος 2-2: Υπολογισμός του πίνακα R.....	34



Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Λειτουργία του συστήματος blockchain

Το blockchain (Nakamoto,2008) είναι ένα ειδικό είδος βάσης δεδομένων, που ονομάζεται επίσης αποκεντρωμένο ψηφιακό καθολικό, το οποίο διατηρείται από πολλούς υπολογιστές καταναμημένους σε όλο τον κόσμο. Τα δεδομένα του blockchain οργανώνονται σε block, τα οποία είναι χρονολογικά διατεταγμένα και ασφαλισμένα με κρυπτογράφηση.

Η αποκέντρωση στο blockchain αναφέρεται στην ιδέα ότι η ισχύς ελέγχου και λήψης αποφάσεων ενός δικτύου κατανέμεται μεταξύ των χρηστών του, αντί να ελέγχεται από μια μεμονωμένη οντότητα, όπως μια κυβέρνηση ή μια εταιρεία. Αυτό μπορεί να είναι χρήσιμο σε περιπτώσεις στις οποίες οι άνθρωποι πρέπει να συντονιστούν με αγνώστους ή στις οποίες θέλουν να διασφαλίσουν την ασφάλεια και την ακεραιότητα των δεδομένων τους.

Σε ένα αποκεντρωμένο δίκτυο blockchain, δεν υπάρχει κεντρική αρχή ή μεσάζων που να ελέγχει τη ροή δεδομένων ή συναλλαγών. Αντ' αυτού, οι συναλλαγές επαληθεύονται και καταγράφονται από ένα καταναμημένο δίκτυο υπολογιστών, που ονομάζονται κόμβοι, οι οποίοι συνεργάζονται για να διατηρήσουν την ακεραιότητα του δικτύου και έτσι η τεχνολογία αυτή παρέχει ασφαλείς και άμεσες peer to peer συναλλαγές.

Όταν ένας χρήστης ξεκινά μια συναλλαγή, όπως την αποστολή ενός συγκεκριμένου ποσού μ κρυπτονομισμάτων σε άλλο χρήστη, αυτή η συναλλαγή μεταδίδεται στο δίκτυο. Κάθε κόμβος ταχτοποιεί τη συναλλαγή επαληθεύοντας ψηφιακές υπογραφές και άλλα δεδομένα συναλλαγής. Μόλις επαληθευτεί η συναλλαγή από τους εξορύκτες (miners), προστίθεται σε ένα block μαζί με άλλες συναλλαγές που έχουν ήδη επαληθευτεί. Τα block συνδέονται μεταξύ τους χρησιμοποιώντας κρυπτογραφικές μεθόδους και σχηματίζουν το blockchain. Η διαδικασία της επαλήθευσης συναλλαγών και της προσθήκης τους στο blockchain γίνεται μέσω ενός μηχανισμού ομοφωνίας, ενός συνόλου κανόνων που διέπουν τον τρόπο με τον



οποίο οι κόμβοι στο δίκτυο φτάνουν σε συμφωνία σχετικά με την κατάσταση του blockchain και την εγκυρότητα των συναλλαγών.(Sarmah, S. S. ,2018. Taskinsoy, J. ,2019.).

Η κρυπτογράφηση είναι το κλειδί για να διατηρεί το blockchain ένα αρχείο συναλλαγών το οποίο είναι ασφαλές, διαφανές και ανθεκτικό σε παραβιάσεις. Για παράδειγμα, το hashing είναι μια σημαντική κρυπτογραφική μέθοδος που χρησιμοποιείται σε blockchain. Είναι μια κρυπτογραφική διαδικασία που μετατρέπει μια εισροή οποιουδήποτε μεγέθους σε μια σειρά χαρακτήρων σταθερού μεγέθους συναρτήσεις hash που χρησιμοποιούνται στα blockchain. Είναι γενικά ανθεκτικές σε συγκρούσεις, πράγμα που σημαίνει ότι οι πιθανότητες εύρεσης δύο τμημάτων δεδομένων που παράγουν την ίδια εκροή, είναι υπερβολικά μικρές.

Εξίσου σημαντικός με την κρυπτογράφηση είναι και ο μηχανισμός ομοφωνίας. Ο αλγόριθμος ομοφωνίας είναι ένας μηχανισμός που επιτρέπει στους χρήστες ή στις μηχανές να συντονίζονται σε ένα καταναμημένο περιβάλλον. Διασφαλίζει ότι όλοι οι κόμβοι στο δίκτυο έχουν το ίδιο αντίγραφο του καθολικού, το οποίο περιέχει ένα αρχείο όλων των συναλλαγών. Ας δούμε τους σημαντικότερους μηχανισμούς.(Oyinloyek κ.ά , 2021)

- Proof-of-Work;

Το Proof of Work (PoW) είναι ένας μηχανισμός ομοφωνίας που χρησιμοποιείται σε πολλά δίκτυα blockchain για την επαλήθευση των συναλλαγών και τη διατήρηση της ακεραιότητας του blockchain. Είναι ο αρχικός μηχανισμός ομοφωνίας που χρησιμοποιείται από το Bitcoin.

Στο PoW, οι εξορύκτες ανταγωνίζονται για να λύσουν ένα σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα, προκειμένου να προσθέσουν το επόμενο block στο blockchain. Στη διαδικασία η οποία είναι γνωστή ως εξόρυξη, ο πρώτος εξορύκτης που λύνει το πρόβλημα ανταμείβεται με κρυπτονομίσματα. Οι εξορύκτες πρέπει να χρησιμοποιούν ισχυρούς υπολογιστές για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων για την εξόρυξη νέων νομισμάτων και την ασφάλεια του δικτύου. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η διαδικασία εξόρυξης απαιτεί σημαντικά ποσά υπολογιστικής ισχύος και, συνεπώς, ενέργειας.(Oyinloyek κ.ά,2021)

- Proof of Stake (PoS);

Το Proof of Stake (PoS) είναι ένας μηχανισμός ομοφωνίας που έχει σχεδιαστεί για να αντιμετωπίσει ορισμένα από τα μειονεκτήματα του Proof of Work (PoW). Σε ένα σύστημα PoS, αντί να ανταγωνίζονται οι εξορύκτες για την επίλυση σύνθετων μαθηματικών



προβλημάτων για την επικύρωση συναλλαγών και την προσθήκη νέων block στο blockchain, οι επικυρωτές επιλέγονται με βάση το ποσό των κρυπτονομισμάτων με το οποίο πραγματοποιούν "ενέργεια Staking" στο δίκτυο.

Οι επικυρωτές διακρατούν ένα συγκεκριμένο ποσό κρυπτονομισμάτων ως πρόσθετη εγγύηση ή "Stake", για να συμμετάσχουν στη διαδικασία συναίνεσης. Στη συνέχεια επιλέγονται τυχαία για να δημιουργήσουν νέα block και να επικυρώσουν συναλλαγές με βάση το μέγεθος της ενέργειας Staking τους. Οι επικυρωτές ανταμείβονται με προμήθεια συναλλαγής για τη δημιουργία νέων block και ως κίνητρο για να ενεργούν προς το συμφέρον του δικτύου.(Oyinloyek κ.ά, 2021)

Το πρόβλημα με το να λειτούργει ο κάθε εξορύκτης μόνος του είναι ότι υπάρχουν λιγότερες πιθανότητες για να εντοπίσει το σωστό hash ειδικά αν διαθέτει μικρό ποσοστό ισχύος .Το πρόβλημα αυτό λύνεται όμως με το pool εξόρυξης. Τα pool εξόρυξης είναι ομάδες εξορυκτών που συγκεντρώνουν τους πόρους τους (ισχύς hash) για να αυξήσουν την πιθανότητα να κερδίσουν ανταμοιβές block. Όταν το pool βρίσκει επιτυχώς ένα block, οι εξορύκτες στο pool μοιράζονται την ανταμοιβή ανάλογα με τον όγκο εργασίας που συνεισέφερε ο καθένας.

Στην επόμενη ενότητα θα αναφέρουμε μερικές χρήσεις του blockchain στην καθημερινότητα

1.2 Χρήση blockchain στην καθημερινότητα

1.2.1 Κρυπτονομίσματα

Πρόκειται για την κορυφαία χρήση του blockchain(Nakamoto,2008). Τα σύγχρονα κρυπτονομίσματα βασίζονται στην ανωνυμία, τη διαφάνεια, την αμεταβλητότητα και την ασφάλεια των ανοικτών λογιστικών βιβλίων (ή καθολικών) που βασίζονται στις αλυσίδες blockchain για να λειτουργήσουν ως ψηφιακά περιουσιακά στοιχεία που φέρουν αξία. Hassani, H., Huang, X., & Silva, E. (2018).

1.2.2 Υγεινομική Περίθαλψη

Η αρχιτεκτονική της βάσης δεδομένων blockchain είναι ιδανική για την αποθήκευση προσωπικών αρχείων υγείας. Οι χρήστες αποκτούν μόνιμη αποθήκευση για τα αρχεία υγείας



που είναι προσβάσιμα οπουδήποτε υπάρχει σύνδεση στο διαδίκτυο. Μπορούν να μοιράζονται την πρόσβαση με γιατρούς και ασφαλιστικές εταιρείες με απλές διαδικτυακές συναλλαγές και οι γιατροί με την κατάλληλη άδεια μπορούν να προσθέτουν νέα δεδομένα στο αρχείο.(Prokofieva, M., & Miah, S. J. ,2019).

1.2.3 Ψηφοφορία μέσω Blockchain

Είναι μια τέλεια εφαρμογή της τεχνολογίας blockchain σε μια υπάρχουσα ανάγκη. Με το blockchain για ψηφοφορία, η επαλήθευση της ταυτότητας του ψηφοφόρου είναι εγγυημένη με κρυπτογραφικού επιπέδου ασφάλεια. Το δίκτυο blockchain μπορεί να παρακολουθεί την ψηφοφορία, να κάνει την καταμέτρηση και να εγγυάται την ακεραιότητα του αποτελέσματος. (Tas, R., & Tanriöver, Ö. Ö,2020).

1.2.4 Gaming

Στον κόσμο των διαδικτυακών παιχνιδιών και τυχερών παιγνίων, η τεχνολογία blockchain μπορεί να παρέχει ένα αρχείο που καθορίζει την τυχαιότητα των ζαριών, των χειρών στο πόκερ ή των γεγονότων στο παιχνίδι. Το blockchain μπορεί να καταγράφει τις δυνάμεις των παικτών στα παιχνίδια ρόλων και τα κέρδη τους στον τζόγο.(Bastos, N. ,2020.)

Η αυξανόμενη χρήση του blockchain οδηγεί στην ανάγκη μαθηματικής μοντελοποίησης του. Παρακάτω θα αναφερθεί το σύστημα που θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία αυτή.

1.3 Χαρακτηριστικά συστημάτων εξυπηρέτησης

Η μοντελοποίηση του blockchain θα πραγματοποιηθεί με την βοήθεια της θεωρίας συστημάτων αναμονής. Τα συστήματα αυτά αποτελούνται από τα εξής μέρη (Prabhu, N. U. ,1997. Sztrik, J. ,2011.Song, X.S. ,2022, Fralix, B. ,2020) :

- 1.Τον χώρο αναμονής όπου τοποθετούνται οι αφίξεις που εισέρχονται στο σύστημα, Ο χώρος αυτός μπορεί να είναι περιορισμένης ή άπειρης χωρητικότητας.
2. Των αριθμό των υπάλληλων που εξυπηρετούν την ουρά.
3. Η διαδικασία αφίξεων. Δηλαδή το πιθανοθεωρητικό μοντέλο σύμφωνα με το οποίο πραγματοποιούνται οι αφίξεις. Δηλαδή οι αφίξεις μπορεί να εισέρχονται στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson, ή οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων μπορεί να ακολουθούν Erlang κατανομή. Επίσης ενδιαφερόμαστε και για τον αριθμό πελατών σε κάθε άφιξη.



4. Η διαδικασία εξυπηρέτησεων. Η διάρκεια εξυπηρέτησης, δηλαδή τον χρόνο που χρειάζεται ο υπάλληλος για να εξυπηρέτησε έναν πελάτη, συνήθως ακολουθεί μια κατανομή. Επιπλέον μελετάμε και τον πλήθος των πελατών που εξυπηρετούνται ταυτόχρονα.

5. Η πειθαρχία της ουράς, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο επιλέγεται ο επόμενος πελάτης που θα εξυπηρετηθεί, π.χ., FCFS (First Come First Served), LCFS (Last Come First Served), Processor Sharing (PS), κ.α..

1.3.1 Συντομογραφίες των συστημάτων εξυπηρέτησης

Ο συμβολισμός που έχει επικρατήσει είναι $X^W/Z^Y/n/K$ και προέρχεται από τον D.G.Kendall

Όπου :

X: Κατανομή αφίξεων

W; Αριθμός πελατών ανά άφιξη

Z: Κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης

W; Αριθμός πελατών ανά εξυπηρέτηση

n : Αριθμός υπαλλήλων στο σύστημα

K: Χωρητικότητα συστήματος.

1.4 Μοντελοποίηση του blockchain

Παρόλο που η τεχνολογία blockchain έχει σημειώσει αξιοσημείωτη πρόοδο όπως είδαμε, η πρόοδος στην μαθηματική μοντελοποίηση, ανάλυση και βελτιστοποίηση συστημάτων blockchain είναι δυσανάλογη. Στόχος της εργασίας είναι η ανάπτυξη μοντέλου θεωρίας ουρών αναμονής για τα συστήματα blockchain και η μελέτη των βασικών μέτρων απόδοσης,(Meng, T.,2021, Kawase, Y.,2017) όπως:

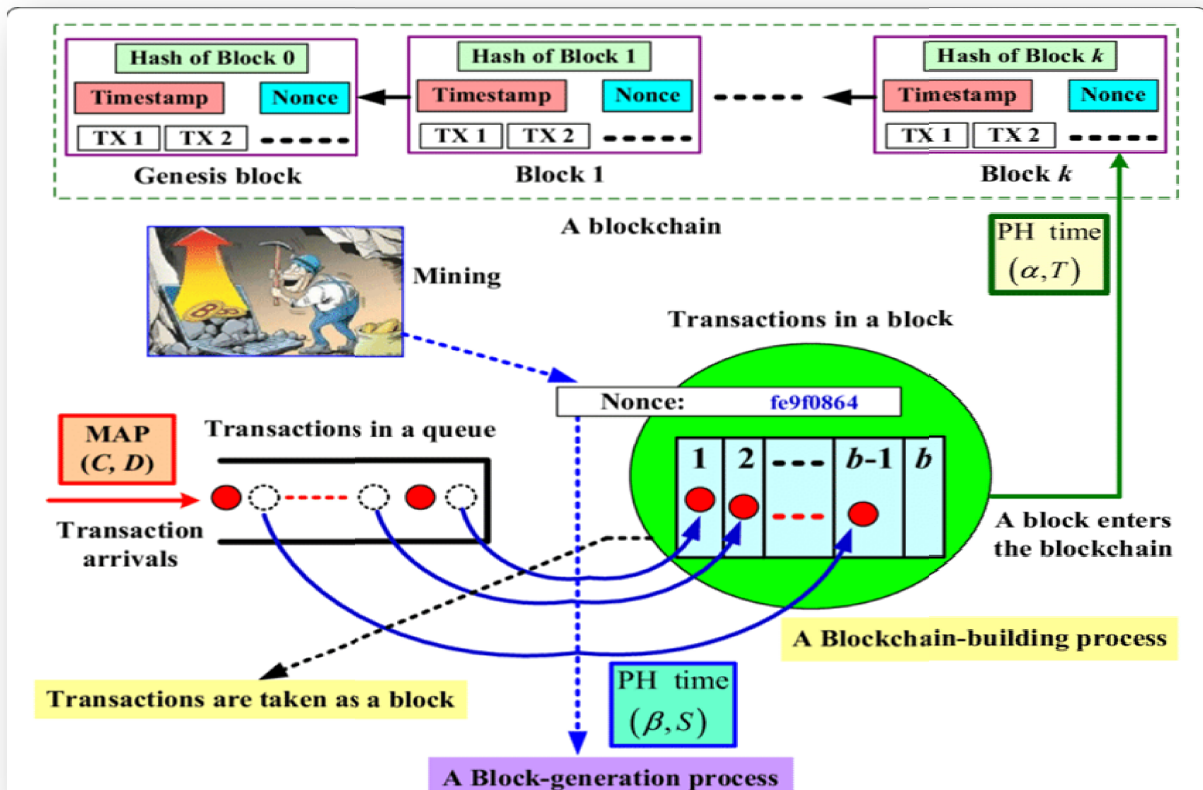
- ο μέσος χρόνος αναμονής στη ουρά,
- ο μέσος αριθμός συναλλαγών στο μπλοκ
- ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης οποιασδήποτε συναλλαγής.



Η μελέτη των βασικών αυτών μέτρων απόδοσης βοηθά επίσης στην βελτιστοποίηση της αλυσίδας. Τα βασικά μεθοδολογικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε είναι :

- Πολυδιάστατες Μαρκοβιανές διαδικασίες συνεχούς χρόνου: Αποτελούν μια από τις βασικότερες κλάσεις στοχαστικών διαδικασιών, οι οποίες έχουν την ιδιότητα της αμνησίας: δοθείσης της παρούσης κατάστασης του συστήματος μπορούμε να προβλέψουμε την μελλοντική.
- Πινακο-αναλυτικές μέθοδοι (matrix analytic methods): Παρέχουν μαθηματικά και αλγοριθμικά εργαλεία στην μοντελοποίηση περίπλοκων στοχαστικών συστημάτων. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν τη χρήση πινάκων για την αναπαράσταση της υποκείμενης πιθανοτικής δομής του συστήματος που μελετάται.
- Θεωρία συστημάτων αναμονής (queueing theory): Αποτελεί τον κλάδο των μαθηματικών που παρέχει μοντέλα για την αποτίμηση της επίδοσης συστημάτων που παρέχουν εξυπηρέτηση σε ζητήσεις που συμβαίνουν τυχαία.

Η μοντελοποίηση του blockchain σύμφωνα με τον Li κ.ά(2018) πραγματοποιείται με χρήση ενός συστήματος αναμονής με δύο φάσεις εξυπηρέτησης κατά ομάδες. Πρώτη φάση εξυπηρέτησης είναι η δημιουργία του block και δεύτερη φάση εξυπηρέτησης είναι η προσθήκη του block στο blockchain. Πιο συγκεκριμένα οι καταγραφές φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων (Poisson, MAP,...) και τοποθετούνται σε έναν χώρο αναμονής. Ακολούθως χρειάζονται επικύρωση από miners (1^η φάση). Ο χρόνος αυτός ακολουθεί μια συνεχή κατανομή (εκθετική, PH,...). Το πολύ b καταγραφές ορίζουν ένα block, το οποίο μετά θα διοχετευτεί στο δίκτυο (2^η φάση). Ο χρόνος που χρειάζεται ακολουθεί μια συνεχή κατανομή (εκθετική, PH,...). Υποθέτουμε ότι όλες οι εμπλεκόμενες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες. Στην απλούστερη μορφή όλες οι εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές είναι εκθετικά κατανομημένες και το σύστημα περιγράφεται από μια 2-διάστατη Μαρκοβιανή διαδικασία $(I(t), J(t))$ με χώρο καταστάσεων $E = \{(i, j), i=0, 1, \dots, b, j=0, 1, 2, \dots\}$, όπου $I(t)$ παριστά το πλήθος των καταγραφών στο block και $J(t)$ παριστά το πλήθος των καταγραφών στην ουρά την χρονική στιγμή t . Η $\{(I(t), J(t))\}$ είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία τύπου G/M/1 και η πινακογεωμετρική μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί για την μελέτη της. Παρακάτω απεικονίζεται το σύστημα αυτό



Εικόνα 1-1: Απεικόνιση του blockchain ως ένα σύστημα εξυπηρέτησης

Ουσιαστικά η εργασία αυτή επικεντρώνεται στις μεθόδους αποτίμησης της επίδοσης της αλυσίδας με χρήση μαρκοβιανών μοντέλων και στην ανάλυση τους με την πινακογεωμετρική μέθοδο. Επίσης στοχεύουμε στην παρουσίαση βασικών στοιχείων που δείχνουν την απόδοση του συστήματος, Τέλος πρόκειται να αναφέρουμε τα συμπεράσματα που θα βοηθήσουν στο να βελτιστοποιήσουμε την αλυσίδα.

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο αυτό με την αναφορά ορισμένων βασικών συστημάτων εξυπηρέτησης .

1.5 Βασικά μαρκοβιανά μοντέλα

Στην ενότητα αυτή θα δούμε κάποια βασικά συστήματα εξυπηρέτησης (Prabhu, N. U. ,1997. Sztrik, J. ,2011.) . Συγκεκριμένα τα συστήματα που αναφέρονται παρακάτω είναι το σύστημα

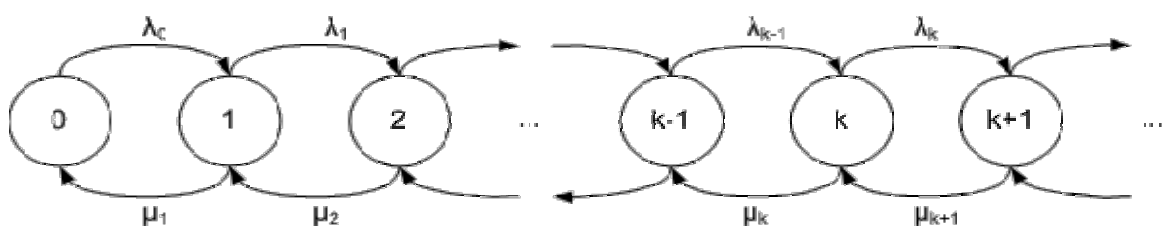


M/M/1, M/G/1, M/M/c. Οι βασικές μεταβλητές και οι όροι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι εξής:

- λ : ρυθμός αφίξεων
- μ : ρυθμός εξυπηρέτησης
- c : αριθμός υπηρετών
- $\rho = \lambda/(c\mu)$: ρυθμός συνωστισμού ή αλλιώς η πιθανότητα ο υπηρέτης να είναι απασχολημένος
- P_n : πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα
- L : αριθμός πελατών στο σύστημα
- L_q : αριθμός πελατών στην ουρά
- W : χρόνος αναμονής ενός πελάτη στο σύστημα
- W_q : χρόνος αναμονής ενός πελάτη στην ουρά
- S : χρόνος εξυπηρέτησης που ακολουθεί μια κατανομή
- R : υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης όταν ο υπηρέτης είναι απασχολημένος

1.5.1 Σύστημα Εξυπηρέτησης M/M/1

Εδώ βλέπουμε το σύστημα ως μια σειρά από αφίξεις που φτάνουν με μια διαδικασία Poisson και η εξυπηρέτηση γίνεται από έναν υπηρέτη με τον χρόνο αυτής να ακολουθεί εκθετική κατανομή. Η μελέτη του συστήματος έχει νόημα όταν ο ρυθμός συνωστισμού $\rho = \lambda/\mu$ είναι μικρότερος της μονάδας αλλιώς το σύστημα δεν είναι ευσταθές διότι η ουρά απειρίζεται καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Το σύστημα έχει την παραπάνω μορφή



Εικόνα 1-2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Όπου θεωρούμε ότι $\lambda_i = \lambda$ και $\mu_i = \mu$ για $i=0,1,2,\dots$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & & \\ & \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & \\ & & \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Εικόνα 1-3: Πίνακας ρυθμού μετάβασης

Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι :

$$\sum_{i \neq j} p_i q_{ij} - p_j q_j = 0 \text{ και } \sum p_n = 1, (1.1)$$

όπου p_i, p_j οι πιθανότητες μετάβασης και q_{ij}, q_j οι ρυθμοί μετάβασης. Οπότε προκύπτει ότι

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \text{ και γενικά } (\lambda + \mu) p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} \text{ για } k=1,2,\dots, (1.2)$$

Αρά

$$\lambda p_k - \mu p_{k+1} = \lambda p_{k-1} - \mu p_k = \dots = \lambda p_0 - \mu p_1 = 0 \text{ ή } \lambda p_k = \mu p_{k+1} \text{ ή } \frac{\lambda}{\mu} p_k = p_{k+1}, (1.3)$$

οπότε

$$\frac{\lambda}{\mu} p_{k-1} = p_k \text{ ή } p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = \rho^k p_0 \text{ και } p_0 = 1 - \rho, (1.4)$$

Εφόσον

$$\sum p_n = 1 \text{ ή } \sum \rho^k p_0 = 1 \text{ και } \frac{p_0}{1-\rho} = 1 \text{ ή } p_0 = 1 - \rho \text{ άρα } p_k = \rho^k (1 - \rho) (1.5)$$

Με $k=0,1,2,\dots$ η οποία είναι επίσης η πιθανότητα να έχουμε k αφίξεις στο σύστημα.

Για τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα ισχύει ότι :

$$E[L] = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{\rho}{1-\rho}. (1.6)$$

Επιπλέον από τον νόμο του Little γνωρίζουμε ότι $L = \lambda W$, άρα ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι

$$E[W] = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, (1.7)$$



Και επίσης ο χρόνος παραμονής στην ουρά είναι

$$E[W_q] = E\left[W - \frac{1}{\mu}\right] = E[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\mu}, (1.8)$$

τέλος ο αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$E[L_q] = \lambda E[W_q] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}. (1.9)$$

1.5.2 Σύστημα Εξυπηρέτησης M/G/1

Το σύστημα αυτό είναι παρόμοιο με το M/M/1 δηλαδή οι πελάτες φτάνουν με μια διαδικασία Poisson και η εξυπηρέτηση γίνεται από τους υπηρέτες με την διαφορά ότι ο χρόνος αυτής ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\mu}$. Όταν μια άφιξη μπαίνει στο σύστημα περιμένει μέχρι να τελειώσει η συναλλαγή που βρίσκεται στην εξυπηρέτηση εφόσον ο υπηρέτης είναι απασχολημένος (το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα ρ) και στην συνέχεια περιμένει να τελειώσουν και όλες οι άλλες συναλλαγές που υπάρχουν στην ουρά πριν από αυτήν. Όποτε ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά είναι

$$E(W_q) = E(L_q)E(S) + \rho E(R), (1.10)$$

όμως γνωρίζουμε ότι

$$E[L_q] = \lambda E[W_q], (1.11)$$

Άρα μέσω της (1.11) η (1.10) λαμβάνει την μορφή

$$E(W_q) = \frac{\rho E(R)}{1-\rho}, (1.12)$$

όπου

$$E[R] = \frac{E[S^2]}{2E[S]} = \frac{\mu E[S^2]}{2}, (1.13)$$

Τελικά ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά είναι

$$E(W_q) = \frac{\rho \mu E[S^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)} (1.14)$$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$E[L_q] = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)}, (1.15)$$



και από την σχέση

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}, (1.16)$$

προκύπτει ότι ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι

$$E[W] = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}, (1.17)$$

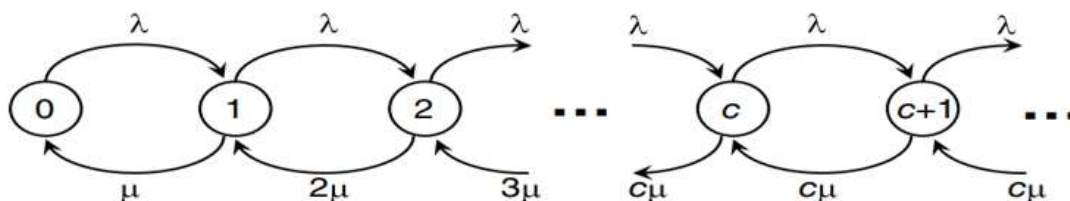
οπότε από τον νομό του Little ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$E[L] = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1-\rho)} + \rho. (1.18)$$

1.5.3 Σύστημα Εξυπηρέτησης M/M/c

Οι πελάτες φτάνουν και πάλι στο σύστημα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και οι c υπηρέτες εξυπηρετούν τις αφίξεις με ρυθμό μ . Ο ρυθμός συνωστισμού είναι $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$.

Η απεικόνιση του συστήματος καθώς και ο πίνακας ρυθμού μετάβασης φαίνονται παρακάτω:



Εικόνα 1-4: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & & & \\ & 2\mu & -(2\mu + \lambda) & \lambda & & \\ & & 3\mu & -(3\mu + \lambda) & \lambda & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Εικόνα 1-5: Πίνακας ρυθμών μετάβασης



Οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος δίνονται από την σχέση (1.1):

Με βάση την (1.1) προκύπτει ότι

$$(\kappa\mu)p_{\kappa} = \lambda p_{\kappa-1} \text{ για } \kappa=1,2,\dots,c, \quad (1.19)$$

$$(c\mu)p_{\kappa} = \lambda p_{\kappa-1} \text{ για } \kappa=c,c+1,\dots, \quad (1.20)$$

άρα για τις πιθανότητες μετάβασης οι εξισώσεις είναι

$$p_{\kappa} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\kappa} \frac{1}{\kappa!} p_0 \text{ για } \kappa \leq c, \quad (1.21)$$

$$p_{\kappa} = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{\kappa-c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} p_0 = \rho^{\kappa-c} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} p_0 \text{ για } \kappa > c, \quad (1.22)$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} \quad (1.23)$$

.Ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά υπολογίζεται από την τύπο

$$E[L_q] = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0 \rho}{c!(1-\rho)^2}, \quad (1.24)$$

Από τον νόμο του Little, ο μέσος χρόνος παραμονής στην ουρά είναι

$$E[W_q] = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0 \rho}{\lambda c!(1-\rho)^2} \quad (1.25)$$

Τέλος ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα και μέσος αριθμός πελατών είναι

$$E[W] = E\left[W_q + \frac{1}{\mu}\right] = E[W_q] + \frac{1}{\mu} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0 \rho}{\lambda c!(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}, \quad (1.26)$$

$$E[L] = \lambda E[W] = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c p_0 \rho}{c!(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}. \quad (1.27)$$



Κεφάλαιο 2

Μεθοδολογικό πλαίσιο

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στο βασικό μεθοδολογικό πλαίσιο που διέπει την Μαρκοβιανή ανάλυση ενός blockchain συστήματος με την βοήθεια πινακογεωμετρικών τεχνικών (Neuts, 1981. Latouche and Ramaswami ,1999. Adan, I., van Leeuwen, J., & Selen, J, 2017). Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η μελέτη τέτοιων συστημάτων γίνεται με την βοήθεια δισδιάστατων Μαρκοβιανών διαδικασιών, όπου η μια συνιστώσα έχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων και η άλλη άπειρο. Αρχικά θα αναφερθούμε στην απλούστερη περίπτωση, μελετώντας διαδικασίες QBD (Quasi Birth-Death process), και στην συνέχεια θα προχωρήσουμε σε μια γενικότερη θεώρηση στοχαστικών διαδικασιών τύπου G/M/1 (quasi-skip-free to the right) και τύπου M/G/1 (quasi-skip-free to the left). Τα συστήματα blockchain περιγράφονται, από διαδικασίες του τύπου G/M/1.

2.1 Διαδικασίες QBD

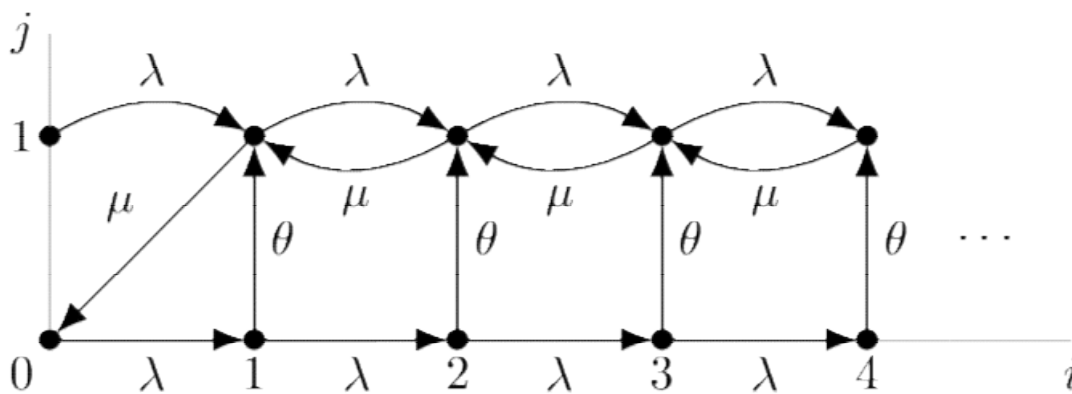
Οι διαδικασίες QBD αποτελούν απλή γενίκευση των διαδικασιών γεννήσεων-θανάτων σε δύο διαστάσεις. Πρόκειται για μια Μαρκοβιανή διαδικασία δύο διαστάσεων $X(t) = \{(X_1(t), X_2(t)); t \geq 0\}$ με χώρο καταστάσεων της μορφή $\{0, 1, \dots\} \times \{0, 1, \dots, N\}$, δηλαδή η μια διάσταση είναι πεπερασμένη και η άλλη άπειρη. Η πεπερασμένη διάσταση είναι μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων

2.1.1 Μηχάνημα με χρόνο ενεργοποίησης

Αρχικά αναφέρουμε ένα παράδειγμα που παρουσιάζει ο Adan κ.ά (2017). Θεωρούμε μια μηχανή που επεξεργάζεται βλάβες με την σειρά που αυτές καταφτάνουν. Οι αφίξεις έρχονται με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και ο χρόνος επισκευής είναι εκθετικός με ρυθμό μ όπως είδαμε και στο 1.4.1 θεωρούμε ότι $\rho = \lambda/\mu < 1$ για λόγους ευστάθειας. Όταν το σύστημα είναι άδειο το μηχάνημα απενεργοποιείται και τίθεται σε λειτουργία όταν υπάρχει μια άφιξη με τον χρόνο ενεργοποίησης να ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\theta$. Επίσης η απενεργοποίηση της μηχανής γίνεται ακαριαία. Θα μελετήσουμε τον χρόνο παραμονής μιας



βλάβης στο σύστημα. Το σύστημα περιγράφεται από την διαδικασία $X(t) = \{(X_1(t), X_2(t)); t \geq 0\}$ όπου $X_1\{t\}$ είναι ο αριθμός βλαβών στο σύστημα την στιγμή t και η $X_2\{t\}$ περιγράφει αν το μηχάνημα είναι σε λειτουργία ή όχι την στιγμή t (με 1 συμβολίζουμε την ενεργή κατάσταση και με 0 την ανενεργή). Ο χώρος καταστάσεων του συστήματος είναι $S = \{(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \{0,1\}\}$ και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι :



Εικόνα 2-1: Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης

Προφανώς η $X(t)$ είναι Μαρκοβιανή διαδικασία διότι αν για παράδειγμα θεωρήσουμε την κατάσταση $(2,1)$ τότε με ρυθμό λ καταλήγουμε στην κατάσταση $(3,1)$ και με ρυθμό μ στην κατάσταση $(1,1)$. Δηλαδή από το διάγραμμα μπορούμε για οποιαδήποτε κατάσταση να προβλέψουμε την μελλοντική .

Πιο συγκεκριμένα το διάγραμμα αυτό παρουσιάζει ομοιότητες με το σύστημα BD της μορφής M/M/1 της ενότητα 1.4.1 με την διαφορά ότι η κατάσταση i αντικαθίσταται με το σύνολο $\{(i,0), (i,1)\}$ το οποίο ονομάζεται επίπεδο του i . Επίσης άλλη μια διαφορά είναι ότι στις BD διαδικασίες οι μεταβάσεις πραγματοποιούνται σε γειτονικές καταστάσεις ενώ στις QBD σε γειτονικά επίπεδα . Για το συγκεκριμένο μοντέλο ορίζουμε το $L_i := \{(i,0), (i,1)\}$, $i \geq 0$ ως το επίπεδο i . Τότε ο χώρος καταστάσεων είναι $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} L_i$. Έστω επίσης $p(i,j)$ η οριακή πιθανότητα της κατάστασης $(i,j) \in S$. Η κατάσταση $(0,1)$ είναι μεταβατική , συνεπώς $p(0,1)=0$. Επιπλέον ο ρυθμός εξόδου από μια κατάσταση ισούται με το ρυθμό εισόδου στην κατάσταση αυτή, άρα οι εξισώσεις ισορροπίας που προκύπτουν είναι:

$$\lambda p(0,0) = \mu p(1,1), \quad (2.1)$$

$$(\lambda + \theta) p(i,0) = \lambda p(i-1,0), \quad i \geq 1, \quad (2.2)$$



$$(\lambda + \mu)p(i, 1) = \lambda p(i-1, 0) + \theta p(i, 0) + \mu p(i+1, 1), \quad i \geq 1, \quad (2.3)$$

Οι εξισώσεις είναι ανάλογες με αυτές του M/M/1 συστήματος και η αναλογία αυτή αναδεικνύεται εισάγοντας το διάνυσμα $\mathbf{p}_i = [p(i, 0) \quad p(i, 1)]$, καθώς οι εξισώσεις λαμβάνουν την παρακάτω μορφή :

$$\mathbf{p}_0 \Lambda_0^{(0)} + \mathbf{p}_1 \Lambda_{-1}^{(1)} = 0 \quad (2.4)$$

$$\mathbf{p}_{i-1} \Lambda_1 + \mathbf{p}_i \Lambda_0 + \mathbf{p}_{i+1} \Lambda_{-1} = 0, \quad i \geq 1, \quad (2.5)$$

Όπου

$$\Lambda_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \theta) & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\Lambda_0^{(0)} = -\Lambda_1, \quad \Lambda_{-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{pmatrix},$$

(2.7)

Η εξίσωση (2.5) μπορεί να απλοποιηθεί με απαλοιφή του \mathbf{p}_{i+1} . Καταρχάς εξισώνοντας την ροή από το επίπεδο i στο $i+1$ με την ροή από το επίπεδο $i+1$ στο i προκύπτει ότι :

$$\lambda(p(i, 0) + p(i, 1)) = \mu p(i+1, 1). \quad (2.8)$$

Με μορφή πινάκων η εξίσωση μετατρέπεται σε:

$$\mathbf{p}_i \Lambda^* = \mathbf{p}_{i+1} \Lambda_{-1}, \quad (2.9)$$

Όπου

$$\Lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας την σχέση (2.9) στην (2.5) προκύπτει ότι

$$\mathbf{p}_{i-1} \Lambda_1 + \mathbf{p}_i (\Lambda_0 + \Lambda^*) = 0, \quad i \geq 1, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{p}_i = -\mathbf{p}_{i-1} \Lambda_1 (\Lambda_0 + \Lambda^*)^{-1} = \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{R}, \quad (2.12)$$

Όπου

$$\mathbf{R} = -\Lambda_1 (\Lambda_0 + \Lambda^*)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda + \theta} & \frac{\lambda}{\mu} \\ 0 & \frac{\lambda}{\mu} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$



Τελικά η εξίσωση (2.11) γίνεται $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 R^i, \quad i \geq 0$ (2.14)

Ακόμα από την εξίσωση (2.4) και από την συνθήκη κανονικοποίησης προκύπτει ότι

$$\sum_{(i,j) \in S} p(i,j) = \mathbf{p}_0 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} = 1, \text{ όπου } \mathbf{1} \text{ το μοναδιαίο διάνυσμα.} \quad (2.15)$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (2.14) αποτελεί μια πινακογεωμετρική λύση και εμφανίζει ομοιότητες με το M/M/1 σύστημα της παραγράφου 1.4.1, όπου εκεί η στάσιμη κατανομή δίνεται από τον τύπο $p(i) = p(0)p^i, \quad i \geq 0$. Δηλαδή στο p αντιστοιχεί ο πίνακας R . Ο πίνακας R είναι πολύ σημαντικός στην πινακογεωμετρική μέθοδο. Το στοιχείο του (j,k) συμβολίζει τον αναμενόμενο χρόνο στην κατάσταση $(i+1,k)$ πολλαπλασιασμένο με το στοιχείο (j,j) του πίνακα $-\Lambda_0$ πριν την πρώτη επιστροφή στο επίπεδο i με δοσμένη την αρχική συνθήκη (i,j) με $i \geq 1$. Το στοιχείο (j,j) του πίνακα $-\Lambda_0$ είναι ο ρυθμός αναχώρησης της διαδικασίας από την κατάσταση (i,j) με $i \geq 1$. Συμπεραίνουμε ότι μηδενικές γραμμές του πίνακα Λ_1 αντιστοιχούν σε μηδενικές γραμμές στον πίνακα R .

Τέλος με την βοήθεια της εξίσωσης (2.14) λαμβάνουμε τον μέσο αριθμών βλαβών στο σύστημα, ο οποίος είναι:

$$E[X_1] = \sum_{i \geq 1} i \mathbf{p}_i \mathbf{1} = \sum_{i \geq 1} i \mathbf{p}_0 R^i \mathbf{1} = \mathbf{p}_0 R (\mathbf{I} - R)^{-2} \mathbf{1} \quad (2.16)$$

Και ο μέσος χρόνος στο σύστημα σύμφωνα με τον νόμο του Little είναι $E[S] = \frac{E[X_1]}{\lambda}$ (2.17)

Παρατηρούμε ότι παρουσιάζεται μια αναλογία μεταξύ της απλής διαδικασίας γεννήσεων – θανάτων και της διανυσματικής προσέγγισης. Οι αναλογίες αυτές συγκεντρώνονται στο παρακάτω πίνακα

Βήμα	Διαδικασία γεννήσεων – θανάτων	Διανυσματική προσέγγιση
j-οστή εξίσωση ισορροπίας	$(\lambda + \mu)p(i,1) = \lambda p(i-1,0) + \theta p(i,0) + \mu p(i+1,1)$	$\mathbf{p}_{i-1} \Lambda_1 + \mathbf{p}_i \Lambda_0 + \mathbf{p}_{i+1} \Lambda_{-1} = 0$
Γεωμετρική λύση	$p_i = p_0 \rho^i$	$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 R^i$
Συνθήκη κανονικοποίησης	$p_0 (1 - \rho)^{-1} = 1$	$\mathbf{p}_0 (\mathbf{I} - R)^{-1} = 1$

Πίνακας 2 -1: Πίνακας αντιστοιχίας απλής και διανυσματικής προσέγγισης

2.1.2 Γενικές διαδικασίες QBD (Quasi Birth-Death process)



$\Lambda_1^{(0)}$: διάστασης $(b + 1) \times (r + 1)$, ρυθμοί μετάβασης που οδηγούν σε μετάβαση από επίπεδο 0 στο επίπεδο 1.

$\Lambda_{-1}^{(1)}$: διάστασης $(r + 1) \times (b + 1)$, ρυθμοί μετάβασης που οδηγούν σε μετάβαση από επίπεδο 1 στο επίπεδο 0

$\Lambda_0^{(1)}$: διάστασης $(r + 1) \times (r + 1)$, ρυθμοί μετάβασης εντός του επιπέδου 1, που δεν οδηγούν σε αλλαγή επιπέδου

Λ_1 : διάστασης $(r + 1) \times (r + 1)$, ρυθμοί μετάβασης που οδηγούν σε μετάβαση από επίπεδο $i \geq 0$ στο επίπεδο $i+1$

Λ_{-1} : διάστασης $(r + 1) \times (r + 1)$, ρυθμοί μετάβασης που οδηγούν σε μετάβαση από επίπεδο $i \geq 0$ στο επίπεδο $i-1$

Λ_0 : διάστασης $(r + 1) \times (r + 1)$, ρυθμοί μετάβασης εντός του επιπέδου $i > 0$ που δεν οδηγούν σε αλλαγή επιπέδου

Επίσης ο πίνακας $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_0 + \Lambda_{-1}$ είναι ο πίνακας ρυθμού μετάβασης που περιγράφει την QBD εντός των επιπέδων. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του Λ είναι αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών του είναι ίσο με 0. Στην επομένη ενότητα περιγράφεται η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος

2.1.3 Συνθήκη Ευστάθειας

Στην ενότητα αυτή θα διαπιστώσουμε την συνθήκη ευστάθειας της QBD διαδικασίας. Υποθέτουμε ότι η $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ είναι αδιαχωρίστη και ότι ο πίνακας Λ περιέχει μια κλάση επικοινωνίας. Από τις ομογενείς BD διαδικασίες με ρυθμό γεννήσεων λ και ρυθμού θανάτων μ γνωρίζουμε ότι το σύστημα είναι ευσταθές αν $\lambda - \mu < 0$ δηλαδή όταν δεν διολισθαίνει στο άπειρο. Ειδικότερα το λ είναι η μέση μετατόπιση προς τα δεξιά και μ η μέση μετατόπιση προς τα αριστερά. Με ανάλογο τρόπο προκύπτει η συνθήκη ευστάθειας στις QBD διαδικασίες, δηλαδή η μέση μετατόπιση προς τα δεξιά πρέπει να είναι μικρότερη από την μέση μετατόπιση προς τα αριστερά ώστε το σύστημα να είναι ευσταθές (Neuts, 1994). Η μέση μετατόπιση προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά εξαρτάται από το ποσοστό του χρόνου που παραμένει η QBD σε κάθε φάση, το οποίο καθορίζεται από τον πίνακα Λ . Αν η μοναδική θετική λύση της εξίσωσης $x\Lambda = 0$ και $x\mathbf{1} = 1$ είναι η $x = (x(0), x(1), \dots, x(r))$ όπου $x(j)$ το ποσοστό του χρόνου που βρίσκεται το σύστημα στην φάση j όταν βρίσκεται μακριά από το επίπεδο 0. Προκύπτει δηλαδή ότι $x\Lambda_{-1}\mathbf{1}$ είναι η μέση μετατόπιση προς τα αριστερά και $x\Lambda_1\mathbf{1}$ είναι η μέση μετατόπιση προς τα δεξιά, συνεπώς η QBD είναι ευσταθής αν

$$x\Lambda_1\mathbf{1} < x\Lambda_{-1}\mathbf{1}$$

Θεώρημα 1 (Neuts, 1989)



Η QBD $\{X(t)\}$ είναι ευσταθής (θετικά επαναληπτική) αν και μόνο αν

$$x\Lambda_1 \mathbf{1} < x\Lambda_{-1} \mathbf{1}$$

Με $x=(x(0),x(1),\dots\dots\dots x(r))$ η οριακή κατανομή της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{X(t)\}$ με γεννήτορα $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_{-1} + \Lambda_0$, η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

$$x\Lambda = 0 \text{ και } x\mathbf{1} = 1$$

Το θεώρημα αυτό παρουσιάστηκε από τον Neuts (1989). Στην συνέχεια θα μελετηθεί η εφαρμογή της πινακογεωμετρικής μεθόδου με στόχο την εύρεση της στάσιμης κατανομής.

2.1.4 Πινακογεωμετρική μέθοδος

Στόχος μας είναι ο υπολογισμός των οριακών πιθανοτήτων

$$p(i, j) := \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_1(t) = i, X_2(t) = j), (i, j) \in S \quad (2.20)$$

Με πινακογεωμετρική μορφή και σε όρους των επιπέδων. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει ο πίνακας R που είδαμε στην ενότητα 2.1.1 στον υπολογισμό αυτόν. Έστω τα διανύσματα οριακών πιθανοτήτων :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &:= [p(0,0) \quad p(0,1) \quad \dots \quad p(0,b)], \\ \mathbf{p}_i &:= [p(i,0) \quad p(i,1) \quad \dots \quad p(i,r)], i \geq 1, \\ \text{και } \mathbf{p} &= [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_1 \quad \dots \quad \dots]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας για την QBD διαδικασία με πίνακα ρυθμού μετάβασης Q είναι $pQ=0$ και αναλύονται σε:

$$\mathbf{p}_0\Lambda_0^{(0)} + \mathbf{p}_1\Lambda_{-1}^{(1)} = 0, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{p}_0\Lambda_1^{(0)} + \mathbf{p}_1\Lambda_0^{(1)} + \mathbf{p}_2\Lambda_{-1} = 0, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{p}_{i-1}\Lambda_1 + \mathbf{p}_i\Lambda_0 + \mathbf{p}_{i+1}\Lambda_{-1} = 0, i \geq 2. \quad (2.24)$$

Το παρακάτω θεώρημα δίνει την στάσιμη κατανομή μιας QBD διαδικασίας.

Θεώρημα 2 (Neuts,1989)

Αν η QBD $\{X(t)\}$ είναι αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική, το στάσιμο διάνυσμα p με $pQ = 0, p\mathbf{1} = 1$, δίνεται από την σχέση:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i R = \mathbf{p}_{i-1} R \times R = \mathbf{p}_1 R^i, i \geq 1,$$

Όπου ο πίνακας ρυθμών R είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση της



$$R^2\Lambda_{-1} + R\Lambda_0 + \Lambda_1 = 0, \quad (2.25)$$

Τα p_0, p_1 προκύπτουν από τις (2.22),(2.23) (αντικαθιστώντας το $p_2 = p_1R$),

$$\mathbf{p}_0\Lambda_0^{(0)} + \mathbf{p}_1\Lambda_{-1}^{(1)} = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{p}_0\Lambda_1^{(0)} + \mathbf{p}_1[\Lambda_0^{(1)} + R\Lambda_{-1}] = 0, \quad (2.27)$$

Και την συνθήκη κανονικοποίησης

$$1 = \mathbf{p}_0\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i\mathbf{e} = \mathbf{p}_0\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_1R^{i-1}\mathbf{e} = \mathbf{p}_0\mathbf{e} + \mathbf{p}_1(I - R)^{-1}\mathbf{e} \quad (2.28)$$

Η εξίσωση (2.25) είναι μια εξίσωση πινάκων δευτέρου βαθμού και ο R έχει φασματική ακτίνα μικρότερη της μονάδας (δηλαδή η μεγίστη κατά μέτρο ιδιοτιμή του R έχει μέτρο μικρότερο της μονάδας). Ο $(I - R)$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε υπάρχει ο πίνακας $(I - R)^{-1}$. Ακόμα ισχύει ότι $R^0 = I$ (μοναδιαίος πίνακας) και :

$$\sum_{i=0}^{\infty} R^i = 1 + R + R^2 + \dots$$

$$R \sum_{i=0}^{\infty} R^i = R + R^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} R^i - I,$$

Αλλιώς $I = (I - R) \sum_{i=0}^{\infty} R^i$ και συνεπώς $\sum_{i=0}^{\infty} R^i = (I - R)^{-1}$.

Επίσης από την (2.25) λαμβάνουμε την σχέση:

$$R = -(R^2\Lambda_{-1} + \Lambda_1)\Lambda_0^{-1}, \quad (2.29)$$

Όπου ο Λ_0 είναι αντιστρέψιμος ως πίνακας ρυθμών μετάβασης μιας παροδικής Μαρκοβιανής διαδικασίας. Ειδικότερα αν θεωρήσουμε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P μιας παροδικής Μαρκοβιανής αλυσίδας, γνωρίζουμε ότι $P^n \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$, άρα η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του P είναι μικρότερη του 1, οπότε ο $I - P$ είναι αντιστρέψιμος. Τελικά

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n = (I - P)^{-1}, \quad (2.30)$$

Για τον πίνακα παροδικών πιθανοτήτων μετάβασης P μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι της μορφής

$$P = I + \Delta \Lambda_0, \quad (2.31)$$

$$0 < \Delta < \max_i - (\Lambda_0)_{i,i}, \quad (2.32)$$

Από την (2.30) προκύπτει ότι



$$\text{όπου } a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{bmatrix}, \quad b = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad \dots \quad b_r], \quad bI_r = 1, \quad a, b > 0, \quad (2.36)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2.24) την σχέση (2.31) προκύπτει ότι

$$p_{i-1}\Lambda_1 + p_i\Lambda_0 + p_{i+1}ab = 0, \quad i \geq 2. \quad (2.37)$$

Επίσης εξισώνοντας την ροή μεταξύ των επιπέδων i και $i+1$ παρατηρούμε ότι

$$p_i\Lambda_1I = p_{i+1}\Lambda_{-1}I = p_{i+1}abI = p_{i+1}a. \quad (2.38)$$

Αντικαθιστώντας την (2.34) στην (2.33) λαμβάνουμε την σχέση

$$p_{i-1}\Lambda_1 + p_i\Lambda_0 + p_i\Lambda_1Ib = 0, \quad i \geq 2. \quad (2.39)$$

Το οποίο εκφράζεται και ως

$$p_i = p_{i-1}R, \quad i > 1, \quad (2.40)$$

Όπου

$$R = -\Lambda_1(\Lambda_0 + \Lambda_1 \cdot I \cdot b)^{-1}, \quad (2.41)$$

με $(\Lambda_0 + \Lambda_1 \cdot I \cdot b)$ αντιστρέψιμος πίνακας ως γεννήτορας παροδικής Μαρκοβιανής διαδικασίας.

Παρακάτω παρουσιάζεται η επέκταση των QBD διαδικασιών σε μια Μαρκοβιανή διαδικασία με παρόμοια δομή αλλά με την δυνατότητα μεγαλύτερων βημάτων στην οριζόντια διεύθυνση. Οι διαδικασίες αυτές ονομάζονται Quasi-skip-free (QSF).

2.2 Quasi-skip-free (QSF)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα βασικά στοιχεία των Quasi-skip-free (QSF) διαδικασιών, οι οποίες είναι οι γενικεύσεις των δισδιάστατων Μαρκοβιανών συστημάτων που σχετίζονται με τα συστήματα M/G/1 (quasi-skip-free to the left) και G/M/1 (quasi-skip-free to the right) Ramaswami, V., & Latouche, G. (1986), Neuts, M. F. (1989), Li, Q. L.



(2010). Οι QBD έχουν ίδιο χώρο καταστάσεων με τις QSF αλλά διαφορετικό πίνακα ρυθμών μετάβασης. Οι πρώτες είναι skip-free και στις δυο κατευθύνσεις, ενώ οι QSF επιτρέπουν την μετάβαση μεταξύ καταστάσεων με μεγαλύτερα βήματα στην μια κατεύθυνση. Οι QSF διακρίνονται σε quasi-skip-free to the right και σε quasi-skip-free to the left και απαιτείται διαφορετική προσέγγιση για την εύρεση κάθε στάσιμης κατανομής. Αρχικά θα δοθεί ένα παράδειγμα μιας QSF διαδικασίας σε batch συστήματα εξυπηρέτησης (δηλαδή η εξυπηρέτηση μπορεί να επεξεργαστεί πολλές αφίξεις ταυτόχρονα)

2.2.1 Ένα μοντέλο εξυπηρέτησης κατά ομάδες που υπόκειται σε βλάβες (Batch service subject to breakdowns)

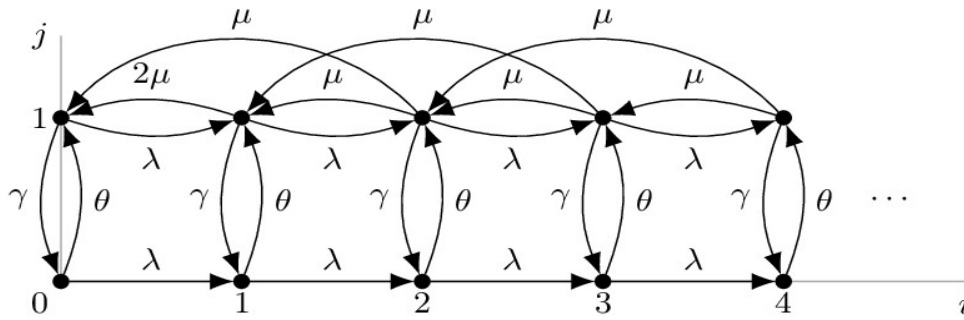
Έστω μία μηχανή batch που υπόκειται σε βλάβες. Ανάλογα με τις λεπτομέρειες των εργασιών, η μηχανή batch μπορεί μερικές φορές να εξυπηρετεί δύο εργασίες ταυτόχρονα, αλλά μερικές φορές μόνο μία εργασία. Για απλότητα, υποθέτουμε ότι με πιθανότητα $1/2$ η μηχανή batch εξυπηρετεί μία εργασία και με την ίδια πιθανότητα εξυπηρετεί δύο εργασίες. Ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητος από τον αριθμό των εργασιών στην εξυπηρέτηση και κατανέμεται εκθετικά με ρυθμό 2μ . Οι εργασίες φτάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Η μηχανή χαλάει μετά από εκθετικό χρόνο με ρυθμό γ (ανεξάρτητα από το αν εξυπηρετεί εργασία ή όχι) και η επισκευή διαρκεί εκθετικό χρόνο με ρυθμό θ . Κάθε φορά που η μηχανή χαλάει, η επισκευή ξεκινά αμέσως. Αν υπάρχει μόνο μία εργασία στο σύστημα, η μηχανή εξυπηρετεί αυτήν την εργασία με πιθανότητα 1. Παρατηρούμαι ότι η μηχανή λειτουργεί με πιθανότητα $\frac{\theta}{\gamma+\theta}$ και είναι σε επισκευή με πιθανότητα $\frac{\gamma}{\gamma+\theta}$ (δηλαδή το ποσοστό του χρόνου που λειτουργεί είναι $\frac{\theta}{\gamma+\theta}$). Ο ρυθμός με τον οποίο ο εξυπηρετητής μπορεί να εξυπηρετήσει εργασίες είναι $\frac{\theta}{\gamma+\theta} 2\mu[1 \cdot (\frac{1}{2}) + 2 \cdot (\frac{1}{2})] = \frac{\theta}{\gamma+\theta} 3\mu$ και συνεπώς η συνθήκη ευστάθειας είναι

$$\rho := \frac{\lambda}{\frac{\theta}{\gamma+\theta} 3\mu} < 1. \quad (2.42)$$

Η κατάσταση του συστήματος μπορεί να περιγραφεί από την $X(t):=(X_1(t), X_2(t))$ όπου το $X_1(t)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των εργασιών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t και το $X_2(t)$ να περιγράφει αν η μηχανή λειτουργεί (1) ή όχι (0) τη χρονική στιγμή t . Η διαδικασία



$\{X(t)\}_{t \geq 0}$ είναι μία Μαρκοβιανή διαδικασία με χώρο καταστάσεων $S := \{(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \{0, 1\}\}$, τα επίπεδα είναι $L_i = \{(i, 0), (i, 1)\}, i \geq 0$ και το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι .



Εικόνα 2-2: Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης

Η διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ είναι QSF προς τα δεξιά, δηλαδή η διαδικασία δεν μπορεί να παραλείψει κανένα επίπεδο κατά τη μετάβαση προς τα δεξιά, ενώ μπορεί να παραλείψει ένα επίπεδο κατά τη μετάβαση προς τα αριστερά με batch εξυπηρέτηση μεγέθους 2. Χρησιμοποιούμε την πινακογεωμετρική μέθοδο για τον καθορισμό της κατανομής ισορροπίας αυτής της διαδικασίας QSF.

Έστω $p(i, j)$ η οριακή πιθανότητα της κατάστασης $(i, j) \in S$. Από το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης μπορούμε να εξάγουμε τις εξισώσεις ισορροπίας εξισώνοντας τη ροή έξω από μία κατάσταση με τη ροή μέσα σε αυτή την κατάσταση. Για τις οριακές καταστάσεις έχουμε:

$$(\lambda + \theta)p(0, 0) = \gamma p(0, 1), \quad (2.43)$$

$$(\lambda + \gamma)p(0, 1) = 2\mu p(1, 1) + \mu p(2, 1) + \theta p(0, 0), \quad (2.44)$$

$$(\lambda + \theta)p(1, 0) = \lambda p(0, 0) + \gamma p(1, 1), \quad (2.45)$$

$$(\lambda + 2\mu + \gamma)p(1, 1) = \lambda p(0, 1) + \theta p(1, 0) + \mu(p(2, 1) + p(3, 1)), \quad (2.46)$$

$$(\lambda + \theta)p(i, 0) = \lambda p(i - 1, 0) + \gamma p(i, 1), i \geq 2 \quad (2.47)$$

$$(\lambda + 2\mu + \gamma)p(i, 1) = \lambda p(i - 1, 0) + \theta p(i, 0) + \mu(p(i + 1, 1) + p(i + 2, 1)),$$

$$i \geq 2 \quad (2.48)$$

Εισάγοντας το διάνυσμα οριακών πιθανοτήτων $\mathbf{p}_i = [p(i, 0) \quad p(i, 1)]$, οι εξισώσεις (2.43)-(2.47) λαμβάνουν την μορφή



$$\mathbf{p}_0\Lambda_0^{(0)} + \mathbf{p}_1\Lambda_{-1}^{(1)} + \mathbf{p}_2\Lambda_{-2} = 0, \quad (2.49)$$

$$\mathbf{p}_{i-1}\Lambda_1 + \mathbf{p}_i\Lambda_0 + \mathbf{p}_{i+1}\Lambda_{-1} + \mathbf{p}_{i+2}\Lambda_{-2} = 0, i \geq 1. \quad (2.50)$$

Όπου,

$$\Lambda_{-2} = \Lambda_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \theta) & \theta \\ \gamma & -(\gamma + \lambda + 2\mu) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\Lambda_0^{(0)} = \begin{pmatrix} -(\lambda + \theta) & \theta \\ \gamma & -(\gamma + \lambda) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{-1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\mu \end{pmatrix},$$

Από την ενότητα 2.1 γνωρίζουμε ότι μια QBD διαδικασία έχει στάσιμη κατανομή $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0\mathbf{R}^i, i \geq 0$. Αντικαθιστώντας την σχέση αυτή στην (2.50) προκύπτει ότι

$$\mathbf{p}_{i-1}(\Lambda_1 + \mathbf{R}\Lambda_0 + \mathbf{R}^2\Lambda_{-1} + \mathbf{R}^3\Lambda_{-2}) = 0, i \geq 1, \quad (2.52)$$

Όπου ο πίνακας ρυθμών \mathbf{R} είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$\Lambda_1 + \mathbf{R}\Lambda_0 + \mathbf{R}^2\Lambda_{-1} + \mathbf{R}^3\Lambda_{-2} = 0, \quad (2.53)$$

Η οποία λύνεται αλγοριθμικά όπως είδαμε στην ενότητα 2.1.4.1

Επίσης η (2.49) με αντικατάσταση της $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0\mathbf{R}^i$ μετατρέπεται σε

$$\mathbf{p}_0(\Lambda_0^{(0)} + \mathbf{R}\Lambda_{-1}^{(1)} + \mathbf{R}^2\Lambda_{-2}) = 0, \quad (2.54)$$

Και με την βοήθεια την συνθήκης κανονικοποίησης λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\mathbf{1} = \mathbf{p}_0\mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i\mathbf{e} = \mathbf{p}_0\mathbf{e} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{p}_i\mathbf{R}^i\mathbf{e} = \mathbf{p}_0\mathbf{e} + \mathbf{p}_1(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{e}. \quad (2.55)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2.53)-(2.54) βρίσκουμε το διάνυσμα \mathbf{p}_0 και κατά συνεπεια το \mathbf{p}_i για $i \geq 1$

2.2.2 Γενικές QSF διαδικασίες

Όπως είδαμε οι QSF διαδικασίες έχουν ίδιο χώρο καταστάσεων με τις QBD διαδικασίες αρά από την ενότητα 2.1.2 τα επίπεδα ορίζονται ως:

$$L_0 := \{(0,0), (0,1), \dots \dots \dots (0, b)\}, L_i = \{(i, 0), (i, 1), \dots \dots \dots (i, r)\}, i \geq 0, \quad (2.56)$$

Όπου b, r δυο μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και ο χώρος καταστάσεων είναι

$$S := \cup_{i \geq 0} L_i. \quad (2.57)$$



Ορίζουμε την διαδικασία $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), t \geq 0\}$, όπου το $X_1(t)$ εκφράζει τα επίπεδα την στιγμή t και το $X_2(t)$ την φάση την στιγμή t . Επικεντρωνόμαστε στις ομογενείς διαδικασίες QSF, που σημαίνει ότι οι ρυθμοί μετάβασης είναι ανεξάρτητοι από το επίπεδο, εκτός ενδεχομένως από τους ρυθμούς μετάβασης από και προς το επίπεδο 0. Θα προσδιορίσουμε τους δύο τύπους διαδικασιών QSF. Χρησιμοποιώντας τους πίνακες μετάβασης Λ_n (που είναι ανεξάρτητοι από τα επίπεδα) και Λ_n^m (που εξαρτώνται από τα επίπεδα), έχουμε ότι ο πίνακας ρυθμού μετάβασης Q μιας διαδικασίας QSF προς τα αριστερά είναι της μορφής

$$Q = \begin{bmatrix} \Lambda_0^{(0)} & \Lambda_1^{(0)} & \Lambda_2^{(0)} & \Lambda_3^{(0)} & \dots & \\ \Lambda_{-1}^{(1)} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \dots & \\ & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 & \dots \\ & & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

Πίνακας 2-4: Πίνακας ρυθμών μετάβασης QSF προς τα αριστερά

Και ο πίνακας ρυθμού μετάβασης Q μιας διαδικασίας QSF προς τα δεξιά είναι της μορφής.

$$Q = \begin{bmatrix} \Lambda_0^{(0)} & \Lambda_1^{(0)} & & & & \\ \Lambda_{-1}^{(1)} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & & & \\ \Lambda_{-2}^{(2)} & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \Lambda_1 & & \\ \Lambda_{-3}^{(3)} & \Lambda_{-2} & \Lambda_{-1} & \Lambda_0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

Πίνακας 2-5: Πίνακας ρυθμών μετάβασης QSF προς τα δεξιά

Οι εξισώσεις ισορροπίας δίνονται από την εξίσωση $pQ=0$

Αν η διαδικασία είναι QSF προς τα αριστερά τότε οι εξισώσεις είναι της μορφής

$$p_0 \Lambda_0^{(0)} + p_1 \Lambda_{-1}^{(1)} = 0, \quad (2.60)$$

$$p_0 \Lambda_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{i+1} p_k \Lambda_{i-k} = 0, i \geq 1, \quad (2.61)$$

Ενώ αν είναι προς τα δεξιά τότε

$$\sum_{k \geq 0} p_k \Lambda_{-k}^{(k)} = 0, \quad (2.62)$$



$$\mathbf{p}_0 \Lambda_1^{(0)} + \sum_{k \geq 1} \mathbf{p}_k \Lambda_{1-k} = 0, \quad (2.63)$$

$$\sum_{k \geq i-1} \mathbf{p}_k \Lambda_{i-k} = 0, i \geq 2. \quad (2.64)$$

Συγκρίνοντας τους πίνακες (2.58)-(2.59) με τον πίνακα ρυθμού μετάβασης που δόθηκε στην ενότητα 2.1.2 διαπιστώνουμε ότι οι QBD διαδικασίες είναι QSF διαδικασίες και προς τα δεξιά και προς τα αριστερά. Το γεγονός αυτό επιτρέπει την μελέτη της συνθήκης ισορροπίας των συστημάτων QSF με την βοήθεια των μεθόδων που αναλύθηκαν στην ενότητα 2.1.3 για τις QBD διαδικασίες.

2.2.3 Συνθήκη Ευστάθειας QSF διαδικασιών

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η επέκταση του θεωρήματος 1 που αναφέρεται στην συνθήκη ευστάθειας μιας QBD διαδικασίας, ώστε να βρεθεί η αντίστοιχη συνθήκη για τις QSF διαδικασίες. Ορίζουμε τον πίνακα $\Lambda := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Lambda_i$, ο οποίος περιγράφει την μεταβατική συμπεριφορά των φάσεων. Υποθέτουμε ότι η $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ είναι αδιαχώριστη και ότι ο πίνακας Λ περιέχει μια κλάση επικοινωνίας. Έστω x το διάνυσμα οριακών πιθανοτήτων, τότε

$$x \Lambda = 0 \text{ και } x \mathbf{1} = 1, \quad (2.65)$$

Παρόμοια με τις QBD διαδικασίες χρησιμοποιούμε την συνθήκη ότι η μέση μετατόπιση προς τα δεξιά είναι μικρότερη από την μέση μετατόπιση προς τα αριστερά (Neuts, 1989).

Θεώρημα 3 (Neuts, 1989).

Η QBD $\{X(t)\}$ είναι ευσταθής (θετικά επαναληπτική) αν και μόνο αν

$$x \sum_{i \geq 1} \Lambda_i \mathbf{1} < x \sum_{i \leq -1} \Lambda_i \mathbf{1},$$

Με $x = (x(0), x(1), \dots, x(r))$ η οριακή κατανομή της Μαρκοβιανής διαδικασίας $\{X(t)\}$ με γεννήτορα Λ και επίσης ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$x \Lambda = 0 \text{ και } x \mathbf{1} = 1$$

Τέλος ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την εφαρμογή της πινακογεωμετρικής μεθόδου στην εύρεση της στάσιμης κατανομής.



2.2.4 Πινακογεωμετρική μέθοδος

Η πινακογεωμετρική μέθοδος εφαρμόζεται σε διαδικασίες που είναι QSF προς τα δεξιά και έχουν ως πίνακα ρυθμού μετάβασης τον πίνακα που φαίνεται στην σχέση (2.59). Καθοριστικός για την προσέγγιση είναι ο πίνακας ρυθμού R που δημιουργεί τη σχέση

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 R^{i-1}, i \geq 1, \quad (2.67)$$

Ο πίνακας R είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση της εξίσωσης

$$\sum_{i \geq 0} R^i \Lambda_{1-i} = 0. \quad (2.68)$$

ο R έχει φασματική ακτίνα μικρότερη της μονάδας (δηλαδή η μεγίστη κατά μέτρο ιδιοτιμή του R έχει μέτρο μικρότερο της μονάδας). Ο $(I - R)$ είναι αντιστρεψίμος, οπότε υπάρχει ο πίνακας $(I - R)^{-1}$. Επίσης αν υποθέσουμε ότι ο R είναι λύση της (2.68) τότε αντικαθιστώντας την (2.67) στην συνθήκη (2.64) προκύπτει ότι

$$\mathbf{p}_{i-1} \sum_{k \geq 0} R^k \Lambda_{1-k} = 0, i \geq 2, \quad (2.69)$$

Τέλος η (2.68) λαμβάνει την μορφή :

$$R = -(\Lambda_1 + \sum_{i \geq 2} R^i \Lambda_{1-i}) \Lambda_0^{-1}. \quad (2.70)$$

Για να λύσουμε αριθμητικά αυτή την εξίσωση, πρέπει πρώτα να ορίσουμε ένα άνω φράγμα για το άπειρο άθροισμα. Έστω K το άνω φράγμα. Έπειτα να υπολογίσουμε μια προσέγγιση για το R όπως γίνεται στον Αλγόριθμο 2.1. Όσο μεγαλύτερο είναι το K , τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση για το R , αλλά τόσο δυσκολότερη είναι η υπολογιστική προσπάθεια στην υλοποίηση αυτής της προσέγγισης. Τέλος, αναφέρουμε ότι ο R έχει την ίδια ερμηνεία όπως σε μια διαδικασία QBD, όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.1.1. Παρακάτω δίνεται ένας αλγόριθμος υπολογισμού του πίνακα R . Neuts (1989).

```

1: Pick  $\varepsilon$  small and positive and  $K$  a large integer
2: Set  $R_0 = 0$ ,  $R_1 = -\Lambda_1 \Lambda_0^{-1}$  and  $n = 1$ 
3: while  $\|R_n - R_{n-1}\|_{\max} > \varepsilon$  do
4: Compute  $R_{n+1}$  according to

$$R_{n+1} = -(\Lambda_1 + \sum_{i=2}^K R_n^i \Lambda_{1-i}) \Lambda_0^{-1} \quad (2.71)$$

5: Update  $n = n + 1$ 
6: end while
    
```

Αλγόριθμος 2-2: Υπολογισμός του πίνακα R



Εφόσον καθοριστεί ο πίνακας R , υπολογίζεται και η στάσιμη κατανομή. Για να βρεθεί η στάσιμη κατανομή πρέπει πρώτα να υπολογιστούν τα διανύσματα οριακών πιθανοτήτων \mathbf{p}_0 και \mathbf{p}_1 .

Αντικαθιστώντας την (2.67) στις εξισώσεις ισορροπίας (2.62)-(2.64) προκύπτουν τα εξής:

$$\mathbf{p}_0 \Lambda_0^{(0)} + \mathbf{p}_1 \sum_{k \geq 1} R^{k-1} \Lambda_{-k}^{(k)} = 0, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{p}_0 \Lambda_1^{(0)} + \mathbf{p}_1 \sum_{k \geq 1} R^{k-1} \Lambda_{1-k} = 0, \quad (2.73)$$

Επίσης η συνθήκη κανονικοποίησης

$$\mathbf{1} = \mathbf{p}_0 \mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_i \mathbf{e} = \mathbf{p}_0 \mathbf{e} + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_1 R^{i-1} \mathbf{e} = \mathbf{p}_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}_1 (\mathbf{I} - R)^{-1} \mathbf{1}, \quad (2.74)$$

επιτρέπει τον υπολογισμό των \mathbf{p}_0 και \mathbf{p}_1 . Βέβαια για να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός αυτός πρέπει το άπειρο άθροισμα να περιοριστεί σε ένα άνω φραγμένο άθροισμα ώστε να υπολογιστούν αριθμητικά τα διανύσματα και έπειτα η στάσιμη κατανομή, η οποία είναι

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 R^{i-1}, i \geq 1. \quad (2.75)$$



Κεφάλαιο 3

Ανάλυση του συστήματος blockchain με χρήση της πινακογεωμετρικής μεθόδου

3.1 Περιγραφή Μοντέλου

Η μοντελοποίηση του blockchain (Li κ.ά,2018) γίνεται με χρήση ενός συστήματος αναμονής με δύο φάσεις εξυπηρέτησης κατά ομάδες (Markovian batch-service queueing system with two different service stages). Πρώτη φάση εξυπηρέτησης είναι η δημιουργία του block και δεύτερη φάση εξυπηρέτησης είναι η προσθήκη του block στο blockchain. Πιο συγκεκριμένα οι καταγραφές φτάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία αφίξεων (Poisson, MAP,...) με ρυθμό λ και τοποθετούνται σε έναν χώρο αναμονής άπειρης χωρητικότητας (στο παρόν κεφάλαιο για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι οι αφίξεις προέρχονται από την διαδικασία Poisson). Ακολούθως οι καταγραφές χρειάζονται επικύρωση από τους miners η οποία λογίζεται ως η πρώτη φάση και την αναφέρουμε ως φάση δημιουργίας του block. Ο χρόνος αυτός ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_2 . Στην συνέχεια το block θα διοχετευτεί στο δίκτυο και θα τοποθετηθεί στο blockchain μαζί με τα υπόλοιπα, διαδικασία η οποία αποτελεί την δεύτερη φάση εξυπηρέτησης και αναφέρεται ως η φάση δημιουργίας της αλυσίδας. Ο χρόνος που χρειάζεται ακολουθεί και εδώ εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_1 . Ακόμα το μέγεθος του block πρέπει να είναι περιορισμένης χωρητικότητας, συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι σε κάθε block μπορούν να γίνουν το πολύ b καταγραφές, Αν το block που προκύπτει έχει μικρότερο μέγεθος από b τότε αν εμφανιστεί νέα συναλλαγή κατά την διάρκεια της διαδικασίας εξόρυξης του block γίνεται δεκτή σε αυτό, ενώ αν υπάρχουν πάνω από b συναλλαγές στην ουρά τότε το νέο block θα αποτελείται από b συναλλαγές ώστε να είναι πιο αποδοτική η εξυπηρέτηση του συστήματος. Τέλος η ουρά ακολουθεί το μοτίβο προτεραιότητας FCFS (First Come First Service), δηλαδή η πρώτη άφιξη εξυπηρετείται πρώτη.

Στο μοντέλο που θα αναλυθεί παρακάτω υποθέτουμε ότι όλες οι εμπλεκόμενες τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και εκθετικά κατανομημένες με την πρώτη φάση της



εξυπηρέτησης να έχει ρυθμό μ_2 και την δεύτερη ρυθμό μ_1 . Επίσης οι αφίξεις φτάνουν με ρυθμό λ . Το σύστημα περιγράφεται από μια 2-διάστατη Μαρκοβιανή διαδικασία $(I(t), J(t))$ με χώρο καταστάσεων $E = \{(i, j), i=0, 1, \dots, b, j=0, 1, 2, \dots\}$, όπου $I(t)$ παριστά το πλήθος των καταγραφών στο block και $J(t)$ παριστά το πλήθος των καταγραφών στην ουρά την χρονική στιγμή t . Η $\{(I(t), J(t))\}$ είναι μια Μαρκοβιανή διαδικασία τύπου GI/M/1 και η πινακογεωμετρική μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί για την μελέτη της. Η αναπαράσταση του blockchain ως σύστημα εξυπηρέτησης δίνεται από την εικόνα 1-1

3.2 Μοντελοποίηση συστήματος

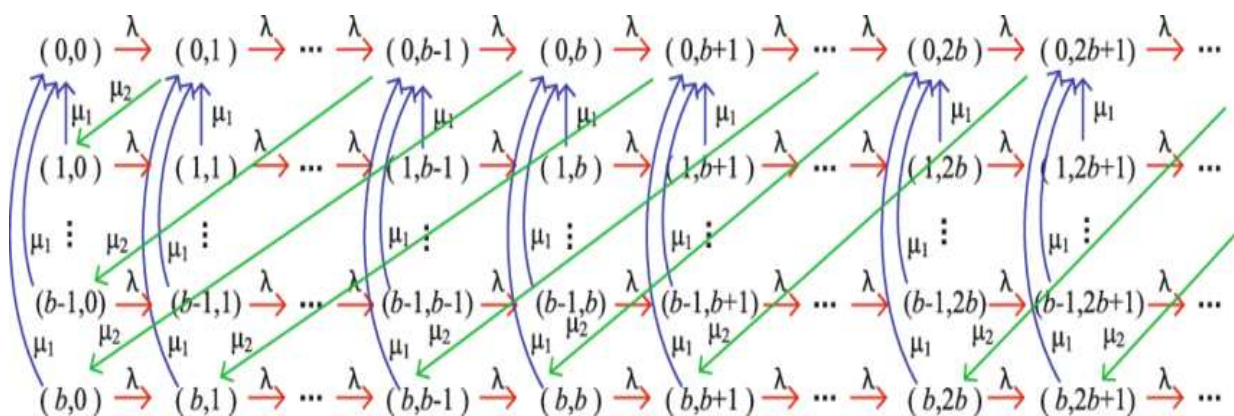
Έστω $X(t) = (I(t), J(t))$. Τότε η $\{X(t): t \geq 0\}$ είναι μια μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου τύπου GI/M/1 (Li κ.ά, 2019. Neuts, 1989) δηλαδή είναι μια QSF προς τα δεξιά διαδικασία και θα χρησιμοποιήσουμε την πινακογεωμετρική μέθοδο για την ανάλυση της, όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο χώρος καταστάσεων είναι

$$E = \{(i, j) : i=0, 1, \dots, b, j=0, 1, 2, \dots\}, (3.1)$$

με τα επίπεδα

$$L_j = \{(0, j), (1, j), \dots, (b, j)\}, j \geq 0, (3.2)$$

Οι καταστάσεις μετάβασης φαίνονται στην εικόνα 3-1



Εικόνα 3-1: Διάγραμμα καταστάσεων μετάβασης

Πράγματι η $\{X(t): t \geq 0\}$ είναι μια μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου, διότι για μια οποιαδήποτε δοσμένη κατάσταση μπορούμε να προβλέψουμε την μελλοντική. Για



$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \dots, B_b = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu_2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Εικόνα 3-5:Υποπίνακες του πίνακα Q

Οι πίνακες $B_i, 1 \leq i \leq b$,μεγέθους $b + 1 \times b + 1$ απεικονίζουν τους ρυθμούς μεταβάσεις από το επίπεδο i στο επίπεδο 0

Θεωρώ επίσης τον πίνακα A για τον οποίο ισχύει

$$A = A_0 + A_1 + A_b = \begin{pmatrix} -\mu_2 & & & & \mu_2 \\ \mu_1 & -\mu_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \mu_1 & & & -\mu_1 & \\ \mu_1 & & & & -\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Εικόνα 3-6:Πίνακας ρυθμών μετάβασης εντός των επιπέδων

Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης που περιγράφει την διαδικασία εντός των επιπέδων.

Στη επόμενη ενότητα παραθέτουμε την συνθήκη ευστάθειας του συστήματος καθώς και την στάσιμη κατανομή ,η εύρεση της οποίας είναι απαραίτητη για την ανάλυση απόδοσης του συστήματος.

3.3 Συνθήκη ευστάθειας και η στάσιμη κατανομή

3.3.1 Συνθήκη ευστάθειας

Η Μαρκοβιανή διαδικασία με πίνακα A και πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων είναι αδιαχώριστη (όπως φαίνεται από την εικόνα 3.7) και θετικά επαναληπτική ως κλειστή κλάση με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (Li, Q. L. , 2010. Neuts, 1981.). Ακόμα είναι απεριοδική διότι οι πιθανότητες πρώτης μετάβασης από μια κατάσταση προς τις άλλες είναι θετικές. Επομένως υπάρχει η στάσιμη κατανομή .Έστω θ το διάνυσμα της στάσιμης κατανομής μεγέθους $1 \times b$, δηλαδή

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \dots, \theta_b), (3.1)$$



Το θ είναι η μοναδική λύση των εξισώσεων

$$\theta A = 0 \quad (3.2)$$

$$\theta e = 1, \quad (3.3)$$

όπου το e είναι ένα διάνυσμα $b \times 1$, με τα στοιχεία του να είναι όλα ίσα με το ένα. Από την εξίσωση (3.2) προκύπτει ότι

$$\theta_i = 0 \text{ για } i = 1, 2, \dots, b - 1 \quad (3.4)$$

$$\theta_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \theta_b. \quad (3.5)$$

Από την εξίσωση (3.3) προκύπτει ότι

$$\theta_0 + \theta_b = 1, \quad (3.6)$$

Άρα το διάνυσμα θ είναι

$$\theta = \left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, 0, 0, \dots, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right), \quad (3.7)$$

Γνωρίζουμε από την ενότητα 2.2.3 και από το θεώρημα 3 ότι η Μαρκοβιανή διαδικασία με πίνακα Q είναι θετικά επαναληπτική αν ισχύει ότι

$$\theta \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{-k} \right) e > \theta \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \right) e, \quad (3.8)$$

όπου A_{-k} είναι οι πίνακες κάτω από την κύρια διαγώνιο του πίνακα Q και A_k είναι αυτοί που βρίσκονται από πάνω. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση μας η σχέση (3.8) παίρνει την μορφή

$$b\theta A_b e > \theta A_0 e. \quad (3.9)$$

Εφόσον $A_0 e$ ισούται με έναν πίνακα στήλης μεγέθους $b \times 1$ με όλα τα στοιχεία του να είναι ίσα με λ τότε

$$\theta A_0 e = \lambda, \quad (3.10)$$

$$b\theta A_b e = b\theta_0, \quad (3.11)$$

$$\mu_2 = \frac{b\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (3.12)$$

Συμπεραίνουμε ότι η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική αν



$$\lambda < \frac{b\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}. \quad (3.13)$$

Ουσιαστικά θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση αυτή διότι αλλιώς όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές άρα δεν υπάρχει και στάσιμη κατανομή. Η κατανομή αυτή είναι αναγκαία για την αποτίμηση της επίδοσης της αλυσίδας.

3.3.2 Στάσιμη Κατανομή

Το διάνυσμα της στάσιμης κατανομής ισούται με $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \dots)$ όπου

$$\pi_0 = (\pi_{0,0}, \pi_{1,0}, \dots \dots \dots \pi_{b,0}) \quad (3.14)$$

$$\pi_1 = (\pi_{0,1}, \pi_{1,1}, \dots \dots \dots \pi_{b,1}) \quad (3.15)$$

$$\pi_k = (\pi_{0,k}, \pi_{1,k}, \dots \dots \dots \pi_{b,k}) \quad \text{με } k \geq 2 \quad (3.16)$$

Για να βρούμε όμως την στάσιμη κατανομή πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τον πίνακα ρυθμών R , ο οποίος είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση της εξίσωσης :

$$R^n A_b + R A_1 + A_0 = 0 \quad (3.17)$$

Η εξίσωση αυτή των πινάκων είναι μη γραμμική και είναι εξαιρετικά δύσκολο να κατορθώσουμε να βρούμε την μοναδική της λύση διότι ο πίνακας $R^n A_b$ είναι μεγάλου μεγέθους. Ενδεικτικά θα δούμε την περίπτωση $b=1$. Τότε

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu_2) & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda + \mu_1) \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad R^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta\alpha + \beta\delta \\ \alpha\gamma + \gamma^2 & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Άρα από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι

$$\begin{cases} \frac{-(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_2)}{\mu_1} \alpha + \frac{\lambda(\lambda + \mu_1)}{\mu_1} + \alpha^2 \mu_2 + \alpha \delta \mu_2 - \frac{\lambda \mu_2}{\lambda + \mu_2} \delta = 0, & (3.19) \\ \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2} \alpha \delta + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2} \delta^2 + (\lambda + \mu_1) \delta + \lambda = 0, & (3.20) \end{cases}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή και δεν μπορεί να δοθεί η ακριβής μορφή του πίνακα R . Ο πίνακας R μπορεί να βρεθεί αλγοριθμικά, σύμφωνα με τον Neuts(1981). Ένας αποδοτικός αλγόριθμος οποίος μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων μας δίνει μια αρκετά καλή προσέγγιση του πίνακα R είναι:



$$R_0 = 0 \quad (3.21)$$

$$R_{n+1} = (R_n^b A_b + A_0)(-A_1)^{-1} \quad (3.22)$$

Σύμφωνα με τον Neuts (1981) η στάσιμη κατανομή όταν η διαδικασία είναι θετικά επαναληπτική υπολογίζεται από τον τύπο $\pi_k = \pi_0 R^k$, $k \geq 1$, όπου π_0 η λύση των εξισώσεων

$$\pi_0 B[R] = \pi_0 \text{ και } \pi_0 (I - R)^{-1} e = 1 \quad (3.23)$$

$$B[R] = \sum_{k=0}^b R^k B_k \quad (3.24)$$

όπου $B[R]$ είναι ένας αδιαχωριστος πίνακας.

Με βάση την στάσιμη κατανομή μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα μεγέθη τα οποία θα βοηθήσουν ώστε να κατανοήσουμε την απόδοση του συστήματος εξυπηρέτησης του blockchain.

3.4 Ανάλυση απόδοσης

Εδώ θα δούμε τους παράγοντες εκείνους που δείχνουν την απόδοση της αλυσίδας, συγκεκριμένα μελετάμε τον μέσο αριθμό συναλλαγών στην ουρά ,τον μέσο αριθμό συναλλαγών στον block και τέλος τον μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα συνολικά.(Li κ.ά, 2019)

Ο μέσος αριθμός συναλλαγών στην ουρά είναι

$$E[J] = \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=0}^b \pi_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} j \pi_j e = \pi_0 R (I - R)^{-2} e, \quad (3.25)$$

Ο μέσος αριθμός συναλλαγών στο block είναι

$$E[I] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^b i \pi_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j h = \pi_0 (I - R)^{-1} h \text{ όπου } h = (0, 1, 2, \dots, b)^T. \quad (3.26)$$

Έστω T ο χρόνος ολοκλήρωσης μιας συναλλαγής. Όταν μια συναλλαγή φτάνει στο σύστημα την στιγμή t τότε βρίσκεται i συναλλαγές στο block και $kb+l$ στην ουρά με $i=0,1,\dots,b$, $k=0,1,2,\dots$ και $l=0,1,\dots,b-1$. Με χρήση της στάσιμης κατανομής και με το θεώρημα ολικής πιθανότητας θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο παραμονής στο σύστημα.(Kawase, Y., & Kasahara, S. 2017. Li κ.ά,2019.)



Περίπτωση 1: Όταν $i=0$, τότε δεν υπάρχει καμία συναλλαγή στο block και υπάρχουν $k+1$ στην ουρά οι οποίες θα περάσουν από δυο εξυπηρετήσεις με χρόνο δημιουργίας του block $\frac{k+1}{\mu_2}$ και με χρόνο κατασκευής της αλυσίδας $\frac{k+1}{\mu_1}$. Άρα

$$E[T_{i=0}] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{0, kb+l} \left(\frac{k+1}{\mu_2} + \frac{k+1}{\mu_1} \right). \quad (3.27)$$

Περίπτωση 2: Όταν $i=1,2,\dots,b$, τότε υπάρχουν i συναλλαγές στο block και έτσι ο χρόνος δημιουργίας του block είναι $\frac{k+1}{\mu_2}$ και ο χρόνος κατασκευής της αλυσίδας $\frac{k+2}{\mu_1}$.

$$E[T_{i \neq 0}] = \sum_{i=1}^b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{i, kb+l} \left[\frac{1}{\mu_1} + (k+1) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right], \quad (3.28)$$

Τελικά ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης της συναλλαγής είναι ίσος με:

$$E[T] = E[T_{i=0}] + E[T_{i \neq 0}], \quad (3.29)$$

$$E[T] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{0, kb+l} \left(\frac{k+1}{\mu_2} + \frac{k+1}{\mu_1} \right) + \sum_{i=1}^b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{i, kb+l} \left[\frac{1}{\mu_1} + (k+1) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right] \quad (3.30)$$

Αποδεικνύεται επίσης ότι ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης της συναλλαγής μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του πίνακα R . (Li κ.ά 2019)

Ισχύει ότι :

$$\sum_{i=0}^b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{i, kb+l} (k+1) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} (k+1) \pi_{kb+l} e \quad (3.31)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} (k+1) \pi_{kb+l} &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} (k+1) \pi_0 R^{kb+l} = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} (k+1) \pi_0 R^{kb+l} &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) R^{kb} (1 - R^b) (1 - R)^{-1}, \quad (3.32) \end{aligned}$$

και

$$\pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) R^{kb} (1 - R^b) (1 - R)^{-1} = \pi_0 (1 - R^b)^{-1} (1 - R)^{-1} \quad (3.33)$$

Άρα

$$\sum_{i=0}^b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{i, kb+l} (k+1) \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \pi_0 (1 - R^b)^{-1} (1 - R)^{-1} e \quad (3.34)$$

Ακόμα



$$\sum_{i=1}^b \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{i, kb+l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{kb+l} e - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{0, kb+l} \quad (3.35)$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{kb+l} e = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_0 R^{kb+l} e = \pi_0 (1 - R)^{-1} e \quad (3.36)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{0, kb+l} = \langle \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{b-1} \pi_{kb+l} \rangle_{i=0} = \langle \pi_0 (1 - R)^{-1} \rangle_{i=0} \quad (3.37)$$

Όπου $\langle Z \rangle_{i=0}$ είναι το πρώτο στοιχείο του διανύσματος Z .

Συμπεραίνουμε ότι

$$E[T] = \frac{1}{\mu_1} [\pi_0 (1 - R)^{-1} e - \langle \pi_0 (1 - R)^{-1} \rangle_{i=0}] + \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \pi_0 (1 - R^b)^{-1} (1 - R)^{-1} e. \quad (3.38)$$

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

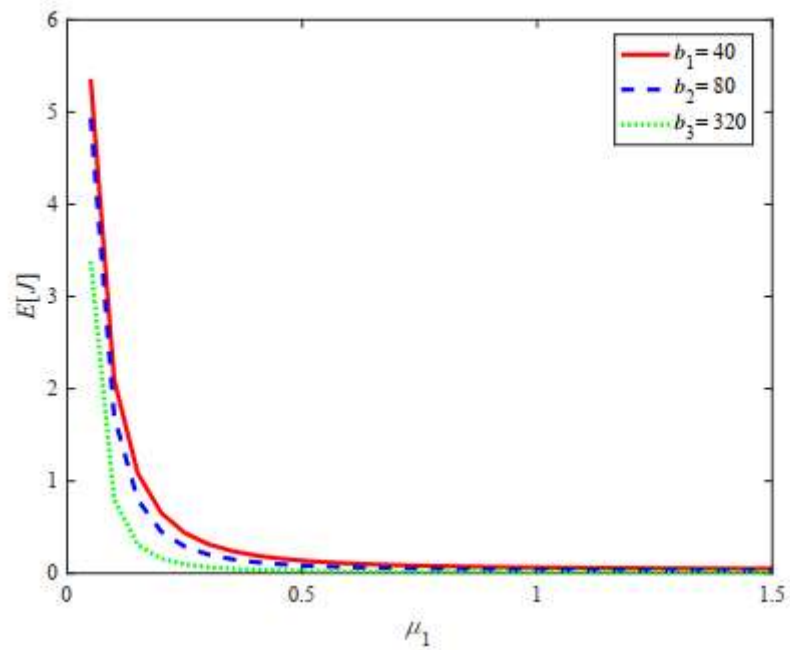
Στην ενότητα αυτήν παραθέτουμε αριθμητικά παραδείγματα για την επιβεβαίωση των θεωρητικών αποτελεσμάτων και για να μελετήσουμε την επίδραση των παραμέτρων μ_1, μ_2, λ, b στα μέτρα επίδοσης του συστήματος.

Παράδειγμα 1:

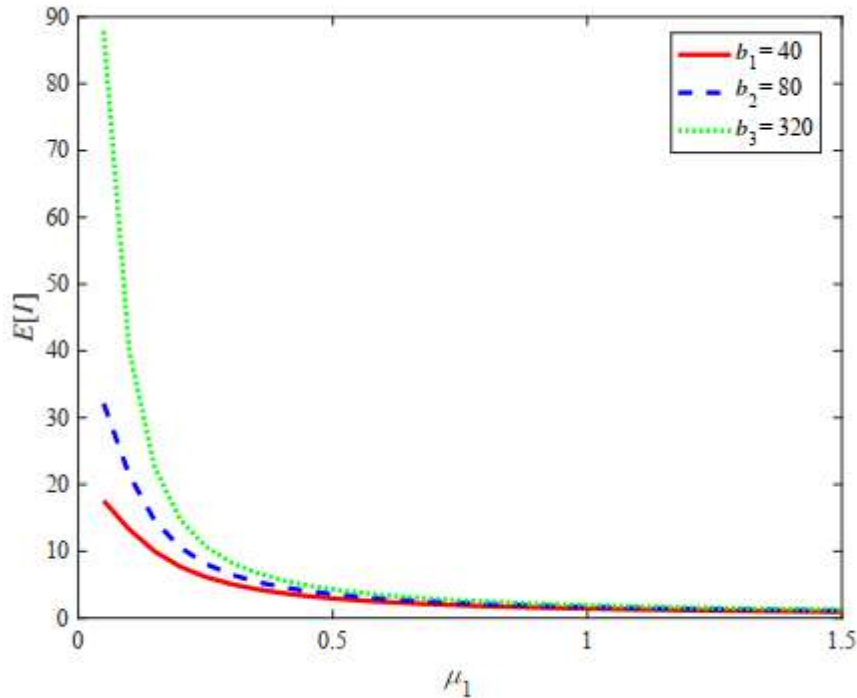
Μελέτη της επίδρασης του ρυθμού κατασκευής του blockchain μ_1 στον μέσο αριθμό συναλλαγών στην ουρά ($E[J]$) και στο block ($E(I)$), όταν ο ρυθμός δημιουργίας του block είναι $\mu_2=2$, ο ρυθμός αφίξεων είναι $\lambda=0.3$ και για το μέγιστο μέγεθος του block μελετάμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, δηλαδή $b_1=40, b_2=80$ και $b_3=320$.

Παράδειγμα 2:

Μελέτη της επίδρασης του μεγέθους του block $b=40, 41, \dots, 500$ στον μέσο χρόνο ολοκλήρωσης συναλλαγής $E[T]$ για αυξανόμενες τιμές του λ . Θεωρούμε τρεις περιπτώσεις, δηλαδή $\lambda_1=0.1, \lambda_2=0.9$ και $\lambda_3=1.5$ (Οι υπόλοιπες παράμετροι όπως στο Παράδειγμα 1)

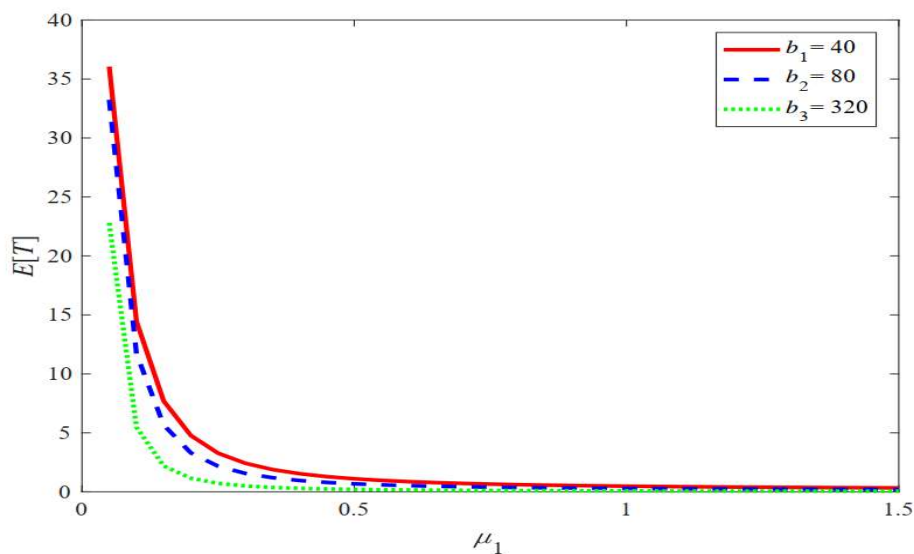


Εικόνα 3-7: Το μέσο πλήθος καταγραφών στην ουρά συναρτήσει του μ_1 για τις διάφορες τιμές του b



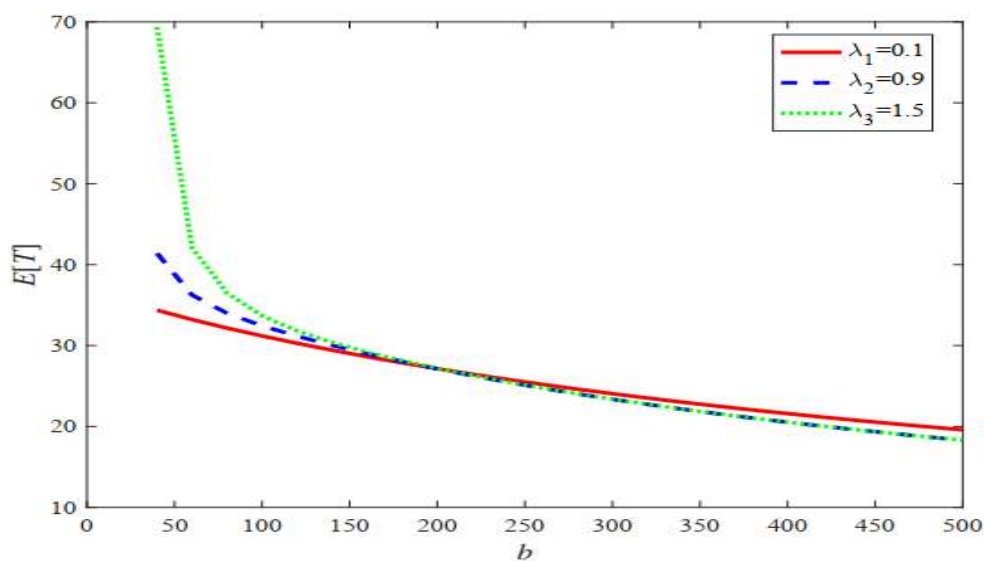
Εικόνα 3-8: Το μέσο πλήθος καταγραφών στο block συναρτήσει του μ_1 για τις διάφορες τιμές του b

Παρατηρούμε από τις εικόνες 3-7 και 3-8 ότι ο μέσος αριθμός συναλλαγών στην ουρά $E[J]$ και ο μέσος αριθμός συναλλαγών στο block $E[I]$ μειώνονται όσο το μ_1 αυξάνεται. Επίσης το $E[J]$ μειώνεται καθώς το b αυξάνεται, ενώ το $E[I]$ αυξάνεται όσο το b αυξάνεται, διότι υπάρχει αύξηση του χρόνου κατασκευής του block, οπότε συνωστίζονται συναλλαγές στην πρώτη φάση.



Εικόνα 3-9: Ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης της συναλλαγής στο σύστημα συναρτίζει του μ_1 για τις διάφορες τιμές του b

Ακόμα από την εικόνα 3-9 είναι εμφανές ότι ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης της συναλλαγής μειώνεται όσο το μ_1 αυξάνεται όπως επίσης μειώνεται και όταν το b αυξάνεται. Τέλος από την εικόνα 3-10 ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης της συναλλαγής μειώνεται όταν αυξάνεται το b και επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη τιμή K για την οποία όταν $b \leq K$ το $E[T]$ αυξάνεται όταν το λ αυξάνεται. Αντίθετα όταν $b > K$ το $E[T]$ αυξάνεται όσο το λ μειώνεται.



Εικόνα 3-10: Ο μέσος χρόνος ολοκλήρωσης της συναλλαγής στο σύστημα συναρτίζει του b για τις διάφορες τιμές του λ



Κεφάλαιο 4

Επεκτάσεις του συστήματος εξυπηρέτησης στην μελέτη των συστημάτων blockchain

Το μοντέλο GI/M/1 με δύο φάσης εξυπηρέτησης παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην μελέτη των συστημάτων blockchain ,όμως οι εκθετικοί χρόνοι εξυπηρέτησης είναι περιοριστικοί για την πρακτική εφαρμογή του. Για τον λόγο αυτό είναι απαραίτητη η χρήση πιο σύνθετων μοντέλων στην μελέτη των συστημάτων blockchain. Παρακάτω θα αναφερθούν μερικές ιδέες.

4.1 Επεκτάσεις συστήματος

4.1.1 Σύστημα με Erlang χρόνους εξυπηρέτησης

Μια πιο γενική οπτική για την μελέτη του blockchain συστήματος είναι η δημιουργία ενός σύστημα εξυπηρέτησης, σύμφωνα με την οποία οι αφίξεις εισέρχονται στο σύστημα με ρυθμό λ ,όπου οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν μια γενική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$ και η διαδικασία με την οποία δημιουργείται το block ακολουθεί Erlang($b\mu_2, \mu_2$) κατανομή με $\mu_2 > 0$. Ειδικότερα στο σύστημα αυτό οι συναλλαγές τοποθετούνται αρχικά στην ουρά, η οποία είναι άπειρης χωρητικότητας. Έπειτα οι miners επικυρώνουν τις συναλλαγές μέχρι την ολοκλήρωση της δημιουργίας του block ,το οποίο είναι το πρώτο στάδιο εξυπηρέτησης και στην συνέχεια το block αυτό διοχετεύεται μαζί με όλα τα αλλά στο δίκτυο ώστε να δημιουργηθεί το blockchain,το οποίο είναι το δεύτερο στάδιο εξυπηρέτησης. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι δημιουργίας του blockchain είναι εκθετικά κατανομημένοι με ρυθμό μ_1 και ότι το μέγιστο μέγεθος του block είναι b . Το σύστημα περιγράφεται από μια 3-διάστατη Μαρκοβιανή διαδικασία $(I(t), J(t), K(t))$ με χώρο καταστάσεων $E = \{(i, j, k), i=0, 1, \dots, b, j=0, 1, 2, \dots, k=1, 2, 3, \dots, b\}$, όπου $I(t)$ παριστά το πλήθος των καταγραφών στο block, $J(t)$ παριστά το πλήθος των καταγραφών στην ουρά και $K(t)$ περιγράφει την φάση στην οποία βρίσκεται η δημιουργία του block την χρονική στιγμή t .



Τότε η διαδικασία $X(t) = (I(t), J(t), K(t))_{t \geq 0}$ έχει χώρο καταστάσεων

$$E = \{(i, j, k) : i=0, 1, \dots, b, j=0, 1, 2, \dots, k=1, 2, \dots, b\}, (4.1)$$

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος μπορεί να εφαρμοστεί η πινακογεωμετρική μέθοδος.

4.1.2 Σύστημα της μορφής MAP/PH/1

Το σύστημα παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από το Li κ.ά (2019) Οι καταγραφές εισέρχονται στο σύστημα με μια Μαρκοβιανή διαδικασία αφίξεων (MAP) ,η οποία αντιπροσωπεύεται από τους πίνακες (C, D) τάξης m_0 , όπου C, D πίνακες ρυθμών μετάβασης και $C+D$ πίνακας μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής διαδικασίας με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων άρα είναι θετικά επαναληπτική και συνεπώς υπάρχει η στάσιμη κατανομή. Έστω θ διάνυσμα της στάσιμης κατανομής, τότε αυτό ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\theta(C + D) = 0, (4.2)$$

$$\theta e = 1, (4.3)$$

Όπου e το διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με 1.

Τέλος ο ρυθμός αφίξεων είναι

$$\lambda = \theta D e. (4.4)$$

Οι καταγραφές τοποθετούνται στον χώρο αναμονής όπου ελέγχονται από τους miners για την δημιουργία του block, το οποίο έχει μέγιστο πλήθος καταγραφών ίσο με b . Η διαδικασία αυτή είναι η πρώτη φάση εξυπηρέτησης και υποθέτουμε ότι οι χρόνοι δημιουργίας του block είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν κατανομή τύπου φάσεων (PH-distribution). Η κατανομή αυτή αντιπροσωπεύεται από τους πίνακες (β, S) τάξης m_2 όπου

$$\beta e = 1, (4.5)$$

και ο ρυθμός δημιουργίας του block είναι

$$\mu_2 = \frac{-1}{\beta S^{-1} e}. (4.6)$$

Έπειτα το block διοχετεύεται στο δίκτυο και τοποθετείται στην αλυσίδα μαζί με τα υπόλοιπα block . Το στάδιο αυτό είναι η δεύτερη φάση της εξυπηρέτησης και ακολουθεί κατανομή



τύπου φάσεων με τους χρόνους δημιουργίας του blockchain να είναι ανεξάρτητοι. Η κατανομή αντιπροσωπεύεται από τους πίνακες (α, T) τάξης m_1 , όπου

$$\alpha e = 1, (4.7)$$

με ρυθμό εξυπηρέτησης

$$\mu_1 = \frac{-1}{\alpha T^{-1}e}. (4.8)$$

Τέλος ο χώρος καταστάσεων δημιουργείται με βάση τις μεταβλητές:

$N_1(t)$ = αριθμός συναλλαγών στην ουρά

$N_2(t)$ = αριθμός συναλλαγών στο block

$I(t)$ = η φάση της MAP

$J_1(t)$ = η φάση δημιουργίας του blockchain

$J_2(t)$ = η φάση δημιουργίας του block

Η διαδικασία $X(t) = \{(N_1(t), N_2(t), I(t), J_1(t), J_2(t)), t \geq 0\}$ αποτελεί Μαρκοβιανή διαδικασία με χώρο καταστάσεων

$$\Omega = \{(0, 0; i), 1 \leq i \leq m_0\}$$

$$\cup \{(0, l; i, j), 1 \leq l \leq b, 1 \leq i \leq m_0, 1 \leq j \leq m_1\}$$

$$\cup \{(k, 0; i, r), k \geq 1, 1 \leq i \leq m_0, 1 \leq r \leq m_2\}$$

$$\cup \{(k, l; i, j), k \geq 1, 1 \leq l \leq b, 1 \leq i \leq m_0, 1 \leq j \leq m_1\}. (4.9)$$

Ο χώρος των καταστάσεων προκύπτει από το γεγονός ότι η διαδικασία δημιουργίας του block και η διαδικασία δημιουργίας του blockchain δεν μπορεί να συμβαίνει παράλληλα, διότι το block πρέπει πρώτα να δημιουργηθεί για να ενταθεί στο στάδιο δημιουργίας του blockchain. Ειδικότερα ο χώρος $(0, 0, i)$ αντιπροσωπεύει το κενό σύστημα όπου δεν υπάρχει κάποια φάση εξυπηρέτησης, ο χώρος $(0, l, i, j)$ αναφέρεται στο σύστημα την στιγμή που δεν υπάρχει συναλλαγή στην ουρά και υπάρχει μία συναλλαγή στο block και η εξυπηρέτηση βρίσκεται στην φάση δημιουργίας του block. Ο χώρος $(k, 0; i, r)$, συμβολίζει το στάδιο του συστήματος όπου δεν υπάρχουν καταγραφές στο block παρά μόνο στην ουρά και η εξυπηρέτηση βρίσκεται στην διαδικασία δημιουργίας του block και τέλος ο χώρος $(k, l; i, j)$



αντιπροσωπεύει το σύστημα όταν υπάρχουν συναλλαγές και στην ουρά και στο block και η εξυπηρέτηση βρίσκεται στο στάδιο δημιουργίας του block .

Για την μελέτη του συστήματος εφαρμόζεται η πινακογεωμετρική μέθοδος.

4.2 Ζητήματα για περαιτέρω έρευνα

Ένα ενδιαφέρον ζήτημα αποτελεί η προσαρμογή δομής αμοιβής - κόστους στο σύστημα εξυπηρέτησης. Η διαμόρφωση της λειτουργίας αυτής περιλαμβάνει την εξέταση διάφορων παραγόντων όπως οι δομές κόστους, τα τέλη συναλλαγών, την ανταμοιβή εξόρυξης ,τους μηχανισμούς συναίνεσης, την ασφάλεια. Ο στόχος είναι να βρεθούν οι βέλτιστες πολιτικές που εξασφαλίζουν την αποτελεσματική και ασφαλή λειτουργία του blockchain.

Τέλος ουσιαστικής σημασίας είναι η ανάλυση πολλαπλών κατηγοριών συναλλαγών στα συστήματα blockchain. Οι συναλλαγές αντιμετωπίζονται στη διαδικασία δημιουργίας μπλοκ και στη διαδικασία οικοδόμησης blockchain σύμφωνα με μια προτεραιότητα εξυπηρέτησης. Οι συναλλαγές με μεγαλύτερες αμοιβές προωθούνται στην κορυφή.



Βιβλιογραφικές Αναφορές

Adan, I., van Leeuwen, J., & Selen, J. (2017). Analysis of structured Markov processes I. *arXiv preprint arXiv:1709.09060*.

Bastos, N. (2020). A change on the horizon for the gaming industry: Trends, blockchain technology, and cryptocurrency. *UNLV Gaming Law Journal*, 10, 117.

Fralix B. (2020). On classes of Bitcoin-inspired infinite-server queueing systems. *Queueing Systems*, 95(1): 29-52

Hassani, H., Huang, X., & Silva, E. (2018). Big-Crypto: Big data, blockchain, and cryptocurrency. *Big Data and Cognitive Computing*, 2(4), 34.

Kawase, Y., & Kasahara, S. (2017). Transaction-confirmation time for Bitcoin: A queueing analytical approach to blockchain mechanism. In *International Conference on Queueing Theory and Network Applications* (pp. 75-88). Springer.

Latouche, G., & Ramaswami, V. (1999). *Introduction to matrix analytic methods in stochastic modeling*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Li, Q. L. (2010). *Constructive computation in stochastic models with applications: The RG-factorizations*. Springer Science & Business Media.

Li, Q. L., Ma, J. Y., & Chang, Y. X. (2018). Blockchain queue theory. In *Computational Data and Social Networks. 7th International Conference, CSoNet 2018, Shanghai, China, December 18–20, 2018, Proceedings 7* (pp. 25-40). Springer International Publishing.

Li, Q. L., Ma, J. Y., Chang, Y. X., Ma, F. Q., & Yu, H. B. (2019). Markov processes in blockchain systems. *Computational Social Networks*. 6, 1-28.

Meng T., Zhao Y., Wolter K., Xu C. Z. (2021). On consortium blockchain consistency: A queueing network model approach. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*,



32(6):

1369-1382.

Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. "Decentralized Business Review, p. 21260, 2008

Neuts, M. F. (1981). *Matrix-geometric solutions in stochastic models*. Johns Hopkins University Press.

Neuts, M. F. (1989). *Structured stochastic matrices of M/G/1 type and their applications*. Marcel Dekker, Inc.

Oyinloye, D. P., Teh, J. S., Alawida, M., & Jamil, N. (2021). Blockchain consensus: An overview of alternative protocols. *Symmetry*, 13(8), 1363

Prabhu, N. U. (1997). *Foundation of queueing theory*. Springer Science+Business Media.

Prokofieva, M., & Miah, S. J. (2019). Blockchain in healthcare. *Australasian Journal of Information System*, 23

Ramaswami, V., & Latouche, G. (1986). A general class of Markov processes with explicit matrix-geometric solutions. *OR Spektrum*, 8(4), 209-218.

Sarmah, S. S. (2018). Understanding blockchain technology. *Business Intelligence Architect*, Alpha Clinical Systems, USA.

Song X. S., Li Q. L., Chang Y. X., Zhang, C. (2022). A Markov process theory for network growth processes of DAG-based blockchain systems. arXiv preprint arXiv:2209.01458, pp. 1-49.



Sztrik, J. (2011). *Basic queueing theory*. University of Debrecen, Faculty of Informatics.

Taş, R., & Tanrıöver, Ö. Ö. (2020). A systematic review of challenges and opportunities of blockchain for e-voting. *Symmetry*, 12(8), 1328.

Taskinsoy, J. (2019). Blockchain: A misunderstood digital revolution. In *Things You Need to Know about Blockchain*. University of Malaysia Sarawak (UNIMAS)