ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

Θεωρία των Copula και οι Εφαρμογές της στα Οικονομικά

Τασιούλας Χρήστος

ΑΜ 142656

Επιβλέπων καθηγητής: Παπαδόπουλος Βασίλειος

Αθήνα, Μάρτιος 2023

Θεωρία των Copula και οι Εφαρμογές της στα Οικονομικά

Τασιούλας Χρήστος

ΑΜ 142656

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικης Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

Βασίλειος Παπαδόπουλος

Καθηγητής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

Μιχαήλ Ανούσης

Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών

Πανεπιστημίου Αιγαίου

Αθήνα, Μάρτιος 2023

Η ολοκλήρωση της εργασίας αυτής δεν θα ήταν δυνατή χωρίς την πολύτιμη στήριξη του επιβλέποντα καθηγητή μου κ.Βασίλειο Παπαδόπουλο. Τον ευχαριστώ θερμά για την υποστήριξή του και τον χρόνο που διέθεσε κατά την εκπόνηση της εργασίας αλλά και κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος γενικότερα. Τέλος, ευχαριστώ τους φίλους και την οικογένεια μου για την ηθική συμπαράσταση και την υπομονή τους.

Περίληψη

Στόχος της εργασίας είναι η εισαγωγή στην θεωρία των copula, η ανάλυση των ιδιοτήτων τους, η εμβάθυνση στις οικογένειες copula και στους συντελεστές εξάρτησης-συσχέτισης και τέλος η εξέταση της χρήσης των copula ως εργαλείο ανάλυσης στην οικονομική επιστήμη.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα γίνει μια ιστορική αναδρομή των copulas, πως και από ποιους ξεκίνησε η χρήση του όρου στα μαθηματικά. Στην συνέχεια θα αναλυθεί ο σκοπός και οι στόχοι της εργασίας. Τέλος θα πραγματοποιηθεί η προεπισκόπηση της διάρθρωσης και του περιεχομένου των επόμενων κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα αναφέρουμε κάποιες προαπαιτούμενες έννοιες και τους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες των copula με βάση τον Nelsen. Επιπλέον θα παρουσιάσουμε το θεώρημα του Sklar, τα φράγματα F-H,τις copula επιβίωσης και την πυκνότητα copula.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα περιγράψουμε τη σχέση των copulas με τα μέτρα εξάρτησης-συσχέτισης αφού πρώτα παραθέσουμε τους ορισμούς και τις ιδιότητές τους. Έπειτα θα αναλύσουμε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson, τους συντελεστές βαθμολογικής συσχέτισης του Spearman και του Kendall καθώς και τον συντελεστή εξάρτησης ουράς.

Στο τέταρτο κεφάλαιο πραγματοποιείτε μία εκτενής παρουσίαση των οικογενειών copula. Πιο αναλυτικά θα παρουσιαστούν οι ελλειπτικές και οι αρχιμήδειες copula με τις υποπεριπτώσεις αυτών και τις ιδιότητές τους.

Τέλος το κύριο σώμα της εργασίας ολοκληρώνεται με την εφαρμογή της θεωρίας των copulas στα οικονομικά και θα παρουσιαστούν τομείς των οικονομικών όπου χρησιμοποιούνται οι copula ως εργαλείο ανάλυσης.

Λέξεις – Κλειδιά

Copula, συζεύξεις, θεώρημα Sklar, εξάρτηση, survival copula, Archimedean copula, οικογένειες copula.

Abstract

The main objective of this thesis is the introduction to the theory of copulas, the analysis of their properties, the introduction of the copula families and the dependence-correlation concepts and finally the examination of the use of copulas as an analysis tool in economic science.

In the first chapter, there will be a historical review of copulas, how and by whom the use of the term in mathematics began. Then the purpose and objectives of the work will be analyzed. Finally, the structure and content of the following chapters will be previewed.

In the second chapter we will mention some prerequisite concepts and the basic definitions and properties of copula based on Nelsen. In addition we will present Sklar's theorem, F-H barriers, survival copulas and copula density.

In the third chapter we will describe the relationship of copulas with the dependence-correlation measures after first listing their definitions and properties. Then we will analyze Pearson's linear correlation, Spearman's and Kendall's rank correlation c as well as the tail dependence coefficient.

In the fourth chapter is given an extensive presentation of copula families. The elliptic and Archimedean copula with their sub-cases and their properties will be presented in more detail.

Finally, the main body of the thesisi is completed with the application of the theory of copulas in economics-statistics. Areas of economics where copulas are used as an analysis tool will be presented.

Keywords

Copula , Sklar Theorem, depedence, survival copula, Archimedean copula, copula families.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Συντομογραφίες & Ακρωνύμια

1.Εισαγωγή

1.1 Ιστορική αναδρομή

Οι Copulas (συζεύξεις) είναι συναρτήσεις που συνδέουν πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής με τις μονοδιάστατες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής τους. Εναλλακτικά οι copulas είναι πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής όπου τα μονοδιάστατα όρια τους είναι ομοιόμορφα στο διάστημα (0,1).

Η λέξη Copula είναι Λατινικής προέλευσης που μεταφράζεται ως σύνδεσμος, δεσμός, ζεύγος (εξ ου και το αγγλικό couple ζευγάρι). Έτσι ο όρος copula στην ελληνική γλώσσα έχει μεταφραστεί και διαδοθεί ως σύζευξη. Η λέξη Copula χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στα μαθηματικά ως στατιστική έννοια από τον Abe Sklar (1959) στο θεώρημά του περιγράφοντας τις συναρτήσεις που «ενώνουν-ζευγαρώνουνν» μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομής για να συνθέσουν πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής. Οι συναρτήσεις βέβαια αυτές προϋπήρχαν πριν την εισαγωγή του όρου Copula. Η ιδέα των συναρτήσεων copula είχε εμφανιστεί προηγουμένως στο έργο του Hoeffding (1940, 1941), ο οποίος ασχολήθηκε κυρίως με διδιάστατες τυποποιημένες κατανομές και καθιέρωσε τα καλύτερα δυνατά όρια για αυτές τις συναρτήσεις. Εμφανίζονται στα έργα των Frechet,Feron,Dall'Aglio και πολλών άλλων. Ο Sklar χαρακτηριστικά αναφέρει ότι δανείστηκε τον όρο από την γραμματική , όπου η λέξη copula χρησιμοποιούνταν ως γραμματικός όρος για την λέξη ή έκφραση που λειτουργεί ως σύνδεσμος μεταξύ θεμάτων, όταν σε επιστολή του στον Frechet στα Γαλλικά έπρεπε κάπως να ονοματίσει τις συγκεκριμένες συναρτήσεις για να αποδείξει ένα θεώρημα που στην συνέχεια πήρε το όνομα του. Η επιλογή της ονομασίας copula από τον Sklar, λοιπόν, δεν ήταν τυχαία καθώς και εδώ υπάρχει ένα είδος δεσμού μεταξύ των περιθώριων κατανομών και της από κοινού συνάρτησης κατανομής.

Όταν ο Sklar χρησιμοποίησε πρώτη φορά στο σύγγραμμά του το 1959 τον όρο copula συνεργάζονταν με τον Berthold Schweizer στην ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανολογικών μετρικών χώρων (probabilistic metric spaces-PM Spaces). Κατά την περίοδο από το 1958 μέχρι το 1976 τα πιο σημαντικά συμπεράσματα όσον αφορά τους copulas εξελίχθηκαν από την μελέτη των PM-spaces. Στην πορεία παρουσιάστηκε αρκετή πρόοδος ως προς τους copulas και την εξάρτηση. Η πρώτη σαφής συσχέτιση των copulas στην μελέτη της εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών εμφανίζεται στο έργο των Schweizer και Wolf 1981. Πιο συγκεκριμένα οι των Schweizer και Wolf ανέλυσαν και τροποποιήσαν τα κριτήρια του Renyi's (1959) για το μέτρο εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών χρησιμοποιώντας τις αμετάβλητες ιδιότητες των copulas κάτω από αυστηρά μονότονους μετασχηματισμούς τυχαίων μεταβλητών. Πρόσφατα έχει γίνει ένα πολύ σημαντικό στατιστικό και μαθηματικό εργαλείο, αφού αντικατοπτρίζει τη σχέση εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών και έχει εφαρμογή σε τομείς όπως η αναλογιστική επιστήμη (actuarial science), η διοικητική κινδύνου (risk management), τα χρηματοοικονομικά (finance), η ανάλυση χαρτοφυλακίου (portfolio analysis), κ.α. Τη δεκαετία του 90 έγινε ευρεία διάδοση της θεωρίας των συζεύξεων, με συγγραφή διαφόρων βιβλίων στο συγκεκριμένο αντικείμενο.

1.2 Διάρθρωση-Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας

Αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι η παρουσίαση της έννοιας και των ιδιοτήτων των συναρτήσεων copula. Αρχικά θα γίνει εισαγωγή σε κάποιους βασικούς ορισμούς και απαραίτητα θεωρήματα για την κατανόηση της έννοιας των συναρτήσεων copula. Στη συνέχεια σκοπός είναι η παρουσίαση των διάφορων οικογενειών copula και των ιδιοτήτων τους Επιπλέον θα δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στην σχέση των copula με την εξάρτηση τυχαίων μεταβλητών, το οποίο παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω της εφαρμογής της στην στατιστική. Στο τελικό στάδιο ο θεματικός άξονας της εργασίας της εργασίας μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση της εφαρμογής της θεωρίας των copula ,ως ένα εργαλείο ανάλυσης ,στην οικονομική επιστήμη με την βοήθεια των παραπάνω.

Πιο συγκεκριμένα στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια εκτενής αναφορά στην έννοια των copula, η οποία συνδέει τις μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές με την αντίστοιχη N-διάστατη συνάρτηση κατανομής. Ακόμη αναφέρουμε, με βάση τον Nelsen (2006), κάποιους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες των copula. Στη συνέχεια διατυπώνεται το θεώρημα του Sklar, το οποίο αποτελεί θεμέλιο για πολλές εφαρμογές της θεωρίας των copula. Πραγματοποιείτε ανάλυση των φραγμάτων Fréchet-Hoeffding των συναρτήσεων copula. Και το κεφάλαιο κλείνει μία αναφορά στις copula επιβίωσης και την έννοια της πυκνότητας των copula.

Στο τρίτο κεφάλαιο προχωράμε στην ανάλυση της σχέσης των copula με τις έννοιες της εξάρτησης-συσχέτισης. Πιο συγκεκριμένα θα περιγράψουμε τη σχέση των copulas με τα μέτρα εξάρτησης-συσχέτισης αφού πρώτα παραθέσουμε τους ορισμούς και τις ιδιότητές τους. Έπειτα θα αναλύσουμε τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson, τους συντελεστές βαθμολογικής συσχέτισης του Spearman και του Kendall καθώς και τον συντελεστή εξάρτησης ουράς. Και στο τέλος του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε την σχέση μεταξύ του συντελεστή ρ του Spearman με τον συντελεστή τ του Kendall σύμφωνα με τον Nelsen.

Στη συνέχεια στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται οι Marshal-Olkin copulas, οι ελλειπτικές και οι αρχιμήδειες copula με τις επιμέρους υποπεριπτώσεις τους. Αναλυτικότερα\ θα παρουσιαστούν οι Gaussian (Normal) copula, t-Student -copula, Clayton copula, Frank copula και Gumbel copula με τους ορισμούς και τις ιδιότητες τους.

Τέλος η εργασία ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των εφαρμογών που διαθέτει η θεωρία των copula στη προσέγγιση οικονομικών ζητημάτων. Πως χρησιμοποιείται σαν εργαλείο ανάλυσης, σε ποιούς κλάδους των οικονομικών έχει εφαρμογή και στην χρήση της στην προσομοίωση μιας εφαρμογής ενός οικονομικού μοντέλου.

2. Copulas βασικοί ορισμοί

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στις Copulas ως συναρτήσεις που συνδέουν πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής με τις μονοδιάστατες περιθώριες συναρτήσεις κατανομής τους είτε ως πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής όπου τα μονοδιάστατα όρια τους είναι ομοιόμορφα. Αλλά καμία από τις δύο προτάσεις δεν δύναται να συντελέσει ως ακριβής ορισμός. Στο κεφάλαιο αυτό θα δοθούν κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ο ορισμός που έδωσε ο Nelsen για τις συναρτήσεις copula . Επιπρόσθετα θα ορίσουμε τα Copulas και θα παραθέσουμε κάποιες βασικές ιδιότητές τους. Εν συνεχεία θα παραθέσουμε το θεώρημα του Sklar και τα φράγματα Frechet-Hoeffging. Τέλος θα γίνει αναφορά στις copula επιβίωσης και την έννοια της πυκνότητας μιας συνάρτησης copula.

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Έστω ότι έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X,Y με συναρτήσεις κατανομής F και G αντίστοιχα με $F(x) = P(X \leq x), G(x) = P(Y \leq Y)$. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους είναι η H όπου $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Έπειτα συμβολίζουμε με $\overline{\mathrm{R}}$ το επεκταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\bar{R} = [-\infty, \infty]$ και $\mathrm{I} = [0,1]$. Σκοπός της ενότητας αυτής είναι να ορίσουμε τις έννοιες H-όγκος, 2-αύξουσα συνάρτηση και η gounded-εδραιωμένη συνάρτηση.

<u>Ορισμός 1:</u> Έστω ότι S_1, S_2 είναι υποσύνολα του $\overline{\mathrm{R}}$ και H διδιάστατη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού $DomH = S_1 \times S_2$. Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, του οποίου οι κορυφές ανήκουν στο $S_1 \times S_2$. Ο H-όγκος του B δίνεται από τον τύπο:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

Η διαφορά πρώτης τάξη της H πάνω στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B ορίζεται ως:

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_2, y) \text{ και } \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1).$$

με τον τελεστή διαφορών:

$$\Delta_a^b F(x) = F(b) - F(a)$$

Τότε ο H-όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου B είναι η διαφορά δεύτερης τάξης της H ως προς το B:

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x,y)$$

<u>Ορισμός 2:</u> Μία δισδιάστατη πραγματική συνάρτηση H καλείται 2-αύξουσα αν $V_H(B) \geq 0$ για όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα B των οποίων οι κορυφές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της H $DomH = S_1 \times S_2$.

Επισημαίνεται πως ακόμα και όταν η H είναι μη αρνητική $H \geq 0$ δεν συνεπάγεται ότι και ο H-όγκος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός κι αυτός. Υπάρχουν περιπτώσεις που παρότι η H δεν είναι θετική σε όλο το πεδίο ορισμού της είναι 2-αύξουσα και περιπτώσεις που ενώ είναι θετική σε όλο το πεδίο ορισμού της δεν είναι 2-αύξουσα.

<u>Ορισμός 3:</u> Ας υποθέσουμε ότι a_1, a_2 τα ελάχιστα στοιχεία των συνόλων $S_1 \times S_2$ αντίστοιχα. Τότε η από κοινού συνάρτηση κατανομής H με $DomH = S_1 \times S_2$ ονομάζεται grounded αν: $H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0$

2.2 Ορισμός και ιδιότητες συναρτήσεων copula

<u>Ορισμός 4 (Ορισμός κατά Nelsen 1)</u>: Μια N-μεταβλητή Copula είναι μια συνάρτηση **C** με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $Dom\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}^N = [0,1]^N$
2. H $\boldsymbol{C}$ είναι εδραιωμένη grounded και N-αύξουσα
3. H $\boldsymbol{C}$ έχει περιθώριες $\boldsymbol{C}_n$ που ικανοποιούν $\boldsymbol{C}_n = \boldsymbol{C}(1,\dots,1,u,1,\dots,1) = u \ \forall\, u \in \boldsymbol{I}$

<u>Ορισμός 5 (Ορισμός κατά Nelsen 2)</u>: Μια N-μεταβλητή Copula είναι μια συνάρτηση $\boldsymbol{C}$ με πεδίο ορισμού $Dom\boldsymbol{C}$ το $\boldsymbol{I}^N$ η οποία $C: \boldsymbol{I}^N \to \boldsymbol{I}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\boldsymbol{C}(0,\dots,0,v,\dots,0) = \boldsymbol{C}(0,\dots,u,0,\dots,0) = 0 \ \forall\, u,v \in \boldsymbol{I}$
2. $\forall\, u_1,u_2,v_1,v_2 \in \boldsymbol{I}$ τέτοια ώστε $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$ ισχύει $C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$

2.2.1 Ορισμός 2-διάστατης copula

<u>Ορισμός 6:</u> Στη διδιάστατη περίπτωση n=2 μία σύζευξη έχει τη μορφή:

$$C(u_1,u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

για να είναι η $C: [0,1]^2 \to [0,1]$ σύζευξη πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Για κάθε $u_1, u_2 \in \mathbf{I}$,

$$C(u,0) = 0 = C(0,u)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι απαραίτητη για κάθε πολυδιάστατη αθροιστική συνάρτηση κατανομή.

2. Για κάθε $u_1, u_2 \in \mathbf{I}$,

$$C(u,1) = u \; και \; C(1,v) = v$$

Η ιδιότητα αυτή είναι προϋπόθεση των ομοιόμορφων περιθωρίων.

3. Για κάθε $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \boldsymbol{I}$ τέτοια ώστε $u_1 \leq u_2$, και $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Η τελευταία ιδιότητα εξασφαλίζει πως για κάθε τυχαίο διάνυσμα $(U_1, \dots, U_d)$ η πιθανότητα $P(U_1 \in [a_1, b_1], \dots, U_d \in [a_d, b_d])$ να είναι μη αρνητική.

2.2.2 Ορισμός n-διάστατης copula

<u>Ορισμός 7:</u>. Μία n-διάστατη σύζευξη $C: [0,1]^n \to [0,1]$ είναι μια από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής με ομοιόμορφες περιθώριες .

Ο ορισμός αυτός μας επιτρέπει να δούμε τις συζεύξεις σαν πιθανότητες:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n)$$

Εδώ οι $U_1, .., U_n$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα [0,1].

Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν:

1. Η $C(u_1, \dots, u_n)$ είναι αύξουσα σε κάθε συνιστώσα u_i
2. $\mathbf{C}(1, \dots, 1, u_1, 1, \dots, 1) = u_i$ και $\mathbf{C}(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0$, για όλα τα i∈{1,...d}, $u_i \in [0,1]$
3. Για όλα τα $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0,1]^d$ με $a_i \leq b_i$ για όλα τα τα i ∈ {1, …, d} ισχύει

$$\sum_{i_1=1}^{2} \dots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0$$

όπου $u_{j,1} = a_j, u_{j,2} = b_j$ για όλα τα j∈{1,...d}

2.3 Θεώρημα Sklar

Πρωταγωνιστικό ρόλο στην ανάπτυξη των συναρτήσεων copula έπαιξε το Θεώρημα του Sklar το οποίο διατυπώθηκε το 1959 και αποτελεί μία σύνδεση μεταξύ της από κοινού κατανομής δύο τυχαίων μεταβλητών και των αντίστοιχων περιθωρίων κατανομών. Το Θεώρημα αυτό διατυπώνεται στη συνέχεια.

<u>Θεωρημα 1:</u>Θεώρημα του Sklar (1959) Έστω $H(x_1, .., x_N): \mathbb{R}^N \to [0,1]$ μια N-διάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1, \dots, F_N$. Τότε υπάρχει μια Copula τέτοια ώστε:

$$H(x_1, .., x_N) = C(F_1(x_1), \dots, F_N(x_N)) \; \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Εάν οι περιθώριες $F_1, \dots, F_N$ είναι συνεχής τότε η C είναι μοναδική , στην αντίθετη περίπτωση η C είναι μοναδικά ορισμένη στο $RanF_1 \times RanF_2 \dots, RanF_N$, αντίστροφα αν C μια N-copula και $F_1, \dots, F_N$ αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής, τότε η συνάρτηση H είναι μια N-διάστατη αθροιστική συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1, \dots, F_N$.

Επομένως, το θεώρημα αυτό περιγράφει τη σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της από κοινού συνάρτησης κατανομής και των περιθώριων κατανομών της, ορίζοντας το Copula ως από κοινού συνάρτηση κατανομής και συνδέοντας το με τις περιθώριες.

2.4 Φράγματα Fréchet-Hoeffding

Βασικό Θεώρημα στη θεωρία των copulas είναι τα φράγματα Fréchet-Hoeffding , που μας δίνουν άνω και κάτω φράγματα για copulas και ισοδύναμα για από κοινού συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1, ο Hoeffding (1940, 1941) και έπειτα ο Fréchet (1951) ασχολήθηκαν με τη δημιουργία φραγμάτων για τις συναρτήσεις copula. Αν κα ασχολήθηκαν ξεχωριστά κατέληξαν σε παρόμοια συμπεράσματα, έτσι προς τιμήν του έργου και των δύο, δόθηκε στα φράγματα αυτά η ονομασία Fréchet-Hoeffding.

<u>Θεώρημα 2:</u> Φράγματα Fréchet-Hoeffding. Για κάθε copula $C(u) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ έχουμε τα φράγματα:

$$\max\{\sum_{j=1}^{d} u_j - d + 1{,}0\} \leq C(u) \leq \min_{1\leq j\leq d}\{u_j\}, u \in [0{,}1]^d$$

Ορίζουμε $W(u) = max\ \ \{\sum_{j=1}^{d} u_j - d + 1{,}0\}$ και $M(u) = \min_{1\leq j\leq d}\{u_j\}$.

για $d \geq 2$ η M(u) είναι copula, ενώ μόνο για $d = 2$ η W(u) είναι copula.

<u>Απόδειξη θεωρήματος</u>: Για το άνω όριο έχουμε ότι αφού η C είναι d-αύξουσα και γειωμένη συνεπάγεται ότι C γνησίως αύξουσα σε κάθε γνώρισμά της οπότε $C(u) \leq C(1, \ldots, 1, u_j, 1, \ldots, 1) = u_j$ για κάθε j.

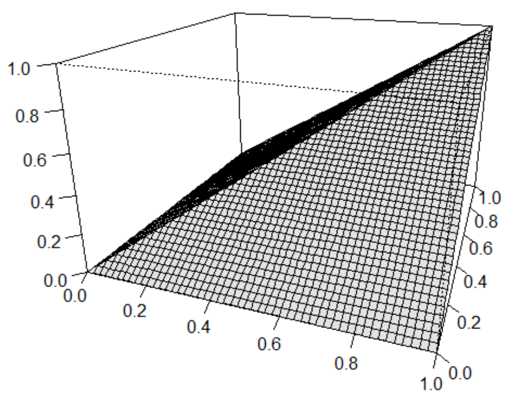
Άρα

$$C(u) \leq \min_{1\leq j\leq d}\{u_j\} = M(u) \qquad (1)$$

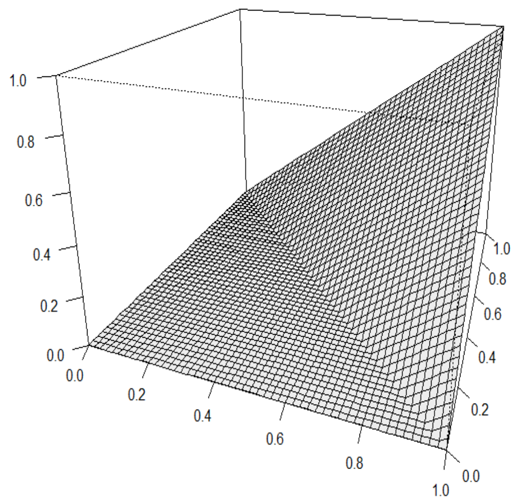
Για το κάτω όριο γνωρίζουμε αρχικά ότι $C(u) \geq 0, \forall u \in [0{,}1]^d$ εξ ορισμού. Στη συνέχεια έχουμε :

$C(u) = P(U_1 \leq u_1, \ldots, U_d \leq u_d) = 1 - P(U_1 > u_1, \ldots, U_d > u_d) \geq 1 - \sum_{i=1}^{d} P\,(U_i >$ *ui=1−i=1d(1−PUi≤ui)=1−i=1d(1−ui)=1−d+i=1dui* (2)

Τελικά , C(u)≥W(u).



Σχήμα 1.1: Διάγραμμα άνω φράγματος διδιάστατου copula



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα κάτω φράγματος διδιάστατου copula

2.5 Συνάρτηση Πυκνότητας

Ορισμός 8:Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού κατανομή F περιθώριες F_1, F_2 και αντίστοιχη συνάρτηση copula C. Αν οι συναρτήσεις αυτές είναι δύο φορές παραγωγίσιμες, τότε η πυκνότητα copula ορίζεται ως:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v}$$

Με βάση τον ορισμό αυτό είναι εύκολο να προσδιορισθεί η σχέση μεταξύ της από κοινού κατανομής των συνεχών τυχαίων μεταβλητών X και Y των αντίστοιχων περιθώριων πυκνοτήτων και της πυκνότητας copula. Η συνάρτηση πυκνότητας μιας πολυμεταβλητής συνάρτησης κατανομής μπορεί να εκφραστεί ως

$$h(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

για n=2

$$h(x,y) = c\big(F_X(x), G_Y(y)\big) f(x) g(y)$$

$$\sum_{i_1=1}^{2} \dots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\dots i_d} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{d,i_d}) \geq 0$$

2.6 Copulas επιβίωσης

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στα Copula επιβίωσης, τα οποία έχουν μεγάλο ενδιαφέρον και έχουν χρησιμοποιηθεί σε πολλές οικονομικές και στατιστικές εφαρμογές. Ο λόγος είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές αναπαριστούν τους χρόνους ζωής μονάδων, ανθρώπων, οικονομικών δεικτών που ανήκουν σε κάποιο πληθυσμό. Έτσι όταν μια τυχαία μεταβλητή εκφράζει τον χρόνο ζωής μονάδων, τότε ορίζεται στο $[0, \infty]$. Η πιθανότητα λοιπόν να επιβιώσει μια μονάδα πέραν κάποιου χρονικού σημείου x, εκφράζεται από την παρακάτω συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$$

όπου η F η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X.

Ωστόσο, στη δισδιάστατη περίπτωση θα θεωρήσουμε πως οι χρόνοι ζωής μπορούν να πάρουν τιμές στο $\bar{R}$, παρότι ορίζονται στο $[0, \infty]$. Έτσι για ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών X,Y , με από κοινού συνάρτηση κατανομής H, η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης ορίζεται ως:

$$\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y)$$

και εκφράζει την πιθανότητα και οι δύο μονάδες να έχουν επιβιώσει πέραν κάποιων χρονικών σημείων x,y αντίστοιχα.

Οι περιθώριες της $\bar{H}$ είναι οι παρακάτω:

$$\bar{F}(x) = \bar{H}(x, \infty) \text{ και } \bar{G}(y) = \bar{H}(-\infty, y)$$

Ας υποθέσουμε τώρα πως C είναι το copula των X,Y. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C\big(F(x), G(y)\big) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(\bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1)\end{aligned}$$

Επομένως, αν ορίσουμε τη συνάρτηση $\hat{C}: I \to I^2$ με τύπο:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$$

θα έχουμε:

$$\bar{H}(x,y) = \hat{C}\big(\bar{F}(x), \bar{G}(y)\big).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως το $\hat{C}$ είναι copula και συγκεκριμένα είναι το Copula επιβίωσης των X,Y το οποίο συνδέει την από κοινού συνάρτηση επιβίωσης $\bar{H}$ με τις περιθώριες συναρτήσεις επιβίωσης, με τρόπο ανάλογο που ένα copula συνδέει την από κοινού συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες του. Θα πρέπει όμως να προσέξουμε το εξής. Η copula επιβίωσης $\hat{C}$ δεν είναι η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης $\bar{C}$ δύο τυχαίων μεταβλητών που κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0,1) και με από κοινού συνάρτηση κατανομής το copula C . Αυτό συμβαίνει γιατί:

$$\bar{C}(u,v) = P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u,v) = \hat{C}(1-u, 1-v).$$

3. Εξάρτηση-Συσχέτιση των Copulas

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα μέτρα εξάρτησης-συσχέτισης των Copulas. Η εξάρτηση μεταξύ δύο η περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά ζητήματα στη θεωρία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε κάποιες επιθυμητές ιδιότητες των συντελεστών εξάρτησης και θα δώσουμε τους γενικούς ορισμούς του μέτρου συμφωνίας (measure of concordance). Έπειτα θα παρουσιάσουμε το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson, το συντελεστή συσχέτισης τάξης Rho του Spearman και Tau του Kendall καθώς επίσης και το συντελεστή εξάρτησης ουράς.

3.1 Συντελεστές εξάρτησης

Λαμβάνοντας υπόψη την ποικιλία των συναρτήσεων copula, ένα ερώτημα είναι το πως σχετίζεται η παράμετρος εξάρτησης που εμπεριέχεται στη συναρτησιακή τους έκφραση με την πιο οικεία έννοια της συσχέτισης. Ένα βασικό μέλημα είναι η ικανότητα ενός μοντέλου copula να συλλάβει την εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές με ένα ικανοποιητικό τρόπο. Στο εδάφιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα μέτρο εξάρτησης και τη σχέση τους με τις συναρτήσεις copula. Αρχικά, θα παρουσιαστούν κάποιες επιθυμητές ιδιότητες των μέτρων. Έπειτα θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον στο συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson.

3.1.1 Μέτρο Εξάρτησης

Η εξάρτηση μεταξύ τυχαίων μεταβλητών μπορεί να μετρηθεί και να ερμηνευτεί με ποικίλους τρόπους. Διαισθητικά ένα μέτρο εξάρτησης δείχνει κατά πόσο οι τυχαίες μεταβλητές X,Y σχετίζονται με άκρα την ανεξαρτησία και την μονότονη εξάρτηση. Εάν το μέτρο αυτό παραμένει αμετάβλητο κάτω από γνησίως αύξοντα μετασχηματισμό των μεταβλητών μπορεί να εκφραστεί με βάση τη copula C.

Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F,G αντίστοιχα και από κοινού συνάρτηση κατανομής H . Τότε θα λέμε ότι είναι εξαρτημένες ή συσχετισμένες, αν δεν είναι ανεξάρτητες, δηλαδή όταν ισχύει ότι:

$H(x,y) \neq F(x)G(y)$, για οποιοδήποτε $x, y\epsilon R$

3.1.2 Επιθυμητές ιδιότητες μέτρου εξάρτησης

Στη διδιάστατη περίπτωση, για κάθε συντελεστή-μέτρο εξάρτησης δ(X,Y) επιθυμούμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

- το δ ορίζεται για κάθε ζεύγος X,Y συνεχών τυχαίων μεταβλητών
- $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$ (συμμετρία).
- $-1 \leq \delta(Y,X) \leq 1$ (κανονικότητα).
- $\delta(X,Y) = 0$ αν και μόνο αν οι X,Y είναι ανεξάρτητες.
- $\delta(Y,X) = 1 \Leftrightarrow (X,Y)$ comotonic. Δηλαδή τα X,Y έχουν τέλεια θετική εξάρτηση όταν ο συντελεστής παίρνει τη μέγιστη τιμή του. Με την έννοια τέλεια θετική εξάρτηση εννοούμε ότι η Y είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση της X.
- $\delta(Y,X) = -1 \Leftrightarrow (X,Y)$ countertonic. Δηλαδή τα X,Y έχουν τέλεια αρνητική εξάρτηση όταν ο συντελεστής παίρνει την ελάχιστη τιμή του. Με την έννοια τέλεια αρνητική εξάρτηση εννοούμε ότι η Y είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της X.
- Για έναν αυστηρά (γνησίως μονότονο) μετασχηματισμό $T: R \to R$ του X ισχύει ότι:

$$\delta(T(X),Y) = \begin{cases} \delta(\mathrm{X},\mathrm{Y}), \text{αν η T είναι αύξουσα} \\ -\delta(\mathrm{X},\mathrm{Y}), \text{αν η T είναι φθίνουσα} \end{cases}$$

3.1.3 Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης του Pearson

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης Pearson αναπτύχθηκε από τον Karl Pearson, είναι η πιο γνωστή έννοια εξάρτησης και μάλιστα γραμμικής στη βιβλιογραφία και θα παρουσιαστεί στο εδάφιο αυτό ακολουθώντας τους Trivedi and Zimmer (2007).

Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και από κοινού συνάρτηση κατανομής F. Όταν οι διακυμάνσεις των X,Y είναι πεπερασμένες, ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson μεταξύ του ζεύγους των μεταβλητών (X,Y) ορίζεται ως εξής:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

όπου $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ η συνδιασπορά των X,Y και $\sigma_X \sigma_Y > 0$ οι τυπικές αποκλίσεις των X,Y αντίστοιχα.

Ο συντελεστής συσχέτισης Pearson ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- Αναφέρεται σε γραμμικές και μόνο συσχετίσεις.
- $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$ (συμμετρία).
- $-1 \leq \rho(Y,X) \leq 1$ (κανονικότητα).
- Παραμένει αμετάβλητος υπό γραμμικούς και μόνο μετασχηματισμούς μεταβλητών.

Παρατηρούμε ότι καθώς ο συντελεστής συσχέτισης Pearson εκφράζει την γραμμικότητα, σε περίπτωση που δεν υπάρχει γραμμικότητα, προκύπτει μία απρόβλεπτη συσχέτιση των δύο μεταβλητών, κάτι που είναι σύνηθες όταν υπάρχουν ακραίες τιμές. Στην περίπτωση που το ζεύγος (X,Y) ακολουθεί μια διδιάστατη κανονική κατανομή τότε η δομή εξάρτησης (copula) καθορίζεται πλήρως από την συσχέτιση και η μηδενική συσχέτιση και η ανεξαρτησία είναι ισοδύναμα. Όμως, η γενική μηδενική συσχέτιση δεν συνεπάγεται πάντα την ανεξαρτησία. Για παράδειγμα αν $X \sim N(0,1)$ και $Y = X^2$ τότε $Cov(X,Y) = Cov(X,X^2) = E(X^3) - E(X\quad)E(X^2) = E(X^3) - 0 \cdot E(X^2) = E(X^3)$. Όμως, είναι γνωστό ότι αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής και έχει συμμετρική σ.π.π τότε $E(X^k) = 0$, για $k = 2\nu + 1$.Δηλαδή έχουμε ότι $Cov(X,Y) = 0$ αλλά (X,Y) είναι εξαρτημένες.

Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson δεν ορίζεται για κάποιες κατανομές με βαριές ουρές (heavy-tailed distributions) για τις οποίες δεν υπάρχουν ροπές δεύτερης τάξης όπως π.χ. η διδιάστατη t-Student κατανομή με βαθμούς ελευθερίας 1 ή 2.

Ο συντελεστής δεν είναι αμετάβλητος υπό αυστηρά αύξοντες μη- γραμμικούς μετασχηματισμούς. Δηλαδή,$\rho(T(X),T(Y)) \neq \rho(X,Y)$ για $T: R \to R$ γνησίως αύξουσα και μη γραμμική.

Ο συντελεστής συσχέτισης Pearson παρουσιάζει μερικά ακόμη μειονεκτήματα. Πιο συγκεκριμένα, ο συντελεστής συσχέτισης Pearson το μόνο που εκφράζει είναι η γραμμική ή μη σχέση των δύο αυτών μεταβλητών αλλά δεν δίνει καμία πληροφορία για το πώς προέρχεται αυτή η σχέση. Παράλληλα, αν προκύψει γραμμική σχέση, είναι πολύ πιθανό να οφείλεται στον τρόπο που έχει διαμορφωθεί και επιλεχθεί το τυχαίο δείγμα που εξετάζεται. Εξαιτίας, λοιπόν αυτών των μειονεκτημάτων έχουν προταθεί οι συντελεστές βαθμολογικής συσχέτισης (rank correlation), οι οποίοι αναλύονται στη συνέχεια.

3.2 Συντελεστές συσχέτισης

Ένα αριθμητικό μέτρο συσχέτισης (association) είναι μια στατιστική σύνοψη του βαθμού της σχέσης μεταξύ μεταβλητών. Για λόγους ευκολίας, οι συντελεστές συσχέτισης συνήθως κυμαίνονται μεταξύ του -1 και του 1. Οι τιμές τους αυξάνονται καθώς η ισχύς της συσχέτισης μεγαλώνει με τιμή 1 (ή -1) όταν υπάρχει πλήρης θετική (ή αρνητική) συσχέτιση. Κάθε συντελεστής συσχέτισης μετρά ένα συγκεκριμένο τύπο σχέσης μεταξύ των μεταβλητών. Ο συντελεστής συσχέτισης του Pearson για παράδειγμα μετρά το ποσό γραμμικής σχέσης μεταξύ των μεταβλητών.

Τα πιο γνωστά και χρησιμοποιημένα μέτρα συσχέτισης, τα οποία παραμένουν αμετάβλητα κάτω από γνησίως αύξοντες μετασχηματισμούς, είναι το ρ_S του Spearman και το τ_K του Kendall, και τα δύο μετράνε μια μορφή εξάρτησης γνωστή ως εναρμόνιση . Τα μέτρα αυτά παίζουν σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές, καθώς η απόφαση για το πόσο καλή είναι η προσαρμογή μια σύζευξης σε ένα σύνολο δεδομένων παίρνεται με βάση αυτά τα δυο μέτρα. Επίσης, πρέπει να σημειωθεί πως, αυτά τα δυο μέτρα πάντα υπάρχουν, ενώ η ύπαρξη άλλων μέτρων όπως του συντελεστή συσχέτισης του Pearson δεν είναι εγγυημένη.

3.2.1 Μέτρο συμφωνίας cocordance

Αρχικά θα δοθεί ένας ορισμός για την διάταξη δύο συναρτήσεων copula στην διδιάστατη περίπτωση και στην συνέχεια θα διατυπωθεί ο ορισμός του μέτρου συμφωνίας (Scarsini, 1984).

Ορισμός 9: Έστω ότι έχουμε δύο διαφορετικές συναρτήσεις copula C_1, C_2. Τότε θα λέμε ότι η C_1 είναι μικρότερη από την C_2 $(C_1 < C_2)$ όταν ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$C_1(u,v) \leq C_2(u,v) \text{ για κάθε } (u,v) \in [0,1]^2$$

Ορισμός 10: (Nelsen, 2006) Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, M ένα μέτρο συσχέτισής τους και C η copula τους. Τότε θα λέμε πως το M είναι μέτρο συμφωνίας των X,Y και θα το συμβολίζουμε με $M_{x,y}$ ή M_C εάν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- Το $M_{x,y}$ ορίζεται για κάθε ζεύγος X,Y συνεχών τυχαίων μεταβλητών
- $-1 \leq M_{x,y} \leq 1$ με $M_{x,y} = 1, M_{x,-x} = -1$
- $M_{x,y} = M_{y,x}$
- Αν οι X,Y είναι ανεξάρτητες τότε $M_{x,y} = 0$
- $M_{-x,y} = M_{x,-y} = -M_{x,y}$

- Αν C_1, C_2 είναι συναρτήσεις copula τέτοιες ώστε $C_1 < C_2$ τότε $M_{C_1} < M_{C_2}$
- Αν $\{(X_{n,}Y_n)\}$ είναι μια ακολουθία συνεχών τυχαίων μεταβλητών με copulas C_n και αν η C_n συγκλίνει σημειακά στη C τότε $\lim_{n\to\infty} M_{C_n} = M_C$

3.2.2 Συμφωνία-ασυμφωνία

Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και από κοινού συνάρτηση κατανομής F.

Δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι σε συμφωνία, όταν μεγάλες (μικρές) τιμές της μίας τείνουν να συσχετιστούν με μεγάλες (μικρές) τιμές της άλλης. Αντίθετα, λέμε ότι είναι σε ασυμφωνία, όταν μεγάλες (μικρές) τιμές της μίας τείνουν να συσχετιστούν με μικρές (μεγάλες) τιμές της άλλης. Ακολουθεί ένας πιο ακριβής ορισμός για την έννοια της συμφωνίας που διατυπώνεται, στη συνέχεια, σύμφωνα με τον Nelsen (2006).

<u>Ορισμός 11</u>: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και (x_1, y_1) και (x_2, y_2) δύο ζεύγη των παρατηρούμενων τιμών τους. Τότε θα έχουμε συμφωνία των (x_1, y_1) και (x_2, y_2) όταν: $x_1 < x_2$ και $y_1 < y_2$ ή $x_1 > x_2$ και $y_1 > y_2$ ή εναλακτικά όταν $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$.

Ομοίως θα έχουμε ασυμφωνία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) όταν: : $x_1 < x_2$ και $y_1 > y_2$ ή $x_1 > x_2$ και $y_1 < y_2$ ή εναλακτικά όταν $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$.

3.2.3 Συντελεστής βαθμολογικής συσχέτισης (Rank Correlation)

Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν οι συντελεστές Rho του Spearman και Tau του Kendall όπου και οι δύο βασίζονται στην έννοια της συμφωνίας (concordance) και ασυμφωνίας (disconcordance) των τυχαίων μεταβλητών σύμφωνα με τον Nelsen (2006). Ένα πλεονέκτημα που έχουν και οι δύο συντελεστές σε σύγκριση με το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson, , είναι πως δεν εξαρτώνται από τις περιθώριες κατανομές.

3.2.4 Συντελεστής Rho του Spearman

Ο συντελεστής συσχέτισης Rho του Spearman, που συμβολίζεται με ρ_s, σύμφωνα με τον Nelsen (1991), προτάθηκε και πήρε το όνομά του από τον Charles Spearman το 1904 και βασίζεται στην έννοια της συμφωνίας και ασυμφωνίας. Όσα ακολουθούν διατυπώνονται σύμφωνα με τον Nelsen (2006).

Έστω (X_1, Y_1) (X_2, Y_2) (X_3, Y_3) ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με από κοινού συνάρτηση κατανομής F και τα X_1, X_2 , X_3 έχουν συνάρτηση κατανομής F_1, ενώ τα Y_1, Y_2 , Y_3 έχουν συνάρτηση κατανομής F_2. Τότε ο συντελεστής συσχέτισης ρ_s του Spearman ορίζεται να είναι ανάλογος με την πιθανότητα της συμφωνίας μείον την πιθανότητα της ασυμφωνίας για τα διανύσματα (X_1, Y_1) και (X_2, Y_3) (Kruskal, 1958) και ορίζεται να είναι ο ακόλουθος:

$$\rho_S(X,Y) = 3[P\{((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}].$$

Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στον παραπάνω ορισμό εξίσου το διάνυσμα (X_3, Y_2).Το διάνυσμα (X_1, Y_1) έχει από κοινού συνάρτηση κατανομής F, ενώ το διάνυσμα (X_2, Y_3) έχει από κοινού συνάρτηση κατανομής $F_1 F_2$ αφού τα X_2, Y_3 είναι ανεξάρτητα .

Στη συνέχεια ακολουθεί ένα θεώρημα (βλέπε,Nelsen,2006) το οποίο ορίζει τον συντελεστή συσχέτισης ρ_s του Spearman όταν έχουμε την συνάρτηση copula C των μεταβλητών X και Y. Η απόδειξη δίδεται χάριν πληρότητας και η σύνθεση της βασίστηκε στον Nelsen (2006).

Θεώρημα 3: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και με copula C. Τότε ο συντελεστής συσχέτισης ρ_s του Spearman ορίζεται ως:

$$\rho_S(X,Y) = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]dudv = 12E(UV) - 3$$

Απόδειξη: Ο συντελεστής συσχέτισης ρ_s του Spearman ορίζεται ως η συσχέτιση Pearson των U,V σύμφωνα με τους Trivedi and Zimmer(2007). Έτσι έχουμε:

$$\rho_S(X,Y) = \rho\big(F_1(X), F_2(\mathrm{Y})\big) = \rho(u,v) = \frac{Cov(U,V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{Var(U)Var(V)}}$$

Επισημαίνεται ότι οι U και V είναι ομοιόμορφες στο (0,1), και έτσι έχουν μέσες τιμές ίσες με 1/2 και διακυμάνσεις ίσες με 1/12.Επομένως ο συντελεστής συσχέτισης ρ_s του Spearman γίνεται

$$\rho_S(X,Y) = \frac{E(UV) - 1/2 \times 1/2}{\sqrt{1/12 \times 1/12}} = \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = 12E(UV) - 3$$

Σκοπός μας τώρα είναι ο υπολογισμός της ποσότητας E(UV) και η απόδειξη μας θα είναι πλήρης. Δεδομένου ότι, η συνάρτηση κατανομής των (U,V) είναι copula των (X,Y) έχουμε

$$E(UV) = \int_0^1\int_0^1 uvdC(u,v)$$

και έτσι η πιο πάνω σχέση γίνεται:

$$\rho_s(X,Y) = 12\int_0^1\int_0^1 uvdC(u,v) - 3$$
$$= 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3 = 12(\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 1/4)$$

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι η τιμή 1/4 είναι ίση με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^1\int_0^1 uvdudv$ καθώς,

$\int_0^1\int_0^1 uvdudv = \int_0^1 v(\int_0^1 udu)dv = \int_0^1 v[\frac{u^2}{2}]_0^1\, dv = \int_0^1 v\frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}[\frac{v^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Έτσι η παραπάνω σχέση για τον συντελεστή συσχέτισης ρ_s του Spearman παίρνει την μορφή,

$$\rho_s(X,Y) = 12(\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - \int_0^1\int_0^1 uvduv) = 12\int_0^1\int_0^1 [C(u,v) - uv]dudv$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης ρ_s του Spearman εκτός από τις ιδιότητες του μέτρου συμφωνίας, σύμφωνα με τον Nelsen (2006) ικανοποιεί τις επιθυμητές ιδιότητες των συντελεστών εξάρτησης. Δηλαδή:

- $\rho_s(X,\Upsilon) = \rho_s(\Upsilon,X)$ (συμμετρία).
- $-1 \leq \rho_s(X,\Upsilon) \leq 1$ (κανονικότητα).
- $\rho_s(X,\Upsilon) = 1$ εαν -ν $C = C^+$ εαν -ν υπάρχει τέλεια θετική συσχέτιση
- $\rho_s(X,\Upsilon) = -1$ εαν -ν $C = C^-$ εαν -ν υπάρχει τέλεια αρνητική συσχέτιση
- Το ρ_s παραμένει αμετάβλητο σε γνησίως μονότονους μετασχηματισμούς των μεταβλητών X,Y
- $\rho_s(X,\Upsilon) = 0$ εάν οι τυχαίες μεταβλητές X,Y είναι ανεξάρτητες

3.2.5 Συντελεστής συσχέτισης Tau του Kendall

Ο συντελεστής, που συμβολίζεται με **τ**, εισήχθη, σύμφωνα με τον Nelsen (1991), για πρώτη φορά από τον Fechner περίπου το 1900 και διατυπώθηκε εκ νέου από τον Kendall το 1938. Ο συντελεστής αυτός βασίζεται στην έννοια της συμφωνίας και ασυμφωνίας.

Έστω (X_1, X_2) και (X_2, Y_2) δύο ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα με από κοινού συνάρτηση κατανομής F και τα X_1, X_2 έχουν συνάρτηση κατανομής F_1, ενώ τα Y_1, Y_2 έχουν συνάρτηση κατανομής F_2. Τότε σύμφωνα με τον Nelsen (2006) ο συντελεστής συσχέτισης τ του Kendall ισούται με την πιθανότητα της συμφωνίας μείον την πιθανότητα της ασυμφωνίας και ορίζεται να είναι ο ακόλουθος:

$$\tau = \tau(X,Y) = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

Στη συνέχεια, βασιζόμενοι στο Nelsen (2006), παρουσιάζουμε ένα Θεώρημα σχετικό με τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης τ του Kendall ως συνάρτηση της copula των υπό θεώρηση τυχαίων μεταβλητών. Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του Nelsen (2006) και δίνεται χάριν πληρότητας.

Θεώρημα 4: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και με copula C. Τότε ο συντελεστής συσχέτισης τ του Kendall ορίζεται ως:

$$\tau(X,Y) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1 = 4E(C(u,v)) - 1$$

Απόδειξη: Έστω (X_1, X_2) και (X_2, Y_2) δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από μία συνεχή διδιάστατη κατανομή, με περιθώριες F_1, F_2 και copula C. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\tau = \tau(X,Y) &= P\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2) > 0\} - P\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2) < 0\}\\ &= P\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2) > 0\} - 1 + P\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2) > 0\}\\ &= 2[P\{(X_1-X_2)(Y_1-Y_2) > 0\}] - 1\\ &= 2[P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) + P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2)] - 1 \quad (1)\end{aligned}$$

Θα υπολογίζουμε τις πιθανότητες $P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2)$ και $P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2)$ χρησιμοποιώντας την copula C. Έστω $c(u,v) = \frac{d^2}{dudv}C(u,v)$ η πυκνότητα που αντιστοιχεί στην copula C και f(x,y) η από κοινού πυκνότητα των X,Y. Για τον υπολογισμό λοιπόν της πιθανότητας $P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2)$ έχουμε:

$$P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P(X_2 \leq x, Y_2 \leq y)\, f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\, f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(F_1(x), F_2(y))\frac{d^2}{dxdy}F(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C\big(F_1(x), F_2(y)\big)\frac{d^2}{dxdy}C(F_1(x), F_2(y))\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} C(u,v)\frac{d^2}{dudv}C(u,v)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}dxdy = \int_0^1\int_0^1 C(u,v)c(u,v)\, dudv$$

$$= \int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v)$$

Ομοίως,

$$P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_1 \leq x, Y_1 \leq y) f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y) f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(F_1(x), F_2(y)) \frac{d^2}{dxdy} F(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C\big(F_1(x), F_2(y)\big) \frac{d^2}{dxdy} C(F_1(x), F_2(y))\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(u,v) \frac{d^2}{dudv} C(u,v) \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} dxdy = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} C(u,v) c(u,v)\, dudv$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} C(u,v) dC(u,v)$$

Επομένως η σχέση (1) μετά τον υπολογισμό των πιθανοτήτων γίνεται:

$$\tau(X,Y) = 4 \int_{0}^{1} \int_{0}^{1} C(u,v) dC(u,v) - 1 = 4E\big(C(u,v)\big) - 1$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης τ του Kendall ικανοποιεί και αυτός τις επιθυμητές ιδιότητες των μέτρων εξάρτησης όπως αυτές διατυπώθηκαν νωρίτερα για το συντελεστή συσχέτισης ρ_s του Spearman. Παρά το γεγονός ότι και οι δύο συντελεστές βαθμολογικής συσχέτισης εκφράζουν την πιθανότητα συμφωνίας μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών, με copula C, οι τιμές τους συχνά διαφέρουν κατά πολύ. Σύμφωνα λοιπόν με τους Durbin and Stuart (1951) οι συντελεστές αυτοί συνδέονται μεταξύ τους με κάποιες ανισοτικές σχέσεις, οι οποίες διατυπώνονται στο ακόλουθο Θεώρημα, η απόδειξη του οποίου υπάρχει στο σύγγραμμα του Nelsen (2006) και στους Durbin and Stuart (1951).

Θεώρημα 5: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές και τ, ρ_s οι συντελεστές Tau του Kendall και Rho του Spearman, αντίστοιχα. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$$-1 \leq 3\tau - \rho_s \leq 1,$$

$$\frac{3\tau - 1}{2} \leq \rho_s \leq \frac{1 + 2\tau - \tau^2}{2}, \tau \geq 0 \; \kappa\alpha\iota$$

$$\frac{\tau^2 + 2\tau - 1}{2} \leq \rho_s \leq \frac{1 + 3\tau}{2}, \tau \leq 0$$

Βλέπουμε τα πλεονεκτήματα των συντελεστών βαθμολογικής συσχέτισης σε σχέση με τον συντελεστή γραμμικής συσχέτισης του Pearson :

- Ικανοποιούν όλες τις επιθυμητές ιδιότητες και δεν εξαρτώνται από τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής, αλλά μόνο από την copula C.
- Παραμένουν αναλλοίωτοι σε γνησίως μονότονους μετασχηματισμούς των τυχαίων μεταβλητών και όχι μόνο σε γραμμικούς.

Παρ' όλα αυτά, λόγω του ότι είναι συντελεστές συσχέτισης και όχι εξάρτησης, δεν μας παρέχουν όλες τις δυνατές πληροφορίες για τη δομή εξάρτησης και υπάρχουν περιπτώσεις που λόγω της πολυπλοκότητας των τύπων τους, δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός τους.

3.2.6 Συντελεστής εξάρτησης ουράς (Tail dependence)

Η ενότητα επικεντρώνεται στο συντελεστή εξάρτησης ουράς ο οποίος, γενικά μιλώντας, εκφράζει το βαθμό εξάρτησης δύο τυχαίων μεταβλητών στις ουρές της αντίστοιχης κατανομής. Ο συντελεστής εξάρτησης ουράς, όπως και ο συντελεστής βαθμολογικής συσχέτισης, εξαρτάται μόνο από την συνάρτηση copula των τυχαίων μεταβλητών. Είναι ένα μέτρο εξάρτησης που αφορά τις ουρές των κατανομών και μετρά την εξάρτηση των μεταβλητών που παίρνουν τιμές στο επάνω-δεξιά και στο κάτω-αριστερά τεταρτημόριο μιας διδιάστατης κατανομής. Ακολουθεί ο ορισμός του συντελεστή εξάρτησης ουράς σύμφωνα με τον Nelsen (2006).

Ορισμός 12: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα. Ο συντελεστής εξάρτησης της άνω ουράς λ_{ij}, είναι το όριο (αν αυτό υπάρχει) της δεσμευμένης πιθανότητας, ότι η Y είναι μεγαλύτερη του 100-οστού ποσοστημορίου της F_2 , δεδομένου ότι η X είναι μεγαλύτερη του 100-οστού ποσοστημορίου της F_1, καθώς το $t \to 1-$. Δηλαδή:

$$\lambda_{ij} = \lim_{t \to 1-} P[Y > F_2^{-1}(t) | X > F_1^{-1}(t)]$$

Εάν υποθέσουμε τώρα ότι C είναι η συνάρτηση copula X,Y τότε ο συντελεστής εξάρτησης της άνω ουράς λ_{ij} ορίζεται σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα (Nelsen,2006)

Θεώρημα 6: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και λ_{ij} ο συντελεστής εξάρτησης της άνω ουράς όπως ορίστηκε παραπάνω. Έστω επίσης η συνάρτηση copula C των X,Y. Αν το άνω όριο στον παραπάνω ορισμό υπάρχει τότε

$$\lambda_{ij} = 2 - \lim_{t \to 1-} \frac{1 - C(t,t)}{1 - t}$$

Απόδειξη: Για τον συντελεστή εξάρτησης της άνω ουράς λ_{ij} έχουμε

$$\lambda_{ij} = \lim_{t\to 1-} P[Y > F_2^{-1}(t) | X > F_1^{-1}(t)] = \lim_{t\to 1-} P\big[F_2\ (Y) > t | F_1\ (X) > t\big]$$

$$= \lim_{t\to 1-} P[V > t | U > t] = \lim_{t\to 1-} \frac{P[V > t, U > t]}{P[V > t]}$$

Η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης $\bar{C}$ δύο τυχαίων μεταβλητών που κατανέμονται ομοιόμορφα στο (0,1) με από κοινού συνάρτηση κατανομής τη copula C ορίζεται ως

$$\bar{C}\ (u, v) = P(U > u, V > v) = 1 - u - v + C(u, v)$$

Επομένως

$\lim_{t\to 1-} \frac{\bar{C}\ (t,t)}{P[U>t]} = \lim_{t\to 1-} \frac{1-2t+C(t,t)}{1-t} = \lim_{t\to 1-} \frac{2-2t+C(t,t)-1}{1-t} =$

$\lim_{t\to 1-} (\frac{2-2t}{1-t} + \frac{C(t,t)-1}{1-t}) = \lim_{t\to 1-} 2(\frac{1-t}{1-t}) + \lim_{t\to 1-} \frac{C(t,t)-1}{1-t} = 2 - \lim_{t\to 1-} \frac{1-C(t,t)}{1-t}$

Εάν, $\lambda_{ij} \in (0,1]$ θα λέμε ότι η copula C παρουσιάζει άνω εξάρτηση ουράς, ενώ αν $\lambda_{ij} = 0$, θα λέμε ότι η copula C παρουσιάζει άνω ανεξαρτησία ουράς.

Ο ορισμός που ακολουθεί αναφέρεται στο συντελεστή εξάρτησης κάτω ουράς και σύμφωνα με τον Nelsen (2006), διατυπώνεται ως εξής.

Ορισμός 13: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα. Ο συντελεστής εξάρτησης της κάτω ουράς λ_{ij}, είναι το όριο (αν αυτό υπάρχει) της δεσμευμένης πιθανότητας, ότι η Y είναι μικρότερη ή ίση του 100-οστού ποσοστημορίου της F_2 , δεδομένου ότι η X είναι μικρότερη ή ίση του 100-οστού ποσοστημορίου της F_1, καθώς το $t \to 1-$. Δηλαδή:

$$\lambda_L = \lim_{t\to 0+} P[Y \le F_2^{-1}(t) | X \le F_1^{-1}(t)]$$

Εάν υποθέσουμε τώρα ότι C είναι η συνάρτηση copula X,Y τότε ο συντελεστής εξάρτησης της άνω ουράς λ_L ορίζεται σύμφωνα με το ακόλουθο θεώρημα (Nelsen,2006)

Θεώρημα 7: Έστω X,Y δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F_1, F_2 αντίστοιχα και λ_L ο συντελεστής εξάρτησης της κάτω ουράς όπως ορίστηκε παραπάνω. Έστω επίσης η συνάρτηση copula C των X,Y. Αν το όριο στον παραπάνω ορισμό υπάρχει τότε

$$\lambda_L = \lim_{t\to 0+} \frac{C(t,t)}{t}$$

Απόδειξη: Για τον συντελεστή εξάρτησης της κάτω ουράς λ_L έχουμε

$$\lambda_L = \lim_{t\to 0+} P[Y \leq F_2^{-1}(t) | X \leq F_1^{-1}(t)] = \lim_{t\to 0+} P\big[F_2\ (Y) \leq t | F_1\ (X) \leq t\big]$$

$$= \lim_{t\to 0+} P[V \leq t | U \leq t] = \lim_{t\to 0+} \frac{P[V \leq t, U \leq t]}{P[V \leq t]} = \lim_{t\to 0+} \frac{C(t,t)}{t}$$

Εάν, $\lambda_L \in (0,1]$ θα λέμε ότι η copula C παρουσιάζει κάτω εξάρτηση ουράς, ενώ αν $\lambda_L = 0$, θα λέμε ότι η copula C παρουσιάζει κάτω ανεξαρτησία ουράς. Τέλος οι δύο παραπάνω συντελεστές είναι μη παραμετρικοί και εξαρτώνται από τη copula των X,Y.

4. Οικογένειες Copulas

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε τις ειδικές οικογένειες των Copulas. Πιο συγκεκριμένα θα ξεκινήσουμε με τις ελλειπτικές copula και τις υποκατηγορίες τους την γκαουσιανή (Gaussian) copula και την t-student copula. Στη συνέχεια θα επεκταθούμε στις αρχιμήδειες copula και τις οικογένειες Frank copula, Gumbel copula, Clayton copula. Στο τελευταίο σκέλος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τις Compound copulas και την μέθοδο των Marshal και Olkin.

4.1 Ελλειπτικές Copulas

Μια βασική κατηγορία συζεύξεων είναι οι ελλειπτικές (elliptical) copulas. Αποτελείται από την γκαουσιανή (Gaussian) copula και t-copula. Μπορούμε να πάρουμε εύκολα παραδείγματα από αυτές τις copulas .Ωστόσο ένα βασικό μειονέκτημα είναι ότι δεν μπορούν να γραφτούν σε κλειστές μορφές.

4.1.1 Gausian Copula

Η κανονική ή Gausian Copula είναι η σύζευξη της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής. Έστω **R** συμμετρικός, Θετικά ορισμένος πίνακας με diagR=1 και Φ_R η τυποποιημένη πολυδιάστατη κανονική κατανομή με πίνακα συσχετίσεων R.

Η πολυδιάστατη κανονική σύζευξη ορίζεται ως εξής:

$$C_R^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

για n=2 έχουμε:

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-R_{12}^2)^{1/2}} exp\left\{-\frac{s^2+t^2-2R_{12}}{2(1-R_{12}^2)}\right\} ds\, dt$$

Στην περίπτωση που οι δύο τυχαίες μεταβλητές u,v είναι ασυσχέτιστες, η κανονική σύζευξη παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$C_0^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} f_1(s) ds \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} f_2(t) dt = uv = \Pi(u, v)$$

4.1.2 t-student Copula

Η t-student copula είναι η σύζευξη της πολυδιάστατης t-student κατανομής. Έστω X ένα διάνυσμα με n-διάστατη t-student κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας, διάνυσμα μέσης τιμής μ (για ν>1) και πίνακα συνδιασπορών $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ (για ν>2). Έχουμε:

$$X^d = \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Z$$

Όπου $\mu \in R^n, S \sim x_\nu^2$ και το τυχαίο διάνυσμα $Z \sim N(0, \Sigma)$. Τα μ,S,Z είναι ανεξάρτητα. Η σύζευξη του διανύσματος X είναι η t-student copula με ν βαθμούς ελευθερίας. Η t-student copula μπορεί να γραφεί αναλυτικά:

$$C_{\nu,R}^t(u) = t_{\nu,R}^t(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))$$

Όπου:

- $R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, για i,j $\in \{1, \dots, n\}$
- Η $t_{\nu,R}^t$ είναι πολυδιάστατη συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $\frac{\sqrt{\nu}Y}{\sqrt{S}}, Y \sim N_n(0, \Sigma)$
- Οι τυχαίες μεταβλητές $S \sim x_\nu^2$ και το τυχαίο διάνυσμα Y είναι ανεξάρτητα.
- Οι t_ν είναι οι περιθώριες συναρτήσεις της $t_{\nu,R}^t$

Για n=2 η t-student copula παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$C_{\nu,R}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - R_{12}^2)^{1/2}} \left\{1 + \frac{s^2 + t^2 - 2R_{12}st}{v(1 - R_{12}^2)}\right\}^{-(v+2)/2} ds\, dt$$

Όπου R_{12} είναι ο γραμμικός συντελεστής συσχέτισης της διδιάστατης t-student κατανομής με ν βαθμούς ελευθερίας, αν ν>2.

Παρατηρούμε ότι ο τύπος της t-student copula είναι πανομοιότυπος με αυτόν της Gaussian copula αλλά έχει μια επιπλέων παράμετρο το ν. Η παράμετρος αυτή ελέγχει την εξάρτηση στα άκρα της κατανομής. Όταν η παράμετρος αυτή είναι μικρή τότε έχουμε εξάρτηση στα άκρα και ανεξαρτησία στο κέντρο της κατανομής. Αντίθετα όταν το ν παίρνει μεγάλες τιμές τότε έχουμε εξάρτηση στο κέντρο της κατανομής και η t-student συμπεριφέρεται ανάλογα με την της Gaussian copula.

4.2 Archimedean Copulas

Στην προηγούμενη ενότητα αναλύσαμε την οικογένεια των ελλειπτικών copula και αναφέραμε ότι η προσομοίωση τους είναι εξίσου εύκολη με την προσομοίωση των ελλειπτικών κατανομών . Παρόλα αυτά όμως τα elliptical copulas παρουσιάζουν αρκετά μειονεκτήματα. Κυρίως δεν μπορούν να παρουσιαστούν σε κλειστές μορφές και είναι περιορισμένες ως προς το να έχουν ακτινική συμμετρία. Σε πολλές χρηματοοικονομικές και ασφαλιστικές εφαρμογές παρουσιάζονται ισχυρές εξαρτήσεις μεταξύ μεγάλων τιμών στα κέρδη και τις απώλειες. Στην περίπτωση συγκεκριμένων ασυμμετριών δεν είναι δυνατή η μελέτη με την χρήση ελλειπτικών copula.

Στην παρούσα ενότητα θα αναλυθεί μια διαφορετική οικογένεια copula που καλούνται Αρχιμήδειες (Archimedean Copulas). Σε αντίθεση με τις ελλειπτικές copulas οι Αρχιμήδειες μπορούν να εκφραστούν σε κλειστές φόρμες-τύπους.. Παρουσιάζουν και αυτές κάποια μειονεκτήματα. Επειδή οι Archimedean Copulas δεν προέρχονται από τις πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών που παίρνουμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Sklar , για να επιβεβαιώσουμε την πολυδιάστατη μορφή των δισδιάστατων αρχιμήδειων copulas χρησιμοποιούμαι συγκεκριμένες μεθόδους. Επίσης στις αρχιμήδειες copulas παρουσιάζεται έλλειψη ελεύθερων παραμέτρων στους πίνακες συσχετίσεων διότι κάποιες τιμές εισάγονται εσκεμμένα ως ίσες. Στον αντίποδα όμως αυτών οι Archimedean Copulas κατασκευάζονται με μεγάλη ευκολία, έχουν πολλές οικογένειες συζεύξεων που προέρχονται από αυτές και ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητες.

Ορισμός 14: Έστω φ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, όπου $\varphi\colon [0,1] \to [0,\infty]$ με $\varphi(1) = 0$. Τότε η ψευδοαντίστροφη συνάρτηση της φ είναι η συνάρτηση $\varphi^{[-1]}\colon [0,\infty] \to [0,1]$ και ορίζεται ως εξής:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{[-1]} & ,0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & ,\varphi(0) \leq t \leq \propto \end{cases}$$

Επισημαίνετε εδώ ότι η συνάρτηση $\varphi^{[-1]}$ είναι συνεχής και φθίνουσα στο διάστημα [0,∞] και γνησίως φθίνουσα στο [0,φ(0)]. Επιπρόσθετα, για τη ψευδοαντίστροφη συνάρτηση ισχύουν τα παρακάτω:

- $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$, στο διάστημα [0,1]
- $\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) = \begin{cases} t & ,0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0) & ,\varphi(0) \leq t \leq \propto \end{cases}$*=min(t,φ(0)).*
- Αν $\varphi(0) = \infty$ τότε έχουμε ότι $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$

Θεώρημα 8: Έστω φ μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, όπου $\varphi: [0,1] \to [0, \infty]$ με $\varphi(1) = 0$ και $\varphi^{[-1]}$ η ψευδοαντίστροφη συνάρτηση της φ. Τότε η συνάρτηση $C[0,1]^2: [0, \infty] \to [0,1]$ που δίνεται από τον τύπο:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

είναι copula αν και μόνο αν η συνάρτηση φ είναι κυρτή.

Η απόδειξη του θεωρήματος έχει γίνει από τον Nelsen και χρησιμοποιείτε για να ορίσουμε τις αρχιμήδειες copulas.

Επομένως, τα copulas που έχουν την παραπάνω μορφή ονομάζονται Archimedean Copulas και η συνάρτηση f καλείται γεννήτορας τους. Αν φ(0)=∞, τότε έχουμε αρχιμήδεια Copula με αυστηρό γεννήτορα φ. Στην περίπτωση αυτή $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, και το Copula $C(u, v)$ θα ονομάζεται αυστηρή αρχιμήδεια σύζευξη.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $\varphi(1) = 1 - t$ για $t \in [0,1]$. Τότε η ψευδο-αντίστροφη της φ, $\varphi^{[-1]}(t) = 1 - t$ για $t \in [0,1]$ και $\varphi^{[-1]}(t) = 0$ για t>1. Άρα $\varphi^{[-1]}(t) = \max(1 - t, 0)$. Επίσης όπως αναφέραμε στο 2ο Κεφάλαιο $C(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$. Συνεπώς συμπεραίνουμε ότι το διδιάστατο κάτω φράγμα Fréchet-Hoeffding είναι αρχιμήδεια copula.

4.2.1 Οικογένεια Gumbel

Η οικογένεια Gumbel, γνωστή και ως Gumbel-Hougaard, παίρνει τη μορφή:

$$C_a(u,v) = exp\,(-[(-\,ln\,u)^a + (-\,ln\,v)^a]^{1/a})$$

όπου $\alpha \in [0,\infty)$. Ο γεννήτορας φ_α της οικογένειας Gumbel, είναι μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από $[0,1] \to [0,\infty]$ με $\varphi_a(1) = 0$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\varphi_a(t) = (-\ln t)^a$$

Ο γεννήτορας αυτός είναι αυστηρός, αφού $\varphi_a(0) = \infty$. Επιπλέον έχουμε ότι $C_1 = C^{\perp}$ και $C_\infty = C^+$. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θεωρήματα. Πιο συγκεκριμένα για το copula ανεξαρτησίας γνωρίζουμε ότι: $\varphi(t) = -\ln t$.

Επομένως,

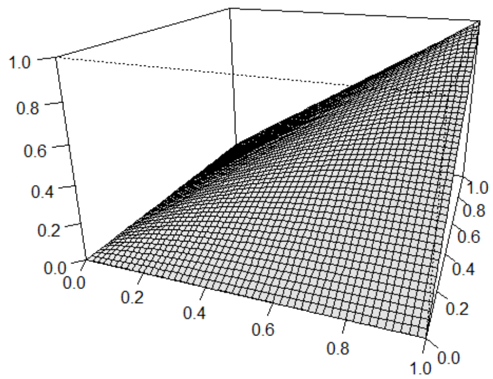
$$\frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)} = \frac{-\ln s}{-\frac{1}{t}} = tlns$$

και

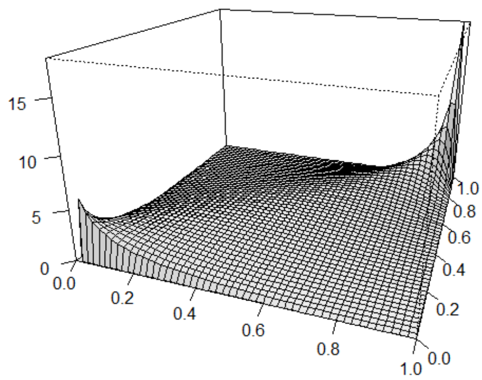
$$\lim_{\alpha\to 1^+} \frac{\varphi_a(s)}{\varphi'_a(t)} = \lim_{\alpha\to 1^+} \frac{(-\ln s)^a}{-\frac{a}{t}(-\ln t)^{a-1}} = \lim_{\alpha\to 1^+} \frac{t(-\ln s)^a}{-a(-\ln t)^{a-1}} = t\ln s$$

Εφόσον, $\lim_{\alpha\to 1^+} \frac{\varphi_a(s)}{\varphi'_a(t)} = t\ln s$ τότε $C_1 = C^{\perp}$.
Αντίστοιχα για το $C_\infty = C^+$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\varphi_a(s)}{\varphi'_a(t)} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{-t - \ln t}{a} = 0$$



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα συνάρτησης κατανομής Gumbel copula με α=2



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα συνάρτησης πυκνότητας Gumbel copula με α=2

4.2.2 Οικογένεια Clayton

Η οικογένεια Clayton, γνωστή και ως Clayton,Cook-Johnson, παίρνει τη μορφή:

$$C_a(u,v) = \max\left([u^{-a} + v^{-a} - 1]^{-\frac{1}{a}}, 0\right),$$

όπου $\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$. Ο γεννήτορας φ_α της οικογένειας Clayton, είναι :

$$\varphi_a(t) = \frac{t^{-a} - 1}{\alpha}$$

Ωστόσο, το Clayton Copula χρησιμοποιείται συνήθως για α>0. Τότε ο παραπάνω γεννήτορας είναι αυστηρός και η οικογένεια Clayton παίρνει τη μορφή:

$$C_a(u,v) = [u^{-a} + v^{-a} - 1]^{-\frac{1}{a}}$$

Επιπλέον έχουμε ότι $C_{-1} = C^-, C_\infty = C^+$, $C_0 = C^\perp$. Για το άνω και το κάτω όριο καθώς:

Για το κάτω φράγμα γνωρίζουμε ότι: $\varphi(t) = 1 - t$. Επομένως :

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)} = \frac{1-s}{-1} = s - 1$$

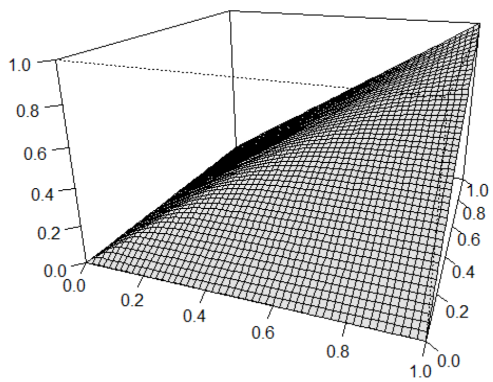
και

$$\lim_{\alpha \to 1^+} \frac{\varphi_a(s)}{\varphi'_a(t)} = \lim_{\alpha \to 1^+} \frac{\frac{s^{-a}-1}{a}}{(-s)^{a-1}} = \lim_{\alpha \to 1^+} \frac{s^{a+1}}{a}(s^{-a} - 1) = s - 1$$

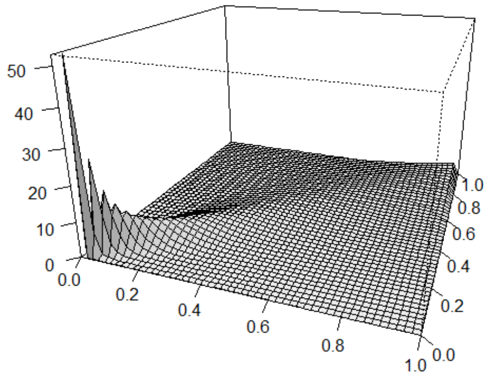
Εφόσον, $\lim_{\alpha \to 1^+} \frac{\varphi_a(s)}{\varphi'_a(t)} = \frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)} = s - 1$ τότε $C_{-1} = C^-$

Αντίστοιχα για το $C_\infty = C^+$ έχουμε:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\varphi_a(s)}{\varphi'_a(t)} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\frac{t^{-a}-1}{a}}{-t^{-a-1}} = \lim_{\alpha \to \infty} -\frac{t^{a+1}}{a}(t^{-a} - 1) = \lim_{\alpha \to \infty} -\frac{t - t^{a+1}}{a} = 0$$



Σχήμα 4.3: Διάγραμμα συνάρτησης κατανομής Claytonl copula με α=4



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα συνάρτησης πυκνότητας Claytonl copula με α=4

4.2.3 Οικογένεια Frank

Η οικογένεια Frank παίρνει τη μορφή:

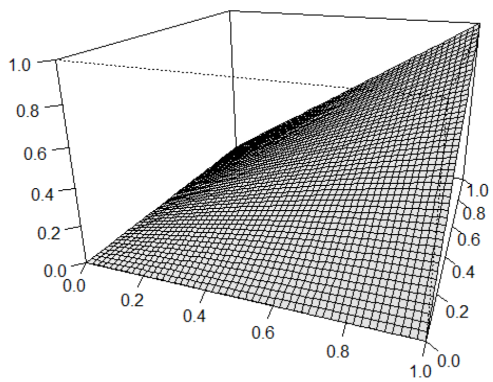
$C_a(u,v) = -\frac{1}{\alpha}\ln(1 + \frac{(e^{-au}-1)(e^{-av}-1)}{e^{-a}-1})$,

όπου $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ο γεννήτορας φ_α της οικογένειας Frank, είναι :

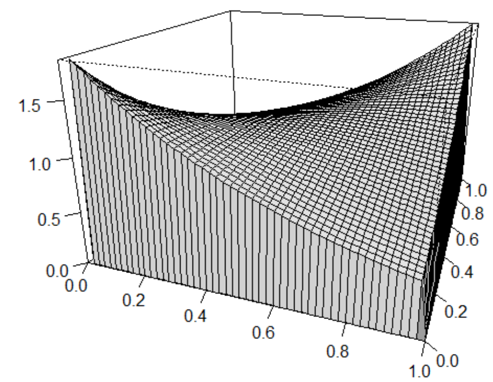
$$\varphi_a(t) = -\ln\frac{e^{-at}-1}{e^{-a}-1}$$

Η Frank copula είναι μία copula συμμετρική η οποία ικανοποιεί την ακτινική συμμετρία, $C = \hat{C}$. Επιπλέον έχουμε ότι $C_{-\infty} = C^-, C_\infty = C^+, C_0 = C^\perp$.

Σε αντίθεση με την Gumbel και την Clayton Copula, η Frank Copula επιτρέπει και αρνητική συσχέτιση, εφόσον ο συντελεστής μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $(-\propto ,0) \cup (0,\propto)$. Συνεπώς, δύναται θεωρητικά να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση αποτελεσμάτων με ισχυρή θετικά ή αρνητική συσχέτιση. Ωστόσο, όπως θα παρατηρήσουμε και στους πίνακες παρακάτω, η εξάρτηση των ουρών του είναι σχετικά ασθενής και η ισχυρότερη συσχέτιση είναι στο κέντρο της κατανομής, γεγονός που υποδηλώνει ότι το Frank Copula είναι το πλέον κατάλληλο για δεδομένα που εμφανίζουν ασθενή εξάρτηση ουράς.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα συνάρτησης κατανομής Frank copula με α=3/2



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα συνάρτησης πυκνότητας Frank copula με α=3/2

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ COPULA	**ΓΕΝΝΗΤΟΡΑΣ $\varphi_a(t)$**	**ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ (α)**	**COPULA $C_a(u,v)$**
Gumbel	$(-\ln t)^a$	$\alpha \in [0,\infty)$	$exp\,(-[(-\,ln\,u)^a + (-\,ln\,v)^a]^{1/a})$
Clayton	$\frac{t^{-a}-1}{\alpha}$	$\alpha \in [-1,\infty) \setminus \{0\}$	$\max\left([u^{-a} + v^{-a} - 1]^{-\frac{1}{a}}, 0\right)$
Frank	$-\ln\frac{e^{-at}-1}{e^{-a}-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{\alpha}\ln(1+\frac{(e^{-au}-1)(e^{-av}-1)}{e^{-a}-1})$

Πίνακας 1:Αρχιμήδειες Copulas και οι γεννήτορές τους

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ COPULA	**τ του Kendall**	**λ_U**	**λ_L**
Gumbel	$\frac{a-1}{a}$	$2-2^{\frac{1}{a}}$	0
Clayton	$\frac{a}{a+2}$	0	$2^{-\frac{1}{a}}$
Frank	$1-\frac{4}{a}(1-\frac{1}{a}\int_0^a \frac{t}{e-1}dt)$	0	0

Πίνακας 2:Αρχιμήδειες Copulas και τα μέτρα εξάρτησης-συσχέτισής τους

4.3 Compound Copulas

Τα Compound Copulas προέρχονται, σύμφωνα με τους Marshall και Olkin (1988), από μια γενική μέθοδο κατασκευής copulas, τη λεγόμενη μέθοδο σύνθεσης-μίξης (compounding method). Είναι εύκολο να καταλάβουμε τη χρησιμότητα της μεθόδου αυτής, αν σκεφτούμε πως οι σύνθετες-μεμιγμένες κατανομές (compound distributions), χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στην κατηγοριοποίηση-διαχείρηση των κινδύνων (risk classification-management), και ιδιαίτερα στη θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου. Επίσης, οι Marshall και Olkin (1988) έδειξαν πως με τη μέθοδο της σύνθεσης-μίξης (compounding method), μπορούν να δημιουργηθούν αρκετές σημαντικές οικογένειες Copulas.

Στη συνέχεια, θα δώσουμε ένα γενικό ορισμό για τις σύνθετες-μεμιγμένες κατανομές.

<u>Ορισμός 15:</u> Για κάθε παραμετρική οικογένεια κατανομών $F(\cdot|\theta)$, μπορούμε να θεωρήσουμε την παράμετρο θ ως την τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Θ με κατανομή G. Τότε $F(\cdot|\theta)$ είναι μια δεσμευμένη κατανομή δοθέντος Θ=θ και η αντίστοιχη μη δεσμευμένη κατανομή:

$$H(x) = \int F(x \mid \theta) dG(\theta)$$

είναι μια σύνθετη-μεμιγμένη κατανομή (compound distribution).

Αντίστοιχα, για ένα δείγμα $X_1, .. X_n$ ισχύει:

$$H(x) = \int \Pi F_i(x_i \mid \theta) dG(\theta),$$

όπου η G και κάθε F_i είναι μια μονομεταβλητή συνάρτηση κατανομής.

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής σύνθετων-μεμιγμένων κατανομών στην χρηματοοικονομική για την εξαγωγή μια copula με ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Παράδειγμα: Έστω χαρτοφυλάκιο X ζημιών τον κίνδυνο του οποίου κατηγοριοποιούμαι με την χρήση της παραμέτρου *γ*. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο *γ* συναρτήσει της παραμέτρου *γ*:

$$P(X \leq x \mid \gamma) = 1 - e^{-\gamma x}$$

Εάν η παράμετρος *γ* ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους (*α*,*λ*), τότε:

$$F(x) = \int_0^{\propto} P(X \leq x \mid \gamma) \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma^{\alpha-1} e^{-\lambda\gamma} d\gamma$$

$$= \int_0^{\propto} (1 - e^{-\gamma x}) \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma^{\alpha-1} e^{-\lambda\gamma} d\gamma = 1 - \int_0^{\propto} e^{-\gamma x} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \gamma^{\alpha-1} e^{-\lambda\gamma} d\gamma$$

$$= 1 - (1 + \frac{x}{\lambda})^{-\alpha}$$

Συνεπώς η F ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους (*α*,*λ*). Αντίστοιχα η περιθώρια κατανομής της είναι η $f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}$.

Στηριζόμενοι στην υπόθεση τώρα , δοθέντος της κατηγορίας κινδύνου *γ,* τα X_1, X_2 είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα και εντάσσονται στην ίδια κατηγορία κινδύνου *γ*. Τότε συμπεραίνουμε ότι το *γ* προκαλεί εξάρτηση. Άρα η συνάρτηση κατανομής F παίρνει τη μορφή:

$F(x_1, x_2) = 1 - P(X_1 > x_1) - P(X_2 > x_2) + P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = 1 - \left(1 + \frac{x_1}{\lambda}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{x_1 + x_2}{\lambda}\right)^{-\alpha} = F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1 + [\left(1 - F_1(x_1)\right)^{-\frac{1}{a}} + (1 +$
$F2x2-1a-1]-a$

Συνεπώς για $v = F_2(x_2)$ και $u = F_1(x_1)$ μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση copula :

$$C(u, v) = u + v - 1 + [(1 - u)^{-\frac{1}{a}} + (1 + v)^{-\frac{1}{a}} - 1]^{-a}$$

και να εκφράσουμε τη διμεταβλητή συνάρτηση κατανομής ως:

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

4.3.1 Μέθοδος των Marshal και Olkin (1988)

Η μέθοδος των Marshal και Olkin χρησιμοποιεί το μετασχηματισμό Laplace και την αντίστροφή του για την κατασκευή συναρτήσεων copula. Υπενθυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της θετικής τυχαίας μεταβλητής *γ* ορίζεται ως:

$$\tau(s) = E_\gamma(e^{-s\gamma}) = \int_0^\infty e^{-st} dF_\gamma(t)$$

όπου F_γ είναι η συνάρτηση κατανομής της *γ* . Επίσης, είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση (moment generating function, mgf), που εκτιμάται στο -*s* . Γνωρίζοντας λοιπόν την $\tau(s)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατανομή.

Η μέθοδος των Marshall και Olkin για την κατασκευή Copulas, περιγράφεται ως εξής:

Έστω X_ι μια τυχαία μεταβλητή. Δοθέντος μίας θετικής λανθάνουσας μεταβλητής γ_ι , η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής, ορίζεται ως εξής:

$$H_i(x|\gamma_\iota) = H_i(x)^{\gamma_\iota}$$

όπου H_i είναι μια βασική συνάρτηση κατανομής για i=1,2,...n

Οι Marshall και Olkin, θεώρησαν πολυμεταβλητές συναρτήσεις κατανομής, της μορφής

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = E[K(H_1(x_1)^{\gamma_1}, H_2(x_2)^{\gamma_2}, \dots, H_n(x_n)^{\gamma_n})]$$

όπου K είναι μια συνάρτηση κατανομής με ομοιόμορφες περιθώριες και η μέση τιμή υπολογίζεται για τα $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Ας θεωρήσουμε τώρα, πως όλες οι λανθάνουσες μεταβλητές είναι ίσες μεταξύ τους. Τότε, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί σε ανεξάρτητες περιθώριες, οι Marshall και Olkin (1988) έδειξαν ότι:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E(H_1(x_1)^{\gamma}, H_2(x_2)^{\gamma}, \dots, H_n(x_n)^{\gamma}) \\ &= \tau(\tau^{-1}\big(F_1(x_1)\big) + \dots + \tau^{-1}(F_n(x_n))) \end{aligned}$$

όπου F_i είναι η i-οστή περιθώρια κατανομή της F και τ ο μετασχηματισμός Laplace της γ.

Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να διακρίνουμε πως η αντίστροφη συνάρτηση τ^{-1} χρησιμεύει ως γεννήτρια συνάρτηση για μία αρχιμήδεια Copula. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής να μπορεί να δοθεί από τη μορφή ενός τέτοιου Copula. Για να γίνει πιο κατανοητό αυτό, θα παρουσιάσουμε ένα θεώρημα που βρίσκεται στο βιβλίο του Joe (1997).

<u>Θεώρημα 9</u>: Έστω M μια μονομεταβλητή συνάρτηση κατανομής μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής και τ, ο μετασχηματισμός Laplace της. Τότε, θεωρώντας μια μονομεταβλητή συνάρτηση κατανομής F, υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση κατανομής G, τέτοια ώστε:

$$\bar{F}(x) = \int_0^{\infty} \bar{H}^a(x) dM(a) = \tau(-\ln \bar{H}(x))$$

έτσι ώστε: $\bar{H} = \exp\{-\tau^{-1}(\bar{F})\}$.

Στη συνέχεια, αν θεωρήσουμε τη διμεταβλητή συνάρτηση κατανομής $F(F_1, F_2)$. Για j=1,2 έχουμε $G_j = \exp\{-\tau^{-1}(F_j)\}$. Τότε θα ισχύει:

$$F(F_1, F_2) = \int_0^{\infty} G_1^a G_2^a \, dM(a) = \tau(-\ln G_1 - \ln G_2) = \tau(\tau^{-1}(F_1) + \tau^{-1}(F_2))$$

Είναι φανερό λοιπόν πως η αντίστροφη συνάρτηση ενός μετασχηματισμού Laplace αποτελεί ένα σημαντικό τύπο γεννήτριας για τις αρχιμήδειες copula οι οποίες είναι της μορφής:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

Συνδέοντας τώρα το παραπάνω θεώρημα με τη μέθοδο των Marshall και Olkin, έχουμε:

$$\tau[-\ln H_i(x)] = Eexp\{-[-\,ln\, H_i(x)]\gamma\} = F_i(x)$$

έτσι ώστε:

$$H_i(x) = \exp\{-\tau^{-1}[F_i(x)]\}$$

Με τον τρόπο αυτό, χρησιμοποιώντας την περιθώρια κατανομή και την κατανομή της λανθάνουσας τυχαίας μεταβλητής, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βασική συνάρτηση κατανομής $H_i(x)$.

Στη συνέχεια, ακολουθεί ένας πίνακας, ο οποίος παρέχει τη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace, για τους αντίστροφους γεννήτορες των Gumbel, Clayton και Frank Copulas.

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ COPULA	**ΓΕΝΝΗΤΟΡΑΣ** $\boldsymbol{\varphi_a(t)}$	**ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ (α)**	**Μετασχηματισμός Laplace** $\boldsymbol{\tau(s) = \varphi^{-1}(s)}$	**Κατανομή μετασχηματισμού Laplace**
Gumbel	$(-\ln t)^a$	$\alpha \in [0, \infty)$	$\exp\left(-s^{\frac{1}{a}}\right)$	Θετική Σταθερά
Clayton	$\dfrac{t^{-a}-1}{\alpha}$	$\alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$	$(1+s)^{\frac{1}{a}}$	Γάμμα κατανομή
Frank	$-\ln \dfrac{e^{-at}-1}{e^{-a}-1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$-\dfrac{1}{a}\ln[1+e^s(e^{-1}-1)]$	Κατανομή Λογαριθμικής σειράς θετικών ακέραιων μεταβλητών

<u>Πίνακας 3</u>: Archimedean Copulas και Μετασχηματισμός Laplace

Γενικότερα, ο μετασχηματισμός Laplace έχει καλά ορισμένες αντίστροφες. Παραπάνω, ορίσαμε ως $\tau(s)$ το μετασχηματισμό Laplace μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής γ. Επομένως για την Gumbel copula η τυχαία μεταβλητή γ είναι μία $1/_{\alpha}$ θετική σταθερά, για την Clayton copula είναι μια κατανομή Gamma(1, $1/_{\alpha}$) και για τη Frank copula είναι μια τυχαία μεταβλητή λογαριθμικής σειράς που ορίζεται από όλους τους φυσικούς αριθμούς.

5. Εφαρμογές των Copula στα οικονομικά.

Αν και η έννοια των copula εισήχθη από το 1959, δεν είναι μέχρι τα τελευταία χρόνια που έχουμε πρακτική εφαρμογή στον τομέα των οικονομικών και ιδιαίτερα στα χρηματοοικονομικά. Οι copula χρησιμοποιήθηκαν, αρχικά, σε ασφαλιστικά δεδομένα και στην συνέχεια βρήκαν πεδίο εφαρμογής στα οικονομικά. Στα λίγα αυτά χρόνια που οι copula έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται, έχουν αποδειχθεί πολύτιμο εργαλείο ανάλυσης και υπάρχει σημαντική ανάπτυξη των μεθόδων τους στα χρηματοοικονομικά ώστε ήδη να έχει δημιουργηθεί βιβλιογραφία.

Εν συνεχεία θα αναλύσουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι copula και ποια η χρησιμότητα των εφαρμογών τους στα χρηματοοικονομικά. Πιο συγκεκριμένα θα παραθέσουμε τρία πολύ βασικά ζητήματα των χρηματοοικονομικών στα οποία χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις copula. Το πρώτο είναι η μη-κανονικότητα των αποδόσεων, το οποίο έχει ως συνέπεια η προσέγγιση μέσω της κλασσικής μεθόδου (μέθοδος των Black και Scholes) να παρουσιάζει μεγάλη απόκλιση στα αποτελέσματα της σε σχέση με αυτά που παρατηρούνται στην πράξη και η εφαρμογή της να αντιμετωπίζεται πλέον με μεγάλο σκεπτικισμό. Το δεύτερο είναι το θέμα της μη τέλειας αγοράς (incomplete market), η οποία φέρνει στην επιφάνεια νέες διαστάσεις στις επιπλοκές στην τιμολόγηση-αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων. Το τρίτο είναι ο πιστωτικός κίνδυνος (credit risk), λόγω του οποίου έχουν αναπτυχθεί πολλά προϊόντα και τεχνικές για την τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων.

Η αυξημένη χρήση των συναρτήσεων copula είναι απόρροια της τεράστιας ανάπτυξης των χρηματοοικονομικών προϊόντων την δεκαετία του 90 που είχε ως αποτέλεσμα την μαζική χρήση τους με συνέπεια την αύξηση της πολυπλοκότητας τους και της δυσκολίας υπολογισμού τους και της δημιουργίας προβλέψεων. Το φαινόμενο αυτό δημιούργησε την ανάγκη για εισαγωγή νέων εργαλείων ανάλυσης, το κενό δύναται να καλύψουν οι συναρτήσεις copula χάρη στις ιδιαίτερα χρήσιμες ιδιότητές τους. Το ζητούμενο είναι να παρατηρήσουμε πώς οι συναρτήσεις copula βρίσκουν εφαρμογή την αντιμετώπιση τέτοιων ζητημάτων. Οι τεχνικές για την τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων και για την μέτρηση του κινδύνου έχουν τι βάσεις τους στην θεωρίας πιθανοτήτων. Οι συναρτήσεις copula μας δίνουν έναν εύχρηστο τρόπο για να παρουσιάσουμε πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών, οι οποίες έχουν μεγάλη εφαρμογή στα οικονομικά-χρηματοοικονομικά.. Η βασική αλλαγή, στην οποία οφείλεται η ανακάλυψη των μεθόδων copula στα χρηματοοικονομικά έχει να κάνει με την υπόθεση των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προϊόντων. Παλαιότερα η χρήση της κανονικής κατανομής ήταν η σύνηθες υπόθεση για τις αποδόσεις και τα μοντέλα τους. Μάλιστα, η σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία βασίστηκε στο γεγονός ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά τους. Στον τομέα της τιμολόγησης, η υπόθεση αυτή οδήγησε στο υπόδειγμα των Black και Scholes και η ίδια υπόθεση είναι αυτή πάνω στην οποία βασίστηκαν οι περισσότερες μέθοδοι της διοίκησης κινδύνου. Τα τελευταία χρόνια υπάρχει έντονη αμφισβήτηση της υπόθεσης της κανονικότητας λόγω των δεδομένων που παρατηρούνται αλλά και από την πραγματικότητα της αγοράς. Αυτός είναι ένας λόγος για τον οποίο τα τελευταία χρόνια βλέπουμε να αναπτύσσονται προϊόντα τα οποία θεωρούν μη κανονικές αποδόσεις, με πιο γνωστό από αυτά τα δικαιώματα vanilla (vanilla options). Το γεγονός της μη κανονικότητας θα ήταν πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστεί χωρίς τη χρήση των συναρτήσεων copula.

5.1 Παρούσες αξίες γενικών χρηματικών ροών

Θεωρούμε μια γενική σειρά καθορισμένων πληρωμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ σε χρόνους $1,2,..,n$ που θετική αρνητική . Η παρούσα αξία (present value) για αυτή τη χρηματική ροή δίνεται από τον τύπο:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-Y(i)}$$

όπου οι στοχαστικές μεταβλητές $Y(i) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_i$ και οι μεταβλητές Y_i είναι τα στοχαστικά συνεχή σύνθετα ποσοστά απόδοσης κατά την περίοδο [i-1,i]. Οι τυχαίες Y_i είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κανονική και οι τιμές ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή. Για τις παραμέτρους της κατανομής χρησιμοποιούμαι:

$\mu_i = E[Y_i], \sigma_i^2 = Var[Y_i], \mu_{(i)} = E[Y(i)] = \sum_{j=1}^{i} \mu_j$ και $\sigma_{(i)}^2 = Var[Y_i] = \sum_{j=1}^{i} \sigma_j^2$

Σε αντίθεση με τα Y_i, στις μεταβλητές $Y(i)$ επομένως και στις προεξοφλημένες πληρωμές $a_i e^{-Y(i)}$ της χρηματικής ροής παρατηρείται αλληλεξάρτηση. Αυτό καθιστά αδύνατο τον υπολογισμό της κατανομής του αθροίσματος S. Για τον λόγο αυτό οι Kaas, Dhaene και Goovaerts εισήγαγαν την χρήση ενός αθροίσματος ,προς αντικατάσταση του S, στο οποίο οι περιθώριες συναρτήσεις των συνιστωσών θα είναι οι ίδιες όπως προηγουμένως αλλά διαφοροποιείται η δομή εξάρτηση. Το νέο αυτό άθροισμα ονομάζεται κυρτό άνω όριο και ακολουθεί τον τύπο :

$$S_u = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\mu_{(i)} + sign(a_i)\sigma_{(i)}\Phi^{-1}(U)}$$

Όπου U είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1) και Φ η τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Σε πολλές χρηματοοικονομικές εφαρμογές παρατηρείται το πρόβλημα εύρεσης και ανάλυσης μιας στοχαστικής ποσότητας. Αυτό οφείλεται στην εξάρτηση των συνιστωσών των ποσοτήτων αυτών. Στο πρόβλημα της εκτίμησης των χρηματικών ροών οι μεταβλητές *Y(i)* είναι εξαρτημένες. Η μέθοδος της αντικατάστασης του αθροίσματος έχει τις βάσεις της στη κυρτή διάταξη (convex order) και τον τρόπο με τον οποίο αυτή επηρεάζει την δομή εξάρτησης μεταξύ των συνιστωσών του αρχικού αθροίσματος.

Γενικά μια μεταβλητή W καλείται άνω όριο της V στη τάξη κυρτότητας αν:

$E[u(V)] \leq E[u(W)]$ για κάθε κυρτή συνάρτηση $u: R \to R$.

Επειδή οι κυρτές συναρτήσεις παίρνουν τις μεγαλύτερες τιμές στις ουρές, η W παίρνει πιο ακραίες τιμές σε σχέση με την V και για αυτό η W είναι πιο «επικίνδυνη».

$E[u(-V)] \geq E[u(-W)]$ για κάθε κοίλη συνάρτηση $u: R \to R$.

Γενικά προτιμάται μια απώλεια V από μια απώλεια W και αυτό συνεπάγεται η W να είναι πιο «επικίνδυνη».

$E[u(V)] = E[u(W)]$ και $E[(V-k)_+] \leq E[(W-k)_+]$ για κάθε τιμή του k.

Οι οικονομικές απώλειες που υπερβαίνουν μια διατήρηση τιμής k, είναι πάντοτε μεγαλύτερες για W παρά για την V, αυτό καθιστά την W πιο «επικίνδυνη».

Συνεπώς η αντικατάσταση μιας τυχαίας V μεταβλητής με άγνωστη κατανομή με μια μεταβλητή W με γνωστή κατανομή αλλά μεγαλύτερη στην τάξη κυρτότητας είναι μια σωστή στρατηγική.

Παράδειγμα: Έστω ένα άθροισμα συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών :

$$V = \varphi_1(X_1) + \varphi_2(X_2) + \cdots + \varphi_n(X_n)$$

Όπου οι συναρτήσεις $\varphi_t: R \to R$ είναι όλες αύξουσες ή φθίνουσες. Η μεταβλητή $W = \varphi_1(F_{X_1}^{-1}(U)) + \varphi_2(F_{X_2}^{-1}(U)) + \cdots + \varphi_n(F_{X_n}^{-1}(U))$ όπου U μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, ορίζεται σαν το πάνω όριο στη τάξη κυρτότητας, δηλαδή $V \leq_{CX} W$. Η F_{X_j} είναι η συνάρτηση κατανομής της X_j, $F_{X_j} = P(X_j \leq x)$ και η

$F_{X_j}^{-1}(p) = \inf\left\{x \in R: F_{X_j}(x) \geq p\right\}, p \in [0,1]$ η αντίστροφη συνάρτηση της F.

Η εφαρμογή της θεωρίας έχει ως εξής , χωρίζουμε την παρούσα αξία των ροών $S = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-Y(i)}$ σε δύο μέρη αναλόγως από το εάν η πληρωμή είναι θετική ή αρνητική . Έχουμε $S = S^+ - S^-$ όπου:

$S^+ = \sum_{i=1}^{n}(a_i)_+ e^{-Y(i)}$ *και* $S^- = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)_+ e^{-Y(i)}$ με $(a_i)_+ = \max(a_i, 0)$

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής των S^+, S^- δίνεται από τον τύπο:

$$H(s^+, s^-) = P[S^+ \leq s^+, S^- \leq s^-]$$

Τα άνω όρια των S^+, S^- δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

$$S_u^+ = \sum_{i=1}^{n}(a_i)_+ \exp\left(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)}\Phi^{-1}(U_1)\right) \ \textit{και}$$

$$S_u^- = \sum_{i=1}^{n}(-a_i)_+ \exp\left(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)}\Phi^{-1}(U_2)\right)$$

Όπου U_1, U_2 τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1) .

Επισημαίνεται ότι : $S_u^+ - S_u^- \leq_{CX} S_U$

Για τις συναρτήσεις κατανομών των S^+, S^- δίνονται :

$$F_{S_u^+}(s) = P(S_u^+ \leq s) = \Phi(v_s)$$

$$F_{S_u^-}(s) = P(S_u^- \leq s) = \Phi(w_s)$$

Όπου v_s, w_s ορίζονται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i)_+ \exp\left(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)}v_s\right) = s$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-a_i)_+ \exp\left(-\mu_{(i)} + \sigma_{(i)} w_s\right) = s$$

Σε αυτό το στάδιο για την σύνδεση των κατανομών των S^+, S^- με την από κοινού κατανομή χρησιμοποιούμαι τις συναρτήσεις copula. Θα κατασκευάσουμε μια copula $C(u, v; \hat{\rho}_s)$ όπου $\hat{\rho}_s$ είναι η εκτιμώμενη συσχέτιση των S^+, S^-. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής παίρνει τη μορφή

$$H(s^+, s^-) \approx C(F_{S_u^+}(s^+), F_{S_u^-}(s^-); \hat{\rho}_s)$$

Στην μελέτη των Goovaerts, De Schepper, Hua, Darkiewicz and Vyncke (2005), 'On the Use of Copulas for Calculating the Present Value of a General Cash Flow' με την χρήση της Gaussian copula έδειξαν ότι το παραπάνω μοντέλο έχει μεγάλη ακρίβεια στην προσέγγιση της κατανομής των χρηματικών ροών.

5.2 Risk Management - Value at Risk

Στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά και στη Διοίκηση κινδύνου-Risk Management, η αξία σε κίνδυνο- VaR είναι ένα ευρέως διαδεδομένο μέτρο εκτίμησης του κινδύνου των απωλειών ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου. Από την πληθώρα των μεθόδων που υπάρχουν για τον υπολογισμό του VaR, οι πιο διαδεδομένες είναι η ιστορική προσομοίωση, η μέθοδος διασποράς-συνδιασποράς (variance-covariance) και η προσομοίωση Monte Carlo. Ενώ η ιστορική προσομοίωση δεν βασίζεται σε συγκεκριμένες υποθέσεις για την συμπεριφορά των παραγόντων κινδύνου, η μέθοδος variance-covariance και η Monte Carlo προσομοίωση υποθέτουν κάποιου είδους κανονικής κατανομής για τους παράγοντες κινδύνου. Συνεπώς η δομή εξάρτησης μεταξύ διαφόρων παραγόντων κινδύνου φαίνεται από την συσχέτιση μεταξύ αυτών των παραγόντων. Η μελέτη της συσχέτισης όμως κρύβει παγίδες που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε αναξιόπιστες εκτιμήσεις του VaR ενός χαρτοφυλακίου. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις copula που μπορούν να περιγράψουν τις εξαρτήσεις μεταξύ δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών που ακολουθούν περιθώριες κατανομές. Το Value-at-Risk ενός χαρτοφυλακίου προσδιορίζεται από την πολυδιάστατη κατανομή των αυξήσεων των παραγόντων κινδύνου. Αυτή η κατανομή μπορεί να μοντελοποιηθεί με τη βοήθεια των copula όπου οι παράμετροι των copula δεν παραμένουν αναγκαστικά σταθεροί στο χρόνο.

Σε ένα χρόνο t ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από d μονάδες μετοχικών κεφαλαίων $w = (w_1, .., w_d)^T$ με τιμές $S_t = (S_{1,t}, .., S_{d,t})^T$ και λογαριθμικές τιμές $Z_t = \ln S_t$ έχει αξία:

$$V_t = \sum_{j=1}^{d} w_j e^{Z_{j,t}}$$

Η συνάρτηση κερδών και απωλειών (P&L function) ορίζεται ως $L_{t+1} = (V_{t+1} - V_t)$. Ορίζουμε $X_{t+1} = (Z_{t+1} - Z_t)$ τον χρόνο προσαύξησης των παραγόφων κινδύνου στο χρονικό διάστημα t,t+1. Η συνάρτηση P&L γράφεται ως εξής:

$$L_{t+1} = \sum_{j=1}^{d} w_j S_{j,t} (e^{X_{j,t+1}} - 1)$$

Το VaR υπολογίζεται ως το α-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής F_L της συνάρτησης P&L

$$VaR = F_L^{-1}(a)$$

Η μονοδιάστατη κατανομή F_L εξαρτάται από την d-διάστατη κατανομή F_X. Με την χρήση των copula οι περιθώριες κατανομές F_{X_j} από κάθε μονοδιάστατη προσαύξηση μπορούν να μοντελοποιηθούν ξεχωριστά και εν συνεχεία να τις συνδέσουμε στην πολυδιάστατη κατανομή F_X.

Η διαδικασία της εκτίμησης του VaR με την χρήση Copula βασισμένο σε ένα δείγμα $\{X_t\}_{t=1}^{T}$ αποτελείτε από τα παρακάτω βήματα:

- Προσδιορισμός των περιθωρίων συναρτήσεων $F_{X_j}(x_j)$
- Προσδιορισμός της συνάρτησης copula $C(u_1, .. u_d; \theta)$
- Εκτίμηση της παραμέτρου εξάρτησης θ της C
- Δημιουργία δεδομένων $X_{T+1} \sim C(u_1, .. u_d; \theta)$
- Δημιουργία ενός δείγματος απωλειών $L_{T+1}(X_{T+1})$ του χαρτοφυλακίου
- Εκτίμηση του $\widehat{VaR}_{T+1}$ που είναι το εμπειρικό ποσοστιαίο σημείο $\hat{\alpha}$ σε μία βαθμίδα α του δείγματος απωλειών $L_{T+1}(X_{T+1})$

Για την copula που ανήκει σε μια παραμετρική οικογένεια $C = \{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ και για μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές $F_{X_j}(x_j; \delta_j)$ η πυκνότητα του X δίνεται από τον τύπο:

$$f(x_1, .., x_d; \delta_1, .., \delta_d, \theta) = c\{F_{X_1}(x_1; \delta_1), \dots, F_{X_d}(x_d; \delta_d); \theta\} \prod_{j=1}^{d} f_j(x_j; \delta_j)$$

Όπου $c(u_1, .., u_d) = \frac{d^d C(u_1, .., u_d)}{du_1 \dots du_d}$

Βλέπουμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση η χρήση των συναρτήσεων copula συντελεί στην δόμηση ενός πιο ακριβούς και αποτελεσματικού μοντέλου εκτίμησης του VaR.

5.3 Credit and Basket Derivatives

Τα πιστωτικά παράγωγα (credit derivatives) είναι τα χρηματοοικονομικά εργαλεία των οποίων τα κέρδη συνδέονται με κάποιο τρόπο με τη μεταβολή της πιστωτικής ποιότητας ενός ή περισσοτέρων πιστοληπτών. Στόχο έχουν την μεταβίβαση του πιστωτικού κινδύνου ενός βασικού μέσου. Οι συναλλαγές αυτές συνδέουν δύο αντισυμβαλλόμενους, τον πωλητή του πιστωτικού κινδύνου (ή αγοραστή προστασίας) και τον αγοραστή του κινδύνου (ή πωλητή προστασίας). Τα πιστωτικά παράγωγα χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες. Τις ανταλλαγές ολικής απόδοσης (total return swaps), τα προϊόντα πιστωτικού ανοίγματος (credit spread) και τα προϊόντα πιστωτικής αθέτησης (credit default products). Τα προϊόντα πιστωτικής αθέτησης χωρίζονται σε τρεις υποκατηγορίες: τις ανταλλαγές πιστωτικής αθέτησης (credit default swaps), τα δικαιώματα πιστωτικής αθέτησης (credit default options) και τις συμφωνίες αποζημιώσεων (indemnity agreements). Τα τελευταία 10 χρόνια παρουσιάζεται η αύξηση των "χαρτοφυλακίων πιστωτικών παραγώγων" που είναι τα basket default swap και τα CDO (collateralized debt obligation). Οι ανταλλαγές πιστωτικής αθέτησης (CDS) είναι ιδιωτικές συμβάσεις μεταξύ δύο μερών πάνω σε ένα «στοίχημα» για την πτώχευση, αθέτηση υποχρέωσης ή αναδιάρθρωση του χρέους ενός εκδότη. Τα CDO είναι μια «δεξαμενή» από δανειακές συμβάσεις που μεταβιβάζονται σε μια νομική οντότητα ειδικού σκοπού η οποία στη συνέχεια εκδίδει τίτλους με διαφορετική προτεραιότητα αποζημίωσης σε περίπτωση δυσκολίας τήρησης των υποχρεώσεων.

Στην περίπτωση των credit default swap ο αγοραστής προστασίας θέλει να θωρακιστεί από οποιαδήποτε γεγονός είναι δυνατόν να επηρεάσει την πιστωτική ικανότητα του οφειλέτη- κατόχου του βασικού μέσου. Αυτό αποκαλείται πιστωτικό συμβάν, το οποίο είναι ένας ευρύς όρος και καλύπτει τη μη εξόφληση ή την υποβάθμιση της ικανότητας του οφειλέτη. Ο αγοραστής προστασίας δεσμεύεται να καταβάλει σε καθορισμένα χρονικά διαστήματα και μέχρι της λήξης της οφειλής (ή την εμφάνιση του πιστωτικού συμβάντος) ένα σταθερό πριμ. Αντίστοιχα, ο πωλητής προστασίας, σε περίπτωση πιστωτικού συμβάντος, δεσμεύεται να καταβάλει ποσά αντίστοιχα με τη ζημία που συνδέεται με το βασικό μέσο και που αντιστοιχεί στη διαφορά μεταξύ λογιστικής και αγοραίας αξίας.

Το πρώτο βήμα στην αξιολόγηση των πιστωτικών παραγώγων είναι η μοντελοποίηση των από κοινού χρόνων αθέτησης (joint default time).

Ο χρόνος αθέτησης τ_i για κάθε οφειλέτη $i = \{1,..,n\}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή και η περίπτωση της αθέτησης πρέπει να είναι ,σε καθεστώς τέλειας αγοράς με ελεύθερη πληροφόρηση ,γνωστή ανά πάσας στιγμή σε όλα τα μέλη της αγοράς.

Έστω $F(t) = P(\tau \leq t)$ η συνάρτηση κατανομής και *f(t)* η συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου παύσης (default time). Ο ρυθμός κινδύνου *h(t)* δίνεται από τον τύπο:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{1}{1-F(t)} \times \frac{dF(t)}{dt} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{P(t < \tau \leq t + \Delta t \quad |\tau > t)}{\Delta t}$$

όπου $dF = (t < \tau \leq t + dt, \tau > t)$ και $1 - F(t) = P(\tau > t) = S(t)$ όπου $S(t)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης.

Ο ρυθμός κινδύνου είναι μια συνάρτηση που δίνει τη στιγμιαία πιθανότητα αθέτησης σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t. Οι περιθώριες κατανομές επιβίωσης $S_i(t_i)$ είναι ομαλές και αυστηρά φθίνουσες και δίνονται από τους τύπους :

$$S_i(t_i) = 1 - F_i(t_i) = e^{-\int_0^t h_i(s)ds} \quad \text{και} \quad F_i(t_i) = 1 - e^{-\int_0^t h_i(s)ds}$$

Όπου h_i είναι οι εντάσεις αθέτησης των *i*. Ο χρόνος αθέτησης τ_i ορίζεται ως εξής:

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0, \int_0^t h_i(s)ds \geq \theta_i\}$$

Όπου τα θ_i ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Η από κοινού κατανομή των χρόνων αθέτησης τ_i είναι:

$$F(t_1,..,t_n) = P(\tau_1 \leq t_1,..,\tau_n \leq t_n)$$

Η από κοινού κατανομή επιβίωσης είναι:

$$S(t_1,..,t_n) = P(\tau_1 > t_1,..,\tau_n > t_n) = C(e^{-\int_0^t h_1(s)ds},..,e^{-\int_0^t h_n(s)ds})$$

Ο χρόνος τ_i ορίζεται ως ο πρώτος χρόνος που η διαδικασία της αθέτησης

$\lambda_i(t) = e^{-\int_0^t h_i(s)ds}$ φτάνει το επίπεδο των ενεργοποιημένων μεταβλητών U_i :

$$\tau_i = \inf\{\tau \geq 0, \lambda_i(t) \leq U_i\}$$

Η επιλογή εξάρτησης μεταξύ των χρόνων αθέτησης καθορίζει τις τιμές των CDS και CDO's. Οι copula μας δίνουν τη δυνατότητα να υποδιαιρούμε το πρόβλημα της μοντελοποίησης των χρόνων αθέτησης σε δύο μικρότερα μέρη. Πρώτο μέρος να προσδιοριστούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών και σε δεύτερο στάδιο να επιλεγεί η κατάλληλη μορφή copula που περιγράφει καλύτερα την δομή εξάρτησης μεταξύ των χρόνων αθέτησης. Στη συνέχεια, οι περιθώριες συναρτήσεις μαζί με την επιλεγμένη copula χρησιμοποιούνται στον προσδιορισμό της από κοινού κατανομής των χρόνων αθέτησης. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης των copula στην μοντελοποίηση των από κοινού χρόνων αθέτησης είναι ότι διατηρούν σχετικά καλούς πίνακες συσχετίσεων, δεν υπάρχουν περιορισμοί στην προσέγγιση της κατανομής, μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις διαδικασίες προσομοιώσεων, παρουσιάζουν διάφορες δομές εξάρτησης και βασικότερο βοηθούν στη κατασκευή μιας μοναδικής από κοινού κατανομής.

5.4 Τιμολόγηση παράγωγων

Ένα από τα βασικά σημεία στο οποίο χρησιμοποιούνται οι copula είναι η τιμολόγηση των παραγώγων. Τα βασικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε είναι η μη κανονικότητα και η μη τέλεια αγορά, η οποία οδηγεί σε πιστωτικό κίνδυνο και σε λάθη ισοστάθμισης (hedging error). Οι copula είναι το εργαλείο με το οποίο μπορούν να αντιμετωπιστούν αυτά τα προβλήματα. Το κύριο πλεονέκτημα των συναρτήσεων των συνδέσμων είναι ότι μας δίνει τη δυνατότητα να ξεπεράσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών ξεχωριστά από τον προσδιορισμό της κίνησης αγοράς (market comovement) και της εξάρτησης.

Η εφαρμογή που θα παρουσιάσουμε αποτελεί ένα διαισθητικό παράδειγμα της χρήσης των συνδέσμων στα οικονομικά στην τιμολόγηση παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων . Παράγωγο προϊόν στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται ένα συμβόλαιο, η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος (υποκείμενο προϊόν, αγγλ. underlying asset). Ουσιαστικά, δηλαδή, πρόκειται για ένα αξιόγραφο, η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Για παράδειγμα θεωρούμε ένα δισδιάστατο αριθμητικό δικαίωμα (bivariate digital option). Το δικαίωμα αυτό αποφέρει μία νομισματική μονάδα αν δύο μετοχές ή δείκτες είναι ταυτόχρονα πάνω ή κάτω από τα επίπεδα του ζεύγους των τιμών εξάσκησης. Θα θεωρήσουμε το προϊόν αυτό να αναφέρεται στους δείκτες Nikkei 225 και S&P 500 το οποίο αποφέρει, σε χρόνο εξάσκησης T, μία μονάδα αν και οι δύο δείκτες είναι κάτω από δύο δοσμένα επίπεδα δικαιώματος πώλησης σε μία τέλεια αγορά είναι κάτω από δύο δοσμένα επίπεδα K_{NKY} και K_{SP}. Η αξία αυτού του δικαιώματος πώλησης δεδομένου ότι βρισκόμαστε σε συνθήκες τέλειας αγοράς είναι:

$$DP = \exp[-r(T-t)]\, Q(K_{NKY}, K_{SP}),$$

όπου $Q(K_{NKY}, K_{SP})$ είναι η από πιθανότητα μηδενικού κινδύνου ώστε και οι δύο δείκτες να είναι χαμηλότερα από τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης. Αν θεωρήσουμε ότι Q_{NKY} είναι η πιθανότητα μηδενικού κινδύνου ο δείκτης Nikkei κατά τον χρόνο T είναι κάτω απο το επίπεδο K_{NKY} και ότι Q_{SP} είναι η πιθανότητα μηδενικού κινδύνου ο δείκτης S&P 500 κατά τον χρόνο T είναι κάτω από το επίπεδο K_{SP} τότε η σχέση της αξίας δικαιώματος πώλησης που αναφέραμε παραπάνω παίρνει τη μορφή:

$$DP = \exp[-r(T-t)]\, C(Q_{NKY}, Q_{SP})$$

όπου C διδιάστατη συνάρτηση.

Εύκολα επαληθεύεται ότι η συνάρτηση C είναι συνάρτηση copula καθώς πληροί τα κριτήρια του ορισμού αυτών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η χρήση συναρτήσεων copula μας δίνει την δυνατότητα να εκφράσουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής ως συνάρτηση των δύο περιθωρίων και ως αποτέλεσμα την τιμολόγηση του δισδιάστατου προϊόντος κάνοντας χρήση των πληροφοριών που προκύπτουν από τις μονοδιάστατες υποπεριπτώσεις.

Θεωρούμε τώρα το δισδιάστατο δικαίωμα αγοράς . Το δικαίωμα αυτό σε χρόνο εξάσκησης T αποφέρει μία μονάδα εάν οι δείκτες Nikkei 225 και S&P 500 υπερβαίνουν τα δοσμένα επίπεδα K_{NKY} και K_{SP} αντίστοιχα. Στην περίπτωση αυτή η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$DP = \exp[-r(T-t)]\,\bar{Q}(K_{NKY}, K_{SP}),$$

όπως πριν εισάγουμε την συνάρτηση C οπότε η σχέση παίρνει τη μορφή:

$$DP = \exp[-r(T-t)]\,\bar{C}(\bar{Q}_{NKY}, \bar{Q}_{SP})$$

όπου η συνάρτηση $\bar{C}$ είναι survival copula.

Η παρακάτω σχέση συνδέει την copula επιβίωσης με την συνάρτηση συνδέσμου:

$$\bar{C}[\bar{Q}(K_{NKY}), \bar{Q}(K_{SP})] = 1 - \mathrm{Q}(K_{NKY}) - \mathrm{Q}(K_{SP}) + C(Q(K_{NKY}), Q(K_{SP}))$$

Ας δούμε τώρα τη μορφή της συνάρτησης copula αναλόγως της σχέσης των αγορών:

i) Έστω ότι οι αγορές είναι ανεξάρτητες, στην περίπτωση αυτή το δικαίωμα πώλησης

$$DP = \exp[-r(T-t)]\,Q_{NKY}Q_{SP}$$

Συνεπώς η πρώτη και πιο απλή περίπτωση είναι η $C(x,y) = yx$

Ας δούμε τι συμβαίνει στις ακραίες περιπτώσεις που οι αγορές έχουν τέλεια θετική είτε αρνητική συσχέτιση.

ii) Στην περίπτωση της τέλειας αρνητικής συσχέτισης έχουμε :

$$DP = \exp[-r(T-t)]\,Q(K_{NKY}, K_{SP}) = exp[-r(T-t)]\min(Q_{NKY}, Q_{SP})$$

Συνεπώς στην συγκεκριμένη περίπτωση η copula έχει την μορφή $C(x,y) = \min(y,x)$ η οποία είναι άνω φράγμα Fréchet-Hoeffding.

iii) Αντίστοιχα στην περίπτωση της τέλειας θετικής συσχέτισης έχουμε :

$$DP = \exp[-r(T-t)]\,Q(K_{NKY}, K_{SP}) = exp[-r(T-t)]\,max\,(Q_{NKY} + Q_{SP} - 1{,}0)$$

Συνεπώς στην συγκεκριμένη περίπτωση η copula έχει την μορφή $C(x,y) = max\,(y + x - 1{,}0)$ η οποία είναι κάτω φράγμα Fréchet-Hoeffding.

iv) Τέλος στην περίπτωση της μη τέλειας εξάρτησης των αγορών θεωρώντας μια γραμμική σχέση των τριών περιπτώσεων ως εξής:

$$C(Q_{NKY}, Q_{SP}) = \alpha\, min(Q_{NKY}, Q_{SP}) + \beta max(Q_{NKY} + Q_{SP} - 1{,}0) \\ + (1-\alpha-\beta)Q_{NKY}Q_{SP},$$

με $0 \le \alpha, \beta \le 1$.

Βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις copula βρίσκουν άμεση εφαρμογή στην τιμολόγηση διδιάστατων παραγώγων . Ο βασικότερος λόγος είναι ότι δεδομένου οποιονδήποτε δοθέντων περιθώριων συναρτήσεων κατανομών μπορούμε να γνωρίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής. Αυτό μας δίνει την δυνατότητα να μπορούμε να χειριστούμε με σχετική ευκολία πολύπλοκες περιπτώσεις καθώς οι συνδυασμοί των παραπάνω υποπεριπτώσεων είναι σχεδόν άπειροι.

5.5 Μοντέλο επιβίωσης εταιρειών

Ας δούμε τώρα μία εφαρμογή, από το βιβλίο «Copula methods in finance» για το που μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι copula. Θεωρούμε δύο εταιρίες οι οποίες έχουν χρόνους ζωής X και Y αντίστοιχα. Οι δύο εταιρίες είναι εκτεθειμένες σε τριών ειδών πλήγματα, ένα που επηρεάζει ταυτόχρονα και τις δύο εταιρίες και άλλα δύο τα οποία επηρεάζουν την κάθε εταιρία ξεχωριστά. Θα θεωρήσουμε ότι τα πλήγματα ακολουθούν τρείς ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$, όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στην εταιρεία που το κάθε πλήγμα μπορεί να επηρεάσει. Άρα οι χρόνοι στους οποίους μπορεί να συμβεί το πλήγμα συμβολίζονται με Z_1, Z_2, Z_{12}, και οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι και εκθετικοί με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις κατανομών τους είναι της μορφής:

$$G_i(z_i) = 1 - \exp(-\lambda_i z_i)\,, \gamma\iota\alpha\ i = 1,2,12$$

Όταν συμβεί ένα πλήγμα οι εταιρείες θα έχουν χρόνο ζωής:

$$X = \min(Z_1, Z_{12})\,, Y = \min(Z_2, Z_{12})$$

Η πιθανότητα επιβίωσης της εταιρείας X είναι η συνάρτηση επιβίωσης:

$$\bar{F}_1(x) = P(X > x) = P(Z_1 > x, Z_{12} > x) = \bar{G}_1(x)\bar{G}_{12}(x) = \exp\left(-x(\lambda_1 + \lambda_{12})\right)$$

Ομοίως για την εταιρεία Y:

$$\bar{F}_2(x) = \exp\left(-y(\lambda_2 + \lambda_{12})\right)$$

Η πιθανότητα να επιβιώσουν και οι δύο εταιρείες δηλαδή η συνάρτηση επιβίωσης και των δύο εταιρειών είναι η:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x,y) &= P(X > x, Y > y) = P(\min(Z_1, Z_{12}) > x, \min(Z_2, Z_{12}) > y)\\ &= P(Z_1 > x)P(Z_2 > 2)P(Z_{12} > \max(x,y))\\ &= \exp(-\lambda_1 x)\exp(-\lambda_2 y)\exp(-\lambda_{12}\max(x,y))\\ &= \exp\left(-(\lambda_1+\lambda_{12})x - y(\lambda_2+\lambda_{12}) + \lambda_{12}\min(\mathrm{x},\mathrm{y})\right)\\ &= \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y)\min\left(\exp(\lambda_{12}x), \exp(\lambda_{12}y)\right)\end{aligned}$$

Ορίζοντας τώρα,

$$m = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_{12}} \; \kappa\alpha\iota \; n = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2 + \lambda_{12}}$$

Έχουμε ότι: $\exp(\lambda_{12}x) = \bar{F}_1(x)^{-m}, \exp(\lambda_{12}y)) = \bar{F}_2(y)^{-n}$

Συνεπώς η συνάρτηση επιβίωσης είναι:

$$\begin{aligned}\bar{F}(x,y) &= \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y)\min\{[\bar{F}_1(x)]^{-m}, [\bar{F}_2(y)]^{-n}\}\\ &= \min\{[\bar{F}_2(y)][\bar{F}_1(x)]^{1-m}, [\bar{F}_1(x)][\bar{F}_2(y)]^{1-n}\}\end{aligned}$$

Η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των x,y $\bar{F}(x,y) = \bar{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(y))$. Χρησιμοποιώντας μια copula επιβίωσης της οικογένειας Marshall και Olkin :

$$\bar{C}(v,z) = \min(v^{1-m}z, vz^{1-n}) = \begin{cases} v^{1-m}z, v^m \geq z^n \\ vz^{1-n}, v^m < z^n \end{cases}$$

Οπότε η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης για χρόνο πάνω από t είναι η:

$$\bar{F}(t,t) = \bar{C}\left(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)\right) = \min\{[\bar{F}_2(t)][\bar{F}_1(t)]^{1-m}, [\bar{F}_1(t)][\bar{F}_2(t)]^{1-n}\}$$

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μία εταιρία από τον κλάδο των τροφίμων και μία εταιρία από τον κλάδο των τηλεπικοινωνιών. Οι δύο αυτές εταιρίες είναι εκτεθειμένες σε τρία πιθανά πλήγματα, αυτό που έχει επίδραση στον κλάδο των τροφίμων, αυτό που έχει επίδραση στον κλάδο των τηλεπικοινωνιών και ένα το οποίο έχει επίδραση στην οικονομία, γενικότερα. Έστω ότι οι πιθανοί χρόνοι πραγματοποίησης αυτών των πληγμάτων είναι 2, 1 και 4 χρόνια, με αντίστοιχες παραμέτρους $\lambda_1 = 0{,}5, \lambda_2 = 1, \lambda_{12} = 0{,}25$. Οι πιθανότητες επιβίωσης των δύο εταιρειών πέρα από τους χρόνους x και y, αντίστοιχα είναι:

$$\bar{F}_1(x) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x) = \exp(-0{,}75x)$$

$$\bar{F}_2(y) = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})y) = \exp(-1{,}25y)$$

Η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης, με βάση το μοντέλο Marshall-Olkin, είναι:

$$\bar{C}\left(\bar{F}_1(x),\overline{F_2}(y)\right) = \min\{[\exp(-1{,}25y)][\exp(-0{,}50x)],[\exp(-0{,}75x)][\exp(-y)]\}$$

$$\bar{C}\left(\bar{F}_1(x),\bar{F}_2(y)\right) = \begin{cases}\exp(-1{,}25y-0{,}5x)\,, x \leq y \\ \exp(-0{,}75x-y)\,, x > y\end{cases}$$

Καθώς τα m και n όπως τα ορίσαμε παραπάνω βρίσκονται m=1/3και n=1/5.

Η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης για χρόνο πάνω από x=y=t=3 υπολογίζεται:

$$\bar{C}\left(\bar{F}_1(3)\bar{F}_2(3)\right) = \exp\left(3(-1{,}25-0{,}5)\right) = 0{,}5248\%$$

Βιβλιογραφία

1. Nelsen, R. B., (2006), "*An Introduction to Copulas"*, 2nd edition, Springer, New York
2. Nelsen R. B., (2003), "*Properties and applications of cop*
3. Nelsen, R.B. (1998), "*An Introduction to Copulas*". Lectures Notes in Statistics, 139, Springer Verlag, New York.
4. Marshall A.W., and Olkin I., (1988), *"Families of Multivariate Distributions"*, Journal of the American Statistical Association Vol 83,834–841.
5. Marshall A.W. and Olkin I., (1988), "*Multivariate Distributions Generated from Mixtures of Convolution and Product Families*", Department of Statistics, Stanford University, California.
6. Jaworski P., Durante F., Hardle W., and Rychlik T., (2010), *"Copula Theory and its Applications"*, Proceedings of the Workshop held in Warsaw, 25-26 September 2009, Springer.
7. Arnold H., (2006), *"Dependence Modelling via the Copula Method"*, Quantitative Risk Management Group, CSIRO Mathematical and Information Sciences.
8. Sklar, A. (1959): "*Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*",Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8, pp. 229-231.
9. Sklar, A. (1996): "*Random variables, distribution functions, and copulas – a personal look backward and forward*", in Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, ed. By L. Rüschendorff, B. Schweizer and M. Taylor, pp. 1-14. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA.
10. M. Goovaerts, A. De Schepper, Y. Hua, G. Darkiewicz and D. Vyncke, *On the Use of Copulas for Calculating the Present Value of a General Cash Flow*" ,Tijdschrift voor Economie en Management ,Vol. L, 1, 2005
11. Bouye, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A.,…, "Copulas for Finance. AReading Guide and Some Applications", GRO, Credit Lyonnais, 2000.

12. Dias Da Costa, A., “Copula Inference for Finance and Insurance”, Doctoral Thesis submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

13. Clemen, R. T., Reilly, T., “Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis”, *Management Science*, 1999.

14. Frey, R., McNeil, A. and Nyfeler, M., “Copulas and Credit Models”,*RISK*, 2001.

15. Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W., (2004), COPULAMETHODS IN FINANCE, John Wiley & Sons, Ltd.

16. Schweizer, B. (1991): Thirty years of copulas. In: G. Dall’Aglio, S. Kotz, and G. Salinetti (eds.): *Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

17. Scarsini, M. (1984): On measures of concordance. *Stochastica*, 8, 201-218.

18. Kaas R,Dhaene J.and Goovaerts M.,2000 “ Upper and Lower Bouds for Sums of Variables”, Mathematics and Economics 27..151-168.

19. M. Goovaerts, A. De Schepper, Y. Hua, G. Darkiewicz and D. Vyncke,“*On the Use of Copulas for Calculating the Present Value of a General Cash Flow*”,Tijdschrift voor Economie en Management ,Vol. L, 1, 2005

Υπέθυνη Δήλωση Συγγραφεά:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 και τα άρθρα 2,4,6 παρ. 3 του Ν. 1256/1982, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον.