



ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΠΡΟΧΩΡΗΜΕΝΕΣ ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

”ΤΟ ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟ ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ Λ CDM, ΟΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΑΚΕΣ ΑΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΣΚΟΤΕΙΝΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (ΒΑΘΜΟΤΑΝΥΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ $f(R)$ ΘΕΩΡΙΕΣ).”

“THE STANDARD COSMOLOGICAL Λ CDM MODEL, ITS OBSERVATIONAL TENSIONS, AND ITS EXTENSIONS WITHIN THE FRAMEWORK OF DYNAMICAL DARK ENERGY AND GENERALIZED THEORIES OF GRAVITY (SCALAR-TENSOR AND $f(R)$ THEORIES)”

Του μεταπτυχιακού φοιτητή
ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Κ. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΠΟΥΛΟΥ
(Α.Μ.: 161239)

Επιβλέπων Καθηγητής
ΠΕΡΙΒΟΛΑΡΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΑΝΔΡΟΣ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής
ΚΕΧΑΓΙΑΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ

ΑΘΗΝΑ, Μάιος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή/της φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο/η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του/της συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του/της συγγραφέα/δημιουργού. Ο/Η συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

*Στην μνήμη του πανεπιστημιακού μου "δασκάλου"
Στυλιανού-Δημητρίου Φούλια
και
Στην οικογένειά μου,
για τον χρόνο που της στέρησα, ενώ μελετούσα τη φύση του...*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Περιβολαρόπουλο Λέανδρο αφ' ενός για το "βάπτισμα" στην Κοσμολογία (προ εικοσιπενταετίας περίπου, μέσω του αντίστοιχου προπτυχιακού μαθήματος στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων) και αφετέρου για την πολύτιμη καθοδήγηση και την επιστημονική υποστήριξη κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iii
1 Εισαγωγή	1
2 Στοιχεία Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας	3
2.1 Η ανάγκη για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	3
2.1.1 Ακαριαία δράση από απόσταση	3
2.1.2 Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή	3
2.1.3 Η Αρχή της Ισοδυναμίας	4
2.1.4 Η Αρχή του Mach	5
2.2 Βασικές Αρχές της ΓΘΣ	6
2.2.1 Η Αρχή Γενικής Σχετικότητας	6
2.2.2 Η Αρχή της Γενικής Συναλλοιωτότητας	6
2.2.3 Η Αρχή της Αντιστοιχίας	6
2.3 Η Γεωμετρία της ΓΘΣ	6
2.3.1 Η μετρική	6
2.3.2 Τανυστικός Λογισμός	7
2.3.3 Ο Τανυστής Καμπυλότητας Riemann	11
2.3.4 Εξισώσεις Πεδίου Einstein	13
2.4 Η Λύση Schwarzschild	19
2.4.1 Υπολογισμός των Συμβόλων Christoffel	20
2.4.2 Ο τανυστής Riemann	21
2.4.3 Ο τανυστής Ricci	21

2.4.4	Επίλυση των Εξισώσεων και η Λύση Schwarzschild	22
2.4.5	Το Θεώρημα του Birkhoff και Κοσμολογικές Προεκτάσεις	23
2.4.6	Μαθηματική Απόδειξη της Μετάπτωσης του Περιηλίου του Ερμή	23
3	Το Καθιερωμένο Πρότυπο ΛCDM	29
3.1	Η Μετρική του Σύμπαντος	29
3.1.1	Η Κοσμολογική Αρχή	29
3.1.2	Σταθερή Καμπυλότητα	29
3.1.3	Η Μετρική Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker (FLRW)	30
3.1.4	1η Εξίσωση Friedmann	30
3.1.5	Εξίσωση Ρευστού (Εξίσωση Συνέχειας)	32
3.1.6	2η Εξίσωση Friedmann (Εξίσωση Επιτάχυνσης)	34
3.2	Τα Συστατικά του Σύμπαντος	36
3.2.1	Ύλη ($w = 0$)	36
3.2.2	Ακτινοβολία ($w = 1/3$)	36
3.2.3	Σκοτεινή Ενέργεια - Κοσμολογική Σταθερά ($w = -1$)	37
3.2.4	Παράμετροι Πυκνότητας ^[6]	39
3.2.5	Σύμπαν με ένα συστατικό	40
3.3	Μέτρηση Κοσμικών Αποστάσεων	41
3.3.1	Ερυθρά Μετατόπιση (Redshift)	41
3.3.2	Οι παράμετροι Hubble και Επιβράδυνσης	43
3.3.3	Ο Νόμος του Hubble	44
3.3.4	Αποστάσεις στο Σύμπαν	46
3.4	Η Κοσμολογική Σταθερά	50
3.4.1	Η επιταχυνόμενη Διαστολή	50
3.4.2	Επίπεδο $\Omega_0 - \Omega_\Lambda$	51
3.5	Υπερκαινοφανείς Αστέρρες Τύπου Ia (SNe Ia)	52
3.6	Σωματίδια	54
3.7	Σκοτεινή Ύλη	55
3.8	Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB)	56

3.9	Προβλήματα του Μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης	60
3.9.1	Το πρόβλημα της επιπεδότητας	60
3.9.2	Το πρόβλημα του ορίζοντα	60
3.9.3	Το πρόβλημα των μονοπόλων	61
3.10	Πληθωρισμός (Inflation)	61
3.11	Παρατηρησιακές Ασυνέπειες	65
3.11.1	Η Ένταση της Σταθεράς του Hubble (H_0 - Tension)	65
3.11.2	Η Ένταση του S_8 - Ανάπτυξη Δομών	66
3.11.3	Εσωτερικές Ανωμαλίες στα Δεδομένα του Planck	66
3.11.4	Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς	66
4	Δυναμική Σκοτεινή Ενέργεια	68
4.1	Μοντέλα Δυναμικής Σκοτεινής Ενέργειας	68
4.1.1	Το Επίπεδο w CDM Μοντέλο	68
4.1.2	Βαθμωτά Πεδία: Πεμπτουσία (Quintessence)	68
4.1.3	Η Παραμετροποίηση Chevallier-Polarski-Linder (CPL) ^{[21],[36],[40]}	71
4.1.4	Ανακατασκευή του Βαθμωτού Πεδίου από την Παρατηρούμενη Σκοτεινή Ενέργεια	71
4.1.5	Σκοτεινή Ενέργεια Φάντασμα (Phantom Dark Energy)	73
4.1.6	Μοντέλα Τρέχοντος Κενού (Running Vacuum Models - RVM)	76
5	Γενικευμένες Θεωρίες Βαρύτητας $f(R)$	78
5.1	Η Ιδέα	78
5.1.1	Θεωρία Brans-Dicke ^{[19],[31]}	78
5.1.2	Φορμαλισμός	79
5.2	Από τη Δράση Einstein-Hilbert στις Θεωρίες $f(R)$	81
5.2.1	$f(R)$ τροποποίηση του ολοκληρώματος δράσης Einstein-Hilbert	82
5.3	Το Μοντέλο Starobinsky ^{[17],[22],[23]}	84
5.4	Γενικευμένες εξισώσεις Friedmann	86
5.4.1	Η Ενεργός Βαρυτική Σταθερά (G_{eff})	87

6	Συμπεράσματα και Μελλοντικές Προοπτικές	89
	Παράρτημα Π1: Στοιχεία Τανυστικού Λογισμού	91
	Παράρτημα Π2: Εξίσωση Klein - Gordon	94

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αποτελεί μία απόπειρα να σκιαγραφήσει το Καθιερωμένο Πρότυπο της Κοσμολογίας Λ CDM, τις ασυνέπειες που προκύπτουν από το παραπάνω θεωρητικό μοντέλο και τα παρατηρησιακά δεδομένα όπως αυτά συλλέγονται και αξιολογούνται, καθώς και τις προτεινόμενες λύσεις για τη άρση των ασυνεπειών αυτών.

Στο **κεφάλαιο 2** γίνεται μία ανασκόπηση των Βασικών Αρχών της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας(ΓΘΣ) και του μαθηματικού φορμαλισμού της. Ξεκινώντας από τη Διαφορική Γεωμετρία, ειδικότερα από τη Θεωρία Επιφανειών και τον Τανυστικό Λογισμό, μέσω του ορισμού των συμβόλων Christoffel, του τανυστή καμπυλότητας του Riemann, του τανυστή του Einstein και του τανυστή ενέργειας-ορμής καταλήγουμε στις εξισώσεις πεδίου του Einstein οι οποίες αποτελούν τον τρόπο περιγραφής της γεωμετρίας του Σύμπαντος, η οποία πηγάζει από το περιεχόμενο του(ύλη-ενέργεια).

Στο **κεφάλαιο 3** παρουσιάζεται το Λ CDM, πως δηλαδή από την ΓΘΣ καταλήγουμε στην μετρική του Σύμπαντος (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) και από εκεί στις θεμελιώδεις κοσμολογικές εξισώσεις (εξ. Friedmann-εξ. Ρευστού). Θα δούμε επίσης πως γίνεται η μέτρηση της κοσμικής γεωμετρίας (αποστάσεις στο σύμπαν),την ερυθρά μετατόπιση, πως ορίζονται οι κοσμολογικές παράμετροι, τον παράγοντα Hubble, τον νόμο Hubble, το πρόβλημα της ηλικίας του Σύμπαντος, το πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς Λ , πως γίνονται κοσμολογικές μετρήσεις μέσω υπερκαινοφανών αστέρων, την κοσμική ακτινοβολία υποβάθρου(CMB), Αποσύζευξη-Επανασύνδεση και θερμικές διαταραχές αυτής καθώς και το περιεχόμενο (βαρυονική-σκοτεινή ύλη) και την θερμική ιστορία του Σύμπαντος. Ακολουθεί μια παρουσίαση των προβλημάτων της θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης (πρόβλημα του ορίζοντα-πρόβλημα των μονοπόλων-πρόβλημα της επιπεδότητας) καθώς και η θεωρία του πληθωριστικού Σύμπαντος. Τέλος, αναλύονται οι Ασυνέπειες και Εντάσεις (H_0 Tension – S_8 Tension) μεταξύ διαφορετικών μετρήσεων για παράδειγμα από την αποστολή Planck και από άμεσες, τοπικές μετρήσεις (distance ladder) που χρησιμοποιούν Κηφίδες και Υπερκαινοφανείς τύπου Ia (SNe Ia), όπως αυτές της ομάδας SH0ES ή μεταξύ των αποτελεσμάτων του Planck και των ερευνών ασθενούς βαρυτι-

κού φακού (weak lensing) και σμηγών γαλαξιών. Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου αυτού αναλύεται το πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς Λ και οι δύο προεκτάσεις του, αφ' ενός η χαώδης διαφορά ανάμεσα στην μετρούμενη τιμή και την θεωρητικά προβλεπόμενη τιμή βάσει της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου(QFT) για την πυκνότητα ενέργειας του κενού (ρ_Λ), αφετέρου το γεγονός ότι η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας είναι συγκρίσιμη με την πυκνότητα της ύλης στη σημερινή εποχή, δεδομένου ότι εξελίσσονται διαφορετικά στον χρόνο (πρόβλημα της σύμπτωσης).

Στο **κεφάλαιο 4** παρουσιάζονται τα μοντέλα Δυναμικής Σκοτεινής Ενέργειας (Dynamical Dark Energy) τα οποία αποτελούν μια κατηγορία κοσμολογικών μοντέλων που προτάθηκαν ως εναλλακτική λύση στο καθιερωμένο πρότυπο Λ CDM και αναπτύχθηκαν για να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα της "λεπτής ρύθμισης" (fine-tuning) της τιμής του Λ , καθώς και το πρόβλημα της "σύμπτωσης". Θεωρούνται επίσης πιο αποτελεσματικά στην επίλυση της έντασης του Hubble σε σχέση με άλλα μοντέλα. Τα κύρια λοιπόν εξ' αυτών είναι το μοντέλο της Πεμπτουσίας (Quintessence) το οποίο προτείνει την ύπαρξη ενός βαθμωτού πεδίου ϕ (scalar field) που εξελίσσεται αργά σε ένα δυναμικό $V(\phi)$ και ανάλογα με την κινητική και δυναμική του ενέργεια, μπορεί να έχει αρνητική πίεση και να προκαλεί επιταχυνόμενη διαστολή, αρκεί η εξέλιξή του να είναι αργή (slow-roll). Το μοντέλο της Εξωτικής Σκοτεινής Ενέργειας (Phantom Dark Energy) το οποίο αναφέρεται σε μοντέλα όπου η παράμετρος κατάστασης είναι $w < -1$ και σε αυτή την περίπτωση, η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας αυξάνεται με τον χρόνο (αντί να μένει σταθερή ή να μειώνεται), οδηγώντας σε πεπερασμένο χρόνο σε μια μοναδικότητα γνωστή ως "Μεγάλο Σχίσμο" (Big Rip), όπου η απωστική βαρύτητα διαλύει τα πάντα, ακόμη και τα άτομα.

Στο **κεφάλαιο 5** παρουσιάζεται η γενική ιδέα της εξήγησης των κοσμολογικών φαινομένων, χωρίς την ανάγκη σκοτεινής ενέργειας ή σκοτεινής ύλης, μέσω των Τροποποιημένων Θεωριών Βαρύτητας $f(R)$. Οι θεωρίες $f(R)$ αποτελούν μια από τις απλούστερες και πιο δημοφιλείς επεκτάσεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ), οι οποίες τροποποιούν τη βαρύτητα γενικεύοντας τη δράση Einstein-Hilbert. Σκιαγραφούνται λοιπόν κάποια υπονήφια μοντέλα όπως το μοντέλο Starobinsky ($f(R) = R + aR^2$) το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε πληθωρισμό στο πρώιμο σύμπαν και το μοντέλο της ενεργούς βαρυτικής σταθεράς βάσει του οποίου η βαρυτική σύζευξη γίνεται ενεργός και μεταβλητή ($G_{\text{eff}} = G/f'(R)$), αλλάζοντας τη βαρυτική αλληλεπίδραση σε διαφορετικές κοσμολογικές κλίμακες.

Τέλος στο **κεφάλαιο 6** αναφέρονται τα εξαγόμενα συμπεράσματα από την ανάλυση του περιεχομένου των προηγούμενων κεφαλαίων και συζητιούνται μελλοντικές προοπτικές.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας

2.1 Η ανάγκη για τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Η ανάγκη για τη διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ) προέκυψε από θεμελιώδη θεωρητικά προβλήματα και παρατηρησιακές ασυμφωνίες που δεν μπορούσαν να επιλυθούν στο πλαίσιο της Νευτώνειας μηχανικής και της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΕΘΣ).

2.1.1 Ακαριαία δράση από απόσταση

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας (ΕΘΣ) έδειξε ότι καμία πληροφορία ή σήμα δεν μπορεί να ταξιδέψει ταχύτερα από το φως. Ωστόσο, ο νόμος της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα προϋπέθετε «ακαριαία δράση από απόσταση» (instantaneous action at a distance). Αυτό σήμαινε ότι η βαρυντική δύναμη αντιδρούσε άμεσα σε αλλαγές της κατανομής της ύλης, παραβιάζοντας το όριο της ταχύτητας του φωτός που έθετε η ΕΘΣ. Η Ειδική Σχετικότητα περιγράφει φυσικά φαινόμενα μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς (συστήματα που κινούνται με σταθερή ταχύτητα). Δεν μπορεί να περιγράψει τη βαρύτητα και τους φυσικούς νόμους σε επιταχυνόμενα (μη αδρανειακά) συστήματα.

2.1.2 Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή

Η μετάπτωση του περιηλίου του Ερμή αναφέρεται στη σταδιακή περιστροφή της ελλειπτικής τροχιάς του πλανήτη Ερμή γύρω από τον Ήλιο. Αντί η τροχιά να είναι μια τέλεια κλειστή έλλειψη που επαναλαμβάνεται ακριβώς, ο μεγάλος άξονας της έλλειψης στρέφεται αργά στον χώρο, με αποτέλεσμα το σημείο της πλησιέστερης προσέγγισης στον Ήλιο (το περιήλιο) να μετακινείται διαρκώς.

Η "αποτυχία" της Νευτώνειας Βαρύτητας έγκειται στην αδυναμία της να εξηγήσει πλήρως το

μέγεθος αυτής της μετατόπισης. Σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα, η τροχιά ενός μοναχικού πλανήτη γύρω από ένα άστρο θα έπρεπε να είναι μια τέλεια κλειστή έλλειψη. Ωστόσο, στο ηλιακό μας σύστημα, οι βαρυτικές επιδράσεις (διαταραχές) των άλλων πλανητών προκαλούν φυσιολογικά μια μετάπτωση. Η ανάλυση με βάση τη Νευτώνεια θεωρία προέβλεπε μια μετάπτωση 55,58 δευτερολέπτων τόξου (arcseconds) ανά αιώνα, οι αστρονομικές παρατηρήσεις, όμως, μετρούσαν μια μετάπτωση 56,01 arcseconds ανά αιώνα. Υπήρχε, δηλαδή, μια ανεξήγητη διαφορά 43 arcseconds ανά αιώνα, την οποία η Νευτώνεια Μηχανική δεν μπορούσε να δικαιολογήσει, επειδή αντιμετώπιζε τη βαρύτητα ως δύναμη σε έναν επίπεδο χώρο και δεν λάμβανε υπόψη την καμπύλωση του χωροχρόνου, η οποία γίνεται αισθητή κοντά σε μεγάλα σώματα όπως ο Ήλιος.

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (ΓΘΣ) του Αϊνστάιν διόρθωσε αυτό το σφάλμα εισάγοντας έναν επιπλέον όρο στην εξίσωση κίνησης των πλανητών ($3GMu^2/c^2$), ο οποίος απουσιάζει από τη Νευτώνεια εξίσωση. Αυτή η σχετικιστική διόρθωση προβλέπει ότι η έλλειψη δεν κλείνει ποτέ ακριβώς, προκαλώντας μια πρόσθετη μετάπτωση. Ο υπολογισμός βάσει της ΓΘΣ δίνει ακριβώς 43,03 arcseconds ανά αιώνα, καλύπτοντας πλήρως το κενό που άφησε η θεωρία του Νεύτωνα και επιβεβαιώνοντας τις παρατηρήσεις.

2.1.3 Η Αρχή της Ισοδυναμίας

Η ΓΘΣ γενίκευσε την αρχή της σχετικότητας ώστε οι φυσικοί νόμοι να έχουν την ίδια μορφή για όλους τους παρατηρητές, ανεξάρτητα από την κίνησή τους. Στη Νευτώνεια Μηχανική, η ισότητα μεταξύ της αδρανειακής μάζας m_I (που αντιστέκεται στην επιτάχυνση), όπως αυτή προκύπτει από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, και της βαρυτικής μάζας m_g (που καθορίζει τη βαρυτική έλξη), όπως αυτή προκύπτει από τον Νόμο της Παγκόσμιας Έλξης, φαινόταν σαν μια τυχαία σύμπτωση.

Η ΓΘΣ βασίστηκε στην Αρχή της Ισοδυναμίας, η οποία ορίζει ότι ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται είναι τοπικά ισοδύναμο με ένα σύστημα που βρίσκεται εντός βαρυτικού πεδίου και εξηγεί αυτή την ισότητα με βάση το περίφημο νοητικό πείραμα (πείραμα του ανελκυστήρα) του Einstein: ένας παρατηρητής σε ένα κλειστό εργαστήριο δεν μπορεί να διακρίνει αν βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας ή αν το εργαστήριό του επιταχύνεται (με την προϋπόθεση βέβαια το εργαστήριο να είναι αρκετά μικρό, «τοπικά αδρανειακό σύστημα», έτσι ώστε οι παλιρροϊκές δυνάμεις να είναι αμελητέες). Αυτό οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η βαρύτητα είναι προτιμότερο να μην αντιμετωπίζεται ως δύναμη, αλλά ως αποτέλεσμα της καμπύλωσης του χωροχρόνου, η οποία με τη σειρά της οφείλεται στην κατανομή της ύλης στο χωροχρονικό συνεχές.

2.1.4 Η Αρχή του Mach

Η Αρχή του Mach (Mach's Principle), αποτελεί μια από τις βαθύτερες εννοιολογικές βάσεις που οδήγησαν στη διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σε αντίθεση με την κλασική Νευτώνεια μηχανική, η οποία προϋποθέτει την ύπαρξη ενός «απόλυτου χώρου» ως ανεξάρτητο σκηνικό για την κίνηση των σωμάτων, η Αρχή του Mach πρεσβεύει μια αυστηρά σχεσιακή (relational) αντίληψη της φυσικής.

Με απλά λόγια, η αρχή δηλώνει ότι **η αδράνεια ενός σώματος δεν είναι μια εγγενής, ανεξάρτητη ιδιότητά του, αλλά καθορίζεται πλήρως από την κατανομή της ύλης και της ενέργειας σε ολόκληρο το Σύμπαν.**

Για να κατανοήσουμε τη σημασία της, αρκεί να εξετάσουμε το διάσημο νοητικό πείραμα του «Κάδου του Νεύτωνα» (Newton's bucket). Αν περιστρέψουμε έναν κάδο γεμάτο με νερό, η επιφάνεια του νερού θα πάρει ένα κοίλο (παραβολικό) σχήμα λόγω των φυγόκεντρων δυνάμεων. Ο Νεύτωνας υποστήριξε ότι αυτό αποδεικνύει την περιστροφή του κάδου ως προς τον «απόλυτο χώρο». Ο Mach, ωστόσο, αντιπρότεινε ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για κίνηση ως προς τον κενό χώρο. Σύμφωνα με τον Mach, οι φυγόκεντρες δυνάμεις αναπτύσσονται επειδή το νερό περιστρέφεται *σε σχέση με την υπόλοιπη μάζα του Σύμπαντος* (τους «απλανείς αστέρες»). Αν το Σύμπαν ήταν απολύτως άδειο, ένα μοναχικό περιστρεφόμενο σώμα δεν θα εμφάνιζε καμία απολύτως αδράνεια και η επιφάνεια του νερού θα παρέμενε επίπεδη.

Ο Einstein εντυπωσιάστηκε βαθύτατα από αυτή την ιδέα. Το αρχικό του όραμα για τη Γενική Σχετικότητα ήταν να δημιουργήσει μια θεωρία όπου η γεωμετρία του χωροχρόνου (και άρα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς) να υπαγορεύεται αποκλειστικά από την ύλη. Πράγματι, στις εξισώσεις πεδίου, τις οποίες θα δούμε εκτενώς στη συνέχεια, η ύλη λέει στον χωρόχρονο πώς να καμπυλωθεί, ενσωματώνοντας σε μεγάλο βαθμό αυτή τη σχεσιακή φιλοσοφία. Η έννοια του frame-dragging (όπου μια περιστρεφόμενη μάζα "παρασέρνει" τον τοπικό χωρόχρονο μαζί της) είναι μια άμεση επιβεβαίωση των ιδεών του Mach εντός της Γενικής Σχετικότητας.

Η απόκλιση της Γενικής Σχετικότητας από τον Mach:

Παρά την αρχική πρόθεση του Einstein, η Γενική Σχετικότητα δεν ικανοποιεί πλήρως την Αρχή του Mach με την αυστηρή της έννοια. Ο κύριος λόγος είναι ότι οι εξισώσεις πεδίου επιδέχονται τις λεγόμενες *λύσεις κενού* (vacuum solutions). Παραδείγματα αποτελούν ο εντελώς επίπεδος χωρόχρονος Minkowski ή η λύση Schwarzschild (που περιγράφει τον χωρόχρονο γύρω από μια μοναχική μάζα σε ένα κατά τα άλλα άδειο Σύμπαν). Το γεγονός ότι ο χωρόχρονος, η γεωμετρία και η αδράνεια συνεχίζουν να υφίστανται και να έχουν δομή ακόμα και απουσία της ύλης - ενέργειας, δείχνει ότι η Γενική Σχετικότητα διατηρεί ορισμένα χαρακτηριστικά του "απόλυτου χώρου", απομακρυνόμενη από το απόλυτο όραμα του Mach.

2.2 Βασικές Αρχές της ΓΘΣ

Εκτός της Αρχής της Ισοδυναμίας και την Αρχή του Mach, οι οποίες περιγράφονται παραπάνω οι βασικές αρχές που διέπουν την ΓΘΣ είναι οι επόμενες τρεις.

2.2.1 Η Αρχή Γενικής Σχετικότητας

Με βάση την αρχή της Γενικής Σχετικότητας όλοι οι παρατηρητές, επιταχυνόμενοι και μη, είναι ισοδύναμοι όσον αφορά την περιγραφή των φυσικών νόμων, δηλαδή οι φυσικοί νόμοι έχουν την ίδια μορφή για όλους τους παρατηρητές.

2.2.2 Η Αρχή της Γενικής Συναλλοιότητας

Οι φυσικοί νόμοι έχουν τη μορφή ισότητας μεταξύ τανυστών ώστε να έχουν την ίδια μορφή για όλους τους παρατηρητές.

2.2.3 Η Αρχή της Αντιστοιχίας

Νέοι φυσικοί νόμοι θα πρέπει να τείνουν σε παλαιότερους όταν πάρουμε τα κατάλληλα όρια. Για παράδειγμα, η Γενική Σχετικότητα μετατρέπεται σε Ειδική Σχετικότητα στο όριο έλλειψης βαρύτητας. Η ειδική σχετικότητα ανάγεται σε Νευτώνεια μηχανική στο όριο χαμηλών ταχυτήτων $v \ll c$. Η Γενική Σχετικότητα ανάγεται στη Νευτώνεια βαρύτητα στο όριο ασθενών βαρυτικών πεδίων και χαμηλών ταχυτήτων.

2.3 Η Γεωμετρία της ΓΘΣ

2.3.1 Η μετρική

Ο «χώρος» στον οποίο τελούνται οι φυσικές διεργασίες, κατά την ΕΘΣ, είναι ένας 4-διάστατος επίπεδος (ελλείπει ύλης) χώρος (χώρος Minkowski) στον οποίο το ρόλο της 4ης διάστασης (πλην των τριών χωρικών) παίζει ο χρόνος. Συχνά χαρακτηρίζεται και ως ψευδο-Ευκλείδιος (pseudo-Euclidean) μιας και η μετρική που τον περιγράφει είναι της μορφής:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

με την χωροχρονική απόσταση μεταξύ σημείων να δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (2.2)$$

Ο αναγνώστης ας παρατηρήσει σε αυτό το σημείο ότι στην παρούσα εργασία η «υπογραφή» της μετρικής θα είναι $(-, +, +, +)$. Επίσης πως σε όλη την έκταση της, γίνεται παραδοχή της **σύμβασης Einstein**, κατά την οποία επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται, ήτοι :

$$\sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (2.3)$$

Δεδομένου τώρα ότι η ΓΘΣ περιγράφει χώρους παρουσία ύλης, προκειμένου να αποδώσουμε καμπυλότητα στον χώρο, επιτρέπουμε στην αντίστοιχη μετρική $g_{\mu\nu}$ να μεταβάλλεται στο χώρο και τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.4)$$

(με την προϋπόθεση όμως ότι η χωροχρονική απόσταση που δίνεται από αυτή τη σχέση αφορά σημεία απειροστά κοντά μεταξύ τους) και ο καμπύλος χωροχρόνος πλέον χαρακτηρίζεται ως ψευδο-Ρημάνιος (pseudo-Riemannian).

2.3.2 Τανυστικός Λογισμός

Προκειμένου να περιγράψουμε τον 4-διάστατο καμπύλο χωροχρόνο, θα χρησιμοποιήσουμε Τανυστικό Λογισμό κάνοντας χρήση των τανυστών, κατάλληλων γεωμετρικών «αντικειμένων» για την περιγραφή χώρων με καμπυλότητα. Πριν απ' αυτό όμως ας δούμε κάποιες έννοιες (και την σύνδεση τους) από την Διαφορική Γεωμετρία και την Θεωρία Επιφανειών.

Οι Εξισώσεις Gauss^[2]

Οι εξισώσεις του Gauss αναλύουν τη δεύτερη παράγωγο του διανύσματος θέσης \mathbf{x} (ή αλλιώς την παράγωγο των διανυσμάτων βάσης $\mathbf{x}_i = \partial \mathbf{x} / \partial u^i$) σε μια συνιστώσα εφαπτομενική στην επιφάνεια και μια κάθετη σε αυτήν:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k + b_{ij} \mathbf{N} \quad (2.5)$$

όπου:

- $\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}$
- Γ_{ij}^k είναι τα σύμβολα Christoffel 2ου είδους (εφαπτομενική συνιστώσα).

- b_{ij} είναι οι συντελεστές της **Δεύτερης Θεμελιώδους Μορφής** (κάθετη συνιστώσα).
- \mathbf{N} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια.

Εφαρμόζοντας τους τανυστές στη Θεωρία των Επιφανειών, ορίζουμε μέσω των εξισώσεων Gauss:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} + b_{ij} \mathbf{N}, \quad (\alpha, i, j = 1, 2) \quad (2.6)$$

τα σύμβολα του Christoffel 1ου είδους ως:

$$\Gamma_{ijk} \equiv \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_k = \Gamma_{ij}^{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}_k) = \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k} \quad (2.7)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j$, έχουμε:

$$\Gamma_{ij\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha\beta} g^{\beta k} = \Gamma_{ij}^{\alpha} \delta_{\alpha}^k = \Gamma_{ij}^k \quad (2.8)$$

Επομένως, τα σύμβολα του Christoffel 1ου και 2ου είδους συνδέονται μεταξύ τους μέσω των σχέσεων:

$$\Gamma_{ijk} = g_{k\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} \quad \text{και} \quad \Gamma_{ij}^k = g^{k\alpha} \Gamma_{ij\alpha} \quad (2.9)$$

Θα ήταν χρήσιμο να σημειωθεί πως τα σύμβολα του Christoffel δεν αποτελούν συνιστώσες τανυστή, καθώς ο κανόνας μετασχηματισμού τους περιλαμβάνει και τις δεύτερες παραγώγους του μετασχηματισμού συντεταγμένων.

Με βάση τα παραπάνω, είναι εύκολο να δειχθεί^[2] πως τα σύμβολα του Christoffel 1ου είδους δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \quad (2.10)$$

Οπότε τα σύμβολα του Christoffel 2ου είδους, θα είναι:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) \quad (2.11)$$

ή σε πιο συμπαγή γραφή :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_j g_{i\alpha} + \partial_i g_{j\alpha} - \partial_{\alpha} g_{ij}) \quad (2.12)$$

Οι Εξισώσεις Weingarten^[2]

Οι εξισώσεις του Weingarten εκφράζουν την παράγωγο του κάθετου διανύσματος \mathbf{N} ως γραμμικό συνδυασμό των εφαπτομενικών διανυσμάτων βάσης \mathbf{x}_α . Επειδή το \mathbf{N} είναι μοναδιαίο, η παράγωγός του είναι πάντα κάθετη στο \mathbf{N} (δηλαδή βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια):

$$\mathbf{N}_i = \beta_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha, \quad (\alpha, i = 1, 2) \quad (2.13)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικώς με \mathbf{x}_j , βρίσκουμε ότι τα θεμελιώδη μεγέθη b_{ij} ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$-b_{ij} = \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{x}_j = \beta_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_j = \beta_i^\alpha g_{\alpha j} \quad (2.14)$$

και εάν ορίσουμε $b_{ij} = b_i^\alpha g_{\alpha j}$, έχουμε:

$$b_{ij} = b_i^\gamma g_{\gamma j} = -\beta_i^\alpha g_{\alpha \gamma} g^{\gamma j} = -\beta_i^\alpha \delta_\alpha^j = -\beta_{ij} \quad (2.15)$$

Οι εξισώσεις Weingarten γράφονται πλέον ως:

$$\mathbf{N}_i = -b_i^\alpha \mathbf{x}_\alpha, \quad (i = 1, 2) \quad (2.16)$$

με τα b_{ij} και b_j^i να συνδέονται με τις σχέσεις:

$$b_{ij} = g_{\alpha j} b_i^\alpha \quad \text{και} \quad b_j^i = g^{\alpha j} b_{i\alpha} \quad (2.17)$$

Ορίζουμε τώρα τον **συναλλοίωτο τανυστή καμπυλότητας του Riemann**:

$$R_{mijk} = b_{ik} b_{jm} - b_{ij} b_{km} \quad (2.18)$$

καθώς και τον **μικτό τανυστή καμπυλότητας του Riemann**:

$$R_{ijk}^p = g^{\alpha p} R_{ijk\alpha} \quad (2.19)$$

Μια χρήσιμη ιδιότητα που προκύπτει από την σχέση (2.18) είναι ότι οι συνιστώσες R_{mijk} είναι αντισυμμετρικές ως προς την εναλλαγή των δύο πρώτων και ως προς την εναλλαγή των δύο τελευταίων δεικτών, ήτοι :

$$R_{imjk} = -R_{mijk} \quad \text{και} \quad R_{mikj} = -R_{mijk} \quad (2.20)$$

Επομένως όταν $i = m$ και $j = k$ θα είναι: $R_{imjk} = 0$. Έτσι σε έναν χώρο 4-διαστάσεων από τις $4^4 = 256$ συνιστώσες θα επιβιώνουν μόνο 20.

Παραγωγή Τανυστών ^[6]

Για να ορίσουμε την παράγωγο ενός συναλλοίωτου 4-διανύσματος πρέπει να θεωρήσουμε τη διαφορά της τιμής του μεταξύ δύο (απειροστά κοντινών) γειτονικών σημείων του χωροχρόνου. Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\partial_\nu a_\mu = \lim_{dx^\nu \rightarrow 0} \frac{a_\mu(x + dx) - a_\mu(x)}{dx^\nu} \quad (2.21)$$

Το a_μ είναι τανυστής και επομένως $a'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu$. Ακόμα έχουμε ότι:

$$da_\mu = \frac{\partial a_\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho = \partial_\rho a_\mu dx^\rho \quad (2.22)$$

Εκτελούμε τώρα τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} da_\mu \rightarrow da'_\mu &= \frac{\partial a'_\mu}{\partial x'^\rho} dx'^\rho = \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} a_\nu \right) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \\ &= \frac{\partial a_\nu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} dx^\sigma + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\rho \partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} a_\nu dx^\sigma \\ &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} da_\nu + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\rho \partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} a_\nu dx^\sigma \end{aligned} \quad (2.23)$$

και παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι αυτός που απαιτείται ώστε να είναι το da_μ 4-διάνυσμα. Όμως ο δεύτερος όρος καταστρέφει τον αναμενόμενο μετασχηματισμό. Δεδομένου ότι η ποσότητα $\frac{\partial a_\mu}{\partial x^\nu}$ δεν είναι τανυστής και άρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εκφράσεις για την περιγραφή φυσικών νόμων, ορίζουμε ένα νέο διαφορικό Da_μ (**απόλυτο διαφορικό**) που να μπορεί να μετασχηματίζεται ως τανυστής:

$$Da_\mu \equiv da_\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu a_\nu dx^\sigma \quad (2.24)$$

Θεωρώντας την έκφραση $(a^\rho b_\rho)_{;\sigma}$, όπου b_ρ είναι αυθαίρετο διάνυσμα και υποθέτοντας ότι ισχύει ο κανόνας γινομένου για τη συναλλοίωτη παράγωγο, έχουμε :

$$(a_\rho b^\rho)_{;\sigma} = (a_\rho b^\rho)_{,\sigma} = a_{\rho,\sigma} b^\rho + a_\rho b^\rho_{,\sigma} \quad (2.25)$$

και χρησιμοποιώντας τον κανόνα γινομένου για τη συναλλοίωτη παράγωγο :

$$(a_\rho b^\rho)_{;\sigma} = a_{\rho;\sigma} b^\rho + a_\rho b^\rho_{;\sigma} = a_{\rho;\sigma} b^\rho + a_\rho (b^\rho_{,\sigma} + \Gamma_{\tau\sigma}^\rho b^\tau) \quad (2.26)$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των δύο προηγούμενων σχέσεων, ο όρος $a_\rho b^\rho_{,\sigma}$ διαγράφεται και από τις δύο πλευρές. Στη συνέχεια, μετονομάζουμε τους βωβούς δείκτες στον όρο με το σύμβολο

Christoffel ($a_\rho \Gamma_{\tau\sigma}^\rho b^\tau = a_\tau \Gamma_{\rho\sigma}^\tau b^\rho$) ώστε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το b^ρ . Έτσι παίρνουμε:

$$a_{\rho;\sigma} b^\rho = a_{\rho,\sigma} b^\rho - \Gamma_{\rho\sigma}^\tau a_\tau b^\rho \quad (2.27)$$

και επειδή το b^ρ είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα, απαλείφοντας το, προκύπτει για τη **συναλλοίωτη παράγωγο συναλλοίωτου 4-διανύσματος** :

$$a_{\mu;\nu} = a_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma a_\sigma \quad (2.28)$$

και η αντίστοιχη σχέση για τη **συναλλοίωτη παράγωγο ανταλλοίωτου 4-διανύσματος** :

$$a_{;\nu}^\mu = a_{,\nu}^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma a^\sigma \quad (2.29)$$

όπου το κόμμα (,) δηλώνει τη μερική παράγωγο ($\partial a_\mu / \partial x^\nu$) και το ελληνικό ερωτηματικό (;) τη συναλλοίωτη.

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης γίνεται εύκολα εάν θεωρήσουμε βάσει της (2.28) ότι η συναλλοίωτη παράγωγος για ένα συναλλοίωτο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση:

$$b_{\lambda;\mu} = b_{\lambda,\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho b_\rho \quad (2.30)$$

και αντίστοιχα, για ένα βαθμοτό ϕ ισχύει $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$. Για ένα τυχαίο ανταλλοίωτο διάνυσμα a^λ , τότε κατασκευάζοντας το βαθμοτό $\phi = a^\lambda b_\lambda$, θα έχουμε:

$$(a^\lambda b_\lambda)_{;\mu} = (a^\lambda b_\lambda)_{,\mu} \implies a^\lambda_{;\mu} b_\lambda + a^\lambda b_{\lambda;\mu} = a^\lambda_{,\mu} b_\lambda + a^\lambda b_{\lambda,\mu} \quad (2.31)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση το $b_{\lambda;\mu}$, όπως το γράψαμε αρχικά, παίρνουμε:

$$a^\lambda_{;\mu} b_\lambda + a^\lambda (b_{\lambda,\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho b_\rho) = a^\lambda_{,\mu} b_\lambda + a^\lambda b_{\lambda,\mu} \quad (2.32)$$

Διαγράφοντας τον κοινό όρο $a^\lambda b_{\lambda,\mu}$ από τα δύο μέλη και κάνοντας κατάλληλη μετονομασία των βωβών δεικτών ($a^\lambda \Gamma_{\lambda\mu}^\rho b_\rho = a^\rho \Gamma_{\rho\mu}^\lambda b_\lambda$), μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το αυθαίρετο διάνυσμα b_λ και να το απαλείψουμε. Έτσι βρίσκουμε την τελική ζητούμενη σχέση:

$$a^\lambda_{;\mu} = a^\lambda_{,\mu} + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda a^\rho \quad (2.33)$$

2.3.3 Ο Τανυστής Καμπυλότητας Riemann

Θα δούμε τώρα πως προκύπτει ο **Μικτός Τανυστής Καμπυλότητας του Riemann** αποδεικνύοντας την **ταυτότητα Ricci**, η οποία εκφράζει τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων

ενός διανύσματος. Για να την αποδείξουμε, υπολογίζουμε τη δεύτερη συναλλοίωτη παράγωγο ενός ανταλλοίωτου διανύσματος a^μ και ελέγχουμε την αντισυμμετρία της.

Παραγωγίζοντας την (2.29) ως προς x^β και εφαρμόζοντας τον κανόνα της συναλλοίωτης παραγώγου για έναν τανυστή (ένας όρος με θετικό πρόσημο για τον άνω δείκτη και ένας με αρνητικό για τον κάτω):

$$a^\mu_{;\alpha;\beta} = \partial_\beta(a^\mu_{;\alpha}) + \Gamma^\mu_{\rho\beta} a^\rho_{;\alpha} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} a^\mu_{;\rho} \quad (2.34)$$

Αντικαθιστούμε την (2.29) στην (2.34) και εκτελούμε τις μερικές παραγώγους με τον κανόνα του γινομένου:

$$\begin{aligned} a^\mu_{;\alpha;\beta} &= \partial_\beta(\partial_\alpha a^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} a^\nu) + \Gamma^\mu_{\rho\beta}(\partial_\alpha a^\rho + \Gamma^\rho_{\nu\alpha} a^\nu) - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}(\partial_\rho a^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} a^\nu) \\ &= \partial_\beta \partial_\alpha a^\mu + (\partial_\beta \Gamma^\mu_{\nu\alpha}) a^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} (\partial_\beta a^\nu) + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \partial_\alpha a^\rho + \Gamma^\mu_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\nu\alpha} a^\nu - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \partial_\rho a^\mu - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\nu\rho} a^\nu \end{aligned} \quad (2.35)$$

Για να διευκολύνουμε τη σύγκριση, μετονομάζουμε τους βωβούς δείκτες στους όρους των πρώτων παραγώγων. Στον όρο $\Gamma^\mu_{\rho\beta} \partial_\alpha a^\rho$ αλλάζουμε το ρ σε ν , ώστε να γίνει $\Gamma^\mu_{\nu\beta} \partial_\alpha a^\nu$.

Για να βρούμε τον όρο $a^\mu_{;\beta;\alpha}$, εναλλάσσουμε τους δείκτες παραγώγισης α και β στην (2.35):

$$a^\mu_{;\beta;\alpha} = \partial_\alpha \partial_\beta a^\mu + (\partial_\alpha \Gamma^\mu_{\nu\beta}) a^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\beta} (\partial_\alpha a^\nu) + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \partial_\beta a^\nu + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\rho_{\nu\beta} a^\nu - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} \partial_\rho a^\mu - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} \Gamma^\mu_{\nu\rho} a^\nu \quad (2.36)$$

Τώρα, υπολογίζουμε τη διαφορά (τον μεταθέτη) $a^\mu_{;\alpha;\beta} - a^\mu_{;\beta;\alpha}$. Παρατηρούμε τις εξής κρίσιμες ακυρώσεις:

- Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συμμετρικές ($\partial_\beta \partial_\alpha a^\mu = \partial_\alpha \partial_\beta a^\mu$), άρα αλληλοαναιρούνται.
- Οι όροι με τις πρώτες παραγώγους του διανύσματος ($\Gamma^\mu_{\nu\alpha} \partial_\beta a^\nu$ και $\Gamma^\mu_{\nu\beta} \partial_\alpha a^\nu$) εμφανίζονται αυτούσιοι και στις δύο εξισώσεις, οπότε κατά την αφαίρεση διαγράφονται.
- Στη Διαφορική Γεωμετρία, το θεμελιώδες θεώρημα αποδεικνύει ότι υπάρχει μία και μοναδική συνοχή η οποία ικανοποιεί ταυτόχρονα δύο συνθήκες: είναι χωρίς στρέψη (συμμετρική) και διατηρεί τη μετρική αναλλοίωτη κατά την παράλληλη μεταφορά ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$). Αυτή η μοναδική συνοχή ονομάζεται **Συνοχή Levi-Civita** και είναι αυτή ακριβώς που υιοθετείται στο Καθιερωμένο Κοσμολογικό Πρότυπο (Λ CDM).

Φυσικά, η απουσία στρέψης ερμηνεύεται από το γεγονός ότι η βαρύτητα σε μακροσκοπικές κλίμακες καθορίζεται αποκλειστικά από την *καμπυλότητα* που προκαλεί η μάζα-ενέργεια. Η στρέψη θα απαιτούσε σύζευξη με το εγγενές σπιν (spin) της ύλης, το οποίο σε αστροφυσικές και κοσμολογικές κλίμακες αλληλοαναιρείται και θεωρείται μακροσκοπικά αμελητέο. Σε έναν χωρόχρονο χωρίς στρέψη (torsion-free), ήτοι $T^\rho_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} =$

0 τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά: $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\rho}$. Συνεπώς, οι όροι $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}\partial_{\rho}a^{\mu}$ και $\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}a^{\nu}$ ακυρώνονται απόλυτα με τους αντίστοιχους όρους της (2.36).

Το εντυπωσιακό αποτέλεσμα είναι ότι **όλες οι παράγωγοι του διανύσματος a^{μ} εξαφανίζονται**. Το μόνο που απομένει είναι οι όροι που πολλαπλασιάζονται με το ίδιο το διάνυσμα a^{ν} :

$$a^{\mu}_{;\alpha;\beta} - a^{\mu}_{;\beta;\alpha} = (\partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} - \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} + \Gamma_{\rho\beta}^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\rho}) a^{\nu} \quad (2.37)$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι προφανώς ένας τανυστής και το a^{ν} είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα, η ποσότητα εντός της παρένθεσης *πρέπει υποχρεωτικά* να είναι τανυστής. Ορίζουμε την αρνητική τιμή αυτής της παρένθεσης ως τον **Τανυστή Καμπυλότητας Riemann** $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\mu} - \partial_{\beta}\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\rho\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\rho} - \Gamma_{\rho\beta}^{\mu}\Gamma_{\nu\alpha}^{\rho} \quad (2.38)$$

ή

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\nu,\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\alpha\nu,\beta}^{\mu} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\rho} - \Gamma_{\rho\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} \quad (2.39)$$

Με βάση αυτόν τον ορισμό, η (2.37) παίρνει την τελική της μορφή, γνωστή ως **Ταυτότητα Ricci**:

$$a^{\mu}_{;\alpha;\beta} - a^{\mu}_{;\beta;\alpha} = -R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}a^{\nu} \quad (2.40)$$

Η ταυτότητα αυτή αποδεικνύει ότι οι συναλλοίωτες παράγωγοι μετατίθενται (αλλάζουν σειρά χωρίς συνέπειες) *μόνο* σε έναν επίπεδο χωρόχρονο όπου $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = 0$. Σε καμπύλο χωρόχρονο, η σειρά παραγωγίσις έχει σημασία!

Δύο σημαντικοί τανυστές καμπυλότητας που προκύπτουν αθροίζοντας πάνω στους δείκτες του Riemann είναι ο **τανυστής του Ricci**, ο οποίος ορίζεται ως :

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = R_{\nu\mu} \quad (2.41)$$

καθώς και το **βαθμοτό Ricci** :

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.42)$$

2.3.4 Εξισώσεις Πεδίου Einstein

Η γενική ιδέα στη (ΓΘΣ) για το πως το περιεχόμενο του "χώρου" (ύλη-ενέργεια) παράγει τη γεωμετρία του, είναι στο να αναζητήσουμε την κατάλληλη εξίσωση όπου το ένα μέλος της να περιγράφει τη γεωμετρία και το άλλο το περιεχόμενο. Είναι πλέον προφανές πως αυτό θα γίνει με την βοήθεια τανυστών.

Για την περιγραφή λοιπόν του περιεχομένου καταλληλότερος τανυστής είναι ο **τανυστής ενέργειας-ορμής** $T^{\mu\nu}$. Ο πιο εποπτικός τρόπος κατασκευής του τανυστή ενέργειας-ορμής ξεκινά από την

Ειδική Σχετικότητα και τη μελέτη των ρευστών.

- **Ορισμός ως Ροή:** Οι συνιστώσες του τανυστή $T^{\mu\nu}$ ορίζονται φυσικά ως η ροή της μ -συνιστώσας της ορμής που διασχίζει μια επιφάνεια με σταθερό x^ν . Συγκεκριμένα:
 - T^{00} : Πυκνότητα ενέργειας.
 - T^{0i} : Ροή ενέργειας (π.χ. αγωγή θερμότητας).
 - T^{i0} : Πυκνότητα ορμής.
 - T^{ij} : Ροή ορμής (πίεση και διατμητικές τάσεις).
- **Η περίπτωση της "Σκόνης" (Dust):** Θεωρώντας ένα σύνολο μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων (σκόνη) που κινούνται με 4-ταχύτητα u^μ , η πυκνότητα μάζας/ενέργειας δεν είναι βαθμωτό μέγεθος (scalar) αλλά μετασχηματίζεται. Λόγω της συστολής του όγκου και της αύξησης της μάζας κατά τον παράγοντα γ , η πυκνότητα μετασχηματίζεται ως συνιστώσα τανυστή 2ης τάξης. Έτσι, για τη σκόνη προκύπτει:

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

όπου ρ είναι η ιδιοπυκνότητα.

- **Ιδανικό Ρευστό:** Γενικεύοντας για ρευστά που έχουν ισότροπη πίεση p στο σύστημα ηρεμίας τους (χωρίς εσωτερικές τριβές ή ροή θερμότητας), ο τανυστής παίρνει τη μορφή:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Επιπλέον στην (ΓΘΣ), η διατήρηση του τανυστή ενέργειας - ορμής γενικεύεται εάν αντικαταστήσουμε την απλή παράγωγο με τη συναλλοίωτη παράγωγο ως : $T^\nu_{\mu;\nu} = 0$.

Σε ότι αφορά το μέλος της εξίσωσης που θα περιγράφει τη γεωμετρία (δηλαδή καμπυλότητα) ο τανυστής του Riemann δεν μας εξυπηρετεί αφού αφ' ενός έχει 4 δείκτες, ενώ ο τανυστής ενέργειας - ορμής 2 και αφετέρου όπου δεν θα υπήρχε ύλη, δεν θα υπήρχε καμπυλότητα (κατ' επέκταση και βαρύτητα), αφού στον κενό χώρο $T^{\mu\nu} = 0$. Αναζητούμε λοιπόν τον απλούστερο τανυστή 2ης τάξης που να περιγράφει καμπυλότητα και να διατηρείται συναλλοίωτα (δηλ. να έχει μηδενική παράγωγο). Η μορφή του εν λόγω τανυστή θα είναι : $R^{\mu\nu} + C g^{\mu\nu} R$ με $C = \text{const}$.

Η παραπάνω σταθερά είναι $C = -1/2$ όπως εύκολα αποδεικνύεται λαμβάνοντας υπόψιν την απαίτηση μηδενισμού της παραγώγου και κάνοντας χρήση της **ταυτότητας Bianchi** (για την απόδειξη βλ. (Π1)):

$$\boxed{R^{\mu}_{\nu\rho\sigma;\tau} + R^{\mu}_{\nu\tau\rho;\sigma} + R^{\mu}_{\nu\sigma\tau;\rho} = 0} \quad (2.45)$$

πολλαπλασιάζοντας με $\delta^{\rho}_{\mu}g^{\nu\sigma}$, έχουμε :

$$(g^{\nu\sigma}R^{\mu}_{\nu\mu\sigma})_{;\tau} + (g^{\nu\sigma}R^{\mu}_{\nu\tau\mu})_{;\sigma} + (g^{\nu\sigma}R^{\mu}_{\nu\sigma\tau})_{;\mu} = 0 \quad (2.46)$$

ή

$$R_{;\tau} - R^{\sigma}_{\tau;\sigma} - R^{\mu}_{\tau;\mu} = 0 \quad (2.47)$$

και πολλαπλασιάζοντας με $g^{\rho\tau}$, τελικά έχουμε :

$$R^{\rho\mu}_{;\mu} - \frac{1}{2}g^{\rho\tau}R_{;\tau} = 0 \quad (2.48)$$

η οποία δεν είναι άλλη από την επιθυμητή σχέση :

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = 0 \quad (2.49)$$

Έχουμε λοιπόν βρεί τον κατάλληλο τανυστή προκειμένου να περιγράψουμε τη γεωμετρία του χωροχρόνου και αυτός δεν είναι άλλος από τον **τανυστή του Einstein** :

$$\boxed{G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R} \quad (2.50)$$

Είμαστε σε θέση λοιπόν τώρα να γράψουμε τη σχέση που συνδέει την γεωμετρία του χωροχρόνου(τανυστής Einstein) με το περιεχόμενο του (τανυστής ενέργειας - ορμής) και αυτές δεν είναι άλλες από τις **εξισώσεις πεδίου Einstein** (σε συναλλοίωτη μορφή) :

$$\boxed{G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}} \quad (2.51)$$

Με βάση την αρχή της αντιστοιχίας της (ΓΘΣ) όμως, κατά την οποία όταν τα βαρυτικά πεδία είναι ασθενή οι εξισώσεις πεδίου Einstein θα πρέπει να δίνουν τα ίδια αποτελέσματα με την **εξίσωση Poisson** ($\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$) όπως αυτή απορρέει από την Νευτώνεια Βαρύτητα, μπορούμε να προσδιορίσουμε την σταθερά κ . Για διευκόλυνση των υπολογισμών, θεωρούμε $c = 1$ και χρησιμοποιούμε την εναλλακτική μορφή των εξισώσεων πεδίου (trace-reversed form), η οποία συνδέει άμεσα τον τανυστή Ricci $R_{\mu\nu}$ με τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$. Για να απομονώσουμε τον τανυστή καμπυλότητας Ricci ($R_{\mu\nu}$), υπολογίζουμε το ίχνος αυτής της τανυστικής εξίσωσης. Για να το πετύχουμε αυτό, συστέλλουμε την εξίσωση πολλαπλασιάζοντας και τα

δύο μέλη με τον αντίστροφο μετρικό τανυστή $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R(g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = \kappa(g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}) \quad (2.52)$$

- Η συστολή του τανυστή Ricci μας δίνει το Βαθμωτό Ricci: $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R$
- Το ίχνος της μετρικής ισούται με τον αριθμό των διαστάσεων ($D = 4$) του χωροχρόνου:
 $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} = 4$
- Το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής συμβολίζεται με T : $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = T$

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην (2.52), παίρνουμε την εξίσωση για τα ίχνη:

$$R - \frac{1}{2}R(4) = \kappa T \quad (2.53)$$

$$R - 2R = \kappa T \implies -R = \kappa T \implies R = -\kappa T \quad (2.54)$$

Η εξίσωση (2.54) δείχνει άμεσα ότι το Βαθμωτό Ricci (η συνολική καμπυλότητα του χωροχρόνου) είναι ευθέως ανάλογο με το ίχνος του τανυστή ενέργειας-ορμής.

Αντικαθιστώντας τώρα τη σχέση $R = -\kappa T$ πίσω στις εξισώσεις πεδίου, έχουμε:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(-\kappa T)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

ή

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa T g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.56)$$

ή

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu} \right)} \quad (2.57)$$

Στο **Νευτώνειο όριο**, κάνουμε τρεις βασικές υποθέσεις:

1. **Ασθενές πεδίο:** Η μετρική του χωροχρόνου προσεγγίζει την επίπεδη μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ με μια μικρή διαταραχή $h_{\mu\nu}$ ($|h_{\mu\nu}| \ll 1$):

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.58)$$

Η φυσική σημασία της χρονικής συνιστώσας της μετρικής g_{00} αναδεικνύεται μελετώντας την κίνηση ενός δοκιμαστικού σωματιδίου που εκτελεί ελεύθερη πτώση. Στη Γενική Σχετικότητα, η τροχιά του σωματιδίου περιγράφεται από την εξίσωση της γεωδαισιακής:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.59)$$

όπου τ είναι ο ιδιοχρόνος του σωματιδίου.

Για να μεταβούμε στο **Νευτώνειο όριο**, κάνουμε τις εξής παραδοχές:

- **Χαμηλές ταχύτητες** ($v \ll c$): Οι χωρικές συνιστώσες της τετραταχύτητας είναι αμελητέες σε σχέση με τη χρονική. Επομένως, $dx^i/d\tau \ll dt/d\tau$ (με $x^0 = t$ και $c = 1$).
- **Στατικό πεδίο**: Η μετρική δεν αλλάζει με τον χρόνο, άρα όλες οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται ($\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$).
- **Ασθενές πεδίο**: Το βαρυτικό πεδίο είναι τόσο ασθενές, ώστε ο ιδιοχρόνος τ ταυτίζεται πρακτικά με τον χρόνο συντεταγμένων t ($dt/d\tau \approx 1$).

Εφαρμόζοντας την πρώτη παραδοχή (χαμηλές ταχύτητες), ο μόνος όρος που επιβιώνει στο άθροισμα $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau}$ είναι αυτός με $\alpha = \beta = 0$. Η γεωδαισιακή εξίσωση για τις χωρικές συντεταγμένες ($\mu = i$) απλοποιείται δραματικά:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \approx 0 \implies \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i \quad (2.60)$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.60) είναι η τρισδιάστατη κλασική επιτάχυνση του σωματιδίου. Στη Νευτώνεια μηχανική, η επιτάχυνση αυτή προκαλείται από την κλίση του βαρυτικού δυναμικού Φ :

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi \implies \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \Phi \quad (2.61)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (2.60) και (2.61), προκύπτει ότι το σύμβολο Christoffel Γ_{00}^i παίζει τον ρόλο της δύναμης:

$$\Gamma_{00}^i = \partial_i \Phi \quad (2.62)$$

Τώρα, υπολογίζουμε το Γ_{00}^i από τον ορισμό του, κάνοντας χρήση του ασθενούς πεδίου ($g^{ij} \approx \eta^{ij} = \delta^{ij}$) και του στατικού πεδίου ($\partial_0 = 0$):

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (2\partial_0 g_{j0} - \partial_j g_{00}) \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} (0 - \partial_j g_{00}) = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00} \quad (2.63)$$

Εξισώνοντας τις (2.62) και (2.63), έχουμε:

$$\partial_i \Phi = -\frac{1}{2} \partial_i g_{00} \implies \partial_i (g_{00} + 2\Phi) = 0 \quad (2.64)$$

Η σχέση αυτή σημαίνει ότι η ποσότητα $(g_{00} + 2\Phi)$ είναι μια σταθερά στον χώρο. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε:

$$g_{00} = C - 2\Phi \quad (2.65)$$

Για να βρούμε τη σταθερά ολοκλήρωσης C , θεωρούμε τις οριακές συνθήκες στο άπειρο. Πολύ μακριά από κάθε κατανομή μάζας ($r \rightarrow \infty$), το Νευτώνειο δυναμικό μηδενίζεται ($\Phi \rightarrow 0$) και ο χωρόχρονος γίνεται εντελώς επίπεδος (χώρος Minkowski), άρα η χρονική συνιστώσα της μετρικής παίρνει την τιμή $g_{00} \rightarrow \eta_{00} = -1$. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στο άπειρο:

$$-1 = C - 0 \implies C = -1 \quad (2.66)$$

Καταλήγουμε έτσι στην τελική σχέση (αν επαναφέρουμε το c , η σχέση είναι $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi/c^2)$):

$$g_{00} \approx -1 - 2\Phi \implies g_{00} \approx -(1 + 2\Phi) \quad (2.67)$$

Για τη χρονική συνιστώσα, η σχέση με το Νευτώνειο δυναμικό είναι η $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi)$, άρα :

$$h_{00} = -2\Phi \quad (2.68)$$

2. **Βραδέως κινούμενη ύλη:** Οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερες του φωτός ($v \ll c$). Ο ταυυστής ενέργειας-ορμής κυριαρχείται από την πυκνότητα μάζας-ενέργειας στην ηρεμία, άρα η μόνη μη μηδενική συνιστώσα είναι η $T_{00} \approx \rho$. Το ίχνος υπολογίζεται ως $T \approx \eta^{00}T_{00} = -\rho$.
3. **Στατικό πεδίο:** Οι χρονικές παράγωγοι είναι αμελητέες σε σχέση με τις χωρικές ($\partial_0 \approx 0$).

Υπολογίζουμε πρώτα το **δεξί μέλος** της (2.57) για τη χρονική συνιστώσα ($\mu = \nu = 0$):

$$R_{00} = \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00} \right) \approx \kappa \left[\rho - \frac{1}{2}(-\rho)(-1) \right] = \kappa \left(\rho - \frac{1}{2}\rho \right) = \frac{1}{2}\kappa\rho \quad (2.69)$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το **αριστερό μέλος**, δηλαδή τη συνιστώσα R_{00} του ταυυστή Ricci. Κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς $h_{\mu\nu}$ και αγνοώντας τις χρονικές παραγωγούς, ο ταυυστής Ricci απλοποιείται στη μορφή:

$$R_{00} \approx \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i \approx \partial_i \Gamma_{00}^i \quad (2.70)$$

Το σύμβολο Christoffel Γ_{00}^i στο όριο ασθενούς πεδίου είναι:

$$\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2}\eta^{ij}(2\partial_0 h_{j0} - \partial_j h_{00}) \approx -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_j h_{00} \quad (2.71)$$

Αντικαθιστώντας το στην (2.70), παίρνουμε:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\partial_i(\delta^{ij}\partial_j h_{00}) = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \quad (2.72)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $h_{00} = -2\Phi$, το αριστερό μέλος γίνεται:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\nabla^2(-2\Phi) = \nabla^2\Phi \quad (2.73)$$

Τέλος, εξισώνοντας το δεξί μέλος της (2.69) με το δεξί μέλος της (2.73), προκύπτει:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{2}\kappa\rho \quad (2.74)$$

Με απευθείας σύγκριση της (2.74) με την εξίσωση Poisson της Νευτώνειας βαρύτητας, προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\kappa = 4\pi G \implies \kappa = 8\pi G \quad (2.75)$$

Τελικά, επαναφέροντας την ταχύτητα του φωτός c , προσδιορίζουμε την σταθερά κ , ως :

$$\boxed{\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}} \quad (2.76)$$

Στον **κενό χώρο** όπου $T^{\mu\nu} = 0$ οι εξισώσεις πεδίου γράφονται ως :

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0 \quad (2.77)$$

ή

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = 0 \quad (2.78)$$

ή

$$R^\mu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\mu R = 0 \quad (2.79)$$

και εφόσον $R^\mu_\mu = R$ και $\delta^\mu_\mu = 4$ θα είναι $R = 0$ με αποτέλεσμα :

$$\boxed{R^{\mu\nu} = 0} \quad (2.80)$$

2.4 Η Λύση Schwarzschild

Αναζητούμε τώρα μία λύση των εξισώσεων πεδίου στο κενό γύρω από ένα σφαιρικό αντικείμενο. Για να βρούμε τη μετρική, βρίσκουμε πρώτα την κατάλληλη γενική μορφή της μετρικής που εμπεριέχει τις αναμενόμενες συμμετρίες. Η μετρική θα πρέπει να είναι χρονικά ανεξάρτητη μιας και το σφαιρικό αντικείμενο στο κέντρο είναι στατικό και θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες (λόγω σφαιρικής συμμετρίας). Σε σφαιρικές συντεταγμένες η μετρική δεν θα πρέπει να εξαρτάται από τις γωνίες θ και ϕ , παρά μόνο με τον τρόπο που αντιστοιχεί σε μετρική επιφάνειας σφαίρας σε δεδομένη ακτίνα r . Επιπλέον οι βαρυτικές δυνάμεις θα πρέπει να μηδενίζονται σε άπειρη απόσταση από το κέντρο.

Οι παραπάνω περιορισμοί μάς οδηγούν σε μετρικές της μορφής:

$$ds^2 = -B(r)c^2 dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.81)$$

με $A(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$ και $B(r \rightarrow \infty) \rightarrow 1$. Αυτή είναι η πιο γενική μετρική συμβατή με τους περιορισμούς και τις συμμετρίες του συστήματός μας.

2.4.1 Υπολογισμός των Συμβόλων Christoffel

Λεπτομερής υπολογισμός οδηγεί στα 13 μη μηδενικά σύμβολα Christoffel. Η προαναφερθείσα γενική σχέση που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των συμβόλων του Christoffel για διαγώνιες μετρικές είναι η σχέση (2.12):

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\alpha} (\partial_j g_{ia} + \partial_i g_{ja} - \partial_a g_{ij}) \quad (2.82)$$

Επιπλέον, μόνο οι παράγωγοι ως προς r θα είναι μη μηδενικές. Συμβολίζουμε αυτές τις παραγώγους με τόνο ($'$). Για τη μετρική Schwarzschild:

$$ds^2 = -B(r)c^2 dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.83)$$

τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel Γ_{ij}^k είναι τα εξής 13 (λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$):

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)} \quad (2.84)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{B'(r)c^2}{2A(r)} \quad (2.85)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{A'(r)}{2A(r)} \quad (2.86)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A(r)} \quad (2.87)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} \quad (2.88)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \quad (2.89)$$

$$(2.90)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot\theta \quad (2.91)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta \quad (2.92)$$

Συνολικά, έχουμε 9 διακριτές εξισώσεις που αντιστοιχούν σε 13 μη μηδενικές συνιστώσες λόγω της συμμετρίας στους κάτω δείκτες.

2.4.2 Ο τανυστής Riemann

Οι συνιστώσες του τανυστή Riemann, σύμφωνα με την σχέση (2.39) θα είναι:

$$R_{rtr}^t = \partial_r \Gamma_{rt}^t - \partial_t \Gamma_{rr}^t + \Gamma_{\mu r}^t \Gamma_{tr}^{\mu} - \Gamma_{\mu t}^t \Gamma_{rr}^{\mu} \quad (2.93)$$

Κάνοντας τις αντικαταστάσεις των συμβόλων Christoffel που βρήκαμε προηγουμένως:

$$R_{rtr}^t = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \quad (2.94)$$

(όπου ο τόνος ' υποδηλώνει παράγωγο ως προς r).

Οι υπόλοιπες μη μηδενικές συνιστώσες υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο και είναι:

$$R_{\theta t\theta}^t = -\frac{rB'}{2A} \quad (2.95)$$

$$R_{\phi t\phi}^t = -\frac{rB' \sin^2\theta}{2A} \quad (2.96)$$

$$R_{\theta r\theta}^r = \frac{rA'}{2A^2} \quad (2.97)$$

$$R_{\phi r\phi}^r = \frac{rA' \sin^2\theta}{2A^2} \quad (2.98)$$

$$R_{\phi\theta\phi}^{\theta} = \left(1 - \frac{1}{A} \right) \sin^2\theta \quad (2.99)$$

2.4.3 Ο τανυστής Ricci

Για τον υπολογισμό του τανυστή Ricci αρκούν 6 συνιστώσες του τανυστή Riemann δεδομένου ότι ο τανυστής του Riemann είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δύο πρώτων ή των δύο τελευταίων δεικτών και μόνο οι παράγωγοι ως προς r είναι μη μηδενικές. Ο τανυστής Ricci $R_{\mu\nu}$ προκύπτει από τη συστολή του τανυστή του Riemann. Οι μη μηδενικές συνιστώσες

(διαγώνιες) του τανυστή Ricci για τη συγκεκριμένη μετρική είναι:

$$R_{tt} = -\frac{c^2 B}{A} \left[-\frac{B''}{2B} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{B} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{A'B'}{AB} - \frac{B'}{rB} \right] \quad (2.100)$$

$$R_{rr} = -\frac{B''}{2B} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{rA} \quad (2.101)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{1}{A} - \frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) \quad (2.102)$$

2.4.4 Επίλυση των Εξισώσεων και η Λύση Schwarzschild

Στο κενό, όπως είδαμε, οι εξισώσεις πεδίου του Einstein ανάγονται σε $R_{\mu\nu} = 0$. Εκ των (2.100) - (2.101) έχουμε :

$$\frac{A}{c^2 B} R_{tt} + R_{rr} = 0 \quad (2.103)$$

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \implies (AB)' = 0 \implies AB = \text{const.} \quad (2.104)$$

Απαιτώντας στο άπειρο η μετρική να γίνεται επίπεδη ($A \rightarrow 1, B \rightarrow 1$), βρίσκουμε ότι $A(r)B(r) = 1$ ή $B(r) = 1/A(r)$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $R_{\theta\theta} = 0$, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d}{dr}(rB) = 1 \implies B(r) = 1 - \frac{a}{r} \quad (2.105)$$

όπου a είναι σταθερά ολοκλήρωσης. Επομένως:

$$A(r) = \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1} \quad (2.106)$$

και επειδή σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας, για ασθενή βαρυτικά πεδία, η συνιστώσα g_{tt} σχετίζεται με το Νευτώνειο δυναμικό $\Phi = -GM/r$ μέσω της σχέσης $g_{tt} \approx -(1 + 2\Phi/c^2)$. Συγκρίνοντας με τη λύση μας ($g_{tt} = -B = -(1 - a/r)$), προκύπτει για την σταθερά a :

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.107)$$

Επομένως, η τελική μορφή της μετρικής Schwarzschild είναι:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.108)$$

2.4.5 Το Θεώρημα του Birkhoff και Κοσμολογικές Προεκτάσεις

Το Θεώρημα του Birkhoff, αποτελεί ένα από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Το θεώρημα δηλώνει ότι: *Η μοναδική σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein στο κενό είναι η στατική, ασυμπτωτικά επίπεδη μετρική Schwarzschild.*

Εάν θεωρήσουμε μια κενή περιοχή του χωροχρόνου έξω από μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας M , ο χωροχρόνος περιγράφεται υποχρεωτικά από το στοιχείο μήκους:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.109)$$

Οι φυσικές και κοσμολογικές συνέπειες αυτού του θεωρήματος είναι τεράστιας σημασίας:

- **Απουσία Βαρυτικής Ακτινοβολίας:** Ακόμα και αν η κεντρική πηγή (π.χ. ένας αστέρας) πάλλεται ακτινικά ή καταρρέει βαρυτικά διατηρώντας τη σφαιρική της συμμετρία, το εξωτερικό βαρυτικό πεδίο παραμένει αυστηρά στατικό. Συνεπώς, μια καθαρά σφαιρική κίνηση μάζας δεν μπορεί να εκπέμψει βαρυτικά κύματα.
- **Κοσμολογική Εφαρμογή (Το Ανάλογο του Νεύτωνα):** Στο πλαίσιο της κοσμολογίας, το θεώρημα Birkhoff αποτελεί το αυστηρό σχετικιστικό ανάλογο του θεωρήματος του φλοιού (shell theorem) του Νεύτωνα. Εγγυάται ότι, σε ένα ομογενές και ισότροπο Σύμπαν, αν θεωρήσουμε μια υποθετική σφαιρική επιφάνεια, η βαρυτική επίδραση όλης της ύλης που βρίσκεται έξω από αυτή τη σφαίρα αλληλοαναιρείται πλήρως στο εσωτερικό της. Αυτό επιτρέπει τη μελέτη της δυναμικής του Σύμπαντος εφαρμόζοντας Νευτώνεια μηχανική σε μια δοκιμαστική μάζα στην επιφάνεια αυτής της σφαίρας.

2.4.6 Μαθηματική Απόδειξη της Μετάπτωσης του Περιηλίου του Ερμή

Αντί επιλόγου αυτού του κεφαλαίου, θα ήταν ενδιαφέρον να επανέλθουμε στο αστρονομικό φαινόμενο της μετάπτωσης του περιηλίου του Ερμή και να δούμε πως αυτό ερμηνεύεται στο πλαίσιο της (ΓΘΣ). Για να βρούμε την τροχιά ενός πλανήτη, αναζητούμε μια σχέση που να συνδέει την ακτινική του απόσταση από τον Ήλιο (r) με τη γωνία περιστροφής του (ϕ).

Επειδή η βαρυτική έλξη αποτελεί κεντρική δύναμη (η διεύθυνσή της διέρχεται διαρκώς από το κέντρο του Ήλιου), η ασκούμενη ροπή στον πλανήτη είναι μηδενική. Κατά συνέπεια, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται.

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, η ειδική στροφορμή (δηλαδή η στροφορμή ανά μο-

νάδα μάζας) συμβολίζεται με h και δίνεται από τη σχέση:

$$h = r^2 \frac{d\phi}{dt} = r^2 \dot{\phi} = \text{const.} \quad (2.110)$$

Λύνοντας την Εξίσωση (2.110) ως προς τη γωνιακή ταχύτητα $\dot{\phi}$, προκύπτει:

$$\dot{\phi} = \frac{h}{r^2} \quad (2.111)$$

Εισάγοντας τον μετασχηματισμό μεταβλητής $u = \frac{1}{r}$ (οπότε $r = \frac{1}{u}$) στην εξίσωση της στροφορμής, προκύπτει:

$$\dot{\phi} = hu^2 \quad (2.112)$$

Στη συνέχεια, αναζητούμε την έκφραση της ακτινικής ταχύτητας (\dot{r}) συναρτήσει της αζιμουθιακής γωνίας ϕ , εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} \quad (2.113)$$

Δεδομένου ότι $r = 1/u$, η παράγωγός του είναι $\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}$. Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση καθώς και τη γωνιακή ταχύτητα $\frac{d\phi}{dt} = hu^2$, λαμβάνουμε:

$$\dot{r} = \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \right) (hu^2) \implies \dot{r} = -h \frac{du}{d\phi} \quad (2.114)$$

Παρατηρούμε ότι οι μη-γραμμικοί όροι u^2 απλοποιούνται πλήρως. Παραγωγίζοντας εκ νέου ως προς τον χρόνο, υπολογίζουμε την ακτινική επιτάχυνση \ddot{r} :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{d\phi} \left(-h \frac{du}{d\phi} \right) \frac{d\phi}{dt} = -h \frac{d^2u}{d\phi^2} (hu^2) \implies \ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} \quad (2.115)$$

Στο σύστημα των πολικών συντεταγμένων, η συνολική επιτάχυνση κατά την ακτινική διεύθυνση δίνεται από τη σχέση $a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$. Σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα, η επιτάχυνση αυτή οφείλεται αποκλειστικά στο βαρυτικό πεδίο:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.116)$$

Αντικαθιστώντας τους όρους της Νευτώνειας εξίσωσης με τις εκφράσεις που εξήχθησαν συναρτήσει της νέας μεταβλητής u , έχουμε:

- $\ddot{r} = -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2}$
- $r\dot{\phi}^2 = \frac{1}{u} (hu^2)^2 = h^2 u^3$

$$\bullet \quad -\frac{GM}{r^2} = -GMu^2$$

Με αυτές τις αντικαταστάσεις, η εξίσωση του Νεύτωνα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$-h^2u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} - h^2u^3 = -GMu^2 \quad (2.117)$$

Διαιρώντας όλους τους όρους με τον κοινό παράγοντα $-h^2u^2$, καταλήγουμε στην τελική μορφή της **Εξίσωσης Binet**:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}} \quad (2.118)$$

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα Birkhoff ότι ο χωρόχρονος γύρω από τον Ήλιο (μάζας M) περιγράφεται από τη μετρική Schwarzschild. Για έναν πλανήτη που κινείται στο ισημερινό επίπεδο ($\theta = \pi/2$), το «μήκος» της διαδρομής του στον χωρόχρονο δίνεται από τη σχέση:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (2.119)$$

Διαιρώντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το $d\tau^2$, προκύπτει η εξίσωση της 4-ταχύτητας του πλανήτη (όπου η τελεία υποδηλώνει παραγώγιση ως προς τον ιδιοχρόνο τ):

$$-c^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \quad (2.120)$$

Ορίζοντας τώρα την ειδική ενέργεια ως $\epsilon \equiv \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 \dot{t}$, η οποία διατηρείται κατά μήκος της γεωδαισιακής του πλανήτη, όπως και η ειδική στοφορμή (h), λόγω της στατικότητας και της σφαιρικής συμμετρίας της μετρικής Schwarzschild και αντικαθιστώντας στην (2.120) λαμβάνουμε:

$$-c^2 = -\frac{\epsilon^2 c^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + \frac{h^2}{r^2} \quad (2.121)$$

Πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με τον παράγοντα $\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$ προκειμένου να απαλειφθούν οι παρονομαστές και αναδιατάσσοντας τους όρους, καταλήγουμε στην εξίσωση του «Ενεργού Δυναμικού» στη Γενική Σχετικότητα:

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2GMh^2}{c^2 r^3} = c^2(\epsilon^2 - 1) \quad (2.122)$$

Στην Εξίσωση (2.122), ο όρος $-\frac{2GMh^2}{c^2 r^3}$ αποτελεί την καθαρά σχετικιστική διόρθωση. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο όρος αυτός δεν υπάρχει στη Νευτώνεια μηχανική και είναι αυτός που ευθύνεται για τη μη κλειστή μορφή των τροχιών, οδηγώντας στο φαινόμενο της μετάπτωσης του περιηλίου.

Εφαρμόζοντας εκ νέου τον μετασχηματισμό του Binet, θέτουμε $u = 1/r$. Όπως αποδείχθηκε στην κλασική ανάλυση, η ακτινική ταχύτητα μετασχηματίζεται ως $\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi}$, συνεπώς το τετράγωνό της ισούται με $\dot{r}^2 = h^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2$.

Αντικαθιστώντας το r με $1/u$ στην εξίσωση του ενεργού δυναμικού (Εξίσωση 2.122) και θεωρώντας το δεξιό μέλος ως μια νέα σταθερά, προκύπτει:

$$h^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + h^2 u^2 - 2GMu - \frac{2GMh^2}{c^2} u^3 = \text{const.} \quad (2.123)$$

Διαιρώντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το τετράγωνο της ειδικής στροφορμής (h^2), η εξίσωση απλοποιείται στην ακόλουθη μορφή:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 - \frac{2GM}{h^2} u - \frac{2GM}{c^2} u^3 = \text{const.} \quad (2.124)$$

Το τελευταίο βήμα συνίσταται στην παραγωγή της (2.124) ως προς τη γωνία ϕ . Εφόσον το δεξιό μέλος αποτελεί σταθερά, η παράγωγός του μηδενίζεται:

$$2 \left(\frac{du}{d\phi} \right) \frac{d^2 u}{d\phi^2} + 2u \left(\frac{du}{d\phi} \right) - \frac{2GM}{h^2} \left(\frac{du}{d\phi} \right) - 3 \cdot \frac{2GM}{c^2} u^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right) = 0 \quad (2.125)$$

Με την εύλογη φυσική παραδοχή ότι η ακτίνα της τροχιάς δεν παραμένει αυστηρά σταθερή (δηλαδή ο πλανήτης δεν εκτελεί μια τέλεια κυκλική τροχιά, άρα $\frac{du}{d\phi} \neq 0$), μπορούμε να διαιρέσουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με τον κοινό παράγοντα $2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)$. Η απλοποίηση αυτή οδηγεί στη σχέση:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{h^2} - \frac{3GM}{c^2} u^2 = 0 \quad (2.126)$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους, καταλήγουμε στην τελική διαφορική εξίσωση της τροχιάς στο πλαίσιο της (ΓΘΣ):

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \quad (2.127)$$

Καθίσταται πλέον σαφές ότι η καθοριστική σχετικιστική διόρθωση $\frac{3GM}{c^2} u^2$ αναδύεται φυσιολογικά και αυστηρά από τη γεωμετρία του χωροχρόνου (τη μετρική Schwarzschild) και τις αρχές διατήρησης, χωρίς την ανάγκη *ad hoc* εισαγωγής κάποιας νέας, υποθετικής δύναμης.

Τέλος, εφαρμόζοντας την διαταρακτική μέθοδο, θεωρώντας μια πολύ μικρή διαταραχή (u_1) και δεδομένου ότι ο σχετικιστικός όρος είναι εξαιρετικά μικρός σε σχέση με τους Νευτώνειους, για την επίλυση της μη-γραμμικής διαφορικής εξίσωσης υποθέτουμε ότι η λύση $u(\phi)$ αποτελείται από την ακριβή κλασική Νευτώνεια λύση, $u_0(\phi)$, και μια απειροελάχιστη σχετικιστική

διαταραχή, $u_1(\phi)$:

$$u(\phi) = u_0(\phi) + u_1(\phi) \quad (2.128)$$

Η μη-διαταραγμένη κλασική λύση, η οποία περιγράφει την τέλεια, κλειστή έλλειψη, είναι:

$$u_0(\phi) = \frac{GM}{h^2}(1 + \epsilon \cos \phi) \quad (2.129)$$

όπου το ϵ αντιπροσωπεύει την εκκεντρότητα της πλανητικής τροχιάς.

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (2.129) στη διαφορική εξίσωση (2.127) και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης για το μικρό u_1 , υψώνουμε τη Νευτώνεια λύση u_0 στο τετράγωνο για να υπολογίσουμε τη συνεισφορά του σχετικιστικού όρου. Το ανάπτυγμα αυτό παράγει όρους της μορφής $\cos \phi$ και $\cos^2 \phi$.

Το κρίσιμο μαθηματικό φαινόμενο σε αυτό το σημείο είναι ο *συντονισμός* (resonance). Ο μοναδικός όρος του αναπτύγματος που οδηγεί σε προοδευτική, αθροιστική μεταβολή της τροχιάς (secular perturbation), εμποδίζοντας την έλλειψη να κλείσει, είναι ο όρος που είναι γραμμικά ανάλογος του $\cos \phi$. Απομονώνοντας αυτόν τον κρίσιμο όρο συντονισμού, η διαφορική εξίσωση για τη διαταραχή u_1 λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 \approx \frac{3(GM)^3}{c^2 h^4} 2\epsilon \cos \phi \quad (2.130)$$

Η επίλυση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, εστιάζοντας αποκλειστικά στον όρο συντονισμού που προκαλεί την προοδευτική μεταβολή της τροχιάς, αποδίδει τη σχετικιστική διαταραχή:

$$u_1(\phi) = \frac{3(GM)^3}{c^2 h^4} \epsilon \cdot \phi \sin \phi \quad (2.131)$$

Προσθέτοντας τη μη-διαταραγμένη Νευτώνεια λύση και τη μικρή σχετικιστική διαταραχή, η συνολική συνάρτηση της τροχιάς λαμβάνει τη μορφή:

$$u(\phi) = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \epsilon \cos \phi + \frac{3(GM)^2}{c^2 h^2} \epsilon \cdot \phi \sin \phi \right] \quad (2.132)$$

Στο σημείο αυτό, εφαρμόζεται μια σημαντική προσέγγιση βασισμένη στο ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης. Για μια υποθετική, απειροελάχιστη γωνιακή μετατόπιση $\delta\phi$, ισχύει η ακόλουθη τριγωνομετρική προσεγγιστική ταυτότητα:

$$\cos(\phi - \delta\phi) \approx \cos \phi + \delta\phi \cdot \sin \phi \quad (2.133)$$

Συγκρίνοντας άμεσα την ταυτότητα αυτή με την Εξίσωση (2.132), καθίσταται σαφές ότι υπάρχει πλήρης μαθηματική αντιστοιχία. Επομένως, η πραγματική τροχιά μπορεί να αναπαρασταθεί

ισοδύναμα ως μια τέλεια έλλειψη της οποίας ο άξονας συμμετρίας υφίσταται μια προοδευτική μετατόπιση:

$$u(\phi) \approx \frac{GM}{h^2} [1 + \epsilon \cos(\phi - \delta\phi)] \quad (2.134)$$

όπου το μέτρο αυτής της στιγμιαίας μετατόπισης ισούται με:

$$\delta\phi = \frac{3(GM)^2}{c^2 h^2} \phi \quad (2.135)$$

Για να υπολογιστεί η συνολική γωνιακή μετατόπιση του περιηλίου έπειτα από μία πλήρη τροχιακή περιστροφή γύρω από το κεντρικό σώμα, θέτουμε τη γωνία $\phi = 2\pi$ στην εξίσωση της μετατόπισης:

$$\Delta\phi = \frac{3(GM)^2}{c^2 h^2} (2\pi) = \frac{6\pi(GM)^2}{c^2 h^2} \quad (2.136)$$

Από την κλασική ουράνια μηχανική είναι γνωστό ότι, για μια ελλειπτική τροχιά, το τετράγωνο της ειδικής στροφορμής συνδέεται με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης μέσω της σχέσης $h^2 = GMa(1 - \epsilon^2)$, όπου a είναι ο μεγάλος ημιάξονας και ϵ η εκκεντρότητα. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στον παρονομαστή της παραπάνω σχέσης, η σταθερά GM απλοποιείται εν μέρει και προκύπτει:

$$\Delta\phi \approx \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \epsilon^2)} \quad (2.137)$$

Η πλήρης αυτή μαθηματική εξαγωγή καταδεικνύει πώς η εγγενής καμπυλότητα του χωροχρόνου προκαλεί μια θεμελιώδη απόκλιση από την κλειστή Νευτώνεια γεωμετρία, προβλέποντας θεωρητικά και με απόλυτη ακρίβεια την παρατηρούμενη μετάπτωση της τροχιάς του πλανήτη Ερμή.

Κεφάλαιο 3

Το Καθιερωμένο Πρότυπο Λ CDM

3.1 Η Μετρική του Σύμπαντος

3.1.1 Η Κοσμολογική Αρχή

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο Λ CDM πρωταρχική υπόθεση αποτελεί η παραδοχή ότι όλοι οι παρατηρητές είναι ισοδύναμοι. Η περιγραφή του Σύμπαντος λοιπόν δεν θα πρέπει να εξαρτάται από τη θέση από την οποία γίνεται αυτή η περιγραφή. Η παραπάνω υπόθεση, η οποία αποτελεί την **Κοσμολογική Αρχή**, υποδεικνύει ότι το Σύμπαν είναι **ομογενές** και **ισοτροπικό**.

3.1.2 Σταθερή Καμπυλότητα

Θεωρούμε τώρα ότι ο χώρος αποτελείται από 3 διαστάσεις και δεν υπάρχει εξάρτηση της μετρικής από το χρόνο. Έτσι η σχέση (2.81) για $B(r) = 0$ γράφεται ως :

$$ds_3^2 = A(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \quad (3.1)$$

τα στοιχεία του τανυστή Riemann για τη μετρική αυτή υπολογίζονται ως :

$$R_{r\theta}^{r\theta} = R_{r\phi}^{r\phi} = \frac{1}{2r} \frac{A'}{A^2} \quad (3.2)$$

$$R_{\theta\phi}^{\theta\phi} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) \quad (3.3)$$

και λόγω ομοιογένειας (ίδια καμπυλότητα σε όλες τις διευθύνσεις), οι χωρικές συνιστώσες του τανυστή του Riemann θα είναι ίσες μεταξύ τους και έστω ίσες με k , οπότε:

$$\frac{1}{2r} \frac{A'}{A^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = k \quad (3.4)$$

Απ' όπου προκύπτει ότι :

$$A(r) = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (3.5)$$

Τελικά, η μετρική που προκύπτει θα δίνεται από την σχέση :

$$ds_3^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.6)$$

Μπορούμε τώρα να διακρίνουμε τις επόμενες τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με τις τιμές που μπορεί να πάρει η σταθερά k :

$k = 0$: Ο συνήθης επίπεδος χώρος σε σφαιρικές συντεταγμένες.

$k > 0$: Απειρισμός για $r = 1/\sqrt{k}$ που οφείλεται στην επιλογή των συντεταγμένων (μοναδικότητα συντεταγμένων). Θέτουμε : $\sqrt{kr} = \sin \chi$ και η μετρική παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = \frac{1}{k} [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.7)$$

που είναι η μετρική μιας 3-σφαίρας, ήτοι τρισδιάστατης σφαιρικής «επιφάνειας» ακτίνας $1/\sqrt{k}$.

$k < 0$: Θέτοντας $\sqrt{-kr} = \sinh \chi$ προκύπτει υπερβολικός χώρος.

Δεδομένου ότι η σταθερά k μετρά την καμπυλότητα του χώρου, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα ακτινική συντεταγμένη $\bar{r} = \sqrt{|k|r}$, έτσι ώστε το k να παίρνει τις τιμές $-1, 0, +1$.

3.1.3 Η Μετρική Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker (FLRW)

Είδαμε λοιπόν ότι η μετρική που περιγράφει ισοτροπικό τρισδιάστατο χώρο σταθερής καμπυλότητας δίνεται από την σχέση (3.6). Προκειμένου τώρα να επεκτείνουμε τη μετρική μας στις 4 διαστάσεις (χωροχρόνο), σεβόμενοι την Κοσμολογική Αρχή (ομοιογένεια-ισοτροπία), εισάγουμε τον παράγοντα διαστολής $a(t)$, ο οποίος θα προσδώσει την εξάρτηση από το χρόνο. Η μετρική που προκύπτει δεν είναι άλλη από την **μετρική Friedmann - Lemaître - Robertson - Walker** :

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (3.8)$$

3.1.4 1η Εξίσωση Friedmann

Για την περιγραφή του περιεχομένου του Σύμπαντος, ανακαλούμε τις εξισώσεις (2.44) της περίπτωσης του Ιδανικού Ρευστού, προσδίδοντας τους εξάρτηση από τον χρόνο. Έτσι η χρονική

συνιστώσα του ταυσστή ενέργειας-ορμής θα είναι :

$$T_0^0 = -c^2 \rho(t) \quad (3.9)$$

και οι χωρικές συνιστώσες του :

$$T_i^i = p(t) \quad , (i = 1, 2, 3) \quad (3.10)$$

Υπολογίζουμε τώρα τα γεωμετρικά μεγέθη, όπως αυτά προκύπτουν από την μετρική Robertson-Walker και που είναι απαραίτητα για τις εξισώσεις πεδίου του Einstein.

Τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ βάσει της σχέσης (2.12) είναι:

- **Χρονικές συνιστώσες (δείκτης $\lambda = t$):**

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^t = a\dot{a}r^2, \quad \Gamma_{\phi\phi}^t = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \quad (3.11)$$

όπου η τελεία (κατά τον Νευτώνειο συμβολισμό) συμβολίζει την παράγωγο ως προς τον χρόνο t .

- **Χωρικές συνιστώσες με χρονικό δείκτη:**

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{t\theta}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.12)$$

- **Αμιγώς χωρικές συνιστώσες:**

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{kr}{1 - kr^2} \quad (3.13)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r(1 - kr^2), \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \quad (3.14)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad (3.15)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta \quad (3.16)$$

Οι μη μηδενικές συνιστώσες του ταυσστή Ricci $R_{\mu\nu}$ είναι:

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{c^2 a} \quad (3.17)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{kc^2}{a^2} \right) g_{ij} \quad (3.18)$$

όπου g_{ij} είναι το χωρικό μέρος της μετρικής. Συγκεκριμένα:

$$R_{rr} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right) \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad (3.19)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right) a^2 r^2 \quad (3.20)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (3.21)$$

και με έναν δείκτη πάνω :

$$R_0^0 = 3\frac{\ddot{a}}{c^2 a} \quad (3.22)$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{c^2} \frac{2\dot{a}^2 + 2kc^2}{a^2} \quad (3.23)$$

Το βαθμωτό Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu$ θα δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right) \quad (3.24)$$

Για την t-t συνιστώσα των εξισώσεων Einstein έχουμε :

$$G_0^0 = R_0^0 - \frac{1}{2}R = \frac{8\pi G}{c^4} T_0^0 \quad \text{ή} \quad (3.25)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{c^2 a} - \frac{1}{2} \frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right) = -\frac{8\pi G}{c^4} c^2 \rho \quad (3.26)$$

Από την οποία σχέση προκύπτει μία από τις δύο σημαντικότερες Κοσμολογικές Εξισώσεις, η **Πρώτη Εξίσωση Friedmann** :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (3.27)$$

3.1.5 Εξίσωση Ρευστού (Εξίσωση Συνέχειας)

Επίσης από τη διατήρηση του ταυσστή ενέργειας - ορμής $T_{t;\mu}^\mu = 0$, που αναπτύσσοντάς τον είναι:

$$T_{t,\mu}^\mu + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu T_t^\sigma - \Gamma_{t\mu}^\sigma T_\sigma^\mu = 0 \quad (3.28)$$

για τη χρονική συνιστώσα, η συναλλοίωτη παράγωγος γράφεται αναλυτικά ως:

$$\nabla_\mu T_0^\mu = \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\sigma\mu}^\mu T_0^\sigma - \Gamma_{0\mu}^\sigma T_\sigma^\mu = 0 \quad (3.29)$$

Σε ένα ομογενές και ισότροπο Σύμπαν, η ύλη και η ενέργεια περιγράφονται από τον ταυσστή

ιδανικού ρευστού. Με μικτή μορφή (ένας δείκτης άνω, ένας κάτω), οι μη μηδενικές συνιστώσες του είναι:

$$T^0_0 = -\rho, \quad T^i_j = p\delta^i_j \quad (3.30)$$

Οι μη διαγώνιοι όροι είναι μηδέν ($T^0_i = T^i_0 = 0$). Υπολογίζουμε τους τρεις όρους της (3.29) ξεχωριστά, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι μόνες χωρικές συνιστώσες είναι οι $i, j = 1, 2, 3$:

1ος Όρος: Η μερική παράγωγος

Επειδή $T^i_0 = 0$ και η πυκνότητα εξαρτάται μόνο από τον χρόνο ($\rho = \rho(t)$), έχουμε:

$$\partial_\mu T^\mu_0 = \partial_0 T^0_0 + \partial_i T^i_0 = \partial_0(-\rho) = -\dot{\rho} \quad (3.31)$$

2ος Όρος: Η πρώτη σύνδεση (ίχνος Christoffel)

Ο όρος αυτός περιέχει το άθροισμα $\Gamma^\mu_{\sigma\mu} T^\sigma_0$. Επειδή το T^σ_0 είναι μη μηδενικό μόνο για $\sigma = 0$, ο όρος απλοποιείται στο $\Gamma^\mu_{0\mu} T^0_0$. Γνωρίζουμε ότι το ίχνος των συμβόλων Christoffel δίνεται από τη σχέση $\Gamma^\mu_{0\mu} = \frac{\partial_0 \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}$. Για τη μετρική FLRW, $\sqrt{-g} = a^3(t)$, άρα $\Gamma^\mu_{0\mu} = 3\frac{\dot{a}}{a}$. Επομένως:

$$\Gamma^\mu_{0\mu} T^0_0 = \left(3\frac{\dot{a}}{a}\right) (-\rho) = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad (3.32)$$

3ος Όρος: Η δεύτερη σύνδεση

Ο όρος $-\Gamma^\sigma_{0\mu} T^\mu_\sigma$ έχει άθροισμα ως προς σ και μ . Επειδή ο τανυστής T^μ_σ είναι διαγώνιος, επιβιώνουν μόνο οι όροι όπου $\mu = \sigma$. Αναπτύσσοντας για τον χρόνο (0) και τον χώρο (i):

$$-\Gamma^\sigma_{0\mu} T^\mu_\sigma = -(\Gamma^0_{00} T^0_0 + \Gamma^i_{0i} T^i_i) \quad (3.33)$$

(όπου στο T^i_i υπάρχει άθροισμα $i = 1, 2, 3$). Από τα σύμβολα Christoffel της μετρικής FLRW γνωρίζουμε ότι $\Gamma^0_{00} = 0$ και $\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j$. Άρα για κάθε χωρική διάσταση $\Gamma^i_{0i} = \frac{\dot{a}}{a}$ και αντικαθιστώντας:

$$-\left(0 + \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{a}}{a} p\right) = -3\frac{\dot{a}}{a}p \quad (3.34)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αποτελέσματα των στην (3.29), παίρνουμε:

$$-\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}\rho - 3\frac{\dot{a}}{a}p = 0 \quad (3.35)$$

ή

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (3.36)$$

παίρνουμε τη δεύτερη σημαντικότερη Κοσμολογική Εξίσωση, την **Εξίσωση του Ρευστού** :

$$\dot{\rho}c^2 + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho c^2 + p) = 0 \quad (3.37)$$

ισοδύναμα:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \quad (3.38)$$

3.1.6 2η Εξίσωση Friedmann (Εξίσωση Επιτάχυνσης)

Η δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος καθορίζεται από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (3.39)$$

Για να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής της διαστολής (την επιτάχυνση \ddot{a}), πρέπει να εξετάσουμε τις χωρικές συνιστώσες των εξισώσεων πεδίου. Λόγω της ισοτροπίας του Σύμπαντος, όλες οι χωρικές συνιστώσες ($r - r$, $\theta - \theta$, $\phi - \phi$) αποδίδουν την ίδια διαφορική εξίσωση.

Για να καταλήξουμε στη διαφορική εξίσωση της χωρικής συνιστώσας, ξεκινάμε από την πλήρη μορφή της μετρικής Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) σε σφαιρικές συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.40)$$

Από τη μετρική αυτή, η συνιστώσα που αντιστοιχεί στην ακτινική απόσταση ($r - r$ ή $1 - 1$) είναι η $g_{11} = \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}$.

Μέσω του υπολογισμού των συμβόλων Christoffel για τη μετρική FLRW, η χωρική συνιστώσα R_{11} του τανυστή καμπυλότητας Ricci υπολογίζεται βάσει της (3.18) ως εξής:

$$R_{11} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{kc^2}{a^2} \right) g_{11} \quad (3.41)$$

ή

$$R_{11} = \frac{1}{c^2} \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{1 - kr^2} \quad (3.42)$$

ενώ το βαθμωτό καμπυλότητας Ricci (το ίχνος του τανυστή, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$) δίνεται από τη σχέση (3.24) ως:

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} \right] \quad (3.43)$$

Αντικαθιστώντας τις Εξισώσεις (3.42) και (3.43) στον ορισμό του τανυστή Einstein για τη συνιστώσα $1 - 1$, έχουμε:

$$G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{c^2(1 - kr^2)} - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right] \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad (3.44)$$

Κάνοντας τις πράξεις και φέρνοντας τους όρους σε κοινό παρονομαστή:

$$G_{11} = \frac{1}{c^2(1 - kr^2)} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2kc^2 - 3a\ddot{a} - 3\dot{a}^2 - 3kc^2) \quad (3.45)$$

ή

$$G_{11} = \frac{-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - kc^2}{c^2(1 - kr^2)} \quad (3.46)$$

Από την άλλη πλευρά των εξισώσεων του Einstein βρίσκεται ο ταυστής ενέργειας-ορμής. Για ένα ιδανικό ρευστό, η χωρική του συνιστώσα με κάτω δείκτες είναι $T_{11} = pg_{11}$ (όπου p η ισότροπη πίεση). Συνεπώς:

$$T_{11} = p \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad (3.47)$$

Εξισώνοντας τώρα το γεωμετρικό μέρος (G_{11}) με το ενεργειακό μέρος ($\frac{8\pi G}{c^4}T_{11}$), παίρνουμε:

$$\frac{-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - kc^2}{c^2(1 - kr^2)} = \frac{8\pi G}{c^4} p \frac{a^2}{1 - kr^2} \quad (3.48)$$

ή

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} p \quad (3.49)$$

ή

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} p \quad (3.50)$$

Παρατηρούμε άμεσα ότι οι δύο τελευταίοι όροι στο αριστερό μέλος της (3.40) αποτελούν ακριβώς το αριστερό μέλος της 1ης εξ, Friedmann. Επίσης από τον συνδυασμό των εξισώσεων πεδίου (με χρήση της r - r συνιστώσας) προκύπτει η **Δεύτερη Εξίσωση Friedmann** (ή εξίσωση επιτάχυνσης) η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)} \quad (3.51)$$

Έχοντας θεωρήσει το Ιδανικό Ρευστό ως το κατάλληλο μοντέλο για να περιγράψουμε το περιεχόμενο του Σύμπαντος, αναμένουμε η **καταστατική εξίσωση** (σχέση πυκνότητας-πίεσης) που θα το χαρακτηρίζει να είναι της μορφής :

$$\boxed{p = w\rho c^2} \quad (3.52)$$

και είμαστε σε θέση πλέον να διερευνήσουμε τις διάφορες περιπτώσεις που προκύπτουν για τα διάφορα περιεχόμενα ρευστά, ανάλογα με την παράμετρο w , η οποία εν γένει θεωρείται χρονοανεξάρτητη.

3.2 Τα Συστατικά του Σύμπαντος

3.2.1 Ύλη ($w = 0$)

Ως ύλη εννοούμε τα μη σχετικιστικά σωματίδια ($p \ll \rho c^2$) και άρα από την εξίσωση συνέχειας (3.51) για $p = 0$, προκύπτει ότι:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \iff \frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{da}{a} \iff \rho \sim a^{-3} \quad (3.53)$$

και επειδή $\rho \propto \frac{1}{V} \iff V \sim a^3$ (διαστολή).

Η ύλη μπορεί να είναι:

- **Σκοτεινή ύλη:** Το μεγαλύτερο ποσοστό ύλης στο Σύμπαν δεν είναι ορατό και δεν αλληλεπιδρά ηλεκτρομαγνητικά. Αποτελείται από άγνωστο προς το παρόν είδος υποθετικών σωματιδίων (π.χ. WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles): Σωματίδια με μάζα που αλληλεπιδρούν ασθενώς (όχι ηλεκτρομαγνητικά), Αξίονια (Axions: Υποθετικά ελαφρά σωματίδια που γίνονται αντιληπτά μόνο από τις βαρυτικές του αλληλεπιδράσεις)). Εκτός από τη γενική βαρυτική αλληλεπίδραση, η πιο διάσημη ένδειξη για την ύπαρξη της Σκοτεινής Ύλης προέρχεται από τις καμπύλες περιστροφής των γαλαξιών (Galaxy Rotation Curves). Παρατηρούμε ότι τα άστρα στην περιφέρεια των γαλαξιών κινούνται πολύ πιο γρήγορα από ό,τι θα έπρεπε αν υπήρχε μόνο η ορατή ύλη. Αυτό υποδεικνύει ότι υπάρχει μια τεράστια "άλος" αόρατης ύλης που συγκρατεί τους γαλαξίες. Ψυχρή Σκοτεινή Ύλη (Cold Dark Matter - CDM): Την αποκαλούμε «Ψυχρή» επειδή τα σωματίδιά της κινούνταν αργά (μη σχετικιστικά) όταν το σύμπαν ήταν πολύ νέο, επιτρέποντας έτσι τον σχηματισμό των δομών (γαλαξιών) που βλέπουμε σήμερα. Η σκοτεινή ύλη αποτελεί περίπου το 25% της συνολικής ενέργειας του Σύμπαντος.
- **Βαρυονική ύλη:** Πρόκειται για τα γνωστά σωματίδια (πρωτόνια, νετρόνια, ηλεκτρόνια) της οποίας όμως η μάζα αποτελεί μικρό σχετικά ποσοστό της συνολικής ύλης-ενέργειας του Σύμπαντος (περίπου 5%).

3.2.2 Ακτινοβολία ($w = 1/3$)

Ως ακτινοβολία εννοούμε τα σχετικιστικά σωματίδια όπου η πίεση σχετίζεται με την πυκνότητα μέσω της σχέσης $p = \frac{1}{3}\rho c^2$. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση ρευστού είναι:

$$\dot{\rho} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \iff \frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a} \iff \rho \sim a^{-4} \quad (3.54)$$

Αυτή η πιο γρήγορη αραιώση της ακτινοβολίας σε σχέση με την ύλη οφείλεται στο γεγονός ότι επιπλέον της αραιώσης του αριθμού φωτονίων με τον όγκο, μειώνεται και η ενέργεια του κάθε φωτονίου λόγω διαστολής του μήκους κύματος με τον παράγοντα $a(t)$. Ισχύει ότι $E = hf = \frac{hc}{\lambda} \sim a^{-1}$.

Η ακτινοβολία εμφανίζεται με τις παρακάτω μορφές:

- **Φωτόνια:** Τα περισσότερα αποτελούν μέρος του «Υποβάθρου Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων» (CMB).
- **Νετρίνα:** Έχουν μικρή μάζα και είναι σχετικιστικά κατά το μεγαλύτερο μέρος της ιστορίας του Σύμπαντος.
- **Βαρυτικά κύματα:** Κοσμικά βαρυτικά κύματα που προβλέπεται ότι παράγονται στο πρώιμο Σύμπαν.

3.2.3 Σκοτεινή Ενέργεια - Κοσμολογική Σταθερά ($w = -1$)

Η ύλη και η ακτινοβολία δεν επαρκούν για να εξηγήσουν την επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος. Είμαστε υποχρεωμένοι να υποθέσουμε πως κυριαρχείται από ένα συστατικό με αρνητική πίεση της μορφής $p = -\rho c^2$. Από την εξίσωση ρευστού έχουμε :

$$\dot{\rho}c^2 + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho c^2 - \rho c^2) = 0 \iff \dot{\rho} = 0 \iff \rho = \text{const.} \quad (3.55)$$

Εφόσον η πυκνότητα ενέργειας παραμένει σταθερή και το Σύμπαν διαστέλλεται, η ενέργεια θα πρέπει να αναπληρώνεται με κάποιο τρόπο. Το έλλειμα αυτό έρχεται να καλύψει η ενέργεια του κενού.

Η σύνδεση της Κοσμολογικής Σταθεράς Λ με την ενέργεια του κβαντικού κενού αποτελεί μια από τις σημαντικότερες τομές μεταξύ της Γενικής Σχετικότητας και της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου. Σύμφωνα με την QFT, η κατάσταση κενού πρέπει να είναι αυστηρά αναλλοίωτη κατά Lorentz (Lorentz invariant), ώστε να μην ορίζει κανένα προτιμητέο σύστημα αναφοράς.

Στο πλαίσιο του ταυστικού λογισμού, ο μοναδικός ταυστής 2ης τάξης που παραμένει αναλλοίωτος κάτω από γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων είναι ο μετρικός ταυστής $g_{\mu\nu}$. Συνεπώς, ο ταυστής ενέργειας-ορμής του κενού, $T_{\mu\nu}^{vac}$, πρέπει υποχρεωτικά να είναι ανάλογος της μετρικής:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = C g_{\mu\nu} \quad (3.56)$$

Για ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα (όπου $g_{00} = -1$), η χρονική συνιστώσα T_{00} ταυτίζεται με την ενεργειακή πυκνότητα του κενού ρ_{vac} . Έτσι, $\rho_{vac} = C(-1) \implies C = -\rho_{vac}$, οπότε εξάγεται η θεμελιώδης σχέση:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \quad (3.57)$$

Για να κατανοήσουμε τη μακροσκοπική συμπεριφορά αυτού του κενού, το συγκρίνουμε με τον ταυσστή ενέργειας-ορμής ενός ιδανικού ρευστού: $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$. Εφόσον το κενό δεν έχει κατευθυντική ροή, ο όρος της τετραταχύτητας $u_\mu u_\nu$ πρέπει να απαλειφθεί, πράγμα που συμβαίνει μόνο εάν:

$$\rho_{vac} + p_{vac} = 0 \implies p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (3.58)$$

Η σχέση (3.58) αποδεικνύει ότι η ενέργεια του κενού χαρακτηρίζεται από εξίσωση καταστατικής κατάστασης με παράμετρο $w = -1$.

Θερμοδυναμική Ερμηνεία: Η αρνητική πίεση του κενού επιβεβαιώνεται και διαισθητικά μέσω του Πρώτου Νόμου της Θερμοδυναμικής για μια αδιαβατική κοσμολογική διαστολή ($dU + pdV = 0$). Επειδή η πυκνότητα ενέργειας του κενού ρ_{vac} είναι σταθερή, η συνολική ενέργεια σε έναν όγκο V είναι $U = \rho_{vac}V$. Διαφορίζοντας, λαμβάνουμε:

$$d(\rho_{vac}V) + p_{vac}dV = 0 \implies \rho_{vac}dV + p_{vac}dV = 0 \implies p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (3.59)$$

Φυσικά, αυτό σημαίνει ότι καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, η παραγωγή νέου χώρου αυξάνει τη συνολική ενέργεια του συστήματος. Αυτή η ενέργεια αντλείται από το αρνητικό έργο που παράγει η "τάση" (αρνητική πίεση) του κενού ενάντια στη διαστολή.

Ο Einstein είχε προσθέσει στο αριστερό μέλος των εξισώσεων πεδίου τον όρο $-\Lambda g_{\mu\nu}$, μιας και ο ταυσστής ενέργειας - ορμής εξακολουθεί να διατηρείται ($\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$), υποθέτοντας ένα στατικό Σύμπαν. Μετά την ανακάλυψη της διαστολής του Σύμπαντος, χρησιμοποιούμε την κοσμολογική σταθερά, μεταφέροντας τον επιπλέον όρο στο δεξί μέλος των εξισώσεων Einstein, προκειμένου να εκφράσουμε την πυκνότητα ενέργειας του κενού ρ_Λ :

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.60)$$

$$\text{με } T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} \equiv \rho_\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.61)$$

Συνοψίζοντας εάν εν γένει, οι λύσεις για την εξάρτηση της πυκνότητας από τον παράγοντα κοσμικής διαστολής είναι:

$$\rho \sim a^{-3(1+w)} \quad (3.62)$$

τότε:

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-3}, & \text{ύλη} \\ a^{-4}, & \text{ακτινοβολία} \\ a^0, & \text{ενέργεια κενού} \end{cases} \quad (3.63)$$

3.2.4 Παράμετροι Πυκνότητας ^[6]

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τώρα την πρώτη εξίσωση Friedmann (3.27), θεωρώντας $c=1$ και κάνοντας χρήση της παραμέτρου του Hubble, η οποία ορίζεται ως:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.64)$$

με τη μορφή :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.65)$$

Θα συμβολίζουμε εφ' εξής τις παροντικές τιμές των μεγεθών με τον δείκτη '0', δηλαδή για $t = t_0$, έτσι για επίπεδο σύμπαν ($k = 0$) η εξίσωση (3.65) γίνεται :

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{c,0} \quad (3.66)$$

όπου $\rho_{c,0}$, η σημερινή τιμή της **κρίσιμης πυκνότητας** έτσι ώστε να έχουμε επίπεδο σύμπαν και είναι :

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ gr/cm}^3 \quad (3.67)$$

ή σε άλλες μονάδες:

$$\rho_{c,0} = 2.78 \times 10^{11} h^2 M_{\odot}/\text{Mpc}^3 = 1.1 \times 10^{-5} h^2 \text{ protons/cm}^3 \quad (3.68)$$

όπου η αδιάστατη παράμετρος h χρησιμοποιείται για να παρακολουθεί πώς μεταφέρεται η αβεβαιότητα της H_0 σε άλλες κοσμολογικές παραμέτρους. Σημερινές μετρήσεις από την Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου δίνουν με ακρίβεια την τιμή: $h \approx 0,67 \pm 0,01$ ^[13]. Χρησιμοποιούμε την κρίσιμη πυκνότητα για να ορίσουμε τις αδιάστατες παραμέτρους πυκνότητας:

$$\Omega_{I,0} \equiv \frac{\rho_{I,0}}{\rho_{c,0}} \quad (3.69)$$

όπου $\rho_{I,0} = \rho_{r,0} + \rho_{m,0} + \rho_{\Lambda}$ και ορίζοντας την παράμετρο καμπυλότητας ως: $\Omega_k \equiv -kc^2/(a_0^2 H_0^2)$ η εξίσωση (3.65) παίρνει τη μορφή:

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right] \quad (3.70)$$

Κανονικοποιώντας τον παράγοντα κοσμικής διαστολής ως: $a_0 = 1$, τότε η εξίσωση (3.70) γίνεται:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{k,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (3.71)$$

Παρατηρήσεις δείχνουν πως το Σύμπαν αποτελείται από ακτινοβολία, ύλη και σκοτεινή ενέρ-

για και οι τιμές των παραμέτρων είναι:

$$|\Omega_{k,0}| < 0.01, \quad \Omega_{r,0} = 9.4 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{m,0} = 0.32, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0.68 \quad (3.72)$$

Η καταστατική εξίσωση της σκοτεινής ενέργειας φαίνεται ότι είναι αυτή που αντιστοιχεί σε κοσμολογική σταθερά, δηλαδή $w \approx -1$. Η ύλη αποτελείται από 5% βαρυονική ύλη ('b') και 27% ψυχρή σκοτεινή ύλη (CDM, 'c'), οπότε:

$$\Omega_{b,0} = 0.05, \quad \Omega_{c,0} = 0.27 \quad (3.73)$$

Ακόμη και σήμερα λοιπόν, η καμπυλότητα αποτελεί λιγότερο από το 1% του περιεχομένου της κοσμικής ενέργειας. Σε πρώιμους χρόνους τα φαινόμενα της καμπυλότητας είναι εντελώς αμελητέα (θυμηθείτε ότι η ύλη και η ακτινοβολία μεταβάλλονται ως a^{-3} και a^{-4} αντίστοιχα, ενώ η συνεισφορά της καμπυλότητας αυξάνεται ως a^{-2}). Στη συνέχεια της παρούσας εργασίας θα παραλείψουμε τους δείκτες '0' (σύμφωνα με τη διεθνή βιβλιογραφία) και όταν αναφερόμαστε στις παραμέτρους πυκνότητας, θα εννοούμε τις σημερινές τους τιμές. Επίσης θα θεωρούμε το σύμπαν επίπεδο με $\Omega_k = 0$.

3.2.5 Σύμπαν με ένα συστατικό

Λόγω του ότι οι πυκνότητες της ακτινοβολίας, της ύλης και της ενέργειας κενού μεταβάλλονται με διαφορετικούς ρυθμούς, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για το μεγαλύτερο μέρος της ιστορίας του Σύμπαντος, σε αυτό κυριαρχούσε μόνο ένα συστατικό (πρώτα ακτινοβολία, μετά ύλη και έπειτα σκοτεινή ενέργεια). Παραμετροποιώντας κάθε συστατικό σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση w_I , αποτυπώνονται όλες οι περιπτώσεις. Έτσι για επίπεδο σύμπαν με ένα συστατικό, η εξίσωση Friedmann παίρνει τη μορφή:

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{I,0}} a^{-\frac{1+3w_I}{2}} \quad (3.74)$$

Με ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.74), εξάγουμε τη χρονική εξάρτηση του παράγοντα κοσμικής διαστολής:

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{2}{3(1+w_I)}}, & w_I \neq -1 \\ e^{Ht}, & w_I = -1 \end{cases} \quad (3.75)$$

Κατά την εποχή της κυριαρχίας της ύλης ισχύει $a(t) \propto t^{2/3}$, ενώ κατά την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας ισχύει $a(t) \propto t^{1/2}$.

Στον Πίνακα 3.1 συνοψίζονται οι λύσεις για ένα επίπεδο σύμπαν κατά την εποχή κυριαρχίας της ύλης και κυριαρχίας της ακτινοβολίας.

Συστατικό	w	$\rho(\mathbf{a})$	$\mathbf{a}(\mathbf{t})$
Ακτινοβολία	$1/3$	a^{-4}	$t^{1/2}$
Ύλη	0	a^{-3}	$t^{2/3}$
Σκοτεινή ενέργεια	-1	a^0	e^{Ht}

Πίνακας 3.1:

3.3 Μέτρηση Κοσμικών Αποστάσεων

3.3.1 Ερυθρά Μετατόπιση (Redshift)

Η ερυθρά μετατόπιση (redshift), η οποία συμβολίζεται με το γράμμα z , περιγράφει τη φαινομενική αύξηση του μήκους κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Ορίζεται ως η κλασματική μεταβολή του μήκους κύματος:

$$z \equiv \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} \quad (3.76)$$

όπου λ_{obs} είναι το παρατηρούμενο μήκος κύματος και λ_{emit} το εκπεμπόμενο μήκος κύματος. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί και ως $1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emit}}}$.

Στη φυσική, η ερυθρά μετατόπιση διακρίνεται σε τρεις βασικές κατηγορίες, ανάλογα με το φυσικό αίτιο που την προκαλεί:

1. Κινηματική Ερυθρή Μετατόπιση (Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler)

Προκύπτει λόγω της σχετικής απομάκρυνσης της πηγής του φωτός από τον παρατηρητή. Για μικρές, μη σχετικιστικές ταχύτητες, ισχύει προσεγγιστικά η σχέση $z \simeq v/c$ [1]. Στο πλαίσιο της Ειδικής Σχετικότητας, η παρατηρούμενη συχνότητα (ν_R) μίας πηγής που απομακρύνεται συνδέεται με την εκπεμπόμενη (ν_E) μέσω του τύπου:

$$\nu_R = \nu_E \left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c} \right)^{1/2} \quad (3.77)$$

Υπάρχει επίσης και το εγκάρσιο σχετικιστικό φαινόμενο Doppler, όπου $f' = f/\gamma$ (όπου γ ο παράγοντας Lorentz). Αυτό συμβαίνει όταν η πηγή κινείται κάθετα ως προς τον παρατηρητή και οφείλεται αποκλειστικά στη σχετικιστική διαστολή του χρόνου, μην έχοντας κλασικό ανάλογο.

2. Βαρυτική Ερυθρή Μετατόπιση

Αποτελεί άμεση συνέπεια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και της Αρχής της Ισοδυναμίας. Φως που εκπέμπεται από μια περιοχή με ισχυρό βαρυτικό πεδίο (π.χ. την επιφάνεια ενός άστρου) και ταξιδεύει προς μια περιοχή με ασθενέστερο πεδίο (π.χ. στο διάστημα), «δαπανά» ενέργεια για να «σκαρφαλώσει» έξω από το βαρυτικό πηγάδι, με αποτέλεσμα να υφίσταται ερυθρά μετατόπιση .

Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία Schwarzschild για τον χωρόχρονο γύρω από μία σφαιρική μάζα M , ο λόγος των συχνοτήτων δίνεται από:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left(\frac{1 - 2GM/(r_E c^2)}{1 - 2GM/(r_R c^2)} \right)^{1/2} \quad (3.78)$$

Αν η απόσταση του παρατηρητή είναι μεγαλύτερη από της πηγής ($r_R > r_E$), τότε η συχνότητα μειώνεται ($\nu_R < \nu_E$). Η βαρυτική ερυθρή μετατόπιση μπορεί εναλλακτικά να ερμηνευτεί και ως βαρυτική διαστολή του χρόνου: ένας παρατηρητής που βρίσκεται μακριά από ένα βαρυτικό πεδίο βλέπει τα ρολόγια που βρίσκονται βαθιά μέσα σε αυτό να χτυπούν πιο αργά.

3. Κοσμολογική Ερυθρή Μετατόπιση

Αυτή η μορφή ερυθρής μετατόπισης παρατηρείται στους μακρινούς γαλαξίες και οφείλεται στη διαστολή του ίδιου του χώρου του Σύμπαντος (σύμφωνα με τη μετρική Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Καθώς ο χώρος διαστέλλεται, «τεντώνει» μαζί του και το μήκος κύματος της διερχόμενης ακτινοβολίας.

Συνδέεται άμεσα με τον παράγοντα κοσμικής διαστολής $a(t)$ μέσω της εξαιρετικά σημαντικής σχέσης:

$$1 + z = \frac{a(t_R)}{a(t_E)} \quad (3.79)$$

Θεωρώντας ότι ο σημερινός παράγοντας διαστολής (κατά τον χρόνο λήψης t_0) είναι $a(t_0) = 1$, η σχέση απλοποιείται σε $1 + z = \frac{1}{a(t_E)}$. Αυτό σημαίνει ότι μετρώντας το z ενός γαλαξία, γνωρίζουμε ακριβώς πόσο μικρότερο ήταν το Σύμπαν τη στιγμή που εξέπεμψε το φως.

Για κοντινούς γαλαξίες (όπου το z είναι μικρό), η ερυθρά μετατόπιση είναι ανάλογη της φυσικής απόστασης d του αντικειμένου, δίνοντας τον γνωστό Νόμο του Hubble: $cz \approx H_0 d$, όπου H_0 η σταθερά του Hubble. Σύμφωνα με αυτόν τον νόμο, οι γαλαξίες φαίνονται να απομακρύνονται με ταχύτητα ανάλογη της απόστασής τους από εμάς.

3.3.2 Οι παράμετροι Hubble και Επιβράδυνσης

Οι παράμετροι Hubble (H) και επιβράδυνσης (q) είναι θεμελιώδη κοσμολογικά μεγέθη που περιγράφουν τη δυναμική της διαστολής του Σύμπαντος. Προκύπτουν με φυσικό τρόπο όταν αναπτύξουμε τον παράγοντα κοσμικής διαστολής $a(t)$ (ή $R(t)$) σε δυναμοσειρά Taylor γύρω από τη σημερινή εποχή (κοσμικό χρόνο t_0).

Η Παράμετρος Hubble $H(t)$

Η παράμετρος Hubble μετράει το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται ο παράγοντας κλίμακας, δηλαδή τον κλασματικό ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος σε οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή t . Ορίζεται από τη σχέση:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.80)$$

όπου $\dot{a}(t)$ είναι η πρώτη παράγωγος του παράγοντα κλίμακας ως προς τον κοσμικό χρόνο t (δηλαδή η "ταχύτητα" διαστολής). Η σημερινή τιμή αυτής της παραμέτρου συμβολίζεται ως $H_0 \equiv H(t_0)$ και είναι η γνωστή Σταθερά του Hubble, η οποία περιγράφει τον τωρινό ρυθμό διαστολής.

Η Παράμετρος Επιβράδυνσης $q(t)$

Η παράμετρος επιβράδυνσης σχετίζεται με τη δεύτερη παράγωγο του παράγοντα κλίμακας, $\ddot{a}(t)$, και περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της διαστολής, δηλαδή το αν η διαστολή του Σύμπαντος επιταχύνεται ή επιβραδύνεται. Ορίζεται ως:

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t)a(t)}{\dot{a}^2(t)} = -\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)H^2(t)} \quad (3.81)$$

Η σημερινή της τιμή συμβολίζεται αντίστοιχα ως $q_0 \equiv q(t_0)$.

- **Το πρόσημο:** Το αρνητικό πρόσημο στον ορισμό εισήχθη ιστορικά επειδή οι κοσμολόγοι, τον περασμένο αιώνα, ανέμεναν ότι η βαρυτική έλξη της ύλης θα προκαλούσε αναπόφευκτα επιβράδυνση της διαστολής ($\ddot{a} < 0$). Υπό αυτή την υπόθεση, μια θετική τιμή για το q θα υποδείκνυε φυσιολογική επιβράδυνση.
- **Επιταχυνόμενη διαστολή:** Οι σύγχρονες κοσμολογικές παρατηρήσεις (π.χ. από μακρινούς υπερκαινοφανείς αστέρες) έδειξαν το αντίθετο: η σημερινή τιμή είναι $q_0 < 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\ddot{a} > 0$, αποδεικνύοντας ότι το Σύμπαν μας όχι μόνο διαστέλλεται, αλλά η διαστολή του επιταχύνεται (λόγω της σκοτεινής ενέργειας/κοσμολογικής σταθεράς).

Χρησιμοποιώντας αυτές τις δύο παραμέτρους, ο παράγοντας διαστολής στο παρελθόν ($t - t_0$) μπορεί να προσεγγιστεί μαθηματικά ως εξής:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 = \left[1 - H_0(t_0 - t) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t_0 - t)^2 - \dots \right] - 1 \quad (3.82)$$

Αυτή η έκφραση είναι εξαιρετικά χρήσιμη, καθώς μας επιτρέπει να συνδέσουμε άμεσα παρατηρήσιμα μεγέθη, όπως η ερυθρή μετατόπιση (z), με τον χρόνο καθυστέρησης (look-back time) $t_0 - t$ και τις αποστάσεις των γαλαξιών, αναπαράγοντας σε πρώτη προσέγγιση (για μικρά z) τον Νόμο του Hubble.

3.3.3 Ο Νόμος του Hubble

Γενίκευση του Νόμου του Hubble και η Παράμετρος Επιβράδυνσης

Για μικρές αποστάσεις και αντίστοιχα μικρές τιμές ερυθρής μετατόπισης ($z \ll 1$), η σχέση που περιγράφει τη διαστολή του Σύμπαντος προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη γραμμική μορφή του νόμου του Hubble, $v = H_0d$. Ωστόσο, για την ακριβή περιγραφή της κοσμολογικής εξέλιξης σε μεγαλύτερες κλίμακες (όπου ο χρόνος ταξιδιού του φωτός είναι συγκρίσιμος με την ηλικία του Σύμπαντος), είναι απαραίτητο να αναπτύξουμε τον παράγοντα κλίμακας $a(t)$ σε σειρά Taylor γύρω από τη σημερινή εποχή t_0 :

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \quad (3.83)$$

Διαιρώντας την παραπάνω έκφραση με το $a(t_0)$ και εισάγοντας τη σημερινή σταθερά του Hubble $H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$, καθώς και την αδιάστατη **παράμετρο επιβράδυνσης** (deceleration parameter) $q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)H_0^2}$, το ανάπτυγμα παίρνει τη μορφή:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \quad (3.84)$$

Συνδυάζοντας αυτό το κινηματικό ανάπτυγμα με τον ορισμό της ερυθρής μετατόπισης ($1 + z = a(t_0)/a(t)$) και τη γεωμετρία της μετρικής FLRW, μπορούμε να εκφράσουμε την απόσταση φωτεινότητας d_L (το κατεξοχήν παρατηρήσιμο μέγεθος στην αστρονομία) ως συνάρτηση της ερυθρής μετατόπισης z :

$$d_L(z) = \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z + \mathcal{O}(z^2) \right] \quad (3.85)$$

Η σχέση (3.85) αποτελεί τον **γενικευμένο νόμο του Hubble** για το τοπικό αλλά μη-γραμμικό

Σύμπαν. Ο πρώτος όρος της παρένθεσης αναπαράγει τον κλασικό γραμμικό νόμο, ενώ ο δεύτερος όρος εισάγει την απαραίτητη διόρθωση λόγω της μεταβολής του ρυθμού διαστολής στον χρόνο.

Η ιστορική και φυσική σημασία της παραμέτρου q_0 υπήρξε καθοριστική. Μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1990, η επιστημονική κοινότητα ανέμενε ότι η βαρυτική έλξη της ύλης θα επιβράδυνε τη διαστολή του Σύμπαντος, συνεπάγοντας $q_0 > 0$. Εντούτοις, το 1998, οι παρατηρήσεις απομακρυσμένων Υπερκαινοφανών τύπου Ia (Supernovae Ia) απέδειξαν ότι τα αντικείμενα αυτά εμφανίζονταν πιο αμυδρά –άρα βρίσκονταν σε μεγαλύτερη απόσταση φωτεινότητας d_L – από ό,τι προέβλεπε ένα επιβραδυνόμενο μοντέλο.

Η προσαρμογή των παρατηρησιακών δεδομένων στη σχέση (3.83) απέδειξε περίτρανα ότι $q_0 < 0$, το οποίο με τη σειρά του μεταφράζεται σε $\ddot{a}(t_0) > 0$. Η ανακάλυψη αυτή αποτέλεσε την πρώτη άμεση ένδειξη ότι η διαστολή του Σύμπαντος **επιταχύνεται**, καθιστώντας έκτοτε επιβεβλημένη την εισαγωγή της Σκοτεινής Ενέργειας (ή της Κοσμολογικής Σταθεράς Λ) στο Καθιερωμένο Κοσμολογικό Πρότυπο.

Σύμφωνα με τον νόμο αυτό, οι γαλαξίες φαίνονται να απομακρύνονται από εμάς με μια ταχύτητα η οποία είναι ευθέως ανάλογη της φυσικής τους απόστασης από τη Γη. Για κοντινούς γαλαξίες (όπου η ερυθρή μετατόπιση z είναι μικρή), η μαθηματική έκφραση του νόμου είναι:

$$\boxed{v = H_0 d} \quad \text{ή} \quad \boxed{cz = H_0 d} \quad (3.86)$$

όπου:

- v είναι η ταχύτητα απομάκρυνσης του γαλαξία.
- c είναι η ταχύτητα του φωτός και z η ερυθρή μετατόπιση.
- d είναι η φυσική απόσταση του γαλαξία.
- H_0 είναι η σταθερά του Hubble.

Η Σταθερά του Hubble (H_0):

- Αντιπροσωπεύει τον σημερινό ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος.
- Οι διαστάσεις της είναι αντίστροφος χρόνος (χρόνος⁻¹). Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό, καθώς το αντίστροφο της σταθεράς ($1/H_0$), γνωστό ως *χρόνος Hubble*, παρέχει μια καλή εκτίμηση για την ηλικία του Σύμπαντος.
- Επειδή οι μετρήσεις της σταθεράς ενέχουν αβεβαιότητες, αυτή συχνά εκφράζεται μέσω της σχέσης $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, όπου το h είναι μια αδιάστατη παράμετρος που βοηθά στο να παρακολουθείται η μετάδοση των σφαλμάτων στους υπολογισμούς (αβεβαιότητα της H_0).

Ιστορική και Φυσική Σημασία:

Ο Hubble κατέληξε σε αυτόν τον νόμο συνδυάζοντας μετρήσεις ερυθρής μετατόπισης (που υποδηλώνουν ταχύτητα) με εκτιμήσεις αποστάσεων κοντινών γαλαξιών, χρησιμοποιώντας τους μεταβλητούς αστέρες Κηφίδες ως «τυπικά κεριά».

Η ύπαρξη αυτής της γραμμικής σχέσης ταχύτητας-απόστασης ήταν μια εκπληκτική ανακάλυψη, καθώς αποτέλεσε την πρώτη άμεση απόδειξη ότι το Σύμπαν δεν είναι στατικό αλλά διαστέλλεται. Λογικά, αυτό υποδηλώνει ότι αν γυρίσουμε τον χρόνο προς τα πίσω, το Σύμπαν ξεκίνησε από μια κατάσταση εξαιρετικά υψηλής πυκνότητας σε μια πεπερασμένη χρονική στιγμή στο παρελθόν, στηρίζοντας έτσι τη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang).

Σε ένα ευρύτερο κοσμολογικό πλαίσιο, ο ρυθμός διαστολής δεν παραμένει σταθερός στο πέραςμα του χρόνου. Περιγράφεται από την γενικότερη παράμετρο Hubble:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.87)$$

η οποία μεταβάλλεται ανάλογα με τον κοσμικό χρόνο t (και τον παράγοντα κλίμακας a) και εξαρτάται από το συνολικό περιεχόμενο του Σύμπαντος σε ύλη, ακτινοβολία και σκοτεινή ενέργεια. Η H_0 είναι απλώς η τιμή αυτής της παραμέτρου τη σημερινή εποχή ($t = t_0$).

3.3.4 Αποστάσεις στο Σύμπαν

Η μέτρηση αποστάσεων στο Σύμπαν αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες προκλήσεις στην κοσμολογία. Λόγω της διαστολής του Σύμπαντος και της καμπυλότητας του χωροχρόνου (όπως περιγράφεται από τη μετρική FLRW), η έννοια της «απόστασης» δεν είναι μονοσήμαντη. Σε μεγάλες κοσμολογικές κλίμακες, αντί για μια απλή μέτρηση μήκους, χρησιμοποιούμε την ερυθρή μετατόπιση (z) ως δείκτη απόστασης.

Για τον καθορισμό των αποστάσεων, οι αστρονόμοι χρησιμοποιούν τη λεγόμενη Κλίμακα Αποστάσεων (Distance Ladder), όπου η μία μέθοδος βαθμονομεί την επόμενη. Παράλληλα, σε κοσμολογικό επίπεδο, ορίζονται διαφορετικά είδη αποστάσεων ανάλογα με τη μέθοδο μέτρησης:

1. Η Κλίμακα Αποστάσεων [4]

- **Παραλλακτική Μέθοδος (Γεωμετρικές Αποστάσεις):** Είναι η παλαιότερη και πιο άμεση μέθοδος, αλλά λειτουργεί με ακρίβεια μόνο για σχετικά μικρές αποστάσεις εντός του Γαλαξία μας (μικρότερες από 1 kpc).
- **Τυπικά Κεριά (Standard Candles):** Πρόκειται για αστρονομικά αντικείμενα των οποίων γνωρίζουμε την απόλυτη φωτεινότητα (εκπεμπόμενη ισχύς L). Μετρώντας την παρατη-

ρούμενη ροή / φαινόμενη λαμπρότητα (F ή m), μπορούμε να υπολογίσουμε την απόστασή τους.

- *Μεταβλητοί Κηφείδες*: Λαμπρά, παλλόμενα άστρα που η περίοδος της παλμικής τους κίνησης συνδέεται άμεσα με την απόλυτη φωτεινότητά τους. Χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αποστάσεων σε κοντινούς γαλαξίες (10 – 40 Mpc).
- *Υπερκαινοφανείς Αστέρρες Τύπου Ia (SNIa)*: Εξαιρετικά λαμπρές αστρικές εκρήξεις (φτάνουν το απόλυτο μέγεθος $M \approx -19$) που λειτουργούν ως τυπικά κεριά, επιτρέποντάς μας να μετρήσουμε αποστάσεις βαθιά μέσα στην κοσμική ροή (Hubble flow).

- **Μέτρο Απόστασης (Distance Modulus)**: Στην αστρονομία η απόσταση συχνά υπολογίζεται μέσω της διαφοράς μεταξύ του φαινόμενου (m) και του απόλυτου (M) μεγέθους ενός αντικειμένου, η οποία σχετίζεται με την απόσταση φωτεινότητας (d_L) μέσω του τύπου:

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right) \quad (3.88)$$

- **Συνκινούμενη Απόσταση (Comoving Distance, χ)**: Είναι η απόσταση μεταξύ δύο αντικειμένων η οποία παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου, αν τα αντικείμενα κινούνται μόνο λόγω της διαστολής του Σύμπαντος (Hubble flow). Συνδέεται με τη μετρική απόσταση (d_m), η οποία σε ένα επίπεδο Σύμπαν είναι ακριβώς ίση με τη συνκινούμενη. Με χρήση της σχέσης (3.79) μπορούμε να υπολογίσουμε το διαφορικό dz ως:

$$dz = d \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = -\frac{da}{a^2} = -\frac{\dot{a} dt}{a a} = -H(z)(1+z)dt \quad (3.89)$$

το οποίο παρέχει μία πολύ χρήσιμη σχέση μεταξύ του διαστήματος dz της ερυθρής μετατόπισης και του αντίστοιχου διαστήματος dt του κοσμικού χρόνου. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τον παρελθόντα χρόνο ως:

$$t_0 - t(z) = \int_t^{t_0} dt = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H(z')} \quad (3.90)$$

(συνκινούμενη απόσταση comoving distance)

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (3.91)$$

και γράφοντας την μετρική FLRW στη μορφή:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi)d\Omega^2] \quad (3.92)$$

Η απόσταση που πολλαπλασιάζεται με τη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega^2$ είναι η **μετρική απόσταση**:

$$d_m \equiv a_0 S_k(\chi) = \begin{cases} a_0 \sinh(\chi/a_0), & k = -1 \\ \chi, & k = 0 \\ a_0 \sin(\chi/a_0), & k = +1 \end{cases} \quad (3.93)$$

Σε επίπεδο Σύμπαν ($k=0$) η μετρική απόσταση είναι ίση με την συνκινούμενη (comoving) απόσταση χ (θεωρώντας συνήθως $a_0 = 1$). και η χ συντεταγμένη του γαλαξία είναι:

$$\chi(z) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (3.94)$$

Είναι ξεκάθαρο ότι για να υπολογίσουμε κάποιο από αυτά τα ολοκληρώματα πρέπει να ξέρουμε πώς μεταβάλλεται η $H(z)$, η οποία απαιτεί γνώση του τρόπου μεταβολής του παράγοντα κλίμακας $a(t)$. Για πιο μακρινά αντικείμενα πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί σχετικά με την έννοια της απόστασης.

- **Φυσική / Ιδιοαπόσταση (Physical / Proper Distance, r_p):** Είναι η πραγματική απόσταση που θα μετρούσαμε με έναν «χάρακα» σε μία δεδομένη κοσμική χρονική στιγμή. Συνδέεται με τη συνκινούμενη απόσταση μέσω του παράγοντα κοσμικής διαστολής $a(t)$:

$$r_p(z) = a(t) \cdot d_{co}(z) \quad (3.95)$$

- **Απόσταση Φωτεινότητας (Luminosity Distance, d_L):** Χρησιμοποιείται όταν μελετάμε «τυπικά κεριά» (όπως οι SNe Ia). Λόγω της διαστολής, τα φωτόνια υφίστανται ερυθρή μετατόπιση (χάνουν ενέργεια) και ο ρυθμός άφιξής τους μειώνεται, οδηγώντας σε μικρότερη παρατηρούμενη ροή. Η παρατηρούμενη ροή F (ενέργεια ανά δευτερόλεπτο και ανά επιφάνεια λήψης) από μία έκρηξη υπερκαινοφανούς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συμπεράνουμε την απόσταση φωτεινότητάς του. Θεωρήστε μία πηγή σε δεδομένη κινούμενη απόσταση χ . Σε στατικό Ευκλείδειο χώρο, η σχέση μεταξύ απόλυτης φωτεινότητας και παρατηρούμενης ροής είναι:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2} \implies L = 4\pi\chi^2 F \quad (3.96)$$

Σε έναν χωρόχρονο, ο οποίος περιγράφεται από την μετρική FLRW ο ορισμός της σχέσης (3.96) πρέπει να τροποποιηθεί για τρεις λόγους:

- 1) Τη χρονική στιγμή t_0 που το φως φτάνει στη Γη, η σφαίρα που έχει κέντρο τον υπερκαινοφανή και φτάνει μέχρι τη Γη έχει επιφάνεια $4\pi d_m^2$. Το κλάσμα του φωτός που λαμβάνει ένα τηλεσκόπιο με άνοιγμα A είναι $A / (4\pi d_m^2)$.

- 2) Το πλήθος των φωτονίων που φτάνουν είναι μικρότερο από τα φωτόνια που εκπέμπονται κατά τον παράγοντα ερυθρής μετατόπισης $(1+z)^{-1}$.
- 3) Η ενέργεια E_0 των φωτονίων που λαμβάνονται είναι μικρότερη από την ενέργεια E_1 των φωτονίων που εκπέμπονται κατά τον ίδιο παράγοντα $(1+z)^{-1}$.

Έτσι η σωστή σχέση για την παρατηρούμενη ροή μίας πηγής με φωτεινότητα L , σε συντεταγμένη απόσταση χ και ερυθρή μετατόπιση z είναι:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi d_m^2 (1+z)^2} \quad (3.97)$$

όπου έχουμε ορίσει την απόσταση φωτεινότητας d_L , έτσι ώστε η σχέση μεταξύ φωτεινότητας, ροής και απόστασης φωτεινότητας να είναι η ίδια όπως στον Ευκλείδειο χώρο. Άρα:

$$d_L = d_m(1+z) \quad (3.98)$$

και η απόσταση φωτεινότητας ορίζεται ως:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (3.99)$$

- **Απόσταση Γωνιακής Διαμέτρου (Angular Diameter Distance, d_A):** Χρησιμοποιείται όταν εξετάζουμε «τυπικούς χάρακες» (standard rulers), δηλαδή αντικείμενα γνωστού φυσικού μεγέθους D (όπως οι διακυμάνσεις του Κοσμικού Υποβάθρου Μικροκυμάτων). Ορίζεται από τον λόγο του πραγματικού μεγέθους προς το φαινόμενο γωνιακό μέγεθος $\delta\theta$ που παρατηρούμε στον ουρανό ($d_A = D/\delta\theta$). Σχετίζεται με τη μετρική απόσταση ως:

$$d_A = \frac{d_m}{1+z} \quad (3.100)$$

Από την μετρική FLRW έχουμε την σχέση μεταξύ του φυσικού μεγέθους του αντικειμένου και του γωνιακού του μεγέθους :

$$D = a(t_1) S_k(\chi) \delta\theta = \frac{d_m}{1+z} \delta\theta \quad (3.101)$$

Εκ των παραπάνω, η σχέση που συνδέει τις δύο αποστάσεις είναι:

$$d_L = d_A(1+z)^2 \quad (3.102)$$

Η ακριβής γνώση και μέτρηση αυτών των αποστάσεων σε μεγάλες ερυθρές μετατοπίσεις είναι ο τρόπος με τον οποίο ανακαλύψαμε ότι η διαστολή του Σύμπαντος επιταχύνεται λόγω της

Σκοτεινής Ενέργειας / Κοσμολογικής Σταθεράς Λ .

3.4 Η Κοσμολογική Σταθερά

3.4.1 Η επιταχυνόμενη Διαστολή

Όπως έχουμε ήδη δει για μία συγκεκριμένη τιμή (του παρόντος χρόνου) της σταθεράς Hubble "προκύπτει" επίπεδο Σύμπαν ($k = 0$) και μέσω της (3.66) όρισαμε την κρίσιμη πυκνότητα ως :

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.103)$$

Χρησιμοποιώντας την κρίσιμη πυκνότητα όρισαμε την παράμετρο πυκνότητας ως :

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (3.104)$$

και την παράμετρο καμπυλότητας ως:

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{H^2 a^2} \quad (3.105)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.66) με τη μορφή :

$$\Omega + \Omega_k = 1 \quad (3.106)$$

Ανακαλώντας τώρα την εξίσωση ρευστού (3.37) και θεωρώντας ότι το Σύμπαν κυριαρχείται από ύλη ($p = 0$), η σχέση για την παράμετρο επιβράδυνσης (3.81) γίνεται :

$$q_0(t) = -\frac{\ddot{a}_0(t_0)a(t_0)}{\dot{a}_0^2(t_0)} = -\frac{\ddot{a}_0(t_0)}{a_0(t_0)H_0^2(t_0)} = \frac{\rho}{2\rho_c} = \frac{\Omega_0}{2} \quad (3.107)$$

Τα παρατηρησιακά δεδομένα (από μακρινούς υπερκαινοφανείς) όμως υποδεικνύουν επιταχυνόμενη διαστολή, ήτοι $q_0 < 0$. Είμαστε λοιπόν αναγκασμένοι να προσθέσουμε έναν ακόμη όρο στην εξίσωση (3.106), ο οποίος θα σχετίζεται με την Κοσμολογική Σταθερά Λ , η οποία θα εξυπηρετεί διαφορετικό σκοπό από αυτόν για τον οποίο προοριζόταν από τον Einstein (στατικό Σύμπαν). Ο επιπλέον αυτός όρος είναι η παράμετρος :

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \quad (3.108)$$

αφού τώρα η εξίσωση επιτάχυνσης (3.51), όντως παράγει επιταχυνόμενη διαστολή για

$\Lambda > 4\pi G\rho$:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.109)$$

ξαναγράφουμε λοιπόν την (3.106) με τον όρο της παραμέτρου καμπυλότητας :

$$\boxed{\Omega + \Omega_{\Lambda} = 1 - \Omega_k} \quad (3.110)$$

και προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις :

- **Ανοιχτό σύμπαν:** $k < 0 \implies 0 < \Omega + \Omega_{\Lambda} < 1$
- **Επίπεδο σύμπαν:** $k = 0 \implies \Omega + \Omega_{\Lambda} = 1$
- **Κλειστό σύμπαν:** $k > 0 \implies \Omega + \Omega_{\Lambda} > 1$

Η εξίσωση ρευστού για την κοσμολογική σταθερά είναι:

$$\dot{\rho}_{\Lambda} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_{\Lambda} + \frac{p_{\Lambda}}{c^2}\right) = 0 \quad (3.111)$$

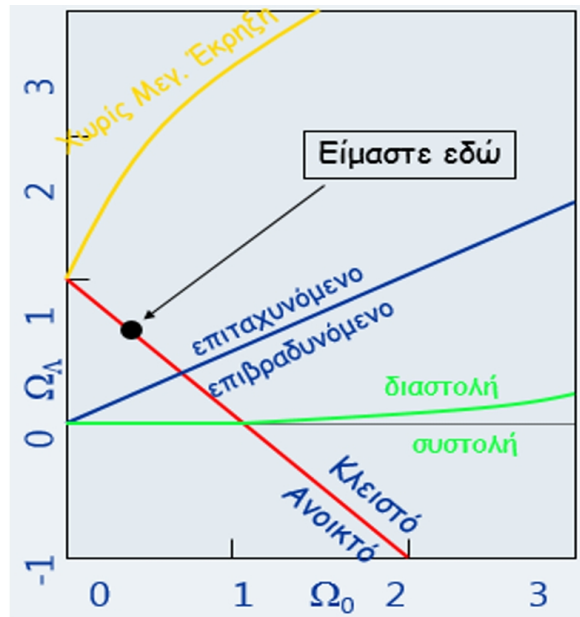
και αφού η πυκνότητα είναι σταθερή ($\dot{\rho}_{\Lambda} = 0$), προκύπτει ότι:

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}c^2 \quad (3.112)$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση η κοσμολογική σταθερά έχει αρνητική πίεση, κάτι που σημαίνει ότι καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, εκτελείται έργο πάνω στο ρευστό της κοσμολογικής σταθεράς. Έτσι η πυκνότητα ενέργειάς παραμένει σταθερή, παρόλο που ο όγκος του Σύμπαντος αυξάνεται!

3.4.2 Επίπεδο $\Omega_0 - \Omega_{\Lambda}$

Στο επόμενο σχήμα (Σχ.3.1), το οποίο αποτελεί ίσως το πιο σημαντικό διάγραμμα στην Κοσμολογία, αποτυπώνονται οι διαφορετικές ιστορίες του Σύμπαντος σε σχέση με το άθροισμα $\Omega_0 + \Omega_{\Lambda}$, όπως αυτό διαμορφώνεται για τους διάφορους συνδυασμούς :



Σχήμα 3.1: **Επίπεδο** $\Omega_0 - \Omega_\Lambda$ (Περιβολαρόπουλος, Α., και Αντωνίου, Ι. *Θεωρία της Σχετικότητας και την Κοσμολογία [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-201>*)

Η ευθεία που αποτελεί το σύνορο μεταξύ επιταχυνόμενων και επιβραδυνόμενων Σύμπαντων είναι η :

$$q_0(t) = -\frac{\ddot{a}_0(t_0)a(t_0)}{\dot{a}_0^2(t_0)} = 0 \quad (3.113)$$

επίσης από την εξίσωση επιτάχυνσης (3.82)-(3.83) , έχουμε :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \Omega_\Lambda H^2 \quad (3.114)$$

εισάγοντας την κρίσιμη πυκνότητα (3.66), έχουμε:

$$q_0 = \frac{\Omega_0}{2} - \Omega_\Lambda \quad (3.115)$$

Από τα παρατηρησιακά δεδομένα συμπεραίνουμε πως βρισκόμαστε σε ένα Σύμπαν όπου $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$, $k = 0$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ και $\Omega_0 = 0,3$. Δηλαδή σε ένα επίπεδο Σύμπαν με 70% σκοτεινή ενέργεια και 30% ύλη (4% κανονική ύλη και το υπόλοιπο σκοτεινή ύλη).

3.5 Υπερκαινοφανείς Αστέρες Τύπου Ia (SNe Ia)

Οι υπερκαινοφανείς αστέρες Τύπου Ia (SNe Ia) αποτελούν εξαιρετικά ισχυρές και φωτεινές αστρικές εκρήξεις, οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στην Κοσμολογία ως δείκτες μέτρησης κοσμικών αποστάσεων.

- **Μηχανισμός Δημιουργίας:** Προκύπτουν αποκλειστικά σε διπλά αστρικά συστήματα, στα οποία ο ένας αστέρας είναι ένας συμπαγής "λευκός νάνος". Ο λευκός νάνος έλκει και συσσωρεύει (προσαυξάνει) σταδιακά ύλη από το άστρο-συννοδό του.

- **Η Έκρηξη:** Όταν η μάζα του λευκού νάνου φτάσει το θεωρητικό όριο Chandrasekhar (περίπου 1,4 ηλιακές μάζες), η πίεση εκφυλισμού δεν επαρκεί πλέον για να εξισορροπήσει τη βαρυτική έλξη. Αυτό οδηγεί στη συρρίκνωση του άστρου, εκτινάσσοντας τη θερμοκρασία του σε σημείο όπου πυροδοτείται ανεξέλεγκτα η σύντηξη άνθρακα, καταλήγοντας σε μια βίαιη θερμοπυρηνική έκρηξη.

- **Καμπύλη Φωτός:** Κατά την έκρηξη παράγονται τεράστιες ποσότητες ραδιενεργού νικελίου-56 (^{56}Ni). Η διάσπαση του ^{56}Ni σε κοβάλτιο-56 και έπειτα σε σίδηρο-56 εκπέμπει ακτίνες γάμμα. Αυτές οι ακτίνες αλληλεπιδρούν με τα εκτινασσόμενα υλικά, μειώνοντας την ενέργειά τους και απελευθερώνοντας την ακτινοβολία που δημιουργεί τη χαρακτηριστική καμπύλη φωτός του υπερκαινοφανούς (μια γρήγορη άνοδος της φωτεινότητας ακολουθούμενη από μια σταδιακή μείωση).

- **Φασματικά Χαρακτηριστικά:** Ταξινομούνται ως Τύπου Ia επειδή στο φάσμα τους απουσιάζουν οι γραμμές υδρογόνου και ηλίου, αλλά διαθέτουν μια χαρακτηριστική γραμμή ιονισμένου πυριτίου στα 615 nm. Πώς βαθμονομούνται; Οι SNe Ia αναφέρονται συχνά ως «τυπικά κεριά» (standard candles) επειδή κατά τη μέγιστη φωτεινότητά τους αγγίζουν ένα σταθερό απόλυτο μέγεθος ($M \approx -19$). Ωστόσο, η εγγενής φωτεινότητά τους έχει αποκλίσεις, γι' αυτό και πιο σωστά ονομάζονται «τυποποιήσιμα κεριά» (standardisable candles). Η βαθμονόμησή τους είναι μια διαδικασία πολλαπλών σταδίων:

1. **Τυποποίηση Καμπύλης Φωτός (Σχέση Phillips):** Διαπιστώθηκε εμπειρικά ότι το απόλυτο μέγεθος ενός SN Ia συσχετίζεται άμεσα με το "πλάτος" (τη διάρκεια) της καμπύλης φωτός του. Οι φωτεινότεροι υπερκαινοφανείς παραμένουν φωτεινοί για περισσότερο χρόνο και τείνουν να είναι πιο "μπλε" σε χρώμα. Εφαρμόζοντας αυτή τη γνώση, καθώς και διορθώσεις-K (για να αντισταθμιστεί η ερυθρή μετατόπιση του φάσματος), οι αστρονόμοι μπορούν να βρουν την ακριβή απόλυτη λαμπρότητά τους.

2. **Η Κλίμακα Κοσμικών Αποστάσεων (Cosmic Distance Ladder):** Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τους SNe Ia για κοσμολογικές μετρήσεις (όπως η μέτρηση της σταθεράς Hubble, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την απόλυτη λαμπρότητά τους σε φυσικές μονάδες απόστασης (Mpc), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των "σκαλοπατιών":

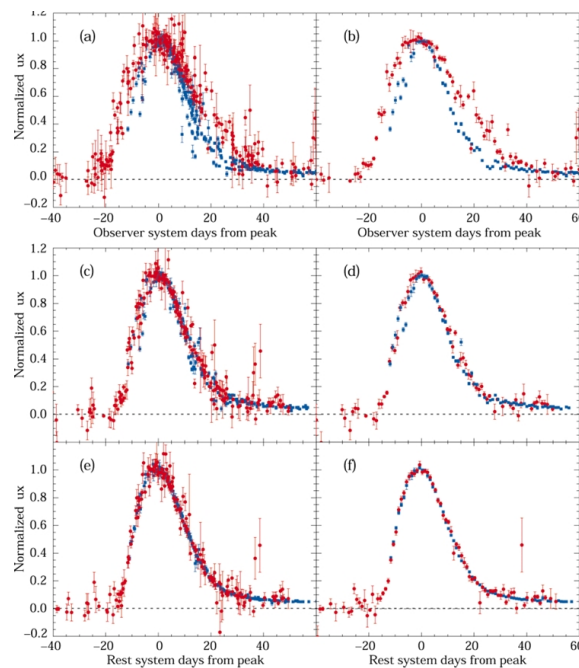
- **1ο Σκαλοπάτι (Γεωμετρικές Αγκυρώσεις):** Χρησιμοποιούνται μέθοδοι, όπως η τριγωνομετρική παράλλαξη (π.χ. από την αποστολή Gaia), για να μετρηθούν γεωμετρικά και με απόλυτη ακρίβεια οι αποστάσεις σε τοπικούς γαλαξίες-άγκυρες (π.χ. στον Γαλαξία μας, στο Μέγα Νέφος του Μαγγελάνου ή στον γαλαξία NGC 4258).

- **2ο Σκαλοπάτι (Κηφείδες / TRGB):** Στους παραπάνω γαλαξίες, εντοπίζονται πρωτογενείς δεί-

κτες αποστάσεων, κυρίως οι μεταβλητοί αστέρες Κηφείδες (ή οι ερυθροί γίγαντες TRGB). Με βάση την ήδη γνωστή γεωμετρική απόσταση των "αγκυρών", βαθμονομείται η σχέση περιόδου-φωτεινότητας των Κηφίδων.

- *3ο Σκαλοπάτι (SNe Ia σε κοινούς γαλαξίες):* Οι ερευνητές εστιάζουν με τηλεσκόπια (όπως το Hubble) σε πιο μακρινούς γαλαξίες που φιλοξένησαν πρόσφατα έναν υπερκαινοφανή SN Ia, στους οποίους μετρούν επίσης και τους αστέρες Κηφείδες. Οι Κηφείδες δίνουν την απόσταση αυτού του γαλαξία. Έχοντας την απόσταση, μπορούν επιτέλους να "κλειδώσουν" (βαθμονομήσουν) με ακρίβεια την απόλυτη λαμπρότητα του συγκεκριμένου SN Ia.

Αφού βαθμονομηθεί με ασφάλεια η λαμπρότητα των SNe Ia μέσω των Κηφίδων σε κοντινούς γαλαξίες, αυτοί οι υπερκαινοφανείς μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο επόμενο και τελικό βήμα: τη μέτρηση τεράστιων κοσμολογικών αποστάσεων βαθιά μέσα στην κοσμική ροή (Hubble flow), για τον υπολογισμό της σταθεράς του Hubble και της σκοτεινής ενέργειας σχήμα (3.2).



Σχήμα 3.2: Goldhaber, G., et al. (The Supernova Cosmology Project) (2001). "Timescale Stretch Parameterization of Type Ia Supernova B-band Light Curves". The Astrophysical Journal, 558(2), 359.

3.6 Σωματία

Τα σωματία που συνθέτουν το Σύμπαν και καθορίζουν την κοσμολογική του εξέλιξη, ταξινομούνται με βάση τις ιδιότητές τους στις εξής βασικές κατηγορίες:

1. Βαρύνια : Σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν τα πρωτόνια και τα νετρόνια. Τα πρωτόνια

είναι σταθερά σωμάτια με φορτίο +1 και ενέργεια ηρεμίας 938.3 MeV. Τα νετρόνια είναι ηλεκτρικά ουδέτερα με ενέργεια ηρεμίας 939.6 MeV. Σε αντίθεση με τα πρωτόνια, είναι ευσταθή μόνο όταν βρίσκονται μέσα σε ατομικούς πυρήνες. Σε ελεύθερη κατάσταση είναι ασταθή και έχουν χρόνο ημιζωής περίπου 890 δευτερόλεπτα (15 λεπτά), διασπώμενα σε πρωτόνια, ηλεκτρόνια και νετρίνα. Στο σημερινό Σύμπαν τα βαρυόνια είναι μη σχετικιστικά (η κινητική τους ενέργεια είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια ηρεμίας τους). Το βαρυονικό περιεχόμενο του Σύμπαντος αποτελείται κατά βάση από 1 μέρος ηλίου για κάθε 3 μέρη υδρογόνου (κατά μάζα).

2. Λεπτόνια : Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα ηλεκτρόνια και τα νετρίνα. Τα ηλεκτρόνια είναι ευσταθή σωμάτια με φορτίο -1 και ενέργεια ηρεμίας 0.511 MeV. Επειδή το Σύμπαν είναι στο σύνολό του ηλεκτρικά ουδέτερο, υπάρχει ακριβώς ένα ηλεκτρόνιο για κάθε ένα πρωτόνιο. Ωστόσο, επειδή είναι εξαιρετικά ελαφρύτερα από τα βαρυόνια, η συνεισφορά τους στη συνολική μάζα του Σύμπαντος είναι αμελητέα. Τα νετρίνα εμφανίζονται σε 3 "γεύσεις" (ηλεκτρονίου, μιονίου, ταυ), είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, ευσταθή και έχουν εξαιρετικά μικρή μάζα (της τάξης των μερικών eV). Επειδή αλληλεπιδρούν με την ύλη αποκλειστικά μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης και της βαρύτητας, είναι πάρα πολύ δύσκολο να ανιχνευθούν. Λόγω της μικρής τους μάζας, ήταν σχετικιστικά για το μεγαλύτερο μέρος της ιστορίας του Σύμπαντος και άρχισαν να συμπεριφέρονται ως μη σχετικιστική ύλη μόνο σε πρόσφατους κοσμολογικούς χρόνους.

3. Σωμάτια Ακτινοβολίας : Εδώ ανήκουν τα φωτόνια, τα οποία είναι αφόρτιστα, ευσταθή και έχουν μηδενική μάζα ηρεμίας. Η ενέργειά τους εξαρτάται από τη συχνότητά τους ($E=hf$) και κινούνται πάντα σχετικιστικά. Σήμερα, η τεράστια πλειοψηφία των φωτονίων στο Σύμπαν αποτελεί την Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB), δηλαδή το αρχέγονο φως που σκεδάστηκε για τελευταία φορά κατά τη δημιουργία των πρώτων ατόμων. Η αριθμητική τους πυκνότητα είναι τεράστια, καθώς αναλογούν περίπου 10^9 φωτόνια της CMB για κάθε ένα βαρυόνιο.

3.7 Σκοτεινή Ύλη

Η μελέτη της ταχύτητας των γαλαξιών μέσα στα σμήνη γαλαξιών αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της κοσμολογίας για τον υπολογισμό της συνολικής μάζας του σύμπαντος και την απόδειξη της ύπαρξης της σκοτεινής ύλης. Συγκεκριμένα, η σχέση μεταξύ της ταχύτητας των γαλαξιών και των σμηνών βασίζεται στα εξής σημεία:

1. Το Θεώρημα Virial και η συνολική μάζα : Η μέτρηση της τυπικής ταχύτητας (u) των γαλαξιών που ανήκουν σε ένα σμήνος μάζας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη συνολική μάζα (M) και την ακτίνα (R) του σμήνους μέσω του θεωρήματος Virial. Το θεώρημα αυτό συσχετίζει την κινητική με τη δυναμική ενέργεια των δέσμιων βαρυτικών συστημάτων και εκφράζεται προσεγγιστικά από τη σχέση $u^2 \sim GM/R$.

2. Η ένδειξη για τη Σκοτεινή Ύλη : Όταν οι αστρονόμοι μετρούν τις ταχύτητες των γαλαξιών

μέσα στα σμήνη, διαπιστώνουν ότι αυτές είναι υπερβολικά μεγάλες για να δικαιολογηθούν αποκλειστικά από τη βαρυτική έλξη της ορατής ύλης (άστρα και αέρια). Για να παραμένουν οι γαλαξίες βαρυτικά δεσμευμένοι στο σμήνος και να μην διαφεύγουν στο διάστημα λόγω των τεράστιων ταχυτήτων τους, πρέπει να υπάρχει τεράστια ποσότητα αόρατης μάζας. Οι υπολογισμοί μέσω του θεωρήματος Virial δείχνουν ότι η παράμετρος πυκνότητας της ύλης πρέπει να είναι $\Omega_0 > 0,2$. Επειδή η θεωρία της πυρηνοσύνθεσης περιορίζει τη βαρυονική (κοινή) ύλη σε πολύ μικρότερο ποσοστό, αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί θεμελιώδη ένδειξη για την ύπαρξη μη βαρυονικής σκοτεινής ύλης στα σμήνη γαλαξιών.

3. Ιδιότητες Ταχύτητες (Peculiar Velocities) : Η συνολική παρατηρούμενη ταχύτητα ενός γαλαξία δεν προκύπτει μόνο από την κοσμολογική διαστολή του σύμπαντος (ταχύτητα Hubble), αλλά περιλαμβάνει και την ιδιότυπη ταχύτητά του (peculiar velocity). Η ιδιότυπη ταχύτητα (τυπικής τάξης μεγέθους $\sim 500 km/s$) οφείλεται ακριβώς στις τοπικές βαρυτικές αλληλεπιδράσεις με την υπερκείμενη κατανομή της πυκνότητας, όπως είναι η βαρυτική έλξη από το σμήνος στο οποίο ανήκει ο γαλαξίας.

4. Επιβεβαίωση από τις Ακτίνες X : Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ταχύτητα των γαλαξιών επιβεβαιώνονται με μια συμπληρωματική μέθοδο στα σμήνη γαλαξιών: τη μελέτη των θερμών αερίων. Τα διαγαλαξιακά αέρια παγιδεύονται στο τεράστιο βαρυτικό πεδίο («πηγάδι») του σμήνους, επιταχύνονται και μετατρέπουν τη δυναμική τους ενέργεια σε κινητική. Ως αποτέλεσμα, θερμαίνονται σε τεράστιες θερμοκρασίες (περίπου $10^8 K$) και εκπέμπουν ακτίνες X. Η μάζα που απαιτείται για να συγκρατήσει αυτό το υπέρθερμο αέριο (εξισορροπώντας την τεράστια πίεσή του) οδηγεί ξανά στο συμπέρασμα ότι απαιτείται πυκνότητα σκοτεινής ύλης περίπου 10 φορές μεγαλύτερη από την κανονική βαρυονική ύλη.

Το μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας βρίσκεται με τη μορφή της μη βαρυονικής Σκοτεινής Ύλης, η οποία δεν εκπέμπει φως. Τα σωματίδια που την αποτελούν είναι μέχρι σήμερα άγνωστα, αλλά υπάρχουν αρκετοί θεωρητικοί υποψήφιοι:

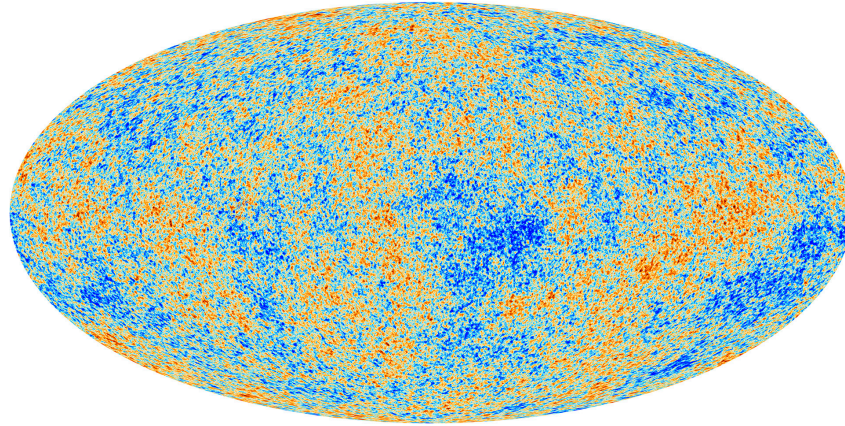
- WIMPs (Ασθενώς Αλληλεπιδρώντα Σωματίδια με Μάζα): Ελαφρά υπερσυμμετρικά σωματίδια που αλληλεπιδρούν μόνο βαρυτικά και ασθενώς.
- Πολύ βαριά νετρίνα ή ελαφρά σωματίδια όπως τα αξιόνια.

Για να εξηγηθεί η δημιουργία των γαλαξιών και των δομών, τα σωματίδια της σκοτεινής ύλης πρέπει να ήταν «ψυχρά», δηλαδή να κινούνταν με μη σχετικιστικές ταχύτητες ώστε να μπορέσουν να συσσωρευτούν υπό την επίδραση της βαρύτητας.

3.8 Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB)

Η Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB - Cosmic Microwave Background) αποτελεί την αρχέγονη, «απολιθωμένη» ακτινοβολία που έχει απομείνει από τα πρώιμα, εξαιρετικά θερμά

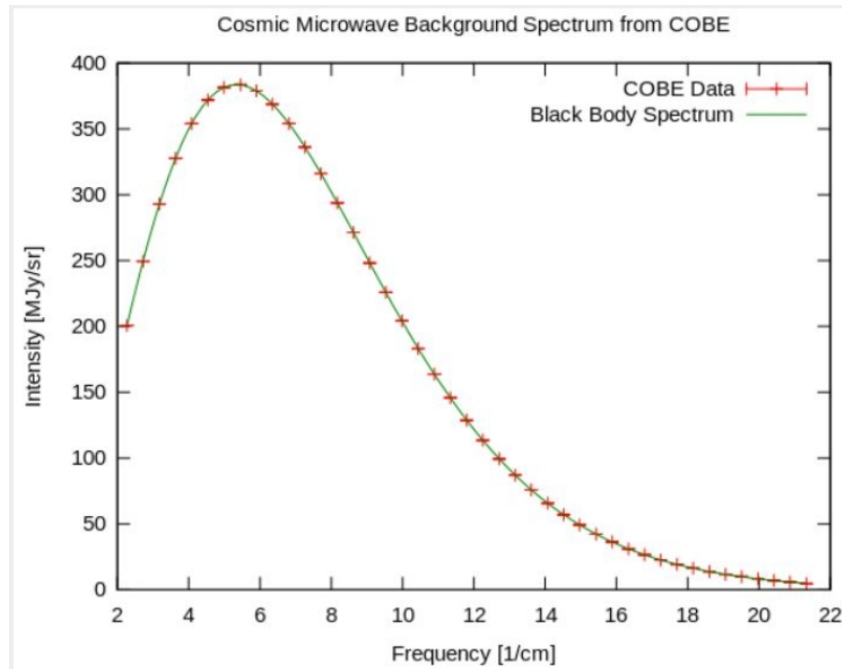
και πυκνά στάδια της εξέλιξης του Σύμπαντος, αμέσως μετά τη Μεγάλη Έκρηξη. Αποτελεί το πιο ισχυρό εργαλείο της σύγχρονης κοσμολογίας, καθώς μας παρέχει μια "φωτογραφία" (Σχήμα 3.2) του Σύμπαντος όταν αυτό είχε ηλικία μόλις 380.000 ετών.



Σχήμα 3.3: Θερμοκρασιακός Χάρτης της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου. Planck Collaboration (2020). "Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck." *Astronomy and Astrophysics*, 641, A1.

Στο πολύ πρώιμο Σύμπαν, η θερμοκρασία ήταν τόσο υψηλή που η ύλη ήταν πλήρως ιονισμένη. Τα φωτόνια της ακτινοβολίας ήταν "παγιδευμένα" σε μια πυκνή σούπα ελεύθερων ηλεκτρονίων και πρωτονίων, καθώς σκεδάζονταν συνεχώς πάνω στα ηλεκτρόνια (σκέδαση Thomson). Καθώς το Σύμπαν διαστελλόταν και η θερμοκρασία του έπεφτε, έφτασε σε ένα σημείο όπου τα πρωτόνια μπόρεσαν να συνδεθούν με τα ηλεκτρόνια και να σχηματίσουν τα πρώτα ουδέτερα άτομα υδρογόνου (εποχή της Επανασύνδεσης). Χωρίς ελεύθερα ηλεκτρόνια για να τα εμποδίζουν, τα φωτόνια σταμάτησαν να σκεδάζονται (Αποσύζευξη) και το Σύμπαν έγινε διαφανές. Αυτά ακριβώς τα φωτόνια, τα οποία ταξιδεύουν ελεύθερα στο διάστημα έκτοτε, χωρίς να αλληλεπιδρούν με την ύλη, αποτελούν τη σημερινή Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου.

Η ύπαρξη της CMB προβλέφθηκε θεωρητικά το 1948 από τους Gamow, Alpher και Hermann, αλλά ανακαλύφθηκε τυχαία το 1965 από τους ραδιοαστρονόμους Penzias και Wilson, οι οποίοι έπιασαν ένα επίμονο "παράσιτο" μικροκυμάτων από κάθε κατεύθυνση του ουρανού. Σήμερα, η ακτινοβολία αυτή έχει ψυχθεί λόγω της διαστολής του Σύμπαντος και ανιχνεύεται με θερμοκρασία περίπου 2.725 K και κατανέμεται φασματικά σχεδόν τέλεια ως ακτινοβολία μέλανος σώματος, γεγονός που επιβεβαιώθηκε περίτρανα από το όργανο FIRAS του δορυφόρου COBE το 1990 (Σχήμα 3.3).



Σχήμα 3.4: Φασματική κατανομή της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων. Fixsen, D. J., et al. (1996). "The Cosmic Microwave Background spectrum from the full COBE FIRAS data set." *The Astrophysical Journal*, 473(2), 576.

Αν και η CMB είναι εξαιρετικά ομοιογενής και ισοτροπική, παρατηρήσεις από δορυφόρους (όπως ο COBE, ο WMAP και ο Planck) αποκάλυψαν ότι κρύβει απειροελάχιστες θερμοκρασιακές διακυμάνσεις της τάξης του 1 προς 100.000 (10^{-5} ανάλογα με την κατεύθυνση). Αυτές οι μικρές αυξομειώσεις θερμοκρασίας και πυκνότητας ήταν ο απόηχος των αρχέγονων ακουστικών κυμάτων που πάλλονταν στο τότε πλάσμα ύλης-ακτινοβολίας. Αποτέλεσαν τα "σπέρματα" ή τις περιοχές συμπύκνωσης γύρω από τις οποίες η βαρύτητα τράβηξε σταδιακά την ύλη, οδηγώντας τελικά στη δημιουργία των γαλαξιών, των άστρων και των σμηνών που βλέπουμε σήμερα. Χωρίς αυτές τις διαταραχές, δεν θα υπήρχε η σημερινή κοσμική δομή.

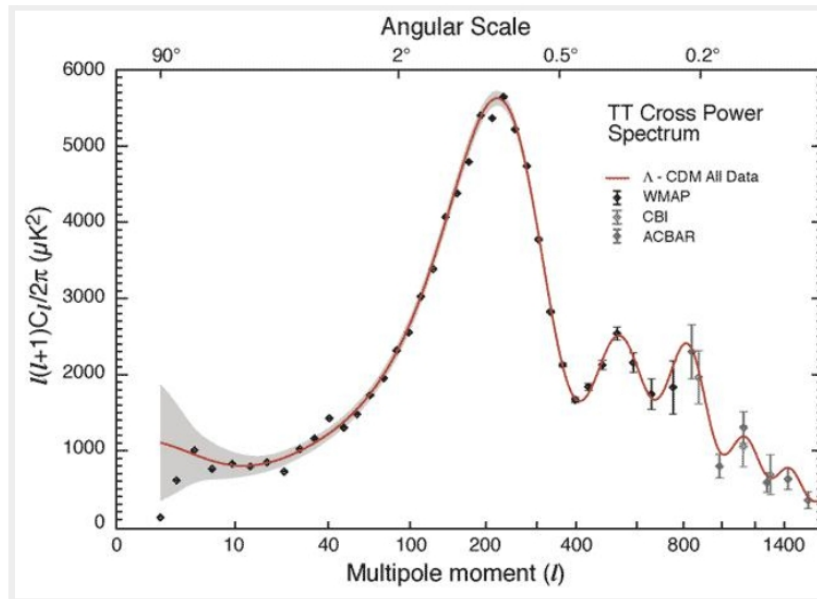
Η λεπτομερής ανάλυση του γωνιακού φάσματος αυτών των ανισοτροπιών (των λεγόμενων πολυπολικών ροπών ή "ακουστικών κορυφών") μας επιτρέπει να υπολογίσουμε με εκπληκτική ακρίβεια τις θεμελιώδεις παραμέτρους του Σύμπαντος. Αυτό το επιτυγχάνουμε γράφοντας τις θερμοκρασιακές διαταραχές ως σειρές σφαιρικών αρμονικών της μορφής :

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.116)$$

Η συνάρτηση συσχετισμού βρίσκεται από τον χάρτη των διαταραχών μέσω της συνάρτησης συσχετισμού:

$$C(\theta) = \left\langle \frac{\delta T(\hat{n})}{T} \frac{\delta T(\hat{n}')}{T} \right\rangle_{\hat{n}\hat{n}'=\cos\theta} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta) \quad (3.117)$$

όπου P_l είναι τα πολυώνυμα Legendre.



Σχήμα 3.5: Ανάλυση των διακυμάνσεων της θερμοκρασίας της Κοσμικής Ακτινοβολίας Μικροκυμάτων (στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο) ανάλογα με τη κατεύθυνση παρατήρησης. Bennett, C. L., et al. (2003). "First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results." The Astrophysical Journal Supplement Series, 148(1), 1.

Σε πρώτη προσέγγιση η CMB είναι ομογενής και ισοτροπική. Σε επίπεδο διαταραχών $1/1000$, υπάρχει μόνο ένας διπολικός όρος λόγω της κίνησης του παρατηρητή ως προς το σύστημα του CMB. Σε επίπεδο διαταραχών $1/100000$, και αφού αφαιρεθεί ο διπολικός όρος, υπάρχουν πρωτογενείς διαταραχές των οποίων το γωνιακό φάσμα εμφανίζει μια σειρά από μέγιστα σε χαρακτηριστικές γωνιακές κλίμακες.

- **Γεωμετρία:** Η θέση της πρώτης κορυφής στο διάγραμμα του Σχήματος (3.4) καταδεικνύει ότι το Σύμπαν είναι επίπεδο. Η θεωρία προβλέπει ότι το μέγιστο θα εμφανιστεί για $l = 200$.
- **Συστατικά:** Οι διακυμάνσεις για $l > 300$ οφείλονται στις αρμονικές. Το ύψος και η κατανομή των κορυφών αποκαλύπτουν την ακριβή πυκνότητα της βαρυονικής (κανονικής) ύλης, της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας.

Εκτός από τις διακυμάνσεις θερμοκρασίας, η ακτινοβολία υποβάθρου παρουσιάζει και έναν βαθμό πόλωσης, ο οποίος προκλήθηκε από τη σκέδαση των φωτονίων (σκέδαση Compton) κατά την αποσύζευξή τους. Η μελέτη της πόλωσης παρέχει ανεξάρτητες πληροφορίες και χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, για την αναζήτηση ιχνών από αρχέγονα βαρυτικά κύματα που ενδέχεται να παρήχθησαν κατά τη βίαιη φάση του Κοσμικού Πληθωρισμού.

3.9 Προβλήματα του Μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης

Η απλή μορφή του κοσμολογικού μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang) αντιμετωπίζει ορισμένα θεμελιώδη προβλήματα, τα οποία οδήγησαν την επιστημονική κοινότητα στην εισαγωγή της θεωρίας του Πληθωριστικού Σύμπαντος (μιας περιόδου ακραία επιταχυνόμενης διαστολής) για την επίλυσή τους. Τα τρία βασικά προβλήματα είναι τα εξής:

3.9.1 Το πρόβλημα της επιπεδότητας

Από τις σύγχρονες παρατηρήσεις προκύπτει ότι το Σύμπαν σήμερα είναι σχεδόν απόλυτα επίπεδο, δηλαδή η ολική παράμετρος πυκνότητάς του είναι $\Omega_{tot} \approx 1$. Όμως, σύμφωνα με τις εξισώσεις του Friedmann, οποιαδήποτε απόκλιση από την απόλυτη επιπεδότητα στο παρελθόν θα μεγεθυνόταν δραματικά καθώς το Σύμπαν διαστελλόταν. Για να έχουμε $\Omega_{tot} \approx 1$ σήμερα, σημαίνει ότι σε πολύ πρώιμους χρόνους το Σύμπαν έπρεπε να είναι "αφύσικα" κοντά στο επίπεδο. Για παράδειγμα, την εποχή της πυρηνοσύνθεσης (1 δευτερόλεπτο μετά τη Μεγάλη Έκρηξη) το Ω έπρεπε να διαφέρει από τη μονάδα το πολύ κατά 10^{-18} και την εποχή του ηλεκτρασθενούς σπασίματος της συμμετρίας κατά 10^{-30} . Το απλό μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης αδυνατεί να εξηγήσει ποιος μηχανισμός επέβαλε την επιπεδότητα.

3.9.2 Το πρόβλημα του ορίζοντα

Η Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB) παρουσιάζει μια εκπληκτική ομοιογένεια θερμοκρασίας (περίπου 2,7 K) σε όλες τις κατευθύνσεις του ουρανού. Ωστόσο, στο απλό (συνεχώς επιβραδυνόμενο) μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης, απομακρυσμένες περιοχές του Σύμπαντος δεν θα μπορούσαν ποτέ να έχουν έρθει σε αιτιακή επαφή μέχρι την εποχή της επανασύνδεσης. Κοντά στην εποχή της επανασύνδεσης t_{ls} , βλέπουμε ότι η τότε κλίμακα του ορίζοντα d_{hor} είναι διπλάσια από την τότε κλίμακα Hubble, αφού το Σύμπαν και τότε κυριαρχείτο από ύλη. Επομένως:

$$d_{hor}(t_{ls}) \approx \frac{2c}{H(t_{ls})} \approx 2 \times 0.2 \text{ Mpc} = 0.4 \text{ Mpc} \quad (3.118)$$

Για μας ως παρατηρητές, αυτή η απόσταση αντιστοιχεί σε γωνιακή απόσταση:

$$\theta_{hor} \approx \frac{d_{hor}(t_{ls})}{d_A(t_{ls})} \approx \frac{0.4 \text{ Mpc}}{13 \text{ Mpc}} 0.03 \text{ rad} \approx 2^\circ \quad (3.119)$$

Συγκεκριμένα, για έναν σημερινό παρατηρητή, περιοχές της CMB που απέχουν γωνιακά περισσότερο από 2 μοίρες δεν είχαν τον χρόνο να ανταλλάξουν φωτεινά σήματα (πληροφορία) από τη γέννηση του Σύμπαντος μέχρι τη στιγμή που εξέπεμψαν το φως τους. Το μεγάλο πρόβλημα

λοιπόν είναι: πώς αυτές οι αιτιακά ασύνδετες περιοχές απέκτησαν ακριβώς την ίδια θερμοκρασία, εφόσον δεν μπορούσαν να αλληλεπιδράσουν για να έρθουν σε θερμική ισορροπία;

3.9.3 Το πρόβλημα των μονοπόλων

Οι Μεγάλες Ενοποιημένες Θεωρίες (GUTs) της Σωματιδιακής Φυσικής προβλέπουν ότι, καθώς το πολύ πρώιμο Σύμπαν ψυχόταν και συνέβαιναν αλλαγές φάσης με σπάσιμο συμμετριών, έπρεπε να δημιουργηθούν σημαντικές τοπολογικές ατέλειες που συμπεριφέρονται ως "μαγνητικά μονόπολα", με μάζα ηρεμίας που προβλέπεται να είναι $M_{mon} \sim E_{GUT} \sim 10^{12} TeV$. Σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης, η πυκνότητά αυτών των μονοπόλων θα μειωνόταν πιο αργά από την πυκνότητα της ακτινοβολίας, με αποτέλεσμα να έπρεπε να κυριαρχούν απόλυτα στο σημερινό Σύμπαν. Το γεγονός ότι δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ ούτε ένα μαγνητικό μονόπολο (...!) αποτελεί άλλη μια σοβαρή ασυνέπεια της κλασικής θεωρίας της Μεγάλης Έκρηξης.

3.10 Πληθωρισμός (Inflation)

Η σύγχρονη κοσμολογία επιλύει όλα τα παραπάνω ζητήματα ενσωματώνοντας τη θεωρία του Πληθωρισμού, ο οποίος "ισοπέδωσε" γεωμετρικά τον χώρο (λύνοντας το πρόβλημα της επιπέδότητας), επέτρεψε σε μια μικρή αιτιακά συνδεδεμένη περιοχή να "τεντωθεί" και να καλύψει όλο τον ορατό ουρανό (λύνοντας το πρόβλημα του ορίζοντα), αραίωσε τεχνητά τυχόν μονόπολα (λύνοντας το πρόβλημα των μονοπόλων) και παρήγαγε μέσω κβαντικών διακυμάνσεων τα σπέρματα για την δόμηση των γαλαξιών.

Ο πληθωρισμός είναι μια περίοδος στο πρώιμο Σύμπαν με επιταχυνόμενη διαστολή του κατά την οποία ο παράγοντας κλίμακας αυξάνει δραματικά. Την εποχή αυτή η συνάρτηση του παράγοντα κοσμικής διαστολής $a(t)$ αυξάνεται με επιταχυνόμενο ρυθμό, οπότε $\ddot{a}(t) > 0$.

Η εξίσωση Friedmann για την επιτάχυνση

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \quad (3.120)$$

προϋποθέτει ότι για να έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή, θα πρέπει να έχουμε αρνητική πίεση με :

$$p < -\frac{\rho c^2}{3} \quad (3.121)$$

και επομένως, όπως έχουμε ήδη δει, σε αυτήν την περίπτωση η εξίσωση Friedmann γράφεται στη μορφή:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda_i}{3} \quad (3.122)$$

Η επιταχυνόμενη διαστολή κυριαρχεί γρήγορα σε σχέση με τον όρο της καμπυλότητας. Έτσι επιβιώνει μόνο ο όρος που περιέχει την κοσμολογική σταθερά Λ και η εξίσωση Friedmann ξαναγράφεται ως :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{\Lambda_i}{3} \implies \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda_i}{3}} \implies a(t) \propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda_i}{3}}t\right) \quad (3.123)$$

Γίνεται τώρα ξεκάθαρο πως αν υπήρχε μια μικρή πληθωριστική περίοδος κατά τη διάρκεια της εποχής κυριαρχίας της ακτινοβολίας, τότε κατά την περίοδο εκείνη ο παράγοντας κλίμακας $a(t)$ είχε εκθετική αύξηση.

Θεωρώντας ότι η εποχή του πληθωρισμού ξεκινά την $t = t_i$, τελειώνει την $t = t_f$ και ότι στη διάρκεια της περιόδου αυτής η σταθερά Hubble είχε την τιμή $H = H_i$. Ο παράγοντας κοσμικής διαστολής είχε τις μορφές:

$$a(t) = \begin{cases} a(t_i) \left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}, & t < t_i \\ a(t_i) \exp[H_i(t - t_i)], & t_i < t < t_f \\ a(t_i) \exp[H_i(t_f - t_i)] \left(\frac{t}{t_f}\right)^{1/2}, & t > t_f \end{cases} \quad (3.124)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο παράγοντας κλίμακας $a(t)$ αυξάνει κατά:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{H_i(t_f - t_i)} \equiv e^N \quad (3.125)$$

Αν η διάρκεια του πληθωρισμού λοιπόν, ήταν μεγάλη σε σχέση με τον χρόνο Hubble, ο αριθμός εκθετικής αύξησης N θα ήταν μεγάλος και η αύξηση του παράγοντα διαστολής $a(t)$ τεράστια.

Το πρόβλημα της επιπεδότητας λύνεται πολύ εύκολα, εάν θεωρήσουμε μια πληθωριστική περίοδο στο πολύ πρώιμο Σύμπαν, αφού εάν εισάγουμε την ολική παράμετρο πυκνότητας Ω_{tot} στην εξίσωση Friedmann :

$$|1 - \Omega_{tot}| = \frac{|k|}{a^2 H^2} \quad (3.126)$$

και αφού κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού :

$$\ddot{a}(t) > 0 \implies \frac{d}{dt}(\dot{a}) > 0 \implies \frac{d}{dt}(aH) > 0 \quad (3.127)$$

Επομένως από τη σχέση (3.103) αφού ο παρονομαστής διαρκώς αυξάνει, τότε : $\Omega_{tot} \rightarrow 1$.

Τώρα, ερχόμενοι στο πρόβλημα του ορίζοντα, η φυσική απόσταση (τωρινή) από την επιφάνεια τελευταίας σκέδασης είναι : $d_p(t_0) \approx 1,4 \times 10^4 Mpc$, στο τέλος του πληθωρισμού, δηλαδή

την $t_f = 10^{-34}$ sec ;όπου $a_f = 10^{-27}$ η αντίστοιχη απόσταση ήταν : $d_p(t_f) = a_f d_p(t_0) \sim 3 \times 10^{-23} Mpc \sim 0,9m$ και πριν την εποχή του πληθωρισμού το Σύμπαν ήταν μια σφαίρα ακτίνας : $d_p(t_i) = e^{-N} d_p(t_f) \sim 10^{-44}m$. Και αφού $d_{hor} \sim 6 \times 10^{-28}sec$, υπήρχε παραπάνω από αρκετός χρόνος προκειμένου δύο σημεία να έρθουν σε αιτιακή σύνδεση και κατ' επέκταση σε θερμική ισορροπία.

Τέλος, η λύση στο πρόβλημα των μονοπόλων, εάν θεωρήσουμε ότι τα μαγνητικά μονόπολα δημιουργούνται πριν ή κατά την διάρκεια του πληθωρισμού, η αριθμητική πυκνότητά τους αραιώνει τόσο πολύ (λόγω εκθετικής διαστολής) που τα κάνει μη ανιχνεύσιμα.

Η απάντηση σε ένα αναμενόμενο ερώτημα, από την πλευρά του αναγνώστη, για το πώς τελειώνει ο πληθωρισμός μπορεί να δοθεί εάν υποθέσουμε ότι τον ρόλο της κοσμολογικής σταθεράς κατά τον πληθωρισμό έπαιξε η δυναμική ενέργεια ενός αργά εξελισσόμενου βαθμωτού πεδίου (**inflaton**). Η πυκνότητα Lagrange για ένα βαθμωτό πεδίο ϕ σε καμπύλο χωρόχρονο έχει μορφή:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \quad (3.128)$$

Οι δυναμικές εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler - Lagrange είναι:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (3.129)$$

και είναι ανάλογες με την εξίσωση κίνησης σωματίου που κυλά προς τα κάτω στο δυναμικό του και υπόκειται σε κοσμική τριβή ανάλογη του ρυθμού διαστολής του σύμπαντος H . Το βαθμωτό αυτό πεδίο συμπεριφέρεται σαν ιδανικό ρευστό με πυκνότητα και πίεση:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (3.130)$$

Η εξίσωση Friedmann όταν κυριαρχεί ένα τέτοιο βαθμωτό πεδίο έχει τη μορφή:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (3.131)$$

Στο όριο όπου το βαθμωτό πεδίο εξελίσσεται αργά ($\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$) και κυριαρχεί η δυναμική ενέργεια επί του κινητικού όρου του πεδίου, η εξίσωση κατάστασης του ρευστού προσομοιάζει αυτή της κοσμολογικής σταθεράς $p \approx -\rho$, που οδηγεί σε επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος. Η προσέγγιση αργής εξέλιξης του βαθμωτού πεδίου που συμβαίνει κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού αντιστοιχεί στην υπόθεση ότι η δεύτερη χρονική παράγωγος του πεδίου $\ddot{\phi}$ στην εξίσωση κίνησης του ϕ μπορεί να αγνοηθεί, όπως και ο κινητικός όρος $\frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ στην πυκνότητα και την πίεση του πεδίου. Στο πλαίσιο αυτής της προσέγγισης, ορίζουμε τις **παράμετρους αργής**

κύλισης(Slow-Roll parameters) ϵ και η , ως :

$$\epsilon \equiv \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad \eta \equiv M_P^2 \frac{V''}{V} \quad (3.132)$$

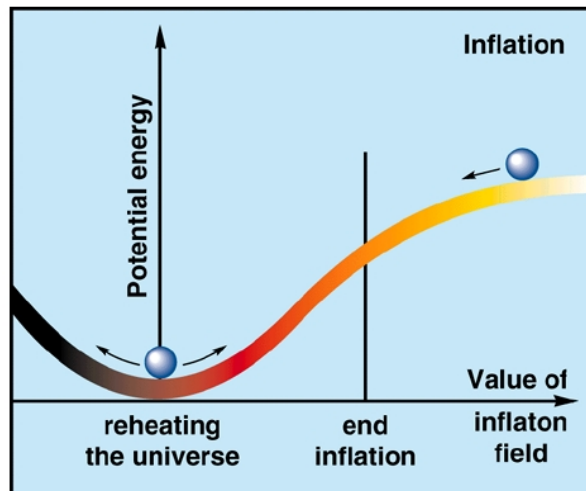
και κάνοντας την παραδοχή ότι αυτές είναι πολύ μικρές, ήτοι $\epsilon \ll 1$ και $|\eta| \ll 1$, η δυναμική εξίσωση εξέλιξης του πεδίου και η εξίσωση Friedmann παίρνουν τη μορφή:

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi), \quad H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (3.133)$$

Οι παραπάνω συνθήκες αργής εξέλιξης οδηγούν σε πληθωρισμό (επιταχυνόμενη διαστολή $\ddot{a} > 0$). Πραγματικά, έχουμε $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$ και επομένως για να έχουμε πληθωρισμό θα πρέπει $\frac{\dot{H}}{H^2} > -1$. Στο πλαίσιο των συνθηκών αργής εξέλιξης έχουμε μικρή τιμή για την έκφραση $\frac{\dot{H}}{H^2}$ που διασφαλίζει την ύπαρξη επιταχυνόμενης διαστολής και επομένως πληθωρισμού. Η μικρή τιμή της άλλης παραμέτρου, η , διασφαλίζει ότι ο πληθωρισμός θα διαρκέσει αρκετά ώστε να επιλυθούν τα προβλήματα επιπεδότητας και ορίζοντα ($N \gg 1$). Ο αριθμός N μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του δυναμικού ως:

$$N \equiv \ln \left(\frac{a(t_{end})}{a(t)} \right) = \int_t^{t_{end}} H dt \approx \frac{1}{M_P^2} \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{V}{V'} d\phi \quad (3.134)$$

Το πεδίο inflaton μπορεί να παρασταθεί με μια μπίλια που κατέρχεται σε μια πλαγιά. Κατά τη φάση του πληθωρισμού η ενεργειακή πυκνότητα είναι σχεδόν σταθερή και οδηγεί τη ραγδαία διαστολή. Όταν η μπίλια αρχίσει τις ταλαντώσεις περί του ελαχίστου του δυναμικού (κινητικός και δυναμικός όρος της ενέργειας συγκρίσιμοι), ο πληθωρισμός σταματά.



Σχήμα 3.6: (Johan Jarnestad / The Royal Swedish Academy of Sciences)

3.11 Παρατηρησιακές Ασυνέπειες

Αν και το πρότυπο κοσμολογικό μοντέλο Λ CDM περιγράφει με επιτυχία ένα ευρύ φάσμα κοσμολογικών δεδομένων, η βελτίωση της ακρίβειας των παρατηρήσεων έχει αναδείξει σημαντικές ασυνέπειες και εντάσεις μεταξύ διαφορετικών μετρήσεων. Οι κυριότερες ασυνέπειες είναι οι εξής:

3.11.1 Η Ένταση της Σταθεράς του Hubble (H_0 - Tension)

Αυτή αποτελεί τη σημαντικότερη και πιο επίμονη διαφωνία, η οποία κυμαίνεται μεταξύ 4σ και 6σ.

- **Πρώιμο Σύμπαν:** Οι μετρήσεις από την αποστολή Planck, οι οποίες βασίζονται στη φυσική του πρώιμου Σύμπαντος και υποθέτουν το μοντέλο Λ CDM, δίνουν μια τιμή για τη σταθερά του Hubble $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.^[13]

- **Όψιμο Σύμπαν:** Οι άμεσες, τοπικές μετρήσεις (distance ladder) που χρησιμοποιούν Κηφίδες και Υπερκαινοφανείς τύπου Ia (SNe Ia), όπως αυτές της ομάδας SH0ES, δίνουν συστηματικά υψηλότερες τιμές, $H_0 = 73,04 \pm 1,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.^[14] Η διαφορά αυτή φτάνει τα 5σ (πιθανότητα 1 στα 3,5 εκατομμύρια να είναι τυχαία), υποδεικνύοντας πιθανή αποτυχία του μοντέλου Λ CDM να συνδέσει το πρώιμο με το όψιμο Σύμπαν.

Μαθηματικά, η στατιστική σημαντικότητα της διαφωνίας (tension) μεταξύ δύο ανεξάρτητων παρατηρησιακών μετρήσεων υπολογίζεται με βάση τη θεωρία σφαλμάτων. Αν υποθέσουμε ότι διαθέτουμε δύο ανεξάρτητες πειραματικές εκτιμήσεις ενός κοσμολογικού μεγέθους, έστω $x_1 \pm \sigma_1$ και $x_2 \pm \sigma_2$, όπου σ_1 και σ_2 είναι οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις (standard deviations) της κάθε μέτρησης.

Εφόσον οι δύο μετρήσεις προέρχονται από εντελώς διαφορετικά και ανεξάρτητα παρατηρησιακά δεδομένα (π.χ. Κοσμική Μικροκυματική Ακτινοβολία Υποβάθρου έναντι Τοπικών Υπερκαινοφανών), το συνολικό σφάλμα της διαφοράς τους δίνεται από τη ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των επιμέρους σφαλμάτων:

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (3.135)$$

Το επίπεδο της ασυνέπειας T , εκφρασμένο σε μονάδες σ , ορίζεται απλώς ως ο λόγος της απόλυτης διαφοράς των κεντρικών τιμών προς το συνδυασμένο στατιστικό σφάλμα:

$$T = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \quad (3.136)$$

Για να γίνει κατανοητό το μέγεθος του προβλήματος, μπορούμε να εφαρμόσουμε την παραπάνω

σχέση στο διάσημο πρόβλημα της σταθεράς του Hubble (H_0). Αν θεωρήσουμε την εκτίμηση από την αποστολή Planck ($H_0 = 67.4 \pm 0.5$ km/s/Mpc) και τη μέτρηση από την ομάδα SH0ES στο τοπικό Σύμπαν ($H_0 = 73.0 \pm 1.0$ km/s/Mpc), ο υπολογισμός μας δίνει μια ασυνέπεια:

$$T = \frac{|67.4 - 73.0|}{\sqrt{0.5^2 + 1.0^2}} = \frac{5.6}{\sqrt{0.25 + 1.0}} \approx 5.0\sigma \quad (3.137)$$

Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει ότι η διαφωνία δεν αποτελεί στατιστικό θόρυβο, αλλά ένα ισχυρότατο σήμα (επιπέδου 5σ) που χρήζει φυσικής ερμηνείας.

3.11.2 Η Ένταση του S_8 - Ανάπτυξη Δομών

Υπάρχει μια μέτρια ένταση (περίπου $2,5\sigma$) μεταξύ των αποτελεσμάτων του Planck και των ερευνών ασθενούς βαρυτικού φακού (weak lensing) και σμηγών γαλαξιών. Οι έρευνες ασθενούς φακού (όπως CFHTLenS, KiDS, DES) προτιμούν χαμηλότερες τιμές για το πλάτος των διακυμάνσεων της πυκνότητας (S_8) ή της παραμέτρου πυκνότητας της ύλης (Ω_m) σε σχέση με αυτές που προβλέπει το Planck στο πλαίσιο του Λ CDM.

3.11.3 Εσωτερικές Ανωμαλίες στα Δεδομένα του Planck

Ακόμη και εντός των δεδομένων του Planck, υπάρχουν ενδείξεις ασυνέπειας με το βασικό μοντέλο:

- **Ανωμαλία A_{lens}** : Τα φάσματα ισχύος της κοσμικής ακτινοβολίας υποβάθρου (CMB) δείχνουν μια προτίμηση για υψηλότερο πλάτος βαρυτικού φακού ($A_L > 1$) από αυτό που προβλέπει το Λ CDM (όπου $A_L = 1$), με στατιστική σημαντικότητα περίπου $2,8\sigma$.
- **Καμπυλότητα**: Λόγω της ανωμαλίας του φακού, τα δεδομένα του Planck από μόνα τους (χωρίς συνδυασμό με BAO) προτιμούν ένα κλειστό Σύμπαν ($\Omega_K < 0$) με σημαντικότητα άνω του $3,4\sigma$, κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την πρόβλεψη του επίπεδου Σύμπαντος του πληθωρισμού.

3.11.4 Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς

Παρότι η σύνδεση της Κοσμολογικής Σταθεράς Λ με το κβαντικό κενό είναι μαθηματικά κομψή, οδηγεί στη μεγαλύτερη και πιο δυσεπίλυτη παρατηρησιακή ασυνέπεια (tension) στην ιστορία της θεωρητικής φυσικής, γνωστή ως **Το Πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς** (The Cosmological Constant Problem).

Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου, η πυκνότητα ενέργειας του κενού υπολογίζεται αθροίζοντας τις ενέργειες μηδενικού σημείου (zero-point energies) $\frac{1}{2}\hbar\omega$ όλων των κβαντικών ταλαντωτών

ενός πεδίου. Επειδή το άθροισμα αυτό απειρίζεται, εισάγεται ένα όριο αποκοπής (cutoff scale), συνήθως στην κλίμακα Planck ($M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV). Ο θεωρητικός υπολογισμός δίνει μια τιμή πυκνότητας της τάξης του:

$$\rho_{vac}^{(theor)} \sim \frac{M_{Pl}^4}{16\pi^2} \sim 10^{74} \text{ GeV}^4 \quad (3.138)$$

Ωστόσο, οι κοσμολογικές παρατηρήσεις (όπως η μελέτη των Supernovae Ia και η Ακτινοβολία Υποβάθρου CMB) προσδιορίζουν την πραγματική, παρατηρούμενη τιμή της πυκνότητας της Σκοτεινής Ενέργειας στο σημερινό Σύμπαν περίπου στα:

$$\rho_{\Lambda}^{(obs)} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4 \quad (3.139)$$

Ο λόγος μεταξύ της θεωρητικής πρόβλεψης και της παρατηρούμενης τιμής είναι:

$$\frac{\rho_{vac}^{(theor)}}{\rho_{\Lambda}^{(obs)}} \sim 10^{121} \quad (3.140)$$

Αυτή η κολοσσιαία απόκλιση των $\sim 120!$ τάξεων μεγέθους καθιστά την πρόβλεψη της πυκνότητας του κενού τη "χειρότερη" θεωρητική τιμή.

Το Πρόβλημα της Σύμπτωσης: Υπάρχει το ερώτημα γιατί η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας είναι συγκρίσιμη με την πυκνότητα της ύλης στη σημερινή εποχή, δεδομένου ότι εξελίσσονται διαφορετικά στον χρόνο.

Αυτές οι ασυνέπειες υποδηλώνουν είτε την ύπαρξη συστηματικών σφαλμάτων στις μετρήσεις είτε την ανάγκη για νέα φυσική πέρα από το καθιερωμένο μοντέλο Λ CDM. Στα επόμενα δύο κεφάλαια γίνεται παρουσίαση των δύο σημαντικότερων προτάσεων για την επίλυση αυτών των ασυνεπειών. Αφ' ενός μέσω της Δυναμικής Σκοτεινής Ενέργειας και αφ' ετέρου μέσω των Γενικευμένων Θεωριών Βαρύτητας.

Κεφάλαιο 4

Δυναμική Σκοτεινή Ενέργεια

4.1 Μοντέλα Δυναμικής Σκοτεινής Ενέργειας

Οι ασυνέπειες που προκύπτουν από Λ CDM οδηγούν στην ανάγκη εισαγωγής μοντέλων Δυναμικής Σκοτεινής Ενέργειας, τα οποία περιγράφουν την επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος μέσω πεδίων ή ρευστών που εξελίσσονται στον χρόνο.

4.1.1 Το Επίπεδο w CDM Μοντέλο

Ένας απλός τρόπος να μοντελοποιήσουμε τη σκοτεινή ενέργεια είναι μέσω ενός ομογενούς ρευστού με καταστατική εξίσωση:

$$w_0 = \frac{p_0}{\rho_0} < -\frac{1}{3} \quad (4.1)$$

την οποία θεωρούμε ως μια αυθαίρετη σταθερά. Όταν $w_0 = -1$, το μοντέλο ανάγεται στο Λ CDM. Σε ένα επίπεδο Σύμπαν με παρουσία ύλης και αυτού του ρευστού, η εξίσωση Friedmann εκφρασμένη μέσω των αδιάστατων παραμέτρων πυκνότητας παίρνει τη μορφή:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_{w_0} (1+z)^{3(1+w_0)}] \quad (4.2)$$

με τη συνθήκη $\Omega_m + \Omega_{w_0} = 1$.

4.1.2 Βαθμωτά Πεδία: Πεμπτουσία (Quintessence)

Στην Πεμπτουσία χρησιμοποιούμε ένα κανονικό βαθμωτό πεδίο ϕ , το οποίο αλληλεπιδρά με τον εαυτό του και συζεύγνυται ελάχιστα με τη βαρύτητα. Το βαθμωτό αυτό πεδίο περιγράφεται

από την πυκνότητα Lagrange:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (4.3)$$

όπου $V(\phi)$ είναι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας του πεδίου.

Ο ταυσιτής ενέργειας-ορμής μπορεί να προκύψει από τη σχέση:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.4)$$

η οποία αναλύεται ως εξής:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \mathcal{L} + \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \quad (4.5)$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να υπολογίσουμε τους επιμέρους όρους. Αρχικά:

$$\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{g g^{\alpha\beta} \partial g_{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

και έπειτα:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right] = \frac{1}{2} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \quad (4.7)$$

Επομένως, ο ταυσιτής ενέργειας-ορμής παίρνει τη μορφή:

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (4.8)$$

το οποίο ανάγεται στην παρακάτω σχέση:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.9)$$

ή, αντικαθιστώντας την πυκνότητα Lagrange \mathcal{L} :

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right) \quad (4.10)$$

Υποθέτοντας ότι το βαθμωτό πεδίο είναι σχεδόν χωρικά ομογενές σε κοσμολογικές κλίμακες, μπορούμε να αγνοήσουμε τις χωρικές παραγώγους του $\partial_i \phi$ σε σχέση με τις χρονικές παραγώγους του $\dot{\phi}$. Έτσι:

$$T_{0i} = T_{i0} = 0 \quad (4.11)$$

$$T_{ij} = 0 \quad , i \neq j \quad (4.12)$$

γεγονός που σημαίνει ότι ο ταυσιτής $T_{\mu\nu}$ είναι διαγώνιος. Μπορούμε πλέον να εξάγουμε την ενεργειακή πυκνότητα και την πίεση του πεδίου:

$$\rho_\phi = T_0^0 = g^{0\mu}T_{\mu 0} = g^{00}T_{00} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (4.13)$$

$$p_\phi = T_i^i = g^{i\mu}T_{\mu i} = g^{ii}T_{ii} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (4.14)$$

Επομένως, η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης του πεδίου είναι:

$$w(\phi) = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \quad (4.15)$$

Γενικά, για $\dot{\phi}^2 \gg V(\phi)$, δηλαδή για ένα πεδίο στο οποίο κυριαρχεί η κινητική ενέργεια:

$$w(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \approx \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2} = 1 \quad (4.16)$$

Ενώ για $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, δηλαδή για ένα πεδίο στο οποίο κυριαρχεί η δυναμική ενέργεια:

$$w(\phi) = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \approx \frac{-2V(\phi)}{2V(\phi)} = -1 \quad (4.17)$$

Η συνθήκη για να "παίξει" η Πεμπτουσία το ρόλο της Σκοτεινής Ενέργειας (ώστε $w < -1/3$), θα πρέπει η κινητική του ενέργεια να είναι μικρότερη από τη δυναμική. Για να διατηρηθεί αυτή η συνθήκη για αρκετό χρονικό διάστημα (ώστε $w \approx -1$), πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες αργής εξέλιξης (slow-roll conditions):

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad \text{και} \quad |\ddot{\phi}| \ll |V'(\phi)| \quad (4.18)$$

Η χρονική εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου καθορίζεται από την εξίσωση Klein-Gordon (η απόδειξη βρίσκεται στο Παράτημα Π2):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \quad (4.19)$$

4.1.3 Η Παραμετροποίηση Chevallier-Polarski-Linder (CPL) ^{[21],[36],[40]}

Μια ευρέως χρησιμοποιούμενη προσέγγιση, που προτάθηκε από τους Chevallier-Polarski και Linder, η οποία επιτρέπει τη χρονική μεταβολή της καταστατικής εξίσωσης είναι η εξής:

$$w(a) = w_0 + w_a(1 - a) \quad (4.20)$$

η οποία μπορεί να εξαχθεί ως το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της $w(a)$ γύρω από το $a = 1$, κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους:

$$w(a) = w(a=1) + (a-1)w'(a=1) + \frac{1}{2}(a-1)^2w''(a=1) + \mathcal{O}[(a-1)^3] \quad (4.21)$$

όπου ο τόνος υποδηλώνει την παράγωγο ως προς τον παράγοντα κλίμακας a . Συναρτήσει της ερυθρής μετατόπισης z , η καταστατική εξίσωση $w(z)$ παίρνει τη μορφή:

$$w(z) = w_0 + w_a \left(1 - \frac{1}{1+z}\right) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z} \quad (4.22)$$

Η σημερινή της τιμή $w(a_0)$ (γνωρίζοντας ότι $a_0 = 1$) είναι:

$$w(a_0) = w_0 + w_a(1 - a_0) = w_0 \quad (4.23)$$

και η τιμή της κλίσης της είναι:

$$w'(a) = \frac{dw(a)}{da} = -w_a \quad (4.24)$$

4.1.4 Ανακατασκευή του Βαθμοτού Πεδίου από την Παρατηρούμενη Σκοτεινή Ενέργεια

Στα πρότυπα της Δυναμικής Σκοτεινής Ενέργειας (όπως η Πεμπτουσία), θεωρούμε ένα βαθμοτό πεδίο ϕ με κινητική ενέργεια $\dot{\phi}^2/2$ και δυναμική ενέργεια $V(\phi)$. Η συνολική πυκνότητα ενέργειας και η πίεση του πεδίου δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις $\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ και $p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$.

Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις, το δυναμικό $V(\phi)$ απαλείφεται και απομονώνουμε τον κινητικό όρο του πεδίου:

$$\dot{\phi}^2 = \rho_\phi + p_\phi \quad (4.25)$$

Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση $p_\phi = w(z)\rho_\phi$ και ταυτίζοντας την πυκνότητα του πεδίου με τη συνολική πυκνότητα της Σκοτεινής Ενέργειας ($\rho_\phi \equiv \rho_{DE}$), η (4.25) παίρνει τη

μορφή:

$$\dot{\phi}^2(z) = [1 + w(z)] \rho_{DE}(z) \quad (4.26)$$

Ο στόχος μας είναι να εκφράσουμε το πεδίο ϕ ως συνάρτηση της ερυθρομετάθεσης z αντί του χρόνου t . Για να γίνει αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας (chain rule) στην παράγωγο του πεδίου:

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{dt} \quad (4.27)$$

Για να υπολογίσουμε τον όρο dz/dt , ξεκινάμε από τη θεμελιώδη σχέση που συνδέει τον παράγοντα κλίμακας a με την ερυθρομετάθεση z (θεωρώντας $a_0 = 1$ σήμερα):

$$a = (1 + z)^{-1} \implies da = -(1 + z)^{-2} dz \quad (4.28)$$

Η παράμετρος Hubble ορίζεται ως $H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$. Λύνοντας ως προς το διαφορικό του χρόνου dt και αντικαθιστώντας το da , προκύπτει:

$$dt = \frac{da}{aH} = \frac{-(1 + z)^{-2} dz}{(1 + z)^{-1} H} = -\frac{dz}{(1 + z)H} \quad (4.29)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της ερυθρομετάθεσης με τον χρόνο είναι:

$$\frac{dz}{dt} = -(1 + z)H(z) \quad (4.30)$$

Αντικαθιστώντας την (4.30) πίσω στην (4.27), η χρονική παράγωγος του πεδίου εκφράζεται αποκλειστικά μέσω του z :

$$\dot{\phi} = -(1 + z)H(z) \frac{d\phi}{dz} \quad (4.31)$$

Παίρνοντας τώρα την τετραγωνική ρίζα της (4.26) (και βάζοντας απόλυτη τιμή στο $1 + w$ για να παραμείνει η ρίζα πραγματική ακόμα και σε «εξωτικά» μοντέλα phantom ενέργειας όπου $w < -1$), εξισώνουμε με την (4.31):

$$-(1 + z)H(z) \frac{d\phi}{dz} = \pm \sqrt{|1 + w(z)| \rho_{DE}(z)} \quad (4.32)$$

Λύνοντας ως προς το διαφορικό του πεδίου $d\phi$, έχουμε:

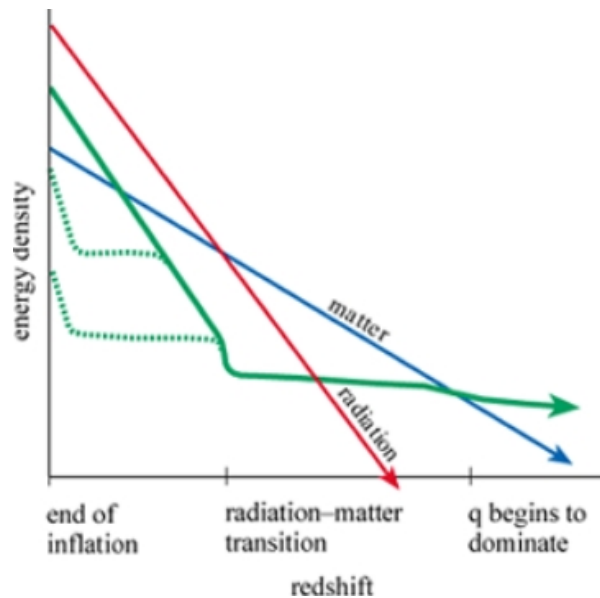
$$d\phi = \mp \frac{\sqrt{|1 + w(z)| \rho_{DE}(z)}}{(1 + z)H(z)} dz \quad (4.33)$$

Επιλέγοντας συμβατικά το θετικό πρόσημο για την εξέλιξη του πεδίου και ολοκληρώνοντας από τη σημερινή εποχή ($z = 0$, όπου θέτουμε ως σημείο αναφοράς $\phi(0) = 0$) έως μια τυχαία

ερυθρομετάθεση z , καταλήγουμε στην τελική σχέση ανακατασκευής:

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{\sqrt{|1 + w(z')|\rho_{DE}(z')}}{(1+z')H(z')} dz' \quad (4.29)$$

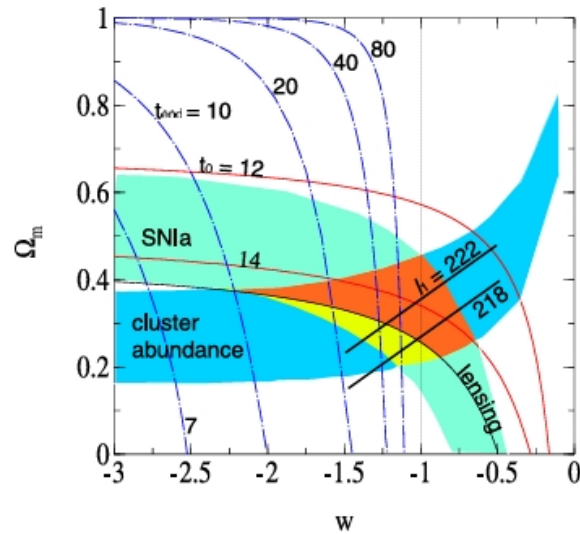
Σε αντίθεση με την Κοσμολογική Σταθερά Λ , η οποία μένει παγωμένη και ξαφνικά "εμφανίζεται" από το πουθενά στο σημερινό Σύμπαν, τα μοντέλα Πεμπτουσίας (συγκεκριμένα τα λεγόμενα tracker fields) δείχνουν την πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας ρ_ϕ να "ακολουθεί" (track) δυναμικά την πυκνότητα της ακτινοβολίας και της ύλης στο παρελθόν, και τελικά να κυριαρχεί ομαλά στις μέρες μας.



Σχήμα 4.1: Η ενεργειακή πυκνότητα της ύλης (μπλε), της ακτινοβολίας (κόκκινη) και των πεδίων ιχνηλατών (πράσινη) μεταβάλλονται όλες με τον χρόνο ή, ισοδύναμα, με την ερυθρομετάθεση (redshift). Αν η ενέργεια παρασταθεί σε λογαριθμικό άξονα, η ενεργειακή πυκνότητα της ακτινοβολίας πέφτει ως μια ευθεία γραμμή καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται. Η ενεργειακή πυκνότητα της ύλης πέφτει επίσης, αλλά με πιο αργό ρυθμό. Στο πρώιμο Σύμπαν, η ενεργειακή πυκνότητα ενός πεδίου πεμπτουσίας τύπου ιχνηλάτη μπορεί να ξεκινήσει από ένα ευρύ φάσμα αρχικών συνθηκών, οι οποίες συγκλίνουν όλες σε μια κοινή πορεία προτού η πυκνότητα της ύλης ξεπεράσει την πυκνότητα της ακτινοβολίας κατά την έναρξη της εποχής της ύλης. (Caldwell, R. R., Steinhardt, P. J. (2000). "Quintessence." Physics World, 13(11), 31-37.)

4.1.5 Σκοτεινή Ενέργεια Φάντασμα (Phantom Dark Energy)

Όπως παρατηρήθηκε από την ανάλυση των δεδομένων, συχνά οι παρατηρήσεις ευνοούν μια παράμετρο καταστατικής εξίσωσης $w < -1$. Η περιοχή αυτή ονομάζεται περιοχή «φάντασμα» (phantom regime) και τα μοντέλα που την περιγράφουν αναφέρονται ως Σκοτεινή Ενέργεια Φάντασμα (Σχ.4.1).

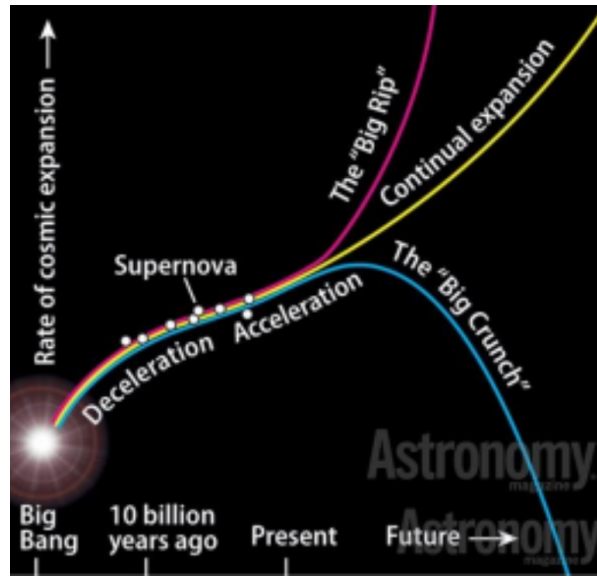


Σχήμα 4.2: (Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., Weinberg, N. N. (2003). "Phantom energy and cosmic doomsday." Physical Review Letters, 91(7), 071301.)

Μια βασική ιδιότητα αυτών των θεωριών φαίνεται από την εξέλιξη της ενεργειακής πυκνότητας. Έχοντας καταστατική εξίσωση $p = w\rho$ με $w < -1$, γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα θα δίνεται από τη σχέση:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (4.34)$$

Εφόσον $w < -1$, η ποσότητα $1 + w$ είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι ο εκθέτης του παράγοντα κλίμακας a είναι θετικός. Επομένως, σε αντίθεση με την κοινή ύλη, την ακτινοβολία ή την κοσμολογική σταθερά, η ενεργειακή πυκνότητα της Σκοτεινής Ενέργειας Φάντασμα **αυξάνεται** καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται. Αυτή η ραγδαία αύξηση της πυκνότητας και του ρυθμού διαστολής οδηγεί θεωρητικά σε έναν απειρισμό του παράγοντα κλίμακας σε πεπερασμένο χρόνο στο μέλλον, ένα σενάριο γνωστό ως **Μεγάλη Πήξη (Big Rip)**, κατά το οποίο ακόμα και δέσμια συστήματα (μεταξύ αυτών και τα άτομα) κυριολεκτικά διαλύονται λόγω του αδυσώπητου "τεντώματος" του χωροχρόνου. Στο σχήμα (4.2) απεικονίζονται οι διαφορετικές ιστορίες αναφορικά με την εξέλιξη του Σύμπαντος.



Σχήμα 4.3: ('What is the Fate of the Universe?' By David J. Eicher. Published: Monday, July 1, 2019. <https://astronomy.com/magazine/greatest-mysteries/2019/07/9-what-is-the-fate-of-the-universe>.)

Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο βαθμοτού πεδίου που να προσομοιώνει αυτή τη συμπεριφορά, το πεδίο πρέπει να έχει αρνητικό κινητικό όρο. Η πυκνότητα Lagrange για ένα πεδίο φάντασμα ϕ δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L}_{phantom} = -\frac{1}{2}\partial\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (4.35)$$

Υποθέτοντας ξανά ένα χωρικά ομογενές πεδίο, η ενεργειακή πυκνότητα και η πίεση γίνονται:

$$\rho_\phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad p_\phi = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (4.36)$$

Η παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης παίρνει τη μορφή:

$$w(\phi) = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{-\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{-\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \quad (4.37)$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια παραμένει μικρότερη από τη δυναμική $\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} < V(\phi)\right)$, η ενεργειακή πυκνότητα παραμένει θετική $\rho_\phi > 0$. Εξαιτίας όμως του αρνητικού πρόσημου στον κινητικό όρο, ο αριθμητής (πίεση) είναι μεγαλύτερος κατά απόλυτη τιμή από τον παρονομαστή, με αποτέλεσμα να ισχύει αυστηρά:

$$w(\phi) < -1 \quad (4.38)$$

Το κύριο θεωρητικό πρόβλημα με τα πεδία φάντασμα είναι ότι παραβιάζουν τη Μηδενική Ενεργειακή Συνθήκη (Null Energy Condition - NEC), σύμφωνα με την οποία $\rho + p \geq 0$. Πράγματι, στο μοντέλο μας ισχύει:

$$\rho_\phi + p_\phi = -\dot{\phi}^2 < 0 \quad (4.39)$$

Η παρουσία βαθμωτών πεδίων με αρνητικό πρόσημο στον κινητικό όρο (γνωστά και ως ghost fields) συνεπάγεται αρνητική κινητική ενέργεια, γεγονός που στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας πεδίου οδηγεί σε σοβαρές κβαντικές αστάθειες (instabilities) και απειρισμούς, καθιστώντας τα μοντέλα αυτά προβληματικά από θεωρητική σκοπιά, παρά την καλή προσαρμογή τους στα παρατηρησιακά δεδομένα.

4.1.6 Μοντέλα Τρέχοντος Κενού (Running Vacuum Models - RVM)

Μια εναλλακτική και θεωρητικά θεμελιωμένη προσέγγιση στη Δυναμική Σκοτεινή Ενέργεια προσφέρεται από τα μοντέλα του Τρέχοντος Κενού (Running Vacuum Models). Σε αντίθεση με το καθιερωμένο πρότυπο Λ CDM, όπου η κοσμολογική σταθερά Λ θεωρείται μια απόλυτη σταθερά, στα μοντέλα RVM η ενεργειακή πυκνότητα του κενού αντιμετωπίζεται στο πλαίσιο της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου (QFT) σε καμπύλο χωρόχρονο. Σύμφωνα με τις τεχνικές της Ομάδας Επανακανονικοποίησης (Renormalization Group - RG), η παράμετρος Λ (και κατ' επέκταση η ενεργειακή πυκνότητα ρ_Λ) "τρέχει", δηλαδή μεταβάλλεται δυναμικά σε συνάρτηση με την ενεργειακή κλίμακα του Σύμπαντος, η οποία συνήθως ταυτίζεται με την παράμετρο Hubble $H(t)$. Η ενεργειακή πυκνότητα του κενού μπορεί να αναπτυχθεί σε άρτιες δυνάμεις της παραμέτρου Hubble ως εξής:

$$\rho_\Lambda(H) = \frac{3}{8\pi G} \left(c_0 + \nu H^2 + \alpha \dot{H} + \mathcal{O}(H^4) \right) \quad (4.40)$$

Για τη μελέτη του ύστερου Σύμπαντος (όπου ο όρος \dot{H} και οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(H^4)$ μπορούν να αγνοηθούν ως αμελητέοι), η ενεργειακή πυκνότητα του κενού προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$\rho_\Lambda(H) = \rho_{0,\Lambda} + \frac{3\nu}{8\pi G} (H^2 - H_0^2) \quad (4.41)$$

όπου $\rho_{0,\Lambda}$ είναι η σημερινή τιμή της πυκνότητας του κενού, H_0 είναι η σημερινή σταθερά Hubble, και ν είναι μια αδιάστατη παράμετρος (γνωστή ως παράμετρος τρεξίματος - running parameter). Θεωρητικοί υπολογισμοί υποδεικνύουν ότι η ν παίρνει πολύ μικρές τιμές ($|\nu| \ll 1$). Όταν $\nu = 0$, το μοντέλο ανάγεται στο Λ CDM. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι στα μοντέλα RVM η καταστατική εξίσωση του κενού παραμένει αυστηρά ίση με την παραδοσιακή τιμή της κοσμολογικής σταθεράς:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda \implies w_\Lambda = -1 \quad (4.42)$$

Ωστόσο, επειδή η πυκνότητα ρ_Λ μεταβάλλεται με τον χρόνο, η ικανοποίηση της ταυτότητας Bianchi για τη συνολική διατήρηση της ενέργειας (εξίσωση συνέχειας) του Σύμπαντος συνεπάγεται μια αλληλεπίδραση μεταξύ της ύλης και του κενού. Υποθέτοντας ότι η σταθερά παγκόσμια έλξης G παραμένει σταθερή, η εξίσωση συνέχειας για τη μη-σχετικιστική ύλη και το κενό γράφεται:

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\dot{\rho}_\Lambda \quad (4.43)$$

Αυτή η σχέση υποδηλώνει ότι υπάρχει μια ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ της σκοτεινής ύλης και της σκοτεινής ενέργειας. Αν $\nu > 0$, η ενεργειακή πυκνότητα του κενού ελαττώνεται καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, «διασπώμενη» ομαλά σε σκοτεινή ύλη. Η δυναμική αυτή συμπεριφορά έχει αποδειχθεί σε πολυάριθμες μελέτες ότι οδηγεί σε μια ελαφρώς διαφορετική ιστορία διαστολής, η οποία είναι ικανή να προσφέρει λύσεις στην ασυμφωνία της σταθεράς Hubble (H_0 tension) καθώς και στην ένταση που παρατηρείται στον ρυθμό ανάπτυξης των κοσμολογικών δομών (S_8 tension).

Κεφάλαιο 5

Γενικευμένες Θεωρίες Βαρύτητας $f(R)$

5.1 Η Ιδέα

Οι θεωρίες $f(R)$ αποτελούν μια από τις απλούστερες και πιο δημοφιλείς επεκτάσεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ), οι οποίες τροποποιούν τη βαρύτητα γενικεύοντας τη δράση Einstein-Hilbert. Στη συνήθη ΓΘΣ, η βαρυτική δράση βασίζεται στο βαθμωτό Ricci, R , και έχει τη μορφή γραμμικής συνάρτησης. Οι θεωρίες $f(R)$ γενικεύουν αυτήν την προσέγγιση αντικαθιστώντας το R με μια αυθαίρετη συνάρτηση $f(R)$ στη λαγκρανζιανή πυκνότητα της δράσης:

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m \quad (5.1)$$

όπου S_m είναι η δράση της ύλης. Αυτή η τροποποίηση επιτρέπει την εισαγωγή όρων ανώτερης τάξης ή άλλων συναρτήσεων του R (π.χ. R^2 , $1/R$) που μπορούν να επηρεάσουν τη δυναμική του σύμπαντος. Η τροποποίηση της βαρύτητας στις θεωρίες $f(R)$ εξαρτάται από τον φορμαλισμό που χρησιμοποιείται για την παραγωγή των εξισώσεων πεδίου:

5.1.1 Θεωρία Brans-Dicke ^{[19],[31]}

Σε αντίθεση με τη Γενική Σχετικότητα, όπου η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G αντιμετωπίζεται ως μια απόλυτη και αμετάβλητη σταθερά της φύσης, στη θεωρία Brans-Dicke προάγεται σε ένα δυναμικό βαθμωτό πεδίο συμβολίζεται συνήθως με ϕ . Αυτό σημαίνει ότι εξαρτάται από τις χωροχρονικές συντεταγμένες και η ενεργός τιμή του G μπορεί να μεταβάλλεται με τον κοσμικό χρόνο. Ουσιαστικά, το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι αυτό που καθορίζει την ισχύ της σύζευξης (coupling strength) της ύλης με τη βαρύτητα.

Η θεωρία βασίζεται στην εξής λογική: Η ύλη στο Σύμπαν (όπως περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής της) και μια νέα αδιάστατη σταθερά σύζευξης, η παράμετρος ω , καθορίζουν τη μορφή και την εξέλιξη του βαθμωτού πεδίου ϕ . Με τη σειρά του, το πεδίο ϕ καθορίζει

την τοπική τιμή της βαρυτικής σταθεράς G . Τέλος, οι βαρυτικές εξισώσεις συσχετίζουν την καμπυλότητα του χωροχρόνου με τον τανυστή ενέργειας-ορμής τόσο της συμβατικής ύλης όσο και του ίδιου του βαθμωτού πεδίου.

Η θεωρία εξαρτάται από την ελεύθερη παράμετρο Ω_{BD} (ή απλά ω). Είναι μαθηματικά αποδεδειγμένο ότι, στο όριο όπου αυτή η παράμετρος τείνει στο άπειρο ($\omega \rightarrow +\infty$), η θεωρία Brans-Dicke ταυτίζεται με τις εξισώσεις και τις προβλέψεις της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Επειδή ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του μοντέλου είναι ότι το ενεργό G μεταβάλλεται με τον χρόνο, μια τέτοια μεταβολή θα επηρέαζε δυναμικά τις τροχιές των πλανητών. Πειραματικά δεδομένα από το Ηλιακό σύστημα θέτουν αυστηρούς περιορισμούς στην παράμετρο ω , απαιτώντας να είναι αρκετά μεγάλη (οι παλαιότερες συντηρητικές εκτιμήσεις έθεταν όριο $\omega \geq 500$), υποδεικνύοντας ότι στις χαμηλές ενέργειες η θεωρία του Einstein περιγράφει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη φύση.

5.1.2 Φορμαλισμός

A. Μετρικός Φορμαλισμός : Η δράση μεταβάλλεται ως προς τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$. Οδηγεί σε εξισώσεις πεδίου τέταρτης τάξης (σε αντίθεση με τη δεύτερη τάξη της $\Gamma\Theta\Sigma$). Εισάγει έναν επιπλέον βαθμωτό βαθμό ελευθερίας (scalar degree of freedom), γνωστό ως **"scalon"**, ο οποίος είναι δυναμικός. Η θεωρία είναι δυναμικά ισοδύναμη με τη θεωρία Brans-Dicke με παράμετρο $\omega_{BD} = 0$. Η σχέση μεταξύ της καμπυλότητας R και της ύλης T δεν είναι πλέον αλγεβρική (όπως $R = -\kappa^2 T$ στη $\Gamma\Theta\Sigma$), αλλά διαφορική:

$$3\Box f'(R) + f'(R)R - 2f(R) = \kappa^2 T \quad (5.2)$$

όπου $\Box = \nabla_\sigma \nabla^\sigma$ είναι ο τελεστής d'Alembert. Αυτό σημαίνει ότι η καμπυλότητα μπορεί να υφίσταται ακόμη και στο κενό ($T = 0$).

Ο Τελεστής του d'Alembert (\Box)

Ο τελεστής του d'Alembert (ή Νταλαμπερτιανή), ο οποίος συμβολίζεται παραδοσιακά με ένα τετράγωνο (\Box), αποτελεί τη γενίκευση του τελεστή Laplace στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Εμφανίζεται θεμελιωδώς στις κυματικές εξισώσεις της σχετικιστικής φυσικής.

Στον Επίπεδο Χωρόχρονο (Ειδική Σχετικότητα):

Στον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski, μετρικής $\eta_{\mu\nu}$ και υπογραφής $(-, +, +, +)$ (όπου $c = 1$), ο τελεστής ορίζεται μέσω των συνήθων μερικών παραγώγων ως το εσωτερικό γινόμενο του

τελεστή της τετραβαθμίδας (∂_μ) με τον εαυτό του:

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (5.3)$$

Είναι προφανές ότι σε στατικές καταστάσεις (όπου οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται), η Νταλαμπερτιανή ανάγεται στην κλασική Λαπλασιανή (∇^2).

Σε Καμπύλο Χωρόχρονο (Γενική Σχετικότητα):

Όταν μεταβαίνουμε στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, ο χωρόχρονος καμπυλώνεται και η μετρική Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ αντικαθίσταται από τον γενικό μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$. Σύμφωνα με την αρχή της γενικής συναλλοιότητας, οι απλές μερικές παράγωγοι (∂_μ) πρέπει να αντικατασταθούν από συναλλοιώτες παραγώγους (∇_μ).

Έτσι, ο συναλλοιώτος τελεστής d'Alembert ορίζεται ως:

$$\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = \nabla^\mu \nabla_\mu \quad (5.4)$$

Μια εξαιρετικά χρήσιμη ταυτότητα του διαφορικού λογισμού σε πολλαπλότητες μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη δράση της Νταλαμπερτιανής πάνω σε ένα τυχαίο βαθμωτό πεδίο ϕ (όπως για παράδειγμα το πεδίο της Σκοτεινής Ενέργειας) χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε ρητά τα σύμβολα Christoffel. Η μορφή αυτή χρησιμοποιεί την ορίζουσα του μετρικού τανυστή, $g = \det(g_{\mu\nu})$, και δίνεται από τη σχέση:

$$\square \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) \quad (5.5)$$

Η Εξίσωση (5.5) είναι η πιο πρακτική μορφή του τελεστή για αναλυτικούς υπολογισμούς σε κοσμολογικά μοντέλα, καθώς εξαρτάται μόνο από τις συνιστώσες της μετρικής και τις παραγώγους τους.

Β. Φορμαλισμός Palatini : Η μετρική $g_{\mu\nu}$ και η (αφινική) συνοχή Γ (σύμβολα Christoffel 2ου είδους) θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές. Οι εξισώσεις πεδίου παραμένουν δεύτερης τάξης, αλλά εμφανίζονται όροι που εξαρτώνται από τις παραγώγους της ύλης. Σε αυτόν τον φορμαλισμό, το βαθμωτό πεδίο δεν είναι δυναμικό και η θεωρία ισοδυναμεί με θεωρία Brans-Dicke με παράμετρο $\omega_{BD} = -3/2$.

Οι θεωρίες $f(R)$ χρησιμοποιούνται κυρίως για να εξηγήσουν κοσμολογικά φαινόμενα χωρίς την ανάγκη σκοτεινής ενέργειας ή σκοτεινής ύλης:

- **Επιταχυνόμενη Διαστολή:** Μοντέλα όπως το $f(R) = R - \frac{\alpha}{R^n}$ μπορούν να παράγουν την όψιμη επιτάχυνση του σύμπαντος.
- **Πληθωρισμός:** Το μοντέλο Starobinsky ($f(R) = R + \alpha R^2$) μπορεί να οδηγήσει σε πληθωρισμό στο πρώιμο σύμπαν.

- **Ενεργός Βαρυτική Σταθερά:** Η βαρυτική σύζευξη γίνεται ενεργός και μεταβλητή ($G_{eff} = \frac{G}{f'(R)}$), αλλάζοντας τη βαρυτική αλληλεπίδραση σε διαφορετικές κλίμακες.

5.2 Από τη Δράση Einstein-Hilbert στις Θεωρίες $f(R)$

Οι εξισώσεις της ΓΘΣ μπορούν να εξαχθούν, βάσει της θεωρίας του Λογισμού Μεταβολών, μέσω της Αρχής της Ελάχιστης Δράσης. Η παραδοσιακή δράση που περιγράφει το βαρυτικό πεδίο στο κενό είναι η γνωστή δράση Einstein-Hilbert, η οποία βασίζεται στο βαθμωτό Ricci R και είναι :

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (5.6)$$

όπου $\kappa^2 = 8\pi G$ (θεωρώντας $c = 1$) και g είναι η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$. Αν συμπεριλάβουμε και την παρουσία της κοινής ύλης, η συνολική δράση του συστήματος γράφεται ως το άθροισμα του βαρυτικού μέρους και του μέρους της ύλης:

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right) \quad (5.7)$$

όπου \mathcal{L}_m είναι η πυκνότητα Lagrange που περιγράφει τα πεδία της ύλης. Μεταβάλλοντας αυτή τη δράση ως προς τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$, προκύπτουν οι γνωστές εξισώσεις πεδίου του Einstein. Ωστόσο, προκειμένου να εξηγηθεί η παρατηρούμενη επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος χωρίς την ανάγκη εισαγωγής κάποιας άγνωστης μορφής Σκοτεινής Ενέργειας, μπορούμε να γενικεύσουμε τον γεωμετρικό όρο της δράσης. Στις γενικευμένες θεωρίες $f(R)$, η γραμμική εξάρτηση από τη βαθμωτή καμπυλότητα R αντικαθίσταται από μια αυθαίρετη, μη γραμμική (αλλά επαρκώς ομαλή) συνάρτηση $f(R)$. Έτσι, η τροποποιημένη δράση του βαρυτικού πεδίου παίρνει τη μορφή:

$$S_{EH}^{mod} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{f(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_m \right) \quad (5.8)$$

Αυτή η φαινομενικά απλή τροποποίηση του αριστερού (γεωμετρικού) μέλους των εξισώσεων, εισάγει νέους δυναμικούς όρους (εξισώσεις τέταρτης τάξης στον μετρικό φορμαλισμό) που μπορούν να μιμηθούν τη συμπεριφορά της σκοτεινής ενέργειας στις μεγάλες κοσμολογικές κλίμακες. Είναι προφανές ότι το καθιερωμένο κοσμολογικό πρότυπο (Λ CDM) μπορεί να ανακτηθεί πολύ εύκολα ως μια ειδική, απλή περίπτωση της παραπάνω γενικευμένης δράσης, επιλέγοντας:

$$f(R) = R - 2\Lambda \quad (5.9)$$

5.2.1 $f(R)$ τροποποίηση του ολοκληρώματος δράσης Einstein-Hilbert

Γενικεύουμε κατάλληλα το ολοκλήρωμα δράσης Einstein-Hilbert στη βάση της $f(R)$ τροποποίησης και να απαιτήσουμε τη στασιμοποίησή του έτσι, ώστε να εξαχθούν οι γενικευμένες εξισώσεις Einstein. Ξεκινάμε από την κατάλληλη γενικευμένη έκφραση για το ολοκλήρωμα δράσης:

$$S_{EH}^{mod} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (5.10)$$

όπου $\kappa = 8\pi G$ (για $c = 1$) και ο επιπλέον όρος S_m εμπεριέχει τη δράση της ύλης για όλα τα παρόντα πεδία στην περιοχή περιγραφής. Μεταβάλλουμε τη δράση, αγνοώντας προσωρινά τη δράση της ύλης και τον σταθερό συντελεστή για λόγους απλότητας :

$$\delta S_{EH}^{mod} = \int d^4x \delta(\sqrt{-g} f(R)) = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \delta f(R) \quad (5.11)$$

Για τον πρώτο όρο :

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (5.12)$$

Για τον δεύτερο όρο ορίζουμε $F(R) = \frac{\partial f}{\partial R}$ οπότε:

$$\delta f(R) = F(R) \delta R \quad (5.13)$$

και επειδή :

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (5.14)$$

ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφεί ως άθροισμα των:

$$\delta S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} F(R) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (5.15)$$

και

$$\delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} F(R) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (5.16)$$

Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στην **ταυτότητα Palatini** για τη μεταβολή του ταυσιαστή Ricci :

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) \quad (5.17)$$

Απόδειξη της ταυτότητας Palatini

Η Ταυτότητα Palatini εκφράζει τη μεταβολή του ταυσιαστή Ricci, $\delta R_{\mu\nu}$, συναρτήσεως των συναλλοιώτων παραγώγων της μεταβολής των συμβόλων Christoffel, $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο για την παραγωγή των εξισώσεων πεδίου μέσω της Αρχής Ελαχίστης Δράσης.

Ξεκινάμε από τον ορισμό του τανυστή καμπυλότητας Riemann μέσω των συμβόλων Christoffel:

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \quad (5.18)$$

Θεωρούμε μια απειροστή μεταβολή της μετρικής, η οποία επάγει μια αντίστοιχη μεταβολή $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ στα σύμβολα Christoffel. Η μεταβολή του τανυστή Riemann είναι:

$$\delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}) + \delta(\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) - \delta(\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}) \quad (5.19)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του γινομένου στους δύο τελευταίους όρους, έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} &= \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) - \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}) \\ &\quad + (\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda})\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) \\ &\quad - (\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu})\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ένα κρίσιμο γεωμετρικό γεγονός είναι ότι, ενώ η συνοχή $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ δεν αποτελεί τανυστή, η μεταβολή της (η διαφορά δηλαδή δύο γειτονικών συνοχών), $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, **είναι κανονικός τανυστής**. Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο της (∇_{λ}).

Η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ ως προς λ δίνεται από τον ορισμό:

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) = \partial_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \quad (5.21)$$

Αντίστοιχα, εναλλάσσοντας τους δείκτες λ και ν , η συναλλοίωτη παράγωγος ως προς ν είναι:

$$\nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}) = \partial_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}) + \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} \quad (5.22)$$

Αφαιρώντας την (5.22) από την (5.21), παρατηρούμε ότι οι τελευταίοι όροι (με το $\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}$ και $\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}$) αλληλοαναιρούνται λόγω της συμμετρίας των συμβόλων Christoffel στους κάτω δείκτες ($\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}$). Συγκεντρώνοντας τους υπόλοιπους όρους, προκύπτει ακριβώς η δεξιά πλευρά της (5.19):

$$\nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}) = \delta R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} \quad (5.23)$$

Η σχέση (5.23) αποτελεί τη γενικευμένη Ταυτότητα Palatini για τον τανυστή Riemann.

Για να βρούμε την αντίστοιχη ταυτότητα για τον τανυστή καμπυλότητας Ricci ($R_{\mu\nu}$), αρκεί να συστειλούμε (contract) τους δείκτες ρ και λ θέτοντας $\rho = \lambda$. Ορίζοντας $\delta R_{\mu\nu} \equiv \delta R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$, λαμβάνουμε την τελική **Ταυτότητα Palatini**:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}) \quad (5.24)$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας Palatini η (5.16) γράφεται:

$$\delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} \square F(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R)) \delta g^{\mu\nu} \quad (5.25)$$

Οπότε, εκ των (5.11), (5.12), (5.15) και (5.25) έχουμε για το τροποποιημένο ολοκλήρωμα δράσης (χωρίς την ύλη):

$$\delta S_{EH}^{mod} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) \right) \delta g^{\mu\nu} \quad (5.26)$$

Απαιτώντας την αρχή της ελάχιστης δράσης, δηλαδή τον μηδενισμό της συνολικής μεταβολής της δράσης συμπεριλαμβανομένου και του υλικού μέρους S_m , εξάγουμε τον ορισμό του ταυσιτή ενέργειας-ορμής :

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (5.27)$$

και για $\delta g^{\mu\nu} = 0$, καταλήγουμε στις τροποποιημένες εξισώσεις Einstein:

$$F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.28)$$

Πολλαπλασιάζουμε με $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} F(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} f(R) + g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \square F(R) - g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) = \kappa g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (5.29)$$

οπότε η εξίσωση του ίχνους :

$$F(R) R - 2f(R) + 3\square F(R) = \kappa T \quad (5.30)$$

5.3 Το Μοντέλο Starobinsky ^{[17],[22],[23]}

Το μοντέλο του Starobinsky είναι μια από τις πρώτες προσπάθειες τροποποίησης της (ΓΘΣ), με αρχικό στόχο την εξαγωγή μιας επανακανονικοποιήσιμης θεωρίας. Πρόκειται για μια από τις πιο σημαντικές ειδικές περιπτώσεις των θεωριών $f(R)$, η οποία αποτέλεσε το προοίμιο για τη μελέτη της φάσης του κοσμικού πληθωρισμού στο πρώιμο Σύμπαν. Στο συγκεκριμένο μοντέλο, η συνάρτηση της καμπυλότητας $f(R)$ λαμβάνει μια τετραγωνική μορφή:

$$f(R) = R + \alpha R^2 \quad (5.31)$$

όπου α είναι μια θετική σταθερά.

Η επιλογή αυτή, όπως αποδεικνύεται από τον υπολογισμό του ίχνους των γενικευμένων εξισώσεων Einstein, αναδεικνύει την ύπαρξη ενός βαθμού ελευθερίας $\phi = F(R)$ (γνωστού ως scalaron). Αντικαθιστώντας τη μορφή αυτή και την παράγωγό της, $F(R) = 1 + 2\alpha R$, στην εξίσωση του ίχνους (5.30), προκύπτει:

$$(1 + 2\alpha R)R + 3\Box(1 + 2\alpha R) - 2(R + \alpha R^2) = \kappa T \quad (5.32)$$

ή

$$\Box R - \frac{1}{6\alpha}(R + \kappa T) = 0 \quad (5.33)$$

Ορίζουμε τώρα ένα είδος γωνιακής συχνότητας ω (ή ισοδύναμης μάζας m) ως:

$$-\frac{1}{6\alpha} \equiv \omega^2 \equiv m^2 \quad (5.34)$$

και καταλήγουμε στην ενεργό εξίσωση Klein-Gordon για το βαθμωτό scalaron:

$$\boxed{\Box R + m^2(R + \kappa T) = 0} \quad (5.35)$$

Το πιο ισχυρό πλεονέκτημα του μοντέλου Starobinsky είναι η ικανότητά του να οδηγεί με φυσικό τρόπο σε πληθωριστική διαστολή. Αναπαριστώντας τη συνάρτηση σε μια ισοδύναμη κοσμολογική μορφή $f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}$, και εφαρμόζοντας τις συνθήκες αργής κύλισης (slow roll approximation) όπου η παράμετρος Hubble H μεταβάλλεται πολύ αργά, οι κινητικοί όροι μπορούν να παραλειφθούν. Έτσι, η εξίσωση Friedmann απλοποιείται στην προσεγγιστική μορφή $\dot{H} \approx -M^2/6$. Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση, εξάγεται η λύση για τη χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας $a(t)$:

$$a(t) \approx \exp \left[H_i(t - t_i) - \left(\frac{M^2}{12} \right) (t - t_i)^2 \right] \quad (5.36)$$

Η εκθετική αυτή διαστολή του Σύμπαντος συνεχίζεται όσο ικανοποιείται η συνθήκη αργής κύλισης $\epsilon \approx M^2/6H^2 \leq 1$ (δηλαδή για $H^2 \geq M^2$). Η πληθωριστική φάση τερματίζεται όταν $\epsilon \approx 1$. Προκειμένου το μοντέλο να επιλύσει επιτυχώς τα προβλήματα του ορίζοντα και της επιπεδότητας, θα πρέπει να εξασφαλίζει ένα πλήθος εκθετικών αυξήσεων (e-foldings) $N \geq 70$, γεγονός που θέτει την αυστηρή συνθήκη $\epsilon(t_f) \leq 7 \cdot 10^{-3}$ για τις παραμέτρους στο τέλος του πληθωρισμού.

5.4 Γενικευμένες εξισώσεις Friedmann

Από τις τροποποιημένες κατά $f(R)$ εξισώσεις Einstein (5.28):

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + g_{\mu\nu}\square F(R) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (5.37)$$

θα καταλήξουμε στις τροποποιημένες εξισώσεις Friedmann. Η πρώτη θα εξαχθεί από τη χρονική συνιστώσα (00):

$$F(R)R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}f(R) + g_{00}\square F(R) - \nabla_0\nabla_0F(R) = \kappa T_{00} \quad (5.38)$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $\nabla_0\nabla_0F(R) = \partial_0\partial_0F(R) = \ddot{F}$, αφού η $F(R) = \partial_R f(R)$ είναι βαθμωτή ποσότητα. Θεωρώντας ένα επίπεδο, ομογενές και ισότροπο Σύμπαν, η FLRW μετρική, για λόγους απλότητας στις μετέπειτα πράξεις (υιοθετώντας $c = 1$), μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2 \quad (5.39)$$

Οπότε τα μετρικά στοιχεία θα είναι διαγώνια με $g_{00} = -1$ και $g_{ii} = a^2(t)$ για $i = 1, 2, 3$. Η ορίζουσα της διαγώνιας μετρικής ισούται με $g = -a^6(t)$ και το αντίστροφο χρονικό στοιχείο είναι $g^{00} = -1$. Για την D'Alembertian της $F(R)$ ισχύει:

$$\square F(R) = \nabla_{\mu}\nabla^{\mu}F(R) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}F(R)) \quad (5.40)$$

Εφόσον η $F(R)$ εξαρτάται μόνο από τον χρόνο, ο υπολογισμός της δίνει:

$$\square F(R) = \frac{1}{a^3}\partial_t(a^3g^{00}\partial_tF(R)) = -\frac{1}{a^3}\partial_t(a^3\dot{F}) = -\ddot{F} - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{F} = -\ddot{F} - 3H\dot{F} \quad (5.41)$$

Οπότε ο αντίστοιχος χρονικός όρος $g_{00}\square F(R)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$g_{00}\square F(R) = (-1)(-\ddot{F} - 3H\dot{F}) = \ddot{F} + 3H\dot{F} \quad (5.42)$$

Αντικαθιστώντας τα στοιχεία του τανυστή Ricci ($R_{00} = -3\dot{H} - 3H^2$) και το στοιχείο του τανυστή ενέργειας-ορμής ($T_{00} = \rho_0$), προκύπτει:

$$F(R)(-3\dot{H} - 3H^2) - \frac{1}{2}(-1)f(R) + (\ddot{F} + 3H\dot{F}) - \ddot{F} = \kappa\rho_0 \quad (5.43)$$

Εκφράζοντας το \dot{H} μέσω της βαθμωτής καμπυλότητας $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$ και κάνοντας τις απαραίτητες αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε στην **πρώτη τροποποιημένη εξίσωση Friedmann**:

$$\boxed{3FH^2 = \frac{FR - f}{2} - 3H\dot{F} + \kappa\rho_0} \quad (5.44)$$

Για τη δεύτερη τροποποιημένη εξίσωση Friedmann, από τις χωρικές συνιστώσες (ii) έχουμε:

$$F(R)R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}f(R) + g_{ii}\square F(R) - \nabla_i\nabla_i F(R) = \kappa T_{ii} \quad (5.45)$$

και δεδομένου ότι $\nabla_i\nabla_i F = -\Gamma_{ii}^0\dot{F} = -a^2H\dot{F}$:

$$g_{ii}\square F(R) - \nabla_i\nabla_i F(R) = a^2(-\ddot{F} - 3H\dot{F}) - (-a^2H\dot{F}) = a^2(-\ddot{F} - 2H\dot{F}) \quad (5.46)$$

Διαιρώντας με $g_{ii} = a^2$ και αντικαθιστώντας τον όρο $R_{ii}/a^2 = \dot{H} + 3H^2$ και την πίεση $p = T_{ii}/a^2$, προκύπτει:

$$F(R)(\dot{H} + 3H^2) - \frac{1}{2}f(R) - \ddot{F} - 2H\dot{F} = \kappa p \quad (5.47)$$

Επίσης, η πρώτη τροποποιημένη εξίσωση Friedmann λαμβάνοντας υπόψιν ότι $R = 6(\dot{H} + 2H^2)$ γράφεται ως:

$$-3F(\dot{H} + H^2) + \frac{1}{2}f + 3H\dot{F} = \kappa\rho_0 \quad (5.48)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην έκφραση για την **δεύτερη τροποποιημένη εξίσωση Friedmann**:

$$\boxed{-2\dot{H}F = \ddot{F} - H\dot{F} + \kappa(\rho_0 + p)} \quad (5.49)$$

5.4.1 Η Ενεργός Βαρυτική Σταθερά (G_{eff})

Στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΘΣ), η σταθερά της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα, G , θεωρείται μια θεμελιώδης, απόλυτη και αμετάβλητη σταθερά της φύσης. Αντιθέτως, ένα από τα πιο κρίσιμα και ελέγξιμα χαρακτηριστικά των γενικευμένων θεωριών βαρύτητας (όπως οι θεωρίες $f(R)$ και οι βαθμωτές-τανυστικές θεωρίες) είναι ότι η βαρυτική σύζευξη μεταξύ της γεωμετρίας και της ύλης παύει να είναι σταθερή. Αντίθετα, προάγεται σε μια δυναμική ποσότητα, γνωστή ως Ενεργός Βαρυτική Σταθερά (Effective Gravitational Constant), G_{eff} . Στις θεωρίες $f(R)$, η τροποποίηση των εξισώσεων του Einstein οδηγεί σε μια αναπροσαρμογή της σταθεράς G . Συγκρίνοντας τις τροποποιημένες εξισώσεις με τις αντίστοιχες της ΓΘΣ, διαπιστώνεται ότι η ενεργός βαρυτική σταθερά δίνεται από τη σχέση:

$$G_{eff} = \frac{G}{F(R)} = \frac{G}{f'(R)} \quad (5.50)$$

όπου G είναι η «γυμνή» (bare) σταθερά του Νεύτωνα και $F(R) \equiv \partial f/\partial R$. Επειδή η βαθμωτή καμπυλότητα R εξελίσσεται με τον κοσμικό χρόνο καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, προκύπτει άμεσα ότι και η G_{eff} αποκτά χρονική εξάρτηση, δηλαδή $\dot{G}_{eff} \neq 0$. Προκειμένου το βαρυτικό πεδίο να είναι ελκτικό και να αποφευχθούν κβαντικές αστάθειες (όπως η ύπαρξη ghost fields), απαιτείται αυστηρά $F(R) > 0$, συνεπώς $G_{eff} > 0$. Η δυναμική φύση της ενεργού βαρυτικής

σταθεράς έχει βαθιές κοσμολογικές και αστροφυσικές συνέπειες, παρέχοντας τρόπους για τον παρατηρησιακό έλεγχο αυτών των θεωριών:

Ανάπτυξη Κοσμολογικών Δομών (Structure Formation): Στη γραμμική θεωρία διαταραχών, η εξέλιξη της πυκνότητας της μη-σχετικιστικής ύλης $\delta_m \equiv \delta\rho_m/\rho_m$ περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G_{eff}\rho_m\delta_m = 0 \quad (5.51)$$

Ο τελευταίος όρος, που εκφράζει την ελκτική βαρυτική κατάρρευση απέναντι στην κοσμική τριβή (όρος $2H\dot{\delta}_m$), εξαρτάται άμεσα από την G_{eff} . Μια μεταβαλλόμενη G_{eff} τροποποιεί τον ρυθμό με τον οποίο αναπτύσσονται τα σμήνη γαλαξιών και οι δομές μεγάλης κλίμακας στο σύμπαν. Αυτή η διαφοροποίηση μπορεί ενδεχομένως να προσφέρει θεωρητική εξήγηση για την ασυνέπεια σ_8 (S_8 tension) που παρατηρείται μεταξύ των μετρήσεων του Planck και των ερευνών ασθενούς βαρυτικού φακού.

Αστροφυσικές Εφαρμογές και SNe Ia: Όπως αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 3 σχετικά με τους υπερκαινοφανείς τύπου Ia, η έκρηξη πυροδοτείται όταν ένας λευκός νάνος υπερβεί το όριο μάζας Chandrasekhar (M_{Ch}). Το όριο αυτό εξαρτάται ισχυρά από τη σταθερά της βαρύτητας σύμφωνα με τη σχέση:

$$M_{Ch} \propto G_{eff}^{-3/2} \quad (5.52)$$

Συνεπώς, σε μια θεωρία $f(R)$ όπου η σταθερά της βαρύτητας ήταν διαφορετική στο παρελθόν (σε μεγαλύτερα z), η μάζα των πρόδρομων αστέρων των SNe Ia θα διέφερε από τη σημερινή. Αυτό σημαίνει ότι η απόλυτη λαμπρότητά τους θα μεταβαλλόταν, θέτοντας υπό αμφισβήτηση την απόλυτη ιδιότητά τους ως «τυπικά κεριά» (standard candles) και απαιτώντας προσεκτικές διορθώσεις κατά τη μέτρηση κοσμολογικών αποστάσεων.

Περιορισμοί από το Ηλιακό Σύστημα: Σε τοπικό επίπεδο, οι δοκιμασίες της Γενικής Σχετικότητας στο Ηλιακό Σύστημα, καθώς και οι παρατηρήσεις από ραντάρ (π.χ. η αποστολή Cassini), θέτουν εξαιρετικά αυστηρούς περιορισμούς στον σημερινό ρυθμό μεταβολής της σταθεράς της βαρύτητας, απαιτώντας $|\dot{G}/G|_0 \lesssim 10^{-13} \text{ yr}^{-1}$. Κάθε βιώσιμο μοντέλο $f(R)$ οφείλει να ενσωματώνει μηχανισμούς «θωράκισης» (screening mechanisms), όπως ο μηχανισμός Chameleon, προκειμένου να επαναφέρει την G_{eff} στις κλασικές της τιμές σε περιοχές υψηλής πυκνότητας ύλης (όπως η Γη και το Ηλιακό Σύστημα), διατηρώντας παράλληλα τις κοσμολογικές αποκλίσεις σε μεγάλες κλίμακες.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Μελλοντικές Προοπτικές

Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώθηκε στη μελέτη του Καθιερωμένου Κοσμολογικού Προτύπου Λ CDM, εμβαθύνοντας τόσο στις θεωρητικές του βάσεις όσο και στις σημαντικές προκλήσεις που αντιμετωπίζει στη σύγχρονη εποχή της Κοσμολογίας. Ξεκινώντας από τις θεμελιώδεις αρχές της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και φτάνοντας μέχρι την περιγραφή της διαστολής του Σύμπαντος, καταδείχθηκε ότι το μοντέλο Λ CDM αποτελεί την πιο επιτυχημένη μέχρι σήμερα προσπάθεια περιγραφής του Σύμπαντος, εξηγώντας με αξιοσημείωτη επιτυχία παρατηρήσεις όπως η Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMB), η μεγάλης κλίμακας δομή του Σύμπαντος και η επιταχυνόμενη διαστολή που μετρήθηκε μέσω των υπερκαινοφανών αστέρων τύπου Ia (SNe Ia). Ωστόσο, όπως αναλύθηκε εκτενώς, η ολοένα και μεγαλύτερη ακρίβεια των παρατηρησιακών δεδομένων έχει φέρει στο φως σοβαρές ασυνέπειες (tensions) που υποδεικνύουν τα όρια του μοντέλου Λ CDM. Η σημαντικότερη εξ αυτών, η Ένταση της Σταθεράς του Hubble (H_0 tension), η οποία αγγίζει πλέον τα 5 σ , αναδεικνύει μια θεμελιώδη ασυμφωνία μεταξύ των προβλέψεων του πρώιμου Σύμπαντος (μέσω του δορυφόρου Planck) και των άμεσων τοπικών μετρήσεων στο όψιμο Σύμπαν. Παράλληλα, η Ένταση S_8 που αφορά τον ρυθμό ανάπτυξης των κοσμολογικών δομών, σε συνδυασμό με το δυσεπίλυτο θεωρητικό πρόβλημα της τεράστιας απόκλισης της τιμής της κοσμολογικής σταθεράς Λ σε σχέση με τις προβλέψεις της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου, καθιστούν επιτακτική την ανάγκη για θεωρητικές επεκτάσεις. Σε αυτή την κατεύθυνση, εξετάστηκαν δύο κύριες κατηγορίες θεωρητικών προεκτάσεων:

Δυναμική Σκοτεινή Ενέργεια: Για την άρση του προβλήματος της "λεπτής ρύθμισης" και της "σύμπτωσης", διερευνήθηκαν μοντέλα όπου η σκοτεινή ενέργεια δεν είναι μια αυστηρή σταθερά, αλλά ένα δυναμικό πεδίο που εξελίσσεται στον χρόνο. Μοντέλα βαθμωτών πεδίων, όπως η Πεμπτουσία (με $w > -1$) και η Σκοτεινή Ενέργεια Φάντασμα (με $w < -1$), προσφέρουν τον απαραίτητο θεωρητικό χώρο για μια διαφορετική ιστορία κοσμικής διαστολής. Επιπλέον, τα Μοντέλα Τρέχοντος Κενού (Running Vacuum Models), βασισμένα στην Κβαντική Θεωρία

Πεδίου σε καμπύλο χωρόχρονο, επιτρέπουν την αλληλεπίδραση μεταξύ σκοτεινής ύλης και σκοτεινής ενέργειας, παρέχοντας μια φυσική εξήγηση για την ελάφρυνση των παρατηρησιακών εντάσεων.

Γενικευμένες Θεωρίες Βαρύτητας $f(R)$: Μια ριζικά διαφορετική αλλά εξίσου ισχυρή προσέγγιση είναι η αλλαγή του γεωμετρικού μέλους των εξισώσεων του Einstein. Επεκτείνοντας τη δράση Einstein-Hilbert σε μια γενική συνάρτηση $f(R)$, αποδείχθηκε ότι μπορούμε να παράγουμε επιταχυνόμενη διαστολή αμιγώς λόγω βαρυτικών φαινομένων, χωρίς την ανάγκη εισαγωγής εξωτικών μορφών σκοτεινής ενέργειας. Όπως αναλύθηκε, η μελέτη τέτοιων θεωριών, είτε μέσω του μετρικού είτε μέσω του Palatini φορμαλισμού, οδηγεί στην εμφάνιση επιπλέον δυναμικών βαθμών ελευθερίας (όπως το scalaron στο μοντέλο Starobinsky), οι οποίοι δύνανται να οδηγήσουν τόσο σε φυσιολογικό κοσμικό πληθωρισμό στο πρώιμο Σύμπαν, όσο και σε αποτελεσματικές τροποποιήσεις της ενεργού βαρυτικής σταθεράς (G_{eff}) σε μεγάλες κλίμακες.

Μελλοντικές Προοπτικές: Η απάντηση στο ερώτημα εάν η φύση επιλέγει τη διατήρηση της Γενικής Σχετικότητας με την εισαγωγή νέων δυναμικών πεδίων (Δυναμική Σκοτεινή Ενέργεια) ή εάν οι νόμοι της βαρύτητας πρέπει να τροποποιηθούν στις κοσμολογικές κλίμακες (Modified Gravity), θα δοθεί μέσα από την επόμενη γενιά παρατηρησιακών δεδομένων. Στο άμεσο μέλλον, διαστημικές αποστολές υψηλής ακρίβειας, όπως το διαστημικό τηλεσκόπιο Euclid του ESA και το Roman Space Telescope της NASA, καθώς και επίγεια προγράμματα όπως το Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI), αναμένεται να χαρτογραφήσουν την κατανομή της ύλης και τον ρυθμό διαστολής του Σύμπαντος με πρωτοφανή ακρίβεια σε διαφορετικές ερυθρές μετατοπίσεις (z). Επιπροσθέτως, η αναδυόμενη Αστρονομία Βαρυτικών Κυμάτων, μέσω της χρήσης των λεγόμενων "τυπικών σειρήνων" (standard sirens), θα προσφέρει έναν εντελώς ανεξάρτητο τρόπο μέτρησης κοσμικών αποστάσεων, παρακάμπτοντας την παραδοσιακή κλίμακα αποστάσεων και τις συστηματικές της αβεβαιότητες. Συμπερασματικά, το καθιερωμένο πρότυπο Λ CDM παραμένει ένα εξαιρετικό σημείο αναφοράς, ωστόσο το Σύμπαν φαίνεται να είναι πιο πολύπλοκο από ό,τι υπαγορεύει η κοσμολογική σταθερά. Βρισκόμαστε πλέον σε ένα κομβικό σημείο αλλαγής παραδείγματος, όπου ο συνδυασμός της θεωρητικής κοσμολογίας με τα νέα, υπερ-ακριβή δεδομένα αναμένεται να αποκαλύψει τα επόμενα χρόνια την πραγματική φύση της "σκοτεινής" πλευράς του Σύμπαντος.

Παράρτημα Π1: Στοιχεία Τανυστικού Λογισμού

1. Βαθμωτά Μεγέθη (Scalars)

Ένα μέγεθος ϕ ονομάζεται **βαθμωτό** (ή τανυστής τάξης 0) αν η τιμή του παραμένει αναλλοίωτη σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (1)$$

2. Διανύσματα (Vectors)

Ανταλλοίωτα Διανύσματα (Contravariant Vectors)

Ένα αντικείμενο A^μ είναι **ανταλλοίωτο διάνυσμα** (ή τανυστής τάξης (1,0)) αν οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (2)$$

Παράδειγμα αποτελεί το διαφορικό των συντεταγμένων dx^μ .

Συναλλοίωτα Διανύσματα (Covariant Vectors)

Ένα αντικείμενο A_μ είναι **συναλλοίωτο διάνυσμα** (ή τανυστής τάξης (0,1)) αν οι συνιστώσες του μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα:

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \quad (3)$$

Παράδειγμα αποτελεί η κλίση (gradient) ενός βαθμωτού πεδίου $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$.

3. Τανυστές (Tensors)

Γενικεύοντας, ένας **τανυστής τάξης** (M, N) (M φορές ανταλλοίωτος και N φορές συναλλοίωτος) μετασχηματίζεται ως εξής:

$$T_{\nu_1 \dots \nu_N}^{\mu_1 \dots \mu_M} = \left(\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_M}}{\partial x^{\alpha_M}} \right) \left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_N}}{\partial x'^{\nu_N}} \right) T_{\beta_1 \dots \beta_N}^{\alpha_1 \dots \alpha_M} \quad (4)$$

4. Ο Μετρικός Τανυστής (Metric Tensor)

Ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$ είναι ένας συμμετρικός συναλλοίωτος τανυστής 2ης τάξης. Χρησιμοποιείται για την ανύψωση και τον υποβιβασμό δεικτών:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad \text{και} \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (5)$$

όπου $g^{\mu\nu}$ είναι ο αντίστροφος μετρικός τανυστής, για τον οποίο ισχύει $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$.

5. Απόδειξη της Ταυτότητας Bianchi

Η απόδειξη της Διαφορικής Ταυτότητας Bianchi απλοποιείται δραματικά αν κάνουμε χρήση ενός **Τοπικά Αδρανειακού Συστήματος Συντεταγμένων** (ή κανονικών συντεταγμένων Riemann) γύρω από ένα τυχαίο σημείο P του χωροχρόνου. Σύμφωνα με την Αρχή της Ισοδυναμίας, σε ένα τέτοιο σύστημα, ο χωρόχρονος στο σημείο P προσεγγίζει απόλυτα τον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski.

Αυτό σημαίνει μαθηματικά ότι στο σημείο P , οι πρώτες παράγωγοι της μετρικής μηδενίζονται, και συνεπώς όλα τα σύμβολα Christoffel είναι μηδέν, αλλά οι παράγωγοί τους δεν είναι:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) = 0, \quad \partial_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(P) \neq 0 \quad (6)$$

Λόγω της εξ. (6), ο ορισμός του τανυστή Riemann στο σημείο P απλοποιείται, καθώς τα γινόμενα των συμβόλων Christoffel διαγράφονται:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu \quad (7)$$

Επιπλέον, επειδή τα σύμβολα Γ μηδενίζονται στο P , η συναλλοίωτη παράγωγος οποιουδήποτε τανυστή ταυτίζεται απόλυτα με τη συνήθη μερική παράγωγο. Έτσι, για τη συναλλοίωτη παρά-

γωγο του τανυστή Riemann ως προς τ έχουμε:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma;\tau} = \partial_\tau R^\mu_{\nu\rho\sigma} \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (8), παίρνουμε την έκφραση για τον πρώτο όρο της ταυτότητας:

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma;\tau} = \partial_\tau \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\tau \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} \quad (9)$$

Τώρα, γράφουμε τις δύο κυκλικές μεταθέσεις των δεικτών (ρ, σ, τ) για να βρούμε τους άλλους δύο όρους:

$$R^\mu_{\nu\sigma\tau;\rho} = \partial_\rho \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\tau} - \partial_\rho \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \quad (10)$$

$$R^\mu_{\nu\tau\rho;\sigma} = \partial_\sigma \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\tau} \quad (11)$$

Αθροίζοντας τις Εξισώσεις (9), (10) και (11), κατασκευάζουμε το αριστερό μέλος της Ταυτότητας Bianchi:

$$\begin{aligned} R^\mu_{\nu\rho\sigma;\tau} + R^\mu_{\nu\sigma\tau;\rho} + R^\mu_{\nu\tau\rho;\sigma} &= \partial_\tau \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\tau \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} \\ &\quad + \partial_\rho \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\tau} - \partial_\rho \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \\ &\quad + \partial_\sigma \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\tau} \end{aligned} \quad (12)$$

Γνωρίζουμε από τον απλό διαφορικό λογισμό ότι οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συμμετρικές και μετατίθενται (π.χ. $\partial_\tau \partial_\rho = \partial_\rho \partial_\tau$). Παρατηρώντας προσεκτικά το δεξί μέλος της Εξίσωσης (7), βλέπουμε ότι κάθε θετικός όρος έχει έναν ακριβώς αντίθετο:

- Ο θετικός όρος $\partial_\tau \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma}$ αναιρείται από τον αρνητικό $-\partial_\rho \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\sigma}$.
- Ο αρνητικός όρος $-\partial_\tau \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}$ αναιρείται από τον θετικό $\partial_\sigma \partial_\tau \Gamma^\mu_{\nu\rho}$.
- Ο θετικός όρος $\partial_\rho \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\tau}$ αναιρείται από τον αρνητικό $-\partial_\sigma \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\tau}$.

Επομένως, όλοι οι όροι αλληλοδιαγράφονται και το άθροισμα στο σημείο P ισούται αυστηρά με μηδέν:

$$\boxed{R^\mu_{\nu\rho\sigma;\tau} + R^\mu_{\nu\sigma\tau;\rho} + R^\mu_{\nu\tau\rho;\sigma} = 0} \quad (13)$$

Η εξ. (13) συνδέει αποκλειστικά τανυστές, άρα είναι μια *τανυστική εξίσωση*. Μια θεμελιώδης ιδιότητα του τανυστικού λογισμού ορίζει ότι αν μια τανυστική εξίσωση ισχύει σε ένα οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων (όπως το τοπικά αδρανειακό που επιλέξαμε), τότε **πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων**. Επίσης, εφόσον το σημείο P επιλέχθηκε εντελώς τυχαία, το αποτέλεσμα γενικεύεται για κάθε σημείο, αποδεικνύοντας την ταυτότητα για ολόκληρο τον χωρόχρονο.

Παράρτημα Π2: Εξίσωση Klein - Gordon

Η γενική δράση βαθμοτού πεδίου σε χωρόχρονο Riemann είναι:

$$S_\phi = \int \sqrt{-g} \mathcal{L}\phi(\phi, \partial_\alpha \phi) d^4x \quad (14)$$

Σε έναν χωρόχρονο με υπογραφή $(-, +, +, +)$, το αντίστροφο χρονικό στοιχείο της μετρικής είναι αρνητικό ($g^{00} = -1$). Επομένως, για να είναι θετική η κινητική ενέργεια του πεδίου, η πυκνότητα Lagrange πρέπει να λάβει ένα ολικό αρνητικό πρόσημο στον κινητικό όρο:

$$\mathcal{L}\phi = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (15)$$

Για οποιαδήποτε περιοχή Ω , θεωρούμε τη μεταβολή του πεδίου:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (16)$$

η οποία μηδενίζεται στην επιφάνεια $\Gamma(\Omega)$ που περικλείει την περιοχή Ω :

$$\delta\phi(x) = 0 \quad \text{στο} \quad \Gamma(\Omega) \quad (17)$$

Μεταβάλλοντας τη δράση έχουμε:

$$\delta S(\Omega) = \delta \left(\int_\Omega \sqrt{-g} \mathcal{L}\phi(\phi, \partial_\alpha \phi) d^4x \right) = \int_\Omega \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \delta(\partial_\alpha \phi) \right] d^4x \quad (18)$$

Αναπτύσσοντας τον δεύτερο όρο παίρνουμε:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \delta(\partial_\alpha \phi) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \delta\phi \right] - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \right] \delta\phi \quad (19)$$

Συνεπώς η μεταβολή της δράσης γράφεται:

$$\delta S(\Omega) = \int_\Omega \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \right) \right] \delta\phi d^4x + \int_\Omega \partial_\alpha \left[\frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_\alpha \phi)} \delta\phi \right] d^4x \quad (20)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης (Gauss) για το δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \delta\phi \right] d^4x = \int_{\Gamma(\Omega)} \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \delta\phi \cdot n, dS = 0 \quad (21)$$

αφού $\delta\phi = 0$ στην επιφάνεια $\Gamma(\Omega)$. Για $\delta S(\Omega) = 0$ εξάγουμε την εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\delta S(\Omega) = 0 \implies \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \right) \right] \delta\phi, d^4x = 0 \quad (22)$$

Η οποία μας δίνει:

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_{\alpha}\phi)} \right) = 0 \quad (23)$$

Υπολογίζοντας κάθε όρο της εξίσωσης ξεχωριστά παίρνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi) = \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - V(\phi) \right) = -\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (24)$$

Και για τον δεύτερο όρο:

$$\partial_{\lambda} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L}\phi)}{\partial(\partial_{\lambda}\phi)} \right] = \partial_{\lambda} \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\nu}\phi\delta_{\mu}^{\lambda} + \partial_{\mu}\phi\delta_{\nu}^{\lambda}) \right) \right] = \partial_{\mu} (-\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi) \quad (25)$$

Το οποίο γράφεται ως:

$$= -(\partial_{\mu}(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\phi + \sqrt{-g}\partial_{\mu}(g^{\mu\nu})\partial_{\nu}\phi + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi) \quad (26)$$

Χρησιμοποιώντας τη μετρική FLRW (με υπογραφή $(-, +, +, +)$):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix} \quad (27)$$

με ορίζουσα $\det(g_{\mu\nu}) = g = -a^6(t)$. Έτσι προκύπτει:

$$\partial_0 g = \frac{\partial}{\partial t}(-a^6(t)) = -6a^5(t)\dot{a}, \quad \partial_i g = \frac{\partial}{\partial x^i}(-a^6(t)) = 0 \quad (28)$$

Επίσης, επειδή η μετρική είναι διαγώνια, $\partial_{\mu}g^{\mu\nu} = 0$. Αφού υποθέτουμε ότι το πεδίο είναι ομογενές (εξαρτάται μόνο από τον χρόνο):

$$\partial_0\phi = \dot{\phi} \quad \text{και} \quad \partial_i\phi = 0 \quad (29)$$

Έτσι, ο δεύτερος όρος της εξίσωσης Euler-Lagrange, εκμεταλλευόμενος την παράγωγο της ρίζας της ορίζουσας $\partial_0(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\partial_0(g)$, γίνεται:

$$\partial_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\lambda\phi)}(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi) \right] = -\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2g}\partial_0(g)g^{00}\partial_0\phi + g^{00}\partial_0\partial_0\phi \right) \quad (30)$$

Αντικαθιστώντας το αντίστροφο στοιχείο $g^{00} = -1$:

$$= -\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2g}\partial_0(g)(-1)\dot{\phi} + (-1)\ddot{\phi} \right) = \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2g}\partial_0(g)\dot{\phi} + \ddot{\phi} \right) \quad (31)$$

$$= a^3 \left(\frac{1}{2(-a^6)}(-6a^5\dot{a})\dot{\phi} + \ddot{\phi} \right) = a^3 \left(3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \ddot{\phi} \right) \quad (32)$$

Οπότε, τελικά, αντικαθιστώντας και τους δύο όρους στην αρχική εξίσωση (10) έχουμε:

$$-\sqrt{-g}\frac{\partial V}{\partial\phi} - a^3 \left(3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \ddot{\phi} \right) = 0 \implies -a^3 \left(\frac{\partial V}{\partial\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \ddot{\phi} \right) = 0 \quad (33)$$

Και διαιρώντας με το $-a^3$ προκύπτει η τελική διαφορική εξίσωση εξέλιξης του βαθμωτού πεδίου (εξίσωση Klein-Gordon):

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (34)$$

Βιβλιογραφία

- [1] Weinberg, S. (2013). Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity (1η έκδ.). John Wiley and Sons, Inc.
- [2] Martin M. Lipschutz (1982). Διαφορική Γεωμετρία . Schaum’s Outline Series. McGraw-Hill.
- [3] Ryden, B. (2016). Introduction to Cosmology (2η έκδ.). Cambridge University Press.
- [4] Dodelson, S. (2020). Modern Cosmology (2η έκδ.). Academic Press.
- [5] Sean M. Carroll. “The Cosmological constant”. In: Living Rev. Rel. 4 (2001), p. 1. doi: 10.12942/lrr-2001-1. arXiv: astro-ph/0004075.
- [6] Περιβολαρόπουλος, Λ., και Αντωνίου, Ι. (2023). Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας και την Κοσμολογία [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις. <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-201>.
- [7] M.V.Berry (1989) Principles of Cosmology and Gravitation. Adam Hilger , IOP Publishing Ltd.
- [8] Weinberg, S, (2008). Cosmology (1η έκδ.). Oxford University Press.
- [9] Κ.Ε.Βαγιονάκης (1997) Σωματιδιακή Φυσική και Κοσμολογία. Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο Ιωαννίνων.
- [10] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. (2014).Quantum Field Theory for the Gifted Amateur (1st Edition). Oxford University Press.
- [11] Adam G. Riess et al. “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”. In: Astron. J. 116 (1998), pp. 1009–1038. doi: 10.1086/300499. arXiv: astro-ph/9805201.
- [12] Alex Kexagias, Azadeh Moradinezhad Dizgah, Antonio Riotto, 2013, «Comments on the Starobinsky Model of Inflation and its Descendants», arXiv:1312.1155v1 [hep-th], 4 Dec 2013, Cornell University.

- [13] Planck Collaboration (2020). "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters".
- [14] Riess, A. G., Yuan, W., Macri, L. M., et al. (2022). "A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team." *The Astrophysical Journal Letters*, 934(1), L7.
- [15] Carroll, S. (2013). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (1η έκδ.). Pearson Education Limited.
- [16] Riess, A. G., et al. (2021). "A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant".
- [17] Alexei Starobinsky, 2019, «Different possibilities for pre-inflationary history of our Universe», International Workshop «Theoretical Problems of Modern Cosmology», France.
- [18] Lavrentios Kazantzidis and Leandros Perivolaropoulos. "Is gravity getting weaker at low z ? Observational evidence and theoretical implications". In: (July 2019). arXiv: 1907.03176 [astro-ph.CO].
- [19] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General relativity: An introduction for physicists*. 2006.
- [20] G. Alestas, L. Kazantzidis, and L. Perivolaropoulos. "H0 tension, phantom dark energy, and cosmological parameter degeneracies". In: *Phys. Rev. D* 101.12 (2020), p. 123516. doi: 10.1103/PhysRevD.101.123516. arXiv: 2004.08363 [astro-ph.CO].
- [21] Michel Chevallier and David Polarski. "Accelerating universes with scaling dark matter". In: *Int. J. Mod. Phys. D* 10 (2001), pp. 213–224. doi: 10.1142/S0218271801000822. arXiv: gr-qc/0009008.
- [22] De Felice, A., Tsujikawa, S. (2010). " $f(R)$ theories." *Living Reviews in Relativity*, 13(1), 3.
- [23] Sotiriou, T. P., Faraoni, V. (2010). " $f(R)$ theories of gravity." *Reviews of Modern Physics*, 82(1), 451.
- [24] Mariusz P. Dabrowski. "Puzzles of dark energy in the Universe—phantom". In: *Eur. J. Phys.* 36.6 (2015), p. 065017. doi: 10.1088/0143-0807/36/6/065017. arXiv: 1411.2827 [gr-qc].
- [25] Fulvio Sbis'a. "Classical and quantum ghosts". In: *Eur. J. Phys.* 36 (2015), p. 015009. doi: 10.1088/0143-0807/36/1/015009. arXiv: 1406.4550 [hep-th].

- [26] William J. Wolf and Macarena Lagos. “Cosmological Instabilities and the Role of Matter Interactions in Dynamical Dark Energy Models”. In: Phys. Rev. D 100.8 (2019), p. 084035. doi: 10.1103/PhysRevD.100.084035. arXiv: 1908.03212 [gr-qc].
- [27] G. Pantazis, S. Nesseris, and L. Perivolaropoulos. “Comparison of thawing and freezing dark energy parametrizations”. In: Phys. Rev. D 93.10 (2016), p. 103503. doi: 10.1103/PhysRevD.93.103503. arXiv: 1603.02164 [astro-ph.CO].
- [28] Michael J. Mortonson, Wayne Hu, and Dragan Huterer. “Hiding dark energy transitions at low redshift”. In: Phys. Rev. D 80 (2009), p. 067301. doi: 10.1103/PhysRevD.80.067301. arXiv: 0908.1408 [astro-ph.CO].
- [29] Dragan Huterer and Michael S. Turner. “Prospects for probing the dark energy via supernova distance measurements”. In: Phys. Rev. D 60 (1999), p. 081301. doi: 10.1103/PhysRevD.60.081301. arXiv: astro-ph/9808133.
- [30] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. “Dynamics of dark energy”. In: Int. J. Mod. Phys. D 15 (2006), pp. 1753–1936. doi: 10.1142/S021827180600942X. arXiv: hep-th/0603057.
- [31] Di Valentino, E., Mena, O., Pan, S., Visinelli, L., Yang, W., Melchiorri, A., Mota, D. F., Riess, A. G., Silk, J. (2021). ”In the realm of the Hubble tension—a review of solutions.” Classical and Quantum Gravity, 38(15), 153001.
- [32] Takashi Nakamura and Takeshi Chiba. “Determining the equation of state of the expanding universe: Inverse problem in cosmology”. In: Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 306 (1999), pp. 696–700. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02551.x. arXiv: astro-ph/9810447.
- [33] Exploring the Expansion History of the Universe Eric V. Linder¹Physics Division, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA 94720
- [34] Manvendra Pratap Rajvanshi and J. S. Bagla. “Reconstruction of Dynamical Dark Energy Potentials: Quintessence, Tachyon and interacting models”. In: J. Astrophys. Astron. 40.6 (2019), p. 44. doi: 10.1007/s12036-019-9613-2. arXiv: 1905.01103 [astro-ph.CO].
- [35] Zong-Kuan Guo, Nobuyoshi Ohta, and Yuan-Zhong Zhang. “Parametrization of quintessence and its potential”. In: Phys. Rev. D 72 (2005), p. 023504. doi:10.1103/PhysRevD.72.023504. arXiv: astro-ph/0505253.
- [36] Eric V. Linder. “Exploring the expansion history of the universe”. In: Phys. Rev. Lett. 90 (2003), p. 091301. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.091301. arXiv: astro-ph/0208512.
- [37] Rubén Arjona, Wilmar Cardona, and Savvas Nesseris. “Unraveling the effective fluid approach for $f(R)$ models in the subhorizon approximation”. In: Phys. Rev. D 99.4 (2019), p. 043516. doi: 10.1103/PhysRevD.99.043516. arXiv: 1811.02469 [astro-ph.CO].

- [38] Dong Zhao, Yong Zhou, and Zhe Chang. “Anisotropy of the Universe via the Pantheon supernovae sample revisited”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 486.4 (2019), pp. 5679–5689. doi: 10.1093/mnras/stz1259. arXiv: 1903.12401 [astro-ph.CO].
- [39] R. R. Caldwell, Rahul Dave, and Paul J. Steinhardt. “Cosmological imprint of an energy component with general equation of state”. In: *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998), pp. 1582–1585. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.1582. arXiv: astro-ph/9708069.
- [40] Eric V. Linder. “The Dynamics of Quintessence, The Quintessence of Dynamics”. In: *Gen. Rel. Grav.* 40 (2008), pp. 329–356. doi: 10.1007/s10714-007-0550-z. arXiv: 0704.2064 [astro-ph].
- [41] C’eline Boehm, Julien Lesgourgues. DARK MATTER AND DARK ENERGY. <https://lesgourg.github.io/courses/DMDE EPFL.pdf>. Accessed: 2020-06-08.
- [42] Edward Macaulay, Ingunn Kathrine Wehus, and Hans Kristian Eriksen. “Lower Growth Rate from Recent Redshift Space Distortion Measurements than Expected from Planck”. In: *Phys. Rev. Lett.* 111.16 (2013), p. 161301. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.161301. arXiv: 1303.6583 [astro-ph.CO].
- [43] Shinji Tsujikawa. “Possibility of realizing weak gravity in redshift space distortion measurements”. In: *Phys. Rev. D* 92.4 (2015), p. 044029. doi: 10.1103/PhysRevD.92.044029. arXiv: 1505.02459 [astro-ph.CO].
- [44] Andrew Johnson et al. “Searching for Modified Gravity: Scale and Redshift Dependent Constraints from Galaxy Peculiar Velocities”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 458.3 (2016), pp. 2725–2744. doi: 10.1093/mnras/stw447. arXiv: 1504.06885 [astro-ph.CO].
- [45] Lavrentios Kazantzidis and Leandros Perivolaropoulos. “Evolution of the $f\sigma_8$ tension with the Planck15/ Λ CDM determination and implications for modified gravity theories”. In: *Phys. Rev. D* 97.10 (2018), p. 103503. doi: 10.1103/PhysRevD.97.103503. arXiv: 1803.01337 [astro-ph.CO].
- [46] Savvas Nesseris, George Pantazis, and Leandros Perivolaropoulos. “Tension and constraints on modified gravity parametrizations of $G_{\text{eff}}(z)$ from growth rate and Planck data”. In: *Phys. Rev. D* 96.2 (2017), p. 023542. doi: 10.1103/PhysRevD.96.023542. arXiv: 1703.10538 [astro-ph.CO].
- [47] F. Skara and L. Perivolaropoulos. “Tension of the EG statistic and redshift space distortion data with the Planck- Λ CDM model and implications for weakening gravity”. In: *Phys. Rev. D* 101.6 (2020), p. 063521. doi: 10.1103/PhysRevD.101.063521. arXiv: 1911.10609 [astro-ph.CO].

- [48] Benjamin L’Huillier, Arman Shafieloo, and Hyungjin Kim. “Model-independent cosmological constraints from growth and expansion”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 476.3 (2018), pp. 3263–3268. doi: 10.1093/mnras/sty398. arXiv: 1712.04865 [astro-ph.CO].
- [49] Alba Quelle and Antonio L. Maroto. “On the tension between growth rate and CMBdata”. In: *Eur. Phys. J. C* 80.5 (2020), p. 369. doi: 10.1140/epjc/s10052-020-7941-7. arXiv: 1908.00900 [astro-ph.CO]
- [50] F. Köhlinger et al. “KiDS-450: The tomographic weak lensing power spectrum and constraints on cosmological parameters”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 471.4 (2017), pp. 4412–4435. doi: 10.1093/mnras/stx1820. arXiv: 1706.02892 [astro-ph.CO].
- [51] Shahab Joudaki et al. “KiDS-450 + 2dFLenS: Cosmological parameter constraints from weak gravitational lensing tomography and overlapping redshift space galaxy clustering”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 474.4 (2018), pp. 4894–4924. doi: 10.1093/mnras/stx2820. arXiv: 1707.06627 [astro-ph.CO].
- [52] T. M. C. Abbott et al. “Dark Energy Survey year 1 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing”. In: *Phys. Rev. D* 98.4 (2018), p. 043526.
- [53] Varun Sahni. “The Cosmological constant problem and quintessence”. In: *Class. Quant. Grav.* 19 (2002). Ed. by P. Dunsby, G. Ellis, and Roy Maartens, pp. 3435–3448. doi: 10.1088/0264-9381/19/13/304. arXiv: astro-ph/0202076.
- [54] Steinhardt P.J. *Critical Problems in Physics*. Princeton University Press, 1997.
- [55] H. E. S. Velten, R. F. vom Martens, and W. Zimdahl. “Aspects of the cosmological “coincidence problem””. In: *Eur. Phys. J. C* 74.11 (2014), p. 3160. doi: 10.1140/epjc/s10052-014-3160-4. arXiv: 1410.2509 [astro-ph.CO].
- [56] B. Carter. “Large number coincidences and the anthropic principle in cosmology.” In: *Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data*. Ed. by M. S. Longair. Vol. 63. Jan. 1974, pp. 291–298.
- [57] Leandros Perivolaropoulos and Foteini Skara. “Challenges for Λ CDM: An update”. In: (May 2021). arXiv: 2105.05208 [astro-ph.CO].
- [58] N. Aghanim et al. “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”. In: *Astron. Astrophys.* 641 (2020), A6. doi: 10.1051/0004-6361/201833910. arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
- [59] Adam G. Riess et al. “Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Evidence for Physics beyond Λ CDM”. In: *Astrophys. J.* 876.1 (2019), p. 85. doi: 10.3847/1538-4357/ab1422. arXiv: 1903.07603 [astro-ph.CO].

- [60] Kenneth C. Wong et al. “H0LiCOW– XIII. A 2.4 per cent measurement of H_0 from lensed quasars: 5.3σ tension between early- and late-Universe probes”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 498.1 (2020), pp. 1420–1439. doi: 10.1093/ mnras/stz3094. arXiv: 1907.04869 [astro-ph.CO].
- [61] David Camarena and Valerio Marra. “Local determination of the Hubble constant and the deceleration parameter”. In: *Phys. Rev. Res.* 2.1 (2020), p. 013028. doi: 10.1103/PhysRevResearch.2.013028. arXiv: 1906.11814 [astro-ph.CO].
- [62]] A. Conley et al. “SUPERNOVA CONSTRAINTS AND SYSTEMATIC UNCERTAINTIES FROM THE FIRST THREE YEARS OF THE SUPERNOVA LEGACY SURVEY”. In: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 192.1 (Dec. 2010), p. 1. issn: 1538-4365. doi: 10.1088/0067-0049/192/1/1. url: <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/192/1/1>.
- [63] Adam G. Riess et al. “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”. In: *Astron. J.* 116 (1998), pp. 1009–1038. doi: 10.1086/300499. arXiv: astro-ph/9805201.
- [64] S. Perlmutter et al. “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae”. In: *Astrophys. J.* 517 (1999), pp. 565–586. doi: 10.1086/307221. arXiv: astro-ph/9812133.
- [65] Sean M. Carroll. “The Cosmological constant”. In: *Living Rev. Rel.* 4 (2001), p. 1. doi: 10.12942/lrr-2001-1. arXiv: astro-ph/0004075.
- [66] Steven Weinberg. “The Cosmological Constant Problem”. In: *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989). Ed. by Jong-Ping Hsu and D. Fine, pp. 1–23. doi: 10.1103/ RevModPhys.61.1.
- [67] Licia Verde. “Statistical methods in cosmology”. In: *Lect. Notes Phys.* 800 (2010), pp. 147–177. doi: 10.1007/978-3-642-10598-2_4. arXiv: 0911.3105 [astro-ph.CO].
- [68] In Jae Myung. “Tutorial on maximum likelihood estimation”. In: *Journal of Mathematical Psychology* 47.1 (2003), pp. 90–100. issn: 0022-2496. doi: [https://doi.org/10.1016/S0022-2496\(02\)00028-7](https://doi.org/10.1016/S0022-2496(02)00028-7). url: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022249602000287>.
- [69] Licia Verde. *Statistical Techniques for Data Analysis in Cosmology*. <https://www.ice.csic.es/personal/verde/verdeLecturesstat.pdf>. Accessed: 2021-05 11.
- [70] William H. Press et al. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. 3rd ed. USA: Cambridge University Press, 2007. isbn: 0521880688.
- [71] Celia Escamilla-Rivera. “Status on bidimensional dark energy parameterizations using SNe Ia JLA and BAO datasets”. In: *Galaxies* 4.3 (2016), p. 8. doi: 10.3390/galaxies4030008. arXiv: 1605.02702 [astro-ph.CO].

- [72] Ashley J. Ross et al. “The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample– I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$ ”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 449.1 (2015), pp. 835–847. doi: 10.1093/mnras/stv154. arXiv: 1409.3242 [astro-ph.CO].
- [73] Lauren Anderson et al. “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 441.1 (2014), pp. 24–62. doi: 10.1093/mnras/stu523. arXiv: 1312.4877 [astro-ph.CO].
- [74] Victoria de Sainte Agathe et al. “Baryon acoustic oscillations at $z = 2.34$ from the correlations of Ly α absorption in eBOSS DR14”. In: *Astron. Astrophys.* 629 (2019), A85. doi: 10.1051/0004-6361/201935638. arXiv: 1904.03400 [astro-ph.CO].
- [75] D. M. Scolnic et al. “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample”. In: *Astrophys. J.* 859.2 (2018), p. 101. doi: 10.3847/1538-4357/aab9bb. arXiv: 1710.00845 [astro-ph.CO].
- [76] D.M.Scolnic. Pantheon Data (github). <https://github.com/dscolnic/Pantheon>. Accessed: 2020-04-21.
- [77] D.M. Scolnic. Scolnic et al. Supernova Catalog. https://archive.stsci.edu/prepds/ps1cosmo/scolnic_datatable.html. Accessed: 2020-04-21.
- [78] L. Kazantzidis and L. Perivolaropoulos. “Hints of a Local Matter Underdensity or Modified Gravity in the Low z Pantheon data”. In: *Phys. Rev. D* 102.2 (2020), p. 023520. doi: 10.1103/PhysRevD.102.023520. arXiv: 2004.02155 [astro-ph.CO].
- [79] M. Betoule et al. “Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples”. In: *Astron. Astrophys.* 568 (2014), A22. doi: 10.1051/0004-6361/201423413. arXiv: 1401.4064 [astro-ph.CO].
- [80] Daniel J. Eisenstein et al. “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies”. In: *The Astrophysical Journal* 633.2 (Oct. 2005), pp. 560–574. issn: 1538-4357. doi: 10.1086/466512. url: <http://dx.doi.org/10.1086/466512>.
- [81] Eric Aubourg et al. “Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements”. In: *Phys. Rev. D* 92.12 (2015), p. 123516. doi: 10.1103/PhysRevD.92.123516. arXiv: 1411.1074 [astro-ph.CO].
- [82] G. Alestas, L. Kazantzidis, and L. Perivolaropoulos. “ H_0 tension, phantom dark energy, and cosmological parameter degeneracies”. In: *Phys. Rev. D* 101.12 (2020), p. 123516. doi: 10.1103/PhysRevD.101.123516. arXiv: 2004.08363 [astro-ph.CO].

- [83] G. Efstathiou and J. R. Bond. “Cosmic confusion: Degeneracies among cosmological parameters derived from measurements of microwave background anisotropies”. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 304 (1999), pp. 75–97. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02274.x. arXiv: astro-ph/9807103.
- [84] Oystein Elgaroy and Tuomas Multamaki. “On using the CMB shift parameter in tests of models of dark energy”. In: *Astron. Astrophys.* 471 (2007), p. 65. doi: 10.1051/0004-6361:20077292. arXiv: astro-ph/0702343.
- [85] Zhongxu Zhai and Yun Wang. “Robust and model-independent cosmological constraints from distance measurements”. In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2019.07 (July 2019), pp. 005–005. issn: 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2019/07/005. url: <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2019/07/005>.
- [86] Wayne Hu and Naoshi Sugiyama. “Small scale cosmological perturbations: An Analytic approach”. In: *Astrophys. J.* 471 (1996), pp. 542–570. doi: 10.1086/177989. arXiv: astro-ph/9510117.
- [87] Alan Heavens. “Statistical techniques in cosmology”. In: (June 2009). arXiv: 0906.0664 [astro-ph.CO].
- [88] Daniel Baumann. *Cosmology Lecture Notes*. <http://cosmology.amsterdam/education/cosmology/>. Accessed: 2020-04-09.
- [89] Leandros Perivolaropoulos. “Accelerating universe: observational status and theoretical implications”. In: *AIP Conf. Proc.* 848.1 (2006). Ed. by Lefteris Papantonopoulos, pp. 698–712. doi: 10.1063/1.2348048. arXiv: astro-ph/0601014.
- [90] Joshua Frieman, Michael Turner, and Dragan Huterer. “Dark Energy and the Accelerating Universe”. In: *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 46 (2008), pp. 385–432. doi: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243. arXiv: 0803.0982 [astro-ph].
- [91] Muhammad Omer Farooq. “Observational constraints on dark energy cosmological model parameters”. Other thesis. Sept. 2013. arXiv: 1309.3710 [astro-ph.CO].
- [92] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, Jan. 2015. isbn: 978-1-107-45398-2.
- [93] Monique Signore and D. Puy. “Supernova and cosmology”. In: *New Astron. Rev.* 45 (2001), pp. 409–423. doi: 10.1016/S1387-6473(00)00163-9. arXiv: astro-ph/0010634.
- [94] Bill S. Wright and Baojiu Li. “Type Ia supernovae, standardizable candles, and gravity”. In: *Phys. Rev. D* 97.8 (2018), p. 083505. doi: 10.1103/PhysRevD.97.083505. arXiv: 1710.07018 [astro-ph.CO].

- [95] Paolo A. Mazzali et al. “Can differences in the nickel abundance in Chandrasekhar mass models explain the relation between brightness and decline rate of normal type Ia supernovae?” In: *Astrophys. J.* 547 (2001), p. 988. doi: 10.1086/318428. arXiv: astro-ph/0009490.
- [96] W. D. Arnett. “Type I supernovae. I- Analytic solutions for the early part of the light curve”. In: *Astrophys. J.* 253 (1982), pp. 785–797. doi: 10.1086/ 159681.
- [97] E. Gaztanaga et al. “Bounds on the possible evolution of the gravitational constant from cosmological type Ia supernovae”. In: *Phys. Rev. D* 65 (2002), p. 023506. doi: 10.1103/PhysRevD.65.023506. arXiv: astro-ph/0109299.
- [98] Luca Amendola, Pier Stefano Corasaniti, and Franco Occhionero. “Time variability of the gravitational constant and type Ia supernovae”. In: (July 1999). arXiv: astro-ph/9907222.
- [99] Shinji Tsujikawa, 2013, «Quintessence: A Review», arXiv:1304.1961v2, [gr-qc], 5 Oct 2013, Tokyo-Japan.
- [100] Andrew R. Liddle, Paul Parsons and John D. Barrow, 1994, «Formalising the Slow-Roll Approximation in Inflation», arXiv:astro-ph/9408015v1-4 Aug 1994, Sussex-U.K.
- [101] Diego Saez Gomez, 2008, «Modified $f(R)$ gravity from scalar–tensor theory and inhomogeneous EoS dark energy», *General Relativity and Gravitation* (2011) DOI 10.1007/s10714-008-0724-3, Springer Science+Business Media, LLC 2008.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.