



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

«Αναλυτικός προσδιορισμός του ηλεκτρικού δυναμικού στο ανισότροπο και ανομοιογενές σφαιρικό μοντέλο της κεφαλής στην ηλεκτροεγκεφαλογραφία»

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβληθείσα στη
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του
Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου
από την

Κωνσταντίνα Μπαμπαλή του Αθανασίου

Προς απόκτηση του τίτλου της
Διδάκτορος του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

Πάτρα
Μάϊος 2026

Η παρούσα διατριβή αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία της Μπαμπαλή Κωνσταντίνας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβληθείσα στη
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας του
Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου
από την
Κωνσταντίνα Μπαμπαλή του Αθανασίου
Εξεταστική Επιτροπή

Μαρία Χατζηνικολάου

Καθηγήτρια, Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας,
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Γρηγόριος Καμβύσας

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Γεώργιος Δάσιος

Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ελευθέριος Προτοπαπός

Επίκουρος Καθηγητής, Σχολής Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας,
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

Παναγιώτης Βαφέας

Καθηγητής, Τμήμα Χημικών Μηχανικών,
Πανεπιστήμιο Πατρών

Μάριος Αντωνακάκης

Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών,
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Γεώργιος Χατζαράκης

Καθηγητής, Τμήμα Εκπαιδευτικών Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Εκπαιδευτικών
Ηλεκτρονικών Μηχανικών, ΑΣΠΑΙΤΕ

«στην οικογένειά μου»

Ευχαριστίες

Καθώς φτάνει στο τέλος αυτό το ταξίδι της αναζήτησης και της ολοκλήρωσης της διδακτορικής μου διατριβής, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους πίστεψαν σε εμένα και με στήριξαν σε αυτή την πορεία.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την εκλιπούσα Φωτεινή Καριώτου, η οποία ήταν η πρώτη που πίστεψε σε εμένα και μου έδωσε αυτή την ευκαιρία. Η καθοδήγησή της, η υποστήριξή της, ο επαγγελματισμός της και η ξεχωριστή της ευγένεια είναι μόνο μερικά από τα στοιχεία που χαρακτήριζαν την προσωπικότητά της.

Ευχαριστώ θερμά την επιβλέπουσά μου, κ. Μ. Χατζηνικολάου, καθώς και τον κ. Γ. Καμβύσα, χωρίς τη συμβολή των οποίων δεν θα ήταν δυνατή η ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής. Με στήριξαν στις δυσκολίες και με καθοδήγησαν με υπομονή και εμπιστοσύνη καθ' όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

Ένα ξεχωριστό ευχαριστώ οφείλω στον Καθηγητή κ. Γ. Δάσιο, έναν ιδιαίτερο άνθρωπο που είχα την τιμή να γνωρίσω, του οποίου οι συμβουλές κατά τη διάρκεια της συγγραφής υπήρξαν πολύτιμες και συνέβαλαν ουσιαστικά στην επιτυχή ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους φίλους μου, οι οποίοι με ενθάρρυναν και στάθηκαν δίπλα μου με κατανόηση και στήριξη σε όλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας.

Τέλος, ευχαριστώ από καρδιάς την οικογένειά μου και ιδιαίτερα τους γιους μου, Μενέλαο και Θανάση, για την αγάπη, την υπομονή και τη δύναμη που μου έδωσαν να συνεχίσω.

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή επικεντρώνεται στη μαθηματική μοντελοποίηση των βιοηλεκτρικών δυναμικών που παράγονται από τη νευρωνική δραστηριότητα στον ανθρώπινο εγκέφαλο, στο πλαίσιο της μελέτης του ευθέως προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (HEΓ).

Αρχικά, μελετάται ένα πολυστρωματικό σφαιρικό μοντέλο κεφαλής αποτελούμενο από τέσσερις ομόκεντρες περιοχές (χωρία). Ο εσωτερικός πυρήνας αντιστοιχεί στον εγκεφαλικό ιστό, ο οποίος περιβάλλεται από τρία διαδοχικά στρώματα: το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (ENY), το κρανίο και το δέρμα της κεφαλής. Τα μέσα αυτά θεωρούνται ηλεκτρικά ανισότροπα, με διακριτές τιμές για την ακτινική και την εφαπτομενική αγωγιμότητα, οι οποίες περιγράφονται μέσω τανυστών αγωγιμότητας. Με αφετηρία την εξίσωση Poisson και για διπολική πηγή ρεύματος στο εσωτερικό του εγκεφαλικού ιστού, αναπτύσσονται αναλυτικές εκφράσεις για το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάθε χωρίο. Επιβάλλοντας τις κατάλληλες συνθήκες διαπερατότητας στα όρια μεταξύ των επιμέρους στρωμάτων, υπολογίζονται οι συντελεστές των αναπτύξεων αυτών, ώστε το πρόβλημα να οδηγεί σε μοναδική λύση.

Επιπλέον, εξετάζεται η περίπτωση ενός ομογενούς ανισότροπου μέσου, με στόχο την κατανόηση της επίδρασης της ανισοτροπίας στη χωρική κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αντίστοιχα ισότροπα μοντέλα, τα οποία προκύπτουν ως ειδική περίπτωση του παρόντος μοντέλου, αναδεικνύοντας τις διαφοροποιήσεις που προκύπτουν λόγω της κατευθυντικής εξάρτησης της αγωγιμότητας καθώς και τη σημαντική μείωση του πλάτους των επιφανειακών δυναμικών όταν λαμβάνεται υπόψη η ανισοτροπία.

Η διατριβή αυτή επεκτείνει τις υπάρχουσες αναλυτικές μεθόδους για την επίλυση του ευθέως προβλήματος της HEΓ σε πολυστρωματικά ανισότροπα σφαιρικά μοντέλα. Οι αναλυτικές εκφράσεις που προκύπτουν παρέχουν ένα θεωρητικό πλαίσιο αναφοράς για τη σύγκριση με ισότροπες προσεγγίσεις, καθώς και για την επαλήθευση αριθμητικών μεθόδων, όπως, η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και η μέθοδος συνοριακών στοιχείων (BEM).

Λέξεις – Κλειδιά

Ηλεκτροεγκεφαλογραφία, Ανισότροπη αγωγιμότητα, Σφαιρικό πρότυπο, Διπολική πηγή, Αναλυτική λύση

Abstract

This doctoral dissertation focuses on the mathematical modeling of the bioelectric potentials generated by neuronal activity in the human brain, within the framework of the electroencephalography (EEG) forward problem.

A multilayer spherical head model consisting of four concentric regions is considered. The innermost region corresponds to the brain tissue and is surrounded by three successive layers representing the cerebrospinal fluid (CSF), the skull, and the scalp. These media are assumed to be electrically anisotropic, with distinct radial and tangential conductivity values described by conductivity tensors. Starting from the Poisson equation and considering a dipolar current source located within the brain tissue, analytical solutions for the electric potential are derived in each domain. By imposing the appropriate transmission conditions at the interfaces between adjacent layers, the coefficients of these expansions are determined, so that the problem admits a unique solution.

In addition, the case of a homogeneous anisotropic medium is examined in order to investigate the effect of anisotropy on the spatial distribution of the electric potential. The results are compared with the corresponding isotropic models, which arise as a special case of the present formulation, highlighting the differences introduced by the directional dependence of conductivity, as well as the significant reduction in the amplitude of the surface potentials when anisotropy is taken into account.

This dissertation extends existing analytical solutions of the EEG forward problem to multilayer anisotropic spherical head models. The analytical expressions derived in this study provide a theoretical reference framework for comparison with isotropic approaches and with numerical methods such as the finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM)

Keywords

Electroencephalography (EEG), Anisotropic Conductivity, Spherical Head Model, Current Dipole Source, Analytical Solution

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	v
Περίληψη	vi
Abstract	vii
Περιεχόμενα	viii
Συμβολισμός	x
Κεφάλαιο 1 ^ο	13
1. Κεφάλαιο Λειτουργική απεικόνιση του ανθρώπινου εγκεφάλου	13
1.1. Ανατομία ανθρώπινου εγκεφάλου	13
1.2. Ο Νευρώνας.....	14
1.2.1. Η θεμελιώδης μονάδα του νευρικού συστήματος.....	14
1.2.2. Το δυναμικό ηρεμίας	17
1.2.3. Το δυναμικό ενεργείας.....	18
1.2.4. Τα συναπτικά δυναμικά	20
1.3. Η εξέλιξη των νευροεπιστημών και η θεμελίωση της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας	22
1.4. Το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα	24
1.5. Βιοηλεκτρικά δυναμικά και η σχεδόν στάσιμη θεωρία	30
Κεφάλαιο 2 ^ο	35
2. Το μαθηματικό υπόβαθρο	35
2.1. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων	35
2.2. Σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις	40
Κεφάλαιο 3 ^ο	44
3. Ανισοτροπία	44
3.1. Ανισοτροπία ηλεκτρικής αγωγιμότητας	44
3.2. Οι αγωγιμότητες των φλοιών στην ανθρώπινη κεφαλή.	47
3.2.1. Η αγωγιμότητα του δέρματος	49
3.2.2. Η αγωγιμότητα του εγκεφαλονωτιαίου υγρού	50
3.2.3. Η αγωγιμότητα του εγκεφάλου	50
3.2.4. Η αγωγιμότητα του κρανίου.....	53
3.3. Η επίδραση της ανισοτροπίας της αγωγιμότητας στην ανθρώπινη κεφαλή.....	53
3.4. Αριθμητικές προσεγγίσεις και βιοφυσική θεμελίωση της ανισοτροπίας των ηλεκτρικών αγωγιμοτήτων των ιστών.....	57
3.5. Βιβλιογραφική ανασκόπηση αναλυτικών μεθόδων για ανισοτροπικά μοντέλα ...	62
Κεφάλαιο 4 ^ο	66
4. Ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό μοντέλο εγκεφάλου για την εύρεση των δυναμικών HEG.....	66
4.1. Το Ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό μοντέλο	66
4.2. Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος	67
4.3. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό πρότυπο	72
4.4. Οι συνθήκες διαπερατότητας του προβλήματος.....	77
4.5. Εφαρμογή συνθηκών διαπερατότητας (ή μεταβατικότητας)	79
4.6. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό πρότυπο με διπολική πηγή	85
Κεφάλαιο 5 ^ο	88
5. Αναγωγή προβλήματος σε περιπτώσεις μελέτης	88

5.1. Τα ηλεκτρικά δυναμικά για μονοπολική και διπολική πηγή σε μη ομογενή ανισότροπο σφαιρικό αγωγό με σταθερό λόγο (η/ϵ)	88
5.2. Ισότροπο μη ομογενές σφαιρικό πρότυπο με τρεις φλοιούς.....	93
Κεφάλαιο 6 ^ο	95
6. Ομογενή σφαιρικά πρότυπα.....	95
6.1. Ανισότροπο ομογενές σφαιρικό πρότυπο	95
6.2. Ισότροπο ομογενές σφαιρικό πρότυπο	100
6.3. Σύγκριση ανισότροπων και ισότροπων ομογενών προτύπων	105
6.4. Αποτελέσματα ανάλυσης ισότροπων και ανισότροπων ομογενών προτύπων ...	108
Κεφάλαιο 7 ^ο	113
7. Συγκρίσεις – αποτελέσματα.....	113
7.1. Σύγκριση του ανισότροπου μη ομογενούς με το ανισότροπο ομογενές πρότυπο	113
7.2. Μέτρο σχετικής διαφοράς (RDM) και σφάλμα μεγέθους (MAG).....	116
7.3. Σύγκλιση της Σειράς Σφαιρικών Αρμονικών.....	118
7.4. Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις	120
Παράρτημα Α: Αναλυτικοί υπολογισμοί στο σφαιρικό πρότυπο για τη διπολική πηγή και τα δυναμικά.....	127
Παράρτημα Β: Οι συντελεστές του αναπτύγματος της λύσης A_{jn}, B_{jn}	138
Παράρτημα Γ : Υπολογισμός δυναμικών για τα μετρικά σφαλματα RDM και MAG	143

Συμβολισμός

Γενικά σύμβολα

Ω_c : το χωρίο που περιγράφει τον εγκέφαλο

Ω_f : το χωρίο που αντιστοιχεί στο εγκεφαλονωτιαίο υγρό

Ω_b : το χωρίο που αντιστοιχεί στα κρανιακά οστά

Ω_s : το χωρίο που αντιστοιχεί στο δέρμα

s_c : η σφαιρική διεπιφάνεια μεταξύ του εγκεφάλου και του ENY

s_f : η σφαιρική διεπιφάνεια μεταξύ του εγκεφαλονωτιαίου υγρού και του κρανίου

s_b : η σφαιρική διεπιφάνεια μεταξύ του κρανίου και του τριχωτού της κεφαλής.

s_s : η σφαιρική διεπιφάνεια μεταξύ του δέρματος και του εξωτερικού χωρίου

\mathbb{R}^3 : Ευκλείδειος τρισδιάστατος χώρος

\mathbf{r} : διάνυσμα θέσης του σημείου παρατήρησης

\mathbf{r}_0 : διάνυσμα θέσης της σημειακής πηγής

$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$: εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σημείο \mathbf{r} της επιφάνειας S

$\delta(\mathbf{r})$: γενικευμένη συνάρτηση του Dirac ($[\delta] = [L^3, M^0, T^0, Q^0]$)

$\delta_{nn'}$: δέλτα του Kronecker

\times, \cdot, \otimes : εξωτερικό, εσωτερικό και τανυστικό γινόμενο αντίστοιχα

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$: καρτεσιανή ορθοκανονική βάση

$\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3$: μοναδιαία διανύσματα του καμπυλόγραμμου ορθογώνιου συστήματος

h_1, h_2, h_3 : μετρικοί συντελεστές καμπυλόγραμμου ορθογώνιου συστήματος

$\mathbf{r} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3$ Καρτεσιανή αναπαράσταση διανύσματος

$\tilde{I} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \otimes \hat{x}_i$: ταυτοτικό δυαδικό

$\nabla = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$: τελεστής ανάδελα ($[\nabla] = [L^{-1}, M^0, T^0, Q^0]$)

$\Delta = \nabla \cdot \nabla =$ τελεστής του Laplace ($[\Delta] = [L^{-2}, M^0, T^0, Q^0]$)

T : χρονική περίοδος (sec)

λ : χωρική περίοδος (μήκος κύματος)

ω : κυκλική συχνότητα (χρονική πυκνότητα)

k : κυματικός αριθμός (χωρική πυκνότητα)

f : συχνότητα (Hz)

c_0 : ταχύτητα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό
 ϵ : ηλεκτρική επιδεκτικότητα ή διηλεκτρική σταθερά ($[\epsilon] = [L^{-3}, M^{-1}, T^2, Q^2]$)
 ϵ_0 : ηλεκτρική επιδεκτικότητα του κενού
 μ : μαγνητική διαπερατότητα ($[\mu] = [L^1, M^1, T^0, Q^{-2}]$)
 μ_0 : μαγνητική διαπερατότητα του κενού
 σ : αγωγιμότητα ($[\sigma] = [L^{-3}, M^{-1}, T^1, Q^2]$)
 σ_0 : αγωγιμότητα του χώρου V_i
 $\bar{\sigma}$: τανυστής αγωγιμότητας
 σ_t : εφαπτομενική αγωγιμότητα
 σ_r : ακτινική αγωγιμότητα
 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό πεδίο (χωρική εξάρτηση) ($[\mathbf{E}] = [L^1, M^1, T^{-2}, Q^{-1}]$)
 $\mathbf{J}^V(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r})$: χωρική πυκνότητα ρεύματος ($[\mathbf{J}^V] = [L^{-2}, M^0, T^{-1}, Q^1]$)
 $\mathbf{J}^P(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$: χωρική πυκνότητα του κύριου σημειακού διπολικού ρεύματος
 $\mathbf{J} = \mathbf{J}^V + \mathbf{J}^P$: χωρική πυκνότητα ολικού ρεύματος
 $u(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό δυναμικό ($\mathbf{E} = -\nabla u$), ($[u] = [L^2, M^1, T^{-2}, Q^{-1}]$)
 $u^-(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό δυναμικό στον εσωτερικό χώρο V^- με $0 < \mathbf{r} < \mathbf{r}_0$
 $u^-(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό δυναμικό στον εσωτερικό χώρο V^- με $\mathbf{r}_0 < \mathbf{r} < \mathbf{r}_s$
 $u^+(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό δυναμικό στον εξωτερικό χώρο V^+ με $\mathbf{r} > \mathbf{r}_s$
 M : η ένταση της μονοπολικής πηγής
 \mathbf{Q} : η ροπή της διπολικής πηγής
 s : η ένταση της πυκνότητας ρεύματος πηγής
 $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$: η συνάρτηση Green που αντιστοιχεί στο πεδίο $u(\mathbf{r})$ με πηγή στο σημείο \mathbf{r}'

Σύμβολα στο σφαιρικό πρότυπο

$(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$: σφαιρική ορθοκανονική βάση
 $\mathbf{r} = r\hat{r} + \theta\hat{\theta} + \phi\hat{\phi}$: σφαιρική αναπαράσταση διανύσματος
 r_a : ακτίνα του σφαιρικού ομογενούς αγωγού
 $P_n(x)$: πολυώνυμα Legendre
 $P_n^m(x)$: συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους
 $\bar{Y}_{nm,a}(\mathbf{r})$: οι κανονικοποιημένες πραγματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές
 $Y_{nm,a}(\mathbf{r})$: οι μη - κανονικοποιημένες πραγματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$Y_n^{m,e}(\mathbf{r})$: οι μη - κανονικοποιημένες πραγματικές άρτιες επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$Y_n^{m,o}(\mathbf{r})$: οι μη - κανονικοποιημένες πραγματικές περιττές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές

$\psi_i(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό δυναμικό μια μονοπολική πηγή σε σφαιρικό αγωγό $i = c, f, b, s$

$u_i(\mathbf{r})$: ηλεκτρικό δυναμικό μια διπολική πηγή σε σφαιρικό αγωγό $i = c, f, b, s$

r_c : ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά τον εγκέφαλο (λευκή και φαιά ουσία)

r_f : ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά το εγκεφαλονωτιαίο υγρό

r_b : ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά το κρανίο

r_s : ακτίνα του σφαιρικού φλοιού που αναπαριστά το δέρμα

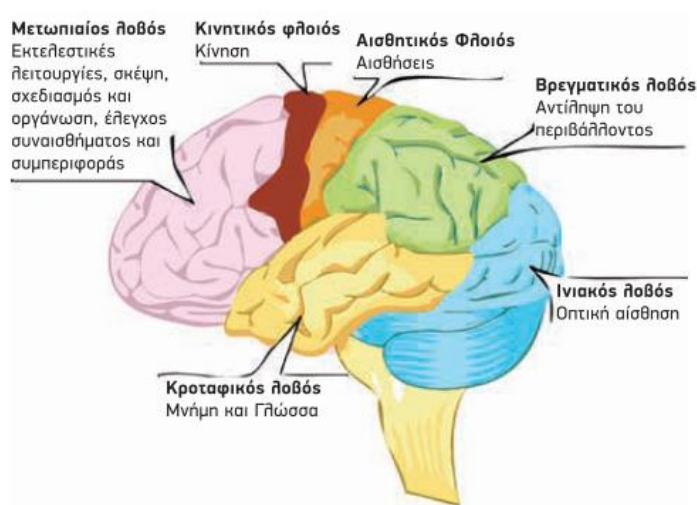
Κεφάλαιο 1^ο

1. Κεφάλαιο Λειτουργική απεικόνιση του ανθρώπινου εγκεφάλου

1.1. Ανατομία ανθρώπινου εγκεφάλου

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελεί ένα από τα πιο περίπλοκα και λιγότερο πλήρως κατανοητά συστήματα της ανθρώπινης ύπαρξης. Πρόκειται για ένα όργανο που έχει διαμορφωθεί μέσα από μια μακρόχρονη εξελικτική πορεία εκατομμυρίων ετών και χαρακτηρίζεται από εξαιρετικά πολύπλοκη οργάνωση.

Ο εγκέφαλος είναι το κεντρικό όργανο του νευρικού συστήματος, βρίσκεται μέσα στο κρανίο για προστασία, και περιβάλλεται από τις τρεις μήνιγγες (σκληρή, αραχνοειδής, χοριοειδής) που λειτουργούν ως επιπρόσθετα προστατευτικά στρώματα, ενώ ανάμεσα στις μήνιγγες κυκλοφορεί και το προστατευτικό εγκεφαλονωτιαίο υγρό. Η μάζα που έχει ο εγκέφαλος κατά μέσο όρο στους ενήλικες είναι περίπου 1300-1400 gr, που αντιστοιχεί στο 2% της μάζας του σώματος και διαφέρει ανάλογα με το φύλο, τη φυλή, την ηλικία και τη σωματική διάπλαση του ατόμου. Ο εγκέφαλος διαιρείται σε τρία κύρια μέρη: τα δύο εγκεφαλικά ημισφαίρια (δεξιό και αριστερό), την παρεγκεφαλίδα και το εγκεφαλικό στέλεχος, τα οποία έχουν εξειδικευμένες λειτουργίες που συνθέτουν το σύνολο των νοητικών και σωματικών μας λειτουργιών, από την υψηλή σκέψη μέχρι τις αυτόματες ζωτικές διεργασίες.



Σχήμα 1.1 Ανατομική διαίρεση του εγκεφαλικού φλοιού (Γιωτάκος, 2019)

Στο επίπεδο του εγκεφαλικού φλοιού, κάθε εγκεφαλικό ημισφαίριο υποδιαιρείται σε επιμέρους λοβούς, οι οποίοι παρουσιάζουν διακριτή ανατομική και λειτουργική οργάνωση. Στο σχήμα 1.1 απεικονίζονται οι κύριοι λοβοί του εγκεφάλου (μετωπιαίος, βρεγματικός, κροταφικός και ινιακός), καθώς και βασικές λειτουργικές περιοχές του φλοιού. Οι λοβοί αυτοί συμμετέχουν στη ρύθμιση ανώτερων γνωστικών, αισθητηριακών και κινητικών λειτουργιών, μέσω οργανωμένων φλοιϊκών νευρωνικών δικτύων.

Η ανωτερότητα του ανθρώπινου είδους αποδίδεται στον εγκέφαλο, ο οποίος αποτελεί ένα εξαιρετικά πολύπλοκο και εκτεταμένο νευρωνικό δίκτυο. Χάρη στη λειτουργική του ευελιξία, είναι ικανός να επεξεργάζεται τα δεδομένα που προέρχονται από τους αισθητηριακούς υποδοχείς, να αποθηκεύει εμπειρίες στη μνήμη και να κατευθύνει προσαρμοστικές συμπεριφορικές αποκρίσεις.

Ο εγκέφαλος στο εσωτερικό του φιλοξενείται ένα εκτεταμένο δίκτυο νευρικών κυττάρων, του οποίου η λειτουργία σχετίζεται άμεσα με την παραγωγή της σκέψης, τη μνήμη, τη ρύθμιση των σωματικών λειτουργιών και τη διαμόρφωση των συναισθημάτων. Οι διεργασίες αυτές πραγματοποιούνται μέσω της αλληλεπίδρασης περίπου 10^{11} νευρώνων, οι οποίοι επικοινωνούν μεταξύ τους μέσω ενός τεράστιου αριθμού συνάψεων, που εκτιμάται ότι κυμαίνεται μεταξύ 10^{14} και 10^{15} . Η λειτουργική πολυπλοκότητα και η αποδοτικότητα του εγκεφάλου υπερβαίνουν κατά πολύ κάθε τεχνητό υπολογιστικό σύστημα που έχει κατασκευαστεί έως σήμερα.

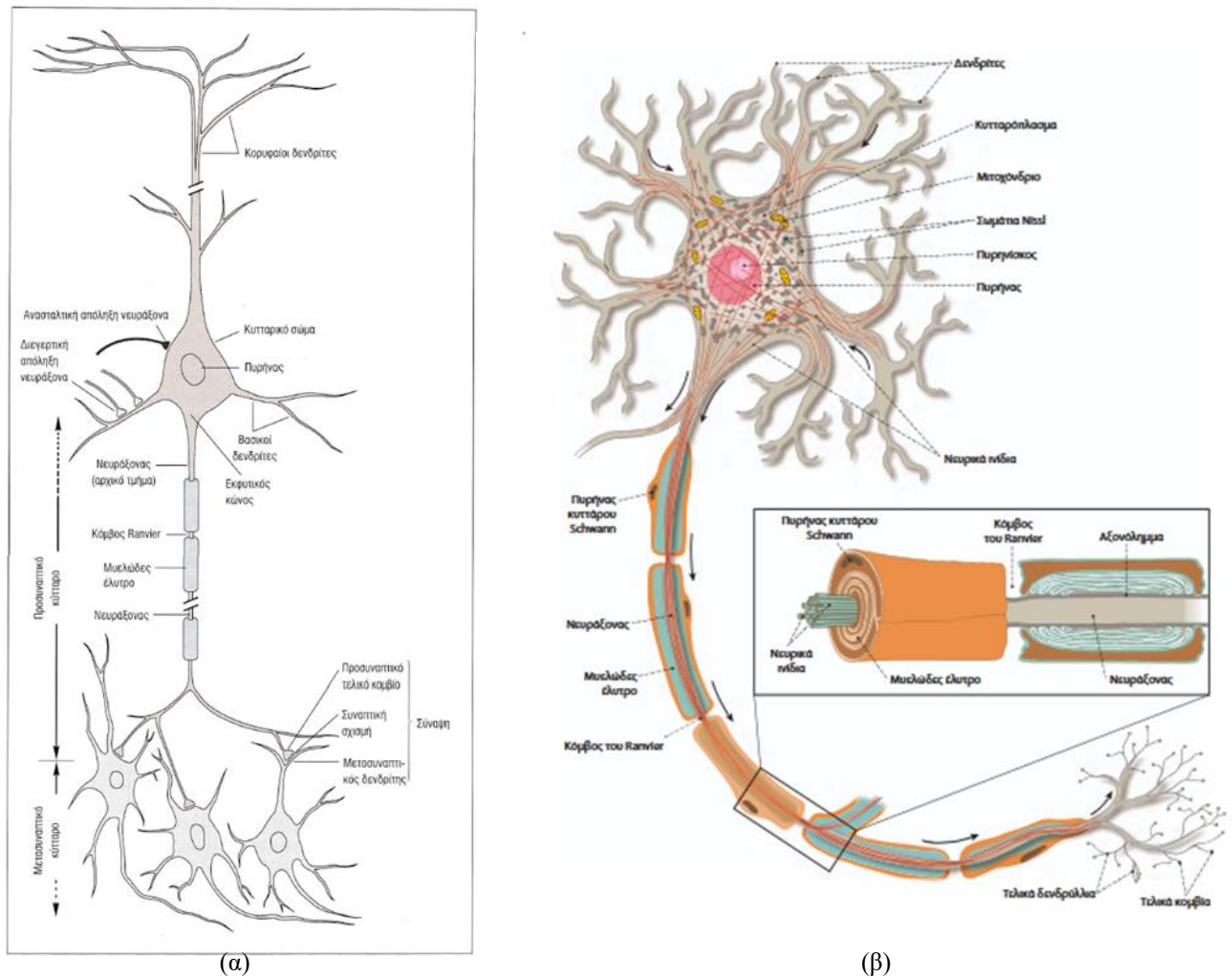
Το ενδιαφέρον για τη μελέτη του εγκεφάλου μπορεί να ανιχνευθεί ήδη από την αρχαιότητα. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν από τους πρώτους που χρησιμοποίησαν τον όρο «εγκέφαλος», περίπου τέσσερις χιλιάδες χρόνια πριν.

1.2. Ο Νευρώνας

1.2.1. Η θεμελιώδης μονάδα του νευρικού συστήματος

Στο νευρικό σύστημα διακρίνονται δύο βασικές κατηγορίες κυττάρων: τα νευρικά κύτταρα (νευρώνες) και τα νευρογλοιακά κύτταρα (γλοία). Τα πρώτα αποτελούν τις θεμελιώδεις μονάδες για τη μετάδοση και επεξεργασία πληροφοριών, ενώ τα δεύτερα επιτελούν υποστηρικτικές και ρυθμιστικές λειτουργίες που διασφαλίζουν τη φυσιολογική δραστηριότητα του νευρικού ιστού.

Παρά το γεγονός ότι οι νευρώνες, οι θεμελιώδεις μονάδες του εγκεφάλου, διαθέτουν σχετικά απλή δομή, οι ανώτερες γνωστικές και συμπεριφορικές λειτουργίες του ανθρώπου αναδύονται από τον τεράστιο αριθμό τους και, κυρίως, από τον τρόπο με τον οποίο αυτοί οργανώνονται σε εκτεταμένα νευρωνικά κυκλώματα με ιδιαίτερα ακριβή συνδεσιμότητα. Ο ανθρώπινος εγκέφαλος περιέχει περίπου 100 δισεκατομμύρια νευρώνες (10^{11}), οι οποίοι, αν και μοιράζονται μια κοινή βασική αρχιτεκτονική, διαφοροποιούνται σε χιλιάδες λειτουργικούς τύπους.



Σχήμα 1.2 Η δομή του νευρώνα (α) (Kandel et al., 2004), (β) (Παπαδόπουλος, 2021)

Ο τυπικός νευρώνας εμφανίζει τέσσερις κύριες δομικές περιοχές: το κυτταρικό σώμα, τους δενδρίτες, τον άξονα και τις συναπτικές απολήξεις. Καθεμιά από αυτές τις δομές έχει εξειδικευμένο ρόλο στη γένεση, την αγωγή και τη μετάδοση των νευρικών ώσεων.

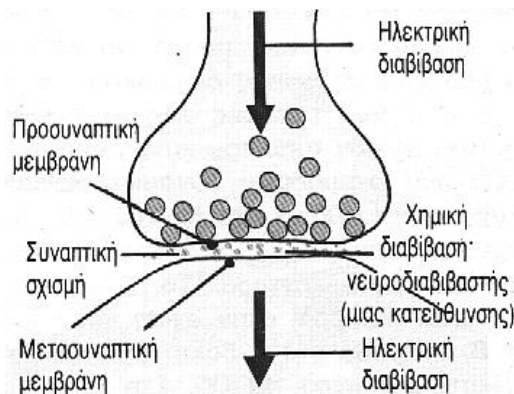
Το κυτταρικό σώμα περιέχει τον πυρήνα και είναι υπεύθυνο για την αποθήκευση της γενετικής πληροφορίας. Είναι το κέντρο ελέγχου του νευρώνα και από αυτό εκφύονται οι

κυτταρικές αποφυάδες, δηλαδή ο νευράξονας και οι δενδρίτες. Η διάμετρός του είναι συνήθως 50 μm ή και μεγαλύτερη.

Οι δενδρίτες είναι συνήθως κοντές και διακλαδισμένες αποφυάδες που εκφύονται από το κυτταρικό σώμα. Ουσιαστικά, αποτελούν τα υποδοχικά στοιχεία του νευρώνα, καθώς είναι υπεύθυνοι για τη λήψη των συναπτικών σημάτων από άλλους νευρώνες. Μαζί με το κυτταρικό σώμα, οι δενδρίτες αποτελούν την κύρια περιοχή εισόδου των νευρικών σημάτων.

Ο νευράξονας είναι μια μακρά απόφυση που αποτελεί το κύριο μέσο μετάδοσης των νευρικών ερεθισμάτων από το κυτταρικό σώμα προς άλλους νευρώνες. Το μήκος του μπορεί να ποικίλλει σημαντικά, φτάνοντας ακόμα και τα 3 μέτρα. Ο νευράξονας είναι γενικά πολύ λεπτός (από 0,2 έως 20 μm). Πολλές φορές καλύπτεται από ένα λιπώδες περίβλημα, το μυελινώδες έλυτρο, το οποίο διακόπτεται σε κανονικά διαστήματα, σχηματίζοντας τους κόμβους του Ranvier. Η δυναμική ενέργεια, δηλαδή το νευρικό σήμα, ξεκινά είτε από τον εκφυτικό κώνο (το αρχικό τμήμα του νευράξονα) είτε, σε ορισμένες περιπτώσεις, από τον πρώτο κόμβο του Ranvier. Ένας μόνο νευράξονας μπορεί να δημιουργήσει συνάψεις με χίλιους (1.000) άλλους νευρώνες.

Κοντά στο τέλος του, ο νευράξονα διακλαδίζεται σε λεπτούς κλάδους, οι οποίοι σχηματίζουν σημεία επικοινωνίας με άλλους νευρώνες. Τα νευρικά κύτταρα επικοινωνούν μεταξύ τους, εκκρίνοντας ειδικές βιοχημικές ουσίες, τους νευροδιαβιβαστές ή νευρομεταβιβαστές, που δρουν ως μεταφορείς μηνυμάτων. Οι νευροδιαβιβαστές ανήκουν σε τρεις κατηγορίες: τα αμινοξέα, τις μονοαμίνες και τα πολυπεπίδια. Παραλήπτες των μηνυμάτων είναι οι υποδοχείς ειδικά πρωτεϊνικά μόρια στην απόληξη του δενδρίτη του γειτονικού νευρώνα.

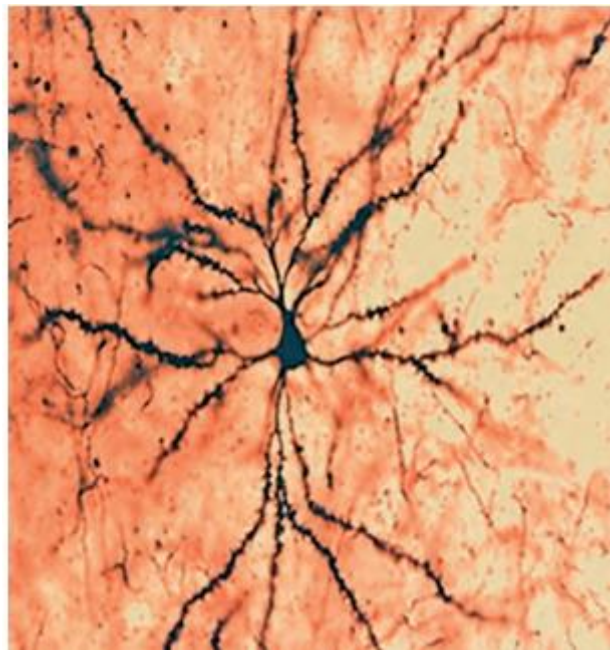


Σχήμα 1.3 Η σύναψη (Καριώτου, 2002)

Τα σημεία επικοινωνίας των νευρώνων ονομάζονται συνάψεις. Το κύτταρο που μεταδίδει το σήμα ονομάζεται προσυναπτικό κύτταρο ενώ το κύτταρο που δέχεται το σήμα ονομάζεται μετασυναπτικό κύτταρο.

Το προσυναπτικό κύτταρο μεταδίδει το σήμα μέσω των τελικών νευραξονικών κλάδων, που ονομάζονται τελικά κομβία. Η επαφή μεταξύ των δύο κυττάρων δεν είναι άμεση, καθώς υπάρχει ένα μικρό κενό ανάμεσά τους, η συναπτική σχισμή η οποία έχει πάχος 15-19 nm.

Οι περισσότερες προσυναπτικές απολήξεις καταλήγουν στους δενδρίτες του μετασυναπτικού νευρώνα, αν και κάποιες μπορεί να καταλήξουν στο κυτταρικό του σώμα.



Σχήμα 1.4 Φωτομικρογραφία νευρικού κυττάρου ραβδωτού σώματος μετά από εφαρμογή της ιστολογικής μεθόδου Golgi (Παπαδόπουλος, 2021).

1.2.2. Το δυναμικό ηρεμίας

Σε κατάσταση ηρεμίας, όλα τα κύτταρα, συμπεριλαμβανομένων των νευρώνων, διατηρούν μια διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής πλευράς της κυτταρικής μεμβράνης τους. Η διαφορά αυτή είναι γνωστή ως δυναμικό ηρεμίας και προκύπτει από την άνιση κατανομή ιόντων και την εκλεκτική διαπερατότητα της μεμβράνης. Σε ένα τυπικό νευρώνα, το δυναμικό ηρεμίας βρίσκεται περίπου στα -65 mV, με το εσωτερικό να είναι πιο αρνητικό σε σχέση με το εξωτερικό. Ανάλογα με τον τύπο του

κυττάρου, η τιμή αυτή μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ -40 και -80 mV, ενώ στα μυϊκά κύτταρα είναι μεγαλύτερη και μπορεί να φτάσει τα -90 mV.

Η ύπαρξη του δυναμικού ηρεμίας οφείλεται κυρίως στην άνιση κατανομή ιόντων εκατέρωθεν της κυτταρικής μεμβράνης. Στο εσωτερικό του κυττάρου, η συγκέντρωση ιόντων καλίου (K^+) είναι πολύ υψηλότερη (περίπου 20 φορές υψηλότερη) από τη συγκέντρωση έξω από το κύτταρο, ενώ αντίθετα το νάτριο (Na^+) βρίσκεται σε μεγαλύτερη συγκέντρωση εκτός του κυττάρου. Επιπλέον, στον ενδοκυττάριο χώρο υπάρχουν και ιόντα χλωρίου Cl^- για τα οποία η μεμβράνη είναι αδιαπέραστη με αποτέλεσμα αφενός την ανισοκατανομή των ιόντων στις δύο πλευρές της μεμβράνης και αφετέρου την περίσσεια αρνητικών φορτίων στο εσωτερικό και, αντίθετα, περίσσεια θετικών φορτίων στο εξωτερικό.

Η εκλεκτική αυτή διαπερατότητα της μεμβράνης ενισχύει την ανισορροπία. Αναλυτικά, η μεμβράνη σε κατάσταση ηρεμίας είναι πολύ πιο διαπερατή στο K^+ απ' ό,τι στο Na^+ , επιτρέποντας στο κάλιο να κινείται πιο ελεύθερα προς το εξωτερικό του κυττάρου. Καθώς θετικά φορτισμένα ιόντα K^+ εξέρχονται, το εσωτερικό του κυττάρου γίνεται ολοένα και πιο αρνητικό, μέχρις ότου η ηλεκτρική έλξη που ασκούν τα αρνητικά φορτία εξισορροπήσει την περαιτέρω έξοδο καλίου. Έτσι διαμορφώνεται ένα σταθερό δυναμικό μεμβράνης, γνωστό ως δυναμικό ηρεμίας.

Όταν το κύτταρο διεγερθεί και η μεμβράνη εκπολωθεί πέρα από ένα κρίσιμο κατώφλι, μπορεί να προκληθεί δυναμικό ενέργειας, το οποίο αποτελεί παροδική μεταβολή του δυναμικού της μεμβράνης. Η αντλία Na^+/K^+ συμβάλλει στη μακροπρόθεσμη διατήρηση των ιοντικών συγκεντρώσεων, ώστε το κύτταρο να είναι έτοιμο για νέο κύκλο διέγερσης.

1.2.3. Το δυναμικό ενεργείας

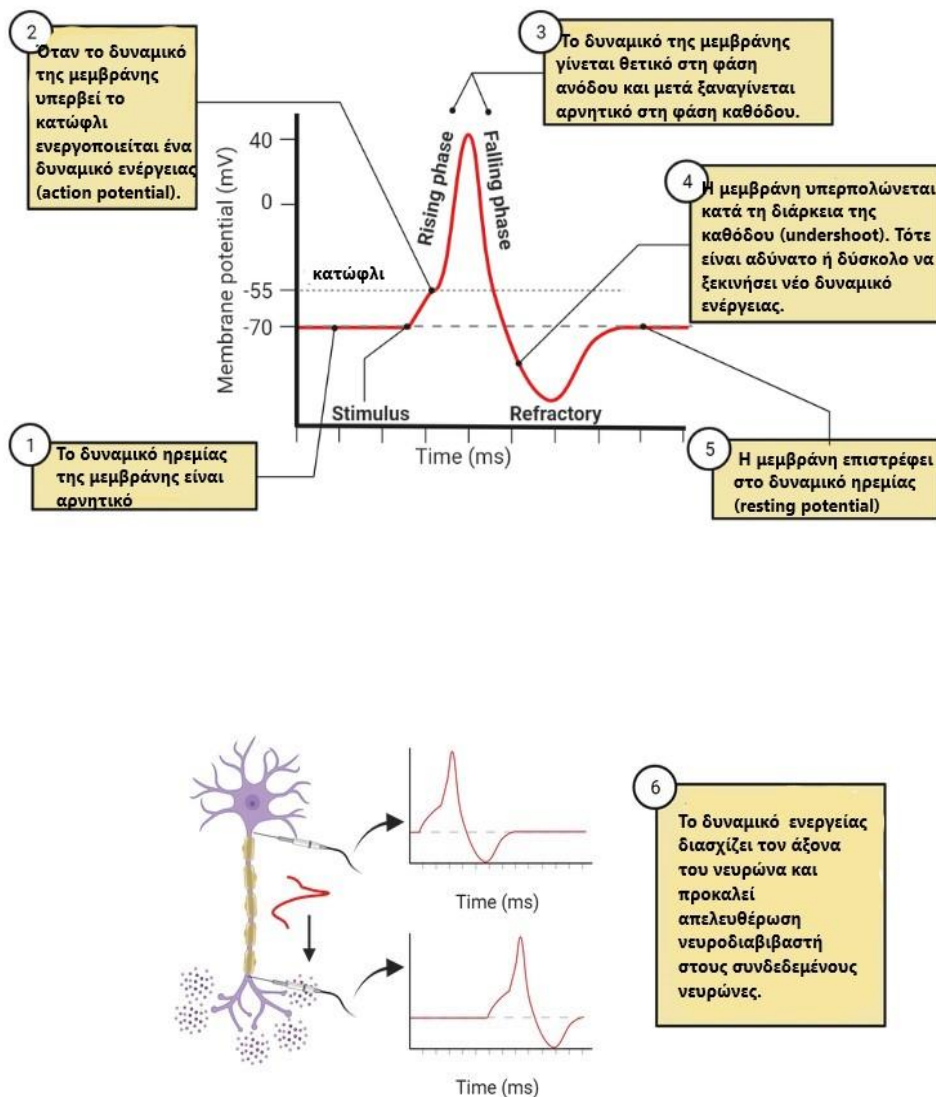
Τα ηλεκτρικά σήματα που άγει ο νευράξονας, ονομάζονται δυναμικά ενεργείας, είναι ταχείς, παροδικές νευρικές ώσεις του τύπου όλον ή ουδέν, που σημαίνει ότι είτε παράγονται πλήρως είτε καθόλου, με σταθερό πλάτος (περίπου 100mV) και μικρή διάρκεια (περίπου 1 ms) (Kandel et al., 2004).

Το δυναμικό ενέργειας παράγεται σε μια εξειδικευμένη περιοχή, τον εκφυτικό κώνο, και διαδίδεται κατά μήκος του νευράξονα με υψηλές ταχύτητες (1-100 μέτρα ανά δευτερόλεπτο) χωρίς να μειώνεται το πλάτος του. Το γεγονός ότι το εύρος του δυναμικού

παραμένει σταθερό οφείλεται στο γεγονός ότι το δυναμικό ενέργειας αναγεννάται διαρκώς κατά μήκος του άξονα.

Τα δυναμικά ενέργειας αποτελούν τα σήματα που χρησιμοποιεί ο εγκέφαλος για την υποδοχή, ανάλυση και μεταφορά πληροφορίας. Είναι απόλυτα τυποποιημένα σε όλο το νευρικό σύστημα και παράγονται από ερεθίσματα του περιβάλλοντος (π.χ., φως, μηχανική επαφή). Η πληροφορία που μεταφέρεται καθορίζεται από τον τύπο του σήματος, όχι από την ιδιότητά του. Δηλαδή, η πληροφορία μεταφέρεται μέσω του μοτίβου και της συχνότητας των δυναμικών ενέργειας, και όχι από το μέγεθος ή τη διάρκεια κάθε σήματος. Προκειμένου να αυξηθεί η ταχύτητα των νευρικών σημάτων (δυναμικών ενέργειας), οι μεγάλοι νευράξονες καλύπτονται από ένα λιπώδες περίβλημα, το μυελινώδες έλυτρο. Αυτό το έλυτρο διακόπτεται σε κανονικά διαστήματα, δημιουργώντας τους κόμβους του Ranvier. Η αναγέννηση του δυναμικού ενέργειας συμβαίνει μόνο σε αυτά τα «γυμνά» σημεία κατά μήκος του νευράξονα.

Το δυναμικό ενέργειας παράγεται από τη διαδοχική ενεργοποίηση (άνοιγμα) των τασσεοεξαρτώμενων διαύλων Na^+ και K^+ . Το δυναμικό ενέργειας είναι μια ταχεία αύξηση και μείωση του ηλεκτρικού δυναμικού, η οποία διαδίδεται κατά μήκος του νευρώνα και οδηγεί στην απελευθέρωση νευροδιαβιβαστών στο προσυναπτικό άκρο. Ειδικότερα, όταν το δυναμικό της μεμβράνης φθάσει σε μία κρίσιμη τιμή (ουδός), ανοίγουν τα τασσεοελεγχόμενα κανάλια Na^+ , επιτρέποντας την ταχεία είσοδο ιόντων Na^+ στο εσωτερικό του κυττάρου και οδηγώντας σε απότομη εκπόλωση της μεμβράνης. Η διαδικασία αυτή ενισχύεται μέσω θετικής ανάδρασης, καθώς η περαιτέρω εκπόλωση προκαλεί το άνοιγμα επιπλέον καναλιών Na^+ . Στη συνέχεια, τα κανάλια Na^+ απενεργοποιούνται, ενώ με χρονική καθυστέρηση ανοίγουν τα τασσεοελεγχόμενα κανάλια K^+ , επιτρέποντας την έξοδο ιόντων K^+ από το κύτταρο και προκαλώντας επαναπόλωση της μεμβράνης. Η βραδεία επαναφορά των καναλιών K^+ οδηγεί σε παροδική υπερπόλωση, πριν την τελική αποκατάσταση του δυναμικού ηρεμίας. Το Σχήμα 1.5 απεικονίζει διαγραμματικά κάθε στάδιο του δυναμικού ενέργειας.



Σχήμα 1.5: Διαγραμματική απεικόνιση των φάσεων του δυναμικού ενέργειας (Kirby et al., 2024).

1.2.4. Τα συναπτικά δυναμικά

Πέρα από τα δυναμικά ενέργειας, τα νευρικά κύτταρα παράγουν και τοπικά δυναμικά, όπως τα υποδοχέα και τα συναπτικά, τα οποία δεν ακολουθούν τον νόμο «όλα ή τίποτα», αλλά εξασθενούν προοδευτικά με την απόσταση από το σημείο δημιουργίας τους. Τα δυναμικά αυτά προκύπτουν από μικρές μεταβολές στο δυναμικό της μεμβράνης.

Η μείωση του αρνητικού δυναμικού της μεμβράνης (για παράδειγμα από -65 mV σε -55 mV), η οποία αυξάνει την πιθανότητα παραγωγής δυναμικού ενέργειας, ονομάζεται

εκπόλωση. Αντίθετα, η αύξηση της αρνητικότητας της μεμβράνης (για παράδειγμα από -65 mV σε -75 mV), η οποία μειώνει την πιθανότητα εμφάνισης δυναμικού ενέργειας και δρα ανασταλτικά, καλείται υπερπόλωση.

Η εκπόλωση έχει διεγερτικό ρόλο, ενώ η υπερπόλωση λειτουργεί προστατευτικά, εμποδίζοντας την ανεξέλεγκτη παραγωγή ώσεων. Η συνεργασία των τοπικών δυναμικών με τα δυναμικά ενέργειας είναι καθοριστική για την επικοινωνία μεταξύ νευρικών κυττάρων και για τη σωστή λειτουργία του νευρικού συστήματος συνολικά.

Ένα σημαντικό είδος τοπικών δυναμικών είναι τα μετασυναπτικά δυναμικά, τα οποία δημιουργούνται κατά τη συναπτική μετάδοση. Όταν ενεργοποιείται ο προσυναπτικός νευρώνας, το σήμα μεταδίδεται μέσω του συναπτικού χάσματος, στη μετασυναπτική μεμβράνη όπου προκαλείται το μετασυναπτικό δυναμικό. Τα δυναμικά αυτά εμφανίζονται κυρίως στην περιοχή της σύναψης και έχουν μικρότερο μέγεθος σε σχέση με τα δυναμικά ενέργειας.

Τα μετασυναπτικά δυναμικά διακρίνονται σε:

- διεγερτικά μετασυναπτικά δυναμικά (Excitatory Postsynaptic Potentials – EPSP), τα οποία προκαλούν εκπόλωση της μετασυναπτικής μεμβράνης, και
- ανασταλτικά μετασυναπτικά δυναμικά (Inhibitory Postsynaptic Potentials – IPSP), τα οποία προκαλούν υπερπόλωση της μεμβράνης.

Τα διεγερτικά μετασυναπτικά δυναμικά έχουν συνήθως μικρό μέγεθος, της τάξης μερικών mV, και συνήθως δεν επαρκούν από μόνα τους για την πρόκληση δυναμικού ενέργειας. Ωστόσο, τα μετασυναπτικά δυναμικά μπορούν να αθροιστούν στον χώρο και στον χρόνο, καθώς τα σήματα που προέρχονται από τους δενδρίτες συγκεντρώνονται στο σώμα του νευρώνα. Η συνολική αυτή άθροιση καθορίζει τελικά αν ο νευρώνας θα παράγει δυναμικό ενέργειας.

Ο ηλεκτροεγκεφαλογράφος (ΗΕΓ) καταγράφει το άθροισμα μετασυναπτικών δυναμικών που δημιουργούνται σε μεγάλους πληθυσμούς νευρώνων του εγκεφαλικού φλοιού. Όταν σε μια περιοχή της μετασυναπτικής μεμβράνης δημιουργείται ένα διεγερτικό μετασυναπτικό δυναμικό, θετικά ιόντα εισέρχονται στη μετασυναπτική περιοχή, με αποτέλεσμα την υπεροχή αρνητικών φορτίων (ανιόντων) στην εξωκυττάρια περιοχή. Η κίνηση αυτή των ιόντων δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο με αρνητικό πόλο στην περιοχή της σύναψης και θετικό πόλο στη γύρω εξωκυττάρια περιοχή.

Στην περίπτωση δημιουργίας ανασταλτικού μετασυναπτικού δυναμικού εμφανίζονται παρόμοια φαινόμενα, όμως το ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται έχει αντίθετη πολικότητα. Τα τοπικά αυτά ηλεκτρικά πεδία μπορούν να αθροιστούν στον χώρο και στον χρόνο, δημιουργώντας μακροσκοπικά δυναμικά που είναι δυνατόν να καταγραφούν στην επιφάνεια του κρανίου. Αντίθετα, τα δυναμικά ενέργειας έχουν πολύ μικρή διάρκεια (περίπου 1 ms), σε σύγκριση με τα συναπτικά δυναμικά που διαρκούν περίπου 10 ms. Για τον λόγο αυτό, τα δυναμικά ενέργειας δεν συμβάλλουν ουσιαστικά στη δημιουργία των ρυθμών που καταγράφονται στο ΗΕΓ.

Τα κύτταρα που είναι κυρίως υπεύθυνα για τα δυναμικά που καταγράφονται στο ΗΕΓ και θεωρούνται ως η κύρια πηγή του μετρούμενου εξωτερικά ηλεκτρικού αλλά και μαγνητικού πεδίου είναι τα πυραμιδικά κύτταρα του εγκεφαλικού φλοιού. Αυτό συμβαίνει γιατί το ρεύμα των ιόντων που διαρρέουν τους δενδρίτες των πυραμιδικών κυττάρων είναι διατεταγμένα κάθετα προς την επιφάνεια του φλοιού (γεγονός που ευνοεί την άθροιση των ηλεκτρικών πεδίων που παράγονται από τη δραστηριότητά τους). Ακόμη, οι δενδρίτες τους δέχονται μεγάλο αριθμό προσαγωγών ινών (αξόνων) γεγονός που οδηγεί σε πολλές συναπτικές εισόδους και στη δημιουργία πολυάριθμων συναπτικών δυναμικών. Η άθροιση αυτών των δυναμικών οδηγεί στους χαρακτηριστικούς ρυθμούς του ΗΕΓ που καταγράφονται στο τριχωτό της κεφαλής. Τέλος η επαγόμενη ροή των ιόντων στον εξωκυττάριο χώρο θεωρείται ως χωρικό ρεύμα αγωγιμότητας.

1.3. Η εξέλιξη των νευροεπιστημών και η θεμελίωση της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας

Η συστηματική επιστημονική θεμελίωση των νευροεπιστημών τοποθετείται στα μέσα του 19ου αιώνα. Ειδικότερα, στις 18 Απριλίου 1861, ο Γάλλος ιατρός και ανατόμος Pierre Paul Broca παρουσίασε στη Γαλλική Εταιρεία Ανθρωπολογίας τα ευρήματά του σχετικά με τη συσχέτιση συγκεκριμένης περιοχής του αριστερού εγκεφαλικού ημισφαιρίου με τη γλωσσική λειτουργία. Η ανακοίνωση αυτή αποτέλεσε σημείο καμπής, καθώς ανέδειξε για πρώτη φορά τη λειτουργική εξειδίκευση περιοχών του εγκεφάλου. Στις δεκαετίες που ακολούθησαν, η έρευνα στον τομέα αυτό γνώρισε ραγδαία ανάπτυξη και διαμορφώθηκαν θεωρίες που παραμένουν θεμελιώδεις μέχρι σήμερα, όπως εκείνες των Wernicke και Cajal, σύμφωνα με τις οποίες ο εγκέφαλος αποτελείται από διακριτές αλλά συνεργαζόμενες λειτουργικές περιοχές, οι οποίες συνθέτουν πολύπλοκες συμπεριφορές (Ταππούρας, Μ.,

Γιαννιτσάκης, Ν., Καρβούνης, Ε., & Τζάλλας, 2015). Πριν από αυτούς, οι επιστήμονες πίστευαν ότι ο εγκέφαλος ήταν ένα ενιαίο, συνεχόμενο δίκτυο (σαν ένα τεράστιο σύστημα υδραυλικών σωληνώσεων όπου τα πάντα είναι ενωμένα). Ο Cajal απέδειξε (με παρατήρηση) ότι ο εγκέφαλος αποτελείται από μεμονωμένα κύτταρα (τους νευρώνες), που επικοινωνούν μεταξύ τους.

Παράλληλα με τη μορφολογική και λειτουργική μελέτη του εγκεφάλου, αναπτύχθηκε το ενδιαφέρον για τα ηλεκτρικά φαινόμενα που συνοδεύουν τη δραστηριότητα των νευρικών κυττάρων. Ήδη από τα τέλη του 18ου αιώνα, ο Luigi Galvani είχε διατυπώσει την άποψη ότι τα νεύρα διαθέτουν εγγενή ηλεκτρική φύση, ενώ αργότερα ο Emil du Bois-Reymond απέδειξε πειραματικά ότι η λειτουργία των περιφερικών νευρών συνοδεύεται από μετρήσιμες μεταβολές του ηλεκτρικού δυναμικού. Η πειραματική επιβεβαίωση της ηλεκτρικής διεγερσιμότητας του φλοιού ήρθε το 1870 από τους Fritsch και Hitzig, οι οποίοι κατέρριψαν οριστικά την άποψη περί ομοιογενούς και ηλεκτρικά αδρανούς εγκεφαλικής μάζας.

Στο πεδίο της ηλεκτροφυσιολογίας, ο Richard Caton (1842–1926) υπήρξε ο πρώτος που απέδειξε την ύπαρξη αυθόρμητων ηλεκτρικών ρευμάτων στον εγκέφαλο πειραματόζωων. Στις 24 Αυγούστου 1875, χρησιμοποιώντας ένα ευαίσθητο γαλβανόμετρο με κάτοπτρο, κατέγραψε «ασθενή ρεύματα μεταβαλλόμενης κατεύθυνσης» στη φαιά ουσία, ενώ το 1877 ανέφερε τη δυνατότητα καταγραφής αυτών των σημάτων ακόμη και από την επιφάνεια του κρανίου. Στην εξέλιξη αυτή, ο Πολωνός φυσιολόγος Adolf Beck (1890) πρόσθεσε τη θεμελιώδη παρατήρηση ότι οι ρυθμικές ταλαντώσεις του φλοιού καταστέλλονται ως απόκριση σε αισθητηριακά ερεθίσματα, εισάγοντας την έννοια του απεγχορισμού του σήματος.

Στις αρχές του 20ού αιώνα, η τεχνολογική πρόοδος επέτρεψε στον Vladimir Pravdich-Neminsky να πραγματοποιήσει το 1912 την πρώτη φωτογραφική καταγραφή εγκεφαλικών κυμάτων σε σκύλους, χρησιμοποιώντας το γαλβανόμετρο χορδής του Einthoven και εισάγοντας τον όρο «ηλεκτροκερεβρόγραμμα». Ωστόσο, η καθοριστική τομή για την κλινική επιστήμη σημειώθηκε το 1924, όταν ο Hans Berger (1873–1941) πέτυχε την πρώτη συστηματική καταγραφή ηλεκτρικών δυναμικών από το ανθρώπινο κεφάλι. Οι αρχικές του μελέτες διεξήχθησαν σε ασθενείς με οστικά ελλείμματα του κρανίου, χρησιμοποιώντας το γαλβανόμετρο χορδής Edelmann, όμως σύντομα διαπίστωσε ότι η καταγραφή ήταν εφικτή και μέσω του ανέπαφου δέρματος της κεφαλής. Η χρήση του ισχυρότερου γαλβανόμετρου διπλού πηνίου της Siemens το 1926, με ευαισθησία 130 $\mu\text{V}/\text{cm}$, υπήρξε καθοριστική για τη

λήψη καθαρών ιχνών, τα οποία δημοσιεύθηκαν επίσημα το 1929. Στην ιστορική αυτή αναφορά, ο Berger περιέγραψε τον ρυθμό άλφα (10 Hz) και τον ρυθμό βήτα, εισάγοντας και καθιερώνοντας το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ) ως το πρωταρχικό εργαλείο μελέτης της ανθρώπινης εγκεφαλικής λειτουργίας.

Η ανακάλυψη αυτή χαρακτηρίστηκε από τους ιστορικούς ως ένα ιδιότυπο «Σύνδρομο του Κολόμβου». Ο Berger, ορμώμενος από μια βαθιά προσωπική πεποίθηση, δεν αποσκοπούσε αρχικά στη δημιουργία μιας διαγνωστικής μεθόδου, αλλά στην ανακάλυψη της φυσικής υπόστασης της «ψυχικής ενέργειας» (psychische Energie) και της μετατροπής της σε ηλεκτρισμό. Παρόλο που η θεωρητική του αφετηρία προσέγγιζε τη μεταφυσική, η σχολαστική και μεθοδική του εργασία τον οδήγησε σε μια από τις σημαντικότερες ιατρικές ανακαλύψεις του 20ού αιώνα. Παρά τον αρχικό σκεπτικισμό της επιστημονικής κοινότητας, που τον αντιμετώπισε ως ερασιτέχνη (dilettante), η επιμονή του δικαιώθηκε, μετατρέποντας μια υποκειμενική αναζήτηση στην απόλυτα αντικειμενική καταγραφή της εγκεφαλικής δραστηριότητας.

Η επιστημονική εγκυρότητα της μεθόδου σφραγίστηκε το 1934 από τον νομπελίστα Edgar Douglas Adrian (Lord Adrian), ο οποίος επιβεβαίωσε την εγκεφαλική προέλευση των κυμάτων Berger. Ταυτόχρονα, η διαγνωστική αξία του ΗΕΓ εδραιώθηκε μέσω των ερευνών των Fischer και Kornmüller (1933), οι οποίοι ταυτοποίησαν για πρώτη φορά τις παθολογικές ηλεκτρικές αιχμές (spikes) σε μοντέλα επιληψίας, μετατρέποντας την ηλεκτροεγκεφαλογραφία σε ένα αναντικατάστατο κλινικό εργαλείο για τη νευρολογία (Schomer & Silva, 2012).

1.4. Το Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα

Η κλινική ωρίμανση της μεθόδου της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας επήλθε τη μεταπολεμική περίοδο, με τον Frederic Gibbs (1947-1948) να διαπιστώνει ότι οι παροξυσμικές εκκενώσεις του κροταφικού λοβού αναδεικνύονται συχνά αποκλειστικά κατά τον ύπνο. Η παρατήρηση αυτή καθιέρωσε την καταγραφή υπό συνθήκες ύπνου ως απαραίτητο διαγνωστικό πρότυπο, επιβάλλοντας τη χρήση σταθερότερων μεθόδων τοποθέτησης ηλεκτροδίων (pasted electrodes) για πολύωρες μελέτες. Παράλληλα, ο Henri Gastaut εισήγαγε τη διαλείπουσα φωτοδιέγερση, αποδεικνύοντας ότι ο οπτικός ερεθισμός μπορεί να προσδιορίσει τον «επιληπτικό ουδό» του ασθενούς.

Την ίδια εποχή, οι Magoun και Moruzzi (1949) συνέδεσαν το ΗΕΓ με τη συνείδηση, καταδεικνύοντας ότι ο ηλεκτρικός ερεθισμός του ανιόντος δικτυωτού συστήματος του στελέχους προκαλεί απεγχρονισμό του σήματος και συμπεριφορική αφύπνιση. Στο Μόντρεαλ, η συνεργασία των Herbert Jasper και Wilder Penfield οδήγησε στην ανάπτυξη της ενδοεγχειρητικής ηλεκτροφλοιογραφίας (electrocortigraphy). Ο ακριβής εντοπισμός των επιληπτογόνων εστιών εδραίωσε την πεποίθηση ότι το ΗΕΓ δεν είναι μια στατική απεικόνιση, αλλά μια δυναμική χαρτογράφηση (functional mapping) της λειτουργικής ανατομίας του εγκεφάλου.

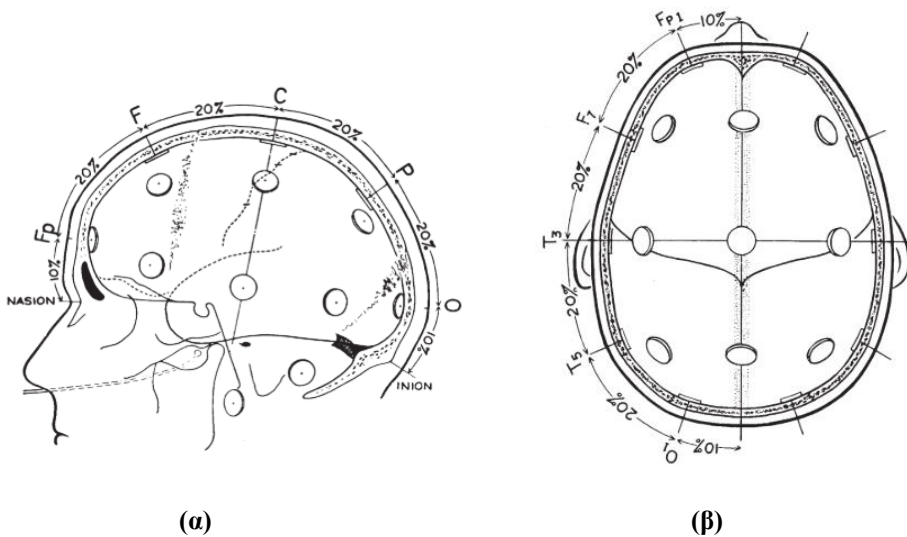
Η ηλεκτροεγκεφαλογραφία (ΗΕΓ) αποτελεί μια κρίσιμη, μη επεμβατική διαγνωστική τεχνική για την καταγραφή της ηλεκτρικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, μέσω ηλεκτροδίων τοποθετημένων στην επιφάνεια του κρανίου. Η μέθοδος αυτή καταγράφει τα ηλεκτρομαγνητικά σήματα που προκύπτουν από τη νευρωνική δραστηριότητα, παρέχοντας πολύτιμες πληροφορίες για τη λειτουργία του εγκεφάλου και διαδραματίζοντας καθοριστικό ρόλο στην ανίχνευση νευρολογικών διαταραχών. Η ακριβής εντοπισμένη απεικόνιση των υποκείμενων νευρωνικών πηγών από τα ΗΕΓ σήματα είναι ζωτικής σημασίας τόσο σε κλινικά όσο και σε ερευνητικά πλαίσια, ιδίως σε προεγχειρητικές αξιολογήσεις ασθενών με επιληψία, όπου η ακριβής εντόπιση των επιληπτικών εστιών είναι καθοριστική για τον σχεδιασμό της χειρουργικής επέμβασης (Hallez et al., 2007).

Η διαδικασία εντοπισμού των νευρωνικών πηγών βασίζεται στην επίλυση του ευθέως προβλήματος της ΗΕΓ, δηλαδή στον υπολογισμό του ηλεκτρικού δυναμικού που μετράτε στο τριχωτό της κεφαλής από γνωστές εσωτερικές πηγές ρεύματος. Το πρόβλημα αυτό είναι εγγενώς πολύπλοκο, καθώς τα καταγεγραμμένα δυναμικά εξαρτώνται γραμμικά από την ένταση της πηγής, αλλά εμφανίζουν μη γραμμική εξάρτηση από τη θέση, τον προσανατολισμό και τη χωρική κατανομή του διανυσματικού πεδίου πυκνότητας ρεύματος. Συνεπώς, η επίλυσή του απαιτεί πολύπλοκα γεωμετρικά και βιοφυσικά μοντέλα της ανθρώπινης κεφαλής, ώστε να ληφθεί υπόψη η περίπλοκη διάδοση των ηλεκτρικών πεδίων μέσω των εγκεφαλικών και περιεγκεφαλικών δομών.

Προκειμένου να καταγραφούν τα ηλεκτρικά δυναμικά που παράγονται από τη δραστηριότητα του εγκεφάλου, χρησιμοποιούνται ηλεκτρόδια, τα οποία αποτελούν τους αισθητήρες του ΗΕΓ. Τα ηλεκτρόδια ανιχνεύουν (καταγράφουν) τις διαφορές δυναμικού στην επιφάνεια του δέρματος, οι οποίες οφείλονται στην κίνηση ιόντων στους ιστούς του ανθρώπινου σώματος, επιτρέποντας τη μεταφορά του σήματος προς τα καλώδια, από όπου οδηγείται σε συστήματα ενίσχυσης και ψηφιακής καταγραφής. Η επαφή των ηλεκτροδίων

με το δέρμα γίνεται μέσω ηλεκτρολυτών ή ειδικών κολλώδων υλικών, ώστε να επιτυγχάνεται χαμηλή αντίσταση επαφής, συνήθως μικρότερη από 5 kΩ, γεγονός που εξασφαλίζει υψηλή ποιότητα σήματος.

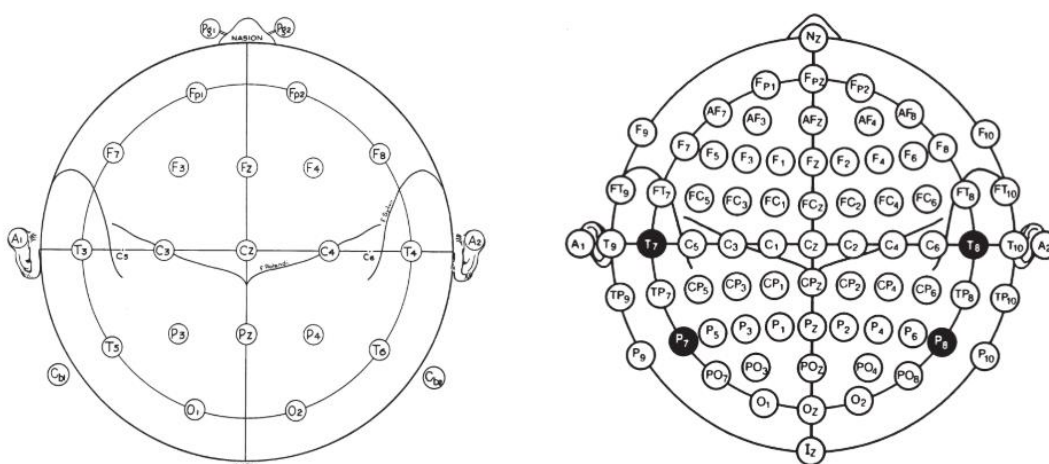
Η τοποθέτηση των ηλεκτροδίων στην επιφάνεια της κεφαλής βασίζεται σε διεθνώς τυποποιημένα γεωμετρικά πρότυπα, με σκοπό την εξασφάλιση της επαναληψιμότητας και της συγκρισιμότητας των καταγραφών ΗΕΓ. Το πιο διαδεδομένο είναι το σύστημα 10–20, στο οποίο οι θέσεις των ηλεκτροδίων καθορίζονται ως ποσοστά (10% και 20%) των αποστάσεων μεταξύ συγκεκριμένων ανατομικών σημείων αναφοράς της κεφαλής, όπως το nasion (μετωπική περιοχή), το inion (οπίσθια περιοχή του κρανίου) και τα προωτιαία σημεία (Εικόνα 1.6).



Εικόνα 1.6 α) Σχηματική απεικόνιση του διεθνούς συστήματος 10–20, όπου οι θέσεις των ηλεκτροδίων καθορίζονται ως ποσοστά (10% και 20%) των αποστάσεων μεταξύ των ανατομικών σημείων αναφοράς (nasion–inion). **β)** Άνω όψη της κεφαλής που παρουσιάζει την εφαρμογή του συστήματος 10–20 και τη διάταξη των ηλεκτροδίων κατά μήκος των κύριων αξόνων της επιφάνειας του κρανίου (Jasper, 1958).

Με την εξέλιξη των πολυκαναλικών συστημάτων EEG, αναπτύχθηκαν επεκτάσεις του συστήματος αυτού, όπως το σύστημα 10–10 (ή 10% σύστημα), το οποίο εισάγει επιπλέον ηλεκτρόδια μεταξύ των αρχικών θέσεων, καθώς και το σύστημα 10–5, το οποίο παρέχει ακόμη μεγαλύτερη χωρική πυκνότητα και χρησιμοποιείται σε εφαρμογές υψηλής ανάλυσης και εντοπισμού νευρωνικών πηγών (Εικόνα 1.7). Οι θέσεις αυτές εκφράζονται μέσω τυποποιημένων κωδικών (π.χ. Fp1, Fp2, Cz, Pz), οι οποίοι αντιστοιχούν σε συγκεκριμένες περιοχές του εγκεφαλικού φλοιού (μετωπιαία, βρεγματική, κεντρική, ινιακή), καθώς και στη σχετική γεωμετρική τους θέση (αριστερά, δεξιά ή στη μέση γραμμή). Συγκεκριμένα, η ονοματολογία των θέσεων χρησιμοποιεί γράμματα που αντιστοιχούν στις υποκείμενες

φλοιώδεις περιοχές: **F** (Frontal) για τον μετωπιαίο λοβό, **P** (Parietal) για τον βρεγματικό, **T** (Temporal) για τον κροταφικό και **O** (Occipital) για τον ινιακό. Η κεντρική περιοχή συμβολίζεται με το γράμμα **C** (Central), παρόλο που δεν αποτελεί διακριτό λοβό, ενώ ο δείκτης **z** (zero) υποδεικνύει τα ηλεκτρόδια που τοποθετούνται κατά μήκος της μέσης γραμμής του κρανίου. Η αριθμητική διάκριση των θέσεων ακολουθεί μια σαφή πλευρική λογική, όπου οι μονοί αριθμοί (1, 3, 5, 7) αντιστοιχούν στο αριστερό ημισφαίριο και οι ζυγοί αριθμοί (2, 4, 6, 8) στο δεξί (Jasper, 1958; Klem et al., 1999). Με τον τρόπο αυτό, η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων προσαρμόζεται αναλογικά στις ιδιαιτερότητες του σχήματος και του μεγέθους της κεφαλής κάθε εξεταζόμενου.



Εικόνα 1.7 α) Προβολή της κεφαλής σε ένα επίπεδο με την πλήρη κατανομή των τυπικών θέσεων ηλεκτροδίων (Fp, F, C, P, O) και την αντίστοιχη ονοματολογία του συστήματος 10–20. **β)** Επεκταμένο σύστημα τοποθέτησης ηλεκτροδίων υψηλής πυκνότητας (10–10/10–5), το οποίο επιτρέπει αυξημένη χωρική δειγματοληψία και χρησιμοποιείται σε εφαρμογές ανάλυσης και εντοπισμού νευρωνικών πηγών (Jasper, 1958).

Στο πλαίσιο του εμπρόσθιου προβλήματος (forward problem), η ακρίβεια αυτής της γεωμετρικής διευθέτησης είναι καθοριστική, καθώς επιτρέπει τη σωστή αντιστοίχιση των καταγραφόμενων δυναμικών με τις γεωμετρικές παραμέτρους των στιβάδων του κρανίου και του εγκεφαλικού φλοιού. Με τον τρόπο αυτό, τα ηλεκτρόδια τοποθετούνται σε προκαθορισμένες θέσεις πάνω στην επιφάνεια της κεφαλής, εξασφαλίζοντας τυποποίηση και συγκρισιμότητα των καταγραφών μεταξύ διαφορετικών μετρήσεων και υποκειμένων.

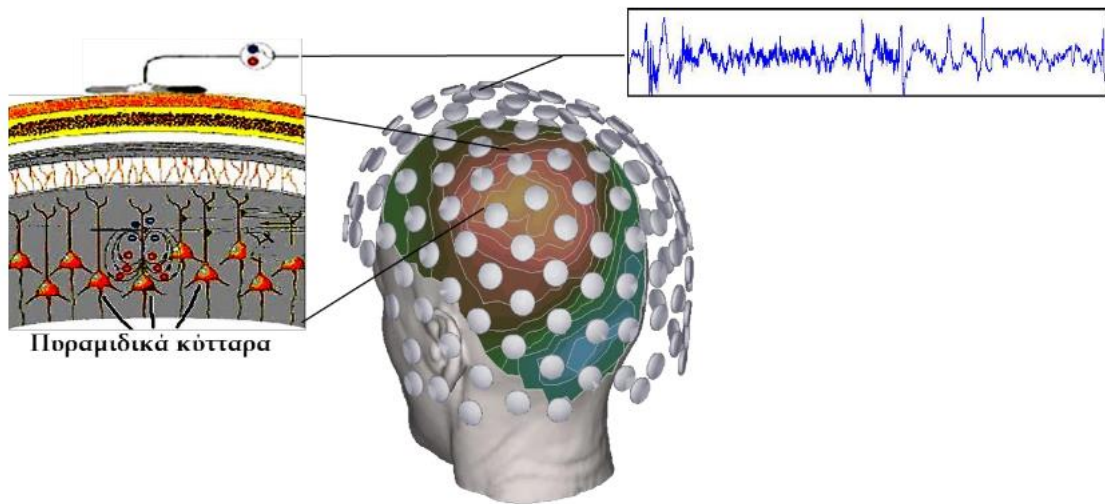
Παράλληλα με τα γεωμετρικά αυτά πρότυπα, στη σύγχρονη έρευνα χρησιμοποιούνται συστήματα πολυκαναλικής καταγραφής υψηλής πυκνότητας (high-density EEG), τα οποία αποτελούν πρακτικές υλοποιήσεις των παραπάνω διατάξεων και περιλαμβάνουν 32, 64, 128, 256 ή και περισσότερα ηλεκτρόδια. Τα συστήματα αυτά, όπως αυτά που διατίθενται

σε περιβάλλοντα επεξεργασίας όπως το EEGLAB, βασίζονται σε προκαθορισμένες τρισδιάστατες συντεταγμένες ηλεκτροδίων και επιτρέπουν ακριβέστερη δειγματοληψία της επιφάνειας της κεφαλής, γεγονός που είναι ιδιαίτερα σημαντικό σε προβλήματα εντοπισμού νευρωνικών πηγών. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές διατάξεις ηλεκτροδίων, από αραιά έως υψηλής πυκνότητας σύνολα, προκειμένου να αξιολογηθεί η επίδραση της χωρικής δειγματοληψίας στην ακρίβεια των υπολογιζόμενων δυναμικών και των αντίστοιχων δεικτών σφάλματος.

Στην οριακή επιφάνεια μέταλλο–ηλεκτρολύτης πραγματοποιείται η μετατροπή της ιοντικής αγωγιμότητας του ιστού σε ηλεκτρονική αγωγιμότητα του μετάλλου. Η διεπαφή αυτή δημιουργεί μια διαφορά δυναμικού, η οποία είναι ευαίσθητη στις μεταβολές της ιοντικής συγκέντρωσης που προκαλείται από τη νευρική δραστηριότητα, αλλά δεν επηρεάζεται σημαντικά από μηχανικούς ή θερμικούς παράγοντες. Τα ηλεκτρόδια Ag/AgCl, που χρησιμοποιούνται ευρέως στο ΗΕΓ, είναι ημι-μη πολώσιμα, επιτρέποντας τη διέλευση ηλεκτρονίων με ελάχιστη τάση πόλωσης, και εξασφαλίζουν αξιόπιστη καταγραφή των βιοδυναμικών σημάτων. Η διεργασία αυτή περιλαμβάνει αμφίδρομες χημικές αντιδράσεις στη διεπαφή μέταλλο–ηλεκτρολύτης, μέσω των οποίων τα θετικά ιόντα του μετάλλου και τα αρνητικά ιόντα του ηλεκτρολύτη ανταλλάσσονται με ελεύθερα ηλεκτρόνια στο μέταλλο. Η καταγραφή των δυναμικών πραγματοποιείται με μέτρηση της διαφοράς δυναμικού μεταξύ δύο ή περισσότερων ηλεκτροδίων, ενώ η τάση του «ημιστοιχείου» καθορίζεται από τη φύση του μετάλλου, τη συγκέντρωση των ιόντων και τη θερμοκρασία. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατή η καταγραφή των διαφορών δυναμικού που σχετίζονται με τη συλλογική νευρωνική δραστηριότητα, η οποία αποτελεί τη βάση για την επίλυση του προβλήματος εντοπισμού νευρωνικών πηγών (Κουτσούρης et al., 2003).

Στο σύγχρονο ερευνητικό πεδίο, η Νευρογνωσία (Neurocognition) αποτελεί το επίκεντρο των νευροεπιστημών, καθώς επιχειρεί να φωτίσει το φράγμα μεταξύ εγκεφάλου και νόησης.

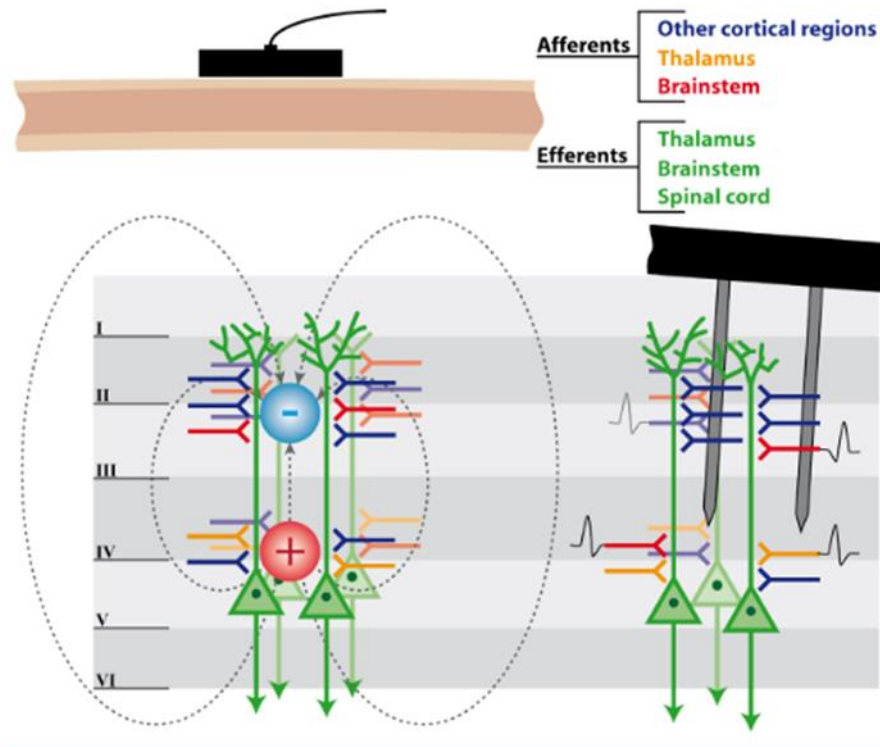
Παρότι τεχνικές όπως η fMRI, η PET και η SPECT παρέχουν υψηλή χωρική ανάλυση μέσω έμμεσων δεικτών νευρωνικής δραστηριότητας, μετρώντας τις αλλαγές στην αιματική ροή και τον μεταβολισμό, το ΗΕΓ διαδραματίζει κεντρικό και συμπληρωματικό ρόλο στη νευρογνωστική έρευνα, ιδίως ως προς τη μελέτη της χρονικής δυναμικής των γνωστικών διεργασιών, χάρη στη χιλιοστοδευτερόλεπτη χρονική του ανάλυση και τη δυνατότητα διερεύνησης υψηλών συχνοτικών συνιστωσών υπό κατάλληλες συνθήκες.



Εικόνα 1.8 Οι ΗΕΓ ρυθμοί που καταγράφονται στο τριχωτό της κεφαλής είναι το αποτέλεσμα της άθροισης πολλών διεγερτικών και ανασταλτικών μετασυναπτικών δυναμικών, τα οποία παράγονται στην πυραμιδική στιβάδα του εγκεφαλικού φλοιού (Τσιπούρας et al., 2009)

Στην κλινική πράξη, η συμβολή του ΗΕΓ είναι αδιαμφισβήτητη, ιδιαίτερα στη διάγνωση της μη σπασμωδικής επιληπτικής κατάστασης (nonconvulsive status epilepticus), όπου αποτελεί κρίσιμο διαγνωστικό κριτήριο σε επείγουσες καταστάσεις κώματος ή σύγχυσης. Όπως υπογραμμίζει ο Niedermeyer (2010), το ΗΕΓ αποτελεί μια ανεξάντλητη πηγή πληροφοριών για τη συντριπτική πλειονότητα των νευρολογικών παθήσεων. Η διαγνωστική του αξία δεν περιορίζεται στην ανίχνευση παροξυσμικών «αιχμών» (spikes), καθώς οι μη παροξυσμικές ανωμαλίες παρέχουν κρίσιμα δεδομένα για τις λειτουργικές δυσλειτουργίες του εγκεφάλου, γεφυρώνοντας το χάσμα μεταξύ κυτταρικής φυσιολογίας και κλινικής νευρολογίας.

Οι επεμβατικές μέθοδοι μετρήσεις ηλεκτρικών δυναμικών, στηρίζονται σε εμφυτευμένα ηλεκτρόδια που τοποθετούνται σε άμεση εγγύτητα με τον νευρωνικό ιστό, επιτρέποντας την καταγραφή σημάτων με μεγαλύτερη χωρική και χρονική ανάλυση. Λόγω της μικρής απόστασης από τους νευρώνες, τα ηλεκτρόδια αυτά μπορούν να ανιχνεύσουν άμεσα δυναμικά ενέργειας που σχετίζονται με τη νευρωνική πυροδότηση, καθώς και τοπικά δυναμικά πεδίου που προκύπτουν από τη συλλογική δραστηριότητα γειτονικών νευρωνικών πληθυσμών.



Εικόνα 1.9 Σχηματική απεικόνιση των πηγών σημάτων BCI στις φλοιϊκές στιβάδες I–VI. Οι πυραμιδικοί νευρώνες των στιβάδων V και VI επισημαίνονται με πράσινο, με χρωματική κωδικοποίηση των αποκαλυπτικών και βασικών συνάψεων. Η χωρική και χρονική ολοκλήρωση συναπτικών σημάτων δημιουργεί ηλεκτρικά πεδία ανιχνεύσιμα ως EEG. Τα εμφυτευμένα ηλεκτρόδια, τοποθετημένα κοντά στους νευρώνες, μετρούν άμεσα δυναμικά ενέργειας (APs), προσφέροντας υψηλότερη ανάλυση από τις μη-επεμβατικές μεθόδους (Steyrl et al., 2016)

Η άμεση πρόσβαση σε αυτές τις ηλεκτρικές διεργασίες επιτρέπει την εξαγωγή λεπτομερέστερης πληροφορίας, η οποία μπορεί να αναλυθεί και να αποκωδικοποιηθεί μέσω τεχνικών επεξεργασίας σήματος για εφαρμογές Brain–Computer Interfacing. Παρά τις διαφορές στον τρόπο καταγραφής οι επεμβατικές και μη-επεμβατικές μέθοδοι βασίζονται στις ίδιες θεμελιώδεις νευρωνικές ηλεκτρικές διεργασίες. Μία σχηματική απεικόνιση των βασικών πηγών των παραπάνω σημάτων και των διαφορών μεταξύ επεμβατικών και μη-επεμβατικών καταγραφών παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.9.

1.5. Βιοηλεκτρικά δυναμικά και η σχεδόν στάσιμη θεωρία

Όπως αναφέρθηκε στην υποενότητα 1.2.4. και στο πλαίσιο της βιοηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, η νευρωνική δραστηριότητα προτυποποιείται μακροσκοπικά μέσω της διάκρισης

της συνολικής πυκνότητας ρεύματος σε πρωτεύον (επιβαλλόμενο) ρεύμα \mathbf{J}^p και επαγόμενο χωρικό ρεύμα αγωγιμότητας \mathbf{J}^v .

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \mathbf{J}^v \quad (1.1)$$

Το πρωτεύον ρεύμα \mathbf{J}^p , ή κυρίως αντιστοιχεί στα ιοντικά ρεύματα που παράγονται άμεσα από ενεργές βιολογικές διεργασίες, δηλαδή από τη ροή ιόντων διαμέσου μεμβρανικών διαύλων των νευρώνων. Βιοφυσικά, σχετίζεται κυρίως με τα μετασυναπτικά ρεύματα στους δενδρίτες και αποτελεί την πρωτογενή πηγή του παραγόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Σε μακροσκοπική κλίμακα, το κυρίως ρεύμα ή πρωτεύον \mathbf{J}^p , προσεγγίζεται συχνά από ισοδύναμο ρεύμα δίπολου, με διπολική ροπή \mathbf{Q} . Δηλαδή, οι βιοηλεκτρικές πηγές του ΗΕΓ προκύπτουν κυρίως από τα μετασυναπτικά δυναμικά συγχρονισμένων πληθυσμών πυραμιδικών νευρώνων και προσεγγίζονται μαθηματικά ως ισοδύναμα ηλεκτρικά δίπολα (Dassios & Fokas, 2009).

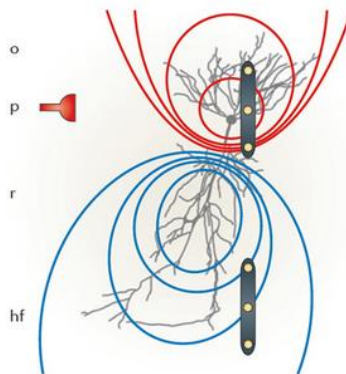
Τα πρωτεύοντα ρεύματα δεν προκαλούνται από το ηλεκτρικό πεδίο του αγωγίου μέσου, αλλά συνιστούν τις πρωτογενείς πηγές του προβλήματος.

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \quad (1.2)$$

Αντιθέτως το επαγόμενο χωρικό ρεύμα \mathbf{J}^v αναπτύσσεται παθητικά στον εξωκυττάριο αγωγίμο χώρο ως απόκριση στο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από το πρωτεύον ρεύμα. Δημιουργείται δευτερογενώς λόγω της ικανότητας του μέσου να άγει προϋπάρχοντα ηλεκτρικά φορτία και υπακούει στον νόμο της αγωγιμότητας, σύμφωνα με τον οποίο η πυκνότητα ρεύματος συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο μέσω της σχέσης

$$\mathbf{J}^v(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

όπου σ είναι η αγωγιμότητα του μέσου. Το επαγόμενο ρεύμα εξαρτάται τόσο από την αγωγιμότητα (όσο μεγαλύτερη είναι η αγωγιμότητα σ τόσο ισχυρότερο είναι το επαγόμενο ρεύμα) και από το ηλεκτρικό πεδίο. Η οριακή περίπτωση $\sigma \rightarrow \infty$ αντιστοιχεί σε τέλειο αγωγό, ενώ η περίπτωση $\sigma = 0$ χαρακτηρίζει το μέσο ως μη αγωγίμο.



Εικόνα 1.10 Σχηματική απεικόνιση διπολικής πηγής (source–sink) σε αγωγίμο μέσο και της αντίστοιχης κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού (ισοδυναμικές καμπύλες). Οι κόκκινες και μπλε καμπύλες αντιστοιχούν σε περιοχές θετικού και αρνητικού δυναμικού, αντίστοιχα, ενώ η κατανομή αυτή αποτελεί τη βάση των μετρήσεων ΗΕΓ (Buzsaki et al., 2016).

Σε ένα αγωγίμο μέσο, τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα περιγράφονται από τις εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες ενοποιούν τους βασικούς νόμους του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού. Αποτελούν ένα συζευγμένο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν πώς τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία παράγονται από φορτία και ρεύματα και πώς εξελίσσονται χρονικά (Griffiths, 1999; Δάσιος, 2012).

$$\text{Νόμος του Faraday} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1.4)$$

$$\text{Νόμος των Ampere-Maxwell} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (1.5)$$

$$\text{Νόμος του Gauss για τον Ηλεκτρισμό} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.6)$$

$$\text{Νόμος του Gauss για τον μαγνητισμό} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.7)$$

Τα διανυσματικά πεδία \mathbf{E} (V/m), \mathbf{H} (A/m) αναφέρονται στις εντάσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, ενώ το \mathbf{B} (*Tesla*) είναι η μαγνητική επαγωγή (ή πυκνότητα μαγνητικής ροής). Η σχέση που συνδέει τη μαγνητική επαγωγή με την ένταση του μαγνητικού πεδίου εξαρτάται από τη μαγνητική διαπερατότητα μ του υλικού και η ηλεκτρική μετατόπιση \mathbf{D} (C/m^2) ενσωματώνει τις ιδιότητες του μέσου διάδοσης. Σε γραμμικά, ισότροπα και ομογενή μέσα ισχύουν οι καταστατικές σχέσεις όπως παρακάτω:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.9)$$

Όταν το μέσο είναι το κενό ισχύουν αντίστοιχα:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.10)$$

Σε ένα ομογενές και ισότροπο μέσο οι παράμετροι που περιγράφουν την ηλεκτρομαγνητική του συμπεριφορά είναι η διηλεκτρική συμπεριφορά ε , η μαγνητική διαπερατότητα μ και η αγωγιμότητα σ , όπου για το κενό ισχύει $\sigma_0 = 0$, ενώ για τον εγκεφαλικό ιστό (πρότυπο ομογενές πεπερασμένου κλειστού αγωγού σταθερής αγωγιμότητας) υιοθετούμε μία τυπική τιμή αγωγιμότητας $\sigma = 0.3 S/m$ (Καριώτου, 2002). Επιπλέον στο κενό ισχύει:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} F/m \quad \text{και} \quad \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m \quad (1.11)$$

Το ηλεκτρικό κύμα διαδίδεται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός:

$$c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}, \quad (1.12)$$

όπου c η φασική ταχύτητα των κυμάτων που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$c = \frac{\omega}{Re k'} \quad (1.13)$$

και $Re k$ είναι το πραγματικό μέρος του κυματικού αριθμού k που προκύπτει από τη σχέση διασποράς:

$$k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i\mu\sigma\omega. \quad (1.14)$$

Στον βιοηλεκτρομαγνητισμό του εγκεφάλου, τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που παράγονται από τη νευρωνική δραστηριότητα αντιστοιχούν σε μια τυπική τιμή συχνότητας $f = 100\text{Hz}$. Η κυκλική συχνότητα δίνεται από τη σχέση: $\omega = 2\pi f$ ενώ το μήκος κύματος λ συνδέεται με τον κυματικό αριθμό k που μετράει την πυκνότητα των κυμάτων στο χώρο ως:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (1.15)$$

Υπολογίζοντας το κυματικό αριθμό έχουμε :

$$\mu \varepsilon \omega^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (2\pi 100)^2 = 4.4 \cdot 10^{-13}$$

$$i\mu\sigma\omega = i \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.3 \cdot (2\pi 100) = i 2.37 \cdot 10^{-4}$$

Επειδή $\mu \varepsilon \omega^2 \ll i\mu\sigma\omega$ προκύπτει ότι $k^2 = i\mu\sigma\omega = i 2.37 \cdot 10^{-4}$ δηλαδή $k = \sqrt{i 2.37 \cdot 10^{-4}}$, ή $k = (1 + i)0.0109$, ($\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$).

Επειδή το k είναι μιγαδικός κυματικός αριθμός το μήκος κύματος δίνεται από το

$$\lambda = \frac{2\pi}{Im(k)} = \frac{2 \cdot 3.14}{0.0109} = 576m$$

Όταν η χαρακτηριστική διάσταση του μέσου (διάμετρο εγκεφάλου $a \sim 18cm = 0.18m$) είναι πολύ μικρότερη από το μήκος κύματος ($a < \frac{\lambda}{4}$) οι χωρικές μεταβολές των πεδίων είναι αμελητέες. Αυτό, ισοδυναμεί με ένα αργά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό κυματικό πεδίο όπου οι όροι των εξισώσεων Maxwell που σχετίζονται με την κυματική διάδοση και την ακτινοβολία καθίστανται αμελητέοι ($\frac{\partial E}{\partial t}, \frac{\partial B}{\partial t}$). Αυτό δικαιολογεί την εφαρμογή της σχεδόν στατικής προσέγγισης των εξισώσεων του Maxwell και ισοδυναμεί με τα λεγόμενα Σχεδόν Στατικά πεδία (Quasi Static fields). Στο στατικό όριο ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις (Δάσιος, 2012):

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.19)$$

Από τη σχέση $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ (1.16) προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο είναι συντηρητικό, δηλαδή το γραμμικό ολοκλήρωμα γύρω από οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι C είναι μηδέν και συνεπώς μπορεί το ηλεκτρικό πεδίο να εκφραστεί ως βαθμίδα δυναμικού

$$\mathbf{E} = -\nabla u, \quad (1.20)$$

όπου u το ηλεκτρικό δυναμικό.

Λαμβάνοντας την απόκλιση της εξίσωσης (1.17) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1), (1.3) έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla \cdot \mathbf{J} \\ 0 &= \nabla \cdot (\mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E}) \\ \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\nabla \cdot \mathbf{J}^p \end{aligned} \quad (1.21)$$

Από (1.20)

$$\begin{aligned} -\sigma \Delta u &= -\nabla \cdot \mathbf{J}^p \\ \sigma \Delta u &= \nabla \cdot \mathbf{J}^p \end{aligned} \quad (1.22)$$

Η (1.22) εκπροσωπεί την εξίσωση Poisson.

Ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου μας παρέχει την εξίσωση:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.23)$$

Τα ρεύματα \mathbf{J}^v , \mathbf{J}^p σχηματίζουν κλειστούς βρόχους ιοντικής ροής, με αποτέλεσμα η τοπική συσσώρευση φορτίου να είναι πολύ μικρή (σχεδόν μηδενική) και να επιβάλλει στο ολικό ρεύμα να είναι σωληνοειδές στην περίπτωση αργά μεταβαλλόμενων πεδίων (σχεδόν στάσιμη θεωρία):

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.24)$$

Κεφάλαιο 2^ο

2. Το μαθηματικό υπόβαθρο

Το πρώτο βήμα για τη μελέτη ενός φυσικού προβλήματος είναι η κατάλληλη μαθηματική αναπαράσταση της γεωμετρίας του συστήματος, έτσι ώστε να αποδίδεται όσο το δυνατόν πιστότερα η φυσική δομή του προτύπου χωρίς να χάνεται η αναλυτική λύση του προβλήματος. Στην παρούσα εργασία η ανθρώπινη κεφαλή προσεγγίζεται μέσω ενός σφαιρικού γεωμετρικού μοντέλου.

Η επιλογή του σφαιρικού μοντέλου παρουσιάζει μαθηματικό ενδιαφέρον, καθώς η γεωμετρία της σφαίρας επιτρέπει τη χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων και την αξιοποίηση της σφαιρικής συμμετρίας που εμφανίζεται σε πολλά φυσικά προβλήματα. Επιπλέον, σε αρκετές εφαρμογές της φυσικής πολλά συστήματα μπορούν να προσεγγιστούν ικανοποιητικά μέσω σφαιρικών γεωμετρικών μοντέλων (π.χ. το βαρυτικό πεδίο της γης ή το ηλεκτρικό δυναμικό γύρω από ένα σημειακό φορτίο).

Στο σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων η θέση ενός σημείου στον τρισδιάστατο χώρο προσδιορίζεται από την ακτινική απόσταση r και δύο γωνιακές μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές είναι η γωνία πόλωσης θ και η αζιμούθια γωνία φ , οι οποίες καθορίζουν τον προσανατολισμό ενός σημείου πάνω στη σφαιρική επιφάνεια.

Η χρήση των σφαιρικών συντεταγμένων καθιστά δυνατή την απλούστερη μαθηματική διατύπωση προβλημάτων που παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία και οδηγεί φυσικά στην ανάπτυξη των λύσεων μέσω σφαιρικών αρμονικών. Οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν τη φυσική βάση συναρτήσεων για προβλήματα που διατυπώνονται σε σφαιρικές γεωμετρίες και χρησιμοποιούνται ευρέως στην επίλυση εξισώσεων της μαθηματικής φυσικής.

2.1. Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3 , πολλές επιφάνειες μπορούν να περιγραφούν μέσω αλγεβρικών εξισώσεων που συνδέουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι επιφάνειες που ορίζονται από πολυωνυμικές εξισώσεις, καθώς ο βαθμός του πολυωνύμου παρέχει ένα φυσικό μέτρο της γεωμετρικής τους πολυπλοκότητας.

Συγκεκριμένα, οι γραμμικές εξισώσεις πρώτου βαθμού περιγράφουν επίπεδα της μορφής $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, με a, b, c, d πραγματικοί αριθμοί και αποτελούν τις απλούστερες γραμμικές γεωμετρικές δομές στον χώρο.

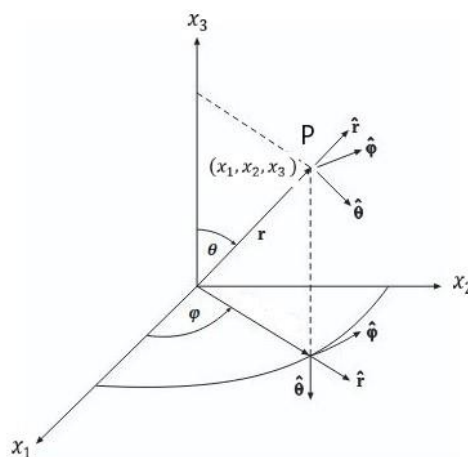
Αντίστοιχα, οι εξισώσεις δεύτερου βαθμού οδηγούν σε επιφάνειες δεύτερου βαθμού με πλουσιότερη γεωμετρική δομή, όπως μια σφαίρα ακτίνας $r, r \in \mathbb{R}$ που περιγράφεται από εξίσωση της μορφής

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad (2.1)$$

Η υψηλή εγγενής συμμετρία της σφαίρας καθιστά φυσική την εισαγωγή του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων (r, θ, φ) . Ο μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι ομαλός εκτός του κέντρου ($r = 0$), όπου οι γωνιακές μεταβλητές (θ, φ) δεν ορίζονται μοναδικά (είναι απροσδιόριστες).

Ένα σημείο στο χώρο προσδιορίζεται από την ακτινική απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας και από δύο γωνιακές μεταβλητές που καθορίζουν τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης. Οι επιφάνειες σταθερής ακτίνας r αποτελούν δισδιάστατες σφαίρες με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων.

Η χρησιμότητα του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων αναδεικνύεται ιδιαίτερα στη μελέτη διαφορικών εξισώσεων με σφαιρική συμμετρία, όπου βασικοί διαφορικοί τελεστές, όπως ο τελεστής Laplace, αποκτούν μορφή που επιτρέπει τον αποτελεσματικό χωρισμό των μεταβλητών. Η διαδικασία αυτή οδηγεί στον προσδιορισμό ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του σφαιρικού τελεστή Laplace–Beltrami. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές είναι οι σφαιρικές αρμονικές, οι οποίες αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον χώρο $L^2(S^2)$.



Σχήμα 2.1 Σφαιρικές συντεταγμένες (Arfken & Weber, 2005)

Έστω ένα διάνυσμα θέσης ενός σημείου P, $\mathbf{r} = x_1\hat{\mathbf{x}}_1 + x_2\hat{\mathbf{x}}_2 + x_3\hat{\mathbf{x}}_3$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπου $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \hat{\mathbf{x}}_3$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα, τότε στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, η θέση του σημείου P δίνεται από τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) που απεικονίζονται στο σχήμα 2.1.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) συνδέονται με τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\x_3 &= r \cos \theta,\end{aligned}\tag{2.2}$$

όπου θ είναι η πολική γωνία (μετρούμενη από τον άξονα z) και φ η αζιμούθια (στο $x-y$ επίπεδο) $r \in [0, +\infty), \theta \in [0, \pi]$ και $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Στο σύστημα αυτό, οι επιφάνειες σταθερού r είναι σφαίρες, οι επιφάνειες σταθερού θ είναι κώνοι με κορυφή στο κέντρο, ενώ οι επιφάνειες σταθερού φ είναι ημιεπίπεδα που διέρχονται από τον άξονα z . Το στοιχειώδες μήκος τόξου στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων δίνεται από τη σχέση:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2\tag{2.3}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν οι μετρικοί συντελεστές (Arfken & Weber, 2005)

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\varphi = r \sin \theta\tag{2.4}$$

Στο πλαίσιο του ευθέως προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (HEΓ), το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό των αγώγιμων ιστών του εγκεφάλου, σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν πηγές ρεύματος ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Συνεπώς, αναζητούμε λύσεις της εξίσωσης

$$\nabla^2 u = 0\tag{2.5}$$

Ο τελεστής Laplace, σε σφαιρικές συντεταγμένες, όταν εφαρμόζεται στο ηλεκτρικό δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, λαμβάνει τη μορφή (Dassios, 2012; Morse & Feshbach, 1953; Smythe, 1968).

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\tag{2.6}$$

Για την επίλυση του τελεστή Laplace (2.6) αναζητούνται λύσεις της μορφής γινομένου:

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)\tag{2.7}$$

όπου κάθε παράγοντας εξαρτάται μόνο από μια μεταβλητή. Με την αντικατάσταση της παραπάνω μορφής (2.7) στην (2.6) και διαχωρισμό των όρων, το πρόβλημα ανάγεται στην

επίλυση τριών συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων, μια για κάθε μεταβλητή. Στην πραγματικότητα πολλαπλασιάζοντας με $r^2 \sin^2 \theta$ και διαιρώντας με τη (2.7) βρίσκουμε

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0 \quad (2.8)$$

Όπου ο πρώτος όρος εξαρτάται μόνο από την ακτίνα r ενώ οι υπόλοιποι όροι περιέχουν μόνο τις γωνίες θ, φ .

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (2.9)$$

θέτω

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2 \quad \text{επομένως} \quad \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) \sin^2 \theta = -m^2$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) = n(n+1) \quad (2.12)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R = 0 \quad (2.13)$$

$$-\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) = n(n+1)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) + [n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] \theta = 0 \quad (2.14)$$

όπου η σταθερά διαχωρισμού n παίρνει τις τιμές $0, 1, 2, \dots$ έτσι ώστε η συνάρτηση θ να παραμένει φραγμένη για $\theta = 0$ και $\theta = \pi$ και η σταθερά διαχωρισμού m παίρνει τις ακέραιες τιμές του διαστήματος $|m| \leq n$ προκειμένου να εξασφαλιστεί η μονοτιμία ως προς τη γωνία φ και η ανεξαρτησία των ιδιοσυναρτήσεων (λύσεων). Η ακτινική εξίσωση (2.13) έχει ως γενική λύση γραμμικό συνδυασμό των εσωτερικών λύσεων r^n και των εξωτερικών λύσεων $r^{-(n+1)}$, δηλαδή

$$R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}. \quad (2.15)$$

Η γωνιακή εξίσωση (2.14) που προκύπτει αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm–Liouville στη μοναδιαία σφαίρα. Με αντικατάσταση $x = \cos \theta$ η (2.14) μετασχηματίζεται στην εξίσωση των συσχετισμένων πολωνύμων Legendre (Dassios, 2012):

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n^m(x) + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] P_n^m(x) = 0 \quad (2.16)$$

Το γωνιακό μέρος της λύσης ικανοποιεί τη συσχετισμένη εξίσωση Legendre (2.16). Οι γενικές λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους $P_n^m(x)$ και δευτέρου είδους $Q_n^m(x)$ (Dassios & Vafeas, 2001). Οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους ορίζονται ως

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n, \quad (2.17)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n \text{ και } n = 0, 1, 2, \dots$$

όπου x ορίζεται: $-1 < x < 1$ και ισχύει ότι $P_n^m(x) = 0$ αν $m > n$.

Τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν τον τύπο Rodrigues (Arfken & Weber, 2005; Dassios, 2012; Lebedev, 2022),

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Αν στην εξίσωση (2.17) αντικατασταθεί το $P_n(x)$ μέσω του τύπου Rodrigues (2.18) προκύπτει η εναλλακτική μορφή των συσχετισμένων πολυωνύμων Legendre, (2.19)

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n. \quad (2.19)$$

Θέτοντας $x = \cos\theta$, η σχέση (2.19) γράφεται

$$P_n^m(\cos\theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos\theta)^m} P_n(\cos\theta). \quad (2.20)$$

Αντίστοιχα, οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre δευτέρου είδους δίνονται από τη σχέση

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} Q_n(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1, n. \quad (2.21)$$

Για τη μελέτη προβλημάτων σε ολόκληρη τη σφαίρα, όπως στο σφαιρικό πρότυπο του εγκεφάλου που υιοθετούμε, οι οριακές συνθήκες κανονικότητας στους πόλους ($\theta = 0, \pi$) επιβάλλουν ότι οι επιτρεπτές λύσεις της γωνιακής εξίσωσης είναι οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους $P_n^m(x)$ με δείκτες $n = 0, 1, 2, \dots$ και $|m| \leq n$. Οι συναρτήσεις δευτέρου είδους $Q_n^m(x)$ απορρίπτονται, καθώς παρουσιάζουν λογαριθμικές ιδιομορφίες στα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$ δηλ ($x = \pm 1$), γεγονός που δεν είναι αποδεκτό για συνεχή πεδία στο εσωτερικό της σφαίρας.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις P_n^{-m} και P_n^m είναι γραμμικά εξαρτημένες, καθώς συνδέονται μέσω της σχέσης (Arfken & Weber, 2005):

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \quad (2.22)$$

Επιπλέον, κατά τη μετάβαση από τις μιγαδικές στις πραγματικές σφαιρικές αρμονικές, οι αρνητικές τιμές του δείκτη m δεν οδηγούν σε νέες ανεξάρτητες συναρτήσεις, αλλά ενσωματώνονται στους πραγματικούς γωνιακούς όρους μέσω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin(m\varphi)$ και $\cos(m\varphi)$. Εργαζόμαστε με $m \geq 0$ για τα P_n^m , καθώς οι αρνητικές τιμές του προκύπτουν μέσω των αντίστοιχων τριγωνομετρικών όρων.

Στην ειδική περίπτωση που αντιστοιχεί σε αξονική συμμετρία, (δηλαδή για $m = 0$) και $P_n^0(x) = P_n(x)$ η (2.16) ανάγεται στην κλασική εξίσωση Legendre.

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (2.23)$$

Οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης (2.23) είναι η συνάρτηση Legendre πρώτου είδους $P_n(x)$, η οποία είναι πολώνυμο (2.24) και η συνάρτηση Legendre δευτέρου είδους (2.25) η οποία παρουσιάζει λογαριθμικές ιδιομορφίες στα σημεία $x = \pm 1$.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.24)$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} P_k(x) P_{n-1-k}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.25)$$

Οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre της ίδιας τάξης m ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nn'}, \quad \text{για } n \geq m \geq 0 \quad (2.26)$$

και οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre του ίδιου βαθμού n ικανοποιούν τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n^m(x) P_n^{m'}(x)}{1-x^2} dx = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'}, \quad \text{για } n \geq m \geq 1 \quad (2.27)$$

2.2. Σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις

Στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας S^2 το γωνιακό μέρος του τρισδιάστατου τελεστή Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες ταυτίζεται με τον επιφανειακό τελεστή Laplace–Beltrami, ο οποίος εκφράζεται στις σφαιρικές συντεταγμένες (θ, φ) ως

$$\mathcal{B}_{S^2} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad (2.28)$$

Οι σφαιρικές αρμονικές αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του επιφανειακού τελεστή Laplace–Beltrami στη μοναδιαία σφαίρα S^2 γεγονός που τις καθιστά φυσική βάση για την ανάπτυξη

συναρτήσεων ορισμένων στην επιφάνεια σφαιρικών ή προσεγγιστικά σφαιρικών γεωμετριών, όπως στην περίπτωση του ηλεκτρικού δυναμικού που μετράται στην ηλεκτροεγκεφαλογραφία και ισχύει

$$\mathcal{B}_{S^2} Y_n^m(\theta, \varphi) = -n(n+1)Y_n^m(\theta, \varphi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ και } m = -n, \dots, 0, \dots, n \quad (2.29)$$

Η εξίσωση των συσχετισμένων πολωνύμων Legendre (2.16) εμφανίζεται στη μαθηματική φυσική κατά την επίλυση οριακών προβλημάτων της θεωρίας δυναμικού για χωρία με σφαιρική συμμετρία (π.χ. σφαίρα, σφαιροειδές). Το απλούστερο τέτοιο χωρίο, η σφαίρα, προσέδωσε την ονομασία «σφαιρικές αρμονικές» στις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace-Beltrami (2.29).

Πριν συνεχίσουμε ορίζουμε το συμβολισμό των αρμονικών που θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργασία. Στο εξής, οι συναρτήσεις $\bar{Y}_n^m(\theta, \varphi)$ θα αναφέρονται στις πραγματικές σφαιρικές αρμονικές, σε αντιδιαστολή με τις μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές $Y_n^m(\theta, \varphi)$, οι οποίες ορίζονται μέσω του αζιμουθιακού παράγοντα $e^{im\varphi}$. Οι πραγματικές σφαιρικές αρμονικές προκύπτουν ως κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί των μιγαδικών σφαιρικών αρμονικών και εκφράζονται μέσω των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos(m\varphi)$ και $\sin(m\varphi)$. Σε πολλές εφαρμογές της μηχανικής και της φυσικής, όπως στην ηλεκτροεγκεφαλογραφία, προτιμούμε τις πραγματικές σφαιρικές αρμονικές (Surface/Real Spherical Harmonics) $\bar{Y}_n^m(\theta, \varphi)$, καθώς τα φυσικά μεγέθη που μελετάμε είναι πραγματικά. Οι μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές $Y_n^m(\theta, \varphi)$ ορίζονται ως το γινόμενο του πολικού (γωνιακού) μέρους $\theta(\theta)$ και του αζιμουθιακού μέρους δηλαδή:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

$$\text{για } n = 0, 1, 2, \dots, m = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n-1, n \quad (2.30)$$

Ακόμη, οι μιγαδικές σφαιρικές αρμονικές σχηματίζουν ορθοκανονικό σύστημα βάσης στη μοναδιαία σφαίρα S^2 σύμφωνα με την παρακάτω σχέση :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \varphi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \varphi)^* \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.31)$$

όπου n είναι ο βαθμός και m η τάξη της σφαιρικής αρμονικής ενώ το (*) δηλώνει το μιγαδικό συζυγή.

Ομοίως οι πραγματικές σφαιρικές αρμονικές $\bar{Y}_n^m(\theta, \varphi)$ σχηματίζουν ορθοκανονικό σύστημα βάσης στη μοναδιαία σφαίρα S^2 ικανοποιώντας την αντίστοιχη σχέση:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{Y}_n^m(\theta, \varphi) \bar{Y}_{n'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.32)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots, n - 1, n$$

Οι κανονικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές $\bar{Y}_n^m(\theta, \varphi)$, ορίζονται ως:

$$\bar{Y}_{nm}^{(e)}(\theta, \varphi) = N_{nm} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (2.33)$$

$$\bar{Y}_{nm}^{(o)}(\theta, \varphi) = N_{nm} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

Σημειώνεται πως ο εκθέτης (e) ή (o) δηλώνει αντίστοιχα τον άρτιο (even) ή τον περιττό (odd) χαρακτήρα των πραγματικών σφαιρικών αρμονικών. Ο συντελεστής κανονικοποίησης N_{nm} των πραγματικών σφαιρικών αρμονικών δίνεται από τη σχέση

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (2.35)$$

Ο παράγοντας $\left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right)$ εισάγεται ώστε να διασφαλίζεται η ορθοκανονικότητα της βάσης στη μοναδιαία σφαίρα. Ειδικότερα, λαμβάνει υπόψη τη διαφορετική συμβολή του αξονοσυμμετρικού όρου $m = 0$, έτσι ώστε η κανονικοποίηση των συναρτήσεων να παραμένει συνεπής τόσο στην περίπτωση αξονικής συμμετρίας όσο και για $m \neq 0$. Οι κανονικοποιημένες πραγματικές σφαιρικές αρμονικές άρτιας συμμετρίας ορίζονται ως

$$\bar{Y}_{nm}^{(e)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \times P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \quad (2.36)$$

για $m = 0, 1, 2, \dots, n$,

ενώ οι κανονικοποιημένες πραγματικές σφαιρικές αρμονικές περιττής συμμετρίας δίνονται από

$$\bar{Y}_{nm}^{(o)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \times P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi), \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (2.37)$$

Για $m = 0$ υφίσταται μόνο η άρτια πραγματική σφαιρική αρμονική, καθώς ο περιττός όρος μηδενίζεται λόγω της ταυτότητας $\sin(0 \cdot \varphi) = 0$, όπου P_n^m είναι οι συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους βαθμού n και τάξης m (associated Legendre functions). Για $m = 0$, οι συναρτήσεις αυτές ανάγονται στα κλασικά πολυώνυμα Legendre P_n .

Στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών θα χρησιμοποιηθούν συχνά και οι μη κανονικοποιημένες πραγματικές σφαιρικές αρμονικές, οι οποίες ορίζονται ως

$$Y_{nm}^{(e)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.38)$$

$$Y_{nm}^{(o)}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi), \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (2.39)$$

Οι κανονικοποιημένες και μη κανονικοποιημένες συναρτήσεις συνδέονται μέσω των σχέσεων (2.38),(2.39).

$$\bar{Y}_{nm}^{(e)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} Y_{nm}^{(e)}(\theta, \varphi), m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.40)$$

$$\bar{Y}_{nm}^{(o)}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi (n+m)!}} Y_{nm}^{(o)}(\theta, \varphi), m = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

Κεφάλαιο 3^ο

3. Ανισοτροπία

Ορισμένα υλικά, συνήθως στερεά ή κρυσταλλική μορφή παρουσιάζουν την ιδιότητα να μεταβάλλουν μια φυσική τους ιδιότητα (π.χ σκληρότητα, ελαστικότητα, πυκνότητα, ηλεκτρική αγωγιμότητα) ανάλογα με την κατεύθυνση ($\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$) του χώρου μέσα στον οποίο αναπτύσσονται. Το φαινόμενο κατά το οποίο τα υλικά εμφανίζουν ιδιότητες με διαφορετικές αριθμητικές τιμές σε διαφορετικές κατευθύνσεις ονομάζεται ανισοτροπία. Η λέξη ανισοτροπία προέρχεται από την αρχαία ελληνική άνισος + τρόπος (τρέπω= διεύθυνση), υποδηλώνοντας τη διαφοροποίηση της συμπεριφοράς ανά διεύθυνση.

Γενικά, στα ανισότροπα υλικά οι φυσικές ιδιότητες δεν είναι ίδιες κατά μήκος διαφορετικών κατευθύνσεων ούτε ισοδύναμες σε όλες τις χωρικές διευθύνσεις. Αντίθετα, εξαρτώνται από τη διεύθυνση μέτρησης. Αναλυτικά, η ανισότροπη αγωγιμότητα σε βιολογικούς ιστούς αναφέρεται στην κατευθυντική εξάρτηση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας μέσα σε αυτά τα υλικά. Για παράδειγμα (Stiefel et al., 2013), στους νευρικούς ιστούς, το περίβλημα της μυελίνης (πολυστρωματικό φύλλο λιπιδίων περιτυλιγμένο περιοδικά γύρω τους) επηρεάζει σημαντικά την αγωγιμότητά τους καθώς βελτιώνει την αγωγιμότητα των δυναμικών δράσης, επιτρέπει την ταχύτερη διάδοση του σήματος κατά μήκος του νευρώνα ενώ τον εμποδίζει σε κάθετες κατευθύνσεις. Σε αντιδιαστολή, ισοτροπία σημαίνει η ομοιόμορφη συμπεριφορά μια ιδιότητας ενός υλικού προς όλες τις κατευθύνσεις. Αυτή η ιδιότητα συναντάται σε αέρια ή υγρά υλικά τα οποία λέγονται ισοτροπικά.

3.1. Ανισοτροπία ηλεκτρικής αγωγιμότητας

Σε ένα ανισότροπο μέσο, η σχέση μεταξύ της αγωγιμότητας, της πυκνότητας ρεύματος και του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να εκφραστεί από τον νόμο του Ohm:

$$\mathbf{J} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (3.1)$$

όπου

\mathbf{J} : το τρέχον διάνυσμα πυκνότητας

$\bar{\sigma}$: ο τανυστής αγωγιμότητας

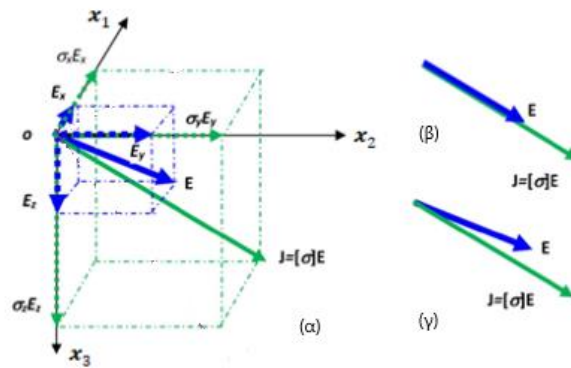
$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$: το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) , ο ταυστής αγωγιμότητας μπορεί να εκφραστεί:

$$J_i = \sum_j^{xyz} \sigma_{ij} E_j, \quad i = x, y, z, \quad (3.2)$$

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad i = x, y, z, \quad (3.3)$$

όπου τα στοιχεία σ_{ij} αποτελούν τις συνιστώσες του ταυστή ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Στο σχήμα 3.1, απεικονίζεται η σχέση μεταξύ ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} και πυκνότητας ρεύματος \mathbf{J} σε ισότροπο και ανισότροπο μέσο.



Σχήμα 3.1: (α) η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος όταν δρα ηλεκτρικό πεδίο, (β) η σχέση σε ένα ισότροπο μέσο και (γ) σε ανισότροπο μέσο (Stiefel et al., 2013)

Σε ένα ισότροπο μέσο η πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} είναι παράλληλη με το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , δηλαδή

$$j_x = \sigma E_x \quad j_y = \sigma E_y \quad j_z = \sigma E_z \quad (3.4)$$

όπου σ είναι η βαθμωτή ηλεκτρική αγωγιμότητα.

Αντίθετα, σε ένα ανισότροπο μέσο ισχύει:

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx} E_x + \sigma_{xy} E_y + \sigma_{xz} E_z \\ j_y &= \sigma_{yx} E_x + \sigma_{yy} E_y + \sigma_{yz} E_z \\ j_z &= \sigma_{zx} E_x + \sigma_{zy} E_y + \sigma_{zz} E_z \end{aligned} \quad (3.5)$$

Στην προσπάθεια να εκφράσουμε την ανισοτροπία της αγωγιμότητας με μαθηματικά μοντέλα θα πρέπει πρώτα να αναφερθούμε στην πυκνότητα του ρεύματος του εγκεφάλου.

Σύμφωνα με την υποενότητα 1.5, η συνολική χωρική πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} , διακρίνεται σε μια κύρια πηγή ρεύματος με πυκνότητα \mathbf{J}^P και σε ένα επαγόμενο ρεύμα αγωγιμότητας με πυκνότητα \mathbf{J}^v , το οποίο εισάγει την ηλεκτρική αγωγιμότητα του χώρου-υλικού $\bar{\sigma}$, καθώς εκφράζεται από την σχέση (3.1)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^P + \mathbf{J}^v \quad (3.6)$$

Ακόμη, θεωρούμε τη δυαδική μορφή του τανυστή:

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \hat{\mathbf{e}}_j \quad (3.7)$$

όπου για μοναδιαία διανύσματα έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} = & \sigma_{rr} \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} + \sigma_{r\theta} \hat{\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_{r\varphi} \hat{\mathbf{r}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \sigma_{\theta r} \hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\mathbf{r}} + \sigma_{\theta\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_{\theta\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \sigma_{\varphi r} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\mathbf{r}} + \\ & \sigma_{\varphi\theta} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_{\varphi\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Η δράση του τανυστή αγωγιμότητας επί ενός μοναδιαίου διανύσματος του συστήματος (δηλαδή σε μία διεύθυνση της βάσης του συστήματος) δίνει, λόγω ορθογωνιότητας, συνδυασμό συνιστωσών κατά τις βασικές διευθύνσεις.

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} &= \sigma_{rr} \hat{\mathbf{r}} + \sigma_{\theta r} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_{\varphi r} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \tilde{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \sigma_{r\theta} \hat{\mathbf{r}} + \sigma_{\theta\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_{\varphi\theta} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \tilde{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \sigma_{r\varphi} \hat{\mathbf{r}} + \sigma_{\theta\varphi} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma_{\varphi\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Το γεγονός ότι οι διαφορές στην αγωγιμότητα προκύπτουν μόνο στην ακτινική και στις εφαπτομενικές διευθύνσεις, συνεπάγεται ότι η δράση του τανυστή σε κάθε μία από αυτές τις διευθύνσεις παράγει βάρθρωση και όχι αλλαγή διεύθυνσης. Δηλαδή, η δράση του τανυστή αγωγιμότητας σε καθεμία από τις κύριες διευθύνσεις οδηγεί σε μεταβολή μόνο του μέτρου του διανύσματος και όχι της διεύθυνσής του. Επομένως, οι διευθύνσεις αυτές αποτελούν ιδιοδιευθύνσεις του τανυστή αγωγιμότητας. Έτσι ισχύει:

$$\tilde{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sigma_{rr} \hat{\mathbf{r}}, \quad \tilde{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \sigma_{\theta\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \tilde{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \sigma_{\varphi\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (3.10)$$

Από όπου προκύπτει ότι τα εκτός διαγωνίου στοιχεία απαιτούμε να μηδενίζονται:

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{\varphi r} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0 \quad (3.11)$$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι η αγωγιμότητα στις δύο εφαπτομενικές διευθύνσεις είναι ισοδύναμη, δηλαδή:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} := \sigma_t \quad (3.12)$$

και ορίζουμε την ακτινική συνιστώσα ως

$$\sigma_{rr} := \sigma_r \quad (3.13)$$

Συνεπώς, ο τανυστής αγωγιμότητας απλοποιείται περαιτέρω ως:

$$\tilde{\sigma} = \sigma_r \hat{r}\hat{r} + \sigma_t \hat{\theta}\hat{\theta} + \sigma_t \hat{\varphi}\hat{\varphi}, \quad (3.14)$$

ο οποίος, στη διαγώνια μορφή του, αναπαρίσταται ως τανυστής δεύτερης τάξης και αποτυπώνει την ανισοτροπική συμπεριφορά των ιστών στις ακτινικές και εφαπτομενικές διευθύνσεις.

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_t \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.2. Οι αγωγιμότητες των φλοιών στην ανθρώπινη κεφαλή.

Η ακριβής μοντελοποίηση της αγωγιμότητας των ιστών αποτελεί κρίσιμο στοιχείο στη μελέτη της ηλεκτροφυσιολογίας του εγκεφάλου. Οι ιστοί επιδεικνύουν τόσο ανομοιογένεια (μεταβολή της αγωγιμότητας στον χώρο) όσο και ανισοτροπία (μεταβολή της αγωγιμότητας ανάλογα με την κατεύθυνση). Έτσι, οι αγωγιμότητες των ιστών διαφοροποιούνται ανάλογα με το είδος του ιστού. Οι βιολογικοί ιστοί που συγκροτούν τα επιμέρους διαμερίσματα της κεφαλής παρουσιάζουν διαφορετικές φυσικές ιδιότητες, κυρίως ως προς την ηλεκτρική τους αγωγιμότητα, γεγονός που έχει καθοριστική σημασία για τη μοντελοποίηση του ευθύ προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (ΗΕΓ). Για τις ανάγκες του παρόντος μοντέλου, οι ιστοί ομαδοποιούνται σε τέσσερα βασικά διαμερίσματα, καθένα από τα οποία περιλαμβάνει επιμέρους ανατομικές δομές. Το εξωτερικό διαμέρισμα αντιστοιχεί στο τριχωτό της κεφαλής και περιλαμβάνει το δέρμα, τον υποδόριο λιπώδη ιστό και το μυϊκό στρώμα. Το δεύτερο διαμέρισμα αντιστοιχεί στο κρανίο και περιλαμβάνει το σπογγώδες οστό, το έσω και το έξω συμπαγές οστό, καθώς και τις κρανιακές ραφές. Ακολουθεί το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (cerebrospinal fluid, CSF), ενώ το εσωτερικό διαμέρισμα αντιστοιχεί στον εγκεφαλικό ιστό, ο οποίος περιλαμβάνει κυρίως τη φαιά και τη λευκή ουσία, τους μήνιγγες (dura), τον αιματικό ιστό, την παρεγκεφαλίδα, και την επιληπτογόνο ζώνη (EZ).

Οι τιμές της ηλεκτρικής αγωγιμότητας αποδίδονται σε κάθε διαμέρισμα βάσει δεδομένων της διεθνούς βιβλιογραφίας. Όταν δεν είναι διαθέσιμες αξιόπιστες τιμές για τα επιμέρους συστατικά ενός διαμερίσματος, χρησιμοποιείται μία ισοδύναμη αποτελεσματική αγωγιμότητα που αντιπροσωπεύει το σύνολο του διαμερίσματος. Έτσι, για παράδειγμα, όταν δεν υπάρχουν ξεχωριστές μετρήσεις για τα επιμέρους στρώματα του συμπαγούς οστού, υιοθετείται μία ενιαία τιμή αγωγιμότητας για ολόκληρο το κρανιακό διαμέρισμα. Αντίστοιχα, για τον εγκεφαλικό ιστό χρησιμοποιούνται αποτελεσματικές τιμές αγωγιμότητας που αναφέρονται στο σύνολο του εγκεφάλου ή, όπου απαιτείται, διακριτές τιμές για τη λευκή και τη φαιά ουσία. Η προσέγγιση αυτή είναι σύμφωνη με τη συνήθη πρακτική στη βιβλιογραφία της ηλεκτρομαγνητικής μοντελοποίησης βιολογικών ιστών, όπου σύνθετες ανατομικές δομές προσεγγίζονται μέσω ισοδύναμων μακροσκοπικών παραμέτρων αγωγιμότητας.

Ωστόσο, αν και άμεσες μετρήσεις της ηλεκτρικής αγωγιμότητας είναι δύσκολο να υλοποιηθούν, πολλοί μελετητές ασχολήθηκαν και όρισαν τις τιμές για τις αγωγιμότητες που συναντώνται στην ανθρώπινη κεφαλή. Στον παρακάτω πίνακα 3.1 παρουσιάζεται ένα εύρος ισοτροπικών τιμών αγωγιμοτήτων που υπάρχει στην βιβλιογραφία (Abascal et al., 2008; Azizollahi et al., 2018; Gargiulo et al., 2015; Roche-Labarbe et al., 2008; Warner et al., 2019). Στην πραγματικότητα ακόμη και στο ίδιο το στρώμα του ιστού οι τιμές των αγωγιμοτήτων δεν είναι ίδιες αλλά μεταβάλλονται ανάλογα με την διεύθυνση κατά την οποία εξετάζονται. Η αγωγιμότητα των βιολογικών ιστών είναι ένα ανισότροπο μέγεθος καθώς εξαρτάται από την κατεύθυνση (εφαπτομενική ή ακτινική). Από μαθηματική άποψη οι ανισότροπες ιδιότητες των υλικών (όπως η αγωγιμότητα) περιγράφονται με διανύσματα και τανυστές, ενώ οι ισότροπες ιδιότητες με βαθμωτά μεγέθη.

Είδος Ιστού	Ισότροπες Αγωγιμότητες (S/ m)				
	Roche-Labarbe et al., 2008	Abascal et al., 2008	Gargiulo et al., 2015	Azizollahi et al.	Warner et al., 2019
White Matter		0.30	0.14	0.14	0.1429
Gray Matter		0.30	0.33	0.33	0.3333
Cerebrospinal Fluid (CSF)	1.8	1.79	1.54	1.79	1.79
Skull	0.0042 - 0.33	0.039	0.05 - 0.2	0.03 - 0.05	0.001
Skin-Scalp	0.33	0.44	0.43	0.43	0.4346
Sinus					10^{-6}
Eyes					0.5051
Fontanelles	0.3		1.54	0.33-0.53	

Πίνακας 3.1: Ισότροπες ηλεκτρικές αγωγιμότητες ιστών

Κάνοντας μια διευκρίνιση μπορούμε να επισημάνουμε ότι ο όρος ανισότροπη αγωγιμότητα σημαίνει ότι η αγωγιμότητα του αγωγού είναι διαφορετική σε διαφορετικές κατευθύνσεις, ενώ ο όρος ανομοιογένεια σημαίνει ότι η αγωγιμότητα είναι διαφορετική σε διαφορετικές θέσεις.

3.2.1. Η αγωγιμότητα του δέρματος

Το εξωτερικό στρώμα της κεφαλής αποτελείται ανατομικά από το δέρμα (skin) δηλαδή την επιδερμίδα και από το τριχωτό της κεφαλής (scalp) που περιλαμβάνει ολόκληρη την περιοχή πάνω από το κρανίο η οποία είναι ένα πιο αγωγίμο υλικό που εμπεριέχει το λιπώδες οστό και το μυϊκό ιστό. Η αγωγιμότητα για το δέρμα της ανθρώπινης κεφαλής θεωρείται από πολλούς ερευνητές ως ισότροπη (Azizollahi et al., 2018; Gargiulo et al., 2015; Roche-Labarbe et al., 2008; Warner et al., 2019) με μια μέση τιμή $\sigma_{isot} = 0,44 S/m$. Όμως το δέρμα ως αγωγός συμπεριφέρεται διαφορετικά όταν λαμβάνεται υπόψη η ανισοτροπία (Abascal et al., 2008). Έτσι το τριχωτό της κεφαλής μπορεί να παρουσιάζει ανισοτροπία-ειδικά λόγω της παρουσίας μυϊκού ιστού - και η αγωγιμότητα κατά μήκος της επιφάνειας του κρανίου (εφαπτομενική -tangential) θεωρείται 1,5 φορά από εκείνη στην κάθετη κατεύθυνση (ακτινική -radial) (δηλαδή υπάρχει ανισοτροπία υπέρ της εφαπτομενικής διεύθυνσης), σε συχνότητα 50 kHz ($\frac{\sigma_t}{\sigma_r} = 1,5$).

Ισχύει ότι στην περίπτωση της ανισοτροπίας, ο τανυστής αγωγιμότητας $\bar{\sigma}$ περιγράφει την ηλεκτρική αγωγιμότητα ενός ιστού σε διαφορετικές διευθύνσεις. Το ίχνος (trace) ενός τανυστή είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του, δηλαδή των κύριων τιμών (eigenvalues) που αντιστοιχούν στην αγωγιμότητα στις τρεις κάθετες διευθύνσεις. Ανεξάρτητα από το πόσο ανισότροπος είναι ο ιστός, το άθροισμα των αγωγιμοτήτων στις τρεις διευθύνσεις ($\sum_{k=1}^3 \sigma_k$) παραμένει σταθερό και αν ένας ιστός είχε αγωγιμότητα ίδια προς όλες τις κατευθύνσεις τότε το ίχνος του είναι ίσο με τρεις φορές την ιστροπική αγωγιμότητα (Abascal et al., 2008), δηλαδή

$$tr(\bar{\sigma}) = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = 3\sigma_{isot}. \quad (3.16)$$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ίδια αγωγιμότητα προς όλες τις κατευθύνσεις π.χ του δέρματος ισχύει:

$$tr(\bar{\sigma}) = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_t \end{bmatrix} = \sigma_r + 2\sigma_t \Rightarrow \sigma_r + 2\sigma_t = 3\sigma_{isot} \quad (3.17)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τη μέση τιμή $\sigma_{isot} = 0.44 \text{ S/m}$ τότε με $\sigma_{rad} = \frac{\sigma_t}{1,5}$ έχουμε $\sigma_{rad} = 0,33 \text{ S/m}$ και $\sigma_t = 0,495 \text{ S/m}$.

3.2.2. Η αγωγιμότητα του εγκεφαλονωτιαίου υγρού

Το εγκεφαλονωτιαίο υγρό ENY, (CSF -Fluid) είναι ένα καθαρό, διαυγές υγρό που βρίσκεται μέσα στον εγκέφαλο και το νωτιαίο μυελό. Η βασική του λειτουργία είναι να προστατεύει το κεντρικό νευρικό σύστημα από χτυπήματα και κραδασμούς, σαν μια μαλακή «απαλή ασπίδα». Επιπλέον, βοηθά στη θρέψη των νευρικών κυττάρων και απομακρύνει τα άχρηστα προϊόντα από τον εγκέφαλο. Παράγεται συνεχώς μέσα σε ειδικές κοιλότητες του εγκεφάλου και κυκλοφορεί μέσα σε χώρους γύρω από τον εγκέφαλο και τον νωτιαίο μυελό, όπου τελικά απορροφάται ξανά στην κυκλοφορία του αίματος. Το ENY είναι ένα από τα πιο αγωγίμα ιστολογικά διαμερίσματα στο κεφάλι, με μέση τιμή αγωγιμότητας κοντά στα $1,7 \text{ S/m}$.

Το ENY θεωρείται ισότροπο (Abascal et al., 2008; Hallez et al., 2007; McCann et al., 2019) δηλαδή θεωρεί ότι η αγωγιμότητα είναι η ίδια σε όλες τις διευθύνσεις (radial = tangential \approx ίσες τιμές). Αναλυτικότερες μελέτες (McCann et al., 2019) επιβεβαιώνουν την εξάρτηση της αγωγιμότητας του εγκεφαλονωτιαίου υγρού (CSF) από τη θερμοκρασία. Συγκεκριμένη μελέτη (Baumann et al., 1997), αναφέρει αύξηση της αγωγιμότητας του ENY κατά 23% σε θερμοκρασία σώματος ($\sim 37 \text{ }^\circ\text{C}$), φτάνοντας περίπου και τη τιμή $1,79 \text{ S/m}$ σε σύγκριση με τιμές σε θερμοκρασία δωματίου ($\sim 25 \text{ }^\circ\text{C}$) δηλαδή περίπου 23% υψηλότερη τιμή. Η μεταβολή αυτή συμβαδίζει με γνωστούς θερμοκρασιακούς συντελεστές αγωγιμότητας για υγρά με παρόμοια ιοντική σύσταση (π.χ. KCl). Αξίζει να σημειωθεί πως για σχεδόν δύο δεκαετίες, αρκετές μελέτες είχαν υποτιμήσει την τιμή της αγωγιμότητας του ανθρώπινου εγκεφαλονωτιαίου υγρού έως και 44% κάτι που επηρέαζε την ακρίβεια των μοντέλων για τον εντοπισμό των πηγών.

3.2.3. Η αγωγιμότητα του εγκέφαλου

Ο εγκέφαλος (cerebrum) είναι το κέντρο ελέγχου του σώματος. Αποτελείται κυρίως από δύο είδη ιστού: τη φαιά και τη λευκή ουσία. Η φαιά ουσία περιλαμβάνει τα σώματα των

νευρικών κυττάρων και είναι υπεύθυνη για την επεξεργασία των πληροφοριών. Η λευκή ουσία αποτελείται από νευρικές ίνες που μεταφέρουν σήματα μεταξύ διαφορετικών περιοχών του εγκεφάλου και του νωτιαίου μυελού. Μαζί, αυτές οι δομές επιτρέπουν τη σκέψη, την κίνηση, τη μνήμη, την αίσθηση και πολλές άλλες λειτουργίες που κάνουν τον άνθρωπο αυτό που είναι.

Η αγωγιμότητα της φαιάς ουσίας του εγκεφάλου

Η φαιά ουσία του εγκεφάλου (Grey matter- GM) θεωρείται γενικά ισότροπο μέσο (Hallez et al., 2007; Wolters et al., 2006), καθώς δεν παρατηρείται παράγοντες κατευθυντικότητας στις τιμές αγωγιμότητας. Η μέση τιμή της αγωγιμότητας αναφέρεται περίπου ίση με $0,47 \text{ S/m} \pm 0,24 \text{ S/m}$ (McCann et al., 2019), παρουσιάζοντας ωστόσο σημαντική μεταβλητότητα. Η διακύμανση αυτή αποδίδεται τόσο στη χρησιμοποιούμενη μέθοδο μέτρησης όσο και στην κλινική κατάσταση των συμμετεχόντων. Ειδικότερα, έχουν χρησιμοποιηθεί τεχνικές όπως η Μαγνητική Τομογραφία Ηλεκτρικής Εμπέδησης (Magnetic Resonance Electrical Impedance Tomography, MREIT), η οποία συνδυάζει εφαρμογή ηλεκτρικού ρεύματος με MRI για την εκτίμηση της κατανομής της αγωγιμότητας, καθώς και η Τομογραφία Ηλεκτρικής Εμπέδησης (Electrical Impedance Tomography, EIT), μία μη επεμβατική μέθοδος που βασίζεται στην εφαρμογή ρευμάτων στην επιφάνεια του κρανίου και στη μέτρηση διαφορών δυναμικού. Επιπλέον, οι αναφερόμενες τιμές επηρεάζονται από τη νευρολογική κατάσταση των εξεταζόμενων, όπως σε περιπτώσεις νόσου Alzheimer, επιληψίας και άλλων νευρολογικών διαταραχών.

Η αγωγιμότητα της λευκής ουσίας του εγκεφάλου

Σε αντίθεση με τη φαιά ουσία, η οποία συνήθως προσεγγίζεται ως ισότροπο μέσο, η λευκή ουσία του εγκεφάλου (Brain White Matter, WM) παρουσιάζει έντονα ανισότροπη συμπεριφορά ως προς την ηλεκτρική αγωγιμότητα, λόγω της οργανωμένης δομής των νευρικών ινών. Παρ' όλα αυτά, πολλά από τα παλαιότερα μοντέλα θεωρούσαν τα ιστολογικά διαμερίσματα του εγκεφάλου ισότροπα, παραμελώντας την ανισοτροπία της λευκής ουσίας. Η παραδοχή αυτή μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά σφάλματα στον εντοπισμό ισοδύναμου διπόλου, με μέσες αποκλίσεις που έχουν αναφερθεί ίσες με $11,21 \text{ mm}$ και $26,3 \text{ mm}$ (Hallez et al., 2005). Επιπλέον, σε προσομοιώσεις του ευθέως προβλήματος με χρήση της μεθόδου Ηλεκτρικής Τομογραφίας Εμπέδησης (Electrical Impedance Tomography, EIT), η οποία βασίζεται στην τοποθέτηση ηλεκτροδίων στην επιφάνεια της κεφαλής για την καταγραφή διαφορών δυναμικού, η αγνόηση της

ανισοτροπίας της λευκής ουσίας μπορεί να επιφέρει σημαντικές αποκλίσεις στις υπολογιζόμενες τάσεις. Συγκεκριμένα, έχει αναφερθεί μέσο σφάλμα περίπου 53% στις τάσεις που θα καταγράφονταν από τα επιφανειακά ηλεκτρόδια (Abascal et al., 2008).

Η λευκή ουσία αποτελείται από νευροάξονες με οργανωμένο χωρικό, γεγονός που προσδίδει κατευθυντική εξάρτηση στις ηλεκτρικές της ιδιότητες και οδηγεί σε ανισότροπη συμπεριφορά της αγωγιμότητας. Οι άξονες των νευρικών ινών καθορίζουν τις κύριες ιδιοκατευθύνσεις αγωγιμότητας, κατά μήκος των οποίων η αγωγιμότητα λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές, ενώ μικρότερες τιμές παρατηρούνται στις διευθύνσεις κάθετα προς τις ίνες. Ειδικότερα, η διαμήκης (longitudinal ή parallel) συνιστώσα της αγωγιμότητας υπερτερεί της εγκάρσιας (transversal ή perpendicular) συνιστώσας, λόγω της μικροδομικής οργάνωσης και της παρουσίας της μυελίνης γύρω από τους νευράξονες. Οι ακριβείς τιμές των συνιστωσών αυτών επηρεάζονται σημαντικά από παράγοντες όπως η ηλικία, η ανατομική περιοχή και η ύπαρξη νευρολογικής παθολογίας (Wolters et al., 2006).

Επιπλέον, έχει αναφερθεί ότι η λευκή ουσία παρουσιάζει συστηματική διαφορά μεταξύ της αγωγιμότητας παράλληλα και κάθετα προς τη διεύθυνση των νευρικών ινών. Σύμφωνα με τους Wolters et al. (2006), η εγκάρσια αγωγιμότητα είναι το δεκαπλάσιο της διαμήκης (παράλληλης) αγωγιμότητας, γεγονός που αναδεικνύει τον έντονα ανισότροπο χαρακτήρα της λευκής ουσίας.

$$\frac{\sigma_{parallel}}{\sigma_{trans}} = \frac{10}{1}. \quad (3.18)$$

Στο παρόν σφαιρικό μοντέλο, η ανισοτροπία της λευκής ουσίας περιγράφεται μέσω ακτινικής και εφαπτομενικής συνιστώσας αγωγιμότητας. Η ακτινική αγωγιμότητα αντιστοιχεί στη διεύθυνση r , ενώ η εφαπτομενική αγωγιμότητα αντιστοιχεί στις διευθύνσεις θ, φ . Υπό την παραδοχή ακτινικού προσανατολισμού των νευρικών ινών, η ακτινική συνιστώσα αντιστοιχεί στη διαμήκη αγωγιμότητα, ενώ η εφαπτομενική στην εγκάρσια αγωγιμότητα.

Σύμφωνα με το μοντέλο των Hallez et al. (2005), η ανισοτροπία της λευκής ουσίας προσεγγίζεται μέσω διάκρισης μεταξύ ακτινικής (radial) και εφαπτομενικής (tangential) αγωγιμότητας. Για ισοτροπική τιμή αναφοράς $\sigma_{isot} = 0,33 S/m$, η παράλληλη (διαμήκη) /ακτινική αγωγιμότητα υπολογίζεται ίση με $\sigma_{paral} = 1,4278 S/m$ ενώ η κάθετη (εγκάρσια) /εφαπτομενική αγωγιμότητα λαμβάνεται ίση με $\sigma_{trans} = 0,15864 S/m$, οδηγώντας σε λόγο ανισοτροπίας περίπου 9:1 (Hallez et al., 2005).

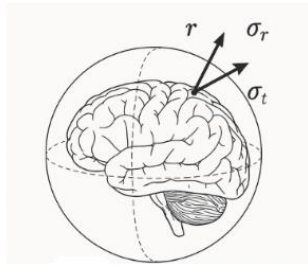
3.2.4. Η αγωγιμότητα του κρανίου

Το κρανίο (skull) είναι το οστέινο περίβλημα που προστατεύει τον εγκέφαλο. Αποτελείται από πολλά οστά που ενώνονται μεταξύ τους με ραφές και σχηματίζουν μια ανθεκτική δομή. Εκτός από την προστασία του εγκεφάλου, το κρανίο σχηματίζει και τη βάση του προσώπου, στηρίζοντας τα μάτια, τη μύτη και το στόμα. Η αγωγιμότητα του κρανίου (οστού) παρουσιάζει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον καθώς είναι αυτή που επηρεάζει έντονα τις μετρήσεις του δυναμικού και η παραμέληση της ανισοτροπίας του κρανίου έχει ως αποτέλεσμα ένα σφάλμα εντοπισμού διπόλου, κατά μέσο όρο, 13,73 mm με μέγιστο τα 24,51 mm (Antonakakis et al., 2020; Dannhauer et al., 2011; Ferree et al., 2001; Hallez et al., 2005; Wolters et al., 2006). Η ανισοτροπία αυτή έχει μελετηθεί από πολλούς ερευνητές όπως αναφέρεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.3.

3.3. Η επίδραση της ανισοτροπίας της αγωγιμότητας στην ανθρώπινη κεφαλή.

Η έννοια της ανισοτροπίας είχε ήδη απασχολήσει την επιστημονική κοινότητα από τη δεκαετία του 1960 πολύ πριν από την ανάπτυξη σύγχρονων υπολογιστικών μεθόδων και αριθμητικών αλγορίθμων. Ο Nicholson (1965), πραγματοποιώντας άμεσες μετρήσεις σε ζωικά πρότυπα, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του εγκεφαλικού ιστού είναι μη ομογενής και ανισότροπη. Επιπλέον, ανέφερε ότι ο νευρικός ιστός εμφανίζει ανισοτροπία λόγω του παράλληλου προσανατολισμού των νευραξόνων της λευκής ουσίας, γεγονός που έχει ως αποτέλεσμα η διαμήκης (parallel/longitudinal) αγωγιμότητα να υπερτερεί της εγκάρσιας (transverse/perpendicular) αγωγιμότητας. Είναι επίσης γνωστό ότι, πέραν της λευκής ουσίας, ανισότροπη συμπεριφορά παρουσιάζει και το οστό του κρανίου (Hallez et al., 2009). Ειδικότερα, η ηλεκτρική αγωγιμότητα του οστού εξαρτάται από τη διεύθυνση διάδοσης του ρεύματος, λαμβάνοντας διαφορετικές τιμές κατά μήκος της επιφάνειας του κρανίου και διαφορετικές τιμές κατά τη διεύθυνση κάθετα προς αυτήν. Στο πλαίσιο σφαιρικών μοντέλων κεφαλής, η διεύθυνση κάθετα προς την επιφάνεια αντιστοιχεί στην ακτινική διεύθυνση σ_r (radial conductivity), ενώ οι διευθύνσεις παράλληλα προς την επιφάνεια αντιστοιχούν στην εφαπτομενική αγωγιμότητα σ_t (tangential conductivity). Έχει αναφερθεί ότι η εφαπτομενική αγωγιμότητα του κρανιακού οστού μπορεί να είναι περίπου δεκαπλάσια της ακτινικής αγωγιμότητας, γεγονός που καταδεικνύει τον έντονα ανισότροπο χαρακτήρα του ιστού.

$$\frac{\sigma_t}{\sigma_r} = 10. \quad (3.19)$$



Σχήμα 3.2 : Εφαπτομενική σ_t και ακτινική αγωγιμότητα σ_r .

Ο Hallez μελέτησε την επίδραση της ανισοτροπίας της λευκής ουσίας και του κρανιακού οστού στην επίλυση του ευθέως και του αντιστρόφου προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας. Τα αποτελέσματά του έδειξαν ότι η ανισοτροπία των ιστών πρέπει να λαμβάνεται υπόψη για την ακριβέστερη εκτίμηση της θέσης των πηγών, καθώς η παράλειψή της μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα εντοπισμού ισοδύναμου διπόλου που κυμαίνονται από 0 mm έως 5 mm.

Επιπλέον, μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί σχετικά με το ηλεκτρικό δυναμικό που προέρχεται από εγκεφαλικές πηγές έχουν δείξει ότι η ανισοτροπία των εγκεφαλικών ιστών έχει μικρή επίδραση στον εντοπισμό των πηγών σε ηλεκτροεγκεφαλογράφημα, αλλά επηρεάζει σημαντικά την ισχύ (strength) της πηγής και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που αυτή παράγει (Haueisen et al., 2002).

Επιπλέον, σύμφωνα με τους Wolters CH, Anwander A (Wolters et al., 2006), οι επιφανειακές πηγές επηρεάζονται λιγότερο από την ανισότροπη αγωγιμότητα του εγκεφάλου σε σύγκριση με πηγές που εντοπίζονται σε μεγαλύτερο βάθος. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στο ότι οι βαθύτερες πηγές περιβάλλονται σε μεγαλύτερο βαθμό από ανισότροπους ιστούς, με αποτέλεσμα να εντείνεται η επίδραση της ανισοτροπίας στο προκύπτον ηλεκτρικό πεδίο. Αρκετές μελέτες έχουν πραγματοποιήσει συγκρίσεις των δυναμικών που καταγράφονται στα ηλεκτρόδια για ισότροπα και ανισότροπα μοντέλα κεφαλής (Wolters, 2003). Ωστόσο, σχετικά περιορισμένος αριθμός εργασιών έχει διερευνήσει συστηματικά την επίδραση της ανισότροπης αγωγιμότητας στους υπολογισμούς των ισοδύναμων διπόλων.

Για την επίλυση του ευθέως προβλήματος οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρέως και αποδίδουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε ανισοτροπικά αγωγιμα

διαμερίσματα είναι η μέθοδος του finite difference method (FDM) και the finite element method (FEM). Αντίθετα, η μέθοδος boundary element method (BEM), μπορεί μόνο να χρησιμοποιηθεί όταν τα διαμερίσματα του εγκεφάλου θεωρούνται ισοτροπικά.

Ο Hallez et al. (2005), αξιοποιώντας τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference Method, FDM), η οποία βασίζεται σε τρισδιάστατο πλέγμα που μπορεί να εξαχθεί απευθείας από εικόνες μαγνητικής τομογραφίας και παρουσιάζει σχετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος, διερεύνησε τη δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου με χρήση αρχής αμοιβαιότητας (FDM-R) για τον εντοπισμό διπόλων σε μοντέλα κεφαλής με ανισότροπες αγωγιμότητες στο κρανίο και στη λευκή ουσία (Hallez et al., 2005).

Στο συγκεκριμένο μοντέλο αναφοράς, τα σφάλματα αποδίδονται αποκλειστικά στην παράλειψη της ανισοτροπίας, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι οι ανισότροπες αγωγιμότητες δεν πρέπει να αγνοούνται. Ειδικότερα, η αγνόηση της ανισοτροπίας του κρανίου και της λευκής ουσίας οδηγεί σε σφάλματα εντοπισμού της θέσης του διπόλου της τάξης των 13,73 mm και 11,21 mm αντίστοιχα. Στη μελέτη χρησιμοποιήθηκαν τέσσερα ιστικά διαμερίσματα (δέρμα, κρανίο, λευκή ουσία και φαιά ουσία), εκ των οποίων το δέρμα και η φαιά ουσία θεωρήθηκαν ισότροπα, ενώ το κρανίο και η λευκή ουσία αντιμετωπίστηκαν ως ανισότροπα.

Ο ίδιος μελετητής, σύγκρινε το αναλυτικό μοντέλο κεφαλής με το αριθμητικό μοντέλο (με ανισοτροπία) και κατέληξε πως για τον εντοπισμό της πηγής για μέγεθος πλέγματος μεγαλύτερου του 1 mm, ο μέσος όρος εντοπισμού του διπόλου ξεπερνάει τα 3 mm. Αυτό σημαίνει πως η μέθοδος FDM δεν μπορεί να μοντελοποιήσει την ανισοτροπία του κρανίου αν το μέγεθος του πλέγματος που αναλύεται είναι μεγαλύτερο του 1 mm. Επιπλέον, ο ίδιος ερευνητής στην μελέτη του το 2008, (Hallez et al., 2008), μελέτησε την εκτίμηση των σφαλμάτων που προκύπτουν από λανθασμένη μοντελοποίηση των αγωγιμοτήτων και ειδικότερα της μοντελοποίησης της ανισοτροπίας της αγωγιμότητας της λευκής ουσίας. Τα αποτελέσματα που προσήλθαν από εικόνες DW-MRI, έδειξαν πως το σφάλμα προσανατολισμού και θέσης εξαρτάται από τον προσανατολισμό του δοκιμαστικού δίπολου. Συγκεκριμένα, διαπιστώθηκε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό της θέσης αυξάνεται όταν ο προσανατολισμός του διπόλου είναι παρόμοιος με τον προσανατολισμό της ανισοτροπίας, ενώ το σφάλμα προσανατολισμού μειοποιείται όταν οι δύο προσανατολισμοί αποκλίνουν σημαντικά μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα αυτά

αναδεικνύουν τη σημασία της ακριβούς μοντελοποίησης της ανισοτροπίας της λευκής ουσίας για τον αξιόπιστο εντοπισμό πηγών στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα.

Μία σημαντική μελέτη σχετικά με την επίδραση της ανομοιογενούς και ανισότροπης αγωγιμότητας του κρανίου και της λευκής ουσίας παρουσιάστηκε από τους Md. Rezaul Bashar, Yan Li και Peng Wen (Bashar et al., 2008) οι οποίοι διερεύνησαν το ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (HEΓ) και τη χωρική κατανομή του παραγόμενου ηλεκτρικού δυναμικού. Στη μελέτη τους χρησιμοποιήθηκε η κλασματική ανισοτροπία FA (Fractional Anisotropy) για την ποσοτικοποίηση της ανισοτροπίας της λευκής ουσίας. Η μοντελοποίηση της κεφαλής πραγματοποιήθηκε μέσω σφαιρικού προτύπου πέντε διαμερισμάτων (δέρμα, κρανίο, εγκεφαλικό υγρό, φαιά ουσία και λευκή ουσία) ενώ για την αριθμητική επίλυση εφαρμόστηκε η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων FEM.

Για την ποσοτική αξιολόγηση της επίδρασης της ανισοτροπίας στην κατανομή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου χρησιμοποιούνται συνήθως δύο δείκτες σφάλματος: ο δείκτης σχετικής διαφοράς τοπογραφίας (Relative Difference Measure — RDM) και ο δείκτης μεταβολής πλάτους (Magnitude — MAG). Οι δείκτες αυτοί εισήχθησαν στο πλαίσιο της μεθόδου οριακών στοιχείων (Boundary Element Method — BEM) και αποτελούν πλέον καθιερωμένα κριτήρια σύγκρισης διαφορετικών μοντέλων αγωγιμότητας.

Έτσι τα σφάλματα που αποδόθηκαν στην ανισοτροπία της αγωγιμότητας της λευκής ουσίας αξιολογήθηκαν μέσω των μετρικών RDM και MAG. Οι υπολογισμοί έδωσαν τιμές $RDM = 1.59\% \sim 18.87\%$ και $MAG = 0.95 \sim 1.12$, οι οποίες αποκλίνουν αισθητά από τις ιδανικές τιμές $RDM = 0\%$ και $MAG = 1$.

$$RDM = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{ref_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (ref_i)^2}} - \frac{meas_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (meas_i)^2}} \right)^2} \quad (3.20)$$

$$MAG = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n meas_i^2}{\sum_{i=1}^n ref_i^2}} \quad (3.21)$$

Όπου ref_i (reference) αντιστοιχεί στις τιμές δυναμικού που προκύπτουν από το ομογενές ισότροπο μοντέλο, $meas_i$ (measurement) στις αντίστοιχες τιμές του ανομοιογενούς ανισότροπου μοντέλου και n : στον συνολικό αριθμό μετρήσεων.

Η μετρική RDM χρησιμοποιείται για την ποσοτική αξιολόγηση της ομοιότητας ή της απόκλισης μεταξύ δύο τοπογραφικών κατανομών δυναμικού στο HEΓ, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της ανάλυσης και του εντοπισμού πηγών. Αντίστοιχα, η μετρική MAG αξιολογεί

κατά πόσο μια αριθμητική προσομοίωση αναπαράγει σωστά το μέγεθος της πραγματικής ή θεωρητικής κατανομής του ηλεκτρικού σήματος. Απόκλιση της τιμής του MAG από την ιδανική τιμή ($MAG = 1$) υποδηλώνει ότι η ανισοτροπία της αγωγιμότητας της λευκής ουσίας οδηγεί είτε σε υπερεκτίμηση είτε σε υποεκτίμηση της έντασης του παραγόμενου σήματος, επηρεάζοντας συνεπώς την ακρίβεια των υπολογιστικών προσομοιώσεων. Επιπλέον, τα μέγιστα σφάλματα που αποδόθηκαν στην ανισοτροπία της αγωγιμότητας του κρανίου βρέθηκαν ίσα με $RDM = 17.17\%$ και $MAG = 1.11$. Όταν λήφθηκαν ταυτόχρονα υπόψη η ανισοτροπία της λευκής ουσίας και του κρανίου, τα συνολικά σφάλματα αυξήθηκαν περαιτέρω, λαμβάνοντας τιμές $RDM = 20.39\%$ και $MAG = 1.09$ (Bashar et al., 2008). Τα αποτελέσματα αυτά υποδεικνύουν ότι η ανομοιογενής εγκάρσια αγωγιμότητα της λευκής ουσίας, καθώς και η ακτινική αγωγιμότητα του κρανίου, αποτελούν κρίσιμους παράγοντες που επηρεάζουν σημαντικά την κατανομή των ηλεκτρικών δυναμικών στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα.

3.4. Αριθμητικές προσεγγίσεις και βιοφυσική θεμελίωση της ανισοτροπίας των ηλεκτρικών αγωγιμοτήτων των ιστών.

Οι ερευνητές (Garnero et al., 1998), χρησιμοποιώντας την μέθοδο FEM, στην εργασία τους με τίτλο: Influence of skull anisotropy for the forward and inverse problem in EEG to 1998, μελέτησαν την επίδραση της ανισοτροπίας του κρανίου τόσο στο ευθύ, όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα. Στην μελέτη, χρησιμοποίησαν ένα αναλυτικό μοντέλο για το σφαιρικό πρότυπο και FEM για το ρεαλιστικό πρότυπο. Στην μελέτη που εκπόνησαν, έλαβαν υπόψιν μόνο την ανισοτροπία της αγωγιμότητας του οστού του κρανίου και ορίσαν τις παρακάτω τιμές για την ακτινική και την εφαπτομενική διεύθυνση της ανισοτροπίας στο κρανίο.

$$\text{Tangential conductivity} = 0.125 \text{ S/m}$$

$$\text{Radial conductivity} = 0.0125 \text{ S/m} \quad (3.22)$$

Παρατηρείται ότι και οι εν λόγω ερευνητές βασίζουν τη μελέτη τους στην αναλογία μεταξύ της εφαπτομενικής και της ακτινικής αγωγιμότητας του οστικού ιστού, την οποία υιοθετούμε και εμείς στη μαθηματική μας προσέγγιση. Η αναλογία αυτή δίνεται από τη σχέση (3.8). Λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της ανισοτροπίας του κρανίου στο ηλεκτρικό δυναμικό, διαπιστώθηκε ότι παρατηρείται σημαντική διάχυση στην κατανομή του δυναμικού όταν αυτό προέρχεται από μία μόνο πηγή, όπως ένα απλό δίπολο (single

dipole). Αντιθέτως, η επίδραση της ανισοτροπίας είναι πιο έντονη σε περιπτώσεις όπου υπάρχουν εκκεντρικά δίπολα (eccentric dipoles), καθώς αυτά βρίσκονται εγγύτερα στην επιφάνεια του κρανιακού οστού.

Ένα ακόμη σημαντικό συμπέρασμα της μελέτης είναι ότι, στο πλαίσιο ενός σφαιρικού μοντέλου, η ανισοτροπία έχει την τάση να μειώνει το πλάτος του ηλεκτρικού δυναμικού (δηλαδή περιορίζει τη διακύμανσή του), ενώ η επίδρασή της καθίσταται εντονότερη όταν εφαρμόζεται σε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο. Ωστόσο, η ποσοτική διαφορά μεταξύ της ισοτροπικής και της ανισότροπης περίπτωσης παραμένει σχετικά μικρή, καθώς οι υπολογισμοί του RDM δεν έδειξαν απόκλιση μεγαλύτερη του 10%.

Η διαφορά αυτή κυμαίνεται στα ίδια επίπεδα με άλλα σφάλματα μοντελοποίησης για παράδειγμα του σφάλματος που προέρχεται από την μοντελοποίηση του σχήματος της κεφαλής η οποία δεν είναι ομοιόμορφη επιφάνεια αλλά μπορεί να περιέχει και οπές στην επιφάνεια της.

Για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της παραπάνω μελέτης χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις επίλυσης, μία βασισμένη σε τεχνική τετραγωνικού συστήματος και μια μη γραμμική μέθοδο. Από τα αποτελέσματα των ερευνητών προέκυψε ότι η ανισοτροπία της αγωγιμότητας επηρεάζει ουσιαστικά την ακρίβεια της λύσης, ενώ ακόμη και η εφαρμογή μη γραμμικών μεθόδων, οι οποίες παρέχουν λεπτομερέστερη πληροφορία για την κατανομή των πηγών, δεν επαρκεί όταν η ανισοτροπία του κρανίου δεν λαμβάνεται υπόψη. Στην περίπτωση αυτή, το αντίστροφο πρόβλημα αποτυγχάνει να αποδώσει με ακρίβεια τη χωρική κατανομή των ενεργών περιοχών του εγκεφαλικού φλοιού και να περιγράψει αξιόπιστα τις επιμέρους περιοχές που συμμετέχουν στη δημιουργία του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος. Τέλος, οι ερευνητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι απαιτούνται περαιτέρω βελτιώσεις στη μοντελοποίηση του ευθέως προβλήματος, ώστε να επιτευχθεί η ανάπτυξη περισσότερο ρεαλιστικών μοντέλων κεφαλής, ικανών να συνυπολογίζουν τοπικές ανομοιογένειες των ιστών. Τέτοιες ανομοιογένειες μπορεί να σχετίζονται, για παράδειγμα, με την παρουσία κρανιακών οπών, παραρρίνιων κόλπων ή άλλων ανατομικών ιδιομορφιών που επηρεάζουν τη χωρική κατανομή της ηλεκτρικής αγωγιμότητας.

Το ανθρώπινο κρανίο αποτελείται από ένα μαλακό στρώμα οστού (σπογγώδες οστό) που περικλείεται από δύο στρώματα σκληρού οστού (συμπαγές οστό). Το σπογγώδες οστό παρουσιάζει σημαντικά μεγαλύτερη αγωγιμότητα σε σχέση με το συμπαγές οστό, με

αποτελεσμα η συνολική αγωγιμότητα του κρανίου να παρουσιάζει ισχυρή εξάρτηση από την κατεύθυνση (ανισοτροπία). Όπως τεκμηριώνεται από τους (Akhtari et al., 2002) η ακτινική αγωγιμότητα του κρανιακού οστού εμφανίζει αναλογία 1:10 ως προς την εφαπτομενική του αγωγιμότητα. Επιπλέον, οι ανομοιογένειες του κρανίου —και ιδιαίτερα οι τοπικές μεταβολές της ακτινικής αγωγιμότητας που οφείλονται στη μεταβαλλόμενη αναλογία σπογγώδους και συμπαγούς οστού — ενδέχεται να επηρεάζουν τα υπολογιστικά αποτελέσματα ακόμη περισσότερο από την ίδια την ανισοτροπία (Ollikainen et al., 1999).

Μελετώντας την επίδραση της ανισοτροπίας του κρανίου και της λευκής ύλης στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (ΗΕΓ) και το μαγνητοεγκεφαλογράφημα (ΜΕΓ) στο πλαίσιο του ευθύ προβλήματος (Wolters et al., 2001) αναδεικνύεται ότι η ανισοτροπία αυτών των ιστών ασκεί υπολογίσιμη επιρροή στην κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού στο ΗΕΓ και, επομένως, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά τη μοντελοποίηση. Παράλληλα, διαπιστώθηκε ότι η ανισοτροπία του κρανίου δεν επιδρά ουσιαστικά στο ΜΕΓ, ενώ η ανισοτροπία της λευκής ύλης επηρεάζει μετρήσιμα το παραγόμενο μαγνητικό σήμα. Το εύρημα αυτό εναρμονίζεται με την καθιερωμένη παραδοχή ότι τα ρεύματα που ρέουν στο δέρμα και στο κρανίο δεν συμβάλλουν ουσιωδώς στη δημιουργία μαγνητικού πεδίου.

Η μοντελοποίηση της αγωγιμότητας των ιστών του κρανίου και των εν τω βάθει εγκεφαλικών δομών παρουσιάζει σημαντικές αποκλίσεις, κυρίως ως προς το εύρος της ανισοτροπίας που λαμβάνεται υπόψη. Συνεπώς, τα υπολογιστικά μοντέλα κυμαίνονται από πλήρως ισότροπα —όπου το εσωτερικό του κρανίου θεωρείται ομογενές ως προς την αγωγιμότητα— έως πλήρως ανισότροπα, όπου γίνεται διακριτή αναπαράσταση των επιμέρους φλοιών, όπως του εγκεφαλικού φλοιού, του εγκεφαλονωτιαίου υγρού, του δέρματος και του οστού, με ανισοτροπία να αποδίδεται στην αγωγιμότητα κάθε στρώματος.

Επιπλέον μελέτες (Wolters et al., 2001), μοντελοποιώντας την αγωγιμότητα του κρανακού οστού, διατήρησαν την ακτινική αγωγιμότητα σταθερή και αύξησαν την εφαπτομενική κατά ένα συντελεστή 10, βάσει της αναλογίας (1:10),(Garnero et al., 1998). Μεσω αυτής της προσέγγισης, υπολόγισαν τα μετρικά σφάλματα για μια εφαπτομενικά προσανατολισμένη εκκεντρική πηγή και κατέληξαν στις τιμές $RDM = 20\%$ και $MAG = 1.72$.

Επιπλέον, η ανισοτροπία της λευκής ύλης οδηγεί σε σημαντική μείωση του πλάτους του επιφανειακού δυναμικού. Στην περίπτωση του MEG, οι βαθιές πηγές συνοδεύονται από αυξημένο σφάλμα τόσο στην τοπογραφία όσο και στη μέτρηση της έντασης του σήματος, με το σφάλμα έντασης (MAG) να φτάνει περίπου το 0.6 για αναλογία ανισοτροπίας 1:10. Ιδιαίτερη σημασία έχει και η τοπική αγωγιμότητα γύρω από τη βαθιά πηγή, η οποία επηρεάζει έντονα την ακρίβεια των υπολογισμών. Συνεπώς, για την αξιόπιστη εντοπισμό και εκτίμηση της ισχύος βαθιών εγκεφαλικών πηγών, η ανισοτροπία της λευκής ύλης (και σε μικρότερο βαθμό του κρανίου), είναι απαραίτητη.

Σε μια ακόμη μελέτη της ανισοτροπίας, οι Cuartas Morales et al. (Cuartas Morales et al., 2019) ανέπτυξαν μια αποτελεσματική υπολογιστική λύση FDMs η οποία ενσωματώνει με ευελιξία πληροφορίες αγωγιμότητας και ανισοτροπίας. Δεδομένης της υψηλής υπολογιστικής πολυπλοκότητας της μεθόδου, οι συγγραφείς έδωσαν ιδιαίτερη έμφαση στην επίτευξη ενός πολύ χαμηλού αριθμητικού σφάλματος, χρησιμοποιώντας ακριβείς αναλυτικές εκφράσεις για μοντέλα αγωγών σφαιρικού όγκου. Στη συνέχεια, τεκμηρίωσαν την υπολογιστική απόδοση της προτεινόμενης μεθόδου συγκρίνοντάς την με άλλους αριθμητικούς επιλυτές. Τέλος, εφάρμοσαν το αναπτυγμένο εργαλείο μοντελοποίησης κεφαλής σε μαγνητικές τομογραφίες MRI υψηλής ανάλυσης από πραγματικό υποκείμενο, προκειμένου να αξιολογήσουν την προστιθέμενη αξία της ενσωμάτωσης λεπτομερών πληροφοριών αγωγιμότητας και ανισοτροπίας. Τα αποτελέσματά έδειξαν ξεκάθαρα ότι το αναπτυγμένο FDMs (το μοντέλο AFDRM-NZ, με τα ενσωματωμένα δεδομένα) μπορεί να συμβάλει σε μια πιο ακριβή μοντελοποίηση κεφαλής κατ' επέκταση, σε πιο αξιόπιστη αξιοποίηση της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας ως εργαλείου απεικόνισης της εγκεφαλικής λειτουργίας.

Παράλληλα, οι μελετητές Antonakakis M., Schrader S., Aydin U., and Wolter H., στην εργασία τους *Inter-Subject Variability of Skull Conductivity and Thickness in Calibrated Realistic Head Models*, εκτίμησαν την αγωγιμότητα του κρανίου χρησιμοποιώντας μη επεμβατικές μεθόδους EEG, MEG και χρήση MRI, μελετώντας ένα γκρουπ 20 ατόμων ηλικίας 18-53 (Antonakakis et al., 2020). Στην έρευνά τους, οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν ανάλυση πηγών σωματοαισθητικών προκλητών δυναμικών (SEPs), βασισμένη σε λεπτομερή μοντελοποίηση κεφαλής με τη μέθοδο FEM, με αντικείμενο τη μελέτη του συστατικού P20/N20. Η στατιστική ανάλυση έδειξε σημαντική συσχέτιση της βαθμονομημένης αποτελεσματικής αγωγιμότητας του κρανίου με το πάχος των κρανιακών οστών και την ηλικία των συμμετεχόντων. Συγκεκριμένα, η αγωγιμότητα του κρανίου

βρέθηκε υψηλότερη σε νεότερους συμμετέχοντες, γεγονός που αποδόθηκε στη μικρότερη οστική πυκνότητα και στο μικρότερο πάχος του διπλοϊκού στρώματος. Επιπλέον, διαπιστώθηκε ότι ακόμη και μικρές μεταβολές στην αγωγιμότητα του κρανίου μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές αλλαγές στα υπολογιζόμενα ηλεκτρικά δυναμικά και να οδηγήσουν σε σφάλματα εντοπισμού πηγών της τάξης των λίγων εκατοστών. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η εκτιμώμενη πυκνότητα ρεύματος μεταβλήθηκε έως και κατά τέσσερις φορές, αναδεικνύοντας την ιδιαίτερη ευαισθησία της αντίστροφης λύσης στις παραμέτρους αγωγιμότητας. Τέλος, δεν παρατηρήθηκε στατιστικά σημαντική επίδραση του φύλου στις εκτιμώμενες τιμές της αγωγιμότητας.

Στο ίδιο πλαίσιο, σχετικά με τη σημασία της ανισοτροπίας και της ετερογένειας της αγωγιμότητας του κρανίου στην ανάλυση πηγών EEG, σημαντική είναι η μελέτη των Moritz Dannhauer, Lanfer B., Wolters C.H. και Knösche T.R. (Dannhauer et al., 2011) οι οποίοι διερεύνησαν τα σφάλματα που προκύπτουν κατά την εφαρμογή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM) σε στρωματοποιημένα μοντέλα εγκεφάλου. Ο κύριος στόχος της μελέτης τους ήταν η αξιολόγηση του κατά πόσο η ανισοτροπία της ηλεκτρικής αγωγιμότητας των κρανιακών οστών μπορεί να προσεγγίσει με ακρίβεια την πραγματική πολυεπίπεδη δομή του ανθρώπινου κρανίου, λαμβάνοντας υπόψη διαφορετικές χωρικές θέσεις και κατευθύνσεις των εγκεφαλικών πηγών.

Η μελέτη εστίασε επίσης στον εντοπισμό των βέλτιστων παραμέτρων των εξεταζόμενων μοντέλων και στην εκτίμηση της ευαισθησίας της απόδοσής τους σε μεταβολές των παραμέτρων αυτών. Η προσέγγιση βασίστηκε στη λεπτομερή μοντελοποίηση της στρωματοποιημένης κρανιακής δομής με FEM. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η ενσωμάτωση των τοπικών ετερογενειών της αγωγιμότητας στην επιφάνεια του κρανίου αποτελεί κρίσιμο παράγοντα για την ακρίβεια των προσομοιώσεων.

Επιπλέον, οι συγγραφείς κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η χρήση ανισότροπων και ανομοιογενών μοντέλων απαιτεί την υιοθέτηση υψηλότερων τιμών αγωγιμότητας από την ευρέως χρησιμοποιούμενη 0.0042 S/m. Συγκεκριμένα, η αγωγιμότητα του κρανίου να θεωρείται περίπου 0.01 S/m, η οποία αντιστοιχεί σε αναλογία αγωγιμότητας δέρματος–κρανίου–εγκεφάλου της τάξεως 40:1:40. Τέλος, η μελέτη προτείνει την αναλυτική μοντελοποίηση του κρανίου λαμβάνοντας υπόψη δύο διακριτούς τύπους οστικού ιστού – τον συμπαγή και τον σπογγώδη – οι οποίοι μπορούν να αναγνωριστούν με επαρκή ακρίβεια μέσω μαγνητικής τομογραφίας (MRI), και να τους αποδοθούν διαφορετικές τιμές αγωγιμότητας. Σε περιπτώσεις όπου δεν είναι εφικτός αυτός ο διαχωρισμός, το κρανίο

προτείνεται να μοντελοποιείται ως ομογενές και ισοτροπικό, με αγωγιμότητα σαφώς υψηλότερη από την ευρέως χρησιμοποιούμενη τιμή των 0.0042 S/m. Η μέση τιμή αγωγιμότητας που προέκυψε από τις μετρήσεις των τεσσάρων μοντέλων υπολογίστηκε σε 0.0093 S/m.

Συνοψίζοντας, σε περίπτωση που το κρανίο μοντελοποιείται ως ανισότροπο και ομογενές, επιβάλλεται να χρησιμοποιηθεί μια πολύ υψηλότερη ακτινική αγωγιμότητα στο οστό του κρανίου από ό, τι συνήθως (0.0042 S/m) και ταυτόχρονα μια σημαντικά χαμηλότερη αναλογία ανάμεσα στην ακτινική και εφαπτομενική αγωγιμότητα από την τυπικά υιοθετούμενη $\frac{\sigma_t}{\sigma_r} = 10$. Στο πλαίσιο αυτό, οι προτεινόμενες τιμές για τα ανισοτροπικά μοντέλα είναι: ακτινική αγωγιμότητα 0.0093 S/m και εφαπτομενική αγωγιμότητα 0.015 S/m.

3.5. Βιβλιογραφική ανασκόπηση αναλυτικών μεθόδων για ανισοτροπικά μοντέλα

Το 1988, πρώτος ο De Munck μελέτησε την αρχική εξίσωση της κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού, χρησιμοποιώντας σφαιρικό συμμετρικό σχήμα εγκεφάλου, μοντελοποιώντας τον ανθρώπινο εγκέφαλο ως ένα μοντέλο τεσσάρων ομόκεντρων σφαιρικών αγωγών με ανισότροπες αγωγιμότητες των φλοιών. Εισηγάγε την ανισοτροπία των αγωγιμοτήτων στην προσπάθεια να καταλήξει σε ένα μαθηματικό μοντέλο για τον προσδιορισμό της πηγής του δυναμικού και επίλυσε την εξίσωση του προβλήματος:

$$\text{div}(\sigma \text{ grad } \psi) = s \quad (3.23)$$

όπου s είναι η πυκνότητα του ρεύματος πηγής ενώ σ είναι η αγωγιμότητα του ιστού, η οποία στην ανισοτροπία εκφράζεται όπως έχουμε αναλύσει στην υποενότητα 3.1 με ένα τανυστή $\bar{\sigma}$.

Στον ίδιο τανυστή ανισοτροπίας καταλήγουν και οι μελέτες (Hallez et al., 2005) και (De Munck, 1988), όπου στο πλαίσιο του σφαιρικού μοντέλου της ανθρώπινης κεφαλής, ο τανυστής των ανισοτροπικών αγωγιμοτήτων λαμβάνει τη μορφή διαγώνιας μήτρας.

Ειδικότερα, στο πλαίσιο ενός στρωματοποιημένου σφαιρικού μοντέλου της ανθρώπινης κεφαλής, ο De Munck (1988) υπέθεσε ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του οστικού ιστού, του εγκεφαλονωτιαίου υγρού και της λευκής ουσία μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός συμμετρικού και διαγώνιου τανυστή αγωγιμότητας.

Παράλληλα, υιοθέτησε την παραδοχή της ανισοτροπίας των αγωγιμοτήτων κατά μήκος δύο κύριων διευθύνσεων, της ακτινικής και της εφαπτομενικής, οι οποίες αντιστοιχούν στις φυσικές γεωμετρικές διευθύνσεις του σφαιρικού μοντέλου.

Με τη χρήση αναλυτικών μαθηματικών προσεγγίσεων, ο De Munck μελέτησε την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού που παράγεται από διπολική πηγή σε αγωγίμο μέσο. Στο πλαίσιο αυτό, το δυναμικό ψ_{dip} που οφείλεται σε ένα ηλεκτρικό δίπολο εκφράζεται ως ανάπτυγμα σε άπειρη σειρά σφαιρικών αρμονικών και δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_{dip} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n^{(2)}(r)}{\epsilon_N B_N^{(2)}} \left\{ M_r R_n^{(1)}(r_0) Y_{n00}(\theta, \varphi) + \frac{1}{4\pi} M_\theta r_0^{-1} R_n^{(1)} Y_{n10}(\theta, \varphi) \right\}, \quad (3.24)$$

όπου M_r είναι η ακτινική και M_θ η εφαπτομενική συντεταγμένη της ροπής του διπολικού διανύσματος και οι συναρτήσεις $R_n^{(1)}$ και $R_n^{(2)}$ αποτελούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \epsilon \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1)R(r_0, r) = 0 \quad (3.25)$$

η οποία προκύπτει από τη χωρική αποσύνθεση της εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες, λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή της αγωγιμότητας του μέσου. Η ροπή του διπολικού διανύσματος αναλύεται στις ακτινικές και εφαπτομενικές συνιστώσες του, γεγονός που επιτρέπει την ανάδειξη της κατευθυντικής εξάρτησης του παραγόμενου δυναμικού.

Σε μεταγενέστερη εργασία, ο De Munck, σε συνεργασία με τους Wolters και Clerc (De Munck et al., 2012), επέκτεινε την ανάλυση εισάγοντας ρητά την ανισοτροπία της ηλεκτρικής αγωγιμότητας. Στην προσέγγιση αυτή δεν υιοθετείται συγκεκριμένο γεωμετρικό μοντέλο κεφαλής (όπως σφαιρικό ή ελλειψοειδές), αλλά θεωρείται ένα άπειρο, ομογενές και ανισοτροπικό αγωγίμο μέσο, χωρίς διακριτά διαμερίσματα, όπως δέρμα, κρανίο, εγκεφαλονωτιαίο υγρό, φαιά και λευκή ουσία.

Υπό την παραδοχή της απεριόριστης έκτασης του αγωγίμου μέσου, η αγωγιμότητα $\underline{\gamma}(x)$ θεωρείται χωρικά ανεξάρτητη και περιγράφεται από έναν συμμετρικό και θετικά ορισμένο τανυστή $\underline{\gamma}(x) = \underline{\gamma}_\infty$, ο οποίος μπορεί να παρασταθεί μέσω παραγοντοποίησης ως: $\underline{\gamma}_\infty = \underline{w} \underline{w}^T$, όπου \underline{w}^T είναι ανάστροφος πίνακας της μήτρας της αγωγιμότητας

Τα σύμβολα που χρησιμοποιήθηκαν για την εργασία του Wolters και De Munck είναι διαφορετικά και μια σύγκριση αυτών μπορούμε να δούμε στον παρακάτω πίνακα 3.2.

	Αγωγιμότητα	Μήτρα αγωγιμότητας	Ηλεκ.δυναμικό	Ροπή
De Munch	σ	$\bar{\sigma}$	ψ_{dip}	M
Wolters	$\underline{\gamma}$	\underline{w}	ψ_{anis}^{dip}	m_0

Πίνακας 3.2 Σύμβολισμός αγωγιμοτήτων Wolter και De Munch

Το $\underline{\gamma}$ είναι ένας τανυστής που αναφέρεται την αγωγιμότητα και που αντιπροσωπεύει τοπική ανισοτροπία. Ο τανυστής $\underline{\gamma}$ είναι ένας σημαντικός παράγοντας που βοηθάει να υιοθετηθεί ένα πιο πραγματικό μοντέλο εγκεφάλου με διαμερίσματα διαφορετικής αγωγιμότητας (δέρμα, κρανίο, εγκεφαλικό υγρό, φαιά ουσία και λευκή ουσία). Το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\nabla \cdot (\underline{\gamma} \cdot \nabla \psi) = \nabla \cdot \mathbf{J}_i \quad (3.26)$$

ενώ το μαγνητικό δυναμικό περιγράφεται από:

$$\nabla \times \left(\underline{\gamma}^{inv} \left(\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \right) = \nabla \times (\underline{\gamma}^{inv} \cdot \mathbf{J}_i) \quad (3.27)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η ανθρώπινη κεφαλή θεωρείται ηλεκτρικά μονωμένη ως προς το εξωτερικό περιβάλλον, επιβάλλεται η συνθήκη διαπερατότητας μηδενικής καθετης ροής ρεύματος στην εξωτερική επιφάνεια:

$$\mathbf{n}(x) \cdot \underline{\gamma} \cdot \nabla \psi(x) = 0 \quad \text{για } x \in S_{head} \quad (3.28)$$

Όπου $\mathbf{n}(x)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια της κεφαλής. Επιπλέον, στις διεπιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών απαιτείται η συνέχεια του ηλεκτρικού δυναμικού και της καθετης συνιστώσας της πυκνότητας ρεύματος:

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \psi_2(x) \\ \mathbf{n}(x) \cdot \underline{\gamma}_1 \cdot \nabla \psi_1(x) = \mathbf{n}(x) \cdot \underline{\gamma}_2 \cdot \nabla \psi_2(x) \end{cases} \quad (3.29)$$

Στο πλαίσιο του άπειρου, ομογενούς, ανισοτροπικού αγωγού, το ηλεκτρικό δυναμικό που παράγεται από διπολική πηγή λαμβάνει την ακόλουθη αναλυτική μορφή:

$$\psi_{anis}^{dip}(x) = \frac{1}{4\pi \sqrt{\det(\underline{\gamma}_\infty)}} \frac{m_0 \underline{\gamma}_\infty^{inv}(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0) \underline{\gamma}_\infty^{inv}(x - x_0)}} \quad (3.30)$$

Ο De Munch καταλήγει ότι η αγωγιμότητα του εγκεφαλονωτιαίου υγρού, καθώς και η εγγενής ανισοτροπία των εγκεφαλικών ιστών, αποτελούν κρίσιμους παράγοντες στον

εντοπισμό των νευρωνικών πηγών και ότι η παράλειψή τους από τα μοντέλα μπορεί να οδηγήσει σε συστηματικά σφάλματα στις λύσεις των αντίστροφων προβλημάτων.

Κεφάλαιο 4^ο

4. Ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό μοντέλο εγκεφάλου για την εύρεση των δυναμικών ΗΕΓ

4.1. Το Ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό μοντέλο

Η μαθηματική μοντελοποίηση των δυναμικών ΗΕΓ έχει στηριχθεί διαχρονικά σε απλουστευμένες γεωμετρικές προσεγγίσεις της ανθρωπίνης κεφαλής, με κυρίαρχη περίπτωση τα ομόκεντρα σφαιρικά μοντέλα. Στα μοντέλα αυτά οι επιμέρους στοιβάδες της κεφαλής (εγκέφαλος, εγκεφαλονωτιαίο υγρό, κρανίο και δέρμα) προσεγγίζονται ως ομογενή και ισότροπα αγώγιμα μέσα. Η συγκεκριμένη παραδοχή προσφέρει αναλυτικές εκφράσεις, προσδίδοντας υπολογιστική αποδοτικότητα και ερμηνευτική διαύγεια (De Munck, 1988; Azizollahi et al., 2018; Darbas, 2018; Papargiri et al., 2021). Ωστόσο, αγνοούν τις ανισοτροπικές ιδιότητες συγκεκριμένων ιστών, ιδίως του κρανίου και της λευκής ουσίας, γεγονός που επηρεάζει σημαντικά την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου και μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα εντοπισμού άνω των 15 mm. Η αδυναμία των ισότροπικών μοντέλων να αποδώσουν ρεαλιστικά τη φυσιολογία καθιστά επιτακτική την ανάγκη για ακριβέστερες προσεγγίσεις.

Για την αντιμετώπιση των περιορισμών αυτών έχουν αναπτυχθεί προηγμένες υπολογιστικές τεχνικές, όπως η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και οι υβριδικές προσεγγίσεις BEM-FEM, οι οποίες επιτρέπουν την ενσωμάτωση ρεαλιστικών ανατομικών μοντέλων και ανισοτροπικών αγωγιμοτήτων, προερχόμενων από απεικονιστικά δεδομένα διάχυσης (diffusion-weighted imaging) (Wolters et al., 2006 ; Erdbrügger et al., 2024). Παρότι οι αριθμητικές αυτές μέθοδοι παρέχουν βελτιωμένη ακρίβεια, συνοδεύονται από αυξημένη υπολογιστική επιβάρυνση και συχνά στερούνται της αναλυτικής διαύγειας και γενικευσιμότητας των σφαιρικών μοντέλων, τα οποία παραμένουν πολύτιμα για θεωρητικές αναλύσεις και επαλήθευση αλγορίθμων.

Στην παρούσα μελέτη, εισάγεται ένα αναλυτικό μαθηματικό πλαίσιο για την επίλυση του προβλήματος προώθησης ΗΕΓ με χρήση ενός τριστρωματικού σφαιρικού μοντέλου που ενσωματώνει τις ανισοτροπικές αγωγιμότητες. Το μοντέλο περιλαμβάνει ομόκεντρες στοιβάδες που αναπαριστούν το εγκεφαλικό παρέγχυμα, το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (CSF), το κρανίο και το δέρμα. Στο πλαίσιο αυτό, προκύπτει αναλυτική λύση για το ηλεκτρικό

δυναμικό υπό τη μορφή ανάπτυξης σε σφαιρικές αρμονικές, για οποιονδήποτε διπολικό ρεύμα ανεξαρτήτως προσανατολισμού και θέσης. Η διατύπωση αυτή καθιστά εφικτή την άμεση σύγκριση μεταξύ των υποθέσεων ανισοτροπίας και ισοτροπίας, προσφέροντας σαφή ποσοτικοποίηση των επιπτώσεων της αγωγιμότητας στην ακρίβεια των μοντέλων ΗΕΓ.

Σύμφωνα με την βιβλιογραφία (Darbas, 2018) οι μέθοδοι που ασχολούνται με την επίλυση του ευθέως προβλήματος ΗΕΓ διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: τις αριθμητικές και τις αναλυτικές μεθόδους. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν η μέθοδος οριακών στοιχείων (BEM), η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FDM). Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει μαθηματικές αναλυτικές προσεγγίσεις για την επίλυση του ευθέως προβλήματος και αποτελεί το βασικό αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

4.2. Μαθηματική τοποθέτηση του προβλήματος

Ακολουθώντας την ανατομική διάρθρωση του εγκεφάλου προτυποποιούμε την ανθρώπινη κεφαλή ως μία σφαίρα αποτελούμενη από τέσσερα χωρία. Ξεκινώντας από το εσωτερικό προς το εξωτερικό, θεωρούμε τον εγκεφαλικό ιστό (cerebrum-white and gray matter) με χωρίο Ω_c , το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (Cerebrospinal fluid- CSF) με χωρίο Ω_f , τα κρανιακά οστά με χωρίο Ω_b και το δέρμα με χωρίο Ω_s . Το κάθε χωρίο αποτελείται από διαφορετικούς βιολογικούς ιστούς οι οποίοι χαρακτηρίζονται από διαφορετικές ηλεκτρικές αγωγιμότητες. Αντίστοιχα, στις τέσσερις αυτές περιοχές των βιολογικών ιστών αντιστοιχούν οι ηλεκτρικές αγωγιμότητες $\sigma_c, \sigma_f, \sigma_b, \sigma_s$. Η ηλεκτρική αγωγιμότητα του εξωτερικού χώρου θεωρείται μηδενική, δηλαδή $\sigma_e = 0$. Η ανθρώπινη κεφαλή προσεγγίζεται γεωμετρικά ως μια σφαίρα με ομόκεντρες σφαιρικές διεπιφάνειες ακτίνων $r_c < r_f < r_b < r_s$ όπως απεικονίζεται στο σχήμα 4.1.

Οι ακτίνες των επιμέρους ιστών, σύμφωνα με ενδεικτικές τιμές της βιβλιογραφίας, έχουν επιλεγεί από διάφορους ερευνητές ως εξής:

(Garnero et al., 1998) τριχωτό κεφαλής $r_s = 10$ (skin), για το κρανίο $r_b = 9,2 \text{ cm}$ (skull) και $r_c = 8,7 \text{ cm}$ για τον εγκέφαλο (Cerebrum)

(Hallez et al., 2007) $r_s = 9,2 \text{ cm}$, $r_b = 8,5 \text{ cm}$, $r_f = 8,2 \text{ cm}$ και $r_c = 8 \text{ cm}$

(Ferree et al., 2001) $r_s = 9,2 \text{ cm}$, $r_b = 8,7 \text{ cm}$, $r_f = 8,2 \text{ cm}$ και $r_c = 8 \text{ cm}$

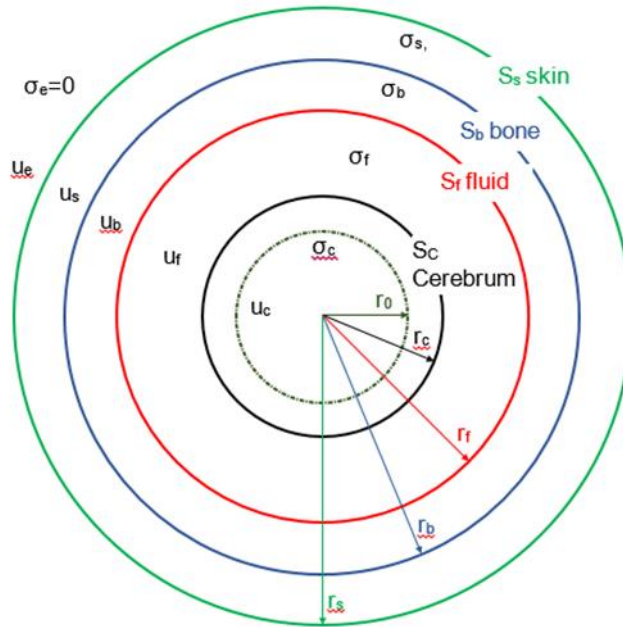
(Petrov & Sridhar, 2013) $r_s = 10,2 \text{ cm}$, $r_b = 9,7 \text{ cm}$, $r_f = 9,2 \text{ cm}$ και $r_c = 9,1 \text{ cm}$

(Nüßing, 2018; Piastra, 2019) $r_s = 9,2 \text{ cm}$, $r_b = 8,6 \text{ cm}$, $r_f = 8,0 \text{ cm}$ και $r_c = 7,8 \text{ cm}$

Οι επιφάνειες που διαχωρίζουν τους αγωγίμους χώρους μεταξύ τους είναι σφαιρικές και περιγράφονται από την εξίσωση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r_i^2, \quad i = c, f, b, s \quad (4.1)$$

Όπου r_i είναι η ακτίνα της αντίστοιχης σφαιρικής διεπιφάνειας.



Σχήμα 4.1 Σφαιρικός αγωγός με τρεις φλοιούς

Το πρόβλημα που μελετάμε είναι ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού $u(\mathbf{r})$ σε κάθε χωρίο του μοντέλου, για γνωστή θέση και ροπή της διπολικής πηγής. Για το σκοπό αυτό ξεκινούμε από τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει το ηλεκτρικό δυναμικό $u(\mathbf{r})$ σε αγωγίμο σφαιρικό αγωγό με ανισότροπη αγωγιμότητα. Η εξίσωση αυτή είναι η γενικευμένη εξίσωση Poisson και γράφεται με τη μορφή

$$\text{div}(\bar{\sigma} \cdot \text{grad} u) = s \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \nabla \cdot [\bar{\sigma} \cdot \nabla u] = s \quad (4.2)$$

όπου s είναι η πυκνότητα του ρεύματος πηγής.

Σε σφαιρικό πρότυπο, όταν η πηγή προσεγγίζεται ως σημειακό ηλεκτρικό δίπολο στη θέση $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ ο όρος πηγής εκφράζεται μέσω της κατανομής Dirac. Στη γενική του μορφή του γράφεται ως

$$s = \frac{M}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (4.3)$$

όπου M είναι η ένταση της μονοπολικής πηγής (βαθμωτό μέγεθος).

Για την επίλυση της (4.2) απαιτείται αρχικά ο υπολογισμός του διανυσματικού πεδίου $\bar{\sigma} \cdot \nabla u$ και στη συνέχεια η λήψη της απόκλισης του στο επιλεγμένο συστημα συντεταγμένων.

Ο τανυστής αγωγιμότητας $\bar{\sigma}$ αποδίδεται, σύμφωνα με την σχέση (3.7), σε καρτεσιανή μορφή. Εφόσον είναι συμμετρικός ισχύει $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και συνεπώς γράφεται:

$$\bar{\sigma} = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ji} \hat{x}_i \hat{x}_j \quad (4.4)$$

Επίσης, η βαθμίδα (gradient) σε γενικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , με μετρικούς συντελεστές h_1, h_2, h_3 γράφεται ως:

$$\nabla u = \sum_{\ell=1}^3 \frac{\hat{\xi}_\ell}{h_\ell} \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \quad (4.5)$$

Επομένως, η δράση του τανυστή αγωγιμότητας επί της βαθμίδας δίνεται:

$$\bar{\sigma} \cdot \nabla u = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j \cdot \sum_{\ell=1}^3 \frac{\hat{\xi}_\ell}{h_\ell} \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} = \sum_{\ell,i,j=1}^3 \left[\frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{x}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \right] \hat{x}_i \quad (4.6)$$

Θέτοντας για συντομία

$$A_i = \sum_{\ell,j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{x}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \quad (4.7)$$

λαμβάνουμε τη μορφή

$$\bar{\sigma} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{x}_i \quad (4.8)$$

Στη συνέχεια, προβάλλουμε το αποτέλεσμα στην καμπυλόγραμμη βάση πολλαπλασιάζοντας το δεξί μέλος της (4.8) από τα δεξιά με το ταυτοτικό δυαδικό (4.9):

$$\bar{\mathbb{I}} = \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 \hat{\xi}_2 + \hat{\xi}_3 \hat{\xi}_3 = \sum_{k=1}^3 \hat{\xi}_k \hat{\xi}_k, \quad (4.9)$$

οπότε προκύπτει:

$$\bar{\sigma} \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{x}_i \cdot \sum_{k=1}^3 \hat{\xi}_k \hat{\xi}_k = \sum_{i,k=1}^3 A_i (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_k) \hat{\xi}_k. \quad (4.10)$$

Η σχέση (4.10) αποτελεί την καμπυλόγραμμη μορφή του διανυσματικού πεδίου $\bar{\sigma} \cdot \nabla u$ με συνιστώσες τις:

$$\sum_{i=1}^3 A_i (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.11)$$

ή λόγω της (4.7) οι συνιστώσες είναι οι παρακάτω:

$$\sum_{\ell, i, j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{x}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_k), \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.12)$$

Άρα η (4.10) μας δίνει:

$$\bar{\sigma} \cdot \nabla u = \sum_{i, k=1}^3 A_i (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_k) \hat{\xi}_k = \sum_{\ell, i, j, 1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{x}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_k) \hat{\xi}_k, \quad (4.13)$$

όπου \hat{x}_i, \hat{x}_j τα μοναδιαία καρτεσιανά διανύσματα και $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3$ τα μοναδιαία διανύσματα του καμπυλόγραμμου ορθογώνιου συστήματος.

Για την απόκλιση (div) διανυσματικού πεδίου μιας συνάρτησης f σε ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα ισχύει:

$$\mathbf{f} = f_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + f_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + f_{\xi_3} \hat{\xi}_3 \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\hat{\xi}_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \hat{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \hat{\xi}_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \right) \cdot (f_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + f_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + f_{\xi_3} \hat{\xi}_3) = \sum_{k=1}^3 \hat{\xi}_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} \cdot \sum_{k=1}^3 \hat{\xi}_k f_{\xi_k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (f_{\xi_1} h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_1 f_{\xi_2} h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (h_1 h_2 f_{\xi_3}) \right], \quad (4.15)$$

όπου $h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \right|$, $h_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \right|$, $h_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} \right|$.

Εισάγοντας τις συνιστώσες (4.12) στον ορισμό (4.15) προκύπτει:

$$\nabla \cdot [\bar{\sigma} \cdot \nabla u] = \nabla \cdot \left[\sum_{\ell, i, j, \kappa=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{x}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_\kappa) \hat{\xi}_\kappa \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} h_2 h_3 \sum_{\ell, i, j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} \sigma_{ij} (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_1} (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\xi}_1) \right. \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \xi_2} h_1 h_3 \sum_{\ell, i, j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_2} (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\xi}_2) \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \xi_3} h_1 h_2 \sum_{\ell, i, j=1}^3 \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_3} (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\xi}_3) \right]
\end{aligned}$$

Άρα καταλήγουμε στην

$$\nabla \cdot [\bar{\sigma} \cdot \nabla u] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i, j, \ell, k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k} (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\xi}_k) \frac{\sigma_{ij}}{h_\ell} (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \right] \quad (4.16)$$

Στην περίπτωσή μας η βάση $(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3)$ είναι ορθογώνια βάση διανυσμάτων του \mathbb{R}^3 , όπου ο πίνακας $\bar{\sigma}$ είναι διαγώνιος, δηλαδή:

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \sigma_k \hat{\xi}_k \hat{\xi}_k. \quad (4.17)$$

Από τη (4.13) η ποσότητα που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\sum_{i, j=1}^3 (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\xi}_k) \sigma_{ij} (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \quad (4.18)$$

και γράφεται λόγω της (4.17):

$$\sum_{i, j=1}^3 \sigma_{ij} \hat{\mathbf{x}}_i \hat{\mathbf{x}}_j : \hat{\xi}_k \hat{\xi}_\ell = \bar{\sigma} : \hat{\xi}_k \hat{\xi}_\ell$$

Αλλά

$$\bar{\sigma} = \sum_{s=1}^3 \sigma_s \hat{\xi}_s \hat{\xi}_s,$$

οπότε η (4.18) γίνεται

$$\begin{aligned}
\sum_{i, j=1}^3 (\hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\xi}_k) \sigma_{ij} (\hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) &= \sum_{s=1}^3 \sigma_s \hat{\xi}_s \hat{\xi}_s : \hat{\xi}_k \hat{\xi}_\ell = \sum_{s=1}^3 \sigma_s (\hat{\xi}_s \cdot \hat{\xi}_k) (\hat{\xi}_s \cdot \hat{\xi}_\ell) \\
&= \sum_{s=1}^3 \sigma_s \delta_{sk} \delta_{s\ell}.
\end{aligned}$$

Άρα, αφού η βάση $(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3)$ είναι ορθογώνια ισχύει:

$$\hat{\xi}_i \cdot \hat{\xi}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

και η σχέση (4.16) γράφεται

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\bar{\sigma} \cdot \nabla u] &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i,j,\ell,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k h_\ell} \left(\sum_{ij=1}^3 (\hat{x}_i \cdot \hat{\xi}_k) \sigma_{ij} (\hat{x}_j \cdot \hat{\xi}_\ell) \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i,j,\ell,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k h_\ell} \left(\sum_{s=1}^3 \sigma_s \underbrace{\delta_{sk} \delta_{s\ell}}_{=1} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell} \right]\end{aligned}$$

Λόγω ορθοκανονικότητας, μόνο οι όροι με ίδιους δείκτες συνεισφέρουν δηλαδή αν $k = \ell = s$ ισχύει $\delta_{sk} = 1, \delta_{s\ell} = 1$.

Σε καμπυλόγραμμο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση του ηλεκτρικού δυναμικού:

$$\nabla \cdot [\bar{\sigma} \cdot \nabla u] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_k^2} \sigma_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} \right) = s \quad (4.19)$$

4.3. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό πρότυπο

Στο παρόν τμήμα της εργασίας, μελετάται το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σφαιρικό μοντέλο εγκεφάλου. Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια χρησιμοποιούνται σφαιρικές συντεταγμένες. Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (r, θ, φ) οι μετρικοί συντελεστές και τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα βάσης είναι:

$$\begin{aligned}h_1 = h_r &= 1 & h_2 = h_\theta &= r & h_3 = h_\varphi &= r \sin\theta \\ \hat{\xi}_1 &= \hat{r} & \hat{\xi}_2 &= \hat{\theta} & \hat{\xi}_3 &= \hat{\varphi}\end{aligned} \quad (4.20)$$

Επιπλέον, θεωρούμε ότι το μέσο παρουσιάζει ανισοτροπία ως προς την ακτινική διεύθυνση r . Ο τανυστής $\bar{\sigma}$ λαμβάνεται συμμετρικός και διαγώνιος σύμφωνα με τον de Munck (1988). Επομένως

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ ή ισοδύναμα } \bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]_{i,j=1}^3 = \begin{cases} \sigma_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (4.21)$$

Με τις παραπάνω παραδοχές επιλύουμε τη σχέση (4.19). Αναπτύσσοντας το άθροισμα για το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2} \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2^2} \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \\ + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_3^2} \sigma_3 \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) = s \end{aligned}$$

Οι αγωγιμότητες είναι συναρτήσεις του ξ_1 , δηλαδή της ακτινικής σφαιρικής συντεταγμένης. Θεωρούμε ότι $\sigma_1 = \varepsilon(\xi_1)$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \eta(\xi_1)$ και προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{1} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r^2} \eta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin \theta} \eta \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = s \end{aligned}$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ανισότροπη εξίσωση Poisson:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{r^2}{\eta} s \quad (4.22)$$

Στη συνέχεια εξισώνουμε τις σχέσεις (4.3) και (4.22) και έχουμε για το ηλεκτρικό δυναμικό την εξίσωση.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ = \frac{M}{\eta \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Θεωρώντας κατανομή ηλεκτρικού δυναμικού $\psi(\mathbf{r})$ που αντιστοιχεί σε μονοπολική πηγή, υποθέτουμε την έκφραση:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M R_n(r_0, r) \bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \quad (4.24)$$

Με τη συνάρτηση \bar{Y}_{nma} εκπροσωπούνται οι κανονικοποιημένες πραγματικές επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές και $R_n(r_0, r)$ οι αντίστοιχες ακτινικές συναρτήσεις.

Η (4.22) μπορεί να γραφτεί με χρήση του τελεστή Beltrami, επί της μοναδιαίας σφαίρας:

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \underbrace{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}}_{B\psi} = \frac{r^2}{\eta} s$$

όπου ο τελεστής Beltrami $\mathcal{B} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ εξαρτάται μόνο από τις γωνιακές συντεταγμένες (θ, φ)

Οι σφαιρικές αρμονικές Y_n^m , με $n = 0, 1 \dots$ και $m = 0, 1 \dots n$, αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή \mathcal{B} , με ιδιοτιμές $-n(n+1)$. Δηλαδή:

$$\mathcal{B}Y_n^m(\theta, \varphi) = -n(n+1)Y_n^m(\theta, \varphi)$$

Θεωρώντας λύση ψ στη μορφή (4.24) η (4.23) μετατρέπεται στην παρακάτω εξίσωση

$$\sum_{nma}^{\infty n1} M \left[\bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial r} \right) + R_n \bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \mathcal{B} \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \right] = \frac{r^2}{\eta} s \quad (4.25)$$

$$\text{ή} \quad \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \varepsilon \frac{\partial R_n}{\partial r} \right) - n(n+1)R_n \right] = \frac{r^2}{\eta} s$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{nma}^{\infty n1} M R_n(r_0, r) \bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \right) \right] \\ & - \sum_{nma}^{\infty n1} n(n+1) M R_n(r_0, r) \bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \\ & = \frac{M}{\eta \sin\theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ή} \quad & \sum_{nma}^{\infty n1} \bar{Y}_{nma}(\theta_0, \varphi_0) \bar{Y}_{nma}(\theta, \varphi) \left[\frac{1}{\eta} \frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dR_n(r_0, r)}{dr} \right) - n(n+1)R_n(r_0, r) \right] \\ & = \frac{1}{\eta \sin\theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Με τις σφαιρικές αρμονικές (για $\alpha=e$ έχουμε άρτιες και για $\alpha=o$ έχουμε τις περιττές) η σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}) + \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}})] [R_n^*] \\ & = \frac{1}{\eta \sin\theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου

$$R_n^* = \frac{1}{\eta} \frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dR_n(r_0, r)}{dr} \right) - n(n+1)R_n(r_0, r) \quad (4.28)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας την (4.27) με $\bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}})$ και ολοκληρώνοντας επι της μοναδιαίας σφαίρας S^2 προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_{S^2} [\bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}) + \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}})] \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}) ds [R_n^*] \\ & = \int_{S^2} \frac{1}{\eta \sin\theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}) ds \quad \text{ή} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_{S^2} [\bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}) \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}) + \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}}) \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}})] ds [R_n^*] \\ & = \frac{\delta(r - r_0)}{\eta} \int_{S^2} \frac{1}{\sin\theta} \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}) ds. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονικότητα των σφαιρικών αρμονικών, καταλήγουμε στη σχέση.

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) R_n^* + 0 &= \frac{\delta(r - r_0)}{\eta} \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \\ R_n^* - \frac{\delta(r - r_0)}{\eta} &= 0 \end{aligned}$$

Άρα από την (4.28) έχουμε:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dR_n}{dr} \right) - n(n+1)R_n - \frac{\delta(r - r_0)}{\eta} = 0$$

Καταλήγουμε στην ΔΕ που είναι μη ομογενής και αναζητούμε την λύση της ($R_n(r_0, r)$)

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dR_n}{dr} \right) - n(n+1)\eta R_n = \delta(r - r_0) \quad (4.29)$$

Η αντίστοιχη ομογενής ΣΔΕ, είναι τύπου Euler:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dR_n}{dr} \right) - n(n+1)\eta R_n = 0 \Leftrightarrow r^2 R_n'' + 2r R_n' - n(n+1) \frac{\eta}{\varepsilon} R_n = 0 \quad (4.30)$$

Δέχεται λύσεις της μορφής $R_n(r) = r^s$ όπου s οι ρίζες της δείκτριας εξίσωσης

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 4n(n+1) \frac{\eta}{\varepsilon}}}{2}$$

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4n(n+1) \frac{\eta}{\varepsilon}} \right) \quad (4.31)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4n(n+1) \frac{\eta}{\varepsilon}} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4n(n+1) \frac{\eta}{\varepsilon}} \right)$$

$$= -s_1 - 1$$

Οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ (4.30) δίνονται από

$$y_1(r) = r^{s_1} \quad \text{και} \quad y_2(r) = r^{s_2} = r^{-s_1-1}$$

και ο γραμμικός συνδυασμός τους:

$$R_n(r) = A_n r^{s_1} + B_n r^{-s_1-1} \quad (4.32)$$

είναι η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (4.30).

Καθώς $s_1 = s_1(\varepsilon, \eta)$ και τα ε, η χαρακτηρίζουν τον ιστό στον οποίο αναφέρεται η λύση του προβλήματος, στη συνέχεια θα συμβολίζουμε το $s_1 = s_1(\varepsilon, \eta) := s_j(\varepsilon_j, \eta_j)$, οπότε και $s_2 = -s_1 - 1 := -s_j(\varepsilon_j, \eta_j) - 1$, όπου $j = c, f, b, s$.

Στο εσωτερικό χωρίο με αγωγιμότητα ε_c που περιέχει την πηγή έχουμε:

$$r^2 \varepsilon_c R_{c,n}'' + 2r \varepsilon_c R_{c,n}' - n(n+1) \eta R_{c,n} = \delta(r - r_0) \quad (4.33)$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} r^2 \varepsilon_c R_{c,n}^{(1)''} + 2r \varepsilon_c R_{c,n}^{(1)'} - n(n+1) \eta R_{c,n}^{(1)} = 0 & , \quad 0 < r < r_0 \\ r^2 \varepsilon_c R_{c,n}^{(2)''} + 2r \varepsilon_c R_{c,n}^{(2)'} - n(n+1) \eta R_{c,n}^{(2)} = 0 & , \quad r > r_0 \end{cases}$$

από την (4.32) υποθέτουμε ότι:

$$R_{c,n}(\mathbf{r}) = \begin{cases} R_{c,n}^{(1)}(r) = A_{c,n}^{(1)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(1)} r^{-(s_c+1)}, & 0 < r < r_0 \\ R_{c,n}^{(2)}(r) = A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)}, & r_0 < r < r_c \end{cases} \quad (4.34)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή της πηγής Ω_c είναι:

$$\psi_c(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) R_{c,n}(r) \quad \text{ή}$$

$$\psi_c(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{cases} A_{c,n}^{(1)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(1)} r^{-(s_c+1)}, & 0 < r < r_0 \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)}, & r_0 < r < r_c \end{cases} \quad (4.35)$$

Κατ' αντιστοιχία το ηλεκτρικό δυναμικό στα χωρία των φλοιών $\Omega_f, \Omega_b, \Omega_s$ της κεφαλής

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} r^{s_f} + B_{f,n} r^{-(s_f+1)}], \quad \mathbf{r} \in \Omega_f \quad (4.36)$$

$$\psi_b(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{b,n} r^{s_b} + B_{b,n} r^{-(s_b+1)}], \quad \mathbf{r} \in \Omega_b \quad (4.37)$$

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{s,n} r^{s_s} + B_{s,n} r^{-(s_s+1)}], \quad \mathbf{r} \in \Omega_s \quad (4.38)$$

Για τον εξωτερικό χώρο όπου η αγωγιμότητα είναι μηδέν ($\varepsilon_{ext} = \eta_{ext} = 0$) το ηλεκτρικό δυναμικό έχει τη μορφή.

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [\underbrace{A_{e,n}}_{=0} r^{s_e} + B_{e,n} r^{-(s_e+1)}], \quad \mathbf{r} \in \Omega_e$$

Επιβάλλεται $A_{e,n} = 0$, για να έχω ομαλή λύση σε όλο το Ω (εάν δεν ισχύει $A_{e,n} = 0$ τότε για $r \rightarrow \infty$ απειρίζεται η λύση). Καταλύγουμε:

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) B_{e,n} r^{-(s_e+1)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_e. \quad (4.39)$$

4.4. Οι συνθήκες διαπερατότητας του προβλήματος

Για μια σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση $r = r_0$, η ακτινική συνιστώσα $R_n(r)$ του δυναμικού πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες. Ειδικότερα, η συνάρτηση $R_n(r)$ πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο $r = r_0$, δηλαδή:

$$\lim_{r \rightarrow r_0^-} R_n(r) = \lim_{r \rightarrow r_0^+} R_n(r) \quad (4.40)$$

Ωστόσο, η ακτινική παράγωγος της $R_n(r)$ παρουσιάζει ασυνέχεια, η οποία καθορίζεται από την ένταση της πηγής. Για την εξαγωγή της συνθήκης ασυνέχειας, ξεκινώντας από την (4.29) ολοκληρώνουμε την εξίσωση σε ένα μικρό διάστημα γύρω από το σημείο της πηγής r_0 , δηλαδή στο $[r_0 - \theta, r_0 + \theta]$, $\theta > 0$, και λαμβάνουμε το όριο για $\theta \rightarrow 0^+$ λαμβάνοντας υπόψη ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης Dirac ισούτε με τη μονάδα όταν το διάστημα ολοκλήρωσης περιέχει το r_0 . Από τη διαδικασία αυτή προκύπτει ότι η ακτινική παράγωγος παρουσιάζει ασυνέχεια στη θέση της πηγής. Αναλυτικά έχουμε:

$$\int_{r_0-\theta}^{r_0+\theta} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \varepsilon \frac{dR_n}{dr} \right) - n(n+1)\eta R_n \right] dr = \int_{r_0-\theta}^{r_0+\theta} \delta(r - r_0) dr \quad (4.41)$$

επειδή

$$\int_{r_0-\theta}^{r_0+\theta} \delta(r - r_0) dr = 1$$

και

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{r_0-\theta}^{r_0+\theta} n(n+1)\eta R_n dr = 0,$$

από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει η συνθήκη ασυνέχειας

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} \left[r^2 \varepsilon \frac{d R_n(r)}{dr} \right] - \lim_{r \rightarrow r_0^-} \left[r^2 \varepsilon \frac{d R_n(r)}{dr} \right] = 1$$

$$\text{ή} \quad \lim_{r \rightarrow r_0^+} \left[\frac{d R_n(r)}{dr} \right] - \lim_{r \rightarrow r_0^-} \left[\frac{d R_n(r)}{dr} \right] = \frac{1}{r_0^2 \varepsilon}. \quad (4.42)$$

Επιπλέον, η συνθήκη συνέχειας του δυναμικού $\psi(\mathbf{r})$, στις διεπιφάνειες S_c, S_f, S_b, S_s απαιτεί:

$$\psi_c(\mathbf{r}_c) = \psi_f(\mathbf{r}_c), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_c \in S_c \quad (4.43)$$

$$\psi_f(\mathbf{r}_f) = \psi_b(\mathbf{r}_f), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_f \in S_f \quad (4.44)$$

$$\psi_b(\mathbf{r}_b) = \psi_s(\mathbf{r}_b), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_b \in S_b \quad (4.45)$$

$$\psi_s(\mathbf{r}_s) = \psi_e(\mathbf{r}_s), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s \in S_s \quad (4.46)$$

Επίσης, η συνάρτηση $\psi(\mathbf{r})$, πρέπει να έχει πεπερασμένη τιμή στην αρχή των αξόνων άρα το όριο $\lim_{r \rightarrow 0} \psi(\mathbf{r})$ πρέπει να μην απειρίζεται.

Ακόμη, η κάθετη συνιστώσα της πυκνότητας του ρεύματος σε κάθε διεπιφάνεια S_j παίρνει την μορφή $\hat{\mathbf{r}} \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \nabla \psi)$ ενώ η αγωγιμότητα σ_j έχει δύο κατευθύνσεις, την ακτινική αγωγιμότητα ε_j και την εφαπτομενική η_j , επομένως γράφεται

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_j \cdot \nabla \psi] &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[\sum_{\kappa=1}^3 \sigma_{\kappa} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\kappa} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{\kappa} \cdot \nabla \psi \right] = \\ &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[[\varepsilon_j \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \eta_j (\hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \hat{\boldsymbol{\phi}})] \cdot \nabla \psi \right] = \\ &= \underbrace{\left[\hat{\mathbf{r}} \cdot \varepsilon_j \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} \right]}_{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1} \cdot \nabla \psi + \underbrace{\left[\hat{\mathbf{r}} \cdot \eta_j (\hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \hat{\boldsymbol{\phi}}) \right]}_{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = 0} \cdot \nabla \psi = \varepsilon_j \underbrace{\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla \psi}_{\frac{\partial}{\partial r}} = \varepsilon_j \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot [\bar{\boldsymbol{\sigma}}_j \cdot \nabla \psi_j] = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[[\varepsilon_j \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}} + \eta_j (\hat{\boldsymbol{\theta}} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \hat{\boldsymbol{\phi}})] \cdot \nabla \psi_j \right] = \varepsilon_j \frac{\partial \psi_j}{\partial r} \quad (4.47)$$

Επομένως, η συνθήκη συνέχειας της κάθετης συνιστώσας της πυκνότητας του ρεύματος στις διεπιφάνειες S_c, S_f, S_b, S_s απαιτεί :

$$\varepsilon_c \frac{\partial \psi_c(\mathbf{r}_c)}{\partial r} = \varepsilon_f \frac{\partial \psi_f(\mathbf{r}_c)}{\partial r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_c \in S_c \quad (4.48)$$

$$\varepsilon_f \frac{\partial \psi_f(\mathbf{r}_f)}{\partial r} = \varepsilon_b \frac{\partial \psi_b(\mathbf{r}_f)}{\partial r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_f \in S_f \quad (4.49)$$

$$\varepsilon_b \frac{\partial \psi_b(\mathbf{r}_b)}{\partial r} = \varepsilon_s \frac{\partial \psi_s(\mathbf{r}_b)}{\partial r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_b \in S_b \quad (4.50)$$

$$\varepsilon_s \frac{\partial \psi_s(\mathbf{r}_s)}{\partial r} = \varepsilon_e \frac{\partial \psi_e(\mathbf{r}_s)}{\partial r} = 0, (\varepsilon_e = 0), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_s \in S_s \quad (4.51)$$

4.5. Εφαρμογή συνθηκών διαπερατότητας (ή μεταβατικότητας)

Στην υποενότητα αυτή υπολογίζουμε τους συντελεστές του αναπτυγματος του ηλεκτρικού δυναμικού (4.35)-(4.39), με την βοήθεια των συνθηκών διαπερατότητας.

Το ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή Ω_c που περιέχει την πηγή δίνεται από την μορφή

$$\psi_c(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{cases} A_{c,n}^{(1)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(1)} r^{-(s_c+1)}, & 0 < r < r_0 \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)}, & r_0 < r < r_c \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\mu \varepsilon R_{c,n}(\mathbf{r}) = \begin{cases} A_{c,n}^{(1)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(1)} r^{-(s_c+1)}, & 0 < r < r_0 \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)}, & r_0 < r < r_c \end{cases} \quad (4.53)$$

1. Για να ορίζεται η ακτινική συνάρτηση $R_{c,n}(r)$ στο σημείο $r = 0$, πρέπει να παραμένει πεπερασμένη καθώς $r \rightarrow 0$. Δεδομένου ότι ο όρος $B_{c,n}^{(1)} r^{-(s_c+1)}$ αποκλίνει στο άπειρο επιβάλλεται ο μηδενισμός του αντίστοιχου συντελεστή $B_{c,n}^{(1)} = 0$, επίσης
2. $\lim_{r \rightarrow r_0^-} R_{c,n}^{(1)} = \lim_{r \rightarrow r_0^+} R_{c,n}^{(2)}$, άρα $\lim_{r \rightarrow r_0^-} A_{c,n}^{(1)} r^{s_c} = \lim_{r \rightarrow r_0^+} [A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)}]$ ή

$$A_{c,n}^{(1)} r_0^{s_c} = A_{c,n}^{(2)} r_0^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r_0^{-(s_c+1)} \quad \text{ή}$$

$$A_{c,n}^{(1)} = A_{c,n}^{(2)} + B_{c,n}^{(2)} \frac{r_0^{-(s_c+1)}}{r_0^{s_c}} \quad \text{ή}$$

$$\text{άρα} \quad A_{c,n}^{(1)} = A_{c,n}^{(2)} + B_{c,n}^{(2)} r_0^{-(2s_c+1)} \quad (4.54)$$

$$3. \lim_{r \rightarrow r_0} [R_{c,n}^{(1)'} - R_{c,n}^{(2)'}] = -\frac{1}{r_0^2 \varepsilon_c} \quad \text{επομένως}$$

$$s_c A_{c,n}^{(1)} r_0^{(s_c-1)} - s_c A_{c,n}^{(2)} r_0^{(s_c-1)} + (s_c + 1) B_{c,n}^{(2)} r_0^{-(s_c+1)-1} = -\frac{1}{r_0^2 \varepsilon_c}$$

$$s_c (A_{c,n}^{(2)} + B_{c,n}^{(2)} r_0^{-(2s_c+1)} - A_{c,n}^{(2)} r_0^{(s_c-1)} + (s_c + 1) B_{c,n}^{(2)} r_0^{-(s_c+2)}) = -\frac{1}{r_0^2 \varepsilon_c}$$

$$B_{c,n}^{(2)} [s_c r_0^{(-s_c-2)} + (s_c + 1) r_0^{-(s_c+2)}] = -\frac{1}{r_0^2 \varepsilon_c}$$

$$B_{c,n}^{(2)} [r_0^{(-s_c-2)} (2s_c + 1)] = -\frac{1}{r_0^2 \varepsilon_c}$$

$$B_{c,n}^{(2)} = -\frac{1}{r_0^2 \varepsilon_c} \frac{1}{r_0^{(-s_c-2)} (2s_c + 1)} = -\frac{1}{r_0^{2-s_c-2} \varepsilon_c (2s_c + 1)} = -\frac{r_0^{s_c}}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \quad (4.55)$$

Έτσι με αντικατάσταση των συντελεστών (4.53), (4.54) έχουμε :

$$\mu \varepsilon R_{c,n}(r) = \begin{cases} A_{c,n}^{(1)} r^{s_c} \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)} \end{cases} = \begin{cases} A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r_0^{-(2s_c+1)} r^{s_c} \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} + B_{c,n}^{(2)} r^{-(s_c+1)} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{r_0^{s_c}}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} r_0^{-(2s_c+1)} r^{s_c} \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{r_0^{s_c}}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} r^{-(s_c+1)} \end{cases} = \begin{cases} A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{r_0^{-s_c-1}}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} r^{s_c} \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{r_0^{s_c}}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} r^{-(s_c+1)} \end{cases}$$

$$R_{c,n}(\mathbf{r}) = \begin{cases} A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \frac{r^{s_c}}{r_0^{s_c+1}}, & 0 < r < r_0 \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \frac{r_0^{s_c}}{r^{s_c+1}}, & r_0 < r < r_c \end{cases}$$

Αντίστοιχα η λύση στο εσωτερικό χωρίο γράφεται ως:

$$\begin{aligned} & \psi_c(\mathbf{r}) \\ & = \sum_{nma}^{\infty} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{cases} A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \frac{r^{s_c}}{r_0^{s_c+1}}, & 0 < r < r_0 \\ A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \frac{r_0^{s_c}}{r^{s_c+1}}, & r_0 < r < r_c \end{cases} \quad (4.56) \end{aligned}$$

Η εύρεση του $A_{c,n}^{(2)}$ επιβάλλει την εφαρμογή της συνθήκης συνέχειας (4.43) στις (4.35), (4.36).

$$\psi_c(\mathbf{r}_c) = \psi_f(\mathbf{r}_c), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_c \in S_c, \quad (\mathbf{r}_c > \mathbf{r}_0)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r_c^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+1}} \right] \\
& = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} r_c^{s_f} + B_{f,n} r_c^{-(s_f+1)}] \quad (4.57)
\end{aligned}$$

Θέτω

$$\begin{aligned}
R_n^{*(1)} &= [A_{c,n}^{(2)} r_c^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+1}}] \\
R_n^{*(2)} &= [A_{f,n} r_c^{s_f} + B_{f,n} r_c^{-(s_f+1)}]
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζω με $\bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}})$ και ολοκληρώνω στην επιφάνεια S_c^2

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_{S_c^2} M [\bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}) + \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}})] \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}) ds [R_n^{*(1)}] = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \int_{S_c^2} M [\bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}) + \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nm}^o(\hat{\mathbf{r}})] \bar{Y}_{n'm'}^e(\hat{\mathbf{r}}) ds [R_n^{*(2)}] \\
& \quad \text{για } n = n' \text{ και } m = m' \quad \text{άρα } \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) [R_n^{*(1)}] = \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) [R_n^{*(2)}] \\
& \quad A_{c,n}^{(2)} r_c^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+1}} = A_{f,n} r_c^{s_f} + B_{f,n} r_c^{-(s_f+1)} \\
& \quad A_{c,n}^{(2)} = A_{f,n} r_c^{s_f-s_c} + B_{f,n} \frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}} + \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Από τη συνθήκη (4.48):

$$\begin{aligned}
& \varepsilon_c \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{\partial}{\partial r} \left[A_{c,n}^{(2)} r_c^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+1}} \right] \\
& = \varepsilon_f \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{\partial}{\partial r} [A_{f,n} r_c^{s_f} + B_{f,n} r_c^{-(s_f+1)}] \\
& \varepsilon_c \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} s_c r_c^{s_c-1} + \frac{(s_c+1)}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+2}} \right] \\
& = \varepsilon_f \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} s_f r_c^{s_f-1} + B_{f,n} (-s_f-1) r_c^{-s_f-2}] \\
& \varepsilon_c M \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) \left[A_{c,n}^{(2)} s_c r_c^{s_c-1} + \frac{(s_c+1)}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+2}} \right] \\
& = \varepsilon_f M \bar{Y}_{nm}^e(\hat{\mathbf{r}}_0) [A_{f,n} s_f r_c^{s_f-1} + B_{f,n} (-s_f-1) r_c^{-s_f-2}]
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_c \left[A_{c,n}^{(2)} s_c r_c^{s_c-1} + \frac{(s_c + 1)}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{s_c+2}} \right] = \varepsilon_f [A_{f,n} s_f r_c^{s_f-1} + B_{f,n} (-s_f - 1) r_c^{-s_f-2}]$$

$$A_{c,n}^{(2)} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c} \left[A_{f,n} \frac{s_f}{s_c} r_c^{s_f-s_c} + B_{f,n} \frac{(-s_f - 1)}{s_c} \frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}} \right]$$

$$- \frac{(s_c + 1)}{\varepsilon_c s_c (2s_c + 1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}}$$
(4.59)

Ομοίως εφαρμόζουμε τη συνθήκη συνέχειας (4.44) στις (4.36), (4.37).

$$\sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{r}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{r}) [A_{f,n} r_f^{s_f} + B_{f,n} r_f^{-(s_f+1)}]$$

$$= \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{r}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{r}) [A_{b,n} r_f^{s_b} + B_{b,n} r_f^{-(s_b+1)}]$$

$$A_{f,n} r_f^{s_f} + B_{f,n} r_f^{-(s_f+1)} = A_{b,n} r_f^{s_b} + B_{b,n} r_f^{-(s_b+1)}$$

$$A_{f,n} + B_{f,n} \frac{1}{r_f^{2s_f+1}} = A_{b,n} r_f^{s_b-s_f} + B_{b,n} r_f^{-(s_b+s_f+1)}$$
(4.60)

Από την συνθήκη (4.49) προκύπτει :

$$\varepsilon_f [A_{f,n} s_f r_f^{s_f-1} + B_{f,n} (-s_f - 1) r_f^{-s_f-2}]$$

$$= \varepsilon_b [A_{b,n} s_b r_f^{s_b-1} + B_{b,n} (-s_b - 1) r_f^{-s_b-2}]$$

$$A_{f,n} + B_{f,n} \frac{(-s_f - 1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{s_f+s_f+1}}$$

$$= \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_f} \left[A_{b,n} \frac{s_b}{s_f} r_f^{s_b-s_f} + B_{b,n} \frac{(-s_b - 1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{s_b+s_f+1}} \right]$$
(4.61)

Ομοίως εφαρμόζουμε τη συνθήκη συνέχειας (4.45) στις (4.38), (4.39).

$$\sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{r}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{r}) [A_{b,n} r_b^{s_b} + B_{b,n} r_b^{-(s_b+1)}]$$

$$= \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{r}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{r}) [A_{s,n} r_b^{s_s} + B_{s,n} r_b^{-(s_s+1)}]$$

$$A_{b,n} r_b^{s_b} + B_{b,n} r_b^{-(s_b+1)} = A_{s,n} r_b^{s_s} + B_{s,n} r_b^{-(s_s+1)}$$

$$A_{b,n} + B_{b,n} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} = A_{s,n} r_b^{s_s-s_b} + B_{s,n} \frac{1}{r_b^{s_b+s_s+1}}$$
(4.62)

Από την (4.50) έχω:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b [A_{b,n} s_b r_b^{s_b-1} + B_{b,n} (-s_b - 1) r_b^{-s_b-2}] &= \varepsilon_s [A_{s,n} s_s r_b^{s_s-1} + B_{s,n} (-s_s - 1) r_b^{-s_s-2}] \\ A_{b,n} + B_{b,n} \frac{(-s_b - 1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} & \\ &= \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b} \left[A_{s,n} \frac{s_s}{s_b} r_b^{s_s-s_b} + B_{s,n} \frac{(-s_s - 1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{s_s+s_b+1}} \right] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Ομοίως εφαρμόζουμε τη συνθήκη συνέχειας (4.46) στις (4.38), (4.39).

$$\begin{aligned} \sum_{nma}^{\infty 1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{r}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{r}) [A_{s,n} r_s^{s_s} + B_{s,n} r_s^{-(s_s+1)}] & \\ &= \sum_{nma}^{\infty 1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{r}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{r}) B_{e,n} r_s^{-(s_e+1)} \\ A_{s,n} r_s^{s_s} + B_{s,n} r_s^{-(s_s+1)} &= B_{e,n} r_s^{-(s_e+1)} \\ A_{s,n} + B_{s,n} \frac{1}{r_s^{(2s_s+1)}} &= B_{e,n} \frac{1}{r_s^{(s_e+s_s+1)}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Από την (4.51) έχω:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s [A_{s,n} s_s r_s^{s_s-1} + B_{s,n} (-s_s - 1) r_s^{-s_s-2}] &= \varepsilon_e [B_{e,n} (-s_e - 1) r_s^{-s_e-2}] = 0 \\ A_{s,n} s_s r_s^{s_s-1} + B_{s,n} (-s_s - 1) r_s^{-s_s-2} &= 0 \\ A_{s,n} + B_{s,n} \frac{(-s_s - 1)}{s_s} \frac{1}{r_s^{2s_s+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες διαπερατότητας στις αντίστοιχες διεπιφάνειες, προκύπτει το γραμμικό σύστημα οκτώ εξισώσεων (4.66).

1. $A_{c,n}^{(2)} - A_{f,n} r_c^{s_f-s_c} - B_{f,n} \frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}} = \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}}$
2. $A_{c,n}^{(2)} - \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c} \left[A_{f,n} \frac{s_f}{s_c} r_c^{s_f-s_c} + B_{f,n} \frac{(-s_f-1)}{s_c} \frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}} \right] =$
 $-\frac{(s_c+1)}{\varepsilon_c s_c (2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}}$
3. $A_{f,n} + B_{f,n} \frac{1}{r_f^{2s_f+1}} - A_{b,n} r_f^{s_b-s_f} - B_{b,n} r_f^{-(s_b+s_f+1)} = 0$
4. $A_{f,n} + B_{f,n} \frac{(-s_f-1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{s_f+s_f+1}} - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_f} \left[A_{b,n} \frac{s_b}{s_f} r_f^{s_b-s_f} + \right.$
 $\left. B_{b,n} \frac{(-s_b-1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{s_b+s_f+1}} \right] = 0$
5. $A_{b,n} + B_{b,n} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} - A_{s,n} r_b^{s_s-s_b} - B_{s,n} \frac{1}{r_b^{s_b+s_s+1}} = 0$

$$\begin{aligned}
6. \quad & A_{b,n} + B_{b,n} \frac{(-s_b-1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b} \left[A_{s,n} \frac{s_s}{s_b} r_b^{s_s-s_b} + \right. \\
& \left. B_{s,n} \frac{(-s_s-1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{s_s+s_b+1}} \right] = 0 \\
7. \quad & A_{s,n} + B_{s,n} \frac{1}{r_s^{(2s_s+1)}} - B_{e,n} \frac{1}{r_s^{(s_e+s_s+1)}} = 0 \\
8. \quad & A_{s,n} + B_{s,n} \frac{(-s_s-1)}{s_s} \frac{1}{r_s^{2s_s+1}} = 0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$[AB] \cdot \begin{bmatrix} A_{c,n}^{(2)} \\ A_{f,n} \\ B_{f,n} \\ A_{b,n} \\ B_{b,n} \\ A_{s,n} \\ B_{s,n} \\ B_{e,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}} \\ -\frac{(s_c+1)}{s_c} \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.67}$$

όπου

$$[AB] = \begin{bmatrix} 1 & -r_c^{s_f-s_c} & -\frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\varepsilon_f s_f}{\varepsilon_c s_c} r_c^{s_f-s_c} & -\frac{\varepsilon_f (-s_f-1)}{\varepsilon_c s_c r_c^{s_c+s_f+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_f^{-2s_f-1} & -r_f^{s_b-s_f} & -r_f^{-(s_b+s_f+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(-s_f-1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{2s_f+1}} & -\frac{\varepsilon_b s_b}{\varepsilon_f s_f} r_f^{s_b-s_f} & -\frac{\varepsilon_b (-s_b-1)}{\varepsilon_f s_f} \frac{1}{r_f^{s_b+s_f+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_b^{-2s_b-1} & -r_b^{s_s-s_b} & -r_b^{-(s_b+s_s+1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(-s_b-1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} & -\frac{\varepsilon_s s_s}{\varepsilon_b s_b} r_b^{s_s-s_b} & \frac{\varepsilon_s (s_s+1)}{\varepsilon_b s_b} \frac{1}{r_b^{s_s+s_b+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r_s^{(2s_s+1)}} & -r_s^{-(s_e+s_s+1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(-s_s-1)}{s_s} \frac{1}{r_s^{2s_s+1}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $[AB]$, που προκύπτει από το γραμμικό σύστημα 8×8 εξισώσεων, αντικατοπτρίζει τις συνθήκες συνέχειας καθώς και τις συνθήκες συνέχειας της κάθετης συνιστώσας της πυκνότητας του ρεύματος στις διεπιφάνειες S_c, S_f, S_b, S_s .

Το διάνυσμα των συντελεστών $[A_{c,n}^{(2)} A_{f,n} B_{f,n} A_{b,n} B_{b,n} A_{s,n} B_{s,n} B_{e,n}]$ αντιπροσωπεύει τις σταθερές που αντιστοιχούν στη λύση της εξίσωσης Poisson σε κάθε σφαιρικό χωρίο. Από τη λύση του συστήματος προκύπτουν οι συντελεστές του αναπτύγματος της λύσης, A_{ij}, B_{ij} , των οποίων οι αναλυτικές εκφράσεις παρατίθενται στο Παράρτημα Β.1.

4.6. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο ανισότροπο μη ομογενές σφαιρικό πρότυπο με διπολική πηγή

Οι εξισώσεις του ηλεκτρικού δυναμικού που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες προέκυψαν με την παραδοχή σημειακής μονοπολικής πηγής. Η μονοπολική πηγή αποτελεί μια ιδεατή μαθηματική κατασκευή, η οποία χρησιμοποιείται κυρίως για αναλυτικούς σκοπούς, καθώς δεν αντιστοιχεί σε φυσιολογικά ρεαλιστική πηγή που συναντάται στην ηλεκτροεγκεφαλογραφία (ΗΕΓ). Η μονοπολική λύση έχει ιδιαίτερη σημασία, διότι αποτελεί τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Poisson, δηλαδή τη συνάρτηση Green του προβλήματος. Δεδομένου ότι μια διπολική πηγή μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο δύο γειτονικών μονοπολικών πηγών ίσης έντασης και αντίθετου προσήμου, το δυναμικό που παράγει προκύπτει μέσω κατάλληλης χωρικής παραγωγίσης της συνάρτησης Green.

Αντίθετα, η νευρωνική δραστηριότητα προσεγγίζεται αποτελεσματικότερα μέσω ισοδύναμων διπολικών πηγών ρεύματος, των οποίων η συνολική δράση μπορεί να προσεγγιστεί ρεαλιστικότερα από μια ισοδύναμη διπολική ροπή.

Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια πραγματοποιείται η αναγωγή των δυναμικών που αντιστοιχούν σε μονοπολική πηγή $\psi(\mathbf{r})$ σε δυναμικό διπολικής πηγής $u(\mathbf{r})$.

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r^{s_c}}{r_0^{s_c+1}} \right], & 0 < r < r_0 \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r^{s_c+1}} \right], & r_0 < r < r_c \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} r^{s_f} + B_{f,n} r^{-(s_f+1)}], & r_c < r < r_f \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{b,n} r^{s_b} + B_{b,n} r^{-(s_b+1)}], & r_f < r < r_b \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{s,n} r^{s_s} + B_{s,n} r^{-(s_s+1)}], & r_b < r < r_s \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) B_{e,n} r^{-(s_e+1)}, & r_s < r \end{cases} \quad (4.68)$$

Στην περίπτωση διπολικής πηγής, το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο \mathbf{r} εκφράζεται μέσω της συνάρτησης Green ως

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \quad (4.69)$$

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}')$$

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}')$$

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} \mathbf{Q} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}_0} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)] G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}')$$

$$u(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}')$$

Για σημειακή διπολική πηγή με διπολική ροπή \mathbf{Q} στο σημείο \mathbf{r}_0 , καταλήγουμε στη μορφή

$$u(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0), \quad (4.70)$$

όπου $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$, η συνάρτηση Green με \mathbf{r}_0 την θέση της πηγής.

Το ηλεκτρικό δυναμικό $u_c(\mathbf{r})$ στο εσωτερικό του αγωγού με διπολική πηγή μετατρέπεται

$$u_c(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r^{s_c} - \frac{1}{\epsilon_c(2s_c + 1)} \frac{r^{s_c}}{r_0^{s_c+1}} \right],$$

$$0 < r < r_0$$

$$u_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s_c+1}} \right] \frac{1}{\epsilon_c(2s_c + 1)} \right\} r^{s_c} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

Αντικαθιστώντας τις κανονικοποιημένες σφαιρικές αρμονικές \bar{Y}_{nma} με τις μη κανονικοποιημένες Y_{nma} σύμφωνα με τις σχέσεις (2.40), (2.41) λαμβάνουμε:

$$u_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] A_{c,n}^{(2)} - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s_c+1}} \right] \frac{1}{\epsilon_c(2s_c + 1)} \right\} r^{s_c} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

Με ανάλογο τρόπο, προκύπτουν οι αντίστοιχες εκφράσεις του δυναμικού διπολικής πηγής σε κάθε χωρίο.

$$u(\mathbf{r}) =$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& -\mathcal{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s_c+1}} \right] \frac{1}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \right\} r^{s_c} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), 0 < r < r_0 \\
& -\mathcal{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] r^{s_c} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) r_0^{s_c}]}{r^{s_c+1}} \frac{1}{\varepsilon_c (2s_c + 1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_0 < r < r_c \\
& -\mathcal{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{f,n}] r^{s_f} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{f,n}] r^{-(s_f+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_c < r < r_f \\
& -\mathcal{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{b,n}] r^{s_b} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{b,n}] r^{-(s_b+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_f < r < r_b \\
& -\mathcal{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{s,n}] r^{s_s} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{s,n}] r^{-(s_s+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_b < r < r_s \\
& \quad -\mathcal{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{e,n}] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) r^{-(s_e+1)}, r_s < r
\end{aligned} \right. \tag{4.71}$$

Κεφάλαιο 5^ο

5. Αναγωγή προβλήματος σε περιπτώσεις μελέτης

5.1. Τα ηλεκτρικά δυναμικά για μονοπολική και διπολική πηγή σε μη ομογενή ανισότροπο σφαιρικό αγωγό με σταθερό λόγο (η/ε)

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι συναρτήσεις του ηλεκτρικού δυναμικού σε μη ομογενή ανισότροπο σφαιρικό αγωγό. Οι ακτινικές αγωγιμότητες των επιμέρους στρωμάτων συμβολίζονται με $\varepsilon_c, \varepsilon_f, \varepsilon_b, \varepsilon_s, \varepsilon_e$, ενώ ως προς την εφαπτομενική διεύθυνση με $\eta_c, \eta_f, \eta_b, \eta_s, \eta_e$. Σε αυτή την μελέτη περίπτωσης θα θεωρήσουμε πως οι αγωγιμότητες διατηρούν σταθερό λόγο $\frac{\eta}{\varepsilon} = \nu$ και κατ' επέκταση έχουν τον ίδιο συντελεστή s_1 . Κάνοντας αντικατάσταση $s_c = s_f = s_b = s_s = s_1$ στο προηγούμενο σύστημα προκύπτουν οι εξισώσεις (5.1)

1. $A_{c,n}^{(2)} = A_{f,n} + B_{f,n} \frac{1}{r_c^{2s_1+1}} + \frac{1}{\varepsilon_c(2s_1+1)} \frac{r_0^{s_1}}{r_c^{2s_1+1}}$
2. $A_{c,n}^{(2)} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_c} \left[A_{f,n} + B_{f,n} \frac{(-s_1-1)}{s_1} \frac{1}{r_c^{2s_1+1}} \right] - \frac{(s_1+1)}{\varepsilon_c s_1 (2s_1+1)} \frac{r_0^{s_1}}{r_c^{2s_1+1}}$
3. $A_{f,n} + B_{f,n} \frac{1}{r_f^{2s_1+1}} - A_{b,n} - B_{b,n} r_f^{-2s_1-1} = 0$
4. $A_{f,n} + B_{f,n} \frac{(-s_1-1)}{s_1} \frac{1}{r_f^{2s_1+1}} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_f} \left[A_{b,n} + B_{b,n} \frac{(-s_1-1)}{s_1} \frac{1}{r_f^{2s_1+1}} \right]$
5. $A_{b,n} + B_{b,n} \frac{1}{r_b^{2s_1+1}} = A_{s,n} + B_{s,n} \frac{1}{r_b^{2s_1+1}}$
6. $A_{b,n} + B_{b,n} \frac{(-s_1-1)}{s_1} \frac{1}{r_b^{2s_1+1}} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b} \left[A_{s,n} + B_{s,n} \frac{(-s_1-1)}{s_1} \frac{1}{r_b^{2s_1+1}} \right]$
7. $A_{s,n} + B_{s,n} \frac{1}{r_s^{(2s_1+1)}} = B_{e,n} \frac{1}{r_s^{(2s_1+1)}}$
8. $A_{s,n} + B_{s,n} \frac{(-s_1-1)}{s_1} \frac{1}{r_s^{2s_1+1}} = 0$

(5.1)

Η λύση των εξισώσεων έχει τα παρακάτω αποτελέσματα για τους συντελεστές B_{ij}

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B_{s,n}} &= \frac{\varepsilon_s}{r_0^{s_1}} \frac{1}{(2s_1 + 1)^2} \left\{ \left[-(s_1 + 1)^2 - (\varepsilon_{bs} - \varepsilon_{fb})s_1(s_1 + 1) - \varepsilon_{fs}s_1^2 \right] \right. \\
&\quad \cdot \left[(1 + \varepsilon_{cf})s_1 + 1 \right] \\
&\quad - \left[(2 + \varepsilon_{bs} + \varepsilon_{sb})(s_1 + 1)s_1 + 1 - \varepsilon_{sf} \right] \left[(1 + \varepsilon_{cf})s_1 \right. \\
&\quad \left. + 1 \right] R_{fb} - \left[(1 + \varepsilon_{fb})s_1 + 1 \right] (s_1 + 1) \left[(1 + \varepsilon_{cf})s_1 + 1 \right] R_{bs} \\
&\quad - \left[(1 + \varepsilon_{sb})s_1 + 1 \right] \left[(1 + \varepsilon_{cf})s_1 + 1 \right] R_{fb} R_{bs} (s_1 + 1) \\
&\quad + \left[-(s_1 + 1)^2 - (\varepsilon_{bs} + \varepsilon_{fb})s_1(s_1 + 1) - \varepsilon_{fs}s_1^2 \right] \left[(1 + \varepsilon_{bf})s_1 \right. \\
&\quad \left. + 1 \right] + (2s_1 + 1)^2 \left[(1 + \varepsilon_{bs})s_1 + 1 \right] R_{cf} \\
&\quad - \left[(2 + \varepsilon_{bs} + \varepsilon_{sb})(s_1 + 1)s_1 + 1 - \varepsilon_{sf} \right] \left[(1 + \varepsilon_{bf})s_1 \right. \\
&\quad \left. + 1 \right] R_{fb} R_{cf} \\
&\quad + \left\{ - \left[(1 + \varepsilon_{fb})s_1 + 1 \right] (s_1 + 1) \left[(1 + \varepsilon_{bf})s_1 + 1 \right] + (2s_1 \right. \\
&\quad \left. + 1)^2 (s_1 + 1) \right\} R_{cf} R_{bs} \\
&\quad \left. - \left[(1 + \varepsilon_{bs})s_1 + 1 \right] (s_1 + 1) \left[(1 + \varepsilon_{bf})s_1 + 1 \right] R_{cf} R_{fb} R_{bs} \right\} \quad (5.2)
\end{aligned}$$

$$B_{s,n} = \frac{r_0^{s_1}}{\varepsilon_s} (2s_1 + 1)^2 \{W\}$$

$$B_{e,n} = B_{s,n} \left[\frac{2s_1 + 1}{s_1} \right] \quad (5.3)$$

$$B_{b,n} = \frac{1}{\varepsilon_{bs}(2s_1 + 1)} B_{sn} [(\varepsilon_{bs} + 1)s_1 + 1 + (s_1 + 1)R_{bs}] \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_{f,n}}{B_{s,n}} &= \frac{1}{(2s_1 + 1)^2} \frac{1}{\varepsilon_{bs}} [(\varepsilon_{bs} + 1)s_1 + 1 + (s_1 + 1)R_{bs}] \cdot \frac{1}{\varepsilon_{fb}} \\
&\quad \cdot \left[(\varepsilon_{fb} + 1)s_1 + 1 + \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_{bs}} + 1 \right) s_1 + 1 \right) R_{fb} \right] - \frac{1}{\varepsilon_{fb} \varepsilon_{bs}} R_{fb} \\
B_{f,n} &= \frac{r_0^{s_1}}{\varepsilon_s} \frac{1}{W} \frac{1}{\varepsilon_{fb} \varepsilon_{bs}} \left\{ [(\varepsilon_{bs} + 1)s_1 + 1 + (s_1 + 1)R_{bs}] \left[(\varepsilon_{fb} + 1)s_1 + 1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_{bs}} + 1 \right) s_1 + 1 \right) R_{fb} \right] - \frac{1}{\varepsilon_{fb} \varepsilon_{bs}} R_{fb} \right\} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_{f,n}}{B_{s,n}} &= \frac{1}{(2s_1 + 1)^2} \frac{1}{\varepsilon_{bs}} [(\varepsilon_{bs} + 1)s_1 + 1 + (s_1 + 1)R_{bs}] \cdot \frac{1}{\varepsilon_{fb}} \\
&\quad \cdot \left[(\varepsilon_{fb} + 1)s_1 + 1 + \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_{bs}} + 1 \right) s_1 + 1 \right) R_{fb} \right] - \frac{1}{\varepsilon_{fb} \varepsilon_{bs}} R_{fb} \\
B_{f,n} &= \frac{r_0^{s_1}}{\varepsilon_s} \frac{1}{W} \frac{1}{\varepsilon_{fb} \varepsilon_{bs}} \left\{ [(\varepsilon_{bs} + 1)s_1 + 1 + (s_1 + 1)R_{bs}] \left[(\varepsilon_{fb} + 1)s_1 + 1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_{bs}} + 1 \right) s_1 + 1 \right) R_{fb} \right] - \frac{1}{\varepsilon_{fb} \varepsilon_{bs}} R_{fb} \right\}, \tag{5.6}
\end{aligned}$$

όπου οι συμβολισμοί:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_f - \varepsilon_b}{\varepsilon_b - \varepsilon_s} \left(\frac{r_f}{r_b} \right)^{2s_1+1} &= R_{fb} \\
\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_b} \left(\frac{r_c}{r_f} \right)^{2s_1+1} &= R_{cf} \Rightarrow \frac{1}{R_{cf}} = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_b}{\varepsilon_c - \varepsilon_f} \left(\frac{r_f}{r_c} \right)^{2s_1+1} \\
\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_f}{\varepsilon_b} \left(\frac{r_c}{r_f} \right)^{2s_1+1} &= \left(\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_b} - 1 \right) R_{cf} \\
\frac{\varepsilon_b - \varepsilon_s}{\varepsilon_s - 0} \left(\frac{r_b}{r_s} \right)^{2s_1+1} &= R_{bs} \\
\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_s} = \varepsilon_{bs} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_{bs}} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_b} \quad \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_b} = \varepsilon_{fb} \quad \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_f} = \varepsilon_{cf}
\end{aligned}$$

Για τους συντελεστές A_{ij} έχουμε

$$A_{f,n} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_f} B_{f,n} r_c^{-(s_1+1)} \left(-1 - \frac{1}{\varepsilon_{cf}} \frac{(s_1 + 1)}{s_1} \right) - \frac{r_0^{s_1}}{\varepsilon_c - \varepsilon_f} r_c^{-(s_1+1)} \frac{1}{s_1} \tag{5.7}$$

$$A_{b,n} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_b} B_{f,n} r_f^{-(s_1+1)} \left(\frac{2s_1 + 1}{s_1} \right) - B_{b,n} r_f^{-(s_1+1)} \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_b} \left[1 + \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_f} \left(\frac{s_1 + 1}{s_1} \right) \right] \tag{5.8}$$

$$A_{s,n} = B_{s,n} \frac{(s_1 + 1)}{s_1} r_s^{-2s_1-1} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
A_{c,n}^{(2)} &= \left\{ \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_f} \left(-1 - \frac{1}{\varepsilon_{cf}} \frac{(s_1 + 1)}{s_1} \right) + 1 \right\} B_{f,n} r_c^{-2s_1-1} + \left[-\frac{1}{(\varepsilon_c - \varepsilon_f)} \frac{1}{s_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_c (2s_1 + 1)} \right] \frac{r_0^{s_1}}{(r_c^{2s_1+1})} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Τα δυναμικά σε μη ομογενή σφαιρικό αγωγό με μονοπολική πηγή και με σταθερό λόγο $(\frac{\eta}{\epsilon})$, όπως προκύπτουν από αναγωγή των αντίστοιχων σχέσεων (4.60) για ανισότροπο μη ομογενή αγωγό με εφαπτομενική και ακτινική διεύθυνση ανισοτροπίας λόγου $(\frac{\eta_j}{\epsilon_j})$, φαίνονται παρακάτω.

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r^{s_1} - \frac{1}{\epsilon_c(2s_1+1)} \frac{r^{s_1}}{r_0^{s_1+1}} \right], & 0 < r < r_0 \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r^{s_1} - \frac{1}{\epsilon_c(2s_1+1)} \frac{r_0^{s_1}}{r^{s_1+1}} \right], & r_0 < r < r_c \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} r^{s_1} + B_{f,n} r^{-(s_1+1)}], & r_c < r < r_f \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{b,n} r^{s_1} + B_{b,n} r^{-(s_1+1)}], & r_f < r < r_b \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{s,n} r^{s_1} + B_{s,n} r^{-(s_1+1)}], & r_b < r < r_s \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) B_{e,n} r^{-(s_1+1)}, & r_s < r \end{cases} \quad (5.11)$$

Όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 4.6, η μονοπολική πηγή $\psi(\mathbf{r})$, αποτελεί ιδεατή μαθηματική κατασκευή, η οποία χρησιμοποιείται για τον ορισμό της συνάρτησης Green του προβλήματος και δεν αντιστοιχεί σε φυσιολογικά ρεαλιστική πηγή στην ηλεκτροεγκεφαλογραφία. Η νευρωνική δραστηριότητα προσεγγίζεται αποτελεσματικότερα μέσω ισοδύναμης διπολικής πηγής $u(\mathbf{r})$.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στο παρόν μοντέλο, προκύπτουν οι αντίστοιχες συναρτήσεις του ηλεκτρικού δυναμικού για διπολική πηγή.

Για το δυναμικό στο χωρίο Ω_c , $0 < r < r_0$ ισχύει η σχέση (4.70). Αναλυτικά

$$u_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$$

$$u_c(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[A_{c,n}^{(2)} r^{s_1} - \frac{1}{\epsilon_c(2s_1+1)} \frac{r^{s_1}}{r_0^{s_1+1}} \right]$$

$$u_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s_1+1}} \right] \frac{1}{\epsilon_c(2s_1+1)} \right\} r^{s_1} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

Αντικαθιστώντας τις κανονικοποιημένες συναρτήσεις \bar{Y}_{nma} με τις αντίστοιχες μη κανονικοποιημένες πραγματικές σφαιρικές αρμονικές Y_{nma} το ηλεκτρικό δυναμικό στην εσωτερική περιοχή $u_c(\mathbf{r})$, γράφεται ως:

$$u_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s_1+1}} \right] \frac{1}{\epsilon_c(2s_1+1)} \right\} r^{s_1} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad 0 < r < r_0$$

Αντίστοιχα, για το δυναμικό στο χωρίο Ω_c , με $r_0 < r < r_c$ έχουμε :

$$u_c(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] r^{s_1} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) r_0^{s_1}]}{r^{s_1+1}} \frac{1}{\epsilon_c(2s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

Ομοίως στο χωρίο Ω_f όπου $r_c < r < r_f$ και στα υπόλοιπα τμήματα.

$$u_f(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{nma}^{\infty n1} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} r^{s_1} + B_{f,n} r^{-(s_1+1)}]$$

$$u_f(\mathbf{r})$$

$$= -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{f,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{f,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$u_f(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{f,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{f,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$u_b(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{b,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{b,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$u_s(\mathbf{r}) = -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{s,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{s,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

καταλήγουμε στις παρακάτω μορφές για διπολική πηγή σε όλα τα χωρία:

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) = & \left\{ \begin{aligned}
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s_1+1}} \right] \frac{1}{\varepsilon_c (2s_1+1)} \right\} r^{s_1} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), 0 < r < r_0 \\
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] r^{s_1} - \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) r_0^{s_1}]}{r^{s_1+1}} \frac{1}{\varepsilon_c (2s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_0 < r < r_c \\
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{f,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{f,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_c < r < r_f \\
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{b,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{b,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_f < r < r_b \\
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{s,n}] r^{s_1} + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{s,n}] r^{-(s_1+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), r_b < r < r_s \\
& -\frac{\mathbf{Q}}{4\pi} \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{e,n}] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) r^{-(s_1+1)}, r_s < r
\end{aligned} \right. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

5.2. Ισότροπο μη ομογενές σφαιρικό πρότυπο με τρεις φλοιούς

Η αναλυτική λύση που αναπτύχθηκε για το ανισοτροπικό μοντέλο κεφαλής τριών κελυφών μπορεί, ως ειδική περίπτωση, να αναχθεί στην αντίστοιχη λύση του ισοτροπικού ανομοιογενούς μοντέλου. Ειδικότερα, με την επιβολή των κατάλληλων περιορισμών στη γενική ανισότροπη διατύπωση, οι αναλυτικές εκφράσεις του ηλεκτρικού δυναμικού, καθώς και οι συντελεστές A_{ij} και B_{ij} ανάγονται στις αντίστοιχες ποσότητες της ισοτροπικής περίπτωσης.

Στο ισοτροπικό μοντέλο, ο εγκέφαλος, το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (CSF), το κρανίο και το τριχωτό της κεφαλής χαρακτηρίζονται από τις αντίστοιχες ισοτροπικές αγωγιμότητες $\sigma_c, \sigma_f, \sigma_b, \sigma_s$. Υπό την παραδοχή της ισοτροπίας, δεν υφίσταται διάκριση μεταξύ ακτινικής και εφαπτομενικής αγωγιμότητας: συνεπώς, για κάθε στρώμα οι ακτινικές και εφαπτομενικές αγωγιμότητες ταυτίζονται και ισχύει: $\varepsilon_j = \eta_j = \sigma_j$.

Επιπλέον, στη γενική ανισοτροπική και ανομοιογενή διατύπωση, οι χαρακτηριστικοί εκθέτες της εξίσωσης (4.31) ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_{j1} = n \quad \text{και} \quad s_{j2} = -n - 1 = -s_{j1} - 1 \quad (5.13)$$

Με την επιβολή των παραπάνω συνθηκών ισοτροπίας, καταλήγουμε στην αντίστοιχη αναλυτική λύση του ισοτροπικού πολυστρωματικού μοντέλου.

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{r}) = & \\
& \left\{ \begin{aligned}
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] - \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{n+1}} \right] \frac{1}{\sigma_c(2n+1)} \right\} r^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad 0 < r < r_0 \\
& -\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{c,n}^{(2)}] r^n - \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) r_0^n]}{r^{n+1}} \frac{1}{\sigma_c(2n+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_0 < r < r_c \\
& -\mathbf{Q} \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{f,n}] r^n + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{f,n}] r^{-(n+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_c < r < r_f \\
& -\mathbf{Q} \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{b,n}] r^n + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{b,n}] r^{-(n+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_f < r < r_b \\
& -\mathbf{Q} \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) A_{s,n}] r^n + \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{s,n}] r^{-(n+1)} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_b < r < r_s \\
& -\mathbf{Q} \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \nabla_{\mathbf{r}_0} [Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) B_{e,n}] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) r^{-(n+1)}, \quad r_s < r
\end{aligned} \right. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Το αντίστοιχο σύστημα των συντελεστών γράφεται σε μορφή μήτρας ως εξής:

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & \frac{1}{r_c^{2n+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -\frac{\sigma_f}{\sigma_c} & \frac{\sigma_f (n+1)}{\sigma_c n r_c^{2n+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & r_f^{-n-1} & -1 & -r_f^{-(2n+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{(-n-1)}{n} \frac{1}{r_f^{2n+1}} & -\frac{\sigma_b}{\sigma_f} & -\frac{\sigma_b (-n-1)}{\sigma_f s_f} \frac{1}{r_f^{2n+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & r_b^{-2n-1} & -1 & -r_b^{-(2n+1)} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(-s_b-1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{2n+1}} & -\frac{\sigma_s}{\sigma_b} & \frac{\sigma_s (n+1)}{\sigma_b n} \frac{1}{r_b^{2n+1}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r_s^{(2n+1)}} & -r_s^{-(n+1)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(-n-1)}{n} \frac{1}{r_s^{2n+1}} & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{c,n}^{(2)} \\ A_{f,n} \\ B_{f,n} \\ A_{b,n} \\ B_{b,n} \\ A_{s,n} \\ B_{s,n} \\ B_{e,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_c(2n+1)} & \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}} \\ (n+1) & 1 & \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}} \\ n & \sigma_c(2n+1) & \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

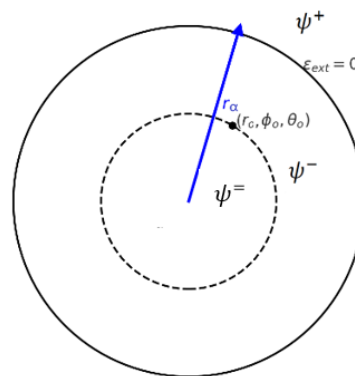
Οι λύσεις των σταθερών συντελεστών $A_{n,c}^{(2)}$, $A_{f,n}$, $B_{f,n}$, $A_{b,n}$, $A_{s,n}$, $B_{s,n}$, $B_{e,n}$ προκύπτουν από την επίλυση του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος, ενώ οι αναλυτικές τους εκφράσεις παρατίθενται στο Παράρτημα Β.2.

Κεφάλαιο 6^ο

6. Ομογενή σφαιρικά πρότυπα

Στα προβλήματα ΗΕΓ, το μοντέλο του ομογενούς αγωγού βασίζεται στην παραδοχή ότι όλοι οι φλοιοί της κεφαλής παρουσιάζουν την ίδια ηλεκτρική αγωγιμότητα, παρότι αυτό δεν ισχύει στη φυσική πραγματικότητα. Δηλαδή σε ένα ομογενή αγωγό δεν γίνεται διάκριση μεταξύ των επιμέρους ανατομικών περιοχών, όπως ο εγκεφαλικός ιστός (φαιά και λευκή ουσία), το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (CSF), τα κρανιακά οστά και το δέρμα. Όλα τα χωρία προσεγγίζονται ως ένα ενιαίο αγωγίμο μέσο με χωρικά σταθερή αγωγιμότητα σ . Η απλοποίηση αυτή επιτρέπει τη θεωρητική μελέτη και την αναλυτική επίλυση του ευθέως προβλήματος της ΗΕΓ και λειτουργεί ως σημείο αναφοράς για πιο ρεαλιστικά, πολυστρωματικά μοντέλα αγωγιμότητας. Επιπλέον, η αναλυτική λύση του ομογενούς μοντέλου χρησιμοποιείται ευρέως ως πρότυπη λύση για την επαλήθευση και την αξιολόγηση της ακρίβειας αριθμητικών μεθόδων, όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) και η Μέθοδος Οριακών Στοιχείων (BEM). Στα ομογενή μοντέλα ισχύει

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_b = \sigma_s = \sigma \quad (6.1)$$



Σχήμα 6.1 Ομογενής αγωγός

6.1. Ανισότροπο ομογενές σφαιρικό πρότυπο

Ωστόσο, η ανισοτροπία της αγωγιμότητας, η οποία εμφανίζεται στους ιστούς του εγκεφάλου, επηρεάζει σημαντικά τα μετρούμενα ηλεκτρικά δυναμικά. Η παράλειψη της ανισοτροπίας αυτής οδηγεί σε αποκλίσεις και σφάλματα εκτίμησης στον εντοπισμό της

διπολικής πηγής ΗΕΓ, όπως έχει τεκμηριωθεί στη σχετική βιβλιογραφία (Akhtari et al., 2002; Bampali et al., 2025; Hallez et al., 2009; Wolters et al., 2001).

Στο πλαίσιο του κεφαλαίου 6, αναλύουμε ένα ανισότροπο μοντέλο θεωρώντας την ύπαρξη ανισοτροπίας της αγωγιμότητας ως προς τη διεύθυνση και ειδικότερα μεταξύ ακτινικής και εφαπτομενικής συνιστώσας. Η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ λαμβάνει δύο διακριτές τιμές: μία στην ακτινική διεύθυνση, $\sigma_1 = \varepsilon (\xi_1)$, και μία στην εφαπτομενική διεύθυνση, $\sigma_2 = \eta (\xi_1)$. Λόγω της παραδοχής της ομοιογένειας, οι συνιστώσες αυτές δεν εξαρτώνται από τη χωρική θέση, αλλά μόνο από τη διεύθυνση, και συνεπώς παραμένουν σταθερές εντός του αγωγίμου μέσου, δηλαδή ισχύει:

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \varepsilon_f = \varepsilon_b = \varepsilon_s = \varepsilon \\ \eta_c &= \eta_f = \eta_b = \eta_s = \eta\end{aligned}\tag{6.2}$$

Για την αγωγιμότητα $\bar{\sigma}$ ισχύει:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}\tag{6.3}$$

Ακόμη, στο εξωτερικό περιβάλλον του αγωγού θεωρούμε πως δεν υπάρχει αγωγιμότητα άρα $\sigma_e = 0$

Η κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού $\psi(\mathbf{r})$ σε σφαιρικό αγωγό, λαμβάνοντας υπόψη την ανισοτροπία της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, περιγράφεται από την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση (4.2) ενώ η πηγή ρεύματος προσεγγίζεται ως ιδανική διπολική πηγή σημείου και εκφράζεται μέσω της (4.3). Χρησιμοποιώντας ορθογώνιο καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων προκύπτει το γενικευμένο πλαίσιο περιγραφής του ηλεκτρικού δυναμικού (4.19), ενώ ισχύουν και οι σχέσεις (4.20) που περιγράφουν το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο εργαζόμαστε. Υποθέτοντας μια κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού $\psi(\mathbf{r})$ που αντιστοιχεί σε μονοπολική πηγή, η οποία εκφράζεται με τη χρήση πραγματικών κανονικοποιημένων σφαιρικών αρμονικών, το δυναμικό γράφεται σύμφωνα με τη σχέση (4.29).

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών, προκύπτει η μη ομογενής διαφορική εξίσωση (4.24) η οποία έχει γενική λύση της μορφής (4.32):

$$R_n(r) = A_n r^{s_1} + B_n r^{-s_1-1}$$

όπου οι εκθέτες s_1 και s_2 ενσωματώνουν την ανισοτροπία του αγωγίμου ιστού, καθώς εμπεριέχουν τις παραμέτρους της ακτινικής ε και της εφαπτομενικής η αγωγιμότητας και

δίνονται από την (4.36). Ακόμη, ο αγωγός θεωρείται ομογενής, ως προς την ηλεκτρική αγωγιμότητα σ και θεωρούμε ότι

$$s_1 = s \text{ και } s_2 = -s - 1. \quad (6.4)$$

Κατά συνέπεια, το ηλεκτρικό δυναμικό σε ανισότροπο ομογενή σφαιρικό αγωγό, για πηγή τοποθετημένη στη θέση r_0 , εκφράζεται ως $\psi(\mathbf{r})$:

$$\psi^-(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_n^{(1)} r^s + B_n^{(1)} r^{-(s+1)}], \quad 0 < r < r_0 \quad (6.5)$$

$$\psi^-(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_n^{(2)} r^s + B_n^{(2)} r^{-(s+1)}], \quad r_0 < r < r_s \quad (6.6)$$

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) B_n^{(3)} r^{-(s+1)}, \quad r > r_s \quad (6.7)$$

Δεδομένου ότι το δυναμικό πρέπει να μηδενίζεται στο άπειρο, προκύπτει ότι $A_e = 0$.

Ακόμη, θεωρούμε από (6.5) και (6.6).

$$\begin{aligned} R_n^{(1)} &= A_n^{(1)} r^s + B_n^{(1)} r^{-(s+1)} \\ R_n^{(2)} &= A_n^{(2)} r^s + B_n^{(2)} r^{-(s+1)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Η γενική μορφή της ακτινικής λύσης $R_n^{(1)}$ περιλαμβάνει όρους της μορφής r^s και $r^{-(s+1)}$.

Η απαίτηση κανονικότητας του συστήματος επιβάλλει η ακτινική συνάρτηση $R_n^{(1)}$ να παραμένει πεπερασμένη στο όριο $\lim_{r \rightarrow 0^+} R_n(r)$. Δεδομένου ότι ο όρος $r^{-(s+1)}$ αποκλίνει στο

μηδέν, ο αντίστοιχος συντελεστής πρέπει να μηδενίζεται. Συνεπώς, καταλήγουμε στη συνθήκη

$$B_n^{(1)} = 0 \quad (6.9)$$

Από τη συνθήκη συνέχειας

$$\lim_{r \rightarrow r_0^-} R_n(r) = \lim_{r \rightarrow r_0^+} R_n(r),$$

οδηγούμαστε στη σχέση

$$A_n^{(1)} = A_n^{(2)} + B_n^{(2)} r_0^{-(2s+1)} \quad (6.10)$$

Επιπλέον, η παράγωγος της ακτινικής συνάρτησης δεν είναι συνεχής στο σημείο $r = r_0$, λόγω της ύπαρξης σημειακής πηγής στο συγκεκριμένο σημείο. Η ασυνέχεια αυτή προκύπτει

από την ολοκλήρωση της εξίσωσης στο r_0 και ποσοτικοποιείται από τη διαφορά των πλευρικών ορίων της παραγώγου. Έτσι η συνθήκη ασυνέχειας (ή άλματος) της παραγώγου δίνεται από την (6.11).

$$\lim_{r \rightarrow r_0^+} \left[\frac{d R_n(r)}{dr} \right] - \lim_{r \rightarrow r_0^-} \left[\frac{d R_n(r)}{dr} \right] = \frac{1}{r_0^2 \varepsilon} \quad (6.11)$$

$$A_n^{(2)} s r_0^{s-1} - B_n^{(2)} (s+1) r_0^{-(s+2)} - A_n^{(1)} s r_0^{s-1} = \frac{1}{r_0^2 \varepsilon}$$

Από την (6.10) βρίσκουμε

$$A_n^{(2)} s r_0^{s-1} - B_n^{(2)} (s+1) r_0^{-(s+2)} - [A_n^{(2)} + B_n^{(2)} r_0^{-(2s+1)}] s r_0^{s-1} = \frac{1}{r_0^2 \varepsilon}$$

η οποία οδηγεί στην:

$$B_n^{(2)} = -\frac{r_0^s}{\varepsilon (2s+1)}. \quad (6.12)$$

Επιπλέον, από τις συνθήκες διαπερατότητας

$$\psi^-(r_s) = \psi^+(r_s), \quad r = r_s \in S, \quad (r_a > r_0) \quad (6.13)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \psi^-(r_s)}{\partial r} = \varepsilon_e \frac{\partial \psi^+(r_s)}{\partial r} = 0, \quad (\varepsilon_e = 0) \quad (6.14)$$

παίρνουμε τις τιμές των σταθερών $A_n^{(2)}, B_n^{(3)}$

$$A_n^{(2)} = -\frac{(s+1)}{s \varepsilon (2s+1)} \frac{r_0^s}{r_s^{2s+1}}$$

$$B_n^{(3)} = -\frac{r_0^s}{\varepsilon s} \quad (6.15)$$

Βάζοντας $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(1)}, B_n^{(2)}, B_n^{(3)}$ στις (6.5), (6.6), (6.7) τα δυναμικά για μονοπολική πηγή έχουν τη μορφή:

$$\psi^-(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left(-\frac{(s+1)}{s \varepsilon (2s+1)} \frac{r_0^s}{r_s^{2s+1}} \right) r^s$$

$$- \frac{1}{\varepsilon (2s+1)} \frac{r^s}{r_0^{s+1}}, \quad 0 < r < r_0 \quad (6.16)$$

$$\psi^-(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[\left(-\frac{(s+1)}{s \varepsilon (2s+1)} \frac{r_0^s}{r_s^{2s+1}} \right) r^s - \frac{1}{\varepsilon (2s+1)} \frac{r_0^s}{r^{s+1}} \right], \quad r_0 < r < r_s \quad (6.17)$$

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left(-\frac{r_0^s}{\varepsilon s} \right) r^{-(s+1)}, \quad r > r_s. \quad (6.18)$$

Με τη χρήση της συνάρτησης Green, τα δυναμικά που αντιστοιχούν σε μονοπολική πηγή ανάγονται στα αντίστοιχα δυναμικά διπολικής πηγής

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') = -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$$

όπου $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$, η συνάρτηση Green με \mathbf{r}_0 την θέση της πηγής.

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \begin{cases} \psi_c^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}'), & 0 < r < r_0 \\ \psi_c^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}'), & r_0 < r < r_s \\ \psi^+(\mathbf{r}; \mathbf{r}'), & r > r_s \end{cases}$$

Σε αντιστοιχία με τις πράξεις του ανισότροπου μη ομογενούς με μονοπολική πηγή λαμβάνουμε τα αποτελέσματα για το ανισότροπο ομογενές

$$u^{\text{anisot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi\varepsilon(2s+1)} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{(s+1)}{s r_s^{2s+1}} \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] + \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{s+1}} \right] \right\} r^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad 0 < r < r_0 \quad (6.19)$$

$$u^{\text{anisot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi\varepsilon(2s+1)} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{(s+1)}{s r_s^{2s+1}} \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] r^s + \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r^{s+1}} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_0 < r < r_s \quad (6.20)$$

$$u^{\text{anisot}}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi\varepsilon s} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) r^{-(s+1)}, \quad r > r_s \quad (6.21)$$

6.2. Ισότροπο ομογενές σφαιρικό πρότυπο

Στον ομογενή αγωγό που μελετάται στη συνέχεια, δεν λαμβάνονται υπόψη εσωτερικές ανομοιογένειες, όπως στρώματα (φλοιοί) με διαφορετική αγωγιμότητα. Κατά συνέπεια, το μέσο χαρακτηρίζεται από μία και μοναδική σταθερή αγωγιμότητα σ . Επιπλέον, σε μια μελέτη περίπτωσης με ισοτροπία δεν υπάρχουν διαφορετικές αγωγιμότητες (ε, η) ως προς την ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση r σχέση (6.23).

$$\sigma_c = \sigma_f = \sigma_b = \sigma_s = \sigma \quad (6.22)$$

$$\varepsilon = \eta = \sigma \quad (6.23)$$

Στη σχέση (6.23), η $\varepsilon(\xi_1)$, περιγράφει την ακτινική αγωγιμότητα ως συνάρτηση της ακτινικής σφαιρικής συντεταγμένης ενώ η $\eta(\xi_1)$ περιγράφει την εφαπτομενική αγωγιμότητα. Ακόμη ισχύει πως η λύση της ΔΕ από το ανισότροπο μη ομογενές σύστημα (4.31) διαμορφώνεται:

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4n(n+1) \frac{\eta}{\varepsilon}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4n(n+1)} = \begin{cases} n \\ -n-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_1 = n \text{ και } s_2 = -(n+1) \quad (6.23)$$

Στο σημείο αυτό της εργασίας υπολογίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό σε έναν ομογενή και ισότροπο σφαιρικό αγωγό. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε μέσω αναγωγής του γενικού ανισότροπου πολυστρωματικού μοντέλου (τριών φλοιών), είτε ως ειδική περίπτωση του ανισότροπου ομογενούς αγωγού. Στην παρούσα εργασία επιλέγεται η πρώτη προσέγγιση, καθώς το ανισότροπο μη ομογενές μοντέλο αποτελεί το αρχικό μαθηματικό πρόβλημα επίλυσης του δυναμικού που έχει ήδη αναλυθεί στο κεφάλαιο 4.

Υπό τις παραδοχές (6.22) και (6.23), οι οκτώ γραμμικές εξισώσεις που περιγράφουν το ανισότροπο, σφαιρικό και μη ομογενές σύστημα απλοποιούνται και μετασχηματίζονται στη μορφή που ακολουθεί:

1. $A_{c,n}^{(2)} - A_{f,n} - B_{f,n} r_c^{-2n-1} = \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{(r_c^{2n+1})}$
2. $A_{c,n}^{(2)} - A_{f,n} + \frac{(n+1)r_c^{-2n-1}}{n} B_{f,n} = -\frac{(n+1)}{n \sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}}$
3. $A_{f,n} + B_{f,n} r_f^{-2n-1} - A_{b,n} - B_{b,n} r_f^{-2n-1} = 0$
4. $A_{f,n} - B_{f,n} \frac{(n+1)}{n} r_f^{-2n-1} - A_{b,n} + B_{b,n} \frac{(n+1)}{n} r_f^{-2n-1} = 0$
5. $A_{b,n} + B_{b,n} r_b^{-2n-1} - A_{s,n} - B_{s,n} r_b^{-2n-1} = 0$

$$\begin{aligned}
6. \quad & A_{b,n} - B_{b,n} \frac{(n+1)}{n} r_b^{-2n-1} - A_{s,n} + B_{s,n} \frac{(n+1)}{n} r_b^{-2n-1} = 0 \\
7. \quad & A_{s,n} r_s^{2n+1} + B_{s,n} - B_{e,n} = 0 \Rightarrow A_{s,n} = (-B_{s,n} + B_{e,n}) r_s^{-2n-1} \\
8. \quad & A_{s,n} - B_{s,n} \frac{(n+1)}{n} r_s^{-2n-1} = 0 \Rightarrow A_{s,n} = B_{s,n} \frac{(n+1)}{n} r_s^{-2n-1}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Από τις 7,8 έχουμε: $B_{s,n} \left[\frac{2n+1}{n} \right] = B_{e,n}$

Από τις 5,6 έχουμε:

$$\begin{aligned}
& B_{b,n} r_b^{-2n-1} - A_{s,n} - B_{s,n} r_b^{-2n-1} \\
& = -B_{b,n} \frac{(n+1)}{n} r_b^{-2n-1} - A_{s,n} + B_{s,n} \frac{(n+1)}{n} r_b^{-2n-1} \\
& B_{b,n} \left[1 + \frac{(n+1)}{n} \right] = B_{s,n} \left[1 + \frac{(n+1)}{n} \right] \Rightarrow B_{b,n} = B_{s,n}
\end{aligned}$$

Από τις 3,4 έχουμε: $B_{f,n} = B_{b,n}$

Από τις 1,2 έχουμε:

$$\begin{aligned}
A_{f,n} + B_{f,n} r_c^{-2n-1} + \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{(r_c^{2n+1})} &= A_{f,n} - \frac{(n+1) r_c^{-2n-1}}{n} B_{f,n} - \frac{(n+1)}{n \sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}} \\
B_{f,n} \left(1 + \frac{(n+1)}{n} \right) r_c^{-2n-1} &= -\frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{(r_c^{2n+1})} - \frac{(n+1)}{n \sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}} \\
B_{f,n} \frac{(2n+1)}{n} &= -\frac{r_0^n}{\sigma(2n+1)n} [n + (n+1)] \Rightarrow B_{f,n} = -\frac{r_0^n}{\sigma(2n+1)}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
B_{f,n} = B_{b,n} = B_{s,n} &= -\frac{1}{\sigma(2n+1)} r_0^n \\
B_{e,n} = B_{s,n} \left[\frac{2n+1}{n} \right] &= -\frac{r_0^n}{\sigma n}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Συντελεστές A_{in}

$$\text{Από 7: } A_{s,n} = (-B_{s,n} + B_{e,n}) r_s^{-2n-1} = B_{s,n} \left(-1 + \frac{2n+1}{n} \right) r_s^{-2n-1} = B_{s,n} \left(\frac{n+1}{n} \right) r_s^{-2n-1}$$

$$\text{Από 6: } A_{b,n} = B_{b,n} \frac{(n+1)}{n} r_b^{-2n-1} + A_{s,n} - B_{s,n} \frac{(n+1)}{n} r_b^{-2n-1} \Rightarrow A_{b,n} = A_{s,n}$$

$$\text{Από 4: } A_{f,n} = A_{b,n} \text{ και από την 2: } A_{c,n}^{(2)} = A_{f,n}$$

$$\begin{aligned}
\text{Άρα: } A_{s,n} = A_{f,n} = A_{b,n} = A_{c,n}^{(2)} &= B_{s,n} \left(\frac{n+1}{n} \right) r_s^{-2n-1} = -\frac{1}{\sigma(2n+1)} r_0^n \left(\frac{n+1}{n} \right) r_s^{-2n-1} \\
&= -\frac{(n+1) r_0^n}{\sigma(2n+1)n} r_s^{-2n-1} = -\frac{(n+1) r_0^n}{\sigma(2n+1)n} r_s^{-2n-1}
\end{aligned}$$

$$A_{s,n} = A_{f,n} = A_{b,n} = A_{c,n}^{(2)} = -\frac{(n+1)r_0^n}{\sigma(2n+1)n} r_s^{-2n-1} \quad (6.26)$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι για το εσωτερικό χωρίο δίνεται από την σχέση:

$$\psi_c(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{cases} A_{c,n}^{(2)} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r^n}{r_0^{n+1}}, & 0 < r < r_0 \\ A_{c,n}^{(2)} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}}, & r_0 < r < r_c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} *) A_{c,n}^{(2)} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} &= -\frac{(n+1)r_0^n}{\sigma(2n+1)n} r_s^{-2n-1} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \\ &= -\frac{r_0^n r^n}{\sigma(2n+1)n} [(n+1)r_s^{-2n-1} + n r_0^{-2n-1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} **) A_{c,n}^{(2)} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} &= -\frac{(n+1)r_0^n}{\sigma(2n+1)n} r_s^{-2n-1} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \\ &= -\frac{r_0^n r^n}{\sigma(2n+1)n} [(n+1)r_s^{-2n-1} + n r^{-2n-1}] \end{aligned}$$

$\psi_c(\mathbf{r})$

$$= \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \begin{cases} -\frac{r_0^n r^n}{\sigma(2n+1)n} [(n+1)r_s^{-2n-1} + n r_0^{-2n-1}], & 0 < r < r_0 \\ -\frac{r_0^n r^n}{\sigma(2n+1)n} [(n+1)r_s^{-2n-1} + n r^{-2n-1}], & r_0 < r < r_c \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\psi_c^-(\mathbf{r}) &= \sum_{nma}^{\infty n1} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{M}{\sigma(2n+1)} \left[\frac{(n+1)}{n} \left(\frac{r_0}{r_s}\right)^n \left(\frac{r^n}{r_s^{n+1}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \right], \quad 0 < r < r_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\psi_c^-(\mathbf{r}) &= \sum_{nma}^{\infty n1} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{M}{\sigma(2n+1)} \left[\frac{(n+1)}{n} \left(\frac{r_0}{r_s}\right)^n \left(\frac{r^n}{r_s^{n+1}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_0^n}{r^{n+1}} \right], \quad r_0 < r < r_c \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ενώ το ηλεκτρικό δυναμικό στους ενδιάμεσους φλοιούς από τις σχέσεις (6.25), (6.26) :

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) [A_{f,n} r^n + B_{f,n} r^{-(n+1)}], \quad \mathbf{r} \in \Omega_f$$

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[-\frac{(n+1) r_0^n}{\sigma (2n+1)n} r_s^{-2n-1} r^n - \frac{1}{\sigma(2n+1)} r_0^n r^{-(n+1)} \right] \quad (6.28)$$

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left\{ -\frac{r_0^n r^n}{\sigma (2n+1)n} [(n+1) r_s^{-2n-1} + n r^{-(2n+1)}] \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_f$$

$$\psi_b(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left\{ -\frac{r_0^n r^n}{\sigma (2n+1)n} [(n+1) r_s^{-2n-1} + n r^{-(2n+1)}] \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_b \quad (6.29)$$

$$\psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left\{ -\frac{r_0^n r^n}{\sigma (2n+1)n} [(n+1) r_s^{-2n-1} + n r^{-(2n+1)}] \right\}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_s \quad (6.30)$$

για το εξωτερικό χωρίο

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[-\frac{r_0^n}{\sigma n} r^{-(n+1)} \right], \quad \mathbf{r} \in \Omega_e. \quad (6.31)$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα των δυναμικών $\psi_f(\mathbf{r})$, $\psi_b(\mathbf{r})$, $\psi_s(\mathbf{r})$ μας επιβεβαιώνουν πως στην μελέτη περίπτωσης που υπάρχει ομοιογένεια ως προς την αγωγιμότητα, το πρόβλημα ενός πρότυπου μη ομογενούς συστήματος με 3 φλοιούς ανάγεται σε ένα ομογενές σφαιρικό πρότυπο με τις ίδιες εξισώσεις των δυναμικών (ίδια δυναμικά) ανάμεσα στους φλοιούς.

Επιπλέον, επαληθεύτηκε ότι σε ένα ομογενές μοντέλο το δυναμικό που υπάρχει στο εξωτερικό μέρος της πηγής $\psi_c^-(\mathbf{r})$ είναι το ίδιο με το υπόλοιπα χωρία του σφαιρικού μοντέλου $\psi_f(\mathbf{r}) = \psi_b(\mathbf{r}) = \psi_s(\mathbf{r})$. Για το ομογενές ισότροπο προκύπτει

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\sum_{nma}^{\infty n1} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{M}{\sigma (2n+1)} \left[\frac{(n+1)}{n} \left(\frac{r_0}{r_s}\right)^n \left(\frac{r^n}{r_s^{n+1}}\right) + \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \right], & 0 < r < r_0 \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left\{ -\frac{r_0^n r^n}{\sigma (2n+1)n} [(n+1) r_s^{-2n-1} + n r^{-(2n+1)}] \right\}, & r_0 < r < r_s \\ \sum_{nma}^{\infty n1} M \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \left[-\frac{r_0^n}{\sigma n} r^{-(n+1)} \right], & r > r_s \end{cases} \quad (6.32)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις εξισώσεις του ηλεκτρικού δυναμικού που προέκυψαν από την αναγωγή του ανισότροπου μη ομογενούς, θα προχωρήσουμε στην αναγωγή του δυναμικού με μονοπολική πηγή σε δυναμικό με διπολική πηγή με τη βοήθεια της συνάρτησης $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$ με \mathbf{r}_0 την θέση της πηγής (4.70). Το δυναμικό για το ισότροπο ομογενές σφαιρικό πρότυπο με μονοπολική πηγή (6.32) μετασχηματίζεται για διπολική πηγή όπως παρακάτω:

$$\begin{aligned}
u^{\bar{}}(\mathbf{r}) &= -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left\{ - \sum_{nma}^{\infty 1} \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{\sigma (2n+1)} \left[\frac{(n+1)}{n} \left(\frac{r_0}{r_s}\right)^n \left(\frac{r^n}{r_s^{n+1}}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \right] \right\} \\
u^{\bar{}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty 1} \nabla_{\mathbf{r}_0} \left\{ \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{\sigma (2n+1)} \left[\frac{(n+1)}{n} \frac{r_0^n r^n}{r_s^{2n+1}} + \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \right] \right\} \\
u^{\bar{}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty 1} \frac{1}{\sigma (2n+1)} \left\{ \frac{(n+1)}{n} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^n \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r_s^{2n+1}} \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{\bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{n+1}} \right] \right\} r^n \bar{Y}_{nma}(\hat{\mathbf{r}})
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις μορφές των Y_{nma} από τις σχέσεις (2.40),(2.41) κεφάλαιο 2 έχουμε:

$$\begin{aligned}
u^{\bar{}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty 1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{1}{\sigma (2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{(n+1)}{n} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r_s^{2n+1}} \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{n+1}} \right] \right\} r^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \\
u^{\bar{}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty 1} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{(n+1)}{n} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r_s^{2n+1}} \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{\mathbf{r}_0} \left[\frac{Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)}{r_0^{n+1}} \right] \right\} r^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Ομοίως για $r_0 < r < r_s$

$$\begin{aligned}
u^{\bar{}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty 1} \frac{1}{2\pi\sigma} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{(n+1)}{n} \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r_s^{2n+1}} r^n \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r^{n+1}} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \tag{6.34}
\end{aligned}$$

για $r > r_s$

$u_e(\mathbf{r}) =$

$$\mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{1}{\sigma n} \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^n Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) r^{-(n+1)} \quad (6.35)$$

6.3. Σύγκριση ανισότροπων και ισότροπων ομογενών προτύπων

Προκειμένου να επαληθευθούν οι αναλυτικές εκφράσεις που παρουσιάστηκαν ανωτέρω στις υποενότητες 6.1 και 6.2, υιοθετούνται ορισμένες παραδοχές σχετικά με την πρωτογενή πηγή ρεύματος. Ειδικότερα, θεωρούμε μία χωρικά εντοπισμένη διπολική πηγή στη θέση r_0 με διπολική ροπή \mathbf{Q} , η οποία μοντελοποιείται ως ιδανικό ηλεκτρικό δίπολο και περιγράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από τη σχέση:

$$\mathbf{Q} = 10^{-5} \hat{\mathbf{r}}_0 \quad (6.37)$$

Για τη διασφάλιση της υπολογιστικής ακρίβειας και τη μελέτη των διαταραχών στο βάθος που εντοπίζεται η πηγή, εξετάζονται τρεις διαφορετικές ακτινικές θέσεις εντός του σφαιρικού μοντέλου της κεφαλής, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

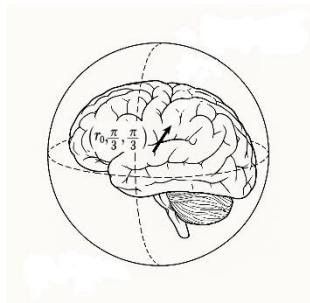
$$r_{01} = 10^{-2} \text{ m}, \quad r_{02} = 3 * 10^{-2} \text{ m}, \quad r_{03} = 6 * 10^{-2} \text{ m} \quad (6.38)$$

$$\mathbf{r}_{01} = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = (0.01, \pi/3, \pi/3)$$

$$\mathbf{r}_{02} = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = (0.03, \pi/3, \pi/3) \quad (6.39)$$

$$\mathbf{r}_{03} = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = (0.06, \pi/3, \pi/3)$$

Επιπλέον, το διάνυσμα θέσης της πηγής $\hat{\mathbf{r}}_0$ καθορίζεται με σταθερό προσανατολισμό. $(\theta_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, ο οποίος θεωρείται αμετάβλητος κατά τη διάρκεια της ανάλυσης.



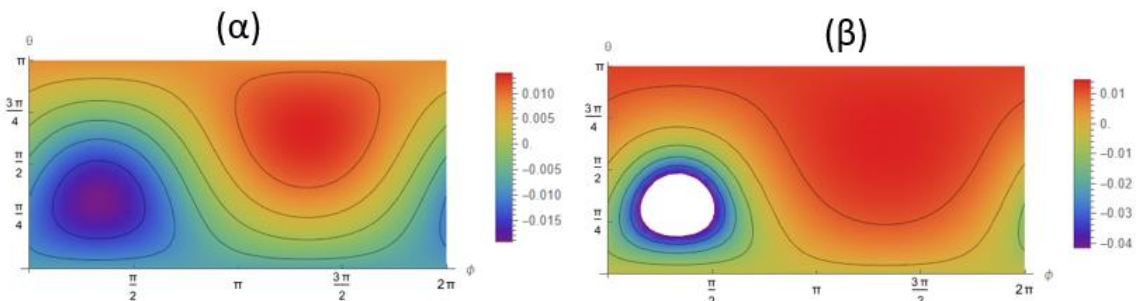
Σχήμα 6.2 Το διάνυσμα θέσης της πηγής r_0

Για την μελέτη της επίδρασης της ανισοτροπίας, πραγματοποιούμε αναλυτική σύγκριση του ηλεκτρικού δυναμικού σε τρεις χωρικές περιοχές: (i) εντός της κεφαλής $0 < r < r_0$, (ii)

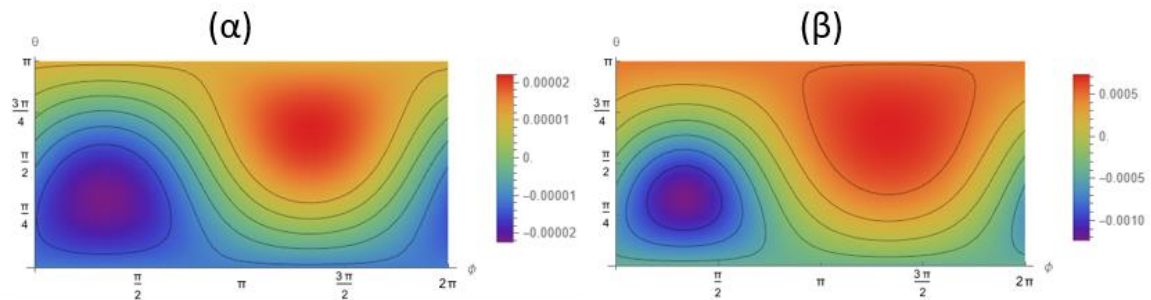
μεταξύ πηγής και επιφάνειας $r_0 < r < r_s$, και (iii) εκτός του κεφαλικού μοντέλου $r > r_s$. Η ανάλυση επαναλαμβάνεται για τρία διαφορετικά βάθη πηγής (r_{o1}, r_{o2}, r_{o3}), προσφέροντας πλήρη αξιολόγηση της επίδρασης τόσο της θέσης της πηγής όσο και της ανισοτροπίας των ιστών στα δυναμικά που καταγράφονται στην επιφάνεια.

Η εξέλιξη της διαδικασίας αυτής της μελέτης για το δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, τόσο για ισότροπα όσο και για ανισότροπα υλικά, παρουσιάζεται στις επόμενες γραφικές παραστάσεις (plots) που έχουν δημιουργηθεί με τη βοήθεια του Wolfram Mathematica. Οι αντίστοιχες μετρήσεις των δυναμικών στα σημεία παρατίθενται συγκεντρωτικά στον πίνακα 6.1.

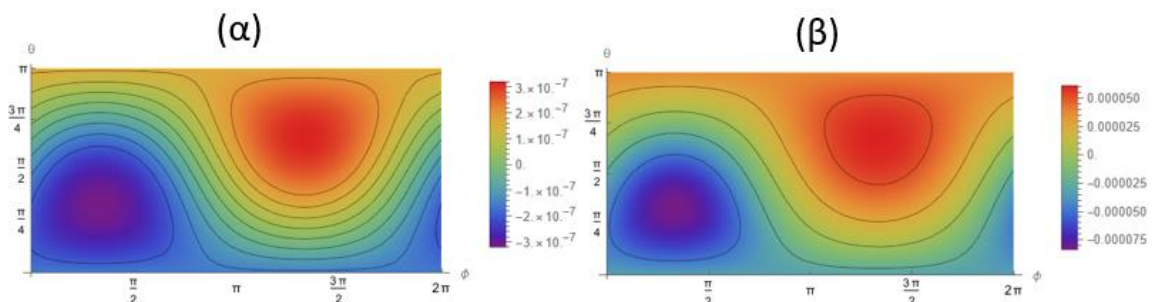
Η περιοχή $0 < r < r_0$ αναλύεται διεξοδικά για διαφορετικά βάθη της πηγής (r_{o1}, r_{o2}, r_{o3}). Για σταθερό προσανατολισμό και ακτίνα $r = 0.005m$, τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται στα σχήματα 6.3- 6.5.



Σχήμα 6.3. Ηλ. Δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.005m$ θέση πηγής $r_{o1} = (0.01, \pi/3, \pi/3)$
(α) ανισότροπο (β) ισότροπο

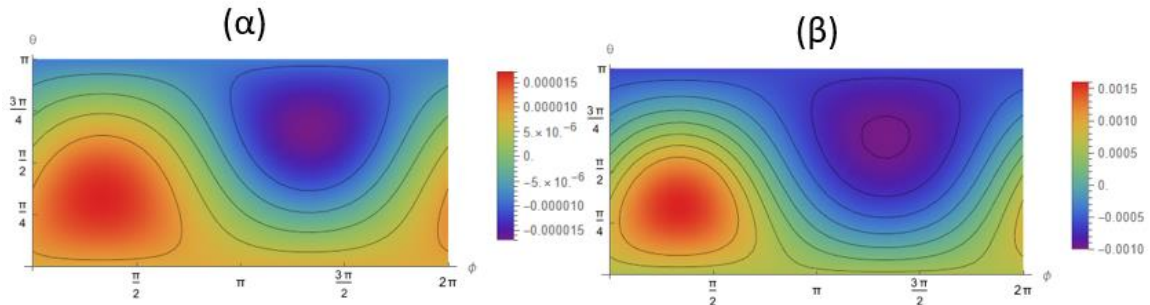


Σχήμα 6.4 Ηλ. Δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.005m$ θέση πηγής $r_{o2} = (0.03, \pi/3, \pi/3)$
(α) ανισότροπο (β) ισότροπο

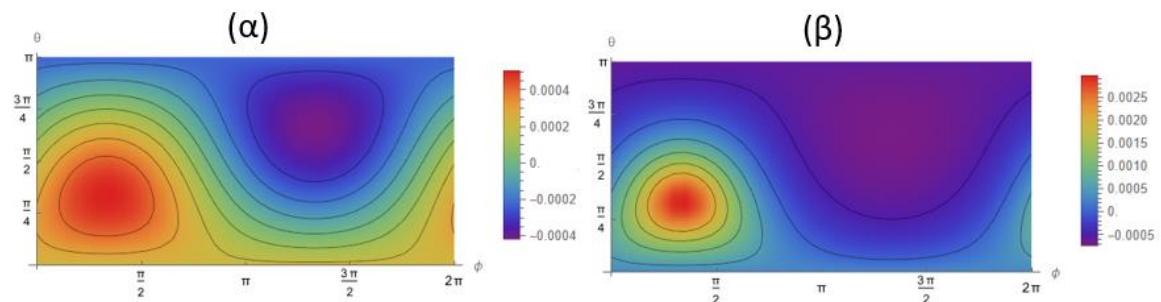


Σχήμα 6.5 Ηλ. Δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.005m$, θέση πηγής $r_{o3} = (0.06, \pi/3, \pi/3)$
(α) ανισότροπο (β) ισότροπο

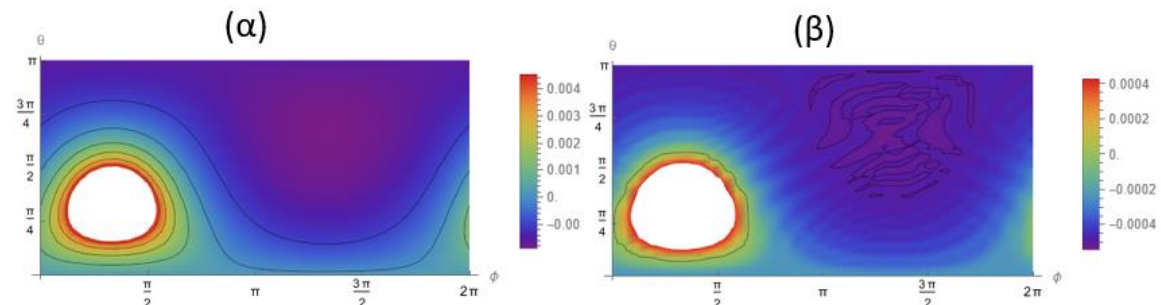
Το ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή $r_0 < r < r_s$, σε θέση παρατήρησης $r = 0.07m$ παρουσιάζονται στα διαγράμματα - σχήματα 6.6 - 6.7.



Σχήμα. 6.6 Ηλ. Δυναμικό $u^-(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.07m$, θέση πηγής $r_{01} = \left(0.01, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(α)ανισότροπο (β) ισότροπο

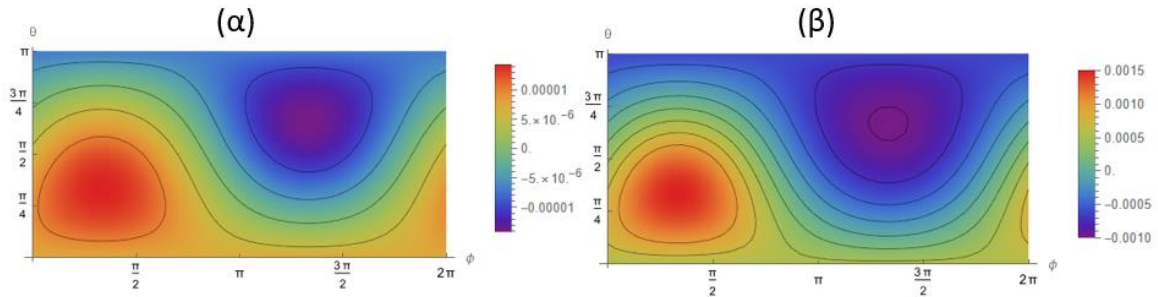


Σχήμα. 6.7 Ηλ. Δυναμικό $u^-(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.07m$, θέση πηγής $r_{02} = \left(0.03, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(α)ανισότροπο (β) ισότροπο

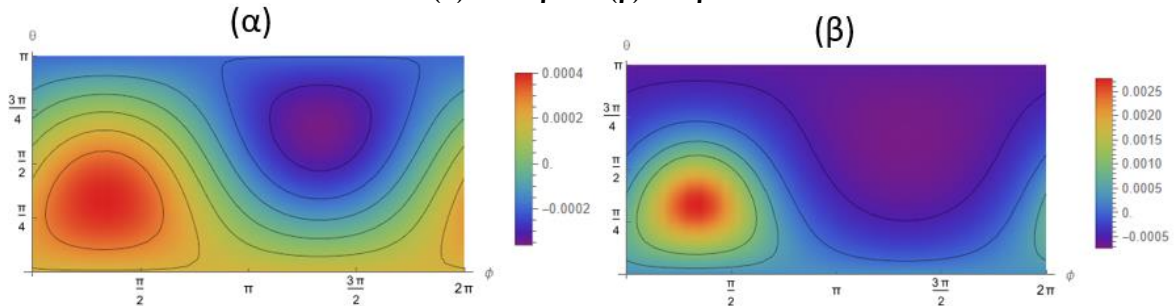


Σχήμα. 6.8 Ηλ. Δυναμικό $u^-(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.07m$, θέση πηγής $r_{03} = \left(0.06, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(α)ανισότροπο (β) ισότροπο

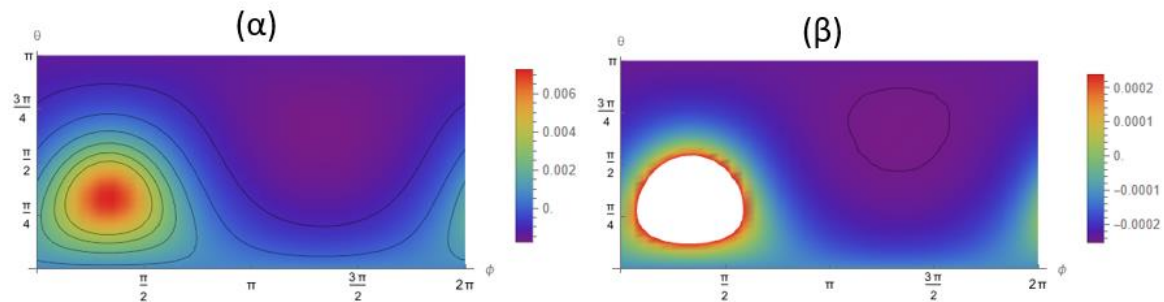
Το ηλεκτρικό δυναμικό στην περιοχή $r > r_\alpha$, (στα ίδια βάθη και με τον ίδιο προσανατολισμό φ, θ) σε επιλεγμένη θέση παρατήρησης $r = 0.08m$ παρουσιάζονται στα διαγράμματα (density plots) - σχήματα 6.9 - 6.11.



Σχήμα. 6.9 Ηλ. Δυναμικό $u^+(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.08m$, θέση πηγής $r_{01} = \left(0.01, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(α) ανισότροπο (β) ισότροπο



Σχήμα. 6.10 Ηλ. Δυναμικό $u^+(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.08m$, θέση πηγής $r_{02} = \left(0.03, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(α) ανισότροπο (β) ισότροπο



Σχήμα. 6.11 Ηλ. Δυναμικό $u^+(r, \theta, \varphi)$, με $r = 0.08m$, θέση πηγής $r_{03} = \left(0.06, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
(α) ανισότροπο (β) ισότροπο

6.4. Αποτελέσματα ανάλυσης ισότροπων και ανισότροπων ομογενών προτύπων

Το ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (ΗΕΓ), αφορά τον υπολογισμό της κατανομής του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια της κεφαλής, ως απόκριση σε δεδομένες ισοδύναμες νευρωνικές διπολικές πηγές εντός αγώγιμων εγκεφαλικών ιστών. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται αναλυτικά με τη χρήση σφαιρικών προτύπων κεφαλής, όπως παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες. Στο κεφάλαιο 6, εξετάστηκε η επίλυση του άμεσου προβλήματος ΗΕΓ μέσω ενός ομογενούς σφαιρικού προτύπου με ανισότροπες ιδιότητες. Αναπτύχθηκαν αναλυτικές εκφράσεις της εξίσωσης Poisson για το ηλεκτρικό δυναμικό, με ανισότροπο τανυστή αγωγιμότητας, από ένα διπολικό ρεύμα εντός του

προτύπου κεφαλής και συγκεκριμένα στις διακριτές ακτινικές περιοχές $0 < r < r_0$, $r_0 < r < r_\alpha$ και $r > r_\alpha$, για επιλεγμένες ακτίνες. Οι ακτίνες αυτές αντιστοιχούν σε τρία διαφορετικά βάρη πηγής r_{01}, r_{02}, r_{03} . Επιπλέον, το σύστημα της κεφαλής θεωρήθηκε ότι περιβάλλεται από μη αγώγιμο μέσο (αέρα).

Από τα διαγράμματα (σχήματα 6.3–6.11), καθώς και από τις μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν σε επιλεγμένα σημεία όλων των περιοχών που μελετήθηκαν, διαπιστώθηκε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό μειώνεται με την αύξηση της ακτινικής απόστασης (πίνακας 6.1). Η συμπεριφορά αυτή προκύπτει με σαφήνεια από τις μετρήσεις στο σημείο $(r, \varphi, \theta) = (0.005, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, όπου για βάθος πηγής $|\mathbf{r}_{01}| = 0.01m$ και σημείο παρατήρησης $r = 0.005m$ το δυναμικό είναι $u^-(\mathbf{r}) = -1.79433 \cdot 10^{-2}v$ ενώ για βάθος $|\mathbf{r}_{03}| = 0.06m$ το δυναμικό είναι $u^-(\mathbf{r}) = -3.046 \cdot 10^{-7}v$ δηλαδή πέντε τάξεις μεγέθους ως προς το μέτρο του δυναμικού μικρότερο.

Καθώς το βάθος της πηγής μεταβλήθηκε από $|\mathbf{r}_{01}| = 0.01m$ σε $|\mathbf{r}_{03}| = 0.06m$, το ηλεκτρικό δυναμικό μεταβλήθηκε ως συνέπεια της αλλαγής της απόστασης μεταξύ της πηγής και του σημείου παρατήρησης. Η παρατηρούμενη συμπεριφορά του ηλεκτρικού δυναμικού είναι σύμφωνη με τη δομή των αναλυτικών λύσεων (6.19, (6.20) και (6.33), (6.34), στις οποίες η χωρική εξάρτηση περιγράφεται μέσω όρων της μορφής r^n και $r^{-(n+1)}$. Συγκεκριμένα, στη θέση παρατήρησης $r = 0.07m$ παρουσιάστηκε σημαντική αύξηση του δυναμικού, καθώς το σημείο παρατήρησης προσεγγίζει τη θέση της πηγής ($|\mathbf{r}_{03}| = 0.06m$), και το δυναμικό αυξήθηκε από $u^-(\mathbf{r}) = 0.0161315 \cdot 10^{-3}$ στο $|\mathbf{r}_{01}| = 0.01m$ σε $u^-(\mathbf{r}) = 9.17645 \cdot 10^{-3}$ σε θέση πηγής $|\mathbf{r}_{03}| = 0.06m$, αντιστοιχώντας σε μεταβολή της τάξης των δύο μεγεθών. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με προηγούμενες μελέτες στη μοντελοποίηση ΗΕΓ (Wolters et al., 2006), όπου χρησιμοποιήθηκαν ρεαλιστικά πρότυπα κεφαλής βασισμένα σε δεδομένα MRI και καταγράφηκαν παρόμοιες μεταβολές του δυναμικού ως προς το βάθος της πηγής.

Ένα ακόμη σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι οι νευρωνικές διπολικές πηγές που εντοπίζονται κοντά στην επιφάνεια της κεφαλής εμφανίζουν μειωμένη ευαισθησία στην ανισοτροπία της αγωγιμότητας, λόγω του μικρού τους βάθους. Η παρατήρηση αυτή συμφωνεί με τη μελέτη (Akhtari et al., 2002), όπου καταδεικνύεται ότι η ανισοτροπία της αγωγιμότητας του κρανίου επηρεάζει εντονότερα τις βαθύτερες πηγές. Τα παρόντα αποτελέσματα το επιβεβαιώνουν, καθώς για πηγές σε μεγαλύτερα βάρη ($|\mathbf{r}_{01}| = 0.01m$)

η ανισότροπη αγωγιμότητα των ιστών μεταβάλλει σημαντικά το προκύπτον ηλεκτρικό πεδίο, ενώ για επιφανειακές πηγές η επίδραση αυτή είναι αισθητά μειωμένη. Το εύρημα αυτό υποστηρίζεται και από τη μελέτη (Hallez et al., 2009), όπου τονίζεται η σημασία της ανισοτροπίας των ιστών για την ακριβή εντόπιση πηγών, ιδίως σε βαθύτερες εγκεφαλικές περιοχές.

Ειδικότερα, στην περιοχή $r_0 < r < r_a$ για βάθος πηγής $|\mathbf{r}_{01}| = 0.01 \text{ m}$, το ηλεκτρικό δυναμικό στο ανισότροπο πρότυπο υπολογίστηκε ίσο με $u^-(\mathbf{r}) = 0.0161315 \cdot 10^{-3} \text{ v}$, ενώ για πηγή πησίον της επιφάνειας με βάθος $|\mathbf{r}_{03}| = 0.06 \text{ m}$ προέκυψε $u^-(\mathbf{r}) = 9.17645 \cdot 10^{-3} \text{ v}$. Τα αποτελέσματα αυτά καταδεικνύουν ότι οι βαθύτερες πηγές επηρεάζονται εντονότερα από τις ανισότροπες ιδιότητες των περιβαλλόντων ιστών, οδηγώντας σε μεγαλύτερες μεταβολές του ηλεκτρικού δυναμικού. Αυτό αποτυπώνεται στη σημαντικά μεγαλύτερη διαφορά δυναμικού που παρατηρείται στο ανισότροπο πρότυπο σε σύγκριση με το ισότροπο, για ίδιες γεωμετρικές συνθήκες.

Συγκεκριμένα, στην περιοχή $r_0 < r < r_a$ και για σημείο παρατήρησης $r = 0.07 \text{ m}$ σε βαθιά πηγή με $|\mathbf{r}_{01}| = 0.01 \text{ m}$ το δυναμικό στο ανισότροπο πρότυπο λαμβάνει την τιμή $u^-(\mathbf{r}) = 0.0161315 \cdot 10^{-3} \text{ v}$ ενώ στο αντίστοιχο ισότροπο το δυναμικό είναι $u^-(\mathbf{r}) = 1.4668 \cdot 10^{-3} \text{ v}$. Η διαφορά αυτή υποδηλώνει ότι η ανισοτροπία ενισχύει την επίδραση των βαθιών πηγών στο παρατηρούμενο δυναμικό γεγονός που αναδεικνύει τον κρίσιμο ρόλο της στη ρεαλιστική προσομοίωση της διάδοσης των βιοηλεκτρικών πεδίων. Αντίστοιχα, για επιφανειακές πηγές, το ανισότροπο πρότυπο παρουσιάζει δυναμικό $u^-(\mathbf{r}) = 9.17645 \cdot 10^{-3} \text{ v}$ ενώ στο ισότροπο πρότυπο το δυναμικό είναι $u^-(\mathbf{r}) = 3.23795 \cdot 10^{-3} \text{ v}$ δηλαδή παρουσίασε μικρότερες αποκλίσεις

Ακόμη, για πρότυπο κεφαλής με ακτίνα $r_a = 0.08 \text{ m}$ και βάθος πηγής $|\mathbf{r}_{03}| = 0.06 \text{ m}$, το ηλεκτρικό δυναμικό παρουσίασε μικρότερες αποκλίσεις μεταξύ ισότροπου και ανισότροπου προτύπου, και οι διαφορές αυτές μειώνονται όσο η πηγή πλησιάζει την επιφάνεια της κεφαλής, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τις μελέτες (Wolters et al., 2001, 2006).

Πέραν του ευθέως προβλήματος, η ανισοτροπία διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο και στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος εντοπισμού νευρωνικών πηγών. Η ακρίβεια του εντοπισμού συνδέεται άμεσα την κατανόηση της εγκεφαλικής δραστηριότητας, στοιχείο κρίσιμο τόσο για κλινικές όσο και για ερευνητικές εφαρμογές. Η παράλειψη της

ανισοτροπίας, και ειδικότερα στο κρανίο, έχει αποδειχθεί ότι οδηγεί σε σημαντικά σφάλματα στον εντοπισμό πηγών, όπως έχει επισημανθεί στη σχετική βιβλιογραφία (Hallez et al., 2008). Αντίθετα, η ενσωμάτωση ανισότροπων αγωγιμοτήτων βελτιώνει την ακρίβεια του εντοπισμού πηγών, μειώνοντας τα σφάλματα που παρατηρούνται στα ισότροπα πρότυπα.

Γενικότερα, η παραμέληση της ανισοτροπίας των βιολογικών ιστών επηρεάζει δυσμενώς τόσο τη λύση του ευθέως προβλήματος όσο και τη διαδικασία εντοπισμού πηγών (McCann et al., 2019). Στο πλαίσιο αυτό, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας ενισχύουν τα υφιστάμενα συμπεράσματα, καταδεικνύοντας ότι οι βαθύτερες νευρωνικές πηγές εμφανίζουν αυξημένη ευαισθησία στις ανισότροπες ιδιότητες των ιστών, οδηγώντας σε ακριβέστερες και πιο αξιόπιστες κατανομές δυναμικού σε σχέση με τα ισότροπα πρότυπα.

Η εισαγωγή τανυστών ανισότροπης αγωγιμότητας οδήγησε σε ένα πιο ρεαλιστικό πρότυπο κεφαλής και σε βελτιωμένη ακρίβεια των αποτελεσμάτων προσομοίωσης ΗΕΓ. Η ανισοτροπία αποδείχθηκε ότι επηρεάζει σημαντικά τη συμπεριφορά του συστήματος, ιδιαίτερα για βαθιές πηγές, ενισχύοντας την ανάγκη χρήσης ανισότροπων προτύπων τόσο στο ευθύ όσο και στο αντίστροφο πρόβλημα. Παρότι τα ισότροπα πρότυπα προσφέρουν απλότητα και μικρότερο υπολογιστικό κόστος, δεν αποτυπώνουν επαρκώς τη δομική και λειτουργική πολυπλοκότητα του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Συνολικά, τα ευρήματα της μελέτης συμβάλλουν στην πρόοδο της μαθηματικής μοντελοποίησης της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας, προσφέροντας ακριβέστερη αναπαράσταση της εγκεφαλικής δραστηριότητας και βελτιωμένη ακρίβεια στον εντοπισμό ισοδύναμων νευρωνικών πηγών. Ειδικότερα, η ανισοτροπία του τανυστή αγωγιμότητας μεταβάλλει ουσιαστικά την κατανομή του ηλεκτρικού δυναμικού που παράγεται από διπολικές πηγές, με την επίδρασή της να καθίσταται εντονότερη σε βαθύτερες εγκεφαλικές περιοχές.

r_0	Ηλεκτρικό δυναμικό (volt) σε μοντέλο ομογενές με ανισότροπη αγωγιμότητα	Ηλεκτρικό δυναμικό (volt) σε μοντέλο ομογενές με ισότροπη αγωγιμότητα
$0 < r < r_0$ where $r=0.005$ m		
0.01m	$- 17.9433 \cdot 10^{-3}$	$- 56.5139 \cdot 10^{-3}$
0.03m	$- 0.0211545 \cdot 10^{-3}$	$- 1.12862 \cdot 10^{-3}$

0.06m	$- 0.0003046 \cdot 10^{-3}$	$- 0.0780411 \cdot 10^{-3}$
$r_0 < r < r_a$ where $r = 0.07m$		
0.01m	$0.0161315 \cdot 10^{-3}$	$1.4668 \cdot 10^{-3}$
0.03m	$0.472776 \cdot 10^{-3}$	$2.35943 \cdot 10^{-3}$
0.06m	$9.17645 \cdot 10^{-3}$	$3.23795 \cdot 10^{-3}$
$r > r_a$ where $r = 0.08m$		
0.01m	$0.013523 \cdot 10^{-3}$	$1.42814 \cdot 10^{-3}$
0.03m	$0.387673 \cdot 10^{-3}$	$2.24187 \cdot 10^{-3}$
0.06m	$5.77121 \cdot 10^{-3}$	$1.91596 \cdot 10^{-3}$

Πίνακας 6.1 Μετρήσεις δυναμικού σε ανισότροπο και ισότροπο σφαιρικό μοντέλο

Κεφάλαιο 7^ο

7. Συγκρίσεις – αποτελέσματα

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται η ανάλυση των αποτελεσμάτων του ηλεκτρικού δυναμικού που προκύπτουν από το ανισότροπο και ανομοιογενές σφαιρικό μοντέλο κεφαλής στο πλαίσιο της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας. Η μελέτη βασίζεται στην αναλυτική λύση και τις εκφράσεις του δυναμικού που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια και αποσκοπεί στην ποιοτική και ποσοτική διερεύνηση της κατανομής των επιφανειακών δυναμικών. Μέσω της απεικόνισης των αποτελεσμάτων (density plot) με τη βοήθεια του προγράμματος (wolfram mathematica) και της σύγκρισής τους, επιδιώκεται η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τη συνεισφορά της ανισοτροπίας και της στρωματοποιημένης δομής της κεφαλής, καθώς και η ανάδειξη πιθανών κατευθύνσεων για περαιτέρω διερεύνηση.

7.1. Σύγκριση του ανισότροπου μη ομογενούς με το ανισότροπο ομογενές πρότυπο

Για την επικύρωση των αναλυτικών εκφράσεων που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 4 και 5, υιοθετούνται συγκεκριμένες παραδοχές σχετικά με την πρωτεύουσα πηγή ρεύματος.

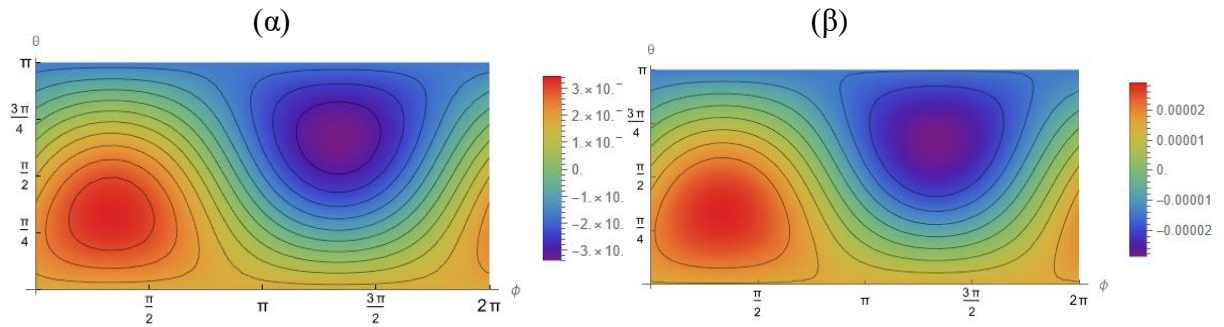
Για ένα τοπικό δίπολο τοποθετημένο στη θέση \mathbf{r}_0 η διπολική ροπή της πηγής σε σφαιρικές συντεταγμένες ορίζεται ως $\mathbf{Q} = 10^{-5} \hat{\mathbf{r}}_0$.

Επιπλέον, το διάνυσμα θέσης της πηγής \mathbf{r}_0 εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες σύμφωνα με τη σχέση (7.1), όπου η κατεύθυνση παραμένει σταθερή:

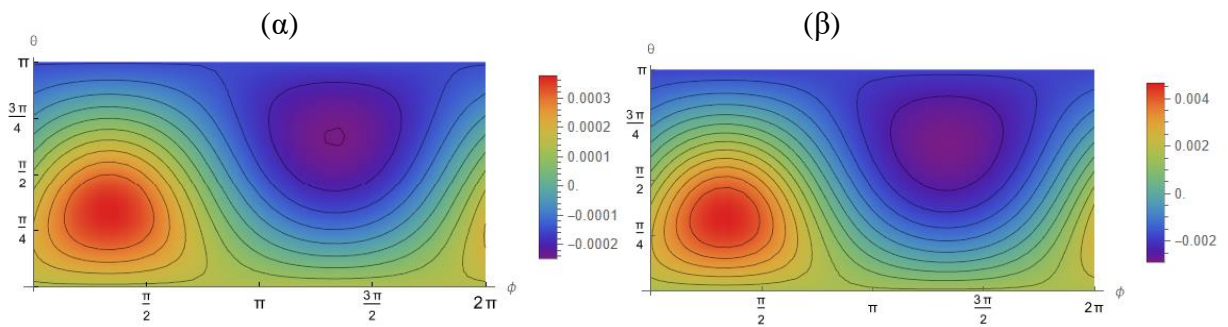
$$\mathbf{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = (r_0, \pi/3, \pi/3) \quad (7.1)$$

Η ανάλυση αυτή πραγματοποιείται για τρία διακριτά βάθη διπόλου (r_{01}, r_{02}, r_{03}), παρέχοντας μια συστηματική διερεύνηση της επίδρασης τόσο της θέσης της πηγής όσο και της ανισοτροπίας των ιστών στα προκύπτοντα δυναμικά στην επιφάνεια της κεφαλής. Η μεθοδολογική ροή τόσο για το ανισότροπο τριστρωματικό μοντέλο κεφαλής όσο και για το ανισότροπο ομογενές μοντέλο απεικονίζεται στα σχήματα (7.1)–(7.3), ενώ οι αντίστοιχες ποσοτικές μετρήσεις συνοψίζονται στον πίνακα 7.1.

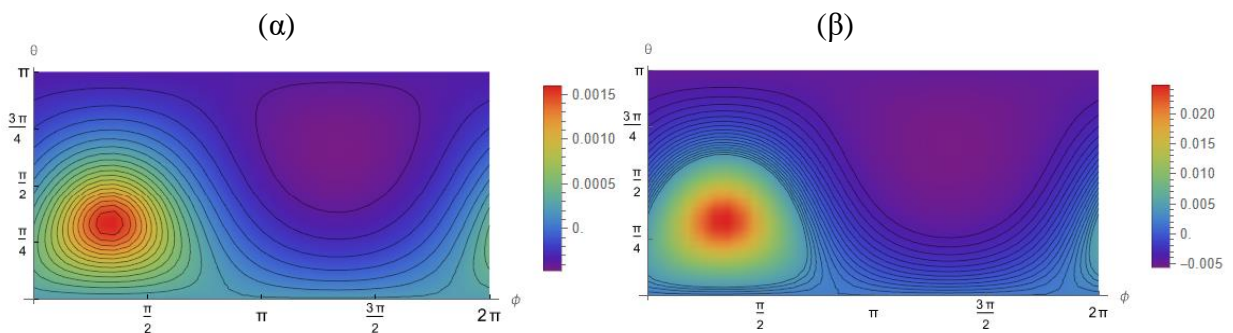
Τα αποτελέσματα καταδεικνύουν ότι το ηλεκτρικό δυναμικό μειώνεται προοδευτικά με την αύξηση της ακτινικής απόστασης από την πηγή ρεύματος. Στο τριστρωματικό μοντέλο κεφαλής, τα επιφανειακά δυναμικά είναι συστηματικά χαμηλότερα από εκείνα στα ανισότροπα ομογενή μοντέλα για πηγές ίδιου βάθους και προσανατολισμού.



Σχήμα 7.1 Ηλ. Δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, with $r = 0.092m$ σε θέση πηγής $r_{01} = \left(0.01, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (α) ανισότροπο τριών φλοιών μοντέλο (β) ανισότροπο ομογενές



Σχήμα 7.2 Ηλ. Δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, with $r = 0.092m$ σε θέση πηγής $r_{02} = \left(0.05, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (α) ανισότροπο τριών φλοιών μοντέλο (β) ανισότροπο ομογενές

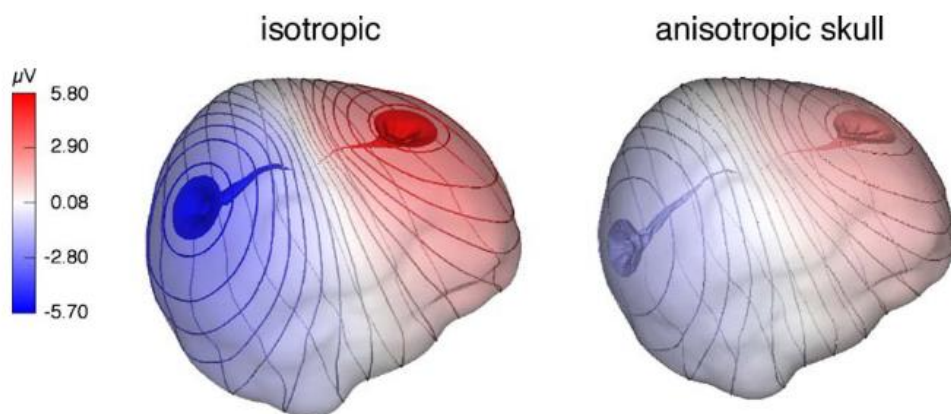


Σχήμα 7.3 Ηλ. Δυναμικό $u(r, \theta, \varphi)$, with $r = 0.092m$ σε θέση πηγής $r_{03} = \left(0.07, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ (α) ανισότροπο τριών φλοιών μοντέλο (β) ανισότροπο ομογενές

r_0	Ηλεκτρικά Δυναμικά (volt) ανισότροπου μοντέλου με τρία στρώματα	Ηλεκτρικά Δυναμικά (volt) ισότροπου ομογενούς μοντέλου
$at r = 0.092m$		
$r_0 = (0.01, \pi/3, \pi/3)$	$3.24559 \cdot 10^{-6}$	$2.7414 \cdot 10^{-5}$
$r_0 = (0.05, \pi/3, \pi/3)$	$3.3695 \cdot 10^{-4}$	$4.2477 \cdot 10^{-3}$
$r_0 = (0.07, \pi/3, \pi/3)$	$1.2750 \cdot 10^{-3}$	$1.9289 \cdot 10^{-2}$

Πίνακας 7.4. Οι τιμές του ηλεκτρικού δυναμικού σε απόσταση ακτίνας $r = 0.092m$ για βάθη πηγής με ακτίνες $r_0 = (0.01, 0.05, 0.08)$ όλες οι πηγές προσανατολισμένες προς την ίδια κατεύθυνση $(\varphi, \theta) = (\pi/3, \pi/3)$

Η εξασθένηση αυτή του δυναμικού στα ανισότροπα μοντέλα, όπως αναφέραμε και στην υποενότητα 6.4, αποδίδεται κυρίως στο κρανίο, το οποίο λειτουργεί ως φράγμα λόγω του ότι παρουσιάζει αγωγιμότητα με υψηλή αντίσταση στην εφαπτομενική διεύθυνση και σημαντικά χαμηλότερη αντίσταση στην ακτινική διεύθυνση ($\sigma_t > \sigma_r$). Εξάλλου σε μελέτες που έγιναν από τον Wolters με προκλινόμενη πηγή, βρέθηκε ότι η ανισοτροπία του κρανίου διαχέει και εξασθενεί τη ροή του επιστρεφόμενου ρεύματος, μειώνοντας τη διείδυση των ισοδυναμικών επιφανειών και κάνοντάς τες να φαίνονται σαν να προέρχονται από πιο βαθιά και ασθενέστερη πηγή σχήμα 7.4. Επιπλέον, βρέθηκε ότι η ανισοτροπία αυτή του κρανίου προκαλεί σφάλματα τοπογραφίας (RDM $\approx 10\%$) και μείωση της έντασης του δυναμικού στην επιφάνεια (συντελεστής μεγέθυνσης ≈ 0.5). (Wolters et al., 2006).



Σχήμα 7.5. Οπτικοποίηση των επιφανειών επιστροφής ρεύματος για πηγή που είναι κυρίως προσανατολισμένη εφαπτομενικά στον αισθητικό φλοιό για το ισότροπο μοντέλο (αριστερά) και το μοντέλο με ανισότροπο κρανιακό τμήμα (δεξιά) (Wolters et al., 2006).

Αντίθετα, τα ομογενή ανισότροπα μοντέλα, στερούνται αυτού του φράγματος της αγωγιμότητας του κρανίου, αδυνατούν να αναπαράγουν το χαρακτηριστικό φιλτράρισμα που επιβάλλει το κρανίο, οδηγώντας σε προβλεπόμενα επιφανειακά δυναμικά με

μεγαλύτερο πλάτος και μειωμένη χωρική διασπορά σε σύγκριση με τα πολυστρωματικά μοντέλα κεφαλής.

7.2. Μέτρο σχετικής διαφοράς (RDM) και σφάλμα μεγέθους (MAG)

Οι αναλυτικές εκφράσεις του ευθέως προβλήματος, που προέρχονται τόσο από το τριών – φλοιών ανομοιογενές ανισότροπο μοντέλο όσο και από το ομογενές ανισότροπο μοντέλο κεφαλιού, αξιολογούνται χρησιμοποιώντας δύο τυπικές ποσοτικές μετρικές σφάλματος. Το Μέτρο Σχετικής Διαφοράς (Relative Difference Measure -RDM), που αντικατοπτρίζει τις τοπογραφικές αποκλίσεις και έχει ιδανική τιμή $RDM = 0$, και το Σφάλμα (διαφορά) Μεγέθους (Magnitude Error -MAG), που χαρακτηρίζει τις διαφορές στο συνολικό πλάτος με ιδανική τιμή $MAG = 1$.

Τα δυναμικά που υπολογίζονται με το ομογενές ανισότροπο μοντέλο θεωρούνται ως δεδομένα αναφοράς (ref), ενώ τα αντίστοιχα που προκύπτουν από το ανομοιογενές ανισότροπο τριών φλοιών μοντέλο θεωρούνται ως μετρούμενα δεδομένα (meas). Το ομογενές ανισότροπο μοντέλο επιλέγεται ως πρότυπο αναφοράς, καθώς επιδέχεται αναλυτική λύση σύμφωνα με την υποενοτητα 6.1. (Bampali et al., 2025).

Στην υποενοτητα αυτή μελετήθηκαν οι διαφορές του ηλεκτρικού δυναμικού στην επιφάνεια του τριχωτού της κεφαλής που προκαλούνται από διπολική πηγή ρεύματος, μέσω υπολογισμών των αναλυτικών λύσεων σε προκαθορισμένες χωρικές θέσεις (θ, ϕ) για ακτίνα κεφαλής 9,2 cm. Οι θέσεις παρατήρησης και υπολογισμού των δυναμικών αντιστοιχούν σε πρότυπες διατάξεις ηλεκτροδίων, αντλημένες από ευρέως χρησιμοποιούμενες ερευνητικές διαμορφώσεις του EEGLAB. Διαφορετικές θέσεις τοποθέτησης ηλεκτροδίων εξετάστηκαν με σκοπό την αξιολόγηση της αξιοπιστίας της αναλυτικής λύσης. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιήθηκαν μοντέλα ηλεκτροδίων σε αραιές (32 ηλεκτρόδια) και υψηλής πυκνότητας (346 και 385 ηλεκτρόδια) διατάξεις EEG οι οποίες συναντώνται σε πειραματικά πρωτόκολλα.

Για ομογενές ανισότροπο μοντέλο (ref), και ανομοιογενές ανισότροπο τριών φλοιών (meas) και για διάταξη 32 ηλεκτροδίων προέκυψαν τιμές σφάλματος $MAG = 0.0812$ και $RDM = 0.02869$. Οι υπολογισμοί για την εύρεση των σφαλμάτων αυτών (RDM, MAG) ακολουθούν τις διατυπώσεις των ερευνητών (Bashar et al., 2008; Hee et al., 2009; Nüßing, 2018; Piastra, 2019) και τους τύπους (3.20), (3.21). Οι αναφερόμενες τιμές των δεικτών MAG και RDM υπολογίστηκαν λαμβάνοντας υπόψη σύμφωνα με τη βιβλιογραφία σε όλα τα ηλεκτρόδια κάθε διάταξης.

Σε δεύτερη αξιολόγηση, βασισμένη σε εκτεταμένη διάταξη 346 ηλεκτροδίων κατανεμημένων στην επιφάνεια της κεφαλής, τα υπολογιζόμενα δυναμικά στο τριχωτό της κεφαλής απέδωσαν δείκτες σφάλματος $MAG = 0.08133$ και $RDM = 0.0267$. Τέλος, για μια διάταξη αποτελούμενη από 385 θέσεις ηλεκτροδίων, προέκυψαν τιμές $MAG = 0.080429$ και $RDM = 0.02193$.

Στη συνέχεια το μοντέλο αναφοράς (ref), αντικαθίσταται από το ομογενές ιστροπικό μοντέλο κεφαλιού, με σκοπό την περαιτέρω διερεύνηση της συμπεριφοράς της ανισοτροπικής διατύπωσης υπό διαφορετική παραδοχή μοντελοποίησης. Αντίστοιχα, τα σφάλματα που υπολογίστηκαν για το τριστηρωματικό ανισοτροπικό (ανομοιογενές) μοντέλο, σε σύγκριση με το ομογενές ιστροπικό μοντέλο, έδωσαν τιμές

$MAG = 0.212198$ και $RDM = 0.56751$ για διάταξη 32 ηλεκτροδίων. Για πυκνότερη διάταξη 346 ηλεκτροδίων αντίστοιχες τιμές ήταν $MAG = 0.224119$ και $RDM = 0.577985$.

Τέλος, με μοντέλο αναφοράς το ισότροπο ομογενές (ref) και μετρούμενο μοντέλο το ανισότροπο ομογενές (meas) πραγματοποιήθηκε σε 346 θέσεις ηλεκτροδίων υπολογισμός των RDM και MAG , με προκύπτουσες τιμές $MAG = 2.7558$ και $RDM = 0.55698$, που αποκλίνουν σημαντικά από τις ιδανικές τιμές ($MAG = 1$, $RDM = 0$). Να σημειωθεί πως σε όλες τις περιπτώσεις, η πηγή είχε ίδια ένταση, βάθος και προσανατολισμό. Επίσης, το ομογενές ιστροπικό μοντέλο υλοποιήθηκε χρησιμοποιώντας την αναλυτική λύση που έχει παρουσιαστεί στο κεφάλαιο 6.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να διευκρινίσουμε πως οι σημαντικές αποκλίσεις των τιμών MAG και RDM από τις ιδανικές τιμές δεν ερμηνεύονται ως σφάλμα του ανισοτροπικού μοντέλου, αλλά αντανακλούν τις θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ της ανισοτροπικής και της ισότροπης περιγραφής της αγωγιμότητας των ιστών. Δηλαδή υποδηλώνουν ότι το ιστροπικό μοντέλο υπερεκτιμά το ηλεκτρικό δυναμικό με αποτέλεσμα να εμφανίζονται μεγαλύτερα σφάλματα και αποκλίσεις.

Τα αποτελέσματα αυτά, τα οποία προέκυψαν από τις αναλυτικές εκφράσεις, είναι συνεπή με προηγούμενες μελέτες που έχουν δείξει ότι η ανισοτροπία των ιστών μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τόσο το μέτρο όσο και τη χωρική κατανομή των ηλεκτρικών δυναμικών στην επιφάνεια του τριχωτού της κεφαλής. Ειδικότερα, οι Bashar et al., χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο του ευθέως προβλήματος βασισμένο στη Μέθοδο Οριακών Στοιχείων (BEM), ανέφεραν τιμές του δείκτη RDM έως 20.39% και του δείκτη MAG έως 1.09 για συνδυασμένες περιπτώσεις ανομοιογενούς ανισοτροπίας στη λευκή ουσία και στο κρανίο, ανάλογα με τον προσανατολισμό του διπόλου και τη διαμόρφωση των αγωγιμοτήτων.

ομογενές ανισότροπο (ref), και ανομοιογενές ανισότροπο (meas)	RDM	MAG
διάταξη 32 ηλεκτροδίων	0.02869	0.0812
346 ηλεκτροδίων	0.0267	0.08133
385 ηλεκτροδίων	0.02193.	0.080429
ομογενές ισότροπο (ref), και ανομοιογενές ανισότροπο (meas)		
διάταξη 32 ηλεκτροδίων	0.56751	0.212198
346 ηλεκτροδίων	0.577985	0.224119
Ισότροπο ομογενές (ref) και ανισότροπο ομογενές (meas)		
346 θέσεις ηλεκτροδίων	0.55698	2.7558

Πίνακας 7.6 Οι τιμές των RDM και MAG της λύσης μας

7.3. Σύγκλισης της Σειράς Σφαιρικών Αρμονικών

Η αναλυτική λύση του ευθέως προβλήματος που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία, τόσο σε ανισότροπα πολυστρωματιά όσο και σε ανισότροπα ομογενή μοντέλα, εκφράζεται ως άπειρες σειρές σφαιρικών αρμονικών. Στους αριθμητικούς υπολογισμούς, οι σειρές αυτές αποκόπτονται σε πεπερασμένη τάξη N . Επομένως, είναι απαραίτητο να ελεγχθεί ότι η επιλεγμένη τιμή του N είναι επαρκής, ώστε η αποκοπή της σειράς να μην επηρεάζει ουσιαστικά τα υπολογιζόμενα δυναμικά.

Η σύγκλιση εξετάζεται με την προοδευτική αύξηση της τάξης αποκοπής N και τον επανυπολογισμό του δυναμικού σε συγκεκριμένα σημεία παρατήρησης. Όταν η περαιτέρω αύξηση του N οδηγεί σε αμελητέες μεταβολές, η σειρά θεωρείται ότι έχει συγκλίνει και η αριθμητική προσέγγιση κρίνεται αξιόπιστη.

Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν με το λογισμικό Wolfram Mathematica. Στη συνήθη αριθμητική ακρίβεια (machine precision), το Mathematica χρησιμοποιεί 16 σημαντικά ψηφία, γεγονός που επιτρέπει την εκτίμηση της σύγκλισης με μεγάλη ακρίβεια.

Στο ομογενές ανισότροπο μοντέλο εξετάστηκαν δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, για πηγή στη θέση $r_0 = 0.03m$ σε σημείο παρατήρησης με ακτινική συντεταγμένη $r_0 = 0.005m$, η σειρά σταθεροποιείται ήδη από $N=9$. Στη δεύτερη

περίπτωση, όπου το δυναμικό υπολογίζεται στην επιφάνεια της κεφαλής ($r_s = 0.092m$) και για πηγή στη θέση $r_0 = 0.005m$, η σύγκλιση είναι ελαφρώς βραδύτερη και η πρακτική σταθεροποίηση εμφανίζεται περίπου από $N=15$, ενώ για $N \geq 20$ οι τιμές παραμένουν αμετάβλητες στα δεκαδικά ψηφία που εμφανίζονται. Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η σύγκλιση του ομογενούς ανισότροπου μοντέλου είναι γενικά ταχεία, αλλά ο απαιτούμενος αριθμός όρων εξαρτάται από τη θέση της πηγής και το σημείο στο οποίο υπολογίζεται το δυναμικό.

N	Ανισότροπο Ομογενές (α)
8	0.004247713543293624
10	0.004247712026504651
12	0.0042477119783554396
15	0.004247711977427788
20	0.0042477119774279115
28	0.0042477119774279115
30	0.0042477119774279115

N	Ανισότροπο Ομογενές (β)
5	-0.00002115452650697137
9	-0.000021154526506975474
10	-0.000021154526506975474
11	-0.000021154526506975474
12	-0.000021154526506975474
15	-0.000021154526506975474
20	-0.000021154526506975474
30	-0.000021154526506975474

Πίνακας 7.2α Τιμές δυναμικών στο ανισότροπο ομογενές μοντέλο, μετρήσεις πάνω στην κεφαλή $r_s = 0.092m$ και για βάθος ακτινικής πηγής $r_0 = 0.05m$.

Πίνακας 7.2β Τιμές δυναμικών στο ανισότροπο ομογενές μοντέλο, μετρήσεις στο σημείο παρατήρησης με ακτινική συντεταγμένη $r=0.005m$ για ακτίνα κεφαλή $r_s = 0.08m$ και για βάθος ακτινικής πηγής $r_0 = 0.03m$.

Στο ανισότροπο μοντέλο τριών φλοιών, η σύγκλιση της σειράς είναι βραδύτερη, λόγω της παρουσίας πολλαπλών διεπιφανειών και των έντονων διαφορών στις αγωγιμότητες των επιμέρους στρωμάτων. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 7.3, η λύση σταθεροποιείται ουσιαστικά από $N=16$. Για $N \geq 20$, οι μεταβολές εμφανίζονται μόνο σε πολύ υψηλά δεκαδικά ψηφία, δηλαδή στο επίπεδο της αριθμητικής ακρίβειας του Mathematica (περίπου 10^{-16}). Από $N=23$ και μετά, η τιμή του δυναμικού παραμένει αμετάβλητη στα εμφανιζόμενα ψηφία.

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι η σύγκλιση είναι ταχύτερη στο ομογενές ανισότροπο μοντέλο, ενώ στο πολυστρωματικό μοντέλο απαιτείται μεγαλύτερος αριθμός όρων, εξαιτίας της αυξημένης πολυπλοκότητας του προβλήματος. Με βάση τον παραπάνω έλεγχο, για τις τελικές προσομοιώσεις επιλέχθηκε η τιμή $N=20$, ώστε να διασφαλίζεται ότι τα υπολογιζόμενα δυναμικά είναι πρακτικά ανεξάρτητα από την αποκοπή της σειράς.

N	Ανισότροπο 3 φλοιών
8	0.0003369505639073413
10	0.0003369503638106907
12	0.00033695035440499686
16	0.000336950354127163
20	0.0003369503541273243
21	0.0003369503541273247
23	0.00033695035412732477
25	0.00033695035412732477
30	0.00033695035412732477
32	0.00033695035412732477
33	0.00033695035412732477

Πίνακας 7.3 Τιμές δυναμικών στο ανισότροπο τριών φλοιών μοντέλο, μετρήσεις πάνω στην κεφαλή $r_s = 0.092m$ και για βάθος ακτινικής πηγής $r_0 = 0.05m$.

7.4. Συμπεράσματα και Μελλοντικές Επεκτάσεις

Στο πλαίσιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής μελετήθηκε το ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας, δηλαδή ο υπολογισμός του ηλεκτρικού δυναμικού που παράγεται από διπολικές πηγές ρεύματος στο εσωτερικό του εγκεφάλου και καταγράφεται στην επιφάνεια της κεφαλής. Στην κατακλείδα αυτής της μελέτης, επιχειρείται μια συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων μέσω των αναλυτικών εκφράσεων (4.71), (5.14), (6.19) - (6.21) και (6.33) - (6.35), οι οποίες αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες ενότητες.

Η ακριβής επίλυση του ευθέως προβλήματος αποτελεί θεμέλιο για την αξιοπιστία των αντίστροφων προβλημάτων, καθώς ο προσδιορισμός των δυναμικών επηρεάζει άμεσα την ακρίβεια του εντοπισμού της θέσης της πηγής, κάτι που κρίνεται ζωτικής σημασίας σε κλινικές εφαρμογές, όπως η μελέτη της επιληψίας και οι προεγχειρητικοί έλεγχοι.

Όπως έχει δειχθεί στο κεφάλαιο 3, η ανισοτροπία της αγωγιμότητας των ιστών διαδραματίζει κρίσιμο ρόλο στην ακρίβεια αυτή, καθιστώντας την ενσωμάτωσή της στα μοντέλα ΗΕΓ επιβεβλημένη.

Παρά το γεγονός ότι η πλειονότητα των σύγχρονων προσεγγίσεων βασίζεται σε αριθμητικές μεθόδους —όπως FEM, BEM, η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (FDM) και υβριδικές προσεγγίσεις τύπου BEM–FEM— οι πλήρως αναλυτικές εκφράσεις για πολυστρωματικά σφαιρικά μοντέλα με κατευθυντικά εξαρτώμενη αγωγιμότητα παραμένουν περιορισμένες στη βιβλιογραφία.

Στην παρούσα μελέτη, η επίλυση του προβλήματος βασίστηκε στις θεμελιώδεις εξισώσεις του μοντέλου De Munck. Το ευθύ πρόβλημα επιλύθηκε αναλυτικά, ενσωματώνοντας τις ανισοτροπικές δομές των ιστών, χρησιμοποιώντας σφαιρικές αρμονικές σε συνδυασμό με

την εξίσωση του Poisson, για πεδία που δημιουργούνται από διπολικές ροές ρεύματος. Παράλληλα προσδιορίστηκαν οι συντελεστές A_{jn} , B_{jn} του αναπτύγματος της λύσης σε κάθε χωρίο, μέσω των κατάλληλων συνθηκών διαπερατότητας, ώστε να εξασφαλιστεί η μοναδικότητα της λύσης.

Η διατριβή, υιοθετώντας αυτό το ανισότροπο πλαίσιο εξυπηρετεί διττό σκοπό: ενισχύει τον φυσιολογικό ρεαλισμό του μοντέλου και ταυτόχρονα μειώνει τα υπολογιστικά σφάλματα σε επακόλουθες διατυπώσεις αντίστροφου προβλήματος.

Από τις τιμές των δυναμικών (πίνακες 6.1 και 7.1) και τα παρατηρούμενα ποσοτικά μεγέθη, προκύπτει ότι η ανισοτροπία των ιστών επηρεάζει σημαντικά το πλάτος των δυναμικών στην επιφάνεια της κεφαλής. Ειδικότερα, οι αποκλίσεις που ποσοτικοποιήθηκαν μέσω των δεικτών $MAG = 2.756$ και $RDM = 0.557$ για το ομογενές ανισότροπο έναντι του ισότροπου μοντέλου, καθώς και οι τιμές $MAG \approx 0.212-0.224$ και $RDM \approx 0.568-0.578$ που προέκυψαν για το τριπλό στρωματικό ανισοτροπικό μοντέλο, καταδεικνύουν ότι η κατανομή και το μέγεθος των υπολογιζόμενων ηλεκτρικών δυναμικών μεταβαλλονται σημαντικά όταν λαμβάνεται υπόψη η κατευθυντική εξάρτηση της αγωγιμότητας. Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνουν ότι η ενσωμάτωση ανισότροπων χαρακτηριστικών παρέχει μια πιο ρεαλιστική αναπαράσταση του όγκου -αγωγού της ανθρώπινης κεφαλής.

Η πρωτοτυπία της παρούσας μελέτης έγκειται στη δημιουργία ενός αναλυτικού, θεωρητικού πλαισίου αναφοράς για την αξιολόγηση και τη σύγκριση αριθμητικών προσεγγίσεων.

Η παρούσα εργασία θέτει τις βάσεις για περαιτέρω έρευνα προς διάφορες κατευθύνσεις. Πρωτίστως, η άμεση ποσοτική σύγκριση των αναλυτικών λύσεων που προέκυψαν με αριθμητικές προσεγγίσεις (FEM και BEM), θα επιτρέψει την περαιτέρω επικύρωση της ακρίβειας των υπολογιστικών μοντέλων. Επιπλέον, ενδιαφέρον παρουσιάζει η επέκταση της αναλυτικής μεθοδολογίας σε γεωμετρίες υψηλότερου ανατομικού ρεαλισμού, όπως τα ελλειψοειδή ή σφαιροειδή μοντέλα, προκειμένου να ενσωματωθεί ακόμα μεγαλύτερος βαθμός λεπτομέρειας στη μοντελοποίηση του όγκου-αγωγού της κεφαλής. Τέλος, σημαντικό αντικείμενο μελλοντικής έρευνας αποτελεί η αξιοποίηση δεδομένων μαγνητικής τομογραφίας (MRI) και απεικόνισης τανυστή διάχυσης (DTI/Diffusion MRI), με σκοπό τον προσδιορισμό εξατομικευμένων τανυστών αγωγιμότητας. Η ενσωμάτωση τέτοιων υποκειμενοκεντρικών χαρακτηριστικών αναμένεται να ενισχύσει σημαντικά την πιστότητα της μαθηματικής περιγραφής του ευθέος προβλήματος και, κατ' επέκταση, την αξιοπιστία των λύσεων του αντίστροφου προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας.

Βιβλιογραφία

1. Abascal, J. F. P. J., Arridge, S. R., Atkinson, D., Horesh, R., Fabrizi, L., De Lucia, M., Horesh, L., Bayford, R. H., & Holder, D. S. (2008). Use of anisotropic modelling in electrical impedance tomography; Description of method and preliminary assessment of utility in imaging brain function in the adult human head. *NeuroImage*, 43(2), 258–268. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2008.07.023>
2. Akhtari, M., Bryant, H. C., Mamelak, A. N., Flynn, E. R., Heller, L., Shih, J. J., Mandelkem, M., Matlachov, A., Ranken, D. M., Best, E. D., Dimauro, M. A., Lee, R. R., & Sutherling, W. W. (2002). Conductivities of three-layer line human skull. *Brain Topography*, 14(3), 151–167. <https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1014590923185>
3. Antonakakis, M., Schrader, S., Aydin, Ü., Khan, A., Gross, J., Zervakis, M., Rampp, S., & Wolters, C. H. (2020). Inter-Subject Variability of Skull Conductivity and Thickness in Calibrated Realistic Head Models. *NeuroImage*, 223. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2020.117353>
4. Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2005). *Mathematical Methods for Physicists* (Sixth). Elsevier Academic Press.
5. Azizollahi, H., Darbas, M., Diallo, M. M., El Badia, A., & Lohrengel, S. (2018). EEG in neonates: Forward modeling and sensitivity analysis with respect to variations of the conductivity. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 15(4), 905–932. <https://doi.org/https://doi.org/10.3934/mbe.2018041>
6. Bampali, K., Hadjinicolaou, M., & Kamvyssas, G. (2025). Analytical Solution for Electric Potential in a Homogeneous Anisotropic Spherical Head Model with Directional Conductivity. *2025 IEEE 25th International Conference on Bioinformatics and Bioengineering (BIBE)*, 287–293. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/BIBE66822.2025.00055>
7. Bashar, M. R., Li, Y., & Wen, P. (2008). A study of white matter and skull inhomogeneous anisotropic tissue conductivities on EEG forward head modeling. *Proceedings of 11th International Conference on Computer and Information Technology, ICCIT 2008*, 7–13. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/ICCITECHN.2008.4803103>
8. Baumann, S. B., Wozny, D. R., Kelly, S. K., & Meno, F. M. (1997). The electrical conductivity of human cerebrospinal fluid at body temperature. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 44, 220–223. <https://doi.org/https://doi.org/10.1109/10.554770>
9. Buzsaki, G., Anastassiou, C. A., & Koch, C. (2016). The origin of extracellular fields and currents — EEG, ECoG, LFP and spikes. *Nat Rev Neurosci.*, 13(6), 407–420. <https://doi.org/10.1038/nrn3241>.
10. Cuartas Morales, E., Acosta-Medina, C. D., Castellanos-Dominguez, G., & Mantini, D. (2019). A Finite-Difference Solution for the EEG Forward Problem in Inhomogeneous Anisotropic Media.

- Brain Topography*, 32(2), 229–239. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10548-018-0683-2>
11. Dannhauer, M., Lanfer, B., Wolters, C. H., & Knösche, T. R. (2011). Modeling of the human skull in EEG source analysis. *Human Brain Mapping*, 32(9), 1383–1399. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/hbm.21114>
 12. Darbas, M. (2018). *Review on Mathematical Modelling of Electroencephalography (EEG)*. September. <https://doi.org/https://doi.org/10.1365/s13291-018-0183-z>
 13. Dassios, G. (2012). Ellipsoidal Harmonics. In *Cambridge* (Vol. 11, Issue 1).
 14. Dassios, G., & Fokas, A. S. (2009). Electro-magneto-encephalography for a three-shell model: Dipoles and beyond for the spherical geometry. *Inverse Problems*, 25(3). <https://doi.org/https://doi.org/10.1088/0266-5611/25/3/035001>
 15. Dassios, G., & Vafeas, P. (2001). *Connection formulae for differential representations in Stokes ow. 133*, 283–294.
 16. De Munck, J. C. (1988). The potential distribution in a layered anisotropic spheroidal volume conductor. *Journal of Applied Physics*, 64(2), 464–470. <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.341983>
 17. De Munck, J. C., Wolters, C. H., & Clerc, M. (2012). EEG and MEG: forward modeling. In *Handbook of Neural Activity Measurement* (Issue January). <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/cbo9780511979958.006>
 18. Erdbrügger, T., Höltershinken, M., Radecke, J. O., Buschermöhle, Y., Wallois, F., Pursiainen, S., Gross, J., Lencer, R., Engwer, C., & Wolters, C. (2024). CutFEM-based MEG forward modeling improves source separability and sensitivity to quasi-radial sources: A somatosensory group study. *Human Brain Mapping*, 45(11), 1–14. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/hbm.26810>
 19. Ferree, T. C., Clay, M. T., & Tucker, D. M. (2001). The spatial resolution of scalp EEG. *Neurocomputing*, 38–40, 1209–1216. [https://doi.org/10.1016/S0925-2312\(01\)00568-9](https://doi.org/10.1016/S0925-2312(01)00568-9)
 20. Gargiulo, P., Belfiore, P., Friogeirsson, E. A., Vanhatalo, S., & Ramon, C. (2015). The effect of fontanel on scalp EEG potentials in the neonate. *Clinical Neurophysiology*, 126(9), 1703–1710. <https://doi.org/10.1016/j.clinph.2014.12.002>
 21. Garnero, L., Baillet, S., Marin, G., Guérin, C., Meunier, G., & Renault, B. (1998). Modelisation of inhomogeneous and anisotropic conductivities in a realistic head model for the EEG and MEG forward problem. *NeuroImage*, 7(4 PART II). [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1053-8119\(18\)31512-X](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1053-8119(18)31512-X)
 22. Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics* (3rd ed). Prentice Hall.
 23. Hallez, H., Staelens, S., & Lemahieu, I. (2009). Dipole estimation errors due to not incorporating anisotropic conductivities in realistic head models for EEG source analysis. *Physics in Medicine and Biology*, 54(20), 6079–6093. <https://doi.org/https://doi.org/10.1088/0031-9155/54/20/004>

24. Hallez, H., Vanrumste, B., Grech, R., Muscat, J., De Clercq, W., Vergult, A., D'Asseler, Y., Camilleri, K. P., Fabri, S. G., Van Huffel, S., & Lemahieu, I. (2007). Review on solving the forward problem in EEG source analysis. *Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation*, 4(1), 1–29. <https://doi.org/https://doi.org/10.1186/1743-0003-4-46>
25. Hallez, H., Vanrumste, B., Hese, P. Van, Delputte, S., & Lemahieu, I. (2008). Dipole estimation errors due to differences in modeling anisotropic conductivities in realistic head models for EEG source analysis. *Physics in Medicine and Biology*, 53(7), 1877–1894. <https://doi.org/https://doi.org/10.1088/0031-9155/53/7/005>
26. Hallez, H., Vanrumste, B., Van Hese, P., D'Asseler, Y., Lemahieu, I., & Van De Walle, R. (2005). A finite difference method with reciprocity used to incorporate anisotropy in electroencephalogram dipole source localization. *Physics in Medicine and Biology*, 50(16), 3787–3806. <https://doi.org/https://doi.org/10.1088/0031-9155/50/16/009>
27. Haueisen, J., Tuch, D. S., Ramon, C., Schimpf, P. H., Wedeen, V. J., George, J. S., & Belliveau, J. W. (2002). *The Influence of Brain Tissue Anisotropy on Human EEG and MEG*. 166, 159–166. <https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0962>
28. Hee, W., Liu, Z., Mueller, B. A., Lim, K., & He, B. (2009). Clinical Neurophysiology Influence of white matter anisotropic conductivity on EEG source localization : Comparison to fMRI in human primary visual cortex. *Clinical Neurophysiology*, 120(12), 2071–2081. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.clinph.2009.09.007>
29. Jasper, H. H. (1958). The ten–twenty electrode system of the International Federation. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 10, 371–375.
30. Kandel, E. R., Schwartz, J. H. A., & Jessell, T. λZI. (2004). *Βασικές Αρχές Νευροεπιστημών* (Ιατρικές Ε).
31. Kirby, E. D., Glenn, M. J., Sandstrom, N. J., & Williams, C. (2024). *Introduction to Behavioral Neuroscience*. [https://openstax.org/details/books/introduction-behavioral-neuroscience?Book details](https://openstax.org/details/books/introduction-behavioral-neuroscience?Book%20details)
32. Klem, G. H., Luders, H. O., & Jasper, H. . (1999). *The ten - twenty electrode system of the International Federation*. 44195, 2–5.
33. Lebedev, N. N. (2022). Special functions and their applications. In *Special Functions and their Applications*. <https://doi.org/10.2307/2314530>
34. McCann, H., Pisano, G., & Beltrachini, L. (2019). Variation in Reported Human Head Tissue Electrical Conductivity Values. *Brain Topography*, 32(5), 825–858. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10548-019-00710-2>
35. Morse, P., & Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*.
36. Nüßing, A. (2018). *Fitted and Unfitted Finite Element Methods for Solving the EEG Forward Problem*.
37. Ollikainen, J. O., Vauhkonen, M., Karjalainen, P. A., & Kaipio, J. P. (1999). Effects of local skull

- inhomogeneities on EEG source estimation. *Medical Engineering and Physics*, 21(3), 143–154. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1350-4533\(99\)00038-7](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S1350-4533(99)00038-7)
38. Papargiri, A., Kalantonis, V. S., Kaziki, D., Vafeas, P., & Fragoyiannis, G. (2021). Revisiting an analytical solution for the three-shell spherical human head model in electroencephalography. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 4, 100178. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/J.PADIFF.2021.100178>
 39. Petrov, Y., & Sridhar, S. (2013). Electric Field Encephalography as a Tool for Functional Brain Research: A Modeling Study. *PLoS ONE*, 8(7). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0067692>
 40. Piastra, M. C. (2019). *New Finite Element Methods for Solving the MEG and the Combined MEG/EEG Forward Problem*. <https://miami.uni-muenster.de/Record/15be38b1-6e82-483e-befc-64734b28213b/TOC>
 41. Roche-Labarbe, N., Aarabi, A., Kongolo, G., Gondry-Jouet, C., Dümpelmann, M., Grebe, R., & Wallois, F. (2008). High-resolution electroencephalography and source localization in neonates. *Human Brain Mapping*, 29(2), 167–176. <https://doi.org/10.1002/hbm.20376>
 42. Schomer, D. L., & Silva, and F. L. da. (2012). Niedermeyer’s Electroencephalography. In *Niedermeyer’s Electroencephalography: Basic Principles, Clinical Applications, and Related Fields: Sixth Edition* (pp. 1–16). Wolters Kluwer Health.
 43. Smythe, W. . (1968). *Static and Dynamic Electricity*.
 44. Steyrl, D., Kobler, R. J., & Müller-Putz, G. R. (2016). On Similarities and Differences of Invasive and Non-Invasive Electrical Brain Signals in Brain-Computer Interfacing. *Journal of Biomedical Science and Engineering*, 09(08), 393–398. <https://doi.org/10.4236/jbise.2016.98034>
 45. Stiefel, K. M., Torben-Nielsen, B., & Coggan, J. S. (2013). Proposed evolutionary changes in the role of myelin. *Frontiers in Neuroscience*, 7(7 NOV), 1–9. <https://doi.org/10.3389/fnins.2013.00202>
 46. Warner, A., Tate, J., Burton, B., & Johnson, C. (2019). A High-Resolution Head and Brain Computer Model for Forward and Inverse EEG Simulation. *BioRxiv*, 552190. <https://doi.org/10.1101/552190>
 47. Wolters, C. H. (2003). *Influence of Tissue Conductivity Inhomogeneity and Anisotropy on EEG/MEG based Source Localization in the Human Brain* (Vol. 2003).
 48. Wolters, C. H., Anwander, A., Koch, M. A., Reitzinger, S., Kuhn, M., & Svensen, M. (2001). Influence of head tissue conductivity anisotropy on human EEG and MEG using fast high resolution finite element modeling, based on a parallel algebraic multigrid solver. “*Forschung Und Forschung Und Wissenschaftliches Rechnen*” *Contributions to the Heinz-Billing Award*, 111–157. http://www.simbio.de/ReportsEvents/PublicDocs/Postscript/billing_bookchapter.ps.gz
 49. Wolters, C. H., Anwander, A., Tricoche, X., Weinstein, D., Koch, M. A., & MacLeod, R. S. (2006). Influence of tissue conductivity anisotropy on EEG/MEG field and return current computation in a realistic head model: A simulation and visualization study using high-resolution finite element modeling. *NeuroImage*, 30(3), 813–826.

<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2005.10.014>

50. Γιωτάκος, Ο. (2019). *Ο Συναισθηματικός Εγκέφαλος* (Παρισιανού Α.Ε (ed.); Issue 1820).
51. Δάσιος, Γ. (2012). *Μαθηματική θεμελίωση της ηλεκτρικής και μαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου* (Ι.-Ι. Πανεπιστήμιο Πατρών (ed.)). Πανεπιστήμιο Πατρών και ΙΕΧΜΗ - ΙΤΕ.
52. Καριώτου, Φ. (2002). *Μαθηματικά προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας στη νευροφυσιολογία του εγκεφάλου*. Πανεπιστήμιο Πατρών.
53. Κουτσούρης, Δ., Παυλόπουλο, Σ., & Πρέντζα, Α. (2003). *Εισαγωγή στη Βιοϊατρική Τεχνολογία και Ανάλυση Ιατρικών Σημάτων* (Τζιόλα).
54. Παπαδόπουλος, Γ. (2021). *Κεντρικό Νευρικό Σύστημα* (U. S. Press (ed.); pp. 13–22).
55. Ταπτούρας, Μ., Γιαννιτάκης, Ν., Καρβούνης, Ε., & Τζάλλας, Α. (2015). Κεφάλαιο 9 – Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. In *Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα: Βασικές αρχές και τεχνικές επεξεργασίας* (Κάλλιπος,).
56. Τσιπούρας, Μ., Γιαννακέας, Ν., Καρβούνης, Ε., & Τζάλλας, Α. (2009). Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. In *Βασικές αρχές και τεχνικές επεξεργασίας* (pp. 278–329). Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.

Παράρτημα Α: Αναλυτικοί υπολογισμοί στο σφαιρικό πρότυπο για τη διπολική πηγή και τα δυναμικά

Στο παρόν παράρτημα παρατίθενται αναλυτικά οι μαθηματικοί υπολογισμοί που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του ηλεκτρικού δυναμικού στο ανισότροπο σφαιρικό πρότυπο κεφαλής. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται ο ορισμός και ο προσανατολισμός της διπολικής πηγής, ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων από καρτεσιανές σε σφαιρικές, καθώς και οι απαραίτητες διανυσματικές πράξεις που χρησιμοποιούνται στην τελική μορφή του δυναμικού. Οι υπολογισμοί αυτοί αξιοποιούνται για την υλοποίηση των αντίστοιχων εκφράσεων στο λογισμικό Wolfram Mathematica.

A1. Η διπολική πηγή

Τα χαρακτηριστικά της διπολικής πηγής που χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του ηλεκτρικού δυναμικού, δηλαδή το διάνυσμα ροπής της πηγής σε καρτεσιανές συντεταγμένες και οι αντίστοιχες συνιστώσες του σε σφαιρικές συντεταγμένες, παρουσιάζονται στη συνέχεια. Για την διπολική πηγή ισχύει ότι έχει μέτρο ροπής $Q = 10^{-5} C \cdot m$ και προσανατολισμό σε καρτεσιανές συντεταγμένες που ορίζονται από το μοναδιαίο διάνυσμα.

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \quad A.1$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, η ροπή της πηγής δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{Q} = Q\hat{Q} = \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}}\hat{x}_{01} + \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}}\hat{x}_{02} + \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}}\hat{x}_{03} \text{ C} \cdot \text{m}, \quad A.2$$

ενώ αναπαρίσταται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως:

$$\mathbf{Q} = Q_{r_0}\hat{r} + Q_{\theta_0}\hat{\theta} + Q_{\varphi_0}\hat{\varphi} \quad A.3$$

Ισχύουν οι τύποι (A.4) μετασχηματισμού από καρτεσιανή βάση σε σφαιρική βάση (Arfken & Weber, 2005):

$$\begin{aligned} Q_{r_0} &= x_{01}\sin\theta_Q\cos\varphi_Q + x_{02}\sin\theta_Q\sin\varphi_Q + x_{03}\cos\theta_Q \\ Q_{\theta_0} &= x_{01}\cos\theta_Q\cos\varphi_Q + x_{02}\cos\theta_Q\sin\varphi_Q - x_{03}\sin\theta_Q \\ Q_{\varphi_0} &= -x_{01}\sin\varphi_Q + x_{02}\cos\varphi_Q \end{aligned} \quad A.4$$

Αναλυτικά για να μετατραπεί το διάνυσμα \mathbf{Q} από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες, πρώτα βρίσκουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες $(r_Q, \theta_Q, \varphi_Q)$ που αντιστοιχούν στο διάνυσμα της πηγής \mathbf{Q} αξιοποιώντας τις σχέσεις του μετασχηματισμού:

$$x_{01} = r\sin\theta\cos\varphi \quad r = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + x_{03}^2}$$

$$x_{o2} = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_{o1}^2 + x_{o2}^2}}{x_{o3}}\right)$$

A.5

$$x_{o3} = r \cos \theta$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_{o2}}{x_{o1}}\right)$$

Αναλυτικά

$$r_Q = \sqrt{x_{Q1}^2 + x_{Q2}^2 + x_{Q3}^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right](10^{-5})^2} = 10^{-5}$$

$$\theta_Q = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_{Q1}^2 + x_{Q2}^2}}{x_{Q3}}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{10^{-5}}{\sqrt{3}}\right)^2}}{\frac{10^{-5}}{\sqrt{3}}}\right) = \arctan(\sqrt{2})$$

$$= 54,73 \text{ μοίρες} = 0,304\pi = 0,955 \text{ rad}$$

$$\varphi_Q = \arctan\left(\frac{x_{Q2}}{x_{Q1}}\right) = \arctan(1) = 45 \text{ μοίρες} = 0,25\pi = 0,785 \text{ rad}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες της διπολικής πηγής.

$$\begin{aligned} Q_{r_o} &= x_{o1} \sin \theta_Q \cos \varphi_Q + x_{o2} \sin \theta_Q \sin \varphi_Q + x_{o3} \cos \theta_Q \\ &= \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \sin(0.304\pi) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \sin(0.304\pi) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \cos(0.304\pi) = 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{\theta_o} &= x_{o1} \cos \theta_Q \cos \varphi_Q + x_{o2} \cos \theta_Q \sin \varphi_Q - x_{o3} \sin \theta_Q \\ &= \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \cos(0.304\pi) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \cos(0.304\pi) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad - \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \sin(0.304\pi) = 0 \end{aligned}$$

$$Q_{\varphi_o} = -x_{o1} \sin \varphi_Q + x_{o2} \cos \varphi_Q = -\frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{10^{-5}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες η ροπή της πηγής είναι :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(r_Q, \theta_Q, \varphi_Q) &= (Q_{r_o}, Q_{\theta_o}, Q_{\varphi_o}) = (10^{-5}, 0, 0) \text{ ή} \\ \mathbf{Q} &= Q_{r_o} \hat{\mathbf{r}} + Q_{\theta_o} \hat{\boldsymbol{\theta}} + Q_{\varphi_o} \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 10^{-5} \hat{\mathbf{r}} + 0 \hat{\boldsymbol{\theta}} + 0 \hat{\boldsymbol{\varphi}} = 10^{-5} \hat{\mathbf{r}} \end{aligned}$$

A.7

Δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{Q} είναι ακτινικό στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$

A.2 Υπολογισμός ηλεκτρικού δυναμικού στο ανισότροπο σφαιρικό ομογενές πρότυπο

Το δυναμικό στο ανισότροπο ομογενές πρότυπο, όπως έχει αποδειχθεί στο κεφάλαιο 6, από τη σχέση (6.20)- (A.8) πάνω στην επιφάνεια της κεφαλής για ακτίνα $r_s = 0.092m$ αναλύεται παρακάτω.

$$u^-_{anisot}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi\epsilon(2s+1)} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

$$\left\{ \frac{(s+1)}{s r_s^{2s+1}} \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] r^s + \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]}{r^{s+1}} \right\} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_0 < r < r_s$$

$$u^-_{anisot}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi\epsilon(2s+1)} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \quad A.8$$

$$\left\{ \frac{(s+1)}{s r_s^{2s+1}} r^s + \frac{1}{r^{s+1}} \right\} \nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_0 < r < r_s$$

Το λογισμικό που χρησιμοποιείται για την οπτικοποίηση των ανωτέρω ηλεκτρικών δυναμικών είναι το Wolfram Mathematica. Πριν από την καταχώρηση των συναρτήσεων και την υλοποίηση των διαγραμμάτων, πραγματοποιούνται οι απαραίτητοι αναλυτικοί υπολογισμοί των βαθμωτών παραγώγων (gradient) και των σχετικών εσωτερικών γινομένων. Έτσι, οι συναρτήσεις που υπολογίστηκαν, σε συνδυασμό με το αντίστοιχο φορτίο της πηγής, μπορούν να εισαχθούν στο λογισμικό Wolfram Mathematica και να παραχθούν τα αντίστοιχα διαγράμματα τύπου DensityPlot. Συγκεκριμένα, υπολογίζεται η έκφραση του grad οι οποία εμφανίζονται στις τελικές μορφές των ηλεκτρικών δυναμικών:

$$\nabla_{\mathbf{r}_0} [r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0)]$$

Ισχύει αναλυτικά:

$$\nabla_{\mathbf{r}} r^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) = s r^{s-1} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \frac{r^s}{r} \frac{\partial Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{r^s}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

$$\text{και } \mathbf{Q} = 10^{-5} \hat{\mathbf{r}}$$

Έτσι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{Q} \cdot \nabla r^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$ γίνεται

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla r^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) = 10^{-5} s r^{s-1} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$$

$$\text{Άρα:} \quad \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^s Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) = 10^{-5} s r_0^{s-1} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad A.9$$

Το δυναμικό (A.8) από την (A.9) θα μετασχηματιστεί:

$$u^-_{anisot}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi\epsilon(2s+1)} \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{0m}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \quad A.10$$

$$\left\{ \frac{(s+1)}{s r_s^{2s+1}} r^s + \frac{1}{r^{s+1}} \right\} 10^{-5} s r_0^{s-1} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}), \quad r_0 < r < r_s$$

Στο πρόγραμμα mathematica υλοποιώ την παραπάνω έκφραση του δυναμικού για ακτίνα κεφαλής $r_s = 0.092m$, βάθος πηγής $\hat{\mathbf{r}}_{01} = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = \left(0.05, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, εφαπτομενική και ακτινική αγωγιμότητα $\eta = 0.125 S/m$ και $\varepsilon = 0.0125 S/m$ αντίστοιχα, όπως παρατίθεται στο παρακάτω notebook του Wolfram Mathematica.

Υλοποίηση Wolfram Mathematica

```

In[*]:= ClearAll["Global`*"]
      |διαγραφή ιδιοτήτων συμβόλων

Clear[R0, θ0, φ0, r, θ, φ, σ]
      |διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[*]:= R0 = 0.05

In[*]:= φ0 = Pi/3

In[*]:= θ0 = Pi/3

In[*]:= η = 0.125

Out[*]= 0.125

In[*]:= ε = 0.0125

Out[*]= 0.0125

In[*]:= s1[η_, ε_, n_] := -0.5 + 0.5 * (sqrt[1 + 4 * n * (n + 1) * η / ε])

P[n_, θ_] := ((-1)^m) LegendreP[n, Cos[θ]]
      |πολυώνιοιο | e... |συνημίτονο

Q[n_, m_, θ_] := ((-1)^m) LegendreP[n, m, Cos[θ]]
      |πολυώνιοιο Legen... |συνημίτονο

In[*]:= F1[r_, θ_, φ_] :=
      sum_{n=1}^{30} (sum_{m=0}^n ( ( (2 * n + 1) * (n - m)! / (2 * Pi * ε * (2 * s1[η, ε, n] + 1) * (n + m)! ) ) * (1 - 1/2 * KroneckerDelta[θ, m]) *
      ( ( (s1[η, ε, n] + 1) / (s1[η, ε, n] * 0.092^(2 * s1[η, ε, n] + 1)) * r^s1[η, ε, n] + r^-(s1[η, ε, n] + 1)) * 10^-5 * s1[η, ε, n] * R0^(s1[η, ε, n] - 1) *
      ((Q[n, m, θ] * Sin[m * φ] * Q[n, m, θ0] * Sin[m * φ0] + Q[n, m, θ] * Cos[m * φ] * Q[n, m, θ0] * Cos[m * φ0]))))
      |ημίτονο |ημίτονο |συνημίτονο |συνημίτονο

In[*]:= F1[0.092, Pi/4, Pi/4]
      |π |π

Out[*]= 0.00424771

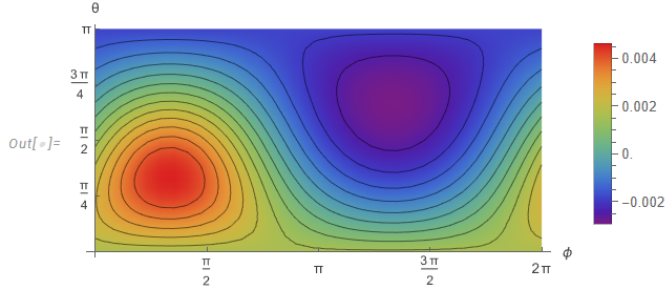
In[*]:= r := 0.092

```

```

In[ ]:= DensityPlot[F1[0.092, t, φ], {φ, 0, 2 Pi}, {t, 0, Pi}, Axes → True, Frame → False, AspectRatio → 1/2,
[διάγραμμα πυκνότητας] [π] [π] [επιλο... [αλη... [κορνίζα [ψευδής [λόγος διαστάσεων
Ticks → {{0, Pi/2, Pi, 3 Pi/2, 2 Pi}, {0, Pi/4, Pi/2, 3 Pi/4, Pi}}, AxesLabel → {"φ", "θ"}, ColorFunction → "Rainbow",
[σημάδια υποδι... [π] [π] [π] [π] [π] [π] [π] [π] [ετικέτες αξόνων [συνάρτηση χρώματος
PlotPoints → 35, MeshFunctions → {#3 &, #3 &}, Mesh → {Range[-0.004, 0.004, 0.0005], Range[-0.004, 0.004, 0.0005]},
[αριθμός σημείων δι... [συναρτήσεις πλέγματος [πλέγμα [πεδίο τιμών έκφρασης [πεδίο τιμών έκφρασης
MeshStyle → Opacity[0.5, Black], PlotLegends → Placed[Automatic, Right]
[στυλ πλέγμα... [αδιαφάνεια [μαύρο [υπομνήματα δι... [τοποθε... [αυτόματο [δεξιά θέση

```



A.3 Υπολογισμός ηλεκτρικού δυναμικού στο ανισότροπο σφαιρικό τριών φλοιών πρότυπο

Οι γραφικές απεικονίσεις για το δυναμικό u_s πάνω στην επιφάνεια της κεφαλής σε ανισότροπο πρότυπο τριών φλοιών στο χωρίο $r_b < r < r_s$ παρουσιάζεται.

$$\begin{aligned}
u_s = -Q \cdot \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \{ \nabla_{r_0} [Y_{nma}(\hat{r}_0) A_{s,n}] r^{s_s} \\
+ \nabla_{r_0} [Y_{nma}(\hat{r}_0) B_{s,n}] r^{-(s_s+1)} \} Y_{nma}(\hat{r}), \quad (A.11)
\end{aligned}$$

$r_b < r < r_s$

$$\begin{aligned}
u_s = - \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \{ Q \nabla_{r_0} [Y_{nma}(\hat{r}_0) A_{s,n}] r^{s_s} \\
+ Q \nabla_{r_0} [Y_{nma}(\hat{r}_0) B_{s,n}] r^{-(s_s+1)} \} Y_{nma}(\hat{r}), \\
u_s = - \sum_{nma}^{\infty n1} \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \{ Q \nabla_{r_0} [A4] Y_{nma}(\hat{r}_0) r^{s_s} \\
+ Q \nabla_{r_0} [B4] Y_{nma}(\hat{r}_0) r^{-(s_s+1)} \} Y_{nma}(\hat{r}) \quad (A.12)
\end{aligned}$$

Ισχύουν : $B_{s,n} = B_4$ και $A_{s,n} = A_4$

Η διπολική πηγή που χρησιμοποιείται για το ανισότροπο τριών φλοιών μοντέλο είναι η ίδια ακτινική πηγή που χρησιμοποιήθηκε για το ομογενές πρότυπο (A.7)

Υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων $\mathbf{Q} \cdot \nabla A4(r) Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})$

$$1^\circ \text{ Διάνυσμα : } \nabla_r A4(r) Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{\partial}{\partial r} A4(r) Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$2^\circ \text{ Διάνυσμα : } \mathbf{Q} = 10^{-5} \hat{\mathbf{r}}$$

Αυτό οδηγεί στη σχέση :

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} A4(r_0) Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) = 10^{-5} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \frac{\partial}{\partial r} A4(r)/r \rightarrow r_0 \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} [B4] Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) = 10^{-5} Y_{nma}(\hat{\mathbf{r}}_0) \frac{\partial}{\partial r} B4(r)/r \rightarrow r_0 \quad (\text{A.14})$$

Για την υλοποίηση στο mathematica καλαλήγουμε στην παρακάτω μορφή :

$$u_s = - \sum_{n=1}^{30} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{0m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \\ \{ 10^{-5} * (\text{παραγωγός του } A4 \text{ στο } r_0) r^{s_s} \\ + 10^{-5} * (\text{παραγωγός του } B4 \text{ στο } r_0) r^{-(s_s+1)} \} * \\ [P_n^m(\cos \theta_0) * \text{Sin}[m\phi_0] * P_n^m(\cos \theta) * \text{Sin}[m\phi] + P_n^m(\cos \theta_0) \\ * \text{Cos}[m\phi_0] * P_n^m(\cos \theta) * \text{Cos}[m\phi]] \quad (\text{A.15})$$

Στο πρόγραμμα mathematica υλοποιώ την παραπάνω έκφραση του δυναμικού για ακτίνα κεφαλής $r_s = 0.092m$, βάθος πηγής $\hat{\mathbf{r}}_{01} = (r_0, \theta_0, \phi_0) = (0.05, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, με ανισότροπες αγωγιμότητες σύμφωνα με τη βιβλιογραφία και όπως παρατίθεται στο παρακάτω notebook του

Mathematica.

```
In[1]:= ClearAll["Global`*"]
[διαγραφή ιδιοτήτων συμβόλων]
Clear[r0, theta0, phi0, r, theta, phi]
[διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων]
```

In[4]:= **rc = 0.078**

Out[4]= 0.078

In[5]:= **rf = 0.08**

Out[5]= 0.08

In[6]:= **rb = 0.086**

Out[6]= 0.086

In[7]:= **rs = 0.092**

Out[7]= 0.092

In[8]:= **rθ = 0.05**

Out[8]= 0.05

In[9]:= **θ0 = $\frac{\text{Pi}}{3}$**

Out[9]= $\frac{\pi}{3}$

In[10]:= **φ0 = $\frac{\text{Pi}}{3}$**

Out[10]= $\frac{\pi}{3}$

In[11]:= **ηs = 0.484**

Out[11]= 0.484

In[12]:= **es = 0.33**

Out[12]= 0.33

In[13]:= **ηb = 0.0557**

Out[13]= 0.0557

In[14]:= **eb = 0.00557**

Out[14]= 0.00557

In[15]:= **ef = 1.7**

Out[15]= 1.7

In[16]:= **ηf = 1.7**

Out[16]= 1.7

In[17]:= **ec = 0.15864**

Out[17]= 0.15864

In[18]:= **ηc = 1.4278**

Out[18]= 1.4278

In[19]:= **ss[n_, es, ηs] := -0.5 + 0.5 * Sqrt[1 + 4 * n * (n + 1) * ηs / es]**
τετραγωνική ρίζα

In[20]:= **ssval[n_] := ss[n, es, ηs]**

In[21]:= **ssval[1]**

Out[21]= 1.28419

In[22]:= $sb[n_ , eb, \eta b] := -0.5 + 0.5 \sqrt{1 + 4 * n * (n + 1) * \eta b / eb}$
τετραγωνική ρίζα

In[23]:= $sbval[n_] := sb[n, eb, \eta b]$

In[24]:= $sbval[1]$

Out[24]= 4.

In[25]:= $sf[n_ , ef, \eta f] := -0.5 + 0.5 \sqrt{1 + 4 * n * (n + 1) * \eta f / ef}$
τετραγωνική ρίζα

In[26]:= $sfval[n_] := sf[n, ef, \eta f]$

In[27]:= $sfval[1]$

Out[27]= 1.

In[28]:= $sc[n_ , ec, \eta c] := -0.5 + 0.5 \sqrt{1 + 4 * n * (n + 1) * \eta c / ec}$
τετραγωνική ρίζα

In[29]:= $scval[n_] := sc[n, ec, \eta c]$

In[32]:= $P[n_ , \theta in_] := ((-1) ^ m) \text{LegendreP}[n, \text{Cos}[\theta in]]$
πολυώνυμο Legendre... [συνημίτονο]

In[33]:= $P[n, \theta]$

Out[33]= $(-1)^m \text{LegendreP}[n, \text{Cos}[\theta]]$

In[34]:= $P[4, \theta \theta]$

Out[34]= $-\frac{37}{128} (-1)^m$

In[35]:= $T[n_ , m_ , \theta in_] := ((-1) ^ m) * \text{LegendreP}[n, m, \text{Cos}[\theta in]]$
πολυώνυμο Legendre... [συνημίτονο]

In[38]:= $s1[n_ , \epsilon_ , \eta_] := -0.5 + 0.5 \sqrt{1 + 4 * n * (n + 1) * \eta / \epsilon}$
τετραγωνική ρίζα

In[39]:= $s1val[n_] := s1[n, \epsilon, \eta]$

In[41]:= A4 :=

$$\begin{aligned}
 & - \left(\left(r_s^{-1-2ss} \left(-2 r_b^{-1-2sb} - \frac{r_b^{-1-2sb}}{sb} \right) \left(\frac{r_0^{sc} r_c^{-1-2sc}}{ec(1+2sc)} + \frac{r_0^{sc} r_c^{-1-2sc}(1+sc)}{ec\ sc(1+2sc)} \right) \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) (-1-ss) \right) / \right. \\
 & \left(ss \right. \\
 & \left. \left(-r_b^{-1-sb-ss} \left(-2 r_b^{-1-2sb} - \frac{r_b^{-1-2sb}}{sb} \right) \left(r_f^{sb-sf} \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(r_f^{sb-sf} - \frac{eb\ r_f^{sb-sf}\ sb}{ef\ sf} \right) \left(r_c^{-1-sc-sf} - \frac{ef\ r_c^{-1-sc-sf}\ (-1-sf)}{ec\ sc} - r_f^{-1-2sf} \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) \right) \right) \right) + \\
 & \left(r_f^{-1-sb-sf} \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) - \left(r_f^{-1-sb-sf} - \frac{eb\ r_f^{-1-sb-sf}\ (-1-sb)}{ef\ sf} \right) \left(r_c^{-1-sc-sf} - \frac{ef\ r_c^{-1-sc-sf}\ (-1-sf)}{ec\ sc} - r_f^{-1-2sf} \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) \right) \right) - \\
 & r_b^{-1-2sb} \left(r_f^{sb-sf} \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) - \left(r_f^{sb-sf} - \frac{eb\ r_f^{sb-sf}\ sb}{ef\ sf} \right) \left(r_c^{-1-sc-sf} - \frac{ef\ r_c^{-1-sc-sf}\ (-1-sf)}{ec\ sc} - r_f^{-1-2sf} \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) \right) \right) \\
 & \left. \left(r_b^{-1-sb-ss} - \frac{es\ r_b^{-1-sb-ss}\ (-1-ss)}{eb\ sb} \right) \right) + \\
 & \frac{1}{ss} r_s^{-1-2ss} (-1-ss) \\
 & \left(r_b^{-1-sb-ss} \left(-2 r_b^{-1-2sb} - \frac{r_b^{-1-2sb}}{sb} \right) \left(r_f^{sb-sf} \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(r_f^{sb-sf} - \frac{eb\ r_f^{sb-sf}\ sb}{ef\ sf} \right) \left(r_c^{-1-sc-sf} - \frac{ef\ r_c^{-1-sc-sf}\ (-1-sf)}{ec\ sc} - r_f^{-1-2sf} \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) \right) \right) \right) - \\
 & \left(r_f^{-1-sb-sf} \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) - \left(r_f^{-1-sb-sf} - \frac{eb\ r_f^{-1-sb-sf}\ (-1-sb)}{ef\ sf} \right) \left(r_c^{-1-sc-sf} - \frac{ef\ r_c^{-1-sc-sf}\ (-1-sf)}{ec\ sc} - r_f^{-1-2sf} \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) \right) \right) - \\
 & r_b^{-1-2sb} \left(r_f^{sb-sf} \left(-2 r_f^{-1-2sf} - \frac{r_f^{-1-2sf}}{sf} \right) \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) - \left(r_f^{sb-sf} - \frac{eb\ r_f^{sb-sf}\ sb}{ef\ sf} \right) \left(r_c^{-1-sc-sf} - \frac{ef\ r_c^{-1-sc-sf}\ (-1-sf)}{ec\ sc} - r_f^{-1-2sf} \left(r_c^{-sc+sf} - \frac{ef\ r_c^{-sc+sf}\ sf}{ec\ sc} \right) \right) \right) \\
 & \left. \left(r_b^{-1-sb-ss} - \frac{es\ r_b^{-1-sb-ss}\ ss}{eb\ sb} \right) \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$


```

In[45]:= a4values = Table[D[A4expr /. {ss → ssvall[n], sb → sbval[n], sf → sfval[n], sc → scval[n]}, r] /. r → 0.05, {n, 1, 20}]
Out[45]= {-1705.91, -3311.86, -7629.19, -19592.6, -54003., -156109., -466521., -1.42795 × 106, -4.44899 × 106, -1.40498 × 107, -4.48368 × 107, -1.44282 × 108, -4.67423 × 108, -1.52264 × 109, -4.98277 × 109, -1.63687 × 1010, -5.39476 × 1010, -1.78296 × 1011, -5.90688 × 1011, -1.96101 × 1012}

In[46]:= b4values = Table[D[B4expr /. {ss → ssvall[n], sb → sbval[n], sf → sfval[n], sc → scval[n]}, r] /. r → 0.05, {n, 1, 20}]
Out[46]= {-0.192422, -0.00137987, -0.0000105527, -8.70937 × 10-8, -7.60503 × 10-10, -6.9119 × 10-12, -6.46487 × 10-14, -6.17525 × 10-16, -5.99229 × 10-18, -5.88539 × 10-20, -5.83525 × 10-22, -5.82925 × 10-24, -5.85889 × 10-26, -5.9183 × 10-28, -6.00335 × 10-30, -6.11109 × 10-32, -6.23942 × 10-34, -6.38682 × 10-36, -6.55221 × 10-38, -6.73484 × 10-40}

In[47]:= DA4[n_] := a4values[[n]]
In[48]:= DB4[n_] := b4values[[n]]
In[49]:=
F1[r_, θv_, φv_, θ0_, φ0_] :=
-Sum[Sum[(2 n + 1) / (2 Pi)] * (1 - 1/2 KroneckerDelta[0, m]) * (Factorial[n - m] / Factorial[n + m]) * (10^(-5) * DA4[n] * r^ssvall[n] + 10^(-5) * DB4[n] * r^(- (ssvall[n] + 1))) *
(T[n, m, θv] + Sin[m * φv] * T[n, m, θ0] + Sin[m * φ0] * T[n, m, θv] + Cos[m * φv] * T[n, m, θ0] + Cos[m * φ0]), {m, 0, n}], {n, 1, 20}]

In[50]:= F1[0.092, Pi / 4, Pi / 3, Pi / 3]
Out[50]= 0.00033695

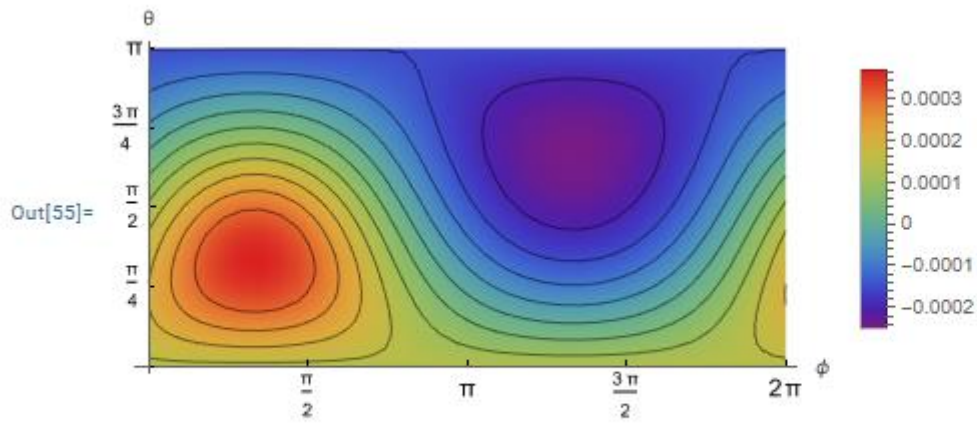
In[51]:= r := 0.092
In[52]:= Fishort[r_?NumericQ, θv_?NumericQ, φv_?NumericQ] :=
N[
-Sum[Sum[(2 n + 1) / (2 Pi)] * (1 - 1/2 KroneckerDelta[0, m]) * (Factorial[n - m] / Factorial[n + m]) * (10^(-5) * DA4[n] * r^ssvall[n] + 10^(-5) * DB4[n] * r^(- (ssvall[n] + 1))) *
(T[n, m, θv] + Sin[m * φv] * T[n, m, θ0] + Sin[m * φ0] * T[n, m, θv] + Cos[m * φv] * T[n, m, θ0] + Cos[m * φ0]), {m, 0, n}], {n, 1, 5}]

In[53]:= NMinimize[{Fishort[r, t, φ], 0 < t < Pi, 0 < φ < 2 * Pi}, {t, φ}]
Out[53]= {-0.000249138, {t → 2.09439, φ → 4.18879}}

In[54]:= NMaximize[{Fishort[r, t, φ], 0 < t < Pi, 0 < φ < 2 * Pi}, {t, φ}]
Out[54]= {0.000366809, {t → 1.0472, φ → 1.0472}}

In[55]:= DensityPlot[F1[0.092, t, φ, Pi / 3, Pi / 3], {φ, 0, 2 Pi}, {t, 0, Pi}, Axes → True, Frame → False, AspectRatio → 1 / 2, Ticks → {Table[i Pi / 2, {i, 0, 4}], Table[i Pi / 4, {i, 0, 4}]},
TicksStyle → Directive[GrayLevel[0], Medium], AxesLabel → {"φ", "θ"}, ColorFunction → "Rainbow", PlotPoints → 35, MeshFunctions → {{#3 &}},
Mesh → {Range[-0.0003, 0.0003, 0.00005]}, MeshStyle → Opacity[0.5, Black], PlotLegends → Placed[Automatic, Right]]

```



Παράρτημα Β: Οι συντελεστές του αναπτύγματος της λύσης A_{jn}, B_{jn}

Β1. Εύρεση των συντελεστών στο ανισότροπο μη ομογενές σύστημα με τρεις φλοιούς.

Οι λύσεις των συντελεστών A_{jn}, B_{jn} που εμφανίζονται στα ηλεκτρικά δυναμικά (4.30)- (4.34) στο ανισότροπο μη ομογενές σύστημα προσδιορίζονται με τη βοήθεια πινάκων όπως στη συνέχεια.

$$[AB] \cdot \begin{bmatrix} A_{n,c}^{(2)} \\ A_{f,n} \\ B_{f,n} \\ A_{b,n} \\ B_{b,n} \\ A_{s,n} \\ B_{s,n} \\ B_{e,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_0^{s_c} \\ \frac{\epsilon_c(2s_c+1)}{\epsilon_c(2s_c+1)} & \frac{r_0^{2s_c+1}}{r_c^{2s_c+1}} \\ (s_c+1) & 1 & r_0^{s_c} \\ s_c & \epsilon_c(2s_c+1) & r_c^{2s_c+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -r_c^{s_f-s_c} & -\frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{\epsilon_f s_f}{\epsilon_c s_c} r_c^{s_f-s_c} & -\frac{\epsilon_f (-s_f-1)}{\epsilon_c s_c r_c^{s_c+s_f+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_f^{-2s_f-1} & -r_f^{s_b-s_f} & -r_f^{-(s_b+s_f+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(-s_f-1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{2s_f+1}} & -\frac{\epsilon_b s_b}{\epsilon_f s_f} r_f^{s_b-s_f} & -\frac{\epsilon_b (-s_b-1)}{\epsilon_f s_f} \frac{1}{r_f^{s_b+s_f+1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_b^{-2s_b-1} & -\frac{\epsilon_s s_s}{\epsilon_b s_b} r_b^{s_s-s_b} & -\frac{r_b^{-(s_b+s_s+1)}}{\epsilon_b (s_s+1)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(-s_b-1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} & -\frac{\epsilon_s s_s}{\epsilon_b s_b} r_b^{s_s-s_b} & \frac{\epsilon_s (s_s+1)}{\epsilon_b s_b} \frac{1}{r_b^{s_s+s_b+1}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{r_s^{(2s_s+1)}} & 1 & -r_s^{-(s_e+s_s+1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(-s_s-1)}{s_s} \frac{1}{r_s^{2s_s+1}} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{n,c}^{(2)} \\ A_{f,n} \\ B_{f,n} \\ A_{b,n} \\ B_{b,n} \\ A_{s,n} \\ B_{s,n} \\ B_{e,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_0^{s_c} \\ \frac{\epsilon_c(2s_c+1)}{\epsilon_c(2s_c+1)} & \frac{r_0^{2s_c+1}}{r_c^{2s_c+1}} \\ (s_c+1) & 1 & r_0^{s_c} \\ s_c & \epsilon_c(2s_c+1) & r_c^{2s_c+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (B.2)$$

Με τις παρακάτω αντικαταστάσεις, προκύπτει η σχέση (B.3).

$$A_{c,n}^{(2)} = A_1, A_{f,n} = A_2, A_{b,n} = A_3, A_{s,n} = A_4,$$

$$B_{f,n} = B_2, B_{b,n} = B_3, B_{s,n} = B_4, B_{e,n} = B_5,$$

$$I1 = \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}},$$

$$I2 = -\frac{(s_c+1)}{s_c} \frac{1}{\varepsilon_c(2s_c+1)} \frac{r_0^{s_c}}{r_c^{2s_c+1}} \Rightarrow I2 = \frac{-(s_c+1)}{s_c} \cdot I1$$

$$[M] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M\varepsilon \quad [M] = \begin{bmatrix} 1 & A12 & 0 & 0 & B12 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & A22 & 0 & 0 & B22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A33 & 0 & B32 & B33 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & A43 & 0 & B42 & B43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A54 & 0 & B53 & B54 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A64 & 0 & B63 & B64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & B74 & B75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & B84 & 0 \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

όπου

$$A12 = -r_c^{s_f-s_c}, B12 = -\frac{1}{r_c^{s_c+s_f+1}}$$

$$A22 = -\frac{\varepsilon_f s_f}{\varepsilon_c s_c} r_c^{s_f-s_c} \Rightarrow A22 = \frac{\varepsilon_f s_f}{\varepsilon_c s_c} * A12$$

$$B22 = -\frac{\varepsilon_f (-s_f-1)}{\varepsilon_c s_c r_c^{s_c+s_f+1}} \Rightarrow B22 = \frac{\varepsilon_f (-s_f-1)}{\varepsilon_c s_c} * B12$$

$$A33 = -r_f^{s_b-s_f}, B32 = \frac{1}{r_f^{2s_f+1}}, B33 = \frac{-1}{r_f^{(s_b+s_f+1)}}$$

$$A43 = -\frac{\varepsilon_b s_b}{\varepsilon_f s_f} r_f^{s_b-s_f} \Rightarrow A43 = \frac{\varepsilon_b s_b}{\varepsilon_f s_f} \cdot A33$$

$$B42 = \frac{(-s_f-1)}{s_f} \frac{1}{r_f^{2s_f+1}} \Rightarrow B42 = \frac{(-s_f-1)}{s_f} \cdot B32$$

$$B43 = -\frac{\varepsilon_b (-s_b-1)}{\varepsilon_f s_f} \frac{1}{r_f^{s_b+s_f+1}} \Rightarrow B43 = \frac{\varepsilon_b (-s_b-1)}{\varepsilon_f s_f} \cdot B33$$

$$A54 = -r_b^{s_s-s_b}, B53 = \frac{1}{r_b^{2s_b+1}}, B54 = \frac{-1}{r_b^{s_s+s_b+1}}$$

$$A64 = -\frac{\varepsilon_s s_s}{\varepsilon_b s_b} r_b^{s_s-s_b} \Rightarrow A64 = \frac{\varepsilon_s s_s}{\varepsilon_b s_b} \cdot A54$$

$$B63 = \frac{-(s_b+1)}{s_b} \frac{1}{r_b^{2s_b+1}} \Rightarrow B63 = \frac{-(s_b+1)}{s_b} \cdot B53$$

$$B64 = \frac{\varepsilon_s (s_s+1)}{\varepsilon_b s_b} \frac{1}{r_b^{s_s+s_b+1}} \Rightarrow B64 = \frac{\varepsilon_s (s_s+1)}{\varepsilon_b s_b} \cdot B54$$

$$B74 = \frac{1}{r_s^{(2s_s+1)}}, \quad B75 = -r_s^{-(s_e+s_s+1)} = -\frac{1}{r_s^{(s_e+s_s+1)}}$$

$$B84 = \frac{(-s_s - 1)}{s_s} \frac{1}{r_s^{2s_s+1}} \Rightarrow B84 = \frac{(s_s + 1)}{s_s} \cdot B74$$

Οι λύσεις που προκύπτουν για τα $A_1, A_2, A_3, A_4, B_2, B_3, B_4, B_5$, με τη μέθοδο των οριζουσών (κανόνας του Cramer) έχοντας επαναλαμβανόμενες σταθερές $Con1, Con2$ δίνονται παρακάτω στις (B.4)-(B.11)

$$Con1 = (B54 - A54 \cdot B84) - (B64 - A64 \cdot B84)$$

$$Con2 = (B54 - A54 \cdot B84) \cdot B63 - (B64 - A64 \cdot B84) \cdot B53$$

$$A_1 = l1 + (l1 - l2) \cdot$$

$$\begin{aligned} & ((B43 \cdot Con1 - A43 \cdot Con2) \cdot (B12 - A12 \cdot B32) + (A12 \cdot B42 - B12) \cdot (B \\ & \cdot Con1 - A33 \cdot Con2)) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \end{aligned} \quad (B.4)$$

$$A_2 = (l1 - l2)$$

$$\cdot ((B43 \cdot Con1 - A43 \cdot Con2) \cdot B32 - (B33 \cdot Con1 - A33 \cdot Con2) \cdot B42) \frac{B7}{Det[M]} \quad (B.5)$$

$$A_3 = (l1 - l2)(B32 - B42)Con2 \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.6)$$

$$A_4 = -(l1 - l2)B84 \cdot (B32 - B42)(B53 - B63) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.7)$$

$$B_2 = -(l1 - l2)((B43 \cdot Con1 - A43 \cdot Con2) - (B33 \cdot Con1 - A33 \cdot Con2)) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.8)$$

$$B_3 = -(l1 - l2)(B32 - B42)Con1 \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.9)$$

$$B_4 = (l1 - l2)(B32 - B42)(B53 - B63) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.10)$$

$$B_5 = (l1 - l2)(B32 - B42)(B53 - B63) \cdot \frac{B84 - B74}{Det[M]} \quad (B.11)$$

B2. Εύρεση των συντελεστών στο ισότροπο μη ομογενές σύστημα με τρεις φλοιούς

Οι λύσεις των συντελεστών A_{jn}, B_{jn} που εμφανίζονται στα ηλεκτρικά δυναμικά (5.14) σε ένα ισότροπο μη ομογενές σφαιρικό σύστημα προσδιορίζονται με τη βοήθεια πινάκων και ισχύουν οι λύσεις (B.4)-(B.11) του παραρτήματος B1.

Επιπλέον, στο ομογενές ισχύει $s_{j1} = n$ και $s_{j2} = -n - 1 = -s_{j1} - 1$ με αποτέλεσμα οι σταθερές να μετασχηματίζονται όπως εμφανίζονται παρακάτω :

$$\begin{aligned}
 I1 &= \frac{1}{\sigma_c(2n+1)} \frac{r_0^n}{r_c^{2n+1}}, \quad I2 = \frac{-(n+1)}{n} \cdot I1 \\
 A12 &= A33 = A54 = -1 \\
 A22 &= -\frac{\sigma_f}{\sigma_c}, \quad A43 = -\frac{\sigma_b}{\sigma_f}, \quad A64 = -\frac{\sigma_s}{\sigma_b}, \quad B12 = -\frac{1}{r_c^{2n+1}} \\
 B22 &= \frac{\sigma_f(-n-1)}{\sigma_c n} \cdot B12, \quad B43 = \frac{\sigma_b(-n-1)}{\sigma_f n} \cdot B33, \quad B64 = \frac{\sigma_s(-n-1)}{\sigma_b n} \cdot B54 \\
 B32 &= -B33 = \frac{1}{r_f^{2n+1}}, \quad B53 = -B54 = \frac{1}{r_b^{2n+1}}, \quad B74 = -B75 = \frac{1}{r_s^{(2n+1)}}, \\
 B42 &= \frac{-(n+1)}{n} B32, \quad B63 = \frac{-(n+1)}{n} \cdot B53, \quad B84 = \frac{(n+1)}{n} \cdot B74
 \end{aligned}$$

Αναλυτικά οι εκφράσεις των μεταβλητών παρουσιάζονται παρακάτω

$$Con1 = (B54 + B84) - (B64 - A64 \cdot B84)$$

$$Con2 = (B54 + B84) \cdot B63 + (B64 - A64 \cdot B84) \cdot B54$$

$$A_1 = l1 + (l1 - l2) \cdot$$

$$((B43 \cdot Con1 - A43 \cdot Con2) \cdot (B12 - B33) - (B42 + B12) \cdot$$

$$(B33 \cdot Con1 + Con2)) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.4)$$

$$A_2 = (l1 - l2)$$

$$\cdot ((B43 \cdot Con1 - A43 \cdot Con2) \cdot (-B33) - (B33 \cdot Con1 + Con2) \cdot B42) \cdot \frac{B7}{Det[} \quad (B.5)$$

$$A_3 = (l1 - l2)(B32 - B42)Con2 \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.6)$$

$$A_4 = -(l1 - l2)B84 \cdot (B32 - B42)(-B54 - B63) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.7)$$

$$B_2 = -(l1 - l2)((B43 \cdot Con1 - A43 \cdot Con2) - (-B32 \cdot Con1 + Con2)) \cdot \frac{B75}{Det[M]} \quad (B.8)$$

$$B_3 = -(l_1 - l_2)(B_{32} - B_{42})Con1 \cdot \frac{B_{75}}{Det[M]} \quad (B.9)$$

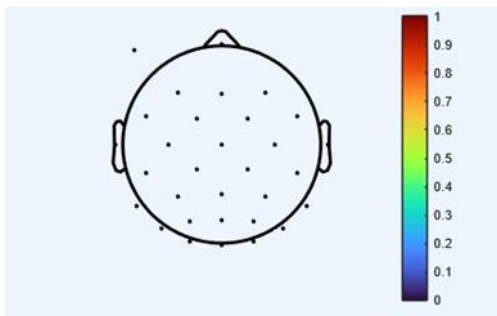
$$B_4 = (l_1 - l_2)(B_{32} - B_{42})(B_{53} - B_{63}) \cdot \frac{B_{75}}{Det[M]} \quad (B.10)$$

$$B_5 = (l_1 - l_2)(B_{32} - B_{42})(B_{53} - B_{63}) \cdot \frac{B_{84} - B_{74}}{Det[M]} \quad (B.11)$$

Παράρτημα Γ : Υπολογισμός δυναμικών για τα μετρικά σφαλματα RDM και MAG

Στην παρούσα εργασία, για την αριθμητική αξιολόγηση των αναλυτικών εκφράσεων του ηλεκτρικού δυναμικού χρησιμοποιήθηκαν τυποποιημένες θέσεις ηλεκτροδίων από τα αρχεία της πλατφόρμας EEGLAB (όπως τα `eeglab_chan32.locs` , `standard_1005.ced`). Συγκεκριμένα, το αρχείο `standard_1005.ced` περιέχει τις θέσεις των ηλεκτροδίων του διεθνούς συστήματος 10–05 σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) , οι οποίες βασίζονται σε πρότυπο ανατομικό μοντέλο κεφαλής (MNI template) και, συνεπώς, αντιστοιχούν σε ρεαλιστική γεωμετρία και όχι σε ιδανική σφαιρική επιφάνεια σταθερής ακτίνας. Για να καταστούν συμβατές με το παρόν σφαιρικό μοντέλο, οι συντεταγμένες αυτές μετατράπηκαν σε σφαιρικές συντεταγμένες και διατηρήθηκαν μόνο οι γωνιακές παράμετροι (θ, φ) , ενώ η ακτινική συντεταγμένη τέθηκε ίση με την ακτίνα της εξωτερικής επιφάνειας του μοντέλου, $r = 0.092m$.

Με τον τρόπο αυτό προέκυψαν 32 σημεία παρατήρησης στην επιφάνεια του τριχωτού της κεφαλής, τα οποία αντιστοιχούν στη διάταξη των 32 ηλεκτροδίων. Στα σημεία αυτά υπολογίστηκαν, μέσω της αναλυτικής λύσης του ανισότροπου πολυστρωματικού σφαιρικού μοντέλου, οι αντίστοιχες 32 τιμές του ηλεκτρικού δυναμικού με σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση $\hat{r}_{01} = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = \left(0.05, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ και σημεία παρατήρησης στην επιφάνεια του τριχωτού της κεφαλής.



Σχήμα Γ1 : Σημεία ηλεκτροδίων από matlab

```
points = {{0.092, 1.5905, 0.0000}, {0.092, 2.2290, 0.4014}, {0.092, 1.0814, 5.5853},  
{0.092, 0.7962, 0.0000}, {0.092, 1.0809, .6960}, {0.092, 2.0420, 5.9341},  
{0.092, 1.2818, 5.0731}, {0.092, 0.5682, 5.4970}, {0.092, 0.5682, 0.7842},  
{0.092, 1.2818, 1.2100}, {0.092, 1.6746, 4.7124}, {0.092, 0.8370, 4.7124},  
{0.092, 0.8370, 1.5708}, {0.092, 0.0000, 0.0000}, {0.092, 1.6746, 1.5708},  
{0.092, 1.2827, 4.3526}, {0.092, 0.5682, 3.9301}, {0.092, 0.5682, 2.3598},  
{0.092, 1.2818, 1.9327}, {0.092, 1.6570, 4.0826}, {0.092, 1.0814, 3.8439},
```

{0.092, 0.7962, 3.1416}, {0.092, 1.0809, 2.4455}, {0.092, 1.6570, 2.1983},
{0.092, 1.6384, 3.7686}, {0.092, 1.3208, 3.5335}, {0.092, 1.1933, 3.1416},
{0.092, 1.3208, 2.7506}, {0.092, 1.6390, 2.5130}, {0.092, 1.6159, 3.4566},
{0.092, 1.5905, 3.1416}, {0.092, 1.6159, 2.8299}};

Τιμές Δυναμικού=

{0.000107663, 0.0000452448,
2.03285*10⁻⁶, 0.000200679, 0.00034108, -0.0000532937, -0.000125557,
0.0000647907, 0.000298895, 0.000345837, -0.00021227, -0.0000867413,
0.000309208, 0.000136345, 0.000215804, -0.000188709, -0.0000358608,
0.000152019, 0.0002044, -0.00023146, -0.000148217, -0.0000162494,
0.0000874402, 0.0000675099, -0.000216978, -0.000160632,
-0.0000857651, -0.0000241148, -0.0000115435, -0.000186457,
-0.000139004, -0.0000823092}

Για το ανισότροπο σφαιρικό μοντέλο τριών φλοιών, με ακτίνα εξωτερικής επιφάνειας $r = 0.092m$, σημειακή πηγή τοποθετημένη στη θέση $\hat{r}_{01} = (r_0, \theta_0, \varphi_0) = \left(0.05, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ και σημεία παρατήρησης στην επιφάνεια του τριχωτού της κεφαλής, οι υπολογιζόμενες τιμές του ηλεκτρικού δυναμικού στα 385 σημεία των ηλεκτροδίων δίνονται παρακάτω.

Τιμές Δυναμικού για τις αντίστοιχες θέσεις :

{0.000136345, 0.000136345, 0.00013967, -0.000168409, 0.000236568,
0.000286905, -0.000133219, -0.000114802, -0.000117527, -0.000125353,
-0.000139307, 0.000291576, 0.000332672, 0.000345554, 0.00033195,
0.000300522, 0.000204627, -0.0000595104, -0.0000439473, -0.000038069,
-0.0000364085, -0.0000485153, 0.000282759, 0.00035689, 0.000358422,
0.000322033, 0.000274514, 0.000204745, 0.0000323962, 0.0000418245,
0.0000505234, 0.000062555, 0.0000731523, 0.000213875, 0.000312129,
0.000283359, 0.000247701, 0.000215387, 0.000181026, 0.000136345,
0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000111286,
0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345,
0.0000323962, 0.0000418245, 0.0000505234, 0.000062555, 0.0000731523,
0.000213875, 0.000312129, 0.000283359, 0.000247701, 0.000215605,
0.000181026, -0.0000595104, -0.0000439473, -0.000038069,
-0.0000364085, -0.0000485153, 0.000332672, 0.000345554, 0.00033195,
0.000300522, 0.000204627, -0.000168409, 0.000236568, 0.000286905,
-0.00015675, -0.000147215, -0.000155708, -0.000166129, -0.00017876,
0.000286377, 0.000306977, 0.000313329, 0.00030666, 0.000250617,
-0.0000933286, -0.0000798952, -0.0000806829, -0.0000889762,
-0.000111148, 0.000329773, 0.000363322, 0.000352107, 0.00031532,
0.000252912, -0.0000114497,
1.5648*10⁻⁶, 0.0000100215, 0.0000150149, -8.96679*10⁻⁶,
0.000316166, 0.000345327, 0.000312901, 0.000269952, 0.000224109,
0.0000849099, 0.0000912642, 0.0000988352, 0.000113741, 0.000136425,
0.000262104, 0.000229406, 0.000204104, 0.000185611, 0.000170122,

0.0000886114, 0.0000832927, 0.0000944982, 0.000104904, 0.000126306,
0.000164746, 0.000247494, 0.000215418, 0.000194448, 0.000177538,
0.000161055, -0.0000154407, -2.83484*10⁻⁶,
5.88864*10⁻⁶, 0.0000135294, 9.83554*10⁻⁶, 0.000254593, 0.000344276,
0.000332175, 0.000291673, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345,
0.000136345, 0.000294649, 0.000301173, 0.000265157, 0.000231367, 0.000199689,
0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345,
0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345, 0.000136345,
-0.0000545507, -0.000040508, -0.0000362169, -0.0000397176,
-0.0000651536, 0.00032934, 0.000364999, 0.000342591, 0.00029879,
0.000242289, 0.000035477, 0.000046034, 0.0000559844, 0.0000694387,
0.0000594655, 0.000294649, 0.000301173, 0.000265157, 0.000231314,
0.000199689, -0.0000545507, -0.000040508, -0.0000362169,
-0.0000397176, -0.0000651536, 0.00032934, 0.000364999, 0.000342591,
0.00029879, 0.000242289, -0.000127318, -0.000115677, -0.000120861,
-0.000131428, -0.000148917, 0.000315327, 0.000342824, 0.000341496,
0.000317762, 0.000255815, -0.0000545507, -0.000040508, -0.0000362169,
-0.0000397176, -0.0000651536, 0.00032934, 0.000364999, 0.000342591,
0.00029879, 0.000242289, -0.0000989914, -0.0000815528, -0.0000796379,
-0.0000837408, -0.0000982369, 0.0002956, 0.000352869, 0.000362224,
0.000335749, 0.000292189, -0.0000154407, -2.83484*10⁻⁶,
5.88864*10⁻⁶, 0.0000135294,
9.83554*10⁻⁶, 0.000254593, 0.000344276, 0.000332175, 0.000291673,
0.000248288, 0.000195701, 0.0000832927, 0.0000886114, 0.0000944982,
0.000104904, 0.000126306, 0.000164746, 0.000247494, 0.000215418,
0.000194448, 0.000185611, 0.000170122, -0.0000114497,
1.5648*10⁻⁶, 0.0000100215, 0.0000150149, -8.96679*10⁻⁶,
0.000254593, 0.000316166, 0.000345327, 0.000312901, 0.000224109,
0.0000849099, 0.0000912642, 0.0000988352, 0.000113741, 0.000136425,
0.000164746, 0.000247494, 0.000215418, 0.000194448, 0.000185611,
0.000161055, -0.0000154407, -2.83484*10⁻⁶, 5.88864*10⁻⁶, 0.0000135294,
9.83554*10⁻⁶, 0.000254593, 0.000344276, 0.000332175, 0.000291673,
0.000248288, 0.000195701, 0.0000832927, 0.0000886114, 0.0000944982,
0.000104904, 0.000126306, 0.000164746, 0.000247494, 0.000215418,
0.000194448, 0.000177538, 0.000161055, -0.0000154407, -2.83484*10⁻⁶,
5.88864*10⁻⁶, 0.0000135294, 9.83554*10⁻⁶, 0.000254593, 0.000344276,
0.000332175, 0.000291673, 0.000248288, 0.000195701, 0.0000832927, 0.0000886114,
0.0000944982, 0.000104904, 0.000126306, 0.000164746, 0.000247494, 0.000215418,
0.000194448, 0.0000832927, 0.0000886114, 0.0000944982, 0.000104904,
0.000126306, 0.000164746, 0.000247494, 0.000215418, 0.000194448,
0.000177538, 0.000161055, -0.0000154407, -2.83484*10⁻⁶,
5.88864*10⁻⁶, 0.0000135294, 9.83554*10⁻⁶, 0.000254593, 0.000344276,
0.000332175, 0.000291673, 0.000248288, 0.000195701, 0.0000832927, 0.0000886114,
0.0000944982, 0.000104904, 0.000126306, 0.000164746, 0.000247494, 0.000215418,
0.000194448}

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.