



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σκέδαση Ελαστικών Κυμάτων από μη Φραγμένες Επιφάνειες

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΙΜΠΙΔΗΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλειος Σεβρόγλου

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2024

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο/η συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οποιονδήποτε τρόπο παραχώρηση των δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση», (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιοδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων



Σκέδαση Ελαστικών Κυμάτων από μη Φραγμένες Επιφάνειες

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΤΣΙΜΠΙΔΗΣ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής

Βασίλειος Σεβρόγλου

Καθηγητής

Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Συνεπιβλέπων Καθηγητής:

Νικόλαος Τσίτσας

Καθηγητής

Τμήμα Πληροφορικής

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα από όλα ευχαριστώ το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο για τους νέους δρόμους γνώσης και σκέψης που ανοίγει μέσα από το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά », καθώς και για την υποστήριξη του Προγράμματος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Βασίλειο Σεβρόγλου, Καθηγητή στο τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς γιατί με εισήγαγε σε μια νέα για μένα ερευνητική περιοχή παρέχοντας μου ολόπλευρη στήριξη. Έδειξε κατανόηση και υπομονή σε δυσκολίες που αντιμετώπισα καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου, με παρότρυνε να είμαι αισιόδοξος και με ενθάρρυνε να συνεχίσω ακόμα πιο εντατικά την προσπάθεια μου . Καθοριστική επίσης ήταν η βοήθεια του συνεπιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Νικόλαο Τσίτσα Καθηγητή στο τμήμα πληροφορικής του Αριστοτέλειου πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης

Ευχαριστώ τους γονείς μου, Ιωάννη και Μάρθα, για όλα όσα έχω καταφέρει έως αυτή τη στιγμή. Αναμφίβολα, χωρίς την ανιδιοτελή βοήθεια τους δεν θα βρισκόμουν σε αυτό το σημείο σήμερα.

Τέλος το μεγαλύτερο ευχαριστώ το χρωστώ στην σύζυγό μου, Βάλια και στο πεντάχρονο παιδί μου για την αμέριστη συμπαράστασή και ενθάρρυνσή τους σε όλη την πορεία μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της εργασίας αυτής αποτελεί η σκέδαση των ελαστικών κυμάτων από μη φραγμένες επιφάνειες, στην οποία θα θεωρήσουμε μηδενισμό του πεδίου μετατοπίσεων (συνθήκη $u=0$, Dirichlet). Το κυματικό πεδίο θεωρείται ότι είναι αρμονικό και το μέσο διάδοσης είναι ομογενές και ισότροπο. Θα εξετάσουμε ελαστικά κύματα που διαδίδονται σε ένα άπειρο πεδίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, οριοθετημένο από μη φραγμένη επιφάνεια S , δοθείσα ως γράφημα μιας συνάρτησης $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, $\alpha \in (0,1]$.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως πρόβλημα συνοριακών τιμών για το σκεδασμένο πεδίο (*scattered field*) σε ένα μη φραγμένο χωρίο άνω της επιφάνειας σκέδασης. Η διατύπωση αυτού του προβλήματος περιλαμβάνει μια καινοτόμα συνθήκη ακτινοβολίας, η οποία χαρακτηρίζει το προσπίπτον κύμα. Θα αναλυθεί ο τρόπος με τον οποίο αυτή η συνθήκη ακτινοβολίας γενικεύει άλλες συνθήκες ακτινοβολίας που, συνήθως, χρησιμοποιούνται σε προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων. Έπειτα θα δειχθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών που μοντελοποιεί το πρόβλημα σκέδασης έχει το πολύ μία λύση για μια γενική κλάση των προσπιπτόντων πεδίων, συμπεριλαμβανομένων των επιπέδων και κυκλικών κυμάτων.

ABSTRACT

We consider the scattering of elastic waves by an unbounded surface on which the displacement vanishes. The wave field is assumed to be time-harmonic and the propagation medium to be homogeneous and isotropic. The scattering surface is assumed to be given as a graph of a bounded function $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, $\alpha \in (0,1]$.

The problem is formulated as a boundary value problem for the scattered field in the unbounded domain above the scattering surface. This boundary value problem formulation includes a novel radiation condition characterising upward propagating waves. The way in which this radiation condition generalizes other radiation conditions commonly employed in elastic wave scattering problems is discussed in detail. It is then shown that the boundary value problem, and thus the scattering problem, admits at most one solution for a general class of incident fields including plane and cylindrical waves.

Πίνακας Περιεχομένων

Περίληψη.....	5
Abstract.....	6
Εισαγωγή.....	8
1. Ορισμοί Βασικές Έννοιες.....	9
1.1. Γενικά περί κυμάτων.....	9
1.1.1. Είδη Κυμάτων.....	9
1.1.2. Μεγέθη των κυμάτων.....	11
1.2. Κυματικά Προβλήματα-Θεωρία σκέδασης.....	12
1.2.1. Προβλήματα σκέδασης.....	13
1.3. Περιγραφή Βασικών Μεθόδων Επίλυσης Προβλημάτων Σκέδασης.....	14
2. Το Πρόβλημα Σκέδασης των Ελαστικών Κυμάτων από μη Φραγμένες Επιφάνειες.....	19
2.1. Η Εξίσωση Navier.....	19
2.2. Το Πρόβλημα της Σκέδασης των Ελαστικών Κυμάτων από μη Φραγμένες Επιφάνειες	21
2.3. Βασικά Αποτελέσματα.....	23
3. Ελαστικά Δυναμικά σε μη Φραγμένες Επιφάνειες.....	26
3.1. Βασικές Ιδιότητες Ελαστικών Δυναμικών.....	26
3.2. Τελεστής Ψευδοτάσης.....	27
3.3. Αποτελέσματα Ομοιόμορφης Κανονικότητας για τα ελαστικά δυναμικά σε Φραγμένες Επιφάνειες.....	30
3.4. Η Κανονικότητα για τα Ελαστικά δυναμικά σε μη Φραγμένες Επιφάνειες.....	35
4. Συνθήκες Ακτινοβολίας και Μοναδικότητα σε μη Φραγμένες Επιφάνειες.....	43
4.1. Συνθήκες Ακτινοβολίας για Ελαστικά Κύματα.....	43
4.2. Μία νέα Συνθήκη Ακτινοβολίας για Σκέδαση σε μη Φραγμένες Επιφάνειες.....	47
4.3. Διατύπωση ως Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών και Μοναδικότητα της Λύσης.....	53
4.4. Συμπεράσματα.....	62
Βιβλιογραφία.....	65

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το **Πρόβλημα της Σκέδασης Ελαστικών Κυμάτων** από μη φραγμένες επιφάνειες (ανώμαλη) αναφέρεται στη μελέτη του τρόπου, με τον οποίο τα ελαστικά κύματα αλληλεπιδρούν και ανακλώνται από μια επιφάνεια που είναι ανώμαλη (ή μη επίπεδη). Η μη φραγμένη επιφάνεια (ανώμαλη) μπορεί να περιλαμβάνει μη επίπεδα σημεία, ραβδώσεις, κόγχες, κοίλες ή οποιαδήποτε άλλη μορφή παραμόρφωσης.

Η σκέδαση ελαστικών κυμάτων από μη φραγμένες επιφάνειες είναι σημαντική σε πολλούς τομείς, όπως η ακουστική, η ραδιοφωνία, η απεικόνιση με υπέρηχο, η ανίχνευση ακουστικών ελατηρίων και πολλά άλλα. Η κατανόηση της σκέδασης ελαστικών κυμάτων από μη φραγμένες επιφάνειες μπορεί να μας βοηθήσει να προβλέψουμε την εξάπλωση και την απόδοση των κυμάτων σε διάφορα περιβάλλοντα και συνθήκες.

Η ανάλυση του προβλήματος της σκέδασης ελαστικών κυμάτων από μη φραγμένες επιφάνειες υλοποιείται με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων και αριθμητικών μεθόδων πχ. η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ή η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, κ.ά για την πρόβλεψη και την κατανόηση της ανακλαστικής συμπεριφοράς των ελαστικών κυμάτων.

Από την μελέτη αυτού του προβλήματος είναι δυνατόν η ανάκτηση πληροφοριών σχετικών με την ανώμαλη επιφάνεια, (πχ. δομή, υφή, απότομη αλλαγή του υλικού ή άλλες φυσικές ιδιότητες της επιφάνειας), καθώς και ο υπολογισμός των μεταβολών της σκέδασης των κυμάτων σε διάφορες συνθήκες, πχ. η αλλαγή της γωνίας προσέγγισης ή η αλληλεπίδραση με άλλες δομές ή αντικείμενα.

Κατανοώντας το πρόβλημα της σκέδασης ελαστικών κυμάτων από μη φραγμένες επιφάνειες, μπορούμε να αναπτύξουμε καλύτερες τεχνικές για τον έλεγχο και την αξιοποίηση των ελαστικών κυμάτων σε διάφορους τομείς. Για παράδειγμα μπορούμε να:

- **Βελτιστοποιήσουμε την σχεδίαση αισθητήρων υπερήχων** για την απεικόνιση εσωτερικών δομών σε ιατρικές εφαρμογές.
- Κατανοήσουμε καλύτερα την συμπεριφορά και την **σκέδαση των ελαστικών κυμάτων σε γεωλογικούς σχηματισμούς** (Geological formations), με σκοπό τον εντοπισμό κοιτασμάτων ορυκτών πόρων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο:

Ορισμοί-Βασικές Έννοιες

1.1 Γενικά περί Κυμάτων

Σε αυτά που θα ακολουθήσουν θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες που σχετίζονται με τα κύματα και την σκέδαση όπως τα είδη κυμάτων καθώς και τα μεγέθη τους, τα κυματικά προβλήματα όπου θα εστιάσουμε στα προβλήματα σκέδασης και τέλος θα δούμε βασικές μεθόδους προβλημάτων σκέδασης

1.1.1. Είδη Κυμάτων

Κύμα: Οποιαδήποτε διαταραχή από την κατάσταση ισορροπίας η οποία διαδίδεται στο χώρο με πεπερασμένη ταχύτητα. Η ταχύτητα διαδόσεως του κύματος εξαρτάται από τις ελαστικές ιδιότητες του μέσου μεταδόσεως και από την πυκνότητά του. Υπάρχουν πολλά είδη κυμάτων, κοινό χαρακτηριστικό όλων είναι η μεταφορά ενέργειας. Βασικές κατηγορίες διάκρισης των κυμάτων έχουν να κάνουν με:

Την γεωμετρία του μέσου διάδοσης(κύματα χώρου και κύματα επιφάνειας)

Το σχήμα του κύματος (αρμονικά,στάσιμα,κτλ

Το σχήμα του μετώπου του κύματος(σφαιρικά κύματα, επίπεδα κύματα)

το μέσο διάδοσης όπου με κριτήριο αυτό διακρίνονται τρεις βασικές κατηγορίες:

- α) Τα **μηχανικά κύματα**, που ταξιδεύουν διαμέσου ενός υλικού(π.χ του νερού, του αέρα, ενός στερεού σώματος κτλ.)
- β) Τα **ηλεκτρομαγνητικά κύματα** όπου διαδίδονται στην ύλη και το κενό. Το διαταρασσόμενο μέγεθος είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Οι διαταραχές στα δύο πεδία είναι συμφασικές, ώστε να λαμβάνουν ταυτόχρονα τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τους. Τα κύματα αυτά είναι εγκάρσια
- γ) Τα **κύματα πιθανότητας** της Κβαντικής Φυσικής, στα οποία τα υποατομικά σωματίδια παρουσιάζουν και κυματικές ιδιότητες
- δ) Τα **Βαρυτικά κύματα** όπου συμπεριφέρονται όπως τα ηλεκτρομαγνητικά, με τη διαφορά ότι το μέσο διάδοσης είναι ο χωροχρόνος.

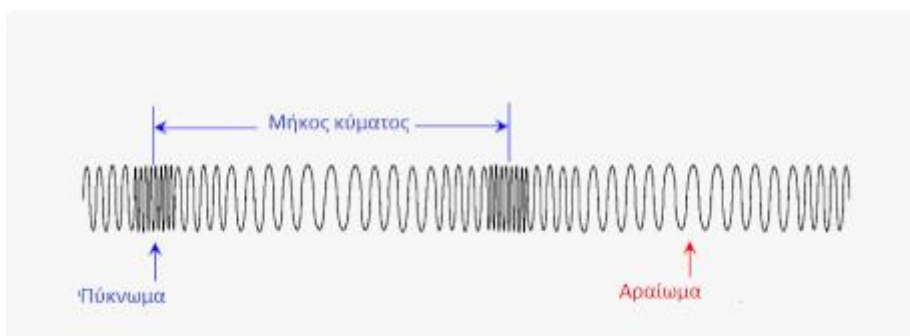
Την κατεύθυνση διαταραχής, όπου έχουμε τις επόμενες δύο βασικές κατηγορίες κυμάτων:

- α) Τα **Εγκάρσια κύματα** ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση διάδοσής τους είναι κάθετη στη διεύθυνση της ταλάντωσης των σωματιδίων που αποτελούν το μέσο διάδοσης. Στα εγκάρσια κύματα εμφανίζονται μέγιστα και ελάχιστα που ονομάζονται «όρη» και «κοιλιάδες» αντίστοιχα. Εγκάρσια κύματα διαδίδονται μόνο στα στερεά σώματα και κατά προσέγγιση στην επιφάνεια υγρών ,παράδειγμα τέτοια κίνησης είναι όταν μία λεπτή χορδή μεγάλου μήκους διαταραχθεί στο άκρο της από μία ταλαντευόμενη πηγή, δημιουργούνται κατά μήκος της εγκάρσια κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα που εξαρτάται από τις ιδιότητες του υλικού της.



- β) Τα **Διαμήκη κύματα** στα οποία η κατεύθυνση του διαταρασσόμενου μεγέθους είναι παράλληλη στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος. Στα διαμήκη κύματα ορίζονται πυκνώματα και αραιώματα. Παράδειγμα τέτοιου κύματος είναι μια διαταραχή που διαδίδεται στις σπείρες ενός ελατηρίου:

- **Πύκνωμα** είναι το σημείο στο οποίο υπάρχει η μέγιστη τιμή του διαταρασσόμενου μεγέθους. Στο παράδειγμα του ελατηρίου αντιστοιχεί σε πύκνωμα στις σπείρες.
- **Αραιώμα** είναι το σημείο στο οποίο υπάρχει η ελάχιστη τιμή του διαταρασσόμενου μεγέθους. Στο παράδειγμα του ελατηρίου αντιστοιχεί σε αραιώμα στις σπείρες.



Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες έχουμε συνδυασμό εγκάρσιου και διαμήκη κύματος όπως για παράδειγμα η κίνηση που εκτελούν τα κύματα του νερού.

1.1.2. Μεγέθη των κυμάτων

Συχνότητα (f) ενός κύματος ονομάζεται ο αριθμός των διαταραχών που δημιουργήθηκαν ή πέρασαν από ένα συγκεκριμένο σημείο ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή ο αριθμός των διαταραχών διά του χρονικού διαστήματος στο οποίο μετρήσαμε τον αριθμό των διαταραχών. Συμβολίζεται με f (frequency που σημαίνει συχνότητα στα Αγγλικά) και μετριέται σε δευτερόλεπτα εις τη μείον ένα ή s^{-1} , ή hz .

Περίοδος (T) ενός κύματος είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να κάνει ένα πλήρη κύκλο η κυματική διαταραχή και μετριέται σε sec . Ισχύει:

$$T=1\div f$$

Φάση κύματος χαρακτηρίζεται το μέγεθος που εκφράζει την απομάκρυνση ενός σώματος που εκτελεί ταλάντωση από τη θέση ισορροπίας του σε κάποιο δεδομένο χρόνο.

Κατά τη μελέτη των κυμάτων αποδείχθηκε ότι αυτά μπορούν να μελετηθούν με βάση τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η Φάση είναι βασικό μέγεθος αυτών των συναρτήσεων. Συμβολίζεται με ϕ και μετριέται όπως και οι γωνίες σε rad (ακτίνια). Η φάση στα κύματα εξαρτάται από το σημείο και το χρόνο για το οποίο μελετάμε. Συνήθως ένα κύμα περιγράφεται (προσεγγιστικά) από την εξίσωση $a=A\eta\mu(\phi(x,t))$ όπου $\phi(x,t)$ η συνάρτηση της φάσης συναρτήσει της θέσης x του σημείου που μελετάμε τη στιγμή t , a το μέγεθος που διαταράσσεται και A το πλάτος του κύματος. Η φάση συνήθως είναι γραμμική συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, δηλαδή της μορφής $\phi=at+bx$

Συμφασικά ή σε φάση ονομάζονται δύο σημεία που συμπεριφέρονται λόγω του κύματος με τον ίδιο τρόπο. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι βρίσκονται στο ίδιο σημείο της διαταραχής. Αν ϕ_1 η φάση του ενός και ϕ_2 η φάση του άλλου ισχύει $\phi_1=\phi_2+2k\pi$

Σε αντίθεση φάσης ονομάζονται τα σημεία που συμπεριφέρονται αντίθετα λόγω του κύματος. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι το ένα σημείο είναι συμφασικό με ένα τρίτο σημείο, που απέχει απόσταση μισό μήκος κύματος από το πρώτο στη διαταραχή. Αν ϕ_1 η φάση του ενός και ϕ_2 η φάση του άλλου ισχύει $\phi_1=\phi_2+2k\pi+\pi$.

Δύο κύματα του ίδιου είδους ίδιας συχνότητας που συμβάλλουν, επειδή υποχρεωτικά έχουν την ίδια ταχύτητα, σε κάθε σημείο του μέσου έχουν συγκεκριμένη διαφορά φάσης. Η διαφορά φάσης των

κυμάτων επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Αν τα κύματα είναι σε φάση, τότε το τελικό κύμα έχει πλάτος το άθροισμα των πλατών. Αν είναι σε αντίθεση φάσης έχουν πλάτος τη διαφορά των πλατών

- **Πλάτος του κύματος** ονομάζεται το πλάτος της ταλάντωσης των σωματιδίων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Το πλάτος του κύματος σχετίζεται με το ποσό της ενέργειας που μεταφέρεται μέσω του κύματος. **Όσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος τόσο μεγαλύτερη είναι και η ενέργεια** που μεταφέρεται για παράδειγμα τα μεγάλα θαλάσσια κύματα μεταφέρουν στον ίδιο χρόνο περισσότερη ενέργεια απ' ό,τι τα μικρά.
- **Μήκος κύματος(λ)** είναι η απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου. Το κύμα είναι περιοδικό φαινόμενο, ουσιαστικά η επανάληψη μιας διαταραχής. Το μήκος αυτής της διαταραχής είναι το μήκος κύματος. Συμβολίζεται με λ και μετριέται όπως και το πλάτος του κύματος σε μονάδες μήκους, συνήθως σε μέτρα. Το μήκος κύματος είναι ίσο με την ελάχιστη δυνατή απόσταση μεταξύ δύο διαφορετικών συμφασικών σημείων.
- **Φυσική ή κυματική ταχύτητα v** είναι η ταχύτητα της διαταραχής του κύματος. Συνήθως συμβολίζεται με v , και μετριέται ανάλογα με τις μονάδες μέτρησης των μεγεθών μήκος του κύματος και περίοδος, συνήθως σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο (m/s). Από τον ορισμό του μήκους κύματος προκύπτει ότι $v = \lambda/T = \lambda f$. Η εξίσωση $v = \lambda f$ ονομάζεται θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής και ισχύει σε όλα τα κύματα. Η κυματική ταχύτητα εξαρτάται από το υλικό που χρησιμοποιείται ως μέσο διάδοσης. Ειδικότερα ένα υλικό ονομάζεται:
 - **Ελαστικό** όταν επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση ταυτόχρονα με την άρση του αιτίου της παραμόρφωσης του
 - **Πλαστικό** όταν δεν επανέρχεται ποτέ στην αρχική του κατάσταση μετά την άρση του αιτίου της παραμόρφωσης του
 - **Βισκοελαστικό** όταν για να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση απαιτείται σχεδόν άπειρος χρόνος
 - **ομογενές** όταν έχει σε όλα τα σημεία του τις ίδιες ιδιότητες, δηλαδή οι ιδιότητες του είναι ανεξάρτητες της θέσης στην οποία αναφέρονται και που είναι και η φυσική ερμηνεία της ομοιογένειας του υλικού. Από μαθηματικής πλευράς αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν κάποιο φυσικό πρόβλημα παραμένουν αναλλοίωτες σε παράλληλη μετατόπιση. Δηλαδή αν η εξίσωση F περιγράφει ένα πρόβλημα σε τυχαία θέση r του \mathbb{R}^2 και η εξίσωση G περιγράφει το ίδιο πρόβλημα στην θέση $r+c$ για κάθε $c \in \mathbb{R}^2$ τότε οι F και G ταυτίζονται.

- **ισότροπο** όταν έχει την ιδιότητα να διατηρούν σε όλο τον όγκο του τις ίδιες ιδιότητες π.χ σταθερό δείκτη διάθλασης, σταθερή τιμή απορροφητικότητας της ακτινοβολίας κλπ. όπως είναι π.χ. ο αέρας, το νερό, το οινόπνευμα ή ακόμα και το γυαλί (-εφόσον είναι ομογενές και απαλλαγμένο από τάσεις) κ.λπ. Από μαθηματικής πλευράς αυτό σημαίνει ότι οι εξισώσεις που περιγράφουν κάποιο φυσικό πρόβλημα παραμένουν αναλλοίωτες σε κάθε μετασχηματισμό στροφής. Δηλαδή αν η εξίσωση F περιγράφει ένα πρόβλημα σε τυχαία θέση r και η εξίσωση G περιγράφει το ίδιο πρόβλημα στην θέση (A,r) όπου του \mathbb{R}^2 A πίνακας μετασχηματισμού, τότε οι F και G ταυτίζονται.

Αν σε ένα υλικό μέσο επιδράσουν ένα σύνολο ροπών και δυνάμεων τότε αυτό εκτελεί δύο είδη κινήσεων :

- 1) την κίνηση στερεού σώματος όταν έχουμε περιστροφή και μεταφορά
- 2) την κίνηση ελαστικού σώματος όπου το σώμα αλλάζει σχήμα και διογκώνεται ή συρρικνώνεται

Δύο είναι οι παράμετροι που περιγράφουν τις ελαστικές ιδιότητες ενός ισότροπου και ελαστικού μέσου, οι λ και μ . Οι σταθερές λ και μ αποτελούν τους δείκτες ελαστικότητας ενός υλικού και λέγονται σταθερές Lamé.

1.3 Κυματικά Προβλήματα-Θεωρία σκέδασης

Τα προβλήματα κυματικής που συναντά κανείς, αφορούν κάποια από τις μεγάλες περιοχές της ακουστικής, του ηλεκτρομαγνητισμού και της ελαστικότητας και διακρίνονται σε προβλήματα διάδοσης, προβλήματα ακτινοβολίας και προβλήματα

σκέδασης.

Η πρώτη κατηγορία ασχολείται με τη μελέτη του είδους και της μορφής των κυμάτων που διαδίδονται σε ένα μέσο (χώρο διάδοσης) και πως αυτά μπορούν να καθοριστούν από τις ιδιότητες του χώρου διάδοσης. Στην περίπτωση αυτή η πηγή των κυμάτων δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης, σε αντιδιαστολή με τη δεύτερη κατηγορία προβλημάτων, όπου εκεί μελετάται η συμπεριφορά και η μορφή των κυμάτων που παράγονται από μια συγκεκριμένη πηγή. Τα προβλήματα σκέδασης είναι πιο σύνθετα καθώς το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται όταν μέσα στο χώρο διάδοσης ενός γνωστού κυματικού πεδίου (προσπίπτον κύμα) υπάρχει ένα «εμπόδιο» (χωρική ασυνέχεια ή μεταβολή στις φυσικές παραμέτρους του χώρου), ο σκεδαστής, η ύπαρξη του οποίου οδηγεί στη δημιουργία ενός ακόμη πεδίου, του σκεδασμένου πεδίου και στην εκτροπή μέρους της ενέργειας του αρχικού κύματος.

Ως αποτέλεσμα, το σκεδασμένο πεδίο μεταφέρει τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή, σε αντίθεση με το προσπίπτον πεδίο που μεταφέρει μόνο τα χαρακτηριστικά της πηγής από την οποία προέρχεται.

Η λέξη σκέδαση προέρχεται ετυμολογικά από το αρχαίο ελληνικό ρήμα σκεδάννυμι που σημαίνει σκορπίζω-διασκορπίζω.

Υπάρχουν εφαρμογές του παραπάνω φαινομένου σε πολλούς τομείς όπως:

- Στην υγεία, με χρήση υπερήχων όπως για παράδειγμα μελέτη οργάνων του σώματος με χρήση υπερηχογραφήματος
- Στην ναυτιλία (σόναρ και βυθόμετρα για αποφυγή αβαθών και υφάλων)
- Στην αεροπλοΐα
- Στην γεωλογία (σεισμικά κύματα, εντοπισμός κοιτασμάτων πετρελαίου)

1.2.1 Προβλήματα σκέδασης

Τα προβλήματα σκέδασης διακρίνονται σε ευθέα και αντίστροφα. Ένα πρόβλημα σκέδασης χαρακτηρίζεται ως ευθύ πρόβλημα σκέδασης όταν είναι γνωστή η επιφάνεια και τα φυσικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή και αναζητείται το σκεδασμένο πεδίο και ως αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης όταν γνωρίζουμε τη μορφή του σκεδασμένου πεδίου και ζητάμε να προσδιορίσουμε το γεωμετρικό σχήμα και τις φυσικές ιδιότητες του σκεδαστή, ενώ και στους δύο τύπους προβλημάτων το προσπίπτον πεδίο είναι γνωστό. Ως αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ορίζεται ο καθορισμός των γεωμετρικών ή/και φυσικών ιδιοτήτων του σκεδαστή μέσω της εκ των προτέρων γνώσης που έχουμε για το προσπίπτον και το σκεδασμένο κυματικό πεδίο. Τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορες εφαρμογές και βρίσκονται στην αιχμή της σύγχρονης τεχνολογίας, όπως ο μη-καταστρεπτικός έλεγχος, η αξονική τομογραφία, τα ραντάρ, ο εντοπισμός και καθορισμός υπερήχων, η γεωφυσική και πολλά άλλα. Επιπλέον, εφαρμογές των αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης χρησιμοποιούνται ευρέως σε μελέτες που αφορούν τον τομέα της γεωφυσικής. Στη συνέχεια, αναφέρουμε τη μελέτη του προβλήματος σκέδασης, αρχικά του ευθέως και έπειτα του αντίστροφου. Αρχικά το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ορίζεται ως καλά τοποθετημένο κατά Hadamard, όταν έχουμε ύπαρξη μίας τουλάχιστον λύσης, μοναδικότητα λύσης και όταν η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Μία τέτοια λύση χαρακτηρίζεται ευσταθής. Η συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα είναι πολύ σημαντική

γιατί σε εφαρμοσμένα προβλήματα υπάρχουν αρχικές και συνοριακά δεδομένα τα οποία υπολογίζονται χρησιμοποιώντας μετρήσεις, με αποτέλεσμα να περιέχουν σφάλματα. Τα σφάλματα αυτά μεταφέρονται στη λύση και επομένως, η απαιτούμενη ευστάθεια μας εξασφαλίζει ότι μικρές τιμές σφάλματων των δεδομένων επιφέρουν αντίστοιχα μικρές τιμές στα σφάλματα της λύσης. Η καλή τοποθέτηση κατά Hadamard ενός ευθέως προβλήματος σκέδασης εξασφαλίζεται από τη συνθήκη ακτινοβολίας του A. Sommerfeld η οποία δηλώνει ότι το σκεδασμένο πεδίο πολύ μακριά από το σκεδαστή έχει τη μορφή ενός αποκλίνοντος σφαιρικού κύματος. Στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων οι S. Silver, C. Müller θεμελίωσαν μαθηματικά τη συνθήκη ακτινοβολίας ενώ στη σκέδαση ελαστικών κυμάτων, συνθήκες ακτινοβολίας για τα διαμήκη και τα εγκάρσια κύματα διατυπώθηκαν από τον V. Kupradze για τις τρεις διαστάσεις και από τον T. Arens , στις δύο διαστάσεις αντίστοιχα. Η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης συνδέεται άμεσα με τον καθορισμό των φυσικών ή/και γεωμετρικών ιδιοτήτων του σκεδαστή. Αρχικά μελετάται η μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος και στη συνέχεια ο προσδιορισμός/ανακατασκευή του σκεδαστή, η οποία επιτυγχάνεται με κατάλληλο αλγόριθμο αντιστροφής. Ενδεικτικά αναφέρουμε βιβλιογραφία σχετικά με ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης στην ακουστική , τον ηλεκτρομαγνητισμό και ελαστικότητα. Πληθώρα μαθηματικών όπως οι N. Logan , X. Pao και C. Mow έχουν περιγράψει εκτενώς την εξέλιξη της θεωρίας της σκέδασης ελαστικών κυμάτων. Ωστόσο, στην περιοχή της ελαστικότητας καθοριστική ήταν η συνεισφορά του V. Kupradze. Ο V. Kupradze απέδειξε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις και την καλή τοποθέτηση του προβλήματος, επιπλέον, διατύπωσε τις συνθήκες ακτινοβολίας που χαρακτηρίζουν τα συγκεκριμένα προβλήματα. Πρώτοι από όλους οι C. Ying και R. Truell μελέτησαν τη σκέδαση ελαστικών κυμάτων και έλυσαν πρόβλημα που αφορούσε τη σκέδαση επίπεδου διαμήκους κύματος το οποίο είχε προκληθεί από σκεδαστή σφαιρικού τύπου. Έπειτα, επιλύθηκε το αντίστοιχο πρόβλημα για το εγκάρσιο κυματικό πεδίο από τους N. Einspruch, E. Witterholt και R. Truell.

1.3 Περιγραφή Βασικών Μεθόδων Επίλυσης Προβλημάτων Σκέδασης

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε βασικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων σκέδασης. Αρχικά γίνεται σύντομη αναφορά σε τέσσερις ιστορικές μεθόδους και έπειτα παραθέτουμε μία εκτενή αναφορά στη μέθοδο της παραγοντοποίησης, factorization method,.

1. Η μέθοδος των Angell, Kleinman και Roach

Σε αυτή τη μέθοδο δημιουργείται ένα ισοδύναμο σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων του αρχικού προβλήματος σκέδασης. Η εφαρμογή της μεθόδου απαιτεί την επίλυση του συστήματος από όλες τις συχνότητες. Έχει αποδειχθεί ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου αυτής στην ακουστική για τα προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet, Neumann και διαπερατού σκεδαστή.

2. Η μέθοδος των Kirsch και Kress

Σε αυτή τη μέθοδο το σκεδασμένο κυματικό πεδίο αναπαρίσταται ως δυναμικό απλού στρώματος. Η ολοκλήρωση γίνεται στην ομαλή επιφάνεια πυκνότητας του εσωτερικού χωρίου που ορίζει το σύνορο του σκεδαστή. Υπολογίζεται το πλάτος σκέδασης ως ολοκλήρωμα έκφρασης, στην οποία συμμετέχει η πυκνότητα μέσω του δυναμικού απλού στρώματος. Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι να ανακατασκευαστεί η πυκνότητα επί της εσωτερικής επιφάνειας μέσω της υπέρθεσης των τιμών του πλάτους σκέδασης. Έτσι, επιλύεται προσεγγιστικά μία μη καλώς τοποθετημένη ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους.

3. Η μέθοδος των Colton και Monk

Η μέθοδος αυτή κυρίως χρησιμοποιείται για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Γίνεται χρήση των συναρτήσεων Herglotz. Σημαντική είναι η συμβολή του Γ. Δάσιου και Ζ. Ρήγου στην ανάπτυξη της μεθόδου αυτής στη σκέδαση ελαστικών κυμάτων για τις τρεις διαστάσεις. Οι τελευταίοι επιλύσαν το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ενός πλήρους τρισδιάστατου δυαδικού, τανιστικού, η οποία προκλήθηκε από ένα φραγμένο, σκληρό ελαστικά σώμα, το οποίο χαρακτηριζόταν από επιφανειακή συνοριακή συνθήκη μηδενισμού των μετατοπίσεων.

4. Η μέθοδος των Colton και Kirsch

Η μέθοδος των Colton και Kirsch χρησιμοποιείται για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Κατασκεύασαν αλγόριθμο ανακατασκευής μη διαπερατού σκεδαστή σε ομογενές και μη-ομογενές μέσο. Αυτό επιτεύχθηκε μέσω της εκ των προτέρων γνώσης που είχαν για τα πλάτη σκέδασης. Σημαντική είναι η συμβολή του Δ. Γκιντίδη και Κ. Κυριάκη όπου επέκτειναν την εφαρμογή της μεθόδου αυτής για τις περιπτώσεις του σκληρού σκεδαστή και της κοιλότητας στην τρισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα.

5. Η Μέθοδος της Παραγοντοποίησης

Η μέθοδος της παραγοντοποίησης έχει ως κύριο στόχο τον προσδιορισμό/την ανακατασκευή της άγνωστης επιφάνειας του σκεδαστή. Τα προβλήματα σκέδασης κατά την μελέτη των οποίων γίνεται εντοπισμός και ταυτοποίηση άγνωστων αντικειμένων μέσω της θεωρίας των ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων εντάσσονται στην κατηγορία των αντίστροφων προβλημάτων. Τα σύνθετα μοντέλα στη θεωρία της σκέδασης περιλαμβάνουν προβλήματα συνοριακών τιμών για ειδικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), όπως η εξίσωση Helmholtz στην ακουστική, οι εξισώσεις Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό και η εξίσωση Navier στην ελαστικότητα. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης είναι ο καθορισμός της ανομοιογένειας του μέσου διάδοσης από τις μετρήσεις του πεδίου. Η μελέτη τέτοιου τύπου προβλημάτων βρίσκει εφαρμογή στην ιατρική απεικόνιση, στην επιστήμη των υλικών, στον μη καταστρεπτικό έλεγχο, στην παρακολούθηση της σεισμικής δραστηριότητας και στην τομογραφία. Τα προβλήματα ανακατασκευής του σκεδαστή είναι εν γένει μη-γραμμικά, δηλαδή οι τιμές των μετρούμενων μεγεθών δεν εξαρτώνται γραμμικά από το προς ανακατασκευή αντικείμενο. Αυτό είναι αναμενόμενο αν λάβουμε υπόψη τα διάφορα φυσικά προβλήματα που συναντάμε. Ο πιο διαδεδομένος και επιτυχημένος τρόπος μελέτης αυτών των προβλημάτων είναι μέσω της χρήσης παραμετροποιήσεων προκειμένου να περιγράψουν προσεγγιστικά τα διάφορα εμπόδια (που συναντούν τα κυματικά πεδία). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται υπολογίζονται αριθμητικά μέσω κατάλληλων επαναληπτικών σχημάτων. Μία τέτοιου είδους μέθοδος που είναι ίσως και η πιο διαδεδομένη είναι η μέθοδος τύπου Newton. Οι μέθοδοι αυτού του τύπου ενώ πετυχαίνουν γρήγορη σύγκλιση, έχει τοπικό χαρακτήρα. Το κυριότερο μειονέκτημά τους είναι ότι απαιτείται η εκ των προτέρων γνώση σημαντικών πληροφοριών για το άγνωστο αντικείμενο, όπως οι συνθήκες διαπύδησης και ο τύπος των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος σκέδασης. Οι δυσκολίες και τα προβλήματα που παρουσιάζονται στις επαναληπτικές μεθόδους δημιούργησαν την ανάγκη να μελετηθούν και να αναπτυχθούν διαφορετικές μη-επαναληπτικές μέθοδοι των οποίων η λύση εξαρτάται αποκλειστικά από το ευθύ πρόβλημα και την καλή τοποθέτησή του. Μία τέτοια μέθοδος είναι αυτή της παραγοντοποίησης η οποία για να εφαρμοστεί απαιτείται να οριστούν ολοκληρωτικοί τελεστές που θα ικανοποιούν το θεμελιώδες θεώρημα των Kirsch και Grinberg . Συνήθως αυτό επιτυγχάνεται με την κατάλληλη παραγοντοποίηση των ολοκληρωτικών τελεστών μέσω των οποίων εκφράζεται το αρχικό πρόβλημα σκέδασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο:

Το Πρόβλημα Σκέδασης των Ελαστικών Κυμάτων από μη Φραγμένες Επιφάνειες

2.1 Η Εξίσωση Navier

Η διάδοση του ελαστικού κύματος, στο δυναμικό πρόβλημα, μέσα σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο στον \mathbb{R}^2 με σταθερές Lamé λ και μ περιγράφεται από ένα διανυσματικό πεδίο $u(x,t)$ που εκφράζει την τοπική μετατόπιση του σημείου $x \in \mathbb{R}^2$ του μέσου την χρονική στιγμή $t \in [0, +\infty)$ από την θέση ισορροπίας. Οι σταθερές Lamé λ και μ πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\mu > 0 \text{ και } \lambda + 2\mu > 0 \quad (2.1.1)$$

Η πρώτη σχέση απαιτεί η παραμόρφωση του ελαστικού μέσου να είναι στην διεύθυνση της δεδομένης τάσης που ασκείται στο μέσο και η δεύτερη σχέση ότι όταν το υλικό συμπιέζεται από παντού τότε συρρικνώνεται.

Ορίζουμε ως σ το τανυστικό πεδίο που χαρακτηρίζει την τάση στο σημείο x

χ. Από τον νόμο του Hooke προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\sigma = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu[\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (2.1.2)$$

για το πεδίο μετατοπίσεων u

Στην συνέχεια θεωρώντας μηδενική την εξωτερική επιβαλλόμενη δύναμη, η εξίσωση του Cauchy παίρνει την μορφή:

$$\nabla \cdot \sigma - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

όπου ρ η πυκνότητα του μέσου διάδοσης. Το μέσο θεωρείται ισότροπο και ομογενές, επομένως η τιμή της πυκνότητας παραμένει σταθερή σε όλα τα σημεία και λόγω της αρμονικής εξάρτησης του πεδίου από τον χρόνο

$$u(x,t)=u(x) e^{-i\omega t} \quad (2.1.4)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα, η εξίσωση (2.1.3) γίνεται:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \omega^2 u = 0 \quad (2.1.5)$$

Από την παραπάνω σχέση λόγω της (2.1.2) προκύπτει η φασματική εξίσωση Navier

$$(\Delta^* + \rho \omega^2) u = 0 \quad (2.1.6)$$

όπου Δ^* είναι ο τελεστής Navier και δίνεται από την σχέση

$$\Delta^* = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot) \quad (2.1.7)$$

Διαιρούμε την εξίσωση (2.1.6) με ρ και κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla \cdot u) - \Delta u \quad (2.1.8)$$

Προκύπτει η εξίσωση

$$c_p^2 \nabla(\nabla \cdot u) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times u) + \omega^2 u = 0 \quad (2.1.9)$$

Όπου οι σταθερές c_p και c_s δίνονται από τους τύπους

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{και} \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.1.10)$$

Από την εξίσωση (2.1.9) λαμβάνουμε την ακόλουθη μορφή για το πεδίο μετατοπίσεων

$$u = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times u) - \frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot u) \quad (2.1.11)$$

η οποία ορίζει ανάλυση κατά Helmholtz του $u \in C^2$, δηλαδή:

$$u = u_p + u_s \quad (2.1.12)$$

όπου

$$u_p = \frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot u), \quad u_s = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times u) \quad (2.1.13)$$

και ισχύουν

$$\nabla \times \mathbf{u}_p = 0 \text{ και } \nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 \quad (2.1.14)$$

Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για την αστρόβιλη u_p και την σωληνοειδή u_s συνιστώσα του \mathbf{u}

$$\Delta u_p + k_p^2 u_p = 0, \Delta u_s + k_s^2 u_s = 0 \quad (2.1.15)$$

όπου οι κυματάριθοι k_p και k_s δίνονται από τους τύπους

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \text{ και } k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (2.1.16)$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο μετατοπίσεων \mathbf{u} αποτελείται από δύο διαφορετικά κύματα, τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz. Το πεδίο u_p ορίζει τα διαμήκη κύματα (P-κύματα) με κυματάριθο k_p και ταχύτητα διάδοσης c_p και το πεδίο u_s ορίζει τα εγκάρσια κύματα (S-κύματα) με κυματάριθο k_s και ταχύτητα διάδοσης c_s .

Στην περίπτωση του στατικού προβλήματος, θεωρούμε $\omega = 0$ και το πεδίο μετατοπίσεων ικανοποιεί την ελαστοστατική εξίσωση Navier

$$\Delta^* \mathbf{u} = 0 \quad (2.1.17)$$

2.2 Το Πρόβλημα της Σκέδασης των Ελαστικών Κυμάτων από μη Φραγμένες Επιφάνειες

Η διάδοση χρονικά αρμονικών κυμάτων με κυκλική συχνότητα ω σε ένα ελαστικό στερεό με τις Lamé σταθερές μ, λ ($\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0$) διέπεται από την εξίσωση Navier:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.2.1)$$

Θα εξετάσουμε ελαστικά κύματα που διαδίδονται σε ένα άπειρο πεδίο $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, οριοθετημένο από μη φραγμένη επιφάνεια S , δοθείσα ως γράφημα μιας συνάρτησης $f \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$. Θα εξετάσουμε το ακόλουθο πρόβλημα σκέδασης:

Πρόβλημα Σκέδασης: Δεδομένου ενός προσπίπτων πεδίου \mathbf{u}^{inc} που είναι λύση της εξίσωσης (2.2.1) στο Ω , να βρεθεί το πεδίο \mathbf{u} της σκέδασης, έτσι ώστε $\mathbf{u}^{\text{inc}} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ στο S .

Μαθηματικά, θα διατυπώσουμε αυτό το πρόβλημα σκέδασης ως πρόβλημα συνοριακών τιμών για ένα διάνυσμα πεδίου $\mathbf{u} \in [C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})]^2$, που αποτελείται κατ' αρχήν από την εξίσωση Navier και τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο S . Ωστόσο, αυτή η διατύπωση δεν είναι καλά καθορισμένη, χωρίς μερικές επιπρόσθετες υποθέσεις για τη λύση.

Επιπλέον, πρέπει να επιβληθεί μια συνθήκη κατακόρυφης αύξησης και, ακόμη πιο σημαντικά, μια κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας. Πώς θα διατυπωθεί αυτή η συνθήκη δεν είναι σαφές, εκ των προτέρων, και η ερώτηση θα εξεταστεί με λεπτομέρεια στο Κεφάλαιο 4. Αυτή η συζήτηση οδηγεί στην τελική διατύπωση του **Προβλήματος Συνοριακών Τιμών (Boundary Value Problem)** για το \mathbf{u} ως Πρόβλημα 4.1.

Για να καθιερωθεί η ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα σκέδασης, θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της εξίσωσης του **Συνοριακού Ολοκληρώματος (Boundary Integral)**. Θα κάνουμε μια υπόθεση για το πεδίο σκέδασης ως ένα δυναμικό της μορφής:

$$u(x) = \int_S K(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad x \in \Omega, \quad (2.2.2)$$

όπου $\varphi \in [BC(S)]^2$, ο χώρος των φραγμένων και συνεχών διανυσματικών συναρτήσεων στο S .

Αυτή η υπόθεση οδηγεί σε μια ολοκληρωτική εξίσωση για το φ , η επίλυση της οποίας πρέπει να αποδειχθεί. Ωστόσο, προκύπτουν αρκετές δυσκολίες:

- Η πρώτη από αυτές είναι η κατάλληλη επιλογή του πίνακα πυρήνα K στην εξίσωση (2.2.2). Για να είναι καλά ορισμένο το ολοκλήρωμα για κάθε φραγμένη και συνεχή διανυσματική πυκνότητα φ , πρέπει να απαιτείται ότι:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{O}(|\mathbf{y}|^{-p}), \mathbf{y} \in S, |\mathbf{y}| \rightarrow \infty, \quad (2.2.3)$$

για κάθε $x \in \Omega$ και κάποιο $p > 1$. Επομένως, ο ελεύθερος χώρος τανυστής του Green, ο κανονικός/τυπικός πυρήνας στη θεωρία του δυναμικού, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση (2.2.3) μόνο για $p \leq 1/2$, δεν είναι κατάλληλη επιλογή.

Η δεύτερη δυσκολία είναι ότι οι ολοκληρωτικοί τελεστές που προκύπτουν από την ολοκληρωτική εξίσωση δεν μπορούν να θεωρηθούν συμπαγείς τελεστές στον χώρο των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων. Οπότε, για να μπορέσουμε να εξάγουμε την ύπαρξη λύσης στην ολοκληρωτική εξίσωση από την μοναδικότητα της λύσης, απαιτείται ένα πολύ πιο στοχαστική λύση από αυτή που απαιτείται στην περίπτωση του φραγμένου εμποδίου.

Αυτές οι δυσκολίες πρέπει να αντιμετωπιστούν για να επιλυθεί το πρόβλημα σκέδασης με τη θεωρία του Navier. Αυτό γίνεται με τη χρήση προηγμένων μαθηματικών εργαλείων όπως η *Θεωρία Αντιστροφής Καθολικής Προβολής (Theory of Global Projection Operators)* και η *Θεωρία Συνθήκης Ακτινοβολίας (Radiation Condition Theory)*. Αυτές οι θεωρίες επιτρέπουν την καλά

καθορισμένη διατύπωση και επίλυση του προβλήματος σκέδασης για ελαστικά κύματα από μη φραγμένες επιφάνειες με τη θεωρία του Navier.

Συνοψίζοντας, η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος σκέδασης ελαστικών κυμάτων από μη φραγμένες επιφάνειες, χρησιμοποιώντας τη θεωρία του Navier, περιλαμβάνει την εξίσωση Navier, τις οριακές συνθήκες Dirichlet στην επιφάνεια S , μια συνθήκη κατακόρυφης αύξησης και μια συνθήκη ακτινοβολίας.

2.3 Βασικά Αποτελέσματα

Σύμφωνα με τη θεωρία της γραμμικοποιημένης ελαστικότητας, η ομαλότητα των λύσεων της εξίσωσης του Navier (2.2.1) έως το όριο, αποδεικνύεται από μέσω των αποτελεσμάτων ομαλότητας για αδύναμες λύσεις συστημάτων ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Οι θεμελιώδεις λύσεις της εξίσωσης του Navier είναι ο ελεύθερου χώρου τανυστής Γ του Green και ο τανυστής $\Gamma_{D,h}$ του Green, για ένα ημιεπίπεδο με ένα άκαμπτο σύνορο. Ο τανυστής $\Gamma_{D,h}$ του Green ικανοποιεί την εξίσωση (2.2.3) με $p = 3/2$ [3]

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η μελέτη των ιδιοτήτων των ελαστικών δυναμικών, απλού και διπλού στρώματος, που ορίζονται από μη φραγμένες επιφάνειες χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση $\Gamma_{D,h}$. Όταν χρησιμοποιούμε έναν τελεστή ψευδοτάσης για να ορίσουμε τον πυρήνα ενός διπλού στρώματος δυναμικού, αυτός ο πυρήνας είναι ασθενώς μη ομαλός. Η ομαλότητα των ελαστικών δυναμικών, απλού και διπλού στρώματος σε μια φραγμένη, κλειστή επιφάνεια που καθορίζεται χρησιμοποιώντας τον ελεύθερου χώρου τανυστή Γ .

Η ομοιομορφία της ομαλότητας εκτιμάται στο σύνορο των καμπυλών, όπου υπάρχουν κάποιες βασικές γεωμετρικές ιδιότητες. Αυτή η ιδιότητα της ομοιομορφίας το κλειδί για να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα για τις κλειστές συνοριακές καμπύλες, καθώς και για να αποδειχθούν παρόμοια αποτελέσματα για τα δυναμικά που ορίζονται σε μη φραγμένες επιφάνειες, χρησιμοποιώντας τον τανυστή $\Gamma_{D,h}$ του Green ως πίνακα πυρήνα. Αυτά τα αποτελέσματα της ομαλότητας, παρουσιάζονται ως Θεωρήματα 3.5 και 3.6, στο Κεφάλαιο 3.

Για να μελετηθεί το πρόβλημα σκέδασης σε μη φραγμένες επιφάνειες απαιτείται να βρεθεί μια κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας. Αυτή η συνθήκη που ονομάζεται "Συνθήκη Ακτινοβολίας Ανόδου Διάδοσης" (*Upward Propagation Radiation Condition, UPRC*), παρουσιάζεται στον Ορισμό 4.5 έχει ορισμένες ιδιότητες. Τα πιο σημαντικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Θεώρημα 4.3, στο οποίο αναφέρεται αριθμός ισοδύναμων διατυπώσεων της UPRC, καθώς και δείχνεται η γενίκευση αυτής και πώς μπορεί να χαρακτηριστεί ως προς άλλες κανονικές συνθήκες ακτινοβολίας.

Η συνθήκη UPRC χρησιμοποιείται στη διατύπωση του **Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** (*Boundary Value Problem*) σε μη φραγμένες επιφάνειες ως Πρόβλημα 4.1. Εκτός από την εξίσωση Navier, τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet και την συνθήκη UPRC, η διατύπωση του **Προβλήματος Συνοριακών Τιμών** περιλαμβάνει, επίσης, μια συνθήκη ανάπτυξης που εξασφαλίζει ότι η λύση παραμένει φραγμένη σε όλες τις οριζόντιες λωρίδες. Το υπόλοιπο του Κεφαλαίου 4 περιλαμβάνει την απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης για το **Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών** (*Boundary Value Problem*) σε μη φραγμένες επιφάνειες ως Πρόβλημα 4.1 και Θεώρημα 4.6.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο:

Ελαστικά Δυναμικά σε μη Φραγμένες Επιφάνειες

Αντικείμενο αυτού του Κεφαλαίου είναι να μελετηθεί η ομαλότητα των αποτελεσμάτων για τα ελαστικά δυναμικά που ορίζονται στην επιφάνεια S , καθώς και οι ιδιότητες των σχετικών τελεστών ολοκλήρωσης. Σε όλο αυτό το κεφάλαιο, η μελέτη θα περιοριστεί σε επιφάνειες που δίδονται ως γράφημα συναρτήσεων $f \in C^{1,1}(\mathbb{R})$. Για να αποδειχθούν τα τελικά αποτελέσματα, επισημαίνεται ότι θα γίνει μια ειδική επιλογή των τιμών μ και λ στον ορισμό του γενικευμένου διανύσματος έντασης (stress vector), για το οποίο ο πυρήνας στον ορισμό του διπλού στρώματος δυναμικού έχει μόνο μια ασθενή ανωμαλία όταν $x \rightarrow y$ στο S . Εν συνεχεία, θα επαναδιατυπωθούν μερικές γνωστές ιδιότητες των ελαστικών δυναμικών στην περίπτωση μιας κλειστής συνοριακής καμπύλης. Ωστόσο, αυτά τα αποτελέσματα θα διαφέρουν από την συνήθη διατύπωση, καθώς θα δοθεί έμφαση στην ομοιομορφία ως προς μια συγκεκριμένη κλάση των συνοριακών καμπυλών.

Επιστρέφοντας στην περίπτωση της μη φραγμένης επιφάνειας S , τα αποτελέσματα για την κλειστή συνοριακή καμπύλη θα εφαρμοστούν αποσυνθέτοντας τα δυναμικά σε ένα λείο τμήμα, ορισμένο σε ολόκληρο το S , καθώς και σε ένα ιδιάζων (μη ομαλό) τμήμα με την υποστήριξη ενός συμπαγούς υποσυνόλου του S . Έτσι, προκύπτουν παρόμοια αποτελέσματα ομαλότητας για τα δυναμικά σε μη φραγμένη επιφάνεια.

3.1 Βασικές Ιδιότητες Ελαστικών Δυναμικών

Θα ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο εισάγοντας τις ελαστικές δυνατότητες που μας ενδιαφέρουν. Για μια διανυσματική πυκνότητα $\varphi \in [BC(S)]^2$, ορίζουμε ένα ελαστικό δυναμικό, απλού στρώματος σε μία μη φραγμένη επιφάνεια S , από το:

$$v(x) := \int_S \Gamma_{D,h}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } x \in U_h \setminus S \quad (3.1.1)$$

και ένα διπλού στρώματος δυναμικού στο S από το

$$v(x) := \int_S \Pi_{D,h}^{(2)}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } x \in U_h \setminus S \quad (3.1.2)$$

Αν υποθέσουμε ότι το D είναι ένα φραγμένο, απλά συνεκτικό πεδίο τάξης $C^{1,1}$, μπορούμε παρόμοια για $\varphi \in [C(\partial D)]^2$ να ορίσουμε ένα ελαστικό δυναμικό απλού στρώματος στο ∂D από το:

$$v_D(x) := \int_{\partial D} \Gamma(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.1.3)$$

και ένα ελαστικό δυναμικό, διπλού στρώματος

$$w_D(x) := \int_{\partial D} \Pi^{(2)}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.1.4)$$

Από τις ιδιότητες των θεμελιωδών λύσεων Γ και $\Gamma_{D,h}$, καθώς και των παραγώγων τους $\Pi^{(2)}$ και $\Pi^{(2)}_{D,h}$, είναι προφανές ότι όλα τα ολοκληρώματα υπάρχουν ως γενικευμένα (ή καταχρηστικά) ολοκληρώματα. Επιπλέον, το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα τυπικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.1: Τα δυναμικά v και w είναι λύσεις της εξίσωσης Navier στο $U_h \setminus \bar{\Omega}$ και στο Ω . Τα δυναμικά v_D και w_D είναι λύσεις της εξίσωσης Navier στο D και στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

3.2 Τελεστής Ψευδο-Τάσης

Θα χρησιμοποιηθεί ο γενικευμένος τελεστής ψευδο-τάσης P . Θα εξετάσουμε ποια επίδραση οι παράμετροι $\tilde{\mu}$ και $\tilde{\lambda}$ στον ορισμό έχουν ιδιόμορφη συμπεριφορά των παραγώγων της θεμελιώδους λύσης, $\Pi^{(j)}(x, y)$, $j = 1, 2$, για $|x - y| \rightarrow 0$. Θα διαπιστώσουμε ότι για την ειδική επιλογή $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, αυτές οι συναρτήσεις πίνακες γίνονται ασθενώς μη ομαλές. Σε αυτήν την περίπτωση, ο P ονομάζεται ψευδο-τελεστής έντασης [17].

Για να απλοποιήσουμε την έρευνα, εισάγουμε τον πίνακα του Kelvin και τον πίνακα των θεμελιωδών λύσεων για ελαστοστατικά προβλήματα, δηλαδή τα προβλήματα της συνοριακών τιμών, συμπεριλαμβανομένου της εξίσωσης του Navier με $\omega = 0$:

$$\Gamma_K(x, y) := \frac{3\mu + \lambda}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} \log \frac{1}{|x - y|} I + \frac{\mu + \lambda}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} J(x - y)$$

για $x, y \in \mathbb{R}^2$ $x \neq y$ με

$$J(z) := \frac{zz^T}{|z|^2}$$

Καθώς το ακόλουθο θεώρημα δείχνει, ο πίνακας συνάρτησης Γ_K έχει την ίδια ιδιόμορφη συμπεριφορά όπως ο Γ ο ίδιος.

Θεώρημα 3.2 Ο Πίνακας Συνάρτησης Δ ορίζεται από

$$\Delta(x,y) := \Gamma(x,y) - \Gamma_K(x,y), \quad x \neq y$$

ανήκει στο $[C^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)]^{2 \times 2}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Είναι αρκετό να δείξουμε ότι ο Δ είναι καλά ορισμένος και συνεχώς παραγωγίσιμος για $x = y$. Από τις ασυμπτωτικές αναπτύξεις για τις θεμελιώδεις λύσεις Φ_1 και Φ_2 που δίνονται στο [2], βλέπουμε ότι

$$\Delta(x,y) = \widetilde{\Phi}_1(|x-y|)I + \widetilde{\Phi}_2(|x-y|)J(x-y),$$

με

$$\widetilde{\Phi}_1(t) = \beta_1 t^2 \log t + \gamma + \log t O(t^4) + O(t^2)$$

$$\widetilde{\Phi}_2(t) = \beta_2 t^2 \log t + \gamma + \log t O(t^4) + O(t^2)$$

καθώς $t \rightarrow 0$, με σύνθετες σταθερές β_1, β_2 και γ .

Εισάγουμε, επιπλέον, τον πίνακα συνάρτησης $H^{(l)}$ ως

$$H^{(l)}(z) := -2z_l \frac{zz^T}{|z|^4} + \frac{e_l z^T + z e_l^T}{|z|^2}, \quad l=1,2$$

για $z \in \mathbb{R}^2$, όπου e_l υποδηλώνει το l -οστό καρτεσιανό μοναδιαίο διάνυσμα συντεταγμένων. Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta(x,y) = \widetilde{\Phi}'_1(|x-y|) \frac{x_1 + y_1}{|x-y|} I + \widetilde{\Phi}'_2(|x-y|) \frac{x_1 + y_1}{|x-y|} J(x-y) + \widetilde{\Phi}_2(|x-y|) H^{(l)}(x-y).$$

Καθώς

$$\widetilde{\Phi}'_1(t) = 3\beta_1 t \log t + \log t O(t^3) + O(t)$$

$$\widetilde{\Phi}'_2(t) = 3\beta_2 t \log t + \log t O(t^3) + O(t)$$

καθώς $t \rightarrow 0$, ακολουθεί η πρόταση

Θα εφαρμόσουμε τώρα τον γενικευμένο τελεστή έντασης $P^{(x)}$ στις στήλες του Γ_K . Ας συμβολίσουμε με Λ μια καμπύλη τάξης $C^{1,1}$ στο \mathbb{R}^2 και με $n(x)$ τον κάθετο σε αυτήν στο $x \in \Lambda$. Για $x \in \Lambda$, $y \in \mathbb{R}^2$ και θέτοντας $r := |x - y|$, καθώς και $C := (3\mu + \lambda)/(4\pi\mu(2\mu + \lambda))$, προκύπτει ότι:

$$\Gamma_{K,jk}(x, y) = C \left\{ \delta_{jk} \log \frac{1}{r} + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right\}$$

Επομένως, μετά από υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{K,jk}(x, y)}{\partial n(x)} &= C \left\{ \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial n(x)} \log \frac{1}{r} + \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \sum_{l=1}^2 n_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right\} \\ &= C \left\{ \frac{\partial}{\partial n(x)} \log \frac{1}{r} (\delta_{jk} + 2 \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)) - \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} (n_j \frac{\partial}{\partial x_k} \log \frac{1}{r} + n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{r}) \right\} \end{aligned}$$

Παρόμοια προκύπτει ότι:

$$\operatorname{div}_x \Gamma_{K,k} = \frac{2\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \frac{\partial}{\partial x_k} \log \frac{1}{r}$$

και επομένως

$$n(x) \operatorname{div}_x \Gamma_{K,k} = \frac{2\mu}{3\mu + \lambda} n_j \frac{\partial}{\partial x_k} \log \frac{1}{r}$$

Τελικά, ισχύει ότι:

$$(n^\perp(x) \operatorname{div}_x^\perp \Gamma_{K,k})_j = \sum_{l=1}^2 n_l \left(\frac{\partial \Gamma_{K,jk}(x, y)}{\partial n_{x_l}} - \frac{\partial \Gamma_{K,jk}(x, y)}{\partial x_j} \right) = 2C \frac{2\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \left\{ \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial n(x)} \log \frac{1}{r} - n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{r} \right\}$$

Συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα προκύπτει ακόλουθο Λήμμα:

$$\begin{aligned} (P^{(x)}(\Gamma_{K,k}(x, y)))_j &= C \frac{\partial}{\partial n(x)} \log \frac{1}{r} \left(\mu + \tilde{\mu} - 2\tilde{\mu} \frac{2\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \delta_{jk} + 2(\mu + \tilde{\mu}) \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + \\ &C n_k \frac{\partial}{\partial x_j} \log \frac{1}{r} \left(2\tilde{\mu} \frac{2\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} - (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right) + C n_j \frac{\partial}{\partial x_k} \log \frac{1}{r} \left(\tilde{\lambda} \frac{2\mu}{3\mu + \lambda} - (\mu + \tilde{\mu}) \frac{\mu + \lambda}{3\mu + \lambda} \right) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Λήμμα 3.1 Ας συμβολίσουμε με Λ μια καμπύλη τάξης $C^{1,1}$ στο \mathbb{R}^2 και ας υποθέσουμε ότι $x \in \Lambda$, $y \in \mathbb{R}^2$. Για την επιλογή $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, υπάρχει:

$$(P^{(x)}(\Gamma_{K,\kappa}(x,y)))_j = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\mu+\lambda}{3\mu+\lambda} \delta_{jk} + 2 \frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial n(x)} \log \frac{1}{r}$$

Απόδειξη: Άμεσα από την εξίσωση (3.2.1) εισάγοντας τις δοθείσες εκφράσεις $\tilde{\mu}$ και $\tilde{\lambda}$.

Παρατήρηση 3.1 Έστω Λ μια καμπύλη τάξης $C^{1,1}$ στο \mathbb{R}^2 και υποθέτουμε ότι $x, y \in \Lambda$. Τότε, ως αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.2 και του Λήμματος 3.1, παρατηρώντας το Θεώρημα 2.9 [3] τότε η εκτίμηση 2.14 [3] ισχύει με το Γ να αντικαθίσταται από το $\Pi^{(j)}$, $j = 1, 2$.

3.3 Αποτελέσματα Ομοιόμορφης Κανονικότητας για τα Ελαστικά δυναμικά σε Φραγμένες Επιφάνειες

Σκοπός αυτής της Ενότητας είναι να διατυπωθούν τα αποτελέσματα της κανονικότητας και τις σχέσεις άλματος για ελαστικά δυναμικά, που ορίζονται σε λείες, φραγμένες, και κλειστές επιφάνειες. Αυτά τα αποτελέσματα είναι γνωστά στην αρχή [16], [12]. Στην παρουσίαση σε αυτήν την ενότητα, θα βασιστούμε σε μεγάλο βαθμό στις αποδείξεις που δίνονται στο [12], αλλά τα αποτελέσματα θα γενικευτούν σε δύο σημαντικά σημεία.

Πρώτον, θα εξετάσουμε τις συνοριακές καμπύλες τάξης $C^{1,1}$ αντί για αυτές τάξης C^2 . Αυτή η επέκταση είναι σημαντική για τη θεωρία της επίλυσης, καθώς αυτή η θεωρία απαιτεί μια ιδιότητα συμπαγείας για φραγμένες οικογένειες τέτοιων επιφανειών σε μια ασθενή τοπολογία. Αυτή η ιδιότητα δεν θα ικανοποιείτο, χωρίς πρόσθετες ισοσυνεχείς υποθέσεις για οικογένειες C^2 επιφανειών.

Δεύτερον, θα προσδιορίσουμε τις ιδιότητες των συνοριακών καμπυλών, που καθορίζουν τις σταθερές στις εκτιμήσεις κανονικότητας. Έτσι, θα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε αυτά τα αποτελέσματα ομοιόμορφα για τις κλάσεις των πεδίων που μοιράζονται αυτές τις ιδιότητες.

Ας εξετάσουμε πρώτα τη γενίκευση σε στην συνοριακή καμπύλη $C^{1,1}$. Για μια λεπτομερή ανάλυση των δυναμικών ελαστικών που ορίζονται σε επιφάνειες Lyapunov, ανατρέξτε στο [14]. Για ένα σύνορο ∂D τάξης $C^{1,1}$, η καμπυλότητα $\kappa(x)$ μπορεί να οριστεί για σχεδόν όλα τα $x \in \partial D$. Επιπλέον, αναφερόμενοι στις παρατηρήσεις για τα πεδία $C^{1,\alpha}$, ισχύει ότι $\kappa \in L^\infty(\partial D)$ και $\|\kappa\|_{L^\infty(\partial D)} \leq H_1(D)$.

Μια προσεκτική ανασκόπηση της απόδειξης των εκτιμήσεων της κανονικότητας στο [12] αποκαλύπτει ότι η υπόθεση ενός συνόρου C^2 χρησιμοποιείται μόνο για να αποκτηθούν ορισμένες γεωμετρικές εκτιμήσεις, μέσω του αναπτύγματος Taylor μέχρι δευτέρας τάξης. Στην απόδειξη του

ακόλουθου Λήμματος (Λήμμα 1.1 στο [12]), αναφέρεται πως μπορούν αυτά τα αποτελέσματα να αποδειχθούν στην περίπτωση ενός συνόρου τάξης $C^{1,1}$.

Λήμμα 3.2 Για κάποιους αριθμούς $\kappa_0, \delta, M > 0$, υποθέτουμε ότι $D \in D_{1, \kappa_0, \delta, M}$

$$|n(x)(x - y)| \leq q|x - y|^2$$

$$|n(x) - n(y)| \leq q|x - y|$$

Για όλα τα $x, y \in \partial D$, με δοθείσα σταθερά q

$$q = \max\{\sqrt{2}\kappa_0, 2\left(\min\left\{\delta, \frac{1}{2\kappa_0}\right\}\right)^{-1}, \left(\min\left\{\delta, \frac{1}{2\kappa_0}\right\}\right)^{-2} M\}$$

Απόδειξη: Έστω ∂D παραμετροποιείται με βάση το μήκος τόξου και συμβολίζουμε με $t(s)$ και $n(s)$ τα διανύσματα εφαπτόμενης και κάθετης κατεύθυνσης στο s αντίστοιχα, καθώς επίσης και με $\kappa(s)$ την καμπυλότητα στο s , για όλα τα s όπου έχει οριστεί. Τότε:

$$\frac{\partial}{\partial s} |x(s) - x(s_0)|^2 = 2t(s)(x(s) - x(s_0))$$

$$\frac{\partial}{\partial s^2} |x(s) - x(s_0)|^2 = 2[1 - \kappa(s)n(s)(x(s) - x(s_0))]$$

όπου η δεύτερη εξίσωση ισχύει για σχεδόν όλα τα s . Επομένως:

$$|x(s) - x(s_0)|^2 = 2 \int_{s_0}^s \int_{s_0}^t [1 - \kappa(t')n(t')(x(t') - x(s_0))] dt' dt,$$

$$n(s_0)(x(s) - x(s_0)) = - \int_{s_0}^s \int_{s_0}^t \kappa(t')n(t')n(s_0) dt' dt,$$

Έτσι, αρχικά υποθέτουμε ότι $|x(s) - x(s_0)|^2 \leq \min\{\delta, (2\kappa_0)^{-1}\}$. Τότε μια εύκολη εκτίμηση του διπλού ολοκληρώματος στην πρώτη εξίσωση:

$$|x(s) - x(s_0)|^2 \geq \frac{1}{2}(s-s_0)^2$$

και συνεπώς, από την δεύτερη εξίσωση:

$$|n(s_0)(x(s) - x(s_0))| \leq \kappa_0 |x(s) - x(s_0)|^2$$

για $|x(s) - x(s_0)| > \min\{\delta, (2\kappa_0)^{-1}\}$, υπάρχει τετριμμένα:

$$|n(s_0)(x(s) - x(s_0))| \leq (\min\{\delta, \frac{1}{2\kappa_0}\})^{-2} M |x(s) - x(s_0)|^2$$

Παρόμοια έχουμε:

$$n(s) - n(s_0) = \int_{s_0}^s \kappa(t) t(t) dt,$$

Με την ίδια λογική όπως παραπάνω, έχουμε:

$$|n(s) - n(s_0)| \leq \max\{\sqrt{2}\kappa_0, 2 \left(\min\left\{\delta, \frac{1}{2\kappa_0}\right\}\right)^{-1}\} |x(s) - x(s_0)|$$

Για τα επόμενα επιχειρήματα, θεωρούμε ότι $\kappa_0, \delta, M > 0$. Για οποιονδήποτε $D \in D_1$, κ_0, δ, M και $\varphi \in [C(\partial D)]^2$, ορίζουμε το ελαστικό δυναμικό, διπλού στρώματος v_D , καθώς και το ελαστικό δυναμικό, διπλού στρώματος w_D από τις εξισώσεις (3.1.3) και (3.1.4) αντίστοιχα.

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε ο άνω δείκτης $-$ συμβολίζει το διάνυσμα χώρου ορισμένο στο D και ας θεωρήσουμε ο άνω δείκτης $+$ συμβολίζει το διάνυσμα χώρου ορισμένο στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Το ακόλουθο θεώρημα αναφέρει τα αποτελέσματα κανονικότητας για ένα ελαστικό δυναμικό, απλού στρώματος.

Θεώρημα 3.3 Ας υποθέσουμε ότι $D \in D_1$, κ_0, δ, M

(a) για $\varphi \in [C(\partial D)]^2$ και $\alpha \in (0, 1)$, υπάρχει $v_D \in [C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)]^2$ και

$$\|v_D\|_{0,\alpha,\mathbb{R}^2} \leq C \|\varphi\|_{\infty,\partial D}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα $\alpha, \kappa_0, \delta, M$

(b) για $\varphi \in [C^{0,\alpha}(\partial D)]^2$ και $\alpha \in (0, 1)$, η πρώτες τάξης παράγωγοι του v_D^\pm στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ και στο D έχουν $C^{0,\alpha}$ -επεκτάσεις στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ και στο \bar{D} αντίστοιχα. Επιπλέον, υπάρχει:

$$\|v_D^-\|_{1,\alpha,\bar{D}} \|v_D^+\|_{1,\alpha,\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} \leq C \|\varphi\|_{0,\alpha,\partial D}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα $\alpha, \kappa_0, \delta, M$. Για $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, υπάρχει

$$P_{v_D^\pm(x)} = \pm \frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{\partial D} \Pi^{(1)}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (3.3.1)$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα

(c) για $\varphi \in [C(\partial D)]^2$ και $\alpha \in (0, 1)$, υπάρχει

$$\int_{\partial D} \Gamma(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \in [C^{0, \alpha}(\partial D)]^2$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

$$\left\| \int_{\partial D} \Gamma(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \right\|_{0, \alpha, \partial D} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τις παραμέτρους α , κ_0 , δ , M .

Απόδειξη: Το Θεώρημα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο όπως το Θεώρημα 2.19 και 2.21 στο [12].

Αναφορικά με την εξάρτηση της σταθεράς C από τις παραμέτρους, μια ανασκόπηση της απόδειξης στο [12] δείχνει ότι όλες οι σταθερές εξαρτώνται από τις παραμέτρους κ_0 , δ , M , με παρόμοιο τρόπο όπως η σταθερά q στο Λήμμα 3.5.

Εφαρμόζοντας τα επιχειρήματα του [12] προκύπτει ότι (3.3.1) ισχύει για όλα τα $\tilde{\mu}$ και $\tilde{\lambda}$, με το ολοκλήρωμα να ορίζεται υπό της έννοιας της κύριας τιμής Cauchy.

Συνεπώς, το ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα για $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, προκύπτει από το Θεώρημα 3.2 και το Λήμμα 3.3.

Σημειώστε ότι το (c) εφαρμόζεται από το (a). Το αντίστοιχο θεώρημα για το ελαστικό δυναμικό, διπλού στρώματος είναι το εξής:

Θεώρημα 3.4 Υποθέτουμε ότι $D \in D_{1, \kappa_0, \delta, M}$

(a) Για $\varphi \in [C(\partial D)]^2$, $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, το ελαστικό δυναμικό διπλού στρώματος του w_D^\pm στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ και στο D έχει συνεχείς επεκτάσεις στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ και στο \bar{D} αντίστοιχα. Επιπλέον, υπάρχει:

$$\|w_D^-\|_{\infty, D} \|w_D^+\|_{\infty, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το κ_0 , δ , M και

$$\mathbf{w}_D^\pm(\mathbf{x}) = \pm \frac{1}{2} \varphi(\chi) + \int_{\partial D} \Pi^{(2)}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \mathbf{x} \in \partial D,$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα.

(b) Για $\varphi \in [C(\partial D)]^2$, $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\alpha \in [0, 1]$, υπάρχει:

$$\int_{\partial D} \Pi^{(j)}(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \in [C^{0,\alpha}(\partial D)]^2, \quad j=1,2,$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

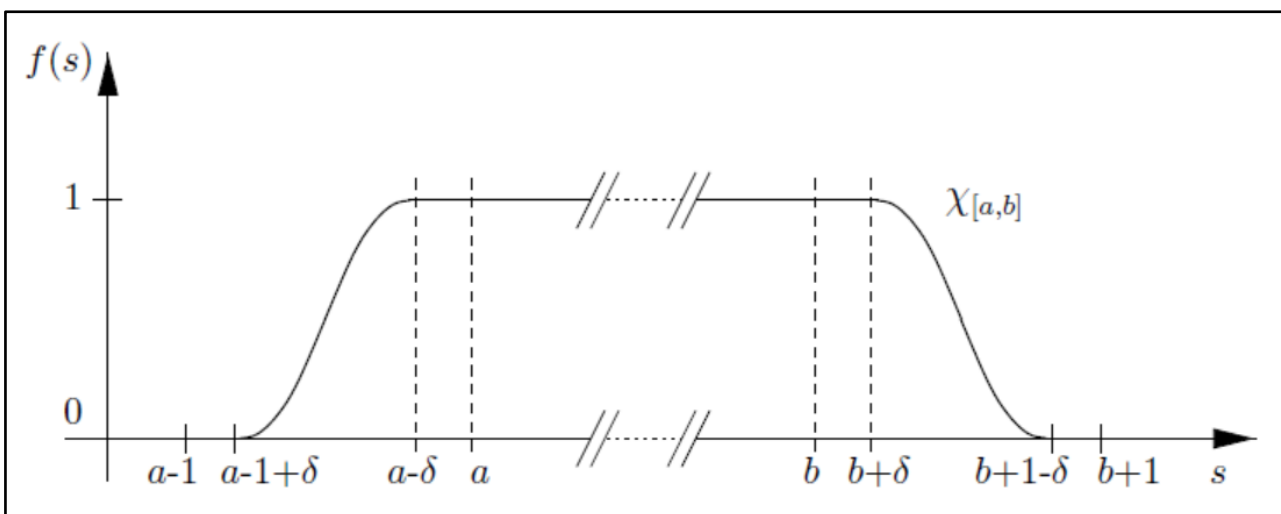
$$\left\| \int_{\partial D} \Pi^{(j)}(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \right\|_{0,\alpha,\partial D} \leq C \|\varphi\|_{\infty,\partial D} \quad j=1,2,$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , κ_0 , δ και M .

Απόδειξη: Παρατηρώντας επίσης το Λήμμα 3.2, η πρόταση συμπεραίνεται αναλογικά με το [14, Θεώρημα 2.20], αλλά χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο πυρήνας του ολοκληρώματος είναι ασθενώς μη ομαλός. Επίσης, παρατηρούμε το Θεώρημα 2.9 (c) για να δείξουμε την πρόταση σχετικά με το ολοκλήρωμα στον τύπο για το $\mathbf{w}_D^\pm(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial D$.

Είναι, επίσης, δυνατή η μελέτη της κανονικότητας των ελαστικών δυναμικών της επιφάνειας εάν η πυκνότητα ανήκει σε χώρο Sobolev κλασματικής τάξης. Τέτοιες μελέτες έχουν γίνει για παράδειγμα στο [5]. Θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Παρατήρηση 3.2 Υποθέτουμε ότι το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι κλάσης $C^{1,1}$, $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, και $\varphi \in [H^{1/2}(\partial D)]^2$. Τότε, υπάρχει $\mathbf{w}_D, \mathbf{v}_D \in [H^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \partial D)]^2$.



Εικόνα 3.1 Η Συνάρτηση $X_{[a,b]}$

3.4 Η Κανονικότητα για τα Ελαστικά δυναμικά σε μη Φραγμένες Επιφάνειες

Για να πετύχουμε παρόμοια αποτελέσματα ομαλότητας για τα ελαστικά δυναμικά που ορίζονται σε μη φραγμένη επιφάνεια, οι πυρήνες των συναρτήσεων θα διαχωριστούν σε τοπικά μη ομαλά τμήματα και τα υπόλοιπα τμήματα που είναι λεία. Οι εκτιμήσεις ομαλότητας που προκύπτουν θα είναι ομοιόμορφες ως προς συγκεκριμένες κλάσεις ορίων.

Για τον σκοπό αυτό, ορίζουμε τα $h \in \mathbb{R}^2$ και επίσης $c > h$ και $M > 0$. Από τον ορισμό του συνόλου $B_{i,c,M}$, θα δείξουμε την ομαλότητα των ελαστικών δυναμικών, ομοιόμορφα ως προς συναρτήσεις $f \in B_{i,c,M}$.

Επίσης, θέτω $H > M \geq \sup_{f \in B_{i,c,M}} \|f\|_{\infty, \mathbb{R}}$ και εισάγουμε τις περιοχές:

$$V_n := \{x \in U_h : n - 1 < x_1 < n + 1, x_2 < H\}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Από αυτό προκύπτει ότι για κάθε $x, y \in U_h \setminus \overline{U_h}$, υπάρχει είτε $n \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $x, y \in V^n$, είτε πρέπει να ισχύει $|x - y| \geq 1$.

Εισάγουμε, επίσης, μια C^∞ συνάρτηση χ με τις ακόλουθες ιδιότητες: $\chi(s) = 0$ για $s < \varepsilon$, $\chi(s) = 1$ για $s \geq 1 - \varepsilon$ για ένα $\varepsilon, \frac{1}{2} > \varepsilon > 0$. Για $a < b$, ορίζουμε:

$$\chi_{[a,b]}(s) := \begin{cases} 1, & a \leq s \leq b, \\ \chi(s - a + 1), & a - 1 < s < a \\ \chi(b - s + 1), & b < s < b + 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε, $\chi_{[a,b]} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Στα παρακάτω επιχειρήματα, θα δείξουμε την εξάρτηση μιας συνάρτησης ή ενός συνόλου από την συνοριακή συνάρτηση $f \in B_{i,c,M}$ με ένδειξη υπό ή άνω δείκτη f .

Από τον ορισμό (3.1.1) των ελαστικών δυναμικών, απλού στρώματος σε μη φραγμένες επιφάνειες, ορίζουμε για $f \in B_{i,c,M}$ και $\varphi \in [BC(S_f)]^2$:

$$v_{1,n}^f(x) := \int_{S_f} (\Gamma_{D,h}(x, y) - \chi_{[n-1, n+1]}(y_1) \varphi(y)) ds(y), \quad x \in V_n \setminus S_f,$$

και

$$v_{2,n}^f(x) := \int_{S_f} \Gamma(x, y) \chi_{[n-1, n+1]}(y_1) \varphi(y) ds(y), \quad x \in V_n \setminus S_f,$$

Στο $V_n \setminus S_f$, υπάρχει προφανώς $v^f = v_{1,n}^f + v_{2,n}^f$. Τώρα αναλύουμε την κανονικότητα αυτών των διανυσματικών πεδίων.

Λήμμα 3.3 Για $f \in B_{1,c,M}$ και $\alpha \in (0,1)$, υπάρχει $v_{1,n}^f \in C^{0,\alpha}(V_n)$ και

$$\|v_{1,n}^f\|_{0,\alpha,V_n} \leq C \|\varphi\|_{\infty,S_f},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α, c, M, h και H .

Απόδειξη: Για $x \in V_h, y \in S_f$, θέτουμε

$$K_{jk}(x, y) := \Gamma_{D,h,jk}(x, y) - \chi_{[n-1,n+1]}(y_1) \Gamma_{jk}(x, y), \quad j,k=1,2.$$

Από τα Θεωρήματα 2.10 και 2.13 [3], καθώς και το Θεώρημα 2.16 [3], γνωρίζουμε ότι K_{jk} είναι συνεχώς διαφορίσιμος στο $V_n \times S_f$ και ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\kappa \in L^1(\mathbb{R}) \cap BC(\mathbb{R})$, εξαρτημένη μόνο από το c, M, h και H , τέτοια ώστε:

$$\left. \begin{array}{l} |K_{jk}(x, y)| \\ |grand_x K_{jk}(x, y)| \end{array} \right\} \leq \kappa(x_1 -), \quad x \in V_n, y \in S_f \quad (3.4.1)$$

Έτσι, αμέσως προκύπτει για $x \in V_h$:

$$|v_{1,n}^f(x)| \leq 4(1+M) \|\kappa\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\varphi\|_{\infty,S_f} \quad x \in V_n \quad (3.4.2)$$

Για ορισμένο $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$S_{x,\varepsilon} := \{y \in S_f : |x_1 - y_1| < \varepsilon\}, \quad x \in V_n,$$

Τότε, αφήνοντας $x, x' \in V_n$ και υποθέτοντας $|x - x'| < \varepsilon$, από την (3.4.1) και το Θεώρημα της Μέσης Τιμής προκύπτει ότι:

$$\left| \int_{S_{x,2\varepsilon}} (K(x, y) - K(x', y)) \varphi(y) ds(y) \right| \leq 16(1+M) \|\kappa\|_{\infty(\mathbb{R})} \varepsilon^{2-\alpha} \|\varphi\|_{\infty,S_f} |x - x'|^\alpha. \quad (3.4.3)$$

Από την άλλη πλευρά, εκτιμούμε, επίσης,:

$$\left| \int_{S_f/S_{x,2\varepsilon}} (K(x,y) - K(x',y))\varphi(y)ds(y) \right| \leq 4(1+M)\|\kappa\|_{L^1(\mathbb{R})}\varepsilon^{1-\alpha}\|\varphi\|_{\infty,S_f}|x-x'|^\alpha. \quad (3.4.4)$$

Συνδυάζοντας την (3.4.2) και (3.4.4) παράγεται ο ισχυρισμός για $|x-x'| < \varepsilon$. Στην περίπτωση που $|x-x'| > \varepsilon$, από την (3.4.2), τετριμμένα προκύπτει ότι:

$$|v_{1,n}^f(x) - v_{1,n}^f(x')| \leq 8(1+M)\varepsilon^{-\alpha}\|\kappa\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\varphi\|_{\infty,S_f}|x-x'|^\alpha.$$

Λήμμα 3.4 Για $f \in B_{i,c,M}$ και $\alpha \in (0,1)$, υπάρχει $v_{2,n}^f \in C^{0,\alpha}(V_n)$ και

$$\|v_{2,n}^f\|_{0,\alpha,V_n} \leq C\|\varphi\|_{\infty,S_f},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α, c, M, h και H .

Απόδειξη: Ορίζουμε τα πεδία D_n^f , $f \in B_{i,c,M}$ με έναν πολύ παρόμοιο τρόπο με την κατασκευή που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 2, λίγο πριν από το Θεώρημα 2.7 [3]. Επιλέγοντας $\rho > 0$, ορίζουμε:

$$\chi_n(s) := \begin{cases} x(s-n+3), & s < n-2 \\ 1, & n-2 \leq s \leq n+2 \\ x(n+3-s), & n+2 < s \end{cases}$$

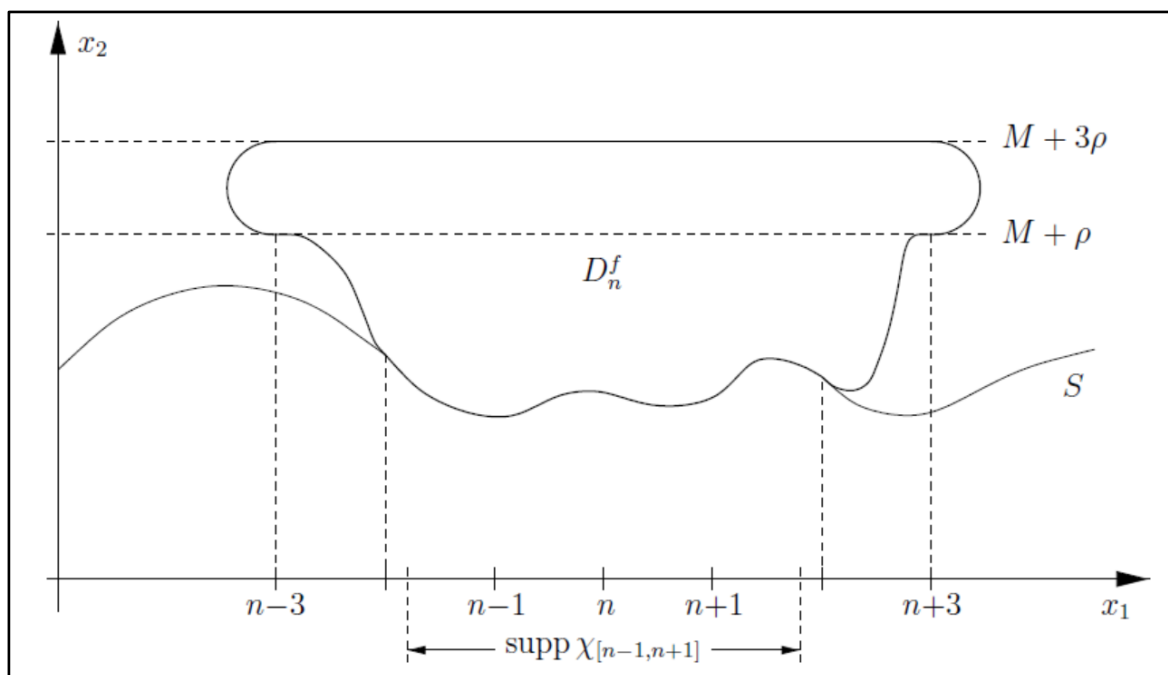
όπου χ είναι η ίδια συνάρτηση αποκοπής που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως σε αυτήν την ενότητα και θέτουμε:

$$\tilde{f}(s) := \chi_n(s)f(s) + (1-\chi_n(s))(M+\rho)$$

Μία κλειστή συνοριακή καμπύλη $C^{1,1}$ στο D_n^f , θα κατασκευαστεί τώρα όπως υποδεικνύεται παρακάτω και απεικονίζεται στο Σχήμα 3.2:

- Ανάμεσα στα σημεία $(n-3, \tilde{f}(n-3)^\top)$ και $(n+3, \tilde{f}(n+3)^\top)$, το ∂D_n^f είναι ταυτόσημο με το $\tilde{S}_f := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \tilde{f}(x_1)\}$,
- Έξω από το αυτήν την τομή, το ∂D_n^f επεκτείνεται με δύο ημικύκλους ακτίνας ρ ,
- Το ∂D_n^f κλείνεται από μια ευθεία γραμμή που συνδέει τους δύο ημικύκλους.

Το πεδίο ∂D_n^f είναι έτσι ένα φραγμένο, απλά συνεκτικό πεδίο κλάσης $C^{1,1}$. Επιπλέον, υπάρχουν σταθερές κ_0, δ και \tilde{M} , εξαρτημένες μόνο από το c, M και ρ έτσι ώστε $D_n^f \subset D_{1, \kappa_0, \delta, \tilde{M}}$ για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$ και $f \in B_{1, c, M}$. Επίσης, μεταξύ $(n-2, f(n-2))$ και $(n+2, f(n+2))$, ∂D_n^f είναι ταυτόσημο με το S_f .



Εικόνα 3.2 Κατασκευή στο πεδίο D_n^f

Καθώς $\text{supp} \chi_{[n-1, n+1]} \subset \subset (n-2, n+2)$, μπορούμε να ορίσουμε την πυκνότητα $\psi \in [BC(D_n^f)]^2$ από

$$\psi(x) := \begin{cases} \chi_{[n-1, n+1]}(x_1) \varphi(x), & x \in \partial D_n^f \cap S_f \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τότε

$$v_{2,n}^f(x) = \int_{\partial D_n^f} \Gamma(x, y) \psi(y) ds(y)$$

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.6 (α) ολοκληρώνει τώρα την απόδειξη.

Τα δύο προηγούμενα λήμματα αποτελούν τα βασικά στοιχεία για την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος, στο οποίο δίνονται τα αποτελέσματα κανονικότητας για τα ελαστικά δυναμικά, απλού στρώματος, σε μη φραγμένη επιφάνεια. Στη διατύπωσή του, καθώς και στα επόμενα επιχειρήματα σε αυτό το Κεφάλαιο, ας ορίσουμε έναν άνω δείκτη, που συμβολίζεται $^+$ διάνυσμα χώρου ορισμένο στο Ω_f και έναν άνω δείκτη, που συμβολίζεται $^-$ διάνυσμα χώρου ορισμένο στο $U_n \setminus \bar{\Omega}_f$.

Θεώρημα 3.5 Υποθέτω $f \in B_{1,c,M}$ και

(a) Για $\varphi \in [BC(S_f)]^2$ και $\alpha \in (0,1)$, υπάρχει $v_f \in [V^{0,\alpha}(U_n)]^2$ και

$$\|v_f\|_{0,\alpha,U_n \setminus \bar{U}_H} \leq C \|\varphi\|_{\infty,S_f},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , c , M , h και H .

(b) Για $\varphi \in [C^{0,\alpha}(S_f)]^2$ και $\alpha \in (0,1)$, η πρώτη τάξης παράγωγοι του V_f^\pm στο Ω_f και στο $U_h \setminus \bar{\Omega}_f$ έχουν $C^{0,\alpha}$ – επεκτάσεις στο $\bar{\Omega}_f$ και στο $U_h \setminus \bar{\Omega}_f$ αντίστοιχα. Επιπλέον, υπάρχει:

$$\|v_f^-\|_{1,\alpha,U_h \setminus \Omega_f} \|v_f^+\|_{1,\alpha,\bar{\Omega}_f \setminus \bar{U}_H} \leq C \|\varphi\|_{0,\alpha,S_f},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , c , M , h και H .

Για $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ υπάρχει

$$P_{V_f}^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{S_f} \Pi_{D,h}^{(1)}(x,y) \varphi(y) ds(y) \quad x \in S_f,$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

(c) Για $\varphi \in [BC(S_f)]^2$, και $\alpha \in [0,1]$, υπάρχει:

$$\int_{S_f} \Gamma_{D,h}(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \in [C^{0,\alpha}(S_f)]^2,$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

$$\left\| \int_{S_f} \Gamma_{D,h}(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \right\|_{0,\alpha,S_f} \leq C \|\varphi\|_{\infty,S_f}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , c , M και h .

Απόδειξη: Από τα Λήμματα 3.3 και 3.4 συμπεραίνουμε αμέσως ότι $\mathbf{v}_f \in C(U_h)$ και

$$\|\mathbf{v}_f\|_{\infty, U_h \setminus \overline{U_H}} \leq C \|\varphi\|_{\infty, S_f} \quad (3.4.5)$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , c , M , h και H .

Για x, y στο $U_h \setminus \overline{U_H}$, υπάρχει είτε ένας ακέραιος $n \in \mathbb{Z}$ με x, y στο V_n είτε $|x-y| \geq 1$. Στη δεύτερη περίπτωση, εύκολα τετριμμένα προκύπτει από την (3.4.5) ότι:

$$|\mathbf{v}_f(x) - \mathbf{v}_f(y)| \leq C \|\varphi\|_{\infty, S_f} |x-y|^\alpha$$

Ωστόσο, στην πρώτη περίπτωση, η ίδια εκτίμηση προκύπτει από τα Λήμματα 3.3 και 3.4. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του μέρους (α).

Καθώς ο πυρήνας συνάρτησης στον ορισμό του $v_{1,n}^f$ είναι απείρως λείος, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την σειρά της ολοκλήρωσης και της διαφοροποίησης. Έτσι, με έναν απευθείας αναλογικό τρόπο προς την απόδειξη του Λήμματος 3.3, προκύπτει η ίδια εκτίμηση για οποιαδήποτε πρώτη παράγωγο του $v_{1,n}^f$.

Για να δείξουμε το (b), προχωρούμε όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 3.4, εφαρμόζοντας μόνο το Θεώρημα 3.3 (b) και χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για το μέρος (a).

Το μέρος (c) είναι άμεση συνέπεια του μέρους (a).

Τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν για το Θεώρημα 3.5 μπορούν να εφαρμοστούν για να αποδείξουν την κανονικότητα για τα ελαστικά δυναμικά, διπλού στρώματος. Απλώς πρέπει να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.4 για να λάβουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 3.6 Υποθέτω $f \in B_{i,c,M}$,

- (a) Για $\varphi \in [BC(S_f)]^2$, $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$, το ελαστικό δυναμικό διπλού στρώματος του w_f^\pm στο Ω_f και στο $U_h \setminus \overline{\Omega_f}$ έχει συνεχείς επεκτάσεις στο $\overline{\Omega_f}$ και στο $U_h \setminus \Omega_f$ αντίστοιχα. Επιπλέον, υπάρχει

$$\|w_f^\pm\|_{\infty, U_h \setminus \Omega_f} \|w_f^+\|_{\infty, \overline{\Omega_f}} \leq C \|\varphi\|_{\infty, S_f},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , c , M , h και H και

$$w_{V_f}^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{S_f} \Pi_{D,h}^{(2)}(x,y) \varphi(y) ds(y) \quad x \in S_f$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα.

- (b) Για $\varphi \in [BC(S_f)]^2$, $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\alpha \in (0,1)$, υπάρχει

$$\int_{S_f} \Pi_{D,h}^{(j)}(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \in [C^{0,\alpha}(S_f)]^2, \quad j=1,2$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

$$\left\| \int_{S_f} \Pi_{D,h}^{(j)}(\cdot, y) \varphi(y) ds(y) \right\|_{0,\alpha,S_f} \leq C \|\varphi\|_{\infty,S_f} \quad j=1,2$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το α , c , M , και h .

Για ορισμένα επιχειρήματα, θα είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τα ελαστικά δυναμικά στρώματα στον χώρο Sobolev $[H_{loc}^1(U_h)]^2$.

Χρησιμοποιώντας την Σημείωση 3.1 και ακολουθώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά στα Λήμματα 3.3 και 3.4, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Σημείωση 3.1 Υποθέτουμε ότι $\tilde{\mu} = \mu(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\tilde{\lambda} = (2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)/(3\mu + \lambda)$ και $\varphi \in [H_{loc}^{1/2}(S)]^2$. Τότε υπάρχει $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in [H_{loc}^1(U_h \setminus S)]^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:

Συνθήκες Ακτινοβολίας και Μοναδικότητα σε μη Φραγμένες Επιφάνειες

Σε αυτό το Κεφάλαιο, το πρόβλημα της σκέδασης σε μη φραγμένες επιφάνειες θα διατυπωθεί μαθηματικά ως ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών στο χώρο Ω . Για να εξασφαλιστεί η καλή διατύπωση αυτού του προβλήματος, θα πρέπει να συμπεριληφθεί η συνθήκη ακτινοβολίας. Θα αρχίσουμε, λοιπόν, εξετάζοντας μερικές από τις συνθήκες ακτινοβολίας που έχουν χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων. Στη συνέχεια, προχωρούμε στον ορισμό μιας νέας συνθήκης ακτινοβολίας, που ονομάζεται

"Συνθήκη Ακτινοβολίας Ανόδου Διάδοσης" (*Upward Propagation Radiation Condition, UPRC*), και αναλύουμε τις ιδιότητές της, ειδικότερα πώς γενικεύει μερικές από τις πιο συμβατικές συνθήκες. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τη διατύπωση του προβλήματος σκέδασης ως Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών και, τελικά, θα αποδείξουμε ότι αυτό το πρόβλημα δέχεται το πολύ μία λύση.

4.1 Συνθήκες Ακτινοβολίας για Ελαστικά Κύματα

Από φυσικής άποψης, είναι σαφές ότι πεδίο σκέδασης θα πρέπει να αποτελείται από κύματα που ταξιδεύουν κατά μήκος ή μακριά από το εμπόδιο σκέδασης. Όταν διατυπώνεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών, η μοναδικότητα της λύσης μπορεί να διασφαλιστεί μόνο αν συμπεριληφθεί μια μαθηματική χαρακτηριστική αναπαράσταση τέτοιων πεδίων στη διατύπωση. Μια τέτοια χαρακτηριστική αναπαράσταση ονομάζεται συνθήκη ακτινοβολίας.

Ίσως, η πιο γνωστή συνθήκη ακτινοβολίας στη θεωρία σκέδασης είναι αυτή που εισήγαγε ο A. SOMMERFELD στην εργασία του Habilitation [21] το 1896. Μια σύγχρονη παρουσίαση αυτής της συνθήκης και του ρόλου της σε προβλήματα σκέδασης που περιλαμβάνουν φραγμένα εμπόδια δίνεται από τους COLTON/KRESS [13]. Η διατύπωση της συνθήκης ακτινοβολίας του Sommerfeld για την περίπτωση ελαστικών κυμάτων οφείλεται στον KUPRADZE [17], και μια σύγχρονη έκδοση αυτής της διατύπωσης δίνεται εδώ:

Ορισμός 4.1: Έστω $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα φραγμένο πεδίο. Μια λύση $\mathbf{u} \in [C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})]^2$ για την εξίσωση Navier στο εξωτερικό του D λέγεται ότι ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας του Kupradze αν:

$$\frac{\partial u_p}{\partial r} - ik_p u_p = o(r^{-1/2}) \text{ και } \frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_s u_s = o(r^{-1/2}) \quad (4.1.1)$$

Στην περίπτωση προβλημάτων σκέδασης, που εμπλέκουν έναν μη φραγμένο σκεδαστή, δεν είναι σαφές ότι η εξίσωση (4.1.1) συνεπάγεται απαραίτητα ένα συγκεκριμένο ρυθμό διάσπασης για την $u(x)$ καθώς $|x| \rightarrow \infty$. Έτσι, για προβλήματα ανάκλασης αυτού του τύπου, εισάγουμε την ακόλουθη έννοια ενός ακτινοβολούμενου κύματος:

Ορισμός 4.2: Έστω $H \subseteq \mathbb{R}$. Μια λύση $\mathbf{u} \in [C^2(U_H)]^2$ για την εξίσωση Navier λέγεται ότι ακτινοβολεί αν:

$$u_p = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u_p}{\partial r} - ik_p u_p = o(r^{-1/2})$$

και

$$u_s = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} - ik_s u_s = o(r^{-1/2})$$

ομοιόμορφα στο x/r για $x \in U_H$, καθώς $r := |x| \rightarrow \infty$.

Παρατήρηση 4.1: Ένα διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Kupradze στο πνεύμα του Ορισμού 4.1 για ένα ορισμένο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι, επίσης, ακτινοβόλο στο πνεύμα του Ορισμού 4.2 για οποιοδήποτε H , ώστε $D \cap U_H = \emptyset$ (δείτε, για παράδειγμα, τον τύπο (3.63) στο [4]).

Όπως αναμένεται, η Γ , επίσης, ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Kupradze:

Θεώρημα 4.1: Οι στήλες των πινάκων συναρτήσεων $\Gamma(\cdot, y)$ και $\Pi^{(2)}(\cdot, y)$, καθώς και οι γραμμές των $T(x, \cdot)$ και $\Pi^{(1)}(x, \cdot)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$, ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας του Kupradze.

Απόδειξη: Για το Γ , η πρόταση αποδεικνύεται όπως στην [5] για την τρισδιάστατη περίπτωση. Για το $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση του Λήμματος 2.5[3] σε συνδυασμό με το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το Γ .

Στην **Ενότητα 2.4** [3], κατά την παραγωγή του πίνακα των θεμελιωδών λύσεων $\Gamma_{D,h}$, διατυπώθηκε ως απαίτηση ότι οι στήλες του πίνακα συνάρτησης \mathbf{U} αναπαριστούν πεδία κύματος που διαδίδονται μακριά από το T_h . Τώρα, θα ορίσουμε την πρόταση μαθηματικά, δείχνοντας ότι αναπαριστούν ακτινοβόλες λύσεις για την εξίσωση Navier.

Θεώρημα 4.2: Για $x, y \in U_h$ και $H > \max\{x_2, y_2\}$, οι στήλες του πίνακα συνάρτησης $\Gamma_{D,h}(\cdot, y)$ και οι γραμμές του πίνακα συνάρτησης $\Gamma_{D,h}(x, \cdot)$ αποτελούν ακτινοβόλες λύσεις για την εξίσωση Navier στο U_H .

Απόδειξη: Καθώς η Γ είναι συμμετρική, η πρόταση για τα πρώτα δύο όρους στην (2.22) [3] αποδεικνύεται στο Θεώρημα 4.1, μαζί με την Παρατήρηση 4.1. Επομένως, αρκεί να δείξουμε την πρόταση για το U .

Παρατηρούμε ότι οι όροι στην 2.27 [3] που περιλαμβάνουν το M_p αντιστοιχούν στο διαμήκη, καθώς και οι όροι που περιλαμβάνουν το M_s αντιστοιχούν στο εγκάρσιο μέρος του U . Αυτά θα συμβολίζονται με $U^{(p)}$ και $U^{(s)}$, αντίστοιχα. Για σταθερό y , ένα στοιχείο εισόδου $U_{jk}^{(p)}(\cdot, y)$, $j, k = 1, 2$, ικανοποιεί την βαθμωτή εξίσωση Helmholtz:

$$\Delta_z U_{jk}^{(p)}(z, y) + k_p^2 U_{jk}^{(p)}(z, y) = 0, z \in U_h$$

για την συνοριακή συνθήκη:

$$U_{jk}^{(p)}(z, y) = g(z) := -\Gamma_{jk}(z, y) + \Gamma_{jk}(z, y'_h) - U_{jk}^{(s)}(z, y) = 0,$$

Από την (2.27) παρατηρούμε, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα που παρουσιάζονται στο [6], ότι το $U_{jk}^{(p)}$ ικανοποιεί την ανοδική συνθήκη ακτινοβολίας [7], όπως δίνεται εδώ ως Ορισμός 4.8 και, ακόμη πιο συγκεκριμένα, ότι:

$$U_{jk}^{(p)}(z, y) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}_2}(z, \tilde{z}) g(\tilde{z}) ds(\tilde{z}), \quad \text{για } z \in U_h$$

όπου $\Phi(z, \tilde{z}) = i/4 U_0^{(1)}(k_p |z - \tilde{z}|)$. Επανεξετάζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 2.13 [3], βλέπουμε ότι η $g(z) = O(|z_1|^{-3/2})$ όταν $|z_1| \rightarrow \infty$. Μπορούμε, έτσι, να χρησιμοποιήσουμε το επιχειρήμα που παρουσιάζεται στο [8, Ενότητα 5] για να συμπεράνουμε ότι:

$$|U_{jk}^{(p)}(z, y)| \leq C (1 + z_2 - h)(1 + r)^{-3/2} z \in T_h$$

και

$$\frac{\partial U_{jk}^{(p)}}{\partial r}(z, y) - ik_p U^{(p)jk}(x, y) = o(r^{-1/2})$$

όπου η παράγωγος μπορεί να ληφθεί ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές z ή y . Το ίδιο επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί στο $U(s)(\cdot, y)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται ανακαλώντας το Λήμμα 2.15[3].

Πόρισμα 4.1: Για $x, y \in U_H$ και $H > \max \{x_2, y_2\}$, οι στήλες του και οι στήλες $\Pi_{D,h}^{(2)}(\cdot, y)$, $\Pi_{D,h}^{(1)}(x, \cdot)$ αποτελούν ακτινοβόλες λύσεις για την εξίσωση Navier στο U_H .

Απόδειξη: Αποτελεί άμεσο συμπέρασμα του προηγούμενου θεωρήματος με την εφαρμογή του Λήμματος 2.5 [3].

Έχει δοθεί, επίσης, μεγάλη προσοχή στην ειδική περίπτωση της σκέδασης από μια περιοδική επιφάνεια, δηλαδή ένα πλέγμα διάθλασης. Σε αυτήν την περίπτωση, συνήθως, επιβάλλεται μια συνθήκη ακτινοβολίας χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Rayleigh [9], [10] και [11].

Ορισμός 4.3: Υποθέτουμε ότι η f είναι 2π -περιοδική. Τότε η $u \in BC(\Omega)$ λέγεται να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας με ανάπτυξη Rayleigh (RERC) εάν, για $x_2 > \max f$, έχει μια ανάπτυξη της μορφής:

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ u_{p,n} \begin{pmatrix} a_n \\ \beta_n \end{pmatrix} e^{i(a_n x_1 + \beta_n x_2)} + u_{s,n} \begin{pmatrix} \gamma_n \\ -a_n \end{pmatrix} e^{i(a_n x_1 + \gamma_n x_2)} \right\},$$

όπου $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $u_{p,n}, u_{s,n} \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{Z}$), $a_n := a + n$

$$\beta_n := \begin{cases} \sqrt{k_p^2 - a_n^2}, & a_n^2 \leq k_p^2 \\ i\sqrt{a_n^2 - k_p^2}, & a_n^2 > k_p^2 \end{cases} \quad \gamma_n := \begin{cases} \sqrt{k_s^2 - a_n^2}, & a_n^2 \leq k_s^2 \\ i\sqrt{a_n^2 - k_s^2}, & a_n^2 > k_s^2 \end{cases}$$

Ένα πεδίο u που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας RERC είναι οιονεί περιοδικό με μετατόπισης φάσης a στο $U_{\max f}$ και, επομένως, μέσω αναλυτικής συνέχισης στο Ω , δηλαδή, για όλα τα $x = (x_1, x_2)^T \in \Omega$,

$$u(x_1 + 2\pi, x_2) = e^{ia2\pi} u(x_1, x_2).$$

Καθώς μια περιοδική επιφάνεια είναι μία ειδική περίπτωση τραχιάς επιφάνειας, το πρόβλημα της σκέδασης από ένα πλέγμα διάθλασης μπορεί να θεωρηθεί ως μία ειδική περίπτωση του προβλήματος της σκέδασης σε μία τραχιά επιφάνεια. Η συνθήκη ακτινοβολίας που θα εισαχθεί αργότερα για προβλήματα σκέδασης που περιλαμβάνουν μία τραχιά επιφάνεια θα πρέπει να ικανοποιείται από

διανυσματικά πεδία που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας RERC, καθώς και από ακτινοβόλα πεδία στην έννοια του Ορισμού 4.2. Θαδειχθεί ότι αυτό είναι πράγματι περίπτωση.

4.2 Μία νέα Συνθήκη Ακτινοβολίας για Σκέδαση σε μη Φραγμένες Επιφάνειες

Θα ξεκινήσουμε αυτήν την ενότητα με μια σύντομη ανασκόπηση ορισμένων αποτελεσμάτων για την περίπτωση του βαθμωτού πεδίου. Σε αυτήν την περίπτωση, η ισχύουσα εξίσωση είναι η εξίσωση Helmholtz,

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

Η ελεύθερη πεδίου συνάρτηση Green είναι:

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|)$$

Έχει σημειωθεί σημαντική πρόοδος σε προβλήματα σκέδασης κύματος βαθμωτού πεδίου που αφορούν μη φραγμένες επιφάνειες. Η θεμελίωση πολλών από αυτών των αποτελεσμάτων είναι μια νέα συνθήκη ακτινοβολίας, η οποία ονομάζεται ανοδική συνθήκη διαδίδουσας ακτινοβολίας:

Ορισμός 4.4: Μια λύση $u: G \rightarrow \mathbb{C}$ της εξίσωσης Helmholtz στο $G \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται ότι ικανοποιεί την ανοδική συνθήκη διαδίδουσας ακτινοβολίας (UPRC), αν, για κάποιο $H \in \mathbb{R}$ και $\varphi \in L^\infty(T_H)$, $U_H \subset G$ και

$$u(x) = 2 \int_{T_H} \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in U_H$$

Για την περίπτωση του ελαστικού κύματος, θα υιοθετηθεί μία παρόμοια προσέγγιση. Για τον ορισμό μιας UPRC, θα χρησιμοποιηθεί ο πίνακας των θεμελιωδών λύσεων $\Gamma_{D,h}$

Ορισμός 4.5 Μια λύση $u : G \rightarrow \mathbb{C}^2$ της εξίσωσης Navier (2.1.1) στο $G \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται ότι ικανοποιεί την ανοδική συνθήκη διαδίδουσας ακτινοβολίας (UPRC), αν, για κάποιο $H \in \mathbb{R}$ και $\varphi \in [L^\infty(T_H)]^2$ $U_H \subset G$ και

$$u(x) = \int_{T_H} \Pi_{D,H}^{(2)}(x,y) \varphi(y) ds(y), x \in U_H \quad (4.2.1)$$

Σημείωση 4.1 Σημείωση ότι από το Θεώρημα 2.16 [3] (α) προκύπτει ότι για αυθαίρετο $\varphi \in [L^\infty(T_h)]^2$, το ολοκλήρωμα στην εξίσωση (4.2.1) υπάρχει ως μη κανονικό (γενικευμένο) ολοκλήρωμα.

Σημείωση 4.2 Προφανώς ο ορισμός της ανοδικής συνθήκης διαδίδουσας ακτινοβολίας εξαρτάται από την επιλογή των παραμέτρων $\tilde{\lambda}$ και $\tilde{\mu}$ στον ορισμό των γενικευμένων τάσεων. Ωστόσο, το Θεώρημα 4.3 παρακάτω δείχνει ότι ο ορισμός και η πυκνότητα φ είναι πράγματι ανεξάρτητα από αυτούς τους αριθμούς.

Το παρακάτω θεώρημα χαρακτηρίζει περαιτέρω την UPRC και καθιερώνει, μέσω της ισοδυναμίας των (α) και (γ), ότι ικανοποιείται από οποιαδήποτε ακτινοβόλα λύση (αναφέρεται επίσης στον χαρακτηρισμό του βαθμωτού UPRC στο [7], Θεώρημα 2.9]):

Θεώρημα 4.3 Για δεδομένο $a \in \mathbb{R}$ και $u : U_a \rightarrow \mathbb{C}^2$, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (α) $u \in [C^2(U_a)]^2$, $u \in [L^\infty(U_a \setminus U_H)]^2$, για όλα τα $H > a$, $\Delta^* u + \omega^2 u = 0$ στο U_a και u ικανοποιεί το UPRC στο U_a .
- (β) $u \in [C^2(U_a)]^2$, $u \in [L^\infty(U_a \setminus U_H)]^2$, για όλα τα $H > a$, $\Delta^* u + \omega^2 u = 0$ στο U_a και για ορισμένο $H > a$ και $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty(T_H)$,

$$u(x) = 2grand \int_{T_H} \frac{\partial \Phi_p}{\partial y_2}(x,y) \varphi_1(y) ds(y) + 2grand^\perp \int_{T_H} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_2}(x,y) \varphi_2(y) ds(y)$$

για όλα τα $x \in U_H$, όπου Φ_p και Φ_s συμβολίζουν τις θεμελιώδεις λύσεις για την εξίσωση Helmholtz με το k να έχει αντικατασταθεί με τα k_p και k_s αντίστοιχα.

- (γ) $u \in [L^\infty(U_a \setminus U_H)]^2$, για όλα τα $H > a$ και υπάρχει μία ακολουθία (u_n) από ακτινοβόλες λύσεις τέτοιες ώστε $u_n(x) \rightarrow u(x)$, ομοιόμορφα στα συμπαγές υποσύνολα U_a και

$$\sup_{x \in U_H \setminus U_{h',c,M}} |u_n(x)| < \infty \quad (4.2.2)$$

για κάθε $H, h' \in \mathbb{R}$, ικανοποιώντας $h' > H > \alpha$,

- (δ) u ικανοποιεί (4.2.1) για κάθε $H = \alpha$ και ορισμένο $\varphi \in [L^\infty(T_\alpha)]^2$.
- (ε) $u \in [L^\infty(U_\alpha \setminus U_H)]^2$, για ορισμένο $H > \alpha$ και u ικανοποιεί (4.2.1) για κάθε $H > \alpha$ με $\varphi = u|_{T_H}$.
- (στ) $u \in [C^2(U_\alpha)]^2$, $u \in [L^\infty(U_\alpha \setminus U_H)]^2$, για όλα $H > \alpha$, $\Delta^* u + \omega^2 u = 0$ στο U_α για κάθε $H > \alpha$ και ακτινοβόλα λύση στο U_α , w τέτοια ώστε οι περιορισμοί των w και P_w στο T_H είναι μέσα στο $[L^1(T_H)]^2$, ισχύει ότι

$$\int_{T_H} (u P_w - w P_u) ds = 0 \quad (4.2.3)$$

Απόδειξη: (α) \Rightarrow (β): Με H που επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει η (4.2.1), εισάγουμε τις συναρτήσεις:

$$\Psi_{p,k}(x, y) := \frac{1}{k_p^2} \operatorname{div}_x \Pi_{D,H,k}^{(2)}(x, y) \quad k=1,2$$

$$\Psi_{s,k}(x, y) := \frac{1}{k_s^2} \operatorname{div}_x^\perp \Pi_{D,H,k}^{(2)}(x, y)$$

και γράφουμε εκ νέου $u(x)$ για $x \in U_H$ ως

$$u(x) = u_p(x) + u_s(x)$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{grand} \int_{T_H} \sum_{k=1}^2 \Psi_{s,k}(x, y) \Phi_k(y) ds(y) \\ &\quad + \operatorname{grand}^\perp \int_{T_H} \sum_{k=1}^2 \Psi_{p,k}(x, y) \Phi_k(y) ds(y) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Περιορίζοντας προσοχή μας στο πρώτο ολοκλήρωμα προς το παρών, ορίζουμε:

$$\begin{aligned} V_N(x) &= \int_{T_{H(N)}} \sum_{k=1}^2 \Psi_{p,k}(x, y) \Phi_k(y) ds(y), \\ V(x) &= \int_{T_H} \sum_{k=1}^2 \Psi_{p,k}(x, y) \Phi_k(y) ds(y), \end{aligned}$$

Για $H' > H$, τα διανυσματικά πεδία V_N είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz $\Delta_{N+}^2 u = 0$ στο $U_\alpha \setminus U_N$, $\nabla_N \cdot k_p v_N = 0$ στο $U_{H'}$. Σύμφωνα με το Πρόρισμα 4.1 και μία εφαρμογή του Λήμματος 2.5 [3], βλέπουμε ότι αυτά εκπέμπουν, επίσης, ακτινοβολία στο $U_{H'}$. Με βάση το Θεώρημα 2.13 [3] μαζί με

το Λήμμα 2.5 [3], ισχύει επίσης $v_N(x) \rightarrow v(x)$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U_H . Για $h' > H$, με βάση τη Σημείωση 2.17 [3], βλέπουμε επιτέλους ότι

$$\sup_{x \in U_{H'} \setminus U_h, n \in \mathbb{N}} |V_N(x)| < \infty$$

Έτσι, με βάση το Θεώρημα 2.1 στο [12], το v ικανοποιεί την UPRC για την εξίσωση Helmholtz (βλ. Ορισμό 4.8), που είναι η απαίτηση. Το επιχείρημα για το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (4.2.4) είναι ταυτόσημο.

(β) \Rightarrow (γ): Ορίζουμε $\psi_1 := \frac{1}{k_p^2} \operatorname{div} u$ και $\psi_2 := -\frac{1}{k_p^2} \operatorname{div}^\perp u$. Τότε το (β) συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in U_H$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 2 \int_{T_H} \frac{\partial \Phi_p}{\partial y_2}(x, y) \varphi_1(y) ds(y), \\ \psi_2(x) &= 2 \int_{T_H} \frac{\partial \Phi_s}{\partial y_2}(x, y) \varphi_2(y) ds(y), \end{aligned}$$

Από την ισοδυναμία των (i) και (ii) στο Θεώρημα 2.9 στο [11], προκύπτει ότι υπάρχουν ακολουθίες $\Psi_j^{(n)}$ ($j = 1, 2$) ακτινοβόλων λύσεων στην Helmholtz εξίσωση με $k = k_p$ και $k = k_s$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Psi_j^{(n)}(x) \rightarrow \Psi_j(x)$, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα U_a και

$$\sup_{x \in U_a \setminus U_h, n \in \mathbb{N}, j=1,2} |\Psi_j^{(n)}(x)| < \infty$$

Για όλα τα $H > a$. Θέτουμε:

$$U_n(x, y) := \operatorname{grad} \Psi_1^{(n)}(x) + \operatorname{grad}^\perp \Psi_2^{(n)}(x)$$

Λήμμα 2.5 [3] Συνεπάγεται τότε την (4.2.2) και ότι η $u_n(x)$ συγκλίνει στο $u(x)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του U_a .

(γ) \Rightarrow (στ): Υποθέτουμε $H > a$ και θέτουμε $D := U_H \cap B_R(0)$ για κάποιο $R > H$, όπου $B_R(0)$ συμβολίζει την ανοικτή μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα R . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το w είναι μια ακτινοβόλα λύση στο U_a , έτσι ώστε οι περιορισμοί του w και Pw στο T_H ανήκουν στο $[L^1(T_H)]^2$. Τότε το:

$$\int_{\partial D} u_n P_w - w P u_n ds = 0$$

προκύπτει από το τρίτο γενικευμένο θεώρημα Betti (2.10). Αφήνοντας το $R \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το w και u_n είναι ακτινοβόλες λύσεις της εξίσωσης Navier, καταλήγουμε:

$$\int_{T_H} u_n P_w - w P u_n ds = 0$$

Αφήνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$, και ανακαλώντας το (4.2.2) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5 [3], βλέπουμε ότι το (4.2.3) ισχύει. Η παραμένουσα πρόταση προκύπτει από το Πρόρισμα 2.6 [3].

(στ) \Rightarrow (α), (ε): Είναι αρκετό να δειχθεί ότι η (4.2.1) ισχύει για όλα τα $H > a$ με $\varphi = u|_{T_H}$.

Δίνοντας ότι $H > a$ και $x \in U_H$, διαλέγουμε $h', A \in \mathbb{R}$, με $h' > x_2 > H$ και $A > |x_1|$. Θέτουμε $B := \{y \in U_H \setminus \overline{U_{h'}}, : |y_1| < A\}$, Τότε το Θεώρημα 2.16 (ε),

$$u(x) = \int_{\partial B} \{ \Gamma_{D,H}(x,y) P u(y) - \Pi^{(2)}_{D,H}(x,y) u(y) \} ds(y)$$

Αφήνοντας $A \rightarrow \infty$, και ανακαλώντας $u \in [L^\infty(U_a \setminus U_{h'})]^2$ από το Θεώρημα 2.10 [3], 4.2 και 2.16 (α) [3] προκύπτει ότι:

$$u(x) = \int_{T_{h'}} \{ \Gamma_{D,H}(x,y) P u(y) - \Pi^{(2)}_{D,H}(x,y) u(y) \} ds(y) \\ + \int_{T_H} \Pi^{(2)}_{D,H}(x,y) u(y) ds(y)$$

Εφαρμόζοντας την (4.2.3) με w ίσο με κάθε μία από τις γραμμές της $\Gamma_{D,H}(x, \cdot)$ διαδοχικά, το ολοκλήρωμα πάνω από το $T_{h'}$ φαίνεται να εξαφανίζεται.

(στ) \Rightarrow (α), (ε): Εισάγοντας, για $a \in \mathbb{R}$, η απεικόνιση $n_a(z) := (z_1, z_2 + a)^T$, έχουμε από την (ε) ότι:

$$u(x) = \int_{T_{h'}} \Pi^{(2)}_{D,H}(x, n_{H-a}(z)) u(n_{H-a}(z)) ds(z) \quad x \in U_H \quad (4.2.5)$$

καθώς $u \in [L^\infty(U_a \setminus U_H) \cap C(U_a)]^2$ για ορισμένο $H > a$, οι πυκνότητες $u(n_{H-a}(\cdot))$ βρίσκονται όλες μέσα στη σφαίρα $[L^\infty(T_a)]^2$, για H αρκετά κοντά στο a . Λαμβάνοντας υπόψη ότι η μοναδιαία μπάλα στο $[L^\infty(T_a)]^2$ είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγής, υπάρχει μια ακολουθία (H_n) με $H_n \rightarrow a$ και $u(n_{H-a}(\cdot)) \rightarrow \varphi \in [L^\infty(T_a)]^2$. Παίρνοντας το όριο όταν $H \rightarrow a$, μέσω αυτής της ακολουθίας στην (4.2.5), καταλήγουμε ότι η (4.2.1) ισχύει για $H = a$ με αυτήν της φ .

(δ) \Rightarrow (γ) Καθώς η (4.2.1) ικανοποιείται με $h = a$, αυτό απορρέει από το Θεώρημα 2.16 (α) τότε

$$|u(x)| \leq \|\varphi\|_\infty g(x_2) \quad x \in U_a \quad (4.2.6)$$

όπου $g \in C(\mathbb{R})$. Θέτοντας:

$$u(x) := \int_{T_H} \Pi^{(2)}_{D,a}(x,y)\varphi(y) ds(y) \quad x \in U_\alpha$$

$u \in [L^\infty(U_a \setminus U_h)]^2$ για κάθε $h > a$ και χρησιμοποιώντας την (4.2.2), προκύπτει από την (4.2.6). Επίσης, είναι εύκολο να δούμε από το Θεώρημα 2.16 [3] (α) ότι η $u_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $u(x)$ σε συμπαγή υποσύνολα του U_a και ότι η u_n είναι ακτινοβολούσα.

Παρατήρηση 4.2 Από τη Σημείωση 2.14 στο [11] και την ισοδυναμία των δηλώσεων (α) και (β) στο Θεώρημα 4.3, προκύπτει ότι κάθε φραγμένη λύση της εξίσωσης Navier u στο Ω που ικανοποιεί το UPRC στο Ω και είναι οιονεί περιοδική στο Ω και ικανοποιεί, επίσης, το UPRC του Ορισμού 4.3. Αντίστροφα, εφαρμόζοντας τα ίδια αποτελέσματα, μια φραγμένη, είναι περιοδική λύση της εξίσωσης Navier στο Ω που ικανοποιεί το RERC, ικανοποιεί επίσης το UPRC.

Απομένει να αποδειχθεί ότι οι ελαστικά δυναμικά, απλού και διπλού στρώματος v ορίζονται από την σχέση (3.1.1) και w που ορίζεται από τη σχέση (3.1.2) ικανοποιούν το UPRC. Για τον σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι f ανήκει στο $C^{1,1}(\mathbb{R})$, $\varphi \in [(BS(C))^2]$, και εισάγουμε τα διανυσματικά πεδία v_N και w_N , $N \in (\mathbb{N})$, με τον ακόλουθο τρόπο:

$$v_N(x) := \int_{S(N)} \Gamma_D, h(x,y)\varphi(y) ds(y),$$

$$x \in \Omega$$

$$w_N(x) := \int_{S(N)} \Pi^{(2)}_{D,h}(x,y)\varphi(y) ds(y),$$

Καθώς το S_N είναι φραγμένο σύνολο, η εφαρμογή του Θεωρήματος 4.2 και του Πορίσματος 4.6 οδηγεί στο ότι v_N και w_N είναι ακτινοβόλες λύσεις της εξίσωσης Navier στον Ορισμό 4.2 για οποιαδήποτε $H > \sup f$. Από τα Θεωρήματα 2.13 [3] και 2.16 (α) [3], οι ακολουθίες $(v_N(x))$ και $(w_N(x))$ συγκλίνουν προς $v(x)$ και $w(x)$, αντίστοιχα, για $x \in \Omega$, και αυτή η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή υποσύνολα του U_a για οποιοδήποτε $a > \sup f$. Τελικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.5 (α) και το Θεώρημα 3.6 (α) για να δούμε ότι η σχέση (4.2.2) ισχύει με $a > \sup f$. Έτσι, η ισοδυναμία των (α) και (γ) στο Θεώρημα 4.12 οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.4: Υποθέτουμε ότι f ανήκει στο $C^{1,1}(\mathbb{R})$. Τότε, οι ελαστικά δυναμικά απλού στρώματος v και διπλού στρώματος w ικανοποιούν το UPRC.

4.3 Διατύπωση ως Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών και Μοναδικότητα της Λύσης

Θυμηθείτε τον τρόπο διατύπωσης του προβλήματος σκέδασης από την Ενότητα 2.2:

Πρόβλημα Σκέδασης: Δεδομένου ενός προσπίπτων πεδίου u^{inc} που είναι λύση της εξίσωσης (2.1.1) στο Ω , να βρεθεί το πεδίο u της σκέδασης, έτσι ώστε $u^{inc} + u = 0$ στο S .

Θα διατυπώσουμε το πρόβλημα σκέδασης ως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Στην πραγματικότητα, οι υποθέσεις μπορούν να διατυπωθούν κάπως πιο γενικά: Απαιτούμε μόνο το u^{inc} να είναι λύση της εξίσωσης του Navier σε κάποιο γειτονικό σύνολο της επιφάνειας $S = \partial\Omega$ και το $g := -u^{inc}|_S \in [BC(S) \cap H_{loc}^{1/2}(S)]^2$.

Πρόβλημα 4.1 Βρείτε ένα διανυσματικό πεδίο $u \in (C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \cap H_{loc}^{1/2}(\Omega))^2$ που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1. Η εξίσωση του Navier $\Delta^* u + \omega^2 u = 0$ στον χώρο Ω ,
2. Οι οριακές συνθήκες του Dirichlet $u = g$ στην επιφάνεια S για κάποιο διανυσματικό πεδίο $g \in [BC(S) \cap H_{loc}^{1/2}(S)]^2$.
3. Η συνθήκη του κατακόρυφου ρυθμού ανάπτυξης:

$$\sup_{x \in \Omega} X_2^\beta |u(x)| < \infty \text{ για κάποιο } \beta \in \mathbb{R} \quad (4.3.1)$$

4. Η UPRC στον χώρο Ω .

Παρατήρηση 4.3: Μια λύση του Προβλήματος 4.1 ικανοποιεί την πρόταση (α) του Θεωρήματος 4.3 με οποιοδήποτε $a > \sup f$.

Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού θα αφιερωθεί στην απόδειξη ότι το Πρόβλημα 4.1 έχει το πολύ μία λύση. Ωστόσο, αξίζει να τονίσουμε σε αυτό το στάδιο ότι είναι σαφές από πριν ότι το Πρόβλημα 4.1 είναι καλά διατυπωμένο σε ορισμένες, μη-τετριμμένες λύσεις: Από την Παρατήρηση 4.2 βλέπουμε ότι, στην περίπτωση που η f είναι περιοδική και οι τιμές Dirichlet g είναι περιοδικές, το

Πρόβλημα 4.1 μειώνεται στο πρόβλημα διάθλασης του πλέγματος που εξετάστηκε στις αναφορές [6], [8], αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι η λύση u είναι περιοδική. Το πρόβλημα διάθλασης του πλέγματος αποδείχθηκε στις αναφορές [6], [8], ότι έχει μοναδική λύση. Έτσι, γνωρίζουμε ότι το Πρόβλημα 4.1 δέχεται λύσεις στην περίπτωση που η f είναι περιοδική και οι τιμές g είναι ομοιογενές περιοδικές.

Ας τονίσουμε, επίσης, ότι θα δείξουμε τώρα, το Πρόβλημα 4.1 έχει το πολύ μία λύση σε κάθε περίπτωση, στην πραγματικότητα θα αποδείξουμε για το πρόβλημα διάθλασης πλέγματος ότι η επιπλέον απαίτηση ότι η λύση είναι περιοδική μπορεί να απορριφθεί.

Σε όλο το υπόλοιπο Κεφάλαιο, έστω h ορίζεται ένας πραγματικός αριθμός με $h < \inf f$. Το πρώτο βήμα στην απόδειξη της μοναδικότητας θα είναι η ακόλουθη θεώρηση αναπαράστασης:

Θεώρημα 4.5 Έστω ότι u είναι μία λύση του Προβλήματος 4.1 με $g \equiv 0$. Τότε ισχύει ότι $u \in [C^1(\bar{\Omega})]^2$, οι πρώτες παράγωγοι του είναι φραγμένες στο D_H για οποιοδήποτε $H > \sup f$ και

$$u(x) := - \int_{\Omega} \Gamma_{D,h}(x,y) P u(y) ds(y), \quad \text{για όλα τα } x \in \Omega$$

Απόδειξη: Το γεγονός ότι $u \in [C^1(\bar{\Omega})]^2$ και οι πρώτες παράγωγοί του είναι φραγμένες D_H για οποιοδήποτε $H > \sup f$ είναι συνέπεια του Θεωρήματος 2.7 [3]. Για ένα σημείο $x \in \Omega$, επιλέγουμε $h', A \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ με $h' > \max\{x_2, \sup f\}$ και $A > |x_1|$. Ορίζουμε το σύνολο $D_{\varepsilon,h'}^A := \{x \in D_{h'}(A) : x_2 > f(x_1) + \varepsilon\}$. Τότε, από το Θεώρημα 2.16 (ε) [3], ισχύει ότι:

$$u(x) = \int_{\partial D_{\varepsilon,h'}^A} \{\Gamma_{D,h}(x,y) P u(y) - \Pi^{(2)}_{D,h}(x,y) u(y)\} ds(y)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.7 [3], βλέπουμε ότι η συνθήκη του ρυθμού ανάπτυξης (4.3.1) για το u ισχύει και για οποιαδήποτε πρώτη παράγωγο του u . Αφήνοντας το $A \rightarrow \infty$ και λαμβάνοντας υπόψη τα Θεωρήματα 2.13 και 2.14 [3], έχουμε τα χωρία:

$$U(x) = \int_{T_{h'}} \{\Gamma_{D,h}(x,y) P u(y) - \Pi^{(2)}_{D,h}(x,y) u(y)\} ds(y) \\ - \int_{S_{\varepsilon}} \{\Gamma_{D,h}(x,y) P u(y) - \Pi^{(2)}_{D,h}(x,y) u(y)\} ds(y),$$

όπου $S_{\varepsilon} := \{x \in \Omega : x_2 = f(x_1) + \varepsilon\}$. Σημειώνουμε εδώ ότι το κανονικό n προς την επιφάνεια S_{ε} υποτίθεται ότι δείχνει προς τα πάνω. Η απόδειξη ολοκληρώνεται παρατηρώντας την Παρατήρηση 4.3 και την ισοδυναμία των (α) και (στ) στο Θεώρημα 4.3, με την οποία το ολοκλήρωμα πάνω από το $T_{h'}$ μηδενίζεται, και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ας παρουσιάσουμε ορισμένες συναρτήσεις, οι οποίες θα είναι σημαντικές στα επόμενα επιχειρήματα.

Ας υποθέσουμε ότι $h' > \sup f$, $A > 0$ και $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Ορίζουμε:

$$I(h', A)[u] = \int_{T_{h'(A)}} (2\mu + \lambda) \left(\left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 - \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 \right) + \mu \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 - \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 \right) + \omega^2 |u|^2 ds,$$

$$J_1(h', A)[u] = 2\operatorname{Re} \int_{\gamma_{h'(A)}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} \cdot \text{Puds},$$

$$J_2(h', A)[u] = 2\operatorname{Re} \int_{\gamma_{h'(A)}} \bar{u} \cdot \text{Puds},$$

$$K(h', A)[u] = \operatorname{Im} \int_{T_{h'(A)}} \bar{u} \cdot \text{Puds},$$

όπου ανακαλούμε τις υποθέσεις σχετικά με την κατεύθυνση των κανονικών διανυσμάτων στην Ενότητα 1.3. Θα εξετάσουμε τώρα τις ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων.

Λήμμα 4.1 Υποθέτουμε ότι u ικανοποιεί τη δήλωση (β) στο Θεώρημα 4.3 με $H > \sup f$ και ορισμένες πυκνότητες $\varphi_j \in L^2(T_H) \cap L^\infty(T_H)$ ($j=1,2$). Τότε για όλα τα $h' > H$ ισχύει:

$$I(h', \infty)[u] = 2\omega^2 \left\{ \int_{-k_p}^{k_p} |\tilde{\varphi}_1|^2 \gamma_p^2 dt + \int_{-k_p}^{k_p} |\tilde{\varphi}_2|^2 \gamma_s^2 dt \right\}$$

όπου $\tilde{\varphi}_1(t) := e^{-i\gamma_p H} \hat{\varphi}_1(t)$, $\tilde{\varphi}_2(t) := e^{-i\gamma_s H} \hat{\varphi}_2(t)$ και $\hat{\varphi}_j$ συμβολίζουν τον μετασχηματισμό Fourier των $\varphi_j(y_1, y_2)$ ως προς τον y_1 ($j=1,2$) π.χ

$$\hat{\varphi}_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(y_1, y_2) e^{iy_1 t} dy_1$$

Απόδειξη: Επιλέξτε $H > \sup f$, έτσι ώστε η αναπαράσταση του u στον χώρο U_H , σύμφωνα με την πρόταση (β) του Θεωρήματος 4.3, να ισχύει. Στη συνέχεια, η αιτιολόγηση που παρουσιάζεται για την παραγωγή της εξίσωσης (29) στο [6],

$$u(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}_1(t) \begin{pmatrix} t \\ \gamma_p \end{pmatrix} e^{-i(tx_1 + \gamma_p x_2)} + \tilde{\varphi}_2(t) \begin{pmatrix} t \\ -\gamma_s \end{pmatrix} e^{i(tx_1 + \gamma_s x_2)} dt, \quad x \in U_H$$

Η εφαρμογή του Θεωρήματος Parseval, για οποιοδήποτε $h' > H$, οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$\int_{T_{h'}} |u_1|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |t\tilde{\varphi}_1 + \gamma_s \tilde{\varphi}_2|^2 dt$$

$$\int_{T_{h'}} |u_2|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma_p \tilde{\varphi}_1 - t\tilde{\varphi}_2|^2 dt$$

$$\int_{T_{h'}} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |it^2 \bar{\varphi}_1 + it\gamma_s \bar{\varphi}_2|^2 dt$$

$$\int_{T_{h'}} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |it \bar{\varphi}_1 + i\gamma_s^2 \bar{\varphi}_2|^2 dt$$

$$\int_{T_{h'}} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |it\gamma_p \bar{\varphi}_1 - it^2 \bar{\varphi}_2|^2 dt$$

$$\int_{T_{h'}} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} |i\gamma_p^2 \bar{\varphi}_1 - it \gamma_s \bar{\varphi}_2|^2 dt$$

Από αυτούς τους τύπους, μπορούν εύκολα να προκύψουν οι παρακάτω τρεις ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \int_{T_{h'}} \{|u_1|^2 + |u_2|^2\} ds &= \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\varphi}_1|^2 (t^2 + |\gamma_p|^2) + \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (t\bar{\gamma}_s - t\gamma_p) \\ &+ \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (t\gamma_s - t\bar{\gamma}_p) + |\bar{\varphi}_2|^2 (|\gamma_s|^2 + t^2) dt, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$\begin{aligned} \int_{T_{h'}} \left\{ \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 \right\} ds &= \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\varphi}_1|^2 (\gamma_p^4 - t^4) + \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (-t\gamma_p^2 \bar{\gamma}_s - t^3 \bar{\gamma}_s) \\ &+ \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (-t\gamma_p^2 \gamma_s - t^3 \gamma_s) dt \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{T_{h'}} \left\{ \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right|^2 \right\} ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (t\gamma_p \gamma_s + t^3 \bar{\gamma}_p) + \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (t\bar{\gamma}_p \gamma_s^2 - t^3 \bar{\gamma}_p) \\ &+ |\bar{\varphi}_2|^2 (\gamma_s^4 - t^4) dt \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.3.2) έως (4.3.4) και παρατηρώντας ότι $k_p^2 - t^2 + |\gamma_p|^2 = 0$ για $|t| > k_p$, καθώς και $k_s - t^2 + |\gamma_s|^2 = 0$ για $|t| > k_s$, προκύπτει τώρα η δήλωση.

Λήμμα 4.2 Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Λήμματος 4.1. Τότε, για κάθε $h' > H$, έχουμε την ταυτότητα:

$$K(h', \infty)[u] = \omega^2 \left\{ \int_{-k_p}^{k_p} |\bar{\varphi}_1|^2 \gamma_p dt + \int_{-k_p}^{k_p} |\bar{\varphi}_2|^2 \gamma_s dt \right\}$$

Απόδειξη: Ανακαλώντας τις παρατηρήσεις στην αρχή της απόδειξης του Λήμματος 4.1 και υιοθετώντας τον ίδιο συμβολισμό, παίρνουμε το εξής:

$$\begin{aligned}
 \int_{T_{h'}} \bar{u} P u \, ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ |\bar{\varphi}_1|^2 (i\mu t^2 \gamma_p + i\tilde{\mu} t^2 \gamma_p + i\tilde{\lambda} t^2 \bar{\gamma}_p + i(2\mu + \lambda) \bar{\gamma}_p \gamma_p^2) \\
 &+ \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 (i\mu t \gamma_p \bar{\gamma}_s + i\tilde{\mu} t \gamma_p \bar{\gamma}_s - i\tilde{\lambda} t^3 - i(2\mu + \lambda) t \gamma_p^2) \\
 &+ \bar{\bar{\varphi}}_1 \bar{\bar{\varphi}}_2 (i\mu t \gamma_s^2 - i\tilde{\mu} t^3 + \tilde{\lambda} t \bar{\gamma}_p \gamma_s - i(2\mu + \lambda) t \bar{\gamma}_p \gamma_s) \\
 &+ |\bar{\varphi}_2| (i\mu t \gamma_s^2 \bar{\gamma}_s - i\tilde{\mu} t^2 \bar{\gamma}_s - i\tilde{\lambda} t^2 \gamma_s + i(2\mu + \lambda) t^2 \gamma_s) \} dt
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος, υπολογισμοί δείχνουν ότι όλοι οι όροι που περιλαμβάνουν $\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2$ και τον μιγαδικό συζυγή τους ακυρώνονται. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
 \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |\bar{\varphi}_1|^2 (i\mu t^2 \gamma_p + i\mu t^2 \bar{\gamma}_p + i\mu t^2 \bar{\gamma}_p + i(2\mu + \lambda) \bar{\gamma}_p \gamma_p^2) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |\bar{\varphi}_1|^2 (\mu t^2 \gamma_p + \mu t^2 \bar{\gamma}_p + \tilde{\mu} t^2 \gamma_p + \tilde{\mu} t^2 \bar{\gamma}_p \\
 &+ \tilde{\lambda} t^2 \bar{\gamma}_p + \tilde{\lambda} t^2 \bar{\gamma}_p + (2\mu + \lambda) \tilde{\lambda} \bar{\gamma}_p \gamma_p^2 + (2\mu + \lambda) \gamma_p^3) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (2\mu + \lambda) |\bar{\varphi}_1|^2 (t^2 \gamma_p + \gamma_p^3 + t^2 \bar{\gamma}_p + \bar{\gamma}_p \gamma_p^2) dt \\
 &= \int_{-k_p}^{k_p} (2\mu + \lambda) k_p^2 \gamma_p |\bar{\varphi}_1|^2 dt
 \end{aligned}$$

Ένας παρόμοιος υπολογισμός για τον υπόλοιπο όρο στην έκφραση (4.3.5) οδηγεί τώρα στο Λήμμα.

Το ακόλουθο Πρόρισμα από τα προηγούμενα δύο Λήμματα έχει θεμελιώδη σημασία:

Πόρισμα 4.2: Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι υποθέσεις του Λήμματος 4.1. Τότε, για κάθε $h' > H$, ισχύει:

$$I(h', \infty) \leq 2k_s K(h', \infty)[u]$$

Απόδειξη: Η δήλωση προκύπτει από τα Λήμματα 4.1 και 4.2, λαμβάνοντας υπόψη ότι $k_p \geq \gamma_p$ στο $[-k_p, k_p]$, $k_s \geq \gamma_s$ στο $[-k_s, k_s]$ και $k_s > k_p$.

Μία άλλη, απλούστερη σχέση σχετική με αυτές τις συναρτήσεις, είναι πολύ πιο εύκολο να αποδειχθεί, και αναφέρεται στο ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 4.3: Έστω u μια λύση του Προβλήματος 4.1 με $g \equiv 0$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $h' > \max f$ και $A > 0$. Τότε:

$$K(h', A)[u] = -J_2(h', A)[u]$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το τρίτο γενικευμένο **Θεώρημα Betti** [3] στο u και το \bar{u} στο $D_{h'}(A)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η u είναι μια λύση του Προβλήματος 4.1 με $g \equiv 0$. Καθώς η u και οι εφαπτομενικές της παράγωγοι μηδενίζονται στο S , Pu έχει την απλή μορφή:

$$Pu = \mu \frac{\partial u}{\partial n} + (\lambda + \mu)n \operatorname{div} u \text{ στο } S \quad (4.3.6)$$

και επομένως

$$\int_{S(A)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} Puds = \int_{S(A)} \left\{ \mu n_2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 + (\lambda + \mu)n_2 |\operatorname{div} u|^2 \right\} \quad (4.3.7)$$

για κάθε $A > 0$. Με μια παρόμοια προσέγγιση, δείχνουμε επίσης ότι:

$$\varepsilon_{\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}}(\bar{u}, u) = \mu \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + (\lambda + \mu) |\operatorname{div} u|^2 \text{ στο } S \quad (4.3.8)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.3.7) και (4.3.8), συμπεραίνουμε σε ένα ολοκλήρωμα με μέρη ότι:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{S(A)} \left\{ \mu n_2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + (\lambda + \mu)n_2 |\operatorname{div} u|^2 \right\} ds \\ &= 2\operatorname{Re} \int_{S(A)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} Puds - \int_{S(A)} n_2 \varepsilon_{\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}}(\bar{u}, u) - n_2 \omega^2 |u|^2 ds \\ &= 2\operatorname{Re} \int_{S(A)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} Puds + 2\operatorname{Re} \int_{D_{h'}(A)} \varepsilon_{\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}, u\right) - \omega^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} u dx \\ &\quad - \int_{T_{h'}(A)} \varepsilon_{\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}}(\bar{u}, u) - \omega^2 |u|^2 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Από την άλλη πλευρά, για οποιοδήποτε $h' > \sup f$, με βάση το πρώτο **Θεώρημα Betti** [3] ισχύει επίσης:

$$\int_{\partial D_{h'}(A)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} Puds = \int_{\partial D_{h'}(A)} \varepsilon_{\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2}, u\right) - \omega^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} u dx \quad (4.3.10)$$

Είναι επίσης δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί ότι

$$\operatorname{Re} \int_{T_{h'}(A)} \left\{ 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_2} P u + \omega^2 |u|^2 - \varepsilon_{\bar{\mu}, \bar{\lambda}}(\bar{u}, u) \right\} ds = I(h', A)[u]$$

Συνδυάζοντας αυτή την ταυτότητα με τις εξισώσεις (4.3.9) και (4.3.10), καταλήγουμε τελικά στο συμπέρασμα ότι:

$$0 \leq \int_{S(A)} \left\{ \mu n_2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + (\lambda + \mu) n_2 |\operatorname{div} u|^2 \right\} ds = I(h', A)[u] + J_1(h', A)[u] \quad (4.3.11)$$

Το υπόλοιπο παράγωγο της μοναδικότητας του αποτελέσματος είναι τώρα μια αρκετά απλή προσαρμογή της μεθόδου που παρουσιάζεται στο [15] για την περίπτωση της εξίσωσης Helmholtz. Ας εισάγουμε τα διανυσματικά πεδία v_A που ορίζονται για $A > 0$ με την ακόλουθη μορφή:

$$v_A(x) := - \int_{S(A)} \Gamma_{D,h}(x, y) P u(y) ds(y),$$

Χρησιμοποιώντας τον ανισότητα Cauchy-Schwarz και το Θεώρημα 2.13 [3], βρίσκουμε ότι $v_A|_{h'} \in [L^2(T_{h'}) \cap BC(T_{h'})]^2$ για όλα τα $h' > \sup f$.

Καθώς το v_A είναι μια ακτινοβόλα λύση της εξίσωσης Navier για κάθε $A \in \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι ικανοποιεί τη δήλωση (γ) του Θεωρήματος 4.3 και, επομένως και τη δήλωση (β) αυτού του Θεωρήματος. Έτσι, από το Πρόρισμα 4.2:

$$I(h', \infty)[v_A] \leq 2k_s K(h', \infty)[v_A] \quad (4.3.12)$$

Θέτουμε $w(x_1) := |P u(x_1, f(x_1))|$ για $x_1 \in \mathbb{R}$. Τότε :

$$\int_{-A}^A |w(x_1)|^2 dx_1 \leq \int_{S(A)} |P u|^2 ds \leq (1 + \|f'\|_{\infty; \mathbb{R}}^2)^{1/2} \int_{-A}^A |w(x_1)|^2 dx_1 \quad (4.3.13)$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.13 και το Λήμμα 2.5 [3] παίρνουμε τις εκτιμήσεις:

$$|\Gamma_{D,h}(x,y)|, \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{D,h}(x,y) \right| \leq C(1 + |x_1 - y_1|^{-3/2}) \quad (j=1,2)$$

για $x \in T_h, y \in S$, όπου C είναι ορισμένη σταθερά εξαρτώμενη μόνο στο h' και h . Αυτό παράγει τις εκτιμήσεις:

$$\begin{aligned} |v_A(x)|, \left| \frac{\partial v_A}{\partial x_j}(x) \right| &\leq CW_A(x_1) \\ |u(x) - v_A(x)| &\leq CW_\infty(x_1) - W_A(x_1) \\ \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial v_A}{\partial x_j}(x) \right| &\leq CW_\infty(x_1) - W_A(x_1) \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

για $x \in T_h, j=1,2$, με ορισμένες γενετικές σταθερές C , όπου:

$$W_A(x_1) := \int_{-A}^A |1 + |x_1 - y_1|^{-\frac{3}{2}} \omega(y_1) dy_1 \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

Ανακαλώντας (4.3.6), μπορούμε να εκτιμήσουμε μέσω (4.3.11)-(4.3.13) και θε 4.21

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |w(x_1)|^2 dx_1 &\leq C \int_{S(A)} \{ \mu n_2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 ds + (\lambda + \mu) n_2 |div u|^2 \} ds \\ &\leq C \{ |I(h', A)[u] - I(h', A)[v_A]| \\ &\quad + |I(h', A)[v_A] - I(h', \infty)[v_A]| \\ &\quad + 2k_s [|K(h', \infty)[v_A] - K(h', A)[v_A]| \\ &\quad + |K(h', A)[v_A] - K(h', A)[u]|] \\ &\quad + |J_1(h', A)[u] + 2k_s |J_2(h', A)[u]| \} \end{aligned}$$

Από (4.3.14), ακολουθεί, με ορισμένη θετική σταθερά C ,

$$\left. \begin{aligned} &|I(h', A)[v_A] - I(h', \infty)[v_A]| \\ &|K(h', \infty)[v_A] - K(h', A)[v_A]| \end{aligned} \right\} \leq C \int_{\mathbb{R} \setminus [-A, A]} w_A^2(x_1) dx_1$$

και

$$\left\{ \begin{aligned} &|I(h', A)[u] - I(h', \infty)[vA]| \\ &|K(h', A)[vA] - K(h', A)[u]| \end{aligned} \right\} \leq C \int_{-A}^A (w_\infty(x_1) - w_A(x_1))w_\infty(x_1) dx_1$$

Τελικά καταλήγουμε, για ορισμένη σταθερά $c > 0$ και για όλα $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |w(x_1)|^2 dx_1 &\leq c \left\{ \int_{\mathbb{R}[-A, A]} w_A^2(x_1) dx_1 \right. \\ &\quad + \int_{-A}^A (w_\infty(x_1) - w_A(x_1))w_\infty(x_1) dx_1 \\ &\quad \left. + |J_1(h', A)[u]| + |J_2(h', A)[u]| \right\} \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Καθώς ισχύει η εξίσωση (4.3.15) και έχουμε, επίσης, από το Θεώρημα 2.7 [3] ότι $\omega \in L^\infty(\mathbb{R})$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα A στο [15] για να πάρουμε ότι $w \in L^2(\mathbb{R})$ και, παρατηρώντας την εξίσωση (4.3.13), ότι για όλα τα $A_0 > 0$,

$$\begin{aligned} (1 + \|f'\|_{\infty, \mathbb{R}}^2)^{-\frac{1}{2}} \int_S |Pu|^2 ds &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |w(x_1)|^2 dx_1 \\ &\leq c \sup_{A > A_0} \{ |J_1(h', A)[u]| + |J_2(h', A)[u]| \} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Για $x \in D_{h'}$ με $|x_1| > 0$, τώρα συμπεραίνουμε από το Θεώρημα 2.13 [3], Θεώρημα 4.5 και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, ότι

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq 2 \left\{ \int_{S \setminus S(\frac{|x_1|}{2})} |\Gamma_{D, h}(x, y) Pu(y)| ds(y) \right\}^2 \\ &\quad + 2 \left\{ \int_{S(\frac{|x_1|}{2})} |\Gamma_{D, h}(x, y) Pu(y)| ds(y) \right\}^2 \\ &\leq c_1 \int_{S \setminus S(\frac{|x_1|}{2})} |Pu|^2 ds + C_2 \left(\frac{|x_1|}{2} \right)^{-2} \end{aligned}$$

όπου

$$C_1 = 16 \sup_{x \in D_{h'}} \int_S \max_{j, k=1, 2} |\Gamma_{D, h, jk}(x, y)|^2 ds(y) < \infty$$

από την Παρατήρηση 2.14 και

$$C_2 = 32 \|H\|_{C([0, h' - h])}^2 (1 + \|f'\|_{\infty; \mathbb{R}}^{\frac{1}{2}} \|Pu\|_{[L^2(S)]})^2$$

Επομένως, $u(x) \rightarrow 0$ as $|x_1| \rightarrow \infty$ ($x \in D_{h'}$), ομοιόμορφα στο x_2 .

Από το Λήμμα 2.5 και το Θεώρημα 2.7 [3], προκύπτει τώρα ότι $J_j(A)[u] \rightarrow 0$ όταν $A \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2$), και ως εκ τούτου, από την εξίσωση (4.3.16), ότι $Pu = 0$ στο S .

Επαναλαμβάνοντας για μία ακόμη φορά το Θεώρημα 4.5, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $u \equiv 0$ στο Ω .

Έχουμε έτσι αποδείξει το ακόλουθο κεντρικό θεώρημα:

Θεώρημα 4.6: Έστω u και v λύσεις του Προβλήματος 4.1 με τα ίδια δεδομένα Dirichlet g . Τότε $u \equiv v$ στο Ω .

4.4 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα Διπλωματική Εργασία αποτελούν μια λεπτομερή έρευνα για τα ζητήματα της μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης για το πρόβλημα της σκέδασης ελαστικών κυμάτων σε μη φραγμένες επιφάνειες, στην οποία η μετατόπιση μηδενίζεται. Έχειδειχθεί ότι για μια γενική κλάση πεδίων πρόσπτωσης, συμπεριλαμβανομένων των ειδικών περιπτώσεων των κυλινδρικών και επίπεδων κυμάτων, υπάρχει μια μοναδική λύση. Για την απόδειξη του αποτελέσματος μοναδικότητας, έχει προταθεί μια νέα συνθήκη ακτινοβολίας, η οποία χαρακτηρίζεται από τα πεδία κυμάτων που διαδίδονται προς τα πάνω, και έχειδειχθεί ότι αυτή η συνθήκη γενικεύει την συνθήκη ακτινοβολίας του Kupradze, καθώς και την συνθήκη ακτινοβολίας της ανάπτυξης Rayleigh, που συνήθως χρησιμοποιείται σε προβλήματα διάθλασης πλεγμάτων.

Για την απόδειξη της ύπαρξης της λύσης, έχει μελετηθεί λεπτομερώς η κανονικότητα των ελαστικών απλού και διπλού στρώματος που ορίζονται σε φραγμένα εμπόδια και ανώμαλες επιφάνειες. Οι εκτιμήσεις που έχουν προκύψει διαφέρουν από τα συμβατικά αποτελέσματα στο γεγονός ότι ισχύουν ομοιόμορφα για όλες τις επιφάνειες που μοιράζονται ορισμένες γεωμετρικές ιδιότητες. Τα δυναμικά ελαστικά σε μη φραγμένες επιφάνειες χρησιμοποιήθηκαν δοκιμαστική συνάρτηση απλού και διπλού δυναμικού για το πεδίο της σκέδασης. Μια καινοτόμα θεωρία επίλυσης έχει χρησιμοποιηθεί για να

αποδειχθεί η επιλυσιμότητα της αντίστοιχης εξίσωσης συνοριακής ολοκλήρωσης στο χώρο των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων, καθώς και σε όλους τους L_p -χώρους, $1 \leq p \leq \infty$.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία, δίνουν μία καταφατική λύση στο ερώτημα της μοναδικής επιλυσιμότητας για το πρόβλημα της σκέδασης ελαστικών κυμάτων από μια άκαμπτη ανώμαλη επιφάνεια. Ωστόσο, δόθηκε ένας αριθμός απαραίτητων παρατηρήσεων σχετικών με μη πλήρη ικανοποιητικά αποτελέσματα, καθώς και με σημαντικές συνέπειες.

Μία ελαφριά όψη των παρουσιαζόμενων αποτελεσμάτων είναι ο περιορισμός των επιφανειών κλάσης $C^{1,1}$ αντί των επιφανειών κλάσης $C^{1,\alpha}$. Στην πραγματικότητα, η θεωρία επιλυσιμότητας δεν βασίζεται καθ' αυτή σε αυτήν την υπόθεση. Αυτό οφείλεται μόνο στη φύση των αποτελεσμάτων κανονικότητας και των αντίστοιχων ιδιοτήτων απεικόνισης των τελεστών ολοκλήρωσης. Είναι δυνατή η επέκταση αυτών των αποτελεσμάτων σε σύνορα κλάσης $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1]$, αλλά ο βαθμός τεχνικής λεπτομέρειας που έχει σχέση φαίνεται δυσανάλογος με τις νέες γνώσεις που αποκτώνται.

Όσον αφορά ακόμη πιο γενικές επιφάνειες, φαίνεται εφικτή η επέκταση των αποτελεσμάτων μοναδικότητας σε περιοχές σκέδασης που είναι τμήματα Lyapunov. Για την περίπτωση των ακουστικών κυμάτων, αυτό το αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην εργασία [1], και αναμένεται ότι παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν και για την περίπτωση των ελαστικών κυμάτων. Ωστόσο, η ερώτηση της επιλυσιμότητας των συνοριακών εξισώσεων ολοκλήρωσης για τέτοιες επιφάνειες παραμένει ανοιχτή.

Ένα ακόμα ενδιαφέρον θέμα είναι η επέκταση των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 3 και 4 σε προβλήματα σκέδασης που περιλαμβάνουν εμπόδια με διαφορετικές φυσικές ιδιότητες. Από Σύμφωνα με τις εφαρμογές αυτές, μια ελεύθερη επιφάνεια ή μία συνοριακή συνθήκη Robin θα ήταν πιο ρεαλιστικές από την άκαμπτη επιφάνεια που εξετάζεται στην παρούσα εργασία. Όσον αφορά το ζήτημα της μοναδικότητας της λύσης, παρόμοιες μέθοδοι με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 3 και 4 θα μπορούσαν να εφαρμοστούν στην περίπτωση της συνοριακής συνθήκης Robin. Αναμένεται ότι η μοναδικότητα της λύσης δεν ισχύει στην περίπτωση της ελεύθερης επιφάνειας αν επιτραπεί η χρήση της ίδιας γενικής κλάσης των πεδίων πρόσπτωσης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πρόβλημα με την συνοριακή συνθήκη του Dirichlet αντικαθίσταται από τον όρο $Pu = g$, και δέχεται λύσεις επιφανειακών κυμάτων Rayleigh στην περίπτωση που $g = 0$.

Για να αποδειχθεί η ύπαρξη λύσης σε οποιοδήποτε πρόβλημα με την συνοριακή εξίσωση ολοκλήρωσης για κάθε φυσικό ρεαλιστικό πρόβλημα, απαιτείται η χρήση ενός τανυστή τάσης σ_{jk} αντί του γενικού τανυστή τάσης π_{jk} και επομένως απαγορεύει τη χρήση του ψευδο-τελεστή

συμπίεσης. Ως αποτέλεσμα, είναι απαραίτητο να αντιμετωπίζονται οι τελεστές ολοκλήρωσης τύπου Cauchy ως απλού τύπου.

Από την άλλη πλευρά, η προσέγγιση που παρουσιάζεται στην παρούσα Εργασία για την απόδειξη της επιλυσιμότητας των συνοριακών τελεστών ολοκλήρωσης σε όλους τους χώρους L_p μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας σε μια ευρεία κλάση τελεστών ολοκλήρωσης που προκύπτουν στη θεωρία της ακουστικής και της ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Μια πρώτη εφαρμογή αυτής της προσέγγισης παρουσιάζεται στην εργασία [9] για την περίπτωση των ακουστικών κυμάτων.

Τέλος, ένα θέμα που δεν έχει εξεταστεί στην παρούσα μελέτη είναι ο αριθμητικός υπολογισμός της λύσης για ένα πρόβλημα σκέδασης σε μη φραγμένη επιφάνεια. Με τη χρήση της μεθόδου της συνοριακής εξίσωσης ολοκλήρωσης, το πρόβλημα ελαττώνεται σε αριθμητική επίλυση μιας συνοριακής εξίσωσης ολοκλήρωσης ή ενός συστήματος τέτοιων εξισώσεων στην πραγματική γραμμή. Η κύρια μέθοδος που έχει προταθεί για αυτόν τον σκοπό είναι η μέθοδος της πεπερασμένης τομής, η οποία περιορίζει το εύρος της ολοκλήρωσης σε ένα πεπερασμένο διάστημα $[-A, A]$ και στη συνέχεια αποδεικνύει την σύγκλιση της αντίστοιχης λύσης πεπερασμένης τομής όταν $A \rightarrow \infty$ [18], [19]. Η ολοκληρωτική εξίσωση με τον περιορισμένο εύρος ολοκλήρωσης μπορεί να επιλυθεί αρχικά με οποιαδήποτε μέθοδο τοποθέτησης σημείων, αριθμητικής ολοκλήρωσης ή μεθόδου Galerkin, αλλά το αποτέλεσμα είναι ένας πυκνός γραμμικός σύστημα που απαιτεί μεγάλη ακρίβεια και, συνεπώς, πρέπει να χρησιμοποιηθούν εξελιγμένες τεχνικές συμπίεσης της μήτρας για τη λύση. Παραδείγματα τέτοιων μεθόδων περιγράφονται στα [9], [19], [20] και [10].

Βιβλιογραφία

- [1] Arens, T. "A new integral equation formulation for the scattering of plane elastic waves by diffraction gratings." *The Journal of Integral Equations and Applications* (1999): 275-297.
- [2] Arens, T. "The scattering of plane elastic waves by a one-dimensional periodic surface." *Mathematical methods in the applied sciences* 22.1 (1999): 55-72.
- [3] Arens, T. "The Scattering of Elastic Waves by Rough Surfaces." A thesis for the degree of Doctor of Philosophy (2000): 9-18.
- [4] Brakhage, Helmut, and Peter Werner. "Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Helmholtz'sche Schwingungsgleichung." *Archiv der Mathematik* 16 (1965): 325-329.
- [5] Chandler-Wilde, Simon N. "On asymptotic behavior at infinity and the finite section method for integral equations on the half-line." *The Journal of Integral Equations and Applications* (1994): 37-74.
- [6] Chandler-Wilde, Simon N., Chris R. Ross, and Bo Zhang. "Scattering by infinite one-dimensional rough surfaces." *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 455.1990 (1999): 3767-3787.
- [7] Chandler-Wilde, Simon N., and Bo Zhang. "A generalized collectively compact operator theory with an application to integral equations on unbounded domains." *The Journal of Integral Equations and Applications* (2002): 11-52.
- [8] Chandler-Wilde, Simon N., and Bo Zhang. "A uniqueness result for scattering by infinite rough surfaces." *SIAM Journal on Applied Mathematics* 58.6 (1998): 1774-1790.
- [9] Chandler-Wilde, Simon N., and Marko Lindner. "Boundary integral equations on unbounded rough surfaces: Fredholmness and the finite section method." *The Journal of Integral Equations and Applications* (2008): 13-48..
- [10] Chandler-Wilde, Simon N., Mizanur Rahman, and Chris R. Ross. "A fast two-grid and finite section method for a class of integral equations on the real line with application to an acoustic scattering problem in the half-plane." *Numerische Mathematik* 93 (2002): 1-51.
- [11] Chandler-Wilde, Simon N., and Bo Zhang. "Electromagnetic scattering by an inhomogeneous conducting or dielectric layer on a perfectly conducting plate." *Proceedings of the Royal*
- [12] Constanda, Christian. *A mathematical analysis of bending of plates with transverse shear deformation*. Longman Scientific and Technical, 1990.

- [13] Colton, David L., Rainer Kress, and Rainer Kress. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Vol. 93. Berlin: Springer, 1998.
- [14] du Plessis, N. "Potential Theory and its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics." (1969): 406-407.
- [15] Fokkema, J. T., and P. M. Van den Berg. "Elastodynamic diffraction by a periodic rough surface (stress-free boundary)." *The Journal of the Acoustical Society of America* 62.5 (1977): 1095-1101.
- [16] Kress, Rainer. "Inverse elastic scattering from a crack." *Inverse Problems* 12.5 (1996): 667.
- [17] Kupradze, Viktor Dmitrievič. Potential methods in the theory of elasticity. Israel Program for Scientific Translations, 1965.
- [18] Meade, Douglas B. "Applications of generalized stress in elastodynamics." *Quarterly of applied mathematics* 49.1 (1991): 121-145.
- [19] Meier, A., and S. N. Chandler-Wilde. "On the stability and convergence of the finite section method for integral equation formulations of rough surface scattering." *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24.4 (2001): 209-232.
- [20] Ross, Christopher Roger. Direct and inverse scattering by rough surfaces. Diss. Brunel University, 1996.
- [21] Sommerfeld, Arnold. "Mathematische Theorie der Diffraction: Mit einer Tafel." *Mathematische Annalen* 47.2-3 (1896): 317-374.