Σχολή Θετικών Επιστημών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

«Διδασκαλία και μάθηση Αλγεβρικών εννοιών με ιστορική προοπτική»

Κυριακή Μωυσιάδου

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Πάτρα, Ιούνιος, 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

«Διδασκαλία και μάθηση Αλγεβρικών εννοιών με ιστορική προοπτική»

Μωυσιάδου Κυριακή

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:
Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Καθηγητής

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:
Ανδρέας Αρβανιτογεώργος
Καθηγητής

Πάτρα, Ιούνιος 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Νικολαντωνάκη, για τη συμβολή του στη διαμόρφωση και εκπόνηση της παρούσας εργασίας, καθώς μέσω της καθοδήγησης, της κατανόησης και της υπομονής του, έγινε εφικτή η ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Τον συν-επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ανδρέα Αρβανιτογεώργο για τις πολύτιμες συμβουλές του.

Τους καθηγητές μου στο πρόγραμμα «Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά» του ΕΑΠ για τη συνεργασία και τις γνώσεις που μου προσέφεραν. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κ. Ευγένιο Αυγερινό για τους ορίζοντες που μου άνοιξε στο ταξίδι της γνώσης που αφορά την Ιστορία και τη Διδακτική των Μαθηματικών.

Όλους τους μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνά μου και διέθεσαν τον χρόνο τους για να επιλύσουν τα προβλήματα που τους ανέθεσα.

Τους γονείς μου, για την αδιάκοπη υποστήριξή τους.

Τον σύζυγό μου Σωκράτη που αποτελεί το στήριγμά μου, για την αμέριστη συμπαράσταση και κατανόηση που επέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Στην κόρη μου Πελαγία, που γεννήθηκε κατά τη συγγραφή της εργασίας αυτής

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται ο συνδυασμός του πεδίου της επίλυσης αλγεβρικών προβλημάτων και του πεδίου της ιστορίας των μαθηματικών. Η εργασία αποτελείται από δύο βασικούς άξονες. Ο πρώτος άξονας είναι η σφαιρική παρουσίαση των πεδίων αυτών μέσω της βιβλιογραφικής επισκόπησης. Ο δεύτερος άξονας περιλαμβάνει τον σχεδιασμό και την πραγματοποίηση έρευνας που μελετά τις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, καθώς και τις δυσκολίες που συναντούν κατά τη διαδικασία αυτή, με χρήση προβλημάτων που προέρχονται από την Ιστορία των Μαθηματικών.

Πιο συγκεκριμένα, η βιβλιογραφική επισκόπηση πραγματεύεται αρχικά το αντικείμενο των μαθηματικών προβλημάτων και την επίλυσή τους. Έπειτα, γίνεται αναφορά στην χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική τους, ενώ παρουσιάζονται και οι λόγοι χρήσης ιστορικών μαθηματικών προβλημάτων. Τέλος, αναφέρονται πηγές προβλημάτων από την ιστορία των μαθηματικών και παρουσιάζονται και λύνονται ενδεικτικά ιστορικά προβλήματα από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους, εστιάζοντας στην αλγεβρική τους επίλυση (με χρήση εξισώσεων 1^{ου} βαθμού) και στην αριθμητική τους επίλυση. Όπου κατέστη δυνατό, παρουσιάζονται και οι πρωτότυπες λύσεις των εκάστοτε συγγραφέων των προβλημάτων.

Αντικείμενο της έρευνας αποτελεί η αξιολόγηση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιώντας ιστορικά προβλήματα και το ενδεχόμενο ύπαρξης διαφοροποίησης των επιδόσεων αυτών σε μαθητές Γ Γυμνασίου και Α Λυκείου. Επίσης μελετάται το ενδιαφέρον των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων και για την Ιστορία των Μαθηματικών.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως οι μαθητές συναντούν ιδιαίτερες δυσκολίες κατά την επίλυση προβλημάτων και οι επιδόσεις τους θα χαρακτηρίζονταν από μέτριες έως πολύ αδύναμες. Προέκυψε σημαντική διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών Γυμνασίου και των μαθητών Λυκείου, με καλύτερες αυτές των μαθητών Λυκείου.

Απώτερος σκοπός της έρευνας αυτής είναι να λειτουργήσει ως αφετηρία για περεταίρω μελέτη και εισαγωγή της χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών και συγκεκριμένα των ιστορικών προβλημάτων, στην εκπαιδευτική διαδικασία και τη σχολική τάξη.

Λέξεις – Κλειδιά

Επίλυση προβλημάτων, Ιστορία των Μαθηματικών, Ιστορικά Προβλήματα

«Teaching and learning Algebraic concepts with a historical perspective»

Moisiadou Kiriaki

Abstract

In this paper, the combination of the field of solving algebraic problems and the field of the history of mathematics is attempted. The work consists of two main axes. The first axis is the global presentation of these fields through the bibliographic overview. The second axis includes the planning and carrying out of research that studies students' performance in solving problems, as well as the difficulties they encounter during this process, using problems derived from the History of Mathematics.

More specifically, the literature review initially deals with the subject of mathematical problems and their solution. Also, reference is made to the use of the History of Mathematics in their teaching, while the reasons for using historical mathematical problems are also presented. Finally, sources of problems from the history of mathematics are cited and illustrative historical problems from different cultures and different time periods are presented and solved, focusing on their algebraic solution (using equations of the 1st degree) and their numerical solution. Where possible, the original solutions of the respective authors of the problems are also presented.

The object of the research is the evaluation of the students' performance in solving problems using historical problems and the possibility of differentiation of these performances in students of Third Grade of Middle School and First Grade of High School. Students' interest in problem solving and in the History of Mathematics is also studied.

The results of the research showed that the students encounter particular difficulties when solving problems and their performance would be characterized from moderate to very

weak. A significant difference emerged in the performance of Middle School students and High School students, with this of High School students being better.
The ultimate purpose of this research is to act as a starting point for further study and introduction of the use of the history of mathematics, specifically historical problems, in the educational process and the school classroom.

Keywords

Problem Solving, History of Mathematics, Historical Problems

Περιεχόμενα

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Γραφημάτων

1. Προβλήματα

1.1 Ορισμός Προβλήματος

Η γενικότερη έννοια του προβλήματος μπορεί να οριστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους και σύμφωνα με τους Frensch & Funke (1995) δεν υπάρχει μοναδικός αποδεκτός ορισμός του προβλήματος.

Οι Newell και Simon (1972) ορίζουν το πρόβλημα ως μια κατάσταση που αντιμετωπίζει κάποιος ο οποίος δεν γνωρίζει άμεσα τη σειρά των ενεργειών που χρειάζεται να ακολουθήσει ώστε να επιτύχει το σκοπό του. Παρόμοιος είναι ο ορισμός των Krulik και Rudnick (1988) όπου πρόβλημα χαρακτηρίζεται μια κατάσταση (ποσοτική ή μη), που αντιμετωπίζει ένα άτομο ή μια ομάδα ατόμων η οποία απαιτεί ανάλυση και δεν έχει εμφανή προφανή διαδρομή για την απόκτηση της λύσης της. Κατά τον Schoenfeld (1985) πρόβλημα είναι μια αμφίβολη ή δύσκολη ερώτηση, ένα ζήτημα διερεύνησης, συζήτησης ή σκέψης. Οι Blum και Niss (1989) κινούνται στο ίδιο πλαίσιο με τον Schoenfeld, περιγράφοντας το πρόβλημα ως μια κατάσταση που δημιουργεί ανοικτές ερωτήσεις και έχει τη δυνατότητα να ωθήσει κάποιον νοητικά να εμπλακεί σε μια διαδικασία σκέψης.

Ο Jonassen (2000) περιγράφει λακωνικά το πρόβλημα ως μια άγνωστη οντότητα σε κάποια κατάσταση, διευκρινίζει όμως πως ένα πρόβλημα μπορεί να αφορά μια γενικότερη σύνθετη κατάσταση ή συγκεκριμένα τα μαθηματικά.

Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως μαθηματικό πρόβλημα όταν εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες και αρχές στην αναζήτηση της απάντησης (Μαμωνά-Downs, Παπαδόπουλος, 2017). Τα μαθηματικά προβλήματα είναι μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται ως μέσα διδασκαλίας για την εξάσκηση μαθηματικών δεξιοτήτων αλλά και για την αξιολόγηση του επιπέδου ανάπτυξης των μαθηματικών (Schoenfeld 1992). Επίσης κάθε μαθηματικό πρόβλημα αποτελεί για το μαθητή μια εργασία για την οποία ενδιαφέρεται και επιθυμεί να αναλύσει χωρίς όμως να διαθέτει μαθηματικά μέσα που να είναι εύκολα προσβάσιμα για την ανάλυση αυτή (Schoenfeld, 1989).

1.2 Είδη Προβλημάτων

Υπάρχουν διαφορετικά είδη προβλημάτων ως προς τη φύση τους, τον τρόπο παρουσίασης, τη δομή, την πολυπλοκότητα, τον τρόπο λύσης και τον τομέα εξειδίκευσής τους (Jonassen, 2000). Ο διαχωρισμός προβλημάτων σε κατηγορίες είναι σχετικός με την οπτική του εκάστοτε ερευνητή και μπορεί να αφορά τη θεματολογία των προβλημάτων, το είδος των δεδομένων και των ζητούμενων, των τρόπων λύσης, του πλήθους λύσεων κ.α.. Για το λόγο αυτό θα αναφερθούμε σε μερικά παραδείγματα κατηγοριοποιήσεων προβλημάτων που συναντώνται στη σχετική βιβλιογραφία της παρούσας εργασίας.

Σύμφωνα με τους Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλο (2017), ο Ούγγρος Μαθηματικός G. Polya διακρίνει δυο κύριες και γενικές κατηγορίες προβλημάτων: Τα προβλήματα Εύρεσης και τα προβλήματα Απόδειξης. Στα προβλήματα εύρεσης στόχος είναι να βρεθεί το ζητούμενο (άγνωστος) που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος, ενώ στα προβλήματα απόδειξης ζητούμενο είναι να αποδειχθεί αν ένας ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής. Αξίζει να σημειώσουμε πως στο έργο του Polya (1981) συναντώνται επίσης και τα Προβλήματα Ρουτίνας (ή αλλιώς τυποποιημένα προβλήματα) των οποίων η λύση περιορίζεται σε απλές και ήδη γνωστές διαδικασίες όπως η αντικατάσταση αριθμών σε τύπους και προφανώς η ενασχόληση με αυτά δεν προάγει την κριτική σκέψη του λύτη. Ο Schoenfeld (1992) διαχωρίζει τα προβλήματα σε προβλήματα ρουτίνας και πρωτότυπα προβλήματα. Ο όρος των τυποποιημένων προβλημάτων αναφέρεται και στο έργο του Jonassen (2000) όπου κατά την κατηγοριοποίηση των Mayer και Wittrock (1996) τα τυποποιημένα προβλήματα είναι αυτά στα οποία είναι εξοικειωμένοι οι λύτες ενώ αντίθετα υπάρχουν και τα μη τυποποιημένα προβλήματα.

Ο Jonassen (2000) διαχωρίζει τα προβλήματα σε καλώς δομημένα , τα οποία περιέχουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την επίλυσή τους με επιλογή και χρήση κατάλληλων αλγορίθμων και τα προβλήματα ελλιπούς δομής, στα οποία παραλείπονται σημαντικά στοιχεία και υπάρχουν διάφοροι τρόποι εύρεσης της λύσης.

Επίσης ο Jonassen (2000) παρουσίασε έναν άλλο διαχωρισμό ειδών προβλημάτων σε σχέση με τη γνωστική διαδικασία που ακολουθείται από τον λύτη κατά την επίλυση του προβλήματος. Όπως αναφέρει υπάρχουν προβλήματα λογικής (logical), αλγοριθμικά προβλήματα (algorithmic), λεκτικά προβλήματα (story - word), προβλήματα που χρησιμοποιούν κανόνες (rule-using problems), προβλήματα λήψης απόφασης (decisionmaking), προβλήματα εντοπισμού προβληματικής κατάστασης (troubleshooting), προβλήματα διάγνωσης - επίλυσης (diagnosis-solution problems), προβλήματα στρατηγικής επίδοσης (strategic performances), προβλήματα ανάλυσης περίπτωσης (case analysis problems), προβλήματα σχεδιασμού (design problems) και προβλήματα διλλήματος (dilemmas).

Οι Krulik και Rudnick (1988) αναφέρθηκαν συγκεκριμένα σε προβλήματα πολλαπλών σταδίων και τα διαχώρισαν σε δυο είδη. Στο πρώτο είδος, η απάντηση του πρώτου σταδίου είναι απαραίτητη για την απάντηση του δεύτερου σταδίου. Ενώ στο δεύτερο είδος προβλημάτων, κάθε στάδιο είναι ανεξάρτητο από το άλλο. Τελικά το πρόβλημα απαντάται συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των επιμέρους σταδίων.

Τα μαθηματικά προβλήματα, σε σχέση με τον τρόπο που παρουσιάζονται, μπορούν να είναι λεκτικά, γραπτά, εικονιστικά και περιλαμβάνουν τις αντίστοιχες ποσοτικές πληροφορίες (Schoenfeld, 1992). Στεκόμαστε στα λεκτικά προβλήματα που συναντώνται στα σχολικά βιβλία μαθηματικών και αποτελούν στην πλειοψηφία τους προβλήματα ρουτίνας ή απλές μαθηματικές ασκήσεις που περιγράφουν με λέξεις μια υποθετική κατάσταση. Έτσι τα προβλήματα αυτά στην ουσία δεν θεωρούνται προβλήματα, καθώς ο μαθητής απλώς εφαρμόζει το μοντέλο λύσης που έχει διδαχθεί σε παρόμοιες ασκήσεις και έτσι δεν απαιτείται σκέψη ανώτερης τάξης (Krulik, Rudnick 1988; Schoenfeld, 1989). Παρόλο που τα προβλήματα εξυπηρετούν έναν σκοπό, παρέχοντας επαφή με προβληματικές καταστάσεις και πρακτική εξάσκηση σε χρήση αλγορίθμων και μαθηματικών διαδικασιών, η χρήση ενός προσεκτικά ανεπτυγμένου μοντέλου – αλγορίθμου από τους μαθητές δεν τους εκθέτει ουσιαστικά στην επίλυση προβλημάτων (Krulik, Rudnick 1988). Όμως η ύπαρξη των λεκτικών προβλημάτων στα σχολικά εγχειρίδια έχει τη σημασία της καθώς τα προβλήματα αυτά προσφέρουν στους μαθητές τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν και να εξασκήσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και να διακρίνουν πως να προσεγγίσουν και να επιλύσουν προβλήματα σε καταστάσεις της καθημερινότητας (De Corte etc 2000).

1.3 Περιεχόμενο Προβλήματος

Σύμφωνα με τον Wickelgren (1974) μπορούμε να διακρίνουμε τρεις τύπους πληροφοριών που περιέχονται στα προβλήματα.

- Πληροφορίες που σχετίζονται με τα δεδομένα, όπου με τον όρο δεδομένα περιγράφεται το σύνολο των εκφράσεων που υπάρχουν στο πρόβλημα κατά την έναρξη των διαδικασιών επίλυσης.
- Πληροφορίες που σχετίζονται με τις λειτουργίες, όπου με τον όρο λειτουργίες περιγράφονται οι ενέργειες που πραγματοποιούνται σχετικά με τα δεδομένα ή τις εκφράσεις που προκύπτουν από τα δεδομένα μέσω κάποιας ακολουθίας ενεργειών.
- Πληροφορίες που σχετίζονται με τους στόχους, όπου στόχος ενός προβλήματος περιγράφεται η τελική επιθυμητή έκφραση που αναζητείται να παραχθεί στον κόσμο του προβλήματος.

Για τον Polya (1981) κάθε πρόβλημα θα πρέπει να περιέχει έναν άγνωστο (που αναζητείται), πληροφορίες που δίνονται και θεωρούνται γνωστές (δεδομένα) και μια συνθήκη με την οποία θα καθοριστεί ο τρόπος με τον οποίο συνδέεται ο άγνωστος (το ζητούμενο) με τα δεδομένα. Επίσης το πρόβλημα θα πρέπει να είναι καλά διαλεγμένο, να μην είναι πολύ δύσκολο ούτε πολύ εύκολο, να παρουσιάζει ενδιαφέρον και για αυτό χρειάζεται να διατεθεί χρόνος για την παρουσίασή του με ελκυστικό και φυσικό τρόπο (Polya, 1957).

Κατά τους Krulik και Rudnick (1988), ένα μαθηματικό πρόβλημα θα πρέπει να είναι ελκυστικό για τους μαθητές, να διαθέτει τη δυνατότητα επέκτασης, να προσφέρεται για ποικίλες τεχνικές επίλυσης και η λύση του προβλήματος να περιλαμβάνει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών ή/και τη χρήση μαθηματικών δεξιοτήτων. Τα καλά προβλήματα δεν χρειάζεται να είναι απαραίτητα λεκτικά και μπορούν να παραχθούν από κάθε πτυχή της καθημερινής ζωής ή και από τα κλασσικά μαθηματικά περιβάλλοντα. Τέλος υποστηρίζουν πως η κατασκευή ενός προβλήματος έχει ιδιαίτερη σημασία, η οποία έγκειται στο ότι για να δημιουργηθεί (επιτυχώς) ένα πρόβλημα, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνουν τα συστατικά του, να εντοπίζουν τα βασικά του στοιχεία και τον τρόπο που συνδέονται μεταξύ τους αλλά και το στόχο του προβλήματος.

1.4 Επίλυση Προβλήματος

Ο όρος «επίλυση προβλήματος» (problem solving) έχει πολλές διαφορετικές σημασίες ανά τον κόσμο και πολλές φορές η σημασία του αλλάζει σημαντικά ακόμα και στην ίδια χώρα (Schoenfeld, 2008). Ο Polya (1957) ορίζει την επίλυση ενός προβλήματος ως μια περίπλοκη δραστηριότητα κατά την οποία χρησιμοποιούνται οι προηγούμενες γνώσεις, οι εμπειρίες, η διαίσθηση και οι πεποιθήσεις του λύτη. Σύμφωνα με το NCTM (2000, σελ. 51) η επίλυση προβλήματος αναφέρεται στην εμπλοκή σε δραστηριότητες για τις οποίες η μέθοδος επίλυσης δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή. Οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν ήδη γνωστές πληροφορίες και στρατηγικές και μέσα από τη διαδικασία αυτή σκοπός είναι να παραχθεί η νέα μαθηματική γνώση και να βρεθεί η λύση του προβλήματος. Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος δεν αποτελεί μόνο έναν στόχο εκμάθησης μαθηματικών αλλά και ένα κύριο μέσο ώστε να επιτευχθεί αυτό. Επίσης ο Πόρποδας (2003) χαρακτηρίζει την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος ως μια πολυδιάστατη διαδικασία που δεν εμπεριέχει μόνο τη γνώση αριθμητικών δεδομένων, πράξεων και αλγορίθμων αλλά και τον γλωσσικό παράγοντα μέσω του οποίου προκύπτουν οι ποσοτικές σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία της διατύπωσης και με των οποίων την κατανόηση και αποκωδικοποίηση θα επιτευχθεί η επίλυση του προβλήματος. Για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι απαραίτητη η συλλογιστική σκέψη, η ικανότητα συσχετισμού και η αναπαράσταση του προβλήματος από τους μαθητές (Van De Walle 2007). Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι μια πολύπλοκη διαδικασία η οποία απαιτεί από ένα άτομο να συντονίζει προηγούμενες εμπειρίες και μαθηματικές γνώσεις, να διαθέτει κατανόηση και διαίσθηση, προκειμένου να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις μιας νέας κατάστασης. Οι Garofalo και Lester (1985) ισχυρίστηκαν ότι η επίλυση προβλημάτων έχει αρχίσει να θεωρείται ως διαδικασία που περιλαμβάνει τις υψηλότερες ικανότητες: οπτικοποίηση, συσχέτιση, αφαίρεση, κατανόηση, χειρισμό, ανάλυση, σύνθεση, γενίκευση, όπου κάθε ικανότητα πρέπει να είναι διαχειρίσιμη και όλες μαζί να μπορούν να συντονιστούν και να λειτουργήσουν ταυτόχρονα.

1.4.1 Μοντέλα Επίλυσης Προβλημάτων

Το έργο του Polya (1957; 1981) αποτέλεσε σημείο αναφοράς στην επίλυση προβλημάτων προτείνοντας ένα μοντέλο επίλυσης προβλημάτων που περιλαμβάνει τέσσερα στάδια: α) την κατανόηση του προβλήματος, β) την επινόηση ενός σχεδίου λύσης που περιλαμβάνει την αναγνώριση και επιλογή κατάλληλων στρατηγικών, γ) την εκτέλεση του σχεδίου λύσης και δ) την ανασκόπηση – επαλήθευση του προβλήματος.

Για την κατανόηση του προβλήματος ο Polya (1957) θέτει κάποιες βοηθητικές ερωτήσεις όπως: Ποιο είναι το ζητούμενο; Ποια είναι τα δεδομένα; Ποια είναι η συνθήκη;

Ικανοποιείται η συνθήκη; Είναι επαρκής; Είναι ανεπαρκής; Είναι πλεοναστική; Είναι αντιφατική; Προτείνει επίσης να χρησιμοποιηθεί σχήμα και κατάλληλος συμβολισμός και τέλος να διαχωριστούν τα διάφορα μέρη της συνθήκης. Οι Krulik et al. (1988) αναφέρουν πως ένας τρόπος για την κατανόηση και αντίληψη του προβλήματος είναι η επανάληψη της διατύπωσής του με ευχέρεια και ο σχεδιασμός ενός σχήματος το οποίο θα περιλαμβάνει το ζητούμενο και τα δεδομένα.

Στο δεύτερο στάδιο, που είναι η επινόηση ενός σχεδίου λύσης, ο Polya (1957) αναφέρει πως πρέπει να βρεθεί η σχέση μεταξύ των δεδομένων και των ζητούμενων και αν ο συσχετισμος αυτός δεν είναι άμεσα εφικτός, τότε ο λύτης θα πρέπει να εξετάσει βοηθητικά προβλήματα ώστε να καταρτίσει το σχέδιο λύσης. Επίσης συνιστά στο λύτη να σιγουρευτεί πως χρησιμοποίησε όλα τα δεδομένα και έχει λάβει υπόψη του όλες τις ουσιώδεις έννοιες που περιέχονται στο πρόβλημα. Η σύλληψη της ιδέας ενός σχεδίου λύσης, που αποτελεί κύριο επίτευγμα στην επίλυση προβλημάτων, επιτυγχάνεται όταν είναι γνωστοί οι υπολογισμοί και οι πράξεις που θα εκτελεστούν για την εύρεση του ζητούμενου (Polya, 1957) και τα βοηθητικά στοιχεία για την εξεύρεση του σχεδίου αυτού είναι η ανάλυση και η σύνθεση των πληροφοριών που δίνονται στο πρόβλημα (Krulik et al., 1988).

Κατά την εκτέλεση του σχεδίου λύσης ο Polya (1957) παρακινεί το λύτη να ελέγχει κάθε του βήμα ώστε να είναι σίγουρος και να αποδεικνύει την ορθότητά του, πράγμα το οποίο χρειάζεται νηφαλιότητα και υπομονή.

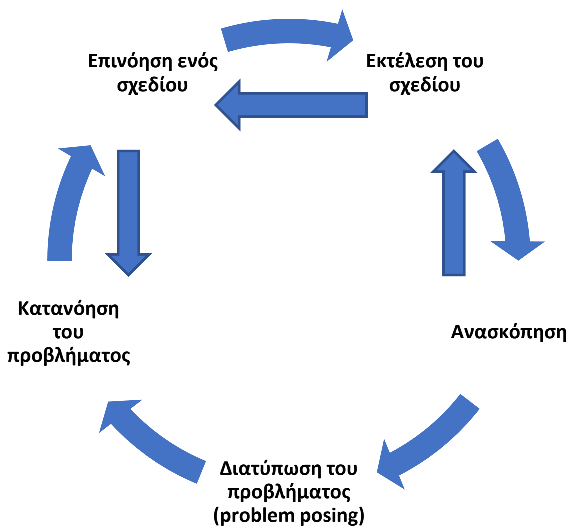
Το τελευταίο στάδιο είναι η ανασκόπηση όπου πρέπει να εξεταστεί και να ελεγχθεί το αποτέλεσμα και η αιτιολόγηση της λύσης. Ο λύτης μπορεί να αναλογιστεί αν υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι εύρεσης της λύσης και αν μπορεί το αποτέλεσμα που βρέθηκε ή η μέθοδος να χρησιμοποιηθεί και σε άλλα προβλήματα. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η βέλτιστη κατανόηση της λύσης, η εμπέδωση της γνώσης και η ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

Αργότερα, τα παραπάνω στάδια διαφοροποιήθηκαν από άλλους ερευνητές και μετατράπηκαν σε περισσότερα ή και λιγότερα. Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1) φαίνονται ενδεικτικά κάποια μοντέλα επίλυσης προβλημάτων που προτείνονται από τους Polya (1945), Schoenfeld (1985), Lester et al. (1989), Verschaffel et al. (1999) και τα αντίστοιχα στάδια που περιλαμβάνουν, όπως παρουσιάστηκαν στην έρευνα των Marcou & Lerman (2006).

Polya (1945)	**Schoenfeld (1985)**	**Lester et al. (1989)**	**Verschaffel et al. (1999)**
1. Κατανόηση προβλήματος 2. Επινόηση σχεδίου λύσης 3. Εκτέλεση σχεδίου λύσης 4. Ανασκόπηση	1. Ανάλυση 2. Εξερεύνηση 3. Επαλήθευση	1. Προσανατολισμός 2. Οργάνωση σχεδίου λύσης 3. Εκτέλεση σχεδίου 4. Επαλήθευση	1. Νοερή αναπαράσταση προβλήματος 2. Τρόπος επίλυσης 3. Εκτέλεση απαραίτητων πράξεων 4. Ερμηνεία αποτελεσμάτων και διαμόρφωση απάντησης 5. Αξιολόγηση λύσης

Πίνακας 1 Μοντέλα Επίλυσης Προβλημάτων
(Marcou& Lerman, 2006)

Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος είναι μια δυναμική αλλά και κυκλική διαδικασία όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Εικόνα 1), (Wilson et al. 1994).



Εικόνα 1 Σχήμα επίλυσης μαθηματικού προβλήματος
(Wilson et al. 1994)

Οι Μαμωνά-Downs και Παπαδόπουλος (2017) προτείνουν περισσότερα βήματα καθοδήγησης για την επίλυση προβλημάτων.

1. Εύρεση και χρήση παρόμοιων γνωστών προβλημάτων
2. Εύρεση βοηθητικών στοιχείων και σχέσεων για την επίλυση.

3. Διαμόρφωση βοηθητικών προβλημάτων ως βοηθητικό μέσο για την επίλυση .
4. Διερεύνηση ύπαρξης πιθανού μοτίβου.
5. Αντίστροφη εργασία (ξεκινώντας είτε από τα συμπεράσματα είτε από κάποια εικασία).
6. Δημιουργία σχήματος
7. Διατύπωση προβλήματος με μαθηματικά σύμβολα.
8. Διαφοροποίηση προβλήματος με αλλαγή κάποιων βασικών μερών ή συνθηκών του.
9. Διάσπαση ή αναδιατύπωση προβλήματος με σκοπό την εύρεση εναλλακτικών διατυπώσεων.
10. Επανεξέταση επιχειρηματολογίας.

1.4.2 Ευρετικές

Ευρετική στρατηγική (heuristics) είναι μία πρόταση, ένας τρόπος επίλυσης προβλήματος η οποία βοηθάει τους λύτες να καταλάβουν ή να λύσουν ένα πρόβλημα (Schoenfeld, 1980). Παρόμοιο ορισμό δίνει και ο Κλαουδάτος (2011) λέγοντας πως ευρετική σημαίνει μια γενική οδηγία ή στρατηγική που είναι ανεξάρτητη από οποιοδήποτε ειδικό θέμα και βοηθά το λύτη στην προσέγγιση του προβλήματος, την κατανόησή του και στην αποτελεσματική διαχείριση των γνώσεων που διαθέτει έτσι ώστε να το επιλύσει. Διακρίνονται δυο είδη ευρετικών, οι γενικές ευρετικές (general heuristics) και οι ειδικές ευρετικές (task-specific heuristics).

Ο Polya (1981) εισήγαγε τις ευρετικές ως μέσο επίλυσης προβλημάτων και ο Schoenfeld (1989,1992,2008) ασπάστηκε τις ιδέες του Polya και θέσπισε μια ταξινόμηση των ευρετικών. Η πρώτη μορφή ευρετικής είναι η αναλογία. Για παράδειγμα κάποιος μπορεί να προσπαθήσει να λύσει ένα απλούστερο πρόβλημα δοκιμάζοντας συγκεκριμένους αριθμούς ή να απλουστεύσει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας ειδικές περιπτώσεις. Επίσης θα μπορούσε να λύσει ένα ανάλογο πρόβλημα αντιστοιχίζοντας συγκεκριμένες συνθήκες ανάμεσα στο πρόβλημα που πρέπει να λυθεί και στο ανάλογο που έχει λυθεί. Μια ακόμα μορφή ευρετικής είναι η λύση ενός σχετικού προβλήματος μειώνοντας τις προϋποθέσεις και γενικεύοντάς το. Επίσης προτείνεται η λύση ενός ισοδύναμου προβλήματος, που δημιουργείται με επαναδιατύπωση του αρχικού και η χρησιμοποίηση της εις άτοπον απαγωγής ή της αντιθετοαντιστροφής. Τέλος, η χρήση σχημάτων είναι μια μορφή ευρετικής όπου μπορούν να χρησιμοποιηθούν γραφήματα, διαγράμματα και γραφικές παραστάσεις για την επίλυση του προβλήματος και αυτό συνήθως αποδίδει και μια καλύτερη κατανόηση του προβλήματος (Κλαουδάτος 2011).

1.4.3 Μεταγνώση

Κατά τον Schoenfeld (1992) η μεταγνώση (*metacognition*) έχει πολλαπλές και σχεδόν ασύνδετες ερμηνείες που εκτείνονται από τη γνώση σχετικά με τις διαδικασίες σκέψης ενός ατόμου έως την αυτορρύθμιση κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων κι έτσι καθίσταται δύσκολη η χρήση της ως έννοια. Η έννοια της μεταγνώσης επινοήθηκε στα τέλη της δεκαετίας του 1970 και εμφανιζόταν περιστασιακά στη βιβλιογραφία της μαθηματικής εκπαίδευσης των αρχών της δεκαετίας του 1980, ενώ στη συνέχεια η συχνότητα εμφάνισής της αυξανόταν σταδιακά και αποτέλεσε σημαντικό πεδίο έρευνας. Ο Flavel (1976) ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με την έννοια αυτή, γράφοντας στην αρχική του μελέτη τα εξής: « Η μεταγνώση αναφέρεται στη γνώση του ατόμου σχετικά με τις δικές του γνωστικές διαδικασίες ή οτιδήποτε σχετίζεται με αυτές, π.χ. τις σχετικές με τη μάθηση ιδιοτήτων πληροφοριών ή δεδομένων… Η μεταγνώση αναφέρεται μεταξύ άλλων, στην ενεργή παρακολούθηση, τη συνακόλουθη ρύθμιση και ενορχήστρωση των διαδικασιών αυτών σε σχέση με τα γνωστικά αντικείμενα ή τα στοιχεία τους, συνήθως στην υπηρεσία κάποιων συγκεκριμένων στόχων (όπως η επίλυση προβλήματος) ». (Flavel 1976, σελ. 232)

Η αυτορρύθμιση ή αλλιώς παρακολούθηση και έλεγχος, αποτελεί έναν ευρύ τομέα που περιλαμβάνεται υπό τον όρο της μεταγνώσης. Για παράδειγμα, κατά την επεξεργασία ενός μαθηματικού προβλήματος μπορεί ένα άτομο να φτάσει σε σημείο που η κατανόησή του γίνεται ασαφής και το πρόβλημα είναι πιο περίπλοκο από όσο είχε σκεφτεί αρχικά και τότε το πιο σύνηθες είναι να αποφασίσει να κατανοήσει το πρόβλημα και να το επεξεργαστεί από την αρχή. Σε διανοητικές καταστάσεις λοιπόν (όπως η επίλυση προβλημάτων, η ανάγνωση και η γραφή), αν τα πράγματα δείχνουν να προχωρούν τότε το άτομο συνεχίζει στο ίδιο μονοπάτι ενώ αν παρουσιάζεται κάποια προβληματική κατάσταση, τότε κάνει απολογισμό και σκέφτεται άλλες επιλογές. Η παρακολούθηση και η αξιολόγηση της προόδου αποτελούν τα βασικά στοιχεία της αυτορύθμισης.

Ο Schoenfeld (1983) και οι Lester et al. (1989) έχουν επισημάνει τον ρόλο κλειδί των μεταγνωστικών διαδικασιών (metacognition) στη λύση προβλήματος. Τονίζεται και ότι πολλές από τις ευρετικές (heuristics) του Polya έχουν μεταγνωστικό χαρακτήρα. Η μεταγνώση, οι πεποιθήσεις και οι μαθηματικές πρακτικές θεωρούνται κρίσιμες πτυχές της μαθηματικής σκέψης (Schoenfeld 1992). Γενικότερα λοιπόν, θα συμπεραίναμε πως η επίλυση προβλημάτων καλύπτει μόνο ένα μέρος της μαθηματικής σκέψης, καθώς σημαντικές είναι επίσης η ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων και η ανάπτυξη μιας μαθηματικής άποψης (Schoenfeld, 1989).

1.4.4 Ικανότητες και Δυσκολίες Παιδιών στην Επίλυση Προβλημάτων

Η ικανότητα που αφορά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αναπτύσσεται αργά και σε πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, καθώς απαιτεί πολλά περισσότερα από μια απλή και άμεση εφαρμογή συγκεκριμένων γνώσεων μαθηματικού περιεχομένου (Lester, 1988). Τα αποτελέσματα διάφορων ερευνών που πραγματοποιήθηκαν έδειξαν πως παρ' όλα τα χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης, αρκετά παιδιά μετά το δημοτικό σχολείο δεν έχουν τις απαιτούμενες ικανότητες για την προσέγγιση μαθηματικών προβλημάτων ή οι ικανότητες αυτές είναι ανεπαρκείς (Lester et al., 1989; Schoenfeld, 1992; Verschaffel et al., 1999).

Ο Schoenfeld (1983) διέκρινε τρεις τύπους απαιτούμενων γνώσεων για την επίλυση προβλημάτων:

1. Πόροι, δηλαδή ειδικές γνώσεις πάνω σε συγκεκριμένο τομέα, όπως για παράδειγμα αλγόριθμοι, ευρετικές, διαδικασίες ρουτίνας, αναπαραστάσεις και γνώσεις με τις οποίες προσεγγίζεται ένα πρόβλημα.
2. Έλεγχος, σχεδιασμός, παρακολούθηση, αξιολόγηση, μεταγνωστικές διαδικασίες κ.α. σχετικά με την επιλογή και εφαρμογή της αντίστοιχης στρατηγικής.
3. Συστήματα πεποιθήσεων για τον ίδιο τον λύτη, το περιβάλλον, το θέμα και τα μαθηματικά, πράγματα τα οποία επηρεάζουν τη συμπεριφορά του ατόμου αυτού.

Οι Heller και Hungate (1985) κατηγοριοποίησαν τη φύση της απαιτούμενης γνώσης για την επίλυση προβλημάτων σε θεματικούς τομείς όπως τη γνώση που χρειάζεται για την κατανόηση και την αναπαράσταση προβλημάτων, τη στρατηγική γνώση που αφορά την προσέγγιση που ακολουθείται για την επίλυση προβλημάτων, τη γνώση βασικών αρχών και εννοιών και τέλος τη γνώση που αφορά την ποικιλία γνωστών προτύπων και διαδικασιών επίλυσης.

Οι Kroll και Miller (1993) προσδιόρισαν τρεις κύριους γνωστικούς και συναισθηματικούς παράγοντες που αφορούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην επίλυση προβλημάτων. Οι παράγοντες αυτοί είναι: η γνώση, ο έλεγχος (μετάγνωση) και οι πεποιθήσεις – συναισθήματα.

Κατά την ίδια έρευνα, οι **γνωστικοί παράγοντες** χωρίστηκαν στις εξής κατηγορίες:

- Αλγοριθμική Γνώση, που αφορά υπολογιστικές δεξιότητες που προφανώς είναι απαραίτητες αλλά όχι επαρκείς για την επίλυση προβλημάτων.
- Γλωσσική Γνώση, που αφορά τη γλώσσα στην οποία παρουσιάζεται το πρόβλημα και αποτελεί σημαντική πηγή δυσκολίας για κάποιους μαθητές.
- Εννοιολογική Γνώση, που σχετίζεται με τις αποφάσεις που λαμβάνονται κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων.
- Σχηματική Γνώση, που αφορά την ανάλυση του προβλήματος και την αναπαράστασή του.
- Στρατηγική Γνώση, δηλαδή την ποικιλία στρατηγικών επίλυσης προβλήματος και την κατάλληλη επιλογή τους.

Για τον Lester (1988) η επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων επηρεάζεται από γνωστικούς αλλά και μη γνωστικούς παράγοντες, που μπορούν να ταξινομηθούν στις παρακάτω αλληλεξαρτώμενες και ευρείες κατηγορίες: την απόκτηση γνώσης και τη αξιοποίηση τους, τον έλεγχο, τις πεποιθήσεις, τις στάσεις και τα συναισθήματα του λύτη και το εκάστοτε κοινωνικοπολιτιστικό πλαίσιο.

Επίσης, οι Frensch και Funke (1995) υποστηρίζουν πως η επίλυση προβλημάτων επηρεάζεται από εσωτερικούς και εξωτερικούς παράγοντες. Οι εσωτερικοί παράγοντες είναι η εμπειρία του λύτη, αλλά και γνωστικοί (διαισθητική και επίσημη γνώση) και μη γνωστικοί παράγοντες (πεποιθήσεις, συναισθήματα) που τον αφορούν. Οι εξωτερικοί παράγοντες αφορούν τη δομή και το περιεχόμενο του προβλήματος, καθώς και περιβαλλοντικούς παράγοντες (πόροι, προσδοκίες, διαδικασίες πληροφόρησης και διαθέσιμες γνώσεις).

Ο Polya (1957), διέκρινε τη συμπεριφορά των μαθητών και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν σε καθένα από τα στάδια επίλυσης ενός προβλήματος. Παρατηρήθηκε μη ικανοποιητική κατανόηση του προβλήματος, η οποία αποτελεί ίσως την πιο διαδεδομένη δυσκολία και οφείλεται συνήθως σε έλλειψη συγκέντρωσης. Ως προς την επινόηση σχεδίου λύσης, οι μαθητές πολλές φορές ξεκινούν να εκτελούν υπολογισμούς σχεδόν αμέσως, χωρίς να έχουν προσπαθήσει πρώτα να αναλύσουν το πρόβλημα και να το κατανοήσουν (Polya, 1957; De Corte et al.,1982), ενώ κάποιοι άλλοι αναμένουν με αδράνεια τη σύλληψη μιας ιδέας λύσης χωρίς να εκτελούν βήματα που θα την επιταχύνει (Polya 1957). Κατά την εκτέλεση του σχεδίου, οι μαθητές επιδεικνύουν χαρακτηριστική έλλειψη υπομονής και απροσεξία σε κάθε βήμα χωρίς ιδιαίτερο έλεγχο (Polya 1957). Τέλος, το στάδιο του ελέγχου συχνά παραλείπεται πλήρως και τα παιδιά δεν επαληθεύουν τα αποτελέσματα που βρήκαν σχεδόν ποτέ (Polya, 1957; De Corte et al.,1982).

1.5 Κατηγορίες Λυτών Προβλημάτων

Στη βιβλιογραφία γίνεται λόγος για κατηγορίες λυτών προβλημάτων όπου μεταξύ των άλλων αναφέρονται οι «καλοί», οι «φτωχοί», οι «εξειδικευμένοι», οι «αρχάριοι», οι «επιτυχείς» και οι «ανεπιτυχείς» λύτες προβλημάτων.

O Dodson (1972) στη σχετική του μελέτη, κατέγραψε τα χαρακτηριστικά των καλών και επιτυχημένων λυτών προβλημάτων. Παρατήρησε ότι τα άτομα αυτά κρίνονται «ανώτερα» σχετικά με: **α)** τις επιδόσεις τους στα μαθηματικά **β)** τη γενική και λεκτική ικανότητα συλλογισμού που διαθέτουν **γ)** τη χωρική ικανότητα **δ)** τις θετικές τους στάσεις **ε)** την αντίσταση στην απόσπαση της προσοχής **στ)** το επίπεδο ανεξαρτησίας του πεδίου και **ζ)** την αποκλίνουσα σκέψη τους.

Η έρευνα του Schoenfeld (1985; 1989; 1992) διέκρινε τις διαφορές ενός καλού κι ενός φτωχού λύτη προβλημάτων εστιάζοντας σε πέντε σημεία.

1. Η γνώση των καλών λυτών προβλημάτων είναι καλά συνδεδεμένη και αποτελείται από πλούσια σχήματα ενώ δεν συμβαίνει το ίδιο με τους φτωχούς λύτες προβλημάτων.

2. Οι καλοί λύτες προβλημάτων τείνουν να εστιάζουν την προσοχή τους σε δομικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων ενώ οι φτωχοί λύτες προβλημάτων επικεντρώνονται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά.

3. Οι καλοί λύτες προβλημάτων έχουν μεγαλύτερη επίγνωση από τους φτωχούς λύτες προβλημάτων σχετικά με τα δυνατά και τα αδύνατα σημεία τους ως λύτες.

4. Οι καλοί λύτες προβλημάτων υπερέχουν σε σχέση με τους φτωχούς στην παρακολούθηση και ρύθμιση των προσπαθειών τους για επίλυση προβλημάτων.

5. Οι καλοί λύτες προβλημάτων τείνουν να ανησυχούν περισσότερο από τα φτωχούς λύτες σχετικά με την απόκτηση «κομψών» λύσεων στα προβλήματα.

Ως προς τους αρχάριους και τους εξειδικευμένους λύτες προβλημάτων, ο Wickelgren (1974) αναφέρει πως οι ιδέες που εφαρμόζονται σε προβλήματα από αρχάριους λύτες συνήθως εξαντλούνται, ενώ αντίθετα οι εξειδικευμένοι λύτες επιλέγουν από μια ποικιλία πιθανών προσεγγίσεων του προβλήματος καθώς διαθέτουν πολλές ιδέες για την επίλυσή του. Οι Heller και Hungate (1985) κατά τις εμπειρικές και θεωρητικές τους αναλύσεις στην επίλυση προβλημάτων, σημείωσαν πως η κατανόηση και η αντίληψη των αρχαρίων τείνει να είναι ελλιπής σε προβλήματα που αφορούν δεκάδες θεμελιώδεις έννοιες και επίσης παρατήρησαν πως οι αρχάριοι δεν κατασκευάζουν αναπαραστάσεις που βοηθούν στην επίλυση προβλημάτων. Από την άλλη, οι εξειδικευμένοι λύτες χρησιμοποιούν μια διαδικασία διαδοχικών βελτιώσεων - εκτός από τις περιπτώσεις που αφορούν απλά προβλήματα των οποίων ανακαλούν τις στρατηγικές επίλυσης. Σύμφωνα με τις ίδιες έρευνες, οι εξειδικευμένοι λύτες χρησιμοποιούν στρατηγικές που περιλαμβάνουν υψηλού επιπέδου σχεδιασμό και ποιοτική ανάλυση πριν καταλήξουν στις εξισώσεις επίλυσης του προβλήματος. Οι αρχάριοι όμως, δεν έχουν τις απαιτούμενες γνώσεις για να προσεγγίσουν τα προβλήματα κατά αυτόν τον τρόπο και προσπαθούν να οδηγηθούν στις εξισώσεις απευθείας από το κείμενο του προβλήματος. Σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η ποσότητα των γνώσεων που διαθέτουν οι εξειδικευμένοι λύτες σε συγκεκριμένους τομείς, γνωρίζοντας και μέσω της εμπειρίας πότε οι έννοιες και οι αρχές είναι εφαρμοστέες και χρήσιμες στην επίλυση ενός προβλήματος, ενώ οι αρχάριοι δεν διαθέτουν πολλές από αυτές τις γνώσεις ούτε τις έχουν καλά οργανωμένες και παρατηρείται πως συχνά διακατέχονται από αφελείς προκαταλήψεις και όχι από επιστημονικά ορθές ιδέες. Τέλος, προκύπτει το συμπέρασμα πως οι εξειδικευμένοι λύτες διαθέτουν ποικιλία μοντέλων και γνώση σχετικά με τους τύπους προβλημάτων και τις μεθόδους λύσης τους, που οι αρχάριοι δεν έχουν αναπτύξει ακόμα.

Η Foong (στο B.Kaur, 1997), στην έρευνά της (1990;1994) σε φοιτητές δασκάλους προσχολικής ηλικίας, σχετικά με τους επιτυχείς και τους ανεπιτυχείς λύτες προβλημάτων διέκρινε πως οι επιτυχείς λύτες μετέφραζαν το πρόβλημα με μεγαλύτερη ορθότητα και ακρίβεια ενώ οι ανεπιτυχείς λύτες πρόσεχαν τις προφανείς λεπτομέρειες και μετέφραζαν κάθε πρόταση χωρίς να δημιουργήσουν μια σφαιρική αναπαράσταση του προβλήματος. Επίσης, οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων σχεδίαζαν τις λύσεις τους πριν από την εκτέλεση τους με περισσότερες λεπτομέρειες, ενώ οι ανεπιτυχείς λύτες έτειναν να είναι παρορμητικοί στην εκτέλεση των λύσεων χωρίς πολλές φορές να έχουν κατανοήσει το πρόβλημα και αυτό τους οδηγούσε σε εσφαλμένες μεθόδους κατ΄ εξακολούθηση. Οι επιτυχείς λύτες προβλημάτων παρατηρήθηκε πως χρησιμοποίησαν περισσότερες μεταγνωστικές διαδικασίες δείχνοντας μεγαλύτερη επίγνωση των στρατηγικών επίλυσης. Οι ανεπιτυχείς λύτες από την άλλη, επέδειχναν συχνά αρνητικά συναισθήματα όπως η απογοήτευση και η σύγχυση.

1.6 Στόχοι και Ρόλοι Ενασχόλησης με την Επίλυση Προβλημάτων

Κατά την έρευνα που πραγματοποιήθηκε το 1983 σε τμήματα Μαθηματικών (Schoenfeld, 1983), προέκυψαν οι παρακάτω κατηγορίες στόχων που αφορούν μαθήματα επίλυσης προβλημάτων.

- Εκπαίδευση μαθητών/φοιτητών στη δημιουργική σκέψη και την ανάπτυξη ικανότητας επίλυσης προβλημάτων (συνήθως μέσω εστίασης στις ευρετικές στρατηγικές).
- Προετοιμασία μαθητών/φοιτητών για μαθηματικούς διαγωνισμούς που περιλαμβάνουν επίλυση προβλημάτων (πχ μαθηματικές ολυμπιάδες κλπ).
- Παροχή οδηγιών για συγκεκριμένες ευρετικές στρατηγικές σε φοιτητές που προορίζονται ως πιθανοί μελλοντικοί δάσκαλοι.
- Εκμάθηση βασικών τεχνικών σε συγκεκριμένους τομείς όπως η μαθηματική μοντελοποίηση.
- Παροχή διαφορετικής προσέγγισης των βασικών τεχνικών των μαθηματικών και προσπάθεια καλλιέργειας ικανοτήτων κριτικής σκέψης και αναλυτικής συλλογιστικής.

Στη μελέτη των Stanic και Kilpatrick (1988) αποσαφηνίστηκαν οι ρόλοι που διαδραματίζει η ενασχόληση με τα προβλήματα στην εκπαίδευση. Αυτοί είναι:

- *Αιτιολόγηση διδασκαλίας των μαθηματικών.* Διαχρονικά, τα περισσότερα από τα προβλήματα που περιλαμβάνονται στα σχολικά προγράμματα σπουδών, σχετίζονται κατά κάποιο τρόπο με τις εμπειρίες του πραγματικού κόσμου και της καθημερινότητας και αποσκοπούν στο να πείσουν τους δασκάλους και τους μαθητές για την αναγκαιότητα των μαθηματικών.

- *Παροχή κινήτρων για συγκεκριμένα θεματικά πεδία.* Τα προβλήματα χρησιμοποιούνται συχνά ως εισαγωγή σε θέματα στα οποία μόλις γίνει κατανοητή η θεωρία του μαθήματος, θα γίνει εφικτή και η επίλυση των προβλημάτων που προαναφέρονται.
- *Λόγοι αναψυχής.* Τα ψυχαγωγικά προβλήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να δείξουν ότι τα μαθηματικά μπορούν να είναι διασκεδαστικά και πως υπάρχουν διασκεδαστικές χρήσεις των δεξιοτήτων που έχουν κατακτήσει οι μαθητές.
- *Ως μέσο ανάπτυξης νέων δεξιοτήτων.* Τα προβλήματα μπορούν να βοηθήσουν την εισαγωγή των μαθητών σε ενασχόληση με νέα γνωστικά αντικείμενα και να παρέχουν ένα πλαίσιο για συζητήσεις τεχνικών που αφορούν το συγκεκριμένο αντικείμενο.
- *Ως πρακτική εξάσκηση.* Η συντριπτική πλειοψηφία των προβλημάτων που δίνονται στα σχολεία ως μαθηματικές εργασίες, εμπίπτει στην κατηγορία αυτή. Οι μαθητές διδάσκονται μια συγκεκριμένη τεχνική και στη συνέχεια εξασκούνται σε προβλήματα που την αφορούν, ώστε να εξοικειωθούν και να την κατακτήσουν.

1.7 Ρόλος Εκπαιδευτικών στην Επίλυση Προβλημάτων

Πολλές έρευνες έχουν γίνει για την σημασία του ρόλου του εκπαιδευτικού στις μαθησιακές διαδικασίες αλλά και συγκεκριμένα στην επίλυση προβλημάτων. Το περιεχόμενο της παιδαγωγικής γνώσης των εκπαιδευτικών ως προς την επίλυση προβλημάτων, ο τρόπος διδασκαλίας αλλά και η γενικότερη κουλτούρα που επικρατεί στη σχολική τάξη, αποτελούν παράγοντες που καθορίζουν την επιτυχία και την αποτυχία των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων (Lester et al.,1989; Verschaffel et al.,1999). Ο Schoenfeld (1992) τονίζει τη σημαντικότητα των πεποιθήσεων των εκπαιδευτικών για τους ίδιους αλλά και για τους μαθητές, καθώς οι πεποιθήσεις τους καθορίζουν τη φύση του περιβάλλοντος που δημιουργείται στην τάξη και το περιβάλλον με τη σειρά του συμβάλλει στη διαμόρφωση των πεποιθήσεων των μαθητών αναφορικά και με τη φύση των μαθηματικών. Οι Krulik et al. (1988) αναφέρουν πως η θετική στάση των εκπαιδευτικών προς τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων είναι κρίσιμη και απαιτούμενη για την επιτυχία των μαθητών και πως είναι σημαντικό να τους δίνεται ο απαραίτητος χρόνος για περισυλλογή και επεξεργασία του προβλήματος. Σύμφωνα με τους Lester et al. (1988), ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να οργανώνει στρατηγικές διδασκαλίας της επίλυσης προβλημάτων, να παρέχει κατευθυντήριες γραμμές ως προς την οργάνωση των μαθητών και να έχει επίγνωση αξιολογώντας σωστά τα διαφορετικά (γνωστικά) επίπεδα των μαθητών. Ο Polya (1962) συνιστά στους εκπαιδευτικούς να αναλογίζονται τη χρησιμότητα ενός προβλήματος στην σχολική τάξη και αναφέρει πως ένα πρόβλημα θα είναι ενδιαφέρον όταν γίνεται συγκεκριμένο (από τον εκπαιδευτικό). Η ενασχόληση του εκπαιδευτικού με την επίλυση ενός προβλήματος, η αφομοίωση της λύσης του, η σκέψη για τον χρόνο και τον τρόπο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί αλλά και οι προαπαιτούμενες γνώσεις, αποτελούν κύρια στοιχεία προετοιμασίας του εκπαιδευτικού για τη διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων (Polya, 1981). Η διδασκαλία είναι μία στοχευμένη δραστηριότητα, που απαιτεί τη χρήση γνώσεων, στρατηγικών και μεταγνωστικών δεξιοτήτων του εκπαιδευτικού προσπαθώντας να πετύχει στόχους που διαμορφώνονται από τις πεποιθήσεις και τις γνώσεις του και αποτελούν υψηλή προτεραιότητά του (Schoenfeld 2006).

Αναφορικά με την οργάνωση και τον σχεδιασμό της διδασκαλίας επίλυσης προβλημάτων, οι Krulik et al. (1988) αναδεικνύουν τη σημασία της δουλειάς που πρέπει να εκτελέσει ο εκπαιδευτικός βρίσκοντας τρόπους και μεθόδους για να γίνει κατανοητή η διατύπωση του προβλήματος, ώστε να μπορεί ο μαθητής να διακρίνει τα δεδομένα, τις συνθήκες και το ζητούμενο που αποτελούν τα κύρια μέρη του προβλήματος. Επίσης υποστηρίζουν πως ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να εντάξει τους μαθητές σε διαδικασίες σύλληψης ιδεών και σχεδίου λύσης, το οποίο αποτελεί βασικό συστατικό για την επίλυση του προβλήματος. Κατά την εκτέλεση του σχεδίου λύσης, είναι απαραίτητη για τον εκπαιδευτικό η εύρεση τρόπων εξέτασης των λεπτομερειών του προβλήματος ώστε να βεβαιωθούν οι μαθητές ότι το σχέδιο λύσης που έχουν καταρτίσει ανταποκρίνεται στις συνθήκες του προβλήματος. Τέλος, οι ίδιοι ερευνητές αναφέρουν πως ο εκπαιδευτικός πρέπει να δημιουργήσει ένα πλαίσιο ανασκόπησης της πορείας της λύσης και του αποτελέσματος έτσι ώστε να μπορούν οι μαθητές να εμπεδώσουν τις αντίστοιχες γνώσεις και να αναπτύξουν ικανότητες στην επίλυση προβλημάτων.

Οι Lester et al. (1989) διεξήγαγαν μια σημαντική έρευνα με χρήση διδακτικής παρέμβασης σε μαθητές Γυμνασίου, με σκοπό να μελετήσουν το ρόλο της μεταγνώσης (δηλαδή της γνώσης και του ελέγχου της) στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Στόχος της διδακτικής παρέμβασης ήταν η ενθάρρυνση της μεταγνωστικής ανάπτυξης των μαθητών. Ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό ήταν ο δάσκαλος να χρησιμεύει σαν εξωτερικός επιτηρητής κατά τη διάρκεια επίλυσης προβλημάτων, να ενθαρρύνει τη συζήτηση πάνω στα θέματα που εξετάζονται και να αποτελεί πρότυπο εκτελεστικής συμπεριφοράς. Ο Πίνακας 2 οριοθετεί τις οδηγίες συμπεριφοράς του εκπαιδευτικού.

Διδακτική Δράση	**Σκοπός**
ΠΡΙΝ	
1. Ανάγνωση του προβλήματος και συζήτηση για λέξεις ή φράσεις μη κατανοητές από τους μαθητές	Ανάδειξη σημασίας προσεκτικής ανάγνωσης και εστίαση σε ειδικό λεξιλόγιο
2. Συζήτηση στην τάξη και εστίαση στην κατανόηση του προβλήματος	Εστίαση σε σημαντικά δεδομένα και διαδικασία διερεύνησης
3. Συζήτηση στην τάξη για πιθανές στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος (προεραιτικά)	Εκμαίευση ιδεών για πιθανούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος
ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ	
4. Παρατήρηση και ερώτηση μαθητών για το στάδιο επίλυσης που βρίσκονται	Διάγνωση δυνατοτήτων και αδυναμιών
5. Παροχή υποδείξεων όπου απαιτείται	Βοήθεια στους μαθητές για να ξεπεράσουν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν
6. Επέκταση προβλήματος όπου είναι δυνατόν	Πρόκληση γενίκευσης για τους μαθητές που έχουν λύσει νωρίς το πρόβλημα
7. Προτροπή στους μαθητές που λύνουν το πρόβλημα να δώσουν την απάντησή τους	Αυτοεξέταση της λύσης από κάθε μαθητή ώστε να βεβαιωθεί ότι έχει νόημα
ΜΕΤΑ	
8. Επίδειξη και συζήτηση των λύσεων	Ανάδειξη και αναφορά διαφορετικών στρατηγικών
9. Συσχέτιση με προβλήματα που έχουν λυθεί προηγουμένως ή/και προτροπή στους μαθητές να λύσουν πιθανές επεκτάσεις του προβλήματος	Ανάδειξη γενικής εφαρμογής στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων

10. Συζήτηση ειδικών χαρακτηριστικών (πχ εικόνες)	Ανάδειξη του τρόπου με τον οποίο τα ειδικά χαρακτηριστικά επηρεάζουν την προσέγγιση

Πίνακας 2 Διδακτικές Δράσεις Επίλυσης Προβλημάτων (Lester et al., 1989)

Κάποια από τα κύρια συμπεράσματα της παραπάνω έρευνας των Lester et al. ήταν:

- Ο εντοπισμός της δυναμικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (συμπεριλαμβανομένων των μεταγνωστικών) που χρησιμοποιούνται στην επίλυση προβλημάτων, δηλαδή οι διαδικασίες ελέγχου και η επίγνωση των γνωστικών διαδικασιών αναπτύσσονται ταυτόχρονα με την κατανόηση μαθηματικών εννοιών.
- Για την βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων είναι απαραίτητο να ασχοληθούν με ποικίλους τύπους προβλημάτων σε τακτική βάση και για μεγάλο χρονικό διάστημα.
- Η διδασκαλία που αφορά τις οδηγίες επίλυσης προβλημάτων και τη μεταγνώση γίνεται αποτελεσματικότερη όταν γίνεται σε συγκεκριμένο πλαίσιο με οργανωμένο τρόπο υπό την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού.
- Παρατηρείται δυσκολία για τον εκπαιδευτικό να διατηρήσει τους ρόλους του στην τάξη (επιτηρητής, διευκολυντής, πρότυπο), ειδικά όταν οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα κατά τη διάρκεια του μαθήματος.
- Δεν προκύπτει δικαιολόγηση της άποψης πως οι αλληλεπιδράσεις και οι δραστηριότητες των μαθητών σε μικρές ομάδες έχουν καλύτερα αποτελέσματα.
- Οι τρόποι αξιολόγησης θα πρέπει να επιβραβεύουν και να ενθαρρύνουν τις συμπεριφορές που επιθυμούμε να επιδείξουν οι μαθητές.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθούμε επιγραμματικά στη Θεωρία των Διδακτικών Καταστάσεων καθώς η χρήση της συνδέεται και με την επίλυση προβλημάτων. Για τον Κλαουδάτο (2011), μεγάλο μέρος της υπευθυνότητας ενός καθηγητή μαθηματικών είναι ο σχεδιασμός Διδακτικών Καταστάσεων, με τις οποίες θα πρέπει να προτείνονται δραστηριότητες όπου θα αναζητείται από τους μαθητές η κατάλληλη απάντηση που όμως δεν είναι συγκεκριμένη ή τυποποιημένη αλλά προέρχεται από ένα ευρύ φάσμα επιλογών. Κατά το σχεδιασμό των διδακτικών καταστάσεων, ο καθηγητής θα ενσωματώνει τις αφηρημένες μαθηματικές ιδέες και έννοιες σε ένα κατάλληλο πλαίσιο για τους μαθητές, εκτελώντας έναν κύκλο που ξεκινά από τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, προχωρά σε συγκεκριμένα προβλήματα και επιστρέφει στις αφηρημένες έννοιες. Ο Κλαουδάτος διακρίνει διάφορα είδη διδακτικών καταστάσεων όπως Καταστάσεις Δράσης, Καταστάσεις Διατύπωσης, Καταστάσεις Επικοινωνίας, Καταστάσεις Επικύρωσης, Καταστάσεις απόφασης, Καταστάσεις Θεσμοποίησης. Κάθε μια από τις παραπάνω κατηγορίες έχει συγκεκριμένη χρησιμότητα και στόχους ενώ γενικότερα η χρήση διδακτικών καταστάσεων στη μαθηματική εκπαίδευση βοηθά στην πρόβλεψη των δυσκολιών των μαθητών, ερμηνεύει ανυπέρβλητες δυσκολίες της διδασκαλίας, διασαφηνίζει τα προαπαιτούμενα του μαθητή (γνωστικά και επιστημολογικά) και παράγει καταστάσεις που είναι ανακοινώσιμες και εφαρμόσιμες. Τέλος ο συγγραφέας εφιστά την προσοχή στον προσεκτικό σχεδιασμό των Διδακτικών Καταστάσεων για να αποφευχθούν ανεπιθύμητες συνέπειες προτείνοντας να αποφεύγονται καταστάσεις που οδηγούν σε αναμενόμενη γνώση γιατί με τον τρόπο αυτό μπορούν να χαθούν τα κίνητρα μάθησης και να αποφεύγονται καταστάσεις που παράγουν γνώση με διάφορα τεχνάσματα, γιατί με τον τρόπο αυτό χάνεται το νόημα της γνώσης.

2. Χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία

2.1 Εισαγωγή

Κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών, κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι καθηγητές συναντούν συχνά μια αρνητική στάση και απροθυμία των μαθητών απέναντι σε μαθηματικές έννοιες που παρουσιάζονται και δέχονται ερωτήσεις όπως «γιατί να τα μάθω αυτά» , «που θα μου χρησιμεύσουν» , «ποιος τα ανακάλυψε» και «πως τα σκέφτηκε». Είναι φανερό λοιπόν, ότι οι μαθητές αναζητούν ένα κίνητρο για να ασχοληθούν πρόθυμα και με ενδιαφέρον με τις μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται. Η παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών στα σχολικά προγράμματα, τείνει να γίνει μια διεκπεραιωτική διαδικασία όπου οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να αποκτήσουν κάποιες γνώσεις με απομνημόνευση τύπων, κανόνων και τεχνικών επίλυσης ασκήσεων, χωρίς να υπάρχει ο χώρος και ο χρόνος να λάβουν απαντήσεις στις παραπάνω ερωτήσεις τους. Με τον τρόπο αυτό όμως, βασικοί εκπαιδευτικοί στόχοι (και όχι απλά μαθησιακοί) όπως η καλλιέργεια της κριτικής σκέψης και η ανάπτυξη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων, δεν μπορούν να επιτευχθούν στον επιθυμητό βαθμό. Ένας πιθανός τρόπος αντιμετώπισης των παραπάνω θεμάτων είναι η ενσωμάτωση στοιχείων Ιστορίας των Μαθηματικών κατά τη διδασκαλίας τους. Από τη δεκαετία του 1960 και έπειτα, έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες που αφορούν την ενσωμάτωση της Ιστορίας στη Διδακτική των Μαθηματικών. Η ενσωμάτωση αυτή αποτελεί τα τελευταία χρόνια βασικό θέμα σε μαθηματικά συνέδρια, άρθρα και δημοσιεύσεις. Καθιερωμένοι φορείς διεθνώς, όπως για παράδειγμα το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (National Council of Teachers of Mathematics - NCTM 1989) προτρέπουν να εισαχθεί η ιστορία στα προγράμματα σπουδών μαθηματικών. Μάλιστα έχουν δημιουργηθεί και ομάδες που εργάζονται προς αυτή την κατεύθυνση, όπως η Διεθνής Ομάδα για τη σχέση Ιστορίας και Παιδαγωγικής των Μαθηματικών (International Study Group on the Relationship between the History and Pedagogy of Mathematics - ISGHPM).

Τα αναμενόμενα οφέλη της σύνδεσης των μαθηματικών με την ιστορία τους είναι πολλαπλά και στα πλαίσια της παρούσας εργασίας εστιάζουμε κυρίως στην αύξηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, τη βελτίωση κατανόησης των εννοιών που διδάσκονται και την καλλιέργεια της κριτικής τους σκέψης, αφού κατά την ενασχόληση με ιστορικά θέματα των μαθηματικών και ιστορικά προβλήματα παρέχονται πολλές αφορμές για σκέψη. Μπορεί να γίνει πιο κατανοητό το πως γεννήθηκαν και εξελίχθηκαν τα Μαθηματικά αλλά και να εκτιμηθεί ο ρόλος που διαδραμάτισαν τα Μαθηματικά στην εξέλιξη της ιστορία της ανθρωπότητας, της κοινωνίας και του πολιτισμού. Για προκύψουν τα αναμενόμενα οφέλη, θα πρέπει η ενσωμάτωση της ιστορίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών, να γίνει με τον κατάλληλο τρόπο. Κατά τις έρευνες για την ενσωμάτωση αυτή, έχουν διατυπωθεί και αντιρρήσεις – ενστάσεις. Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να αναδειχθούν οι λόγοι και οι τρόποι χρήσης της ιστορίας στη μαθηματική εκπαίδευση αλλά και να παρουσιαστούν οι δυσκολίες και οι ενστάσεις ως προς τη χρήση αυτή. Τέλος θα συνδεθεί η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική εκπαίδευση με την επίλυση προβλημάτων.

2.2 Λόγοι Χρήσης Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Ο Fauvel (1991) ήταν από τους βασικούς υποστηρικτές της άποψης πως η ιστορία των μαθηματικών θα πρέπει να αποτελεί κύριο στοιχείο στη διδασκαλία τους και για να στηρίξει την άποψή του, έθεσε 15 επιχειρήματα. Σύμφωνα με τα επιχειρήματα του Fauvel, η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση:

1. Συμβάλλει και πολλαπλασιάζει τα κίνητρα για μάθηση.
2. Αναδεικνύει τον ανθρώπινο χαρακτήρα της επιστήμης των μαθηματικών.
3. Συμβάλλει στην κατανόηση των εννοιών μέσω της εξέλιξής τους.
4. Τροποποιεί τις αντιλήψεις των μαθητών για τα μαθηματικά.
5. Αυξάνει και διατηρεί το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά.
6. Ενθαρρύνει τους μαθητές δείχνοντας πως οι ίδιες δυσκολίες αντιμετωπίστηκαν στο παρελθόν.
7. Βοηθά στην κατανόηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μέσω των εμποδίων που παρατηρήθηκαν κατά την εξέλιξη της επιστήμης.
8. Αποσαφηνίζει τον ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στην κοινωνία.
9. Παρέχει τη δυνατότητα ενασχόλησης με διαθεματικές εργασίες.
10. Διευκολύνει τη διδασκαλία του μαθήματος.
11. Δημιουργεί ευκαιρίες για περαιτέρω έρευνα.
12. Συμβάλλει στη διαμόρφωση της δομής και της διάταξης της διδακτέας ύλης.
13. Αναδεικνύει την αξία νεότερων τεχνικών σε σχέση με τις παλαιότερες.
14. Συμβάλλει στην ανάπτυξη δεξιοτήτων και διαφορετικών προσεγγίσεων.
15. Κάνει τα μαθηματικά λιγότερο απωθητικά και πιο ελκυστικά για τα παιδιά.

Τα παραπάνω επιχειρήματα, σύμφωνα με τον Fried (2001), μπορούν να χωριστούν σε τρεις γενικές κατηγορίες, λέγοντας πως η ιστορία των μαθηματικών:

1. Εξανθρωπίζει τα μαθηματικά.
2. Κάνει τα μαθηματικά πιο κατανοητά, ενδιαφέροντα και προσιτά.
3. Παρέχει προοπτική σχετικά με έννοιες, προβλήματα και επίλυση προβλημάτων.

Στην πρώτη κατηγορία γίνεται ορατή η ενθάρρυνση που παρέχει η ιστορία των μαθηματικών για πολυπολιτισμικές προσεγγίσεις και η παροχή ιστορικών προτύπων στους μαθητές, συνδέοντας την μελέτη των μαθηματικών με κίνητρα και ανθρώπινα συναισθήματα (Swetz 1995). Στη δεύτερη και ευρύτερη κατηγορία, περιλαμβάνονται ισχυρισμοί για την ποικιλία που προσθέτει η ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους, για την αλλαγή στάσης και τη μείωση του φόβου των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά και την ανάδειξη της θέσης που καταλαμβάνουν τα μαθηματικά στην κοινωνία. Η τελευταία κατηγορία διαφοροποιείται αναφορικά με τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές, καθώς για τους εκπαιδευτικούς είναι σημαντικό ότι η εκμάθηση κάποιου θέματος στα μαθηματικά ακολουθεί μια παράλληλη διαδρομή με την ιστορία του θέματος αυτού, ενώ για τους μαθητές η ιστορία παρέχει ένα πλαίσιο προβλημάτων και ιδεών, δείχνει τις σχέσεις μεταξύ ορισμών και εφαρμογών και προτείνει εναλλακτικές προσεγγίσεις στην επίλυση προβλημάτων (Fried, 2001).

Κατά τον Jankvist (2009), τα επιχειρήματα για τη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι δύο διαφορετικών ειδών: αυτά που αναφέρονται στην ιστορία ως εργαλείο που υποβοηθά την πραγματική εκμάθηση και τη διδασκαλία τους και αυτά που αναφέρονται στην ιστορία ως μεμονωμένο στόχο. Η χρήση της ιστορίας ως εργαλείο σχετίζεται με τον τρόπο που μαθαίνουν οι μαθητές μαθηματικά. Η ιστορία μπορεί να γίνει κινητήριος παράγοντας για να ασχοληθούν οι μαθητές με τα μαθηματικά και να βοηθήσει στη διατήρηση του ενδιαφέροντος και του ενθουσιασμού τους αφού μπορεί να δώσει στα μαθηματικά μια πιο ανθρώπινη υπόσταση. Επίσης η ιστορία μπορεί να αποτελέσει ένα γνωστικό εργαλείο που υποστηρίζει την εκμάθηση των μαθηματικών και να παρέχει διαφορετικές προσεγγίσεις. Τέλος, αποτελεί ένα εξελικτικό επιχείρημα όπου ο ιστορικός παραλληλισμός λειτουργεί ως εργαλείο και ενισχύει την άποψη πως για να μάθει κανείς μαθηματικά και να τα εμπεδώσει θα πρέπει ο νους του να περάσει τα στάδια που πέρασαν τα μαθηματικά κατά την εξέλιξή τους. Από την άλλη, τα επιχειρήματα που προβάλλουν την ιστορία ως στόχο, αναφέρονται στο ότι η ιστορία εξυπηρετεί από μόνη της ένα σκοπό και η εστίασή της θα είναι στις αναπτυξιακές και εξελικτικές πτυχές του κλάδου των μαθηματικών, δείχνοντας την εξέλιξή του στον χώρο και το χρόνο.

Οι Tzanakis και Archavi (2000) διέκριναν πέντε κύριους τομείς στους οποίους η διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να υποστηριχθεί, να εμπλουτιστεί και να βελτιωθεί με χρήση της ιστορίας τους. Οι τομείς αυτοί είναι:

1. Η εκμάθηση των μαθηματικών.
2. Η ανάπτυξη οπτικών που αφορούν τη φύση των μαθηματικών και τη μαθηματική δραστηριότητα.
3. Το διδακτικό υπόβαθρο των καθηγητών και το εκπαιδευτικό τους ρεπερτόριο.
4. Η συναισθηματική προδιάθεση απέναντι στα μαθηματικά.
5. Η εκτίμηση των μαθηματικών ως μείγμα πολιτιστικής και ανθρώπινης προσπάθειας.

2.3 Δυσκολίες, Ενστάσεις και Εμπόδια Χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Παρ’ όλες τις προαναφερθείσες κατηγορίες επιχειρημάτων υπέρ της ενσωμάτωσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία τους και τα οφέλη που προσφέρει, έχουν εκφραστεί αρκετές ενστάσεις ως προς τη χρήση της, καθώς υπάρχουν δυσκολίες και εμπόδια που είναι πιθανό να παρουσιαστούν. Τα επιχειρήματα κατά της χρήσης της ιστορίας και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται, χωρίζονται κατά τους Tzanakis & Arcavi (2000) σε δυο ευρύτερες κατηγορίες: τις φιλοσοφικές ενστάσεις και τις πρακτικές πηγές δυσκολίας.

Αναφορικά με τις φιλοσοφικές πηγές δυσκολίας, οι ενστάσεις που διατυπώνονται είναι:

- Η ιστορία δεν είναι μαθηματικά και θα έπρεπε να διδάσκεται ξεχωριστά, πρώτα να διδαχτούν οι μαθητές ένα μαθηματικό θέμα και έπειτα την ιστορία του.
- Η ιστορία μπορεί να μπερδέψει και όχι να διαφωτίσει τους μαθητές.
- Οι μαθητές μπορεί να μη διαθέτουν ιστορικό υπόβαθρο, πράγμα που καθιστά αδύνατη την ενοποίηση των μαθηματικών με τη γενική ιστορία.
- Πολλοί μαθητές αντιπαθούν την ιστορία οπότε θα αντιπαθούν και την ιστορία των μαθηματικών βρίσκοντάς την βαρετή.

- Η πρόοδος των μαθηματικών συντελείται όταν αντιμετωπίζονται και ξεπερνώνται δύσκολα προβλήματα, οπότε ποιος ο λόγος να εξακολουθεί να ασχολείται κάποιος με αυτά;
- Η ιστορία είναι δυνατόν να προκαλέσει πολιτιστικό σοβινισμό και τοπικιστικό εθνικισμό.

Οι δυσκολίες πρακτικής φύσεως είναι:

- Έλλειψη χρόνου. Ο διδακτικός χρόνος είναι ήδη λιγοστός και η χρήση της ιστορίας τον περιορίζει περισσότερο.
- Έλλειψη πόρων. Δεν υπάρχει επαρκής όγκος υλικού με ιστορικές πληροφορίες ικανές να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς.
- Έλλειψη εμπειρογνωμοσύνης. Οι εκπαιδευτικοί (καθηγητές μαθηματικών) δεν έχουν λάβει την απαραίτητη επιμόρφωση ως προς την ιστορία άρα δεν διαθέτουν την απαιτούμενη ιστορική και διεπιστημονική γνώση κι αυτό τους οδηγεί σε έλλειψη αυτοπεποίθησης ενσωμάτωσης και διδασκαλίας της ιστορίας στο μάθημα των μαθηματικών.
- Έλλειψη αξιολόγησης. Συνήθως η ιστορία των μαθηματικών δεν αποτελεί συνιστώσα της αξιολόγησης των μαθητών και έτσι αυτοί δεν εκτιμούν την ιστορία και δεν της δίνουν την απαραίτητη προσοχή.

Στο έργο των Tzanakis & Arcavi (2000), για καθεμία από τις παραπάνω ενστάσεις που διατυπώθηκαν, αντιπαραβάλλονται τα αντίστοιχα επιχειρήματα και οι λόγοι χρήσης της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση, που προσπαθούν να καταρρίψουν καθεμία από αυτές.

2.4 Τρόποι Χρήσης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Σύμφωνα με τους Tzanakis και Archavi (2000) υπάρχουν τρεις διαφορετικοί, αλλά ακόμα συμπληρωματικοί, τρόποι ενσωμάτωσης της ιστορίας στη διδακτική των μαθηματικών.

1. Εκμάθηση ιστορίας με την παροχή άμεσων ιστορικών πληροφοριών.
   Στην κατηγορία αυτή περιλαμβάνονται μεμονωμένες πληροφορίες όπως ονόματα, βιογραφίες, διάσημα έργα και γεγονότα, διάσημα προβλήματα κλπ, καθώς επίσης και πλήρη μαθήματα ή βιβλία που αφορούν την ιστορία των μαθηματικών. Η έμφαση δίνεται περισσότερο στους ιστορικούς πόρους και όχι στην εκμάθηση

μαθηματικών οπότε δεν επιδρά άμεσα στη διδασκαλία τους αλλά επηρεάζει τη μαθησιακή εμπειρία.

2. Εκμάθηση μαθηματικών θεμάτων μέσω διδακτικής προσέγγισης βασισμένης στην ιστορία.

   Ο τρόπος αυτός μπορεί να χαρακτηριστεί ως γενετική προσέγγιση στη διδασκαλία και τη μάθηση και δεν είναι ούτε αυστηρά ιστορικός ούτε αυστηρά επαγωγικός. Σε μια τέτοια προσέγγιση δίνεται λιγότερη έμφαση στον τρόπο χρήσης θεωριών, εννοιών και μεθόδων και περισσότερη έμφαση σχετικά με το λόγο που παρέχουν απάντηση σε συγκεκριμένα μαθηματικά προβλήματα και ερωτήματα, χωρίς ωστόσο να αγνοείται ο «τεχνικός» ρόλος της μαθηματικής γνώσης.

3. Ανάπτυξη βαθύτερης επίγνωσης των μαθηματικών αλλά και των κοινωνικών και πολιτισμικών πλαισίων που τα περιέχουν.

   Επεξηγηματικά στην κατηγορία αυτή, που αφορά τη μαθηματική επίγνωση περιλαμβάνεται η εγγενής και η εξωγενής φύση των μαθηματικών. Η εγγενής φύση περιλαμβάνει εννοιολογικά πλαίσια, κίνητρα, ερωτήματα και προβλήματα που προκάλεσαν εξελίξεις, μορφή και περιεχόμενο της εξελισσόμενης φύσης των μαθηματικών, αμφιβολίες, δυσκολίες, παράδοξα, αντιφάσεις, ευρετικές αλλά και ερωτήσεις και προβλήματα χρήσιμα για γενίκευση. Η εξωγενής φύση των μαθηματικών, δείχνει τη σύνδεση και την επιρροή τους σχετικά με κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες. Για παράδειγμα, τα μαθηματικά είναι συνδεδεμένα με τη φιλοσοφία, τις τέχνες και τις ανθρωπιστικές επιστήμες και αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της εκάστοτε πολιτιστικής κληρονομιάς. Επίσης η ανάπτυξη των μαθηματικών επηρεάζεται από το κοινωνικοπολιτιστικό περιβάλλον και μάλιστα τα ρεύματα της μαθηματικής εκπαίδευσης ιστορικά αντικατοπτρίζουν τις τάσεις στον πολιτισμό και την κοινωνία.

Η ενσωμάτωση της Ιστορίας στη Μαθηματική εκπαίδευση περιλαμβάνει τη χρήση του αντίστοιχου υλικού με πηγές αναφοράς, το οποίο διαχωρίζεται σε:

- Υλικό πρωτογενούς πηγής δηλαδή αποσπάσματα από πρωτότυπα μαθηματικά έγγραφα.
- Δευτερογενές υλικό, το οποίο περιλαμβάνει αφηγήσεις ιστορίας από διδακτικά βιβλία, ερμηνείες, ανακατασκευές κλπ.

- Διδακτικό υλικό πηγής, δηλαδή τα αποσπάσματα πρωτογενών και δευτερογενών πηγών με μια συγκεκριμένη προσέγγιση εμπνευσμένη από την ιστορία και τα οποία περιλαμβάνουν επίδειξη, εκμάθηση, εξάσκηση κλπ.

Επίσης οι Tzanakis και Archavi (2000) προτείνουν διάφορους τρόπους εισαγωγής της Ιστορίας κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιγραμματικά η εισαγωγή αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με χρήση:

- Ιστορικών αποσπασμάτων
- Ερευνητικών εργασιών
- Πρωτογενών πηγών
- Φύλλων εργασίας
- Ιστορικών πακέτων
- Διαισθητικών επιχειρημάτων, εκμετάλλευσης λαθών και αλλαγή προοπτικής
- Ιστορικών προβλημάτων
- Μηχανικών οργάνων
- Βιωματικών μαθηματικών δραστηριοτήτων
- Παιχνιδιών
- Ταινιών και άλλων οπτικών μέσων
- Εξωτερικών δραστηριοτήτων
- Διαδικτύου

Με αφορμή την παραπάνω έρευνα των Tzanakis και Archavi (2000), ο Jankvist (2009) ταξινομεί τους τρόπους εισαγωγής της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία τους, σε τρεις κατηγορίες με βάση την εκάστοτε προσέγγιση. Η χρήση της ιστορίας σε καθεμία από αυτές μπορεί να κλιμακωθεί από μικρή έως μεγαλύτερη και περιεκτική. Οι κατηγορίες είναι:

1. Διαφωτιστικές προσεγγίσεις (illumination approaches), όπου τα βιβλία των μαθηματικών και η διδασκαλία τους συμπληρώνονται με μια ποικιλία ιστορικών πληροφοριών, όπως για παράδειγμα ιστορικά αποσπάσματα που περιλαμβάνουν ονόματα, βιογραφίες, διάσημα έργα και γεγονότα, διάσημα προβλήματα, όπως είδαμε παραπάνω).
2. Προσεγγίσεις σε σχέση με οριοθετημένες ενότητες (modules approaches), δηλαδή συνήθως ενότητες που είναι αφιερωμένες στην ιστορία των

μαθηματικών και μελετούν συγκεκριμένες περιπτώσεις. Παράδειγμα αποτελούν τα προαναφερόμενα ιστορικά πακέτα που μπορούν να μελετηθούν με τη βοήθεια σχολικών εγχειριδίων, πρωτότυπων πηγών ή εργασίες μαθητών).

3. Προσεγγίσεις που βασίζονται στην ιστορία (history-based approaches), οι οποίες επικεντρώνονται στην ανάπτυξη και εξέλιξη των μαθηματικών μέσα από την ιστορία τους. Στις προσεγγίσεις αυτές μελετάται συνήθως έμμεσα η ιστορία των μαθηματικών και η ιστορική εξέλιξη δεν συζητείται ανοικτά και αναλυτικά, καθορίζει όμως τον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών θεμάτων. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η γενετική προσέγγιση που έχει αναφερθεί παραπάνω.

Παρουσιάσαμε λοιπόν, πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις και τρόπους εισαγωγής της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών όμως ο τρόπος και ο βαθμός ένταξής της αλλά και η φύση του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί, γίνεται με βασικό κριτήριο το σκοπό της εκάστοτε διδασκαλίας (Jankvist 2009). Δηλαδή καθώς οι εκπαιδευτικοί στόχοι διαφέρουν ανά βαθμίδα, χρησιμοποιούνται σε καθεμία από αυτές οι αντίστοιχες προσεγγίσεις που κρίνονται βοηθητικές για την επίτευξη των σκοπών των προγραμμάτων σπουδών.

2.5 Θετικά Χρήσης Ιστορικών Προβλημάτων στη Μαθηματική Εκπαίδευση

Όπως αναφέρεται από τον Tünde Kántor στα Πρακτικά του 15ου συνεδρίου ProMath που πραγματοποιήθηκε στο στο Ege το 2013 και είχε θέμα την επίλυση προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση, τα πλεονεκτήματα της χρήσης ιστορικών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι:

- Η ανάδειξη της συνέχειας και της συνοχής των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών κατά τους περασμένους αιώνες.
- Η ύπαρξη κινήτρου για τους μαθητές μέσω των προβλημάτων που ήταν αντικείμενο έρευνας πριν από αιώνες, επιτρέποντάς τους να αγγίξουν το μακρινό και πρόσφατο παρελθόν.
- Η σύνδεση των μαθηματικών με διάφορους πολιτισμούς και άλλες πνευματικές εξελίξεις στην επιστήμη.
- Η παραγωγή διδαγμάτων από τα μαθηματικά λάθη και τα άλυτα προβλήματα του παρελθόντος.

- Η ενθάρρυνση μαθητών με χρήση βιογραφιών στα μαθήματα των μαθηματικών, καθώς οι ιστορίες ζωής διάσημων μαθηματικών γεμίζουν με ενθουσιασμό και θετικά συναισθήματα τους ταλαντούχους μαθητές κάνοντάς τους να πιστεύουν ότι θα μπορούσαν και οι ίδιοι να λύσουν προβλήματα που έθεσαν διάσημοι μαθηματικοί στα νιάτα τους.

Ο Swetz (2007) σε ομιλία του σε συνέδριο της ένωσης Ιστορίας και Επιστημολογίας για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (History and Epistemology in Mathematics Education) που έγινε στην Πράγα, τόνισε πως η χρήση των πραγματικών ιστορικών προβλημάτων δε βοηθά μόνο στην επίδειξη στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και την ενίσχυση των μαθηματικών δεξιοτήτων αλλά και μεταδίδει την αίσθηση της συνέχειας των μαθηματικών ανησυχιών ανά τους αιώνες αφού το ίδιο πρόβλημα ή είδος προβλήματος συχνά βρίσκεται σε διαφορετικές κοινωνίες και χρονικές περιόδους και μπορεί να εκτιμηθεί ανάλογα. Επίσης απεικονίζει την εξέλιξη και σύγκριση των διαδικασιών λύσης αλλά και παρέχει ιστορικές και πολιτιστικές γνώσεις ως προς τους εμπλεκόμενους λαούς και τις αντίστοιχες εποχές.

Ο T. Kántor (2013) προτείνει 3 στάδια επίλυσης προβλημάτων με χρήση της ιστορίας:

1. Ενθάρρυνση ανεξάρτητης έρευνας
2. Επίδειξη προσεγγίσεων για την επίλυση προβλημάτων
3. Συζήτηση λύσεων διάσημων ιστορικών προβλημάτων των περασμένων αιώνων.

3. Ιστορικά Προβλήματα

3.1 Εισαγωγή

Η Ιστορία των Μαθηματικών αποτελεί μια χρήσιμη πηγή εύρεσης προβλημάτων για χρήση στις σχολικές εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Σύμφωνα με τον Swetz (2007) τα γραπτά αρχεία της μαθηματικής διδασκαλίας από αρχαιοτάτων χρόνων, σχεδόν πάντοτε περιείχαν προβλήματα προς λύση από τους αναγνώστες. Διασωθέντα αρχεία παλαιών πολιτισμών (Βαβυλωνία, Αίγυπτος, Κίνα) αποκαλύπτουν πως η διδασκαλία των μαθηματικών ήταν άρρηκτα συνδεδεμένη με την επίλυση προβλημάτων και στα πρώιμα στάδια εκμάθησης οι μαθηματικές οδηγίες (εκτέλεση των μαθηματικών) αφορούσαν την επίλυση προβλημάτων. Τέτοιου είδους προβλήματα αποτέλεσαν πρωταρχική πηγή διδασκαλίας και επιλέχθηκαν με προσοχή από τους εκάστοτε συγγραφείς ώστε να είναι χρήσιμα και να αναδείξουν την τέχνη των μαθηματικών. Επίσης η χρησιμότητα των προβλημάτων αυτών βασιζόταν στις άμεσες ανάγκες των αρχαίων κοινωνιών, οπότε αντικατοπτρίζει και τις πτυχές της καθημερινής τους ζωής. Αργότερα, οι Έλληνες ήταν αυτοί που πρώτοι εφάρμοσαν αρχές και τεχνικές απόδειξης και γενίκευσης στα μαθηματικά και στα προβλήματα. Οι συλλογές προβλημάτων δεν περιορίζονται μόνο στις αρχαίες κοινωνίες αλλά εμφανίζονται τακτικά σε όλη την ιστορία των μαθηματικών. Στη βιβλιογραφία των μαθηματικών λοιπόν, έχουν συγκεντρωθεί χιλιάδες προβλήματα και αποτελούν δεξαμενή για να αντληθούν ασκήσεις και εργασίες για τη σχολική τάξη. Παρακάτω θα παρουσιαστούν μερικά από αυτά καθώς και διάφοροι τρόποι επίλυσής τους με εστίαση στα προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις 1ου βαθμού και απλές αριθμητικές μεθόδους (όπως πχ μέθοδο των τριών, πράξεις με κλάσματα κ.α.).

3.2 Πηγές Ιστορικών Προβλημάτων Διαφορετικών Πολιτισμών

Κάποιες σημαντικές και βασικές πηγές ιστορικών προβλημάτων ανά διαφορετικούς πολιτισμούς και χρονολογίες όπως παρατίθενται στο έργο του Swetz (1994) και του εγχειριδίου της Μαθηματικής Ένωσης Αμερικής (2004) είναι:

Οι Βαβυλωνιακές Πινακίδες - Βαβυλώνα (2000-1000 π.Χ.): Έχουν ανακαλυφθεί χιλιάδες Βαβυλωνιακές πήλινες πλάκες (πινακίδες), οι περισσότερες στις τοποθεσίες των αρχαίων πόλεων Nippur και Susa και πλέον διασώζονται σε μουσεία και βιβλιοθήκες

Πανεπιστημίων ανά τον κόσμο. Περίπου 400 από αυτές είναι γνωστό ότι περιέχουν μαθηματικό υλικό, αλλά λίγες έχουν αποκρυπτογραφηθεί μέχρι σήμερα. Οι πινακίδες αυτές, μέσω και των προβλημάτων που παρουσιάζονται, αναδεικνύουν την επιδεξιότητα των Βαβυλωνίων στις αλγοριθμικές διαδικασίες.

Πάπυρος Rhind - Αίγυπτος (1650 π.Χ.): Ο πάπυρος του Rhind είναι το μεγαλύτερο καλά διατηρημένο έργο των αρχαίων αιγυπτιακών μαθηματικών. Πήρε το όνομά του από τον A. Henry Rhind, έναν Σκωτσέζο λόγιο και αρχαιοκάπηλο που τον αγόρασε από κατάστημα στο Luxor της Αιγύπτου το 1858. Το Βρετανικό μουσείο απέκτησε τον πάπυρο μετά το θάνατο του Rhind και τον φυλάσσει μέχρι σήμερα. Ο πάπυρος Rhind είναι επίσης γνωστός ως πάπυρος Ahmes ή A'h-mose από τον συγγραφέα που τον έγραψε. Είναι γραμμένος σε ιερατική γραφή – μια μορφή αιγυπτιακής γραφής που χρησιμοποιείται σε παπύρους και διαφέρει από το εικονικό ιερογλυφικό σύστημα που χρησιμοποιείται για γραφή σε τοίχους ναών ή σκάλισμα σε κίονες. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται, είναι συχνά συμβατικές εικόνες των πραγμάτων που αντιπροσωπεύουν. Ο πάπυρος αυτός ξεκινά με μια εισαγωγή και ακολουθούν 85 αριθμητικά, γεωμετρικά και διάφορα άλλα προβλήματα με τις λύσεις τους. Ο πάπυρος Rhind δεν περιέχει θεωρητικά αποτελέσματα καθώς τα προβλήματα αντικατοπτρίζουν τις ανάγκες μιας αγροτικής κοινωνίας και ειδικότερα, στην ενότητα "Διάφορα" παρέχονται πληροφορίες για τα αιγυπτιακά έθιμα και τις μεθόδους εμπορίας, φορολογίας, διατροφής των ζώων και καθορισμού συγκριτικών αξιών διαφορετικών αγαθών και ποτών με βάση την ποσότητα που μπορεί να παραχθεί από μια μονάδα υλικού. Η γραφή στον πάπυρο ολοκληρώνεται με την προσευχή ενός αγρότη στον θεό Ρα για ζέστη, άνεμο και νερό και την απαλλαγή του από επιβλαβή ζιζάνια και παράσιτα.

Ο Πάπυρος της Μόσχας – Αίγυπτος (1650 π.Χ.): Είναι μια συλλογή από 25 προβλήματα που αφορούν κυρίως την πρακτική ζωή, παρόμοια με τα προβλήματα στον πάπυρο Rhind. Ο Πάπυρος της Μόσχας είναι επίσης γνωστός ως Πάπυρος Golenischev από τον άνθρωπο που τον αγόρασε το 1893 στην Αίγυπτο. Ο πάπυρος αυτός βρίσκεται τώρα στο Μουσείο Καλών Τεχνών της Μόσχας.

Πάπυρος Καΐρου – Αίγυπτος (250 π.Χ.): Είναι μια συλλογή 40 προβλημάτων, 9 από τα οποία αφορούν ορθογώνια τρίγωνα. Ανακαλύφθηκε το 1983 και μεταφράστηκε - αποκρυπτογραφήθηκε το 1962.

The Jiuzhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Arts) - Κίνα (100 π.Χ.): Είναι μια συλλογή που αποτελείται από 246 προβλήματα και τις λύσεις τους. Χωρίζεται σε εννέα κεφάλαια όπου το καθένα από αυτά εστιάζει σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή καθώς όλα τα προβλήματα που περιέχονται σχετίζονται με τις γραφειοκρατικές ανάγκες της κινεζικής αυτοκρατορίας.

Ελληνική (Παλατινή) Ανθολογία - Ελλάδα (500 μ.Χ.): Είναι μια συλλογή 46 αριθμητικών προβλημάτων που συγκεντρώθηκαν από τον Μητρόδωρο και πιστεύεται ότι κάποια από αυτά μπορεί να μην επινοήθηκαν από τον ίδιο αλλά να διατυπώθηκαν παλαιότερα. Τα προβλήματα αυτά τίθενται σε μια πνευματώδη ή αινιγματική μορφή. Αποτελούν τμήμα της Παλατινής Ανθολογίας, η οποία είναι μια συλλογή 15 βιβλίων σύντομων ποιημάτων ποικίλης θεματολογίας της ύστερης αρχαιότητας γραμμένα από διάφορους συγγραφείς. Η Ανθολογία αυτή ονομάστηκε Παλατινή καθώς το χειρόγραφό της βρέθηκε στην Παλατινή Βιβλιοθήκη της Χαϊδεμβέργης το 1606.

Propositiones ad Acuendos Juvenes– Ευρώπη (800 μ.Χ.) (Αγγλικά: Propositions for Sharpening the Wits of the Young): Πρόκειται για ένα μεσαιωνικό λατινικό χειρόγραφο που είναι μια συλλογή από 53 προβλήματα και γρίφους που συνέταξε ο μοναχός Alcuin της Υόρκης.

Η Άλγεβρα του al Khwarizmi (820 μ.Χ.) – Ισλαμικός (Αραβικός) κόσμος: Πρόκειται για ένα βιβλίο Άλγεβρας που έγραψε ο Muḥammed Musa al Khwarizmi με τίτλο "Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr w'al'muqabalah " στο οποίο συνδυάζεται η μαθηματική γνώση των Ελλήνων και οι απλές εξισώσεις των Ινδών. Κατά την επίλυση απλών πολυωνυμικών εξισώσεων στο βιβλίο αυτό εισήχθησαν και χρησιμοποιούνταν οι διαδικασίες της «εξισορρόπησης» και της «αποκατάστασης» (που πρακτικά αφορούν τη μεταφορά αφαιρούμενων όρων στο άλλο μέλος της εξίσωσης και την απαλοιφή όμοιων όρων στα διαφορετικά της μέλη). Στα αραβικά al-jabr, από όπου πήρε το όνομά της η Άλγεβρα, σημαίνει αποκατάσταση. Όταν το βιβλίο αυτό έφτασε στην Ευρώπη, μεταφράστηκε στα λατινικά και έγινε το πρώτο βιβλίο Άλγεβρας που χρησιμοποιήθηκε. Το έργο αυτό αποτελεί ορόσημο καθώς δεν περιείχε μόνο αλγορίθμους για την επίλυση εξισώσεων αλλά περιείχε επίσης υλικό για τη βασική Γεωμετρία και ένα πολύ μεγάλο τμήμα αφιερωμένο σε προβλήματα που σχετίζονταν κυρίως με το ισλαμικό κληρονομικό δίκαιο.

Lilavati - Ινδία (1150 μ.Χ.): Είναι έργο που γράφτηκε από τον μαθηματικό-αστρονόμο Bhaskara II και πήρε το όνομα της κόρης του. Το Lilavati αποτελεί μια περίληψη 500 χρόνων ινδουιστικής μαθηματικής παράδοσης και περιέχει δεκατρείς ενότητες για την αριθμητική, τη γεωμετρία και την άλγεβρα. Ο Bhaskara χρησιμοποιούσε συμβολική σημειογραφία στα ρητορικά του προβλήματα αναπαριστώντας τις αρνητικές ποσότητες με μια κουκκίδα πάνω από θετικές ποσότητες και τις άγνωστες ποσότητες με τις αρχικές συλλαβές της εκάστοτε λέξης.

Liber Abaci - Ιταλία (1200 μ.Χ.): Βιβλίο που είναι γραμμένο από τον Ιταλό μαθηματικό Leonardo of Pisa, επίσης γνωστό ως Fibonacci (ο γιος του Bonaccio) και αποτελείται από 15 κεφάλαια που παρουσιάζουν τεχνικές της αριθμητικής και της απλής άλγεβρας. Το έργο αυτό άσκησε μεγάλη επιρροή στα Ευρωπαϊκά μαθηματικά αφού περιείχε μια μεγάλη συλλογή προβλημάτων που αντιγράφηκαν από αυτό και επαναχρησιμοποιήθηκαν για αιώνες.

Η Αριθμητική του Τρεβίζο – Ιταλία (1478 μ.Χ.): Είναι ένα ιταλικό βιβλίο που λέγεται ότι αποτελεί την παλαιότερη γνωστή έντυπη αριθμητική. Δεν έχει τίτλο και ο συγγραφέας του είναι άγνωστος, αλλά πήρε το όνομά του από την πόλη της Βόρειας Ιταλίας στην οποία εκδόθηκε. Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο στην κοινή βενετική διάλεκτο, και ήταν χρήσιμο για οποιονδήποτε ήθελε να μάθει για την τέχνη του υπολογισμού, όχι μόνο για τους μαθηματικούς, τους πλούσιους ή τους ερευνητές. Αν και η χρήση του άβακα και των ρωμαϊκών αριθμών ήταν ακόμα στη μόδα, στην αριθμητική του Treviso χρησιμοποιήθηκε το ινδο-αραβικό αριθμητικό σύστημα και οι υπολογιστικοί αλγόριθμοι. Περιέχει προβλήματα αριθμητικής που αφορούν κυρίως το εμπόριο (προβλήματα συνεργασιών - συνεταιρισμών, προβλήματα εκπτώσεων, προβλήματα χρηματικών συναλλαγών).

The New Normal Mental Arithmetic - Αμερική (1873 μ.Χ.): Γράφτηκε από τον Edward Brooks, καθηγητή μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Πενσυλβάνια και περιλαμβάνει παρουσίαση αριθμητικών μεθόδων και συλλογή από προβλήματα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις σχολικές τάξεις. Το βιβλίο αυτό χρησιμοποιήθηκε ευρέως για διδακτικούς σκοπούς το δεύτερο μισό του 19ου αιώνα στην Πενσυλβάνια και το Μέριλαντ των Η.Π.Α. Περιέχει κυρίως γεωργικά και κτηνοτροφικά προβλήματα με επιρροές από την τοπική αγροτική φύση.

A Treatise of Arithmetic - Αγγλία (1880 μ.Χ.): Αποτελεί παράδειγμα τυπικού βρετανικού κειμένου της εποχής, γραμμένο από τον J. Hamblin Smith και περιλαμβάνει αριθμητικές μεθόδους και πρακτική εφαρμογή τους μέσω προβλημάτων που αφορούν χρήματα και μετρήσεις. Τα προβλήματα αυτά παρέχουν και ιστορικές πληροφορίες που αφορούν τη Βικτωριανή εποχή.

Σημειώνουμε πως υπάρχει πληθώρα μαθηματικών προβλημάτων που συναντώνται σε διάφορα ιστορικά γραπτά της εκάστοτε εποχής (κυρίως Ευρωπαϊκά), δεν έχουν εκδοθεί ομαδοποιημένα και οι συγγραφείς τους είναι συνήθως άγνωστοι. Τα προβλήματα αυτά αφορούν κυρίως το εμπόριο και τις συναλλαγές και μας δίνουν μια εικόνα για το πως λειτουργούσε ο επιχειρηματικός κόσμος της αντίστοιχης εποχής.

3.3 Ιστορικές Μέθοδοι Επίλυσης Αριθμητικών Προβλημάτων

Προτού παρουσιάσουμε ενδεικτικά κάποια απλά Ιστορικά Προβλήματα αριθμητικής και τις μεθόδους επίλυσής τους, είναι χρήσιμο να αναφερθούμε συνοπτικά σε κάποιες από τις μεθόδους αυτές μέσα στο ιστορικό πλαίσιο χρήσης τους, ώστε να αναδειχθεί και η εφαρμογή τους στα προβλήματα παρακάτω.

3.3.1 Αναλογίες - Κανόνας των τριών

Η Μέθοδος (Κανόνας) των Τριών είναι μία απλή αναλογία, που από τρεις δοθείσες ποσότητες ζητείται να βρεθεί η τέταρτη. Σχεδόν όλοι οι πολιτισμοί που χρησιμοποιούσαν μαθηματικά είχαν μια διαδικασία επίλυσης αναλογιών. Προβλήματα που επιλύονται με την (απλή) μέθοδο των τριών με ανάλογα ή αντιστρόφως ανάλογα ποσά, θεωρούνται βασικά και συναντώνται στα σχολικά βιβλία των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού και των πρώτων τάξεων του Γυμνασίου.
Μια αφηρημένη διατύπωση του κανόνα με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό είναι: «ο Α είναι στο Β ότι ο Γ στο Χ» που μπορεί να εκφραστεί ως αναλογία $Α/Β=Γ/Χ$ και να επιλυθεί ως προς Χ: $Α•Χ=Β•Γ$ ή $Χ=(Β•Γ)/Α$.
Η κινεζική εκδοχή του Κανόνα των Τριών, που ονομάζεται jin you, παρουσιάστηκε στο δεύτερο κεφάλαιο του *Jiuzhang Suanshu (Nine Chapters on the Mathematical Arts)*, που γράφτηκε πριν από περίπου 2000 χρόνια. Ο κανόνας χρησιμοποιήθηκε αρχικά για τον προσδιορισμό της συναλλαγματικής ισοτιμίας μεταξύ διαφορετικών τύπων σιτηρών και περιγράφεται ως εξής: «Πολλαπλασιάστε τη δοσμένη ποσότητα (Β) (suo you shu) με την

αντίστοιχη τιμή της ζητούμενης ποσότητας (Γ) (sho giu lii). Αυτό το γινόμενο είναι ο διαιρετέος. Έπειτα η τιμή της δοσμένης ποσότητας (Α) (suo you lii) είναι ο διαιρέτης. Διαιρέστε τον διαιρετέο με τον διαιρέτη». Έτσι προκύπτει το ζητούμενο Χ=(Β•Γ)/Α .

Παρόμοιο τρόπο επίλυσης προβλημάτων με αναλογίες χρησιμοποιούσαν και οι Αιγύπτιοι όπως φαίνεται στον πάπυρο του Rhind αλλά και οι Ινδοί όπως αναδεικνύεται στο *Lilavati* του Bhaskara. Για τους Έλληνες μαθηματικούς, τα προβλήματα αναλογίας είχαν γεωμετρικό χαρακτήρα. Οι Έλληνες έμποροι όμως, έλυναν κλασσικά προβλήματα αναλογίας με τον παραπάνω τρόπο.

Ο κανόνας των τριών παρουσιάζεται επίσης στην Αριθμητική του Τρεβίζο και δίνεται ως εξής: «Ο κανόνας που πρέπει τώρα να μελετήσετε (είναι ο)…κανόνας τριών πραγμάτων.. Είναι αυτό: ότι πρέπει να πολλαπλασιάσετε το πράγμα που θέλετε να μάθετε με αυτό που δεν είναι σαν αυτό, και να διαιρέστε με το άλλο…».

3.3.2 Μέθοδος της Ψευδούς Παραδοχής - Method of False Position

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν τη Μέθοδο της (Μονής) Ψευδούς Παραδοχής για να λύσουν γραμμικές εξισώσεις, όπως φαίνεται στους Παπύρους του Rhind και της Μόσχας. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι μάντευαν μια βολική μεν, αλλά συνήθως λάθος απάντηση και στη συνέχεια την προσάρμοζαν για να πάρουν το σωστό αποτέλεσμα. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιήθηκε στην Ευρώπη και συγκεκριμένα στην Ιταλία στις αρχές του 14ου αιώνα ενώ εμφανίστηκε σε αγγλικά και αμερικανικά εγχειρίδια μαθηματικών περίπου το 1780. Για παράδειγμα στο εγχειρίδιο «The Scholar's Guide to Arithmetic», ο John Bonnycastle (Λονδίνο, 1780) περιγράφει τη μέθοδο ως εξής: «Η απλή παραδοχή διδάσκει την επίλυση των ερωτήσεων των οποίων τα αποτελέσματα είναι ανάλογα με τις υποθέσεις. Κανόνας: 1. Πάρτε οποιονδήποτε αριθμό και εκτελέστε με αυτόν τις ίδιες πράξεις που περιγράφονται στην ερώτηση. 2. Στη συνέχεια, πείτε, όπως είναι το αποτέλεσμα της πράξης σε σχέση με την υπόθεση, έτσι είναι και το αποτέλεσμα στην ερώτηση για τον απαιτούμενο αριθμό».

Η εφαρμογή της μεθόδου αυτής κατά την επίλυση γραμμικών εξισώσεων φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Για να λύσουμε την εξίσωση: x+1/8 x=45 θεωρούμε (ψευδής παραδοχή) ότι x=8. Τότε έχουμε 8+1/8 8=9 που δεν συνάδει με το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (το 45). Οπότε αναζητούμε έναν αριθμό που αν πολλαπλασιαστεί με το 9 που βρήκαμε, να δώσει 45. Ο αριθμός αυτός είναι το 5 οπότε η ζητούμενη λύση της εξίσωσης είναι 8•5=40 δηλαδή x=40.

3.3.3 Μέθοδος της Διπλής Ψευδούς Παραδοχής - Method of Double False Position (Method of Deficiency and Surplus)

Οι αρχαίοι Κινέζοι μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν τον κανόνα της διπλής ψευδούς παραδοχής, που είναι επίσης γνωστός ως Μέθοδος Έλλειψης και Πλεονάσματος, για την επίλυση απλών γραμμικών εξισώσεων με μία μεταβλητή αλλά και συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων. Είναι παρόμοιος με την Αιγυπτιακή Μέθοδο της Ψευδούς Παραδοχής, με τη διαφορά ότι γίνονται δύο υποθέσεις για την εύρεση του ζητούμενου. Ο κανόνας αυτός περιγράφεται στο 7^{ο} κεφάλαιο του *Jiuzhang Suanshu (Εννέα Κεφάλαια για τη Μαθηματική Τέχνη)* το οποίο έχει τίτλο Ying bu zu (Υπερβολή και έλλειψη) και περιέχει 19 προβλήματα, τα περισσότερα από τα οποία μπορούν να λυθούν εύκολα σήμερα και με άλλες μεθόδους. Επίσης ο κανόνας της διπλής ψευδούς παραδοχής εμφανίστηκε αργότερα στον ισλαμικό κόσμο, όπου ήταν γνωστός ως hisab al-Chata'ayn (ο κανόνας των δύο λαθών). Στη συνέχεια μεταδόθηκε και στην Ευρώπη. Ήταν δημοφιλής κυρίως πριν από το 1600, που η λύση ακόμα και των πιο απλών γραμμικών εξισώσεων ήταν δύσκολη λόγω της έλλειψης κατάλληλης σημειογραφίας και συμβολισμών. Ο τρόπος χρήσης του κανόνα της διπλής ψευδούς παραδοχής για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων περιγράφεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Για να λύσουμε την εξίσωση: 11x=4 ,

- Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή 11x-4=0
- Θεωρούμε δυο τιμές για το x. Έστω x=a=1 και x=b=2.
- Υπολογίζουμε για καθεμία από αυτές το 11x-4 και ονομάζουμε τα αποτελέσματα
  Για x=a=1 έχουμε: 11•1-4=7 και θεωρούμε A=7
  Για x=b=2 έχουμε: 11•2-4=18 και θεωρούμε B=18
- Πολλαπλασιάζουμε καθένα από τα αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω με τις μη-αντίστοιχες τιμές που υποθέσαμε δηλαδή A•b και B•a και τα αφαιρούμε (από το μεγαλύτερο αφαιρούμε το μικρότερο)
  A•b =7•2=14 και B•a =18•1=18, B•a - A•b =18-14=4
- Αφαιρούμε τα A, B με τη σειρά που χρησιμοποιήσαμε στο παραπάνω βήμα
  B-A=18-7=11
- Διαιρούμε τις διαφορές των γινομένων με τις διαφορές των αποτελεσμάτων και παίρνουμε το x
  $x=\frac{4}{11}$

3.3.4 Ισλαμική Μέθοδος Επίλυσης εξισώσεων Al-jabr και Al-muqabala

Η τυπική μέθοδος επίλυσης γραμμικών εξισώσεων που διδάσκεται στα σχολεία παγκοσμίως προέρχεται από το έργο του Muḥammed Musa al Khwarizmi ο οποίος εισήγαγε και χρησιμοποίησε τις τεχνικές του al-jabr και του al-muqabala για να μετασχηματίσει τις γραμμικές εξισώσεις στην τυπική μορφή που ονόμασε «ρίζες ίσες με αριθμούς», ονομάζοντας τον άγνωστο ως «ρίζα». Ο Al-Khwarizmi δεν χρησιμοποίησε σύμβολα αλλά περιέγραψε με λέξεις κάθε διαδικασία. Για παράδειγμα η εξίσωση $4x = 20$ περιγράφηκε ως «τέσσερις ρίζες είναι ίσες με είκοσι». Με σύγχρονο συμβολισμό, γράφουμε εξισώσεις του τύπου «ρίζες ίσες με αριθμούς» με τη μορφή $ax = b$ και στη συνέχεια τις λύνουμε διαιρώντας κατά μέλη με το a και προκύπτει η λύση (ρίζα) $x = b/a$. Οι πολυπλοκότερες γραμμικές εξισώσεις ανάγονται στη μορφή αυτή χρησιμοποιώντας κάποιες βασικές τεχνικες.

Για παράδειγμα για να αναχθεί η εξίσωση $7x + 4 = 11x – 16$ στη μορφή $ax = b$ και να επιλυθεί χρησιμοποιούνται οι τεχνικές *Al-jabr* και *Al-muqabala*.

Al-jabr σημαίνει «αποκατάσταση» δηλαδή μεταφορά μιας αφαιρούμενης ποσότητας στην άλλη πλευρά της εξίσωσης όπου γίνεται προστιθέμενη ποσότητα. Έτσι χρησιμοποιούμε το al-jabr για να μετατρέψουμε το $7x + 4 = 11x − 16$ σε $7x+4+16=11x$ δηλαδή $7x + 20 = 11x$.

Η έννοια *Al-muqabala* αναφέρεται στη μείωση ενός θετικού όρου αφαιρώντας ίσα ποσά και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης. Επομένως χρησιμοποιούμε το al-muqabala για να μετατρέψουμε το $7x + 20 = 11x$ σε $7x − 7x + 20 = 11x − 7x$ δηλαδή $20 = 4x$. Οπότε προκύπτει η τυπική μορφή $ax = b$ και διαιρώντας κατά μέλη με 4, έχουμε ότι $x=5$.

3.3.5 Συνεισφορά του L. Euler στην Επίλυση Προβλημάτων με Χρήση Γραμμικών Εξισώσεων

Όπως είδαμε παραπάνω, η μέθοδος επίλυσης εξισώσεων που χρησιμοποιούμε στα σύγχρονα μαθηματικά προέρχεται από το έργο του Al-Khwarizmi, ο οποίος όμως δεν χρησιμοποιούσε σύμβολα αλλά έκανε λεκτική περιγραφή. Το έργο του διάσημου μαθηματικού Leonhard Euler (1707- 1783) συνέβαλλε στη θεμελίωση της Άλγεβρας και στη διαμόρφωση της σημερινής μορφής της. Στο βιβλίο του, *«Στοιχεία Άλγεβρας» (Vollständige Anleitung zur Algebra)* που γράφτηκε το 1765 στα Γερμανικά και έπειτα μεταφράστηκε και στα Αγγλικά (*Elements of Algebra)*, ο Euler μεταξύ άλλων παρουσιάζει τους βασικούς κανόνες για την επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού (γραμμικές εξισώσεις) χρησιμοποιώντας συμβολισμούς. Στο κεφάλαιο αυτό επίσης ο Euler περιέγραψε με προσοχή τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων μετατρέποντάς τα σε εξισώσεις. Συγκεκριμένα αναφέρει: «*Στην Άλγεβρα, όταν έχουμε μια ερώτηση να επιλύσουμε, συμβολίζουμε τον αριθμό που αναζητείται με ένα από τα τελευταία γράμματα του αλφαβήτου και στη συνέχεια, εξετάζουμε με ποιον τρόπο οι δεδομένες συνθήκες μπορούν να σχηματίσουν ισότητα μεταξύ δύο μεγεθών. Αυτή η ισότητα αντιπροσωπεύεται με ένα είδος τύπου, που ονομάζεται εξίσωση, η οποία μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε τελικά την τιμή του αριθμού που αναζητούμε και κατά συνέπεια να επιλύσουμε την ερώτηση. Μερικές φορές αναζητούνται αρκετοί αριθμοί αλλά βρίσκονται με τον ίδιο τρόπο σχηματίζοντας εξισώσεις*». Επίσης ο Euler τόνισε τον προφανή αλλά σημαντικό χαρακτήρα της προσεκτικής εξέτασης των συνθηκών του προβλήματος προκειμένου να σχηματιστεί από αυτές η εξίσωση που θα εκφράζει συμβολικά τους αριθμούς που ζητούνται (άγνωστοι). Μετά από τη διαδικασία αυτή, όλη η τέχνη συνίσταται στην επίλυση αυτών των εξισώσεων και την εύρεση των τιμών των άγνωστων αριθμών. Για τη διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων ο Euler εξηγεί πως μια εξίσωση αποτελείται από δύο μέρη που χωρίζονται με το σήμα της ισότητας, =. Για να δείξουμε ότι τα μέρη αυτά είναι ίσα το ένα στο άλλο, είμαστε συχνά υποχρεωμένοι να κάνουμε μεγάλο αριθμό μετασχηματισμών σε αυτά τα δύο μέρη, προκειμένου να συναγάγουμε από αυτά την τιμή της άγνωστης ποσότητας. Αλλά όλοι αυτοί οι μετασχηματισμοί πρέπει να βασίζονται στις ακόλουθες αρχές. Δηλαδή, ότι δύο ίσες ποσότητες παραμένουν ίσες:

Είτε προσθέτουμε σε αυτές είτε αφαιρούμε από αυτές, ίσες ποσότητες.

Είτε τις πολλαπλασιάσουμε είτε τις διαιρούμε με τον ίδιο αριθμό.

Είτε τις υψώσουμε και τις δύο στην ίδια δύναμη

Είτε εξάγουμε τις ρίζες τους στον ίδιο βαθμό.

Ή τέλος, αν πάρουμε τους λογάριθμους αυτών των μεγεθών.

Οι εξισώσεις που επιλύονται πιο εύκολα είναι εκείνες στις οποίες η άγνωστη ποσότητα δεν υπερβαίνει την πρώτη δύναμη, αφού οι όροι της εξίσωσης έχουν τοποθετηθεί σωστά και αυτές ονομάζονται απλές εξισώσεις, ή εξισώσεις πρώτου βαθμού. (Euler, 1984, σελ. 187-189).

3.4 Ιστορικά Προβλήματα

3.4.1 Πρόβλημα Βάρους Βαβυλωνιακής Πινακίδας YBC 4652 (2000-1000 π.Χ.)

Βρήκα μια πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Αφού πρόσθεσα το 1/7 του βάρους της και μετά το 1/11 του καινούριου βάρους, ζύγιζε 1 mina. Πόσο ήταν το αρχικό βάρος της πέτρας; (Mina είναι μια αρχαία μονάδα βάρους που χρησιμοποιούσαν οι Βαβυλώνιοι και οι Σουμέριοι. Επίσης ήταν και νομισματική μονάδα. Ισχύει ότι 1mina=60 shekels).

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το βιβλίο *Learning Activities from the History of Mathematics* (Swetz,1993)

- Επίλυση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ το αρχικό βάρος της πέτρας. Για ευκολία χρησιμοποιούμε τη μετατροπή 1mina=60 shekels. Τότε:

$$\chi + \frac{\chi}{7} + \frac{1}{11}\left(\chi + \frac{\chi}{7}\right) = 60$$

$$77\chi + 11\chi + 7\chi + \chi = 4620$$

$$96\chi = 4620$$

$$\chi = \frac{4620}{96} = \frac{385}{8} = 48\frac{1}{8}$$

$$\chi = 48{,}125$$

Η πέτρα ζύγιζε αρχικά $48\frac{1}{8}$ shekels δηλαδή 48,125 shekels.

- Η επίλυση της εξίσωσης με τη μέθοδο της ψευδούς παραδοχής

$$\chi + \frac{\chi}{7} + \frac{1}{11}\left(\chi + \frac{\chi}{7}\right) = 60$$

Θέτοντας y= $\chi + \frac{\chi}{7}$ μετασχηματίζουμε την εξίσωση ως εξής: $y + \frac{1}{11}y = 60$. Υποθέτουμε ότι y=11. Τότε έχουμε $11 + \frac{1}{11} \cdot 11$ =12. Το 2ο μέλος της εξίσωσης είναι 60 και αφού 12· 5=60 θα είναι y=11· 5=55.

Κι αφού y= $\chi + \frac{\chi}{7}$,λύνουμε την εξίσωση: $\chi + \frac{\chi}{7} = 55$. Έστω ότι χ=7 άρα $7 + \frac{7}{7} = 8$. Όμως το 2ο μέλος της εξίσωσης είναι 55 και $8 \cdot \frac{55}{8} = 55$, άρα $\chi = 7 \cdot \frac{55}{8} = \frac{385}{8} = 48\frac{1}{8}$

3.4.2 Πρόβλημα 76 του Αιγυπτιακού Παπύρου του Rhind (1650 π.Χ.)

1000 καρβέλια που έχουν pesu 10 πρόκειται να ανταλλαγούν με έναν αριθμό καρβελιών που έχουν pesu 20 και ίδιο αριθμό καρβελιών που έχουν pesu 30. Πόσα καρβέλια θα υπάρχουν από κάθε είδος;

(Το pesu υποδηλώνει την ποιότητα του ψωμιού με βάση την ποσότητα του αλευριού που χρησιμοποιήθηκε. Ένα καρβέλι με pesu 10 περιέχει 1/10 hekat αλεύρι και άρα είναι καλύτερης ποιότητας από ένα αλεύρι με pesu 20 που περιέχει 1/20 hekat αλεύρι).

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το βιβλίο *The Rhind Mathematical Papyrus vol1, Free Translation and Commentary*, (Chace, 1927).

- Η λύση που δίνεται στον Πάπυρο:

Το $\frac{1}{20}$ του hekat αλεύρι παράγει ένα καρβέλι της κατηγορίας pesu 20.

Το $\frac{1}{30}$ του hekat αλεύρι παράγει ένα καρβέλι της κατηγορίας pesu 30.

Άρα το $\frac{1}{20}+\frac{5}{30}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ του hekat παράγει 2 καρβέλια, ένα από κάθε κατηγορία.

Άρα τα $\frac{12}{12}=1$ hekat θα παράγουν 24 καρβέλια, 12 από κάθε κατηγορία.

Η ποσότητα του αλευριού στα 1000 καρβέλια κατηγορίας pesu 10 είναι 100 hekat.
Πολλαπλασιάζοντας το 100 με το 12 το αποτέλεσμα είναι 1200 και αυτός είναι ο αριθμός των καρβελιών κάθε κατηγορίας για την ανταλλαγή.

- Λύση με το σχηματισμό εξίσωσης

Έστω χ ο αριθμός των καρβελιών προς ανταλλαγή από κάθε κατηγορία pesu 20 και 30.
Τότε αφού το $\frac{1}{20}$ του hekat αλεύρι παράγει ένα καρβέλι της κατηγορίας pesu 20, το $\frac{1}{30}$ του hekat αλεύρι παράγει ένα καρβέλι της κατηγορίας pesu 30 και το $\frac{1}{10}$ του hekat αλεύρι παράγει ένα καρβέλι της κατηγορίας pesu 10, καθώς επίσης και ότι υπάρχουν 1000 καρβέλια της κατηγορίας pesu 10 προς ανταλλαγή, τελικά θα έχουμε:

$$\chi\frac{1}{20}+\chi\frac{1}{30}=1000*\frac{1}{10}$$

ή

$$\frac{\chi}{20}+\frac{\chi}{30}=100$$

λύνοντας την παραπάνω εξίσωση με τον κλασσικό τρόπο (Al-jabr και Al-muqabala με σύγχρονο συμβολισμό) έχουμε:

$60 * \frac{\chi}{20} + 60 * \frac{\chi}{30} = 60 * 100$ ή $3\chi + 2\chi = 6000$ ή $5\chi = 6000$ ή $\chi = \frac{6000}{5}$ ή $\chi = 1200$

Δηλαδή θα υπάρχουν 1200 καρβέλια από κάθε κατηγορία (pesu 20 και 30) για ανταλλαγή.

- Λύση της παραπάνω εξίσωσης με τη μέθοδο της ψευδούς παραδοχής

Έστω ότι χ=60 (ψευδής παραδοχή) άρα $\frac{60}{20} + \frac{60}{30} = 3 + 2 = 5$ που δεν συνάδει με το $2^{ο}$ μέλος της εξίσωσης (το 100). Οπότε πολλαπλασιάζοντας το 5 με το 20 ώστε να γίνει 100 θα προκύψει αντίστοιχα 60•20=1200 που είναι και η ζητούμενη λύση.

3.4.3 Πρόβλημα Συνάντησης – Ταξιδιού - The *Jiuzhang Suanshu* (Nine Chapters on the Mathematical Arts) - Κίνα (100 π.Χ.)

Ο Α ξεκινά από την πόλη Chang'an για την πόλη Qi και το ταξίδι του διαρκεί 5 ημέρες. Ο Β ξεκινά από την πόλη Qi για την πόλη Chang'an και το ταξίδι του διαρκεί 7 ημέρες. Αν υποθέσουμε ότι ο Β ξεκινά 2 ημέρες νωρίτερα από τον Α, να βρείτε πότε θα συναντηθούν.

Πρόκειται για το πρόβλημα 21του βιβλίου *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary,* (Shen et al , 1999).

- Κινεζική μέθοδος λύσης:

Πρόσθεσε τις 5 και τις 7 μέρες ως διαιρέτη. Από τις 7 μέρες, αφαίρεσε τις 2 μέρες που ξεκινάει νωρίτερα ο Β. Πολλαπλασίασε τη διαφορά με τις ημέρες του Α και πάρε αυτό το γινόμενο σαν διαιρετέο. Η διαίρεση δίνει τον αριθμό των ζητούμενων ημερών.

5+7=12 ο διαιρέτης

$(7 - 2) \cdot 5 = 25$ ο διαιρετέος

Οπότε το ζητούμενο είναι $\frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$. Δηλαδή θα συναντηθούν σε $2\frac{1}{12}$ μέρες.

- Εναλλακτικός τρόπος λύσης:

Ο Α καλύπτει το 1/5 του ταξιδιού σε μια μέρα, ενώ ο Β καλύπτει το 1/7 του ταξιδιού σε μια μέρα. Αν μετατρέψουμε τα κλάσματα με κοινό παρονομαστή, θα έχουμε ότι ο Α καλύπτει τα 7/35 της απόστασης σε μια μέρα, ενώ ο Β καλύπτει τα 5/35. Δεδομένου ότι ο Β ξεκίνησε δύο μέρες νωρίτερα, θα έχει ήδη διανύσει τα 10/35 της απόστασης όταν ξεκινά ο Α. Έτσι απομένουν τα 25/35 της απόστασης και μαζί καλύπτουν τα 12/35 της απόστασης σε μια μέρα. Έτσι χρειάζονται 2 1/12 ημέρες για να καλυφθούν τα 25/35 της απόστασης. Με άλλα λόγια, θα συναντηθούν 2 1/12 ημέρες αφότου ο Α φύγει από την Chang'an.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ οι μέρες που θα περάσουν μέχρι να συναντηθούν από τη στιγμή που ο Α φεύγει από την Chang'an. Τότε, υποθέτοντας ότι η απόσταση μεταξύ των πόλεων είναι 1, γνωρίζουμε ότι η απόσταση που καλύπτεται από τον Α σε χ ημέρες είναι $\frac{1}{5}\chi$ ενώ η αντίστοιχη απόσταση που καλύπτεται από τον Β είναι $\frac{1}{7}(\chi+2)$. Το άθροισμα των δύο αποστάσεων είναι η συνολική απόσταση μεταξύ των πόλεων, δηλαδή 1. Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{5}\chi+\frac{1}{7}(\chi+2)=1 \text{ ή } 35\cdot\frac{1}{5}\chi+35\cdot\frac{1}{7}(\chi+2)=35\cdot 1 \text{ ή } 7\chi+5\chi+10=35 \text{ ή}$$

$$12\chi=25 \text{ ή } \chi=\frac{25}{12}=2\frac{1}{12}$$

Επομένως θα συναντηθούν σε $2\frac{1}{12}$ μέρες από τη στιγμή που ο Α θα φύγει από την Chang'an.

3.4.4 Πρόβλημα Φόροι και μεταφορά Δημητριακών The *Jiuzhang Suanshu* (Nine Chapters on the Mathematical Arts) - Κίνα (100 π.Χ.)

Ένας άνθρωπος που μεταφέρει δημητριακά θα πρέπει να διαβεί μέσω τριών περασμάτων. Στο πρώτο πέρασμα του αφαιρείται ως φόρος το ένα τρίτο των δημητριακών που κουβαλά. Στο μεσαίο πέρασμα του αφαιρείται το ένα πέμπτο και στο τελευταίο πέρασμα του αφαιρείται το ένα έβδομο των δημητριακών που κουβαλά. Ας υποθέσουμε ότι τα δημητριακά που του απομένουν είναι 500 λίβρες. Πόσα δημητριακά μεταφέρθηκαν αρχικά;

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το βιβλίο *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary,* (Shen et al , 1999).

- Κινεζική μέθοδος λύσης:

Εφόσον στο πρώτο πέρασμα δίνεται το 1/3, το υπόλοιπο σε αυτό το σημείο είναι 2/3. Το υπόλοιπο μετά το μεσαίο πέρασμα θα είναι $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ενώ αυτό μετά το τελευταίο πέρασμα θα είναι $\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{48}{105}=\frac{16}{35}$. Έτσι το τελικό υπόλοιπο είναι τα 16/35 της αρχικής ποσότητας. Επομένως, η αρχική ποσότητα είναι 35/16 του τελικού ποσού ή $\frac{35}{16}\cdot 500$ δηλαδή $1093\frac{3}{4}$ λίβρες.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ η αρχική ποσότητα των δημητριακών. Τότε:

Φεύγοντας από το πρώτο πέρασμα θα έχει: $\chi-\frac{1}{3}\chi=\frac{2}{3}\chi$

Φεύγοντας από το μεσαίο πέρασμα θα έχει: $\frac{2}{3}\chi - \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\chi = \frac{2}{3}\chi\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\chi\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15}\chi$

Φεύγοντας από το τελευταίο πέρασμα θα έχει: $\frac{8}{15}\chi - \frac{1}{7}\cdot\frac{8}{15}\chi = \frac{8}{15}\chi\left(1-\frac{1}{7}\right) = \frac{8}{15}\chi\cdot\frac{6}{7} = \frac{48}{105}\chi = \frac{16}{35}\chi$

Άρα: $\frac{16}{35}\chi = 500$ ή $\chi = 500\cdot\frac{35}{16}$ ή $\chi = \frac{17500}{16}$ ή $\chi = 1093\frac{3}{4}$

Δηλαδή η αρχική ποσότητα δημητριακών ήταν $1093\frac{3}{4}$ λίβρες.

3.4.5 Πρόβλημα Δεξαμενής – The *Jiuzhang Suanshu* (Nine Chapters on the Mathematical Arts) - Κίνα (100 π.Χ.)

Μια δεξαμενή γεμίζει μέσω πέντε καναλιών. Το πρώτο κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή στο 1/3 της ημέρας, το δεύτερο τη γεμίζει σε 1 μέρα, το τρίτο σε 2½ μέρες, το τέταρτο σε 3 μέρες και το πέμπτο κανάλι σε 5 μέρες. Ας υποθέσουμε ότι όλα τα κανάλια είναι ανοιχτά και ρίχνουν ταυτόχρονα νερό στη δεξαμενή, να βρείτε πόσες μέρες χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή.

Πρόκειται για το πρόβλημα 26 όπως αναφέρεται στο βιβλίο *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary,* (Shen et al , 1999).

- Κινεζική μέθοδος λύσης:

Προσδιορίστε και καταγράψτε για κάθε κανάλι την ποσότητα που ρίχνει στη δεξαμενή σε μία ημέρα. Έτσι, το πρώτο κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή 3 φορές σε μια μέρα, το δεύτερο τη γεμίζει 1 φορά σε μια μέρα, το τρίτο γεμίζει τα 2/5 της δεξαμενής σε μια μέρα, το τέταρτο γεμίζει το 1/3 της δεξαμενής σε μια μέρα και το πέμπτο γεμίζει το 1/5 της δεξαμενής σε μια μέρα. Ως εκ τούτου, σε μια μέρα και τα πέντε κανάλια θα γεμίσουν $3+1+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = 4\frac{14}{15}$ δεξαμενές. Έτσι για να γεμίσει η δεξαμενή μία φορά, διαιρέστε το 1 με το $4\frac{14}{15}$, δίνοντας $\frac{15}{74}$ της ημέρας.

- Εναλλακτική Λύση συγγραφέα:

Καταγράψτε τον αριθμό τον ημερών και τον αντίστοιχων φορών που γεμίζει η δεξαμενή (σε 2 στήλες). Πολλαπλασιάστε τις φορές που γεμίζει η δεξαμενή με τον αντίστοιχο αριθμό των ημερών (αφού έχει ομογενοποιηθεί ο αριθμός των ημερών, δηλαδή βρίσκοντας το Ε.Κ.Π. τους). Προσθέστε και θεωρείστε το διαιρέτη. Πάρτε το γινόμενο του αριθμού των ημερών (Ε.Κ.Π.) σαν διαιρετέο. Διαιρέστε και βρείτε την απάντηση.

Το $1^{ο}$ κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή 3 φορές σε 1 μέρα δηλαδή 45 φορές σε 15 μέρες

Το $2^{ο}$ κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή 1 φορά σε 1 μέρα δηλαδή 15 φορές σε 15 μέρες

Το $3^{ο}$ κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή 2 φορές σε 5 μέρες δηλαδή 6 φορές σε 15 μέρες

Το $4^{ο}$ κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή 1 φορά σε 3 μέρες δηλαδή 5 φορές σε 15 μέρες

Το $5^{ο}$ κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή 1 φορά σε 5 μέρες δηλαδή 3 φορές σε 15 μέρες

Τελικά γεμίζει 74 φορές σε 15 μέρες.

Οπότε ο διαιρέτης είναι το 74

Ο διαιρετέος είναι το 15

Άρα χρειάζεται 15/74 μέρες για να γεμίσει η δεξαμενή.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ ο αριθμός των ημερών που χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή από όλα τα κανάλια ταυτόχρονα. Άρα σε μια μέρα θα γεμίσει το $\frac{1}{\chi}$ της δεξαμενής. Και δεδομένου ότι το αντίστοιχο κλάσμα της δεξαμενής που γεμίζει σε μια μέρα από κάθε κανάλι είναι το αντίστροφο του αριθμού των ημερών που χρειάζεται για να γεμίσει το κανάλι, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$$

Οπότε θα έχουμε: $\frac{1}{\chi} = 3 + 1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ δηλαδή $\frac{1}{\chi} = \frac{74}{15}$ άρα $\chi = \frac{15}{74}$

3.4.6 Πρόβλημα Ηλικίας Διόφαντου - Παλατινή Ανθολογία (περίπου 500 μ.Χ.)

Πρόκειται για ένα πρόβλημα που, κατά την Ανθολογία, ήταν γραμμένο στον τάφο του Διόφαντου.

«Αυτός ο τάφος σκεπάζει το Διόφαντο. Ω θαύμα μεγάλο! Ο τάφος δηλώνει με τρόπο επιστημονικό τα μέτρα της ζωής του. Ο θεός του έδωσε τη μοίρα να είναι αγόρι για το ένα έκτο της ζωής του και προσθέτοντας ένα δωδέκατο σκέπασε τις παρειές του με χνούδι. Του άναψε το φως του γάμου μετά από ένα έβδομο και πέντε χρόνια μετά από το γάμο του έδωσε έναν γιο. Αλίμονο, άμοιρο παιδί στερνογεννημένο, αφού έφτασε το μέτρο της μισής ζωής του πατέρα του, μοίρα ψυχρή το πήρε. Αφού (ο Διόφαντος) παρηγόρησε το πένθος του με τη σοφία των αριθμών για τέσσερα χρόνια, η ζωή του τελείωσε».

Μετάφραση του Σταμούλη στην *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία : βιβλίο XIV. Προβλήματα αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί* (1967).

Μια έμμετρη μετάφραση του επιγράμματος συναντάμε στο βιβλίο «Μαθηματικά και Επίγραμμα» του Άρη Μπιτσώρη που εκδόθηκε στη Θεσσαλονίκη το 2007. Αυτή είναι:

«Ο τάφος του Διόφαντου στα θαύματα ταιριάζει
Γιατί με τέχνασμα αριθμών τα χρόνια του μας βγάζει
Το ένα έκτο της ζωής η παιδική ηλικία
και το ένα δωδέκατο ήταν στην εφηβεία.
Στο ένα έβδομο μετά θα φέρει και τη νύφη
και πέντε χρόνια ύστερα ο γιος του εγεννήθη.
Όμως αλίμονο για αυτόν, ο γιος θα αποδημήσει
ζώντας τα χρόνια τα μισά από όσα αυτός θα ζήσει.
Βαρύ το πένθος του παιδιού και για να το γλυκάνει
έρευνες με τους αριθμούς θα κάνει ως να πεθάνει.
Αυτός θα φύγει απ’ τη ζωή μετά τέσσερα χρόνια
μα η μνήμη του Διόφαντου παρέμεινε αιώνια».

- Υπολογισμός διάρκειας ζωής του Διόφαντου στην Παλατινή Ανθολογία

Αρκεί να βρεθεί ένας αριθμός που μπορεί να εκφράζει την ηλικία ενός ανθρώπου και όταν ελαττωθεί κατά το έκτο, δωδέκατο, έβδομο και δεύτερο μέρος του να μένουν 9 (5 και 4 χρόνια που αναγράφονται στο πρόβλημα). Ένας τέτοιος αριθμός είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 6, 12, 7 και 2 δηλαδή το 84. Άρα ο Διόφαντος μέχρι τα 14 ήταν παιδί, μέχρι τα 21 έφηβος, παντρεύτηκε στα 33, έκανε παιδί στα 38, έχασε το γιο του στα 80 και πέθανε στα 84.

(Επαλήθευση: $84 - \frac{1}{6} \cdot 84 - \frac{1}{12} \cdot 84 - \frac{1}{7} \cdot 84 - \frac{1}{2} \cdot 84 = 84 - 14 - 7 - 12 - 42 = 9$)

- Λύση του προβλήματος με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ η ηλικία του Διόφαντου, τότε: $\frac{\chi}{6} + \frac{\chi}{12} + \frac{\chi}{7} + 5 + \frac{\chi}{2} + 4 = \chi$ ή

$14\chi + 7\chi + 12\chi + 420 + 42\chi + 336 = 84\chi$ ή 9χ=756 ή χ=84

3.4.7 Πρόβλημα Μούσες και μήλα – Παλατινή Ανθολογία (περίπου 500 μ.Χ.)

Η Αφροδίτη είπε στον Έρωτα που στεκόταν κατηφής: «Γιατί παιδί μου είσαι θλιμμένος;» και αυτός απάντησε «Οι Μούσες μου έκλεψαν τα μήλα που είχα φέρει από τον Ελικώνα, αρπάζοντάς τα από τον κόρφο μου και τα μοιράστηκαν μεταξύ τους, παίρνοντας η καθεμία διαφορετικά. Το ένα πέμπτο από τα μήλα το πήρε η Κλειώ, το ένα δωδέκατο η Ευτέρπη και η θεική Θάλεια το ένα όγδοο. Η Μελπομένη πήρε το ένα εικοστό, η Τερψιχόρη το ένα τέταρτο, η Ερατώ το ένα έβδομο. Τριάντα μήλα μου έκλεψε η Πολύμνια, η Ουρανία εκατόν είκοσι, ενώ η Καλλιόπη έφυγε με τριακόσια μήλα. Σου έρχομαι λοιπόν τώρα με τα χέρια ελαφρωμένα και σου φέρνω ετούτα τα πενήντα μήλα που μου αφήσαν οι Θεές».

Το ζητούμενο είναι πόσα μήλα είχε πάρει ο Έρωτας από τον Ελικώνα.
Μετάφραση του Σταμούλη στην *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία : βιβλίο XIV. Προβλήματα αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί* (1967).

- Λύση με κατασκευή εξίσωσης

Έστω χ ο αριθμός των μήλων που είχε πάρει ο Έρωτας από τον Ελικώνα. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\chi-\frac{\chi}{5}-\frac{\chi}{12}-\frac{\chi}{8}-\frac{\chi}{20}-\frac{\chi}{4}-\frac{\chi}{7}-30-120-300=50$$

ή

$$\chi-\frac{\chi}{5}-\frac{\chi}{12}-\frac{\chi}{8}-\frac{\chi}{20}-\frac{\chi}{4}-\frac{\chi}{7}=500$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το 840 έχουμε:

$$840\chi-168\chi-70\chi-105\chi-42\chi-210\chi-120\chi=420.000$$

$$125\chi=420.000$$

$$\chi=3.360$$

Άρα ο Έρωτας είχε πάρει από τον Ελικώνα 3.360 μήλα.

- Εναλλακτική μορφή εξίσωσης:

$$\chi=\frac{\chi}{5}+\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{8}+\frac{\chi}{20}+\frac{\chi}{4}+\frac{\chi}{7}+30+120+300+50$$

Από την οποία παίρνουμε και πάλι χ=3.360.

3.4.8 Πρόβλημα Έρωτες και Λουτρό (Δεξαμενής) – Παλατινή Ανθολογία (περίπου 500 μ.Χ.)

Εδώ στεκόμαστε τρεις Έρωτες που χύνουμε στο λουτρό νερό, στέλνοντας τα ρέματά μας στο λουτήρα με την ωραία ροή. Εγώ στα δεξιά με τα φτερά μου γεμίζω το λουτήρα στο ένα έκτο της ημέρας. Εγώ στα αριστερά με τους αμφορείς μου, τον γεμίζω σε τέσσερις ώρες. Κι εγώ στη μέση με το τόξο μου, θέλω μισή μέρα ακριβώς. Για πες μου, σε πόσο χρόνο θα τον γεμίσουμε ρίχνοντας νερό από τα φτερά, τους αμφορείς και το τόξο ταυτόχρονα;

Μετάφραση του Σταμούλη στην *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία : βιβλίο XIV. Προβλήματα αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί* (1967).

- Λύση:

Έστω χ τα λίτρα νερού που χωράει ο λουτήρας.

Ο Έρωτας με τα φτερά ρίχνει χ λίτρα στο $\frac{1}{6}$ της ημέρας δηλαδή σε $\frac{1}{6} \cdot 24$ =4 ώρες

Ο Έρωτας με τους αμφορείς ρίχνει χ λίτρα σε 4 ώρες

Ο Έρωτας με το τόξο ρίχνει χ λίτρα στο $\frac{1}{2}$ της ημέρας δηλαδή σε $\frac{1}{2} \cdot 24$ =12 ώρες

Οπότε σε μια ώρα με τα φτερά, τους αμφορείς και το τόξο πέφτουν αντίστοιχα $\frac{\chi}{4}, \frac{\chi}{4}, \frac{\chi}{12}$ λίτρα νερό. Άρα μαζί ρίχνουν: $\frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{12} = \frac{7\chi}{12}$ λίτρα νερό σε μια ώρα. Οπότε χ λίτρα ρίχνουν μαζί σε $\frac{12}{7}$ ώρες δηλαδή στο $\frac{1}{14}$ της ημέρας.

3.4.9 Πρόβλημα Κληρονομιάς – Παλατινή Ανθολογία (περίπου 500 μ.Χ.)

Αφήνω στους δύο γιούς μου τους χίλιους στατήρες της περιουσίας μου. Το ένα πέμπτο όμως από το μερίδιο του γνήσιου θέλω να αυξηθεί κατά 10 από το ένα τέταρτο αυτού που παίρνει ο νόθος.

Μετάφραση του Σταμούλη στην *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία : βιβλίο XIV. Προβλήματα αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί* (1967).

- Λύση:

Προφανώς αναζητούμε τα μερίδια του κάθε γιου.

Έστω χ το μερίδιο του γνήσιου γιου. Τότε αφού η περιουσία είναι 1000 στατήρες, ο νόθος γιος θα πάρει 1000-χ. Λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα του προβλήματος, προκύπτει η εξίσωση:

$\frac{\chi}{5} = \frac{1000-\chi}{4} + 10$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το 20 παίρνουμε: $4\chi = 5000 - 5\chi + 200$

Οπότε $9\chi = 5200$ ή $\chi = \frac{5200}{9} = 577\frac{7}{9}$

Δηλαδή ο γνήσιος γιος θα πάρει $577\frac{7}{9}$ στατήρες και ο νόθος $1000 - \frac{5200}{9} = \frac{3800}{9} = 422\frac{2}{9}$ στατήρες.

3.4.10 Πρόβλημα Κληρονομιάς - Propositiones ad Acuendos Juvenes– Alcuin (800 μ.Χ.)

Ένας νοικοκύρης πεθαίνοντας άφησε πίσω του την έγκυο γυναίκα του και 960 σελίνια περιουσία. Πριν πεθάνει καθόρισε πως αν η γυναίκα του έκανε γιο, τότε ο γιός θα έπαιρνε τα 3/4 της κληρονομιάς δηλαδή τα 9/12 και η γυναίκα του το 1/4 της κληρονομιάς δηλαδή τα 3/12. Αν γεννιόταν κόρη, τότε η κόρη θα έπαιρνε τα 7/12 και η γυναίκα του τα 5/12. Όμως η γυναίκα του γέννησε δίδυμα, ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Πόσα θα πάρει η γυναίκα, ο γιος και η κόρη του τελικά;

Πρόκειται για το πρόβλημα 35 που αναφέρεται στο *Problems to sharpen the young,* των Singmaster and Hadley (1992) από Mathematical Gazette Vol: 76, σελ 118

- Λύση του Alcuin:

9 και 3 κάνει 12 και 12 troy ounches (ουγγιές) κάνουν 1 pound.
Όμοια 7 και 5 κάνει επίσης 12 και δύο φορές το 12 κάνει 24. Οι 24 ουγγιές κάνουν 2 pounds, που είναι 40 σελίνια.
Ο γιος λαμβάνει 9 τέτοια μέρη 40 σελινιών, που είναι 18 pounds και κάνουν 360 σελίνια.
Η μητέρα παίρνει τα 3 από τα μέρη για το γιο και τα 5 από την κόρη. 3 και 5 κάνουν 8. Οπότε η μητέρα λαμβάνει 8 τέτοια μέρη 40 σελινιών δηλαδή 16 pounds που είναι 320 σελίνια.
Αυτό που απομένει είναι τα 7 μέρη 40 σελινιών και είναι 14 pounds ή 280 σελίνια που λαμβάνει η κόρη.
Προσθέτοντας 360 και 320 και 280 προκύπτουν 960 σελίνια δηλαδή 48 pounds.
(Παρατηρούμε ότι από τον συγγραφέα χρησιμοποιείται μια αντιστοιχία των μεγεθών της εποχής που είναι 12 troy ounches (ουγγιές) = 1 pound και 1 pound=20 σελίνια).

- Μια πιο σύγχρονη μορφή της λύσης:

Ο γιός θα έπαιρνε τα 9/12 και η γυναίκα του τα 3/12.
Η κόρη θα έπαιρνε τα 7/12 και η γυναίκα του τα 5/12.
Επειδή όμως έκανε δίδυμα (γιο και κόρη) σύμφωνα με τα παραπάνω θα μοιράζονταν τα 24/12 της περιουσίας. Οπότε για να προκύψουν τα 12/12 της περιουσίας διαιρούμε όλα τα μερίδια με το 2 και έχουμε:
Ο γιος θα πάρει: $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{12}\cdot 960=\frac{9}{24}\cdot 960=360$ σελίνια.
Η κόρη θα πάρει: $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{12}\cdot 960=\frac{7}{24}\cdot 960=280$ σελίνια.

Η γυναίκα του θα πάρει: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3+5}{12}\cdot 960=\frac{8}{24}\cdot 960=320$ σελίνια.

3.4.11 Πρόβλημα Ηλικίας - Propositiones ad Acuendos Juvenes– Alcuin (800 μ.Χ.)

Ένας ηλικιωμένος συνάντησε ένα παιδί και το χαιρέτισε λέγοντάς του «εύχομαι να ζήσεις όσο έχεις ζήσει μέχρι τώρα κι τόσο ακόμα όσο θα είναι η ηλικία σου τότε κι ακόμα τρεις φορές την ηλικία εκείνη και μετά αν ο Θεός σου δώσει άλλον ένα χρόνο ζωής, θα έχεις συμπληρώσει έναν αιώνα». Πόσο χρονών ήταν το παιδί;

Πρόκειται για το πρόβλημα 36 που αναφέρεται στο *Problems to sharpen the young,* των Singmaster and Hadley (1992) από Mathematical Gazette Vol: 76, σελ 119

- Λύση του συγγραφέα:

Η απάντηση στο πρόβλημα δίνεται από τον συγγραφέα ως εξής:
Το παιδί ήταν 8 ετών και 3 μηνών εκείνη τη στιγμή. Αν προσθέσεις την ίδια ηλικία θα είναι 16 ετών και 6 μηνών. Διπλασιάζοντας το τελευταίο θα είναι 33 ετών. Κι αν πολλαπλασιάσεις με το 3 θα είναι 99 ετών. Προσθέτοντας 1 σε αυτό, κάνει 100.

- Λύση με χρήση αγνώστου και σχηματισμό εξίσωσης:

Έστω χ η ηλικία του παιδιού. Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση:

$$\chi+2\chi+3(\chi+2\chi)+1=100$$

Από όπου παίρνουμε $12x=99$ οπότε $\chi=\frac{99}{12}=8\frac{1}{4}=8\frac{3}{12}$
Δηλαδή η ηλικία του παιδιού ήταν 8 ετών και 3 μηνών.

3.4.11 Πρόβλημα με Χρηματικά Ποσά - Η Άλγεβρα του al Khwarizmi (820 μ.Χ.)

Έχουμε δυο χρηματικά ποσά, η διαφορά των οποίων είναι 2 dirhams. Αν διαιρέσουμε το μικρότερο ποσό με το μεγαλύτερο, το πηλίκο θα ισούται με ½. Να βρεθούν τα χρηματικά ποσά.
Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το βιβλίο *Learning Activities from the History of Mathematics* (Swetz,1993)

- Λύση:

Έστω χ το μεγαλύτερο χρηματικό ποσό. Κι αφού η διαφορά των δύο ποσών είναι 2 dirhams, τότε το μικρότερο ποσό θα είναι χ-2. Οπότε έχουμε:

$$\frac{\chi-2}{\chi}=\frac{1}{2} \text{ ή } \chi=2(\chi-2)\text{ή } \chi=2\chi-4 \text{ ή } 4=2\chi-\chi \text{ ή } \chi=4$$

Άρα το ένα ποσό είναι 4 dirhams και το άλλο 2 dirhams.

3.4.13 Πρόβλημα Τα Άνθη του Λωτού – από το *Lilavati* του Bhaskara II (Ινδία – 1150 μ.Χ.)

Από ένα μπουκέτο με άνθη λωτού, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο, προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Σίβα, Βισνού και Ήλιο και το ένα τέταρτο στην Θεά. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί που απέμειναν, δόθηκαν στον σεβάσμιο άρχοντα γκουρού. Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των λωτών που είχε το μπουκέτο.

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το βιβλίο των Patwardhan et al (2001), *Līlāvatī of Bhāskarācārya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition : with Rationale in Terms of Modern Mathematics*

- Λύση του Bhaskara:

Υποθέτουμε ότι ο συνολικός αριθμός των λωτών είναι 1.
Οπότε ο αριθμός των λωτών που απομένουν είναι:

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)=1-\frac{20+12+10+15}{60}=1-\frac{57}{60}=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$$

Άρα ο συνολικός αριθμός των λωτών είναι: $\frac{6\times 1}{1/_{20}}=120.$

- Άλλος τρόπος λύσης που βασίζεται στη μέθοδο δοκιμής – λάθους (ψευδούς παραδοχής):

Αρκεί να βρεθεί ένας αριθμός που μπορεί να εκφράζει τον αριθμό ανθών λουλουδιών και όταν ελαττωθεί κατά το τρίτο, πέμπτο, έκτο και τέταρτο μέρος του να μένουν 6. Ένας τέτοιος αριθμός θα μπορούσε να είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 3, 5, 6 και 4 δηλαδή το 60.

Τότε θα είναι: $60-\frac{60}{3}-\frac{60}{5}-\frac{60}{6}-\frac{60}{4}=60-20-12-10-15=3$

Όμως το υπόλοιπο πρέπει να είναι 6, το οποίο προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του 3 με το 2. Οπότε αναλόγως πολλαπλασιάζοντας το 60 με το 2 προκύπτει 120. Ελέγχουμε:

$$120-\frac{120}{3}-\frac{120}{5}-\frac{120}{6}-\frac{120}{4}=120-40-24-20-30=6$$

Οπότε ο ζητούμενος αριθμός των λωτών είναι 120.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ ο συνολικός αριθμός των λωτών. Τότε έχουμε:

$$\chi - \frac{1}{3}\chi - \frac{1}{5}\chi - \frac{1}{6}\chi - \frac{1}{4}\chi = 6$$

$$60\chi - 20\chi - 12\chi - 10\chi - 15\chi = 360$$

$$3\chi = 360$$

$$\chi = \frac{360}{3} = 120$$

Ομοίως μπορούμε να σχηματίσουμε την εξίσωση:

$\frac{1}{3}\chi + \frac{1}{5}\chi + \frac{1}{6}\chi + \frac{1}{4}\chi + 6 = \chi$ λύνοντας την οποία θα βρούμε και πάλι χ=120.

Άρα υπήρχαν συνολικά 120 άνθη λωτών στο μπουκέτο.

3.4.14 Πρόβλημα Δεξαμενής – από το *Lilavati* του Bhaskara II (Ινδία – 1150 μ.Χ.)

Τέσσερις χείμαρροι καταλήγουν σε μια δεξαμενή και ξεχωριστά χρειάζονται 1, 1/2, 1/3 , 1/6 ημέρες αντίστοιχα για να τη γεμίσουν. Αν όλοι οι χείμαρροι ρίχνουν ταυτόχρονα νερό στη δεξαμενή, να βρεθεί ο χρόνος που χρειάζεται για να την γεμίσουν.

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το βιβλίο των Patwardhan et al (2001), *Līlāvatī of Bhāskarācārya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition : with Rationale in Terms of Modern Mathematics*

- Λύση του Bhaskara:

Ο Bhaskara αναφέρει και χρησιμοποιεί έναν συγκεκριμένο τύπο για επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων. Αν t_1, t_2,.. είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι που χρειάζεται κάθε πηγή για να γεμίσει τη δεξαμενή, τότε αν χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα όλες οι πηγές, ο χρόνος που θα χρειαστεί για να γεμίσει η δεξαμενή θα είναι: $\frac{1}{\frac{1}{t1}+\frac{1}{t2}+\cdots}$.

Οπότε σύμφωνα με τον τύπο αυτόν η λύση για το πρόβλημα είναι πως ο απαιτούμενος χρόνος θα είναι: $\frac{1}{1+2+3+6} = \frac{1}{12}$ της ημέρας.

Επίσης ο Bhaskara εξηγεί πως οι 4 χείμαρροι μπορούν να γεμίσουν αντίστοιχα 1,2,3 και 6 δεξαμενές σε μια μέρα, άρα όλοι μαζί γεμίζουν 12 δεξαμενές τη μέρα. Οπότε ο χρόνος για μια δεξαμενή θα είναι $\frac{1}{12}$ της ημέρας.

3.4.15 Πρόβλημα σαρκοβόρων (Λιοντάρι – λεοπάρδαλη – αρκούδα) - Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένα λιοντάρι τρώει ένα πρόβατο σε 4 ώρες, μια λεοπάρδαλη τρώει το ίδιο πρόβατο σε 5 ώρες. Μια αρκούδα τρώει το ίδιο πρόβατο σε 6 ώρες. Αν ρίχναμε το πρόβατο στα τρία σαρκοβόρα, πόση ώρα θα έκαναν όλα μαζί για να το καταβροχθίσουν;

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Η λύση του Fibonacci:

Για τις 4 ώρες που χρειάζεται το λιοντάρι γράψε το 1/4, για τις 5 ώρες που χρειάζεται η λεοπάρδαλη γράψε το 1/5 και για τις 6 ώρες που χρειάζεται η αρκούδα γράψε το 1/6. Επειδή τα 1/4, 1/5 και 1/6 χωράνε ακριβώς στο 60, ας υποθέσουμε ότι χρειάζονται 60 ώρες για να καταβροχθίσουν όλα μαζί το πρόβατο.
Κατόπιν να εξετάσεις πόσα πρόβατα θα έτρωγε το λιοντάρι σε 60 ώρες. Επειδή σε 4 ώρες τρώει 1 πρόβατο, είναι φανερό ότι σε 60 ώρες θα έτρωγε 15 πρόβατα. Και η λεοπάρδαλη θα έτρωγε 12, αφού το 1/5 του 60 είναι 12. Ομοίως και η αρκούδα θα έτρωγε 10, δηλαδή το 1/6 του 60. Άρα σε 60 ώρες και τα 3 ζώα μαζί θα έτρωγαν 12 συν 15 συν 10 πρόβατα, δηλαδή 37. Έτσι λοιπόν θα πούμε: «Σε 60 ώρες που υποθέσαμε θα έτρωγαν 37 πρόβατα, σε πόσο χρόνο θα έτρωγαν μόνο ένα πρόβατο;». Πολλαπλασίασε λοιπόν το 1 με το 60 και διαίρεσε με το 37 που δίνει $1\frac{23}{37}$. Σε τόσες ώρες θα είχαν καταβροχθίσει την αντιλόπη.

- Ένας άλλος αριθμητικός τρόπος:

Σε μια ώρα το λιοντάρι τρώει το 1/4 του προβάτου, η λεοπάρδαλη το 1/5 και η αρκούδα το 1/6. Άρα όλα μαζί σε μια ώρα τρώνε το: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{15+12+10}{60}=\frac{37}{60}$

Τα 37/60 του προβάτου σε 1 ώρα

Τα 60/60=1 του προβάτου σε x ώρες

Και με τον κανόνα των τριών παίρνουμε: $\frac{37}{60}\chi=1$ άρα $\chi=\frac{60}{37}=1\frac{23}{37}$

3.4.16 Πρόβλημα Ταξιδιού - από το Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένας άντρας πήγε στη Lucca για δουλειές, διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε εκεί 12 δηνάρια. Στη συνέχεια πήγε στη Φλωρεντία όπου και πάλι διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Τέλος έφτασε στην Πίζα όπου και εκεί διπλασίασε τα χρήματά του και ξόδεψε 12 δηνάρια. Στο τέλος δεν του περίσσεψαν καθόλου χρήματα. Πόσα χρήματα είχε αρχικά;

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Λύση του Fibonacci:

Επειδή υποτίθεται ότι πάντα διπλασίαζε τα χρήματά του, είναι προφανές ότι τα 2 θα γίνουν από το ένα. Είναι προφανές ποιο κλάσμα είναι το 1 από τα 2, δηλαδή γράφουμε $\frac{1}{2}$ και μάλιστα το γράφουμε 3 φορές λόγω των τριών ταξιδιών, οπότε $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\frac{1}{2}$. Το 2 πολλαπλασιάζεται με το 2 και το άλλο 2 που βρίσκονται στους παρονομαστές οπότε θα προκύψει 8 από το οποίο παίρνουμε το $\frac{1}{2}$ δηλαδή 4, από το οποίο παίρνουμε το $\frac{1}{2}$ δηλαδή 2, από το οποίο παίρνουμε το $\frac{1}{2}$ δηλαδή 1. Μετά από αυτό προσθέτουμε το 4, το 2 και το 1 που κάνουν 7 και έπειτα πολλαπλασιάζουμε με τα 12 δηνάρια που ξόδεψε και έτσι παίρνουμε 84 και διαιρούμε με το 8. Το αποτέλεσμα θα είναι $\frac{1}{2}10$ δηνάρια που είχε ο άντρας στην αρχή.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ τα χρήματα που είχε ο άντρας αρχικά. Τότε:

Στη Lucca θα είχε: 2χ-12 δηνάρια

Στη Φλωρεντία θα είχε: 2(2χ-12)-12 δηνάρια

Στην Πίζα θα είχε: 2[2(2χ-12)-12]-12 δηνάρια

Και επειδή στο τέλος δεν του έμειναν καθόλου χρήματα, θα έχουμε:

2[2(2χ-12)-12]-12=0. Λύνουμε την εξίσωση:

$$2[2(2\chi-12)-12]-12=0$$

$$4(2\chi-12)-24-12=0$$

$$8\chi-48-36=0$$

$$8\chi=84$$

$$\chi=\frac{84}{8}=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$$

Οπότε ο άντρας είχε αρχικά $10\frac{1}{2}$ δηνάρια.

- Ακόμα ένας τρόπος λύσης:

Αφού στο τέλος δεν του περίσσεψε τίποτα και στην Πίζα ξόδεψε 12 δηνάρια σημαίνει ότι είχε 12 δηνάρια. Όμως είχε διπλασιάσει τα χρήματά του άρα όταν έφτασε στην Πίζα είχε

(12:2=6) 6 δηνάρια. Οπότε στη Φλωρεντία επειδή ξόδεψε 12 δηνάρια θα είχε (12+6=18) 18 δηνάρια και επειδή είχε διπλασιάσει τα χρήματά του, όταν έφτασε στη Φλωρεντία είχε (18:2=9) 9 δηνάρια. Στη Lucca επίσης ξόδεψε 12 δηνάρια άρα θα είχε (12+9=21) 21 δηνάρια και επειδή διπλασίασε τα χρήματά του, όταν έφτασε στη Lucca θα είχε αρχικά (21:2=10,5) 10,5 δηνάρια δηλαδή $10\frac{1}{2}$ δηνάρια.

3.4.17 Πρόβλημα Τα μήλα και οι 7 πόρτες - από το Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένας άντρας μπήκε σε έναν κήπο αναψυχής από 7 πόρτες και εκεί μάζεψε έναν αριθμό μήλων. Όταν ήθελε να φύγει έπρεπε να δώσει στον πρώτο θυρωρό τα μισά από όλα τα μήλα που μάζεψε και ένα ακόμα. Στον δεύτερο θυρωρό έδωσε τα μισά από τα υπόλοιπα μήλα και ένα ακόμα. Με τον ίδιο τρόπο έδωσε μήλα στους άλλους 5 θυρωρούς και τελικά του έμεινε ένα μήλο. Πόσα μήλα μάζεψε αρχικά;

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Ο Fibonacci δίνει τη λύση του προβλήματος περιγραφικά ως εξής:

«Για το ένα μήλο που έμεινε για αυτόν κρατάς 1 στο οποίο προσθέτεις το ένα μήλο που έδωσε στον τελευταίο (έβδομο) θυρωρό, θα είναι 2 που θα διπλασιάσεις, θα είναι 4 και είχε τόσα όταν ήρθε στον τελευταίο θυρωρό. Σε αυτά προσθέτεις το 1 μήλο που έδωσε στον έκτο θυρωρό, θα είναι 5 που θα διπλασιάσεις, θα είναι 10, και τόσα έμειναν αφού άφησε 5 πόρτες. Σε αυτά προσθέτεις το 1 μήλο του πέμπτου θυρωρού, θα είναι 11 που θα διπλασιάσεις. Θα είναι 22 έως να προσθέσεις 1 για το μήλο που έδωσε στον τέταρτο θυρωρό, θα είναι 23 και όταν διπλασιάσεις θα είναι 46 στα οποία προσθέτεις ακόμα 1 για το μήλο που αυτός έδωσε στον τρίτο θυρωρό, θα είναι 47 που θα διπλασιάσεις. Τότε θα είναι 94 και πάλι προσθέτεις 1 για το μήλο που έδωσε στον δεύτερο θυρωρό. Θα είναι 95 και όταν διπλασιάσεις θα είναι 190 στα οποία προσθέτεις το 1 που έδωσε στην πρώτη πόρτα και διπλασιάζοντας αυτό το ποσό θα υπάρχουν 382, και αυτό το σύνολο είναι το αριθμός των μήλων. Και έτσι αντιστρέφοντας τη σειρά που προτάθηκε θα είσαι σε θέση να μπορείς να λύσεις οποιοδήποτε παρόμοιο πρόβλημα».

- Συμβολικός τρόπος επίλυσης:

Για κάθε πόρτα που περνάει προσθέτουμε 1 και πολλαπλασιάζουμε με το 2. Όταν πέρασε την:

7η πόρτα	1+1=2	2•2=4
6η πόρτα	4+1=5	5•2=10
5η πόρτα	10+1=11	11•2=22
4η πόρτα	22+1=23	23•2=46
3η πόρτα	46+1=47	47•2=94
2η πόρτα	94+1=95	95•2=190
1η πόρτα	190+1=191	191•2=382

- Ομοίως μπορούμε να γράψουμε:

Μετά τη συνάντησή του με τον 7ο θυρωρό του έμεινε 1 μήλο. Και επειδή έδωσε στο φρουρό τα μισά από τα μήλα του, πριν του δώσει 1 ακόμη θα είχε 2 μήλα. Άρα όταν έφυγε από τον 6ο θυρωρό είχε 4 μήλα. Οπότε
αφού έφυγε από τον 5ο θυρωρό είχε 2(4+1)=10 μήλα
αφού έφυγε από τον 4ο θυρωρό είχε 2(10+1)=22 μήλα
αφού έφυγε από τον 3ο θυρωρό είχε 2(22+1)=46 μήλα
αφού έφυγε από τον 2ο θυρωρό είχε 2(46+1)=94 μήλα
αφού έφυγε από τον 1ο θυρωρό είχε 2(94+1)=190 μήλα
πριν συναντήσει τον 1ο θυρωρό είχε 2(190+1)=382 μήλα.

- Επίλυση με χρήση εξίσωσης:

Έστω χ ο αριθμός των μήλων που είχε αρχικά. Τότε έχουμε:

Φεύγοντας από την 1η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\chi - 1$ μήλα

Φεύγοντας από τη 2η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi - 1) - 1$ μήλα

Φεύγοντας από την 3η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi - 1) - 1) - 1$ μήλα

Φεύγοντας από την 4η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi - 1) - 1) - 1) - 1$ μήλα

Φεύγοντας από την 5η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi - 1) - 1) - 1) - 1) - 1$ μήλα

Φεύγοντας από την 6η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi - 1) - 1) - 1) - 1) - 1) - 1$ μήλα

Φεύγοντας από την 7η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi - 1) - 1) - 1) - 1) - 1) - 1) - 1$ μήλα, που από την εκφώνηση δίνεται ότι ήταν 1 μήλο. Άρα

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1=1$

Η παραπάνω εξίσωση έχει πολύπλοκη μορφή, μπορεί όμως να επιλυθεί με απλό τρόπο αλλά και πολλή προσοχή, προσθέτοντας κάθε φορά το 1 κατά μέλη και πολλαπλασιάζοντας με το 2 κατά μέλη (όπως και στον περιγραφικό τρόπο του Fibonacci).

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)=2$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)=2\cdot 2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1=4$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)=5$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)-1=10$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1\right)=11$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)-1=22$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1\right)=23$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)-1=46$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1\right)=47$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)-1=94$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi-1\right)=95$$

$$\frac{1}{2}\chi-1=190$$

$$\frac{1}{2}\chi=191$$

$$\chi=382$$

- Άλλος τρόπος επίλυσης με χρήση αγνώστου και εξίσωσης βήμα προς βήμα σύμφωνα με τα δεδομένα.

Δηλαδή αν χ ο αριθμός των μήλων που είχε αρχικά ο άνδρας, τότε

Φεύγοντας από την 1η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\chi - 1$ μήλα

Φεύγοντας από τη 2η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\chi - 1\right) - 1 = \frac{1}{4}\chi - \frac{3}{2}$ μήλα

Φεύγοντας από την 3η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\chi - \frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{1}{8}\chi - \frac{7}{4}$

Φεύγοντας από την 4η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\chi - \frac{7}{4}\right) - 1 = \frac{1}{16}\chi - \frac{15}{8}$

Φεύγοντας από την 5η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\chi - \frac{15}{8}\right) - 1 = \frac{1}{32}\chi - \frac{31}{16}$

Φεύγοντας από την 6η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{32}\chi - \frac{31}{16}\right) - 1 = \frac{1}{64}\chi - \frac{63}{32}$

Φεύγοντας από την 7η πόρτα είχε: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{64}\chi - \frac{63}{32}\right) - 1 = \frac{1}{128}\chi - \frac{127}{64}$

Όμως στο τέλος είχε 1 μήλο άρα $\frac{1}{128}\chi - \frac{127}{64} = 1$ οπότε πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με το 128 έχουμε $\chi - 254 = 128$ ή $\chi = 254 + 128$ ή $\chi = 382$.

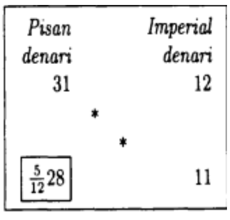
3.4.18 Πρόβλημα Ανταλλαγής Χρημάτων (Συναλλάγματος) - από το Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένα αυτοκρατορικό σολδίο, δηλαδή 12 αυτοκρατορικά δηνάρια (ή σε οποιοδήποτε άλλο νόμισμα), πωλείται για 31 δηνάρια Πίζας (ή σε οποιοδήποτε άλλο νόμισμα) και αναζητείται πόσα δηνάρια Πίζας θα πάρει κανείς για 11 αυτοκρατορικά δηνάρια.

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Ο Fibonacci περιγράφει τη λύση ως εξής:

Καταγράφετε το πρόβλημα, δηλαδή την πρώτη πώληση, δηλαδή τα 12 αυτοκρατορικά δηνάρια. Στην ίδια γραμμή στα αριστερά γράψε την τιμή τους, δηλαδή 31 δηνάρια Πίζας και βάλε τα 11 αυτοκρατορικά δηνάρια κάτω από τα 12 αυτοκρατορικά δηνάρια, όπως φαίνεται εδώ (Εικόνα 2). Μετά θα πολλαπλασιάσετε τους αριθμούς που είναι διαγώνια απέναντι, δηλαδή το 11 και το 31 και θα είναι 341. Και θα διαιρέσετε με το 12. Το πηλίκο θα είναι $28\frac{5}{12}$ δηνάρια Πίζας.



Εικόνα 2 Σχήμα Λύσης Fibonacci

(Sigler, L. , 2003, σελ 156)

Δηλαδή με τη μέθοδο των τριών μπορούμε να γράψουμε:

12 αυτοκρατορικά δηνάρια πωλούνται για 31 δηνάρια Πίζας

11 αυτοκρατορικά δηνάρια πωλούνται για χ δηνάρια Πίζας

$$12\chi = 31 \cdot 11$$

$$12\chi = 341$$

$$\chi = \frac{341}{12} = 28\frac{5}{12}$$

Οπότε για 11 αυτοκρατορικά δηνάρια θα λάβει κάποιος $28\frac{5}{12}$ δηνάρια Πίζας.

3.4.19 Πρόβλημα Δενδροφύτευσης - από το Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένας βασιλιάς έστειλε 30 άνδρες να φυτέψουν δέντρα σε μια συγκεκριμένη φυτεία, όπου φύτεψαν 1000 δέντρα σε 9 μέρες. Αναζητείται πόσες μέρες θα χρειαστούν 36 άνδρες για να φυτέψουν 4400 δέντρα.

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Ο Fibonacci περιγράφει τη λύση ως εξής:

Γράψτε τους 36 άνδρες κάτω από τους 20 άνδρες και τα 4400 δέντρα κάτω από τα 1000 δέντρα. Έπειτα θα πολλαπλασιάσετε τους 30 άνδρες με τα 4400 δέντρα και το γινόμενο τους με τις 9 ημέρες. Τέλος θα διαιρέσετε το συνολικό γινόμενο με τους 36 άνδρες και τα 1000 δέντρα. Το πηλίκο θα είναι 33 που είναι ο συνολικός αριθμός των ημερών κατά τις οποίες οι άνδρες θα φυτέψουν το 4400 δέντρα.

Σχηματικά έχουμε το παρακάτω:

Μέρες	Δέντρα	Άντρες
9	1000	30
$\boxed{33}$	4400	36

Εικόνα 3 Σχήμα Λύσης Fibonacci

$$\frac{30 \cdot 4400 \cdot 9}{36 \cdot 1000} = \frac{1188}{36} = 33$$

- Άλλος τρόπος επίλυσης (διπλή εφαρμογή κανόνα των τριών):

30 άντρες φυτεύουν 1000 δέντρα (σε 9 μέρες)

36 άντρες φυτεύουν χ δέντρα (σε 9 μέρες)

Οπότε $30\chi = 36 \cdot 1000$ ή $\chi = \frac{36000}{30} = 1200$ άρα

(36 άντρες) φυτεύουν 1200 δέντρα σε 9 μέρες

(36 άντρες) φυτεύουν 4400 δέντρα σε y μέρες

$1200y = 4400 \cdot 9$ ή $y = \frac{39600}{1200} = 33$

Επομένως 36 άνδρες θα χρειαστούν 33 μέρες για να φυτέψουν 4400 δέντρα.

3.4.20 Πρόβλημα Συνεταιρισμού - από το Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Δύο άνδρες ιδρύουν μαζί μια εταιρεία στην οποία ο πρώτος βάζει στην εταιρεία 18 λίρες και ο άλλος βάζει 25 λίρες. Η εταιρεία βγάζει κέρδος 7 λίρες και αναζητείται το μερίδιο από τις 7 λίρες που θα λάβει ο καθένας.

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Ο Fibonacci περιγράφει τη λύση ως εξής:

Γράψε τις μετοχές του πρώτου μέλους της εταιρείας, δηλαδή 18 λίρες, στην πρώτη γραμμή ενός πίνακα, στο δεξί του μέρος και δίπλα προς τα αριστερά στην ίδια γραμμή γράψε 25 λίρες, που είναι οι μετοχές του δεύτερου μέλους. Επίσης προς τα αριστερά, χωριστά από αυτούς αν θέλεις, γράψε το κέρδος των 7 λιρών, όπως φαίνεται εδώ παρακάτω. Έπειτα πρόσθεσε μαζί τις μετοχές και των δύο μελών, δηλαδή το 18 και το 25. Θα είναι 43. Βάλτε στο πρόβλημα κάτω από το 18 ως κλάσμα τον παρονομαστή 43 και άλλα 43 βάζεις κάτω από το 25 ως κλάσμα. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζεις τις μετοχές του πρώτου μέλους, δηλαδή το 18, με το κέρδος, δηλαδή το 7. Θα είναι 126 και θα διαιρέσεις με το 43 που βρίσκεται κάτω από το 18. Το πηλίκο θα είναι $2\frac{40}{43}$ λίρες, και αυτό είναι το μερίδιο του κέρδους που κατέχει το πρώτο μέλος (δηλαδή 2 λίρες και 18 σολδία και $7\frac{11}{43}$ δηνάρια). Το υπόλοιπο του κέρδους θα δοθεί στο δεύτερο μέλος. Ωστόσο για εξάσκηση μπορείς να πολλαπλασιάσεις τις μετοχές του άλλου μέλους με το κέρδος, δηλαδή το 25 με το 7. Θα είναι 175 που θα διαιρέσεις με το 43 που βρίσκεται στο κλάσμα κάτω από το 25. Το πηλίκο θα είναι $4\frac{4}{43}$ λίρες, και αυτό είναι το μερίδιο του δεύτερου μέλους, (δηλαδή 4 λίρες και 1 σολδίο και $4\frac{32}{43}$ δηνάρια). Αν σε αυτό προσθέσετε το μερίδιο που θα πάρει το πρώτο μέλος, θα προκύψει το αποτέλεσμα των 7 λιρών.

3.4.21 Πρόβλημα Το λιοντάρι στο λάκκο - από το Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.)

Ένα λιοντάρι βρίσκεται σε έναν λάκκο, του οποίου το βάθος είναι 50 παλάμες. Αυτό σκαρφαλώνει καθημερινά $\frac{1}{7}$ μιας παλάμης, και γλιστράει το $\frac{1}{9}$ της παλάμης. Αναζητείται σε πόσες μέρες θα βγει το λιοντάρι από το λάκκο.

Το πρόβλημα ανακτήθηκε από το *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*, Sigler (2003).

- Η λύση του Fibonacci:

Βάζεις ότι θα φύγει από το λάκκο σε 63 μέρες γιατί 63 είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο του 9 και του 7, και βλέπεις πόσο ανεβαίνει και κατεβαίνει το λιοντάρι στις 63 ημέρες. Ανεβαίνει πράγματι 63/7 παλάμες που είναι 9 παλάμες, και κατεβαίνει 63/9 που είναι 7 παλάμες τις οποίες αφαιρείς από τις 9 και μένουν 2 παλάμες. Τόσο ανεβαίνει περισσότερο από ότι κατεβαίνει στις 63 ημέρες. Από εκεί λες, για τις 63 μέρες που έβαλα, ανεβαίνει 2 παλάμες, τι να βάλω για να ανέβει 50 παλάμες; Πολλαπλασιάζετε το 63 με το 50, και διαιρείτε με το 2. Το πηλίκο θα είναι 1575 ημέρες και αυτό είναι σε πόσες ημέρες το λιοντάρι θα φύγει από το λάκκο.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης:

Έστω χ αριθμός των ημερών που χρειάζεται το λιοντάρι. Τότε θα έχουμε:

$\frac{1}{7}\chi - \frac{1}{9}\chi = 50$ ή $63 \cdot \frac{1}{7}\chi - 63 \cdot \frac{1}{9}\chi = 63 \cdot 50$ ή $9\chi - 7\chi = 3150$ ή $2\chi = 3150$ ή $\chi = \frac{3150}{2}$ ή $\chi = 1575$

Άρα το λιοντάρι χρειάζεται 1575 ημέρες για να βγει από το λάκκο.

3.4.22 Πρόβλημα Συνεταιρισμού – Αριθμητική Τρεβίζο (1478 μ.Χ)

Τρεις έμποροι έχουν επενδύσει τα χρήματά τους σε έναν συνεταιρισμό, τους οποίους θα αναφέρω ονομαστικά, για να κάνω το πρόβλημα πιο ξεκάθαρο. Ο πρώτος ονομαζόταν Piero, ο δεύτερος Polo, και ο τρίτος Zuanne. Ο Piero επένδυσε 112 δουκάτα, ο Polo 200 δουκάτα, και ο Zuanne 142 δουκάτα. Στο πέρας ενός χρονικού διαστήματος, ανακάλυψαν ότι είχαν κερδίσει 563 δουκάτα. Το ζητούμενο είναι να μάθουμε τι μερίδιο των κερδών αντιστοιχεί στον καθένα ώστε να μην εξαπατηθεί κανείς.

Το πρόβλημα αντλήθηκε από την *Πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο – Μετάφραση* των Νικολαντωνάκη και Ζήση (2018).

- Η λύση που προτείνει ο συγγραφέας:

Σε αυτό το πρόβλημα, όπως και σε όλα τα προβλήματα με συνεταιρισμούς, τοποθετείτε τα μερίδια του καθενός το ένα κάτω από το άλλο και βρίσκετε το σύνολό τους, το οποίο γίνεται ο διαιρέτης σας, οπότε:

Ο Piero έβαλε 112 δουκάτα

Ο Polo έβαλε 200 δουκάτα

Ο Zuanne έβαλε 142 δουκάτα

Το σύνολο 454 είναι ο Διαιρέτης

Στη συνέχεια, παίρνετε την περίπτωση του Piero, λέγοντας: « εάν 454 δουκάτα έφεραν κέρδη 563 δουκάτα, πόσα θα μου φέρουν τα 112 δουκάτα; » Τώρα γνωρίζετε τον διαιρέτη σας. Τακτοποιώντας τον κανόνα, γνωρίζετε τι πρέπει να κάνετε σύμφωνα με τις κατευθύνσεις του:

454 έφεραν κέρδη 563

112 έφεραν κέρδη χ

$$454\chi = 563 \cdot 112$$

$$\chi = \frac{63056}{454} = 138\frac{202}{227}$$

Δηλαδή τα κέρδη του Piero ήταν $138\frac{202}{227}$ δουκάτα.

Ο ανώνυμος συγγραφέας δίνει τις υποδιαιρέσεις, 1 δουκάτο = 24 γρόσια και 1 γρόσι = 32 πέννες (σε χρυσό) και αφορά την (μεγάλη) λίρα των γροσίων (lira di grossi).

Οπότε η λύση θα γίνει: 138 δουκάτα και $\frac{202}{227} \cdot 24 = \frac{4848}{227} = 21\frac{81}{227}$ γρόσια.

Άρα θα έχουμε 138 δουκάτα και 21 γρόσια και $\frac{81}{227} \cdot 32 = \frac{2592}{227} = 11\frac{95}{227} = 11\frac{190}{454}$ πένες.

Τελικά τα κέρδη του Piero ήταν 138 δουκάτα, 21 γρόσια και 11 και 190/454 πένες.

Έπειτα παίρνετε την περίπτωση του Polo, λέγοντας : « Εάν τα 454 δουκάτα έφεραν κέρδη 563 δουκάτα, πόσα θα μου φέρουν τα 200 δουκάτα ; »

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι τα κέρδη του Polo ήταν $\frac{563 \cdot 200}{454} = \frac{112600}{454} = 248\frac{4}{227}$ δουκάτα, άρα με τις αντίστοιχες μετατροπές προκύπτει ότι ήταν 248 δουκάτα, 0 γρόσσια, και 13 και 242/454 πένες.

Τέλος για την περίπτωση του Zuanne, λέγοντας: « Εάν τα 454 δουκάτα έφεραν κέρδη 563 δουκάτα, πόσα θα μου φέρουν τα 142 δουκάτα;» παίρνουμε $\frac{563 \cdot 142}{454} = \frac{79946}{454} = 176\,\frac{21}{227}$, άρα με τις αντίστοιχες μετατροπές προκύπτει ότι το μερίδιό του ήταν 176 δουκάτα, 2 γρόσσια και 7 και 22/454 πένες.

Ο (ανώνυμος) συγγραφέας εκτελεί και την επαλήθευση για καλύτερη κατανόηση του προβλήματος από τους αναγνώστες του, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 4):

Ο Piero κερδίζει							
δουκάτα	**138**	***γρόσσια***	**21**	***πέννες***	**11**	$\frac{190}{454}$	
Ο Polo κερδίζει							
δουκάτα	**248**	***γρόσσια***	**0**	***πέννες***	**13**	$\frac{242}{454}$	
Ο Zuanne κερδίζει							
δουκάτα	**176**	***γρόσσια***	**2**	***πέννες***	**7**	$\frac{22}{454}$	
Σύνολο κερδών							
δουκάτα	**563**	***γρόσσια***	**0**	***πέννες***	**0**	$\frac{0}{454}$	

Εικόνα 4 Επαλήθευση Λύσης

(σελίδα lxxxvii Πρακτική Αριθμητική Τρεβίζο – Μετάφραση 2018)

3.4.23 Πρόβλημα Συνάντησης Αγγελιοφόρων– Αριθμητική Τρεβίζο (1478 μ.Χ)

Ο Άγιος Πατέρας (Πάπας) έστειλε έναν αγγελιοφόρο από τη Ρώμη στην Βενετία, προστάζοντας τον να φτάσει στη Βενετία σε 7 ημέρες. Και η πλέον επιφανής Σινόρια της Βενετίας έστειλε έναν αγγελιοφόρο ο οποίος θα έπρεπε να φτάσει από τη Βενετία στη Ρώμη σε 9 ημέρες. Επίσης η απόσταση από τη Ρώμη έως τη Βενετία είναι 250 μίλια. Συνέβη με την διαταγή των κυρίων τους, οι αγγελιοφόροι να ξεκινήσουν το ταξίδι τους την ίδια ώρα. Ζητείται να βρεθεί σε πόσες ημέρες θα συναντηθούν και πόσα μίλια θα έχει ταξιδέψει ό καθένας τους.

(Σινόρια της Βενετίας :Ανώτερη αρχή που είχε προκύψει από την ένωση των εξουσιών του Συμβουλίου του Δούκα, τριών μελών των Σαράντα και του Δόγη).

Το πρόβλημα αντλήθηκε από την *Πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο – Μετάφραση* των Νικολαντωνάκη και Ζήση (2018).

- Λύση του συγγραφέα:

Ο συγγραφέας αναφέρει τη μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος λέγοντας: *«Ο κανόνας για τα δύο πράγματα τα οποία έρχονται μαζί είναι αυτός: Ότι θα πρέπει να πολλαπλασιάζετε τους δύο όρους τον έναν με τον άλλο και να διαιρείτε το γινόμενο αυτού του πολλαπλασιασμού με το άθροισμα των δύο δεδομένων αριθμών».*

Η λύση λοιπόν σύμφωνα με τα παραπάνω έχει ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε το 7 με το 9 και έχουμε 63. Προσθέτουμε το 7 και το 9 και έχουμε 16. Διαιρούμε το γινόμενο με το άθροισμα και έχουμε: $\frac{63}{16} = 3\frac{15}{16}$ μέρες που θα περάσουν μέχρι να συναντηθούν οι αγγελιοφόροι.

Εάν θέλουμε να μάθουμε πόσα μίλια έχει κάνει ο καθένας, συνεχίζουμε με τον κανόνα των 3, ως εξής:

Για τον αγγελιοφόρο από τη Ρώμη

Σε 7 ημέρες διανύει 250 μίλια

Σε $\frac{63}{16}$ ημέρες χ;

$$7\chi = 250 \cdot \frac{63}{16}$$

$$\chi = \frac{250 \cdot 63}{16 \cdot 7} = \frac{15750}{112} = 140\frac{5}{8}$$

Άρα ο αγγελιοφόρος από τη Ρώμη διανύει $140\frac{5}{8}$ μίλια.

Για τον αγγελιοφόρο από τη Βενετία αντίστοιχα

Σε 9 ημέρες διανύει 250 μίλια

Σε $\frac{63}{16}$ ημέρες y;

$$9y = 250 \cdot \frac{63}{16}$$

$$y = \frac{250 \cdot 63}{16 \cdot 9} = \frac{15750}{144} = 109\frac{3}{8}$$

Άρα ο αγγελιοφόρος από τη Βενετία διανύει $109\frac{3}{8}$ μίλια.

Επαλήθευση: $140\frac{5}{8} + 109\frac{3}{8} = 250$ μίλια.

- Άλλος τρόπος εύρεσης του χρόνου συνάντησης με χρήση εξίσωσης:

Η ταχύτητα του αγγελιοφόρου από Ρώμη για Βενετία είναι 250 / 7 μίλια ανά ημέρα και η ταχύτητα του αγγελιοφόρου από Βενετία για Ρώμη είναι 250 / 9 μίλια ανά ημέρα, άρα εάν συναντηθούν σε x ημέρες, θα έχουμε:

$$\frac{250}{7}\chi+\frac{250}{9}\chi=250$$

$$250\chi\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)=250$$

$$\chi\frac{9+7}{9\cdot 7}=1$$

$$\chi=\frac{9\cdot 7}{9+7}=\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}$$

3.4.24 Πρόβλημα Καταδίωξης του Λαγού - Αριθμητική Τρεβίζο (1478 μ.Χ)

Ένας λαγός βρίσκεται 150 βήματα μπροστά από ένα λαγωνικό το οποίο τον καταδιώκει. Ο λαγός καλύπτει 6 βήματα ενώ το λαγωνικό 10. Ζητούμενο είναι να βρεθεί πόσα βήματα έχει κάνει το λαγωνικό όταν προφταίνει τον λαγό.

Το πρόβλημα αντλήθηκε από την *Πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο – Μετάφραση* των Νικολαντωνάκη και Ζήση (2018).

Ο συγγραφέας αναφέρει τη μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος λέγοντας: *«Ο κανόνας των δύο όρων οι οποίοι διαχωρίζονται και συναντώνται είναι αυτός: Ότι θα πρέπει να πολλαπλασιάζουμε τους δύο αριθμούς με τον αριθμό των διαστημάτων που διανύθηκαν, και να διαιρούμε με την διαφορά σε μέγεθος των δύο αριθμών».*
Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο αλγόριθμος της λύσης που προτείνεται είναι ο εξής:
Βρίσκουμε τη διαφορά του 6 από το 10 δηλαδή 10-6=4 που είναι ο διαιρέτης.
Βρίσκουμε το γινόμενο 150·10=1500 που είναι τα 150 βήματα που προηγείται ο λαγός επί τα 10 που κάνει το λαγωνικό δηλαδή ο αριθμός του διαστήματος που διανύθηκε. Και διαιρούμε 1500:4=375 βήματα που έχει καλύψει το λαγωνικό όταν προφταίνει το λαγό.
Ομοίως μπορούμε να βρούμε και τα βήματα του λαγού για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα. Βρίσκουμε το γινόμενο 150·6=900. Και διαιρούμε 900:4=225 βήματα που έχει καλύψει ο λαγός. Άρα ο λαγός προηγούνταν αρχικά 150 και έπειτα κάλυψε 225 βήματα, συνολικά κάλυψε 375 βήματα, όσα και το λαγωνικό.

3.4.25 Πρόβλημα Χρημάτων στο Πορτοφόλι - Αριθμητική Τρεβίζο (1478 μ.Χ)

Ένας άντρας έχει βρει ένα πορτοφόλι το οποίο περιέχει μερικά δουκάτα, δεν θα αναφέρω πόσα. Από αυτά ξοδεύει 1/4, 1/5, 1/6 και 9 δουκάτα περισσεύουν. Ζητείται ο αριθμός των δουκάτων στο πορτοφόλι όταν το βρήκε.

Το πρόβλημα αντλήθηκε από την *Πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο – Μετάφραση* των Νικολαντωνάκη και Ζήση (2018).

- Η λύση του συγγραφέα:

Αυτοί οι τρείς αριθμοί (παρονομαστές) περιέχονται στο 120, όπως θα βρείτε πολλαπλασιάζοντας τους παρονομαστές τον ένα με τον άλλο, πρώτα τους δύο πρώτους, έπειτα τον τελευταίο με το γινόμενο των δύο πρώτων, έτσι: 4 φορές το 5 κάνει 20, και 6 φορές το 20 κάνει 120, διαιρώντας με το 2 έχουμε 60 στο οποίο αυτά τα κλάσματα (εννοεί παρονομαστές) επίσης περιέχονται. Τώρα ενεργείστε με τον ακόλουθο τρόπο:

Το $\frac{1}{4}$ του 60 είναι 15

Το $\frac{1}{5}$ του 60 είναι 12

Το $\frac{1}{6}$ του 60 είναι 10

Το σύνολο είναι 37.

Αφαιρούμε τα 37 από τα 60 και απομένουν 23. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα των τριών (στη σύγχρονη μορφή του) προκύπτει:

Απέμειναν 23 από τα 60

Απέμειναν 9 από τα χ;

$$23\chi = 60 \cdot 9$$

$$\chi = \frac{540}{23} = 23\frac{11}{23}$$

Οπότε το πορτοφόλι είχε αρχικά $23\frac{11}{23}$ δουκάτα.

- Λύση με χρήση αγνώστου και εξίσωσης

Έστω χ ο αριθμός των δουκάτων που είχε αρχικά το πορτοφόλι. Τότε θα έχουμε:

$$\frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} + \frac{\chi}{6} + 9 = \chi$$

$$60 \cdot \left(\frac{\chi}{4} + \frac{\chi}{5} + \frac{\chi}{6} + 9\right) = 60 \cdot \chi$$

$$15\chi + 12\chi + 10\chi + 540 = 60\chi$$

$$60\chi - 37\chi = 540$$

$$23\chi = 540$$

$$\chi = \frac{540}{23} = 23\frac{11}{23}$$

3.4.26 Πρόβλημα Κατασκευή Σπιτιού Ι - Αριθμητική Τρεβίζο (1478 μ.Χ)

Ένας ξυλουργός έχει αναλάβει να χτίσει ένα σπίτι σε 20 μέρες. Αυτός προσλαμβάνει έναν άλλο άνδρα και λέει: «Αν χτίσουμε το σπίτι μαζί, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την δουλειά σε 8 ημέρες». Ζητούμενο είναι να βρεθεί πόσο θα πάρει στον άλλο άνδρα να το χτίσει μόνος του.

Το πρόβλημα αντλήθηκε από την *Πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο – Μετάφραση* των Νικολαντωνάκη και Ζήση (2018).

Σε αυτό το πρόβλημα πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο δεύτερος άνδρας κάνει τόση δουλειά σε 8 ημέρες όση ο πρώτος κάνει σε 12 ημέρες. Θεωρώντας αυτό, τακτοποιούμε τον κανόνα ως εξής: Αν το 12 παράγει 8, πόσο θα παράγει το 20 ;
Το 12 παράγει 8
Το 20 παράγει χ;

$$12\chi = 8 \cdot 20$$

$$\chi = \frac{8 \cdot 20}{12} = \frac{160}{12} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$$

Άρα ο άλλος άνδρας χρειάζεται $13\frac{1}{3}$ ημέρες για να χτίσει το σπίτι μόνος του.

3.4.27 Πρόβλημα Κατασκευή Σπιτιού ΙΙ - Αριθμητική Τρεβίζο (1478 μ.Χ)

Αν 17 άνδρες χτίζουν 2 σπίτια σε 9 ημέρες, πόσες ημέρες θα πάρει σε 20 άνδρες να χτίσουν 5 σπίτια ;
Το πρόβλημα αντλήθηκε από την *Πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο – Μετάφραση* των Νικολαντωνάκη και Ζήση (2018).

- Λύση:

Αυτό το πρόβλημα απαιτεί να εφαρμόσουμε τον κανόνα των τριών δύο φορές.
17 άνδρες χτίζουν 2 σπίτια σε 9 μέρες
20 άνδρες χτίζουν χ σπίτια σε 9 μέρες

$$17\chi = 2 \cdot 20$$

$$\chi = \frac{40}{17}$$

Άρα βρίσκουμε πως 20 άνδρες σε 9 μέρες χτίζουν $\frac{40}{17}$ σπίτια και ζητάμε να βρούμε σε πόσες μέρες θα χτίσουν 5 σπίτια. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα των τριών και πάλι, ως εξής:

$\frac{40}{17}$ σπίτια σε 9 μέρες

5 σπίτια σε y μέρες

$$\frac{40}{17}y = 5 \cdot 9$$

$$y = 45 \cdot \frac{17}{40}$$

$$y = \frac{765}{40} = 19\frac{1}{8}$$

Και προφανώς αφού η ημέρα έχει 24 ώρες και το $\frac{1}{8}$ του 24 είναι το 3 θα έχουμε πως 20 άνδρες θα χτίσουν 5 σπίτια σε $19\frac{1}{8}$ ημέρες, δηλαδή σε 19 ημέρες και 3 ώρες.

3.4.28 Πρόβλημα Μοιρασιάς Ι - από την Άλγεβρα του Euler (1770 μ.Χ.)

Ένας πατέρας αφήνει 1600 λίρες για να μοιραστούν στους τρεις γιους του με τον ακόλουθο τρόπο: ο μεγαλύτερος είναι να πάρει 200 λίρες παραπάνω από τον δεύτερο, και ο δεύτερος 100 λίρες παραπάνω από τον νεότερο. Αναζητείται το μερίδιο του καθενός.

Το πρόβλημα προέρχεται από το βιβλίο του Euler, *Elements of Algebra* ,(1984 - επανατύπωση έκδοσης 1840) - Σελ 195

- Η λύση του Euler:

Έστω χ το μερίδιο του τρίτου γιου. Τότε ο δεύτερος γιος θα πάρει χ+100 και ο πρώτος γιος θα πάρει χ+300. Το άθροισμα των μεριδίων των τριών γιών είναι 1600 λίρες, άρα:

$$3\chi + 400 = 1600 \text{ ή } 3\chi = 1200 \text{ ή } \chi = 400$$

Επομένως ο νεότερος θα πάρει 400 λίρες, ο δεύτερος θα πάρει 500 λίρες και ο τρίτος θα πάρει 700 λίρες.

3.4.29 Πρόβλημα Μοιρασιάς ΙΙ - από την Άλγεβρα του Euler (1770 μ.Χ.)

Ένας πατέρας αναφέρει στη διαθήκη του, ότι οι τρεις γιοι του θα πρέπει να μοιραστούν την περιουσία του με τον ακόλουθο τρόπο: ο μεγαλύτερος θα λάβει 1000 κορώνες λιγότερες από τη μισή περιουσία, ο δεύτερος θα λάβει 800 κορώνες λιγότερες από το ένα τρίτο της περιουσίας και ο τρίτος θα λάβει 600 κορώνες λιγότερες από το ένα τέταρτο της περιουσίας. Ζητείται η τιμή της συνολικής περιουσίας και το μερίδιο του καθενός.

Το πρόβλημα προέρχεται από το βιβλίο του Euler, *Elements of Algebra* ,(1984 - επανατύπωση έκδοσης 1840) - Σελ 196

- Λύση του Euler:

Έστω χ η συνολική περιουσία.

Το μερίδιο του 1ου γιου είναι: $\frac{1}{2}\chi - 1000$

Το μερίδιο του 2ου γιου είναι: $\frac{1}{3}\chi - 800$

Το μερίδιο του 3ου γιου είναι: $\frac{1}{4}\chi - 600$

Οπότε οι τρεις γιοι θα λάβουν συνολικά:

$\frac{1}{2}\chi - 1000 + \frac{1}{3}\chi - 800 + \frac{1}{4}\chi - 600$ και το άθροισμα αυτό πρέπει να ισούται με χ. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση: $\frac{13}{12}\chi - 2400 = \chi$ και αφαιρώντας χ έχουμε $\frac{1}{12}\chi - 2400 = 0$. Έπειτα προσθέτοντας 2400 έχουμε $\frac{1}{12}\chi = 2400$ και τέλος πολλαπλασιάζοντας με 12 παίρνουμε

$\chi = 28800$.

Η περιουσία επομένως αποτελείται από 28.800 κορώνες από τις οποίες:

Ο 1ος γιος παίρνει 13.400 κορώνες

Ο 2ος γιος παίρνει 8.800 κορώνες

Ο 3ος γιος παίρνει 6.600 κορώνες

28.800 κορώνες

3.4.30 Πρόβλημα Διαχωρισμού Αριθμού - από την Άλγεβρα του Euler (1770 μ.Χ.)

Ζητείται να χωριστεί ο αριθμός a σε δύο μέρη, έτσι ώστε το μεγαλύτερο μέρος να υπερβαίνει το μικρότερο κατά b.

Το πρόβλημα προέρχεται από το βιβλίο του Euler, *Elements of Algebra* ,(1984 - επανατύπωση έκδοσης 1840) - Σελ 194

- Λύση που προτείνει ο Euler

Έστω x το μεγαλύτερο από τα μέρη που θα χωριστεί ο αριθμός a. Τότε το άλλο μέρος θα είναι a-x έτσι ώστε να ισχύει x=a-x+b . Προσθέτοντας x κατά μέλη θα έχουμε 2x=a+b και διαιρώντας με το 2 θα είναι $x = \frac{a+b}{2}$.

- Δεύτερος τρόπος που προτείνει ο Euler.

Έστω x το μεγαλύτερο μέρος, το οποίο υπερβαίνει το μικρότερο κατά b. Έτσι είναι προφανές ότι το άλλο μέρος είναι μικρότερο από το μεγαλύτερο κατά b και ως εκ τούτου θα πρέπει να είναι: x-b. Τώρα, αυτά τα δύο μέρη λαμβανόμενα μαζί θα πρέπει να κάνουν a, άρα παίρνουμε 2x-b=a και προσθέτοντας b έχουμε 2x=a+b από όπου προκύπτει $x = \frac{a+b}{2}$ και το οποίο είναι η τιμή του μεγαλύτερου μέρους. Οπότε η τιμή του μικρότερου θα είναι: $\frac{a+b}{2} - b$ ή $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ ή $\frac{a-b}{2}$.

- Αριθμητικό παράδειγμα που παραθέτει ο Euler:

Να χωριστεί ο αριθμός 7 σε δύο μέρη, έτσι ώστε το μεγαλύτερο μέρος να υπερβαίνει το μικρότερο κατά 3.

Λύση παραδείγματος:

Έστω x το μεγαλύτερο μέρος. Τότε το άλλο μέρος θα είναι 7-x έτσι ώστε να ισχύει x=7-x+3 ή x=10-x , προσθέτοντας x έχουμε 2x=10 και διαιρώντας με 2 προκύπτει x=5.

Οπότε τα ζητούμενα μέρη είναι το 5 και το 2.

3.5 Σχόλια - Παρατηρήσεις

Από την παραπάνω παρουσίαση προβλημάτων που προέρχονται από διαφορετικούς πολιτισμούς και χρονολογίες, μπορούμε να εξάγουμε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα. Αρχικά γίνεται εμφανές πως το ίδιο πρόβλημα ή είδος προβλήματος συχνά βρίσκεται σε διαφορετικές κοινωνίες και χρονικές περιόδους όπως για παράδειγμα τα προβλήματα μοιρασιάς, τα προβλήματα δεξαμενών κλπ και δίνεται η δυνατότητα απεικόνισης της εξέλιξης και της σύγκρισης των διαδικασιών λύσης που προτείνονται από τους εκάστοτε συγγραφείς των προβλημάτων, πράγμα που επιβεβαιώνει τα λεγόμενα του Swetz (2007) για τη χρήση των Ιστορικών προβλημάτων στην εκπαίδευση (παράγραφος 2.5). Επίσης είναι προφανές πως τα ιστορικά προβλήματα μαθηματικών όπως αυτά που παρουσιάσαμε παραπάνω, παρέχουν ιστορικές και πολιτιστικές γνώσεις για τους εμπλεκόμενους λαούς και τις αντίστοιχες εποχές, καθώς συνήθως τα προβλήματα πραγματεύονται απαραίτητες διαδικασίες της καθημερινής ζωής (πχ πρόβλημα συνεταιρισμών, συναλλάγματος κλπ). Μελετώντας ιστορικά προβλήματα και τις αντίστοιχες πρωτότυπες λύσεις τους, παρέχεται και μια νέα οπτική, πολλές φορές αρκετά διαφορετική από αυτήν που προστάζουν οι σύγχρονες μέθοδοι και διδάσκονται στα σύγχρονα προγράμματα σπουδών.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφέρουμε πως κατά την ιστορική αναδρομή και την επίλυση βασικών ιστορικών προβλημάτων αναδεικνύονται κάποια χαρακτηριστικά γνωρίσματα της εξελισσόμενης αλγεβρικής σκέψης. Για παράδειγμα στις Βαβυλωνιακές πινακίδες (περίπου 1800 π.Χ.) για τη διατύπωση των προβλημάτων χρησιμοποιείται γεωμετρική ορολογία και συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα και με τις κατάλληλες πράξεις προσδιορίζεται η ζητούμενη (ειδική) λύση. Προχωρώντας αρκετά αργότερα, στην *Άλγεβρα του al Khwarizmi* (περίπου 820 μ.Χ.) η διατύπωση είναι αμιγώς ρητορική και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με συγκεκριμένα αριθμητικά δεδομένα με χρήση αγνώστου και δημιουργία εξίσωσης Στο Liber Abaci του Fibonacci (1202 μ.Χ.) και στην Αριθμητική του Τρεβίζο (1478 μ.Χ.) οι λύσεις είναι κυρίως περιγραφικές και χρησιμοποιούνται συγκεκριμένες αναπαραστάσεις που έχουν εξηγηθεί στις εισαγωγές των αντίστοιχων έργων, ενώ δεν χρησιμοποιείται άγνωστος και εξίσωση. Τέλος, στο έργο Elements of Algebra - *Vollständige Anleitung zur Algebra* του Leonhard Euler (1840/ 1770) η διατύπωση και επίλυση των προβλημάτων είναι σχεδόν ταυτόσημη με εκείνη που γίνεται στα σύγχρονα διδακτικά βιβλία της σχολικής Άλγεβρας.

4. Έρευνα

4.1 Σκοπός της Έρευνας

Στα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών που διδάσκονται στα Ελληνικά σχολεία, η επίλυση προβλήματος θεωρείται βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών παρ' όλο που δεν αποτελεί ξεχωριστή ενότητα σε αυτά. Τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούν κύριο πεδίο των σχολικών εγχειριδίων του Δημοτικού Σχολείου στα πλαίσια εμπέδωσης και εξάσκησης αριθμητικών πράξεων και απλών διαδικασιών (όπως πχ πράξεις με κλάσματα, μέθοδος των τριών, ανάλογα ποσά κλπ). Στο γυμνάσιο οι μαθητές καλούνται να αντιμετωπίσουν προβλήματα που λύνονται με τη χρήση εξισώσεων 1^{ου} και 2^{ου} βαθμού καθώς και με κατασκευή συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Στο Λύκειο συναντώνται λιγότερα σε πλήθος προβλήματα σε διάφορες όμως παραγράφους των σχολικών εγχειριδίων της Άλγεβρας, με στόχο οι μαθητές να μπορούν να εφαρμόσουν την αντίστοιχη μεθοδολογία που αφορά τις έννοιες που διδάχτηκαν. Γίνεται λοιπόν σαφές πως η μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στην προσφορά των απαραίτητων εφοδίων ώστε να γίνουν οι μαθητές ικανοί λύτες προβλημάτων. Τα προβλήματα που συναντώνται στα σχολικά εγχειρίδια χαρακτηρίζονται ως προβλήματα ρουτίνας, αφού συνήθως ο δάσκαλος – καθηγητής διδάσκει τη μέθοδο επίλυσης ενός προβλήματος και καλεί τους μαθητές να λύσουν ανάλογα προβλήματα. Παρόλο όμως το γεγονός ότι οι μαθητές καλούνται να λύσουν προβλήματα σε διάφορες διδακτικές παραγράφους της ύλης σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες και θα περιμέναμε να είναι εξοικειωμένοι με αυτά, αποτελεί κοινή παραδοχή πως στην πλειοψηφία τους δυσκολεύονται και συχνά αποτυγχάνουν στην επίλυσή τους.

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι να μελετήσει τις επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων που λύνονται με απλές αριθμητικές μεθόδους και εξισώσεις πρώτου βαθμού. Επίσης σκοπός είναι να διερευνηθεί ο τρόπος επίλυσης που επιλέγουν οι μαθητές (αλγεβρικός ή αριθμητικός) αλλά και να εντοπιστούν οι δυσκολίες που συναντούν. Συγκεκριμένα οι δυσκολίες μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανά στάδιο επίλυσης σύμφωνα και με τα στάδια του Polya που αναφέρθηκαν στη βιβλιογραφική επισκόπηση. Επίσης, τα προβλήματα που απαρτίζουν το φύλλο εργασίας που δόθηκε στους μαθητές, επιλέχθηκαν από ιστορικές πηγές και μαθηματικές συλλογές διάφορων πολιτισμών και χρονολογιών οπότε είναι σκόπιμο να διερευνηθεί εάν οι μαθητές τα επιλύουν με τις σύγχρονες αλγεβρικές μεθόδους που διδάσκονται στο σχολείο ή οι λύσεις τους προσεγγίζουν σε κάποιο βαθμό τις πρωτότυπες λύσεις που δόθηκαν από τους εκάστοτε συγγραφείς των προβλημάτων. Τέλος, μέσω του ερωτηματολογίου που κλήθηκαν να συμπληρώσουν, μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για το ενδιαφέρον που δείχνουν οι μαθητές για την επίλυση προβλημάτων, τα ιστορικά προβλήματα και την ιστορία των μαθηματικών.

4.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Συγκεκριμένα, τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται στην παρούσα έρευνα είναι:

- Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων (με αφορμή ιστορικά προβλήματα μαθηματικών);
- Υπάρχει διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών διαφορετικών βαθμίδων εκπαίδευσης (Γυμνάσιο – Λύκειο) στην επίλυση προβλημάτων;
- Ποιον τρόπο επίλυσης προτιμούν οι μαθητές (αλγεβρικό ή αριθμητικό);
- Σε ποιο στάδιο επίλυσης (κατά τα στάδια του Polya) συναντούν δυσκολίες;
- Θα ενδιέφερε τους μαθητές να μάθουν περισσότερα για την ιστορία των Μαθηματικών;
- Θα ενδιέφερε τους μαθητές να λύσουν περισσότερα ιστορικά προβλήματα μαθηματικών και στο σχολείο;
- Θα ενδιέφερε τους μαθητές να διδαχθούν στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, στα πλαίσια αντίστοιχου μαθήματος ώστε να βελτιώσουν τις ικανότητες μου στην επίλυση προβλημάτων;

4.3 Μεθοδολογία Έρευνας

Στη βιβλιογραφία που αφορά τη μεθοδολογία έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών, αναφέρονται διαφορετικά υποδείγματα τα οποία αποτελούν συστήματα παραδοχών που αφορούν την επιστημολογία, τη μεθοδολογία και την οντολογία και επιδρούν σε μεγάλο βαθμό στην επιλογή των μεθόδων και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Στην παρούσα έρευνα επιλέχθηκε το υπόδειγμα της ποιοτικής έρευνας που όπως το περιγράφει ο Ernest (1998), προέρχεται από τη μεθοδολογία των κοινωνικών επιστημών, αναφέρεται επίσης ως ερμηνευτικό ή νατουραλιστικό και κυρίως αφορά στην ανθρώπινη κατανόηση και την ερμηνεία φαινομένων. Η μεθοδολογία που ακολουθεί, βασίζεται στην καταγραφή φαινομένων σε σχέση με τις περιγραφές των συμμετεχόντων και αφορά την υποκειμενική τους άποψη. Στα πλαίσια του υποδείγματος αξιοποιούνται κυρίως ποιοτικές μέθοδοι όπως η εθνογραφική, η μελέτη περίπτωσης κ.α. . Επίσης στις μεθόδους συλλογής δεδομένων περιλαμβάνονται και επιδόσεις σε μαθηματικές δοκιμασίες, κλίμακες Likert για την καταγραφή στάσεων και απόψεων, πρωτόκολλα «φωναχτής σκέψης», συνεντεύξεις κλπ. Άρα στο ποιοτικό υπόδειγμα περιλαμβάνεται και η ποσοτική αλλά και η ποιοτική ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων. Η επιστημολογία του ποιοτικού υποδείγματος αποδέχεται την υποκειμενικότητα της γνώσης και της πραγματικότητας και επιπλέον ο ερευνητής είναι θεμιτό να παρουσιάζει τις προσωπικές και υποκειμενικές του απόψεις για τα φαινόμενα που μελετά, σύμφωνα πάντα με τον Ernest (1998). Οι πιθανές αδυναμίες που πηγάζουν από την υποκειμενικότητα, αντιμετωπίζονται με την τριγωνοποίηση πολλαπλών απόψεων για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Στη μαθηματική εκπαίδευση η ποιοτική μέθοδος έχει βρει εφαρμογή μεταξύ άλλων, στην εις βάθος κατανόηση της μάθησης μαθηματικών αντικειμένων από τους μαθητές, τη μελέτη των διαδικασιών και στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και τις στάσεις, τις αντιλήψεις και τις πεποιθήσεις μαθητών και εκπαιδευτικών. Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι η ποιοτική ερευνητική μεθοδολογία είναι ιδανική για την παρούσα έρευνα καθώς ο κύριος στόχος είναι η διερεύνηση της επίλυσης προβλημάτων από μαθητές (επιδόσεις, στρατηγικές, στάσεις κλπ).

4.4 Δείγμα – Συμμετέχοντες στην Έρευνα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε κατά το πρώτο δεκαπενθήμερο του Μαΐου 2022 και έλαβαν μέρος 16 μαθητές που φοιτούν σε διαφορετικά Γυμνάσια και Λύκεια της Έδεσσας και συγκεκριμένα 8 μαθητές που φοιτούν στη Γ Γυμνασίου και 8 μαθητές που φοιτούν στην Α Λυκείου. Σημειώνουμε πως προσεγγίστηκαν άλλοι 6 μαθητές (Γυμνασίων και Λυκείων) για να λάβουν μέρος στην έρευνα, όμως δεν έδειξαν πρόθεση και ενδιαφέρον και έτσι δεν συμμετείχαν.

4.5 Διαδικασία Συλλογής Δεδομένων και Ερευνητικά Εργαλεία

Για να αξιολογηθούν οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων αλλά και οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν κατά τα στάδια επίλυσης, καθώς δεν υπάρχει σταθμισμένο εργαλείο για την αξιολόγηση αυτή, δόθηκε στους μαθητές ένα αυτοσχέδιο φύλλο εργασίας που περιλαμβάνει τέσσερα προβλήματα που έχουν αντληθεί από ιστορικές μαθηματικές πηγές διαφορετικών πολιτισμών και χρονικών περιόδων και ζητήθηκε να τα λύσουν με όποιον τρόπο επιθυμούν (πχ αριθμητικά, αλγεβρικά, σχηματικά, περιγραφικά κλπ). Τα προβλήματα αυτά μπορούν να επιλυθούν με απλές μεθόδους, δηλαδή κατασκευή και επίλυση εξίσωσης πρώτου βαθμού ή μετασχηματισμό σε εξίσωση πρώτου βαθμού, μέθοδο των τριών αλλά και απλές πράξεις με κλάσματα. Κάθε πρόβλημα επιδέχεται παραπάνω από έναν τρόπο επίλυσης. Όλα τα παραπάνω, οι μαθητές τα έχουν διδαχθεί στο σχολείο από τις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού και μέχρι τη Β Γυμνασίου, διαθέτουν δηλαδή θεωρητικά όλα τα εφόδια για να επιλύσουν τα προβλήματα αυτά. Σημαντικό είναι το γεγονός ότι η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε μαθητές Γ Γυμνασίου και Α Λυκείου, με το σκεπτικό ότι θα πρέπει να έχουν εμπεδώσει την ήδη διδαχθείσα ύλη των προηγούμενων τάξεων και να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις αυτές όπου ζητηθεί. Επίσης, μετά από την ενασχόλησή τους με τα προβλήματα, δόθηκε στους μαθητές ερωτηματολόγιο που αφορά τη σχέση τους με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλημάτων, το ενδιαφέρον τους για τα ιστορικά προβλήματα και την ιστορία των Μαθηματικών και κάποιες επεξηγηματικές ερωτήσεις αναφορικά με την επίλυση καθενός από τα προβλήματα. Το φύλλο εργασίας με τα προβλήματα που ζητήθηκε να λυθούν καθώς και ένα συμπληρωματικό ερωτηματολόγιο δόθηκε στους μαθητές για ενασχόληση στο σπίτι τους χωρίς χρονικό περιορισμό και τα φύλλα εργασίας με τις απαντήσεις επιστράφηκαν από τους μαθητές στην ερευνήτρια μέσα σε διάστημα το πολύ δύο ημερών.

4.5.1 Το Φύλλο Εργασίας

Όπως προαναφέρθηκε, το φύλλο εργασίας αποτελείται από τέσσερα προβλήματα τα οποία παρατέθηκαν με συγκεκριμένη σειρά ώστε να παρουσιάζουν όσο το δυνατόν πιο διαβαθμισμένη δυσκολία. Συγκεκριμένα:

<u>Πρόβλημα 1:</u> «Από ένα μπουκέτο με άνθη λωτού, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο, προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Σίβα, Βισνού και Ήλιο και το ένα τέταρτο στην Ινδή Θεά. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί που απέμειναν, δόθηκαν στον σεβάσμιο άρχοντα γκουρού. Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των λωτών που είχε το μπουκέτο.»

Το πρώτο πρόβλημα προέρχεται από το βιβλίο *Lilavati* του Bhaskara II που γράφτηκε στην Ινδία και χρονολογείται στο 1150 μ.Χ. . Το πρόβλημα αυτό τιτλοφορήθηκε από την ερευνήτρια ως «Τα Άνθη του Λωτού» , λύνεται με σχηματισμό εξίσωσης πρώτου βαθμού και είναι όμοιο με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει οι μαθητές στη Β Γυμνασίου στο κεφάλαιο που αφορά τις εξισώσεις πρώτου βαθμού. Επίσης μπορεί να λυθεί και με αριθμητικούς τρόπους που βασίζονται στη μέθοδο δοκιμής και λάθους. Αναλυτικά οι προτεινόμενοι τρόποι επίλυσης παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 στη σελίδα 49.

Πρόβλημα 2: «Μια δεξαμενή γεμίζει μέσω πέντε καναλιών. Το πρώτο κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή στο 1/3 της ημέρας, το δεύτερο τη γεμίζει σε 1 μέρα, το τρίτο σε 2½ μέρες, το τέταρτο σε 3 μέρες και το πέμπτο κανάλι σε 5 μέρες. Αν υποθέσουμε ότι όλα τα κανάλια είναι ανοιχτά και ρίχνουν ταυτόχρονα νερό στη δεξαμενή, να βρείτε πόσες μέρες χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή».
Το δεύτερο πρόβλημα αντλήθηκε από το *Jiuzhang Suanshu* που γράφτηκε στην Κίνα περί το 100 π.Χ. και είναι ένα χαρακτηριστικό πρόβλημα δεξαμενής και για αυτό τιτλοφορήθηκε από την ερευνήτρια ως «Πρόβλημα Δεξαμενής». Όμοιά του συναντώνται διαχρονικά σε διάφορες συλλογές ιστορικών προβλημάτων αλλά και σε πιο απλές μορφές του στα σχολικά εγχειρίδια των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού και της Α Γυμνασίου. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με απλή συλλογιστική και πράξεις με κλάσματα καθώς και με σχηματισμό κλασματικής εξίσωσης που μετατρέπεται εύκολα σε εξίσωση πρώτου βαθμού. Αναλυτικά οι προτεινόμενοι τρόποι επίλυσης παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 στη σελίδα 42.

Πρόβλημα 3: «Ο Άγιος Πατέρας (Πάπας) έστειλε έναν αγγελιοφόρο από τη Ρώμη στην Βενετία, προστάζοντας τον να φτάσει (στη Βενετία) σε 7 ημέρες. Και η πλέον επιφανής Σινόρια της Βενετίας έστειλε έναν αγγελιοφόρο ο οποίος θα έπρεπε να φτάσει από τη Βενετία στη Ρώμη σε 9 ημέρες. Επίσης η απόσταση από τη Ρώμη έως τη Βενετία είναι 250 μίλια. Συνέβη με την διαταγή των κυρίων τους, οι αγγελιοφόροι να ξεκινήσουν το ταξίδι τους την ίδια ώρα. Ζητείται να βρεθεί σε πόσες ημέρες θα συναντηθούν και πόσα μίλια θα έχει ταξιδέψει ο καθένας».
Το τρίτο πρόβλημα προέρχεται από την *Αριθμητική του Τρεβίζο* της Ιταλίας το 1478 μ.Χ. από άγνωστο συγγραφέα. Το πρόβλημα αυτό τιτλοφορήθηκε από την ερευνήτρια ως «πρόβλημα συνάντησης αγγελιοφόρων» και μπορεί να επιλυθεί με κατασκευή εξίσωσης πρώτου βαθμού ή απλή συλλογιστική με πράξεις με κλάσματα και μέθοδο των τριών. Ανάλογο πρόβλημα ενδεχομένως να μην υπάρχει στα σχολικά εγχειρίδια, όμως μπορεί να θεωρηθεί δεδομένο ότι οι μαθητές έχουν τα εφόδια να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα αυτό με βάση όσα έχουν διδαχθεί. Αναλυτικά οι προτεινόμενοι τρόποι επίλυσης παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 στη σελίδα 61.

Πρόβλημα 4: «Ένας άντρας μπήκε σε έναν κήπο αναψυχής από 7 πόρτες και εκεί μάζεψε έναν αριθμό μήλων. Όταν ήθελε να φύγει, έπρεπε να δώσει στον πρώτο θυρωρό τα μισά από όλα τα μήλα που μάζεψε και ένα ακόμα. Στον δεύτερο θυρωρό έδωσε τα μισά από τα υπόλοιπα μήλα και ένα ακόμα. Με τον ίδιο τρόπο έδωσε μήλα στους άλλους 5 θυρωρούς και τελικά του έμεινε ένα μήλο. Πόσα μήλα μάζεψε αρχικά;».

Το τέταρτο πρόβλημα αντλήθηκε από το Liber Abaci του Fibonacci που γράφτηκε στην Ιταλία το 1202 μ.Χ.. Το πρόβλημα αυτό τιτλοφορήθηκε από την ερευνήτρια ως «Τα μήλα και οι 7 πόρτες» και θα το χαρακτηρίζαμε ως το δυσκολότερο από τα προβλήματα που παρατίθενται επειδή όμοιό του δεν συναντάται στα σχολικά εγχειρίδια αλλά και λόγω της περίπλοκης εξίσωσης που προκύπτει αν ο μαθητής προσπαθήσει να το λύσει με τρόπους κατασκευής εξίσωσης που έχει διδαχθεί στο σχολείο. Αναλυτικά οι προτεινόμενοι τρόποι επίλυσης παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 στη σελίδα 53.

Στο παράρτημα παρατίθεται το φύλλο εργασίας με τη μορφή που δόθηκε στους μαθητές.

4.5.2 Το Ερωτηματολόγιο

Λόγω της αδυναμίας διεξαγωγής προσωπικών συνεντεύξεων, θεωρήθηκε σκόπιμο οι μαθητές να απαντήσουν σε ένα ερωτηματολόγιο συμπληρωματικά αμέσως μετά την ενασχόλησή τους με τα προβλήματα, με σκοπό να εξαχθούν όσο το δυνατόν πιο ασφαλή συμπεράσματα κυρίως για τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν κατά την επίλυση του κάθε προβλήματος. Αρχικά ζητήθηκε από τους μαθητές να χαρακτηρίσουν τη σχέση τους με τα Μαθηματικά και τη σχέση τους με την Επίλυση Προβλημάτων, ώστε να αναδειχθεί εάν υπάρχει ταύτιση σε αυτές. Οι δυνατές επιλογές χαρακτηρισμών της σχέσης με τα Μαθηματικά και την Επίλυση Προβλημάτων ήταν «ΚΑΛΗ», «ΜΕΤΡΙΑ» και «ΚΑΚΗ». Έπειτα ακολούθησαν ερωτήσεις που αφορούσαν την επίλυση του κάθε προβλήματος με σκοπό να εντοπιστούν οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές σε κάθε στάδιο επίλυσης σύμφωνα με τα στάδια που προτείνει ο Polya (1945). Οι δυνατές επιλογές απαντήσεων στις ερωτήσεις αυτές ήταν «ΝΑΙ» ή «ΟΧΙ». Αναφορικά με το στάδιο της κατανόησης του προβλήματος, οι μαθητές ρωτήθηκαν αν κατανόησαν το πρόβλημα και αν μπόρεσαν να διακρίνουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα του κάθε προβλήματος. Οι ερωτήσεις αυτές αν και θεωρούνται ταυτόσημες, μπορούν να επιδείξουν αν υπάρχει διαφοροποίηση στο τι θεωρούν ότι καταλαβαίνουν οι μαθητές και στο τι θα πρέπει να έχουν καταλάβει και διακρίνει για να συνεχίσουν με την επίλυση του προβλήματος. Αναφορικά με το στάδιο της επινόησης του σχεδίου λύσης οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπόρεσαν να σκεφτούν στρατηγικές επίλυσης και αν σκέφτηκαν παραπάνω από μια στρατηγική. Για το στάδιο της εκτέλεσης του σχεδίου λύσης, ρωτήθηκαν για το αν αντιμετώπισαν δυσκολίες στις απαιτούμενες πράξεις. Για το τελευταίο στάδιο της ανασκόπησης, οι μαθητές ρωτήθηκαν εμμέσως, αν πιστεύουν πως βρήκαν τη λύση του προβλήματος και σε σύγκριση με τα γραπτά τους στα φύλλα εργασίας θα εξεταστεί αν έχουν εκτελέσει κάποιας μορφής επαλήθευση. Τέλος, δόθηκε ένα συμπληρωματικό ερώτημα που δεν αφορά τα στάδια επίλυσης, αφορά όμως το σκεπτικό τους καθώς ρωτήθηκαν αν έχουν συναντήσει παρόμοια προβλήματα στο σχολείο και θα αναδειχθεί αν χρησιμοποιούν τις μεθόδους που έχουν διδαχθεί. Το ερωτηματολόγιο περιλαμβάνει και μια ακόμα ενότητα ερωτήσεων που αφορούν το ενδιαφέρον των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων και πιο συγκεκριμένα για την επίλυση ιστορικών προβλημάτων, για την ιστορία των μαθηματικών και για αναλυτικότερη διδασκαλία στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων. Οι επιλογές απαντήσεων στις ερωτήσεις αυτές ήταν επίσης «ΝΑΙ» ή «ΟΧΙ».

Στο παράρτημα παρατίθεται το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές.

5. Αποτελέσματα Έρευνας

5.1 Ανάλυση Δεδομένων - Κωδικοποίηση

Η έρευνα βασίστηκε στο ποιοτικό υπόδειγμα που περιγράφει ο Ernest (1998), στο οποίο περιλαμβάνεται και η ποσοτική αλλά και η ποιοτική ανάλυση των ερευνητικών δεδομένων. Η ανάλυση του πλήθους των σωστών και λανθασμένων απαντήσεων των μαθητών στα προβλήματα είναι ποσοτική. Η ανάλυση του τρόπου επίλυσης των προβλημάτων και των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτηματολόγια είναι ποιοτική. Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων που αφορούν τις λύσεις των μαθητών, η παρουσίαση των αποτελεσμάτων έγινε συνολικά για το δείγμα των μαθητών αλλά χωρίστηκε και σε δύο υποκατηγορίες, αυτές των μαθητών Γυμνασίου και των μαθητών Λυκείου.

Μετά από τη συγκέντρωση των Φύλλων Εργασίας και Ερωτηματολογίων πάνω στα οποία εργάστηκαν οι μαθητές, έγινε η κωδικοποίησή τους, δίνοντας αντίστοιχα τους κωδικούς Γ1,Γ2,…,Γ8 για τους 8 μαθητές Γυμνασίου και Λ1,Λ2,…,Λ8 για τους 8 μαθητές Λυκείου. Έπειτα ξεκίνησε η ανάλυσή τους. Αρχικά κρίθηκε σκόπιμη η καταγραφή του πλήθους των σωστών και ολοκληρωμένων προβλημάτων κάθε μαθητή καθώς και η συχνότητά τους. Δηλαδή καταγράφηκε πόσοι μαθητές έλυσαν σωστά και τα 4 προβλήματα, πόσοι τα 3, πόσοι τα 2, πόσοι το 1 και πόσοι κανένα. Επίσης δημιουργήθηκε συγκριτικός πίνακας των παραπάνω δεδομένων ανά ηλικιακή εκπαιδευτική βαθμίδα (μαθητές Γυμνασίου και μαθητές Λυκείου). Στη συνέχεια διερευνήθηκε το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά. Πρωτίστως καταγράφηκαν οι επιδόσεις των μαθητών σε καθένα από τα τέσσερα προβλήματα. Για το λόγο αυτό, δημιουργήθηκε από την ερευνήτρια μια αυτοσχέδια κλίμακα μέτρησης επιδόσεων. Σε κάθε πρόβλημα που δεν υπήρχε καμία απάντηση δόθηκε η βαθμολογία 0. Σε κάθε πρόβλημα που δεν λύθηκε αλλά υπήρξε κάποια λανθασμένη προσπάθεια επίλυσης, δόθηκε η βαθμολογία 1. Σε κάθε πρόβλημα που προέκυψε μερικώς σωστή λύση (σωστή μεθοδολογία μέχρι κάποιο ικανοποιητικό σημείο κατά την κρίση της ερευνήτριας ή σωστή μεθοδολογία με λάθος αποτέλεσμα) δόθηκε η βαθμολογία 2. Τέλος για κάθε πρόβλημα που επιλύθηκε σωστά, δόθηκε η βαθμολογία 3. Επίσης επιχειρήθηκε να καταγραφεί και να παρουσιαστεί και μια ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων και των λαθών των μαθητών, εξετάζοντας και τον τρόπο επίλυσης που χρησιμοποίησαν, κατηγοριοποιώντας τον σε αλγεβρικό ή αριθμητικό. Τέλος για την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών σε κάθε πρόβλημα, δόθηκε ένας σχολιασμός της γενικότερης εικόνας τους σε σχέση και με τις αντίστοιχες απαντήσεις που έδωσαν στα ερωτηματολόγια.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που αφορούν τη σχέση τους με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλημάτων αλλά και το ενδιαφέρον τους για την επίλυση προβλημάτων, τα ιστορικά προβλήματα και την Ιστορία των Μαθηματικών.

5.2 Τα Προβλήματα Συνολικά

Τα αποτελέσματα που αφορούν το πλήθος των προβλημάτων που επιλύθηκαν σωστά από κάθε μαθητή Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και συνολικά όλου του δείγματος φαίνονται στον Πίνακα 3.

Πλήθος σωστών λύσεων προβλημάτων	Μαθητές Γυμνασίου		Μαθητές Λυκείου		Σύνολο Μαθητών	
	Συχνότητα	Σχετ. Συχν %	Συχνότητα	Σχετ. Συχν %	Συχνότητα	Σχετ. Συχν %
Κανένα (0)	6	75%	0	0%	6	37,5%
Ένα (1)	1	12,5%	2	25%	3	18,75%
Δύο (2)	1	12,5%	3	37,5%	4	25%
Τρία (3)	0	0	1	12,5%	1	6,25%
Τέσσερα (4)	0	0	2	25%	2	12,5%
Σύνολο	**8**	**100%**	**8**	**100%**	**16**	**100%**

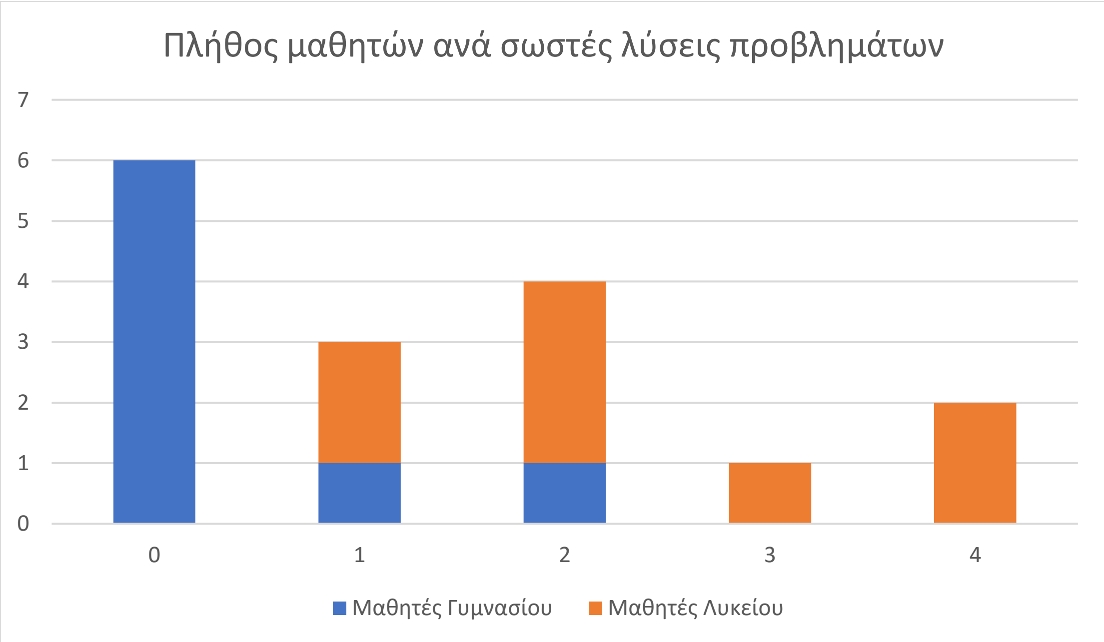
Πίνακας 3 Πλήθος σωστών λύσεων προβλημάτων

Συγκεκριμένα παρατηρούμε ότι:

- 6 από τους 16 μαθητές δεν έλυσαν σωστά κανένα πρόβλημα (ποσοστό 37,5%) και συγκεκριμένα οι μαθητές αυτοί φοιτούν όλοι στο Γυμνάσιο.
- 3 από τους 16 μαθητές έλυσαν σωστά μόνο το ένα από τα προβλήματα (ποσοστό 18,75%) και συγκεκριμένα 1 μαθητής Γυμνασίου και 2 Λυκείου.

- 4 από τους 16 μαθητές έλυσαν σωστά 2 προβλήματα (ποσοστό 25%) και μάλιστα 1 μαθητής Γυμνασίου και 3 Λυκείου.
- 1 από τους 16 μαθητές έλυσαν σωστά 3 προβλήματα (ποσοστό 6,25%) και μάλιστα πρόκειται για μαθητή Λυκείου.
- 2 από τους 16 μαθητές έλυσαν σωστά όλα τα προβλήματα (ποσοστό 12,5%) και πρόκειται για μαθητές Λυκείου.

Τα παραπάνω δεδομένα απεικονίζονται σχηματικά στο ακόλουθο ραβδόγραμμα (Διάγραμμα 1).



Διάγραμμα 1 - Πλήθος Σωστών Λύσεων Προβλημάτων

Από τα δεδομένα αυτά, είναι εμφανής η αποτυχία των μαθητών Γυμνασίου στην επίλυση των προβλημάτων αφού οι 6 από τους 8 δεν έλυσαν σωστά κανένα πρόβλημα, ένας μαθητής έλυσε σωστά ένα πρόβλημα και άλλος ένας δυο προβλήματα. Οι επιδόσεις των μαθητών Λυκείου είναι σαφώς βελτιωμένες σε σχέση με αυτές των μαθητών Γυμνασίου, αλλά το γεγονός ότι μόνο 3 από τους μαθητές κατάφεραν να λύσουν πάνω από 2 προβλήματα, καταδεικνύει επίσης αδυναμία στην επίλυση προβλημάτων.

5.3 Ανάλυση Απαντήσεων Μαθητών στο Πρόβλημα 1

Αναλυτικά παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην επίλυση του προβλήματος 1 «Τα άνθη του Λωτού».

Στον Πίνακα 4 φαίνονται οι απαντήσεις των μαθητών Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και του συνόλου του δείγματος των μαθητών. Έγινε κατηγοριοποίηση των απαντήσεων και δόθηκε η αντίστοιχη βαθμολογία της κλίμακας που κατασκευάστηκε.
Στο πρόβλημα αυτό, η μέση βαθμολογία των μαθητών Γυμνασίου ήταν 1,375 (με άριστα το 3), η μέση βαθμολογία των μαθητών Λυκείου ήταν 3 (με άριστα το 3), ενώ η μέση βαθμολογία για το σύνολό τους ήταν 2,19 (με άριστα το 3).

Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 1	Μαθητές Γυμνασίου		Μαθητές Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %
Καμία Απάντηση (0)	1	12,5%	0	0%	1	6,25%
Λανθασμένη Λύση (1)	5	62,5%	0	0%	5	31,25%
Μερικώς Σωστή Λύση (2)	0	0%	0	0%	0	0%
Σωστή Λύση (3)	2	25%	8	100%	10	62,5%
ΣΥΝΟΛΟ	**8**	**100%**	**8**	**100%**	**16**	**100%**

Πίνακας 4 Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 1

Αναφορικά με τους τρόπους επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και το σύνολό τους, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5. Στην συγκεκριμένη περίπτωση εξετάζουμε μόνο τους τρόπους που χρησιμοποίησαν οι μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν το πρόβλημα (αλγεβρική ή αριθμητική επίλυση) και όχι την επιτυχία ή την αποτυχία τους να επιλύσουν σωστά το πρόβλημα.

Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 1	Μαθητές Γυμνασίου	Μαθητές Λυκείου	Σύνολο Μαθητών
Καμία Απάντηση	1	0	1
Χρήση Αριθμητικής	3	0	3
Χρήση Άλγεβρας	4	8	12
Σύνολο	**8**	**8**	**16**

Πίνακας 5 Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 1

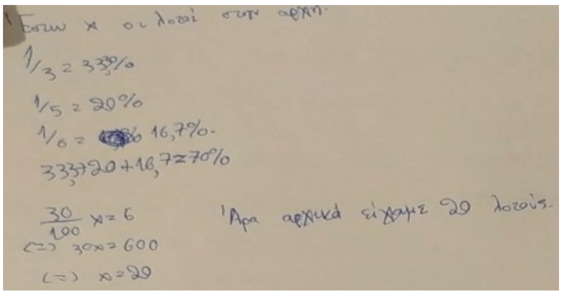
Η μορφή του προβλήματος 1 είναι γνώριμη στους μαθητές καθώς στο κεφάλαιο των εξισώσεων 1^{ου} βαθμού που διδάσκεται στη Β Γυμνασίου, καλούνται να λύσουν παρόμοιας μορφής προβλήματα αλγεβρικά, θέτοντας ως χ τον άγνωστο (εδώ τα άνθη του λωτού) και κατασκευάζοντας και λύνοντας την εξίσωση να βρουν την απάντηση. Αυτός είναι και ο τρόπος που χρησιμοποίησαν όλοι οι μαθητές οι οποίοι έλυσαν σωστά το πρόβλημα.

Για να παρουσιαστεί μια σαφέστερη εικόνα αναφορικά με την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο 1ο πρόβλημα, δημιουργήθηκε μια κατηγοριοποίησή τους, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 6).

Επίλυση Προβλήματος 1	Απόλυτη και σχετική συχνότητα (%) απαντήσεων μαθητών		
	Γυμνασίου	Λυκείου	Σύνολο
Επιτυχία με Εξίσωση	2 (25%)	8 (100%)	10 (62,5%)
Επιτυχία με Αριθμητική	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Σωστός σχηματισμός εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Λάθος σχηματισμός εξίσωσης	2 (25%)	0 (0%)	2 (12,5%)
Αποτυχία με Αριθμητική	3 (37,5%)	0 (0%)	3 (18,75%)
Καμία απάντηση	1 (12,5%)	0 (0%)	1 (6,25%)
Τυχαία απάντηση	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
ΣΥΝΟΛΟ	**8 (100%)**	**8 (100%)**	**16 (100%)**

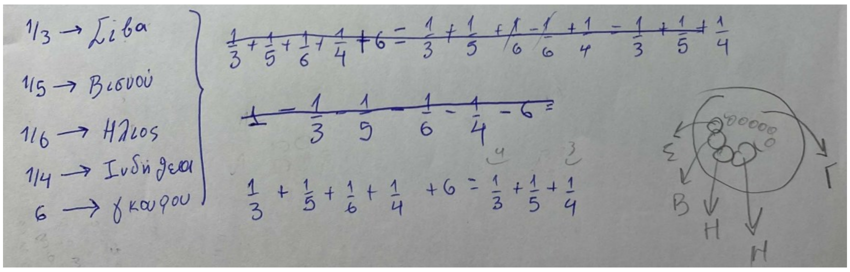
Πίνακας 6 Επίλυση Προβλήματος 1 (ποιοτική ανάλυση)

Παρακάτω δίνονται κάποιες λανθασμένες προσπάθειες επίλυσης μαθητών. Αρχικά στην Εικόνα 5 παρατηρούμε μια λανθασμένη κατασκευή εξίσωσης κατά την επίλυση με χρήση άλγεβρας, όπου ο μαθητής Γ1 δεν έλαβε υπ' όψη του όλα τα δεδομένα (δεν χρησιμοποίησε το ¼ των λωτών που δίνεται στην Ινδή θεά). Αξιοσημείωτη είναι και η σκέψη του για τη μετατροπή των κλασμάτων σε ποσοστά και η χρήση τους στην εξίσωση.



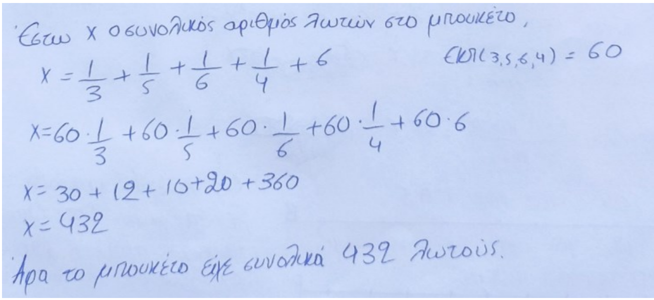
Εικόνα 5 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ1 στο πρόβλημα 1

Στην Εικόνα 6 παρατηρούμε λανθασμένη επίλυση με χρήση αριθμητικής καθώς ο μαθητής Γ5 προσπάθησε να εκτελέσει πράξεις με τα κλάσματα που δίνονται στην εκφώνηση, με εμφανή δυσκολία στις πράξεις, αλλά δεν κατάφερε να φτάσει σε κάποιο αποτέλεσμα.



Εικόνα 6 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ5 στο πρόβλημα 1

Μια ακόμα λανθασμένη προσπάθεια με χρήση άλγεβρας φαίνεται στην Εικόνα 7. Ο μαθητής κατασκεύασε λανθασμένη εξίσωση την οποία έλυσε επίσης λανθασμένα καθώς δεν πολλαπλασίασε και τα δυο μέλη της εξίσωσης με τον αριθμό 60 και έκανε υπολογιστικά λάθη.



Εικόνα 7 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ4 στο πρόβλημα 1

Στην ενότητα του ερωτηματολογίου που αφορούσε το πρόβλημα 1, όλοι οι μαθητές απάντησαν πως κατανόησαν το πρόβλημα, μπόρεσαν να διακρίνουν δεδομένα και ζητούμενα και να σκεφτούν στρατηγικές επίλυσης. 2 μαθητές απάντησαν πως δυσκολεύτηκαν με τις απαιτούμενες πράξεις, ενώ στην πραγματικότητα βλέπουμε πως δυσκολεύτηκαν περισσότεροι αφού έγιναν αρκετά υπολογιστικά λάθη. Παρ’ όλο που οι μαθητές που έλυσαν το πρόβλημα δηλώνουν πως πιστεύουν ότι βρήκαν τη λύση του, κανένας δεν έχει εκτελέσει κάποια μορφή επαλήθευσης. Τέλος για την ομοιότητα του προβλήματος 1 με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει στο σχολείο, 5 από τους 8 μαθητές Γυμνασίου και 7 από τους 8 μαθητές Λυκείου απάντησαν πως έχουν αντιμετωπίσει παρόμοια προβλήματα. Οι τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν είναι κυρίως αλγεβρικοί και έγιναν προσπάθειες για αριθμητική επίλυση χωρίς όμως επιτυχία. Οι μαθητές επέλεξαν το σύγχρονο τρόπο αλγεβρικής επίλυσης με κατασκευή εξίσωσης που διδάσκονται στο σχολείο και καμία από τις λύσεις δεν προσεγγίζει την πρωτότυπη λύση του Bhaskara.

5.4 Ανάλυση Απαντήσεων Μαθητών στο Πρόβλημα 2

Οι απαντήσεις των μαθητών στην επίλυση του προβλήματος 2 «Πρόβλημα Δεξαμενής» παρουσιάζονται παρακάτω. Αρχικά έγινε κατηγοριοποίηση των απαντήσεων και δόθηκε η αντίστοιχη βαθμολογία της κλίμακας που κατασκευάστηκε για τους μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και το σύνολό τους όπως φαίνεται στον Πίνακα 7.

Στο πρόβλημα 2, η μέση βαθμολογία (με άριστα το 3) των μαθητών Γυμνασίου ήταν 0,875 , των μαθητών Λυκείου ήταν 1,75 και του συνόλου τους 1,3125.

Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 2	Μαθητές Γυμνασίου		Μαθητές Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %
Καμία Απάντηση (0)	1	12,5%	2	25%	3	18,75%
Λανθασμένη Λύση (1)	7	87,5%	2	25%	9	56,25%
Μερικώς Σωστή Λύση (2)	0	0%	0	0%	0	0%
Σωστή Λύση (3)	0	0%	4	50%	4	25%
ΣΥΝΟΛΟ	8	100%	8	100%	16	100%

Πίνακας 7 Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 2

Αναφορικά με τους τρόπους επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και το σύνολό τους, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 8.

Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 2	Μαθητές Γυμνασίου	Μαθητές Λυκείου	Σύνολο Μαθητών
Καμία Απάντηση	1	2	3
Χρήση Αριθμητικής	7	4	11
Χρήση Άλγεβρας	0	2	2
Σύνολο	**8**	**8**	**16**

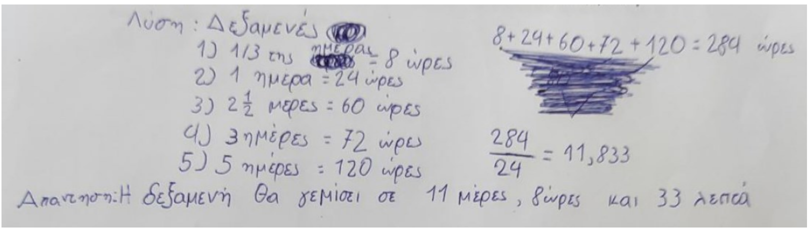
Πίνακας 8 Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 2

Ο Πίνακας 9 περιέχει την κατηγοριοποίηση που θεσπίστηκε για την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών.

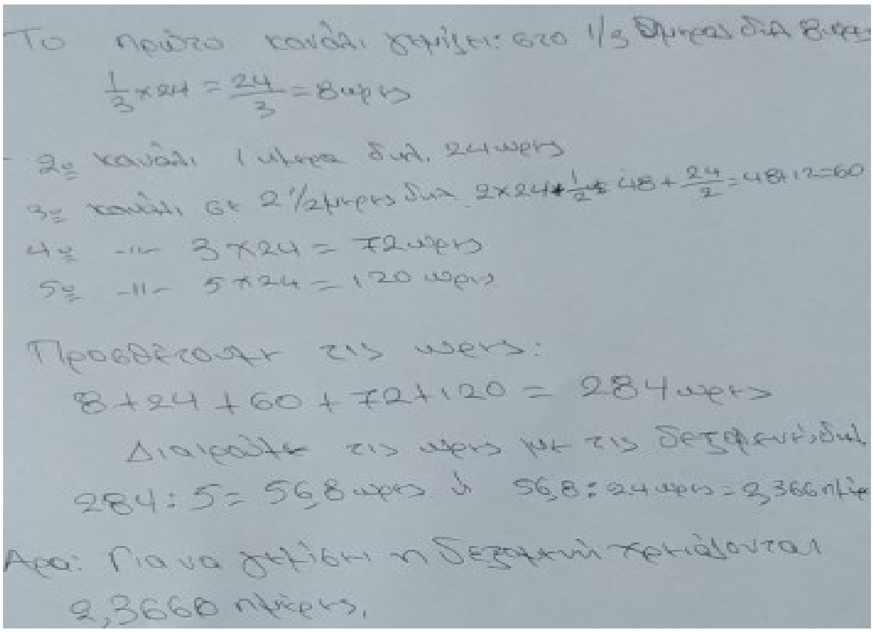
Επίλυση Προβλήματος 2	Απόλυτη και σχετική συχνότητα (%) απαντήσεων μαθητών		
	Γυμνασίου	Λυκείου	Σύνολο
Επιτυχία με Εξίσωση	0 (0%)	2 (25%)	2 (12,5%)
Επιτυχία με Αριθμητική	0 (0%)	2 (25%)	2 (12,5%)
Σωστός σχηματισμός εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Λάθος σχηματισμός εξίσωσης	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Αποτυχία με Αριθμητική	7 (87,5)	2 (25%)	9 (56,25%)
Καμία απάντηση	1 (12,5%)	1 (12,5%)	2 (12,5%)
Τυχαία απάντηση	0 (0%)	1 (12,5%)	1 (6,25%)
ΣΥΝΟΛΟ	**8 (100%)**	**8 (100%)**	**16 (100%)**

Πίνακας 9 Επίλυση Προβλήματος 2 (ποιοτική ανάλυση)

Κανένας από τους μαθητές Γυμνασίου δεν κατάφερε να επιλύσει σωστά το πρόβλημα 2, ενώ όλες οι προσπάθειες έγιναν με χρήση αριθμητικής. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε κάποιες από αυτές στις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 8 και Εικόνα 9) όπου φαίνεται πως οι μαθητές Γ7 και Γ1 απλώς έκαναν μετατροπή σε ώρες και πρόσθεσαν τους χρόνους που γεμίζει κάθε κανάλι τη δεξαμενή. Στην Εικόνα 4 δεν σκέφτηκε ο μαθητής Γ7 να διαιρέσει με το πλήθος των φορών που έχει γεμίσει η δεξαμενή, ενώ στην Εικόνα 5, ο Γ1 διαίρεσε μεν αλλά με λάθος αριθμό αφού υπέθεσε (λανθασμένα) ότι η δεξαμενή θα έχει γεμίσει 5 φορές (προφανώς λόγω των 5 καναλιών που τη γεμίζουν).



Εικόνα 8 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ7 στο πρόβλημα 2



Το πρώτο κανάλι γεμίζει στο 1/3 ημέρας δηλ. 8 ώρες

$\frac{1}{3} \times 24 = \frac{24}{3} = 8$ ώρες

2ο κανάλι 1 ημέρα δηλ. 24 ώρες

3ο κανάλι σε 2 1/2 μέρες δηλ $2 \times 24 + \frac{1}{2} = 48 + \frac{24}{2} = 48 + 12 = 60$

4ο -//- $3 \times 24 = 72$ ώρες

5ο -//- $5 \times 24 = 120$ ώρες

Προσθέτουμε τις ώρες:

$8 + 24 + 60 + 72 + 120 = 284$ ώρες

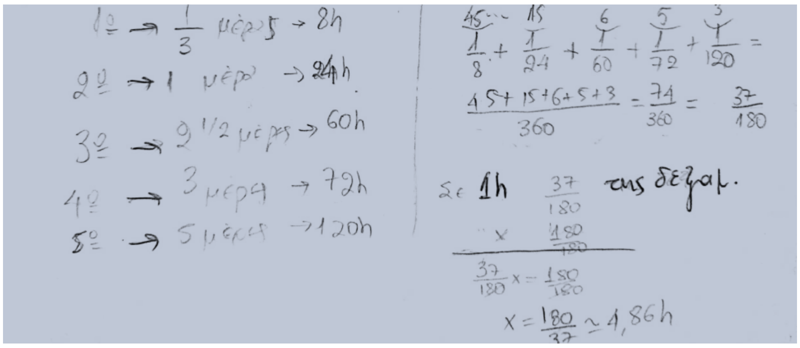
Διαιρούμε τις ώρες με τις δεξαμενές

$284 : 5 = 56{,}8$ ώρες ή $56{,}8 : 24$ ώρες $= 2{,}366$ ημέρες

Άρα: Για να γεμίσει η δεξαμενή χρειάζονται 2,3660 ημέρες.

Εικόνα 9 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ1 στο Πρόβλημα 2

Το πρόβλημα επιλύθηκε σωστά από μαθητές Λυκείου, με χρήση αριθμητικής αλλά και άλγεβρας. Στις εικόνες 10 και 11 παρουσιάζονται αντίστοιχα οι λύσεις που έδωσαν οι μαθητές αυτοί (Λ7, Λ2).



1ο → $\frac{1}{3}$ μέρας → 8h

2ο → 1 μέρα → 24h

3ο → 2 1/2 μέρες → 60h

4ο → 3 μέρα → 72h

5ο → 5 μέρες → 120h

$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72} + \frac{1}{120} =$

$\frac{45+15+6+5+3}{360} = \frac{74}{360} = \frac{37}{180}$

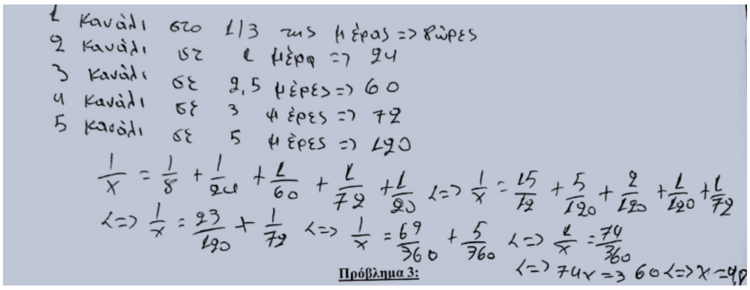
Σε 1h $\frac{37}{180}$ της δεξαμ.

x $\frac{180}{180}$

$\frac{37}{180} x = \frac{180}{180}$

$x = \frac{180}{37} \simeq 4{,}86h$

Εικόνα 10 Σωστή Λύση Μαθητή Λ7 στο Πρόβλημα 2 (χρήση αριθμητικής)



1 κανάλι στο 1/3 της μέρας => 8ώρες

2 κανάλι σε 1 μέρα => 24

3 κανάλι σε 2,5 μέρες => 60

4 κανάλι σε 3 μέρες => 72

5 κανάλι σε 5 μέρες => 120

$\frac{1}{x} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{60} + \frac{1}{72} + \frac{1}{120} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{15}{72} + \frac{5}{120} + \frac{2}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{72}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{23}{120} + \frac{1}{72} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{69}{360} + \frac{5}{360} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{74}{360}$

Πρόβλημα 3:

$\Leftrightarrow 74x = 360 \Leftrightarrow x = 4{,}8$

Εικόνα 11 Σωστή Λύση Μαθητή Λ2 στο Πρόβλημα 2 (χρήση άλγεβρας)

Στην ενότητα του ερωτηματολογίου που αφορούσε το πρόβλημα 2, 6 από τους 8 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν ότι κατανόησαν το πρόβλημα και μπόρεσαν να σκεφτούν στρατηγικές επίλυσης, αλλά όλοι (8 από τους 8) απάντησαν ότι μπόρεσαν να διακρίνουν δεδομένα και ζητούμενα. Παρατηρείται λοιπόν μια διαφοροποίηση για το τι θεωρούν οι μαθητές κατανόηση του προβλήματος αυτού. Όλοι οι μαθητές Λυκείου απάντησαν πως κατανόησαν το πρόβλημα και διέκριναν δεδομένα και ζητούμενα αλλά 6 από τους 8 σκέφτηκαν στρατηγικές επίλυσης. 2 μαθητές Γυμνασίου και 1 μαθητής Λυκείου απάντησαν πως δυσκολεύτηκαν με τις απαιτούμενες πράξεις. Και στο πρόβλημα αυτό, κανένας μαθητής δεν έχει εκτελέσει κάποια μορφή επαλήθευσης. Τέλος για την ομοιότητα του προβλήματος 2 με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει στο σχολείο, 2 από τους 8 μαθητές Γυμνασίου και 5 από τους 8 μαθητές Λυκείου απάντησαν πως έχουν αντιμετωπίσει παρόμοια προβλήματα. Οι τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του προβλήματος αυτού είναι στην πλειοψηφία τους αριθμητικοί, δεν προσεγγίζουν όμως την Κινεζική μέθοδο λύσης αλλά κινούνται στα πλαίσια της εναλλακτικής μεθόδου των συγγραφέων του προβλήματος (χωρίς πολλές επιτυχίες), κάνοντας όμως την μετατροπή των ημερών σε ώρες.

5.5 Ανάλυση Απαντήσεων Μαθητών στο Πρόβλημα 3

Οι απαντήσεις των μαθητών στην επίλυση του προβλήματος 3 «Πρόβλημα Συνάντησης Αγγελιοφόρων» παρουσιάζονται παρακάτω. Έγινε και πάλι κατηγοριοποίηση των απαντήσεων και δόθηκε η αντίστοιχη βαθμολογία της κλίμακας που κατασκευάστηκε. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 10.

Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 3	Μαθητές Γυμνασίου		Μαθητές Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %
Καμία Απάντηση (0)	5	62,5%	0	0%	5	31,25%
Λανθασμένη Λύση (1)	3	37,5%	4	50%	7	43,75%
Μερικώς Σωστή Λύση (2)	0	0%	1	12,5%	1	6,25%
Σωστή Λύση (3)	0	0%	3	37,5%	3	18,75%
ΣΥΝΟΛΟ	**8**	**100%**	**8**	**100%**	**16**	**100%**

Πίνακας 10 Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 3

Στο πρόβλημα 3, η μέση βαθμολογία (με άριστα το 3) των μαθητών Γυμνασίου ήταν 0,375 , των μαθητών Λυκείου ήταν 1,875 και του συνόλου τους 1,125.

Αναφορικά με τους τρόπους επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και το σύνολό τους, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 11.

Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 3	Μαθητές Γυμνασίου	Μαθητές Λυκείου	Σύνολο Μαθητών
Καμία Απάντηση	5	0	5
Χρήση Αριθμητικής	3	3	6
Χρήση Άλγεβρας	0	5	5
Σύνολο	**8**	**8**	**16**

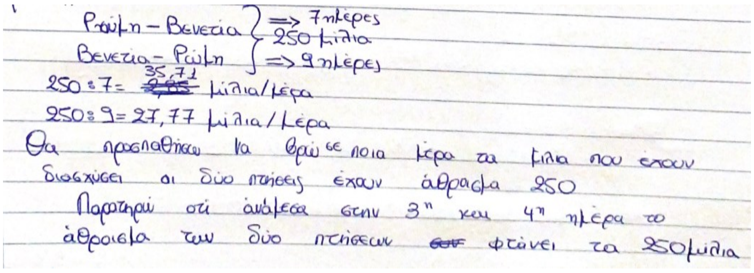
Πίνακας 11 Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 3

Για να παρουσιαστεί μια σαφέστερη εικόνα αναφορικά με την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο 3º πρόβλημα, δημιουργήθηκε μια κατηγοριοποίησή τους, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 12).

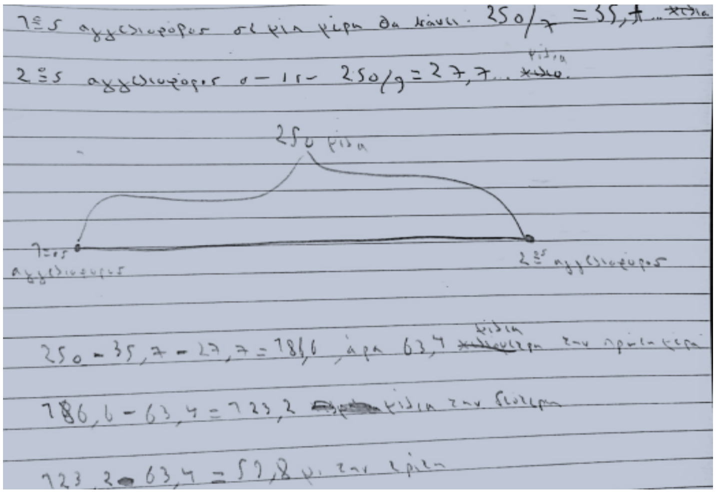
Επίλυση Προβλήματος 3	Απόλυτη και σχετική συχνότητα (%) απαντήσεων μαθητών		
	Γυμνασίου	Λυκείου	Σύνολο
Επιτυχία με Εξίσωση	0 (0%)	3 (37,5%)	3 (18,75%)
Επιτυχία με Αριθμητική	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Σωστός σχηματισμός εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	0 (0%)	1 (12,5%)	1 (6,25%)
Λάθος σχηματισμός εξίσωσης	0 (0%)	1 (12,5%)	1 (6,25%)
Αποτυχία με Αριθμητική	3 (37,5%)	3 (37,5%)	6 (37,5%)
Καμία απάντηση	5 (62,5%)	0 (0%)	5 (31,25%)
Τυχαία απάντηση	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
ΣΥΝΟΛΟ	**8 (100%)**	**8 (100%)**	**16 (100%)**

Πίνακας 12 Επίλυση προβλήματος 3 (ποιοτική ανάλυση)

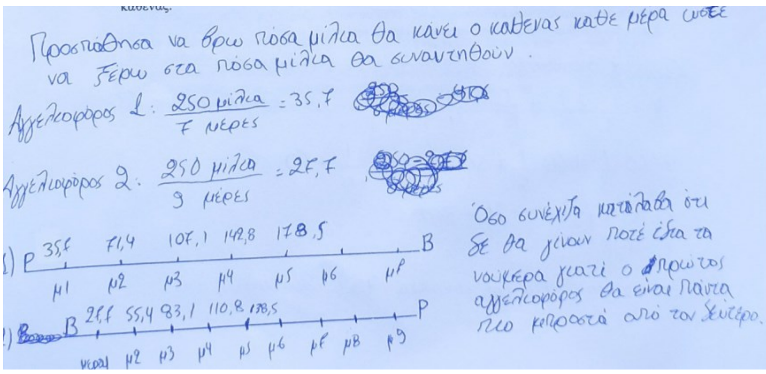
Τόσο οι μαθητές Γυμνασίου αλλά και οι μαθητές Λυκείου που προσπάθησαν να επιλύσουν το πρόβλημα 3 με αριθμητικό τρόπο, προσπάθησαν να βρουν την ταχύτητα του κάθε αγγελιοφόρου (μίλια/μέρα) και χρησιμοποίησαν δοκιμές για να προσεγγίσουν το χρόνο συνάντησής τους όπως φαίνεται και στις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 12, Εικόνα 13, Εικόνα 14). Στην εικόνα 14 επίσης φαίνεται και ένα «εννοιολογικό μπέρδεμα», δηλαδή μια έλλειψη κατανόησης του προβλήματος, καθώς ο μαθητής Γ4 αναφέρει πως ο πρώτος αγγελιοφόρος θα είναι πάντα πιο μπροστά από τον δεύτερο.



Εικόνα 12 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Α1 στο πρόβλημα 3

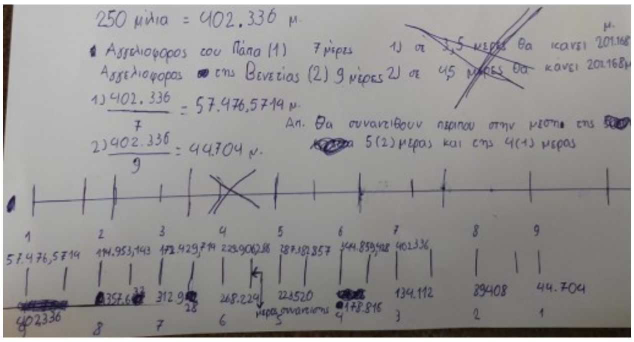


Εικόνα 13 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Α6 στο πρόβλημα 3



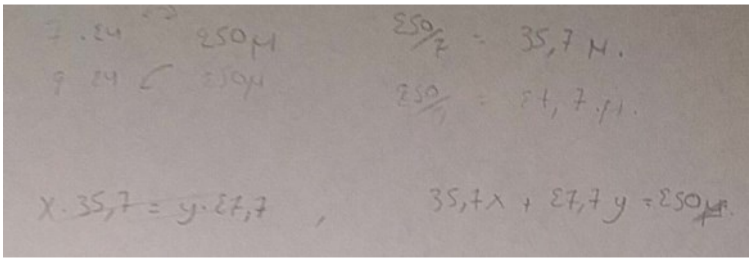
Εικόνα 14 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ4 στο πρόβλημα 3

Με δοκιμές και χρήση σχήματος προσπάθησε να επιλύσει το πρόβλημα και ο μαθητής Γυμνασίου Γ7, κάνοντας μάλιστα και με μετατροπή των μιλίων σε μέτρα, πράγμα που δε ζητήθηκε και ίσως μπέρδεψε το μαθητή καθώς έκανε δυσκολότερο το πρόβλημα και τις απαιτούμενες πράξεις πιο πολύπλοκες (Εικόνα 15).



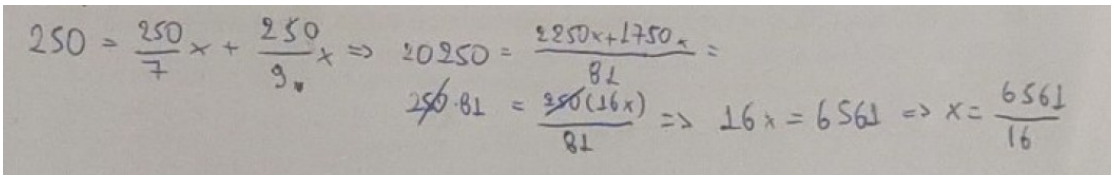
Εικόνα 15 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ7 στο πρόβλημα 3

Στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 16) ο μαθητής Λ5 προσπάθησε να επιλύσει το πρόβλημα βρίσκοντας την ταχύτητα του κάθε αγγελιοφόρου και σχηματίζοντας μια εξίσωση που θεωρείται λανθασμένη αφού δεν προσδιορίζει τις έννοιες που συμβολίζονται με τις μεταβλητές x και y και έτσι δεν μπόρεσε να την επιλύσει.



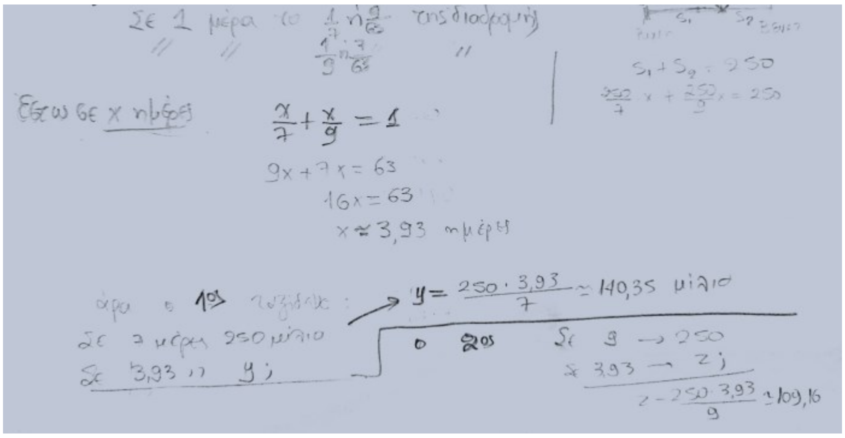
Εικόνα 16 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Λ5 στο πρόβλημα 3

Στην Εικόνα 17 φαίνεται ο σωστός σχηματισμός εξίσωσης αλλά η λάθος επίλυσή της από το μαθητή Λ4.



Εικόνα 17 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Λ4 στο πρόβλημα 3

Τέλος παρουσιάζεται και η σωστή επίλυση του προβλήματος 3 από τον μαθητή Λ7 με αλγεβρικό τρόπο (Εικόνα 18).



Εικόνα 18 Σωστή Λύση μαθητή Λ7 στο πρόβλημα 3 (αλγεβρικός τρόπος)

Στην ενότητα του ερωτηματολογίου που αφορούσε το πρόβλημα 3, 7 από τους 8 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν ότι κατανόησαν το πρόβλημα, αλλά όλοι (8 από τους 8) απάντησαν ότι μπόρεσαν να διακρίνουν δεδομένα και ζητούμενα. Κι εδώ παρατηρείται μια διαφοροποίηση για το τι θεωρούν οι μαθητές κατανόηση του προβλήματος. 3 από τους 5 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν ότι σκέφτηκαν στρατηγικές επίλυσης ενώ 4 δυσκολεύτηκαν με τις απαιτούμενες πράξεις. Όλοι οι μαθητές Λυκείου απάντησαν πως κατανόησαν το πρόβλημα και διέκριναν δεδομένα και ζητούμενα και 7 από τους 8 σκέφτηκαν στρατηγικές επίλυσης. Και στο πρόβλημα αυτό, κανένας μαθητής δεν έχει εκτελέσει κάποια μορφή επαλήθευσης. Τέλος για την ομοιότητα του προβλήματος 3 με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει στο σχολείο, 3 από τους 8 μαθητές Γυμνασίου και 3 από τους 8 μαθητές Λυκείου απάντησαν πως έχουν αντιμετωπίσει παρόμοια προβλήματα. Οι τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του προβλήματος αυτού είναι μοιρασμένοι σε αλγεβρικούς και αριθμητικούς, ενώ κατά την αριθμητική επίλυση αρκετοί μαθητές προσπάθησαν να προσεγγίσουν τη λύση με δοκιμές. Προφανώς κανένας από τους μαθητές δεν χρησιμοποίησε τον πρακτικό περιγραφικό τρόπο που αναφέρεται ως πρωτότυπη λύση του προβλήματος στην αριθμητική του Τρεβίζο.

5.6 Ανάλυση Απαντήσεων Μαθητών στο Πρόβλημα 4

Τέλος παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στην επίλυση του προβλήματος 4 «Τα μήλα και οι 7 πόρτες». Έγινε και πάλι η κατηγοριοποίηση των απαντήσεων για τους μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου και το σύνολό τους και δόθηκε η αντίστοιχη βαθμολογία της κλίμακας που κατασκευάστηκε, όπως φαίνεται στον Πίνακα 13.

Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 4	Μαθητές Γυμνασίου		Μαθητές Λυκείου		Σύνολο	
	Συχν.	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %	Συχν	Σχετ. Συχν %
Καμία Απάντηση (0)	3	37,5%	1	12,5%	4	25%
Λανθασμένη Λύση (1)	4	50%	1	12,5%	5	31,25%
Μερικώς Σωστή Λύση (2)	0	0%	2	25%	2	12,5%
Σωστή Λύση (3)	1	12,5%	4	50%	5	31,25%
ΣΥΝΟΛΟ	**8**	**100%**	**8**	**100%**	**16**	**100%**

Πίνακας 13 Απαντήσεις Μαθητών στο Πρόβλημα 4

Η μέση βαθμολογία των μαθητών στο πρόβλημα 4 με άριστα το 3 ήταν 0,875 για τους μαθητές Γυμνασίου, 2,125 για τους μαθητές Λυκείου και 1,5 για το σύνολό τους.

Αναφορικά με τους τρόπους επίλυσης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές Γυμνασίου, Λυκείου αλλά και το σύνολό τους, τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πίνακα 14.

Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 4	Μαθητές Γυμνασίου	Μαθητές Λυκείου	Σύνολο Μαθητών
Καμία Απάντηση	3	1	4
Χρήση Αριθμητικής	2	0	2
Χρήση Άλγεβρας	3	7	10
Σύνολο	**8**	**8**	**16**

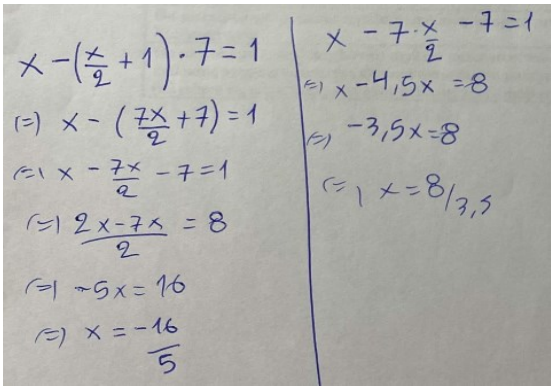
Πίνακας 14 Τρόποι Επίλυσης Προβλήματος 4

Για να παρουσιαστεί μια σαφέστερη εικόνα αναφορικά με την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στο $4^{ο}$ πρόβλημα, δημιουργήθηκε μια κατηγοριοποίησή τους, όπως φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 15).

Επίλυση Προβλήματος 4	Απόλυτη και σχετική συχνότητα (%) απαντήσεων μαθητών		
	Γυμνασίου	Λυκείου	Σύνολο
Επιτυχία με Εξίσωση	0 (0%)	4 (50%)	4 (25%)
Επιτυχία με Αριθμητική	1 (12,5)	0 (0%)	1 (6,25%)
Σωστός σχηματισμός εξίσωσης αλλά λάθος αποτέλεσμα	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Λάθος σχηματισμός εξίσωσης	3 (37,5%)	3 (37,5%)	6 (37,5%)
Αποτυχία με Αριθμητική	1 (12,5%)	0 (0%)	1 (6,25%)
Καμία απάντηση	3 (37,5%)	1 (12,5%)	4 (25%)
Τυχαία απάντηση	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
ΣΥΝΟΛΟ	**8 (100%)**	**8 (100%)**	**16 (100%)**

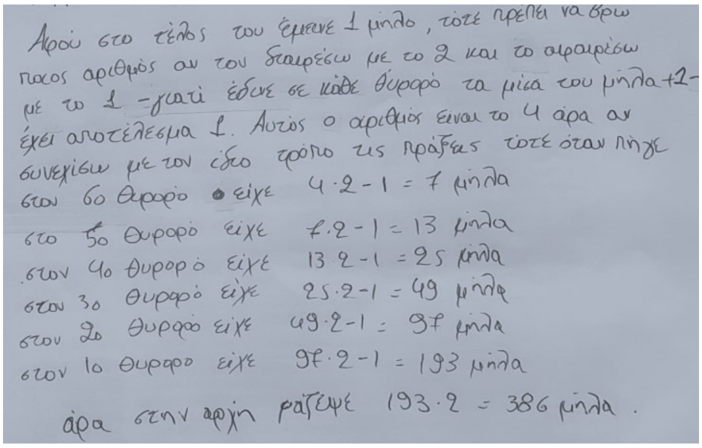
Πίνακας 15 Επίλυση Προβλήματος 4 (ποιοτική ανάλυση)

Αναλυτικότερα, κανένας μαθητής Γυμνασίου δεν έλυσε σωστά το πρόβλημα αυτό με αλγεβρικό τρόπο ενώ έγιναν προσπάθειες όπως φαίνεται στη λύση που έδωσε ο μαθητής Γ5 (Εικόνα 19). Βασική παρανόηση στη λύση του μαθητή αυτού, πέρα κι από την εμφανή δυσκολία και στη λανθασμένη επίλυση της εξίσωσης, είναι η λανθασμένη κατασκευή της καθώς θεώρησε ότι η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται 7 φορές αλλά αγνόησε ότι αλλάζει ο αριθμός των μήλων που έχει ο άντρας συναντώντας κάθε θυρωρό.



Εικόνα 19 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ5 στο πρόβλημα 4

Επίσης στην Εικόνα 20 φαίνεται η λανθασμένη επίλυση του μαθητή Γ4 με αριθμητικό τρόπο, όπου ανέπτυξε ένα μοτίβο υπολογισμών το οποίο όμως δεν είναι σωστό και δεν βρήκε τη λύση του προβλήματος.



Αφού στο τέλος του έμεινε 1 μήλο, τότε πρέπει να βρω ποιος αριθμός αν τον διαιρέσω με το 2 και το αφαιρέσω με το 1 -γιατί έδινε σε κάθε θυρωρό τα μισά του μήλα +1- έχει αποτέλεσμα 1. Αυτός ο αριθμός είναι το 4 άρα αν συνεχίσω με τον ίδιο τρόπο τις πράξεις τότε όταν πήγε

στον 6ο θυρωρό είχε $4 \cdot 2 - 1 = 7$ μήλα

στο 5ο θυρωρό είχε $7 \cdot 2 - 1 = 13$ μήλα

στον 4ο θυρωρό είχε $13 \cdot 2 - 1 = 25$ μήλα

στον 3ο θυρωρό είχε $25 \cdot 2 - 1 = 49$ μήλα

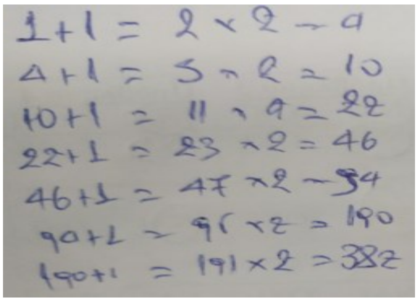
στον 2ο θυρωρό είχε $49 \cdot 2 - 1 = 97$ μήλα

στον 1ο θυρωρό είχε $97 \cdot 2 - 1 = 193$ μήλα

άρα στην αρχή μάζεψε $193 \cdot 2 = 386$ μήλα.

Εικόνα 20 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Γ4 στο πρόβλημα 4

Ο μαθητής Γυμνασίου Γ8 που έλυσε το πρόβλημα 4 με αριθμητικό τρόπο, κατέγραψε απλά τους υπολογισμούς του (σχήμα υπολογισμών) όπως φαίνεται στην Εικόνα 21 χωρίς όμως να εξηγήσει περεταίρω το σκεπτικό του.



$1+1 = 2 \times 2 = 4$

$4+1 = 5 \times 2 = 10$

$10+1 = 11 \times 2 = 22$

$22+1 = 23 \times 2 = 46$

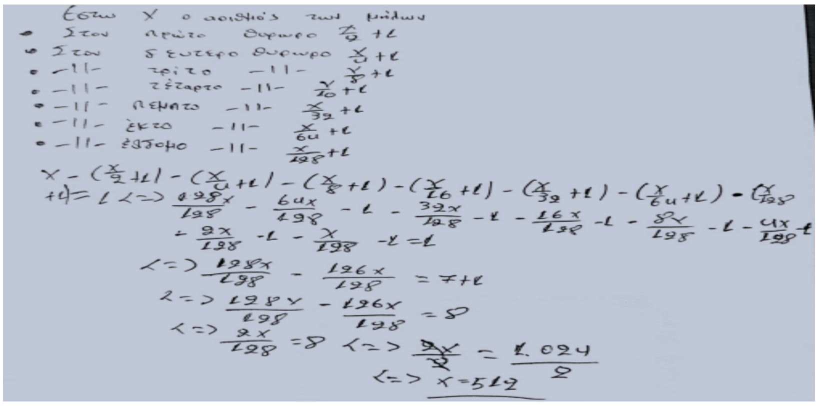
$46+1 = 47 \times 2 = 94$

$94+1 = 95 \times 2 = 190$

$190+1 = 191 \times 2 = 382$

Εικόνα 21 Σωστή Λύση Μαθητή Γ8 στο πρόβλημα 4 (αριθμητικός τρόπος)

Όσοι μαθητές Λυκείου προσπάθησαν να λύσουν το πρόβλημα 4, το έκαναν με αλγεβρικό τρόπο. Όσοι έκαναν λάθος, χρησιμοποίησαν λάθος εξίσωση όπως φαίνεται παρακάτω στην Εικόνα 22.



Έστω x ο αριθμός των μήλων

- Στον πρώτο θυρωρό $\frac{x}{2}+1$
- Στον δεύτερο θυρωρό $\frac{x}{4}+1$
- -ll- τρίτο -ll- $\frac{x}{8}+1$
- -ll- τέταρτο -ll- $\frac{x}{16}+1$
- -ll- πέμπτο -ll- $\frac{x}{32}+1$
- -ll- έκτο -ll- $\frac{x}{64}+1$
- -ll- έβδομο -ll- $\frac{x}{128}+1$

$x - (\frac{x}{2}+1) - (\frac{x}{4}+1) - (\frac{x}{8}+1) - (\frac{x}{16}+1) - (\frac{x}{32}+1) - (\frac{x}{64}+1) - (\frac{x}{128}+1) = 1 \Leftrightarrow \frac{128x}{128} - \frac{64x}{128} - 1 - \frac{32x}{128} - 1 - \frac{16x}{128} - 1 - \frac{8x}{128} - 1 - \frac{4x}{128} - 1 - \frac{2x}{128} - 1 - \frac{x}{128} - 1 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{128x}{128} - \frac{126x}{128} = 7+1$

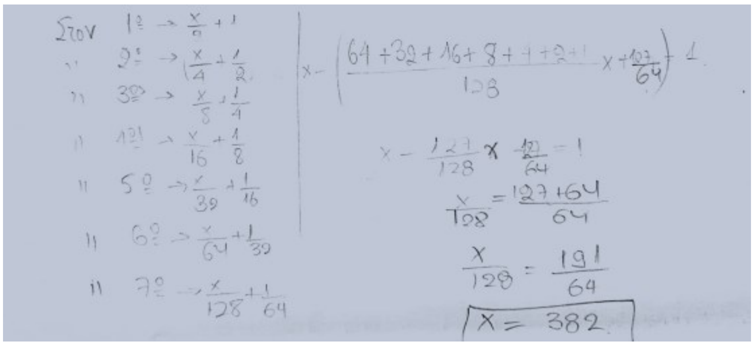
$\Leftrightarrow \frac{128x}{128} - \frac{126x}{128} = 8$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{128} = 8 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{1.024}{2}$

$\Leftrightarrow x = 512$

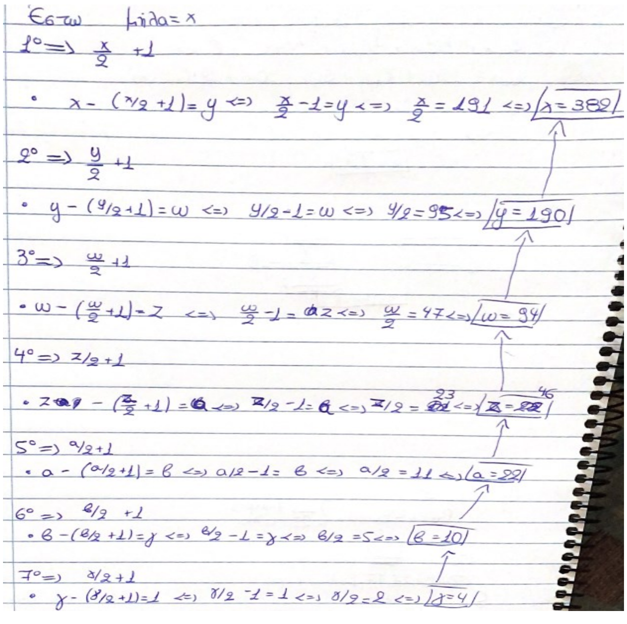
Εικόνα 22 Λανθασμένη Λύση Μαθητή Λ2 στο πρόβλημα 4 (λάθος εξίσωση)

Οι τρόποι που χρησιμοποίησαν οι μαθητές Λυκείου που έλυσαν σωστά το πρόβλημα 4 φαίνονται στις εικόνες 23 και 24. Στην Εικόνα 23 ο μαθητής Λ7 αξιοποίησε κλιμακωτά τα δεδομένα και κατέληξε στην εξίσωση την οποία έλυσε σωστά.



Εικόνα 23 Σωστή Λύση Μαθητή Λ7 στο πρόβλημα 4

Παρόμοιος είναι και ο τρόπος του μαθητή Λ1 όπως φαίνεται στην Εικόνα 24, που κατασκεύασε 7 εξισώσεις (χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεταβλητές) και έπειτα έλυσε από την τελευταία προς την πρώτη εξίσωση βρίσκοντας τους βοηθητικούς αγνώστους (y, ω, z, α, β, γ) και έτσι κατέληξε στον ζητούμενο αριθμό μήλων (x).



Εικόνα 24 Σωστή Λύση Μαθητή Λ1 στο πρόβλημα 4

Στην ενότητα του ερωτηματολογίου που αφορούσε το πρόβλημα 4, 6 από τους 8 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν ότι κατανόησαν το πρόβλημα και μπόρεσαν να διακρίνουν δεδομένα και ζητούμενα όμως 4 από τους 8 μπόρεσαν να σκεφτούν στρατηγικές επίλυσης και 4 από τους 8 δυσκολεύτηκαν στις απαιτούμενες πράξεις. Και πάλι όλοι οι μαθητές Λυκείου απάντησαν πως κατανόησαν το πρόβλημα και διέκριναν δεδομένα και ζητούμενα και 7 από τους 8 σκέφτηκαν στρατηγικές επίλυσης, με τους 4 από αυτούς να δυσκολεύονται στις απαιτούμενες πράξεις. Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα, έτσι και σε αυτό, κανένας μαθητής δεν έχει προσπαθήσει να παρουσιάσει κάποια μορφή επαλήθευσης, παρά το γεγονός ότι 2 μαθητές Γυμνασίου και 5 Λυκείου πιστεύουν πως βρήκαν τη λύση του. Τέλος για την ομοιότητα του προβλήματος 4 με προβλήματα που έχουν αντιμετωπίσει στο σχολείο, όλοι οι μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου απάντησαν πως δεν έχουν αντιμετωπίσει παρόμοια προβλήματα. Οι τρόποι που χρησιμοποιήθηκαν στην επίλυση του προβλήματος αυτού είναι στην συντριπτική τους πλειοψηφία αλγεβρικοί, ενώ αριθμητικό τρόπο επέλεξαν 2 μαθητές Γυμνασίου (με μια επιτυχία και μια αποτυχία επίλυσης) προσπαθώντας να απεικονίσουν το μοτίβο που περιγράφεται στην εκφώνηση και προσεγγίζοντας σε κάποιο βαθμό την πρωτότυπη περιγραφική λύση του Fibonacci αλλά σε πιο συμβολική μορφή (όπως για παράδειγμα στην Εικόνα 17).

5.7 Συγκριτικά Αποτελέσματα για τα Προβλήματα

Παρακάτω παρουσιάζονται αναλυτικά οι βαθμολογίες των μαθητών σε κάθε πρόβλημα στην κλίμακα 0-3 που προαναφέρθηκε (με άριστα το 3) αλλά και η συνολική τους επίδοση με άριστα το 12. Στον πίνακα 16 δίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών Γυμνασίου.

Μαθητές Γυμνασίου	Βαθμολογία Μαθητών Γυμνασίου σε κλίμακα 0-3				Συνολικά κλίμακα 0-12
	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4	
Μαθητής Γ. 1	1	1	0	0	2/12
Μαθητής Γ. 2	1	0	0	1	2/12
Μαθητής Γ. 3	1	1	0	1	3/12
Μαθητής Γ. 4	1	1	1	1	4/12
Μαθητής Γ. 5	1	1	0	1	3/12
Μαθητής Γ. 6	3	1	0	0	4/12
Μαθητής Γ. 7	0	1	1	0	2/12
Μαθητής Γ. 8	3	1	1	3	8/12
Μέση Επίδοση	1,375	0,875	0,375	0,875	3,5/12

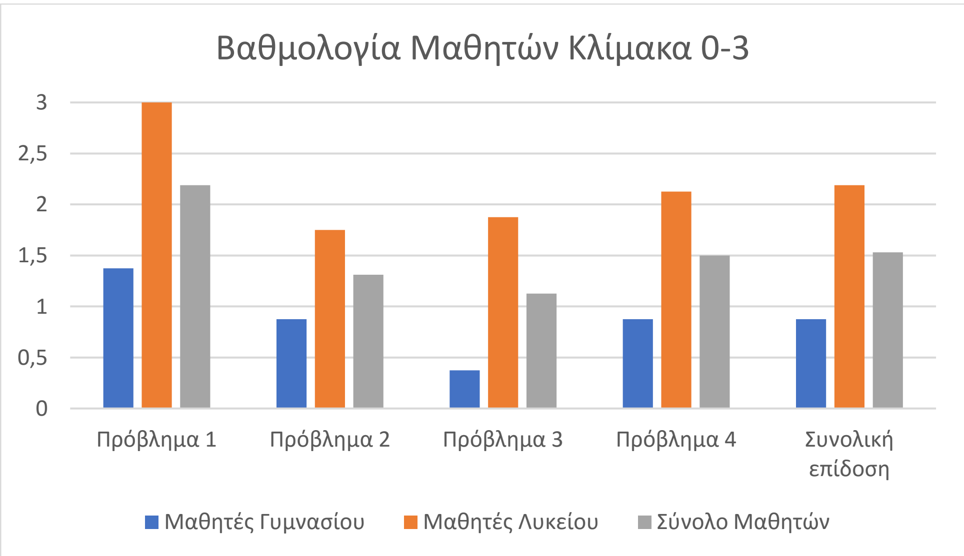
Πίνακας 16 Βαθμολογίες Μαθητών Γυμνασίου

Στον Πίνακα 17 παρουσιάζονται οι βαθμολογίες των μαθητών Λυκείου.

Μαθητές Λυκείου	Βαθμολογία Μαθητών Γυμνασίου σε κλίμακα 0-3				Συνολικά κλίμακα 0-12
	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2	Πρόβλημα 3	Πρόβλημα 4	
Μαθητής Λ. 1	3	0	1	3	7/12
Μαθητής Λ. 2	3	3	1	2	9/12
Μαθητής Λ. 3	3	3	3	3	12/12
Μαθητής Λ. 4	3	3	2	0	8/12
Μαθητής Λ. 5	3	1	1	2	7/12
Μαθητής Λ. 6	3	1	1	1	6/12
Μαθητής Λ. 7	3	3	3	3	12/12
Μαθητής Λ. 8	3	0	3	3	9/12
Μέση Επίδοση	3	1,75	1,875	2,125	8,75/12

Πίνακας 17 Βαθμολογίες Μαθητών Λυκείου

Η μέση επίδοση του συνόλου των μαθητών στο πρόβλημα 1 ήταν 2,1875, στο πρόβλημα 2 ήταν 1,3125 , στο πρόβλημα 3 ήταν 1,125 , στο πρόβλημα 4 ήταν 1,5 με άριστα το 3 και συνολικά ήταν 6,125 με άριστα το 12, δηλαδή 1,53125 με άριστα το 3. Τα παραπάνω δεδομένα φαίνονται στο Διάγραμμα 2.



Διάγραμμα 2 - Βαθμολογία Μαθητών

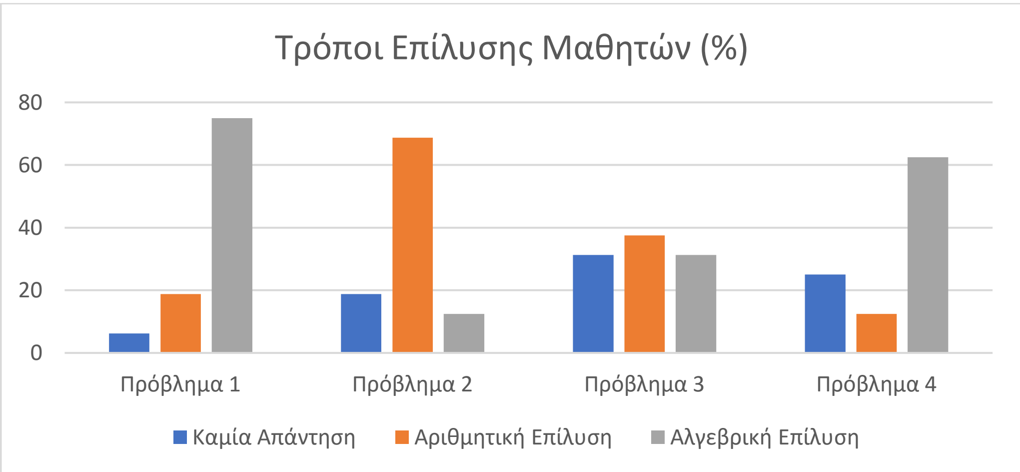
Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι οι επιδόσεις των μαθητών Γυμνασίου ήταν κακές και αποκαρδιωτικές στην επίλυση προβλημάτων, ενώ των μαθητών Λυκείου σαφώς πιο βελτιωμένες και ικανοποιητικές. Τα προβλήματα 2 και 3 ήταν αυτά που δυσκόλεψαν περισσότερο τους μαθητές και συγκεκριμένα το πρόβλημα 2 τους μαθητές Λυκείου και το πρόβλημα 3 τους μαθητές Γυμνασίου.

Για να προκύψει μια πιο ικανοποιητική συγκριτική εικόνα του τρόπου επίλυσης που προτίμησαν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές (στο σύνολό τους) σε καθένα από τα προβλήματα δημιουργήθηκε ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 18), όπου παρουσιάζεται πόσοι μαθητές δεν έδωσαν καμία απάντηση στο πρόβλημα, πόσοι προσπάθησαν να το επιλύσουν με χρήση αριθμητικής και πόσοι με χρήση άλγεβρας.

Επίλυση Προβλήματος	Απόλυτη και σχετική συχνότητα (%) απαντήσεων μαθητών							
	Πρόβλημα 1		Πρόβλημα 2		Πρόβλημα 3		Πρόβλημα 4	
Καμία Απάντηση	1	6,25%	3	18,75%	5	31,25	4	25%
Χρήση Αριθμητικής	3	18,75%	11	68,75%	6	37,5	2	12,5%
Χρήση Άλγεβρας	12	75%	2	12,5%	5	31,25	10	62,5%
Σύνολο	**16**	**100%**	**16**	**100%**	**16**	**100%**	**16**	**100%**

Πίνακας 18 Τρόποι Επίλυσης Προβλημάτων

Τα παραπάνω δεδομένα φαίνονται και στο ακόλουθο ραβδόγραμμα (Διάγραμμα 3)

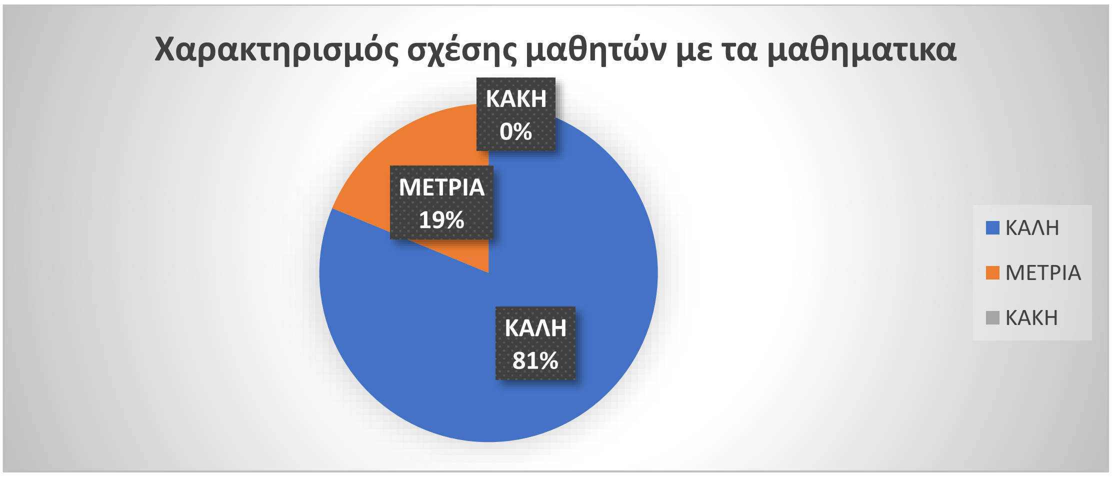


Διάγραμμα 3 - Τρόποι Επίλυσης Μαθητών

5.8 Συνοπτική Ανάλυση Απαντήσεων Ερωτηματολογίων

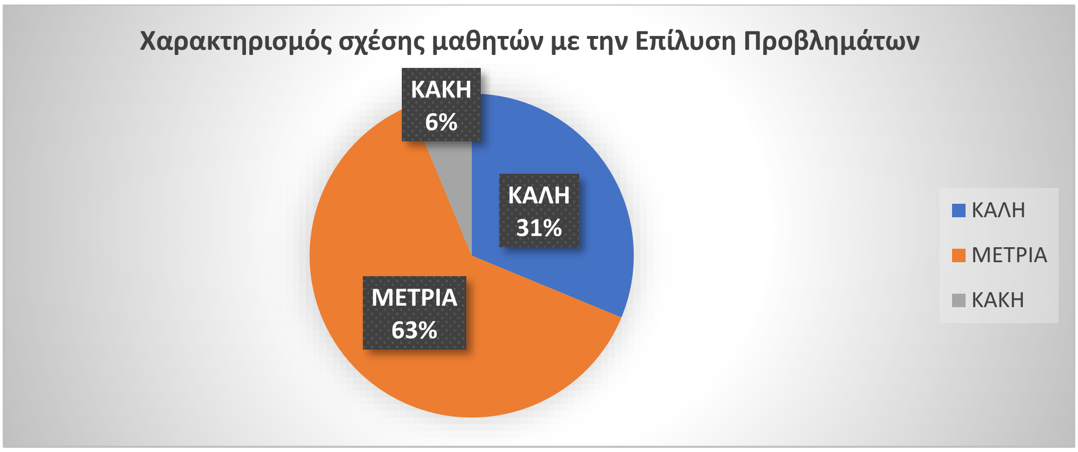
Τα ερωτηματολόγια περιλάμβαναν ερωτήσεις με σκοπό να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα που αφορούν την επίλυση προβλημάτων και την ιστορία των μαθηματικών.

Στο πεδίο του ερωτηματολογίου που αφορούσε τον (υποκειμενικό) χαρακτηρισμό της σχέσης των μαθητών με τα μαθηματικά, 6 μαθητές Γυμνασίου την χαρακτήρισαν καλή, 2 μαθητές μέτρια και κανένας κακή. Αντίστοιχα 7 μαθητές Λυκείου την χαρακτήρισαν καλή 1 μέτρια και κανένας κακή. Ο χαρακτηρισμός της σχέσης του συνόλου των μαθητών με τα μαθηματικά φαίνεται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα (Διάγραμμα 4).



Διάγραμμα 4 - Χαρακτηρισμός Σχέσης Μαθητών με τα Μαθηματικά

Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε πως η ενασχόληση των μαθητών με το φύλλο εργασίας επίλυσης προβλημάτων και τα ερωτηματολόγια έγινε οικειοθελώς, για το λόγο αυτό αναμέναμε πως οι μαθητές που δέχθηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα θεωρούν πως έχουν καλή σχέση με τα μαθηματικά, πράγμα που επιβεβαιώθηκε και από τις απαντήσεις τους. Το ερώτημα όμως είναι πόσο καλή είναι η σχέση τους και με την επίλυση προβλημάτων. Μόνο 2 από τους μαθητές Γυμνασίου χαρακτήρισαν τη σχέση τους με την επίλυση προβλημάτων καλή, 5 μαθητές μέτρια και 1 κακή. Για τους μαθητές Λυκείου αντίστοιχα οι απαντήσεις ήταν 3 καλή, 5 μέτρια και κανένας κακή. Συνολικά οι απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα αυτό παρουσιάζονται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα (Διάγραμμα 5).



Διάγραμμα 5 - Χαρακτηρισμός Σχέσης Μαθητών με την Επίλυση Προβλημάτων

Από τα παραπάνω προκύπτει σημαντική διαφοροποίηση της πεποίθησης των μαθητών για τη σχέση τους με τα μαθηματικά και για αυτήν με την επίλυση προβλημάτων, πράγμα που ίσως φανερώνει τις δυσκολίες και τις αδυναμίες των μαθητών στην αντιμετώπιση προβλημάτων και θα άξιζε να διερευνηθεί περεταίρω.

Στην ενότητα του ερωτηματολογίου που αφορά το ενδιαφέρον των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων, την ιστορία των μαθηματικών και τον συνδυασμό τους (επίλυση ιστορικών προβλημάτων) προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα.

Στην ερώτηση «Βρήκα ενδιαφέρουσα την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων» δηλαδή των προβλημάτων του Φύλλου Εργασίας, 7 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν «ΝΑΙ» και ένας «ΟΧΙ». Ακριβώς τις ίδιες απαντήσεις έδωσαν και οι μαθητές Λυκείου. Συνολικά οι απαντήσεις του δείγματος των μαθητών στην ερώτηση αυτή παρουσιάζονται στο Διάγραμμα 6.

Διάγραμμα 6 - Ενδιαφέρον για την επίλυση των προβλημάτων

Στην ερώτηση «Θα με ενδιέφερε να ασχοληθώ με την επίλυση Μαθηματικών Ιστορικών Προβλημάτων (από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους) και στο σχολείο», 5 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν «ΝΑΙ» και 3 «ΟΧΙ», ενώ με τον ίδιο τρόπο απάντησαν και οι μαθητές Λυκείου. Οι απαντήσεις για το σύνολο των μαθητών παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 7).

Διάγραμμα 7 - Ενδιαφέρον για Επίλυση Ιστορικών Προβλημάτων και στο Σχολείο

Στην ερώτηση «Θα με ενδιέφερε να μάθω περισσότερες πληροφορίες για την Ιστορία των Μαθηματικών», 6 μαθητές Γυμνασίου απάντησαν «ΝΑΙ» και 2 «ΟΧΙ», ενώ αντίστοιχα 3 μαθητές Λυκείου απάντησαν «ΝΑΙ» και 5 «ΟΧΙ». Οι μαθητές Γυμνασίου δηλαδή έχουν πιο θετική στάση απέναντι στην Ιστορία των Μαθηματικών και δείχνουν ενδιαφέρον για αυτή, σε σχέση με τους μαθητές Λυκείου. Για το σύνολο του δείγματος των μαθητών, οι απαντήσεις παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα (Διάγραμμα 8).

Διάγραμμα 8 - Ενδιαφέρον για την Ιστορία των Μαθηματικών

Τέλος στην ερώτηση «Θα με ενδιέφερε να διδαχθώ στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, στα πλαίσια αντίστοιχου μαθήματος ώστε να βελτιώσω τις ικανότητες μου στην επίλυση προβλημάτων» είναι πραγματικά αξιοσημείωτο πως όλοι οι μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου απάντησαν «ΝΑΙ», δηλαδή το 100% του δείγματος.

Διάγραμμα 9 - Ενδιαφέρον μαθητών να διδαχθούν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων

Οι απαντήσεις των μαθητών στην ενότητα του ερωτηματολογίου που αφορά τα προβλήματα που έλυσαν στο Φύλλο Εργασίας, είχαν ως κύριο σκοπό τον εντοπισμό των σταδίων επίλυσης που δυσκολεύτηκαν οι μαθητές και των δυσκολιών που αντιμετώπισαν. Θα ήταν ιδανικό να εξεταστούν οι απαντήσεις κάθε μαθητή ξεχωριστά σε καθένα από τα προβλήματα, σε συνδυασμό με το ερωτηματολόγιο αλλά και με τη διεξαγωγή προσωπικής συνέντευξης, ώστε να εξαχθούν πιο ασφαλή και χρήσιμα συμπεράσματα για τη διαδικασία επίλυσης που ακολούθησαν και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν. Όμως κατά τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας αυτό δεν ήταν εφικτό, οπότε οι απαντήσεις στις ερωτήσεις αυτές ενσωματώθηκαν συνοπτικά στην ανάλυση του κάθε προβλήματος που δόθηκε παραπάνω.

Στο παράρτημα δίνονται οι συγκεντρωτικοί πίνακες των απαντήσεων των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου στις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

5.9 Περιορισμοί Έρευνας

Κατά τη διεξαγωγή της παρούσας έρευνας υπήρξαν αρκετοί περιορισμοί. Αρχικά, οι μαθητές που συμμετείχαν δεν επιλέχθηκαν με κάποιον συγκεκριμένο τρόπο δειγματοληψίας αλλά αποτελούν μέλη του οικείου περιβάλλοντος της ερευνήτριας και συγκεκριμένα είναι μαθητές που φοιτούν σε Γυμνάσια και Λύκεια της περιοχής της Έδεσσας, οπότε το δείγμα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αντιπροσωπευτικό και να γενικευτούν τα αποτελέσματα. Επίσης δεν εφαρμόστηκε κάποιας μορφής αξιολόγηση των μαθητών πριν από την έρευνα για να εξεταστεί το επίπεδό τους και το μαθηματικό τους υπόβαθρο παρά μόνο έγινε ερώτηση στο ερωτηματολόγιο για τον (υποκειμενικό) χαρακτηρισμό της σχέσης τους με τα μαθηματικά και την επίλυση προβλημάτων. Οι μαθητές δέχθηκαν να συμμετάσχουν στην έρευνα οικειοθελώς, ενώ υπήρξαν και άλλοι που αρνήθηκαν, οπότε μπορεί να θεωρηθεί πως οι μαθητές που συμμετείχαν τελικά επιδεικνύουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, πράγμα που κάνει ακόμα πιο επισφαλή τη γενίκευση των αποτελεσμάτων. Το γεγονός ότι τα φύλλα εργασίας συμπληρώθηκαν στους οικείους χώρους του κάθε μαθητή, με ελεύθερη χρονική διάρκεια ενασχόλησης, αποτελεί επίσης βασικό περιορισμό της έρευνας καθώς οι επιδόσεις τους δεν μπορούν να αξιολογηθούν στον ίδιο βαθμό, δηλαδή οι επιδόσεις μαθητών που ασχολήθηκαν περισσότερη ώρα με την επίλυση των προβλημάτων ενδέχεται να διαφέρουν από αυτών που ασχολήθηκαν σημαντικά λιγότερη ώρα. Επίσης δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν οι μαθητές κατά την επίλυση των προβλημάτων έλαβαν κάποιου είδους βοήθεια (από άλλα άτομα, έρευνα στο διαδίκτυο κλπ). Τέλος, η μη ύπαρξη συγκεκριμένου σταθμισμένου εργαλείου για τη διερεύνηση των ερωτημάτων της έρευνας, οδήγησε στην κατασκευή αυτοσχέδιου φύλλου εργασίας και ερωτηματολογίου καθώς και αυτοσχέδια μορφή αξιολόγησής τους από την ερευνήτρια.

6. Συμπεράσματα - Προτάσεις

6.1 Απαντήσεις στα Ερευνητικά Ερωτήματα – Συσχέτιση με Βιβλιογραφία και Προηγούμενες Έρευνες

Βασικός σκοπός της έρευνας ήταν η μελέτη των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και πραγματοποιήθηκε με χρήση προβλημάτων προερχόμενα από την Ιστορία των Μαθηματικών. Τα λεκτικά προβλήματα που χρησιμοποιήθηκαν, ανήκουν στην κατηγορία των προβλημάτων εύρεσης, που διακρίνει ο Polya (1981), αφού στόχος ήταν να βρεθεί το ζητούμενο (άγνωστος) που ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Τα 2 πρώτα προβλήματα μπορούν να χαρακτηριστούν ως προβλήματα ρουτίνας, καθώς οι μαθητές έχουν έρθει σε συχνή επαφή με παρόμοια προβλήματα στο σχολείο, ενώ τα 2 τελευταία προβλήματα που επιλέχθηκαν τείνουν να χαρακτηριστούν πρωτότυπα προβλήματα καθώς οι μαθητές πιθανόν δεν έχουν έρθει σε άμεση επαφή με παρόμοια προβλήματα και η επίλυσή τους χρειάστηκε παρατήρηση, ανάπτυξη κάποιου είδους στρατηγικής και συνδυασμό των μαθηματικών τους γνώσεων. Το περιεχόμενο των προβλημάτων που επιλέχθηκαν, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις που έχει θέσει ο Polya (1981), δηλαδή περιέχουν έναν άγνωστο, δεδομένες πληροφορίες και τη συνθήκη που συνδέει τον άγνωστο με τα δεδομένα. Επίσης ικανοποιούνται και οι προϋποθέσεις των Krulik και Rudnick (1988), που υποστηρίζουν πως ένα μαθηματικό πρόβλημα θα πρέπει να είναι ελκυστικό για τους μαθητές, να διαθέτει τη δυνατότητα επέκτασης, να προσφέρεται για ποικίλες τεχνικές επίλυσης και η λύση του να περιλαμβάνει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών ή/και τη χρήση μαθηματικών δεξιοτήτων. Το πεδίο των απαιτούμενων μαθηματικών γνώσεων για την επίλυση των προβλημάτων που τέθηκαν, είναι οι αριθμητικές πράξεις και διαδικασίες (όπως πράξεις με κλάσματα και μέθοδος των τριών) και η κατασκευή και λύση εξισώσεων $1^{ου}$ βαθμού.

Οι απαντήσεις σε καθένα από τα ερευνητικά ερωτήματα σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας είναι αντίστοιχα τα παρακάτω:

- Ποιες είναι οι επιδόσεις των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων (με αφορμή ιστορικά προβλήματα μαθηματικών);

Τα αποτελέσματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε, δείχνουν ταύτιση με τα αποτελέσματα προηγούμενων ερευνών (Lester et al., 1989; Schoenfeld, 1992; Verschaffel et al., 1999) αφού έδειξαν πως οι μαθητές δεν έχουν τις απαιτούμενες ικανότητες για την προσέγγιση μαθηματικών προβλημάτων ή οι ικανότητες αυτές είναι ανεπαρκείς, παρ' όλο που οι μαθηματικές γνώσεις που χρειάστηκαν για να τα επιλύσουν έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Ειδικότερα οι επιδόσεις του συνόλου του δείγματος των μαθητών χαρακτηρίζονται μέτριες (μέση επίδοση 6,125 /12). Σύμφωνα με τα παραπάνω αλλά και τις απαντήσεις των μαθητών, συμπεραίνουμε πως οι γνωστικοί παράγοντες επηρέασαν την επιτυχία επίλυσης προβλημάτων (απουσία ποικιλίας στρατηγικών επίλυσης, λάθη σε αριθμητικές πράξεις και εξισώσεις κλπ).

- Υπάρχει διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών διαφορετικών βαθμίδων εκπαίδευσης (Γυμνάσιο – Λύκειο) στην επίλυση προβλημάτων;

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν πως υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση στις επιδόσεις των μαθητών διαφορετικών βαθμίδων. Ειδικότερα οι επιδόσεις των μαθητών του Γυμνασίου κρίνονται ιδιαίτερα ανεπαρκείς (μέση επίδοση 3,5 / 12) , ενώ οι επιδόσεις των μαθητών Λυκείου είναι μεν πολύ καλύτερες αλλά όχι πλήρως ικανοποιητικές (μέση επίδοση 8,75 /12).

- Ποιον τρόπο επίλυσης προτιμούν οι μαθητές (αλγεβρικό ή αριθμητικό);

Σύμφωνα με τις λύσεις που προσπάθησαν να δώσουν οι μαθητές στα προβλήματα που τέθηκαν και την ανάλυση των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκε παραπάνω, συμπεραίνουμε πως οι μαθητές χρησιμοποιούν αλγεβρικούς αλλά και αριθμητικούς τρόπους και η επιλογή αυτή εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα. Ειδικότερα οι μαθητές Λυκείου έδειξαν μεγαλύτερη τάση στη χρήση αλγεβρικών μεθόδων (κατασκευή εξισώσεων) στα προβλήματα, με εξαίρεση το πρόβλημα 2 όπου χρησιμοποιήθηκαν αριθμητικές μέθοδοι στην πλειοψηφία του συνόλου των μαθητών.

- Σε ποιο στάδιο επίλυσης (κατά τα στάδια του Polya) συναντούν δυσκολίες;

Ένα από τα ερευνητικά ερωτήματα αφορά την προσπάθεια να εντοπιστούν οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά τα στάδια επίλυσης που αναφέρει ο Polya (1957). Για το $1^{ο}$ στάδιο της κατανόησης του προβλήματος ο Polya αναφέρει πως είναι η πιο διαδεδομένη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές και οφείλεται συνήθως σε έλλειψη συγκέντρωσης. Στην έρευνα αυτή, τα προβλήματα επιλέχθηκαν με τέτοιον τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί η δυσκολία κατανόησής τους από τους μαθητές και να μπορέσουν να προχωρήσουν σε διαδικασίες επίλυσης και να διερευνηθεί ο τρόπος επίλυσης που χρησιμοποιούν. Παρ' όλα αυτά παρατηρήθηκαν δυσκολίες κατανόησης από αρκετούς μαθητές, κυρίως μαθητές Γυμνασίου στα 2 τελευταία προβλήματα, που φαίνονται από τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο (στην ερώτηση «Κατανόησα το πρόβλημα») αλλά και τις λύσεις τους, όπου για παράδειγμα στο πρόβλημα 2 αρκετοί μαθητές πρόσθεσαν απλά το χρόνο που γεμίζει κάθε κανάλι τη δεξαμενή χωρίς να κατανοήσουν ότι θα γεμίσει παραπάνω από μια φορές. Στο 2ο στάδιο, της επινόησης του σχεδίου λύσης, τα αποτελέσματα της έρευνας συμφωνούν με τα λεγόμενα του Polya καθώς οι μαθητές στην πλειοψηφία τους προσπάθησαν να εκτελέσουν άμεσα υπολογισμούς αλλά και επέδειξαν αδράνεια για τη σύλληψη σχεδίου λύσης, αφού δεν προσπάθησαν ιδιαίτερα να εκτελέσουν βήματα για να επιταχύνουν τη σύλληψη αυτή με αποτέλεσμα να μην κάνουν καμία προσπάθεια λύσης του εκάστοτε προβλήματος, αφήνοντας το πεδίο λύσης κενό. Το 3ο στάδιο, της εκτέλεσης του σχεδίου λύσης, ήταν αυτό στο οποίο παρατηρήθηκαν πολλές δυσκολίες αφού πολλοί μαθητές δεν ήταν προσεκτικοί στους υπολογισμούς και την επίλυση των εξισώσεων που κατασκεύασαν κάνοντας πολλά αριθμητικά λάθη και σε κάποιες περιπτώσεις δεν έλεγξαν ότι χρησιμοποιούν όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Η απουσία ελέγχου κατά την επίλυση του προβλήματος ήταν εμφανής, αφού οι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν και τα υπολογιστικά τους λάθη. Φυσικό επακόλουθο ήταν και η πλήρης παράλειψη του τελευταίου σταδίου, αυτού της επισκόπησης – ελέγχου, αφού κανένας μαθητής δεν κατέγραψε κάποιας μορφής επαλήθευση των λύσεων, γεγονός που επίσης επιβεβαιώνει συμπεράσματα προηγούμενων ερευνών (Polya, 1957; De Corte et al.,1982).

- Θα ενδιέφερε τους μαθητές να μάθουν περισσότερα για την ιστορία των Μαθηματικών;

Οι απαντήσεις στο ερώτημα αυτό ήταν σχεδόν μοιρασμένες, αφού το 56% των μαθητών δηλώνει πως θα ήθελε να μάθει περισσότερα για την Ιστορία των Μαθηματικών. Το μεγάλο ποσοστό της αρνητικής στάσης και ενδιαφέροντος προς την ιστορία των μαθηματικών είναι πιθανό να οφείλεται στην αντιπάθεια που δείχνουν οι μαθητές στην ιστορία, άρα η αντιπάθεια αυτή να επεκτείνεται και στην ιστορία των μαθηματικών, βρίσκοντάς την βαρετή και μη ενδιαφέρουσα, όπως αναφέρουν οι Tzanakis & Arcavi (2000).

- Θα ενδιέφερε τους μαθητές να λύσουν περισσότερα ιστορικά προβλήματα μαθηματικών και στο σχολείο;

Παρ' όλο που το 87% των μαθητών απάντησε πως βρήκε ενδιαφέρουσα την επίλυση των προβλημάτων που δόθηκαν στο Φύλλο εργασίας, το ποσοστό όσων δηλώνουν πως θα τους ενδιέφερε να λύσουν περισσότερα ιστορικά προβλήματα μαθηματικών και στο σχολείο μειώνεται στο 62%. Θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνηθούν οι λόγοι της μείωσης αυτής και θα βοηθούσε σημαντικά η διαδικασία συνέντευξης των μαθητών, πράγμα που δεν ήταν εφικτό στην παρούσα έρευνα.

- Θα ενδιέφερε τους μαθητές να διδαχθούν στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, στα πλαίσια αντίστοιχου μαθήματος ώστε να βελτιώσουν τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλημάτων;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι σαφής και κατηγορηματική καθώς όλοι ανεξαιρέτως οι μαθητές (100% του δείγματος) απάντησαν πως θα τους ενδιέφερε να διδαχθούν στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης ώστε να βελτιώσουν τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλημάτων. Στην προσπάθειά μας να αναγνώσουμε τη σημασία της απάντησης αυτής, συσχετίζοντάς την και με τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση για το χαρακτηρισμό της σχέσης τους με την επίλυση προβλημάτων (63% μέτρια και 6% κακή), θα λέγαμε πως οι μαθητές ενδιαφέρονται για τα προβλήματα και θέλουν να βελτιώσουν τις ικανότητές τους στην επίλυση προβλημάτων, αναγνωρίζοντας τις δυσκολίες που συναντούν και τις αδυναμίες τους, όπως φαίνεται από το χαρακτηρισμό της σχέσης τους με αυτά.

6.2 Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα – Εκπαιδευτικές Προτάσεις

Με αφορμή την σύντομη έρευνα που πραγματοποιήθηκε και μέσα από τα αποτελέσματα που προέκυψαν, δημιουργείται η ανάγκη για περαιτέρω έρευνες και επεκτάσεις της έρευνας αυτής σε μεγαλύτερο και αντιπροσωπευτικό δείγμα μαθητών και με παραπάνω μεταβλητές προς ανάλυση. Παραδοσιακά, αλλά και όπως φάνηκε από την παρούσα έρευνα, η επίλυση προβλημάτων δυσκολεύει τους μαθητές και θα ήταν χρήσιμο να διερευνηθούν περαιτέρω τα σημεία που παρουσιάζονται οι δυσκολίες κατά τη διαδικασία επίλυσης, τα λάθη και οι παρανοήσεις που υπάρχουν, έτσι ώστε να συμβάλλουν στην εύρεση τρόπων βελτίωσης των ικανοτήτων και των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων.

Με αφορμή τα ιστορικά προβλήματα που κλήθηκαν να λύσουν οι μαθητές στο πλαίσιο της έρευνας, θα ήταν πολύ χρήσιμη η δημιουργία και εκτέλεση μιας έρευνας με χρήση διδακτικής παρέμβασης που είναι βασισμένη στην Ιστορία των μαθηματικών. Δηλαδή στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου κεφαλαίου – παραγράφου, όπως για παράδειγμα στην παράγραφο που αφορά προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις 1ου βαθμού της Β Γυμνασίου, να παρουσιαστούν ιστορικά προβλήματα όπως αυτά που παραθέσαμε και οι τρόποι επίλυσής τους βασισμένοι στις πρωτότυπες λύσεις αλλά και αυτοί που προκύπτουν με τις σύγχρονες αλγεβρικές μεθόδους. Για να αξιολογηθεί η προσφορά της διδακτικής παρέμβασης στη βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών, θα ήταν καλό να διενεργηθεί ένα τεστ επίλυσης τέτοιων προβλημάτων πριν από τη διδακτική παρέμβαση και ένα μετά. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική τους και συγκεκριμένα στη διδακτική της άλγεβρας, όπως είδαμε και στη βιβλιογραφική επισκόπηση, προσφέρει μια ελπιδοφόρα προοπτική στην βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών αντικειμένων και των επιδόσεων των μαθητών, για το λόγο αυτό θα ήταν σκόπιμο να διερευνηθεί περαιτέρω. Η Ιστορία των Μαθηματικών είναι κομμάτι της μαθηματικής επιστήμης και της εξέλιξής της, δυστυχώς όμως δεν βρίσκει χώρο στα προγράμματα σπουδών των ελληνικών σχολείων για τους φιλοσοφικούς και πρακτικούς λόγους που έχουν αναφερθεί (Tzanakis & Arcavi 2000). Θα είχε όμως ιδιαίτερο ενδιαφέρον να ερευνηθεί η επίδραση που θα είχε η εισαγωγή της Ιστορίας των Μαθηματικών σε κάθε ενότητα των μαθηματικών (στο βαθμό που είναι αυτό δυνατό ανάλογα και με την ύλη που μελετάται), αναφορικά με τις επιδόσεις, την ενεργοποίηση του ενδιαφέροντος και την ενθάρρυνση που θα μπορούσε να προσφέρει στους μαθητές στην ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά και την αναζήτηση και εμπέδωση της μαθηματικής γνώσης.

Βιβλιογραφία

Ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές (πηγές) της Εργασίας.

Blum, W., & Niss, M. (1989). *Mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, Trends and issues in mathematics instruction In W. Blum, M. Niss & I. Huntley (Eds)*, *Modelling, applications and applied problem solving* Ellis Horwood, Chichester, U.K.. 1–22.

Chace, A.B (1927). *The Rhind Mathematical Papyrus vol1, Free Translation and Commentary*, Mathematica Association of Amerika. Oberlin, Ohio, U. S. A

De Corte, E., Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. *International Conference on Mathematics for Living, Amman*, November 2000 (pp.18-23). Jordan.

Dodson, J. W. (1972). Characteristics of successful insightful problem solvers. *NLSMA Report*, No. 31. Stanford, CA: School Mathematics Study Group.

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics

education: A postmodern perspective. In A. Teppo (Ed), *Qualitative research methods in mathematics education, NCTM- JRME Monograph no. 9,* (pp. 22-39).

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra*, μετάφραση: Rev. John Hewlett. New York: Springer-Verlag (επανατύπωση έκδοσης 1840).

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the learning of mathematics*, Vol *11* (No2), 3-6

Frensch, P. A., & Funke, J., (1995). Definitions, traditions, and a general framework for understanding complex problem solving. In: P. A. Frensch, & J. Funke, (Eds.), *Complex problem solving: The European perspective*, (pp. 3-25). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

Fried M., «Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?» , Science & Education 10(4):391-408, July 2001, DOI:10.1023/A:1011205014608 ανακτήθηκε από https://www.researchgate.net/publication/227054852_Can_Mathematics_Education_and_History_of_Mathematics_Coexist

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231–236). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Jankvist U. T. (2009). "A categorization of the "whys" and "hows" on using history in mathematics education". *Educational Studies in Mathematics 71*, pp.235-261.

Jonassen, D. (2000). Toward a design theory of problem solving. *Educational Technology: Research & Development*, 48 (4), 63-85.

Heller, J.I., & Hungate, H.N. (1985). Implications for mathematics instruction of research on scientific problem solving. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* p. 83-1 12). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Katz, V. , Michalowiz K.D, (2005), project directors, *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics, Classroom Resource Material,* Mathematical Association of America

Kaur B., 1997, Difficulties with problem solving in mathematics, *The Mathematics Educator, vol. 2*, p. 93-112, Association of Mathematics Educators

Kántor T. (2013), *Historical aspects in teaching mathematics* **,** In A. Ambrus, E. Vásárhelyi (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education*, Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August – 1 September, 2013 in Eger, Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Institute of Mathematics Mathematics Teaching and Education Center and Eszterházi Károly College, Institute of Mathematics and Informatics, Hungary 2014.

Kroll, D.L., & Miller, T. (1993**).** Insights from research on mathematical problem solving in the middle grades. In D.T. Owens (Ed), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (p. 58-77). NY: Macmillan

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). *Problem solving: A handbook for Elementary School Teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

Lester, F. K. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnaren Swedish journal of mathematics education*, Vol 15 (No 3).

Lester, F., Garofalo, J., & Kroll, D. (1989). The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Seven Classes. *Final report to the National Science Foundation Grant of MEDC project MDR*, 85-50346.

Marcou, A., & Lerman, S. (2006). Towards the development of a self-regulated mathematical problem solving model. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka & N. Stehlikova (eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.4 (pp. 137-144). Prague (Czech Republic): PME.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Patwardhan, K.S. Naimpally, S.A. , Singh, S.L. (2001), Līlāvatī of Bhāskarācārya: A Treatise of Mathematics of Vedic Tradition : with Rationale in Terms of Modern Mathematics Largely Based on N.H. Phadke's Marāthī Translation of Līlāvatī **.** Delhi: Motilal Banarsidass Publ

Polya, G. (1957). *How to solve it?* (2nd ed.). Princeton, N.J.: Princeton University Press.

Polya, G. (1981). *Mathematics discovery: An understanding, learning, and teaching problem solving (combined edition)*. New York: John Willey & Son.

Schoenfeld, A.H. (1983). *Theoretical and pragmatic issues in the design of Mathematical problem solving instruction.* Paper delivered at the annual meeting of the American Educational Research Association. Montreal.

Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical problem solving. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L.B. Resnick, & L. E. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research* (pp. 83-103). Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Schoenfeld, A. H (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2008). Problem Solving in the United States, 1970-2008: Research and Theory, Practice and Politics. In G. Törner, A. H. Schoenfeld, & K. Reiss (Eds.), *Problem* *solving around the world – Summing up the state of the art. Special issue of the Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, Issue (1).

Shen, K. Crossley, J. Lun, A. Liu, H. (1999) *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*, Beijing: Oxford University Press

Sigler, L. (2003). *Fibonacci's Liber Abaci - A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag

Singmaster, D. & Hadley, J. (1992) Problems to sharpen the young, *Mathematical Gazette* Vol: 76. No: 475, 102-126

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp.1–22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Swetz, F. J. (1994). *Learning activities from the history of mathematics*. J. Weston Walch Publisher

Swetz, F. J. (1995), 'Using Problems from the History of Mathematics in Classroom Instruction', in F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.), *Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. 25–38.

Swetz, F. J. (2007), Historical Problems: A Valuable Resource for Mathematics Classroom Instruction, History and Epistemology in Mathematics Education Proceedings of the 5th European Summer University Prague July 19–24, 2007, Vydavatelsky servis, Plzeň, ISBN 978-80-86843-19-3

Tzanakis, C. & Arcavi, A. (2000). "Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey". In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study",* (pp. 201 - 240). Dordrecht. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Van De Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics. Teaching Developmentally* (6th Edition). Boston: Pearson

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment with Fifth Graders. *Mathematical Thinking and Learning*, 1 (3), 195-229.

Wickelgren, W.A. (1974). *How to Solve Mathematical Problems*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.

Wilson, J., Fernandez, M., L., and Hadaway, N. (1994). Problem Solving: Managing it all, *The Mathematics Teacher*, vol. 87, (No 3).195-199.

Αγαλιώτης, Ι. (2011). *Διδασκαλία Μαθηματικών στην Ειδική Αγωγή και Εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα, Εκδόσεις Γρηγόρη

Κλαουδάτος Ν. (2011). Σημειώσεις του μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών». Τμήμα Μαθηματικών. Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών. Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μαμωνά-Downs, Γ.Παπαδόπουλος Ι.(2017).*Επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά*. Ηράκλειο: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ

Νικολαντωνάκης, Κ. Ζήσης, Ι. (2018). *Η πρακτική Αριθμητική του Τρεβίζο, Μετάφραση*. Παιδαγωγική Σχολή – Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας. Φλώρινα

Πόρποδας Κ. (2003): «Διαγνωστική Αξιολόγηση και Αντιμετώπιση των Μαθησιακών Δυσκολιών στο Δημοτικό Σχολείο». ΕΠΕΑΕΚ του ΥΠΕΠΘ. Πάτρα

Σταμούλης, Δ. (1967), μετάφραση *Ανθολογία Ελληνική ή Παλατινή Ανθολογία : βιβλίο XIV. Προβλήματα αριθμητικά αινίγματα, χρησμοί*, Αθήνα: Ιδιωτική Έκδοση

Παράρτημα Α: Φύλλο Εργασίας στην Επίλυση Προβλημάτων

Φύλλο Εργασίας στην Επίλυση Προβλημάτων

Όνομα ή Αρχικά Ονόματος: ……………………………….

Ηλικία/ Τάξη: ………….

*Το Φύλλο Εργασίας δίνεται στο πλαίσιο της μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας μου, που έχει σκοπό να διερευνήσει τον τρόπο σκέψης, τις στρατηγικές και τις δυσκολίες των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων. Οι απαντήσεις σας θα συνεισφέρουν στην εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων σε ερευνητικά ερωτήματα που αφορούν την επίλυση προβλημάτων.

Σας ευχαριστώ εκ των προτέρων για τον χρόνο και την ενασχόλησή σας.

Μωυσιάδου Κυριακή – Μαθηματικός

Παρακάτω δίνονται τέσσερα προβλήματα που έχουν αντληθεί από ιστορικές μαθηματικές πηγές διαφορετικών πολιτισμών και χρονικών περιόδων. Να λύσετε τα προβλήματα αυτά με όποιον τρόπο επιθυμείτε (πχ αριθμητικά, αλγεβρικά, σχηματικά, περιγραφικά κλπ). Παρακαλείσθε να αναλύσετε το σκεπτικό σας κατά τη διαδικασία επίλυσης και να σημειώσετε στα αντίστοιχα πεδία λύσης οποιαδήποτε πράξη, σχήμα ή σχέδιο λύσης χρησιμοποιήσατε, ακόμα κι αν δεν ολοκληρώσατε την λύση.

Σε περίπτωση που δεν μπορείτε να λύσετε κάποιο πρόβλημα, να σημειώσετε στο πεδίο λύσης την ένδειξη:

[A]- αν δεν κατανοήσατε το πρόβλημα ή

[B]-αν κατανοήσατε το πρόβλημα αλλά δεν μπορέσατε να βρείτε τρόπο για την επίλυσή του.

<u>Πρόβλημα 1:</u>

Τα Άνθη του Λωτού – από το *Lilavati* του Bhaskara II (Ινδία – 1150 μ.Χ.)

Από ένα μπουκέτο με άνθη λωτού, το ένα τρίτο, το ένα πέμπτο και το ένα έκτο, προσφέρθηκαν αντίστοιχα στους θεούς Σίβα, Βισνού και Ήλιο και το ένα τέταρτο στην Ινδή Θεά. Οι υπόλοιποι έξι λωτοί που απέμειναν, δόθηκαν στον σεβάσμιο άρχοντα γκουρού. Να βρείτε τον συνολικό αριθμό των λωτών που είχε το μπουκέτο.

<u>Πρόβλημα 2:</u>

Πρόβλημα Δεξαμενής – από το *Jiuzhang Suanshu* (Κίνα - 100 π.Χ.)

Μια δεξαμενή γεμίζει μέσω πέντε καναλιών. Το πρώτο κανάλι γεμίζει τη δεξαμενή στο 1/3 της ημέρας, το δεύτερο τη γεμίζει σε 1 μέρα, το τρίτο σε 2½ μέρες, το τέταρτο σε 3 μέρες και το πέμπτο κανάλι σε 5 μέρες. Αν υποθέσουμε ότι όλα τα κανάλια είναι ανοιχτά και ρίχνουν ταυτόχρονα νερό στη δεξαμενή, να βρείτε πόσες μέρες χρειάζονται για να γεμίσει η δεξαμενή.

<u>Πρόβλημα 3:</u>

Πρόβλημα Συνάντησης Αγγελιοφόρων– Αριθμητική Τρεβίζο (Ιταλία - 1478 μ.Χ)

Ο Άγιος Πατέρας (Πάπας) έστειλε έναν αγγελιοφόρο από τη Ρώμη στην Βενετία, προστάζοντας τον να φτάσει (στη Βενετία) σε 7 ημέρες. Και η πλέον επιφανής Σινόρια της Βενετίας έστειλε έναν αγγελιοφόρο ο οποίος θα έπρεπε να φτάσει από τη Βενετία στη Ρώμη σε 9 ημέρες. Επίσης η απόσταση από τη Ρώμη έως τη Βενετία είναι 250 μίλια. Συνέβη με την διαταγή των κυρίων τους, οι αγγελιοφόροι να ξεκινήσουν το ταξίδι τους την ίδια ώρα. Ζητείται να βρεθεί σε πόσες ημέρες θα συναντηθούν και πόσα μίλια θα έχει ταξιδέψει ο καθένας.

<u>Πρόβλημα 4:</u>

Τα μήλα και οι 7 πόρτες - από το Liber Abaci του Fibonacci (Ιταλία - 1202 μ.Χ.)

Ένας άντρας μπήκε σε έναν κήπο αναψυχής από 7 πόρτες και εκεί μάζεψε έναν αριθμό μήλων. Όταν ήθελε να φύγει, έπρεπε να δώσει στον πρώτο θυρωρό τα μισά από όλα τα μήλα που μάζεψε και ένα ακόμα. Στον δεύτερο θυρωρό έδωσε τα μισά από τα υπόλοιπα μήλα και ένα ακόμα. Με τον ίδιο τρόπο έδωσε μήλα στους άλλους 5 θυρωρούς και τελικά του έμεινε ένα μήλο. Πόσα μήλα μάζεψε αρχικά;

Παράρτημα Β: Ερωτηματολόγιο

Ερωτηματολόγιο

Παρακαλώ κυκλώστε την απάντησή σας σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις:

Πως θα χαρακτηρίζατε τη σχέση σας με τα Μαθηματικά;	ΚΑΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΚΑΚΗ
Πως θα χαρακτηρίζατε τη σχέση σας με την Επίλυση Προβλημάτων;	ΚΑΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΚΑΚΗ

	Πρόβλημα 1		**Πρόβλημα 2**		**Πρόβλημα 3**		**Πρόβλημα 4**	
Κατανόησα το Πρόβλημα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Μπόρεσα να διακρίνω δεδομένα και ζητούμενα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Μπόρεσα να σκεφτώ στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Σκέφτηκα παραπάνω από μια στρατηγικές επίλυσης	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Δυσκολεύτηκα με τις απαιτούμενες πράξεις	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Πιστεύω πως βρήκα τη λύση του προβλήματος	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Έχω λύσει παρόμοια προβλήματα στο σχολείο	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ

Βρήκα ενδιαφέρουσα την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Θα με ενδιέφερε να ασχοληθώ με την επίλυση Μαθηματικών Ιστορικών Προβλημάτων (από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους) και στο σχολείο	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Θα με ενδιέφερε να μάθω περισσότερες πληροφορίες για την Ιστορία των Μαθηματικών	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Θα με ενδιέφερε να διδαχθώ στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, στα πλαίσια αντίστοιχου μαθήματος ώστε να βελτιώσω τις ικανότητες μου στην επίλυση προβλημάτων.	ΝΑΙ	ΟΧΙ

Παράρτημα Γ: Καταγραφή - Ομαδοποίηση Απαντήσεων Μαθητών Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο

Απαντήσεις Μαθητών Γυμνασίου στο Ερωτηματολόγιο

Πως θα χαρακτηρίζατε τη σχέση σας με τα Μαθηματικά;	ΚΑΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΚΑΚΗ
	6	2	
Πως θα χαρακτηρίζατε τη σχέση σας με την Επίλυση Προβλημάτων;	ΚΑΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΚΑΚΗ
	2	5	1

	Πρόβλημα 1		**Πρόβλημα 2**		**Πρόβλημα 3**		**Πρόβλημα 4**	
Κατανόησα το Πρόβλημα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		6	2	7	1	6	2
Μπόρεσα να διακρίνω δεδομένα και ζητούμενα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		8		8		6	2
Μπόρεσα να σκεφτώ στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		6	2	3	5	4	4
Σκέφτηκα παραπάνω από μια στρατηγικές επίλυσης	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	2	6	4	4		8	3	5
Δυσκολεύτηκα με τις απαιτούμενες πράξεις	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	1	7	2	6	4	4	4	4
Πιστεύω πως βρήκα τη λύση του προβλήματος	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	5	3	4	4	1	7	2	6
Έχω λύσει παρόμοια προβλήματα στο σχολείο	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	5	3	2	6	3	5		8

Βρήκα ενδιαφέρουσα την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	7	1
Θα με ενδιέφερε να ασχοληθώ με την επίλυση Μαθηματικών Ιστορικών Προβλημάτων (από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους) και στο σχολείο	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	5	3
Θα με ενδιέφερε να μάθω περισσότερες πληροφορίες για την Ιστορία των Μαθηματικών	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	6	2
Θα με ενδιέφερε να διδαχθώ στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, στα πλαίσια αντίστοιχου μαθήματος ώστε να βελτιώσω τις ικανότητες μου στην επίλυση προβλημάτων.	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8	

Παράρτημα Δ: Καταγραφή - Ομαδοποίηση Απαντήσεων Μαθητών Λυκείου στο Ερωτηματολόγιο

Απαντήσεις Μαθητών Λυκείου στο Ερωτηματολόγιο

Πως θα χαρακτηρίζατε τη σχέση σας με τα Μαθηματικά;	ΚΑΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΚΑΚΗ					
	7	**1**						
Πως θα χαρακτηρίζατε τη σχέση σας με την Επίλυση Προβλημάτων;	ΚΑΛΗ	ΜΕΤΡΙΑ	ΚΑΚΗ					
	3	**5**						
	Πρόβλημα 1		**Πρόβλημα 2**		**Πρόβλημα 3**		**Πρόβλημα 4**	
Κατανόησα το Πρόβλημα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		**8**		**8**		**8**	
Μπόρεσα να διακρίνω δεδομένα και ζητούμενα	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		**8**		**8**		**8**	
Μπόρεσα να σκεφτώ στρατηγικές επίλυσης του προβλήματος	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		**6**	**2**	**7**	**1**	**7**	**1**
Σκέφτηκα παραπάνω από μια στρατηγικές επίλυσης	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	1	**7**	**1**	**7**		**8**	**2**	**6**
Δυσκολεύτηκα με τις απαιτούμενες πράξεις	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	1	**7**	**1**	**7**	**6**	**2**	**4**	**4**
Πιστεύω πως βρήκα τη λύση του προβλήματος	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	8		**6**	**2**	**2**	**6**	**5**	**3**
Έχω λύσει παρόμοια προβλήματα στο σχολείο	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
	7	**1**	**5**	**3**	**3**	**5**		**8**
Βρήκα ενδιαφέρουσα την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων	ΝΑΙ	ΟΧΙ						
	7	**1**						
Θα με ενδιέφερε να ασχοληθώ με την επίλυση Μαθηματικών Ιστορικών Προβλημάτων (από διαφορετικούς πολιτισμούς και διαφορετικές χρονικές περιόδους) και στο σχολείο	ΝΑΙ	ΟΧΙ						
	5	**3**						
Θα με ενδιέφερε να μάθω περισσότερες πληροφορίες για την Ιστορία των Μαθηματικών	ΝΑΙ	ΟΧΙ						
	3	**5**						
Θα με ενδιέφερε να διδαχθώ στο σχολείο πιο αναλυτικά στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων, στα πλαίσια αντίστοιχου μαθήματος ώστε να βελτιώσω τις ικανότητες μου στην επίλυση προβλημάτων.	ΝΑΙ	ΟΧΙ						
	8							

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.