



Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.
ΧΑΟΣ, ΣΥΖΥΓΗ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»**

ΡΟΔΟΛΦΟΣ ΑΡΚΑΣ ΚΟΛΕΤΣΟΣ

ΑΜ: 156344, ΜΣΜ

Επιβλέπων καθηγητής : Ανούσης Μιχαήλ

Συνεπιβλέπων καθηγητής: Αρβανιτογεώργος Ανδρέας

Βόλος, Μάιος 2026

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία, εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» (ΜΣΜ) της Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας (ΣΘΕΤ) του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ).

Ευχαριστώ πολύ, τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Ανούση Μιχαήλ, για τη βοήθεια που παρείχε και τη στήριξη που πρόσφερε καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ τον Συνεπιβλέποντα Καθηγητή κ. **Αρβανιτογεώργος Ανδρέας** για τη σημαντική συμβολή του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ τη σύζυγό μου Φωτεινή, για την αμέριστη και διαρκή της στήριξη.

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Περίληψη

Τα δυναμικά συστήματα είναι ένας τομέας Μαθηματικών που αναπτύσσεται από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα και είναι κυρίως μαθηματικά μοντέλα που περιγράφουν την εξέλιξη ενός σημείου σε έναν γεωμετρικό χώρο με την πάροδο του χρόνου, ακολουθώντας έναν συγκεκριμένο κανόνα ή συνάρτηση.

Στο 1^ο κεφάλαιο δίνονται τα βασικά χαρακτηριστικά των δυναμικών συστημάτων, τα οποία και τα κατηγοριοποιούν, με έμφαση να δίνεται στα συνεχή και διακριτά χρονικά συστήματα.

Στο 2^ο κεφάλαιο γίνεται μελέτη των Μονοδιάστατων Δυναμικών Συστημάτων, παρατηρούμε την τροχιά ενός σημείου και ανακαλύπτουμε τα σταθερά, περιοδικά, υπερβολικά,κ.αλ. σημεία της.

Για την γενίκευση συμπερασμάτων και περαιτέρω μελέτη τους απαιτούνται βασικές γνώσεις Μαθηματικής Ανάλυσης. Χρειάζεται λοιπόν, να γίνει μία αναφορά σε μετρικούς χώρους (3^ο κεφάλαιο), σε ομοιομορφισμούς και διαφορομορφισμούς (4^ο κεφάλαιο), για να καταλήξουμε σε έννοιες του χάους (Χαοτικά δυναμικά συστήματα-5^ο κεφάλαιο).

Η συζυγία (σύγκριση, σχέση, ..) δυναμικών συστημάτων μελετάται στο 6^ο κεφάλαιο της εργασίας, με το τελευταίο 7^ο κεφάλαιο να εστιάζει σε κάποιες μορφές συζυγίας (Κλάσεις Συζυγίας μονοδιάστατων γραμμικών συναρτήσεων και Διαφορομορφισμών Διαστημάτων)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δυναμικά Συστήματα.

1.1 Γενικά περί συστημάτων.....σελ.6
1.2. Αυτόνομα δυναμικά συστήματασελ.8
1.3 Επιφάνεια τμήματος Poincareσελ.14
1.4. Διακριτά Δυναμικά συστήματα.....σελ.18

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Μονοδιάστατα Δυναμικά Συστήματα

2.1. Συνάρτηση μετάβασης και τροχιάσελ.22
2.2. Σταθερά σημεία τροχιάςσελ.27
2.3. Ελκτικά και Απωθητικά Σταθερά σημείασελ.31
2.4. Μη-Υπερβολικά Σταθερά σημείασελ.41
2.5. Λεκάνη έλξης σταθερού σημείου.....σελ.46
2.6. Περιοδικά Σημεία.....σελ.52
2.7. Περιοδικά Σημεία της Λογιστικής συνάρτησης.....σελ.57
2.8. Η Οικογένεια των συναρτήσεων Σκηνης.....σελ.67
2.9. Θεώρημα Sharkovsky.....σελ.70

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Μετρικοί Χώροι

3.1. Ορισμός μετρικού χώρουσελ.75
3.2. Σύγκλιση ακολουθιών.....σελ.77
3.3. Ανοικτά και κλειστά σύνολασελ.80
3.4. Πυκνά Σύνολα.....σελ.82
3.5. <i>ωμέγα</i> και <i>άλφα-όρια</i> Δυναμικών Συστημάτωνσελ.85

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ομοιομορφισμοί, Διαφορομορφισμοί, Αριθμησιμότητα Συνόλου

4.1. Συνέχεια συναρτήσεωνσελ.87
4.2. Συνεχής συνάρτηση επανάληψης στα Δυναμικά Συστήματα.....σελ.90
4.3 Ομοιομορφισμοί και Διαφορομορφισμοίσελ.92
4.4. Αριθμησιμότητα, Σύνολα Μέτρου Μηδέν και το Σύνολο Cantor.....σελ.98

4.5. Τριαδικά αναπτύγματα και το σύνολο Cantor.....σελ.104	σελ.104
4.6. Η συνάρτηση Σκηνης για $\mu = 3$σελ.106	σελ.106
4.7. Ένα άλλο σύνολο Cantor.....σελ.110	σελ.110

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χαοτικά Δυναμικά Συστήματα

5.1. Οι συναρτήσεις Διπλασιασμού και Διπλασιασμού Γωνιώνσελ.112	σελ.112
5.2 Μεταβατικότητασελ.116	σελ.116
5.3. Ο Ορισμός του Devayne-Χάοςσελ.118	σελ.118
5.4. Κάποια Συμβολικά Δυναμικά και η συνάρτηση μετατόπισηςσελ.122	σελ.122
5.5. Ευαίσθητη Εξάρτηση από τις Αρχικές Συνθήκες και Wiggins-χάος.....σελ.125	σελ.125
5.6 Ljarunon χάος.....σελ.130	σελ.130

6^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Σύζευξη Δυναμικών Συστημάτων

6.1 Συζυγείς συναρτήσεις.....σελ.134	σελ.134
6.2 Ιδιότητες Συζυγών συναρτήσεωνσελ.139	σελ.139
6.3 Γραμμική Σύζευξησελ.144	σελ.144
6.4 Συζυγία και η Οικογένεια της Σκηνηςσελ.146	σελ.146
6.5 Σύζευξη και Θεμελιώδεις πεδίο.....σελ.151	σελ.151
6.6 Δομική σταθερότητα και διακλαδώσειςσελ.156	σελ.156

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Κλάσεις Συζυγίας

7.1 Δυναμική μονοδιάστατων γραμμικών συναρτήσεων.....σελ.157	σελ.157
7.2 Κλάσεις Συζυγίας μονοδιάστατων γραμμικών συναρτήσεωνσελ.158	σελ.158
7.3 Διαφορομορφισμοί Διαστημάτωνσελ.164	σελ.164
7.4 Κλάσεις Συζυγίας Διαφορομορφισμών Διαστημάτωνσελ.167	σελ.167
ΠΗΓΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑσελ.172	σελ.172

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δυναμικά Συστήματα

1.1 Γενικά περί συστημάτων

Μπορούμε να πούμε ότι ένα σύστημα λέμε ότι είναι δυναμικό όταν μεταβάλλεται στον χρόνο υπό την επίδραση κάποιων κανόνων, οι οποίοι καθορίζουν την χρονική εξέλιξή του. Οποιαδήποτε χρονική στιγμή σε ένα δυναμικό σύστημα έχουμε την αντίστοιχη κατάσταση του, που περιγράφεται από ένα σύνολο πραγματικών αριθμών (διάνυσμα θέσης), που αντιπροσωπεύει τις τιμές των μεταβλητών που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε, και αναπαριστάται από ένα γεωμετρικό σημείο σε κατάλληλο χώρο. Ένα δυναμικό σύστημα δηλαδή είναι ένα σύνολο όλων των πιθανών χρονικά καταστάσεων ενός συστήματος εφοδιασμένο με κάποιον κανόνα που καθορίζει μία κατάσταση σε σχέση με τις παρελθοντικές καταστάσεις (ή και τις μελλοντικές).

Μπορούμε να σκεφτούμε την εξέλιξη του καιρού σε κάποια περιοχή ή του πληθυσμού βακτηρίων, την κίνηση ενός εκκρεμές κ.α. ως παραδείγματα δυναμικών συστημάτων.

Ένα δυναμικό σύστημα αποτελείται από δύο μέρη:

Ο Χώρος Καταστάσεων ο οποίος ορίζεται έτσι ώστε να περιέχει όλες τις πιθανές θέσεις των καταστάσεων (διανυσμάτων θέσης) που μεταβάλλονται χρονικά. Κάθε κατάσταση του συστήματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο του χώρου καταστάσεων. Ο χώρος καταστάσεων μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο. Μπορεί να είναι πεπερασμένο ή να περιέχει μεμονωμένες τιμές (π.χ. $\{0,1\}$) ή μη πεπερασμένο ή να περιέχει άπειρα στοιχεία (διαμορφώνοντας μια λεία πολλαπλότητα όπως συνήθως προκύπτει όταν το δυναμικό σύστημα προκύπτει από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις). Ο Χώρος καταστάσεων μπορεί να έχει άπειρες διαστάσεις (όπως και στις μερικές διαφορικές εξισώσεις) και μηδενική διάσταση (π.χ. Cantor set).

Ο κανόνας (μετασχηματισμός, απεικόνιση) που είναι συνήθως μια **συνάρτηση** η οποία δίνει την χρονική εξέλιξη του συστήματος, δηλαδή περιγράφει τις μελλοντικές (ή συχνά και παρελθοντικές) καταστάσεις του συστήματος που προκύπτουν από την τρέχουσα (τωρινή) κατάστασή του. Συνήθως είναι μια συνάρτηση χρονικής (στιγμιαίας) μετάβασης, η οποία έχοντας γνωστή την τωρινή κατάσταση μας δίνει την κατάσταση του συστήματος την επόμενη (στιγμιαία αλλά διακριτή) χρονική στιγμή.

Τα δυναμικά συστήματα είναι ένας τομέας τόσο των καθαρών όσο και των εφαρμοσμένων Μαθηματικών και έχει εφαρμογές σε πολλά πεδία της Φυσικής, Αστρονομίας, Βιολογίας, Μετεωρολογίας, σε θέματα όπως ανάπτυξη πληθυσμών,

πρόγνωση καιρού κ.α.

Ανάλογα με τα βασικά χαρακτηριστικά του, ένα Δυναμικό Σύστημα μπορεί να είναι:

- Ντετερμινιστικό ή στοχαστικό (ανάλογα της συνάρτησης μετάβασης)
 - Διακριτό ή συνεχές (αν ο χρόνος μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων είναι διακριτός ή συνεχής)
 - Γραμμικό ή μη γραμμικό
 - Αυτόνομο ή μη αυτόνομο
- Τα *Ντετερμινιστικά μοντέλα* είναι αυτά που η συμπεριφορά τους είναι προβλέψιμη, δηλαδή υπάρχει η δυνατότητα πρόβλεψης των καταστάσεων χρονικά.
- Τα *Στοχαστικά μοντέλα* όπου η εξέλιξη των μεταβλητών των καταστάσεων ενός συστήματος επηρεάζεται από τυχαία γεγονότα και η συμπεριφορά του συστήματος δεν μπορεί να προβλεφτεί ολικά (σε κάθε χρονική στιγμή).
- *Χαοτικά μοντέλα* λέγονται τα Ντετερμινιστικά μοντέλα που η συμπεριφορά τους δεν είναι προβλέψιμη για όλες τις χρονικές στιγμές.
- Στα *Διακριτά συστήματα* ο χρόνος ορίζεται σε διακριτές μονάδες, δηλαδή παραμετροποιείται από διακριτή μεταβλητή και συνήθως προκύπτουν από ένα σύνολο εξισώσεων (συχνά διαφορών ή διαφορικών). Το σύστημα λύνεται εύκολα με αριθμητικές μεθόδους.
- Στα *Συνεχή συστήματα* ο χρόνος μεταξύ δύο καταστάσεων είναι συνεχής, δηλαδή δύο διαδοχικές χρονικά στιγμές απέχουν απειροελάχιστα μεταξύ τους, και τέτοια μοντέλα προκύπτουν συνήθως από διαφορικές εξισώσεις. Η αναλυτική λύση τους δεν είναι πάντα εφικτή για αυτό χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους επίλυσής τους (όπως την μέθοδο Euler).
- Τα *Γραμμικά συστήματα* έχουν μια συνάρτηση μετάβασης f που περιγράφει την συμπεριφορά του, να ικανοποιεί δύο βασικές ιδιότητες:
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
 - $f(ax) = af(x)$
- Τα *Μη Γραμμικά συστήματα* έχουν συνάρτηση μετάβασης που δεν ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες.
- *Αυτόνομο σύστημα* είναι ένα σύστημα από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, που δεν εξαρτώνται από μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Όταν αυτή είναι ο χρόνος, λέμε ότι έχουμε χρονικά-αμετάβλητο σύστημα. Δηλαδή αν η κατάσταση $x(t)$ οδηγεί στην $y(t)$ τότε κάθε χρονική μετατόπιση $x(t + \delta)$ οδηγεί στην κατάσταση $y(t + \delta)$.

Όλες οι καταστάσεις ενός συστήματος διαμορφώνουν έναν χώρο \mathcal{X} . Η εξέλιξη ενός συστήματος γίνεται φανερό μέσω ενός μετασχηματισμού $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, όπου $f(x)$ εκπροσωπεί την κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή 1, ενώ την χρονική στιγμή μηδέν η κατάσταση είναι x .

Για να αναλύσουμε ένα σύστημα και να μελετήσουμε την μακροχρόνια συμπεριφορά του χρειαζόμαστε, φυσικά, μια δομή στο \mathcal{X} και κάποιους περιορισμούς για τον μετασχηματισμό f . Υπάρχουν τρεις κύριες περιπτώσεις:

1. Αν \mathcal{X} είναι χώρος μέτρου και $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο, έχουμε την περίπτωση της *εργοδικής θεωρίας*.
2. Αν \mathcal{X} είναι τοπολογικός χώρος και $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ συνεχής απεικόνιση, έχουμε τα *τοπολογικά δυναμικά συστήματα*.
3. Αν \mathcal{X} είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ διαφορίσιμη απεικόνιση, έχουμε *λείο (smooth) δυναμικό σύστημα*.

1.2. Αυτόνομα δυναμικά συστήματα

Υπάρχουν δύο ουσιαστικά διαφορετικές προσεγγίσεις στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων, οι οποίες βασίζονται σε:

- ▲ χρονικά συνεχείς μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις
- ▲ χρονικά διακριτές συναρτήσεις

Μια προσέγγιση ξεκινά από χρονικά συνεχείς διαφορικές εξισώσεις και οδηγεί σε χρονικά διακριτές συναρτήσεις, οι οποίοι λαμβάνονται από αυτές μέσω κατάλληλης διακριτοποίησης του χρόνου. Η άλλη προσέγγιση ξεκινά από τη μελέτη των χρονικά διακριτών συναρτήσεων και στη συνέχεια σταδιακά αναπτύσσεται σε χρονικά συνεχείς διαφορικές εξισώσεις. Μετά από μια σύντομη εισαγωγή σε όρους μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, στο υπόλοιπο της εργασίας θα ακολουθηθεί η δεύτερη διαδρομή προς τη θεωρία δυναμικών συστημάτων. Αυτό επιτρέπει έναν γενικά πιο απλό τρόπο εισαγωγής των σημαντικών εννοιών, οι οποίες συνήθως μπορούν να μεταφερθούν

σε ένα πιο σύνθετο και φυσικά ρεαλιστικό πλαίσιο.

Από εδώ και εξής όποτε αναφερόμαστε σε σύστημα ή δυναμικό σύστημα θα εννοούμε αυτόνομο δυναμικό σύστημα. Ακολουθεί ένας ορισμός των αυτόνομων δυναμικών συστημάτων (A. Lasota and M.C. Mackay, A. Katok and B. Hasselblatt) και το θεώρημα Poincare-Bendixson.

Ορισμός 1.2.1. Ένα δυναμικό σύστημα αποτελείται από έναν χώρο X φάσεων (ή καταστάσεων) και μια οικογένεια μετασχηματισμών $f_t: X \rightarrow X$, όπου ο χρόνος t μπορεί να είναι είτε διακριτός, $t \in \mathbb{Z}$, είτε συνεχής, $t \in \mathbb{R}$. Για αυθαίρετες καταστάσεις $x \in X$ πρέπει να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $f_0(x) = x$
2. $f_t(f_s(x)) = f_{t+s}(x)$, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$

Με άλλα λόγια, ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να γίνει κατανοητό ως μια μαθηματική προσέγγιση για την εξέλιξη της κατάστασης ενός συστήματος στο χρόνο. Η ιδιότητα 2 παραπάνω διασφαλίζει ότι οι μετασχηματισμοί f_t σχηματίζουν μια Αβελιανή ομάδα.

Μπορείτε να αναζητήσετε διαφορετικούς ορισμούς των δυναμικών συστημάτων σε βιβλιογραφία ή διαδίκτυο. Ακολουθεί ορισμός για τα χρονικά συνεχή δυναμικά συστήματα που προκύπτουν από συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Ορισμός 1.2.2. Αν $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, $t \in \mathbb{R}$, τότε

$$f: X \rightarrow X, \quad \dot{x} = f(x(t)) = f(x) \quad (1)$$

ονομάζεται *διανυσματικό πεδίο*. Μπορεί να γραφτεί ως σύστημα n αυτόνομων (δηλαδή, μη χρονικά εξαρτώμενων) συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης,

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Η τυπική λύση της εξίσωσης (1) (αν υπάρχει),

$$x(t) = f_t(x(0))$$

ονομάζεται *ροή του διανυσματικού πεδίου*, όπου $x(0)$ οι αρχικές συνθήκες.

Εδώ f_t είναι ο μετασχηματισμός που έχουμε ήδη συναντήσει στον Ορισμό 1.2.1. παραπάνω. Σημειώστε ότι αυτό δεν απαντά στο ερώτημα του πώς να κατασκευαστεί η ροή για αυθαίρετες αρχικές συνθήκες x_0 . Αυτό το πρόβλημα χρονολογείται αιώνες πίσω και με την πάροδο των ετών έχουν αναπτυχθεί πολλές διαφορετικές προσεγγίσεις και τεχνικές. Η πιο κλασική προσέγγιση είναι αυτή της εύρεσης σαφών αναλυτικών λύσεων. Αυτό μπορεί να παρέχει πολλές πληροφορίες, αλλά ουσιαστικά εφαρμόζεται μόνο σε μια εξαιρετικά περιορισμένη κατηγορία διαφορικών εξισώσεων. Από τις αρχές του 20ού αιώνα έχει σημειωθεί μεγάλη ανάπτυξη στις τοπολογικές μεθόδους για την απόκτηση ποιοτικών τοπολογικών πληροφοριών, όπως η ύπαρξη περιοδικών λύσεων. Και πάλι, αυτή η προσέγγιση μπορεί να είναι πολύ επιτυχημένη σε ορισμένες περιπτώσεις, αλλά υπάρχουν πολλές εξισώσεις που έχουν, για παράδειγμα, άπειρες περιοδικές λύσεις, πιθανώς αλληλένδετες με πολύ περίπλοκους τρόπους, στους οποίους αυτές οι μέθοδοι δεν εφαρμόζονται πραγματικά. Τέλος, υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση λύσεων. Τις τελευταίες δεκαετίες, με την αυξανόμενη υπολογιστική ισχύ, υπήρξε ελπίδα ότι οι αριθμητικές μέθοδοι θα μπορούσαν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο. Και πάλι, ενώ αυτό ισχύει σε πολλές περιπτώσεις, υπάρχουν επίσης πολλές εξισώσεις για τις οποίες οι αριθμητικές μέθοδοι έχουν πολύ περιορισμένη εφαρμογή επειδή τα σφάλματα προσέγγισης αυξάνονται εκθετικά και γίνονται γρήγορα ανεξέλεγκτα. Επιπλέον, αυτή η «ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες» θεωρείται πλέον εγγενές χαρακτηριστικό ορισμένων εξισώσεων που δεν μπορούν να επιλυθούν αυξάνοντας την υπολογιστική ισχύ.

Ορισμός 1.2.3. Μια μοναδική διαδρομή στον χώρο καταστάσεων που ακολουθείται από την $x(t)$ στο χρόνο ονομάζεται *τροχιά* του δυναμικού συστήματος.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε την ύπαρξη και τη μοναδικότητα των λύσεων του διανυσματικού πεδίου της f . Υπάρχει απόδειξη αυτού αν η f είναι ομαλή (συνεχώς διαφορίσιμη, C^1).

Πρόταση 1.2.4. Για ομαλή f , δύο διακριτές τροχιές δεν μπορούν να τέμνονται, ούτε μπορεί μία μόνο τροχιά να τέμνει τον εαυτό της για $t < \infty$.

Απόδειξη: Υποθέστε ότι μια ενιαία τροχιά τέμνει τον εαυτό της. Ξεκινώντας με την αρχική συνθήκη στο σημείο τομής, υπάρχουν δύο επιλογές κατεύθυνσης για να προχωρήσουμε,

κάτι που αντικρούει τη μοναδικότητα. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει για δύο διακριτές τροχιές.

Αν υπάρχει μοναδικότητα, το $x(0)$ καθορίζει το αποτέλεσμα μιας ροής (τροχιάς) μετά από χρόνο t : έχουμε αυτό που ονομάζεται ντετερμινισμό.

Κάποιος μπορεί τώρα να αναρωτηθεί για τον γενικό «χαρακτήρα» μιας ροής $f_t(x(0))$, μιλώντας διαισθητικά: Είναι «απλή» ή «περίπλοκη»; Στη συνέχεια δίνουμε μια πρώτη, μάλλον όχι τόσο ποιοτική απάντηση.

Ορισμός 1.2.5. Ονομάζουμε μια ροή απλή αν για $t \rightarrow \infty$ όλα τα $x(t)$ είναι είτε σταθερά σημεία, $x = c, c \in \mathbb{R}$, είτε $\dot{x} = 0$, είτε περιοδικές τροχιές, δηλαδή, κλειστοί βρόχοι $x(t + \tau) = x(t), t \in \mathbb{R}$.

Στην περίπτωση των σταθερών σημείων, μπορούμε να συναντήσουμε διαφορετικούς τύπους συμπεριφοράς της τροχιάς όπως αυτή εξελίσσεται στο χρόνο, η οποία επηρεάζεται από τις αρχικές συνθήκες στο περιβάλλον γύρω από αυτά.

Θα παρατηρήσουμε παρακάτω διαφορετικούς τύπους συμπεριφοράς: Για παράδειγμα, σε μία περίπτωση η τροχιά μπορεί να «περιστρέφεται προς τα μέσα» στο σταθερό σημείο προσεγγίζοντάς το χρονικά ασυμπτωτικά, ενώ σε άλλη περίπτωση η τροχιά μπορεί να «περιστρέφεται προς τα έξω» (οι οποίες δεν είναι οι μόνες περιπτώσεις πιθανής δυναμικής του συστήματος). Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα σταθερό σημείο, εκτός από την απλή ύπαρξή του, μπορεί να έχει πολύ διαφορετική επίδραση στο περιβάλλον του.

Η ίδια συλλογιστική ισχύει και για την περίπτωση μιας περιοδικής τροχιάς. Μπορεί για παράδειγμα (σκεφτείτε τα σημεία στο επίπεδο \mathbb{R}^2) να έχουμε μια κυκλική περιοδική τροχιά. Ωστόσο, αν επιλέξουμε αρχικές συνθήκες που δεν βρίσκονται σε αυτόν τον κύκλο, μπορούμε να παρατηρήσουμε, για παράδειγμα, τη συμπεριφορά των σημείων να οδηγεί σε τροχιές «ελικοειδής» (να εισέρχονται στην περιοδική τροχιά τόσο από το εσωτερικό του κύκλου όσο και από το εξωτερικό).

Ο προσδιορισμός και ταξινόμηση σταθερών σημείων και περιοδικών τροχιών βρίσκεται στο επίκεντρο αυτής της εργασίας.

Ορισμός 1.2.6. Μια ροή ονομάζουμε περίπλοκη ή σύνθετη αν δεν είναι απλή.

Προκύπτει λοιπόν τώρα το ερώτημα, πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η διάσταση του χώρου φάσεων, ώστε να είναι δυνατή η περίπλοκη συμπεριφορά. Η απάντηση δίνεται με βάση το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.7. (Poincare-Bendixson) Έστω $\dot{x} = f(x)$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο που δρα σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει ένα κλειστό, φραγμένο σύνολο $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, το οποίο είναι τέτοιο ώστε όλες οι τροχιές που ξεκινούν από το \mathbb{R} να παραμένουν στο \mathbb{R} . Τότε οποιαδήποτε τροχιά που ξεκινά από το \mathbb{R} είναι είτε ένα σταθερό σημείο είτε μια περιοδική τροχιά, είτε κινείται σπειροειδώς καθώς $t \rightarrow \infty$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι περίπλοκη και υπερβαίνει το πεδίο εφαρμογής αυτής της εργασίας. Βασίζεται στην ιδέα της μοναδικότητας των λύσεων και στο ότι οι τροχιές δεν μπορούν να τέμνονται μεταξύ τους. Επίσης, η διαφορετική τοπολογία σε δύο και τρεις διαστάσεις παίζει κρίσιμο ρόλο στο είδος των τροχιών.

Πόρισμα 1.2.8. Έστω $f(x) \in \mathbb{R}^n$ και οι συνθήκες του θεωρήματος Poincare-Bendixson πληρούνται. Τότε $n \leq 2 \Rightarrow$ απλές λύσεις. Συνεπώς, $n \geq 3 \Rightarrow$ «όλα μπορούν να συμβούν», δηλαδή, είναι δυνατές οι πολύπλοκες λύσεις.

Αυτό εγείρει το ερώτημα του πώς να ελέγξουμε αυτές τις περιπτώσεις για μια δεδομένη διαφορική εξίσωση. Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.2.9. Ας εξετάσουμε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την μετατόπιση κατά γωνία θ ενός κινούμενου μη γραμμικού εκκρεμής,

$$\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \sin\theta = A\sin(2\pi ft).$$

Το ν δηλώνει τον συντελεστή τριβής, το A το πλάτος της περιοδικής κίνησης και με f τη συχνότητα της κινητήριας δύναμης.

Ξαναγράφουμε αυτό το δυναμικό σύστημα σε μορφή διανυσματικού πεδίου χρησιμοποιώντας

$$x_1 := \dot{\theta}, \quad x_2 := \theta, \quad x_3 := 2\pi ft.$$

Το «κόλπο» της ενσωμάτωσης της χρονικής εξάρτησης της διαφορικής εξίσωσης ως τρίτης μεταβλητής μας επιτρέπει να κάνουμε το διανυσματικό πεδίο αυτόνομο, οδηγώντας στο παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = -\nu x_1 - \sin x_2 + A \sin x_3$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

$$\dot{x}_3 = 2\pi f.$$

Έχουμε $n = 3$, άρα είναι δυνατή η σύνθετη δυναμική.

Ακολουθεί ο ορισμός των χρονικά διακριτών δυναμικών συστημάτων, τα οποία αποτελούν κύριο αντικείμενο μελέτης της εργασίας.

Ορισμός 1.2.10. Αν $X \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, $x_n \in X$, $t \in \mathbb{R}$. $n \in \mathbb{Z}$, τότε

$$f: X \rightarrow X, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (2)$$

ονομάζεται *χρονικά διακριτή απεικόνιση*. Οι $x_{n+1} = f(x_n)$ ονομάζονται μερικές φορές οι *εξισώσεις κίνησης* του δυναμικού συστήματος.

Η επιλογή της αρχικής συνθήκης x_0 καθορίζει το αποτέλεσμα μετά από n διακριτά χρονικά βήματα (δηλαδή το σύστημα είναι ντετερμινιστικό) με τον ακόλουθο τρόπο

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = (f \circ f)(x_0) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) (\neq f(x_0)f(x_0)!))$$

Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία, ισχύει

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^2(x_{n-2}) = \dots = f^n(x_0)$$

Με άλλα λόγια, για τις συναρτήσεις η κατάσταση είναι τυπικά απλούστερη από ό,τι για τις διαφορικές εξισώσεις. Αυτό είναι το αντίστοιχο της ροής για χρονικά συνεχή συστήματα.

Υπάρχει και η αντίστοιχη εκδοχή του *Θεώρημα 1.2.7. (Poincare-Bendixson)*.

Πόρισμα 1.2.11. (Διακριτοποίηση Poincare-Bendixson) Έστω $x_{n+1} = f(x_n)$ μια ομαλή απεικόνιση που ενεργεί σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει ένα κλειστό, φραγμένο σύνολο $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^N$, το οποίο είναι τέτοιο ώστε όλες οι τροχιές που ξεκινούν από το \mathbb{R} να παραμένουν στο \mathbb{R} . Ας δούμε τις τροχιές που ξεκινούν από το \mathbb{R} για $n \rightarrow \infty$. Έστω f αντιστρέψιμη. Τότε $N = 1 \Rightarrow$ απλές λύσεις. Συνεπώς, $N \geq 2 \Rightarrow$ πολύπλοκες λύσεις είναι πιθανές. Έστω f μη αντιστρέψιμη. Τότε οι πολύπλοκες λύσεις είναι πάντα πιθανές.

Έτσι, το διακριτοποιημένο *θεώρημα Poincare-Bendixson* μας αφήνει με την πιθανότητα ότι η δυναμική ακόμη και απλών μονοδιάστατων χαρτών δεν είναι τετριμμένη, γι' αυτό και θα τις μελετήσουμε λεπτομερώς.

Σχόλιο 1.2.12. Αν συγκρίνετε αυτό το συμπέρασμα με το προηγούμενο για τις ροές, θα

παρατηρήσετε μια μείωση της συνθήκης στη διάσταση N , υπονοώντας κανονική δυναμική, κατά πρώτον για αντιστρέψιμες συναρτήσεις και κατά δεύτερο για μη αντιστρέψιμες συναρτήσεις σε σύγκριση με τις ροές. Αυτό δεν είναι σύμπτωση όπως θα δούμε παρακάτω.

1.3 Επιφάνεια τμήματος Poincare

Μια *επιφάνεια τμήματος Poincare* επιτρέπει την αναγωγή μιας ροής N -διάστασεων σε μια συνάρτηση $(N - 1)$ -διαστάσεων. Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι:

Η πρώτη είναι η *επιφάνεια τμήματος Poincare* στο χώρο.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση, π.χ. $\dot{x} = F(x)$, σε $N = 3$ -διάστατο χώρο και ας θέσουμε $x_3 = K$ όπου K είναι μια σταθερά που επιλέγεται για ευκολία. Η συνάρτηση Poincare για αυτό το σύστημα ορίζεται μοναδικά από την επανάληψη

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} (x_1)_{n+1} \\ (x_2)_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} (x_1)_n \\ (x_2)_n \end{pmatrix}$$

από το n -οστό έως το $(n + 1)$ -οστό βήμα υπό την προϋπόθεση ότι $x_3 = K$ διατηρείται σταθερό.

Αυτός ο ορισμός φαίνεται να είναι αρκετά απλός, ωστόσο, υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημαντικές παρατηρήσεις: Πρώτον, είναι αρκετά εύκολο να παραχθεί μια *επιφάνεια τμήματος Poincare* για μια δεδομένη διαφορική εξίσωση *αριθμητικά*, αλλά μόνο σε εξαιρετικές περιπτώσεις μπορεί να ληφθεί η αντίστοιχη συνάρτηση Poincare *αναλυτικά*. Δεύτερον, εάν οι χρόνοι μεταξύ δύο βημάτων είναι σταθεροί, τότε ορισμένες ασήμαντες πληροφορίες σχετικά με το δυναμικό σύστημα διαχωρίζονται εύκολα παράγοντας μια *επιφάνεια τμήματος Poincare*. Ωστόσο, τις περισσότερες φορές δεν υπάρχει λόγος για τον οποίο το χρονικό βήμα θα πρέπει να είναι σταθερό. Εάν δεν συμβαίνει αυτό, η πλήρης δυναμική ορίζεται από αυτό που ονομάζεται *αιωρούμενη ροή* ή *ροή σε αναστολή*,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n), & x_n &\in \mathbb{R}^{N-1} \\ t_{n+1} &= t_n + T(x_n), & T: \mathbb{R}^{N-1} &\rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) ονομάζεται χρονική συνάρτηση πρώτης επιστροφής. Αυτό μας επιτρέπει να σχηματίσουμε μια ιδέα για το πώς εφαρμόζεται το *θεώρημα Poincare-Bendixson* σε διακριτά συστήματα μειωμένων διαστάσεων: Η παραπάνω *αιωρούμενη ροή* εξακολουθεί

να παρέχει μια ακριβή αναπαράσταση του υποκείμενου χρονικά συνεχούς δυναμικού συστήματος. Ωστόσο, αν αναφερθούμε μόνο στην πρώτη εξίσωση αγνοώντας τη δεύτερη Εξίσωση (3), όπως κάναμε πριν, μειώνουμε τη διάσταση ολόκληρου του δυναμικού συστήματος κατά μία.

Φυσικά, θα μπορούσαμε επίσης να θεωρήσουμε ολόκληρες τις εξισώσεις αιωρούμενης ροής ως μια απεικόνιση N -διάστατων διαστάσεων, ωστόσο, το σύνολο στο οποίο ορίζεται η εξίσωση (3) είναι πάντα απεριόριστο και επομένως δεν θα μπορούσαμε να συσχετιστούμε με το *θεώρημα Poincare-Bendixson*.

Παρόλα αυτά, εκ κατασκευής, η εξίσωση Poincare είναι αντιστρέψιμη. Ωστόσο, αν παραμελήσουμε οποιαδήποτε μεμονωμένη συνιστώσα του διανύσματος στην εξίσωση, πράγμα που υποδηλώνει ότι μειώνουμε περαιτέρω τη διάσταση του χώρου φάσεων κατά ένα, η προκύπτουσα απεικόνιση θα γίνει μη αντιστρέψιμη, επειδή έχουμε χάσει κάποιες πληροφορίες. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη το *θεώρημα Poincare-Bendixson*, δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι παρά την ελάχιστη διάστασή τους, οι μονοδιάστατες μη αντιστρέψιμες απεικονίσεις μπορούν να εμφανίσουν περίπλοκη χρονικά ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Μια δεύτερη εκδοχή μιας συνάρτησης Poincare λαμβάνεται από μια *επιφάνεια τομής Poincare* στο χρόνο. Για αυτόν τον σκοπό, λαμβάνουμε δείγμα από ένα χρονικά συνεχές δυναμικό σύστημα όχι ως προς έναν περιορισμό στον χώρο των φάσεων αλλά σε διακριτούς χρόνους $t_n = t_0 + n\tau, n \in \mathbb{N}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση που καθορίζει την εξίσωση (3) της αιωρούμενης ροής καταλήγει έτσι στην $T(x_n) = n\tau$. Έχουμε αυτό που ονομάζεται *στροβοσκοπική δειγματοληψία* του χώρου φάσεων. Αυτή η παραλλαγή είναι πολύ βολική για δυναμικά συστήματα που κινούνται από περιοδικές δυνάμεις όπως, για παράδειγμα, το μη γραμμικό εκκρεμές. Ωστόσο, επιθυμούμε να παρουσιάσουμε αυτήν την τεχνική για ένα απλούστερο σύστημα, όπου αυτό είναι πιο εύκολο να το δούμε. Αυτό το σύστημα παρέχει ένα σπάνιο παράδειγμα για το οποίο η συνάρτηση Poincare μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει πρώτα να μάθουμε για ένα μαθηματικό αντικείμενο που ονομάζεται « δ -συνάρτηση» (Dirac), την οποία μπορούμε να εισαγάγουμε ως εξής.

Αναζητούμε μια «συνάρτηση» που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\delta(x) := \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Να σημειωθεί ότι υπάρχουν πολλές άλλες αναπαραστάσεις της δ -συνάρτησης. Αυστηρά

μιλώντας, η « δ -συνάρτηση» δεν είναι συνάρτηση αλλά μάλλον ένα συναρτησώειδες, μια κατανομή που ορίζεται σε έναν συγκεκριμένο χώρο συναρτήσεων (Schwartz).

Δύο σημαντικές ιδιότητες της δ -συνάρτησης που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια είναι η κανονικοποίησή της,

$$\text{για κάθε } \epsilon > 0, \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1 \text{ και } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

για ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$.

Ας δούμε τώρα το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.3.1 Μια περιστρεφόμενη ράβδος (χωρίς τριβή) αδράνειας I και μήκους l υφίσταται κρούσεις δύναμης K/l που εφαρμόζονται περιοδικά σε χρονικά βήματα $t = 0, \tau, 2\tau, \dots, \tau \in \mathbb{R}$, στο μη σταθερό άκρο της. Η γωνία την χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}$ με την κατακόρυφο σε θετική έννοια που σχηματίζει το μη σταθερό άκρο της, συμβολίζεται με $\theta = \theta(t)$, και επιλέγουμε $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Η εξίσωση κίνησης για αυτό το δυναμικό σύστημα προκύπτει άμεσα από φυσικά επιχειρήματα, ωστόσο, την αναφέρουμε εδώ απλώς στη μορφή

$$\ddot{\theta} = k \sin \theta \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\tau),$$

όπου η δυναμική μεταβλητή θ περιγράφει τη γωνία στροφής και το $k: K/l$ είναι μια παράμετρος ελέγχου. Όπως και πριν, μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτήν την διαφορική εξίσωση ως διανυσματικό πεδίο,

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = k \sin \theta \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\tau)$$

Σύμφωνα με την δεύτερη εξίσωση, το ω είναι σταθερό κατά τους χρόνους $t \neq m\tau$ μεταξύ των κρούσεων, αλλά αλλάζει ασυνεχώς στις κρούσεις, οι οποίες λαμβάνουν χώρα στους χρόνους $t = m\tau$. Η

πρώτη εξίσωση τότε υπονοεί ότι η γωνία θ μεταβάλλεται συνεχώς μεταξύ των λακτισμάτων, αντανακλώντας τις ασυνεχείς αλλαγές στην κλίση ω .

Ας κατασκευάσουμε τώρα μια κατάλληλη επιφάνεια τμήματος *Poincare* για αυτό το δυναμικό σύστημα.

Ας ορίσουμε $\theta_n := \theta(t)$ και $\omega_n := \omega(t)$ στο $t = n\tau + 0^+$ όπου 0^+ είναι ένα θετικό απειροελάχιστο. Δηλαδή, εξετάζουμε και τις δύο δυναμικές μεταβλητές αμέσως μετά από κάθε κρούση.

Στη συνέχεια, ολοκληρώνουμε την πρώτη εξίσωση μέσω της δ -συνάρτησης στο $t = (n + 1)\tau$, οδηγώντας σε

$$\int_{n\tau+0^+}^{(n+1)\tau+0^+} \dot{\theta} d(t) = \theta_{n+1} - \theta_n = \omega_n \tau$$

Με τον ίδιο τρόπο ενσωματώνουμε την δεύτερη εξίσωση του δυναμικού συστήματος

$$k \int_{n\tau+0^+}^{(n+1)\tau+0^+} \sin\theta \sum_{m=0}^{\infty} \delta(t - m\tau) d(t) = \omega_{n+1} - \omega_n = k \sin\theta_{n+1}$$

Εάν $\tau = 1$ βλέπουμε ότι $\theta_{n+1} = \theta_n + \omega_n$

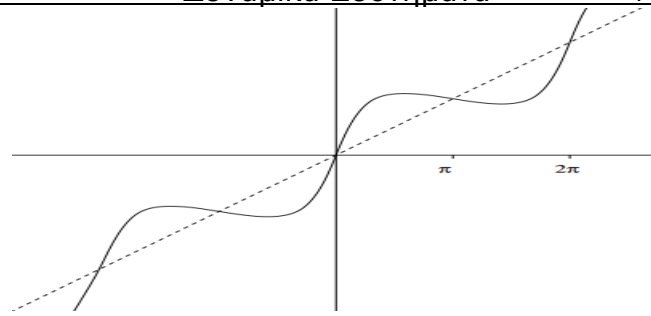
$$\omega_{n+1} = \omega_n + k \sin\theta_{n+1}$$

Αυτή η δισδιάστατη αναπαράσταση ονομάζεται τυπική αναπαράσταση ή μερικές φορές και αναπαράσταση Chirikov-Taylor. Παρουσιάζει μια δυναμική που είναι τυπική για χρονικά διακριτά δυναμικά συστήματα, χρησιμεύοντας έτσι ως τυπικό παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία συστημάτων. Για λόγους ευκολίας, η δυναμική των (θ_n, ω_n) συχνά θεωρείται $mod 2\pi$.

Μπορούμε να μειώσουμε περαιτέρω τη δυναμική του προβλήματος συνδυάζοντας τις τελευταίες εξισώσεις, στην $\omega_{n+1} = \omega_n + k \sin(\theta_n + \omega_n)$.

Υποθέτοντας ότι $\theta_n \ll \omega_n$, κάτι που φυσικά θα πρέπει να δικαιολογηθεί λεπτομερώς αν θέλουμε να ισχυριστούμε ότι η προκύπτουσα εξίσωση είναι ένα ρεαλιστικό μοντέλο, καταλήγουμε ότι $\omega_{n+1} = \omega_n + k \sin\omega_n$.

Η μονοδιάστατη συνάρτηση ημιτονοειδούς ανόδου που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα 1.3.1., παρέχει ένα άλλο παράδειγμα μιας φαινομενικά απλής συνάρτησης που παρουσιάζει πολύ μη τετριμμένη δυναμική η οποία αλλάζει με πολύ περίπλοκο τρόπο υπό την μεταβολή των παραμέτρων.



σχήμα 1.3.1

1.4. Διακριτά Δυναμικά συστήματα

Διακριτά δυναμικά συστήματα όπως είδαμε, είναι τα συστήματα στα οποία ο χρόνος εξελίσσεται σε διακριτές μονάδες. Για παράδειγμα η καταγραφή του ανθρώπινου πληθυσμού μιας πόλης κάθε χρόνο και η ανάλυση της ανάπτυξής της.

Τα κύρια παραδείγματα διακριτών δυναμικών συστημάτων προκύπτουν από την επανάληψη ενός μετασχηματισμού. Ας θεωρήσουμε έναν χώρο \mathcal{X} και μία απεικόνιση $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. Ως χώρος \mathcal{X} μπορεί να θεωρηθεί το μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$, το μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$, ο μοναδιαίος κύκλος στο \mathbb{R}^2 , η επιφάνεια ενός τόρου, ένα Cantor σύνολο, κ.αλ..

Η απεικόνιση f δίνει, όπως ειπώθηκε στον ορισμό 1.2.10., την χρονική εξέλιξη των σημείων του \mathcal{X} . Εάν $x \in \mathcal{X}$, τότε παίρνουμε την αλληλουχία $x, f(x), f(f(x)), \dots$.

Σημείωση 1.4.1. Για $n > 0, n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε ως $f^n(x)$ την n -ιοστή επανάληψη της f στο x . Ειδικότερα $f^1 = f$, και ως σύμβαση θεωρούμε ότι για όλα τα $x \in \mathcal{X}$ έχουμε $f^0 = x$ τη ταυτοτική συνάρτηση που συνήθως συμβολίζεται $Id(x) = x$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως $f^n(x)$ την κατάσταση που έχει μεταβεί το σημείο x την χρονική στιγμή n .

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.2. Ορίζουμε ως $\mathcal{O}_f^+(x)$ την *μπροστινή-τροχιά* ενός σημείου $x \in \mathcal{X}$ υπό την επανάληψη του μετασχηματισμού f ,

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\},$$

δηλαδή έχουμε την ημι-ομάδα μετασχηματισμών $\{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$.

Παράδειγμα 1.4.3. Αν $\mathcal{X} = [0,1]$ το μοναδιαίο διάστημα και ως $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ας είναι η

απεικόνιση $f(x) = \frac{1}{3}x$. Τότε

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}, \dots \right\}$$

Παράδειγμα 1.4.4. Αν \mathcal{X} είναι ο μοναδιαίος κύκλος, ένα παράδειγμα μιας απεικόνισης $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ είναι η περιστροφή (κατά τους δείκτες του ρολογιού) κατά γωνία 2π , όπου αντιστοιχεί ένα σημείο $x \in \mathcal{X}$ στο σημείο του κύκλου μετά την περιστροφή του (σύμφωνη με αυτή των δεικτών ενός ρολογιού) υπό γωνία 2π .

Σημείωση 1.4.5. Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε ορίζεται και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τις προς- τα -πίσω επαναλήψεις

$f^{-1}(x)$: μία χρον. στιγμή πριν την στιγμή της κατάστασης x ,
 $f^{-2}(x) = f^{-1}(x) \circ f^{-1}(x)$: δύο χρον. στιγμές πριν την στιγμή της κατάστασης $x \dots$
 δηλαδή με $f^{-n}(x)$ ορίζουμε την κατάσταση που έχει μεταβεί το σημείο x την χρονική στιγμή $-n$, $n \in \mathbb{N}$.

Αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε και πάλι να ορίσουμε το σύνολο $\{f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots, f^{-n}(x), \dots\} = \{f^{-n}(x), n \in \mathbb{N}\}$, των προ-εικόνων ενός σημείου $x \in \mathcal{X}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.6. Αν η f είναι αντιστρέψιμη, ορίζουμε ως $\mathcal{O}_f(x)$ την (ολική) τροχιά ενός σημείου $x \in \mathcal{X}$ υπό την επανάληψη προς τα εμπρός και πίσω, του μετασχηματισμού f , δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_f(x) &= \{ \dots, f^{-n}(x), \dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots, n \in \mathbb{N} \} = \\ &= \{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε την ομάδα μετασχηματισμών $\{f^k(x), k \in \mathbb{Z}\}$.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα διακριτό δυναμικό σύστημα που μας ενδιαφέρει η τιμή των καταστάσεων του συστήματος τόσο στο μέλλον όσο και στο παρελθόν. Όμως ακόμη και αν η συνάρτηση μετάβασης f είναι απλή, η μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του συστήματος είναι συχνά «χαστική». Μπορεί δύο σημεία $x, y \in \mathcal{X}$ να βρίσκονται αρκετά κοντά, ενώ μετά από μερικές επαναλήψεις (χρονικές στιγμές) της f οι αποστάσεις των $f(x)$ και $f(y)$ να είναι αρκετά μακριά. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως *ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες*.

Το κύριο αντικείμενο των Δυναμικών συστημάτων είναι η μελέτη της συμπεριφοράς των τροχιών όλων (ή σχεδόν όλων) των καταστάσεων του συστήματος. Οι τροχιές μπορεί

να είναι αρκετά περίπλοκες ακόμη και αν ο μετασχηματισμός μετάβασης είναι απλός. Μπορεί να αποτελούνται από πεπερασμένο ή και άπειρο πλήθος σημείων (καταστάσεων). Υπάρχει περίπτωση να αποτελείται από μικρό αριθμό σημείων (για παράδειγμα οι επαναλήψεις του μετασχηματισμού να οδηγούν σε σημεία από τα οποία να διέρχεται η τροχιά μιας κατάστασης συνεχώς στη μεταβολή του χρόνου).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.7. Ένα σημείο $x \in X$, λέγεται **περιοδικό** εάν υπάρχει $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $f^n(x) = x$.

Αν $n = 1$, δηλαδή $f(x) = x$, λέμε ότι το σημείο $x \in X$ είναι **σταθερό** σημείο.

Γενικά εάν ισχύει $f^n(x) = x$, τότε λέμε ότι το σημείο $x \in X$, λέγεται **περιοδικό** με περίοδο $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, και ισχύει $f^{n+j}(x) = f^j(x)$ για όλα τα $j \geq 0$.

Σημείωση 1.4.8. Σε ένα δυναμικό σύστημα $f: X \rightarrow X$ το σύνολο με όλα τα σημεία $x \in X$ με περίοδο n , ας συμβολίζεται $Per_n(f)$, ενώ το σύνολο όλων των περιοδικών σημείων με $Per(f)$.

$$Per_n(f) = \{x \in X: f^n(x) = x\} \quad \text{και} \quad Per(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(f)$$

Επίσης με $Fix(f)$ ονομάζουμε το σύνολο των σταθερών σημείων της f .

Σχόλιο 1.4.9. Αν $x \in X$ είναι σταθερό σημείο της f , τότε ισχύει $f^n(x) = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η τροχιά του x είναι $O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x)\} = \{x\}$. Αν επιπλέον η f είναι αντιστρέψιμη τότε $O_f(x) = \{x\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.10. Εάν $x \in X$ περιοδικό σημείο της f , η ελάχιστη (ή κύρια) περίοδος του x είναι ο μικρότερος ακέραιος $n \geq 1$ τέτοιος ώστε $f^n(x) = x$.

Σχόλιο 1.4.11. Αν n είναι η ελάχιστη περίοδος του $x \in X$, τότε τα σημεία $f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)$, είναι όλα διαφορετικά του $x \in X$, οπότε η εμπρός τροχιά του x είναι $O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4.12. Ένα σημείο $x \in X$, λέγεται **προπεριοδικό** εάν υπάρχει $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $f^{n+j}(f^k(x)) = f^j(f^k(x))$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$.

Σχόλιο 1.4.13. Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε κάθε προπεριοδικό σημείο της είναι περιοδικό.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτουν πολλά ερωτήματα για τις τροχιές ενός Δυναμικού συστήματος. Κάποια ερωτήματα, όπως:

- Υπάρχουν σε κάθε τροχιά περιοδικά και σταθερά σημεία;
- Υπάρχει τροχιά που είναι πυκνή στον χώρο \mathcal{X} , δηλαδή κάποια στιγμή βρίσκεται αρκετά κοντά σε κάθε σημείο του χώρου;
- Μπορεί τα σύνολα $Per(f)$ ή $Fix(f)$ να είναι πυκνά στον \mathcal{X} ;
- Είναι οι τροχιές ισοκατανεμημένες στον χώρο ή περνούν περισσότερο χρόνο σε κάποιες περιοχές του χώρου και λιγότερο σε άλλες;
- Μπορεί όλες οι τροχιές του συστήματος να διέρχονται από κάποια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου;
και άλλα...

Με κάποια από τα παραπάνω ερωτήματα θα ασχοληθούμε στην πορεία του συγγράμματος.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Μονοδιάστατα Δυναμικά Συστήματα.

Οι μονοδιάστατες απεικονίσεις είναι τα απλούστερα συστήματα που είναι ικανά για χαοτική συμπεριφορά. Είναι επομένως πολύ βολικές για την εκμάθηση ορισμένων θεμελιωδών ιδιοτήτων των δυναμικών συστημάτων. Έχουν επίσης το πλεονέκτημα ότι είναι αρκετά δεκτικές σε αυστηρή μαθηματική ανάλυση. Από την άλλη πλευρά, δεν είναι απλό να τις συσχετίσουμε με ρεαλιστικά δυναμικά συστήματα. Ωστόσο μπορεί κανείς να υποστηρίξει τέτοιες συνδέσεις χρησιμοποιώντας προσεκτικά διακριτοποιήσεις χρονικά συνεχούς δυναμικής.

2.1. Συνάρτηση μετάβασης και τροχιά

Έχουμε μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως συνάρτηση χρονικής μετάβασης για την οποία όπως έχουμε αναφέρει λειτουργεί ως σκαλοπάτι για να μεταβούμε από την (αρχική) χρονική στιγμή x_0 στις χρονικές στιγμές ισχύει x_1, x_2, x_3, \dots

όπου $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), x_3 = f(x_2) = f^3(x_0), \dots$, δηλαδή

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Η τροχιά $\mathcal{O}_f^+(x_0)$ ενός σημείου $x_0 \in \mathbb{R}$ σύμφωνα με τον ορισμό 1.4.2. είναι το σύνολο των σημείων

$$\mathcal{O}_f^+(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$$

(όπου θεωρούμε ως σύμβαση ότι $x_0 = f^0(x_0)$)

Πιο συχνά η συνάρτηση μετάβασης ορίζεται σε κάποιο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, με την αναγκαία συνθήκη οι επαναλήψεις της σε κάποιο τυχαίο σημείο του I να ανήκουν σε αυτό, δηλαδή θεωρούμε συνάρτηση $f: I \rightarrow I$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1.

Μονοδιάστατο Δυναμικό Σύστημα είναι μια συνάρτηση $f: I \rightarrow I$ όπου I υποδιάστημα του \mathbb{R} .

Παράδειγμα 2.1.2. Μια ακολουθία της μορφής $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ όπως η εξίσωση $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ που δίνει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού $\alpha > 0$, είναι ένα μονοδιάστατο δυναμικό σύστημα με τη $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ να είναι η αντίστοιχη συνάρτηση μετάβασης σε διάστημα που θα μπορούσε να είναι της μορφής $I=[0,\alpha]$. Αν $x_0 = 2$, τότε $x_1 = \frac{1}{2}(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, ... παίρνουμε όλο και καλύτερες προσεγγίσεις του άρρητου $\sqrt{2}$.

(Συγκεκριμένα ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \approx 1.41421... = \sqrt{2}$)

Παράδειγμα 2.1.3. Αν θεωρήσουμε $x_{n+1} = f(x_n) = \sin(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, με $x_0 = 2$, τότε $x_1 = \sin 2 \approx 0.909$, $x_2 \approx \sin 0.909 \approx 0.01$, ... Παρατηρούμε ότι η τροχιά πλησιάζει το σημείο $x_n = 0$, ενώ αν θέσουμε ως $f(x) = \cos x$ με $x_0 = 2$, παίρνουμε $x_1 = \cos 2 \approx 0.9993$, $x_2 \approx \cos 0.999 \approx 0.9998$ και είναι φανερό ότι τροχιά πλησιάζει το σημείο $x_n = 1$.

Προφανώς για $x_0 = \alpha$, η συνάρτηση $f(x)$ και στις δύο περιπτώσεις αποτελεί μονοπαραμετρικό δυναμικό σύστημα σε διάστημα $I = [0, \alpha]$.

Παράδειγμα 2.1.4. Αν $f(x) = ax$ (**γραμμική συνάρτηση**) έχουμε ίσως τα πιο απλά δυναμικά συστήματα (γραμμικά μοντέλα, όπως θα μπορούσαμε ίσως να περιγράψουμε την ανάπτυξη κάποιου πληθυσμού σε n μήνες), με $x_{n+1} = \alpha \cdot x_n$ για κάποιο $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $x_0 > 0$ είναι ο αρχικός πληθυσμός τότε ένα μήνα μετά αυτός θα είναι $x_1 = \alpha x_0$, δύο μήνες μετά $x_2 = \alpha x_1 = \alpha^2 x_0$, δηλαδή τον n -ιοστό μήνα ο πληθυσμός θα έχει γίνει $x_n = \alpha^n \cdot x_0$. Από την τελευταία σχέση μπορούμε να καταλάβουμε την μακροχρόνια συμπεριφορά του πληθυσμού και την επιρροή της παραμέτρου α .

i) αν $\alpha > 1$ τότε $x_n \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$,

ii) αν $0 < \alpha < 1$ τότε $x_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$,

iii) αν $\alpha = 1$ τότε ο πληθυσμός παραμένει σταθερός.

Μονοπαραμετρικό δυναμικό σύστημα έχουμε μόνο στην περίπτωση όπου $|\alpha| < 1$ ή $-1 < \alpha < 1$ σε διάστημα I , όπως $I = [0, \alpha]$ ή $[\alpha, 0]$ αν $\alpha < 0$.

Παράδειγμα 2.1.5.

Δυναμικό σύστημα μπορεί να προκύψει από εφαρμογή συνάρτησης σε μορφή

$f(x) = ax + b$ με $a \neq 0$, a, b σταθερές. Τότε

$$f^2(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b,$$

$$f^3(x) = f(a^2x + ab + b) = a(a^2x + ab + b) + b = a^3x + a^2b + ab + b$$

$$f^4(x) = f(a^3x + a^2b + ab + b) = a(a^3x + a^2b + ab + b) + b = \dots =$$

$$a^4 \cdot x + a^3b + a^2b + ab + b, \dots \text{συνεχίζοντας έχουμε}$$

$$f^n(x) = a^n \cdot x + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b$$

Με αρχική τιμή $x_0 \in \mathbb{R}$, ο όρος της n -ιστής επανάληψης που εφαρμόζουμε στην x_0 , ισούται με

$$x_n = f^n(x_0) = a^n \cdot x_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b =$$

$$= a^n \cdot x_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)b$$

Παρατηρούμε ότι για $a \neq 1$ οι όροι του αθροίσματος στην παρένθεση της παραπάνω παράστασης είναι όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο 1 και λόγο a , άρα έχουμε από γνωστό τύπο ότι $a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$, οπότε

$$x_n = a^n \cdot x_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} b = \left(x_0 + \frac{b}{a - 1}\right) a^n + \frac{b}{1 - a},$$

Αν $a = 1$ τότε $x_n = x_0 + nb$.

Ας εξετάσουμε την επίδραση της παραμέτρου $a \neq 0$, στην λύση του συστήματος.

i) αν $|\alpha| < 1$ τότε $a^n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, άρα ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b}{1 - a}$

ii) αν $a > 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ όταν $b > 0$,

iii) αν $a = 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_0 + nb) = \infty$ όταν $x_0, b > 0$

iv) αν $a \leq -1$, τότε το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ δεν υπάρχει.

Μονοπαραμετρικό δυναμικό σύστημα μπορούμε να έχουμε στην περίπτωση όπου $|\alpha| < 1$.

Παράδειγμα 2.1.6. (Η Λογιστική συνάρτηση)

Έστω $z_n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} - \{0\}$ ο αριθμός των εντόμων που εκκολάπτονται από αυγά

το έτος $n \in \mathbb{N}_0$. Αν $\mu > 0$ είναι ο μέσος αριθμός αυγών που γεννιούνται ανά έντομο, σε μια (για τα έντομα) «ιδανική» περίπτωση, με αρχικό πληθυσμό z_0 έχουμε

$$z_{n+1} = \mu z_n = \mu^2 z_{n-1} = \dots = \mu^{n+1} z_0 = \exp((n+1) \ln \mu) z_0,$$

όπου υποθέτουμε ότι τα έντομα δεν ζουν περισσότερο από ένα χρόνο. Αυτό υπονοεί ευθέως για $\mu > 1$ έναν εκθετικά αυξανόμενο και για $\mu < 1$ έναν εκθετικά μειούμενο πληθυσμό.

Το 1798, ο Μάλθους πρότεινε να ενσωματώσει την επίδραση των εχθρών, ή του υπερπληθυσμού, αντικαθιστώντας την παράμετρο ελέγχου μ μέσω της λογιστικής ανάπτυξης $\mu z_n (1 - \frac{z_n}{\bar{z}})$, όπου \bar{z} μοντελοποιεί μια περιορισμένη προσφορά τροφής με $0 \leq z_n \leq \bar{z}$. Δηλαδή, αν $z_n = \bar{z}$ η τροφή εξαντλείται και όλα τα έντομα πεθαίνουν.

Η αντικατάσταση του μ μετά το πρώτο σύμβολο ισότητας της παραπάνω εξίσωσης οδηγεί στη νέα εξίσωση $z_{n+1} = \mu z_n (1 - \frac{z_n}{\bar{z}})$.

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με το \bar{z} και ορίζοντας τη νέα μεταβλητή $x_n = \frac{z_n}{\bar{z}}$, προκύπτει η διάσημη λογιστική συνάρτηση $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$.

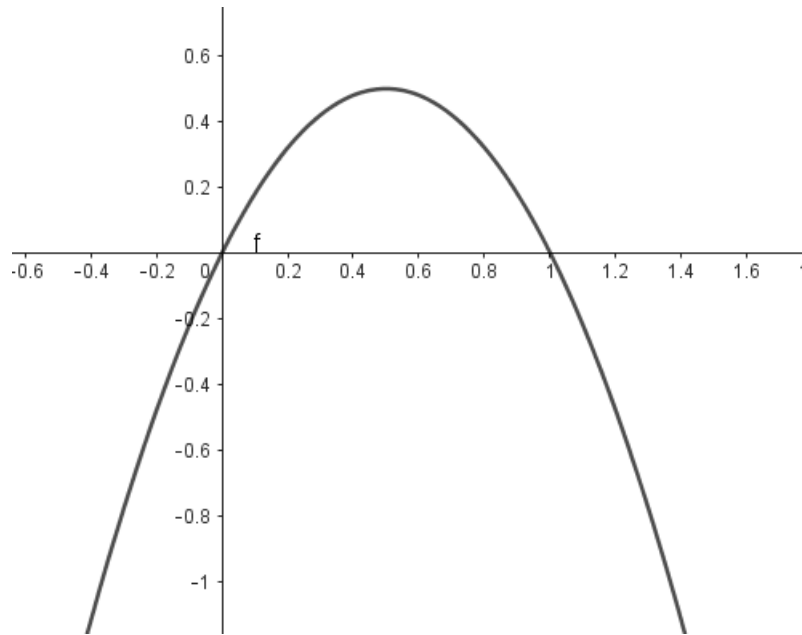
Η λογιστική συνάρτηση έχει τελικά την μορφή $L_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Είναι συνάρτηση διαφορίσιμη ως πολυωνυμική και με μια γρήγορη μελέτη της παραγώγου της καταλήγουμε στο ακρότατο $K(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$ του οποίου το είδος καθορίζεται από το πρόσημο του $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Αν $\mu > 0$ είναι ολικό μέγιστο, ενώ ελάχιστο αν $\mu < 0$. Για να προκύψει από την λογιστική εξίσωση δυναμικό σύστημα αναζητούμε (εάν υπάρχει) διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, ώστε $L_\mu: I \rightarrow I$, δηλαδή θέλουμε $L_\mu(x) \in I$ για κάθε $x \in I$.

Όταν $\mu < 0$ δεν ισχύει η ζητούμενη προϋπόθεση.

Αν $\mu > 0$, έχουμε $L_\mu(x) > 0$ όταν $x \in [0, 1]$ με $0 < L_\mu(x) < \mu/4$. Εμείς θέλουμε $\mu/4 \leq 1$ άρα $0 < \mu \leq 4$. Τότε $0 \leq L_\mu(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, συνεπώς η λογιστική συνάρτηση ορίζει ένα δυναμικό σύστημα στο διάστημα $I = [0, 1]$.

Αν $\mu > 4$, τότε υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $L_\mu(x) > 1$, δηλαδή το σύνολο τιμών της $L_\mu(x)$

δεν είναι υποσύνολο του I , οπότε η $L_\mu(x)$ δεν αποτελεί δυναμικό σύστημα του $[0,1]$.



Σχήμα 2.1.1

Γραφική παράσταση της λογιστικής συνάρτησης

$$L_2(x) = 2x(1 - x), \mu = 2, \text{ με λογισμικό Geogebra}$$

Σχόλιο 2.1.7. Ιδανικά, δεδομένης μιας αναδρομικά ορισμένης ακολουθίας x_n , θα θέλαμε να έχουμε έναν συγκεκριμένο τύπο για το x_n με βάση στοιχειώδεις συναρτήσεις (η λεγόμενη λύση κλειστής μορφής), αλλά αυτό είναι συχνά πολύ δύσκολο ή αδύνατο να επιτευχθεί. Στην περίπτωση των γραμμικών και ορισμένων λογιστικών συναρτήσεων, υπάρχει λύση κλειστής μορφής, όπως στην περίπτωση $x_n = 5x_{n-1}$ με $x_0 = 2$, ο n -ιστός όρος της μπορεί να βρεθεί από την κλειστή μορφή $x_n = 2 \cdot 5^{n-1}$.

2.2. Σταθερά σημεία τροχιάς

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.1. Για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ένα σημείο $c \in \mathbb{R}$ λέγεται *σταθερό σημείο* της f , εάν ισχύει $f(c) = c$.

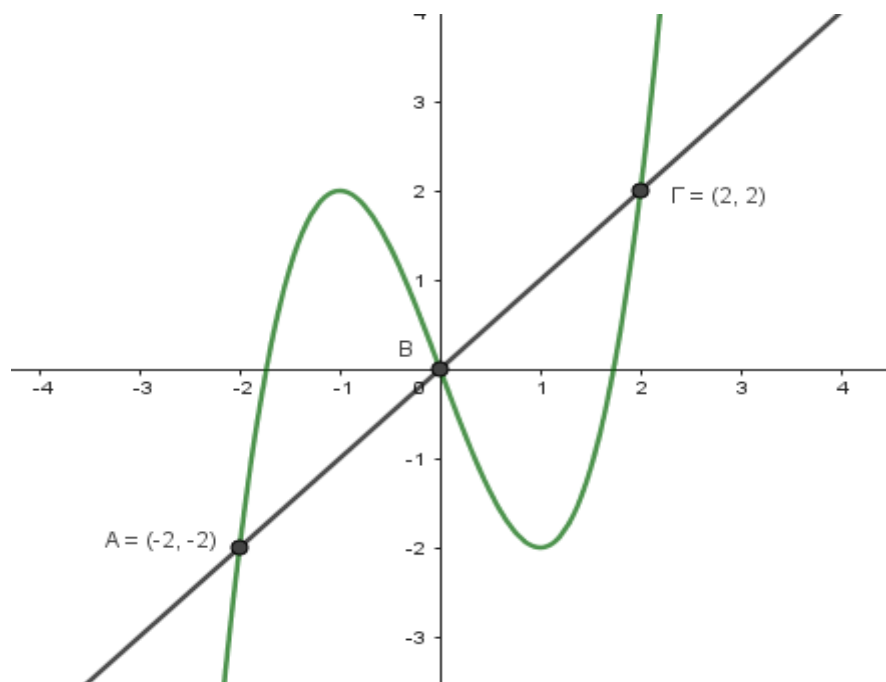
Γραφικά, τα σταθερά σημεία μιας συνάρτησης προκύπτουν από τα σημεία τομής (εάν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x$.

Παράδειγμα 2.2.2.

1. Έστω $f(x) = x = Id(x)$. Τότε το σύνολο των σταθερών σημείων είναι $Fixf = \mathbb{R}$.
2. Έστω $f(x) = -x$. Τα σταθερά σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = -x$ δηλ $x = -x$, άρα $x = 0$, οπότε $Fix(f) = \{0\}$.

Παράδειγμα 2.2.3. Αν $f(x) = x^3 - 3x$, τότε τα σταθερά σημεία βρίσκονται από την επίλυση της εξίσωσης (όποτε αυτό είναι εφικτό)

$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 3x = x \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$ άρα τα σταθερά σημεία είναι $x = 0$ και $x = \pm 2$, δηλ. $Fix(f) = \{0, 2, -2\}$.



Σχήμα 2.2.1

Τα σημεία τομής της γραφική παράστασης της $f(x) = x^3 - 3x$ και της ευθείας $y = x$, ορίζουν τα σταθερά σημεία της f , (λογισμικό Geogebra).

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2.4. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έχει σταθερό σημείο $c \in \mathbb{R}$, τότε τελικά σταθερό σημείο της f λέγεται κάθε σημείο $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f^k(y) = c$ ενώ $f^m(y) \neq c$ όταν $0 < m < k$ με $m, k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 2.2.5.

$$\text{Η συνάρτηση } T(x): [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ με } T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ορίζει δυναμικό σύστημα στο διάστημα $[0,1]$. Η εξίσωση $T(x) = x$ έχει δύο λύσεις $x = 0$ και $x = 2/3$ τα οποία είναι και τα σταθερά σημεία της.

Παρατηρήστε ότι $T\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, $T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ και $T(1) = 0$, συνεπώς τελικά σημεία (και όχι βέβαια μοναδικά) της συνάρτησης είναι τα $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$.

Παράδειγμα 2.2.6. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4$ δεν έχει σταθερά σημεία διότι η εξίσωση $f(x) = x$ είναι αδύνατη.

Υπάρχει επίσης ένα θεώρημα σταθερού σημείου: Μια συνεχής συνάρτηση f που απεικονίζει ένα συμπαγές διάστημα στον εαυτό του, έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Θεώρημα 2.2.7. Αν $f: I \rightarrow I$ συνεχής, με $I = [a, b]$, $a < b$, φραγμένο διάστημα του \mathbb{R} , τότε η $f(x)$ έχει ένα (τουλάχιστον) σταθερό σημείο $c \in I$.

Απόδειξη: Αν έχουμε $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ τότε έχουμε τα σταθερά σημεία $x = a$ ή $x = b$. Όταν $f(a) \neq a$ και $f(b) \neq b$ τότε $f(a) > a$ και $f(b) < b$ διότι $f([a, b]) \subseteq [a, b]$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, η οποία είναι συνεχής στο I και $g(a) = f(a) - a > 0$, $g(b) = f(b) - b < 0$. Από το γνωστό θεώρημα Bolzano υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g(c) = 0$ ή $f(c) = c$, δηλ. c σταθερό σημείο της $f(x)$.

■

Παρατήρηση 2.2.8. Από το παραπάνω θεώρημα έχουμε την βεβαιότητα της ύπαρξης ενός σταθερού σημείου μιας συνάρτησης, αλλά δεν παίρνουμε πληροφορίες για το πλήθος τους. Επίσης εάν ισχύει $I \subseteq f(I)$ τότε η $f(x)$ έχει σταθερό σημείο στο I .

Θεώρημα 2.2.9. Αν $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, $I = [a, b]$, $a < b$, φραγμένο διάστημα του \mathbb{R} , με $I \subseteq f(I)$, τότε η $f(x)$ έχει ένα (τουλάχιστον) σταθερό σημείο $c \in I$.

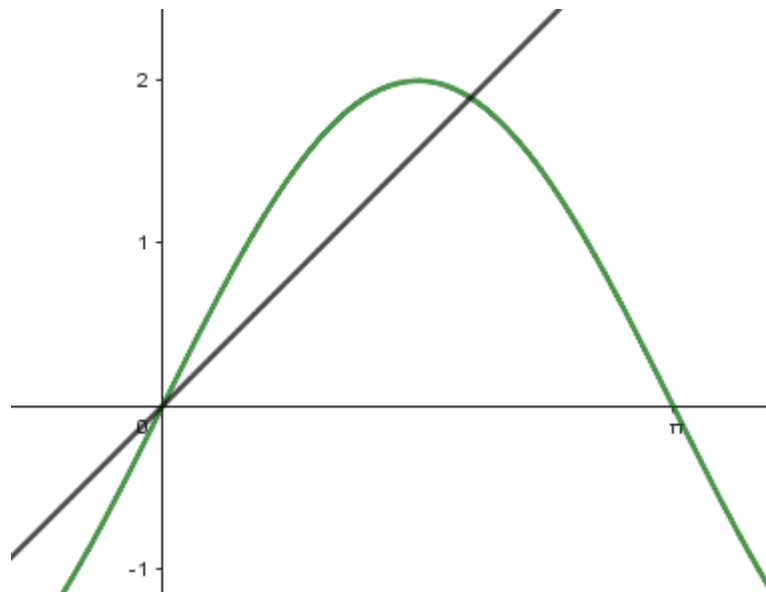
Απόδειξη: Αν έχουμε $f(a) = a$ ή $f(b) = b$ τότε έχουμε τα σταθερά σημεία $x = a$ ή $x = b$. Όταν $f(a) \neq a$ και $f(b) \neq b$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $f(x_1) < a < x_1$ και $f(x_2) > b > x_2$.

Αν ορίσουμε ξανά την συνεχή στο I συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, έχουμε

$g(x_1) = f(x_1) - a < 0$ και $g(x_2) = f(x_2) - b > 0$, οπότε υπάρχει

$c \in (x_1, x_2)$ ή $(x_2, x_1) \subset (a, b)$ τέτοιο ώστε $g(c) = 0$ ή $f(c) = c$, δηλ. c σταθερό σημείο της $f(x)$. ■

Παρατήρηση 2.2.10. Δεν είναι πάντα εφικτό να βρούμε όλα τα σταθερά σημεία μιας συνάρτησης. Αν $f(x) = 2\sin x$, $x \in [0, \pi]$ τότε ένα σταθερό σημείο είναι το 0, αφού $f(0) = \sin 0 = 0$, όμως υπάρχει και δεύτερη λύση της εξίσωσης $2\sin x = x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, όπως φαίνεται στο παρακάτω γράφημα, η οποία είναι δύσκολο να ορισθεί και αναζητείται προσεγγιστικά.



Σχήμα 2.2.2

Στην εικόνα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 2\sin x$ και $y = x$.

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για την προσέγγιση των ριζών μιας εξίσωσης, όπως η μέθοδος Newton που θα δούμε παρακάτω.

Μέθοδος Newton

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Η μέθοδος Newton που θα περιγράψουμε βρίσκει προσεγγίσεις των ριζών της συνάρτησης, δηλαδή προσεγγιστικές λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Αν x_0 είναι μια πρώτη προσέγγιση της ρίζας, παίρνουμε την εφαπτομένη της καμπύλης της από το σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο x_1 . Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, και αν $y = 0$ τότε $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ εάν $f'(x_0) \neq 0$. Συνήθως η τιμή x_1 είναι καλύτερη προσέγγιση της ρίζας της f από ότι η αρχική προσέγγιση x_0 .

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία που δίνεται αναδρομικά από την ακολουθία $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ με αρχική προσέγγιση x_0 , βρίσκοντας όλο και καλύτερες προσεγγίσεις. Η συνάρτηση μετάβασης $N_f = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ ονομάζεται συνάρτηση Newton.

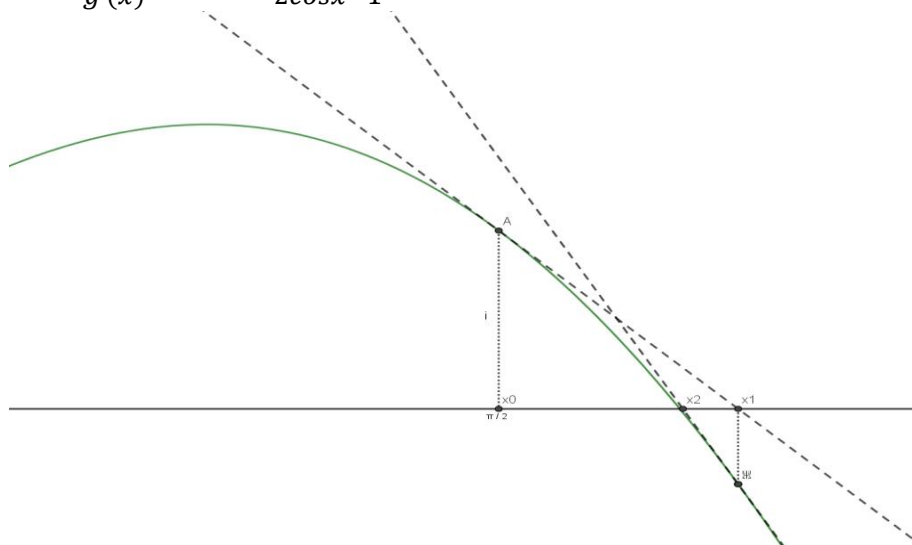
Παρατηρήστε ότι για την ρίζα της f έχουμε $f(x) = 0$ ή $N_f = x$, δηλαδή είναι σταθερό σημείο της N_f .

Παρατήρηση 2.2.11. Με την μέθοδο Newton μπορούμε να αναζητήσουμε τα σταθερά σημεία μιας συνάρτησης f , αναζητώντας τις ρίζες της $g(x) = f(x) - x$, δηλαδή αναζητώντας τα σταθερά σημεία της $N_g = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.

Αν $f(x) = 2\sin x$, $x \in [0, \pi]$ (όπως είδαμε νωρίτερα είναι δύσκολο να βρούμε το σταθερό σημείο της κοντά στο $\pi/2$), αναζητούμε το σταθερό σημείο της

$$N_g = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{2\sin x - x}{2\cos x - 1}$$

έχοντας ως πρώτη προσέγγιση ας πούμε $x_0 = \pi/2$.



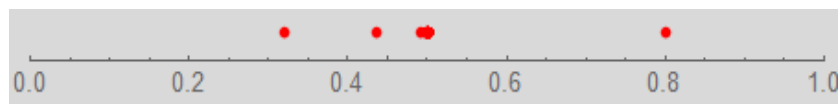
Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται γραφικά η μέθοδος Newton. Με πράσινο έχουμε την γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) - x = 2\sin x - x$ κοντά στη περιοχή του $x_0 = \pi/2$ (αρχική προσέγγιση). Από το σημείο $A(\frac{\pi}{2}, g(\frac{\pi}{2}))$ φέρουμε την εφαπτομένη της καμπύλης που τέμνει τον x -άξονα στο x_1 (δεύτερη προσέγγιση). Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και φέρουμε από το σημείο $N(x_1, g(x_1))$ την εφαπτομένη της καμπύλης που τέμνει τον x -άξονα στο x_2 (τρίτη προσέγγιση) και συνεχίζουμε ομοίως παίρνοντας όλο και καλύτερη προσέγγιση του σταθερού σημείου της $f(x)$.

2.3. Ελκτικά και Απωθητικά Σταθερά σημεία

Αρχικά θα δούμε τα *διαγράμματα ιστού* με τα οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε τη τροχιά ενός σημείου x_0 μέσω μιας συνάρτησης $f(x)$. Αυτό γίνεται παίρνοντας γραφικές επαναλήψεις ως εξής:

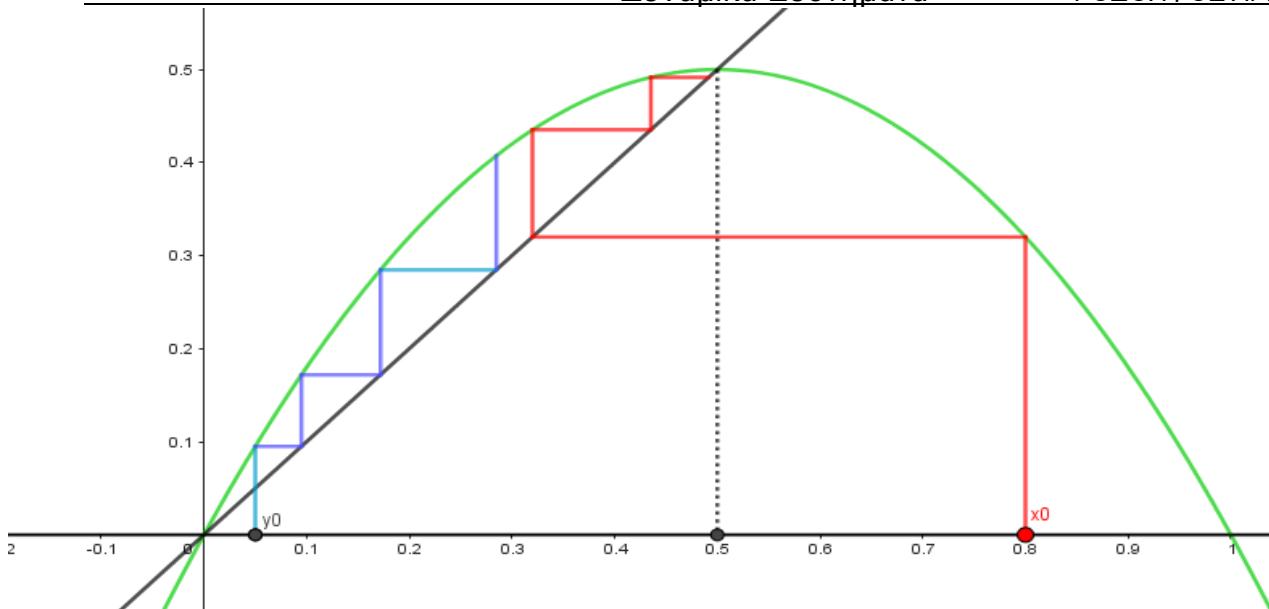
Παράδειγμα 2.3.1. Ας πάρουμε την λογιστική συνάρτηση $L_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $L_2(x) = 2x(1-x)$, όπου με $L_2(x) = x$ ή $2x(1-x) = x$, έχει δύο σταθερά σημεία $x = 0$ και $x = 1/2$.

Παρατηρούμε τα 150 σημεία της τροχιάς του δυναμικού συστήματος με $x_0 = 0.8$ στον x -άξονα



Ξεκινάμε από σημείο $x_0 = 0.8$ στον x -άξονα και σχεδιάζουμε μια γραμμή κάθετα προς τη συνάρτηση. Στη συνέχεια, μετακινούμαστε οριζόντια προς τη ευθεία $y = x$ (Σχήμα 2.3.1 κόκκινη γραμμή), έπειτα κάθετα προς τη συνάρτηση και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε ότι η γραμμή συγκλίνει προς το σημείο της καμπύλης της $L_2(x)$ που ορίζει το σταθερό σημείο της συνάρτησης $x = 0.5$.

Λέμε ότι $x = 0.5$ είναι *σταθερό ελκτικό σημείο*.



Σχήμα 2.3.1

Αν θεωρήσουμε ως αρχικό σημείο το $y_0 = 0.05$, κοντά στο άλλο σταθερό σημείο $x = 0$ της συνάρτησης, παρατηρούμε ότι (εφαρμόζοντας αντίστοιχες γραφικές επαναλήψεις, με μπλε στο σχήμα 2.3.1) η τεθλασμένη γραμμή απομακρύνεται από σταθερό σημείο. Μάλιστα συγκλίνει προς το σταθερό σημείο $x = 0.5$. Σε άλλες περιπτώσεις μπορεί να πηγαίνει στο ∞ , ενώ μπορεί και να ταλαντώνεται επ' αόριστον μεταξύ δύο σημείων...

Λέμε τότε ότι $x = 0$ είναι σταθερό απωθητικό σημείο.

Σχόλιο 2.3.2. Από το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να πούμε ότι έχουμε δύο κυρίως καταστάσεις της τροχιάς ενός συστήματος (μαζί με κάποιες παραλλαγές τους), παρατηρώντας εάν η ακολουθία $x_n = f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό c καθώς $n \rightarrow \infty$ (τότε προφανώς c είναι ένα σταθερό σημείο).

α) *Ευσταθής τροχιά*, όταν το διάγραμμα ιστού πλησιάζει ένα σταθερό σημείο.

β) *Ασταθής τροχιά*, όταν το διάγραμμα ιστού απομακρύνεται από ένα σταθερό σημείο.

Πρόταση 2.3.3. Αν $f(x)$ συνεχής συνάρτηση και $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = c$, τότε η τροχιά του x_0 συγκλίνει σε σταθερό σημείο c της f . Δηλαδή $f(c) = c$.

Απόδειξη. Για μια συνεχής συνάρτηση f , έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = c$.

Τότε $f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)) = f(c)$

Αφού η f είναι συνεχής ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = f(c)$.

Από την μοναδικότητα όμως της σύγκλισης του ορίου, προκύπτει $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = c$, άρα $f(c) = c$. ■

Για να δώσουμε ορισμούς των *ελκτικών* και *απωθητικών* σταθερών σημείων, ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f: X \rightarrow X$, όπου X υποσύνολο του \mathbb{R} , (όπως ένα διάστημα ή το ίδιο το \mathbb{R}), και $c \in X$ σταθερό σημείο της f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.4. Έστω συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ με $f(c) = c$.

i) το c είναι **ευσταθές σταθερό σημείο** εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in X$ και $|x - c| < \delta$, τότε $|f^n(x) - c| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Εάν δεν ισχύουν τα παραπάνω τότε το c λέγεται **ασταθές σταθερό σημείο** της f .

ii) το c είναι **ελκτικό σημείο** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός $m > 0$ τέτοιος ώστε $|x - c| < m \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c$

iii) το c είναι **συμπτωματικά ευσταθές** εάν είναι ευσταθές και ελκτικό σημείο της f .

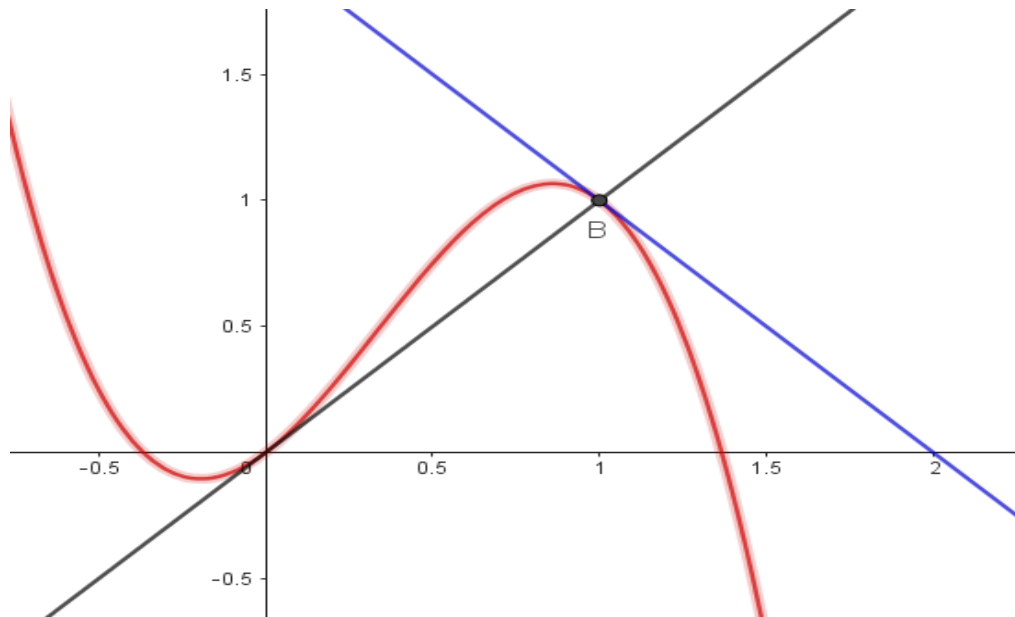
Παρατήρηση 2.3.5. Αν το c είναι ένα ασταθές σταθερό σημείο, τότε θα υπάρχει $\epsilon > 0$ και x αυθαίρετα κοντά στο c , όπου κάποια επανάληψη του x , ας πούμε η $f^n(x)$, θα έχει μεγαλύτερη από ϵ απόσταση από το c .

Ονομάζουμε τότε το c **απωθητικό σημείο** (απωθητικό σταθερό σημείο), αφού οι επαναλήψεις απομακρύνονται από το σταθερό σημείο (το c είναι ασταθές). Θα δούμε επίσης ότι ένα σταθερό σημείο μπορεί να είναι ευσταθές χωρίς να ελκύει, και ότι μπορεί να είναι ελκτικό χωρίς να είναι ευσταθές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.6. Ένα σταθερό σημείο $c \in X$ μίας διαφορίσιμης συνάρτησης f λέγεται **υπερβολικό** εάν $|f'(c)| \neq 1$.

Το c λέγεται **μη-υπερβολικό** αν $|f'(c)| = 1$, δηλαδή $f'(c) = 1$ ή $f'(c) = -1$, όπου η εφαπτομένη της καμπύλης από το σταθερό της σημείο είναι η ευθεία $y = x$ ή κάθετη σε αυτή.

Παράδειγμα 2.3.7. Η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x$, με $f'(x) = -6x^2 + 4x + 1$ έχει σταθερά σημεία $x = 0$ και $x = 1$ τα οποία είναι μη-υπερβολικά αφού $f'(0) = 1$ και $f'(1) = -1$. (βλέπε σχήμα 2.3.2.)



Σχήμα 2.3.2.

Γραφική παράσταση της $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x$ και η εφαπτομένη της από το σημείο $B(1, f(1))$ η οποία είναι κάθετη στην $y = x$.

Θεώρημα 2.3.8. Έστω διαφορίσιμη συνάρτηση $f: X \rightarrow X$, με συνεχή πρώτη παράγωγο.

i) Αν $c \in X$ σταθερό σημείο της $f(x)$ με $|f'(c)| < 1$, τότε c είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ελκτικό σημείο της f .

Δηλαδή υπάρχει σταθερά λ με $0 < \lambda < 1$ τέτοια ώστε

$|f^n(x) - c| < \lambda^n |x - c|$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ και για όλα τα $x \in X$ τα οποία βρίσκονται αρκετά κοντά στο c .

(Οι επαναλήψεις σημείων κοντά στο c , συγκλίνουν γεωμετρικά στο c).

ii) Αν $c \in X$ σταθερό σημείο της $f(x)$ με $|f'(c)| > 1$, τότε c λέγεται πηγή ή απωθητικό σημείο της f .

Απόδειξη. i) Ας θεωρήσουμε ότι το σύνολο X είναι ανοιχτό διάστημα το οποίο περιέχει το σταθερό σημείο, $c \in X$ της f . Έστω ότι $|f'(c)| < \lambda < 1$ για κάποια $\lambda > 0$, οπότε από την συνέχεια της παραγώγου της $f(x)$ στο X , υπάρχει ανοιχτό διάστημα I στο οποίο

$|f'(x)| < \lambda < 1$ για κάθε $x \in I$. Από το θεώρημα Μέσης τιμής, εάν $x \in I$ υπάρχει $k \in I$, με k ανάμεσα στο x και c , που ικανοποιεί

$$f'(k) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ δηλαδή } |f(x) - c| = |f'(k)||x - c| < \lambda|x - c|$$

άρα $|f(x) - c| < |x - c|$, δηλαδή η απόσταση της εικόνας $f(x)$ από το c είναι μικρότερη από αυτήν του x από το c . Δηλαδή η τροχιά του x πλησίασε προς το c .

Επαναλαμβάνουμε το θεώρημα Μέσης τιμής για k ανάμεσα του $f(x)$ και c , οπότε

$$f'(k) = \frac{f^2(x)-f(c)}{f(x)-c} \text{ δηλαδή}$$

$$|f^2(x) - c| = |f'(k)||f(x) - c| < \lambda|f(x) - c| < \lambda^2|x - c|$$

Δηλαδή η τροχιά στο σημείο $f^2(x)$ πλησίασε κι άλλο προς το c . Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για την τρίτη επανάληψη της f , προκύπτει

$$|f^3(x) - c| < \lambda^3|x - c| \text{ και συνεχίζοντας στη } n \text{-ιοστή επανάληψη θα έχουμε}$$

$$|f^n(x) - c| < \lambda^n|x - c|$$

Καθώς $n \rightarrow \infty$, ισχύει $\lambda^n \rightarrow 0$, συνεπώς $f^n(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$, δηλαδή η τροχιά του x συγκλίνει προς το c . ■

ii) Η απόδειξη γίνεται με αντίστοιχο τρόπο.

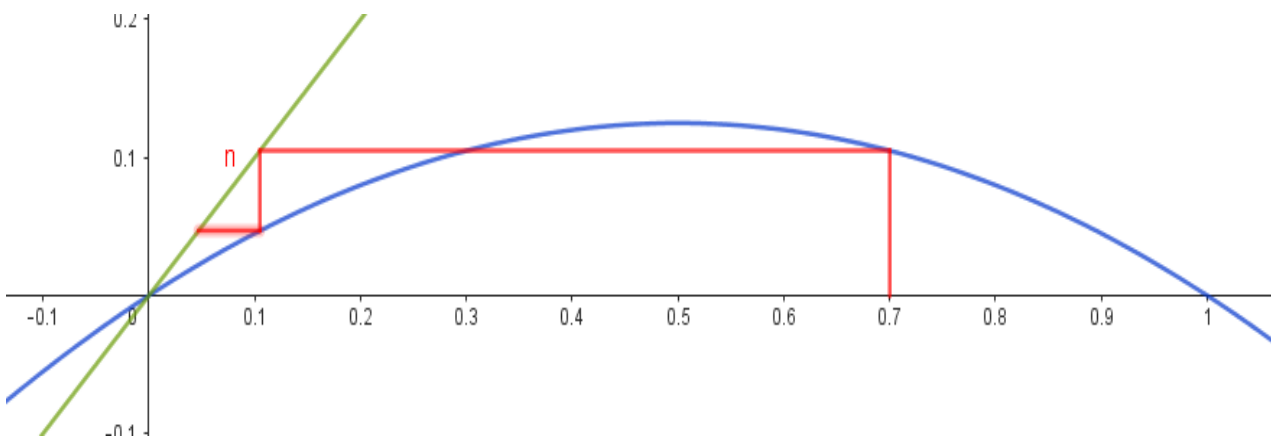
Ορισμός 2.3.9. Έστω διαφορίσιμη συνάρτηση $f: X \rightarrow X$, με συνεχή πρώτη παράγωγο ($f \in C^1$) και c σταθερό σημείο της. Αν $|f'(c)| = 1$, τότε c είναι ένα οριακό (επίσης αδιάφορο, ουδέτερο) σταθερό σημείο.

Σχόλιο 2.3.10. Αυτό σημαίνει ότι για ένα ασυμπτωτικά ευσταθές ελκτικό σημείο c όλα τα σημεία που βρίσκονται «επαρκώς κοντά» στο c έλκονται από το c . Κατά συνέπεια, για μια πηγή όλα αυτά τα σημεία απωθούνται από το c . Για ένα οριακό σταθερό σημείο και τα δύο είναι πιθανά, και μπορεί κανείς να ταξινομήσει περαιτέρω αυτό το σημείο ως οριακά σταθερό, ασταθές ή και τα δύο, ανάλογα με την κατεύθυνση.

Παράδειγμα 2.3.11. Η λογιστική συνάρτηση $L_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $L_2(x) = 2x(1 - x)$, είδαμε στο παράδειγμα 2.3.1 με διάγραμμα ιστού ότι έχει δύο σταθερά σημεία $x = 0$ και $x = 0.5$. Τότε $L_2'(x) = 2 - 4x$, και $L_2'(0) = 2 > 1$ δηλ. $x = 0$ απωθητικό σημείο και $L_2'(0.5) = 0 < 1$ άρα $x = 0.5$ ασυμπτωτικά ευσταθές (βλέπε σχήμα 2.3.1.)

Σχόλιο 2.3.12. Είδαμε στο Παράδειγμα 2.1.6. ότι η λογιστική συνάρτηση $L_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ με $L'_\mu(x) = \mu(1-2x)$, όταν $0 < \mu \leq 4$, ορίζει ένα δυναμικό σύστημα στο διάστημα $I = [0,1]$. Λύνοντας την εξίσωση $L_\mu(x) = x$, αναζητούμε τα σταθερά της σημεία, τα οποία είναι $x = 0$ και $x = 1 - 1/\mu$. Δουλεύουμε στο διάστημα $[0,1]$ και το $x = 1 - 1/\mu$ είναι σταθερό σημείο εάν $0 < 1 - 1/\mu \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \mu > 1$. Δηλαδή, αν $0 < \mu \leq 1$, η λογιστική συνάρτηση έχει ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο $x = 0$ αφού $L'_\mu(0) = \mu \leq 1$. Μάλιστα όταν $\mu = 1$ τότε

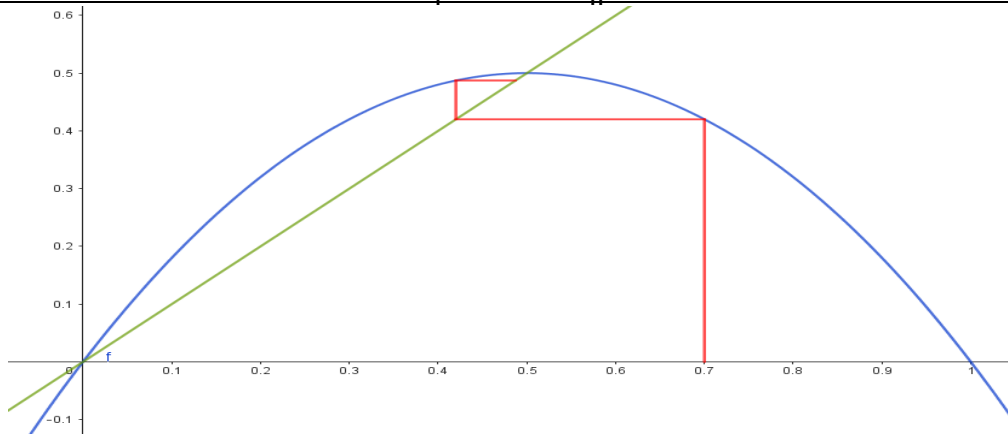
$|L'_\mu(0)| = \mu = 1$, άρα είναι μη-υπερβολικό σταθερό σημείο ενώ με $0 < \mu < 1$ είναι υπερβολικό.



Σχήμα 2.3.4.

Διάγραμμα ιστού για την $L_{0.5}(x) = 0.5x(1-x)$

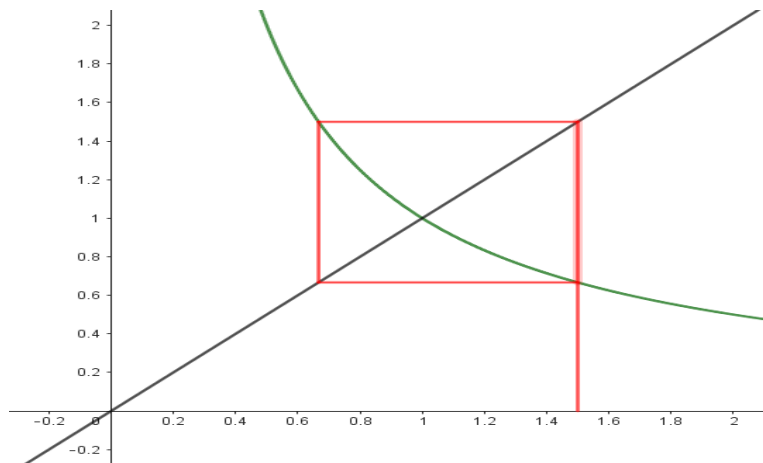
Αν $1 < \mu \leq 4$ έχουμε $L'_\mu(0) = \mu > 1$, συνεπώς το σταθερό σημείο $x = 0$ είναι απωθητικό, ενώ για το $x = 1 - 1/\mu$ με $|L'_\mu(1 - \frac{1}{\mu})| = |2 - \mu|$, είναι ελκτικό όταν $|L'_\mu(1 - \frac{1}{\mu})| < 1 \Leftrightarrow |2 - \mu| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2 - \mu < 1 \Leftrightarrow 1 < \mu < 3$ και απωθητικό όταν $3 < \mu \leq 4$.



Σχήμα 2.3.5.

Διάγραμμα ιστού για την $L_2(x) = 2x(1 - x)$ με ελκτικό σταθερό σημείο το $x = 1/2$. Όταν $\mu = 3$ έχουμε $|L'_3(1 - \frac{1}{3})| = |L'_3(\frac{2}{3})| = |2 - 3| = 1$ και το σταθερό σημείο $x = 2/3$ είναι μη-υπερβολικό.

Παράδειγμα 2.3.13. Η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ έχει δύο μη-υπερβολικά σταθερά σημεία $x = 1$ και $x = -1$ αφού $f'(x) = 1/x^2$ και $f'(1) = f'(-1) = 1$. Στο σχήμα 2.3.6. φαίνεται από το διάγραμμα ιστού, ότι δεν είναι ελκτικό το $x = 1$ (αλλά ούτε απωθητικό) αφού τα σημεία του διαγράμματος δεν απομακρύνονται ούτε πλησιάζουν, αλλά διατηρούν σταθερή απόσταση από αυτό.

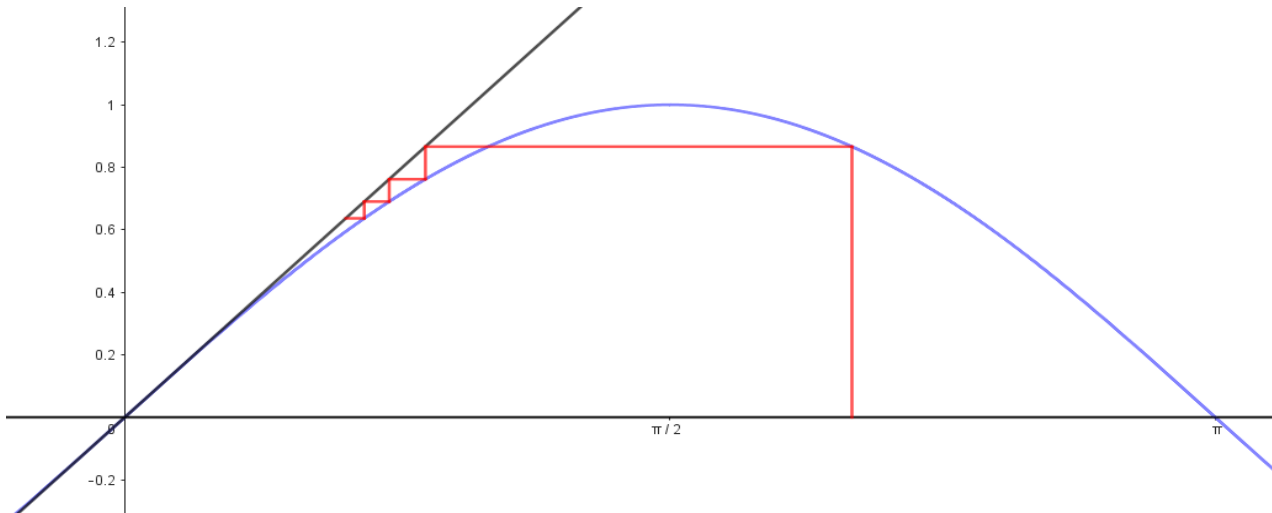


Σχήμα 2.3.6.

Διάγραμμα ιστού για την $f(x) = 1/x$ με μη-υπερβολικά σταθερό σημείο το $x = 1$

Παράδειγμα 2.3.14. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, έχει ένα σταθερό σημείο $x = 0$ και η τροχιά οποιουδήποτε σημείου $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει προς αυτό. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το $x = 0$ είναι καθολικά ελκτικό σταθερό σημείο της f . Δηλαδή ένα καθολικά ελκτικό σταθερό σημείο σε ένα δυναμικό σύστημα είναι ένα σημείο στο οποίο όλα τα άλλα σημεία

του συστήματος τελικά θα συγκλίνουν σε αυτό, ανεξάρτητα από την αρχική τους θέση.



Σχήμα 2.3.7.

Διάγραμμα ιστού για την $f(x) = \sin x$ με καθολικά ελκτικό σταθερό σημείο $x = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.15. Ένα ελκτικό σταθερό σημείο $c \in X$ θεωρείται καθολικά ελκτικό εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c$ για κάθε $x \in X$.

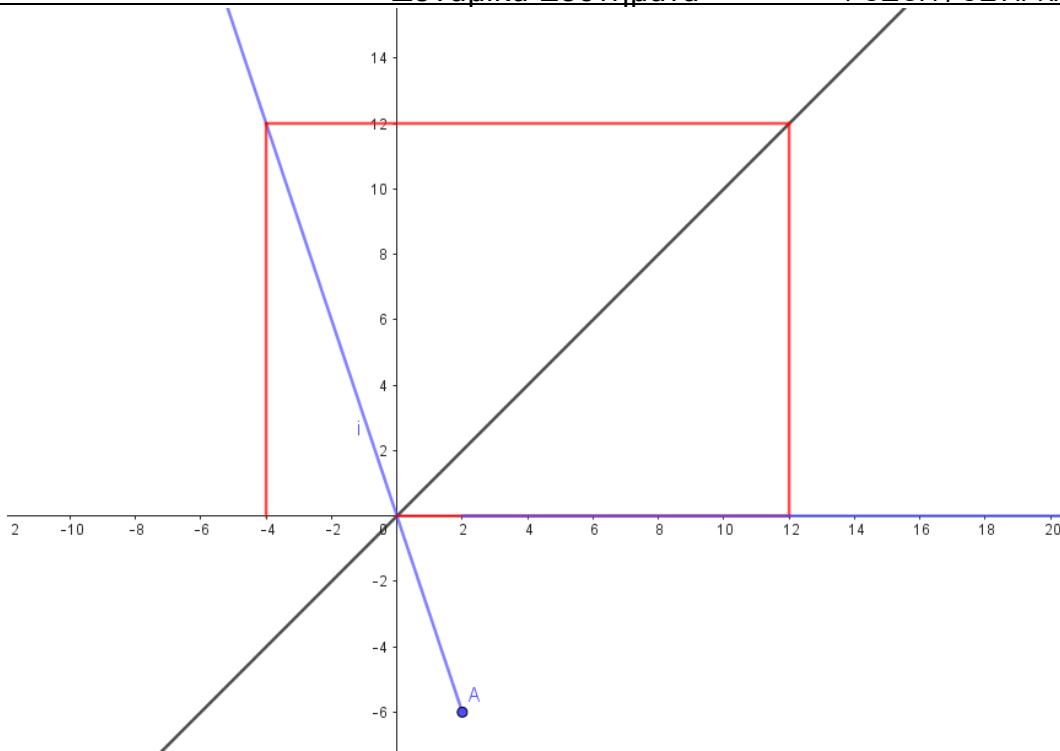
(υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο X είναι υποδιάστημα του \mathbb{R} ή και όλο το \mathbb{R})

Παράδειγμα 2.3.16. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{εάν } x < 2 \\ 0, & \text{εάν } x \geq 2 \end{cases}$ είναι ασυνεχής στο $x = 2$,

ενώ έχει σταθερό σημείο το $x = 0$. Αν θεωρήσουμε ως X οποιοδήποτε υποδιάστημα του \mathbb{R} , προφανώς η τροχιά του σημείου εντέλει καταλήγει στο $x = 0$.

Άρα $x = 0$ είναι καθολικά ελκτικό σημείο της $f(x)$.

Παρατηρούμε από το διάγραμμα ιστού της $f(x)$ (βλέπε Σχήμα 2.3.8. με αρχικό σημείο $x = -4$) ότι, το $x = 0$ είναι ασταθές σημείο της.



Σχήμα 2.3.8.

Διάγραμμα ιστού για την $f(x)$ με καθολικά ελκτικό αλλά ασταθές σταθερό σημείο ασυνέχειας $x = 0$.

Πρόταση 2.3.17. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει σταθερό σημείο $x = 0$ που είναι καθολικά ελκτικό.

Απόδειξη: Από την μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\sin x = x$, έχουμε ως μοναδικό σταθερό σημείο της συνάρτησης το $x = 0$. Θα δείξουμε ότι είναι καθολικά ελκτικό σταθερό σημείο της f .

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μετά την πρώτη επανάληψη της f , θα βρεθεί σε σημείο του διαστήματος $[-1,1]$ αφού $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι $-1 \leq x \leq 1$, όπου $f'(x) = \cos x$.

Αν $0 < x \leq 1$, τότε $0 < f(x) < 1$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $c \in (0,1)$, ώστε $f'(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x}$ ή $f(x) = xf'(x)$ δηλαδή $0 < f(x) < x$.

Συνεχίζοντας στην δεύτερη επανάληψη έχουμε $0 < f^2(x) < f(x) < x$, άρα μετά από n επαναλήψεις θα ισχύει $0 < f^n(x) < f^{n-1}(x) < \dots < f^2(x) < f(x) < x$, δηλαδή προκύπτει φθίνουσα ακολουθία $x_n = f^n(x)$, φραγμένη από κάτω από το 0. Σύμφωνα με τη πρόταση 2.3.3. η ακολουθία συγκλίνει σε σταθερό της σημείο, δηλαδή στο $x = 0$.

Τελικά $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $x = 0$ καθολικά ελκτικό σταθερό σημείο της f .

Αντίστοιχα δουλεύουμε εάν $-1 \leq x < 0$. ■

Σχόλιο 2.3.18. Παρατηρήστε ότι $f'(0) = 1$, αφού $f'(x) = \cos x$, δηλαδή το $x = 0$ είναι μη-υπερβολικό σημείο.

Σχόλιο 2.3.19. Έχει δειχθεί ότι κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση δεν μπορεί να έχει ασταθές σημείο το οποίο να είναι καθολικά ελκτικό.

Παράδειγμα 2.3.20. Η συνάρτηση Newton, $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ με $f'(x) \neq 0$, που είδαμε στη προηγούμενη παράγραφο, μας οδηγεί στην προσέγγιση των ριζών μιας συνάρτησης $f(x)$. Αν $f(c) = 0$ τότε $N_f(c) = c$, δηλαδή οι ρίζες της $f(x)$ είναι σταθερά σημεία της N_f . Έχουμε,

$$N'_f(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}, \text{ άρα } N'_f(c) = \frac{f(c)f''(x)}{(f'(c))^2} = 0$$

Συνεπώς $|N'_f(c)| = 0 < 1$, άρα c είναι ελκτικό σταθερό σημείο της N_f και μάλιστα $\lim_{n \rightarrow \infty} N_f^n(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.21. Ένα σταθερό σημείο c μιας συνάρτησης $f(x)$ λέγεται *υπερ-ελκτικό* σταθερό σημείο εάν $f'(c) = 0$.

Τότε έχουμε πολύ γρήγορη σύγκλιση στο σταθερό σημείο από τα γειτονικά του σημεία.

Σχόλιο 2.3.22. Έχει αποδειχθεί ότι αν c ρίζα μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$, τότε c είναι υπερ-ελκτικό σταθερό σημείο της N_f αν και μόνο αν $f'(c) \neq 0$.

Παράδειγμα 2.3.23. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x$, με $f'(x) = 3x^2 - 4$, έχει ρίζα $x = 2$, $f(2) = 0$ ενώ $f'(2) = 8 \neq 0$, και $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^3 - 4x}{3x^2 - 4} = \frac{2x^3}{3x^2 - 4}$, με $N_f(2) = 2$ και $N'_f(x) = \frac{6x^2(x^2 - 4)}{(3x^2 - 4)^2}$ με $N'_f(2) = 0$.

Η σύγκλιση λοιπόν της μεθόδου Newton προς την ρίζα της $f(x)$ γίνεται πολύ γρήγορα.

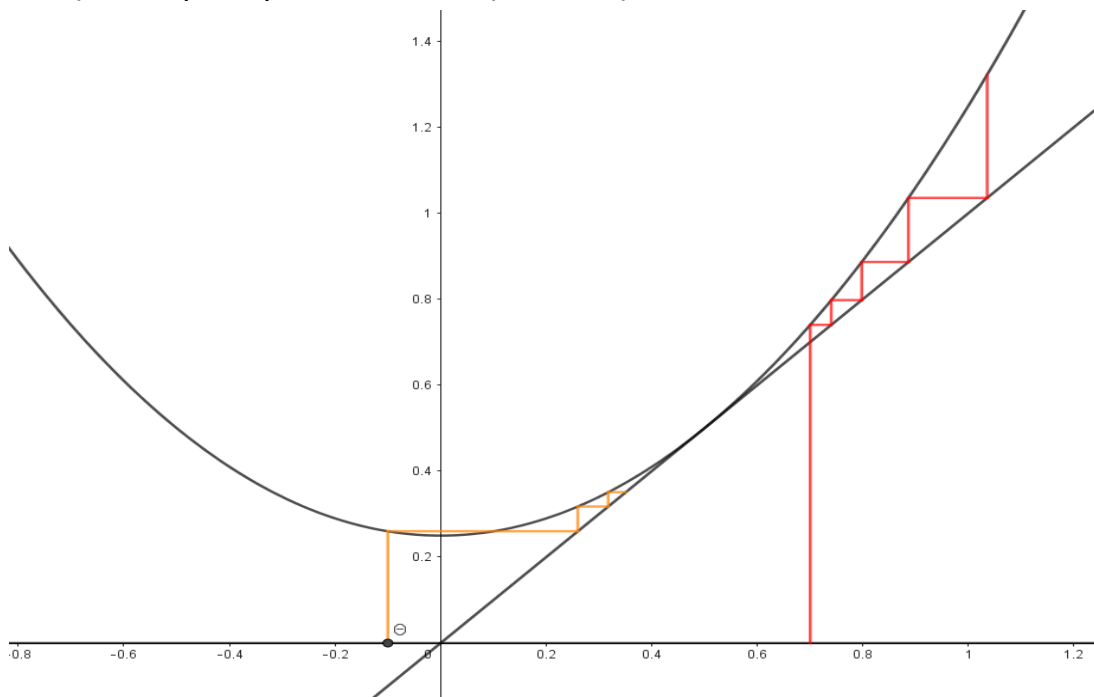
Παράδειγμα 2.3.24. Η Λογιστική συνάρτηση $L_2(x) = 2x(1 - x) = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 1$ με $L'_2(x) = 2 - 4x$, είδαμε ότι έχει δύο σταθερά σημεία $x = 0$ και $x = 1/2$. Ισχύει $L'_2(1/2) = 0$, άρα το $x = 1/2$ είναι υπερ-ελκτικό σταθερό σημείο.

2.4. Μη-Υπερβολικά Σταθερά σημεία

Ένα σταθερό σημείο c μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$, είπαμε ότι λέγεται μη-υπερβολικό εάν $f'(c) = 1$ ή $f'(c) = -1$.

Στο Παράδειγμα 2.3.14., είδαμε ότι το $x = 0$ είναι μη-υπερβολικό σημείο της $f(x) = \sin x$, ωστόσο, η γραφική επανάληψη υποδηλώνει ότι η τροχιά οποιοδήποτε σημείου του \mathbb{R} μέσω της f καταλήγει στο 0, επομένως το $c = 0$ είναι καθολικό ευσταθές σταθερό σημείο. Είναι δυνατόν ένα σταθερό σημείο να είναι ασταθές, αλλά και να έχει μονόπλευρη σταθερότητα (να είναι ημι-σταθερό).

Παράδειγμα 2.4.1. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1/4$, έχει ένα σταθερό σημείο $x = 1/2$ ως μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$. Αυτό είναι μη-υπερβολικό αφού $f'(1/2) = 1$. Στο σχήμα 2.4.1. από το διάγραμμα ιστού παρατηρούμε ότι το σταθερό σημείο είναι ευσταθές από αριστερά και ασταθές από δεξιά.



Σχήμα 2.4.1.

Διάγραμμα ιστού για την $f(x) = x^2 + 1/4$ με σταθερό σημείο $x = 1/2$

Στο επόμενο θεώρημα εξετάζουμε την περίπτωση που για ένα σταθερό σημείο c μιας συνάρτησης f ισχύει $f'(c) = 1$.

Θεώρημα 2.4.2. Έστω c ένα μη υπερβολικό σταθερό σημείο της $f(x)$ με $f'(c) = 1$. Αν $f'(x)$, $f''(x)$ και $f'''(x)$ είναι συνεχή στο $x = c$, τότε:

- (i) αν $f''(c) \neq 0$, το c είναι ημι-ευσταθές,
- (ii) αν $f''(c) = 0$ και $f'''(c) < 0$, τότε το c είναι ασυμπτωτικά ευσταθές,
- (iii) αν $f''(c) = 0$ και $f'''(c) > 0$, τότε το c είναι ασταθές

Απόδειξη: (i) Αν $f'(c) = 1$ τότε η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της καμπύλης της $f(x)$ στο $x = c$. Υποθέτουμε ότι $f''(c) > 0$, τότε η $f(x)$ είναι κυρτή σε περιοχή του $x = c$ και η ευθεία $y = x$ θα βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της $f(x)$ σε γειτονικά σημεία του c , δηλαδή σε διάστημα $I = [c - \delta, c + \delta]$ για κάποιο $\delta > 0$. Επίσης η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ θα αυξάνεται, ενώ από τη συνέχεια της $f(x)$ στο $x = c$ θα ισχύει $f'(x) > 0$ στο διάστημα I .

Θα έχουμε $0 < f'(x) < 1$ όταν $x \in [c - \delta, c]$ και $f'(x) > 1$ όταν $x \in [c, c + \delta]$. Εφαρμόζοντας Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x, c] \subset (c - \delta, c)$, υπάρχει $a \in (x, c)$ με

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \text{ Όμως}$$

$$0 < f'(a) < 1, f(c) = c \text{ (c σταθερό σημείο), } x < c \Leftrightarrow x - c < 0, \text{ άρα}$$

$$0 < \frac{f(x) - c}{x - c} \Leftrightarrow f(x) - c < 0 \Leftrightarrow f(x) < c, \text{ και}$$

$$\frac{f(x) - c}{x - c} < 1 \Leftrightarrow f(x) - c > x - c \Leftrightarrow f(x) > x, \text{ άρα } x < f(x) < c.$$

Επαναλαμβάνοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[f(x), c] \subset (c - \delta, c)$ προκύπτει $f(x) < f^2(x) < c$, και συνεχίζοντας σε n επαναλήψεις σε διάστημα $[f^{n-1}(x), c] \subset (c - \delta, c)$, έχουμε $f^{n-1}(x) < f^n(x) < c$. Βλέπουμε ότι η ακολουθία $f^n(x)$ αυξάνεται και έχει άνω φράγμα το c , άρα πρέπει να συγκλίνει σε ένα σταθερό σημείο. Δεν μπορεί να υπάρχει άλλο σταθερό σημείο (ας πούμε $d \neq c$), σε αυτό το διάστημα, καθώς από το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[d, c] \subset (c - \delta, c)$, (αν $d < c$), θα έδινε $f'(q) = 1$ για κάποιο $q \in (x, c)$, δηλαδή θα είχαμε αντίφαση. Συνεπώς, βλέπουμε ότι το c είναι ευσταθές από αριστερά σταθερό σημείο.

Ομοίως στο διάστημα $(c, x] \subset (c, c + \delta)$, η εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής όπως παραπάνω, δίνει $\beta \in (c, x)$ με $f'(\beta) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Όμως $f'(\beta) > 1$, $f(c) = c$ (c σταθερό σημείο), $x > c \Leftrightarrow x - c > 0$, άρα

$$\frac{f(x) - c}{x - c} > 1 \Leftrightarrow f(x) - c > x - c \Leftrightarrow f(x) > x > c.$$

Όμοια όπως πριν, έχουμε σε n επαναλήψεις σε διάστημα $[c, f^{n-1}(x)] \subset (c, c + \delta)$ ότι $f^n(x) > f^{n-1}(x) > \dots > f^2(x) > f(x) > x > c$. Βλέπουμε ότι η ακολουθία $f^n(x)$

αυξάνεται και ότι το σημείο απομακρύνεται από το c υπό επανάληψη, επομένως το σταθερό σημείο είναι ασταθές στα δεξιά.

Παρόμοιες σκέψεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν όταν $f''(c) < 0$ και το γράφημα είναι κοίλο προς τα κάτω ε περιοχή του $x = c$.

(ii) Για το σταθερό σημείο c της $f(x)$ ισχύει $f'(c) = 1, f''(c) = 0$ και $f'''(c) < 0$. Αφού $f'''(c) < 0$, θα υπάρχει $\delta > 0$, ώστε στο διάστημα $I = [c - \delta, c + \delta]$ η f'' είναι φθίνουσα, με $f''(c) = 0$, άρα $f''(x) > 0$ αν $x \in (c - \delta, c)$ και $f''(x) < 0$ όταν $x \in (c, c + \delta)$. Αυτό σημαίνει ότι το c είναι τοπικό μέγιστο της $f'(x)$, με μέγιστη τιμή $f'(c) = 1$ στο I .

Εφαρμόζοντας Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x, c] \subset (c - \delta, c)$, όπως στην απόδειξη του **(i)**, υπάρχει $a \in (x, c)$ με $f'(a) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

Από τη συνέχεια της $f(x)$ στο $x = c$ θα ισχύει $f'(x) > 0$ στο διάστημα I .

Όμως $0 < f'(a) < 1$, οπότε για κάποιο λ με $0 < \lambda < 1$ θα έχουμε $|f'(a)| < \lambda < 1$.

Τότε

$$|f(x) - c| = |f'(a)| |x - c| < \lambda |x - c|.$$

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και συνεχίζοντας στη n -ιοστή επανάληψη θα έχουμε $|f^n(x) - c| < \lambda^n |x - c|$

Καθώς $n \rightarrow \infty$, ισχύει $\lambda^n \rightarrow 0$, συνεπώς $f^n(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$, δηλαδή η τροχιά του x συγκλίνει προς το c από αριστερά.

Ομοίως στο διάστημα $[c, x] \subset (c, c + \delta)$, η εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής όπως παραπάνω δίνει $\beta \in (c, x)$ με $f'(\beta) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{f(x) - c}{x - c}$.

Όμως $0 < f'(\beta) < 1$, οπότε για κάποιο λ με $0 < \lambda < 1$ θα έχουμε $|f'(\beta)| < \lambda < 1$. Τότε όπως πριν, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία και συνεχίζοντας ως τη n -ιοστή επανάληψη θα έχουμε $|f^n(x) - c| < \lambda^n |x - c|$.

Καθώς $n \rightarrow \infty$, ισχύει $\lambda^n \rightarrow 0$, συνεπώς $f^n(x) \rightarrow c$, δηλαδή η τροχιά του x συγκλίνει προς το c από δεξιά.

Τελικά το c είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο της $f(x)$. ■

(iii) Εργαζόμαστε όπως στο (ii)

Παράδειγμα 2.4.3. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1/4$, έχει ένα μη-υπερβολικό σταθερό σημείο $x = 1/2$, αφού $f'(1/2) = 1$, το οποίο είναι ημι-ευσταθές διότι

$$f''(1/2) = 2 \neq 0.$$

Ενώ συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει σταθερό σημείο $x = 0$, με $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ και $f'''(0) = -1 < 0$, άρα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο της.

Θα εξετάσουμε και την περίπτωση να έχουμε $f'(c) = -1$, όπου c σταθερό σημείο μιας συνάρτησης f .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.4. Η παράγωγος *Schwarzian* $Sf(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$, ορίζεται ως η συνάρτηση $Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$.

Αν $f'(x) = -1$, τότε $Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} (f''(x))^2$.

Θεώρημα 2.4.5. Έστω c ένα μη-υπερβολικό σταθερό σημείο της $f(x)$ με $f'(c) = -1$.

Αν $f'(x)$, $f''(x)$ και $f'''(x)$ είναι συνεχή στο $x = c$, τότε:

- (i) αν $Sf(c) < 0$, το c είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο της.
- (ii) αν $Sf(c) > 0$, το c είναι ασταθές σταθερό σημείο της.

Απόδειξη:

(i) Αν $g(x) = f(f(x)) = f^2(x)$ τότε $f(c) = c$ και $g(c) = f(f(c)) = f(c) = c$, δηλαδή c σταθερό σημείο της $g(x)$. Θα δείξουμε ότι c ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο της $g(x)$, οπότε και της $f(x)$.

Παραγωγίζουμε τρεις φορές ως προς x την $g(x)$:

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x), \text{ άρα } g'(c) = f'(f(c)) \cdot f'(c) = f'(c)(-1) = (-1)(-1) = 1,$$

$$\text{και } g''(x) = f''(f(x)) \cdot (f'(x))^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x), \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} g''(c) &= f''(f(c)) \cdot (f'(c))^2 + f'(f(c)) \cdot f''(c) = f''(c)(-1)^2 + f'(c) \cdot f''(c) \\ &= f''(c) - f''(c) = 0, \end{aligned}$$

$$g'''(x) = f'''(f(x)) \cdot (f'(x))^3 + 2f''(f(x)) \cdot f'(x)f''(x) + f''(f(x)) \cdot f'(x)f''(x) + f'(f(x)) \cdot f'''(x). \text{ Τότε}$$

$$\begin{aligned}
 g'''(c) &= f'''(f(c)) \cdot (f'(c))^3 + 2f''(f(c)) \cdot f'(c)f''(c) + f''(f(c)) \cdot f'(c)f''(c) \\
 &\quad + f'(f(c)) \cdot f'''(c) = \\
 &= f'''(c) \cdot (-1)^3 + 2f''(c) \cdot (-f''(c)) + f''(c) \cdot (-f''(c)) + f'(c) \cdot f'''(c) \\
 &= -f'''(c) - 2(f''(c))^2 - (f''(c))^2 - f'''(c) = -2f'''(c) - 3(f''(c))^2 \\
 &= 2Sf(c) < 0
 \end{aligned}$$

Από το θεώρημα 2.4.2.(ii), το c είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο της $g(x)$, οπότε και της $f(x)$. ■

(iii) Δουλεύουμε με παρόμοιο τρόπο και χρησιμοποιούμε το θεώρημα 2.4.2.(iii).

Σχόλιο 2.4.6. Είδαμε στο Σχόλιο 2.3.12. ότι η λογιστική συνάρτηση

$L_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ με $L'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$, $L''_\mu(x) = -2\mu$, $L'''_\mu(x) = 0$, έχει μη-υπερβολικά σταθερά σημεία για $\mu = 1$ το $x = 0$ και για $\mu = 3$ το $x = 2/3$.

Αν $\mu = 1$, το σταθερό σημείο $x = 0$ έχει $L'_1(0) = 1$ και $L''_1(0) = -2 \neq 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.4.2. το $x = 0$ είναι ημι-ευσταθές. Ωστόσο, θεωρούμε αυτό ως ένα ευσταθές σημείο για την L_1 αφού είναι ελκτικό από δεξιά και τα σημεία αριστερά του 0 δεν βρίσκονται στο πεδίο ορισμού του L_1 που ορίζεται στο διάστημα $[0,1]$.

Αν $\mu = 3$, το σταθερό σημείο είναι $x = \frac{2}{3}$, με $L'_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1$ και $L''_3\left(\frac{2}{3}\right) = -6 < 0$. Τότε

$$SL_3\left(\frac{2}{3}\right) = -L_3''' \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{3}{2} \left(L_3'' \left(\frac{2}{3}\right)\right)^2 = 0 - \frac{3}{2}(-6)^2 = -48 < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.4.5. το $x = 2/3$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο της.

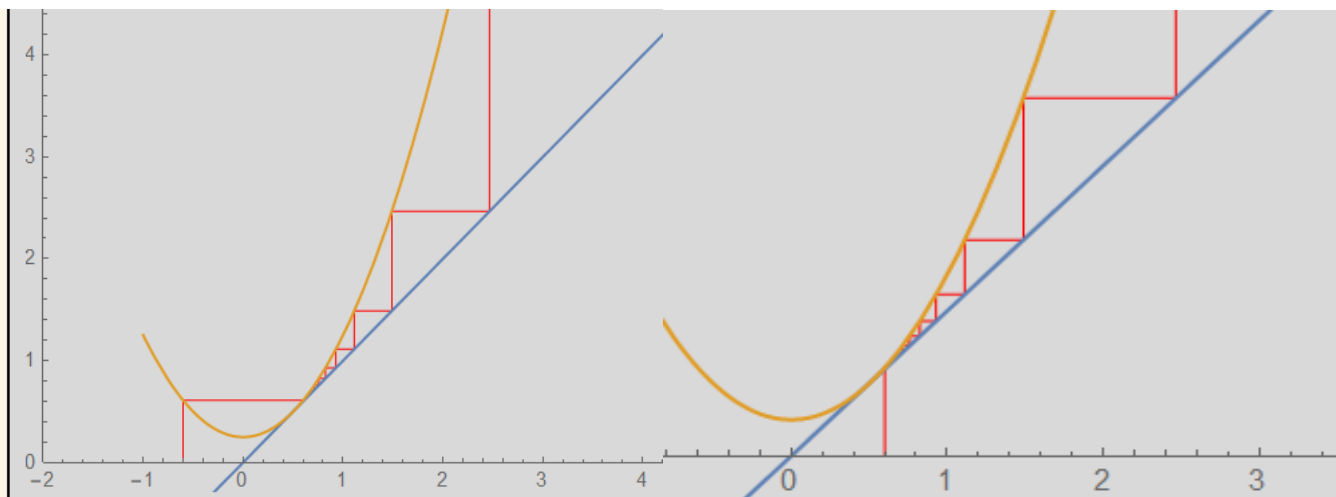
2.5. Λεκάνη έλξης (Σταθερό σύνολο) σταθερού σημείου

Η ύπαρξη σταθερού σημείου μιας συνάρτησης επανάληψης $f: X \rightarrow X$ (όπου X υποδιάστημα του ή και όλο το \mathbb{R}) σε ένα δυναμικό σύστημα επηρεάζει σημαντικά την χρονική μεταβολή του συστήματος. Κυρίως μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των σημείων σε σχέση με αυτό, δηλαδή αν πλησιάζουν ή απομακρύνονται (και με ποιο ρυθμό) από αυτό υπό την επίδραση της f . Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ελκτικό σταθερό σημείο, μας ενδιαφέρει επίσης ποια είναι τα σημεία του X , που η τροχιά τους οδηγεί σε αυτό. Όλα αυτά τα σημεία που «έλκονται» από ένα σταθερό σημείο, θα αποτελέσουν στοιχεία ενός συνόλου που θα το ονομάσουμε *λεκάνη έλξης* του σταθερού σημείου.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5.1. Η *λεκάνη έλξης* ή *σταθερό σύνολο* $B_f(c)$ ενός σταθερού σημείου c της $f: X \rightarrow X$ είναι το σύνολο όλων των $x \in X$ για τα οποία η ακολουθία $x_n = f^n(x)$ συγκλίνει στο c :

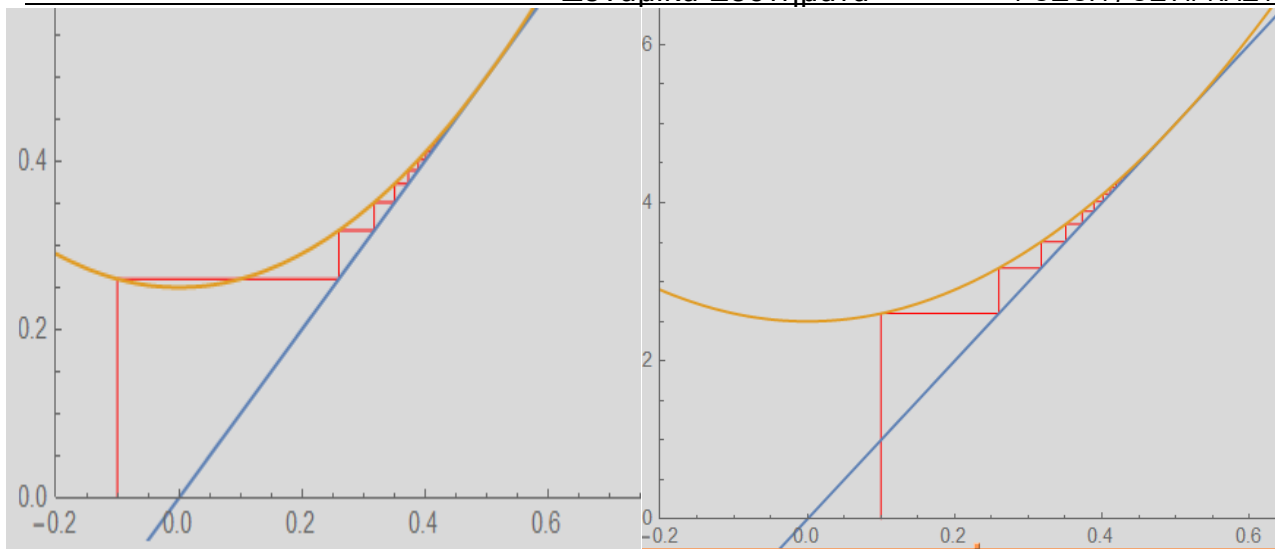
$$B_f(c) = \{x \in X: f^n(x) \rightarrow c, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty\}$$

Παράδειγμα 2.5.2. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1/4$, $X = \mathbb{R}$, έχει ένα μη-υπερβολικό σταθερό σημείο $x = 0.5$, το οποίο είναι ημι-ευσταθές (βλέπε παράδειγμα 2.4.3). Από το διάγραμμα ροής για αρχικό σημείο $x = -0.6$ και $x = 0.6$ παρατηρούμε (βλέπε Σχήμα 2.5.1) ότι απομακρυνόμαστε από το σταθερό σημείο, ενώ αν ξεκινήσουμε με $x = -0.4$ και $x = 0.1$ η τροχιά τους έλκεται από αυτό (βλέπε Σχήμα 2.5.2).



Σχήμα 2.5.1.

Διαγράμματα ιστού (λογισμικό Mathematica) για την $f(x) = x^2 + 1/4$ με αρχικά σημεία $x = -0.6$ και $x = 0.6$



Σχήμα 2.5.2.

Διαγράμματα ιστού (λογισμικό Mathematica) για την $f(x) = x^2 + 1/4$ με αρχικά σημεία $x = -0.1$ και $x = 0.1$

Η λεκάνη έλξης $B_f(0.5)$ του σταθερού σημείου $x = 0.5$ της f είναι το διάστημα $[-0.5, 0.5]$.

Παράδειγμα 2.5.3. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ έχει σταθερό σημείο $x = 0$ που είναι καθολικά ελκτικό, όπως είδαμε στην Πρόταση 2.3.17., συνεπώς η λεκάνη έλξης του ($B_f(0)$) είναι όλο το \mathbb{R} .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5.4. Το σύνολο όλων των $x \in X$ μιας συνάρτησης $f: X \rightarrow X$, των οποίων οι τροχιές απωθούνται από ένα σταθερό σημείο c της f , ονομάζεται *ασταθές σύνολο του c* και συμβολίζεται $D_f(c)$.

Για αντιστρέψιμες συναρτήσεις, ο ορισμός του $D_f(c)$ μπορεί να γίνει ακριβής μέσω επαναλήψεων προς τα πίσω για δεδομένο $x \in X$. Για μη αντιστρέψιμες συναρτήσεις, το $D_f(c)$ μπορεί να οριστεί ως το σύνολο όλων των x για τα οποία υπάρχει ένα σύνολο προεικόνων $f(x_{-i}) = x_{-i+1}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = c$.

Σχόλιο 2.5.5. Η άμεση λεκάνη έλξης της f ενός σταθερού σημείου της c , είναι το μεγαλύτερο διάστημα που περιέχεται στη λεκάνη έλξης του c και περιέχει το c . Αρχικά δείχνουμε ότι αυτό είναι πάντα ένα ανοιχτό διάστημα όταν το c είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο.

Πρόταση 2.5.6. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση η οποία έχει ένα ελκτικό σταθερό σημείο c . Η άμεση λεκάνη έλξης της f του σταθερού σημείου της c , είναι ένα ανοιχτό διάστημα.

Απόδειξη: Αφού c ελκτικό σταθερό σημείο της f , υπάρχει πραγματικός αριθμός $m > 0$ τέτοιος ώστε αν $|x - c| < m$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c$.

Δηλαδή για όλα τα $x \in I_m = (c - m, c + m)$, έχουμε $f^n(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Ας συμβολίσουμε με A το μεγαλύτερο διάστημα που περιέχει το c για το οποίο ισχύει $f^n(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$ για όλα τα $x \in A$.

Ας υποθέσουμε ότι $A = [a, b]$ κλειστό διάστημα. Τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}^+$ με $f^k(x) \in I_m$. Η συνάρτηση $f^k(x)$ είναι και αυτή (όπως η f) συνεχής, άρα τα σημεία κοντά στο άκρο a του A , θα απεικονίζονται μέσω της f στο I_m .

Δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε εάν $|x - a| < \delta$ τότε $|f^k(x) - f^k(a)| < \eta$, όπου $\eta = \min\{|f^k(a) - (c - m)|, |(c + m) - f^k(a)|\}$.

Έτσι, υπάρχουν σημεία $x - a$ κοντά στο a για τα οποία $f^k(x) \in I_m$, άρα $f^{k+n}(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$, το οποίο είναι αντίφαση. Συνεπώς $a \notin A$ (ομοίως και το άλλο άκρο $b \notin A$, άρα A ανοιχτό διάστημα). ■

Σχόλιο 2.5.7. Στο παράδειγμα 2.5.2., η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1/4$ είδαμε ότι έχει ένα ημι-ευσταθές σταθερό σημείο $x = 0.5$. Μερικές φορές θεωρούμε το $c = \infty$ ως ένα ελκτικό σταθερό σημείο της f , έτσι ώστε $B_f(\infty) = (-\infty, 0.5) \cup (0.5, \infty)$.

Σχόλιο 2.5.8. Αν $f: I \rightarrow I$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $I = [a, b]$ που έχει ένα ελκτικό σταθερό σημείο $c \in [a, b]$, τότε δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την πιθανότητα η λεκάνη έλξης να περιλαμβάνει είτε το a είτε το b , ή και τα δύο (όπως στο Παράδειγμα 2.5.2.). Από την άλλη πλευρά, αν $x = a$ είναι το ελκτικό σταθερό σημείο, η λεκάνη έλξης μπορεί να είναι ένα σύνολο της μορφής $[a, p)$ για κάποιο $p \in (a, b]$. Ένα τέτοιο σύνολο μπορεί να θεωρηθεί ανοιχτό ως υποσύνολο του $[a, b]$.

Σχόλιο 2.5.9. Διακλαδώσεις Λογιστικής Συνάρτησης

Είδαμε στο Παράδ. 2.1.6., ότι η λογιστική συνάρτηση $L_\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$, όταν $0 < \mu \leq 4$, ορίζει δυναμικό σύστημα στο διάστημα $I = [0,1]$.

Οι λογιστικές απεικονίσεις $L_\mu(x)$ είναι συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών μ και x . Συνήθως περιορίζουμε το x στο διάστημα $[0, 1]$ και θεωρούμε $\mu \in (0,4)$. Το μ είναι μια παράμετρος την οποία επιτρέπουμε να μεταβάλλεται, αλλά στη συνέχεια μελετάμε τη συνάρτηση L_μ για συγκεκριμένες σταθερές τιμές του μ . Καθώς η παράμετρος μ μεταβάλλεται, βλέπουμε μια αντίστοιχη αλλαγή στη φύση της συνάρτησης L_μ . Αυτό ονομάζεται *διακλάδωση*. Για παράδειγμα (βλέπε Σχόλιο 2.3.12.), για $0 < \mu \leq 1$, η L_μ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο $[0, 1]$, $c = 0$, το οποίο είναι ελκτικό. Καθώς το μ αυξάνεται πέρα από το 1, ένα νέο σταθερό σημείο $c = 1 - 1/\mu$, δημιουργείται στο $[0, 1]$, οπότε τώρα η L_μ έχει δύο σταθερά σημεία. Το $c = 0$ τώρα απωθεί και το $c = 1 - 1/\mu$ ελκύει (για $1 < \mu \leq 3$). Στο $\mu = 3$ η φύση αυτών των σταθερών σημείων αλλάζει ξανά όπως θα δούμε. Σε αυτήν την ενότητα προσδιορίζουμε τη λεκάνη έλξης αυτών των σταθερών σημείων καθώς το μ αυξάνεται από 0 σε 3. Θα δούμε ότι η «δυναμική» (μακροπρόθεσμη συμπεριφορά) του L_μ είναι αρκετά απλή για αυτό το εύρος τιμών του μ .

Ξεκινάμε δείχνοντας ότι η λεκάνη έλξης της L_μ για $0 < \mu \leq 1$ είναι όλο το πεδίο ορισμού της, δηλαδή $[0, 1]$. Λέμε σε αυτήν την περίπτωση ότι το 0 είναι ένας *καθολικός ελκυστής*.

Πρόταση 2.5.10. Έστω $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$ λογιστική συνάρτηση.

Αν $0 < \mu \leq 1$ τότε $B_{L_\mu}(0) = [0,1]$ ενώ αν $1 < \mu \leq 3$, $B_{L_\mu}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = (0,1)$.

Απόδειξη:

i) Αν $0 < \mu \leq 1$.

Έχουμε μόνο ένα ελκτικό σταθερό σημείο $x = 0$. Παρατηρήστε ότι $L_\mu(1) = 0$.

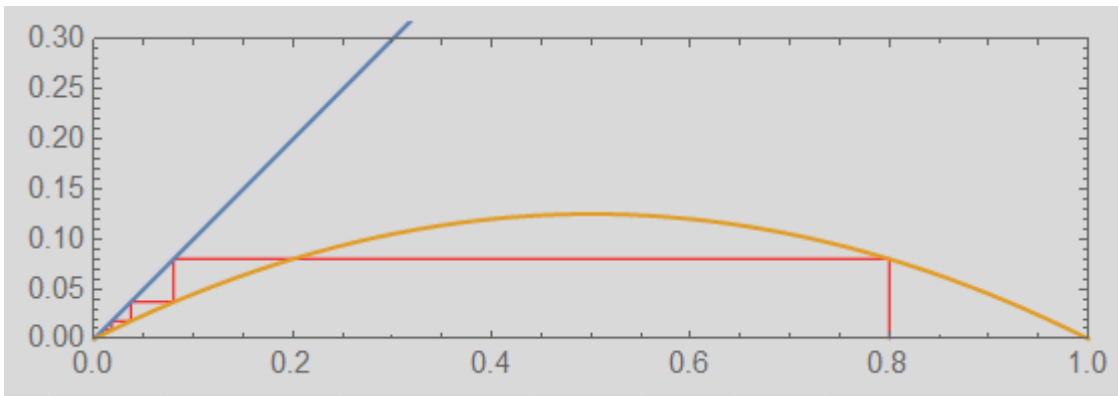
Αν $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1-x < 1$ και $0 < \mu \leq 1$ τότε $0 < \mu(1-x) < 1$ άρα $0 < \mu x(1-x) < x \Leftrightarrow 0 < L_\mu(x) < x$. Ομοίως από την δεύτερη επανάληψη της $L_\mu(x)$, έχουμε $0 < L_\mu^2(x) < L_\mu(x)$ και συνεχίζοντας σε n επαναλήψεις καταλήγουμε σε

$0 < L^n_\mu(x) < \dots < L^3_\mu(x) < L^2_\mu(x) < L_\mu(x) < x$. Η ακολουθία $L^n_\mu(x)$ είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω από το 0, άρα συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο $x = 0$.

Παρατηρούμε την επίδραση της παραμέτρου $\mu = 1$ στο δυναμικό σύστημα με αρχική τιμή $x = 0.8$ (150 σημεία της τροχιάς).



Άρα η λεκάνη έλξης της L_μ είναι $B_{L_\mu}(0) = [0,1]$.



Σχήμα 2.5.3.

Διάγραμμα ιστού (λογισμικό Mathematica) για την $L_{0.5}(x) = 0.5x(1 - x)$, με αρχικό σημείο $x = 0.8$.

i) Αν $1 < \mu \leq 3$.

Έχουμε δει ότι για $\mu > 1$ το σταθερό σημείο 0 είναι απωθητικό, αλλά ένα νέο σταθερό σημείο $c = 1 - 1/\mu$ πλέον υπάρχει, το οποίο είναι ελκτικό (για $1 < \mu \leq 3$). Επομένως από την Πρόταση 2.5.6., υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $I = (a, b)$ που περιέχει το σταθερό σημείο και για κάθε $x \in I$ ισχύει $L_\mu^n(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Εάν η λεκάνη έλξης του c είναι $B_{L_\mu}(c)$, τότε $0,1 \notin B_{L_\mu}(c)$ επειδή $L_\mu(0) = 0$ και $L_\mu(1) = 0$, άρα $B_{L_\mu}(c) \neq [0,1]$.

Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, το $L_\mu((a, b))$, είναι ένα διάστημα που πρέπει να περιέχεται στο (a, b) , γιατί αν $x \in (a, b)$, $L_\mu^n(x) \rightarrow c$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

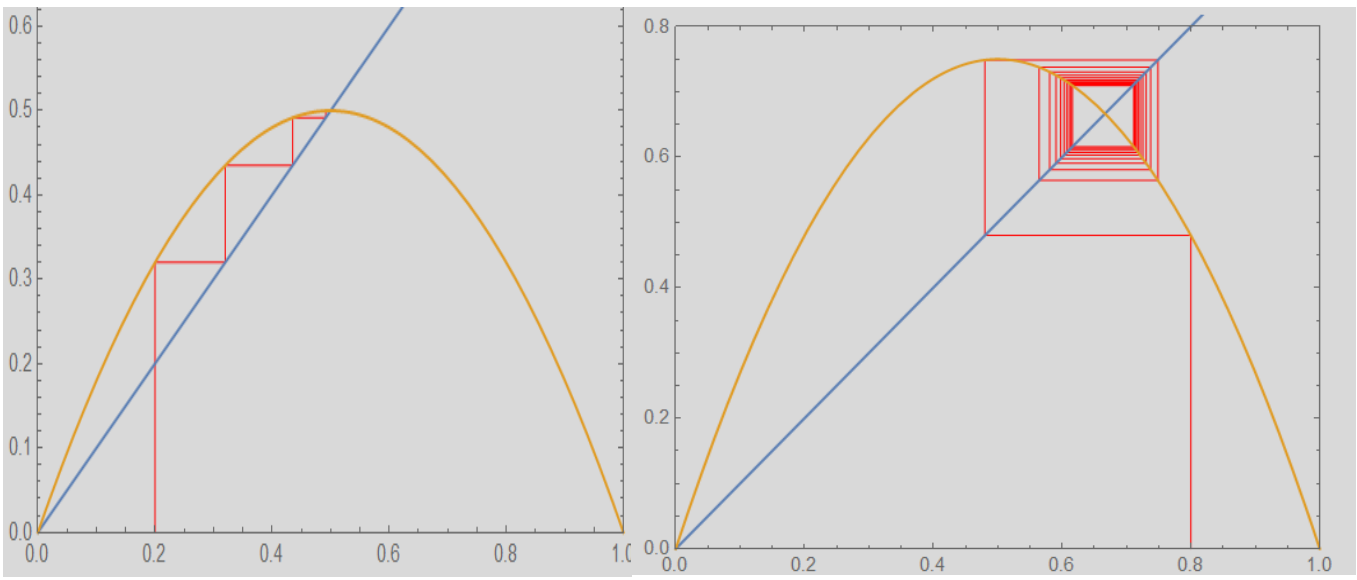
Έστω x_n μια ακολουθία στο (a, b) με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, τότε από τη συνέχεια του L_μ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} L_\mu(x_n) = L_\mu(a)$.

Δεδομένου ότι $x_n \in (a, b)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ έχουμε $L_\mu(x_n) \in (a, b)$.

Όμως $L_\mu(a) \notin (a, b)$, οπότε ο μόνος τρόπος που αυτό είναι δυνατό είναι αν $L_\mu(a) = a$ ή $L_\mu(a) = b$, και ομοίως για το b . Αυτό είναι δυνατό μόνο αν τα a και b είναι σταθερά σημεία, ή είναι τελικά σταθερά σημεία ή $L_\mu(a) = b$ ή $L_\mu(b) = a$.

Η τελευταία περίπτωση δεν μπορεί να συμβεί, και αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $a = 0$ και $b = 1$, αφού δεν υπάρχουν άλλα σταθερά ή τελικά σταθερά σημεία στο $[0,1]$ που να μπορούν να ικανοποιήσουν αυτές τις συνθήκες. Συνεπώς, πρέπει να έχουμε

$$B_{L_\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) = (0,1). \blacksquare$$



Σχήμα 2.5.4.

Διαγράμματα ιστού (λογισμικό Mathematica) για τις $L_2(x) = 2x(1-x)$, και $L_3(x) = 3x(1-x)$, με αρχικά σημεία $x = 0.2$ και $x = 0.8$ αντίστοιχα.

Σχόλιο 2.5.11. Αν $\mu = 3$ τότε το σταθερό σημείο $c = 1 - \frac{1}{3} = 2/3$ της λογιστικής συνάρτησης $L_3(x) = 3x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, δεν είναι ελκτικό ούτε απωθητικό (βλέπε σχήμα 2.5.4.).

Παρατηρούμε την επίδραση της παραμέτρου $\mu = 3$ στο δυναμικό σύστημα (150 σημεία της τροχιάς) με αρχικό σημείο $x = 0.8$.



2.6. Περιοδικά Σημεία

Τα περιοδικά σημεία μιας πεπερασμένης τροχιάς, είναι σημαντικά στη μελέτη των δυναμικών συστημάτων και της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς τους:

Θεωρούμε συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ με $X \subseteq \mathbb{R}$.

Ορισμοί 2.6.1.

- i) Ένα σημείο $c \in X$ είναι **περιοδικό** σημείο της $f(x)$ με περίοδο $r \in \mathbb{Z}^+$ όταν $f^r(c) = c$ (δηλαδή c σταθερό σημείο της $f^r(x)$).

Τότε ισχύει επίσης $f^{2r}(c) = c, f^{3r}(c) = c, \dots$ δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι το σημείο c είναι $2r$ -περιοδικό, $3r$ -περιοδικό, \dots σημείο της $f(x)$.

Ο μικρότερος θετικός r , με $f^r(c) = c$, ονομάζεται **ελάχιστη (ή κύρια ή πρώτη) περίοδο του c** και το σύνολο $O_f(c) = \{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{r-1}(c)\}$ λέμε ότι είναι r -κύκλος.

Το σύνολο με όλα τα σημεία του X με περίοδο r , ας είναι

$$Per_r(f) = \{x \in X: f^r(x) = x\},$$

ενώ το σύνολο με όλα τα περιοδικά της σημεία συμβολίζεται με $Per(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Per_n(f)$

Ισχύει $Fix(f) \subseteq Per(f)$.

- ii) Ένα σημείο $c \in X$ είναι **τελικά περιοδικό** σημείο της $f(x)$ (όπου c δεν είναι περιοδικό σημείο της f), εάν υπάρχει $m \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε το $f^m(c)$ να είναι περιοδικό σημείο της $f(x)$.
- iii) Ένα περιοδικό σημείο $c \in X$ είναι **ευσταθές** (αντίστοιχα **ασυμπτωτικά ευσταθές**, **ασταθές**, ...) εάν είναι ευσταθές (αντίστοιχα **ασυμπτωτικά ευσταθές**, \dots) σταθερό σημείο της $f^r(x)$.

Θεώρημα 2.6.2. Έστω c περιοδικό σημείο της $f(x)$ με περίοδο $r \in \mathbb{Z}^+$, και $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x = c$. Εάν $c_i = f^i(c)$, $i = 0, 1, 2, \dots, r-1$ τότε

- a) c είναι **ασυμπτωτικά ευσταθές** όταν

$$|f'(c_0) \cdot f'(c_1) \cdot f'(c_2) \cdot \dots \cdot f'(c_{r-1})| < 1.$$

- b) c είναι **ασταθές** όταν

$$|f'(c_0) \cdot f'(c_1) \cdot f'(c_2) \cdot \dots \cdot f'(c_{r-1})| > 1.$$

Απόδειξη:

a) Θα αποδείξουμε την περίπτωση που c είναι περιοδικό σημείο της $f(x)$ με περίοδο $r = 3$.

Τότε $\mathcal{O}_f(c) = \{c, f(c), f^2(c)\} = \{c_0, c_1, c_2\}$, και

$$\frac{d}{dx}(f^3(x)) = \frac{d}{dx}(f(f^2(x))) = f'(f^2(x))(f^2(x))' = f'(f^2(x))f'(f(x))f'(x)$$

$$\text{Όταν } x = c, \quad \frac{d}{dx}(f^3(c)) = f'(c_2) \cdot f'(c_1) \cdot f'(c_0) < 1.$$

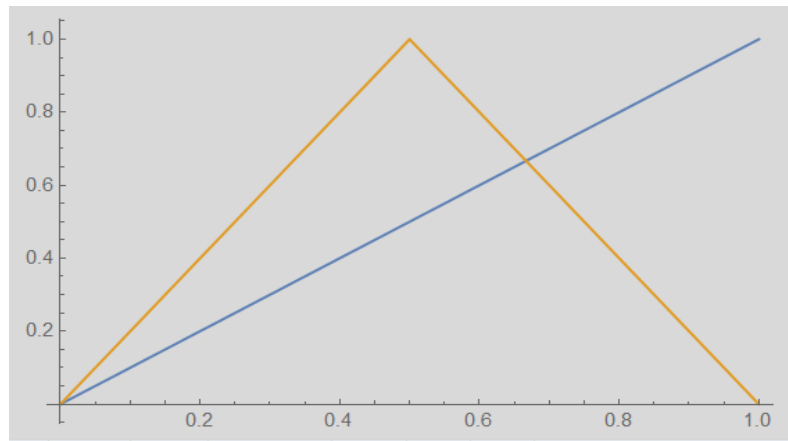
Τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.8. το $x = c$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο της $f^3(x)$. ■

b) Δουλεύουμε όπως στο a) και χρησιμοποιούμε επίσης το θεώρημα 2.3.8.

Παράδειγμα 2.6.3. Η συνάρτηση σκηνης όπως συνήθως καλείται (Παράδειγμα 2.2.5.),

$$T(x): [0,1] \rightarrow [0,1] \quad \text{με} \quad T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

είδαμε ότι έχει δύο σταθερά σημεία $c = 0$ και $c = \frac{2}{3}$ (βλέπε σχήμα 2.6.1.)



Σχήμα 2.6.1.

Η $T(x)$ ορίζει δυναμικό σύστημα στο $[0,1]$, αφού η τροχιά οποιουδήποτε σημείου του $[0,1]$ βρίσκεται σε αυτό. Ας δούμε πως επιδρά η $T(x)$:

Αν $0 < x < 1/4$ τότε $T(x) = 2x$ και $0 < 2x < 1/2$ άρα $T^2(x) = 2 \cdot 2x = 4x$.

Αν $1/4 < x < 1/2$ τότε $T(x) = 2x$ και $1/2 < x < 1$ άρα $T^2(x) = 2(1 - 2x)$.

Αν $1/2 < x < 3/4$ τότε $T(x) = 2(1 - x) = 2 - 2x$ και

$-\frac{3}{4} < -x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < 1 - x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2(1 - x) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < T(x) < 1$ άρα
 $T^2(x) = 2 \cdot (1 - 2 + 2x) = 2(2x - 1)$.

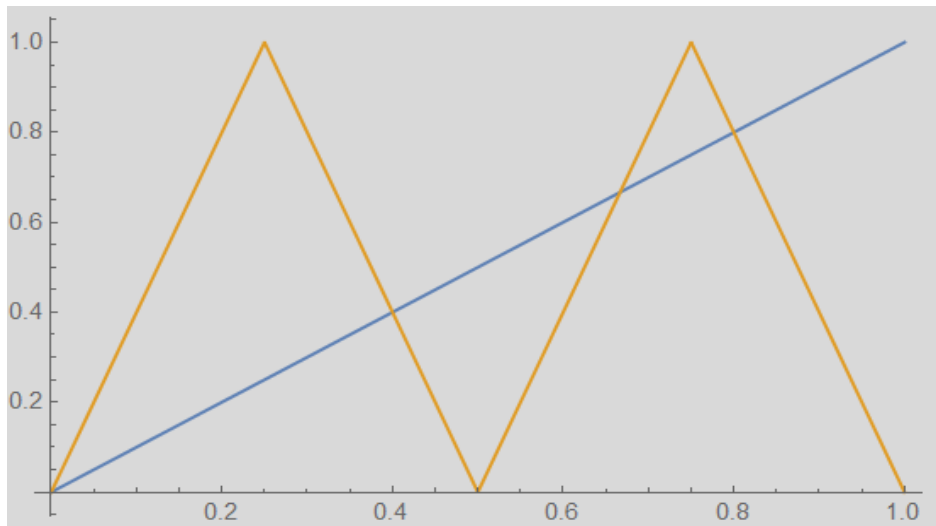
Αν $3/4 < x < 1$ τότε $T(x) = 2(1 - x) = 2 - 2x$ και

$-1 < -x < -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 < 1 - x < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < 2(1 - x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < T(x) < \frac{1}{2}$ άρα

$T^2(x) = 2 \cdot (2 - 2x) = 4(1 - x)$

$$\text{Συνοπτικά } T^2(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2(1 - 2x), & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(2x - 1), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4(1 - x), & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Το γράφημά της φαίνεται στο σχήμα 2.6.2.



Σχήμα 2.6.2.

Παρατηρούμε ότι έχουμε τέσσερα σταθερά σημεία για την $T^2(x)$, τα οποία μπορούμε να βρούμε λύνοντας την εξίσωση $T^2(x) = x$ στα τέσσερα διαστήματα που ορίζεται.

Αυτά είναι $c_0 = 0, c_1 = \frac{2}{5}, c_2 = \frac{2}{3}, c_3 = \frac{4}{5}$.

Τα $c_0 = 0$ και $c_2 = \frac{2}{3}$ είναι σταθερά σημεία για την $T(x)$, άρα έχουμε δύο σταθερά σημεία με περίοδο 2, τα $c_1 = \frac{2}{5}$ και $c_3 = \frac{4}{5}$ ($Per_2(T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$).

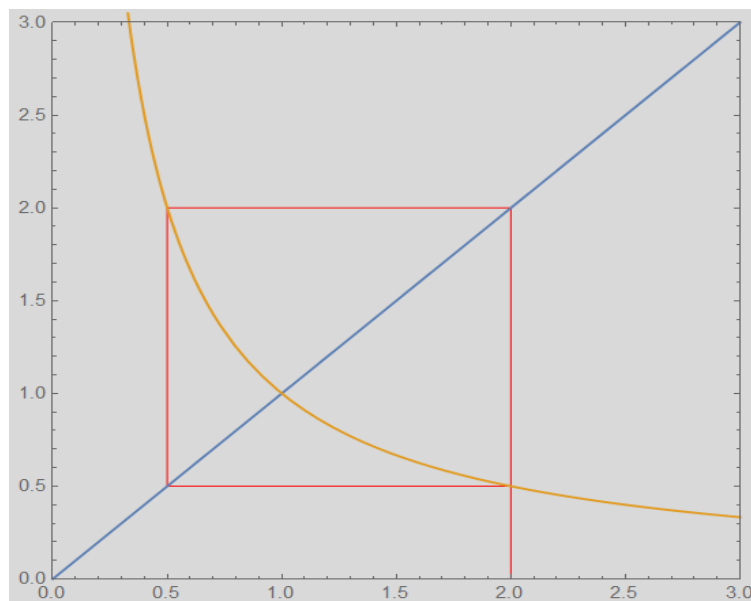
Παρατηρήστε ότι $T(2/5) = 4/5$ και $T^2(2/5) = 2(1 - 2 \cdot 2/5) = 2/5$ και ομοίως $T^2(4/5) = 2/5$.

Θα εξετάσουμε με την βοήθεια του θεωρήματος 2.6.2. την ευστάθεια των περιοδικών σημείων. Έχουμε $|T'(x)| = 2$, άρα $|T'(2/5)| |T'(4/5)| = 4 > 1$, οπότε τα περιοδικά σημεία είναι ασταθή. Στην τρίτη επανάληψη $T^3(x)$, θα έχουμε έξι περιοδικά σημεία με περίοδο τρία και βέβαια τα δύο σταθερά σημεία της $T(x)$.

Παράδειγμα 2.6.4. Έστω συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x \neq 1, x > 0$.

Δεν έχουμε σταθερά σημεία αφού $f(x) = \frac{1}{x} \neq x, (x \neq 1)$, όμως ισχύει $f^2(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ άρα έχουμε 2-κύκλο σημεία $\{x, \frac{1}{x}\}$.

Επίσης $|f'(x)f'\left(\frac{1}{x}\right)| = \left|\frac{-1}{x^2}(-x^2)\right| = 1$ συνεπώς το θεώρημα 2.6.2. δεν μας δίνει πληροφορία για την ευστάθεια των περιοδικών σημείων. Από το διάγραμμα ιστού (βλέπε σχήμα 2.6.3. με αρχικό σημείο $x = 2$), παρατηρούμε ότι τα περιοδικά σημεία είναι ευσταθή χωρίς να είναι όμως ελκτικά ή απωθητικά.



Σχήμα 2.6.3.

Παράδειγμα 2.6.5. Αν έχουμε την συνάρτηση $g(x) = -x$, αναζητώντας τα σταθερά της σημεία είδαμε, ότι έχει μόνο το $x = 0$, συνεπώς $Fix(g) = \{0\}$.

Ισχύει επίσης $g^2(x) = g(g(x)) = g(-x) = x$, ενώ $g(x) = -x$ και $g(-x) = x$, άρα κάθε σημείο της είναι περιοδικό με πρώτη περίοδο 2, δηλαδή $Per_2(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$!

Σημείωση 2.6.6. Όπως τα σταθερά σημεία έτσι και τα περιοδικά μπορεί να είναι ευσταθή αλλά όχι ελκτικά (Παράδειγμα 2.6.4.), όπως και ελκτικά αλλά όχι ευσταθή.

Σημείωση 2.6.7. Η λεκάνη έλξης του σταθερού σημείου $x = 0$ της $f(x) = \sin x$ είναι όλο το \mathbb{R} , οπότε θα ήταν αντιφατικό να έχει περιοδικά σημεία με περίοδο μεγαλύτερη ή ίση του δύο. Το ίδιο ισχύει και για την λογιστική συνάρτηση με $0 < \mu \leq 3$.

Σχόλιο 2.6.8. Σε τυπικά δυναμικά συστήματα, τα σταθερά σημεία και οι περιοδικές τροχιές είναι απομονωμένα με «πιο περίπλοκες» τροχιές ενδιάμεσα.

Τώρα ελέγχουμε τη σταθερότητα των περιοδικών σημείων.

Πόρισμα 2.6.9. Έστω διαφορίσιμη συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ με $c \in X$ ένα περιοδικό σημείο της πρώτης περιόδου k , δηλαδή $f^k(c) = c$, και $f^m(c) \neq c$ όταν $0 < m < k$.

- i) Αν $(f^k)'(c) < 1$ τότε c είναι περιοδικό ελκτικό σημείο.
- ii) Αν $(f^k)'(c) > 1$ τότε c είναι περιοδικό απωθητικό σημείο.
- iii) Αν $(f^k)'(c) = 1$ τότε c είναι οριακό περιοδικό σημείο.

Απόδειξη: Αυτό προκύπτει τετριμμένα από θεώρημα 2.3.8, και ορισμό 2.3.9.

Ορίζουμε $g(x) := f^k(x)$ και εξετάζουμε το $g(c) = c$. Τότε το c είναι ένα σταθερό σημείο έλξης/απώθησης/οριακό της g , συνεπώς το c είναι ένα σταθερό σημείο έλξης/απώθησης/οριακό της f^k και τελικά το c είναι μια περιοδική τροχιά έλξης/απώθησης/οριακή της f . ■

Θα δώσουμε παρακάτω τον ορισμό της υπερβολικότητας σε μονοδιάστατες συναρτήσεις (θυμηθείτε τον αντίστοιχο ορισμό 2.3.6. υπερβολικότητας ενός σταθερού σημείου).

Ορισμοί 2.6.10. Έστω συνάρτηση $f: X \rightarrow X$, $f \in C^1$ με $c \in X \subseteq \mathbb{R}$ ένα περιοδικό σημείο της, πρώτης περιόδου k . Το σημείο c λέγεται υπερβολικό αν $|(f^k(c))'| \neq 1$.

Μία συνάρτηση $f \in C^1$ στο X λέγεται υπερβολική εάν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n_0 \geq n$ ισχύει $|(f^{n_0}(x))'| \neq 1$.

Δηλαδή, για υπερβολικές συνάρτησεις θέλουμε να αποκλείσουμε οποιαδήποτε οριακή συμπεριφορά στις n -οστές επαναλήψεις.

2.7. Περιοδικά Σημεία της Λογιστικής συνάρτησης

Έχουμε την λογιστική συνάρτηση $L_\mu(x) = \mu x(1-x) = \mu x - \mu x^2$, $0 \leq x \leq 1$, όπου $0 < \mu \leq 4$, η οποία όπως είδαμε έχει ένα μόνο σταθερό σημείο $x = 0$ (ευσταθές) αν $0 < \mu \leq 1$, ενώ δύο $x = 0$ (ασταθές) και $x = 1 - 1/\mu$ (ευσταθές) όταν $1 < \mu \leq 4$.

❖ Αναζητούμε αρχικά 2-κύκλο περιοδικά σημεία.

Για να βρούμε 2-κύκλο περιοδικά σημεία της $L_\mu(x)$, με

$$L_\mu^2(x) = \mu(\mu x - \mu x^2)(1 - \mu x + \mu x^2) = \mu^2 x(1-x)(1 - \mu x + \mu x^2) = \mu^2 x(1 - x - \mu x + \mu x^2 + \mu x^2 - \mu x^3) = \mu^2 x(1 - x - \mu x + 2\mu x^2 - \mu x^3)$$

λύνουμε την εξίσωση

$$L_\mu^2(x) = x \Leftrightarrow \mu^2 x(1 - x - \mu x + 2\mu x^2 - \mu x^3) - x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x[\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1](\mu x - \mu + 1) = 0$$

Παίρνουμε ως λύσεις τα σταθερά σημεία $c = 0$ και $c = 1 - 1/\mu$ της $L_\mu(x)$ και τις ρίζες αν υπάρχουν του τριωνύμου $\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1$. Η Διακρίνουσά του είναι

$$\Delta = \mu^2(\mu^2 + 2\mu + 1) - 4\mu^2(\mu + 1) = \mu^2(\mu^2 - 2\mu - 3).$$

Αν $0 < \mu < 3$ τότε $\mu^2 - 2\mu - 3 < 0$ άρα δεν έχουμε 2-κύκλο περιοδικά σημεία.

Αν $\mu = 3$, τότε $\Delta = 0$, και προκύπτει η λύση $x = 2/3$, το οποίο όμως είναι σταθερό σημείο της $L_\mu(x)$, οπότε δεν έχουμε επίσης 2-κύκλο περιοδικά σημεία.

Όταν $3 < \mu < 4$, είναι $\mu^2 - 2\mu - 3 > 0$ δηλαδή $\Delta > 0$, άρα έχουμε δύο επιπλέον λύσεις

$$c_{1,2} = \frac{\mu(\mu + 1) \pm \sqrt{\mu^2(\mu^2 - 2\mu - 3)}}{2\mu^2} = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}$$

Τότε $|L'_\mu(c_1)L'_\mu(c_2)| = |(\mu - 2\mu c_1)(\mu - 2\mu c_2)| = |\mu^2(1 - 2c_1)(1 - 2c_2)| = |\mu^2[1 - 2(c_1 + c_2) + 4c_1c_2]| = \left| \mu^2 \left(1 - 2 \frac{\mu(\mu+1)}{\mu^2} + 4 \frac{\mu+1}{\mu^2} \right) \right| = |\mu^2 - 2\mu(\mu + 1) + 4(\mu + 1)| = |\mu^2 - 2\mu^2 - 2\mu + 4\mu + 4| = |-\mu^2 + 2\mu + 4| = |\mu^2 - 2\mu - 4|$

Για να είναι τα σημεία ευσταθή πρέπει $|L'_\mu(c_1)||L'_\mu(c_2)| < 1$ ή $|\mu^2 - 2\mu - 4| < 1$ άρα $-1 < \mu^2 - 2\mu - 4 < 1$ και καταλήγουμε στις ανισώσεις $\mu^2 - 2\mu - 3 > 0$ και $\mu^2 - 2\mu - 5 > 0$ από τις οποίες αναζητούμε λύσεις όταν $3 < \mu \leq 4$.

Τα παραπάνω ικανοποιούνται όταν $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} \cong 3.44949$. Τότε έχουμε 2-κύκλο περιοδικά σημεία $\{c_1, c_2\}$.

Αν $\mu = 1 + \sqrt{6}$, τότε $(L_\mu^2(c_1))' = L'_\mu(c_1)L'_\mu(c_2) = -(1 + \sqrt{6})^2 + 2(1 + \sqrt{6}) - 4 = -1$ με

$$(L_\mu^2)'(x) = \mu^2(1 - 2x - 2\mu x + 6\mu x^2 - 4\mu x^3),$$

$$(L_\mu^2)''(x) = \mu^2(-2 - 2\mu + 12\mu x - 12\mu x^2),$$

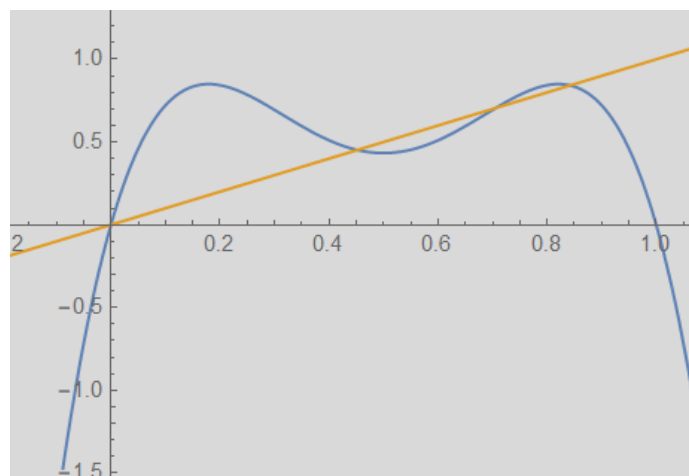
$$(L_\mu^2)'''(x) = \mu^2(12\mu - 24\mu x) = 12\mu^3(1 - 2x),$$

ενώ η παράγωγος Schwarzian (Ορισμός 2.4.4.) είναι

$$SL_\mu^2(c_1) = -(L_\mu^2)'''(c_1) - \frac{3}{2}((L_\mu^2)''(c_1))^2 = -12\mu^3(1 - 2c_1) - \frac{3}{2}[\mu^2(-2 - 2\mu + 12\mu c_1 - 12\mu c_1^2)]^2 < 0,$$

άρα ο 2-κύκλος $\{c_1, c_2\}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής (Θεώρημα 2.4.5.).

Αν $\mu > 1 + \sqrt{6}$, τότε ο 2-κύκλος $\{c_1, c_2\}$ είναι ασταθής διότι $|L'_\mu(c_1)L'_\mu(c_2)| > 1$



Σχήμα 2.7.1.

Για $\mu = 3.4$, φαίνονται στο γράφημα τα δύο σταθερά σημεία $x = 0$, $x = 1 - \frac{1}{3.4} = 0.705$ και τα 2-κύκλο περιοδικά σημεία c_1 και c_2 .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω,

Σημείωση 2.7.1. Η Λογιστική συνάρτηση $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$,

- αν $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ έχουμε 2-κύκλο ασυμπτωτικά ευσταθή περιοδικά σημεία .
- $\mu > 1 + \sqrt{6}$ έχουμε 2-κύκλο ασταθή περιοδικά σημεία .

Σχόλιο 2.7.2. Τα παραπάνω δείχνουν ότι έχουμε μια διακλάδωση όταν $\mu = 3$ όπου δημιουργείται ένας 2-κύκλος ο οποίος δεν υπήρχε προηγουμένως. Υπάρχει όμως και μια άλλη διακλάδωση στο $\mu = 1 + \sqrt{6}$.

Αυτό σημαίνει ότι για $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, όταν χρησιμοποιούμε γραφική επανάληψη σημείων κοντά στο c_1 και c_2 , θα πλησιάσουν την τροχιά περιόδου 2 και όχι το σταθερό σημείο (το οποίο είναι πλέον ασταθές). Στην πραγματικότητα, μπορεί να αποδειχθεί ότι για αυτό το εύρος τιμών του μ , η λεκάνη έλξης του 2-κύκλου αποτελείται από όλα τα $(0, 1)$, (εκτός από το σταθερό σημείο $1 - 1/\mu$ και τελικά σταθερά σημεία όπως το $1/\mu$). Όταν το μ υπερβαίνει το $1 + \sqrt{6} = 3.449499 \dots$, τα σημεία περιόδου 2 γίνονται ασταθή και θα δούμε ότι συμβαίνει κάτι διαφορετικό. Έχουμε μια άλλη διακλάδωση όταν $\mu = 1 + \sqrt{6}$, με τη γέννηση ενός 4-κύκλου με ελκτική περίοδο.

Σχόλιο 2.7.3. Είδαμε στο παράδειγμα 2.3.24. ότι η λογιστική συνάρτηση για $\mu = 2$ έχει υπερ-ελκτικό σταθερό σημείο το $x = 1/2$.

Θα εξετάσουμε εάν υπάρχει υπερ-ελκτικός 2-κύκλος για την L_μ όταν $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$. Ας υποθέσουμε ότι ο 2-κύκλος της L_μ που αποτελείται από τα σημεία $\{a, b\}$ είναι υπερ-ελκτικός. Τότε ισχύει

$$a = \mu b(1 - b) \text{ και } b = \mu a(1 - a)$$

Πολ/ζουμε τις παραπάνω ισότητες και έχουμε $\mu^2(1 - a)(1 - b) = 1$

Επίσης πρέπει $(L_\mu^2)'(a) = L'_\mu(a)L'_\mu(b) = 0$

$$\text{δηλαδή } \mu^2(1 - 2a)(1 - 2b) = 0$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $a = 1/2$ οπότε $b = \mu \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}$ ή αντίστροφα $b = \frac{1}{2}$ και $a = \frac{\mu}{4}$.

Ας δεχτούμε ότι $a = 1/2$, τότε

$$\mu^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \mu^3 - 4\mu^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4) = 0$$

Προκύπτει όπως περιμέναμε για το υπερ-ελκτικό σταθερό σημείο $x = 1/2$, $\mu = 0$, ενώ από το τριώνυμο δεχόμαστε την τιμή $\mu = 1 + \sqrt{5}$.

Συνεπώς η Λογιστική συνάρτηση όταν $\mu = 1 + \sqrt{5}$, έχει υπερ-ελκτικό 2-κύκλο από τα σημεία $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

Ας συνοψίσουμε τα συμπεράσματά που έχουμε βγάλει έως εδώ.

Για $0 < \mu < b_1 = 1$, το $c = 0$ είναι το μόνο σταθερό σημείο το οποίο είναι ελκτικό. Υπάρχει μια διακλάδωση στο $b_1 = 1$, όπου δημιουργείται ένα μη μηδενικό σταθερό σημείο $c = 1 - 1/\mu$. Αυτό το σταθερό σημείο ελκύει για $\mu \leq 3$ (και το $c = 0$ δεν ελκύει πλέον) και υπερελκύει όταν $\mu = s_1 = 2$.

Η δεύτερη διακλάδωση συμβαίνει όταν $\mu = b_2 = 3$. Το σταθερό σημείο $c = 1 - 1/\mu$ γίνεται ασταθές και δημιουργείται ένας ελκτικός 2-κύκλος για $3 < \mu < 1 + \sqrt{6} = b_3$.

Όταν το μ υπερβαίνει το $1 + \sqrt{6}$, ο 2-κύκλος παύει να είναι ελκτικός και γίνεται απωθητικός. Επιπλέον, δημιουργείται ένας 4-κύκλος που ελκύει μέχρι το μ να υπερβεί μια τιμή b_4 , οπότε γίνεται απωθητικός και δημιουργείται ένας 8-κύκλος έλξης. Αυτός ο τύπος διπλασιασμού περιόδου συνεχίζεται έτσι ώστε όταν το μ υπερβαίνει το b_n , δημιουργείται ένας $2n-1$ -κύκλος έλξης μέχρι το μ να φτάσει στο b_{n+1} . Αυτοί οι κύκλοι γίνονται υπερελκτικοί σε κάποιο s_n ($b_n < s_n < b_{n+1}$).

Αυτή η συμπεριφορά συνεχίζεται με τη δημιουργία $2n$ -κύκλων για όλα τα $n \in \mathbb{Z}^+$, μέχρι το μ να φτάσει περίπου 3,57.

Με άλλα λόγια, $b_n < \mu < b_{n+1}$, η L_μ έχει έναν σταθερό $2n$ -κύκλο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $b_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cong 3.57$.

Παρατηρήστε την επίδραση της παραμέτρου $\mu = 3.9$ στο δυναμικό σύστημα (150 σημεία της τροχιάς) με αρχική τιμή $x = 0.8$.



Σημείωση 2.7.4. Διάγραμμα Διακλάδωσης

Η συμπεριφορά που περιγράφεται παραπάνω μπορεί να απεικονιστεί γραφικά χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα διακλάδωσης. Για να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα

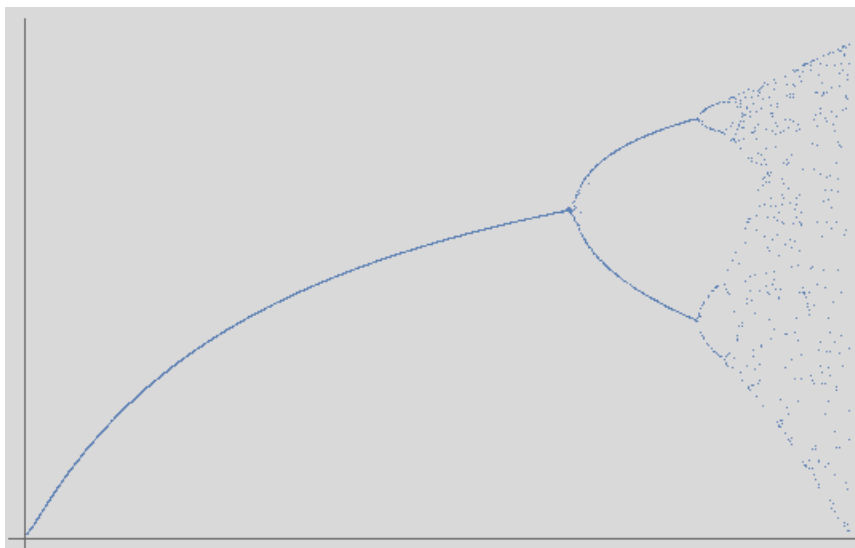
διακλάδωσης, απεικονίζουμε μ , $0 \leq \mu \leq 4$ κατά μήκος του άξονα x , και τιμές του $L_\mu^n(x)$ κατά μήκος του άξονα y . Η ιδέα είναι να υπολογίσουμε (ας πούμε) για κάθε τιμή του μ τις πρώτες 500 επαναλήψεις κάποιου (αυθαίρετα επιλεγμένου) σημείου x_0 . Αγνοούμε τις πρώτες 450 επαναλήψεις και απεικονίζουμε τις επόμενες 50. Έτσι, για παράδειγμα, εάν $1 < \mu < 3$, επειδή το σταθερό σημείο έλκει, οι επαναλήψεις θα πλησιάσουν το σταθερό σημείο $1 - 1/\mu$, επομένως για n μεγάλες τιμές, αυτό που βλέπουμε να απεικονίζεται θα είναι (πολύ κοντά) στην τιμή $1 - 1/\mu$.

Για $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ το σταθερό σημείο έχει γίνει απωθητικό, επομένως αυτό δεν εμφανίζεται πλέον, αλλά ο 2-κύκλος έχει γίνει ελκτικός, επομένως βλέπουμε να απεικονίζονται τα 2 σημεία του 2-κύκλου. Αυτό συνεχίζεται με τον 4-κύκλο, τον 8-κύκλο κ.λπ. Αυτό ονομάζεται διαδρομή διπλασιασμού περιόδου προς το χάος.

Μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα διάγραμμα διακλάδωσης για την $L_\mu(x)$ χρησιμοποιώντας το Mathematica με τον ακόλουθο κώδικα:

```
f[x_] := x * (1 - x)
h[x_, a_] := a * f[x]
g[a_] := (k[x_] := h[x, a];
A = NestList[k, Random[Real, {0, 1}], 100];
      |λίστα ένθεσης          |πραγματικός αριθμός
Return[A[[100]]])
      |απόδοση
B = Table[g[j / 1000], {j, 1000, 4000}];
      |πίνακας πινών
ListPlot[B, PlotStyle -> PointSize[0.001], Ticks -> False]
```

Το διάγραμμα διακλάδωσης φαίνεται στο σχήμα 2.7.2

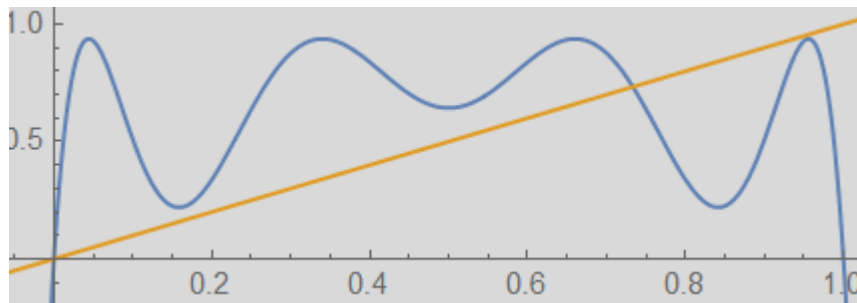


Σχήμα 2.7.2.

❖ Αναζητούμε **3-κύκλο** περιοδικά σημεία.

Η επίλυση της εξίσωσης $L_\mu^3(x) = x$ είναι δύσκολη, για αυτό θα αναζητήσουμε την τιμή του μ για την οποία έχουμε 3-κύκλο περιοδικά σημεία από το γράφημά της, αναζητώντας τα σταθερά σημεία της $L_\mu^3(x)$.

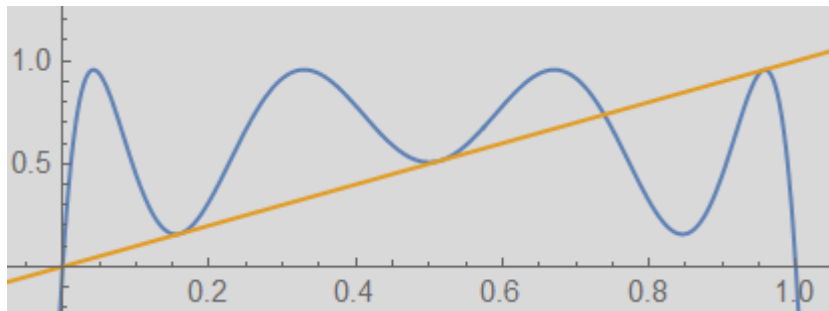
Με την βοήθεια κάποιου λογισμικού (π.χ. Mathematica) σχεδιάζουμε την $L_\mu^3(x)$ δίνοντας τιμές στο μ και παρατηρούμε ότι όταν $\mu < 1 + \sqrt{8} \cong 3.82$ αλλά και πολύ κοντά σε αυτό έχουμε τα γνωστά σταθερά σημεία $x = 0$ και $x = 1 - 1/\mu$ (Σχήμα 2.7.3.).



Σχήμα 2.7.3.

Γραφική παράσταση της $L_\mu^3(x)$ για $\mu = 3.75 < 1 + \sqrt{8}$

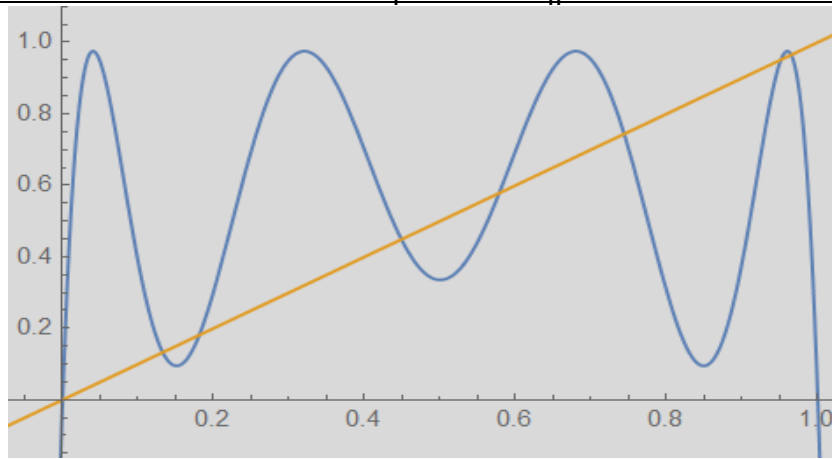
Όταν όμως $\mu = 1 + \sqrt{8}$ εμφανίζονται άλλα τρία σταθερά σημεία (Σχήμα 2.7.4.). Εμφανίστηκε ένας 3-κύκλος.



Σχήμα 2.7.4.

Γραφική παράσταση της $L_\mu^3(x)$ για $\mu = 1 + \sqrt{8}$

Τέλος παρατηρούμε στο Σχήμα 2.7.5. όταν $\mu > 1 + \sqrt{8}$ εμφανίζονται άλλα δύο 3-κύκλο περιοδικά σημεία.



Σχήμα 2.7.5.

Γραφική παράσταση της $L_\mu^3(x)$ για $\mu = 3.9 > 1 + \sqrt{8}$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι έχουμε διακλάδωση για $\mu = 1 + \sqrt{8}$

Η εξίσωση $L_\mu^3(x) = x$ δύναται να απλοποιηθεί αν παραβλέψουμε τα δύο σταθερά σημεία της $L_\mu(x)$. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $g_\mu(x)$ με

$$g_\mu(x) = \frac{L_\mu^3(x) - x}{L_\mu(x) - x}. \text{ Κάνοντας τις πράξεις παίρνει την μορφή}$$

$$g_\mu(x) = \mu^6 x^6 - (\mu^5 + 3\mu^6)x^5 + (\mu^4 + 4\mu^5 + 3\mu^6)x^4 - (\mu^3 + 3\mu^4 + 5\mu^5 + \mu^6)x^3 + (\mu^2 + 3\mu^3 + 3\mu^4 + 2\mu^5)x^2 - (\mu + 2\mu^2 + 2\mu^3 + \mu^4)x + 1 + \mu + \mu^2$$

Θέτουμε $\lambda = 7 + 2\mu - \mu^2$ και

$$h_\mu(z) = g_\mu\left(-\frac{z}{\mu}\right) = z^6 + (3\mu + 1)z^5 + (3\mu^2 + 4\mu + 1)z^4 + (\mu^3 + 5\mu^2 + \mu + 1)z^3 + (2\mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu + 1)z^2 + (\mu^3 + 2\mu^2 + 2\mu + 1)z + 1 + \mu + \mu^2$$

Και η παραπάνω συνάρτηση μπορεί να γραφεί (κάντε επαλήθευση)

$$h_\mu(z) = \left[z^3 + z^2 \frac{3\mu + 1}{2} + z \left(2\mu + 3 - \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\mu + 5}{2} - \frac{\lambda}{2} \right]^2 + \frac{\lambda}{4} (z + 1)^2 (z + \mu)^2$$

Επίσης να αναφέρουμε ότι $\lambda > 0$ όταν $\mu < 1 + \sqrt{8}$, $\lambda = 0$ για $\mu = 1 + \sqrt{8}$, ενώ $\lambda < 0$ με $\mu > 1 + \sqrt{8}$.

Πρόταση 2.7.5.

- i) Αν $0 < \mu < 1 + \sqrt{8}$ η λογιστική συνάρτηση $L_\mu(x)$ δεν έχει 3-κύκλο.
- ii) Αν $\mu = 1 + \sqrt{8}$ τότε η εξίσωση $h_\mu(z) = 0$ έχει τρεις διακριτές ρίζες, κάθε μία από τις οποίες έχει πολλαπλότητα δύο. Αυτές οι τρεις ρίζες αποτελούν έναν 3-κύκλο για την $L_\mu(x)$.
- iii) Αν $\mu > 1 + \sqrt{8}$ (αλλά πολύ κοντά) τότε η εξίσωση $h_\mu(z)=0$ έχει έξι απλές ρίζες που δημιουργούν δύο 3-κύκλους για την $L_\mu(x)$.

Απόδειξη:

- i) Αν $0 < \mu < 1 + \sqrt{8}$ τότε $\lambda > 0$ άρα $h_\mu(z) > 0$. Τότε η $h_\mu(z)$ είναι θετικά ορισμένη και η εξίσωση $h_\mu(z) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Συνεπώς, η $L_\mu(x)$ δεν έχει 3-κύκλο.
- ii) Αν $\mu = 1 + \sqrt{8}$ τότε $\lambda = 0$ και η εξίσωση $h_\mu(z)=0$ γίνεται

$$z^3 + z^2 \frac{3(1 + \sqrt{8}) + 1}{2} + z(2 + 2\sqrt{8} + 3) + \frac{1 + \sqrt{8} + 5}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^3 + z^2(2 + 3\sqrt{2}) + z(5 + 4\sqrt{2}) + 3 + \sqrt{2} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει τρεις πραγματικές ρίζες (χρησιμοποιώντας κατάλληλο λογισμικό)

$$z_i = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}} + \frac{2i\pi}{3}\right)\right) - \frac{2 + 3\sqrt{2}}{3}, i = 0,1,2$$

- iii) Αν $\mu > 1 + \sqrt{8}$ τότε $\lambda < 0$ και μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε $h_\mu(z) = h_1(z)h_2(z)$ χρησιμοποιώντας τη διαφορά δύο τετραγώνων, και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής σε καθένα από τα $h_1(z)$ και $h_2(z)$, για να δούμε ότι το καθένα έχει τρεις διαφορετικές ρίζες που αντιστοιχούν σε δύο 3-κύκλους, οι οποίοι μπορούν στη συνέχεια να αποδειχθούν διακριτοί.

Σημείωση 2.7.6.

Θα αναζητήσουμε υπερ-ελκτικό 3-κύκλο για την λογιστική συνάρτηση.

Έστω ότι αυτός είναι ο $\{c_1, c_2, c_3\}$. Πρέπει $(L_\mu^3)'(c_1) = L'_\mu(c_1)L'_\mu(c_2)L'_\mu(c_3) = 0$ δηλαδή $\mu^3(1 - 2c_1)(1 - 2c_2)(1 - 2c_3) = 0$. Ας δεχτούμε ότι $c_1 = 1/2$, τότε $(L_\mu^3)'(1/2) = 1/2$, δηλαδή $c_1 = 1/2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $L_\mu^3(x) = x$ ή (όπως είδαμε)

$$\text{της } g_\mu(x) = \frac{L_\mu^3(x) - x}{L_\mu(x) - x} = x$$

$$\text{Άρα } g_\mu(1/2) = 0 \text{ με}$$

$$\begin{aligned} g_\mu(1/2) &= \mu^6 \frac{1}{64} - (\mu^5 + 3\mu^6) \frac{1}{32} + (\mu^4 + 4\mu^5 + 3\mu^6) \frac{1}{16} - (\mu^3 + 3\mu^4 + 5\mu^5 + \mu^6) \frac{1}{8} + \\ &+ (\mu^2 + 3\mu^3 + 3\mu^4 + 2\mu^5) \frac{1}{4} - (\mu + 2\mu^2 + 2\mu^3 + \mu^4) \frac{1}{2} + 1 + \mu + \mu^2 = \\ &= \frac{1}{64} (\mu^6 - 2\mu^5 - 6\mu^6 + 4\mu^4 + 16\mu^5 + 12\mu^6 - 8\mu^3 - 24\mu^4 - 40\mu^5 - 8\mu^6 + 16\mu^2 \\ &\quad + 48\mu^3 + 48\mu^4 + 32\mu^5 - 32\mu - 64\mu^2 - 64\mu^3 - 32\mu^4 + 64 + 64\mu + 64\mu^2) \\ &= \frac{1}{64} (-\mu^6 + 6\mu^5 - 4\mu^4 - 24\mu^3 + 16\mu^2 + 32\mu + 64) \end{aligned}$$

Θεωρώντας το πολυώνυμο $P(a) = a^6 - 6a^5 + 4a^4 + 24a^3 - 16a^2 - 32a + 64$
και θέτοντας $\beta = a + 1$ καταλήγουμε στην μορφή

$$P(\beta) = (\beta - 1)^6 - 6(\beta - 1)^5 + 4(\beta - 1)^4 + 24(\beta - 1)^3 - 16(\beta - 1)^2 - 32(\beta - 1) + 64 = \dots = \beta^6 - 11\beta^4 + 35\beta^2 - 89$$

Αντικαθιστώντας $\omega = \beta^2$ καταλήγουμε στο πολυώνυμο

$$P(\omega) = \omega^3 - 11\omega^2 + 35\omega - 89$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική ρίζα (με χρήση Mathematica) η οποία μας οδηγεί στην τιμή $\mu = 3.83118740 \dots$

Βρίσκουμε, λοιπόν, τα άλλα δύο σημεία του υπερ-ελκτικού 3-κύκλου για την παραπάνω τιμή του μ , με $c_1 = 1/2$, $c_2 = L_{3.83..}(1/2) = \frac{3.83\dots}{4} = 0.95796$,

$$\text{και } c_3 = L_{3.83..}^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3.832..^2}{4} \left(1 - \frac{3.83\dots}{4}\right) = 0.1548..$$

Παράδειγμα 2.7.8. Αν $\mu = 4$

Θα εξετάσουμε ιδιαίτερα την περίπτωση όπου $\mu = 4$, δηλαδή

$$L_4(x) = 4x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Σε αυτήν την περίπτωση η λογιστική συνάρτηση εκφράζεται από την εξίσωση διαφορών $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση (αφού $0 \leq x_n \leq 1$) $x_n = \sin^2 \theta_n$ με $\theta_n \in (0, \frac{\pi}{2}]$ και έχουμε $\sin^2 \theta_{n+1} = 4 \sin^2 \theta_n (1 - \sin^2 \theta_n)$ ή $\sin^2 \theta_{n+1} = 4 \sin^2 \theta_n \cos^2 \theta_n$ ή $\sin^2 \theta_{n+1} = (2 \sin \theta_n \cos \theta_n)^2$ ή $\sin^2 \theta_{n+1} = \sin^2 2\theta_n$ άρα $\sin \theta_{n+1} = \pm \sin 2\theta_n$

Όμως $\theta_n > 0$ αφού $\theta_n \in (0, \frac{\pi}{2}]$ άρα $\theta_{n+1} = 2\theta_n$

Η επαναλαμβανόμενη συνάρτηση $\theta_{n+1} = 2\theta_n$ είναι γεωμετρική πρόοδος, οπότε η λύση είναι $\theta_n = 2^n \theta_0$, όπου $\theta_0 = \arcsin \sqrt{x_0}$ είναι η αρχική τιμή.

Άρα η εξίσωση διαφορών έχει λύση $x_n = \sin^2(2^n \theta_0)$

Αναζητώντας σημεία n -κύκλου λύνουμε την εξίσωση $L_4^n(x) = x$ δηλαδή

$\sin^2 \theta = \sin^2(2^n \theta)$ από την οποία προκύπτει

$\pm \theta = 2^n \theta + 2k\pi$ ή $\pm \theta = 2^n \theta + (2k + 1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ συνοπτικά δηλαδή

$$\pm \theta = 2^n \theta + k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2^n \pm 1} \quad \text{με } n = 1, 2, 3, \dots \quad k \in \mathbb{Z}$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε κύκλους με περιόδους για οποιοδήποτε $n = 1, 2, 3, \dots$, με

$$Per_n(L_4) = \left\{ \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2^n - 1} \right) \text{ με } 0 \leq k < 2^{n-1} \right\} \cup \left\{ \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2^n + 1} \right) \text{ με } 0 \leq k \leq 2^{n-1} \right\}$$

Για να βρούμε 2-κύκλο θέτουμε $n = 2$, $Per_2(L_4) = \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{5} \right), \sin^2 \left(\frac{2\pi}{5} \right) \right\}$

Ενώ για $n = 3$ έχουμε δύο 3-κύκλους,

$$Per_3(L_4) = \left\{ \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{7} \right), \sin^2 \left(\frac{2\pi}{7} \right), \sin^2 \left(\frac{3\pi}{7} \right) \right\}, \left\{ \sin^2 \left(\frac{\pi}{9} \right), \sin^2 \left(\frac{2\pi}{9} \right), \sin^2 \left(\frac{4\pi}{9} \right) \right\} \right\}$$

2.8. Η Οικογένεια των συναρτήσεων Σκηνής

Η γενική τους μορφή είναι

$$T_\mu: [0,1] \rightarrow [0,1] \quad \text{με} \quad T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

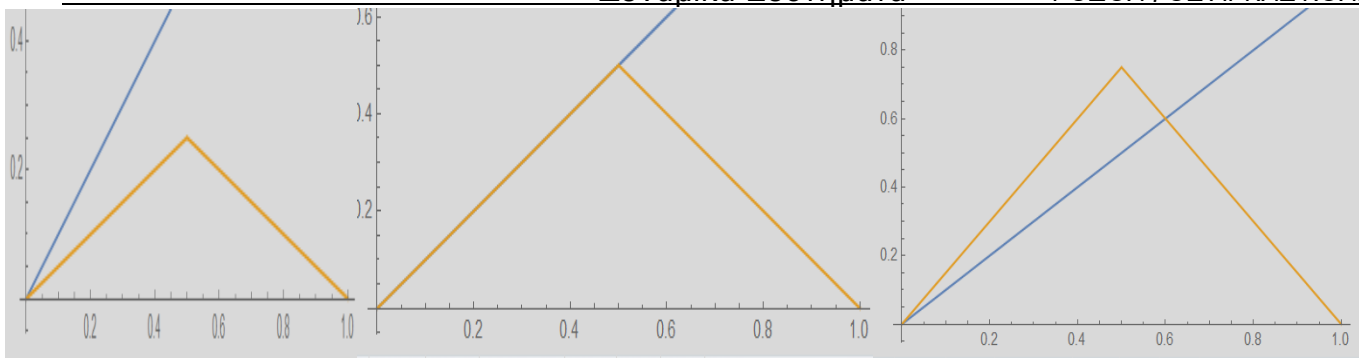
και ορίζουν δυναμικό σύστημα στο διάστημα $[0,1]$.

Θα εστιάσουμε αρχικά τις περιπτώσεις όπου $0 < \mu \leq 2$

- Αν $0 < \mu < 1$, η εξίσωση $T_\mu(x) = x$ έχει μοναδική λύση $x = 0$, αφού $T(x) < x$ στο $(0, 1/2]$ και όταν $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 \leq 1-x \leq \frac{1}{2}$ και $0 < \mu < 1$ άρα $0 \leq \mu(1-x) \leq \frac{1}{2}$ δηλαδή $0 \leq T_\mu(x) < \frac{1}{2} < x$. Ισχύει $T'_\mu(0) = \mu < 1$, άρα το $x = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σταθερό σημείο της $T(x)$ που είναι καθολικά ελκτικό, δηλαδή η λεκάνη έλξης του είναι $B_{T_\mu}(0) = [0,1]$.
- Αν $\mu = 1$, τότε όλα τα σημεία του διαστήματος $[0, 1/2]$ είναι σταθερά σημεία αφού $T_1(x) = x$. Επίσης τα σημεία $\frac{1}{2} < x \leq 1$ είναι τελικά σταθερά σημεία διότι $T_1^2(x) = T_1(1-x) = 1-x$ αφού $0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2}$. Είναι φανερό ότι τα σταθερά σημεία είναι ευσταθή όχι όμως ελκτικά.
- Αν $1 < \mu < 2$, εκτός από το σταθερό σημείο $x = 0$, έχουμε και δεύτερο αφού η εξίσωση $T_\mu(x) = x$ έχει λύση στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$. Αυτή είναι $\mu(1-x) = x \Leftrightarrow \mu - \mu x = x \Leftrightarrow x = \frac{\mu}{\mu+1}$. Ισχύει $|T'_\mu(0)| = |T'_\mu(\frac{\mu}{\mu+1})| = \mu > 1$ άρα τα δύο σταθερά σημεία είναι ασταθή.

Η συνάρτηση $T_\mu(x)$ παρουσιάζει διακλάδωση για $\mu = 1$ αφού δημιουργείται νέο σταθερό σημείο στο διάστημα $(1/2, 1)$.

- Αν $\mu = 2$, είδαμε στο παράδειγμα 2.2.5. ότι η $T_2(x)$ έχει δύο απωθητικά σταθερά σημεία 0 και $2/3$, διότι $|T'_2(0)| = |T'_2(2/3)| = 2 > 1$.



Σχήμα 2.8.1.

Γραφική παράσταση της $T_\mu(x)$ για $\mu = 0.5, 1, 1.5$

Σημείωση 2.8.1. Αναζητούμε **2-κύκλο** της $T_\mu(x)$

Μπορείτε να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $T_\mu^2(x)$ έχει την μορφή

$$T_\mu^2(x) = \begin{cases} \mu^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2\mu} \\ \mu(1 - \mu x), & \frac{1}{2\mu} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1 - \mu + \mu x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2\mu} \\ \mu^2(1 - x), & 1 - \frac{1}{2\mu} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Δείτε το παράδειγμα 2.6.3. όπου $\mu = 2$.

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $T_\mu^2(x) = x$, όταν $0 \leq x \leq 1$, δηλαδή επιλύουμε τις εξισώσεις :

όταν $0 \leq x \leq \frac{1}{2\mu}$: $T_\mu^2(x) = x \Leftrightarrow \mu^2 x = x \Leftrightarrow x = 0$, το σταθερό σημείο της $T_\mu^2(x)$,

όταν $\frac{1}{2\mu} \leq x \leq \frac{1}{2}$: $T_\mu^2(x) = x \Leftrightarrow \mu(1 - \mu x) = x \Leftrightarrow x = \frac{\mu}{1 + \mu^2}$, εάν $\frac{1}{2\mu} \leq \frac{\mu}{1 + \mu^2} \leq \frac{1}{2}$

όταν $\frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2\mu}$: $T_\mu^2(x) = x \Leftrightarrow \mu(1 - \mu + \mu x) = x \Leftrightarrow x = \frac{\mu}{1 + \mu}$,

σταθερό σημείο της $T_\mu(x)$, και,

όταν $1 - \frac{1}{2\mu} \leq x \leq 1$: $T_\mu^2(x) = x \Leftrightarrow \mu^2(1 - x) = x \Leftrightarrow x = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}$,

$$\text{εάν } 1 - \frac{1}{2\mu} \leq \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \leq 1$$

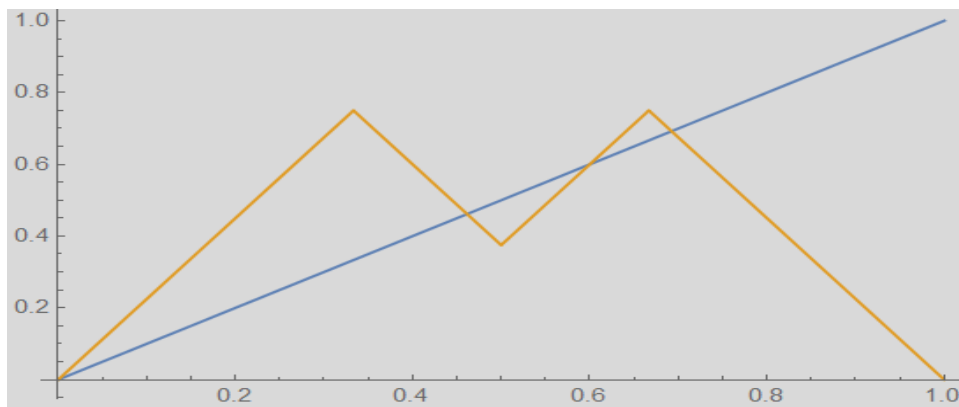
Η δεύτερη και τέταρτη εξισώσεις δεν έχουν σε κάθε περίπτωση λύσεις. Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν τους περιορισμούς που αναφέρονται. Μπορούμε όμως πιο εύκολα να απαιτήσουμε $T_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$, για να προκύψουν τέσσερα σημεία τομής της απεικόνισης της $T_\mu^2(x)$ και της ευθείας $y = x$ (βλέπε σχήμα 2.8.2.)

$$\text{Όμως } T_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\mu - \mu^2 = 1 \Leftrightarrow (\mu - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1,$$

Άρα ο 2-κύκλος εμφανίζεται όταν $\mu > 1$ (αν $\mu \leq 1$, δεν υπάρχουν 2-περιοδικά σημεία).

Άρα έχουμε τον 2-κύκλο όταν $\mu > 1$, με $Per_2(T_\mu) = \left\{ \frac{\mu}{1+\mu^2}, \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \right\}$ όπου

$$\frac{1}{2\mu} \leq \frac{\mu}{1+\mu^2} \leq \frac{1}{2} \text{ και } 1 - \frac{1}{2\mu} \leq \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \leq 1$$



Σχήμα 2.8.2.

Γραφική παράσταση της $T_\mu^2(x)$ για $\mu = 1.5$

Έχουμε

$$(T_\mu^2)'(x) = \begin{cases} \mu, & 0 < x < \frac{1}{2\mu} \\ -\mu^2, & \frac{1}{2\mu} < x < \frac{1}{2} \\ \mu^2, & \frac{1}{2} < x < 1 - \frac{1}{2\mu} \\ -\mu^2, & 1 - \frac{1}{2\mu} < x < 1 \end{cases}$$

και ισχύει $|(T_\mu^2)'(\frac{\mu}{1+\mu^2})| = \left| \left(T_\mu \left(\frac{\mu}{1+\mu^2} \right) \right)' \left(T_\mu \left(\frac{\mu^2}{1+\mu^2} \right) \right)' \right| = |\mu^4| > 1$ αφού $\mu > 1$, άρα ο 2-κύκλος είναι ασταθής.

Σημείωση 2.8.2. Αναζητούμε 3-κύκλο της $T_\mu(x)$

Όπως και στην περίπτωση του 2-κύκλου, αναζητούμε τη μικρότερη τιμή του μ για την οποία υπάρχει ένας τριπλός κύκλος. Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην περίπτωση του διπλού κύκλου, αναζητούμε την τιμή της μεγαλύτερης ρίζας της εξίσωσης $T_\mu^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $T_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) = \mu\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$ για $\frac{1}{2\mu} \leq x \leq \frac{1}{2}$ (βλέπε σημείωση 2.2.1.) έχουμε $\mu\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$ και παίρνοντας την επόμενη επανάληψη της $T_\mu(x)$, παίρνουμε

$$T_\mu^3\left(\frac{1}{2}\right) = \mu^2\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu^3 - 2\mu^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu - 1)(\mu^2 - \mu - 1) = 0$$

Οι ρίζες είναι $\mu=1$ και $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Τελικά έχουμε διακλάδωση όταν $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ όπου εμφανίζονται για πρώτη φορά περιοδικά σημεία με περίοδο τρία.

Σημείωση 2.8.3. Γενικά, μπορεί να αποδειχθεί ότι για $k > 3$ περιττό, η περίοδος k εμφανίζεται για πρώτη φορά όταν το μ είναι ίσο με τη μεγαλύτερη πραγματική ρίζα της εξίσωσης $\mu^k - 2\mu^{k-1} + 2\mu^{k-3} - 2\mu^{k-4} + \dots - 2\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\mu - 1)(\mu^{k-1} - \mu^{k-2} - \mu^{k-3} + \mu^{k-4} - \mu^{k-5} + \mu^{k-6} \dots + \mu - 1) = 0$$

2.9. Θεώρημα του Sharkovsky

Αρχικά θα θυμίσουμε το θεώρημα 2.2.8. που αφορά τα σταθερά σημεία μιας συνάρτησης σε διάστημα, το οποίο θα χρειαστούμε στις αποδείξεις προτάσεων που θα ακολουθήσουν

Θεώρημα 2.9.1. Έστω $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνεχής συνάρτηση, όπου I είναι ένα διάστημα με $J = f(I) \supseteq I$, τότε η $f(x)$ έχει ένα σταθερό σημείο στο διάστημα I .

Λήμμα 2.9.2. Έστω $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνεχής συνάρτηση. Αν $J \subseteq f(I)$ είναι ένα κλειστό φραγμένο διάστημα, τότε υπάρχει ένα κλειστό φραγμένο διάστημα $K \subseteq I$ με $f(K) = J$.

Απόδειξη: Έστω $J = [\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

Τότε υπάρχουν $\gamma, \delta \in I$ όπου $f(\gamma) = \alpha$ και $f(\delta) = \beta$.

Θέλουμε να ορίσουμε το σημείο του I που είναι πλησιέστερα στο γ και $f(x) = \beta$, δηλαδή έστω $\kappa \in I$ με $f(\kappa) = \beta$ και η απόσταση $|\kappa - \gamma|$ είναι ελάχιστη (το κ υπάρχει λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f).

Ομοίως ας θέσουμε λ το σημείο του I , που βρίσκεται ανάμεσα από τα γ και κ , με $f(\lambda) = \alpha$ που είναι πλησιέστερα στο κ , και η απόσταση $|\lambda - \kappa|$ είναι ελάχιστη, δηλαδή έστω $\lambda \in I$ με $f(\lambda) = \alpha$ και η απόσταση $|\lambda - \kappa|$ είναι ελάχιστη. Έτσι ορίσαμε το μικρότερο κλειστό διάστημα $K = [\kappa, \lambda]$ ή $[\lambda, \kappa], K \subseteq I$, όπου $f(\lambda) = \alpha, f(\kappa) = \beta$, ενώ δεν υπάρχει εσωτερικό σημείο $\rho \in K$ με $f(\rho) = \alpha$ ή $f(\rho) = \beta$ (το διάστημα K μπορεί να είναι και το $[\gamma, \delta]$).

Αφού $f(\lambda) = \alpha, f(\kappa) = \beta$ και f συνεχής στο $K \subseteq I$, από το θεώρημα Ενδιάμεσων τιμών έχουμε $[\alpha, \beta] \subseteq f(K)$.

Αν $\tau \in f(K)$, τότε υπάρχει $\zeta \in K$ με $f(\zeta) = \tau$. Θα πρέπει $f(\zeta) \in J = [\alpha, \beta]$, διότι σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε αντίφαση από χρήση του θεωρήματος Ενδιαμέσων τιμών για την επιλογή των κ, λ . ■

Το 1975 σε μια εργασία με τίτλο «Η τρίτη περίοδος υπονοεί χάος», οι Li και Yorke απέδειξαν ένα αξιολογικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.9.3. Έστω $f: X \rightarrow X$ μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $X \subseteq \mathbb{R}$. Αν η $f(x)$ έχει ένα σημείο περίοδο τρία, τότε για οποιοδήποτε $k = 1, 2, 3, \dots$, υπάρχει ένα σημείο με περίοδο k .

Η εργασία αυτή προκάλεσε σημαντικό ενδιαφέρον και λίγο αργότερα επισημάνθηκε ότι ένας Ουκρανός μαθηματικός ονόματι Sharkovsky είχε δημοσιεύσει το 1964 ένα πολύ πιο γενικό θεώρημα (στα ρωσικά) σε ένα ουκρανικό περιοδικό. Το θεώρημά του ήταν άγνωστο στη Δύση μέχρι την εμφάνιση του Θεωρήματος Li-Yorke. Για να διατυπώσουμε το θεώρημά του, πρέπει να ορίσουμε μια νέα διάταξη των θετικών ακεραίων \mathbb{Z}^+ . Στη «διάταξη Sharkovsky», το 3 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός, ακολουθούμενο από το 5, στη συνέχεια από το 7 (όλοι οι περιττοί ακέραιοι), στη συνέχεια $2 \cdot 3, 2 \cdot 5$, (2 φορές οι περιττοί ακέραιοι), στη συνέχεια $2 \cdot 3, 2 \cdot 5$, (2 φορές τους περιττούς ακέραιους αριθμούς), έπειτα 2^2 φορές τους περιττούς ακέραιους κ.λπ., τελειώνοντας με δυνάμεις του 2 σε φθίνουσα σειρά:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Θεώρημα 2.9.4 (Θεώρημα Sharkovsky, 1964)

Έστω $f: X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση σε ένα διάστημα X (όπου X μπορεί να είναι οποιοδήποτε φραγμένο ή μη φραγμένο υποδιάστημα του \mathbb{R}). Αν η f έχει ένα σημείο περιόδου k , τότε έχει σημεία περιόδου r για όλα τα $r \in \mathbb{Z}^+$ με $k \triangleright r$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το θεώρημα για $k = 3$. Ας υποθέσουμε ότι η f έχει σημείο με περίοδο 3, δηλαδή υπάρχει 3-κύκλος $\{a, b, c\}$ στο X με

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a, \text{ και } a < b < c \text{ οπότε } f(c) < f(a) < f(b)$$

(αν υπάρχει άλλη διάταξη των περιοδικών σημείων δουλεύουμε ανάλογα).

Ας ορίσουμε τα διαστήματα $K_0 = [a, b]$ και $K_1 = [b, c]$ ενώ με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών εύκολα προκύπτει ότι $f(K_0) \supseteq K_1$ και $f(K_1) \supseteq K_0 \cup K_1$.

- Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η f έχει σταθερό σημείο (περιόδου ένα).
Αφού $f(K_1) \supseteq K_0 \cup K_1 \supseteq K_1$, από το θεώρημα 2.9.1., συμπεραίνουμε το ζητούμενο.
- Θα αποδείξουμε ότι η f έχει σημείο περιόδου δύο, δηλαδή ότι η f^2 έχει σταθερό σημείο.
Ισχύει $f(K_1) \supseteq K_0 \cup K_1 \supseteq K_0$, ενώ το Λήμμα 2.9.2. μπορεί να μας επιτρέψει να θεωρήσουμε διάστημα $\Delta \subseteq K_1$ όπου $f(\Delta) = K_0$.
Τότε έχουμε $f^2(\Delta) = f(K_0) \supseteq K_1 \supseteq \Delta$, οπότε από το θεώρημα 2.9.1., το διάστημα Δ περιέχει ένα σταθερό σημείο c της f^2 .
Το σημείο c είναι σημείο περιόδου δύο και όχι σταθερό σημείο της f διότι $f(c) \in K_0$ και $c \in K_1$, άρα $f(c) \neq c$.
- Θα αποδείξουμε ότι η f έχει σημείο περιόδου τέσσερα, δηλαδή ότι η f^4 έχει σταθερό σημείο.
Είδαμε ότι $f(K_0) \supseteq K_1$ και $f(K_1) \supseteq K_0 \cup K_1 \supseteq K_1$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε $\Delta_1 \subseteq K_1$ όπου $f(\Delta_1) = K_0$, όπως επίσης $\Delta_2 \subseteq K_1$ όπου $f(\Delta_2) = \Delta_1$, και $\Delta_3 \subseteq K_1$ όπου $f(\Delta_3) = \Delta_2$.

Τότε $f^2(\Delta_3) = f(\Delta_2) = \Delta_1$ και έτσι $f^3(\Delta_3) = f(\Delta_1) = K_0$, $f^4(\Delta_3) \supseteq K_1 \supseteq \Delta_3$.

Από το θεώρημα 2.9.1., συμπεραίνουμε ότι η f^4 έχει σταθερό σημείο $c \in \Delta_3$, το οποίο δεν έχει περίοδο 3 ή μικρότερη, συνεπώς έχει περίοδο τέσσερα.

Η παραπάνω κατασκευή γενικεύεται εύκολα σε οποιονδήποτε αριθμό σταθερών σημείων μεγαλύτερο από τέσσερα. Παράδειγμα για να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο περιόδου πέντε, στόχος μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο Δ του K_1 το οποίο απεικονίζεται πρώτα από τη f στο K_1 , μετά ξανά στο K_1 , μετά στο K_1 , μετά στο K_0 και μετά στο K_1 , έτσι ώστε $f^5(\Delta) \supseteq \Delta$. Έτσι, η f^5 έχει ένα σταθερό σημείο $c \in \Delta$, το οποίο δεν μπορεί να είναι σημείο μικρότερης περιόδου διότι $f(c) \in K_1$, $f^2(c) \in K_1$, $f^3(c) \in K_1$, $f^4(c) \in K_0$ και $f^5(c) \in \Delta$ (επομένως δεν μπορεί να έχουμε

$$f(c) = c, f^2(c) = c, f^3(c) = c, f^4(c) = c). \blacksquare$$

Πρόταση 2.9.5. Έστω $f: I \rightarrow I$ συνεχής συνάρτηση σε διάστημα I , με

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d, f(d) = a, \text{ και } a < b < c < d,$$

τότε η $f(x)$ έχει σημείο με περίοδο τρία, άρα έχει σημεία με οποιαδήποτε άλλη περίοδο.

Απόδειξη: Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$f([a, b]) = [b, c], f([b, c]) = [c, d], f([c, d]) = [a, d].$$

Ειδικότερα, υπάρχει $\Delta_1 \subseteq [c, d]$ με $f(\Delta_1) = [c, d]$, και $\Delta_2 \subseteq [c, d]$ όπου $f(\Delta_2) = [b, c]$.

$$\text{Αν } K_1 \subseteq \Delta_1 \text{ με } f(K_1) = \Delta_2, \text{ τότε } f^3(K_1) = f^2(\Delta_2) = f([b, c]) = [c, d] \supseteq K_1,$$

και από θεώρημα 2.9.1., συμπεραίνουμε ότι η f^3 έχει σταθερό σημείο $c \in K_1$, το οποίο δεν είναι σταθερό σημείο της f , άρα η f έχει σημείο με περίοδο τρία. ■

Σχόλιο 2.9.6. Από το θεώρημα 2.9.4., μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για μια συνεχή σε διάστημα I συνάρτηση $f: I \rightarrow I$, και I_1 και I_2 δύο κλειστά υποδιαστήματα του I με το πολύ ένα κοινό σημείο, αν $f(I_1) \supseteq I_2$ και $f(I_2) \supseteq I_1 \cup I_2$, τότε η f έχει 3-κύκλο.

Σχόλιο 2.9.7. (Αντίστροφο του Θεωρήματος του Sharkovsky)

Όπως αναφέραμε, για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$ στην διάταξη Sharkovsky του \mathbb{Z}^+ , ο Sharkovsky έδειξε ότι υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f: I \rightarrow I$ (ως συνήθως, το I είναι είτε η πραγματική ευθεία είτε ένα διάστημα), τέτοια ώστε η f να έχει ένα σημείο περιόδου m , αλλά κανένα σημείο περιόδου k με $k \triangleright m$.

Ισχύουν συνεπώς τα ακόλουθα:

- Για κάθε $k \in \mathbb{Z}^+$, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f: I \rightarrow I$ που έχει έναν k -κύκλο, αλλά δεν έχει κύκλους περιόδου n για κανένα n που εμφανίζεται πριν από το k στην διάταξη Sharkovsky.
- Υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f: I \rightarrow I$ που έχει έναν $2n$ -κύκλο, για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ και δεν έχει άλλους κύκλους οποιασδήποτε άλλης περιόδου.

3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Μετρικοί Χώροι

Οι περιοδικές και προ-περιοδικές τροχιές (συμπεριλαμβανομένων εκείνων που σχετίζονται με σταθερό σημείο) είναι ότι περισσότερο μπορούμε να εξετάσουμε για περιγραφή των τροχιών μιας συνάρτησης, χωρίς να προσθέσουμε οποιαδήποτε πρόσθετη δομή. Οποιαδήποτε τροχιά η οποία δεν είναι περιοδική ή προπεριοδική είναι άπειρη και δεν υπάρχουν πολλά που μπορούμε να πούμε για να «περιγράψουμε» ένα άπειρο υποσύνολο ενός αυθαίρετου συνόλου χωρίς πρόσθετη δομή. Υπάρχουν πολλά είδη δομών που μπορούν να ληφθούν υπόψη σε ένα σύνολο, π.χ. μετροθεωρητική δομή, τοπολογική δομή, γεωμετρική δομή, αλγεβρική δομή. Κάθε ένα από αυτά θα μπορούσε να είναι περισσότερο ή λιγότερο χρήσιμο ανάλογα με το είδος της περιγραφής και των πληροφοριών που μας ενδιαφέρουν και το είδος της συνάρτησης που εξετάζουμε. Το είδος της δομής που δέχεται ένα σύνολο δημιουργεί το δικό του σύνολο ερωτημάτων και μεθόδων προβλημάτων και λύσεων και ουσιαστικά μια ξεχωριστή προσέγγιση και κλάδο της θεωρίας των Δυναμικών Συστημάτων, αν και φυσικά υπάρχουν επίσης πολλές καταστάσεις στις οποίες ένα σύνολο μπορεί να δέχεται μια πολλαπλότητα δομών και αυτές μπορούν όλες να συμβάλουν σε μια βαθύτερη κατανόηση του συστήματος. Σε αυτές τις σημειώσεις θα επικεντρωθούμε κυρίως στις τοπολογικές ιδιότητες των Δυναμικών Συστημάτων και έτσι θα υποθέσουμε από τώρα και στο εξής ότι το σύνολο X είναι ένας τοπολογικός χώρος.

Είναι βολικό συνεπώς να εισαγάγουμε την ιδέα ενός τοπολογικού μετρικού χώρου. Αυτό είναι απλώς ένα ζεύγος (X, d) όπου το X είναι ένα σύνολο και το d είναι μια απόσταση που ορίζεται στο σύνολο, και ονομάζεται μετρική. Η μετρική d πρέπει να ικανοποιεί ορισμένες φυσικές ιδιότητες που θα περίμενε κανείς από μια συνάρτηση απόστασης.

Πολλές από τις προτάσεις και θεωρήματα που ακολουθούν θα παρουσιαστούν χωρίς αποδείξεις καθώς δεν είναι κύριο αντικείμενο της μελέτης μας και μπορούν να βρεθούν άλλωστε εύκολα σε πλήθος βιβλιογραφίες της ανάλυσης.

3.1. Ορισμός μετρικού χώρου

Ορισμός 3.1.1. Μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος (X, d) , όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ μια απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $d(x, y) \geq 0$, για κάθε $x, y \in X$,
2. $d(x, y) = 0$, αν και μόνο αν $x = y$,

3. $d(x, y) = d(y, x)$, (συμμετρική ιδιότητα),
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (τριγωνική ανισότητα)

Η απεικόνιση d ονομάζεται *μετρική*, τα στοιχεία του συνόλου X ονομάζονται *σημεία* και ο αριθμός $d(x, y)$ ονομάζεται *απόσταση* του x από το y .

Παραθέτουμε κάποια απλά παραδείγματα μετρικών χώρων.

Παράδειγμα 3.1.2. Το ζεύγος (X, d) με $X = \mathbb{R}$ και τη συνήθη μετρική στο \mathbb{R} ,

$d(x, y) = |x - y|$, για $x, y \in \mathbb{R}$, είναι μετρικός χώρος με την απόσταση να ικανοποιεί τις (1)-(4).

Παράδειγμα 3.1.3. Το ζεύγος (\mathbb{R}^2, d) με μετρική την Ευκλείδεια απόσταση

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, για $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, είναι μετρικός χώρος.

Γενικότερα, το \mathbb{R}^n με στοιχεία τα διανύσματα $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και τη συνήθη συνάρτηση απόστασης

$d(\vec{x}, \vec{y}) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$, είναι μετρικός χώρος.

Παράδειγμα 3.1.4. Το ζεύγος (X, d) με $X = \mathbb{C}$ το σύνολο όλων των μιγαδικών

αριθμών, με μετρική την απόσταση $d(z, w) = |z - w|$, $z, w \in \mathbb{C}$ είναι μετρικός χώρος.

Παράδειγμα 3.1.5. Έστω $X = S^1$ όπου $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος

στο μιγαδικό επίπεδο. Η φυσική μετρική στο S^1 δίνεται από την (μικρότερη) απόσταση γύρω από τον κύκλο μεταξύ των δύο σημείων που εξετάζονται.

Παράδειγμα 3.1.6. Για τυχαίο μη κενό σύνολο X , η συνάρτηση

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}, \text{ για κάθε } x, y \in X,$$

είναι μετρική στο X , και τη λέμε *διακριτή μετρική*.

Παράδειγμα 3.1.7. Έστω το σύνολο $X = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i = 0 \text{ ή } 1\}$, όπου τα

στοιχεία του X είναι άπειρες ακολουθίες των 0 και 1. Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι η

d όπως ορίζεται παρακάτω είναι μετρική στο X :

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}, x, y \in X$$

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x = (1, 1, 1, 1, \dots)$ και $y = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, τότε

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + \frac{1}{2^6} + \dots + 0 + \frac{1}{2^n} =$$

(άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με 1^ο όρο $\frac{1}{4}$ και λόγο $\frac{1}{4}$)

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Με αυτήν τη μετρική, τα σημεία με συντεταγμένες που διαφέρουν για μικρό n απέχουν περισσότερο μεταξύ τους από εκείνα με συντεταγμένες που διαφέρουν για μεγάλες τιμές του n . Για παράδειγμα, η απόσταση μεταξύ $(1, 0, 1, 1, 1, \dots)$ και $(1, 1, 1, 1, \dots)$ είναι $1/4$, ενώ η απόσταση μεταξύ $(1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$ και $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$ είναι $1/16$.

Σχόλιο 3.1.8. Στο ίδιο σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές μετρικές: Αν έχουμε μια συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1, τότε αυτή επάγει μια απόσταση στο X ως εξής: $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$, $x, y \in X$.

Εύκολα ελέγχεται ότι η d_f είναι μετρική στο X .

3.2. Σύγκλιση ακολουθιών

Στον Απειροστικό Λογισμό μελετήσαμε τη σύγκλιση ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Με τον όρο *ακολουθία πραγματικών αριθμών* εννοούμε κάθε συνάρτηση $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στο \mathbb{R}).

Συνήθως, γράφουμε $x_n: x(n)$ για το n -οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n) ή $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$.

Ας θυμηθούμε ότι αν $\{x_n\}$ είναι μια ακολουθία στο \mathbb{R} , λέμε ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό x αν ισχύει το εξής:

Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \equiv n_0(\epsilon)$ με την ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0(\epsilon)$, τότε $|x_n - x| < \epsilon$.

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ή $\lim x_n = x$ ή, πιο απλά, $x_n \rightarrow x$.

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ορίου για μια ακολουθία (x_n) σε ένα μετρικό χώρο (X, d) . Ο ορισμός υπαγορεύεται από τον αντίστοιχο ορισμό για ακολουθίες πραγματικών αριθμών: η βασική ιδέα είναι ότι μια ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν μπορούμε να βρούμε όσο κοντά θέλουμε στο x ένα τελικό τμήμα της ακολουθίας $\{x_n: n \geq n_0\}$. Ισοδύναμα, θα λέγαμε ότι η (x_n) συγκλίνει στο x αν η απόσταση του x_n από το x τείνει στο 0 όταν το n τείνει στο άπειρο.

Ορισμός 3.2.1. (σύγκλιση ακολουθίας) Λέμε ότι μια ακολουθία $\{x_n\}$ στον μετρικό χώρο (X, d) συγκλίνει στο $x \in X$ ως προς την μετρική d (ή είναι d -συγκλίνουσα) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \equiv n_0(\epsilon)$ ώστε αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0$, τότε $d(x_n, x) < \epsilon$.

Για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ ή απλώς $x_n \rightarrow x$.

Πρόταση 3.2.2. Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d) και έστω $x \in X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{d} x$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(d(x_n, x))_n$ πραγματικών αριθμών είναι μηδενική.

Πρόταση 3.2.3. Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d) . Αν υπάρχει το όριο της $\{x_n\}$, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Πρόταση 3.2.4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αν $\{x_n\}, \{y_n\}$ ακολουθίες στο X και $x, y \in X$ με $x_n \xrightarrow{d} x, y_n \xrightarrow{d} y$ τότε $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

Σημείωση 3.2.5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος εφοδιασμένος με τη διακριτή μετρική (βλέπε Παράδειγμα 3.1.6.). Τότε μια ακολουθία $\{x_n\}$ στον (X, d) είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι σταθερή.

Απόδειξη: Έστω αρχικά ότι $x_n \xrightarrow{d} x$. Τότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geq n_0$, τότε $d(x_n, x) < 1/2$. Από τον ορισμό της διακριτής μετρικής, έπεται ότι $d(x_n, x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$ ή αλλιώς, ότι $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς η x_n είναι τελικά σταθερή. Το αντίστροφο είναι προφανές από τον ορισμό του ορίου: σε κάθε

μετρικό χώρο, τελικά κάθε σταθερή ακολουθία είναι συγκλίνουσα. ■

Ο ορισμός της ακολουθίας Cauchy (ή βασικής ακολουθίας) πραγματικών αριθμών γενικεύεται κι αυτός άμεσα στο πλαίσιο των μετρικών χώρων.

Ορισμός 3.2.6. (βασική ακολουθία). Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, d) . Λέμε ότι η $\{x_n\}$ είναι βασική (ή Cauchy) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \equiv n_0(\epsilon)$ ώστε αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m, n \geq n_0$, τότε $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Πρόταση 3.2.7. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι ακολουθία Cauchy.

Παρατήρηση 3.2.8. Υπάρχουν παραδείγματα μετρικών χώρων στους οποίους δεν συγκλίνουν όλες οι βασικές ακολουθίες. Ένα παράδειγμα είναι ο χώρος \mathbb{Q} των ρητών αριθμών με τη συνήθη μετρική. Η ακολουθία $\{x_n\}$ με $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, ενώ είναι βασική, δεν συγκλίνει σε ρητό αριθμό.

Ορισμός 3.2.9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ο χώρος X λέγεται *πλήρης* εάν κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X .

Ορισμός 3.2.10. Ένα σημείο x σε χώρο X είναι *οριακό σημείο* της $\{x_n\}$ αν υπάρχει υπακολουθία $\{x_{n_k}\}$ που συγκλίνει στο x , ($x_{n_k} \rightarrow x$ καθώς $k \rightarrow \infty$).

Σχόλια 3.2.11. 1. Αν μια ακολουθία δηλαδή συγκλίνει στο x , τότε το x είναι το μοναδικό οριακό σημείο της.

2. Μια ακολουθία μπορεί να έχει οριακά σημεία χωρίς να συγκλίνει.

Ορισμός 3.2.12. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και συνάρτηση $f: X \rightarrow X$. Η f λέγεται *συστολή* εάν υπάρχει σταθερά $\lambda \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

3.3. Ανοικτά και κλειστά σύνολα

Ορισμός 3.3.1.

- i)* Αν το ζεύγος (X, d) είναι μετρικός χώρος και $\alpha \in X, \epsilon > 0$, τότε το σύνολο $B_\epsilon^d(\alpha) = \{x \in X: d(\alpha, x) < \epsilon\}$ λέγεται *ανοιχτή μπάλα* με κέντρο α και ακτίνα ϵ .
- ii)* Το σύνολο $S_\epsilon^d(\alpha) = \{x \in X: d(\alpha, x) \leq \epsilon\}$ λέγεται *σφαίρα* με κέντρο α και ακτίνα ϵ .

Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τη μετρική στην οποία αναφερόμαστε, θα παραλείπουμε τον εκθέτη στα αντίστοιχα σύνολα και θα γράφουμε απλώς $B_\epsilon(\alpha), S_\epsilon(\alpha)$ κ.λπ.

Παράδειγμα 3.3.2. Αν $X = \mathbb{R}$, τότε οι ανοιχτές μπάλες είναι διαστήματα της μορφής $(\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$. Αν $X = \mathbb{R}^2$ και $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, τα σημεία του $B_\epsilon(\alpha)$ είναι αυτά που βρίσκονται εσωτερικά του κύκλου με κέντρο το (α_1, α_2) και ακτίνας ϵ (το όριο του κύκλου δεν περιλαμβάνεται).

Ορισμός 3.3.3.(εσωτερικό σημείο). Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σημείο $x \in X$ λέγεται *εσωτερικό σημείο* (interior point) του A , αν υπάρχει $\epsilon_x > 0$ ώστε $B_{\epsilon_x}^d(x) \subseteq A$.

Ορισμός 3.3.4.

- i)* Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται *ανοιχτό* αν για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $\epsilon > 0$ όπου ισχύει $B_\epsilon(\alpha) \subseteq A$ (δηλαδή, κάθε σημείο του A μπορεί να περιβάλλεται από μια ανοιχτή μπάλα που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A).
- ii)* Το σύνολο $A \subseteq X$ είναι *κλειστό* αν το συμπλήρωμά του $X - A$ (συχνά γράφεται A^c) είναι ανοιχτό.

Σημειώσεις 3.3.5.

- Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το (A, d) ως μετρικό χώρο. Για παράδειγμα, αν $A = [0, 1]$ το υποσύνολο του \mathbb{R} με τη συνήθη μετρική, τότε στο A , το $B_\epsilon(0) = (0, \epsilon)$ είναι ανοιχτή μπάλα με κέντρο το 0.

- Σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) τα μονοσύνολα $\{x\}$, $x \in X$, είναι κλειστά.
- Τα ανοιχτά διαστήματα (α, β) στο \mathbb{R} είναι ανοιχτά σύνολα και οποιαδήποτε ένωση ανοιχτών διαστημάτων είναι ανοιχτό σύνολο. Τα κλειστά διαστήματα όπως $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty)$ είναι κλειστά σύνολα.
- Σε κάθε μετρικό χώρο X , τα σύνολα X και το κενό σύνολο \emptyset , δεν είναι ούτε ανοιχτά ούτε κλειστά, όπως και τα σύνολα $\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ στο χώρο \mathbb{R} .
- Οποιαδήποτε ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(\alpha)$ σε έναν μετρικό χώρο X είναι ένα ανοιχτό σύνολο ενώ η κλειστή μπάλα: $\overline{B_\epsilon(\alpha)} = \{x \in X: d(\alpha, x) \leq \epsilon\}$, είναι ένα κλειστό σύνολο.
- Αν σε μη κενό σύνολο X ορίζουμε τη διακριτή μετρική, κάθε υποσύνολο του είναι ανοιχτό. Πράγματι αν $\alpha \in A \subseteq X$, τότε για $0 < \epsilon < 1$, ισχύει $B_\epsilon^\delta(\alpha) = \{\alpha\} \subseteq A$, δηλαδή κάθε σημείο του A είναι εσωτερικό. Επίσης είναι και κλειστό.

Θεώρημα 3.3.6. Η ένωση ανοιχτών συνόλων σε χώρο (X, d) είναι ανοιχτό σύνολο και η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό.

Παρατήρηση 3.3.7. Εστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και ακολουθία $\{x_n\}$ στον X , ώστε $x_n \xrightarrow{d} x$. Το σύνολο $K = \{x_n: n = 1, 2, \dots\} \cup \{x\}$ είναι κλειστό στον (X, d) .

Απόδειξη: Πράγματι, αν $y \notin K$, τότε $\delta = d(x, y) > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{d} x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x, \delta/2)$ για κάθε $n > n_0$. Θέτουμε $r = \min\{d(y, x_i): i = 1, 2, \dots, n_0\} > 0$. Αν επιλέξουμε $0 < \epsilon < \min\{\frac{r}{2}, \frac{\delta}{2}\}$, έπεται ότι $B(y, \epsilon) \subseteq X \setminus K$, άρα $X \setminus K$ ανοιχτό σύνολο, οπότε K κλειστό. ■

Πρόταση 3.3.8. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1) Το A είναι ανοιχτό υποσύνολο του X .
- 2) Για κάθε $\alpha \in A$ και για κάθε ακολουθία $\{x_n\}$ στον X με $x_n \xrightarrow{d} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$, τότε $x_n \in A$.

Πρόταση 3.3.9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $B \subseteq X$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i) Το B είναι κλειστό υποσύνολο του X .
- ii) Αν $\{x_n\}$ ακολουθία στο B με $x_n \xrightarrow{d} x \in X$, τότε $x \in B$.

Σχόλιο 3.3.10. Όπως είδαμε, ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X, d) μπορεί να μην είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό. Επίσης, ένα σύνολο που είναι ανοικτό (αντιστοίχως, κλειστό) μπορεί να είναι και κλειστό (αντιστοίχως, ανοικτό).

3.4. Πυκνά Σύνολα

Για να ορίσουμε την έννοια του χάους για μονοδιάστατες απεικονίσεις, χρειαζόμαστε διάφορες τοπολογικές έννοιες όπως η πυκνότητα και η μεταβατικότητα. Δίνεται αρχικά ο τοπολογικός ορισμός του οριακού σημείου ενός συνόλου.

Ορισμός 3.4.1. Ένα σημείο $x \in X$ ενός μετρικού χώρου (X, d) καλείται *οριακό σημείο* (ή σημείο συσσώρευσης) ενός συνόλου $A \subseteq X$, αν κάθε σφαίρα $S_\varepsilon^d(x)$, $\varepsilon > 0$ περιέχει ένα σημείο του A διαφορετικό από το x . Δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$A \cap S_\varepsilon^d(x) \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

Σχόλιο 3.4.2. Μία ακολουθία μπορεί να «επισκέπτεται» άπειρες φορές μια περιοχή κοντά σε οριακό της σημείο x , ακόμα κι αν δεν συγκλίνει εκεί.

Σχόλιο 3.4.3. Είναι προφανές ότι κάθε $x \in A$, είναι οριακό σημείο του $A \subseteq X$. Το γεγονός που καθιστά ενδιαφέρον τον παραπάνω ορισμό είναι η ύπαρξη συνόλων A και σημείων $x \in X$ που ενώ $x \notin A$ εντούτοις το x είναι οριακό σημείο του A . Ένα παράδειγμα είναι το σύνολο $(0,1)$ ως υποσύνολο του \mathbb{R} , όπου οι αριθμοί 0 και 1 είναι οριακά του σημεία. Επομένως, ένα σύνολο A είναι κλειστό αν και μόνον αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.

Ορισμός 3.4.4. Η *κλειστή θήκη* (closure) ενός συνόλου A σε έναν μετρικό χώρο X ορίζεται ως το σύνολο:

$$\begin{aligned} cl(A) &\equiv \bar{A} = \{x \in X : x \text{ οριακό σημείο του } A\} = \\ &= \{x \in X : \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ ισχύει } A \cap B_\varepsilon^d(x) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Πρόταση 3.4.5. Το \bar{A} είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A , (δηλαδή, αν B είναι ένα άλλο κλειστό σύνολο που περιέχει το A τότε $A \subseteq B$).

Σημείωση 3.4.6. Παρατηρήστε ότι $A \subseteq \bar{A}$ και \bar{A} κλειστό σύνολο. Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι ισχύουν τα παρακάτω:

- $\bar{A} = A$ αν και μόνο αν το A είναι κλειστό.
- Αν $A \subseteq B$ τότε $\bar{A} \subseteq \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\bar{\bar{A}} = A$, $\bar{X} = X$ και $\bar{\emptyset} = \emptyset$

Παράδειγμα 3.4.7. Αν $X = \mathbb{R}$, τότε $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Αν έχουμε ορίσει σε ένα μη κενό σύνολο την διακριτή μετρική, τότε $\bar{A} = A$.

Ορισμός 3.4.8.(πυκνό υποσύνολο). Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$.

Το A λέγεται *πυκνό* (dense) στον X , αν $\bar{A} = X$.

Παρατήρηση 3.4.9. Αν $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, τότε $A \subseteq I$ πυκνό στο I , εάν για κάθε ανοικτό διάστημα U που περιέχεται στο I , ισχύει $U \cap A \neq \emptyset$. Αυτό ισχύει διότι κάθε $x \in I$ είναι οριακό σημείο του A : αν $x \in I$, $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $\delta > 0$.

Ισοδύναμα, το A είναι πυκνό στο I αν για οποιοδήποτε $x \in I$ και οποιοδήποτε $\delta > 0$ το διάστημα $(x - \delta, x + \delta)$ περιέχει ένα σημείο του A .

Διαισθητικά, τα σημεία του A κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα I με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε υποδιάστημα του I (ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι) να περιέχει ορισμένα σημεία του A .

Παράδειγμα 3.4.10. α) Τα \mathbb{Q} και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο \mathbb{R} .

β) Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Θα αποδείξουμε την προηγούμενη πρόταση:

Δείχνουμε ότι το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$. Έστω $x \in (0,1)$, από τον ορισμό αρκεί να βρούμε έναν ρητό αριθμό y αυθαίρετα κοντά στο x , δηλαδή, που να ικανοποιεί $|x - y| < \delta$, για κάποιον αυθαίρετο αριθμό $\delta > 0$.

Υποθέστε ότι το x έχει δεκαδικό ανάπτυγμα

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} = .d_1 d_2 d_3 \dots \text{ με } d_n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}.$$

Επιλέγουμε $m \in \mathbb{Z}^+$ αρκετά μεγάλο ώστε $10^{-m} < \delta$ και έστω $y = \sum_{n=1}^m \frac{d_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$,

$$\text{τότε } |x - y| = |.00 \dots 0 d_{m+1} d_{m+2} d_{m+3} \dots| = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} \leq \frac{1}{10^m} < \delta. \blacksquare$$

γ) Για διαστήματα του \mathbb{R} , έχουμε ότι $\overline{(0,1)} = [0,1], \overline{[0,1]} = [0,1]$, ενώ αν $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ τότε $\bar{A} = A \cup \{0\}$.

δ) (Θεώρημα Kronecker). Έστω $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Το σύνολο

$$\Gamma(\theta) := \{(\cos(2\pi n\theta), \sin(2\pi n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Σχόλιο 3.4.11. Ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X μπορεί να είναι πυκνό και ανοιχτό. Για παράδειγμα στο \mathbb{R} το σύνολο $A = \mathbb{R} - \sqrt{2}$ είναι ανοιχτό και πυκνό σύνολο.

Θεώρημα 3.4.12. Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- i) Το σύνολο A είναι πυκνό στον X ,
- ii) Αν $\epsilon > 0$, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $d(\alpha, x) < \epsilon$,
- iii) Για κάθε $x \in X$, υπάρχει ακολουθία $\{\alpha_n\} \subset A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x$.

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii). Υποθέστε ότι το A είναι πυκνό στο X και έστω $x \in X$, τότε είτε $x \in A$ (οπότε ισχύει το (ii)) είτε το x είναι ένα οριακό σημείο του A , δηλαδή, οποιαδήποτε σφαίρα $B_\epsilon(x)$ περιέχει σημεία του A , άρα υπάρχει $\alpha \in A$ με $d(\alpha, x) < \epsilon$.

(ii) \Rightarrow (iii). Αν $x \in X$ και $n \in \mathbb{Z}^+$, υπάρχει τότε ακολουθία $\{\alpha_n\} \in A$ με

$d(\alpha_n, x) < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ τέτοιο ώστε καθώς $n \rightarrow \infty$, $d(\alpha_n, x) \rightarrow 0$, δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{Z}^+$, τέτοιο ώστε αν $n > N \Rightarrow d(\alpha_n, x) < \epsilon$ άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x$.

(iii) \Rightarrow (i). Αν $x \in X$ και υπάρχει $\{\alpha_n\} \subset A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x$, τότε το x είναι οριακό σημείο του A , καθώς $B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $\delta > 0$, άρα $\bar{A} = X$. ■

Λήμμα 3.4.13. Για μία συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ το σύνολο $Per_1(f) = Fix(f)$ από όλα τα σταθερά σημεία της, είναι κλειστό. Το ίδιο ισχύει και για τις συνεχείς συναρτήσεις σε έναν μετρικό χώρο X .

Απόδειξη: Έστω $x \in X$ και x_n ας υποθέσουμε ότι είναι ακολουθία σημείων στο σύνολο $Fix(f)$ με $x_n \rightarrow x$. Η f είναι συνεχής άρα,

$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$, άρα x είναι επίσης σταθερό σημείο, συνεπώς το σύνολο $Fix(f)$ είναι κλειστό. ■

Παράδειγμα 3.4.14. Η συνάρτηση $f(x) = x \sin(1/x)$ έχει σταθερά σημεία $x = 0$ και $x = x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}$, $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$. Επίσης, κάθε σημείο x_k είναι μη υπερβολικό σταθερό σημείο. Το σύνολο $Fix(f) = \{x_k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ είναι σαφώς ένα κλειστό σύνολο. Αυτή η συνάρτηση έχει πολλά τελικά σταθερά σημεία που είναι εύκολο να βρεθούν. Το σημείο $x = 0$ είναι σταθερό αλλά δεν ελκύει, καθώς υπάρχουν άλλα σταθερά σημεία που είναι αυθαίρετα κοντά του.

3.5. ωμέγα και άλφα-όρια Δυναμικών Συστημάτων

Ένα βασικό χαρακτηριστικό λοιπόν μιας τοπολογικής δομής είναι ότι μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια των οριακών σημείων για τις ακολουθίες και το εκμεταλλευόμαστε πλήρως στην προσπάθειά μας να περιγράψουμε τη δομή των μη περιοδικών τροχιών ενός δυναμικού συστήματος.

Ορισμός 3.5.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και η συνάρτηση $f: X \rightarrow X$. Για $x_0 \in X$ και τα σημεία $x_n := \{f^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ του X , ορίζουμε το σύνολο **ωμέγα-όριο** του x_0 , ως

$$\omega(x_0) := \{y \in X : x_{n_j} \rightarrow y \text{ για κάποια υπακολουθία } n_j \rightarrow \infty \text{ καθώς } j \rightarrow \infty\}.$$

Σχόλια 3.5.2.

- 1) Το *ωμέγα-όριο* είναι επομένως το σύνολο των τοπολογικών οριακών σημείων της εμπρόσθιας τροχιάς $\mathcal{O}^+(x_0)$ που θεωρείται ως μια άπειρη ακολουθία στο X .
- 2) Είναι εύκολο να δούμε ότι αν το x_0 είναι περιοδικό, τότε $\omega(x_0) = \mathcal{O}^+(x_0)$.
- 3) Επιπλέον, αν το X είναι συμπαγές, τότε $\omega(x_0) \neq \emptyset$ για κάθε $x_0 \in X$ και, αν η f είναι συνεχής, τότε το $\omega(x_0)$ είναι f -αμετάβλητο με την έννοια ότι το $x \in \omega(x_0)$ υπονοεί ότι $f(x) \in \omega(x_0)$.

Αν η f είναι αντιστρέψιμη μπορούμε ομοίως να ορίσουμε το σύνολο *άλφα-όριο* του x_0 :

Ορισμός 3.5.3. Έστω X τοπολογικός χώρος και η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: X \rightarrow X$. Για $x_0 \in X$, και τα σημεία $x_k := \{f^k(x_0), k \in \mathbb{Z}\}$, ορίζουμε το σύνολο **άλφα-όριο** του x_0 , ως

$$\alpha(x_0) := \{y \in X: x_{n_j} \rightarrow y \text{ για κάποια υπακολουθία } n_j \rightarrow -\infty \text{ καθώς } j \rightarrow \infty\}.$$

Σαφώς οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν για το σύνολο *άλφα-όριο* που ισχύουν και για το σύνολο *ωμέγα-όριο*. Το *άλφα-όριο* είναι απλώς το *ωμέγα-όριο* για την f^{-1} και επομένως ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες.

Η έννοια του οριακού συνόλου $\alpha(x_0)$ και $\omega(x_0)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διατύπωση των εννοιών του ελκτικού και απωθητικού σημείου (βλέπε ορισμό 7.3.5.).

Ορισμός 3.5.4. Ένα σημείο $p \in X$, ενός μετρικού χώρου (X, d) , είναι **ελκτικό σταθερό σημείο** εάν υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x_0 \in B_\delta^d(p)$ να ισχύει $\omega(x_0) = \{p\}$.

Αν η f είναι αντιστρέψιμη, ορίζουμε ένα απωθητικό σταθερό σημείο p ως ένα ελκτικό σταθερό σημείο για την f^{-1} ή, ισοδύναμα, ως ένα σημείο για το οποίο υπάρχει περιοχή $B_\delta^d(p)$ του p όπου $\alpha(x_0) = \{p\}$ για κάθε $x_0 \in B_\delta^d(p)$.

Τα σύνολα *άλφα* και *ωμέγα-όριο* εξαρτώνται φυσικά από τον χώρο X και από την συνάρτηση f καθώς και από την αρχική συνθήκη x_0 . Μπορούν να είναι οτιδήποτε, από ένα μοναδικό σημείο έως ολόκληρο τον χώρο, όπως θα δούμε σε παραδείγματα που θα μελετηθούν παρακάτω.

4^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ομοιομορφισμοί, Διαφορομορφισμοί, Αριθμησιμότητα Συνόλου

Όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, ομοίως και σε αυτό πολλά από τα θεωρήματα, προτάσεις, Λήμματα που δεν αφορούν τα Δυναμικά Συστήματα δεν συνοδεύονται από τις αντίστοιχες αποδείξεις, τις οποίες βέβαια μπορείτε να αναζητήσετε σε πληθώρα βιβλιογραφιών.

4.1. Συνέχεια συναρτήσεων

Αρχικά θα μελετήσουμε την έννοια της συνέχειας για συναρτήσεις $f: (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$ όπου (X, d_1) και (Y, d_2) μετρικοί χώροι. Πριν διατυπώσουμε το σχετικό ορισμό να θυμηθούμε κάποιες γνωστές έννοιες για συναρτήσεις $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a \in X$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ με $|x - a| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε $a \in X$, τότε η f θα λέγεται συνεχής στο X . Γενικά το δ εξαρτάται από το ϵ αλλά και από το a .

Θα δείξουμε ότι τα παραπάνω επεκτείνονται και σε μετρικούς χώρους. Παρατηρείστε ότι η f είναι συνεχής στο a αν το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο $f(a)$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο a . Ο ορισμός της συνέχειας πραγματικών συναρτήσεων στηρίζεται ουσιαστικά στην έννοια της απόστασης και είναι φυσικό να περιμένει κανείς ότι θα μπορεί να γενικευθεί και για συναρτήσεις που δεν ορίζονται ή που δεν παίρνουν τιμές μόνο στο \mathbb{R} .

Ορισμός 4.1.1 Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X, d_1) και (Y, d_2) λέγεται *συνεχής στο $a \in X$* , αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από f , a και ϵ), ώστε για κάθε $x \in X$ με $d_1(x, a) < \delta$ να ισχύει $d_2(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Παρατήρηση 4.1.2. Στην περίπτωση όπου $X = Y = \mathbb{R}$ με την συνηθισμένη μετρική, οι προηγούμενοι ορισμοί συμπίπτουν με τους γνωστούς από την Ανάλυση ορισμούς της συνέχειας.

Παράδειγμα 4.1.3. Προφανές παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X, d_1) και (Y, d_2) είναι οι σταθερές συναρτήσεις $f(x) = c$ για κάθε $x \in X$ και $c \in Y$.

Επίσης η ταυτοτική συνάρτηση $I: (X, d_1) \rightarrow (X, d_1)$ με $I(x) = x$ για κάθε $x \in X$ είναι προφανές παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης.

Πρόταση 4.1.4. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X, d_1) και (Y, d_2)

- (i) η f είναι συνεχής στο $x = a$.
- (ii) για κάθε ϵ -μπάλα $B_\epsilon(f(a))$ με κέντρο το $f(a)$, υπάρχει μια δ -μπάλα $B_\delta(a)$ με κέντρο το a τέτοια ώστε $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$.
- (iii) Για οποιουδήποτε ανοιχτό σύνολο V που περιέχει το $f(a)$, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U που περιέχει το a τέτοιο ώστε $f(U) \subseteq V$.

Απόδειξη: Δεδομένου ότι η ισοδυναμία των (i) και (ii) είναι μια αναδιατύπωση του ορισμού της συνέχειας, θα δείξουμε μόνο την ισοδυναμία των (i) και (iii).

(i) \Rightarrow (iii) Έστω ανοιχτό σύνολο $V \subset Y$ με $f(a) \in V$. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ με $B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$ αφού το V είναι ανοιχτό. Η f είναι συνεχής στο $x = a$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ με $f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a)) \subseteq V$, οπότε αν $U = B_\delta(a)$ ισχύει το ζητούμενο.

(iii) \Rightarrow (i) Η ϵ -μπάλα $B_\epsilon(f(a))$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y με $f(a) \in B_\epsilon(f(a))$, άρα υπάρχει ανοιχτό $U \subseteq X$ που περιέχει το a τέτοιο ώστε $f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a))$.

Όμως U ανοιχτό, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(a) \subseteq U$. Επομένως $f(B_\delta(a)) \subseteq f(U) \subseteq B_\epsilon(f(a))$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x = a$. ■

Ορισμός 4.1.5. Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ αν είναι συνεχής σε κάθε $a \in X$, τότε θα λέγεται συνεχής στο X ή απλά συνεχής.

Θεώρημα 4.1.6. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X, d_1) και (Y, d_2) :

(i) η $f: X \rightarrow Y$ είναι συνεχής,

(ii) $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X όταν V είναι ανοικτό υποσύνολο του Y ,

(iii) $f^{-1}(U)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X όταν U είναι κλειστό υποσύνολο του Y .

(το σύνολο $f^{-1}(V) = \{x \in X: f(x) \in V\}$ ορίζεται ακόμη και αν η f δεν είναι αντιστρέψιμη)

Απόδειξη. (i) \Rightarrow (ii) Έστω V ανοικτό υποσύνολο του Y . Θα δείξουμε ότι το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X . Αν το $f^{-1}(V)$ είναι κενό τότε το συμπέρασμα ισχύει. Αν όχι, έστω $x \in f^{-1}(V)$. Τότε, $f(x) \in V$ και το V είναι ανοικτό, συνεπώς υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $B_\epsilon(f(x)) \subseteq V$. Αφού η f είναι συνεχής στο x , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq V$, δηλαδή $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$. Συνεπώς, το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.

(ii) \Rightarrow (iii) Έστω U κλειστό υποσύνολο του Y . Τότε $Y \setminus U$ είναι ανοικτό υποσύνολο του Y . Από την υπόθεσή μας, το $f^{-1}(Y \setminus U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X . Όμως, $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$. Αφού το $X \setminus f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό, το $f^{-1}(U)$ είναι κλειστό.

(iii) \Rightarrow (i) Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x . Θεωρούμε τη ανοικτή μπάλα $B = B_\epsilon(f(x))$ με $\epsilon > 0$. Τότε το $Y \setminus B$ είναι κλειστό και από την υπόθεσή μας το $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ είναι επίσης κλειστό, δηλαδή το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό. Επιπλέον, $x \in f^{-1}(B)$ διότι $f(x) \in B$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B)$. Ισοδύναμα, $f(B_\delta(x)) \subseteq B \subseteq B_\epsilon(f(x))$. ■

Σχόλιο 4.1.7. Η συνέχεια μιας συνάρτησης $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ στο $a \in X$, χαρακτηρίζεται και με ακολουθίες. Η αρχή μεταφοράς σύγκλισης ακολουθιών αναφέρει ότι η f είναι συνεχής στο a αν και μόνο αν μεταφέρει συγκλίνουσες ακολουθίες στο a σε συγκλίνουσες ακολουθίες στο $f(a)$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow a$ έχουμε ότι $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Υπάρχει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.8. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X, d_1) και (Y, d_2) :

(i) η f είναι συνεχής στο $x = a$,

(ii) για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \rightarrow a$ ισχύει ότι $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

4.2. Συνεχής συνάρτηση επανάληψης στα Δυναμικά Συστήματα

Σχόλιο 4.2.1. Ως εφαρμογή των παραπάνω θεωρημάτων, θα δείξουμε ότι η λεκάνη έλξης $B_f(p)$, ενός σταθερού σημείου p για μια συνεχή απεικόνιση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, X μετρικός χώρος, είναι ένα ανοιχτό σύνολο.

Θυμίζουμε ότι $B_f(p) = \{x \in X: f^n(x) \rightarrow p, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty\}$.

Έστω p ένα σταθερό σημείο έλξης για την f . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $x \in B_\epsilon(p)$, ανοιχτή μπάλα ακτίνας ϵ με κέντρο το p , τότε $f^n(x) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Είδαμε ότι για $0 < \mu < 1$, το 0 είναι ένα σταθερό ελκτικό σημείο της λογιστικής συνάρτησης $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ με λεκάνη έλξης $[0,1]$. Σε αυτήν την περίπτωση ο μετρικός χώρος είναι $X = [0,1]$, άρα η λεκάνη έλξης είναι ένα ανοιχτό σύνολο, δηλαδή ολόκληρος ο χώρος (το σταθερό σημείο 0 είναι καθολικά ελκτικό).

Για συνεχείς απεικονίσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που έχουν ένα ασυμπτωτικά σταθερό σημείο p , η λεκάνη έλξης είναι ένα ανοιχτό σύνολο, το οποίο σε αυτήν την περίπτωση είναι απλώς η ένωση ανοιχτών διαστημάτων. Το μεγαλύτερο τέτοιο ανοιχτό διάστημα στο οποίο ανήκει το p ονομάζεται *άμεση λεκάνη έλξης* του p ως προς την f .

Λέγοντας ότι το $A \subseteq X$ είναι *αμετάβλητο* ως προς την f , σημαίνει ότι $f(x) \in A$ για όλα τα $x \in A$.

Θεώρημα 4.2.2. Αν $f: X \rightarrow X$ είναι μια συνεχής απεικόνιση ενός τοπολογικού χώρου X και p είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο της f , τότε η λεκάνη έλξης της f , το σύνολο $B_f(p)$, είναι ένα αμετάβλητο ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $x \in B_f(p)$, τότε $f^n(x) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$, οπότε $f^n(f(x)) \rightarrow f(p) = p$ καθώς $n \rightarrow \infty$, άρα $f(x) \in B_f(p)$ και $B_f(p)$ είναι ένα αμετάβλητο σύνολο.

Αφού p είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο της f , υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν

$x \in B_\epsilon(p)$, $f^n(x) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Όμως f συνεχής συνάρτηση επομένως το σύνολο $f^{-1}(B_\epsilon(p))$ είναι ανοικτό.

Έχουμε $B_f(p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_\epsilon(p))$, οπότε αν $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_\epsilon(p))$, τότε $x \in f^{-n}(B_\epsilon(p))$ για κάποια $n \in \mathbb{Z}^+$ ή $f^n(x) \in B_\epsilon(p)$, δηλαδή $x \in B_f(p)$.

Αντίστροφα αν $x \in B_f(p)$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{Z}^+$ με $f^n(x) \in B_\epsilon(p)$ (αφού το p είναι ελκτικό) οπότε $x \in f^{-n}(B_\epsilon(p))$ και $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_\epsilon(p))$. Τελικά ως ένωση ανοικτών διαστημάτων, το $B_f(p)$ είναι ανοικτό σύνολο. ■

Λήμμα 4.2.3. Έστω $f: X \rightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση ενός μετρικού χώρου X . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $x \in X$ τέτοιο ώστε και $\omega(x_0) = \{p\}$, $p \in X$. Τότε p είναι σταθερό σημείο της f .

Θεώρημα 4.2.4. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $f: X \rightarrow X$ μία συνάρτηση συστολής. Τότε

- i) η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο $p \in X$.
- ii) για κάθε $x_0 \in X$ η ακολουθία $\{f^n(x)\}$ συγκλίνει στο p .

Παράδειγμα 4.2.5. Έστω $X = [0,1]$, $\lambda \in (0,1)$ και η συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ που ορίζεται ως $f(x) = \lambda x$. Είναι εύκολο να δούμε ότι για κάθε $x_0 \in X$, έχουμε

$x_1 = \lambda x_0$ και $x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$, και γενικεύοντας για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $x_n = \lambda^n x_0$. Αφού $\lambda \in (0,1)$ προφανώς $\lambda^n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, οπότε $x_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, συνεπώς η τροχιά του x_0 συγκλίνει στο 0 καθώς $n \rightarrow \infty$. Δηλαδή έχει μοναδικό σταθερό σημείο το οποίο είναι το 0. Επομένως $\omega(x_0) = 0$ για κάθε αρχική συνθήκη $x_0 \in X$. Αυτό δείχνει ότι σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.4., το $p = 0$ είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο. Επειδή ισχύει $B_\delta^d(p) = X$, το ελκτικό σταθερό σημείο p είναι ένα καθολικά ελκτικό σταθερό σημείο.

Για τους μετρικούς χώρους, η ιδέα της «ομοιότητας» δίνεται από την έννοια του «ομοιομορφισμού». Δύο μετρικοί χώροι θεωρούνται «τοπολογικά» ίδιοι, εάν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους.

4.3 Ομοιομορφισμοί και Διαφορομορφισμοί

Ορισμός 4.3.1. Η συνάρτηση $g: X \rightarrow Y$ μεταξύ μετρικών χώρων (X, d_1) και (Y, d_2) είναι ένας **ομοιομορφισμός** αν η g είναι ένα προς ένα, επί και η g όσο και η g^{-1} είναι συνεχείς (δηλαδή η g είναι αμφισυνεχής). Οι χώροι X και Y λέγονται **ομοιομορφικοί**, όταν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους.

Σχόλια 4.3.2.

- Σημειώστε ότι g είναι ομοιομορφισμός αν και μόνο αν η g^{-1} είναι ομοιομορφισμός (από το Y στο X). Θα πρέπει να θεωρήσετε τους ομοιομορφικούς χώρους ως ουσιαστικά πανομοιότυπους. Συγκεκριμένα, αν έχουν ισοδύναμες μετρικές στο X , τότε οι μετρικοί χώροι (X, d_1) και (Y, d_2) λέγονται ομοιομορφικοί.
- Αν f είναι ομοιομορφισμός, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει με $y = f(x)$ αν και μόνο αν $x = f^{-1}(y)$.

Παράδειγμα 4.3.3.

1. Αν $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = x^2$, τότε η f είναι ένας ομοιομορφισμός. Οποιαδήποτε γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$ είναι ένας ομοιομορφισμός. Επίσης, οποιαδήποτε γνησίως φθίνουσα συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = 0$ είναι ένας ομοιομορφισμός και μπορεί να αποδειχθεί ότι οποιοσδήποτε ομοιομορφισμός του $[0,1]$ προς τον εαυτό του είναι μίας από τις δύο παραπάνω μορφές. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ είναι ένας ομοιομορφισμός. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
2. Διαστήματα τα οποία «μοιάζουν» είναι ομοιομορφικά, δηλαδή $(0,1)$ με (α,β) , $[0,1)$ με $[\alpha,\beta)$ και $(\gamma,\delta]$, και $[0,1]$ με $[\alpha,\beta]$. Για την πρώτη και τρίτη περίπτωση έχουμε τον ομοιομορφισμό $f(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$. Για τη δεύτερη έχουμε ότι η συνάρτηση $g: [0,1) \rightarrow (\gamma,\delta]$ με $g(t) = \delta - t(\delta - \gamma)$ είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής.

3. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctan x$ είναι ένας ομοιομορφισμός των αντίστοιχων μετρικών χώρων. Η λογιστική απεικόνιση $L_\mu = \mu x(1-x), 0 < \mu \leq 4$, δεν είναι ένας ομοιομορφισμός του $[0, 1]$ καθώς δεν είναι ένα-προς-ένα.
4. Θεωρήστε τους μετρικούς χώρους $X = [0, 1]$ και $\Sigma = \{(s_1, s_2, s_3, \dots) : s_i = 0 \text{ ή } 1\}$ με τις συνήθεις μετρικές. Θα δείξουμε ότι αυτοί οι δύο μετρικοί χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί.

Μελετάμε ομοιομορφισμούς που είναι επίσης διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός 4.3.4. Η συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ λέγεται ότι είναι κλάσης \mathbb{C}^1 στο X αν η παράγωγος συνάρτηση $f'(x)$ υπάρχει και είναι συνεχής σε όλα τα $x \in X$. Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται επίσης ομαλή (*smooth*).

Ορισμός 4.3.5. Ένας ομοιομορφισμός $f: X \rightarrow Y$ ονομάζεται **διαφορομορφισμός** στο X αν η f και f^{-1} είναι και οι δύο \mathbb{C}^1 συναρτήσεις στο X .

Αν η f είναι διαφορομορφισμός στο \mathbb{R} και το $I \subset \mathbb{R}$ είναι κάποιο κλειστό διάστημα, μερικές φορές αναφερόμαστε στη f ως διαφορομορφισμό στο I , στο κλειστό διάστημα J όπου $f(I) = J$.

Αν $y = f(x)$, τότε $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$, και παραγωγίζοντας (κανόνας αλυσίδας) έχουμε $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ ή $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

Συνεπώς, για έναν διαφορομορφισμό πρέπει να έχουμε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in I$.

Δεδομένου ότι η $f'(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση, αν επιτρεπόταν να είναι θετική και αρνητική, τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής πρέπει επίσης να πάρει την τιμή 0, που είναι αντίφαση. Επομένως ένας διαφορομορφισμός έχει $f'(x) > 0$ (ή $f'(x) < 0$) για όλα τα $x \in I$.

Παράδειγμα 4.3.6. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^3$ είναι κλάσης \mathbb{C}^1 αλλά δεν είναι διαφορομορφισμός διότι $f'(0) = 0$, δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x) = x^{1/3}$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Αν όμως $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \tan x$, τότε η f είναι διαφορομορφισμός με $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2), f^{-1}(x) = \arctan x$.

Ορισμοί 4.3.7. Έστω συνάρτηση $f: I \rightarrow I$, $f \in \mathbb{C}^1$ στο $I \subseteq \mathbb{R}$.

- Η f ονομάζεται **επέκταση** εάν για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f'(x)| > 1$.
- Η f ονομάζεται **συστολή** εάν για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f'(x)| < 1$.

Παρατηρήσεις 4.3.8.

1. Υπάρχει ασθενέστερη έννοια της επεκτασιμότητας όταν $f \notin \mathbb{C}^1$, η οποία διαφέρει από την επέκταση.
2. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι εάν η f διαστέλλεται ή συστέλλεται, είναι υπερβολική.
3. Αν $f \notin \mathbb{C}^1$ αλλά το πεδίο ορισμού μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένα πολλά διαστήματα στα οποία η f είναι \mathbb{C}^1 , λέμε ότι μια απεικόνιση είναι τμηματικά \mathbb{C}^1 .

Αντίστοιχα, μιλάμε για τμηματικά επεκτεινόμενες/συστελλόμενες /υπερβολικές απεικονίσεις.

Παραδείγματα 4.3.9.

1. Η συνάρτηση σκηνης έχει ένα σημείο μη διαφορισιμότητας στο $x = 1/2$, επομένως είναι τμηματικά \mathbb{C}^1 και τμηματικά διαστελλόμενη, κάτι που σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση υποδηλώνει τμηματική υπερβολικότητα.
2. Ας εξετάσουμε ξανά την λογιστική συνάρτηση $L(x) = \mu x(1 - x)$, $x \in [0,1]$, $\mu > 0$. Έχουμε $L'(x) = \mu - 2\mu x$, με $L'(1/2) = 0$. Συνεπώς, η L δεν μπορεί να είναι επέκταση.

Πρόταση 4.3.10. Ένας διαφορομορφισμός $f: I \rightarrow I$ είναι :

- **Διατήρησης τάξης (προσανατολισμού)** : αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$, (η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση), και ισχύει $x < f(x) < f^2(x) < \dots$ ή $x > f(x) > f^2(x) > \dots$ για $x \in I$, ή,
- **Αντιστροφή τάξης (προσανατολισμού)**: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, (η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση), και ισχύει $c > f(c)$, $f(c) < f^2(c)$, $f^2(c) > f^3(c)$, ...για $x \in I$ (ή αντίστροφα οι φορές των ανισώσεων)

Θεώρημα 4.3.11. Αν I και J ανοιχτά υποδιαστήματα του \mathbb{R} και $f: I \rightarrow J$ ένας διαφορομορφισμός αντιστροφής τάξης με $f(I) = J \subseteq I$, τότε η f έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Αν $I = (a, \beta)$ ομοίως όπως στο θεώρημα 2.2.7. μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη του σταθερού σημείου. Αφού $f(I) = J \subseteq I$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $a < x_1 < f(x_1)$ και $\beta > x_2 > f(x_2)$.

Αν ορίσουμε την συνεχή στο I συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, έχουμε $g(x_1) = f(x_1) - x_1 > 0$ και $g(x_2) = f(x_2) - x_2 < 0$, οπότε υπάρχει $c \in (x_1, x_2)$ ή $(x_2, x_1) \subset (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(c) = 0$ ή $f(c) = c$, δηλαδή c σταθερό σημείο της $f(x)$.

Αν $I = \mathbb{R}$, έστω $\alpha = \lim_{n \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x)$ (α, β μπορεί να είναι $\pm\infty$). Αφού η f είναι διαφορομορφισμός αντιστροφής σειράς, έχουμε $\alpha > \beta$.

Ας θεωρήσουμε και πάλι την συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, τότε $\lim_{n \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ ενώ $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$, οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ με $g(c) = 0$ άρα $f(c) = c$ και c σταθερό σημείο της f .

Ομοίως μπορούμε να δουλέψουμε σε άλλα διαστήματα του \mathbb{R} .

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερο σταθερό σημείο της f . Αν $\alpha = f(\alpha)$ και $\beta = f(\beta)$ με $\alpha < \beta$ τα δύο σταθερά σημεία της, αφού f διαφορομορφισμός αντίστροφης σειράς, έχουμε $f(\alpha) > f(\beta)$. Άρα καταλήγουμε ότι $\alpha > \beta$, άτοπο. ■

Παράδειγμα 4.3.12. Οι διαφορομορφισμοί που διατηρούν την τάξη έχουν παρατηρηθεί να έχουν οποιονδήποτε αριθμό σταθερών σημείων. Θα δούμε ότι δεν μπορούν να έχουν σημεία περιόδου μεγαλύτερης από 1. Από την άλλη πλευρά, οι διαφορομορφισμοί που αντιστρέφουν την τάξη μπορούν να έχουν σημεία περιόδου 2, (π.χ. $f(x) = -x$), αλλά όχι σημεία μεγαλύτερης περιόδου. Το συμπέρασμα είναι ότι η δυναμική των μονοδιάστατων διαφορομορφισμών δεν είναι περίπλοκη. Αυτό δεν ισχύει για τους δισδιάστατους διαφορομορφισμούς (δηλαδή, διαφορομορφισμούς $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Θεώρημα 4.3.13. Έστω $f: I \rightarrow I$ διαφορομορφισμός σε ένα ανοικτό διάστημα I .

- i) Αν η f είναι διατήρηση τάξης, τότε η f δεν έχει περιοδικά σημεία περιόδου μεγαλύτερης από 1,
- ii) Αν η f είναι αντίστροφης τάξης, τότε η f δεν έχει περιοδικά σημεία περιόδου μεγαλύτερης από 2.

Απόδειξη:

(i) Αν $\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ είναι η τροχιά ενός σημείου x_0 της συνάρτησης f , με $x_1 = f(x_0) \neq x_0$, δηλαδή x_0 δεν είναι σταθερό σημείο της f .

Αν $x_1 > x_0$ τότε $f(x_1) > f(x_0)$ (f γνησίως αύξουσα) συνεπώς $x_2 > x_1$.

Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα καταλήγουμε ότι

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, \text{ οπότε } f^n(x_0) \neq x_0.$$

Αν $x_1 < x_0$ τότε $f(x_1) < f(x_0)$ συνεπώς $x_2 < x_1$ ομοίως με επανάληψη καταλήγουμε ότι $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$, οπότε $f^n(x_0) = x_n \neq x_0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $f^n(x_0) = x_n \neq x_0$ δηλαδή η f δεν έχει περιοδικά σημεία (μπορεί να έχει μόνο σταθερά).

(ii) Αν η f είναι αντίστροφης τάξης, τότε η f^2 είναι διαφορομορφισμός διατήρησης τάξης, αφού f γνησίως φθίνουσα. Δηλαδή ισχύει $f'(x) < 0$ άρα

$$(f^2(x))' = (f(f(x)))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) > 0, \text{ συνεπώς από το i), η } f^2 \text{ δεν έχει}$$

περιοδικά σημεία περιόδου μεγαλύτερης από 1, άρα η f δεν έχει περιοδικά σημεία περιόδου μεγαλύτερης από 2. ■

Πρόταση 4.3.14. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι συνεχής και ένα προς ένα.

Τότε:

i) η f είναι διατήρηση τάξης ή αντιστροφή τάξης στο $[\alpha, \beta]$,

ii) αν η f είναι διατήρηση τάξης, τότε κάθε περιοδικό σημείο της f είναι σταθερό σημείο της,

iii) αν η f είναι αντιστροφή τάξης, τότε η f έχει μόνο ένα σταθερό σημείο και όλα τα υπόλοιπα περιοδικά της σημεία έχουν περίοδο δύο.

Απόδειξη:

i) Αν υποθέσουμε ότι έχουμε για $\alpha < \beta$ να ισχύει $f(\alpha) < f(\beta)$ (δεν μπορούν να είναι ίσες καθώς η f είναι ένα προς ένα), και έστω $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) > f(x_2)$ (δηλ. η f δεν είναι γνησίως αύξουσα).

- Υποθέστε ότι $f(\alpha) < f(x_2) < f(x_1)$, τότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $c \in (\alpha, x_1)$ με $f(c) = f(x_2)$. Με δεδομένο όμως ότι η f είναι ένα προς ένα, έχουμε $c = x_2$. Αυτό δεν είναι δυνατό αφού $c < x_1 < x_2$.
- Αν $f(x_2) < f(\alpha) < f(x_1)$ βρίσκουμε $c \in (x_1, x_2)$ με $f(c) = f(\alpha)$ (άτοπο).
- Ομοίως, αν $f(x_2) < f(x_1) < f(\alpha) < f(\beta)$ βρίσκουμε $c \in (x_2, \beta)$ με $f(c) = f(\alpha)$ (πάλι άτοπο).

Άρα για $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ (διατήρηση τάξης).

Αν υποθέσουμε ότι για $\alpha < \beta$ ότι ισχύει $f(\alpha) > f(\beta)$ εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο και δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ (αντιστροφή τάξης).

Συνεπώς η f είναι διατήρηση τάξης ή αντιστροφή τάξης στο $[\alpha, \beta]$

ii) Ας υποθέσουμε ότι c είναι ένα σημείο της f με περίοδο p , δηλαδή $f^p(c) = c$. Επειδή η f είναι διατήρηση τάξης ισχύει $c < f(c) < f^2(c)$ οπότε λαμβάνουμε μια αύξουσα ακολουθία της οποίας το όριο υπάρχει, ας είναι ℓ . Τότε

$$c < \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{np}(c) = c, \text{ άτοπο.}$$

Ομοίως η ανίσωση $f(c) > c$ οδηγεί σε άτοπο, άρα $f(c) = c$ και $p=1$.

iii) Δεδομένου ότι η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα μέσα στον εαυτό της, η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο (Θεώρημα 2.2.7.). Πρέπει να έχουμε $f(a) > a$, διαφορετικά $a = f(a) > f(\beta) \geq a$, κάτι που είναι αδύνατο. Ομοίως, $f(\beta) < \beta$.

Αν c_1, c_2 είναι διαφορετικά σταθερά σημεία της f με $c_1 < c_2$, τότε $c_1 = f(c_1) > f(c_2) = c_2$ κάτι που είναι αδύνατο, άρα η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο. Τώρα παρατηρήστε ότι επειδή η f είναι αντιστροφή τάξης, η f^2 διατηρεί την τάξη, άρα τα μόνα περιοδικά σημεία που μπορεί να έχει η f^2 είναι σταθερά της σημεία, και αυτά είναι σημεία περιόδου 2 της f . ■

Παρατήρηση 4.3.15. Συνεπώς, αν $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ είναι διαφορομορφισμός (θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στο 7^ο κεφάλαιο), τότε είναι είτε αυστηρά αύξουσα, είτε αυστηρά φθίνουσα. Θα δούμε ότι αν είναι αυξανόμενη, η f διατηρεί την τάξη με $f(a) = a$, $f(\beta) = \beta$ και τα μόνα άλλα περιοδικά σημεία είναι σταθερά σημεία. Αν είναι φθίνουσα (αντιστροφή τάξης), τότε έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο με όλα τα άλλα περιοδικά σημεία να έχουν περίοδο 2. Επίσης, η f^2 διατηρεί τον προσανατολισμό και πρέπει να έχουμε $f(a) = \beta$, $f(\beta) = a$.

4.4 Αριθμησιμότητα, Σύνολα Μέτρου Μηδέν και το Σύνολο Cantor

Δεδομένου ενός άπειρου συνόλου A , υπάρχουν διάφοροι τρόποι να σκεφτούμε το A ως "μεγάλο".

Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ είναι ένα "μεγάλο" σύνολο, καθώς είναι πυκνό στο \mathbb{R} . Ωστόσο, κατά κάποιο τρόπο είναι ένα "μικρό" σύνολο, αυτό που ονομάζουμε *μετρήσιμο* σύνολο και επίσης ένα σύνολο *μέτρου μηδέν*. Τα σύνολα μέτρου μηδέν είναι σύνολα που είναι μικρά ως προς το "μήκος". Πολλές από τις ιδέες σε αυτήν την ενότητα οφείλονται στον George Cantor, έναν Γερμανό μαθηματικό του 19ου αιώνα. Πριν εξετάσουμε την έννοια της μετρησιμότητας, εξετάζουμε σύνολα μέτρου μηδέν.

Ορισμός 4.4.1. Έστω I ένα φραγμένο υποδιάστημα του \mathbb{R} , με άκρα α, β ($\alpha \leq \beta$).

Το μήκος του I είναι τότε $|I| = \beta - \alpha$. Αν I είναι ένα μη φραγμένο διάστημα, θέτουμε $|I| = \infty$.

Ορισμός 4.4.2. Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου αν μπορούμε να καλύψουμε το A με φραγμένα ανοιχτά διαστήματα που έχουν δεικτοδοτηθεί από το σύνολο \mathbb{Z}^+ , έτσι ώστε το συνολικό μήκος των διαστημάτων να μπορεί να επιλεγεί να είναι αυθαίρετα μικρό. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένου οποιουδήποτε $\epsilon > 0$, υπάρχει μια συλλογή ανοιχτών διαστημάτων $\{I_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ με

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} I_n \text{ και } \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |I_n| \leq \epsilon.$$

Μια συλλογή ανοιχτών συνόλων O_λ , των οποίων η ένωση περιέχει ένα σύνολο A (σε έναν μετρικό χώρο) ονομάζεται ανοιχτό κάλυμμα του συνόλου A .

Σχόλια 4.4.3

1. Η απαίτηση τα διαστήματα να είναι ανοιχτά δεν είναι αυστηρή, μπορεί να είναι κλειστά ή μισάνοιχτα. Για παράδειγμα, εάν τα διαστήματα I_n είναι κλειστά, αντικαταστήστε I_n με J_n , με $I_n \subset J_n$, και $|J_n| = |I_n| + \epsilon/2^n$, τότε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |J_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |I_n| + \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \epsilon/2^n \leq 2\epsilon$$

2. Αν μια ιδιότητα P ισχύει παντού εκτός από ένα σύνολο μέτρου μηδέν, μερικές φορές λέμε ότι ισχύει σχεδόν παντού (συντομογραφία σχ.π.), οπότε για παράδειγμα, αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται από $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ τότε λέμε ότι $f(x) = 0$ σχ.π.

Παράδειγμα 4.4.4. Ένα πεπερασμένο υποσύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ του \mathbb{R} , είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου διότι για $\epsilon > 0$, υπάρχουν διαστήματα της μορφής $I_i = \left(\alpha_i - \frac{\epsilon}{2^n}, \alpha_i + \frac{\epsilon}{2^n}\right), i = 0, 1, 2, \dots, n$, με $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_i$ και με ολικό μήκος των διαστημάτων να είναι ϵ .

Ορισμός 4.4.5. Οποιοδήποτε σύνολο A που είναι πεπερασμένο ή μπορεί να τεθεί σε αντιστοιχία ένα προς ένα με το σύνολο \mathbb{Z}^+ λέγεται *αριθμήσιμο*. Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι τα μέλη του A μπορούν να παρατεθούν ως ακολουθία.

Επίσης είναι φανερό ότι κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Παραδείγματα 4.4.6.

1. Το σύνολο $A = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ είναι αριθμήσιμο διότι μπορούμε να ορίσουμε την ένα προς ένα και επί συνάρτηση $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.
2. Το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών είναι ένα μετρήσιμο σύνολο.
3. Το σύνολο \mathbb{R} δεν είναι αριθμήσιμο (λέμε ότι είναι μη-αριθμήσιμο).
4. Θα δείξουμε (μέσω αντίφασης) ότι το διάστημα $[0, 1]$ είναι μη-αριθμήσιμο: Ας υποθέσουμε ότι το $[0, 1]$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο, τότε μπορούμε να απαριθμήσουμε τα μέλη του ως ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$. Κάθε μέλος αυτής της ακολουθίας έχει μια δυαδική επέκταση, ας πούμε

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= .x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \dots \\ \alpha_2 &= .x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \dots \\ \alpha_3 &= .x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \dots \\ \alpha_4 &= .x_{41}x_{42}x_{43}x_{44} \dots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \dots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \dots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \dots \\ \alpha_n &= .x_{n1}x_{n2}x_{n3}x_{n4} \dots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \dots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \dots \end{aligned}$$

Αν $\beta = .\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \dots \beta_n \dots$ όπου $\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } x_{ii} = 1 \\ 1, & \text{αν } x_{ii} = 0 \end{cases}$ τότε το β διαφέρει από το α_1

στο πρώτο διαδικό ψηφίο, από το α_2 στο δεύτερο διαδικό ψηφίο, κτλ, από το α_n στο n -ιοστό διαδικό ψηφίο. Τότε όμως ο αριθμός β δεν ταυτίζεται με κάποιο όρο της ακολουθίας α_n , δηλαδή καταλήγουμε σε αντίφαση αφού όλα τα στοιχεία του $[0, 1]$ αποτελούν όρους της α_n . Συνεπώς το διάστημα $[0,1]$ είναι μη-αριθμήσιμο.

Παρατηρήσεις 4.4.7.

1. Κάθε $x \in (0, 1)$ έχει μια μοναδική μη τερματική δυαδική επέκταση, για

παράδειγμα: $\frac{1}{2} = .1000\dots$ και $\frac{1}{2} = .0111\dots$

επομένως το $1/2$ έχει δύο διαφορετικές δυαδικές αναπαραστάσεις, αλλά μόνο η δεύτερη είναι μη τερματική.

Στην απόδειξη της μη αριθμήσιμης συνάρτησης του $[0, 1]$ θα πρέπει να υποθέσουμε ότι τα α_i έχουν μια μη τερματική επέκταση. Αυτό δίνει $\beta = .\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 \dots \beta_n \dots$, αλλά δεν γνωρίζουμε αν είναι τερματική ή όχι. Για να αποφύγουμε αυτή τη δυσκολία θα πρέπει να ξεκινήσουμε απαριθμώντας όλες τις πιθανές δυαδικές επεκτάσεις (τόσο τις τερματικές όσο και τις μη τερματικές), επομένως ορισμένοι αριθμοί παρατίθενται δύο φορές, αλλά υπάρχουν μόνο αριθμήσιμα πολλοί που έχουν τερματικές επεκτάσεις (αυτές είναι οι δυαδικοί ρητοί όπως $1/2, 3/4 = .1100 \dots$ κ.λπ.). Προχωρούμε όπως προηγουμένως για να δείξουμε ότι το β δεν είναι ένα από τα απαριθμημένα στοιχεία.

2. Είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ του διαστήματος $(0, 1)$ και του \mathbb{R} (λέμε ότι αυτά τα σύνολα έχουν την ίδια πληθικότητα). Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), f(x) = \arctan(x)$ είναι ένα προς ένα και επί.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι οι ρητοί αριθμοί (και στην πραγματικότητα οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο) είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, δηλαδή, μπορούν να καλυφθούν από μια συλλογή ανοιχτών διαστημάτων των οποίων το συνολικό μήκος μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένα διάστημα όπως το $[0, 1]$ δεν είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου και επίσης ότι οι άρρητοι αριθμοί στο $[0, 1]$ δεν αποτελούν ένα σύνολο μηδενικού μέτρου.

Πρόταση 4.4.8. Οι ρητοί αριθμοί σχηματίζουν ένα σύνολο μέτρου μηδέν.

Απόδειξη: Μπορούμε να απαριθμήσουμε το \mathbb{Q} ως ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$.

Για $\epsilon > 0$, υπάρχουν διαστήματα της μορφής $I_n = (\alpha_n - \frac{\epsilon}{2^{1+n}}, \alpha_n + \frac{\epsilon}{2^{1+n}})$, σε κάποιο από τα οποία ανήκει ένας τυχαίος ρητός α_n . Άρα έχουμε $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{i=1}^n I_n$.

Το συνολικό μήκος όλων των παραπάνω διαστημάτων είναι

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |I_n| = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$$

το οποίο μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Το σύνολο $K = \bigcup_{i=1}^n I_n$ είναι ένα άλλο παράδειγμα ενός συνόλου στο \mathbb{R} που είναι ανοιχτό και πυκνό, περιέχει \mathbb{Q} και δεν είναι ίσο με \mathbb{R} . ■

Θα δείξουμε τώρα ότι ένα διάστημα I , με άκρα α και β , $\alpha < \beta$, δεν μπορεί να είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου. Το ακόλουθο αποτέλεσμα οφείλεται στον Borel. Αρχικά χρειαζόμαστε ένα λήμμα που παρουσιάζει ενδιαφέρον από μόνο του και να σχετίζεται με ένα αποτέλεσμα γνωστό ως *Θεώρημα Heine-Borel*:

Λήμμα 4.4.9. Έστω μια συλλογή ανοιχτών συνόλων O_λ , που καλύπτουν το διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha \leq \beta$ (δηλαδή, $[\alpha, \beta] \subset \bigcup O_\lambda$). Τότε υπάρχει μια πεπερασμένη υποσυλλογή αυτών των συνόλων που καλύπτει το $[\alpha, \beta]$.

Απόδειξη: Έστω $S = \{x \in [\alpha, \beta] : \text{υπάρχει μια πεπερασμένη υποσυλλογή διαστημάτων από τα } O_\lambda, \text{ που καλύπτουν } [\alpha, x]\}$. Προφανώς $\alpha \in S$ και το σύνολο S έχει άνω φράγμα το β , άρα υπάρχει $\mu = \sup(S)$ και $\mu \leq \beta$.

Υποθέτουμε ότι $\mu < \beta$, τότε το μ ανήκει σε κάποιο ανοιχτό σύνολο, ας πούμε O_μ από τη συλλογή μας. Εφόσον αυτό το σύνολο είναι ανοιχτό, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $(\mu - \epsilon, \mu + \epsilon) \subset O_\mu$. Αν $\beta \in (\mu, \mu + \epsilon)$, τότε είναι σαφές ότι μπορούμε να καλύψουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ από μια πεπερασμένη υποσυλλογή των ανοιχτών συνόλων, αφού μπορούμε πάντα να συμπεριλάβουμε το O_μ . Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι το μ είναι το ελάχιστο ανώτερο όριο του συνόλου S , άρα πρέπει να έχουμε $\mu = \beta$. ■

Πρόταση 4.4.10. Αν μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία διαστημάτων I_n , $n = 1, 2, \dots$, καλύπτει ένα διάστημα I με άκρα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, τότε $\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |I_n| \geq |I|$.

Απόδειξη: Δίνουμε την απόδειξη για την περίπτωση όπου τα διαστήματα I_n είναι ανοιχτά, και $I = [\alpha, \beta]$ είναι ένα κλειστό διάστημα. Μια μικρή τροποποίηση θα δώσει το γενικό αποτέλεσμα.

Συμβολίζουμε με (α_1, β_1) το πρώτο διάστημα που περιέχει το σημείο α . Αν $\beta_1 < \beta$, έστω (α_2, β_2) το πρώτο διάστημα της ακολουθίας I_n που περιέχει το σημείο β_1 . Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε αν $\beta_{n-1} < \beta$, (α_n, β_n) να είναι το πρώτο διάστημα που περιέχει το σημείο β_{n-1} .

Αυτή η διαδικασία πρέπει να τερματιστεί με κάποιο $\beta_n < \beta$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε μια αυξανόμενη ακολουθία που οριοθετείται από πάνω από το β , άρα πρέπει να συγκλίνει σε ένα όριο $\mu \leq \beta$, όπου το μ ανήκει στο I_κ για κάποιο κ . Όλα τα διαστήματα (α_n, β_n) εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό θα έπρεπε να προηγούνται του I_κ στη δεδομένη ακολουθία, δηλαδή, όλα αυτά για τα οποία $\beta_{n-1} \in I_\kappa$. Αυτό είναι

αδύνατο αφού κανένα από αυτά τα διαστήματα δεν είναι ίσα. Συνεπώς

$$|I| = \beta - \alpha < \beta_n - \alpha_1 = \sum_{i=2}^n (\beta_i - \beta_{i-1}) + \beta_1 - \alpha_1 \leq \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |I_n| \quad \blacksquare$$

Συμπεραίνουμε ότι το διάστημα $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, δεν είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου. Αυτό επίσης δίνει μια εναλλακτική απόδειξη του γεγονότος ότι ένα διάστημα είναι ένα μη-αριθμήσιμο σύνολο:

Συμπέρασμα 4.4.11. Ένα διάστημα I με άκρα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, δεν είναι μηδενικού μέτρου και επομένως δεν μπορεί να είναι ένα μετρήσιμο σύνολο.

Παράδειγμα 4.4.12. Το σύνολο Cantor.

Το σύνολο Cantor C ορίζεται ως εξής: Έστω το σύνολο $S_0 = [0, 1]$, το μοναδιαίο διάστημα. Αφαιρούμε το ανοιχτό διάστημα $(1/3, 2/3)$ από το S_0 για να πάρουμε $S_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$.

Συνεχίζουμε να αφαιρούμε ανοιχτά μεσαία τρίτα για να προκύψει

$$S_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

και συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο αφαιρώντας τα ανοιχτά μεσαία τρίτα έτσι ώστε

$$S_n = [0, 1/3^n] \cup \dots$$

Συμβολίζοντας το συνολικό μήκος των υποδιαστημάτων που αποτελούν το S_n με $|S_n|$ (άρα $|S_0| = 1$), έχουμε:

Το S_1 αποτελείται από 2 διαστήματα συνολικού μήκους $|S_1| = 2/3$,

Το S_2 αποτελείται από 2^2 διαστήματα συνολικού μήκους $|S_2| = 2^2/3^2$,

Το S_3 αποτελείται από 2^3 διαστήματα συνολικού μήκους $|S_3| = 2^3/3^3$,

και γενικά το

S_n αποτελείται από 2^n διαστήματα συνολικού μήκους $|S_n| = 2^n/3^n$.

Ορισμός 4.4.13. Το σύνολο Cantor C ορίζεται ως $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$.

Στόχος μας τώρα είναι να δείξουμε ότι το σύνολο Cantor είναι ένα μεγάλο σύνολο με την έννοια ότι δεν είναι αριθμήσιμο, αλλά μικρό με την έννοια ότι είναι ένα σύνολο μηδενικού μέτρου. Διερευνούμε επίσης τις ιδιότητες του C και δείχνουμε μια σύνδεση μεταξύ του C και της τριαδικής ανάπτυξης ορισμένων αριθμών στο $[0, 1]$. Το σύνολο Cantor είναι ένα παράδειγμα φράκταλ - έχει την ιδιότητα της αυτοομοιότητας. Για παράδειγμα, το $C \cap [0, 1/3]$ μοιάζει ακριβώς με το σύνολο Cantor, αλλά σε μικρότερη κλίμακα. Το $C \cap [0, 1/9]$ είναι ένα αντίγραφο του C αλλά σε μικρότερη κλίμακα. Μπορούμε να συνεχίσουμε έτσι επ' αόριστον για να βλέπουμε το C σε όλο και μικρότερες κλίμακες.

Πρόταση 4.4.14. Το σύνολο Cantor C είναι ένα κλειστό μη κενό υποσύνολο του $[0, 1]$, που έχει μέτρο μηδέν.

Απόδειξη: Το C δεν είναι κενό επειδή περιέχει όλα τα τελικά σημεία καθενός από τα διαστήματα που αποτελούν το σύνολο S_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ (για παράδειγμα, $1/3 \in S_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$). Ισχύει $C \subset S_n$ για $n = 1, 2, 3, \dots$ όπου $|S_n| = 2^n/3^n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, έτσι ώστε το C να μπορεί να καλύπτεται από μια συλλογή διαστημάτων των οποίων το συνολικό μήκος μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό. Το C είναι ένα κλειστό σύνολο επειδή καθένα από τα σύνολα S_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ είναι κλειστό, και C είναι η τομή κλειστών συνόλων. ■

4.5 Τριαδικά αναπτύγματα και το σύνολο Cantor.

Κάθε αριθμός $x \in [0, 1]$ έχει μια τριαδική ανάπτυξη, δηλαδή, μπορεί να γραφτεί ως $x = .a_1a_2a_3a_4 \dots = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} \dots$ όπου $a_i = \{0,1,2\}$.

Αν $a_1 = 0$ τότε $x \in [0, 1/3]$ αφού $x = .0a_2a_3a_4 \dots \leq .0222 \dots = 1/3$.

Ομοίως, αν $a_1 = 1$, τότε $x \in [1/3, 2/3]$, και αν $a_1 = 2$, τότε $x \in [2/3, 1]$. Αντίστροφα,

αν $x \in [0, 1/3]$, το x έχει τριαδική επέκταση με $a_1 = 0$, και ομοίως για τα άλλα

δύο διαστήματα. Επιπλέον, όπως και στην περίπτωση της δυαδικής επέκτασης, κάθε $x \in (0, 1)$ έχει μια μοναδική μη τερματική τριαδική επέκταση. Για παράδειγμα

$$\frac{1}{3} = .1000 \dots = .02222 \dots \quad \text{και} \quad \frac{2}{3} = .2000 \dots = .1222 \dots$$

Θα δείξουμε ότι $x \in C$ αν και μόνο αν το x έχει τριαδική ανάπτυξη (πιθανώς τερματική) που αποτελείται μόνο από 0 και 2. Αυτό σημαίνει, για παράδειγμα, ότι $1/3 \in C$, $1 = .2222 \dots \in C$, $2/3 \in C$ και $3/4 = .20202 \dots \in C$.

Θεώρημα 4.5.1. $x \in C$ αν και μόνο αν το x έχει τριαδικό ανάπτυγμα

$$x = .a_1a_2a_3a_4 \dots, \quad \text{όπου} \quad a_i = \{0,2\}.$$

Απόδειξη: Αρχικά, ας υποθέσουμε ότι $x \in C$ με τριαδική ανάπτυξη $x = .a_1a_2a_3a_4 \dots$,

τότε $x \in S_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Συγκεκριμένα $x \in S_1$, άρα είτε $x \in [0, 1/3]$ και μπορούμε να πάρουμε $a_1 = 0$, ή $x \in [2/3, 1]$ και $a_1 = 2$. Επίσης $x \in S_2$, άρα είτε $x \in [0, 1/9]$ και $a_2 = 0$, ή $x \in [2/9, 1/3]$ και $a_2 = 2$, ή $x \in [2/3, 7/9]$ και $a_2 = 0$, ή $x \in [8/9, 1]$ και $a_2 = 2$.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε ότι μπορούμε να πάρουμε $a_n = 0$ ή $a_n = 2$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε την επέκταση έτσι ώστε $a_n = 0$ ή $a_n = 2$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, τότε επειδή αυτό ισχύει για $n = 1$ πρέπει να έχουμε $x \in [0, 1/3]$ ή $x \in [2/3, 1]$ ώστε $x \in S_1$. Ομοίως, $a_2 = 0$ ή 2 δηλαδή $x \in S_2$ και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, $x \in S_n$ για $n = 1, 2, \dots$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = C$. ■

Ορισμός 4.5.2. Το σύνολο Cantor είναι μη-αριθμήσιμο

Απόδειξη: Ορίζουμε μια συνάρτηση ένα προς ένα $f: [0, 1] \rightarrow C$ ως εξής:

Έστω $x \in [0, 1]$ μια δυαδική αναπαράσταση (μη τερματική) $x = .a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ όπου $a_i \in \{0, 1\}$.

$$\text{Θέτουμε } f(x) = .b_1 b_2 b_3 b_4 \dots, \text{ όπου } b_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } a_i = 0 \\ 2, & \text{αν } a_i = 1 \end{cases}$$

Τότε η $f(x)$ είναι ένα προς ένα (δεν είναι όμως επί, διότι ορισμένοι αριθμοί όπως $2/3 = .1222 \dots \in C$ δεν βρίσκονται στην περιοχή της f). Συνεπώς, υπάρχει ένα υποσύνολο του C που είναι μη μετρήσιμο, άρα το ίδιο το C είναι μη μετρήσιμο. ■

Τέλος, δείχνουμε ότι το σύνολο Cantor είναι εντελώς “μη συνεκτικό” και “τέλειο”. Σε αυτό το πλαίσιο, το να πούμε ότι το C είναι εντελώς μη συνεκτικό σημαίνει ότι δεν περιέχει διαστήματα, και το γεγονός ότι είναι τέλειο σημαίνει ότι κάθε σημείο του C είναι ένα οριακό σημείο του C . Πιο επίσημα:

Ορισμός 4.5.3. Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται πλήρως μη συνεκτικό ή ασύνδετο (ή έχει κενό εσωτερικό), αν το A δεν περιέχει μη κενά ανοιχτά διαστήματα.

Για παράδειγμα, διακριτά σύνολα σημείων είναι πλήρως ασύνδετα, \mathbb{Q} το σύνολο των ρητών στο \mathbb{R} είναι πλήρως ασύνδετο.

Ορισμός 4.5.4. Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται τέλειο αν κάθε σημείο του A είναι ένα οριακό σημείο του A .

Θεώρημα 4.5.5. Το σύνολο Cantor C είναι εντελώς ασύνδετο και τέλειο.

Απόδειξη: Αν το A είναι ένα μη κενό ανοιχτό διάστημα που περιέχεται στο C , τότε το A περιέχεται στο S_n για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$. Αλλά $|S_n| = 2^n / 3^n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$, άρα αυτό είναι αδύνατο καθώς κάθε μη κενό ανοιχτό διάστημα έχει θετικό μήκος.

Για να δείξουμε ότι το C είναι τέλειο, παίρνουμε $x \in C$ το οποίο έχει τριαδικό ανάπτυγμα $x = .a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$, όπου $a_i \in \{0, 2\}$.

Θέτουμε $x_n = .a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots$, επιλεγμένο έτσι ώστε $x_n \in C$ και να συμφωνεί με

το x στις πρώτες n -θέσεις και $x_n \neq x$ και $x_n \neq x_m$ για όλα τα $n, m \in \mathbb{Z}^+$, $n \neq m$. Τότε

$$|x_n - x| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty,$$

άρα x οριακό σημείο του A . ■

Υπάρχουν και άλλα «Σύνολα Cantor» εκτός από το C . Οποιοδήποτε υποσύνολο του \mathbb{R} που είναι κλειστό, φραγμένο, τέλειο και εντελώς ασύνδετο λέγεται Σύνολο Cantor. Θα δούμε ότι αυτά προκύπτουν αρκετά φυσικά στη θεωρία δυναμικών συστημάτων.

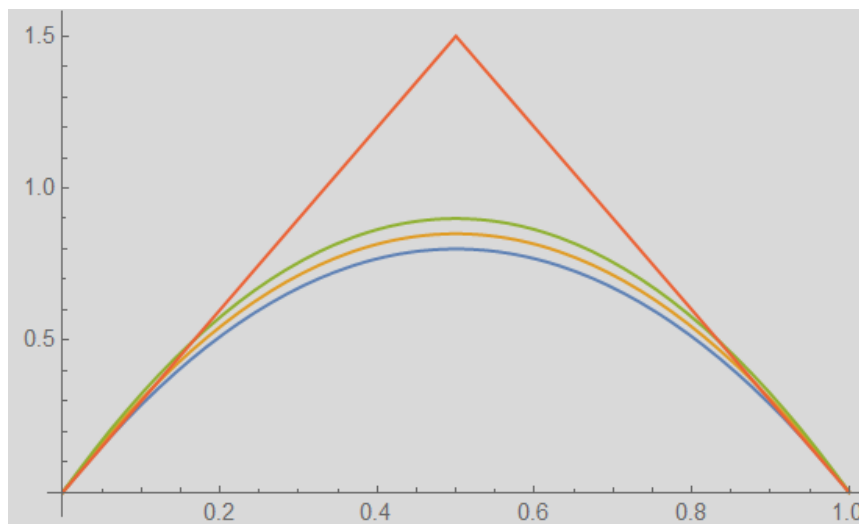
4.6 Η συνάρτηση Σκηνής για $\mu = 3$

Θεωρήστε την οικογένεια σκηνών T_μ για $\mu = 3$, όπου θεωρούμε τη T_3 ως μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} , με μορφή

$$T_3(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x), & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Εξ ορισμού, η συνάρτηση σκηνής είναι τμηματικά γραμμική.

Αν θέλαμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση σκηνής με μια ακολουθία διαφορίσιμων συναρτήσεων, θα μπορούσαμε να το κάνουμε με συναρτήσεις όπως σκιαγραφείται στο Σχήμα 4.6.1. παρακάτω.



Σχήμα 4.6.1.

Προσέγγιση της τμηματικά γραμμικής μη διαφορίσιμης συνάρτησης σκηνής $T_3(x)$ με μια ακολουθία μη γραμμικών διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Θα έπρεπε να ορίσουμε τα μέγιστα της ακολουθίας συναρτήσεων και τις καμπυλότητες γύρω από αυτά έτσι ώστε να προσεγγίζουν ασυμπτωτικά τη συνάρτηση σκηνης. Έτσι, κατά κάποιον τρόπο, τη συνάρτηση σκηνης μπορεί να γίνει κατανοητή ως η οριακή περίπτωση μιας ακολουθίας μη γραμμικών συναρτήσεων.

Θα δείξουμε ότι η τροχιά του $x \in [0, 1]$ είναι φραγμένη αν και μόνο αν $x \in C$, το σύνολο Cantor. Συγκεκριμένα, αν $x \notin C$, τότε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Θα δείξουμε επίσης ότι το C είναι ένα αμετάβλητο σύνολο ως προς τη T_3 ($T_3(C) = C$), επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τη T_3 ως μια απεικόνιση $T_3 : C \rightarrow C$, και εδώ λαμβάνει χώρα η ενδιαφέρουσα δυναμική της T_3 .

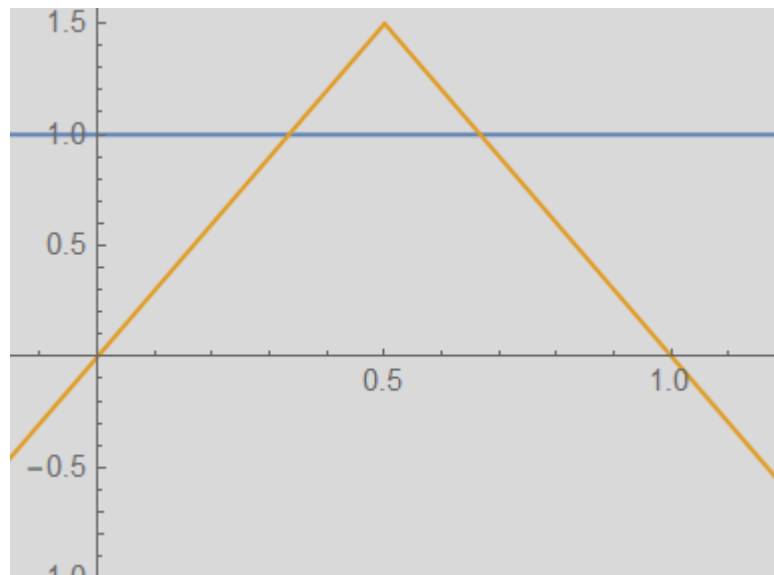
Πρόταση 4.6.1. Αν $\Lambda = \{x \in [0, 1] : T_3^n(x) \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{Z}^+\}$, τότε $\Lambda = C$, το σύνολο Cantor. Επιπλέον, $T_3(C) \subseteq C$.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός 1. Αν $x \in (1/3, 2/3)$ τότε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Αυτό συμβαίνει επειδή η T_3 αυξάνεται στο $(1/3, 1/2]$ και μειώνεται στο $[1/2, 2/3)$ έτσι ώστε αν $1/3 < x \leq 1/2$, τότε $T_3(1/3) < T_3(x) \leq T_3(1/2)$ άρα $1 < T_3(x) \leq 3/2$.

Ομοίως, αν $1/2 \leq x < 2/3$ τότε $1 < T_3(x) \leq 3/2$, άρα $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.



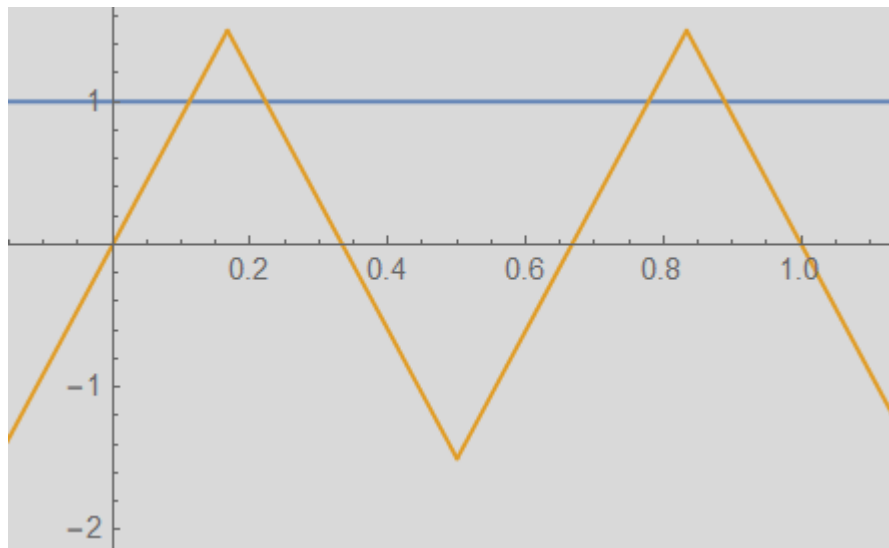
Σχήμα 4.6.2.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης σκηνης $T_3(x)$.

Ισχυρισμός 2. Η συνάρτηση $T_3^2(x)$ είναι

$$T_3^2(x) = \begin{cases} 9x, & x \leq \frac{1}{6} \\ 3(1 - 3x), & \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{2} \\ 3(-2 + 3x), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{6} \\ 9(1 - x), & x > \frac{5}{6} \end{cases}$$

Αν $x \in (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$ τότε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.



Σχήμα 4.6.3.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης σκηής $T_3^2(x)$.

Η συνάρτηση $T_3^2(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1/9, 1/6]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1/6, 2/9)$, έτσι ώστε αν $1/9 < x \leq 1/6$, τότε $T_3^2\left(\frac{1}{9}\right) < T_3^2(x) \leq T_3^2\left(\frac{1}{6}\right)$ και $1 < T_3^2(x) \leq \frac{3}{2}$ και ομοίως αν $1/6 < x \leq 2/9$ τότε $1 < T_3^2(x) \leq \frac{3}{2}$. Ένα παρόμοιο επιχείρημα ισχύει επίσης όταν $x \in (7/9, 8/9)$ για να δώσει $T_3^2(x) > 1$ σε κάθε περίπτωση, έτσι ώστε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Ισχυρισμός 3. Αν $x \notin C$, τότε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Είδαμε ότι αν $x \in (1/3, 2/3)$ τότε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Υποθέστε αντ' αυτού ότι $x \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ και έχει τριαδική ανάπτυξη

$$x = .a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \text{ όπου } a_i = \{0, 1, 2\}.$$

$$\text{Τότε } T_3(x) = \begin{cases} .a_2 a_3 a_4 \dots, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ .\beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ όπου } \beta_i = \begin{cases} 0, & \text{αν } a_i = 2 \\ 1, & \text{αν } a_i = 1 \\ 2, & \text{αν } a_i = 0 \end{cases}$$

Συνεπώς, αν το x έχει 1 στην τριαδική του ανάπτυξη, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}^+$, με

$$T_3^k(x) = .1a_{k+1} \dots, \text{ άρα } T_3^k(x) \in [1/3, 2/3].$$

Μπορούμε μόνο να έχουμε $T_3^k(x) = \frac{1}{3}$ όταν η τριαδική ανάπτυξη του x αποτελείται από μια ακολουθία 0 και 2 (k όροι), ακολουθούμενη από ένα 1, και στη συνέχεια ακολουθούμενη από μια άπειρη σειρά από 0 (σε αυτήν την περίπτωση $x \in C$ επειδή οι όροι 1000 ... μπορούν να γραφτούν ως 0222 ...). Έτσι, $T_3^{k+1}(x) > 1$ και η τροχιά του x θα φτάσει στο $-\infty$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι αν $x \notin C$, τότε $T_3^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Ισχυρισμός 4. Αν $x \in C$, τότε $T_3(x) \in C$

Αν κάθε $a_i = 0$ ή 2, τότε κάθε β_i (ισχυρισμός 3) είναι 0 ή 2, άρα $T_3(x) \in C$. ■

Τελικά, βλέπουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε την T_3 ως μια απεικόνιση $T_3 : C \rightarrow C$. Το σύνολο Cantor C είναι το σύνολο στο οποίο λαμβάνει χώρα η ενδιαφέρουσα δυναμική. Μπορούμε να δούμε ότι η T_3 είναι μια απεικόνιση σε σχέση με το σύνολο, αλλά σαφώς δεν είναι ένα προς ένα. Μια παρόμοια ανάλυση μπορεί να γίνει για το T_μ όταν $\mu > 2$ για να συμπεράνουμε ότι υπάρχει κάποιο σύνολο C_μ , ένας τύπος συνόλου Cantor, στο οποίο λαμβάνει χώρα η ενδιαφέρουσα δυναμική.

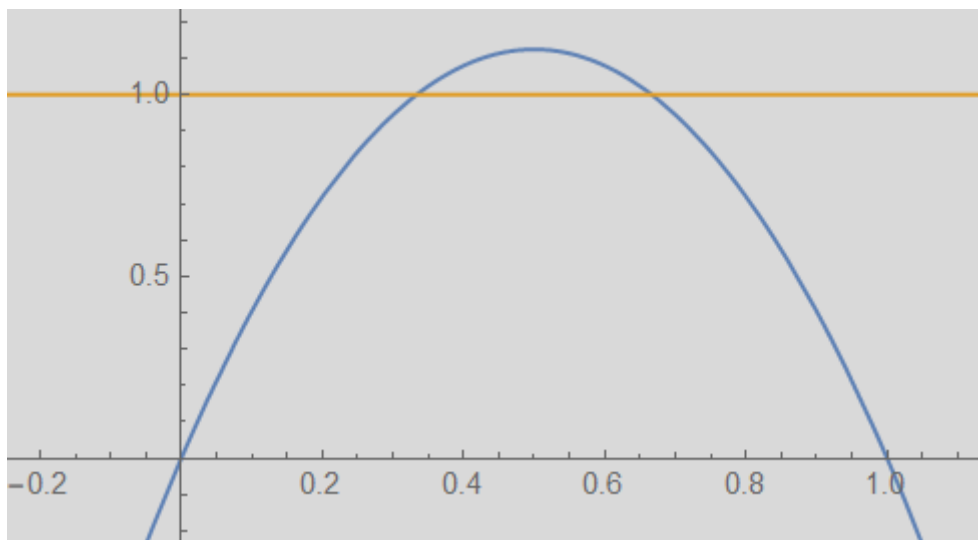
Παρόμοια (αλλά πιο περίπλοκη) συλλογιστική δείχνει επίσης ότι η λογιστική απεικόνιση $L_\mu x(1-x)$, $\mu > 4$, $x \in \mathbb{R}$ έχει τον ίδιο τύπο συμπεριφοράς.

4.7. Ένα άλλο σύνολο Cantor

Εξετάζουμε ένα σύνολο Cantor που προκύπτει από τη λογιστική απεικόνιση $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$ για $\mu > 4$.

Σκεφτόμαστε την L_μ ως μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} , αλλά μας ενδιαφέρει κυρίως ο περιορισμός της στο $[0, 1]$. Τότε $L_\mu(1/2) = \frac{\mu}{4} > 1$, και $x = 1/2$ είναι ένα κρίσιμο σημείο για την L_μ . Από το γράφημα της L_μ βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο σημεία α_0 και $\alpha_1 = 1 - \alpha_0$ όπου $L_\mu(\alpha_0) = 1 = L_\mu(\alpha_1)$ και επιπλέον, $L_\mu(x) > 1$ για όλα τα $x \in (\alpha_0, \alpha_1)$.

Όπως και για την συνάρτηση σκηνης $T_3(x)$, βλέπουμε ότι αν $x \in (\alpha_0, \alpha_1)$, τότε $L_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.



Γραφική παράσταση της $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ για $\mu > 4$.

Το σύνολο $I_0 = (0, \alpha_0)$ και $I_2 = (\alpha_1, 1)$ και $\Lambda_1 = I_0 \cup I_2$, είναι ένωση δύο ξένων κλειστών διαστημάτων, άρα είναι ένα κλειστό σύνολο όπου

$$\Lambda_1 = \{x \in [0,1] : L_\mu(x) \in [0,1]\}$$

Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο όπως κάναμε με την συνάρτηση σκηνης T_3 , για να βρούμε ένα σύνολο Λ_2 , μια ένωση τεσσάρων ξένων κλειστών διαστημάτων:

$$\Lambda_2 = \{x \in [0,1] : L_\mu^2(x) \in [0,1]\}$$

Συνεχίζοντας, στην n -ιοστή επανάληψη, έχουμε το κλειστό σύνολο Λ_n από την

ένωση 2^n ξένων κλειστών διαστημάτων:

$$\Lambda_n = \{x \in [0,1] : L_\mu^n(x) \in [0,1]\}$$

Θέτουμε $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ το οποίο ως ένωση κλειστών διαστημάτων είναι επίσης κλειστό διάστημα, υποσύνολο του $[0,1]$.

Να θυμηθούμε ότι αν $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ είναι μια συνάρτηση σε έναν μετρικό χώρο \mathcal{X} , η αντίστροφη εικόνα ενός συνόλου $U \subseteq \mathcal{X}$ είναι το σύνολο $f^{-1}(U) = \{x \in \mathcal{X} : f(x) \in U\}$. Βλέπουμε ότι

$$\Lambda_1 = L_\mu^{-1}([0,1]), \Lambda_2 = L_\mu^{-2}([0,1]), \dots, \Lambda_n = L_\mu^{-n}([0,1]), \text{ και}$$

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_\mu^{-n}([0,1]),$$

ώστε $x \in \Lambda$ αν και μόνο αν $L_\mu^n(x) \in [0,1] \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Επίσης, το Λ είναι ένα μη κενό σύνολο επειδή πρέπει να περιέχει τα σημεία περιόδου του L_μ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι ένα τέλει και εντελώς μη συνεκτικό σύνολο μηδενικού μέτρου, άρα είναι ένα σύνολο Cantor. Όπως και πριν, μπορούμε να θεωρήσουμε το L_μ ως μια συνάρτηση $L_\mu: \Lambda \rightarrow \Lambda$, καθώς εδώ λαμβάνει χώρα η ενδιαφέρουσα δυναμική.

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να γίνει ευκολότερη όταν $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Σε αυτή την περίπτωση, αν βρούμε τα σημεία α_0 και α_1 , από την $L_\mu(x) = 1$, παίρνουμε την εξίσωση $\mu x^2 - \mu x + 1 = 0$. Η επίλυση της δίνει

$$\alpha_i = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}, \quad i = 0 \text{ ή } 1.$$

Για $x \in \Lambda_1$, $|L'_\mu(x)|$ είναι ελάχιστο όταν $x = \alpha_0$ ή $x = \alpha_1$ και έχουμε

$$L'_\mu(\alpha_0) = \mu - 2\mu\alpha_0 = \sqrt{\mu^2 - 4\mu}.$$

Άρα για $\mu > 0$ και $x \in \Lambda_1$, $L'_\mu(x) \geq L'_\mu(\alpha_0) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$, όταν $\mu^2 - 4\mu > 1$, για το οποίο απαιτούμε $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Αυτό δείχνει ότι το L_μ δεν μπορεί να έχει ελκτικά περιοδικά σημεία αν $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι τα επιμέρους διαστήματα που αποτελούν κάθε σύνολο Λ_n έχουν μήκος μικρότερο από $\frac{1}{r^n}$, για κάποιο $r > 1$ και αυτό χρησιμοποιείται για να δειχθεί ότι το Λ είναι ένα σύνολο Cantor. Αυτό ισχύει επίσης για οποιοδήποτε $\mu > 4$, αλλά η ανάλυση είναι πιο δύσκολη.

5^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΧΑΟΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

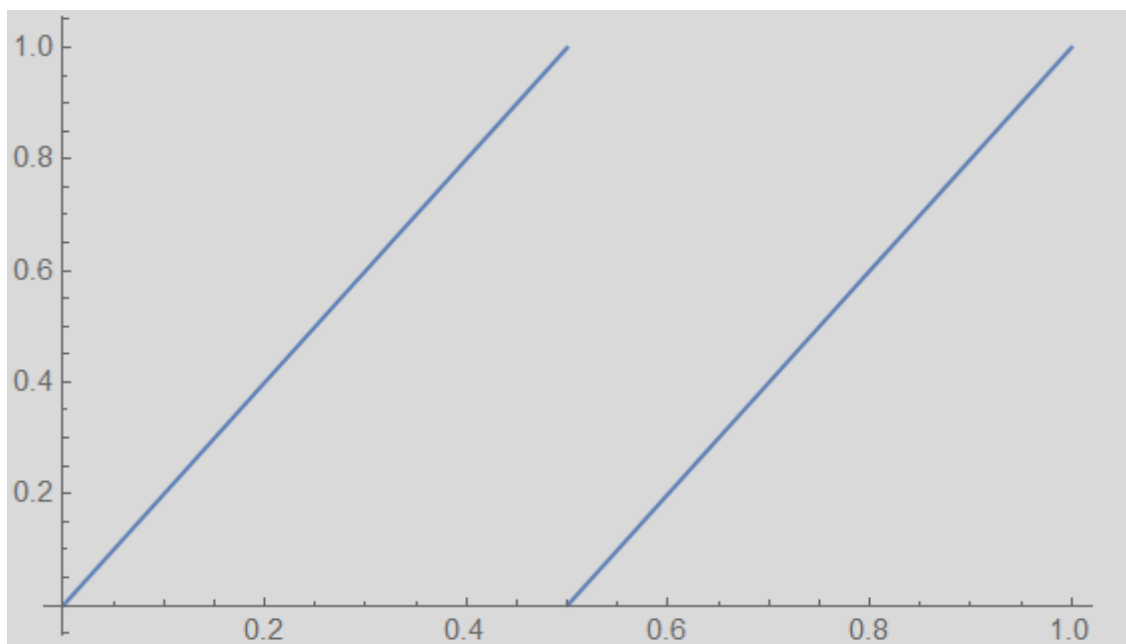
Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε τον ορισμό του χάους από τον Devaney για μονοδιάστατες απεικονίσεις και επίσης για πιο γενικές συναρτήσεις που ορίζονται σε μετρικούς χώρους. Οι μονοδιάστατες απεικονίσεις είναι συναρτήσεις $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ για κάποιο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις των οποίων τα περιοδικά σημεία σχηματίζουν ένα πυκνό σύνολο συχνά έχουν εξαιρετικά χαοτικές συμπεριφορές.

5.1. Οι συναρτήσεις Διπλασιασμού και Διπλασιασμού Γωνιών

Η συνάρτηση διπλασιασμού. (ή δυαδικός μετασχηματισμός)

Η συνάρτηση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$, ορίζεται ως

$$B(x) = 2x(\text{mod}1) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Γραφική παράσταση της συνάρτησης διπλασιασμού D

Πρόταση 5.1.1. Η πληθικότητα του συνόλου $Per_n(B)$, δηλαδή το πλήθος των περιοδικών στοιχείων της συνάρτησης B , είναι ίση με $2^n - 1$.

Απόδειξη : Θα αποδείξουμε αυτήν την πρόταση χρησιμοποιώντας μια πιο βολική αναπαράσταση του δυαδικού μετασχηματισμού, την συνάρτηση διπλασιασμού γωνιών:

Σημειώστε ότι η απεικόνιση στον κύκλο είναι C^1 , ενώ η B είναι ασυνεχής στο $x = 1/2$. Αυτός είναι ένας από τους λόγους για τους οποίους είναι μερικές φορές πιο βολικό να χρησιμοποιούμε την κυκλική αναπαράσταση.

Η συνάρτηση διπλασιασμού γωνιών.

Θα χρησιμοποιήσουμε το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. Αν $z = a + bi$, τότε η απόλυτη τιμή (ή μέτρο) δίνεται από $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Το συζυγές του z είναι $\bar{z} = a - bi$ και μπορούμε να ελέγξουμε ότι $z\bar{z} = |z|^2$. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το \mathbb{C} χρησιμοποιώντας σημεία στο (μιγαδικό) επίπεδο $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Ο μοναδιαίος κύκλος S_1 όπως είπαμε στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σύνολο $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Σημεία του S_1 μπορούν να παρασταθούν στην μορφή

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ για κάποια } \theta \in \mathbb{R}.$$

Η γωνία θ είναι το όρισμα του z (γράφεται $Arg(z)$), και είναι η γωνία που διαγράφει η ακτίνα από το $(0, 0)$ στο (a, b) (όταν $z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}$) και τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Το S_1 είναι ένας μετρικός χώρος αν η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $z, w \in S_1$ ορίζεται ως η μικρότερη απόσταση μεταξύ των δύο σημείων, που διατρέχει τον κύκλο.

Ορίζουμε μια αντιστοίχιση $D: S_1 \rightarrow S_1$ με $D(z) = z^2$. Αυτή η αντιστοίχιση ονομάζεται συνάρτηση διπλασιασμού γωνίας λόγω της επίδρασης που έχει στη γωνία $\theta = Arg(z)$: $D(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$. Βλέπουμε ότι η γωνία θ διπλασιάζεται.

Έτσι, μεταφέρουμε τη δυναμική της μετατόπισης Bernoulli στο \mathbb{R} με τη μορφή $\theta \rightarrow 2\theta$. Η απόδειξη της πρότασης προκύπτει ως συνέπεια της επόμενης πρότασης.

Είναι σαφές ότι υπάρχουν πολλές ομοιότητες μεταξύ του χάρτη διπλασιασμού και του χάρτη διπλασιασμού γωνίας, και θα το εξετάσουμε αυτό στην επόμενη ενότητα όταν μελετήσουμε την έννοια της συζυγίας για δυναμικά συστήματα. Αρχικά δείχνουμε ότι τα περιοδικά σημεία της D είναι πυκνά στο S_1 .

Θεωρήστε τα περιοδικά σημεία της $D(z) = z^2$. Η επίλυση της $z^2 = z$ δίνει $z = 1$ (μπορούμε να αγνοήσουμε το $z = 0$), η $D^2(z) = z$ δίνει $z^4 = z$ ή $z^3 = 1$ και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι τα περιοδικά σημεία είναι n -οστές ρίζες της μονάδας.

Πρόταση 5.1.2. Τα περιοδικά σημεία της συνάρτησης διπλασιασμού γωνιών $D: S_1 \rightarrow S_1$ είναι πυκνά στο S_1

Απόδειξη: Για να βρούμε τις περιοδικές τροχιές της $D(z)$, ας πάρουμε $n \in \mathbb{N}$ και

$$D^n(z) = \underbrace{((z^2)^2 \dots)^2}_{n\text{-φορές}} = z^{2^n} = z.$$

για κάποιο $n \in \mathbb{Z}^+$, τότε $z^{2^n} = z$ ή $z^{2^n-1} = 1$.

Για $z = e^{i\theta}$, τότε θέλουμε να βρούμε τις $(2^n - 1)$ -οστές ρίζες της μονάδας.

Αυτό δίνει: $e^{(2^n-1)i\theta} = e^{2k\pi i}$, για κάποια $k \in \mathbb{Z}^+$.

Έτσι παίρνουμε τις $2^n - 1$ διακριτές ρίζες: $z_k = \frac{2k\pi i}{2^n-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 2^n - 2$ οπότε

$$\text{Per}_n(D) = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{2^n-1}} : 0 \leq k < 2^n - 1 \right\}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Αυτά τα σημεία είναι ισαπέχοντα γύρω από τον κύκλο, σε απόσταση $\frac{2\pi}{2^n-1}$ μεταξύ τους, η οποία μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή λαμβάνοντας το n αρκετά μεγάλο. Συνεπώς, τα περιοδικά σημεία είναι πυκνά στο S_1 . ■

Σημείωση 5.1.3. Δυαδική επέκταση της $B(x)$

Είναι επίσης βολικό να περιγράψουμε τη $B(x)$ με όρους δυαδικής επέκτασης ενός πραγματικού αριθμού στο $[0,1]$.

Έστω $x \in [0, 1]$ με δυαδική επέκταση $x = .a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ όπου $a_i \in \{0,1\}$.

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

Αν υποθέσουμε ότι $a_1 = 0$ στη δυαδική επέκταση του x έχουμε

$$B(x) = 2x = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots = .a_2a_3a_4 \dots$$

Αν υποθέσουμε ότι $a_1 = 1$, τότε

$$B(x) = 2x - 1 = \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots \right) - 1 = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots = .a_2a_3a_4 \dots$$

Άρα γενικά ισχύει

$$B(.a_1a_2a_3a_4 \dots) = .a_2a_3a_4 \dots \text{ και επαγωγικά } B^n(.a_1a_2a_3a_4 \dots) = .a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \dots$$

Συνεπώς, αν $x = .a_1a_2a_3a_4 \dots a_n a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n$ έχει ένα ανάπτυγμα που επαναλαμβάνεται κάθε n θέσεις, τότε $B^n(x) = x$, έτσι ώστε το x να είναι περιοδικό σημείο περιόδου n .

Για παράδειγμα $B^2(.01010101 \dots) = 01010101.$, άρα είναι ένα σημείο περιόδου 2.

Χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα για να δείξουμε ότι το σύνολο των περιοδικών σημείων του B είναι πυκνό στο $[0, 1]$, όπως επίσης για να μετρήσουμε τον αριθμό των περιοδικών σημείων της περιόδου n . Παρατηρήστε ότι επειδή $B'(x) > 1$ όπου ορίζεται, όλες οι περιοδικές τροχιές του B είναι ασταθείς.

Πρόταση 5.1.4. Τα περιοδικά σημεία της συνάρτησης διπλασιασμού B είναι πυκνά στο $[0, 1]$.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε N τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^N} < \epsilon$.

Αν $x \in [0, 1]$ αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα περιοδικό σημείο y για την B που βρίσκεται εντός του $(x - \epsilon, x + \epsilon)$. Υποθέτουμε ότι η δυαδική ανάπτυξη του x είναι

$x = .a_1a_2a_3a_4 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$, και θέτουμε $y = .a_1a_2a_3a_4 \dots a_N a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_N a_1 \dots$ ένα σημείο με περίοδο N . Τότε

$$|x - y| = \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{b_j}{2^j} \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^N} < \epsilon, \text{ όπου } b_j = 0 \text{ ή } 1 \text{ ή } -1. \blacksquare$$

5.2 Μεταβατικότητα

Μερικές φορές, δεδομένου $f: X \rightarrow X$ (X ένας μετρικός χώρος), όταν επαναλαμβάνουμε το $x_0 \in X$, η τροχιά $O_f^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\} = \{f^n(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ απλώνεται ομοιόμορφα πάνω από το X , έτσι ώστε το $O_f^+(x_0)$ να είναι ένα πυκνό σύνολο στο X . Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 5.2.1. Η συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ λέγεται (τοπολογικά) **μεταβατική** αν υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε η τροχιά του $O_f(x_0)$ να είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X .

Ένα **μεταβατικό σημείο** για την f είναι ένα σημείο x_0 που έχει μια πυκνή τροχιά υπό την f . Αν η f είναι μεταβατική, τότε υπάρχει ένα πυκνό σύνολο μεταβατικών σημείων, αφού κάθε σημείο στο $O_f(x_0)$ θα είναι ένα μεταβατικό σημείο.

Διαισθητικά, αυτός ο ορισμός σημαίνει ότι η f έχει σημεία τα οποία τελικά μετακινούνται υπό επανάληψη από μια αυθαίρετα μικρή γειτονιά σημείων στο X σε οποιαδήποτε άλλη.

Μπορούμε να δώσουμε ορισμό της μεταβατικότητας μιας συνάρτησης με την βοήθεια του ωμέγα-ορίου:

Ορισμός 5.2.2. Η συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ λέγεται **μεταβατική** εάν υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $\omega(x_0) = X$.

Παράδειγμα 5.2.3. Η απεικόνιση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$ είναι μεταβατική: Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε ένα σημείο $x_0 \in [0,1]$ το οποίο έχει πυκνή τροχιά υπό την B . Το x_0 ορίζεται χρησιμοποιώντας τη δυαδική του επέκταση με τον ακόλουθο τρόπο:

πρώτα γράφουμε όλα τα πιθανά "1-μπλοκ", δηλαδή, 0 ακολουθούμενο από 1. Στη συνέχεια, γράψτε όλα τα πιθανά "2-μπλοκ", δηλαδή, 00, 01, 10, 11, έπειτα όλα τα πιθανά "3-μπλοκ", δηλαδή, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, και

στη συνέχεια συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο με όλα τα πιθανά "4-μπλοκ" κ.λπ. (θα μπορούσαμε να τα γράψουμε με τη σειρά που εμφανίζονται όπως στη δυαδική επέκταση των ακεραίων). Αυτό δίνει:

$$x_0 = \cdot 01\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111\ 0000\ 0001\ \dots,$$

ένα σημείο του $[0,1]$.

Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{O}_B(x_0)$ είναι πυκνό στο $[0,1]$, παίρνουμε $y \in [0,1]$ με δυαδική επέκταση $y = .y_1y_2y_3 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i}$, $y_i = 0$ ή 1

Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε N τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^N} < \delta$. Όλες οι πιθανές πεπερασμένες συμβολοσειρές των 0 και 1 εμφανίζονται στην δυαδική επέκταση του x_0 , επομένως η συμβολοσειρά $y_1y_2y_3 \dots y_N$ πρέπει επίσης να εμφανίζεται στην δυαδική επέκταση του x_0 .

Συνεπώς, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}^+$ έχουμε

$D^k(x_0) = .y_1y_2y_3 \dots y_N\beta_{N+1}\beta_{N+2} \dots$ για κάποια $\beta_{N+1}\beta_{N+2} \dots$ έτσι ώστε

$$|D^k(x_0) - y| = |.y_1y_2y_3 \dots y_N\beta_{N+1}\beta_{N+2} \dots - .y_1y_2y_3 \dots y_Ny_{N+1}y_{N+2} \dots| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^N} < \delta$$

Συνεπώς, οποιοδήποτε σημείο $y \in [0,1]$ βρίσκεται αυθαίρετα κοντά στην τροχιά του x_0 υπό την B , επομένως αυτή η τροχιά είναι πυκνή στο $[0, 1]$. ■

Παρατήρηση 5.2.4. Είναι εύκολο να δούμε ότι για μια μεταβατική απεικόνιση $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ σε έναν μετρικό χώρο, δεδομένων οποιωνδήποτε μη κενών ανοιχτών συνόλων U και V στο \mathcal{X} , υπάρχει $k \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$.

Λιγότερο εύκολο είναι να δούμε το αντίστροφο αυτής της πρότασης, το οποίο ισχύει για πλήρεις διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους (το \mathcal{X} είναι διαχωρίσιμο αν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο). Αυτό είναι το Θεώρημα *Μεταβατικότητας Birkhoff*:

Θεώρημα 5.2.5. Μια συνεχής συνάρτηση f ενός πλήρους διαχωρίσιμου μετρικού χώρου \mathcal{X} είναι **μεταβατική** αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος U και V μη κενών ανοιχτών υποσυνόλων του \mathcal{X} υπάρχει $k \in \mathbb{Z}^+$ με $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$.

Με άλλα λόγια, ο χώρος \mathcal{X} δεν μπορεί να αναλυθεί σε δύο ξένα σύνολα που να παραμένουν ξένα υπό την επίδραση της f . Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι πολύ περίπλοκη για να παρουσιαστεί στην εργασία.

Σχόλιο 5.2.6. Με χρήση του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση διπλασιασμού γωνίας είναι μεταβατική.

Ορισμός 5.2.7. Μία συνάρτηση f ενός πλήρους διαχωρίσιμου μετρικού χώρου \mathcal{X} ονομάζεται **ελάχιστη** αν $\forall x \in \mathcal{X}$, η τροχιά είναι πυκνή στο \mathcal{X} .

Παρατηρήσεις 5.2.8.

1. Προφανώς, η ελαχιστότητα υπονοεί τοπολογική μεταβατικότητα.
2. Η ελαχιστότητα είναι μάλλον σπάνια στα δυναμικά συστήματα, επειδή δεν επιτρέπει την ύπαρξη περιοδικών τροχιών.
3. Υπάρχουν ιδέες που είναι πολύ παρόμοιες με την τοπολογική μεταβατικότητα, χρησιμοποιώντας επιπλέον αυτό που ονομάζεται μέτρο, οδηγώντας μας σε έννοιες της εργοδικής θεωρίας.

5.3. Ο Ορισμός του Devaney-Χάος

Ο Devaney ήταν ο πρώτος που όρισε την έννοια του χάους, λέγοντας ότι μια συνάρτηση είναι χαοτική αν έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων, είναι μεταβατική και έχει επίσης αυτό που ονομάζεται ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες (γνωστή ως «φαινόμενο πεταλούδας» στη δημοφιλή βιβλιογραφία). Στη συνέχεια, αποδείχθηκε ότι οι δύο πρώτες απαιτήσεις συνεπάγονται την τρίτη, επομένως ορίζουμε το χάος ως εξής:

Ορισμός 5.3.1 Έστω $f: X \rightarrow X$ μια συνάρτηση ενός μετρικού χώρου X , τότε η f λέγεται ότι είναι **χαοτική (D-χαοτική)** αν:

(i) Το σύνολο των περιοδικών σημείων της f είναι πυκνό στο X .

(ii) η f είναι μεταβατική.

Παρατήρηση 5.3.2. Αυτός ο ορισμός επισημαίνει δύο βασικά συστατικά ενός χαοτικού δυναμικού συστήματος:

1. Ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών που σχετίζονται με «απλές» δυναμικές, οι οποίες παρέχουν ένα στοιχείο κανονικότητας.
2. Τοπολογική μεταβατικότητα που αντανακλά «περίπλοκες» δυναμικές και επομένως ένα στοιχείο ανωμαλίας.

Παραδείγματα 5.3.3.

1. Οι ομοιομορφισμοί ή διαφορομορφισμοί ενός διαστήματος $I \subseteq \mathbb{R}$ δεν μπορούν να είναι χαοτικοί, καθώς δεν είναι ποτέ μεταβατικοί. Ομοίως οι συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$ και η λογιστική συνάρτηση L_μ για $0 < \mu < 3$.
2. Είδαμε ότι η συνάρτηση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$ έχει πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων και είναι μεταβατική, επομένως είναι μια χαοτική απεικόνιση.
3. Η συνάρτηση σκηνης $T_2: [0,1] \rightarrow [0,1]$ είναι χαοτική.

Εξ ορισμού, συνάρτηση σκηνης είναι τμηματικά γραμμική. Κάποιος μπορεί επομένως να αναρωτηθεί από ποια άποψη μία τέτοια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάσει μια πιθανώς χαοτική δυναμική που συνήθως συνδέεται με τη μη γραμμικότητα. Ο λόγος είναι ότι υπάρχει ένα σημείο μη διαφορήσιμο, δηλαδή, η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά όχι διαφορίσιμη στο $x = 1/2$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν το $x \in [0, 1]$ έχει μια δυαδική ανάπτυξη $x = .a_1a_2a_3a_4 \dots$ τότε

$$T_2(x) = \begin{cases} .a_2a_3a_4 \dots, & \text{αν } a_1 = 0 \\ .\beta_2\beta_3\beta_4 \dots, & \text{αν } a_1 = 1 \end{cases} \quad \text{όπου } \beta_i = 1 \text{ αν } a_i = 0 \text{ και } \beta_i = 0 \text{ αν } a_i = 1.$$

Γενικότερα, μπορούμε να δούμε επαγωγικά ότι :

$$T_2^n(x) = \begin{cases} .a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \dots, & \text{αν } a_n = 0 \\ .\beta_{n+1}\beta_{n+2}\beta_{n+3} \dots, & \text{αν } a_n = 1 \end{cases}$$

Μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω για να καταγράψουμε τα περιοδικά σημεία της T . Για παράδειγμα, τα σταθερά σημεία της είναι $x = 0$ και $x = .1010 \dots = 2/3$, και τα σημεία περιόδου 2 είναι $x_1 = .01100110 \dots = 2/5$ και $x_2 = .11001100 \dots = 4/5$.

Τα 3-περιοδικά σημεία είναι $x_3 = .010010010010 \dots = 2/7$, $x_4 = .100100100100 \dots = 4/7$, $x_5 = .110110110110 \dots = 6/7$ και

$x_6 = .001110001110 \dots = 2/9$, $x_7 = .011100011100 \dots = 4/9$, $x_8 = .111000111000 \dots = 8/9$.

Παρατηρήστε ότι σημεία της μορφής $x = \frac{\kappa}{2^n} \in (0,1)$, $\kappa \in \mathbb{Z}^+$, είναι σχεδόν σταθερά, καθώς έχουν δυαδική επέκταση της μορφής $x = .a_1a_2a_3a_4 \dots a_n000 \dots$, όπου $a_n = 0$ αν το κ άρτιος και $a_n = 1$ αν κ είναι περιττός. Συνεπώς, $T_2^n(x) = 0$ αν κ είναι άρτιος και $T_2^n(x) = 1$ αν κ είναι περιττός. Συγκεκριμένα, $T_2^n \left[\frac{\kappa-1}{2^n}, \frac{\kappa}{2^n} \right] = [0,1]$.

Το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών μας δείχνει ότι υπάρχει ένα σταθερό σημείο του T_2^n στο

διάστημα $\left[\frac{\kappa-1}{2^n}, \frac{\kappa}{2^n}\right]$. Δεδομένου ότι τέτοια διαστήματα μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρά και να καλύπτουν όλο το $[0, 1]$, το σύνολο των περιοδικών σημείων πρέπει να είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

Χρησιμοποιούμε αυτές τις σκέψεις για να δείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.4. Τα περιοδικά σημεία της $T_2(x)$ είναι αριθμοί στο $[0,1]$ της μορφής $x = \frac{r}{s}$ όπου r είναι ένας άρτιος ακέραιος και s είναι περιττός ακέραιος.

Απόδειξη: Αν $x \in (0,1)$ είναι ένα περιοδικό σημείο για της T_2 , τότε $T_2^n(x) = x$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}^+$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που πρέπει να λάβουμε υπόψη:

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο x έχει ένα δυαδικό ανάπτυγμα $x = .a_1a_2a_3a_4 \dots a_na_{n+1}$ όπου $a_n = 0$, τότε $T_2^n(x) = .a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} \dots a_{2n} \dots$ άρα πρέπει να έχουμε $a_1 = a_{n+1}, a_2 = a_{n+2}, \dots, a_n = a_{2n} = 0$, και $x = .a_1a_2a_3 \dots a_na_1a_2a_3 \dots a_na_1 \dots$, με $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Δηλαδή } x &= \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) + \dots = \\ &= \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{a_1 2^{n-1} + a_2 2^{n-2} + \dots + a_{n-1} 2}{2^n - 1} = \frac{r}{s}, \end{aligned}$$

όπου r άρτιος ακέραιος και s είναι περιττός ακέραιος.

Αν τώρα ο x έχει δυαδικό ανάπτυγμα $x = .a_2a_3a_4 \dots a_na_{n+1}$ όπου $a_n = 1$, τότε $T_2^n(x) = .\beta_{n+1}\beta_{n+2}\beta_{n+3} \dots \beta_{2n} \dots$, οπότε πρέπει $a_1 = \beta_{n+1}, a_2 = \beta_{n+2}, \dots, \beta_n = \beta_{2n}$, και $x = .a_1a_2a_3 \dots a_{n-1}1\beta_1\beta_2\beta_3 \dots \beta_{n-1}0a_1 \dots$.

Μπορούμε τώρα να επιχειρηματολογήσουμε όπως πριν, αλλά χρησιμοποιώντας τους πρώτους $2n$ όρους του x .

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $x = \frac{r}{s} \in (0,1)$ όπου r άρτιος ακέραιος και s είναι περιττός ακέραιος. Δεδομένου ότι οι s και 2 είναι πρώτοι, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη γενίκευση του Θεωρήματος Fermat του Euler για να πάρουμε

$$2^{\varphi(s)} \equiv 1 \pmod{s} \text{ ή } 2^p - 1 = ks \text{ για κάποια } p, k \in \mathbb{Z}^+. (1 < kr < 2^p - 1),$$

όπου φ είναι η συνάρτηση Euler. Παίρνουμε το δυαδικό ανάπτυγμα του kr ως

$kr = a_1 2^{p-1} + a_2 2^{p-2} + \dots + a_{p-2} 2^2 + a_{p-1} 2, a_i \in \{0,1\}$, που είναι άρτιο, άρα

$$\begin{aligned} \frac{kr}{2^p - 1} &= \left(a_1 2^{p-1} + a_2 2^{p-2} + \dots + a_{p-2} 2^2 + a_{p-1} 2 \right) \frac{\frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2^p}} = \\ &= \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots + \frac{a_{p-1}}{2^{p-1}} \right) \frac{1}{1 - \frac{1}{2^p}} = . a_1 a_2 a_3 \dots a_{p-1} 0 a_1 a_2 a_3 \dots a_{p-1} 0 \dots, \end{aligned}$$

που είναι σημείο με περίοδο p (ή μικρότερη).

Είναι πλέον σαφές ότι η $T(x)$ είναι μεταβατική, αφού αν ορίσουμε ένα $x_0 \in (0,1)$ έχοντας μια δυαδική επέκταση που αποτελείται από όλα τα 1-μπλοκ, όλα τα 2-μπλοκ, όλα τα 3-μπλοκ κ.λπ., όπως πριν, εκτός από το ότι εισάγουμε ένα μόνο μηδέν μεταξύ κάθε μπλοκ, τότε προκύπτει ότι αν $x_0 = .x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ τότε $T_2^p(x_0) = .x_1 x_2 x_3 x_4 \dots \beta_{n+1}$ για κάποια $p > 0$, δηλαδή, κάθε μπλοκ θα εμφανίζεται στις επαναλήψεις του x_0 . Όπως πριν, βλέπουμε ότι η T_2 είναι μεταβατική, άρα είναι και χαοτική. ■

Σχόλιο 5.3.5. Είναι δυνατό για μια απεικόνιση να είναι μεταβατική χωρίς να είναι χαοτική (αν και για συνεχείς συναρτήσεις σε διαστήματα στο \mathbb{R} , αυτό δεν είναι δυνατό). Για παράδειγμα, θεωρήστε την άρρητη περιστροφή $R_a: S_1 \rightarrow S_1$ που ορίζεται από $R_a(x) = ax$ για κάποια (σταθερά) $a \in S_1$. Το να πούμε ότι η R_a είναι μια άρρητη περιστροφή σημαίνει ότι $a^n \neq 1$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{Z}^+$, δηλαδή, το a δεν είναι μια n -οστή ρίζα της μονάδας για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{Z}^+$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε $x_0 \in S_1$ έχει μια πυκνή τροχιά (ένας μετασχηματισμός με αυτήν την ιδιότητα λέγεται ελάχιστος).

Ωστόσο, αν υποθέσουμε ότι $R_a^n(x) = x$, τότε $a^n x = x$ ή $a^n = 1$, καταλήγουμε σε μια αντίφαση, έτσι το R_a δεν έχει περιοδικά σημεία. Το R_a είναι ένα παράδειγμα ισομετρίας: τα σημεία παραμένουν πάντα στην ίδια απόσταση μεταξύ τους:

$$|R_a(x) - R_a(y)| = |ax - ay| = |a||x - y| = |x - y|.$$

Σημειώστε ότι αν αντ' αυτού έχουμε $a^n = 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}^+$, τότε $R_a^n(x) = a^n x = x$ για όλα τα $x \in S_1$, έτσι ώστε η R_a^n να είναι απλώς η ταυτοτική συνάρτηση (κάθε σημείο της S_1 έχει περίοδο n).

5.4. Κάποια Συμβολικά Δυναμικά και η συνάρτηση μετατόπισης

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο όλων των άπειρων ακολουθιών των 0 και 1:

$$\Sigma = \{\omega = (s_1, s_2, s_3 \dots) : s_i = 0 \text{ ή } 1\},$$

είναι ένας μετρικός χώρος με μετρική που ορίζεται από

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{|s_{\kappa} - t_{\kappa}|}{2^{\kappa}}, \quad \text{όπου } \omega_1 = (s_1, s_2, s_3 \dots), \quad \omega_2 = (t_1, t_2, t_3 \dots) \in \Sigma$$

Αυτή η μετρική έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

Ιδιότητα 5.4.1. Αν $\omega_1 = (s_1, s_2, s_3, \dots)$, $\omega_2 = (t_1, t_2, t_3, \dots) \in \Sigma$, με $s_i = t_i$, για $i = 1, 2, \dots, n$, τότε ισχύει $d(\omega_1, \omega_2) \leq \frac{1}{2^n}$.

Απόδειξη: Έχουμε ότι

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{|s_{\kappa} - t_{\kappa}|}{2^{\kappa}} = \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{|s_{\kappa} - t_{\kappa}|}{2^{\kappa}} \leq \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{\kappa}} \leq \frac{1}{2^n}. \quad \blacksquare$$

Ιδιότητα 5.4.2. Αν $d(\omega_1, \omega_2) \leq \frac{1}{2^n}$, τότε $s_i = t_i$, για $i = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη: Δίνουμε μια απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $s_j \neq t_j$, για $1 \leq j \leq n$, τότε $d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{|s_{\kappa} - t_{\kappa}|}{2^{\kappa}} \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$, άτοπο. \blacksquare

Η απεικόνιση μετατόπισης σ (μερικές φορές ονομάζεται *μετατόπιση Bernoulli*) είναι μια σημαντική συνάρτηση που ορίζεται στο Σ .

Ορισμός 5.4.3. Η *συνάρτηση μετατόπισης (μετατόπιση Bernoulli)* $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ ορίζεται ως

$$\sigma(s_1, s_2, s_3, \dots) = (s_2, s_3, \dots), \quad \text{για παράδειγμα,}$$

$$\sigma(0, 1, 0, 1, \dots) = (1, 0, 1, 0, \dots) \text{ και } \sigma^2(1, 0, 1, 0, \dots) = (0, 1, 0, 1, \dots), \text{ δηλαδή αν}$$

$\omega_1 = (0, 1, 0, 1, \dots)$ και $\omega_2 = (1, 0, 1, 0, \dots)$ τότε $\{\omega_1, \omega_2\}$ είναι 2-περιοδικά σημεία της σ .

Με αυτόν τον τρόπο, είναι εύκολο να καταγράψουμε όλα τα σημεία της περιόδου n . Οποιαδήποτε ακολουθία που είναι τελικά σταθερή συγκλίνει σαφώς σε ένα τελικά σταθερό σημείο του Σ , και οποιαδήποτε ακολουθία που είναι τελικά περιοδική (όπως $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$), μας δίνει τελικά περιοδικά σημεία.

Πρόταση 5.4.4. Η συνάρτηση μετατόπισης $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ είναι συνεχής, επί, αλλά όχι ένα προς ένα.

Απόδειξη: Σαφώς η σ είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα.

Για να δείξουμε ότι η σ είναι συνεχής, έστω $\epsilon > 0$, τότε θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(\omega_1, \omega_2) < \delta$, τότε $d(\sigma(\omega_1), \sigma(\omega_2)) < \epsilon$.

Θα δούμε ότι αρκεί να πάρουμε $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ αν το n επιλεγθεί τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Σε αυτήν την περίπτωση, αν $d(\omega_1, \omega_2) < \delta = \frac{1}{2^{n+1}}$, τότε από την Ιδιότητα 5.4.2., $s_i = t_i$, για $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Σαφώς οι πρώτοι n όροι των ακολουθιών $\sigma(\omega_1)$ και $\sigma(\omega_2)$ είναι ίσοι, άρα από την Ιδιότητα 5.4.1., $d(\sigma(\omega_1), \sigma(\omega_2)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$, έτσι ώστε η σ να είναι συνεχής. ■

Πρόταση 5.4.5. Η συνάρτηση μετατόπισης $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ είναι χαοτική.

Απόδειξη: Αρχικά δείχνουμε ότι τα περιοδικά σημεία είναι πυκνά στο Σ .

Έστω $\omega = (s_1, s_2, s_3, \dots) \in \Sigma$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία περιοδικών σημείων $\omega_n \in \Sigma$ με $\omega_n \rightarrow \omega$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Ορίζουμε $\omega_1 = (s_1, s_1, s_1, \dots)$, ένα σημείο περιόδου 1 για την σ ,

$\omega_2 = (s_1, s_2, s_1, s_2, \dots)$, ένα σημείο περιόδου 2 για την σ ,

$\omega_3 = (s_1, s_2, s_3, s_1, s_2, s_3, \dots)$, ένα σημείο περιόδου 3 για την σ ,

και συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, ορίζουμε

$\omega_n = (s_1, s_2, \dots, s_n, s_1, s_2, \dots, s_n, s_1, \dots)$, ένα σημείο περιόδου n για την σ .

Δεδομένου ότι τα ω και ω_n συμφωνούν στις πρώτες n συντεταγμένες, έχουμε $d(\omega, \omega_n) \leq \frac{1}{2^n}$, άρα $d(\omega, \omega_n) \rightarrow 0$, καθώς $n \rightarrow \infty$, δηλαδή $\omega_n \rightarrow \omega$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Για να δείξουμε ότι η σ είναι μεταβατική, κατασκευάζουμε ρητά ένα σημείο $\omega_0 \in \Sigma$ που

έχει μια πυκνή τροχιά υπό σ . Ορίζουμε

$$\omega_0 = (01\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 101\ 011\ \dots)$$

και συνεχίζοντας όμοια, έτσι ώστε όλα τα πιθανά n -μπλοκ να εμφανίζονται στο ω_0 . Για να δούμε ότι $\mathcal{O}_\sigma(\omega_0) = \Sigma$, παίρνουμε τυχαίο $\omega = (s_1, s_2, s_3, \dots) \in \Sigma$. Έστω $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε n τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, τότε επειδή το ω_0 αποτελείται από όλα τα πιθανά n -μπλοκ, η ακολουθία (s_1, s_2, s_3, \dots) πρέπει να εμφανίζεται κάπου στο ω_0 , δηλαδή, υπάρχει $k > 0$ με $\sigma^k(\omega_0) = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots)$ έτσι ώστε τα ω και $\sigma^k(\omega_0)$ να έχουν ίδιες τις πρώτες n συντεταγμένες.

$$\text{Συνεπώς, } d(\omega, \sigma^k(\omega_0)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι η τροχιά του ω_0 πλησιάζει αυθαίρετα οποιοδήποτε στοιχείο του Σ , επομένως είναι πυκνή στο Σ . Συνεπώς, η σ είναι μεταβατική και επομένως χαοτική. ■

Παρατήρηση 5.4.6. Μπορεί να αποδειχθεί ότι (τοπολογικές) ιδιότητες (όπως ένα σύνολο είναι ασύνδετο, τέλειο κ.λπ.) διατηρούνται από ομοιομορφισμούς.

Σχόλιο 5.4.7. Ο χώρος μετατόπισης Σ και το σύνολο Cantor C είναι ομοιομορφικοί μετρικοί χώροι. Επιπλέον, το ημι-ανοιχτό διάστημα $[0, 1)$ και ο μοναδιαίος κύκλος S_1 στο μιγαδικό επίπεδο είναι ομοιομορφικά. Συγκεκριμένα, τα Σ και C θα έχουν πανομοιότυπες τοπολογικές ιδιότητες, όπως και τα S_1 και $[0, 1)$. Συνεπώς, τα Σ και $[0, 1]$ δεν μπορούν να είναι ομοιομορφικά, καθώς και τα C και $[0, 1]$ δεν είναι ομοιομορφικά (το C είναι πλήρως ασύνδετο, αλλά το $[0, 1]$ δεν είναι).

Απόδειξη: Δίνεται η συνήθης μετρική του Σ , και το C έχει τη βασική μετρική του \mathbb{R} , δηλαδή $d(x, y) = |x - y|$ για $x, y \in C$.

Ορίζουμε μια απεικόνιση $h: C \rightarrow \Sigma$ ως $h(a_1, a_2, a_3, \dots) = (s_1, s_2, s_3, \dots)$, όπου $a_i = 0$ ή 2 και $s_i = \frac{a_i}{2}$. Σαφώς η h είναι ένα προς ένα και επί. Δείχνουμε ότι είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in C$.

Έστω $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε n τόσο μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Ορίζουμε $\delta = \frac{1}{3^n}$, τότε αν $|x - x_0| < \delta$, τόσο το x_0 όσο και το x πρέπει να βρίσκονται στην ίδια συνιστώσα (υποδιάστημα) του S_n μήκους $\frac{1}{3^n}$.

Έπεται ότι τα x_0 και x πρέπει να έχουν πανομοιότυπες τριαδικές αναπτύξεις στις πρώτες n θέσεις.

Αντίστοιχα, τα $h(x_0)$ και $h(x)$ πρέπει να έχουν τις ίδιες πρώτες n συντεταγμένες.

Έπεται ότι $d(h(x_0), h(x)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$, άρα η h είναι συνεχής στο x_0 . Με παρόμοιο τρόπο βλέπουμε ότι η h^{-1} είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι τα $[0, 1)$ και S_1 είναι ομοιομορφικά, ορίζουμε την $h: [0, 1] \rightarrow S_1$ ως $h(x) = e^{2\pi i x}$, τότε η h είναι ένα προς ένα και επί. Η απεικόνιση h τυλίγει το διάστημα $[0, 1)$ γύρω από τον κύκλο, με τα άκρα του διαστήματος να ταυτίζονται, οπότε με αυτόν τον τρόπο η h γίνεται συνεχής. ■

5.5. Ευαίσθητη Εξάρτηση από τις Αρχικές Συνθήκες και Wiggins-χάος

Τώρα θα δείξουμε ότι ο αρχικός ορισμός του χάους λόγω του Devaney προκύπτει από τον ορισμό που έχουμε δώσει.

Ορισμός 5.5.1. Έστω συνάρτηση $f: X \rightarrow X$ ορισμένη σε έναν μετρικό χώρο (X, d) . Τότε η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $x \in X$ και οποιοδήποτε ανοιχτό διάστημα U που περιέχει x και σημεία εκτός από το x , υπάρχει ένα σημείο $y \in U$ και $n \in \mathbb{Z}^+$ με $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Αυτός είναι ο ακριβής ορισμός της ιδέας ότι οι επαναλήψεις κοντινών σημείων, μπορεί τελικά να είναι πολύ μακριά, έτσι ώστε μια συνάρτηση να έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες αν υπάρχουν σημεία αυθαίρετα κοντά στο x , τα οποία τελικά απέχουν τουλάχιστον απόσταση δ από το x . Η έννοια αυτού του ορισμού είναι ότι ανεξάρτητα από οποιοδήποτε αυθαίρετα μικρό «λάθος» στην επιλογή της αρχικής συνθήκης, δηλαδή η επιλογή του y αντί του x , τελικά οδηγεί σε μια μακροσκοπική διαφορά στα αποτελέσματα.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε αν έχουμε ευαίσθητη εξάρτηση όταν κάνουμε υπολογισμούς, καθώς τα σφάλματα στρογγυλοποίησης μπορεί να μεγεθυνθούν μετά από πολυάριθμες επαναλήψεις. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι επαναλαμβάνουμε την συνάρτηση διπλασιασμού, ξεκινώντας με $x_0 = 1/3$ και $x_1 = 0.333 \dots$. Μετά από 10

επαναλήψεις έχουμε $B^{10}(x_0) = 1/3$ και $B^{10}(x_1) = 0.92$, δηλαδή απόσταση μεγαλύτερη από $1/2$.

Παραδείγματα 5.5.2.

1. Η γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $|a| > 1$, έχει ευαίσθητη εξάρτηση αφού αν $x \neq y$, $|f^n(x) - f^n(y)| = |a^n x - a^n y| = a^n |x - y| \rightarrow \infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Ωστόσο, σαφώς η δυναμική της f δεν είναι περίπλοκη (η f δεν είναι χαοτική).

2. Η συνάρτηση μετατόπισης $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση ως προς τις αρχικές συνθήκες αφού αν $\omega_1, \omega_2 \in \Sigma$ με $\omega_1 \neq \omega_2$, τότε πρέπει να διαφέρουν σε ορισμένες συντεταγμένες, ας πούμε $s_i \neq t_i$.

Τότε $\sigma^{i-1}(\omega_1) = (s_i, s_{i+1}, \dots)$ και $\sigma^{i-1}(\omega_2) = (t_i, t_{i+1}, \dots)$

ώστε $d(\sigma^{i-1}(\omega_1), \sigma^{i-1}(\omega_2)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|s_{i+k-1} - t_{i+k-1}|}{2^k} = \frac{1}{2} + \text{άλλους όρους} \geq \frac{1}{2}$

3. Η συνάρτηση διπλασιασμού γωνιών $D : S_1 \rightarrow S_1$, $D(z) = z^2$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση αφού αν επαναλάβουμε $z = e^{i\theta}$, $\omega = e^{i\varphi}$, $z, \omega \in S_1$, η απόστασή τους διπλασιάζεται μετά από κάθε επανάληψη.

Θεώρημα 5.5.3. Έστω $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ένας χαοτικός μετασχηματισμός, τότε η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Αποδεικνύουμε πρώτα ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα:

Λήμμα 5.5.4. Έστω $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ένας μετασχηματισμός που έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές περιοδικές τροχιές. Τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $x \in \mathcal{X}$ να υπάρχει ένα περιοδικό σημείο p που ικανοποιεί

$$d(x, f^k(p)) > \epsilon, \text{ για όλα τα } k \in \mathbb{Z}^+.$$

Απόδειξη: Έστω a και b δύο περιοδικά σημεία με διαφορετικές τροχιές. Τότε

$$d(f^k(a), f^l(b)) > 0 \text{ για όλα τα } k \text{ και } l \text{ (αφού ασχολούμαστε με πεπερασμένα σύνολα)}.$$

Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $d(f^k(a), f^l(b)) > 2\epsilon$ για όλα τα k και l . Τότε

$d(f^k(a), x) + d(x, f^l(b)) \geq d(f^k(a), f^l(b)) > 2\epsilon, \forall k, l \in \mathbb{Z}^+$, λόγω της τριγωνικής ανισότητας.

Αν το x βρίσκεται εντός ϵ οποιουδήποτε από τα σημεία $f^l(b)$, τότε πρέπει να βρίσκεται σε μεγαλύτερη απόσταση από ϵ από όλα τα σημεία $f^k(a)$ και το ζητούμενο προκύπτει. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.5.3. Έστω $x \in X$ και U ένα ανοιχτό σύνολο στο X που περιέχει το x .

Έστω p ένα περιοδικό σημείο περιόδου r για την f , του οποίου η τροχιά απέχει απόσταση μεγαλύτερη από 4δ από το x .

Τα περιοδικά σημεία της f είναι πυκνά στο X , επομένως υπάρχει ένα περιοδικό σημείο q περιόδου n ας πούμε, με

$$q \in V = U \cap B_\delta(X).$$

Αν $W_i = B_\delta(f^i(p))$, τότε $f^i(p) \in W_i, \forall i \Rightarrow p \in f^{-i}(W_i), \forall i$

Άρα για το ανοιχτό σύνολο $W = f^{-1}(W_1) \cap f^{-2}(W_2) \cap \dots \cap f^{-n}(W_n) \neq \emptyset$.

Δεδομένου ότι η f είναι μεταβατική, υπάρχει ένα σημείο $z \in V$ με $f^k(z) \in W$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}^+$.

Έστω j ο μικρότερος ακέραιος με $k < nj$ ή $1 \leq nj - k \leq n$. Τότε

$f^{nj}(z) = f^{nj-k}(f^k(z)) \in f^{nj-k}(W)$. Όμως

$f^{nj-k}(W) = f^{nj-k}(f^{-1}(W_1) \cap f^{-2}(W_2) \cap \dots \cap f^{-n}(W_n)) \subset f^{nj-k}(f^{-(nj-k)}(W_{nj-k})) = W_{nj-k}$, ώστε

$d(f^{nj}(z), f^{nj-k}(p)) < \delta$. Έχουμε $f^{nj}(q) = q$, και από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει

$$d(f^{nj-k}(p), x) \leq d(f^{nj-k}(p), f^{nj}(z)) + d(f^{nj}(z), f^{nj}(q)) + d(f^{nj}(q), x)$$

Όστε

$4\delta < d(f^{nj-k}(p), x) \leq d(f^{nj-k}(p), f^{nj}(z)) + d(f^{nj}(z), f^{nj}(q)) + d(q, x) < \delta + d(f^{nj}(z), f^{nj}(q)) + \delta$, άρα

$$d(f^{nj}(z), f^{nj}(q)) > 2\delta$$

Η παραπάνω ανισότητα μας οδηγεί στην $d(f^{nj}(x), f^{nj}(z)) \geq \delta$ ή $d(f^{nj}(x), f^{nj}(q)) \geq \delta$, γιατί αν το $f^{nj}(x)$ βρισκόταν σε απόσταση μικρότερη του δ και από τα δύο αυτά σημεία, θα έπρεπε να βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από 2δ μεταξύ τους, γεγονός που αντικρούει την προηγούμενη ανισότητα. Έτσι, ένα από τα δύο, το z ή το q , θα χρησιμεύσει ως το y στον ορισμό 5.5.1., (με $m = nj$). ■

Πρόταση 5.5.5. Η συνάρτηση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $B(x) = 2x(\text{mod}1)$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Απόδειξη:

Απλοποιούμε την απόδειξη επιλέγοντας y αρκετά κοντά στο x έτσι ώστε τα $x, y \in [0,1]$ να μην συναντούν διαφορετικούς κλάδους της $B(x)$ υπό επανάληψη. Με αυτόν τον τρόπο, αποκλείουμε την τεχνική περιπλοκή που προκαλείται από την ασυνέχεια της συνάρτησης στο $x = 1/2$.

Τώρα επαληθεύουμε τον ορισμό με μια «αντίστροφη προσέγγιση»: Ας υποθέσουμε ότι

$$\delta = |B^m(x) - B^m(y)| = |2^m x - 2^m y| = 2^m |x - y|$$

Για δεδομένο δ , πρέπει να επιλέξουμε τα y και m έτσι ώστε να πληρούται ο ορισμός. Είναι επομένως μια καλή ιδέα να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς το m ,

$$2^m = \frac{\delta}{|x - y|}, x \neq y$$

$$m \ln 2 = \ln \frac{\delta}{|x - y|}, \text{άρα } m = \frac{\ln \frac{\delta}{|x - y|}}{\ln 2}$$

Ας επιλέξουμε τώρα $\delta > 0$. Τότε η παραπάνω λύση ορίζει ότι για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει y οσοδήποτε κοντά του ($d(x, y) < \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$), έτσι ώστε μετά από $n > m$ επαναλήψεις να έχουμε

$$|B^n(x) - B^n(y)| = 2^{n-m} |x - y| = 2^{n-m} \delta > \delta. \blacksquare$$

Ορισμός 5.5.6. Χάος κατά την έννοια του Wiggins

Μια απεικόνιση $f: J \rightarrow J, J \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ότι είναι **W-χαοτική** στο J εάν:

1. Η f είναι τοπολογικά μεταβατική.
2. Η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

Παρατηρήσεις 5.5.7. Και πάλι μπορούμε να εντοπίσουμε δύο ιδιαίτερα στοιχεία σε αυτόν τον ορισμό:

1. *Ευαισθησία* που σχετίζεται με κάποιο μηχανισμό επέκτασης, ο οποίος τελικά υπονοεί μη προβλεψιμότητα.
2. *Τοπολογική μεταβατικότητα* που σημαίνει ότι υπάρχει μια πυκνή τροχιά η οποία, παρά την επέκταση, τελικά επιστρέφει κοντά στο αρχικό της σημείο εκκίνησης. Αυτό υπονοεί ότι τα δυναμικά συστήματα πρέπει επίσης να παρουσιάζουν κάποιο μηχανισμό αναδίπλωσης.

Παράδειγμα 5.5.8. Η συνάρτηση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $B(x) = 2x \pmod{1}$ έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες και τα περιοδικά σημεία είναι πυκνά στο $[0,1]$ άρα είναι χαοτική.

Κάποιος μπορεί τώρα να αναρωτηθεί γιατί έχουμε δύο διαφορετικούς ορισμούς του χάους και αν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους. Μια πρώτη απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.5.9. (Banks, Glasner και Weiss)

Εάν η f είναι τοπολογικά μεταβατική και υπάρχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών, η f είναι ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες.

Έτσι, το D -χάος υπονοεί W -χάος.

Παράδειγμα 5.5.10. Η συνάρτηση μετατόπισης είναι D -χαοτική, κατά συνέπεια είναι W -χαοτική.

5.6 Ljarunon χάος

Ας ξεκινήσουμε αυτήν την ενότητα με μια άλλη εφαρμογή της συνάρτησης διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $B(x) = 2x \pmod{1}$

Παράδειγμα 5.6.1. Ασταθής μετατόπιση Bernoulli κατά Ljarunon

Εξετάζουμε δύο σημεία που αρχικά μετατοπίζονται μεταξύ τους κατά $\delta_{x_0} := |x'_0 - x_0|$ με δ_{x_0} “απειροελάχιστα μικρό” έτσι ώστε τα x_0, x'_0 , να μην έχουν εικόνα σε διαφορετικούς κλάδους της γραφικής παράστασης γύρω από $x = 1/2$.

Στη συνέχεια έχουμε

$$\delta_{x_n} := |x'_n - x_n| = 2\delta_{x_{n-1}} = 2^2\delta_{x_{n-2}} = \dots = 2^n\delta_{x_0} = e^{n \ln 2}\delta_{x_0}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια εκθετική απόσταση μεταξύ δύο κοντινών σημείων καθώς ακολουθούμε τις τροχιές τους. Ο ρυθμός διαχωρισμού $\lambda(x_0) := \ln 2$ ονομάζεται (τοπικός) εκθέτης Ljarunon της $B(x)$.

Αυτό το απλό παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί ως εξής, οδηγώντας σε έναν γενικό ορισμό του εκθέτη Ljarunon για μονοδιάστατες συναρτήσεις f . Θεωρήστε

$$\delta_{x_n} = |x'_n - x_n| = |f^n(x'_0) - f^n(x_0)| =: \delta_{x_0} e^{n \lambda(x_0)}, \quad (\delta_{x_0} \rightarrow 0)$$

για το οποίο προϋποθέτουμε ότι υπάρχει εκθετικός διαχωρισμός τροχιών. Υποθέτοντας επιπλέον ότι η f είναι διαφορίσιμη, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω ισότητα ως

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_{x_0} \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{\delta_{x_n}}{\delta_{x_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\delta_{x_0} \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{|f^n(x_0 + \delta_{x_0}) - f^n(x_0)|}{\delta_{x_0}} \quad \text{δηλ,}$$

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε

$$\frac{df^n(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2}) \cdot \dots \cdot f'(x_0)$$

που οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Η τελευταία έκφραση ορίζει έναν μέσο χρόνο (στη μαθηματική βιβλιογραφία αυτό

μερικές φορές ονομάζεται μέσος όρος *Birkhoff*), όπου n όροι κατά μήκος της τροχιάς με αρχική συνθήκη x_0 αθροίζονται με τον υπολογισμό του μέσου όρου ως προς το n . Αυτές οι σκέψεις παρακινούν τον ακόλουθο σημαντικό ορισμό:

Ορισμός 5.6.2. Έστω $f \in C^1$ μια απεικόνιση της πραγματικής ευθείας.

Ο τοπικός αριθμός *Ljapunov* $L(x_0)$ της τροχιάς $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ ορίζεται ως

$$L(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right|^{\frac{1}{n}}$$

αν υπάρχει το όριο.

Ο τοπικός εκθέτης *Ljapunov* $\lambda(x_0)$ ορίζεται ως

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

αν υπάρχει το όριο.

Αυτός ο ορισμός προτάθηκε από τον Α.Μ. *Ljapunov* στη διδακτορική του διατριβή το 1892.

Παρατηρήσεις 5.6.3.

1. Εάν η f δεν είναι C^1 αλλά είναι τμηματικά C^1 , ο ορισμός μπορεί να εφαρμοστεί εξαιρώντας μεμονωμένα σημεία μη διαφορίσιμα.
2. Ισχύει $\exists \lambda(x) \Leftrightarrow \nexists L(x) \neq 0 \text{ ή } \infty$. Εάν οποιαδήποτε πλευρά είναι αληθής, έχουμε $\ln L(x) = \lambda(x)$.
3. Εάν $f'(x_i) = 0 \Rightarrow \nexists \lambda(x)$. Ωστόσο, συνήθως αυτό αφορά μόνο ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων.
4. Για μια επεκτεινόμενη απεικόνιση προκύπτει από τον Ορισμό 4.3.7. ότι $\lambda(x) > 0$. Ομοίως, για μια συστελλόμενη απεικόνιση $\lambda(x) < 0$.

Η έννοια των εκθετών *Ljapunov* μας επιτρέπει να καταλήξουμε σε έναν τρίτο ορισμό του ντετερμινιστικού χάους:

Ορισμός 5.6.4. Χάος κατά την έννοια του Ljapunov

Μια απεικόνιση $f: J \rightarrow J, J \subseteq \mathbb{R}, f$ (τμηματικά) C^1 λέγεται *L-χαστική* στο J αν:

1. η f είναι τοπολογικά μεταβατική.
2. Έχει θετικό εκθέτη Ljapunov για μια τυπική αρχική συνθήκη x_0 .

Παρατηρήσεις 5.6.5.

1. Ο λόγος για τον οποίο απαιτούμε "τυπικότητα" για τις αρχικές συνθήκες οφείλεται στο ότι θα ήταν παραπλανητικό να κρίνουμε για το *L-χάος* με βάση μόνο "κάποια" αρχική συνθήκη. Για παράδειγμα θα μπορούσε μια συνάρτηση να έχει ένα ασταθές σταθερό σημείο $x_0 \in J$, με $\lambda(x_0) > 0$, ενώ η τιμή του $\lambda(x)$ να είναι αρνητική σε όλα τα άλλα $x \in J$.
2. $\lambda(x) > 0$ υποδηλώνει ότι μια συνάρτηση είναι ευαίσθητη, ωστόσο, η άλλη κατεύθυνση δεν ισχύει. Δηλαδή, το *W-χάος* είναι ασθενέστερο από το *L-χάος*, καθώς οι τροχιές μπορούν να διαχωριστούν πιο ασθενώς παρά εκθετικά.
3. Σημειώστε επίσης, ότι το *W-χάος* απαιτεί ευαισθησία για κάθε $x \in J$, ενώ για το *L-χάος* το $\lambda(x) > 0$ για ένα (τυπικό) x είναι αρκετό. Αυτό συμβαίνει επειδή, σε αντίθεση με την ευαισθησία, ο εκθέτης Ljapunov ορίζει μια μέση (στατιστική) ποσότητα.

Ορισμός 5.6.6. Εκθέτης Ljapunov για περιοδικά σημεία.

Έστω $p \in J$ ένα περιοδικό σημείο περιόδου n μιας απεικόνισης $f: J \rightarrow J, J \subseteq \mathbb{R}$. Τότε

$$\lambda(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'(p_i)|, p = p_0, p_i = f^i(p)$$

είναι ο εκθέτης Ljapunov κατά μήκος της περιοδικής τροχιάς $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$.

Για την περίπτωση σταθερού σημείου $n = 1$ έχουμε $\lambda(p) = \ln|f'(p)|$.

Παραδείγματα 5.6.7.

1. Για τη συνάρτηση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1], B(x) = 2x(mod 1)$ έχουμε

$B'(x) = 2$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $x \neq 1/2$, άρα $\lambda(x) = \ln 2$ σε αυτά τα σημεία. Έτσι, εδώ ο εκθέτης *Ljapunov* είναι ο ίδιος για σχεδόν όλα τα x , επειδή η απεικόνιση διαστέλλεται ομοιόμορφα.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-x^3}{2}$ έχει σταθερά σημεία $\text{Fix}f = \{0,1,-1\}$ αφού

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3x-x^3}{2} = x \Leftrightarrow x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1, x = -1,$$

Έχουμε $f'(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)$ οπότε $f'(0) = \frac{3}{2} > 1$, δηλαδή $x = 0$ απωθητικό, ενώ $f'(1) = f'(-1) = 0 < 1$, άρα $x = 1, x = -1$ ελκτικά σημεία.

Ας υπολογίσουμε τους εκθέτες *Ljapunov* της συνάρτησης σε αυτά τα σταθερά σημεία: Έχουμε $\lambda(0) = \ln \frac{3}{2} > 0$ που αντιστοιχεί σε ένα απωθητικό σταθερό σημείο. Για τα άλλα δύο σταθερά σημεία αφού $f'(1) = f'(-1) = 0$, δυστυχώς σε αυτές τις (σπάνιες) περιπτώσεις ο εκθέτης *Ljapunov* δεν είναι ορισμένος.

Κεφάλαιο 6. Σύζευξη Δυναμικών Συστημάτων

Δύο μετρικοί χώροι X και Y είναι «ίδιοι» ή «ισοδύναμοι» (ομοιομορφικοί) εάν υπάρχει ομοιομορφισμός από τον έναν χώρο στον άλλο. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το ερώτημα πότε δύο δυναμικά συστήματα είναι «ισοδύναμα». Δεδομένων των απεικονίσεων $f: X \rightarrow X$ και $g: Y \rightarrow Y$, απαιτούμε να έχουν τον ίδιο τύπο δυναμικής συμπεριφοράς, π.χ., εάν ο ένας είναι χαοτικός, τότε να είναι και ο άλλος, να υπάρχει μια αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των περιοδικών σημείων τους κ.λπ.

Μια προφανής απαίτηση είναι ότι οι υποκείμενοι μετρικοί χώροι πρέπει να είναι ομοιομορφικοί. Έχουμε δει πολλές ομοιότητες μεταξύ της λογιστικής συνάρτησης $L_4(x) = 4x(1-x)$ και της συνάρτησης $T(x)$ και αυτό θα εξεταστεί σε αυτό το κεφάλαιο, μαζί με άλλα παραδείγματα όπως η συνάρτηση μετατόπισης και κύκλου.

6.1 Συζυγείς συναρτήσεις

Αυτή η «ομοιότητα» δίνεται από την ιδέα της συζυγίας, μια έννοια δανεισμένη από τη θεωρία ομάδων, όπου δύο μέλη α και β μιας ομάδας G είναι συζευγμένα αν υπάρχει $g \in G$ με $g\alpha = g\beta$.

Για λόγους απλότητας θα επικεντρωθούμε κυρίως σε δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου, αλλά οι περισσότερες ιδέες μπορούν εύκολα να μεταφραστούν σε συνεχή χρόνο. Η πρώτη και πιο θεμελιώδης έννοια σε οποιοδήποτε πρόβλημα ταξινόμησης είναι η διατύπωση μιας έννοιας ισοδυναμίας. Όπως θα δούμε, υπάρχουν διάφορες έννοιες που μπορούν να είναι χρήσιμες και οι οποίες ορίζουν την ισοδυναμία με διάφορους βαθμούς ισχύος. Ένα από τα κεντρικά προβλήματα της μονοδιάστατης δυναμικής και των δυναμικών συστημάτων γενικά είναι η δυνατότητα να διαπιστωθεί εάν δύο δυναμικά συστήματα είναι συζυγή ή όχι. Θα δούμε ότι εάν μια συνάρτηση έχει έναν 3-κύκλο και μια άλλη δεν έχει 3-κύκλο (για παράδειγμα), τότε οι συναρτήσεις δεν μπορούν να είναι συζυγείς ή εάν μια συνάρτηση έχει 2 σταθερά σημεία και η άλλη έχει 3 σταθερά σημεία. Αυτά είναι παραδείγματα αναλλοίωτων συζυγιών, τα οποία δίνουν κριτήρια για τις μη συζυγείς συναρτήσεις.

Ένα γενικά πιο δύσκολο πρόβλημα είναι η δημιουργία συζυγίας μεταξύ συναρτήσεων.

Η πιο βασική μορφή συζυγίας είναι η ακόλουθη.

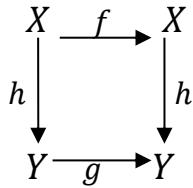
Έστω X, Y δύο σύνολα και οι συναρτήσεις $f: X \rightarrow X$ και $g: Y \rightarrow Y$.

Ορισμός 6.1.1. Οι συναρτήσεις f και g λέγονται **συζυγείς** αν υπάρχει **αμφιμονοσήμαντη** (ένα-προς-ένα και επί) συνάρτηση $h: X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$h \circ f = g \circ h$$

δηλαδή για κάθε $x \in X$ ισχύει $h(f(x)) = g(h(x))$

Η σχέση $h \circ f = g \circ h$ φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα



Η συνθήκη συζυγίας λέει ότι η h αντιστοιχίζει τροχιές σε τροχιές με συνεπή τρόπο.

Η συζυγία είναι στην πραγματικότητα μια σχέση μεταξύ των δυναμικών συστημάτων που προκαλούνται από τις f και g . Θα δούμε ότι η συζυγία ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο όλων των διακριτών χρονικών δυναμικών συστημάτων και επομένως είναι μια αποδεκτή έννοια της ισοδυναμίας. Ωστόσο, είναι μια πολύ αδύναμη έννοια: εγγυάται ότι δύο συζυγή συστήματα έχουν αντίστοιχα σύνολα περιοδικών σημείων δεν δίνει όμως πληροφορία για την γενικότερη εικόνα των τροχιών. Όπως θα δούμε από παραδείγματα παρακάτω, είναι δυνατό να συζευχθούν συστήματα τα οποία δεν θέλουμε πραγματικά να θεωρήσουμε ισοδύναμα. Χρειαζόμαστε επομένως μια ισχυρότερη μορφή συζυγίας και αυτό απαιτεί επίσης κάποια πρόσθετη δομή στους χώρους όπου ορίζονται οι συναρτήσεις f και g .

Έστω τώρα X, Y δύο μετρικοί χώροι. Αυτό θα μας επιτρέψει να διατυπώσουμε μια πολύ ισχυρότερη και πιο ουσιαστική έννοια της ισοδυναμίας, επιβάλλοντας μια επιπλέον συνθήκη στη συνθήκη συζυγίας που εισήχθη παραπάνω.

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f: X \rightarrow X$ και $g: Y \rightarrow Y$.

Στο πλαίσιο των συναρτήσεων σε τοπολογικούς χώρους είναι φυσικό να εξετάζουμε συνεχείς συναρτήσεις, και πολλές από τις συναρτήσεις που θα εξετάσουμε θα είναι συνεχείς, αλλά αυτό δεν απαιτείται αυστηρά από τον ορισμό.

Ορισμός 6.1.2. Οι συναρτήσεις f και g λέγονται **τοπολογικά συζυγείς** αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h: X \rightarrow Y$ τέτοιος ώστε

$$h \circ f = g \circ h$$

δηλαδή για κάθε $x \in X$ ισχύει $h(f(x)) = g(h(x))$

Σχόλια 6.1.3.

1. Αφού η h είναι ομοιομορφισμός είναι αντιστρέψιμη, άρα η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί $f = h^{-1} \circ g \circ h$.
2. Είναι εύκολο να δούμε ότι πρόκειται για μια σχέση ισοδυναμίας. Η κρίσιμη διαφορά είναι ότι οι *τοπολογικές συζεύξεις* διατηρούν επίσης τα *οριακά σύνολα*, δηλαδή αν οι f, g είναι τοπολογικά συζυγή, για κάθε $x \in X$ έχουμε $h(\omega(x)) = \omega(h(x))$.
3. Όπως θα δούμε, αυτή είναι μια πολύ ισχυρότερη μορφή συζυγίας από την απλή συζυγία. Εάν δύο συναρτήσεις είναι τοπολογικά συζυγείς, τότε είναι συζυγείς, αλλά το αντίστροφο είναι ψευδές. Έτσι, οι τοπολογικές κλάσεις συζυγίας είναι μια βελτίωση των τυπικών κλάσεων συζυγίας.

Αν οι χώροι X, Y είναι διαφορίσιμες πολλαπλότητες όπως η \mathbb{R}^n , μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω την έννοια της συζυγίας.

Υποθέτουμε ότι $f: X \rightarrow X$ και $g: Y \rightarrow Y$ είναι δύο συναρτήσεις \mathbb{C}^1 .

Ορισμός 6.1.4. Οι f, g είναι \mathbb{C}^1 **συζυγείς** αν είναι συζυγείς και η συζυγία h είναι \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός.

Σχόλιο 6.1.5. Επίσης, σε αυτήν την περίπτωση είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η συζυγία \mathbb{C}^1 είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Οποιοσδήποτε διαφορομορφισμός \mathbb{C}^1 είναι φυσικά και ένας ομοιομορφισμός.

Παρατήρηση 6.1.6. Υπάρχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα στη χρήση ισχυρών ή ασθενέστερων μορφών συζυγιών. Οι ασθενέστερες μορφές σημαίνουν ότι είναι ευκολότερο για δύο συστήματα να είναι ισοδύναμα, αλλά αυτό μπορεί να περιλαμβάνει περιπτώσεις που στην πραγματικότητα πιστεύουμε ότι δεν θα έπρεπε να είναι. Από την άλλη πλευρά, οι ισχυρότερες μορφές μπορεί να διακρίνουν πάρα πολλά στοιχεία δύο δυναμικών συστημάτων. Η σωστή έννοια της συζυγίας θα εξαρτηθεί από το συγκεκριμένο

πλαίσιο και τα ερωτήματα ενδιαφέροντος. Ωστόσο, οι διαφορίσιμες συζυγίες διατηρούν τόσο μεγάλη δομή που ακόμη και συστήματα που φαίνονται πολύ παρόμοια μπορεί να μην είναι συζυγή, και σε πολλές περιπτώσεις οι τοπολογικές συζυγίες φαίνονται σαν ο κατάλληλος συμβιβασμός μεταξύ της διατήρησης μιας επαρκούς ποσότητας δομής και επαρκώς μεγάλων κλάσεων ισοδυναμίας..

Παράδειγμα 6.1.7. Η λογιστική συνάρτηση $L_4: [0,1] \rightarrow [0,1]$, με $L_4(x) = 4x(1-x)$, είναι τοπολογικά συζυγής με την συνάρτηση σκηνής

$$T_2(x): [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ με } T_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Απόδειξη : Ας ορίσουμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$, με $h(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η h είναι 1-1, επί, και ότι τόσο η h όσο και h^{-1} είναι συνεχής. Συνεπώς η h είναι ομοιομορφισμός, όμως όχι διαφορομορφισμός αφού $h'(1) = 0$. Επίσης έχουμε

$$L_4 \circ h(x) = L_4\left(\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = \sin^2(\pi x), \text{ και}$$

$$h \circ T_2(x) = h(T_2(x)) = \begin{cases} h(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ h(2-2x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} = \sin^2(\pi x)$$

Άρα $L_4 \circ h = h \circ T_2$ οπότε L_4 και T_2 τοπολογικά συζυγείς. ■

Ορισμός 6.1.8. Αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h: X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$h \circ f = g \circ h,$$

τότε λέμε ότι η g είναι ένας **παράγοντας** της f .

Ορισμός 6.1.9. Μια **ημι-σύζευξη** μεταξύ f και g είναι μια επιρριπτική (επί) συνάρτηση $h: X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε $h \circ f = g \circ h$,

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το $f: X \rightarrow X$ είναι μια **επέκταση** της $g: Y \rightarrow Y$ και ότι το $g: Y \rightarrow Y$ είναι ένας **ημι-παράγοντας** της $f: X \rightarrow X$.

Παραδείγματα 6.1.10.

1. Η συνάρτηση διπλασιασμού

$$B(x) = 2x(\text{mod}1) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{ είναι ημι-παράγοντας της}$$

συνάρτησης μετατόπισης $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $\sigma(s_1, s_2, s_3, \dots) = (s_2, s_3, \dots)$.

Απόδειξη : Αν $h: \Sigma \rightarrow [0,1]$, με $h(x_1, x_2, x_3, \dots) = \cdot x_1 x_2 x_3 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $h \circ \sigma = B \circ h$, δηλαδή η B είναι παράγοντας της σ .

Η συνάρτηση h είναι συνεχής όχι όμως ομοιομορφισμός διότι δεν είναι 1-1 (αφού για παράδειγμα $h(1,0,0,\dots) = \frac{1}{2} = h(0,1,1,1,\dots)$ με $(1,0,0,\dots) \neq (0,1,1,1,\dots)$). Επίσης $h(\Sigma) = [0,1]$, άρα η h είναι επί. Συνεπώς η B είναι ημι-παράγοντας της σ . ■

2. Η λογιστική συνάρτηση $L_4: [0,1] \rightarrow [0,1]$, με $L_4(x) = 4x(1-x)$, είναι ημι-παράγοντας με την συνάρτηση διπλασιασμού γωνιών $D: S_1 \rightarrow S_1$, $D(z) = z^2$.

Απόδειξη : Ορίζουμε την συνάρτηση $h: S_1 \rightarrow [0,1]$, με $h(e^{ix}) = \sin^2 x$. Τότε $L_4 \circ h(e^{ix}) = L_4(\sin^2 x) = 4\sin^2(1 - \sin^2 x) = \sin^2(2x)$, και

$$h \circ D(e^{ix}) = h(e^{2ix}) = \sin^2(2x), \text{ άρα } L_4 \circ h = h \circ D.$$

Η h είναι επί και συνεχής, όχι όμως 1-1 (παρατηρήστε ότι $h(e^{ix}) = h(e^{-ix})$), οπότε η h δεν είναι σύζευξη για τις L_4 και D .

Τελικά η L_4 είναι ημι-παράγοντας της D . ■

6.2 Ιδιότητες Συζυγών συναρτήσεων

Συχνά είναι ευκολότερο να δείξουμε έμμεσα ότι ορισμένες συναρτήσεις είναι χαοτικές δείχνοντας ότι είναι συζευγμένες με χαοτικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας την ακόλουθη πρόταση:

Έστω X, Y δύο μετρικοί χώροι και οι συζυγείς συναρτήσεις $f: X \rightarrow X$, $g: Y \rightarrow Y$ μέσω μιας συζυγίας $h: X \rightarrow Y$.

Πρόταση 6.2.1. Οι συναρτήσεις f^n και g^n είναι επίσης συζυγείς μέσω της συζυγίας h , δηλαδή ισχύει $h \circ f^n = g^n \circ h$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Απόδειξη : Ισχύει $h \circ f = g \circ h$.

Τότε θα έχουμε $h \circ f^2 = h \circ f \circ f = g \circ h \circ f = g \circ g \circ h = g^2 \circ h$.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $h \circ f^3 = g^3 \circ h$ και συνεχίζοντας επαγωγικά καταλήγουμε στο ζητούμενο $h \circ f^n = g^n \circ h$. ■

Πόρισμα 6.2.2. Αν η συζυγία h είναι αντιστρέψιμη, ισχύει $f^n = h^{-1} \circ g^n \circ h$, αφού $f^n = (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h)$ και $h \circ h^{-1} = I$.

Πρόταση 6.2.3. Ένα σημείο c είναι σημείο περιόδου m για την f , αν και μόνο αν το $h(c)$ είναι ένα σημείο περιόδου m για την g .

Απόδειξη : Αν c είναι ένα σημείο περιόδου m για την f , ας θεωρήσουμε ότι

$$f^n(c) \neq c \text{ για } 0 < n < m \text{ και } f^m(c) = c.$$

Τότε $h \circ f^n(c) \neq c$ για $0 < n < m$ αφού η h είναι ένα προς ένα, άρα

$$g^n \circ h(c) \neq h(c) \text{ για } 0 < n < m.$$

Επιπλέον, $h \circ f^m(c) = g^m \circ h(c)$, δηλαδή

$$h(c) = g^m \circ h(c) = g^m(h(c))$$

άρα $h(c)$ είναι ένα σημείο περιόδου m για την g .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $g^m(h(c)) = h(c)$.

Τότε, επειδή η h είναι αντιστρέψιμη, από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$f^m = h^{-1} \circ g^m \circ h.$$

$$\text{Έτσι } f^m(c) = h^{-1} \circ g^m \circ h(c) = h^{-1} \left(g^m(h(c)) \right) = h^{-1}(h(c)) = c,$$

άρα c σημείο περιόδου m για την f . ■

Έτσι, αν τα περιοδικά σημεία της συνάρτησης f είναι πιο εύκολα κατανοητά από τα περιοδικά σημεία της συνάρτησης g , μέσω της συζυγίας μπορεί κανείς να αποκτήσει πληροφορίες σχετικά με τα περιοδικά σημεία της g .

Επίσης παρατηρούμε ότι $Per(f) \subseteq Per(g)$.

Θα δούμε ότι αυτό ακριβώς ισχύει για τον χάρτη διπλασιασμού.

Σχόλιο 6.2.4. Υπάρχουν συναρτήσεις f και g που είναι ημι-συζευγμένες από συνάρτηση h και $h(c)$ είναι ένα σημείο περιόδου m για την g , αλλά το σημείο c δεν είναι σημείο περιόδου m για την f .

Πρόταση 6.2.5. Αν ένα σημείο p είναι ελκτικό σημείο για την f , τότε το $h(p)$ είναι ελκτικό σημείο της g .

Απόδειξη : Αν p είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο για την f , τότε υπάρχει μια ανοιχτή σφαίρα $B_\epsilon(p)$, $\epsilon > 0$, τέτοια ώστε αν $x \in B_\epsilon(p)$ ισχύει $f^n(x) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Έστω $V = h(B_\epsilon(p))$, τότε επειδή η h είναι ομοιομορφισμός το σύνολο V είναι ανοικτό υποσύνολο του Y που περιέχει το $h(p)$.

Αν $y \in V$, τότε $h^{-1}(y) \in B_\epsilon(p)$, οπότε $f^n(h^{-1}(y)) \rightarrow p$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Επίσης συνεχώς συνεπώς $h(f^n(h^{-1}(y))) \rightarrow h(p)$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Άρα,

$$g^n(y) = h \circ f^n \circ h^{-1}(y) \rightarrow h(p) \text{ καθώς } n \rightarrow \infty,$$

συνεπώς $h(p)$ είναι ελκτικό σημείο της g . ■

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει και το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

Πρόταση 6.2.6. Η f είναι μεταβατική αν και μόνο αν η g είναι μεταβατική.

Απόδειξη : Ας υποθέσουμε ότι η τροχιά $\mathcal{O}_f(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z)\}$ ενός σημείου $z \in X$ μέσω της f , είναι πυκνό σύνολο του X και έστω $V \subset Y$ ένα μη κενό ανοικτό σύνολο. Τότε, επειδή η h είναι ένας ομοιομορφισμός, το $h^{-1}(V)$ είναι ανοικτό

σύνολο στο X , άρα υπάρχει $k \in \mathbb{Z}^+$ με $f^k(z) \in h^{-1}(V)$.

Επομένως, $h(f^k(z)) = g^k(h(z)) \in V$, έτσι ώστε η τροχιά

$$\mathcal{O}_g(h(z)) = \{h(z), g(h(z)), g^2(h(z)), \dots, g^n(h(z))\}$$

είναι πυκνή στο Y , δηλαδή, η g είναι μεταβατική. Ομοίως, αν η g είναι μεταβατική, τότε η f είναι μεταβατική. ■

Πρόταση 6.2.7. Η f έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων αν και μόνο αν η g έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων.

Απόδειξη : Ας υποθέσουμε ότι η f έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων και έστω $V \subset Y$ μη κενό και ανοιχτό σύνολο. Τότε το $h^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό του X , άρα περιέχει περιοδικά σημεία της f . Όπως στην Πρόταση 6.2.6., βλέπουμε ότι το V περιέχει περιοδικά σημεία της g . Ομοίως, αν η g έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών σημείων, το ίδιο ισχύει και για την f . ■

Από τις προτάσεις 6.2.6. και 6.2.7. εύκολα εξάγεται η επόμενη:

Πρόταση 6.2.8. Η f είναι χαοτική αν και μόνο αν η g είναι χαοτική.

Σχόλιο 6.2.9. Η ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες δεν είναι μια αναλλοίωτη συζυγή σχέση. Είναι δυνατόν δύο συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους να είναι συζυγείς, η μία να έχει ευαίσθητη εξάρτηση, ενώ η άλλη όχι. Δείτε την παρακάτω περίπτωση.

Παράδειγμα 6.2.10. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 2x$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + \ln 2$. Αν $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \ln x$, τότε η h είναι ομοιομορφισμός και εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $h \circ f = g \circ h = \ln 2x$, άρα οι f και g είναι συζυγείς με την f να έχει ευαίσθητη εξάρτηση (παραδ.5.5.2.) ενώ η g όχι.

Σχόλιο 6.2.11. Μπορεί ωστόσο να αποδειχθεί ότι αν $f: X \rightarrow X$ είναι μια απεικόνιση σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο X (για παράδειγμα $X = [0, 1]$) που έχει ευαίσθητη εξάρτηση, τότε οποιαδήποτε συζυγής απεικόνιση με την f έχει επίσης ευαίσθητη εξάρτηση.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι πολλές από τις συναρτήσεις που έχουμε μελετήσει σε προηγούμενα παραδείγματα είναι χαοτικές. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να αποδυναμώσουμε τις συνθήκες των Προτάσεων 6.1.2., 6.2.3., 6.2.6., 6.2.8.. Αν παραλείψουμε την απαίτηση ότι η h είναι ομοιομορφισμός, αλλά απλώς απαιτήσουμε να

είναι συνεχής και επί, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι αν η f είναι χαοτική, τότε και η g είναι. Με άλλα λόγια, αν η g είναι ένας ημι-παράγοντας της f , όπου f είναι χαοτική, τότε η g είναι επίσης χαοτική. Αυτό το αποτέλεσμα θα είναι χρήσιμο για να δείξουμε ότι πολλά από τα παραδείγματα είναι χαοτικά.

Θα αποδείξουμε αρχικά ένα λήμμα που αφορά τις συνεχείς συναρτήσεις σε μετρικούς χώρους:

Λήμμα 6.2.12. Έστω $h: X \rightarrow Y$ μια συνεχής συνάρτηση μετρικών χώρων και A ένα υποσύνολο του X , τότε $h(\bar{A}) \subseteq \overline{h(A)}$.

Απόδειξη: Έστω $y \in h(\bar{A})$, τότε υπάρχει $x \in \bar{A}$ με $y = h(x)$.

Υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Τότε $h(x_n) \in h(A)$ και h συνεχής, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = h(x) = y$, οπότε $y \in \overline{h(A)}$. ■

Πρόταση 6.2.13. Έστω $h: X \rightarrow Y$ επί και συνεχής. Αν οι $f: X \rightarrow X$ και $g: Y \rightarrow Y$ ικανοποιούν την σχέση $h \circ f = g \circ h$ και η f είναι χαοτική, τότε η g είναι χαοτική.

Απόδειξη: Τα περιοδικά σημεία των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα είναι τα σύνολα $Per(f)$ και $Per(g)$. Αφού $h \circ f = g \circ h$ από την πρόταση 6.2.3. είδαμε ότι $Per(f) \subseteq Per(g)$. Αφού η f είναι χαοτική ισχύει $\overline{Per(f)} = X$, και $h(X) = Y$ διότι η h είναι επί. Από το παραπάνω λήμμα έχουμε

$$Y = h(X) = h(\overline{Per(f)}) \subseteq \overline{h(Per(f))} \subseteq \overline{Per(g)}, \text{ άρα } \overline{Per(g)} = Y.$$

Δηλαδή τα περιοδικά σημεία της g είναι πυκνά στο Y .

Η f είναι χαοτική συνεπώς και μεταβατική, επομένως υπάρχει $x_0 \in X$, με $\overline{\mathcal{O}_f(x_0)} = X$.

$$\begin{aligned} \text{Τότε } h(\mathcal{O}_f(x_0)) &= h\{f^n(x_0): n \in \mathbb{Z}^+\} = \{h \circ f^n(x_0): n \in \mathbb{Z}^+\} = \\ &= \{g^n \circ h(x_0): n \in \mathbb{Z}^+\} = \mathcal{O}_g(h(x_0)), \text{ οπότε} \end{aligned}$$

$$Y = h(X) = h(\overline{\mathcal{O}_f(x_0)}) \subseteq \overline{h(\mathcal{O}_f(x_0))} = \overline{\mathcal{O}_g(h(x_0))}, \text{ συνεπώς } h(x_0) \text{ είναι μεταβατικό σημείο της } g, \text{ δηλαδή είναι και η } g \text{ χαοτική. } \blacksquare$$

Σχόλιο 6.2.14. Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η Πρόταση 6.2.12 παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε την προϋπόθεση ότι η h είναι επί, με την απαίτηση ότι το $h(X)$ είναι πυκνό στο Y .

Παράδειγμα 6.2.15. Η συνάρτηση σκηνης $T_2(x): [0,1] \rightarrow [0,1]$, η λογιστική συνάρτηση $L_4: [0,1] \rightarrow [0,1]$, με $L_4(x) = 4x(1-x)$, η συνάρτηση διπλασιασμού γωνιών $f: S_1 \rightarrow S_1$, $f(z) = z^2$, και η συνάρτηση διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $B(x) = 2x(mod 1)$ είναι όλες χαοτικές.

Απόδειξη: Η συνάρτηση σκηνης T_2 είναι συζυγής με την λογιστική συνάρτηση L_4 (παράδειγμα 5.1.3.), που είναι ημι-παράγοντας της B , η οποία είναι επίσης ημι-παράγοντας της συνάρτησης μετατόπισης σ (παράδειγμα 6.1.7.).

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η συνάρτηση διπλασιασμού γωνίας $f: S_1 \rightarrow S_1$, $f(z) = z^2$, είναι ημι-παράγοντας της συνάρτησης διπλασιασμού $B: [0,1] \rightarrow [0,1]$, $B(x) = 2x(mod 1)$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow S_1$, με $h(x) = e^{2\pi xi}$, η οποία είναι συνεχής, επί και 1-1 σχεδόν παντού (εκτός της περίπτωσης $h(0) = h(1) = 1$). Έχουμε

$$f \circ h(x) = f(e^{2\pi xi}) = e^{4\pi xi}, \text{ και } h \circ B(x) = h(2x(mod 1)) = e^{2\pi i(2x(mod 1))} = e^{4\pi xi},$$

Άρα $f \circ h = h \circ B$, δηλαδή η f είναι ημι-παράγοντας της B

Στην πρόταση 5.4.5. είδαμε ότι η συνάρτηση μετατόπισης σ είναι χαοτική, άρα και οι υπόλοιπες συναρτήσεις θα είναι και αυτές χαοτικές. ■

Οι συζυγίες \mathbb{C}^1 διατηρούν τα οριακά σύνολα, αλλά διατηρούν και ακόμη περισσότερη δομή, ιδιαίτερα την τιμή της παραγώγου στα σταθερά σημεία.

Πρόταση 6.2.16. Έστω οι \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμοί $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίοι είναι \mathbb{C}^1 συζυγείς. Τότε υπάρχει \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $h \circ f = g \circ h$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν p, q σταθερά σημεία για τις f, g αντίστοιχα (εάν υπάρχουν) με $h(p) = q$, τότε $f'(p) = g'(q)$.

Απόδειξη : Από τον ορισμό της συζυγίας έχουμε

$$h \circ f = g \circ h \quad \text{ή} \quad f = h^{-1} \circ g \circ h$$

Εφαρμόζουμε τον κανόνα αλυσίδας για να παραγωγίσουμε

$$f'(x) = (h^{-1} \circ g \circ h)'(x) = (h^{-1})'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Αφού p σταθερό σημείο για την f , και $h(p) = q$, τότε

$$f'(p) = (h^{-1})'(g(h(p))) \cdot g'(h(p)) \cdot h'(p) = (h^{-1})'(g(q)) \cdot g'(q) \cdot h'(p)$$

Όμως q σταθερό σημείο για την g , δηλαδή $g(q) = q$, και

$$(h^{-1})'(q) = (h^{-1})'(h(p)) = (h'(p))^{-1} \text{ άρα}$$

$$f'(p) = (h'(p))^{-1} \cdot g'(q) \cdot h'(p) = g'(q). \blacksquare$$

6.3 Γραμμική Σύζευξη

Μερικές φορές συμβαίνει η συζυγία μεταξύ δύο πραγματικών (ή μιγαδικών) συναρτήσεων να δίνεται από μια απεικόνιση με ένα ευθύγραμμο γράφημα. Αυτό ονομάζεται γραμμική συζυγία και είναι ισχυρότερο από τη συνήθη έννοια της συζυγίας.

Ορισμός 6.3.1. Για συναρτήσεις $f: I \rightarrow I$ και $g: J \rightarrow J$ που ορίζονται σε υποδιαστήματα του \mathbb{R} , λέμε ότι οι f και g είναι γραμμικά συζυγείς και ότι η h είναι γραμμική συζυγία αν η h αντιστοιχεί το I στο J , όπου $h(x) = ax + b$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ και $h \circ f = g \circ h$.

Το ακόλουθο παράδειγμα δίνει ένα κριτήριο για δύο τετραγωνικές συναρτήσεις ώστε να είναι γραμμικά συζευγμένες:

Παράδειγμα 6.3.2. Έστω οι τετραγωνικές συναρτήσεις

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{και} \quad g(x) = rx^2 + sx + t \quad \text{με} \quad a \neq 0 \quad \text{και} \quad r \neq 0.$$

Αν $c = \frac{b^2 - s^2 + 2s - 2b + 4rt}{4a}$, τότε οι f και g είναι γραμμικά συζευγμένες μέσω της

$$\text{γραμμικής συζυγίας} \quad h(x) = \frac{a}{r}x + \frac{b-s}{2r}.$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$h \circ f(x) = h(ax^2 + bx + c) = \frac{a}{r}(ax^2 + bx + c) + \frac{b-s}{2r} = \frac{a^2}{r}x^2 + \frac{ab}{r}x + \frac{2ac+b-s}{2r},$$

και

$$\begin{aligned}
 g \circ h(x) &= g\left(\frac{a}{r}x + \frac{b-s}{2r}\right) = r\left(\frac{a}{r}x + \frac{b-s}{2r}\right)^2 + s\left(\frac{a}{r}x + \frac{b-s}{2r}\right) + t = \\
 &= r\left(\frac{a^2x^2}{r^2} + \frac{a(b-s)}{r^2} + \frac{(b-s)^2}{4r^2}\right) + \frac{sa}{r}x + \frac{bs-s^2}{2r} + t = \\
 &= \frac{a^2}{r}x^2 + \frac{ab}{r}x + \frac{(b-s)^2 + 2bs - 2s^2 + 4rt}{2r}.
 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν $c = \frac{b^2 - s^2 + 2s - 2b + 4rt}{4a}$ ισχύει το ζητούμενο. ■

Για παράδειγμα, αν η f ορίζεται στο διάστημα $[0, 1]$, τότε

$$h(0) = \frac{b-s}{2r} \text{ και } h(1) = \frac{2a+b-s}{2r}$$

οπότε εάν $\frac{a}{r} > 0$ η f είναι συζυγής με την g στο διάστημα $[\frac{b-s}{2r}, \frac{2a+b-s}{2r}]$.

Παράδειγμα 6.3.3.

1) Η λογιστική συνάρτηση $L_\mu: [0,1] \rightarrow [0,1]$, με $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ και η συνάρτηση $g_d(x) = x^2 + d$ είναι γραμμικά συζευγμένες στο διάστημα $[-\mu/2, \mu/2]$ όταν $d = \frac{2\mu - \mu^2}{4}$

Αυτό διαπιστώνεται εύκολα αν στο παράδειγμα 6.3.2. θέσουμε

$$\begin{aligned}
 a = -\mu, \quad b = \mu, \quad c = 0, \quad r = 1, \quad s = 0, \quad t = c, \\
 \text{με } h(0) = \frac{\mu}{2} \text{ και } h(1) = -\frac{\mu}{2}
 \end{aligned}$$

2) Στην περίπτωση $\mu = 4$, η L_4 είναι γραμμικά συζυγής με την $g_{-2}(x) = x^2 - 2$ στο διάστημα $[-2, 2]$ μέσω της $h(x) = -4x + 2$.

3) Αν $\mu = 2$, βλέπουμε ότι η $L_2: [0,1] \rightarrow [0,1]$, με $L_2(x) = 2x(1-x)$ στο $[0,1]$ είναι συζυγής με την $g_0(x) = x^2$ στο διάστημα $[-1, 1]$, μέσω της $h(x) = -2x + 1$.

6.4 Συζυγία και η Οικογένεια της Σκηνής

Είδαμε στην Ενότητα 2.8 ότι για $\mu \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, η σκηνική συνάρτηση

$$T_\mu(x): [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ με } T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1-x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

έχει ένα σημείο περιόδου τρία, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Sharkovsky, θα έχει σημεία όλων των πιθανών περιόδων.

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιούμε μια συγκεκριμένη συζυγία για να δείξουμε ότι για $\mu > 1$, η T_μ θα έχει σημεία περιόδου 2^n για κάθε $n \geq 1$. Αρχικά δείχνουμε ότι το διάστημα $\left[\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}\right]$ είναι αμετάβλητο υπό την $T_\mu^2(x)$ όταν $1 < \mu \leq \sqrt{2}$.

Η συνάρτηση $T_\mu^2(x)$ είδαμε ότι έχει την μορφή

$$T_\mu^2(x) = \begin{cases} \mu^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2\mu} \\ \mu(1-\mu x), & \frac{1}{2\mu} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \mu(1-\mu+\mu x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2\mu} \\ \mu^2(1-x), & 1 - \frac{1}{2\mu} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Πρόταση 6.4.1. Για $1 < \mu \leq \sqrt{2}$, η συνάρτηση περιορισμού $T_\mu^2: \left[\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}\right] \rightarrow \left[\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}\right]$ είναι καλά ορισμένη.

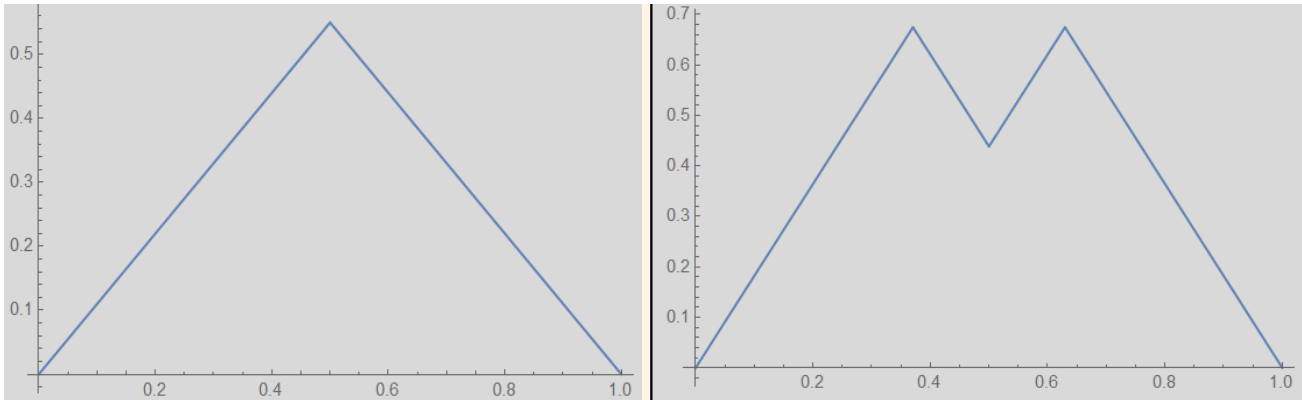
Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι για $1 < \mu \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 < 1 + \mu \leq \sqrt{2} + 1$ άρα $\frac{1}{1+\mu} < \frac{1}{2}$ και

$$\frac{\mu}{1+\mu} = \frac{\mu+1-1}{1+\mu} = 1 - \frac{1}{1+\mu}, \text{ οπότε } 1 < \mu \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 < 1 + \mu \leq \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{1+\mu} > -\frac{1}{2}$$

$$\text{άρα } 1 - \frac{1}{1+\mu} = \frac{\mu}{1+\mu} > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα ισχύει } \frac{1}{2\mu} < \frac{1}{1+\mu} < \frac{1}{2} < \frac{\mu}{1+\mu} < 1 - \frac{1}{2\mu}.$$

Έχουμε $T_\mu\left(\frac{1}{1+\mu}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}$ και $T_\mu\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) = \mu\left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}$ συνεπώς $x = \frac{\mu}{1+\mu}$ είναι ένα τελικό σταθερό σημείο της T_μ .



Στο πρώτο γράφημα είναι η εικόνα της T_μ (όταν $1 < \mu \leq \sqrt{2}$) και παρατηρούμε την μονοτονία της και το μέγιστο για $x = \frac{1}{2}$, ενώ στο δεξί γράφημα παρατηρούμε την μονοτονία και τα ακρότατα της T_μ^2 (τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$). Παρατηρήστε το γράφημα της T_μ^2 στο διάστημα $[\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}] \subseteq [\frac{1}{2\mu}, 1 - \frac{1}{2\mu}]$ που μοιάζει με μια «αντεστραμμένη» εκδοχή της T_μ .

Έστω $x \in [\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}]$, τότε αφού η T_μ^2 παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$ ισχύει

$$T_\mu^2(x) \geq T_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right) = \mu\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \geq \frac{1}{1+\mu}, \text{ δηλαδή}$$

$$\mu^3 - \mu^2 - 2\mu + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (\mu - 1)(\mu^2 - 2) \leq 0 \text{ και τελικά } 1 < \mu \leq \sqrt{2}.$$

Επίσης έχουμε ότι αν $\frac{1}{1+\mu} < x \leq \frac{1}{2}$ τότε $T_\mu(x) = \mu x < T_\mu\left(\frac{1}{1+\mu}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}$ με $\frac{\mu}{1+\mu} > \frac{1}{2}$, άρα $\frac{1}{2\mu} < T_\mu(x) < \frac{1}{2}$ οπότε $T_\mu^2(x) = \mu(1 - \mu x) < T_\mu^2\left(\frac{1}{1+\mu}\right) = \mu\left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}$, δηλαδή $T_\mu^2(x) \in [\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}]$.

Όταν $\frac{1}{2} < x < \frac{\mu}{1+\mu}$, έχουμε $T_\mu(x) = \mu(1 - x) > T_\mu\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) = \mu\left(1 - \frac{\mu}{1+\mu}\right) > \frac{1}{2}$,

άρα $T_\mu^2(x) = \mu(1 - \mu + \mu x) \leq T_\mu^2\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) = \mu\left(1 - \mu + \frac{\mu^2}{1+\mu}\right) = \frac{\mu}{1+\mu}$, συνεπώς και πάλι έχουμε $T_\mu^2(x) \in [\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}]$. ■

Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση για να δείξουμε ότι οι T_μ και $T_{\sqrt{\mu}}^2$ είναι συζυγή όταν η $T_{\sqrt{\mu}}^2$ περιορίζεται σε ένα κατάλληλο αμετάβλητο υποδιάστημα.

Πρόταση 6.4.2. Για $1 < \mu \leq \sqrt{2}$, η συνάρτηση T_μ^2 περιορισμένη στο διάστημα

$[\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}]$ είναι συζυγής της T_{μ^2} στο $[0,1]$.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.4.1, βλέπουμε ότι το δεδομένο διάστημα είναι αμετάβλητο ως προς T_μ^2 .

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μια γραμμική συζυγία $h(x) = ax + b$:

$$h \circ T_\mu^2 = T_{\mu^2} \circ h, \text{ με } h: [\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}] \rightarrow [0,1] \text{ και } a = \frac{1+\mu}{1-\mu}, b = \frac{\mu}{\mu-1}.$$

$$\text{Έχουμε } h\left(\frac{1}{1+\mu}\right) = 1 \text{ και } h\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) = 0.$$

Η αντίστροφη της h μπορεί ναδειχθεί ότι είναι $h^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ και

$$\frac{1}{2} \leq h^{-1}(x) \leq \frac{\mu}{1+\mu} < 1 - \frac{1}{2\mu}, \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} h \circ T_\mu^2 \circ h^{-1}(x) &= h \circ T_{\mu^2} \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right) = h \left(\mu^2 \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right) + \mu - \mu^2 \right) = \\ &= \mu^2 x - \mu^2 b + a(\mu - \mu^2) + b = \mu^2 x = T_{\mu^2}(x). \end{aligned}$$

Ομοίως όταν $\frac{1}{2} < x \leq 1$ τότε $\frac{1}{2\mu} < \frac{1}{1+\mu} \leq h^{-1}(x) \leq \frac{1}{2}$, άρα

$$\begin{aligned} h \circ T_\mu^2 \circ h^{-1}(x) &= h \circ T_{\mu^2} \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right) = h \left(\mu - \mu^2 \left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right) \right) = \\ &= a\mu - \mu^2 x + \mu^2 b + b = \mu^2(1-x) = T_{\mu^2}(x). \end{aligned}$$

Άρα έχουμε $h \circ T_\mu^2 \circ h^{-1}(x) = T_{\mu^2}(x)$ όταν $0 \leq x \leq 1$, δηλαδή η h είναι συζυγία των T_μ^2 και T_{μ^2} . ■

Αν αντί για μ στην προηγούμενη πρόταση θέσουμε $\sqrt{\mu}$ προκύπτει το επόμενο συμπέρασμα.

Συμπέρασμα 6.4.3 Όταν $1 < \mu \leq 2$, η συνάρτηση $T_{\sqrt{\mu}}^2$ περιορισμένη στο διάστημα

$[\frac{1}{1+\mu}, \frac{\mu}{1+\mu}]$ είναι συζυγής της T_μ στο $[0,1]$.

Θεώρημα 6.4.4. Όταν $1 < \mu \leq 2$, η συνάρτηση T_μ έχει 2^n –κύκλο περιοδικά σημεία για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$.

Απόδειξη: Έχουμε δει ότι για κάθε $\mu > 1$, η T_μ έχει μια περίοδο 2 σημείων διαφορετική από το σταθερό σημείο της (σημείωση 2.8.1.). Συγκεκριμένα, καθώς $\mu^2 > 1$, η T_{μ^2} έχει μια περίοδο 2 σημείων διαφορετική από το σταθερό σημείο της. Από την πρόταση 6.4.2., οι T_μ^2 και T_{μ^2} είναι συζυγής, επομένως η T_μ^2 έχει μια περίοδο 2-σημείου διαφορετική από το σταθερό σημείο της. Αυτό πρέπει να είναι μια περίοδος 4 σημείων για την T_μ , γιατί διαφορετικά θα ήταν μια περίοδος 2 σημείων, δίνοντας ένα σταθερό σημείο για την T_μ^2 .

Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω επιχειρήματα, ξεκινώντας με μια περίοδο 2-σημείου για την T_{μ^4} και τη σύζευξη μεταξύ $T_{\mu^2}^2$ και T_{μ^4} , συμπεραίνουμε ότι η T_μ έχει περίοδο 8-σημείων. Με αυτόν τον τρόπο, για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$ βλέπουμε ότι η T_μ έχει περίοδο 2^n –σημείων. ■

Παράδειγμα 6.4.5. Θεωρήστε την περίπτωση όπου $\mu = 2$, τότε βλέπουμε ότι η T_2 , η τυπική συνάρτηση σκηνής, είναι συζυγής με την $T_{\sqrt{2}}^2$ όταν περιορίζεται στο διάστημα $[\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}]$. Αυτό σημαίνει ότι η $T_{\sqrt{2}}^2$ έχει την ίδια δυναμική με την T_2 σε αυτό το υποδιάστημα. Για παράδειγμα, πρέπει να έχει έναν τριπλό κύκλο, ας πούμε $\{c_1, c_2, c_3\}$, όπου τα c_i , είναι διακριτά και $T_{\sqrt{2}}^6(c_1) = c_1$.

Συνεπώς, το c_1 είναι ένα σημείο περιόδου 6 για την $T_{\sqrt{2}}$, και με αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι η $T_{\sqrt{2}}$ έχει 2^k –κύκλο περιοδικά σημεία για κάθε $k \in \mathbb{Z}^+$. Είδαμε νωρίτερα (σημείωση 2.8.2.) ότι $\mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι το σημείο όπου γεννιέται η περίοδος τριών σημείων για την οικογένεια σκηνών. Συγκεκριμένα, η $T_{\sqrt{2}}$ δεν έχει 3-κύκλο σημεία, αλλά αν $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $T_{\sqrt{a}}^2$ (κατάλληλα περιορισμένη) είναι συζυγής με την T_a , προκύπτει ότι η $T_{\sqrt{a}}$ πρέπει να έχει σημεία περιόδου 6.

Παρατηρήσεις 6.4.6.

1) Ας υποθέσουμε ότι $\mu > 1$ και $\frac{\mu^2}{1+\mu^3} \leq \frac{1}{2}$, τότε $\frac{\mu^3}{1+\mu^3} = 1 - \frac{1}{1+\mu^3} \geq \frac{1}{2}$, και έχουμε

$$T_\mu\left(\frac{\mu}{1+\mu^3}\right) = \frac{\mu^2}{1+\mu^3}, T_\mu\left(\frac{\mu^2}{1+\mu^3}\right) = \frac{\mu^3}{1+\mu^3}, \text{ και } T_\mu\left(\frac{\mu^3}{1+\mu^3}\right) = \frac{\mu}{1+\mu^3}. \text{ Δηλαδή έχουμε ένα}$$

κύκλο τριών περιοδικών σημείων $\left\{\frac{\mu}{1+\mu^3}, \frac{\mu^2}{1+\mu^3}, \frac{\mu^3}{1+\mu^3}\right\}$.

Αυτός ο κύκλος εμφανίζεται όταν $\mu > 1$ και $\frac{\mu^2}{1+\mu^3} \leq \frac{1}{2}$ δηλαδή όταν

$$\mu^3 - 2\mu^2 + 1 \geq 0 \text{ ή } (\mu - 1)(\mu^2 - \mu - 1) \geq 0.$$

Η παραπάνω ικανοποιείται όταν $\mu \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Μια παρόμοια ανάλυση μπορεί να γίνει για άλλες περιοδικές τροχιές. Για παράδειγμα, αν $\mu > 1$ και $\frac{\mu^3}{1+\mu^4} \leq \frac{1}{2}$ προκύπτει κύκλο τεσσάρων περιοδικών σημείων, όταν $\mu^3 - \mu^2 - \mu - 1 \geq 0$.

2) Αν $1 < \mu < 2$, και $x \in \left[\mu - \frac{\mu^2}{2}, \frac{\mu}{2}\right]$, μπορούμε να δούμε ότι το προηγούμενο διάστημα είναι αμετάβλητο σύνολο για την $T_\mu(x)$, δηλαδή $T_\mu(x) \in \left[\mu - \frac{\mu^2}{2}, \frac{\mu}{2}\right]$.

Όταν $1 < \mu < \sqrt{2}$ το μικρότερο αμετάβλητο σύνολο για την T_μ είναι μια συλλογή υποδιαστημάτων $\left[\mu - \frac{\mu^2}{2}, \frac{\mu}{2}\right]$. Αν $\mu > \sqrt{2}$ γίνεται όλο το διάστημα $\left[\mu - \frac{\mu^2}{2}, \frac{\mu}{2}\right]$, που ονομάζεται σύνολο *Julia* της T_μ (πήρε το όνομά του από έναν από τους πρώτους πρωτοπόρους της χαοτικής δυναμικής, τον Gaston Julia, ο οποίος εργάστηκε ιδιαίτερα στη σύνθετη δυναμική στις αρχές του 1900). Αν $\mu = 2$ το σύνολο *Julia* είναι όλο το διάστημα $[0,1]$. Το διάγραμμα διακλάδωσης της T_μ για $\mu > 1$ μας δίνει μια εικόνα για το τι συμβαίνει.

3) Η συζυγία μεταξύ T_2 και L_4 μπορεί να κατασκευαστεί λαμβάνοντας υπόψη τα περιοδικά σημεία αυτών των συναρτήσεων. Δεδομένου ότι τα σημεία περιόδου είναι πυκνά για κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις, ταξινομώντας τις προσεκτικά σύμφωνα με τη διάταξή τους στο $[0,1]$, μπορούμε να ορίσουμε μια συζυγία h ορίζοντας την στα περιοδικά σημεία. Η h ορίζεται τότε από ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$, σε ένα πυκνό υποσύνολο. Αυτή η απεικόνιση μπορεί να επεκταθεί συνεχώς σε έναν ομοιομορφισμό του $[0,1]$ με $h(0) = 0$ και $h(1) = 1$. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι η σύζευξη μεταξύ T_2 και L_4 είναι μοναδική.

6.5 Σύζευξη και Θεμελιώδεις πεδίο

Έχουμε δει ότι δύο δυναμικά συστήματα f και g με διαφορετικές δυναμικές ιδιότητες δεν μπορούν να είναι συζυγή. Όμως, μερικές φορές έχουμε δυναμικά συστήματα που έχουν φαινομενικά πολύ παρόμοιες δυναμικές ιδιότητες και τα οποία θα θέλαμε να δείξουμε ότι είναι συζυγή. Αυτό είναι μερικές φορές δυνατό χρησιμοποιώντας την έννοια του θεμελιώδους πεδίου, ένα σύνολο στο οποίο κατασκευάζουμε μια απεικόνιση h με αυθαίρετο τρόπο και δείχνουμε ότι εκτείνεται σε μια συζυγία σε ολόκληρο τον χώρο. Αρχικά, επεξηγούμε αυτήν την ιδέα με ομοιομορφισμούς $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Εξετάζουμε μια αρκετά απλή περίπτωση όπου και οι δύο ομοιομορφισμοί διατηρούν την τάξη και δεν έχουν σταθερά σημεία (στην πραγματικότητα βρίσκονται αυστηρά πάνω από τη ευθεία $y = x$).

Πρόταση 6.5.1. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιομορφισμοί που ικανοποιούν $f(x) > x$ και $g(x) > x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Τότε τα f και g είναι συζυγή.

Απόδειξη: Επιλέγουμε $x_0 \in \mathbb{R}$ αυθαίρετα και θεωρούμε την τροχιά δύο πλευρών

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Αφού $f(x) > x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, έχουμε μια αυξανόμενη ακολουθία :

$$\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 \dots$$

Οπότε τα σύνολα

$$\dots, [x_{-1}, x_0), [x_0, x_1), [x_1, x_2), \dots,$$

είναι ξένα μεταξύ τους ενώ η ένωσή τους είναι όλο το \mathbb{R} .

Πρέπει να ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ διαφορετικά το όριο θα υπήρχε και θα έπρεπε να είναι ένα σταθερό σημείο. Δεν υπάρχουν όμως σταθερά σημεία αφού $f(x) > x$.

Το σύνολο $I = [x_0, f(x_0)) = [x_0, x_1)$ ονομάζεται θεμελιώδες πεδίο για την f .

Έστω $J = [x_0, g(x_0))$ (θεμελιώδες πεδίο για την g) και μία συνεχής αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\tilde{h}: I \rightarrow J$, η οποία να συνδέει γραμμικά τα I και J , με $\tilde{h}(f(x_0)) = g(x_0)$.

Τώρα κάθε άλλη τροχιά της f διαπλέκεται με το $\mathcal{O}_f(x_0)$. Δηλαδή αν $y_0 \in (x_0, x_1)$ τότε

$y_n = f^n(y_0) \in f^n(I)$, άρα βρίσκεται μεταξύ x_n και x_{n+1} . Συνεπώς, κάθε τροχιά έχει ένα μοναδικό μέλος στο διάστημα $[x_0, x_1)$ και το χρησιμοποιούμε αυτό για να επεκτείνουμε τον ορισμό της \tilde{h} σε όλο το \mathbb{R} .

Αν $x \in f^n(I)$, ορίζουμε την $h(x)$ αντιστοιχίζοντας το x πίσω στο I μέσω f^{-n} , στη

συνέχεια χρησιμοποιώντας την $\tilde{h}(f^{-n}(x))$ η οποία είναι καλά ορισμένη, και αντιστοιχίζοντας την πίσω στην $g^n(J)$ χρησιμοποιώντας την g^n .

Δηλαδή, αν $x \in f^n(I)$, $n \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε $h(x) = g^n \circ \tilde{h} \circ f^{-n}(x)$.

Έτσι η h ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} . Εύκολα δείχνουμε ότι η h είναι 1-1. Είναι επίσης συνεχής και επί διότι $\tilde{h}(f^n(I)) = g^n(J)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τέλος, λόγω του ορισμού της h , αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $x \in f^n(I)$ για κάποια $n \in \mathbb{Z}$, άρα $x = f^n(y)$ για κάποια $y \in I$. Τότε

$$g \circ h(x) = g(g^n \circ \tilde{h} \circ f^{-n}(x)) = g^{n+1} \circ \tilde{h} \circ f^{-(n+1)}(f(x)) = h \circ f(x),$$

συνεπώς f και g είναι συζυγή. ■

Παράδειγμα 6.5.2. Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση όπου οι συναρτήσεις f και g είναι ομοιομορφισμοί με αντίστοιχα σταθερά σημεία.

Θα προσεγγίσουμε τους ορισμούς του θεμελιώδους πεδίου σε τοπολογικούς χώρους με την σκέψη μας βέβαια να βρίσκεται στον μετασχηματισμό επανάληψης ενός δυναμικού συστήματος.

Δεδομένου λοιπόν ενός τοπολογικού χώρου και ενός μετασχηματισμού που δρα σε αυτόν, οι εικόνες ενός μοναδικού σημείου του χώρου υπό την επανάληψη του μετασχηματισμού σχηματίζουν μια τροχιά. Ένα θεμελιώδες πεδίο ή περιοχή είναι ένα υποσύνολο του χώρου που περιέχει ακριβώς ένα σημείο από καθεμία από αυτές τις τροχιές. Χρησιμοποιεί ως γεωμετρική υλοποίηση για το αφηρημένο σύνολο των εκπροσώπων των τροχιών των σημείων. Αυτό το πεδίο, όταν επηρεάζεται από όλα τα στοιχεία του, καλύπτει ολόκληρο τον χώρο χωρίς επικάλυψη (εκτός πιθανώς από τα όρια).

Αρχικά ξεκινάμε με τον ορισμό του αμετάβλητου συνόλου.

Ορισμός 6.5.3. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $f: X \rightarrow X$ μία αντιστρέψιμη συνάρτηση. Ένα υποσύνολο $X' \subseteq X$ είναι αμετάβλητο αν $f(X') = X'$.

Παράδειγμα 6.5.4. Οποιοδήποτε σταθερό σημείο είναι σαφώς αμετάβλητο, όπως και η τροχιά ενός περιοδικού σημείου. Στην πραγματικότητα, οποιαδήποτε πλήρης τροχιά είναι αμετάβλητη και επομένως και οποιαδήποτε ένωση τροχιών. Σε ορισμένες περιπτώσεις, υπάρχουν ολόκληρες περιοχές που είναι αμετάβλητες.

Αν το X' είναι ένα αμετάβλητο υποσύνολο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη δυναμική

του μετασχηματισμού f περιορισμένη στο X' , αφού οποιοδήποτε σημείο του X' απεικονίζεται στο X' τόσο σε εμπρόσθια όσο και σε οπίσθια επανάληψη. Συμβολίζουμε με $f|_{X'}$ τον περιορισμό της f στο X' .

Ορισμός 6.5.5. Ένα υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq X'$ είναι ένα *θεμελιώδες πεδίο* για την $f|_{X'}$ αν για κάθε $x \in X'$ υπάρχει μια *μοναδική* χρονική στιγμή $\tau = \tau(x) \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $f^\tau(x) \in \mathcal{U}$.

Σχόλιο 6.5.6. Αν $\mathcal{O}(x_0) = X'$ είναι η πλήρης τροχιά ενός μη περιοδικού σημείου, τότε οποιοδήποτε σημείο σε αυτήν την τροχιά είναι ένα θεμελιώδες πεδίο για το X' . Εάν το x_0 είναι σταθερό ή περιοδικό τότε το $\mathcal{O}(x_0) = X'$ είναι αμετάβλητο αλλά δεν έχει θεμελιώδεις περιοχές αφού κάθε σημείο επιστρέφει σε κάθε άλλο σημείο άπειρες φορές.

Χαρακτηριστικά θεμελιώδους πεδίου ή περιοχής

- **Ένα σημείο ανά τροχιά:** Το θεμελιώδες πεδίο ορίζεται έτσι ώστε να περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε τροχιά της του χώρου. Αυτό διασφαλίζει ότι αποτελεί μια μοναδική αναπαράσταση του επαναλαμβανόμενου μοτίβου.
- **Ένωση ξένων περιοχών:** Οι εικόνες των σημείων ενός θεμελιώδους πεδίου, αφού μετασχηματιστούν (υπό κάποια συνήθως συνάρτηση), είναι ξένες περιοχές μεταξύ τους και η ένωσή τους καλύπτει ολόκληρο τον χώρο.
- **Πολλαπλές επιλογές:** Η επιλογή ενός θεμελιώδους πεδίου δεν είναι μοναδική. Μπορούν να γίνουν διαφορετικές επιλογές για τον ίδιο χώρο, εφόσον πληρούνται οι προϋποθέσεις.
- **Τοπολογικές ιδιότητες:** Τα θεμελιώδη πεδία μπορούν να οριστούν με διάφορους τρόπους, μερικές φορές ως ανοιχτά ή κλειστά σύνολα, και οι ιδιότητές τους μπορούν να ποικίλλουν ανάλογα με τον μετασχηματισμό και χώρο.

Το πρόβλημα της δημιουργίας *συζυγίας* μεταξύ δύο συστημάτων μπορεί ουσιαστικά να αναχθεί σε αυτό της εύρεσης *θεμελιωδών πεδίων*.

Υποθέτουμε ότι $f: X \rightarrow X$ και $g: Y \rightarrow Y$ είναι δύο *αντιστρέψιμες συναρτήσεις*, $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ *αμετάβλητα* σύνολα, και $\mathcal{U} \subseteq X'$, $\mathcal{V} \subseteq Y'$ *θεμελιώδη πεδία* για $f|_{X'}$, $g|_{Y'}$ αντίστοιχα.

Λήμμα 6.5.7. Αν υπάρχει ένα προς ένα και επί συνάρτηση $\tilde{h}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, τότε τα $f|_{X'}$ και $g|_{Y'}$ είναι *συζυγή*.

Απόδειξη: Αφού το υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq X'$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο για την $f|_{X'}$, τότε για κάθε $x \in X'$ υπάρχει μια μοναδική χρονική στιγμή $\tau = \tau(x) \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $f^\tau(x) \in \mathcal{U}$. Επίσης ισχύει $\tau(f(x)) = \tau(x) - 1$.

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x) = g^{-\tau(x)} \circ \tilde{h} \circ f^{\tau(x)}$. Τότε η h είναι ένα προς ένα και επί και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= g^{-\tau(f(x))} \circ \tilde{h} \circ f^{\tau(f(x))}(f(x)) = g^{-\tau(x)+1} \circ \tilde{h} \circ f^{\tau(x)-1}(f(x)) \\ &= g^{-\tau(x)+1} \circ \tilde{h} \circ f^{\tau(x)}(x) = g \circ g^{-\tau(x)} \circ \tilde{h} \circ f^{\tau(x)}(x) = g \circ h(x) \blacksquare \end{aligned}$$

Παραδείγματα 6.5.8.

- 1) Θεωρήστε τις λογιστικές συναρτήσεις $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$ για διάφορες τιμές των $\mu \in (0,4]$ και $x \in [0,1]$. Αρχικά δείχνουμε ότι για $0 < \mu < \lambda \leq 1$, L_μ και L_λ είναι συζυγείς. Υπάρχει μια μικρή περιπλοκή εδώ, καθώς οι συναρτήσεις δεν είναι αύξουσες, αλλά έχουν ένα σταθερό σημείο έλξης το 0, και είδαμε νωρίτερα ότι η λεκάνη έλξης είναι $[0,1]$. Αρχικά ασχολούμαστε με το διάστημα στο οποίο οι συναρτήσεις αυξάνονται, $[0,1/2]$, και εξετάζουμε τον περιορισμό των συναρτήσεων σε αυτό το διάστημα.

Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε έναν ομοιομορφισμό $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$ με την ιδιότητα $L_\lambda \circ h = h \circ L_\mu$. Ας πάρουμε ως θεμελιώδες διάστημα για την L_μ το $(L_\mu(\frac{1}{2}), 1/2] = (\frac{\mu}{4}, 1/2]$ και το $(L_\lambda(\frac{1}{2}), 1/2] = (\frac{\lambda}{4}, 1/2]$ για την L_λ . Ορίζουμε την συνάρτηση $h: (\frac{\mu}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow (\frac{\lambda}{4}, 1/2]$ με $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ και $h(\frac{\mu}{4}) = \lambda/4$ και γραμμικά στο υπόλοιπο του διαστήματος.

Έστω $I = (\frac{\mu}{4}, \frac{1}{2}]$ και $J = (\frac{\lambda}{4}, 1/2]$, τότε το $x = 0$ είναι ελκτικό σταθερό σημείο, άρα τα διαστήματα $L_\mu^n(I)$ και $L_\lambda^n(J)$ είναι ξένα για κάθε $n \in \mathbb{Z}^+$, ενώ η ένωση τους είναι όλο το $(0,1/2]$.

Επεκτείνουμε τον ορισμό της h έτσι ώστε να ορίζεται στο $(0,1/2]$ με

$$h(x) = L_\lambda^n \circ h \circ L_\mu^n(x), \text{ με } x \in L_\mu^n(I).$$

Μπορούμε τώρα να ελέγξουμε ότι η h είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,1/2]$ όταν ορίσουμε $h(0) = 0$.

Αν ορίσουμε την h στο $(\frac{1}{2}, 1]$ στην μορφή $h(1-x) = 1-h(x)$ για $x \in [0, \frac{1}{2}]$, τότε έχουμε έναν ομοιομορφισμό στο $[0,1]$. Τότε

$$L_\lambda(h(1-x)) = L_\lambda(1-h(x)) = L_\lambda(h(x)) = h(L_\mu(x)) = h(L_\mu(1-x)),$$

έτσι ώστε η h να είναι η απαιτούμενη σύζευξη.

- 2) Μια παρόμοια απόδειξη δείχνει ότι L_μ και L_λ είναι συζυγή όταν $1 < \mu < \lambda < 2$. Εξετάστε τα διαστήματα $[0, 1 - \frac{1}{\mu}]$ και $[1 - \frac{1}{\mu}, 1/2]$ ξεχωριστά και αφού το $1 - \frac{1}{\mu}$ είναι ένα ελκτικό σταθερό σημείο, στη συνέχεια χρησιμοποιήστε τη συμμετρία γύρω από το σημείο $x = 1/2$.

Ωστόσο, αυτές οι συναρτήσεις δεν μπορούν να είναι συζυγείς με την L_2 , καθώς οποιαδήποτε συζυγής απεικόνιση $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$ πρέπει να έχει την ιδιότητα $h(\frac{1}{2}) = 1/2$. Αυτό οδηγεί σε αντίφαση.

- 3) Οι συναρτήσεις L_4 και L_μ , $\mu \in (0,4)$ δεν μπορούν να είναι συζυγείς αφού η $L_4: [0,1] \rightarrow [0,1]$ είναι μια επί συνάρτηση, αλλά η L_μ δεν είναι.

Παράδειγμα 6.5.9. Θεωρήστε έναν ομοιομορφισμό $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ που διατηρεί τον προσανατολισμό, έτσι ώστε $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$ και η f είναι αύξουσα. Ας υποθέσουμε ότι η f έχει σταθερά σημεία (εκτός από το 0 και 1), τα $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, τότε η f^2 έχει την ίδια συλλογή σταθερών σημείων (δεν υπάρχουν επιπλέον σταθερά σημεία καθώς η f δεν μπορεί να έχει σημεία περιόδου 2 ή μεγαλύτερη). Αν $f(x) > x$ για $c_k < x < c_{k+1}$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 6.5.1. για να κατασκευάσουμε έναν ομοιομορφισμό μεταξύ f και f^2 , και να κάνουμε το ίδιο για κάθε διάστημα $[c_k, c_{k+1}]$ (αντιμετωπίζοντας την περίπτωση όπου $f(x) < x$ με ανάλογο τρόπο). Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι f και f^2 είναι συζυγείς συναρτήσεις.

Με αφορμή το παραπάνω παράδειγμα δίνουμε έναν τοπολογικό ορισμό του θεμελιώδους πεδίου ενός χώρου.

Ορισμός 6.5.10. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, στον οποίο επιδρά ένας μετασχηματισμός f και $\mathcal{U} \subseteq X$. Τότε το σύνολο \mathcal{U} λέγεται *θεμελιώδες πεδίο* της f στο $X' \subseteq X$, εάν το X' είναι η ένωση των συζυγιών $X' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(\mathcal{U})$ και η τομή οποιωνδήποτε δύο συζυγιών δεν έχει εσωτερικό.

6.6 Δομική σταθερότητα και διακλαδώσεις

Οι έννοιες της σύζευξης ή της ισοδυναμίας μεταξύ δύο δυναμικών συστημάτων είναι ιδιαίτερα σημαντικές σε συνδυασμό με την έννοια της διαταραχής, δηλαδή μιας «μικρής» αλλαγής στο σύστημα. Τι συμβαίνει αν αλλάξουμε το σύστημα πολύ λίγο; Είναι το διαταραγμένο σύστημα συζυγές με το αρχικό σύστημα; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα εξαρτάται από το είδος της συζυγίας που απαιτούμε, αλλά και από το είδος της διαταραχής που επιτρέπουμε. Ορισμένες διαταραχές μπορούν να προκαλέσουν μεγαλύτερη ζημιά από άλλες. Αυτό τυποποιείται με την επιλογή μετρικής ή τοπολογίας στον χώρο των δυναμικών συστημάτων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε διάφορα παραδείγματα και θα δώσουμε ορισμούς των ειδών των διαταραχών και των συζυγιών που είναι κατάλληλες για διάφορες συνθήκες. Προς το παρόν δίνουμε έναν κάπως «εννοιολογικό» ορισμό.

Ορισμός 6.6.1. Ένα δυναμικό σύστημα είναι *δομικά σταθερό* (ως προς μια δεδομένη έννοια συζυγίας και ως προς μια δεδομένη τοπολογία στον κατάλληλο χώρο δυναμικών συστημάτων) εάν βρίσκεται στο εσωτερικό (ως προς την τοπολογία) της κλάσης ισοδυναμίας του (ως προς τη δεδομένη έννοια συζυγίας).

Έτσι, η δομική σταθερότητα σημαίνει ότι μια αρκετά μικρή διαταραχή (στην επιλεγμένη τοπολογία) δεν τροποποιεί τα χαρακτηριστικά του συστήματος (στο επιλεγμένο επίπεδο συζυγίας). Εάν το σύστημα δεν είναι δομικά σταθερό, τότε υπάρχουν άλλα δυναμικά συστήματα «αυθαίρετα κοντά» στο αρχικό, τα οποία δεν είναι συζυγή και επομένως «διαφορετικά». Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το σύστημα υφίσταται διακλάδωση.

Παράδειγμα 6.6.2. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται ως $f(x) = x^2 + 1/4$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $p = 1/2$ και ότι η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη τη διαγώνιο $y = x$ στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Τότε είναι σαφές ότι υπάρχουν τυχαίες μικρές διαταραχές που μπορούν να ωθήσουν το γράφημα της f πλήρως πάνω από τη διαγώνιο, καταστρέφοντας έτσι το σταθερό σημείο ή, αντίστροφα, ωθώντας το λίγο προς τα κάτω έτσι ώστε να τέμνει τη διαγώνιο δύο φορές και έτσι να έχει 2 σταθερά σημεία. Και στις δύο περιπτώσεις, ο αριθμός των σταθερών σημείων έχει αλλάξει και επομένως το νέο σύστημα δεν μπορεί να είναι συζυγές με το αρχικό.

7^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ Κλάσεις Συζυγίας

Ως παράδειγμα εφαρμογών των εννοιών που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, εξετάζουμε αρχικά τις μονοδιάστατες γραμμικές συναρτήσεις. Η κατάσταση σε αυτό το πλαίσιο είναι ιδιαίτερα απλή, αλλά ακριβώς για αυτόν τον λόγο αποτελεί μια καλή κατηγορία συναρτήσεων μέσω των οποίων μπορούμε να επισημάνουμε ορισμένες θεμελιώδεις ιδέες και τεχνικές.

7.1 Δυναμική μονοδιάστατων γραμμικών συναρτήσεων

Οι μόνες γραμμικές συναρτήσεις σε μία διάσταση είναι οι βαθμωτές συναρτήσεις $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζονται ως

$$A(x) = \alpha x \text{ για } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Οι επαναλήψεις της A έχουν την μορφή $A^n(x) = \alpha^n x$, $n \in \mathbb{Z}$

Αυτό μας επιτρέπει να μελετήσουμε εύκολα και συστηματικά τη δυναμική και τα όρια άλφα και ωμέγα για διάφορες τιμές της παραμέτρου α . Σύμφωνα με ορισμούς που έχουν προηγουμένα δοθεί, προκύπτει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.1.1. Μια μονοδιάστατη γραμμική συνάρτηση $A(x) = \alpha x$ είναι

1. αντιστρέψιμη αν $\alpha \neq 0$
2. υπερβολική αν $\alpha \neq \pm 1$
3. διατήρησης του προσανατολισμού αν $\alpha > 0$
4. αντιστροφής του προσανατολισμού αν $\alpha < 0$
5. συστολή αν $|\alpha| \in (0,1)$
6. επεκτάσιμη αν $|\alpha| > 1$

Τα δυναμικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης (π.χ. σταθερά και περιοδικά σημεία, οριακά σύνολα) εξαρτώνται ουσιαστικά από ποια από τις παραπάνω κλάσεις ανήκει.

7.2 Κλάσεις Συζυγίας Μονοδιάστατων Γραμμικών Συναρτήσεων

Η τοπολογική συζυγία είναι το σήμα κατατεθέν της ισοδυναμίας στον τομέα των δυναμικών συστημάτων. Επομένως, είναι εύλογο να αναρωτηθούμε, «δεδομένων δύο γραμμικών απεικονίσεων, υπό ποιες συνθήκες τα δυναμικά συστήματα είναι συζευγμένα μεταξύ τους;».

Έστω οι γραμμικές συναρτήσεις $A, B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $A(x) := \alpha x$, $B(x) := \beta x$ με $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$. Αν είναι συζυγείς, τότε θα πρέπει να είμαστε σε θέση να βρούμε τη συζυγία h μεταξύ των δύο συναρτήσεων, όπου h είναι ένας ομοιομορφισμός που ικανοποιεί: $h \circ A = B \circ h$ ή $h(\alpha x) = \beta(h(x))$. Για παράδειγμα αν $\alpha = 2, \beta = 4$, θέλουμε να ισχύει $h(2x) = 4h(x)$, η οποία ικανοποιείται (για θετικό x) από $h(x) = x^2$. Παρακινούμενοι από αυτό το παράδειγμα, αναζητούμε έναν τύπο συζυγίας στην μορφή

$$h(x) = c \cdot \text{sign}(x)|x|^\kappa, c \neq 0, \kappa \neq 0,$$

$$\text{όπου } \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \text{ η συνάρτηση πρόσημου ενός πραγματικού αριθμού.}$$

Αντικαθιστούμε στην σχέση $h(\alpha x) = \beta(h(x))$ και έχουμε

$$c \cdot \text{sign}(\alpha x)|\alpha|^\kappa|x|^\kappa = \beta c \cdot \text{sign}(x)|x|^\kappa$$

Πρέπει προφανώς $c \neq 0$, και αφού η εξίσωση θα πρέπει να ισχύει όταν $x \neq 0$, μπορούμε να διαιρέσουμε με $|x|^\kappa$:

$$\text{sign}(\alpha x)|\alpha|^\kappa = \beta \text{sign}(x)$$

Εφαρμόζοντας τη συνάρτηση πρόσημου και στις δύο πλευρές, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι θα απαιτηθεί $\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(\beta)$. Λύνοντας την τελευταία σχέση ως προς κ , βρίσκουμε $\kappa = \frac{\log|\beta|}{\log|\alpha|}$.

Δεδομένου ότι $\kappa \neq 0$ έχουμε ότι αν $\kappa < 0$, συμπεραίνουμε ότι είτε (α) $|\alpha| < 1, |\beta| > 1$ είτε (β) $|\alpha| > 1, |\beta| < 1$. Αν όμως $\kappa > 0$, συμπεραίνουμε ότι είτε (γ) $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ είτε (δ) $|\alpha| > 1, |\beta| > 1$. Αυτή η απαίτηση είναι συνεπής με το γεγονός ότι οι δύο συζυγείς συναρτήσεις, θα πρέπει είτε και οι δύο να συστέλλονται είτε και οι δύο να διαστέλλονται.

Επειδή αυτά τα συστήματα έχουν ένα μόνο περιοδικό σημείο, υπάρχει σημαντική

ευελιξία στην περιγραφή μιας συζυγίας και απλώς εντοπίσαμε μία επιλογή.

Ο κύριος σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να εξετάσει λοιπόν, τις μορφές συζυγίας δύο γραμμικών συναρτήσεων :

Θεώρημα 7.2.1. Έστω $A, B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $A(x) = \alpha x$, $B(x) = \beta x$ με $\alpha, \beta \neq 0$ και $\alpha \neq \beta$. Οι συναρτήσεις A και B είναι:

1. **συζυγείς** αν και μόνο αν είναι και οι δύο υπερβολικές και έχουν τον ίδιο προσανατολισμό,
2. **τοπολογικά συζυγείς** αν και μόνο αν είναι συζυγείς και είναι είτε και οι δύο συστολές είτε και οι δύο επεκτάσιμες,
3. δεν είναι \mathbb{C}^1 **συζυγείς** .

Απόδειξη

1. Οι συναρτήσεις $A(x)$, $B(x)$ με $\alpha, \beta \neq 0$ είναι συνεχείς, ένα-προς ένα , επί και αντιστρέψιμες στο \mathbb{R} . Αφού είναι υπερβολικές ισχύει $\alpha, \beta \neq \pm 1$. Επίσης έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, άρα $\alpha, \beta > 0$ ή $\alpha, \beta < 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha, \beta > 0$. Αν ορίσουμε $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, τότε $A(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, δηλαδή ο θετικός ημιάξονας είναι αμετάβλητο υποσύνολο του \mathbb{R} υπό την $A(x)$. Ομοίως αν $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, έχουμε $A(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^-$, δηλαδή ο αρνητικός ημιάξονας είναι επίσης αμετάβλητο υποσύνολο του \mathbb{R} . Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν βέβαια και για την $B(x)$.

Θα αποδείξουμε τη συζυγία βρίσκοντας αρχικά ένα θεμελιώδες πεδίο για κάθε μία από τις συναρτήσεις $A(x)$, $B(x)$.

Έχουμε $\alpha \neq 1$, και ας υποθέσουμε ότι $\alpha \in (0,1)$. Τότε για οποιοδήποτε $x_0 > 0$ θα δείξουμε ότι το ημι-ανοιχτό, ημι-κλειστό διάστημα $I = (\alpha x_0, x_0]$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $A(x)$ για τον θετικό ημιάξονα.

Η ολική τροχιά του x_0 φαίνεται στο σύνολο

$$\mathcal{O}_A(x_0) = \{A^n(x_0): n \in \mathbb{Z}\} = \{ \dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots \}.$$

Αφού $0 < A(x) < x$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}^+$, έχουμε μια ακολουθία :

$$\dots A^2(x_0) < A(x_0) < x_0 < A^{-1}(x_0) < A^{-2}(x_0) \dots \text{ή}$$

$$\dots x_2 < x_1 < x_0 < x_{-1} < x_{-2} \dots$$

Οπότε τα σύνολα $A^n(\alpha x_0, x_0], n \in \mathbb{Z}$, δηλαδή τα διαστήματα

$$\dots, (x_2, x_1], (x_1, x_0], (x_0, x_{-1}], (x_{-1}, x_{-2}], \dots,$$

που είναι αντίστοιχα οι εικόνες των διαστημάτων

$$\dots, A(\alpha x_0, x_0], A^0(\alpha x_0, x_0], A^{-1}(\alpha x_0, x_0], A^{-2}(\alpha x_0, x_0], \dots$$

είναι ξένα μεταξύ τους, ενώ η ένωσή τους είναι όλο το \mathbb{R}^+ .

Ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ και η εμπρόσθια τροχιά του x_0 πλησιάζει προς το ελκτικό σταθερό σημείο της $x = 0$.

Αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο $y_0 \in \mathbb{R}^+$ θα ανήκει σε κάποιο από τα διαστήματα $A^n(\alpha x_0, x_0]$. Έστω ότι $y_0 \in (x_{i+1}, x_i) = A^i(\alpha x_0, x_0]$ για κάποιο $i \in \mathbb{Z}$.

Τότε $y_{-i} \in A^{i-i}(\alpha x_0, x_0] = (\alpha x_0, x_0]$, άρα την χρονική στιγμή $-i$ η τροχιά του y_0 βρίσκεται στο διάστημα $I = (\alpha x_0, x_0]$. Η τροχιά έχει ένα μοναδικό μέλος στο διάστημα I , αφού την προηγούμενη χρονική στιγμή $-i - 1$ η τροχιά βρίσκεται στο διάστημα $y_{-i-1} \in A^1(\alpha x_0, x_0] = (x_2, x_1]$, ενώ την επόμενη χρονική στιγμή $-i + 1$ η τροχιά βρίσκεται στο διάστημα $y_{-i+1} \in A^{-1}(\alpha x_0, x_0] = (x_0, x_{-1}]$. Συνεπώς, κάθε τροχιά σημείου του \mathbb{R}^+ έχει ένα μοναδικό μέλος στο διάστημα $I = (\alpha x_0, x_0]$, δηλαδή είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $A(x)$ για τον θετικό ημιάξονα.

Αν $y_0 < 0$ τότε το διάστημα $J = [y_0, \alpha y_0)$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $A(x)$ για τον αρνητικό ημιάξονα \mathbb{R}^- .

Η ολική τροχιά του x_0 φαίνεται στο σύνολο

$$\mathcal{O}_A(y_0) = \{A^n(y_0) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\}.$$

Αφού $y < A(y) < 0$ για όλα τα $y \in \mathbb{R}^-$, έχουμε μια αυξανόμενη με όριο το ελκτικό σταθερό σημείο της τροχιάς $y = 0$, ακολουθία :

$$\dots A^{-2}(y_0) < A^{-1}(y_0) < y_0 < A(y_0) < A^2(y_0) \dots \text{ή}$$

$$\dots y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 \dots$$

Δουλεύοντας ομοίως, καταλήγουμε ότι $J = [y_0, \alpha y_0)$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $A(x)$ για τον αρνητικό ημιάξονα \mathbb{R}^- .

Τελικά το σύνολο $\mathcal{U} = I \cup J = [y_0, \alpha y_0) \cup (\alpha x_0, x_0]$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $A(x)$ για $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Για την συνάρτηση $B(x)$ έχουμε ομοίως ότι $\beta \neq 1$, και ας υποθέσουμε ότι $\beta > 1$. Τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ και η εμπρόσθια τροχιά του x_0 απομακρύνεται όλο και πιο πολύ από το απωθητικό πλέον σταθερό σημείο της τροχιάς $x = 0$. Αν $x_0 > 0$ δουλεύοντας όπως παραπάνω, το διάστημα $G = [x_0, \beta x_0)$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $B(x)$ για τον θετικό ημιάξονα, ενώ για $y_0 < 0$ το $L = (\beta y_0, y_0]$ είναι θεμελιώδες πεδίο για τον αρνητικό ημιάξονα. Συνεπώς $\mathcal{V} = G \cup L = (\beta y_0, y_0] \cup [x_0, \beta x_0)$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο της $B(x)$ για $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Αφού το υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο για τον $A|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ υπάρχει μια μοναδική χρονική στιγμή $\tau = \tau(x) \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $A^\tau(x) \in \mathcal{U}$. Επίσης ισχύει $\tau(A(x)) = \tau(x) - 1$.

Αν $\tilde{h}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ είναι συνάρτηση ένα προς ένα και επί, τότε θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) := B^{-\tau(x)} \circ \tilde{h} \circ A^{\tau(x)}(x)$, η οποία είναι επίσης ένα προς ένα και επί ως σύνθεση ένα προς ένα και επί συναρτήσεων. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} h \circ A(x) &= B^{-\tau(A(x))} \circ \tilde{h} \circ A^{\tau(A(x))}(A(x)) = B^{-\tau(x)+1} \circ \tilde{h} \circ A^{\tau(x)-1}(A(x)) \\ &= B^{-\tau(x)+1} \circ \tilde{h} \circ A^{\tau(x)}(x) = B \circ B^{-\tau(x)} \circ \tilde{h} \circ A^{\tau(x)}(x) = A \circ h(x) \end{aligned}$$

Δηλαδή η $h(x)$ είναι μία συζυγία των $A|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ και $B|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$.

Αν επιπλέον ορίσουμε $h(0) = 0$, οι συναρτήσεις $A(x), B(x)$ είναι συζυγείς.

Στην περίπτωση όπου $\alpha, \beta < 0$, η τροχιά ενός τυχαίου σημείου $x_0 \neq 0$ μετακινείται κάθε χρονική στιγμή από τον θετικό στον αρνητικό ημιάξονα (ή αντίστροφα) οπότε η ένωση τους $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι αμετάβλητο σύνολο. Τότε μπορεί να αποδειχτεί όπως παραπάνω, ότι διάστημα της μορφής $[x_0, \alpha^2 x_0)$ με $x_0 > 0$ ή $(\alpha^2 x_0, x_0]$ με $x_0 < 0$ είναι ένα θεμελιώδες πεδίο για τις συναρτήσεις $A(x), B(x)$, όταν $\alpha, \beta < -1$, ενώ αν $\alpha, \beta > -1$ μπορούμε να ορίσουμε ως θεμελιώδη πεδία, διαστήματα της μορφής $(\alpha^2 x_0, x_0]$ με $x_0 > 0$ ή $[x_0, \alpha^2 x_0)$ με $x_0 < 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση $h(x)$ και προκύπτει ομοίως ότι οι συναρτήσεις $A(x), B(x)$ είναι συζυγείς. ■

2. Οι συναρτήσεις $A(x), B(x)$ με $\alpha, \beta \neq 0$ είναι συνεχείς, ένα-προς ένα, επί και είναι υπερβολικές $\alpha, \beta \neq \pm 1$. Επίσης έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, άρα $\alpha, \beta > 0$ ή $\alpha, \beta < 0$ και είναι επεκτάσιμες $|\alpha| > 1, |\beta| > 1$ ή συστολές $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$.

Ας δούμε την περίπτωση $\alpha, \beta \in (0, 1)$. Τα θεμελιώδη πεδία μπορούν όπως παραπάνω, να θεωρηθούν τα σύνολα $\mathcal{U} = I_\alpha \cup J_\alpha = [y_\alpha, \alpha y_\alpha) \cup (\alpha x_\alpha, x_\alpha]$ για τυχαία

$x_\alpha > 0, y_\alpha < 0$, της $A(x)$ και $\mathcal{V} = I_\beta \cup J_\beta = [y_\beta, \beta y_\alpha) \cup (\beta x_\beta, x_\beta]$ για τυχαία $x_\beta > 0, y_\beta < 0$ της $B(x)$, στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Η συνάρτηση $\tilde{h}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ομοιομορφισμός μεταξύ των συνόλων \mathcal{U}, \mathcal{V} . Τότε για να είναι η συνάρτηση $h(x) := B^{-\tau(x)} \circ \tilde{h} \circ A^{\tau(x)}(x)$, με $h(0) = 0$ ομοιομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι h, h^{-1} είναι συνεχείς για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θα ξεκινήσουμε με την συνέχεια στο $x = 0$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - 0| = |x| < \delta$ να ισχύει $|h(x) - h(0)| = |h(x)| < \epsilon$, αφού οι τροχιές πλησιάζουν προς το ελκτικό σταθερό σημείο τους $x = 0$. Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ όπου για κάθε $n \geq n_\epsilon$ να έχουμε $B^n(I_\beta \cup J_\beta) \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Τότε για κάθε $n_\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_{n_\epsilon} > 0$ ώστε αν $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ να ισχύει για $\tau(x) \leq -n_\epsilon$. Άρα για κάθε $x \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$, έχουμε ότι $h(x) \in (-\epsilon, \epsilon)$, με συνέπεια η h να είναι συνεχής στο $x = 0$.

Μια συνάρτηση μίας μεταβλητής είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο x και είναι συνεχής στο x αν είναι συνεχής από αριστερά και από δεξιά. Αν $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι σημείο τέτοιο ώστε η τροχιά του οποιαδήποτε στιγμή να βρίσκεται στο εσωτερικό των διαστημάτων $\cup_{n \in \mathbb{Z}} A^n((\alpha x_0, x_0) \cup (y_\alpha, \alpha y_\alpha))$, τότε η h είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Αν όμως το σημείο x ή και κάποια σημεία της τροχιάς του βρίσκεται στο σύνορο κάποιων διαστημάτων $\cup_{n \in \mathbb{Z}} A^n([y_\alpha, \alpha y_\alpha) \cup (\alpha x_\alpha, x_\alpha])$ τότε από την μία μεριά έχουμε την ύπαρξη της συνέχειας ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, από την άλλη μεριά όμως πρέπει να δείξουμε την συνέχεια με ορισμό. Στο σημείο $x = x_\alpha$ για παράδειγμα από αριστερά η h είναι συνεχής. Θέλουμε για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - x_\alpha| < \delta$ να ισχύει $|h(x) - h(x_\alpha)| < \epsilon$. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ όπου για κάθε $n \geq n_\epsilon$ να έχουμε $B^n(x_\beta - \delta, x_\beta + \delta) \subset (x_\beta - \epsilon, x_\beta + \epsilon)$. Τότε για κάθε $n_\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_{n_\epsilon} > 0$ ώστε αν $x \in (x_\alpha - \delta, x_\alpha + \delta)$ να ισχύει για $\tau(x) \leq -n_\epsilon$. Άρα για κάθε $x \in (x_\alpha - \delta, x_\alpha + \delta)$, έχουμε ότι $h(x) - h(x_\alpha) \in (-\epsilon, \epsilon)$, με συνέπεια η h να είναι συνεχής στο $x = x_\alpha$.

Τελικά η h είναι συνεχής. Δείχνουμε με αντίστοιχο τρόπο και ότι η h^{-1} είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι ομοιομορφισμός συνεπώς οι συναρτήσεις $A(x), B(x)$ είναι τοπολογικά συζυγείς. ■

3. Οι συναρτήσεις $A(x), B(x)$ δεν είναι \mathbb{C}^1 συζυγείς αφού θα πρέπει να έχουν ίδια την τιμή της παραγώγου στο σταθερό σημείο τους $x = 0$.

Όμως $A'(x) = \alpha \neq \beta = B'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $\alpha \neq \beta$. Είναι \mathbb{C}^1 συζυγείς μόνο

όταν $\alpha = \beta$. ■

Παρατήρηση 7.2.2. Σημειώστε ότι η περίπτωση $\alpha = 0$ είναι μια εκφυλισμένη περίπτωση όπου όλα τα σημεία αντιστοιχίζονται με το αρχικό μετά από μία επανάληψη. Σαφώς σε αυτήν την περίπτωση η A δεν μπορεί να είναι συζυγής με οποιαδήποτε άλλη γραμμική συνάρτηση B με $\beta \neq 0$. Επίσης, κάθε απεικόνιση είναι πάντα αυτόματα συζυγής με τον εαυτό της μέσω της ταυτότητας, επομένως εξαιρούμε αυτήν την περίπτωση από τα παραπάνω.

Παρατήρηση 7.2.3. Αυτό το αποτέλεσμα καταδεικνύει ιδιαίτερα καθαρά τη διαφορά μεταξύ των τριών επιπέδων συζυγίας. Συγκεκριμένα, δείχνει ότι η απλή συζυγία είναι μια αρκετά ασθενής έννοια ισοδυναμίας, αφού για παράδειγμα οι $A(x) = 3x$ και $B(x) = x/3$ είναι συζυγείς παρόλο που η μία διαστέλλεται και όλες οι τροχιές φτάνουν στο άπειρο σε εμπρόσθιο χρόνο, ενώ η άλλη συσσωρεύεται και όλες οι τροχιές φτάνουν στο 0 σε εμπρόσθιο χρόνο. Από την άλλη πλευρά, η συζυγία \mathbb{C}^1 είναι εξαιρετικά ισχυρή και δεν υπάρχουν δύο διακριτές γραμμικές απεικονίσεις που να είναι συζυγείς με αυτόν τον τρόπο. Η τοπολογική συζυγία είναι συνολικά μια λογική ενδιάμεση έννοια που συζυγεί απεικονίσεις που φαίνεται λογικό να θεωρούνται ισοδύναμες και διακρίνει απεικονίσεις που φαίνεται λογικό να θεωρούνται διακριτές. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό θα ισχύει και για πιο γενικές καταστάσεις, και η τοπολογική συζυγία αποδεικνύεται η πιο βολική έννοια της ισοδυναμίας που χρησιμοποιείται στις περισσότερες περιπτώσεις.

Το Θεώρημα 7.2.1. βοηθά επίσης στην επεξήγηση της έννοιας της δομικής σταθερότητας σε αυτό το πολύ απλό περιβάλλον. Έστω ότι $\mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$ συμβολίζει τον χώρο όλων των μονοδιάστατων γραμμικών απεικονίσεων. Για δύο συναρτήσεις $A(x) = \alpha x$, $B(x) = \beta x$ ορίζουμε μια μετρική $d(A, B) := |\alpha - \beta|$.

Θεώρημα 7.2.4. Έστω $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$. Τότε

- i) Η A δεν είναι δομικά σταθερή ως προς τη συζυγία \mathbb{C}^1 .
- ii) Η A είναι δομικά σταθερή ως προς τη συζυγία (και την τοπολογική συζυγία) αν και μόνο αν είναι αντιστρέψιμη και υπερβολική.

7.3 Διαφορομορφισμοί Διαστημάτων

Σε αυτήν την παράγραφο ξεκινάμε τη μελέτη των μη γραμμικών συναρτήσεων. Ενώ οι γραμμικές συναρτήσεις έχουν το χαρακτηριστικό ότι ουσιαστικά φαίνονται ίδιες σε κάθε κλίμακα, η συνολική δυναμική των μη γραμμικών συναρτήσεων μπορεί να είναι πολύ περίπλοκη, εν μέρει επειδή οι μη γραμμικές συναρτήσεις μπορούν να έχουν πολλά σταθερά και περιοδικά σημεία που αλληλεπιδρούν με πολύπλοκους τρόπους. Θα ξεκινήσουμε, επομένως, τη μελέτη των μη γραμμικών συναρτήσεων με μερικές απλές καταστάσεις, ξεκινώντας με τους διαφορομορφισμούς ενός διαστήματος.

Σε όλο το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ είναι ένα συμπαγές διάστημα και $f: I \rightarrow I$ είναι ένας \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός του I . Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in I$. Έτσι, είτε $f'(x) > 0$ για όλα τα $x \in I$ είτε $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in I$.

Έχουμε μελετήσει διαφορομορφισμούς στην παράγραφο 4.3, και με αφορμή την πρόταση 4.3.10. δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 7.3.1. Έστω $f: I \rightarrow I$ ένας \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός του I . Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, λέμε ότι η f διατηρεί τον προσανατολισμό, διαφορετικά ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Παρατήρηση 7.3.2. Αν f αντιστρέφει τον προσανατολισμό, τότε f^2 διατηρεί τον προσανατολισμό, άρα όλες οι επαναλήψεις είναι προς τα εμπρός και προς τα πίσω της f^2 . Έτσι, μπορούμε πάντα (σχεδόν) να ανάγουμε την κατάσταση στην περίπτωση διατήρησης προσανατολισμού.

Λήμμα 7.3.3. Έστω $f: I \rightarrow I$, $I = [\alpha, \beta]$, ένας \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός ενός συμπαγούς διαστήματος I . Τότε η f αντιστοιχίζει ακραία σημεία σε άκρα ακραία σημεία. Συγκεκριμένα, η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο και αν η f διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε έχει τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία και αυτά είναι τα άκρα του διαστήματος.

Απόδειξη: Αφού f είναι ένας \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός ισχύει ότι $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in I$, δηλαδή η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο I . Μπορεί να έχουμε $f'(x) > 0$ για όλα τα $x \in I$, οπότε η f διατηρεί τον προσανατολισμό (είναι γνησίως αύξουσα), συνεπώς για να ικανοποιεί την απαίτηση να παίρνει τιμές στο $[\alpha, \beta]$, πρέπει $f(\alpha) = \alpha$, και $f(\beta) = \beta$. Άρα η f έχει τουλάχιστον δύο σταθερά σημεία και αυτά είναι τα άκρα

του διαστήματος.

Αν $f'(x) < 0$ για όλα τα $x \in I$, τότε η f αντιστρέφει τον προσανατολισμό (είναι γνησίως φθίνουσα), συνεπώς για να ικανοποιεί την απαίτηση να παίρνει τιμές στο $[\alpha, \beta]$, πρέπει $f(\alpha) = \beta$, και $f(\beta) = \alpha$. Αν πάρουμε την $g(x) = f(x) - x$, τότε για την συνεχή στο I συνάρτηση g , έχουμε

$$g(\alpha)g(\beta) = (f(\alpha) - \alpha)(f(\beta) - \beta) = (\beta - \alpha)(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)^2 < 0$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\gamma) = f(\gamma) - \gamma = 0$ άρα $f(\gamma) = \gamma$, συνεπώς η f έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο γ . ■

Λήμμα 7.3.4. Έστω $f: I \rightarrow I$ ένας \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμός διατήρησης προσανατολισμού ενός συμπαγούς διαστήματος I . Τότε για οποιοδήποτε $x_0 \in I$ τα οριακά σύνολα $\alpha(x_0)$, $\omega(x_0)$ είναι σταθερά σημεία της f .

Απόδειξη: Αν $x_0 \in I$ σταθερό σημείο της f , τότε $f(x_0) = x_0$, οπότε

$$\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \{x_0\} \text{ σταθερό σημείο της } f.$$

Αν $x_0 \in I$ δεν είναι σταθερό σημείο της f , τότε $f(x_0) > x_0$ ή $f(x_0) < x_0$.

Ας πάρουμε την περίπτωση ότι $f(x_0) > x_0$ τότε $x_1 > x_0 \Leftrightarrow x_1 - x_0 > 0$.

Επαναλαμβάνοντας έχουμε $x_2 > x_1, x_3 > x_2, \dots$,

οπότε η τροχιά $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ του x_0 μονότονα αυξάνει και επειδή είναι φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο $p \in I, (x_n \rightarrow p \text{ καθώς } n \rightarrow \infty)$.

Η f είναι συνεχής, οπότε $f(x_n) \rightarrow f(p)$. Όμως $f(x_n) = x_{n+1}$, οπότε

$$\omega(x_0) = \alpha(x_0) = p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p), \text{ άρα } p \text{ σταθερό σημείο της } f. \blacksquare$$

Ορισμός 7.3.5. Ένα σταθερό σημείο $p \in I$ είναι ελκτικό αν υπάρχει μια γειτονιά $\mathcal{U} = (p - \delta, p + \delta)$ για κάποιο $\delta > 0$, του p τέτοια ώστε $\omega(x_0) = \{p\}$ για όλα τα $x_0 \in \mathcal{U}$. Η γειτονιά \mathcal{U} ονομάζεται *τοπική λεκάνη έλξης* του p . Ένα σταθερό σημείο $p \in I$ είναι *απωθητικό* αν υπάρχει μια γειτονιά \mathcal{U} του p τέτοια ώστε $\alpha(x_0) = \{p\}$ για όλα τα

$x_0 \in \mathcal{U}$, δηλαδή είναι ελκτικό για f^{-1} με τοπική λεκάνη έλξης \mathcal{U} .

Παρατήρηση 7.3.6. Σημειώστε ότι τα σταθερά σημεία μπορεί να μην είναι ούτε ελκτικά ούτε απωθητικά, π.χ. η συνάρτηση ταυτότητας.

Στην παράγραφο 2.3. είδαμε ότι για ένα υπερβολικό σταθερό σημείο p ($|f'(p)| \neq 1$) μιας συνάρτησης $f: I \rightarrow I$, ότι είναι ελκτικό εάν $|f'(p)| < 1$, ενώ αν $|f'(p)| > 1$ είναι απωθητικό σημείο της (θεώρημα 2.3.8.).

Ορισμός 7.3.7. Η f είναι υπερβολική αν κάθε σταθερό σημείο της είναι υπερβολικό.

Θα θεωρήσουμε στην συνέχεια την συνάρτηση $f: I \rightarrow I$ ως ένα \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμό διατήρησης προσανατολισμού ($f'(x) > 0$) ενός συμπαγούς διαστήματος I .

Λήμμα 7.3.8. Αν p υπερβολικό σταθερό σημείο μιας συνάρτησης $f: I \rightarrow I$, τότε είναι «απομονωμένο». Δηλαδή υπάρχει γειτονιά \mathcal{U} του p τέτοια ώστε για κάθε $x \neq p$ με $x \in \mathcal{U}$, τα σημεία x δεν είναι σταθερά σημεία.

Απόδειξη: Αφού p υπερβολικό σημείο ισχύει ότι $f'(p) \neq 1$. Τότε υπάρχει γειτονιά \mathcal{U} του p τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathcal{U}$, να ισχύει $f'(x) \neq 1$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $q \in \mathcal{U}$ όπου $f(q) = q$. Άρα $|f(p) - f(q)| = |p - q|$. Από το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού, υπάρχει $z \in [p, q]$ τέτοιο ώστε $|f(p) - f(q)| = f'(z)|p - q|$. Προκύπτει ότι $f'(z) = 1$, άτοπο. ■

Λήμμα 7.3.9. Αν η f είναι υπερβολική, τότε έχει πεπερασμένο αριθμό σταθερών σημείων.

Απόδειξη: Αφού το διάστημα I είναι συμπαγές, εάν έχει άπειρο αριθμό σταθερών σημείων, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f αφού είναι γνησίως αύξουσα ($f'(x) > 0$), θα υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης p , το οποίο είναι σταθερό σημείο αλλά όχι «απομονωμένο». Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε τότε ότι το σημείο p δεν είναι υπερβολικό (Άτοπο!). ■

Παρατήρηση 7.3.10. Αν και δεν θα ορίσουμε επακριβώς αυτήν την έννοια, τα υπερβολικά σταθερά σημεία «γενικά» παραμένουν υπερβολικά υπό μικρές διαταραχές και τα μη υπερβολικά σταθερά σημεία μπορούν να γίνουν κάποιες φορές υπερβολικά από αυθαίρετα μικρές διαταραχές.

7.4 Κλάσεις Συζυγίας Διαφορομορφισμών Διαστημάτων

Σε όλο το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ είναι ένα συμπαγές διάστημα Ξεκινάμε εξετάζοντας την περίπτωση στην οποία η $f: I \rightarrow I$ έχει μόνο δύο σταθερά σημεία.

Πρόταση 7.4.1. Έστω $f, g: I \rightarrow I$ δύο \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμοί διαστημάτων που διατηρούν τον προσανατολισμό, ο καθένας με ακριβώς δύο σταθερά σημεία. Τότε τα f, g είναι τοπολογικά συζυγή.

Απόδειξη: Η f σε διάστημα I , έχει δύο σταθερά σημεία, τα οποία είναι τα άκρα του διαστήματος, $f(\alpha) = \alpha$, και $f(\beta) = \beta$, διότι διατηρεί τον προσανατολισμό. (Λήμμα 7.3.3.) Τότε $f(x) > x$ ή $f(x) < x$ για κάθε $x \in I$.

Αν $f(x) > x$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$ θεωρούμε την τροχιά δύο πλευρών

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{f^n(x_0) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}.$$

Αφού $f(x) > x$ για όλα τα $x \in I$, έχουμε μια αυξανόμενη ακολουθία :

$$\alpha < \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < \beta$$

Προφανώς η τροχιά απομακρύνεται από το άκρο α ενώ πλησιάζει το άκρο β .

Έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\epsilon_\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $|x_0 - \alpha| < \delta$, τότε $|f^n(x_0) - f^n(\alpha)| = |x_n - \alpha| > |x_0 - \alpha|$ άρα υπάρχει $\epsilon_\delta > 0$ $|f^n(x_0) - f^n(\alpha)| \geq \epsilon_\delta$ για $n \in \mathbb{Z}^+$ (Ορισμός 2.3.4.) Συνεπώς α απωθητικό σταθερό σημείο της f .

Επίσης, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $|x_0 - \beta| < \delta$, τότε $|f^n(x_0) - f^n(\beta)| = |f^n(x_0) - \beta| < \epsilon$, δηλαδή β ελκτικό σταθερό σημείο της f .

Αντίστοιχα, αν $f(x) < x$ για κάθε $x \in I$, α ελκτικό σταθερό και β απωθητικό σταθερό σημείο της f .

Ομοίως, τότε και η g έχει επίσης τα ίδια δύο σταθερά σημεία με την f .

Τότε, όπως στο θεώρημα 6.5.1., διαστήματα της μορφής $[x_0, f(x_0)) = [x_0, x_1)$ μπορεί να θεωρηθούν θεμελιώδες πεδίο για την f στο $I = [\alpha, \beta]$ αν διατηρεί τον προσανατολισμό και $(f(x_0), x_0]$ αν αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Αντίστοιχα αν $y_0 \in (\alpha, \beta)$ τότε θεμελιώδες πεδίο της g , είναι διαστήματα της μορφής

$$[y_0, g(y_0)) = [y_0, y_1) \text{ ή } (g(y_0), y_0].$$

Στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ μπορεί να οριστεί τοπολογική συζυγία $h: [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha, \beta]$ θεωρώντας τα παραπάνω θεμελιώδη πεδία αντίστοιχα για τις συναρτήσεις f, g (όμοια κατασκευή με 7.2.1). ■

Αυτό δείχνει ότι όλοι οι διαφορομορφισμοί \mathbb{C}^1 με δύο σταθερά σημεία ανήκουν στην ίδια τοπολογική κλάση συζυγίας. Δεν μπορούν να είναι συζυγείς \mathbb{C}^1 εκτός εάν οι παράγωγοι στα σταθερά σημεία είναι ίδιες. Μπορούμε τώρα να αναφέρουμε ίσως το πιο σημαντικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 7.4.2. Δύο υπερβολικοί διαφορομορφισμοί διαστήματος f, g που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι τοπολογικά συζυγείς αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο αριθμό ελκτικών και τον ίδιο αριθμό απωθητικών σταθερών σημείων.

Απόδειξη: Η μία κατεύθυνση είναι σαφής. Δεδομένου ότι οι τοπολογικές συζεύξεις διατηρούν σταθερά σημεία και οριακά σύνολα, εάν δύο διαφορομορφισμοί διαστήματος έχουν διαφορετικό αριθμό ελκτικών ή/και απωθητικών σταθερών σημείων, δεν μπορούν να είναι τοπολογικά συζευγμένοι. Για την άλλη κατεύθυνση, παρατηρήστε πρώτα ότι τα ελκτικά και τα απωθητικά σταθερά σημεία πρέπει να εναλλάσσονται στο διάστημα. Κάθε κλειστό υποδιάστημα μεταξύ ενός ελκτικού και ενός απωθητικού σταθερού σημείου είναι αμετάβλητο και μπορεί από μόνο του να θεωρηθεί ένας διαφορομορφισμός διαστήματος με ακριβώς δύο σταθερά σημεία, και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρόταση 7.4.1. για να λάβουμε μια συζυγία περιορισμένη στα αντίστοιχα διαστήματα.

Συνδυάζοντας αυτές τις συζυγίες λαμβάνουμε μια καθολική συζυγία. ■

Είναι εύκολο να δούμε ότι το αποτέλεσμα αποτυγχάνει χωρίς την υπόθεση της υπερβολικότητας, ο αριθμός των σταθερών σημείων δεν χαρακτηρίζει γενικά πλήρως την τοπολογική κλάση συζυγίας. Σαφώς, εξακολουθεί να ισχύει ότι τα f, g δεν μπορούν να είναι \mathbb{C}^1 συζυγή αν δεν έχουν τις ίδιες παραγώγους στα αντίστοιχα σταθερά σημεία.

Για να μελετήσουμε τη δομική σταθερότητα των διαφορομορφισμών διαστήματος, πρέπει να εισαγάγουμε μια τοπολογία στον χώρο όλων των \mathbb{C}^1 διαφορομορφισμών του διαστήματος I . Στην πραγματικότητα, θα εισαγάγουμε δύο φυσικές μετρικές στους χώρους $\mathbb{C}^0(I)$ όλων των συνεχών συναρτήσεων $f: I \rightarrow I$ και στον χώρο $\mathbb{C}^1(I)$ όλων των \mathbb{C}^1 συναρτήσεων $f: I \rightarrow I$.

Για $f, g \in \mathbb{C}^0(I)$ ορίζουμε $d_0(f, g) = \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)|\}$.

(δηλαδή για $\epsilon > 0$ έχουμε $d_0(f, g) \leq \epsilon$, αν $|f(x) - g(x)| \leq \epsilon$, για κάθε $x \in I$)

Για $f, g \in \mathbb{C}^1(I)$ ορίζουμε $d_1(f, g) = \sup_{x \in I} \{|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|\}$.

Παρατήρηση 7.4.3. Σημειώστε ότι οι ορισμοί δεν απαιτούν οι f, g να είναι αντιστρέψιμες. Επίσης είναι φανερό ότι $d_1(f, g) \geq d_0(f, g)$. Πράγματι, μπορούμε να έχουμε δύο συναρτήσεις που είναι αυθαίρετα κοντά στη μέτρηση \mathbb{C}^0 και μακριά με τη μέτρηση \mathbb{C}^1 .

Παράδειγμα 7.4.4. Ας υποθέσουμε ότι $I = [0, 1]$ και έστω $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, με $f(x) = 1/2$ και $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, με $g(x) = \frac{1}{2} + \epsilon \sin \frac{x}{\epsilon}$.

Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της g περιέχεται σε μια ϵ -γειτονιά της γραφικής παράστασης της f και επομένως $d_0(f, g) = \epsilon$. Ωστόσο, έχουμε $\frac{df}{dx} = 0$ και $\frac{dg}{dx} = \cos \frac{x}{\epsilon}$ και επομένως $d_1(f, g) \geq 1$. Έτσι, οι συναρτήσεις f και g είναι πολύ κοντά στη μετρική \mathbb{C}^0 για μικρό ϵ , αλλά πάντα μακριά στη μετρική \mathbb{C}^1 .

Αυτό σημαίνει ότι οι δύο μετρικές προκαλούν διαφορετικές τοπολογίες: μπορείτε να έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων f_n που συγκλίνουν στην f στη μετρική \mathbb{C}^0 αλλά όχι στη μετρική \mathbb{C}^1 και επομένως μια «μικρή» διαταραχή στη μετρική \mathbb{C}^0 μπορεί να είναι «μεγάλη» στη μετρική \mathbb{C}^1 . Έχουμε έτσι δύο διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας και δύο διαφορετικές τοπολογίες και θέλουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα της δομικής σταθερότητας ως προς τους διαφορετικούς συνδυασμούς τοπολογιών και κλάσεων ισοδυναμίας. Ορίζουμε κάθε μία από τις τοπολογίες με τη σειρά και εξετάζουμε τις πιθανές κλάσεις ισοδυναμίας.

Πρόταση 7.4.5. Έστω f ένας υπερβολικός διαφορομορφισμός διαστήματος \mathbb{C}^1 . Τότε

- 1) η f είναι \mathbb{C}^1 δομικά σταθερή ως προς την τοπολογική συζυγία.
- 2) η f είναι \mathbb{C}^0 δομικά ασταθής ως προς την τοπολογική συζυγία.
- 3) η f είναι \mathbb{C}^1 δομικά ασταθής ως προς τη συζυγία \mathbb{C}^1 .
- 4) η f είναι \mathbb{C}^0 δομικά ασταθής ως προς τη συζυγία \mathbb{C}^1 .

Απόδειξη: 1) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάποιο αρκετά μικρό $\epsilon > 0$, όλες οι συναρτήσεις $g: I \rightarrow I$, με $d_1(f, g) \leq \epsilon$ είναι υπερβολικές και έχουν τον ίδιο αριθμό σταθερών σημείων με την f , αφού αυτό υπονοεί ότι οι f, g είναι τοπολογικά συζυγή.

Δεδομένου ότι η f είναι υπερβολική, όλα τα σταθερά σημεία της είναι απομονωμένα και υπάρχουν σταθερές $\delta, \delta' > 0$ τέτοιες ώστε, τα διαστήματα $\mathcal{U}_p = [p - \delta, p + \delta]$ και $\mathcal{U}_q = [q - \delta', q + \delta']$ να δηλώνουν μια γειτονιά κάθε σταθερού σημείου p, q . Τότε έχουμε:

- (i) $\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q = \emptyset$ εάν $p \neq q$,
- (ii) $|f(p) - f(p \pm \delta)| \geq \delta'$ για κάθε σταθερό σημείο p ,
- (iii) $|f(x) - x| \geq \delta'$ για κάθε $x \notin \cup_p \mathcal{U}_p$
- (iv) $|f'(x)| \neq 1$ για όλα τα $x \in \mathcal{U}_p$ και μικρό $\delta > 0$, για κάθε σταθερό σημείο p .

Η συνθήκη (ii) υποδηλώνει ότι εφόσον η g είναι επαρκώς \mathbb{C}^0 κοντά στην f , δεν έχει σταθερό σημείο εκτός της ένωσης των γειτονιών \mathcal{U}_p . Δηλαδή για αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ (π.χ. $\epsilon < \delta'$) τότε $d_0(f, g) \leq \epsilon$ οπότε $g(x) \neq x$ για κάθε $x \notin \mathcal{U}_p$.

Επομένως, απλώς πρέπει να δείξουμε ότι εφόσον η g είναι \mathbb{C}^1 επαρκώς κοντά στην f , τότε υπάρχει ένα μοναδικό υπερβολικό σταθερό σημείο μέσα σε κάθε γειτονιά \mathcal{U}_p .

Είναι σαφές ότι πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο της g , αφού οι εικόνες της $f(p \pm \delta)$ βρίσκονται σε αντίθετες πλευρές της διαγωνίου και επομένως το ίδιο πρέπει να ισχύει και για τη g . Δηλαδή αν $d_0(f, g) < \delta'$ τότε τα σημεία $g(p + \delta)$ και $g(p - \delta)$ βρίσκονται επίσης σε αντίθετες πλευρές της διαγωνίου ($y = x$, πάνω στην οποία βρίσκονται τα σταθερά σημεία της f και g).

Αν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό και $d_1(f, g) \leq \epsilon$, ισχύει επίσης $g'(x) \neq 1$ για όλα τα $x \in \mathcal{U}_p$. Ας υποθέσουμε, με αντίφαση, ότι υπάρχουν δύο σταθερά σημεία $q, q' \in \mathcal{U}_p$. Τότε θα είχαμε $|g(p) - g(q')| = |p - q'|$ και, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπήρχε κάποιο σημείο $z \in [q, q'] \subseteq \mathcal{U}_p$ τέτοιο ώστε $|g(p) - g(q')| = |g'(z)||p - q'|$ δηλαδή $|g'(z)| = 1$, το οποίο είναι αντιφατικό.

2) Το δεύτερο μέρος του παραπάνω επιχειρήματος δεν ισχύει εάν η διαταραχή είναι μικρή μόνο στη μετρική του \mathbb{C}^0 . Σαφώς μπορούμε να διαταράξουμε την f εντός της γειτονιάς \mathcal{U}_p (p σταθερό σημείο της f) για να λάβουμε μια συνάρτηση g με $g(\mathcal{U}_p) \subseteq (p - \epsilon, p + \epsilon)$, αλλά έτσι ώστε η g να έχει δύο σταθερά σημεία στο \mathcal{U}_p . Έτσι, η g δεν μπορεί να είναι τοπολογικά συζευγμένη με την f .

3) Είναι σαφές ότι είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένας άλλος διαφορομορφισμός g με $d_1(f, g) \leq \epsilon$, τέτοιος ώστε οι παράγωγοι στα σταθερά σημεία της g να μην συμπίπτουν με τις παραγώγους στα αντίστοιχα σταθερά σημεία της f . Έτσι, ακόμη και αν οι f, g

έχουν τα ίδια σταθερά σημεία, δεν είναι \mathbb{C}^1 συζυγείς.

4) Είναι άμεση συνέπεια του 2). ■

ΠΗΓΕΣ-ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- «LECTURE NOTES ON DYNAMICAL SYSTEMS, CHAOS AND FRACTAL GEOMETRY», Geoffrey R. Goodson. Towson University Mathematics Department 2014
- «Introduction to Dynamical Systems Lecture Notes», Rainer Klages, School of Mathematical Sciences Queen Mary, University of London 18/04/2008
- A. Lasota and M.C. Mackay, Chaos, Fractals, and Noise. (Springer-Verlag, 1994).
- A. Katok and B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems, volume 54 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- «Dynamical Systems and Ergodic Theory» Alexander Gorodnik, University of Bristol 2010 & 2014
- «Πραγματική Ανάλυση», Πέτρος Βαλέττας, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Αθηνών Αθήνα– 2015
- «Σημειώσεις παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης», Σπύρος Αργυρός, Ιανουάριος 2013
- «Real Analysis», N.L.CAROTHERS, Cambridge University Press 2000
- B. Hasselblatt and A. Katok, A first course in dynamics. (Cambridge University Press, 2003).
- R.L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems. (Addison-Wesley, Reading, second edition, 1989).
- K.T. Alligood, T.S. Sauer and J.A. Yorke, Chaos - An introduction to dynamical systems. (Springer, New York, 1997).
- C. Beck and F. Schlögl, Thermodynamics of Chaotic Systems, volume 4 of Cambridge nonlinear science series. (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- C. Robinson, Dynamical Systems. (CRC Press, London, 1995).
- J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey, On Devaney's definition of chaos. Amer. Math. Monthly 99, 332–334 (1992).
- E. Glasner and B. Weiss, Sensitive dependence on initial conditions. Nonlinearity 6, 1067–1075 (1993).
- S. Wiggins, Chaotic transport in dynamical systems, volume 2 of Interdisciplinary Applied Mathematics. (Springer, New York, 1992).
- E. Ott, Chaos in Dynamical Systems. (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- J. Heidel, The existence of periodic orbits of the tent map, Physics Letters A, 143 (1990).
- An introduction to Smooth Ergodic Theory for one-dimensional dynamical systems, Stefano Luzzatto, August 31, 2010, Trieste, Italy.
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_domain.
- Introduction to Dynamical Systems, Lecture Notes ,Stefano Luzzatto ,Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2017-2018.
- Fundamental Domain, Wolfram MathWorld
- Mostly Conjugate: Relating Dynamical Systems — Beyond Homeomorphism Joseph D. Skufca¹, and Erik M. Bollt¹, ¹Department of Mathematics, Clarkson University, Potsdam, New York (Dated: April 24, 2006)