



«Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας»

«Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά»

Διπλωματική Εργασία

«Παραμετρική μελέτη της ευστάθειας του αντίστροφου προβλήματος της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας σε διαταραχές της εκκεντρότητας του γεωμετρικού μοντέλου»

Μαργαρίτης Κωνσταντίνος

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Καριώτου Φωτεινή

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



«Παραμετρική μελέτη της ευστάθειας του αντίστροφου προβλήματος της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας σε διαταραχές της εκκεντρότητας του γεωμετρικού μοντέλου»

Μαργαρίτης Κωνσταντίνος

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:

Καριώτου Φωτεινή

Επ. Καθηγήτρια, ΣΘΕΤ ΕΑΠ

Συν-Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:

Χατζηνικολάου Μαρία

Καθηγήτρια, ΣΘΕΤ ΕΑΠ

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2022

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου κ. Φωτεινή Καριώτου για τη βοήθεια και τη στήριξη που μου προσέφερε από την πρώτη κιόλας στιγμή της γνωριμίας μας, καθώς και για το πολύ ενδιαφέρον θέμα που μου υπέδειξε. Επίσης ήθελα να ευχαριστήσω την β' αξιολογήτρια της διπλωματικής καθηγήτρια κ. Μαρία Χατζηνικολάου για τις εύστοχες παρατηρήσεις της και την σημαντική της υποστήριξη. Τέλος ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου.

Περίληψη

Αν και το πραγματικό σχήμα του εγκεφάλου προσεγγίζεται καλύτερα από ένα τριαξονικό ελλειψοειδές με μέσους ημιάξονες $a_1 = 9, a_2 = 6.5, a_3 = 6$, στις ιατρικές εφαρμογές της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας ο ανθρώπινος εγκέφαλος μοντελοποιείται ως σφαίρα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία σφάλματος στον προσδιορισμό της πηγής, αφού δεδομένα που προέρχονται από ένα ελλειψοειδές εγκέφαλο επεξεργάζονται από αλγορίθμους σχεδιασμένους για σφαιρικό εγκέφαλο. Στην παρούσα εργασία διερευνώνται τα σφάλματα που προκύπτουν στον προσδιορισμό μιας διπολικής πηγής που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ελλειψοειδούς και αντίστοιχα ενός σφαιρικού εγκεφάλου όταν το μοντέλο περιγραφής του εγκεφάλου αποκλίνει από το βέλτιστο. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας. Παρουσιάζονται το φυσικό φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου, η σχεδόν στατική θεωρία των εξισώσεων Maxwell, οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του Geselowitz και το πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών του εγκεφάλου. Στη συνέχεια επιλύεται το ευθύ και του αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο σφαιρικό και στο ελλειψοειδές πρότυπο. Στο ευθύ πρόβλημα προσδιορίζονται αναλυτικά τα ηλεκτρικά δυναμικά στο εσωτερικό και το εξωτερικό του εγκεφάλου, ενώ στο αντίστροφο πρόβλημα υπολογίζονται σε πεπερασμένα βήματα η θέση και η ροπή της διπολικής πηγής μέσω αναλυτικών αλγορίθμων. Στη συνέχεια, τα αναπτύγματα του ηλεκτρικού δυναμικού στο σφαιρικό και στο ελλειψοειδές μοντέλο συνδέονται μέσω του ελλειπτοσφαιρικού συστήματος συντεταγμένων. Αφού επιτευχθεί η σύνδεση των δύο προτύπων, υπολογίζονται τα σφάλματα που δημιουργούνται στον προσδιορισμό της πηγής αρχικά με αναλυτικές εκφράσεις και στη συνέχεια αριθμητικά, για κάποιες ειδικές περιπτώσεις, χρησιμοποιώντας κατάλληλα ελλειψοειδή μοντέλα. Ειδικότερα, υπολογίζονται τα σφάλματα που προκύπτουν στον εντοπισμό της διπολικής πηγής σε ένα ελλειψοειδή εγκέφαλο όταν έχει χρησιμοποιηθεί σφαιρικός αλγόριθμος αντιστροφής και αντίστοιχα σε ένα σφαιρικό εγκέφαλο όταν έχει χρησιμοποιηθεί ελλειψοειδής αλγόριθμος αντιστροφής. Η μελέτη των αποτελεσμάτων έδειξε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα σφάλματα εξαρτώνται από τις τιμές των κύριων εκκεντροτήτων των ελλειψοειδών μοντέλων που χρησιμοποιούνται. Στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εγκεφάλου, τα σφάλματα της θέσης και της ροπής δεν είναι αξιοσημείωτα όταν οι κύριες εκκεντρότητες των ελλειψοειδών μοντέλων πλησιάζουν τις τιμές του μέσου ανθρώπινου εγκεφάλου, ενώ αυξάνονται καθώς οι εκκεντρότητες αποκλίνουν από

αυτές τις τιμές. Ωστόσο, όταν ο εγκέφαλος θεωρείται σφαιρικός, το σφάλμα της θέσης είναι αυξημένο όταν οι κύριες εκκεντρότητες των ελλειψοειδών μοντέλων βρίσκονται εντός της περιοχής των τιμών του μέσου ανθρώπινου εγκεφάλου και μειώνεται καθώς αποκλίνουν από αυτές τις τιμές. Όσον αφορά το σφάλμα της ροπής, παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά όπως στην περίπτωση του ελλειψοειδούς εγκεφάλου.

Λέξεις – Κλειδιά

ηλεκτροεγκεφαλογραφία, αντίστροφο πρόβλημα, ελλειψοειδές πρότυπο, σφαιρικό πρότυπο, ηλεκτρικό δυναμικό, εκκεντρότητες ελλειψοειδούς

Abstract

Although the actual shape of the human brain is best approximated by a triaxial ellipsoid with semiaxes of average values $a_1 = 9, a_2 = 6.5, a_3 = 6$, in medical uses of electroencephalography, the human brain is modelled as a spherical one. Consequently, an error in dipole source localization is generated, since the data originated from an ellipsoidal brain are processed by algorithms developed for a spherical brain. In the present thesis, the errors generated in the identification of a dipole source located inside an ellipsoidal and respectively a spherical brain are investigated when the geometric brain model deviates from the optimum one. First, an introduction to the mathematical theory of electroencephalography is made. The physical phenomenon of electromagnetic brain activity, the quasi-static theory of Maxwell equations, Geselowitz integral representations and the multi-shell brain model are presented. Next, the direct and the inverse problem of electroencephalography in the spherical and ellipsoidal model are solved. In the direct problem, the electric potentials inside and outside the brain are analytically calculated, while in the inverse problem the location and the moment of the dipole source are calculated through analytical algorithms in finite steps. Subsequently, a connecting relation between the electric potential expansions of the spherical and the ellipsoidal model is made through the ellipsospherical coordinate system. Once the connection of the two models is achieved, the errors in the dipole source localization are calculated first with analytical expressions and then numerically for particular cases, using specific ellipsoidal models. Particularly, the errors generated in dipole source localization in an ellipsoidal brain are estimated when the spherical inversion algorithm has been used and respectively in a spherical brain when the ellipsoidal inversion algorithm has been used. The results of the study showed that in both cases the errors depend on the values of the principal eccentricities of the ellipsoidal models that are used. When the brain is ellipsoidal, the location and the moment errors are insignificant when the principal eccentricities of the ellipsoidal models converge to the values of the average human brain, whereas the errors increasing as the eccentricities deviate from these values. However, when the brain is considered a spherical one, the location error is increased when the principal eccentricities of the ellipsoidal models are within the region of the values that represent the average human brain and it decreases as the eccentricities deviate from these values. As far as moment error is concerned, it exhibits a similar behavior as in the case of the ellipsoidal brain.

Keywords

electroencephalography, inverse problem, ellipsoidal model, spherical model, electric potential, ellipsoidal eccentricities

Περιεχόμενα

Περίληψη	5
Abstract	7
Περιεχόμενα.....	9
Κατάλογος Πινάκων	12
Εισαγωγή	13
1 Φυσικό φαινόμενο - Στοιχεία ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου	16
2 Μαθηματική θεωρία της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (EEG).....	17
2.1 Εξισώσεις Maxwell	17
2.2 Πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (EEG)	19
2.3 Τύπος Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό	21
2.4 Πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών.....	23
3 Σφαιρικό πρότυπο	25
3.1 Μελέτη του ευθέως προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο σφαιρικό πρότυπο.....	25
3.1.1 Εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό	25
3.1.2 Εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.....	28
3.2 Αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας.....	29
3.2.1 Αντιστροφή Διπολικής Νευρωνικής Διέγερσης	33
3.2.2 Αντιστροφή κατανεμημένης νευρωνικής διέγερσης.....	38
4 Ελλειψοειδές πρότυπο	43
4.1 Μελέτη του ευθέως προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο ελλειψοειδές πρότυπο.....	43
4.1.1 Εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό	50
4.1.2 Εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό.....	65
4.2 Μελέτη του αντίστροφου προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο ελλειψοειδές πρότυπο	67
5 Ελλειπτοσφαιρικό σύστημα.....	71
5.1 Μετατροπή του ελλειψοειδούς αναπτύγματος στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα	73
5.2 Μετατροπή του σφαιρικού αναπτύγματος στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα	75
5.3 Σύνδεση των δυο αναπτυγμάτων	77

6	Προσδιορισμός σφαλμάτων.....	80
6.1	1 ^η περίπτωση - Ελλειψοειδής εγκέφαλος 1.....	81
6.2	2 ^η περίπτωση – Σφαιρικός εγκέφαλος 1.....	87
6.3	3 ^η περίπτωση - Ελλειψοειδής εγκέφαλος 2.....	91
6.4	4 ^η περίπτωση - Σφαιρικός εγκέφαλος 2.....	94
7	Επίδραση των εκκεντροτήτων του ελλειψοειδούς μοντέλου στον εντοπισμό της πηγής - Αριθμητική Υλοποίηση.....	97
	Επίλογος.....	111
	Βιβλιογραφία.....	113
	Παράρτημα Α: Ελλειψοειδείς Αρμονικές.....	115
	Παράρτημα Β: Κώδικας mathematica.....	118

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Εικόνα 2.1	19
Εικόνα 2.2	23
Εικόνα 5.1	72
Εικόνα 5.2	73
Εικόνα 7.1	101
Εικόνα 7.2	102
Εικόνα 7.3	102
Εικόνα 7.4	103
Εικόνα 7.5	103
Εικόνα 7.6	103
Εικόνα 7.7	104
Εικόνα 7.8	104
Εικόνα 7.9	106
Εικόνα 7.10	106
Εικόνα 7.11	106
Εικόνα 7.12	107
Εικόνα 7.13	107
Εικόνα 7.14	108
Εικόνα 7.15	108
Εικόνα 7.16	109

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 4.1	49
Πίνακας 7.1	101
Πίνακας 7.2	105

Εισαγωγή

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελεί την πιο πολύπλοκη οργανωμένη δομή στο γνωστό σύμπαν. Η μελέτη του εγκεφάλου παρέχει πολύτιμες πληροφορίες τόσο για τη φυσιολογική λειτουργία του όσο και για κάποιες παθολογικές καταστάσεις. Η λειτουργία του εγκεφάλου πραγματοποιείται μέσω ηλεκτροχημικών αντιδράσεων στο εσωτερικό των νευρώνων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία ασθενών ηλεκτρικών ρευμάτων στο χώρο γύρω από τη διέγερση τα οποία προκαλούν ηλεκτρικά δυναμικά στην επιφάνεια του κρανίου (Dassios et al., 2014). Η ηλεκτροεγκεφαλογραφία (EEG) είναι μια μη επεμβατική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την καταγραφή της ηλεκτρικής δραστηριότητας του εγκεφάλου με τη μορφή ηλεκτρικών δυναμικών (Hämäläinen et al., 1993; Malmivuo et al., 1995). Ένα σκουφάκι ηλεκτροδίων (EEG cap) το οποίο τοποθετείται στο κεφάλι του εξεταζόμενου σε συνδυασμό με μια συσκευή καταγραφής συνθέτουν μια απεικόνιση γνωστή ως ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (EEG) (Hari and Puce, 2017). Ως εφευρέτης του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος θεωρείται ο Γερμανός νευροψυχίατρος Hans Berger καθώς ήταν ο πρώτος που κατέγραψε ανθρώπινη εγκεφαλική δραστηριότητα με αυτή τη μέθοδο (Collura, 1993). Το μοντέλο που χρησιμοποιείται πιο συχνά για την περιγραφή μιας ηλεκτρικής διέγερσης είναι αυτό ενός διπόλου $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ όπου \mathbf{r}_0 είναι η θέση του και \mathbf{Q} η διπολική ροπή. Όταν η θέση και η ροπή του διπόλου είναι γνωστά και το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός των ηλεκτρικών δυναμικών πρέπει να λυθεί το ευθύ πρόβλημα της EEG, ενώ όταν είναι γνωστά τα ηλεκτρικά δυναμικά στην επιφάνεια του κρανίου και ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της θέσης και της ροπής του διπόλου πρέπει να λυθεί το αντίστροφο πρόβλημα της EEG. Σε κάθε περίπτωση καθοριστικό ρόλο στην μελέτη αυτών των προβλημάτων διαδραματίζει η γεωμετρία του εγκεφάλου. Η πιο ρεαλιστική περιγραφή για τον εγκέφαλο είναι αυτή ενός ελλειψοειδούς με στατιστικά μέσους ημιάξονες ίσους με 9 cm , 6.5 cm , 6 cm και όγκο περίπου 1.5 lt . Τα στατιστικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του εγκεφάλου προκύπτουν από ογκομετρικές έρευνες με μαγνητική τομογραφία (Allen et al., 2002; Ball et al., 2010). Δύο από τα πιο γνωστά γεωμετρικά μοντέλα για την επίλυση του προβλήματος της EEG αποτελούν το σφαιρικό και το ελλειψοειδές. Το πρώτο είναι πιο διαδεδομένο και απλούστερο μοντέλο ενώ το δεύτερο είναι πιο λεπτομερές καθώς ενσωματώνει την πλήρη ανισοτροπία του τρισδιάστατου χώρου και προσεγγίζει καλύτερα το πραγματικό σχήμα του εγκεφάλου. Αν και το ελλειψοειδές πρότυπο περιγράφει καλύτερα τη γεωμετρία του

εγκεφάλου, στις ιατρικές εφαρμογές χρησιμοποιείται κατά κανόνα το σφαιρικό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται κάποια σφάλματα κατά την επεξεργασία των δεδομένων, καθώς οι μετρήσεις προέρχονται από ένα ελλειψοειδές εγκέφαλο και εισάγονται σε ένα σφαιρικό αλγόριθμο. Στην παρούσα εργασία γίνεται διερεύνηση αυτών των σφαλμάτων αφού πρώτα ολοκληρωθεί η μελέτη του ευθέως και του αντίστροφου προβλήματος της EEG στο σφαιρικό και στο ελλειψοειδές πρότυπο. Το πρώτο κεφάλαιο περιγράφει τους μηχανισμούς που εμπλέκονται στη δημιουργία της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου. Το δεύτερο κεφάλαιο αφορά τη μαθηματική προτυποποίηση του φυσικού φαινομένου. Πιο συγκεκριμένα, γίνεται μια εισαγωγή στις εξισώσεις Maxwell οι οποίες περιγράφουν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα (Bécherawy, 2013). Οι διαστάσεις του εγκεφάλου σε συνδυασμό με τα ηλεκτρικά του χαρακτηριστικά οδηγούν στη σχεδόν στατική θεωρία των εξισώσεων Maxwell η οποία με τη σειρά της οδηγεί στον προσδιορισμό της εξίσωσης Poisson για το ηλεκτρικό δυναμικό. Στη συνέχεια διατυπώνονται τα προβλήματα συνοριακών τιμών για το ηλεκτρικό δυναμικό και ειδικότερα το εσωτερικό πρόβλημα Neumann και το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet στη γενική περίπτωση αγωγού αυθαίρετης γεωμετρίας. Τέλος αποδεικνύεται η ολοκληρωτική αναπαράσταση του Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό και γίνεται μια εισαγωγή στο πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών το οποίο περιλαμβάνει και τους φλοιούς διαφορετικής αγωγιμότητας του εγκεφάλου. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση του ευθέως και του αντίστροφου προβλήματος της EEG στο σφαιρικό πρότυπο (Δάσιος, 2013). Το ευθύ πρόβλημα αφορά τον προσδιορισμό των ηλεκτρικών δυναμικών εφόσον είναι γνωστά η θέση και η ροπή του διπολικού ρεύματος. Τα ηλεκτρικά δυναμικά υπολογίζονται αφού πρώτα εκφραστούν στο πλήρες και ορθοκανονικό σύστημα των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων (Jackson, 1962; Morse and Feshbach, 1953; Stratton, 1941). Στο αντίστροφο πρόβλημα παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος που υπολογίζει τη θέση και τη ροπή της πηγής εφόσον είναι γνωστή η συνάρτηση δυναμικού στην επιφάνεια του κρανίου. Στο τέταρτο κεφάλαιο επιλύεται το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα της EEG στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων (Kariotou, 2004; Dassios and Fokas, 2012). Σε αυτή την περίπτωση τα ηλεκτρικά δυναμικά εκφράζονται συναρτήσεως ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων και ελλειπτικών ολοκληρωμάτων. Επιπλέον, δίνεται μια προσέγγιση του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού μέχρι τους ελλειψοειδείς όρους δεύτερου βαθμού. Τέλος στο αντίστροφο πρόβλημα παρουσιάζεται ένας αλγόριθμος αντιστροφής που υπολογίζει τις συνιστώσες της ροπής και της θέσης του διπόλου. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή

στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα συντεταγμένων (Dassios, 2012) μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η μεταφορά πληροφορίας μεταξύ του σφαιρικού και του ελλειψοειδούς προτύπου. Στο έκτο κεφάλαιο υπολογίζονται αναλυτικά τα σφάλματα που δημιουργούνται στον εντοπισμό της θέσης και της ροπής μιας διπολικής πηγής που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ελλειψοειδούς εγκεφάλου ο οποίος μοντελοποιείται ως σφαιρικός και αντίστοιχα στο εσωτερικό ενός σφαιρικού εγκεφάλου ο οποίος μοντελοποιείται ως ελλειψοειδής. Τέλος, στο έβδομο κεφάλαιο γίνονται κάποια αριθμητικά πειράματα για τη μελέτη της συμπεριφοράς των σφαλμάτων καθώς μεταβάλλονται οι εκκεντρότητες σε ελλειψοειδή μοντέλα σταθερού όγκου.

1 Φυσικό φαινόμενο - Στοιχεία ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου

Ο εγκέφαλος είναι το πιο πολύπλοκο όργανο του ανθρώπινου σώματος και συντονίζει όλες τις λειτουργίες του. Αποτελείται από περίπου εκατό δισεκατομμύρια νευρικά κύτταρα τα οποία επικοινωνούν μεταξύ τους με ηλεκτρομαγνητικά σήματα.

Κάθε νευρώνας περιέχει τον πυρήνα του κυττάρου και ένα κεντρικό άξονα στα άκρα του οποίου υπάρχουν πολλαπλές διακλαδώσεις οι δενδρίτες που το σχήμα τους μοιάζει με κλαδιά δέντρου. Κάθε ηλεκτροχημική διέγερση του εγκεφάλου ισοδυναμεί με μια ροή ιόντων κατά μήκος του νευρωνικού άξονα, δηλαδή με ένα εντοπισμένο πολύ ασθενές πρωτεύον ρεύμα. Οι απολήξεις των δενδριτών δεν βρίσκονται σε επαφή με τις αντίστοιχες απολήξεις των γειτονικών κυττάρων. Η ροή του ρεύματος από νευρώνα σε νευρώνα γίνεται μέσω απελευθέρωσης ουσιών, που ονομάζονται νευροδιαβιβαστές, από τον ένα νευρώνα και η δέσμευσή τους από τον επόμενο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται συναπτική επαφή και οι περιοχές στις οποίες εξελίσσονται ονομάζονται συνάψεις. Μέσω των συναπτικών επαφών και των αξόνων των κυττάρων μεταφέρονται τα νευρικά σήματα στο ανθρώπινο σώμα. Αυτό το ηλεκτρικό κύκλωμα είναι αρκετά πολύπλοκο καθώς είναι πολύ μικρό σε μέγεθος, δεν έχει σταθερή πηγή τάσης και η διαδρομή των νευρικών σημάτων δεν είναι χωρικά προκαθορισμένη αλλά αποφασίζεται κατά περίπτωση σε κάθε σύναψη ανάλογα με την επιθυμητή λειτουργία. Είναι λοιπόν προφανές ότι το πρόβλημα της ηλεκτρομαγνητικής δραστηριότητας του εγκεφάλου είναι διακριτό γιατί το νευρωνικό ρεύμα αφορά κάθε ένα νευρώνα ξεχωριστά. Ωστόσο, κάθε μεμονωμένος νευρώνας παράγει δυναμικά που δεν μπορούμε να ανιχνεύσουμε και ταυτόχρονα η κατανομή των νευρώνων είναι πολύ πυκνή συνεπώς μπορούμε να μελετήσουμε τον εγκέφαλο σαν μια ομογενή αγώγιμη μάζα.

2 Μαθηματική θεωρία της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (EEG)

2.1 Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις του Maxwell περιγράφουν με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων τις βασικές αρχές της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad \text{Νόμος του Faraday} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad \text{Νόμος των Ampere-Maxwell} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{Νόμος του Gauss} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Νόμος του Gauss για το μαγνητισμό} \quad (2.4)$$

όπου \mathbf{E} το διανυσματικό πεδίο της ηλεκτρικής έντασης, \mathbf{H} της μαγνητικής έντασης, \mathbf{D} της ηλεκτρικής μετατόπισης και \mathbf{B} της μαγνητικής επαγωγής. Η πυκνότητα φορτίου συμβολίζεται με ρ ενώ η πυκνότητα ρεύματος με \mathbf{J} και αυτά τα δυο αποτελούν τις πηγές των πεδίων \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D} . Τα \mathbf{E} , \mathbf{H} αποτελούν τις εντάσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό ενώ τα \mathbf{D} , \mathbf{B} είναι οι αντίστοιχες εντάσεις όταν το κύμα διαδίδεται σε ένα υλικό μέσο και εξαρτώνται κάθε φορά από τις ιδιότητες του μέσου. Στην περίπτωση ενός ομογενούς και ισότροπου μέσου αν συμβολίσουμε ϵ τη διηλεκτρική σταθερά, μ τη μαγνητική διαπερατότητα και σ την ηλεκτρική αγωγιμότητα τότε οι εντάσεις \mathbf{D} , \mathbf{B} παίρνουν τη μορφή

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.6)$$

Αν το μέσο μας είναι το κενό τότε $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ οπότε $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ και $\mathbf{B} = \mathbf{H}$

Η ηλεκτρική αγωγιμότητα σ είναι ιδιότητα του μέσου και αντανακλά την ευκολία με την οποία το ηλεκτρικό ρεύμα περνάει μέσα από αυτό. Αν το σ είναι θετικό το μέσο χαρακτηρίζεται ως αγώγιμο ενώ αν το σ είναι 0 το μέσο χαρακτηρίζεται ως μη-αγώγιμο ή μονωτικό. Στην περίπτωση του αγώγιμου μέσου η παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} δημιουργεί ένα επαγωγικό ρεύμα για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\mathbf{J}^i = \sigma \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Οπότε το πεδίο του ρεύματος μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες ως εξής

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^p + \mathbf{J}^i = \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (2.8)$$

Όπου το \mathbf{J}^p είναι το πρωτεύον ρεύμα. Με τη βοήθεια των σχέσεων (2.5), (2.6) και (2.8) παίρνουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην περίπτωση ενός αγωγίμου μέσου

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{J}^p + \sigma \mathbf{E} \quad (2.10)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.12)$$

Αν ο χώρος που διαδίδεται ένα κύμα είναι πεπερασμένος τότε ονομάζουμε χαρακτηριστική διάσταση του μέσου την ακτίνα a της μικρότερης σφαίρας που περιβάλλει το μέσο διάδοσης. Στην ειδική περίπτωση που το μήκος κύματος λ είναι πολύ μεγαλύτερο από την χαρακτηριστική διάσταση a του μέσου $\lambda \gg a$ έχει παρατηρηθεί ότι οι όροι με τις χρονικές παραγώγους παίρνουν αμελητέες τιμές. Έτσι οδηγούμαστε στη σχεδόν στατική θεωρία των εξισώσεων Maxwell οι οποίες παίρνουν τη μορφή

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.16)$$

Ο στροβιλισμός του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} σύμφωνα με την (2.13) είναι μηδέν οπότε μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{E} = -\nabla u \quad (2.17)$$

όπου με u συμβολίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό.

Η απόκλιση της εξίσωσης (1.14) δίνει

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \nabla \cdot (\mathbf{J}^p + \mathbf{J}^i) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{J}^p + \nabla \cdot \mathbf{J}^i \\ &= \nabla \cdot \mathbf{J}^p + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{J}^p - \sigma \Delta u \quad (2.18)$$

Όμως η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν οπότε η (2.18) γίνεται

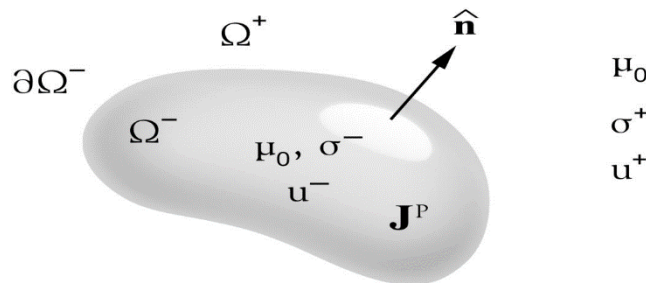
$$\sigma \Delta u = \nabla \cdot \mathbf{J}^p \quad (2.19)$$

που είναι η εξίσωση Poisson για το ηλεκτρικό δυναμικό.

2.2 Πρόβλημα της Ηλεκτροεγκεφαλογραφίας (EEG)

Μελετώντας τον εγκέφαλο σαν μια αγώγιμη μάζα με μαγνητική διαπερατότητα μ_0 εισάγουμε τις τιμές μ_0, ϵ, σ στις εξισώσεις του Maxwell και με κατάλληλους υπολογισμούς καταλήγουμε ότι το μήκος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στον εγκέφαλο είναι πολύ μεγαλύτερο από τη χαρακτηριστική του διάσταση a . Οπότε σε αυτή την περίπτωση μπορεί να εφαρμοστεί η σχεδόν στατική θεωρία.

Έστω $\Omega^- \subset \mathbb{R}^3$ ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο δηλαδή χωρίο. Το χωρίο Ω^- είναι φραγμένο



Εικόνα 2.1

και το σύνορο $\partial\Omega^-$ περιγράφεται από μία συνάρτηση με συνεχή παράγωγο δηλαδή είναι λείο. Το διάνυσμα \hat{n} είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\partial\Omega^-$. Το εξωτερικό χωρίο Ω^+ είναι το συμπλήρωμα του συνόλου $\Omega^- \cup \partial\Omega^-$. Με σ^- συμβολίζουμε την αγωγιμότητα του χωρίου Ω^- και με σ^+ την αγωγιμότητα του Ω^+ . Η μαγνητική διαπερατότητα παραμένει ίδια τόσο στο εσωτερικό χωρίο Ω^- όσο και στο εξωτερικό Ω^+ . Το ηλεκτρικό δυναμικό u^\pm ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα διαπερατότητας

$$\sigma^- \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega^- \quad (2.20)$$

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega^+ \quad (2.21)$$

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial\Omega^- \quad (2.22)$$

$$\sigma^- \frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = \sigma^+ \frac{\partial}{\partial n} u^+(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial\Omega^- \quad (2.23)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

Όπου $\partial/\partial n$ είναι η μερική παράγωγος ως προς το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στη επιφάνεια $\partial\Omega^-$ και οι συνθήκες διαπερατότητας (2.22), (2.23) δηλώνουν τη συνέχεια του ηλεκτρικού δυναμικού καθώς διαπερνούμε τη διεπιφάνεια $\partial\Omega^-$.

Το χωρίο Ω^- αντιστοιχεί στον αγωγίμο εγκέφαλο οπότε $\sigma^- = \sigma \neq 0$ ενώ το Ω^+ στον χώρο που βρίσκεται εξωτερικά από τον εγκέφαλο οπότε $\sigma = 0$. Η παρατήρηση ότι το εξωτερικό χωρίο είναι μη αγωγίμο χωρίζει το πρόβλημα διαπερατότητας (2.20) - (2.24) σε δύο προβλήματα συνοριακών τιμών

Εσωτερικό πρόβλημα Neumann

$$\sigma \Delta u^-(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Omega^- \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \partial\Omega^- \quad (2.26)$$

Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega^+ \quad (2.27)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = u^-(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \partial\Omega^- \quad (2.28)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), r \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

Αρχικά πρέπει να επιλυθεί το εσωτερικό πρόβλημα Neumann (2.25), (2.26) ώστε να προσδιοριστεί το δυναμικό u^- πάνω στο σύνορο $\partial\Omega^-$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό της συνθήκης (2.28) στο πρόβλημα Dirichlet. Η εύρεση του ηλεκτρικού δυναμικού όταν γνωρίζουμε το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα \mathbf{J}^p αποτελεί το ευθύ πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας ενώ όταν γνωρίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στο σύνορο $\partial\Omega^-$ και ζητάμε να προσδιορίσουμε το νευρωνικό ρεύμα \mathbf{J}^p έχουμε να λύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας.

2.3 Τύπος Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα σημειακό μονόπολο στη θέση \mathbf{r}_0 , είναι ανάλογο της θεμελιώδους λύσης της εξίσωσης του Laplace και έχει τη μορφή

$$\Phi_{mon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (2.30)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα σημειακό δίπολο στη θέση \mathbf{r}_0 με ροπή στη διεύθυνση \mathbf{Q} είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος του πεδίου του μονοπόλου στη διεύθυνση της ροπής \mathbf{Q} , δηλαδή

$$\Phi_{dip}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}. \quad (2.31)$$

Το διανυσματικό δυναμικό που δημιουργείται από ένα σημειακό δίπολο έχει τη μορφή

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (2.32)$$

Θεωρούμε ότι το πρωτεύον νευρωνικό ρεύμα αποτελείται από ένα δίπολο με ροπή \mathbf{Q} που βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_0 , δηλαδή

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.33)$$

όπου δ το μέτρο του Dirac

Τότε το δυναμικό που δημιουργείται σε ένα ομογενή χώρο λόγω αυτού του διπόλου πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$\sigma \Delta_{\mathbf{r}} \mathbf{u}_d(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.34)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}$ στα δύο μέλη της εξίσωσης

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left(-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.35)$$

παίρνουμε

$$\Delta_{\mathbf{r}} \left(-\frac{1}{4\pi} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.36)$$

και από την (2.31)

εξάγεται το δυναμικό

$$\mathbf{u}_d(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (2.37)$$

Έστω ένας πεπερασμένος αγωγός Ω^- και $\partial\Omega$ το σύνορό του. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο τύπο του Green

$$\int_{\Omega^-} (f\Delta g - g\Delta f) dv = \int_{\partial\Omega^-} \left(f \frac{\partial}{\partial n} g - g \frac{\partial}{\partial n} f \right) ds \quad (2.38)$$

για $f = u^-$ και $g = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \left(u^-(\mathbf{r}') \Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \Delta_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') \right) dv(\mathbf{r}') = \\ = \int_{\partial\Omega^-} \left(u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial n'} u^-(\mathbf{r}') \right) ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.39)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\partial\Omega$.

Στη συνέχεια εισάγουμε τις σχέσεις

$$\Delta_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (2.40)$$

$$\Delta_{\mathbf{r}'} u^-(\mathbf{r}') = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \quad (2.41)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial n'} u^-(\mathbf{r}') = 0, \quad \mathbf{r}' \in \partial\Omega^- \quad (2.43)$$

στην (2.39) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega^-} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega^-} u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2.44)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της προηγούμενης σχέσης γράφεται

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') &= \int_{\Omega^-} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') \\ &= -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_{\Omega^-} \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv(\mathbf{r}') \\ &= -\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \\ &= -\mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \end{aligned} \quad (2.45)$$

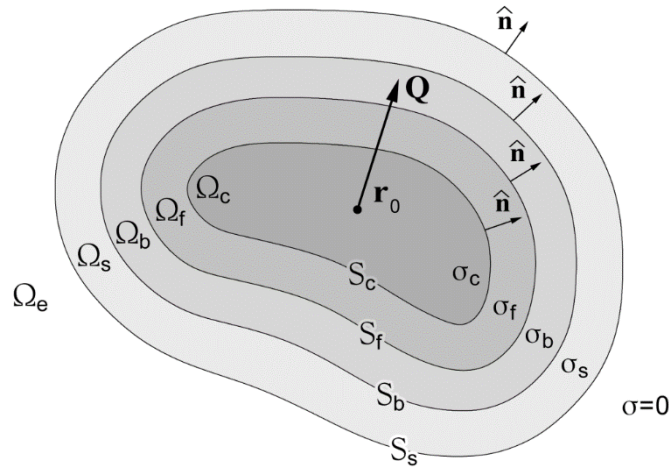
Αντικαθιστώντας την (2.45) στην (2.44) παίρνουμε τον τύπο του Geselowitz για το ηλεκτρικό δυναμικό

$$u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega^-} u^-(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (2.46)$$

ο οποίος ισχύει για κάθε $\mathbf{r} \notin \partial\Omega^-$.

2.4 Πρότυπο των ανομοιογενών φλοιών

Αν προσεγγίσουμε τον εγκέφαλο λίγο διαφορετικά και συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας και τους φλοιούς διαφορετικής αγωγιμότητας που τον περιβάλλουν έχουμε την εξής εικόνα



Εικόνα 2.2

Το χωρίο Ω_c απεικονίζει τον εγκεφαλικό ιστό (cerebrum) έχει σύνορο την επιφάνεια S_c και αγωγιμότητα σ_c . Στο χωρίο Ω_f βρίσκεται το εγκεφαλονωτιαίο υγρό (cerebrospinal fluid) που έχει σύνορο το S_f και αγωγιμότητα σ_f . Ο επόμενος φλοιός Ω_b παραπέμπει στα κρανιοεγκεφαλικά οστά (skull) έχει σύνορο το S_b και αγωγιμότητα σ_b . Τέλος με Ω_s συμβολίζεται ο φλοιός του δέρματος (scalp) και έχει σύνορο το S_s και αγωγιμότητα σ_s . Ο χώρος εξωτερικά του S_s συμβολίζεται με Ω_e και έχει μηδενική αγωγιμότητα. Η μαγνητική διαπερατότητα είναι μ_0 και είναι η ίδια για όλα τα χωρία (Δάσιος, 2013). Στο εσωτερικό του Ω_c θεωρούμε ένα σημειακό διπολικό νευρωνικό ρεύμα στη θέση \mathbf{r}_0 με διπολική ροπή \mathbf{Q} .

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (2.47)$$

όπου δ το μέτρο του Dirac

Το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις στα επιμέρους χωρία

$$\sigma_c \Delta u_c(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \mathbf{r} \in \Omega_c \quad (2.48)$$

$$\Delta u_f(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega_f \quad (2.49)$$

$$\Delta u_b(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega_b \quad (2.50)$$

$$\Delta u_s(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega_s \quad (2.51)$$

$$\Delta u_c(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Omega_c \quad (2.52)$$

Το δυναμικό πρέπει να είναι συνεχές το ίδιο και η κάθετη συνιστώσα του επαγωγικού ρεύματος, σύμφωνα με τις συνθήκες διαπερατότητας σε κάθε διεπιφάνεια ασυνέχειας της αγωγιμότητας. Οπότε έχουμε

$$u_c(\mathbf{r}) = u_f(\mathbf{r}) \quad (2.53)$$

$$\sigma_c \frac{\partial}{\partial n} u_c(\mathbf{r}) = \sigma_f \frac{\partial}{\partial n} u_f(\mathbf{r}) \quad (2.54)$$

στο σύνορο S_c

$$u_f(\mathbf{r}) = u_b(\mathbf{r}) \quad (2.55)$$

$$\sigma_f \frac{\partial}{\partial n} u_f(\mathbf{r}) = \sigma_b \frac{\partial}{\partial n} u_b(\mathbf{r}) \quad (2.56)$$

στο σύνορο S_f

$$u_b(\mathbf{r}) = u_s(\mathbf{r}) \quad (2.57)$$

$$\sigma_b \frac{\partial}{\partial n} u_b(\mathbf{r}) = \sigma_s \frac{\partial}{\partial n} u_s(\mathbf{r}) \quad (2.58)$$

στο σύνορο S_b

Επιπλέον στο σύνορο S_s θα έχουμε τη συνθήκη Neumann:

$$\frac{\partial}{\partial n} u_s(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.59)$$

και τη συνθήκη συνέχειας

$$u_s(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}) \quad (2.60)$$

Για το εξωτερικό δυναμικό απαιτείται η ασυμπτωτική συνθήκη

$$u_e(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \mathbf{r} \rightarrow \infty \quad (2.61)$$

3 Σφαιρικό πρότυπο

3.1 Μελέτη του ευθέως προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο σφαιρικό πρότυπο

3.1.1 Εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

Ας υποθέσουμε ότι ο αγωγίμος εγκέφαλος προτυποποιείται με τη σφαίρα

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \quad (3.1)$$

η οποία περιέχει στο εσωτερικό της ένα διπολικό ρεύμα με ροπή \mathbf{Q} στο σημείο \mathbf{r}_0 , με $|\mathbf{r}_0| < a$. Το ηλεκτρικό δυναμικό που αναπτύσσεται στο εσωτερικό της σφαίρας δίνεται από τη λύση του προβλήματος Neumann

$$\sigma \Delta u^-(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad r < a \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}) = 0, \quad r = a \quad (3.3)$$

Παρατηρούμε ότι αν u^- είναι μια λύση του προβλήματος (3.2), (3.3) τότε και η $u^- + c$, όπου c μια αυθαίρετη σταθερά, είναι επίσης λύση. Οπότε το πρόβλημα αυτό δεν έχει μοναδική λύση. Η μη μοναδικότητα εμφανίζεται συχνά σε προβλήματα δυναμικού, οφείλεται στη συνθήκη Neumann (3.3) και έχει ως συνέπεια την παρουσία αυθαίρετης σταθεράς στη λύση. Η ομαλότητα της λύσης στην περιοχή της αρχής των αξόνων απαιτεί

$$\frac{\partial}{\partial r} u^-(\mathbf{0}) = 0. \quad (3.4)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\nabla_{\mathbf{r}_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.5)$$

συνεπώς μπορούμε να αναζητήσουμε λύση στη μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} w^-(\mathbf{r}) \quad (3.6)$$

όπου w^- είναι ένα άλλο δυναμικό που επιλύει την εξίσωση Poisson

$$\sigma \Delta_{\mathbf{r}} w^-(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad r < a \quad (3.7)$$

Μια ειδική λύση της εξίσωσης (3.7) δίνεται από τη θεμελιώδη λύση του τελεστή του Laplace και συνεπώς η λύση της (3.7) γράφεται

$$w^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + v^-(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

όπου η v^- επιλύει την εξίσωση Laplace

$$\Delta_{\mathbf{r}}v^-(\mathbf{r}) = 0, \quad r < a \quad (3.9)$$

Για την επίλυση της (3.9) χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες και εκφράζουμε τη λύση συναρτήσεων των εσωτερικών σφαιρικών αρμονικών ιδιολύσεων (Bécherrawy, 2013; Jackson, 1962; Morse and Feshbach, 1953; Stratton, 1941)

$$r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

με $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = -n, -n + 1, \dots, n - 1, n$ όπου η κανονικοποιημένη μιγαδική μορφή των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών δίνεται από τη σχέση

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (3.10)$$

με P_n^m τις συσχετισμένες συναρτήσεις Legendre πρώτου είδους

$$P_n^m(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n \quad (3.11)$$

Το σύμβολο $\hat{\mathbf{r}}$ δηλώνει ότι το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ έχει μοναδιαίο μέτρο

Συνεπώς η λύση της (3.9) θα έχει τη μορφή

$$v^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.12)$$

και οι συντελεστές A_n^m θα υπολογιστούν έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη (3.3). Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε τη θεμελιώδη λύση σε σφαιρικές αρμονικές έτσι ώστε να χρησιμοποιήσουμε την ορθογωνιότητα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών. Αρχικά εισάγουμε το ανάπτυγμα Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2rcos\gamma+r^2)}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos\gamma) \quad (3.13)$$

όπου P_n τα πολυώνυμα του Legendre. Η συνάρτηση $\frac{1}{\sqrt{(1-2rcos\gamma+r^2)}}$ μπορεί να θεωρηθεί και ως γεννήτρια συνάρτηση των πολυωνύμων του Legendre. Το ανάπτυγμα (3.13) μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0), & r < r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0), & r > r_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

όπου το γινόμενο $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0$ ορίζει το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}_0$. Στη συνέχεια διατυπώνουμε το προσθετικό θεώρημα των πολωνύμων Legendre

$$P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) = \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (3.15)$$

που εκφράζει κάθε πολώνυμο Legendre βαθμού n ως προς τη γωνία των διευθύνσεων $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_0$ συναρτήσεως των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών που αντιστοιχούν στις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}}_0$. Αντικαθιστώντας την έκφραση (3.15) στο ανάπτυγμα (3.14) παίρνουμε

$$\frac{1}{|r-r_0|} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0), & r < r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0), & r > r_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Κατά συνέπεια η συνοριακή συνθήκη (3.3) γράφεται

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m \left(\frac{d}{dr} r^n \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \\ = -\frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{2n+1} \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^{n+1}} \right) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) & \end{aligned} \quad (3.17)$$

όπου έχουμε επιλέξει τον δεύτερο κλάδο της (3.16). Υπολογίζοντας την (3.17) για $r = a$ και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα προκύπτει για $n = 0$

$$A_0^0 = \text{αυθαίρετο} \quad (3.18)$$

και για κάθε $n \geq 1$ και $|m| \leq n$

$$A_n^m = \frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r_0^n}{a^{2n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (3.19)$$

Αντικαθιστώντας την (3.8) στη (3.6) έχουμε

$$u^-(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} w^-(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{4\pi\sigma|\hat{\mathbf{r}}-\hat{\mathbf{r}}_0|} + v^-(\mathbf{r}) \right) \quad (3.20)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις (3.18), (3.19) στην (3.12) εισάγουμε το αποτέλεσμα καθώς και τον δεύτερο κλάδο της (3.16) στην (3.20) και παίρνουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} u^-(\mathbf{r}) &= c \\ &+ \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{r_0^n}{2n+1} \left(\frac{n+1}{n} \frac{r^n}{a^{(2n+1)}} + \frac{1}{r^{n+1}} \right) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

όπου $c \in \mathbb{R}$ η αυθαίρετη σταθερά του προβλήματος Neumann. Η έκφραση (3.21) ισχύει για $r \in (r_0, a)$. Εισάγοντας την έκφραση (3.16) στην (3.21) παίρνουμε ότι στο εσωτερικό της σφαίρας ισχύει η αναπαράσταση

$$u^-(r) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \frac{1}{|r-r_0|} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.22)$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρήσαμε την αυθαίρετη σταθερά $c = 0$.

Με τη βοήθεια του προσθετικού θεωρήματος (3.15) η (3.22) γράφεται

$$u^-(r) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \frac{1}{|r-r_0|} + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0) \quad (3.23)$$

που ισχύει για κάθε $r \in [0, a]$.

3.1.2 Εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

Το ηλεκτρικό δυναμικό u^+ , στο εξωτερικό της σφαίρας $|r| = a$, που οφείλεται στο διπολικό ρεύμα

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (3.24)$$

δίνεται από τη λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet (2.27) - (2.29) όπου τα δεδομένα Dirichlet δίνονται από την τιμή του u^- στην επιφάνεια της σφαίρας $|r| = a$, δηλαδή

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \left(\frac{2}{|a\hat{\mathbf{r}}-r_0|} \right) + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n(2n+1)} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.25)$$

Η εξίσωση (2.27) και η ασυμπτωτική συνθήκη (2.29) απαιτούν η λύση να έχει τη μορφή

$$u^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.26)$$

Υπολογίζοντας την u^+ στο $|r| = a$ από τη σχέση (3.26) και εξισώνοντας το δεύτερο μέλος από τη σχέση που προκύπτει με το αντίστοιχο της σχέσης (3.25) παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m \frac{1}{a^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{r_0} \left(\frac{2}{|a\hat{\mathbf{r}}-r_0|} \right)$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n(2n+1)} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.27)$$

Αναπτύσσοντας το ηλεκτρικό πεδίο $\frac{2}{|a\hat{\mathbf{r}}-r_0|}$ στο σύστημα των σφαιρικών αρμονικών σύμφωνα με το δεύτερο κλάδο της (3.16) η προηγούμενη σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} B_0^0 \frac{1}{a} Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m \frac{1}{a^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \\ = \frac{1}{2\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{4\pi}{2n+1} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ + \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n(2n+1)} \frac{r_0^n}{a^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Από την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών Y_n^m και κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς προκύπτει

$$B_0^0 = 0 \quad (3.29)$$

και

$$B_n^m = \frac{1}{\sigma n} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) \quad (3.30)$$

για κάθε $n \geq 1$ και $|m| \leq n$.

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές (3.29), (3.30) στη σχέση (3.26) προκύπτει η ακόλουθη αναπαράσταση για το εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

$$u^+(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{n} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.31)$$

που ισχύει για κάθε $r > a$.

3.2 Αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας

Στο αντίστροφο πρόβλημα της EEG θεωρούμε ότι γνωρίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια του κρανίου και αναζητάμε το νευρωνικό ρεύμα που δημιούργησε αυτό το δυναμικό. Το πρόβλημα αυτό είναι δυσκολότερο από το ευθύ όπου μας δίνεται η νευρωνική δραστηριότητα και ζητείται να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό που παράγει.

Υπενθυμίζουμε ότι το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για μια διπολική διέγερση $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$, δίνεται από τη λύση του εσωτερικού προβλήματος Neumann

$$\sigma \Delta u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = 0, \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (3.33)$$

όπου Ω συμβολίζει τον αγωγό, $\partial\Omega$ το σύνορό του, σ είναι η αγωγιμότητα του αγωγού και δ το συναρτησιακό του Dirac στο σημείο $\mathbf{r}_0 \in \Omega$.

Στο εξωτερικό Ω^c του αγωγού το ηλεκτρικό δυναμικό ικανοποιεί το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = 0, \mathbf{r} \in \Omega^c \quad (3.34)$$

$$u^+(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0), \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (3.35)$$

$$u^+(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \mathbf{r} \rightarrow \infty \quad (3.36)$$

όπου η ασυμπτωτική συνθήκη (3.36) αντιστοιχεί στην επιλογή $c = 0$ για την αυθαίρετη σταθερά του προβλήματος (3.2), (3.3). Το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί η διπολική διέγερση $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ σε κάθε σημείο $\mathbf{r} \notin \partial\Omega$ ικανοποιεί τον τύπο του Geselowitz

$$u(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_0) \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} ds(\mathbf{r}') \quad (3.37)$$

Όπως ήδη γνωρίζουμε το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό μπορεί να γραφεί ως

$$u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right), \mathbf{r} \in \Omega \quad (3.38)$$

όπου η συνάρτηση \tilde{u}^- ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\Delta_r \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = 0, \mathbf{r} \in \Omega \quad (3.39)$$

και τη συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial}{\partial n} \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = -\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (3.40)$$

Αν υποθέσουμε ότι η νευρωνική δραστηριότητα διαχέεται σε διάφορα μέρη του εγκεφάλου και δεν προέρχεται μόνο από το διπολικό ρεύμα $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$ τότε αυτό αντικαθίσταται από ένα συνεχές ρεύμα $\mathbf{J}^p = \mathbf{J}^p(\mathbf{r})$, που είναι διάφορο του μηδενός μόνο σε εσωτερικά σημεία του Ω .

Ο φορέας μια συνάρτησης f συμβολίζεται με $\text{supp}f$ και είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το σύνολο μη μηδενισμού της f , δηλαδή

$$\text{supp}f = Cl \{x \in D \mid f(x) \neq 0\} \quad (3.41)$$

όπου με Cl συμβολίζουμε το τοπολογικό κάλυμμα (closure).

Αφού λοιπόν το σύνολο Ω είναι ανοιχτό και περιέχει το κλειστό σύνολο $\text{supp}f$ αυτό σημαίνει ότι η απόσταση του συνόρου $\partial\Omega$ από το $\text{supp}f$ είναι θετική. Συνεπώς η συνάρτηση $\frac{1}{|r-r_0|}$, $r \in \partial\Omega$ και $r_0 \in \text{supp}f$ δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο και ταυτόχρονα το ρεύμα J^p είναι παντού μηδέν στο σύνορο $\partial\Omega$. Λόγω της γραμμικότητας αυτού του προβλήματος το πρόβλημα (3.2), (3.3) παίρνει τη μορφή

$$\sigma \Delta u^-(r) = \nabla \cdot J^p(r), \quad r \in \Omega \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u^-(r) = 0, \quad r \in \partial\Omega \quad (3.43)$$

και η εξίσωση του Geselowitz γράφεται

$$u^-(r) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} J^p(r_0) \cdot \frac{r-r_0}{|r-r_0|^3} dv(r_0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} u^-(r') \hat{n}(r') \cdot \frac{r-r'}{|r-r'|^3} ds(r'), \quad r \in \Omega \quad (3.44)$$

όπου η u^- τώρα ικανοποιεί το πρόβλημα (3.42), (3.43). Ακολουθώντας τη λογική της αναπαράστασης (3.38) έχουμε

$$u^-(r) = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} J^p(r_0) \cdot \nabla_{r_0} \left(\frac{1}{|r-r_0|} + \tilde{u}^-(r; r_0) \right) dv(r_0) \quad (3.45)$$

όπου το r μπορεί να περιορισθεί πάνω στο $\partial\Omega$ καθώς εκεί λαμβάνονται και οι μετρήσεις. Το r_0 παίρνει τιμές στο εσωτερικό του Ω οπότε η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στην τελευταία σχέση δεν απειρίζεται. Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το νευρωνικό ρεύμα J^p έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης και ότι το Ω είναι απλά συνεκτικό και αστεροειδές. Ο ορισμός του αστεροειδούς απαιτεί την ύπαρξη ενός σημείου με την ιδιότητα ότι κάθε ακτίνα που ξεκινάει από αυτό το σημείο και εκτείνεται μέχρι το άπειρο συναντάει το σύνορο του αστεροειδούς σχήματος ακριβώς σε ένα σημείο.

Με αυτές τις υποθέσεις το ρεύμα επιδέχεται την αναπαράσταση Helmholtz (Morse and Feshbach, 1953)

$$J^p(r) = \nabla\Psi(r) + \nabla \times \mathbf{A}(r), \quad r \in \Omega \quad (3.46)$$

με

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(r) = 0 \quad (3.47)$$

όπου το Ψ χαρακτηρίζεται ως βαθμωτό και το \mathbf{A} ως διανυσματικό δυναμικό Helmholtz.

Τώρα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (3.45) ως εξής

$$\begin{aligned}
 u^-(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}^p(\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \mathbf{J}^p(\mathbf{r}_0) \right) d\nu(\mathbf{r}_0) \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}_0) \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right) d\nu(\mathbf{r}_0) \\
 &= \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\partial\Omega} (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}_0)) \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right) ds(\mathbf{r}_0) \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} \left(\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}_0) \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right) d\nu(\mathbf{r}_0) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} \left(\Delta_{\mathbf{r}_0} \Psi(\mathbf{r}_0) \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \right) d\nu(\mathbf{r}_0) \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{r} \in \partial\Omega$. Για την παραπάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = \nabla f \cdot \mathbf{g} + f\nabla \cdot \mathbf{g} \tag{3.49}$$

το Θεώρημα της απόκλισης του Gauss, την αναπαράσταση Helmholtz (3.46), το γεγονός ότι η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν και ότι το ρεύμα \mathbf{J}^p μηδενίζεται πάνω στο $\partial\Omega$.

Εφαρμόζοντας το δεύτερο τύπο του Green στο Ω για τις συναρτήσεις $\Psi(\mathbf{r}_0)$ και $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ με $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\Psi(\mathbf{r}_0) \Delta_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \Delta_{\mathbf{r}_0} \Psi(\mathbf{r}_0) \right) d\nu(\mathbf{r}_0) = \\
 &= \int_{\partial\Omega} \left(\Psi(\mathbf{r}_0) \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}_0)} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{r}_0)} \Psi(\mathbf{r}_0) \right) ds(\mathbf{r}_0) \tag{3.50}
 \end{aligned}$$

Όμως η συνάρτηση $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ είναι αρμονική, η Ψ και η $\frac{\partial}{\partial n} \Psi$ μηδενίζονται στο σύνορο $\partial\Omega$ οπότε θα έχουμε

$$\int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{r}_0} \Psi \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} d\nu(\mathbf{r}_0) = 0 \tag{3.51}$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \partial\Omega$.

Συνεπώς η (3.48) παίρνει τη μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{\Omega} (\Delta_{\mathbf{r}'} \Psi(\mathbf{r}')) \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}') d\nu(\mathbf{r}') \quad (3.52)$$

για κάθε $\mathbf{r} \in \partial\Omega$.

3.2.1 Αντιστροφή Διπολικής Νευρωνικής Διέγερσης

Υποθέτουμε ότι εντός της αγωγίμης ομογενούς σφαίρας ακτίνας a υπάρχει ένα διπολικό ρεύμα $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$. Σύμφωνα με τη λύση του ευθέος προβλήματος το προκαλούμενο ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας δίνεται από την έκφραση (3.21) υπολογισμένη στο $r = a$ δηλαδή

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \mathbf{Q} \cdot \frac{\nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0))}{na^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.53)$$

όπου θεωρήσαμε $c = 0$. Εφόσον γνωρίζουμε την u^- στην επιφάνεια της σφαίρας μπορούμε να την αναπτύξουμε στο σύστημα των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών Y_n^m όπως δίνονται από τους τύπους (3.10). Οπότε θα έχουμε το ανάπτυγμα

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.54)$$

όπου όλοι οι συντελεστές είναι γνωστοί και ίσοι με

$$C_n^m = \int_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} u^-(a\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.55)$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $|m| \leq n$.

Επιπλέον λόγω ορθογωνιότητας έχουμε

$$C_n^m = \frac{1}{\sigma na^{n+1}} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (r_0^n Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)) \quad (3.56)$$

Στο αντίστροφο πρόβλημα από τη γνώση της συνάρτησης $u^-(a\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}_0)$ υπολογίζουμε τις σταθερές C_n^m . Ταυτόχρονα γνωρίζουμε από τη λύση του ευθέος προβλήματος ότι οι σταθερές C_n^m έχουν τη μορφή (3.56) που εξαρτάται μόνον από το δίπολο $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{Q}\}$. Οπότε χρειαζόμαστε έναν αλγόριθμο που θα μας δίνει το \mathbf{r}_0 και το \mathbf{Q} . Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε τρεις αριθμούς για τις συντεταγμένες του \mathbf{r}_0 και τρεις αριθμούς για τις συντεταγμένες του \mathbf{Q} . Οπότε πρέπει να γνωρίζουμε τουλάχιστον έξι συντεταγμένες C_n^m . Στο ανάπτυγμα (3.23) υπάρχουν τρεις συντελεστές για $n = 1$ και πέντε συντελεστές για $n = 2$, οπότε περιοριζόμαστε μόνο

στους οκτώ όρους $n = 1, 2$. Οι εννιά πρώτες σφαιρικές αρμονικές όπως αυτές υπολογίζονται από τη σχέση (3.10) είναι

$$Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (3.57)$$

$$Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \quad (3.58)$$

$$Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \quad (3.59)$$

$$Y_1^1(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \quad (3.60)$$

$$Y_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{-2i\phi} \quad (3.61)$$

$$Y_2^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin\theta \cos\theta e^{-i\phi} \quad (3.62)$$

$$Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \quad (3.63)$$

$$Y_2^1(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin\theta \cos\theta e^{i\phi} \quad (3.64)$$

$$Y_2^2(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{2i\phi} \quad (3.65)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων

$$x_1 = r \cos\theta \quad (3.66)$$

$$x_2 = r \sin\theta \cos\phi \quad (3.67)$$

$$x_3 = r \sin\theta \sin\phi \quad (3.68)$$

εκφράζουμε τις (3.57) - (3.65) σε καρτεσιανή μορφή

$$Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \quad (3.69)$$

$$Y_1^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r} (x_2 - ix_3) \quad (3.70)$$

$$Y_1^0(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r} x_1 \quad (3.71)$$

$$Y_1^1(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r} (x_2 + ix_3) \quad (3.72)$$

$$Y_2^{-2}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^2} (x_2 - ix_3)^2 \quad (3.73)$$

$$Y_2^{-1}(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^2} (x_2 - ix_3)x_1 \quad (3.74)$$

$$Y_2^0(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^2} (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \quad (3.75)$$

$$Y_2^1(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^2} (x_2 + ix_3)x_1 \quad (3.76)$$

$$Y_2^2(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^2} (x_2 + ix_3)^2 \quad (3.77)$$

Υπολογίζοντας τις συζυγείς σφαιρικές αρμονικές $Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_0)$ των εκφράσεων (3.70) - (3.77) και αναλύοντας την (3.56) για $n = 1, 2$ παίρνουμε το σύστημα

$$C_1^{-1} = \frac{1}{\sigma a^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta_0 e^{i\phi_0} \right) \quad (3.78)$$

$$C_1^0 = \frac{1}{\sigma a^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta_0 \right) \quad (3.79)$$

$$C_1^1 = \frac{1}{\sigma a^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0 \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta_0 e^{-i\phi_0} \right) \quad (3.80)$$

$$C_2^{-2} = \frac{1}{2\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^2 \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta_0 e^{2i\phi_0} \right) \quad (3.81)$$

$$C_2^{-1} = \frac{1}{2\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^2 \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin\theta_0 \cos\theta_0 e^{i\phi_0} \right) \quad (3.82)$$

$$C_2^0 = \frac{1}{2\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^2 \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \frac{3 \cos^2 \theta_0 - 1}{2} \right) \quad (3.83)$$

$$C_2^1 = \frac{1}{2\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^2 \sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin\theta_0 \cos \theta_0 e^{-i\phi_0} \right) \quad (3.84)$$

$$C_2^2 = \frac{1}{2\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \left(r_0^2 \sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta_0 e^{-2i\phi_0} \right) \quad (3.85)$$

το οποίο σε καρτεσιανή μορφή γίνεται

$$C_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{\sigma a^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02} + ix_{03}) \quad (3.86)$$

$$C_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{\sigma a^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} x_{01} \quad (3.87)$$

$$C_1^1 = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{\sigma a^2} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02} - ix_{03}) \quad (3.88)$$

$$C_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{128\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02} + ix_{03})^2 \quad (3.89)$$

$$C_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02} + ix_{03}) x_{01} \quad (3.90)$$

$$C_2^0 = \sqrt{\frac{5}{64\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (2x_{01}^2 - x_{02}^2 - x_{03}^2) \quad (3.91)$$

$$C_2^1 = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02} - ix_{03}) x_{01} \quad (3.92)$$

$$C_2^2 = \sqrt{\frac{15}{128\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} (x_{02} - ix_{03})^2 \quad (3.93)$$

Τέλος εκτελώντας την κατά κατεύθυνση παράγωγο παίρνουμε

$$C_1^{-1*} = C_1^1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\sigma a^2} (Q_2 - iQ_3) \quad (3.94)$$

$$C_1^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sigma a^2} Q_1 \quad (3.95)$$

$$C_2^{-2*} = C_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} [(Q_2 x_{02} - Q_3 x_{03}) - i(Q_2 x_{03} + Q_3 x_{02})] \quad (3.96)$$

$$C_2^{-1*} = C_2^1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} [(Q_2 x_{01} + Q_1 x_{02}) - i(Q_3 x_{01} + Q_1 x_{03})] \quad (3.97)$$

$$C_2^0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{1}{\sigma a^3} [2Q_1 x_{01} - Q_2 x_{02} - Q_3 x_{03}] \quad (3.98)$$

Από τις σχέσεις (3.94), (3.95) υπολογίζουμε εύκολα τις συνιστώσες της ροπής \mathbf{Q} του διπόλου οι οποίες είναι

$$Q_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma a^2 C_1^0 \quad (3.99)$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 (C_1^{-1} + C_1^1) \quad (3.100)$$

$$Q_3 = i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 (C_1^1 - C_1^{-1}) \quad (3.101)$$

οπότε βρίσκουμε

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 \left(\sqrt{2} C_1^0, C_1^{-1} + C_1^1, i(C_1^1 - C_1^{-1}) \right) \quad (3.102)$$

Αντικαθιστώντας τα Q_1, Q_2, Q_3 στις σχέσεις (3.96) - (3.98) προκύπτει

$$C_2^{-2*} = C_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{2a} C_1^1 (x_{02} - ix_{03}) \quad (3.103)$$

$$C_2^{-1*} = C_2^1 = \frac{\sqrt{5}}{4a} [2C_1^1 x_{01} + \sqrt{2} C_1^0 (x_{02} - ix_{03})] \quad (3.104)$$

$$C_2^0 = \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{1}{2a} [2\sqrt{2} C_1^0 x_{01} - C_1^{-1} (x_{02} - ix_{03}) - C_1^1 (x_{02} + ix_{03})] \quad (3.105)$$

Λύνοντας την (3.103) ως προς $x_{02} - ix_{03}$ και αντικαθιστώντας στην (3.104) βρίσκουμε μια έκφραση για την πρώτη συνιστώσα της θέσης του διπόλου

$$x_{01} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \left(\frac{C_2^1}{C_1^1} \right) - \sqrt{\frac{2}{5}} a \left(\frac{C_1^0 C_2^2}{C_1^1 C_1^1} \right) \quad (3.106)$$

υποθέτοντας ότι $C_1^1 \neq 0$.

Εναλλακτικά λύνοντας την συζυγή της (3.103) ως προς $x_{02} + ix_{03}$ και αντικαθιστώντας στην συζυγή της (3.104) βρίσκουμε

$$x_{01} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \left(\frac{C_2^1}{C_1^1} \right)^* - \sqrt{\frac{2}{5}} a \left(\frac{C_1^0 C_2^2}{C_1^1 C_1^1} \right)^* \quad (3.107)$$

Από τις (3.106), (3.107) προκύπτει

$$x_{01} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \operatorname{Re} \left(\frac{C_2^1}{C_1^1} \right) - \sqrt{\frac{2}{5}} a \operatorname{Re} \left(\frac{C_1^0 C_2^2}{C_1^1 C_1^1} \right) \quad (3.108)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.103), (3.94) προκύπτει το παρακάτω σύστημα ως προς x_{02}, x_{03}

$$x_{02} + ix_{03} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} \right)^* \quad (3.109)$$

$$x_{02} - ix_{03} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \frac{c_2^2}{c_1^1} \quad (3.110)$$

το οποίο δίνει

$$x_{02} = \frac{a}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^{-2}}{c_1^{-1}} + \frac{c_2^2}{c_1^1} \right) = \frac{2a}{\sqrt{5}} \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} \right) \quad (3.111)$$

$$x_{03} = \frac{ia}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} - \frac{c_2^{-2}}{c_1^{-1}} \right) = \frac{-2a}{\sqrt{5}} \operatorname{Im} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} \right) \quad (3.112)$$

Τελικά η θέση του διπόλου δίνεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{r}_0 = \frac{a}{\sqrt{5}} \left(2 \left(\frac{c_1^1}{c_1^1} \right) - \sqrt{2} \left(\frac{c_1^0 c_2^2}{c_1^1 c_1^1} \right), \frac{c_2^{-2}}{c_1^{-1}} + \frac{c_2^2}{c_1^1}, i \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} - \frac{c_2^{-2}}{c_1^{-1}} \right) \right), c_1^1 \neq 0 \quad (3.113)$$

ή

$$\mathbf{r}_0 = \frac{a}{\sqrt{5}} \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{c_1^1}{c_1^1} \right) - \sqrt{2} \operatorname{Re} \left(\frac{c_1^0 c_2^2}{c_1^1 c_1^1} \right), 2 \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} \right), -2 \operatorname{Im} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} \right) \right), c_1^1 \neq 0 \quad (3.114)$$

3.2.2 Αντιστροφή κατανεμημένης νευρωνικής διέγερσης

Στην προηγούμενη παράγραφο κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο που μας οδηγεί στην ανακατασκευή ενός διπολικού ρεύματος από την γνώση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί επάνω στην επιφάνεια του κρανίου. Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε ένα γενικό νευρωνικό ρεύμα, με φορέα εντός της αγωγίμης σφαίρας που προτυποποιεί τον εγκέφαλο, και επιχειρούμε να επιλύσουμε το αντίστροφο πρόβλημα της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας. Από προηγούμενη παράγραφο γνωρίζουμε ότι αν το άγνωστο ρεύμα \mathbf{J}^p έχει την ανάλυση Helmholtz

$$\mathbf{J}^p = \nabla \Psi + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.115)$$

με

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.116)$$

τότε το επιφανειακό ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την αναπαράσταση

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{4\pi\sigma} \int_{r' \leq a} (\Delta_{r'} \Psi(\mathbf{r})) \tilde{u}^-(a\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}') dv(\mathbf{r}') \quad (3.117)$$

όπου η αρμονική συνάρτηση \tilde{u}^- συνδέεται με το δυναμικό u^- μέσω της σχέσης (3.38)

$$u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \tilde{u}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}') \right) \quad (3.118)$$

Επιπλέον το δυναμικό που δημιουργεί το δίπολο $\{\mathbf{r}', \mathbf{J}^p(\mathbf{r}')\}$ έχει τη μορφή (3.22) με $c = 0$ δηλαδή

$$u^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{J}^p(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{(r'r')^n}{a^{2n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \right) \quad (3.119)$$

Με απλή σύγκριση των σχέσεων (3.118) και (3.119) διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση \tilde{u}^- πάνω στο σύνορο $r = a$ γίνεται

$$\tilde{u}^-(a\hat{\mathbf{r}}; \mathbf{r}') = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r'^n}{a^{n+1}} Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.120)$$

Η πληρότητα του συνόλου των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών πάνω στην μοναδιαία σφαίρα μας επιτρέπει να αναζητήσουμε την συνάρτηση Helmholtz Ψ στο εσωτερικό της σφαίρας $r' < a$, με τη μορφή

$$\Psi(\mathbf{r}') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \quad (3.121)$$

οπότε αρκεί να προσδιορίσουμε του συντελεστές y_n^m που είναι συναρτήσεις μόνο της ακτινικής μεταβλητής r' . Ο τελεστής του Laplace στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων γράφεται

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.122)$$

Το γωνιακό μέρος του τελεστή του Laplace ονομάζεται τελεστής του Beltrami

$$\mathbb{B}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.123)$$

Οπότε ο τελεστής του Laplace γράφεται

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \mathbb{B}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.124)$$

Οι σφαιρικές αρμονικές είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του Beltrami με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις $-n(n+1)$ δηλαδή για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ και $|m| \leq n$ έχουμε

$$\mathbb{B}(\hat{\mathbf{r}})Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = -n(n+1)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.125)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή του Laplace στην (3.121) και χρησιμοποιώντας την (3.125) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta_{r'}\Psi(r') &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{r'^2} \left(r'^2 \frac{d^2}{dr'^2} \right. \\ &\quad \left. + 2r' \frac{d}{dr'} - n(n+1) \right) y_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') \end{aligned} \quad (3.126)$$

και αν θέσουμε

$$\Psi_n^m(r') = \frac{d^2}{dr'^2} y_n^m(r') + \frac{2}{r'} \frac{d}{dr'} y_n^m(r') - \frac{n(n+1)}{r'^2} y_n^m(r') \quad (3.127)$$

τότε θα έχουμε

$$\Delta_{r'}\Psi(r') = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^m(r') Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.128)$$

Στη συνέχεια εισάγουμε τα αναπτύγματα (3.120) και (3.128) στην (3.117) και έχουμε

$$\begin{aligned} u^-(a\hat{\mathbf{r}}) &= -\frac{1}{\sigma} \int_0^a \int_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} \left(\sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \Psi_{n'}^{m'}(r') Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{r'^n}{a^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') \right) r'^2 dr' ds(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{a^{n+1}} \\ &\quad \times \int_0^a \int_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} r'^{m+2} \Psi_{n'}^{m'}(r') Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}') Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') dr' ds(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{a^{n+1}} \\ &\quad \times \int_0^a r'^{m+2} \Psi_{n'}^{m'}(r') dr' \delta_{nn'} \delta_{mm'} \\ &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})}{a^{n+1}} \int_0^a r^{n+2} \Psi_n^m(r) dr. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Η σχέση (3.129) μας δίνει τη μορφή που πρέπει να έχει το ανάπτυγμα του δυναμικού u^- στην επιφάνεια της σφαίρας. Αν γνωρίζουμε το δυναμικό $u(a\hat{\mathbf{r}})$ τότε μπορούμε να αναπτύξουμε την $u(a\hat{\mathbf{r}})$ σε επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές και τότε έχουμε

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Gamma_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.130)$$

όπου οι γνωστοί συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$\Gamma_n^m = \int_{|\hat{r}|=1} u^-(a\hat{r}) Y_n^{m*}(\hat{r}) ds(\hat{r}) \quad (3.131)$$

Από την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών παίρνουμε τις σχέσεις

$$\Gamma_n^m = -\frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^a r^{n+2} \Psi_n^m(r) dr \quad (3.132)$$

για $n = 1, 2, \dots$ και $|m| \leq n$, ενώ $\Gamma_0^0 = 0$ καθώς στο ανάπτυγμα (3.120) είναι $c = 0$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι καθώς ο φορέας του ρεύματος J^P είναι υποσύνολο της ανοικτής σφαίρας ακτίνας a , θα υπάρχει ένας φλοιός με πάχος $\delta > 0$ όπου $J^P \equiv \mathbf{0}$ και κατά συνέπεια $y_n^m \equiv 0$ για $a - \delta < r < a$. Η σφαίρα με ακτίνα $\bar{a} = a - \delta$ είναι η ελάχιστη κλειστή σφαίρα που περιέχει τον φορέα του J^P . Σε αυτήν την περίπτωση θα ισχύει γενικά

$$y_n^m(\bar{a}) \neq 0 \quad (3.133)$$

Σύμφωνα με αυτήν την παρατήρηση το ολοκλήρωμα της (3.132) μετά από επανειλημμένες παραγοντικές ολοκληρώσεις δίνει

$$\int_0^a r^{n+2} \Psi_n^m(r) dr = \bar{a}^{n+1} (\bar{a} \dot{y}_n^m(a) - n y_n^m(\bar{a})) \quad (3.134)$$

Άρα οι συντελεστές Γ_n^m του αναπτύγματος (3.130) παίρνουν τη μορφή

$$\Gamma_n^m = -\frac{1}{\sigma} \frac{n+1}{n(2n+1)} \left(\frac{\bar{a}}{a}\right)^{n+1} (\bar{a} \dot{y}_n^m(\bar{a}) - n y_n^m(\bar{a})) \quad (3.135)$$

όπου η τελεία συμβολίζει παραγώγιση ως προς r . Η σχέση (3.135) συνδέει τις τιμές των y_n^m , \dot{y}_n^m πάνω στο σύνορο $r = \bar{a}$ όμως δεν υπολογίζει τις συναρτήσεις $y_n^m(r)$ έτσι ώστε να είναι αναγνωρίσιμο το ρεύμα που αντιστοιχεί στο μη αρμονικό μέρος της Ψ . Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία εισάγουμε τη διαρμονική προσέγγιση της Ψ την οποία συμβολίζουμε με Ψ_a και έχουμε

$$\Psi_a(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) + r^2 \Psi_2(\mathbf{r}) \quad (3.136)$$

όπου

$$\Delta \Psi_1 = (\mathbf{r}) = \Delta \Psi_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.137)$$

Είναι σχετικά εύκολο να αποδειχθεί ότι αν η Ψ δίνεται από την σχέση (3.136) τότε

$$\Delta \Psi = (6 + 4\mathbf{r} \cdot \nabla) \Psi_2 \quad (3.138)$$

και αν

$$\Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.139)$$

τότε

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= (6 + 4\mathbf{r} \cdot \nabla) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (3 + 2n) B_n^m r^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση (3.140) για την έκφραση $\Delta \Psi$ και εισάγοντας στην (3.129) τις σχέσεις

$$\Psi_n^m(r') = 2(3 + 2n) B_n^m r'^n \quad (3.141)$$

παίρνουμε

$$u^-(a\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{2}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n+1}{n(2n+1)} B_n^m a^{n+2} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.142)$$

και από την (3.130) υπολογίζουμε τους άγνωστους συντελεστές B_n^m συναρτήσει των γνωστών συντελεστών Γ_n^m

$$B_n^m = -\frac{\sigma}{2} \frac{1}{a^{n+2}} \frac{n(2n+1)}{n+1} \Gamma_n^m \quad (3.143)$$

Συνεπώς μια προσέγγιση του ρεύματος δίνεται από τη σχέση

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) - \frac{\sigma}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{n(2n+1)}{n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+2} \Gamma_n^m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \quad (3.144)$$

όπου Ψ_1 είναι μια 'αόρατη' από το εγκεφαλογράφημα συνάρτηση.

4 Ελλειψοειδές πρότυπο

Έστω S η επιφάνεια του τριαξονικού ελλειψοειδούς αναφοράς που έχει την καρτεσιανή μορφή

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad 0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \infty \quad (4.1)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ οι ημιάξονες αναφοράς. Τα τετράγωνα των ημισεσιακών αποστάσεων του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις

$$h_1^2 = a_2^2 - a_3^2 \quad (4.2)$$

$$h_2^2 = a_1^2 - a_3^2 \quad (4.3)$$

$$h_3^2 = a_1^2 - a_2^2 \quad (4.4)$$

Το ελλειψοειδές αναφοράς (4.1) και οι ημισεσιακές αποστάσεις (4.2) - (4.4) εισάγουν ένα ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων (ρ, μ, ν) . Οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες ρ, μ, ν συνδέονται με τις αντίστοιχες καρτεσιανές μέσω των σχέσεων

$$x_1 = \frac{\rho\mu\nu}{h_2h_3} \quad (4.5)$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{(\rho^2 - h_3^2)}\sqrt{(\mu^2 - h_3^2)}\sqrt{(h_3^2 - \nu^2)}}{h_1h_3} \quad (4.6)$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{(\rho^2 - h_2^2)}\sqrt{(h_2^2 - \mu^2)}\sqrt{(h_2^2 - \nu^2)}}{h_1h_2} \quad (4.7)$$

όπου $\rho \in [h_2, \infty)$, $\mu \in [h_3, h_2]$, $\nu \in [-h_3, h_3]$

4.1 Μελέτη του ευθέως προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο ελλειψοειδές πρότυπο

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι ο εγκέφαλος περιγράφεται από το ελλειψοειδές αναφοράς (4.1). Σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες η επιφάνεια S παίρνει τη μορφή $\rho = \alpha_1$. Ο χώρος εσωτερικά του εγκεφάλου συμβολίζεται με V^- και αντιστοιχεί στο διάστημα $\rho \in [h_2, \alpha_1)$. Το χωρίο V^- χαρακτηρίζεται από ηλεκτρική αγωγιμότητα σ και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Ο χώρος εξωτερικά του εγκεφάλου συμβολίζεται με V^+ , αντιστοιχεί στο διάστημα $\rho \in [\alpha_1, \infty)$, δεν είναι αγωγίμος και εμφανίζει την ίδια μαγνητική διαπερατότητα με το χωρίο V^- .

Στο εσωτερικό του χωρίου V^- θεωρούμε ένα σημειακό διπολικό ρεύμα

$$\mathbf{J}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (4.8)$$

στη θέση $\mathbf{r}_0 \in V^-$ με διπολική ροπή \mathbf{Q} .

Το πρωτεύον διπολικό ρεύμα \mathbf{J}^p δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} στο χώρο εσωτερικά του αγωγού V^- , η ύπαρξη του οποίου δημιουργεί το δευτερεύον επαγωγικό ρεύμα $\mathbf{J}^i = \sigma \mathbf{E}$. Το συνολικό ρεύμα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \sigma \mathbf{E} \quad (4.9)$$

Εισάγοντας τις φυσιολογικές σταθερές της μαγνητικής διαπερατότητας μ_0 , της ηλεκτρικής αγωγιμότητας σ , και της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ , του εγκεφάλου στις εξισώσεις Maxwell και λαμβάνοντας υπόψιν τη χαρακτηριστική του διάσταση, συμπεραίνουμε ότι η σχεδόν στατική θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί και σε αυτή την περίπτωση. Ακολουθώντας την ανάλυση που είχε προηγηθεί στο δεύτερο κεφάλαιο καταλήγουμε στα παρακάτω προβλήματα συνοριακών τιμών

Εσωτερικό πρόβλημα Neumann

$$\Delta u^-(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J}^p(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V^- \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial u^-(\mathbf{r})}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in S \quad (4.11)$$

Εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V^+ \quad (4.12)$$

$$u^-(\mathbf{r}) = u^+(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (4.13)$$

$$u^+(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

Η λύση της εξίσωσης του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα συντεταγμένων απαιτεί την ανάπτυξη της θεωρίας των ελλειψοειδών αρμονικών συναρτήσεων. Οι παρακάτω πίνακες παρουσιάζουν βασικά στοιχεία του σφαιρικού και αντίστοιχα του ελλειψοειδούς συστήματος (Dassios, 2012)

	Σφαιρικό σύστημα	Ελλειψοειδές σύστημα
Καμπυλό- γραμμες συντεταγμένες συναρτήσει Καρτεσιανών	$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{x_1}\right)$ $\phi = \arctan\left(\frac{x_3}{x_2}\right)$ <p>$r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$,</p> <p>r η ακτίνα, θ η πολική γωνία, ϕ το αζιμούθιο</p>	$\rho^2 \in (h_2^2, \infty)$ $\mu^2 \in (h_3^2, h_2^2)$ $\nu^2 \in (0, h_3^2)$
Καρτεσιανές συντεταγμένες συναρτήσει Καμπυλό- γραμμων Διάνυσμα θέσης $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$	$x_1 = r \cos \theta$ $x_2 = r \cos \phi \sin \theta$ $x_3 = r \sin \phi \sin \theta$	$x_1^2 = \frac{\rho^2 \mu^2 \nu^2}{h_2^2 h_3^2}$ $x_2^2 = \frac{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - \nu^2)}{h_1^2 h_3^2}$ $x_3^2 = \frac{(\rho^2 - h_2^2)(h_2^2 - \mu^2)(h_2^2 - \nu^2)}{h_1^2 h_2^2}$

		<p>όπου h_1, h_2, h_3 οι ημιστιακές αποστάσεις και ρ, μ, ν οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες</p>
<p>Ορθοκανονικά διανύσματα</p>	$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}}_2 + \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{x}}_3$ $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta \hat{\mathbf{x}}_1 + \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos\theta \sin\phi \hat{\mathbf{x}}_3$ $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi \hat{\mathbf{x}}_2 + \cos\phi \hat{\mathbf{x}}_3$	$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\rho}{h_\rho} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\rho^2 - a_1^2 + a_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i$ $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mu}{h_\mu} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\mu^2 - a_1^2 + a_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i$ $\hat{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\nu}{h_\nu} \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{\nu^2 - a_1^2 + a_i^2} \hat{\mathbf{x}}_i$ <p>όπου a_1, a_2, a_3 οι ημιάξονες αναφοράς του ελλειψοειδούς</p> $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$
<p>Κάθετο διάνυσμα</p>	$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$	$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$

Μετρικοί συντελεστές	$h_r = \left \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right = 1$ $h_\theta = \left \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right = r$ $h_\phi = \left \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right = r \sin \theta$	$h_\rho^2 = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}{(\rho^2 - h_3^2)(\rho^2 - h_2^2)}$ $h_\mu^2 = \frac{(\rho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - h_3^2)(h_2^2 - \mu^2)}$ $h_\nu^2 = \frac{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(h_3^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)}$
Τελεστής κλίσης ∇	$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$	$\nabla = \frac{\hat{\rho}}{h_\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\hat{\mu}}{h_\mu} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\hat{\nu}}{h_\nu} \frac{\partial}{\partial \nu}$
Τελεστής Laplace Δ	$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$	$\Delta = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{J}{h_\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{J}{h_\mu^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{J}{h_\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right]$ <p>όπου $J = h_\rho h_\mu h_\nu$</p>
Επιφανειακές αρμονικές	$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n- m)!}{(n+ m)!}}$ $\times P_n^{ m }(\cos \theta) e^{im\phi},$ $n = 0, 1, 2, \dots,$	$S_n^m(\mu, \nu) = E_n^m(\mu) E_n^m(\nu),$ $n = 0, 1, 2, \dots,$ $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$

	<p>$m = -n, -n + 1, \dots, n - 1, n$</p> <p>Είναι ορθογώνιες επί σφαιρικής επιφάνειας S_R με σχέση ορθογωνιότητας:</p> $\int_{S_R} Y_n^m(\hat{r}) Y_n^{m'}(\hat{r}) ds(\hat{r}) = \delta_{nn'} \delta_{mm'}$ <p>όπου</p> $ds(\hat{r}) = \sin\theta d\theta d\varphi$	<p>Είναι ορθογώνιες επί ελλειψοειδούς επιφάνειας S_{a_1} με σχέση ορθογωνιότητας:</p> $\int_{S_R} S_n^m(\mu, \nu) S_n^{m'}(\mu, \nu) \times \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu)(\rho^2 - \nu^2)}} ds(\mu, \nu) = \gamma_n^m \delta_{nn'} \delta_{mm'}$ <p>όπου</p> $ds(\mu, \nu) = h_\mu h_\nu d\mu d\nu$
<p>Εσωτερικές αρμονικές</p>	<p>$r^n Y_n^m(\hat{r}),$</p> <p>$n = 0, 1, 2, \dots,$</p> <p>$m = -n, \dots, 0, \dots, n$</p>	<p>$\mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu),$</p> <p>$n = 0, 1, 2, \dots,$</p> <p>$m = 1, 2, \dots, 2n + 1$</p>
<p>Εξωτερικές αρμονικές</p>	<p>$r^{-(n+1)} Y_n^m(\hat{r}),$</p> <p>$n = 0, 1, 2, \dots,$</p> <p>$m = -n, \dots, 0, \dots, n$</p>	<p>$\mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) = F_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) = (2n + 1) I_n^m(\rho) \times E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu),$</p> <p>όπου</p> $I_n^m(\rho) = \int_\rho^\infty \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_3^2} \sqrt{t^2 - h_2^2}},$ <p>$\rho \geq h_2,$</p>

		$n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n + 1$
--	--	---

Πίνακας 4.1

Η επίλυση της εξίσωσης Laplace με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών οδηγεί στην εξίσωση Lamè (Kariotou, 2004)

$$(x^2 - h_3^2)(x^2 - h_2^2)E''(x) + x(2x^2 - h_3^2 - h_2^2)E'(x) + [(h_2^2 + h_3^2)P - n(n+1)x^2]E(x) = 0 \quad (4.15)$$

για κάθε μια από τις συναρτήσεις $E(\rho), E(\mu), E(\nu)$ που συνθέτουν την εσωτερική ελλειψοειδή αρμονική συνάρτηση

$$E_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) \quad (4.16)$$

Με τη βοήθεια των P, n ορίζεται ο βαθμός n και η τάξη m της εσωτερικής ελλειψοειδούς αρμονικής.

Η εξωτερική ελλειψοειδής αρμονική συνάρτηση δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} F_n^m(\rho, \mu, \nu) &= (2n+1)E_n^m(\rho, \mu, \nu)I_n^m(\rho) \\ &= (2n+1)I_n^m(\rho)E_n^m(\rho)E_n^m(\mu)E_n^m(\nu) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Οι συναρτήσεις $I_n^m(\rho)$ είναι ελλειπτικά ολοκληρώματα και δίνονται από τη σχέση

$$I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}} \quad (4.18)$$

όπου $n = 0, 1, 2, \dots$ και $m = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Οι συναρτήσεις $S_n^m = E_n^m(\mu)E_n^m(\nu)$ ορίζονται στην επιφάνεια οποιουδήποτε ελλειψοειδούς $\rho = \text{σταθερά}$ είναι γνωστές ως επιφανειακές ελλειψοειδείς αρμονικές και αποτελούν πλήρες και ορθοκανονικό σύστημα ιδιοσυναρτήσεων ως προς τη συνάρτηση βάρους

$$l_{\rho_0}(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}} \quad (4.19)$$

Στην περίπτωση μας είναι $\rho = \rho_0$.

Οι σταθερές κανονικοποίησης γ_n^m ικανοποιούν τη σχέση

$$\begin{aligned}\gamma_n^m &= \iint_{\rho=\rho_0} [E_n^m(\mu)E(\nu)]^2 l_{\rho_0}(\mu, \nu) ds \\ &= \iint_{\rho=\rho_0} \frac{[E_n^m(\mu)E(\nu)]^2}{\sqrt{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)}} ds\end{aligned}\quad (4.20)$$

Στη συνέχεια δίνονται οι τιμές των σταθερών γ_n^m οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία

$$\gamma_0^1 = 4\pi \quad (4.21)$$

$$\gamma_1^m = \frac{4\pi h_1^2 h_2^2 h_3^2}{3 h_m^2}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda - a_1^2) (\Lambda - a_2^2) (\Lambda - a_3^2) \quad (4.23)$$

$$\gamma_2^2 = \frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda' - a_1^2) (\Lambda' - a_2^2) (\Lambda' - a_3^2) \quad (4.24)$$

$$\gamma_2^{6-m} = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^2 h_m^2, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.25)$$

όπου

$$\Lambda \} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 a_k^2 \pm \frac{1}{3} \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left(a_k^4 - \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{a_k^2} \right)} \quad (4.26)$$

4.1.1 Εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό που ικανοποιεί την εξίσωση (4.10) έχει τη μορφή

$$u^-(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m E_n^m(\rho, \mu, \nu) - \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.27)$$

Εκφράζοντας και τη θεμελιώδη λύση του τελεστή του Laplace στο ελλειψοειδές σύστημα έχουμε

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho, \mu, \nu) F_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0), & r < r_0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} E_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) F_n^m(\rho, \mu, \nu), & r > r_0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή

$$-\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_r$$

και στα δύο μέλη της (4.28) και αναπτύσσοντας το ηλεκτρικό πεδίο $\frac{1}{|r-r_0|}$ σύμφωνα με το δεύτερο κλάδο της (4.28) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \frac{1}{|r-r_0|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \frac{1}{\gamma_n^m} \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \frac{1}{2n+1} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0) \\
&\quad \times (2n+1) I_n^m(\rho) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\rho_0, \mu_0, \nu_0)) \\
&\quad \times I_n^m(\rho) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης τον όρο

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu)$$

προκύπτει

$$\begin{aligned}
u^-(\rho, \mu, \nu) &= b_0^1 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \left[b_n^m + \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) I_n^m(\rho) \right] \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (4.27) καθώς και την ελλειψοειδή αρμονική μηδενικού βαθμού και πρώτης τάξης

$$\mathbb{E}_0^1(x) = 1 \tag{4.31}$$

Το πρώτο μέλος της συνοριακής συνθήκης (4.11) γράφεται

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^-(\rho, \mu, \nu)}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[b_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) I_n^m(\rho) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m E_n^{m'}(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \\
&\quad + \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} (\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)) \left[I_n^{m'}(\rho) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right. \\
&\quad \left. + I_n^m(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \right]
\end{aligned}$$

Συνεπώς η συνθήκη Neumann (4.11) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^-(\rho, \mu, \nu)}{\partial \rho} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m E_n^{m'}(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} -\frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \\
&\quad \times \left(I_n^{m'}(\rho) E_n^m(\rho) + I_n^m(\rho) E_n^{m'}(\rho) \right) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} b_n^m E_n^{m'}(a_1) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} -\frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \\
&\quad \times \left(I_n^{m'}(a_1) E_n^m(a_1) + I_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) \right) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών παίρνουμε

$$b_n^m E_n^{m'}(a_1) = -\frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \left(I_n^{m'}(a_1) E_n^m(a_1) + I_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) \right) \quad (4.32)$$

Επιπλέον η σχέση (4.18) γράφεται ισοδύναμα

$$I_n^m(\rho) = -\int_{\infty}^{\rho} \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}} = -\lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\eta}^{\rho} \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}}$$

Συνεπώς

$$I_n^{m'}(\rho) = -\frac{1}{[E_n^m(\rho)]^2 \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{\rho^2 - h_3^2}}$$

Για $\rho = a_1$ είναι

$$I_n^{m'}(a_1) = -\frac{1}{[E_n^m(a_1)]^2 \sqrt{a_1^2 - h_2^2} \sqrt{a_1^2 - h_3^2}}$$

Τελικά χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.3), (4.4) βρίσκουμε

$$I_n^{m'}(a_1) = -\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 [E_n^m(a_1)]^2} \quad (4.33)$$

Εισάγοντας την (4.33) στην (4.32) και διαιρώντας με $-E_n^{m'}(a_1)$ προκύπτει η παρακάτω έκφραση για τους συντελεστές b_n^m

$$b_n^m = \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \left(\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3 E_n^{m'}(a_1) E_n^m(a_1)} - I_n^m(a_1) \right),$$

$$n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots, 2n + 1 \quad (4.34)$$

Αν υπολογίσουμε την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης

$$F_n^m(\rho) = (2n + 1)E_n^m(\rho)I_n^m(\rho) \quad (4.35)$$

στο $\rho = a_1$, αντικαταστήσουμε στην (4.32) και στη συνέχεια διαιρέσουμε με $E_n^m(a_1)$ προκύπτει η παρακάτω ισοδύναμη έκφραση για τους συντελεστές b_n^m

$$b_n^m = -\frac{1}{(2n+1)\sigma\gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \left(\frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} \right) \quad (4.36)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία έκφραση των συντελεστών b_n^m στη σχέση (4.7) προκύπτει η ακόλουθη μορφή για το εσωτερικό δυναμικό $u^-(\mathbf{r})$ στο εσωτερικό του ελλειψοειδούς $\rho = a_1$

$$u^-(\mathbf{r}) = b_0^1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)\sigma\gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \left(\frac{F_n^{m'}(a_1)}{E_n^{m'}(a_1)} \right) \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\sigma} \mathbf{Q} \cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \quad (4.37)$$

Εισάγοντας τις (4.29) και (4.2) στην (4.27) παίρνουμε την ακόλουθη αναπαράσταση για το εσωτερικό δυναμικό u^-

$$u_{el}^-(\rho, \mu, \nu) = b_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma\gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \times \left[I_n^m(\rho) - I_n^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} \right] E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \quad (4.38)$$

όπου $\rho_0 < \rho < a_1$.

Ο πρώτος όρος ($n = 1$) της σειράς στη σχέση (4.38) είναι το άθροισμα

$$\sum_{m=1}^3 \frac{1}{\sigma\gamma_1^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^m(\mathbf{r}_0) \right) \times \left[I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^m(a_1) E_1^{m'}(a_1)} \right] E_1^m(\rho) E_1^m(\mu) E_1^m(\nu)$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος ($m = 1$) είναι

$$\frac{1}{\sigma\gamma_1^1} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^1(\rho) - I_1^1(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^1(a_1) E_1^{1'}(a_1)} \right] E_1^1(\rho) E_1^1(\mu) E_1^1(\nu)$$

Από τη σχέση (4.22) για $m = 1$ προκύπτει

$$\gamma_1^1 = \frac{4\pi}{3} h_2^2 h_3^2 \quad (4.39)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 1 και τάξης 1 είναι

$$E_1^1(x) = x \quad (4.40)$$

Με τη βοήθεια και της σχέσης (4.16) βρίσκουμε την ελλειψοειδή αρμονική 1^{ου} βαθμού και 1^{ης} τάξης

$$\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}) = E_1^1(\rho)E_1^1(\mu)E_1^1(\nu) = \rho\mu\nu \quad (4.41)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}_0) = E_1^1(\rho_0)E_1^1(\mu_0)E_1^1(\nu_0) = \rho_0\mu_0\nu_0 \quad (4.42)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x_1 = \frac{\rho\mu\nu}{h_2h_3}$$

μετατρέπουμε την $\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r})$ σε καρτεσιανή μορφή

$$\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}) = x_1h_2h_3 \quad (4.43)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}_0) = x_{01}h_2h_3 \quad (4.44)$$

Για τον τελεστή κλίσης της παραπάνω έκφρασης έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0}\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}}\right)(x_{01}h_2h_3) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}(x_{01}h_2h_3), \frac{\partial}{\partial x_{02}}(x_{01}h_2h_3), \frac{\partial}{\partial x_{03}}(x_{01}h_2h_3)\right) \\ &= h_2h_3\hat{x}_1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

άρα

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}_0) &= (Q_1\hat{x}_1 + Q_2\hat{x}_2 + Q_3\hat{x}_3) \cdot (h_2h_3\hat{x}_1 + 0\hat{x}_2 + 0\hat{x}_3) \\ &= Q_1h_2h_3 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Οι τιμές της $E_1^1(x)$ και της παραγώγου της για $x = a_1$ είναι αντίστοιχα

$$E_1^1(a_1) = a_1 \quad (4.47)$$

$$E_1^{1'}(a_1) = 1 \quad (4.48)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.39), (4.43), (4.46) - (4.48) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma\gamma_1^1} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^1(\rho) - I_1^1(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^1(a_1) E_1^{1'}(a_1)} \right] E_1^1(\rho) E_1^1(\mu) E_1^1(\nu) = \\ & = \frac{3}{4\pi\sigma} Q_1 x_1 \left[I_1^1(\rho) - I_1^1(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ο δεύτερος όρος ($m = 2$) του αθροίσματος

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^3 \frac{1}{\sigma\gamma_1^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ & \times \left[I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^m(a_1) E_1^{m'}(a_1)} \right] E_1^m(\rho) E_1^m(\mu) E_1^m(\nu) \end{aligned}$$

είναι

$$\frac{1}{\sigma\gamma_1^2} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^2(\rho) - I_1^2(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^2(a_1) E_1^{2'}(a_1)} \right] E_1^2(\rho) E_1^2(\mu) E_1^2(\nu)$$

Από τη σχέση (4.22) για $m = 2$ προκύπτει

$$\gamma_1^2 = \frac{4\pi}{3} h_1^2 h_3^2 \quad (4.50)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 1 και τάξης 2 είναι

$$E_1^2(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (4.51)$$

με παράγωγο

$$E_1^{2'}(x) = \frac{x(x^2 - h_3^2)}{|x^2 - h_3^2| \sqrt{|x^2 - h_3^2|}} \quad (4.52)$$

Με τη βοήθεια και της σχέσης (4.16) βρίσκουμε την ελλειψοειδή αρμονική 1^{ου} βαθμού και 2^{ης} τάξης

$$\mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}) = E_1^2(\rho) E_1^2(\mu) E_1^2(\nu) = \sqrt{|\rho^2 - h_3^2|} \sqrt{|\mu^2 - h_3^2|} \sqrt{|\nu - h_3^2|} \quad (4.53)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}_0) = E_1^2(\rho_0) E_1^2(\mu_0) E_1^2(\nu_0) = \sqrt{|\rho_0^2 - h_3^2|} \sqrt{|\mu_0^2 - h_3^2|} \sqrt{|\nu_0 - h_3^2|} \quad (4.54)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x_2 = \frac{\sqrt{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - \nu^2)}}{h_1 h_3} \quad (4.55)$$

μετατρέπουμε την $\mathbb{E}_1^2(\mathbf{r})$ σε καρτεσιανή μορφή

$$\begin{aligned}
E_1^2(\mathbf{r}) &= \sqrt{|\rho^2 - h_3^2|} \sqrt{|\mu^2 - h_3^2|} \sqrt{|v^2 - h_3^2|} \\
&= \sqrt{|(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(v^2 - h_3^2)|} \\
&= \sqrt{|-(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - v^2)|} \\
&= \sqrt{|(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - v^2)|} \\
&= \sqrt{|h_1^2 h_3^2| \left| \frac{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - v^2)}{h_1^2 h_3^2} \right|} \\
&= \sqrt{|h_1^2 h_3^2|} \sqrt{\left| \frac{(\rho^2 - h_3^2)(\mu^2 - h_3^2)(h_3^2 - v^2)}{h_1^2 h_3^2} \right|} \\
&= \sqrt{|h_1^2 h_3^2|} \sqrt{|x_2^2|} \\
&= \sqrt{h_1^2 h_3^2} \sqrt{x_2^2} \\
&= x_2 h_1 h_3
\end{aligned} \tag{4.56}$$

και αντίστοιχα

$$E_1^2(\mathbf{r}_0) = x_{02} h_1 h_3 \tag{4.57}$$

Για τον τελεστή κλίσης της παραπάνω έκφρασης έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}_0} E_1^2(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) (x_{02} h_1 h_3) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}} (x_{02} h_1 h_3), \frac{\partial}{\partial x_{02}} (x_{02} h_1 h_3), \frac{\partial}{\partial x_{03}} (x_{02} h_1 h_3) \right) \\
&= h_1 h_3 \hat{x}_2
\end{aligned} \tag{4.58}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} E_1^2(\mathbf{r}_0) &= (Q_1 \hat{x}_1 + Q_2 \hat{x}_2 + Q_3 \hat{x}_3) \cdot (0 \hat{x}_1 + h_1 h_3 \hat{x}_2 + 0 \hat{x}_3) \\
&= Q_2 h_1 h_3
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.56), (4.52) και (4.4) βρίσκουμε τις τιμές της $E_1^2(x)$ και της παραγώγου της για $x = a_1$

$$E_1^2(a_1) = \alpha_1 \tag{4.60}$$

$$E_1^{2'}(a_1) = 1 \tag{4.61}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.50), (4.56), (4.59) - (4.61) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma\gamma_1^2} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^2(\rho) - I_1^2(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^2(a_1) E_1^{2'}(a_1)} \right] E_1^2(\rho) E_1^2(\mu) E_1^2(\nu) \\ & = \frac{3}{4\pi\sigma} Q_2 x_2 \left[I_1^2(\rho) - I_1^2(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right] \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ο τρίτος όρος ($m = 3$) του αθροίσματος

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^3 \frac{1}{\sigma\gamma_1^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ & \times \left[I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^m(a_1) E_1^{m'}(a_1)} \right] E_1^m(\rho) E_1^m(\mu) E_1^m(\nu) \end{aligned}$$

είναι

$$\frac{1}{\sigma\gamma_1^3} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^3(\rho) - I_1^3(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^3(a_1) E_1^{3'}(a_1)} \right] E_1^3(\rho) E_1^3(\mu) E_1^3(\nu)$$

Από τη σχέση (4.22) για $m = 3$ προκύπτει

$$\gamma_1^3 = \frac{4\pi}{3} h_1^2 h_2^2 \quad (4.63)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 1 και τάξης 3 είναι

$$E_1^3(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (4.64)$$

με παράγωγο

$$E_1^{3'}(x) = \frac{x(x^2 - h_2^2)}{|x^2 - h_2^2| \sqrt{|x^2 - h_2^2|}} \quad (4.65)$$

Με τη βοήθεια και της σχέσης (4.16) βρίσκουμε την ελλειψοειδή αρμονική 1^{ου} βαθμού και 3^{ης} τάξης

$$\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}) = E_1^3(\rho) E_1^3(\mu) E_1^3(\nu) = \sqrt{|\rho^2 - h_2^2|} \sqrt{|\mu^2 - h_2^2|} \sqrt{|\nu - h_2^2|} \quad (4.66)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}_0) = E_1^3(\rho_0) E_1^3(\mu_0) E_1^3(\nu_0) = \sqrt{|\rho_0^2 - h_2^2|} \sqrt{|\mu_0^2 - h_2^2|} \sqrt{|\nu_0 - h_2^2|} \quad (4.67)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$x_3 = \frac{\sqrt{(\rho^2 - h_2^2)(h_2^2 - \mu^2)(h_2^2 - \nu^2)}}{h_1 h_2} \quad (4.68)$$

μετατρέπουμε την $\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r})$ σε καρτεσιανή μορφή

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}) &= \sqrt{|\rho^2 - h_2^2|} \sqrt{|\mu^2 - h_2^2|} \sqrt{|v^2 - h_2^2|} \\
&= \sqrt{|(\rho^2 - h_2^2)(\mu^2 - h_2^2)(v^2 - h_2^2)|} \\
&= \sqrt{|-(\rho^2 - h_2^2)(\mu^2 - h_2^2)(h_2^2 - v^2)|} \\
&= \sqrt{|(\rho^2 - h_2^2)(\mu^2 - h_2^2)(h_2^2 - v^2)|} \\
&= \sqrt{|h_1^2 h_2^2| \left| \frac{(\rho^2 - h_2^2)(\mu^2 - h_2^2)(h_2^2 - v^2)}{h_1^2 h_2^2} \right|} \\
&= \sqrt{|h_1^2 h_2^2|} \sqrt{\left| \frac{(\rho^2 - h_2^2)(\mu^2 - h_2^2)(h_2^2 - v^2)}{h_1^2 h_2^2} \right|} \\
&= \sqrt{|h_1^2 h_2^2|} \sqrt{|x_3^2|} \\
&= \sqrt{h_1^2 h_2^2} \sqrt{x_3^2} \\
&= x_3 h_1 h_2
\end{aligned} \tag{4.69}$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}_0) = x_{03} h_1 h_2 \tag{4.70}$$

Για τον τελεστή κλίσης της παραπάνω έκφρασης έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) (x_{03} h_1 h_2) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}} (x_{03} h_1 h_2), \frac{\partial}{\partial x_{02}} (x_{03} h_1 h_2), \frac{\partial}{\partial x_{03}} (x_{03} h_1 h_2) \right) \\
&= h_1 h_2 \hat{x}_3
\end{aligned} \tag{4.71}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}_0) &= (Q_1 \hat{x}_1 + Q_2 \hat{x}_2 + Q_3 \hat{x}_3) \cdot (0 \hat{x}_1 + 0 \hat{x}_2 + h_1 h_2 \hat{x}_3) \\
&= Q_3 h_1 h_2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (4.69), (4.65) και (4.3) βρίσκουμε τις τιμές της $E_1^3(x)$ και της παραγώγου της για $x = a_1$

$$E_1^3(a_1) = \alpha_3 \tag{4.73}$$

$$E_1^{3'}(a_3) = 1 \quad (4.74)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.63), (4.69), (4.72) - (4.74) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma\gamma_1^3} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^3(\rho) - I_1^3(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^3(a_1) E_1^{3'}(a_1)} \right] E_1^3(\rho) E_1^3(\mu) E_1^3(\nu) = \\ & = \frac{3}{4\pi\sigma} Q_3 x_3 \left[I_1^3(\rho) - I_1^3(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right] \end{aligned} \quad (4.75)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (4.49), (4.62), (4.75) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^3 \frac{1}{\sigma\gamma_1^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^m(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) \right. \\ & \left. + \frac{1}{a_2 a_3 E_1^m(a_1) E_1^{m'}(a_1)} \right] E_1^m(\rho) E_1^m(\mu) E_1^m(\nu) = \\ & = \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left(I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Άρα το δυναμικό $u_{el}^-(\mathbf{r})$ όπως περιγράφεται στη σχέση (4.38) με ανάλυση του όρου $n = 1$ παίρνει τη μορφή

$$u_{el}^-(\mathbf{r}) = b_0^1 + \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left(I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right) + O(\epsilon l_2) \quad (4.77)$$

Καθώς η τιμή του n μεγαλώνει παίρνουμε καλύτερη προσέγγιση για το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό $u_{el}^-(\mathbf{r})$. Ο δεύτερος όρος της σειράς στη σχέση (4.38) είναι το άθροισμα

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^5 \frac{1}{\sigma\gamma_2^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ & \times \left[I_2^m(\rho) - I_2^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^m(a_1) E_2^{m'}(a_1)} \right] E_2^m(\rho) E_2^m(\mu) E_2^m(\nu) \end{aligned}$$

Για $m = 1$ έχουμε

$$\frac{1}{\sigma\gamma_2^1} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^1(\rho) - I_2^1(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^1(a_1) E_2^{1'}(a_1)} \right] E_2^1(\rho) E_2^1(\mu) E_2^1(\nu)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 2 και τάξης 1 είναι

$$E_2^1(x) = x^2 + \Lambda - a_1^2 \quad (4.78)$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας έκφρασης και της (4.16) βρίσκουμε την ελλειψοειδή αρμονική 2^{ου} βαθμού και 1^{ης} τάξης σε καρτεσιανή μορφή

$$\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) = (\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda - a_m^2} + 1 \right) \quad (4.79)$$

Για τον τελεστή κλίσης της $\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}_0) \\ &= 2(\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\frac{x_{01}}{\Lambda - a_1^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{x_{02}}{\Lambda - a_2^2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{x_{03}}{\Lambda - a_3^2} \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \\ &= 2(\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_{0m}}{\Lambda - a_m^2} \hat{\mathbf{x}}_m \right)\end{aligned}\quad (4.80)$$

άρα

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}_0) = 2(\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda - a_m^2} \right) \quad (4.81)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.23), (4.78), (4.79) και (4.81) και κάνοντας του απαραίτητους υπολογισμούς παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma \gamma_2^1} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^1(\rho) - I_2^1(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^1(a_1) E_2^{1'}(a_1)} \right] E_2^1(\rho) E_2^1(\mu) E_2^1(\nu) = \\ = - \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(I_2^1(\rho) - I_2^1(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda} \right) \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - a_m^2)}\end{aligned}\quad (4.82)$$

όπου οι παράγοντες Q_m, x_{0m} , $m = 1, 2, 3$ δηλώνουν τις Καρτεσιανές συνιστώσες των διανυσμάτων \mathbf{Q}, \mathbf{r}_0 αντίστοιχα.

Ο δεύτερος όρος ($m = 2$) του αθροίσματος

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^5 \frac{1}{\sigma \gamma_2^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ \times \left[I_2^m(\rho) - I_2^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^m(a_1) E_2^{m'}(a_1)} \right] E_2^m(\rho) E_2^m(\mu) E_2^m(\nu)\end{aligned}$$

είναι

$$\frac{1}{\sigma \gamma_2^2} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^2(\rho) - I_2^2(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^2(a_1) E_2^{2'}(a_1)} \right] E_2^2(\rho) E_2^2(\mu) E_2^2(\nu)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 2 και τάξης 2 είναι

$$E_2^2(x) = x^2 + \Lambda' - a_1^2 \quad (4.83)$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας έκφρασης και της (4.16) βρίσκουμε την ελλειψοειδή αρμονική 2^{ου} βαθμού και 2^{ης} τάξης

$$\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}) = (\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda' - a_m^2} + 1 \right) \quad (4.84)$$

Για τον τελεστή κλίσης της $\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}_0) \\ &= 2(\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\frac{x_{01}}{\Lambda' - a_1^2} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{x_{02}}{\Lambda' - a_2^2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{x_{03}}{\Lambda' - a_3^2} \hat{\mathbf{x}}_3 \right) \\ &= 2(\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_{0m}}{\Lambda' - a_m^2} \hat{\mathbf{x}}_m \right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

άρα

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}_0) = 2(\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda' - a_m^2} \right) \quad (4.86)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.24), (4.84), (4.84) και (4.86) και κάνοντας του απαραίτητους υπολογισμούς παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma \gamma_2^2} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^2(\rho) - I_2^2(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^2(a_1) E_2^{2'}(a_1)} \right] E_2^2(\rho) E_2^2(\mu) E_2^2(\nu) = \\ = \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(I_2^2(\rho) - I_2^2(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda'} \right) \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda' - a_m^2)} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Ο τρίτος όρος ($m = 3$) του αθροίσματος

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^5 \frac{1}{\sigma \gamma_2^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ \times \left[I_2^m(\rho) - I_2^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^m(a_1) E_2^{m'}(a_1)} \right] E_2^m(\rho) E_2^m(\mu) E_2^m(\nu) \end{aligned}$$

είναι

$$\frac{1}{\sigma \gamma_2^3} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^3(\rho) - I_2^3(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^3(a_1) E_2^{3'}(a_1)} \right] E_2^3(\rho) E_2^3(\mu) E_2^3(\nu)$$

Από την (4.25) υπολογίζουμε τη σταθερά κανονικοποίησης γ_2^3

$$\gamma_2^3 = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^4 \quad (4.88)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 2 και τάξης 3 είναι

$$E_2^3(x) = x \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (4.89)$$

με παράγωγο

$$E_2^{3'}(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} + \frac{x^2(x^2 - h_3^2)}{|x^2 - h_3^2|\sqrt{|x^2 - h_3^2|}} \quad (4.90)$$

Οι ελλειψοειδείς αρμονικές βαθμού 2 και τάξης 3 έως 5 δίνονται από τον γενικό τύπο

$$\mathbb{E}_2^{6-k}(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3 h_k \frac{x_1 x_2 x_3}{x_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.91)$$

Η ελλειψοειδής αρμονική βαθμού 2 τάξης 3 είναι

$$\mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3^2 x_1 x_2 \quad (4.92)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}_0) = h_1 h_2 h_3^2 x_{01} x_{02} \quad (4.93)$$

Για τον τελεστή κλίσης της παραπάνω έκφρασης έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) (h_1 h_2 h_3^2 x_{01} x_{02}) \\ &= h_1 h_2 h_3^2 x_{02} \hat{\mathbf{x}}_1 + h_1 h_2 h_3^2 x_{01} \hat{\mathbf{x}}_2 \end{aligned}$$

άρα

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}_0) = Q_1 h_1 h_2 h_3^2 x_{02} + Q_2 h_1 h_2 h_3^2 x_{01} \quad (4.94)$$

Οι τιμές της $E_2^3(x)$ και της παραγώγου της για $x = a_1$ είναι αντίστοιχα

$$E_2^3(a_1) = a_1 a_2 \quad (4.95)$$

$$E_2^{3'}(a_1) = a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \quad (4.96)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.88), (4.92), (4.94) - (4.96) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma \gamma_2^3} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^3(\rho) - I_2^3(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^3(a_1) E_2^{3'}(a_1)} \right] E_2^3(\rho) E_2^3(\mu) E_2^3(\nu) = \\ = \frac{15}{4\pi\sigma} (Q_1 x_{02} + Q_2 x_{01}) \left[I_2^{1+2}(\rho) - I_2^{1+2}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_1^2 + a_2^2)} \right] x_1 x_2 \quad (4.97) \end{aligned}$$

Ο τέταρτος όρος ($m = 4$) του αθροίσματος

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^5 \frac{1}{\sigma \gamma_2^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ \times \left[I_2^m(\rho) - I_2^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^m(a_1) E_2^{m'}(a_1)} \right] E_2^m(\rho) E_2^m(\mu) E_2^m(\nu) \end{aligned}$$

είναι

$$\frac{1}{\sigma\gamma_2^4} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^4(\rho) - I_2^4(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^4(a_1) E_2^{4'}(a_1)} \right] E_2^4(\rho) E_2^4(\mu) E_2^4(\nu)$$

Από την (4.25) υπολογίζουμε τη σταθερά κανονικοποίησης γ_2^4

$$\gamma_2^4 = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^4 h_3^2 \quad (4.98)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 2 και τάξης 4 είναι

$$E_2^4(x) = x \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (4.99)$$

με παράγωγο

$$E_2^{4'}(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} + \frac{x^2(x^2 - h_2^2)}{|x^2 - h_2^2| \sqrt{|x^2 - h_2^2|}} \quad (4.100)$$

Από τη σχέση (4.91) υπολογίζουμε την ελλειψοειδή αρμονική βαθμού 2 τάξης 4

$$\mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}) = h_1 h_2^2 h_3 x_1 x_3 \quad (4.101)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}_0) = h_1 h_2^2 h_3 x_{01} x_{03} \quad (4.102)$$

Για τον τελεστή κλίσης της παραπάνω έκφρασης έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) (h_1 h_2^2 h_3 x_{01} x_{03}) \\ &= h_1 h_2^2 h_3 x_{03} \hat{\mathbf{x}}_1 + h_1 h_2^2 h_3 x_{01} \hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned}$$

άρα

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}_0) = Q_1 h_1 h_2^2 h_3 x_{03} + Q_3 h_1 h_2^2 h_3 x_{01} \quad (4.103)$$

Οι τιμές της $E_2^4(x)$ και της παραγώγου της για $x = a_1$ είναι αντίστοιχα

$$E_2^4(a_1) = a_1 a_3 \quad (4.104)$$

$$E_2^{4'}(a_1) = a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \quad (4.105)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.98), (4.101), (4.103) - (4.105) παίρνουμε

$$\frac{1}{\sigma\gamma_2^4} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^4(\rho) - I_2^4(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^4(a_1) E_2^{4'}(a_1)} \right] E_2^4(\rho) E_2^4(\mu) E_2^4(\nu) =$$

$$= \frac{15}{4\pi\sigma} (Q_1 x_{03} + Q_3 x_{01}) \left[I_2^{1+3}(\rho) - I_2^{1+3}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_1^2 + a_3^2)} \right] x_1 x_3 \quad (4.106)$$

Τέλος, ο πέμπτος όρος ($m = 5$) του αθροίσματος

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^5 \frac{1}{\sigma \gamma_2^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ & \times \left[I_2^m(\rho) - I_2^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^m(a_1) E_2^{m'}(a_1)} \right] E_2^m(\rho) E_2^m(\mu) E_2^m(\nu) \end{aligned}$$

είναι

$$\frac{1}{\sigma \gamma_2^5} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^5(\rho) - I_2^5(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^5(a_1) E_2^{5'}(a_1)} \right] E_2^5(\rho) E_2^5(\mu) E_2^5(\nu)$$

Από την (4.25) υπολογίζουμε τη σταθερά κανονικοποίησης γ_2^5

$$\gamma_2^5 = \frac{4\pi}{15} h_1^4 h_2^2 h_3^2 \quad (4.107)$$

Η συνάρτηση Lamè βαθμού 2 και τάξης 5 είναι

$$E_2^5(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (4.108)$$

με παράγωγο

$$E_2^{5'}(x) = \frac{x(x^2 - h_3^2)}{|x^2 - h_3^2| \sqrt{|x^2 - h_3^2|}} \sqrt{|x^2 - h_2^2|} + \frac{x(x^2 - h_2^2)}{|x^2 - h_2^2| \sqrt{|x^2 - h_2^2|}} \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (4.109)$$

Από τη σχέση (4.91) υπολογίζουμε την ελλειψοειδή αρμονική βαθμού 2 τάξης 5

$$\mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}) = h_1^2 h_2 h_3 x_2 x_3 \quad (4.110)$$

και αντίστοιχα

$$\mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}_0) = h_1^2 h_2 h_3 x_{02} x_{03} \quad (4.111)$$

Για τον τελεστή κλίσης της παραπάνω έκφρασης έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}_0) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{01}}, \frac{\partial}{\partial x_{02}}, \frac{\partial}{\partial x_{03}} \right) (h_1^2 h_2 h_3 x_{02} x_{03}) \\ &= h_1^2 h_2 h_3 x_{03} \hat{\mathbf{x}}_2 + h_1^2 h_2 h_3 x_{02} \hat{\mathbf{x}}_3 \end{aligned}$$

άρα

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}_0) = Q_2 h_1^2 h_2 h_3 x_{03} + Q_3 h_1^2 h_2 h_3 x_{02} \quad (4.112)$$

Οι τιμές της $E_2^5(x)$ και της παραγώγου της για $x = a_1$ είναι αντίστοιχα

$$E_2^5(a_1) = a_2 a_3 \quad (4.113)$$

$$E_2^{5'}(a_1) = a_1 \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} \right) \quad (4.114)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.107), (4.110), (4.112) - (4.114) παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma \gamma_2^5} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}_0) \right) \left[I_2^5(\rho) - I_2^5(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_2^5(a_1) E_2^{5'}(a_1)} \right] E_2^5(\rho) E_2^5(\mu) E_2^5(\nu) = \\ & = \frac{15}{4\pi\sigma} (Q_2 x_{03} + Q_3 x_{02}) \left[I_2^{2+3}(\rho) - I_2^{2+3}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_2^2 + a_3^2)} \right] x_2 x_3 \end{aligned} \quad (4.115)$$

Οι όροι για $n = 2$ και $m = 3, 4, 5$ που υπολογίσαμε πριν περιγράφονται πιο γενικά από το άθροισμα

$$\frac{15}{4\pi\sigma} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j \left(I_2^{i+j}(\rho) - I_2^{i+j}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_i^2 + a_j^2)} \right) \quad (4.116)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (4.82), (4.87), (4.97), (4.106) και (4.115) καθώς και τη σταθερά b_0^1 παίρνουμε την προσέγγιση για $n = 2$ του εσωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού (Kariotou, 2004)

$$\begin{aligned} u_{el}^-(\mathbf{r}) = & b_0^1 + \frac{3}{4\pi\sigma} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \left(I_1^m(\rho) - I_1^m(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \right) \\ & - \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(I_2^1(\rho) - I_2^1(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda} \right) \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{(\Lambda - a_m^2)} \\ & + \frac{5}{4\pi\sigma(\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(I_2^2(\rho) - I_2^2(a_1) + \frac{1}{2a_1 a_2 a_3 \Lambda'} \right) \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{(\Lambda' - a_m^2)} \\ & + \frac{15}{4\pi\sigma} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 Q_i x_{0j} x_i x_j \left(I_2^{i+j}(\rho) - I_2^{i+j}(a_1) + \frac{1}{a_1 a_2 a_3 (a_i^2 + a_j^2)} \right) \\ & + O(el_3) \end{aligned} \quad (4.117)$$

Στη συνέχεια χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε την αυθαίρετη σταθερά $b_0^1 = 0$.

4.1.2 Εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στον προσδιορισμό του εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού u^+ . Οι σχέσεις (4.12), (4.14) απαιτούν να έχει τη μορφή

$$u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (4.118)$$

Το παραπάνω δυναμικό μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\begin{aligned} u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) &= c_0^1 I_0^1(\rho) E_0^1(\rho) E_0^1(\mu) E_0^1(\nu) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \\ &= c_0^1 I_0^1(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m (2n+1) I_n^m(\rho) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \end{aligned} \quad (4.119)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (4.31) και (4.17)

Στο σύνορο $\rho = a_1$ γίνεται

$$u_{el}^+(a_1, \mu, \nu) = c_0^1 I_0^1(a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m (2n+1) I_n^m(a_1) \mathbb{E}_n^m(a_1, \mu, \nu) \quad (4.120)$$

Το εσωτερικό δυναμικό u_{el}^- όπως αυτό δίνεται από την έκφραση (4.38) για $\rho = a_1$ είναι

$$u_{el}^-(a_1, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \frac{(\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0))}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} E_n^m(a_1) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \quad (4.121)$$

Εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη Dirichlet (4.13) για το εξωτερικό και το εσωτερικό δυναμικό όπως αυτά δίνονται από τις εκφράσεις (4.120), (4.121) αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned} c_0^1 I_0^1(a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m (2n+1) I_n^m(a_1) E_n^m(a_1) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \frac{(\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0))}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} E_n^m(a_1) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση ορθογωνιότητας βρίσκουμε τους συντελεστές c_n^m

$$c_0^1 = 0 \quad (4.122)$$

$$c_n^m = \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{(2n+1) \sigma \gamma_n^m a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) I_n^m(a_1)} \quad (4.123)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.120) βρίσκουμε την ακόλουθη αναπαράσταση για το εξωτερικό δυναμικό

$$u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{(\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0))}{\sigma \gamma_n^m a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) I_n^m(a_1)} I_n^m(\rho) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) \quad (4.124)$$

Ο πρώτος όρος της παραπάνω σειράς ($n = 1$) είναι το άθροισμα

$$\sum_{m=1}^3 \frac{(\mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^m(\mathbf{r}_0))}{\sigma \gamma_1^m a_2 a_3 E_1^m(a_1) E_1^{m'}(a_1) I_1^m(a_1)} I_1^m(\rho) \mathbb{E}_1^m(\rho, \mu, \nu)$$

Οι σχέσεις (4.43), (4.56), (4.69) που δίνουν τις ελλειψοειδείς αρμονικές 1^{ου} βαθμού σε καρτεσιανή μορφή μπορούν να γραφούν ως

$$\mathbb{E}_1^m(\rho, \mu, \nu) = \frac{h_1 h_2 h_3}{h_m} x_m, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.125)$$

Επιπλέον οι σχέσεις (4.46), (4.59), (4.72) γράφονται στη μορφή

$$\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_1^m(\mathbf{r}_0) = Q_m \frac{h_1 h_2 h_3}{h_m}, \quad m = 1, 2, 3 \quad (4.126)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.22), (4.125), (4.126) βρίσκουμε την προσέγγιση του εξωτερικού δυναμικού u_{el}^+ με ελλειψοειδείς αρμονικές 1^{ου} βαθμού

$$u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) = \frac{3}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(a_1)} + O(\epsilon l_2) \quad (4.127)$$

Με παρόμοιο τρόπο όπως και στο εσωτερικό δυναμικό u_{el}^- βρίσκουμε την προσέγγιση του εξωτερικού δυναμικού u_{el}^+ με ελλειψοειδείς αρμονικές 2^{ου} βαθμού

$$\begin{aligned} u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) &= \frac{3}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{m=1}^3 Q_m x_m \frac{I_1^m(\rho)}{I_1^m(a_1)} \\ &\quad - \frac{5}{8\pi\sigma a_1 a_2 a_3 (\Lambda - \Lambda')} \sum_{m=1}^3 Q_m x_{0m} \left(\frac{I_2^1(\rho)}{I_2^1(a_1)} \frac{\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r})}{\Lambda(\Lambda - a_m^2)} - \frac{I_2^2(\rho)}{I_2^2(a_1)} \frac{\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r})}{\Lambda'(\Lambda' - a_m^2)} \right) \\ &\quad + \frac{15}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \frac{Q_i x_{0j} x_i x_j}{a_i^2 + a_j^2} \frac{I_2^{i+j}(\rho)}{I_2^{i+j}(a_1)} + O(\epsilon l_3) \end{aligned} \quad (4.128)$$

4.2 Μελέτη του αντίστροφου προβλήματος της ηλεκτροεγκεφαλογραφίας στο ελλειψοειδές πρότυπο

Το εσωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό για $\rho_0 < \rho < a_1$ είναι

$$\begin{aligned} u_{el}^-(\rho, \mu, \nu) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \left(\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \right) \\ &\quad \times \left[I_n^m(\rho) - I_n^m(a_1) + \frac{1}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} \right] E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \end{aligned} \quad (4.129)$$

Στο σύνορο $\rho = a_1$ έχουμε

$$u_{el}^-(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} \frac{1}{\sigma \gamma_n^m} \frac{\mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0)}{a_2 a_3 E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1)} E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \quad (4.130)$$

όπου $\mathbf{r}_s = (a_1, \mu, \nu)$, $\mathbf{r}_s \in \partial\Omega^-$

Επιπλέον θεωρούμε τους συντελεστές (Dassios et al., 2007; Dassios and Fokas, 2012)

$$q_n^m = \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0} \mathbb{E}_n^m(\mathbf{r}_0) \quad (4.131)$$

Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση u_{el}^- στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς τότε μπορούμε να την αναπτύξουμε στο σύστημα των επιφανειακών ελλειψοειδών αρμονικών. Θεωρούμε λοιπόν το ανάπτυγμα

$$u_{el}^-(\mathbf{r}_s; \mathbf{r}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} d_n^m E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \quad (4.132)$$

όπου όλοι οι συντελεστές είναι γνωστοί και ίσοι με

$$d_n^m = \frac{1}{\gamma_n^m} \iint_{\rho=a_1} u_{el}^-(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) d\Omega(\mu, \nu) \quad (4.133)$$

$$\text{και } d\Omega(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2} \sqrt{\rho^2 - \nu^2}} ds(\mu, \nu)$$

Οι συντελεστές q_n^m μπορούν να υπολογιστούν από τα δεδομένα του ευθέως προβλήματος. Από τη γνώση των σταθερών d_n^m προσδιορίζουμε τις σταθερές q_n^m από τις εξισώσεις

$$q_n^m = \sigma \alpha_2 \alpha_3 \gamma_n^m E_n^{m'}(a_1) d_n^m \quad (4.134)$$

Αρκούν έξι από αυτές τις σταθερές για τον προσδιορισμό του διπόλου. Στη σχέση (4.131) για $n = 1$ προκύπτουν τρεις σταθερές ενώ για $n = 2$ προκύπτουν πέντε από τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τις τρεις. Ειδικότερα θα περιοριστούμε στο σύνολο $\{q_1^1, q_1^2, q_1^3, q_2^3, q_2^4, q_2^5\}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.131), (4.46), (4.59), (4.72), (4.94), (4.103), (4.112) προκύπτει το ακόλουθο σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους

$$q_1^1 = Q_1 h_2 h_3 \quad (4.135)$$

$$q_1^2 = Q_2 h_1 h_3 \quad (4.136)$$

$$q_1^3 = Q_3 h_1 h_2 \quad (4.137)$$

$$q_2^3 = Q_1 h_1 h_2 h_3^2 x_{02} + Q_2 h_1 h_2 h_3^2 x_{01} \quad (4.138)$$

$$q_2^4 = Q_1 h_1 h_2^2 h_3 x_{03} + Q_3 h_1 h_2^2 h_3 x_{01} \quad (4.139)$$

$$q_2^5 = Q_2 h_1^2 h_2 h_3 x_{03} + Q_3 h_1^2 h_2 h_3 x_{02} \quad (4.140)$$

Από τις 3 πρώτες εξισώσεις προσδιορίζουμε τις συνιστώσες της ροπής του διπόλου. Είναι

$$Q_1 = \frac{q_1^1}{h_2 h_3} \quad (4.141)$$

$$Q_2 = \frac{q_1^2}{h_1 h_3} \quad (4.142)$$

$$Q_3 = \frac{q_1^3}{h_1 h_2} \quad (4.143)$$

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην επίλυση του συστήματος (4.138) - (4.140). Εισάγοντας τις τιμές των Q_1, Q_2, Q_3 στις σχέσεις (4.138) - (4.140) παίρνουμε

$$q_2^3 = h_1 h_3 q_1^1 x_{02} + h_2 h_3 q_1^2 x_{01} \quad (4.144)$$

$$q_2^4 = h_1 h_2 q_1^1 x_{03} + h_2 h_3 q_1^3 x_{01} \quad (4.145)$$

$$q_2^5 = h_1 h_2 q_1^2 x_{03} + h_1 h_3 q_1^3 x_{02} \quad (4.146)$$

Απαλείφοντας τη συνιστώσα x_{01} από τις εξισώσεις (4.144) - (4.145) προκύπτει η εξίσωση

$$q_2^3 - \frac{q_1^2 q_2^4}{q_1^3} = h_1 h^3 q_1^1 x_{02} - \frac{q_1^2 q_1^1}{q_1^3} x_{03} \quad (4.147)$$

Από τη λύση του συστήματος (4.146), (4.147) προκύπτουν η δεύτερη και η τρίτη συνιστώσα της θέσης του διπόλου.

$$x_{02} = \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^3} - \frac{q_1^2 q_2^4}{q_1^1 q_1^3} \right) \quad (4.148)$$

$$x_{03} = \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{q_2^4}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^2} - \frac{q_1^3 q_2^3}{q_1^1 q_1^2} \right) \quad (4.149)$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη συνιστώσα στην εξίσωση (4.144) βρίσκουμε και την πρώτη.

$$x_{01} = \frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^2} + \frac{q_2^4}{q_1^3} - \frac{q_1^1 q_2^5}{q_1^2 q_1^3} \right) \quad (4.150)$$

Συνοψίζοντας, τα διανύσματα της θέσης και της ροπής του διπόλου συναρτήσει των σταθερών q_n^m είναι

$$\mathbf{r}_0 = \left(\frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^2} + \frac{q_2^4}{q_1^3} - \frac{q_1^1 q_2^5}{q_1^2 q_1^3} \right), \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^3} - \frac{q_1^2 q_2^4}{q_1^1 q_1^3} \right), \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{q_2^4}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^2} - \frac{q_1^3 q_2^3}{q_1^1 q_1^2} \right) \right) \quad (4.151)$$

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{q_1^1}{h_2 h_3}, \frac{q_1^2}{h_1 h_3}, \frac{q_1^3}{h_1 h_2} \right) \quad (4.152)$$

Οι σχέσεις (4.81), (4.86) μας δίνουν τις σταθερές q_2^1, q_2^2 αντίστοιχα

$$q_2^1 = 2(\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda - a_m^2} \right) \quad (4.153)$$

$$q_2^2 = 2(\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{Q_m x_{0m}}{\Lambda' - a_m^2} \right) \quad (4.154)$$

Εκφράζοντας τα Q_m, x_{0m} στις παραπάνω σχέσεις συναρτήσει των δεύτερων μελών των σχέσεων (4.141) - (4.143), (4.150) - (4.149) προκύπτουν δυο περιορισμοί που ικανοποιούνται από τις σταθερές $\{q_1^1, q_1^2, q_1^3, q_2^3, q_2^4, q_2^5\}$.

5 Ελλειπτοσφαιρικό σύστημα

Το Ελλειπτοσφαιρικό σύστημα (ρ, θ_e, ϕ_e) συνδυάζει την ελλειψοειδή μεταβλητή ρ με τις έκκεντρες γωνιακές μεταβλητές του σφαιρικού συστήματος (Dassios, 2012). Ορίζεται από το μετασχηματισμό

$$x_1 = \rho \cos\theta_e, \quad h_2 \leq \rho < \infty, \quad (5.1)$$

$$x_2 = \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \cos\phi_e, \quad 0 \leq \theta_e \leq \pi, \quad (5.2)$$

$$x_3 = \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sin\theta_e \sin\phi_e, \quad 0 \leq \phi < 2\pi. \quad (5.3)$$

Η συντεταγμένη επιφάνεια $\rho = \text{σταθερά}$ είναι το ελλειψοειδές

$$\frac{x_1^2}{\rho^2} + \frac{x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} + \frac{x_3^2}{\rho^2 - h_2^2} = 1 \quad (5.4)$$

Εφόσον ισχύει $h_3 \leq \mu \leq h_2$ και $0 \leq \nu \leq h_3$ έπεται ότι

$$0 \leq \frac{\mu \nu}{h_2 h_3} \leq 1, \quad (5.5)$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3} \leq 1, \quad (5.6)$$

$$0 \leq \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2} \leq 1, \quad (5.7)$$

και συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε την παραμετροποίηση

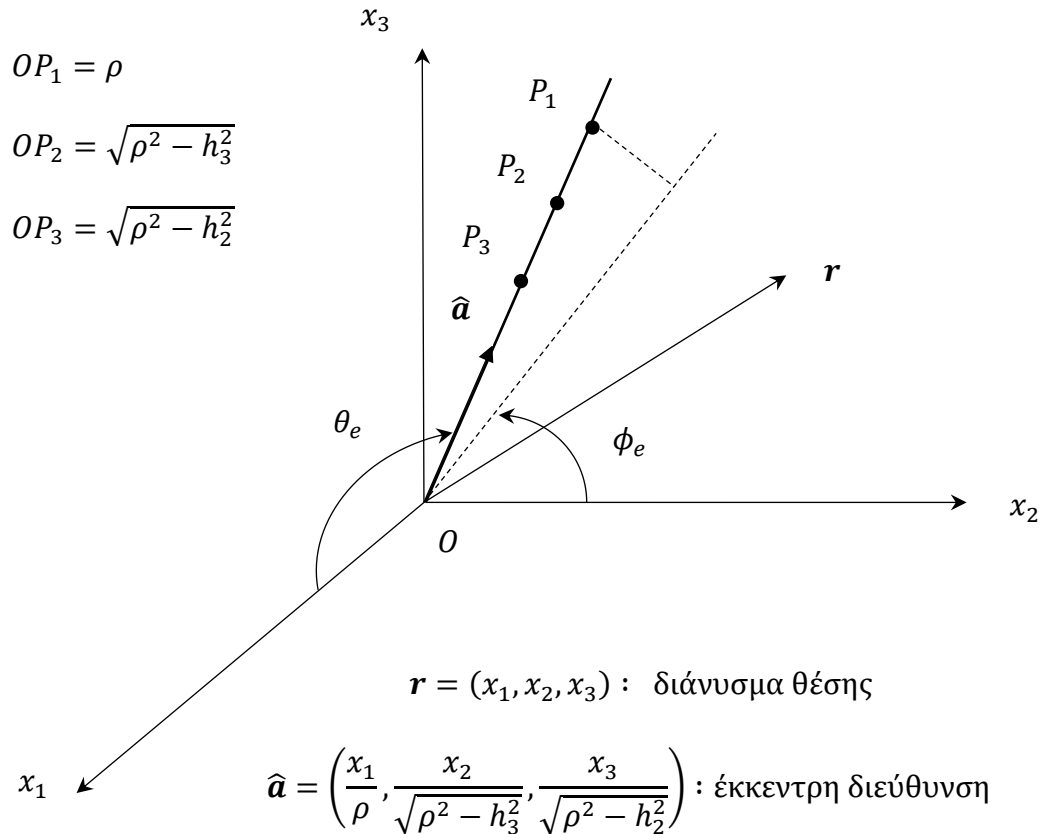
$$\cos\theta_e = \frac{\mu\nu}{h_2 h_3}, \quad (5.8)$$

$$\sin\theta_e \cos\phi_e = \frac{\sqrt{\mu^2 - h_3^2} \sqrt{h_3^2 - \nu^2}}{h_1 h_3}, \quad (5.9)$$

$$\sin\theta_e \sin\phi_e = \frac{\sqrt{h_2^2 - \mu^2} \sqrt{h_2^2 - \nu^2}}{h_1 h_2}, \quad (5.10)$$

όπου τα θ_e και ϕ_e αντιστοιχούν στις έκκεντρες γωνίες της παραμετροποίησης. Οι έκκεντρες γωνίες προσδιορίζουν την έκκεντρη διεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$ σε σχέση με το που ορίζεται το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} στο ελλειψοειδές $\rho = \text{σταθερά}$. Ας υποθέσουμε ότι η ακτίνα στη διεύθυνση του διανύσματος $\hat{\mathbf{a}}$ τέμνει τις σφαίρες με ακτίνες ρ , $\sqrt{\rho^2 - h_3^2}$, $\sqrt{\rho^2 - h_2^2}$ στα σημεία P_1 , P_2 , P_3

αντίστοιχα. Τότε η i συντεταγμένη του διανύσματος $\mathbf{r}(\rho, \mu, \nu)$ συμπίπτει με την i συντεταγμένη του σημείου P_i για $i = 1, 2, 3$.



Εικόνα 5.1

Πράγματι, αν τα a_1, a_2, a_3 συμβολίζουν τα συνημίτονα κατεύθυνσης στην έκκεντρη διεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$ το διάνυσμα θέσης του ελλειψοειδούς μπορεί να γραφεί ως

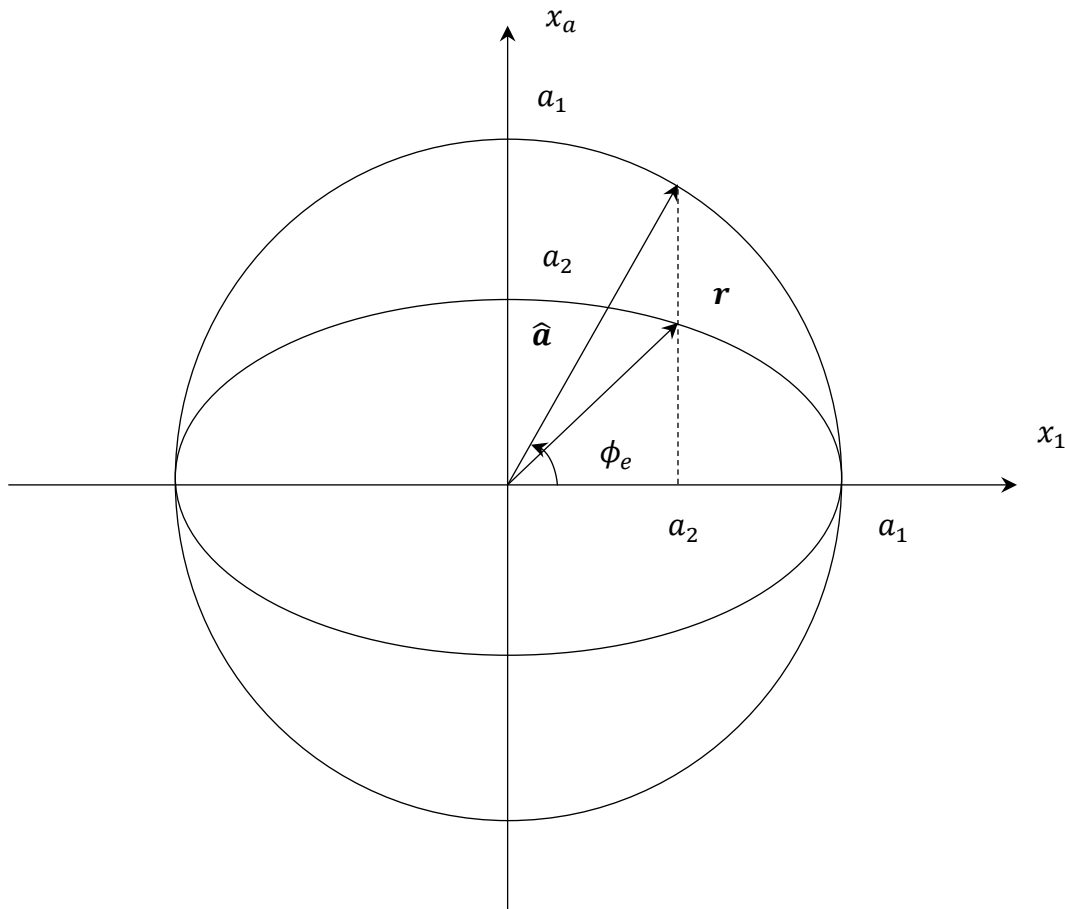
$$\mathbf{r} = (\rho a_1, \sqrt{\rho^2 - h_3^2} a_2, \sqrt{\rho^2 - h_2^2} a_3) \quad (5.11)$$

Η έκκεντρη διεύθυνση $\hat{\mathbf{a}}$ είναι το τρισδιάστατο ανάλογο της έκκεντρης γωνίας ϕ_e που χρησιμοποιήθηκε στις δύο διαστάσεις για την παραμετροποίηση της έλλειψης

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1 \quad (5.12)$$

ή σε παραμετρική μορφή

$$(x_1, x_2) = (a_1 \cos \phi_e, a_2 \sin \phi_e). \quad (5.13)$$



Εικόνα 5.2

5.1 Μετατροπή του ελλειψοειδούς αναπτύγματος στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα

Αναλύοντας το ανάπτυγμα (4.118) μέχρι τους ελλειψοειδείς όρους δευτέρου βαθμού και λαμβάνοντας υπόψιν τη σταθερά $c_0^1 = 0$ προκύπτει

$$\begin{aligned} u_{ei}^+(\rho, \mu, \nu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) \\ &= c_1^1 \mathbb{F}_1^1(\rho, \mu, \nu) + c_1^2 \mathbb{F}_1^2(\rho, \mu, \nu) + c_1^3 \mathbb{F}_1^3(\rho, \mu, \nu) \\ &\quad + c_2^1 \mathbb{F}_2^1(\rho, \mu, \nu) + c_2^2 \mathbb{F}_2^2(\rho, \mu, \nu) + c_2^3 \mathbb{F}_2^3(\rho, \mu, \nu) + c_2^4 \mathbb{F}_2^4(\rho, \mu, \nu) \end{aligned}$$

$$+c_2^5 \mathbb{F}_2^5(\rho, \mu, \nu) + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right) \quad (5.14)$$

Για τους συντελεστές c_n^m γενικά ισχύει

$$c_n^m = \frac{1}{\gamma_n^m} \iint_{\rho=a_1} u_{el}^-(\rho, \mu, \nu) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) d\Omega(\mu, \nu) \quad (5.15)$$

$$\text{όπου } d\Omega(\mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2-\mu)(\rho^2-\nu^2)}} ds(\mu, \nu)$$

Το ανάπτυγμα (5.14) στο καρτεσιανό σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) = & 3c_1^1 I_1^1(\rho) h_2 h_3 x_1 + 3c_1^2 I_1^2(\rho) h_1 h_3 x_2 + 3c_1^3 I_1^3(\rho) h_2 h_1 x_3 \\ & + 5c_2^1 I_2^1(\rho) \mathbb{L}\left(\sum_{n=1}^3 \frac{x_n^2}{\Lambda - a_n^2} + 1\right) + 5c_2^2 I_2^2(\rho) \mathbb{L}'\left(\sum_{n=1}^3 \frac{x_n^2}{\Lambda' - a_n^2} + 1\right) \\ & + 5c_2^3 I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2 x_1 x_2 + 5c_2^4 I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2 x_1 x_3 \\ & + 5c_2^5 I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2 x_3 x_2 + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} u_{el}^+(\rho, \mu, \nu) = & 3c_1^1 I_1^1(\rho) h_2 h_3 \rho \cos\theta_e \\ & + 3c_1^2 I_1^2(\rho) h_1 h_3 \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \cos\phi_e \\ & + 3c_1^3 I_1^3(\rho) h_2 h_1 \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sin\theta_e \sin\phi_e \\ & + 5c_2^1 I_2^1(\rho) \mathbb{L}\left(\frac{\rho^2 \cos^2\theta_e}{\Lambda - a_1^2} + \frac{(\rho^2 - h_2^2) \sin^2\theta_e \cos^2\phi_e}{\Lambda - a_2^2} + \frac{(\rho^2 - h_2^2) \sin^2\theta_e \cos^2\phi_e}{\Lambda - a_3^2} + 1\right) \\ & + 5c_2^2 I_2^2(\rho) \mathbb{L}'\left(\frac{\rho^2 \cos^2\theta_e}{\Lambda' - a_1^2} + \frac{(\rho^2 - h_2^2) \sin^2\theta_e \cos^2\phi_e}{\Lambda' - a_2^2} + \frac{(\rho^2 - h_2^2) \sin^2\theta_e \cos^2\phi_e}{\Lambda' - a_3^2} + 1\right) \\ & + 5c_2^3 I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2 \rho \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \cos\theta_e \sin\theta_e \cos\phi_e \\ & + 5c_2^4 I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2 \rho \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \cos\theta_e \sin\theta_e \sin\phi_e \\ & + 5c_2^5 I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2 \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin^2\theta_e \sin\phi_e \cos\phi_e \end{aligned}$$

$$+O\left(\frac{1}{\rho^4}\right) \quad (5.17)$$

όπου

$$\mathbb{L} = (\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \quad (5.18)$$

$$\mathbb{L}' = (\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \quad (5.19)$$

5.2 Μετατροπή του σφαιρικού αναπτύγματος στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα

Αναλύοντας το ανάπτυγμα (3.26) μέχρι τους σφαιρικούς όρους δευτέρου βαθμού και λαμβάνοντας υπόψιν τη σταθερά $B_0^0 = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} u_s^+(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= Y_1^{-1}(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} B_1^{-1} + Y_1^0(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} B_1^0 \\ &\quad + Y_1^1(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} B_1^1 + Y_2^{-2}(\theta, \phi) \frac{1}{r^3} B_2^{-2} + Y_2^{-1}(\theta, \phi) \frac{1}{r^3} B_2^{-1} \\ &\quad + Y_2^0(\theta, \phi) \frac{1}{r^3} B_2^0 + Y_2^1(\theta, \phi) \frac{1}{r^3} B_2^1 + Y_2^2(\theta, \phi) \frac{1}{r^3} B_2^2 \\ &\quad + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Για τους συντελεστές B_n^m γενικά ισχύει

$$B_n^m = \iint_{|\hat{\mathbf{r}}|=1} u_s^-(r, \theta, \phi) Y_n^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (5.21)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (3.70) - (3.77) εκφράζουμε το ανάπτυγμα (5.20) στο καρτεσιανό σύστημα

$$\begin{aligned} u_s^+(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} B_1^{-1} (x_2 - ix_3) + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r^3} B_1^0 x_1 + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} B_1^1 (x_2 + ix_3) \\ &\quad + \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^{-2} (x_2 - ix_3)^2 + \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^{-1} (x_2 - ix_3) x_1 \\ &\quad + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^0 (2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^1 (x_2 + ix_3) x_1 \end{aligned}$$

$$+ \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^2 (x_2 + ix_3)^2 + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \quad (5.22)$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} u_s^+(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r^3} B_1^0 x_1 + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} (B_1^{-1} + B_1^1) x_2 + i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} (B_1^1 - B_1^{-1}) x_3 \\ &+ \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^{-1} + B_2^1) x_1 x_2 + i \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^1 - B_2^{-1}) x_1 x_3 \\ &+ 2i \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^2 - B_2^{-2}) x_2 x_3 + 2 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^0 x_1^2 \\ &+ \left(\sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^{-2} + \sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^2 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} B_2^0 \right) \frac{1}{r^5} x_2^2 \\ &- \left(\sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^{-2} + \sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^2 + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} B_2^0 \right) \frac{1}{r^5} x_3^2 \\ &+ O\left(\frac{1}{r^4}\right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Το παραπάνω ανάπτυγμα στο ελλειπτοσφαιρικό σύστημα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} u_s^+(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r^3} B_1^0 \rho \cos\theta_e + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} (B_1^{-1} + B_1^1) \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \cos\phi_e \\ &+ i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} (B_1^1 - B_1^{-1}) \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \sin\phi_e \\ &+ \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^{-1} + B_2^1) \rho \cos\theta_e \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \cos\phi_e \\ &+ i \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^1 - B_2^{-1}) \rho \cos\theta_e \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \sin\phi_e \\ &+ 2i \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^2 - B_2^{-2}) \sqrt{\rho^2 - h_3^2} \sin\theta_e \cos\phi_e \sqrt{\rho^2 - h_2^2} \sin\theta_e \sin\phi_e \\ &+ 2 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^0 \rho^2 \cos^2 \theta_e \\ &+ \left(\sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^{-2} + \sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^2 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} B_2^0 \right) \frac{1}{r^5} (\rho^2 - h_3^2) \sin^2 \theta_e \cos^2 \phi_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^{-2} + \sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^2 + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} B_2^0 \right) \frac{1}{r^5} (\rho^2 - h_2^2) \sin^2 \theta_e \sin^2 \phi_e \\
& + O\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

5.3 Σύνδεση των δυο αναπτυγμάτων

Από ένα σημείο \mathbf{A} εξωτερικό του εγκεφάλου, διέρχεται μια σφαίρα ακτίνας $r = l > a$ και ένα ελλειψοειδές $\rho = l_1 > a_1$. Στο σημείο $\mathbf{A}(l, \theta, \phi)$ της σφαίρας καθώς και στο σημείο $\mathbf{A}(l_1, \mu, \nu)$ του ελλειψοειδούς υπολογίζουμε το ηλεκτρικό δυναμικό που παράγεται με τη διέγερση της διπολικής πηγής (2.47). Στο σημείο \mathbf{A} το ηλεκτρικό δυναμικό εκφράζεται συγχρόνως από την (5.23) υπό τη θεώρηση ότι ο πραγματικός εγκέφαλος είναι σφαιρικός και από την (5.17) υπό τη θεώρηση ότι είναι ελλειψοειδής. Κατά συνέπεια οι τιμές $u_{s,A}^+(l, \theta, \phi)$ και $u_{el,A}^+(l_1, \mu, \nu)$ σε κάθε σημείο \mathbf{A} συμπίπτουν (Pasiou and Dassios, 2022). Από τη σύγκριση των αναπτυγμάτων (5.23), (5.17) στο σημείο \mathbf{A} προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$0 = 5(c_2^1 I_2^1(\rho) \mathbb{L} + c_2^2 I_2^2(\rho) \mathbb{L}') \tag{5.25}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{r^3} B_1^0 = 3c_1^1 I_1^1(\rho) h_2 h_3 \tag{5.26}$$

$$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1}) = 3c_1^2 I_1^2(\rho) h_1 h_3 \tag{5.27}$$

$$i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{r^3} (B_1^1 - B_1^{-1}) = 3c_1^3 I_1^3(\rho) h_2 h_1 \tag{5.28}$$

$$\sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^1 + B_2^{-1}) = 5c_2^3 I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2 \tag{5.29}$$

$$i \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^1 - B_2^{-1}) = 5c_2^4 I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2 \tag{5.30}$$

$$2i \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{r^5} (B_2^2 - B_2^{-2}) = 5c_2^5 I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2 \tag{5.31}$$

$$2 \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{1}{r^5} B_2^0 = 5 \left(c_2^1 I_2^1(\rho) \mathbb{L} \frac{1}{\Lambda - a_1^2} + c_2^2 I_2^2(\rho) \mathbb{L}' \frac{1}{\Lambda' - a_1^2} \right) \tag{5.32}$$

$$\left(\sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^{-2} + \sqrt{\frac{45}{96\pi}} B_2^2 - \sqrt{\frac{5}{16\pi}} B_2^0 \right) \frac{1}{r^5} = 5 \left(c_2^1 I_2^1(\rho) \mathbb{L} \frac{1}{\Lambda - a_2^2} + c_2^2 I_2^2(\rho) \mathbb{L}' \frac{1}{\Lambda' - a_2^2} \right) \tag{5.33}$$

$$-\left(\sqrt{\frac{45}{96\pi}}B_2^{-2} + \sqrt{\frac{45}{96\pi}}B_2^2 + \sqrt{\frac{5}{16\pi}}B_2^0\right)\frac{1}{r^5} = 5\left(c_2^1 I_2^1(\rho)\mathbb{L}\frac{1}{\Lambda-a_3^2} + c_2^2 I_2^2(\rho)\mathbb{L}'\frac{1}{\Lambda'-a_3^2}\right) \quad (5.34)$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές B_n^m του σφαιρικού αναπτύγματος της λύσης συναρτήσει των συντελεστών c_n^m του ελλειψοειδούς αναπτύγματος. Είναι

$$0 = \sqrt{4\pi} r(5(c_2^1 I_2^1(\rho)\mathbb{L} + c_2^2 I_2^2(\rho)\mathbb{L}')) \quad (5.35)$$

$$B_1^{-1} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1(c_1^2 I_1^2(\rho)h_3 + ic_1^3 I_1^3(\rho)h_2) \quad (5.36)$$

$$B_1^0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r^3 (3c_1^1 I_1^1(\rho)h_2 h_3) \quad (5.37)$$

$$B_1^1 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1(c_1^2 I_1^2(\rho)h_3 - ic_1^3 I_1^3(\rho)h_2) \quad (5.38)$$

$$B_2^{-2} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2(c_2^1 I_2^1(\rho)(\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho)(\Lambda' - a_1^2) + ic_2^5 I_2^5(\rho)h_2 h_3) \quad (5.39)$$

$$B_2^{-1} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{24\pi}{45}} r^5 h_1 h_2 h_3 (c_2^3 I_2^3(\rho)h_3 + ic_2^4 I_2^4(\rho)h_2) \quad (5.40)$$

$$B_2^0 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^5 \left(c_2^1 I_2^1(\rho)\mathbb{L}\frac{1}{\Lambda-a_1^2} + c_2^2 I_2^2(\rho)\mathbb{L}'\frac{1}{\Lambda'-a_1^2}\right) \quad (5.41)$$

$$B_2^1 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{24\pi}{45}} r^5 h_1 h_2 h_3 (c_2^3 I_2^3(\rho)h_3 - ic_2^4 I_2^4(\rho)h_2) \quad (5.42)$$

$$B_2^2 = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2(c_2^1 I_2^1(\rho)(\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho)(\Lambda' - a_1^2) - ic_2^5 I_2^5(\rho)h_2 h_3) \quad (5.43)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.26) - (5.31) μπορούμε να εκφράσουμε το υποσύνολο $\{c_1^1, c_1^2, c_1^3, c_2^3, c_2^4, c_2^5\}$ των συντελεστών c_n^m συναρτήσει των συντελεστών B_n^m . Έχουμε

$$c_1^1 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{I_1^1(\rho)h_2 h_3 r^3} B_1^0 \quad (5.44)$$

$$c_1^2 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{I_1^2(\rho)h_1 h_3 r^3} (B_1^1 + B_1^{-1}) \quad (5.45)$$

$$c_1^3 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{I_1^3(\rho)h_2 h_1 r^3} i(B_1^1 - B_1^{-1}) \quad (5.46)$$

$$c_2^3 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2 r^5} (B_2^1 + B_2^{-1}) \quad (5.47)$$

$$c_2^4 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2 r^5} i (B_2^1 - B_2^{-1}) \quad (5.48)$$

$$c_2^5 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2 r^5} i (B_2^2 - B_2^{-2}) \quad (5.49)$$

6 Προσδιορισμός σφαλμάτων

Καθώς το EEG cap καταγράφει το ηλεκτρικό δυναμικό u_n σε συγκεκριμένες, διακριτές, πεπερασμένες (το πολύ 256) θέσεις (αισθητήρες) στην επιφάνεια του κρανίου η μετατροπή των καταγραφών σε συνεχή συνάρτηση $u(\mathbf{r})$ με \mathbf{r} στην επιφάνεια του κρανίου απαιτεί προσαρμογή (interpolation) των δεδομένων κατάλληλη ώστε να ταιριάζει με το σχήμα του κρανίου και επέκταση (extrapolation) στις περιοχές όπου δεν υπάρχουν δεδομένα, πχ στην περιοχή του προσώπου και του λαιμού. Αυτή η «συμπλήρωση» των δεδομένων ενέχει βαθμούς ελευθερίας για την καλύτερη περιγραφή του δυναμικού στην επιφάνεια του υποκειμένου κρανίου, η οποία θα τροφοδοτήσει τους αλγορίθμους αντιστροφής στον εντοπισμό και τον προσδιορισμό της πηγής που είναι το ζητούμενο του αντίστροφου προβλήματος EEG.

Έτσι, έχουμε δύο θεωρήσεις:

Αν το κεφάλι είναι με καλή προσέγγιση σφαιρικό, τότε η «συμπλήρωση» των δεδομένων του EEG cap θα οδηγήσει στο σφαιρικό ανάπτυγμα (3.26)

$$u_S^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_n^m \frac{1}{r^{n+1}} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})$$

και οι συντελεστές που θα αποδώσει θα είναι οι B_n^m . Ο κατάλληλος (θα λέμε: ο «σωστός») αλγόριθμος αντιστροφής θα είναι ο «σφαιρικός» που θα προσδιορίσει τα $\mathbf{Q}_s, \mathbf{r}_{0_s}$ μέσω των (3.102) και (3.113) αντίστοιχα:

$$\mathbf{Q}_s = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 \left(\sqrt{2} C_1^0, C_1^{-1} + C_1^1, i(C_1^1 - C_1^{-1}) \right)$$

$$\mathbf{r}_{0_s} = \frac{a}{\sqrt{5}} \left(2 \left(\frac{C_2^1}{C_1^1} \right) - \sqrt{2} \left(\frac{C_1^0 C_2^2}{C_1^1 C_1^1} \right), \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} + \frac{C_2^2}{C_1^1}, i \left(\frac{C_2^2}{C_1^1} - \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} \right) \right), C_1^1 \neq 0,$$

όπου $C_n^m = \frac{B_n^m}{a^{n+1}}$.

Αντίστοιχα, αν το κεφάλι είναι με καλή προσέγγιση ελλειψοειδές, τότε η «συμπλήρωση» των δεδομένων του EEG cap θα οδηγήσει στο ελλειψοειδές ανάπτυγμα (4.118)

$$u_{el}^+(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2n+1} c_n^m \mathbb{F}_n^m(\mathbf{r})$$

και οι συντελεστές που θα αποδώσει θα είναι οι c_n^m . Ο «σωστός» αλγόριθμος αντιστροφής θα είναι ο «ελλειψοειδής» που θα προσδιορίσει τα $\mathbf{Q}_{el}, \mathbf{r}_{0_{el}}$ μέσω των (4.151) και (4.152) αντίστοιχα:

$$\mathbf{r}_{0_{el}} = \left(\frac{1}{2h_2h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^2} + \frac{q_2^4}{q_1^3} - \frac{q_1^1 q_2^5}{q_1^2 q_1^3} \right), \frac{1}{2h_1h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^2} + \frac{q_2^5}{q_1^3} - \frac{q_1^2 q_2^4}{q_1^1 q_1^3} \right), \frac{1}{2h_1h_2} \left(\frac{q_2^4}{q_1^2} + \frac{q_2^5}{q_1^3} - \frac{q_1^3 q_2^3}{q_1^1 q_1^2} \right) \right)$$

$$\mathbf{Q}_{el} = \left(\frac{q_1^1}{h_2h_3}, \frac{q_1^2}{h_1h_3}, \frac{q_1^3}{h_1h_2} \right)$$

όπου

$$q_n^m = \sigma \gamma_n^m a_2 a_3 (2n + 1) I_n^m(a_1) E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) c_n^m.$$

Στη συνέχεια, στις πρώτες δύο περιπτώσεις, θα υπολογίσουμε το σφάλμα που γίνεται στον εντοπισμό της πηγής, δηλαδή των \mathbf{Q}, \mathbf{r}_0 , όταν χρησιμοποιηθεί μοντέλο περιγραφής του κεφαλιού διαφορετικό από το βέλτιστο, δηλαδή σφαιρικό μοντέλο (και αλγόριθμος αντιστροφής) ενώ το «σωστό» είναι το ελλειψοειδές, και αντίστροφα, ελλειψοειδές μοντέλο (και αλγόριθμος αντιστροφής) ενώ το «σωστό» είναι το σφαιρικό.

6.1 1^η περίπτωση - Ελλειψοειδής εγκέφαλος 1

Χρησιμοποιείται σφαιρικό μοντέλο περιγραφής του κεφαλιού και σφαιρικός αλγόριθμος αντιστροφής ενώ το «σωστό» είναι το ελλειψοειδές. Κατά συνέπεια τα δεδομένα είναι τα c_n^m , γι' αυτό και τα σφάλματα εκφράζονται τελικά ως προς c_n^m . Στην περίπτωση αυτή ο ελλειψοειδής αλγόριθμος προσδιορίζει με ακρίβεια την πηγή, ενώ τα σφάλματα περιγράφουν την απόσταση της «ακριβώς» προσδιορισμένης πηγής από την προσεγγιστικά προσδιορισμένη πηγή, μέσω του σφαιρικού αλγορίθμου.

Για τον υπολογισμό του σφάλματος θα εκφράσουμε όλους τους συντελεστές συναρτήσει των c_n^m . Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.30) - (4.123) βρίσκουμε τη σύνδεση ανάμεσα στους συντελεστές C_n^m και B_n^m . Είναι

$$C_n^m = \frac{B_n^m}{a^{n+1}} \quad (6.1)$$

Στη συνέχεια με τη βοήθεια των σχέσεων (6.1), (5.35) - (5.43) εκφράζουμε τους συντελεστές C_n^m συναρτήσει των συντελεστών c_n^m . Οι συντελεστές που χρειαζόμαστε είναι

$$C_1^{-1} = a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2) \quad (6.2)$$

$$C_1^0 = a^{-2} 3 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} r^3 (c_1^1 I_1^1(\rho) h_2 h_3) \quad (6.3)$$

$$C_1^1 = a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2) \quad (6.4)$$

$$C_2^{-2} = a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 (c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2) + i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3) \quad (6.5)$$

$$C_2^1 = a^{-3} \frac{5}{2} \sqrt{\frac{24\pi}{45}} r^5 h_1 h_2 h_3 (c_2^3 I_2^3(\rho) h_3 - i c_2^4 I_2^4(\rho) h_2) \quad (6.6)$$

$$C_2^2 = a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 (c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2) - i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3) \quad (6.7)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.123), (4.131) βρίσκουμε τη σύνδεση μεταξύ των συντελεστών q_n^m και c_n^m . Είναι

$$q_n^m = \sigma \gamma_n^m a_2 a_3 (2n + 1) I_n^m(a_1) E_n^m(a_1) E_n^{m'}(a_1) c_n^m \quad (6.8)$$

Οι συντελεστές που χρειαζόμαστε είναι

$$\begin{aligned} q_1^1 &= 3\sigma \gamma_1^1 a_2 a_3 I_1^1(a_1) E_1^1(a_1) E_1^{1'}(a_1) c_1^1 \\ &= 4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1 \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} q_1^2 &= 3\sigma \gamma_1^2 a_2 a_3 I_1^2(a_1) E_1^2(a_1) E_1^{2'}(a_1) c_1^2 \\ &= 4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} q_1^3 &= 3\sigma \gamma_1^3 a_2 a_3 I_1^3(a_1) E_1^3(a_1) E_1^{3'}(a_1) c_1^3 \\ &= 4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3 \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} q_2^3 &= 5\sigma \gamma_2^3 a_2 a_3 I_2^3(a_1) E_2^3(a_1) E_2^{3'}(a_1) c_2^3 \\ &= \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) c_2^3 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} q_2^4 &= 3\sigma \gamma_2^4 a_2 a_3 I_2^4(a_1) E_2^4(a_1) E_2^{4'}(a_1) c_2^4 \\ &= \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) c_2^4 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned}
 q_2^5 &= 3\sigma\gamma_2^5 a_2 a_3 I_2^5(a_1) E_2^5(a_1) E_2^{5'}(a_1) c_2^5 \\
 &= \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} \right) I_2^5(a_1) c_2^5
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε επιπλέον τις σχέσεις (4.39), (4.50), (4.63), (4.88), (4.98), (4.107), (4.47), (4.48), (4.60), (4.61), (4.73), (4.74), (4.95), (4.96), (4.104), (4.105), (4.113), (4.114).

Για το σφάλμα της διπολικής ροπής έχουμε

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_s &= \left(\frac{q_1^1}{h_2 h_3} - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma a^2 C_1^0, \frac{q_1^2}{h_1 h_3} - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 (C_1^{-1} + C_1^1), \right. \\
 &\quad \left. \frac{q_1^3}{h_1 h_2} - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma a^2 i (C_1^1 - C_1^{-1}) \right)
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Εισάγοντας τις (6.2), (6.3), (6.4), (6.9), (6.10), (6.11) στην (6.15) προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_s &= 4\pi\sigma \left(h_2 h_3 (a_1 a_2 a_3 I_1^1(a_1) - r^3 I_1^1(\rho)) c_1^1, \right. \\
 &\quad h_1 h_3 (a_2^2 a_3 I_1^2(a_1) - r^3 I_1^2(\rho)) c_1^2, \\
 &\quad \left. h_1 h_2 (a_2 a_3^2 I_1^3(a_1) - r^3 I_1^3(\rho)) c_1^3 \right)
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

Για το σφάλμα της θέσης ισχύει

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s} &= \left(\frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^2} + \frac{q_2^4}{q_1^3} - \frac{q_1^1 q_2^5}{q_1^2 q_1^3} \right) - a \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{C_2^1}{C_1^1} - \frac{C_1^0 C_2^2}{C_1^1 C_1^1} \right), \right. \\
 &\quad \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^3} - \frac{q_1^2 q_2^4}{q_1^1 q_1^3} \right) - \frac{a}{\sqrt{5}} \left(\frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} + \frac{C_2^2}{C_1^1} \right), \\
 &\quad \left. \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{q_2^4}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^2} - \frac{q_1^3 q_2^3}{q_1^1 q_1^2} \right) - \frac{ia}{\sqrt{5}} \left(\frac{C_2^2}{C_1^1} - \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.9) - (6.14) καθώς και τις (6.1) - (6.7) προκύπτει

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s} &= \left(\frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) c_2^3}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) c_2^4}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1 \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3}\right) I_2^5(a_1) c_2^5}{4\pi\sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3}\right) I_2^5(a_1) c_2^5} \\
& - a \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{a^{-3\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{24\pi}{45}} r^5 h_1 h_2 h_3 (c_2^3 I_2^3(\rho) h_3 - i c_2^4 I_2^4(\rho) h_2)}{a^{-2\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \right. \\
& - \frac{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}} r^3 (c_1^1 I_1^1(\rho) h_2 h_3)}{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \\
& \times \left(\frac{a^{-3} \sqrt[5]{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 (c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2))}{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \right. \\
& \left. - \frac{a^{-3} \sqrt[5]{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \right) \Bigg), \\
& \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) I_2^3(a_1) c_2^3}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1} \right. \\
& + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3}\right) I_2^5(a_1) c_2^5}{4\pi\sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \\
& - \frac{4\pi\sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1} \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_2^2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3}\right) I_2^4(a_1) c_2^4}{4\pi\sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \Bigg) \\
& - \frac{a}{\sqrt{5}} \left(\frac{a^{-3} \sqrt[5]{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 (c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2))}{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \right. \\
& + \frac{a^{-3} \sqrt[5]{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \\
& + \frac{a^{-3} \sqrt[5]{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 (c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2))}{a^{-2} \sqrt[3]{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \Bigg) \\
& \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) c_2^4}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^4(a_1) c_1^4} \right. \\
& + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) c_2^5}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^5(a_1) c_1^5} \\
& - \frac{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^4(a_1) c_1^4} \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) c_2^3}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \Bigg) \\
& - \frac{ia}{\sqrt{5}} \left(\frac{a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 \left(c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2) \right)}{a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \right. \\
& - \frac{a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \\
& - \frac{a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 \left(c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2) \right)}{a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \\
& \left. - \frac{a^{-3} \frac{5}{4} \sqrt{\frac{96\pi}{45}} r^5 h_1^2 i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{a^{-2} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} r^3 h_1 (c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2)} \right) \Bigg) \tag{6.18}
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s} &= \left(\frac{a_1 h_2 h_3}{6} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) c_2^3}{a_2 I_1^2(a_1) c_1^2} + \frac{(a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) c_2^4}{a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \right. \right. \\
& - \frac{I_1^4(a_1) c_1^4}{I_1^2(a_1) c_1^2} \frac{a_1 (a_2^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) c_2^5}{a_2 a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \Bigg) \\
& - \frac{2}{3} h_2 h_3 r^2 \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^3 I_2^3(\rho) h_3 - i c_2^4 I_2^4(\rho) h_2}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right. \\
& - 5 \frac{c_1^4 I_1^4(\rho)}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \\
& \left. \times \left(\frac{c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2) - i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h_1 h_3}{6} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) c_2^3}{I_1^1(a_1) c_1^1} + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) c_2^5}{a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \right. \\
& \left. - \frac{a_2 I_1^2(a_1) c_1^2 (a_3 + a_1^2) I_2^4(a_1) c_2^4}{I_1^1(a_1) c_1^1 a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \right) \\
& - \frac{2}{3} h_1 r^2 \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2)}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right. \\
& \left. + \frac{i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right), \\
& \frac{h_1 h_2}{6} \left(\frac{(a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) c_2^4}{I_1^1(a_1) c_1^1} \right. \\
& \left. + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) c_2^5}{a_2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right. \\
& \left. - \frac{a_3 I_1^3(a_1) c_1^3 (a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) c_2^3}{I_1^1(a_1) c_1^1 a_2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right) \\
& + \frac{2}{3} h_1 r^2 \operatorname{Im} \left(\frac{c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2)}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right. \\
& \left. - \frac{i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right) \quad (6.19)
\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε \mathbf{Q}, \mathbf{r}_0 τις παραμέτρους της πραγματικής πηγής τότε $\mathbf{Q}_{el} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{r}_{0el} = \mathbf{r}_0$ και η (6.16) γίνεται

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_s &= (Q_1 - 4\pi\sigma r^3 h_2 h_3 I_1^1(\rho) c_1^1, Q_2 - 4\pi\sigma r^3 h_1 h_3 I_1^2(\rho) c_1^2, \\
& Q_3 - 4\pi\sigma r^3 h_1 h_2 I_1^3(\rho) c_1^3) \quad (6.20)
\end{aligned}$$

ενώ η (6.19) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s} &= \left(x_{01} - \frac{2}{3} h_2 h_3 r^2 \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^3 I_2^3(\rho) h_3 - i c_2^4 I_2^4(\rho) h_2}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right. \right. \\
& \left. \left. - 5 \frac{c_1^1 I_1^1(\rho)}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right) \right. \\
& \left. \times \left(\frac{c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2) - i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right) \right), \\
& x_{02} - \frac{2}{3} h_1 r^2 \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^1 I_2^1(\rho) (\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho) (\Lambda' - a_1^2)}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 + i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right. \\
& \left. + \frac{i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right),
\end{aligned}$$

$$x_{03} + \frac{2}{3} h_1 r^2 \operatorname{Im} \left(\frac{c_2^1 I_2^1(\rho)(\Lambda - a_1^2) + c_2^2 I_2^2(\rho)(\Lambda' - a_1^2)}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} - \frac{i c_2^5 I_2^5(\rho) h_2 h_3}{c_1^2 I_1^2(\rho) h_3 - i c_1^3 I_1^3(\rho) h_2} \right) \quad (6.21)$$

6.2 2^η περίπτωση – Σφαιρικός εγκέφαλος 1

Χρησιμοποιείται ελλειψοειδές μοντέλο περιγραφής του κεφαλιού και ελλειψοειδής αλγόριθμος αντιστροφής ενώ το «σωστό» είναι το σφαιρικό. Κατά συνέπεια τα δεδομένα είναι τα B_n^m , για αυτό και τα σφάλματα εκφράζονται τελικά ως προς B_n^m . Στην περίπτωση αυτή ο σφαιρικός αλγόριθμος προσδιορίζει με ακρίβεια την πηγή, ενώ τα σφάλματα περιγράφουν την απόσταση της «ακριβώς» προσδιορισμένης πηγής από την προσεγγιστικά προσδιορισμένη πηγή, μέσω του ελλειψοειδούς αλγορίθμου.

Για τη διπολική ροπή έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el} = & \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma B_1^0 - \frac{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{I_1^1(\rho) h_2 h_3} \frac{1}{r^3} B_1^0}{h_2 h_3}, \right. \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma (B_1^{-1} + B_1^1) - \frac{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^2(\rho) h_1 h_3} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1})}{h_1 h_3}, \\ & \left. \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma i (B_1^1 - B_1^{-1}) - \frac{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^3(\rho) h_2 h_1} \frac{1}{r^3} i (B_1^1 - B_1^{-1})}{h_1 h_2} \right) \quad (6.22) \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (6.1), (6.9) - (6.11), (5.44) - (5.46).

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el} = & \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sigma \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \left(1 - a_1 a_2 a_3 \frac{I_1^1(a_1)}{I_1^1(\rho)} \frac{1}{r^3} \right) B_1^0, \right. \\ & \left(1 - a_2^2 a_3 \frac{I_1^2(a_1)}{I_1^2(\rho)} \frac{1}{r^3} \right) \operatorname{Re}(B_1^1), \\ & \left. \left(-1 + a_2 a_3^2 \frac{I_1^3(a_1)}{I_1^3(\rho)} \frac{1}{r^3} \right) \operatorname{Im}(B_1^1) \right) \quad (6.23) \end{aligned}$$

Για τη θέση ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}} &= \left(a \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{C_2^1}{C_1^1} - \frac{C_1^0 C_2^2}{C_1^1 C_1^1} \right) - \frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^2} + \frac{q_2^4}{q_1^3} - \frac{q_1^1 q_2^5}{q_1^2 q_1^3} \right), \right. \\
&\frac{a}{\sqrt{5}} \left(\frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} + \frac{C_2^2}{C_1^1} \right) - \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{q_2^3}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^3} - \frac{q_1^2 q_2^4}{q_1^1 q_1^3} \right), \\
&\left. \frac{ia}{\sqrt{5}} \left(\frac{C_2^2}{C_1^1} - \frac{C_2^{-2}}{C_1^{-1}} \right) - \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{q_2^4}{q_1^1} + \frac{q_2^5}{q_1^2} - \frac{q_1^3 q_2^3}{q_1^1 q_1^2} \right) \right) \quad (6.24)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα C_n^m και q_n^m από τις σχέσεις (6.1), (6.9) - (6.14), (5.44) - (5.49) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}} &= \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{B_2^1}{B_1^1} - \frac{B_1^0 B_2^2}{B_1^1 B_1^1} \right) \right. \\
&- \frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2} \frac{1}{r^5} (B_2^1 + B_2^{-1})}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^2(\rho) h_1 h_3} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1})} \right. \\
&+ \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2} \frac{1}{r^5} i (B_2^1 - B_2^{-1})}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^3(\rho) h_2 h_1} \frac{1}{r^3} i (B_1^1 - B_1^{-1})} \\
&- \frac{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{I_1^1(\rho) h_2 h_3} \frac{1}{r^3} B_1^0}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^2(\rho) h_1 h_3} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1})} \\
&\left. \times \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) \frac{2}{5} \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2} \frac{1}{r^5} i (B_2^2 - B_2^{-2})}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^3(\rho) h_2 h_1} \frac{1}{r^3} i (B_1^1 - B_1^{-1})} \right), \\
&\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{B_2^{-2}}{B_1^{-1}} + \frac{B_2^2}{B_1^1} \right) \\
&- \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2} \frac{1}{r^5} (B_2^1 + B_2^{-1})}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{I_1^1(\rho) h_2 h_3} \frac{1}{r^3} B_1^0} \right. \\
&+ \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) \frac{2}{5} \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2} \frac{1}{r^5} i (B_2^2 - B_2^{-2})}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^3(\rho) h_2 h_1} \frac{1}{r^3} i (B_1^1 - B_1^{-1})} \\
&- \frac{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^2(\rho) h_1 h_3} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1})}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{I_1^1(\rho) h_2 h_3} \frac{1}{r^3} B_1^0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2 r^5} i(B_2^1 - B_2^{-1})}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^3(\rho) h_2 h_1} \frac{1}{r^3} i(B_1^1 - B_1^{-1})}} \Bigg), \\
& \frac{i}{\sqrt{5}} \left(\frac{B_2^2}{B_1^1} - \frac{B_2^{-2}}{B_1^{-1}} \right) \\
& - \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^4(\rho) h_1 h_3 h_2^2 r^5} i(B_2^1 - B_2^{-1})}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{I_1^1(\rho) h_2 h_3} \frac{1}{r^3} B_1^0}} \right. \\
& + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3^2 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) \frac{2}{5} \sqrt{\frac{45}{96\pi}} \frac{1}{I_2^5(\rho) h_3 h_2 h_1^2 r^5} i(B_2^2 - B_2^{-2})}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^2(\rho) h_1 h_3} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1})}} \\
& - \frac{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^3(\rho) h_2 h_1} \frac{1}{r^3} i(B_1^1 - B_1^{-1})}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{I_1^1(\rho) h_2 h_3} \frac{1}{r^3} B_1^0} \\
& \left. \times \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) \frac{1}{5} \sqrt{\frac{45}{24\pi}} \frac{1}{I_2^3(\rho) h_1 h_2 h_3^2 r^5} i(B_2^1 + B_2^{-1})}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{I_1^2(\rho) h_1 h_3} \frac{1}{r^3} (B_1^1 + B_1^{-1})} \right) \Bigg) \quad (6.25)
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0s} - \mathbf{r}_{0el} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{Re} \left(2 \frac{B_2^1}{B_1^1} - \sqrt{2} \frac{B_1^0 B_2^2}{B_1^1 B_1^1} \right) \right. \\
& - \frac{a_1}{2r^2} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_1^2(\rho) I_2^3(a_1) \operatorname{Re}(B_2^1)}{a_2 I_1^2(a_1) I_2^3(\rho) \operatorname{Re}(B_1^1)} \right. \\
& + \frac{(a_3^2 + a_1^2) I_1^3(\rho) I_2^4(a_1) \operatorname{Im}(B_2^1)}{a_3 I_1^3(a_1) I_2^4(\rho) \operatorname{Im}(B_1^1)} \\
& - \sqrt{2} \frac{I_1^1(a_1) I_1^2(\rho) B_1^0}{I_1^1(\rho) I_1^2(a_1) \operatorname{Re}(B_1^1)} \\
& \left. \times \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_1^3(\rho) I_2^5(a_1) \operatorname{Im}(B_2^2)}{a_2 a_3 I_1^3(a_1) I_2^5(\rho) \operatorname{Im}(B_1^1)} \right), \\
& 2 \operatorname{Re} \left(\frac{B_2^2}{B_1^1} \right) \\
& - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{(a_2^2 + a_1^2) I_1^1(\rho) I_2^3(a_1) \operatorname{Re}(B_2^1)}{I_1^1(a_1) I_2^3(\rho) B_1^0} \right. \\
& \left. + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_1^3(\rho) I_2^5(a_1) \operatorname{Im}(B_2^2)}{a_2 a_3 I_1^3(a_1) I_2^5(\rho) \operatorname{Im}(B_1^1)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a_2 I_1^2(a_1) I_1^1(\rho) \operatorname{Re}(B_1^1)}{I_1^1(a_1) I_1^2(\rho) B_1^0} \\
& \times \left(\frac{(a_3^2 + a_1^2) I_1^3(\rho) I_2^4(a_1) \operatorname{Im}(B_2^1)}{a_3 I_1^3(a_1) I_2^4(\rho) \operatorname{Im}(B_1^1)} \right), \\
& -2 \operatorname{Im} \left(\frac{B_2^2}{B_1^1} \right) \\
& + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{(a_3^2 + a_1^2) I_1^1(\rho) I_2^4(a_1) \operatorname{Im}(B_2^1)}{I_1^1(a_1) I_2^4(\rho) B_1^0} \right. \\
& - \frac{a_1 h_3 (a_2^2 + a_1^2) I_1^2(\rho) I_2^3(a_1) \operatorname{Re}(B_2^1)}{a_2 h_1 I_1^2(a_1) I_2^3(\rho) \operatorname{Re}(B_1^1)} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a_3 I_1^1(\rho) I_1^3(a_1) \operatorname{Im}(B_1^1)}{I_1^1(a_1) I_1^3(\rho) B_1^0} \\
& \left. \times \frac{(a_2^2 + a_1^2) I_1^2(\rho) I_2^3(a_1) \operatorname{Re}(B_2^1)}{a_2 I_1^2(a_1) I_2^3(\rho) \operatorname{Re}(B_1^1)} \right) \quad (6.26)
\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε \mathbf{Q}, \mathbf{r}_0 τις παραμέτρους της πραγματικής πηγής τότε $\mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}, \mathbf{r}_{0_s} = \mathbf{r}_0$ και η (6.23) γίνεται

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{el} &= \left(Q_1 - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma a_1 a_2 a_3 \frac{I_1^1(a_1)}{I_1^1(\rho)} \frac{1}{r^3} B_1^0, \right. \\
& Q_2 - \sigma a_2^2 a_3 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{I_1^2(a_1)}{I_1^2(\rho)} \frac{1}{r^3} \operatorname{Re}(B_1^1), \\
& \left. Q_3 + \sigma a_2 a_3^2 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{I_1^3(a_1)}{I_1^3(\rho)} \frac{1}{r^3} \operatorname{Im}(B_1^1) \right) \quad (6.27)
\end{aligned}$$

ενώ η (6.26) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_{0_{el}} &= \left(x_{01} - \frac{a_1}{2\sqrt{5}r^2} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_1^2(\rho) I_2^3(a_1) \operatorname{Re}(B_2^1)}{a_2 I_1^2(a_1) I_2^3(\rho) \operatorname{Re}(B_1^1)} \right. \right. \\
& + \frac{(a_3^2 + a_1^2) I_1^3(\rho) I_2^4(a_1) \operatorname{Im}(B_2^1)}{a_3 I_1^3(a_1) I_2^4(\rho) \operatorname{Im}(B_1^1)} \\
& - \sqrt{2} \frac{I_1^1(a_1) I_1^2(\rho) B_1^0}{I_1^1(\rho) I_1^2(a_1) \operatorname{Re}(B_1^1)} \\
& \left. \left. \times \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_1^3(\rho) I_2^5(a_1) \operatorname{Im}(B_2^1)}{a_2 a_3 I_1^3(a_1) I_2^5(\rho) \operatorname{Im}(B_1^1)} \right) \right), \\
& x_{02} - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{(a_2^2 + a_1^2) I_1^1(\rho) I_2^3(a_1) \operatorname{Re}(B_2^1)}{I_1^1(a_1) I_2^3(\rho) B_1^0} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{a_1(a_3^2+a_2^2)I_1^3(\rho)I_2^5(a_1)Im(B_2^2)}{a_2a_3I_1^3(a_1)I_2^5(\rho)Im(B_1^1)} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a_2I_1^2(a_1)I_1^1(\rho)Re(B_1^1)}{I_1^1(a_1)I_1^2(\rho)B_1^0} \\
& \times \left(\frac{(a_3^2+a_1^2)I_1^3(\rho)I_2^4(a_1)Im(B_2^1)}{a_3I_1^3(a_1)I_2^4(\rho)Im(B_1^1)} \right), \\
\chi_{03} & + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{2} \frac{(a_3^2+a_1^2)I_1^1(\rho)I_2^4(a_1)Im(B_2^1)}{I_1^1(a_1)I_2^4(\rho)B_1^0} \right. \\
& - \frac{a_1h_3(a_2^2+a_1^2)I_1^2(\rho)I_2^3(a_1)Re(B_2^1)}{a_2h_1I_1^2(a_1)I_2^3(\rho)Re(B_1^1)} \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a_3I_1^1(\rho)I_1^3(a_1)Im(B_1^1)}{I_1^1(a_1)I_1^3(\rho)B_1^0} \\
& \left. \times \frac{(a_2^2+a_1^2)I_1^2(\rho)I_2^3(a_1)Re(B_2^1)}{a_2I_1^2(a_1)I_2^3(\rho)Re(B_1^1)} \right) \quad (6.28)
\end{aligned}$$

6.3 3^η περίπτωση - Ελλειψοειδής εγκέφαλος 2

Αν το κεφάλι είναι με καλή προσέγγιση ελλειψοειδές, τότε οι «σωστοί» συντελεστές είναι οι c_n^m , ο «σωστός» αλγόριθμος αντιστροφής είναι ο «ελλειψοειδής» που θα προσδιορίσει τα $\mathbf{Q}_{el}, \mathbf{r}_{0el}$, μέσω των (4.151) και (4.152). Στην περίπτωση όμως που χρησιμοποιηθεί ο σφαιρικός αλγόριθμος για τον εντοπισμό της πηγής, θα προσδιοριστούν τα $\mathbf{Q}_s, \mathbf{r}_{0s}$, μέσω των (3.102) και (3.113). Ωστόσο, τα δεδομένα που θα τροφοδοτήσουν τον αλγόριθμο θα είναι τα «σωστά» δεδομένα c_n^m . Τότε, προκύπτει ο «λανθασμένος» προσδιορισμός $\mathbf{Q}_{s/el}, \mathbf{r}_{0s/el}$. Παρακάτω υπολογίζονται τα σφάλματα $\mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_{s/el}, \mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s/el}$. Είναι

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_{s/el} & = \left(4\pi\sigma h_2 h_3 a_1 a_2 a_3 I_1^1(a_1) c_1^1 - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma B_1^0, \right. \\
& 4\pi\sigma h_1 h_3 a_2^2 a_3 I_1^2(a_1) c_1^2 - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma (B_1^{-1} + B_1^1), \\
& \left. 4\pi\sigma h_1 h_2 a_2 a_3^2 I_1^3(a_1) c_1^3 - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma i (B_1^1 - B_1^{-1}) \right) \quad (6.29)
\end{aligned}$$

Θέτοντας όπου B_n^m το c_n^m έχουμε

$$\mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_{s/el} = \sigma \left(4\pi h_2 h_3 a_1 a_2 a_3 I_1^1(a_1) c_1^1 - \sqrt{\frac{4\pi}{3}} c_1^0, \right.$$

$$4\pi h_2 h_1 h_3^2 a_2^2 a_3 I_1^2(a_1) c_1^2 - \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (c_1^{-1} + c_1^1),$$

$$4\pi h_3 h_1 h_2^2 a_2 a_3^2 I_1^3(a_1) c_1^3 + 0 \quad (6.30)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma \operatorname{Im}(c_1^1) = 0$

Αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s/el} = & \left(\frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) c_2^3}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right. \right. \\ & + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) c_2^4}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \\ & \left. \left. - \frac{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) c_2^5}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \right) \right) \\ & - \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{c_2^1}{c_1^1} - \frac{c_1^0 c_2^2}{c_1^1 c_1^1} \right), \\ & \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) c_2^3}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1} \right. \\ & + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) c_2^5}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \\ & \left. - \frac{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1} \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) c_2^4}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^{-2}}{c_1^{-1}} + \frac{c_2^2}{c_1^1} \right), \\ & \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) c_2^4}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) c_1^1} \right. \\ & \left. + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) c_2^5}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4\pi\sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) c_1^3}{4\pi\sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^3(a_1) c_1^3} \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2}\right) I_2^3(a_1) c_2^3}{4\pi\sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) c_1^2} \\
 & - \frac{i}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} - \frac{c_2^{-2}}{c_1^{-1}} \right) \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s/el} = & \left(\frac{a_1 h_2 h_3}{6} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) c_2^3}{a_2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right. \right. \\
 & + \frac{(a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) c_2^4}{a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \\
 & - \frac{I_1^1(a_1) c_1^1 a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) c_2^5}{I_1^2(a_1) c_1^2 a_2 a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \left. \right) \\
 & - \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{c_2^1}{c_1^1} - \frac{c_1^0 c_2^2}{c_1^1 c_1^1} \right), \\
 & \frac{h_1 h_3}{6} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) c_2^3}{I_1^1(a_1) c_1^1} \right. \\
 & + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) c_2^5}{a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \\
 & - \frac{a_2 I_1^2(a_1) c_1^2 (a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) c_2^4}{I_1^1(a_1) c_1^1 a_3 I_1^3(a_1) c_1^3} \left. \right) \\
 & - \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^2}{c_1^1} \right), \\
 & \frac{h_1 h_2}{6} \left(\frac{(a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) c_2^4}{I_1^1(a_1) c_1^1} \right. \\
 & + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) c_2^5}{a_2 I_1^2(a_1) c_1^2} \\
 & \left. - \frac{a_3 I_1^3(a_1) c_1^3 (a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) c_2^3}{I_1^1(a_1) c_1^1 a_2 I_1^2(a_1) c_1^2} \right) + 0 \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \frac{c_2^1}{c_1^1} - \frac{c_1^0 c_2^2}{c_1^1 c_1^1} \right) = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{c_2^1}{c_1^1} - \frac{c_1^0 c_2^2}{c_1^1 c_1^1} \right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Re} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} \right)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Im} \left(\frac{c_2^2}{c_1^2} \right) = 0$$

αφού τα c_n^m είναι πραγματικά.

6.4 4^η περίπτωση - Σφαιρικός εγκέφαλος 2

Αν το κεφάλι είναι με καλή προσέγγιση σφαιρικό, τότε οι «σωστοί» συντελεστές είναι οι B_n^m , ο «σωστός» αλγόριθμος αντιστροφής είναι ο «σφαιρικός» που θα προσδιορίσει τα $\mathbf{Q}_s, \mathbf{r}_{0_s}$ μέσω των (3.102) και (3.113). Στην περίπτωση όμως που χρησιμοποιηθεί ο ελλειψοειδής αλγόριθμος για τον εντοπισμό της πηγής, θα προσδιοριστούν τα $\mathbf{Q}_{el}, \mathbf{r}_{0_{el}}$ μέσω των (4.152) και (4.151). Ωστόσο, τα δεδομένα που θα τροφοδοτήσουν τον αλγόριθμο θα είναι τα «σωστά» δεδομένα B_n^m . Τότε, προκύπτει ο «λανθασμένος» προσδιορισμός $\mathbf{Q}_{el/s}, \mathbf{r}_{0_{el/s}}$. Παρακάτω υπολογίζονται τα σφάλματα $\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el/s}, \mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el/s}}$. Είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el/s} = & \left(\begin{aligned} & \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sigma B_1^0 - 4\pi\sigma h_2 h_3 a_1 a_2 a_3 I_1^1(a_1) c_1^1, \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma (B_1^{-1} + B_1^1) - 4\pi\sigma h_1 h_3 a_2^2 a_3 I_1^2(a_1) c_1^2, \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \sigma i (B_1^1 - B_1^{-1}) - 4\pi\sigma h_1 h_2 a_2 a_3^2 I_1^3(a_1) c_1^3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Στη συνέχεια θέτουμε όπου c_n^m το B_n^m

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el/s} = & 2\sigma \left(\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{3}} B_1^0 - 2\pi h_2 h_3 a_1 a_2 a_3 I_1^1(a_1) B_1^1, \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{Re}(B_1^1) - 2\pi h_1 h_3 a_2^2 a_3 I_1^2(a_1) B_1^2, \\ & -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{Im}(B_1^1) - 2\pi\sigma h_1 h_2 a_2 a_3^2 I_1^3(a_1) B_1^3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (6.34)$$

Αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0s} - \mathbf{r}_{0el/s} = & \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \left(\sqrt{2} \frac{B_2^1}{B_1^1} - \frac{B_1^0 B_2^2}{B_1^1 B_1^1} \right) \right. \\
& - \frac{1}{2h_2 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) B_2^3}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) B_1^2} \right. \\
& + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) B_2^4}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) B_1^3} \\
& - \left. \frac{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) B_1^1 \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) B_2^5}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) B_1^2 \frac{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) B_1^3}} \right) \\
& \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{B_2^{-2}}{B_1^{-1}} + \frac{B_2^2}{B_1^1} \right) \\
& - \frac{1}{2h_1 h_3} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) B_2^3}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) B_1^1} \right. \\
& + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) B_2^5}{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) B_1^3} \\
& - \left. \frac{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) B_1^2 \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_2^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) B_2^4}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) B_1^1 \frac{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) B_1^3}} \right) \\
& \frac{i}{\sqrt{5}} \left(\frac{B_2^2}{B_1^1} - \frac{B_2^{-2}}{B_1^{-1}} \right) \\
& - \frac{1}{2h_1 h_2} \left(\frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^4 h_3^2 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_1^2}{a_3} \right) I_2^4(a_1) B_2^4}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) B_1^1} \right. \\
& + \frac{\frac{4\pi}{3} \sigma h_1^4 h_2^2 h_3^2 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3} \right) I_2^5(a_1) B_2^5}{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) B_1^2} \\
& - \left. \frac{4\pi \sigma a_2 a_3^2 h_1^2 h_2^2 I_1^3(a_1) B_1^3 \frac{4\pi}{3} \sigma h_1^2 h_2^2 h_3^4 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_1^2}{a_2} \right) I_2^3(a_1) B_2^3}{4\pi \sigma a_1 a_2 a_3 h_2^2 h_3^2 I_1^1(a_1) B_1^1 \frac{4\pi \sigma a_2^2 a_3 h_1^2 h_3^2 I_1^2(a_1) B_1^2}} \right) \Bigg) \quad (6.35)
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{0s} - \mathbf{r}_{0el/s} = & \left(\sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{Re} \left(\sqrt{2} \frac{B_2^1}{B_1^1} - \frac{B_1^0 B_2^2}{B_1^1 B_1^1} \right) \right. \\
& - \frac{a_1 h_2 h_3}{6} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) B_2^3}{a_2 I_1^2(a_1) B_1^2} \right. \\
& + \frac{(a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) B_2^4}{a_3 I_1^3(a_1) B_1^3} \\
& - \left. \frac{I_1^1(a_1) B_1^1 a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) B_2^5}{I_1^2(a_1) B_1^2 a_2 a_3 I_1^3(a_1) B_1^3} \right), \\
& \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Re} \left(\frac{B_2^2}{B_1^1} \right) \\
& - \frac{h_1 h_3}{6} \left(\frac{(a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) B_2^3}{I_1^1(a_1) B_1^1} \right. \\
& + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) B_2^5}{a_3 I_1^3(a_1) B_1^3} \\
& - \left. \frac{a_2 I_1^2(a_1) B_1^2 (a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) B_2^4}{I_1^1(a_1) B_1^1 a_3 I_1^3(a_1) B_1^3} \right), \\
& - \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Im} \left(\frac{B_2^2}{B_1^1} \right) \\
& - \frac{h_1 h_2}{6} \left(\frac{(a_3^2 + a_1^2) I_2^4(a_1) B_2^4}{I_1^1(a_1) B_1^1} \right. \\
& + \frac{a_1 (a_3^2 + a_2^2) I_2^5(a_1) B_2^5}{a_2 I_1^2(a_1) B_1^2} \\
& - \left. \frac{a_3 I_1^3(a_1) B_1^3 (a_2^2 + a_1^2) I_2^3(a_1) B_2^3}{I_1^1(a_1) B_1^1 a_2 I_1^2(a_1) B_1^2} \right) \Big) \tag{6.36}
\end{aligned}$$

7 Επίδραση των εκκεντροτήτων του ελλειψοειδούς μοντέλου στον εντοπισμό της πηγής - Αριθμητική Υλοποίηση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε υπολογισμός των σφαλμάτων με αναλυτικές εκφράσεις. Σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια προσπάθεια να επιλυθούν αριθμητικά τα σφάλματα των δυο πρώτων περιπτώσεων. Υπενθυμίζουμε ότι η πρώτη περίπτωση αφορά τον προσδιορισμό του διπόλου σε έναν ελλειψοειδή εγκέφαλο με τη βοήθεια του σφαιρικού αλγορίθμου ενώ στη δεύτερη περίπτωση το δίπολο βρίσκεται σε ένα σφαιρικό εγκέφαλο και χρησιμοποιείται ο ελλειψοειδής αλγόριθμος για τον προσδιορισμό του. Για την αριθμητική επίλυση θεωρούμε ότι ο εγκέφαλος προτυποποιείται από ένα ελλειψοειδές με ημιάξονες

$$a_1 = 9 \text{ cm}, a_2 = 6.5 \text{ cm}, a_3 = 6 \text{ cm} \quad (7.1)$$

και από μια σφαίρα ίσου όγκου $V = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3 = \frac{4}{3}\pi a^3$ με ακτίνα

$$a = 7.054 \text{ cm} \quad (7.2)$$

Οι ημισεσιακές αποστάσεις του ελλειψοειδούς δίνονται από τις σχέσεις

$$h_1 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2}$$

$$h_2 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2}$$

$$h_3 = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$$

Οι κύριες εκκεντρότητες του ελλειψοειδούς δίνονται από τις εκφράσεις

$$e_{12} = \frac{h_3}{\rho} \quad (7.3)$$

$$e_{23} = \frac{h_1}{\sqrt{\rho^2 - h_3^2}} \quad (7.4)$$

$$e_{31} = \frac{h_2}{\rho} \quad (7.5)$$

Στην περίπτωση μας θεωρούμε $\rho = a_1$.

Επίσης θεωρούμε ένα πρωτεύον διπολικό ρεύμα στη θέση

$$\mathbf{r}_0(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) \quad (7.6)$$

είτε, ισοδύναμα, για το σφαιρικό σύστημα (3.66) - (3.68) στη θέση

$$\mathbf{r}_0(x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (2, 3, 1.73) \quad (7.7)$$

εντός και του σφαιρικού και του ελλειψοειδούς μοντέλου του κεφαλιού με ροπή

$$\mathbf{Q} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (7.8)$$

Για την ηλεκτρική αγωγιμότητα υποθέτουμε την τιμή $\sigma = 0,3 (\Omega m)^{-1}$

Επιπλέον θεωρούμε το σημείο

$$\mathbf{A}(l_1, \theta_e, \phi_e) = (20.3808, 32.85, 30.32), \quad (7.9)$$

για την ταύτιση των δυναμικών $u_{s,A}^+(l, \theta, \phi)$, $u_{el,A}^+(l_1, \mu, \nu)$, το οποίο βρίσκεται εξωτερικά του κεφαλιού.

Για τον υπολογισμό των σφαλμάτων απαιτείται η μετατροπή της πρώτης συνιστώσας του παραπάνω σημείου στο σφαιρικό σύστημα. Είναι

$$r = \sqrt{\rho^2 - \frac{h_3^2 x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} - \frac{h_2^2 x_3^2}{\rho^2 - h_2^2}} \quad (7.10)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (7.11)$$

και (5.1) - (5.3).

Για $r = l$ και $\rho = l_1$ η πρώτη συνιστώσα του σημείου \mathbf{A} δίνεται από τη σχέση

$$l = \sqrt{l_1^2 - \frac{h_3^2 x_2^2}{\rho^2 - h_3^2} - \frac{h_2^2 x_3^2}{\rho^2 - h_2^2}} \quad (7.12)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.1), (3.94) - (3.98) εκφράζουμε τους συντελεστές B_n^m συναρτήσει των συνιστωσών της θέσης και της ροπής. Είναι

$$B_1^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} (Q_2 + iQ_3) \quad (7.37)$$

$$B_1^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{\sigma} Q_1 \quad (7.38)$$

$$B_1^1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} (Q_2 - iQ_3) \quad (7.39)$$

$$B_2^{-2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} [(Q_2 x_{02} - Q_3 x_{03}) + i(Q_2 x_{03} + Q_3 x_{02})] \quad (7.40)$$

$$B_2^{-1} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} [(Q_2 x_{01} + Q_1 x_{02}) + i(Q_3 x_{01} + Q_1 x_{03})] \quad (7.41)$$

$$B_2^0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{1}{\sigma} [2Q_1 x_{01} - Q_2 x_{02} - Q_3 x_{03}] \quad (7.42)$$

$$B_2^1 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} [(Q_2 x_{01} + Q_1 x_{02}) - i(Q_3 x_{01} + Q_1 x_{03})] \quad (7.43)$$

$$B_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{1}{\sigma} [(Q_2 x_{02} - Q_3 x_{03}) - i(Q_2 x_{03} + Q_3 x_{02})] \quad (7.44)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.9) - (6.14), (4.135) - (4.140) μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές c_n^m συναρτήσει των συνιστωσών της θέσης και της ροής

$$c_1^1 = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{Q_1}{a_1 a_2 a_3 h_2 h_3 I_1^1(a_1)} \quad (7.45)$$

$$c_1^2 = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{Q_2}{a_2^2 a_3 h_1 h_3 I_1^2(a_1)} \quad (7.46)$$

$$c_1^3 = \frac{1}{4\pi\sigma} \frac{Q_3}{a_2 a_3^2 h_1 h_2 I_1^3(a_1)} \quad (7.47)$$

$$c_2^3 = \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{Q_1 x_{02} + Q_2 x_{01}}{h_1 h_2 h_3^2 a_2^2 a_1 a_3 \left(a_2 + \frac{a_2^2}{a_2}\right) I_2^3(a_1)} \quad (7.48)$$

$$c_2^4 = \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{Q_1 x_{03} + Q_3 x_{01}}{h_1 h_2^2 h_3 a_3^2 a_2 a_1 \left(a_3 + \frac{a_3^2}{a_3}\right) I_2^4(a_1)} \quad (7.49)$$

$$c_2^5 = \frac{3}{4\pi\sigma} \frac{Q_2 x_{03} + Q_3 x_{02}}{h_1^2 h_2 h_3 a_2^2 a_3 a_1 \left(\frac{a_3 + a_2}{a_2 + a_3}\right) I_2^5(a_1)} \quad (7.50)$$

Οι αναλυτικές εκφράσεις των σφαλμάτων που θα χρησιμοποιηθούν στην αριθμητική επίλυση δίνονται από τις σχέσεις (6.16), (6.19) για τον ελλειψοειδή εγκέφαλο και από τις σχέσεις (6.23), (6.26) για τον σφαιρικό. Για τον ελλειψοειδή εγκέφαλο θα υπολογιστούν τα σφάλματα $|\mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_s|$ και $|\mathbf{r}_{0_{el}} - \mathbf{r}_{0_s}|$ ενώ για τον σφαιρικό τα $|\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el}|$ και $|\mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}}|$. Στην αριθμητική επίλυση θα συμπεριλάβουμε και τις εκφράσεις (6.20), (6.21), (6.27), (6.28) όπου στη θέση των \mathbf{Q} και \mathbf{r}_0 θα χρησιμοποιήσουμε τις ακριβείς τιμές που δίνονται από τις σχέσεις (7.8), (7.7). Ο τελευταίος υπολογισμός αποτελεί έναν τρόπο επαλήθευσης των αλγορίθμων αντιστροφής.

Στη συνέχεια εισάγοντας τα παραπάνω δεδομένα σε κατάλληλο κώδικα στο λογισμικό Mathematica κατασκευάζουμε μια συνάρτηση προγράμματος που παίρνει ως είσοδο ημιάξονες ελλειψοειδών όγκου $V = 468\pi \text{ cm}^3$ σε συμφωνία με το (Pasiou and Dassios, 2022) και παράγει τα παραπάνω σφάλματα σε κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα για τον ελλειψοειδή εγκέφαλο παρουσιάζονται στον πίνακα 7.1, στα διαγράμματα 7.1 - 7.6 και στα 3D γραφήματα 7.7, 7.8 ενώ για το σφαιρικό εγκέφαλο στον πίνακα 7.2, στα διαγράμματα 7.9 - 7.14 και στα 3D γραφήματα 7.15, 7.16 και μας δείχνουν την εξάρτηση των σφαλμάτων από τη μεταβολή των εκκεντροτήτων του ελλειψοειδούς. Τα αποτελέσματα για τις εκφράσεις (6.20), (6.21), (6.27), (6.28) δεν συμπεριλαμβάνονται καθώς συμπίπτουν.

Ελλειψοειδής εγκέφαλος

Ο πίνακας 7.1 απεικονίζει τη μεταβολή των σφαλμάτων της θέσης και της ροπής καθώς αυξάνονται οι ημιάξονες a_1, a_2 του ελλειψοειδούς ενώ ο όγκος του διατηρείται σταθερός και ίσος με $V = 468\pi \text{ cm}^3$. Τα διανύσματα $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{el}, \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0el}$ αναφέρονται στην πραγματική πηγή και έχουν προκύψει από τον ελλειψοειδή αλγόριθμο αντιστροφής ενώ τα $\mathbf{Q}_s, \mathbf{r}_{0s}$ αναφέρονται στην προσεγγιστικά προσδιορισμένη πηγή μέσω του σφαιρικού αλγορίθμου. Παράλληλα στις τρεις πρώτες στήλες απεικονίζεται και η μεταβολή των τριών κύριων εκκεντροτήτων του ελλειψοειδούς. Για τις κύριες εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} ισχύει

$$e_{12} = \frac{h_3}{a_1} = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2} \quad (7.13)$$

$$e_{23} = \frac{h_1}{\sqrt{a_1^2 - h_3^2}} = \frac{h_1}{a_2} = \sqrt{\frac{a_2^2 - a_3^2}{a_2^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2} \quad (7.14)$$

$$e_{31} = \frac{h_2}{a_1} = \sqrt{\frac{a_1^2 - a_3^2}{a_1^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2} \quad (7.15)$$

Συνεπώς οι εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} εξαρτώνται από τους λόγους $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \frac{a_3}{a_1}$ αντίστοιχα.

Καθώς αυξάνονται οι γραμμές του πίνακα από πάνω προς τα κάτω μειώνεται η εκκεντρότητα e_{12} ενώ αυξάνονται οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31} . Κατά συνέπεια

$$\frac{a_2}{a_1} \rightarrow 1, \frac{a_3}{a_2} \rightarrow 0, \frac{a_3}{a_1} \rightarrow 0 \quad (7.16)$$

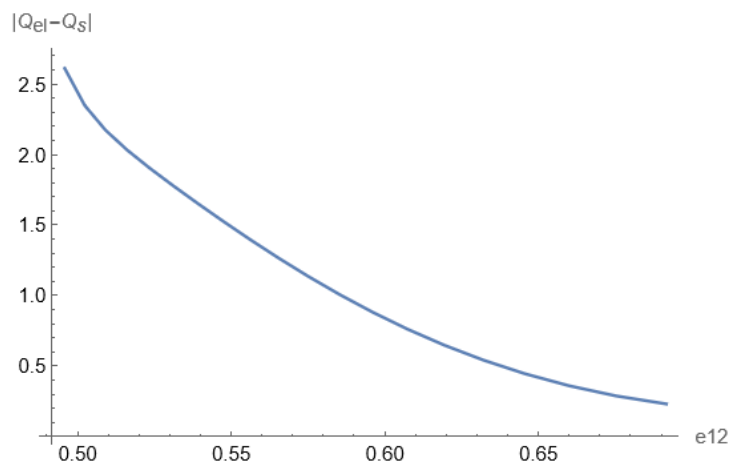
δηλαδή τα ελλειψοειδή μοντέλα τείνουν προς ένα κυκλικό δίσκο. Επίσης παρατηρούμε ότι καθώς η εκκεντρότητα e_{12} φθίνουσα πλησιάζει την τιμή 0.5 και οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31}

αύξουσες πλησιάζουν την τιμή 1 το σφάλμα $|Q_{el} - Q_s|$ αυξάνεται ενώ το σφάλμα $|r_{0_{el}} - r_{0_s}|$ μειώνεται.

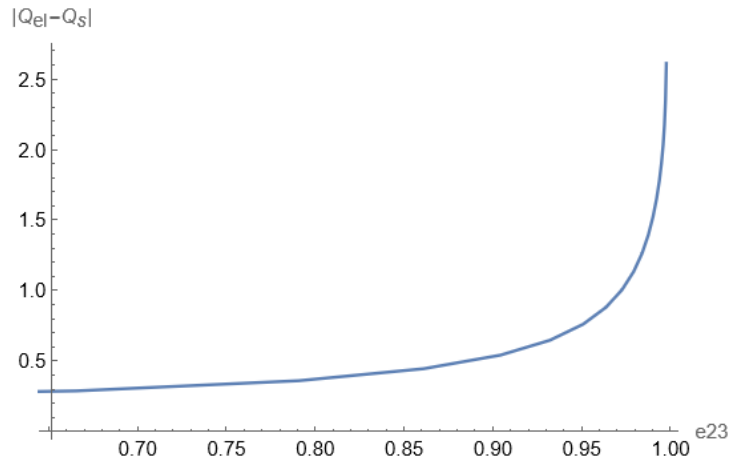
e12	e23	e31	a1	a2	a3	$ Q_{e1}-Q_s $	$ r_{\theta e1}-r_{\theta s} $
0.691661	0.384615	0.745356	9.	6.5	6.	0.231381	7.48795
0.675272	0.665582	0.834858	9.5263	7.0263	5.2439	0.288306	6.86973
0.659952	0.790765	0.887975	10.0526	7.5526	4.6231	0.360552	6.20121
0.645594	0.861151	0.921568	10.5789	8.0789	4.1069	0.445749	5.58856
0.632106	0.904337	0.943724	11.1053	8.6053	3.6729	0.542026	5.0871
0.619409	0.932222	0.958793	11.6316	9.1316	3.3046	0.647706	4.71191
0.607431	0.950893	0.969302	12.1579	9.6579	2.9893	0.761261	4.45329
0.596108	0.96375	0.976786	12.6842	10.1842	2.7172	0.881214	4.29097
0.585383	0.972808	0.982211	13.2105	10.7105	2.4807	1.00607	4.20308
0.575208	0.979311	0.986204	13.7368	11.2368	2.2739	1.13427	4.17091
0.565536	0.984059	0.989185	14.2632	11.7632	2.092	1.26428	4.1802
0.55633	0.987576	0.991438	14.7895	12.2895	1.9312	1.39462	4.22097
0.547555	0.990218	0.993161	15.3158	12.8158	1.7882	1.52417	4.28638
0.539177	0.992224	0.994491	15.8421	13.3421	1.6606	1.65189	4.37142
0.531168	0.993765	0.995528	16.3684	13.8684	1.5462	1.77772	4.47131
0.523502	0.994961	0.996344	16.8947	14.3947	1.4433	1.90282	4.57962
0.516154	0.995897	0.996992	17.4211	14.9211	1.3503	2.0313	4.68595
0.509106	0.996635	0.997509	17.9474	15.4474	1.2661	2.17224	4.77269
0.502336	0.997224	0.997925	18.4737	15.9737	1.1895	2.34737	4.81096
0.495827	0.997695	0.998262	19.	16.5	1.1196	2.61017	4.75599

Πίνακας 7.1

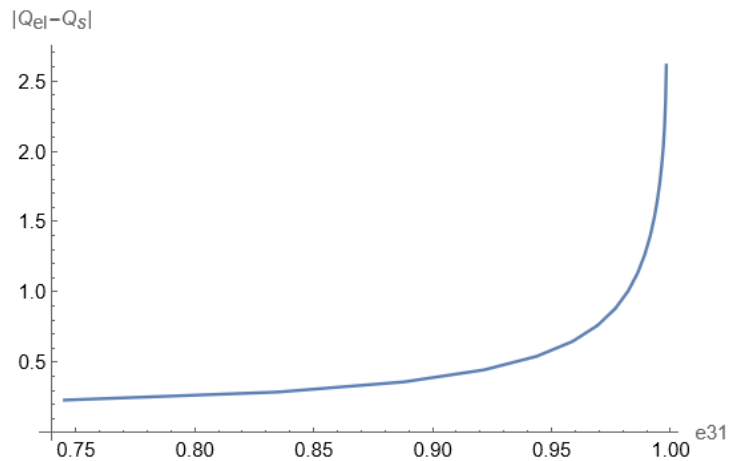
Στα διαγράμματα 7.1 - 7.3 απεικονίζεται η μεταβολή του σφάλματος της ροπής $|Q_{el} - Q_s|$ σε σχέση με τις τρεις κύριες εκκεντρότητες e_{12} , e_{23} , e_{31} . Παρατηρούμε ότι το σφάλμα $|Q_{el} - Q_s|$ είναι αντιστρόφως ανάλογο της εκκεντρότητας e_{12} και ανάλογο των εκκεντροτήτων e_{23} , e_{31} . Ειδικότερα στα διαγράμματα 7.2, 7.3 το σφάλμα αυξάνεται απότομα όταν οι εκκεντρότητες e_{23} , e_{31} ξεπεράσουν την τιμή 0.9.



Εικόνα 7.1

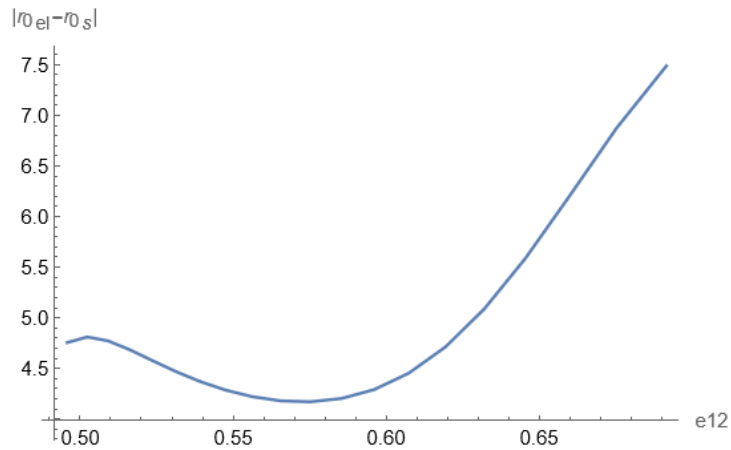


Εικόνα 7.2

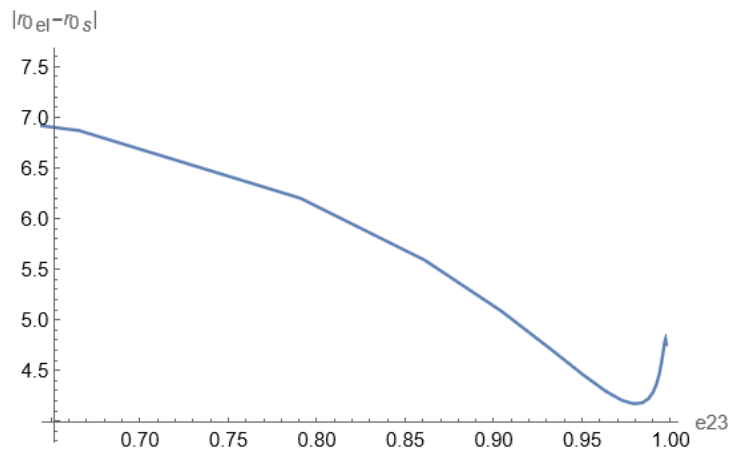


Εικόνα 7.3

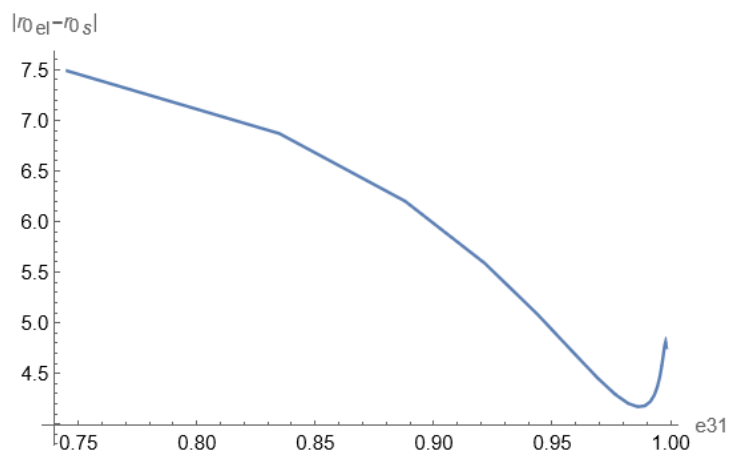
Στα διαγράμματα 7.4 - 7.6 απεικονίζεται η μεταβολή του σφάλματος της θέσης $|\mathbf{r}_{0_{el}} - \mathbf{r}_{0_s}|$ σε σχέση με τις τρεις κύριες εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} . Παρατηρούμε ότι το σφάλμα $|\mathbf{r}_{0_{el}} - \mathbf{r}_{0_s}|$ είναι ανάλογο της εκκεντρότητας e_{12} και αντιστρόφως ανάλογο των εκκεντροτήτων e_{23}, e_{31} .



Εικόνα 7.4

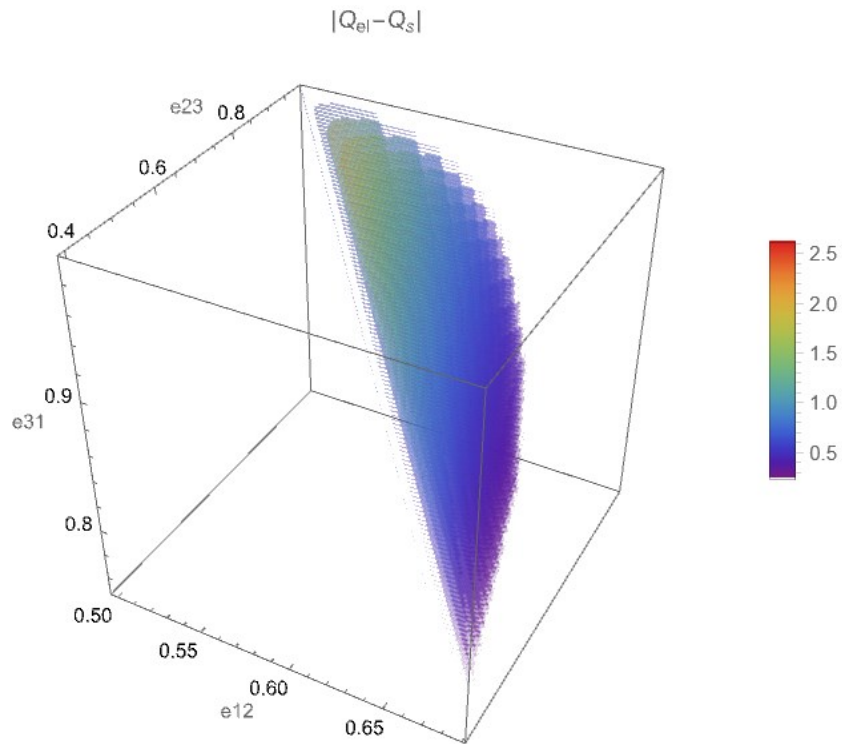


Εικόνα 7.5

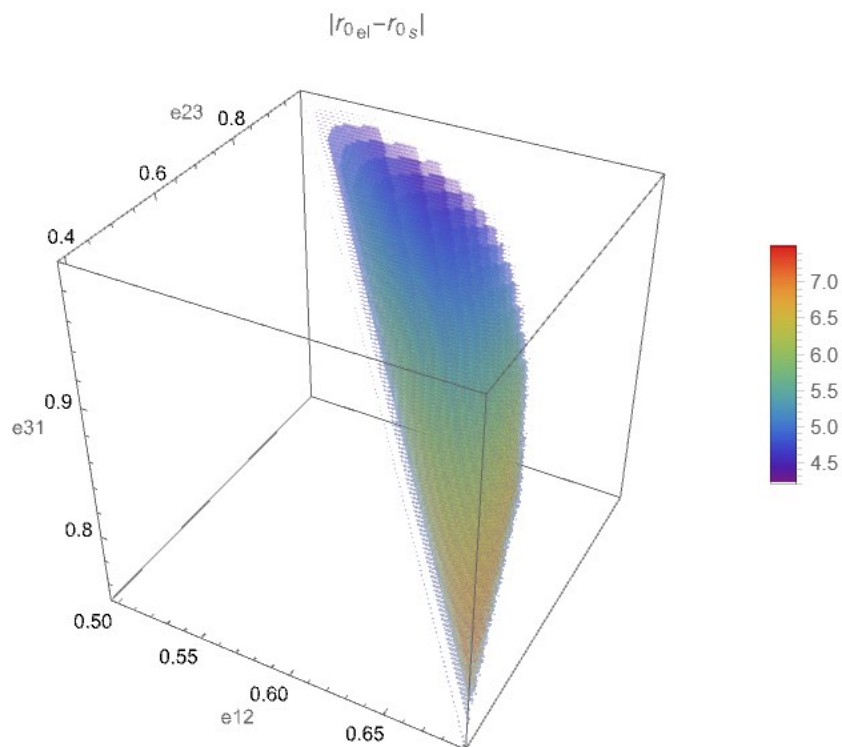


Εικόνα 7.6

Στα τρισδιάστατα διαγράμματα πυκνότητας 7.7, 7.8 απεικονίζεται η πυκνότητα του σφάλματος της ροπής $|Q_{el} - Q_s|$ και της θέσης $|r_{0el} - r_{0s}|$ αντίστοιχα σε συνάρτηση με τις τρεις κύριες εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} .



Εικόνα 7.7



Εικόνα 7.8

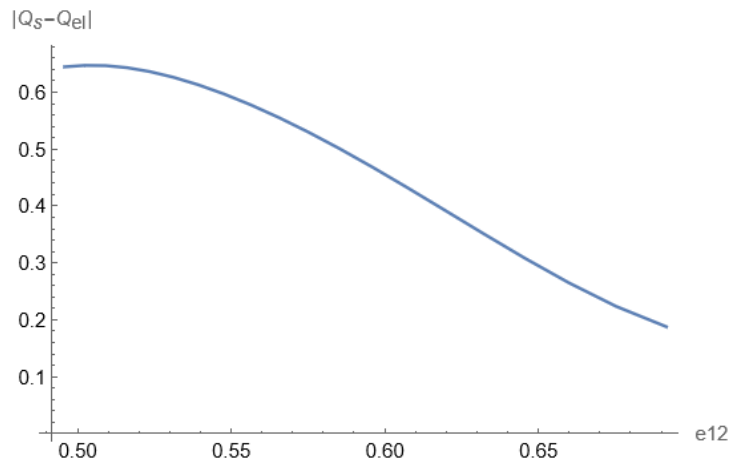
Σφαιρικός εγκέφαλος

Ο πίνακας 7.2 απεικονίζει τη μεταβολή των σφαλμάτων της θέσης και της ροπής καθώς αυξάνονται οι ημιάξονες a_1, a_2 του ελλειψοειδούς ενώ ο όγκος του διατηρείται σταθερός και ίσος με $V = 468\pi \text{ cm}^3$. Τα διανύσματα $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_s, \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0_s}$ αναφέρονται στην πραγματική πηγή και έχουν προκύψει από τον σφαιρικό αλγόριθμο αντιστροφής ενώ τα $\mathbf{Q}_{el}, \mathbf{r}_{0_{el}}$ αναφέρονται στην προσεγγιστικά προσδιορισμένη πηγή μέσω του ελλειψοειδούς αλγορίθμου. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι καθώς η εκκεντρότητα e_{12} φθίνουσα πλησιάζει την τιμή 0.5 και οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31} αύξουσες πλησιάζουν την τιμή 1, το σφάλμα της ροπής $|\mathbf{Q}_{el} - \mathbf{Q}_s|$ και το σφάλμα της θέσης $|\mathbf{r}_{0_{el}} - \mathbf{r}_{0_s}|$ αυξάνονται.

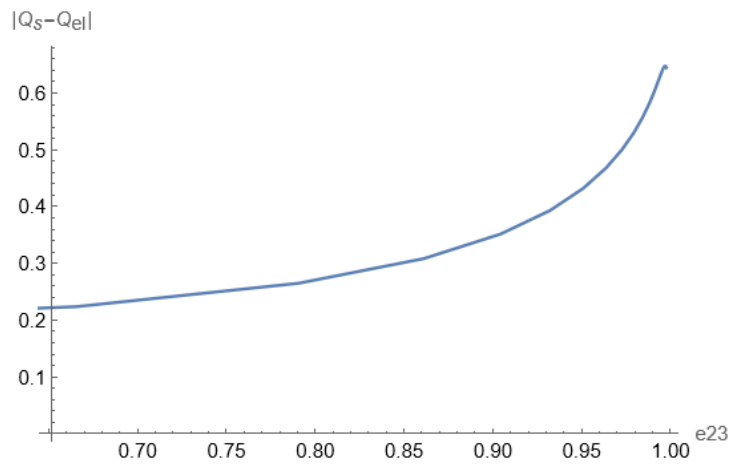
e12	e23	e31	a1	a2	a3	$ \mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el} $	$ \mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}} $
0.691661	0.384615	0.745356	9.	6.5	6.	0.18781	6.44845
0.675272	0.665582	0.834858	9.5263	7.0263	5.2439	0.223683	3.88311
0.659952	0.790765	0.887975	10.0526	7.5526	4.6231	0.264927	3.85059
0.645594	0.861151	0.921568	10.5789	8.0789	4.1069	0.308282	4.2946
0.632106	0.904337	0.943724	11.1053	8.6053	3.6729	0.351492	5.03881
0.619409	0.932222	0.958793	11.6316	9.1316	3.3046	0.393047	6.05481
0.607431	0.950893	0.969302	12.1579	9.6579	2.9893	0.432029	7.34658
0.596108	0.96375	0.976786	12.6842	10.1842	2.7172	0.467928	8.93148
0.585383	0.972808	0.982211	13.2105	10.7105	2.4807	0.500498	10.8367
0.575208	0.979311	0.986204	13.7368	11.2368	2.2739	0.529652	13.0986
0.565536	0.984059	0.989185	14.2632	11.7632	2.092	0.55542	15.7654
0.55633	0.987576	0.991438	14.7895	12.2895	1.9312	0.577872	18.8977
0.547555	0.990218	0.993161	15.3158	12.8158	1.7882	0.59713	22.5768
0.539177	0.992224	0.994491	15.8421	13.3421	1.6606	0.613246	26.9025
0.531168	0.993765	0.995528	16.3684	13.8684	1.5462	0.626283	32.0089
0.523502	0.994961	0.996344	16.8947	14.3947	1.4433	0.636234	38.0701
0.516154	0.995897	0.996992	17.4211	14.9211	1.3503	0.643077	45.327
0.509106	0.996635	0.997509	17.9474	15.4474	1.2661	0.646705	54.0965
0.502336	0.997224	0.997925	18.4737	15.9737	1.1895	0.647117	64.8349
0.495827	0.997695	0.998262	19.	16.5	1.1196	0.644621	78.1667

Πίνακας 7.2

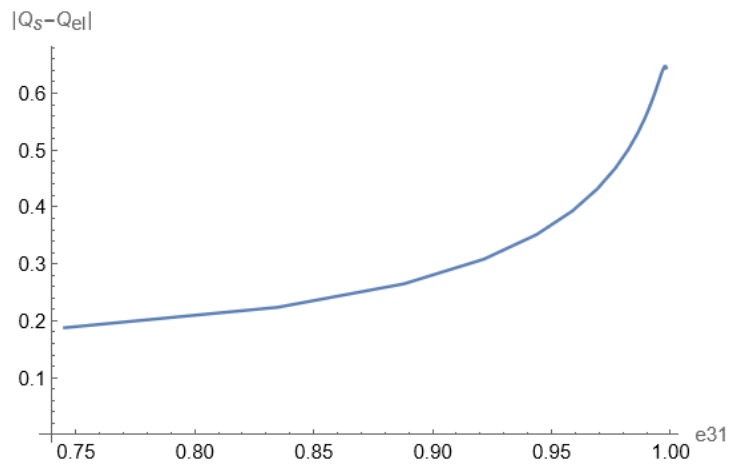
Στα διαγράμματα 7.9 - 7.11 απεικονίζεται η μεταβολή του σφάλματος της ροπής $|\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el}|$ σε σχέση με τις τρεις κύριες εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} . Παρατηρούμε ότι το σφάλμα $|\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el}|$ είναι αντιστρόφως ανάλογο της εκκεντρότητας e_{12} και ανάλογο των εκκεντροτήτων e_{23}, e_{31} . Ειδικότερα στα διαγράμματα 7.10, 7.11, το σφάλμα $|\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{el}|$ αυξάνεται απότομα όταν οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31} ξεπεράσουν την τιμή 0.9.



Εικόνα 7.9

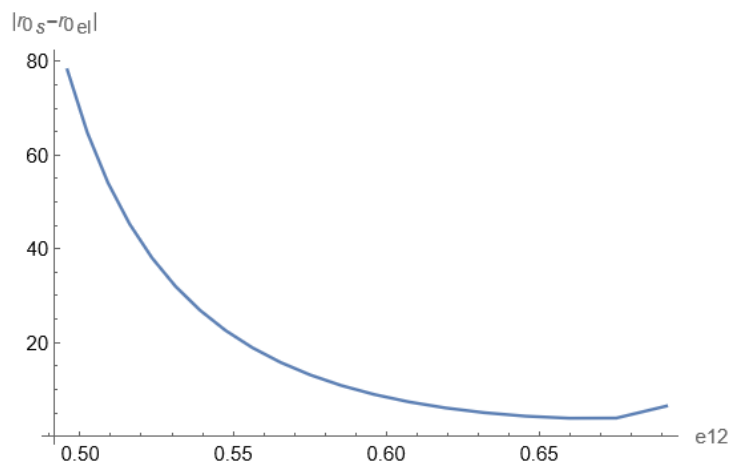


Εικόνα 7.10

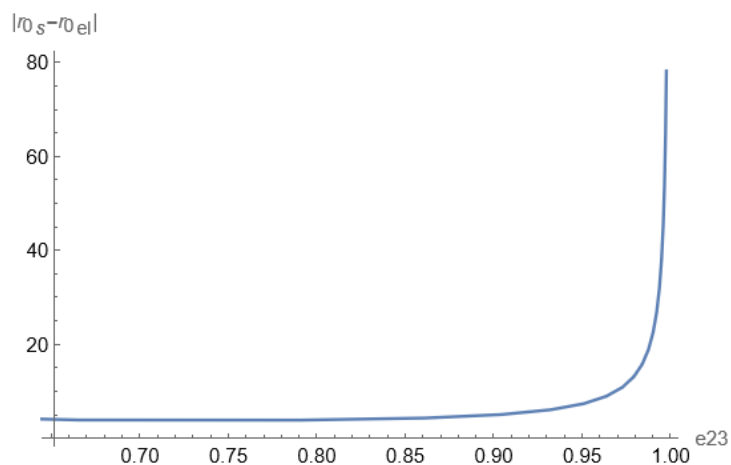


Εικόνα 7.11

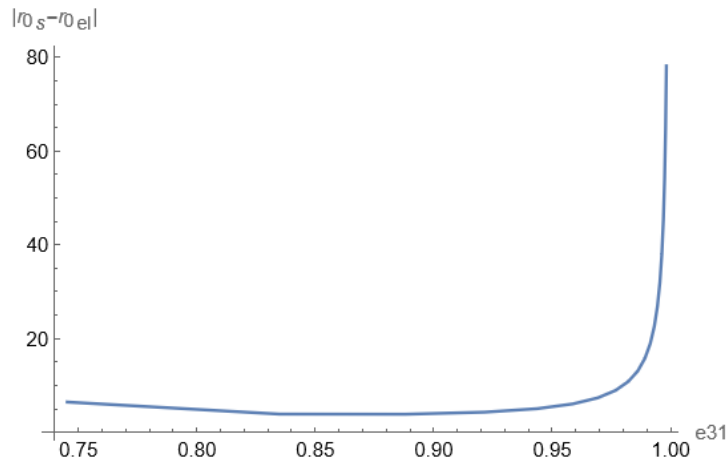
Στα διαγράμματα 7.12 - 7.14 απεικονίζεται η μεταβολή του σφάλματος της θέσης $|\mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}}|$ σε σχέση με τις τρεις κύριες εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} . Παρατηρούμε ότι το σφάλμα $|\mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}}|$ είναι αντιστρόφως ανάλογο της εκκεντρότητας e_{12} και ανάλογο των εκκεντροτήτων e_{23}, e_{31} . Ειδικότερα στα διαγράμματα, 7.13, 7.14 το σφάλμα $|\mathbf{r}_{0_s} - \mathbf{r}_{0_{el}}|$ αυξάνεται απότομα όταν οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31} ξεπεράσουν την τιμή 0.9.



Εικόνα 7.12

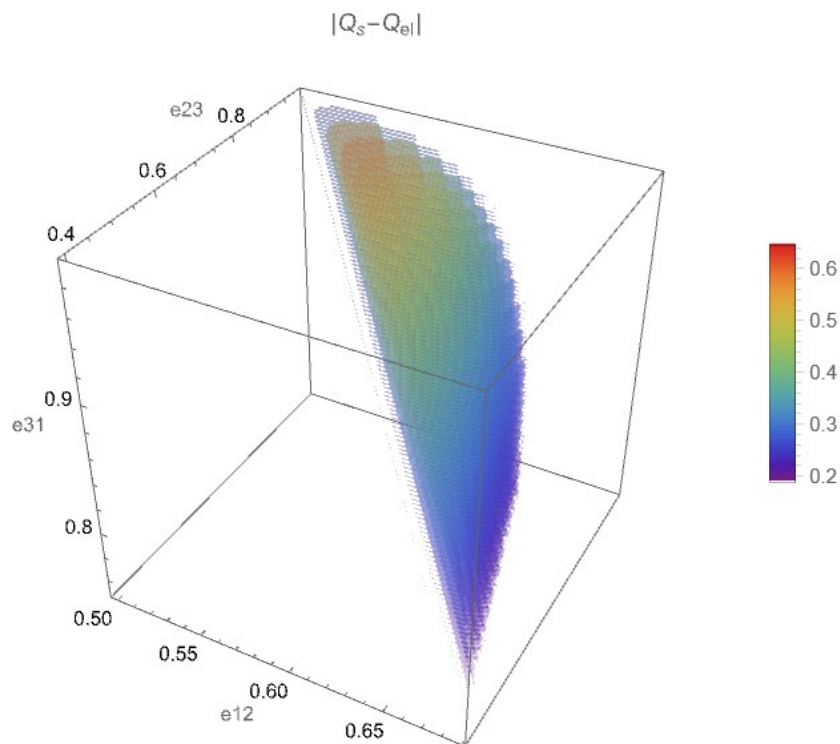


Εικόνα 7.13

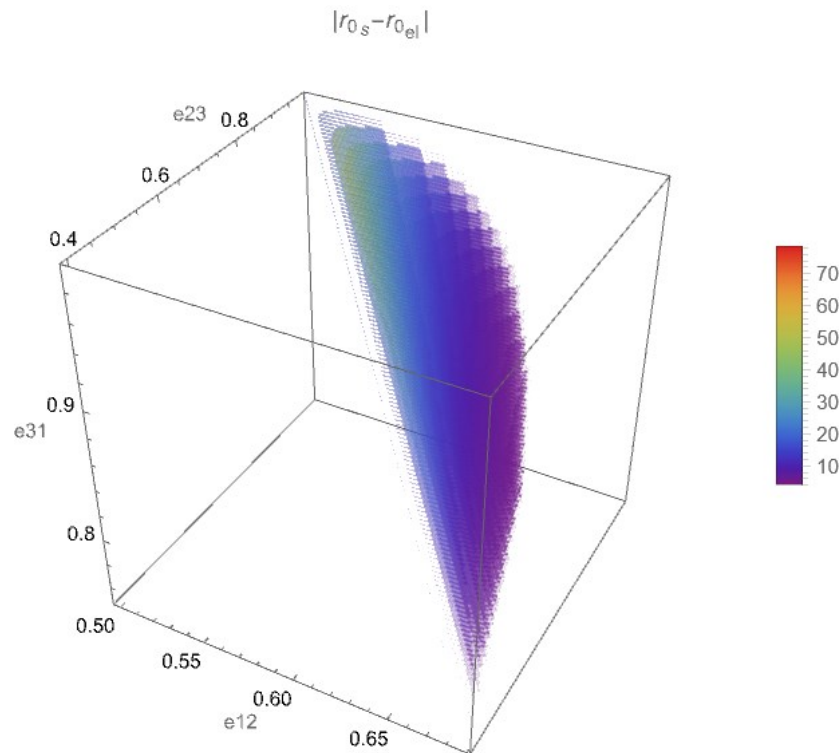


Εικόνα 7.14

Στα τρισδιάστατα διαγράμματα πυκνότητας 7.15 - 7.16 απεικονίζεται η πυκνότητα του σφάλματος της ροπής $|Q_s - Q_{el}|$ και της θέσης $|r_{0_s} - r_{0_{el}}|$ αντίστοιχα σε συνάρτηση με τις τρεις κύριες εκκεντρότητες e_{12}, e_{23}, e_{31} .



Εικόνα 7.15



Εικόνα 7.16

Μελετώντας τα αποτελέσματα της πρώτης περίπτωσης, που αναφέρονται στον ελλειψοειδή εγκέφαλο, στην οποία ο προσδιορισμός της πηγής γίνεται μέσω του σφαιρικού αλγορίθμου και της δεύτερης περίπτωσης, που αναφέρονται στον σφαιρικό εγκέφαλο, στην οποία ο προσδιορισμός της πηγής γίνεται μέσω του ελλειψοειδούς αλγορίθμου, παρατηρούμε ότι τα σφάλματα μειώνονται όταν οι εκκεντρότητες βρίσκονται σε μια περιοχή γύρω από το 0.7. Επιπλέον παρατηρείται μια απότομη αύξηση του σφάλματος όταν οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31} γίνουν μεγαλύτερες από το 0.9 και η εκκεντρότητα e_{12} γίνει μεγαλύτερη από 0.5. Εξάιρεση αποτελεί το σφάλμα της θέσης $|\mathbf{r}_{0el} - \mathbf{r}_{0s}|$ στην ελλειψοειδή θεώρηση όπου ισχύει ακριβώς το αντίθετο. Δηλαδή το σφάλμα είναι αυξημένο όταν οι εκκεντρότητες είναι κοντά στο 0.7, τιμές που χαρακτηρίζουν τα ελλειψοειδή που προσεγγίζουν καλύτερα τον εγκέφαλο, ενώ μειώνεται σε μια περιοχή γύρω από το 0.9, όπως παρατηρούμε και από τα διαγράμματα 7.5, 7.6. Επίσης παρατηρούμε μια ομοιότητα στη συμπεριφορά όλων των σφαλμάτων καθώς αυξάνονται οι εκκεντρότητες e_{23}, e_{31} ενώ παρατηρούμε διαφορετική συμπεριφορά όταν αυξάνεται η εκκεντρότητα e_{12} . Αυτή η συμπεριφορά μπορεί να εξηγηθεί από τη γεωμετρία του ελλειψοειδούς καθώς η αύξηση της εκκεντρότητας e_{12} μειώνει το λόγο $\frac{a_2}{a_1}$ και το

ελλειψοειδές τείνει να γίνει βελονοειδές ενώ η αύξηση των εκκεντροτήτων e_{23}, e_{31} οδηγεί οριακά σε ένα κυκλικό δίσκο.

Επίλογος

Το πραγματικό σχήμα του εγκεφάλου προσεγγίζεται μαθηματικά με σημαντική ακρίβεια με ένα τριαξονικό ελλειψοειδές. Στις ιατρικές εφαρμογές όπου απαιτείται υπολογιστικός αλγόριθμος ο εγκέφαλος προτυποποιείται με σφαίρα ίσου όγκου με αυτόν του ελλειψοειδούς εγκεφάλου. Ειδικότερα όταν απαιτείται να προσδιοριστεί η πηγή ενός ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος τότε αξιοποιείται υπολογιστικά η μαθηματική επίλυση του αντίστροφου προβλήματος τη EEG. Σε αυτή τη διαδικασία η χρήση του σφαιρικού μοντέλου αντί της πραγματικής γεωμετρίας του εγκεφάλου δημιουργεί σφάλματα στον προσδιορισμό της πηγής. Στην εργασία αυτή θεωρούμε ότι η πηγή είναι ένα σημειακό δίπολο και υπολογίζουμε το σφάλμα που δημιουργείται στον εντοπισμό της θέσης και της ροπής του διπόλου στο αντίστροφο πρόβλημα όταν τα δεδομένα προέρχονται από έναν ελλειψοειδή εγκέφαλο και ο αλγόριθμος αντιστροφής τα εκλαμβάνει σαν να προέρχονται από μια σφαίρα και αντίστροφα.

Αρχικά έγινε μια εισαγωγή στη σχεδόν στατική προσέγγιση των εξισώσεων του Maxwell, επιλύθηκαν το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα στη σφαιρική και στην ελλειψοειδή γεωμετρία και προέκυψε ο αλγόριθμος αντιστροφής για το σφαιρικό και το ελλειψοειδές μοντέλο αντίστοιχα. Στη συνέχεια οι δύο αλγόριθμοι συνδέθηκαν καθώς στο εξωτερικό του κεφαλιού το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται με μοναδικό τρόπο και επομένως οι αναπαραστάσεις του ως προς κάθε σύστημα συμπίπτουν. Η σύνδεση αυτή των δύο αναπτυγμάτων αξιοποιήθηκε, μέσω του ελλειπτοσφαιρικού συστήματος, για τη μεταφορά πληροφορίας στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δυο μοντέλων. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σύνδεση υπολογίστηκαν αναλυτικά τα σφάλματα που προκύπτουν στον προσδιορισμό της θέσης και της ροπής της διπολικής πηγής που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός ελλειψοειδούς και ενός σφαιρικού εγκεφάλου όταν το μοντέλο περιγραφής του εγκεφάλου είναι διαφορετικό από το βέλτιστο. Τέλος έγιναν αριθμητικά πειράματα για τον υπολογισμό αυτών των σφαλμάτων χρησιμοποιώντας ελλειψοειδή μοντέλα σταθερού όγκου και διαφορετικών εκκεντροτήτων.

Στην περίπτωση όπου ο εγκέφαλος είναι ελλειψοειδής, ενώ μοντελοποιείται ως σφαιρικός και επομένως χρησιμοποιείται ο σφαιρικός αλγόριθμος, το σφάλμα στον προσδιορισμό της διπολικής ροπής ελαχιστοποιείται όταν οι κύριες εκκεντρότητες πλησιάζουν τις μέσες τιμές του πραγματικού σχήματος του εγκεφάλου και αυξάνεται καθώς οι εκκεντρότητες απομακρύνονται από αυτές τις τιμές. Όσον αφορά το σφάλμα της θέσης δεν ακολουθεί την

ίδια συμπεριφορά, δηλαδή ακόμα κι αν οι εκκεντρότητες είναι κοντά στις πραγματικές το σφάλμα στη θέση παραμένει σημαντικό.

Αντίστοιχα όταν ο εγκέφαλος είναι σφαιρικός και χρησιμοποιείται ο ελλειψοειδής αλγόριθμος για την αντιστροφή, τα σφάλματα στον προσδιορισμό της θέσης και της ροπής μειώνονται καθώς οι εκκεντρότητες του προσεγγιστικού ελλειψοειδούς μοντέλου πλησιάζουν το μέσο ανθρώπινο εγκέφαλο, ενώ αυξάνονται καθώς απομακρυνόμαστε από αυτές τις τιμές. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς οι διαστάσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί στα αριθμητικά πειράματα είναι οι πλησιέστερες στο σφαιρικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση αυτή.

Η εργασία περιλαμβάνει τον αναλυτικό υπολογισμό των σφαλμάτων που στον αλγόριθμο αντιστροφής χρησιμοποιούνται άμεσα τα δεδομένα της πηγής όπως προκύπτουν από το βέλτιστο μοντέλο. Η περαιτέρω αναλυτική και αριθμητική μελέτη αυτών των σφαλμάτων απαιτεί επιπλέον χειρισμούς στη σύνδεση του ελλειψοειδούς και του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων και των αντίστοιχων συντελεστών των αναπτυγμάτων και αποτελεί μελλοντικό στόχο της ερευνητικής μας εργασίας. Επίσης η περαιτέρω αναλυτική μελέτη της επίδρασης των εκκεντροτήτων του ελλειψοειδούς μοντέλου στα παραπάνω σφάλματα μέσω της θεωρίας των διαταραχών αποτελεί μελλοντική ερευνητική κατεύθυνση.

Βιβλιογραφία

Ακολουθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές της Εργασίας.

- Allen, J. S., Damasio, H., and Grabowski, T. J. (2002). Normal neuroanatomical variation in the human brain: an MRI-volumetric study. *American Journal of Physical Anthropology: The Official Publication of the American Association of Physical Anthropologists*, 118(4), 341–358.
- Ball, R., Shu, C., Xi, P., Rioux, M., Luximon, Y., and Molenbroek, J. (2010). A comparison between Chinese and Caucasian head shapes. *Applied Ergonomics*, 41(6), 832–839.
- Bécherrawy, T. (2013). *Electromagnetism: Maxwell equations, wave propagation and emission*. John Wiley & Sons.
- Collura, T. F. (1993). History and evolution of electroencephalographic instruments and techniques. *Journal of Clinical Neurophysiology*, 10(4), 476–504.
- Dassios, G. (2012). *Ellipsoidal harmonics: theory and applications* (Vol. 146). Cambridge University Press.
- Dassios, G., Doschoris, M., and Satrazemi, K. (2014). Localizing brain activity from multiple distinct sources via EEG. *Journal of Applied Mathematics*, 2014.
- Dassios, G., and Fokas, A. S. (2012). Electro-magneto-encephalography for the three-shell model: a single dipole in ellipsoidal geometry. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35(12), 1415–1422.
- Dassios, G., Giapalaki, S. N., Kandili, A. N., and Kariotou, F. (2007). The exterior magnetic field for the multilayer ellipsoidal model of the brain. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 60(1), 1–25.
- Hämäläinen, M., Hari, R., Ilmoniemi, R. J., Knuutila, J., and Lounasmaa, O. v. (1993). Magnetoencephalography—theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain. *Reviews of Modern Physics*, 65(2), 413.
- Hari, R., and Puce, A. (2017). *MEG-EEG Primer*. Oxford University Press.
- Jackson, J. D. (1962). *Classical Electrodynamics*. New York: John Wiley & Sons. Inc.

- Kariotou, F. (2004). Electroencephalography in ellipsoidal geometry. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 290(1), 324–342.
- Malmivuo, J., Plonsey, R., and others. (1995). *Bioelectromagnetism: principles and applications of bioelectric and biomagnetic fields*. Oxford University Press, USA.
- Morse, P. M., and Feshbach, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics. Vol. 1-2*. McGraw-Hill.
- Pasiou, N.-P., and Dassios, G. (2022). On the Geometric Sensitivity of the EEG Inversion Algorithm. *La Matematica*. <https://doi.org/10.1007/S44007-022-00026-X>
- Stratton, J. A. (1941). *Electromagnetic theory*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Δάσιος, Γ. (2013). *Μαθηματική Θεμελίωση της Ηλεκτρικής και Μαγνητικής Δραστηριότητας του Εγκεφάλου*. Πάτρα: Ε.Α.Π.

Παράρτημα Α: Ελλειψοειδείς Αρμονικές

Ως ελλειψοειδές αναφοράς θεωρούμε

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad 0 < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \infty \quad (\text{A.1})$$

Η εσωτερική ελλειψοειδής αρμονική συνάρτηση δίνεται από την έκφραση

$$\mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) = E_n^m(\rho) E_n^m(\mu) E_n^m(\nu) \quad (\text{A.2})$$

ενώ για την εξωτερική ελλειψοειδή αρμονική συνάρτηση ισχύει

$$\mathbb{F}_n^m(\rho, \mu, \nu) = (2n + 1) \mathbb{E}_n^m(\rho, \mu, \nu) I_n^m(\rho)$$

όπου το ελλειπτικό ολοκλήρωμα $I_n^m(\rho)$ έχει τη μορφή

$$I_n^m(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{[E_n^m(t)]^2 \sqrt{t^2 - h_2^2} \sqrt{t^2 - h_3^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots, 2n + 1 \quad (\text{A.3})$$

Οι σταθερές κανονικοποίησης γ_n^m βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 συνοψίζονται ως εξής

$$\gamma_0^1 = 4\pi \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma_1^1 = \frac{4\pi}{3} h_2^2 h_3^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_1^2 = \frac{4\pi}{3} h_1^2 h_3^2 \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_1^3 = \frac{4\pi}{3} h_1^2 h_2^2 \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_2^1 = -\frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda - a_1^2) (\Lambda - a_2^2) (\Lambda - a_3^2) \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_2^2 = \frac{8\pi}{5} (\Lambda - \Lambda') (\Lambda' - a_1^2) (\Lambda' - a_2^2) (\Lambda' - a_3^2) \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_2^3 = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^2 h_3^4 \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma_2^4 = \frac{4\pi}{15} h_1^2 h_2^4 h_3^2 \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_2^5 = \frac{4\pi}{15} h_1^4 h_2^2 h_3^2 \quad (\text{A.12})$$

όπου

$$\left. \begin{matrix} \Lambda \\ \Lambda' \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} \sum_{\kappa=1}^3 a_{\kappa}^2 \pm \frac{1}{3} \sqrt{\sum_{\kappa=1}^3 \left(a_{\kappa}^4 - \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2}{a_{\kappa}^2} \right)} \quad (\text{A.13})$$

και

$$h_1 = \sqrt{a_2^2 - a_3^2} \quad (\text{A.14})$$

$$h_2 = \sqrt{a_1^2 - a_3^2} \quad (\text{A.15})$$

$$h_3 = \sqrt{a_1^2 - a_2^2} \quad (\text{A.16})$$

οι ημιστιακές αποστάσεις του ελλειψοειδούς αναφοράς.

Οι εσωτερικές συναρτήσεις Lamè βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 συνοψίζονται ως εξής

$$E_0^1(x) = 1 \quad (\text{A.17})$$

$$E_1^1(x) = x \quad (\text{A.18})$$

$$E_1^2(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (\text{A.19})$$

$$E_1^3(x) = \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (\text{A.20})$$

$$E_2^1(x) = x^2 + \Lambda - a_1^2 \quad (\text{A.21})$$

$$E_2^2(x) = x^2 + \Lambda' - a_1^2 \quad (\text{A.22})$$

$$E_2^3(x) = x \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \quad (\text{A.23})$$

$$E_2^4(x) = x \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (\text{A.24})$$

$$E_2^5(x) = \sqrt{|x^2 - h_3^2|} \sqrt{|x^2 - h_2^2|} \quad (\text{A.25})$$

Οι εσωτερικές ελλειψοειδείς αρμονικές συναρτήσεις βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 σε καρτεσιανή μορφή συνοψίζονται ως εξής

$$\mathbb{E}_0^1(\mathbf{r}) = 1 \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}) = x_1 h_2 h_3 \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}) = x_2 h_1 h_3 \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}) = x_3 h_1 h_2 \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) = (\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda - a_m^2} + 1 \right) \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}) = (\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m^2}{\Lambda' - a_m^2} + 1 \right) \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3^2 x_1 x_2 \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}) = h_1 h_2^2 h_3 x_1 x_3 \quad (\text{A.33})$$

$$\mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}) = h_1^2 h_2 h_3 x_2 x_3 \quad (\text{A.34})$$

Οι κλίσεις των ελλειψοειδών αρμονικών βαθμού μικρότερου ή ίσου του 2 σε καρτεσιανή μορφή συνοψίζονται ως εξής

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_1^1(\mathbf{r}) = h_2 h_3 \hat{\mathbf{x}}_1 \quad (\text{A.35})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_1^2(\mathbf{r}) = h_1 h_3 \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (\text{A.36})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_1^3(\mathbf{r}) = h_1 h_2 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{A.37})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_2^1(\mathbf{r}) = 2(\Lambda - a_1^2)(\Lambda - a_2^2)(\Lambda - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m}{\Lambda - a_m^2} \hat{\mathbf{x}}_m \right) \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_2^2(\mathbf{r}) = 2(\Lambda' - a_1^2)(\Lambda' - a_2^2)(\Lambda' - a_3^2) \left(\sum_{m=1}^3 \frac{x_m}{\Lambda' - a_m^2} \hat{\mathbf{x}}_m \right) \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_2^3(\mathbf{r}) = h_1 h_2 h_3^2 x_2 \hat{\mathbf{x}}_1 + h_1 h_2 h_3^2 x_1 \hat{\mathbf{x}}_2 \quad (\text{A.40})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_2^4(\mathbf{r}) = h_1 h_2^2 h_3 x_3 \hat{\mathbf{x}}_1 + h_1 h_2^2 h_3 x_1 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \mathbb{E}_2^5(\mathbf{r}) = h_1^2 h_2 h_3 x_3 \hat{\mathbf{x}}_2 + h_1^2 h_2 h_3 x_2 \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (\text{A.42})$$

Παράρτημα Β: Κώδικας Mathematica

```

Clear["Global`*"]
f[a1_, a2_, a3_] := (

    av = {a1, a2, a3};
    h1 = Sqrt[a2^2 - a3^2];
    h2 = Sqrt[a1^2 - a3^2];
    h3 = Sqrt[a1^2 - a2^2];
    e12 = h3 / a1;
    e23 = h1 / (Sqrt[a1^2 - h3^2]);
    e31 = h2 / a1;
    Λ = a1^2 - ((h3^2 + h2^2) / 3) +
        (Sqrt[h1^4 + h3^2 * h2^2] / 3);
    Λp = a1^2 - ((h3^2 + h2^2) / 3) -
        (Sqrt[h1^4 + h3^2 * h2^2] / 3);
    σ = 0.3;

    r0 = 4;
    θ0 = Pi / 3;
    φ0 = Pi / 6;
    r0v = {r0, θ0, φ0};

    x0 = {x01, x02, x03};

    x01 = r0 * Cos[θ0];
    x02 = r0 * Sin[θ0] * Cos[φ0];
    x03 = r0 * Sin[θ0] * Sin[φ0];
    Q1 = Q2 = Q3 = 1 / Sqrt[3];
    Q = {Q1, Q2, Q3};

    i11[p_] :=
    NIntegrate[
        1 / (t^2 * Sqrt[t^2 - h3^2] * Sqrt[t^2 - h2^2]),
        {t, p, ∞}];
    i12[p_] :=
    NIntegrate[
        1 / (Abs[t^2 - h3^2] * Sqrt[t^2 - h3^2] *

```

```

      Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];
i13[p_] :=
  NIntegrate[
    1 / (Abs[t^2 - h2^2] * Sqrt[t^2 - h3^2] *
      Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];
i21[p_] :=
  NIntegrate[
    1 / ((t^2 + Λ - a1^2)^2 * Abs[t^2 - h3^2] *
      Sqrt[t^2 - h3^2] * Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];
i22[p_] :=
  NIntegrate[
    1 / ((t^2 + Λp - a1^2)^2 * Abs[t^2 - h3^2] *
      Sqrt[t^2 - h3^2] * Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];
i23[p_] :=
  NIntegrate[
    1 / (t^2 * Abs[t^2 - h3^2] * Sqrt[t^2 - h3^2] *
      Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];
i24[p_] :=
  NIntegrate[
    1 / (t^2 * Abs[t^2 - h2^2] * Sqrt[t^2 - h3^2] *
      Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];
i25[p_] :=
  NIntegrate[
    1 / (Abs[t^2 - h3^2] * Abs[t^2 - h2^2] *
      Sqrt[t^2 - h3^2] * Sqrt[t^2 - h2^2]), {t, p, ∞}];

(*ελλειψοειδείς συντελεστές*)

c11 = (1 / (4 * Pi * σ)) *
  (Q1 / (a1 * a2 * a3 * h2 * h3 * i11[a1]));
c12 = (1 / (4 * Pi * σ)) *
  (Q2 / (a2^2 * a3 * h1 * h3 * i12[a1]));
c13 = (1 / (4 * Pi * σ)) *
  (Q3 / (a2 * a3^2 * h1 * h2 * i13[a1]));
c21 =
  - ((Sum[Q[[m]] * x0[[m]]) / (Λ - av[[m]]), {m, 1, 3}] /

```

```

      (8 * Pi * σ * a1 * a2 * a3 * Λ * (Λ - Λp) * i21[a1])));
c22 =
  ((Sum[(Q[[m]] * x0[[m]]) / (Λp - av[[m]]), {m, 1, 3}] /
    (8 * Pi * σ * a1 * a2 * a3 * Λp * (Λ - Λp) * i22[a1])));
c23 = (3 / (4 * Pi * σ)) *
  ((Q1 * x02 + Q2 * x01) /
    (h1 * h2 * h3^2 * a2^2 * a1 * a3 * (a2 + (a1^2 / a2)) *
    i23[a1]));
c24 = (3 / (4 * Pi * σ)) *
  ((Q1 * x03 + Q3 * x01) /
    (h1 * h2^2 * h3 * a3^2 * a2 * a1 * (a3 + (a1^2 / a3)) *
    i24[a1]));
c25 = (3 / (4 * Pi * σ)) *
  ((Q2 * x03 + Q3 * x02) /
    (h1^2 * h2 * h3 * a2^2 * a3^2 * a1 *
    ((a3 / a2) + (a2 / a3)) * i25[a1]));

```

```

(*Επιλέγουμε το σημείο A(ρ,θ_ε,φ_ε) =
(20.3808,32.85,30.32)*)

```

```

x1 = l1 * Cos[θe];
x2 = Sqrt[l1^2 - h3^2] * Sin[θe] * Cos[φe];
x3 = Sqrt[l1^2 - h2^2] * Sin[θe] * Sin[φe];
l1 = 20.3808;
θe = 32.85;
φe = 30.32;

```

```

i11l1 = i11[l1];
i12l1 = i12[l1];
i13l1 = i13[l1];
i21l1 = i21[l1];
i22l1 = i22[l1];
i23l1 = i23[l1];
i24l1 = i24[l1];
i25l1 = i25[l1];

```



```

i11a1 = i11[a1];
i12a1 = i12[a1];
i13a1 = i13[a1];
i21a1 = i21[a1];
i22a1 = i22[a1];
i23a1 = i23[a1];
i24a1 = i24[a1];
i25a1 = i25[a1];

```

```

l = Sqrt[l1^2 - ((h3^2 * x2^2) / (l1^2 - h3^2)) -
  ((h2^2 * x3^2) / (l1^2 - h2^2))];

```

(*ελλειψοειδής εγκέφαλος - ακριβής πηγή*)

```

Qs1 = 4 * Pi * l^3 * σ *
  {c11 * h2 * h3 * i11[l1], c12 * h1 * h3 * i12[l1],
   c13 * h1 * h2 * i13[l1]};

```

```

Qer11 = Q - Qs1;

```

```

rθs1 =
  { (2 / 3) * h2 * h3 * l^2 *
    Re[
      ((c23 * i2311 * h3 - I * c24 * i2411 * h2) /
       (c12 * i1211 * h3 - I * c13 * i1311 * h2)) -
      (5 * c11 * i1111) /
      (c12 * i1211 * h3 - I * c13 * i1311 * h2) *
      ((c21 * i2111 * (Λ - a1^2) +
        c22 * i2211 * (Λp - a1^2) -
        I * c25 * i2511 * h2 * h3) /
       (c12 * i1211 * h3 - I * c13 * i1311 * h2)) ) ],
    (2 / 3) * h1 * l^2 *
    Re[
      ((c21 * i2111 * (Λ - a1^2) + c22 * i2211 * (Λp - a1^2)) /
       (c12 * i1211 * h3 + I * c13 * i1311 * h2)) +
      ((I * c25 * i2511 * h2 * h3) /

```

$$\begin{aligned} & (c12 * i1211 * h3 + I * c13 * i1311 * h2)] , \\ (-2 / 3) * h1 * l^2 * \\ \text{Im}[& \\ & ((c21 * i2111 * (\Lambda - a1^2) + c22 * i2211 * (\Lambda p - a1^2)) / \\ & (c12 * i1211 * h3 - I * c13 * i1311 * h2)) - \\ & ((I * c25 * i2511 * h2 * h3) / \\ & (c12 * i1211 * h3 - I * c13 * i1311 * h2))]]; \end{aligned}$$

$$r\theta er11 = x\theta - r\theta s1;$$

$$\text{Norm}[Qer11];$$

$$\text{Norm}[r\theta er11];$$

(*ελλειψοειδής εγκέφαλος -
ελλειψοειδής αλγόριθμος αντιστροφής*)

$$\begin{aligned} Qe11 = 4 * \text{Pi} * \sigma * \{ & h2 * h3 * a1 * a2 * a3 * i11a1 * c11, \\ & h1 * h3 * a2^2 * a3 * i12a1 * c12, \\ & h1 * h2 * a2 * a3^2 * i13a1 * c13 \}; \end{aligned}$$

$$Qer12 = Qe11 - Qs1;$$

$$\begin{aligned} r\theta e11 = & \\ \{ & ((a1 * h2 * h3) / 6) * \\ & (((a2^2 + a1^2) * i23a1 * c23) / (a2 * i12a1 * c12)) + \\ & (((a3^2 + a1^2) * i24a1 * c24) / (a3 * i13a1 * c13)) - \\ & ((i11a1 * c11) / (i12a1 * c12)) * \\ & ((a1 * (a3^2 + a2^2) * i25a1 * c25) / \\ & (a2 * a3 * i13a1 * c13)), \\ & ((h1 * h3) / 6) * \\ & (((a2^2 + a1^2) * i23a1 * c23) / (i11a1 * c11)) + \\ & ((a1 * (a3^2 + a2^2) * i25a1 * c25) / \\ & (a3 * i13a1 * c13)) - \\ & ((a2 * i12a1 * c12) / (i11a1 * c11)) * \\ & (((a3^2 + a1^2) * i24a1 * c24) / (a3 * i13a1 * c13)), \\ & ((h1 * h2) / 6) * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left((a3^2 + a1^2) * i24a1 * c24 \right) / (i11a1 * c11) \right) + \\ & \left((a1 * (a3^2 + a2^2) * i25a1 * c25) / \right. \\ & \quad \left. (a2 * i12a1 * c12) \right) - \\ & \left((a3 * i13a1 * c13) / (i11a1 * c11) \right) * \\ & \left((a2^2 + a1^2) * i23a1 * c23 \right) / \\ & \quad (a2 * i12a1 * c12) \end{aligned} \};$$

$$r\theta er12 = r\theta e11 - r\theta s1;$$

$$\text{Norm}[Qer12];$$

$$\text{Norm}[r\theta er12];$$

(*σφαιρικοί συντελεστές*)

$$B1m1 = (1/2) * \text{Sqrt}[3 / (2 * \text{Pi})] * (1 / \sigma) * (Q2 + I * Q3);$$

$$B1\theta = (1/2) * \text{Sqrt}[3 / \text{Pi}] * (1 / \sigma) * (Q1);$$

$$B11 = (1/2) * \text{Sqrt}[3 / (2 * \text{Pi})] * (1 / \sigma) * (Q2 - I * Q3);$$

$$B2m2 = (1/4) * \text{Sqrt}[15 / (2 * \text{Pi})] * (1 / \sigma) * \\ ((Q2 * x\theta 2 - Q3 * x\theta 3) + I * (Q2 * x\theta 3 + Q3 * x\theta 2));$$

$$B2m1 = (1/4) * \text{Sqrt}[15 / (2 * \text{Pi})] * (1 / \sigma) * \\ ((Q2 * x\theta 1 + Q1 * x\theta 2) + I * (Q3 * x\theta 1 + Q1 * x\theta 3));$$

$$B2\theta = (1/4) * \text{Sqrt}[5 / \text{Pi}] * (1 / \sigma) * \\ (2 * Q1 * x\theta 1 - Q2 * x\theta 2 - Q3 * x\theta 3);$$

$$B21 = (1/4) * \text{Sqrt}[15 / (2 * \text{Pi})] * (1 / \sigma) * \\ ((Q2 * x\theta 1 + Q1 * x\theta 2) - I * (Q3 * x\theta 1 + Q1 * x\theta 3));$$

$$B22 = (1/4) * \text{Sqrt}[15 / (2 * \text{Pi})] * (1 / \sigma) * \\ ((Q2 * x\theta 2 - Q3 * x\theta 3) - I * (Q2 * x\theta 3 + Q3 * x\theta 2));$$

(*σφαιρικός εγκέφαλος - ακριβής πηγή*)

$$Qe12 = \text{Sqrt}[8 * \text{Pi} / 3] * (1 / l^3) * \sigma * a2 * a3 * \\ \{ \text{Sqrt}[1/2] * a1 * (i11a1 / i1111) * B1\theta, \\ a2 * (i12a1 / i1211) * \text{Re}[B11], \\ -a3 * (i13a1 / i1311) * \text{Im}[B11] \};$$

$$Qer21 = Q - Qe12;$$

```

r0e12 = (1 / Sqrt[5]) *
  { (a1 / (2 * l^2)) *
    (((a2^2 + a1^2) * i12l1 * i23a1 * Re[B21]) /
     (a2 * i12a1 * i23l1 * Re[B11])) +
    (((a3^2 + a1^2) * i13l1 * i24a1 * Im[B21]) /
     (a3 * i13a1 * i24l1 * Im[B11])) -
    Sqrt[2] * ((i11a1 * i12l1 * B10) /
     (i11l1 * i12a1 * Re[B11])) *
    ((a1 * (a3^2 + a2^2) * i13l1 * i25a1 * Im[B22]) /
     (a2 * a3 * i13a1 * i25l1 * Im[B11]))),
  (1 / (2 * l^2)) *
    (((1 / 2) * ((a2^2 + a1^2) * i11l1 * i23a1 * Re[B21]) /
     (i11a1 * i23l1 * B10)) +
    ((a1 * (a3^2 + a2^2) * i13l1 * i25a1 * Im[B22]) /
     (a2 * a3 * i13a1 * i25l1 * Im[B11])) -
    (1 / Sqrt[2]) *
     ((a2 * i12a1 * i11l1 * Re[B11]) /
      (i11a1 * i12l1 * B10)) *
     (((a3^2 + a1^2) * i13l1 * i24l1 * Im[B21]) /
      (a3 * i13a1 * i24l1 * Im[B11]))),
  (1 / (2 * l^2)) *
    ((- (1 / 2) * ((a3^2 + a1^2) * i11l1 * i24a1 * Im[B21]) /
     (i11a1 * i24l1 * B10)) +
    ((a1 * h3 * (a2^2 + a1^2) * i12l1 * i23a1 * Re[B21]) /
     (a2 * h1 * i12a1 * i23l1 * Re[B11])) +
    (1 / Sqrt[2]) *
     ((a3 * i11l1 * i13a1 * Im[B11]) /
      (i11a1 * i13l1 * B10)) *
     (((a2^2 + a1^2) * i12l1 * i23a1 * Re[B21]) /
      (a2 * i12a1 * i23l1 * Re[B11])));
r0er21 = x0 - r0e12;

Norm[Qer21];
Norm[r0er21];

```

(*σφαιρικός εγκέφαλος - σφαιρικός αλγόριθμος*)

```

Qs2 = Sqrt [8 * Pi / 3] * σ *
  {Sqrt [1 / 2] * B10, Re [B11], -Im [B11] };
Qer22 = Qs2 - Qel2;

r0s2 = (1 / Sqrt [5]) *
  {Re [(2 * B21 / B11) - (Sqrt [2] * B10 / B11) * (B22 / B11) ],
  2 * Re [B22 / B11], -2 * Im [B22 / B11] };
r0er22 = r0s2 - r0el2;

Norm [Qer22];
Norm [r0er22];
{{e12, e23, e31, a1, a2, a3, Norm [Qer11], Norm [r0er11] },
{e12, e23, e31, a1, a2, a3, Norm [Qer12], Norm [r0er12] },
{e12, e23, e31, a1, a2, a3, Norm [Qer21], Norm [r0er21] },
{e12, e23, e31, a1, a2, a3, Norm [Qer22],
Norm [r0er22] }}

```

(*ελλειψοειδή σταθερού όγκου*)

```

set [n_] := {f[9.0000, 6.5000, 6.0000] [[n]],
f[9.5263, 7.0263, 5.2439] [[n]],
f[10.0526, 7.5526, 4.6231] [[n]],
f[10.5789, 8.0789, 4.1069] [[n]],
f[11.1053, 8.6053, 3.6729] [[n]],
f[11.6316, 9.1316, 3.3046] [[n]],
f[12.1579, 9.6579, 2.9893] [[n]],
f[12.6842, 10.1842, 2.7172] [[n]],
f[13.2105, 10.7105, 2.4807] [[n]],
f[13.7368, 11.2368, 2.2739] [[n]],
f[14.2632, 11.7632, 2.0920] [[n]],
f[14.7895, 12.2895, 1.9312] [[n]],
f[15.3158, 12.8158, 1.7882] [[n]],
f[15.8421, 13.3421, 1.6606] [[n]],
f[16.3684, 13.8684, 1.5462] [[n]],

```

```
f[16.8947, 14.3947, 1.4433][[n]],
f[17.4211, 14.9211, 1.3503][[n]],
f[17.9474, 15.4474, 1.2661][[n]],
f[18.4737, 15.9737, 1.1895][[n]],
f[19.0000, 16.5000, 1.1196][[n]]};
```

In[*]:=

(*πίνακες*)

```
TableForm[set[1],
  TableHeadings →
  {None, {"e12", "e23", "e31", "a1", "a2", "a3",
    "|Q-Qs|", "|rθ-rθs|"}}]
TableForm[set[2],
  TableHeadings →
  {None, {"e12", "e23", "e31", "a1", "a2", "a3",
    "|Qe1-Qs|", "|rθe1-rθs|"}}]
TableForm[set[3],
  TableHeadings →
  {None, {"e12", "e23", "e31", "a1", "a2", "a3",
    "|Q-Qe1|", "|rθ-rθe1|"}}]
TableForm[set[4],
  TableHeadings →
  {None, {"e12", "e23", "e31", "a1", "a2", "a3",
    "|Qs-Qe1|", "|rθs-rθe1|"}}]
```

(*γραφήματα*)

```
set11 = set[1][[All, 1]];
set12 = set[1][[All, 2]];
set13 = set[1][[All, 3]];
set17 = set[1][[All, 7]];
set18 = set[1][[All, 8]];
set31 = set[3][[All, 1]];
set32 = set[3][[All, 2]];
set33 = set[3][[All, 3]];
set37 = set[3][[All, 7]];
```

```
set38 = set[3][A11, 8];
```

```
(*ελλειψοειδής εγκέφαλος - ακριβής πηγή*)
```

```
(* e12, Q, r *)
```

```
Qe121 = Transpose[{set11, set17}];
```

```
re121 = Transpose[{set11, set18}];
```

```
ListLinePlot[Qe121, AxesLabel → {"e12", "|Qe1-Qs|"}]
```

```
ListLinePlot[re121, AxesLabel → {"e12", "|rθe1-rθs|"}]
```

```
(* e23, Q, r *)
```

```
Qe231 = Transpose[{set12, set17}];
```

```
re231 = Transpose[{set12, set18}];
```

```
ListLinePlot[Qe231, AxesLabel → {"e23", "|Qe1-Qs|"}]
```

```
ListLinePlot[re231, AxesLabel → {"e23", "|rθe1-rθs|"}]
```

```
(* e31, Q, r *)
```

```
Qe311 = Transpose[{set13, set17}];
```

```
re311 = Transpose[{set13, set18}];
```

```
ListLinePlot[Qe311, AxesLabel → {"e31", "|Qe1-Qs|"}]
```

```
ListLinePlot[re311, AxesLabel → {"e31", "|rθe1-rθs|"}]
```

```
(*σφαιρικός εγκέφαλος - ακριβής πηγή*)
```

```
(* e12, Q, r *)
```

```
Qe123 = Transpose[{set31, set37}];
```

```
re123 = Transpose[{set31, set38}];
```

```
ListLinePlot[Qe123, AxesLabel → {"e12", "|Qs-Qe1|"}]
```

```
ListLinePlot[re123, AxesLabel → {"e12", "|rθs-rθe1|"}]
```

```
(* e23, Q, r *)
```

```
Qe233 = Transpose[{set32, set37}];
re233 = Transpose[{set32, set38}];
ListLinePlot[Qe233, AxesLabel → {"e23", "|Qs-Qe1|"}]
ListLinePlot[re233, AxesLabel → {"e23", "|rθs-rθe1|"}]
```

(* e31, Q, r *)

```
Qe313 = Transpose[{set33, set37}];
re313 = Transpose[{set33, set38}];
ListLinePlot[Qe313, AxesLabel → {"e31", "|Qs-Qe1|"}]
ListLinePlot[re313, AxesLabel → {"e31", "|rθs-rθe1|"}]
```

(* 3DPlots *)

(* ελλειψοειδής εγκέφαλος - ακριβής πηγή *)

```
Q13D = Transpose[{set11, set12, set13, set17}];
r13D = Transpose[{set11, set12, set13, set18}];
ListDensityPlot3D[Q13D, OpacityFunction → None,
  MaxPlotPoints → 150, ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic,
  AxesLabel → {"e12", "e23", "e31"},
  PlotLabel → "|Qe1-Qs|"]
ListDensityPlot3D[r13D, OpacityFunction → None,
  MaxPlotPoints → 150, ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic,
  AxesLabel → {"e12", "e23", "e31"},
  PlotLabel → "|rθe1-rθs|"]
```

(* σφαιρικός εγκέφαλος - ακριβής πηγή *)

```
Q23D = Transpose[{set31, set32, set33, set37}];
r23D = Transpose[{set31, set32, set33, set38}];
ListDensityPlot3D[Q23D, OpacityFunction → None,
  MaxPlotPoints → 150, ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic,
```



```
AxisLabel → {"e12", "e23", "e31"},  
PlotLabel → "|Qs-Qe1|" ]  
ListDensityPlot3D[r23D, OpacityFunction → None,  
MaxPlotPoints → 150, ColorFunction → "Rainbow",  
PlotLegends → Automatic,  
AxisLabel → {"e12", "e23", "e31"},  
PlotLabel → "|rθs-rθe1|" ]
```

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.