Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

«Μια ιστορική περιπλάνηση στο μαθηματικό άπειρο»

Χρήστος Τσάτσος

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Καλημέρης

Πάτρα, Ιούνιος 2023

«Μια ιστορική περιπλάνηση στο μαθηματικό άπειρο»

Τσάτσος Χρήστος

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής
Κωνσταντίνος Καλημέρης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής
Αυγερινός Ευγένιος

Πάτρα, Ιούνιος 2023

« Ευχαριστώ τον επιβλέποντα της εργασίας μου κ. Καλημέρη,
για την υποστήριξη και την καθοδήγησή του. »

Περίληψη

Από αρχαιοτάτων χρόνων έγιναν προσπάθειες να συλληφθεί το άπειρο ως έννοια. Περισσότερο ως φιλοσοφική – θεολογική παρά μαθηματική.

Από οποιαδήποτε σκοπιά όμως και να το δούμε φαίνεται ότι όσο πλησιάζουμε το άπειρο, τόσο απομακρύνεται και δημιουργεί σύγχυση στη γνωστική μας αντίληψη δημιουργώντας παράδοξα. Εννοιολογικά, το άπειρο προέρχεται από το στερητικό πρόθεμα «α-» και τη λέξη «πέρας», δηλαδή τέλος και συνήθως συνδέεται με τη φράση «χωρίς τέλος», αναφέρεται δηλαδή στο ατέρμονο - απεριόριστο και αποτελεί αντικείμενο μελέτης σε διάφορα επιστημονικά πεδία όπως για παράδειγμα τη φιλοσοφία, την μαθηματική ανάλυση, την φυσική και τη κοσμολογία. Το σύμβολο " ∞ " του απείρου φαίνεται να χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Άγγλο κληρικό και μαθηματικό John Wallis στο βιβλίο του "De sectionibus conicis" το 1655, όπου χρησιμοποίησε δύο ενωμένους κύκλους για να το αναπαραστήσει. Ο Wallis διερεύνησε την έννοια του άπειρου σε βάθος, επομένως είναι πιθανό να ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε το σύμβολο. (John D. Barrow, 2005)

Από πού και να προέρχεται ο συμβολισμός του, αδιαμφισβήτητα η έννοια του άπειρου έχει απασχολήσει αλλά και εμπνεύσει τα μεγαλύτερα μυαλά της ιστορίας καθώς η προσπάθεια κατανόησής της αποτελεί πρόκληση για το ανθρώπινο μυαλό και αδιαμφισβήτητα αποτέλεσε το μέσο για την ανάπτυξη πολλών και σημαντικών θεωριών.

Η παρούσα εργασία φιλοδοξεί να παρουσιάσει:

- τον τρόπο με τον οποίο μέσα στους αιώνες οι αρχαίοι Έλληνες πρώτοι προσέγγισαν την πολυδιάστατη αυτή έννοια.
- τη μεταγενέστερη σύνδεση του απείρου με τις έννοιες του ορίου και τις απαρχές του λογισμού, τα σύνολα και τους πληθάριθμους αυτών, τις αποκλίνουσες σειρές και τη συνάρτηση ζήτα του Riemann.
- τα παράδοξα που δημιουργήθηκαν κατά την προσπάθεια να αναλυθεί το συνεχές με τρόπο διακριτό, αλλά και κατά τη θεώρησή του ως αριθμητική οντότητα.

Σε αυτή την εργασία πέρα από την προσπάθεια να μεταδόσουμε την αντίληψη της έννοιας του απείρου που υπήρχε ανά τους αιώνες αλλά και τη συμβολή του στην εξέλιξη των σύγχρονων μαθηματικών, παρουσιάζουμε παραδείγματα παραδόξων που έχουν συμβάλλει στην αποσαφήνιση βασικών εννοιών και την εξαγωγή σημαντικών αποτελεσμάτων. Αναμφίβολα, τα παράδοξα αιχμαλωτίζουν τη σκέψη, κοροϊδεύουν, προκαλούν, διασκεδάζουν, εκνευρίζουν και αποπλανούν. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι διεγείρουν την περιέργεια, τονώνουν και παρακινούν.

Λέξεις – Κλειδιά

ΑΠΕΙΡΟ, ΠΑΡΑΔΟΞΑ, ΑΡΧΑΙΟΤΗΤΑ

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας Εικόνων

Εισαγωγή

"Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν", δηλαδή "όλα είναι ρευστά και τίποτα δεν μένει το ίδιο", είπε ο Ηράκλειτος αναγνωρίζοντας ότι η αέναη - άπειρη κίνηση και μεταβολή αποτελεί το θεμελιώδες χαρακτηριστικό της πραγματικότητας. Οι αρχαίοι Έλληνες εξέφραζαν το άπειρο με την έννοια του απεριόριστου, αλλά και ως την γεννεσιουργό δύναμη από την οποία δημιοργήθηκε ο κόσμος. Μια από τις πρώτες εμφανίσεις του απείρου στα μαθηματικά αφορά την αναλογία μεταξύ της διαγώνιου και της πλευράς ενός τετραγώνου. Ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του του αρχικά πίστευαν ότι οτιδήποτε στον φυσικό μας κόσμο μπορούσε να εκφραστεί με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών. Η ανακάλυψη από τους ίδιους ότι η σχέση μεταξύ της διαγωνίου και της πλευράς ενός τετραγώνου δεν μπορεί να αποτυπωθεί μέσω των φυσικών αριθμών συντάραξε τα θεμέλια αυτής της κοσμοθεωρίας.

Τόσο ο Πλάτωνας όσο και ο Αριστοτέλης εναντιώθηκαν στην έννοια του «πραγματικού» απείρου (Actual Infinity) (χωρικού, χρονικού ή αριθμητικού) το οποίο διέκριναν από το «δυνητικό» άπειρο (Potential Infinity).

Το πραγματικό άπειρο είναι μια έννοια που χρησιμοποιείται στη θεωρία συνόλων και στη μαθηματική λογική. Αναφέρεται σε ένα πραγματικό, υπαρκτό, ολοκληρωμένο, απεριόριστο σύνολο αντικειμένων ή αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, το πραγματικό άπειρο χρησιμοποιείται σε μαθηματικές δομές όπως το πραγματικό σύνολο των αριθμών, που περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, συμπεριλαμβανομένων των δεκαδικών αριθμών και των αριθμών που δεν μπορούν να εκφραστούν ως δεκαδικές διακριτικές μονάδες. Το Δυνητικό Άπειρο από την άλλη αναφέρεται σε μια κατάσταση όπου μια ποσότητα αυξάνεται χωρίς όρια. Αυτό σημαίνει ότι μια ακολουθία ή μια σειρά αριθμών μπορεί να επεκταθεί ατελείωτα χωρίς να φτάσει ποτέ σε έναν τελικό αριθμό. Για παράδειγμα, η ακολουθία 1, 2, 3, 4, 5, ... είναι ένα παράδειγμα δυνητικού άπειρου.

Η βασική διαφορά τους λοιπόν είναι είναι ότι το δυνητικό άπειρο αναφέρεται σε μια διαδικασία αύξησης χωρίς όριο, ενώ το πραγματικό άπειρο είναι ένα υπαρκτό σύνολο αντικειμένων που αποτελεί μια πλήρη και ολοκληρωμένη μαθηματική έννοια.

Υπερπηδώντας τις δυσκολίες του πραγματικού άπειρου, ο Εύδοξος της Κνίδου αρχικά και ο Αρχιμήδης αργότερα, ανέπτυξαν μια τεχνική γνωστή ως μέθοδος εξάντλησης, σύμφωνα με την οποία ένα εμβαδόν ή ένας όγκος υποδιαιρείται απεριόριστα σε μικρότερα κομμάτια και στη συνέχεια με άθροιση αυτών των «άπειρων» κομματιών προκύπτει το ζητούμενο μέγεθος.

Τεράστιας σημασίας για τα σύγχρονα μαθηματικά αποτέλεσε η μελέτη της απείρως μικρής ποσότητας (απειροστό) όπου οδήγησε και στην ανάπτυξη του λογισμού στα τέλη του 1600 από τον I. Newton και τον G. Leibniz . Ο Νεύτωνας εισήγαγε τη δική του θεωρία για το απειροστό, για να δικαιολογήσει τον υπολογισμό των παραγώγων , ή των κλίσεων. Για να βρει την κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα δεδομένο σημείο (x, y), εξέτασε την αναλογία μεταξύ dy και dx, όπου dy είναι η απειροελάχιστη μεταβολή της μεταβητής y που προκαλείται από την απειροελάχιστη μεταβολή του x. Η χρήση των απειροστών εδρεώθηκε τελικά και πήρε τη σύγχρονη μορφή της με την ανάπτυξη της μη τυπικής ανάλυσης από τον γερμανικής καταγωγής μαθηματικό Abraham Robinson τη δεκαετία του 1960.

Γρήγορα κατέστει αντιληπτό από τους μαθηματικούς ότι η τυπική αντίληψη που έχουμε για τους αριθμούς είναι παραπλανητική όταν μιλάμε για άπειρα μεγέθη. Οι μεσαιωνικοί στοχαστές γνώριζαν το παράδοξο γεγονός ότι τα ευθύγραμμα τμήματα διαφορετικού μήκους φαινόταν να έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων. Στις αρχές του 1600 ο G. Galilei αντιμετώπισε αυτό και ένα μη διαισθητικό αποτέλεσμα γνωστό τώρα ως το παράδοξο του Galileo. Ο Γαλιλαίος έδειξε ότι το σύνολο των αριθμών μέτρησης μπορούσε να τεθεί σε αντιστοιχία ένα προς ένα με το φαινομενικά πολύ μικρότερο σύνολο των τετραγώνων τους. Παρομοίως έδειξε αυτή την 1-1 σχέση και μεταξύ του συνόλου των φυσικών και των διπλασίων τους (άρτιοι). Ο Γαλιλαίος κατέληξε στο συμπέρασμα ότι «δεν μπορούμε να μιλάμε για άπειρες ποσότητες ως το ένα μεγαλύτερο ή μικρότερο ή ίσο με ένα άλλο». Τέτοια παραδείγματα οδήγησαν τον R. Dedekind το 1872 να προτείνει έναν ορισμό του άπειρου συνόλου ως εκείνου που θα μπορούσε να τεθεί σε σχέση ένα προς ένα με κάποιο κατάλληλο υποσύνολό του.

Η σύγχυση σχετικά με τους άπειρους αριθμούς επιλύθηκε από τον Georg Cantor ξεκινώντας το 1873. Πρώτος ο Cantor απέδειξε αυστηρά ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο μέγεθος με τους φυσικούς αριθμούς. Τέτοια σύνολα με το ίδιο μέγεθος (πληθάριθμο) με τους φυσικούς ονομάζονται αριθμήσιμα. Επίσης την ίδια χρονιά ο Cantor απέδειξε το εκπληκτικό αποτέλεσμα ότι δεν είναι όλα τα άπειρα ίσα. Χρησιμοποιώντας το λεγόμενο «διαγώνιο όρισμα», ο Cantor έδειξε ότι το μέγεθος των φυσικών είναι αυστηρά μικρότερο από το μέγεθος των πραγματικών αριθμών. Τέλος ο ίδιος αναζήτησε την ύπαρξη ενός συνόλου τάξης μεγέθους τέτοιας που να βρίσκεται μεταξύ του μετρήσιμου απείρου των φυσικών αριθμών και του συνεχούς, δηλαδή του μεγέθους των πραγματικών αριθμών. Το πρόβλημα αυτό έγινε γνωστό ως «η υπόθεση του συνεχούς» και αποτέλεσε ένα από τα 23 άλυτα προβλήματα που παρουσίασε ο D. Hilbert σε συνέδριο το 1900.

Φυσικά άπειρα μπορεί κανείς να αναζητήσει στον χώρο και τον χρόνο. Αν και οι περισσότεροι από εμάς υποθέτουν ότι ο τρισδιάστατος χώρος είναι άπειρος, οι κοσμολόγοι υπό το πρίσμα του μοντέλου της μεγάλης έκρηξης γενικά πιστεύουν ότι το σύμπαν έχει ένα μακρύ παρελθόν αλλά είναι πεπερασμένο.

1. Το άπειρο στην Αρχαία Ελλάδα και τα παράδοξα που γέννησε

1.1. *Αναξίμανδρος*

Ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος (611 - 547 π.Χ.) φαίνεται να είναι ο πρώτος φιλόσοφος που αναφέρθηκε στην έννοια του απείρου. Υπήρξε μαθητής του Θαλή και μετά τον θάνατο του τον διαδέχτηκε στη σχολή του. Εισήγαγε την πειραματική έννοια των φυσικών φαινομένων, δηλαδή ουσιαστικά έδωσε μία επιστημονική άποψη για τον Κόσμο, απαλλαγμένη από μύθους, ενώ ήταν αυτός που εισήγαγε την προοπτική ενός απείρου σύμπαντος, ατέρμονου σε χώρο και χρόνο.

Συγκεκριμένα, απορρίπτοντας τη θεωρία του Θαλή που πρότεινε το νερό ως την πρώτη αρχή του Κόσμου, ο Αναξίμανδρος υποστήριξε ότι η φυσική ισορροπία πρέπει να διατηρείται αέναα, αποτρέποντας ένα στοιχείο να προσπεράσει τα υπόλοιπα *(Θεοδοσίου, 2011)*. Το βασικό επιχείρημα του ήταν η ιδέα μιας αιώνιας και αμετάβλητης κοσμολογικής ουσίας, από την οποία προέρχονται τα πράγματα και τελικά επιστρέφουν. Επομένως, βάσει της θεωρίας του το άπειρον είναι μία ουσία αυτοπροσδιοριζόμενη, αμετάβλητη, ατέρμονη και άφθαρτη, η οποία διέπεται από απροσδιόριστες ιδιότητες. Επειδή το άπειρο είναι ατελείωτο και άφθαρτο, οι κόσμοι γεννιούνται και επιστρέφουν πίσω σ΄ αυτό. Ο Αναξίμανδρος χρησιμοποίησε τη λέξη άπειρον και με πιο αφηρημένη σημασία, θεωρώντας ότι ήταν μία τεράστια υλική μάζα ή ένα πρωτεύον νεφέλωμα, μία φυσική δύναμη ή ενέργεια, μη περιορισμένη στο χρόνο και πιθανώς χωρίς εσωτερική δομή *(Maor, 2017)*.

Η θεωρία αυτή του Αναξίμανδρου επιβεβαιώνεται και από τα λεγόμενα του Διογένη Λαέρτιου ο οποίος σημειώνει ότι ο Αναξίμανδρος έθεσε ως αρχή του Κόσμου ένα στοιχείο που είναι απεριόριστο – χωρίς να το ορίζει ως νερό, αέρα ή οτιδήποτε άλλο – υποστηρίζοντας ότι ναι μεν το σύνολο είναι αμετάβλητο αλλά ότι τα μέρη του συνόλου υπόκεινται σε αλλαγές.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλεί μάλιστα το γεγονός ότι ο Αναξίμανδρος και ο δάσκαλος του απέρριψαν την άποψη της σεξουαλικής αναπαραγωγής μεταξύ των όντων και θεώρησαν ότι το άπειρον είναι η γενεσιουργός δύναμη που μπορεί να δώσει ζωή, δίνοντας ουσιαστικά στο άπειρο μια θεϊκή υπόσταση.

Μάλιστα, σύμφωνα με τον ψευδο-Πλούταρχο ο Αναξίμανδρος θεωρούσε το άπειρο αποκλειστικά υπεύθυνο για τη γέννηση και το θάνατο του σύμπαντος. Χαρακτηριστικά, υποστήριζε ότι οι ουρανοί έχουν προέλθει από αυτό το Άπειρο, όπως και γενικότερα όλοι οι κόσμοι, που είναι άπειροι σε αριθμό, δηλώνοντας ότι τόσο η γέννηση όσο και ο θάνατος λαμβάνουν έναν πλήρη κύκλο μέσω του άπειρου χρόνου. *(Kirk / Raven / Schofield, 1983)*

Οι Πυθαγόρειοι από την δική τους οπτική συνέδεσαν το καλό και το κακό με το πεπερασμένο και το άπειρο. Οι ίδιοι είχαν πολύ μεγάλη επιρροή στον τότε κόσμο, και έτσι παρουσίασαν στους Έλληνες το άπειρο μέσω τριών αξιωμάτων:

1) Ο χρόνος μοιάζει να μην έχει τέλος.
2) Ο χώρος και ο χρόνος μπορούν να υποδιαιρούνται ασταμάτητα.
3) Ο χώρος δεν έχει περιορισμούς.

Τα παράδοξα που γέννησε η έννοια του απείρου δεν άργησαν να εμφανιστούν στην Αρχαία Ελλάδα.

1.2. *Πυθαγόρας*

Ο Πυθαγόρας ο Σάμιος (580 - 496 π.Χ) ένας από τους σπουδαιότερους αρχαίους εκπροσώπους των μαθηματικών και της φιλοσοφίας, ίδρυσε την Πυθαγόρεια φιλοσοφική σχολή η οποία έδωσε μεγάλη σημασία στο ρόλο των μαθηματικών για την κατανόηση του σύμπαντος.

Μία από τις βασικές πεποιθήσεις του Πυθαγόρα ήταν η έννοια του άπειρου. Έβλεπε το άπειρο ως μια θεμελιώδη έννοια για το σύμπαν, παρούσα σε όλα, από τα μικρότερα σωματίδια μέχρι τα μεγαλύτερα ουράνια σώματα. Ο Πυθαγόρας και η σχολή του πίστευαν ότι το σύμπαν διέπεται από μαθηματικούς νόμους και ότι αυτοί οι νόμοι αντανακλούσαν την άπειρη φύση της πραγματικότητας.

Διερεύνησαν επίσης την έννοια του άπειρου και τη σχέση του με τους αριθμούς και ανακάλυψαν ότι ενώ ορισμένοι μαθηματικοί λόγοι, όπως ο λόγος των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου, ήταν σταθεροί και μπορούσαν να εκφραστούν ως απλά κλάσματα, ωστόσο, υπήρχαν ορισμένοι λόγοι, όπως ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του (π), που δεν μπορούσαν να εκφραστούν σαν ένα απλό κλάσμα. Στα ίδια συμπεράσματα κατέληξε και ο Εύδοξος της Κνίδου που είναι γνωστός για το έργο του πάνω στη θεωρία των αναλογιών. Αυτοί οι λόγοι που δεν μπορούν να «ειπωθούν» και που είναι γνωστοί σε μας ως άρρητοι, θεωρήθηκαν ως απόδειξη της άπειρης φύσης των μαθηματικών. Αξίζει να αναφερθεί ότι από την Πυθαγόρεια σχολή αυτός που κατέληξε πρώτος στα παραπάνω συμπεράσματα ήταν ο Ίππασος ο Μεταποντίνος. Μάλιστα κατηγορήθηκε από τους ίδιους τους Πυθαγόρειους ότι αποκάλυψε την μυστική διδασκαλία των αρρήτων αριθμών (Ιάμβλιχος, 2001) και εξ αυτού καταδιώχθηκε και τελικά φονεύθηκε.

Οι ιδέες του Πυθαγόρα για το άπειρο είχαν βαθιά επίδραση στους μεταγενέστερους φιλοσόφους και μαθηματικούς, συμπεριλαμβανομένων του Πλάτωνα και του Ευκλείδη. Η πίστη του στο άπειρο ως θεμελιώδης πτυχή της πραγματικότητας και η έμφαση του στον ρόλο των μαθηματικών στην κατανόηση του σύμπαντος έθεσαν τα θεμέλια για την ανάπτυξη της δυτικής φιλοσοφίας και επιστήμης. *(D. Fideler, 1987)*

1.3. *Παρμενίδης*

Οι ιδέες του Παρμενίδη (6ος αι. π.Χ.) για το άπειρο είχαν σημαντική επίδραση στους μεταγενέστερους φιλοσόφους, ιδιαίτερα στον Πλάτωνα και τον Ζήνωνα και μέσα από αυτές πρότεινε ένα μεταφυσικό πλαίσιο που έθετε την ύπαρξη μιας ενιαίας και αιώνιας πραγματικότητας. Υποστήριξε ότι αυτή η πραγματικότητα, γνωστή ως Είναι, είναι αμετάβλητη και αδιαίρετη και ότι το βασίλειο της αλήθειας χαρακτηρίζεται από σταθερότητα και μονιμότητα, σε αντίθεση με τη διαρκώς μεταβαλλόμενη και παροδική φύση του φαινομενικού κόσμου.

(Kirk / Raven / Schofield, 1983)

Σύμφωνα με τον Allen (1974), ο Παρμενίδης επιχειρεί να αποδείξει ότι η Ενότητα αποτελεί μια ολότητα με μέρη, μετέχει στο Είναι, είναι ένα και πολλά συγχρόνως, περιορισμένη και απεριόριστη σε πλήθος. Υπονοεί σαφώς ότι η Ενότητα είναι άπειρα διαιρετή και ότι κάθε μέρος της περιέχει και αυτό μια Ενότητα.

Το ότι η Ενότητα έχει άπειρα πολλά μέρη όμως, σημαίνει ότι είναι και άπειρα διαιρούμενη; Ή υποννοεί ότι η διαδικασία της διαίρεσης μπορεί να πραγματοποιηθεί σε οποιοδήποτε μέρος της Ενότητας, όσο μικρό κι αν είναι και τελικά οδηγούμαστε στη διάκριση μεταξύ ενός πραγματικού και ενός δυνητικού άπειρου;

Πράγματι, κατά τον Allen, ο Παρμενίδης έχει να κάνει, όχι με ένα, αλλά με δύο είδη απείρου: ένα πυκνό άπειρο που συνδέεται με αυτό της συνέχειας, τυπικό των εκτεταμένων μεγεθών και το άπειρο της διαδοχής, τυπικό του αριθμού. Αυτοί οι δύο τύποι απείρου ήταν διακριτοί στα ελληνικά μαθηματικά αφού οι Έλληνες – οι οποίοι προσδιόριζαν τον αριθμό με τους θετικούς ακέραιους αριθμούς μεγαλύτερους από 1, και επομένως στερούνταν την έννοια των πραγματικών αριθμών, επομένως δεν είχαν καμία έννοια του αριθμού ως είτε συνεχές είτε πυκνό, και καμία έννοια ισομορφισμού μεταξύ αριθμών και ευθειών.

Η διάκριση μέρους και όλου στον Παρμενίδη είναι σύνθετη και περιέχει μεταφυσικά ζητήματα ως στοιχεία της πολυπλοκότητάς της. Η ενότητα, ως πυκνό άπειρο, αποδεικνύεται ότι είναι ένα σύνολο μερών μέσω της συμμετοχής της στο Είναι. Ως διαδοχικό άπειρο, αποδεικνύεται ότι είναι ένα σύνολο μερών, όχι μέσω της συμμετοχής του σε κάτι άλλο, αλλά μέσω της συμμετοχής απείρως πολλών πραγμάτων, των αριθμών, σε αυτό. Τα ζητήματα συμμετοχής που τίθενται εδώ είναι σημαντικά και για τη μεταγενέστερη μεταφυσική του Πλάτωνα.

Αυτό το θεώρημα που αντιμετωπίζει την Ενότητα ως ένα δυνητικό άπειρο και που αργότερα ονομάστηκε αξίωμα του Αρχιμήδη, είναι το θεμέλιο πολλών Ελληνικών μαθηματικών. Η αντιμετώπιση του άπειρου από το θεώρημα είναι καθαρά δυναμική: το θεώρημα δεν δηλώνει ότι οποιοδήποτε μέγεθος διαιρείται άπειρα. Δηλώνει μόνο ότι οποιοδήποτε μέγεθος είναι απείρως διαιρούμενο, καθώς δεν έχει μέρη που να μην επιτρέπουν τη διαδικασία της διαίρεσης. Όπως με το μέγεθος, έτσι και με το πλήθος. Σύμφωνα με τον Allen, ο Αριστοτέλης ανέφερε ότι οι μαθηματικοί «δεν χρειάζονται το (πραγματικό) άπειρο και δεν το χρησιμοποιούν» σε αντίθεση με τον Παρμενίδη που στα έργα του φαίνεται να υπονοεί την ύπαρξη ενός πραγματικού απείρου.

1.4. *Αναξαγόρας*

Ο Αναξαγόρας (500 - 428 π.Χ) πίστευε ότι το άπειρο ήταν μια θεμελιώδης πτυχή του σύμπαντος και ότι μπορούσε να παρατηρηθεί στον φυσικό κόσμο. Θεωρούσε ότι το σύμπαν αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό μικρών σωματιδίων, τα οποία ονόμαζε «σπόρους». Αυτοί οι σπόροι ήταν απείρως διαιρούμενοι, που σημαίνει ότι μπορούσαν να χωριστούν περαιτέρω σε όλο και μικρότερα μέρη χωρίς να χάσουν τις ιδιότητές τους. Αυτή η έννοια του δυνητικού απείρου ήταν μια ριζική απόκλιση από την προηγούμενη ελληνική πεποίθηση ότι το σύμπαν αποτελείται από έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων.

Ο Αναξαγόρας πίστευε επίσης ότι το ίδιο το σύμπαν ήταν άπειρο, χωρίς αρχή ή τέλος. Υποστήριξε ότι το σύμπαν πάντα υπήρχε και θα υπάρχει και ότι οι κύκλοι της γέννησης και του θανάτου ήταν απλώς μέρος μιας αιώνιας διαδικασίας.
Το έργο του Αναξαγόρα για το άπειρο είχε σημαντική επιρροή σε μεταγενέστερους φιλοσόφους και επιστήμονες, συμπεριλαμβανομένων του Αριστοτέλη και του Γαλιλαίου. *(Arsenijevic , Popovic, Vuletic , 2019)*

1.5. *Πλάτωνας*

Ο Πλάτωνας (427 - 347 π.Χ.) εξερεύνησε ιδέες που σχετίζονται με το άπειρο ιδιαίτερα στη Θεωρία των Μορφών. Πίστευε ότι ο κόσμος των φαινομένων, ο υλικός κόσμος που βλέπουμε γύρω μας, δεν είναι η αληθινή πραγματικότητα. Αντίθετα, υποστήριξε ότι υπάρχει ένας κόσμος Μορφών, ή Ιδεών, που είναι τέλειος και αμετάβλητος. Ο κόσμος των Μορφών περιέχει την αγνή και τέλεια ουσία όλων όσων υπάρχουν στον υλικό κόσμο. Για παράδειγμα, υπάρχει μια Μορφή Ομορφιάς στην οποία συμμετέχουν όλα τα όμορφα πράγματα στον κόσμο, μια Μορφή Δικαιοσύνης που φιλοδοξούν όλες οι δίκαιες πράξεις και ούτω καθεξής. Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι ο κόσμος των Μορφών έχει άπειρες δυνατότητες. Κάθε Μορφή θα μπορούσε να θεωρηθεί μια τέλεια και άπειρη εξιδανίκευση του αντίστοιχου υλικού της αντικειμένου. Ωστόσο, ο Πλάτωνας δεν χρησιμοποίησε ρητά την έννοια του άπειρου για να περιγράψει τον κόσμο των Μορφών.

Πώς παίζει ρόλο το άπειρο στην πλατωνική κοσμοθεωρία; Αν εξετάσουμε τις θεωρίες που παρουσιάζονται στο διάλογο του Πλάτωνα "*Ο Τίμαιος*" , βλέπουμε ότι ο κόσμος αποτελείται από τον αμετάβλητο κόσμος των Μορφών και τον μεταβαλλόμενο κόσμος της φύσης. Συνεπώς, ο κόσμος του αληθινού Είναι δεν είναι ο φυσικός κόσμος της αισθητικής πραγματικότητας.

Ο κόσμος των Μορφών: είναι ένας κόσμος στον οποίο τα πάντα «πάντα είναι», «δεν έχουν γίγνεσθαι» και «δεν αλλάζουν»). Γνωρίζουμε αυτόν τον κόσμο του Είναι με τη λογική (δηλαδή μέσω του λογικού μέρους της ψυχής μας).

Ο κόσμος της φύσης είναι ένας φυσικός κόσμος του γίγνεσθαι. Τα πάντα σε αυτόν τον κόσμο «γίνονται και περνούν, αλλά ποτέ δεν είναι πραγματικά». Γνωρίζουμε αυτόν τον κόσμο μέσω της αίσθησης-αντίληψης και της γνώμης, αυτός ο κόσμος, γράφει ο Πλάτων, δημιουργήθηκε ως ένα πρότυπο βασισμένο στις Μορφές.

Στην πραγματικότητα, ο Πλάτων είχε μια κάπως διφορούμενη σχέση με το άπειρο. Από τη μια πλευρά, τον γοήτευε η ιδέα ενός απεριόριστου ή άπειρου βασίλειου πραγματικότητας, το οποίο μερικές φορές αναφερόταν ως η «αόριστη δυάδα». Από την άλλη πλευρά, ήταν επίσης επιφυλακτικός με την έννοια του άπειρου καθώς πίστευε ότι μπορούσε να οδηγήσει σε παράδοξα και λογικές αντιφάσεις.

Για παράδειγμα, στον διάλογό του «Παρμενίδης», ο Πλάτων έχει τον χαρακτήρα Παρμενίδη να υποστηρίζει ότι αν αποδεχτούμε την ύπαρξη ενός άπειρου αριθμού Μορφών, καταλήγουμε σε παράλογα συμπεράσματα, όπως η ιδέα ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός πραγμάτων που είναι τόσο όμοια όσο και ανόμοια μεταξύ τους ταυτόχρονα.
Συνολικά, ενώ ο Πλάτων δεν διερεύνησε άμεσα την έννοια του άπειρου με τον τρόπο που έκαναν άλλοι φιλόσοφοι, οι ιδέες του για τον κόσμο των Μορφών και η αμφιθυμία του γύρω από την έννοια του απείρου επηρέασαν τους μεταγενέστερους μελετητές.

(J. Turner, K. Corrigan, 2011)

1.6. *Δημόκριτος*

Ο Δημόκριτος (460 - 370 π.Χ.) ήταν ένας από τους πιο σημαντικούς αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους, ο οποίος συχνά θεωρείται ο «πατέρας της ατομικής θεωρίας» λόγω της θεωρίας του για την ύλη που αποτελείται από έναν άπειρο αριθμό ατόμων που ήταν αδιαίρετα και άφθαρτα. Η ιδέα του Δημόκριτου για την ύλη ήταν καινοτόμος και σε αντίθεση με την τότε πεποίθηση ότι το σύμπαν αποτελείται από τέσσερα στοιχεία, δηλαδή τον αέρα, τη γη, τη φωτιά και το νερό.

Η ύλη, σύμφωνα με τον ίδιο, δεν αποτελεί κάτι το συνεχές, αλλά απαρτίζεται από ελάχιστα σωματίδια, αδιαίρετα, ασυμπίεστα και αόριστα. Αυτά τα σωματίδια τα ονόμασε άτομα, είναι ομοιογενή, έχουν συγκεκριμένες αποστάσεις μεταξύ τους και διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το σχήμα, τη διάταξη, τη θέση, το μέγεθος και το βάρος. Τα άτομα είναι σε μια αέναη και άναρχη κίνηση μέσα στο κενό, που επιβάλλεται από τη διαφορετική «βαρύτητα» του κάθε ατόμου.

Ο Δημόκριτος πίστευε ότι το Σύμπαν είναι άπειρο, αναλλοίωτο και άφθαρτο. Υποστήριξε ότι το σύμπαν υπήρχε και θα υπάρχει πάντα, με έναν άπειρο αριθμό κόσμων, μερικοί από τους οποίους ήταν κατοικημένοι με νοήμονα όντα. Αυτή η έννοια του απείρου ήταν και πάλι μια ριζική απόκλιση από τις προηγούμενες ελληνικές πεποιθήσεις ότι το σύμπαν ήταν πεπερασμένο και είχε μια αρχή.
Ο Δημόκριτος διερεύνησε επίσης την έννοια του δυνητικού απείρου, την οποία χρησιμοποίησε για να εξηγήσει την άπειρη διαιρετότητα της ύλης. Πίστευε ότι η ύλη μπορούσε να χωριστεί σε απείρως όλο και μικρότερα μέρη, χωρίς ποτέ να εξαφανιστεί. Αυτή η ιδέα ήταν ένας πρόδρομος για την ανάπτυξη του λογισμού, ο οποίος αργότερα θα παρείχε ένα αυστηρό πλαίσιο για την έννοια του άπειρου.

(Ε. Σπανδάγος, Δ. Τραυλού, 2000)

1.7. *Ζήνων ο Ελεάτης*

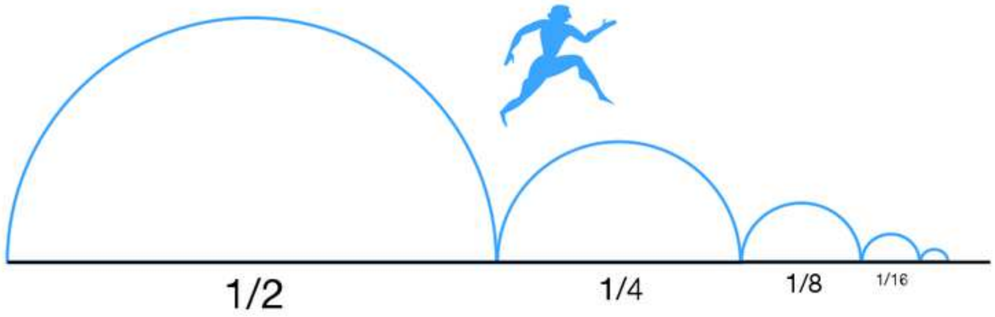
Ο Ζήνων ο Ελεάτης γεννήθηκε γύρω στο 488 π.Χ. στην Ελεά της Ιταλίας και πέθανε γύρω στο 425 π.Χ. στην ίδια πόλη. Ήταν ένας από τους αρχαίους Έλληνες προσωκρατικούς φιλοσόφους στην Κάτω Ιταλία και μέλος της Ελεατικής Σχολής που ίδρυσε ο Παρμενίδης.
Ο Αριστοτέλης τον αποκαλούσε εφευρέτη της διαλεκτικής μεθόδου, ενώ είναι γνωστός για τα παράδοξά του. Τα πιο γνωστά παράδοξα με τα οποία ασχολήθηκε ο Ζήνωνας είναι η διχοτομία, το στάδιο, το βέλος και φυσικά το διασημότερο να είναι το παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας (Maor, 2017).

Ο Ζήνων δημιούργησε τα παραπάνω παράδοξα με σκοπό να καταδείξει την αμφισημία της ανθρώπινης κατανόησης γύρω από αυτή την έννοια, αλλά και ότι η ανθρώπινη κατανόηση δεν μπορεί να περιγράψει πλήρως τη φύση του κόσμου και της πραγματικότητας με αποτέλεσμα πολλές φορές να οδηγεί σε αντιφατικά συμπεράσματα.

1.7.1. Η διχοτομία

Ο Ζήνων, για την μελέτη αυτών των παραδόξων, έφερε ένα παράδειγμα με έναν δρομέα που ξεκινώντας από την αφετηρία έχει σκοπό να φτάσει στον τερματισμό του στίβου. Ξεκινώντας λοιπόν ο δρομέας πρέπει πρώτα να φτάσει στην μέση της διαδρομής. Έπειτα πρέπει να φτάσει στο μέσο μεταξύ της μέσης της διαδρομής και του τέλους. Εν συνεχεία πρέπει να φτάσει στο μέσο μεταξύ του δεύτερου μέσου και του τέλους της διαδρομής κ.ο.κ.

Επομένως πρέπει να τρέξει άπειρες διαδρομές όσο ο χώρος διαιρείται σε μικρότερους υποχώρους. Συνεπώς ο δρομέας δεν θα τερματίσει ποτέ όσο μικρή και να είναι η απόσταση.



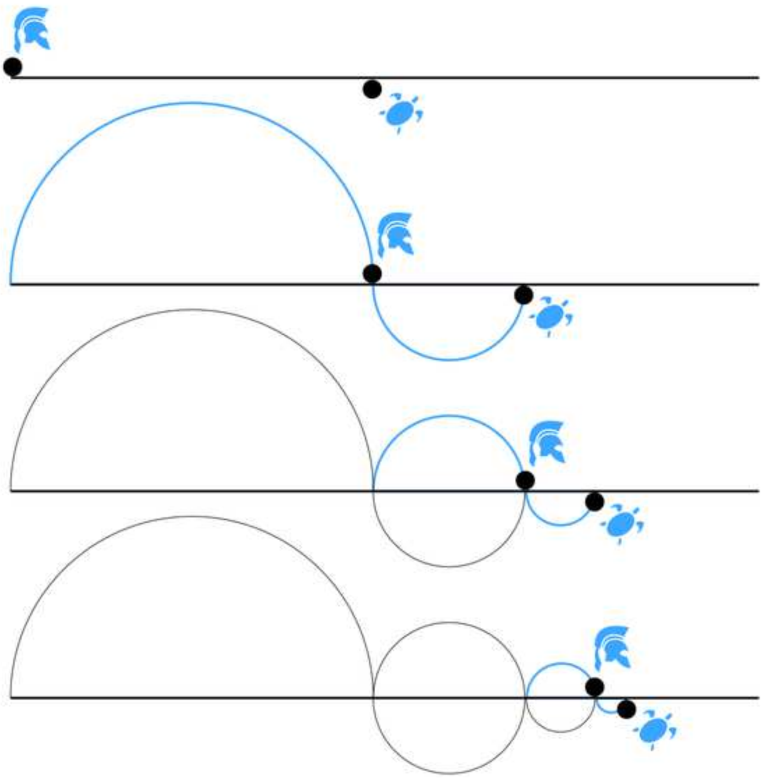
Εικόνα 1 - Ο δρομέας

1.7.2. Ο Αχιλλέας και η Χελώνα

Στην περίπτωση αυτού του παραδόξου, έχουμε δύο δρομείς: τον Αχιλλέα και την Χελώνα που συμμετέχουν σε έναν αγώνα δρόμου. Ο Αχιλλέας τρέχει γρήγορα και η χελώνα πιο αργά. Αφού η χελώνα είναι πιο αργή της χαρίζουμε ένα προβάδισμα. Για να καταφέρει ο Αχιλλέας να ξεπεράσει την χελώνα πρέπει πρώτα να φτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε η χελώνα. Αυτό δεν θα γίνει ποτέ όσο χελώνα προχωρά, και ας είναι αργή. Μέχρι να καλύψει ο Αχιλλέας την απόσταση αυτή η χελώνα θα έχει ήδη προχωρήσει λίγο πιο πέρα.

Έτσι στη συνέχεια ο Αχιλλέας θα πρέπει να καλύψει και αυτή την απόσταση έως δηλαδή την καινούργια θέση της χελώνας. Όμως μέχρι να γίνει αυτό, η χελώνα θα έχει διατρέξει και άλλη απόσταση. Επομένως μπορεί να γίνεται ολοένα και πιο μικρή η απόσταση που τους χωρίζει όμως ο Αχιλλέας δεν θα καταφέρει ποτέ να φτάσει την χελώνα, όσο η απόσταση μπορεί και υποδιαιρείται συνεχώς. Σύμφωνα λοιπόν με τον Ζήνωνα ένας αθλητής που ξεκινάει πρώτος είναι δεδομένο πως θα κερδίσει όποιοι και αν είναι οι αντίπαλοι του και όσο και να είναι η απόσταση που του χαρίστηκε στην αρχή.

Επομένως αφού η ύπαρξη της κίνησης οδηγεί σε τέτοιου είδους παράδοξα, είναι σωστό να θεωρήσουμε πως δεν υπάρχει. Αν κάποιος πιστεύει πως τα πράγματα γύρω του μεταβάλλονται τότε πρέπει να πιστέψει πως ο Αχιλλέας δεν θα καταφέρει να νικήσει την χελώνα. Άρα αφού με το να πιστεύει κάποιος στην κίνηση οδηγείται σε παραλογισμούς, είναι ορθό να πιστεύει ότι ο κόσμος είναι παντοτινά αμετάβλητος, όπως πιστεύει ο δάσκαλος του Ζήνωνα.

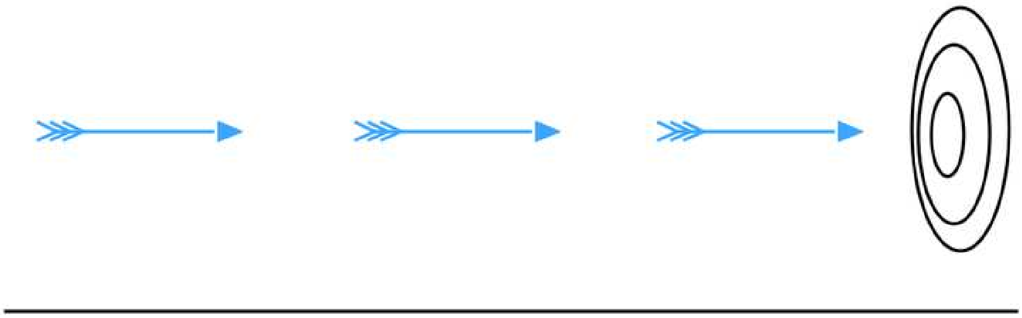


Εικόνα 2 - Ο Αχιλλέας και η χελώνα

1.7.3. Το βέλος

Το παράδοξο του βέλους ακολουθεί μια διαφορετική προσέγγιση και έρχεται για να αμφισβητήσει τη συνοχή των εννοιών της κοινής λογικής για το χρόνο και την κίνηση. Σκεφτείτε πως θα ξεχωρίζατε ένα βέλος που είναι ακίνητο στο διάστημα από ένα βέλος που πετά στο διάστημα, δεδομένου ότι κοιτάζετε ένα μόνο στιγμιότυπο τους.

Από την υπόθεση του Ζήνωνα ότι ο χρόνος αποτελείται από στιγμές, ένα κινούμενο βέλος πρέπει να καταλαμβάνει χώρο ίσο με τον εαυτό του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Δηλαδή σε κάθε αδιαίρετη στιγμή ή στιγμή που βρίσκεται στο σημείο που βρίσκεται. Όμως τα μέρη δεν κινούνται. Έτσι αν σε κάθε στιγμή το βέλος καταλαμβάνει χώρο ίσο με τον εαυτό του, τότε το βέλος δεν κινείται εκείνη τη στιγμή. Ο λόγος που δεν κινείται είναι πως δεν έχει χρόνο για να κινηθεί. Είναι απλά εκεί στο μέρος. Δεν μπορεί να κινηθεί κατά τη διάρκεια της στιγμής γιατί αυτή η κίνηση θα απαιτούσε μια ακόμη μικρότερη μονάδα χρόνου, αλλά η στιγμή είναι αδιαίρετη. Το ίδιο σκεπτικό ισχύει για οποιαδήποτε άλλη στιγμή κατά τη πτήση του βέλους. Επομένως το βέλος δεν κινείται ποτέ.



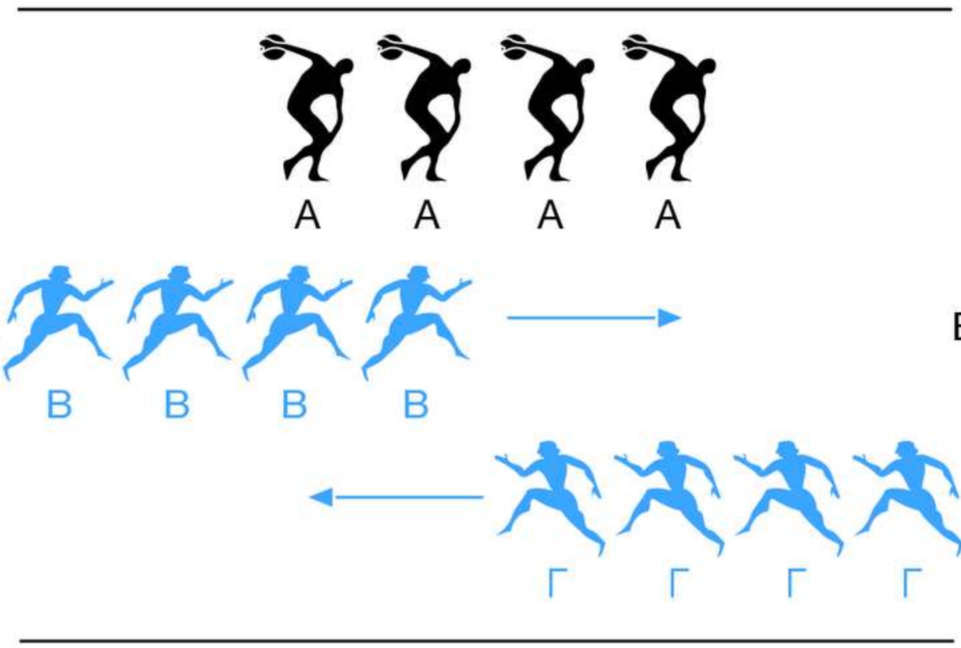
Εικόνα 3 - Το βέλος

1.7.4. Το στάδιο

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρεις κύβους σε σειρά ο ένας πίσω από τον άλλον και με ίδιες διαστάσεις. Έστω Α, Β, Γ και η πλευρά του καθενός είναι μήκους α. Ο ένας κύβος, έστω ο Β, βρίσκεται σε ηρεμία. Ο κύβος Α και ο Γ μετακινούνται δεξιά και αριστερά του Γ με την ίδια ταχύτητα. Ο κύβος Α μετακινείται αριστερά του κύβου Β κατά $\frac{\alpha}{2}$ απόσταση και ο κύβος Γ μετακινείται δεξιά του κύβου Β κατά $\frac{\alpha}{2}$ απόσταση. Επίσης στον ίδιο χρόνο ο κύβος Α έχει μετακινηθεί απόσταση α σε σχέση με τον κύβο Γ. Στον διπλάσιο χρόνο ο κύβος Α έχει μετακινηθεί απόσταση α από τον κύβο Β, το ίδιο και ο κύβος Γ. Επομένως σύμφωνα με τον Ζήνωνα σε ίσα σώματα που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσες ταχύτητες ο μισός χρόνος είναι ίσο με το διπλάσιο του.

Σύμφωνα λοιπόν με το παράδοξο του σταδίου έχουμε δύο αθλητές που τρέχουν ο ένας σε αντίθετη κατεύθυνση από τον άλλον με ίση ταχύτητα. Όταν αυτοί οι δύο αθλητές συναντηθούν νομίζουν ο καθένας πως ο άλλος τρέχει με μεγαλύτερη ταχύτητα. Αυτό ωστόσο δεν ισχύει για κάποιον ακίνητο άνθρωπο που βλέπει τους αθλητές να τρέχουν.

Άρα η ταχύτητα πλέον είναι σχετική και εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή σε σχέση με τον παρατηρούμενο.



Εικόνα 4 - Κίνηση και ταχύτητα

1.8. *Αριστοτέλης*

Ο Αριστοτέλης (384 - 322 π.Χ) είναι ένας από τους σημαντικότερους στοχαστές στην ιστορία της φιλοσοφίας. Τα έργα του για τη μεταφυσική, την ηθική, την πολιτική και πολλούς άλλους τομείς έχουν διαμορφώσει το πνευματικό τοπίο του δυτικού πολιτισμού. Ένα από τα θέματα που διερεύνησε ο Αριστοτέλης στη φιλοσοφία του ήταν η έννοια του άπειρου, την οποία προσέγγισε ποικιλοτρόπως σε όλα τα έργα του.

Στο έργο του «Τα Φυσικά», ο Αριστοτέλης διακρίνει αρχικά δύο τύπους απείρου: το πραγματικό άπειρο και το δυνητικό άπειρο. Το πραγματικό άπειρο αναφέρεται σε μια ποσότητα που είναι ατελείωτη και δεν μπορεί να μετρηθεί, όπως ο άπειρος χώρος και ο χρόνος. Το δυναμικό άπειρο, από την άλλη πλευρά, αναφέρεται σε μια ποσότητα που είναι απεριόριστα επεκτάσιμη, αλλά όχι πραγματικά άπειρη, όπως η άπειρη σειρά φυσικών αριθμών. Ο Αριστοτέλης υποστήριξε ότι το πραγματικό άπειρο είναι αδύνατο επειδή έρχεται σε αντίθεση με τις αρχές της θεωρίας του για την αιτιότητα. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία, κάθε αποτέλεσμα πρέπει να έχει μια αιτία και κάθε αιτία πρέπει να είναι πεπερασμένη και καθορισμένη. Εάν υπήρχε ένα πραγματικό άπειρο, τότε δεν θα ήταν δυνατό να προσδιοριστεί μια αιτία για κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα, γιατί θα υπήρχε πάντα ένας άπειρος αριθμός πιθανών αιτιών. Επομένως, ο Αριστοτέλης συμπέρανε ότι το πραγματικό άπειρο είναι μια λογική αντίφαση και δεν μπορεί να υπάρξει στον πραγματικό κόσμο.

Αποδέχεται λοιπόν την ιδέα του δυνητικού απείρου. Στην πραγματικότητα, πίστευε ότι η έννοια του δυνητικού απείρου είναι απαραίτητη για την κατανόηση της φύσης της πραγματικότητας. Ο Αριστοτέλης υποστήριξε ότι το σύμπαν είναι δυνητικά άπειρο, πράγμα που σημαίνει ότι μπορεί πάντα να επεκταθεί πέρα από τα σημερινά του όρια. Χρησιμοποίησε το παράδειγμα της άπειρης σειράς φυσικών αριθμών για να επεξηγήσει αυτή την έννοια. Αν και δεν υπάρχει πραγματικό τέλος σε αυτή τη σειρά, είναι πάντα δυνατό να προσθέσετε έναν ακόμα αριθμό σε αυτήν. Επομένως, ο Αριστοτέλης έβλεπε το δυνητικό άπειρο ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό του φυσικού κόσμου.

Οι απόψεις του Αριστοτέλη για το άπειρο είχαν σημαντικές επιπτώσεις στις μεταφυσικές θεωρίες του. Πίστευε ότι το σύμπαν αποτελείται από ουσίες που έχουν μια πεπερασμένη, καθορισμένη φύση. Αυτές οι ουσίες οργανώνονται σε μια ιεραρχία αιτιών και αποτελεσμάτων με κάθε επίπεδο αιτιώδους συνάφειας να βασίζεται στο προηγούμενο επίπεδο. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, η τελική αιτία του σύμπαντος είναι ένας αέναη κίνηση η οποία είναι αιώνια και αμετάβλητη. Η έννοια του απείρου αμφισβητεί αυτήν την ιεραρχική δομή, επειδή υπονοεί ότι δεν υπάρχει τελική αιτία ή τέλος στο σύμπαν. Εάν το σύμπαν είναι στην πραγματικότητα άπειρο, τότε δεν μπορεί να εξηγηθεί από μια μοναδική, τελική αιτία.

Παρά τις επικρίσεις του για το πραγματικό άπειρο, οι ιδέες του Αριστοτέλη για το δυνητικό άπειρο είχαν μόνιμη επίδραση στην ανάπτυξη των μαθηματικών και της φιλοσοφίας. Η διάκρισή του μεταξύ του πραγματικού και του δυνητικού άπειρου παρείχε ένα πλαίσιο για την κατανόηση της φύσης του απείρου, το οποίο βελτιώθηκε και επεκτάθηκε από μεταγενέστερους στοχαστές όπως ο Georg Cantor που ανέπτυξε τη σύγχρονη θεωρία των άπειρων συνόλων.

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ένα πράγμα μπορεί να είναι άπειρο είτε με πρόσθεση, είτε με διαίρεση. Σκεπτόμενοι τους αριθμούς αν ξεκινήσει κάποιος να μετράει δεν θα φτάσει ποτέ στο τέρμα αφού πάντα θα υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός από τον προηγούμενο. Επίσης, ο ίδιος αναφέρει ότι μπορούμε διαρκώς να διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε συνεχώς μικρότερα μεγέθη. (Cleary, 2016)

Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ο χρόνος είναι δυνητικά άπειρος, διαφορετικά όμως από ότι είναι ο χώρος. Ο χρόνος διαρκώς εξελίσσεται, δεν σταματά ποτέ. Για να καταλάβουμε τη σχέση του χώρου με τον χρόνο, ο Αριστοτέλης ισχυρίζεται ότι στο μισό χρόνο κάποιος που κινείται μπορεί να καλύψει τη μισή απόσταση. Δηλαδή σύμφωνα με τον Αριστοτέλη τα μεγέθη χώρος και χρόνος είναι ανάλογα, επομένως και συνεχή. Άρα αν ο χρόνος διαιρείται επ' άπειρον, θα διαιρείται και ο χώρος τότε (Theodossiou, et al., 2011).

Η έννοια του απείρου για τον Αριστοτέλη έρχεται σε πλήρη αντίθεση με την θέση του Ζήνωνα, σύμφωνα με την οποία σε πεπερασμένο χρόνο ένα κινητό μπορεί να βρίσκεται σε άπειρα σημεία. Ο Αριστοτέλης απέδειξε πως δεν μπορεί να υπάρχει ούτε κίνηση ούτε ακινησία σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, απλά ο χώρος και ο χρόνος μπορούν να διαιρούνται επ' άπειρον λόγω της συνέχειάς τους και καταλήγει στο συμπέρασμα πως δεν μπορεί να υπάρχει ούτε άπειρη κίνηση μέσα σε πεπερασμένο χρόνο.

Κατά τον Αριστοτέλη κύριο λάθος για το παράδοξο με το δρομέα είναι ότι η κίνηση δεν μπορεί να διαρκέσει άπειρο χρόνο όταν υφίσταται σε πεπερασμένο χώρο. Ο δρομέας σύμφωνα με το φιλόσοφο προφανώς και θα τερματίσει κάποια στιγμή. Όσο η ταχύτητα του είναι σταθερή, θα διανύει κάθε τμήμα της διαδρομής με σταθερό χρόνο. Άρα θα διανύσει τη μισή απόσταση στο μισό χρόνο και το 1/4 της απόστασης στο 1/4 του χρόνου. Αν ολοκληρώσει δηλαδή ολόκληρη την απόσταση σε ολόκληρο το χρόνο, τότε μέσα στο μισό χρόνο θα έχει διανύσει μικρότερο μέρος αυτής, μέσα στο μισό του μισού χρόνου (1/4) μικρότερο μέρος και ούτω καθεξής. Συνεπώς μέσα σε πεπερασμένο χρόνο μπορώ να καλύψω και πεπερασμένη απόσταση ακόμη και αν αυτή μπορεί να διαιρείται επ' άπειρον.

Στο παράδοξο με τον Αχιλλέα και την χελώνα το λάθος του είναι η παραδοχή του απείρου διαστήματος. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη ο Αχιλλέας θα φτάσει την χελώνα αφού είναι πιο γρήγορος και επομένως μέσα στον ίδιο χρόνο διανύει μεγαλύτερη απόσταση από ότι η διανύει η χελώνα.

Στο παράδοξο του βέλους ο χρόνος και ο χώρος διαιρούνται, λανθασμένα, σε άπειρα σημεία.

Τέλος στο παράδοξο του σταδίου, το λάθος του Ζήνωνα είναι πως συγκρίνει την σχετική ταχύτητα των αντίθετα κινούμενων ομάδων με την απόλυτη ταχύτητα μιας ομάδας από αυτές ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή.

Σε αντίθεση με την Ελεατική πεποίθηση και τα παράδοξα του Ζήνωνα που αναφέραμε παραπάνω, ο Αριστοτέλης στήριξε την αντίληψη για τον κόσμο στις αισθήσεις. Σύμφωνα με τον Σταγειρίτη φιλόσοφο, η αλλαγή και η κίνηση υπάρχει και με βάση τις αισθήσεις μας και την εμπιστοσύνη μας σ΄ αυτές αντιλαμβανόμαστε την πραγματικότητα και τις αλλαγές που συμβαίνουν. Γίνεται λοιπόν εύκολα αντιληπτό πως ο Αριστοτέλης ήρθε σε ξεκάθαρη αντιπαράθεση με τα παράδοξα του Ζήνωνα.

Συμπερασματικά, οι απόψεις του Αριστοτέλη για το άπειρο διαμορφώθηκαν από τη θεωρία του για την αιτιότητα και την πίστη του στην ιεραρχική δομή του σύμπαντος δηλαδή ότι είναι πεπερασμένο και δεν δημιουργήθηκε από το άπειρο. Ενώ απέρριψε το πραγματικό άπειρο ως λογική αντίφαση, αναγνώρισε τη σημασία του δυνητικού απείρου για την κατανόηση της φύσης της πραγματικότητας.

Η διάκριση του Αριστοτέλη σχετικά με τα αν υπάρχουν άπειρες ποσότητες, τις οποίες συναντούμε κυρίως στα Φυσικά, αποτελούν ένα ισχυρό δεδομένο για την ιστορία της επιστήμης και της φιλοσοφίας και η θεμελιώδης σημασία τούς και η συνεχής επίδρασή τους στα ρεύματα της φιλοσοφικής σκέψεως, τις καθιστούν σημείο αναφοράς σε κάθε προσπάθεια μελέτης των σχετικών δογμάτων και προβλημάτων σε οποιοδήποτε φιλοσοφικό σύστημα.

1.9. *Πρόκλος ο Διάδοχος*

Ο Πρόκλος ο Λύκιος ή Διάδοχος (412 – 485 μ.Χ.) ήταν νεοπλατωνικός φιλόσοφος, ένας από τους τελευταίους σημαντικότερους κλασικούς φιλοσόφους. Εξετάζοντας την σχέση απειρίας και υπάρξεως όπως συναντάται στην φιλοσοφία του Πρόκλου, διαπιστώνούμε ότι οι ιδέες του αντλούνται κατά το κύριο μέρος από τον Αριστοτέλη.

Κατ' αρχήν πρέπει να πούμε ότι κατά τον Πρόκλο το άπειρο ή απειρία είναι Ενάδα η οποια ταυτίζεται με την Πρώτιστη των δυνάμεων. Το άπειρο ως Ενάδα λοιπόν υφίσταται στον χώρο του μη όντος, με την έννοια ότι προηγείται οντολογικά της υπάρξεως.

Ο Πρόκλος θεωρεί ότι το κατηγόρημα άπειρος αποδίδεται σε τρεις κατηγορίες υποστάσεων:

i. στην δύναμη,

ii. στο πλήθος,

iii. στο μέγεθος.

Τα δύο τελευταία αποτελούν τα δύο στοιχεία στα οποία αναφέρεται η αριστοτελική κατηγορία ποσό. Το πλήθος είναι η ονομασία του αριθμητού ποσού ενώ το μέγεθος είναι η ονομασία του μετρητού ποσού, δηλαδή εκείνου το οποίο σε σύγχρονη γλώσσα θα ονομάζαμε συνεχές ποσό.

Συνεπώς πλήθος είναι κάθε κλάση στοιχείων «διατακτικά ισόμορφη» προς την

δομή (ν, <), όπού ν πεπερασμένο υποσύναλο του συνόλου των φυσικών αριθμών εφοδιασμένων με την γραμμική διάταξη.

Προφανώς το πλήθος επιδέχεται διαίρεση σε συνεχή τμήματα και είναι φανερό ότι το σύνολο των τομών τις οποίες επιδέχεται μπορεί να καταστεί «διατακτικά ισόμορφο» προς την δομή (R, <) του συνόλού των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένων με την «φυσική» διάταξη. Οι δομές (ν, <) καί (R, <) αποτελούν μαθηματικά πρότυπα, τα οποία ερμηνεύούν την «γλώσσα» του Αριστοτέλη σχετικά προς το ποσό.

Ως προς τη δύναμη, η φύση της και η φύση της απειρίας ταυτίζονται, εφ' όσον ο Πρόκλος θεωρεί ότι οι έννοιες Πρώτιστη δύναμη και Ενάδα άπειρο είναι ταυτόσημες. Κατά τον Πρόκλο δεν υφίσταται άπειρο μέγεθος (χωρικά). Ο ίδιος ανάγει την θέση αυτή στον Αριστοτέλη ο οποίος, όπως υποστηρίζει, έδειξε ότι δεν υπάρχει κανένα μέγεθος άπειρο ως προς οποιαδήποτε διάσταση. Ως άπειρο κατά το ποσόν πλήθος εννοεί ένα σύνολο διατεταγμένων στοιχείων στο οποίο δεν υπάρχει:

- πρώτο ή

- τελευταίο στοιχείο ή

- και πρώτο και τελευταίο στοιχείο.

Η θεώρηση του Πρόκλου περί απείρου πλήθους εμπεριέχει την απάντηση των νεοπλατωνικών στο ερώτημα σχετικά με την ύπαρξη ή όχι απείρου πολλαπλότητας. Στα πλαίσια του συστήματος του Πρόκλου γίνεται αποδεκτό το άπειρο σε πλήθος, αναφερόμενο όχι στο ποσό (την πληθικότητά του) αλλά στην παραγωγική του ικανότητα. Παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η παραβολή αυτής της θέσεως με τις θεωρήσεις των μαθηματικών σχετικά με την ύπαρξη άπειρων συνόλων και με σημαντικότερη την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων κατά Zermelo – Frankel.

(Δέμης Απόστολος, 1988)

1.10. *Ευκλείδης*

Το έργο του Ευκλείδη (323 - 285 π.Χ) για το άπειρο είναι σημαντικό γιατί καταδεικνύει πώς το άπειρο κατανοήθηκε και χρησιμοποιήθηκε στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά. Ειδικότερα, η εξερεύνηση του δυνητικού απείρου από τον Ευκλείδη και η απόδειξή του για το άπειρο των πρώτων αριθμών βοήθησαν να τεθούν τα θεμέλια για μεταγενέστερες εξελίξεις στον λογισμό και τη θεωρία αριθμών. Συγκεκριμένα στα "Στοιχεία" αναφέρει:

"Οι πρώτοι αριθμοί πλείους εισί παντός του προτεθέντος πλήθους πρώτων αριθμών",

δηλαδή ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. Ο Ευκλείδης υπέθεσε ότι αν υπήρχε μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός πρώτων αριθμών θα οδηγούσε σε άτοπο. Ενέπνευσε μεταγενέστερους μαθηματικούς να εξερευνήσουν τις ιδιότητες των πρώτων αριθμών με περισσότερες λεπτομέρειες, οδηγώντας στην ανάπτυξη της θεωρίας αριθμών ως πεδίο μελέτης. Σήμερα, η μελέτη των πρώτων αριθμών παραμένει ένας ενεργός τομέας έρευνας και οι ιδιότητές τους έχουν σημαντικές εφαρμογές στην κρυπτογραφία και την επιστήμη των υπολογιστών.

Το αποτελέσματα του Ευκλείδη θεωρούνται αριστουργήματα για την θεωρητική μαθηματική σκέψη. Ο G. Hardy (1877-1947) έγραψε ότι "… είναι τόσο σύγχρονα και σημαντικά όπως και όταν ανακαλυφθηκαν εδώ και 2000 χρόνια ".

Το έργο του Ευκλείδη για το δυνητικό άπειρο, που είναι η ιδέα ότι μια διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ' αόριστον χωρίς να φτάσει ποτέ στην πραγματικότητα στο άπειρο, ήταν πρωτοποριακή για την εποχή της. Έδειξε ότι υπήρχαν ορισμένες ακολουθίες, όπως η σειρά των τετραγώνων αριθμών, που ήταν δυνητικά άπειρες. Αυτή η έννοια ήταν ένας κρίσιμος πρόδρομος της ιδέας των ορίων, η οποία είναι θεμελιώδης για τον σύγχρονο λογισμό. Χωρίς το έργο του Ευκλείδη για το δυνητικό άπειρο, ο λογισμός δεν θα ήταν δυνατός.

Οι συνεισφορές του Ευκλείδη στην εξερεύνηση του απείρου ήταν σημαντικές όχι μόνο λόγω της μαθηματικής τους σημασίας, αλλά και επειδή παρείχαν ένα πλαίσιο για την κατανόηση της ίδιας της φύσης του απείρου. Το έργο του Ευκλείδη απέδειξε ότι το άπειρο δεν ήταν απλώς μια φιλοσοφική έννοια, αλλά μια μαθηματική που μπορούσε να εξερευνηθεί και να κατανοηθεί μέσω αυστηρής απόδειξης και ανάλυσης.

Συμπερασματικά, το έργο του Ευκλείδη για το άπειρο ήταν κρίσιμο για την ανάπτυξη των μαθηματικών. Η εξερεύνηση του δυνητικού άπειρου και η απόδειξή του για το άπειρο των πρώτων αριθμών βοήθησαν να τεθούν τα θεμέλια για μεταγενέστερες εξελίξεις στον λογισμό και τη θεωρία αριθμών και οι ιδέες του βοήθησαν να δοθεί ένα πλαίσιο για την κατανόηση της ίδιας της φύσης του απείρου. Οι ιδέες του βοήθησαν να τεθούν τα θεμέλια για μεταγενέστερες εξελίξεις στα μαθηματικά, και η επιρροή του μπορεί να γίνει αισθητή έως και σήμερα.. *(Fitzpatrick, Euclid Elements, 2008)*

1.11. *Αρχιμήδης*

Ο Αρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) , όπως και ο Ευκλείδης, συνέβαλε σημαντικά στην εξερεύνηση του απείρου. Οι εργασίες του Αρχιμήδη κατέδειξαν ότι το άπειρο είναι μια μαθηματική έννοια που μπορούσε να εξερευνηθεί μέσω αυστηρής απόδειξης και ανάλυσης, και όχι απλώς μια φιλοσοφική έννοια. Οι ιδέες του αποτέλεσαν ισχυρή επιρροή για τα σύγχρονα μαθηματικά.

Το έργο του Αρχιμήδη για το άπειρο επεκτάθηκε και στη θεωρία αριθμών. Ερεύνησε τις ιδιότητες των μεγάλων αριθμών, αλλά και με το πλήθος των πρώτων αριθμών. Όπως και ο Ευκλείδης, έτσι και ο Αρχιμήδης έδειξε ότι ο αριθμός των πρώτων αριθμών είναι άπειρος και ανέπτυξε διάφορες μεθόδους για την εύρεση πρώτων αριθμών.

Μια από τις πιο διάσημες συνεισφορές του Αρχιμήδη στην εξερεύνηση του απείρου είναι η μέθοδος εξάντλησής του. Αυτή η μέθοδος περιλαμβάνει την προσέγγιση του εμβαδού ή του όγκου ενός γεωμετρικού σχήματος διαιρώντας το σε όλο και μικρότερα κομμάτια και στη συνέχεια αθροίζοντας τα εμβαδά ή τους όγκους αυτών των κομματιών. Κάνοντας τα κομμάτια όλο και μικρότερα, καθίσταται δυνατό να πλησιάσουμε αυθαίρετα την πραγματική επιφάνεια ή τον όγκο του σχήματος.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο εξάντλησής του για να βρει το εμβαδόν και τον όγκο πολλών γεωμετρικών σχημάτων, συμπεριλαμβανομένου του κύκλου και της σφαίρας. Με αυτόν τον τρόπο, αποδέχθηκε την έννοια του δυνητικού άπειρου και έδειξε ότι αν και ο κύκλος και η σφαίρα είναι θεωρητικά άπειρα, τα εμβαδά και οι όγκοι τους μπορούσαν να προσεγγιστούν σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας μέσω της μεθόδου εξάντλησής του.

“Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not.”

G. H. Hardy - A Mathematician's Apology (London 1941).

2. Το άπειρο στους πρόποδες των γεωμετρικών κατασκευών

2.1. *Οι τετραγωνισμοί και η μέθοδος της εξάντλησης*

Πολλά προβλήματα γεωμετρικής φύσεως απασχόλησαν στην αρχαιότητα μαθηματικούς και μη και οι τεχνικές που εφαρμόστηκαν, αλλά και τα συμπεράσματα αυτών, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ανήκουν στην προϊστορία του απειροστικού λογισμού.

Ονομαστικά, κάποια από τα πιο δημοφιλή προβλήματα όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου (Δήλιο πρόβλημα) και η τριχοτόμηση της γωνίας, ήρθαν σε σύγκρουση με την ύπαρξη των μη υπερβατικών αριθμών. Χρειάστηκαν να περάσουν δεκάδες αιώνες έως ότου ο F. Lindemann το 1882 αποδείξει ότι ο αριθμός π είναι μη υπερβατικός και κατ' επέκταση να επιβεβαιωθεί ότι η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δεν είναι πανάκεια για οποιοδήποτε πρόβλημα.

Εντούτοις, στην αρχαιότητα η κατασκευαστική ταύτιση της επιφάνειας του εμβαδού με την επιφάνεια ενός τετραγώνου, ήτοι τετραγωνισμός, ήταν μια πρόκληση και συγχρόνως συνέλαβε στην σύλληψη της ιδέας του διαμερισμού των επιφανειών, όπως πολύ αργότερα εφαρμόστηκε για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Και αν οι τετραγωνισμοί των μηνίσκων του Ιπποκράτη του Χίου είχαν από τον ίδιο μια καθαρά γεωμετρική αντιμετώπιση, βλέπουμε ότι ο σοφιστής Αντιφών (420 π.Χ.), ο οποίος ασχολήθηκε με τον τετραγωνισμό του κύκλου, δημιουργεί έναν αλγόριθμο άπειρων βημάτων ώστε να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, εγγράφοντας σε αυτόν κανονικά πολύγωνα και διπλασιάζοντας διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους.

Κάνοντας ένα βήμα πιο πέρα στο σκεπτικό του Αντιφώντος, ο Εύδοξος (408 – 355 π.Χ.) κατά βάση και στη συνέχεια ο Αρχιμήδης (287–212 π.Χ.) αναπτύσσουν την «μέθοδο της εξάντλησης». Ενδεικτικά, κάποιες προτάσεις που ο Αρχιμήδης και ο Ευκλείδης (325–270 π.Χ.) απέδειξαν χρησιμοποιώντας την «μέθοδο της εξάντλησης» είναι οι παρακάτω:

- Το εμβαδόν των κύκλων είναι ανάλογο με το τετράγωνο των διαμέτρων τους.
- Οι όγκοι δύο τετράεδρων του ίδιου ύψους είναι ανάλογοι με τις περιοχές των τριγωνικών βάσεών τους.
- Ο όγκος ενός κώνου είναι το ένα τρίτο του όγκου του αντίστοιχου κυλίνδρου που έχει την ίδια βάση και ύψος.
- το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ μιας παραβολής και μιας τέμνουσας αυτής.
- το εμβαδόν μιας έλλειψης.

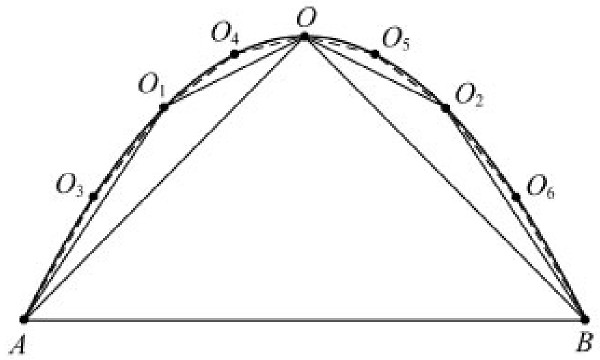
- τον όγκο μιας σφαίρας.
- τον όγκο ενός κυλίνδρου που έχει ύψος ίσο με τη διάμετρό του.
- το αποτέλεσμα μιας άπειρης γεωμετρικής σειράς.
  (Γ. Μπάντες Α.Π.Θ.)

Η βασική ιδέα πίσω από την «μέθοδο της εξάντλησης» βρίσκεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη (Βιβλίο Χ) και είναι το παρακάτω λήμμα:

"Αν αφαιρέσουμε επανειλημμένα από μια ποσότητα περισσότερο από το μισό της, τότε η ποσότητα που απομένει θα είναι τελικά μικρότερη από οποιαδήποτε προκαθορισμένη τιμή."

Σύμφωνα με το λήμμα αυτό, μπορούμε να προσεγγίσουμε την ζητούμενη περιοχή μέσω μιας ακολουθίας εγγεγραμμένων σχημάτων που «εξαντλούν» την περιοχή αυτή έτσι ώστε, η διαφορά μεταξύ του αρχικού σχήματος και των εγγεγραμμένων σχημάτων να μειώνεται κατά τουλάχιστον το μισό σε κάθε βήμα της ακολουθίας. Με λίγα λόγια, η σειρά που δημιουργείται από τις περιοχές των εγγεγραμμένων σχημάτων θα συγκλίνει στην ζητούμενη περιοχή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο τρόπος με τον οποίο ο Αρχιμήδης «εξάντλησε» την παραβολή χρησιμοποιώντας μια ακολουθία τριγώνων, αποδεικνύοντας έτσι πως το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου που έχει την ίδια βάση και την ίδια κορυφή με αυτό. Στο ιστορικό σημείωμα (σελ. 242 - 243) του σχολικού εγχειριδίου των Μαθηματικών προσανατολισμού Γ' Λυκείου (εκδ. 2020) αναφέρονται τα εξής:

«…Έστω το παρακάτω παραβολικό χωρίο με βάση ΑΒ και κορυφή Ο, όπου Ο είναι το σημείο της παραβολής που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση ΑΒ.



Εικόνα 5. Μέθοδος εξάντλησης

Ο Αρχιμήδης, φέρνοντας τις χορδές ΟΑ και ΟΒ, δημιουργεί δυο νέα παραβολικά χωρία με βάσεις ΟΑ, ΟΒ και κορυφές O_1, O_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, αποδεικνύει ότι για τα εμβαδά των τριών τριγώνων OAB, O_1AO και O_2BO ισχύει η σχέση

$$(OAB) = 4[(O_1AO) + (O_2BO)].$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία στα νέα παραβολικά χωρία, βρίσκει ότι

$$(O_1AO) = 4[(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] \quad \text{και} \quad (O_2BO) = 4[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)]$$

Με τον τρόπο αυτό, το εμβαδόν Ε του παραβολικού χωρίου μπορεί να προσεγγιστεί (“εξαντληθεί”) από ένα άπειρο άθροισμα εμβαδών εγγεγραμμένων τριγώνων ως εξής:

$$\begin{aligned}
E &= (OAB) + [(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] + [(OAO_1) + (O_4O_1O)] + [(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] + \cdots \\
&= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}(O_1AO) + \frac{1}{4}(O_2BO) + \cdots \\
&= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (OAB) + \cdots
\end{aligned}$$

Όπως είναι φανερό, πρόκειται για το άθροισμα των (άπειρων) όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha = (OAB)$ και λόγο $\lambda = \frac{1}{4}$, επομένως θα ισούται με:

$$\frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{(OAB)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(OAB).\blacksquare\ldots»$$

Ο Αρχιμήδης, στην πραγματικότητα εργάστηκε λίγο διαφορετικά αποφεύγοντας, όπως και γενικά προκύπτει από τα έργα του, την αναφορά στο άπειρο και χρησιμοποίησε πεπερασμένο πλήθος όρων του παραπάνω αθροίσματος. Απέδειξε έτσι ότι το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $\frac{4}{3}(OAB)$, αποκλείοντας με απαγωγή σε άτοπο (ad absurdum) τις περιπτώσεις να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από αυτό.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πράγματι ότι η «μέθοδος της εξάντλησης» των αρχαίων Ελλήνων πλησίασε την έννοια του ορίου και του σύγχρονου λογισμού, αλλά στην γεωμετρική της εκδοχή, μιας και το αριθμητικό άπειρο ήταν μη αποδεκτό εκείνη την εποχή.

2.2. *Από τον Αριστοτέλη και τον Αρχιμήδη στη Δύση*

Στη Δύση μέχρι και τον 12ο αιώνα, τα μαθηματικά βρίσκονταν σχεδόν στο περιθώριο. Τα φιλοσοφικά κείμενα του Αριστοτέλη σίγουρα συντέλεσαν στο να διατηρηθεί αναμμένη η φλόγα που φώτιζε τον μαθηματικό κόσμο και γενικά η συνεισφορά του σε διάφορες επιστήμες είναι αδιαμφισβήτητη. Χαρακτηριστική για τη συνέχεια ωστόσο, είναι η θέση του A. Meier σύμφωνα με την οποία, η ιστορία των θετικών επιστημών στην Ευρώπη από τον 13^{ο} αιώνα μέχρι και τον 18^{ο} αιώνα δεν είναι παρά η ιστορία της σταδιακής ανατροπής της Αριστοτέλειας φιλοσοφίας. Ως γνωστόν ο Αριστοτέλης επηρέασε βαθύτατα τη φιλοσοφική και επιστημονική σκέψη, αλλά ασχολήθηκε ενεργά και με άλλες επιστήμες, όπως για παράδειγμα η Γενετική (ο Δαρβίνος τον αναγνώρισε ως τον σπουδαιότερο βιολόγο που υπήρξε ποτέ). Επομένως για τον Αριστοτέλη, τα μαθηματικά δεν ήταν το μοναδικό του πεδίο ενδιαφέροντος, αλλά ενημερωνόταν επαρκώς για τα δρώμενα της αυτής επιστήμης και μπορούσε να παρεμβαίνει και να έχει άποψη επ' αυτών. Ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την έννοια του απείρου και προσπάθησε να αποσαφηνίσει το διακριτό από το συνεχές. Έθεσε σε αμφισβήτηση τα επιχειρήματα του Ζήνωνος που προσπαθούσε όπως είδαμε μέσα από τα παράδοξά του, να θίξει θεμελιώδεις έννοιες και αναγνώρισε ότι η έννοια του απείρου είναι βαθύτερη από όσο νόμιζε ο Ζήνων *(R. McKirahan - Aristotle and mathematics).*

Παράλληλα, οι σταδιακές, μέσα στους αιώνες, μεταφράσεις των έργων του Αρχιμήδη (σημ. λιγότερα από τα μισά του έργα έχουν διασωθεί.), όπως από τον G. Moerbeke τον 13^{ο} αιώνα και τον F. Commandino τον 16^{ο} αιώνα, θα ωθήσουν πολλούς μαθηματικούς και μηχανικούς από τον 16^{ο} αιώνα και μετά, να εφαρμόσουν τις μεθόδους του Αρχιμήδη στην κατασκευή ναών, μνημείων, στον υπολογισμό εμβαδών και όγκων σχημάτων αλλά και του κέντρου βάρους και της στατικής αυτών. Πράγματι, σύμφωνα με τον ιστορικό Rene Taton «… η κατανόηση του Αρχιμήδη προϋπέθετε μια πρότερη γνώση μαθηματικής παιδείας, η οποία σταδιακά θα αποκτηθεί μόνο κατά τον $16^{\text{ο}}$ αιώνα και συγκεκριμένα με την εξέλιξη της τυπογραφίας, τα έργα του μεγάλου Συρακούσιου θα αποτελέσουν αντικείμενα βαθύτερης μελέτης…». Γενικά, η συνεισφορά του Αρχιμήδη ήταν τεράστια ως προς την ουσιαστική μεταφορά του θεωρητικού υποβάθρου των μαθηματικών στο εφαρμοσμένο, αλλά συγχρόνως και την μύηση του Δυτικού κόσμου σε έναν εφαρμοσμένο τρόπο σκέψης.

Ενδεικτική είναι και η δήλωση της ομάδας N. Bourbaki: «Στα κείμενα των ιδρυτών του απειροστικού λογισμού μέχρι το 1670 ένα όνομα εμφανίζεται ασταμάτητα, το όνομα του Αρχιμήδη. Πολλοί τον μεταφράζουν και τον σχολιάζουν, όλοι, από τον Fermat μέχρι και τον Barrow, τον αναφέρουν ζηλεύοντάς τον, και όλοι δηλώνουν ότι στα έργα του βρίσκουν ένα πρότυπο και μια πηγή έμπνευσης». *(Χ. Φίλη)*

2.3. *Το άπειρο μέσα από την έννοια του ορίου*

Είδαμε ότι οι Αρχαίοι Έλληνες, ενώ μέσα από τις γεωμετρικές τους κατασκευές πραγματεύτηκαν την έννοια του απείρου, δεν κατάφεραν να απομονώσουν αυτή του ορίου, έννοιες που φυσικά είναι άρρηκτα συνδεδεμένες. Την έννοια του ορίου θα πλησιάσει όσο κανένας άλλος, μέχρι την εποχή εκείνη, ο (Φλαμανδός) μηχανικός Simon Stevin (1548–1620) . Ο Stevin έχει ήδη επηρεαστεί από τα έργα του Αρχιμήδη και προσπαθεί να απλοποιήσει τις μεθόδους του. Στο δεύτερο βιβλίο του περί Μηχανικής εφαρμόζει μια διαδικασία εγγραφής παραλληλογράμων σε τρίγωνο, προκειμένου να αποδείξει ότι κέντρο βάρους του τριγώνου βρίσκεται πάνω στη διάμεσό του και στη συνέχεια με ανάλογο τρόπο εξετάζει το κέντρο βάρους ενός κωνοειδούς τμήματος. Στις παραπάνω εργασίες πλησιάζει την έννοια του ορίου χωρίς να την κατανομάζει. Πλησιάζει ακόμα περισσότερο όμως, όταν στο έργο του *Υδροστατική*, θέλοντας να υπολογίσει την πίεση που ασκείται σε έναν τοίχο, τον διαμερίζει σε λωρίδες και καταλήγει ότι η πίεση P που δέχεται ο τοίχος πλησιάζει όσο θέλουμε τον αριθμό $\frac{1}{2}$, αυξάνοντας απεριόριστα των αριθμό n των λωρίδων αυτών. Με σύγχρονο συμβολισμό μας δείχνει ότι $\lim_{n\to\infty} P = \frac{1}{2}$.

Στο ίδιο πνεύμα με τον Stevin κινείται και ο Ιταλός Luca Valerio (1552 – 1618) στο έργο του *Για το κέντρο βάρους των στερεών* (1604).

Αυτός όμως που θα εισάγει αρχικά και ξεκάθαρα την έννοια του ορίου είναι ο επίσης Φλαμανδός Gregory St. Vincent (1584 – 1667) . Οι πρώτες εργασίες του G. Vincent είχαν να κάνουν με την αντανάκλαση και τη διάθλαση του φωτός. Ένα από τα προβλήματα που ανέκυψαν ήταν η ανάγκη για την τριχοτόμηση μιας γωνίας. Αναζητώντας τρόπους για να τριχοτομήσει μια γωνία λοιπόν κάποια στιγμή καταλήγει μπροστά στη σειρά $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ \dots$. Οι υπολογισμοί μέσω των τεχνικών που ανέπτυξε, του έδειξαν ότι η σειρά αυτή ισούται με $\frac{2}{3}$. Τότε G. Vincent δέχεται για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, την ύπαρξη ενός ορίου. Ενώ σύμφωνα με τον Ευκλείδη όπως είδαμε και στην μέθοδο της «εξάντλησης», η επανειλημμένη αφαίρεση από μια ποσότητα περισσότερο από το μισό της, θα μας δώσει μια ποσότητα μικρότερη τελικά από οποιαδήποτε προκαθορισμένη τιμή, ο G. Vincent προχωρά ακόμα πιο πέρα και γράφει ότι η ποσότητα αυτή τελικά θα εξαντληθεί *(Ad Meskens, Gregory of Saint Vincent: A Pioneer of the Calculus - 1994).*

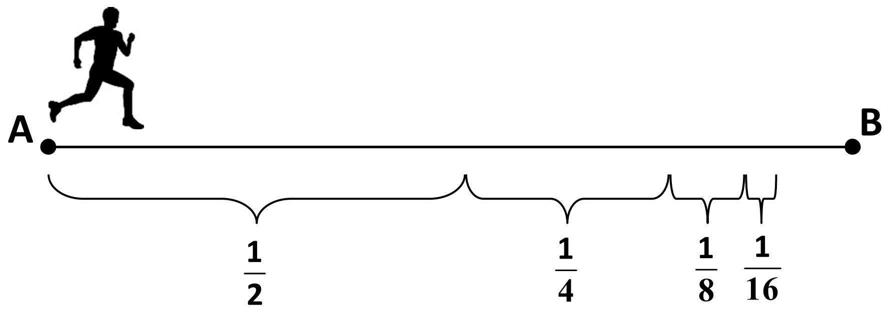
Στη συνέχεια (1647) ο G. Vincent ολοκληρώνει μια συλλογή έργων 1200 σελίδων, με την ονομασία *Opus geometricum* και η οποία αντιμετωπίζεται με καχυποψία, όταν το 1651 ο Christiaan Huygens εντοπίζει λάθη στην απόδειξη του πρώτου για τον τετραγωνισμό του κύκλου (quadraturae circuli). Εντούτοις, στο *Opus geometricum*, ο G. Vincent αναλύει πολλά θέματα συμπεριλαμβανομένων της μελέτης κύκλων, τριγώνων, γεωμετρικών σειρών, ελλείψεων , παραβολών και υπερβολών, αλλά και της μεθόδου του τετραγωνισμού, που όμως ο ίδιος ανακάλυψε ανεξάρτητα. Επίσης εφαρμόζει τις μεθόδους που έχει αναπτύξει για τον υπολογισμό των γεωμετρικών σειρών σε ενδιαφέροντα προβλήματα, όπως την τριχοτόμηση μιας γωνίας που αναφέρθηκε, αλλά και στο παράδοξο του Ζήνωνα με τον Αχιλλέα και τη χελώνα. Η προσέγγισή του για το όριο μιας γεωμετρικής προόδου είναι χαρακτηριστική: *Το όριο μιας γεωμετρικής προόδου είναι το τέλος μιας σειράς, την οποία καμία πρόοδος δεν φτάνει, ακόμα και αν την συνεχίσουμε μέχρι το άπειρο, αλλά που μπορεί να πλησιάσει πιο κοντά από κάθε δοσμένο διάστημα.*

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε τα λόγια του G. Vincent και να δούμε πως και εάν ερμηνεύονται με τη βοήθεια των σειρών κάποια χαρακτηριστικά παράδοξα.

3. Το άπειρο μέσα από τις σειρές

3.1 Ο δρομέας: Μια προσέγγιση με τη βοήθεια σειρών

Πράγματι όπως αναφέρθηκε ήδη, σύμφωνα με τον Ζήνωνα, ο δρομέας δεν θα καταφέρει ποτέ να μεταβεί από το σημείο Α στο σημείο Β μιας και πρέπει να περατώσει έναν άπειρο αριθμό βημάτων σε πεπερασμένο χρόνο.



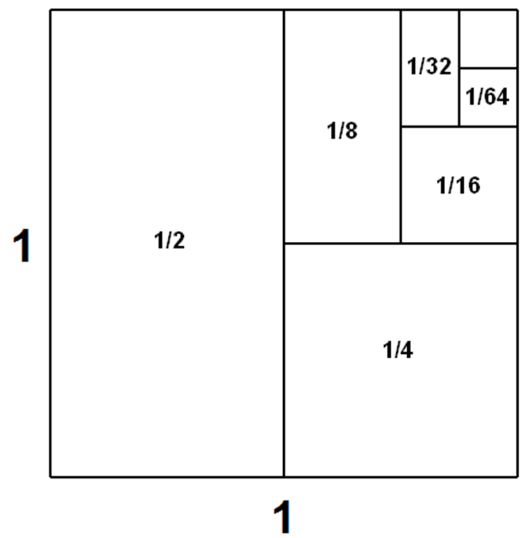
Εικόνα 6. Ο δρομέας

Ο παραπάνω συλλογισμός μας οδηγεί στην γεωμετρική σειρά $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots$. Γνωρίζουμε όμως ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο r, δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{r^\nu - 1}{r-1}$, με $|r|<1$.

Ισοδύναμα, ο παραπάνω τύπος γράφεται $S_\nu = \frac{\alpha_1 r^\nu}{r-1} - \frac{\alpha_1}{r-1}$. Θεωρώντας ότι $\nu \to \infty$, έχουμε ότι $\frac{\alpha_1 r^\nu}{r-1} \to 0$ και επομένως το άπειρο άθροισμα των όρων της παραπάνω γεωμετρικής προόδου θα είναι $S_\infty = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 1$, που εκφράζει ως αποτέλεσμα ολόκληρη την διαδρομή ΑΒ. Επομένως, όπως συνάδει και με την εμπειρία μας, ο δρομέας θα καταφέρει να ολοκληρώσει την διαδρομή ΑΒ.

Μια γεωμετρική ερμηνεία της σύγκλισης της σειράς $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ \dots$, άρα και απόρριψης του ισχυρισμού του Ζήνωνα είναι η παρακάτω:

Σε ένα τετράγωνο πλευράς 1 και εμβαδού 1, χωρίζοντάς το επανειλημμένα στη μέση, καταφέρνουμε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία παραλληλογράμμων με εμβαδά ίσα με $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots,$ που στο σύνολό τους καλύπτουν ολόκληρη την επιφάνεια του αρχικού τετραγώνου.



Εικόνα 7. Το τετράγωνο

3.2 Η σειρά του Grandi

Ο Ιταλός Luigi Guido Grandi (1671 - 1742), είχε αρκετές ιδιότητες, αφού ήταν μοναχός, θεολόγος, φιλόσοφος, μαθηματικός και μηχανικός. Ο ίδιος το 1703 παρατήρησε ότι, χωρίζοντας την άπειρη σειρά

$$1-1+1-1+\ \ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}$$

με παρενθέσεις κατά διαφορετικό τρόπο, λάμβανε και διαφορετικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, η σειρά μπορεί να γραφτεί ως:

- $(1-1)+(1-1)+\ \ldots=0,$ αλλά και
- $1+(-1+1)+(-1+1)+\ \ldots=1,$ αποτελέσματα που από μόνα τους ενέχουν μια γνωστική ασυμφωνία.

Ο Grandi στην προσπάθειά του να καταλήξει σε ένα ασφαλές συμπέρασμα, στο βιβλίο του *Quadratura circuli, et hyperbolae per infinitas hyperbolas, & parabolas quadrabiles geometricè exhibita, & demonstrata (1703)* χρησιμοποιεί το παρακάτω ανάπτυγμα (Taylor):

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ \ldots$$

καταλήγοντας στο αποτέλεσμα $\frac{1}{2}$ για $x=1$. Μάλιστα, ισχυρίστηκε ότι αφού το άθροισμα αυτό ισούται συγχρόνως με 0 και $\frac{1}{2}$, μπορούμε να δημιουργήσουμε τον κόσμο από το τίποτα! Για να ενισχύσει το αποτέλεσμά του έδωσε ένα παράδειγμα τόσο στη δεύτερη έκδοση του *Quadratura circuli* όσο και στο *De Infinitis infinitorum, et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica (1710)* . «Δύο αδέρφια κληρονομούν ένα ανεκτίμητο διαμάντι από τον πατέρα τους και η θέλησή του είναι να μην το πουλήσουν ποτέ. Έτσι συμφωνούν ότι το διαμάντι θα το κρατούν εκ περιτροπής και για εναλλάξ έτη. Εάν αυτή η συμφωνία διαρκέσει στην αιωνιότητα μεταξύ των απογόνων των αδερφών, τότε οι δύο πλευρές θα κατέχουν το διαμάντι κατά το ήμισυ.»

Ένα ακόμα αλγεβρικό τέχνασμα που μας δίνει επίσης το $\frac{1}{2}$ ως αποτέλεσμα της σειράς του Grandi είναι το παρακάτω:

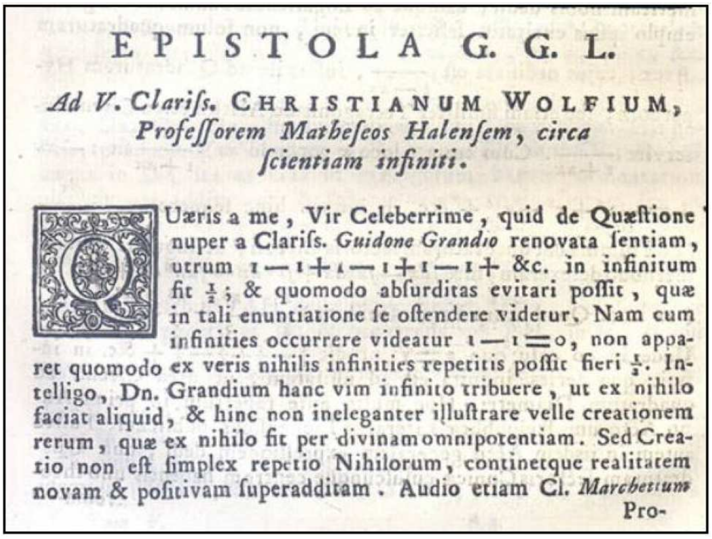
Έστω S ο αριθμός στον οποίον συγκλίνει το άθροισμα $1-1+1-1+\ \ldots$.

Τότε έχουμε:

$$S=1-1+1-1+\ \ldots=1-(1-1+1-1+\ldots)=1-S, \quad \text{επομένως} \quad S=\frac{1}{2}.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα και με διαφορετικές τεχνικές, καταλήγουν και άλλοι μαθηματικοί της εποχής, όπως οι L. Euler και J. Fourier.

Το *Acta Eruditorum* (1682-1685) ήταν το πρώτο επιστημονικό γερμανόφωνο περιοδικό και περιείχε όλες τις εργασίες του G. Leibniz, όπως τη *Nova Methodus Pro Morimus et Minimus* (1684) που αποτέλεσε και την τεράστια συνεισφορά του στον διαφορικό λογισμό. Στο περιοδικό αυτό, περιέχεται και μια επιστολή του Leibniz προς τον επίσης γερμανό μαθηματικό και φιλόσοφο Christian Wolff, όπου παρατηρεί ότι αν σταματήσουμε την σειρά του Grandi σε ένα τυχαίο όρο, έχουμε την ίδια πιθανότητα να λάβουμε ως αποτέλεσμα 0 ή 1, επομένως ως αποτέλεσμα πρέπει να δεχτούμε τον αριθμητικό τους μέσο, δηλαδή το $\frac{1}{2}$.



EPISTOLA G. G. L.

Ad V. Clariss. CHRISTIANUM WOLFIUM, *Professorem Matheseos Halensem, circa scientiam infiniti.*

QUæris a me, Vir Celeberrime, quid de Quæstione nuper a Clariss. *Guidone Grandio* renovata sentiam, utrum $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. in infinitum fit $\frac{1}{2}$; & quomodo absurditas evitari possit, quæ in tali enuntiatione se ostendere videtur. Nam cum infinities occurrere videatur $1 - 1 = 0$, non apparet quomodo ex veris nihilis infinities repetitis possit fieri $\frac{1}{2}$. Intelligo, Dn. Grandium hanc vim infinito tribuere, ut ex nihilo faciat aliquid, & hinc non ineleganter illustrare velle creationem rerum, quæ ex nihilo fit per divinam omnipotentiam. Sed Creatio non est simplex repetio Nihilorum, continetque realitatem novam & positivam superadditam. Audio etiam Cl. *Marchettum* Pro-

Εικόνα 6. Επιστολή στον Christian Wolff

Ο Leibniz παρόλα αυτά, αναγνώρισε ότι ο ισχυρισμός του ως προς το αποτέλεσμα της σειράς ήταν περισσότερο μεταφυσικός παρά μαθηματικός, αλλά συνέχισε λέγοντας ότι στα μαθηματικά υπήρχε περισσότερη μεταφυσική αλήθεια από ό,τι ήταν γενικά αναγνωρισμένο *(Morris Kline - Mathematics Magazine Vol. 56, No. 5 - 1983)*. Εξάλλου, ο ίδιος είχε μελετήσει ήδη την, επίσης εναλλάσσουσα, σειρά $1-2+4-8+16\ldots$ από το 1673 και με το ίδιο σκεπτικό με τον Grandi μπορούσε να εξάγει από τη σειρά ένα αρνητικό αλλά και ένα θετικό αποτέλεσμα. Έτσι, απέκτησε και την πεποίθηση ότι το άθροισμα είναι πεπερασμένο. Δύο χρόνια αργότερα ο Leibniz θα εισάγει και το πρώτο κριτήριο σύγκλισης σειρών. *(Leibniz pp . 205 - 207 - Knobloch pp . 124 - 127).*

Φυσικά, σήμερα γνωρίζουμε ότι η σειρά του Grandi είναι μια ταλαντευόμενη γεωμετρική σειρά που αποκλίνει εφόσον είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha r^n$ με πρώτο όρο $\alpha = 1$ και λόγο $r = -1$. Η σειρά αυτή συγκλίνει μόνο στην περίπτωση όπου $|r| < 1$. Οι αντιφάσεις στα διάφορα εξαγόμενα αποτελέσματα οφείλονται στους «αλγεβρικούς» χειρισμούς της σειράς, οι οποίοι δεν έχουν καμία εγκυρότητα λόγω της άπειρης άθροισης.

3.3 Ένα «περίεργο» άθροισμα

Είναι αρκετά δημοφιλές, άρα και πολύ πιθανό, να συναντήσουμε κάπου την παρακάτω «ισότητα»:

$$1 + 2 + 3 + \ \dots = -\frac{1}{12}$$

Γνωρίζουμε όμως, αλλά είναι και λογικό, ότι το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \ \dots$ δεν συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, πόσω μάλλον σε έναν αρνητικό κλασματικό αριθμό. Κρύβεται πίσω από αυτό το αποτέλεσμα μια μαθηματική αλήθεια ή όπως και στη σειρά του Grandi είναι μια ψευδαίσθηση ως αποτέλεσμα της «αλγεβρικής» μεταχείρισης άπειρων σειρών;

Θέτουμε αρχικά μια «απόδειξη» όπως αναγράφηκε σε απόσπασμα σημειώσεων του S. Ramanujan στον οποίο συχνά και αποδίδεται το εν λόγω αποτέλεσμα:

Έστω $c = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$. Έχουμε:

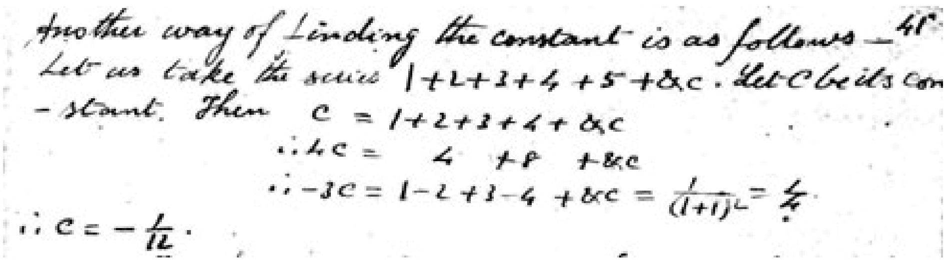
$$\begin{array}{rl} c = & 1 + 2 + 3 + 4 + \dots \\ 4c = & \quad\;\; 4 \quad\;\; + 8 + \dots \qquad (\text{αφαίρεση κατά μέλη}) \\ \hline -3c = & 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \end{array}$$

$$-3c = \frac{1}{4}$$

$$c = -\frac{1}{12},$$

όπου προφανώς έγινε χρήση του αναπτύγματος Taylor

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \dots \quad \text{για} \quad x = 1.$$



Another way of finding the constant is as follows — 41
Let us take the series $1+2+3+4+5+\&c$. Let C be its constant. Then $C = 1+2+3+4+\&c$

$\therefore 4C = \quad 4 \quad + 8 \quad + \&c$

$\therefore -3C = 1-2+3-4+\&c = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$

$\therefore C = -\frac{1}{12}$.

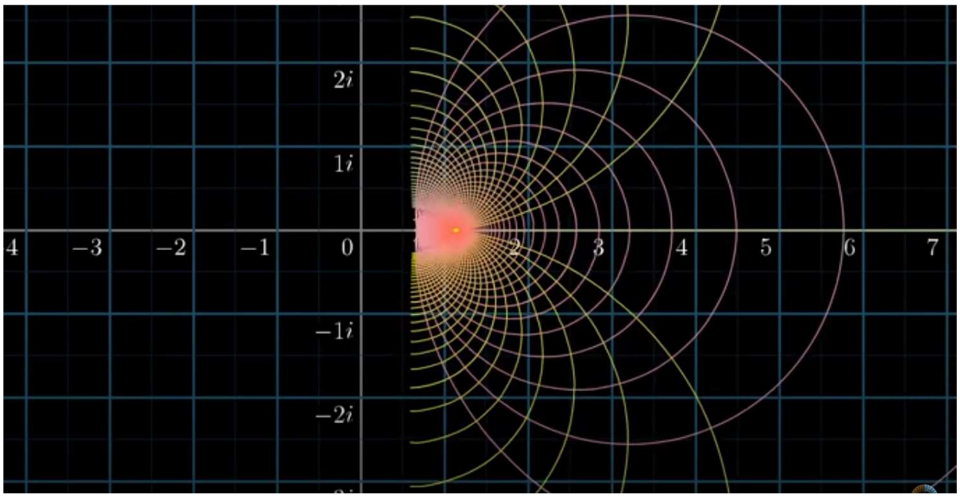
Εικόνα. Απόσπασμα σημειώσεων του S. Ramanujan

Στην προσπάθεια να αναλύσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα, αρχικά θα μιλήσουμε για την συνάρτηση $\zeta(s)$ του Riemann που προκύπτει ως ειδική περίπτωση από τη σειρά Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n^s}$ για $\alpha_n = 1$ και είναι $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, όπου n ακέραιος και s μιγαδική μεταβλητή με $s = \sigma + it$.

Η σειρά Dirichlet:

- συγκλίνει για $\sigma > 1$.
- αποκλίνει για $\sigma < 1$.
- έχει πόλο για $s = 1$.

Η συνάρτηση ζ ορίζεται επομένως για $\sigma > 1$ και έχει την παρακάτω γραφική απεικόνιση:



Εικόνα. Η συνάρτηση ζ, για $\sigma > 1$

Ο Euler το 1737 στο έργο του «Introduction to the Analysis of the Infinite» έδειξε τη συσχέτιση της συνάρτησης ζ με τους πρώτους αριθμούς μέσω της παραγοντοποιημένης μορφής $\zeta(s)=\prod_{p\text{ πρώτος}}\frac{1}{1-p^{s}}$, από την οποία προκύπτει άμεσα ότι για $\operatorname{Re}(s)>1$ η συνάρτηση ζ δεν έχει ρίζες.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η συνάρτηση ζ ικανοποιεί την παρακάτω συναρτησιακή σχέση για κάθε $0<\Re(s)\neq 1$:

$$\zeta(s)=2^{s}\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

Αρχικά γνωρίζουμε ότι: $\zeta(s)=-s\int_0^{\infty}x^{-s-1}\{x\}dx,\ 0<\Re(s)<1$, όπου $\{x\}$ είναι το κλασματικό μέρος του x.

Έχουμε τότε:

$$\left(2^{s}-1\right)\frac{\zeta(s)}{s}=\int_0^{\infty}x^{-s-1}\left(\{x\}-\{2x\}\right)dx,\quad 0<\Re(s)<1$$

$$=\int_0^{\infty}x^{-s-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(\sin 4n\pi x-\sin 2n\pi x\right)dx,$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\infty}x^{-s-1}\left(\sin 4n\pi x-\sin 2n\pi x\right)dx,$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(2^{s}-2^{2s}\right)\Gamma(-s)\sin\frac{\pi s}{2}n^{s}\pi^{s},$$

$$=\left(2^{s}-2^{2s}\right)\pi^{s-1}\Gamma(-s)\sin\frac{\pi s}{2}\zeta(1-s),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\int_0^{\infty}x^{s-1}\sin x dx=\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}$.

Από τα παραπάνω καταλήγουμε λοιπόν ότι:

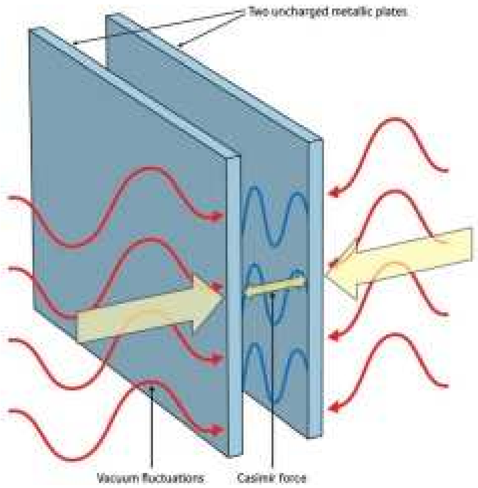
$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

που θα μας παρέχει και την αναλυτική συνέχεια σε όλο το μιγαδικό επίπεδο με $s \neq 1$.

Έχει ενδιαφέρον να αναφερθεί ότι οι μιγαδικές ρίζες της συνάρτησης ζ είναι άπειρες στη ζώνη με $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Όλες οι ρίζες αυτές θεωρούνται ότι βρίσκονται πάνω στην κρίσιμη ευθεία $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$, δηλαδή είναι της μορφής $\varrho = \frac{1}{2} + ti,\ t \in \mathbb{R}$ και αυτό αποτελεί ένα ανοικτό πρόβλημα γνωστό ως υπόθεση Riemann. Η υπόθεση αυτή, αν τελικά αποδειχθεί, θα έχει μεγάλο αντίκτυπο στην κατανομή των πρώτων αριθμών και θεωρείται γενικά ως ένα από τα σημαντικότερα άλυτα προβλήματα των θεωρητικών μαθηματικών (The Riemann Hypothesis – official problem - Enrico Bombieri, 2000).

Επιστρέφουμε στο ζητούμενο και παρατηρούμε ότι η ισότητα $1+2+3+\ \dots = -\frac{1}{12}$ θα μπορούσε να προκύψει από τη συναρτησιακή σχέση $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$ για $s = -1$. Ορίζεται όμως αυτή για $\sigma < 0$; Εξ' ορισμού όχι, αλλά η ανάγκη να επεκτείνουμε τον ορισμό της συνάρτησης αυτής προέρχεται από την ανάγκη να εξερευνήσουμε τις ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων στο μιγαδικό επίπεδο, επιτρέποντας βαθύτερες πληροφορίες για τη συμπεριφορά τους και τις συνδέσεις τους με άλλους τομείς των μαθηματικών, όπως της θεωρίας αριθμών, της μιγαδικής ανάλυσης, της φυσικής και κβαντικής φυσικής όπως στο φαινόμενο Casimir. *(Grant N. Remmen, 2021)*

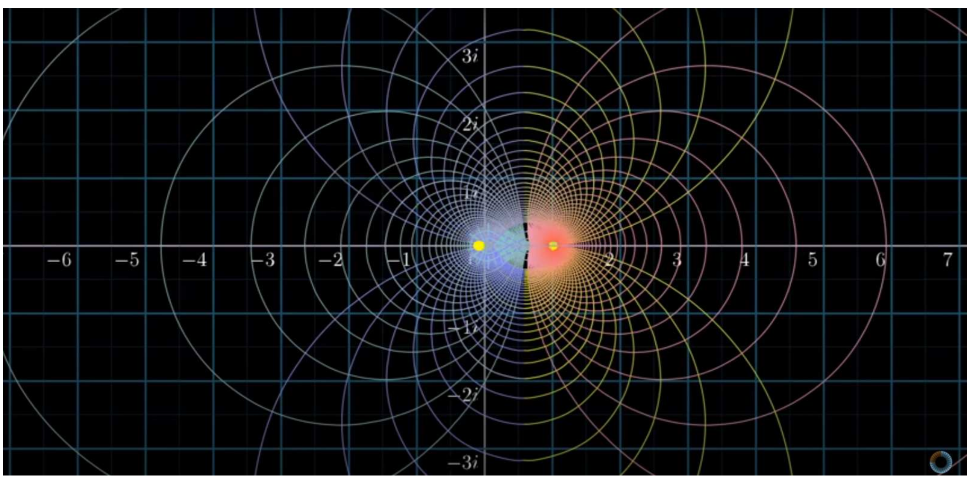
Το φαινόμενο Casimir εμφανίζεται αν τοποθετήσουμε δύο μεταλλικές πλάκες σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους (σε κενό χωρίς βαρύτητα, υποθέτοντας εξιδανικευμένες συνθήκες). Η κλασική φυσική προβλέπει ότι θα είναι απλώς ακίνητα. Ωστόσο, υπάρχει στην πραγματικότητα μια μικρή ελκτική δύναμη μεταξύ τους.



Η παραδοχή της ισότητας $1+2+3+\ \dots = -\dfrac{1}{12}$ στο φαινόμενο Casimir προσφέρει την επανακανονικοποίηση της πυκνότητας ενέργειας του κενού, ιδιαίτερα στο πεδίο των φωτονίων. Αυτό οδηγεί στην πρόβλεψη της δύναμης Casimir μεταξύ των αγώγιμων πλακών, η οποία έχει πλέον επιβεβαιωθεί με ακρίβεια από πειράματα και συμβάλλει στη μελέτη ως προς το μέγεθος της Σκοτεινής Ενέργειας που υπάρχει στο σύμπαν.

(Ramanujan summation and the Casimir effect - Wolfgang Bietenholz, 2021)

Μέσω της αναλυτικής συνέχισης μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε τη συνάρτηση ζ στο σύνολο $\{s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) < 0\}$ και αυτό μπορεί να γίνει με τον παρακάτω μοναδικό τρόπο ώστε η συνάρτηση να διατηρήσει τις σημαντικές της ιδιότητες:



Εικόνα. Η συνάρτηση ζ, για $\sigma \neq 1$

Με την παραπάνω παραδοχή της επέκτασης της συνάρτησης ζ λοιπόν πράγματι από τη σχέση $\zeta(s)=2^{s}\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$ προκύπτει ότι $\zeta(-1)=-\frac{1}{12}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ταυτίζεται με τη «σύγκλιση» της αντίστοιχης σειράς $1+2+3+\ \dots$, αλλά είναι ένα έμμεσο συμπέρασμα της αναλυτικής συνέχισης με σημαντικές εφαρμογές.

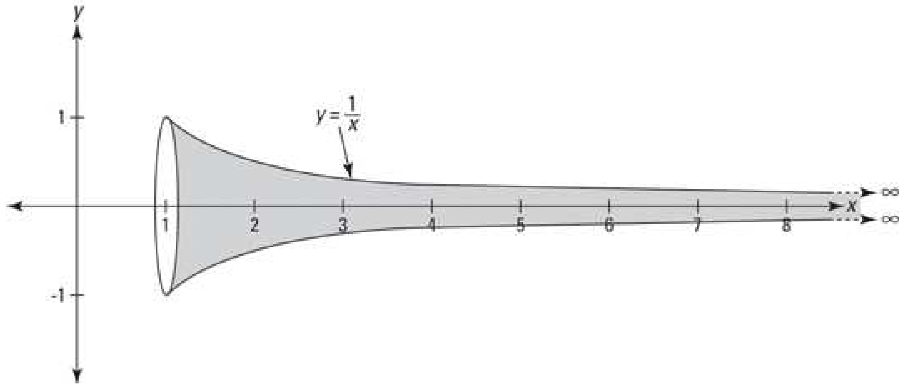
4. Τα «απρόοπτα» του απείρου

4.1. *Η σάλπιγγα του Γαβριήλ (Gabriel's Horn)*

Η σάλπιγγα του Γαβριήλ είναι ένα άπειρης έκτασης σχήμα που επινοήθηκε από τον Ιταλό φυσικομαθηματικό Evangelista Torricelli (1608 – 1647) και το οποίο, ενώ έχει πεπερασμένο όγκο εσωτερικά, η επιφάνεια του είναι άπειρη δημιουργώντας έτσι ένα μαθηματικό παράδοξο.

Εικόνα 11. Gabriel's Horn 1

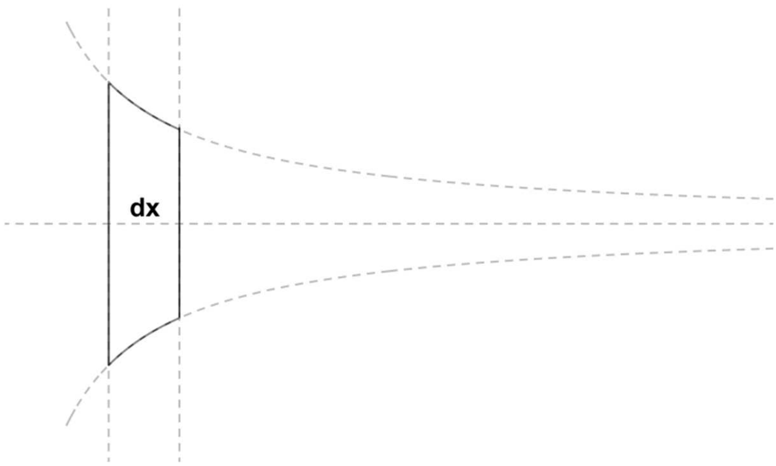
Ο αρχάγγελος Γαβριήλ αναφέρεται στα κείμενα της Αγίας Γραφής και τιμάται από την Ορθόδοξη εκκλησία ως ο αγγελιοφόρος της γέννησης του Χριστού, αλλά και αυτός που με την χαρακτηριστική του σάλπιγγα θα αναγγείλει την άφιξη της ημέρας της Κρίσης, συσχετίζοντας το θείο (άπειρο) με τον άνθρωπο (πεπερασμένο). Η σάλπιγγα του Γαβριήλ, ως γεωμετρικό στερεό σχήμα δημιουργείται εκ περιστροφής, γύρω από τον άξονα των x, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$, αλλά για $x \geq 1$, ώστε να αποφύγουμε την απροσδιοριστία για $x = 0$, αλλά και για ευκολία στις πράξεις.



Εικόνα 12. Gabriel's Horn 2

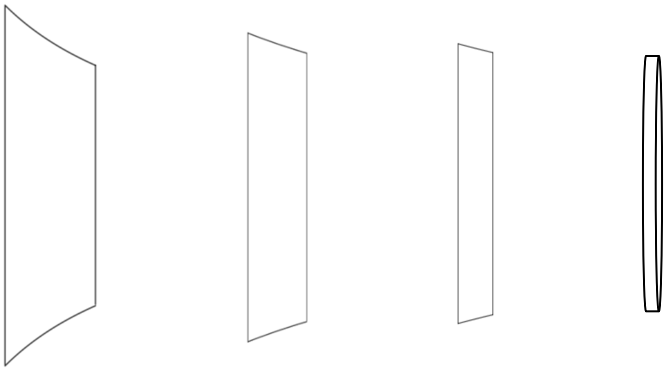
Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες συναρτήσεις για να δημιουργήσουμε το σχήμα αυτό, όπως οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\frac{1}{x^p}$, με $\frac{1}{2}\le p<1$ *(Gabriel's Horn: A Revolutionary Tale - Mathematics Magazine 87 - Vincent Coll - Michael Harrison)* ή την $f(x)=e^{-x}$ και να καταλήξουμε στο ίδιο παράδοξο μεταξύ όγκου και εμβαδού.

Για να υπολογίσουμε τον όγκο και το εμβαδόν της σάλπιγγας, σκεφτόμαστε ότι το σχήμα μεταξύ δύο κατακόρυφων ευθειών που τέμνουν την σάλπιγγα θα έχει την παρακάτω μορφή:



Εικόνα 13. Graph of Gabriel's Horn 3

Επομένως η διατομή αυτή, καθώς η απόσταση dx των δύο κατακόρυφων ευθειών ελαττώνεται, τείνοντας στο μηδέν, προσεγγίζει όλο και περισσότερο έναν κύλινδρο.

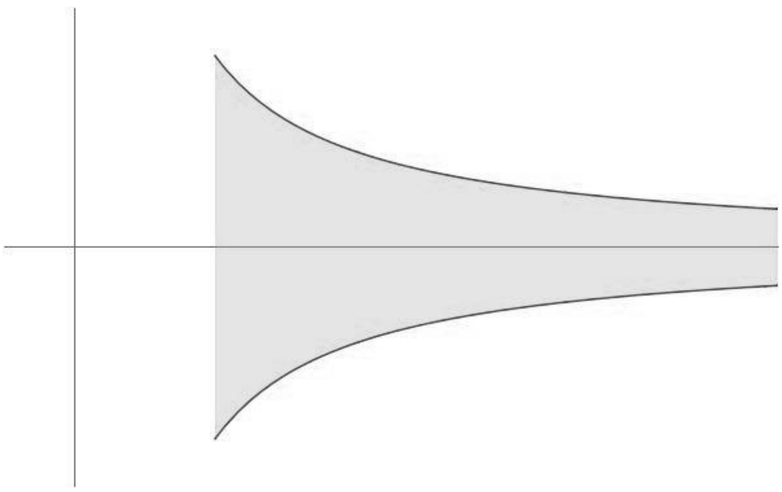


Εικόνα 14. Graph of Gabriel's Horn 4

Αν θεωρήσουμε λοιπόν ότι διαμερίζουμε την σάλπιγγα ώστε να αποτελείται από άπειρους σε πλήθος και απειροελάχιστα λεπτούς τέτοιους δακτύλιους ακτίνας $y=\frac{1}{x}$ και πάχους dx, τότε ο όγκος της σάλπιγγας θα ισούται με:

$$V=\int_1^{\infty}\pi y^2 dx=\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\pi\ .$$

Ακολούθως, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας της σάλπιγγας, είναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι η επιφάνεια αυτή θα είναι σαφώς μεγαλύτερη από την προβολή της σάλπιγγας πάνω στο επίπεδο Oxy.



Εικόνα 15. Graph of Gabriel's Horn 5

Όμως, το εμβαδόν της προβολής αυτής ισούται με:

$$E = 2\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty \,,$$

επομένως και το εμβαδόν της σάλπιγγας θα είναι άπειρο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν και σε αντίθεση με την κοινή διαίσθηση και αντίληψη, αποδείχθηκε ότι μπορούμε να γεμίσουμε την σάλπιγγα με πεπερασμένη ποσότητα χρώματος και επομένως ακούσια να βάψουμε την εσωτερική του επιφάνεια. Εντούτοις, για την επιφάνεια αυτή, εσωτερική ή εξωτερική, χρειαζόμαστε άπειρη ποσότητα χρώματος. Με βάση αυτό το παράδειγμα, το παράδοξο της σάλπιγγας του Γαβριήλ αποκαλείται και παράδοξο του ζωγράφου (Painter's Paradox).

Μια ενδιαφέρουσα εξήγηση της παραδοξότητας του προβλήματος έδωσε ο Isaac Barrow στη διάλεξη 16 των Lectiones του 1666, όπου υποστήριξε ότι ο Torricelli με τον ισχυρισμό του, είχε παραβλέψει την θεωρία του Αριστοτέλη (από το βιβλίο De Caelo 1, μέρος 6) που αναφέρει ότι "δεν υπάρχει αναλογία μεταξύ του πεπερασμένου και του άπειρου". Βασιζόμενος σε αυτή τη θεωρία, ο Barrow θα ισχυριστεί ότι η σύγκριση αντικειμένων διαφορετικής φύσεως όπως μιας άπειρης επιφάνειας και ενός πεπερασμένου όγκου, δεν υπακούει στην θεωρία του Αριστοτέλη *(Mancosu 1999)*.

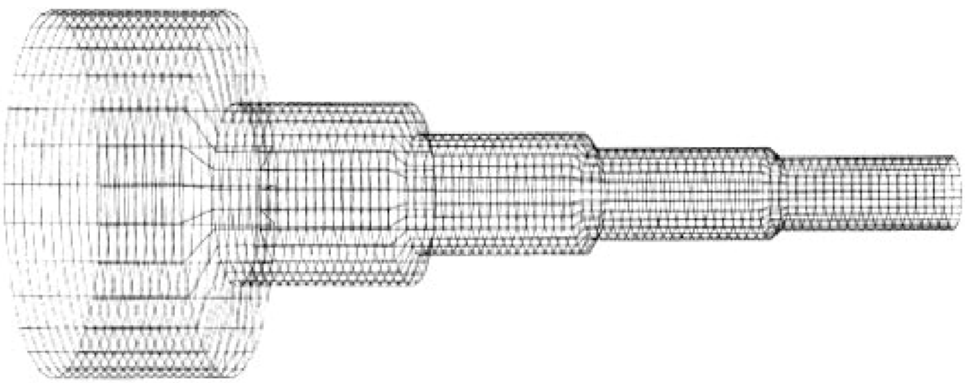
Ο Torricelli μέσω αυτού του παραδόξου που δημιούργησε το 1643, δημιούργησε σύγχυση στην επιστημονική κοινότητα και πυροδότησε έναν κύκλο φιλοσοφικών συζητήσεων ως προς την φύση του απείρου. Χαρακτηριστική ήταν η αντίδραση του Άγγλου φιλοσόφου Thomas Hobbes (1588 – 1679) που αναφώνησε «…για να βγάλει κάποιος νόημα, δεν χρειάζεται να ασχολείται με την γεωμετρία ή την λογική, αλλά να είναι τρελός!». (Thomas Hobbes – The English works – Vol 7 Longman Brown Green & Longmans)

Ο Toriccelli πέρα όμως από την αναταραχή που προκάλεσε, δημιούργησε και γόνιμο έδαφος για παραλλαγές του προβλήματος αυτού, όπως η γαμήλια τούρτα του Γαβριήλ (Gabriel's wedding cake) ή η κούπα των Christian Huygens και René-François de Sluse, αλλά επίσης συνέβαλε και στο θεωρητικό υπόβαθρο ώστε να γίνουν αντιληπτές οι ιδιότητες πιο περίπλοκων σχημάτων, όπως είναι τα μορφοκλάσματα (fractals) που θα αναφερθούν παρακάτω.

Συγκεκριμένα,

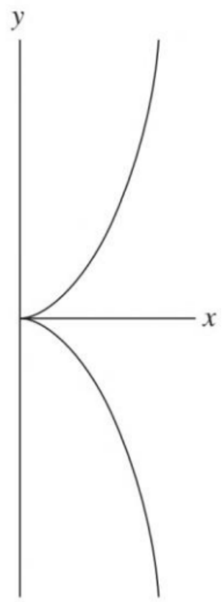
› *η γαμήλια τούρτα του Γαβριήλ (J. Fleron - The College Mathematics Journal, January 1999, Volume 30, Number 1, pp. 35-38)*, είναι το διακριτό ανάλογο της σάλπιγγας του Γαβριήλ, αντικαθιστώντας την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ με την συνάρτηση βήματος

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 1\le x<2 \\ \frac{1}{2}, & 2\le x<3 \\ & \dots \\ \frac{1}{n}, & n\le x<n+1 \\ & \dots \end{cases}.$$

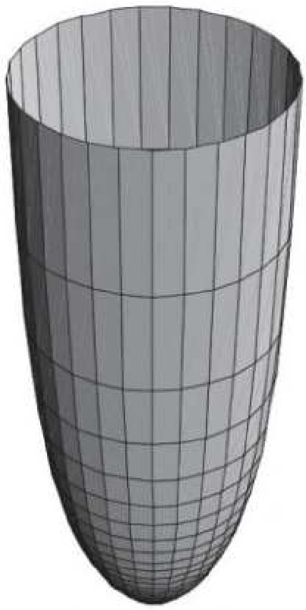


Εικόνα 16. Gabriel's Wedding Cake

› *η κούπα των Christian Huygens και René-François de Sluse*, όπου το 1658 αντέστρεψαν το πρόβλημα του Toriccelli. Το στερεό τους είχε πεπερασμένο εμβαδόν και άπειρο όγκο. Σε γράμμα προς τον Huygens, ο de Sluze περιγράφει το στερεό ως «ένα ποτήρι με μικρό βάρος, αλλά που ακόμα και ο πιο σκληρός πότης δεν μπορεί να αδειάσει». Πρόκειται λοιπόν για ένα στερεό απείρως ψηλό και με πεπερασμένο όγκο που δημιουργείται από την περιστροφή του μη αρνητικού τμήματος της καμπύλης $y^2=\frac{x^3}{1-x}$ με $x\ge 1$, ονομαζόμενης και κισσοειδές του Διοκλή, γύρω από τον άξονα των y. *(Nonplussed! Mathematical Proof of Implausible Ideas - Julian Havil 2007)*



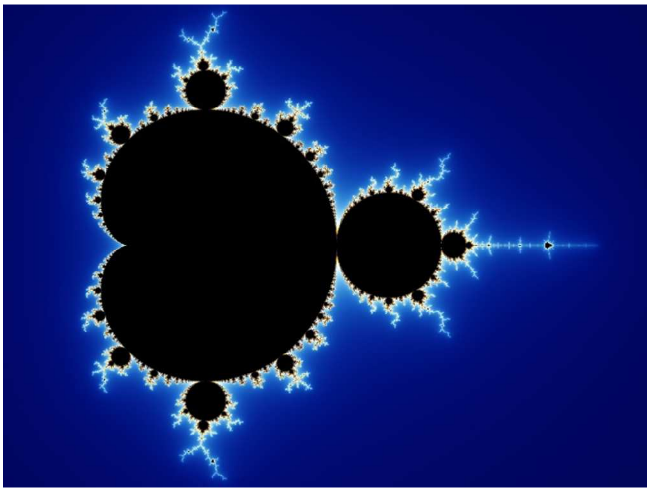
Εικόνα 7.
Το κισσοειδές του Διοκλή



Εικόνα 8.
Η κούπα των Christian Huygens και René-François de Sluse

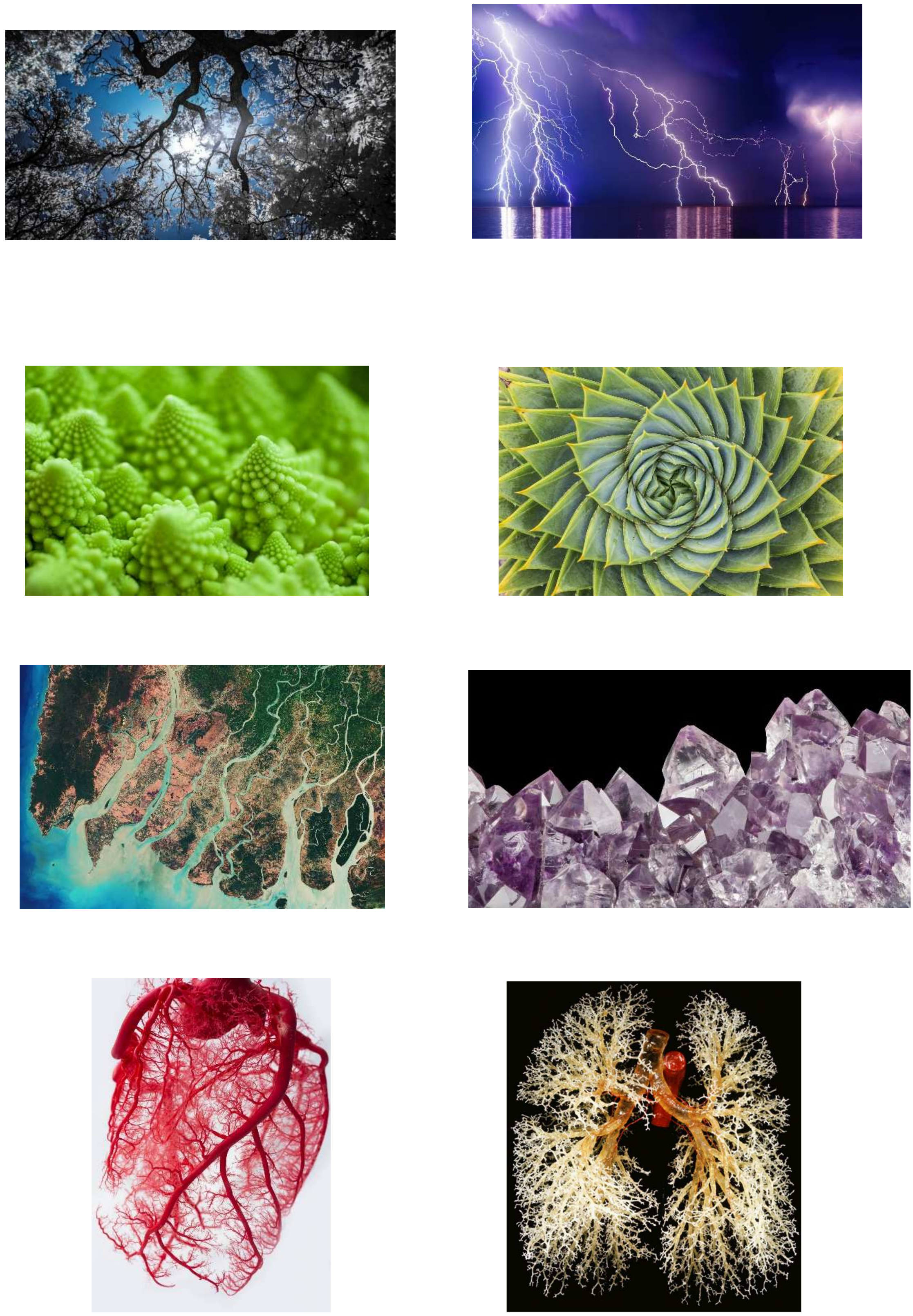
4.2. *Φράκταλς*

Ο όρος “φράκταλ” (fractal) χρησιμοποιείται στα μαθηματικά και την επιστήμη των υπολογιστών για να περιγράψει ένα γεωμετρικό μοτίβο ή μια δομή γενικά που επαναλαμβάνεται σε οποιαδήποτε κλίμακα μεγέθυνσης – σμίκρυνσης και αν το εξετάσουμε παρουσιάζοντας παρόμοια ή πανομοιότυπη δομή (αυτο-ομοιότητα). Ο όρος "fractal" επινοήθηκε από τον Γαλλοαμερικανό μαθηματικό Benoit Mandelbrot το 1975. Προέρχεται από το λατινικό “fractus”, που σημαίνει «κατακερματισμένος / σπασμένος». Τα σχήματα που εμφανίζουν εγγενή επαναλαμβανόμενα μοτίβα είναι η κύρια προϋπόθεση για να ταξινομηθούν ως φράκταλ.



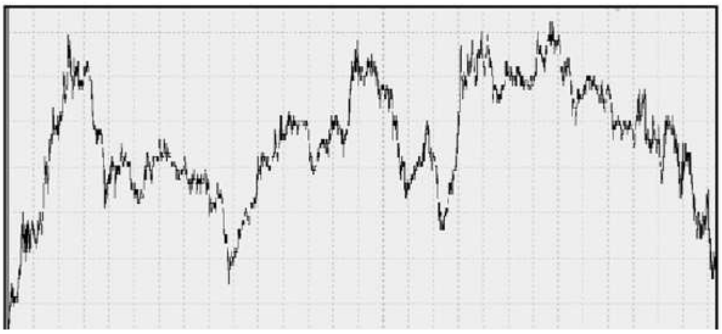
Εικόνα 10. Mandelbrot Set Fractal
Ένα από τα πιο εμβληματικά Fractal.

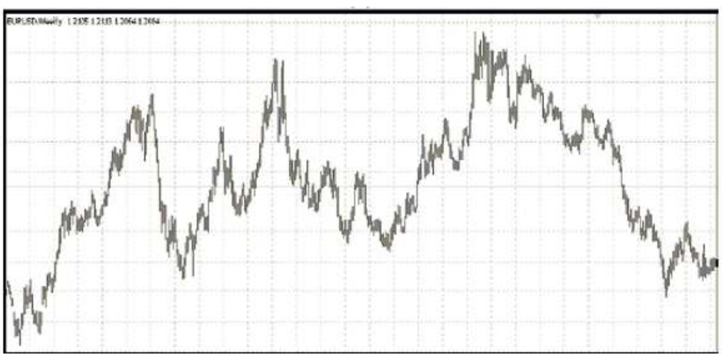
Τα φράκταλς έχουν ευρεία εφαρμογή σε πολλούς τομείς, όπως για παράδειγμα την τέχνη, την φυσική, την οικονομία και την βιολογία την κατασκευή γραφικών όπως το 3D Modeling και τη μοντελοποίηση εδάφους, όπου η ενσωμάτωση εξισώσεων φράκταλ αυξάνει το επίπεδο ρεαλισμού και την ακρίβεια της αναπαράστασης. Η έρευνα και η κατανόηση των φράκταλς έχει βοηθήσει στην ανάπτυξη νέων μοντέλων και την ανάλυση πολύπλοκων δομών στη φύση και τον κόσμο που μας περιβάλλει.



Εικόνες 12.
Fractal στη φύση

Ένα παράδειγμα από τον χώρο της οικονομίας και προς επιβεβαίωση της παρουσίας φαινομένων με αυτο – ομοιότητα στη ζωή μας, παρατίθενται τα παρακάτω γραφήματα που παρουσιάζουν την σχέση των νομισμάτων Δολάριο / Γεν (Εικ. 39α) και Δολάριο / Ευρώ (Εικ. 39(β)) μια συγκεκριμένη ημέρα στο χρηματιστήριο όπου μπορούμε να παρατηρήσουμε την εμφανή ομοιότητα στη διακύμανση των τιμών. Η επανάληψη ενός φαινομένου στα χρηματοοικονομικά είναι πολύ χρήσιμη μιας και μπορούμε να εκτιμήσουμε και να προβλέψουμε την εξέλιξη ενός φαινομένου.

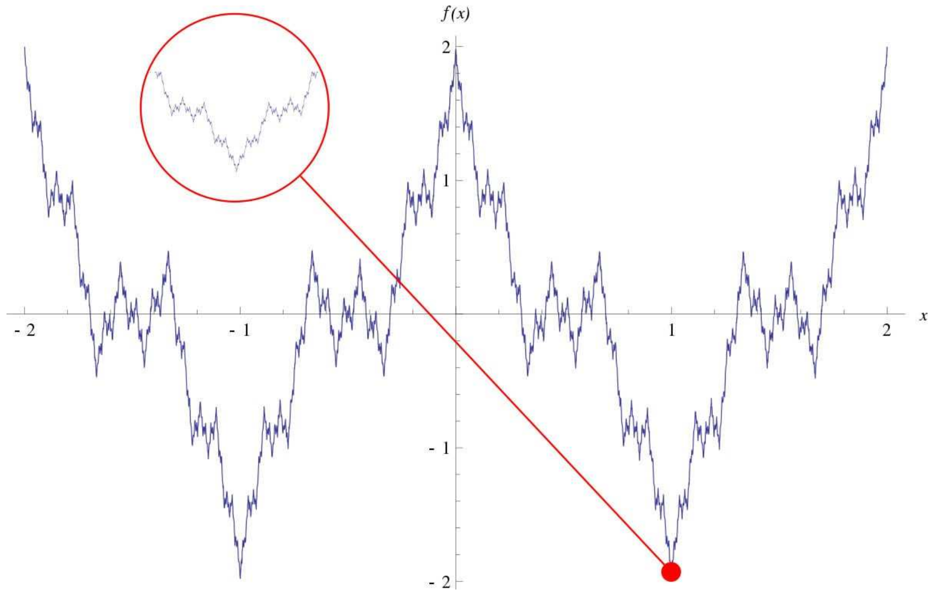




Η δημιουργία των φράκταλς από τους υπολογιστές επιτυγχάνεται μέσω μαθηματικών τύπων και όχι σχεδιάζοντας απλώς ένα (πεπερασμένο) σχήμα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας απεικόνισης είναι το ακόλουθο. Το 1872 ο Karl Weierstrass στη προσπάθειά του να επινοήσει μια συνάρτηση παντού συνεχή και πουθενά διαφορίσιμη απέδωσε μέσω της συνάρτησης (σειρά Fourier)

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos\left(b^n \pi x\right)$ με $0<a<1$ και b θετικό περιττό ακέραιο όπου $ab>1+\frac{3}{2}\pi$, το παρακάτω φράκταλ που ουσιαστικά είναι μια γραμμή που αποτελείται μόνο από γωνίες!

(B. Nelson 2017)

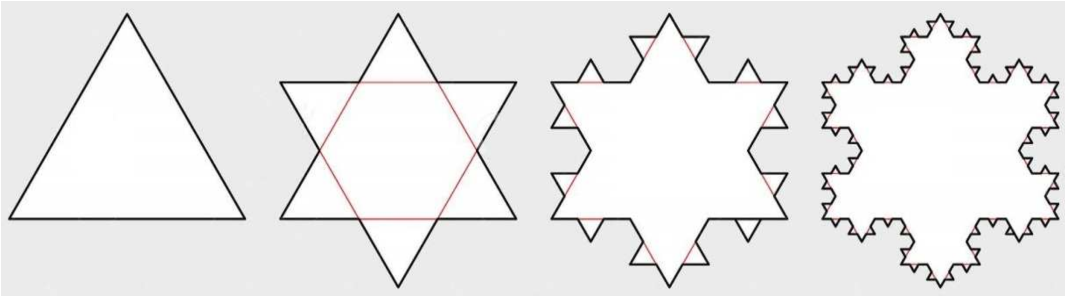


Εικόνα 12.
Συνάρτηση Weierstrass

Στην ευκλείδια γεωμετρία, όπως γνωρίζουμε, μια τέτοια απεικόνιση θα ήταν αδύνατη. Ωστόσο η παραπάνω γραμμή παρόλο που φαίνεται να είναι μια τεθλασμένη πολυγωνική γραμμή, η συνεχής μεγέθυνση θα μας αποκαλύψει ότι στην πραγματικότητα η γραμμή αυτή καλύπτεται εξ' ολοκλήρου από οδοντωτές άκρες, δηλαδή μόνο γωνίες.

4.2.1. *Η νιφάδα του Koch*

Η νιφάδα του Koch είναι ένα από τα παλαιότερα fractal που έχουν περιγραφεί. Εμφανίστηκε στην εργασία *"On a Continuous Curve Without Tangents, Constructible from Elementary Geometry" (1904)* του Σουηδού μαθηματικού Helge von Koch (1870 – 1924). Η νιφάδα αυτή δημιουργείται όταν τριχοτομήσουμε κάθε πλευρά ενός ισοπλεύρου τριγώνου και με βάση το μεσαίο τμήμα, σχηματίσουμε εξωτερικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται επ' αόριστο στα τμήματα των προκυπτόντων σχημάτων.



Εικόνα 19. Η νιφάδα του Koch

Το ενδιαφέρον με τη νιφάδα του Koch είναι ότι περικλείει μια περιοχή με πεπερασμένο εμβαδόν, αλλά με άπειρη περίμετρο. Πράγματι, αποδεικνύεται (*) ότι, αν s είναι η πλευρά του αρχικού ισοπλεύρου τριγώνου, τότε η περίμετρός L και το εμβαδόν E της νιφάδας, μετά από n επαναλήψεις διαχωρισμού των πλευρών του τριγώνου, είναι:

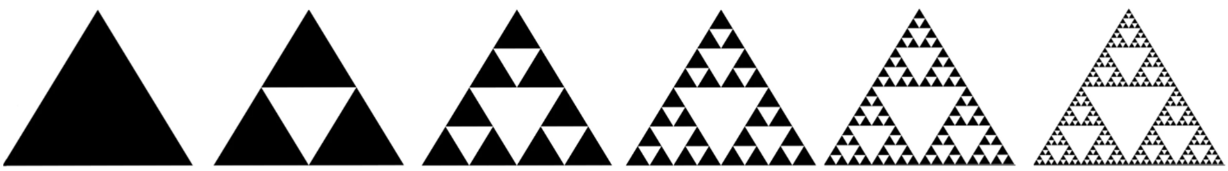
$$L = 3s\left(\frac{4}{3}\right)^n \qquad \text{και} \qquad E = \frac{2s^2\sqrt{3}}{5}$$

* (https://gofiguremath.org/fractals/koch-snowflake/)
(https://gofiguremath.org/fractals/koch-snowflake/koch-snowflake-area/)

Προφανώς, καθώς $n \to \infty$ η περίμετρος L απειρίζεται, αλλά το εμβαδόν E παραμένει σταθερό.

Ένα φράκταλ που ακολουθεί μια αντίστροφη διαδικασία σύνθεσης (αφαιρετική) από τη νιφάδα του Koch είναι το τρίγωνο του Πολωνού μαθηματικού W. F. Sierpiński. Η διαδικασία δημιουργίας του τριγώνου Sierpiński είναι η ακόλουθη:

- Χωρίζουμε ένα συμπαγές ισόπλευρο τρίγωνο σε τέσσερα ίσα ισόπλευρα τρίγωνα και αφαιρούμε το μεσαίο τρίγωνο.
- Κάνουμε το ίδιο με καθένα από τα τρία υπόλοιπα τρίγωνα συνεχίζοντας επ’ αόριστο την διαδικασία αυτή για κάθε νέο τρίγωνο που δημιουργείται.



4.2.2. *Διαστάσεις των Φρακταλς*

Το θέμα που ανακύπτει άμεσα από τη δομή των φράκταλς είναι οι διαστάσεις τους. Τι διάσταση από τοπολογικής απόψεως μπορεί να έχει ένα φράκταλ; Η διάσταση φράκταλ είναι ένας στατιστικός δείκτης που περιγράφει την πολυπλοκότητα ενός δεδομένου σχεδίου ενσωματωμένου σε δεδομένες χωρικές διαστάσεις. Συγκεκριμένα, αυτός ο δείκτης παρέχει ένα μέτρο της χωρητικότητας που έχει το εξεταζόμενο φράκταλ μοτίβο για να γεμίσει το χώρο στον οποίο είναι ενσωματωμένο.

Ο Mandelbrot προσέγγισε τον όρο "διάσταση του Φράκταλ" ως το μέτρο της ατέλειας των αντικειμένων, δηλαδή την λεπτομέρεια του περιγράμματος, το τσαλάκωμα της επιφάνειας, το πορώδες του σχήματος κλπ. Όμως οι Felix Hausdorff (1868-1942) και Abram Besicovitch (1891-1970) έφεραν επανάσταση στα μαθηματικά προτείνοντας διαστάσεις με μη ακέραιες τιμές. Υπέδειξαν ότι αν για παράδειγμα ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει διάσταση 1 και ένα τετράγωνο διάσταση 2, υπάρχουν καμπύλες που έχουν μια διάσταση «ενδιάμεσα» αυτών που σχετίζεται με τις ποσότητες πληροφοριών που περιέχουν όπως η παρακάτω γραμμή:

ή η τσαλακωμένη χάρτινη σφαίρα που δεν είναι συμπαγής και έχει μια τιμή κλασματικής διάστασης, πιθανόν κάπου γύρω στο 2,5 αφού έχει μήκος, πλάτος και βάθος, αλλά έχει επίσης και πολλά κενά ανάμεσα στα στρώματα χαρτιού:

O Felix Hausdorff πρότεινε μια κλασματική διάσταση το 1918 ως μέτρο της τραχύτητας της επιφάνειας. Δεδομένου ότι πολλές μέθοδοι για τον υπολογισμό αυτής της διάστασης είχαν αναπτυχθεί από τον Abram Samoilovitch Besicovitch, σήμερα η διάσταση Hausdorff είναι επίσης γνωστή ως διάσταση Hausdorff - Besicovitch.

Όσον αφορά τα fractals, η θεμελιώδης ιδιότητα που έχουν είναι αποτελούνται από τμήματα ολοένα και μικρότερου μεγέθους, τα οποία στο σύνολο καλύπτουν μία γεωμετρική μορφή με έναν αριθμό «κουτιών» ολοένα και μικρότερου μεγέθους (Barnsley, 1993). Εάν το αντικείμενο αντιστοιχεί στη μία διάσταση (d = 1), τότε αυτά τα «κουτιά» είναι ευθύγραμμα τμήματα μήκους l, στις δύο διαστάσεις (d = 2) τα «κουτιά» είναι τετράγωνα πλευράς l, στις τρεις διαστάσεις (d = 3) είναι κύβοι της πλευράς l κτλ. Προφανώς, όσο περισσότερα "κουτιά" χρησιμοποιούμε τόσο μικρότερο είναι το μήκος τους και τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός τους $\mathcal{N}(l)$, ενώ η συμβολή τους στο συνολικό μέτρο του αντικειμένου M δίνεται από τον τύπο

$$M = \lim_{\substack{l \to 0 \\ N(l) \to \infty}} \mathcal{N}(l) l^D$$

Στην παραπάνω εξίσωση το l τείνει στο μηδέν ενώ το $\mathcal{N}(l)$ τείνει στο άπειρο, ενώ ο εκθέτης D στον οποίο υψώνεται το μήκος l, αντιστοιχεί στη διάσταση του αντικειμένου. Αυτή η παράμετρος που χαρακτηρίζει την μορφοκλασματικότητα (fractality) είναι η πιο σημαντική και ισχύει γι' αυτήν ότι

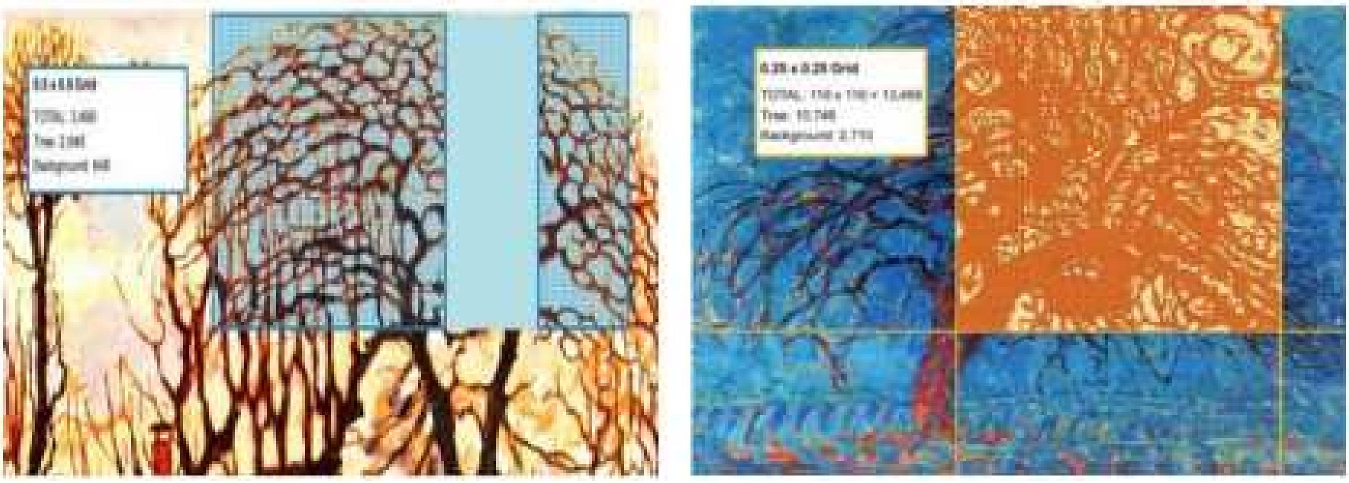
$$d - 1 \leq D \leq d$$

Αν D = d το αντικείμενο καταλαμβάνει πλήρως τον χώρο στον οποίο βρίσκεται, και μιλάμε για ένα συνηθισμένο αντικείμενο. Ωστόσο, για ένα fractal αντικείμενο αναμένουμε D < d, που σημαίνει ότι η υπό μελέτη δομή μπορεί να φαίνεται ότι εκτείνεται σε d διαστάσεις, αλλά στην πραγματικότητα καταλαμβάνει ένα χώρο με διάσταση μικρότερη από d, εισάγοντας έτσι την ύπαρξη χώρων με μη ακέραιες διαστάσεις.

Παρακάτω βλέπουμε ένα δείγμα ως παρουσία των fractals στην τέχνη από τον Ολλανδό ζωγράφο Piet Mondrian (1872–1944) όπως αναλύεται στην εργασία των Bountis, Fokas, Psarakis, Fractal analysis of tree paintings by Piet Mondrian:

Εικόνα 20. Το «Κόκκινο Δέντρο» (Mondrian, 1910) (αριστερά) και «Φάρμα κοντά στο Duivendrecht» (Mondrian, 1916) (δεξιά)

Τόσο στο «Κόκκινο Δέντρο», όσο και στο έργο «Φάρμα κοντά στο Duivendrecht», οι εικόνες των δέντρων φαίνονται αρκετά αραιές, με ανοιχτούς χώρους ανάμεσα στα κλαδιά, ωστόσο όμως, τα δέντρα μπορούν να χαρακτηριστούν ως fractals με $D \approx 1{,}75$ και στις δύο περιπτώσεις και αυτό φαίνεται και στην ανάλυση που υπάρχει στην επόμενη εικόνα σχετικά με το δέντρο της Φάρμας κοντά στο Duivendrecht:



Εικόνα 21. Το δέντρο της Φάρμας κοντά στο Duivendrecht με κάλυψη των κλαδιών του με τετράγωνα με κλίμακα (a) 0,5u και (b) 0,25u αντίστοιχα

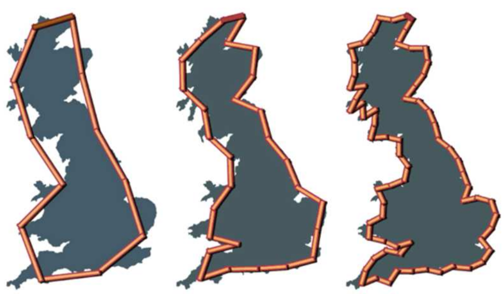
4.2.3. *Το παράδοξο της ακτογραμμής*

Το 1951 ο μαθηματικός Lewis Fry Richardson μελετούσε εάν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της πιθανότητας δύο χωρών να εμπλακούν σε πόλεμο με το μήκος των κοινών τους συνόρων.

Εκείνη την εποχή η επικρατούσα μέθοδος εκτίμησης του μήκους ενός συνόρου (ή ακτογραμμής) ήταν η χρήση ενός χάρτη ή αεροφωτογραφίας μεγάλης κλίμακας και ενός συνόλου διαχωριστικών γραφημάτων. Στη συνέχεια, τα διαχωριστικά χρησιμοποιήθηκαν για να διαιρεθεί το περίγραμμα σε n ίσου μήκους, ευθύγραμμα τμήματα μήκους l όπου το άκρο κάθε γραμμής διχοτομούσε το σύνορο ή την ακτογραμμή που μετρήθηκε (ουσιαστικά μειώνοντας το επίπεδο λεπτομέρειας).

Ο Richardson ανακάλυψε ότι το άθροισμα των τμημάτων, δηλαδή του συνολικού μήκους του περιγράμματος, είναι αντιστρόφως ανάλογο με το κοινό μήκος των τμημάτων l, δηλαδή του μήκους της μονάδας μέτρησης. Το αποτέλεσμα εξέπληξε τον Richardson καθώς με άλλα λόγια, όσο πιο λεπτομερής είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται για να μετρήσουμε μια ακτογραμμή, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η συνολική μέτρηση και καθώς το l πλησιάζει το μηδέν, το μήκος της ακτογραμμής θα τείνει προς το άπειρο! Επομένως κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το μετρούμενο μήκος μιας ακτογραμμής εξαρτάται άμεσα από την μονάδα μέτρησης που χρησιμοποιείται.

Κατά τη διεξαγωγή της έρευνάς του, ο Richardson παρατήρησε ότι η Ισπανία και η Πορτογαλία ανέφεραν δύο διαφορετικές τιμές για το συνολικό μήκος των κοινών συνόρων τους. Τα σύνορα Ισπανίας - Πορτογαλίας ήταν 987 km από την Ισπανία και 1.214 km από την Πορτογαλία, μια διαφορά 227 km, η οποία τώρα μπορούσε να εξηγηθεί καθαρά από το γεγονός ότι οι δύο χώρες είχαν υπολογίσει τα σύνορά τους χρησιμοποιώντας διαφορετικές κλίμακες. Εάν επίσης η ακτογραμμή της Βρετανίας μετρηθεί χρησιμοποιώντας μονάδες μήκους 100 km, το συνολικό μήκος της ακτογραμμής είναι περίπου 2.800 km, ενώ εάν χρησιμοποιούνται μονάδες των 50 km, το συνολικό μήκος είναι περίπου 3.400 km, μια διαφορά 600 km. Αυτή ήταν η αρχή του παραδόξου της ακτογραμμής.



Αυτό το παράδοξο, που παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον Richardson, αποτέλεσε την έμπνευση για μια από τις αρχικές δημοσιεύσεις του Benoit Mandelbrot σχετικά με το θέμα των φράκταλ. Το άρθρο του Mandlebrot «How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension» δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά στο Science το 1967.

Στην εργασία, ο Mandelbrot συζητά έναν εμπειρικό νόμο που ανακαλύφθηκε από τον Richardson, ο οποίος θα μπορούσε να προσεγγιστεί με μια συνάρτηση της μορφής:

$L(G) = MG1\text{-}^{D}$

Οπου:

L = μήκος

G = Κλίμακα μέτρησης

M = θετική σταθερά

D = σταθερά που ονομάζεται διάσταση, ≥ 1.

Διαισθητικά, εάν μια ακτογραμμή φαίνεται ομαλή, η διάστασή της D πρέπει να είναι πιο κοντά στο 1 και όσο πιο ακανόνιστη είναι η ακτογραμμή, τόσο πιο κοντά το D θα πρέπει να είναι στο 2.

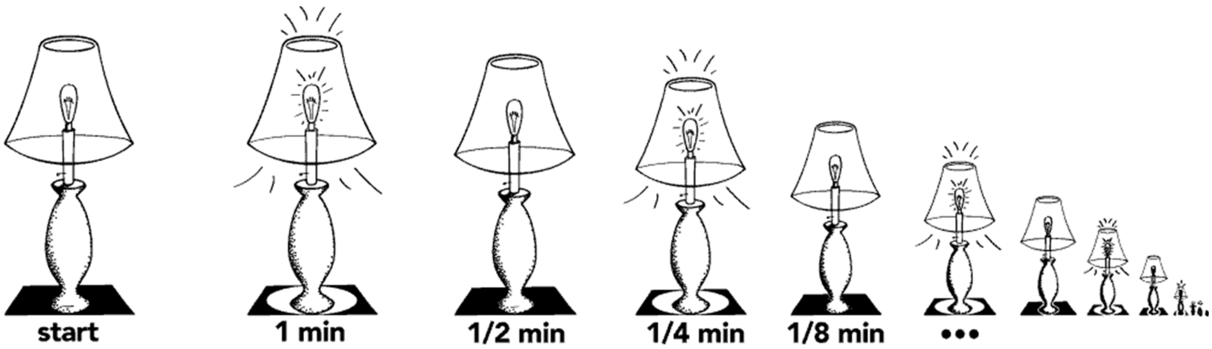
Οι ακτές σε σύγκριση με τα φράκταλς, είναι λιγότερο σαφείς ως προς την κατασκευή τους καθώς σχηματίζονται από φυσικά γεγονότα που δημιουργούν μοτίβα με στατιστικά τυχαίους τρόπους. Τα εξιδανικευμένα φράκταλ, από την άλλη πλευρά, σχηματίζονται από την επαναλαμβανόμενη επανάληψη απλών ακολουθιών. Φαίνεται παρόλα αυτά ότι η θεωρία του Richardson είναι συμβατή με την ιδέα ότι γεωγραφικά σχήματα, όπως οι ακτές, μπορούν να μοντελοποιηθούν από όμοια σχήματα κλασματικής διάστασης, δηλαδή ότι οι ακτές είναι εγγενώς φράκταλ στη φύση τους.

4.3. *Η λάμπα του Thomson*

Το παράδοξο αυτό, ανήκει στην κατηγορία των υπερεργασιών (supertasks) δηλαδή μια μετρήσιμα άπειρη ακολουθία πράξεων που συμβαίνουν διαδοχικά μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Όπως θα φανεί και ακολούθως υπάρχει μια μεγάλη ομοιότητα του θεωρητικού αυτού μοντέλου και των παραδειγμάτων του Ζήνωνα. Ο Thomson (1954) εισήγαγε το παράδειγμα αυτό το οποίο είναι γνωστό ως Thomson's Lamp και το οποίο πίστευε ότι απεικονίζει μια ακόμα παράδοξη κατάσταση.

Ας υποθέσουμε ότι σβήνουμε μια λάμπα. Μετά από 1 λεπτό την ανάβουμε. Μετά από ½ λεπτό ακόμα, την σβήνουμε ξανά, μετά από ¼ του λεπτού την ανάβουμε πάλι, μετά από

⅛ του λεπτού τη σβήνουμε και ούτω καθεξής. Η άθροιση καθενός από αυτούς τους χρόνους δημιουργεί μια άπειρη γεωμετρική σειρά που συγκλίνει στα 2 λεπτά, μετά την οποία έχει ολοκληρωθεί ολόκληρη η υπερεργασία. Ωστόσο όμως, παραμένει το ερώτημα του τι θα συμβεί όταν περάσουν τα 2 λεπτά, δηλαδή εάν η λάμπα είναι αναμμένη ή σβηστή.



Εικόνα 22. Η λάμπα του Thomson

Μπορεί να φαίνεται παράλογο να ισχυρίζεται κανείς ότι η λάμπα θα είναι αναμμένη, καθώς για κάθε στιγμή που ανάβει η λάμπα, υπάρχει μια μεταγενέστερη στιγμή κατά την οποία σβήνει. Αλλά θα φαινόταν εξίσου παράλογο να ισχυριστεί κανείς ότι η λάμπα θα είναι σβηστή, καθώς για κάθε στιγμή που σβήνει η λάμπα υπάρχει μια μεταγενέστερη στιγμή που ανάβει. Για την ανάλυση του εν λόγω παραδόξου, ο Thomson προτείνει της χρήσης του αριθμού 1 για να υποδηλώσουμε ότι η λάμπα είναι αναμμένη και του αριθμού 0 για να υποδηλώσουμε ότι είναι σβηστή. Έτσι, το εν λόγω supertask αποτελείται από την άπειρη ακολουθία καταστάσεων

0,1,0,1,0,1,….0,1,0,1,0,1,….

Για την ακολουθία αυτή, όταν $\nu \to \infty$, δεν υπάρχει σύγκλιση σε κανένα πραγματικό αριθμό και για να αποδειχθεί αυτό, μπορεί κανείς να κάνει χρήση του αριθμητικού μέσου όρου Cesàro. Με δεδομένη μια ακολουθία x_n, ο μέσος όρος Cesàro είναι η ακολουθία

$$C_1 = x_1, \qquad C_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad C_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

και ούτω καθεξής. Αυτοί οι αριθμοί περιγράφουν τη μέση τιμή της ακολουθίας μέχρι ένα δεδομένο όρο. Μια ακολουθία Cesàro συγκλίνει σε έναν αριθμό L εάν και μόνο εάν ο όρος C_n συγκλίνει στο L. Είναι τότε γνωστό ότι η ακολουθία 0,1,0,1,…0,1,0,1,… Cesàro συγκλίνει στο ½ (Bashirov, 2014), εύρημα το οποίο τελικά δεν δίνει απάντηση για τη λάμπα του Thomson.

Ανάλογα με την φιλοσοφική προσέγγιση του ζητήματος, υπάρχουν διάφορες απόψεις για το αν το φωτιστικό θα είναι ανοικτό ή κλειστό μετά από ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα ή αν θα μπορούσαμε να το θεωρήσουμε ανοικτό και κλειστό ταυτόχρονα, εκφράζοντας μια παράδοξη κατάσταση. Είναι βέβαιο η απάντηση δεν βρίσκεται στην επιφάνεια του προβλήματος και σίγουρα δεν είναι μονοσήμαντη. Αγγίζει τα όρια της ικανότητάς μας να κατανοούμε το σύμπαν και τους νόμους που το διέπουν και εγείρει σημαντικά φιλοσοφικά ερωτήματα σχετικά με τη φύση του χρόνου και την αιτιότητα, καθώς και την έννοια του άπειρου μέσω αυτής της άπειρης παλινδρόμησης,

4.4. *Το παράδοξο του Αλβέρτου της Σαξονίας*

Ο Albert Ricmestop ή αλλιώς Αλβέρτος της Σαξονίας (περ. 1316 – 1390) ήταν μεσαιωνικός φιλόσοφος, θεολόγος και μαθηματικός. Ήταν μέλος της φιλοσοφικής σχολής του Πανεπιστημίου του Παρισιού και τα έργα του κάλυπταν ένα ευρύ φάσμα θεμάτων, όπως η λογική, η μεταφυσική, η ηθική και οι φυσικές επιστήμες.

Αν και ο Αλβέρτος της Σαξονίας δεν θεωρείται ως μια από τις εξέχουσες μορφές στην ιστορία των μαθηματικών, η συμβολή του στα μεσαιωνικά μαθηματικά και το ευρύτερο φιλοσοφικό του έργο είχαν διαρκή αντίκτυπο στην ανάπτυξη της δυτικής σκέψης. Έγραψε μια ενδιαφέρουσα πραγματεία για τα Στοιχεία του Ευκλείδη και συνέβαλε σημαντικά στην ανάπτυξη της θεωρίας των αναλογιών, η οποία ήταν κεντρικό θέμα στα μεσαιωνικά μαθηματικά.

Εκτός από το μαθηματικό του έργο, ο Αλβέρτος της Σαξονίας είναι ίσως περισσότερο γνωστός για τη συμβολή του στην επιστήμη της φιλοσοφίας. Υπήρξε θερμός υπερασπιστής της αριστοτελικής φιλοσοφίας και υποστήριξε ότι η επιστημονική γνώση βασιζόταν στην παρατήρηση και το πείραμα, παρά στην καθαρή εικασία.

Ο Αλβέρτος ασχολήθηκε και συμπεριέλαβε στα χειρόγραφά του τους προβληματισμούς του για τα παράδοξα και τα προβλήματά που αναδύονται από την έννοια του άπειρου. Παρείχε δε, ένα σπουδαίο και εύκολα αντιληπτό παράδοξο για το άπειρο το οποίο αργότερα αποτέλεσε τη βάση για τον ορισμό των απείρων συνόλων.

Ας φανταστούμε ότι έχουμε ένα ξύλινο δοκάρι άπειρου μήκους με τετράγωνη διατομή με διαστάσεις 1 επί 1. Κόβουμε σε κύβους ίδιου μεγέθους το δοκάρι δημιουργώντας ίδιους κύβους με ακμή 1 που σύμφωνα με τον Αλβέρτο αν τους τοποθετήσουμε με συστηματικό τρόπο μπορούν να γεμίσουμε έναν άπειρο τρισδιάστατο χώρο.

Για το σκοπό αυτό ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

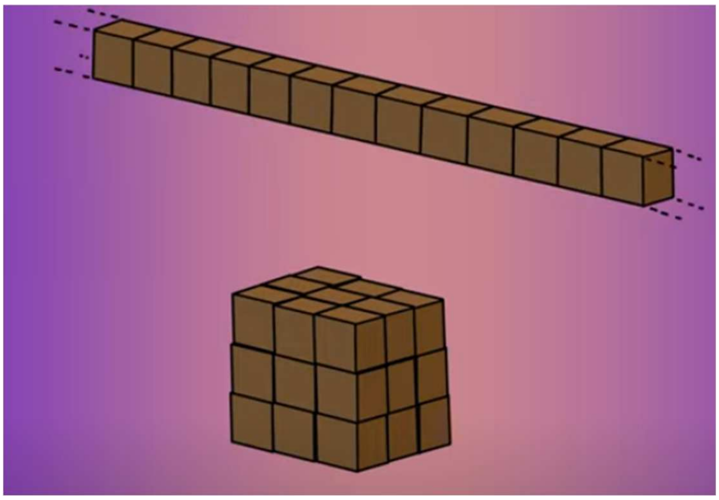
- Επιλέγουμε αρχικά έναν κύβο και τοποθετούμε γύρω του 3^3-1^3, δηλαδή 26 κύβους. Έτσι δημιουργούμε ένα νέο κύβο με ακμή 3 μονάδες.

- Έπειτα τοποθετούμε γύρω από το νέο κύβο $5^3 - 3^3$, δηλαδή 98 κύβους δημιουργώντας έναν ακόμα μεγαλύτερο κύβο με ακμή 5 μονάδες.

- Με τον ίδιο τρόπο τοποθετούμε γύρω από το νέο κύβο $7^3 - 5^3$, δηλαδή 218 κύβους δημιουργώντας ένα κύβο με ακμή 7 μονάδες.

Επαναλαμβάνοντας επ' άπειρον αυτή τη ίδια διαδικασία μπορούμε να σχηματίσουμε έναν κύβο που όγκος αυξάνεται απεριόριστα και καλύπτει οποιονδήποτε χώρο τριών διαστάσεων.

Ο Αλβέρτος μέσα από αυτό το ευφυές παράδειγμά μας φανέρωσε ότι ήταν γνωστή ήδη από τον 14ο αιώνα η παράξενη ιδιότητα του άπειρου να βρίσκεται σε ευθεία αντιστοιχία με ένα μέρος του. (John D. Barrow, 2006)



Εικόνα 23. Η δημιουργία του άπειρου κύβου του Αλβέρτου της Σαξωνίας

4.5. *Το παράδοξο του Γαλιλάιου*

Άλλο ένα παράδειγμα της αντισυμβατικής ιδιότητας του απείρου να βρίσκεται σε 1-1 αντιστοιχία με κάποιο υποσύνολό του, παρουσιάζεται και στο έργο *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638),* όπου ο Γαλιλαίος εξετάζει τους θετικούς ακεραίους και τα τετράγωνά τους και διατυπώνει τον εξής συλλογισμό:

«Δεν μπορεί να αρνηθεί κανείς ότι υπάρχουν τόσα [τετράγωνα] όσοι και αριθμοί επειδή κάθε αριθμός είναι μια [τετραγωνική] ρίζα κάποιου τετραγώνου:

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow 4, \quad 3 \leftrightarrow 9, \quad 4 \leftrightarrow 16, \quad \text{και ούτω καθεξής.}$$

Ωστόσο, στην αρχή είπαμε ότι υπάρχουν πολύ περισσότεροι αριθμοί από τετράγωνα, αφού το μεγαλύτερο μέρος τους δεν είναι τετράγωνα. Και όχι μόνο αυτό. Αναλογικά, ο αριθμός των τετραγώνων μειώνεται καθώς περνάμε σε μεγαλύτερους αριθμούς.»

Επόμένως, ο Γαλιλαίος υποδεικνύει την αντίφαση ότι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί είναι όσοι και τα τετράγωνά τους αλλά και συγχρόνως και περισσότεροι από αυτούς. Θα ερμηνεύσει αυτή την αντίφαση με την μη δυνατότητα διάταξης άπειρων συνόλων ή σύγκρισης άπειρων και πεπερασμένων συνόλων. Πράγματι, στο ίδιο έργο, μεταξύ των τριών χαρακτήρων Simplicio, Sagredo και Salviati αποτυπώνεται ο παρακάτω διάλογος.

- Salviati: *«…όταν λοιπόν ο Simplicio εισάγει πολλές γραμμές διαφορετικού μήκους και με ρωτάει πώς είναι δυνατόν οι μεγαλύτερες να μην περιέχουν περισσότερα σημεία από τη μικρότερη, του απαντώ ότι μια γραμμή δεν περιέχει περισσότερα ή λιγότερα ή απλώς τόσα σημεία με μια άλλη, αλλά ότι κάθε γραμμή περιέχει έναν άπειρο αριθμό σημείων.»*

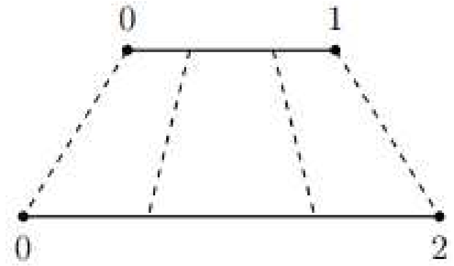
Υπάρχει επίσης μια προγενέστερη οικογένεια παρόμοιων προβλημάτων, όπως η παρατήρηση του Σκωτσέζου καθολικού ιερέα και φιλοσόφου Duns Scotus γύρω στο 1302 μ.χ., ότι οι άρτιοι (όμοια και οι περιττοί) είναι όσοι οι φυσικοί και συγχρόνως λιγότεροι από αυτούς. *(Philosophical Method and Galileo's Paradox of Infinity - Matthew W. Parker p.17).*

Από τα παραπάνω λοιπόν φαίνεται ότι η αρχή της αντιστοιχίας ένα προς ένα, που λειτουργεί για πεπερασμένα σύνολα, δεν ισχύει για άπειρα σύνολα, καθιστώντας δυνατή την ύπαρξη δύο συνόλων άπειρου μεγέθους που έχουν το ίδιο μέγεθος, ακόμα κι αν το ένα φαίνεται να έχει περισσότερα στοιχεία από το άλλο.

5. Άπειρα σύνολα και πληθικότητες

Όσο βαδίζουμε στους αιώνες της μαθηματικής άνθισης, γίνεται ολοένα και πιο ξεκάθαρο ότι το άπειρο είναι μια πολυδιάστατη έννοια που όσο δύσκολα αναλύεται, άλλο τόσο απρόβλεπτες είναι οι εκφάνσεις της, δημιουργώντας στον ανθρώπινο νου σύγχυση, αμφιβολίες και παράδοξα. Αυτός που προσπάθησε να δαμάσει και να μαθηματικοποιήσει το άπειρο, ήταν ο Γερμανός μαθηματικός Georg Cantor (1845 – 1918). Θεμελιωτής της θεωρίας των συνόλων, ο Cantor, κατέδειξε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα και τα διαχώρισε ως προς το μέγεθός τους. Η καντοριανή θεωρία συνόλων προϋποθέτει την ύπαρξη πραγματικών και ολοκληρωμένων απείρων, δηλαδή σε αντιδιαστολή με το αριστοτελικό δυνητικό άπειρο, που είναι ατελές και συνεχώς αυξανόμενο *(Cantorian infinity and philosophical concepts of God – Joanna van der Veen & Leon Horsten).*

Στην Γερμανία του 19ου αιώνα, υπήρχε η τάση για αποδοχή του πραγματικού άπειρου και παρά την θέση του Gauss ότι το άπειρο μπορεί να είναι μόνο μια λεκτική μεταφορά *(Gauss, Carl Friedrich. Letter to Heinrich Olbers, November 29, 1822),* τρεις μεγάλοι της εποχής Bolzano, Riemann και Dedekind, προηγήθηκαν του Cantor στην πλήρη αποδοχή του πραγματικού άπειρου καθώς και στην προώθηση της θεωρητικής διατύπωσης των μαθηματικών. Χρονολογικά όμως ο Bernard Bolzano ήταν ο πρώτος που βάδησε στην κατεύθυνση των παραπάνω, αλλά δεν άσκησε σχεδόν καμία επιρροή. Η υψηλή ποιότητα της δουλειάς του στη λογική και τα θεμέλια των μαθηματικών είναι γνωστή. Ένα βιβλίο με τίτλο Paradoxien des Unendlichen δημοσιεύτηκε μεταθανάτια το 1851 και σε αυτό ο Bolzano υποστήριξε ότι τα μαθηματικά δεν κινδυνεύουν από τα παράδοξα που πηγάζουν από την έννοια του απείρου, δημιουργώντας μια σθεναρή υπεράσπιση περί πραγματικού άπειρου. Ο Bolzano είχε διαπιστώσει την ιδιότητα του άπειρου να βρίσκεται σε ευθεία αντιστοιχία με ένα μέρος του και αυτό συγκεκριμένα μέσω της 1-1 συνάρτησης $f\colon\ [0,1] \to\ [0,2]$ και με τύπο $f(x) = 2x$, που προφανώς το σύνολο τιμών της f έχει διπλάσιο μήκος από το πεδίο ορισμού της (Boyer & Mcrzbach, 1989).



Εικόνα 24. Παραδοξότητα μέσω συνάρτησης - Bolzano

Η περίπτωση του Bolzano υποδηλώνει την απελευθέρωση από τις μετρικές έννοιες (η οποία ήρθε με την ανάπτυξη των θεωριών της προβολικής γεωμετρίας και ιδιαίτερα της τοπολογίας) κάτι που επρόκειτο να ανοίξει τον δρόμο για την ανάπτυξη της θεωρίας των συνόλων. Έτσι, ο Bernhard Riemann πρότεινε καινοτόμες ιδέες για την τοπολογία και για την έννοια του συνόλου και της «πολλαπλότητας» (Mannigfaltigkeit), στην περίφημη εναρκτήρια διάλεξή του «On the Hypotheses that beed at the Foundations of Geometry».
Ο Riemann ήταν ένας ενθουσιώδης οπαδός της ιδέας του Dirichlet, δηλαδή ότι μια συνάρτηση πρέπει να θεωρείται ως μια αντιστοιχία μεταξύ αριθμητικών τιμών, είτε αυτή μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν τύπο είτε όχι, σε αντίθεση με ότι είχε επικρατήσει μέχρι τότε, όπου μια συνάρτηση θα έπρεπε να έχει αναλυτική έκφραση. Μέσω του οράματός του ο Riemann άσκησε καθοριστική επιρροή τόσο στον Dedekind όσο και στον Cantor.

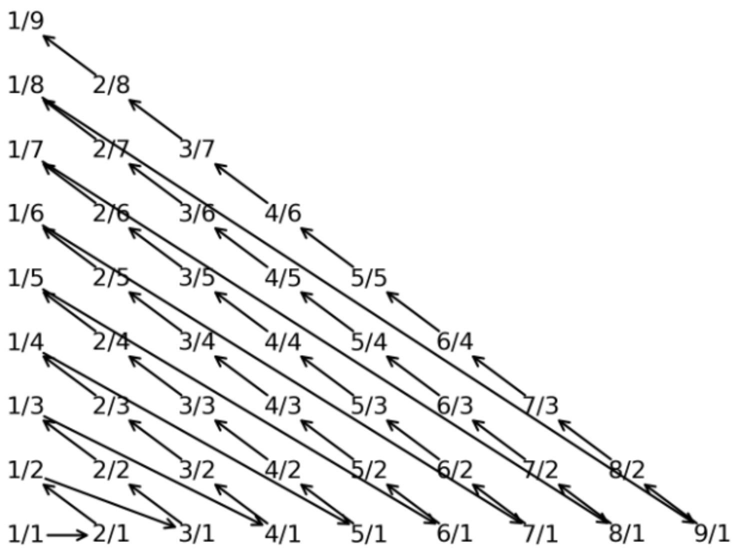
Η θεωρία συνόλων όπως γνωρίζουμε, αναπτύχθηκε από τον Cantor, ουσιαστικά ως απόρροια της ενασχόλησής του με την σύγκλιση των τριγωνομετρικών σειρών. Το πρόβλημα αυτό αρχικά διατυπώθηκε από τον Jean d'Alembert (1717-1783) όταν και εξήγαγε τη σύγχρονη κυματική εξίσωση για την δονούμενη χορδή και ισχυρίστηκε ότι οι τριγωνομετρικές σειρές θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή της. (Zygmund Cambridge, 1959). Ακολούθως ασχολήθηκαν με τη σύγκλιση των τριγωνομετρικών σειρών πολλοί μαθηματικοί, όπως ο Bernoulli, ο Euler και μεταγενέστερα ο Riemann, αλλά την ώθηση προς την σωστή κατεύθυνση έδωσε ο Joseph Fourier (1768-1830) όπου εφάρμοσε τριγωνομετρικές σειρές στο πρόβλημα με την εξίσωση θερμότητας. Οι τριγωνομετρικές σειρές σε αυτή τη περίπτωση είναι παρόμοιες με αυτές που ισχύουν και για την κυματική εξίσωση. Ως ήταν φυσικό επακόλουθο, τέθηκε στη συνέχεια το ερώτημα της ταξινόμησης των συναρτήσεων οι οποίες έχουν συγκλίνουσα σειρά Fourier. Ο Cantor μυήθηκε στο εν λόγω πρόβλημα αρχικά από τις σχετικές μελέτες του H. Heine (1821 – 1881), συναδέλφου του στο πανεπιστήμιο του Halle (Χ. Φίλη 2010) και στη συνέχεια επηρεάστηκε θετικά μέσω της γόνιμης αλληλογραφίας του με τον Richard Dedekind (1831–1916).

Πιο συγκεκριμένα ο Cantor σε μια εργασία του θα διατυπώσει και θα αποδείξει το θεώρημα της μοναδικότητας ως προς την σύγκλιση των σειρών Fourier που εκφράζεται ως εξής:

« Αν η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε οι συντελεστές α_n, b_n ορίζονται μονοσήμαντα. »

Σε εργασίες του γύρω από το ίδιο θέμα, ο Cantor θα διακρίνει διάφορα είδη άπειρων συνόλων ώστε να επεκτείνει το θεώρημα της μοναδικότητας και στη περίπτωση που η συνάρτηση έχει άπειρα σημεία ασυνέχειας. Κάπου εδώ βρίσκεται και η σπίθα που δημιούργησε τη θεωρία συνόλων.

Ο Cantor θα ασχοληθεί αρχικά με την αριθμησιμότητα των αλγεβρικών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που είναι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και θα καταλήξει στο συμπέρασμα ότι είναι ακριβώς όσοι και οι ακέραιοι. Μετά από την παραπάνω μελέτη, ο Cantor ξεκίνησε να μελετά τρόπους για να ταξινομήσει άπειρα σύνολα με βάση την πληθικότητά τους. Το 1873 έγραψε στον Dedekind ότι «το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των ρητών αριθμών μπορούν να αντιστοιχηθούν με μία απεικόνιση 1-1, και επομένως έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό (Crilly & Johnson, 1998). Πρόκειται για την περίφημη συνάρτηση ζευγαρώματος (pairing function) Cantor η οποία κάνει την αντιστοίχιση όπως φαίνεται παρακάτω:



Εικόνα 25. Αντιστοίχιση φυσικών και ρητών

Όσον αφορά τον μαθηματικό ορισμό της παραπάνω απεικόνισης π, αυτός είναι:

$$\pi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\pi(k_1, k_2) \coloneqq \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(k_1 + k_2 + 1) + k_2$$

Η συνάρτηση μάλιστα αυτή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μεγαλύτερες διαστάσεις οπού ορίζεται ως

$$\pi^{(n)}: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$

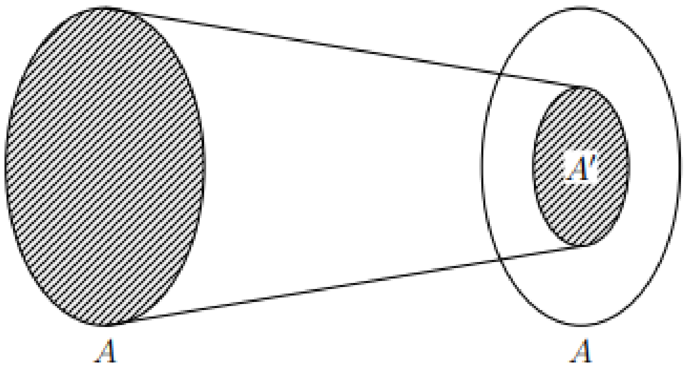
$$\pi^{(n)}(k_1, \dots, k_{n-1}, k_n) = \pi\left(\pi^{(n-1)}(k_1, \dots, k_{n-1}), k_n\right), \;\; n > 2.$$

Η πρωτοποριακή αυτή για την εποχή εργασία, δημοσιεύτηκε το 1874 και αποτέλεσε σταθμό τόσο στη θεωρία συνόλων όσο και στην αντίληψη των μαθηματικών της εποχής για την έννοια του απείρου.

Εν τω μεταξύ, ο Dedekind για πρώτη φορά θα ορίσει το χαρακτηριστικό που διακρίνει τα άπειρα σύνολα από τα πεπερασμένα σύνολα: « Τα άπειρα σύνολα είναι ισοδύναμα με ένα υποσύνολό τους» (Crilly & Johnson, 1998).

Ο παραπάνω ορισμός, σημαίνει ότι ένα σύνολο Α είναι άπειρο όταν για

$$A' \subseteq A, \;\; \exists\, f: A \to A', \;\; \textit{τέτοια ώστε } f \textit{ αμφιμονότιμη}.$$



Εικόνα 26. Ιδιότητα άπειρου συνόλου

Ο Cantor, μετά την εύρεση της συνάρτησης ζευγαρώματος, πίστευε πως και το (0,1) μπορεί να έχει μέτρο ίσο με το $\mathbb{N}$, δηλαδή πληθικό αριθμό $\aleph_0$, εν προκειμένω όμως έσφαλε (Crilly & Johnson, 1998) αφού θα αποδείξει στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα για την ακολουθία εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων των Bolzano-Weierstrass, ότι δεν υπάρχει 1-1 αντιστοίχιση του $\mathbb{N}$ με το διάστημα (0,1), αναδεικνύοντας ουσιαστικά την υπεραριθμησιμότητα των πραγματικών αριθμών.

Αν και εώς τη στιγμή εκείνη η ακριβής δομή των ανώτερων απείρων παρέμενε νεφελώδης, ένα νέο ερώτημα απασχολούσε τον Cantor. Υπήρχε απειροστικός «ημιόροφος» ; Υπήρχε δηλαδή ένα σύνολο τάξης μεγέθους τέτοιας που να βρίσκεται μεταξύ του μετρήσιμου απείρου και του συνεχούς; Σε μια περίπτωση ανυπαρξίας τέτοιου συνόλου θα αποδεικνυόταν ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελεί το σύνολο με την ελάχιστη πληθικότητα που είναι υπεραριθμήσιμο. Το πρόβλημα αυτό έγινε γνωστό ως «η υπόθεση του συνεχούς» και αποτέλεσε ένα από τα 23 άλυτα προβλήματα που παρουσίασε ο D. Hilbert σε συνέδριο το 1900.

Εν τω μεταξύ, ενώ ο Cantor εξακολουθούσε να ψάχνει εάν υπάρχουν άπειρα μεγαλύτερα από το άπειρο των πραγματικών αριθμών, απέδειξε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, το $\mathbb{R}^n$ δεν είναι απείρως μεγαλύτερο από το άπειρο ενός διαστήματος, ενώ επιπλέον το σύνολο που προκύπτει ως

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

είναι μεγαλύτερο από αυτά.

Πράγματι, υποθέτοντας ότι αυτό το σύνολο περιέχει μόνο τόσες συναρτήσεις όσες είναι και οι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad h(x) = f_x$$

είναι αναγκαίο να υποθέσουμε την ύπαρξη μιας 1-1 αντιστοίχισης. Αλλά σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση

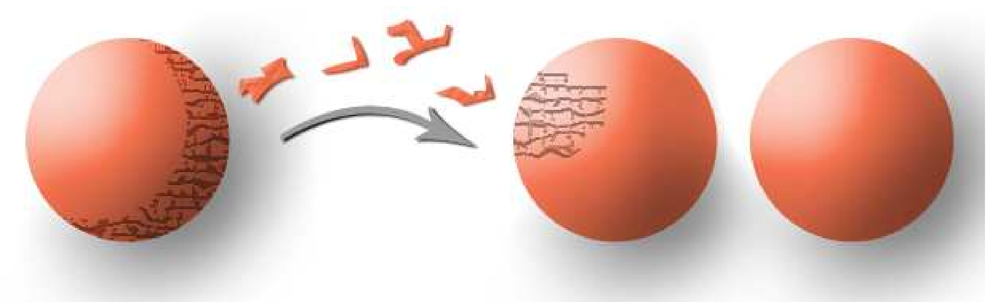
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f_x + 1$$

δεν δίνει εικόνα του $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ επί του $\mathbb{R}$, άρα η υπόθεση είναι λανθασμένη.

Το νόημα όλων των παραπάνω είναι εντυπωσιακό και για να το κατανοήσουμε καλύτερα, θα δώσουμε ένα παράδειγμα (το οποίο αποδίδει επίσης νόημα στις θεωρίες που υποδηλώνουν ότι το Σύμπαν σχηματίστηκε από ένα μικρό σωματίδιο με τη μεγάλη έκρηξη): τα σημεία που υπάρχουν σε ένα σωματίδιο σκόνης όσο μικρής διαμέτρου κι αν πάρουμε, μπορούν να αντιστοιχιστούν σε σημεία ενός τμήματος του διαστήματος με όσο μεγάλη διάμετρο κι αν πάρουμε. Έτσι, βλέπουμε ότι μέσω της έννοιας του απείρου εγείρονται και φιλοσοφικά ζητήματα, τα οποία επηρέασαν την υπαρξιακή προσέγγιση πληθώρας ερευνητών σχετικά με τον άνθρωπο και το σύμπαν.

Το 1922 δύο γερμανοί μαθηματικοί, ο E. Zermelo και ο A. Fraenkel, ανέπτυξαν μια αξιωματική θεωρία για τα σύνολα ώστε να στηρίξουν τον πύργο των απείρων του Καντόρ και να σταθεροποιήσουν τα θεμέλια των μαθηματικών. Δυστυχώς όμως οι κανόνες αυτοί δεν έδιναν ξεκάθαρη απάντηση στην υπόθεση του συνεχούς. Στην πραγματικότητα, φαινόταν μάλιστα να υποδηλώνουν ότι ίσως να μην υπήρχε καν απάντηση. Το βασικό εμπόδιο στο οποίο προσέκρουε η θεωρία τους ήταν ένας κανόνας γνωστός ως «το αξίωμα της επιλογής» που διατυπώθηκε το 1904 από τον Zermelo, προκειμένου να επισημοποιήσει την απόδειξη του θεωρήματος της καλής διάταξης. Δεν ανήκε στους αρχικούς κανόνες των Zermelo και Fraenkel αλλά κατέστη σύντομα σαφές ότι ορισμένες ουσιώδεις μαθηματικές διεργασίες, όπως η ικανότητα σύγκρισης διαφορετικών μεγεθών απείρου, θα ήταν αδύνατες χωρίς αυτόν.

Το αξίωμα της επιλογής δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ένα στοιχείο από κάθε μη κενό σύνολο, ακόμη κι αν αυτή η επιλογή δεν ορίζεται ξεκάθαρα. Με άλλα λόγια, το αξίωμα αυτό λέει ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια "συνάρτηση επιλογής" που θα μας δίνει ένα στοιχείο από κάθε σύνολο της οικογένειας συνόλων. Αυτό ακούγεται ανώδυνο, εμπεριέχει όμως ένα «αγκάθι»: προσφέρει τη δυνατότητα να επινοήσετε κάποια παράδοξα αρχικά σύνολα τα οποία παράγουν ακόμη πιο παράδοξα σύνολα όταν επιλέγετε ένα στοιχείο από το καθένα. Οι πολωνοί μαθηματικοί S. Banach και A. Tarski έδειξαν πώς το παραπάνω αξίωμα σε συνδυασμό με την αρχή της μετάθεσης δημιουργούν μια παράδοξη κατάσταση όπου μια σφαίρα (και γενικά ένα στερεό σώμα) δύναται να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό απλών μερών και μετά ανασυσταθεί σε δύο σφαίρες ισοδύναμες με την αρχική.



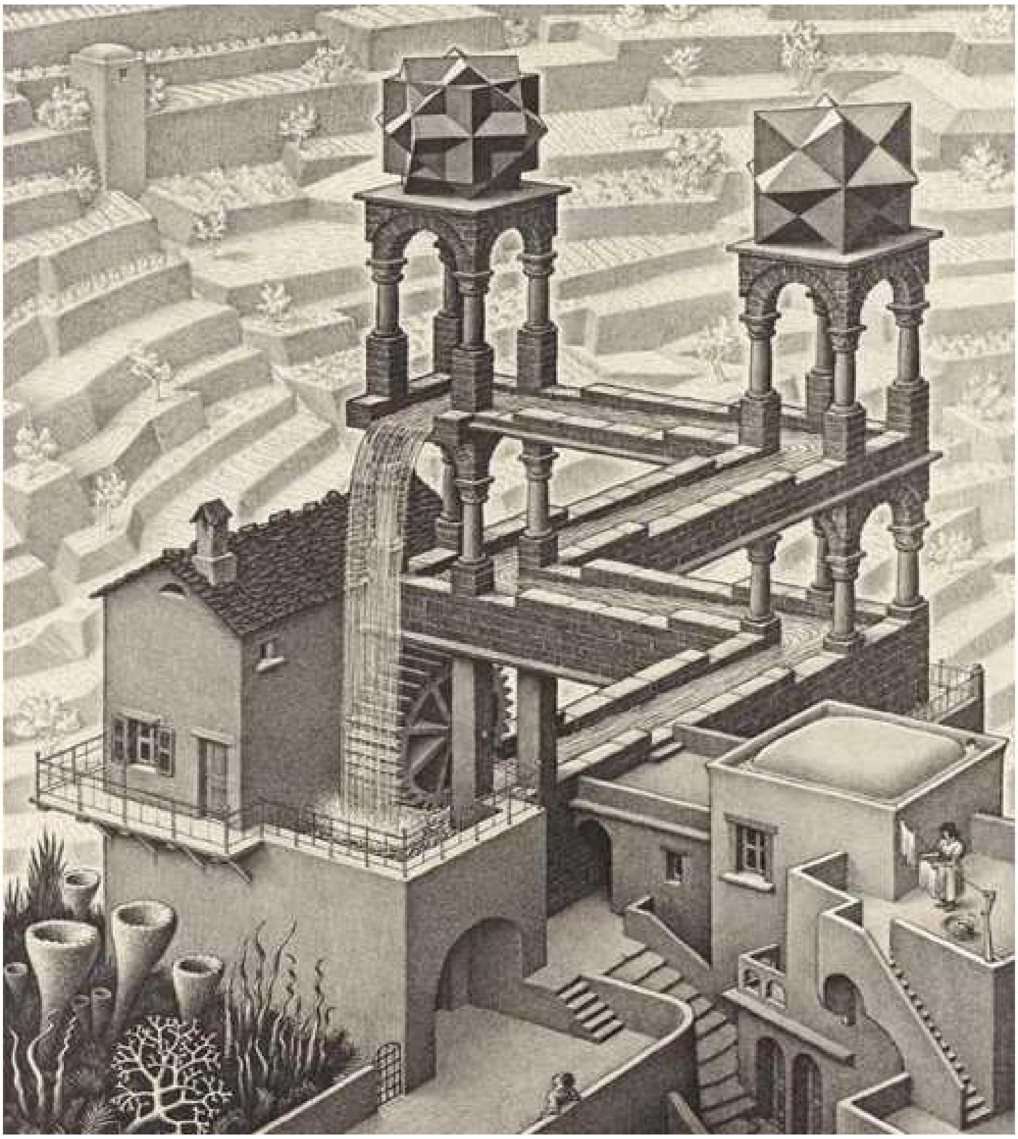
Εικόνα 27. Το παράδοξο των Banach - Tarski

Τέλος, το 1939 ο Kurt Gödel δήλωσε ότι η υπόθεση του συνεχούς δεν μπορεί να λυθεί με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων, ενώ το 1963, ο Paul Cohen απέδειξε ότι η υπόθεση αυτή είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων.

Επίλογος

Από την αρχαιότητα μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα, ο ορισμός του απείρου ήταν απλώς το αντώνυμο της έννοιας του πεπερασμένου. Μετά από αυτή την περίοδο, ο ορισμός του απείρου έχει αλλάξει σημαντικά υπό το πρίσμα των παραδόξων. Η σημασία των παραδόξων στις επιστήμες είναι αδιαμφισβήτητη καθώς εξώθησαν την ανθρώπινη νόηση να υπερβεί τα στερεότυπα της κάθε εποχής και να δημιουργήσει γόνιμο έδαφος για την ανάπτυξη νέων θεωριών που έχουν συμβάλλει σημαντικά στο σύγχρονο οικοδόμημα των μαθηματικών και της φιλοσοφίας. Οφείλουμε αρχικά να υποκλιθούμε στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς και φιλοσόφους που με το ανήσυχο πνεύμα τους και τη βαθιά διορατικότητά τους κατάφεραν να ανάψουν την σπίθα για την μεταγενέστερη εξέλιξη των επιστημών.

Είδαμε επίσης στην παραπάνω εργασία ότι τα παράδοξα που σχετίζονται με το άπειρο ουσιαστικά είναι φαύλοι κύκλοι που καταλήγουν σε αυτοαντιφατικά συμπέρασματα αποκαλύπτοντας λογική αδυναμία. Είναι προτάσεις που αποκαλύπτουν σημαντικά φιλοσοφικά προβλήματα αλλά και την περιορισμένη μας αντίληψη για το άπειρο. Τεράστια είναι η συνεισφορά του Cantor αφού μαθηματικοποίησε το άπειρο και υπέδειξε τα διάφορα επίπεδά του. Αδιαμφισβήτητα αυτός, αλλά και άλλοι θεωρητικοί όπως ο Russell, ο Gödel και γλωσσολόγοι όπως ο Tarski, με τις μελέτες τους γύρω από την φύση του απείρου έχουν συμβάλει στην πρόοδο της σύγχρονης λογικής και επιστήμης. Σίγουρα λοιπόν, τα παράδοξα και η έννοια του απείρου έχουν αλλάξει την αντίληψή μας για ορισμένες βασικές έννοιες από σημασιολογική άποψη, επιτρέποντάς μας να εξετάσουμε σε βάθος το περιεχόμενο πολλών άλλων εννοιών.



Εικόνα 28. Πίνακας καταρράχτη που απεικονίζει τον άπειρο βρόγχο

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. Barnsley, M.F. (2012) Fractals everywhere. Mineola, NY: Dover Publications.
2. Barrett, J. A. & Arntzenius, F. (1999). An infinite decision puzzle, Theory and Decision, 46(1), 101–103.
3. Bashirov, A.E. (2014). Mathematical Analysis Fundamentals. Waltham, MA: Elsevier.
4. Boyer, C. B. & Mcrzbach, C.C. (1989). A History of Mathematics. New York.
5. Cleary, J. J. (2016). Aristotle and mathematics: Aporetic method in cosmology and metaphysics. Brill.
6. Cooper, J. (2016). Aristotelian infinites. Oxford Studies in Ancient Philosophy, 51, 161-206.
7. Crilly, T., Johnson, D. (1998). The Emergence of Topological Dimension Theory . History of Topology, 1-24.
8. Earman, J. & Norton, J. (1993) “Forever is a Day: Supertasks in Pitowsky and Malament-Hogarth Spacetimes”, Philosophy of Science, 60, 22–42.
9. Heath, T. (2015). Mathematics in aristotle. Routledge.
10. https://bmcr.brynmawr.edu/2000/2000.07.10/
11. https://iep.utm.edu/zeno-par/#SSH3aiv
12. Kutuzov, B. V. (1960). Studies in Mathematics VI. Geometry. University.
13. Maor, E. (2017). To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite-New Edition (Vol. 54). Princeton University Press.
14. Norton, J. D. (1999). A Quantum Mechanical Supertask. Foundations of Physics, 29(8): 1265–1302.
15. Theodossiou, E., Mantarakis, P., Dimitrijevic, M. S., Manimanis, V. N., &Danezis, E. (2011). From the Infinity (Apeiron) of Anaximander in ancient Greece to the Theory of infinite Universes in modern Cosmology. Astronomical and AstrophysicalTransactions, 27(1), 153-167.
16. Thomson, J. F., 1954, “Tasks and super-tasks”, Analysis, 15(1): 1–13
17. Van Bendegem, J.P. (1994). Ross’ Paradox Is an Impossible Super-Task, The British Journal for the Philosophy of Science, 45(2): 743–748
18. Wallace, D. F. (2010). Everything and more: a compact history of infinity. WW Norton&Company.
19. (Bountis, Fokas, Psarakis, (xxxx) ‘Fractal analysis of tree paintings by Piet Mondrian (1872–1944)’, Int. J. Arts and Technology, Vol. x, No. x, pp.xxx–xxx.)
20. Aristotle. Metaphysics. Translated by W. D. Ross. Oxford University Press, 1924.
21. Heath, T.L. (1981). A History of Greek Mathematics, Volume I: From Thales to Euclid. Dover Publications.
22. Russell, B. (1945). A History of Western Philosophy. Simon and Schuster.
23. Plato. "Parmenides." Translated by Benjamin Jowett, The Internet Classics Archive, Massachusetts Institute of Technology, 1994, http://classics.mit.edu/Plato/parmenides.html.
24. Huffman, C.A. (2010). Pythagoras. In E.N. Zalta (Ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2010 Edition). Retrieved from https://plato.stanford.edu/archives/win2010/entries/pythagoras/

25. Fine, Gail. "Infinity and Paradox in Plato's Parmenides." The Review of Metaphysics, vol. 37, no. 3, 1984, pp. 479-496.
26. Sedley, David. "Infinity and the Forms in Plato." Oxford Studies in Ancient Philosophy, vol. 10, 1992, pp. 151-178.
27. Boyer, Carl B. "A History of Mathematics." Wiley, 1991.
28. Eves, Howard. "An Introduction to the History of Mathematics." Saunders College Publishing, 1990.
29. Anaxagoras. Fragments: A Text and Translation with a Commentary by Patricia Curd, University of Toronto Press, 2007.
30. Sedley, David. The Midwife of Platonism: Text and Subtext in Plato's Theaetetus. Oxford University Press, 2004.
31. Miloš Arsenijevic , Saša Popovic, Miloš Vuletic Anaxagoras, the Thoroughgoing Infinitist: The Relation between his Teachings on Multitude and on Heterogeneity, 2019
32. Theodossiou, E., Mantarakis, P., Dimitrijevic, M. S., Manimanis, V. N., &Danezis, E. (2011). From the Infinity (Apeiron) of Anaximander in ancient Greece to the Theory of infinite Universes in modern Cosmology. Astronomical and AstrophysicalTransactions, 27(1), 153-167.
33. Euclid. "Elements." Translated by Thomas L. Heath, Barnes & Noble Books, 2008.
34. Allen, R. (1974). The review of metaphysics. Philosophy Education Society, 27(4), 697-725.
35. Grant N. Remmen, Amplitudes and the Riemann Zeta Function, 2021
36. Brent Nelson The Weierstrass Function, 2017
37. Σπανδάγος Ευάγγελος, Σπανδάγου Ρούλα,
38. Τραυλού Δέσποινα, Οι μαθηματικοί της Αρχαίας Ελλάδας, 2000
39. Φίλη Χριστίνα, Οι αρχαιοελληνικές καταβολές των σύγχρονων μαθηματικών, 2010
40. Περί του Πυθαγορικού Βίου - Ιάμβλιχος, Αθήνα 2001
41. Ramanujan summation and the Casimir effect - Wolfgang Bietenholz, 2021

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.