



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Σπουδών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Η μέθοδος του ενοποιημένου μετασχηματισμού σε
προβλήματα φυσικής του εδάφους.

Διπλωματική Εργασία
του
Ιωάννη Χονδροζουμάκη

Επιβλέπων: Καλημέρης Κωνσταντίνος

Πάτρα
11 Σεπτεμβρίου 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή Ιωάννη Χονδροζουμάκη που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας / δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσης τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μεταβίβαση, διανομή, έκδοση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάταρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα / δημιουργού. Ο συγγραφέας / δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο
Σχολή Θετικών Σπουδών και Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Η μέθοδος του ενοποιημένου μετασχηματισμού σε
προβλήματα φυσικής του εδάφους.

Ιωάννης Χονδροζουμάκης

Επιτροπή Επιβλέψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:	Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Καλημέρης Κωνσταντίνος	Βασίλειος Σεβρόγλου
Ερευνητής	Καθηγητής
Ακαδημία Αθηνών	ΠΑΠΕΙ

Πάτρα
11 Σεπτεμβρίου 2026

Περίληψη

Στην παρακάτω εργασία θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του ενοποιημένου μετασχηματισμού για την επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών που αφορούν μερικές διαφορικές εξισώσεις. Συγκεκριμένα θα αναφέρουμε αναλυτικά τη διαδικασία επίλυσης μέσω του E.M. , θα δώσουμε έμφαση στο γιατί ονομάζεται ενοποιημένος καθώς και θα δείξουμε ότι μπορούμε να εξάγουμε, αν θελήσουμε, τη λύση όπως αυτή δίνεται από τους κλασικούς μετασχηματισμούς (sine Fourier, κλπ). Θα δούμε στην πράξη πώς και γιατί υπερτερεί των κλασικών μεθόδων. Τέλος θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της κατακόρυφης διήθησης του νερού, το οποίο αν και μοντελοποιείται από την εξίσωση Richards [19], όπου μετά από παραδοχές μετασχηματίζεται στη μη γραμμική ΜΔΕ του Burgers και αφού πρώτα τη γραμμικοποιήσουμε μέσω του Hopf–Cole transformation [16], προκύπτει μια εξίσωση διάχυσης. Την εξίσωση αυτή θα λύσουμε εφαρμόζοντας τη μέθοδο του ενοποιημένου μετασχηματισμού με στόχο να πάρουμε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης την οποία θα υπολογίσουμε και αριθμητικά.

Λέξεις-κλειδιά: Ενοποιημένος Μετασχηματισμός,

Ευχαριστίες

Πριν από την παρουσίαση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, αισθάνομαι την ανάγκη να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου και συνέβαλαν, ο καθένας με τον δικό του τρόπο, στην ολοκλήρωση αυτής της προσπάθειας.

Πρώτα απ' όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Κωνσταντίνο Καλημέρη, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα αντικείμενο που αποτέλεσε για μένα μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα και απαιτητική εμπειρία. Καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας, η καθοδήγηση, οι παρατηρήσεις και οι συζητήσεις μας με βοήθησαν όχι μόνο να προχωρήσω στην ολοκλήρωσή της, αλλά και να αντιμετωπίζω με μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση τις δυσκολίες που προέκυπταν. Τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για την υπομονή, τον χρόνο και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, καθώς και για τη συμβολή του στην επιστημονική μου πορεία.

Ιδιαίτερη και ξεχωριστή θέση στις ευχαριστίες μου έχει ο Αθανάσιος Παρασκευόπουλος, τον οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς για τη ανυπολόγιστα σημαντική βοήθεια που μου προσέφερε για την εκπόνηση της εργασίας. Η προθυμία του να συζητά μαζί μου κάθε απορία και δυσκολία, να μου εξηγεί σημεία που με προβληματίζαν και να μοιράζεται μαζί μου τις γνώσεις και την εμπειρία του υπήρξε πραγματικά πολύτιμη. Πέρα από την επιστημονική του βοήθεια, εκτιμώ ιδιαίτερα τη διάθεση, την υπομονή και τον τρόπο με τον οποίο στάθηκε δίπλα μου σε αυτή την προσπάθεια. Η συμβολή του δεν περιορίστηκε μόνο στην επίλυση επιμέρους ζητημάτων της εργασίας, αλλά με βοήθησε να συνεχίσω και στις στιγμές που η πορεία της φαινόταν πιο δύσκολη.

Θα ήθελα, πάνω απ' όλα, να ευχαριστήσω την Πόπη Χαρωνίτη, την Πόπη μου. Η αγάπη της όλα αυτά τα χρόνια, η υπομονή της και η στήριξή της μου έδωσαν τη δύναμη να πιστέψω περισσότερο στον εαυτό μου, να σταθώ στα πόδια μου και να προσπαθώ κάθε μέρα να γίνομαι καλύτερος άνθρωπος. Ήταν δίπλα μου για να χαρούμε και να γιορτάσουμε μαζί τις όμορφες στιγμές, αλλά κυρίως σε εκείνες τις στιγμές που τα πράγματα ήταν πιο δύσκολα και η αμφιβολία για το αν θα τα καταφέρω ήταν μεγαλύτερη. Ήταν ο άνθρωπος που με εμπύχωνε και μου έδινε το κουράγιο να συνεχίσω, ακόμα και όταν εγώ ο ίδιος δυσκολευόμουν να πιστέψω ότι μπορώ. Χωρίς εκείνη, πιθανότατα δεν θα είχα τολμήσει να ξεκινήσω αυτό το εγχείρημα ούτε θα είχα βρει τη δύναμη να φτάσω μέχρι εδώ. Για όλα όσα μου έχει δώσει και, κυρίως, για τον άνθρωπο που με βοήθησε και συνεχίζει να με βοηθά να γίνομαι, την ευχαριστώ.

Η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας σηματοδοτεί το τέλος ενός σημαντικού κύκλου και δεν θα ήταν η ίδια χωρίς τους ανθρώπους που μοιράστηκαν μαζί μου τη διαδρομή μέχρι εδώ.

Σε όλους όσοι συνέβαλαν, άμεσα ή έμμεσα, σε αυτή την προσπάθεια, εκφράζω ένα ειλικρινές και θερμό ευχαριστώ.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
1 Εισαγωγή	1
1.1 Ιστορική αναδρομή	1
1.2 Πολύ γρήγορη παρουσίαση της μεθόδου	2
1.3 Γιατί Ενοποιημένος?	3
1.4 Εφαρμογή του E.M σε πρόβλημα της φυσικής του εδάφους	3
2 Η εξίσωση θερμότητας στην ημιευθεία	5
2.1 Η γενική λύση της ΜΔΕ	5
2.2 Η μέθοδος sine Fourier transform.	6
2.3 Λύση του προβλήματος μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού.	7
2.4 Επαλήθευση	10
2.5 Rederivation του Sine Transform	11
2.6 Συνοριακές συνθήκες Robin	11
2.7 Επαναπαραγωγή των κλασικών μετασχηματισμών	13
3 Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο	15
3.1 Η λύση μέσω του κλασσικού μετασχηματισμού	15
3.2 Λύση μέσω του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού	16
3.3 Επαλήθευση	19
3.4 Επαναπαραγωγή του κλασσικού μετασχηματισμού	22
4 Συναρτήσεις Green	25
4.1 Οι συναρτήσεις Green για το πρόβλημα της ημιευθείας	26
4.2 Οι συναρτήσεις Green για το πεπερασμένο χωρίο	28
5 Εφαρμογή της μεθόδου	31
5.1 Το πρόβλημα της κατακόρυφης διήθησης	31
5.2 Εφαρμογή σε συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη	34
5.3 Αριθμητική προσέγγιση της λύσης	36
5.3.1 Καμπύλη ολοκλήρωσης	36
6 Σύνοψη	39

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορική αναδρομή

Η ιδέα που οδηγεί στον Ενοποιημένο Μετασχηματισμό έχει τις ρίζες της στα τέλη του 18ου αιώνα. Αν και ιστορικά οι πρώτες πρώιμες παρατηρήσεις ότι υπάρχει δυνατότητα χρήσης ολοκληρωμάτων για την επίλυση εξισώσεων ανήκουν στον Leonhard Euler (1737) το καθοριστικό βήμα που έφερε τη συστηματοποίηση της χρήσης των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών ως εργαλείο επίλυσης εξισώσεων έγινε από τον Pierre-Simon Laplace μέσω των εργασιών του πάνω στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων (1782-1785). Έδειξε συγκεκριμένα, κάνοντας ένα πολύ σημαντικό βήμα, ότι αντί να προσπαθήσει κάποιος να λύσει άμεσα τις διαφορικές μπορεί να τις μετασχηματίσει σε αλγεβρικές σχέσεις μέσω ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Έπειτα ο Fourier στο βιβλίο του *Théorie analytique de la chaleur* (1822) [3] εισάγει τις σειρές Fourier καθώς και την ιδέα του Spectral decomposition το οποίο μας δίνει ένα ακόμα πολύ χρήσιμο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Οι κλασικές μέθοδοι επέτρεψαν την επίλυση μεγάλου πλήθους γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ιδιαίτερα σε προβλήματα με απλή γεωμετρία και με απλές συνοριακές συνθήκες. Ωστόσο, η εφαρμογή τους καθίσταται δύσκολη σε προβλήματα μη αυτοσυζυγών τελεστών, σε πεπερασμένα χωρία ή σε προβλήματα με σύνθετες συνοριακές συνθήκες, γεγονός που οδήγησε στην ανάπτυξη νεότερων μεθόδων. Μία από τις εξισώσεις που οι κλασικοί μετασχηματισμοί αποτυγχάνουν και η προσπάθεια επίλυσης της οδήγησε στη δημιουργία του ενοποιημένου μετασχηματισμού είναι η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV) [21]:

$$u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \infty \quad (1.2)$$

$$u(0, t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.3)$$

όπου ήταν γνωστό ήδη από το 1982 (που όπως αναφέρει ο Φωκάς στο βιβλίο του [10]) ότι μπορούσε να λυθεί μέσω της inverse scattering transform method [14]. Ο Φωκάς και ο Mark Ablowitz επικεντρώθηκαν στην προσπάθεια επίλυσης του γραμμικοποιημένου

προβλήματος [1]:

$$q_t + q_x + q_{xxx} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.4)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad 0 < x < \infty \quad (1.5)$$

$$q(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.6)$$

Ήταν γνωστό ότι οι γραμμικές ΜΔΕ της μορφής αυτής έδιναν λύση είτε με μετασχηματισμό ως προς x (Fourier) είτε με μετασχηματισμό ως προς t (Laplace). Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπήρχε ανάλογος x - sine transform για εξισώσεις που περιέχουν τρίτη παράγωγο. Αν και ο μετασχηματισμός Laplace “δούλευε” για το παραπάνω πρόβλημα εμφανίζονταν σημαντικοί περιορισμοί στη λύση με βασικότερη ότι δεν μπορούσε να γενικευτεί σε μη γραμμικές ΜΔΕ.

Το γεγονός λοιπόν ότι η IST [15] αποτυγχάνει να δώσει λύση σε προβλήματα με σύνορα (πχ ημιευθεία, πεπερασμένα χωρία κλπ) σε συνδυασμό με την παρατήρηση του Φωκά ότι ο Fourier transform σε γραμμικές ΜΔΕ και ο IST σε μη γραμμικές ολοκληρώσιμες ΜΔΕ, έχουν κοινή δομή στην αντιμετώπιση του προβλήματος στο μιγαδικό επίπεδο (analyticity + spectral relations + contour deformations), γέννησαν την ιδέα μίας ενοποιημένης μεθόδου λύσης ΜΔΕ με ταυτόχρονη αντιμετώπιση τόσο των αρχικών όσο και των συνοριακών συνθηκών των προβλημάτων.

Η ιδέα αυτή γέννησε και την πιο σημαντική εξίσωση της Ε.Μ., την Global Relation που, όπως θα περιγράψουμε και αναλυτικότερα παρακάτω, καταφέρνει να λύσει ακριβώς το πρόβλημα που είχαμε με τον IST δηλαδή: Ενσωματώνει και τις συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα και μάλιστα λόγω της αναλυτικότητας και της συμμετρίας που μας προσφέρει (μέσω contour deformations) μας επιτρέπει να απαλείψουμε άγνωστες συνοριακές συνθήκες για το ΠΑΣΤ που έχουμε.

1.2 Πολύ γρήγορη παρουσίαση της μεθόδου

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε αναλυτικά παραδείγματα της μεθόδου πάνω στο πρόβλημα της εξίσωσης της θερμότητας τόσο στην ημιευθεία όσο και στο πεπερασμένο χωρίο. Κάτι που θα γίνει άμεσα εμφανές, ακόμα και από αυτά τα δύο παραδείγματα, είναι ότι για να επιλύσουμε οποιαδήποτε εξίσωση μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Εύρεση της Ολικής Σχέσης (Global Relation)
2. Εύρεση της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της λύσης
3. Εύρεση της τελικής λύσης του προβλήματος

Ας δούμε τώρα λίγο ποιο αναλυτικά τα παραπάνω βήματα:

1. Επιλέγοντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό που εξυπηρετεί την γεωμετρία του προβλήματος και εφαρμόζοντάς τον στην εξίσωση του προβλήματος προκύπτει η Global relation. Η GR είναι η πιο σημαντική εξίσωση στη μέθοδο του ενοποιημένου μετασχηματισμού καθώς συνδυάζει την λύση του προβλήματος με τις αρχικές και τις συνοριακές του συνθήκες, ανεξάρτητα από το ποιες είναι γνωστές σε εμάς. Αναλυτικά παρουσιάζεται η διαδικασία τόσο στο κεφάλαιο 1 που αφορά την περίπτωση της ημιευθείας όσο και στο κεφάλαιο 2 που αφορά την περίπτωση του πεπερασμένου χωρίου

2. Έχοντας την GR πλέον πολλαπλασιάζοντας, διαιρώντας με τις κατάλληλες ποσότητες και ολοκληρώνοντας κατάλληλα, ώστε στο αριστερό μέλος της εξίσωσης να εμφανιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός που χρησιμοποιήσαμε για το βήμα 1, στο δεξί μέλος της εξίσωσης παίρνουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η ολοκληρωτική αναπαράσταση αυτή θα περιέχει και γνωστές και άγνωστες συναρτήσεις.
3. Για το παραπάνω πρόβλημα επικαλούμαστε πάλι την GR όπου σε συνδυασμό με τη συμμετρία του προβλήματος που έχουμε να επιλύσουμε μας επιτρέπει να απαλείψουμε τις άγνωστες συναρτήσεις. Έτσι προκύπτει τελικά η αναλυτική λύση του προβλήματος πλέον χωρίς κάποια άγνωστη συνάρτηση.

1.3 Γιατί Ενοποιημένος?

Πριν κλείσουμε την εισαγωγή της εργασίας μας θέλουμε να επισημάνουμε ότι η επιλογή του όρου ενοποιημένος δεν είναι καθόλου τυχαία αντίθετα μάλιστα κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι κανένα άλλο όνομα δεν είναι κατάλληλο για να περιγράψει με ακρίβεια την μέθοδο αυτή [6, 10]. Ας δούμε λοιπόν γιατί:

- Η διαδικασία που αναφέραμε παραπάνω παραμένει αναλλοίωτη ανεξάρτητα από το ποιες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος γνωρίζουμε. Για να τονίσουμε αυτή την ιδιότητα της μεθόδου στο κεφάλαιο 2.6 λύσαμε το πρόβλημα Robin.
- Μπορούμε, (και δείχνουμε σε κάθε κεφάλαιο) να κάνουμε *rederive* τους κλασικούς μετασχηματισμούς που επιλύουν το πρόβλημα ξεκινώντας από τη λύση που προέκυψε από τον E.M.
- Σε αντίθεση με του κλασικούς μετασχηματισμούς η λύση που προκύπτει από τον E.M. είναι συνεχής και όπως βλέπουμε και στο κεφάλαιο 3 της εργασίας αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε τις σωστές συναρτήσεις Green σε κάθε περίπτωση

1.4 Εφαρμογή του E.M σε πρόβλημα της φυσικής του εδάφους

Βασισμένοι στη δουλειά των: Κωνσταντίνου Καλημέρη, Λεωνίδα Μηνδρινού και Αθανάσιου Παρασκευόπουλου, [17] θα ασχοληθούμε με το μονοδιάστατο πρόβλημα της κατακόρυφης διήθησης. Το πρόβλημα αυτό μοντελοποιείται από την εξίσωση Richards' [19]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial x} \quad (1.7)$$

η οποία προκύπτει από το νόμο το Darcy που αφορά τη ροή σε πορώδη μέσα σε συνδυασμό με την αρχή διατήρησης της μάζας. Συγκεκριμένα η (1.7) αποτελείται από 2 όρους. Ο πρώτος αφορά την διάχυση λόγω της κλίσης της υγρασίας, δηλαδή την τάση του νερού να διαχέεται από περιοχές υψηλής υγρασίας σε περιοχές χαμηλότερης υγρασίας. Εδώ εύκολα καταλαβαίνουμε ότι ο όρος αυτός, όπως προκύπτει φυσικά, είναι ανάλογος με τη θερμική διάχυση καθώς αν τον απομονώσουμε θα είναι της μορφής $\partial_t = \partial_{xx}$. Ο δεύτερος αφορά τη κίνηση του νερού λόγω βαρύτητας. Εδώ ο όρος $K(\theta)$ αυξάνει ανάλογα με την ποσότητα του νερού και έτσι, ο δεύτερος όρος μας δείχνει ότι όσο περισσότερο

είναι το νερό στην επιφάνεια τόσο μεγαλύτερη είναι και η ταχύτητα αποστράγγισης του, λόγω βαρύτητας. Αν για την (1.7) πάρουμε τις παραδοχές της σταθερής διαχυτικότητας ($D(\vartheta) = D$) και τετραγωνικής εξάρτησης της υδραυλικής αγωγιμότητας από την υδατική περιεκτικότητα ($K(\vartheta) = a(\vartheta + b)^2$) η εξίσωση απλοποιείται στην εξίσωση Burgers

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - 2a(\vartheta + b) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (1.8)$$

η οποία αν και μη γραμμική μέσω της Hopf-Cole transformation μετασχηματίζεται στην γραμμική εξίσωση διάχυσης:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

όπου $w = e^{-\frac{a}{b}\vartheta}$, με $\frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta + b$.

Έχοντας λοιπόν πλέον μία γραμμική ΜΔΕ μπορούμε να ενσωματώσουμε τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος στην GR και μέσω του E.M. να εξάγουμε την γενική αναλυτική λύση. Τέλος για συγκεκριμένη αρχική συνάρτηση θα κάνουμε και αριθμητική αναπαράσταση της λύσης.

Κεφάλαιο 2

Η εξίσωση θερμότητας στην ημιευθεία

2.1 Η γενική λύση της ΜΔΕ

Ας επικεντρωθούμε στο πρόβλημα της εξ. θερμ. και για λόγους ευκολίας επιλέγω την απλούστερη μορφή του προβλήματος ($k = 1$)

$$u_t = u_{xx} \quad (2.1)$$

Γνωρίζουμε ότι η παραπάνω μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια της μεθόδου διαχωρισμού μεταβλητών.

- Θεωρούμε ότι η λύση έχει τη μορφή $u(x, t) = X(x)T(t)$
- Άμεσα προκύπτει ότι η εξ. μπορεί να γραφτεί ως $XT' = X''T$ και να αναχθεί εύκολα σε δύο ΣΔΕ
- Οι λύσεις των οποίων συνδυάζονται για να προκύψει η γενική λύση της ΜΔΕ

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2$$

Απ' όπου προκύπτουν οι ΣΔΕ

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (2.2)$$

και

$$T' + \lambda^2 T = 0 \quad (2.3)$$

Όπου έχουν αντίστοιχα λύσεις $e^{i\lambda x}$ και $e^{-\lambda^2 t}$ και άρα η γενική λύση με βάση την αρχική μας υπόθεση $u(x, t) = X(x)T(t)$ θα είναι της μορφής:

$$U(\lambda)e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \quad (2.4)$$

όπου λ και $U(\lambda)$ αυθαίρετος μιγαδικός αριθμός και μιγαδική συνάρτηση, αντίστοιχα που εξαρτιούνται από τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Επίσης, και το παρακάτω ολοκλήρωμα αποτελεί λύση της (2.1)

$$u(x, t) = \int U(\lambda)e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \quad (2.5)$$

Υπάρχει όμως ένας συστηματικός τρόπος να επιλέγουμε την κατάλληλη καμπύλη ολοκλήρωσης για το (2.5) καθώς και να προσδιοριστεί η αυθαίρετη συνάρτηση $U(\lambda)$? Παρακάτω θα αναλύσουμε πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό στην περίπτωση που η (2.1) ορίζεται στη ημιευθεία

2.2 Η μέθοδος sine Fourier transform.

Στο πρόβλημα της ημιευθείας ο κλασικός τρόπος επίλυσης του (2.1) είναι μέσω της sine Fourier transform [7, 20] δηλαδή :

$$\hat{f}_s(\lambda) = \int_0^\infty \sin(\lambda x) f(x) dx, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (2.6)$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\lambda x) \hat{f}_s(\lambda) d\lambda, \quad 0 < x < \infty \quad (2.7)$$

Δεδομένου βέβαια ότι $f(x) \in L_1$, τουλάχιστον, ώστε το παραπάνω να έχει νόημα.

Ας θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα Dirichlet όπου οι παρακάτω αρχική και συνοριακή συνθήκη θεωρούνται γνωστές συναρτήσεις:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \infty \quad \text{και} \quad (2.8)$$

$$u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0 \quad (2.9)$$

Θα εφαρμόσουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό στη λύση του προβλήματος και έχουμε:

$$\hat{u}_s(\lambda, t) = \int_0^\infty \sin(\lambda x) u(x, t) dx, \quad 0 < \lambda < \infty \quad (2.10)$$

όπου παραγωγίζοντας την (2.10) ως προς t παίρνουμε :

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_s(\lambda, t) = \int_0^\infty \sin(\lambda x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx = \int_0^\infty \sin(\lambda x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx \quad (2.11)$$

και ολοκληρώνοντας 2 φορές κατά παράγοντες προκύπτει:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \sin(\lambda x) \right|_0^\infty - \lambda u(x, t) \cos(\lambda x) \Big|_0^\infty + \lambda^2 \int_0^\infty u(x, t) \sin(\lambda x) dx \quad (2.12)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι το $\frac{\partial u}{\partial x}$ και το u μηδενίζουν καθώς $x \rightarrow \infty$ προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_s(\lambda, t) = -\lambda u(0, t) - \lambda^2 \hat{u}_s(\lambda, t) \quad (2.13)$$

Και έτσι η διαφορική μετασχηματίζεται στην παρακάτω ΣΔΕ

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}_s(\lambda, t) + \lambda^2 \hat{u}_s(\lambda, t) = -\lambda g_0(t) \quad (2.14)$$

Επιλέγοντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{\tilde{\eta}^2 t}$ παίρνουμε:

$$e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_s(\tilde{\eta}, t) = \hat{u}_s(\tilde{\eta}, 0) + \tilde{\eta} \int_0^t e^{\tilde{\eta}^2 \tau} g_0(\tau) d\tau \quad (2.15)$$

Τώρα διαιρώντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού παίρνουμε την λύση του προβλήματος:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin(\tilde{\eta} x) e^{-\tilde{\eta}^2 t} [\hat{u}_s(\tilde{\eta}, 0) + \tilde{\eta} \int_0^t e^{\tilde{\eta}^2 \tau} g_0(\tau) d\tau] d\tilde{\eta}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

Αν και εδώ μοιάζει να έχουμε λύσει πλήρως το πρόβλημα και μάλιστα να έχουμε συνδέσει τις αρχικές και συνοριακές μας συνθήκες με τη λύση, αν πάμε να επιβεβαιώσουμε ότι $u(0, t) = g_0(t)$ αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα ότι το δεξί μέλος μηδενίζει για $x = 0$, λόγω του ημίτονου.

Θα λύσουμε τώρα το πρόβλημα με τη βοήθεια της ενοποιημένης μεθόδου και θα επεκταθούμε περισσότερο στο παραπάνω πρόβλημα στο μέρος “Επαλήθευση”.

2.3 Λύση του προβλήματος μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού.

Ας εξετάσουμε τώρα το ίδιο πρόβλημα όμως αυτή τη φορά μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού [6, 8, 9]. Το σημαντικότερο “εργαλείο” της μεθόδου είναι η Ολική Σχέση (Global Relation) που πρόκειται για μία εξίσωση η οποία συνδέει, στο φασματικό χώρο, τη λύση με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Εδώ αξίζει να σημειωθεί (και θα το δούμε και παρακάτω) ότι η GR συσχετίζει τόσο τις γνωστές όσο και τις άγνωστες συνοριακές συνθήκες κάτι το οποίο την κάνει να υπερισχύει σημαντικά έναντι των κλασικών μεθόδων. Παρακάτω θα εξάγουμε πάλι τη λύση μέσω του E.M. στο πρόβλημα συνοριακών συνθηκών Dirichlet (διότι αυτό κάναμε στην παράγραφο 2), όμως εξ ίσου εύκολα θα λύνουμε και το Neumann πρόβλημα (απαλείφοντας το $\tilde{g}_0$ αντί το $\tilde{g}_1$)

Θυμίζω ξανά το πρόβλημα, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.17)$$

Τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \infty; \quad u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0. \quad (\text{Dirichlet}) \quad (2.18)$$

Επιπλέον συμβολίζουμε ως:

$$u_x(0, t) = g_1(t), \quad t > 0 \quad (2.19)$$

Τώρα μέσω του Half Fourier Transform

$$\begin{aligned} \hat{f}(\tilde{\eta}) &= \int_0^\infty e^{-i\tilde{\eta}x} f(x) dx, \quad \Im \tilde{\eta} \leq 0, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\tilde{\eta}x} \hat{f}(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη λύση, τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες όπως φαίνεται παρακάτω. Σημαντική πληροφορία είναι ότι εδώ πρέπει $\Im \bar{\eta} < 0$ ώστε ο όρος $e^{-i\bar{\eta}x}$ να είναι αναλυτικός και φραγμένος για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι παίρνουμε τους μετασχηματισμούς:

$$\hat{u}(\bar{\eta}, t) = \int_0^\infty e^{-i\bar{\eta}x} u(x, t) dx, \quad t > 0, \quad \Im(\bar{\eta}) \leq 0 \quad (2.21)$$

$$\hat{u}_0(\bar{\eta}) = \int_0^\infty e^{-i\bar{\eta}x} u_0(x) dx, \quad t > 0, \quad \Im(\bar{\eta}) \leq 0 \quad (2.22)$$

$$\tilde{g}_j(\bar{\eta}, t) = \int_0^t e^{\bar{\eta}\tau} g_j(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad j = 0, 1, \quad \bar{\eta} \in \mathbb{C} \quad (2.23)$$

Τώρα παραγωγίζοντας ως προς t ακριβώς όπως κάναμε στην περίπτωση του κλασικού μετασχηματισμού έχουμε:

$$\hat{u}_t = \int_0^\infty e^{-i\bar{\eta}x} u_t dx = \int_0^\infty e^{-i\bar{\eta}x} u_{xx} dx = u_x e^{-i\bar{\eta}x} \Big|_0^\infty + i\bar{\eta} u e^{-i\bar{\eta}x} \Big|_0^\infty - \bar{\eta}^2 \hat{u}. \quad (2.24)$$

Όπου με το $x \rightarrow \infty$ τα εκθετικά θα μηδενιστούν και έτσι:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t + \bar{\eta}^2 \hat{u} &= -g_1(t) - i\bar{\eta} g_0(t) \iff \\ (\hat{u} e^{\bar{\eta}^2 t})_t &= -e^{\bar{\eta}^2 t} (g_1(t) + i\bar{\eta} g_0(t)) \iff \\ \hat{u} e^{\bar{\eta}^2 t} &= \hat{u}_0 - \int_0^t e^{\bar{\eta}^2 \tau} [g_1(\tau) + i\bar{\eta} g_0(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

Όπου εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς για τα g_0 και g_1 η (2.25) γράφεται:

$$e^{\bar{\eta}^2 t} \hat{u}(\bar{\eta}, t) = \hat{u}_0(\bar{\eta}) - \tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) - i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t), \quad \Im(\bar{\eta}) \leq 0 \quad (2.26)$$

Η (2.26) είναι η GR για το πρόβλημα της ημιευθείας και όπως είπαμε και στην αρχή της παραγράφου, παρατηρούμε ότι εδώ ενοποιούνται οι γνωστές συνθήκες $\hat{u}_0, \tilde{g}_0$ με την άγνωστη για το Dirichlet πρόβλημα $\tilde{g}_1$.

Παρακάτω θα δούμε πώς μπορούμε πλέον μέσω της GR τόσο να εξάγουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης, όσο και να απαλείψουμε την άγνωστη συνάρτηση $\tilde{g}_1$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{\bar{\eta}^2 t} \hat{u}(\bar{\eta}, t) &= \hat{u}_0(\bar{\eta}) - \tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) - i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) \iff \\ \hat{u}(\bar{\eta}, t) &= e^{-\bar{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\bar{\eta}) - e^{-\bar{\eta}^2 t} [\tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) - i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t)] \iff \\ e^{i\bar{\eta}x} \hat{u}(\bar{\eta}, t) &= e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\bar{\eta}) - e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} [\tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) - i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t)] \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ολοκληρώνοντας την (2.27) στο $\mathbb{R}$ και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2\pi}$ έχουμε τον αντίστροφο Fourier για την $\hat{u}(\bar{\eta}, t)$. Έτσι προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} [\tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) + i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t)] d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Έτσι έχουμε καταφέρει να εκφράσουμε τη λύση ως ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα που αφορά την αρχική μας συνθήκη και ένα 2ο που αφορά τις συνοριακές μας συνθήκες.

Βέβαια στο 2ο ολοκλήρωμα υπάρχει ακόμα η άγνωστη $\tilde{g}_1$. Εδώ πάλι μέσω της GR θα την εξαιλείψουμε με τον εξής τρόπο:

Θα κάνουμε deform το 2ο ολοκλήρωμα της (2.28) από το $\mathbb{R}$ στο ∂D^+ (θεώρημα Cauchy) Έτσι έχουμε:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [\tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) + i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t)] d\tilde{\eta} \quad (2.29)$$

Επιστρέφοντας στην GR έχουμε :

$$e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(\tilde{\eta}, t) = \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - \tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) - i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t), \quad \Im(\tilde{\eta}) \leq 0 \quad (2.30)$$

τόρα, αλλάζοντας το $\tilde{\eta} \rightarrow -\tilde{\eta}$ παίρνουμε:

$$e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) = \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) - \tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) + i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t), \quad \Im(\tilde{\eta}) \geq 0 \quad (2.31)$$

λύνοντας τώρα την (2.31) προς $\tilde{g}_1$ παίρνουμε:

$$\tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) = \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) - e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) + i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t), \quad \Im(\tilde{\eta}) \geq 0 \quad (2.32)$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η αλλαγή μεταβλητής $\tilde{\eta} \rightarrow -\tilde{\eta}$ “έστειλε” την GR από το αρνητικό φανταστικό ημιεπίπεδο στο θετικό και έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την $\tilde{g}_1$ από την σχέση (2.32) στο 2ο ολοκλήρωμα της σχέσης (2.28) και έτσι η αναπαράσταση της λύσης μας θα αποτελείται αποκλειστικά από γνωστές συναρτήσεις.

Συγκεκριμένα:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [\hat{u}_0(-\tilde{\eta}) - e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) + 2i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t)] d\tilde{\eta} \quad (2.33)$$

και εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο όρος:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) d\tilde{\eta} \quad (2.34)$$

θα μηδενιστεί καθώς και οι δύο συναρτήσεις είναι αναλυτικές και φραγμένες στο ∂D^+ .

Έτσι η (2.33) θα γίνει:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [2i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(-\tilde{\eta})] d\tilde{\eta} \quad (2.35)$$

Και με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης που αποτελείται μόνο από γνωστές συναρτήσεις.

2.4 Επαλήθευση

Πάμε τώρα να δούμε αν η λύση μας επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες και γιατί εδώ μπορούμε, σε αντίθεση με το sine transform να επιβεβαιώσουμε τις συνοριακές μας συνθήκες.

Για $t = 0$ η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης θα γίνει:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x} [2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, 0) + \hat{u}_0(-\tilde{\eta})] d\tilde{\eta} \quad (2.36)$$

Από τον ορισμό (2.23) είναι προφανές ότι $\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, 0) = 0$ έτσι:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \quad (2.37)$$

Το 2ο ολοκλήρωμα μηδενίζει (λήμμα του Jordan) και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (2.20) στο $\hat{u}_0(\tilde{\eta})$ προκύπτει $u(x, 0) = u_0(x)$.

Πάμε τώρα να εξετάσουμε όταν $x = 0$. Έχουμε:

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} [2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(-\tilde{\eta})] d\tilde{\eta} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right] - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} 2i\tilde{\eta} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2) d\tilde{\eta} \quad (2.38)$$

Τώρα αλλάζοντας το λ σε $-\lambda$ οι 2 πρώτοι όροι μηδενίζονται καθώς το 2ο ολοκλήρωμα της (2.38) γίνεται:

$$\int_{\partial D^-} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}$$

όπου ξανακάνοντας deform στην πραγματική ευθεία έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta}$$

και αν κάνω την αλλαγή $i\tilde{\eta}^2 = l$ σε αυτό που έμεινε, deform από το ∂D^+ στην πραγματική ευθεία και αντιστρέψω τους μετασχηματισμούς παίρνω :

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilt} \left(\int_0^T e^{-il\tau} g_0(\tau) d\tau \right) dl = g_0(t).$$

Και έτσι επαληθεύονται και οι συνοριακές συνθήκες. Θυμίζω ότι εδώ όταν εφαρμόσαμε sine transform για $x = 0$ το ολοκλήρωμα μηδενιζόταν λόγω του ημιτόνου με αποτέλεσμα να μπορούμε να επαληθεύσουμε μόνο για την περίπτωση όπου το $g_0(t)$ είναι ταυτοτικά ίσο με το 0.

2.5 Rederivation του Sine Transform

Μπορούμε μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της λύσης, να επανεξάγουμε τον κλασικό μετασχηματισμό [13] αν ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία: Έχουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\bar{\eta}) d\bar{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} [2i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(-\bar{\eta})] d\bar{\eta} \quad (2.39)$$

με αλλαγή μεταβλητής $\bar{\eta} \rightarrow -\bar{\eta}$ στο 2ο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\bar{\eta}) d\bar{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{-i\bar{\eta}x - \bar{\eta}^2 t} [-2i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(\bar{\eta})] d\bar{\eta} \quad (2.40)$$

και κάνοντας deform στην πραγματική ευθεία το 2ο ολοκλήρωμα της (2.40) και προσθέτοντας κατά μέρη προκύπτει:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\bar{\eta}x} - e^{-i\bar{\eta}x}) e^{-\bar{\eta}^2 t} [\hat{u}_0(\bar{\eta}) - 2i\bar{\eta} e^{-i\bar{\eta}x} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) - \hat{u}_0(-)] d\bar{\eta} \quad (2.41)$$

και αφού: $e^{i\bar{\eta}x} - e^{-i\bar{\eta}x} = 2i \sin(\bar{\eta}x)$, $\hat{u}_0() - \hat{u}_0(-) = -2i\hat{u}_s()$ (ορισμοί 2.10, 2.22) καθώς και το ότι από το $e^{-i\bar{\eta}x}$ του $\tilde{g}_0$ "επιβιώνει" το ημίτονο όταν εκμεταλλευτούμε τη συμμετρία του προβλήματος για να το περιορίσουμε στο $[0, +\infty)$ παίρνουμε τον sine transform

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\bar{\eta}x) e^{-\bar{\eta}^2 t} [\hat{u}_s(\bar{\eta}, 0) + \bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t)] d\bar{\eta} \quad (2.42)$$

2.6 Συνοριακές συνθήκες Robin

Ας δούμε τώρα την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Robin.

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε τη συνοριακή συνθήκη $g_R(t)$ ως εξής:

$$g_R(t) = u_x(0, t) - \gamma u(0, t), \quad t > 0 \quad (2.43)$$

όπου γ μία πραγματική σταθερά.

Μέσω των μετασχηματισμών (2.23) και λύνοντας ως προς $\tilde{g}_1$ προκύπτει ότι :

$$\tilde{g}_1(\bar{\eta}, t) = \gamma \tilde{g}_0(\bar{\eta}, t) + \tilde{g}_R(\bar{\eta}, t), \quad \tilde{g}_R(\bar{\eta}, t) = \int_0^t e^{\bar{\eta}\tau} g_R(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (2.44)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (2.44) στην GR (σχέση (2.26)) θα πάρουμε:

$$e^{\bar{\eta}^2 t} \hat{u}(-\bar{\eta}, t) = \hat{u}_0(-\bar{\eta}) + (i\bar{\eta} + \gamma) \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \tilde{g}_R(\bar{\eta}^2, t) \quad (2.45)$$

το 2ο ολοκλήρωμα της ολοκληρωτικής αναπαράστασης (2.29) περιέχει τον όρο:

$$\tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) + i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) \stackrel{(2.44)}{=} (i\bar{\eta} + \gamma) \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \tilde{g}_R(\bar{\eta}^2, t) \quad (2.46)$$

αν τώρα λύσουμε την GR (2.45) ως προς $\tilde{g}_0$ αντικαταστήσουμε στην (2.46) και το τελικό αποτέλεσμα το γράψουμε στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης (2.29) θα πάρουμε:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t}}{\tilde{\eta} + i\gamma} \{2\tilde{\eta} \tilde{g}_R(\tilde{\eta}^2, t) + (\tilde{\eta} - i\gamma)[e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - \hat{u}_0(-\tilde{\eta})]\} d\tilde{\eta} \quad (2.47)$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για $\tilde{\eta}_0 = -i\gamma$ εμφανίζεται πόλος καθώς ο όρος $\tilde{\eta} + i\gamma$ μηδενίζει και έτσι πρέπει να διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

1. $\gamma > 0$

Σε αυτήν την περίπτωση ο πόλος $\tilde{\eta}_0$ είναι εκτός του D^+ και έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα Cauchy - Jordan και έτσι ο όρος $e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t)$ μηδενίζει ακριβώς όπως είδαμε και στο Dirichlet και η λύση γίνεται:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t}}{\tilde{\eta} + i\gamma} [2\tilde{\eta} \tilde{g}_R(\tilde{\eta}^2, t) + (\tilde{\eta} - i\gamma) \hat{u}_0(-\tilde{\eta})] d\tilde{\eta}, \quad \gamma > 0 \quad (2.48)$$

2. $\gamma < 0$

Εδώ τώρα ο πόλος $\tilde{\eta}_0$ βρίσκεται μέσα στο D^+ , όμως πρόκειται για εξαλείψιμο πόλο διότι:

Για $\tilde{\eta} = -i\gamma$ η αγκύλη στο 2ο ολοκλήρωμα της (2.47) θα γίνει:

$$\{2\tilde{\eta} \tilde{g}_R(\tilde{\eta}^2, t) + (\tilde{\eta} - i\gamma)[e^{\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - \hat{u}_0(-\tilde{\eta})]\}_{\tilde{\eta} = -i\gamma} = -2i\gamma [\tilde{g}_R(-\gamma^2, t) + e^{-\gamma^2 t} \hat{u}(i\gamma, t) - \hat{u}_0(i\gamma)] \quad (2.49)$$

Επίσης στο $\tilde{\eta}_0$ η GR γίνεται:

$$e^{-\gamma^2 t} \hat{u}(i\gamma^2, t) = \hat{u}_0(i\gamma) - \tilde{g}_R(-\gamma^2, t) \iff \tilde{g}_R(-\gamma^2, t) = \hat{u}_0(i\gamma) - e^{-\gamma^2 t} \hat{u}(i\gamma^2, t) \quad (2.50)$$

Έτσι είναι προφανές ότι η αγκύλη αυτή κάνει μηδέν.

Τώρα μέσω του Residue theorem μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνεισφορά του όρου $\hat{u}(-\tilde{\eta}, t)$ ως εξής:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x} \frac{\tilde{\eta} - i\gamma}{\tilde{\eta} + i\gamma} \hat{u}(-\tilde{\eta}, t) \stackrel{\tilde{\eta} = -i\gamma}{=} -\frac{2i\pi}{2\pi} e^{i\gamma x} (-2i\gamma) \hat{u}(i\gamma, t) = -2\gamma e^{i\gamma x + \gamma^2 t} [\hat{u}_0(i\gamma) - \tilde{g}_R(-\gamma^2, t)] \quad (2.51)$$

Έτσι η (2.47) γίνεται:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - 2\gamma e^{i\gamma x + \gamma^2 t} [\hat{u}_0(i\gamma) - \tilde{g}_R(-\gamma^2, t)] - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t}}{\tilde{\eta} + i\gamma} [2\tilde{\eta} \tilde{g}_R(\tilde{\eta}^2, t) + (\tilde{\eta} - i\gamma) \hat{u}_0(-\tilde{\eta})] d\tilde{\eta}, \quad \gamma < 0 \quad (2.52)$$

2.7 Επαναπαραγωγή των κλασικών μετασχηματισμών

Όσο είδαμε στο πρόβλημα Dirichlet υπάρχει τρόπος να εξάγουμε τον κλασικό μετασχηματισμό μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της λύσης. Ακριβώς το ίδιο μπορεί να συμβεί στην περίπτωση που έχουμε σ.σ. Robin. Βέβαια εδώ τα πράγματα είναι κάπως πιο περίπλοκα όπως και ήταν αναμενόμενο. Παρακάτω θα αναφέρουμε ακριβώς τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε :

Ας δούμε τώρα πώς απ'το Dirichlet ($\gamma \rightarrow \infty$) πρόβλημα μπορούμε να εξάγουμε τον Sine transform:

Όπως δείξαμε και παραπάνω για $\gamma > 0$ προκύπτει η λύση:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x - \eta^2 t} \hat{u}_0(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{i\eta x - \eta^2 t}}{\eta + i\gamma} [2\eta \tilde{g}_R(\eta^2, t) + (\eta - i\gamma) \hat{u}_0(-\eta)] d\eta, \quad \gamma > 0 \quad (2.53)$$

Όπου για $t = 0$ γίνεται:

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{u}_0(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\eta x} \frac{\eta - i\gamma}{\eta + i\gamma} \hat{u}_0(-\eta) d\eta, \quad \gamma > 0 \quad (2.54)$$

Τώρα “επιστρέφοντας” από το ∂D^+ στην γραμμή των πραγματικών γίνεται:

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{u}_0(\eta) d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \frac{\eta - i\gamma}{\eta + i\gamma} \hat{u}_0(-\eta) d\eta, \quad \gamma > 0 \quad (2.55)$$

Και αντικαθιστώντας τον ορισμό του $\hat{u}_0$ όπου εμφανίζεται, έχουμε:

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \left[\int_0^{+\infty} \left(e^{-i\eta \xi} + \frac{\eta - i\gamma}{\eta + i\gamma} e^{i\eta \xi} \right) u_0(\xi) d\xi \right] d\eta \quad (2.56)$$

Και έτσι προκύπτει το ζευγάρι του μετασχηματισμού:

$$\hat{f}_R(\eta) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-i\eta x} + \frac{\eta - i\gamma}{\eta + i\gamma} e^{i\eta x} \right) f(x) dx \quad (2.57)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta \quad (2.58)$$

Έχουμε ότι για $\gamma \rightarrow \infty$ (σ.σ. Dirichlet) η σχέση (2.58) γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta \quad (2.59)$$

Με αλλαγή μεταβλητής $\eta \rightarrow -\eta$ και καθώς $\hat{f}_R(-\eta) = -\hat{f}_R(\eta)$ προσθέτοντας τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\eta x} \hat{f}_R(-\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (-e^{-i\eta x} + e^{i\eta x}) \hat{f}_R(\eta) d\eta = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(\eta x) \hat{f}_R(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.60)$$

Τώρα από την (2.57) έχουμε ότι :

$$\hat{f}_R(\eta) = \int_0^{+\infty} (e^{-i\eta x} - e^{i\eta x}) f(x) dx = -2i \int_0^{+\infty} \sin(\eta x) f(x) dx \quad (2.61)$$

Γράφοντας ως $\hat{F}(\eta) = \int_0^{+\infty} \sin(\eta x) f(x) dx$ δηλ $\hat{f}_R(\eta) = -2i\hat{F}(\eta)$ παίρνουμε:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(\eta x) \hat{F}_R(\eta) d\eta \quad (2.62)$$

Όπου είναι ο Fourier sine transform

Αντίστοιχα για $\gamma=0$ (σς Neumann) η (2.58) γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta \quad (2.63)$$

Με αλλαγή μεταβλητής $\eta \rightarrow -\eta$ και καθώς $\hat{f}_R(-\eta) = \hat{f}_R(\eta)$ προσθέτοντας τα ολοκληρώματα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-i\eta x} \hat{f}_R(-\eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{i\eta x} \hat{f}_R(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (e^{-i\eta x} + e^{i\eta x}) \hat{f}_R(\eta) d\eta = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\eta x) \hat{f}_R(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (2.64)$$

Τώρα από την (2.57) έχουμε ότι :

$$\hat{f}_R(\eta) = \int_0^{+\infty} (e^{-i\eta x} + e^{i\eta x}) f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(\eta x) f(x) dx \quad (2.65)$$

Γράφοντας ως $\hat{F}(\eta) = \int_0^{+\infty} \cos(\eta x) f(x) dx$ δηλ $\hat{f}_R(\eta) = 2\hat{F}(\eta)$ παίρνουμε:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(\eta x) \hat{F}_R(\eta) d\eta \quad (2.66)$$

Όπου είναι ο Fourier cosine transform

Κεφάλαιο 3

Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο

3.1 Η λύση μέσω του κλασσικού μετασχηματισμού

Ας πάρουμε τώρα την περίπτωση της εξίσωσης θερμότητας όμως σε πεπερασμένο χωρίο:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

Θεωρούμε επίσης ότι έχουμε το πρόβλημα Dirichlet με γνωστές αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \infty \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0 \quad (3.3)$$

$$u(L, t) = h_0(t), \quad t > 0 \quad (3.4)$$

Και θα συμβολίσουμε ως:

$$u_x(0, t) = g_1(t), \quad t > 0 \quad (3.5)$$

$$u_x(L, t) = h_1(t), \quad t > 0 \quad (3.6)$$

τις άγνωστες αρχικές και συνοριακές συνθήκες για το συγκεκριμένο πρόβλημα

Είναι γνωστό ότι το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί μέσω του μετασχηματισμού σειράς ημιτόνου, δηλαδή:

$$f_n = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$
$$f(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) f_n, \quad 0 < x < L$$

Ακολουθώντας τα βήματα όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε:

$$u_n(t) = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u(x, t) dx \quad (3.8)$$

άρα:

$$(u_n)_t = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (3.9)$$

όπου ολοκληρώνοντας δύο φορές κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$\frac{du_n}{dt} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 u_n = \frac{n\pi}{L} [g_0 - \cos(n\pi)h_0] \quad (3.10)$$

Λύνοντας τώρα την ΣΔΕ με ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{(\frac{n\pi}{L})^2 t}$ προκύπτει:

$$e^{(\frac{n\pi}{L})^2 t} u_n = u_{n_0} + \frac{n\pi}{L} \int_0^L e^{(\frac{n\pi}{L})^2 t} g_0(\tau) d\tau - \cos(n\pi) \frac{n\pi}{L} \int_0^t e^{(\frac{n\pi}{L})^2 t} h_0(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

όπου:

$$u_{n_0} = \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u_0(x) dx$$

και μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού η εξίσωση (3.11) γίνεται:

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \left[u_{n_0} + \frac{n\pi}{L} \int_0^L e^{(\frac{n\pi}{L})^2 t} g_0(\tau) d\tau - \cos(n\pi) \frac{n\pi}{L} \int_0^t e^{(\frac{n\pi}{L})^2 t} h_0(\tau) d\tau \right] \quad (3.12)$$

3.2 Λύση μέσω του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού

Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να φτάσουμε σε μια ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού. Να γλυτώσουμε δηλαδή τη σειρά της (3.12) [11, 18].

Για να το πετύχουμε αυτό θα ξεκινήσουμε ορίζοντας πάλι τους μετασχηματισμούς μέσω του Fourier transform αυτή τη φορά για το πεπερασμένο διάστημα:

$$\hat{u}(\hat{\lambda}, t) = \int_0^L e^{-i\hat{\lambda}x} u(x, t) dx, \quad \hat{\lambda} \in \mathbb{C} \quad (3.13)$$

$$\hat{u}_0(\hat{\lambda}) = \int_0^L e^{-i\hat{\lambda}x} u_0(x) dx, \quad \hat{\lambda} \in \mathbb{C} \quad (3.14)$$

$$\tilde{g}_j(\hat{\lambda}, t) = \int_0^t e^{\hat{\lambda}\tau} g_j(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad j = 0, 1, \quad \hat{\lambda} \in \mathbb{C} \quad (3.15)$$

$$\tilde{h}_j(\hat{\lambda}, t) = \int_0^t e^{\hat{\lambda}\tau} h_j(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad j = 0, 1, \quad \hat{\lambda} \in \mathbb{C} \quad (3.16)$$

Λύνοντας όπως και πριν παίρνουμε:

$$\hat{u}_t = \int_0^L e^{-i\hat{\lambda}x} u_t = \int_0^L e^{-i\hat{\lambda}x} u_{xx} = u_x e^{-i\hat{\lambda}x} \Big|_0^L + i\hat{\lambda} u e^{i\hat{\lambda}x} \Big|_0^L - \hat{\lambda}^2 \hat{u} \quad (3.17)$$

έτσι,

$$\hat{u}_t + \hat{\lambda}^2 \hat{u} = -g_1(t) - i\hat{\lambda} g_0(t) + e^{i\hat{\lambda}L} (h_1(t) + \hat{\lambda} h_0(t)) \quad (3.18)$$

όπου με ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{\tilde{\eta}^2 t}$ έχουμε:

$$(\hat{u}e^{\tilde{\eta}^2 t})_t = -e^{\tilde{\eta}^2 t}(g_1(t) - i\tilde{\eta}g_0(t)) + e^{\tilde{\eta}^2 t - i\tilde{\eta}L}(h_1(t) + \tilde{\eta}h_0(t)) \quad (3.19)$$

όπου ολοκληρώνοντας και από τους μετασχηματισμούς (3.13)-(3.16) προκύπτει η Global Relation:

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\eta}^2 t}\hat{u}(\tilde{\eta}, t) &= \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - \tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) - i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) \\ &+ e^{-i\tilde{\eta}L} [\tilde{h}_1(\tilde{\eta}^2, t) + i\tilde{\eta}\tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t)], \quad \tilde{\eta} \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Τώρα για να πάρουμε τελικά την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης μέσω της (3.20), διαιρούμε την εξίσωση με το $e^{\tilde{\eta}^2 t}$, πολλαπλασιάζουμε με $e^{i\tilde{\eta}x}$, ολοκληρώνουμε στο $\mathbb{R}$ και πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{2\pi}$ ώστε να “φτιάξουμε” τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο αριστερό μέλος. Τέλος για να διατηρήσουμε την αναλυτικότητα, θα πρέπει να κάνουμε deform το χωρίο από το $\mathbb{R}$ στο ∂D^+ το ολοκλήρωμα που αφορά τους όρους $\tilde{g}$ και στο ∂D^- αυτό που αφορά του όρους $\tilde{h}$ και έτσι παίρνουμε την αναπαράσταση της λύσης:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [\tilde{g}_1 - i\tilde{\eta}\tilde{g}_0] d\tilde{\eta} \\ &- \int_{\partial D^-} e^{-i\tilde{\eta}(L-x) - \tilde{\eta}^2 t} [\tilde{h}_1 - i\tilde{\eta}\tilde{h}_0] d\tilde{\eta} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Εδώ όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις η ολοκληρωτική αναπαράσταση περιέχει όλες τις αρχικές και όλες τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Ακριβώς, όμως, όπως κάναμε στη περίπτωση της ημιευθείας, έχουμε τη δυνατότητα μέσω της GR να απαλείψουμε τις άγνωστες συνθήκες. Παρακάτω θα περιγράψουμε την περίπτωση του προβλήματος Dirichlet όμως ανάλογα δουλεύουμε και στην περίπτωση του Neumann.

Από το πρόβλημα Dirichlet θεωρούμε γνωστές τις συναρτήσεις:

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(L, t) = h_0(t)$$

Η Global Relation (3.20) μπορεί να γραφτεί στην πιο “βολική” μορφή:

$$e^{\tilde{\eta}^2 t}\hat{u}(\tilde{\eta}, t) = G(\tilde{\eta}, t) - \tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) + e^{-i\tilde{\eta}L}\tilde{h}_1(\tilde{\eta}^2, t) \quad (3.22)$$

Όπου ο όρος $G(\tilde{\eta}, t)$ περιέχει μόνο τις γνωστές για το πρόβλημα συνθήκες. Συγκεκριμένα:

$$G(\tilde{\eta}, t) = \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{-i\tilde{\eta}L}i\tilde{\eta}\tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) \quad (3.23)$$

Εφόσον οι $\tilde{g}_1$ και $\tilde{h}_1$ δεν επηρεάζονται από την αλλαγή $\tilde{\eta} \rightarrow -\tilde{\eta}$ παίρνουμε τη σχέση:

$$e^{\tilde{\eta}^2 t}\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) = G(-\tilde{\eta}, t) - \tilde{g}_1(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}L}\tilde{h}_1(\tilde{\eta}^2, t) \quad (3.24)$$

Όπου λύνοντας το σύστημα (3.22),(3.24) προς $\tilde{g}_1$ και $\tilde{h}_1$ προκύπτει η σχέση για την $\tilde{g}_1$

$$\tilde{g}_1 = \frac{e^{i\tilde{\eta}L}G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L}G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}} + e^{\tilde{\eta}^2 t} \frac{e^{-i\tilde{\eta}L}\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - e^{i\tilde{\eta}L}\hat{u}(\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}} \quad (3.25)$$

και η $\tilde{h}_1$

$$\tilde{h}_1 = \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}} + e^{\tilde{\eta}^2 t} \frac{\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - \hat{u}(\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}} \quad (3.26)$$

Τώρα αντικαθιστώντας τα $\tilde{g}_1$ και $\tilde{h}_1$ στην (3.21) η λύση θα αποτελείται μόνο από γνωστές συναρτήσεις.

Προτού όμως δώσουμε την τελική μορφή της λύσης, θα δείξουμε ότι οι όροι που περιέχουν το $\hat{u}(\pm\tilde{\eta}, t)$ θα μηδενιστούν καθώς είναι φραγμένοι καθώς $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$. Ας πάρουμε για αρχή το 2ο κλάσμα (3.25):

$$\frac{e^{-i\tilde{\eta}L}\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - e^{i\tilde{\eta}L}\hat{u}(\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}} \quad (3.27)$$

εδώ είμαστε στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο άρα ο όρος $e^{-i\tilde{\eta}L}$ αυξάνει εκθετικά και έτσι παίρνουμε το φραγμένο για $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$

$$-\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) + e^{i\tilde{\eta}L} \int_0^L e^{i\tilde{\eta}(L-x)} u(x, t) dx$$

Με όμοια λογική για το δεύτερο κλάσμα της (3.26) αυτή τη φορά όμως είμαστε στο κάτω μιγαδικό ημιεπίπεδο και ο όρος $e^{i\tilde{\eta}L}$ απειρίζεται και κάνει το κλάσμα:

$$\frac{\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - \hat{u}(\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}$$

να γίνει καθώς $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$

$$\int_0^L e^{-i\tilde{\eta}(L-x)} u(x, t) dx - e^{-i\tilde{\eta}L} \hat{u}(\tilde{\eta}, t)$$

όπου επίσης είναι φραγμένο.

Οι πόλοι του $e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}$ βρίσκονται όλοι πάνω στην πραγματική ευθεία (επομένως δεν επηρεάζουν το πρόβλημα) με εξαίρεση τη περίπτωση όπου $\tilde{\eta} = 0$ όπου έχουμε μια α-προσδιοριστία που αίρεται καθώς

$$\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - \hat{u}(\tilde{\eta}, t) = e^{-i\tilde{\eta}L}\hat{u}(-\tilde{\eta}, t) - e^{i\tilde{\eta}L}\hat{u}(\tilde{\eta}, t) = 0, \quad \text{για } \tilde{\eta} = 0$$

έτσι προκύπτει η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης, χωρίς άγνωστες συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right. \\ & - \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta}\tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{e^{i\tilde{\eta}L}G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L}G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \\ & \left. - \int_{\partial D^-} e^{-i\tilde{\eta}(L-x) - \tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta}\tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3 Επαλήθευση

Ας δούμε τώρα αν η λύση μας επαληθεύει τις αρχικές μας συνθήκες για $x = 0, x = L, t = 0$.

Για $x = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} u(0, t) = & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right. \\ & - \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \\ & \left. - \int_{\partial D^-} e^{-i\tilde{\eta}L - \tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Παίρνοντας το 3ο ολοκλήρωμα της (3.29) και με την αλλαγή μεταβλητής $\tilde{\eta} \rightarrow -\tilde{\eta}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial D^-} e^{-i\tilde{\eta}L - \tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \stackrel{\tilde{\eta} \rightarrow -\tilde{\eta}}{=} \\ & \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}L - \tilde{\eta}^2 t} [-i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Έτσι το 2ο και 3ο ολοκλήρωμα είναι στο ∂D^+ και προσθέτοντας τα παίρνω:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} [-i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) - \frac{e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} + \\ & \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}L - \tilde{\eta}^2 t} [-i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} = \\ & \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \left[-i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) - e^{i\tilde{\eta}L} i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) \right. \\ & \left. + \frac{-e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) + e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t) + e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}} \right] d\tilde{\eta} = \\ & \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \left[-i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) - e^{i\tilde{\eta}L} i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) - G(-\tilde{\eta}, t) \right] d\tilde{\eta} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Εδώ θυμίζω ότι ορίσαμε: $G(\tilde{\eta}, t) = \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{-i\tilde{\eta}L} i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t)$ έτσι καθώς έχουμε το $-G(-\tilde{\eta}, t)$ το ολοκλήρωμα (3.31) γίνεται τελικά:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \left[-i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) - e^{i\tilde{\eta}L} i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) - \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) - i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}L} i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) \right] d\tilde{\eta} \\ & = - \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \int_{\partial D^+} 2i\tilde{\eta} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) d\tilde{\eta} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Και έτσι η (3.29) μέσω της (3.32) γίνεται:

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} + \int_{\partial D^+} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} + \int_{\partial D^+} 2i\tilde{\eta} e^{-\tilde{\eta}^2 t} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) d\tilde{\eta} \right) \quad (3.33)$$

Τώρα, στο 2ο ολοκλήρωμα της (3.33) κάνω αλλαγή μεταβλητής $\bar{\eta} \rightarrow -\bar{\eta}$ και deform στον πραγματικό άξονα με αποτέλεσμα να "φεύγει" με το 1ο ολοκλήρωμα της (3.33) έτσι:

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} 2i\bar{\eta} e^{-\bar{\eta}^2 t} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) d\bar{\eta} \quad (3.34)$$

Τώρα με αλλαγή μεταβλητής $i\bar{\eta}^2 = l$, κάνοντας deform στον πραγματικό άξονα και αντικαθιστώντας $\tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t)$ με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε:

$$u(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilt} \left(\int_0^T e^{-il\tau} g_0(\tau) d\tau \right) dl = g_0(t). \quad (3.35)$$

Πάμε να δούμε τώρα την περίπτωση όπου $x = L$:

$$\begin{aligned} u(L, t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bar{\eta}L - \bar{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \right. \\ &\quad - \int_{\partial D^+} e^{i\bar{\eta}L - \bar{\eta}^2 t} [i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{e^{i\bar{\eta}L} G(\bar{\eta}, t) - e^{-i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} \\ &\quad \left. - \int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [i\bar{\eta} \tilde{h}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{G(\bar{\eta}, t) - G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Αυτή τη φορά παίρνοντας το 2ο ολοκλήρωμα και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\bar{\eta} \rightarrow -\bar{\eta}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} &- \int_{\partial D^-} e^{i\bar{\eta}L - \bar{\eta}^2 t} [i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{e^{i\bar{\eta}L} G(\bar{\eta}, t) - e^{-i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} = \\ &\int_{\partial D^-} e^{-i\bar{\eta}L - \bar{\eta}^2 t} [-i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{e^{i\bar{\eta}L} G(\bar{\eta}, t) - e^{-i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} = \\ &\int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [-e^{-i\bar{\eta}L} i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + e^{-i\bar{\eta}L} \frac{e^{i\bar{\eta}L} G(\bar{\eta}, t) - e^{-i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} = \\ &\int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [-e^{-i\bar{\eta}L} i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{G(\bar{\eta}, t) - e^{-2i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} = \end{aligned} \quad (3.37)$$

Τώρα προσθέτοντας το 2ο και το 3ο ολοκλήρωμα της (3.36) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [-e^{-i\bar{\eta}L} i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{G(\bar{\eta}, t) - e^{-2i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} - \\ &\int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [i\bar{\eta} \tilde{h}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{G(\bar{\eta}, t) - G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} = \\ &\int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [-e^{-i\bar{\eta}L} i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) - i\bar{\eta} \tilde{h}_0(\bar{\eta}^2, t) + \frac{(1 - e^{-2i\bar{\eta}L}) G(-\bar{\eta}, t)}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}}] d\bar{\eta} = \\ &\int_{\partial D^-} e^{-\bar{\eta}^2 t} [-e^{-i\bar{\eta}L} i\bar{\eta} \tilde{g}_0(\bar{\eta}^2, t) - i\bar{\eta} \tilde{h}_0(\bar{\eta}^2, t) + e^{-i\bar{\eta}L} G(-\bar{\eta}, t)] d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Και όπου με αντικατάσταση του $G(-\hat{\eta}, t)$ όπως κάναμε και στη (3.29) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D^-} e^{-\hat{\eta}^2 t} [-e^{-i\hat{\eta}L} i\hat{\eta} \tilde{g}_0(\hat{\eta}^2, t) - i\hat{\eta} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t) \\ & + e^{-i\hat{\eta}L} (\hat{u}_0(-\hat{\eta}) + i\hat{\eta} \tilde{g}_0(\hat{\eta}^2, t) - e^{i\hat{\eta}L} i\hat{\eta} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t))] d\hat{\eta} = \\ & \int_{\partial D^-} e^{-i\hat{\eta}L - \hat{\eta}^2 t} \hat{u}_0(-\hat{\eta}) d\hat{\eta} - \int_{\partial D^-} e^{-\hat{\eta}^2 t} 2i\hat{\eta} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t) d\hat{\eta} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Έτσι έχουμε :

$$u(L, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}L - \hat{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\hat{\eta}) d\hat{\eta} + \int_{\partial D^-} e^{-i\hat{\eta}L - \hat{\eta}^2 t} \hat{u}_0(-\hat{\eta}) d\hat{\eta} - \int_{\partial D^-} e^{-\hat{\eta}^2 t} 2i\hat{\eta} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t) d\hat{\eta} \right) \quad (3.40)$$

Τώρα, στο 2ο ολοκλήρωμα της (3.40) κάνω αλλαγή μεταβλητής $\hat{\eta} \rightarrow -\hat{\eta}$ και deform στον πραγματικό άξονα με αποτέλεσμα να "φεύγει" με το 1ο ολοκλήρωμα της (3.40) έτσι:

$$u(L, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} -2i\hat{\eta} e^{-\hat{\eta}^2 t} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t) d\hat{\eta} \quad (3.41)$$

Τώρα με αλλαγή μεταβλητής $i\hat{\eta}^2 = l$, κάνοντας deform στον πραγματικό άξονα και αντικαθιστώντας $\tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t)$ με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier παίρνουμε:

$$u(L, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ilt} \left(\int_0^T e^{-ilt} h_0(\tau) d\tau \right) dl = h_0(t). \quad (3.42)$$

Τώρα για το $t = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}x} \hat{u}_0(\hat{\eta}) d\hat{\eta} \right. \\ & - \int_{\partial D^+} e^{i\hat{\eta}x} \left[i\hat{\eta} \tilde{g}_0(\hat{\eta}^2, 0) + \frac{e^{i\hat{\eta}L} G(\hat{\eta}, 0) - e^{-i\hat{\eta}L} G(-\hat{\eta}, 0)}{e^{i\hat{\eta}L} - e^{-i\hat{\eta}L}} \right] d\hat{\eta} \\ & \left. - \int_{\partial D^-} e^{-i\hat{\eta}(L-x)} \left[i\hat{\eta} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, 0) + \frac{G(\hat{\eta}, 0) - G(-\hat{\eta}, 0)}{e^{i\hat{\eta}L} - e^{-i\hat{\eta}L}} \right] d\hat{\eta} \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Όμως : $\tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, 0) = \tilde{g}_0(\hat{\eta}^2, 0) = 0$ (εξ ορισμού) έτσι:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}x} \hat{u}_0(\hat{\eta}) d\hat{\eta} \right. \\ & - \int_{\partial D^+} e^{i\hat{\eta}x} \left[\frac{e^{i\hat{\eta}L} G(\hat{\eta}, 0) - e^{-i\hat{\eta}L} G(-\hat{\eta}, 0)}{e^{i\hat{\eta}L} - e^{-i\hat{\eta}L}} \right] d\hat{\eta} \\ & \left. - \int_{\partial D^-} e^{-i\hat{\eta}(L-x)} \left[\frac{G(\hat{\eta}, 0) - G(-\hat{\eta}, 0)}{e^{i\hat{\eta}L} - e^{-i\hat{\eta}L}} \right] d\hat{\eta} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Εδώ θυμίζω ότι έχουμε ορίσει ως:

$$G(\hat{\eta}, t) = \hat{u}_0(\hat{\eta}) - i\hat{\eta} \tilde{g}_0(\hat{\eta}^2, t) + e^{-i\hat{\eta}L} i\hat{\eta} \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t) \quad (3.45)$$

άρα :

$$G(\bar{\eta}, 0) = \hat{u}_0(\bar{\eta}) \quad \text{και} \quad G(-\bar{\eta}, 0) = \hat{u}_0(-\bar{\eta}) \quad (3.46)$$

έτσι προκύπτει:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bar{\eta}x} \hat{u}_0(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \right. \\ & - \int_{\partial D^+} e^{i\bar{\eta}x} \left[\frac{e^{i\bar{\eta}L} u_0(\bar{\eta}) - e^{-i\bar{\eta}L} u_0(-\bar{\eta})}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}} \right] d\bar{\eta} \\ & \left. - \int_{\partial D^-} e^{-i\bar{\eta}(L-x)} \left[\frac{u_0(\bar{\eta}) - u_0(-\bar{\eta})}{e^{i\bar{\eta}L} - e^{-i\bar{\eta}L}} \right] d\bar{\eta} \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

έτσι με αλλαγή μεταβλητής, $\bar{\eta} \rightarrow -\bar{\eta}$ στο 3ο ολοκλήρωμα της (3.47) πράξεις με το 2ο ολοκλήρωμα και deform από το ∂D^+ στο $\mathbb{R}$ προκύπτει τελικά η σχέση:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\bar{\eta}x} \hat{u}_0(\bar{\eta}) d\bar{\eta} \quad (3.48)$$

Και από αντίστροφο Fourier προκύπτει το ζητούμενο:

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

Και έτσι επαληθεύονται όλες οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες του προβλήματος.

3.4 Επαναπαραγωγή του κλασικού μετασχηματισμού

Ας εξετάσουμε τώρα πώς μπορούμε να επανεξάγουμε τον κλασικό μετασχηματισμό. Ένας αρκετά πιο γρήγορος τρόπος που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι με τη βοήθεια της GR απευθείας, πριν δηλαδή γράψουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση. Έχουμε την:

$$e^{\bar{\eta}^2 t} \hat{u}(\bar{\eta}, t) = G(\bar{\eta}, t) - \tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) + e^{-i\bar{\eta}L} \tilde{h}_1(\bar{\eta}^2, t) \quad (3.49)$$

Τώρα με αντικατάσταση $\bar{\eta} \rightarrow -\bar{\eta}$ παίρνουμε :

$$e^{\bar{\eta}^2 t} \hat{u}(-\bar{\eta}, t) = G(-\bar{\eta}, t) - \tilde{g}_1(\bar{\eta}^2, t) + e^{i\bar{\eta}L} \tilde{h}_1(\bar{\eta}^2, t) \quad (3.50)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (3.50) και (3.51) έχουμε :

$$e^{\bar{\eta}^2 t} [\hat{u}(\bar{\eta}, t) - \hat{u}(-\bar{\eta}, t)] = G(\bar{\eta}, t) - G(-\bar{\eta}, t) + \tilde{h}_1(\bar{\eta}^2, t)(e^{-i\bar{\eta}L} - e^{i\bar{\eta}L}) \quad (3.51)$$

όμως:

$$\hat{u}(\bar{\eta}, t) = \int_0^L e^{-i\bar{\eta}x} u(x, t) dx \quad (3.52)$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\bar{\eta}, t) - \hat{u}(-\bar{\eta}, t) &= \int_0^L e^{-i\bar{\eta}x} u(x, t) dx - \int_0^L e^{i\bar{\eta}x} u(x, t) dx = \\ &= \int_0^L (e^{-i\bar{\eta}x} - e^{i\bar{\eta}x}) u(x, t) dx = -2i \int_0^L \sin(\bar{\eta}x) u(x, t) dx \end{aligned} \quad (3.53)$$

Και έτσι η (3.52) γίνεται:

$$2ie^{\tilde{\eta}^2 t} \int_0^L \sin(\tilde{\eta} x) u(x, t) dx = G(-\tilde{\eta}, t) - G(\tilde{\eta}, t) - \tilde{h}_1(\tilde{\eta}^2, t)(e^{i\tilde{\eta} L} - e^{-i\tilde{\eta} L}) \quad (3.54)$$

τώρα επιλέγοντας $\tilde{\eta} = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, \dots$ η άγνωστη συνάρτηση $\tilde{h}_1$ εξαλείφεται και έτσι:

$$2ie^{\frac{n\pi^2}{L} t} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u(x, t) dx = G\left(-\frac{n\pi}{L}, t\right) - G\left(\frac{n\pi}{L}, t\right) \quad (3.55)$$

Αντικαθιστώντας τον ορισμό της συνάρτησης G (3.46) η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} 2ie^{\frac{n\pi^2}{L} t} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u(x, 0) dx &= \\ \hat{u}_0\left(-\frac{n\pi}{L}\right) + i\frac{n\pi}{L} \tilde{g}_0\left(\left(-\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) - e^{i\frac{n\pi}{L} L} i\frac{n\pi}{L} \tilde{h}_0\left(\left(-\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) - \\ (\hat{u}_0\left(\frac{n\pi}{L}\right) - i\frac{n\pi}{L} \tilde{g}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) + e^{-i\frac{n\pi}{L} L} i\frac{n\pi}{L} \tilde{h}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)) & \\ = \hat{u}_0\left(-\frac{n\pi}{L}\right) - \hat{u}_0\left(\frac{n\pi}{L}\right) + 2i\frac{n\pi}{L} \tilde{g}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) - i\frac{n\pi}{L} \tilde{h}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) (e^{in\pi} + e^{-in\pi}) & \\ = -2i \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u(x, 0) dx + 2i\frac{n\pi}{L} [\tilde{g}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) - \cos(in\pi) \tilde{h}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)] & \end{aligned} \quad (3.56)$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} 2ie^{\frac{n\pi^2}{L} t} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u(x, 0) dx + 2i \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) u(x, 0) dx &= \\ 2i\frac{n\pi}{L} [\tilde{g}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right) - \cos(in\pi) \tilde{h}_0\left(\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)] & \end{aligned} \quad (3.57)$$

Που είναι πρακτικά η σχέση (3.11) του κλασσικού μετασχηματισμού

Κεφάλαιο 4

Συναρτήσεις Green

Οι συναρτήσεις Green αποτελούν ένα από τα βασικά εργαλεία για την μελέτη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων και ιδιαίτερα προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών. Η ιδέα τους εμφανίζεται αρχικά στο έργο του George Green, ο οποίος στις αρχές του 19ου αιώνα μελέτησε προβλήματα της μαθηματικής φυσικής που σχετίζονταν κυρίως με τη θεωρία δυναμικού και τον ηλεκτρισμό. Η βασική ιδέα ήταν να μελετηθεί η απόκριση ενός συστήματος σε μία σημειακή πηγή και στη συνέχεια, μέσω ολοκλήρωσης, να κατασκευαστεί η λύση για μία γενικότερη κατανομή πηγών.

Στην σύγχρονη μορφή της, η συνάρτηση Green μπορεί να θεωρηθεί ως η λύση ενός γραμμικού προβλήματος όταν η πηγή του προβλήματος αντικατασταθεί από μία συνάρτηση δέλτα. Έτσι, αντί να προσπαθήσουμε να βρούμε απευθείας τη λύση για μία γενική αρχική ή συνοριακή συνθήκη, μπορούμε πρώτα να βρούμε την απόκριση του προβλήματος σε μία σημειακή διέγερση. Η γενική λύση προκύπτει στη συνέχεια ως ολοκλήρωμα των αντίστοιχων σημειακών λύσεων.

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω ιδέα, ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό πρόβλημα της μορφής

$$Lu = f,$$

όπου L είναι ένας γραμμικός διαφορικός τελεστής. Η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ μπορεί, σε γενικές γραμμές, να οριστεί ως η συνάρτηση που ικανοποιεί

$$LG(x, \xi) = \delta(x - \xi),$$

μαζί με τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Εδώ η μεταβλητή x αντιστοιχεί στο σημείο στο οποίο υπολογίζουμε τη λύση, ενώ η ξ αντιστοιχεί στη θέση της σημειακής πηγής.

Λόγω της γραμμικότητας του προβλήματος, μία γενική πηγή μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής κατανομή σημειακών πηγών. Έτσι, η λύση μπορεί να γραφτεί, στην απλούστερη περίπτωση, στη μορφή

$$u(x) = \int G(x, \xi)f(\xi) d\xi.$$

Με τον τρόπο αυτό η συνάρτηση Green περιέχει ουσιαστικά όλη την πληροφορία που αφορά τον διαφορικό τελεστή και τις συνοριακές συνθήκες, ενώ η συγκεκριμένη συνάρτηση f εισάγεται μέσω της ολοκλήρωσης.

Στα προβλήματα που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία η κατάσταση είναι λίγο διαφορετική, καθώς εκτός από αρχικές συνθήκες έχουμε και συνοριακές συνθήκες οι οποίες εξαρτώνται από τον χρόνο. Επομένως, η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης περιέχει έναν όρο που σχετίζεται με την αρχική συνθήκη και επιπλέον όρους που σχετίζονται με τα όρια του χωρίου. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις Green μπορούν να εξαχθούν από αυτή την ολοκληρωτική αναπαράσταση.

Αυτό είναι και το σημείο που μας ενδιαφέρει περισσότερο στο συγκεκριμένο κεφάλαιο. Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, μέσω του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού μπορούμε να πάρουμε μία ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης. Αν τώρα αναδιατάξουμε τα ολοκληρώματα και απομονώσουμε τις αρχικές και συνοριακές συναρτήσεις [?], οι υπόλοιποι όροι μπορούν να αναγνωριστούν ως οι αντίστοιχες συναρτήσεις Green. Επομένως, στην περίπτωση μας οι Green δεν εισάγονται ανεξάρτητα από την προηγούμενη ανάλυση, αλλά προκύπτουν φυσικά από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης.

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία αρχικά στο πρόβλημα της εξίσωσης θερμότητας στην ημιευθεία. Θα δούμε πως από την ολοκληρωτική αναπαράσταση που προκύπτει μέσω του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού μπορούμε να αναγνωρίσουμε τις συναρτήσεις Green και να γράψουμε τη λύση του προβλήματος στην αντίστοιχη ολοκληρωτική μορφή. Στη συνέχεια θα ακολουθήσουμε την ίδια λογική για την εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο.

4.1 Οι συναρτήσεις Green για το πρόβλημα της ημιευθείας

Εδώ θυμίζω ότι έχουμε το πρόβλημα:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

Καθώς και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \infty; \quad u(0, t) = g_0(t), \quad t > 0. \quad (\text{Dirichlet}) \quad (4.2)$$

και τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(\hat{\eta}) &= \int_0^\infty e^{-i\hat{\eta}x} u_0(x) dx, \quad \Im \hat{\eta} \leq 0, \\ u_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\hat{\eta}x} \hat{u}_0(\hat{\eta}) d\hat{\eta}, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\tilde{g}_0(\hat{\eta}, t) = \int_0^t e^{\hat{\eta}\tau} g_0(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \hat{\eta} \in \mathbb{C} \quad (4.4)$$

Μέσω του ενοποιημένου μετασχηματισμού προέκυψε η παρακάτω αναπαράσταση της λύσης του ΠΑΣΤ:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(-\tilde{\eta})] d\tilde{\eta} \quad (4.5)$$

Γράφουμε την (4.5) ως εξής:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) 2i\tilde{\eta} d\tilde{\eta} \quad (4.6)$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό στα $\hat{u}_0, \tilde{g}_0$ παίρνουμε :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \left(\int_0^{\infty} e^{-i\tilde{\eta}x} u_0(x) dx \right) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \left(\int_0^{\infty} e^{-i\tilde{\eta}x} u_0(-x) dx \right) d\tilde{\eta} - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \left(\int_0^t e^{\tilde{\eta}\tau} g_0(\tau) d\tau \right) 2i\tilde{\eta} d\tilde{\eta} \quad (4.7)$$

Τώρα με αλλαγή μεταβλητής $x = \xi$ στο πρώτο ολοκλήρωμα, $-x = \xi$ στο 2ο, $t = T$ όπου $0 < t < T$ καθώς και αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης και στα 3 παίρνουμε:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u_0(\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}(x-\xi) - \tilde{\eta}^2 t} d\tilde{\eta} \right) d\xi - \int_0^{\infty} u_0(\xi) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}(x+\xi) - \tilde{\eta}^2 t} d\tilde{\eta} \right) d\xi - \int_0^t g_0(\tau) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} 2i\tilde{\eta} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2(t-\tau)} d\tilde{\eta} \right) d\tau \quad (4.8)$$

Τα 2 πρώτα ολοκληρώματα μπορούν να γραφτούν ως ένα και έτσι παίρνουμε την λύση στη μορφή:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} u_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^T g_0(\tau) G_L(x, \xi, t) d\tau \quad (4.9)$$

Με τις συναρτήσεις Green :

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}(x-\xi) - \tilde{\eta}^2 t} d\tilde{\eta} - \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}(x+\xi) - \tilde{\eta}^2 t} d\tilde{\eta} \right) \quad \text{και} \quad (4.10)$$

$$G_L(x, \xi, t) = -\frac{i}{\pi} \int_{\partial D^+} \tilde{\eta} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2(t-\tau)} d\tilde{\eta} \quad (4.11)$$

4.2 Οι συναρτήσεις Green για το πεπερασμένο χωρίο

Εδώ για να εξάγουμε τις Green θα ξεκινήσουμε από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης ακριβώς όπως την βρήκαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right. \\
 & - \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \\
 & \left. - \int_{\partial D^-} e^{-i\tilde{\eta}(L-x) - \tilde{\eta}^2 t} [i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \frac{G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)}{e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}}] d\tilde{\eta} \right)
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

για ευκολία ορίζω $\Delta(\tilde{\eta}) = e^{i\tilde{\eta}L} - e^{-i\tilde{\eta}L}$ αλλάζοντας μεταβλητή στο 3ο ολοκλήρωμα ώστε να το στείλουμε στο ∂D^+ , βγάζοντας το $\Delta(\tilde{\eta})$ έξω από τις αγκύλες και μαζεύοντας λίγο τα $e^{i\tilde{\eta}x}$ και τα $e^{i\tilde{\eta}(L-x)}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right. \\
 & - \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta})} [e^{i\tilde{\eta}x} [\Delta(\tilde{\eta}) i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t)] \\
 & \left. + e^{i\tilde{\eta}(L-x)} [\Delta(-\tilde{\eta}) i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t)] d\tilde{\eta} \right)
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

εδώ, αντικαθιστώντας τα G και κάνοντας τις πράξεις έχουμε :

$$\begin{aligned}
 & \Delta(\tilde{\eta}) i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}L} G(\tilde{\eta}, t) - e^{-i\tilde{\eta}L} G(-\tilde{\eta}, t) = \\
 & e^{i\tilde{\eta}L} 2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}L} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - e^{-i\tilde{\eta}L} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) + 2i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t)
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

και

$$\begin{aligned}
 & \Delta(-\tilde{\eta}) i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + G(\tilde{\eta}, t) - G(-\tilde{\eta}, t) = \\
 & e^{-i\tilde{\eta}L} 2i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) - 2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t)
 \end{aligned} \quad (4.15)$$

άρα:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \right. \\
 & - \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta})} [e^{i\tilde{\eta}x} [e^{i\tilde{\eta}L} 2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}L} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - e^{-i\tilde{\eta}L} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) + 2i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t)] \\
 & \left. + e^{i\tilde{\eta}(L-x)} [e^{-i\tilde{\eta}L} 2i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) - 2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t)] d\tilde{\eta} \right)
 \end{aligned} \quad (4.16)$$

όπου έπειτα από επιμεριστικές και απλοποιήσεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - \tilde{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} \\
 & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta})} \left[e^{i\tilde{\eta}(x+L)} 2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}(x+L)} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - e^{i\tilde{\eta}(x-L)} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) \right. \\
 & + e^{i\tilde{\eta}x} 2i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{-i\tilde{\eta}x} 2i\tilde{\eta} \tilde{h}_0(\tilde{\eta}^2, t) + e^{i\tilde{\eta}(L-x)} \hat{u}_0(\tilde{\eta}) - e^{i\tilde{\eta}(L-x)} \hat{u}_0(-\tilde{\eta}) \\
 & \left. - e^{i\tilde{\eta}(L-x)} 2i\tilde{\eta} \tilde{g}_0(\tilde{\eta}^2, t) \right] d\tilde{\eta}
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

και μαζεύοντας τα $\hat{u}_0(\hat{\eta})$, $\hat{u}_0(-\hat{\eta})$, $\tilde{h}_0$, $\tilde{g}_0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}x - \hat{\eta}^2 t} \hat{u}_0(\hat{\eta}) d\hat{\eta} \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2 t}}{\Delta(\hat{\eta})} \left[\left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \hat{u}_0(\hat{\eta}) - \left(e^{i\hat{\eta}(x-L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \hat{u}_0(-\hat{\eta}) \right. \\ & \left. + 2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} - e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \tilde{g}_0(\hat{\eta}^2, t) + 2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}x} + e^{-i\hat{\eta}x} \right) \tilde{h}_0(\hat{\eta}^2, t) \right] d\hat{\eta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

“επιστρέφοντας” από τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}x - \hat{\eta}^2 t} \left(\int_0^L e^{-i\hat{\eta}\xi} u_0(\xi) d\xi \right) d\hat{\eta} \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2 t}}{\Delta(\hat{\eta})} \left[\left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \int_0^L e^{-i\hat{\eta}\xi} u_0(\xi) d\xi \right. \\ & - \left(e^{i\hat{\eta}(x-L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \int_0^L e^{i\hat{\eta}\xi} u_0(\xi) d\xi \\ & + 2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} - e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \int_0^t e^{\hat{\eta}^2 \tau} g_0(\tau) d\tau \\ & \left. + 2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}x} + e^{-i\hat{\eta}x} \right) \int_0^t e^{\hat{\eta}^2 \tau} h_0(\tau) d\tau \right] d\hat{\eta} \end{aligned} \quad (4.19)$$

και με αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^L u_0(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}(x-\xi) - \hat{\eta}^2 t} d\hat{\eta} \right. \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2 t}}{\Delta(\hat{\eta})} \left[e^{-i\hat{\eta}\xi} \left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) - e^{i\hat{\eta}\xi} \left(e^{i\hat{\eta}(x-L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \right] d\hat{\eta} \left. \right\} d\xi \\ & + \int_0^t g_0(\tau) \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2(t-\tau)}}{\Delta(\hat{\eta})} \left[2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} - e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \right] d\hat{\eta} \right\} d\tau \\ & + \int_0^t h_0(\tau) \left\{ \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2(t-\tau)}}{\Delta(\hat{\eta})} \left[2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}x} + e^{-i\hat{\eta}x} \right) \right] d\hat{\eta} \right\} d\tau \end{aligned} \quad (4.20)$$

έτσι προκύπτουν φυσικά οι συναρτήσεις Green:

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\hat{\eta}(x-\xi) - \hat{\eta}^2 t} d\hat{\eta} \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2 t}}{\Delta(\hat{\eta})} \left[e^{-i\hat{\eta}\xi} \left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) - e^{i\hat{\eta}\xi} \left(e^{i\hat{\eta}(x-L)} + e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) \right] d\hat{\eta} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$G_L(x, \tau, t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2(t-\tau)}}{\Delta(\hat{\eta})} 2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}(x+L)} - e^{i\hat{\eta}(L-x)} \right) d\hat{\eta} \quad (4.22)$$

$$G_R(x, \tau, t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-\hat{\eta}^2(t-\tau)}}{\Delta(\hat{\eta})} 2i\hat{\eta} \left(e^{i\hat{\eta}x} + e^{-i\hat{\eta}x} \right) d\hat{\eta} \quad (4.23)$$

και έτσι η (4.16) μπορεί να γραφτεί ως:

$$u(x, t) = \int_0^L u_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^T g_0(\tau) G_L(x, \tau, t) d\tau + \int_0^T h_0(\tau) G_R(x, \tau, t) d\tau. \quad (4.24)$$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή της μεθόδου

5.1 Το πρόβλημα της κατακόρυφης διήθησης

Για να δείξουμε τη μέθοδο του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού και σε εφαρμοσμένο επίπεδο, επιλέξαμε ένα πρόβλημα που αφορά τη φυσική του εδάφους. Συγκεκριμένα, βασισμένοι στην εργασία των Κωνσταντίνου Καλημέρη, Λεωνίδα Μηνδρινού και Αθανάσιου Παρασκευόπουλου : "The unified transform for Burgers' equation: Application to unsaturated flow in finite interval" [17], θα αναλύσουμε το πρόβλημα της διήθησης σε μία διάσταση, πώς μπορούμε να το μετασχηματίσουμε σε μία εξίσωση διάχυσης και μέσω του E.M. θα λύσουμε το πρόβλημα για τις γενικές συνοριακές συνθήκες Dirichlet παίρνοντας την αναλυτική λύση του ΠΑΣΤ και έπειτα θα θεωρήσουμε συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες ώστε να λύσουμε το πρόβλημα και αριθμητικά εμφανίζοντας προφανώς και τις κατάλληλες απεικονίσεις.

Συγκεκριμένα, το πρόβλημα που θέλουμε να περιγράψουμε (της κατακόρυφης διήθησης σε ακόρεστο πορώδες μέσο, σε μία διάσταση) περιγράφεται μέσω της εξίσωσης Richards', η οποία αποτελεί μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση που συνδυάζει φαινόμενα διάχυσης και μεταφοράς. Από την εμφάνισή της στις αρχές του 20ού αιώνα, η εξίσωση Richards' χρησιμοποιείται εκτενώς για την προσομοίωση διαφορετικών φυσικών συνθηκών. Παρότι βασίζεται σε ισχυρό φυσικό υπόβαθρο, η μη γραμμική μορφή της καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την εξαγωγή αναλυτικών λύσεων.

Μία συνηθισμένη πρακτική για την απλοποίηση του μοντέλου είναι η επιβολή συγκεκριμένων συναρτησιακών μορφών στις υδραυλικές παραμέτρους του εδάφους. Συνήθως θεωρείται ότι η υδατική διαχυτότητα του εδάφους (D) παραμένει σταθερή, ενώ η υδραυλική αγωγιμότητα (K) εξαρτάται από την περιεκτικότητα του νερού (θ). Παράλληλα, διαφοροποιήσεις εμφανίζονται ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες που επιλέγονται, οι οποίες μπορούν να προσομοιώνουν καταστάσεις πλημμύρας ή βροχόπτωσης και εκφράζονται συνήθως μέσω συνθηκών Dirichlet ή Robin αντίστοιχα. Επιπλέον παραδοχές εισάγονται όταν το εδαφικό πεδίο θεωρείται πεπερασμένο ή ημι-άπειρο.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial x} \quad (5.1)$$

Εδώ θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου δεχόμαστε τις παραδοχές ότι το εδαφικό πεδίο είναι πεπερασμένο καθώς και ότι υπάρχει σταθερή διαχυτικότητα και τετραγωνική εξάρτηση της υδραυλικής αγωγιμότητας από την υδατική περιεκτικότητα δηλαδή

για $D > 0$ [4, 5] και:

$$K(\vartheta) = a(\vartheta + b)^2 \quad (5.2)$$

Οι παραπάνω παραδοχές μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε την (5.1) στην εξίσωση Burgers'

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - 2a(\vartheta + b) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (5.3)$$

Παρότι η εξίσωση που προκύπτει παραμένει μη γραμμική, είναι δυνατό να μετασχηματιστεί σε γραμμική εξίσωση διάχυσης μέσω του μετασχηματισμού Hopf–Cole.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5.4)$$

όπου $w = e^{-\frac{a}{D}\vartheta}$, με $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{a}{D}w(\vartheta + b)$.

Έτσι, το αρχικό πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως ΠΑΣΤ για την εξίσωση θερμότητας. Για την εξίσωση θερμότητας έχουν αναπτυχθεί πολυάριθμες αναλυτικές μέθοδοι, με πιο διαδεδομένες τον διαχωρισμό μεταβλητών και τις αναπτύξεις σε σειρές Fourier. Οι κλασικές αυτές τεχνικές έχουν εφαρμοστεί επιτυχώς τόσο σε προβλήματα διήθησης όσο και αποστράγγισης, σε πεπερασμένα ή ημι-άπειρα χωρία και υπό διάφορες συνοριακές συνθήκες. [2, 5]

Παρά την αποτελεσματικότητά τους, οι προσεγγίσεις αυτές επιβάλλουν αρκετούς περιορισμούς στη διατύπωση του προβλήματος. Ειδικότερα, συνήθως εφαρμόζονται μόνο σε πεπερασμένα χωρικά διαστήματα και απαιτούν ομογενείς ή σχετικά απλές τοπικές συνοριακές συνθήκες. Ως συνέπεια, η προσεγγιστική αναλυτική λύση οδηγεί συχνά σε εκτεταμένους υπολογισμούς και σε σειρές που ενδέχεται να συγκλίνουν αργά, ιδιαίτερα για μικρούς χρόνους ή κοντά στα όρια, όπου οι συνθήκες συμβατότητας μπορεί να μην ικανοποιούνται. Οι περιορισμοί αυτοί, που σχετίζονται με την έλλειψη ομοιόμορφης σύγκλισης της λύσης προς τα ίχνη της στα σύνορα του ΠΑΣΤ, καθιστούν αναγκαία την ανάπτυξη εναλλακτικών αναλυτικών μεθόδων, ικανών να αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα με πιο άμεσο και ενιαίο τρόπο.

Ακριβώς για την αντιμετώπιση των παραπάνω περιορισμών θα χρησιμοποιήσουμε την Μέθοδο Ενοποιημένου Μετασχηματισμού. Η μέθοδος αυτή παρέχει μία ρητή ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης, βασισμένη στους φυσικά προκύπτοντες φασματικούς μετασχηματισμούς των αρχικών και συνοριακών συνθηκών, που όπως δείξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια εφαρμόζεται σε διάφορες εξελκτικές ΜΔΕ (συγκεκριμένα στην Εξ. Θερμ. Κεφ. 2). Ως αποτέλεσμα, η αναλυτική διατύπωση απλοποιείται σημαντικά, ενώ η ολοκληρωτική μορφή της λύσης είναι συνήθως πιο κατάλληλη για αριθμητική υλοποίηση, παρουσιάζοντας βελτιωμένη σταθερότητα και ταχύτερη σύγκλιση σε σύγκριση με τις αποκομμένες σειρές Fourier.

Ας λύσουμε τώρα την (5.4). Αρχικά έχουμε ότι $w = e^{-\frac{a}{D}\vartheta}$, με $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{a}{D}w(\vartheta + b)$ όπου λύνοντας τη 2η ως προς ϑ και αντικαθιστώντας το w παίρνουμε:

$$\vartheta = -\frac{D}{a} \frac{\partial}{\partial x} (\ln w) - b = -\frac{D}{a} \frac{w_x}{w} - b \quad (5.5)$$

Όπως ήδη έχουμε πει θεωρούμε το πεπερασμένο χωρίο $x \in [0, L]$ καθώς και τη σταθερή αρχική συνάρτηση:

$$\partial(x, 0) = \partial_0, \quad 0 < x < L \quad (5.6)$$

Στην επιφάνεια ($x = 0$) θεωρούμε γνωστή μία χρονικά μεταβαλλόμενη ροή (q), η οποία περιγράφεται μέσω του νόμου του Darcy:

$$K(\partial) - D(\partial) \frac{\partial \partial}{\partial x}(0, t) = q(t), \quad t > 0 \quad (5.7)$$

Στο κάτω όριο ($x = L$) επιβάλλεται συνοριακή συνθήκη Dirichlet, δηλαδή καθορισμένη υγρασία:

$$\partial(L, t) = \partial_L, \quad t > 0 \quad (5.8)$$

με $\partial_0 \geq \partial_L > 0$.

Η εξίσωση (5.7), με χρήση της σχέσης (5.2), παίρνει τη μορφή μη γραμμικής συνοριακής συνθήκης τύπου Robin:

$$a(\partial(0, t) + b)^2 - D \frac{\partial \partial}{\partial x}(0, t) = q(t), \quad t > 0 \quad (5.9)$$

Οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων (5.6), (5.8) και (5.9) μετασχηματίζονται μέσω της καινούριας μεταβλητής w . Έτσι, το τελικό πρόβλημα γίνεται:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (5.10)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad 0 < x < L \quad (5.11)$$

$$w(0, t) = f(t), \quad t > 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(L, t) + Cw(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.13)$$

όπου:

$$w_0(x) = e^{-\frac{a}{D}(\partial_0+b)x}, \quad f(t) = e^{\frac{a}{D} \int_0^t q(s) ds} \text{ και } C = \frac{a}{D}(\partial_L + b)$$

Πρόκειται για πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών της εξίσωσης θερμότητας σε πεπερασμένο διάστημα με μικτές συνοριακές συνθήκες. Είναι δηλαδή το αντίστοιχο πρόβλημα Robin του προβλήματος (2.6) με τη διαφορά ότι εδώ δεν ισχύει η απλούστευση $D = 1$ που δεχτήκαμε στο κεφάλαιο 2.

Η λύση λοιπόν του παραπάνω ΠΑΣΤ της εξίσωσης θερμότητας είναι

$$\begin{aligned} w(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - D\tilde{\eta}^2 t} \hat{w}_0(\tilde{\eta}) d\tilde{\eta} - \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-D\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta}, -L)} \left[\sin(\tilde{\eta}x)(i\tilde{\eta} + C)e^{i\tilde{\eta}L} \hat{w}_0(\tilde{\eta}) + \right. \\ & \left. \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \hat{w}_0(-\tilde{\eta}) + i2\tilde{\eta}D \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \tilde{f}(D\tilde{\eta}^2, t) \right] d\tilde{\eta} \end{aligned} \quad (5.14)$$

όπου:

$$\Delta(\bar{\eta}, x) = \bar{\eta} \cos(\bar{\eta}x) - C \sin(\bar{\eta}x)$$

και οι μετασχηματισμοί

$$\hat{w}_0(\bar{\eta}) = \int_0^L e^{-i\bar{\eta}x} w_0(x) dx$$

και

$$\tilde{f}(k, t) = \int_0^t e^{ks} f(s) ds$$

είναι οι μετασχηματισμοί Fourier που έχουμε δει στο κεφάλαιο 2

5.2 Εφαρμογή σε συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη

Στα πλαίσια της εργασίας μας, επιλέξαμε η συνάρτηση $q(t)$ να είναι η υπερβολική εφαιπτομένη πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά δηλαδή $q(t) = \frac{D}{a} \tanh(t)$. Αυτό επηρεάζει τη συνάρτηση $f(t)$ της σχέσης (5.12) ως εξής:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\frac{a}{D} \int_0^t q(s) ds} = e^{\frac{a}{D} \int_0^t \frac{D}{a} \tanh(s) ds} = e^{\int_0^t \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} ds} = e^{\ln(e^s + e^{-s})|_0^t} \\ &= e^{\ln(\frac{e^t + e^{-t}}{2})} = \cosh(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Έτσι το πρόβλημα (5.10)-(5.13) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (5.16)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad 0 < x < L \quad (5.17)$$

$$w(0, t) = \cosh(t), \quad t > 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(L, t) + Cw(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (5.19)$$

όπου:

$$w_0(x) = e^{-\frac{a}{D}(\partial_0 + b)x} \text{ και } C = \frac{a}{D}(\partial_L + b)$$

τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς $\hat{w}_0$ και $\tilde{f}$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{w}_0(\bar{\eta}) &= \int_0^L e^{-i\bar{\eta}x} w_0(x) dx = \int_0^L e^{-i\bar{\eta}x} e^{-\frac{a}{D}(\partial_0 + b)x} dx \\ &= \int_0^L e^{-(i\bar{\eta} + \frac{a}{D}(\partial_0 + b))x} dx = \frac{1 - e^{-(i\bar{\eta} + \frac{a}{D}(\partial_0 + b))L}}{i\bar{\eta} + \frac{a}{D}(\partial_0 + b)} \\ &= \frac{1 - e^{-(i\bar{\eta} + \mu)L}}{i\bar{\eta} + \mu} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\mu = \frac{a}{D}(\partial_0 + b) \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(k, t) &= \int_0^t e^{ks} f(s) ds = \int_0^t e^{ks} \cosh(s) ds = \int_0^t e^{ks} \frac{e^s + e^{-s}}{2} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (e^{(k+1)s} + e^{(k-1)s}) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{(k+1)s}}{k+1} + \frac{e^{(k-1)s}}{k-1} \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{(k+1)t} - 1}{k+1} + \frac{e^{(k-1)t} - 1}{k-1} \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Τώρα αντικαθιστώντας τις (5.20) και (5.21) στην (5.14) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 w(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tilde{\eta}x - D\tilde{\eta}^2 t} \frac{1 - e^{-(i\tilde{\eta}+L)}}{i\tilde{\eta} +} d\tilde{\eta} - \\
 & \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} \frac{e^{-D\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta}, -L)} \left[\sin(\tilde{\eta}x)(i\tilde{\eta} + C)e^{i\tilde{\eta}L} \frac{1 - e^{-(i\tilde{\eta}+L)}}{i\tilde{\eta} +} + \right. \\
 & \left. \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \frac{1 - e^{-(i\tilde{\eta}+L)}}{-i\tilde{\eta} +} + i\tilde{\eta}D \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \left(\frac{e^{(D\tilde{\eta}^2+1)t} - 1}{D\tilde{\eta}^2 + 1} + \frac{e^{(D\tilde{\eta}^2-1)t} - 1}{D\tilde{\eta}^2 - 1} \right) \right] d\tilde{\eta}
 \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ο όρος $e^{i\tilde{\eta}x - D\tilde{\eta}^2 t}$, που εμφανίζεται στο πρώτο ολοκλήρωμα, είναι αναλυτικός στο D^+ και εμφανίζει εκθετική μείωση καθώς $|\tilde{\eta}| \rightarrow \infty$. Γι' αυτό, μπορούμε να κάνουμε deform από τον πραγματικό άξονα στο ∂D^+ ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\eta}x - D\tilde{\eta}^2 t} \frac{1 - e^{-(A+i\tilde{\eta})L}}{A + i\tilde{\eta}} d\tilde{\eta} &= \int_{\partial D^+} e^{i\tilde{\eta}x - D\tilde{\eta}^2 t} \frac{1}{A + i\tilde{\eta}} d\tilde{\eta} \\
 &\quad - \int_{\partial D^-} e^{i\tilde{\eta}x - D\tilde{\eta}^2 t} \frac{e^{-(A+i\tilde{\eta})L}}{A + i\tilde{\eta}} d\tilde{\eta} \\
 &= \int_{\partial D^+} e^{-D\tilde{\eta}^2 t} \left[\frac{e^{i\tilde{\eta}x}}{A + i\tilde{\eta}} - \frac{e^{-AL} e^{i\tilde{\eta}(L-x)}}{A - i\tilde{\eta}} \right] d\tilde{\eta}.
 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Για να προκύψει η τελευταία ισότητα εφαρμόζεται η αντικατάσταση $\tilde{\eta} \rightarrow -\tilde{\eta}$ στο δευτερο ολοκλήρωμα.

Εδώ θυμίζω ότι το D^+ είναι το χωρίο του άνω μιγαδικού επιπέδου όπου η $e^{-D\tilde{\eta}^2 t}$ φθίνει εκθετικά και πρόκειται για το χρωματισμένο χωρίο του παρακάτω σχήματος. Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα και κάνοντας ξανά deform από το ∂D^+ σε μια καμπύλη C^+ , η οποία βρίσκεται μεταξύ του πραγματικού άξονα και του ∂D^+ , καταλήγουμε στην ακόλουθη αναπαράσταση της λύσης:

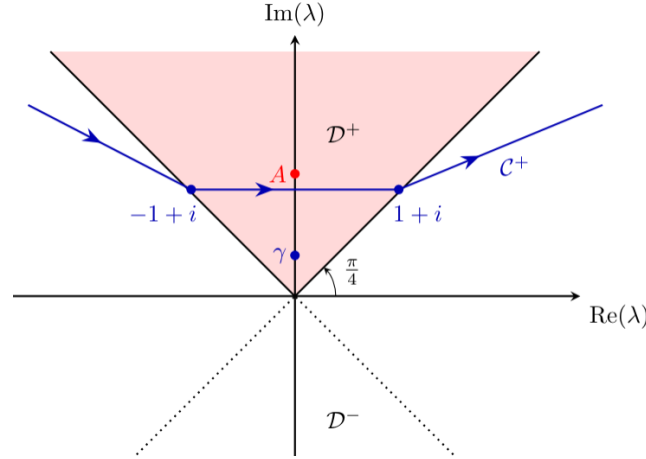
$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t). \quad (5.24)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 w_1(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{e^{-D\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta}, -L)} \left[\frac{e^{i\tilde{\eta}x}(A - i\tilde{\eta}) - e^{-AL} e^{i\tilde{\eta}(L-x)}(A + i\tilde{\eta})}{A^2 + \tilde{\eta}^2} \Delta(\tilde{\eta}, -L) \right. \\
 & - e^{i\tilde{\eta}L}(i\tilde{\eta} + C) \sin(\tilde{\eta}x) \frac{1 - e^{-AL} e^{-i\tilde{\eta}L}}{A + i\tilde{\eta}} \\
 & \left. - \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \frac{1 - e^{-AL} e^{i\tilde{\eta}L}}{A - i\tilde{\eta}} + i\tilde{\eta}D \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \left(\frac{1}{D\tilde{\eta}^2 + 1} + \frac{1}{D\tilde{\eta}^2 - 1} \right) \right] d\tilde{\eta} \\
 = & \frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{e^{-D\tilde{\eta}^2 t}}{\Delta(\tilde{\eta}, -L)} \left[\frac{e^{i\tilde{\eta}x}(A - i\tilde{\eta}) - e^{-AL} e^{i\tilde{\eta}(L-x)}(A + i\tilde{\eta})}{A^2 + \tilde{\eta}^2} \Delta(\tilde{\eta}, -L) \right. \\
 & - e^{i\tilde{\eta}L}(i\tilde{\eta} + C) \sin(\tilde{\eta}x) \frac{1 - e^{-AL} e^{-i\tilde{\eta}L}}{A + i\tilde{\eta}} \\
 & \left. - \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \frac{1 - e^{-AL} e^{i\tilde{\eta}L}}{A - i\tilde{\eta}} + 2i\tilde{\eta}D \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \frac{D\tilde{\eta}^2}{(D\tilde{\eta}^2)^2 - 1} \right] d\tilde{\eta}
 \end{aligned}$$

και

$$w_2(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C^+} \frac{1}{\Delta(\tilde{\eta}, -L)} \left[i\tilde{\eta}D \Delta(\tilde{\eta}, x - L) \left(\frac{e^t}{D\tilde{\eta}^2 + 1} + \frac{e^{-t}}{D\tilde{\eta}^2 - 1} \right) \right] d\tilde{\eta} \quad (5.25)$$



Σχήμα 5.1: Το σύνορο $\partial\mathcal{D}^+$ (μαύρη καμπύλη) του χωρίου $\mathcal{D}^+$ και η παραμορφωμένη (deformed) καμπύλη ολοκλήρωσης $\mathcal{C}^+$ (μπλε καμπύλη), όπως δίνεται από τη σχέση (5.26).

5.3 Αριθμητική προσέγγιση της λύσης

Για να υπολογίσουμε αριθμητικά το παραπάνω ολοκλήρωμα $w(x, t)$ πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλες παραμέτρους καθώς και την κατάλληλη καμπύλη ολοκλήρωσης $\mathcal{C}^+$ η οποία πρόκειται για ένα τραπέζιο, όπως φαίνεται στο σχήμα, όπου ο πόλος του ολοκληρώματος $w_2(x, t)$ ο $\gamma = \frac{i}{\sqrt{D}}$ βρίσκεται κάτω από αυτή ενώ ο εξαλείψιμος πόλος $A = \frac{a}{D}(\partial_0 + b)$ πάνω. Αυτό είναι σημαντικό καθώς στο συγκεκριμένο contour το $w_2(x, t)$ μέσω του θεωρήματος Cauchy δίνει μηδενική συνεισφορά. Έτσι αρκεί να υπολογίσουμε αριθμητικά μόνο το $w_1(x, t)$

Επιλέγουμε τις παραμέτρους: $a = 2\frac{m}{s}$, $b = -1\frac{m^3}{m^3}$, $D = 4\frac{m^2}{s}$, $q = 1/2$, $\partial_0 = 4$, $\partial_L = 4$ και $L = 1$

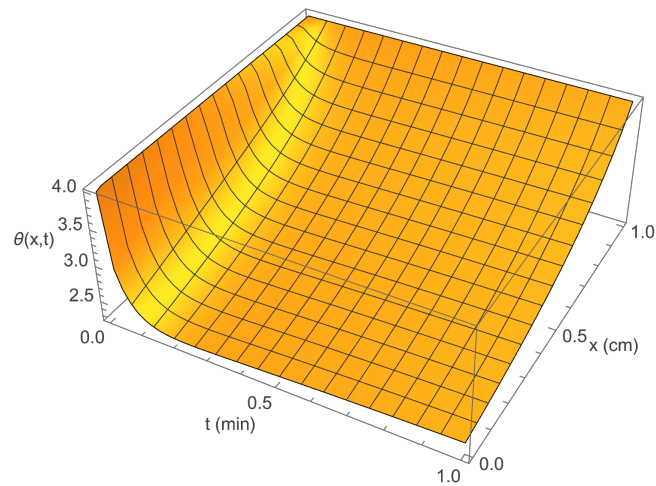
5.3.1 Καμπύλη ολοκλήρωσης

Επιλέγουμε μία άπειρη τραπεζοειδή καμπύλη ολοκλήρωσης $\mathcal{C}^+$ (θετικά προσανατολισμένη), με παραμετρικοποίηση $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$z(s) = \begin{cases} z_1(s) = (-\ell + \ell i) + (-s - \ell) e^{i\frac{5\pi}{6}}, & s \in (-\infty, -\ell), \\ z_2(s) = s + \ell i, & s \in [-\ell, \ell], \\ z_3(s) = (\ell + \ell i) + (s - \ell) e^{i\frac{\pi}{6}}, & s \in (\ell, +\infty), \end{cases} \quad (5.26)$$

Ακολουθώντας τη συζήτηση σχετικά με την αποσύνθεση $w = w_1 + w_2$ στη σχέση, θα εξετάσουμε το παρόν παράδειγμα, όπου η διαφορά έγκειται στον τρόπο αντιμετώπισης του όρου w_2 . Σε παλαιότερες εργασίες [12], ο όρος w_2 υπολογιζόταν αναλυτικά μέσω της συνεισφοράς του υπολοίπου (residue), ενώ σε νεότερες εργασίες μία κατάλληλη επιλογή καμπύλης ολοκλήρωσης δίνει $w_2 = 0$. Αμφότερες οι προσεγγίσεις απαιτούν αμελητέο υπολογιστικό κόστος, ωστόσο η δεύτερη προσέγγιση είναι πιο βολική.

Οι παραπάνω τιμές των φυσικών παραμέτρων δίνουν $A = \frac{2}{4}(4 - 1) = \frac{3}{2}$ και $\gamma = \frac{i}{2}$. η τελευταία αποτελεί μία απλή ρίζα στο εσωτερικό του χωρίου με σύνορο $\mathcal{C}^+$. Προκειμένου



Σχήμα 5.2: Η τρισδιάστατη απεικόνιση της αναλυτικής λύσης $\theta(x, t)$ για $x \in [0, 1]$ cm και $t \in [0, 1]$ min.

να αποφύγουμε τον υπολογισμό ενδεχόμενης συνεισφοράς υπολοίπου λόγω της εμφάνισης του Ai , θεωρούμε την παραμετροποίηση (5.26) με $\ell = 1 < A$, ωστόσο οποιαδήποτε τιμή $\frac{1}{2} < \ell < A$ είναι αποδεκτή, . Έτσι, δεν υπολογίζουμε αναλυτικά τον όρο ω_2 διότι ισούται με 0 λόγω του θεωρήματος Cauchy.

Κεφάλαιο 6

Σύνοψη

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε τη μέθοδο του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού και τον τρόπο με τον οποίο αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναλυτική επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών που περιγράφονται από μερικές διαφορικές εξισώσεις. Αρχικά παρουσιάσαμε συνοπτικά την ιστορική εξέλιξη των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών και στη συνέχεια επικεντρωθήκαμε στη βασική φιλοσοφία του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην Παγκόσμια Σχέση (Global Relation), μέσω της οποίας ενοποιούνται στο φασματικό επίπεδο η αρχική συνθήκη και οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Με τη βοήθεια της αναλυτικότητας των αντίστοιχων μετασχηματισμών, των συμμετριών και των κατάλληλων παραμορφώσεων των καμπυλών ολοκλήρωσης, καταλήξαμε σε ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις της λύσης, στις οποίες οι άγνωστες συνοριακές συναρτήσεις μπορούν να απαλειφθούν. Η διαδικασία αυτή παρουσιάστηκε αρχικά για την εξίσωση θερμότητας στην ημιευθεία και στη συνέχεια για την αντίστοιχη περίπτωση σε πεπερασμένο χωρίο.

Στη συνέχεια εξετάσαμε τη σχέση του Ενοποιημένου Μετασχηματισμού με τους κλασικούς ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Είδαμε ότι, ως αποτέλεσμα της γενικότερης ολοκληρωτικής αναπαράστασης που προκύπτει από τη μέθοδο, είναι δυνατόν να επαναπαραχθούν οι κλασικοί μετασχηματισμοί Fourier sine και cosine ως ειδικές περιπτώσεις. Παράλληλα, η μελέτη των συνοριακών συνθηκών Robin ανέδειξε τη γενικότητα της μεθόδου, καθώς η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί χωρίς να απαιτείται εξαρχής η επιλογή μιας συγκεκριμένης κατηγορίας συνοριακών συνθηκών. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται εμφανέστερος ο λόγος για τον οποίο η μέθοδος χαρακτηρίζεται ως «ενοποιημένη».

Ένα επιπλέον αποτέλεσμα της προηγούμενης ανάλυσης ήταν η φυσική εμφάνιση των συναρτήσεων Green μέσα από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης. Αντί να εισαχθούν ανεξάρτητα, οι συναρτήσεις Green προέκυψαν με την κατάλληλη αναδιάταξη των ολοκληρωμάτων και την απομόνωση των αρχικών και συνοριακών συναρτήσεων. Έτσι, η λύση ενός προβλήματος μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός της συνεισφοράς της αρχικής κατάστασης και των αντίστοιχων συνοριακών δεδομένων.

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας μεταφέραμε τη μεθοδολογία αυτή σε ένα πρόβλημα εφαρμοσμένων μαθηματικών και συγκεκριμένα στο πρόβλημα της μονοδιάστατης κατακόρυφης διήθησης νερού σε ακόρεστο πορώδες μέσο. Το πρόβλημα περιγράφεται αρχικά από τη μη γραμμική εξίσωση Richards. Με την υπόθεση σταθερής διαχυτικότητας και

κατάλληλης τετραγωνικής εξάρτησης της υδραυλικής αγωγιμότητας από την υδατική περιεκτικότητα, η εξίσωση Richards μετασχηματίζεται στην εξίσωση Burgers. Στη συνέχεια, μέσω του μετασχηματισμού Hopf–Cole, το μη γραμμικό πρόβλημα ανάγεται σε ένα γραμμικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση διάχυσης.

Για το γραμμικοποιημένο πλέον πρόβλημα εφαρμόσαμε τον Ενοποιημένο Μετασχηματισμό και προέκυψε αναλυτική ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης. Στη συνέχεια επιλέξαμε συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες και μελετήσαμε την αντίστοιχη αριθμητική λύση. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η επιλογή της καμπύλης ολοκλήρωσης, καθώς με κατάλληλη παραμόρφωση του contour μπορούμε να αποφύγουμε την άμεση υπολογιστική αντιμετώπιση της συνεισφοράς του όρου (w_2), ο οποίος στην περίπτωση που εξετάσαμε μηδενίζεται μέσω του θεωρήματος του Cauchy. Με τον τρόπο αυτό η αριθμητική διαδικασία περιορίζεται στον υπολογισμό του όρου (w_1), οδηγώντας στην τρισδιάστατη απεικόνιση της αναλυτικής λύσης.

Η μελέτη αυτή αποτελεί, επομένως, ένα παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο μία γενική αναλυτική μέθοδος για ΜΔΕ μπορεί να συνδεθεί με ένα συγκεκριμένο πρόβλημα φυσικής του εδάφους. Παράλληλα, δείχνει ότι η μετάβαση από ένα μη γραμμικό φυσικό μοντέλο σε ένα γραμμικό πρόβλημα, όταν αυτό είναι εφικτό μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών, μπορεί να καταστήσει δυνατή την εφαρμογή ισχυρών αναλυτικών τεχνικών όπως ο Ενοποιημένος Μετασχηματισμός.

Η παρούσα εργασία περιορίστηκε σε συγκεκριμένες παραδοχές, οι οποίες ήταν απαραίτητες ώστε το αρχικό πρόβλημα να οδηγηθεί σε γραμμική εξίσωση διάχυσης και να καταστεί δυνατή η αναλυτική του μελέτη. Ως φυσική συνέχεια της εργασίας θα μπορούσε να εξεταστεί η άρση ορισμένων από αυτές τις παραδοχές και η μελέτη πιο γενικών μοντέλων διήθησης, στα οποία η διαχυτικότητα και η υδραυλική αγωγιμότητα διατηρούν τη γενικότερη εξάρτησή τους από την υδατική περιεκτικότητα. Επιπλέον, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε η εξέταση διαφορετικών συνοριακών συνθηκών, διαφορετικών εδαφικών προφίλ και πιο σύνθετων γεωμετριών, καθώς και η προσπάθεια επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος από αυτό που περιγαψαμε στο κεφάλαιο 5.

Κλείνοντας, θέλουμε επιμείνουμε στο πνεύμα της εργασίας και να τονίσουμε ότι η μεθοδολογία που παρουσιάστηκε δεν περιορίζεται στην εξίσωση θερμότητας ούτε στο συγκεκριμένο πρόβλημα της κατακόρυφης διήθησης. Ο Ενοποιημένος Μετασχηματισμός έχει εφαρμογές σε ένα ευρύτερο σύνολο εξελικτικών ΜΔΕ και η δυνατότητα κατασκευής αναλυτικών λύσεων, συναρτήσεων Green και αριθμητικών αναπαραστάσεων δημιουργεί περαιτέρω δυνατότητες μελέτης προβλημάτων της μαθηματικής φυσικής και των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

- [1] M. J. Ablowitz and A. S. Fokas. *Complex Variables: Introduction and Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2nd edition, 2003.
- [2] I. Argyrokastritis, K. Kalimeris, and L. Mindrinos. An analytical solution for vertical infiltration in homogeneous bounded profiles. *European Journal of Soil Science*, 75(4):e13547, 2024.
- [3] Jean Baptiste Joseph baron de Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot, 1822.
- [4] H. Basha. Burgers' equation: a general nonlinear solution of infiltration and redistribution. *Water Resources Research*, 38(11):29–1–29–10, 2002.
- [5] C. Braester. Moisture variation at the soil surface and the advance of the wetting front during infiltration at constant flux. *Water Resources Research*, 9(3):687–694, 1973.
- [6] A Chatziafratis, AS Fokas, and K Kalimeris. The fokas method for evolution partial differential equations. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 14:101144, 2025.
- [7] R. V. Churchill. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1978.
- [8] B. Deconinck, T. Trogdon, and V. Vasan. The method of Fokas for solving linear partial differential equations. *SIAM Review*, 56(1):159–186, 2014.
- [9] A. S. Fokas. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 453(1962):1411–1443, 1997.
- [10] A. S. Fokas. *A Unified Approach to Boundary Value Problems*, volume 78 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, 2008.
- [11] A. S. Fokas and B. Pelloni. A transform method for linear evolution PDEs on a finite interval. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 70:564–587, 2005.
- [12] Athanassios S. Fokas and Efthimios Kaxiras. *Modern Mathematical Methods for Scientists and Engineers: a street-smart introduction*. World Scientific, Singapore, 2022.
- [13] Athanassios S Fokas and Euan A Spence. Synthesis, as opposed to separation, of variables. *Siam Review*, 54(2):291–324, 2012.
- [14] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Letters*, 19(19):1095–1097, 1967.

- [15] Clifford S Gardner, John M Greene, Martin D Kruskal, and Robert M Miura. Method for solving the korteweg-devries equation. *Physical review letters*, 19(19):1095, 1967.
- [16] Eberhard Hopf. The partial differential equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3:201–230, 1950.
- [17] Konstantinos Kalimeris, Leonidas Mindrinos, and Athanasios Paraskevopoulos. The unified transform for burgers’ equation: Application to unsaturated flow in finite interval. *Mathematics*, 14(13), 2026.
- [18] D. Mantzavinos and A. S. Fokas. The unified method for the heat equation: I. non-separable boundary conditions and non-local constraints in one dimension. *European Journal of Applied Mathematics*, 24:857–886, 2013.
- [19] L. A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5):318–333, 1931.
- [20] Elias M Stein and Rami Shakarchi. *Fourier analysis: an introduction*, volume 1. Princeton University Press, 2011.
- [21] Abdul-Majid Wazwaz. The kdv equation. *Handbook of differential equations: evolutionary equations*, 4:485–568, 2008.