ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

«Ο Γκασπάρ Μονζ και η Παραστατική Γεωμετρία»

Ανδρέας Αλυσανδράτος

Επιβλέπων καθηγητής: Μιχαήλ Ανούσης

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2024

«Ο Γκασπάρ Μονζ και η Παραστατική Γεωμετρία»

Ανδρέας Αλυσανδράτος

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικης Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΜΙΧΑΗΛ ΑΝΟΥΣΗΣ

Καθηγητής – Professor

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Department of Mathematics, of the University of the Aegean

Συν-Επιβλέπων Καθηγητης:

ΑΝΔΡΕΑΣ ΑΡΒΑΝΙΤΟΓΕΩΡΓΟΣ

Καθηγητής - Professor

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πάτρας

Department of Mathematics, of the University of Patras

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2024

Με την παρούσα Διπλωματική Εργασία η εκπαιδευτική μου θητεία στο Πρόγραμμα «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου φτάνει στο τέλος της.

Θα ήθελα να εκφράσω τις ολόθερμές μου ευχαριστίες στους Καθηγητές που συνάντησα σε όλες τις ενότητες του Προγράμματος για τη συμβολή τους στην επιτυχή ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κο Μιχαήλ Ανούση και τον συνεπιβλέποντα Καθηγητή κο Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για την άψογη επικοινωνία, καθώς και για την συμβουλευτική τους καθοδήγηση σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας.

Κλείνοντας, να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, τους συναδέλφους και τους φίλους μου για την ανοχή, την υπομονή και τη συμπαράσταση.

Περίληψη

Η εργασία αυτή αποσκοπεί στο να δώσει μία κατά το δυνατόν ολοκληρωμένη περιγραφή της ζωής και του έργου του Γάλλου μαθηματικού Γκασπάρ Μονζ, ξεκινώντας από τα παιδικά του χρόνια, την εκπαίδευση που έλαβε, καθώς και τα επιτεύγματά του σε επιστημονικούς κλάδους όπως, μεταξύ άλλων, τα Μαθηματικά και η Μηχανική. Θα γνωρίσουμε την Παραστατική Γεωμετρία, της οποίας ο Μονζ υπήρξε ο εφευρέτης και «πατέρας» και θα αναδείξουμε το αποτύπωμα και την «κληρονομιά» που άφησε στον κλάδο όχι μόνο των Μαθηματικών, αλλά των επιστημών και της εκπαίδευσης γενικότερα.

Λέξεις – Κλειδιά

- Γκασπάρ Μονζ
- Παραστατική Γεωμετρία
- Μέθοδος ορθογώνιων προβολών
- Ναπολέων Βοναπάρτης
- Πολυτεχνική Σχολή

Abstract

This essay aims to give a description as complete as possible of the life and work of the French mathematician Gaspard Monge, starting from his childhood, the education he received, as well as his achievements in scientific branches such as, among others, Mathematics and Engineering. We will get to know Descriptive Geometry, of which Monge was the inventor and "father" and we will highlight the imprint and "legacy" he left in the field not only of Mathematics, but of the sciences and education in general.

Keywords

- Gaspard Monge
- Descriptive Geometry
- Method of orthographic projections
- Napoleon Bonaparte
- École polytechnique

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή στη ζωή και το έργο του Γκασπάρ Μονζ

1.1 Τα παιδικά χρόνια, το σχολείο και το οικογενειακό περιβάλλον

Ο Γκασπάρ Μονζ (1746 – 1818)

Ο Γκασπάρ Μονζ γεννήθηκε στις 10 Μαΐου 1746 σε μία μικρή πόλη της ανατολικής Γαλλίας με το όνομα Μπον (Beaune). Προερχόταν από μία μάλλον φτωχή οικογένεια, καθώς ο πατέρας του (Jacques Monge) ήταν ένας πλανόδιος πωλητής και η μητέρα του (Jeanne neé Rousseaux) μια απλή αγρότισσα. Τα παιδικά του χρόνια ήταν απλά και παρ' ότι οι γονείς του δεν μπορούσαν να του προσφέρουν πάρα πολλά, ήθελαν να εφοδιάσουν αυτόν και τα δύο του αδέλφια με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, τουλάχιστον σε ό,τι είχε να κάνει με την εκπαίδευσή τους. Ο μικρός Γκασπάρ από τη μεριά του άρπαξε την ευκαιρία, επιδεικνύοντας πρωτοφανή δίψα για γνώση, μόρφωση και μάθηση, με αποτέλεσμα από πολύ μικρή ηλικία να αναπτύξει έντονο ενδιαφέρον για τις επιστήμες και ειδικότερα για τα Μαθηματικά. Στο σχολείο οι δάσκαλοί του εντόπισαν αμέσως την κλίση που είχε προς έναν μαθηματικό τρόπο σκέψης και τον ενθάρρυναν να συνεχίσει να εκπαιδεύεται και να εμπλουτίζει συνεχώς τις γνώσεις του πάνω στη Γεωμετρία. Έτσι, σε ηλικία 11 ετών συνέχισε στο κολλέγιο των Ορτοριανών Πατέρων, το οποίο βρισκόταν υπό τη διοίκηση ενός θρησκευτικού τάγματος, όπου και έπαιρνε τακτικά την πρώτη θέση σε όλα τα μαθήματα.

1.2 Οι πρώτες κατασκευές

Σε ηλικία δεκατεσσάρων ετών ο Μονζ κατασκεύασε μία πυροσβεστική αντλία χωρίς, προφανώς, να έχει λάβει κάποιου είδους εκπαίδευση ή την παραμικρή οδηγία από τον οποιονδήποτε. Όταν οι γύρω του αναρωτήθηκαν πώς κατάφερε να ολοκληρώσει ένα τέτοιο έργο χωρίς καμία βοήθεια, αυτός απάντησε ότι «τα δάχτυλά μου μετέτρεψαν τις σκέψεις μου σε γεωμετρικά σχήματα με μεγάλη ακρίβεια». Ήταν γεννημένος για να ασχοληθεί με τη Μηχανική και τη Γεωμετρία, καθώς η ικανότητά του να συνδυάζει αυτές τις δύο επιστήμες ήταν παροιμιώδης.

Δύο χρόνια αργότερα, πάλι με αποκλειστικά δική του πρωτοβουλία, έφτιαξε έναν ακριβέστατο χάρτη της πόλης του, κατασκευάζοντας δικά του τοπογραφικά όργανα μέτρησης και εφευρίσκοντας δικές του μεθόδους παρατήρησης. Ενώ είχε ήδη λάβει υποτροφία για να συνεχίσει τις σπουδές του στο Κολλέγιο των Ιησουιτών στη Λυών, δέχτηκε λίγες μέρες μετά την επίσκεψη ενός αξιωματικού στο σπίτι του, ο οποίος ήθελε να δει από κοντά τον περίφημο αυτό χάρτη, η φήμη του οποίου είχε ήδη διαδοθεί από στόμα σε στόμα. Ο αξιωματικός, εντυπωσιασμένος με το πέρας της επίσκεψης, έγραψε μια επιστολή στον διοικητή της Βασιλικής Σχολής Μηχανικών της πόλης του Μεζιέρ (École Royale du Génie de Mézières), προτείνοντάς του να κάνει δεκτό τον Μονζ, ώστε αυτός να συνεχίσει εκεί την εκπαίδευσή του.

1.3 Η εκπαίδευση, η προσωπική και η επιστημονική του ζωή

Ο Μονζ – κατόπιν και της έγκρισης του πατέρα του – δέχτηκε για να ανακαλύψει όμως μετά από λίγο καιρό ότι η λαϊκή του καταγωγή οδηγούσε τους υπευθύνους να του αναθέτουν ως επί το πλείστον χειρονακτικές εργασίες ρουτίνας, χωρίς να δίνουν ιδιαίτερη σημασία τις μαθηματικές του ικανότητες (πόσο μάλλον να αξιοποιούν).

Όλα άλλαξαν όταν μία μέρα το αντικείμενο του μαθήματος ήταν η θεωρία της οχύρωσης, με κυριότερο ζητούμενο να σχεδιαστεί η άμυνα της πόλης με τέτοιο τρόπο, ώστε κανένα μέρος της να μην είναι εκτεθειμένο στα εχθρικά πυρά. Οι ήδη υπάρχουσες λύσεις είχαν κριθεί ασύμφορες, καθώς απαιτούσαν έναν ιδιαίτερα μεγάλο όγκο εξαιρετικά δύσκολων υπολογισμών. Ο Μονζ άλλαξε τις μεθόδους αυτές αντικαθιστώντας τις με μία πολύ πιο γρήγορη γραφική και σχεδιαστική διαδικασία και παρέδωσε τη λύση του για το πρόβλημα αυτό σε κάποιον ανώτερό του, λύση που έφτασε μέχρι τους ανώτατους αξιωματικούς για να ελέγξουν την ορθότητά της. Κατόπιν εξέτασης η εργασία χαρακτηρίστηκε ως εξαιρετική δίνοντας στον Μονζ μία πρώτη αναγνώριση για τον τρόπο σκέψης του, με αποτέλεσμα να του δοθεί η θέση του διδάσκοντος. Αντικείμενό του ήταν η εκπαίδευση των μελλοντικών στρατιωτικών μηχανικών στη νέα αυτή μέθοδο, η οποία μετέτρεπε και τα πλέον δύσκολα και άλυτα έως τότε προβλήματα σε κάτι τόσο απλό όσο η αλφαβήτα. Η επιρροή του ήταν καταλυτική και, μέχρι την αποχώρησή του το 1784, το σώμα των μηχανικών της σχολής απέκτησε μία αξιοσημείωτη τεχνική κατάρτιση πάνω στο αντικείμενό της. Πήρε πάντως όρκο ότι δεν θα αποκάλυπτε ποτέ τη μέθοδό του και επί σχεδόν δεκαπέντε χρόνια αυτό παρέμεινε επτασφράγιστο μυστικό. Η πρώτη φορά που πήρε την έγκριση να μιλήσει για αυτήν μπροστά σε ακροατήριο και να τη διδάξει ήταν το 1794 στην École Normale στο Παρίσι. Ανάμεσα στους ακροατές βρισκόταν ο Λαγκράνζ, ο οποίος δήλωσε συνεπαρμένος από την απλότητά και την αποτελεσματικότητά της.

Ανάμεσα στο 1770 και το 1790, ο Μονζ έγραψε και δημοσίευσε πολλά άρθρα σχετικά με τα Μαθηματικά και τη Φυσική στις Ακαδημίες του Παρισιού και του Τορίνο. Η αλήθεια είναι, πάντως, ότι από ένα σημείο της καριέρας του και έπειτα εκδήλωσε μεγαλύτερη προτιμήση προς τη Φυσική και τη Χημεία, βάζοντας τα Μαθηματικά σε δεύτερη μοίρα. Σε ένα ταξίδι του στα Πυρηναία Όρη το 1774 συνεργάστηκε με τον Γάλλο χημικό Jean d' Arcet για να μετρήσουν το υψόμετρο χρησιμοποιώντας μόνο ένα βαρόμετρο. Κατά την παραμονή του στο Παρίσι έκανε αντίστοιχα πειράματα με τον Λαβουαζιέ που είχαν να κάνουν με τη διαστολή, την επίδραση του κενού και άλλα ζητήματα που απασχολούσαν τη Φυσική εκείνης της περιόδου.

Το 1777 παντρεύεται με την Μαρί-Κατρίν Ιάρτ (Marie-Cathérine Huart), νεαρή χήρα και ιδιοκτήτρια ενός σιδηρουργείου, ενώ ο τρόπος που συναντήθηκαν οι «δρόμοι» τους κρύβει πίσω του μία ωραία ιστορία: Ευρισκόμενος σε μία δεξίωση, ο Μονζ άκουσε έναν άλλο καλεσμένο να μιλά μειωτικά και να συκοφαντεί μία γυναίκα διότι τον είχε απορρίψει. Ζήτησε από τον αγενή αυτό άνδρα να ανακαλέσει και όταν αυτός αρνήθηκε ήρθαν στα χέρια, καθώς ο Μονζ θεώρησε δεδομένο πως έπρεπε να υπερασπιστεί τη γυναίκα αυτή δίχως καν να γνωρίζει το όνομά της. Λίγους μήνες αργότερα σε μια άλλη δεξίωση, στην οποία ο Μονζ παρευρίσκετο, γοητεύτηκε από μία νεαρή κυρία

που συνάντησε εκεί. Όταν συστήθηκαν άκουσε προς μεγάλη του έκπληξη την κοπέλα αυτή να του λέει: «Όχι μόνο ξέρω ποιος είστε, αλλά γνωρίζω επιπλέον ότι πριν λίγο καιρό υπερασπιστήκατε την τιμή μου». Η Madame Horbon – χήρα από τα 28 της καθώς είχε παντρευτεί λίγα χρόνια πριν τον κατά 52 έτη μεγαλύτερό της Jacques Horbon - έμελλε να γίνει η αγαπημένη του σύζυγος με την οποία απέκτησε τρεις κόρες, δύο εκ των οποίων παντρεύτηκαν τους Marey και Eschassŕiaux, τέως μέλη της Εθνικής Συνέλευσης. Την ίδια περίοδο ο Μονζ φρόντισε για την κατασκευή ενός εργαστηρίου Χημείας στο Μεζιέρ με τον πιο σύγχρονο εξοπλισμό ενώ ανέλαβε και την υψηλή εποπτεία της λειτουργίας του σιδηρουργείου της συζύγου του.

Το 1780 εξελέγη Αντιπρόεδρος της Ακαδημίας των Επιστημών με αποτέλεσμα να μένει για μεγάλα χρονικά διαστήματα στο Παρίσι. Εκεί παρουσίασε έρευνες πάνω στη Φυσική και τη Χημεία, αλλά και τα Μαθηματικά. Δεν υπάρχει πάντως καμία σημαντική δημοσίευση του Μονζ στο πεδίο της Φυσικής, με αποτέλεσμα να μην έχουν γίνει γνωστές πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τη συνεισφορά του στο αντικείμενο αυτό. Μία εργασία του το 1781 αποτελεί μία πρώτη εφαρμογή της γραμμικής βελτιστοποίησης στο πρόβλημα των μεταφορών, ενώ ένα άλλο άρθρο του δύο χρόνια μετά σχετίζεται με την καύση του υδρογόνου για την παραγωγή νερού. Το 1783 διορίστηκε στη θέση του εξεταστή των ναυτικών δοκίμων, στάθηκε αδύνατον όμως να ανταποκριθεί σε όλα αυτά τα καθήκοντα, με τα οποία είχε επιφορτιστεί και η παραίτησή του από τη θέση του καθηγητή ήταν φυσικό επακόλουθο.

Γαλλικό γραμματόσημο
με τον Γκασπάρ Μονζ

Τα επόμενα χρόνια και μέχρι το 1792, ο Μονζ βρισκόταν είτε στο Παρίσι για να συνεχίσει τις έρευνές του είτε ταξίδευε για να επιθεωρεί τις ναυτικές σχολές. Μέλος διαφόρων ερευνών πάνω στη μεταλλουργία και στη Χημεία, αποτέλεσε έναν εκ των ιδρυτών του επιστημονικού περιοδικού Annales de Chimie.

Η πορεία της ζωής και της καριέρας του Μονζ άλλαξε άρδην λόγω της Γαλλικής Επανάστασης, της οποίας υπήρξε ένθερμος υποστηρικτής, όχι όμως από την αρχή της. Η έναρξη της Επανάστασης το 1789 βρήκε τον Μονζ σε μία πολύ σημαντική θέση και με μία πολύ μεγάλη φήμη: Από τη μία ήταν ένα από τα πλέον ενεργά μέλη της Ακαδημίας Επιστημών με δημοσιεύσεις σε μαθηματικά, φυσική και χημεία. Από την άλλη η θέση του ως εξεταστής των ναυτικών δοκίμων του επέτρεπε να γνωρίζει τι ακριβώς συνέβαινε σε κάθε ένα από τα λιμάνια που επισκεπτόταν, καθώς και να κάνει επισκέψεις σε λατομεία, ορυχεία και πάσης φύσεως εργοστάσια, αποκτώντας ακόμα μεγαλύτερη γνώση και εξειδίκευση σε ζητήματα τεχνολογίας και μεταλλουργίας. Επέλεξε να διατηρήσει έναν διακριτικό πολιτικό ρόλο συμμετέχοντας σε κάποιους συλλόγους και οργανώσεις που είχαν φιλοεπαναστατικό προσανατολισμό, εξακολουθώντας όμως συγχρόνως να ασκεί τα καθήκοντά του χωρίς να μειώσει τους ρυθμούς εργασίας του τόσο ως εξεταστής των δοκίμων όσο και ως εξέχον μέλος της Ακαδημίας. Όταν δημιουργήθηκε ένα Εκτελεστικό Συμβούλιο το 1792 από τη Νομοθετική Συνέλευση τού προτάθηκε η θέση του Υπουργού Ναυτιλίας, την οποία έκανε δεκτή και διετέλεσε Υπουργός για περίπου οκτώ μήνες. Χαρακτηρίστηκε, όμως, ως ισορροπιστής και μετριοπαθής, ενώ δέχτηκε μεγάλη πολεμική. Μην έχοντας τις αντοχές που απαιτούνταν για τη συγκεκριμένη θέση και έχοντας υποστεί τεράστια ψυχολογική φθορά, παραιτήθηκε για να αφοσιωθεί ολοκληρωτικά στη συγγραφή μίας μελέτης για την τέχνη κατασκευής των κανονιών και χάλυβα. Ανέλαβε την επίβλεψη των εργαστηρίων κατασκευής όπλων στο Παρίσι, ενώ συμμετείχε στη δημιουργία μπαρουταποθηκών.

Δεν ξέχασε και την ακαδημαϊκή του υπόσταση, βοηθώντας ενεργά στην ίδρυση της Πολυτεχνικής Σχολής École des travaux publics, φτάνοντας μέχρι και τη θέση του διευθυντή, καθώς και στη γενικότερη μεταρρύθμιση του εκπαιδευτικού συστήματος της Γαλλίας. Παρουσίασε ένα σχέδιο για τη δημιουργία ενός σχολείου για εργάτες και τεχνίτες και προώθησε την ιδέα της ίδρυσης μία ενιαίας εθνικής σχολής που θα εκπαίδευε τους στρατιωτικούς και πολιτικούς μηχανικούς.

1.4 Η γνωριμία με τον Ναπολέοντα

Ο Μονζ είχε θέσει ως στόχο να αναγεννήσει την Ακαδημία Επιστημών που βρισκόταν σε καθεστώς υπολειτουργίας και να την ενσωματώσει στο υπό δημιουργία Εθνικό Ινστιτούτο. Του ανατέθηκε όμως να ταξιδέψει στην Ιταλία και να επιλέξει, μαζί με άλλα έξι μέλη, τα έργα τέχνης και τα πολύτιμα αντικείμενα (γλυπτά, χειρόγραφα και άλλα) που θα έρχονταν στη Γαλλία συνοδεία του στρατού. Η αποστολή του αυτή τον έφερε κοντά στον Ναπολέοντα Βοναπάρτη, με τον οποίο ανέπτυξε μία φιλική σχέση. Μονζ και Ναπολέων είχαν βρεθεί από κοντά το 1792, αν και ο Μονζ δεν το θυμόταν.

Ο Βοναπάρτης με τον Γκασπάρ Μονζ (από πίνακα του Γάλλου ζωγράφου Nicolas-Toussaint Charlet)

Ο Βοναπάρτης, όμως, του έστειλε μία επιστολή θαυμασμού, στην οποία τον ευχαριστούσε για τη γνωριμία τους τότε, όταν αυτός ήταν ένας νεαρός αξιωματικός και ο Μονζ Υπουργός Ναυτιλίας. Λέγεται ότι ο Ναπολέων έβλεπε στον Μονζ τον μοναδικό ειλικρινή φίλο που τον αντιμετώπιζε με ανιδιοτέλεια και χωρις να προσβλέπει σε προσωπικό όφελος. Αν και είχε διοριστεί διευθυντής της Πολυτεχνικής Σχολής (École Polytechnique), αποδέχτηκε – απρόθυμα στην αρχή – την αποστολή να πάρει μέρος στο πλάι του Ναπολέοντα κατά την εκστρατεία του τελευταίου στην Αίγυπτο, καθώς ήταν από τους εκλεκτούς στους οποίους ο Βοναπάρτης εμπιστεύτηκε τα σχέδιά του σχετικά με την κατάκτηση αυτής της χώρας. Ανέλαβε διάφορα τεχνικά και διοικητικά καθήκοντα όταν αφίχθη στο Κάιρο, ενώ διορίστηκε Πρόεδρος του Αιγυπτιακού Ινστιτούτου, διαδραματίζοντας σπουδαίο ρόλο στα επιστημονικά έργα που ανέλαβε. Ταξίδεψε με τον Ναπολέοντα στο Σουέζ και τη Συρία για να επιστρέψουν μαζί στη Γαλλία. Σε αυτά τα σχεδόν τρία χρόνια που έλειπε εκτός Γαλλίας, οι δημοσιεύσεις του στο Αιγυπτιακό Ινστιτούτο φανερώνουν ότι είχε ρίξει το βάρος του πάνω σε νέα κεφάλαια της Ανάλυσης και της Γεωμετρίας. Η παρατήρηση των φυσικών φαινομένων συνέχιζε να του δίνει αφορμή για σκέψη και μελέτη. Συγκεκριμένα, όσο βρισκόταν στην Αίγυπτο ο Monge εντυπωσιάστηκε από το φαινόμενο του αντικατοπτρισμού.

Καθώς οι στρατιώτες διέσχιζαν την έρημο πηγαίνοντας στο Κάιρο από την πόλη της Αλεξάνδρειας, είδαν στο βάθος κάποιες πολύ μεγάλες λίμνες (ή τουλάχιστον έτσι τους φάνηκε αρχικά). Έφταναν στο σημείο να βλέπουν ακόμα και ολόκληρα χωριά, τα οποία έμοιαζαν να περιβάλλονται από τις λίμνες αυτές.

Όσο, βέβαια, πλησίαζαν, αντιλαμβάνονταν ότι οι φερόμενες ως λίμνες συρρικνώνονταν μέχρι που εξαφανίζονταν τελείως από το οπτικό τους πεδίο. Ο Μονζ ήταν ο πρώτος που κατάφερε να δώσει μία εξήγηση του φαινομένου αυτού, διαπιστώνοντας ότι οι ακτίνες του φωτός παρουσίαζαν κλίση ακριβώς πάνω από την άμμο λόγω της υπερβολικής θέρμανσης του αέρα. Η θερμότητα που εκπέμπεται μειώνει την πυκνότητα του αέρα χαμηλά και κοντά στη άμμο, με αποτέλεσμα ο πυκνότερος αέρας που βρίσκεται στο από πάνω στρώμα να λειτουργεί ως φακός και να δημιουργεί διάθλαση του φωτός: όσο μεγαλύτερη ήταν η διαφορά θερμοκρασίας τόσο εντονότερο και το φαινόμενο του αντικατοπτρισμού οπότε και η εικόνα εμφανίζεται πάνω από το πραγματικό αντικείμενο.

Το φαινόμενο του αντικατοπτρισμού από πίνακα της εποχής

Ανέλαβε ξανά τα καθήκοντά του στην Πολυτεχνική Σχολή, στην εφημερίδα της οποίας δημοσιεύτηκαν τα τελευταία του έργα. Διορίστηκε στη συνέχεια μέλος της Συντηρητικής Γερουσίας, της οποίας έγινε Πρόεδρος το 1806, ενώ πήρε και τον τίτλο του Κόμη της Πελούζ. Μπορεί να ειπωθεί με σχετική σιγουριά ότι η φιλία του με τον Ναπολέοντα και ο σεβασμός προς το πρόσωπό του διαδραμάτισαν καθοριστικό ρόλο στο να αποδεχθεί τις θέσεις και τις τιμές αυτές. Σε κάποια περίοδο της ζωής του ο Μονζ ήταν ταυτοχρόνως μέλος της Ακαδημίας Επιστημών, γερουσιαστής, αντιπρόεδρος της επιτροπής που επιφορτίστηκε με το καθήκον να ετοιμάσει προς δημοσίευση το υλικό που συγκεντρώθηκε κατά την παραμονή του στην Αίγυπτο, ενώ συνέχιζε και τη διδασκαλία της Απειροστικής Γεωμετρίας στην École Polytechnique.

1.5 Τα τελευταία χρόνια

Μετά το 1805 η εκπαιδευτική δραστηριότητα του Μονζ άρχισε να εμφανίζει φθίνουσα πορεία. Λόγω της αρθρίτιδας που τον ταλαιπωρούσε, αναγκάστηκε το 1809 να εγκαταλείψει τη διδασκαλία στην Πολυτεχνική Σχολή. Η δημιουργική του περίοδος έμοιαζε να φτάνει στο τέλος της, ενώ υπέστη αποπληξία από την οποία ουσιαστικά δεν συνήλθε ποτέ. Όταν στάλθηκε στη Λιέγη για να οργανώσει την άμυνα της πόλης, όχι μόνο δεν πέτυχε το σκοπό που του είχε ανατεθεί αλλά αναγκάστηκε να τραπεί σε φυγή λίγες εβδομάδες αργότερα, καθώς ο αντίπαλος συμμαχικός στρατός επέλαυνε δίχως να συναντά ιδιαίτερη αντίσταση. Όταν η Γερουσία αποφάσισε την καθαίρεση του Ναπολέοντα στις 3 Απριλίου 1814, εκείνος προτίμησε να μη λάβει μέρος στη συγκεκριμένη συνεδρίαση, ενώ του αφαιρέθηκαν όλοι οι τίτλοι, οι θέσεις και οι τιμές που είχε λάβει από τον Βοναπάρτη. Στα τέλη του 1815 έφυγε από τη Γαλλία και επιστρέφοντας, λίγους μήνες μετά, συνάντησε επιεικώς εχθρική αντιμετώπιση από το Γαλλικό Ινστιτούτο και τη νέα πολιτική τάξη πραγμάτων. Χωρίς υπερβολή η ζωή του κινδύνευε ανά πάσα στιγμή και σε τέτοιο βαθμό που αναγκαζόταν να κρύβεται από τη μία γειτονιά στην άλλη για να μην τον εντοπίσουν, ενώ το 1816 τον εξεδίωξαν και από την Ακαδημία. Μετά το θάνατό του στις 28 Ιουλίου 1818, απόρροια εγκεφαλικού επεισοδίου που τον έριξε σε παρατεταμένο κώμα, οι φοιτητές του στην Πολυτεχνική Σχολή ζήτησαν να παρευρεθούν στην κηδεία του, κάτι όμως που τους απαγορεύτηκε από τον νέο Βασιλιά. Την επόμενη μέρα, πάντως, κατευθύνθηκαν σύσσωμοι στο νεκροταφείο και άφησαν στον τάφο του ένα στεφάνι.

Φοιτητές της Πολυτεχνικής Σχολής στον τάφο του Γκασπάρ Μονζ

Στη συνέχεια τα οστά του μεταφέρθηκαν στο Πάνθεον στο Παρίσι, όπου και εκεί πολλοί νυν και πρώην φοιτητές του έρχονταν για να αποτίσουν φόρο τιμής στη μνήμη του. Έστω και μετά θάνατον, ο Μονζ επανέκτησε τη θέση του – αν και μάλλον δεν την είχε χάσει ποτέ - στο πάνθεον της μαθηματικής ιστορίας. Όταν το 1898 ο Γκούσταβ Άιφελ κατασκεύασε τον περίφημο πύργο του, αποφάσισε να τιμήσει εβδομήντα δύο κορυφαίους επιστήμονες γράφοντας δεκαοκτώ ονόματα σε καθεμία από τις τέσσερις βάσεις του οικοδομήματος. Το όνομα του Μονζ φιγουράρει στην πλευρά που κοιτά (όχι τυχαία) προς τη Στρατιωτική Ακαδημία, ενώ από το 1992 το γαλλικό Ναυτικό έχει δώσει το όνομά του σε ένα πλοίο.

2. Η γέννηση της Παραστατικής Γεωμετρίας

2.1 Οι Γεωμετρίες από την αρχαιότητα

Η λέξη «γεωμετρία» είναι σύνθετη, προέρχεται από τις λέξεις «γη» και «μέτρηση» και η γέννησή της αποδίδεται στην ανάγκη που υπήρχε στην αρχαία Αίγυπτο για την ορθή μέτρηση της γης και τη σωστή οριοθέτηση των χωραφιών όταν αυτά πλημμύριζαν σε ετήσια βάση από τον ποταμό Νείλο. Οι αρχαιότερες καταγεγραμμένες γεωμετρικές γνώσεις που έχουμε σήμερα προέρχονται από την Αίγυπτο και τη Μεσοποταμία και τις βρίσκουμε σε πάπυρους της εποχής και κείμενα γραμμένα σε σφηνοειδή γραφή.

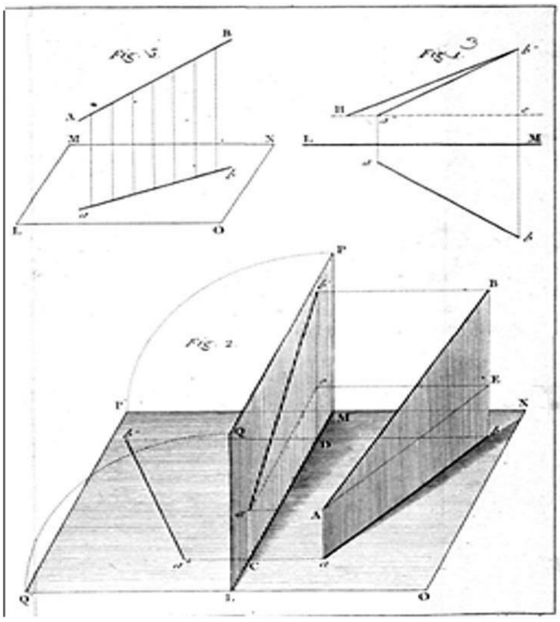
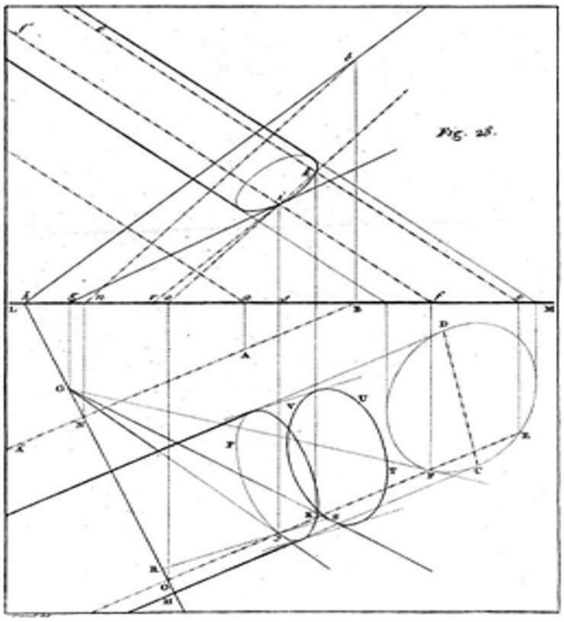
Παρά το γεγονός πως έχει διαπιστωθεί και εξακριβωθεί ότι μέθοδοι για τον υπολογισμό εμβαδών παραλληλογράμμων, τριγώνων, ακόμα και κύκλων, ήταν γνωστές – έστω και κατά προσέγγιση – στους πολιτισμούς αυτούς, η αναγωγή της γεωμετρίας σε αποδεικτική επιστήμη πραγματοποιείται τον $5^{ο}$ π.Χ. αιώνα στην αρχαία Ελλάδα, οπότε και κάνουν την εμφάνισή τους οι έννοιες των σχημάτων, της διατύπωσης της κάθε πρότασης και της αντίστοιχης απόδειξής της. Η απόδειξη, εξάλλου, είναι αυτή που επιβεβαιώνει και την αλήθεια μίας πρότασης και της σχέσης που η πρόταση αυτή έχει όταν συνδυαστεί με άλλες προτάσεις. Αν, δηλαδή, μία πρόταση ισχύει και βοηθά στο να αποδειχθεί μια άλλη, η οποία με τη σειρά της στηρίζεται σε κάποια άλλη και ούτω καθεξής, είναι δυνατόν κάποια στιγμή να υπάρξει πρόταση που γίνεται δεκτή χωρίς να απαιτείται η απόδειξή της, μέθοδος η οποία ονομάστηκε αξιωματική. Οι αρχαίοι Έλληνες άλλαξαν γενικά τον τρόπο σκέψης πάνω στα μαθηματικά, εισάγοντας τις αφηρημένες έννοιες και δίνοντάς τους πρωταρχικό ρόλο. Ο Θαλής ανακάλυψε πολλές γεωμετρικές ιδιότητες όπως αυτές των όμοιων τριγώνων, ο Ιπποκράτης ο Χίος ερεύνησε το πρόβλημα τους διπλασιασμού ενός κύβου και του τετραγωνισμού του κύκλου, ενώ ο Πλάτωνας έκανε πρώτος τη διάκριση ανάμεσα στη θεωρητική και την πρακτική γεωμετρία.

Το έργο, όμως, που καθόρισε την εξέλιξη της γεωμετρίας για τους πολλούς επόμενους αιώνες ήταν τα περίφημα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, στα οποία συνοψίζεται όλη η ελληνική παράδοση στην επιστήμη αυτή. Ο Ευκλείδης χώρισε τις γεωμετρικές προτάσεις σε «θεωρήματα», όπου το ζητούμενο είναι να αποδειχθεί η ιδιότητα ενός αντικειμένου, και σε «προβλήματα» όπου απαιτείται η κατασκευή ενός σχήματος με μία ορισμένη ιδιότητα. Με τα «Στοιχεία» ξεκινά η χρυσή περίοδος της αρχαίας ελληνικής γεωμετρίας, με εξέχουσες φυσιογνωμίες τον Αρχιμήδη, στον οποίο ανήκει η πρώτη απόπειρα να υπολογιστεί κατά προσέγγιση ο αριθμός π και τον Απολλώνιο, γνωστό για τη θεωρία του πάνω στις κωνικές τομές και τις καμπύλες που προκύπτουν από την τομή ενός επιπέδου με την επιφάνεια ενός κώνου. Ευκλείδης, Αρχιμήδης και Απολλώνιος αποτέλεσαν την κορωνίδα της αφηρημένης γεωμετρίας και καμία από τις μελέτες των επιγόνων τους δεν κατάφερε να αφήσει το στίγμα της και να φτάσει στο δικό τους επίπεδο.

Άξιες αναφοράς είναι οι προσπάθειες των Αράβων μαθηματικών από τον 9^{o} έως και τον 14^{o} αιώνα, καθώς το επίπεδο της μαθηματικής επιστήμης ήταν κατά πολύ υψηλότερο από αυτό της Ευρώπης, με αποτέλεσμα να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της γεωμετρίας στον δυτικό κόσμο. Στο έργο του Αλ-Χουαρίζμι (Al-Khwarizmi) εμπεριέχονται τύποι για την εύρεση του μήκους και του εμβαδού του κύκλου, ενώ και μεταγενέστεροί του επηρεάστηκαν από τους αρχαίους Έλληνες επιχειρόντας να επαναδιατυπώσουν γνωστά θεωρήματα και να τα μελετήσουν εκ νέου. Επιστήμονες όπως ο Φιμπονάτσι (Fibonacci) και ο Ταρτάλια (Tartaglia) έχουν στο έργο τους έντονες τέτοιες επιρροές, όπου μαζί με πολλούς σύγχρονούς τους συνδέουν την εμπειρική γεωμετρία με υπολογιστικές μεθόδους, χρήση εργαλείων μέτρησης και τη θεωρία της προοπτικής. Η λέξη «Προοπτική» προέρχεται από τα λατινικά, έχει όμως τη ρίζα της στον ελληνικό όρο «οπτική» που εισήγαγε ο Αριστοτέλης και, κατά τον 15^{o} αιώνα, σήμαινε την παρατήρηση μίας σκηνής από ένα σημείο σταθερό μέσω ενός διαφανούς επιπέδου. Την περίοδο της Αναγέννησης αποτέλεσε για πολλούς καλλιτέχνες και μηχανικούς έναν επιστημονικό τρόπο εικονικής αναπαράστασης, περιορισμένη όμως στο θέμα της εμφάνισης και χωρίς να απαντά πειστικά στο ερώτημα πώς γίνεται εφικτό τα αντικείμενα να αναπαρασταθούν πάνω σε ένα επίπεδο. Ο πιο διάσημος καλλιτέχνης που δημιούργησε έργα με τη μέθοδο της προοπτικής ήταν ο Λεονάρντο ντα Βίντσι (Leonardo da Vinci), έχοντας βέβαια βαθιά γνώση από την ανατομία και τη φυσική μέχρι τη χημεία, τα μαθηματικά και τη μηχανική.

Ο Καρτέσιος (Descartes) με το έργο του «Γεωμετρία» το 1637 χρησιμοποιεί αλγεβρική προσέγγιση για να επιλύσει γεωμετρικά προβλήματα με εργαλεία που ομοιάζουν με κανόνα και διαβήτη, ισχυριζόμενος ότι η μέθοδος της προοπτικής υπερτερεί έναντι οποιασδήποτε προηγούμενης. Κάθε γεωμετρική καμπύλη μπορούσε, σύμφωνα με τον Καρτέσιο, να εκφραστεί ως πολυώνυμο δύο μεταβλητών. Η αναλυτική γεωμετρία συνεχίστηκε με τους Μπερνουγί (Bernoulli), Όιλερ (Euler) και Χέρμαν (Herman) και οδήγησε στο συνδυασμό της με τις μεθόδους του Νεύτονα (Newton) και του Λάιμπνιτς (Leibnitz) πάνω στον απειροστικό λογισμό. Ο Όιλερ, ειδικότερα, επιχείρησε στη συνέχεια να επιλύσει όλα τα γεωμετρικά προβλήματα με μεθόδους Άλγεβρας και Ανάλυσης, ενώ σταδιακά διαφοροποιείται ο κλάδος της διαφορικής Γεωμετρίας με μελέτη καμπυλών και επιφανειών στο χώρο και εφαρμογή των μεθόδων της Ανάλυσης στην αναλυτική Γεωμετρία. Με τις εργασίες των Μονζ και Λαγκράνζ διαμορφώνεται οριστικά η διαφορική Γεωμετρία ως κλάδος με αντικείμενο τις οικογένειες των λείων καμπυλών και των επιφανειών τους, καθώς και τους μετασχηματισμούς τους.

Η προβολική Γεωμετρία, τέλος, εμφανίζεται πρώτη φορά τον 17^{ο} αιώνα στις εργασίες του Ντεζάργκ (Desargues) και του Πασκάλ (Pascal) και ασχολείται με τη μελέτη της απεικόνισης των σωμάτων στο επίπεδο. Το αντικείμενό της αρχικά είναι οι ιδιότητες που έχουν τα σώματα όταν προβάλλονται από ένα επίπεδο σε ένα άλλο, ενώ τα θεωρήματα που διατυπώνει ο Ντεζάργκ αφορούν και το ευκλείδειο επίπεδο και τον ευκλείδειο χώρο. Η εργασία του «πατά» πάνω στην παράδοση των θεωρητικών μαθηματικών του Ευκλείδη, του Πάππου και του Απολλώνιου για να μεταβεί σε κατασκευές τριών διαστάσεων. Ο Ντεζάργκ αντιλήφθηκε στην προοπτική μία ολόκληρη σειρά από νέες τεχνικές που θα μπορούσαν να επεκτείνουν τη γεωμετρία της τότε εποχής. Τόσο ο Καρτέσιος όσο και ο Πασκάλ αντιμετώπισαν με θετικό τρόπο το έργο του Ντεζάργκ, αν και οι ιδέες του συνοδεύονταν από μία σχετικά ιδιόμορφη ορολογία. Ο πρώτος, μάλιστα, του επεσήμανε σε μία επιστολή που του είχε στείλει ότι το λεξιλόγιο που χρησιμοποιούσε εισήγαγε νέες ορολογίες σε ήδη γνωστές έννοιες και ότι αυτό θα δημιουργούσε επιπλέον δυσκολίες στην κατανόησή τους. Δεν έπεσε έξω, καθώς η προβολική γεωμετρία έμεινε για σχεδόν δύο αιώνες στο περιθώριο χωρίς να σημειωθεί ιδιαίτερη πρόοδος όλο αυτό το διάστημα, μέχρι να «επινοηθεί» εκ νέου από τον Μονζ και τους μαθητές του στην Πολυτεχνική Σχολή.

Απεικονίσεις από το έργο του Μονζ «Παραστατική Γεωμετρία»

2.2 Εισαγωγή στην Παραστατική Γεωμετρία

Οι αρχές της Παραστατικής Γεωμετρίας, λοιπόν, συναντώνται στη θεωρία της προοπτικής του 15ου και του 16ου αιώνα, επιστήμη την οποίαν κατείχαν και οι αρχαίοι χωρίς ομώς να κατορθώσουν να την συστηματοποιήσουν σε ένα οργανωμένο σύστημα με αρχές και κανόνες. Ελάχιστα στοιχεία σώζονται σχετικά με τη χρήση της προβολής ή της προοπτικής στην αρχαιότητα, ενώ σε τοιχογραφίες της εποχής συναντάμε κάποιες απόπειρες προοπτικής, χωρίς πάντως να τηρούνται οι ενδεδειγμένοι κανόνες και δείχνουν περισσότερο σαν να χρησιμοποιήθηκαν τυχαία, ώστε να υπάρχει η ψευδαίσθηση του χώρου. Υπήρξαν και πριν τον Μονζ γεωμέτρες, αλλά και καλλιτέχνες και επαγγελματίες που απασχολούνταν σε άλλους κλάδους, οι οποίοι είχαν προσπαθήσει να εφαρμόσουν τεχνικές που ομοίαζαν στην Παραστατική Γεωμετρία. Ως κλάδος, όμως, αναπτύχθηκε επίσημα από τον Μονζ στο έργο του "Application de l'analyse à la géométrie" το 1795 και συνδέει τη χρήση αλγεβρικών μεθόδων με την κατανόηση και την καλύτερη αναπαράσταση των γεωμετρικών αντικειμένων, κάνοντας μια πολύ σημαντική παρατήρηση: Τα γεωμετρικά αντικείμενα στο χώρο έχουν προοπτικές απεικονίσεις που μας επιτρέπουν να τα μελετήσουμε πλέον στο επίπεδο και να αντιληφθούμε – και κατά συνέπεια – να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους.

Εξετάζει έτσι τις ορθογώνιες προβολές των τρισδιάστατων αντικειμένων σε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα προβολής, όπου κάποιες από αυτές τις ιδιότητες διατηρούνται αναλλοίωτες και άλλες εξαφανίζονται.

Ο ίδιος ο Monge αναφέρει στην αρχή του έργου του: «Ο σκοπός της Παραστατικής Γεωμετρίας είναι διπλός: Πρώτον, να βοηθήσει στην κατανόηση των μεθόδων, με τις οποίες αναπαριστώνται τα τρισδιάστατα αντικείμενα σε επιφάνειες δύο διαστάσεων και, δεύτερον, ο τρόπος προσδιορισμού των αντικειμένων αυτών και τα συμπεράσματα που εξάγονται να προκύπτουν από τις ιδιότητες που φέρουν». Επέδειξε δε εξαιρετική δεξιοτεχνία στη χρήση του συστήματος συντεταγμένων και οι υπολογισμοί του βοήθησαν να τεθούν τα θεμέλια της γεωμετρίας της ευθείας γραμμής. Η χρήση των κυλινδρικών και των κεντρικών προβολών, ο προσανατολισμός των επίπεδων επιφανειών και η χρήση μετασχηματισμών με αμοιβαίους πόλους έδειξαν το δρόμο για την προβολική και τη σύγχρονη γεωμετρία και επιβεβαιώνουν τη σπουδαιότητα της συνεισφοράς του Monge στην εξέλιξη της γεωμετρίας στη μορφή που έχει σήμερα.

2.3 Ορισμός της Παραστατικής Γεωμετρίας και τα είδη των προβολών

Τι είναι λοιπόν η Παραστατική Γεωμετρία; Είναι μία μέθοδος, με την οποία τα τρισδιάστατα αντικείεμενα αναπαριστώνται στο επίπεδο των δύο διαστάσεων με χρήση γεωμετρικών προβολών. Η παραστατική γεωμετρία ασχολείται με δύο κατηγορίες προβλημάτων, τα γραφικά και τα μετρικά. Στα πρώτα απαιτείται η κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος ή και ενός απλού γεωμετρικού στοιχείου (ενδεικτικά αναφέρουμε την κατασκευή της τομής μίας πυραμίδας σε ένα επίπεδο ή το σημείο τομής μίας ευθείας και ενός επιπέδου), ενώ στα δεύτερα καλούμαστε να βρούμε το μέτρο ενός γεωμετρικού μεγέθους όπως η απόσταση δύο σημείων, η γωνία μεταξύ δύο ευθειών και διάφορα άλλα. Οι κυριότερες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων είναι η αλλαγή επιπέδου προβολής και η περιστροφή.

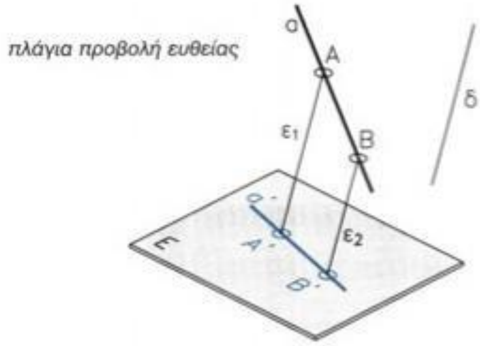
Κάθε αντικείμενο, λοιπόν, είτε πραγματικό είτε φανταστικό, μπορεί να σχεδιαστεί με τέτοιον τρόπο ώστε να καταστεί εφικτή η μοντελοποίησή του σε τρεις διαστάσεις. Οι γεωμετρικές πτυχές του αντικειμένου υπολογίζονται με το πραγματικό τους μέγεθος, ενώ οι εικόνες αναπαριστώνται σε επιφάνεια δύο διαστάσεων. Μπορούμε, συνεπώς, να πούμε ότι η Παραστατική Γεωμετρία έχει ως θεμελιώδη έννοια την «άποψη», παίρνοντας κάθε σημείο του αντικειμένου αυτού και προβάλλοντάς του σε ένα επίπεδο προβολής για να κατασκευάσει μία εικόνα στο διδιάστατο επίπεδο. Στη συνέχεια γίνεται ο σχεδιασμός των γραμμών προβολής για να συνδεθούν όλα τα σημεία του αντικειμένου αυτού με το επίπεδο προβολής και να παραχθεί μία επίπεδη άποψή του, διατηρώντας τις υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των θέσεων των σημείων του αρχικού αντικειμένου.

Οι θεμελιώδεις έννοιες της Παραστατικής Γεωμετρίας μπορούν να γίνουν ευκολότερα κατανοητές αν γνωρίζουμε πώς να συμβολίσουμε και να απεικονίσουμε τα σημεία και τις γραμμές, τα οποία αποτελούν και τα βασικά της στοιχεία. Τα σημεία παριστάνονται συνήθως με κεφαλαία γράμματα και μπορούν να βρίσκονται είτε στο επίπεδο προβολής είτε στον χώρο των τριών διαστάσεων. Οι γραμμές, αντίθετα, παριστάνονται με μικρά γράμματα και μπορούν να είναι είτε γραμμές που ενώνουν δύο σημεία του χώρου είτε γραμμές πάνω στο επίπεδο προβολής. Τα σημεία που τα επίπεδα προβολής συναντούν τις τομές αντικειμένων ονομάζονται ίχνη, ενώ τα επίπεδα που «κόβουν» το αντικείμενο για να αναλυθεί αυτό καλύτερα αποκαλούνται τομές. Προβολή ενός σημείου Α του χώρου σε ένα επίπεδο Ε ονομάζεται το σημείο τομής Α΄ που προκύπτει από την τομή μίας ευθείας (ε) που διέρχεται από το αρχικό σημείο Α με το επίπεδο Ε. Το επίπεδο αυτό λέγεται επίπεδο προβολής και η ευθεία (ε) ευθεία προβολής.

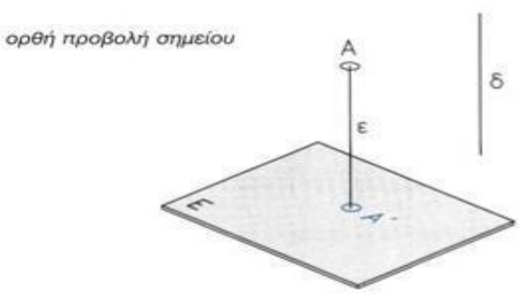
Εκτός όμως από τη μέθοδο του Μονζ (ή μέθοδο των ορθογωνίων προβολών, όπως αναφέρεται κάποιες φορές), υπάρχουν και άλλα είδη προβολών που χρησιμοποιούνται και τα οποία διαφέρουν ανάλογα με το σχήμα του αρχικού αντικειμένου και τον τρόπο που ορίζουμε την ευθεία προβολής. Τα κυριότερα συστήματα προβολών είναι τα παρακάτω:

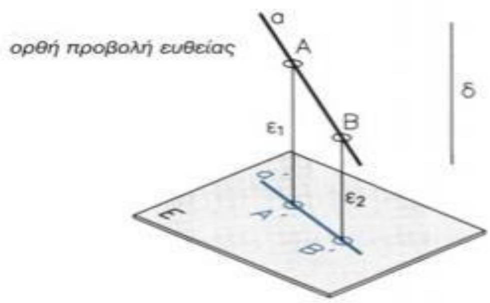
Παράλληλες προβολές, όταν η κάθε ευθεία προβολής είναι παράλληλη προς μία άλλη ευθεία (δ) που την ονομάζουμε «οδηγό» και τη χρησιμοποιούμε σαν οδηγό όλων των ευθειών προβολής.

Πλάγιες προβολές, όταν η ευθεία (δ) έχει τυχαία κλίση ως προς το επίπεδο προβολής Ε.

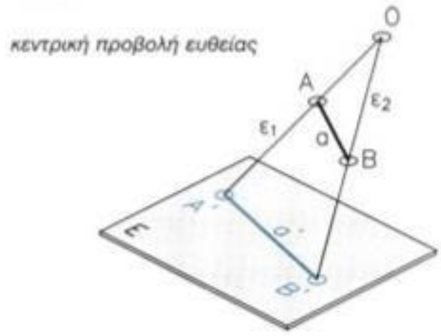


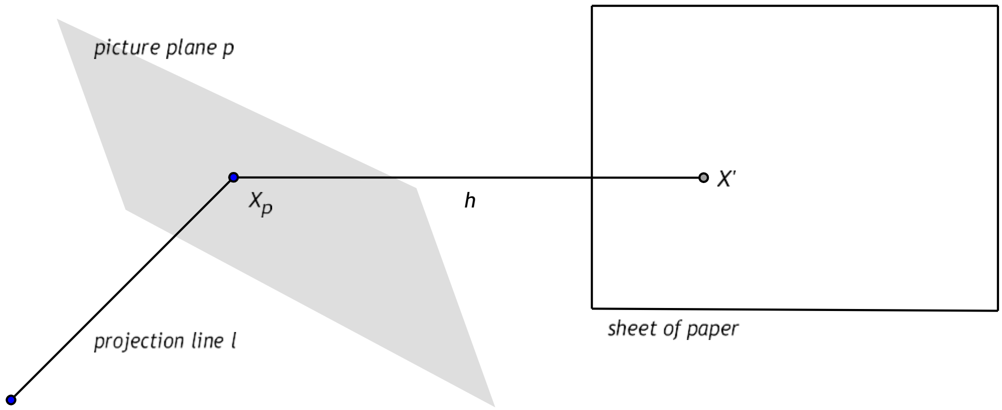
Ορθές προβολές, όταν η ευθεία (δ) είναι κάθετη στο επίπεδο προβολής Ε.





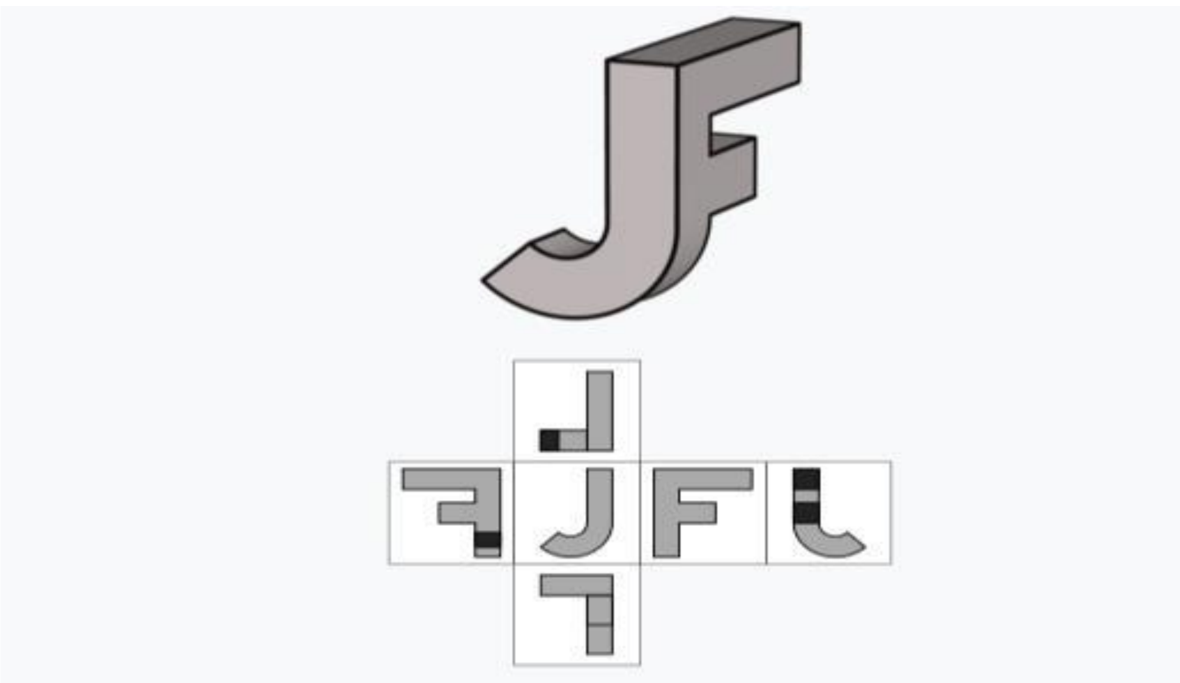
Κεντρικές προβολές, όταν κάθε ευθεία προβολής διέρχεται από σημείο Ο που το θεωρούμε ως το κέντρο προβολής.





Ορθογραφική Προβολή εικόνας στο χαρτί

Ισομετρικές προβολές: Μας επιτρέπουν να δημιουργήσουμε μία τρισδιάστατη όψη του αντικειμένου, όπου τα κάθετα σχέδια προβάλλονται υπό γωνία 120°. Εδώ οι γραμμές που είναι παράλληλες στο χώρο εξακολουθούν να είναι παράλληλες και στην προβολή τους, οι γωνίες όμως παραμορφώνονται οπότε μία ορθή γωνία για παράδειγμα παύει να είναι ορθή και μετατρέπεται σε γωνία 120° όπως αναφέραμε παραπάνω.



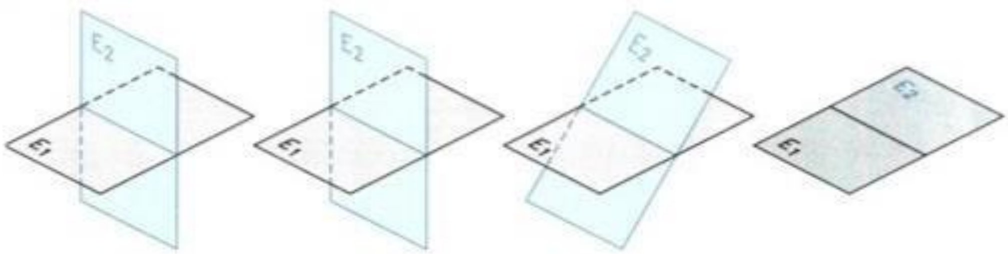
Αντικείμενο σε ισομετρική προβολή

Τέλος, σε σύνθετα σχήματα μεγάλου μεγέθους οι προβολές ανά τμήματα είναι οι ενδεδειγμένες καθώς χωρίζουν το αρχικό αντικείμενο σε πολλά μικρότερα κάνοντας την απεικόνισή του απλούστερη.

Αξίζει ακόμα να γίνει αναφορά στις προβολές προοπτικής που χρησιμεύουν για να προσδώσουν απόσταση και βάθος σε μία εικόνα, ενώ οι λοξές προβολές προσφέρουν μία εικόνα του σχήματος από μία συγκεκριμένη γωνία.

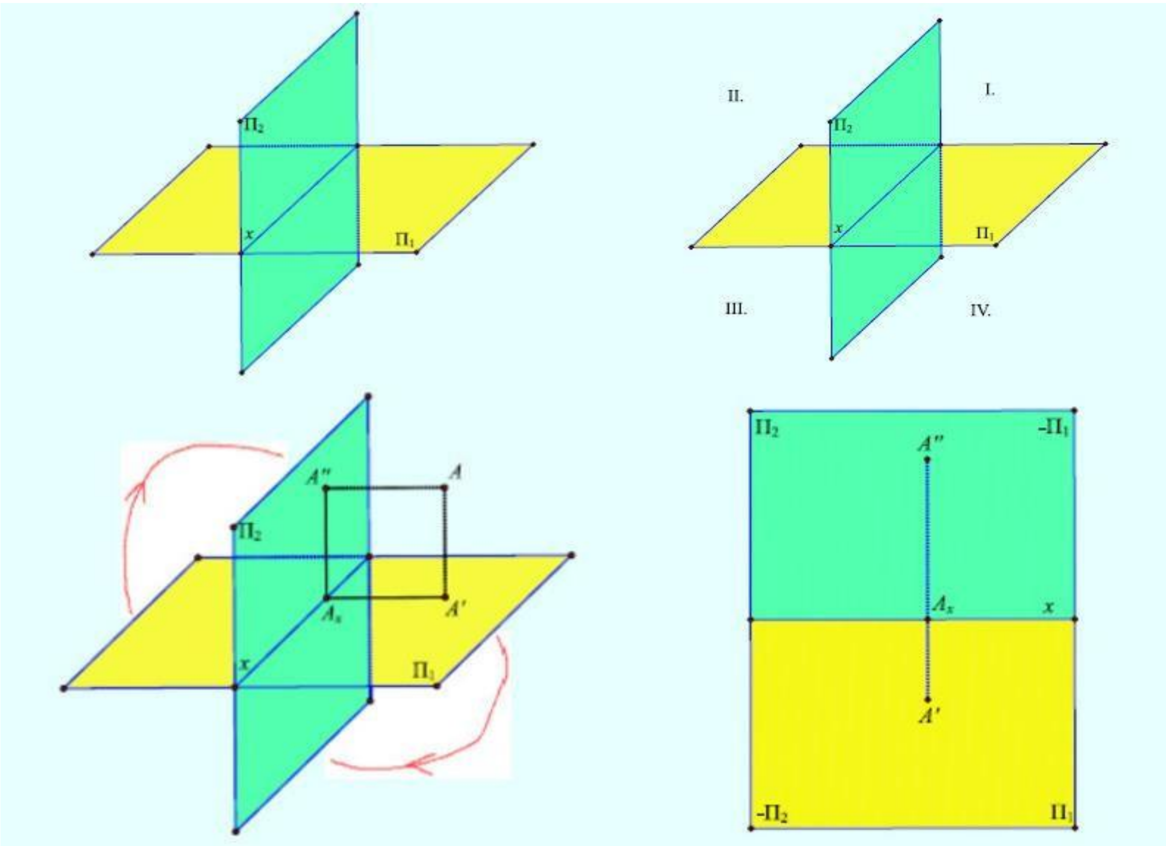
Ανακεφαλαιώνοντας, η Παραστατική Γεωμετρία μπορεί να προσφέρει έναν πολύ μεγάλο αριθμό διαφορετικών προβολών με τις πλέον συχνές να είναι κυρίως οι ορθές και σε μικρότερο βαθμό οι πλάγιες. Η αρχιτεκτονική, από την άλλη, κάνει χρήση κυρίως των κεντρικών προβολών καθώς αυτές προσφέρουν καλύτερη απεικόνιση του χώρου.

Πώς δουλεύει όμως η μέθοδος του Μονζ; Ας θεωρήσουμε ένα σημείο του χώρου π.χ. το Σ και δύο επίπεδα κάθετα μεταξύ τους, έστω $Π_1$ και $Π_2$. Φέρουμε τις ορθές προβολές $Σ_1$, $Σ_2$ του σημείου Σ στα επίπεδα και έχουμε ως Τ την ευθεία τομής τους. Αν στρέψουμε το $Π_2$ γύρω από την ευθεία Τ μέχρι να συμπέσει με το $Π_1$, τότε το σημείο $Σ_2$ θα βρεθεί στην ευθεία που είναι κάθετη στην ευθεία Τ (η διαδικασία αυτή ονομάζεται «κατάκλιση» του ενός επιπέδου στο άλλο, ενώ η αντίστροφη διαδικασία με την οποία το επίπεδο επανέρχεται στην αρχική του θέση λέγεται «ανάκλιση»).



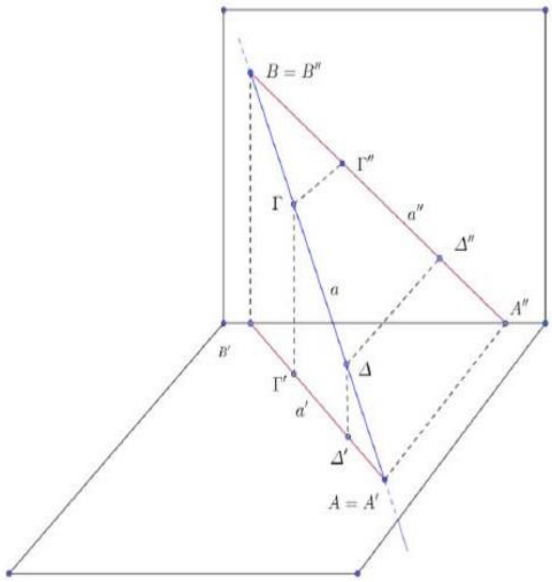
Κατάκλιση του επιπέδου E_2 στο επίπεδο E_1

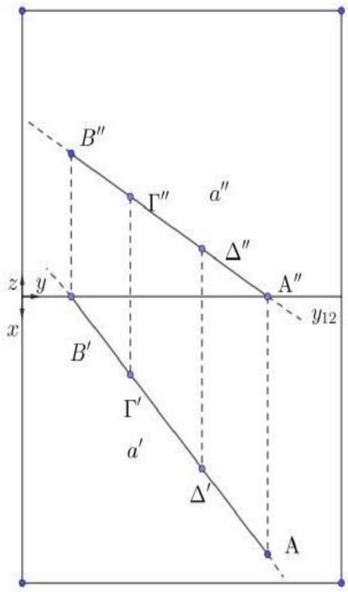
Το σημείο Σ παριστάνεται τώρα στο επίπεδο Π_1 από τα σημεία Σ και Σ_2 και η προηγούμενή του απεικόνιση στο επίπεδο Π_1 είναι μονοσήμαντη και αντιστρέψιμη, δηλαδή μπορεί κάθε σημείο να έχει μία και μοναδική παράσταση. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να παραστήσει κάποιος στο επίπεδο ένα άλλο επίπεδο, ακόμα και οποιοδήποτε γεωμετρικό σχήμα, αλλά και να διατυπώσει θεωρήματα για την παραλληλία ή την καθετότητα δύο ευθειών, δύο επιπέδων ή μίας ευθείας και ενός επιπέδου. Αντίστοιχα, μπορεί να οριστεί η τομή δύο επιπέδων, να σχεδιαστεί ένα επίπεδο που θα διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο και θα είναι κάθετο σε μία ευθεία και πολλά άλλα. Αν πρέπει, πάντως, να εντοπιστεί ένα αδύναμο σημείο στη μέθοδο που διατύπωσε ο Μονζ, αυτό είναι ότι τα μέτρα των γωνιών και οι αποστάσεις δεν διατηρούνται αφού αλλάζει η μορφή των σχημάτων που παριστάνονται.



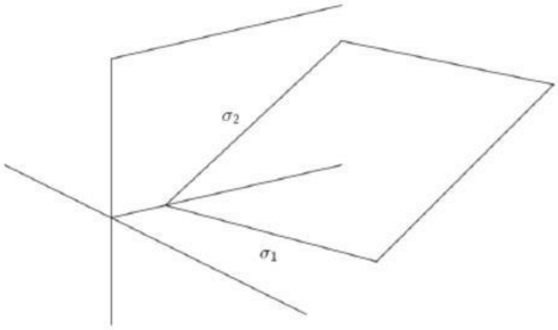
Το σύστημα των δύο επιπέδων προβολής του Μονζ σε τέσσερα στάδια

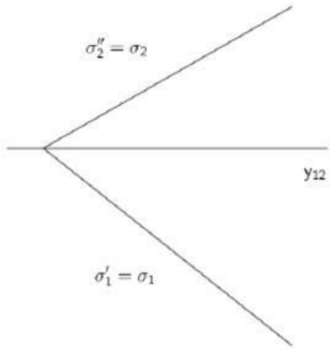
Απεικόνιση μιας ευθείας στο επίπεδο: Έστω ότι δίνεται μία ευθεία στο χώρο των τριών διαστάσεων, η οποία περνά από δύο σημεία Γ και Δ. Έστω ακόμα ότι η ευθεία αυτή τέμνει τα επίπεδα σε σημεία Α και Β, τα οποία ονομάζονται «ίχνη» της ευθείας. Κάνουμε την κατάκλιση και παίρνουμε στο χαρτί το τελικό σχήμα που βλέπουμε παρακάτω:

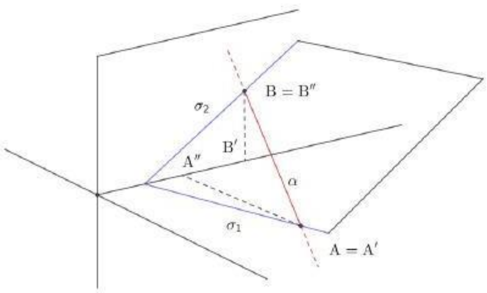


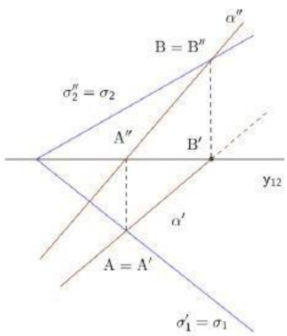


Απεικονίσεις επιπέδων: Έστω επίπεδο σ, το οποίο τέμνει δύο άλλα επίπεδα E_1 και E_2 σε ευθείες $σ_1$ και $σ_2$ αντίστοιχα. Οι $σ_1$, $σ_2$ ονομάζονται «πρώτο ίχνος» και «δεύτερο ίχνος» του σ και λέμε ότι μία ευθεία α βρίσκεται πάνω στο επίπεδο σ, αν τέμνει τις $σ_1$, $σ_2$ ή τέμνει την μία εξ’ αυτών και είναι παράλληλη στην άλλη.

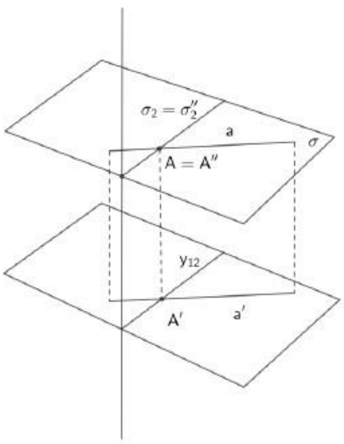


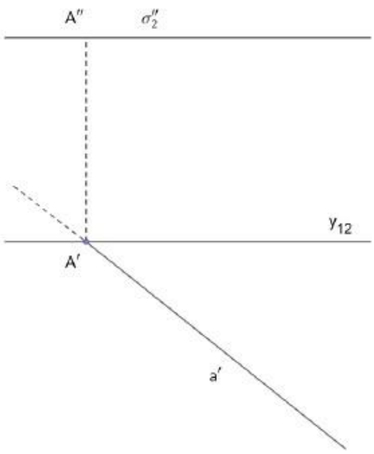




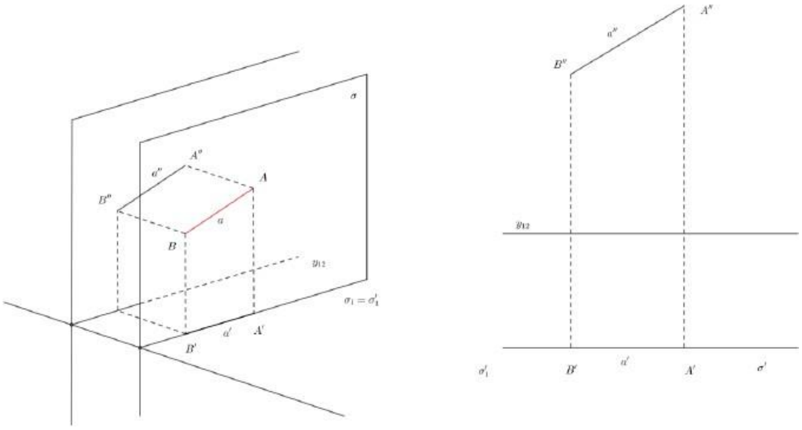


Οριζόντιο επίπέδο, παράλληλο προς το E_1:

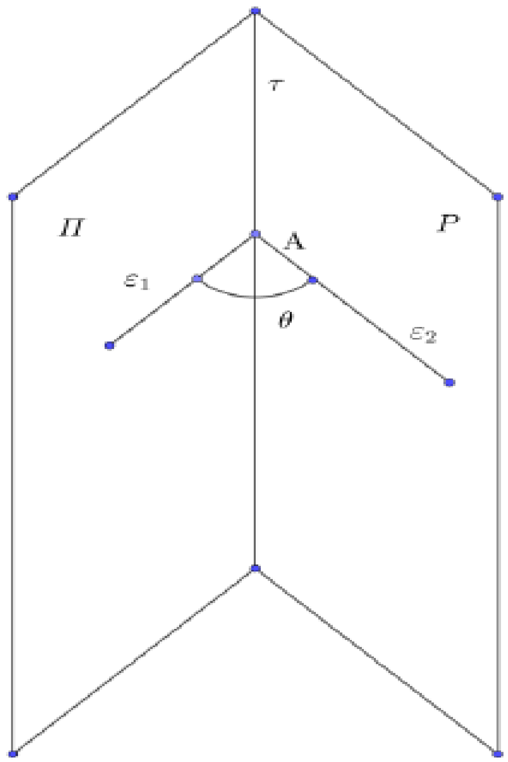




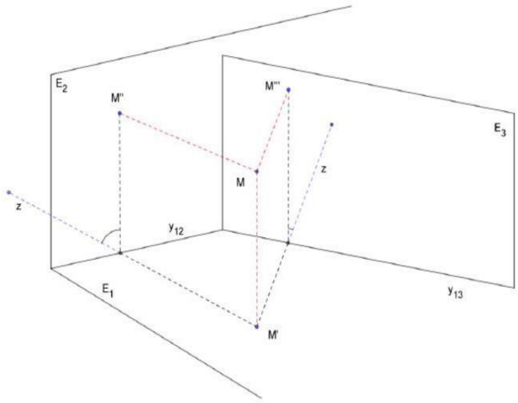
Μετωπικό επίπεδο, παράλληλο προς το E_2:

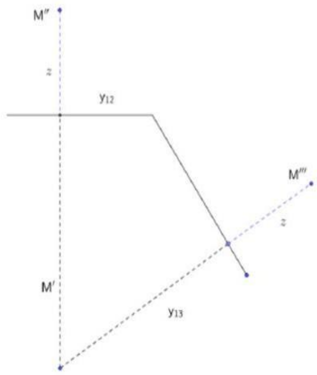


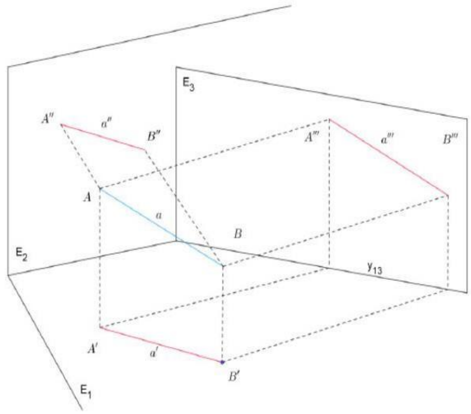
Γωνία μεταξύ επιπέδων: Έστω δύο επίπεδα Π, Ρ με ευθεία τομής την r και Α ένα σημείο της ευθείας αυτής. Αν φέρουμε τις ευθείες ε_1, ε_2 των επιπέδων Π και Ρ αντίστοιχα, κάθετες στην r και οι οποίες διέρχονται από το Α, τότε η γωνία μεταξύ των ε_1 και ε_2 ονομάζεται «γωνία» των επιπέδων Π και Ρ.

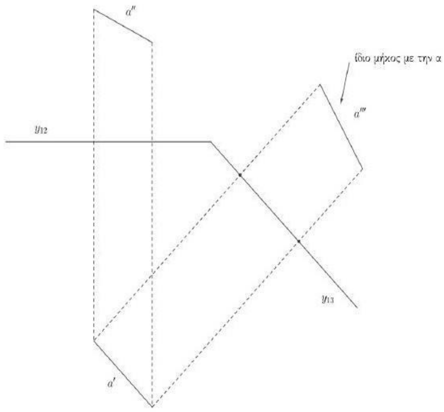


Έστω ένα σχήμα που απεικονίζεται στο σύστημα δύο κάθετων μεταξύ τους επιπέδων Ε1, Ε2 και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αλλάξουμε την απεικόνιση του σχήματος αυτού σε ένα άλλο σύστημα επιπέδων π.χ. Ε1 και Ε3 (όπου το επίπεδο Ε3 είναι κάθετο στο Ε1). Αν Μ, Μ ΄, Μ ΄΄ είναι οι προβολές ενός τυχαίου σημείου στα τρία επίπεδα, οι δύο από τις τρεις προβολές του Μ έχουν ίσο μήκος. Αν πάρουμε μία ευθεία α παράλληλη στο επίπεδο Ε3, η προβολή α΄΄΄ και η α έχουν επίσης ίσο μήκος.

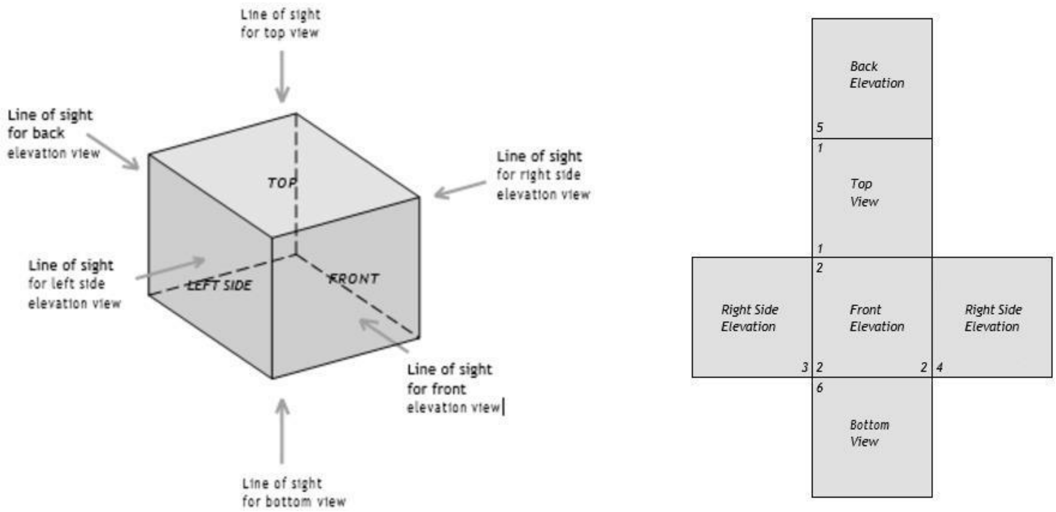




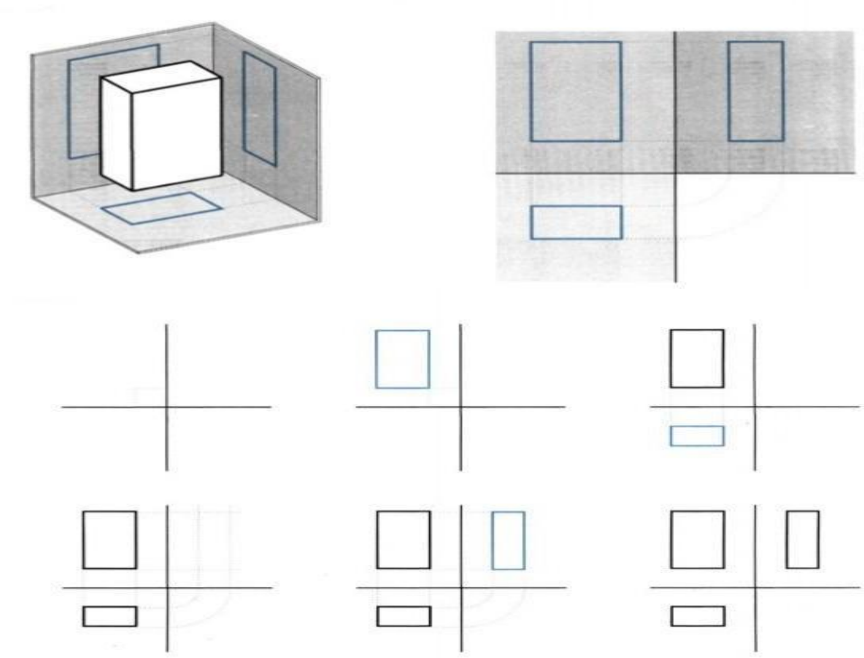




Υπάρχουν, όμως, και σχήματα που τα δύο επίπεδα προβολής μπορεί να μην αποδειχτούν αρκετά και να απαιτηθούν περισσότερα επίπεδα προβολής, κάθετα μεταξύ τους. Παίρνουμε για παράδειγμα έναν κύβο και σχεδιάζουμε στο επίπεδο πολλά σχέδια του σχήματος, περιστρέφοντας κάθε φορά κατά 90^o τη γωνία υπό την οποία βλέπουμε το αντικείμενο. Αν προβάλλουμε αυτά τα σχέδια (που ονομάζονται «όψεις») στα σχέδια προβολής, έχουμε μία εικόνα για το επίπεδο (οριζόντια προβολή), μία εικόνα για το αριστερό κατακόρυφο επίπεδο (κατακόρυφη προβολή) και μία εικόνα για το δεξί κατακόρυφο επίπεδο (πλευρική προβολή).



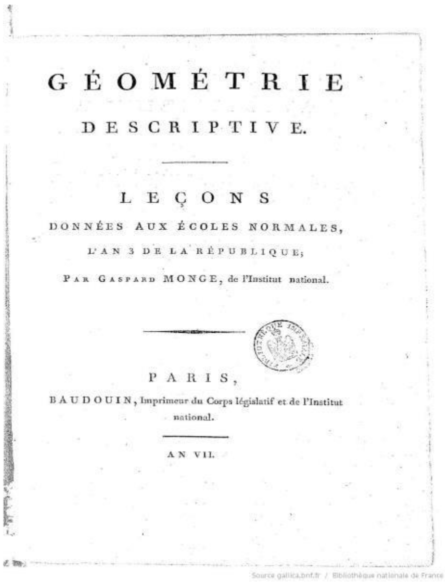
Η απεικόνιση ενός κύβου σε ένα φύλλο χαρτί



Βήματα σχεδίασης των όψεων ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

2.4 Η εξέλιξη της Παραστατικής Γεωμετρίας

Ως επιστήμη μπορεί να διαμορφώθηκε στα τέλη του 18ου αιώνα – αν και άλλες μέθοδοι προβολής είχαν χρησιμοποιηθεί πολύ καιρό πριν – αλλά στη συνέχεια κατέστη άκρως απαραίτητη στο έργο των αρχιτεκτόνων, των μηχανικών, ακόμα και ορισμένων γιατρών. Αρκούσε μία στοιχειώδης και βραχύβια εκπαίδευση για να μπορεί ο σχεδιαστής να «διαβάζει» αυτές τις αναπαραστάσεις και να εξάγει τα συμπεράσματά του, με αποτέλεσμα αυτή η απλή εφεύρεση να φέρει την επανάσταση στο μηχανολογικό σχεδιασμό της εποχής της.


GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE.
LEÇONS
DONNÉES AUX ÉCOLES NORMALES,
L'AN 3 DE LA RÉPUBLIQUE;
PAR GASPARD MONGE, de l'Institut national.
PARIS,
BAUDOUIN, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national.
AN VII.

Εξώφυλλο της δεύτερης έκδοσης της «Παραστατικής Γεωμετρίας»

Τα στοιχεία της παραστατικής Γεωμετρίας έκαναν την εμφάνισή τους πολύ νωρίς στο έργο και στις πρακτικές του Μονζ. Στην ουσία δεν είχαμε να κάνουμε με πρωτογενές υλικό, αλλά με το συντονισμό και τον εξορθολογισμό προγενέστερων γνώσεων, συνοδευόμενο από μία δίχως προηγούμενο εξοικείωση πάνω σε θέματα απειροστικού λογισμού και αναλυτικής γεωμετρίας. Ο Μονζ χρησιμοποιούσε μεθόδους γεωμετρίας με κατασκευές από το 1766 στο Μεζιέρ, έπρεπε όμως να έρθει η Γαλλική Επανάσταση (και συγκεκριμένα το 1794) για να μπορέσει ο Μονζ – όπως αναφέραμε και προηγουμένως - να διδάξει τη νέα αυτή μέθοδο στην École Normale και την École Polytechnique. Οι καταγραφές των διαλέξεων του Μονζ, οι οποίες αποτέλεσαν το πρώτο μάθημα Παραστατικής Γεωμετρίας, μπορούν να θεωρηθούν ως μία πρώιμη έκδοση του μελλοντικού του έργου Application de l'analyse à la gomtrie. Το ακαδημαϊκό έτος 1794-1795 έχουμε την πρώτη δημοσίευση του έργου του στο περιοδικό Séances des Écoles Normale, ενώ η δεύτερη έκδοση κυκλοφόρησε με τη μορφή βιβλίου και με τον τίτλο Géométrie descriptive. Leçons donées aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique. Το μεγαλύτερο μέρος των περίπου 130 σελίδων του βιβλίου αυτού έχει να κάνει με τη θεωρία και τις γενικές μεθόδους της Παραστατικής Γεωμετρίας, ενώ γίνεται και αναφορά στη θεωρία καμπυλών και επιφανειών όπου εφαρμόζονται οι μέθοδοι αυτές μαζί με Διαφορική Γεωμετρία.

Ακολουθεί ο αναλυτικός πίνακας περιεχομένων:

- - - - - - - - - - - - Τέλος Πίνακα Περιεχομένων - - - - - - - - - - - -

Ας επιχειρήσουμε να «περιγράψουμε» πιο αναλυτικά τα περιεχόμενα του βιβλίου αυτού:

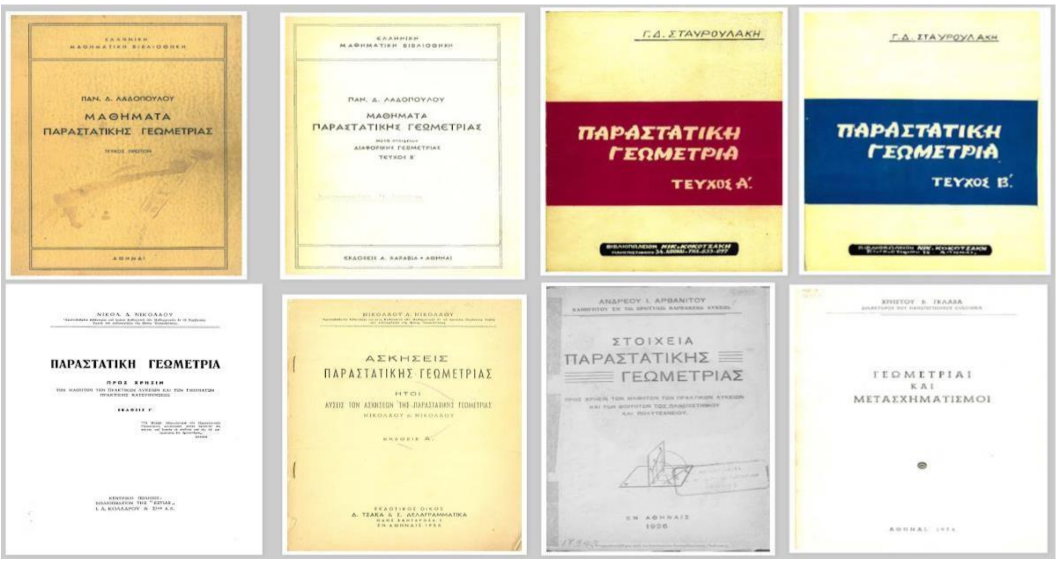
Ο Μονζ ξεκινά εισάγοντας την έννοια της παραστατικής γεωμετρίας. Δίνει τον ορισμό της (τον αναφέραμε παραπάνω) και καταδεικνύει τη σημασία που αυτή έχει στην αρχιτεκτονική και στη μηχανική. Συνεχίζει με μία ανασκόπηση στις θεμελιώδεις έννοιες της γεωμετρίας αναφέροντας τους ορισμούς για τα σημεία, τις ευθείες και τις γραμμές γενικότερα. Εξηγεί πώς είναι εφικτή η κατασκευή των στοιχείων αυτών με χρήση γεωμετρικών εργαλείων σαν την πυξίδα και ερευνά τις ιδιότητές τους στο επίπεδο. Μετά ρίχνει το βάρος του στις ιδιότητες που έχουν τα σχήματα στο επίπεδο, όπως για παράδειγμα το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και περνά στη συνέχεια στην αντίστοιχη έρευνα και ανάλυση όλων αυτών των προηγουμένων ιδιοτήτων στο χώρο. Δείχνει τους τρόπους εφαρμογής της παραστατικής γεωμετρίας για το σχεδιασμό μηχανικών συσκευών και χρησιμοποιεί τον κλάδο αυτό για τη δημιουργία προοπτικών σχεδίων στην κατασκευή κτιρίων και άλλων αναπαραστάσεων. Τέλος, συνοψίζοντας τις αρχές και τις έννοιες που παρουσίασε, τονίζει τη χρησιμότητα της παραστατικής γεωμετρίας ακόμα και σε πολλές μορφές της τέχνης.

2.5 Εκδόσεις βιβλίων παραστατικής γεωμετρίας

Οι δημοσιεύσεις του Μονζ εκείνη την περίοδο απευθύνονταν στους φοιτητές της σχολής, στην πορεία όμως η Παραστατική Γεωμετρία διαδόθηκε και σε πολλές χώρες εκτός της Γαλλίας. Ακολούθησαν επανειλημμένες εκδόσεις τόσο στα γαλλικά όσο και σε άλλες γλώσσες, όπως τα αγγλικά, τα ιταλικά, τα γερμανικά και τα ρωσικά. Ο Μονζ δημοσίευσε το 1801 μια διευρυμένη έκδοση των διαλέξεών του από το 1795 πάνω στην Απειροστική Γεωμετρία, ενώ ένα χρόνο μετά συνεργάστηκε με τον Ασέτ (Hachette) για μία έκθεση πάνω στην Αναλυτική Γεωμετρία. Το συνολικό πλέον αυτό έργο επανεκδόθηκε το 1809, ενώ ο Λιουβίλ (Liouville) πρόσθεσε τα δικά του σημαντικά συμπεράσματα σε μία ακόμα επανέκδοση του 1850. Στην έκδοση που κυκλοφόρησε το 1811 συμπεριλήφθηκαν συμπληρωματικές σημειώσεις από τον Ασέτ, ενώ υπήρξε και μία τέταρτη έκδοση του 1820 που περιείχε ανέκδοτες έως εκείνη τη στιγμή διαλέξεις πάνω στη θεωρία των σκιών και την προοπτική.

Καθ' όλη τη διάρκεια του 20ου αιώνα – για την ακρίβεια από τις αρχές μέχρι τη δεκαετία του 1970 – κυκλοφόρησαν και στην Ελλάδα αρκετά βιβλία πάνω στο αντικείμενο της παραστατικής γεωμετρίας. Τα περισσότερα εξ αυτών χρησιμοποιήθηκαν για εκπαιδευτικούς σκοπούς, καθώς διδάσκονταν είτε στη δευτεροβάθμια είτε στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αναφέρουμε ενδεικτικά κάποιους από αυτούς με αλφαβητική σειρά (στην παρένθεση αναγράφεται η χρονολογία της πρώτης έκδοσης): Ανδρέας Αρβανίτης (1926), Άρης Δεϊμεζής (1964), Νικόλαος Καρακατσανίδης (1909), Παναγιώτης Λαδόπουλος (1968), Νικόλαος Νικολάου (1970), Χρήστος Σάσσαλος (1967), Γεώργιος

Σταυρουλάκης (1964), Πέτρος Τόγκας (1947). Τα περισσότερα εξ' αυτών είναι πολύ καλά δομημένα, καλύπτουν από τις πιο βασικές μέχρι τις πλέον προχωρημένες έννοιες και περιλαμβάνουν πολλά παραδείγματα και ασκήσεις προς εξάσκηση. Κάποια είναι πιο θεωρητικά και κάποια άλλα εστιάζουν περισσότερο στις πρακτικές εφαρμογές του κλάδου της παραστατικής γεωμετρίας, ενώ χρησιμοποιούνται – με τις απαραίτητες «τροποποιήσεις» όπου χρειάζεται – στην αρχιτεκτονική και σε πολυτεχνικές σχολές.



Εξώφυλλα από εκδόσεις Παραστατικής Γεωμετρίας στα ελληνικά

3. Ο Μονζ πέρα από την παραστατική γεωμετρία

3.1 Άλλες πτυχές του έργου του

Στην πορεία του στο πεδίο της παραστατικής γεωμετρίας ο Μονζ, μεταξύ πολυάριθμων άλλων μελετών, ανέπτυξε τη «θεωρία της συναρμολόγησης λίθων», η οποία απαντούσε στο ερώτημα πώς μπορεί κάποιος να χτίσει με τον βέλτιστο τρόπο μία επιφάνεια που του έχει δοθεί εξ’ αρχής και πώς δύναται να προσδιορίσει τις κατασκευαστικές της ιδιότητες δεδομένων διαφόρων περιορισμών. Αυτός ο κλάδος, που είχε αρχικά να κάνει με σχέδια από ξύλο και πέτρα και στη συνέχεια καθιερώθηκε ως η τέχνη του σχεδιασμού για την κατασκευή μεγάλων κτιρίων και γεφυρών λαμβάνοντας υπόψιν τις τομές και τις ενώσεις τους, πήρε το όνομα «στερεοτομία» και είναι για την παραστατική γεωμετρία το αντίστοιχο της προοπτικής για την προβολική γεωμετρία με μία σημαντική διαφοροποίηση ανάμεσα τους: Ενώ η προβολική γεωμετρία παρεκκλίνει από την προοπτική και τις τεχνικές που τη δημιούργησαν, η παραστατική γεωμετρία εξακολουθεί να συνδέεται άρρηκτα με τις ρίζες της. Η παραστατική γεωμετρία δεν εμβαθύνει σε ιδιαίτερες τεχνικές λεπτομέρειες, αλλά επιχειρεί να προσφέρει μία διαισθητική κατανόηση των γραμμών καμπυλότητας και να σχεδιαστούν οι καμπύλες πάνω σε μία επιφάνεια με τέτοιον τρόπο, ώστε να μπορεί να υπάρξει ανάπτυξη της κανονικής αυτής επιφάνειας.Αυτή η μελέτη κάνει την εμφάνισή της στο πρώτο μάθημα Παραστατικής Γεωμετρίας που δίδαξε ο Μονζ στην Ecole Normale και κατόπιν στην Ecole Polytechnique, εισάγοντας την έννοια των «γραμμών επιφανειακής καμπυλότητας». Δεν δίνει βαρύτητα σε λεπτομέρειες τεχνικής φύσεως, αλλά επιχειρεί να προσεγγίσει διαισθητικά τη συγκεκριμένη έννοια, χρησιμοποιώντας λόγου χάριν ένα παράδειγμα για τον τρόπο που συναρμολογείται ένα θησαυροφυλάκιο μέσω των αρμών του, των αρθρώσεων και των στρωμάτων της επιφάνειάς του. Υπήρχαν όμως περιορισμοί στην εν λόγω θεωρία, με αποτέλεσμα ο Μονζ να αντιμετωπίσει έντονη κριτική. Για παράδειγμα τα λιθογλυπτικά σχέδια που έδωσε στους μαθητές του παρουσίαζαν μικρές ή μεγάλες παρεκκλίσεις στην πλειονότητά τους από την γενική αρχή που ο ίδιος διατύπωνε στις διαλέξεις του, ενώ υπήρξαν προβλήματα στην εφαρμογή της θεωρίας του όταν χρειάστηκε να κατασκευαστούν σιδηροδρομικές γραμμές και γέφυρες, καθώς αυτές δεν εμφάνιζαν την απαραίτητη «λοξότητα» για να καταστούν λειτουργικές και κυρίως ασφαλείς.

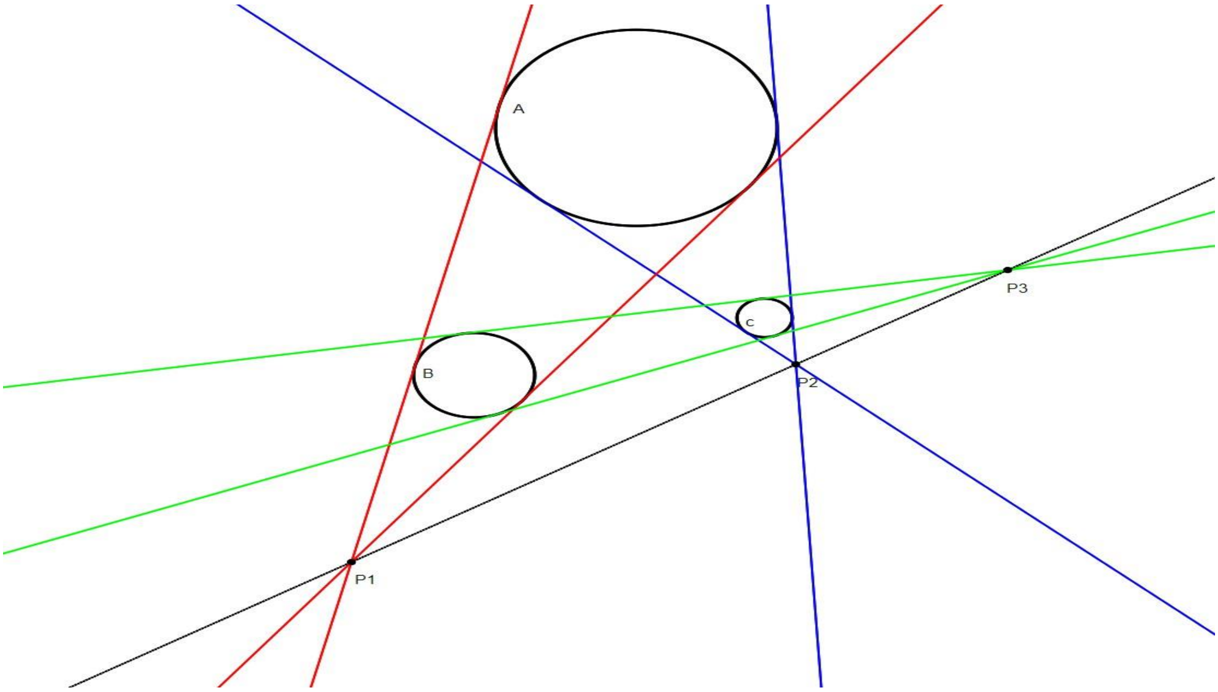
Ο Μονζ εισήλθε αργότερα και στο πεδίο μελέτης των μερικών διαφορικών εξισώσεων, αναλαμβάνοντας να βρει μία γεωμετρική κατασκευή για τη συγκεκριμένη λύση των εξεταζόμενων αυτών εξισώσεων. Αυτό του έδωσε τη δυνατότητα να προσδιορίσει τη γενική μορφή των συναρτήσεων που περιέχονται στις λύσεις κάθε μερικής διαφορικής εξίσωσης, αν και οι μέθοδοί του κατηγορήθηκαν ως ανεπαρκείς στην επιχειρηματολογία τους. Συνέχισε επί πολλά χρόνια να πραγματοποιεί μελέτες, να γράφει υπομνήματα και να διεξάγει έρευνες εισάγοντας έννοιες όπως καμπύλη ολοκλήρωσης, χαρακτηριστικός κώνος και άλλες. Η θεωρία των «εξισώσεων Μονζ» μπόρεσε να αποδείξει τη γεωμετρική σημασία των ολικών διαφορικών εξισώσεων και να τελειοποιήσει την επίλυση ορισμένων εκ των διασταλτικών εξισώσεων.

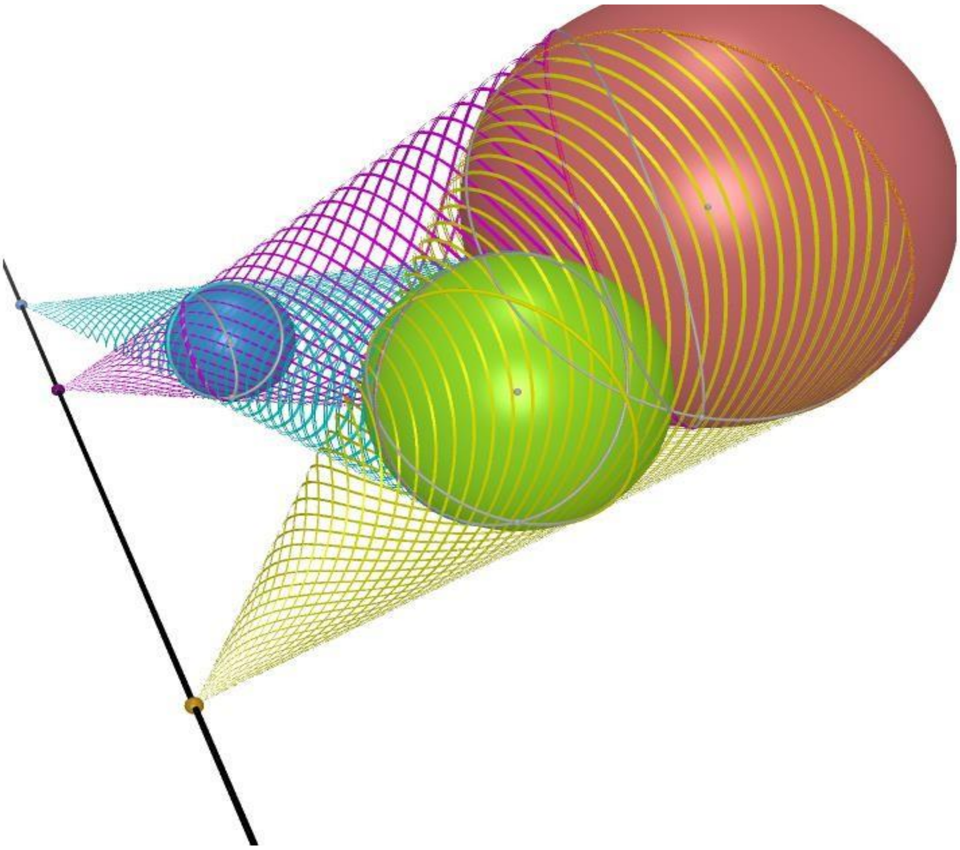
Πριν επιστρέψει στην απειροστική γεωμετρία έγραψε εργασίες σχετικές με την εξίσωση των δονούμενων χορδών και των των καθοριστικών παραγόντων, ενώ επεκτάθηκε στη μαθηματική ανάλυση, καθώς και σε ζητήματα που είχαν να κάνουν με τη φυσική, τη χημεία και την τεχνολογία. Ο Μονζ, με τη γενική θεωρία του πάνω στην καμπυλότητα των επιφανειών, άνοιξε το δρόμο για τον Γκάους (Gauss) και από εκεί πήρε την έμπνευση ο Ρίμαν (Riemann) για να παρουσιάσει τη δική του Γεωμετρία στη θεωρία της σχετικότητας.

Σκίτσο του Μονζ από το επιστημονικό περιοδικό Quantum

3.2 Το Θεώρημα του Μονζ

Σχεδόν μίαμιση δεκαετία πριν τη δημοσίευση της μελέτης του για την παραστατική γεωμετρία, το 1781 ο Μονζ διατύπωσε το παρακάτω θεώρημα που πήρε και το όνομά του: «Έστω ότι έχουμε τρεις κύκλους που βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο. Αν φέρουμε τις κοινές εξωτερικές εφαπτομένες των κύκλων ανά δύο και πάρουμε τα σημεία τομής τους, αυτά τα τρία σημεία είναι συνευθειακά».





Διδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση του Θεωρήματος Μονζ

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού απασχόλησε πολλούς επιστήμονες και όχι απαραίτητα μαθηματικούς, οι περισσότεροι εκ των οποίων χρησιμοποίησαν μία αναγωγή στο χώρο των τριών διαστάσεων: Ο John Edson Sweet για παράδειγμα, μηχανολόγος μηχανικός και εφευρέτης, κατέθεσε το εξής σκεπτικό: "Ας υποθέσουμε ότι αντί για κύκλους παίρνουμε τρεις σφαίρες διαφορετικών ακτίνων, οι οποίες βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο. Αν τώρα υπάρχει και ένα δεύτερο επίπεδο που καλύπτει τις τρεις σφαίρες όντας εφαπτόμενο σε αυτές, τα δύο επίπεδα θα έχουν μία κοινή ευθεία, την ευθεία τομής τους. Δημιουργείται έτσι ένα τρίτο επίπεδο, αυτό της διχοτόμου της γωνίας των δύο προηγούμενων επιπέδων, το οποίο διέρχεται από την ευθεία τομής. Επειδή οποιεσδήποτε σφαίρες κι αν επιλέξουμε αυτές μπορούν να εγγραφούν σε ένα κώνο, οποιοδήποτε επίπεδο εφάπτεται στις δύο σφαίρες θα εφάπτεται και στον κώνο που περικλείει. Έτσι, τα δύο αρχικά επίπεδα εφάπτονται στους τρεις κώνους που έχουν σχηματιστεί. Και από τη στιγμή που κάθε επίπεδο εφαπτόμενο σε ένα κώνο περιέχει την κορυφή του κώνου αυτού, το τρίτο επίπεδο τέμνει τους κώνους στις κοινές εφαπτομένες τους". Ο μαθηματικός Martin Erickson στο βιβλίο του "Beautiful Mathematics" προτίμησε μία διανυσματική λύση χρησιμοποιώντας ιδιότητες διανυσμάτων και ομοιότητα τριγώνων. Το θεώρημα αυτό αποτέλεσε βασικό πυλώνα της θεωρίας των επιφανειών και της γεωμετρικής οπτικής. Χρησιμοποιήθηκε για τη δημιουργία και ανάπτυξη οπτικών συστημάτων και συνέβαλε στη μελέτη της αντανάκλασης και της διάδοσης του φωτός.

3.3 Η εξίσωση του Μονζ και η εξίσωση Μονζ-Αμπέρ

Τρία χρόνια μετά το παραπάνω θεώρημα, ο Μονζ το 1784 διατυπώνει την εξίσωσή του που αναφέρεται στη μελέτη επιφανειών και ερευνά πώς βρίσκεται η καμπυλότητα μίας επιφάνειας στο χώρο των τριών διαστάσεων. Συσχετίζει την καμπυλότητα αυτή με τις μερικές παραγώγους (πρώτη και δεύτερη) της συνάρτησης που περιγράφει την επιφάνεια, βοηθώντας έτσι στην ανάλυση σε βάθος όχι μόνο της καμπυλότητας αλλά και άλλων ιδιοτήτων που έχει η επιφάνεια αυτή.

Μία μορφή της εξίσωσης Μονζ είναι η παρακάτω:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = K\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$$

Με z συμβολίζεται η κατακόρυφη συνάρτηση των x, y ενώ με K συμβολίζεται η συνάρτηση που προσδιορίζει την καμπυλότητα της συνάρτησης. Όπως αναφέραμε παραπάνω, η εξίσωση Μονζ χρησιμοποιείται στη βελτιστοποίηση της μεταφοράς της μάζας. Το πρόβλημα, δηλαδή, ζητά να βρεθεί ο κατάλληλος μετασχηματισμός που θα κάνει το κόστος μεταφοράς από μία κατανομή μάζας σε μία άλλη ελάχιστο.

Η εξίσωση του Μονζ δεν πρέπει να συγχέεται με την εξίσωση Μονζ-Αμπέρ, η οποία είναι μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και εμφανίζεται συνήθως στη διαφορική γεωμετρία. Η γενική της μορφή είναι $\det(D^2 u) = f$, όπου $D^2 u$ είναι ο πίνακας που περιέχει τις δεύτερες μερικές παραγώγους (αν αναφερόμαστε στις δύο διαστάσεις) και f είναι μία συνάρτηση που δίνεται προς μελέτη. Η εξίσωση Μονζ-Αμπέρ βρίσκει εφαρμογή κυρίως στη μελέτη των κυρτών επιφανειών.

3.4 Οι «διάδοχοι» και οι μαθητές του Monge

Ο Μονζ είχε την άποψη ότι η Παραστατική Γεωμετρία θα αποτελούσε ένα ισχυρό όπλο που θα ήταν χρήσιμο και σε άλλους κλάδους της Γεωμετρίας. Η μέθοδός του έπαιξε καθοριστικό ρόλο, καθώς κατέστη εφικτή η χρήση σύνθετων αρχιτεκτονικών και μηχανικών δομών με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια και αποτελεσματικότητα. Με το έργο του έδωσε νέα πνοή στη μελέτη ορισμένων κλάδων της γεωμετρίας και η έρευνά του ήταν η αφετηρία για την άνθηση πολλών ανάλογων προσπαθειών κατά τον 19^{o} αιώνα, συμβάλλοντας στην εξέλιξη της τεχνολογίας και της επιστήμης. Μαζί με έναν από τους μαθητές του, τον Ασέτ, προχώρησε το 1802 στη δημοσίευση του υπομνήματος "Application de l'algèbre` la gómtrie", ενώ άλλοι μαθητές του αφιέρωσαν πλήθος άρθρων σε προβλήματα της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Αξίζει να αναφερθεί ότι ο Λακρουά (Lacroix) και ο Ασέτ δημοσίευσαν ανάλογες προσπάθειες πάνω στην παραστατική γεωμετρία στο πρώτο μισό του 19^{ου} αιώνα και ο Σαρλ Φρανσουά Αντουάν Λερουά (Charle Francois Antoinne Leroy), καθηγητής παραστατικής γεωμετρίας στην Πολυτεχνική Σχολή, είδε τη δική του έρευνα να δημοσιεύεται δεκάδες φορές και να μεταφράζεται σε πολλές ξένες γλώσσες. Μπορεί να ειπωθεί, συνεπώς, με σιγουριά ότι το έργο του Μονζ (αλλά και των μεταγενέστερών του) επηρέασε καταλυτικά την εξέλιξη της παραστατικής γεωμετρίας σε μεγάλο μέρος της Ευρώπης.

Οι διαλέξεις του Μονζ χαρακτηρίζονταν από ποικιλία και πρωτοτυπία και εξηγούν σε μεγάλο βαθμό το λόγο που πολλοί Γάλλοι μαθηματικοί μπορούν να θεωρηθούν μέχρι και «οπαδοί» του. Μπορούμε να αναφέρουμε ενδεικτικά κάποιους από αυτούς: Τον Jean Victor Poncelet, Γάλλο μαθηματικό και μηχανικό που διετέλεσε και Διοικητής της Πολυτεχνικής Σχολής, με ιδιαιτέρως σημαντικό έργο στην προβολική γεωμετρία. Τον Michel Chasles, ο οποίος εγκατέλειψε την καριέρα του ως χρηματιστής για να αφοσιωθεί στα μαθηματικά και απέκτησε τέτοια φήμη που του απονεμήθηκε έδρα στη Σορβόνη. Τον Charles Dupin, οικονομολόγο και πολιτικό μεταξύ άλλων, με έργο στη διαφορική και την παραστατική γεωμετρία που δίδαξε μαθηματικά και μηχανική στην Κέρκυρα, έγινε βαρώνος και εξελέγη στη Βασιλική Ακαδημία Επιστημών της Σουηδίας. Τον Charles-Julien Brianchon που έγινε αργότερα καθηγητής στη Σχολή Πυροβολικού της Βασιλικής Φρουράς. Κορυφαίος όλων μπορεί ενδεχομένως να θεωρηθεί ο Jean-Baptiste Joseph Fourier, διάσημος μαθηματικός και φυσικός, γνωστός για την ομώνυμη ανάλυση και την έρευνα πάνω στις σειρές που φέρουν επίσης το ονομά του, το νόμο αγωγιμότητας, την ανακάλυψη του φαινομένου του θερμοκηπίου και πολλά άλλα, ο οποίος περιέγραφε τον δάσκαλό του Μονζ ως εξής: "Είναι πολύ μορφωμένος, με έντονη ενεργητικότητα και πολύ δυνατή φωνή. Μπορεί να μεταδώσει αυτό που διδάσκει με τη μέγιστη σαφήνεια, μιλάει απλά και κατανοητά και τρέφει απεριόριστο σεβασμό ακόμα και για τον τελευταίο μαθητή του".

3.5 Παιδαγωγική και εκπαίδευση

Η βιομηχανική επανάσταση που συντελέστηκε στην Ευρώπη στις πρώτες δεκαετίες του 19ου αιώνα οδήγησε σε ανάλογη άνθηση της εκπαίδευσης και των τεχνικών επιστημών, μετατρέποντας την παραστατική γεωμετρία σε ένα από τα υποχρεωτικά μαθήματα των σχολών που είχαν ως αντικείμενο τις τεχνικές σπουδές. Χώρες όπως η Γερμανία, η Μεγάλη Βρετανία, η Ιταλία αλλά και η Αυστρία, η Ουγγαρία, ακόμα και η Βουλγαρία αποτέλεσαν τόπους μεγάλης έκρηξης της παραστατικής γεωμετρίας. Γράφτηκαν νέα εγχειρίδια, πλήθος από συλλογές ασκήσεων δημιουργήθηκαν και βιβλία πάνω στο αντικείμενο της παραστατικής γεωμετρίας μεταφράστηκαν και εκδόθηκαν σε χώρες κυρίως της Ανατολικής Ευρώπης. Πολλά πανεπιστήμια φιλοξένησαν διαλέξεις πάνω στην παραστατική γεωμετρία, ενώ καθιερώθηκε ως μάθημα πρώτου εξαμήνου στο Πολυτεχνείο της Πράγας από το 1830 και στη Βιέννη και στην Πράγα λίγα χρόνια αργότερα. Το πρόγραμμα του μαθήματος της παραστατικής γεωμετρίας στο Πολυτεχνείο της Πράγας περιελάμβανε τη χρήση διαφόρων ειδών προβολών, μαζί με θεωρία καμπυλών και επιφανειών. Οι διαλέξεις ήταν υποχρεωτικές για τους φοιτητές που ακολουθούσαν τους κλάδους της μηχανικής, της αρχιτεκτονικής και άλλων παρόμοιων τομέων σπουδών. Το επίπεδο ήταν πολύ ψηλό, καθώς συνοδευόταν αρκετές φορές από ταυτόχρονη μελέτη προβολικής γεωμετρίας και προοπτικής. Στα σχολεία της τότε Αυστρουγγαρίας η Παραστατική Γεωμετρία διδασκόταν από το 1850, καθώς οι μαθητές που συνέχιζαν στα πολυτεχνεία έπρεπε να έχουν γνώση του συγκεκριμένου αντικειμένου, ενώ από το 1870 οι απολυτήριες εξετάσεις περιελάμβαναν υποχρεωτικά τέσσερις με πέντε ασκήσεις Παραστατικής Γεωμετρίας.

Χάρτης με τις πολυτεχνικές σχολές στην Αυστρουγγαρία που δίδασκαν παραστατική γεωμτρία

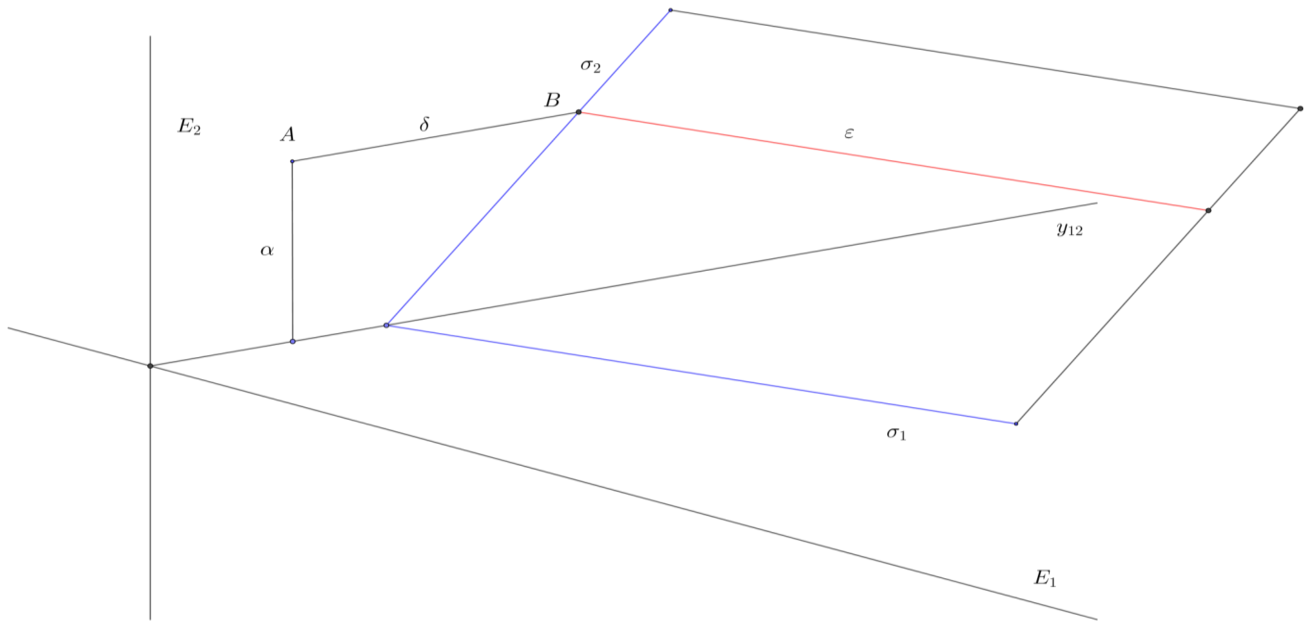
Στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ου αιώνα έκαναν την εμφάνισή τους νέες επιστημονικές εργασίες και μελέτες πάνω στην παραστατική γεωμετρία ενώ, λόγω της ραγδαίας αύξησης των φοιτητών που εκδήλωναν ενδιαφέρον για το αντικείμενο, γεννήθηκε η ανάγκη για περισσότερους καθηγητές παραστατικής γεωμετρίας τόσο στην τριτοβάθμια όσο και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αυτή η γεωμετρία, μαζί με την προβολική, βρέθηκαν στο αποκορύφωμά τους εκείνη τη χρονική περίοδο, γεγονός που κράτησε μέχρι την έναρξη του 2ου Παγκοσμίου Πολέμου. Στη συνέχεια η παραστατική γεωμετρία δεν διατήρησε τον ίδιο μεγάλο ρόλο που κατείχε στην εκπαίδευση, καθώς τα προγράμματα των υπολογιστών άρχισαν να χρησιμοποιούνται για κατασκευές σχεδίων και αντικειμένων, ενώ οι απαιτήσεις πλέον για εργαζομένους με υψηλή γνώση παραστατικής γεωμετρίας στο χώρο της εκπαίδευσης και της βιομηχανίας έχουν ελαχιστοποιηθεί.

Άγαλμα του Μονζ στο κέντρο της πόλης του Μπον

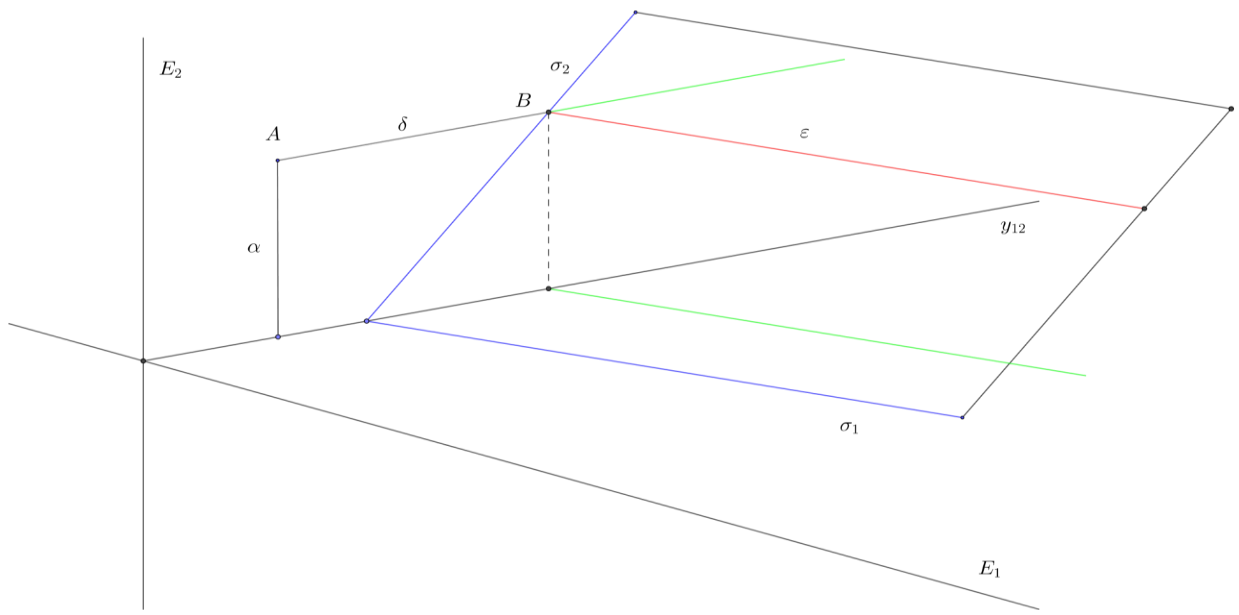
Σε πολλές σχολές πάντως, με αντικείμενο τη μηχανική ή την αρχιτεκτονική, το μάθημα της παραστατικής γεωμετρίας διδάσκεται ακόμα και σήμερα. Στο Πολυτεχνείο Κρήτης, για παράδειγμα, στις τελικές εξετάσεις του Σεπτεμβρίου του 2021 ένα από τα θέματα που κλήθηκαν να αντιμετωπίσουν οι φοιτητές ήταν το εξής: «Δίνεται ένα επίπεδο σ με ίχνη $σ_1$, $σ_2$. Να σχεδιάσετε στο σύστημα του Monge και στο χαρτί τα σημεία του σ που έχουν απόσταση α απο το επίπεδο $Ε_1$ και βρίσκονται πάνω από αυτό».

Τα βήματα για την επίλυση του προβλήματος ήταν τα παρακάτω:

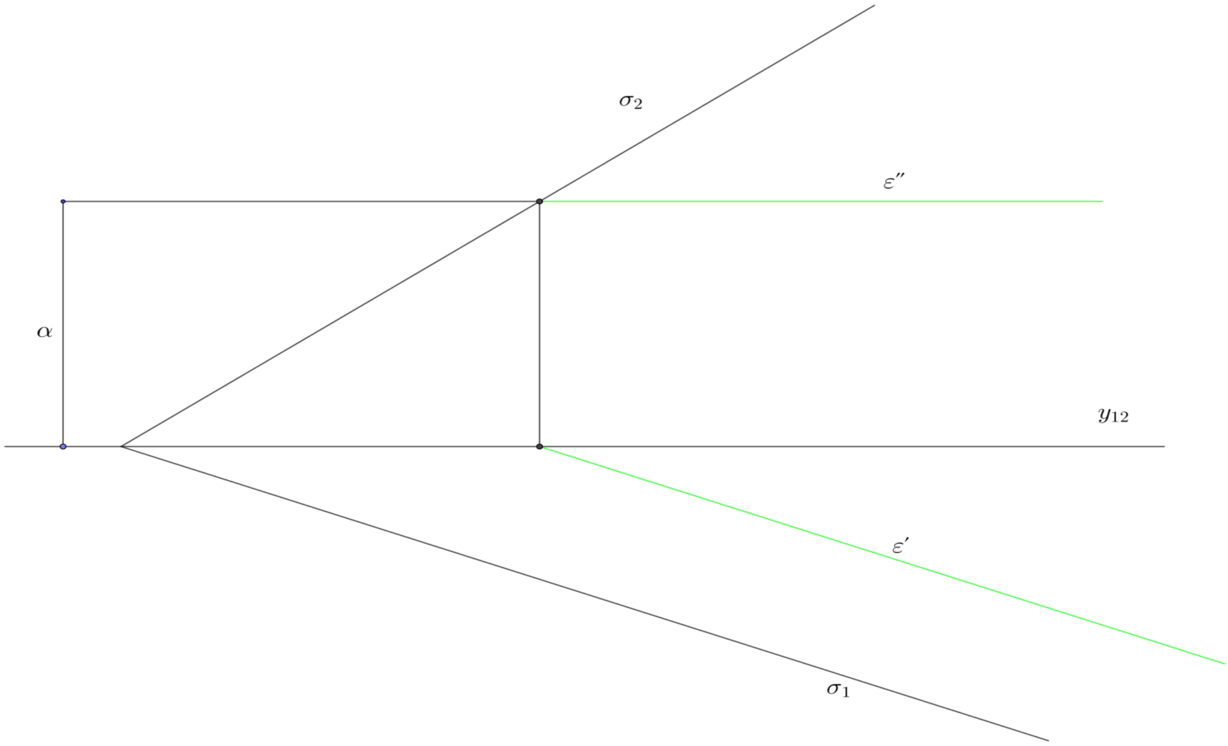
Από το σημείο Α φέρουμε παράλληλη δ προς τον άξονα y_{12}, η οποία τέμνει την $σ_2$ στο Β. Από το σημείο Β φέρουμε αντίστοιχα παράλληλη ευθεία ε προς την $σ_1$. Η ε είναι παράλληλη στο επίπεδο $Ε_1$ (επειδή είναι παράλληλη σε μια ευθεία του, την $σ_1$), επομένως κάθε σημείο της ε απέχει απο το $Ε_1$ όσο απέχει το Β από το $Ε_1$, δηλαδή α. Πρέπει να βρούμε την προβολή της ε στα επίπεδα E_1 και E_2. Η προβολή της ε στο E_2 είναι η δ. Για να βρούμε την προβολή της ε στο E_1 εργαζόμαστε όπως στα σχήματα παρακάτω και σχεδιάζουμε στο χαρτί.



Σχέδιο 1



Σχέδιο 2



Σχέδιο 3

3.6 Επίλογος

Ο Γκασπάρ Μονζ αποτέλεσε εξέχουσα φυσιογνωμία όχι μόνο στον τομέα των θετικών επιστημών (μαθηματικά, φυσική, χημεία κτλ.) αλλά και στη μηχανική και φυσικά στην εκπαίδευση. Διαδραμάτισε με το έργο του πρωταγωνιστικό ρόλο σε άλλους κλάδους των μαθηματικών, εισάγοντας έννοιες θεμελιώδεις που εφαρμόστηκαν αργότερα μέχρι τη βιολογία και την αστρονομία. Όντας ένας από τους βασικούς ιδρυτές – αν όχι ο βασικότερος – της Πολυτεχνικής Σχολής στο Παρίσι, συνέβαλε όπως είδαμε στη συστηματική και με μεθόδους βασισμένες στις φυσικές και μαθηματικές επιστήμες εκπαίδευση των μηχανικών, γεγονός που βοήθησε στην ανάπτυξη της βιομηχανίας. Εν κατακλείδι, ακόμα κι αν τα τελευταία χρόνια της ζωής του ταλαιπωρήθηκε και λοιδωρήθηκε, μπορεί αναμφίβολα να διαπιστώσει κανείς ότι έχει καταλάβει πλέον τη θέση που του αρμόζει στο Πάνθεον της – μαθηματικής και όχι μόνο – ιστορίας.

Βιβλιογραφία

Ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές (πηγές) της Εργασίας.

- Eric Temple Bell - Men of Mathematics (https://ia804707.us.archive.org/30/items/in.ernet.dli.2015.59359/2015.59359.Men-Of-Mathematics_text.pdf)
- MacTutor Biographies (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Monge/)
- The Monge Project (https://themongeproject.online/)
- Ivana D. Cvetković: The Man who Invented Descriptive Geometry (https://www.mas.bg.ac.rs/_media/istrazivanje/fme/vol47/2/17_i_cvetkovic_et_al.pdf)
- Britannica: Géométrie descriptive work by Monge (https://www.britannica.com/topic/Geometrie-descriptive)
- Linda Hall Library: Napoleon and the Scientific Expedition to Egypt (https://www.lindahall.org/experience/digital-exhibitions/napoleon-and-the-scientific-expedition-to-egypt/05-mirages-in-the-desert/#main-content)
- Askisopolis: Σύντομη επισκόπηση της εξέλιξης της Γεωμετρίας (https://www.askisopolis.gr/upload/1_5651histori.pdf)
- Vlasta Moravcova: History of Descriptive Geometry with an emphasis to the boom of Descriptive Geometry in Austro-Hungarian Empire in the 19th century (https://suw.biblos.pk.edu.pl/resources/i5/i4/i6/i2/i0/r54620/MoravcovaV_HistoryDescriptive.pdf)
- Encyclopedia.com: Monge, Gaspard (https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/monge-gaspard)

  Ivana Cvetkovic, Misa Stojicevic, Hellmuth Stachel, R.G. Milićević, Branislav Popkonstantinović: ResearchGate - The man who invented descriptive geometry

(https://www.researchgate.net/publication/332153749_The_man_who_invented_descriptive_geometry)

- Wikiwand: Γκασπάρ Μονζ (https://www.wikiwand.com/el/%CE%93%CE%BA%CE%B1%CF%83%CF%80%CE%AC%CF%81_%CE%9C%CE%BF%CE%BD%CE%B6)
- SuniseaProducts – Apprentices: The man who invented descriptive geometry (https://suniseaproducts.weebly.com/uploads/1/2/2/9/12293663/appendices.pdf)
- Carnegie Mellon community: Basic Concepts of Descriptive Geometry (https://www.andrew.cmu.edu/user/ramesh/teaching/course/48-175/lectures/2.BasicsOfDescriptiveGeometry.pdf)

  Descriptive Geometry by Pál Ledneczki Ph.D. (http://www.epab.bme.hu/oktatas/2008-2009-1/e-DGeo1/DG1_Lecture_notes.pdf)
- Institute of Mathematics Historical Notes: The Golden Slope of French Geometry – A Celebration of Monge's Life (https://ima.org.uk/9681/historical-notes-the-golden-slope-of-french-geometry-a-celebration-of-monges-life/)
- Πολυτεχνείο Κρήτης: Παραστατική Γεωμετρία, λύσεις θεμάτων Σεπ 2021 (https://www.eclass.tuc.gr/modules/document/file.php/ARCH322/%CE%A0%CE%B1%CF%81%CE%B1%CF%83%CF%84%CE%B1%CF%84%CE%B9%CE%BA%CE%AE%20%CE%93%CE%B5%CF%89%CE%BC%CE%B5%CF%84%CF%81%CE%AF%CE%B1%2C%20%CE%BB%CF%8D%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82%20%CE%B8%CE%B5%CE%BC%CE%AC%CF%84%CF%89%CE%BD%20%CE%A3%CE%B5%CF%80%202021.pdf)
- SciHi Blog: Gaspard Monge and his System of Descriptive Geometry (http://scihi.org/gaspard-monge-geometry/)
- Joël Sakarovitch: Gaspard Monge Founder of "Constructive Geometry" (https://www.histoireconstruction.fr/wp-content/uploads/2015/09/Sakarovitch_2009_Gaspard-Monge.pdf)
- FACTS net: 12 Intriguing Facts About Gaspard Monge (https://facts.net/history/people/12-intriguing-facts-about-gaspard-monge/)

- Frank J. Swetz: Mathematical Treasure: Monge on Differential Geometry (https://maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-monge-on-differential-geometry)
- Gallica.bnf: Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République; par Gaspard Monge (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5783452x)
- Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία: Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας (http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2752/Grammiko-Schedio_G-Lykeiou-Epilogis_html-apli/index9_2.html)
- Παν. Λαδόπουλου – Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας (https://drive.google.com/file/d/1PXJcAVB_xvC-r5vvvEIpc8iiXhY_UEnv/view)
- Λιανός – Ανδριοπούλου (Αρχιτέκτονες ΔΠΘ): Παραστατική Γεωμετρία (https://drive.google.com/file/d/0B9uh0VymSVrpMUlOeGlaazB3RDA/view?resourcekey=0-HX82aejj_SF4QHhmYRCQTw)
- Νικ. Καρακατσανίδη: Παραστατική Γεωμετρία (https://drive.google.com/file/d/12NeohgB1dZ_XSc0VB2DNfBK4KAvI9ds/view)
- Πέτρου Τόγκα – Παραστατική Γεωμετρία Ε' Γυμνασίου (https://drive.google.com/file/d/1nyqg5gtZgrdl_cG6ULGHfFpjn7l3G64s/view)
- Δεϊμεζής Άρης, Επιμελητής ΕΜΠ: Εφαρμογαί των Ανώτερων Μαθηματικών εις προβλήματα Παραστατικής Γεωμετρίας (https://drive.google.com/file/d/18-gbvY_HPQ70z7FIVeXGqqHZwMuIf6JL/view
- Ανδρέου Αρβανίτου: Στοιχεία Παραστατικής Γεωμετρίας (https://drive.google.com/file/d/1fgDYcf0rBOvffNGeYITcxIC2Y6hEbdG9/view)

Υπέθυνη Δήλωση Συγγραφεά:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν. 1599/1986 και τα άρθρα 2,4,6 παρ. 3 του Ν. 1256/1982, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής εργασίας και δεν προσβάλλει κάθε μορφής πνευματικά δικαιώματα τρίτων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον.