



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

Προχωρημένες Σπουδές στη Φυσική

Τίτλος διπλωματικής εργασίας:

«Σκέδαση Compton και κβαντική θεωρία πεδίου»

ΗΛΙΑΣ ΤΟΥΡΓΕΛΗΣ

A.M. 91538

Επιβλέπων καθηγητής

ΚΩΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

*Institute of Nuclear & Particle Physics
NCSR "Demokritos"*

Πάτρα, Μάιος 2025

Τίτλος διπλωματικής εργασίας:

«Σκέδαση Compton και κβαντική θεωρία πεδίου»

ΗΛΙΑΣ ΤΟΥΡΓΕΛΗΣ

A.M. 91538

Επιτροπή επίβλεψης Διπλωματικής εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής

ΚΩΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

ΚΩΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΣΦΕΤΣΟΣ

Διευθυντής Ερευνών
Ινστιτούτο Πυρηνικής και Σωματιδιακής
Φυσικής
ΕΚΕΦΕ “ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ”

Τμήμα Φυσικής
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Πάτρα, Μάιος 2025

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

1. Πεδίο ή σωματίδιο;.....	7
2. Μονάδες μέτρησης.....	9

Κεφάλαιο 1. Κλασσική θεωρία πεδίου11

1.1 Σχετικιστικός συμβολισμός.....	11
1.2 Η Lagrangian.....	13
1.3 Ο φορμαλισμός Hamilton.....	15
1.4 Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης (θεώρημα Noether).....	16
1.4.1 Χωροχρονικές μετατοπίσεις και ο τανυστής Ενέργειας –Ορμής.....	17
1.4.2 Μετασχηματισμοί Lorentz και στροφορμή.....	20
1.4.3 Εσωτερικές συμμετρίες.....	23

Κεφάλαιο 2. Το πεδίο Klein-Gordon-Ελεύθερα πεδία.....25

2.1. Σχετικιστική εξίσωση Klein-Gordon.....	25
2.2. Κανονική κβάντωση.....	26
2.3. Η λύση της εξίσωσης Klein-Gordon.....	27
2.4. Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής.....	28
2.5. Η κβάντωση του πραγματικού πεδίου Klein-Gordon.....	30
2.6. Σωματίδια Klein-Gordon.....	34
2.7. Σχετικιστική κανονικοποίηση.....	37
2.8. Το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο.....	38
2.9. Η εικόνα Heisenberg.....	41

Κεφάλαιο 3. Διαδότες- Διαδότης Feynman Klein-Gordon.....44

3.1. Μικροαιτιότητα.....	44
3.2. Διαδότες (propagators).....	45
3.3. Ο Διαδότης Feynman.....	48

3.4. Η συνάρτηση <i>Green</i> του τελεστή <i>Klein-Gordon</i>	51
Κεφάλαιο 4. Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο	53
4.1. Οι εξισώσεις <i>Maxwell</i>	53
4.2. Ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής <i>Faraday</i>	55
4.3. Το ανάπτυγμα του <i>H/M</i> πεδίου σε επίπεδα κύματα.....	56
4.4. Η πυκνότητα <i>Lagrange</i>	57
4.5. Ο τανυστής Ενέργειας-Ορμής.....	58
4.6. Η κβάντωση του <i>H/M</i> πεδίου.....	60
4.7. Οι μεταθετικές σχέσεις του φωτονίου.....	61
4.8. Η συνθήκη <i>Gupta-Bleuler</i>	66
4.9. Φωτόνια χρονοειδούς και επιμήκους πολώσεως	
Οι επιπτώσεις της συνθήκης <i>Gupta-Bleuler</i>	69
4.10. Ο διαδότης <i>Feynman</i> των φωτονίων.....	70
Κεφάλαιο 5 . Το πεδίο <i>Dirac</i>	73
5.1. Η εξίσωση <i>Dirac</i>	73
5.2. Η λύση της εξίσωσης <i>Dirac</i>	75
5.3. Το <i>spin</i> των σωματιδίων <i>Dirac</i>	78
5.4. Η συζυγής εξίσωση <i>Dirac</i>	80
5.5. Ο μετασχηματισμός <i>Lorentz</i> της <i>Dirac</i>	81
5.6. Κλασική θεωρία πεδίου <i>Dirac</i>	82
5.7. Κανονική κβάντωση του πεδίου <i>Dirac</i>	83
5.8. Σωματίδια <i>Dirac</i>	85
5.9. Οι τελεστές των σταθερών κίνησης του πεδίου <i>Dirac</i>	86
5.10. Ο διαδότης του πεδίου <i>Dirac</i>	88
Κεφάλαιο 6. Αλληλεπιδρώντα πεδία	90
6.1. Η εικόνα αλληλεπίδρασης ή <i>Dirac</i>	90

6.2. Ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης (τελεστής Dyson).....	92
6.3. Ο πίνακας σκέδασης S (S -matrix).....	95
6.4. Από την χρονική στην κανονική διάταξη. Το θεώρημα Wick.....	96
Κεφάλαιο 7. QED και οι κανόνες Feynman	101
7.1. Σύζευξη φωτονίων-φερμιονίων.....	101
7.2. Ο πίνακας S της QED.....	102
7.3. Οι δύο πρώτοι όροι της σειράς: S_0, S_1	103
7.4. Ο τρίτος όρος της σειράς: S_2	105
7.5. Οι κανόνες Feynman.....	111
7.6. Τοπική συμμετρία και ρεύμα στην QED.....	112
Κεφάλαιο 8. Ενεργός διατομή σκέδασης	115
8.1. Το πλάτος σκέδασης Feynman M	115
8.2. Η πιθανότητα σκέδασης.....	116
8.3. Ο χώρος των φάσεων.....	116
8.4. Κανονικοποίηση της πιθανότητας.....	118
8.5. Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης.....	118
8.6. Σκέδαση στο σύστημα κέντρου μάζας.....	122
Κεφάλαιο 9. Σκέδαση Compton QED	125
9.1. Το στοιχείο του πίνακα M	125
9.2. Μέσοι όροι και αθροίσματα σπίν.....	127
9.3. Μέσοι όροι και αθροίσματα πόλωσης.....	128
9.4. Υπολογισμός των ιχνών: T_1, T_2, T_3, T_4	129
9.5. Υπολογισμός του τετραγώνου του πλάτους.....	134
9.6. Το πλάτος στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.....	135
9.7. Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης.....	136
9.8. Σχόλια στην σχέση Klein-Nishina και συμπεράσματα.	140

Περίληψη

Η εργασία αυτή περιέχει μια εισαγωγή στην κβαντική θεωρία πεδίου (QFT) την οποία στη συνέχεια εφαρμόζουμε στη σκέδαση Compton. Ο τελικός στόχος είναι να αποδείξουμε την σχέση Klein-Nishina στη μορφή:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2 \theta \right]$$

Στην σύντομη εισαγωγή, εκτός άλλων απαντάμε σε ερωτήσεις όπως «τι είναι η κβαντική θεωρία πεδίου» και παραθέτουμε το σύστημα μονάδων στο οποίο θα εργαστούμε. Στο πρώτο κεφάλαιο παραθέτουμε τμήματα της κλασσικής θεωρίας πεδίου, στον Λαγκρανζιανό φορμαλισμό και τον φορμαλισμό Hamilton, με μια σύντομη αναφορά στις συμμετρίες και τους νόμους διατήρησης. Στα κεφάλαια που ακολουθούν 2,3,4,5 παρουσιάζουμε την κβάντωση των ελεύθερων πεδίων Klein-Gordon (πραγματικού και μιγαδικού), Dirac καθώς και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, με ιδιαίτερη έμφαση στους αντίστοιχους διαδότες τους. Στο έκτο κεφάλαιο συζητάμε τις αλληλεπιδράσεις των πεδίων, τον πίνακα σκέδασης S και το θεώρημα *Wick*. Στο έβδομο κεφάλαιο δείχνουμε πως η ζεύξη ηλεκτρονίου-φωτονίου, οδηγεί στους κανόνες Feynman για την QED, τους οποίους παρουσιάζουμε στο τέλος του κεφαλαίου. Το επόμενο κεφάλαιο 8 είναι αφιερωμένο στην διαφορική ενεργό διατομή σκέδασης ενώ στο τελευταίο κεφάλαιο 9, εφαρμόζουμε τα παραπάνω για να αποδείξουμε τελικά την σχέση Klein-Nishina. Στο τέλος παρουσιάζονται συμπεράσματα και σχόλια που αφορούν στην σχέση Klein-Nishina.

Abstract

This paper contains an introduction to quantum field theory (QFT) which we then apply to Compton scattering. The final goal is to prove the Klein-Nishina relation in the form:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2 \theta \right]$$

In the brief introduction, among other things, we answer questions such as «what is quantum field theory» and present the system of units in which we will work. In the first chapter, we present parts of classical field theory, the Lagrangian and Hamiltonian formalism, with a brief reference to symmetries and conservation laws. In the following chapters 2,3,4 and 5, we present the quantization of free fields like Klein-Gordon (real and complex), Dirac as well as the electromagnetic field, with particular emphasis on their corresponding propagators. In the sixth chapter we discuss field interactions, the S-scattering matrix and the Wick theorem. In the seventh chapter we show how electron-photon coupling leads to the Feynman rules for QED, which we present at the end of the chapter. The next chapter 8 is dedicated to the differential scattering cross section while in the last chapter, chapter 9, we apply the above to finally prove the Klein-Nishina relation. Finally, conclusions and comments concerning the Klein-Nishina relation are presented.

Εισαγωγή

1.Πεδίο ή σωματίδιο;

Η έννοια της δυαδικότητας κύματος-σωματιδίου, μας υποδεικνύει ότι ηλεκτρόνια και φωτόνια, έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Παρά τις διαφορές στη μάζα και το φορτίο τους, κάτω από κατάλληλες συνθήκες, και τα δύο συμπεριφέρονται τόσο ως κύματα, όσο και ως σωματίδια. Στην κλασσική φυσική, τα ηλεκτρόνια όπως και άλλα υλικά σωματίδια, θεωρούνται θεμελιώδη συστατικά της Φύσης. Αντίθετα το φως προκύπτει ως κυματισμός (διαταραχή) του ηλεκτρομαγνητικού (H/M) πεδίου. Στο κβαντικό επίπεδο, φωτόνια και σωματίδια πρέπει να αντιμετωπιστούν ισότιμα, μιας και έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Ποια όμως από τις δύο εικόνες είναι θεμελιώδης και ποια παράγωγη από αυτήν; Η επικρατούσα, ή μάλλον η βολικότερη άποψη, είναι ότι όπως τα προκύπτουν από την κβάντωση του H/M πεδίου, έτσι και τα μαζικά φορτισμένα σωματίδια, όπως το ηλεκτρόνιο, προκύπτουν από την κβάντωση των αντίστοιχων πεδίων ύλης. Για να περιγράψουμε τους θεμελιώδεις νόμους της Φύσης, πρέπει όχι μόνο να εισαγάγουμε πεδία ηλεκτρονίων, αλλά και πεδία κουάρκ, πεδία νετρίνων, πεδία γλουονίων, πεδία W και Z-μποζονίων, πεδία Higgs και μια ολόκληρη σειρά άλλων πεδίων.

Υπάρχει ένα πεδίο που σχετίζεται με κάθε τύπο θεμελιώδους σωματιδίου που εμφανίζεται στη Φύση.

Γιατί «Πεδίο» και γιατί «κβαντικό»;

Ο νόμος του Coulomb (όπως εξάλλου και ο νόμος του Newton) περιλαμβάνουν την αντίληψη της «δράσης από απόσταση». Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη που αισθάνεται ένα ηλεκτρόνιο, αλλάζει αμέσως αν κινηθεί ένα μακρινό πρωτόνιο, αφού η δύναμη μεταφέρεται ακαριαία, με «άπειρη» ταχύτητα.. Αυτή η αντίληψη είναι πειραματικά λανθασμένη και φιλοσοφικά μη ικανοποιητική. Η θεωρία πεδίου του Μάξγουελ διορθώνει την αντίληψη αυτή. Η ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση «ταξιδεύει» με την ταχύτητα του φωτός μέσω του φωτονίου. Ως εκ τούτου είναι απαραίτητη μια σχετικιστική θεώρηση των πραγμάτων. Όλες οι αλληλεπιδράσεις πραγματοποιούνται τοπικά και οι φυσικοί νόμοι έχουν τοπικό χαρακτήρα. Η απαίτηση της τοπικότητας παραμένει ένα ισχυρό κίνητρο για τη μελέτη των θεωριών πεδίου στον κβαντικό κόσμο.

Τα σωματίδια δημιουργούνται και καταστρέφονται!

Επιπλέον ο συνδυασμός της κβαντικής μηχανικής και της ειδικής σχετικότητας υποδεικνύει, ότι ο αριθμός των σωματιδίων δεν διατηρείται. Τα σωματίδια δεν είναι άφθαρτα αντικείμενα, φτιαγμένα μιας δια παντός, στην αρχή της δημιουργίας του σύμπαντος. Μπορούν να δημιουργούνται και να καταστρέφονται. Στην πραγματικότητα, είναι ως επί το πλείστον εφήμερα και φευγαλέα. Αυτό το πειραματικά επαληθευμένο γεγονός, προβλέφθηκε για πρώτη φορά από τον Dirac, ο οποίος κατάλαβε πώς η σχετικότητα, συνεπάγεται την αναγκαιότητα ύπαρξης των αντισωματιδίων.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο μάζας m παγιδευμένο σε ένα μονοδιάστατο κουτί μήκους L . Τότε η αβεβαιότητα της θέσης στον άξονα x είναι $\Delta x = L$. Ο Heisenberg μας λέει (κατά προσέγγιση) ότι η αβεβαιότητα στην ορμή για τον άξονα x είναι τέτοια ώστε

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$$

Δηλαδή

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{L}$$

Σε ένα σχετικιστικό περιβάλλον, η ορμή και η ενέργεια βρίσκονται σε ισοδύναμη βάση.

$$E \approx pc \quad \text{για} \quad mc^2 \ll pc$$

Επομένως θα πρέπει επίσης να έχουμε μια αβεβαιότητα στην ενέργεια της τάξεως

$$\Delta E \geq \hbar c/L.$$

Ωστόσο, όταν η αβεβαιότητα στην ενέργεια υπερβαίνει το $\Delta E = 2mc^2$

τότε περνάμε το φράγμα για να αναδυθούν από το κενό, ζεύγη αντισωματιδίων-σωματιδίων μάζας m . Μετά την αντικατάσταση έχουμε

$$L \geq \frac{\hbar}{2mc}$$

Τα ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων αναμένεται να είναι σημαντικά όταν εξετάζουμε ένα σωματίδιο σε αποστάσεις της τάξεως $\lambda = \hbar/mc$

Σε αποστάσεις μικρότερες από αυτήν, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να ανιχνεύσουμε ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων που σωρεύονται γύρω από το αρχικό σωματίδιο που βάλαμε. Η απόσταση λ ονομάζεται μήκος κύματος Compton και είναι συνήθως μικρότερο από το μήκος κύματος de Broglie $\lambda_{dB} = \hbar/|p|$.

Κατά κάποιο τρόπο το μήκος κύματος de Broglie είναι η απόσταση στην οποία γίνεται εμφανής η κυματική φύση των σωματιδίων ενώ το μήκος κύματος Compton είναι η απόσταση στην οποία η έννοια ενός μόνο σημειακού σωματιδίου καταρρέει πλήρως.

Η παρουσία ενός πλήθους σωματιδίων και αντισωματιδίων σε μικρές αποστάσεις, μας λέει ότι κάθε προσπάθεια να γράψουμε μια σχετικιστική εκδοχή της εξίσωσης Schrödinger ενός σωματιδίου (ή, μιας εξίσωσης για οποιονδήποτε σταθερό αριθμό σωματιδίων) είναι καταδικασμένη σε αποτυχία. Δεν υπάρχει τρόπος, στην μη σχετικιστική κβαντική μηχανική, για την αντιμετώπιση των αλλαγών στον αριθμό των σωματιδίων. Οποιαδήποτε προσπάθεια να κατασκευαστεί μια σχετικιστική εκδοχή της εξίσωσης Schrödinger ενός σωματιδίου, συναντά σοβαρά προβλήματα, όπως οι αρνητικές πιθανότητες, ή, η κατάρρευση της αιτιότητας. Αυτή η αποτυχία μας λέει ότι μόλις μπορούμε στο σχετικιστικό πλαίσιο, χρειαζόμαστε έναν νέο φορμαλισμό για να αντιμετωπίσουμε καταστάσεις με απροσδιόριστο αριθμό σωματιδίων. Αυτός ο φορμαλισμός είναι η κβαντική θεωρία πεδίου (QFT).

Θάλασσα ηλεκτρονίων

Δύο ηλεκτρόνια είναι πανομοιότυπα από κάθε άποψη, ανεξάρτητα από το από πού προέρχονται και τι τους έχει συμβεί μέχρι τώρα. Το ίδιο ισχύει για κάθε άλλο θεμελιώδες σωματίδιο. Ένα ηλεκτρόνιο που παράγεται σε μια μακρινή περιοχή του σύμπαντος είναι πανομοιότυπο με ένα ηλεκτρόνιο που παράγεται σε έναν επιταχυντή σωματιδίων εδώ στη Γη.

Και τα δύο είναι ακριβώς τα ίδια! Πώς είναι αυτό δυνατόν; Γιατί δεν υπάρχουν σφάλματα στην παραγωγή ηλεκτρονίων; Πώς μπορούν να είναι δύο αντικείμενα, κατασκευασμένα τόσο μακριά μεταξύ τους, στον χώρο και τον χρόνο να είναι πανομοιότυπα από όλες τις απόψεις; Η εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε, είναι ότι υπάρχει μια θάλασσα ηλεκτρονίων που γεμίζει το σύμπαν. Έτσι όταν δημιουργείται ένα ηλεκτρόνιο, με κάποιο τρόπο ανασύρουμε το σωματίδιο από αυτή τη θάλασσα. Τότε δεν προκαλεί έκπληξη το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια που παράγονται σε διαφορετικά μέρη του σύμπαντος είναι πανομοιότυπα, αποτελούνται από το ίδιο υλικό. Αυτό είναι που ονομάζουμε «πεδίο ηλεκτρονίων». Τα κβαντικά σωματίδια που είναι ίδια είναι πραγματικά δυσδιάκριτα. Η εναλλαγή δύο σωματιδίων, αφήνει την κατάσταση εντελώς αμετάβλητη, εκτός ίσως, από ένα πιθανό πρόσημο μείον. Αυτό το σύμβολο μείον καθορίζει τα στατιστικά στοιχεία του σωματιδίου. Στην κβαντομηχανική πρέπει να βάλουμε αυτά τα στατιστικά στοιχεία αυθαίρετα, με το χέρι, και, για να συμφωνήσουμε με το πείραμα, θα πρέπει να επιλέξουμε στατιστική Bose (χωρίς πρόσημο μείον) για σωματίδια με σπιν ακέραιο αριθμό και στατιστική Fermi (με πρόσημο μείον) για σωματίδια με σπιν ημιακέραιο. Στην κβαντική θεωρία πεδίου, αυτή η σχέση μεταξύ σπιν και στατιστικής δεν είναι κάτι που πρέπει να βάλουμε με το χέρι, δεν είναι κάτι αυθαίρετο, είναι συνέπεια του θεωρητικού πλαισίου.

Τι είναι η Κβαντική Θεωρία Πεδίου;

Είναι η κβάντωση ενός κλασικού πεδίου, το πιο γνωστό παράδειγμα του οποίου, είναι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Στην κβαντομηχανική, παίρνουμε τις γενικευμένες συντεταγμένες και ορμές, και τις προωθούμε σε τελεστές, οι οποίοι δρουν σε ένα χώρο Hilbert. Η κβάντωση ενός πεδίου, ή δεύτερη κβάντωση ακολουθεί παρόμοια βήματα. Στη θέση των γενικευμένων συντεταγμένων-ορμών, προωθούμε σε τελεστές την πεδιακή συνάρτηση και την συζυγή ορμή. Έτσι, οι βασικοί βαθμοί ελευθερίας στην κβαντική θεωρία πεδίου είναι τελεστικές συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε να κάνουμε με έναν άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας, τουλάχιστον ένας για τον καθένα σημείο στο χώρο. Αυτό το άπειρο επιστρέφει και δημιουργεί προβλήματα απειρισμών σε αρκετές περιπτώσεις.

2. Μονάδες μέτρησης

Υπάρχουν τέσσερις κύριες μονάδες στο SI: τρεις κινηματικές (*metre, sec, Kgr*) και μία ηλεκτρική (*Amber*), οπότε η μονάδα ηλεκτρικού φορτίου ορίζεται ως: $1Cb = 1Asec$.

Είναι σύνηθες στο πεδίο της φυσικής των στοιχειωδών σωματιδίων να επαναπροσδιορίζονται οι μονάδες, έτσι ώστε η ταχύτητα του φωτός και η σταθερά του Planck να γίνονται ίσες με ένα: $c = 1$ και $\hbar = 1$. Αυτό επιβάλλει δύο περιορισμούς στις τρεις κινηματικές μονάδες και επομένως, μας αφήνει ελεύθερη επιλογή για την μία από αυτές. Η κινηματική μονάδα που επιλέγουμε είναι η μονάδα ενέργειας, E, και συνήθως μετριέται σε eV. Μόλις καθορίσουμε $c = 1$ και $\hbar = 1$, όλες οι άλλες κινηματικές μονάδες μπορούν πλέον να εκφραστούν σε μονάδες ενέργειας. Για παράδειγμα από την σχέση

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

με $c = 1$ προκύπτει ότι η μάζα, όπως και η ορμή, έχουν διαστάσεις ενέργειας και μονάδα μέτρησης το eV. Ομοίως από το μήκος κύματος Compton

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

με $c = 1$ και $\hbar = 1$ προκύπτει ότι το μήκος έχει διαστάσεις αντίστροφης ενέργειας και μονάδα μέτρησης eV^{-1} ενώ από την σχέση

$$E = hf$$

Ο χρόνος έχει επίσης διαστάσεις αντίστροφης ενέργειας eV^{-1}

Επομένως η δύναμη είναι $[F] = E^2$. Η ταχύτητα είναι αδιάστατη, η στροφορμή αδιάστατη κλπ

Η μονάδα ηλεκτρικού φορτίου προσδιορίζεται θέτοντας $\epsilon_0 = 1$, οπότε δεδομένου ότι

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

Έχουμε ότι και $\mu_0 = 1$. Συνολικά λοιπόν θεωρούμε:

$$c = \hbar = \mu_0 = \epsilon_0 = 1 \quad (0.1)$$

Επομένως ο νόμος Coulomb γράφεται ως:

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Από όπου προκύπτει ότι, αφού η δύναμη έχει μονάδα μέτρησης $(eV)^2$ και το μήκος έχει μονάδα μέτρησης $(eV)^{-1}$, επομένως το ηλεκτρικό φορτίο είναι αδιάστατο μέγεθος.

Η σταθερά λεπτής υφής είναι αδιάστατη σε όλα τα συστήματα μονάδων. Στο SI ορίζεται ως:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c\epsilon_0} = \frac{1}{137} \quad (0.2)$$

Στο φυσικό σύστημα μονάδων ($c = 1$ και $\hbar = 1$), η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$$

Από αυτήν προκύπτει το κβάντο ηλεκτρικού φορτίου

$$e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}} = 0,303 \quad (0.3)$$

Κεφάλαιο 1.

Κλασική θεωρία πεδίου

Στο κεφάλαιο αυτό, θα θεωρήσουμε τα πεδία σε κάθε σημείο του χώρου, ως δυναμικές μεταβλητές. Ένα πεδίο είναι μια ποσότητα που ορίζεται σε κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου (\vec{x}, t) όπως για παράδειγμα το διανυσματικό ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ ή ένα βαθμωτό πεδίο, όπως το πεδίο θερμοκρασιών $T(\vec{x}, t)$. Ενώ η κλασική σωματιδιακή μηχανική, ασχολείται με έναν πεπερασμένο αριθμό γενικευμένων συντεταγμένων $q_\alpha(t)$, που διακρίνονται μεταξύ τους με την βοήθεια του δείκτη α , στη θεωρία πεδίου μας ενδιαφέρει η δυναμική των πεδίων

$$\phi_\alpha(\vec{x}, t)$$

όπου τόσο το α όσο και το \vec{x} θεωρούνται ως δείκτες. Έτσι έχουμε να κάνουμε με ένα σύστημα απείρων βαθμών ελευθερίας, τουλάχιστον έναν για κάθε σημείο \vec{x} στο χώρο. Η έννοια της θέσης έχει πλέον υποβιβαστεί, από μια δυναμική μεταβλητή στη μηχανική των σωματιδίων, σε έναν απλό δείκτη, μία παράμετρο, στη θεωρία πεδίου. Στο κλασικό επίπεδο, τα πεδία ικανοποιούν κυματικές εξισώσεις, όπως αυτές που ικανοποιεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, απουσία πηγών.

Στη συνέχεια θα εισαγάγουμε την Lagrangian (L) του πεδίου μέσω της πυκνότητας Lagrange (\mathcal{L}), από την οποία προκύπτουν οι πεδιακές εξισώσεις, με την βοήθεια της « Αρχής Hamilton». Από την γενική μορφή του θεωρήματος Noether θα βρούμε τα διατηρήσιμα μεγέθη που προκύπτουν από θεμελιώδεις μετασχηματισμούς συμμετρίας. Τέλος επειδή η θεωρία πεδίου είναι σχετικιστική, θεωρήσαμε απαραίτητη την αναφορά σε ορισμένες σχετικιστικές έννοιες.

1.1 Σχετικιστικός συμβολισμός

Θα χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο «φυσικό σύστημα» μονάδων στο οποίο θεωρούμε

$$\hbar = c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1 \quad (1.1.1)$$

Ακολουθώντας την καθιερωμένη σύμβαση, για το χωροχρονικό «ανταλλοίωτο» τετράνυσμα θα γράφουμε

$$x^\mu = (ct, \vec{x}), (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

Για την χρονική συνιστώσα $x^0 = ct$, ενώ για την χωρική, $x^j = \vec{x}$, ($j = 1, 2, 3$)

Ο «συναλλοίωτος» μετρικός τανυστής Minkowski ορίζεται ως

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.2)$$

Από όπου το «συναλλοίωτο» τετράνυσμα προκύπτει ως:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x})$$

Ο «ανταλλοίωτος» μετρικός τανυστής $g^{\mu\nu}$ ορίζεται ως

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \quad (1.1.3)$$

Οι νόμοι της Φύσης είναι σχετικιστικοί. Στόχος της κβαντικής θεωρίας πεδίου, είναι να συμφιλιώσει την κβαντική μηχανική με την ειδική σχετικότητα. Για το σκοπό αυτό, θέλουμε να κατασκευάσουμε θεωρίες πεδίου στις οποίες ο χώρος και ο χρόνος να τοποθετούνται σε ισότιμη βάση ώστε η θεωρία να είναι αμετάβλητη υπό τους μετασχηματισμούς Lorentz.

$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\text{Όπου ο } \Lambda^\mu_\nu \text{ ικανοποιεί την σχέση: } \Lambda^\mu_\sigma g^{\sigma\tau} \Lambda^\nu_\tau = g^{\mu\nu} \quad (1.1.4)$$

Μια περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα x^3 περιγράφεται από τον μετασχηματισμό Lorentz.

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

Ενώ μια «ώθηση» (boost) με ταχύτητα $v < c \Rightarrow v < 1$ κατά μήκος του άξονα x^1 περιγράφεται από τον μετασχηματισμό

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.6)$$

$$\text{Όπου } \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \text{ με } \beta = v/c = v$$

Οι μετασχηματισμοί Lorentz αφήνουν το μέτρο κάθε τετρασμανυματικού μεγέθους αμετάβλητο, όπως για παράδειγμα

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (\vec{x})^2$$

Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$$

Από όπου

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

Προκύπτει ότι η μερική παράγωγος ως προς την ανταλλοίωτη «θέση», μετασχηματίζεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz. Συμπεριφέρεται δηλαδή ως συναλλοίωτο διάνυσμα. Έχουμε δηλαδή

$$\partial_{\mu'} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$$

όπου

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \vec{\nabla} \right) \quad \text{και} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\vec{\nabla} \right) \quad (1.1.7)$$

Το βαθμωτό τους γινόμενο, είναι επίσης Lorentz αναλλοίωτο και ισούται με τον τελεστή d'Alembert

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

1.2 Η Lagrangian

Στη σωματιδιακή μηχανική η Lagrangian L εξαρτάται από τις γενικευμένες συντεταγμένες q και \dot{q} αλλά όχι από το \ddot{q} . Στη θεωρία πεδίου περιοριζόμαστε παρομοίως σε Lagrangians L που εξαρτώνται από τα ϕ και $\dot{\phi}$, και όχι από το $\ddot{\phi}$. Θα εξετάσουμε επίσης μόνο Lagrangians εξαρτώμενες από το $\vec{\nabla}\phi$ και όχι υψηλότερες παραγώγους. Επίσης δεν θα εξετάσουμε Lagrangians με ρητή εξάρτηση από το x^μ . Όλη αυτή η εξάρτηση έρχεται μόνο μέσω του ϕ και των παραγώγων του. Επομένως θα έχει την μορφή

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha) \quad (1.2.1)$$

όπου η συνάρτηση $\mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ ονομάζεται πυκνότητα Lagrang και εξαρτάται από τα

$$\phi_\alpha(\vec{x}, t), \quad \partial_\mu \phi_\alpha(\vec{x}, t), \quad \vec{\nabla} \phi_\alpha(\vec{x}, t)$$

Η δράση είναι τότε:

$$S[\phi_\alpha] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}$$

Προσδιορίζουμε τις εξισώσεις κίνησης με την αρχή της ελάχιστης δράσης. Μεταβάλλουμε τη διαδρομή, διατηρώντας τα τελικά σημεία σταθερά και απαιτούμε:

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow$$

$$0 = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} \Rightarrow$$

$$0 = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} \delta \phi + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right)$$

Το ολοκλήρωμα της ολικής παραγώγου μηδενίζεται μιας και στο σύνορο, θεωρούμε ότι οι μεταβολές των πεδίων μηδενίζονται: $\delta\phi(\vec{x}_1, t_1) = \delta\phi(\vec{x}_2, t_2) = 0$. Απαιτώντας επιπλέον το πρώτο ολοκλήρωμα να μηδενίζεται, για όλες τις δυνατές διαδρομές, παίρνουμε τελικά τις πεδιακές εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange για τα πεδία $\phi_a(\vec{x}, t)$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0 \quad (1.2.2)$$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το πραγματικό βαθμωτό πεδίο $\phi(\vec{x}, t)$. Η απλούστερη πυκνότητα Lagrange που περιγράφει το πεδίο αυτό είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (1.2.3)$$

Συγκρίνοντάς την με την συνήθη έκφραση της Lagrangian $L = T - V$ συμπεραίνουμε ότι η κινητική ενέργεια του πεδίου είναι

$$T = \int d^3x \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (1.2.4)$$

Ενώ η δυναμική ενέργεια είναι

$$V = \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \right] \quad (1.2.5)$$

Ο πρώτος όρος στην έκφραση αυτή ονομάζεται «ενέργεια βαθμίδας» ενώ ο δεύτερος έχει επικρατήσει ως «δυναμική ενέργεια» ή απλώς δυναμικό.

Προκειμένου να πάρουμε την εξίσωση κίνησης που προκύπτει από την παραπάνω πυκνότητα Lagrange υπολογίζουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2\phi \text{ και } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi = (\dot{\phi}, -\vec{\nabla}\phi)$$

Από την Euler-Lagrange παίρνουμε

$$\partial_\mu(\partial^\mu \phi) - (-m^2\phi) = \ddot{\phi} - \vec{\nabla}^2\phi + m^2\phi = 0$$

Η οποία σε συμπαγή μορφή γράφεται

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2\phi = 0 \quad (1.2.6)$$

Αυτή είναι η εξίσωση Klein-Gordon.

Μια προφανής γενίκευση της Klein-Gordon προκύπτει αντικαθιστώντας στην πυκνότητα Lagrange το δυναμικό με μια γενικότερη μορφή $V(\phi)$.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V(\phi) \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

1.3 Ο φορμαλισμός Hamilton

Ο ονομαζόμενος «κανονικός φορμαλισμός» ή φορμαλισμός Hamilton είναι παρόμοιος με αυτόν ενός συστήματος πεπερασμένων βαθμών ελευθερίας. Η κανονική συζυγής ορμή που αντιστοιχεί στο πεδίο $\phi_a(\vec{x}, t)$ ορίζεται ως

$$\pi_a(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a} \quad (1.3.1)$$

Η πυκνότητα Hamilton ορίζεται ως

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}_a(x) \pi_a(x) - \mathcal{L}(x) \quad (1.3.2)$$

Όπου στην \mathcal{H} απαλείφουμε το $\dot{\phi}_a$ μέσω του π_a έτσι ώστε $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi_a, \pi_a)$

Η Hamiltonian του πεδίου είναι τότε

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (1.3.3)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα του ελεύθερου βαθμωτού πεδίου με πυκνότητα Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

Η κανονική ορμή του πεδίου είναι

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$$

Η πυκνότητα Hamilton είναι

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \right) = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2)$$

Και η Hamiltonian του πεδίου είναι

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} \{ \pi^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2 \}$$

Οι εξισώσεις κίνησης για το σύστημα των πεδίων στον κανονικό φορμαλισμό, δίνονται από τις εξισώσεις Hamilton.

$$\dot{\phi}_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a}, \quad \dot{\pi}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_a} \quad (1.3.4)$$

1.4 Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης (θεώρημα Noether)

Η διατήρηση, της ενέργειας, της ορμής και της στροφορμής, είναι θεμελιώδεις νόμοι, τους οποίους πρέπει να ικανοποιεί η θεωρία μας. Οι νόμοι διατήρησης, είναι αποτέλεσμα της ύπαρξης συμμετριών. Σε κάθε συνεχή μετασχηματισμό, των συντεταγμένων ή των πεδίων, για τον οποίο μετασχηματισμό, η φυσική δεν αλλάζει, αντιστοιχεί μια διατηρούμενη ποσότητα και ένα διατηρούμενο ρεύμα. Πρέπει να τονίσουμε ότι, αν γνωρίζουμε την εξίσωση κίνησης ενός συστήματος, δεν μπορούμε πάντα να βρούμε μια Lagrangian, η οποία μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange να την αναπαράγει. Για παράδειγμα η εξίσωση κίνησης ενός αρμονικού ταλαντωτή με τριβή

$$m\ddot{q} = -kq - \lambda\dot{q}$$

είναι αδύνατον να παραχθεί από μια Lagrangian της μορφής $L = L(q, \dot{q})$.

Αν όμως οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος απορρέουν από μια Lagrangian, τότε σε κάθε «συνεχή συμμετρία» του, αντιστοιχεί μια διατηρήσιμη ποσότητα και ένα αντίστοιχο ρεύμα, χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης συμμετρίας.

Η παραπάνω πρόταση είναι γνωστή ως θεώρημα Noether, με την βοήθεια το οποίου μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές της κίνησης και να απλοποιήσουμε την λύση του προβλήματός μας.

Απόδειξη του θεωρήματος Noether

Λέμε ότι ο απειροστός μετασχηματισμός

$$\delta\phi_\alpha = K_\alpha(\phi, \partial\phi) \quad (1.4.1)$$

Είναι μια συμμετρία, αν αφήνει αμετάβλητη τη δράση $\delta S = 0$. Για να συμβαίνει αυτό, η Lagrangian θα πρέπει να μένει αμετάβλητη $\delta\mathcal{L} = 0$, ή να μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο της μορφής

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi, \partial\phi) \quad (1.4.2)$$

Η μεταβολή της Lagrangian είναι:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)} \delta(\partial_\mu\phi_\alpha) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)} (\partial_\mu(\delta\phi_\alpha)) \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} \delta\phi_\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)} \right) \delta\phi_\alpha \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)} \right) \right] \delta\phi_\alpha + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha \right) \end{aligned}$$

Η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι μηδέν όπως προκύπτει από τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Παίρνουμε επομένως

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha \right) \quad (1.4.3)$$

Όμως για τον μετασχηματισμό συμμετρίας $\delta \phi_\alpha = K_\alpha(\phi)$ ισχύει $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu(\phi)$ οπότε

$$\partial_\mu F^\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha \right) \quad (1.4.4)$$

ή

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha - F^\mu \right) = 0$$

ή

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.4.5)$$

Όπου

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha - F^\mu \quad (1.4.6)$$

Η διατηρούμενη ποσότητα μπορεί να προκύψει αν ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση συνέχειας

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

σε όλο τον χώρο και χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Gauss. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^3x (\partial_\mu j^\mu) = \int_V d^3x (\partial_0 j^0 + \partial_i j^i) = \int_V d^3x \left(\frac{\partial j^0}{\partial t} \right) + \int_V d^3x (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \\ &= \frac{d}{dt} \int_V d^3x j^0 + \oint_S d\vec{S} \cdot \vec{j} = \frac{d}{dt} \int_V d^3x j^0 = \frac{dG}{dt} \end{aligned}$$

Συμπερασματικά:

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x j^0 = \frac{dG}{dt} = 0$$

Όπου θεωρήσαμε ότι $\vec{j} \rightarrow 0$ αρκετά γρήγορα καθώς $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. Επομένως η διατηρούμενη ποσότητα είναι:

$$G = \int_V d^3x j^0 \quad (1.4.7)$$

1.4.1 Χωροχρονικές μετατοπίσεις και ο τανυστής Ενέργειας –Ορμής

Στην κλασσική μηχανική η συμμετρία (γραμμικής) μετατόπισης στο χρόνο, αντιστοιχεί στην διατήρηση της ενέργειας, ενώ η συμμετρία γραμμικής μετατόπισης στο χώρο, αντιστοιχεί στη διατήρηση της ορμής. Στη θεωρία πεδίου έχουμε κάτι παρόμοιο. Ας θεωρήσουμε την απειροστή μετάθεση στο χωρόχρονο

$$x'^\nu = x^\nu + \varepsilon^\nu$$

Το κάθε πεδίο $\phi_\alpha(x^\nu)$ θα μετασχηματίζεται ως

$$\phi(x'^\nu) = \phi(x^\nu + \varepsilon^\nu) = \phi(x^\nu) + \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi$$

Όπου χάριν απλότητας παραλείψαμε τον δείκτη α . Έτσι

$$\delta\phi = \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi$$

Επομένως

$$\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi) = \partial_\mu(\varepsilon^\nu \partial_\nu \phi) = \varepsilon^\nu \partial_\nu(\partial_\mu \phi)$$

Αρα

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \varepsilon^\nu \partial_\nu(\partial_\mu \phi) \\ &= \varepsilon^\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \partial_\nu \phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu(\partial_\mu \phi) \right] = \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \end{aligned}$$

Δηλαδή, η Lagrangian μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Noether με $\delta\mathcal{L} = \varepsilon^\nu \partial_\nu \mathcal{L}$ και $\delta\phi_\alpha = \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_\alpha$.

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha - F^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_\alpha - \varepsilon^\mu \mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \varepsilon^\nu \partial_\nu \phi_\alpha - \delta^\mu_\nu \varepsilon^\nu \mathcal{L} = \\ &= \varepsilon^\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \phi_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] \end{aligned}$$

το οποίο θα μας δώσει τέσσερα διατηρούμενα ρεύματα, ένα για κάθε μία από τις μετατοπίσεις ε^ν για $\nu = 0, 1, 2, 3$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$(j^\mu)_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial_\nu \phi_\alpha - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} = T^\mu_\nu \quad (1.4.8)$$

Ο ταυυστής T^μ_ν ονομάζεται «ταυυστής Ενέργειας-Ορμής» και ικανοποιεί την σχέση

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$$

Ας σημειωθεί ότι:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.4.9)$$

Από όπου προκύπτει ότι:

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha)} \partial^0 \phi_\alpha - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha} \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L} = \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L} = \mathcal{H}$$

Η οποία είναι η πυκνότητα Hamilton. Επιπλέον:

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_\alpha)} \partial^i \phi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha} \partial^i \phi_\alpha = \pi_\alpha \partial^i \phi_\alpha$$

Η οποία είναι η πυκνότητα ορμής του πεδίου.

Οι τέσσερις διατηρούμενες ποσότητες είναι η ενέργεια και η ορμή του πεδίου, οι οποίες δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις σε αντιστοιχία.

$$E = \int d^3x T^{00} \quad \text{και} \quad P^i = \int d^3x T^{0i} \quad (1.4.10)$$

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα το βαθμωτό πραγματικό πεδίο με

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2$$

Τότε

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}) = \partial_\mu (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) - \partial^\nu \mathcal{L} = (\partial_\mu \partial^\mu \phi) \partial^\nu \phi + \\ &+ (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \partial^\nu \phi) - [\frac{1}{2}(\partial^\nu \partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\nu \partial^\mu \phi) - m^2 \phi (\partial^\nu \phi)] = -m^2 \phi (\partial^\nu \phi) + \\ &+ (\partial^\mu \phi) (\partial_\mu \partial^\nu \phi) - \frac{1}{2}(\partial^\nu \partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\nu \partial^\mu \phi) + m^2 \phi (\partial^\nu \phi) = \\ &\frac{1}{2}[(\partial^\nu \partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - (\partial_\mu \phi)(\partial^\nu \partial^\mu \phi)] = \frac{1}{2}[(\partial^\nu \partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - g_{\mu\rho} g^{\mu\sigma} (\partial^\rho \phi)(\partial^\nu \partial_\sigma \phi)] \end{aligned}$$

Αλλά $g_{\mu\rho} g^{\mu\sigma} = \delta_\rho^\sigma$ Επομένως $g_{\mu\rho} g^{\mu\sigma} (\partial^\rho \phi)(\partial^\nu \partial_\sigma \phi) = \delta_\rho^\sigma (\partial^\rho \phi)(\partial^\nu \partial_\sigma \phi) =$
 $(\partial^\sigma \phi)(\partial^\nu \partial_\sigma \phi) = (\partial^\mu \phi)(\partial^\nu \partial_\mu \phi)$ λόγω του βωβού δείκτη σ. Επομένως $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

Για το παράδειγμα αυτό έχουμε:

$$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial^0 \phi - \mathcal{L} = \dot{\phi} \dot{\phi} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

Επομένως η διατηρούμενη ενέργεια είναι

$$E = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2 \phi^2]$$

Η πυκνότητα ορμής είναι:

$$T^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial^i \phi = \dot{\phi} (\partial^i \phi) \quad (1.4.11)$$

Και η διατηρούμενη πεδιακή ορμή είναι:

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \dot{\phi} (\partial^i \phi)$$

Στο παραπάνω παράδειγμα ο τανυστής $T^{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει ότι $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Αυτό, όπως θα δούμε, δεν ισχύει πάντοτε.

1.4.2 Μετασχηματισμοί Lorentz και στροφορμή

Στην κλασσική σωματιδιακή μηχανική, η συμμετρία ως προς τις στροφές, μας οδηγεί στην διατήρηση της στροφορμής. Ποια είναι η ανάλογη ποσότητα που διατηρείται στη θεωρία πεδίου; Επιπλέον έχουμε μετασχηματισμούς Lorentz τις λεγόμενες «προωθήσεις». Ποια διατηρούμενη ποσότητα αντιστοιχεί σε αυτούς; Για να απαντήσουμε τα ερωτήματα αυτά χρειαζόμαστε τους λεγόμενους «απειροστούς μετασχηματισμούς Lorentz»

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (1.4.11)$$

Όπου τα ω^μ_ν είναι απειροστές ποσότητες. Προκειμένου ο Λ να είναι μετασχηματισμός Lorentz πρέπει να ικανοποιεί την σχέση:

$$\Lambda^\mu_\sigma g^{\sigma\tau} \Lambda^\nu_\tau = g^{\mu\nu} \Rightarrow (\delta^\mu_\sigma + \omega^\mu_\sigma) g^{\sigma\tau} (\delta^\nu_\tau + \omega^\nu_\tau) = g^{\mu\nu} \Rightarrow (\delta^\mu_\sigma \omega^\nu_\tau g^{\sigma\tau}) + (\delta^\nu_\tau \omega^\mu_\sigma g^{\sigma\tau}) + \omega^\mu_\sigma \delta^\nu_\tau g^{\sigma\tau} = g^{\mu\nu} \Rightarrow \omega^{\nu\mu} + \omega^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\omega^{\nu\mu} + \omega^{\mu\nu} = 0 \quad (1.4.12)$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι ο πίνακας $\omega^{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός. Έχει επομένως 6 παραμέτρους οι οποίες αντιστοιχούν στις 3-περιστροφές (ω^{ij}) και στις 3 προωθήσεις (ω^{0j}). Θα εξετάσουμε τώρα τον μετασχηματισμό Lorentz ενός βαθμωτού πεδίου. Θεωρούμε επομένως τον μετασχηματισμό:

$$x^\mu \rightarrow (x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu = \delta^\mu_\nu x^\nu + \omega^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + \omega^\mu_\nu x^\nu$$

Επομένως:

$$\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \quad (1.4.13)$$

Ο μετασχηματισμός του πεδίου είναι

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι εδώ θεωρήσαμε έναν ενεργό μετασχηματισμό του πεδίου, στον οποίο μετασχηματίζεται το πεδίο καθεαυτό και όχι το σύστημα συντεταγμένων. Στην αντίθετη περίπτωση θα είχαμε:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda x)$$

Όπου ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται ως: $\Lambda^\mu_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\rho = \delta^\mu_\rho$ οπότε για

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad \text{έχουμε: } (\Lambda^{-1})^\nu_\rho = \delta^\nu_\rho - \omega^\nu_\rho$$

Πράγματι:

$$\Lambda^\mu_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\rho = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu)(\delta^\nu_\rho - \omega^\nu_\rho) \approx \delta^\mu_\nu \delta^\nu_\rho - \delta^\mu_\nu \omega^\nu_\rho + \delta^\nu_\rho \omega^\mu_\nu = \delta^\mu_\rho - \omega^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho = \delta^\mu_\rho$$

Επομένως:

$$(x')^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu) x^\nu = \delta^\mu_\nu x^\nu - \omega^\mu_\nu x^\nu = x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu$$

$$\phi'(x) = \phi(x'^\mu) = \phi(\Lambda^{-1} x^\nu) = \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) = \phi(x^\mu) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)$$

Από την οποία προκύπτει ότι

$$\delta\phi = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \quad (1.4.14)$$

Δεδομένου τώρα ότι ο $\omega^{\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός $\omega^\mu_\mu = 0$ Επομένως

$$\begin{aligned} \partial_\mu (-\omega^\mu_\nu x^\nu \phi(x)) &= -\omega^\mu_\nu \partial_\mu (x^\nu \phi(x)) = -\omega^\mu_\nu [(\partial_\mu x^\nu) \phi(x) + x^\nu \partial_\mu \phi(x)] \\ &= -\omega^\mu_\nu [\delta^\nu_\mu \phi(x) + x^\nu \partial_\mu \phi(x)] = -\omega^\mu_\nu \delta^\nu_\mu \phi(x) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \\ &= -\omega^\mu_\mu \phi(x) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) = \delta\phi \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \delta\phi = -\partial_\mu (\omega^\mu_\nu x^\nu \phi(x)) \quad (1.4.15)$$

Η πυκνότητα Lagrange μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \delta(\partial_\rho\phi) = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \partial_\rho(\delta\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} (-\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)) \\ &+ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \partial_\rho (-\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x)) = -\omega^\mu_\nu x^\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} (\partial_\mu \phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi)} \partial_\mu (\partial_\rho \phi) \right] = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \mathcal{L} \end{aligned}$$

Άρα $\delta\mathcal{L} = -\omega^\mu_\nu x^\nu (\partial_\mu \mathcal{L})$ και ομοίως όπως παραπάνω

$$\delta\mathcal{L} = -\partial_\mu (\omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L}) \quad (1.4.16)$$

Άλλη μια φορά η Lagrangian μεταβάλλεται κατά μία ολική παράγωγο. Μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το θεώρημα Noether για να υπολογίσουμε το διατηρούμενο ρεύμα. Εν προκειμένω: $F^\mu = -\omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L}$ και $\delta\phi = -\partial_\mu (\omega^\mu_\nu x^\nu \phi(x))$ Επομένως:

$$\begin{aligned} j^\mu &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \omega^\rho_\nu x^\nu \partial_\rho \phi + \omega^\mu_\nu x^\nu \mathcal{L} = \\ &= -\omega^\rho_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} x^\nu \partial_\rho \phi - \delta^\mu_\rho x^\nu \mathcal{L} \right] = -\omega^\rho_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\rho \phi - \delta^\mu_\rho \mathcal{L} \right] x^\nu = -\omega^\rho_\nu T^\mu_\rho x^\nu \end{aligned}$$

Όπου T^μ_ρ είναι ο τανυστής Ενέργειας-Ορμής που υπολογίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

$$T^\mu_\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \partial_\rho \phi - \delta^\mu_\rho \mathcal{L}$$

Άρα

$$j^\mu = -\omega_\nu^\rho T_\rho^\mu x^\nu = -\omega_\nu^\rho g_{\rho\sigma} T^{\mu\sigma} x^\nu = -\omega_{\sigma\nu} T^{\mu\sigma} x^\nu = -\omega_{\sigma\nu} x^\nu T^{\mu\sigma}$$

Με κυκλική μετάθεση των δεικτών σ, ν παίρνουμε

$$j^\mu = -\omega_{\nu\sigma} x^\sigma T^{\mu\nu} = \omega_{\sigma\nu} x^\sigma T^{\mu\nu}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$2j^\mu = \omega_{\sigma\nu} x^\sigma T^{\mu\nu} - \omega_{\sigma\nu} x^\nu T^{\mu\sigma} = \omega_{\sigma\nu} [x^\sigma T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\sigma}] \Rightarrow$$

$$j^\mu = \frac{\omega_{\sigma\nu}}{2} [x^\sigma T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\sigma}]$$

Μπορούμε τώρα να αποβάλουμε την απειροστή ποσότητα και να πάρουμε 6 διατηρούμενα ρεύματα τα οποία μπορούν να γραφούν ως:

$$(J^\mu)^{\sigma\nu} = x^\sigma T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\sigma} \quad (1.4.17)$$

Τα οποία ικανοποιούν την $\partial_\mu (J^\mu)^{\sigma\nu} = 0$ και μας δίνουν 6-διατηρούμενες ποσότητες (πυκνότητες τετραρευσμάτων-φορτία). Για $\nu, \sigma = 1, 2, 3$, ο μετασχηματισμός Lorentz, αντιστοιχεί σε στροφές και οι 3-διατηρούμενες ποσότητες δίνουν την συνολική στροφορμή του πεδίου. Η k - συνιστώσα της πυκνότητας της στροφορμής είναι:

$$J^k = (J^0)^{ij} = x^i T^{0j} - x^j T^{0i}$$

Οπότε η αντίστοιχη (k - συνιστώσα), διατηρούμενη συνολική στροφορμή του πεδίου είναι:

$$L^k = Q^{ij} = \int d^3x (x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) \quad (1.4.18)$$

Όσο για τις προωθήσεις (boosts) οι 3-διατηρούμενες ποσότητες είναι

$$Q^{0i} = \int d^3x (x^0 T^{0i} - x^i T^{00}) \quad (1.4.19)$$

Το γεγονός ότι η ποσότητα αυτή διατηρείται μας λέει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dQ^{0i}}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x (x^0 T^{0i} - x^i T^{00}) \\ &= \int d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t} x^0 \right) T^{0i} + \int d^3x x^0 \frac{\partial}{\partial t} T^{0i} - \frac{d}{dt} \int d^3x x^i T^{00} \\ &= \int d^3x T^{0i} + t \int d^3x \frac{\partial T^{0i}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \int d^3x x^i T^{00} \\ &= P^i + t \frac{dP^i}{dt} - \frac{d}{dt} \int d^3x x^i T^{00} \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η ορμή του πεδίου P^i διατηρείται, έτσι

$$\frac{dP^i}{dt} = 0$$

Επομένως

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \ x^i T^{00} = P^i = \text{σταθερό} \quad (1.4.20)$$

Είναι κάτι σαν το «κέντρο της ενέργειας» του πεδίου να ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα. Κάτι σαν την πεδιακή εκδοχή του πρώτου νόμου του Newton.

1.4.3 Εσωτερικές συμμετρίες

Εξετάσαμε παραπάνω μετασχηματισμούς του χωροχρόνου, οι οποίοι είχαν ως συνέπεια μετασχηματισμούς του πεδίου. Μια «εσωτερική συμμετρία», είναι μια συμμετρία που αφορά μετασχηματισμό του πεδίου, ανεξάρτητα από τους μετασχηματισμούς του χωροχρόνου και δρα με τον ίδιο τρόπο σε κάθε σημείο του. Για παράδειγμα το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$ το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon. Για το πεδίο αυτό, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πραγματική πυκνότητα Lagrange

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (1.4.21)$$

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange παίρνουμε

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0 \text{ και } \partial_\mu \partial^\mu \phi^\dagger + m^2 \phi^\dagger = 0 \quad (1.4.22)$$

Η παραπάνω Lagrangian είναι συμμετρική ως προς το μετασχηματισμό στροφής του μιγαδικού πεδίου, κατά την σταθερή απειροστή γωνία α (στροφή στη φάση).

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \text{ και } \phi^\dagger(x) \rightarrow \phi'^\dagger(x) = e^{-i\alpha} \phi^\dagger(x)$$

Οπότε βέβαια, επειδή για απειροστό α , $e^{i\alpha} \approx 1 + i\alpha$

$$\delta\phi(x) = i\alpha \phi(x) \text{ και } \delta\phi^\dagger(x) = -i\alpha \phi^\dagger(x) \quad (1.4.23)$$

Εύκολα προκύπτει ότι $\delta\mathcal{L} = 0$, δηλαδή η \mathcal{L} είναι αμετάβλητη στον μετασχηματισμό «μετατόπισης φάσης». Επομένως ο παραπάνω μετασχηματισμός αποτελεί μία συμμετρία. Η συμμετρία αυτή, χαρακτηρίζεται ως ολική (global) συμμετρία. Το σχετιζόμενο διατηρούμενο ρεύμα είναι:

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta\phi_\alpha - F^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta\phi^\dagger = (\partial_\mu \phi^\dagger) i\alpha \phi + (\partial_\mu \phi) (-i\alpha \phi^\dagger) = \\ &= i\alpha [\phi(\partial_\mu \phi^\dagger) - \phi^\dagger(\partial_\mu \phi)] \end{aligned}$$

Τελικά απογυμνώνοντας από την απειροστή παράμετρο παίρνουμε

$$j^\mu = i[\phi(\partial_\mu \phi^\dagger) - \phi^\dagger(\partial_\mu \phi)] \quad (1.4.24)$$

Η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα (φορτίο) είναι

$$Q = \int d^3x \ j^0 = i \int d^3x [\phi(\partial_0 \phi^\dagger) - \phi^\dagger(\partial_0 \phi)]$$

$$Q = \int d^3x [\phi(\phi^\dagger) - \phi^\dagger(\phi)] \quad (1.4.25)$$

Το Q όπως θα δούμε αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό φορτίο ή στον αριθμό των σωματιδίων (πχ βαρυονικό ή λεπτονικό αριθμό)

Ας θεωρήσουμε τώρα μια εσωτερική συμμετρία στην οποία η απειροστή ποσότητα δεν είναι σταθερή αλλά είναι συνάρτηση της θέσης. Μία τέτοια συμμετρία χαρακτηρίζεται ως «τοπική συμμετρία» (local symmetry). Αυτή είναι της μορφής

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{ia(x)} \phi(x) \quad \mu\epsilon \quad \delta\phi(x) = ia(x)\phi(x) \quad (1.4.26)$$

Η Lagrangian δεν είναι πλέον αμετάβλητη αφού

$$\delta\mathcal{L} = i(\partial_\mu\alpha)\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} e^{ia} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] + e^{ia}(\partial_\mu\phi) \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]$$

Επειδή όμως για α σταθερό $\delta\mathcal{L} = 0$ από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$(\partial_\mu\phi) \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right] = 0$$

Επομένως για μεταβλητό $\alpha = \alpha(x)$ θα έχουμε

$$\delta\mathcal{L} = i(\partial_\mu\alpha)\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} e^{ia} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right]$$

Περισσότερο συμπτυκνωμένα $\delta\mathcal{L} = (\partial_\mu\alpha(x)) h^\mu(\phi)$

Η δράση μεταβάλλεται τότε κατά

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dx^4 \delta\mathcal{L} = \int dx^4 \partial_\mu [\alpha(x) h^\mu(\phi)] - \int dx^4 \alpha(x) (\partial_\mu h^\mu(\phi)) \\ &= - \int dx^4 \alpha(x) (\partial_\mu h^\mu(\phi)) \end{aligned}$$

Επομένως, όταν ικανοποιούνται οι εξισώσεις κίνησης, οπότε $\delta S = 0$, και αυτό πρέπει να συμβαίνει για όλες τις μεταβολές του πεδίου, συμπεριλαμβανομένης και της $\delta\phi(x) = ia(x)\phi(x)$ πρέπει να ισχύει:

$$\partial_\mu h^\mu = 0 \quad (1.4.27)$$

Μπορούμε επομένως να αναγνωρίσουμε την συνάρτηση $h^\mu(\phi)$ ως το διατηρούμενο ρεύμα.

Κεφάλαιο 2.

Το πεδίο Klein-Gordon

Ελεύθερα πεδία

2.1. Σχετικιστική εξίσωση Klein-Gordon

Προκειμένου να παράγουμε την εξίσωση Schrödinger για ένα ελεύθερο σωματίο ενέργειας:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Θεωρούμε την αντιστοίχιση:

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \quad , \quad E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \quad (\hbar = c = 1)$$

Έτσι

παίρνουμε:

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 \psi$$

Η σχετικιστική αναβάθμιση της διαδικασίας αυτής είναι:

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi \Rightarrow$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.1.1)$$

Όπου για να αποφύγουμε την τετραγωνική ρίζα των τελεστών, εφαρμόσαμε την αντιστοίχιση αυτή, με το τετράγωνο της ενέργειας. Η κυματική αυτή εξίσωση, ονομάζεται «εξίσωση Klein-Gordon». Για να μπορεί να διαδραματίσει η εξίσωση Klein-Gordon, ένα ρόλο ανάλογο με αυτόν της εξίσωσης Schrödinger, θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση $\phi(\vec{x}, t)$, να σχετίζεται με την πυκνότητα πιθανότητας ρ . Η συνολική πιθανότητα πρέπει να διατηρείται, ή ισοδύναμα, η πυκνότητα πιθανότητας και το αντίστοιχο ρεύμα πιθανότητας \vec{J} πρέπει να ικανοποιούν μια εξίσωση συνέχειας, της μορφής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (2.1.2)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.1.1) κατάλληλα μια φορά από αριστερά με ϕ^* , και την συζυγή εξίσωση από δεξιά με ϕ και αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\phi^*(\partial_\mu \partial^\mu \phi) - (\partial_\mu \partial^\mu \phi^*)\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi^* - \phi^* \vec{\nabla} \phi) = 0$$

Ορίζοντας τις ποσότητες μέσα στις παρενθέσεις, ως πυκνότητα και ρεύμα αντίστοιχα, βλέπουμε ότι μπορεί να ικανοποιηθεί η εξίσωση συνέχειας (2.1.2).

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right), \quad \vec{J} = i(\phi \vec{\nabla} \phi^* - \phi^* \vec{\nabla} \phi)$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις, μια λύση της (2.1.1) της μορφής επιπέδου κύματος

$$\phi(\vec{x}, t) = N e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})}$$

Μετά την αντικατάσταση και τις πράξεις, παίρνουμε:

$$\rho = 2E|N|^2, \quad \vec{J} = 2\vec{p}|N|^2 \quad (2.1.3)$$

Βλέπουμε ότι η πυκνότητα είναι ανάλογη της ενέργειας. Όμως η Klein-Gordon επιδέχεται λύσεις τόσο θετικής όσο και αρνητικής ενέργειας.

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2}$$

Το γεγονός αυτό δημιουργεί δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι το πρόβλημα της αρνητικής πυκνότητας πιθανότητας. Το δεύτερο προέρχεται από τις αρνητικές τιμές της ενέργειας. Στο πλαίσιο της Q.F.T, η εξίσωση Klein-Gordon ερμηνεύεται ως εξίσωση κίνησης ενός κβαντικού πεδίου και όχι ως εξίσωση που ικανοποιεί μια κυματοσυνάρτηση. Τότε οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας, ερμηνεύονται με την βοήθεια της έννοιας του αντισωματιδίου. Το διατηρούμενο ρεύμα $J^\mu = (\rho, \vec{J})$, αντιστοιχεί είτε στο ηλεκτρικό φορτίο του πεδίου ϕ , είτε στον διατηρούμενο αριθμό « σωματιδίων-αντισωματιδίων ».

2.2. Κανονική κβάντωση

Στην κβαντική μηχανική, η «κανονική κβάντωση» είναι μια συνταγή, η οποία μας οδηγεί από τον φορμαλισμό Hamilton της κλασσικής δυναμικής, στην κβαντική θεωρία. Η συνταγή αυτή, συνίσταται στο να προάγουμε σε τελεστές, κάθε μια από τις γενικευμένες συντεταγμένες q_i και την συζυγή ορμή p_i . Οι αγκύλες Poisson της κλασσικής μηχανικής, μορφοποιούνται στις σχέσεις μετάθεσης μεταξύ τελεστών της κβαντικής θεωρίας. Σε σύστημα μονάδων με $\hbar = 1$ έχουμε:

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad \text{και} \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (2.2.1)$$

Στη θεωρία πεδίου κάνουμε το ίδιο, για το πεδίο $\phi_\alpha(\vec{x})$ και την συζυγή ορμή του πεδίου $\pi_\alpha(\vec{x})$. Έτσι ένα κβαντικό πεδίο είναι ένας τελεστής με διαφορετικές τιμές στα διαφορετικά σημεία του χώρου, που ικανοποιεί τις μεταθετικές σχέσεις:

$$[\hat{\phi}_\alpha(\vec{x}), \hat{\phi}_b(\vec{y})] = [\hat{\pi}_\alpha(\vec{x}), \hat{\pi}_b(\vec{y})] = 0 \quad (2.2.2)$$

$$[\hat{\phi}_\alpha(\vec{x}), \hat{\pi}_b(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab} \quad (2.2.3)$$

Στην σχέση (2.2.3) η συνάρτηση $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$, προέρχεται από την επέκταση της δ_{ij} , στο συνεχές χωρικό φάσμα. Ας σημειωθεί ακόμα, ότι εργαζόμαστε στην εικόνα Schrödinger, οπότε οι τελεστές δεν έχουν εξάρτηση από το χρόνο, παρά μόνο από τον χώρο. Η χρονική εξάρτηση φέρεται από τις καταστάσεις $|\psi\rangle$ οι οποίες εξελίσσονται σύμφωνα με την εξίσωση Schrödinger.

$$i \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (2.2.4)$$

Αυτό που θέλουμε να γνωρίζουμε σε μια κβαντική θεωρία είναι το φάσμα της Hamiltonian. Σε μια κβαντική θεωρία πεδίου έχουμε άπειρους βαθμούς ελευθερίας, τουλάχιστον έναν για κάθε θέση \vec{x} του χώρου. Το γεγονός αυτό δυσκολεύει τον υπολογισμό του φάσματος της ενέργειας. Ειδικά στις θεωρίες ελεύθερου πεδίου, μπορούμε να γράψουμε την δυναμική του πεδίου, έτσι ώστε κάθε βαθμός ελευθερίας να εξελίσσεται ανεξάρτητα από τους άλλους. Οι θεωρίες ελεύθερου πεδίου, έχουν Lagrangians τετραγωνικές ως προς το πεδίο. Επομένως οι εξισώσεις κίνησης είναι γραμμικές.

2.3. Η λύση της εξίσωσης Klein-Gordon

Η απλούστερη σχετικιστική θεωρία ελεύθερου πεδίου είναι η Klein-Gordon που αφορά το πραγματικό, ελεύθερο βαθμωτό πεδίο $\phi(\vec{x}, t)$ με εξίσωση κίνησης

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Προκειμένου να αποσυνδέσουμε του βαθμούς ελευθερίας αρκεί να πάρουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $\phi(\vec{x}, t)$.

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) \quad (2.3.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω διαφορική εξίσωση Klein-Gordon (K-G) παίρνουμε για την $\phi(\vec{p}, t)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\vec{p}^2 + m^2) \right) \phi(\vec{p}, t) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\omega(\vec{p}))^2 \right) \phi(\vec{p}, t) = 0$$

Επομένως για κάθε τιμή του \vec{p} η $\phi(\vec{p}, t)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητα $\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega(\vec{p})$

$$\phi(\vec{p}, t) = a(\vec{p})e^{-i\omega_{\vec{p}}t} + b(\vec{p})e^{i\omega_{\vec{p}}t} \quad (2.3.2)$$

Όπου τα $a(\vec{p}), b(\vec{p})$ είναι μιγαδικές σταθερές για κάθε τιμή της ορμής \vec{p} . Επειδή η $\phi(\vec{x}, t)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση, $\phi(\vec{x}, t) = \phi^*(\vec{x}, t)$ άρα:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \phi^*(\vec{p}, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \phi(-\vec{p}, t) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \phi^*(\vec{p}, t) \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι: $\phi^*(\vec{p}, t) = \phi(-\vec{p}, t)$ από όπου προκύπτουν οι σχέσεις $b^*(\vec{p}) = a(-\vec{p})$ και $a^*(\vec{p}) = b(-\vec{p})$ μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} [e^{i\vec{p}\vec{x}} \phi(\vec{p}, t) + e^{-i\vec{p}\vec{x}} \phi^*(\vec{p}, t)] \quad (2.3.3)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.3.3) την (2.3.2) μετά από μερικές πράξεις καταλήγουμε στην σχέση:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[a(\vec{p}) e^{-i[\omega_{\vec{p}}t - \vec{p}\vec{x}]} + a^*(\vec{p}) e^{i[\omega_{\vec{p}}t - \vec{p}\vec{x}]} \right] \quad (2.3.4)$$

Όπου για τις πράξεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί ότι:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} b^*(\vec{p}) e^{-i\omega_{\vec{p}}t - i\vec{p}\vec{x}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a(-\vec{p}) e^{-i\omega_{\vec{p}}t - i\vec{p}\vec{x}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a(\vec{p}) e^{-i\omega_{\vec{p}}t + i\vec{p}\vec{x}}$$

Και ομοίως:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} b(\vec{p}) e^{i\omega_{\vec{p}}t + i\vec{p}\vec{x}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a^*(\vec{p}) e^{i\omega_{\vec{p}}t - i\vec{p}\vec{x}}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η γενικότερη λύση της διαφορικής K-G είναι μια γραμμική υπέρθεση, απλών αρμονικών ταλαντώσεων, με διαφορετικά πλάτη και διαφορετικές συχνότητες, που δίνονται από την παραπάνω σχέση για το $\omega_{\vec{p}}$. Προκειμένου επομένως να κβαντώσουμε το $\phi(\vec{x}, t)$, αρκεί να κβαντώσουμε αυτό το άπειρο πλήθος αρμονικών ταλαντώσεων. Ας θυμηθούμε λίγο την κβάντωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

2.4. Ο απλός αρμονικός ταλαντωτής

Θα ξεκινήσουμε από την Hamiltonian του απλού αρμονικού ταλαντωτή, όπου θα θέσουμε $m = 1$, ενώ θα κρατήσουμε το ω , αφού θα εξετάσουμε διαφορετικούς ταλαντωτές με διαφορετικές συχνότητες.

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \quad (2.4.1)$$

Προκειμένου να κβαντώσουμε τον ταλαντωτή, προάγουμε τα q, p , σε τελεστές και θεωρούμε την κανονική σχέση μετάθεσης:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \quad (\hbar = 1) \quad (2.4.2)$$

Θέλοντας να βρούμε το ενεργειακό φάσμα της H ορίζουμε τους τελεστές κλίμακας, δημιουργίας και καταστροφής κβάντων ενέργειας, \hat{a}^\dagger, \hat{a}

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \hat{q} - i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \hat{p} \quad \text{και} \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \hat{q} + i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \hat{p} \quad (2.4.3)$$

Οι οποίοι είναι φανερό ότι έχουν σχέση αμοιβαίας συζυγίας. Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις ως προς \hat{q} και \hat{p} παίρνουμε:

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad \text{και} \quad \hat{p} = i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (2.4.4)$$

Αντικαθιστώντας στην $[\hat{q}, \hat{p}] = i$ βρίσκουμε:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (2.4.5)$$

Αντικαθιστώντας ακόμα τα \hat{q} και \hat{p} στην $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$ παίρνουμε:

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.4.6)$$

Εύκολα αποδεικνύεται πλέον ότι:

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \omega \hat{a}^\dagger \text{ και } [\hat{H}, \hat{a}] = -\omega \hat{a} \quad (2.4.7)$$

Οι σχέσεις αυτές μας εξασφαλίζουν ότι οι τελεστές \hat{a}, \hat{a}^\dagger μας πηγαίνουν από την μία ενεργειακή στάθμη στην άλλη. Πράγματι αν $|E\rangle$ είναι μία ιδιοκατάσταση του ταλαντωτή ενέργειας E , δηλαδή $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ τότε για την $\hat{a}^\dagger|E\rangle$ ισχύει:

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|E\rangle) = (\hat{H}\hat{a}^\dagger)|E\rangle = (\omega\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{H})|E\rangle = \omega\hat{a}^\dagger|E\rangle + \hat{a}^\dagger\hat{H}|E\rangle = \omega\hat{a}^\dagger|E\rangle + \hat{a}^\dagger E|E\rangle = (\omega + E)(\hat{a}^\dagger|E\rangle) \Rightarrow$$

$$\hat{H}(\hat{a}^\dagger|E\rangle) = (\omega + E)(\hat{a}^\dagger|E\rangle) \quad (2.4.8)$$

Δηλαδή η κατάσταση $\hat{a}^\dagger|E\rangle$ είναι επίσης ιδιοκατάσταση του ταλαντωτή με ενέργεια $\omega + E$

$$\text{Ομοίως } \hat{H}(\hat{a}|E\rangle) = (E - \omega)(\hat{a}|E\rangle) \quad (2.4.9)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ταλαντωτής έχει μια κλίμακα ιδιοκαταστάσεων, με ενέργειες που απέχουν μεταξύ τους κατά ένα σταθερό βήμα

$$\dots E - 2\omega, E - \omega, E, E + \omega, E + 2\omega \dots$$

Δεδομένου τώρα ότι η ενέργεια είναι κάτω φραγμένη, υπάρχει μια θεμελιώδης κατάσταση $|0\rangle$ τέτοια ώστε $\hat{a}|0\rangle = 0$, με την χαμηλότερη τιμή ενέργειας, ή «ενέργεια μηδενικού σημείου»

$$\hat{H}|0\rangle = \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} |0\rangle + \frac{\omega}{2} |0\rangle = \frac{\omega}{2} |0\rangle$$

$$E_0 = \frac{\omega}{2} \quad (2.4.10)$$

Οι διεγερμένες καταστάσεις προκύπτουν αβίαστα από την επανάληψη της δράσης του τελεστή \hat{a}^\dagger στην θεμελιώδη κατάσταση $|0\rangle$. Οπότε μετά την επανάληψη της δράσης του n - φορές θα έχουν προστεθεί n - κβάντα ενέργειας, οπότε η ενέργειά του θα είναι:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \quad (2.4.11)$$

Ο τελεστής $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, έχει τις ίδιες ιδιοκαταστάσεις $|n\rangle$ με την ενέργεια αφού $[\hat{H}, \hat{N}] = 0$. Οι ιδιοτιμές του, είναι n . Δηλαδή ισχύει η σχέση $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ η οποία δικαιολογεί την ονομασία του ως «τελεστή αριθμησης», αφού η δράση πάνω στις ιδιοκαταστάσεις, μας δίνει τον αριθμό των ενεργειακών κβάντων που περιέχονται σε κάθε

μία από αυτές. Αν $|n\rangle$ και $|n+1\rangle$ είναι οι κανονικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας τότε θα ισχύει:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = c_n |n+1\rangle, \text{ οπότε από το εσωτερικό γινόμενο έχουμε:}$$

$$\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle = c_n^2 \langle n+1 | n+1 \rangle \Rightarrow \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n \rangle = c_n^2 \Rightarrow \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle + 1 = c_n^2 \Rightarrow$$

$$c_n^2 = n+1 \quad \text{Άρα:} \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Επομένως η n -οστή κανονικοποιημένη ιδιοκατάσταση θα είναι

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (2.4.12)$$

Στην περίπτωση ενός συστήματος N ανεξάρτητων ταλαντωτών, με συχνότητες ω_i ($i = 1, 2 \dots N$) η Hamiltonian του συστήματος θα είναι

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i \quad (2.4.13)$$

Όπου οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής θα ικανοποιούν τις μεταθετικές σχέσεις

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (2.4.14)$$

Οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις θα γράφονται ως

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle$$

Και θα αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές ενέργειας

$$E = \sum_{i=1}^N \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \omega_i \quad (2.4.15)$$

Οι καταστάσεις αυτές είναι ταυτόχρονα και ιδιοκαταστάσεις του τελεστή αρίθμησης

$$\hat{N} = \sum_{i=1}^N \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \quad (2.4.16)$$

Με ιδιοτιμές: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$

2.5. Η κβάντωση του πραγματικού πεδίου Klein-Gordon

Θα εφαρμόσουμε την κβάντωση του αρμονικού ταλαντωτή στο ελεύθερο βαθμωτό πεδίο. Αρχικά θα γράψουμε το πεδίο $\phi(\vec{x})$ ως γραμμικό συνδυασμό, άπειρων τελεστών δημιουργίας και καταστροφής $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$, με δείκτη την τρισδιάστατη ορμή \vec{p} .

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right] \quad (2.5.1)$$

Κατά αναλογία με την $\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$. (Η αμοιβαία συζυγία των $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ εξασφαλίζει την πραγματικότητα του $\hat{\phi}(\vec{x})$.) Είναι φανερό ότι ομοίως για την ορμή $\hat{\pi}(\vec{x})$ θα γράψουμε, ανάλογα με την $\hat{p} = i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}] \quad (2.5.2)$$

Οι μεταθετικές σχέσεις για τα $\hat{\phi}$ και $\hat{\pi}$, θα είναι κατά αναλογία:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] = [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = 0 \quad \text{και} \quad [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.5.3)$$

Οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις μεταθετικές σχέσεις των $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = 0 \quad \text{και} \quad [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.5.4)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] &= \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}] , \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{2}} [\hat{a}_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{y}} \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\vec{y}}] \right] = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{2}} (-i) \left\{ -[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] e^{i\vec{p}\vec{x} - i\vec{q}\vec{y}} + [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}] e^{-i\vec{p}\vec{x} + i\vec{q}\vec{y}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{q}}}{2}} (-i) \left\{ -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{i\vec{p}\vec{x} - i\vec{q}\vec{y}} \right. \\ &\quad \left. - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{-i\vec{p}\vec{x} + i\vec{q}\vec{y}} \right\} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{-i}{2} \right) \left\{ -e^{i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} - e^{i\vec{p}(\vec{y} - \vec{x})} \right\} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

Η Hamiltonian σε συνάρτηση με τα $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$ είναι:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x \frac{1}{2} \left\{ \hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}}{2} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}) (\hat{a}_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\vec{x}}) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}2\omega_{\vec{q}}}} (i\vec{p}) (\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}) (i\vec{q}) (\hat{a}_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\vec{x}}) \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}2\omega_{\vec{q}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}) (\hat{a}_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{-i\vec{q}\vec{x}}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}}{2} (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}} \int d^3 x e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \right. \\
&+ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \int d^3 x e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \int d^3 x e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} \int d^3 x e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}}) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}} 2\omega_{\vec{q}}}} (-\vec{p}\vec{q}) (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}} \int d^3 x e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} \\
&+ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \int d^3 x e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \int d^3 x e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} \int d^3 x e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}}) \\
&+ \frac{m^2}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}} 2\omega_{\vec{q}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}} \int d^3 x e^{i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \int d^3 x e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \int d^3 x e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} \\
&+ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} \int d^3 x e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}}) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\sqrt{\omega_{\vec{p}} \omega_{\vec{q}}}}{2} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}} 2\omega_{\vec{q}}}} (-\vec{p}\vec{q}) \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. \left. - \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right) \right. \\
&\quad + \frac{m^2}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}} 2\omega_{\vec{q}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q}) \right. \\
&\quad \left. \left. + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left\{ -\frac{\omega_{\vec{p}}}{2} \left[(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger) - (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) \right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} p^2 (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger) - \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} p^2 (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{2\omega_{\vec{p}}} \left[(\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger) + (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Οι όροι που περιέχουν τα $\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger$, αν πάρουμε υπόψη μας τη σχέση

$\omega_{\vec{p}}^2 = p^2 + m^2$, μηδενίζονται. Οι υπόλοιποι τρεις όροι, που περιέχουν τα $\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ μας δίνουν:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\frac{\omega_{\vec{p}}}{2} + \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} p^2 + \frac{m^2}{2\omega_{\vec{p}}} \right) (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} (\omega_{\vec{p}}^2 + p^2 + m^2) (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} (\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right)
\end{aligned}$$

Άρα:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right) \quad (2.5.5)$$

Προέκυψε μια συνάρτηση δέλτα, $\delta^3(0)$ με το άπειρό της στο μηδέν. Επιπλέον το ολοκλήρωμα ως προς $\omega_{\vec{p}}$ αποκλίνει για μεγάλες τιμές του \vec{p} . Προκειμένου να βρούμε ένα τρόπο να χειριστούμε αυτούς τους απειρισμούς, θα εξετάσουμε τη θεμελιώδη κατάσταση στην οποία αυτοί πρωτοεμφανίζονται. Ορίζουμε την κατάσταση του κενού, ως την κατάσταση, η οποία μηδενίζεται από όλους του τελεστές καταστροφής.

$$\hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{p} \quad (2.5.6)$$

Επομένως η ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως είναι:

$$\begin{aligned} \hat{H}|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(0) \right) |0\rangle \\ &= \int d^3p \omega_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \delta^3(0) \right) |0\rangle = \infty |0\rangle = E_0 |0\rangle \end{aligned}$$

Όπου με E_0 συμβολίσαμε την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως. Η κβαντική θεωρία πεδίου είναι γεμάτη απειρισμούς. Οι απειρισμοί αυτοί άλλοτε μας πληροφορούν ότι κάτι έχει πάει λάθος και άλλοτε πάλι ότι η ερώτηση που έχουμε τοποθετήσει, δεν είναι αποδεκτή. Από πού προέρχεται ο παραπάνω απειρισμός; Είναι δυνατόν με κάποιο τρόπο να τον χειριστούμε;

Υπάρχουν δυο διαφορετικά άπειρα (∞) στην παραπάνω ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως $E_0 = \infty$. Το πρώτο από αυτά προκύπτει από το γεγονός ότι υπολογίσαμε την ενέργεια στον άπειρο χώρο. Απειρισμοί αυτού του είδους ονομάζονται «υπέρυθρες αποκλίσεις» (*infrared divergences*). Προκειμένου να αποφύγουμε τον απειρισμό αυτό, τοποθετούμε το σύστημά μας σε ένα κουτί ακμής L (κανονικοποίηση κυτίου). Θεωρούμε για το πεδίο περιοδικές συνοριακές συνθήκες και στη συνέχεια παίρνουμε το όριο για $L \rightarrow \infty$.

$$(2\pi)^3 \delta^3(0) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3x e^{i\vec{x}\vec{p}}|_{\vec{p}=0} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3x = V$$

Όπου βέβαια V , είναι ο όγκος του κουτιού. Επομένως η συνάρτηση δέλτα $\delta^3(0)$ προκύπτει από το γεγονός ότι υπολογίζουμε την ενέργεια στον άπειρο χώρο. Περιμένουμε λοιπόν η πυκνότητα ενέργειας $\varepsilon_0 = \frac{E_0}{V}$ να μην περιέχει την δ -συνάρτηση. Πράγματι:

$$\varepsilon_0 = \frac{E_0}{V} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}}$$

Η οποία δεν είναι παρά το άπειρο άθροισμα των ενεργειών της θεμελιώδους καταστάσεως του αρμονικού ταλαντωτή και βέβαια εξακολουθεί να είναι άπειρη.

Αλλά ισχύει επιπλέον ότι: $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$ όταν $p \rightarrow \infty$. Ο απειρισμός αυτός, που οφείλεται στη μεγάλη συχνότητα ή στις μικρές αποστάσεις, (μικρό μήκος κύματος), χαρακτηρίζεται ως

«υπεριώδης απόκλιση» (*Ultra-violet divergence*) . Η απόκλιση αυτή οφείλεται στο ότι θεωρήσαμε, ότι η θεωρία μας ισχύει για αυθαίρετα μικρά μήκη, τα οποία αντιστοιχούν σε αυθαίρετα μεγάλες ενέργειες. Αυτό είναι εντελώς παράλογο. Το ολοκλήρωμα πρέπει να αποκοπεί σε κάποια υψηλή τιμή της ορμής, πέραν της οποίας η θεωρία μας καταρρέει! Όσον αφορά στον πρώτο απειρισμό, δεδομένου ότι μας ενδιαφέρουν οι μεταβολές ενέργειας και όχι οι τιμές τους καθαυτές, μπορούμε να θεωρήσουμε την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως αυθαίρετα ίση με το μηδέν, έτσι ώστε

$$\hat{H}|0\rangle = 0 \quad (2.5.7)$$

Οπότε η Hamiltonian θα γράφεται ως:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \quad (2.5.8)$$

Η διάταξη αυτή των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, όπου οι τελεστές καταστροφής τοποθετούνται στα δεξιά ενός γινομένου τελεστών, ονομάζεται «κανονική διάταξη» (*Normal ordering*) και για τους τελεστές $\hat{\phi}_1(\vec{x}_1)\hat{\phi}_2(\vec{x}_2) \dots \hat{\phi}_n(\vec{x}_n)$ συμβολίζεται ως:

$$:\hat{\phi}_1(\vec{x}_1)\hat{\phi}_2(\vec{x}_2) \dots \hat{\phi}_n(\vec{x}_n): \quad \text{ή} \quad \hat{N}(\hat{\phi}_1(\vec{x}_1)\hat{\phi}_2(\vec{x}_2) \dots \hat{\phi}_n(\vec{x}_n))$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$:\hat{H}: = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να εκφράσουμε τον τελεστή της ορμής του πεδίου σε συνάρτηση με τα $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$

$$\hat{P}_i = \int d^3x \hat{\phi} (\partial^i \hat{\phi}) \Rightarrow \hat{\vec{P}} = \int d^3x \hat{\pi}(-\vec{\nabla} \hat{\phi}) \quad (2.5.9)$$

Με κανονική διάταξη και παρόμοιες πράξεις παίρνουμε:

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \quad (2.5.10)$$

2.6. Σωματίδια Klein-Gordon

Οι διεγερμένες καταστάσεις μπορούν να προκύψουν τώρα από την κατάσταση του κενού. Υπολογίζουμε αρχικά τους μεταθέτες.

$$\begin{aligned} [H, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] &= \left[\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{q}} [\hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger [\hat{a}_{\vec{q}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) = \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι:

$$[H, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \quad (2.6.1)$$

Ομοίως:

$$[H, \hat{a}_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \quad (2.6.2)$$

Από την μορφή τους, συμπεραίνουμε ότι όπως και στον ταλαντωτή, μπορούμε να κατασκευάσουμε τις διεγερμένες καταστάσεις, δρώντας στην κατάσταση του κενού $|0\rangle$ με τους τελεστές δημιουργίας $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$. Έτσι η κατάσταση ορμής \vec{p} και ενέργειας $\omega_{\vec{p}}$ είναι:

$$|\vec{p}\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle \quad (2.6.3)$$

Πράγματι η ενέργεια της κατάστασης αυτής είναι:

$$\begin{aligned} \hat{H}|\vec{p}\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger ((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}}) |0\rangle \\ &= \int d^3q \omega_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger |0\rangle = \int d^3q \omega_{\vec{q}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) |\vec{q}\rangle = \omega_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \Rightarrow \\ \hat{H}|\vec{p}\rangle &= \omega_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \quad (2.6.4) \end{aligned}$$

Όπου $\omega_{\vec{p}}^2 = E_{\vec{p}} = \vec{p}^2 + m^2$, είναι η γνωστή μας σχετικιστική σχέση διασποράς, ενός σωματιδίου μάζας m και ορμής \vec{p} . Δρώντας με τον τελεστή της ορμής στην κατάσταση $|\vec{p}\rangle$ μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να υπολογίσουμε την ορμή της.

$$\begin{aligned} \vec{P}|\vec{p}\rangle &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \vec{q} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \vec{p} |\vec{p}\rangle \Rightarrow \\ \vec{P}|\vec{p}\rangle &= \vec{p} |\vec{p}\rangle \quad (2.6.5) \end{aligned}$$

Η οποία μας λέει βέβαια, ότι η κατάσταση $|\vec{p}\rangle$, έχει ορμή \vec{p} .

Στροφορμή

Μπορούμε ακόμη να εξετάσουμε την στροφορμή, εκφράζοντας τον αντίστοιχο τελεστή σε συνάρτηση με τα $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$. Η κλασσική έκφραση όπως είδαμε (1.4.18) είναι:

$$J^i = \varepsilon^{ijk} \int d^3x (x^j T^{0k} - x^k T^{0j}) = 2\varepsilon^{ijk} \int d^3x x^j T^{0k}$$

Για το πραγματικό πεδίο Klein-Gordon όπως είδαμε (1.4.11) ισχύει: $T^{0k} = \pi \partial^k \phi$. Υπολογίζουμε τώρα τους παράγοντες:

$$\begin{aligned} \partial^k \hat{\phi}(\vec{x}) &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^k}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}] \\ \hat{\pi}(\vec{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}] \end{aligned}$$

Μετά την αντικατάσταση, την κανονική διάταξη και αρκετές πράξεις παίρνουμε:

$$\hat{J}^i = i\varepsilon^{ijk} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \left(p^j \frac{\partial}{\partial p_k} - p^k \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \hat{a}_{\vec{p}} \quad (2.6.6)$$

Επομένως η κατάσταση ενός σωματιδίου με μηδενική ορμή έχει ολική στροφορμή:

$$\hat{J}^i |\vec{p} = 0\rangle = 0 \quad (2.6.7)$$

Δηλαδή, η ολική στροφορμή είναι μηδενική, ενώ η τροχιακή στροφορμή είναι μηδέν. Επομένως και η εσωτερική στροφορμή είναι μηδέν. Με άλλα λόγια το σωματίδιο έχει μηδενικό σπίν.

Πολυσωματιδιακές καταστάσεις . Η κατάσταση που προκύπτει από το κενό με την διαδοχική δράση τελεστών δημιουργίας ως:

$$|\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle \quad (2.6.8)$$

Παριστάνει ένα ζεύγος σωματιδίων με ορμές \vec{p}_1 και \vec{p}_2 . Λόγω του ότι:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger] &= 0 \Rightarrow \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger = \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \Rightarrow \\ |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle &= |\vec{p}_2 \vec{p}_1\rangle \quad (2.6.9) \end{aligned}$$

Αυτό μας δείχνει ότι τα σωματίδια του κβαντωμένου πεδίου Klein-Gordon είναι μποζόνια. Ο πλήρης χώρος Hilbert της θεωρίας μας παράγεται από την δράση στο κενό, όλων των δυνατών συνδυασμών των \hat{a}^\dagger . Ο χώρος αυτός είναι γνωστός ως χώρος Fock. Ο τελεστής που μας μετράει τον αριθμό των σωματιδίων σε μια δεδομένη κατάσταση του χώρου Fock είναι:

$$\hat{N} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \quad (2.6.10)$$

Και ικανοποιεί την σχέση: $\hat{N} |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots \vec{p}_n\rangle = n |\vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots \vec{p}_n\rangle$ ο τελεστής αρίθμησης μετατίθεται με την Hamiltonian $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$. Κατά συνέπεια ο αριθμός των σωματιδίων διατηρείται. Αυτή είναι μια γενική ιδιότητα των ελεύθερων θεωριών, η οποία δεν ισχύει στις αλληλεπιδράσεις, όπου σωματίδια είναι δυνατόν να δημιουργούνται ή να καταστρέφονται. Θα εξετάσουμε τώρα το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή του πεδίου, στην κατάσταση του κενού

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}] |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}}] |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} |\vec{p}\rangle \end{aligned}$$

Επομένως η κατάσταση $\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός, μονοσωματιδιακών καταστάσεων της ορμής. Δηλαδή η κατάσταση $\hat{\phi}(\vec{x})|0\rangle$ είναι η κατάσταση ενός σωματιδίου σε καθορισμένη θέση \vec{x} , ενώ η ορμή του μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή. Επιπροσθέτως:

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} e^{i\vec{q}\vec{x}} \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} e^{i\vec{p}\vec{x}} \quad (2.6.11)$$

Δηλαδή η $\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}) | \vec{p} \rangle$ είναι η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου στην κατάσταση $|\vec{p}\rangle$ καθορισμένης ορμής \vec{p} .

2.7. Σχετικιστική κανονικοποίηση

Κανονικοποιούμε το κενό έτσι ώστε $\langle 0|0\rangle = 1$. Η κατάσταση ενός σωματιδίου ορμής \vec{p} ορίζεται τότε ως $|\vec{p}\rangle = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$ οπότε:

$$\langle \vec{q}|\vec{p}\rangle = \langle 0|\hat{a}_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = \langle 0|\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{q}} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})|0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$$

Η κανονικοποίηση αυτή δεν είναι επαρκής δεδομένου ότι η συνάρτηση δέλτα δεν είναι συμμεταβλητή. Σε μια προώθηση Lorentz κατά την διεύθυνση \hat{z} , η τετραορμή p_μ μετασχηματίζεται ως:

$$\begin{pmatrix} p'_0 \\ p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(p_0 + \beta p_3) \\ p_1 \\ p_2 \\ \gamma(p_3 + \beta p_0) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E) \quad (2.7.1)$$

και

$$E' = \gamma(E + \beta p_3) \quad (2.7.2)$$

Από: $E^2 = m^2 + (p_3)^2 \Rightarrow 2EdE = 2p_3 dp_3$ προκύπτει ότι:

$$\frac{dE}{dp_3} = \frac{p_3}{E} \quad (2.7.3)$$

Επιπλέον από την (2.7.1):

$$p'_3 = \gamma(p_3 + \beta E) \Rightarrow dp'_3 = \gamma(dp_3 + \beta dE) \Rightarrow$$

$$\frac{dp'_3}{dp_3} = \gamma \left(1 + \beta \frac{dE}{dp_3} \right) = \gamma \left(1 + \frac{p_3}{E} \right) \quad (2.7.4)$$

Επίσης από την (2.7.2) προκύπτει ότι:

$$\frac{E'}{E} = \gamma \left(1 + \frac{p_3}{E} \right) \quad (2.7.5)$$

Από τις σχέσεις (2.7.4) και (2.7.5) έχουμε:

$$\frac{dp'_3}{dp_3} = \frac{E'}{E} \quad (2.7.6)$$

Πρέπει όμως να ισχύει:

$$1 = \int d^3p' \delta^{(3)}(\vec{p}') = \int d^3p \delta^{(3)}(\vec{p}) \Rightarrow d^3p' \delta^{(3)}(\vec{p}') = d^3p \delta^{(3)}(\vec{p}) \Rightarrow$$

$$\delta^{(3)}(\vec{p}) = \frac{d^3p'}{d^3p} \delta^{(3)}(\vec{p}') \Rightarrow$$

$$\delta^{(3)}(\vec{p}) = \frac{E'}{E} \delta^{(3)}(\vec{p}') \quad (2.7.7)$$

Το αμετάβλητο μέτρο Lorentz είναι τότε:

$$\int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}}$$

Και η αμετάβλητη Lorentz δ-συνάρτηση είναι $2E_{\vec{p}}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ δεδομένου ότι:

$$\int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} 2E_{\vec{p}}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) = 1$$

Τελικά οι σχετικιστικά κανονικοποιημένες καταστάσεις $|p\rangle$ δίνονται από την σχέση:

$$|p\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}}| \vec{p} \rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (2.7.8)$$

Ας σημειωθεί ότι η σχετικιστικά κανονικοποιημένη κατάσταση ορμής $|p\rangle$ διαφέρει από την $| \vec{p} \rangle$ μόνο κατά τον παράγοντα $\sqrt{2E_{\vec{p}}}$. Για τις καταστάσεις αυτές τώρα ισχύει:

$$\langle q|p\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.7.9)$$

Η σχέση πληρότητας των καταστάσεων αυτών μπορεί τώρα να γραφεί ως:

$$1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} |p\rangle\langle p| \quad (2.7.10)$$

2.8. Το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο

Το πραγματικό πεδίο Klein-Gordon που διαπραγματευτήκαμε μέχρι εδώ, περιγράφει σωματίδια μηδενικού σπίν, και μηδενικού ηλεκτρικού φορτίου. Μπορούμε να γενικεύσουμε τις παραπάνω ιδέες, εξετάζοντας ένα μιγαδικό πεδίο, το οποίο ικανοποιεί επίσης την εξίσωση Klein-Gordon. Η γενίκευση αυτή εισάγει ένα ζεύγος «σωματιδίων-αντισωματιδίων» με αντίθετα ηλεκτρικά φορτία.

Ας θεωρήσουμε το μιγαδικό βαθμωτό πεδίο $\psi = \psi(x) = \psi(\vec{x}, t)$ με πυκνότητα Lagrange

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu}\psi^* \partial^{\mu}\psi - m^2\psi^*\psi \quad (2.8.1)$$

Σε αντίθεση με το πραγματικό βαθμωτό πεδίο, εδώ δεν υπάρχει ο παράγοντας $1/2$ μπροστά από την Lagrangian. Αν γράψουμε όμως το ψ σε συνάρτηση με δύο πραγματικά βαθμωτά πεδία ϕ_1, ϕ_2 , στην μορφή:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$$

Τότε ο παράγοντας $1/2$ προκύπτει από το γινόμενο των παραγόντων $1/\sqrt{2}$. Οι εξισώσεις κίνησης για το μιγαδικό πεδίο ψ και το συζυγές πεδίο ψ^* προκύπτουν εύκολα από τις εξισώσεις Euler-Lagrange :

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + m^2 \psi = 0 \quad \text{και} \quad \partial_\mu \partial^\mu \psi^* + m^2 \psi^* = 0 \quad (2.8.2)$$

Όπου η δεύτερη είναι η μιγαδική συζυγής της πρώτης. Επομένως και τα αναπτύγματα των πεδίων σε τελεστές, θα έχουν αμοιβαία συζυγία.

$$\hat{\psi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{b}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right] \quad (2.8.3)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left[\hat{c}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right] \quad (2.8.4)$$

Μιας και το κλασσικό πεδίο ψ δεν είναι πραγματικό, το αντίστοιχο κβαντικό πεδίο $\hat{\psi}$ δεν θα είναι Hermitian. Αυτή είναι η αιτία της εμφάνισης διαφορετικών τελεστών $\hat{b}_{\vec{p}}$ και $\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$, στους προσθετούς με το θετικό και το αρνητικό εκθετικό αντίστοιχα. Η κλασσική ορμή για το πεδίο ψ και το συζυγές του ψ^* , είναι:

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^* \quad \text{και} \quad \pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = \dot{\psi} \quad (2.8.5)$$

Τις οποίες προωθούμε επίσης σε τελεστές.

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left[\hat{c}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right] \quad (2.8.6)$$

$$\hat{\pi}^\dagger(\vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left[\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} - \hat{b}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} \right] \quad (2.8.7)$$

Στην περίπτωση αυτή, οι μεταθετικές σχέσεις μεταξύ του πεδίου και της συζυγούς ορμής είναι:

$$[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad \text{και} \quad [\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.8.8)$$

$$[\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{y})] = [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(\vec{y})] = [\hat{\psi}(\vec{x}), \hat{\pi}^\dagger(\vec{y})] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] = 0 \quad (2.8.9)$$

Όμοια με το πραγματικό πεδίο Klein Gordon, μπορούμε να αποδείξουμε ότι, οι παραπάνω μεταθετικές σχέσεις είναι ισοδύναμες με τις κάτωθι μεταθετικές σχέσεις των $\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$

$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad \text{και} \quad [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) \quad (2.8.10)$$

$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{q}}] = [\hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{q}}] = [\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger] = [\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{q}}^\dagger] = 0$$

$$[\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{q}}] = [\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{q}}^\dagger] = [\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}}] = [\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger] = 0$$

Έτσι οι τελεστές $\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$ λειτουργούν ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής. Συγκεκριμένα, η κβάντωση του μιγαδικού βαθμωτού πεδίου, μας δίνει δύο τελεστές δημιουργίας $\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger$ και δύο τελεστές καταστροφής $\hat{b}_{\vec{p}}, \hat{c}_{\vec{p}}$. Αυτοί αντιστοιχούν σε δύο τύπους σωματιδίων και τα δύο με μάζα m , και τα δύο με σπίν μηδέν. Τα χαρακτηρίζουμε ως «σωματίδια» τα πρώτα και «αντισωματίδια» τα δεύτερα. Αντιθέτως στο πραγματικό

βαθμωτό πεδίο, υπήρχε μόνο ένας τύπος σωματιδίου. Για το πραγματικό βαθμωτό πεδίο, το «σωματίδιο» ταυτίζεται με το «αντισωματίδιό» του.

Ας θυμηθούμε τώρα ότι η κλασσική Lagrangian $\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi$ εμφανίζει εσωτερική ολική (global) συμμετρία στο μετασχηματισμό του πεδίου

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ia} \psi(x) \quad \text{και} \quad \psi^*(x) \rightarrow \psi'^*(x) = e^{-ia} \psi^*(x)$$

Από την συμμετρία αυτή, προκύπτει η διατηρούμενη ποσότητα:

$$Q = i \int d^3x [(\psi^*)\dot{\psi} - \dot{\psi}^*(\psi)] = i \int d^3x [\pi\dot{\psi} - \dot{\psi}^*\pi^*]$$

Προάγοντας το Q σε τελεστή, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $\pi, \psi, \psi^\dagger, \pi^\dagger$ από τις παραπάνω σχέσεις. Μετά την κανονική διάταξη των τελεστών έχουμε:

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{c}_p^\dagger \hat{c}_p - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p) = \hat{N}_c - \hat{N}_b \quad (2.8.11)$$

Επομένως ο τελεστής αρίθμησης \hat{Q} μετράει τον αριθμό των αντισωματιδίων \hat{N}_c μείον τον αριθμό των σωματιδίων \hat{N}_b στη συγκεκριμένη κατάσταση. Η Hamiltonian του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x [\pi\dot{\psi} + \pi^*\dot{\psi}^* - \mathcal{L}] = \int d^3x [\pi\pi^* + \pi^*\pi - \mathcal{L}] \\ &= \int d^3x [\pi\pi^* + \nabla\psi^*\nabla\psi + m^2\psi^*\psi] \end{aligned}$$

Προάγοντας το H σε τελεστή, αντικαθιστώντας τα $\pi, \psi, \psi^\dagger, \pi^\dagger$, και διατάσσοντας κανονικά τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, μετά από αρκετές πράξεις παίρνουμε:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p (\hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p + \hat{c}_p^\dagger \hat{c}_p) \quad (2.8.12)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις για τα \hat{Q} και \hat{H} προκύπτει ότι $[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$, το οποίο μας δείχνει ότι το \hat{Q} , δηλαδή ο συνολικός αριθμός σωματιδίων-αντισωματιδίων διατηρείται. Προφανώς στην θεωρία ελεύθερου πεδίου, διατηρείται χωριστά ο αριθμός των σωματιδίων \hat{N}_b όπως και ο αριθμός των αντισωματιδίων \hat{N}_c . Στις θεωρίες αλληλεπίδρασης όμως, ενώ τα \hat{N}_b, \hat{N}_c δεν διατηρούνται, όμως ο συνολικός αριθμός \hat{Q} των σωματιδίων εξακολουθεί να είναι μια διατηρήσιμη ποσότητα. Συμπερασματικά, οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας \hat{H} είναι και ιδιοκαταστάσεις του τελεστή του αριθμού των σωματιδίων \hat{Q} . Αντιστοιχούμε τον αριθμό +1 στα σωματίδια που δημιουργούνται από τον b_p^\dagger και τον αριθμό -1 για τα αντισωματίδια που δημιουργούνται από τον c_p^\dagger .

Ακολουθώντας παρόμοιες πράξεις με αυτές για το πραγματικό βαθμωτό πεδίο μπορούμε να υπολογίσουμε τον τελεστή της ορμής ως:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} (\hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p + \hat{c}_p^\dagger \hat{c}_p) \quad (2.8.13)$$

Όπως και στο πραγματικό βαθμωτό πεδίο ισχύουν οι μεταθετικές σχέσεις:

$$[\hat{H}, \hat{b}_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}, [\hat{H}, \hat{c}_{\vec{p}}] = -\omega_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}, \text{ και } [\hat{H}, \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger, [\hat{H}, \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger] = \omega_{\vec{p}} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \quad (2.8.14)$$

Η κατάσταση του κενού ορίζεται ως:

$$\hat{b}_{\vec{p}} |0\rangle = \hat{c}_{\vec{p}} |0\rangle = 0, \quad \forall \vec{p} \quad (2.8.15)$$

Προφανώς η κατάσταση του κενού έχει μηδενικό αριθμό σωματιδίων αφού:

$$\hat{Q}|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{c}_{\vec{p}}^\dagger \hat{c}_{\vec{p}} - \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger \hat{b}_{\vec{p}}) |0\rangle = 0$$

Η κατάσταση

$$|1_{\vec{p}}, +1\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} \hat{b}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$$

Είναι η ενεργειακή ιδιοκατάσταση ενός σωματιδίου, αριθμού +1, ορμής \vec{p} και ενέργειας $\omega_{\vec{p}} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Ομοίως η κατάσταση

$$|1_{\vec{p}}, -1\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} \hat{c}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$$

Είναι η ενεργειακή ιδιοκατάσταση ενός αντισωματιδίου, αριθμού -1, και ορμής \vec{p} . Γενικότερα, μπορούμε να γράφουμε την τυχαία κατάσταση με $n_{\vec{p}}$ σωματίδια ορμής \vec{p} και $n'_{\vec{q}}$ σωματίδια ορμής \vec{q} ως

$$|n_{\vec{p}}, +1; n'_{\vec{q}}, -1\rangle \sim (\hat{b}_{\vec{p}}^\dagger)^n (\hat{c}_{\vec{q}}^\dagger)^{n'} |0\rangle$$

Τέλος τα σωματίδια αυτά έχουν επίσης μηδενικό σπίν, είναι επομένως μποζόνια.

2.9. Η εικόνα Heisenberg

Μέχρι τώρα εργασθήκαμε κυρίως στην εικόνα Schrödinger όπου η χρονική εξάρτηση φέρεται από τις καταστάσεις και όχι από τους τελεστές. Έτσι οι πεδιακοί τελεστές, όπως για παράδειγμα ο $\hat{\psi}(\vec{x})$, εξαρτώνται από το χώρο, όχι όμως και από τον χρόνο. Οι χρονική εξέλιξη των μονοσωματιδιακών καταστάσεων, υπακούει στην εξίσωση Schrödinger

$$i \frac{d|\vec{p}(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\vec{p}(t)\rangle \Rightarrow |\vec{p}(t)\rangle = e^{-iE_{\vec{p}}t} |\vec{p}\rangle \quad (2.9.1)$$

Στην εικόνα Heisenberg, η χρονική εξάρτηση ανατίθεται στους τελεστές, ενώ οι καταστάσεις είναι χρονικά αμετάβλητες. Για τους τελεστές, \hat{O}_H στην εικόνα Heisenberg και \hat{O}_S στην εικόνα Schrödinger ισχύει:

$$\hat{O}_H = e^{i\hat{H}t} \hat{O}_S e^{-i\hat{H}t} \quad (2.9.2)$$

Από όπου προκύπτει ότι:

$$\frac{d\hat{O}_H}{dt} = i[\hat{H}, \hat{O}_H] \quad (2.9.3)$$

Θα γράφουμε το τελεστικό πεδίο στην εικόνα Heisenberg ως $\phi(\vec{x}, t) = \phi(x)$. Οι τελεστές στις δύο εικόνες για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή συμπίπτουν. Έτσι οι μεταθετικές σχέσεις που έχουμε εισάγει, παίρνουν την μορφή ισόχρονων μεταθετικών σχέσεων στην εικόνα Heisenberg.

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = 0 \quad \text{και} \quad [\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.9.4)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την χρονική παράγωγο:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\phi}}(x) &= i[\hat{H}, \hat{\phi}(x)] = i \left[\int d^3y \frac{1}{2} \left\{ \hat{\pi}(y)^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi}(y))^2 + m^2 \hat{\phi}(y)^2 \right\}, \hat{\phi}(x) \right] \\ &= i \int d^3y \hat{\pi}(y) (-i) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = \hat{\pi}(x) \end{aligned}$$

Ομοίως για το $\pi(x)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\pi}} &= i[\hat{H}, \hat{\pi}] = i \left[\int d^3y \frac{1}{2} \left\{ \hat{\pi}(y)^2 + (\vec{\nabla} \hat{\phi}(y))^2 + m^2 \hat{\phi}(y)^2 \right\}, \hat{\pi}(x) \right] = \\ &= \frac{i}{2} \int d^3y \{ [(\vec{\nabla} \hat{\phi}(y))^2, \hat{\pi}(x)] + m^2 [\hat{\phi}(y)^2, \hat{\pi}(x)] \} = \\ &= i \int d^3y (\vec{\nabla} \hat{\phi}(y)) (i)(\vec{\nabla}_y \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})) + i \int d^3y 2im^2 \hat{\phi}(y) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \vec{\nabla}^2 \hat{\phi}(x) - m^2 \hat{\phi}(x) \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\int dx \frac{d\delta(x-a)}{dx} f(x) = -f'(a) \quad (2.9.5)$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις:

$$\dot{\hat{\phi}}(x) = \hat{\pi}(x) \quad \text{και} \quad \dot{\hat{\pi}}(x) = \vec{\nabla}^2 \hat{\phi}(x) - m^2 \hat{\phi}(x) \quad (2.9.6)$$

εύκολα προκύπτει ότι ο πεδιακός τελεστής $\hat{\phi}(x)$ στην εικόνα Heisenberg, ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$. Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής στην εικόνα Heisenberg, $\hat{a}_{\vec{p}H}, \hat{a}_{\vec{p}H}^\dagger$, μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{p}H}^\dagger &= e^{i\hat{H}t} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\hat{H}t} = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + [i\hat{H}t, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] + \frac{1}{2!} [i\hat{H}t, [i\hat{H}t, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]] + \dots = \\ &= \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + it [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] + (it)^2 \frac{1}{2!} [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]] + \dots = \\ &= \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + (itE_{\vec{p}}) \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \frac{1}{2!} (itE_{\vec{p}})^2 \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger + \dots = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}}t} \end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε την μεταθετική σχέση $[\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger E_{\vec{p}}$ και την τελεστική ταυτότητα: $e^L A e^{-L} = A + [L, A] + \frac{1}{2!} [L, [L, A]] + \frac{1}{3!} [L, [L, [L, A]]] + \dots$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι:

$$\hat{a}_{\vec{p}H}^\dagger = \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}}t} \quad (2.9.7)$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$\hat{a}_{\vec{p}H} = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t} \quad (2.9.8)$$

Ο πεδιακός τελεστής Heisenberg, του πεδίου $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\vec{x}, t)$ μπορεί τώρα να γραφεί από τις σχέσεις (2.5.1), (2.9.7), (2.9.8) ως:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left[\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx} \right] \quad (2.9.9)$$

Όπου το εκθετικό έχει γραφεί στη μορφή τετρανύσματος:

$$px = p^\mu x_\mu = E_{\vec{p}}t - \vec{p}\vec{x} \quad (2.9.10)$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε (με αρκετές πράξεις) ότι το πεδίο αυτό πράγματι ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon $\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$.

Κεφάλαιο 3.

Διαδότες

Διαδότης Feynman Klein-Gordon

3.1. Μικροαιτιότητα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, εξετάσαμε τις ισόχρονες μεταθετικές σχέσεις των τελεστών Heisenberg του πεδίου $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(\vec{x}, t)$ και της συζυγούς ορμής του $\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(\vec{x}, t)$. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση αυθαίρετων χωροχρονικών αποστάσεων; Προκειμένου η θεωρία μας να ικανοποιεί την απαίτηση της αιτιότητας, πρέπει όλοι οι τελεστές, οι οποίοι δρουν σε χωροειδείς αποστάσεις να είναι μετατιθέμενοι μεταξύ τους. Δηλαδή πρέπει:

$$[\hat{\phi}_1(x), \hat{\phi}_2(y)] = 0, \quad \forall (x - y)^2 < 0 \quad (3.1.1)$$

Η απαίτηση αυτή, γνωστή ως «μικροαιτιότητα» (*microcausality*), εξασφαλίζει ότι μία μέτρηση στη χωροχρονική θέση x , δεν επηρεάζει μια μέτρηση στην θέση y , όταν τα x, y δεν συνδέονται αιτιακά μεταξύ τους. Με άλλα λόγια, έξω από τον κώνο φωτός, όπου ο χρόνος που χρειάζεται μια φωτεινή ακτίνα για να καλύψει την χωρική απόσταση των δύο γεγονότων, είναι μεγαλύτερος από την χρονική απόσταση των γεγονότων, δεν είναι δυνατόν η μία μέτρηση να επηρεάζει την άλλη. Ικανοποιεί η θεωρία μας αυτή την απαίτηση; Προκειμένου να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) &= [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \\ &= \left[\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}), \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} (\hat{a}_{\vec{q}} e^{-iqy} + \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy}) \right] = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} ([\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] e^{-ipx} e^{iqy} + [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}] e^{ipx} e^{-iqy}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} ((2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{-ipx} e^{iqy} \\ &\quad - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) e^{ipx} e^{-iqy}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \end{aligned}$$

Τελικά παίρνουμε:

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (3.1.2)$$

Τι μπορούμε να πούμε για την συνάρτηση αυτή;

A) Η συνάρτηση αυτή $\Delta(x-y)$ όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση, είναι ένας κλασσικός αριθμός (c-number) και όχι ένας τελεστής, το οποίο συμβαίνει τουλάχιστον για όλα τα ελεύθερα πεδία.

B) Είναι Lorentz αμετάβλητη αφού στο ολοκλήρωμα εμφανίζεται όπως είδαμε παραπάνω η

$$\int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}}$$

Γ) Δεν μηδενίζεται για χωροειδή διαστήματα $(\Delta S)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 > 0$. Για παράδειγμα, αν $(x-y) = (t, 0, 0, 0)$ δηλαδή $\Delta \vec{x} = 0$ ή $\vec{x} = \vec{y}$ και $\Delta t = t \neq 0$, τότε $p(x-y) = p_\mu(x-y)^\mu = mt - \vec{p}\Delta \vec{x} = mt$ οπότε

$$\Delta(x-y) = (e^{-imt} - e^{imt}) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \sim (e^{-imt} - e^{imt}) \neq 0$$

Δ) Μηδενίζεται για χωροειδή διαστήματα $(\Delta S)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2 < 0$. Πράγματι ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ίσους χρόνους. Τότε $(\Delta S)^2 = -(\Delta \vec{x})^2 = -(\vec{x} - \vec{y})^2 < 0$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι: $p(x-y) = p_\mu(x-y)^\mu = 0 - \vec{p}(\vec{x} - \vec{y})$, από όπου προκύπτει ότι:

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} - e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})})$$

Όμως $E_{\vec{p}} = E_{-\vec{p}}$ και δεδομένου ότι η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο τον χώρο των ορμών, αλλάζοντας μεταβλητή στο δεύτερο ολοκλήρωμα, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ έχουμε:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}$$

Από όπου προκύπτει ότι $\Delta(x-y) = 0$. Αλλά μιας και το $\Delta(x-y)$ είναι Lorentz αμετάβλητο, όπως αιτιολογήσαμε στο A), μπορεί να εξαρτάται μόνο από το $(\Delta S)^2 = (x-y)^2$ και επομένως θα μηδενίζεται για όλα τα $(\Delta S)^2 = (x-y)^2 < 0$.

3.2. Διαδότες (propagators)

Προκειμένου να διερευνήσουμε την αιτιακή δομή της θεωρίας μας, μπορούμε να τοποθετήσουμε μια λίγο διαφορετική ερώτηση. Προετοιμάζοντας ένα σωματίδιο στη χωροχρονική θέση y , ποιο είναι το πλάτος πιθανότητας να βρεθεί στη χωροχρονική θέση x ; Στην περίπτωση του κβαντωμένου πραγματικού βαθμωτού πεδίου $\hat{\phi}(x)$, η κατάσταση ενός σωματιδίου στη θέση x , όπως εξηγήσαμε παραπάνω, περιγράφεται από την $\hat{\phi}(x)|0\rangle$. Προφανώς η Lorentz αμετάβλητη ποσότητα που αντιστοιχεί στο πλάτος μετάβασης από το y στο x είναι:

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} e^{-ipx} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ipx}) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} (\hat{a}_{\vec{q}} e^{-iqy} + \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger e^{iqy}) | 0 \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger | 0 \rangle e^{-ipx} e^{iqy} = \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{q}}}} e^{-ipx} e^{iqy} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) = \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}$$

Άρα

$$D(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} \quad (3.2.1)$$

Η συνάρτηση $D(x-y)$ ονομάζεται «διαδότης» (*propagator*). Για χωροειδή διαστήματα, $(\Delta S)^2 = (x-y)^2 < 0$, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$D(x-y) \sim \frac{e^{-m|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|^2} \quad (3.2.2)$$

Για παράδειγμα αν πάρουμε $x^0 = y^0 = 0$, τότε $x-y = -(\vec{x}-\vec{y}) = -\vec{r}$ και $-ip(x-y) = -i[-\vec{p}\vec{r}] = i\vec{p}\vec{r}$. Άρα:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}\vec{r}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{ipr \cos \theta}}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

Όπου $p = |\vec{p}|$ και $r = |\vec{r}|$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες, (p, θ, φ) το ολοκλήρωμα αυτό γράφεται:

$$D(x-y) = \frac{i}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + m^2}} (e^{-ipr} - e^{ipr})$$

Για μεγάλες τιμές του r το εκθετικό e^{-ipr} είναι αμελητέο ως προς το e^{ipr} οπότε προσεγγιστικά:

$$D(x-y) = -\frac{i}{4\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr}$$

Αλλά:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dp p}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr} &= \int_0^\infty \frac{d(i\xi)(i\xi)}{\sqrt{(i\xi)^2 + m^2}} e^{i(i\xi)r} = \int_0^\infty \frac{d\xi \xi}{\sqrt{-\xi^2 + m^2}} e^{-\xi r} \\
&= i \int_m^\infty \frac{d\xi \xi}{\sqrt{\xi^2 - m^2}} e^{-\xi r} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} = i \int_m^\infty d\xi e^{-\xi r} = \frac{i}{r} e^{-mr}
\end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει:

$$D(r) = \frac{1}{4\pi^2 r^2} e^{-mr} \quad (3.2.3)$$

Η σχέση αυτή μας δείχνει ότι το $D(r)$ μικραίνει γρήγορα έξω από τον κώνο φωτός, αλλά εξακολουθεί να είναι μη μηδενικό! Φαίνεται σαν το κβαντικό πεδίο να «διασχίζει» τον κώνο φωτός! Εν τούτοις είδαμε ότι οι χωροχρονικές μετρήσεις μετατίθενται και η θεωρία μας είναι αιτιώδης! Μπορούμε να συμβιβάσουμε αυτά τα δύο, εκ πρώτης, αντιφατικά αποτελέσματα. Μπορούμε να γράψουμε τον μεταθέτη ως:

$$\begin{aligned}\Delta(x-y) &= [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(y-x)} \\ &= D(x-y) - D(y-x)\end{aligned}$$

Τι μπορούμε τώρα να πούμε για την παράσταση αυτή;

$$\Delta(x-y) = D(x-y) - D(y-x) \quad (3.2.4)$$

A) Μηδενίζεται για κάθε $(x-y)^2 < 0$ όπως δείξαμε παραπάνω. Δηλαδή για $(x-y)^2 < 0$ δεν υπάρχει (Lorentz αμετάβλητος) τρόπος ώστε να διατάξουμε τα γεγονότα, αφού:

$$D(x-y) - D(y-x) = 0 \quad .$$

B) Μπορούμε, για χωροειδές διάστημα γεγονότων, να βρούμε κατάλληλο συνεχή μετασχηματισμό, ο οποίος θα μετασχηματίσει το $x-y$ σε $-(x-y)$.

Γ) Αυτό, δηλαδή ο μηδενισμός του $\Delta(x-y)$, δεν μπορεί να συμβεί σε ένα χρονοειδές διάστημα, αφού τα σημεία του ανώτερου τμήματος του κώνου φωτός, δεν είναι δυνατόν, μέσω ενός μετασχηματισμού Lorentz, να μετασχηματιστούν σε σημεία του κατώτερου τμήματος του κώνου φωτός.

Συμπερασματικά, αν ένα σωματίδιο, μπορεί, έχει κάποια πιθανότητα, να ταξιδέψει από το $x \rightarrow y$, μπορεί επίσης και από το $y \rightarrow x$, και σε κάθε μέτρηση τα πλάτη πιθανότητας για τα δύο αυτά γεγονότα αλληλοαναιρούνται. Διασώζεται έτσι η αιτιότητα. Τα παραπάνω είναι περισσότερο διαφανή στην περίπτωση του μιγαδικού (φορτισμένου) βαθμωτού πεδίου.

Στην περίπτωση αυτή, το πλάτος

$$D(x-y) = \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle \quad (3.2.5)$$

αντιστοιχεί σε φορτισμένο σωματίδιο, το οποίο δημιουργείται στο y και καταστρέφεται στο x , ενώ το πλάτος:

$$D^*(y-x) = \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle \quad (3.2.6)$$

αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο αντιθέτου φορτίου (αντισωματίδιο) που δημιουργείται στο x και καταστρέφεται στο y . Εκτός του κώνου φωτός, τα δύο πλάτη, σύμφωνα με την μικροαιτιότητα, αλληλοαναιρούνται. Έτσι το πλάτος μετάβασης ενός σωματιδίου από το $x \rightarrow y$, αναιρεί το πλάτος μετάβασης ενός αντισωματιδίου από το $y \rightarrow x$. Το ίδιο συμβαίνει βέβαια και στο πραγματικό (αφόρτιστο) πεδίο, μιας και σε αυτό το πεδίο, το σωματίδιο ταυτίζεται με το αντισωματίδιό του.

3.3. Ο Διαδότης Feynman

Ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα, στη θεωρία των αλληλεπιδράσεων των πεδίων είναι ο διαδότης Feynman, $D_F(x - y)$, ο οποίος ορίζεται ως, η αναμενόμενη τιμή για το γινόμενο των κβαντικών πεδίων στο κενό. Συγκεκριμένα:

$$D_F(x - y) = \langle 0 | \hat{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle & \text{αν } x^0 > y^0 \\ D(y - x) = \langle 0 | \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle & \text{αν } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Όπου ο τελεστής \hat{T} διατάσσει χρονικά τους τελεστές $\hat{\phi}(x)$ και $\hat{\phi}(y)$ έτσι ώστε, ο χρονικά μεταγενέστερος να τοποθετείται αριστερά. Δηλαδή:

$$\hat{T} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) = \begin{cases} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) & \text{αν } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) & \text{αν } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε τον διαδότη Feynman, $D_F(x - y)$, σε συμπαγή μορφή ως:

$$D_F(x - y) = D(x - y) \theta(x^0 - y^0) + D(y - x) \theta(y^0 - x^0) \Rightarrow$$

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ip(x-y)} \} \quad (3.3.3)$$

Ο διαδότης Feynman, $D_F(x - y)$ μπορεί να γραφεί ως ολοκλήρωμα στον χώρο των 4-ορμών ως εξής:

$$D_F(x - y) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (3.3.4)$$

ή

$$D_F(x - y) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})}$$

Απόδειξη

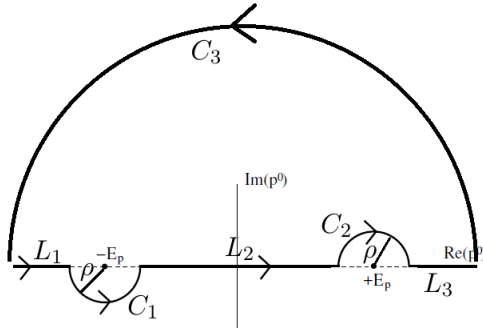
Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, πρέπει να τονίσουμε ότι ο διαδότης $D(x - y)$ εκφράστηκε στη σχέση (3.2.1), ως ολοκλήρωμα στον χώρο των 3-ορμών, με την ορμή p^0 να είναι σταθερή, στο «κέλυφος μάζας» του σωματιδίου $p^0 = E_{\vec{p}}$. Στην παραπάνω έκφραση, κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει αφού έχουμε ολοκλήρωση και ως προς το p^0 . Δηλαδή το p^0 είναι μεταβλητή ενώ η χρονική συνιστώσα της τετραορμής του σωματιδίου είναι η $E_{\vec{p}}$. Επομένως το ολοκλήρωμα ως προς p^0 , έχει για κάθε \vec{p} , δύο πόλους, οι οποίοι προκύπτουν από τον παρονομαστή $p^2 - m^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2$. Οι δύο πόλοι βρίσκονται στα:

$$p^0 = \pm E_{\vec{p}} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

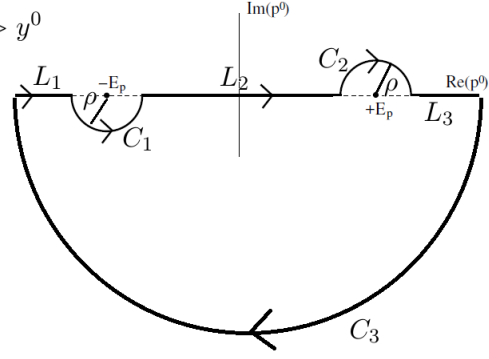
Αφού ο παρονομαστής μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2} = \frac{1}{(p^0 - E_{\vec{p}})(p^0 + E_{\vec{p}})}$$

$$x^0 < y^0$$



$$x^0 > y^0$$



Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στους δύο πόλους για την συνάρτηση:

$$f(z) = f(p^0) = \frac{e^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2} \quad (3.3.5)$$

Είναι:

$$Res(\pm E_{\vec{p}}) = \pm \frac{e^{-i(\pm E_{\vec{p}})(x^0-y^0)}}{2E_{\vec{p}}} \quad (3.3.6)$$

Για $x^0 > y^0$ κλείνουμε την καμπύλη από το κάτω ημιεπίπεδο, όπως φαίνεται στα δεξιά του παραπάνω σχήματος. Έτσι για $p^0 \rightarrow -i\infty$ παίρνουμε $e^{-ip^0(x^0-y^0)} \rightarrow 0$. Το ολοκλήρωμα περιλαμβάνει μόνο τον πόλο $p^0 = +E_{\vec{p}}$ και επειδή η διαγραφή της καμπύλης είναι ωρολογιακή έχουμε από το θεώρημα Cauchy των residues.

$$\oint dz f(z) = -2\pi i Res(+E_{\vec{p}}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2 - m^2} = -2\pi i \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)}$$

Επομένως για $x^0 > y^0$

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^4} \left(-2\pi i \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \right) i e^{-iE_{\vec{p}}(x^0-y^0) + i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-y)} = D(x-y) \end{aligned}$$

Ο οποίος είναι πράγματι ο διαδότης Feynman όπως ορίστηκε παραπάνω.

Αντιθέτως για $y^0 > x^0$ κλείνουμε την καμπύλη αντιωρολογιακά, στο πάνω ημιεπίπεδο, όπως φαίνεται στο αριστερό σχήμα. Τώρα περιλαμβάνεται ο πόλος $p^0 = -E_{\vec{p}}$ και πάλι για $p^0 \rightarrow +i\infty$, $e^{-ip^0(x^0-y^0)} \rightarrow 0$. Λόγω της αντιωρολογιακής διαγραφής της καμπύλης

$$\oint dz f(z) = +2\pi i Res(-E_{\vec{p}}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0-y^0)}}{p^2 - m^2} = +2\pi i \left(-\frac{1}{2E_{\vec{p}}} \right) e^{-i(-E_{\vec{p}})(x^0-y^0)}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
D_F(x-y) &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^4} 2\pi i \left(-\frac{1}{2E_{\vec{p}}}\right) i e^{-i(-E_{\vec{p}})(x^0-y^0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{+iE_{\vec{p}}(x^0-y^0)+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} = \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-iE_{\vec{p}}(y^0-x^0)-i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})}
\end{aligned}$$

Επειδή η ολοκλήρωση γίνεται στο χώρο των ορμών \vec{p} και η $E_{\vec{p}}$ εξαρτάται από το \vec{p}^2 , μπορούμε να αλλάξουμε το πρόσημο στο \vec{p} , οπότε γράφεται:

$$\begin{aligned}
D_F(x-y) &= \int \frac{dp^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-iE_{\vec{p}}(y^0-x^0)+i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})} = \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(y-x)} = D(y-x)
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τώρα τις σχέσεις:

$$D_F(x-y) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}$$

Και

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ip(x-y)} \}$$

Προκύπτει η ταυτότητα:

$$\{ \theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ip(x-y)} \} = 2E_{\vec{p}} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} \quad (3.3.7)$$

Βλέπουμε ότι προκύπτει πάλι ο διαδότης Feynman όπως ορίστηκε παραπάνω. Αντί να εξειδικεύουμε την διαδρομή της ολοκλήρωσης, είναι καθιερωμένο να μετατοπίζουμε ελαφρά τους πόλους από τον άξονα των πραγματικών αριθμών, και να γράφουμε τον διαδότη Feynman ως

$$D_F(x-y) = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (3.3.8)$$

Όπου ε θετικό και απειροστό.

Παρόμοια, και με την ίδια ολοκληρωτική αναπαράσταση, για το μιγαδικό (φορτισμένο) βαθμωτό πεδίο ο διαδότης Feynman είναι:

$$D_F(x-y) = \langle 0 | \hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle = \begin{cases} D(x-y) = \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(y) | 0 \rangle & \text{αν } x^0 > y^0 \\ D^*(y-x) = \langle 0 | \hat{\psi}^\dagger(y) \hat{\psi}(x) | 0 \rangle & \text{αν } y^0 > x^0 \end{cases} \quad (3.3.9)$$

Το πρώτο από αυτά αντιστοιχεί στην δημιουργία ενός σωματιδίου ψ , στη θέση y , το οποίο διαδίδεται στο x , όπου καταστρέφεται μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή $x^0 > y^0$. Το δεύτερο αντιστοιχεί στην δημιουργία ενός αντισωματιδίου $\bar{\psi}$, στη θέση x , το οποίο διαδίδεται μέχρι το y όπου και καταστρέφεται την χρονική στιγμή $y^0 > x^0$. Επομένως είτε

ένα σωματίδιο διαδίδεται από το y στο x , είτε ένα αντισωματίδιο από το x στο y , αλλά πάντοτε, σωματίδια και αντισωματίδια διαδίδονται με θετική συχνότητα (ενέργεια).

3.4. Η συνάρτηση Green του τελεστή Klein-Gordon

Η συνάρτηση Green είναι η απόκριση μιας παλμικής ώσης, για ένα γραμμικό διαφορικό τελεστή, $L_x = L(x)$ ο οποίος ορίζεται σε μια περιοχή, με καθορισμένες αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Αν αναζητούμε την λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$L_x y(x) = f(x) \text{ με } x \in [a, b] \quad (3.4.1)$$

Όπου $f(x)$ δοθείσα συνάρτηση, τότε η γενική της λύση μπορεί να γραφεί ως:

$$y(x) = y_h(x) + \int ds G(x, s) f(s) \quad (3.4.2)$$

Όπου $y_h(x)$ η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $L_x y_h(x) = 0$ και $G(x, s)$ η λεγόμενη συνάρτηση Green του δεδομένου προβλήματος συνοριακών συνθηκών, η οποία είναι λύση της εξίσωσης:

$$L_x G(x, s) = \delta(x - s) \text{ με } x \in [a, b] \quad (3.4.3)$$

Μια σημαντική ιδιότητα του διαδότη Feynman που εξετάσαμε παραπάνω, είναι ότι αυτός αντιστοιχεί στην συνάρτηση Green του διαφορικού τελεστή Klein-Gordon.

Απόδειξη

Πράγματι, μένοντας μακριά από τα ανώμαλα σημεία. Για $x' = s$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \vec{\nabla}_x^2 + m^2) D_F(x - x') &= (\partial_t^2 - \vec{\nabla}_x^2 + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip^0(x^0 - x'^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x - x')} (-p^2 + m^2) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x - x')} \\ &= -i \delta^{(4)}(x - x') \end{aligned}$$

Η χρησιμότητα του διαδότη Feynman, είναι εμφανής στην περίπτωση των αλληλεπιδράσεων. Ας θεωρήσουμε ότι το βαθμωτό, μιγαδικό πεδίο $\phi(x)$ αλληλεπιδρά με μια εξωτερική πηγή $J(x)$. Η πυκνότητα Lagrange του συστήματος είναι:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) - J(x) \phi^\dagger(x) - \phi(x) J^*(x)$$

Οπότε από τις εξισώσεις Euler-Lagrange, για το πεδίο $\phi(x)$ προκύπτει η εξίσωση κίνησης:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = -J(x) \quad (3.4.4)$$

Η λύση της μη ομογενούς αυτής εξίσωσης, μπορεί να γραφεί, με την βοήθεια της συνάρτησης Green του τελεστή Klein-Gordon ως:

$$\phi(x) = \phi_h(x) + \int d^4 x' G(x, x') f(x') \quad (3.4.5)$$

Όπου $\phi_h(x)$ είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης Klein-Gordon, δηλαδή το γνωστό μας ελεύθερο βαθμωτό πεδίο, και $G(x, x')$ ο διαδότης Feynman που υπολογίσαμε παραπάνω.

Κεφάλαιο 4.

Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (H/M) είναι ένα διανυσματικό πεδίο. Τα κβάντα του H/M πεδίου ονομάζονται φωτόνια και έχουν σπίν 1. Είναι επομένως διανυσματικά μποζόνια. Τα διανυσματικά μποζόνια διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη σωματιδιακή φυσική, ως διαδότες των αλληλεπιδράσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κβάντωση του H/M πεδίου, ακολουθώντας πορεία παρόμοια με αυτήν της κβάντωσης του πεδίου Klein-Gordon. Οι συνθήκες κβάντωσης που θα επιβάλουμε παρουσιάζουν κάποιες ιδιαιτερότητες λόγω της εγκάρσιας πόλωσης των H/M κυμάτων. Είναι απαραίτητο επομένως να ορισθούν προσεκτικά οι φυσικές καταστάσεις πόλωσης των φωτονίων.

4.1. Οι εξισώσεις Maxwell

Απουσία πηγών, όπου η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου και η πυκνότητα ρεύματος είναι μηδέν ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) οι εξισώσεις που περιγράφουν κλασσικά το H/M πεδίο είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Εδώ οι εξισώσεις Maxwell έχουν γραφεί στο φυσικό ($c = \hbar = 1$) Heaviside-Lorentz σύστημα μονάδων όπου $\mu_0 = \epsilon_0 = 1$, ενώ έχουμε απορροφήσει τον παράγοντα 4π . Οι εξισώσεις αυτές, αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων συνεξυγμένων διαφορικών εξισώσεων, με αγνώστους τα διανυσματικά πεδία \vec{E}, \vec{B} . Έχουμε δηλαδή έξι αγνώστους. Ορίζουμε τώρα το τετρανυσματικό δυναμικό $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$ του οποίου, η βαθμωτή και η διανυσματική συνιστώσα, επιλέγονται έτσι ώστε:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{και} \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \quad (4.1.1)$$

Η δεύτερη εξίσωση ικανοποιείται αυτόματα. Πράγματι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

Ομοίως αυτόματα ικανοποιείται και η τρίτη εξίσωση. Πράγματι:

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \right) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις Maxwell μας δίνει:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}{\partial t} + \vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad (4.1.2)$$

Ενώ η τέταρτη γράφεται:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \right) \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (4.1.3)$$

Οι δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις (4.1.2), (4.1.3), εκφρασμένες ως προς τα δυναμικά έχουν τέσσερις αγνώστους, ως εκ τούτου πλεονεκτούν έναντι των αρχικών οι οποίες είχαν έξι αγνώστους.

Πεδία βαθμίδας. Αν αντικαταστήσουμε τα δυναμικά (Φ, \vec{A}) με τα (Φ', \vec{A}') τα οποία ορίζονται ως:

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{και} \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f \quad (4.1.4)$$

Τότε τα νέα δυναμικά (Φ', \vec{A}') μας δίνουν ακριβώς τα ίδια πεδία \vec{E}, \vec{B} όπως και τα αρχικά (Φ, \vec{A}) ανεξάρτητα από την μορφή της συνάρτησης f . Πράγματι:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi' = -\frac{\partial(\vec{A} - \vec{\nabla} f)}{\partial t} - \vec{\nabla} \left(\Phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi = \vec{E}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι, η χρονική παράγωγος μετατίθεται με την χωρική παράγωγο, οπότε οι αντίθετοι όροι απαλείφονται. Η καθιερωμένη ονομασία θεωριών, δομημένων πάνω σε ένα ή περισσότερα δυναμικά, (εδώ τα Φ, \vec{A}), όπου διαφορετικά δυναμικά οδηγούν στα ίδια μετρήσιμα μεγέθη (εδώ \vec{E}, \vec{B}), είναι « *θεωρίες βαθμίδας* ». Η έκφραση « *αλλαγή βαθμίδας* » δηλώνει την αλλαγή της συνάρτησης f .

Η βαθμίδα Coulomb. Επιθυμούμε επομένως μια συνάρτηση f , η οποία να απλοποιεί τις διαφορικές μας εξισώσεις. Δεδομένου τώρα ότι, αν οι (Φ', \vec{A}') αποτελούν λύση του συστήματος, τότε και οι $\Phi = \Phi' + \frac{\partial f}{\partial t}$ και $\vec{A} = \vec{A}' - \vec{\nabla} f$ αποτελούν λύση, μπορούμε να επιλέξουμε την f , έτσι ώστε $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Η επιλογή αυτή της f , ονομάζεται « *βαθμίδα Coulomb* ». Έτσι οι διαφορικές μας εξισώσεις ως προς τα δυναμικά, στην βαθμίδα Coulomb γράφονται:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.1.5)$$

Μία λύση της $\vec{\nabla}^2 \Phi = 0$ είναι η $\Phi = 0$, οπότε η δεύτερη γράφεται:

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0 \quad (4.1.6)$$

Η εξίσωση αυτή, έχει λύσεις τα επίπεδα κύματα της μορφής:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (4.1.7)$$

Από την παραπάνω σχέση υπολογίζονται τα \vec{E}, \vec{B} , κάθετα μεταξύ τους και ως προς το \vec{k} :

$$\vec{E} = \mp i\omega \vec{A}_0 e^{\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \vec{B} = \mp i(\vec{k} \times \vec{A}_0) e^{\pm i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (4.1.8)$$

Συμπεραίνουμε επομένως, ότι στην βαθμίδα Coulomb, όπου μπορούμε να θεωρήσουμε $\Phi = 0$, το πεδίο \vec{A} ικανοποιεί την κυματική εξίσωση (4.1.6)

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} = 0 \quad (4.1.9)$$

4.2. Ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής Faraday.

Ορίζουμε το τετρανυσματικό δυναμικό ως:

$$A^\mu(\vec{x}, t) = A^\mu(x) = [\Phi(x), \vec{A}(x)]^T = [A^0, A^1, A^2, A^3]^T \quad (4.2.1)$$

Και στη συνέχεια τον αντισυμμετρικό τανυστή

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (4.2.2)$$

Ο τανυστής αυτός, εκφραζόμενος στην μορφή πίνακα, έχει ως στοιχεία του, τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

Ο τανυστής αυτός, όπως παρατηρούμε, είναι αντισυμμετρικός $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Οι εξισώσεις Maxwell στο κενό, μπορούν τώρα να γραφούν στην σχετικιστική μορφή ως:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.4)$$

Πράγματι για $\nu = 0$ έχουμε:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = 0 \Rightarrow \partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = 0 \Rightarrow \partial_i E^i = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Ενώ για $\nu = 1$ έχουμε:

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = 0 \Rightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_i F^{i1} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{B})_1 = \frac{\partial E^1}{\partial t}$$

Η οποία είναι η πρώτη συνιστώσα της διανυσματικής εξίσωσης

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε τις εξισώσεις Maxwell σε συνάρτηση με το τετρανυσματικό δυναμικό ως:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (4.2.5)$$

Ο μετασχηματισμός βαθμίδας (4.1.4) μπορεί τώρα να γραφεί σε τετρανυσματική μορφή ως:

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) \quad (4.2.6)$$

Ο H/M τανυστής είναι αμετάβλητος σε μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Πράγματι:

$$F'^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu(x) + \partial^\nu f(x)) - \partial^\nu (A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)) =$$

$$= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}(x)$$

Επομένως μένουν αμετάβλητες και οι εξισώσεις Maxwell. Προκειμένου να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις μας, μπορούμε να επιλέξουμε καταλλήλως την συνάρτηση $f(x)$. Οι πιο κοινές βαθμίδες είναι:

Η βαθμίδα Coulomb όπου: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.2.7)$

Και

Η βαθμίδα Lorentz όπου: $\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4.2.8)$

Είναι φανερό ότι μόνο η δεύτερη είναι σχετικιστικά συναλλοίωτη. Επιλέγοντας την λεγόμενη βαθμίδα Lorentz, στην οποία $\partial_\mu A^\mu = 0$, οι εξισώσεις Maxwell παίρνουν την μορφή:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (4.2.9)$$

4.3. Το ανάπτυγμα του H/M πεδίου σε επίπεδα κύματα

Στην ενότητα αυτή, θα αναπτύξουμε το H/M πεδίο $A^\mu(x)$ σε επίπεδα κύματα και θα ορίσουμε τις καταστάσεις τετραδιάστατης πόλωσης. Ας θυμηθούμε εδώ ότι η εξίσωση του πραγματικού πεδίου Klein-Gordon είναι:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Παρατηρούμε ότι για $m = 0$ η κυματική εξίσωση Klein-Gordon γράφεται ως:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \quad (4.3.1)$$

Έχει δηλαδή την ίδια μορφή με αυτήν του H/M πεδίου (4.2.9), με την διαφορά ότι εδώ έχουμε ένα τετρανυσματικό πεδίο το $A^\nu(x)$ και όχι ένα βαθμωτό όπως το ϕ . Οι μερικές

λύσεις της $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$, είναι τα επίπεδα κύματα, οπότε η γενική λύση του πραγματικού κλασσικού πεδίου, μπορεί να γραφεί σαν ένα ολοκλήρωμα.

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) [a_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + a_\lambda^*(\vec{k}) e^{ikx}] \quad (4.3.2)$$

Όπου $\omega_k = |\vec{k}|$ και $k^\mu = (\omega_k, \vec{k})$. Τα $a_\lambda(\vec{k}), a_\lambda^*(\vec{k})$ είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί, προκειμένου το πεδίο $A^\mu(x)$, να είναι πραγματικό. Να ισχύει δηλαδή $A^\mu(x) = A^{*\mu}(x)$. Οι συντελεστές αυτοί ($a_\lambda(\vec{k}), a_\lambda^*(\vec{k})$), θα εξαρτώνται επίσης από την ορμή \vec{k} .

Τα διανύσματα πόλωσης.

Όπως είδαμε το πεδίο \vec{A} , είναι κάθετο στο \vec{k} . Προκειμένου να περιγράψουμε το γεγονός αυτό, χρειαζόμαστε τέσσερα τετρανύσματα. Τα τετρανύσματα αυτά ονομάζονται «διανύσματα πόλωσης». Μιας και εργαζόμαστε στον τετραδιάστατο χώρο, κάθε ένα από αυτά έχει τέσσερις συνιστώσες, $\mu = 0,1,2,3$. Προκειμένου τα διανύσματα αυτά, να παράγουν τον τετραδιάστατο χώρο πόλωσης, πρέπει να είναι τέσσερα, ένα για κάθε δείκτη $\lambda = 0,1,2,3$. Επιπλέον πρέπει να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και μοναδιαία. Κάθε διάνυσμα πόλωσης $\epsilon_\lambda^\mu(\vec{k})$, είναι ένα (πραγματικό) μοναδιαίο τετράνυσμα, με συνιστώσες $\mu = 0,1,2,3$. Το τετράνυσμα αυτό, καθορίζει την κατεύθυνση του H/M πεδίου. Τα διανύσματα πόλωσης, εξαρτώνται επιπλέον, από την ορμή \vec{k} του φωτονίου. Για τις δύο χωροειδείς πολώσεις, επιλέγουμε τα $\epsilon_1^\mu, \epsilon_2^\mu$ να είναι κάθετα στην ορμή \vec{k} , με:

$$\epsilon_1^\mu k_\mu = \epsilon_2^\mu k_\mu = 0 \quad (4.3.3) .$$

Το ϵ_3^μ , αντιστοιχεί στην διαμήκη πόλωση του φωτονίου, ενώ το ϵ_0^μ , αντιστοιχεί στην χρονοειδή πόλωση. Αν η ορμή \vec{k} θεωρηθεί κατά την κατεύθυνση του άξονα x^3 , δηλαδή το διάνυσμα της τετραορμής είναι $k^\mu = \omega_k(1,0,0,1)$, τότε τα διανύσματα πόλωσης μπορούν να γραφούν ως :

$$\epsilon_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_1^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_2^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_3^\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.4)$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ορθογώνια. Χρησιμοποιώντας τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$ μπορούμε να γράψουμε την συνθήκη ορθογωνιότητας ως:

$$\epsilon_{\mu,\lambda} \epsilon_{\lambda'}^\mu = g_{\lambda\lambda'} \quad \text{ή} \quad \epsilon_\mu^\lambda \epsilon_{\nu,\lambda} = g_{\mu\nu} \quad (4.3.5)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις των διανυσμάτων πόλωσης, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την σχέση πληρότητας:

$$g_{\lambda\lambda'} \epsilon_\mu^\lambda \epsilon_{\nu'}^{\lambda'} = g_{\mu\nu} \quad \text{ή} \quad \sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \epsilon_\nu^\lambda(\vec{k}) = g_{\mu\nu} \quad (4.3.6)$$

4.4. Η πυκνότητα Lagrange

Η πυκνότητα Lagrange του ελεύθερου H/M πεδίου μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.4.1)$$

Από την (4.4.1), μπορούν να προκύψουν οι εξισώσεις Maxwell, ως κλασσικές εξισώσεις κίνησης.

Πράγματι:

Ως προς το H/M πεδίο $A^\mu(x)$, με $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, η \mathcal{L} , μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu)] \quad (4.4.2)$$

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange μπορούμε να πάρουμε:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

Αλλά :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

Επίσης

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -[(\partial^\mu A^\nu) - (\partial^\nu A^\mu)]$$

οπότε προκύπτει:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (4.4.3)$$

Η οποία είναι η γνωστή μας εξίσωση του πεδίου, για τις εξισώσεις Maxwell, που για την βαθμίδα Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, μας δίνει την εξίσωση κύματος: $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$

4.5. Ο ταυνοστής Ενέργειας-Ορμής

Ο ταυνοστής ενέργειας – ορμής

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \partial^\nu \phi_\alpha - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Για το H/M πεδίο μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Όμως:

$$\frac{\partial(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial(F^{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} = 2F^{\alpha\beta} \frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}$$

Επίσης:

$$F^{\alpha\beta} \frac{\partial(F_{\alpha\beta})}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} = F^{\alpha\beta} (\delta_\mu^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\sigma^\alpha) = F^{\mu\sigma} - F^{\sigma\mu} = -2F^{\sigma\mu}$$

Τελικά ο ταυνοστής $T^{\mu\nu}$ γράφεται:

$$T^{\mu\nu} = F^{\sigma\mu}(\partial^\nu A_\sigma) + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (4.5.1)$$

Μπορούμε τώρα να επιβεβαιώσουμε την διατήρηση της ενέργειας και της ορμής. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \partial_\mu [F^{\sigma\mu}(\partial^\nu A_\sigma)] + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial_\mu(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) = \\ &= (\partial_\mu F^{\sigma\mu})(\partial^\nu A_\sigma) + F^{\sigma\mu}(\partial_\mu \partial^\nu A_\sigma) + \frac{1}{4}\partial^\nu(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

Αλλά: $\partial_\mu F^{\sigma\mu} = 0$ και $\frac{1}{4}\partial^\nu(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(\partial^\nu F_{\alpha\beta})F^{\alpha\beta}$ οπότε παίρνουμε:

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = F^{\sigma\mu}(\partial_\mu \partial^\nu A_\sigma) + \frac{1}{2}(\partial^\nu F_{\alpha\beta})F^{\alpha\beta}$ από όπου αντικαθιστώντας τους βωβούς δείκτες:

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= F^{\alpha\beta}(\partial_\beta \partial^\nu A_\alpha) + \frac{1}{2}(\partial^\nu F_{\alpha\beta})F^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} \frac{1}{2}\partial^\nu [2\partial_\beta A_\alpha + F_{\alpha\beta}] = \\ &= \frac{1}{2}\partial^\nu [\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha A_\beta]F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial^\nu [\partial_\beta A_\alpha F^{\alpha\beta} + \partial_\alpha A_\beta F^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}\partial^\nu \partial_\beta A_\alpha [F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha}] = 0 \end{aligned}$$

Συμπερασματικά:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.5.2)$$

Ο $T^{\mu\nu}$ είναι επομένως κατάλληλος, ώστε να μας δώσει την διατήρηση της τετραορμής. Περιμένουμε, η πυκνότητα της στροφορμής να δίνεται από την σχέση $\varepsilon_{ijk}x_j T^{0k}$. Αυτό απαιτεί όμως ο $T^{\mu\nu}$ να είναι συμμετρικός και εν προκειμένω δεν είναι. Θεωρούμε τον ταυνοστή:

$$G^{\rho\mu\nu} = A^\nu F^{\mu\rho} \quad (4.5.3)$$

Ο ταυνοστής αυτός, είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δύο πρώτους δείκτες: $G^{\rho\mu\nu} = -G^{\mu\rho\nu}$. Προσθέτουμε τώρα στον $T^{\mu\nu}$ την ποσότητα, $\partial_\rho G^{\rho\mu\nu}$ έτσι παίρνουμε τον συμμετροποιημένο ταυνοστή:

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} \quad (4.5.4)$$

Επειδή:

$$\partial_\mu \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} = \partial_\rho \partial_\mu G^{\mu\rho\nu} = -\partial_\rho \partial_\mu G^{\rho\mu\nu} = -\partial_\mu \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} \Rightarrow \partial_\mu \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} = 0$$

Για τον συμμετρικό ταυνοστή ορμή-ενέργειας ισχύει πάλι:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (4.5.5)$$

Αντικαθιστώντας τα $T^{\mu\nu}, G^{\rho\mu\nu}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} + \partial_\rho G^{\rho\mu\nu} = F^{\sigma\mu}(\partial^\nu A_\sigma) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \partial_\rho (A^\nu F^{\mu\rho}) = \\ &= F^{\rho\mu}(\partial^\nu A_\rho) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + (\partial_\rho A^\nu) F^{\mu\rho} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\rho\mu}(\partial^\nu A_\rho - \partial^\rho A_\nu) \end{aligned}$$

Επειδή:

$$\partial^\nu A_\rho - \partial^\rho A_\nu = \partial^\nu A_\rho - \partial_\rho A^\nu = g_{\rho\sigma}(\partial^\nu A^\sigma - \partial^\sigma A^\nu) = g_{\rho\sigma} F^{\nu\sigma}$$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + g_{\rho\sigma} F^{\nu\sigma} F^{\rho\mu} \quad (4.5.6)$$

Αυτή είναι η καθιερωμένη μορφή του τανυστή ενέργειας-ορμής του H/M πεδίου. Στην μορφή αυτή έχει όλες τις «καλές» ιδιότητες. Είναι συμμετρικός και αμετάβλητος σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Επιπλέον:

$$\begin{aligned} \Theta^{0i} &= g_{\rho\sigma} F^{i\sigma} F^{\rho 0} = g_{\rho j} F^{ij} F^{\rho 0} = g_{jj} F^{ij} F^{j0} = -F^{ij} F^{j0} = -(-\varepsilon_{ijk} B^k) E^j = \varepsilon_{ijk} E^j B^k \Rightarrow \\ \Theta^{0i} &= (\vec{E} \times \vec{B})_i \quad (4.5.7) \end{aligned}$$

Η οποία είναι η σωστή σχέση για την πυκνότητα ορμής ή την ροή ενέργειας, όπως δίνεται από το διάνυσμα Poynting.

4.6. Η κβάντωση του H/M πεδίου

Η κανονική κβάντωση του διανυσματικού πεδίου $A^\mu(x)$, μπορεί να γίνει επιλέγοντας την βαθμίδα Coulomb όπου: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, ή την βαθμίδα Lorentz όπου: $\partial_\mu A^\mu = 0$. Κάθε μία από αυτές έχει τις δικές της ιδιαιτερότητες. Εδώ επιλέγουμε την βαθμίδα Lorentz, η οποία είναι βολική στα φαινόμενα σκέδασης. Το πρώτο βήμα είναι η εύρεση των κανονικών ορμών και η επιβολή των κανονικών σχέσεων μετάθεσης με τα πεδία. Για το H/M πεδίο, όπως είδαμε, η πυκνότητα Lagrange είναι:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Οπότε η συζυγής ορμή του πεδίου A_μ είναι:

$$\begin{aligned} \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} F^{\alpha\beta} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^0 \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^0 \delta_\alpha^\mu) F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (F^{0\mu} - F^{\mu 0}) = \\ &= -\frac{1}{2} 2F^{0\mu} = -F^{0\mu} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\pi^\mu = -F^{0\mu}$$

Επομένως :

$$\pi^0 = -F^{00} = 0 \quad (4.6.1) \quad \text{και} \quad \pi^i = -F^{0i} = E^i \quad (4.6.2)$$

Παρατηρούμε ότι η συζυγής ορμή π^0 του A_0 μηδενίζεται. Η A_0 δεν είναι μια δυναμική μεταβλητή. Το ζεύγος π^0, A_0 δεν αντιπροσωπεύει ένα ζεύγος φυσικών μεταβλητών, αλλά έναν περιορισμό.

4.7. Οι μεταθετικές σχέσεις του φωτονίου

Στο βαθμωτό πεδίο Klein-Gordon, προωθώντας το πεδίο και την συζυγή του ορμή σε τελεστές, είχαμε επιβάλλει την μεταθετική σχέση:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.7.1)$$

Ομοίως εδώ, για τις χρονικές συνιστώσες θα έχουμε:

$$\begin{aligned} [\hat{A}^0(\vec{x}, t), \hat{\pi}_0(\vec{y}, t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow \\ [\hat{A}^0(\vec{x}, t), \hat{\pi}^0(\vec{y}, t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Ενώ για τις χωρικές συνιστώσες έχουμε:

$$\begin{aligned} [\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{\pi}_i(\vec{y}, t)] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow \\ [\hat{A}^i(\vec{x}, t), \hat{\pi}^i(\vec{y}, t)] &= -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν σε συμπαγή μορφή ως:

$$[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{y}, t)] = ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.7.4)$$

$$[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t)] = [\pi^\mu(\vec{x}, t), \pi^\nu(\vec{y}, t)] = 0 \quad (4.7.5)$$

Όπου τώρα τα $\hat{A}^\mu, \hat{\pi}^\mu$ είναι τελεστές, τους οποίους θα αναπτύξουμε σε επίπεδα κύματα. Έτσι θα περιγράψουμε τα κβάντα του H/M πεδίου, τα γνωστά μας φωτόνια

Η «βαθμίδα Feynman»

Εφαρμόζοντας την (4.7.4) για τα $\hat{\pi}^0, \hat{A}^0$, όπως στην (4.6.1) έχουμε:

$$[\hat{A}^0(\vec{x}, t), \hat{\pi}^0(\vec{x}', t)] = ig^{00} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Rightarrow [\hat{A}^0(\vec{x}, t), 0] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \Rightarrow 0 = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

Το οποίο βέβαια είναι άτοπο! Η πρώτη προσπάθειά μας να κβαντώσουμε την κλασική Lagrangian του H/M πεδίου απέτυχε! Μπορούμε όμως να κβαντώσουμε μια διαφορετική Lagrangian, η οποία βέβαια πρέπει να οδηγεί στην ίδια φυσική με την προηγούμενη. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός, ότι η διαφορετική επιλογή βαθμίδας, οδηγεί στην ίδια φυσική για τα παρατηρούμενα μεγέθη. Ας θεωρήσουμε την τροποποιημένη Lagrangian :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.7.6)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange μας δίνουν:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{4} \partial_\mu \left(\frac{\partial F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\lambda}{2} \partial_\mu \left(\frac{\partial (\partial_\alpha A^\alpha)^2}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0$$

Αλλά:

$$\frac{\partial (\partial_\alpha A^\alpha)^2}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 2(\partial_\alpha A^\alpha) \frac{\partial (\partial_\alpha A^\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 2(\partial_\alpha A^\alpha) \delta_\alpha^\mu g^{\alpha\nu} = 2\partial^\nu A^\mu$$

Οπότε μετά την αντικατάσταση παίρνουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange στη μορφή:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (4.7.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση για $\lambda = 1$, γράφεται $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$, που είναι, όπως είδαμε, οι εξισώσεις κίνησης στην βαθμίδα Lorentz (της ίδιας μορφής με την Klein-Gordon μηδενικής μάζας). Η επιλογή αυτή ($\lambda = 1$), ονομάζεται «βαθμίδα Feynman», και πλέον θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν. Για $\lambda = 1$ η πυκνότητα Lagrange γράφεται ως:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.7.8)$$

Και οι εξισώσεις κίνησης που προκύπτουν από αυτήν είναι πράγματι

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad (4.7.9)$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε περεταίρω την παραπάνω Lagrangian αναπτύσσοντάς την ως προς το πεδίο A^ν .

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + (\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu)] =$$

$$= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2} \partial_\mu [A_\nu (\partial^\nu A^\mu) - A^\mu (\partial_\nu A^\mu)]$$

Ο δεύτερος προσθετέος, της ολικής παραγώγου, δεν συμμετέχει στον υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης. Μπορούμε επομένως να τον παραλείψουμε, και να γράψουμε την πυκνότητα Lagrange, στην βαθμίδα Feynman ως:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) \quad (4.7.10)$$

Η συζυγής ορμή του ανταλλοίωτου πεδίου A^μ είναι το συναλλοίωτο τετράνυσμα π_μ .

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^\mu)} = -\frac{1}{2} 2(\partial^\alpha A^\beta) \frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_0 A^\mu)} = -(\partial^\alpha A^\beta) \delta_\alpha^0 g_{\mu\beta} = -\partial^0 A_\mu$$

$$\pi_\mu = -\partial^0 A_\mu \quad (4.7.11)$$

Και η πυκνότητα Hamilton είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_\mu (\partial^0 A^\mu) - \mathcal{L} = -(\partial^0 A_\mu)(\partial^0 A^\mu) + \frac{1}{2}(\partial_0 A_\mu)(\partial^0 A^\mu) + \frac{1}{2}(\partial_i A_\mu)(\partial^i A^\mu) = \\
&= -\frac{1}{2}(\partial^0 A_\mu)(\partial^0 A^\mu) - \frac{1}{2}(\partial^i A_\mu)(\partial^i A^\mu) = -\frac{1}{2}(\partial^\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) = \\
&= -\frac{1}{2}[(\partial^0 A_\mu)(\partial^0 A^\mu) + (\partial^i A_\mu)(\partial^i A^\mu)] = -\frac{1}{2}[\pi_\mu \pi^\mu + (\vec{\nabla} A_\mu)(\vec{\nabla} A^\mu)] \\
\mathcal{H} &= -\frac{1}{2}[\pi_\mu \pi^\mu + (\vec{\nabla} A_\mu)(\vec{\nabla} A^\mu)] \quad (4.7.12)
\end{aligned}$$

Το ανάπτυγμα του H/M πεδίου

Προχωρούμε στο ανάπτυγμα του πεδίου, με το γνωστό τρόπο, σε συνάρτηση με τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, και τα τέσσερα διανύσματα πόλωσης:

$$\epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) = \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \quad \text{με } \lambda = 0, 1, 2, 3$$

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\lambda^{\mu*}(\vec{k}) e^{ikx}] \quad (4.7.13)$$

Όπου για το φωτόνιο, $\omega_k = k^0 = |\vec{k}|$, και οι τελεστές δημιουργίας- καταστροφής θα εξαρτώνται επιπλέον και από την πόλωση λ . Το ανάπτυγμα αυτό ικανοποιεί αμέσως την εξίσωση κίνησης $\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0$, δεδομένου ότι: $\partial_\mu \partial^\mu (e^{\pm ikx}) = -k_\mu k^\mu e^{\pm ikx} = 0 e^{\pm ikx} = 0$. Το τελεστικό ανάπτυγμα της ορμής θα υπολογιστεί από την σχέση: $\pi^\mu = -\partial^0 A^\mu$.

$$\hat{\pi}^\mu(x) = i \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\lambda^{\mu*}(\vec{k}) e^{ikx}] \quad (4.7.14)$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι, αν οι τελεστές \hat{a}, \hat{a}^\dagger ικανοποιούν τις γνωστές μεταθετικές σχέσεις τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, τότε ισχύουν και οι παραπάνω σχέσεις μετάθεσης (4.7.4), (4.7.5), των τελεστικών πεδίων, και αντιστρόφως. Αν δηλαδή ισχύουν:

$$[\hat{a}(\vec{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda')] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.7.15)$$

$$[\hat{a}(\vec{k}, \lambda), \hat{a}(\vec{k}', \lambda')] = [\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda')] = 0 \quad (4.7.16)$$

Τότε θα ισχύουν και οι μεταθετικές σχέσεις:

$$[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{y}, t)] = i g^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.7.17)$$

$$[\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{y}, t)] = [\hat{\pi}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{y}, t)] = 0 \quad (4.7.18)$$

Το $g^{\lambda\lambda'}$ στη σχέση (4.7.15) προέρχεται από το $g^{\mu\nu}$ της σχέσεως (4.7.17) ενώ το αρνητικό πρόσημο δικαιολογείται από το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (4.7.11).

Απόδειξη

Ας προετοιμάσουμε λίγο τις πράξεις. Για την απλοποίηση των συμβολισμών, θα χρησιμοποιήσουμε $\vec{y} = \vec{x}'$,

$\epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) = \epsilon_\lambda^{\mu*}(\vec{k}) = \epsilon^\mu$, $\epsilon_{\lambda'}^\mu(\vec{k}') = \epsilon'^\mu$, $\hat{a}(\vec{k}, \lambda) = \hat{a}$, $\hat{a}(\vec{k}', \lambda') = \hat{a}'$ κλπ. Υπενθυμίζουμε ακόμα ότι για τα διανύσματα πόλωσης ισχύει:

$$\sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) \epsilon_\nu^\lambda(\vec{k}) = g_{\mu\nu} \Rightarrow \sum_{\lambda\lambda'} g^{\lambda\lambda'} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}) = g^{\mu\nu}$$

Όπως επίσης ότι, για την χρονική συνιστώσα των τετρανυσμάτων x^μ , ισχύει ότι:

$$x^0 = x'^0 = t. \quad \text{Επομένως:} \quad e^{-ik(x-x')} = e^{-i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})}, \quad e^{ik(x-x')} = e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})}$$

Ας ξεκινήσουμε:

$$\begin{aligned} & [\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{x}', t)] = \\ & = \sum_{\lambda\lambda'} i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}} \epsilon^\mu \epsilon'^\nu [(\hat{a}e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger e^{ikx}), (\hat{a}'e^{-ik'x'} - \hat{a}'^\dagger e^{ik'x'})] \end{aligned}$$

Οι μεταθέτες: $[\hat{a}, \hat{a}'] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}'^\dagger] = 0$, Ενώ: $[\hat{a}, \hat{a}'^\dagger] = -g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$
Επομένως:

$$\begin{aligned} [\hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{x}', t)] &= \sum_{\lambda\lambda'} i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}} \epsilon^\mu \epsilon'^\nu \\ & g^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') (e^{-ikx+ik'x'} + e^{ikx-ik'x'}) = \\ & = i \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon^\mu \epsilon'^\nu g^{\lambda\lambda'} (e^{-i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})} + e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})}) = \\ & = i \int \frac{d^3k}{2(2\pi)^3} g^{\mu\nu} (e^{-i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})} + e^{i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})}) = \frac{ig^{\mu\nu}}{2} \{\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') + \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')\} \\ & = ig^{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να αποδειχθούν και οι άλλες μεταθετικές σχέσεις που περιλαμβάνουν τους πεδιακούς τελεστές. Ως εκ τούτου οι μεταθετικές σχέσεις των τελεστών που επιλέξαμε είναι οι σωστές. Συγκεκριμένα,

ο τελεστής $\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda)$ δημιουργεί ένα φωτόνιο ορμής \vec{k} και πόλωσης λ

ενώ ο τελεστής $\hat{a}(\vec{k}, \lambda)$ καταστρέφει ένα φωτόνιο ορμής \vec{k} και πόλωσης λ

Παρατηρούμε ότι οι μεταθετικές σχέσεις που αναφέρονται στις χωροειδείς καταστάσεις πόλωσης ($\lambda = 1, 2, 3$), δεδομένου ότι για αυτές $-g^{\lambda\lambda} = 1$, γράφονται:

$$[\hat{a}(\vec{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda')] = \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.7.19)$$

που είναι οι γνωστές μας μποζονικές σχέσεις από το πεδίο Klein-Gordon. Δεν συμβαίνει το ίδιο με αυτές που αναφέρονται στην χρονοειδή κατάσταση πόλωσης. Για τους χρονοειδείς τελεστές δημιουργίας-καταστροφής ($\lambda = 0$) ισχύει:

$$[\hat{a}(\vec{k}, 0), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', 0)] = -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.7.20)$$

Θα δούμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα αυτής της «ανωμαλίας» και πως μπορούμε να τα χειριστούμε.

Ο τελεστής Hamilton.

Προς το παρόν θα υπολογίσουμε τον τελεστή Hamilton (4.7.12), σε συνάρτηση με τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας φωτονίων $\hat{a}(\vec{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda')$. Από την σχέση (4.7.12) παίρνουμε:

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int d^3x [\pi_\mu \pi^\mu + (\vec{\nabla} A_\mu)(\vec{\nabla} A^\mu)]$$

Πριν βυθιστούμε στον υπολογισμό, ας προετοιμάσουμε λίγο τις πράξεις. Εύκολα αποδεικνύεται η σχέση:

$$\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(k \pm k')x} = \delta^3(\vec{k} \pm \vec{k}') e^{-i(\omega \pm \omega')t} \quad (4.7.21)$$

Επιλέγοντας πραγματικά διανύσματα πόλωσης, μπορούμε να γράψουμε το πεδίο και την ορμή του ως:

$$\begin{aligned} \hat{A}^\mu(x) &= \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}] \\ \vec{\nabla} \hat{A}^\mu(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \vec{k} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}] \\ \hat{\pi}^\mu(x) &= i \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}] \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^3x \hat{\pi}_\mu(x) \hat{\pi}^\mu(x) = - \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\mu\lambda'}(\vec{k}') \\ &= - \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int d^3k' \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\mu\lambda'}(\vec{k}') [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}] [\hat{a}(\vec{k}', \lambda') e^{-ik'x} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda') e^{ik'x}] = \\ &= - \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int d^3k' \sqrt{\frac{\omega_{k'}}{2}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\mu\lambda'}(\vec{k}') [\hat{a}\hat{a}' \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i(\omega+\omega')t} + \\ &+ \hat{a}^\dagger \hat{a}'^\dagger \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') e^{i(\omega+\omega')t} - \hat{a}\hat{a}'^\dagger \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{-i(\omega-\omega')t} - \hat{a}^\dagger \hat{a}' \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') e^{i(\omega-\omega')t}] \end{aligned}$$

Μετά την δράση της δ-συνάρτησης, οι δύο πρώτοι προσθετέοι, θα παρουσιάσουν χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{\pm 2i\omega t}$. Δεδομένου τώρα ότι η Lagrangian δεν παρουσιάζει εκπεφρασμένη χρονική εξάρτηση, η ενέργεια διατηρείται, οπότε η Hamiltonian είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Στο δεύτερο επομένως ολοκλήρωμα, όπως μπορεί κανείς εύκολα να επιβεβαιώσει, παρουσιάζονται αντίθετοι προσθετέοι, με την ίδια χρονική εξάρτηση. Θα αποβάλουμε επομένως τους όρους αυτούς και θα πάρουμε:

$$I_1 = \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega_k}{2} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\mu\lambda'}(\vec{k}) [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda') + \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda')]$$

Το οποίο μετά την κανονική διάταξη και την απλοποίηση (4.3.5), θα γραφεί ως:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \sum_{\lambda\lambda'} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\mu\lambda'}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda') = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \sum_{\lambda\lambda'} g_{\lambda\lambda'} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda') = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k [\hat{a}^\dagger(\vec{k}, 0) \hat{a}(\vec{k}, 0) - \sum_{\lambda=1,2,3} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda)] \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί και το δεύτερο ολοκλήρωμα. Εδώ θα χρειαστεί η αντικατάσταση $\vec{k}^2 = \omega_k^2$.

$$I_2 = \int d^3x (\vec{\nabla} A_\mu)(\vec{\nabla} A^\mu) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k [\hat{a}^\dagger(\vec{k}, 0) \hat{a}(\vec{k}, 0) - \sum_{\lambda=1,2,3} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda)]$$

Προσθέτοντας τα δύο ολοκληρώματα και πολλαπλασιάζοντας με $-1/2$ παίρνουμε τον τελεστή Hamilton σε συνάρτηση με τους τελεστές δημιουργίας-καταστροφής.

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left(\sum_{\lambda=1,2,3} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, 0) \hat{a}(\vec{k}, 0) \right) \quad (4.7.22)$$

Η σε πιο συμπαγή μορφή

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \sum_{\lambda=0,1,2,3} -g^{\lambda\lambda} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \hat{a}(\vec{k}, \lambda) \quad (4.7.23)$$

Η αναλογία με τον τελεστή Hamilton του βαθμωτού πεδίου Klein-Gordon είναι εμφανής

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \quad (4.7.24)$$

4.8. Η συνθήκη Gupta-Bleuler

Επιστρέφουμε τώρα στην «ανωμαλία» η οποία εμφανίζεται στη μεταθετική σχέση (4.7.20) των τελεστών $\hat{a}(\vec{k})^0 = \hat{a}(\vec{k}, 0)$, $\hat{a}^\dagger(\vec{k})^0 = \hat{a}^\dagger(\vec{k}, 0)$, χρονοειδούς πόλωσης.

$$[\hat{a}(k)^0, \hat{a}^\dagger(k')^0] = -(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

Για να δούμε πόσο παράξενο είναι αυτό, ορίζουμε την κατάσταση κενού $|0\rangle$ ως συνήθως.

$$\hat{a}(\vec{k}, \lambda)|0\rangle = 0 \quad \text{με} \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (4.8.1)$$

Οπότε η κατάλληλα κανονικοποιημένη κατάσταση ενός φωτονίου ορμής \vec{k} και πόλωσης λ , ορίζεται ως:

$$|\vec{k}, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda)|0\rangle \quad (4.8.2)$$

Και το εσωτερικό τους γινόμενο προκύπτει ως:

$$\langle \vec{k}, \lambda | \vec{k}', \lambda' \rangle = 2\omega_{\vec{k}} \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.8.3)$$

Για τις χωροειδείς πολώσεις $\lambda = 1, 2, 3$ όλα μοιάζουν κανονικά αφού:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}, i | \vec{k}', j \rangle &= \langle 0 | \hat{a}(\vec{k}, i) \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} \sqrt{2\omega_{\vec{k}'}} \hat{a}^\dagger(\vec{k}', j) | 0 \rangle = \\ &= 2\omega_{\vec{k}} \delta^{ij} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned}$$

Για την χρονοειδή πόλωση όμως:

$$\langle \vec{k}, 0 | \vec{k}', 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}(\vec{k}, 0) \sqrt{2\omega_{\vec{k}}} \sqrt{2\omega_{\vec{k}'}} \hat{a}^\dagger(\vec{k}', 0) | 0 \rangle = -2\omega_{\vec{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.8.4)$$

Συνεπώς η norm της κατάστασης ενός φωτονίου χρονοειδούς πόλωσης (βαθμωτό scalar), είναι αρνητική!;; Ουσιαστικά δίνει αρνητική πιθανότητα, για το πλάτος μετάβασης μεταξύ καταστάσεων χρονοειδούς πόλωσης. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, μια κανονικοποιημένη επαλληλία, μονοφωτονικών καταστάσεων με χρονοειδή πόλωση

$$|f\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f(k) |\vec{k}, 0\rangle$$

Το μέτρο της είναι:

$$\begin{aligned} \langle f | f \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} f^*(k) f(k') \langle \vec{k}, 0 | \vec{k}', 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} f^*(k) f(k') [-(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')] = - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |f(k)|^2 < 0 \end{aligned}$$

Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα εξετάζουμε αν μπορούμε να επιβάλλουμε την συνθήκη Lorentz $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ ως μία τελεστική συνθήκη. Για τον μεταθέτη των τελεστών $\partial_\mu \hat{A}^\mu, \hat{A}^\nu$ θα ισχύει $[\partial_\mu \hat{A}^\mu, \hat{A}^\nu] = [0, \hat{A}^\nu] = 0$, δεδομένου ότι θα έχουμε δεχθεί ότι $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$. Αλλά μετά τις πράξεις παίρνουμε:

$$[\partial_\mu \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x')] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{ik^\nu}{\omega_k} \cos(k(x - x')) \quad (4.8.5)$$

Απόδειξη.

Από την σχέση (4.7.6) έχουμε:

$$\hat{A}^\nu(x') = \sum_{\lambda'=0}^3 \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}') [\hat{a}(\vec{k}', \lambda') e^{-ik'x'} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda') e^{ik'x'}]$$

$$\partial_\mu \hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(-ik_\mu)}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) [\hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx}]$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση μετάθεσης θα απομείνουν μόνο οι μη μηδενιζόμενοι μεταθέτες

$$[\partial_\mu \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x')] = \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(-ik_\mu)}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}')$$

$$\{e^{-ikx+ik'x'} [\hat{a}(\vec{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\vec{k}', \lambda')] - e^{ikx-ik'x'} [\hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda), \hat{a}(\vec{k}', \lambda')]\}$$

Από τις μεταθετικές σχέσεις των τελεστών δημιουργίας-καταστροφής (4.7.8), παίρνουμε:

$$[\partial_\mu \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x')] = \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(-ik_\mu)}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}')$$

$$(-g^{\lambda\lambda'})(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \{e^{-ikx+ik'x'} - e^{ikx-ik'x'}\}$$

Οπότε αξιοποιώντας την συνάρτηση $\delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$, γράφουμε:

$$[\partial_\mu \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(x')] = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(-ik_\mu)}{2\omega_k} \sum_{\lambda\lambda'} (-g^{\lambda\lambda'}) \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}) \{e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')}\}$$

Αξιοποιώντας και την σχέση πληρότητας (4.3.6) και την σχέση Euler για τα εκθετικά, φτάνουμε στη ζητούμενη σχέση. Τέλος της απόδειξης.

Η λύση Gupta-Bleuler

Φτάσαμε λοιπόν στο συμπέρασμα, ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη Lorentz $\partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$ ως μια τελεστική συνθήκη. Η καθιερωμένη πια λύση στο παραπάνω πρόβλημα, είναι αυτή που πρότειναν οι Gupta και Bleuler. Αντικατέστησαν την συνθήκη Lorentz με την ασθενέστερη συνθήκη:

$$\partial_\mu \hat{A}^{\mu+}(x) |\Psi\rangle = 0 \quad (4.8.6)$$

Η οποία μας ορίζει τα αποδεκτά καταστατικά διανύσματα $|\Psi\rangle$. Όπου το $|\Psi\rangle$ παριστάνει το ket οποιουδήποτε αριθμού φωτονίων. Ενώ ο τελεστής $\hat{A}^{\mu+}$, περιέχει μόνο τους τελεστές καταστροφής $\hat{a}(\vec{k}, \lambda)$.

$$\hat{A}^{\mu+}(x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx}$$

Για τον πεδιακό τελεστή γράφουμε:

$$\hat{A}^\mu(x) = \hat{A}^{\mu+}(x) + \hat{A}^{\mu-}(x) \quad (4.8.7)$$

Όπου οι τελεστές καταστροφής (θετικής συχνότητας) και δημιουργίας (αρνητικής συχνότητας) αντίστοιχα είναι:

$$\hat{A}^{\mu+}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} \quad (4.8.8)$$

$$\hat{A}^{\mu-}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) e^{ikx} \quad (4.8.9)$$

Έτσι η συζυγής συνθήκη της: $\partial_\mu \hat{A}^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = 0$ είναι η $\langle\Psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu-}(x) = 0$ και η αναμενόμενη τιμή της συνθήκης Lorentz, είναι τώρα μηδέν αφού:

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\partial_\mu \hat{A}^\mu(x)|\Psi\rangle &= \langle\Psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu-}(x) + \partial_\mu \hat{A}^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = \\ &= \langle\Psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu-}(x)|\Psi\rangle + \langle\Psi|\partial_\mu \hat{A}^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = \langle\Psi|\Psi(+1)\rangle + \langle\Psi|\Psi(-1)\rangle = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Όπου τα $|\Psi(\pm 1)\rangle$ αντιπροσωπεύουν την κατάσταση $|\Psi\rangle$, \pm ένα φωτόνιο.

4.9. Φωτόνια χρονοειδούς και επιμήκους πολώσεως

Οι επιπτώσεις της συνθήκης Gupta-Bleuler

Προκειμένου να αντιληφθούμε την σημασία της συνθήκης Gupta-Bleuler, θα επιλέξουμε κατά τα γνωστά τα διανύσματα πόλωσης ως:

$$\epsilon_0^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad \epsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad \epsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad \epsilon_3^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

Με το ϵ_3^μ της επιμήκους πολώσεως $\vec{\epsilon}_3 = \vec{k}/|\vec{k}|$ και τα $\epsilon_1^\mu, \epsilon_2^\mu$ της εγκάρσιας πόλωσης, $\vec{\epsilon}_1 \vec{k} = \vec{k} \vec{\epsilon}_2 = 0$, οπότε για $k^\mu = \omega_k(1, 0, 0, 1)$ μιας και $k^3 = \omega_k = |\vec{k}|$. Η συνθήκη Gupta-Bleuler (4.8.6) μας δίνει:

$$0 = \partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-i}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) k_\mu \hat{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} |\Psi\rangle$$

Αλλά:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu k_\mu \hat{a}_\lambda(\vec{k}) &= \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon_\lambda^0 k_0 \hat{a}_\lambda + \epsilon_\lambda^1 k_1 \hat{a}_\lambda + \epsilon_\lambda^2 k_2 \hat{a}_\lambda + \epsilon_\lambda^3 k_3 \hat{a}_\lambda) = \\ &= \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon_\lambda^0 \omega_k \hat{a}_\lambda + \epsilon_\lambda^3 (-\omega_k) \hat{a}_\lambda) = \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 (\epsilon_\lambda^0 \hat{a}_\lambda - \epsilon_\lambda^3 \hat{a}_\lambda) = \omega_k (\hat{a}_0 - \hat{a}_3) \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση του αθροίσματος αυτού στην συνθήκη Gupta-Bleuler μας δίνει:

$$0 = \partial_\mu A^{\mu+}(x)|\Psi\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{-i e^{-ikx}}{\sqrt{2\omega_k}} \omega_k (\hat{a}_0(\vec{k}) - \hat{a}_3(\vec{k})) |\Psi\rangle \quad (4.9.1)$$

Επομένως για κάθε τιμή του \vec{k} πρέπει να ισχύει:

$$(\hat{a}_0(\vec{k}) - \hat{a}_3(\vec{k}))|\Psi\rangle = 0 \quad (4.9.2)$$

από όπου βέβαια προκύπτει και η σχέση:

$$\langle\Psi|(\hat{a}_0^\dagger(\vec{k}) - \hat{a}_3^\dagger(\vec{k})) = 0 \quad (4.9.3)$$

Η σχέση αυτή επιβάλλει έναν περιορισμό, στον γραμμικό συνδυασμό, των φωτονίων χρονοειδούς και γραμμικής πολώσεως. Ο περιορισμός αυτός είναι εμφανής όταν υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή της ενέργειας μιας κατάστασης $|\Psi\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle &= \langle\Psi|\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \sum_{\lambda=0,1,2,3} -g^{\lambda\lambda} \hat{a}^\dagger(\vec{k},\lambda)\hat{a}(\vec{k},\lambda)|\Psi\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \left\{ \langle\Psi|\sum_{\lambda=1,2} \hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})\hat{a}_\lambda(\vec{k})|\Psi\rangle - \langle\Psi|\hat{a}_0^\dagger(\vec{k})\hat{a}_0(\vec{k})|\Psi\rangle + \langle\Psi|\hat{a}_3^\dagger(\vec{k})\hat{a}_3(\vec{k})|\Psi\rangle \right\} \Rightarrow \\ \bar{H} = \langle\Psi|\hat{H}|\Psi\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_k \sum_{\lambda=1,2} \langle\Psi|\hat{a}_\lambda^\dagger(\vec{k})\hat{a}_\lambda(\vec{k})|\Psi\rangle \quad (4.9.4) \end{aligned}$$

Όπου για τους δύο τελευταίους όρους χρησιμοποιήσαμε ότι:

$$\begin{aligned} -\langle\Psi|\hat{a}_0^\dagger(\vec{k})\hat{a}_0(\vec{k})|\Psi\rangle + \langle\Psi|\hat{a}_3^\dagger(\vec{k})\hat{a}_3(\vec{k})|\Psi\rangle &= \langle\Psi|(\hat{a}_3^\dagger\hat{a}_3 - \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0)|\Psi\rangle = \\ \langle\Psi|(\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_0^\dagger)\hat{a}_3 + \hat{a}_0^\dagger(\hat{a}_3 - \hat{a}_0)|\Psi\rangle &= \langle\Psi|(\hat{a}_3^\dagger - \hat{a}_0^\dagger)\hat{a}_3|\Psi\rangle + \langle\Psi|\hat{a}_0^\dagger(\hat{a}_3 - \hat{a}_0)|\Psi\rangle = \\ &= 0\hat{a}_3|\Psi\rangle + \langle\Psi|\hat{a}_0^\dagger 0 = 0 \end{aligned}$$

Από όπου προκύπτει επίσης ότι:

$$\langle\Psi|\hat{a}_0^\dagger(\vec{k})\hat{a}_0(\vec{k})|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{a}_3^\dagger(\vec{k})\hat{a}_3(\vec{k})|\Psi\rangle \quad (4.9.5)$$

Η σχέση (4.9.4), μας πληροφορεί ότι η μόνη συνεισφορά στην μέση ενέργεια προέρχεται από τα εγκάρσια φωτόνια. Η μέση ενέργεια που αντιστοιχεί στα χρονοειδή (βαθμωτά) φωτόνια, είναι αρνητική. Είναι όμως πάντοτε αντίθετη από την μέση ενέργεια που αντιστοιχεί στα φωτόνια επιμήκους πολώσεως. Το συμπέρασμα αυτό, συμφωνεί με την κλασσική H/M θεωρία, όπου τα \vec{E}, \vec{B} σε ένα κλασσικό H/M κύμα, είναι πάντοτε κάθετα στο κυματόνιο \vec{k} . Δεν έχουμε εξ άλλου παρατηρήσει ποτέ, καταστάσεις βαθμωτών ή επιμηκών φωτονίων. Από την άλλη η σχέση (4.9.5) μας λέει ότι η αναμενόμενη τιμή του αριθμού χρονοειδών φωτονίων, είναι ίση με αυτήν των επιμηκών φωτονίων, και αυτό συμβαίνει σε κάθε κατάσταση $|\Psi\rangle$. Το τελευταίο έρχεται να επικυρώσει με έμφαση το προηγούμενο συμπέρασμα.

4.10. Ο διαδότης Feynman των φωτονίων

Ο διαδότης Feynman του άμαζου φωτονικού πεδίου, ορίζεται με παρόμοιο τρόπο, όπως και στο πραγματικό πεδίο Klein-Gordon, και μας δίνει το πλάτος διάδοσης ενός φωτονίου από το χωροχρονικό σημείο $x = (\vec{x}, t)$ στο σημείο $x' = (\vec{x}', t)$. Ορίζεται ως η μέση τιμή στο κενό, του χρονικά διατεταγμένου γινομένου του πεδιακού τελεστή.

$$D_F^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | T \hat{A}^\mu(x) \hat{A}^\nu(x') | 0 \rangle = D^{\mu\nu}(x - x') \theta(x^0 - x'^0) + D^{\mu\nu}(x' - x) \theta(x'^0 - x^0)$$

Όπου για $x^0 > x'^0$

$$D^{\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | (\hat{A}^{\mu+}(x) + \hat{A}^{\mu-}(x)) (\hat{A}^{\nu+}(x') + \hat{A}^{\nu-}(x')) | 0 \rangle$$

Από τα οκτώ γινόμενα επιβιώνει μόνο το $\hat{A}^{\mu+}(x) \hat{A}^{\nu-}(x')$ το οποίο αντιστοιχεί στη δημιουργία ενός φωτονίου στο (x') και την καταστροφή του στο (x) . Έτσι:

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(x - x') &= \langle 0 | \hat{A}^\mu(x) \hat{A}^\nu(x') | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}') \langle 0 | \hat{a}_\lambda(\vec{k}) \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle e^{-ikx} e^{ik'x'} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'}}} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}') e^{-ikx} e^{ik'x'} (-g^{\lambda\lambda'}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') = \\ &= - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{\lambda, \lambda'=0}^3 g^{\lambda\lambda'} \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k}) \epsilon_{\lambda'}^\nu(\vec{k}) e^{-ik(x-x')} \Rightarrow \\ D^{\mu\nu}(x - x') &= -g^{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(x-x')} \quad (4.10.1) \end{aligned}$$

Ομοίως για το $D^{\mu\nu}(x' - x)$ παίρνουμε:

$$D^{\mu\nu}(x' - x) = -g^{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-ik(x'-x)} \quad (4.10.2)$$

Αντικαθιστώντας στον διαδότη Feynman $D_F^{\mu\nu}(x - x')$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(x - x') &= -g^{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \{ \theta(x^0 - x'^0) e^{-ik(x-x')} + \theta(x'^0 - x^0) e^{ik(x-x')} \} = \\ &= -g^{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} 2\omega_k \int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{ie^{-ik(x-x')}}{k^2} \end{aligned}$$

Τελικά ο διαδότης $D_F^{\mu\nu}$ παίρνει την μορφή:

$$D_F^{\mu\nu}(x - x') = -g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik(x-x')}}{k^2} \quad (4.10.3)$$

Στο τελευταίο βήμα των πράξεων χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα (3.3.7)

$$\{\theta(x^0 - y^0)e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0)e^{ip(x-y)}\} = 2E_{\vec{p}} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2} \quad (4.10.4)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του διαδότη $D_F^{\mu\nu}$ μπορεί να υπολογισθεί ως:

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(k) &= \int d^4x D_F^{\mu\nu}(x - x') e^{ik(x-x')} = \int d^4x (-g^{\mu\nu}) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik'(x-x')}}{k'^2} e^{ik(x-x')} = \\ &= (-ig^{\mu\nu}) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{k'^2} e^{ix'(k'-k)} \int d^4x e^{-ix(k'-k)} = \\ &= (-ig^{\mu\nu}) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{k'^2} e^{ix'(k'-k)} (2\pi)^4 \delta^4(k' - k) \Rightarrow \end{aligned}$$

Ο φωτονικός διαδότης στο χώρο των ορμών γράφεται ως:

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2} \quad (4.10.5)$$

Όπου υπενθυμίζουμε ότι συναρτήσει των καταστάσεων πόλωσης ισχύει:

$$-g^{\mu\nu} = \epsilon_3^\mu(\vec{k})\epsilon_3^\nu(\vec{k}) - \epsilon_0^\mu(\vec{k})\epsilon_0^\nu(\vec{k}) + \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_\lambda^\mu(\vec{k})\epsilon_\lambda^\nu(\vec{k}) \quad (4.10.6)$$

Κεφάλαιο 5 .

Το πεδίο Dirac

Έχοντας μελετήσει τα σωματίδια Klein-Gordon (spin 0) και τα φωτόνια (spin 1), στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε σωματίδια με (spin 1/2) όπως τα ηλεκτρόνια που θα χρειαστούμε, αλλά και νετρίνα, quarks και άλλα, τα οποία περιγράφονται από την εξίσωση Dirac.

5.1. Η εξίσωση Dirac

Ο Dirac εντόπισε το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών στην εξίσωση Klein-Gordon, στον τετραγωνικό της χαρακτήρα.

$$H^2\phi = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi$$

Προσπάθησε να βρει μια εξίσωση, τυπικά όμοια με την εξίσωση Schrödinger

$$H\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Προσπάθησε, και ως γνωστόν τα κατάφερε (1928), να «υπολογίσει την τετραγωνική ρίζα» του τελεστή Hamilton, όπως ο ίδιος σχολίασε. Η ομώνυμη εξίσωση, αναγνωρίζεται πλέον ότι περιγράφει φερμιόνια (spin 1/2) όπως τα ηλεκτρόνια. Προκειμένου οι συνιστώσες της κυματοσυνάρτησης, να παρέχουν μια περιγραφή του spin, η εξίσωση αυτή πρέπει να είναι μια εξίσωση πινάκων. Επιπλέον οι σχετικιστικές λύσεις, της σχετικιστικής εξίσωσης Klein-Gordon, διπλασίασαν τα σωματίδια εισάγοντας τα αντισωματίδιά τους, διπλασιάζοντας έτσι και τα πεδία. Εκείνο επομένως που χρειαζόμαστε για το ψ , είναι ένας πίνακας (spinor) τεσσάρων συνιστωσών, ώστε να περιγράφει σωματίδια και αντισωματίδια με spin-up και spin-down. Τότε όμως και η Hamiltonian (H) πρέπει να είναι ένας πίνακας-τελεστής 4×4 . Η απλούστερη επιλογή για την Hamiltonian (H) είναι:

$$\hat{H} = \vec{a}\vec{p} + \beta m \quad (5.1.1)$$

Με β ένα πίνακα 4×4 , \vec{p} τον διανυσματικό τελεστή της ορμής $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} = -i\vec{\nabla}$ και \vec{a} ένα διάνυσμα με τρεις συνιστώσες, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ πίνακες 4×4 . Η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$(-i\vec{a}\vec{\nabla} + \beta m)\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad (5.1.2)$$

Οι πίνακες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα έτσι ώστε:

α) Ο πίνακας-τελεστής \hat{H} να είναι Ερμιτιανός. Αυτό θα εξασφαλίσει θετικά ορισμένη και διατηρούμενη πιθανότητα όπως και στην εξίσωση Schrödinger

β) Οι συνιστώσες της ψ πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon. Αυτό εξασφαλίζει ότι οι λύσεις της, θα είναι τα επίπεδα κύματα, με ενέργεια $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

γ) Υπάρχει μια τετρανυσματική πυκνότητα ρεύματος, η οποία διατηρείται, της οποίας η χρονοειδής συνιστώσα είναι θετικά ορισμένη.

Προκειμένου να ικανοποιείται η δευτέρα συνθήκη, πρέπει $\hat{H}^2 = \vec{\hat{p}}^2 + m^2$ όπου:

$$\begin{aligned}\hat{H}^2 &= (\vec{a}\vec{p} + \beta m)^2 = (a_i p_i + \beta m)(a_j p_j + \beta m) = a_i a_j p_i p_j + a_i \beta p_i m + \beta a_j m p_j + \beta^2 m^2 \\ &= a_i a_i p_i p_i + \sum_{i>j} (a_i a_j + a_j a_i) p_i p_j + (a_i \beta + \beta a_i) m p_i + \beta^2 m^2 = \\ &= a_i^2 p_i^2 + p_i p_j \{a_i, a_j\}_{i>j} + \{a_i, \beta\} m p_i + \beta^2 m^2\end{aligned}$$

Πρέπει επομένως οι πίνακες να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad \{a_i, \beta\} = 0, \quad \{a_i, a_j\}_{i \neq j} = 0 \quad (5.1.3)$$

Οι σχέσεις αυτές σε πιο συμπαγή μορφή γράφονται ως:

$$\{a_i, a_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{a_i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1 \quad (5.1.4)$$

Μια από τις ομάδες πινάκων που ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις είναι η επονομαζόμενη «αναπαράσταση Pauli-Dirac»

$$\beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad a_i = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.5)$$

Όπου $0_2, 1_2$ είναι ο μηδενικός και ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας αντίστοιχα, και σ_i είναι οι τρεις πίνακες Pauli.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Εκτός από την παραπάνω επιλογή, υπάρχουν και άλλες δυνατότητες επιλογής των πινάκων a_i, β που ικανοποιούν τις ίδιες συνθήκες. Δύο από αυτές, επίσης πινάκων 4×4 , είναι οι «αναπαραστάσεις Weyl και Majorana», οι οποίες όμως δεν θα μας απασχολήσουν περεταίρω. Εύκολα μπορεί κανείς να αποδείξει, ότι οι πίνακες a_i, β , είναι μηδενικού ίχνους, Ερμιτιανοί, και έχουν ιδιοτιμές ± 1 . Η εξίσωση Dirac εκφράζεται ποιο όμορφα αν χρησιμοποιήσουμε τους πίνακες γ^μ του Dirac, οι οποίοι ορίζονται ως:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta a_i \quad (5.1.6)$$

Οι οποίοι παίρνουν την τελική μορφή:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0_2 \end{pmatrix} \quad (5.1.7)$$

Είναι φανερό ότι οι πίνακες γ^μ είναι πίνακες 4×4 .

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πινάκων Pauli, $\sigma_i^2 = 1_{2 \times 2}$, $\{\sigma_i, \sigma_j\}_{i \neq j} = 0$, μπορούμε για τους πίνακες γ^μ του Dirac να αποδείξουμε τις σχέσεις:

$$(\gamma^0)^2 = 1_{4 \times 4}, \quad (\gamma^i)^2 = -1_{4 \times 4}, \quad \{\gamma^0, \gamma^i\} = \{\gamma^i, \gamma^j\}_{i \neq j} = 0 \quad (5.1.7)$$

Οι σχέσεις αυτές μπορούν να γραφούν σε συμπαγή μορφή ως:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} 1_{4 \times 4} \quad (5.1.8)$$

Λέμε τότε ότι οι πίνακες γ^μ του Dirac ικανοποιούν την «*άλγεβρα Clifford*» ή «*άλγεβρα των πινάκων γ^μ* ». Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την σχέση:

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (5.1.9)$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση Dirac, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} (-i\vec{a}\vec{\nabla} + \beta m)\psi &= i\frac{\partial}{\partial t}\psi \Rightarrow i\left(\frac{\partial}{\partial t}\psi + a_i\frac{\partial}{\partial x^i}\psi\right) - \beta m\psi = 0 \Rightarrow \\ i(\beta\partial_0 + \beta a_i\partial_i - \beta^2 m)\psi &= 0 \Rightarrow \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια εξίσωση πινάκων 4×4 . Επομένως τα $\psi, 0$ που εμφανίζονται σε αυτήν είναι πίνακες 4×1 . Η κυματοσυνάρτηση ψ έχει επομένως τέσσερις συνιστώσες. Είναι δηλαδή της μορφής:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (5.1.11)$$

5.2. Η λύση της εξίσωσης Dirac

Θεωρώντας την ενέργεια των σωματιδίων θετική $E = p^0 > 0$, αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης Dirac της μορφής των επιπέδων κυμάτων:

$$\psi_+(x) = u(p)e^{-ipx} \quad (5.2.1)$$

Η λύση $\psi_+(x)$ αναφέρεται ως λύση «*θετικής ενέργειας*». Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Dirac παίρνουμε:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \quad (5.2.2)$$

Η οποία στην μορφή πίνακα γράφεται:

$$\begin{aligned} (\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma}\vec{p} - m)u(p) &= 0 \Rightarrow \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p^0 - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \vec{p} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m\right)u(p) &= 0 \Rightarrow \\ \begin{pmatrix} p^0 - m & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -(p^0 + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Όπου γράψαμε τον spinor $u(p)$ σε συνάρτηση με δύο πίνακες στήλες, u_A, u_B διάστασης 2×1 ο καθένας, με την καθιερωμένη ονομασία, ισχυρή και ασθενής συνιστώσα. Οπότε η παραπάνω εξίσωση πινάκων μας δίνει:

$$u_A = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(p^0 - m)} u_B \quad \text{και} \quad u_B = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{(p^0 + m)} u_A \quad (5.2.4)$$

Αντικαθιστώντας το u_B στο u_A , για $p^0 = E$, παίρνουμε:

$$u_A = \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p})}{E^2 - m^2} u_A \quad (5.2.5)$$

Δεδομένου τώρα ότι:

$$(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{p}) = \vec{p}^2 = E^2 - m^2$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε πίνακα u_A διάστασης 2×1 . Μπορούμε να επιλέξουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις:

$$u_{1,A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{2,A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.6)$$

Για την πρώτη από αυτές και για

$$\vec{\sigma}\vec{p} = \begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix} \quad (5.2.7)$$

Παίρνουμε:

$$u_{1,B} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p^3 & p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & -p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$u_{1,B} = \begin{pmatrix} \frac{p^3}{E + m} \\ \frac{p^1 + ip^2}{E + m} \end{pmatrix} \quad (5.2.8)$$

Τελικά ο spinor $u_1(p)$ γράφεται:

$$u_1(p) = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3}{E + m} \\ \frac{p^1 + ip^2}{E + m} \end{pmatrix} \quad (5.2.9)$$

Με παρόμοιο τρόπο ο spinor $u_2(p)$ γράφεται:

$$u_2(p) = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p^1 - ip^2}{E + m} \\ \frac{-p^3}{E + m} \end{pmatrix} \quad (5.2.10)$$

Όμως η εξίσωση Dirac (5.1.10), ως μια εξίσωση ιδιοτιμών, με πίνακες 4×4 , έχει τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις ψ^n , με $n = 1, 2, 3, 4$. Κάθε μια από αυτές τις λύσεις, έχει τέσσερις συνιστώσες. Προκειμένου να εκφράσουμε τις δύο άλλες λύσεις θα μπορούσαμε να πάρουμε αυθαίρετα δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις για το u_B , $u_{3,B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_{4,B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, τότε όμως, όπως μπορεί κανείς εύκολα να ελέγξει, τα 4-spinors u_3, u_4 , που προκύπτουν, είναι γραμμικώς εξαρτημένα από τα u_1, u_2 . Επομένως δεν μπορούμε να βρούμε τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις της μορφής $\psi_+(x) = u(p)e^{-ipx}$, πολλαπλασιαζόμενες δηλαδή με το εκθετικό e^{-ipx} . Μπορούμε όμως να εξετάσουμε τις λύσεις «αρνητικής ενέργειας»

$$\psi_-(x) = v(p)e^{ipx} \quad (5.2.11)$$

Οι λύσεις αυτές μας δίνουν για τους spinors $v(p)$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0 \quad (5.2.12)$$

Από την (5.2.12), με παρόμοιο τρόπο, παίρνουμε τους spinors $v(p)$:

$$v_1(p) = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p^3}{E+m} \\ \frac{p^1 + ip^2}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2(p) = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p^1 - ip^2}{E+m} \\ \frac{-p^3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.2.13)$$

Ορθογωνιότητα

Από τις παραπάνω σχέσεις (5.2.9), (5.2.10), (5.2.13), εύκολα αποδεικνύεται, η ορθογωνιότητα των spinors.

$$\begin{aligned} u_1^\dagger(p)u_2(p) &= u_2^\dagger(p)u_1(p) = 0 \\ u_1^\dagger(p)v_2(p) &= v_2^\dagger(p)u_1(p) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Κανονικοποίηση

Οι σταθερές N_1, N_2, N_3, N_4 , μπορούν να έχουν οποιαδήποτε τιμή. Είναι όμως βολικό να επιλέξουμε την συνθήκη κανονικοποίησης ως:

$$u_1^\dagger(p)u_1(p) = 2E$$

Από την οποία μετά τις πράξεις παίρνουμε:

$$N_1 = \sqrt{E+m}$$

Ομοίως προκύπτουν και οι άλλες σταθερές N_2, N_3, N_4 . Η συνθήκη κανονικοποίησης και η ορθογωνιότητα από κοινού, για $\alpha, \beta = 1, 2$, μπορούν να γραφούν σε συμπαγή μορφή ως:

$$u_\alpha^\dagger(p)u_\beta(p) = v_\alpha^\dagger(p)v_\beta(p) = 2E\delta_{\alpha\beta} \quad (5.2.15)$$

Τελικά οι λύσεις για τους 4- spinors είναι:

$$\begin{aligned}
u_1(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3}{E+m} \\ \frac{p^1+ip^2}{E+m} \end{pmatrix}, & u_2(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p^1-ip^2}{E+m} \\ \frac{-p^3}{E+m} \end{pmatrix} \\
v_1(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p^3}{E+m} \\ \frac{p^1+ip^2}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & v_2(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{p^1-ip^2}{E+m} \\ \frac{-p^3}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Ενώ οι αντίστοιχες συναρτήσεις $\psi(x)$ είναι:

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= u_1(p)e^{-ipx}, \psi^{(2)} = u_2(p)e^{-ipx} \\
\psi^{(3)} &= v_1(p)e^{ipx}, \psi^{(4)} = v_2(p)e^{ipx}
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Εξωτερικό γινόμενο

Είναι εδώ σκόπιμο να εισάγουμε τους συζυγείς spinors $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$, και μέσω αυτών το εξωτερικό γινόμενο, $u\bar{u}$. Με αντικατάσταση στις σχέσεις (5.2.16) μπορούμε να αποδείξουμε τις ταυτότητες (σχέσεις πληρότητας):

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1,2} u_s(p)\bar{u}_s(p) &= \gamma^\mu p_\mu + m = (\gamma p) + m \\
\sum_{s=1,2} v_s(p)\bar{v}_s(p) &= \gamma^\mu p_\mu - m = (\gamma p) - m
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Τέλος από τις σχέσεις (5.2.9),(5.2.10),(5.2.13) προκύπτουν εύκολα οι παρακάτω σχέσεις εσωτερικών γινομένων των spinors, που θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια.

$$u_\alpha^\dagger(p)v_\beta(-p) = v_\alpha^\dagger(p)u_\beta(-p) = 0 \tag{5.2.19}$$

5.3. Το spin των σωματιδίων Dirac

Ο τελεστής της τροχιακής στροφορμής $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$, με τη βοήθεια του τελεστή Levi-Civita γράφεται ως:

$$\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \hat{r}_j \hat{p}_k \tag{5.3.1}$$

Υπολογίζουμε τον μεταθέτη της στροφορμής με τον τελεστή Hamilton (5.1.1)

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \hat{p} + \beta m = a_i \hat{p}_i + \beta m$$

$$[\hat{L}_i, \hat{H}] = [\epsilon_{ijk} \hat{r}_j \hat{p}_k, a_l \hat{p}_l + \beta m] = [\epsilon_{ijk} \hat{r}_j \hat{p}_k, a_l \hat{p}_l] =$$

$$= \epsilon_{ijk} a_l [\hat{r}_j, \hat{p}_k, \hat{p}_l] = \epsilon_{ijk} a_l [\hat{r}_j, \hat{p}_l] \hat{p}_k = i \epsilon_{ijk} \delta_{jl} a_l \hat{p}_k = i \epsilon_{ijk} a_j \hat{p}_k$$

Από όπου προκύπτει:

$$[\hat{L}, \hat{H}] = i \vec{a} \times \hat{\vec{p}} \neq 0 \quad (5.3.2)$$

Συμπεραίνουμε ότι η τροχιακή στροφορμή δεν διατηρείται. Προκειμένου η ολική στροφορμή $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$, να διατηρείται, πρέπει: $[\hat{\vec{J}}, \hat{H}] = 0$. Ορίζουμε τον τελεστή:

$$\hat{\vec{S}} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (5.3.3)$$

Για β όπως στην (5.1.5) $\beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix}$, εύκολα προκύπτει ότι: $[\hat{S}_i, \beta] = 0$. Επιπλέον:

$$[\hat{S}_i, \alpha_j] = \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix} = 2i \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = 2i \epsilon_{ijk} a_k \quad (5.3.4)$$

Ο μεταθέτης των $\hat{\vec{S}}, \hat{H}$ υπολογίζεται τώρα από τις παραπάνω σχέσεις:

$$[\hat{S}_i, \hat{H}] = [\hat{S}_i, a_j \hat{p}_j + \beta m] = [\hat{S}_i, a_j \hat{p}_j] = [\hat{S}_i, a_j] \hat{p}_j = 2i \epsilon_{ijk} \hat{p}_j a_k$$

Άρα

$$[\hat{\vec{S}}, \hat{H}] = 2i \hat{\vec{p}} \times \vec{a} = -2\vec{a} \times \hat{\vec{p}} \quad (5.3.5)$$

Επομένως, από τις (5.3.2), (5.3.5), προκύπτει:

$$\left[\hat{\vec{L}} + \frac{1}{2} \hat{\vec{S}}, \hat{H} \right] = 0 \Rightarrow [\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}, \hat{H}] = 0$$

Όπου:

$$\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

Ο τελεστής $\hat{\vec{S}}$, ικανοποιεί την άλγεβρα της στροφορμής και αντιπροσωπεύει την εσωτερική στροφορμή των σωματιδίων Dirac. Επειδή εξάλλου:

$$\hat{\vec{S}}^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}^2 & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ενώ οι ιδιοτιμές του $\hat{\vec{S}}^2$, είναι $s(s+1)$, συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για σωματίδια με spin $1/2$. Ας εξετάσουμε για παράδειγμα ένα ακίνητο σωματίδιο Dirac με $\vec{p} = 0$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\psi^{(1)} = u_1(m, 0) e^{-imt}, \quad \text{με} \quad u_1(m, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζοντας την z-συνιστώσα του spin, ο \hat{S}_3 γράφεται:

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Από όπου παίρνουμε:

$$\hat{S}_3 \psi^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} = \frac{1}{2} u_1(m, 0) e^{-imt} = \frac{1}{2} \psi^{(1)}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η πρώτη μας λύση $\psi^{(1)}$, αντιστοιχεί σε spin-up, σωματίδιο. Ομοίως οι τρεις άλλες λύσεις μας, για ένα ακίνητο σωματίδιο (αντισωματίδιο) αντιπροσωπεύουν αντίστοιχα, σωματίδιο spin-down, αντισωματίδιο spin-up, αντισωματίδιο spin-down. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν το σωματίδιο κινείται κατά την διεύθυνση του άξονα z. Πράγματι για $p^1 = p^2 = 0, p^3 \neq 0$ παίρνουμε:

$$\hat{S}_3 \psi^{(1)} = \hat{S}_3 \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx} = \frac{1}{2} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p^3}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipx} = \frac{1}{2} \psi^{(1)}$$

Δεν συμβαίνει το ίδιο για ένα σωματίδιο που κινείται σε διαφορετική διεύθυνση, όπως για παράδειγμα $p^3 = p^2 = 0, p^1 \neq 0$.

$$\hat{S}_3 \psi^{(1)} = \hat{S}_3 \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{p^1}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ipx} = \frac{1}{2} \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{p^1}{E+m} \end{pmatrix} e^{-ipx} \neq \frac{1}{2} \psi^{(1)}$$

Δηλαδή τα u, v , δεν είναι πλέον ιδιοκαταστάσεις του spin.

5.4. Η συζυγής εξίσωση Dirac

Αντίθετα από την εξίσωση Klein-Gordon, η εξίσωση Dirac είναι μια εξίσωση πινάκων. Χρειαζόμαστε επομένως τον αναστροφοςυζυγή πίνακα ψ^\dagger . Η θεωρία μας όμως δουλεύει καλλίτερα, αν εργαστούμε με τον συζυγή πίνακα: $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$ Ξεκινώντας από την εξίσωση Dirac (5.1.10), παίρνουμε:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi)^\dagger = 0 \Rightarrow -i(\partial_\mu \psi)^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger = 0 \Rightarrow$$

$$i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 + m\psi^\dagger = 0 \Rightarrow i(\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0) \gamma^\mu \gamma^0 + m\psi^\dagger \gamma^0 = 0 \Rightarrow$$

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (5.4.1)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε: $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, και $(\gamma^0)^2 = \hat{1}$

Από την εξίσωση Dirac και την συζυγή της (5.4.1) πολλαπλασιάζοντας την πρώτη από αριστερά με $\bar{\psi}$ και την δεύτερη με ψ από δεξιά, παίρνουμε:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi) = 0, \quad (i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi})\psi = 0$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \quad (5.4.2)$$

Συνεπώς το διατηρούμενο ρεύμα είναι:

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (5.4.3)$$

Το ρεύμα αυτό έχει θετικά ορισμένη χρονοειδή συνιστώσα:

$$J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_{\alpha=1}^4 |\psi_\alpha|^2 \geq 0$$

5.5. Ο μετασχηματισμός Lorentz της Dirac

Η μορφή της εξίσωσης Dirac πρέπει να μένει αμετάβλητη σε μετασχηματισμούς Lorentz. Το συναλλοίωτο ως προς τον μετασχηματισμό:

$$(x')^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (5.5.1)$$

αντιστοιχεί στην ισοδυναμία:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \Rightarrow (i\gamma^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \quad (5.5.2)$$

Πρέπει δηλαδή η μορφή της να μένει αμετάβλητη κατά την μετάβαση από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο. Η νέα κυματοσυνάρτηση $\psi'(x')$, πρέπει να συνδέεται με την αρχική $\psi(x)$ μέσω μιας γραμμικής σχέσης, μιας και τόσο η εξίσωση Dirac, όσο και ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός ως προς τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Θεωρούμε λοιπόν τον μετασχηματισμό:

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad (5.5.3)$$

Όπου $\Lambda = \Lambda^\mu_\nu$ και $S(\Lambda)$ είναι ένας πίνακας 4×4 , ο οποίος εξαρτάται από τις παραμέτρους του μετασχηματισμού Lorentz και μετασχηματίζει τον spinor $\psi(x)$, στον spinor $\psi'(x')$. Δεδομένου του αμετάβλητου των φυσικών νόμων, για όλα τα αδρανειακά συστήματα, πρέπει να υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής $S^{-1}(\Lambda)$, ο οποίος θα επιτρέπει στον παρατηρητή $A(\psi(x))$, να κατασκευάσει τον δικό του spinor, από τον spinor του παρατηρητή $B(\psi'(x'))$.

$$\psi(x) = S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \quad (5.5.4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι για τους μετασχηματισμούς Lorentz ισχύει:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu x'^\mu \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu, \quad \Lambda^\mu_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu$$

$$\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$$

Οπότε από την μετασχηματισμένη εξίσωση (5.5.2) έχουμε:

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu S(\Lambda)\psi(x) - mS(\Lambda)\psi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu S(\Lambda)\psi(x) - mS^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$[iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu S(\Lambda)\partial_\nu - m]\psi(x) = 0$$

Οπότε προκειμένου η εξίσωση αυτή να ταυτίζεται με την εξίσωση: $(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi(x) = 0$ πρέπει να ισχύει: $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu S(\Lambda) = \gamma^\nu \Rightarrow \gamma^\mu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu S(\Lambda) = S(\Lambda)\gamma^\nu \Rightarrow$

$$\gamma^\mu (\Lambda^{-1})_\mu{}^\nu = S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) \quad (5.5.4)$$

Η σχέση αυτή ορίζει τον τελεστή $S(\Lambda)$ του μετασχηματισμού των spinors, ο οποίος εξασφαλίζει την συμμεταβλητότητα της εξίσωσης Dirac.

5.6. Κλασσική θεωρία πεδίου Dirac

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την κυματική εξίσωση Dirac (5.5.2) ως μια πεδιακή εξίσωση, του σπινωριακού πεδίου $\psi(x)$. Η πυκνότητα Lagrange από την οποία απορρέει η εξίσωση (5.5.2) είναι:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (5.6.1)$$

Θεωρούμε τους spinors $\psi(x), \psi^\dagger(x)$, ως ανεξάρτητα πεδία, με τέσσερις συνιστώσες το καθένα. Από τις εξισώσεις κίνησης (1.2.2) παίρνουμε:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \Rightarrow 0 - (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \Rightarrow$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (5.6.2)$$

Και

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} i\gamma^\mu) - (-m\bar{\psi}) = 0 \Rightarrow$$

$$i\partial_\mu \bar{\psi}(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}(x) = 0 \quad (5.6.3)$$

Οι αντίστοιχες, κανονικές, συζυγείς ορμές, που αντιστοιχούν στα παραπάνω πεδία, είναι:

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 = i\psi^\dagger \quad (5.6.4)$$

$$\pi_{\psi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} = 0 \quad (5.6.5)$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την πυκνότητα Hamilton:

$$\mathcal{H}(x) = \pi_\psi(x)\dot{\psi}(x) + \pi_{\psi^\dagger}(x)\dot{\psi}^\dagger(x) - \mathcal{L} = i\psi^\dagger\dot{\psi} + 0 - \psi^\dagger\gamma^0(i\gamma^0\dot{\psi} + i\gamma^i\partial_i\psi - m\psi) \Rightarrow$$

$$\mathcal{H}(x) = -i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi + m\psi^\dagger\gamma^0\psi \quad (5.6.6)$$

Εύκολα μπορεί να αποδείξει κανείς, ότι η παραπάνω Lagrangian (5.6.1), εμφανίζει «εσωτερική συμμετρία». Είναι δηλαδή αμετάβλητη στον μετασχηματισμό φάσης της μορφής:

$$\psi'(x) = e^{ia}\psi(x) \approx (1 + ia)\psi(x)$$

$$\psi'^{\dagger}(x) = e^{-ia}\psi^{\dagger}(x) \approx (1 - ia)\psi^{\dagger}(x)$$

Ισχύει δηλαδή, για τον μετασχηματισμό αυτό:

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) \quad (5.6.7)$$

Η συμμετρία αυτή μας οδηγεί, όπως γνωρίζουμε, στο διατηρούμενο ρεύμα J^{μ} (5.4.3).

$$J^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \quad , \quad \partial_{\mu}J^{\mu} = 0$$

Θα πολλαπλασιάσουμε το 4-ρεύμα αυτό με την μονάδα ηλεκτρικού φορτίου, προκειμένου να εκφράσουμε την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος Dirac.

$$J^{\mu} = e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \quad (5.6.8)$$

Με χρονοειδή συνιστώσα:

$$J^0 = e\bar{\psi}\gamma^0\psi = e\psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^0\psi = e\psi^{\dagger}\psi$$

Οπότε διατηρούμενη ποσότητα, αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό φορτίο και ανάλογα με την (1.4.7) είναι:

$$Q = \int d^3x j^0 = e \int d^3x \psi^{\dagger}\psi \quad (5.6.9)$$

5.7. Κανονική κβάντωση του πεδίου Dirac

Όπως είδαμε η κβάντωση του πεδίου, επιτυγχάνεται προωθώντας τα πεδία σε τελεστές και επιβάλλοντας στην συνέχεια κατάλληλες μεταθετικές σχέσεις. Τα φερμιόνια όμως (π.χ. ηλεκτρόνια) σε αντίθεση με τα μποζόνια, υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli, και έχουν αντισυμμετρικές κυματικές συναρτήσεις. Προκειμένου να εφαρμόσουμε την θεωρία που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια για τα μποζόνια, στην περίπτωση των σπινორιακών πεδίων, αρκεί να αντικαταστήσουμε τις μεταθετικές σχέσεις με σχέσεις αντιμετάθεσης. Προωθώντας λοιπόν τα σπινორιακά πεδία ψ^{\dagger}, ψ , σε τελεστικά πεδία $\hat{\psi}^{\dagger}, \hat{\psi}$, και λαμβάνοντας αντιμεταθετικές σχέσεις έχουμε:

$$\{\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\pi}_{\beta}(\vec{x}', t)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.7.1)$$

Όπου τα α, β δηλώνουν τους δείκτες, δηλαδή τις συνιστώσες, των spinors. Όμως από την (5.6.4), έχουμε: $\pi_{\psi} = i\psi^{\dagger}$, οπότε η (5.7.1) γράφεται:

$$\{\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\vec{x}', t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \Rightarrow \{\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\kappa}^{\dagger}(\vec{x}', t)\gamma_{\kappa\beta}^0\} = \gamma_{\kappa\beta}^0\delta_{\alpha\kappa}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

Από όπου για $\hat{\psi}_{\kappa}^{\dagger}(\vec{x}', t)\gamma_{\kappa\beta}^0 = \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(x', t)$ παίρνουμε:

$$\{\hat{\psi}_{\alpha}(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{\beta}^{\dagger}(x', t)\} = \gamma_{\alpha\beta}^0\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (5.7.2)$$

Οι άλλοι αντιμεταθέτες μηδενίζονται:

$$\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(\vec{x}', t)\} = \{\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0 \quad (5.7.3)$$

Αναπτύσσουμε τώρα το κβαντικό πεδίο Dirac, σε συνάρτηση με τις γνωστές μας λύσεις επιπέδων κυμάτων (5.2.17) $u_s(p), v_s(p)$.

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} [\hat{a}^s(\vec{p}) u_s(p) e^{-ipx} + \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) v_s(p) e^{ipx}] \quad (5.7.4)$$

Και

$$\bar{\hat{\psi}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} [\hat{b}^s(\vec{p}) \bar{v}_s(p) e^{-ipx} + \hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \bar{u}_s(p) e^{ipx}] \quad (5.7.5)$$

Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής οφείλουν τότε να ικανοποιούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$\{\hat{a}^s(\vec{p}), \hat{a}^{s'\dagger}(\vec{p}')\} = \{\hat{b}^s(\vec{p}), \hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}')\} = (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (5.7.6)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{a}^s(\vec{p}), \hat{a}^{s'}(\vec{p}')\} &= \{\hat{b}^s(\vec{p}), \hat{b}^{s'}(\vec{p}')\} = \{\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}), \hat{a}^{s'\dagger}(\vec{p}')\} = \{\hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}), \hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}')\} = \\ &= \{\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}), \hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}')\} = \{\hat{a}^s(\vec{p}), \hat{b}^{s'}(\vec{p}')\} = 0 \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα (5.7.4), (5.7.5) στη σχέση αντιμετάθεσης (5.7.2) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(x', t)\} = \\ &= \sum_s \sum_{s'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4EE'}} [\{\alpha^s(\vec{p}), \alpha^{s'\dagger}(\vec{p}')\} u_{(a)s}(p) \bar{u}_{(\beta)s'}(p') e^{-ipx+ip'x'} + \\ &\quad + \{\alpha^s(\vec{p}), b^{s'}(\vec{p}')\} u_{(a)s}(p) \bar{v}_{(\beta)s'}(p') e^{-ipx-ip'x'} + \\ &\quad + \{b^{s\dagger}(\vec{p}), b^{s'}(\vec{p}')\} v_{(a)s}(p) \bar{v}_{(\beta)s'}(p') e^{ipx-ip'x'} + \\ &\quad + \{b^{s\dagger}(\vec{p}), \alpha^{s'\dagger}(\vec{p}')\} v_{(a)s}(p) \bar{u}_{(\beta)s'}(p') e^{ipx+ip'x'}] \end{aligned}$$

Λόγω της (5.7.7), επιβιώνουν μόνο ο πρώτος και ο τρίτος προσθετέος, οι οποίοι αντικαθίστανται από τις συναρτήσεις δέλτα. Επομένως:

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(x', t)\} &= \sum_s \sum_{s'} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4EE'}} (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') [\\ &\quad u_{(a)s}(p) \bar{u}_{(\beta)s'}(p') e^{-ipx+ip'x'} + v_{(a)s}(p) \bar{v}_{(\beta)s'}(p') e^{ipx-ip'x'}] = \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \left[\sum_s u_{(\alpha)s}(p) \bar{u}_{(\beta)s}(p) e^{-ipx+ipx'} + \sum_s v_{(\alpha)s}(p) \bar{v}_{(\beta)s}(p) e^{ipx-ipx'} \right]$$

Θα αντικαταστήσουμε τα αθροίσματα από την (5.2.18), τα δε εκθετικά, επειδή οι σχέσεις μας είναι ισόχρονες θα γραφούν ως: $-ipx + ipx' = i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')$, $ipx - ipx' = -i\vec{p}(\vec{x} - \vec{x}')$,

$$\sum_{s=1,2} u_{(\alpha)s}(p) \bar{u}_{(\beta)s}(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta}, \quad \sum_{s=1,2} v_{(\alpha)s}(p) \bar{v}_{(\beta)s}(p) = (\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha\beta}$$

Επομένως θα πάρουμε:

$$\left\{ \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(x', t) \right\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} [(\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} + (\gamma^\mu p_\mu - m)_{\alpha\beta} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}]$$

Αλλάζοντας στο δεύτερο ολοκλήρωμα το πρόσημο της 3-ορμής $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ παίρνουμε:

$$\left\{ \hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t), \hat{\psi}_\beta(x', t) \right\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} (\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i + m + \gamma^0 p_0 - \gamma^i p_i - m)_{\alpha\beta} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} =$$

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E} (\gamma^0 E)_{\alpha\beta} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} = (\gamma^0)_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

Που είναι η (5.7.2). Τέλος της απόδειξης.

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι οι σχέσεις (5.7.1), (5.7.2), (5.7.3) είναι ισοδύναμες με τις σχέσεις (5.7.6), (5.7.7)

5.8. Σωματίδια Dirac

Η κατάσταση του κενού ορίζεται πάλι, ως η κατάσταση που μηδενίζεται από τους τελεστές $\hat{a}^s(\vec{p}), \hat{b}^s(\vec{p})$.

$$\hat{a}^s(\vec{p})|0\rangle = \hat{b}^s(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad (5.8.1)$$

Οι τελεστές $\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}), \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})$ (παρόμοια με τις σχέσεις (2.7.8), (2.7.9)), ερμηνεύονται ως τελεστές δημιουργίας ενός σωματιδίου (αντισωματιδίου) ορμής \vec{p} , spin s , και φορτίου $+1(-1)$ αντίστοιχα.

$$|1\vec{p}, s, +\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}^{s\dagger}(\vec{p})|0\rangle, \quad |1\vec{p}, s, -\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})|0\rangle \quad (5.8.2)$$

Επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο προκύπτει ως:

$$\langle \vec{p}, s | \vec{p}', s' \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{ss'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (5.8.3)$$

Οι καταστάσεις, με περισσότερα του ενός σωματιδίων, είναι αντισυμμετρικές στην εναλλαγή των σωματιδίων. Υπακούουν δηλαδή στην αρχή του Pauli. Για τα αντισωματίδια τύπου \hat{b} για παράδειγμα έχουμε:

$$\left\{ \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}), \hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}') \right\} = 0 \Rightarrow \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}') = -\hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}') \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \Rightarrow$$

$$\hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})\hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}')|0\rangle = -\hat{b}^{s'\dagger}(\vec{p}')\hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})|0\rangle \Rightarrow$$

$$|1\vec{p}, s; 1\vec{p}', s'\rangle = -|1\vec{p}', s'; 1\vec{p}, s\rangle \quad (5.8.4)$$

Ομοίως για τα σωματίδια τύπου \hat{a} . Ο αριθμός των σωματιδίων στην ίδια κατάσταση δεν μπορεί να είναι διαφορετικός από ένα, λόγω του ότι για

$$\vec{p}, s = \vec{p}', s' \Rightarrow \{\hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}), \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})\} = 0 \Rightarrow (\hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}))^2 = 0 \Rightarrow :$$

$$(\hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}))^2 |0\rangle = (\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}))^2 |0\rangle = 0 \quad (5.8.5)$$

5.9. Οι τελεστές των σταθερών κίνησης του πεδίου Dirac

Ο τελεστής Hamilton

Ο τελεστής Hamilton θα υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα της πυκνότητας Hamilton $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$, με $\mathcal{H}(x)$, όπως στην (5.6.6)

$$\mathcal{H}(x) = -i\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + m\psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi \quad (5.9.1)$$

Προκειμένου να εκφράσουμε την H ως τελεστή, θα απλοποιήσουμε πρώτα στον παράγοντα $(-i\gamma^i \partial_i + m)\psi$, αντικαθιστώντας το ψ από την (5.7.4). Θα χρησιμοποιήσουμε ότι:

$$\partial_i(-ipx) = -i\partial_i(p_0x^0 + p_ix^i) = -ip_i$$

$$\begin{aligned} (-i\gamma^i \partial_i + m)\hat{\psi} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \sum_{s=1,2} [\hat{a}^s(\vec{p})u_s(p)e^{-ipx}(-\gamma^i p_i + m) + \\ &\quad + \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})v_s(p)e^{ipx}(\gamma^i p_i + m)] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.2.2), (5.2.12) μπορούμε να γράψουμε

$$(-\gamma^i p_i + m)u_s(p) = \gamma^0 p_0 u_s(p) = \gamma^0 E u_s(p) \quad (5.9.2)$$

$$(\gamma^i p_i + m)v_s(p) = -\gamma^0 p_0 v_s(p) = -\gamma^0 E v_s(p) \quad (5.9.3)$$

Άρα

$$(-i\gamma^i \partial_i + m)\hat{\psi} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E}} \gamma^0 E \sum_{s=1,2} [\hat{a}^s(\vec{p})u_s(p)e^{-ipx} - \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})v_s(p)e^{ipx}]$$

Αντικαθιστώντας από την (5.7.5) το $\bar{\psi}$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4EE'}} E \\ &\sum_s \sum_{s'} [\hat{b}^{s'}(\vec{p}')v_{s'}^\dagger(p')e^{-ip'x} \hat{a}^s(\vec{p})u_s(p)e^{-ipx} + \hat{a}^{s'\dagger}(\vec{p}')u_{s'}^\dagger(p')e^{ip'x} \hat{a}^s(\vec{p})u_s(p)e^{-ipx} - \\ &\quad - \hat{b}^{s'}(\vec{p}')v_{s'}^\dagger(p')e^{-ip'x} \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})v_s(p)e^{ipx} - \hat{a}^{s'\dagger}(\vec{p}')u_{s'}^\dagger(p')e^{ip'x} \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})v_s(p)e^{ipx}] \end{aligned}$$

Τα εκθετικά που παρουσιάζονται στην παραπάνω σχέση μπορούν με το $\int d^3x$, να αντικατασταθούν ως:

$$\int d^3x e^{\pm i p x \pm i p' x} = e^{\pm i(E+E')t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{p}')$$

$$\int d^3x e^{\mp i p x \pm i p' x} = e^{\mp i(E-E')t} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

Μετά την αντικατάσταση και την αξιοποίηση των συναρτήσεων δέλτα παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sum_s \sum_{s'} & [\hat{b}^{s'}(-\vec{p}) u_{s'}^\dagger(-p) \hat{a}^s(\vec{p}) u_s(p) e^{-2iEt} + \hat{a}^{s'\dagger}(\vec{p}) u_{s'}^\dagger(p) \hat{a}^s(\vec{p}) u_s(p) - \\ & - \hat{b}^{s'}(\vec{p}) u_{s'}^\dagger(p) \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) u_s(p) - \hat{a}^{s'\dagger}(-\vec{p}) u_{s'}^\dagger(-p) \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) u_s(p) e^{+2iEt}] \end{aligned}$$

Από την (5.2.19) έχουμε: $u_{s'}^\dagger(-p) u_s(p) = u_{s'}^\dagger(-p) u_s(p) = 0$ και από την (5.2.15) έχουμε:

$$u_{s'}^\dagger(p) u_s(p) = u_{s'}^\dagger(p) u_s(p) = 2E_{\vec{p}} \delta_{ss'} \quad (5.9.4)$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s [\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}) - \hat{b}^s(\vec{p}) \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})] \quad (5.9.5)$$

Από την σχέση αντιμετάθεσης (5.7.6) για $\vec{p} = \vec{p}'$ και $s = s'$ παίρνουμε:

$$-\hat{b}^s(\vec{p}) \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) = \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p}) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \quad (5.9.6)$$

Επομένως ο τελεστής Hamilton γράφεται

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s [\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}) + \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p}) - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)] \quad (5.9.7)$$

Στην κανονική διάταξη, αποβάλλουμε τον όρο αρνητικής συνεισφοράς $-(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$, οπότε τελικά:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s [\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}) + \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p})] \quad (5.9.8)$$

Σχόλιο. Αν στην (5.9.5) είχαμε επιβάλει σχέση μετάθεσης και όχι αντιμετάθεσης για τους τελεστές, $\hat{b}^s(\vec{p}), \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p})$, τότε μετά και την κανονική διάταξη και την αποβολή του άπειρης συνεισφοράς, θα παίρναμε:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \sum_s [\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}) - \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p})]$$

Στην περίπτωση αυτή τα κβάντα \hat{b} θα είχαν αρνητική συνεισφορά στην ενέργεια. Τότε όμως η ενέργεια δεν θα είχε κάτω φράγμα και δεν θα μπορούσαμε να ορίσουμε την κατάσταση κενού. Επιβάλλοντας όμως σχέσεις αντιμετάθεσης και οι δύο συνεισφορές στην ενέργεια

είναι θετικές. Η επιλογή επομένως σχέσεων αντιμετάθεσης είναι επιβεβλημένη. (Peskin, Chapter 3)

Ο τελεστής $\hat{\vec{P}}$ της ορμής του πεδίου

Από την σχέση (5.6.4), για το πεδίο Dirac, με $\hat{\pi} = i\psi^\dagger$ για την ορμή του πεδίου παίρνουμε:

$$\hat{\vec{P}} = -i \int d^3x \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi$$

Με παρόμοιες πράξεις με αυτές που προηγήθηκαν για τον υπολογισμό του \hat{H} παίρνουμε:

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \sum_s [\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}) + \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p})] \quad (5.9.9)$$

Ο τελεστής \hat{Q} του φορτίου

Από την διατηρούμενη πυκνότητα ρεύματος (5.4.3) $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \Rightarrow J^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τελεστή του φορτίου \hat{Q} .

$$\hat{Q} = e \int d^3x \psi^\dagger \psi = e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s [\hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}) - \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p})] \quad (5.9.10)$$

Μπορούμε εδώ να ορίσουμε τους τελεστές αρίθμησης σωματιδίων και αντισωματιδίων αντίστοιχα, 3-ορμής \vec{p} και spin s ως:

$$\hat{n}^s(\vec{p}) = \hat{a}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{a}^s(\vec{p}), \quad \hat{\bar{n}}^s(\vec{p}) = \hat{b}^{s\dagger}(\vec{p}) \hat{b}^s(\vec{p}) \quad (5.9.11)$$

5.10. Ο διαδότης του πεδίου Dirac

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο αυτό με τον διαδότη Feynman του πεδίου Dirac. Όπως και στο Klein-Gordon (3.3.1), ο διαδότης ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή, του χρονικά διατεταγμένου γινομένου των κβαντικών πεδίων στο κενό.

$$S_F(x - x') = \langle 0 | \hat{T} \hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(x') | 0 \rangle \quad (5.10.1)$$

Δεδομένου ότι το δεξιό μέλος της εξίσωσης εμπεριέχει έναν πίνακα 4×4 , θα χρησιμοποιούμε όπου αυτό είναι απαραίτητο τους λεγόμενους δείκτες Dirac $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. Έτσι η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

$$S_{F\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | \hat{T} \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\bar{\psi}}_\beta(x') | 0 \rangle \quad (5.10.2)$$

Όπου το χρονικά διατεταγμένο γινόμενο αντιμετατιθέμενων πεδίων διαφοροποιείται μερικώς, και ένα αρνητικό πρόσημο συνοδεύει την μετάθεση των πεδίων. Έτσι έχουμε:

$$\hat{T} \left(\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\bar{\psi}}_\beta(x') \right) = \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\bar{\psi}}_\beta(x') \theta(x_0 - x'_0) - \hat{\bar{\psi}}_\beta(x') \hat{\psi}_\alpha(x) \theta(x'_0 - x_0) \quad (5.10.3)$$

Μια σημαντική ιδιότητα του διαδότη Feynman, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, είναι ότι αυτός αντιστοιχεί στην συνάρτηση Green του αντίστοιχου διαφορικού τελεστή (3.4.3). Εκεί για το πεδίο Klein-Gordon, εδώ για το πεδίο Dirac. Θα ισχύει επομένως ότι:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S_F(x - x') = i\delta^{(4)}(x - x') \cdot \hat{1}_4 \quad (5.10.4)$$

Θεωρούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier

$$S_F(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip(x-x')} , \quad \delta^{(4)}(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \quad (5.10.5)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.10.4) παίρνουμε την έκφραση του διαδότη στο χώρο των ορμών.

$$S_F(p) = \frac{i}{\gamma^\mu p_\mu - m} = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2} \quad (5.10.6)$$

Επιστρέφοντας στην (5.10.5) και αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$S_F(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-x')} \quad (5.10.7)$$

Επαναφέροντας τους δείκτες Dirac, η (5.10.7) γράφεται ως:

$$S_{F\alpha\beta}(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-x')} \quad (5.10.8)$$

Τέλος από την σχέση (3.3.4) για τον διαδότη του βαθμωτού πεδίου Klein-Gordon

$$D_F(x - x') = \int \frac{dp^4}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-x')}$$

μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την σχέση:

$$S_F(x - x') = (i\gamma^\mu \partial_\mu + m)D_F(x - x') \quad (5.10.9)$$

Μπορούμε δηλαδή να εκφράσουμε τον φερμιονικό διαδότη σε συνάρτηση με τον μποζονικό, από την παραπάνω σχέση (5.10.9)

Κεφάλαιο 6 .

Αλληλεπιδρώντα πεδία

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με τα ελεύθερα κβαντικά πεδία, τα οποία είναι μια ειδική περίπτωση. Αυτά περιλαμβάνουν σωματίδια, ως διεγέρσεις του κβαντικού πεδίου και μπορούμε να υπολογίσουμε το ενεργειακό τους φάσμα, αλλά τα σωματίδια αυτά δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, τίποτε το συνταρακτικό δεν συμβαίνει σε αυτά. Επιθυμώντας να εξετάσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων, στις οποίες τα σωματίδια είναι δυνατόν να σκεδάζονται, να διασπώνται, να δημιουργούνται ή να καταστρέφονται, είμαστε υποχρεωμένοι, να συμπεριλάβουμε στην πυκνότητα Lagrange και όρους υψηλότερης τάξεως, όρους ζεύξης μεταξύ των πεδίων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να καλούμεθα να επιλύσουμε ένα σύστημα μη γραμμικών, συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο είναι εξαιρετικά δύσκολο να λυθεί. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί, εφαρμόζοντας την θεωρία διαταραχών, υπό την προϋπόθεση ότι η διαταραχή είναι ασθενής. Στην QED η θεωρία διαταραχών είναι εφαρμόσιμη μιας και η σταθερά ζεύξης των πεδίων είναι της τάξεως της σταθεράς λεπτής υφής. Η τάξη των προσεγγίσεων, περιγράφεται από τους διαφορετικούς όρους της σειράς του πίνακα S . Στους υπολογισμούς των διαφορετικών όρων της σειράς αυτής είναι χρήσιμο το θεώρημα Wick.

6.1. Η εικόνα αλληλεπίδρασης ή εικόνα Dirac

Όπως γνωρίζουμε από την κβαντική μηχανική, μια θεωρία μπορεί να διατυπωθεί με διαφορετικές αλλά ισοδύναμες εικόνες. Αυτές διαφέρουν μεταξύ τους στον τρόπο που χειριζόμαστε την χρονική εξέλιξη. Οι δύο βασικές εικόνες είναι η εικόνα Schrödinger , στην οποία οι τελεστές είναι σταθεροί ενώ τα καταστατικά διανύσματα μεταβάλλονται με το χρόνο, και η εικόνα Heisenberg, στην οποία τα καταστατικά διανύσματα είναι σταθερά ενώ οι τελεστές είναι χρονοεξαρτώμενοι. Οι τελεστές Heisenberg μεταβάλλονται με το χρόνο σύμφωνα με την σχέση

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{O}_H(0) e^{-i\hat{H}t} \quad (6.1.1)$$

Η οποία προκύπτει από την εξίσωση κίνησης των τελεστών Heisenberg

$$[\hat{O}_H(t), \hat{H}] = i \frac{d\hat{O}_H(t)}{dt} \quad (6.1.2)$$

Τα καταστατικά διανύσματα στην εικόνα Heisenberg είναι σταθερά

$$|\psi(t)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_H = |\psi\rangle_H \quad (6.1.3)$$

Από την άλλη, στην εικόνα Schrödinger, τα καταστατικά διανύσματα, εξελίσσονται σύμφωνα με την εξίσωση Schrödinger.

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle_S}{dt} = H|\psi(t)\rangle_S \quad (6.1.4)$$

Η λύση της οποίας είναι

$$|\psi(t)\rangle_s = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle_s \quad (6.1.5)$$

Ανακαλώντας ότι $|\psi(0)\rangle_s = |\psi\rangle_H$, προκύπτει ότι

$$|\psi(t)\rangle_s = e^{-iHt}|\psi\rangle_H \quad (6.1.6)$$

Ενώ οι τελεστές είναι χρονικά αμετάβλητοι

$$\hat{O}_S(t) = \hat{O}_S(0) = \hat{O}_S = \hat{O}_H(0) \quad (6.1.7)$$

Επομένως για τον τελεστή $\hat{O}_H(t)$ στην εικόνα Heisenberg και \hat{O}_S στην εικόνα Schrödinger ισχύει

$$\hat{O}_H(t) = e^{iHt}\hat{O}_S e^{-iHt} \quad (6.1.8)$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι, αν οι τελεστές Schrödinger ικανοποιούν την μεταθετική σχέση $[\hat{A}_S, \hat{B}_S] = \hat{C}_S$ τότε την ίδια μεταθετική σχέση ικανοποιούν και οι αντίστοιχοι τελεστές Heisenberg, ισχύει δηλαδή $[\hat{A}_H, \hat{B}_H] = \hat{C}_H$. Πράγματι

$$\begin{aligned} [\hat{A}_H, \hat{B}_H] &= [e^{iHt}\hat{A}_S e^{-iHt}, e^{iHt}\hat{B}_S e^{-iHt}] = \\ &= e^{iHt}\hat{A}_S e^{-iHt} e^{iHt}\hat{B}_S e^{-iHt} - e^{iHt}\hat{B}_S e^{-iHt} e^{iHt}\hat{A}_S e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}\hat{A}_S \hat{B}_S e^{-iHt} - e^{iHt}\hat{B}_S \hat{A}_S e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}(\hat{A}_S \hat{B}_S - \hat{B}_S \hat{A}_S) e^{-iHt} = \\ &= e^{iHt}[\hat{A}_S, \hat{B}_S] e^{-iHt} = e^{iHt}\hat{C}_S e^{-iHt} = \hat{C}_H \end{aligned}$$

Η «εικόνα αλληλεπίδρασης» ή «εικόνα Dirac», είναι μία μίξη των δύο εικόνων, η οποία χρησιμοποιείται εκτενώς στην θεωρία διαταραχών. Χωρίζουμε την Hamiltonian σε δύο μέρη.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}(t) \quad (6.1.9)$$

Όπου \hat{H}_0 είναι η Hamiltonian των ελεύθερων πεδίων και $\hat{H}_{int}(t)$ είναι η χρονοεξαρτημένη διαταραχή που μας ενδιαφέρει. Αν και ο χωρισμός σε \hat{H}_0 και \hat{H}_{int} είναι αυθαίρετος, είναι χρήσιμο η \hat{H}_0 να είναι επιλύσιμη, όπως για παράδειγμα η Hamiltonian των ελεύθερων πεδίων που είδαμε παραπάνω. Στην εικόνα αλληλεπίδρασης Dirac, η χρονική εξέλιξη των τελεστών, διέπεται από την \hat{H}_0 , ενώ η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων διέπεται από την \hat{H}_{int} . Θα χρησιμοποιούμε τον δείκτη D , για τους τελεστές και τις καταστάσεις στην εικόνα αλληλεπίδρασης Dirac. Ορίζουμε λοιπόν για τις καταστάσεις

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_D &= e^{i\hat{H}_0 t}|\psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0 t}e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle_S = e^{-i\hat{H}_{int}t}|\psi(0)\rangle_S \Rightarrow \\ |\psi(t)\rangle_D &= e^{-i\hat{H}_{int}t}|\psi(0)\rangle_S \quad (6.1.10) \end{aligned}$$

Και για τους τελεστές στην εικόνα αλληλεπίδρασης Dirac

$$\hat{O}_D(t) = e^{i\hat{H}_0 t}\hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (6.1.11)$$

Επομένως η Hamiltonian της αλληλεπίδρασης Dirac είναι

$$\hat{H}_D(t) = (\hat{H}_{int})_D = e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_{int}) e^{-i\hat{H}_0 t} \quad (6.1.12)$$

Η εξίσωση Schrödinger για τις καταστάσεις στην εικόνα της αλληλεπίδρασης Dirac , μπορεί να προκύψει από την εξίσωση Schrödinger για τις καταστάσεις στην εικόνα Schrödinger.

$$\begin{aligned} i \frac{d|\psi(t)\rangle_s}{dt} &= \hat{H}_S |\psi(t)\rangle_s \Rightarrow i \frac{d}{dt} (e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D) = (\hat{H}_0 + \hat{H}_{int})_S e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D \Rightarrow \\ &\Rightarrow i \frac{d}{dt} (e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D) = (\hat{H}_0 + \hat{H}_{int})_S e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D \Rightarrow \\ &\Rightarrow i (-i(\hat{H}_0)_S) e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D + i e^{-i\hat{H}_0 t} \frac{d|\psi(t)\rangle_D}{dt} = \\ &= (\hat{H}_0)_S e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D + (\hat{H}_{int})_S e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D \Rightarrow \\ &\Rightarrow i e^{-i\hat{H}_0 t} \frac{d|\psi(t)\rangle_D}{dt} = (\hat{H}_{int})_S e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D \Rightarrow i \frac{d|\psi(t)\rangle_D}{dt} = e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H}_{int})_S e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_D \end{aligned}$$

Άρα

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle_D}{dt} = (\hat{H}_{int})_D |\psi(t)\rangle_D \quad (6.1.13)$$

6.2. Ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης (τελεστής Dyson)

Στην προηγούμενη παράγραφο βρήκαμε ότι η διαφορική εξίσωση, της χρονικής εξέλιξης των καταστάσεων, στην εικόνα της αλληλεπίδρασης Dirac είναι η (6.1.13)

$$i \frac{d|\psi(t)\rangle_D}{dt} = (\hat{H}_{int})_D |\psi(t)\rangle_D \quad (6.2.1)$$

Προκειμένου να λυθεί η εξίσωση αυτή, ορίζουμε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης ή τελεστή Dyson $\hat{U}(t, t_0)$, έτσι ώστε η λύση της να είναι:

$$|\psi(t)\rangle_D = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_D \quad (6.2.2)$$

Για τον τελεστή $\hat{U}(t, t_0)$, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\hat{U}(t, t) = \hat{I}, \quad \hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t_1) \hat{U}(t_1, t_0), \quad \hat{U}^{-1}(t_0, t) = \hat{U}(t, t_0), \quad \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{I}$$

Άρα η Δ.Ε. (6.2.1) γράφεται:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} [\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_D] &= (\hat{H}_{int})_D [\hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_D] \Rightarrow \\ i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) &= (\hat{H}_{int})_D \hat{U}(t, t_0) \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Η Δ.Ε. (6.2.3) περιγράφει την χρονική εξέλιξη, του τελεστή $\hat{U}(t, t_0)$, της χρονικής εξέλιξης. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t_0) + (-i) \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_D(t') \hat{U}(t', t_0) \quad (6.2.4)$$

Από αυτήν, με διαδοχικές επαναλήψεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\hat{U}(t_0, t_0) = \hat{I}$ μπορούμε να πάρουμε την σειρά Neumann.

$$\begin{aligned} \hat{U}(t, t_0) = & \hat{I} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_D(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) + \\ & + (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_3) + \text{higher order terms} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Μπορούμε τώρα, να γράψουμε τα ολοκληρώματα αυτά, έτσι ώστε να έχουν όλα τα ίδια πάνω και κάτω άκρα ολοκλήρωσης, με ένα τρόπο που επινόησε ο Dyson. Ας δούμε τον δεύτερο όρο της σειράς:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές στο δεύτερο ολοκλήρωμα από t_1 σε t_2 , $t_1 \leftrightarrow t_2$, παίρνουμε:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_1) \quad (6.2.7)$$

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να γράψουμε ολοκληρώματα της παραπάνω μορφής, επεκτείνοντας το πάνω όριο ολοκλήρωσης στο t . Δεδομένου ότι για την συνάρτηση βήματος του Heaviside ισχύουν: για $t_2 > t_1$, $\theta(t_1 - t_2) = 0$, και για $t_1 > t_2$, $\theta(t_1 - t_2) = 1$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \int_{t_0}^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) \quad (6.2.8)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) + \int_{t_1}^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \\ & = \int_{t_0}^t dt_2 \theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) \end{aligned}$$

Μπορούμε επομένως για το αρχικό ολοκλήρωμα (6.2.6), με την βοήθεια της (6.2.8) να γράψουμε:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \Theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_1 \Theta(t_2 - t_1) \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_1) = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 [\Theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) + \Theta(t_2 - t_1) \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_1)]
\end{aligned}$$

Αν τώρα εκμεταλλευτούμε τον τελεστή της χρονικής διάταξης τελεστών \hat{T} , ο οποίος διατάσσει χρονικά τους τελεστές $\hat{H}_D(t_1)$ και $\hat{H}_D(t_2)$ έτσι ώστε, ο χρονικά μεταγενέστερος να τοποθετείται αριστερά. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
\hat{T}[\hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2)] &= \Theta(t_1 - t_2) \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) + \Theta(t_2 - t_1) \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_1) = \\
&= \begin{cases} \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) & \text{αν } t_1 > t_2 \\ \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_1) & \text{αν } t_2 > t_1 \end{cases} \quad (6.2.9)
\end{aligned}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα (6.2.6) γράφεται ως:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{T}[\hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2)] \quad (6.2.10)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να εκφραστούν και οι επόμενοι προσθετέοι της σειράς Neumann.

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t, t_0) &= \hat{I} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \hat{H}_D(t_1) + (-i)^2 \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \hat{T}[\hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2)] + \\
&+ (-i)^3 \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^t dt_3 \hat{T}[\hat{H}_D(t_1) \hat{H}_D(t_2) \hat{H}_D(t_3)] + \text{higher order terms}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση, περισσότερα συμπυκνωμένα γράφεται ως:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \hat{T}[\hat{H}_D(t_1) \dots \hat{H}_D(t_n)] \quad (6.2.11)$$

Η σχέση (6.2.11) μπορεί να γραφεί συμβολικά, ως ένα χρονικά διατεταγμένο εκθετικό

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{T} \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_D(t') \right) \right] \quad (6.2.12)$$

Ο τελεστής αυτός είναι πράγματι λύση της τελεστικής διαφορικής εξίσωσης (6.2.3). Ο τελεστής χρονικής διάταξης, εξασφαλίζει ότι όλοι οι τελεστές στο εκθετικό μετατίθενται!

Απόδειξη

$$i \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = i \frac{d}{dt} \hat{T} \left[\exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_D(t') \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \hat{T} \left\{ i(-i) \hat{H}_D(t) \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_D(t') \right) \right\} = \hat{H}_D(t) \hat{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt' \hat{H}_D(t') \right) = \\
&= \hat{H}_D(t) \hat{U}(t, t_0)
\end{aligned}$$

Με την παρατήρηση ότι στην προτελευταία γραμμή, ο $\hat{H}_D(t)$ μπορεί να περάσει αριστερά από το χρονικά διατεταγμένο εκθετικό, μιας και το t είναι το άνω όριο του ολοκληρώματος. Τέλος της απόδειξης.

6.3. Ο πίνακας σκέδασης S (S -matrix)

Ο πίνακας σκέδασης S , είναι θεμελιώδης στην QFT. Δηλώνει το πλάτος πιθανότητας να συμβεί μια ορισμένη διαδικασία μετάβασης, από μια αρχική σε μία τελική κατάσταση, υπό την επίδραση κάποιας αλληλεπίδρασης. Προκειμένου να υπολογίσουμε τον πίνακα σκέδασης S στην εικόνα της αλληλεπίδρασης Dirac, χρειαζόμαστε τον τελεστή Dyson. Συμβολίζουμε με $|\psi(t)\rangle$ το χρονικά εξαρτημένο καταστατικό διάνυσμα στην εικόνα αλληλεπίδρασης. Στο όριο $t \rightarrow -\infty$ το σύστημά μας είναι στην αρχική (*initial*) κατάσταση $|i\rangle$.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\psi(t)\rangle = |\psi(-\infty)\rangle = |i\rangle \quad (6.3.1)$$

Το σύστημα μεταβαίνει στο μακρινό μέλλον στην κατάσταση

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\psi(t)\rangle = |\psi(+\infty)\rangle = \hat{U}(+\infty, -\infty)|i\rangle \quad (6.3.2)$$

Η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε μια συγκεκριμένη τελική (*final*) κατάσταση $|f\rangle$, μέλος ενός πλήρους συστήματος τελικών καταστάσεων $|F\rangle = \{|f\rangle\}$ είναι:

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | \psi(+\infty) \rangle|^2 = |\langle f | \hat{U}(+\infty, -\infty) | i \rangle|^2 \quad (6.3.3)$$

Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης, από το μακρινό παρελθόν στο απώτερο μέλλον, ονομάζεται, πίνακας S (S -matrix),

$$\hat{S} = \hat{U}(+\infty, -\infty) = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \hat{T}[\hat{H}_D(t_1) \dots \hat{H}_D(t_n)] \quad (6.3.4)$$

και εκφράζει την προβολή του χρονοεξαρτημένου καταστατικού διανύσματος, στην ελεύθερη τελική κατάσταση $\langle f |$. Τα στοιχεία του πίνακα \hat{S} είναι:

$$S_{fi} = \langle f | \hat{S} | i \rangle \quad (6.3.5)$$

Όπου θεωρήσαμε ότι η αρχική και η τελική κατάσταση είναι ιδιοκαταστάσεις της ελεύθερης Hamiltonian. Η παραπάνω επομένως πιθανότητα (6.3.3) γράφεται ως:

$$P_{i \rightarrow f} = |\langle f | \hat{S} | i \rangle|^2 = |S_{fi}|^2 \quad (6.3.6)$$

Ως εκ τούτου, ο πίνακας S , και ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης των καταστάσεων συνδέονται με την σχέση:

$$\hat{S} = \hat{U}(+\infty, -\infty) \quad (6.3.7)$$

Αν τα στοιχεία του πίνακα S , υπολογισθούν στην αναπαράσταση της αλληλεπίδρασης, τότε ο τελεστής αυτός μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{S} = \hat{T}[\exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}_D(t)\right)] \quad (6.3.8)$$

Ενώ τα στοιχεία S_{fi} του πίνακα S μπορούν να γραφούν ως:

$$S_{fi} = \langle f | \hat{T}[\exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \hat{H}_D(t)\right)] | i \rangle \quad (6.3.9)$$

Προφανώς ο S είναι μοναδιακός μιας και ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης είναι εξ αρχής μοναδιακός. Το γεγονός αυτό εκφράζεται ως:

$$1 = \langle \psi(+\infty) | \psi(+\infty) \rangle = \langle \psi(+\infty) | \sum_f | f \rangle \langle f | \psi(+\infty) \rangle = \sum_f \langle i | \hat{S}^\dagger | f \rangle \langle f | \hat{S} | i \rangle = \sum_f |S_{fi}|^2$$

Επομένως

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1 \quad (6.3.10)$$

Η σχέση (6.3.10) εκφράζει την διατήρηση της πιθανότητας, δεδομένου ότι το $|S_{fi}|^2$, εκφράζει την πιθανότητα μέτρησης μιας ορισμένης τελικής κατάστασης $|f\rangle$, δεδομένης της αρχικής κατάστασης $|i\rangle$, ενώ το άθροισμα εμπεριέχει όλες τις δυνατές τελικές καταστάσεις (διαφορετικά σωματίδια, ορμές, spin, κλπ).

Μπορούμε στη σχέση (6.3.8) να εισάγουμε την πυκνότητα Hamilton $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi(x), \pi(x))$ και να γράψουμε:

$$\hat{S} = \hat{T}[\exp\left(-i \int d^4x \hat{\mathcal{H}}_D(x)\right)] \quad (6.3.11)$$

$$\hat{S} = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n \hat{T}[\hat{\mathcal{H}}_D(x_1) \dots \hat{\mathcal{H}}_D(x_n)] \quad (6.3.12)$$

Συνήθως, η πυκνότητα της αλληλεπίδρασης \mathcal{L}_{int} , είναι ένα μονώνυμο ή πολυώνυμο δυνάμεων του τελεστή του πεδίου. Επομένως ο υπολογισμός των S_{fi} ανάγεται στον υπολογισμό χρονικά διατεταγμένων γινομένων των τελεστών $\hat{\phi}_D(x)$.

6.4. Από την χρονική στην κανονική διάταξη. Το θεώρημα Wick.

Δεδομένου ότι το χρονοδιατεταγμένο γινόμενο $\hat{T}[\hat{\mathcal{H}}_D(x_1) \dots \hat{\mathcal{H}}_D(x_n)]$, αντιπροσωπεύει μια άπειρη σειρά παραγόντων, διατεταγμένων σε χρονολογική σειρά, ο υπολογισμός του είναι μια επίπονη εργασία. Μπορούμε να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς αυτούς, εφαρμόζοντας το θεώρημα Wick , το οποίο μας υποδεικνύει πως μπορούμε να περάσουμε

από την χρονική στην κανονική διάταξη τελεστών. Ας δούμε πρώτα πως ορίζεται το γινόμενο της κανονικής διάταξης τελεστών.

Κανονική διάταξη

Κάθε ελεύθερο τελεστικό πεδίο, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο όρων. Ενός με «θετική συχνότητα» και ενός με «αρνητική συχνότητα». Για το βαθμωτό τελεστικό πεδίο μπορούμε να γράψουμε:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_+(x) + \hat{\phi}_-(x) \quad (6.4.1)$$

Στην περίπτωση του Hermitian βαθμωτού πεδίου (2.9.9) έχουμε:

$$\hat{\phi}_+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ipx} \quad , \quad \hat{\phi}_-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+ipx}$$

Όπου η «θετική συχνότητα» αντιστοιχεί στο εκθετικό $\hat{\phi}_+ \sim e^{-ipx} \sim e^{-iEt}$ και περιλαμβάνει τον τελεστή καταστροφής $\hat{a}_{\vec{p}}$, ενώ η «αρνητική συχνότητα» στο εκθετικό $\hat{\phi}_- \sim e^{+ipx} \sim e^{+iEt}$, περιλαμβάνει τον τελεστή δημιουργίας $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$. Ο διαχωρισμός αυτός είναι χρήσιμος μιας και

$$\hat{\phi}_+|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle e^{-ipx} = 0 \quad (6.4.2)$$

$$\langle 0|\hat{\phi}_- = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \langle 0|\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{+ipx} = 0 \quad (6.4.3)$$

Εισάγοντας τον διαχωρισμό του πεδίου σε θετική και αρνητική συχνότητα, στο χρονικά διατεταγμένο γινόμενο και για $t > t'$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) &= \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x') = (\hat{\phi}_+(x) + \hat{\phi}_-(x))(\hat{\phi}_+(x') + \hat{\phi}_-(x')) = \\ &= \hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_+(x') + \hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_-(x') + \hat{\phi}_-(x)\hat{\phi}_+(x') + \hat{\phi}_-(x)\hat{\phi}_-(x') \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

Όπου τα επιμέρους γινόμενα, είναι μεν χρονικά διατεταγμένα, όμως οι τελεστές καταστροφής δεν είναι σε όλοι στην δεξιά θέση κάθε γινομένου. Συγκεκριμένα στο γινόμενο $\hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_-(x')$ ο τελεστής δημιουργίας $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, είναι στα δεξιά. Αυτό το γινόμενο όμως μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_-(x') = \hat{\phi}_-(x')\hat{\phi}_+(x) + [\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')]$$

Αντικαθιστώντας στην (6.4.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) &= \hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_+(x') + \hat{\phi}_-(x')\hat{\phi}_+(x) + [\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')] + \hat{\phi}_-(x)\hat{\phi}_+(x') \\ &+ \hat{\phi}_-(x)\hat{\phi}_-(x') \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Ορίζουμε την «κανονική διάταξη» του γινομένου των τελεστών, έτσι ώστε η θετική συχνότητα (σε όποιο από αυτά υπάρχει), που περιέχει τους τελεστές καταστροφής, να βρίσκεται στα δεξιά μας

$$\hat{N}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) = \hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_+(x') + \hat{\phi}_-(x')\hat{\phi}_+(x) + \hat{\phi}_-(x)\hat{\phi}_+(x') + \hat{\phi}_-(x)\hat{\phi}_-(x') \quad (6.4.6)$$

$$\hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) = \hat{N}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) + [\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')] \quad (6.4.7)$$

Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή του κενού και στα δύο μέλη της εξίσωσης, ο όρος που περιλαμβάνει την αναμενόμενη τιμή του κενού της κανονικής διάταξης, μηδενίζεται και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'))|0\rangle &= \\ &= \langle 0|\hat{N}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'))|0\rangle + \langle 0|[\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')]|0\rangle = \langle 0|[\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')]|0\rangle \Rightarrow \\ \langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'))|0\rangle &= \langle 0|[\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')]|0\rangle \quad (6.4.8) \end{aligned}$$

Αλλά το αριστερό μέλος της εξίσωσης (6.4.8), (σχέσεις (3.3.2), (3.3.4)), είναι ο διαδότης Feynman για $t > t'$, οπότε:

$$D_F(x - x') = \langle 0|\hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x'))|0\rangle = \langle 0|[\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')]|0\rangle \quad (6.4.9)$$

Παρόμοια είναι η απόδειξη για $t' > t$. Θυμίζουμε εδώ, ότι για τον διαδότη Feynman έχουμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.4.10)$$

Ας σημειωθεί ότι, στους παραπάνω υπολογισμούς η αναμενόμενη τιμή του κενού στο δεξιό μέλος είναι περιττή, αφού ο μεταθέτης $[\phi_+(x), \phi_-(x')]$, είναι ήδη ένας κλασσικός αριθμός (c-number). Πράγματι:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-(x')] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] e^{+ip'x'} e^{-ipx} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}'}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') e^{+ip'x'} e^{-ipx} = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip(x-x')} \end{aligned}$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε την σχέση (6.4.7) ως:

$$\hat{T}(\phi(x)\phi(x')) = \hat{N}(\phi(x)\phi(x')) + D_F(x - x') \quad (6.4.11)$$

Θεώρημα Wick

Η σχέση (6.4.11) περιγράφει το θεώρημα Wick στην απλούστερη μορφή του. Στην γενική του διατύπωση το θεώρημα Wick μας λέει ότι :

«Κάθε χρονικά διατεταγμένο γινόμενο τελεστών, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων, ενός κανονικά διατεταγμένου γινομένου τελεστών και ενός διαδότη (ή γινομένου περισσότερων) ο οποίος (διαδότης) είναι κλασσικός αριθμός».

Η απόδειξη του θεωρήματος ακολουθεί την επαγωγική μέθοδο. Ορίζουμε πρώτα την «συναίρεση» (contraction) των δύο τελεστών, ώστε να αντιστοιχεί στον διαδότη τους, ως:

$$\underline{\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')} = \langle 0 | \hat{T}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')) | 0 \rangle = D_F(x - x') \quad (6.4.12)$$

Σε γλώσσα συμβόλων το θεώρημα μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\hat{T}(\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)) = \hat{T}(\hat{\phi}_1 \dots \hat{\phi}_n) = \hat{N}(\hat{\phi}_1 \dots \hat{\phi}_n) + \hat{N}(\text{όλων των δυνατών συναιρέσεων})$$

Για παράδειγμα στην περίπτωση τεσσάρων τελεστών είναι:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4) &= \hat{N}(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4) + \underline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2} N(\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4) + \underline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3} N(\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4) + \underline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4} N(\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3) \\ &+ \underline{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3} N(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4) + \underline{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4} N(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3) + \underline{\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4} N(\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2) + \\ &\underline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2} \underline{\hat{\phi}_3\hat{\phi}_4} + \underline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_3} \underline{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_4} + \underline{\hat{\phi}_1\hat{\phi}_4} \underline{\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3} \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι, η αναμενόμενη τιμή του κενού (vacuum expectation value-VEV) κάθε κανονικά διατεταγμένου γινομένου τελεστών μηδενίζεται, $\langle 0 | N(\phi_1 \dots \phi_n) | 0 \rangle = 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) | 0 \rangle &= \langle 0 | \underline{\phi_1\phi_2} \underline{\phi_3\phi_4} | 0 \rangle + \langle 0 | \underline{\phi_1\phi_3} \underline{\phi_2\phi_4} | 0 \rangle + \langle 0 | \underline{\phi_1\phi_4} \underline{\phi_2\phi_3} | 0 \rangle = \\ &= D_F(x_1 - x_2)D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_3)D_F(x_2 - x_4) + D_F(x_1 - x_4)D_F(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά κομψό και κυρίως έχει, όπως θα δούμε, μια απεικονιστική αναπαράσταση. Στην QED οι μόνες μη μηδενικές «συναιρέσεις» μεταξύ των πεδιακών τελεστών που συνεισφέρουν είναι:

$$\underline{\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\bar{\psi}}_\beta(x')} = S_{F\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | \hat{T}\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\bar{\psi}}_\beta(x') | 0 \rangle \quad (6.4.13)$$

$$\underline{\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x')} = D_{F\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | \hat{T}\hat{A}_\mu(x)\hat{A}_\nu(x') | 0 \rangle \quad (6.4.14)$$

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό, αποδεικνύοντας δύο προτάσεις, οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 1. Μέσα σε ένα κανονικά διατεταγμένο γινόμενο τελεστών, μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά δύο μποζονικών τελεστών.

Πρόταση 2. Μέσα σε ένα κανονικά διατεταγμένο γινόμενο, μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά δύο φερμιονικών τελεστών, με αλλαγή του προσήμου στο γινόμενό τους.

Απόδειξη:

Ας θεωρήσουμε πρώτα την κανονική διάταξη του μεταθέτη δύο, μη μετατιθέμενων μποζονικών πεδίων.

$$\begin{aligned}\hat{N}([\hat{\phi}_+(x), \hat{\phi}_-^\dagger(x')]) &= \hat{N}(\hat{\phi}_+(x)\hat{\phi}_-^\dagger(x') - \hat{\phi}_-^\dagger(x')\hat{\phi}_+(x)) = \\ &\hat{\phi}_-^\dagger(x')\hat{\phi}_+(x) - \hat{\phi}_-^\dagger(x')\hat{\phi}_+(x) = 0\end{aligned}\quad (6.4.15)$$

Μιας και η (6.4.15) ισχύει για όλα τα $\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+^\dagger, \hat{\phi}_-^\dagger$, ισχύει και για τα αθροίσματά τους. Ισχύει δηλαδή ότι;

$$\hat{N}([\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(x')]) = 0 \quad (6.4.16)$$

Στην περίπτωση των φερμιονικών τελεστών δημιουργίας και καταστροφής \hat{f}^\dagger, \hat{f} , αντίστοιχα, για την κανονική τους διάταξη ισχύει: $\hat{N}(\hat{f}\hat{f}^\dagger) = -\hat{f}^\dagger\hat{f}$. Οπότε με παρόμοιο τρόπο όπως για την (6.4.16), μπορούμε να δείξουμε ότι η κανονική διάταξη του αντιμεταθέτη, δύο φερμιονικών πεδίων είναι επίσης μηδέν, ακόμη και αν αυτός δεν είναι μηδέν! Δηλαδή:

$$\hat{N}(\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\}) = 0 \quad (6.4.17)$$

Σε ένα κανονικά διατεταγμένο γινόμενο θα ισχύει:

$$\hat{N}(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(x')) = \hat{N}(\hat{\phi}^\dagger(x')\hat{\phi}(x) + [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(x')]) = \hat{N}(\hat{\phi}^\dagger(x')\hat{\phi}(x)) \quad (6.4.18)$$

Ενώ για τα φερμιονικά πεδία:

$$\hat{N}(\hat{\psi}(x)\hat{\psi}(x')) = \hat{N}(-\hat{\psi}(x')\hat{\psi}(x) + \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\}) = \hat{N}(-\hat{\psi}(x')\hat{\psi}(x)) \quad (6.4.19)$$

Τέλος της απόδειξης των προτάσεων 1 και 2.

Κεφάλαιο 7.

QED και οι κανόνες Feynman

7.1. Σύζευξη φωτονίων-φερμιονίων

Στην παράγραφο αυτή, θα εξετάσουμε την πυκνότητα Lagrange της αλληλεπίδρασης φωτονίων- φερμιονίων. Στο κεφάλαιο 4 είδαμε ότι οι εξισώσεις Maxwell στο κενό (4.2.4) γράφονται ως $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. Παρουσία πηγών, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφούν ως

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (7.1.1)$$

όπου ,

$$J^\nu = (\rho, \vec{J}) \quad (7.1.2)$$

με ρ την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου και \vec{J} , την πυκνότητα ρεύματος. Η πυκνότητα Lagrange που αντιστοιχεί στην (7.1.1) αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι η (4.4.1) με έναν επιπρόσθετο όρο που συνδέει το 4-ρεύμα με το φωτόνιο

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\nu A_\nu \quad (7.1.3)$$

Στο κεφάλαιο 5 είδαμε ότι η πυκνότητα ρεύματος (5.6.8) φερμιονίων γράφεται ως $J^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ και ειδικά για το ηλεκτρόνιο $J^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ οπότε η (7.1.3) γράφεται

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu \quad (7.1.4)$$

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την εικόνα, αρκεί να προσθέσουμε την πυκνότητα του ελεύθερου φερμιονικού πεδίου (5.6.1). Παίρνουμε έτσι την πυκνότητα Lagrange για το συζευγμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με το πεδίο Dirac

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (7.1.5)$$

Η εξίσωση (7.1.5), είναι η πλήρης εξίσωση της πυκνότητας Lagrange, από την οποία εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange (1.2.2) μπορούμε να πάρουμε την (7.1.1), την πλήρη εξίσωση Dirac αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = -e\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (7.1.6)$$

Όπως και την συζυγή της

$$(i\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu + m\bar{\psi} = e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \quad (7.1.7)$$

Η Lagrangian (7.1.5) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathcal{L}_{QED}(x) = \mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_D(x) + \mathcal{L}_{int}(x)$$

Όπου: $\mathcal{L}_{em}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $\mathcal{L}_D(x) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$, $\mathcal{L}_{int}(x) = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$

7.2. Ο πίνακας S της QED

Από τις σχέσεις (1.3.2) και (6.1.9), συμπεραίνουμε ότι για τις ηλεκτρομαγνητικές (H/M) αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρονίων (e^-), ποζιτρονίων (e^+) και φωτονίων (γ), η πυκνότητα Hamilton της αλληλεπίδρασης είναι της μορφής:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\mathcal{L}_{int} = -e\hat{\bar{\psi}}(\gamma^\mu\hat{A}_\mu)\hat{\psi} = -e\hat{\bar{\psi}}(\gamma A)\hat{\psi} \quad (7.2.1)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό: $\gamma^\mu\hat{A}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \gamma A$

Τα κβαντικά πεδία έχουν την μορφή:

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s [\hat{a}(\vec{p}, s)u(p, s)e^{-ipx} + \hat{b}^\dagger(\vec{p}, s)v(p, s)e^{ipx}] = \hat{\psi}^+ + \hat{\psi}^- \quad (7.2.2)$$

Με τον τελεστή

$$\hat{\psi}^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s \hat{a}(\vec{p}, s)u(p, s)e^{-ipx} \quad (7.2.3)$$

Να καταστρέφει σωματίδια (e^-) και αντίστοιχα τον $\hat{\psi}^-$ να δημιουργεί αντισωματίδια (e^+).
Ισχύει ακόμη ότι:

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\psi}}(x) \equiv \hat{\psi}^\dagger\gamma^0 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \sum_s [\hat{a}^\dagger(\vec{p}, s)\bar{u}(p, s)e^{ipx} + \hat{b}(\vec{p}, s)\bar{v}(p, s)e^{-ipx}] = \\ &= \hat{\bar{\psi}}^- + \hat{\bar{\psi}}^+ \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Με τους $\hat{\bar{\psi}}^-, \hat{\bar{\psi}}^+$ να δημιουργούν σωματίδια (e^-) και να καταστρέφουν αντισωματίδια (e^+), αντίστοιχα. Τέλος το κβαντικό H/M πεδίο το γράφουμε ως:

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \sum_\lambda [\hat{a}(\vec{k}, \lambda)\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda)\epsilon_\mu^*(\vec{k}, \lambda)e^{ikx}] = \\ &= \hat{A}_\mu^+ + \hat{A}_\mu^- = \hat{A}^+ + \hat{A}^- \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Με τους $\hat{A}_\mu^+, \hat{A}_\mu^-$ αντίστοιχα να καταστρέφουν και να δημιουργούν φωτόνια αντίστοιχα. Με τις παρατηρήσεις αυτές, η πυκνότητα Hamilton μπορεί να γραφεί ως:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = -e(\hat{\bar{\psi}}^- + \hat{\bar{\psi}}^+)(\gamma(\hat{A}^+ + \hat{A}^-))(\hat{\psi}^+ + \hat{\psi}^-) \quad (7.2.6)$$

Από την άλλη, το ανάπτυγμα σε σειρά Dyson του τελεστή S (6.3.12), γράφεται αναλυτικά ως:

$$\hat{S} = \hat{1} - i \int d^4x_1 \hat{\mathcal{H}}_{int}(x_1) - \frac{1}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{T}[\hat{\mathcal{H}}_{int}(x_1)\hat{\mathcal{H}}_{int}(x_2)] + \dots$$

Οπότε για $\hat{\mathcal{H}}_{int} = -e\hat{\psi}(\gamma A)\hat{\psi}$ όπως παραπάνω γράφεται:

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \hat{1} + ie \int d^4x_1 \hat{T}\{[\hat{\psi}(\gamma \hat{A})\hat{\psi}](x_1)\} - \frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{T}\{[\hat{\psi}(\gamma \hat{A})\hat{\psi}](x_1)[\hat{\psi}(\gamma \hat{A})\hat{\psi}](x_2)\} \\ &+ \dots = \hat{S}_0 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \dots + \hat{S}_n + \dots \quad (7.2.7)\end{aligned}$$

Όπου βέβαια στον δεύτερο όρο της σειράς, δεν απαιτείται χρονική διάταξη, αφού έχουμε ως μεταβλητή μόνο το x_1 . Στην περίπτωση αυτή η χρονική διάταξη, ισοδυναμεί με κανονική διάταξη και το θεώρημα Wick γράφεται ως:

$$\hat{T}\{[\hat{\psi}(\gamma \hat{A})\hat{\psi}](x_1)\} = \hat{N}\{[\hat{\psi}(\gamma \hat{A})\hat{\psi}](x_1)\}$$

Παρατήρηση: Σε κάθε όρο \hat{S}_n της σειράς, εμφανίζεται ένας παράγοντας της μορφής e^n . Από την άλλη η σταθερά λεπτής υφής, στο σύστημα μονάδων Gauss είναι αδιάστατη και ίση με:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}$$

Όμως οι αδιάστατες ποσότητες, είναι αδιάστατες σε κάθε σύστημα μονάδων και έχουν την ίδια αριθμητική τιμή. Επομένως στο φυσικό σύστημα μονάδων όπου $\hbar = c = 1$ έχουμε:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}} \approx 0,3$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, κάθε όρος του αθροίσματος έχει μπροστά έναν παράγοντα της μορφής $(0,3)^n$ και επομένως οι όροι υψηλότερης τάξης είναι μικρότεροι. Μπορούμε λοιπόν με καλή προσέγγιση να πάρουμε μόνο τους πρώτους όρους της σειράς.

7.3. Οι δύο πρώτοι όροι της σειράς: S_0, S_1

Ας θεωρήσουμε τώρα την δράση του όρου \hat{S}_0 του τελεστή \hat{S} , σε μία αρχική κατάσταση η οποία περιλαμβάνει ένα ηλεκτρόνιο και ένα φωτόνιο με ορμές και πολώσεις $(p, s), (k, \lambda)$ αντίστοιχα.

$$\begin{aligned}S_{(0)fi} &= \langle f | \hat{S}_0 | i \rangle = \langle f | \hat{S}_0 | e^-(p, s); \gamma((k, \lambda)) \rangle = \langle f | \hat{1} | e^-(p, s); \gamma((k, \lambda)) \rangle = \\ &= \langle f | e^-(p, s); \gamma((k, \lambda))\end{aligned}$$

Όπου αν: $\langle f | = \langle e^-(p, s); \gamma((k, \lambda)) |$ τότε $S_{(0)fi} = 1$ ενώ $S_{(0)fi} = 0$ σε κάθε άλλη περίπτωση. Πρόκειται για την συνεισφορά του πρώτου όρου, στην περίπτωση δύο σωματιδίων (εδώ ενός ηλεκτρονίου και ενός φωτονίου), τα οποία δεν αλληλεπιδρούν. Κάθε σωματίδιο βρίσκεται τελικά, στην ίδια κατάσταση ορμής και πόλωσης που βρισκόταν και αρχικά. Ο ταυτοτικός πίνακας απλώς αναπαράγει την αρχική κατάσταση.

Ας εξετάσουμε τώρα τον όρο \hat{S}_1 . αυτός έχει ένα ανάπτυγμα σε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής ως:

$$\begin{aligned}\hat{S}_1 &= ie \int d^4x_1 \hat{N} \left\{ \left[\hat{\psi}(\gamma A) \hat{\psi} \right] (x_1) \right\} = \\ &= ie \int d^4x_1 \hat{N} \left\{ \left(\hat{\psi}^- + \hat{\psi}^+ \right) \left(\gamma(\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \right) \left(\hat{\psi}^+ + \hat{\psi}^- \right) \right\} \quad (7.3.1)\end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός μας δίνει οκτώ όρους της μορφής $\hat{\psi}^- \gamma(\hat{A}^+) \hat{\psi}^+$ κλπ. Θα εξετάσουμε έναν από αυτούς, τον όρο $\hat{\psi}^- \hat{A}^+ \hat{\psi}^+$ όπου χάριν απλότητας παραλείψαμε τον πίνακα γ και ο οποίος είναι κανονικά διατεταγμένος. Υπενθυμίζουμε ότι η δράση των τελεστών αυτών, είναι αυτή που εμφανίζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

$$\hat{A}^+ \rightarrow \text{καταστρέφει } \gamma \text{ (φωτόνια)}$$

$$\hat{A}^- \rightarrow \text{δημιουργεί } \gamma \text{ (φωτόνια)}$$

$$\hat{\psi}^+ \rightarrow \text{καταστρέφει } e^- \text{ (ηλεκτρόνια)}$$

$$\hat{\psi}^- \rightarrow \text{δημιουργεί } e^+ \text{ (ποζιτρόνια)}$$

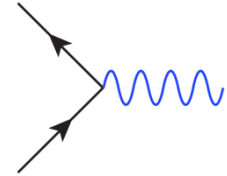
$$\hat{\bar{\psi}}^+ \rightarrow \text{καταστρέφει } e^+ \text{ (ποζιτρόνια)}$$

$$\hat{\bar{\psi}}^- \rightarrow \text{δημιουργεί } e^- \text{ (ηλεκτρόνια)}$$

Επομένως η δράση του παραπάνω τελεστή σε μία αρχική κατάσταση ηλεκτρονίου (e^-), φωτονίου (γ) για παράδειγμα θα μας δώσει:

$$\hat{\psi}^- \hat{A}^+ \hat{\psi}^+ |e^-; \gamma\rangle = \hat{\psi}^- \hat{A}^+ |\gamma\rangle = \hat{\psi}^- |0\rangle = |e^- \rangle$$

Ο όρος αυτός αντιστοιχεί σε μία αλληλεπίδραση της μορφής $e^- + \gamma \rightarrow e^-$, και μπορεί να παρασταθεί σε διάγραμμα Feynman μιας κορυφής. Όπως θα εξηγήσουμε στην συνέχεια τέτοιοι όροι δεν είναι φυσικά αποδεκτοί. Από τους οκτώ υπό-όρους οι τέσσερις είναι αυτής της μορφής. $\gamma \rightarrow e^- + e^+$, $\gamma \rightarrow e^- + \gamma$, $0 \rightarrow e^- + \gamma + e^+$. Πράγματι για τον όρο $\gamma \rightarrow e^- + e^+$, αντιστοιχεί το διάγραμμα του διπλανού σχήματος. Η διατήρηση της 4-ορμής υπαγορεύει:



$$k = p_1 + p_2 \quad (7.3.2)$$

όπου p_1, p_2 οι 4-ορμές του e^- και του e^+ αντίστοιχα. Επομένως:

$$k^2 = (p_1 + p_2)^2 \Rightarrow 0 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \quad (7.3.3)$$

Η σχέση (7.3.3) είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς. Μπορούμε επομένως να επιλέξουμε το σύστημα αναφοράς έτσι ώστε $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$. Επομένως η (7.3.3) γράφεται ως: $0 = (E_1 + E_2)^2$ το οποίο βέβαια είναι άτοπο. Λέμε τότε ότι το φωτόνιο αυτό βρίσκεται έξω από το «κέλυφος μάζας» του. Είναι ένα «εικονικό» φωτόνιο, και τέτοια φωτόνια μπορούν να υπάρχουν μόνον ως «διαδότες», δηλαδή κατά την μεταβίβαση της αλληλεπίδρασης.

Θα εξετάσουμε τώρα έναν από τους υπόλοιπους τέσσερις υπό-όρους, για παράδειγμα τον κανονικά διατεταγμένο όρο: $\hat{\psi}^+ \hat{A}^+ \hat{\psi}^+$.

$$\hat{\psi}^+ \hat{A}^+ \hat{\psi}^+ |e^-; \gamma\rangle = \hat{\psi}^+ \hat{A}^+ |\gamma\rangle = \hat{\psi}^+ |0\rangle = 0$$

Το ίδιο συμβαίνει και με τους τρεις υπόλοιπους υπό-όρους. Βλέπουμε επομένως ότι η δράση του τελεστή \hat{S}_1 οδηγεί ή σε μηδενισμούς ή σε μη φυσικά αποδεκτές αλληλεπιδράσεις, όπως επίσης ότι τα διαγράμματα στα οποία αντιστοιχούν οι υπό-όροι του, είναι διαγράμματα μιας κορυφής.

7.4. Ο τρίτος όρος της σειράς: S_2

Για την σκέδαση ηλεκτρονίων-φωτονίων: $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$, η ελάχιστη συνεισφορά, προέρχεται από τον όρο δεύτερης τάξης, μιας και χρειάζονται τουλάχιστον δύο αλληλεπιδράσεις ηλεκτρονίων-φωτονίων. Θα εξετάσουμε επομένως, τον τρίτο όρο της σειράς Dyson τον \hat{S}_2 .

$$\hat{S}_2 = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{T} \{ [\hat{\psi}(\gamma\hat{A})\hat{\psi}](x_1) [\hat{\psi}(\gamma\hat{A})\hat{\psi}](x_2) \} \quad (7.4.1)$$

Πρώτα θα μετατρέψουμε την χρονική διάταξη σε κανονική διάταξη, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Wick. Χάριν ευκολίας θα αντικαταστήσουμε τα ορίσματα των τελεστών με δείκτες. Έτσι θα γράφουμε:

$$\hat{T} \{ [\hat{\psi}(\gamma\hat{A})\hat{\psi}](x_1) [\hat{\psi}(\gamma\hat{A})\hat{\psi}](x_2) \} = \hat{T} [\hat{\psi}_1 \gamma \hat{A}_1 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \gamma \hat{A}_2 \hat{\psi}_2] \quad (7.4.2)$$

Και το θεώρημα Wick μας λέει: (δεν θα πάρουμε υπόψη μας συναιρέσεις με το ίδιο όρισμα μιας και αυτές δεν συνεισφέρουν)

$$\begin{aligned} \hat{T}[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2] &= \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2] + \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma \underbrace{A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2}_{\psi_1 \bar{\psi}_2} \psi_2] + \\ &\quad \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \underbrace{\psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2}_{\psi_1 \bar{\psi}_2} \psi_2] + \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2] + \\ &\quad + (\text{όροι με απλές συναιρέσεις όπως η } \bar{\psi}_1 A_2 \text{ οι οποίοι μηδενίζονται}) + \\ &\quad + \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma \underbrace{A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2}_{\psi_1 \bar{\psi}_2} \psi_2] + \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma \underbrace{A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2}_{\psi_1 \bar{\psi}_2} \psi_2] + \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \underbrace{\psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2}_{\psi_1 \bar{\psi}_2} \psi_2] + \\ &\quad + (\text{όροι όπου τουλάχιστον η μία συναίρεση μηδενίζεται}) + \\ &\quad + \underbrace{\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2}_{\psi_1 \bar{\psi}_2} + \\ &\quad + (\text{όροι στους οποίους οι συναιρέσεις μηδενίζονται}) \end{aligned}$$

Είναι προφανές πλέον ότι ο \hat{S}_2 αντιστοιχεί σε αλληλεπιδράσεις δύο κορυφών ή όπως λέμε «δενδροειδή» διαγράμματα. Ο πρώτος υπό-όρος του \hat{S}_2 είναι:

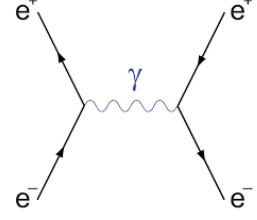
$$\hat{S}_{2\alpha} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N}[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2] \quad (7.4.3)$$

Ο όρος αυτός περιγράφει δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, οι οποίες συμβαίνουν στα x_1, x_2 , και δεν συνδέονται μεταξύ τους με κάποιο εικονικό σωματίδιο

(διαδότη Feynman). Μπορούμε να σκεφτούμε δύο ξεχωριστές κορυφές διαγραμμάτων, ασύνδετες μεταξύ τους και όπως είδαμε παραπάνω αυτές δεν αντιπροσωπεύουν φυσικά αποδεκτές διαδικασίες.

Φωτονικός διαδότης. Ο δεύτερος υπό-όρος περιλαμβάνει την συναίρεση των H/M πεδίων.

$$\hat{S}_{2\gamma} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} \left[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \right] \quad (7.4.4)$$



Η συναίρεση των A_1, A_2 που εμφανίζεται εδώ, είναι ο φωτονικός διαδότης Feynman. Αυτός περιγράφει μία αλληλεπίδραση η οποία περιλαμβάνει ένα εικονικό φωτόνιο μεταξύ των δύο κορυφών στα x_1, x_2 , όπως στο διπλανό σχήμα. Επειδή ο διαδότης είναι αριθμός και όχι τελεστής, οι μόνοι τελεστές που συμμετέχουν είναι αυτοί της δημιουργίας και της καταστροφής ηλεκτρονίων και ποζιτρονίων, σωματιδίων με σπίν 1/2.

Φερμιονικός διαδότης. Θα εξετάσουμε τώρα τον τρίτο και τον τέταρτο υπό-όρο οι οποίοι περιλαμβάνουν συναιρέσεις φερμιονικών πεδίων.

$$\hat{S}_{2\gamma} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} \left[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \right] \quad (7.4.5)$$

$$\hat{S}_{2\delta} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} \left[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \right] \quad (7.4.6)$$

Φερμιονικοί και μποζονικοί γειτονικοί τελεστές πάντοτε μετατίθενται. Ισχύουν όμως και οι δύο ακόλουθες προτάσεις που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. (η απόδειξή τους έγινε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου).

Πρόταση 1. Μέσα σε ένα κανονικά διατεταγμένο γινόμενο, μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά δύο μποζονικών τελεστών, ακόμα και αν συναιρούνται μεταξύ τους.

Πρόταση 2. Μέσα σε ένα κανονικά διατεταγμένο γινόμενο, μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά δύο φερμιονικών τελεστών, με αλλαγή του προσήμου στο γινόμενό τους. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προτάσεις μπορούμε λοιπόν να αποδείξουμε ότι:

$$\hat{N} \left[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \right] = \hat{N} \left[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \right] \quad (7.4.7)$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \hat{N} \left[\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \right] &= \hat{N} \left[-\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \bar{\psi}_2 \psi_1 \gamma A_2 \psi_2 \right] = \hat{N} \left[\bar{\psi}_2 \bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \gamma A_2 \psi_2 \right] = \\ &= \hat{N} \left[\bar{\psi}_2 \gamma A_2 \bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \psi_2 \right] = \hat{N} \left[-\bar{\psi}_2 \gamma A_2 \bar{\psi}_1 \psi_2 \gamma A_1 \psi_1 \right] = \hat{N} \left[\bar{\psi}_2 \gamma A_2 \psi_2 \bar{\psi}_1 \gamma A_1 \psi_1 \right] \end{aligned}$$

Επειδή οι δείκτες είναι βουβοί μπορούμε να τους εναλλάξουμε, οπότε παίρνουμε την (7.4.7). Τέλος της απόδειξης. Ισχύει επομένως:

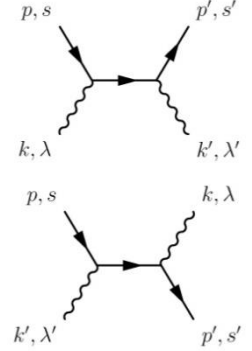
$$\hat{S}_2 = \hat{S}_{2\gamma} + \hat{S}_{2\delta} = 2\hat{S}_{2\delta}$$

$$\hat{S}_2 = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} [\bar{\psi}_1 \gamma A_1 \underline{\psi_1 \bar{\psi}_2} \gamma A_2 \psi_2] \quad (7.4.8)$$

Η συναίρεση των $\psi_1, \bar{\psi}_2$, μας δίνει έναν φερμιονικό διαδότη, ενώ τα αλληλεπιδρώντα σωματίδια είναι ένα ηλεκτρόνιο και ένα φωτόνιο. Αναπτύσσοντας τους τελεστές, σε τελεστές δημιουργίας και καταστροφής και αντικαθιστώντας τον διαδότη παίρνουμε:

$$\hat{S}_2 = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} \{ (\bar{\psi}_1^+ + \bar{\psi}_1^-) \times \\ \times \gamma(A_1^+ + A_1^-)(S_F(x_1 - x_2))\gamma(A_2^+ + A_2^-)(\psi_2^+ + \psi_2^-) \} \quad (7.4.9)$$

Από τους δεκαέξι υπό-όρους που περιλαμβάνουν τελεστές δημιουργίας και καταστροφής (με παρόμοιο τρόπο όπως παραπάνω) απομένουν μόνο δύο, οι οποίοι είναι σε συμφωνία με τα διπλανά διαγράμματα. Τελικά παίρνουμε:



$$\hat{S}_2 = -e^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} \{ [\bar{\psi}_1^- \gamma A_1^- S_F(x_1 - x_2) \gamma A_2^+ \psi_2^+ + \\ + \bar{\psi}_1^- \gamma A_1^+ S_F(x_1 - x_2) \gamma A_2^- \psi_2^+] \} = \hat{S}_{2\alpha} + \hat{S}_{2\beta} \quad (7.4.10)$$

Το $\hat{S}_{2\alpha}$ αντιστοιχεί στο πρώτο διάγραμμα και το $\hat{S}_{2\beta}$ αντιστοιχεί στο δεύτερο διάγραμμα.

Υπολογισμός του S_{2afi} . Θα υπολογίσουμε τώρα το στοιχείο του πίνακα για εισερχόμενο ηλεκτρόνιο $e^-(p, s)$ και εισερχόμενο φωτόνιο $\gamma(k, \lambda)$. Πρώτα από όλα ο τελεστής $\hat{S}_{2\alpha}$ είναι:

$$\hat{S}_{2\alpha} = (-e^2) \int d^4x_1 \int d^4x_2 \hat{N} [\bar{\psi}_1^- \gamma A_1^- S_F(x_1 - x_2) \gamma A_2^+ \psi_2^+] \quad (7.4.11)$$

Και το στοιχείο S_{2afi} του πίνακα είναι:

$$S_{2afi} = \langle e^-(p', s'); \gamma(k', \lambda') | \hat{S}_{2\alpha} | e^-(p, s); \gamma(k, \lambda) \rangle \\ S_{2afi} = \langle (p', s'); (k', \lambda') | \hat{S}_{2\alpha} | (p, s); (k, \lambda) \rangle \quad (7.4.12)$$

Για τους πεδιακούς τελεστές έχουμε:

$$\bar{\psi}_1^- = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \hat{a}^\dagger(\vec{p}, s) \bar{u}(p, s) e^{ipx_1}$$

$$\psi_2^+ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \hat{a}(\vec{p}, s) u(p, s) e^{-ipx_2}$$

$$A_2^+ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\lambda \hat{a}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\mu(k, \lambda) e^{-ikx_2}$$

$$A_1^- = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_\lambda \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(k, \lambda) e^{ikx_1}$$

Μας χρειάζονται ακόμη, οι μεταθετικές σχέσεις, όπως και οι σχέσεις κανονικοποίησης, τις οποίες υπενθυμίζουμε εδώ μόνο για το φωτόνιο. Για το ηλεκτρόνιο είναι παρόμοιες. Με την διαφορά ότι στη θέση του μεταθέτη έχουμε τον αντί-μεταθέτη.

$$[\hat{a}(\vec{k}', \lambda'), \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda)] = (2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.4.13)$$

$$|k, \lambda\rangle = \sqrt{2\omega_k} \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda) |0\rangle \quad (7.4.14)$$

$$\langle k, \lambda | k', \lambda' \rangle = (2\pi)^3 2\omega_k \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.4.15)$$

$$\hat{a}(\vec{k}', \lambda') |k, \lambda\rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \delta_{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle \quad (7.4.16)$$

Μετά την αντικατάσταση της (7.4.11) στην (7.4.12) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} S_{2afi} &= \langle (p', s'); (k', \lambda') | (-e^2) \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times \\ &\times \hat{N}[\bar{\psi}_1^- \gamma A_1^- S_F(x_1 - x_2) \gamma A_2^+ \psi_2^+] | (p, s); (k, \lambda) \rangle \quad (7.4.17) \end{aligned}$$

Η κανονική διάταξη μέσα στο «σάντουιτς» δεν είναι απαραίτητη μιας και οι τελεστές είναι ήδη κανονικά διατεταγμένοι. Η δράση των τελεστών πάνω στο ket που βρίσκεται στα δεξιά είναι:

$$\begin{aligned} &[\bar{\psi}_1^- \gamma A_1^- S_F(x_1 - x_2) \gamma A_2^+ \psi_2^+] | (p, s); (k, \lambda) \rangle = \\ &= \int \frac{d^3p''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p''}}} \sum_{s''} \hat{a}^\dagger(\vec{p}'', s'') \bar{u}(p'', s'') e^{ip''x_1} \times \\ &\times \int \frac{d^3k''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k''}}} \sum_{\lambda''} \hat{a}^\dagger(\vec{k}'', \lambda'') \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k'', \lambda'') e^{ik''x_1} \times \\ &\times S_F(x_1 - x_2) \times \\ &\times \int \frac{d^3k'''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k'''}}} \sum_{\lambda'''} \hat{a}(\vec{k}', \lambda''') \gamma^\nu \epsilon_\nu(k''', \lambda''') e^{-ik'''x_2} \times \\ &\times \int \frac{d^3p'''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'''}}} \sum_{s'''} \hat{a}(\vec{p}', s''') u(p''', s''') e^{-ip'''x_2} \times | (p, s); (k, \lambda) \rangle \quad (7.4.18) \end{aligned}$$

Όταν οι δύο τελεστές καταστροφής επιδράσουν πάνω στο ket που βρίσκεται προς τα δεξιά, «σκοτώνουν» το ket επειδή:

$$\begin{aligned} &\hat{a}(\vec{k}', \lambda''') \hat{a}(\vec{p}', s''') | (p, s); (k, \lambda) \rangle = \\ &= (2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k} \delta_{\lambda\lambda'''} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}''') (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \delta_{ss'''} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}''') |0\rangle \quad (7.4.19) \end{aligned}$$

Έτσι παίρνουμε:

$$S_{2afi} = \langle (p', s'); (k', \lambda') | (-e^2) \int d^4x_1 \int d^4x_2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p''}}} \sum_{s''} \hat{a}^\dagger(\vec{p}'', s'') \bar{u}(p'', s'') e^{ip''x_1} \times \\
& \times \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k''}}} \sum_{\lambda''} \hat{a}^\dagger(\vec{k}'', \lambda'') \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k'', \lambda'') e^{ik''x_1} \times \\
& S_F(x_1 - x_2) \times \\
& \gamma^\nu \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s) e^{-ikx_2} e^{-ipx_2} |0\rangle \quad (7.4.20)
\end{aligned}$$

Οι δύο τελεστές δημιουργίας δρουν πάνω στην κατάσταση του κενού και δίνουν:

$$\hat{a}^\dagger(\vec{p}'', s'') \hat{a}^\dagger(\vec{k}'', \lambda'') |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{p''}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k''}}} |(p'', s''); (k'', \lambda'')\rangle \quad (7.4.21)$$

Τώρα μεταξύ του bra και του ket βρίσκονται μόνο αριθμοί οι οποίοι βέβαια μπορούν να βγουν έξω από το εσωτερικό γινόμενο τους. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
S_{2afi} &= (-e^2) \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \times \int \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p''}}} \sum_{s''} \bar{u}(p'', s'') e^{ip''x_1} \times \\
& \times \int \frac{d^3 k''}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k''}}} \sum_{\lambda''} \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k'', \lambda'') e^{ik''x_1} \times \\
& \times \frac{1}{\sqrt{2E_{p''}}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{k''}}} \langle (p', s'); (k', \lambda') | (p'', s''); (k'', \lambda'') \rangle \\
& \times S_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s) e^{-ikx_2} e^{-ipx_2} \quad (7.4.22)
\end{aligned}$$

Όμως για το εσωτερικό γινόμενο ισχύει:

$$\begin{aligned}
& \langle (p', s'); (k', \lambda') | (p'', s''); (k'', \lambda'') \rangle = \\
& = (2\pi)^3 2\omega_{k''} \delta_{\lambda' \lambda''} \delta^{(3)}(\vec{k}'' - \vec{k}') (2\pi)^3 2E_{p''} \delta_{s'' s'} \delta^{(3)}(\vec{p}'' - \vec{p}') \quad (7.4.23)
\end{aligned}$$

Έτσι οι δ-συναρτήσεις «σκοτώνουν» στα αθροίσματα και τα ολοκληρώματα, τις διπλοτονοούμενες ποσότητες και απομένουν μόνο οι τονούμενες. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}
S_{2afi} &= (-e^2) \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \bar{u}(p', s') e^{ip'x_1} \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k', \lambda') e^{ik'x_1} \\
& \times S_F(x_1 - x_2) \gamma^\nu \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s) e^{-ikx_2} e^{-ipx_2} \quad (7.4.24)
\end{aligned}$$

Μετά την αντικατάσταση του χωροχρονικού διαδότη Feynman από την (5.10.7)

$$S_F(x_1 - x_2) = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma q) + m}{q^2 - m^2} e^{-iq(x_1 - x_2)} \quad (7.4.25)$$

Και αναδιατάσσοντας τους παράγοντες παίρνουμε:

$$S_{2afi} = (-e^2) \bar{u}(p', s') \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k', \lambda') \gamma^\nu \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s) (i) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma q) + m}{q^2 - m^2} \times \\ \times \int d^4 x_1 e^{-iqx_1} e^{ip'x_1} e^{ik'x_1} \int d^4 x_2 e^{-ikx_2} e^{-ipx_2} e^{iqx_2} \quad (7.4.26)$$

Ας σημειωθεί ότι τα δύο τελευταία ολοκληρώματα γράφονται ως:

$$\int d^4 x_1 e^{i(p'+k'-q)x_1} \int d^4 x_2 e^{i(q-k-p)x_2} = \\ = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - q) (2\pi)^4 \delta^4(q - k - p) \quad (7.4.27)$$

Από την οποία είναι φανερό ότι, σε κάθε κορυφή του διαγράμματος η 4-ορμή διατηρείται. Ο μετασχηματισμός Fourier του διαδότη στο χώρο των ορμών (5.10.6) είναι:

$$S_F(x_1 - x_2) = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma q) + m}{q^2 - m^2} e^{-iq(x_1 - x_2)} \Rightarrow \\ S_F(q) = i \frac{(\gamma q) + m}{q^2 - m^2} \quad (7.4.28)$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε τα ολοκληρώματα της σχέσεως (7.4.26) ως :

$$i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma q) + m}{q^2 - m^2} \times \\ \times \int d^4 x_1 e^{-iqx_1} e^{ip'x_1} e^{ik'x_1} \int d^4 x_2 e^{-ikx_2} e^{-ipx_2} e^{iqx_2} = \\ = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S_F(q) \times (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - q) (2\pi)^4 \delta^4(q - k - p) = \\ = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - k - p) (S_F(q))$$

Οπότε το στοιχείο S_{2afi} του πίνακα είναι :

$$S_{2afi} = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - k - p) (-e^2) \bar{u}(p', s') \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k', \lambda') [S_F(q)] \gamma^\nu \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s)$$

Συμβολίζουμε με M_{fi} την παράσταση, η οποία ονομάζεται «πλάτος *Feynman*» :

$$M_{2afi} = (-e^2) \bar{u}(p', s') \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(k', \lambda') [S_F(q)] \gamma^\nu \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s)$$

Η οποία μπορεί να γραφεί και ως:

$$M_{2afi} = \bar{u}(p', s') (-ie\gamma^\mu) \epsilon_\mu^*(k', \lambda') [S_F(q)] (-ie\gamma^\nu) \epsilon_\nu(k, \lambda) u(p, s) \quad (7.4.29)$$

Οπότε το στοιχείο S_{2afi} του πίνακα γράφεται τελικά:

$$S_{2afi} = (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - k - p) M_{2afi} \quad (7.4.30)$$

Αυτή είναι η μορφή που προκύπτει για το πρώτο διάγραμμα και με τους κανόνες Feynman. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος σκέδασης και για το δεύτερο διάγραμμα. Η άλγεβρα που απαιτείται είναι επίπονη. Ευτυχώς ...κανόνες Feynman!.

7.5. Οι κανόνες Feynman

Το 1940 ο Richard Feynman επινόησε κάποιους κανόνες, με τους οποίους μπορούμε να παρακάμψουμε όλη αυτή την επίπονη άλγεβρα και να υπολογίσουμε το πλάτος σκέδασης σύντομα. Δεδομένης της ποσότητας πράξεων που χρειαστήκαμε για τον υπολογισμό του πλάτους, οι κανόνες αυτοί αποτελούν μια ευχάριστη ανακούφιση. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι κανόνες αυτοί, μπορούν να εφαρμοστούν όχι μόνο για τον \hat{S}_2 αλλά για τους τελεστές όλων των τάξεων \hat{S}_n . Ο Feynman διέκρινε ότι σε όλους τους υπολογισμούς πλάτους σκέδασης, όπως αυτός που παρουσιάσαμε παραπάνω, σε κάθε εισερχόμενο ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί ένας σπίνορας $u(p, s)$. Σε κάθε εισερχόμενο ποζιτρόνιο ένας σπίνορας $\bar{v}(p, s)$. Για τα εξερχόμενα, ηλεκτρόνιο και ποζιτρόνιο αντιστοιχούν τα $\bar{u}(p, s)$ και $v(p, s)$. Για κάθε εικονικό σωματίδιο, υπάρχει ένας διαδότης, εκφρασμένος στο χώρο των ορμών, όπως ο $S_F(q)$ για το εικονικό φερμιόνιο, ή ο $D_F(k)$ για το εικονικό φωτόνιο. Σε κάθε κορυφή αντιστοιχεί ένας πίνακας γάμμα γ^μ και ένας παράγοντας $-ie$. Για τους όρους πρώτης τάξεως, όπως ο S_1 έχουμε μία κορυφή, για της δεύτερης τάξεως S_2 , δύο και πάει λέγοντας. Επιπλέον προκύπτει πάντα μια συνάρτηση δέλτα, η οποία εξασφαλίζει ότι, η αρχική 4-ορμή των εισερχόμενων σωματιδίων είναι ίση με την τελική των εξερχόμενων.

Κανόνες Feynman για την QED

A. Το στοιχείο πίνακα μιας δεδομένης αλληλεπίδρασης (πλάτος σκέδασης) είναι:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p_f - \sum p_i \right) M_{fi}, \text{ όπου } M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

Όπου $\sum p_f$ το άθροισμα των τελικών ορμών και $\sum p_i$ το άθροισμα των τελικών. Το M_n προέρχεται από τον n-οστό διαταρακτικό όρο S_n του τελεστή S .

B. Το πλάτος Feynman M_n υπολογίζεται από όλα τα συνδεδεμένα διαγράμματα με (n) κορυφές. Οι τιμές των M_n υπολογίζονται ως εξής.

1. Σε κάθε κορυφή αντιστοιχούμε έναν παράγοντα της μορφής $-ie\gamma^\mu$.

2. Σε κάθε εσωτερική γραμμή, η οποία απεικονίζει ένα εικονικό φωτόνιο 4-ορμής k, αντιστοιχούμε τον φωτονικό διαδότη: $D_F(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$

3. Σε κάθε εσωτερική γραμμή, η οποία απεικονίζει ένα εικονικό φερμιόνιο 4-ορμής q, αντιστοιχούμε τον φερμιονικό διαδότη: $S_F(q) = i \frac{(\gamma q) + m}{q^2 - m^2}$.

4. Σε κάθε εξωτερική γραμμή, αντιστοιχούμε έναν από τους παρακάτω σπινωριακούς παράγοντες όπου τα p, k δηλώνουν την αντίστοιχη κατάσταση 3-ορμής ενώ τα s, λ τις καταστάσεις πόλωσης.

α. Σε κάθε εισερχόμενο ηλεκτρόνιο: $u(p, s)$

β. Σε κάθε εξερχόμενο ηλεκτρόνιο: $\bar{u}(p', s')$

γ. Σε κάθε εισερχόμενο ποζιτρόνιο: $\bar{v}(p, s)$

δ. Σε κάθε εξερχόμενο ποζιτρόνιο: $v(p', s')$

ε. Σε κάθε εισερχόμενο φωτόνιο: $\epsilon_\nu(k, \lambda)$

στ. Σε κάθε εξερχόμενο φωτόνιο: $\epsilon_\mu^*(k', \lambda')$

5. Οι σπινωριακοί παράγοντες (πίνακες γ , διαδότες S_F , σπίνορες), σε κάθε φερμιονική γραμμή, διατάσσονται έτσι ώστε: «Όταν διαβάζουμε από δεξιά προς τα αριστερά του διαγράμματος, να προκύπτει ή ίδια σειρά με αυτή που δείχνει το βέλος της γραμμής». Η διάταξη αυτή είναι σημαντική, μιας και εκφράζει την σειρά πολλαπλασιασμού των πινάκων όταν δεν γράφουμε τους δείκτες τους.

6. Η 4-ορμή διατηρείται σε κάθε κορυφή του διαγράμματος.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες Feynman, ώστε από τα διαγράμματα να υπολογίσουμε απευθείας το πλάτος σκέδασης σε κάθε περίπτωση

7.6. Τοπική συμμετρία και ρεύμα στην QED .

Στην παράγραφο αυτή, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Noether στην πλήρη Lagrangian της QED, την οποία επαναφέρουμε εδώ από την σχέση (7.1.5)

$$\mathcal{L}_{QED}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Με

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial^\nu A^\mu\partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu\partial_\mu A_\nu)$$

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$$

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Επιβάλλοντας τον μετασχηματισμό: $\psi'(x) = e^{-ia}\psi(x)$, $\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{ia}$, οι παράγοντες του φωτονικού πεδίου A_μ , δεν επηρεάζονται, οπότε $\mathcal{L}'_{em} = \mathcal{L}_{em}$. Επίσης εύκολα προκύπτει ότι $\mathcal{L}'_D = \mathcal{L}_D$, $\mathcal{L}'_{int} = \mathcal{L}_{int}$. Τελικά παίρνουμε: $\mathcal{L}'_{QED}(x) = \mathcal{L}_{QED}(x)$. Συμπεραίνουμε επομένως ότι όπως και για τα ελεύθερα πεδία έτσι και για τα αλληλεπιδρώντα, έχουμε «συμμετρία βαθμίδας». Τα ψ, A_μ είναι «πεδία βαθμίδας». Διαφορετικές τιμές της

παραμέτρου a , αντιπροσωπεύουν διαφορετικές βαθμίδες. Η Lagrangian της QED είναι συμμετρική σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, όπως επίσης η Hamiltonian, οι πεδιακές εξισώσεις και οι τελεστές που παράγονται από αυτές.

Εφαρμόζοντας τώρα για το διατηρούμενο ρεύμα την σχέση (1.4.6), την οποία για ευκολία επαναφέρουμε εδώ

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \delta \phi_\alpha - F^\mu \quad (1.4.6)$$

Όπου επειδή $\delta \mathcal{L} = 0 \Rightarrow F^\mu = 0$ έχουμε:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} \delta A^\nu \quad (7.6.1)$$

Όμως:

$$\delta A^\nu = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \bar{\psi} i \gamma^\mu, \text{ και } \delta \psi = -i a \psi$$

Μετά την αντικατάσταση στην (7.5.1) , την απογύμνωση από την παράμετρο a και αφού πολλαπλασιάσουμε με την μονάδα ηλεκτρικού φορτίου παίρνουμε:

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \text{ και } Q = \int d^3x j^0 = e \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (7.6.2)$$

Η σχέση (7.5.2) είναι η ίδια με αυτήν που πήραμε για το ελεύθερο πεδίο Dirac στο κεφάλαιο 5. (σχέσεις (5.6.8), (5.6.9)). Το γεγονός αυτό ήταν εξάλλου αναμενόμενο αφού το φορτίο του φωτονίου είναι μηδέν, οπότε στην αλληλεπίδρασή του με το σωματίδιο Dirac, δεν είναι δυνατόν να μεταβάλλει το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο.

Θα εξετάσουμε τώρα ένα μετασχηματισμό της μορφής

$$\psi' = e^{-ia(x^\mu)} \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{ia(x^\mu)} \quad (7.6.3)$$

Μετασχηματισμοί αυτής της μορφής, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 1, ονομάζονται «τοπικοί εσωτερικοί μετασχηματισμοί». Η γωνία φάσης του μετασχηματισμού δεν είναι σταθερή, αλλά είναι μια χωροχρονική συνάρτηση $a = a(x^\mu)$. Αν η Lagrangian είναι αμετάβλητη σε ένα τέτοιο μετασχηματισμό, λέμε ότι αυτή παρουσιάζει «τοπική συμμετρία». Ο μετασχηματισμός είναι διαφορετικός σε κάθε σημείο αλλά σε κάθε σημείο παρουσιάζει συμμετρία. Πως συμπεριφέρεται η \mathcal{L}_{QED} σε ένα τέτοιο μετασχηματισμό όπως ο (7.6.3) ; Είναι φανερό ότι ο φωτονικός προσθετός \mathcal{L}_{em} είναι αμετάβλητος αφού δεν εμπεριέχει συνιστώσες του πεδίου ψ . Τι συμβαίνει με το φερμιονικό τμήμα;

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\psi}' (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' = \bar{\psi} e^{ia(x^\nu)} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{-ia(x^\nu)} \psi =$$

$$= \bar{\psi} e^{ia(x^\nu)} i \gamma^\mu (\partial_\mu \psi) e^{-ia(x^\nu)} + \bar{\psi} e^{ia(x^\nu)} i \gamma^\mu \psi (\partial_\mu e^{-ia(x^\nu)}) - \bar{\psi} e^{ia(x^\nu)} m e^{-ia(x^\nu)} \psi \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu a(x^\nu) \quad (7.6.4)$$

Το φερμιονικό τμήμα επομένως μεταβάλλεται κατά $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu a(x^\nu)$. Εξετάζουμε τώρα το τμήμα της αλληλεπίδρασης.

$$\mathcal{L}'_{int} = e\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'A_\mu = e\bar{\psi}e^{ia(x^\nu)}\gamma^\mu e^{-ia(x^\nu)}\psi A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \mathcal{L}_{int}$$

Επομένως αμετάβλητο μένει και το τμήμα της αλληλεπίδρασης. Επομένως η συνολική Lagrangian $\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int}$ μεταβάλλεται κατά την μεταβολή του φερμιονικού τμήματος $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu a(x^\nu)$. Όπως είδαμε όμως στο Κεφάλαιο 4 (σχέση (4.2.6)), το φωτονικό πεδίο είναι αμετάβλητο σε μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu f(x)$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε την ειδική μορφή για την συνάρτηση $f(x)$,

$$f(x^\nu) = -\frac{1}{e}a(x^\nu) \quad (7.6.5)$$

Και να μετασχηματίσουμε το φωτονικό πεδίο ως:

$$A_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x^\nu) \quad (7.6.6)$$

Εύκολα μπορεί να επιβεβαιώσει κανείς ότι υπό τον μετασχηματισμό (7.6.6), $\mathcal{L}'_{em} = \mathcal{L}_{em}$, ενώ εκτελώντας και τους δύο μετασχηματισμούς (7.6.3) και (7.6.6) στο τμήμα της αλληλεπίδρασης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{int} &= e\bar{\psi}'\gamma^\mu\psi'A'_\mu = e\bar{\psi}e^{ia(x^\nu)}\gamma^\mu e^{-ia(x^\nu)}\psi\left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x^\nu)\right) \Rightarrow \\ \mathcal{L}'_{int} &= e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu a(x^\nu) \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

Επιβάλλοντας επομένως και τους δύο μετασχηματισμούς στην ολική Lagrangian \mathcal{L}_{QED} έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{QED} &= \mathcal{L}'_{em} + \mathcal{L}'_D + \mathcal{L}'_{int} = \\ &= \mathcal{L}_{em} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu a(x^\nu) + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu a(x^\nu) = \\ &\mathcal{L}_{em} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{QED} \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι, υπό το ζεύγος των τοπικών μετασχηματισμών (7.5.3) και (7.5.6), η ολική Lagrangian \mathcal{L}_{QED} , μένει αμετάβλητη. Με άλλα λόγια έχουμε μια θεωρία αλληλεπίδρασης η οποία σέβεται την τοπική συμμετρία βαθμίδας. Η QED είναι η πρώτη και η απλούστερη από τις θεωρίες βαθμίδας. Το διατηρούμενο ρεύμα είναι το ίδιο με αυτό που υπολογίσαμε από την ολική συμμετρία (σχέση (7.6.2)).

Κεφάλαιο 8.

Ενεργός διατομή σκέδασης

8.1. Το πλάτος σκέδασης Feynman M .

Σε μια τυπική διαδικασία σκέδασης, η αρχική κατάσταση του συστήματος, περιλαμβάνει δύο σωματίδια $|i\rangle = |p_1, p_2\rangle$, ενώ η τελική κατάσταση είναι εν γένει, μια πολυσωματιδιακή κατάσταση $|f\rangle = |q_1, \dots, q_n\rangle$. Τα στοιχεία του πίνακα σκέδασης \hat{S} μπορούν να γραφούν όπως είδαμε στο κεφάλαιο 7, ως:

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) M_{fi} \quad (8.1.1)$$

Όπου: $p_i = p_1 + p_2$ και $q_f = q_1 + \dots + q_n$ είναι οι τετραορμές των σωματιδίων στην αρχική και την τελική κατάσταση αντίστοιχα. Η πιθανότητα να συμβεί η παραπάνω διαδικασία, δίνεται από το τετράγωνο του μέτρου του στοιχείου $S_{fi} = \langle f | S | i \rangle$. Υπολογίζουμε τα στοιχεία του πίνακα \hat{S} διαταρακτικά. Στην ελεύθερη θεωρία, όπου δεν έχουμε αλληλεπιδράσεις, ο πίνακας \hat{S} είναι απλώς ο ταυτοτικός πίνακας $\hat{1}$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$$\hat{S} = \hat{1} + i\hat{T} \quad (8.1.2)$$

Ο πίνακας \hat{T} , εκφράζει την απόκλιση από την θεωρία των ελεύθερων πεδίων. Μιας και ο πίνακας \hat{S} , πρέπει να μηδενίζεται, εκτός αν η αρχική και η τελική κατάσταση έχουν την ίδια συνολική 4-ορμή, είναι χρήσιμο να γράψουμε ένα παράγοντα δ-συνάρτησης, ο οποίος θα εξασφαλίζει την διατήρηση της ολικής 4-ορμής. Δηλαδή:

$$\hat{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) \hat{M} \quad (8.1.3)$$

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να εστιάσουμε την προσοχή μας, στον υπολογισμό του μη τετριμμένου τμήματος του πίνακα \hat{S} , δηλαδή του \hat{M} . Τα στοιχεία του πίνακα \hat{M} , είναι το ανάλογο του πλάτους σκέδασης f , της κβαντικής μηχανικής του ενός σωματιδίου. Μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε το κινηματικό μέρος του πίνακα \hat{S} , από το τμήμα που αφορά αποκλειστικά στην αλληλεπίδραση (interaction Hamiltonian).

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= |\langle f | \hat{S} - \hat{1} | i \rangle|^2 = |i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) M_{fi}|^2 = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) |M_{fi}|^2 \end{aligned}$$

Όπου $M_{fi} = \langle f | M | i \rangle$.

Μπορούμε να χειριστούμε το πρόβλημα που προέκυψε παραπάνω με το γινόμενο των δύο συναρτήσεων δέλτα, περιορίζοντας το σύστημά μας, σε χωροχρονικό «κυτίο» (V, T) . Πρώτα θα εφαρμόσουμε την ιδιότητα της δ-συνάρτησης $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$, για να γράψουμε $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f)$

Από την κανονικοποίηση κυτίου τώρα έχουμε:

$$2\pi\delta(p_1 - p_2) = \int dx e^{ix(p_1 - p_2)}$$

Όπου περιορίζοντας το εκθετικό στο διάστημα $[0, L]$ παίρνουμε

$$2\pi\delta(p_1 - p_2) = \int_0^L dx e^{ix(p_1 - p_2)} \Rightarrow 2\pi\delta(0) = \int_0^L dx = L$$

Η παραπάνω σχέση για τον τρισδιάστατο χώρο γράφεται ως:

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) = V \quad (8.1.4)$$

Ενώ για το χωροχρονικό «κυτίο» γράφεται ως:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = VT \quad (8.1.5)$$

Όπου V , T είναι ο όγκος και το χρονικό διάστημα της κανονικοποίησης αντίστοιχα, τα οποία θα θεωρήσουμε στο τέλος, ότι τείνουν στο άπειρο. Μπορούμε επομένως να αξιοποιήσουμε την μία από τις δ-συναρτήσεις και να γράψουμε:

$$\begin{aligned} |S_{fi}|^2 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) |M_{fi}|^2 = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) |M_{fi}|^2 = VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) |M_{fi}|^2 \Rightarrow \\ |S_{fi}|^2 &= VT (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) |M_{fi}|^2 \quad (8.1.6) \end{aligned}$$

8.2. Η πιθανότητα σκέδασης.

Η αρχική και η τελική κατάσταση θεωρούνται ιδιοκαταστάσεις της ορμής, επομένως προκειμένου, σύμφωνα με την υιοθετημένη κανονικοποίηση, να υπολογίσουμε την «διαφορική πιθανότητα» μετάβασης από την κατάσταση $|i\rangle$ στην κατάσταση $|f\rangle$, πρέπει να διαιρέσουμε το $|S_{fi}|^2$ με τις αντίστοιχες νόρμες τους.

$$dP_{fi} = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} \quad (8.2.1)$$

Η συνολική διαφορική πιθανότητα θα υπολογισθεί, αθροίζοντας την παραπάνω πιθανότητα, για όλες τις τελικές καταστάσεις $|f\rangle$ οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα στοιχειώδη φασικό όγκο.

$$dP_{tot} = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle \langle f|f\rangle} dN_f \quad (8.2.2)$$

Όπου dN_f το πλήθος των κβαντικών καταστάσεων, στη γειτονιά της τελικής κατάστασης $|f\rangle$, εφόσον πρόκειται για μετάβαση προς το συνεχές φάσμα και όχι προς μια ιδεατή τελική κατάσταση.

8.3. Ο χώρος των φάσεων

Η κατάσταση κίνησης ενός σωματιδίου, μπορεί να παρασταθεί με ένα σημείο στον 6-διάστατο χώρο των φάσεων $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ και αντίστροφα κάθε σημείο του χώρου

των φάσεων, αντιστοιχεί σε μια κατάσταση του σωματιδίου. Στην κλασσική μηχανική, υπάρχει ένας άπειρος αριθμός διαθέσιμων σημείων του φασικού χώρου, για ένα σωματίδιο περιορισμένο σε μια περιοχή του χώρου, το οποίο έχει μια ορισμένη ορμή. Η κβαντομηχανική απαιτεί τα σημεία του φασικού χώρου, που αντιστοιχούν στις κβαντικές καταστάσεις, να απέχουν μεταξύ τους συγκεκριμένες αποστάσεις. Για παράδειγμα σε ένα πηγάδι δυναμικού πλάτους L , με άπειρο βάθος, οι επιτρεπόμενες τιμές της ορμής κατανέμονται διακριτά

$$p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n \quad (8.3.1)$$

Επομένως μια κατάσταση του σωματιδίου, αντιστοιχεί στον φασικό χώρο, σε ένα στοιχειώδη όγκο

$$dV_\phi = dx_1 dx_2 dx_3 dp_1 dp_2 dp_3 = dx_1 dx_2 dx_3 \frac{2\pi\hbar}{dx_1} \frac{2\pi\hbar}{dx_2} \frac{2\pi\hbar}{dx_3} = (2\pi\hbar)^3 \Rightarrow$$

$$dV_\phi = (2\pi\hbar)^3 \quad (8.3.2)$$

Συμπεραίνουμε επομένως, ότι ο αριθμός των επιτρεπόμενων καταστάσεων N σε έναν χώρο φάσεων V_ϕ , δεν θα είναι πλέον άπειρος, αλλά πεπερασμένος και μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος του όγκου των φάσεων προς τον στοιχειώδη φασικό όγκο.

$$N = \frac{V_\phi}{dV_\phi} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x \int d^3p \quad (8.3.3)$$

Αν το σωματίδιο είναι περιορισμένο σε ένα γεωμετρικό όγκο V τότε έχουμε:

$$N = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \quad \text{και για } \hbar = 1 \text{ έχουμε } N = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p$$

Επομένως ο αριθμός των κβαντικών καταστάσεων με ορμή μεταξύ των \vec{q}_f και $\vec{q}_f + d\vec{q}_f$ για κάθε ένα από τα n σωματίδια της τελικής κατάστασης, με ορμή \vec{q}_n , είναι:

$$dN_f = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3q \quad (8.3.4)$$

Όπου V είναι ο ευκλείδειος όγκος στον οποίο βρίσκεται το σωματίδιο. Αν για παράδειγμα στην τελική κατάσταση έχουμε δύο σωματίδια με ορμές \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 , τότε ο συνολικός αριθμός των τελικών καταστάσεων θα είναι:

$$dN_f = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p'_1 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p'_2$$

Ενώ για τα n τελικά σωματίδια με ορμές q_j

$$dN_f = \prod_{j=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} d^3q_j \quad (8.3.5)$$

Έτσι για την «συνολική διαφορική πιθανότητα» μετάβασης από την $|i\rangle$ στην $|f\rangle$, έχουμε από την (8.2.2)

$$dP_{tot} = \frac{|S_{fi}|^2}{\langle i|i\rangle\langle f|f\rangle} \prod_{j=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 q_j \quad (8.3.6)$$

8.4. Κανονικοποίηση της πιθανότητας

Για την κανονικοποίηση της πιθανότητας χρειάζεται να υπολογίσουμε τον παρονομαστή της σχέσεως (8.3.6). Η συμφωνηθείσα στο δεύτερο κεφάλαιο κανονικοποίηση [σχέση (2.7.9)] είναι:

$$\begin{aligned} \langle p_1|p_2\rangle &= 2E_{\vec{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \Rightarrow \langle p_1|p_1\rangle = 2E_{\vec{p}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0) \Rightarrow \\ \langle p_1|p_1\rangle &= 2E_{\vec{p}_1} V \quad (8.4.1) \end{aligned}$$

Οπότε για μία σκέδαση $2 \rightarrow 2$

$$\langle i|i\rangle = \langle p_1, p_2|p_1, p_2\rangle = 2E_{\vec{p}_1} V 2E_{\vec{p}_2} V = 2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2} V^2$$

και

$$\langle f|f\rangle = \langle p'_1, p'_2|p'_1, p'_2\rangle = 2E_{\vec{p}'_1} 2E_{\vec{p}'_2} V^2$$

Μετά την αντικατάσταση έχουμε

$$\begin{aligned} dP_{tot} &= \frac{VT(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) |M_{fi}|^2}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2} V^2 2E_{\vec{p}'_1} 2E_{\vec{p}'_2} V^2} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p'_1 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 p'_2 \Rightarrow \\ dP_{tot} &= \frac{T}{V} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) |M_{fi}|^2 \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}'_1}} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}'_2}} \quad (8.4.2) \end{aligned}$$

Ο παράγοντας που εμφανίζεται εδώ, και στην γενικότερη περίπτωση των n εξερχόμενων σωματιδίων έχει την μορφή:

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - q_f) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}_j}} \quad (8.4.3)$$

ονομάζεται «Λόρεντζ αναλλοίωτος φασικός χώρος» (Lorentz invariant phase space). Τελικά παίρνουμε

$$dP_{tot(f)} = \frac{T}{V} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} |M_{fi}|^2 d\Pi_{LIPS} \quad (8.4.4)$$

8.5. Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης.

Η ενεργός διατομή σκέδασης σ είναι ένα πειραματικά μετρούμενο μέγεθος, το οποίο έχει διαστάσεις εμβαδού, $(\text{μήκος})^2$. Για παράδειγμα, ο Rutherford, ενδιαφερόμενος για το

μέγεθος r του ατομικού πυρήνα, βομβάρδισε φύλλα χρυσού με σωματίδια άλφα (α), και μετρώντας τα σκεδαζόμενα σωματίδια, κατάφερε να μετρήσει την ενεργό διατομή $\sigma = \pi r^2$, του πυρήνα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν απομονωμένο πυρήνα ο οποίος βομβαρδίζεται από μία δέσμη σωματιδίων, πυκνότητας $n_{in} = dN_{in}/dV$, κινούμενα με ταχύτητα v_{in} , ως προς τον πυρήνα. Η ενεργός διατομή σκέδασης ορίζεται ως « ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων που σκεδάζονται στη μονάδα του χρόνου, dN_{sc}/dt προς την ροή Φ των εισερχόμενων σωματιδίων »

$$\sigma = \frac{\text{αριθμός σκεδαζόμενων σωματιδίων}}{(\text{χρόνος του πειράματος})(\text{πυκνότητα σωματιδίων της δέσμης})(\text{ταχύτητα δέσμης})}$$

$$\sigma = \frac{N_{sc}}{T\Phi} \quad (8.5.1)$$

Όπου T ο χρόνος του πειράματος, δηλαδή ο χρόνος που χρειάζονται όλα τα εισερχόμενα σωματίδια να χτυπήσουν το στόχο και Φ η εισερχόμενη ροή σωματιδίων. Αν το εμβαδό διατομής της προσπίπτουσας δέσμης είναι A , η ροή ορίζεται ως «ο ρυθμός με τον οποίο διέρχονται σωματίδια, ανά μονάδα εμβαδού διατομής της δέσμης»

$$\Phi = \frac{dN_{in}/dt}{A} = \frac{dN_{in}}{A dt} = \frac{n_{in} dV}{A dt} = \frac{n_{in} A dx}{A dt} = n_{in} v \Rightarrow \Phi = n_{in} v$$

Στο πείραμα μετράμε επίσης την «διαφορική ενεργό διατομή σκέδασης» ανά μονάδα στερεής γωνίας, $d\sigma/d\Omega$, η οποία ορίζεται ως « ο αριθμός των σκεδαζόμενων σωματιδίων, σε μια ορισμένη στερεά γωνία $d\Omega$, στη μονάδα του χρόνου $dN_{sc(\Omega)}/dt$, προς την ροή Φ εισερχομένων σωματιδίων». Αυτή μας δίνει πληροφορίες για το σχήμα του σκεδάζοντος αντικειμένου ή για την μορφή του δυναμικού σκέδασης.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN_{sc(\Omega)}/dt}{d\Omega \Phi} = \frac{dN_{sc(\Omega)}/dt}{d\Omega n_{in} v} \quad (8.5.2)$$

Όπου $d\sigma$ είναι η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης. Η διαφορική πιθανότητα σκέδασης, ορίζεται κλασικά, ως ο λόγος των σκεδαζόμενων σωματιδίων σε μια στερεή γωνία γύρω από τον στόχο $dN_{sc(\Omega)}$ προς τον συνολικό αριθμό των εισερχόμενων σωματιδίων.

$$dP = dN_{sc(\Omega)}/N_{in} = dN_{sc}/n_{in}V \Rightarrow dN_{sc(\Omega)} = dP \cdot n_{in}V$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (8.5.2), μετά τις απλοποιήσεις έχουμε:

$$d\sigma = \frac{dP \cdot V}{dt v} \quad (8.5.3)$$

Όπου dP/dt είναι η πιθανότητα μετάβασης στη μονάδα του χρόνου. Θεωρώντας τον όγκο και το χρόνο του πειράματος οπότε $dt \rightarrow T$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι, πρακτικά είναι αδύνατον να συγκρούονται κάθε φορά, παραπάνω από δύο σωματίδια, (όπως εξάλλου και στα διαγράμματα Feynman), έχουμε:

$$d\sigma = \frac{V}{T v} dP \quad (8.5.4)$$

Όπου V, T ο ολικός όγκος και χρόνος αντίστοιχα του πειράματος και η v μπορεί να αντικατασταθεί από την v_r , δηλαδή την σχετική ταχύτητα των σωματιδίων που σκεδάζονται.

Από την κλασσική άποψη, ένα σωματίδιο άλφα για παράδειγμα, ή θα σκεδαστεί ή δεν θα σκεδαστεί από τον πυρήνα. Κβαντομηχανικά όμως το σωματίδιο έχει μια πιθανότητα να σκεδαστεί! Η διαφορική, κανονικοποιημένη πιθανότητα, δίνεται όπως είπαμε παραπάνω (8.4.4) από την σχέση

$$dP_{tot(fi)} = \frac{T}{V} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} |M_{fi}|^2 d\Pi_{LIPS}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην (8.5.4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{V}{Tv_r} \frac{T}{V} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} |M_{fi}|^2 d\Pi_{LIPS} \Rightarrow \\ d\sigma &= \frac{1}{v_r} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} |M_{fi}|^2 d\Pi_{LIPS} \quad (8.5.5) \end{aligned}$$

Η σχέση (8.5.5), στην περίπτωση της σκέδασης $2 \rightarrow 2$ παίρνει την μορφή:

$$d\sigma = \frac{1}{v_r} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}'_1}} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}'_2}} \quad (8.5.6)$$

Οι παράγοντες V, T έχουν πλέον απαλειφθεί, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$V \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$$

Το γινόμενο

$$F = 4v_r E_{\vec{p}_1} E_{\vec{p}_2} \quad (8.5.7)$$

συνδέεται με την ροή των σωματιδίων που προσπίπτουν στον στόχο και ονομάζεται «παράγοντας ροής Moller». Στην περίπτωση συγγραμμικών σκεδάσεων μπορεί να πάρει την παρακάτω εύχρηστη μορφή (8.5.8), η οποία είναι αμετάβλητη σε μετασχηματισμούς Lorentz, μιας και πρόκειται για βαθμωτή ποσότητα. Όπου χρησιμοποιούμε τους δείκτες 1,2 για τα εισερχόμενα σωματίδια.

$$\begin{aligned} F &= 4v_{12} E_1 E_2 = 4|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| E_1 E_2 = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \Rightarrow \\ F &= 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (8.5.8) \end{aligned}$$

Απόδειξη:

Πράγματι, επειδή $p^\mu = mu^\mu = m\gamma(1, \vec{v}) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) = (E, \vec{p}) \Rightarrow \vec{p} = m\gamma\vec{v} \Rightarrow \vec{p} = E\vec{v}$, προκύπτει ότι:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$$

Αρκεί επομένως να αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned}
|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|E_1E_2 &= \sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2} \Rightarrow \left(\left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| \right)^2 E_1^2 E_2^2 = (p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2 \Rightarrow \\
(E_2\vec{p}_1 - E_1\vec{p}_2)^2 &= (E_1E_2 - \vec{p}_1\vec{p}_2)^2 - m_1^2m_2^2 \Rightarrow \\
E_2^2\vec{p}_1^2 + E_1^2\vec{p}_2^2 - 2E_1E_2\vec{p}_1\vec{p}_2 &= E_1^2E_2^2 + \vec{p}_1^2\vec{p}_2^2 - 2E_1E_2\vec{p}_1\vec{p}_2 - m_1^2m_2^2 \Rightarrow \\
E_2^2\vec{p}_1^2 + E_1^2\vec{p}_2^2 &= (m_1^2 + \vec{p}_1^2)(m_2^2 + \vec{p}_2^2) + \vec{p}_1^2\vec{p}_2^2 - m_1^2m_2^2 \Rightarrow \\
E_2^2\vec{p}_1^2 + E_1^2\vec{p}_2^2 &= m_1^2\vec{p}_2^2 + m_2^2\vec{p}_1^2 + \vec{p}_1^2\vec{p}_2^2 + \vec{p}_1^2\vec{p}_2^2 \Rightarrow \\
E_2^2\vec{p}_1^2 + E_1^2\vec{p}_2^2 &= \vec{p}_2^2(m_1^2 + \vec{p}_1^2) + \vec{p}_1^2(m_2^2 + \vec{p}_2^2) \Rightarrow \\
E_2^2\vec{p}_1^2 + E_1^2\vec{p}_2^2 &= \vec{p}_2^2E_1^2 + \vec{p}_1^2E_2^2
\end{aligned}$$

Το οποίο βέβαια είναι αληθές. Τέλος της απόδειξης.

Έτσι στην περίπτωση μιας σκέδασης $2 \rightarrow 2$ η γενική σχέση για την διαφορική ενεργό διατομή παίρνει την μορφή:

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2)}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}} \frac{d^3p'_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}'_1}} \frac{d^3p'_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}'_2}} \quad (8.5.9)$$

Την σχέση αυτή, στη συγκεκριμένη μορφή, θα χρησιμοποιήσουμε στο φαινόμενο Compton. Στην βιβλιογραφία παρουσιάζεται συχνά στην μορφή:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{|M_{fi}|^2}{F} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_3 - q_4) \times \frac{1}{(2\pi)^3} d^4q_3 \delta(q_3^2 - m_3^2) \theta(q_3^0) \times \\
&\times \frac{1}{(2\pi)^3} d^4q_4 \delta(q_4^2 - m_4^2) \theta(q_4^0) \quad (8.5.10)
\end{aligned}$$

Απόδειξη:

Ας την δούμε! Αρκεί να δείξουμε ότι για τα \vec{q}_3, \vec{q}_4 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση:

$$\frac{d^3\vec{q}}{2E_{\vec{q}}} = d^4q \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0)$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\int d^4q \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0) &= \int d^3\vec{q} \int d q^0 \delta(q^{0^2} - \vec{q}^2 - m^2) \theta(q^0) \\
&= \int d^3\vec{q} \int d q^0 \delta(q^{0^2} - E_{\vec{q}}^2) \theta(q^0) = \\
&= \int d^3\vec{q} \int d q^0 \left[\frac{\delta(q^0 - E_{\vec{q}})}{2E_{\vec{q}}} + \frac{\delta(q^0 + E_{\vec{q}})}{2E_{\vec{q}}} \right] \theta(q^0)
\end{aligned}$$

Όπου όμως ο δεύτερος προσθετέος μηδενίζεται λόγω της συνάρτησης Heaviside $\theta(q^0)$

Έτσι έχουμε:

$$\int d^4q \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0) = \int d^3\vec{q} \int dq^0 \frac{\delta(q^0 - E_{\vec{q}})}{2E_{\vec{q}}} \theta(q^0) \Rightarrow$$

$$\int \frac{d^3\vec{q}}{2E_{\vec{q}}} = \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0)$$

οπότε

$$\frac{d^3\vec{q}}{2E_{\vec{q}}} = d^4q \delta(q^2 - m^2) \theta(q^0)$$

8.6. Σκέδαση στο σύστημα κέντρου μάζας.

Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω, σε μια ειδική περίπτωση, μελετώντας μια σκέδαση $2 \rightarrow 2$, στο σύστημα κέντρου μάζας. Για τα εισερχόμενα σωματίδια 4-ορμής p_1, p_2 και τα εξερχόμενα με 4-ορμές p_3, p_4 , στο σύστημα κέντρου μάζας, από την διατήρηση της 4-ορμής παίρνουμε:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \text{ και } \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \quad (8.6.1)$$

επιπλέον για τις ενέργειες στο σύστημα κέντρου μάζας ισχύει:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E_{cm} \quad (8.6.2)$$

όπου E_{cm} , η συνολική ενέργεια κέντρου μάζας. Για τον στοιχειώδη φασικό χώρο έχουμε:

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_4} \quad (8.6.3)$$

Επειδή $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ θέτουμε $|\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = p_f$, οπότε $E_3 = \sqrt{m_3^2 + p_f^2}$ και ομοίως $E_4 = \sqrt{m_4^2 + p_f^2}$ ολοκληρώνοντας ως προς \vec{p}_3, \vec{p}_4 παίρνουμε

$$\Pi_{LIPS} = \int d^3p_3 \int d^3p_4 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_3} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_4} \quad (8.6.4)$$

Τώρα επειδή $\int d^3p_4 = \int d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\Pi_{LIPS} = \int d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2 \int d^3p_3 \dots$$

Οπότε ο στοιχειώδης φασικός χώρος που αντιστοιχεί στην στερεή γωνία $d\Omega$ είναι:

$$d\Pi_{LIPS} = d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2 \int d^3p_3 \dots \quad (8.6.5)$$

Για την συνάρτηση δέλτα μπορούμε να γράψουμε:

$$\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) =$$

$$= \delta(E_{cm} - E_3 - E_4) \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4)$$

Αντικαθιστώντας στην (8.6.5) και ολοκληρώνοντας ως προς \vec{p}_3 παίρνουμε:

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int_0^\infty dp_f p_f^2 \frac{1}{E_3} \frac{1}{E_4} \delta(E_{cm} - E_3 - E_4) \quad (8.6.6)$$

Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = E_3 + E_4 - E_{cm} = \sqrt{m_3^2 + p_f^2} + \sqrt{m_4^2 + p_f^2} - E_{cm}$$

$$\frac{dx}{dp_f} = \frac{d}{dp_f} (E_3 + E_4 - E_{cm}) = \frac{p_f}{E_3} + \frac{p_f}{E_4} = p_f \frac{E_3 + E_4}{E_3 E_4} = p_f \frac{E_{cm}}{E_3 E_4}$$

$$\begin{aligned} d\Pi_{LIPS} &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int_{m_3+m_4-E_{cm}}^\infty dx \frac{p_f(x)}{E_{cm}} \delta(x) = \\ &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f(0)}{E_{cm}} \theta(E_{cm} - m_3 - m_4) \end{aligned}$$

Για $E_{cm} > m_3 + m_4$ παίρνουμε:

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f(0)}{E_{cm}} \quad (8.6.7)$$

Για να υπολογίσουμε το $p_f(0)$, αρκεί στην αλλαγή μεταβλητής να θέσουμε:

$$x = 0 \Rightarrow E_3 + E_4 = E_{cm}, \text{ οπότε προκύπτει: } p_f(0) = p_f \text{ τελικά:}$$

$$d\Pi_{LIPS} = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{cm}} \quad (8.6.8)$$

Επομένως αντικαθιστώντας την (8.6.8) στην (8.5.5) παίρνουμε

$$d\sigma = \frac{1}{v_r} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} |M_{fi}|^2 \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{cm}} \quad (8.6.9)$$

Τώρα όπως και παραπάνω $p^\mu = mu^\mu = m\gamma(1, \vec{v}) = (m\gamma, m\gamma\vec{v}) = (E, \vec{p})$. Επομένως

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$$

Και η σχετική ταχύτητα γράφεται:

$$v_r = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} - \frac{\vec{p}_2}{E_2} \right| = \left| \frac{\vec{p}_1}{E_1} + \frac{\vec{p}_1}{E_2} \right| = |\vec{p}_1| \frac{E_{cm}}{E_1 E_2}$$

Μετά την αντικατάσταση $E_1 = E_{\vec{p}_1}$, $E_2 = E_{\vec{p}_2}$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = |\vec{p}_i|$, $|\vec{p}_3| = |\vec{p}_4| = |\vec{p}_f| = p_f$ στη σχέση (8.6.9) και τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$d\sigma = |M_{fi}|^2 \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} d\Omega \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |M_{fi}|^2 \quad (8.6.10)$$

Ελαστική σκέδαση. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση της ελαστικής σκέδασης , $p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4$ στο σύστημα κέντρου μάζας. Ελαστική χαρακτηρίζεται η σκέδαση αν $m_1 = m_3$ και $m_2 = m_4$, για παράδειγμα, η σκέδαση ηλεκτρονίου πρωτονίου, $ep \rightarrow ep$. Στο σύστημα κέντρου μάζας έχουμε:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}_i \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 = \vec{p}_f$$

Ενώ οι τετραορμές των σωματιδίων γράφονται ως:

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_i), \quad p_2 = (E_1, -\vec{p}_i), \quad p_3 = (E_3, \vec{p}_f), \quad p_4 = (E_4, -\vec{p}_f)$$

Η διατήρηση της 4-ορμής μας δίνει:

$$p_1 + p_2 = (E_1 + E_2, \vec{0}) = p_3 + p_4 = (E_3 + E_4, \vec{0}) = (E_{cm}, \vec{0}) \quad (8.6.11)$$

Η (8.6.11) μας δίνει:

$$(p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2 = m_3^2 + m_4^2 + 2p_3 p_4 \Rightarrow p_1 p_2 = p_3 p_4$$

$$\Rightarrow E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 = E_3 E_4 - \vec{p}_3 \vec{p}_4 \Rightarrow E_1 E_2 + \vec{p}_1^2 = E_3 E_4 + \vec{p}_3^2 \Rightarrow$$

$$E_1 E_2 + E_1^2 - m_1^2 = E_3 E_4 + E_3^2 - m_3^2 \Rightarrow E_1(E_1 + E_2) = E_3(E_3 + E_4) \Rightarrow E_1 = E_3 \Rightarrow$$

$$E_1^2 = E_3^2 \Rightarrow m_1^2 + \vec{p}_1^2 = m_3^2 + \vec{p}_3^2 \Rightarrow \vec{p}_1^2 = \vec{p}_3^2 \Rightarrow |\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| \Rightarrow$$

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| \quad (8.6.12)$$

Από την (8.6.10) και την (8.6.12) παίρνουμε για την ελαστική σκέδαση:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 E_{cm}^2} |M_{fi}|^2 \quad (8.6.13)$$

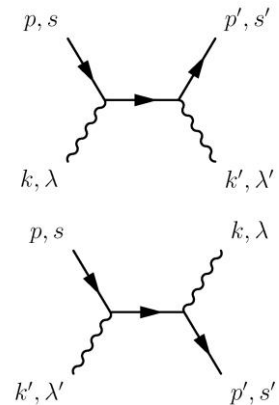
Κεφάλαιο 9.

Σκέδαση Compton QED

Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε την σκέδαση Compton στα πλαίσια της QED, προκειμένου να δείξουμε πως η QED μπορεί να μας οδηγήσει στην σχέση Klein–Nishina. Χρησιμοποιούμε τα δένδροειδή διαγράμματα Feynman που αναφέρονται στην σκέδαση Compton. Εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους κανόνες Feynman για να προσδιορίσουμε το πλάτος σκέδασης. Τετραγωνίζουμε το πλάτος και υπολογίζουμε τον μέσο όρο για τις πολώσεις των εισερχόμενων φωτονίων. Αυτό είναι απαραίτητο δεδομένου ότι η προσπίπτουσα δέσμη θεωρήθηκε μη πολωμένη. Υπολογίζουμε ακόμα, το άθροισμα των καταστάσεων πόλωσης για τα σκεδαζόμενα φωτόνια. Το ίδιο είναι απαραίτητο και για το σπιν των ηλεκτρονίων. Τα αθροίσματα αυτά εκφράζονται ως μία σειρά από ίχνη, γινομένων πινάκων Dirac, τα οποία υπολογίζουμε αναλυτικά. Βρίσκουμε μια έκφραση, για τον μέσο όρο του τετραγώνου του συνολικού πλάτους σκέδασης, το οποίο είναι μια Lorentz αμετάβλητη ποσότητα. Το ολοκλήρωμα του χώρου των φάσεων, υπολογίζεται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Αποδεικνύουμε την σχέση για το $d\sigma/d(\cos\theta)$ σε συνάρτηση με την αρχική και την τελική ενέργεια των φωτονίων και της γωνίας σκέδασης. Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως σχέση Klein–Nishina. Η συμφωνία της, με τα πειραματικά δεδομένα, υποδεικνύει ότι η QED, παρέχει μια εξαιρετικά ακριβή και σχετικιστικά αμετάβλητη, περιγραφή του ηλεκτρομαγνητισμού.

9.1. Το στοιχείο του πίνακα M

Στην προσέγγιση χαμηλότερης τάξεως, συνεισφέρουν τα δύο δένδροειδή διαγράμματα Feynman που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Στο πρώτο, το ηλεκτρόνιο (p, s) απορροφά το φωτόνιο (k, λ) και στη συνέχεια σκεδαζεται στο (p', s') εκπέμποντας το φωτόνιο (k', λ') . Στο δεύτερο σχήμα, το ηλεκτρόνιο (p, s) εκπέμπει πρώτα το φωτόνιο (k', λ') και στη συνέχεια απορροφά το φωτόνιο (k, λ) και σκεδαζεται στο ηλεκτρόνιο (p', s') . Αν εναλλάξουμε την θέση των ηλεκτρονίων, τα δύο διαγράμματα συμπίπτουν. Επομένως τα δύο πλάτη M_1, M_2 που αντιστοιχούν σε αυτά πρέπει να προστεθούν $M = M_1 + M_2$. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες Feynman για την QED που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 7, μπορούμε να γράψουμε τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα σκέδασης. Στο πρώτο διάγραμμα η ορμή του διαδότη, δεδομένου ότι το φωτόνιο (k, λ) είναι εισερχόμενο, είναι $q = p + k$. Στο δεύτερο, όπου το φωτόνιο (k', λ') είναι εξερχόμενο $q = p - k'$. Έτσι έχουμε:



$$iM_1 = \bar{u}(p', s')(-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^*(k', \lambda') \frac{i(\gamma p + \gamma k + m)}{(p + k)^2 - m^2} (-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k, \lambda)u(p, s) \quad (9.1.1)$$

Όπου υιοθετήσαμε χάριν συντομίας, το σύμβολο

$$\gamma p \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu p_\mu$$

$$iM_2 = \bar{u}(p', s')(-ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu(k, \lambda) \frac{i(\gamma p - \gamma k' + m)}{(p - k')^2 - m^2} (-ie\gamma^\mu)\epsilon_\mu^*(k', \lambda')u(p, s) \quad (9.1.2)$$

Οπότε για το άθροισμά τους έχουμε:

$$\begin{aligned} iM &= iM_1 + iM_2 = \\ &= -ie^2\epsilon_\mu^*(k', \lambda')\epsilon_\nu(k, \lambda)\bar{u}(p', s') \left[\frac{\gamma^\mu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^\nu}{(p + k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\nu(\gamma p - \gamma k' + m)\gamma^\mu}{(p - k')^2 - m^2} \right] u(p, s) \end{aligned}$$

Οι παρονομαστές στους διαδότες μπορούν να γραφούν ποιο κομψά ως

$$(p + k)^2 - m^2 = p^2 + 2pk + k^2 - m^2 = m^2 + 2pk + 0 - m^2 = 2pk \Rightarrow$$

$$(p + k)^2 - m^2 = 2pk \quad (9.1.3)$$

Με παρόμοιο τρόπο

$$(p - k')^2 - m^2 = -2pk' \quad (9.1.4)$$

Για τους αριθμητές έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^\nu u(p, s) &= \gamma^\mu(\gamma^\rho p_\rho \gamma^\nu + \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu + m\gamma^\nu)u(p, s) = \\ &= \gamma^\mu(p_\rho \gamma^\rho \gamma^\nu + \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu m)u(p, s) = \gamma^\mu(p_\rho [2g^{\rho\nu} - \gamma^\nu \gamma^\rho] + \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu m)u(p, s) \\ &= \gamma^\mu(2p^\nu - \gamma^\nu \gamma^\rho p_\rho + \gamma^\rho k_\rho \gamma^\nu + \gamma^\nu m)u(p, s) = \\ &= \gamma^\mu(2p^\nu + (\gamma k)\gamma^\nu)u(p, s) - \gamma^\mu \gamma^\nu (\gamma^\rho p_\rho - m)u(p, s) \end{aligned}$$

Από την σχέση (5.2.2) όμως ισχύει ότι $(\gamma^\rho p_\rho - m)u(p, s) = 0$. Οπότε:

$$\gamma^\mu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^\nu u(p, s) = [\gamma^\mu(\gamma k)\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu]u(p, s) \quad (9.1.5)$$

Ομοίως για τον αριθμητή του δευτέρου κλάσματος:

$$\gamma^\nu(\gamma p - \gamma k' + m)\gamma^\mu u(p, s) = [-\gamma^\nu(\gamma k')\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu]u(p, s) \quad (9.1.6)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε το στοιχείο του πίνακα ποιο κομψά

$$iM = -ie^2\epsilon_\mu^*(k', \lambda')\epsilon_\nu(k, \lambda)\bar{u}(p', s') \left[\frac{\gamma^\mu(\gamma k)\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2pk} + \frac{-\gamma^\nu(\gamma k')\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2pk'} \right] u(p, s)$$

Θέτουμε:

$$Q^{\mu\nu} = \left[\frac{\gamma^\mu(\gamma k)\gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2pk} + \frac{-\gamma^\nu(\gamma k')\gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2pk'} \right] \quad (9.1.7)$$

Οπότε το στοιχείο του πίνακα και για τις δύο διαδικασίες γράφεται ως:

$$iM = -ie^2\epsilon_\mu^*(k', \lambda')\epsilon_\nu(k, \lambda)\bar{u}(p', s')Q^{\mu\nu}u(p, s) \quad (9.1.8)$$

Σπίν και πόλωση

Τα συγκρουόμενα σωματίδια (ηλεκτρόνια – φωτόνια) είναι μη πολωμένα οπότε θα χρειαστούμε τον μέσο όρο του $|M|^2$ για το σπίν των ηλεκτρονίων και την πόλωση των φωτονίων. Επίσης η πόλωση των σωματιδίων στην τελική κατάσταση είναι μη ανιχνεύσιμη, οπότε θα χρειαστούμε το άθροισμα των τελικών καταστάσεων σπίν και πόλωσης αντίστοιχα.

9.2. Μέσοι όροι και αθροίσματα σπίν

Υπολογίζουμε πρώτα τον μέσο όρο για το σπιν των ηλεκτρονίων στην αρχική κατάσταση και το άθροισμα για τις τελικές καταστάσεις σπίν των ηλεκτρονίων. Υπολογίζουμε δηλαδή από την σχέση (9.1.8) την παράσταση.

$$A = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} |M|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} e^4 \epsilon_\mu^*(k', \lambda') \epsilon_\nu(k, \lambda) \epsilon_\rho(k', \lambda') \epsilon_\sigma^*(k, \lambda) \sum_{s,s'} [\bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s)] [\bar{u}(p', s') Q^{\rho\sigma} u(p, s)]^* \quad (9.2.2)$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα, είναι καλό να προετοιμάσουμε μερικούς από τους όρους του. Πρώτα παρατηρούμε ότι η παράσταση $\bar{u}(p', s') Q^{\rho\sigma} u(p, s)$ εκφράζει μια βαθμωτή ποσότητα (scalar). Επομένως:

$$[\bar{u}(p', s') Q^{\rho\sigma} u(p, s)]^* = [\bar{u}(p', s') Q^{\rho\sigma} u(p, s)]^\dagger = u(p, s)^\dagger (Q^{\rho\sigma})^\dagger \bar{u}(p', s')^\dagger$$

$$\text{Επειδή } \bar{u} = u^\dagger \gamma^0 \text{ έχουμε } \bar{u}^\dagger = (\gamma^0)^\dagger u = \gamma^0 u$$

Επομένως η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$u(p, s)^\dagger (Q^{\rho\sigma})^\dagger \bar{u}(p', s')^\dagger = u(p, s)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 u(p', s') =$$

$$= \bar{u}(p, s) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 u(p', s')$$

Επομένως

$$[\bar{u}(p', s') Q^{\rho\sigma} u(p, s)]^* = \bar{u}(p, s) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 u(p', s') \quad (9.2.3)$$

Με την αντικατάσταση της (9.2.3) στο άθροισμα της (9.2.2), το άθροισμα αυτό γράφεται:

$$\sum_{s,s'} \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} u(p, s) \bar{u}(p, s) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 u(p', s') =$$

$$\sum_{s'} \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} \left[\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) \right] [\gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 u(p', s')]$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την σχέση πληρότητας (5.2.18)

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \gamma p + m$$

Οπότε το άθροισμα μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{s'} \bar{u}(p', s') Q^{\mu\nu} (\gamma p + m) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 u(p', s')$$

Συμβολίζουμε τώρα με G τον πίνακα 4×4

$$G = Q^{\mu\nu} (\gamma p + m) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 \quad (9.2.4)$$

Και γράφουμε το άθροισμα ως:

$$\sum_{s'} \bar{u}(p', s') G u(p', s')$$

Γράφοντας τώρα ρητά τους δείκτες στον πολλαπλασιασμό των πινάκων, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{s'} \bar{u}(p', s')_i G_{ij} u(p', s')_j &= G_{ij} \left[\sum_s u(p', s') \bar{u}(p', s') \right]_{ji} = G_{ij} (\gamma p' + m)_{ji} = \\ &= \text{Tr}[G(\gamma p' + m)] = \text{Tr}[Q^{\mu\nu} (\gamma p + m) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 (\gamma p' + m)] \end{aligned}$$

Υπολογίσαμε επομένως το άθροισμα της σχέσεως (9.2.2), όπου μετά την αντικατάσταση γράφεται ως:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} e^4 \epsilon_\mu^*(k', \lambda') \epsilon_\nu(k, \lambda) \epsilon_\rho(k', \lambda') \epsilon_\sigma^*(k, \lambda) \times \\ &\times \text{Tr}[Q^{\mu\nu} (\gamma p + m) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 (\gamma p' + m)] \quad (9.2.5) \end{aligned}$$

9.3. Μέσοι όροι και αθροίσματα πόλωσης

Συνεχίζουμε υπολογίζοντας τον μέσο όρο για την αρχική πόλωση των φωτονίων και το άθροισμα των τελικών καταστάσεων πόλωσης των φωτονίων. Υπολογίζουμε δηλαδή την παράσταση

$$B = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} A = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{1}{2} \sum_{s, s'} |M|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 \quad (9.3.1)$$

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα

$$\sum_{\lambda} \epsilon_\sigma^*(k, \lambda) \epsilon_\nu(k, \lambda) \rightarrow -g_{\sigma\nu} \quad (9.3.2)$$

Το βέλος υποδεικνύει ότι δεν πρόκειται για κάποια ισότητα αλλά για μια ισοδύναμη αντικατάσταση η οποία μπορεί να προκύψει από την ταυτότητα Ward. Η ταυτότητα αυτή, προκύπτει από το γεγονός που σχολιάσαμε στην παράγραφο (4.9), ότι δηλαδή η μέση ενέργεια χρονοειδών και διαμηκών φωτονίων είναι αντίθετες. Έτσι η σχέση (4.3.6) για $\lambda = 1, 2$ μπορεί να γραφεί όπως η (9.3.2).

Αντικαθιστώντας την (9.3.2) στην (9.3.1) παίρνουμε:

$$B = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = \frac{e^4}{4} g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} \text{Tr}[Q^{\mu\nu} (\gamma p + m) \gamma^0 (Q^{\rho\sigma})^\dagger \gamma^0 (\gamma p' + m)] \Rightarrow$$

$$B = \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left[Q^{\mu\nu} (\gamma p + m) \gamma^0 (Q_{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 (\gamma p' + m) \right] \quad (9.3.3)$$

Για τον υπολογισμό του $\gamma^0 (Q_{\mu\nu})^\dagger \gamma^0$, με $Q^{\mu\nu}$ όπως στη σχέση (9.1.7), έχουμε να υπολογίσουμε τις βαθμωτές ποσότητες $2pk$ και $-2pk'$ και τις ποσότητες της μορφής, $\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu$ και $2\gamma^\mu p^\nu$.

Επειδή όμως $\gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu$ και $(\gamma^0)^2 = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma^0 (\gamma^\mu (\gamma^\rho k_\rho) \gamma^\nu)^\dagger \gamma^0 &= \gamma^0 \gamma^\nu^\dagger k_\rho^\dagger \gamma^{\rho\dagger} \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\nu^\dagger \gamma^0 \gamma^0 k_\rho^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\rho\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \\ &= \gamma^\nu \gamma^0 k_\rho^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho \gamma^\mu = \gamma^\nu \gamma^\rho k_\rho \gamma^\mu = \gamma^\nu (\gamma k) \gamma^\mu \end{aligned}$$

Επίσης για τις ποσότητες της μορφής $2\gamma^\mu p^\nu$ έχουμε:

$$\gamma^0 (2\gamma^\mu p^\nu)^\dagger \gamma^0 = 2p^\nu \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = 2p^\nu \gamma^\mu$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\gamma^0 (Q_{\mu\nu})^\dagger \gamma^0 = \left[\frac{\gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu}{2pk} + \frac{-\gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu}{-2pk'} \right] \quad (9.3.4)$$

Αντικαθιστώντας στην (9.3.3) τις (9.3.4) και (9.1.7) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = \frac{e^4}{4} \text{Tr} \left\{ \left(\frac{\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu}{2pk} + \frac{-\gamma^\nu (\gamma k') \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu}{-2pk'} \right) (\gamma p + m) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu}{2pk} + \frac{-\gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu}{-2pk'} \right) \cdot (\gamma p' + m) \right\} \Rightarrow \\ B &= \frac{e^4}{4} \left[\frac{T_1}{(2pk)^2} - \frac{T_2}{(2pk')(2pk)} - \frac{T_3}{(2pk')(2pk)} + \frac{T_4}{(2pk')^2} \right] \quad (9.3.5) \end{aligned}$$

Όπου τα T_1, T_2, T_3, T_4 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Tr} [(\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu) (\gamma p + m) (\gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu) (\gamma p' + m)] \\ T_2 &= \text{Tr} [(\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu) (\gamma p + m) (-\gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu) (\gamma p' + m)] \\ T_3 &= \text{Tr} [(-\gamma^\nu (\gamma k') \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu) (\gamma p + m) (\gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu + 2\gamma_\mu p_\nu) (\gamma p' + m)] \\ T_4 &= \text{Tr} [(-\gamma^\nu (\gamma k') \gamma^\mu + 2\gamma^\nu p^\mu) (\gamma p + m) (-\gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu) (\gamma p' + m)] \end{aligned}$$

9.4. Υπολογισμός των ιχνών: T_1, T_2, T_3, T_4

Επειδή για τα ίχνη των πινάκων ισχύουν οι ταυτότητες :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \quad \text{Tr} A^{\mu\nu} = \text{Tr} A_{\mu\nu}, \quad \text{Tr} A^{\mu\nu} = \text{Tr} A^{\nu\mu} \quad (9.4.1)$$

Επιπλέον για τα ίχνη των πινάκων γάμμα ισχύουν οι προτάσεις:

Πρόταση 1: Μπορούμε να αντιστρέψουμε την διάταξη όλων των πινάκων γάμμα μέσα στο ίχνος, δηλαδή

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \dots \gamma^\sigma) = Tr(\gamma^\sigma \dots \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (9.4.2)$$

Πρόταση 2: Το ίχνος του γινομένου περιττού πλήθους πινάκων γάμμα είναι ίσο με μηδέν

Βλέπουμε ότι αν θέσουμε για τους πίνακες στο ίχνος T_2 :

$$A = (\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu), B = (\gamma p + m), C = (-\gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu + 2\gamma_\nu p_\mu), D = (\gamma p' + m)$$

Τότε

$$T_2 = T_3 \quad (9.4.3)$$

Πράγματι:

$$T_2 = Tr[ABCD] = Tr[DCBA] = Tr[ADCB] = Tr[BADC] = Tr[CBAD] = T_3$$

Επιπλέον βλέπουμε ότι αν αντικαταστήσουμε στην $T_1(k)$ το k με το $-k'$ παίρνουμε το $T_4(k')$.

$$T_4(k') = T_1(-k') \quad (9.4.4)$$

Αρκεί επομένως να υπολογίσουμε μόνο τα T_1 και T_2 . Κάθε ένα από αυτά έχει 16 προσθετέους μέσα στο ίχνος. Οι 8 από αυτούς τους προσθετέους, έχουν περιττό πλήθος πινάκων γάμμα και επομένως το ίχνος τους είναι ίσο με το μηδέν. Θα υπολογίσουμε το ίχνος καθενός από τους υπόλοιπους 8 πίνακες I_n , με $n = 1, 2 \dots 8$. Πρώτα για τον T_1 .

Υπολογισμός του ίχνους T_1

Το ίχνος T_1 της σχέσεως (9.3.5), μετά την επιμεριστική ιδιότητα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα οκτώ ιχνών, τα οποία θα υπολογίσουμε ένα προς ένα στη συνέχεια.

$$T_1 = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8$$

Όπου:

$$\begin{aligned} I_1 &= Tr[\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu (\gamma p) \gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu (\gamma p')] = Tr[\gamma^\mu (\gamma^\rho k_\rho) \gamma^\nu \gamma^\sigma p_\sigma \gamma_\nu (\gamma^\tau k_\tau) \gamma_\mu \gamma^\varphi p'_\varphi] = \\ &= k_\rho p_\sigma k_\tau p'_\varphi Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma^\tau \gamma_\mu \gamma^\varphi] \end{aligned}$$

Από τις ιδιότητες των πινάκων γάμμα παίρνουμε

$$\gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\nu = -2\gamma^\sigma \quad (9.4.5)$$

οπότε

$$I_1 = k_\rho p_\sigma k_\tau p'_\varphi Tr[-2\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma_\mu \gamma^\varphi]$$

Επιπλέον για τους πίνακες γάμμα ισχύει:

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma_\mu = -2\gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho \quad (9.4.6)$$

Οπότε

$$I_1 = k_\rho p_\sigma k_\tau p'_\varphi 4 \text{Tr}[\gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\varphi]$$

Από τις ιδιότητες των ιχνών για τους πίνακες γάμμα παίρνουμε:

$$\text{Tr}[\gamma^\tau \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\varphi] = 4(g^{\tau\sigma} g^{\rho\varphi} - g^{\tau\rho} g^{\sigma\varphi} + g^{\tau\varphi} g^{\sigma\rho}) \quad (9.4.7)$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} I_1 &= 16k_\rho p_\sigma k_\tau p'_\varphi (g^{\tau\sigma} g^{\rho\varphi} - g^{\tau\rho} g^{\sigma\varphi} + g^{\tau\varphi} g^{\sigma\rho}) = \\ &= 16 \left[(k_\rho p'^\rho)(p_\sigma k^\sigma) - (k_\rho k^\rho)(p_\sigma p'^\sigma) + (k_\rho p^\rho)(p'_\varphi k^\varphi) \right] \Rightarrow \\ I_1 &= 16[(pk)(p'k) - k^2(pp') + (pk)(p'k)] \quad (9.4.8) \end{aligned}$$

Αλλά για το φωτόνιο ισχύει $k^2 = k_\rho k^\rho = 0$. Τελικά παίρνουμε:

$$I_1 = 32(pk)(p'k) \quad (9.4.9)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \text{Tr}[\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu (\gamma p) 2\gamma_\mu p_\nu (\gamma p')] = 2k_\rho p_\sigma p_\nu p'_\tau \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu \gamma^\tau] = \\ &= 2k_\rho p_\sigma p_\nu p'_\tau \text{Tr}[-2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau] = -4k_\rho p_\sigma p_\nu p'_\tau \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau] = \\ &= -4k_\rho p_\sigma p_\nu p'_\tau 4(g^{\sigma\nu} g^{\rho\tau} - g^{\sigma\rho} g^{\nu\tau} + g^{\sigma\tau} g^{\nu\rho}) = \\ &= -16[(k_\rho p'^\rho)(p_\sigma p^\sigma) - (k_\rho p^\rho)(p_\nu p'^\nu) + (k_\rho p^\rho)(p_\sigma p'^\sigma)] = \\ &-16[(p'k)m^2 - (pk)(pp') + (pk)(pp')] . \text{ Τελικά:} \end{aligned}$$

$$I_2 = -16(p'k)m^2 \quad (9.4.10)$$

$$I_3 = \text{Tr}[\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu m \gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu m] = m^2 k_\rho k_\sigma \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu]$$

Αλλά $\gamma^\nu \gamma_\nu = 4 \cdot 1_4$ οπότε:

$$I_3 = 4m^2 k_\rho k_\sigma \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu] = 4m^2 k_\rho k_\sigma \text{Tr}[4g^{\rho\sigma} \cdot 1_4] = 16m^2 k_\rho k_\sigma g^{\rho\sigma} 4 = 64m^2 k_\rho k^\rho$$

$$I_3 = 0 \quad (9.4.11)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \text{Tr}[\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu m 2\gamma_\mu p_\nu m] = 2m^2 k_\rho p_\nu \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\mu] = 2m^2 k_\rho p_\nu \text{Tr}[4g^{\rho\nu} \cdot 1_4] = \\ &= 8m^2 k_\rho p_\nu g^{\rho\nu} \text{Tr}[1_4] = 32m^2 (pk) \end{aligned}$$

$$I_4 = 32m^2 (pk) \quad (9.4.12)$$

$$\begin{aligned} I_5 &= \text{Tr}[2\gamma^\mu p^\nu (\gamma p) \gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu (\gamma p')] = 2p^\nu p_\rho k_\sigma p'_\tau \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu \gamma^\tau] = \\ &= 2p^\nu p_\rho k_\sigma p'_\tau g_{\nu\varphi} \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\varphi \gamma^\sigma \gamma_\mu \gamma^\tau] = -4p^\nu p_\rho k_\sigma p'_\tau g_{\nu\varphi} \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\varphi \gamma^\rho \gamma^\tau] = \\ &= -4p^\nu p_\rho k_\sigma p'_\tau g_{\nu\varphi} 4(g^{\sigma\varphi} g^{\rho\tau} - g^{\sigma\rho} g^{\varphi\tau} + g^{\sigma\tau} g^{\varphi\rho}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -16p_\phi p_\rho k_\sigma p'_\tau (g^{\sigma\phi} g^{\rho\tau} - g^{\sigma\rho} g^{\phi\tau} + g^{\sigma\tau} g^{\phi\rho}) \\
&= -16[(pk)(pp') - (pk)(pp') + (p'k)p^2] = -16m^2(p'k)
\end{aligned}$$

$$I_5 = -16m^2(p'k) \quad (9.4.13)$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= Tr[2\gamma^\mu p^\nu (\gamma p) 2\gamma_\mu p_\nu (\gamma p')] = 4p^\nu p_\rho p_\nu p'_\sigma Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu \gamma^\sigma] = 4p^\nu p_\rho p_\nu p'_\sigma Tr[-2\gamma^\rho \gamma^\sigma] \\
&= -8p^\nu p_\rho p_\nu p'_\sigma Tr[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = -8p^\nu p_\rho p_\nu p'_\sigma 4g^{\rho\sigma} = -32p^2 p^\sigma p'_\sigma = -32m^2(pp')
\end{aligned}$$

$$I_6 = -32m^2(pp') \quad (9.4.14)$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= Tr[2\gamma^\mu p^\nu m \gamma_\nu (\gamma k) \gamma_\mu m] = 2m^2 p^\nu k_\rho Tr[\gamma^\mu \gamma_\nu \gamma^\rho \gamma_\mu] = 2m^2 p^\nu k_\rho Tr[\gamma^\mu g_{\nu\sigma} \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_\mu] = \\
&= 2m^2 p^\nu k_\rho g_{\nu\sigma} Tr[\gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma_\mu] = 2m^2 p_\sigma k_\rho Tr[4g^{\sigma\rho} 1_4] = 32m^2 p_\sigma k_\rho g^{\sigma\rho} = \\
&= 32m^2 p^\rho k_\rho = 32m^2(pk)
\end{aligned}$$

$$I_7 = 32m^2(pk) \quad (9.4.15)$$

$$I_8 = Tr[2\gamma^\mu p^\nu m 2\gamma_\mu p_\nu m] = 4m^2 p^\nu p_\nu Tr[\gamma^\mu \gamma_\mu] = 4m^2 p^2 Tr[4 \cdot 1_4] = 16m^2 p^2 Tr[1_4]$$

$$I_8 = 64m^4 \quad (9.4.16)$$

Αθροίζοντας τους παραπάνω οκτώ προσθετέους παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
T_1 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 = 32(pk)(p'k) - 16(p'k)m^2 + 0 + 32m^2(pk) \\
&\quad - 16m^2(p'k) - 32m^2(pp') + 32m^2(pk) + 64m^4
\end{aligned}$$

$$T_1 = 16(4m^4 - 2m^2(pp') + 4m^2(pk) - 2m^2(p'k) + 2(pk)(p'k)) \quad (9.4.17)$$

Για το T_4 θα κάνουμε την αντικατάσταση $k \rightarrow -k'$

$$T_4 = 16(4m^4 - 2m^2(pp') - 4m^2(pk') + 2m^2(p'k') + 2(pk')(p'k')) \quad (9.4.18)$$

Υπολογισμός του ίχνους T_2

Οι αντίστοιχοι οκτώ προσθετέοι του T_2 είναι:

$$\begin{aligned}
I_1 &= Tr[-\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu (\gamma p) \gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu (\gamma p')] = -k_\rho p_\sigma k'_\tau p'_\phi Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\mu \gamma^\tau \gamma_\nu \gamma^\phi] = \\
&= -k_\rho p_\sigma k'_\tau p'_\phi Tr[-2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma_\nu \gamma^\phi] = 2k_\rho p_\sigma k'_\tau p'_\phi Tr[\gamma^\sigma 4g^{\rho\tau} \cdot 1_4 \gamma^\phi] = \\
&= 8g^{\rho\tau} k_\rho p_\sigma k'_\tau p'_\phi Tr[\gamma^\sigma \gamma^\phi] = 8g^{\rho\tau} k_\rho p_\sigma k'_\tau p'_\phi 4g^{\sigma\phi} = 32(kk')(pp')
\end{aligned}$$

$$I_1 = 32(kk')(pp') \quad (9.4.19)$$

$$I_2 = Tr[\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu (\gamma p) 2\gamma_\nu p_\mu (\gamma p')] = 2k_\rho p_\sigma p_\mu p'_\tau Tr[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma_\nu \gamma^\tau] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2k_\rho p_\sigma p_\mu p'_\tau \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho (-2\gamma^\sigma) \gamma^\tau] = -4k_\rho p_\sigma p_\mu p'_\tau \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\tau] = \\
&= -4k_\rho p_\sigma p_\mu p'_\tau 4(g^{\mu\rho} g^{\sigma\tau} - g^{\mu\sigma} g^{\rho\tau} + g^{\mu\tau} g^{\rho\sigma}) \\
I_2 &= -16[2(pk)(pp') - (p'k)m^2] \quad (9.4.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \text{Tr}[-\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu m \gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu m] = -m^2 k_\rho k'_\sigma \text{Tr}[4g^{\rho\nu} \cdot 1_4 \gamma^\sigma \gamma_\nu] = \\
&= -4m^2 k_\rho k'_\sigma \text{Tr}[\gamma^\sigma \gamma^\rho] = -4m^2 k_\rho k'_\sigma 4g^{\sigma\rho} \\
I_3 &= -16m^2 (kk') \quad (9.4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \text{Tr}[\gamma^\mu (\gamma k) \gamma^\nu m 2\gamma_\nu p_\mu m] = 2m^2 k_\rho p_\mu \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\nu] = \\
&= 2m^2 k_\rho p_\mu \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu] = 2m^2 k_\rho p_\mu \text{Tr}[4g^{\mu\rho} \cdot 1_4] = 8m^2 k_\rho p_\mu g^{\mu\rho} \text{Tr}[1_4] \\
I_4 &= 32m^2 (pk) \quad (9.4.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \text{Tr}[-2\gamma^\mu p^\nu (\gamma p) \gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu (\gamma p')] = -2p^\nu p_\rho k'_\sigma p'_\tau \text{Tr}[-2\gamma^\rho \gamma^\sigma g_{\nu\varphi} \gamma^\varphi \gamma^\tau] = \\
&= 4g_{\nu\varphi} p^\nu p_\rho k'_\sigma p'_\tau \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\varphi \gamma^\tau] = 4g_{\nu\varphi} p^\nu p_\rho k'_\sigma p'_\tau 4(g^{\rho\sigma} g^{\varphi\tau} - g^{\rho\varphi} g^{\sigma\tau} + g^{\rho\tau} g^{\sigma\varphi}) = \\
I_5 &= 16[2(pk')(pp') - (p'k')m^2] \quad (9.4.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 &= \text{Tr}[2\gamma^\mu p^\nu (\gamma p) 2\gamma_\nu p_\mu (\gamma p')] = 4p^\nu p_\rho p_\mu p'_\sigma \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu \gamma^\sigma] = \\
&= 4p^\nu p_\rho p_\mu p'_\sigma \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho g_{\nu\tau} \gamma^\tau \gamma^\sigma] = 4g_{\nu\tau} p^\nu p_\rho p_\mu p'_\sigma \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\tau \gamma^\sigma] = \\
&= 4p_\tau p_\rho p_\mu p'_\sigma 4(g^{\mu\rho} g^{\tau\sigma} - g^{\mu\tau} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\tau}) = \\
I_6 &= 16m^2 (p'p) \quad (9.4.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 &= \text{Tr}[-2\gamma^\mu p^\nu m \gamma_\mu (\gamma k') \gamma_\nu m] = -2m^2 p^\nu k'_\rho \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma_\nu] = \\
&= -2m^2 p^\nu k'_\rho \text{Tr}[4 \cdot 1_4 \gamma^\rho \gamma_\nu] = -8m^2 p^\nu k'_\rho \text{Tr}[\gamma^\rho g_{\nu\sigma} \gamma^\sigma] = -8m^2 g_{\nu\sigma} p^\nu k'_\rho \text{Tr}[\gamma^\rho \gamma^\sigma] = \\
&= -8m^2 p_\sigma k'_\rho 4g^{\rho\sigma} \\
I_7 &= -32m^2 (pk') \quad (9.4.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 &= \text{Tr}[2\gamma^\mu p^\nu m 2\gamma_\nu p_\mu m] = 4m^2 p^\nu p_\mu \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma_\nu] = 4m^2 p^\nu p_\mu \text{Tr}[\gamma^\mu g_{\nu\sigma} \gamma^\sigma] = \\
&= 4m^2 g_{\nu\sigma} p^\nu p_\mu 4g^{\mu\sigma} \\
I_8 &= 16m^4 \quad (9.4.26)
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τα οκτώ ίχνη.

$$\begin{aligned}
T_2 &= 32(kk')(pp') - 16[2(pk)(pp') - (p'k)m^2] - 16m^2(kk') + 32m^2(pk) + \\
&+ 16[2(pk')(pp') - (p'k')m^2] + 16m^2(p'p) - 32m^2(pk') + 16m^4
\end{aligned}$$

Επειδή τώρα

$$p + k = p' + k' \Rightarrow (p - p')^2 = (k' - k)^2 \Rightarrow p^2 - 2pp' + p'^2 = k'^2 - 2kk' + k^2 \Rightarrow$$

$$kk' = pp' - m^2 \quad (9.4.27)$$

Με παρόμοιο τρόπο παίρνουμε

$$pk = p'k' \text{ και } pk' = p'k \quad (9.4.28)$$

Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε το T_2 σε συνάρτηση με τα pk και $p'k$.

$$\begin{aligned} T_2 &= 32(pp')(pp') - 32m^2(pp') - 32(pk)(pp') + 16m^2(p'k) - 16m^2(pp') + \\ &+ 16m^4 + 32m^2(pk) + 32(pk')(pp') - 16m^2(pk) + 16m^2(pp') - 32m^2(p'k) + 16m^4 = \\ &= 32(pp')(pp') + 32(pp')[p(k' - k)] - 32m^2(pp') - 16m^2(p'k) + 16m^2(pk) + 32m^4 \end{aligned}$$

Αλλά $p(k' - k) = p(p - p') = p^2 - pp' = m^2 - pp'$

Μετά την αντικατάσταση και τις αναγωγές ομοίων όρων παίρνουμε τελικά

$$T_2 = 32m^4 + 16m^2(pk) - 16m^2(p'k) \quad (9.4.29)$$

9.5. Υπολογισμός του τετραγώνου του πλάτους

Μετά τους υπολογισμούς των ιχνών μπορούμε επιστρέφοντας στη σχέση (9.3.5) που μας δίνει το μέσο όρο του τετραγώνου του πλάτους να γράψουμε:

$$B = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = \frac{e^4}{16} \left[\frac{T_1}{(pk)^2} - \frac{2T_2}{(pk')(pk)} + \frac{T_4}{(2pk')^2} \right] \quad (9.5.1)$$

Όπου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (9.4.28), $pk' = p'k$ και $p'k' = pk$ γράφουμε:

$$T_1 = 32(2m^4 - m^2(pp') + 2m^2(pk) - m^2(p'k) + (pk)(p'k)) \quad (9.5.2)$$

$$T_2 = 16(2m^4 + m^2(pk) - m^2(p'k)) \quad (9.5.3)$$

$$T_4 = 32(2m^4 - m^2(pp') - 2m^2(p'k) + m^2(pk) + (p'k)(pk)) \quad (9.5.4)$$

Η αντικατάσταση μας δίνει

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{2m^4}{(pk)^2} - \frac{m^2(pp')}{(pk)^2} + \frac{2m^2}{(pk)} - \frac{m^2(p'k)}{(pk)^2} + \frac{(p'k)}{(pk)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m^4}{(pk)(p'k)} - \frac{m^2}{(p'k)} + \frac{m^2}{(pk)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2m^4}{(p'k)^2} - \frac{m^2(pp')}{(p'k)^2} - \frac{2m^2}{(p'k)} + \frac{m^2(pk)}{(p'k)^2} + \frac{(pk)}{(p'k)} \right] \quad (9.5.5) \end{aligned}$$

Η παράσταση αυτή μπορεί να γραφεί πιο κομψά αν παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{m^4}{(pk)^2} - \frac{m^2(pp')}{(pk)^2} + \frac{m^2}{(pk)} - \frac{m^2(p'k)}{(pk)^2} &= \frac{m^2}{(pk)^2} [m^2 - (pp') + (pk) - (p'k)] = \\ &= \frac{m^2}{(pk)^2} [-kk' + k(p - p')] = \frac{m^2}{(pk)^2} [-kk' + k(k' - k)] = \frac{m^2}{(pk)^2} [-k^2] = 0 \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{m^4}{(pk)^2} - \frac{m^2(pp')}{(pk)^2} + \frac{m^2}{(pk)} - \frac{m^2(p'k)}{(pk)^2} = 0 \quad (9.5.6)$$

Ομοίως μηδενίζεται το άθροισμα

$$\frac{m^4}{(p'k)^2} - \frac{m^2(pp')}{(p'k)^2} - \frac{m^2}{(p'k)} + \frac{m^2(pk)}{(p'k)^2} = 0 \quad (9.5.7)$$

Μετά τις απλοποιήσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = \\ &= 2e^4 \left[\frac{(p'k)}{(pk)} + \frac{(pk)}{(p'k)} + 2m^2 \left(\frac{1}{(pk)} - \frac{1}{(p'k)} \right) + m^4 \left(\frac{1}{(pk)} - \frac{1}{(p'k)} \right)^2 \right] \quad (9.5.8) \end{aligned}$$

9.6. Το πλάτος στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, όπου υποθέτουμε ακίνητο το ηλεκτρόνιο, τα τετρανύσματα παίρνουν την μορφή:

$$p = p^\mu = (m, \vec{0}), \quad k = k^\mu = (\omega, \vec{k}), \quad p' = p'^\mu = (E', \vec{p}'), \quad k' = k'^\mu = (\omega', \vec{k}')$$

$$\text{Όπου: } \omega = |\vec{k}|, \quad \omega' = |\vec{k}'|$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$pk = p^\mu k_\mu = (m, \vec{0}) \cdot \begin{pmatrix} \omega \\ -\vec{k} \end{pmatrix} = m\omega, \quad \text{και} \quad p'k = p'^\mu k_\mu = (m, \vec{0}) \cdot \begin{pmatrix} \omega' \\ -\vec{k}' \end{pmatrix} = m\omega'$$

Αντικαθιστώντας στην (9.5.8) παίρνουμε:

$$B = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + m^2 \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2 \right] \quad (9.6.1)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα περισσότερο αν αξιοποιήσουμε την διατήρηση της τετραορμής (φαινόμενο Compton). Πράγματι:

$$\begin{aligned} p + k &= p' + k' \Rightarrow p' = p + k - k' \Rightarrow p'^2 = (p + k - k')^2 \Rightarrow \\ m^2 &= m^2 + 2p(k - k') + (k - k')^2 \Rightarrow 0 = 2pk - 2pk' + k^2 - 2kk' + k'^2 \Rightarrow \\ 0 &= 2m\omega - 2m\omega' + 0 - 2kk' + 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$kk' = m\omega - m\omega' \quad (9.6.2)$$

Αλλά:

$$kk' = k^\mu k'_\mu = (\omega, \vec{k}) \cdot \left(\frac{\omega'}{c}, -\vec{k}' \right) = \omega\omega' - \vec{k}\vec{k}' = \omega\omega' - \omega\omega' \cos\theta = \omega\omega'(1 - \cos\theta) \Rightarrow$$

$$kk' = \omega\omega'(1 - \cos\theta) \quad (9.6.3)$$

Όπου η γωνία σκέδασης είναι: $\theta = \cos^{-1}(\vec{k} \cdot \vec{k}')$. Αντικαθιστώντας στην (9.6.2) έχουμε:

$$\omega\omega'(1 - \cos\theta) = m\omega - m\omega' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m}(1 - \cos\theta) \quad (9.6.4)$$

Η σχέση (9.6.4) είναι η γνωστή σχέση Compton για την μετατόπιση του μήκους κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας. Λύνοντας ως προς ω' παίρνουμε:

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)} \quad (9.6.5)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε το τετράγωνο του πλάτους (9.6.1) ως:

$$B = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2m \frac{1}{m} (\cos\theta - 1) + m^2 \left(\frac{1}{m} (1 - \cos\theta) \right)^2 \right] =$$

$$= 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 2\cos\theta - 2 + \cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 \right] \Rightarrow$$

$$B = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (9.6.6)$$

9.7. Διαφορική Ενεργός διατομή σκέδασης

Όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 8 η διαφορική ενεργός διατομή, για μια σκέδαση $2 \rightarrow 2$, ή $p_1 + p_2 \rightarrow q_3 + q_4$, δίνεται από την σχέση (8.5.9) την οποία επαναφέρουμε εδώ:

$$d\sigma = \frac{|M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_3 - q_4)}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{d^3 q_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}_3}} \frac{d^3 q_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{q}_4}} \quad (9.7.1)$$

Στο θέμα που διαπραγματευόμαστε, το $|M_{fi}|^2$, είναι οι μέσοι όροι και τα αθροίσματα του σπίν και της πόλωσης των φωτονίων, το οποίο όπως είδαμε (9.6.6) είναι συνάρτηση του ω' . Θα γράφουμε λοιπόν

$$|M(\omega')|^2 = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = B$$

Επίσης για την σκέδαση που μελετάμε ισχύουν

$$p_1 = p, \quad p_2 = k, \quad q_3 = p', \quad q_4 = k'$$

ενώ ο «παράγοντας ροής» είναι

$$F = 4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 4 \sqrt{(pk)^2 - p^2 k^2} = 4 \sqrt{(m\omega)^2 - p^2 0} = 4m\omega \Rightarrow$$

$$F = 4m\omega$$

Γράφουμε λοιπόν την σχέση (9.7.1) ως:

$$d\sigma = \frac{|M(\omega')|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k)}{4m\omega} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega'} \frac{d^3 \omega'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'} \quad (9.7.2)$$

$$\text{Όπου χάριν συντομίας γράψαμε:} \quad d^3 p' = d^3 |\vec{p}'| \quad \text{και} \quad d^3 k' = d^3 |\vec{k}'| = d^3 \omega'$$

Επίσης η συνάρτηση δέλτα θα γραφεί ως:

$$\delta^{(4)}(p' + k' - p - k) = \delta(E' + \omega' - m - \omega) \delta^{(3)}(\vec{p}' + \vec{k}' - 0 - \vec{k})$$

Μετά τις παρατηρήσεις αυτές η συνολική ενεργός διατομή θα είναι:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int d\sigma = \\ &= \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \omega'}{\omega'} |M(\omega')|^2 \int \frac{d^3 p'}{E'} \delta(E' + \omega' - m - \omega) \delta^{(3)}(\vec{p}' + \vec{k}' - \vec{k}) \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

Είναι χρήσιμο εδώ να σχολιάσουμε ότι η E' είναι συνάρτηση του $|\vec{p}'|$:

$$E'(\vec{p}') = \sqrt{m^2 + \vec{p}'^2}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς $d^3 p'$ και εκμεταλλευόμενοι την δ -συνάρτηση, θα διαλέξουμε το

$$\vec{p}'_0 = \vec{k} - \vec{k}'$$

Οπότε έχουμε:

$$\sigma = \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^3 \omega'}{\omega'} |M(\omega')|^2 \frac{1}{E'(\vec{p}'_0)} \delta(E'(\vec{p}'_0) + \omega' - m - \omega)$$

Εδώ είναι χρήσιμο να γράψουμε:

$$\begin{aligned} E'(\vec{p}'_0) &= E'(\omega') = \sqrt{m^2 + \vec{p}'_0^2} = \sqrt{m^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2} = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2 + \vec{k}'^2 - 2\vec{k}\vec{k}'} = \\ &= \sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} \Rightarrow \\ E'(\vec{p}'_0) &= E'(\omega') = \sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta} \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

Παίρνουμε επομένως:

$$\sigma = \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)^2} \int \frac{d^3\omega'}{\omega'} |M(\omega')|^2 \frac{1}{E'(\omega')} \delta(E'(\omega') + \omega' - m - \omega) \quad (9.7.5)$$

Εκφράζοντας το ολοκλήρωμα αυτό σε σφαιρικές συντεταγμένες του ω' έχουμε:

$$\begin{aligned} d^3\omega' &= \omega' \sin\theta d\varphi d\theta d\omega' = d\varphi \sin\theta d\theta \omega'^2 d\omega' = -d(\cos\theta) d\varphi \omega'^2 d\omega' \\ \sigma &= \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)^2} \int d\varphi \int d(\cos\theta) \int \omega' d\omega' |M(\omega')|^2 \frac{1}{E'(\omega')} \delta(E'(\omega') + \omega' - m - \omega) \Rightarrow \\ \sigma &= \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)} \int d(\cos\theta) \int \omega' d\omega' |M(\omega')|^2 \frac{1}{E'(\omega')} \delta(E'(\omega') + \omega' - m - \omega) \quad (9.7.6) \end{aligned}$$

Προκειμένου να αξιοποιήσουμε την δ-συνάρτηση, θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|} \quad (9.7.7)$$

Όπου x_0 ρίζα της $g(x) = 0$, με:

$g(\omega') = E'(\omega') + \omega' - m - \omega$, από την οποία η $g(\omega') = 0$, μας δίνει για την ρίζα ω'_0 της εξίσωσης την συνθήκη

$$E'(\omega'_0) = m + \omega - \omega'_0 \quad (9.7.8)$$

ενώ αξίζει εδώ να σχολιάσουμε ότι η συνθήκη αυτή, μας οδηγεί μετά τις πράξεις στην γνωστή μας σχέση Compton (9.6.4).

$$\frac{1}{\omega'_0} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{m} (1 - \cos\theta)$$

Θα εκφράσουμε τώρα την παράγωγο της $g(\omega')$.

$$g'(\omega') = 1 + \frac{dE'(\omega')}{d\omega'} = 1 + \frac{2\omega' - 2\omega \cos\theta}{2E'(\omega')} = 1 + \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{E'(\omega')}$$

Επομένως θα γράψουμε την συνάρτηση δέλτα στη μορφή:

$$\delta(E'(\omega') + \omega' - m - \omega) = \frac{\delta(\omega' - \omega'_0)}{\left|1 + \frac{\omega'_0 - \omega \cos\theta}{E'(\omega'_0)}\right|} \quad (9.7.9)$$

Μετά την αντικατάσταση της (9.7.9), στην (9.7.6) η ενεργός διατομή γράφεται:

$$\sigma = \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)} \int d(\cos\theta) \int \omega' d\omega' |M(\omega')|^2 \frac{1}{E'(\omega')} \frac{\delta(\omega' - \omega'_0)}{\left|1 + \frac{\omega'_0 - \omega \cos\theta}{E'(\omega'_0)}\right|}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς $d\omega'$ με την δ-συνάρτηση παίρνουμε:

$$\sigma = \frac{1}{4m\omega} \frac{1}{4(2\pi)} \int d(\cos\theta) \omega'_0 |M(\omega'_0)|^2 \frac{1}{E'(\omega'_0)} \frac{1}{\left|1 + \frac{\omega'_0 - \omega \cos\theta}{E'(\omega'_0)}\right|} =$$

$$= \frac{1}{32\pi m\omega} \int d(\cos\theta) |M(\omega'_0)|^2 \frac{\omega'_0}{|E'(\omega'_0) + \omega'_0 - \omega \cos\theta|}$$

Το κλάσμα στο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{\omega'_0}{|E'(\omega'_0) + \omega'_0 - \omega \cos\theta|} &= \frac{\omega'_0}{|m + \omega - \omega'_0 + \omega'_0 - \omega \cos\theta|} = \frac{\omega'_0}{|m + \omega(1 - \cos\theta)|} = \\ &= \frac{\omega'_0}{m[1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos\theta)]} = \frac{(\omega'_0)^2}{m\omega} \end{aligned}$$

Όπου στο τελευταίο βήμα αξιοποιήσαμε το ω'_0 όπως δίνεται από την σχέση (9.6.5). Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\sigma = \int d\sigma = \int d(\cos\theta) \frac{1}{32\pi m\omega} \frac{(\omega'_0)^2}{m\omega} |M(\omega'_0)|^2$$

Από όπου παίρνουμε:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{1}{32\pi m\omega} \frac{(\omega'_0)^2}{m\omega} |M(\omega'_0)|^2 \quad (9.7.10)$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $|M(\omega'_0)|^2$ από την σχέση (9.6.6) που υπολογίσαμε παραπάνω

$$|M(\omega'_0)|^2 = B = \frac{1}{4} \sum_{\lambda, \lambda', s, s'} |M|^2 = 2e^4 \left[\frac{\omega'_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'_0} - \sin^2\theta \right]$$

Και γράφοντας πλέον $\omega'_0 = \omega'$, εννοώντας το επιλεγμένο από την δ-συνάρτηση ω' , το οποίο ικανοποιεί την σχέση Compton για την μετατόπιση του μήκους κύματος, παίρνουμε:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{e^4}{16\pi m^2} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left[\frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right] \quad (9.7.11)$$

Η σχέση αυτή είναι η γνωστή ως σχέση klein-Nishina, όπως παρουσιάστηκε πρώτη φορά το 1929 από τους Oskar klein και Yoshio Nishina. Επειδή τώρα

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} \quad (9.7.12)$$

Από την (9.7.11) και για $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ παίρνουμε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2\theta \right] \quad (9.7.13)$$

Όπου

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m} \quad (9.7.14)$$

Είναι η λεγόμενη «κλασσική ακτίνα του ηλεκτρονίου»

Η σχέση (9.7.13) είναι η σχέση Klein-Nishina στη μορφή που την παρουσιάσαμε στην εισαγωγή της εργασίας.

9.8 Σχόλια στην σχέση Klein-Nishina και συμπεράσματα.

Σχόλια

1. Η σχέση Dirac

Το 1926 ο Dirac υπολόγισε την διαφορική ενεργό διατομή σκέδασης για την σκέδαση Compton, χωρίς όμως να πάρει υπόψη του το σπιν του ηλεκτρονίου. Η σχέση στην οποία κατέληξε είναι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 [1 + \cos^2 \theta] \quad (9.8.1)$$

Στη σχέση αυτή ο τελευταίος παράγοντας περιλαμβάνει δύο προσθετέους. Ο πρώτος αντιστοιχεί σε εισερχόμενα φωτόνια γραμμικά πολωμένα κάθετα στο επίπεδο σκέδασης ενώ ο δεύτερος σε εισερχόμενα φωτόνια, των οποίων η πόλωση βρίσκεται πάνω στο επίπεδο σκέδασης. Το άθροισμα των δυο αυτών προσθετέων, μας δίνει την ενεργό διατομή μιας μη πολωμένης δέσμης εισερχόμενων φωτονίων. Δυστυχώς η παραπάνω σχέση, αγνοεί το γεγονός ότι ένα ηλεκτρόνιο έχει μια μαγνητική ροπή που δημιουργείται από την εσωτερική στροφορμή του ηλεκτρονίου (σπιν 1/2). Αυτή η μαγνητική ροπή, αλληλεπιδρά επίσης με τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία των προσπίπτοντων φωτονίων και δίνει έναν πρόσθετο μηχανισμό σκέδασης. Οι εργασίες του Dirac του 1928 παρείχαν το θεωρητικό πλαίσιο για τον σωστό υπολογισμό των πρόσθετων επιδράσεων του σπιν του ηλεκτρονίου. Ο Oscar Klein και ο Yoshio Nishina εργάστηκαν πυρετωδώς τους μήνες μετά τη δημοσίευση του Dirac για να κατανοήσουν τις ιδέες του και να τις εφαρμόσουν στη σκέδαση Compton, δημοσιεύοντας τον υπολογισμό τους, μόλις έξι μήνες αργότερα. Συμπεριλαμβάνοντας με επιτυχία την αλληλεπίδραση των φωτονίων με το σπιν του ηλεκτρονίου, το αποτέλεσμα τους, έδωσε έναν επιπλέον προσθετέο που φαίνεται στην παρακάτω σχέση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 \left[1 + \cos^2 \theta + \frac{(\lambda - \lambda')^2}{\lambda \lambda'} \right] \quad (9.8.2)$$

Αυτός ο πρόσθετος όρος, λόγω της σκέδασης φωτονίων από τη μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου, είναι το αποτέλεσμα ενός μέσου όρου για τους πιθανούς προσανατολισμούς του σπιν του ηλεκτρονίου (τόσο πριν όσο και μετά σκέδαση) καθώς επίσης και ενός μέσου όρου για την πόλωση του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου φωτονίου. Είναι φανερό ότι αυτός ο όρος είναι θετικός. Αυξάνοντας έτσι την αναμενόμενη διαφορική διατομή σε όλες τις γωνίες σκέδασης που είναι μεγαλύτερες από 0° . Η επίδρασή του είναι προφανώς μεγαλύτερη για μεγάλες ενέργειες προσπίπτοντος φωτονίου και για μεγάλες γωνίες σκέδασης. Μπορούμε να βάλουμε αυτόν τον τύπο στην πιο κοινή του μορφή αντικαθιστώντας το $1 + \cos^2 \theta$ με το $1 + 1 - \sin^2 \theta$, αναπτύσσοντας τον αριθμητή του επιπλέον όρου και απλοποιώντας. Το αποτέλεσμα είναι η περίφημη σχέση Klein-Nishina:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - \sin^2 \theta \right] \quad (9.8.3)$$

2. Σκέδαση Thomson

Στο όριο των μικρών ενεργειών του προσπίπτοντος φωτονίου $\omega \rightarrow 0$, όπως φαίνεται από την σχέση (9.6.5)

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \theta)} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega'}{\omega} = 1$$

Δηλαδή το σκεδαζόμενο φωτόνιο έχει την ίδια συχνότητα με το προσπίπτον, οπότε η σχέση (9.7.11) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} &= \frac{e^4}{16\pi m^2} [1 + 1 - \sin^2 \theta] = \frac{e^4}{16\pi m^2} [1 + \cos^2 \theta] \Rightarrow \\ \frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} &= \frac{e^4}{16\pi m^2} [1 + \cos^2 \theta] \quad (9.8.4) \end{aligned}$$

Αξιοποιώντας τώρα τις σχέσεις (9.7.12) και (9.7.14), μπορούμε από την (9.8.4) να πάρουμε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 [1 + \cos^2 \theta] \quad (9.8.5)$$

Οι σχέσεις (9.8.4) και (9.8.5) μας δίνουν την γωνιακή κατανομή της διαφορικής ενεργού διατομής και ταυτίζονται με αυτές που υπολογίζονται από την κλασσική H/M θεωρία (σκέδαση Thomson)

Από την σχέση (9.8.4) ολοκληρώνοντας σε όλες τις γωνίες σκέδασης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{e^4}{16\pi m^2} [1 + \cos^2 \theta] = \frac{e^4}{16\pi m^2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) [1 + \cos^2 \theta] \\ &= \frac{e^4}{16\pi m^2} \frac{8}{3} = \frac{8\pi r_e^2}{3} \\ \sigma &= \frac{8\pi r_e^2}{3} \quad (9.8.6) \end{aligned}$$

Η (9.8.6) είναι η γνωστή σχέση της ολικής ενεργού διατομής, για την σκέδαση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας όπως προκύπτει από την κλασσική H/M θεωρία (σκέδαση Thomson)

3. Η ολική ενεργός διατομή σκέδασης Compton

Προκειμένου να υπολογίσουμε την ολική ενεργό διατομή, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την σχέση (9.7.11). Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \omega/\omega'$, και $\gamma = \omega/m$, οπότε από την σχέση (9.6.5) παίρνουμε:

$$du = -\gamma d(\cos\theta) \text{ και } \sin^2\theta = \frac{2(u-1)}{\gamma} - \frac{(u-1)^2}{\gamma^2} \quad (9.8.7)$$

Για τα όρια ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\cos\theta_1 = -1 \Rightarrow u_1 = 1 + 2\gamma \text{ και } \cos\theta_2 = 1 \Rightarrow u_2 = 1$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} d(\cos\theta) = \\ &= \frac{e^4}{8\pi m^2} \int_{u_1}^{u_2} du \left[-\frac{1}{2\gamma} \frac{1}{u^3} - \frac{1}{2\gamma} \frac{1}{u} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{u-1}{u^2} - \frac{1}{2\gamma^3} \frac{(u-1)^2}{u^2} \right] \end{aligned} \quad (9.8.8)$$

Μετά την ολοκλήρωση, παίρνουμε σε συμπαγή μορφή:

$$\sigma = \frac{e^4}{8\pi m^2} \left[\frac{1+\gamma}{\gamma^3} \left(\frac{2\gamma(1+\gamma)}{1+2\gamma} - \ln(1+2\gamma) \right) + \frac{1}{2\gamma} \ln(1+2\gamma) - \frac{1+3\gamma}{(1+2\gamma)^2} \right] \quad (9.8.9)$$

Στο όριο των υψηλών ενεργειών όπου $\omega \gg m \Rightarrow \gamma \gg 1$, η (9.8.9) μας δίνει:

$$\sigma \cong \frac{e^4}{16\pi m^2} \frac{1}{\gamma} \left(\ln(2\gamma) + \frac{1}{2} \right) = \frac{e^4}{16\pi m} \frac{1}{\omega} \left(\ln\left(\frac{2\omega}{m}\right) + \frac{1}{2} \right) \quad (9.8.10)$$

Η σχέση (9.8.10) μας δείχνει ότι στο όριο των υψηλών ενεργειών η ολική ενεργός διατομή μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου.

4. Διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης Compton, για γραμμικά πολωμένα φωτόνια.

Η διαφορική ενεργός διατομή, για γραμμικά πολωμένα φωτόνια, υπολογίστηκε το 1954 από τον Heitler ο οποίος κατέληξε στη σχέση:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2 + 4\cos^2\theta \right] \quad (9.8.11)$$

Όπου θ είναι η γωνία των διανυσμάτων \hat{E}_0, \hat{E} , του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου αντίστοιχα. Αναλύοντας το διάνυσμα \hat{E} σε δύο συνιστώσες, μία \hat{E}_1 , επί του επιπέδου (\hat{E}_0, \hat{k}) όπου \hat{k} το κυματάνυσμα του σκεδαζόμενου φωτονίου, και \hat{E}_2 κάθετο στο επίπεδο αυτό, μπορούμε να γράψουμε:

$$E_1 = E \cos\beta \text{ και } E_2 = E \sin\beta \quad (9.8.12)$$

Όπου β είναι η γωνία (\hat{E}, \hat{E}_1) . Επειδή η $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ είναι ανάλογη της έντασης I της Η/Μ ακτινοβολίας, και η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου $E^2 = E_1^2 + E_2^2$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2 \quad (9.8.13)$$

Όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στις δύο παραπάνω συνιστώσες του διανύσματος \hat{E} .

Αν συμβολίσουμε με ξ την γωνία των (\hat{E}_0, \hat{k}) , τότε η σφαιρική τριγωνομετρία μας δίνει τη σχέση:

$$\cos\theta = \cos\beta \sin\xi \quad (9.8.14)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2 + 4\cos^2\beta \sin^2\xi \right] \quad (9.8.15)$$

Αν $\beta = 90^\circ$, έχουμε δηλαδή μόνο την συνιστώσα \hat{E}_2 , τότε $\cos\beta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$ δηλαδή τα (\hat{E}_0, \hat{E}) είναι μεταξύ τους κάθετα. Στην περίπτωση αυτή

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_2 = \frac{1}{4} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2 \right] \quad (9.8.16)$$

Αν $\beta = 0^\circ$ όπου έχουμε μόνο την συνιστώσα \hat{E}_1 , $\cos\beta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \sin\xi \Rightarrow \theta = 90^\circ - \xi$ δηλαδή τα (\hat{E}_0, \hat{E}) βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (\hat{E}_0, \hat{k}) . Στην περίπτωση αυτή

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_1 = \frac{1}{4} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2 + 4 \sin^2\xi \right] \quad (9.8.17)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι ανεξάρτητα από την γωνία ξ , η συνιστώσα \hat{E}_1 είναι η κυρίαρχη από τις δύο συνιστώσες της \hat{E} . Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με την εικόνα που έχουμε στις χαμηλές συχνότητες $\lambda \cong \lambda'$, όπου η κάθετη συνιστώσα \hat{E}_2 είναι μηδέν. Στο άλλο όριο της οπισθοσκέδασης φωτονίων υψηλής ενέργειας, $\lambda' \gg \lambda$ και γωνία σκέδασης $\theta \cong 180^\circ \Rightarrow \xi = 90^\circ$, οι δυο συνιστώσες είναι ίσες. Για το λόγο αυτό, λέμε ότι τα οπισθοσκεδαζόμενα φωτόνια, είναι «σχεδόν μη πολωμένα» ακόμα και αν τα εισερχόμενα είναι πλήρως πολωμένα. Αντικαθιστώντας στην (9.8.13) τις (9.8.16) και (9.8.17) παίρνουμε την συνολική διατομή στη μορφή

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2\cos^2\xi \right] \quad (9.8.18)$$

Πάλι από την σφαιρική τριγωνομετρία έχουμε

$$\cos^2\xi = \sin^2\theta \cos^2\varphi \quad (9.8.19)$$

Όπου θ είναι η πολική γωνία και φ είναι η αζιμουθιακή σκέδασης Compton. Τελικά η σχέση (9.8.18) γράφεται ως:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda'}\right)^2 \left[\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\lambda'}{\lambda} - 2\sin^2\theta \cos^2\varphi \right] \quad (9.8.20)$$

Η (9.8.20) μα υποδεικνύει ότι η πιθανότητα σκέδασης είναι μέγιστη όταν $\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$ δηλαδή τα σκεδαζόμενα σωματίδια φωτόνιο-ηλεκτρόνιο αναδύονται κατά προτίμηση σε κατευθύνσεις κάθετες στο ηλεκτρικό πεδίο \hat{E}_0 της εισερχόμενης ακτινοβολίας.

Τέλος επειδή η μέση τιμή $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$, από την σχέση (9.8.20), υπολογίζοντας τον μέσο όρο για όλες τις τιμές της αζιμουθιακής γωνίας φ , μπορούμε να πάρουμε την σχέση (9.8.3), που μας δίνει την διαφορική ενεργό διατομή για μη πολωμένη προσπίπτουσα δέσμη.

Συμπεράσματα

1. Η θεωρητική σχέση (9.7.13) είναι σε συμφωνία με πειραματικά δεδομένα της σκέδασης Compton. Τα διαγράμματα που παρουσιάζουμε εδώ είναι από το «EXPERIMENTS IN MODERN PHYSICS / Adrian C. Melissinos & Jim Napolitano-Chapter 9.2». Στο συγκεκριμένο πείραμα, τα προσπίπτοντα φωτόνια που χρησιμοποιήθηκαν ήταν φωτόνια γάμμα εκπεμπόμενα από μια πηγή Cs^{137} . Η ενέργεια των φωτονίων αυτών είναι $E = 0,662 MeV$. Ο στόχος ο οποίος προσέφερε τα σκεδάζοντα ηλεκτρόνια, ήταν στόχοι Pb και Al .

Στο πρώτο διάγραμμα (FIGURE 9.7), σχεδιάστηκαν οι τιμές της αντίστροφης ενέργειας των σκεδαζόμενων φωτονίων $1/E'$, σε συνάρτηση με την ποσότητα $(1 - \cos \theta)$. Η θεωρητική σχέση είναι αυτή που προκύπτει από την σχέση (9.6.5), μετά την επαναφορά των μονάδων και την επίλυση ως προς $1/E'$.

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{mc^2} (1 - \cos \theta) + \frac{1}{E} \quad (9.8.21)$$

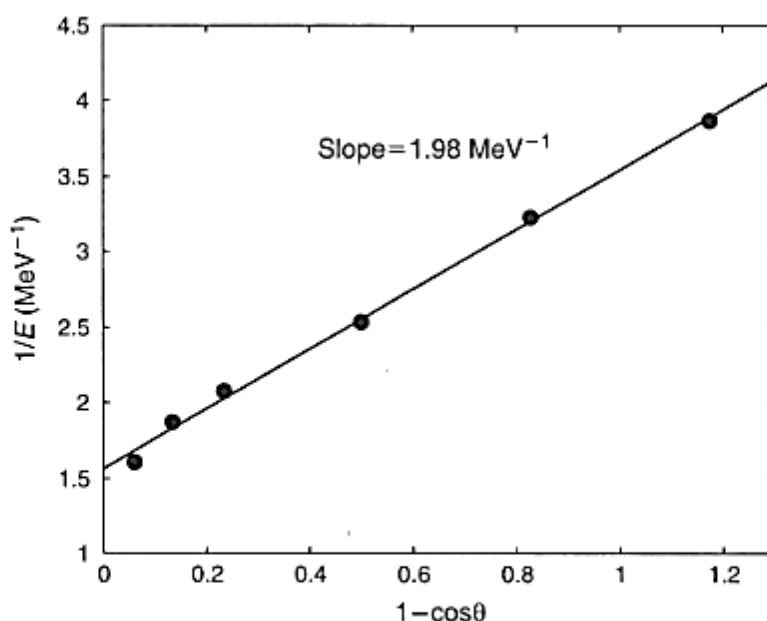


FIGURE 9.7 The results obtained for the energy (frequency shift) of the Compton scattered gamma rays. Note that $1/E'$ is plotted against $(1 - \cos \theta)$, leading to a linear dependence. The slope of the line gives the mass of the electron.

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα, οι πειραματικές τιμές βρίσκονται πράγματι πολύ κοντά στην θεωρητική ευθεία. Η κλίση του διαγράμματος μας δίνει για την μάζα του ηλεκτρονίου την τιμή:

$$\frac{1}{mc^2} = 1,98 MeV^{-1} \Rightarrow m = 0,5 MeV/c^2 \quad (9.8.22)$$

Η τιμή αυτή συμφωνεί με την γνωστή τιμή για την μάζα του ηλεκτρονίου.

Στο δεύτερο διάγραμμα (FIGURE 9.8), έχει σχεδιαστεί η διαφορική ενεργός διατομή σε συνάρτηση με την γωνία σκέδασης (από το ίδιο πείραμα), καθώς και οι θεωρητικές καμπύλες Thomson και Klein-Nishina. Η θεωρητική καμπύλη Thomson δίνεται από την σχέση (9.8.5) για $r_e = 2,8 \cdot 10^{-15} m$. Η αντίστοιχη θεωρητική καμπύλη Klein-Nishina, προκύπτει από την σχέση (9.8.3) όπου, αφού επαναφέρουμε τις μονάδες στη σχέση (9.6.5) θα αντικαταστήσουμε

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{1}{1 + \gamma(1 - \cos\theta)}$$

Όπου για τα φωτόνια του πειράματος (Cs^{137}) έχουμε:

$$\gamma = \frac{\hbar\omega}{mc^2} = 1,29$$

Η τελική θεωρητική σχέση μετά από μερικές πράξεις είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} r_e^2 [1 + \cos^2\theta] \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos\theta)]^2} \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta)^2}{[1 + \cos^2\theta][1 + \gamma(1 - \cos\theta)]} \right] \quad (9.8.23) \end{aligned}$$

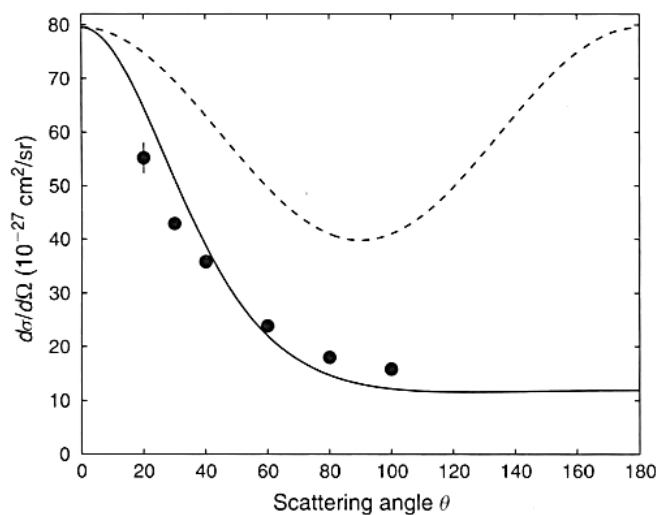


FIGURE 9.8 The results obtained for the scattering cross section of ^{137}Cs gamma rays as a function of angle. The solid line is the prediction of the Klein-Nishina formula for that particular energy; the dotted line is the Thomson cross section.

Όπως μπορεί κανείς να διακρίνει από το παραπάνω διάγραμμα (FIGURE 9.8) , οι πειραματικές τιμές (κουκίδες) συμφωνούν καλλίτερα με την θεωρητική καμπύλη της εξίσωσης (9.8.9) και ταυτόχρονα αποκλίνουν σημαντικά από την θεωρητική καμπύλη Thomson (διακεκομμένη γραμμή) . Επομένως η διατομή Thomson, σχέση (9.8.5) , δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή της σκέδασης φωτονίων υψηλής ενέργειας.

2. Το τρίτο διάγραμμα που ακολουθεί (Figure 5) προέρχεται από το «Lecture Note on Photon interactions and Cross Sections H. Hirayama». Στο πολικό αυτό διάγραμμα απεικονίζεται η διαφορική ενεργός διατομή σε συνάρτηση με την γωνία σκέδασης για διαφορετικές ενέργειες της δέσμης των προσπίπτοντων φωτονίων, στην περιοχή $0,01\text{MeV} - 3\text{MeV}$. Είναι εμφανές ότι καθώς η ενέργεια των φωτονίων που προσπίπτουν αυξάνει, η διαφορική ενεργός διατομή σε συγκεκριμένη γωνία σκέδασης μικραίνει. Φαίνεται ακόμη η έντονη διασπορά των φωτονίων προς τα εμπρός καθώς η ενέργεια των φωτονίων που προσπίπτουν αυξάνει.

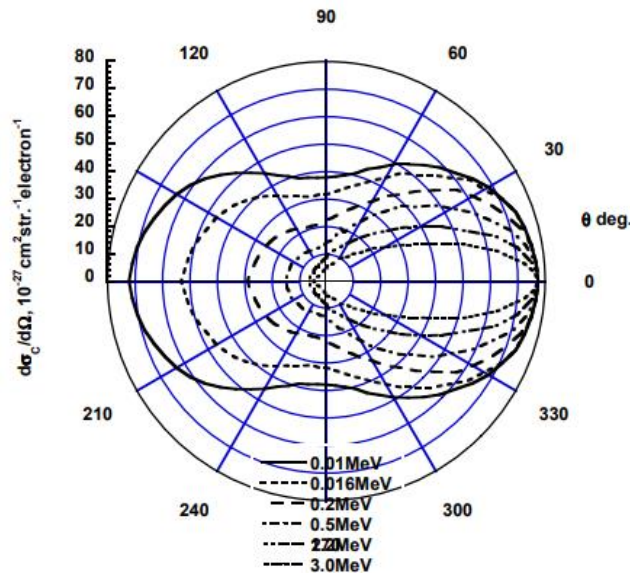


Figure 5: Differential cross section of Compton scattering (original figure from [17]).

3. Για ενέργειες δέσμης της τάξεως των GeV είναι απαραίτητες διορθώσεις υψηλότερης τάξης για την ερμηνεία της σκέδασης Compton. Οι διορθώσεις αυτές (Next Leading Order corrections) απαιτούν υπολογισμούς του πλάτους σκέδασης αφενός για διαγράμματα ενός βρόχου για την σκέδαση $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$ όπως τα παρακάτω της εικόνας 2 (Figure 2)

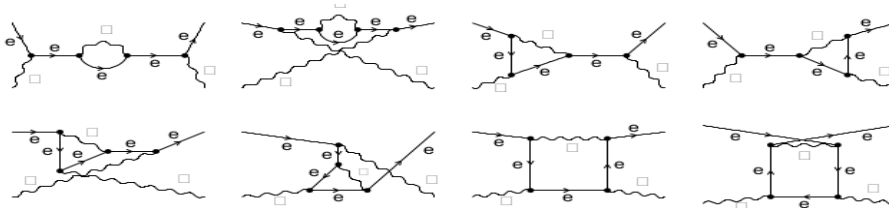


Figure 2: One-loop QED diagrams for $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$

Αφετέρου για διαγράμματα διπλού φαινομένου Compton $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma + \gamma$, όπως αυτά της εικόνας 3 (Figure 3)

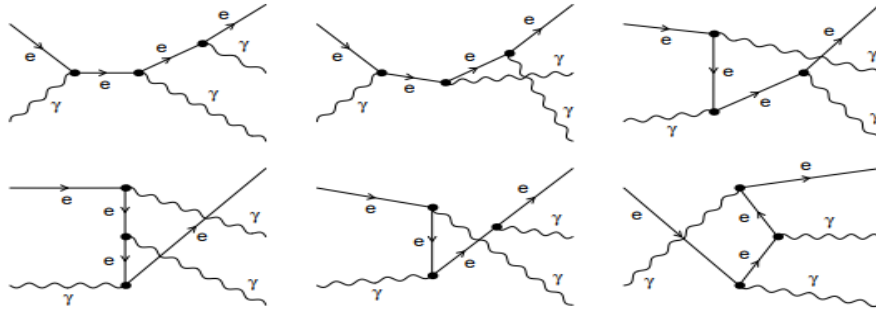


Figure 3: Tree diagrams for $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma \gamma$

Στους υπολογισμούς αυτούς παρουσιάζονται υπέρυθρες αποκλίσεις (infrared divergences) οι οποίες όμως αλληλοαναιρούνται. Η συνολική ενεργός διατομή υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους, με τη χρήση προγραμμάτων υπολογιστών.

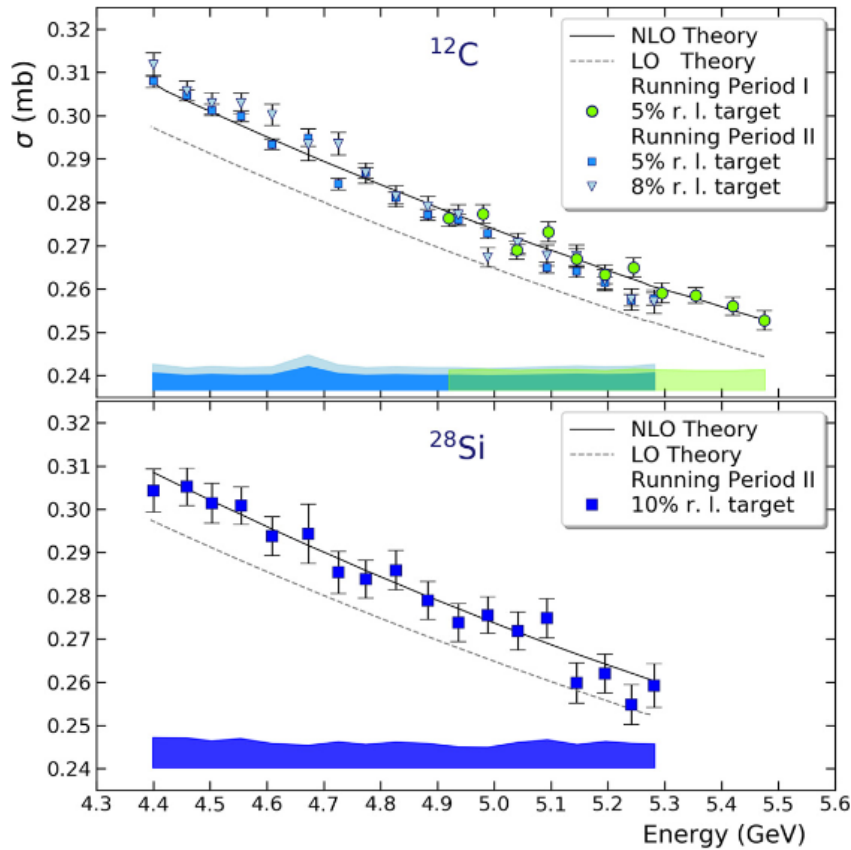


Fig. 4. The Compton cross sections measured on atomic electrons of ^{12}C and ^{28}Si targets. The dashed curve corresponds to the Klein-Nishina calculation. The solid curve is the result of next-to-leading order calculation. Error bars are statistical uncertainties. Bands at the bottom of both plots show point-to-point systematic uncertainties.

Στην εικόνα 4 (Fig.4) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων μεγάλης ακρίβειας για ενέργειες της τάξεως των 5GeV . Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε εξαιρετική συμφωνία με την θεωρητική πρόβλεψη των διορθώσεων υψηλότερης τάξης (NLO).

Επίλογος

Υπολογίσαμε την θεωρητική σχέση για την διαφορική ενεργό διατομή της σκέδασης Compton, σε προσέγγιση πρώτης τάξεως, στηριζόμενοι στην κβαντική θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Θεωρητικοί υπολογισμοί υψηλότερης τάξεως απαιτούν περεταίρω ανάπτυξη της θεωρίας, περιλαμβάνοντας ομαλοποίηση των ολοκληρωμάτων που αποκλίνουν και επανακανονικοποίηση της θεωρίας. Η ολική διατομή σκέδασης Compton υπολογίζεται θεωρητικά σε υψηλότερη τάξη, με την χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων. Οι πειραματικές μετρήσεις βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία για ενέργειες της τάξεως των MeV , ενώ για ενέργειες της τάξεως των GeV , απαιτούνται υπολογισμοί υψηλότερης τάξεως.

Βιβλιογραφία

1. Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder, (1995), *An Introduction To Quantum Field Theory*, Perseus Books, ISBN 0-201-50397-2
2. Robert D. Klauber, (2013), *Student Friendly Quantum Field Theory*, Sandtrove Press, ISBN 978-0984513949
3. Κυριάκος Ταμβάκης, (2007), *Εισαγωγή στην κβαντική θεωρία των πεδίων*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ιωαννίνων
4. Griffiths D. (2008), *Introduction to elementary particles*, Wiley (2008) ISBN 0-471-60386-4
5. Matthew Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*, Cambridge University Press, ISBN 978-1-107-03473-0
6. Στέφανος Τραχανάς (1999), *Σχετικιστική Κβαντομηχανική*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, ISBN 960-7309-18-9
7. Heitler, W. (2010) *The Quantum Theory of Radiation*. 3rd Edition, Oxford University Press, ISBN 978-0-486-64558-2
8. Adrian C. Melissinos & Jim Napolitano, *Experiments in Modern Physics*, ISBN 978-0124898516
9. Babis Anastasiou, (2020) *Quantum Field Theory*, Institute for Theoretical Physics, ETH Zurich, 8093 Zurich, Switzerland
<https://people.phys.ethz.ch/~babis/Teaching/QFT1/qft1.pdf>
10. David Tong (2006), *Quantum Field Theory* University of Cambridge,
<https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>
11. Costas Foudas, *Advanced Particle Physics*,
Lecture 5 https://alpha.physics.uoi.gr/foudas_public/APP-UoI-2011/Lecture5-Klein-Gordon-Dirac.pdf
12. H. Hirayama, *Lecture Note on Photon interactions and Cross Sections*
https://rcwww.kek.jp/research/shield/photon_r.pdf
13. Carolyn Kierans, Tadayuki Takahashi, Gottfried Kanbach, *Telescopes for Gamma-ray Astrophysics*, arXiv:2208.07819 [astro-ph.IM] doi.org/10.1007/978-981-16-4544-0-46-1
14. P. Ambrozewicz et al. [PrimEx], *High precision measurement of Compton scattering in the 5 GeV region*, *Physics Letters B*, Volume 797, 10 October 2019, doi.org/10.1016/j.physletb.2019.134884
15. A. Denner, S. Dittmaier, *Complete $O(\alpha)$ QED corrections to polarized Compton scattering*, *Nucl. Phys. B*, 540 (1999) 58-86, doi:10.1016/S0550-3213(98)00767-6