



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Ηλεκτρομαγνητική διέγερση πολυστρωματικών
μέσων από N δίπολα και
εφαρμογές στη Βιοϊατρική

(Electromagnetic excitation of layered media by N dipoles and
biomedical applications)

Ευθυμία Φάκα

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Λ. Τσίτσας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Ηλεκτρομαγνητική διέγερση πολυστρωματικών μέσων από N δίπολα και εφαρμογές στη Βιοϊατρική

(Electromagnetic excitation of layered media by N dipoles and
biomedical applications)

Ευθυμία Φάκα

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Α. Τσίτσας

Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα

Πληροφορικής, ΑΠΘ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Βασίλειος Σεβρόγλου

Καθηγητής, Τμήμα Στατιστικής &

Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο
Πειραιά

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

*Αφιερώνεται στα παιδιά μου
Δημήτρη και Αναστασία*

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Νικόλαο Τσίτσα για τη συνεχή και πολύτιμη στήριξη και ανατροφοδότησή του καθ' όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας καθώς και τον Καθηγητή κ. Βασίλειο Σεβρόγλου, ο οποίος με τα σχόλια και τις παρατηρήσεις του ως δεύτερος επιβλέπων συνέβαλε στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Μεταδιδακτορικό Ερευνητή κ. Ανδρέα Καλογερόπουλο για τον χρόνο και την προθυμία του για βοήθεια καθώς και για το συνεχές έναυσμα που μου έδινε ώστε να διευρύνω τους ορίζοντές μου στον τομέα της ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την εκλιπούσα Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Φωτεινή Καριώτου η οποία με βοήθησε να ανακαλύψω το ενδιαφέρον μου για τον τομέα της σκέδασης. Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω για την αγάπη και την συμπαράστασή τους τον σύζυγό μου Μιχάλη και τα παιδιά μας Δημήτρη και Αναστασία, οι οποίοι υπήρξαν κινητήριος δύναμη για εμένα. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Γιώργο και Αναστασία για τη βοήθεια και τη στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τη διέγερση ενός πολυστρωματικού σκεδαστή από σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Οι διεγέρσεις αυτές γίνονται από N το πλήθος ηλεκτρικά δίπολα αυθαίρετα κατανεμημένα στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του σκεδαστή. Ειδικότερα μελετώνται τα πρωτεύοντα (προσπίπτοντα), από τα N δίπολα, και τα δευτερεύοντα (σκεδαζόμενα και διαθλώμενα), από τον πολυστρωματικό σκεδαστή, ηλεκτρικά πεδία. Όταν περισσότερα από ένα δίπολα εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην ίδια περιοχή, τα εμπλεκόμενα πρωτεύοντα και δευτερεύοντα πεδία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, δημιουργώντας ένα καθολικό πεδίο. Μάλιστα, όταν τα δίπολα είναι αυθαίρετα κατανεμημένα μέσα ή έξω από το στρωματοποιημένο μέσο, η φύση των ακτινοβολούμενων πεδίων είναι πιο περίπλοκη. Τα εμπλεκόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία ομαδοποιούνται σε σχέση με την προέλευση της διέγερσής τους (πεδία q -διέγερσης), τον τύπο σκέδασης (πρωτογενή, δευτερογενή, ολικά) και το πλήθος των δίπολων από τα οποία προέρχονται (μεμονωμένα, καθολικά).

Στην εργασία παρουσιάζεται θεωρία που σχετίζεται με τη διέγερση ενός πολυστρωματικού σκεδαστή από N δίπολα καθώς και η αναλυτική λύση του ευθέως προβλήματος και γίνεται εφαρμογή αυτής της θεωρίας για την επίλυση προβλημάτων διέγερσης πολυστρωματικής σφαίρας από αυθαίρετα ηλεκτρικά δίπολα καθώς και η επίλυση αντίστροφων προβλημάτων κάνοντας χρήση της θεωρίας χαμηλών συχνοτήτων. Ειδικότερα η εργασία περιλαμβάνει 5 κεφάλαια. Στο 1^ο κεφάλαιο αναφέρεται η βασική θεωρία σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Το 2^ο κεφάλαιο περιλαμβάνει τα σημαντικότερα θεωρήματα σκέδασης για επίπεδα και σφαιρικά κύματα καθώς και θεωρήματα που αφορούν τη σκέδαση πολυστρωματικού σκεδαστή από N πηγές. Στο 3^ο κεφάλαιο γίνεται η τοποθέτηση του προβλήματος και παρουσιάζεται μια αναλυτική λύση του ευθέως προβλήματος. Στη συνέχεια του ίδιου κεφαλαίου γίνεται εφαρμογή της αναλυτικής λύσης σε δύο προβλήματα σκέδασης: i) διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από ένα αυθαίρετο ηλεκτρικό δίπολο και ii) διέγερση διστρωματικής σφαίρας από δύο αυθαίρετα ηλεκτρικά δίπολα. Στο 4^ο κεφάλαιο κάνοντας την υπόθεση χαμηλών συχνοτήτων επιλύονται αντίστροφα προβλήματα που αφορούν στην εύρεση των φυσικών παραμέτρων ενός σκεδαστή και στον εντοπισμό ενός εξωτερικού δίπολου που διεγείρει έναν σφαιρικό σκεδαστή (ομογενή διηλεκτρική σφαίρα). Στο 5^ο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα

της εργασίας και μελλοντικοί στόχοι έρευνας. Στην εργασία αναφέρονται επίσης εφαρμογές των προβλημάτων σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον τομέα της Βιοϊατρικής.

Λέξεις – Κλειδιά: Σκέδαση, Ηλεκτρομαγνητισμός, Σφαιρικά Κύματα, Πολυστρωματικό Μέσο, Ηλεκτρικά Δίπολα, Χαμηλές συχνότητες, Αντίστροφα Προβλήματα

Abstract

This thesis deals with the excitation of a multilayer scatterer by spherical electromagnetic waves. These excitations are made by N electric dipoles arbitrarily distributed inside and outside the scatterer. In particular, the primary (incident), from the N dipoles, and the secondary (scattered and diffracted), from the multilayer scatterer, electric fields are studied. When more than one dipoles emit electromagnetic waves in the same region, the primary and secondary fields involved interact with each other, creating a universal field. Indeed, when dipoles are arbitrarily distributed inside or outside the layered medium, the nature of the radiating fields is more complicated. The electromagnetic fields involved are grouped with respect to the origin of their excitation (q -excitation fields), the type of scattering (primary, secondary, total) and the number of dipoles from which they originate (individual, overall).

The thesis presents the theory related to the excitation of a multilayer scatterer by N dipoles as well as the analytical solution of the direct problem and the application of this theory to the solution of problems of excitation of a multilayer sphere by arbitrary electric dipoles and the solution of inverse problems using low frequency theory. In particular, the thesis includes 5 chapters. Chapter 1 deals with the basic theory of electromagnetic wave scattering. Chapter 2 includes the most important scattering theorems for plane and spherical waves as well as theorems concerning multilayer scattering from N sources. In Chapter 3 the problem is stated and an analytical solution of the direct problem is presented. The same chapter then applies the analytical solution to two scattering problems: i) excitation of a multilayer sphere by one arbitrary electric dipole and ii) excitation of a bilayer sphere by two arbitrary electric dipoles. In Chapter 4, by making the low frequency assumption, inverse problems are solved to find the physical parameters of a scatterer and to locate an external dipole exciting a spherical scatterer (homogeneous dielectric sphere). Chapter 5 presents the conclusions of the thesis and future research objectives. The thesis also reports applications of electromagnetic wave scattering problems in the field of Biomedicine.

Keywords: Scattering, Electromagnetism, Spherical Waves, Multilayered Medium, Electric Dipoles, Low Frequencies, Inverse Problems

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	5
Περίληψη.....	6
Abstract	8
Κατάλογος Εικόνων	10
Εισαγωγή.....	11
1. Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων	14
1.1 Βασική Θεωρία.....	14
1.2 Θεμελιώδης λύση	16
1.3 Συνοριακές συνθήκες-Τύποι σκεδαστών	16
1.4 Συνθήκη ακτινοβολίας	19
1.5 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις.....	19
1.6 Πλάτη και ενεργειακές διατομές σκέδασης.....	21
2. Θεωρήματα σκέδασης	23
2.1 Θεωρήματα επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.....	23
2.2 Θεωρήματα σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων	24
2.3 Θεωρήματα σκέδασης πολυστρωματικού σκεδαστή	26
2.4 Θεωρήματα σκέδασης πολυστρωματικού σκεδαστή από N δίπολα	31
3. Προβλήματα σκέδασης πολυστρωματικού σκεδαστή.....	45
3.1 Τοποθέτηση του προβλήματος.....	45
3.2 Διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από ένα ηλεκτρικό δίπολο σε αυθαίρετη θέση ..	48
3.3 Διέγερση διστρωματικής σφαίρας από δυο ηλεκτρικά δίπολα σε αυθαίρετη θέση	53
4. Αντίστροφα προβλήματα	60
4.1 Υπόθεση χαμηλών συχνοτήτων - Ασυμπτωτικά αναπτύγματα.....	60
4.2 Αντίστροφο πρόβλημα εξωτερικής διέγερσης ομογενούς διηλεκτρικής σφαίρας	61
4.3 Αντίστροφο πρόβλημα εύρεσης θέσης εξωτερικού δίπολου που διεγείρει ομογενή διηλεκτρική σφαίρα.....	64
Συμπεράσματα.....	78
Βιβλιογραφία.....	79
Παράρτημα Α.....	83
Παράρτημα Β	85

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1: Σκέδαση προσπίπτοντος κύματος από σκεδαστή.....	17.
Εικόνα 2: Διέγερση πολυστρωματικού σκεδαστή από δύο εσωτερικά μαγνητικά δίπολα.....	26.
Εικόνα 3: Διέγερση πολυστρωματικού σκεδαστή από N αυθαίρετα ηλεκτρικά δίπολα.....	32.
Εικόνα 4: Διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από N αυθαίρετα κατανεμημένα ηλεκτρικά δίπολα.....	46.
Εικόνα 5: Διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από ένα αυθαίρετο ηλεκτρικό δίπολο.....	49.
Εικόνα 6: Διέγερση διστρωματικής σφαίρας από δύο αυθαίρετα ηλεκτρικά δίπολα.....	53.
Εικόνα 7: Προσδιορισμός φυσικών παραμέτρων ομογενούς διηλεκτρικής σφαίρας από εξωτερική διέγερση ηλεκτρικού δίπολου.....	62.
Εικόνα 8: Προσδιορισμός θέσης εξωτερικού δίπολου που διεγείρει ομογενή διηλεκτρική σφαίρα.....	64.

Εισαγωγή

Η μελέτη προβλημάτων σκέδασης έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, λόγω της ανάγκης πρακτικής εφαρμογής αυτών σε διάφορους τομείς της σύγχρονης καθημερινότητας. Ωστόσο η θεωρία σκέδασης ενός κύματος (ακουστικού ή ηλεκτρομαγνητικού) από ένα μέσο δεν είναι σύγχρονη καθώς μελετάται ήδη από τον 19^ο αιώνα. Διάσημοι επιστήμονες όπως οι Mie, Clebsch, Nicholson, Debye, Watson, Walker, Rayleigh, Bessel, Lorenz, Lorentz, Maxwell, Heaviside και Green ασχολήθηκαν με αυτό το επιστημονικό πεδίο.

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία εμφανίζονται αρκετά ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε ένα πολυστρωματικό μέσο [4], [14], [15], [16], [20]. Ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια, εξαιτίας της πληθώρας και της σημαντικότητας των εφαρμογών που έχουν, μελετώνται προβλήματα που αφορούν τη διέγερση πολυστρωματικού μέσου από N πηγές [17], [19], [28], [29], [31]. Ένας από τους τομείς στους οποίους τα προβλήματα αυτά έχουν άμεση εφαρμογή είναι ο τομέας της Βιοϊατρικής. Η απεικόνιση εγκεφάλου (brain medical imaging) χρησιμοποιεί τη διέγερση των σφαιρικών μέσων από εσωτερικά σημειακά δίπολα [21], [22]. Η ηλεκτροεγκεφαλογραφία (electroencephalography) [18], η μαγνητοεγκεφαλογραφία (magnetoencephalography) [24], η απεικόνιση μαγνητικού συντονισμού (magnetic resonance imaging) [25] και η μοντελοποίηση κεραιών οι οποίες είτε εμφυτεύονται στον εγκέφαλο [26] είτε χρησιμοποιούνται για τη θεραπεία του καρκίνου [23] βασίζονται στην ηλεκτρομαγνητική διέγερση ενός μέσου. Επίσης, πρόσφατες έρευνες υποστηρίζουν ότι η μη ιονίζουσα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μικροκυμάτων επιτρέπει την έγκαιρη ανίχνευση της οστεοπόρωσης και μειώνει το κόστος και τον αριθμό των παραπομπών για περαιτέρω εξετάσεις [36].

Τα τελευταία χρόνια έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς σε πολλά ερευνητικά πεδία χάρη στις οπτικές και θερμοοπτικές ιδιότητές τους τα νανοσωματίδια χρυσού (AuNPs). Τα AuNP διαθέτουν την ικανότητα να εστιάζουν ένα ισχυρό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε επίπεδο νανοκλίμακας χάρη σε ένα φυσικό φαινόμενο που ονομάζεται επιφανειακός πλάσμονικός εντοπισμός (LSPR). Οι φωτοθερμικές ιδιότητες των AuNPs χρησιμοποιούνται ευρέως όχι μόνο για την αντιμετώπιση καρκινικών κύτταρων και όγκων αλλά και για επιλεκτική καταστροφή ανθεκτικών στα αντιβιοτικά βακτηρίων αλλά και για τη θεραπεία του HIV. Μια πολύ πρόσφατη εφαρμογή της

θερμοπλασμονικής είναι αυτή κατά της επιδημίας του κοροναϊού (Covid-19), όπου επιτρέπει την ανίχνευση αλληλουχιών ιών [34].

Μια ακόμη εφαρμογή του ηλεκτρομαγνητισμού στη Βιοϊατρική αποτελεί η αλληλεπίδραση των κυμάτων Terahertz με τα βιομακρομόρια. Τα επίπεδα περιστροφής και δόνησης της ενέργειας των βιομακρομορίων κυμαίνονται στο ενεργειακό εύρος των κυμάτων Terahertz. Τα κύματα Terahertz αναφέρονται σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητες που κυμαίνονται από 0,1 THz έως 10 THz, με μήκη κύματος από 30 μm έως 3 mm και κύκλους δόνησης από 0,1 ps έως 10 ps. Οι ερευνητές έχουν εφαρμόσει φασματοσκοπία Terahertz για να αναλύσουν τα δομικά χαρακτηριστικά των βιολογικών μακρομορίων, όπως πρωτεϊνών, νουκλεϊκών οξέων, πολυσακχαριτών και λιπιδίων. Η ερμηνεία της χωρικής διαμόρφωσης των μακρομορίων με φασματοσκοπία Terahertz βοηθάει στην αποσαφήνιση των μοριακών τους μηχανισμών [35].

Παρ' όλες τις εφαρμογές που έχουν σήμερα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στον τομέα της Βιοϊατρικής, τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία ραδιοσυχνότητας (RF-EMFs), που κυμαίνονται από 30 kHz έως 300 GHz του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, έχουν ταξινομηθεί από τον Διεθνή Οργανισμό Έρευνας για τον Καρκίνο (IARC) ως πιθανώς καρκινογόνα για τον άνθρωπο. Αυτός ο τύπος ακτινοβολίας εκπέμπεται από καθημερινές συσκευές, όπως κινητά τηλέφωνα, ραδιόφωνα, τηλεοράσεις, ιατρικό εξοπλισμό και από πολλές άλλες πηγές. Κατά την τελευταία δεκαετία έχουν διεξαχθεί πολλές έρευνες σχετικά με τις πιθανές γονοτοξικές επιδράσεις των RF-EMFs και μάλιστα πρόσφατες έρευνες δηλώνουν ότι η έκθεση σε RF-EMF μπορεί να επηρεάσει το DNA των αλληλουχιών LINE-1 (μακροχρόνια διάσπαρτα ενεργά ρετροστοιχεία-1) και rDNA (αλληλουχίες DNA που κωδικοποιούν το ριβοσωμικό RNA), οι οποίες αντιπροσωπεύουν σε μεγάλο βαθμό το ανθρώπινο γονιδίωμα [37]. Γι' αυτόν τον λόγο είναι απαραίτητη η περαιτέρω έρευνα σχετικά με τις επιγενετικές επιδράσεις (θετικές και αρνητικές) της έκθεσης του ανθρώπου σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με τη διέγερση ενός πολυστρωματικού σκεδαστή από σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Οι διεγέρσεις αυτές γίνονται από N το πλήθος ηλεκτρικά δίπολα αυθαίρετα κατανομημένα. Η διέγερση του πολυστρωματικού σκεδαστή από μια κατανομή N αυθαιρέτων ηλεκτρικών δίπολων, τα οποία παράγουν σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχει ως αποτέλεσμα τη

δημιουργία διαφόρων πρωτογενών και δευτερευόντων πεδίων που αλληλεπιδρούν. Τα δίπολα είναι κατανομημένα τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό του σκεδαστή. Ο σκεδαστής είναι ένα πολυστρωματικό μέσο το οποίο περιλαμβάνει P το πλήθος ομοιογενή στρώματα. Τα στρώματα διαχωρίζονται από επιφάνειες οι οποίες ικανοποιούν, ανάλογα με το είδος τους, τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες, ενώ στο κέντρο του σκεδαστή βρίσκεται ο πυρήνας του. Το εξωτερικό του σκεδαστή είναι επίσης ένα συνεχές ομογενές μέσο.

1. Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Ο καθορισμός ενός προβλήματος σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων απαιτεί τη διατύπωση των εξισώσεων Maxwell, τις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στις διαχωριστικές επιφάνειες των μέσων και μια συνθήκη ακτινοβολίας η οποία εξασφαλίζει την ασυμπτωτική τάξη εξασθένησης του κύματος καθώς οδεύει στο άπειρο. Παρακάτω παρουσιάζονται βασικές αρχές της θεωρίας σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

1.1 Βασική Θεωρία

Θεωρούμε ομογενές και ιστροπικό μέσο, όγκου $V \subseteq \mathbb{R}^3$, μαγνητικής διαπερατότητας μ , ηλεκτρικής επιτρεπτότητας ε και αγωγιμότητας σ , με χωρική πυκνότητα φορτίων $\rho(r, t)$ και χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος $\mathbf{J}(r, t)$. Στο μέσο αυτό διαδίδεται ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(r, t)$, ηλεκτρική μετατόπιση $\mathbf{D}(r, t)$, μαγνητική επαγωγή $\mathbf{B}(r, t)$ και μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(r, t)$. Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι διανυσματικά πεδία που εξαρτώνται από τον χρόνο t και ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

Δεδομένου ότι σε ένα ομογενές και ιστροπικό μέσο ισχύουν οι καταστατικές σχέσεις:

$$\mathbf{J}(r, t) = \sigma \mathbf{E}(r, t) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{D}(r, t) = \varepsilon \mathbf{E}(r, t) \quad (1.6)$$

$$\mathbf{B}(r, t) = \mu \mathbf{H}(r, t) \quad (1.7)$$

έπεται η εξίσωση συνέχειας:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(r, t) + \frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} = 0. \quad (1.8)$$

Θεωρούμε αρμονική χρονική εξάρτηση για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, της μορφής:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα και τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E}, \mathbf{H} τα χωρικά μέρη των αντίστοιχων πεδίων.

Οπότε, οι εξισώσεις (1.1)-(1.4) γίνονται:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon} \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.14)$$

Κάνοντας την υπόθεση/παραδοχή ότι ο χώρος διάδοσης των κυμάτων είναι ελεύθερος πηγών, η χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\rho(\mathbf{r}, t)$ και η χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ μηδενίζονται. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση οι σχέσεις (1.11) – (1.14) παίρνουν τη μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.18)$$

Εφαρμόζοντας κατάλληλη κανονικοποίηση προκύπτει για τις (1.15) και (1.16):

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = ik\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -ik\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.20)$$

Εφαρμόζοντας τον στροβιλισμό ($\nabla \times$) και απαλείφοντας το \mathbf{H} (ή το \mathbf{E}) στις (1.19) και (1.20) προκύπτει η διανυσματική εξίσωση Helmholtz για τα πεδία \mathbf{E} και \mathbf{H} αντίστοιχα.

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (1.21)$$

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (1.22)$$

όπου k ο κυματικός αριθμός ή κυματάρηθος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στον χώρο διάδοσης και δίνεται από τη σχέση:

$$k = \sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega}, \quad \text{Im}k \geq 0. \quad (1.23)$$

1.2 Θεμελιώδης λύση

Η θεμελιώδης λύση $\tilde{G}(\mathbf{r}, r_0)$ της εξίσωσης (1.21) ή (1.22) σε δυαδική μορφή δίνεται από:

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, r_0) = \frac{1}{k^2} (\nabla_r \nabla_r + k^2 \tilde{I}) G(\mathbf{r}, r_0) \quad (1.24)$$

όπου $\tilde{I} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z}$ και $G(\mathbf{r}, r_0)$ η θεμελιώδης λύση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz στον \mathbb{R}^3 , η οποία δίνεται από:

$$G(\mathbf{r}, r_0) = \frac{e^{ik|r-r_0|}}{ik|r-r_0|}. \quad (1.25)$$

Για τα σφαιρικά κύματα που παράγονται κατά τη διέγερση ενός ηλεκτρικού ή μαγνητικού δίπολου μοναδιαίας ροπής $\hat{\mathbf{p}}$ ή $\hat{\mathbf{m}}$ αντίστοιχα αποδεικνύονται οι σχέσεις που συνδέουν το ηλεκτρικό E_e και το μαγνητικό H_m πεδίο με τη θεμελιώδη λύση σε δυαδική μορφή:

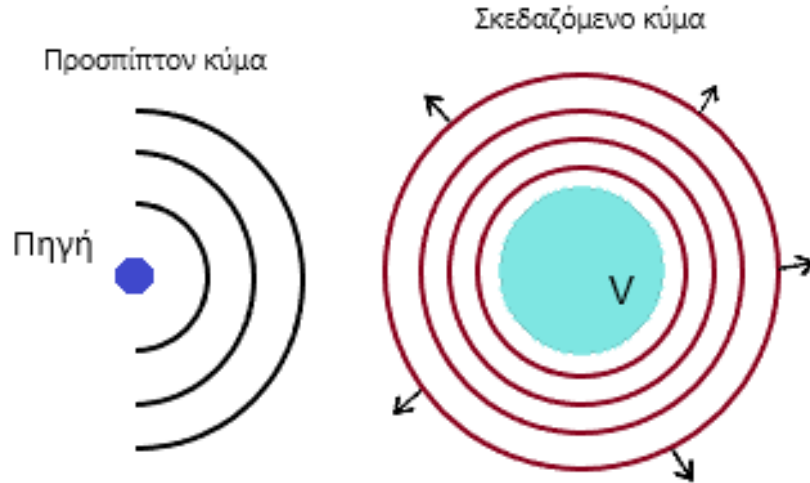
$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, r_0) = \frac{ik^3}{4\pi\varepsilon} \tilde{G}(\mathbf{r}, r_0) \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{H}_m(\mathbf{r}, r_0) = \frac{ik^3}{4\pi} \tilde{G}(\mathbf{r}, r_0) \cdot \hat{\mathbf{m}}. \quad (1.27)$$

1.3 Συνοριακές συνθήκες-Τύποι σκεδαστών

Θεωρούμε έναν σκεδαστή V συμπαγές υποσύνολο του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^3, d_\varepsilon)$ με d_ε την ευκλείδεια μετρική. Το σύνορο του V , $S = \partial V$, αποτελεί μια C^2 επιφάνεια του \mathbb{R}^3 . Ο εξωτερικός χώρος $V^0 = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}$ είναι μη φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_0 , μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και κυματάρηθος k_0 . Το εσωτερικό του σκεδαστή V^1 αποτελεί επίσης ένα ομογενές μέσο και χαρακτηρίζεται από τις αντίστοιχες παραμέτρους ε_1 , μ_1 και k_1 .

Όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με πρωτεύον ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^{Pr} προσπίπτει σε έναν σκεδαστή V , λόγω της αρχής του Huygens, ο σκεδαστής V συμπεριφέρεται ως πηγή και επανακτινοβολεί ένα δευτερογενές ηλεκτρομαγνητικό κύμα με σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^S .



Εικόνα 1: Σκέδαση προσπίπτοντος κύματος από σκεδαστή

Το ολικό πεδίο \mathbf{E}^t σε κάθε σημείο του εξωτερικού του σκεδαστή, είναι η υπέρθεση (διανυσματικό άθροισμα) του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου πεδίου.

$$\mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{Pr}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^S(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V} \quad (1.28)$$

Οι συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια S , του σκεδαστή καθορίζονται ανάλογα με τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή.

1. Τέλειος αγωγός

Στην επιφάνεια του σκεδαστή ισχύει $\sigma^1 \rightarrow \infty$, οπότε η εφαπτομενική συνιστώσα του ολικού εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια S είναι μηδενική, δηλαδή:

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in S \quad (1.29)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S (με φορά από το εσωτερικό προς το εξωτερικό της).

2. Ανθεκτική επιφάνεια

Η ανθεκτική επιφάνεια ενός σκεδαστή δεν επιτρέπει στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα να εισέλθουν βαθιά στο εσωτερικό του σκεδαστή, με αποτέλεσμα το μεγαλύτερο μέρος του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου να σκεδάζεται στο

εξωτερικό του. Η επαπτομενική συνιστώσα του ολικού εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια S του σκεδαστή V συνδέεται με τη σχέση:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^t = \frac{Z_s}{ik} \hat{n} \times (\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r})), \quad r \in S \quad (1.30)$$

όπου Z_s η σχετική επιφανειακή αντίσταση που εξαρτάται από τις φυσικές παραμέτρους του σκεδαστή και είναι αδιάστατη μεταβλητή.

3. Διηλεκτρική επιφάνεια

Η διηλεκτρική επιφάνεια επιτρέπει σε ένα μέρος του προσπίπτοντος ηλεκτρομαγνητικού κύματος να εισέρχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή V^1 και ένα μέρος του να σκεδάζεται στο εξωτερικό του V^0 . Για τη διηλεκτρική επιφάνεια ισχύουν οι σχέσεις:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = \hat{n} \times \mathbf{E}^1(\mathbf{r}), \quad r \in S \quad (1.31)$$

$$\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = \frac{\mu^0}{\mu^1} \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}^1(\mathbf{r}), \quad r \in S \quad (1.32)$$

4. Πολυστρωματικός σκεδαστής

Ο πολυστρωματικός σκεδαστής αποτελεί μια γενικότερη περίπτωση διαπερατού σκεδαστή, όπου το εσωτερικό του V^1 διαχωρίζεται από $N - 1$ λείες C^2 επιφάνειες S_j με $j \in \{2, 3, \dots, N\}$. Μεταξύ δύο επιφανειών υπάρχει ένα υποσύνολο V_j το οποίο καλείται στρώμα. Το κάθε στρώμα V_j , $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ συνίσταται από ένα ομογενές και ισοτροπικό διηλεκτρικό υλικό και χαρακτηρίζεται από τη δικιά του ηλεκτρική επιτρεπτικότητα ϵ_j , μαγνητική διαπερατότητα μ_j και κυματάριθμο k_j . Κάθε επιφάνεια S_j περιβάλλει την S_{j+1} και ισχύει:

$$S_j \cap S_{j+1} = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, N$$

όπου $S_1 = S$.

Για το ολικό ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}_j^t πάνω στις διαχωριστικές επιφάνειες S_j ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \mathbf{E}_j^t(\mathbf{r}) &= \hat{n} \times \mathbf{E}_{j+1}^t(\mathbf{r}), \quad r \in S_j \\ \hat{n} \times \nabla \times \mathbf{E}_j^t(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_j}{\mu_{j+1}} \hat{n} \times \mathbf{E}_{j+1}^t(\mathbf{r}), \quad r \in S_j \\ \hat{n} \cdot \mathbf{E}_j^t(\mathbf{r}) &= \frac{\epsilon_{j+1}}{\epsilon_j} \hat{n} \cdot \mathbf{E}_{j+1}^t(\mathbf{r}), \quad r \in S_j. \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.4 Συνθήκη ακτινοβολίας

Στα προβλήματα σκέδασης, το σκεδασμένο πεδίο ικανοποιεί μια συνθήκη η οποία εξασφαλίζει την ασυμπτωτική τάξη εξασθένησής του καθώς οδεύει στο άπειρο. Οι συνθήκες ακτινοβολίας που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή την εργασία είναι των Silver-Müller. Η λύση E^S, H^S των εξισώσεων Maxwell που ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας των Silver-Müller καλείται ακτινοβολούσα λύση.

Χρησιμοποιώντας την κανονικοποιημένη μορφή (1.19), (1.18) των εξισώσεων Maxwell στις συνθήκες ακτινοβολίας των Silver-Müller προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{E}^S \times \hat{\mathbf{r}} + r \mathbf{H}^S) = \mathbf{0} \quad (1.34)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{H}^S \times \hat{\mathbf{r}} + r \mathbf{E}^S) = \mathbf{0} \quad (1.35)$$

ομοίωμα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$.

Επίσης για τα σκεδασμένα πεδία $\mathbf{E}^S, \mathbf{H}^S$ προκύπτουν οι συνθήκες:

$$\mathbf{E}^S(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \text{ και } \mathbf{H}^S(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \quad (1.36)$$

οι οποίες είναι αναμενόμενες αφού τα σκεδαζόμενα πεδία εκφυλίζονται και αποσβένουν καθώς απομακρύνονται από τον σκεδαστή.

1.5 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί τη διανυσματική Μ.Δ.Ε. Helmholtz και η θεμελιώδης λύση εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Green. Παρακάτω αναφέρονται τα διανυσματικά θεωρήματα Green για δύο πεδία τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις.

Θεωρούμε σκεδαστή V με σύνορο $S = \partial V$ μια C^2 επιφάνεια και μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ κάθετο στην επιφάνεια S με φορά προς το εξωτερικό του σκεδαστή.

Πρώτο διανυσματικό θεώρημα Green

Για πεδία $\mathbf{F} \in C^1(\bar{V})$ και $\mathbf{D} \in C^2(\bar{V})$ ισχύει

$$\int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{D}) ds = \int_V [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{D}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{D})] dv \quad (1.37)$$

Δεύτερο διανυσματικό θεώρημα Green

Για πεδία $\mathbf{F}, \mathbf{D} \in C^2(\bar{V})$ ισχύει

$$\int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D} \times \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \nabla \times \mathbf{D}) ds = \int_V [\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F})] dv \quad (1.38)$$

Θεώρημα Stratton-Chu

Για τα διανυσματικά πεδία $E, H \in C^1(V) \cap C(\bar{V})$ ισχύει:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) = & -\nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \nabla \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \cdot E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') - \\ & ik \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times H(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \nabla \times \int_D [\nabla \times E(\mathbf{r}') - ikH(\mathbf{r}')] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') - \\ & \nabla \int_D \nabla \cdot E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') + ik \int_D [\nabla \times H(\mathbf{r}') - ikE(\mathbf{r}')] \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V \end{aligned} \quad (1.39)$$

Αντίστοιχη σχέση προκύπτει και για το μαγνητικό πεδίο H απλώς εναλλάσσοντας το E με το H .

Εσωτερική αναπαράσταση

Έστω $E, H \in C^1(V) \cap C(\bar{V})$ οι λύσεις των εξισώσεων Maxwell που προκύπτουν από την αναπαράσταση Stratton – Chu για το εσωτερικό ενός σκευαστή V . Τότε οι εσωτερικές αναπαραστάσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα δίνονται από:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}) = & -\nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times H(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} H(\mathbf{r}) = & -\nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times H(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in V \end{aligned} \quad (1.41)$$

Εξωτερική αναπαράσταση

Έστω $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus V)$ οι λύσεις των εξισώσεων Maxwell που ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας Silver – Muller, για το εσωτερικό ενός σκευαστή V^0 . Τότε οι εξωτερικές αναπαραστάσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα δίνονται από:

$$E(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') - \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times H(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{r} \in V^0 \quad (1.42)$$

$$H(\mathbf{r}) = \nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times H(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}') + \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}' \times E(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{r} \in V^0 \quad (1.43)$$

1.6 Πλάτη και ενεργειακές διατομές σκέδασης

Τα σκεδασμένα πεδία $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ που ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας των Silver-Müller εκφράζονται με τις ακόλουθες ασυμπτωτικές μορφές ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = g_e(\hat{\mathbf{r}})h(kr) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty \quad (1.44)$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{r}) = g_m(\hat{\mathbf{r}})h(kr) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \rightarrow \infty \quad (1.45)$$

όπου $h(kr) = \frac{e^{ikr}}{ikr}$ η σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης και

$$g_e(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r}')) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}') + \frac{k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \hat{\mathbf{r}} \times \left[\hat{\mathbf{r}} \times \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^t(\mathbf{r}')) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}') \right] \quad (1.46)$$

$$g_m(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi} \hat{\mathbf{r}} \times \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^t(\mathbf{r}')) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}') - \frac{k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{r}} \times \left[\hat{\mathbf{r}} \times \int_S (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^t(\mathbf{r}')) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} ds(\mathbf{r}') \right] \quad (1.47)$$

είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πλάτος σκέδασης ή μακρινό πεδίο.

Η συνάρτηση μακρινού πεδίου έχει τις ίδιες διαστάσεις με το σκεδαζόμενο πεδίο και εξαρτάται γενικά από τις διευθύνσεις διάδοσης και πόλωσης του προσπίπτοντος πεδίου και από τη διεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{r}}$ του πεδίου. Το μακρινό πεδίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη προβλημάτων σκέδασης.

Ένα ακόμα μέγεθος που μας ενδιαφέρει κατά τη μελέτη προβλημάτων σκέδασης είναι η ενεργειακή διατομή σκέδασης $\sigma^t(\hat{\mathbf{r}})$, η οποία εκφράζει τον μέσο ρυθμό σκέδασης της ενέργειας προς τον μέσο ρυθμό με τον οποίο η ενέργεια του προσπίπτοντος

κύματος διαπερνά την κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος μοναδιαία σφαίρα και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma^t(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{k^2} \int_{S^2} |g_e(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (1.48)$$

Ένα άλλο μέτρο της επίδρασης που έχει ο σκεδαστής στην ενέργεια του κύματος είναι η ενεργειακή διατομή απορρόφησης $\sigma^a(\hat{\mathbf{r}})$, η οποία εκφράζει τον μέσο ρυθμό απορρόφησης της ενέργειας από τον σκεδαστή και δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma^a(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{k} \text{Im} \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}^t \times \nabla \times \overline{\mathbf{E}^t}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (1.49)$$

Από τα δύο αυτά μεγέθη ορίζεται η αποσβεσμένη ενεργειακή διατομή $\sigma^e(\hat{\mathbf{r}})$ ώστε:

$$\sigma^e(\hat{\mathbf{r}}) = \sigma^t(\hat{\mathbf{r}}) + \sigma^a(\hat{\mathbf{r}}). \quad (1.50)$$

2. Θεωρήματα σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο διατυπώνονται βασικά θεωρήματα σκέδασης για επίπεδα και σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα καθώς και θεωρήματα και αποδείξεις που αφορούν τη σκέδαση ενός πολυστρωματικού σκεδαστή από ένα δίπολο και από N δίπολα.

Τα θεωρήματα χρησιμοποιούν το σύμβολο Twersky το οποίο για δύο διανυσματικές συναρτήσεις $P, Q \in C^2(V)$ ορίζεται ως:

$$\{P, Q\}_S = \int_S [(\hat{\mathbf{n}} \times P) \cdot (\nabla \times Q) - (\hat{\mathbf{n}} \times Q) \cdot (\nabla \times P)] ds$$

2.1 Θεωρήματα επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Θεώρημα 1.1

Για δύο πρωτεύοντα ηλεκτρικά επίπεδα κύματα E_1^{pr}, E_2^{pr} που προσπίπτουν σε σκεδαστή V με $\partial V = S$ και τα αντίστοιχα σκεδασμένα πεδία E_1^s, E_2^s ισχύει:

$$\{E_1^{pr}, E_2^s\} = \{E_2^{pr}, E_1^s\} \quad (2.1.1)$$

Γενικό Θεώρημα Σκέδασης Επίπεδων Κυμάτων

Για τα μακρινά πεδία δύο επίπεδων κυμάτων με διευθύνσεις διάδοσης $\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{r}}$ ισχύει:

$$\mathbf{q} \cdot \overline{g(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p})} + \bar{\mathbf{p}} \cdot g(\hat{\mathbf{d}}; \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g(\hat{\mathbf{r}}'; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p})} \cdot g(\hat{\mathbf{r}}'; \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{q}) ds(\mathbf{r}') \quad (2.1.2)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{r}} \in S^2, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^3$ και $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0, \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$.

Θεώρημα Αμοιβαιότητας Επίπεδων Κυμάτων

Για τα μακρινά πεδία δύο επίπεδων κυμάτων με διευθύνσεις διάδοσης $\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{r}}$ ισχύει:

$$\mathbf{q} \cdot g(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot g(-\hat{\mathbf{d}}; -\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{q}) \quad (2.1.3)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{r}} \in S^2, \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^3$ και $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0, \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$.

Οπτικό Θεώρημα Επίπεδων Κυμάτων

Για την ενεργειακή διατομή σκέδασης ισχύει:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \operatorname{Re} \left(\bar{\mathbf{p}} \cdot g(\hat{\mathbf{d}}; \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{q}) \right) \quad (2.1.4)$$

όπου $\hat{\mathbf{d}} \in S^2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{C}^3$ και $\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$.

2.2 Θεωρήματα σφαιρικών ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Θεωρούμε δύο σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα που παράγονται από πηγές σε θέσεις \mathbf{q}_1 και \mathbf{q}_2 με πόλωση $\hat{\mathbf{p}}_1$ και $\hat{\mathbf{p}}_2$ αντίστοιχα και προσπίπτουν σε σκεδαστή D , με ηλεκτρικά πεδία:

$$E_{q_1}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_1) = \frac{q_1 e^{-ikq_1}}{ik} \nabla \times \left[\frac{e^{ik|r-q_1|}}{|r-q_1|} \hat{\mathbf{q}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_1 \right] \quad (2.2.1)$$

$$E_{q_2}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_2) = \frac{q_2 e^{-ikq_2}}{ik} \nabla \times \left[\frac{e^{ik|r-q_2|}}{|r-q_2|} \hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \right] \quad (2.2.2)$$

Για το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο και για το ηλεκτρικό πλάτος σκέδασης ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} E_q^s(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}) = E^s(\mathbf{r}; -\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (2.2.3)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} g_{e,q}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}) = g_e(\hat{\mathbf{r}}; -\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}). \quad (2.2.4)$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για το μαγνητικό πεδίο και μαγνητικό πλάτος σκέδασης. Άμεση συνέπεια των σχέσεων (2.2.3) και (2.2.4) είναι η ταύτιση του σκεδαζόμενου πεδίου και του πλάτους σκέδασης ενός προσπίπτοντος σφαιρικού κύματος με διάνυσμα θέσης της πηγής \mathbf{q} , με το σκεδαζόμενο πεδίο και το πλάτος σκέδασης του αντίστοιχου προσπίπτοντος επιπέδου κύματος με κατεύθυνση διάδοσης $-\hat{\mathbf{q}}$, καθώς $q \rightarrow \infty$.

Ορίζουμε τον σφαιρικό γεννήτορα μακρινού πεδίου για δύο σφαιρικά ηλεκτρικά πεδία που παράγονται από δύο σημειακές πηγές την ποσότητα:

$$G_{q_2}(\mathbf{q}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) = e^{ikq_1} \mathbf{q}_1 \times \left[\nabla \times E_{q_2}^s(\mathbf{q}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) - \frac{ik}{2\pi} \int_{S^2} \hat{\mathbf{r}} \times g_{q_2}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_2) e^{ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}_1} ds(\hat{\mathbf{r}}) \right] \quad (2.2.5)$$

όπου $\hat{\mathbf{p}}_2$ η πόλωση του πεδίου που παράγεται από τη σημειακή πηγή στη δεύτερη θέση. Από τον παραπάνω ορισμό εξάγουμε το συμπέρασμα ότι καθώς η πρώτη πηγή απομακρύνεται στο άπειρο, ο σφαιρικός γεννήτορας ανάγεται σε μακρινό πεδίο σφαιρικού κύματος το οποίο παράγεται από τη σημειακή πηγή που βρίσκεται στη δεύτερη θέση.

Θεώρημα 2.1

Για δύο προσπίπτοντα ηλεκτρικά πεδία $E_{q_1}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_1)$ και $E_{q_2}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_2)$ σε σκεδαστή D ισχύει:

$$\lim_{q_1 \rightarrow \infty} G_{q_2}(\mathbf{q}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) = g_{q_2}(-\mathbf{q}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) \quad (2.2.6)$$

Συνεπώς, όταν οι σημειακές πηγές απομακρύνονται στο άπειρο ο σφαιρικός γεννήτορας μακρινού πεδίου $G_{q_2}(\mathbf{q}_1; \hat{\mathbf{p}}_2)$ ανάγεται σε πλάτος σκέδασης ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος με διάνυσμα πόλωσης $\hat{\mathbf{p}}_2$ και διεύθυνση διάδοσης $-\hat{\mathbf{q}}_1$.

Γενικό Θεώρημα Σκέδασης Σφαιρικών Κυμάτων

Έστω δύο σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα προσπίπτοντα σε σκεδαστή D με αντίστοιχα ηλεκτρικά πεδία $E_{q_1}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_1)$ και $E_{q_2}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_2)$. Τότε ισχύει:

$$\hat{\mathbf{p}}_1 \cdot G_{q_2}(\mathbf{q}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) + \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \overline{G_{q_1}(\mathbf{q}_2; \hat{\mathbf{p}}_1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} g_{q_2}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_2) \cdot \overline{g_{q_1}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_1)} ds(\hat{\mathbf{r}}) = Q_{q_1, q_2}(\hat{\mathbf{p}}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) \quad (2.2.7)$$

$$Q_{q_1, q_2}(\hat{\mathbf{p}}_1; \hat{\mathbf{p}}_2) = -\frac{ik}{4\pi} \int_S \left[(\hat{\mathbf{n}} \times \overline{E_{q_1}^t(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_1)}) \cdot (\nabla \times E_{q_2}^t(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_2)) - (\hat{\mathbf{n}} \times E_{q_2}^t(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_2)) \cdot (\nabla \times \overline{E_{q_1}^t(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_1)}) \right] ds(\mathbf{r}) \quad (2.2.8)$$

Το μέγεθος $Q_{q_1, q_2}(\hat{\mathbf{p}}_1; \hat{\mathbf{p}}_2)$ εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή D .

Θεώρημα Αμοιβαιότητας Σφαιρικών Κυμάτων

Για δύο μαγνητικά δίπολα τοποθετημένα στις θέσεις $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, τα οποία εκπέμπουν σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα προσπίπτοντα στον σκεδαστή D ισχύει:

$$h_0(kq_1)(\hat{\mathbf{q}}_2 \times \hat{\mathbf{p}}_2) \cdot (\nabla \times E_{q_1}^s(\hat{\mathbf{q}}_2; \hat{\mathbf{p}}_1)) = h_0(kq_2)(\hat{\mathbf{q}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_1) \cdot (\nabla \times E_{q_2}^s(\hat{\mathbf{q}}_1; \hat{\mathbf{p}}_2)) \quad (2.2.9)$$

για οποιεσδήποτε πολώσεις $\hat{\mathbf{p}}_1, \hat{\mathbf{p}}_2$.

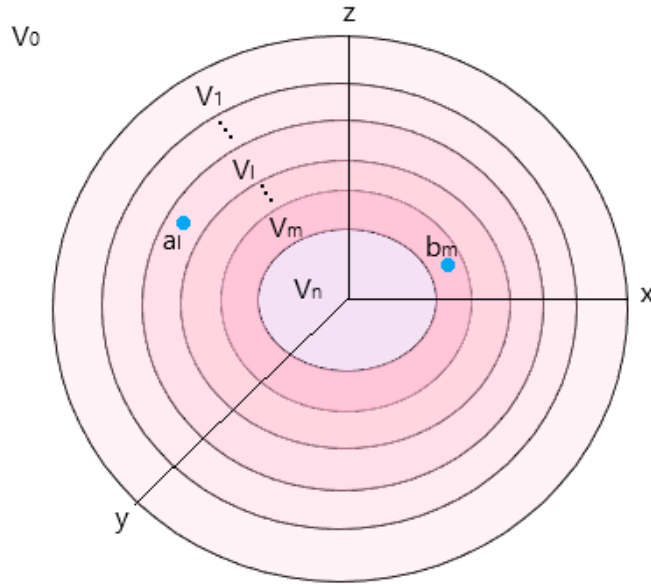
Οπτικό Θεώρημα Σφαιρικών Κυμάτων

Για την αποσβεννυμένη ενεργειακή διατομή σκέδασης σ^e ισχύει:

$$\sigma_q^e = -\frac{4\pi}{k^2} \text{Re}(\hat{\mathbf{p}} \cdot G_a(\mathbf{a}; \hat{\mathbf{p}})) \quad (2.2.10)$$

2.3 Θεωρήματα σκέδασης πολυστρωματικού σκεδαστή

Θεωρούμε πολυστρωματικό σκεδαστή V , ο οποίος ταυτίζεται με ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με ομαλό και κλειστό σύνορο $S_1 \subset C^2$. Το εσωτερικό του σκεδαστή χωρίζεται από $n - 1$, C^2 επιφάνειες S_j ($j = 2, \dots, n$) οι οποίες διαιρούν τον σκεδαστή σε V_j ($j = 1, \dots, n - 1$) στρώματα. Στις επιφάνειες S_j θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα \hat{n} . Τα στρώματα V_j για $j = 1, \dots, n - 1$ αποτελούνται από ομογενή και ισοτροπικά υλικά και χαρακτηρίζονται από κυματάριθμο k_j , μαγνητική διαπερατότητα μ_j και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_j . Το εξωτερικό $V_0 = \mathbb{R}^3 \setminus V$ του σκεδαστή αποτελείται από ομογενές και ισοτροπικό υλικό με κυματάριθμο k_0 , μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_0 .



Εικόνα 2: Διέγερση πολυστρωματικού σκεδαστή από δύο εσωτερικά μαγνητικά δίπολα

Ο σκεδαστής διεγείρεται από δύο μαγνητικά δίπολα τοποθετημένα στις θέσεις $\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_m$, ($l, m = 0, \dots, n$) και $m \geq l$ με αντίστοιχες πολώσεις $\hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b$. Τα δύο δίπολα βρίσκονται στα στρώματα V_l, V_m αντίστοιχα. Τα δίπολα παράγουν αντίστοιχα πρωτεύοντα ηλεκτρικά πεδία $E_{a_l}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_a)$, $E_{b_m}^{pr}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_b)$, δευτερεύοντα ηλεκτρικά πεδία $E_{a_l}^{sec}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_a)$, $E_{b_m}^{sec}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_b)$ και ολικά πεδία $E_{a_l}^l(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_a)$, $E_{b_m}^m(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_b)$.

Με τον όρο $S_R(\mathbf{0})$ συμβολίζουμε μια μεγάλη σφαίρα με κέντρο το $\mathbf{0}$ και ακτίνα R , που περιέχει τον σκεδαστή V και με $S_\varepsilon(\mathbf{a}_l)$ μια μικρή σφαίρα με κέντρο το \mathbf{a}_l και ακτίνα ε .

Γενικά Θεωρήματα Πολυστρωματικού Σκεδαστή

Θεώρημα 3.1

Τα ολικά ηλεκτρικά πεδία $E_{a_l}^m, E_{b_m}^l$ στο κάθε στρώμα και τα αντίστοιχα μακρινά πεδία $g_{a_l}^0$ και $g_{b_m}^0$ από δύο δίπολα στις θέσεις $\mathbf{a}_l \in V_l$ και $\mathbf{b}_m \in V_m$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{k_0\mu_0}{ik_l^2\mu_l} \cdot \frac{\nabla \times E_{b_m}^l(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)}{h_0(k_l a_l)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_a - \frac{k_0\mu_0}{ik_m^2\mu_m} \cdot \frac{\nabla \times \overline{E_{a_l}^m(\mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a)}}{h_0(k_m b_m)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_b + \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g_{a_l}^0(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \cdot g_{b_m}^0(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_b) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b) \quad (2.3.1)$$

όπου

$$\mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b) = -\frac{\mu_0}{\mu_{n-1}} \cdot \frac{ik_0}{4\pi} \left\{ \overline{E_{a_l}^{n-1}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a)}, E_{b_m}^{n-1}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b) \right\}_{\partial V_n} \quad (2.3.2)$$

Η συνάρτηση \mathcal{E} εξαρτάται από τις φυσικές ιδιότητες των στρωμάτων V_n οπότε για τις τέλεια ηλεκτρικές (PEC), τέλεια μαγνητικές (PMC) και τις διηλεκτρικές επιφάνειες S_n γίνεται αντίστοιχα:

$$\mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b) = 0 \quad (2.3.3)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b) = -\frac{k_0 k_{n-1} \mu_0}{2\pi \mu_{n-1}} \int_{S_n} \frac{Re(Z_s)}{|Z_s|^2} (\hat{\mathbf{n}} \times \overline{E_{a_l}^{n-1}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_a)}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times E_{b_m}^{n-1}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_b)) ds(\mathbf{r}) \quad (2.3.4)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b) = -\frac{k_0\mu_0}{2\pi|\mu_n|^2} \left[Im(k_n^2 \mu_n) \int_{V_n} \overline{E_{a_l}^n(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \cdot E_{b_m}^n(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_b) dv(\mathbf{r}) + Im(\mu_n) \int_{V_n} (\nabla \times \overline{E_{a_l}^n(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_a)}) \cdot (\nabla \times E_{b_m}^n(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{p}}_b)) dv(\mathbf{r}) \right] \quad (2.3.5)$$

Απόδειξη

Για τα στρώματα V_l και V_m χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της υπέρθεσης προκύπτει:

$$\{\overline{E_{a_l}^l}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l} = \{\overline{E_{a_l}^{pr}}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l} + \{\overline{E_{a_l}^{sec}}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l}$$

$$\{\overline{E_{a_l}^m}, E_{b_m}^m\}_{\partial V_m} = \{\overline{E_{a_l}^m}, E_{b_m}^{pr}\}_{\partial V_m} + \{\overline{E_{a_l}^m}, E_{b_m}^{sec}\}_{\partial V_m}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\{\overline{E_{a_l}^{sec}}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l} = 0$ και $\{\overline{E_{a_l}^m}, E_{b_m}^{sec}\}_{\partial V_m} = 0$, τη συνθήκη ακτινοβολίας και την παρακάτω σχέση που συνδέει τα πεδία $E_{a_l}^{pr}$ και $E_{b_m}^l$ στο στρώμα V_l :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{E_{a_l}^{pr}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_\varepsilon(a_l)} = -4\pi i \frac{a_l}{k_l} e^{-ik_l a_l} (\nabla \times E_{b_m}^l(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_a \quad (2.3.6)$$

Προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} & \{\overline{E_{a_l}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a)}, E_{b_m}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_m} \\ &= \frac{2i \mu_m}{k_0 \mu_0} \int_{S^2} \overline{g_{a_l}^0(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \cdot g_{b_m}^0(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_b) ds(\hat{\mathbf{r}}) \\ & \quad - 4\pi i \frac{a_l \mu_m}{k_l \mu_l} e^{-ik_l a_l} (\nabla \times E_{b_m}^l(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_a \\ & \{\overline{E_{a_l}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a)}, E_{b_m}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_m} \\ &= \frac{\mu_m}{\mu_{n-1}} \{\overline{E_{a_l}^{n-1}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a)}, E_{b_m}^{n-1}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_n} \\ & \quad - 4\pi i \frac{b_m}{k_m} e^{-ik_m b_m} (\nabla \times \overline{E_{a_l}^m(\mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a)}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_b \end{aligned}$$

οι οποίες καταλήγουν στη ζητούμενη σχέση (2.3.1). Τέλος εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια S_n και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απόκλισης του Gauss σε διηλεκτρικό πυρήνα V_n , προκύπτουν οι εκφράσεις (2.3.3)-(2.3.5).

Θεώρημα 3.2

Τα πρωτεύοντα ηλεκτρικά πεδία $E_{a_l}^{pr}, E_{b_l}^{pr}$ και τα αντίστοιχα μακρινά πεδία $g_{a_l}^{pr}$ και $g_{b_l}^{pr}$ που παράγονται από δύο δίπολα στις θέσεις \mathbf{a}_l και \mathbf{b}_l ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{\nabla \times \overline{E_{a_l}^{pr}(\mathbf{b}_l; \hat{\mathbf{p}}_a)}}{ik_l h_0(k_l b_l)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_b - \frac{\nabla \times E_{b_l}^{pr}(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)}{ik_l h_0(k_l a_l)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_a = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g_{a_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \cdot g_{b_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_b) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.3.7)$$

Απόδειξη

Για το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους γίνεται χρήση της βοηθητικής συνάρτησης

$$F(\theta) = \int_0^{2\pi} (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}_a) \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}_b) d\varphi.$$

Επιλέγεται σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε τα $\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l$ να βρίσκονται στον άξονα των z με σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (θ, φ) στο S^2 με $(\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l) \cdot \hat{\mathbf{r}} = |\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l| \cos \theta$ και αντικαθιστώντας στην F προκύπτει:

$$F(0) = F(\pi) = 2\pi(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{p}}_a) \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{p}}_b).$$

Από το πρωτεύον μακρινό πεδίο

$$g_{a_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a) = \frac{e^{-ik_l a_l \hat{\mathbf{r}}}}{h_0(k_l a_l)}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση για τα $F(0)$ και $F(\pi)$ οδηγούμαστε στην:

$$\begin{aligned} & \overline{h_0(k_l a_l)} h_0(k_l b_l) \int_{S^2} \overline{g_{a_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \cdot g_{b_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_b) ds(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \int_0^\pi F(\theta) e^{ik_l |\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l| \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{i}{k_l |\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l|} [F(\pi)] e^{-ik_l |\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l|} - F(0) e^{ik_l |\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l|} \\ & \quad - \int_0^\pi \left(e^{ik_l |\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l| \cos \theta} \frac{dF(\theta)}{d\theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

από την οποία έπειτα από υπολογισμούς προκύπτει η (2.3.7).

Θεώρημα 3.3

Τα δευτερεύοντα ηλεκτρικά πεδία $E_{a_l}^{sec}, E_{b_l}^{sec}$ στο στρώμα V_l και τα ολικά μακρινά πεδία $g_{a_l}^0$ και $g_{b_l}^0$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla \times E_{b_l}^{sec}(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)}{ik_l h_0(k_l a_l)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_a - \frac{\nabla \times \overline{E_{a_l}^{sec}(\mathbf{b}_l; \hat{\mathbf{p}}_a)}}{ik_l h_0(k_l b_l)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_b - \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g_{a_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \\ & \quad \cdot g_{b_l}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_b) ds(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2\pi} \frac{k_l \mu_l}{k_0 \mu_0} \int_{S^2} \overline{g_{a_l}^0(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_a)} \\ & \quad \cdot g_{b_l}^0(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{p}}_b) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{k_l \mu_l}{k_0 \mu_0} \mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l; \hat{\mathbf{p}}_a, \hat{\mathbf{p}}_b) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Θεώρημα Αμοιβαιότητας Πολυστρωματικού Σκεδαστή

Για τα ολικά ηλεκτρικά πεδία $E_{a_l}^m, E_{b_m}^l$, που αντιστοιχούν στην εσωτερική διέγερση του πολυστρωματικού σκεδαστή V με οποιονδήποτε πυρήνα V_n ισχύει:

$$k_l^2 \mu_l h_0(k_l a_l) \left(\nabla \times E_{a_l}^m(\mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_a) \right) \cdot \hat{\mathbf{p}}_b = k_m^2 \mu_m h_0(k_m b_m) \left(\nabla \times E_{b_m}^l(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b) \right) \cdot \hat{\mathbf{p}}_a \quad (2.3.9)$$

Απόδειξη

Αρχικά γνωρίζουμε ότι:

$$\{E_{a_l}^l, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l} = \{E_{a_l}^{pr}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l} + \{E_{a_l}^{sec}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l}.$$

Ακόμη, αφού τα $E_{a_l}^j$ και $E_{b_m}^j$ ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz στο V_j , ($j = 0, \dots, l-1$) εφαρμόζοντας διαδοχικά το δεύτερο διανυσματικό θεώρημα Green και χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες, καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\{E_{a_l}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_l} = \frac{\mu_l}{\mu_0} \{E_{a_l}^0(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^0(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_l(0)}$$

το οποίο καθώς $R \rightarrow \infty$ από τη συνθήκη ακτινοβολίας συνεπάγεται

$$\{E_{a_l}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_l} = 0.$$

Αντίστοιχα προκύπτει

$$\{E_{a_l}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^l(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_{l+1}} = \frac{\mu_l}{\mu_m} \{E_{a_l}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_m}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Green, το $\{E_{a_l}^{sec}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l} = 0$ και το $\{E_{a_l}^{pr}, E_{b_m}^l\}_{\partial V_l}$ συμπίπτει με το $\{E_{a_l}^{pr}, E_{b_m}^l\}_{S_{\varepsilon_1(a_l)}}$, όπου $S_{\varepsilon_1(a_l)}$ μια μικρή σφαίρα. Τότε από την (2.3.6) καθώς $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ και τις ανωτέρω σχέσεις έχουμε:

$$\{E_{a_l}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{\partial V_m} = 4\pi i \frac{\mu_m a_l}{\mu_l k_l} e^{-ik_l a_l} \left(\nabla \times E_{b_m}^l(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b) \right) \cdot \hat{\mathbf{p}}_a. \quad (2.3.10)$$

Επιπλέον, για το στρώμα V_m ισχύει

$$\{E_{a_l}^m, E_{b_m}^m\}_{\partial V_l} = \{E_{a_l}^m, E_{b_m}^{pr}\}_{\partial V_m} + \{E_{a_l}^m, E_{b_m}^{sec}\}_{\partial V_m}.$$

Επομένως, από τα παραπάνω και εφαρμόζοντας τις συνοριακές στην επιφάνεια του πυρήνα S_n για κάθε είδος πυρήνα (PEC, PMC ή διηλεκτρικό) έχουμε:

$$\{E_{a_l}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_a), E_{b_m}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_{m+1}} = 0$$

και

$$\{E_{a_l}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_\alpha), E_{b_m}^m(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_b)\}_{S_m} = 4\pi i \frac{b_m}{k_m} e^{-ik_m b_m} (\nabla \times E_{a_l}^m(\mathbf{b}_m; \hat{\mathbf{p}}_\alpha)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_b \quad (2.3.11)$$

Από τις (2.3.10) και (2.3.11) προκύπτει η ζητούμενη (2.3.9).

Πόρισμα 3.1

Για δύο δίπολα στις θέσεις $\mathbf{a}_l, \mathbf{b}_l \in V_l$ ισχύει:

$$h_0(k_l a_l) (\nabla \times E_{a_l}^{pr}(\mathbf{b}_l; \hat{\mathbf{p}}_\alpha)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_b = h_0(k_l b_l) (\nabla \times E_{b_l}^{pr}(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha \quad (2.3.12)$$

$$h_0(k_l a_l) (\nabla \times E_{a_l}^{sec}(\mathbf{b}_l; \hat{\mathbf{p}}_\alpha)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_b = h_0(k_l b_l) (\nabla \times E_{b_l}^{sec}(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_b)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha \quad (2.3.13)$$

Οπτικό Θεώρημα Πολυστρωματικού Σκεδαστή

Για την αποσβεννυμένη ενεργειακή διατομή σκέδασης $\sigma_{a_l}^e$ και το δευτερεύον πεδίο $E_{a_l}^{sec}$ που παράγεται από τη διέγερση ενός εσωτερικού δίπολου στη θέση $\mathbf{a}_l \in V_l$ ισχύει:

$$\sigma_{a_l}^e = \frac{k_l \mu_0}{k_0 \mu_l} 4\pi a_l^2 \left[\text{Re} \left(\frac{i}{k_l} h_0(k_l a_l) (\nabla \times E_{a_l}^{sec}(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_\alpha)) \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha \right) + \frac{2}{3} \right] \quad (2.3.14)$$

Απόδειξη

Από την (2.3.4) θέτοντας $\mathbf{a}_l = \mathbf{b}_l$, $\hat{\mathbf{p}}_\alpha = \hat{\mathbf{p}}_b$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.3.2) προκύπτουν:

$$\sigma_{a_l}^0 = -\frac{4\pi k_0 \mu_0}{k_0^2 k_l \mu_l} \left[\text{Re} \left(\frac{\nabla \times E_{a_l}^{sec}(\mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_\alpha)}{i k_l h_0(k_l a_l)} \cdot \hat{\mathbf{p}}_\alpha \right) - \frac{2}{3} k_l^2 a_l^2 \right] + \frac{2\pi}{k_0^2} \mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}_\alpha)$$

$$\sigma_{a_l}^a = \frac{\mu_0}{\mu_{n-1}} \frac{i}{2k_0} \left\{ \overline{E_{a_l}^{n-1}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_\alpha)}, E_{a_l}^{n-1}(\cdot; \hat{\mathbf{p}}_\alpha) \right\}_{S_n} = \frac{2\pi}{k_0^2} \mathcal{E}(\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_l; \hat{\mathbf{p}}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}_\alpha).$$

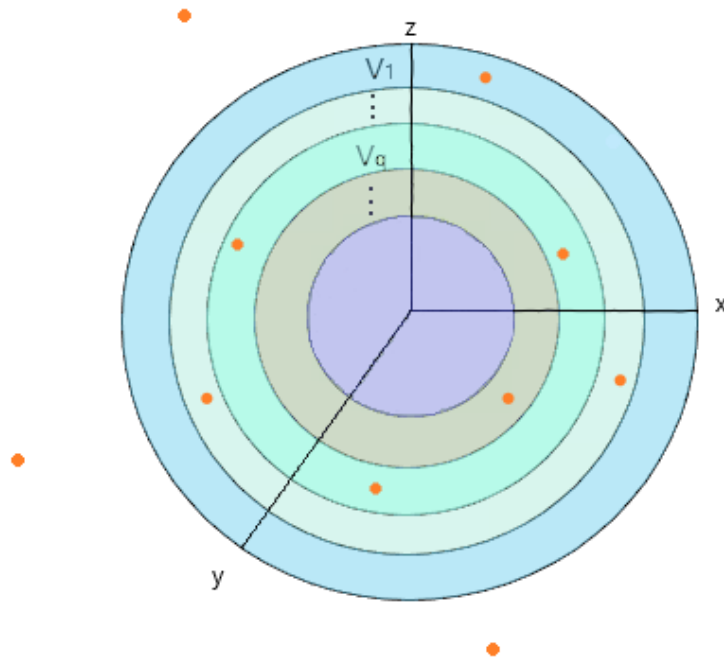
που καταλήγουν στη ζητούμενη σχέση.

2.4 Θεωρήματα σκέδασης πολυστρωματικού σκεδαστή από N δίπολα

Θεωρούμε πολυστρωματικό σκεδαστή V , ο οποίος ταυτίζεται με ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με ομαλό και κλειστό σύνορο $S_1 \subset C^2$. Το εσωτερικό του σκεδαστή χωρίζεται από $P-1$, C^2 επιφάνειες S_p ($p = 2, \dots, P$) οι οποίες διαιρούν τον σκεδαστή σε V_p ($p = 1, \dots, P$) δακτυλιοειδή στρώματα με ακτίνες $r_{p+1} < r < r_p$, $p = 1, \dots, P-1$. Στις επιφάνειες S_p θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο

εξωτερικό διάνυσμα \hat{n} . Τα στρώματα V_p για $p = 1, \dots, P - 1$ αποτελούνται από ομογενή και ισοτροπικά υλικά και χαρακτηρίζονται από κυματάριθμο k_p , μαγνητική διαπερατότητα μ_p και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_p . Ο πυρήνας του σκεδαστή V_P μπορεί να είναι τέλεια ηλεκτρικά αγωγίμος (PEC), τέλεια μαγνητικά αγωγίμος (PMC) ή διηλεκτρικός με κυματάριθμο k_P , μαγνητική διαπερατότητα μ_P και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_P . Το εξωτερικό $V_0 = \mathbb{R}^3 \setminus V$ του σκεδαστή αποτελείται από ομογενές και ισοτροπικό υλικό με κυματάριθμο k_0 , μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_0 .

Ο σκεδαστής διεγείρεται από N (εξωτερικά ή εσωτερικά) ηλεκτρικά δίπολα, με διανύσματα θέσης \mathbf{r}^i , διάνυσμα πόλωσης $\hat{\mathbf{p}}^i$, $i = 1, \dots, N$. Τα δίπολα είναι αυθαίρετα κατανομημένα σε Q διεγείροντα στρώματα τα οποία ονομάζουμε V_q^{ex} για $q = 1, \dots, Q$ και $Q \leq P + 1$. Στην περίπτωση που όλα τα δίπολα βρίσκονται στο εξωτερικό V_0 του σκεδαστή, θεωρούμε ότι το V_1^{ex} συμπίπτει με το V_0 , ενώ αν δεν υπάρχουν εξωτερικά δίπολα θεωρούμε ως V_1^{ex} το πιο εξωτερικό στρώμα που περιέχει δίπολα. Το στρώμα διέγερσης V_q^{ex} περιέχει n_q δίπολα με ισχύ $A_{q,j}$, διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_{q,j}$ και διανύσματα πόλωσης $\hat{\mathbf{p}}_{q,j}$, $j = 1, \dots, n_q$ αντίστοιχα. Προφανώς ισχύει ότι: $n_1 + n_2 + \dots + n_Q = N$.



Εικόνα 3: Διέγερση πολυστρωματικού σκεδαστή από N αυθαίρετα ηλεκτρικά δίπολα

Κάθε ηλεκτρικό δίπολο εκπέμπει πρωτεύοντα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, που δίνονται από:

$$\mathbf{E}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) = A_{q,j} \nabla \times \left(\frac{e^{ik_q|r-r_{q,j}|}}{|r-r_{q,j}|} \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{q,j} \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{H}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega\mu_q} \nabla \times \mathbf{E}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_{q,j} \quad (2.4.2)$$

όπου $j = 1, \dots, n_q$ και $q = 1, \dots, Q$. Από εδώ και στο εξής θα παρουσιάζονται μόνο οι σχέσεις που αφορούν τα συμμετέχοντα ηλεκτρικά πεδία, ενώ τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία μπορούν να ληφθούν από τις εξισώσεις Maxwell–Faraday (1.15–1.16).

Στην περίπτωση που το V_p δεν είναι στρώμα διέγερσης, τα δευτερεύοντα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που δημιουργούνται σε αυτό, από ένα δίπολο στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$ συμπίπτουν με τα συνολικά πεδία στο V_p και συμβολίζονται αντίστοιχα με $\mathbf{E}_{q,j}^p$ και $\mathbf{H}_{q,j}^p$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Sommerfeld, το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο στρώμα διέγερσης V_q^{ex} , το οποίο οφείλεται σε ένα δίπολο στο ίδιο στρώμα $\mathbf{r}_{q,j} \in V_q^{ex}$ προκύπτει από:

$$\mathbf{E}_{q,j}^q(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{q,j}^{sec}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q^{ex} \setminus \{\mathbf{r}_{q,j}\}. \quad (2.4.3)$$

Τα πεδία που οφείλονται σε ένα μόνο δίπολο θα αναφέρονται ως μεμονωμένα πεδία. Επιπλέον, το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο q-διέγερσης \mathbf{E}_q^p στο στρώμα V_p είναι η υπέρθεση των συνολικών μεμονωμένων πεδίων στο V_p , τα οποία οφείλονται στη διέγερση των διπόλων στο V_q^{ex} , και δίνεται από:

$$\mathbf{E}_q^p(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{E}_{q,j}^p(\mathbf{r}). \quad (2.4.4)$$

Για τα στρώματα διέγερσης V_q^{ex} , το πρωτεύον πεδίο q-διέγερσης \mathbf{E}_q^{pr} και το δευτερεύον πεδίο q-διέγερσης \mathbf{E}_q^{sec} ορίζονται ως οι υπερθέσεις των αντίστοιχων μεμονωμένων πεδίων που οφείλονται σε όλα τα δίπολα στο V_q^{ex} δηλαδή ως:

$$\mathbf{E}_q^l(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{E}_{q,j}^l(\mathbf{r}) \quad (2.4.5)$$

όπου $l \in \{pr, sec\}$.

Επομένως, το συνολικό πεδίο q-διέγερσης στο στρώμα V_q δίνεται από:

$$E_q^q(\mathbf{r}) = E_q^{pr}(\mathbf{r}) + E_q^{sec}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_q^{ex} \setminus \{\mathbf{r}_{q,1}, \dots, \mathbf{r}_{q,n_q}\}. \quad (2.4.6)$$

Το καθολικό πεδίο E^p του μη διεγείροντος στρώματος V_p ορίζεται ως η υπέρθεση όλων των συνολικών πεδίων του V_p , δηλαδή ως:

$$E^p(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} E_{q,j}^p(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^Q E_q^p(\mathbf{r}). \quad (2.4.7)$$

Εάν το V_q είναι στρώμα διέγερσης, το συνολικό δευτερεύον πεδίο του V_q είναι η υπέρθεση όλων των μεμονωμένων δευτερευόντων πεδίων του V_q , ενώ το καθολικό πεδίο του V_q ορίζεται ως:

$$E^q(\mathbf{r}) = E_q^{pr}(\mathbf{r}) + E_q^{sec}(\mathbf{r}) + \sum_{s \neq q} E_s^q(\mathbf{r}). \quad (2.4.8)$$

Επιπλέον, τα μεμονωμένα ηλεκτρομαγνητικά πεδία στο V_0 ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας των Silver–Müller:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (Z_0 \mathbf{r} \times H_{q,j}^0(\mathbf{r}) + r E_{q,j}^0(\mathbf{r})) = \mathbf{0} \quad (2.4.9)$$

ομοιόμορφα σε όλες τις κατευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / r$, όπου $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ είναι η σύνθετη αντίσταση του V_0 .

Προφανώς, τα συνολικά πεδία q -διέγερσης και τα καθολικά ηλεκτρομαγνητικά πεδία ικανοποιούν επίσης τη συνθήκη (2.4.9). Επιπλέον, το ηλεκτρικό πεδίο έχει την ακόλουθη ασυμπτωτική μορφή:

$$E_{q,j}^0(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_{q,j}(\hat{\mathbf{r}}) h_0(k_0 r) + \mathcal{O}(r^{-2}), \quad r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty \quad (2.4.10)$$

όπου h_0 είναι η σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Η συνάρτηση $\mathbf{g}_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})$ είναι το μεμονωμένο μακρινό πεδίο προς την κατεύθυνση παρατήρησης $\hat{\mathbf{r}}$ λόγω του διπόλου στη θέση $\mathbf{r}_{q,j} \in V_q^{ex}$. Στη συνέχεια, το μακρινό πεδίο q -διέγερσης $\mathbf{g}_q(\hat{\mathbf{r}})$ και το καθολικό μακρινό πεδίο $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{r}})$ ορίζονται ως οι υπερθέσεις των μεμονωμένων μακρινών πεδίων λόγω όλων των δίπολων στο V_q^{ex} και όλων των N δίπολων αντίστοιχα, δηλαδή:

$$\mathbf{g}_q(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{j=1}^{n_q} \mathbf{g}_{q,j}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{q=1}^Q \mathbf{g}_q(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.4.12)$$

Η μεμονωμένη διατομή $\sigma_{q,j}$, η διατομή q-διέγερσης σ_q και η καθολική διατομή σ είναι οι διατομές σκέδασης που οφείλονται σε ένα δίπολο στη θέση $r_{q,j} \in V_q^{ex}$, σε όλα τα δίπολα στο V_q^{ex} και σε όλα τα N δίπολα και δίνονται, αντίστοιχα, από:

$$\sigma_{q,j} = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |\mathbf{g}_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.4.13)$$

$$\sigma_q = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |\mathbf{g}_q(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.4.14)$$

$$\sigma = \frac{1}{k_0^2} \int_{S^2} |\mathbf{g}(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.4.15)$$

όπου S^2 η μοναδιαία σφαίρα στο \mathbb{R}^3 .

Αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διατομών σκέδασης

Ορίζουμε τη q-διατομή αλληλεπίδρασης (q-ISCS), $\tilde{\sigma}_q$, ως τη διαφορά μεταξύ της διατομής q-διέγερσης (q-excitation cross section) σ_q και του αθροίσματος των μεμονωμένων διατομών σκέδασης που προκύπτουν από όλα τα δίπολα στο V_q^{ex}

$$\tilde{\sigma}_q = \sigma_q - \sum_{j=1}^{n_q} \sigma_{q,j} \quad (2.4.16)$$

τη διατομή έμμεσης αλληλεπίδρασης (indirect ISCS), σ^I , ως τη διαφορά μεταξύ της καθολικής διατομής σκέδασης σ και του αθροίσματος των διατομών σκέδασης q-διέγερσης (q-excitation cross sections)

$$\sigma^I = \sigma - \sum_{q=1}^Q \sigma_q \quad (2.4.17)$$

τη συνολική διατομή αλληλεπίδρασης (total ISCS), σ^T , ως τη διαφορά μεταξύ της καθολικής διατομής σκέδασης σ και του αθροίσματος των μεμονωμένων διατομών σκέδασης που προκύπτουν απ' όλα τα N δίπολα

$$\sigma^T = \sigma - \sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \sigma_{q,j}. \quad (2.4.18)$$

Για έναν πολυστρωματικό σκεδαστή, που διεγείρεται από δίπολα σε διαφορετικά στρώματα, υπάρχουν δύο είδη αλληλεπιδράσεων:

- άμεση αλληλεπίδραση που οφείλεται σε δίπολα που περιέχονται στο ίδιο στρώμα διέγερσης και

- έμμεση αλληλεπίδραση που οφείλεται σε δίπολα που περιέχονται σε διαφορετικά στρώματα.

Θεώρημα 4.1

Οι διατομές αλληλεπίδρασης σ^T , σ^I και $\tilde{\sigma}_q$ συνδέονται μέσω της σχέσης:

$$\sigma^T = \sigma^D + \sigma^I \quad (2.4.19)$$

όπου

$$\sigma^D = \sum_{q=1}^Q \tilde{\sigma}_q \quad (2.4.20)$$

είναι η διατομή άμεσης αλληλεπίδρασης.

Θεώρημα 4.2

Για το s -διεγυρόμενο πεδίο του V_q^{ex} και το q -διεγυρόμενο πεδίο του V_s^{ex} ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n_q} A_{q,j} H_s^q(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} = \sum_{v=1}^{n_s} A_{s,v} H_q^s(\mathbf{r}_{s,v}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{s,v}. \quad (2.4.21)$$

Επιπλέον, ορίζουμε τις μεμονωμένες πρωτεύουσες διατομές σκέδασης (individual primary cross section) $\sigma_{q,j}^{pr}$, την q -πρωτεύουσα διατομή σκέδασης (q -primary cross-section) σ_q^{pr} και την πρωτεύουσα διατομή αλληλεπίδρασης (primary interaction cross-section) $\tilde{\sigma}_q^{pr}$ αντίστοιχα

$$\sigma_{q,j}^{pr} = \frac{1}{k_q^2} \int_{S^2} |\mathbf{g}_{q,j}^{pr}(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) = 4\pi |A_{q,j}|^2 \quad (2.4.22)$$

$$\sigma_q^{pr} = \frac{1}{k_q^2} \int_{S^2} |\mathbf{g}_{q,j}^{pr}(\hat{\mathbf{r}})|^2 ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.4.23)$$

$$\tilde{\sigma}_q^{pr} = \frac{2}{k_q^2} \sum_{j=1}^{n_q-1} \sum_{v=j+1}^{n_q} \text{Re} \left(\int_{S^2} \overline{\mathbf{g}_{q,j}^{pr}(\hat{\mathbf{r}})} \cdot \mathbf{g}_{q,v}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \right) \quad (2.4.24)$$

όπου $\mathbf{g}_{q,j}^{pr}$ το πρωτεύον μακρινό πεδίο για το δίπολο στη θέση $r_{q,j}$ το οποίο δίνεται από:

$$\mathbf{g}_{q,j}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}) = ik_q A_{q,j} e^{-ik_q r_{q,j} \hat{\mathbf{r}}} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}_{q,j}). \quad (2.4.25)$$

Πρακτικά, το $\tilde{\sigma}_{q,j,v}^{pr}$ αντιπροσωπεύει τον μέσο ρυθμό ροής ενέργειας/ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας που προκαλείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ πεδίων που δημιουργούνται από τα δίπολα στις θέσεις $r_{q,j}$ και $r_{q,v}$ υπό την απουσία του

σκεδαστή. Σημειώνουμε ότι οι πρωτεύουσες διατομές σκέδασης δεν συνεισφέρουν στην καθολική διατομή σκέδασης, εκτός και αν ισχύει ότι $V_q^{ex} \equiv V_0$.

Παρακάτω, αποδεικνύονται οπτικά θεωρήματα για την καθολική διατομή σκέδασης, για τη διατομή άμεσης αλληλεπίδρασης (direct ISCS) και για τη διατομή έμμεσης αλληλεπίδρασης (indirect ISCS).

Θεώρημα 4.3

Η καθολική διατομή σκέδασης (overall scattering cross-section) σ που προκύπτει από τη διέγερση ενός πολυστρωματικού σκεδαστή από N δίπολα δίνεται από:

$$\sigma = 4\pi Z_0 Re \left(\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \mathbf{H}_q^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right) + \frac{Z_0}{Z_q} \sum_{q=1}^Q \sigma_q^{pr} \quad (2.4.26)$$

Η διατομή άμεσης αλληλεπίδρασης (direct ISCS) σ^D και η διατομή έμμεσης αλληλεπίδρασης (indirect ISCS) σ^I δίνονται αντίστοιχα από:

$$\sigma^D = 4\pi Z_0 Re \left(\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \tilde{H}_q^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right) + \frac{Z_0}{Z_q} \sum_{q=1}^Q \tilde{\sigma}_q^{pr} \quad (2.4.27)$$

$$\sigma^I = 4\pi Z_0 Re \left(\sum_{q=1}^Q \sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} \tilde{H}_q^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right) \quad (2.4.28)$$

όπου $H_{q,j}^{sec}$ είναι το q - j μερικό δευτερεύον μαγνητικό πεδίο του V_q^{ex} , δηλαδή το άθροισμα όλων των μεμονωμένων δευτερευόντων πεδίων του V_q^{ex} εκτός από το πεδίο που παράγεται από το δίπολο στη θέση $\mathbf{r}_{q,j}$, και \tilde{H}_q^{sec} είναι το q -μερικό δευτερεύον μαγνητικό πεδίο του V_q^{ex} , δηλαδή το άθροισμα όλων των δευτερευόντων q -διέγερσης πεδίων που ακτινοβολούν στο V_q^{ex} , εκτός από τα πεδία που παράγονται από τα δίπολα του V_q^{ex} .

Απόδειξη

Για δύο δίπολα στις θέσεις $\mathbf{r}_{q,j} \in V_q^{ex}$ και $\mathbf{r}_{s,v} \in V_s^{ex}$ ισχύει:

$$k_0^2 Z_0 \left(\overline{A_{q,j}} H_{s,v}^q(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} + A_{s,v} \overline{H_{q,j}^s(\mathbf{r}_{s,v})} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{s,v} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \overline{g_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})} \cdot g_{s,v}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.4.29)$$

Αθροίζοντας ως προς v για όλα τα δίπολα στο V_s^{ex} και έπειτα ως προς j για όλα τα δίπολα στο V_q^{ex} και χρησιμοποιώντας τη (2.4.4) προκύπτει ότι τα μαγνητικά πεδία σε κάθε δύο στρώματα V_q^{ex} και V_s^{ex} συνδέονται με τη σχέση:

$$k_0^2 Z_0 \left(\sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} H_s^q(r_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} + \sum_{v=1}^{n_s} A_{s,v} \overline{H_q^s(r_{s,v})} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{s,v} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \overline{g_q(\hat{\mathbf{r}})} \cdot g_s(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.4.30)$$

Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι για κάθε δύο μεμονωμένα δευτερεύοντα πεδία του V_q^{ex} εξαιτίας των διπόλων στις θέσεις $r_{q,j}$ και $r_{q,v}$ ισχύει

$$k_0^2 Z_0 \left(\overline{A_{q,j}} H_{q,v}^{sec}(r_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} + A_{q,v} \overline{H_{q,j}^{sec}(r_{q,v})} \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,v} \right) + \frac{k_0 \mu_0}{2\pi k_q \mu_q} \int_{s^2} \overline{g_{q,j}^{pr}(\hat{\mathbf{r}})} \cdot g_{q,v}^{pr}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{s^2} \overline{g_{q,j}(\hat{\mathbf{r}})} \cdot g_{q,v}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.4.31)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.4.14) για τη σ_q και αθροίζοντας την (2.4.31) για όλα τα $v, j = 1, \dots, n_q$ καταλήγουμε

$$\sigma_q = 4\pi Z_0 Re \left(\sum_{j=1}^{n_q} \overline{A_{q,j}} H_q^{sec}(r_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right) + \frac{Z_0}{Z_q} \sigma_q^{pr}. \quad (2.4.32)$$

Η σχέση (2.4.26) προκύπτει αθροίζοντας τη (2.4.30) και για τους δύο δείκτες q, s και εφαρμόζοντας τη (2.4.32) για $V_q^{ex} \equiv V_s^{ex}$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.4.15) για την σ . Ακόμη, γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma_{q,j} = 4\pi Z_0 Re \left(\overline{A_{q,j}} H_q^{sec}(r_{q,j}) \cdot p_{q,j} \right) + \frac{Z_0}{Z_q} \sigma_{q,j}^{pr}. \quad (2.4.33)$$

Οπότε, η σχέση (2.4.27) προκύπτει από (2.4.32) και (2.4.33) χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (2.4.16) και (2.4.20). Τέλος λαμβάνουμε τη (2.4.28) αθροίζοντας τη (2.4.32) για όλα τα $q = 1, \dots, Q$ και χρησιμοποιώντας τη (2.4.26) και τη (2.4.17).

Διατήρηση ροών ενέργειας και ισχύος

Αρχικά θα ορίσουμε τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα (Lagrangian density). Η πυκνότητα Lagrange συνήθως αναφέρεται στη διαφορά μεταξύ της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Όμως για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, συμπίπτει με τη διαφορά μεταξύ του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

$$L(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{2} |H(\mathbf{r})|^2 - \frac{\varepsilon}{2} |E(\mathbf{r})|^2. \quad (2.4.34)$$

Το επόμενο θεώρημα συσχετίζει την q -διατομή σκέδασης (q -excitation scattering cross) με την αντίστοιχη λαγκρανζιανή πυκνότητα (Lagrangian density) και τη ροή

ισχύος διαμέσου της επιφάνειας του στρώματος διέγερσης. Θεωρούμε ότι όλα τα δίπολα βρίσκονται στο ίδιο στρώμα.

Θεώρημα 4.4

Η διατομή q-διέγερσης (q-excitation scattering cross-section) σ_q , οι λαγκρανζιανές πυκνότητες L_q^p από τη διέγερση των μαγνητικών δίπολων στο στρώμα διέγερσης V_q και η ροή ισχύος S_q^q που δημιουργείται από όλα τα δίπολα του στρώματος V_q συνδέονται με τη σχέση:

$$\sigma_q = 2i\omega Z_0 \sum_{p=0}^{q-1} \int_{V_p} L_q^p(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + Z_0 \int_{S_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^q(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}). \quad (2.4.35)$$

Πόρισμα 4.1

Για τη διατομή q-διέγερσης και τη μέση ροή ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας εξωτερικά του στρώματος διέγερσης V_q ισχύει:

$$\sigma_q = Z_0 Re \left(\int_{S_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^q(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right) \quad (2.4.36)$$

Η άεργος ισχύς που κατευθύνεται στο στρώμα διέγερσης V_q σχετίζεται με την αποθηκευμένη ενέργεια σε όλα τα στρώματα του σκεδαστή πριν από το V_q με τη σχέση:

$$2\omega \sum_{p=0}^{q-1} \int_{V_p} L_q^p(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) = -Im \left(\int_{S_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^q(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right). \quad (2.4.37)$$

Από τη σχέση (2.4.36) καταλαβαίνουμε ότι η μέση ροή ισχύος μέσω της επιφάνειας ενός στρώματος διέγερσης «μεταφέρεται» άμεσα στο μακρινό πεδίο ως ρυθμός ροής ενέργειας που εκδηλώνεται από τη διατομή q-διέγερσης (q-excitation cross section). Αντίθετα η σχέση (2.4.37) δηλώνει ότι η άεργος ισχύς δεν «μεταφέρεται» στο μακρινό πεδίο, αλλά αντίθετα, αποθηκεύεται ως διαφορά μεταξύ της μαγνητικής και της ηλεκτρικής ενέργειας στα στρώματα του σκεδαστή που περικλείονται από το στρώμα διέγερσης.

Αναφορικά με τη ροή ισχύος γνωρίζουμε ότι η μεμονωμένη ροή ισχύος ενός δίπολου που ακτινοβολεί σε έναν σκεδαστή V δίνεται από:

$$S = S^{pr} + S^{ext} + S^{sec} \quad (2.4.38)$$

όπου οι S^{pr} και S^{sec} είναι οι ροές ισχύος πρωτεύοντων και δευτερευόντων πεδίων αντίστοιχα, ενώ η S^{ext} είναι η ροή ισχύος που προκαλείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ του πρωτεύοντος και του αντίστοιχου δευτερευόντος πεδίου και ορίζεται ως:

$$S^{ext} = E^{pr} \times \bar{H}^{sec} + E^{sec} \times \bar{H}^{pr}. \quad (2.4.39)$$

Επιπλέον, όταν το στρώμα διέγερσης V_q περιέχει περισσότερα από ένα δίπολα τότε τα πρωτεύοντα και τα δευτερεύοντα πεδία που δημιουργούνται αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε τις S_q^{pr} και S_q^{sec} ως την πρωτεύουσα και τη δευτερεύουσα ροή ενέργειας που προκαλούνται από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ όλων των πρωτεύοντων και όλων των δευτερευόντων πεδίων του V_q αντίστοιχα, ενώ την S_q^{ext} ως τη ροή ισχύος που προκαλείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ των πρωτεύοντων και των δευτερευόντων πεδίων του V_q .

Θεώρημα 4.5

Η ροή ισχύος που προκαλείται μέσω της επιφάνειας S_q συνδέεται με τη ροή αλληλεπίδρασης IPF (interaction power flux) του V_q με τη σχέση:

$$\int_{S_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^q(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = \int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot (S_q^{pr}(\mathbf{r}) + S_q^{sec}(\mathbf{r})) ds(\mathbf{r}) + 2i\omega \sum_{p=q}^P \int_{V_p} L_q^p(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) \quad (2.4.40)$$

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας το θεώρημα απόκλισης στο V_q για τη δευτερεύουσα ροή ισχύος q -διέγερσης (q -excitation secondary power flux), παίρνουμε

$$\int_{S_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{sec}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = 2i\omega \int_{V_q} L_q^{sec}(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + \int_{S_{q+1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{sec}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \quad (2.4.41)$$

όπου L_q^{sec} η λαγκραζιανή πυκνότητα των δευτερευόντων πεδίων στο V_q . Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στο S_{q+1} για τα E_q^q και \bar{H}_q^q έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{S_{q+1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{sec}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) &= - \int_{S_{q+1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (E_q^{pr}(\mathbf{r}) \times \bar{H}_q^{q+1}(\mathbf{r})) ds(\mathbf{r}) - \int_{S_{q+1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \\ & (E_q^{q+1}(\mathbf{r}) \times \bar{H}_q^{pr}(\mathbf{r})) ds(\mathbf{r}) + \int_{S_{q+1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{q+1}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) + \int_{S_{q+1}} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{pr}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Ακόμη, γνωρίζουμε ότι:

$$\int_{S_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^q(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) = 2i\omega \sum_{p=q+1}^P \int_{V_p} L_q^p(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) \quad (2.4.43)$$

για $p = q + 1, q + 2, \dots P$.

Συνδυάζοντας τη (2.4.42) με τις (2.4.38), (2.4.41) και (2.4.43) προκύπτει η (2.4.40).

Οι εκφράσεις που προκύπτουν λαμβάνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του (2.4.40) αποκαλύπτουν ότι η μέση ροή ισχύος από την επιφάνεια του στρώματος διέγερσης είναι ίση με τη μέση ροή ισχύος μέσω του συνόρου του στρώματος διέγερσης, το οποίο επάγεται από την αλληλεπίδραση μεταξύ των μεμονωμένων πρωτεύοντων και όλων των άλλων μεμονωμένων πεδίων στο V_q . Η σχέση (2.4.40) σε συνδυασμό με την (2.4.35) δίνει μια εναλλακτική μορφή του Θεωρήματος 4 υπονοώντας ότι μόνο οι αλληλεπιδράσεις που σχετίζονται με τα πρωτεύοντα πεδία προκαλούν ροή ισχύος.

$$\sigma_q = 2i\omega Z_0 \sum_{p=0}^P \int_{V_p} L_q^p(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + Z_0 \int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(S_q^{pr}(\mathbf{r}) + S_q^{sec}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}). \quad (2.4.44)$$

Η αλληλεπίδραση μεταξύ δευτερευόντων πεδίων ασχολείται με την άεργο ισχύ, η οποία φαίνεται να λειτουργεί ως «φορέας ροής», μεταφέροντας την επαγόμενη ροή ενέργειας από το στρώμα διέγερσης, μέσω των υπόλοιπων στρωμάτων του σκεδαστή, στο μακρινό πεδίο. Η ποσότητα $S_q^{pr} + S_q^{ext}$ θα ονομάζεται q -πρωτεύουσα ροή αλληλεπίδρασης (q -primary IPF). Επιπλέον, η διαφορά μεταξύ μαγνητικής και ηλεκτρικής ενέργειας που αποθηκεύεται στα στρώματα του σκεδαστή είναι αποτέλεσμα τόσο της δευτερεύουσας IPF σε όλα τα στρώματα όσο και της q -πρωτεύουσας IPF στο στρώμα διέγερσης V_q .

Διατομές σκέδασης και οπτικό θεώρημα

Θεώρημα 4.6

Οι ροές ισχύος S_q^{pr} και S_q^{ext} ικανοποιούν τη σχέση

$$Z_q \operatorname{Re} \left(\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{pr}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right) = \sigma_q^{pr} \quad (2.4.45)$$

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_q^{ext}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right) = 4\pi \sum_{j=1}^{n_q} \operatorname{Re} \left(\bar{A}_{q,j} H_q^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right) \quad (2.4.46)$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας το πραγματικό μέρος της (2.4.44) προκύπτει

$$\sigma_q = Z_0 \operatorname{Re} \left(\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(S_q^{pr}(\mathbf{r}) + S_q^{ext}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}) \right). \quad (2.4.47)$$

Εφαρμόζοντας την (2.4.32) η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$4\pi \sum_{j=1}^{n_q} \operatorname{Re} \left(\bar{A}_{q,j} H_q^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right) + \frac{\sigma_q^{pr}}{Z_q} = \operatorname{Re} \left(\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(S_q^{pr}(\mathbf{r}) + S_q^{ext}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}) \right). \quad (2.4.48)$$

Ακόμη, από το δεύτερο θεώρημα Green στο $\Omega_q = V_q \setminus S_\varepsilon$, όπου S_ε σφαίρα ακτίνας ε και κέντρου $\mathbf{r}_{q,j}$, για τα $\bar{E}_{q,j}^{pr}, E_{q,v}^{sec}$ ισχύει

$$\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\bar{E}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) \times H_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}) + E_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}) \times \bar{H}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}) = \int_{S_\varepsilon} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\bar{E}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) \times H_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}) + E_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}) \times \bar{H}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}). \quad (2.4.49)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στις δύο προηγούμενες σχέσεις για τα ολοκληρώματα στο S_ε καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$, παίρνουμε

$$\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\bar{E}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) \times H_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}) + E_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}) \times \bar{H}_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}) = 4\pi \bar{A}_{q,j} H_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j}. \quad (2.4.50)$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία για τα πεδία $E_{q,j}^{pr}, \bar{E}_{q,v}^{sec}$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό για το $S_{q,j}^{ext}$ καταλήγουμε στο:

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot S_{q,j}^{ext}(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \right) = 4\pi \operatorname{Re} \left(\bar{A}_{q,j} H_{q,v}^{sec}(\mathbf{r}_{q,j}) \cdot \hat{\mathbf{p}}_{q,j} \right). \quad (2.4.51)$$

Βρίσκοντας το άθροισμα της ανωτέρω σχέσης για $j = 1, \dots, n_q$ οδηγούμαστε στην (2.4.46). Η σχέση (2.4.45) προκύπτει από τις (2.4.46) και (2.4.48).

Μπορούμε να διακρίνουμε τις ροές ισχύος ανάλογα με το αν προέρχονται ή όχι από αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ίδιων πεδίων. Ορίζουμε τη q-μεμονωμένη ροή ισχύος και την q-αλληλεπίδρασης ροή ισχύος, αντίστοιχα, ως εξής:

$$\hat{S}_q(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q} E_{q,j}^q(\mathbf{r}) \times \bar{H}_{q,j}^q(\mathbf{r}) \quad (2.4.52)$$

$$\tilde{S}_q(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{n_q-1} \sum_{v=j+1}^{n_q} E_{q,j}^q(\mathbf{r}) \times \bar{H}_{q,v}^q(\mathbf{r}) \quad (2.4.53)$$

και παρατηρούμε ότι $S_q^{pr} + S_q^{ext} + S_q^{sec} = S_q + S_q$.

Ακόμη, από τις σχέσεις (2.4.13) και (2.4.44) καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση η οποία συνδυάζει την q-ISCS με την αντίστοιχη ροή ισχύος:

$$\tilde{\sigma}_q = 2i\omega Z_0 \sum_{p=0}^P \int_{V_p} \tilde{L}_q^p(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + Z_0 \int_{\partial V_q} \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{S}_q(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \quad (2.4.54)$$

όπου \tilde{L}_q^p δηλώνει το τμήμα της λαγκρανζιανής πυκνότητας (Lagrangian density) που προκαλείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ διαφορετικών μεμονωμένων πεδίων που ακτινοβολούν στο V_p .

Η φυσική ερμηνεία της (2.4.54) είναι η ακόλουθη: Ένα αρνητικό q-ISCS σημαίνει ότι η ροή ισχύος δεν κατευθύνεται προς τα έξω -όπως αναμενόταν- αλλά προς τα μέσα. Τότε, η ροή ισχύος που προκαλείται από την αλληλεπίδραση μεταξύ των μεμονωμένων πεδίων «επιστρέφει» στο στρώμα διέγερσης. Επιπροσθέτως, τονίζουμε ότι οι ροές ισχύος της (2.4.54) περιλαμβάνουν μόνο αυτές που προκαλούνται από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μεμονωμένων πεδίων και όχι τις μεμονωμένες ροές ισχύος.

Όταν διεγείρονται περισσότερα από ένα στρώματα, εμφανίζονται διαφορετικοί τύποι ροών ισχύος.

Θεώρημα 4.7

Η καθολική διατομή σκέδασης, η καθολική λαγκρανζιανή πυκνότητα (Lagrangian density) και οι q-διεγερθείσες ροές (q-excitation fluxes) συνδέονται ως εξής:

$$\sigma = 2i\omega Z_0 \sum_{p=0}^P \int_{V_p} L_p^I(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + Z_0 \sum_{q=1}^Q \int_{\partial V_q^{ex}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(S_q^{pr}(\mathbf{r}) + S_q^{ov}(\mathbf{r}) \right) ds(\mathbf{r}) \quad (2.4.55)$$

όταν το V_p συμπίπτει με ένα V_q^{ex} , τότε το L^p αναφέρεται στο L_p^{sec} ,

$$\sigma^T = 2i\omega Z_0 \sum_{p=0}^P \int_{V_p} L_p^T(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + Z_0 \sum_{q=1}^Q \int_{\partial V_q^{ex}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{S}_q^T(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \quad (2.4.56)$$

όπου L_p^T και \tilde{S}_q^T δηλώνουν τα μέρη της λαγκρανζιανής πυκνότητας (Lagrangian density) και της ροής ισχύος, αντίστοιχα, τα οποία αποδίδονται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ πεδίων που παράγονται από διαφορετικά δίπολα, και

$$\sigma^I = 2i\omega Z_0 \sum_{p=0}^P \int_{V_p} L_p^I(\mathbf{r}) dv(\mathbf{r}) + Z_0 \sum_{q=1}^Q \int_{\partial V_q^{ex}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \tilde{S}_q^I(\mathbf{r}) ds(\mathbf{r}) \quad (2.4.57)$$

όπου L_p^I και \tilde{S}_q^I τα μέρη της λαγκρανζιανής πυκνότητας (Lagrangian density) και της ροής ισχύος, αντίστοιχα, που προκαλούνται από τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πεδίων που δημιουργούνται σε διαφορετικά στρώματα. Στην (2.4.57), η IPF που οφείλεται στα πρωτεύοντα πεδία απουσιάζει γεγονός που είναι αναμενόμενο αφού η έμμεση ISCS ποσοτικοποιεί την αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων από διαφορετικά στρώματα διέγερσης.

Για πεπερασμένο αριθμό δίπολων ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.8

Η συνολική ISCS, σ^T , ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$1 - N \frac{\sigma^{max}}{\sigma} \leq \frac{\sigma^T}{\sigma} \leq \min \left\{ 1 - N \frac{\sigma^{min}}{\sigma}, 1 - \frac{1}{N} \right\}. \quad (2.4.58)$$

όπου σ^{min} και σ^{max} η ελάχιστη και η μέγιστη μεμονωμένη διατομή σκέδασης από όλα τα δίπολα. Για

$$N^2 \sigma^{min} \leq \sigma \quad (2.4.59)$$

το ελάχιστο για τη (2.4.58) είναι το $1 - \frac{1}{N}$.

Πόρισμα 4.2

Η (2.4.59) ισχύει αν και μόνο αν

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^{max}}} \leq N \leq \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^{min}}}.$$

3. Προβλήματα σκέδασης πολυστρωματικού σκεδαστή

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται σχέσεις μεταξύ των πεδίων για τη γενική περίπτωση του ευθέως προβλήματος διέγερσης πολυστρωματικού σκεδαστή από N ηλεκτρικά δίπολα και στη συνέχεια κάνοντας εφαρμογή των γενικών τύπων επιλύονται δύο προβλήματα διέγερσης πολυστρωματικού σκεδαστή. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται το πρόβλημα διέγερσης μιας πολυστρωματικής σφαίρας από ένα αυθαίρετα κατανεμημένο ηλεκτρικό δίπολο και το πρόβλημα διέγερσης μιας διστρωματικής σφαίρας από δύο αυθαίρετα κατανεμημένα (ένα στο εσωτερικό και ένα στο εξωτερικό της σφαίρας) ηλεκτρικά δίπολα.

3.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

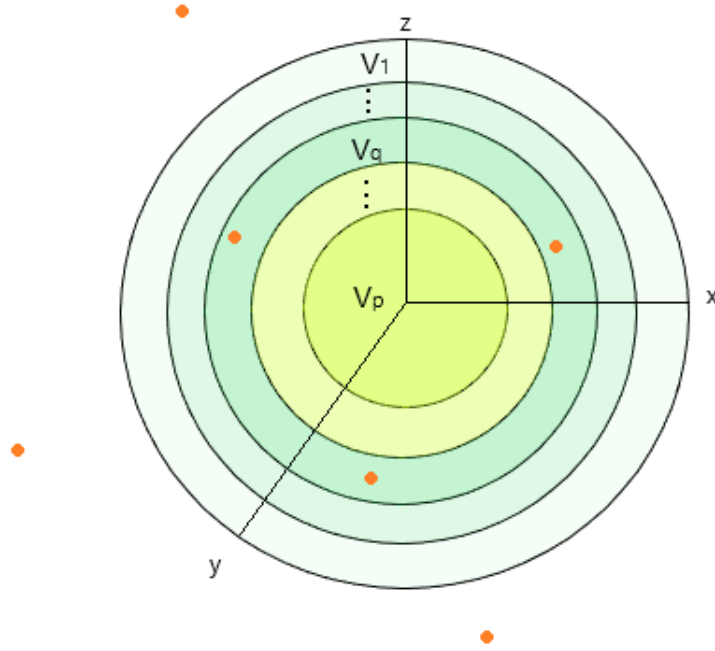
Θεωρούμε σφαιρικό πολυστρωματικό σκεδαστή V , ο οποίος ταυτίζεται με ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 με ομαλό και κλειστό σύνορο $S_1 \subset C^2$. Το εσωτερικό του σκεδαστή χωρίζεται από $P - 1$, C^2 επιφάνειες S_p ($p = 2, \dots, P$) οι οποίες διαιρούν τον σκεδαστή σε V_p ($p = 1, \dots, P$) στρώματα με ακτίνες $a_{p+1} < r < a_p$, $p = 1, \dots, P - 1$. Στις επιφάνειες S_p θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο εξωτερικό διάνυσμα \hat{n} . Τα στρώματα V_p για $p = 1, \dots, P - 1$ αποτελούνται από ομογενή και ισοτροπικά υλικά και χαρακτηρίζονται από κυματάριθμο k_p , μαγνητική διαπερατότητα μ_p και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_p . Ο πυρήνας του σκεδαστή V_p μπορεί να είναι τέλεια ηλεκτρικά αγωγίμος (PEC) ή διηλεκτρικός με κυματάριθμο k_p , μαγνητική διαπερατότητα μ_p και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_p . Το εξωτερικό $V_0 = \mathbb{R}^3 \setminus V$ του σκεδαστή αποτελείται από ομογενές και ισοτροπικό υλικό με κυματάριθμο k_0 , μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_0 .

Ο σκεδαστής διεγείρεται από N ηλεκτρικά δίπολα, με διανύσματα θέσης \mathbf{r}^i , διάνυσμα πόλωσης $\hat{\mathbf{p}}^i$, $i = 1, \dots, N$. Τα δίπολα είναι αυθαίρετα κατανεμημένα σε Q διεγείροντα στρώματα τα οποία ονομάζουμε V_q^{ex} για $q = 1, \dots, Q$ και $Q \leq P + 1$.

Το στρώμα διέγερσης V_q^{ex} περιέχει n_q δίπολα με ισχύ $A_{q,j}$, διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_{q,j}$ και διανύσματα πόλωσης $\hat{\mathbf{p}}_{q,j}$, $j = 1, \dots, n_q$ αντίστοιχα. Ισχύει ότι: $n_1 + n_2 + \dots + n_Q = N$. Αυτά τα ηλεκτρικά δίπολα παράγουν μεμονωμένα πρωτεύοντα ηλεκτρικά πεδία (individual primary fields) που δίνονται από:

$$E_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_q \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{q,j}) \cdot \mathbf{p}_{q,j}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_{q,j}\}.$$

όπου \tilde{G}^{pr} η δυαδική συνάρτηση Green και $\mathbf{p}_{q,j} = A_{q,j} \hat{\mathbf{p}}_{q,j}$.



Εικόνα 4: Διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από N αυθαίρετα κατανεμημένα ηλεκτρικά δίπολα

Στις διαχωριστικές επιφάνειες των στρωμάτων S_p ισχύουν οι σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E^{j-1}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \times E^j(\mathbf{r}), \quad r = a_j$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E^{j-1}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_{j-1}}{\mu_j} \hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E^j(\mathbf{r}), \quad r = a_j.$$

Στην επιφάνεια του πυρήνα στην περίπτωση του τέλεια ηλεκτρικά αγώγιμου ισχύει:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E^{N-1}(\mathbf{r}) = 0, \quad r = a_N$$

ενώ στην περίπτωση του διηλεκτρικού ισχύουν οι αντίστοιχες συνοριακές με αυτές των διαχωριστικών επιφανειών δηλαδή:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E^{P-1}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \times E^P(\mathbf{r}), \quad r = a_j$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E^{P-1}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_{P-1}}{\mu_P} \hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E^P(\mathbf{r}), \quad r = a_j.$$

Επιλέγουμε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, φ) με αρχή O το κέντρο της σφαίρας. Οπότε, η θέση του κάθε δίπολου προσδιορίζεται από $\mathbf{r}_{q,j} = (r_{q,j}, \theta_{q,j}, \varphi_{q,j})$, $j = 1, \dots, n_q$. Χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις για τα πρωτεύοντα μεμονωμένα ηλεκτρικά πεδία προκύπτει:

$$E_{q,j}^{pr}(\mathbf{r}) = \frac{ik_q}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \times \begin{cases} \left(M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) M_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) N_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \right) \cdot \mathbf{p}_{q,j}, & r > r_{q,j} \\ \left(M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) M_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) N_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \right) \cdot \mathbf{p}_{q,j}, & r < r_{q,j} \end{cases}$$

όπου $c_{nm} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varepsilon_m$, και ε_m είναι ο παράγοντας Neumann:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

Για τα μεμονωμένα δευτερεύοντα ηλεκτρικά πεδία σε κάθε στρώμα $V_p, p \neq q$ ισχύει η σχέση:

$$E_{q,j}^p(\mathbf{r}) = \frac{ik_q}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \times \left[M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \left(a_{n,p}^{q,j} M_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) + b_{n,p}^{q,j} M_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \right) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \left(c_{n,p}^{q,j} N_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) + d_{n,p}^{q,j} N_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \right) + M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \left(\tilde{a}_{n,p}^{q,j} M_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) + \tilde{b}_{n,p}^{q,j} M_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \right) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \left(\tilde{c}_{n,p}^{q,j} N_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) + \tilde{d}_{n,p}^{q,j} N_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \right) \right] \cdot \mathbf{p}_{q,j}$$

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς που αναφέρονται στο [17] προκύπτουν τα καθολικά πρωτεύοντα και δευτερεύοντα πεδία:

$$E_q^{pr}(\mathbf{r}) = \sum_{n,m,s} \begin{cases} \left(M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \mathcal{M}_{snm}^1(\mathbf{u}_q) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \mathcal{N}_{snm}^1(\mathbf{u}_q) \right), & r > r_{q,j} \\ \left(M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \mathcal{M}_{snm}^3(\mathbf{u}_q) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \mathcal{N}_{snm}^3(\mathbf{u}_q) \right), & r < r_{q,j} \end{cases}$$

$$E^p(\mathbf{r}) = \sum_{n,m,s} [M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q)(\mathcal{A}_{snm}^p + \mathfrak{B}_{snm}^p) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q)(\mathcal{C}_{snm}^p + \mathfrak{D}_{snm}^p) \\ + M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q)(\tilde{\mathcal{A}}_{snm}^p + \tilde{\mathfrak{B}}_{snm}^p) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q)(\tilde{\mathcal{C}}_{snm}^p + \tilde{\mathfrak{D}}_{snm}^p)]$$

όπου \mathbf{u}_q το n -διάστατο διάνυσμα $(1, 1, \dots, 1)$.

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό των σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων όπως αναφέρονται στο [32] και χρησιμοποιώντας τις ασυμπτωτικές σχέσεις των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel και Hankel για $r \rightarrow \infty$, όπως αναφέρονται στο [6], προκύπτουν για τα μακρινά πεδία q -διέγερσης και για το συνολικό μακρινό πεδίο οι εξής σχέσεις:

$$g_q(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\omega\mu_0}{4\pi} \sum_{n,m,s} \sqrt{n(n+1)} (-i)^{n-1} \\ \times [C_{snm}(\theta, \varphi)(\tilde{\mathcal{A}}_{s,n,m,q}^0 + \tilde{\mathfrak{B}}_{s,n,m,q}^0) \\ + iB_{snm}(\theta, \varphi)(\tilde{\mathcal{C}}_{s,n,m,q}^0 + \tilde{\mathfrak{D}}_{s,n,m,q}^0)] \\ g(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\omega\mu_0}{4\pi} \sum_{s,n,m} \sqrt{n(n+1)} (-i)^{n-1} \\ \times [C_{snm}(\theta, \varphi)(\tilde{\mathcal{A}}_{s,n,m}^0 + \tilde{\mathfrak{B}}_{s,n,m}^0) + iB_{snm}(\theta, \varphi)(\tilde{\mathcal{C}}_{s,n,m}^0 + \tilde{\mathfrak{D}}_{s,n,m}^0)]$$

Οι αντίστοιχες q -διέγερσης διατομές σκέδασης και η καθολική διατομή σκέδασης δίνονται από:

$$\sigma_q = \frac{2\pi}{k_0^2} \sum_{s,n,m} (2n+1) [|\tilde{\mathcal{A}}_{s,n,m,q}^0 + \tilde{\mathfrak{B}}_{s,n,m,q}^0|^2 + |\tilde{\mathcal{C}}_{s,n,m,q}^0 + \tilde{\mathfrak{D}}_{s,n,m,q}^0|^2] \\ \sigma_q = \frac{2\pi}{k_0^2} \sum_{s,n,m} (2n+1) [|\tilde{\mathcal{A}}_{s,n,m}^0 + \tilde{\mathfrak{B}}_{s,n,m}^0|^2 + |\tilde{\mathcal{C}}_{s,n,m}^0 + \tilde{\mathfrak{D}}_{s,n,m}^0|^2]$$

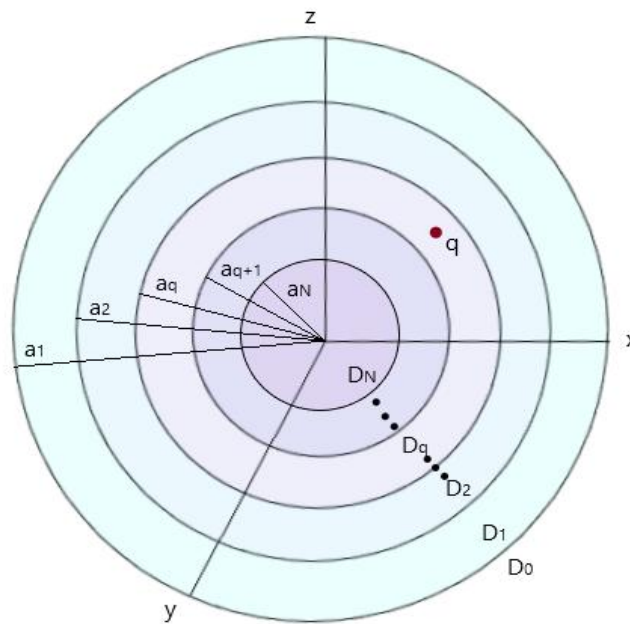
3.2 Διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από ένα ηλεκτρικό δίπολο σε αυθαίρετη θέση

Θεωρούμε σφαιρικό πολυστρωματικό σκεδαστή D , $D \subset \mathbb{R}^3$ ακτίνας a_1 , με ομαλό κλειστό σύνορο $S1 = \partial D$. Το εσωτερικό του σκεδαστή περιλαμβάνει $N - 1$ ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες a_j , $j = 2, \dots, N$. Οι κύκλοι διαχωρίζονται από σφαιρικές επιφάνειες S_j . Για τα D_j στρώματα ισχύει $a_{j+1} \leq r \leq a_j$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$.

1. Τα στρώματα D_p για $p = 1, \dots, P - 1$ αποτελούνται από ομογενή και ιστροπικά

υλικά και χαρακτηρίζονται από κυματάρημο k_j , ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_j και μαγνητική διαπερατότητα μ_j . Ο πυρήνας του σκεδαστή D_N είναι τέλεια ηλεκτρικά αγωγίμος. Το εξωτερικό D_0 του σκεδαστή είναι επίσης ομογενές υλικό με φυσικές σταθερές k_0 , ϵ_0 και μ_0 .

Ο σκεδαστής διεγείρεται από σφαιρικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το οποίο παράγεται από σημειακό ηλεκτρικό δίπολο αυθαίρετα κατανομημένο στο στρώμα D_q , $q = 1, \dots, N - 1$ με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_q = (r_q, \theta_q, \varphi_q)$ και διάνυσμα πόλωσης $\hat{\mathbf{p}}$.



Εικόνα 5: Διέγερση πολυστρωματικής σφαίρας από ένα αυθαίρετο ηλεκτρικό δίπολο

Επιλέγουμε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, φ) με αρχή O το κέντρο της σφαίρας.

Το ηλεκτρικό δίπολο παράγει ένα πρωτεύον ηλεκτρικό πεδίο στο στρώμα D_q που δίνεται από:

$$E_q^{pr}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{p}) = i\omega\mu_q \tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_q\}.$$

Στο στρώμα D_q το ολικό ηλεκτρικό πεδίο προκύπτει από την υπέρθεση του πρωτεύοντος και του σκεδασμένου πεδίου

$$E^q = E_q^{pr} + E_q^{sec}$$

ενώ στα υπόλοιπα στρώματα D_p , $p \neq q$, όπως και στο εξωτερικό D_0 το ολικό ηλεκτρικό πεδίο αντιστοιχεί με το δευτερεύον πεδίο

$$E^p = E_p^{sec}$$

$$E^0 = E_0^{sec}.$$

Στις διαχωριστικές επιφάνειες των στρωμάτων ισχύουν οι σχέσεις:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E^{j-1}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{p}) = \hat{\mathbf{r}} \times E^j(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{p}), \quad r = a_j$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E^{j-1}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{p}) = \frac{\mu_j - 1}{\mu_j} \hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E^j(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{p}), \quad r = a_j.$$

Ενώ στην επιφάνεια του πυρήνα ισχύει:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E^{N-1}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, \mathbf{p}) = 0, \quad r = a_N.$$

Για το πρωτεύον ηλεκτρικό πεδίο ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} E_q^{pr}(\mathbf{r}) &= \frac{ik_q}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \\ &\times \begin{cases} \left(M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) M_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_q) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) N_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_q) \right) \cdot \mathbf{p}, & r > r_q \\ \left(M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) M_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_q) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) N_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_q) \right) \cdot \mathbf{p}, & r < r_q \end{cases} \end{aligned}$$

και για το συνολικό δευτερεύον ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε στρώμα D_j , $j \neq q$ ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} E_q^{sec}(\mathbf{r}) &= \frac{ik_q}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \\ &\times \left[M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \left(a_n^{pq} M_{snm}^1(r_q, k_q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_n^{pq} M_{snm}^3(r_q, k_q) \right) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \left(c_n^{pq} N_{snm}^1(r_q, k_q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d_n^{pq} N_{snm}^3(r_q, k_q) \right) \right. \\ &\quad \left. + M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \left(\tilde{a}_n^{pq} M_{snm}^1(r_q, k_q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{b}_n^{pq} M_{snm}^3(r_q, k_q) \right) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \left(\tilde{c}_n^{pq} N_{snm}^1(r_q, k_q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{d}_n^{pq} N_{snm}^3(r_q, k_q) \right) \right] \end{aligned}$$

όπου $c_{nm} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varepsilon_m$, και ε_m είναι ο παράγοντας Neumann:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων και τις συνοριακές συνθήκες στα στρώματα προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} a_n^{pq} & b_n^{pq} \\ \tilde{a}_n^{pq} & \tilde{b}_n^{pq} \end{bmatrix} = T_n^p \begin{bmatrix} a_n^{p-1q} & b_n^{p-1q} \\ \tilde{a}_n^{p-1q} & \tilde{b}_n^{p-1q} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_n^{pq} & d_n^{pq} \\ \tilde{c}_n^{pq} & \tilde{d}_n^{pq} \end{bmatrix} = S_n^p \begin{bmatrix} c_n^{p-1q} & d_n^{p-1q} \\ \tilde{c}_n^{p-1q} & \tilde{d}_n^{p-1q} \end{bmatrix}$$

όπου

$$T_n^p = -ix_p^2 \begin{bmatrix} U_p(h_n, j_n) & U_p(h_n, h_n) \\ -U_p(j_n, j_n) & -U_p(j_n, h_n) \end{bmatrix} \text{ και } S_n^p = -ix_p^2 \begin{bmatrix} V_p(h_n, j_n) & V_p(h_n, h_n) \\ -V_p(j_n, j_n) & -V_p(j_n, h_n) \end{bmatrix}$$

με

$$U_p(f, g)(x_p, y_p) = \tilde{f}(x_p)g(y_p) - \frac{\sqrt{\mu_p \varepsilon_{p-1}}}{\sqrt{\mu_{p-1} \varepsilon_p}} f(x_p)\tilde{g}(y_p)$$

$$V_p(f, g)(x_p, y_p) = \frac{\sqrt{\mu_p \varepsilon_{p-1}}}{\sqrt{\mu_{p-1} \varepsilon_p}} \tilde{f}(x_p)g(y_p) - f(x_p)\tilde{g}(y_p)$$

και $x_p = k_p a_p$ και $y_p = k_{p-1} a_p$.

Για τον εξωτερικό χώρο D_0 του σκεδαστή προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} a_n^{qq} & b_n^{qq} \\ \tilde{a}_n^{qq} + 1 & \tilde{b}_n^{qq} \end{bmatrix} = T_n^{0 \rightarrow q} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{a}_n^{0q} & \tilde{b}_n^{0q} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_n^{qq} & d_n^{qq} \\ \tilde{c}_n^{qq} + 1 & \tilde{d}_n^{qq} \end{bmatrix} = S_n^{0 \rightarrow q} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{c}_n^{0q} & \tilde{d}_n^{0q} \end{bmatrix}$$

όπου $T_n^{0 \rightarrow q}$ και $S_n^{0 \rightarrow q}$ οι πίνακες μετάβασης από το εξωτερικό D_0 στο στρώμα D_q οι οποίοι προκύπτουν από:

$$T_n^{0 \rightarrow q} = T_n^q T_n^{q-1} T_n^{q-2} \dots T_n^2 T_n^1$$

$$S_n^{0 \rightarrow q} = S_n^q S_n^{q-1} S_n^{q-2} \dots S_n^2 S_n^1.$$

Ακόμη, για το προτελευταίο στρώμα $N - 1$ ισχύει:

$$\begin{bmatrix} a_n^{N-1q} & b_n^{N-1q} \\ \tilde{a}_n^{N-1q} & \tilde{b}_n^{N-1q} \end{bmatrix} = T_n^{q \rightarrow N-1} \begin{bmatrix} a_n^{qq} & b_n^{qq} + 1 \\ \tilde{a}_n^{qq} & \tilde{b}_n^{qq} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_n^{N-1q} & d_n^{N-1q} \\ \tilde{c}_n^{N-1q} & \tilde{d}_n^{N-1q} \end{bmatrix} = S_n^{q \rightarrow N-1} \begin{bmatrix} c_n^{qq} & d_n^{qq} + 1 \\ \tilde{c}_n^{qq} & \tilde{d}_n^{qq} \end{bmatrix}$$

όπου $T_n^{q \rightarrow N-1}$ και $S_n^{q \rightarrow N-1}$ οι πίνακες μετάβασης από το εξωτερικό D_q στο προτελευταίο στρώμα D_{N-1} που προκύπτουν από:

$$T_n^{q \rightarrow N-1} = T_n^{N-1} T_n^{N-2} \dots T_n^{q+2} T_n^{q+1}$$

$$S_n^{q \rightarrow N-1} = S_n^{N-1} S_n^{N-2} \dots S_n^{q+2} S_n^{q+1}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις για το προτελευταίο στρώμα προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} a_n^{N-1q} & b_n^{N-1q} \\ \tilde{a}_n^{N-1q} & \tilde{b}_n^{N-1q} \end{bmatrix} = T_n^{0 \rightarrow N-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{a}_n^{0q} & \tilde{b}_n^{0q} \end{bmatrix} + T_n^{q \rightarrow N-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_n^{N-1q} & d_n^{N-1q} \\ \tilde{c}_n^{N-1q} & \tilde{d}_n^{N-1q} \end{bmatrix} = S_n^{0 \rightarrow N-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{c}_n^{0q} & \tilde{d}_n^{0q} \end{bmatrix} + S_n^{q \rightarrow N-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Στην επιφάνεια του πυρήνα D_N ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} j_n(k_{N-1} a_N) \\ h_n(k_{N-1} a_N) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_n^{N-1q} & b_n^{N-1q} \\ \tilde{a}_n^{N-1q} & \tilde{b}_n^{N-1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{j}_n(k_{N-1} a_N) \\ \tilde{h}_n(k_{N-1} a_N) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c_n^{N-1q} & d_n^{N-1q} \\ \tilde{c}_n^{N-1q} & \tilde{d}_n^{N-1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Τελικά για τους συντελεστές προκύπτει:

$$\tilde{a}_n^{0q} = \frac{T_{n12}^{q \rightarrow N-1} j_n(k_{N-1} a_N) + T_{n22}^{q \rightarrow N-1} h_n(k_{N-1} a_N)}{T_{n12}^{0 \rightarrow N-1} j_n(k_{N-1} a_N) + T_{n22}^{0 \rightarrow N-1} h_n(k_{N-1} a_N)}$$

$$\tilde{b}_n^{0q} = -\frac{T_{n11}^{q \rightarrow N-1} j_n(k_{N-1} a_N) + T_{n21}^{q \rightarrow N-1} h_n(k_{N-1} a_N)}{T_{n12}^{0 \rightarrow N-1} j_n(k_{N-1} a_N) + T_{n22}^{0 \rightarrow N-1} h_n(k_{N-1} a_N)}$$

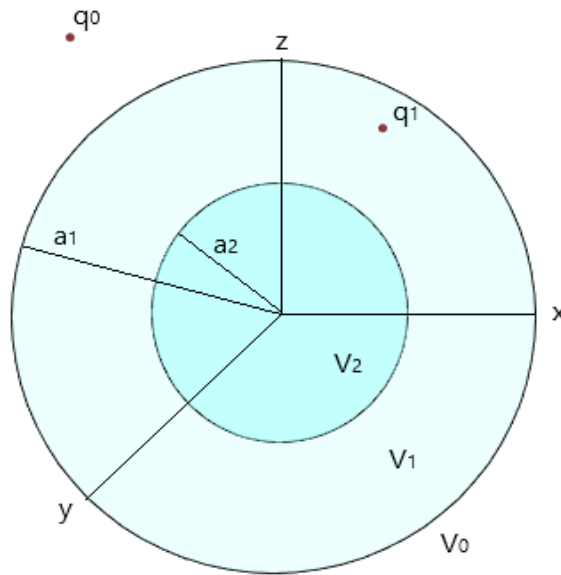
$$\tilde{c}_n^{0q} = \frac{S_{n12}^{q \rightarrow N-1} \tilde{j}_n(k_{N-1} a_N) + T_{n22}^{q \rightarrow N-1} \tilde{h}_n(k_{N-1} a_N)}{T_{n12}^{0 \rightarrow N-1} \tilde{j}_n(k_{N-1} a_N) + T_{n22}^{0 \rightarrow N-1} \tilde{h}_n(k_{N-1} a_N)}$$

$$\tilde{d}_n^{0q} = -\frac{S_{n11}^{q \rightarrow N-1} \tilde{j}_n(k_{N-1} a_N) + T_{n21}^{q \rightarrow N-1} \tilde{h}_n(k_{N-1} a_N)}{T_{n12}^{0 \rightarrow N-1} \tilde{j}_n(k_{N-1} a_N) + T_{n22}^{0 \rightarrow N-1} \tilde{h}_n(k_{N-1} a_N)}$$

3.3 Διέγερση διστρωματικής σφαίρας από δυο ηλεκτρικά δίπολα σε αυθαίρετη θέση

Θεωρούμε σφαιρικό διστρωματικό σκεδαστή V , $V \subset \mathbb{R}^3$ ακτίνας a_1 , με ομαλό κλειστό σύνορο $S_1 = \partial D$. Το εσωτερικό του σκεδαστή είναι ομογενές και περιλαμβάνει το πρώτο στρώμα V_1 , που χαρακτηρίζεται από κυματάριθμο k_1 , ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_1 και μαγνητική διαπερατότητα μ_1 , και τον πυρήνα V_2 (ακτίνας a_2) ο οποίος είναι τέλεια ηλεκτρικά αγωγίμος ή διηλεκτρικός με κυματάριθμο k_2 , ηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_2 και μαγνητική διαπερατότητα μ_2 . Οι κύκλοι/στρώματα διαχωρίζονται από σφαιρικές επιφάνειες S_1 και S_2 αντίστοιχα. Το εξωτερικό V_0 του σκεδαστή είναι επίσης ομογενές μέσο με φυσικές σταθερές k_0 , ϵ_0 και μ_0 . Ο σκεδαστής διεγείρεται από 2 σημειακά ηλεκτρικά δίπολα, αυθαίρετα τοποθετημένα στο εξωτερικό V_0 και στο στρώμα V_1 , με διανύσματα θέσης $\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ και $\mathbf{r}_q = (r_q, \theta_q, \varphi_q)$ και διανύσματα πόλωσης \hat{p}_0 και \hat{p}_1 αντίστοιχα.

Επιλέγουμε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, φ) με αρχή O το κέντρο της σφαίρας.



Εικόνα 6: Διέγερση διστρωματικής σφαίρας από δύο αυθαίρετα ηλεκτρικά δίπολα

Τα δίπολα ακτινοβολούν σφαιρικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$ και παράγουν πρωτεύοντα ηλεκτρικά πεδία της μορφής:

$$E_0^{pr}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0, p_0) = i\omega\mu_0\tilde{G}_0^{pr}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot p_0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_0\}$$

$$E_1^{pr}(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, p_1) = i\omega\mu_1\tilde{G}_1^{pr}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) \cdot p_1, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_q\}.$$

όπου \tilde{G}^{pr} η δυαδική συνάρτηση Green.

Μετά τη σκέδαση των πρωτεύοντων πεδίων στη σφαίρα δημιουργούνται τα δευτερεύοντα πεδία $E_{0,0}^{sec}, E_{1,0}^{sec}, E_{0,1}^{sec}, E_{1,1}^{sec}$.

Στην επιφάνεια του σκεδαστή $S_1 = \partial D$ ισχύουν οι διηλεκτρικές συνοριακές συνθήκες:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0, p_0) = \hat{\mathbf{r}} \times E_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, p_1), \quad r = a_1$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E_0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0, p_0) = \frac{\mu_0}{\mu_1} \hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E_1(\mathbf{r}; \mathbf{r}_q, p_1), \quad r = a_1$$

ενώ στην επιφάνεια του πυρήνα ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες της τέλεια ηλεκτρικά αγωγίμης επιφάνειας:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E_1(\mathbf{r}) = 0, \quad r = a_2.$$

Όλα τα ηλεκτρικά πεδία ικανοποιούν τη διανυσματική εξίσωση Helmholtz:

$$\nabla \times \nabla \times E(\mathbf{r}) - k^2 E(\mathbf{r}) = 0.$$

Για τα πρωτεύοντα και δευτερεύοντα πεδία ισχύουν οι σχέσεις:

- Ολικά μεμονωμένα πεδία που οφείλονται μόνο στο εξωτερικό δίπολο q_0 :
 - Στο V_0 : $E_0^{pr} + E_{0,0}^{sec}$
 - Στο V_1 : $E_{1,0}^{sec}$
- Ολικά μεμονωμένα πεδία που οφείλονται μόνο στο εσωτερικό δίπολο q_1 :
 - Στο V_0 : $E_{0,1}^{sec}$
 - Στο V_1 : $E_1^{pr} + E_{1,1}^{sec}$
- Καθολικά πεδία στο V_0 : $E_0^T = E_0^{pr} + E_{0,0}^{sec} + E_{0,1}^{sec}$
- Καθολικά πεδία στο V_1 : $E_1^T = E_1^{pr} + E_{1,1}^{sec} + E_{1,0}^{sec}$

Για τα πρωτεύοντα πεδία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}
E_0^{pr}(\mathbf{r}) &= \frac{ik_0}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \\
&\times \begin{cases} (M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_0)M_{snm}^1(\mathbf{r}_0, k_0) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_0)N_{snm}^1(\mathbf{r}_0, k_0)) \cdot p_0, & r > r_0 \\ (M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_0)M_{snm}^3(\mathbf{r}_0, k_0) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_0)N_{snm}^3(\mathbf{r}_0, k_0)) \cdot p_0, & r < r_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1^{pr}(\mathbf{r}) &= \frac{ik_1}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \\
&\times \begin{cases} (M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_1)M_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_1) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_1)N_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_1)) \cdot p_1, & r > r_q \\ (M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_1)M_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_1) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_1)N_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_1)) \cdot p_1, & r < r_q \end{cases}
\end{aligned}$$

όπου $c_{nm} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \varepsilon_m$, και ε_m είναι ο παράγοντας Neumann:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases}$$

Για τα δευτερεύοντα στο εξωτερικό V_0 και στο πρώτο στρώμα V_1 ισχύει:

$$\begin{aligned}
E_{p,q}^{sec}(\mathbf{r}) &= \frac{ik_q}{4\pi} \sum_{n,m,s} c_{nm} \\
&\times \left[M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \left(a_n^{pq} M_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_n^{pq} M_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_q) \right) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_q) \left(c_n^{pq} N_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + d_n^{pq} N_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_q) \right) \right. \\
&\quad \left. + M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \left(\tilde{a}_n^{pq} M_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{b}_n^{pq} M_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_q) \right) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_q) \left(\tilde{c}_n^{pq} N_{snm}^1(\mathbf{r}_q, k_q) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \tilde{d}_n^{pq} N_{snm}^3(\mathbf{r}_q, k_q) \right) \right]
\end{aligned}$$

όπου $p = \{0, 1\}$ δηλώνει το στρώμα V_0 και V_1 αντίστοιχα και $q = \{0, 1\}$ δηλώνει το δίπολο.

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς που αναφέρονται στο [17] προκύπτουν:

Για τα πρωτεύοντα πεδία:

$$E_0^{pr}(\mathbf{r}) = \sum_{n,m,s} \begin{cases} (M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_0)M_{snm}^1(1) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_0)N_{snm}^1(1)), & r > r_0 \\ (M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_0)M_{snm}^3(1) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_0)N_{snm}^3(1)), & r < r_0 \end{cases}$$

$$E_1^{pr}(\mathbf{r}) = \sum_{n,m,s} \begin{cases} (M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_1)M_{snm}^1(1) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_1)N_{snm}^1(1)), & r > r_q \\ (M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_1)M_{snm}^3(1) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_1)N_{snm}^3(1)), & r < r_q \end{cases}$$

Για το συνολικό δευτερεύον στο V_0 :

$$E_0^{sec}(\mathbf{r}) = \sum_{n,m,s} [M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_0)(\mathcal{A}_{snm}^0 + \mathfrak{B}_{snm}^0) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_0)(\mathcal{C}_{snm}^0 + \mathfrak{D}_{snm}^0) \\ + M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_0)(\tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 + \tilde{\mathfrak{B}}_{snm}^0) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_0)(\tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 + \tilde{\mathfrak{D}}_{snm}^0)]$$

Για το συνολικό δευτερεύον στο V_1 :

$$E_1^{sec}(\mathbf{r}) = \sum_{n,m,s} [M_{snm}^1(\mathbf{r}, k_1)(\mathcal{A}_{snm}^1 + \mathfrak{B}_{snm}^1) + N_{snm}^1(\mathbf{r}, k_1)(\mathcal{C}_{snm}^1 + \mathfrak{D}_{snm}^1) \\ + M_{snm}^3(\mathbf{r}, k_1)(\tilde{\mathcal{A}}_{snm}^1 + \tilde{\mathfrak{B}}_{snm}^1) + N_{snm}^3(\mathbf{r}, k_1)(\tilde{\mathcal{C}}_{snm}^1 + \tilde{\mathfrak{D}}_{snm}^1)]$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων και τις συνοριακές συνθήκες στα στρώματα προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{snm}^1 & \mathfrak{B}_{snm}^1 \\ \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^1 + M_{snm}^1(1) & \tilde{\mathfrak{B}}_{snm}^1 \end{bmatrix} = T_n^1 \begin{bmatrix} 0 & M_{snm}^3(1) \\ \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 & \tilde{\mathfrak{B}}_{snm}^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{C}_{snm}^1 & \mathfrak{D}_{snm}^1 \\ \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^1 + N_{snm}^1(1) & \tilde{\mathfrak{D}}_{snm}^1 \end{bmatrix} = S_n^1 \begin{bmatrix} 0 & N_{snm}^3(1) \\ \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 & \tilde{\mathfrak{D}}_{snm}^0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$T_n^1 = -i(k_1 r_1)^2 \begin{bmatrix} \tilde{h}_n(k_1 r_1)j_n(k_0 r_1) - \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} h_n(k_1 r_1)\tilde{j}_n(k_0 r_1) & \tilde{h}_n(k_1 r_1)h_n(k_0 r_1) - \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} h_n(k_1 r_1)\tilde{h}_n(k_0 r_1) \\ -\tilde{j}_n(k_1 r_1)j_n(k_0 r_1) + \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} j_n(k_1 r_1)\tilde{j}_n(k_0 r_1) & -\tilde{j}_n(k_1 r_1)h_n(k_0 r_1) + \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} j_n(k_1 r_1)\tilde{h}_n(k_0 r_1) \end{bmatrix}$$

και

S_n^1

$$= -i(k_1 r_1)^2 \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} \tilde{h}_n(k_1 r_1) j_n(k_0 r_1) - h_n(k_1 r_1) \tilde{j}_n(k_0 r_1) & \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} \tilde{h}_n(k_1 r_1) h_n(k_0 r_1) - h_n(k_1 r_1) \tilde{h}_n(k_0 r_1) \\ -\frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} \tilde{j}_n(k_1 r_1) j_n(k_0 r_1) + j_n(k_1 r_1) \tilde{j}_n(k_0 r_1) & -\frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_0}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_1}} \tilde{j}_n(k_1 r_1) h_n(k_0 r_1) + j_n(k_1 r_1) \tilde{h}_n(k_0 r_1) \end{bmatrix}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν τα εξής συστήματα:

$$(1) \begin{cases} \mathcal{A}_{snm}^1 = T_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 \\ \mathcal{B}_{snm}^1 = T_{n,11}^1 \mathcal{M}_{snm}^3(1) + T_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^0 \\ \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^1 = T_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 - \mathcal{M}_{snm}^1(1) \\ \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^1 = T_{n,21}^1 \mathcal{M}_{snm}^3(1) + T_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \mathcal{C}_{snm}^1 = S_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 \\ \mathcal{D}_{snm}^1 = S_{n,11}^1 \mathcal{N}_{snm}^3(1) + S_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^0 \\ \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^1 = S_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 - \mathcal{N}_{snm}^1(1) \\ \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^1 = S_{n,21}^1 \mathcal{N}_{snm}^3(1) + S_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^0 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια του τέλεια ηλεκτρικού πυρήνα προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} j_n(k_1 r_2) \\ h_n(k_1 r_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{snm}^1 & \mathcal{B}_{snm}^1 + \mathcal{M}_{snm}^3(1) \\ \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^1 & \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{j}_n(k_1 r_2) \\ \tilde{h}_n(k_1 r_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{snm}^1 & \mathcal{D}_{snm}^1 + \mathcal{N}_{snm}^3(1) \\ \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^1 & \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

από τις οποίες προκύπτει το εξής σύστημα:

$$(3) \begin{cases} j_n(k_1 r_2) \mathcal{A}_{snm}^1 + h_n(k_1 r_2) \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^1 = 0 \\ j_n(k_1 r_2) (\mathcal{B}_{snm}^1 + \mathcal{M}_{snm}^3(1)) + h_n(k_1 r_2) \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^1 = 0 \\ \tilde{j}_n(k_1 r_2) \mathcal{C}_{snm}^1 + \tilde{h}_n(k_1 r_2) \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^1 = 0 \\ \tilde{j}_n(k_1 r_2) (\mathcal{D}_{snm}^1 + \mathcal{N}_{snm}^3(1)) + \tilde{h}_n(k_1 r_2) \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^1 = 0 \end{cases}$$

Από τα συστήματα (1), (2) και (3) προκύπτει τελικά:

$$j_n(k_1 r_2) T_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 + h_n(k_1 r_2) \left(T_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 - \mathcal{M}_{snm}^1(1) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 = \frac{h_n(k_1 r_2)}{j_n(k_1 r_2) T_{n,12}^1 + h_n(k_1 r_2) T_{n,22}^1} \mathcal{M}_{snm}^1(1)$$

$$j_n(k_1 r_2) \left(T_{n,11}^1 \mathcal{M}_{snm}^3(1) + T_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^0 + \mathcal{M}_{snm}^3(1) \right) \\ + h_n(k_1 r_2) \left(T_{n,21}^1 \mathcal{M}_{snm}^3(1) + T_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{B}}_{snm}^0 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathcal{B}}_{snm}^0 = - \frac{j_n(k_1 r_2) (T_{n,11}^1 + 1) + h_n(k_1 r_2) T_{n,21}^1}{j_n(k_1 r_2) T_{n,12}^1 + h_n(k_1 r_2) T_{n,22}^1} \mathcal{M}_{snm}^3(1)$$

$$\tilde{j}_n(k_1 r_2) S_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 + \tilde{h}_n(k_1 r_2) \left(S_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 - \mathcal{N}_{snm}^1(1) \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 = \frac{\tilde{h}_n(k_1 r_2)}{\tilde{j}_n(k_1 r_2) S_{n,12}^1 + \tilde{h}_n(k_1 r_2) S_{n,22}^1} \mathcal{N}_{snm}^1(1)$$

$$\tilde{j}_n(k_1 r_2) \left(S_{n,11}^1 \mathcal{N}_{snm}^3(1) + S_{n,12}^1 \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^0 + \mathcal{N}_{snm}^3(1) \right) \\ + \tilde{h}_n(k_1 r_2) \left(S_{n,21}^1 \mathcal{N}_{snm}^3(1) + S_{n,22}^1 \tilde{\mathcal{D}}_{snm}^0 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{snm}^0 = - \frac{\tilde{j}_n(k_1 r_2) (S_{n,11}^1 + 1) + \tilde{h}_n(k_1 r_2) S_{n,21}^1}{\tilde{j}_n(k_1 r_2) S_{n,12}^1 + \tilde{h}_n(k_1 r_2) S_{n,22}^1} \mathcal{N}_{snm}^3(1).$$

Εάν ο πυρήνας είχε διηλεκτρική επιφάνεια τότε σε αυτήν, S_2 , θα ίσχυαν οι συνοριακές συνθήκες:

$$\hat{\mathbf{r}} \times E_1(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \times E_2(\mathbf{r}), \quad r = a_2$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_1}{\mu_2} \hat{\mathbf{r}} \times \nabla \times E_2(\mathbf{r}), \quad r = a_2.$$

Το καθολικό πεδίο στον πυρήνα V_2 θα ήταν:

$$E_2^T = E_{0,2}^{sec} + E_{1,2}^{sec}$$

και οι συντελεστές που θα προέκυπταν θα ήταν:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{snm}^0 = \frac{T_{n,22}^{1 \rightarrow 2}}{T_{n,22}^{0 \rightarrow 2}} \mathcal{M}_{snm}^1(1)$$

$$\tilde{\mathbb{B}}_{snm}^0 = -\frac{T_{n,21}^{1\rightarrow 2}}{T_{n,22}^{0\rightarrow 2}} \mathcal{M}_{snm}^3(1)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_{snm}^0 = \frac{S_{n,22}^{1\rightarrow 2}}{S_{n,22}^{0\rightarrow 2}} \mathcal{N}_{snm}^1(1)$$

$$\tilde{\mathbb{D}}_{snm}^0 = -\frac{S_{n,21}^{1\rightarrow 2}}{S_{n,22}^{0\rightarrow 2}} \mathcal{N}_{snm}^3(1).$$

4. Αντίστροφα προβλήματα

Για την επίλυση αντίστροφων προβλημάτων απαιτείται η μετάβαση στην περιοχή χαμηλών συχνοτήτων. Κάνοντας χρήση ασυμπτωτικής ανάλυσης βρίσκουμε τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα των μακρινών πεδίων και παίρνουμε διάφορες μετρήσεις σε κατάλληλες σφαιρικές γωνίες παρατήρησης. Στόχος είναι να δημιουργήσουμε ένα σύστημα για τις άγνωστες παραμέτρους του προβλήματος. Αυτή η υπόθεση είναι ρεαλιστική σε αρκετές εφαρμογές, όπως, π.χ. σε εφαρμογές ιατρικής απεικόνισης, όπως είναι η ηλεκτροεγκεφαλογραφία και η μαγνητική τομογραφία, οι οποίες χρησιμοποιούν συχνότητες διέγερσης της τάξης του 10^{-7} [33].

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα του μακρινού πεδίου για την εξωτερική διέγερση μιας ομογενούς διηλεκτρικής σφαίρας και αντίστροφα προβλήματα που αφορούν την εύρεση των φυσικών παραμέτρων (μαγνητική διαπερατότητα και ηλεκτρική επιτρεπτότητα του σκεδαστή) και τον εντοπισμό της θέσης του δίπολου. Η μέτρηση του μακρινού πεδίου αντί των διατομών σκέδασης αναμένεται να είναι πιο απλή και αποτελεσματική, επειδή οι μετρήσεις των διατομών σκέδασης απαιτούν αρκετές μετρήσεις μακρινού πεδίου σε ένα τμήμα της μοναδιαίας σφαίρας, το οποίο μπορεί να προκαλέσει πρόσθετα σφάλματα στο τελικό αποτέλεσμα [16].

4.1 Υπόθεση χαμηλών συχνοτήτων - Ασυμπτωτικά αναπτύγματα

Κάνοντας την υπόθεση χαμηλών συχνοτήτων $k_0 a_1 \ll 1$, θεωρώντας δηλαδή ότι η ακτίνα του σκεδαστή είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος του πεδίου που παράγει το δίπολο, λαμβάνουμε ασυμπτωτικά αναπτύγματα για το μακρινό πεδίο.

Ορίζοντας τις αδιάστατες παραμέτρους

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}, \quad \mu_r = \frac{\mu_1}{\mu_0}, \quad \kappa = ik_0 a_1, \quad \tau_0 = \frac{a_1}{r_0}$$

προκύπτει από την [16] το ασυμπτωτικό ανάπτυγμα μακρινού πεδίου από την εξωτερική διέγερση ενός ομογενούς διηλεκτρικού σφαιρικού σκεδαστή, καθώς το $\kappa \rightarrow 0$:

$$g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0, \mathbf{p}) = A\tau_0^2 [(\tilde{g}_{\theta,0}(\theta, \varphi) + \tilde{g}_{\theta,1}(\theta, \varphi)\kappa)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (\tilde{g}_{\varphi,0}(\theta, \varphi) + \tilde{g}_{\varphi,1}(\theta, \varphi)\kappa)\hat{\boldsymbol{\varphi}}] + O(\kappa^2)$$

όπου $A = -\frac{\omega\mu_0 k_0}{4\pi}$ και

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\theta,0}(\theta, \varphi) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x \left[\cos \theta \sin \varphi \sin^2 \theta_0 \sin(2\varphi_0) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \cos \theta \cos \varphi (3 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - 1) - \sin \theta \sin(2\theta_0) \cos \varphi_0 \right] \right. \\ \left. + p_y \left[\cos \theta \cos \varphi \sin^2 \theta_0 \sin(2\varphi_0) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} \cos \theta \sin \varphi (2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0 - 1) - \sin \theta \sin(2\theta_0) \sin \varphi_0 \right] \right. \\ \left. + p_z \cos \theta \left[\frac{2}{3} (3 \cos^2 \theta_0 - 1) + \cos(\varphi - \varphi_0) \sin(2\theta_0) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\theta,1}(\theta, \varphi) = -\chi_1 (p_x \cos \varphi \cos \theta_0 + p_y \sin \varphi \cos \theta_0 - p_z \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0)$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\varphi,0}(\theta, \varphi) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x \left[\cos \varphi \sin^2 \theta_0 \sin(2\varphi_0) - \frac{2}{3} \sin \varphi (3 \sin^2 \theta_0 \cos^2 \varphi_0 - 1) \right] \right. \\ \left. + p_y \left[\frac{2}{3} \cos \varphi (\sin^2 \varphi_0 (1 + \sin^2 \theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0) - 1) \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \varphi \sin^2 \theta_0 \sin(2\varphi_0) \right] + p_z \sin(\varphi_0 - \varphi) \sin(2\theta_0) \right\}\end{aligned}$$

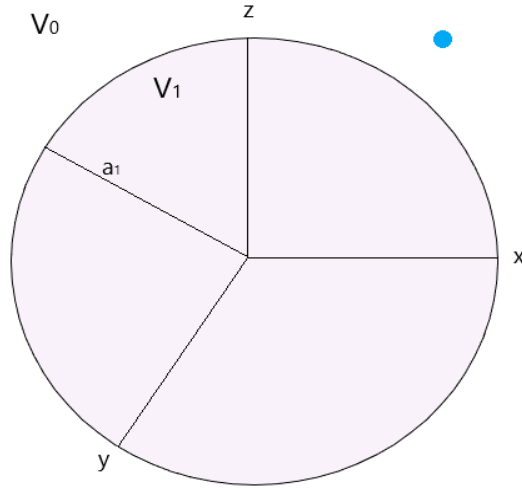
$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\varphi,1}(\theta, \varphi) = \chi_1 [p_x (\cos \theta \sin \varphi \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \sin \varphi_0) \\ - p_y (\sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \cos \theta \cos \varphi \cos \theta_0) \\ + p_z \sin \theta_0 (\cos \theta \cos \varphi \sin \varphi_0 - \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi_0)]\end{aligned}$$

και

$$\chi_0 = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{2(\varepsilon_r + 2)}, \quad \chi_1 = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}.$$

4.2 Αντίστροφο πρόβλημα εξωτερικής διέγερσης ομογενούς διηλεκτρικής σφαίρας

Θεωρούμε μια ομογενή διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας a_1 με φυσικές σταθερές k_1, ε_1 και μ_1 . Το εξωτερικό του σκεδαστή είναι επίσης ομογενές μέσο με φυσικές σταθερές k_0, ε_0 και μ_0 . Θεωρούμε γνωστή την ακτίνα του σκεδαστή a_1 και άγνωστες τις φυσικές του παραμέτρους k_1, ε_1 και μ_1 . Για τον προσδιορισμό αυτών των παραμέτρων διεγείρουμε τον σκεδαστή εξωτερικά από ένα ηλεκτρικό δίπολο το οποίο τοποθετούμε σε θέσεις της επιλογής μας και παίρνουμε μετρήσεις για το μακρινό πεδίο.



Εικόνα 7: Προσδιορισμός φυσικών παραμέτρων ομογενούς διηλεκτρικής σφαίρας από εξωτερική διέγερση ηλεκτρικού δίπολου

Παίρνουμε μετρήσεις του μακρινού πεδίου από τη γωνία παρατήρησης $(\theta, \varphi) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ για ένα εξωτερικό δίπολο $p = (1, 0, 0)$ το οποίο βρίσκεται στη θέση $(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \left(b, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $b > a_1$ και προκύπτει:

$$\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \tilde{g}_{\theta,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$$

$$\text{και } \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \chi_1.$$

Αντικαθιστώντας στο μακρινό πεδίο έχουμε:

$$\tilde{m}_1 = A\tau_0^2 \chi_1 \kappa = Aik_0 \hat{\varphi} \frac{a_1^3}{b^2} \chi_1.$$

Ορίζοντας $\tilde{m}'_1 = \frac{\tilde{m}_1}{Ak_0}$ και αντικαθιστώντας το χ_1 προκύπτει η μαγνητική διαπερατότητα:

$$\tilde{m}'_1 = \frac{a_1^3}{b^2} \chi_1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{m}'_1 b^2}{a_1^3} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \Leftrightarrow$$

$$(\mu_r + 2)\tilde{m}'_1 b^2 = (\mu_r - 1)a_1^3 \Leftrightarrow$$

$$\mu_r(\tilde{m}'_1 b^2 - a_1^3) = -a_1^3 - 2\tilde{m}'_1 b^2 \Leftrightarrow$$

$$\mu_r = \frac{a_1^3 + 2\tilde{m}'_1 b^2}{a_1^3 - \tilde{m}'_1 b^2}.$$

Ακόμη, παίρνουμε μετρήσεις του μακρινού πεδίου από τη γωνία παρατήρησης $(\theta, \varphi) = (0, \frac{\pi}{2})$ για ένα εξωτερικό δίπολο $p = (1,0,0)$ το οποίο βρίσκεται στη θέση $(r_0, \theta_0, \varphi_0) = (b, \frac{\pi}{2}, 0)$, $b > a_1$ και προκύπτει:

$$\tilde{g}_{\theta,0}(0, \frac{\pi}{2}) = \tilde{g}_{\theta,1}(0, \frac{\pi}{2}) = \tilde{g}_{\varphi,1}(0, \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\text{και } \tilde{g}_{\varphi,0}(0, \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3} \tau_0 \chi_0.$$

Αντικαθιστώντας στο μακρινό πεδίο έχουμε:

$$\tilde{m}_2 = A \tau_0^2 \frac{4}{3} \tau_0 \chi_0 = \frac{4}{3} A \frac{a_1^3}{b^3} \chi_0.$$

Ορίζοντας $\tilde{m}'_2 = \frac{3\tilde{m}_2}{4A}$ και αντικαθιστώντας το χ_0 προκύπτει η ηλεκτρική διαπερατότητα:

$$\tilde{m}'_2 = \frac{a_1^3}{b^3} \chi_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{m}'_2 b^3}{a_1^3} = \frac{3(\varepsilon_r - 1)}{2(\varepsilon_r + 2)} \Leftrightarrow$$

$$2(\varepsilon_r + 2)\tilde{m}'_2 b^3 = 3(\varepsilon_r - 1)a_1^3 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon_r(2\tilde{m}'_2 b^3 - 3a_1^3) = -3a_1^3 - 4\tilde{m}'_2 b^3 \Leftrightarrow$$

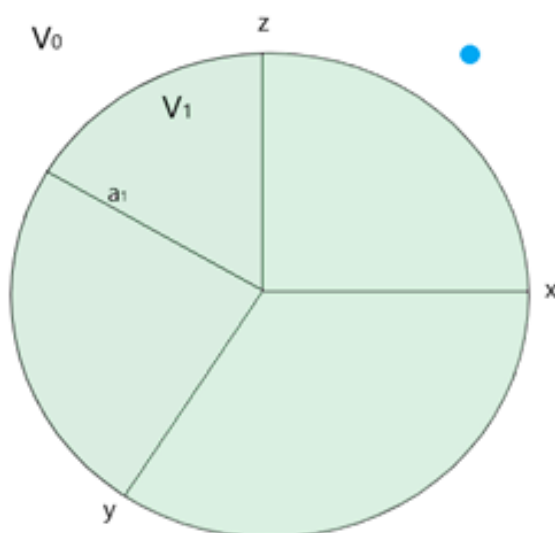
$$\varepsilon_r = \frac{3a_1^3 + 4\tilde{m}'_2 b^3}{3a_1^3 - 2\tilde{m}'_2 b^3}.$$

Τέλος για τον κυματάριθμο k_1 ισχύει:

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 \omega^2} = \sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \omega^2}.$$

4.3 Αντίστροφο πρόβλημα εύρεσης θέσης εξωτερικού δίπολου που διεγείρει ομογενή διηλεκτρική σφαίρα

Θεωρούμε μια ομογενή διηλεκτρική σφαίρα ακτίνας a_1 και φυσικές σταθερές k_1, ϵ_1 και μ_1 , η οποία διεγείρεται εξωτερικά από ένα ηλεκτρικό δίπολο σε αυθαίρετη θέση. Το εξωτερικό του σκεδαστή είναι επίσης ομογενές υλικό με φυσικές σταθερές k_0, ϵ_0 και μ_0 . Θεωρούμε γνωστή την ακτίνα του σκεδαστή a_1 και τις φυσικές του παραμέτρους k_1, ϵ_1 και μ_1 καθώς και τις παραμέτρους του εξωτερικού χώρου. Ο σκεδαστής διεγείρεται εξωτερικά από άγνωστο ηλεκτρικό δίπολο και επιδιώκεται ο προσδιορισμός της θέσης και της πόλωσης του δίπολου.



Εικόνα 8: Προσδιορισμός θέση εξωτερικού δίπολου που διεγείρει ομογενή διηλεκτρική σφαίρα

Για τον προσδιορισμό των ζητούμενων παραμέτρων $(\tau_0, \theta_0, \varphi_0, p_x, p_y, p_z)$ για την εύρεση της θέσης του δίπολου παίρνουμε μετρήσεις του μακρινού πεδίου από διάφορες γωνίες παρατήρησης. Συγκεκριμένα απομονώνουμε τους όρους των τάξεων κ^0 και κ^1 των θ και φ -συνιστωστών στα ασυπτωτικά αναπτύγματα του μακρινού πεδίου $g(\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0, \mathbf{p})$ για τις γωνίες παρατήρησης

$$(\theta, \varphi) = (0, 0), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right), \left(\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right)$$

και προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα:

$$\tilde{g}_{\theta,0}(0, 0) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x \left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) + p_y (2\beta_0 \gamma_0) + p_z \left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3} + 2\alpha_0 \gamma_0 \right) \right\}$$

$$\tilde{g}_{\theta,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x (2\beta_0 \gamma_0) + p_y \left(\frac{2}{3} (2\beta_0^2 - 1) \right) + p_z \left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3} + 2\alpha_0 \beta_0 \right) \right\}$$

$$\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \tau_0 \chi_0 \{ p_x (-2\alpha_0 \gamma_0) + p_y (-2\alpha_0 \beta_0) \}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{6}, 0\right) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x \left(\sqrt{3} \gamma_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \alpha_0 \gamma_0 \right) + p_y (\sqrt{3} \beta_0 \gamma_0 - \alpha_0 \beta_0) \right. \\ \left. + p_z \left(\sqrt{3} \alpha_0^2 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \alpha_0 \gamma_0 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\theta,0}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x \left[\left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) + \alpha_0 \gamma_0 \right] + p_y [\alpha_0 \beta_0] \right. \\ \left. + p_z \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left[2\alpha_0^2 - \frac{2}{3} + 2\alpha_0 \gamma_0 \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\theta,1}(0, 0) = \tilde{g}_{\theta,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -\chi_1 (p_x \alpha_0 - p_z \gamma_0)$$

$$\tilde{g}_{\theta,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \tilde{g}_{\theta,1}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0) = -\chi_1 (p_y \alpha_0 - p_z \beta_0)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\varphi,0}(0, 0) = \tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x (2\beta_0 \gamma_0) + p_y \left(\frac{2}{3} (\beta_0^2 - \beta_0 \gamma_0 - \alpha_0^2) \right) + p_z 2\alpha_0 \beta_0 \right\} \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\varphi,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \tau_0 \chi_0 \left\{ -p_x \left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) - p_y 2\beta_0 \gamma_0 - p_z 2\alpha_0 \gamma_0 \right\}$$

$$\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \chi_1 \{ p_x \alpha_0 \}$$

$$\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \chi_1 \{ p_x \beta_0 - p_y \gamma_0 \}$$

$$\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \chi_1 \{ p_x \beta_0 - p_y \gamma_0 + p_z \gamma_0 \}$$

$$\tilde{g}_{\varphi,1}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) = \chi_1 \left[p_x \left(-\frac{1}{2} \beta_0 \right) - p_y \left(-\frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_0 \right) + p_z \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_0 \right]$$

$$\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right) = \chi_1 \left[p_x \left(\frac{1}{2} \beta_0 \right) - p_y \left(-\frac{1}{2} \gamma_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_0 \right) - p_z \frac{\sqrt{3}}{2} \beta_0 \right]$$

όπου

$$\alpha_0 = \cos \theta_0$$

$$\beta_0 = \sin \varphi_0 \sin \theta_0$$

$$\gamma_0 = \sin \theta_0 \cos \varphi_0.$$

Μπορούμε να απομονώσουμε τις μετρήσεις μακρινού πεδίου διαφορετικών τάξεων της παραμέτρου κ μέσα από την επιλογή διαφορετικών συχνοτήτων της περιοχής χαμηλών συχνοτήτων με την εφαρμογή τεχνικών βελτιστοποίησης ελαχίστων τετραγώνων [38]. Επιπρόσθετα, μπορούμε να λαμβάνουμε διαφορετικές μετρήσεις από τις θ - και φ -συνιστώσες του μακρινού πεδίου χρησιμοποιώντας διάφορες κεραιές λήψης μακρινού πεδίου κατάλληλα πολωμένες προς τις κατευθύνσεις θ και φ . Με αυτόν τον τρόπο απορρίπτονται τα σήματα εισόδου από τις συνιστώσες διαφορετικών διευθύνσεων.

Επιλέγουμε τις εξής μετρήσεις :

$$m_1 = \{p_x \alpha_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1}$$

$$m_2 = \{p_z \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1}$$

$$m_3 = \frac{\tilde{g}_{\theta,0}(0, 0) + \tilde{g}_{\varphi,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_0} = \tau_0 p_z \left(2 \alpha_0^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$m_4 = \{p_y \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) + \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right)}{\chi_1}$$

$$m_5 = \{p_x \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} + m_4$$

Ακόμη, θεωρώντας ότι α_0, β_0 και $\gamma_0 \neq 0$ καθώς και τα p_x, p_y και p_z προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\gamma_0 \tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0) = -\chi_1 \gamma_0 (p_y \alpha_0 - p_z \beta_0) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 \tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0) = -\chi_1 (m_4 \alpha_0 - m_2 \beta_0) \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = -m_6 (m_4 \alpha_0 - m_2 \beta_0)$$

$$\text{όπου } m_6 = \frac{\chi_1}{\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0)}$$

και πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση με p_x παίρνουμε:

$$p_x \gamma_0 = -m_6 p_x (m_4 \alpha_0 - m_2 \beta_0) \Leftrightarrow$$

$$m_7 = \{p_x \gamma_0\} = -m_6 (m_4 m_1 - m_2 m_5).$$

Επομένως, υψώνοντας τις m_1, m_5 και m_7 και αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$p_x^2 (\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2) = m_1^2 + m_5^2 + m_7^2 = m_8.$$

Όμως για τα α_0, β_0 και γ_0 ισχύει ότι:

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1.$$

Οπότε, η ανωτέρω σχέση γίνεται:

$$p_x^2 = m_8 \Leftrightarrow$$

$$p_x = \pm \sqrt{m_8} = m_9.$$

Αντικαθιστώντας στις m_1, m_5, m_7, m_2, m_4 και m_3 υπολογίζουμε τα $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_z, p_y$ και τ_0 αντίστοιχα. Η εκλογή του προσήμου του p_x και αντίστοιχα των υπόλοιπων παραμέτρων γίνεται με βάση τις μετρήσεις m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 και m_7 .

Επιπλέον, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$1. \gamma_0 = 0$$

$$i. \sin \theta_0 = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = 0$$

Τότε $\beta_0 = 0$ και $\alpha_0 = 1$. Όποτε

$$p_x = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1} = m_{10}$$

$$p_y = -\frac{2\sqrt{3}\tilde{g}_{\varphi,1}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)}{3\chi_1} = m_{11}$$

$$\tau_0 = \frac{3\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2m_{10}\chi_0} = m_{12}$$

$$p_z = \frac{3}{4} \left(\frac{\tilde{g}_{\theta,0}(0,0)}{\chi_0 m_{12}} + \frac{2}{3} m_{10} \right) = m_{13}.$$

ii. $\cos \varphi_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

Τότε προκύπτουν οι σχέσεις

$$m_1 = \{p_x \alpha_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1}$$

$$m_{14} = \{p_x \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1}$$

$$m_{15} = \{\tau_0 p_x\} = \frac{3\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2\chi_0}.$$

Όμως σε αυτή την περίπτωση ($\gamma_0 = 0$) ισχύει $a_0^2 + \beta_0^2 = 1$ άρα υψώνοντας τις δύο σχέσεις στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$p_x^2(a_0^2 + \beta_0^2) = m_1^2 + m_{14}^2 \Leftrightarrow p_x^2 = m_1^2 + m_{14}^2 \Leftrightarrow$$

$$p_x = \pm \sqrt{m_1^2 + m_{14}^2} = \pm m_{16}.$$

Για $p_x = m_{16}$ έχουμε:

$$\tau_0 = \frac{3\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2\chi_0 m_{16}} = m_{17}$$

$$\alpha_0 = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1 m_{16}} = m_{18}$$

$$\beta_0 = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1 m_{16}} = m_{19}.$$

Ακόμη, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\tau_0 \{p_y(\alpha_0 \beta_0)\} = -\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2\chi_0} \Leftrightarrow$$

$$p_y = -\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2\chi_0 m_{17} m_{18} m_{19}} = m_{20}$$

$$p_z = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0)}{\chi_1 m_{19}} - \frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2\chi_0 m_{17} m_{19}^2} = m_{21}.$$

Αντίστοιχες εκφράσεις αλλά με αντίθετα πρόσημα προκύπτουν για $p_x = -m_{16}$. Η εκλογή του προσήμου γίνεται μέσω της m_{15} .

Στην περίπτωση που και το $p_x = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
2m_3\tau_0 p_z \beta_0^2 &= \tau_0 p_z \left(2 - \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \\
m_3 \beta_0^2 &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\
\beta_0^2 &= \frac{2}{3m_3} \Leftrightarrow \\
\beta_0 &= \pm \sqrt{\frac{2}{3m_3}}.
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε θετική ρίζα γιατί βρισκόμαστε στο 1^ο-2^ο τεταρτημόριο.

Άρα

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{2}{3m_3}} = m_{22}.$$

Οπότε, για το α_0 έχουμε

$$\alpha_0 = \pm \sqrt{1 - m_{22}^2} = m_{23}.$$

Η εκλογή του προσήμου γίνεται με βάσει τις μετρήσεις. Ακόμη, ισχύει

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-2\chi_0 m_{23} m_{22}} &= \{\tau_0 p_y\} = m_{24} \\
\frac{m_3}{2m_{23}^2 - \frac{2}{3}} &= \{\tau_0 p_z\} = m_{25}
\end{aligned}$$

και πολλαπλασιάζοντας την $\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0) = -\chi_1(p_y \alpha_0 - p_z \beta_0)$ με τ_0 προκύπτει

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0)}{-\chi_1} \tau_0 &= m_{24} m_{23} - m_{25} m_{22} \Leftrightarrow \\
\tau_0 &= \frac{m_{24} m_{23} - m_{25} m_{22}}{m_{26}} = m_{27}
\end{aligned}$$

όπου $m_{26} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0)}{-\chi_1}$. Έπειτα αντικαθιστώντας στις m_{24} και m_{25}

προκύπτουν τα p_y και p_z αντίστοιχα.

Στην περίπτωση που $\gamma_0 = \alpha_0 = 0$ τότε υποχρεωτικά $\beta_0 = 1$ άρα θα προέκυπταν οι εξής εξισώσεις:

$$p_x = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} = m_{28}$$

$$p_z = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0)}{\chi_1} = m_{29}$$

$$\tau_0 = -\frac{3\tilde{g}_{\theta,0}(0,0)}{2\chi_0} = m_{30}$$

$$p_y = \frac{3\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{2\chi_0 m_{30}} = m_{31}.$$

iii. $\sin \theta_0 = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = 0$ και $\cos \varphi_0 = 0 \Leftrightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ όμοια με την περίπτωση i.

2. $p_x = 0$

Τότε ισχύουν:

$$\{p_y \gamma_0\} = -\frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} = m_{32}$$

$$\{p_z \gamma_0\} = -\frac{\tilde{g}_{\theta,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} = m_{33}$$

$$\frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-2\chi_0} = \tau_0 \{m_{32}\beta_0 + m_{33}\alpha_0\} = m_{34}$$

$$\tau_0 p_z \left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3}\right) = m_3$$

$$\tau_0 \{p_y(\alpha_0\beta_0)\} = -\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{2\chi_0} = m_{35}.$$

Από την $\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0) = -\chi_1(p_y\alpha_0 - p_z\beta_0)$ πολλαπλασιάζοντας με γ_0 παίρνουμε:

$$\gamma_0 = m_{36}(m_{32}\alpha_0 - m_{33}\beta_0)$$

$$\text{όπου } m_{36} = \frac{-\chi_1}{\tilde{g}_{\varphi,1}(0,0)}.$$

Ακόμη, προκύπτει από την

$$\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \tau_0 \chi_0 \{-p_y 2\beta_0 \gamma_0 - p_z 2\alpha_0 \gamma_0\} \Leftrightarrow$$

$$\tau_0 \{p_y 2\beta_0 \gamma_0 + p_z 2\alpha_0 \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-\chi_0} = m_{37}$$

και πολλαπλασιάζοντας με α_0 γίνεται:

$$m_{35}\gamma_0 + \alpha_0^2 m_{33} = \alpha_0 m_{37} \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = \frac{\alpha_0 m_{37} - \alpha_0^2 m_{33}}{m_{35}}.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τα γ_0 και β_0 στην $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$ προκύπτει το $\pm\alpha_0$. Έπειτα αντικαθιστώντας προκύπτουν και οι υπόλοιπες παράμετροι $\gamma_0, \beta_0, p_y, p_z$. Η εκλογή των προσήμων γίνεται με βάση τις μετρήσεις.

3. $\alpha_0 = 0$

Τότε ισχύουν:

$$\{p_z \gamma_0\} = -\frac{\tilde{g}_{\theta,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} = m_{33}$$

$$\{p_z \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0)}{\chi_1} = m_{38}$$

$$\{\tau_0 p_z\} = -\frac{3\left(\tilde{g}_{\theta,0}(0, 0) + \tilde{g}_{\varphi,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)}{2\chi_0} = m_{39}.$$

Εργαζόμενοι αντίστοιχα με την περίπτωση 1ii προκύπτει:

$$p_z = \pm\sqrt{m_{33}^2 + m_{38}^2} = \pm m_{40}.$$

Για $p_z = m_{40}$ έχουμε:

$$\tau_0 = \frac{m_{39}}{m_{40}} = m_{41}$$

$$\gamma_0 = \frac{m_{33}}{m_{40}} = m_{42}$$

$$\beta_0 = \frac{m_{38}}{m_{40}} = m_{43}.$$

Ακόμη, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{m_{41}\chi_0} + \frac{2}{3}m_{40} = \left\{p_y \left(\frac{2}{3}(m_{43}^2 - 1 + m_{43}m_{42})\right)\right\} \Leftrightarrow$$

$$p_y = \frac{\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{m_{41}\chi_0} + \frac{2}{3}m_{40}}{\frac{2}{3}(m_{43}^2 - 1 + m_{43}m_{42})} \Leftrightarrow$$

$$p_y = \frac{\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) - \tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{m_{41}\chi_0} + \frac{2}{3}m_{40}}{\frac{2}{3}m_{42}(m_{43} - m_{42})}$$

$$p_x = \frac{\frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)}{m_{41}\chi_0} + \frac{\sqrt{3}}{3}m_{40}}{2\left(m_{42}^2 - \frac{1}{3}\right)}.$$

Αν $\gamma_0 = m_{42} = 0$ έχει ελεγχθεί προηγουμένως. Αν $\gamma_0 = m_{42} = \beta_0 = m_{43}$ τότε από $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$ προκύπτει $\gamma_0 = \beta_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Οπότε, από m_{33} προκύπτει το p_z , από m_{39} το τ_0 και τα p_x και p_y προκύπτουν αντίστοιχα από τις $\tilde{g}_{\theta,0}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ και $\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ αντικαθιστώντας τα προηγούμενα $(\gamma_0, \beta_0, p_z, \tau_0)$.

Αν $\gamma_0^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \gamma_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\beta_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ και εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

Αντίστοιχες εκφράσεις αλλά με αντίθετα πρόσημα προκύπτουν για $p_z = -m_{40}$. Επιλέγουμε το πρόσημο p_z από την m_{39} .

Αν $p_z = 0$ τότε ισχύουν:

$$\begin{aligned} m_4 &= \{p_y \gamma_0\} \\ m_5 &= \{p_x \beta_0\} \\ \frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)}{\chi_0} &= \tau_0 \left\{ p_x \left[\left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) \right] \right\} = m_{44} \\ \frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + \tilde{g}_{\theta,0}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)}{\chi_0} &= \tau_0 \{-p_y 2\beta_0 \gamma_0\} = m_{45}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη m_4 με $-2\beta_0$ και αντικαθιστώντας στη m_{45} προκύπτει:

$$m_{45} = -2\beta_0 m_4 \tau_0.$$

Έπειτα πολλαπλασιάζοντας τη m_5 με τ_0 προκύπτει:

$$\tau_0 = p_x \frac{m_{45}}{-2m_4 m_5}$$

και αντικαθιστώντας στη m_{44} παίρνουμε:

$$\tau_0^2 \left\{ \frac{-2m_4 m_5}{m_{45}} \left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) \right\} = m_{44}.$$

Τελικά από τις

$$\begin{aligned} m_{45} &= -2\beta_0 m_4 \tau_0. \\ \tau_0^2 \left\{ \frac{-2m_4 m_5}{m_{45}} \left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) \right\} &= m_{44} \end{aligned}$$

$$\beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$$

προκύπτει το τ_0^2 και έπειτα αντικαθιστώντας και οι υπόλοιπες παράμετροι.

4. $p_y = 0$

Τότε ισχύουν:

$$m_1 = \{p_x \alpha_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1}$$

$$m_{14} = \{p_x \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1}$$

$$m_2 = \{p_z \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1}$$

$$m_{46} = \{p_z \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0)}{\chi_1}$$

$$m_{47} = \{\tau_0 \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-2m_1 \chi_0}$$

$$m_{48} = \{\tau_0(\gamma_0 + \alpha_0)\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{2\chi_0}$$

$$m_{49} = \{\tau_0 \alpha_0\} = m_{48} - m_{47}$$

$$\frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-\chi_0} = \left\{ 2p_x \gamma_0 m_{47} - \frac{2}{3} \tau_0 p_x + m_{49} m_2 \right\}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη

$$\frac{m_{47}}{m_{49}} = \frac{\gamma_0}{\alpha_0}$$

και κάνοντας χιαστί και πολλαπλασιάζοντας με p_x προκύπτει:

$$\{p_x \gamma_0\} = \frac{m_{47} m_1}{m_{49}} = m_{50}.$$

Υψώνοντας τα m_{50}, m_{20} και m_1 στο τετράγωνο και αθροίζοντας κατά μέλη προκύπτει το p_x^2 ($p_x = \pm m_{51}$) και έπειτα αντικαθιστώντας στις σχέσεις προκύπτουν και οι υπόλοιπες παράμετροι. Η εκλογή των προσήμων γίνεται με βάση τις μετρήσεις.

Αν και $\alpha_0 = 0$ υψώνοντας στο τετράγωνο τις m_2 και m_{46} και αθροίζοντας κατά μέλη προκύπτει το p_z^2 ($p_z = \pm m_{51}$) και έπειτα αντικαθιστώντας στις

σχέσεις προκύπτουν και οι υπόλοιπες παράμετροι. Η εκλογή των προσήμων γίνεται με βάση τις μετρήσεις.

5. $p_z = 0$

Τότε ισχύουν:

$$m_1 = \{p_x \alpha_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1}$$

$$m_5 = \{p_x \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} + m_4$$

$$m_{52} = \{p_y \alpha_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}(0, 0)}{-\chi_1}$$

$$m_4 = \{p_y \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) + \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right)}{\chi_1}$$

$$m_{53} = \tau_0 \{m_1 \gamma_0 + m_{52} \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-2\chi_0}$$

$$m_{54} = \tau_0 \left\{ p_x \left[\left(2\gamma_0^2 - \frac{2}{3} \right) \right] \right\} = \frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) - \frac{1}{2}\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_0}$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω σχέση στο $\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ προκύπτει:

$$\frac{\frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{-\chi_0} - m_{54}}{2m_4} = \{\tau_0 \beta_0\} = m_{55}$$

και αντικαθιστώντας στην m_{53} προκύπτει η

$$\{\tau_0 \gamma_0\} = \frac{m_{53} - m_{52} m_{55}}{m_1} = m_{56}$$

Ακόμη, από τις:

$$m_{54} + 2m_{55}m_5 = 2\tau_0 p_x \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 2\tau_0 p_x \alpha_0^2 = 2\tau_0 p_x \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 2\tau_0 \alpha_0 m_1$$

$$= m_{57}$$

$$m_{55}m_1 = \{\tau_0 \beta_0 p_x \alpha_0\} = \tau_0 \alpha_0 m_5 \Leftrightarrow$$

$$\{\tau_0 \alpha_0\} = \frac{m_{55}m_1}{m_5} = m_{58}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και αθροίζοντας κατά μέλη τις m_{55} , m_{56} και m_{58} προκύπτει το τ_0^2 και έπειτα αντικαθιστώντας προκύπτουν και οι υπόλοιπες παράμετροι.

6. $p_y \alpha_0 = p_z \beta_0$

$$\begin{aligned}
m_1 &= \{p_x \alpha_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_1} \\
m_2 &= \{p_z \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} \\
m_3 &= \frac{\tilde{g}_{\theta,0}(0, 0) + \tilde{g}_{\varphi,0}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_0} = \tau_0 p_z \left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3}\right) \\
m_4 &= \{p_y \gamma_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) + \tilde{g}_{\varphi,1}\left(\pi - \frac{\pi}{6}, 0\right)}{\chi_1} \\
m_5 &= \{p_x \beta_0\} = \frac{\tilde{g}_{\varphi,1}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_1} + m_4.
\end{aligned}$$

Από την αρχική συνθήκη και τις m_2 και m_4 προκύπτει:

$$\alpha_0 m_4 = \beta_0 m_2.$$

Επιπλέον, προκύπτει από τις m_1 και m_5 ότι

$$p_y m_1 = p_z m_5.$$

Ακόμη, έχουμε:

$$\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \tau_0 \chi_0 \left\{ p_x (2\beta_0 \gamma_0) + p_y \left(\frac{2}{3} (\beta_0^2 - \beta_0 \gamma_0) \right) \right\}$$

και πολλαπλασιάζοντας τις $\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με α_0 και β_0 αντίστοιχα και προθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{g}_{\varphi,0}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)}{\chi_0} \alpha_0 + \frac{\tilde{g}_{\theta,0}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{\chi_0} \beta_0 &= \tau_0 \left\{ p_y \alpha_0 \left(-\frac{4}{3} \beta_0^2 - \frac{2}{3} \beta_0 \gamma_0 \right) \right\} \Leftrightarrow \\
m_{60} \alpha_0 + m_{61} \beta_0 &= \tau_0 p_y \left\{ \alpha_0 \left(-\frac{4}{3} \beta_0^2 - \frac{2}{3} \beta_0 \gamma_0 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις

$$\alpha_0 m_4 = \beta_0 m_2$$

$$p_y m_1 = p_z m_5$$

και αντικαθιστώντας στη m_3 προκύπτει:

$$\begin{aligned}
m_{60} \alpha_0 + m_{61} \frac{\alpha_0 m_4}{m_2} &= \frac{m_3}{\left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3}\right)} \frac{m_5}{m_1} \left\{ \alpha_0 \left(-\frac{4}{3} \left(\frac{\alpha_0 m_4}{m_2} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{\alpha_0 m_4}{m_2} \gamma_0 \right) \right\} \Leftrightarrow \\
\alpha_0 \frac{(m_{60} m_2 + m_{61} m_4)}{m_2} &= \frac{m_3 m_5}{\left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3}\right) m_1} \left\{ \alpha_0 \left(-\frac{4}{3} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^2 \alpha_0^2 - \frac{2}{3} \frac{\alpha_0 m_4}{m_2} \gamma_0 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\frac{(m_{60}m_2 + m_{61}m_4) \left(2\alpha_0^2 - \frac{2}{3}\right) m_1}{m_2m_3m_5} + \frac{4}{3} \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2 \alpha_0^2 = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_0 m_4}{m_2} \gamma_0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_0^2 \left(\frac{2m_1(m_{60}m_2 + m_{61}m_4)}{m_2m_3m_5} + \frac{4}{3} \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2 \right) - \frac{2m_1(m_{60}m_2 + m_{61}m_4)}{3m_2m_3m_5} \\ = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_0 m_4}{m_2} \gamma_0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3m_2}{2m_4\alpha_0} \left[\frac{2m_1(m_{60}m_2 + m_{61}m_4)}{3m_2m_3m_5} \right] \\ + \alpha_0 \left[\frac{-3m_2}{2m_4} \left(\frac{2m_1(m_{60}m_2 + m_{61}m_4)}{m_2m_3m_5} + \frac{4}{3} \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2 \right) \right] = \gamma_0 \Leftrightarrow$$

$$\gamma_0 = \frac{m_{62}}{\alpha_0} + m_{63}\alpha_0$$

όπου

$$m_{62} = \frac{3m_2}{2m_4} \left[\frac{2m_1(m_{60}m_2 + m_{61}m_4)}{3m_2m_3m_5} \right] \\ m_{63} = \frac{-3m_2}{2m_4} \left(\frac{2m_1(m_{60}m_2 + m_{61}m_4)}{m_2m_3m_5} + \frac{4}{3} \left(\frac{m_4}{m_2}\right)^2 \right).$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην $a_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$ τα γ_0 και β_0 προκύπτει:

$$a_0^2 + \left(\frac{\alpha_0 m_4}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_{62}}{\alpha_0} + m_{63}\alpha_0\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \\ a_0^2 \left(1 + \frac{m_4^2}{m_2^2}\right) + \frac{m_{62}^2}{a_0^2} + 2m_{62}m_{63} + m_{63}^2 a_0^2 = 1 \Leftrightarrow \\ a_0^2 \left(1 + \frac{m_4^2}{m_2^2} + m_{63}^2\right) + \frac{m_{62}^2}{a_0^2} = 1 - 2m_{62}m_{63}$$

Πολλαπλασιάζοντας με a_0^2 προκύπτει η εξίσωση:

$$a_0^4 m_{64} + a_0^2 m_{65} + m_{62}^2 = 0$$

όπου $m_{64} = 1 + \frac{m_4^2}{m_2^2} + m_{63}^2$ και $m_{65} = 2m_{62}m_{63} - 1$

η οποία έχει λύσεις:

$$a_0^2 = \frac{-m_{65} \pm \sqrt{m_{65}^2 - 4m_{64}m_{62}^2}}{2m_{64}}.$$

Τελικά για το α_0 προκύπτει:

$$\alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{-m_{65} + \sqrt{m_{65}^2 - 4m_{64}m_{62}^2}}{2m_{64}}}.$$

Η εκλογή του προσήμου γίνεται με βάση τις μετρήσεις m_1, m_2, m_3, m_4 και m_5 , και έπειτα αντικαθιστώντας προκύπτουν και οι υπόλοιπες παράμετροι.

Στην περίπτωση που $2\alpha_0^2 - \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, προκύπτουν αντικαθιστώντας και οι υπόλοιπες παράμετροι.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκαν βασικές αρχές της θεωρίας ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης και επιλύθηκαν ευθέα και αντίστροφα προβλήματα. Ειδικότερα παρουσιάστηκαν θεωρήματα σκέδασης και αποδείξεις που αφορούν τη διέγερση πολυστρωματικού σκεδαστή από ένα και από περισσότερα (N το πλήθος) δίπολα. Στη συνέχεια έγινε η παρουσίαση του ευθέως προβλήματος ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης μιας πολυστρωματικής σφαίρας από N δίπολα και επιλύθηκαν δύο ευθέα προβλήματα διέγερσης κάνοντας χρήση της μεθοδολογίας που αναφέρθηκε στη γενική περίπτωση των N δίπολων. Έπειτα, κάνοντας τη μετάβαση στη ζώνη χαμηλών συχνοτήτων και χρησιμοποιώντας τεχνικές ασυμπτωτικής ανάλυσης επιλύθηκαν αναλυτικά δύο αντίστροφα προβλήματα που αφορούν στην εύρεση των φυσικών παραμέτρων ενός σκεδαστή και στον εντοπισμό της θέσης και της πόλωσης ενός εξωτερικού δίπολου.

Μέσα από την βιβλιογραφική ανασκόπηση διαπιστώθηκε η πληθώρα εφαρμογών της ηλεκτρομαγνητικής διέγερσης ενός μέσου (σκεδαστή) τόσο στον τομέα της Βιοϊατρικής όσο και σε άλλους τομείς της σύγχρονης κοινωνίας και αναδείχθηκε η ανάγκη περαιτέρω έρευνας στον τομέα της σκέδασης.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί το έναυσμα για τη συνέχεια της έρευνάς μου στον τομέα της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης η οποία και θα περιλαμβάνει κυρίως αναλυτική επίλυση αντίστροφων προβλημάτων με στόχο την πρακτική αξιοποίησή τους σε διάφορους τομείς της καθημερινότητας. Συγκεκριμένα στους μελλοντικούς στόχους μελέτης μου ανήκουν:

- Η αξιοποίηση της αναλυτικής επίλυσης στη μελέτη αντίστροφων προβλημάτων με τεχνικές μηχανικής μάθησης και βελτιστοποίησης.
- Η μελέτη αντίστροφων προβλημάτων εξωτερικής διέγερσης από δύο ή περισσότερα δίπολα.
- Η μελέτη αντίστροφων προβλημάτων για διστρωματικό σκεδαστή.
- Η επίλυση αντίστροφων προβλημάτων με χρήση τεχνικών κοντινού πεδίου.

Βιβλιογραφία

- [1] C. Athanasiadis, P.A. Martin and I. G. Stratis, On the scattering of point generated electromagnetic waves by a perfectly conducting sphere, and related near-field inverse problems, ZAMM, 83 No. 2 (2003), 129-136.
- [2] X. Αθανασιάδης, Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές, Τόμος Β', Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2015.
- [3] P. Morse and H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, McGraw - Hill Book Company, Inc., 1953.
- [4] N. L. Tsitsas and C. Athanasiadis, On the scattering of spherical electromagnetic waves by a layered sphere, Q. Jl Mech. Appl. Math, 59 No. 1 (2005), 55-74.
- [5] N. Α. Τσίτσας, Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σημειακής πηγής από πολυστρωματική σφαίρα, Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, Αθήνα, 2005.
- [6] M. Abramowicz and I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Springer - Verlag, 1995.
- [7] N. L. Tsitsas, "A low-frequency electromagnetic near-field inverse problem for a spherical scatterer," Journal of Computational Mathematics, vol. 31, no. 5, pp. 439-448, 2013.
- [8] Γ. Δάσσιος, Ειδικά Θέματα Μαθηματικών, Τόμος Β2', Μαθηματικά Πρότυπα Ιατρικής Φυσικής, Πάτρα: Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2013.
- [9] F.M. Kahnert / Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer 79–80 (2003) 775 – 824.
- [10] G. Dassios and R. Kleinman, Low Frequency Scattering (Clarendon Press, Oxford, 2000).
- [11] D. Colton and R. Kress, Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, 2nd edition (Springer-Verlag, Berlin, 1998).
- [12] N. Tsitsas, "Direct and Inverse Dipole Electromagnetic Scattering by a Piecewise Homogeneous Sphere," Journal of Applied Mathematics and Mechanics, pp. 833-849, October 2009.

- [13] C. Athanasiadis, P. A. Martin, A. Spyropoulos and I. G. Stratis, "Scattering relations for point sources: Acoustic and electromagnetic waves," *Journal of Mathematical Physics*, pp. 5683-5697, 2002.
- [14] C. Athanasiadis and N. Tsitsas, "On the Interior Acoustis and Electromagnetic Excitation of a Layered Scatterer with a Resistive or Conductive Core," *Bulletin of the Greek Mathematical Society*, pp. 127-141, 2007.
- [15] C. Athanasiadis and N. Tsitsas, " Scattering Theorems for Acoustic Excitation of a Layered Obstacle by an Interior Point Source," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 118, no. 4, pp. 397-418, 2007.
- [16] P. Prokopiou and N. L. Tsitsas, "Electromagnetic Excitation of a Spherical Medium by an Arbitrary Dipole and Related Inverse Problems," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 140, pp. 438–464, 2018.
- [17] A. Kalogeropoulos, "Mathematical Analysis of Interactions between a Layered Medium and a Distribution of Point Sources," Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, June 2022.
- [18] G. Dassios, "On the hidden electromagnetic activity of the brain," *Mathematical Methods in Scattering Theory and Biomedical Engineering*, Proceedings of the Seventh International Workshop, World Scientific Publishing Co., pp. 297–303, 2006.
- [19] A. Kalogeropoulos and N. L. Tsitsas, "Excitation of a Layered Medium by N Sources: Scattering relations, Interaction Cross Sections and Physical Bounds," *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 79, no. 2, pp. 335-356, 2020.
- [20] C. Athanasiadis and N. L. Tsitsas, "Electromagnetic scattering theorems for interior dipole excitation of a layered obstacle," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 30, pp. 1467–1482, April 2007.
- [21] G. Dassios, "Electric and magnetic activity of the brain in spherical and ellipsoidal geometry", *Mathematical Modeling in Biomedical Imaging*, vol. 1983, pp. 133–202, Springer, 2009.

- [22] G. Dassios and A. S. Fokas, “Electro-magneto-encephalography for a three-shell model: dipoles and beyond for the spherical geometry”, *Inverse Problems*, vol. 25, no. 3, 035001, 2009.
- [23] P. Gas, “Optimization of multi-slot coaxial antennas for microwave thermotherapy based on the S11-parameter analysis”, *Biocybernetics and Biomedical Engineering*, vol. 37, pp. 78–93, 2017.
- [24] G. Dassios, A. S. Fokas and F. Kariotou, “On the non-uniqueness of the inverse magnetoencephalography problem,” *Inverse Problems*, vol. 21, no. 2, pp. L1–L5, Apr. 2005.
- [25] F. Liu and S. Crozier, “Electromagnetic fields inside a lossy, multilayered spherical head phantom excited by MRI coils: Models and methods,” *Phys. Med. Biol.*, vol. 49, pp. 1835–1851, 2004.
- [26] J. Kim and Y. Rahmat-Samii, “Implanted antennas inside a human body: Simulations, designs, and characterizations,” *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 52, pp. 1934–1943, 2004.
- [27] A. Moroz, “A recursive transfer-matrix solution for a dipole radiating inside and outside a stratified sphere,” *Ann. Phys.*, vol. 315, pp. 352–418, 2005.
- [28] A. E. Moskalensky and M. A. Yurkin, “Energy budget and optical theorem for scattering of source-induced fields,” *Physical Review A*, vol. 99, 053824, May 2019.
- [29] A. Baptiste, L. D. Brendan and E. C. Le Ru, “Electromagnetic Interactions of Dye Molecules Surrounding a Nanosphere” *Nanoscale*, vol. 11, no. 2, pp. 11, 2019.
- [30] A. E. Krasnok, A. E. Miroshnichenko, P. A. Belov and Y. S. Kivshar, “All-dielectric optical nanoantennas,” *Optics Express*, vol. 20, no. 18, pp. 20599–20604, 2012.
- [31] Y. A. Eremin and T. Wriedt, “Generalization of the Optical Theorem to an Arbitrary Multipole Excitation of a Particle near a Transparent Substrate,” *Mathematics*, vol. 9, no. 24, 3244, 2021.

- [32] C. T. Tai, *Dyadic Green Functions in Electromagnetic Theory*, 2nd Edition, IEEE Press, Piscataway, NJ, 1994.
- [33] N. L. Tsitsas & P. A. Martin, Finding a source inside a sphere, *Inverse Problem*. 28:(2012), 015003 (11 pp).
- [34] A. Guglielmelli, F. Pierini, N. Tabiryan, C. Umeton, T. J. Bunning, & L. De Sio, Thermoplasmonics with Gold Nanoparticles: A New Weapon in Modern Optics and Biomedicine, *Advanced Photonics Research*, 2(8), 2000198, (17 pp), 2021.
- [35] L. Sun, L. Zhao, & R. Y. Peng, Research progress in the effects of terahertz waves on biomacromolecules. *Military Med Res*, 8, 28, (8 pp), 2021.
- [36] G. Albuquerque, A. Cruz, D. Carvalho, N. Mayrink, B. Pinheiro, A. Campos, J. G. Lima, J. Henriques, & R. Valentim . A method based on non-ionizing microwave radiation for ancillary diagnosis of osteoporosis: a pilot study. *BioMedical Engineering OnLine* 21, 70, (14 pp) 2022.
- [37] F. Ravaioli, M. G. Bacalini, C. Giuliani, C. Pellegrini, C. D’Silva, S. De Fanti, C. Pirazzini, G. Giorgi, & B. Del Re. Evaluation of DNA Methylation Profiles of LINE-1, Alu and Ribosomal DNA Repeats in Human Cell Lines Exposed to Radiofrequency Radiation. *International Journal of Molecular Sciences*. 24(11):9380, 2023.
- [38] G. Dassios, and G. Kamvyssas, “Point source excitation in direct and inverse scattering: The soft and the hard small sphere,” *IMA J. Appl. Math.*, vol. 55, pp. 67-84, 1995.

Παράρτημα Α

Σφαιρικές διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις (Spherical Vector Wave Functions)

Οι άρτιες και περιττές σφαιρικές διανυσματικές συναρτήσεις πρώτου είδους ορίζονται για $n = 1, 2, \dots$ και $m = 0, \dots, n$, ως:

$$M_{emn}^1(\mathbf{r}, k) = -mj_n(kr) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - j_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$M_{omn}^1(\mathbf{r}, k) = mj_n(kr) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - j_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned} N_{emn}^1(\mathbf{r}, k) &= n(n+1) \frac{j_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \tilde{j}_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad - \tilde{j}_n(kr) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{omn}^1(\mathbf{r}, k) &= n(n+1) \frac{j_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \tilde{j}_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \tilde{j}_n(kr) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned}$$

όπου P_n^m είναι η συνάρτηση Legendre πρώτου είδους, j_n οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και

$$\tilde{j}_n(kr) = \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [rj_n(kr)].$$

Οι άρτιες και περιττές σφαιρικές διανυσματικές συναρτήσεις πρώτου είδους ορίζονται για $n = 1, 2, \dots$ και $m = 0, \dots, n$, ως:

$$M_{emn}^3(\mathbf{r}, k) = -mh_n(kr) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - h_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$M_{omn}^3(\mathbf{r}, k) = mh_n(kr) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} - h_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\begin{aligned}
N_{emn}^3(\mathbf{r}, k) &= n(n+1) \frac{h_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \hat{\mathbf{r}} \\
&\quad + \tilde{h}_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad - \tilde{h}_n(kr) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\
N_{omn}^3(\mathbf{r}, k) &= n(n+1) \frac{h_n(kr)}{kr} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \hat{\mathbf{r}} \\
&\quad + \tilde{h}_n(kr) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \sin(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&\quad + \tilde{h}_n(kr) \frac{m}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}}
\end{aligned}$$

όπου $h_n(kr)$ οι σφαιρικές συναρτήσεις Hankel και

$$\tilde{h}_n(kr) = \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [r h_n(kr)].$$

Σφαιρικές διανυσματικές αρμονικές συναρτήσεις (Vector Spherical Harmonics Functions)

Οι άρτιες και περιττές σφαιρικές διανυσματικές συναρτήσεις πρώτου και τρίτου είδους ορίζονται με τη βοήθεια των σφαιρικών διανυσματικών αρμονικών συναρτήσεων $\mathbf{P}_{\sigma mn}$, $\mathbf{B}_{\sigma mn}$ και $\mathbf{C}_{\sigma mn}$.

$$\begin{aligned}
M_{\sigma mn}^1(\mathbf{r}, k) &= \sqrt{n(n+1)} \mathbf{C}_{\sigma mn}(\theta, \varphi) j_n(kr) \\
N_{\sigma mn}^1(\mathbf{r}, k) &= n(n+1) \mathbf{P}_{\sigma mn} \frac{j_n(kr)}{kr} + \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{\sigma mn} \tilde{j}_n(kr) \\
M_{\sigma mn}^3(\mathbf{r}, k) &= \sqrt{n(n+1)} \mathbf{C}_{\sigma mn}(\theta, \varphi) h_n(kr) \\
N_{\sigma mn}^3(\mathbf{r}, k) &= n(n+1) \mathbf{P}_{\sigma mn} \frac{h_n(kr)}{kr} + \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{\sigma mn} \tilde{h}_n(kr)
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\sigma mn} &= \hat{\mathbf{r}} Y_{\sigma mn}(\theta, \varphi) \\
\mathbf{B}_{\sigma mn} &= \frac{r}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla Y_{\sigma mn}(\theta, \varphi)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{\sigma mn} = \frac{r}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla \times [\mathbf{r}Y_{\sigma mn}(\theta, \varphi)]$$

με

$$Y_{emn}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$$

$$Y_{omn}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi)$$

Ασυμπτωτικές εκφράσεις μεγάλων ορισμάτων των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel

$$h_n(z) \sim (-i)^n h_0(z), \quad z \rightarrow \infty$$

$$h'_n(z) \sim (-i)^{n-1} h_0(z), \quad z \rightarrow \infty$$

Ασυμπτωτικές εκφράσεις μεγάλων ορισμάτων των σφαιρικών διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων τρίτου είδους

$$M_{\sigma mn}^3(\mathbf{r}, k) \sim \sqrt{n(n+1)} (-i)^n h_0(z) \mathbf{C}_{\sigma mn}(\theta, \varphi) h_n(kr), \quad kr \rightarrow \infty$$

$$N_{\sigma mn}^3(\mathbf{r}, k) \sim \sqrt{n(n+1)} (-i)^n h_0(z) \mathbf{B}_{\sigma mn}(\theta, \varphi) h_n(kr), \quad kr \rightarrow \infty$$

Παράρτημα Β

Μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται στο ευθύ πρόβλημα διέγερσης πολυστρωματικού σκεδαστή από N πηγές

$$\mathcal{M}_{snm}^1(\mathbf{x}_q) = \frac{ik_q}{4\pi} c_{nm} \sum_{j=1}^{n_q} x_{q,j} M_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \cdot \mathbf{p}_{q,j}$$

$$\mathcal{M}_{snm}^3(\mathbf{x}_q) = \frac{ik_q}{4\pi} c_{nm} \sum_{j=1}^{n_q} x_{q,j} M_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \cdot \mathbf{p}_{q,j}$$

$$\mathcal{N}_{snm}^1(\mathbf{x}_q) = \frac{ik_q}{4\pi} c_{nm} \sum_{j=1}^{n_q} x_{q,j} N_{snm}^1(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \cdot \mathbf{p}_{q,j}$$

$$\mathcal{N}_{snm}^3(\mathbf{x}_q) = \frac{ik_q}{4\pi} c_{nm} \sum_{j=1}^{n_q} x_{q,j} N_{snm}^3(\mathbf{r}_{q,j}, k_q) \cdot \mathbf{p}_{q,j}$$

όπου $\mathbf{x}_q = (x_q^1, \dots, x_q^{n_q})$ αυθαίρετα διανύσματα του \mathbb{R}^{n_q} .

$$\mathbf{A}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{M}_{snm}^1(\mathbf{a}_{n,q}^p)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{M}_{snm}^1(\tilde{\mathbf{a}}_{n,q}^p)$$

$$\mathbf{B}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{M}_{snm}^3(\mathbf{b}_{n,q}^p)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{M}_{snm}^3(\tilde{\mathbf{b}}_{n,q}^p)$$

$$\mathbf{C}_{snm}^p = \mathcal{N}_{snm}^1(\mathbf{c}_{n,q}^p)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{N}_{snm}^1(\tilde{\mathbf{c}}_{n,q}^p)$$

$$\mathbf{D}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{N}_{snm}^3(\mathbf{d}_{n,q}^p)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_{s,n,m,q}^p = \mathcal{N}_{snm}^3(\tilde{\mathbf{d}}_{n,q}^p)$$

όπου $x_{n,q}^p = (x_{1,n,q}^p, \dots, x_{N,n,q}^p)$ και $x \in \{a, b, c, d\}$ είναι τα διανύσματα με συνιστώσες τους άγνωστους συντελεστές των επιμέρους δευτερευόντων πεδίων.