Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Πρόγραμμα Σπουδών

Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά

Διπλωματική εργασία

Διδασκαλία και μάθηση Αλγεβρικών Εννοιών με ιστορική προοπτική

Αποστολία Βούλγαρη

Επιβλέπων καθηγητής: Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης

Αθήνα, Ιούνιος 2023

Διδασκαλία και μάθηση Αλγεβρικών εννοιών με ιστορική προοπτική

Αποστολία Βούλγαρη

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων καθηγητής:
Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Συν-Επιβλέπων καθηγητής:
Ευγένιος Αυγερινός
Καθηγητής,
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα, αποτέλεσε μία μελέτη περίπτωσης, η οποία εξέτασε την αποτελεσματικότητα διδακτικής παρέμβασης διδασκαλίας των δευτεροβάθμιων εξισώσεων μέσα από τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών. Η έρευνα βασίστηκε στη διεξαγωγή pre test και post test πριν και μετά την παρέμβαση, αλλά και την στατιστική ανάλυση μέσω ερωτηματολογίου. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν από την έρευνα, η παρέμβαση, αν και ήταν μόνο μία, βελτίωσε την επίδοση των μαθητών, οι οποίοι έκαναν λιγότερα λάθη, ενώ ταυτόχρονα ήταν ενδιαφέρουσα και ικανοποιητική, σύμφωνα με τις απόψεις των μαθητών.

Λέξεις Κλειδιά: Μαθηματικά, Δευτεροβάθμιες εξισώσεις, Ιστορία των μαθηματικών, Διδακτική Παρέμβαση

Abstract

The present research is a case study, which examined the effectiveness of an intervention teaching quadratic equations through the use of the history of mathematics. The research was based on pre-test and post-test before and after the intervention, as well as statistical analysis through a questionnaire. According to the results obtained from the research, the intervention, although it was only one, improved the performance of the students, who made fewer mistakes, while at the same time it was interesting and satisfying, according to the students' opinions.

Keywords: Mathematics, Quadratic Equations, History of Mathematics, Teaching Intervention

Περιεχόμενα

Λίστα εικόνων

Λίστα Διαγραμμάτων

Λίστα πινάκων

Εισαγωγή

Το πεδίο των μαθηματικών μπορεί να ιδωθεί μέσα από ένα ανθρωπιστικό πρίσμα, καθώς έχει αναπτυχθεί παράλληλα με τον ανθρώπινο πολιτισμό. Ωστόσο, υπάρχει μια κοινή πεποίθηση μεταξύ των μαθητών ότι τα μαθηματικά είναι ένα εντελώς αυτόνομο πεδίο, που στερείται συνάφειας με τα πρακτικά της καθημερινής ζωής (Αγαπητού, 2021). Ο Ernest (1998) προτείνει ότι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να χρησιμεύσει ως πολύτιμο εργαλείο για να εμπνεύσει τους μαθητές να προσεγγίσουν το υπό εξέταση μαθηματικό θέμα με αυξημένο ενδιαφέρον και αφοσίωση. Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη με περιπτώσεις που μπορούν να προκαλέσουν έντονο ενδιαφέρον και έντονα συναισθήματα στους μαθητές, και η ενσωμάτωσή τους σε παιδαγωγικές πρακτικές μπορεί να προκαλέσει αποτελεσματικά το ενδιαφέρον και την περιέργεια των μαθητών για τα μαθηματικά (Fauvel & van Maanen, 1997). Ομοίως, έχει τη δυνατότητα ενίσχυσης της κατανόησης τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μαθητών Σύμφωνα με τον Fauvel (1991), η συμπερίληψη της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών έχει αποδειχθεί ότι ενισχύει την κατανόηση, τη στάση και τον ενθουσιασμό τόσο των μαθητών όσο και των εκπαιδευτικών, ενώ η κατανόηση των μαθηματικών χαρακτηριστικών μιας συγκεκριμένης εποχής, καθώς και εκείνων των σύγχρονων μαθηματικών, επιτυγχάνεται πιο αποτελεσματικά με την εξέταση των μαθηματικών επιτευγμάτων προηγούμενων περιόδων. Σημαντικό παράδειγμα αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο το πέμπτο αξίωμα του Ευκλείδη διευκόλυνε την εμφάνιση νέων μη-ευκλείδειων γεωμετριών, θέτοντας έτσι τις βάσεις για εννοιολογικές μαθηματικές κατασκευές και συστήματα αξιωματικής αφαίρεσης. Κατά συνέπεια, μια ολοκληρωμένη κατανόηση των μαθηματικών απαιτεί την επίγνωση της ιστορικής τους εξέλιξης (Αγαπητού, 2021). Ο Νεύτων χρησιμοποίησε μια μεταφορά για να εξηγήσει ότι είχε σημειώσει σημαντική πρόοδο στον τομέα του βασιζόμενος στο έργο των προκατόχων του. Δήλωσε ότι το είχε πετύχει στεκόμενος μεταφορικά στους ώμους γιγάντων. Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στο πρόγραμμα σπουδών θα μπορούσε να χρησιμεύσει ως δυνητικό κίνητρο για τη διδασκαλία και την απόκτηση μαθηματικών γνώσεων. Ωστόσο, παρά τα πλεονεκτήματά της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω της ιστορίας τους, υπάρχουν εμπόδια για την ενσωμάτωσή της στα εκπαιδευτικά προγράμματα σπουδών και στις διδακτικές πρακτικές. Η αλλαγή της αντίληψης ότι η ιστορία είναι ανόμοια με τα μαθηματικά μπορεί να αποδειχθεί μια πρόκληση. Είναι μια κοινή πεποίθηση μεταξύ των ατόμων ότι ο κλάδος των μαθηματικών είναι διαφορετικός από αυτόν της ιστορίας, δεδομένης της εστίασής του στους υπολογισμούς, τη συλλογιστική και την αφαίρεση. Ακόμη, πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούν μη παραγωγικό να ενσωματώνουν την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία της τάξης (Αγαπητού, 2021). Σύμφωνα με τον Θωμαΐδη (1991), μια απλή παρουσίαση ιστορικών γεγονότων στα μαθηματικά χωρίς ενσωμάτωση στη διδακτική διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε μείωση του ενδιαφέροντος των μαθητών για το θέμα. Αυτό σημαίνει ότι η αφήγηση πρέπει να συνδέεται με τη γένεση ή την εγκαθίδρυση της μαθηματικής κατανόησης. Φαίνεται ότι η ανίχνευση των ιστορικών εξελίξεων στα μαθηματικά είναι ζωτικής σημασίας για την απόκτηση γνώσης στο αντικείμενο. Εκτός από την κατοχή γνώσης της ιστορικής τροχιάς ιδεών, εννοιών και γεγονότων που βοηθούν στη διαμόρφωση της μεθοδολογικής πορείας, είναι επιτακτική ανάγκη να δημιουργηθεί ένα θεμέλιο για την κατανόηση των σύγχρονων εννοιών και προοπτικών στα μαθηματικά. Αυτό θα διευκολύνει τον εκσυγχρονισμό μεθοδολογικών κατευθύνσεων που είναι παρωχημένες. Η συμπερίληψη των ιστορικών πτυχών των μαθηματικών στα προγράμματα σπουδών των σχολικών μαθηματικών μπορεί να χρησιμεύσει ως πηγή έμπνευσης τόσο για τους εκπαιδευτικούς όσο και για τους μαθητές, ενισχύοντας έτσι την ποιότητα και τη σημασία της διδακτικής και μαθησιακής εμπειρίας.

Κάθε τομέας της επιστήμης έχει μια μοναδική ιστορία προέλευσης και προόδου, συμπεριλαμβανομένου του κλάδου των μαθηματικών. Η συσχέτιση μεταξύ της ιστορίας των μαθηματικών και της παιδαγωγικής των μαθηματικών είναι ένα σημαντικό ζήτημα στον τομέα της ιστορίας. Πολυάριθμα ερευνητικά πεδία περιλαμβάνουν ανάλογα θέματα. Ωστόσο, τα χαρακτηριστικά και οι αρχές της έρευνας ποικίλλουν. Η εξέλιξη της μαθηματικής γνώσης αποδεικνύεται από μια σταδιακή γνωστική αφομοίωση των μαθηματικών εννοιών από τα άτομα με την πάροδο του χρόνου. Επιπλέον, η διαδικασία της μαθηματικής εκπαίδευσης περιλαμβάνει την απόκτηση γνώσεων και δεξιοτήτων που σχετίζονται με τη συστηματική μελέτη των μαθηματικών.

Η αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στην παιδαγωγική έχει μακρύ ιστορικό υπόβαθρο. Σύμφωνα με τον Swetz (1986), ο τομέας των μαθηματικών διαθέτει ένα πλούσιο ιστορικό υπόβαθρο που προσφέρει μια πληθώρα συναρπαστικών προβλημάτων, παρουσιάζοντας έτσι άφθονες προοπτικές για την ενίσχυση των ικανοτήτων του ατόμου επίλυσης προβλημάτων. Η διδασκαλία της ιστορίας παρουσιάζει ποικίλες μεθοδολογίες, αλγόριθμους και τεχνικές που επιτρέπουν στους εκπαιδευόμενους να ενισχύσουν τις ικανότητές τους κριτικής σκέψης διερευνώντας διάφορες προσεγγίσεις για την επίλυση προβλημάτων. Η προσέγγιση αυτή περιλαμβάνει την ικανότητα αξιολόγησης πολλαπλών στρατηγικών και αξιολόγησης λύσεων και διαδικασιών. Η ενσωμάτωση της ιστορικής πτυχής των μαθηματικών στην παιδαγωγική μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση της δυναμικής φύσης των μαθηματικών, σε αντίθεση με ένα στατικό και οριστικό σύστημα γνώσης. Αυτή η προσέγγιση υπογραμμίζει τη διασύνδεση μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών κλάδων (Karaduman, 2010). Από παιδαγωγική άποψη, οι μαθητές αποκτούν μια επιστημονική προοπτική του κόσμου και αναγνωρίζουν τον σημαντικό ρόλο που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στη διαμόρφωση της κουλτούρας μιας συγκεκριμένης εποχής. Η μελέτη της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών παρέχει μια εικόνα για το γεγονός ότι τα λάθη, οι αβεβαιότητες, η διαισθητική σκέψη, οι συζητήσεις και οι εναλλακτικές μέθοδοι δεν είναι μόνο αποδεκτές, αλλά και θεμελιώδεις συνιστώσες της διαδικασίας της μαθηματικής έρευνας (Αγαπητού, 2021).

Σύμφωνα με την Αγαπητού (2021) Ο Swetz γράφει: «Η ιστορία των μαθηματικών παρέχει ανθρώπινες ρίζες στο θέμα. Συνδέει τα μαθηματικά με τους ανθρώπους και τις ανάγκες τους. Εξανθρωπίζει το αντικείμενο και με αυτόν τον τρόπο, αφαιρεί κάποια από τα μυστικά του. Τα μαθηματικά δεν είναι κάτι μαγικό και απαγορευτικά ξένο, είναι μάλλον το σώμα της γνώσης που αναπτύχθηκε από ανθρώπους για περίοδο 10.000 ετών. Αυτοί οι άνθρωποι, όπως και εμείς και οι μαθητές μας κάναμε λάθη και συχνά προβληματίστηκαν, αλλά επέμειναν και επεξεργάστηκαν λύσεις για τα προβλήματά τους. Τα μαθηματικά είχαν και έχουν ως επίκεντρο τον άνθρωπο. Η διδασκαλία τους πρέπει να αναγνωρίζει και να βασίζεται σε αυτό το γεγονός ενσωματώνοντας την ιστορία των μαθηματικών ως θεμελιώδες μέρος της εκμάθησής της» (Swetz, 1994).

Κεφάλαιο 1ο: Η Διδασκαλία των Δευτεροβάθμιων εξισώσεων

1.Ιστορική Εξέλιξη και Μέθοδοι επίλυσης Δευτεροβάθμιων Εξισώσεων

Η έρευνα της ιστορίας μίας μαθηματικής έννοιας μπορεί να ρίξει φως στους παράγοντες που συμβάλλουν στις ακαδημαϊκές προκλήσεις, ενώ ταυτόχρονα ενισχύει την ικανότητα του εκπαιδευτικού να αντιμετωπίζει και να ξεπερνά αυτές τις προκλήσεις (Μαργαριτίδου, 2019).

Πολλές φορές στο παρελθόν, οι μαθηματικοί ήταν ανοιχτοί και ειλικρινείς σχετικά με τις δικές τους προκλήσεις. συζήτησαν και έγραψαν γι' αυτές, και συχνά χρειαζόταν πολύς χρόνος και προσπάθεια για να λυθούν πολλές από αυτές. Επειδή συνήθως δεν έχουμε πρόσβαση σε πληροφορίες σχετικά με τη διαδικασία δημιουργίας ή κατασκευής ιδεών, η ιστορική έρευνα μπορεί να αποτελέσει σημαντική βοήθεια.

Το παρελθόν μπορεί να προσφέρει μια πιο ολοκληρωμένη αντίληψη για το πόσο απαιτητικά είναι ορισμένα θέματα ή πεδία, καθώς και για το μέγεθος της προσπάθειας που απαιτείται μερικές φορές για να διατυπωθούν ή να οριστούν συγκεκριμένες θεματικές (Μαργαριτίδου, 2019).

Αιώνες πριν από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων, οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι είχαν κατακτήσει την τέχνη της εύρεσης λύσεων σε προβλήματα που ήταν ανάλογα με αυτά που σήμερα αποκαλούμε τετραγωνικές εξισώσεις. Από την άλλη πλευρά, ο υπολογισμός δεν θεωρήθηκε μέρος των μαθηματικών από τους Έλληνες, οι οποίοι αντίθετα επικεντρώθηκαν στην απλοποίηση των προβλημάτων σε γεωμετρικές μορφές παρά σε αλγεβρικές. Ως αποτέλεσμα, διέκοψαν κάθε σχέση με τον υπολογιστικό τρόπο σκέψης που ήταν χαρακτηριστικός των αρχαίων βαβυλωνιακών μαθηματικών. Για τον Ευκλείδη, το πρόβλημα που αντιλαμβανόμαστε σήμερα ως δευτεροβάθμια εξίσωση $\mathrm{x}^2 + \beta\mathrm{x} = \gamma$

και που λύνουμε εφαρμόζοντας τον γνωστό τύπο, ήταν ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Συγκεκριμένα, ο Ευκλείδης ασχολήθηκε με τη σχέση μεταξύ ευθειών και γωνιών. Ο στόχος ήταν να προσδιοριστεί ένα τμήμα x έτσι ώστε το εμβαδόν ενός σχήματος γ να μπορεί να αναπαραχθεί συνδυάζοντας τις επιφάνειες ενός τετραγώνου με αυτό το τμήμα ως μία από τις πλευρές του και ένα ορθογώνιο με αυτό το τμήμα ως μία από τις πλευρές του και το β ως άλλη πλευρά. Ο Ευκλείδης μας καθοδηγεί στη διαδικασία κατασκευής του τμήματος x στο πρόβλημα VI στο βιβλίο VI. Ο Ευκλείδης ήταν σε θέση να δημιουργήσει κομψές κατασκευές για τετραγωνικές εξισώσεις. Ωστόσο, η γεωμετρική προσέγγιση σε τέτοια προβλήματα έχει έναν θεμελιώδη περιορισμό. Αυτό ισχύει παρά το γεγονός ότι η γεωμετρική τεχνική χρησιμοποιήθηκε από τον Ευκλείδη. Το x^2 μπορεί να ερμηνευτεί ως το εμβαδόν ενός τετραγώνου, που σημαίνει ότι το x^3μπορεί να ερμηνευτεί ως ο όγκος ενός κύβου. Εξαιτίας αυτού, οι Έλληνες μπόρεσαν να συλλάβουν μόνο ένα μικρό μέρος του κόσμου των αλγεβρικών εξισώσεων, ένα τμήμα που μπορεί να ήταν πολύ περιορισμένο για να δημιουργήσει ένα ξεχωριστό μαθηματικό πεδίο. Είναι πιθανό ότι για αυτόν τον λόγο, οι Έλληνες δεν εκτέθηκαν ποτέ στον κόσμο της άλγεβρας (Ernest et al., 2016).

Όταν ερευνούμε την αραβική άλγεβρα, διαπιστώνουμε ότι όσον αφορά την τεχνική που διαθέτει, δεν ξεπερνά το επίπεδο των Στοιχείων του Ευκλείδη. Από την άλλη πλευρά, σε αντίθεση με το περίπλοκο μοτίβο επιχειρηματολογίας και περίπλοκων γεωμετρικών κατασκευών του Ευκλείδη, η αραβική άλγεβρα είναι, από πολλές απόψεις, πιο κατανοητή.

Επομένως, η αδυναμία των αρχαίων Ελλήνων να εννοιολογήσουν με αφηρημένο τρόπο δεν μπορεί να ήταν ο λόγος που δεν εφευρέθηκε η άλγεβρα από αυτούς. Από την άλλη πλευρά, έχουμε την ιδέα ότι οι Έλληνες εμποδίζονταν από κάποιο είδος φραγμού που τους εμπόδιζε να έχουν πρόσβαση στον κόσμο της άλγεβρας. Οι ισλαμιστές μαθηματικοί ήταν οι πρωτοπόροι που εξερεύνησαν πρώτοι αυτό το βασίλειο. Δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες ήταν οι δάσκαλοι των Αράβων όταν επρόκειτο για τα μαθηματικά. Έλαβαν εκπαίδευση σχετικά με ορισμούς, αξιώματα και αποδείξεις από τους αρχαίους Έλληνες. Ωστόσο, η κουλτούρα τους ήταν διαφορετική από τη δική μας. Στον πυρήνα της βρισκόταν μια θρησκεία που απέρριπτε κατηγορηματικά την ιδέα της χρήσης μιας μεταφοράς βασισμένης στην όραση προκειμένου να πλησιάσει το υπερβατικό. Η στενή σύνδεση που υπήρχε μεταξύ της νόησης και της οπτικής εμπειρίας διακόπηκε στον αραβικό πολιτισμό. Αυτή η σύνδεση αποτέλεσε τη βάση της επιστήμης στην ελληνική σκέψη. Η ελληνική έννοια της θεωρητικής γνώσης περιγράφεται καλύτερα από την θέαση ενός αντικειμένου από μεγάλη απόσταση.

Αυτή η τάση γίνεται πολύ εμφανής στα Στοιχεία του Ευκλείδη, τα οποία διατηρούν έναν αυστηρό διαχωρισμό μεταξύ των κατασκευών και των αποδείξεων των θεωρημάτων. Κατά τη διάρκεια των αποδείξεων, ο μόνος στόχος είναι ο προσδιορισμός της αλήθειας (Ernest et al., 2016).

Αυτό εξηγεί γιατί η άλγεβρα, ένας κλάδος των μαθηματικών στον οποίο δίνεται έμφαση στον χειρισμό των τύπων, ήταν ξένη προς τον πολιτισμό των αρχαίων Ελλήνων. Η ικανότητα χειρισμού αλγεβρικών εκφράσεων δεν βασίζεται στη θεωρητική διορατικότητα αλλά στην επιδεξιότητα κάποιου με την αριθμητική. Ο σκοπός αυτής της άσκησης δεν είναι να απεικονίσει το τελικό αποτέλεσμα. Μάλλον, είναι να αναπτύξει μια ευαισθησία στις ευκαιρίες που προσφέρει η γλώσσα της άλγεβρας και να αποκτήσει μια αίσθηση για τις μεθόδους που μπορούν να οδηγήσουν σε αυτήν.

Στο πλαίσιο της αλγεβρικής γλώσσας, η μόνη έκφραση που πραγματοποιείται είναι αυτή που εκτελείται αυτή τη στιγμή. Φυσικά, η μνήμη παίζει έναν εξαιρετικά καθοριστικό ρόλο στο πλαίσιο της προηγούμενης εμπειρίας.

Όταν η αραβική άλγεβρα εισήχθη στην Ευρώπη μέσω της Ισπανίας, πυροδότησε μια συζήτηση μεταξύ του πνεύματος των δυτικών μαθηματικών και του πνεύματος της άλγεβρας, τα οποία ήταν ουσιαστικά διακριτά το ένα από το άλλο αλλά εξίσου βαθιά (Kvasz & Notes, 2006).

Κάνοντας μία ιστορική αναδρομή στο πεδίο της άλγεβρας, οι πηγές παρέχουν υπέροχες εικόνες της ρητορικής φύσης της άλγεβρας (Διόφαντος ή Αλ-Χουαρίζμι), όταν οι μαθηματικές έννοιες αποτελούσαν όχι μόνο ως εργαλεία επικοινωνίας ή μοντελοποίησης, αλλά και μέσα για την παραγωγή νοήματος.

Η μελέτη της ιστορίας μπορεί να ρίξει φως στη φύση των συμβόλων καθώς και στη διαδικασία μέσα από την οποία προέκυψαν. Ωστόσο, η ιστορία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απεικονίσει μια ενδιαφέρουσα διαλεκτική: τα σύμβολα στην πραγματικότητα προέρχονται από την ανάγκη έκφρασης ιδεών σε συμπυκνωμένη μορφή. Ωστόσο, η απλή έκφραση των ιδεών με συμβολικό τρόπο συχνά προωθεί τις ιδέες περαιτέρω, οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να δημιουργήσουν νέες ιδέες και νέα σύμβολα. Ένα ακόμη σημαντικό πλεονέκτημα της ανάγνωσης της ιστορίας είναι ότι προσφέρει ένα γόνιμο περιβάλλον στο οποίο μπορεί να καλλιεργηθεί η επίγνωση για τις προοπτικές που έχουν οι άλλοι πολιτισμοί (Arcavi, 1995).

Σύμφωνα με τον Katz (1997), η ενσωμάτωση ιστορικών εννοιών στην διδασκαλία της άλγεβρας θα μπορούσε να είναι ευεργετική (Μαργαριτίδου, 2019).

Η βασική αρχή που είναι σταθερή στους περισσότερους ορισμούς της άλγεβρας που έχουν προσφερθεί σε διάφορες χρονικές στιγμές είναι ότι το η άλγεβρα ασχολείται με τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων καθώς και με τους χειρισμούς που είναι απαραίτητοι για την επίτευξη αυτού του στόχου (Katz, 1997). Η πολύ πρώιμη ανάπτυξη των εξισώσεων συνδέεται με την εξέλιξη της γραφής καθώς και με τους κοινωνικά αποδεκτούς τρόπους μαθηματικών εξηγήσεων (Radford, 1997).

Η μελέτη της άλγεβρας χωρίζεται σε τρεις διακριτές φάσεις: τη ρητορική, την αφηρημένη και τη συμβολική. Τα χρόνια που προηγήθηκαν του Διόφαντου (περίπου το 250 μ.Χ.) αναφέρονται ως το στάδιο της ρητορικής. Κατά τη διάρκεια αυτής της χρονικής περιόδου, οι ανάγκες ενός προβλήματος κοινοποιήθηκαν μόνο μέσω της χρήσης φυσικής γλώσσας. Το τέλος του συμβολικού σταδίου, που ξεκίνησε με τον Viete (1540-1603) και διακρίνεται από την αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος με τη χρήση γραμμάτων ώστε να μπορούν να δοθούν γενικές λύσεις (Θωμαΐδης, 2014).

Από την περίοδο που οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και Βαβυλώνιοι ανακάλυψαν την επίλυση εξισώσεων, το πεδίο μελέτης γνωστό ως άλγεβρα έχει μια ιστορία που εκτείνεται τουλάχιστον τέσσερις χιλιάδες χρόνια πίσω. Ο μαθηματικός πάπυρος του Rhind, που γράφτηκε από τον Αιγύπτιο Ah-mose περίπου το 1650 π.Χ. και ασχολείται με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, είναι το πρώτο αρχείο που έχει ανακαλυφθεί προς αυτή την κατεύθυνση (Katz, 1997).

Εικόνα 4: Ο πάπυρος του Rhind

Στον αιγυπτιακό πάπυρο, μπορεί κανείς να βρει μια σειρά από αναφορές στην άλγεβρα, οι οποίες αφορούν κυρίως ζητήματα που αφορούν γραμμικές ή τετραγωνικές εξισώσεις (Smith, 1958). Περίπου την ίδια εποχή στην αρχαία Βαβυλώνα, γύρω στο 1700 π.Χ., ανακαλύφθηκαν ταμπλέτες που περιελάμβαναν άλγεβρα, οι οποίες περιέγραφαν τη διαδικασία επίλυσης εξισώσεων. Αυτό οφειλόταν στο γεγονός ότι οι Βαβυλώνιοι γραφείς έγραφαν σε πήλινες πλάκες αντί για πάπυρο, που παρήγαγαν εκείνη την εποχή.

Τα μαθηματικά δισκία γενικά, και αυτά που σχεδιάστηκαν ειδικά για δευτεροβάθμιες εξισώσεις, χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση ανθρώπων που μια μέρα θα αναλάμβαναν ηγέτες του έθνους. Η ικανότητα επίλυσης τετραγωνικών εξισώσεων δεν ήταν ιδιαίτερα χρήσιμη γιατί υπήρχαν πολύ λίγες πραγματικές καταστάσεις που το απαιτούσαν. Αυτό που ήταν πιο σημαντικό ήταν ότι οι μαθητές να αναπτύξουν ικανότητες για την επίλυση προβλημάτων γενικά, δηλαδή, δεξιότητες που θα επέτρεπαν στους μαθητές να λύσουν προβλήματα που έπρεπε να λύσουν οι ηγέτες ενός έθνους (Μαργαριτίδου, 2019).

Οι δεξιότητες αυτές περιλάμβαναν όχι μόνο την ικανότητα τήρησης προκαθορισμένων διαδικασιών, συχνά γνωστών ως αλγόριθμων, αλλά και την ικανότητα προσαρμογής και μείωσης της πολυπλοκότητας των προβλημάτων που έπρεπε να λυθούν.

Στη Βαβυλώνα, δεν ήταν επιθυμητό όλοι οι μαθητές να μάθουν άλγεβρα, αλλά μάλλον, υπήρχε μόνο ένα μικρό ποσοστό του πληθυσμού στην κορυφή της κοινωνίας που ενδιαφερόταν για το θέμα. Ως αποτέλεσμα, η μελέτη της άλγεβρας, και πιο συγκεκριμένα η μελέτη των τετραγωνικών εξισώσεων, χρησιμοποιήθηκε ως φίλτρο για να οριστεί ποιος θα ήταν έτοιμος να γίνει μελλοντικός ηγέτης (Katz, 1997).

Φυσικά, αν και η κύρια γραμμή σκέψης των Βαβυλωνίων για την επίλυση εξισώσεων βασιζόταν στη γεωμετρία, ανέπτυξαν αλγόριθμους ή μεθόδους επίλυσης που εντάσσονται στην άλγεβρα. Τελικά, οι αλγόριθμοι άρχισαν να αντικαθιστούν τη γεωμετρία ως την κύρια μέθοδο για την επίλυση εξισώσεων (Μαργαριτίδου, 2019).

Περνώντας στον ελληνικό πολιτισμό, δυστυχώς, δεν έχουν διασωθεί γραπτά που να περιγράφουν την εξέλιξη των ελληνικών μαθηματικών πριν από το 300 π.Χ. Η πληρέστερη αναφορά γίνεται στα σχόλια που έκανε ο Πρόκλος στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη, το οποίο συντάχθηκε τον πέμπτο αιώνα μ.Χ. Δηλαδή χίλια χρόνια μετά τα έργα που σχολιάστηκαν. Παρόλα αυτά, ο Θαλής της Μιλήτου θεωρείται ο αρχαιότερος γνωστός Έλληνας μαθηματικός, τουλάχιστον σύμφωνα με τις ιστορίες που έχουν διασωθεί (624-547 π.Χ.) Αναφέρεται ότι το 585 π.Χ., προέβλεψε έκλειψη ηλίου και χρησιμοποίησε κριτήρια με βάση τις ομοιότητες μεταξύ τριγώνων για τον προσδιορισμό των αποστάσεων μεταξύ των πλοίων και του λιμανιού.

Παρουσίασε στο κοινό θεωρήματα όπως το γεγονός ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις γωνίες εκτός της βάσης είναι ισοσκελές τρίγωνο και ότι οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες ή ότι η διάμετρος του κύκλου τον χωρίζει σε δύο ίσα μέρη.

Ο Πυθαγόρας της Σάμου αποτέλεσε χωρίς αμφιβολία τον επόμενο μεγάλο μαθηματικό (572-497 π.Χ.). Αφού ταξίδεψε στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα, αποφάσισε να εγκατασταθεί στην πόλη Κρότωνα στην Κάτω Ιταλία (Λαγουδάκος, 2014).

Εκεί ίδρυσε μια σχολή για τη μελέτη της φιλοσοφίας. Δεν υπάρχουν κείμενα που να πιστώνονται είτε στο ίδιο πρόσωπο είτε στους μαθητές του. Υποστήριξαν ότι «ο αριθμός είναι ο πυρήνας των πραγμάτων» αφού τα πάντα μπορούν να αναχθούν σε έναν αριθμό. Οι κινήσεις των πλανητών, για παράδειγμα, μπορούν να γίνουν κατανοητές με τη χρήση αριθμητικών θεωρήσεων. Οι αρμονικές πρόοδοι καθορίζονται από συγκεκριμένες αριθμητικές αναλογίες.

Παράλληλα, του αποδίδονται εύσημα για το γνωστό Πυθαγόρειο θεώρημα. Αυτό το θεώρημα ήταν επίσης ο λόγος που οι Πυθαγόρειοι εγκατέλειψαν τη θεμελιώδη αρχή τους ότι οποιοδήποτε μήκος μπορεί να μετρηθεί χρησιμοποιώντας τη λογική ότι το μήκος θα είναι ένα εκθετικό πολλαπλάσιο του μέτρου σύγκρισης που χρησιμοποιήθηκε. Σύμφωνα με το θεώρημα, η διαγώνιος ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με την μονάδα είναι ένας άρρητος αριθμός.

Γύρω στα μέσα του πέμπτου αιώνα, υπήρξε μια τάση προς τις αποδείξεις και μια σταδιακή απομάκρυνση από αυτούς τους αριθμητικούς υπολογισμούς και την αριθμολογία των Πυθαγορείων. Ο πρωταρχικός στόχος των ελληνικών μαθηματικών είναι επί του παρόντος η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, όπως ο τετραπλασιασμός του κύβου, η τριτομή οποιασδήποτε γωνίας ή ο διπλασιασμός του κύκλου.

Στον Ιπποκράτη τον Χίο (470 π.Χ.) αποδίδεται η ανακάλυψη σχημάτων μεκτογραμμάτων που είναι τετραγωνισμένα. Αυτό σημαίνει ότι το εμβαδόν αυτών των σχημάτων μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το εμβαδόν ενός τριγώνου, και ως αποτέλεσμα, το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι επίσης συνάρτηση του εμβαδού ενός τριγώνου (Λαγουδάκος, 2014).

Ο Πλάτωνας, λίγο αργότερα, ίδρυσε την Ακαδημία στην Αθήνα, όπου η πρόοδος της ελληνικής μαθηματικής σκέψης έφτασε στην κορύφωση της (429-347 π.Χ.) Αυτή ήταν η τοποθεσία όπου μαθηματικοί και φιλόσοφοι από όλη την Ελλάδα συγκεντρώθηκαν για να μοιραστούν τις γνώσεις τους και να μεταδώσουν τη σοφία τους. Ο Πλάτωνας, στο βασικό του βιβλίο «Η Πολιτεία», απεικονίζει τον μαθηματικό γραμματισμό ως ένα μείγμα διδασκαλίας των γνωστικών κλάδων της αριθμητικής, της επιπεδομετρίας, της στερεομετρίας, της αστρονομίας και της μουσικής.

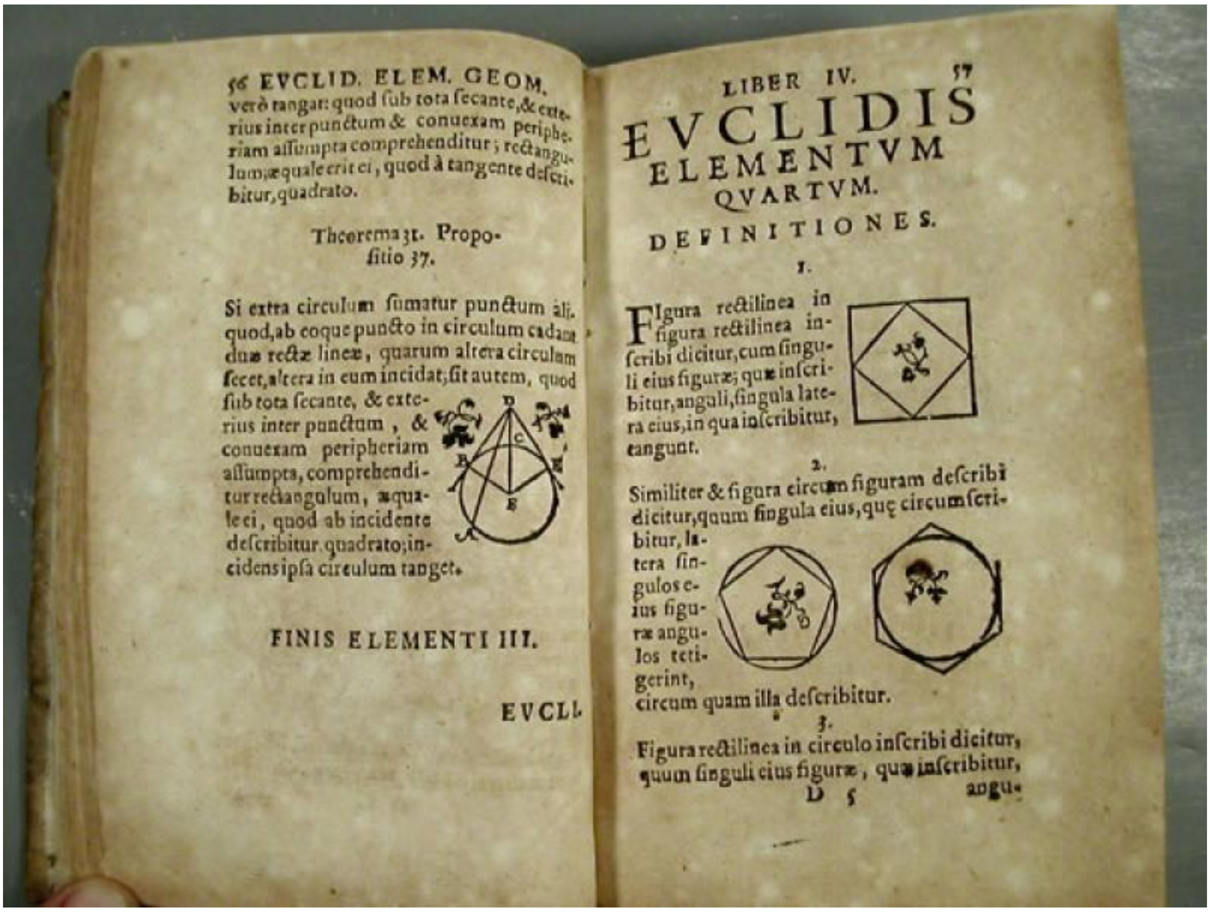
Ο Αριστοτέλης (384-322 π.Χ.) ήταν το πρόσωπο που συνέχισε το έργο του Πλάτωνα αφού πέθανε το 347. Ο Αριστοτέλης εισήλθε στην ακαδημία όταν ήταν δεκαοκτώ ετών και παρέμεινε εκεί μέχρι το θάνατο του Πλάτωνα το 347. Ο φιλόσοφος ίδρυσε μια φιλοσοφική σχολή που ονόμασε «Λύκειο». Στα κείμενά του, αρχικά επισημοποίησε τις θεμελιώδεις αρχές που διέπουν τη λογική επιχειρηματολογία και αναγνώρισε τις θεμελιώδεις αρχές που συνάδουν με τα ευρήματα κάθε επιστημονικού κλάδου.

Ο Ευκλείδης, γνωστός και ως «πρύτανης του πανεπιστημίου της Αλεξάνδρειας», έζησε μεταξύ των ετών 325 και 265 π.Χ. Συγκέντρωσε όλα τα επιτεύγματα της ελληνικής μαθηματικής έρευνας σε δεκατρία βιβλία και τα συνέγραψε. Αυτά τα έργα αναφέρονται ως *Στοιχεία*. Στην αρχή παρείχε τους όρους (ορισμούς), μετά παρουσίασε τον απολύτως απαραίτητο αριθμό θέσεων (αιτήματα), μετά παρουσίασε τις κοινές έννοιες και προφανείς προτάσεις και τέλος παρουσίασε τα λεγόμενα θεωρήματα (Λαγουδάκος, 2014). Στην έκδοση του Θεωνά, τα Στοιχεία περιλαμβάνουν δεκατρία βιβλία ή μέρη και περιέχουν στο σύνολο τους 465 προτάσεις. Αντίθετα με την εντύπωση που επικρατεί, ένα σημαντικό μέρος του υλικού αφορά όχι τη γεωμετρία αλλά τη στοιχειώδη θεωρία αριθμών και την ελληνική άλγεβρα.

Ο Ευκλείδης (300 π.Χ.) στο έργο του τα Στοιχεία επέλυσε την εξίσωση $x^2 + \alpha x = \alpha$ αλλά και την εξίσωση $x^2 + \alpha x = \beta^2$ αγνοώντας ταυτόχρονα τις αρνητικές τους ρίζες (Smith, 1958). Οι μέθοδοι των Βαβυλωνίων και του Brahmagupta παρείχαν σωστές χωρίς όμως η βάση να είναι ξεκάθαρη. Μια σταθερή βάση για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μπορεί να εντοπιστεί στο έργο Στοιχεία του Ευκλείδη στο βιβλίο VI και συγκεκριμένα στην πρόταση 28. Αυτή η πρόταση σύμφωνα με τους Φελούρης et al. (2001), όπως αναφέρει η Μαργαριτίδου (2019) είναι η εξής:

«Πάνω σε δοθέν ευθύγραμμο τμήμα να γραφεί παραλληλόγραμμο από το οποίο αν αφαιρέσουμε παραλληλόγραμμο, όμοιο και ομοίως κείμενο με δοσμένο παραλληλόγραμμο Δ, το παραλληλόγραμμο που μένει είναι ισοδύναμο με δοσμένο ευθύγραμμο σχήμα Γ. Το δοθέν ευθύγραμμο σχήμα Γ δεν μπορεί να έχει εμβαδό μεγαλύτερο από το εμβαδόν παραλληλογράμμου που γράφεται με πλευρά το μισό του ευθυγράμμου τμήματος και είναι όμοιο με αυτό που αφαιρούμε.»

Η πρόταση παραπάνω πρόταση ισοδυναμεί γεωμετρικά με τη συνθήκη επίλυσης της εξίσωσης $\alpha x - \beta\gamma x^2 = S$ (Φελούρης, κ.ά., 2001). Ωστόσο η αλγεβρική ερμηνεία δεν καθίσταται καθόλου προφανής ακόμα και στην περίπτωση που κάποιος εξειδικεύει την πρόταση, που αφορά τα παραλληλόγραμμα αλλά και τα ορθογώνια σχήματα. Σύμφωνα με τη Μαργαριτίδου (2019), ο Ευκλείδης δεν φαίνεται να γνώριζε την άλγεβρα, καθώς σε αυτή την περίπτωση θα την είχε εκφράσει τη χρήση απλούστερης γεωμετρίας (Stillwell, 1989).



56 EVCLID. ELEM. GEOM.
verò tangat: quod ſub tota ſecante,& exterius inter punctum & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur; rectangulum,æquale erit ei, quod à tangente deſcribitur, quadrato.

Theorema 31. Propoſitio 37.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod,ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet,altera in eum incidat;ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato;incidens ipſa circulum tanget.

FINIS ELEMENTI III.

EVCLI-

LIBER IV. 57

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

1.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur,cum ſinguli eius figuræ; quæ inſcribitur,anguli,ſingula latera eius,in qua inſcribitur, tangunt.

2.

Similiter & figura circum figuram deſcribi dicitur,quum ſingula eius,quę circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

3.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, quum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, angu-

D 5

Εικόνα 5: Τα Στοιχεία του Ευκλείδη

Ο Ήρων που θεωρείται ότι έλυσε την εξίσωση $144x(14 - x) = 6.720$ ίσως ενδεχομένως να είχε ήδη χρησιμοποιήσει την αναλυτική μέθοδο στοχεύοντας στον εντοπισμό των ριζών της εξίσωσης $1114x^2 + 297x = 212$ (Smith, 1958, Μαργαριτίδου, 2019).

Η ιστορία της άλγεβρας, την περίοδο εκείνη, άρχισε σταδιακά να μεταβαίνει στο στάδιο λύσης εξισώσεων. Το γεγονός αυτό μπορεί να εντοπιστεί στο έργο του Διόφαντου για τον αλγόριθμο της επίλυσης των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, 30 βασισμένων αποκλειστικά στους αριθμούς, στον 3ο αιώνα (Katz, 2007). Στα Αριθμητικά του Διόφαντου εμφανίζεται παρουσιάζεται για πρώτη φορά ο όρος «άγνωστος» αριθμός, ένα στερεά δομημένο σύστημα συμβολικής αναπαράστασης σχέσεων οι οποίες συμπεριλαμβάνουν τον «άγνωστο» αλλά και τις δυνάμεις του και ορισμένους κανόνες για την λύση εξισώσεων (Θωμαΐδης, 2014) (Μαργαριτίδου, 2019).

Στο πρώτο μισό του 7ου αιώνα ένας νέος πολιτισμός γεννήθηκε από την Αραβία. Σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, το Ισλάμ επικράτησε από την Περσία ως την Ισπανία και από την Αραβία μέχρι και το Ουζμπεκιστάν. Ο χαλίφης Harun al-Rashid περί το 790 μ.Χ. ιδρύει βιβλιοθήκη στην Βαγδάτη στην οποία εκτίθενται συλλογές από χειρόγραφα Ελλήνων μαθηματικών, όπως του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη, του Απολλώνιου, του Διόφαντου και του Πτολεμαίου τα οποία μεταφράζονται στα Αραβικά. Ο χαλίφης al-Mamun (813-833) ίδρυσε ερευνητικό κέντρο το οποίο έμεινε γνωστό με το όνομα οίκος της σοφίας, Bayt al Hikma. Οι μορφωμένοι Άραβες μαθηματικοί συνδύασαν την Ελληνική επιστήμη με την Βαβυλωνιακή παράδοση η οποία προϋπήρχε καθώς και την τριγωνομετρία, την αστρονομία και το αριθμητικό σύστημα των Ινδών. Ένα από τα σπουδαιότερα ισλαμικά μαθηματικά κείμενα είναι το Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala.

Εικόνα 6 Al-Kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala

Πρόκειται για ένα συνοπτικό βιβλίο του πέρση μαθηματικού Muhammad ibn musa al-Khwarizmi (780-850). Από τον όρο al-jabr προέρχεται η ονομασία Άλγεβρα που είναι παγκοσμίως χρησιμοποιούμενη ως σήμερα. Ο όρος αυτός μεταφράζεται αποκατάσταση ενώ ο όρος al-muqabala ως σύγκριση. Η μετατροπή της εξίσωσης : 2x 3 5 x στην μορφή 3x 3 5 γίνεται μέσω της aljabr , ενώ ο μετασχηματισμός στη μορφή 3x 2 μέσω της al-muqabala (Λαγουδάκος, 2014).

2.Δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Σε μια έρευνα που διεξήχθη από τον Makgakga (2014) σε μαθητές πέντε διαφορετικών σχολείων στη Νότια Αφρική με σκοπό την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο συμπλήρωσης του τετραγώνου, ανακαλύφθηκε ότι τα πιο συνηθισμένα λάθη που έγιναν αφορούσαν τη διαίρεση των όρων της εξίσωσης με τον συντελεστή x2, τον πολλαπλασιασμό με το μισό του συντελεστή x και με την πρόσθεση του αντίθετου του σταθερού όρου. Όταν ορισμένοι από τους μαθητές απέτυχαν να συνυπολογίσουν την εξίσωση μετά τη συμπλήρωση του τετραγώνου, βρέθηκαν περισσότερα λάθη, τα οποία υποδηλώνουν ότι οι μαθητές δεν είχαν γνώση της παραγοντοποίησης (Makgakga, 2014).

Οι τετραγωνικές εξισώσεις, γενικά, παρουσιάζουν δυσκολίες για την πλειοψηφία των μαθητών με διάφορους τρόπους. Οι δυσκολίες αυτές περιλαμβάνουν δυσκολίες με αλγεβρικές μεθόδους (ιδιαίτερα παραγοντοποίηση τετραγωνικών εξισώσεων), καθώς και αδυναμία κατανόησης της έννοιας της δευτεροβάθμιας εξισώσεις. Όταν χρησιμοποιούν παραγοντοποίηση, οι μαθητές παλεύουν με μια σειρά από προκλήσεις, μία από τις οποίες είναι ότι δεν έχουν τις υπολογιστικές δεξιότητες (ή τις διαδικαστικές γνώσεις) που είναι απαραίτητες για να ολοκληρώσουν θεμελιώδεις πράξεις όπως ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση (Μαργαριτίδου, 2019).

Για παράδειγμα, η εξίσωση $\mathrm{x}^2 + 8\mathrm{x} + 12 = 0$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως εξής: (x + 6) (x + 2) = 0. Αυτό δείχνει ότι ο μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει σωστά τους αριθμητικούς παράγοντες, αλλά μπορεί να κάνει λάθος στις πράξεις για να φτάσουμε στη τιμή. Κατά την παραγοντοποίηση των τετραγωνικών εξισώσεων, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να εφαρμόσουν σωστά τη μέθοδο της, η οποία περιλαμβάνει τη διαφορά των τετραγώνων, καθώς και τη μέθοδο του κοινού παράγοντα (Μαργαριτίδου, 2019).

Επιπλέον, κατά την παραγοντοποίηση τετραγωνικών εξισώσεων, φαίνεται ότι οι μαθητές αντιμετώπισαν προβλήματα κατά την εφαρμογή της μεθόδου της διαφοράς τετραγώνου και της μεθόδου του κοινού παράγοντα. Πολλοί μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στο να θυμούνται και να χρησιμοποιούν τους σωστούς τύπους της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και ορισμένοι δυσκολεύονται να εφαρμόσουν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα (Godden, et al. 2013).

Γενικά, οι μαθητές που δεν έχουν επαρκή εξειδίκευση στην επίλυση εξισώσεων δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν υπό ποιες συνθήκες μπορούν να τροποποιήσουν μία εξίσωση. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για μαθητές που δεν είναι ικανοί στην άλγεβρα (Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση, 2011). Πολλοί από αυτούς δυσκολεύονται να θυμηθούν και να χρησιμοποιήσουν τις σωστές μορφές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, και μερικοί από αυτούς δυσκολεύονται να εφαρμόσουν αποτελεσματικά τη διαίρεση (Didis & Erbas, 2015).

Δυσκολεύονται επίσης να αφαιρέσουν παρενθέσεις, καθώς η εξίσωση (2x 3)(3 x) = 4 αντικαταστάθηκε από ορισμένους μαθητές με την έκφραση (2x 3 + 3 x + 4) και τέλος, εμφανίζονται αδυναμίες στην αντικατάσταση τιμών στο συντελεστές a, b και στον σταθερό όρο c, αγνοώντας πολλαπλάσια την ύπαρξη του αρνητικού πρόσημου τους, ή τοποθετώντας στη μεταβλητή a την τιμή της μεταβλητής b και αντίστροφα (Makonye & Matuku, 2016) (Μαργαριτίδου, 2019).

Επιπλέον, υπάρχει η πιθανότητα ορισμένοι μαθητές απλώς να απομνημονεύσουν τους κανόνες και να τους εφαρμόσουν μηχανικά χωρίς να τους δίνουν ιδιαίτερη προσοχή. Παραβιάζουν τους κανόνες, τους τύπους και τις αλγεβρικές μεθόδους για την επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων χωρίς να καταλαβαίνουν ποια είναι η σημασία αυτών των πραγμάτων, επομένως είναι αδύνατο για αυτούς να μεταφέρουν αυτές τις δεξιότητες στην επίλυση τυχαίων εξισώσεων με μη τυπικές δομικές ιδιότητες. Έχουν επίσης την τάση, αφού περάσει ένα ορισμένο χρονικό διάστημα, να ξεχάσουν όλα όσα έμαθαν και να χάνουν οποιαδήποτε δεξιότητα απέκτησα (Didis & Erbas, 2015).

Σύμφωνα με το Μαθηματικό Πρόγραμμα Σπουδών για την Υποχρεωτική Εκπαίδευση (2011), αυτά τα άτομα δεν είναι σε θέση να κατανοήσουν την ιδέα της ισότητας επειδή ερμηνεύουν το σύμβολο «=» όχι ως σημάδι που υποδηλώνει ισοδυναμία μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου μέλους μιας ισότητας, αλλά μάλλον ως σημάδι που παρέχει οδηγίες εκτέλεσης ενεργειών, συνήθως δίνοντας μια απάντηση χρησιμοποιώντας έναν αριθμό.

Σύμφωνα με τους Makonye και Matuku (2016), δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις τετραγωνικές ρίζες, τις αλγεβρικές εκφράσεις, τους κανόνες για τη μετατόπιση όρων από το ένα μέλος της εξίσωσης στο άλλο, τη συλλογή όμοιων όρων, καθώς και τη διαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και την πρόσθεση με ακέραιους αριθμούς (Μαργαριτίδου, 2019).

Πολλοί μαθητές, λόγω έλλειψης εννοιολογικής κατανόησης του κανόνα που ισχύει για ένα προϊόν ίσο με μηδέν, μεταφέρουν εσφαλμένα αυτόν τον κανόνα και στην περίπτωση του γινόμενου που δεν είναι ίσο με μηδέν, ενώ δεν αναγνωρίζουν ότι η ρίζα με τιμή 0 εξαφανίζεται όταν ο άγνωστος x απλοποιείται ταυτόχρονα και από τις δύο πλευρές της εξίσωσης (Μαργαριτίδου, 2019).

Οι μαθητές συχνά παρεξηγούν όχι μόνο την έννοια της λύσης στη δευτερεύουσα εξίσωση, αλλά και την έννοια της μεταβλητής όπως εμφανίζεται σε αυτήν την εξίσωση. Πολλοί μαθητές, ακόμη, δεν γνωρίζουν ότι κάθε φορά που μια μεταβλητή εμφανίζεται δύο ή περισσότερες φορές σε μια εξίσωση, διατηρεί πάντα την ίδια τιμή ανεξάρτητα από το πού βρίσκεται στην εξίσωση.

Σύμφωνα με τους Vaiyavutjamai, Ellerton και Clements (2005), ένα άλλο πράγμα που αγνοούν είναι ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν δύο διαφορετικές λύσεις. Για παράδειγμα, το γεγονός ότι υπάρχουν δύο πιθανές απαντήσεις μπορεί να θεωρηθεί ως μια μορφή «αοριστίας» από τη σκοπιά τους. Μερικά από τα παιδιά δεν καταλαβαίνουν πώς να προσδιορίσουν εάν οι απαντήσεις που έχουν πάρει στην εξίσωση είναι οι σωστές ή όχι. Αυτό συμβαίνει ως αποτέλεσμα της έλλειψης γνώσης σχετικά με τις ακριβείς σημασίες των απαντήσεων στην εξίσωση (Vaiyavutjamai, Ellerton, & Clements, 2005).

Οι μαθητές συνήθως δυσκολεύονται να κατανοήσουν την κατάσταση και να αναπαραστήσουν με ακρίβεια συμβολικές σχέσεις ενώ εργάζονται με προβλήματα που απαιτούν από αυτούς να χρησιμοποιήσουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις για να βρουν λύσεις. Αυτό συμβαίνει επειδή οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν πολύπλοκες συντακτικές δομές.

Επιπλέον, ακόμη κι αν κάποιοι από τους μαθητές κατανοούν πλήρως το θέμα που εξετάζουν, μπορεί να μην είναι επιτυχείς στην επίλυσή του επειδή δεν είναι σε θέση να διατυπώσουν τις κατάλληλες μαθηματικές σχέσεις ή να ακολουθήσουν την κατάλληλη μαθηματική τεχνική (Μαργαριτίδου, 2019).

Παρά το γεγονός ότι μπορεί να γνωρίζουν την ποσότητα (ή τις ποσότητες) που μπορεί να υποδεικνύονται ως άγνωστες, δεν είναι σε θέση να δημιουργήσουν κάποιες κρίσιμες σχέσεις με τη βοήθεια μιας μόνο τετραγωνικής εξίσωσης. Η λύση σε πολλά από αυτά τα ζητήματα μπορεί να βρεθεί ανταλλάσσοντας φράσεις με αριθμούς. Σύμφωνα με τους Godden, Mbekwa και Julie (2013), φαίνεται ότι οι μαθητές δεν έχουν επαρκή προηγούμενη εμπειρία με σενάρια στα οποία απαιτείται να αντικαταστήσουν τις μη αριθμητικές οντότητες με μια άλλη έκφραση. Επειδή οι μαθητές σπάνια περνούν από τη διαδικασία να παράγουν μια αριθμητική ισότητα μόνοι τους, οι εμπειρίες που έχουν συγκεντρώσει όσο ήταν στο δημοτικό σχολείο είναι περιορισμένες. Επομένως, όταν ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με την κατασκευή εκφράσεων που ενσωματώνουν αλγεβρικούς όρους, πρέπει να κατευθύνει τις σκέψεις του προς τη δομή του προβλήματος και όχι τα βήματα που πρέπει να γίνουν για να λυθεί η εξίσωση (Μαργαριτίδου, 2001).

Επιδεικνύουν επίσης ελλείψεις στον εντοπισμό τους κοινά σημεία που έχουν τα προβλήματα εξισώσεων στη δομή τους όταν έχουν διαφορετικά σενάρια, γεγονός που δείχνει ότι δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν αυτούς τους παραλληλισμούς.

Η πλειοψηφία των μαθητών Λυκείου αδυνατεί να κατασκευάσει την εξίσωση που αντιστοιχεί σε ένα πρόβλημα, καθώς και να αναγνωρίσει τις σχέσεις που συνδέουν τις μεταβλητές του (Μαργαριτίδου, 2019).

3.Η σημασία της διδασκαλίας των δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Δυστυχώς, ένας σημαντικός αριθμός μαθητών παγκοσμίως αντιμετωπίζει μια δυσμενή αρχική συνάντηση με την δευτεροβάθμια εξίσωση, θεωρώντας την ως μια δύσκολη μέθοδο που απαιτεί απομνημόνευση. Συχνά, οι μαθητές εμπλέκονται στην υπολογιστική και μηχανική επίλυση εξισώσεων χωρίς να έχουν πλήρη κατανόηση των πρακτικών εφαρμογών τους. Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν πολυάριθμες πρακτικές εφαρμογές σε διάφορα σενάρια του πραγματικού κόσμου και καθημερινές ρουτίνας που εκτείνονται πέρα από τη σφαίρα του ακαδημαϊκού χώρου (Αγαπητού, 2021).

Οι τετραγωνικές εξισώσεις εμπλέκονται σε οποιονδήποτε κλάδο που απαιτεί υπολογισμό της ταχύτητας, μέτρηση της επιφάνειας ή προσδιορισμό του κέρδους, ενώ πρόκειται για ένα μαθηματικό εργαλείο που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων όπως κύκλοι, ελλείψεις και παραβολές. Μετά από προσεκτική εξέταση, ορισμένα σχήματα που υπάρχουν στο περιβάλλον μας μοιάζουν με το γράφημα μιας τετραγωνικής εξίσωσης. Το παραβολικό σχήμα χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορους κλάδους όπως η φυσική, η μηχανική και ο αθλητισμός λόγω των σημαντικών εφαρμογών του. Είναι εύλογο ότι επιπλέον πεδία μπορούν επίσης να ωφεληθούν από αυτό το σχήμα, το οποίο μένει να διερευνηθεί. Η βαρυτική δύναμη που ασκεί η Γη υπόκειται στον νόμο του αντίστροφου τετραγώνου, σύμφωνα με τον οποίο το μέγεθος της δύναμης μειώνεται όσο αυξάνεται το τετράγωνο της απόστασης μεταξύ των αντικειμένων. Αυτή η θεμελιώδης αρχή έχει ως αποτέλεσμα αντικείμενα, που κυμαίνονται από μικρό σφαιρικό αθλητικό εξοπλισμό έως μεγάλα διαστημόπλοια, να κινούνται ακολουθώντας μια διαδρομή που μπορεί να περιγράφει ως παραβολική τροχιά (Αγαπητού, 2021).

Η τετραγωνική εξίσωση χρησιμοποιείται από τον στρατό στο πλαίσιο της βολής πυροβολικού, με αποτέλεσμα η εκμάθηση της επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων να μπορεί να συμβάλλει στη διερεύνηση του φαινομένου των βλημάτων που προσκρούουν στο έδαφος ή στο στόχο, όπου κάθε βλήμα υπόκειται αποκλειστικά στη δύναμη της βαρύτητας. Η τροχιά τέτοιων βλημάτων φαίνεται ότι μοιάζει με τη γραφική παράσταση μιας τετραγωνικής εξίσωσης, συγκεκριμένα μιας παραβολικής καμπύλης. Η χρήση της τετραγωνικής εξίσωσης σε συχνή βάση είναι επιτακτική για άτομα που φιλοδοξούν να καταταγούν στο στρατό και να ειδικευτούν σε επιχειρήσεις πυροβολικού ή αρμάτων μάχης. Η τετραγωνική εξίσωση βρίσκει εφαρμογή στην αποσαφήνιση της μηχανικής της κίνησης των πλανητών γύρω από τον ήλιο στο ηλιακό μας σύστημα. Η ανακάλυψη των πλανητών μας έγινε αρχικά από πρώιμους επιστήμονες που δεν είχαν τη βοήθεια των υπολογιστών. Αυτοί οι επιστήμονες χρησιμοποίησαν την τετραγωνική εξίσωση για να εξακριβώσουν ότι οι πλανήτες στο ηλιακό μας σύστημα ακολουθούν ελλειπτικές τροχιές και όχι κυκλικές (Αγαπητού, 2021).

Οι τετραγωνικές εξισώσεις όχι μόνο χρησίμευσαν ως μέσο για να περιγράψουν τις πλανητικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο, αλλά διευκόλυναν επίσης μια πιο προσεκτική παρατήρηση των εν λόγω τροχιών. Η κομβική πρόοδος που διευκόλυνε περαιτέρω εξελίξεις στον τομέα της αστρονομίας ήταν η δημιουργία του τηλεσκοπίου. Μέσω της χρήσης ενός τηλεσκοπίου, ο Γαλιλαίος μπόρεσε να κάνει παρατηρήσεις των φεγγαριών που βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τον Δία καθώς και τις διάφορες φάσεις που εκτίθενται από τον πλανήτη Αφροδίτη.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκαν εκτεταμένα ανακλαστικά τηλεσκόπια για να διερευνήσουν τα αινίγματα του σύμπαντος. Στη σύγχρονη εποχή, κολοσσιαία ραδιοτηλεσκόπια έχουν χρησιμοποιηθεί για το διπλό σκοπό της λήψης και μετάδοσης μηνυμάτων που θα μπορούσαν ενδεχομένως να υποκλαπούν από μια εξωγήινη κοινωνία.

Το οπτικό όργανο που χρησιμοποιούσε ο Galileo ήταν εξοπλισμένο με φακούς που σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας τη διασταύρωση δύο υπερβολών. Το ανακλαστικό τηλεσκόπιο, το οποίο επινοήθηκε από τον Sir Isaac Newton, διαθέτει έναν καθρέφτη που έχει σχήμα διατομής που συμμορφώνεται με μια παραβολική καμπύλη.

Οι τετραγωνικές εξισώσεις είναι μια θεμελιώδης πτυχή των σύγχρονων συστημάτων επικοινωνίας. Η δημιουργία ενός δορυφορικού πιάτου περιλαμβάνει τη χρήση ορισμένων στοιχείων μιας τετραγωνικής εξίσωσης. Αυτό οφείλεται στην ανάγκη για ακριβείς ρυθμίσεις γωνίας για τη βελτιστοποίηση της λήψης σήματος. Το σήμα συλλαμβάνεται από το πιάτο και στη συνέχεια αναμεταδίδεται σε μια κόρνα τροφοδοσίας, η οποία με τη σειρά της μεταδίδει το σήμα είτε σε τηλεόραση είτε σε σταθμό εκπομπής. Η διαδικασία διαμόρφωσης ενός πιάτου ώστε να λαμβάνει ταυτόχρονα σήματα από πολλούς δορυφόρους απαιτεί την ανάλυση μιας τετραγωνικής εξίσωσης (Αγαπητού, 2021).

Οι νόμοι της κίνησης των σωμάτων που διατυπώθηκαν από τον Νεύτωνα θεσπίστηκαν με βάση την τετραγωνική εξίσωση που καθορίζει την επιτάχυνση των αντικειμένων και τις δυνάμεις που δρουν πάνω τους. Οι νόμοι που διατυπώθηκαν από το εν λόγω άτομο βασίζονται στις αρχές της βαρυτικής δύναμης που ενεργεί σε αντικείμενα σε κίνηση και σε ηρεμία, ενώ επίσης εξηγούν την περιστροφική κίνηση των εν λόγω αντικειμένων σε ένα ουράνιο σώμα, δηλαδή τη Γη, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο . Η τετραγωνική εξίσωση βρίσκει εφαρμογή στη σφαίρα του σχεδιασμού του ηχοσυστήματος, συγκεκριμένα στην ανάπτυξη ηλεκτρονικών κυκλωμάτων για τη δόνηση των ηχείων και τη δημιουργία των ήχων. Όταν τα ηχεία εκπέμπουν ηχητικά κύματα, αυτά τα κύματα υφίστανται δόνηση ή συντονισμό, που μπορεί να οδηγήσει σε ανεπιθύμητες ακυρώσεις ηχητικών κυμάτων. Η τετραγωνική εξίσωση χρησιμοποιείται από τους σχεδιαστές για τον επανασχεδιασμό του κυκλώματος και των ηχείων, προκειμένου να επιτευχθεί η βέλτιστη ποιότητα ήχου διασφαλίζοντας ότι τα ηχητικά κύματα αλληλοενισχύονται και δεν αλληλοακυρώνονται (Αγαπητού, 2021).

Οι κατασκευαστές αυτοκινήτων χρησιμοποιούν την τετραγωνική εξίσωση για να υπολογίσουν την απόσταση, σε μέτρα, που απαιτείται για να σταματήσει τελείως ένα όχημα μέσω πέδησης με διαφορετικές ταχύτητες κατά τη φάση σχεδιασμού. Η τετραγωνική εξίσωση χρησιμοποιείται από αξιωματούχους επιβολής του νόμου κατά τη διερεύνηση των σημείων σύγκρουσης οχημάτων για να εξακριβώσουν τις ταχύτητες με τις οποίες τα εμπλεκόμενα οχήματα ταξίδευαν κατά τη στιγμή της πρόσκρουσης. Η χρήση τετραγωνικών εξισώσεων σε διάφορες σχεδιαστικές συναρτήσεις και υπολογισμούς χρησιμοποιείται επίσης από σχεδιαστές αυτοκινήτων για τη βελτίωση της ασφάλειας των επιβατών σε επερχόμενες συγκρούσεις οχημάτων. Η χρήση της τετραγωνικής εξίσωσης είναι διαδεδομένη στο σχεδιασμό της συντριπτικής πλειονότητας των προϊόντων που διατίθενται σε σύγχρονα καταστήματα λιανικής. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση της ασφάλειας των προϊόντων και την πρόβλεψη της μακροζωίας τους. Στη συνέχεια, οι σχεδιαστές είναι σε θέση να εντοπίσουν τις απαραίτητες τροποποιήσεις στο προϊόν προκειμένου να ενισχύσουν την αντοχή του.

Οι τετραγωνικές εξισώσεις βρίσκουν σημαντική εφαρμογή στον τομέα της γεωργίας. Η διατήρηση της ανθρώπινης ζωής εξαρτάται από την πρακτική της γεωργίας. Η τετραγωνική εξίσωση χρησιμοποιείται στον τομέα της γεωργίας για τον προσδιορισμό της θεμελιώδους διάταξης των αγρών. Αυτό αποδεικνύει σημαντικά πλεονεκτήματα καθώς αξιοποιούμε αποτελεσματικά όλους τους διαθέσιμους πόρους. Μια πιθανή εφαρμογή περιλαμβάνει τον καθορισμό της πιο αποτελεσματικής διάταξης των ορίων προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το μέγεθος των γηπέδων και των μάντρας σε μια δεδομένη περιοχή. Ο υπολογισμός του εμβαδού περιλαμβάνει τον πολλαπλασιασμό του μήκους και του πλάτους μιας δεδομένης επιφάνειας. Αυτή η διαδικασία μετατρέπει υπολογισμούς που σχετίζονται με δισδιάστατες περιοχές σε εξισώσεις δεύτερου βαθμού. Κατά συνέπεια, η τετραγωνική εξίσωση έχει παίξει σημαντικό ρόλο στον ανθρώπινο πολιτισμό και τις σύγχρονες δραστηριότητες (Αγαπητού, 2021).

Κεφάλαιο 2 ο : Μεθοδολογία της έρευνας

1.Σκοπός

Σκοπό της παρούσας έρευνας αποτέλεσε η διερεύνηση της αποτελεσματικότητας της παρέμβασης διδασκαλίας των δευτεροβάθμιων εξισώσεων με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών αλλά και η εξέταση της ικανοποίησης των μαθητών από την παρούσα μέθοδο.

2.Ερευνητικά Ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία τέθηκαν για την παρούσα έρευνα, περιλαμβάνουν τα ακόλουθα:

Α. Κατά πόσο η απόδοση των μαθητών θα βελτιωθεί ως προς την επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις μετά από την παρακολούθηση παρέμβασης με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών;

Β. Κατά πόσο η παρέμβαση θα διευκολύνει τη διδασκαλία και τη μάθηση;

Γ. Κατά πόσο η παρέμβαση θα ικανοποιήσει τους μαθητές;

3.Μεθοδολογία και σχεδιασμός της έρευνας

Για την παρούσα έρευνα, σχεδιάστηκαν τρία φύλλα εργασία, τα οποία περιλάμβαναν pre test, post test και το φύλλο εργασίας της παρέμβασης, η οποία

περιλάμβανε 5 δραστηριότητες. Τα αποτελέσματα, συγκρίθηκαν, ούτως ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα. Ακόμη, στους μαθητές μοιράστηκε με τη χρήση του google forms, ερωτηματολόγιο, με στόχο να διερευνηθεί η ικανοποίηση τους από την παρέμβαση. Τα αποτελέσματα αναλύθηκαν στατιστικά μέσω του excel και δημιουργήθηκαν πίνακες.

Κεφάλαιο 3ο : Η διδασκαλία των εξισώσεων στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα

3.1.Εγχειρίδια και αναλυτικά προγράμματα

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο για τα Μαθηματικά, οι στόχοι της απόκτησης και της μετάδοσης γνώσης των μαθηματικών συνδέονται με την απόκτηση θεμελιωδών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων. Η ανάπτυξη επάρκειας στη μαθηματική γλώσσα αποτελεί εργαλείο για την επικοινωνία και την περιγραφή πραγματικών φαινομένων και σεναρίων. Απαραίτητη είναι ακόμη προοδευτική κατανόηση των θεμελιωδών χαρακτηριστικών της δομής των Μαθηματικών και η απόκτηση επάρκειας στη μεθοδολογία κατασκευής λογικών επιχειρημάτων και στη διαδικασία συλλογής και αξιολόγησης αποδεικτικών στοιχείων.

Η προοδευτική απόκτηση δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων και πρακτικής ικανότητας είναι ένας από τους σημαντικούς στόχους των προγραμμάτων διδασκαλίας, ενώ σταθερά τονίζεται η συνάφεια και η πραγματιστική χρησιμότητα των Μαθηματικών σε όλη την ιστορία, περιλαμβάνοντας τη συμβολή τους στα πεδία τόσο των θετικών όσο και των ανθρωπιστικών επιστημών, καθώς και στους κοινωνικοοικονομικούς τομείς.

Υπογραμμίζοντας τη δυναμική φύση της μαθηματικής επιστήμης, όπως αποδεικνύεται από την ταχεία εξέλιξή της, και τη σημασία της ως απαραίτητο εργαλείο για όλες τις ανθρώπινες προσπάθειες, η διδασκαλία των μαθηματικών στο εκπαιδευτικό σύστημα της Ελλάδας στοχεύει να εξοπλίσει τους μαθητές με σημαντικές δεξιότητες για την μετέπειτα πορεία τους. Η ανάπτυξη μιας ευνοϊκής διάθεσης προς τα Μαθηματικά είναι ζωτικής σημασίας, καθώς διευκολύνει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών και προτάσεων, που διαφορετικά θα ήταν επίπονες (Αγαπητού, 2021).

3.2.Ανάλυση το τρόπου διδασκαλίας Δευτεροβάθμιων εξισώσεων

Σύμφωνα με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος, οι μαθητές πρέπει :

- Να μάθουν τη γενική μορφή μιας εξίσωσης 2ου βαθμού με έναν άγνωστο x και να διακρίνουν τους συντελεστές της.

- Να είναι σε θέση να επιλύουν εξισώσεις 2ου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων (ελλιπείς μορφές $\alpha x^2 + \beta x = 0$, $\alpha x^2 + \gamma = 0$και πλήρη μορφή με συμπλήρωση τετραγώνου).

Με βάση τις οδηγίες οι οποίες παρέχονται στους εκπαιδευτικούς, οι μαθητές πρέπει να επιτύχουν τους ακόλουθους διδακτικούς στόχους:

- Να γνωρίζουν πως να επιλύουν δευτεροβάθμιες εξισώσεις χρησιμοποιώντας τον τύπο και να κατανοήσουν τη σημασία της διακρίνουσας για να προσδιοριστεί των λύσεων της εξίσωσης.

- Να είναι σε θέση να μετατρέψουν ένα τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων.

Είναι σημαντικό, όπως τονίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο, οι μαθητές να κατανοήσουν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η παραγοντοποίηση είναι συντομότερος τρόπος για την επίλυση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων δευτέρου βαθμού, αλλά και να τονιστεί ότι ο πιο σύντομος τρόπος εξαρτάται πάντα από τη μορφή της εξίσωσης (Αγαπητού, 2021).

Κεφάλαιο 4ο : Διδακτική παρέμβαση

4.1.Σχεδιασμός Παρέμβασης

Η παρέμβαση η οποία σχεδιάστηκε, είχε ως στόχο να διερευνήσει την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας δευτεροβάθμιων εξισώσεων μέσα μία ιστορική προοπτική. Οι συμμετέχοντες στη μελέτη ήταν τρεις μαθητές της πρώτης τάξης του λυκείου και η παρέμβαση περιελάβανε τη χρήση ενός φύλλου εργασίας που περιείχε ασκήσεις βασισμένες στη μέθοδο του Al-Khwārizmī και στη μέθοδο επίλυσης εξισώσεων του Διόφαντου.

Το φύλλο εργασίας που χρησιμοποιήθηκε για την διεξαγωγή του μαθήματος (βλ. παράρτημα) περιλάμβανε τρεις ασκήσεις, καθεμία από τις οποίες απαιτούσε τη χρήση διαφορετικής μεθόδου για την επίλυση της εξίσωσης. Η πρώτη άσκηση ζήτησε από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση $2x^2 + 10x = 39$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Al-Khwārizmī, η οποία περιλαμβάνει την κατασκευή ενός τετραγώνου και δύο ορθογωνίων για την εξάλειψη των αρνητικών όρων της εξίσωσης. Η δεύτερη άσκηση απαιτούσε από τους μαθητές να λύσουν την εξίσωση $x^2 + 21 = 10x$ χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, ενώ η τρίτη άσκηση απαιτούσε τη χρήση της μεθόδου του Διόφαντου για τη διαίρεση της ενότητας σε δύο μέρη, ώστε αν προστεθούν αριθμοί σε αυτούς, ώστε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων να δίνει τετράγωνο.

Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να οπτικοποιήσουν τις εξισώσεις και να χρησιμοποιήσουν τα οπτικά βοηθήματα που παρέχονται στο φύλλο εργασίας για να τις λύσουν. Χρησιμοποιήθηκαν εποπτικά μέσα, όπως το power point, για να προβληθούν στους μαθητές με τη χρήση προβολέα, εικόνες και κείμενα, μέσα από τα οποία ήρθαν σε επαφή με την ιστορία των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Η αποτελεσματικότητα της παρέμβασης αξιολογήθηκε συγκρίνοντας τα αποτελέσματα ενός pre test, που είχαν ολοκληρώσει οι μαθητές πριν από την παρέμβαση, με τα αποτελέσματα του φύλλου εργασίας που συμπλήρωσαν κατά την παρέμβαση.

Στη συνέχεια, οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο, ώστε να καταγραφούν οι εντυπώσεις τους και οι απόψεις τους σε σχέση με τη διδασκαλία και να εξαχθούν συμπεράσματα για μελλοντικές βελτιώσεις.

Στόχοι της παρέμβασης είναι:

- Να βελτιώσει την κατανόηση των εξισώσεων δευτέρου βαθμού μεταξύ των τριών μαθητών.
- Να ενισχύσει τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών σε σχέση με τις εξισώσεις δευτέρου βαθμού.
- Να αυξήσει την αυτοπεποίθηση και το κίνητρο των μαθητών για την εκμάθηση των μαθηματικών.
- Να αξιολογήσει την αποτελεσματικότητα της μεθόδου διδασκαλίας με βάση την ιστορία στη βελτίωση της απόδοσης των μαθητών στα μαθηματικά.
- Να εντοπίσει τυχόν κενά ή παρανοήσεις στην κατανόηση των εξισώσεων της δευτέρου βαθμού από τους μαθητές.

4.2.Προφίλ Μαθητών

Α ΜΑΘΗΤΡΙΑ

Η πρώτη μαθήτρια ονομάζεται Μ., είναι 15 ετών και είναι η δεύτερη χρονιά που είναι μαθήτρια μου. Της αρέσουν αρκετά τα μαθηματικά και ο μέσος όρος της απόδοσης της είναι υψηλός. Συμμετέχει στο μάθημα και είναι ιδιαίτερα ομιλητική και ενεργή. Συνήθως, ο χαρακτήρας του μαθήματος με τη Μ. είναι μαθητοκεντρικός, με την ίδια να λύνει ασκήσεις, αλλά και να κατευθύνει το μάθημα μέσα από τις απορίες της. Πολλές φορές, είναι αφηρημένη ή βιαστική και κάνει λάθη απροσεξίας.

Β ΜΑΘΗΤΡΙΑ

Η Α. είναι 16 ετών και η σχέση της με τα μαθηματικά είναι αρκετά δύσκολη. Κάνουμε ιδιαίτερα μόλις τους τελευταίους μήνες και έχει αρκετά κενά από τις προηγούμενες τάξεις, τα οποία προσπαθούμε να καλύψουμε. Η ίδια, έχει αναφέρει πως προτιμά τη γεωμετρία και η άλγεβρα της φαίνεται πολύ δύσκολη. Αν και έχει εξαιρετικά ανεπτυγμένες ικανότητες επίλυσης προβλημάτων, έχει βασικά κενά, τα οποία συχνά την φέρνουν σε αδιέξοδο, στην προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων.

Γ ΜΑΘΗΤΗΣ

Ο Α. είναι 16 ετών και είναι ένας μαθητής που αγαπά τα μαθηματικά, ενώ πρόκειται να ακολουθήσει σπουδές στον τομέα των φυσικών επιστημών και ενδιαφέρεται να μην αφήσει κανένα κενό. Είναι επιμελής και έχει εξαιρετικές γνώσεις και ικανότητες. Κάνει σπάνια λάθη και όταν τα κάνει, είναι συνήθως από το άγχος του και την υπερπροσπάθεια που καταβάλει. Δουλεύουμε μαζί μέσα από τα ιδιαίτερα τα τελευταία δύο έτη.

4.3.Pre test

Μία εβδομάδα πριν τη διεξαγωγή της παρέμβασης, πραγματοποιήθηκε pre test, το οποίο οι μαθητές συμπλήρωσαν σε μία διδακτική ώρα, 45 λεπτά. Παρακάτω, παρουσιάζονται οι ασκήσεις και οι λύσεις τους. Τα αποτελέσματα των μαθητών, χρησιμοποιήθηκαν για να γίνει σύγκριση με τα αποτελέσματα μετά την παρέμβαση:

1)Λύστε την ακόλουθη εξίσωση $x^2 + 5x - 6 = 0$

2)Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 = 0$

3)Λύστε την ακόλουθη εξίσωση: $3x^2 - 10x + 7 = 0$

4)Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 6x + 5 = 0$

5)Λύστε την ακόλουθη εξίσωση: $2x^2 + 7x + 3 = 0$

Λύσεις

1.

$(x-1)(x+6)=0$

$x-1=0$

$x+6=0$

$x=1$

$x=-6$

2.

$2x2-x-2x+1=0$

$(2x-1)-1(2x-1)=0$

$(x-1)(2x-1)=0$

$x-1=0$

$2x-1=0$

$x=1$

$x=1/2$

3.

$3x2-3x-7x+7=0$

$3x(x-1)-7(x-1)=0$

$(3x-7)(x-1)=0$

$3x-7=0$

$x-1=0$

$x=7/3$

$x=1$

4.

$(x-5)(x-1)=0$

$x-5=0$

$x-1=0$

$x=5$

$x=1$

5.

$2x2+6x+x+3=0$

$2x(x+3)+x+3=0$

$(2x+1)(x+3)=0$

$2x+1=0$

$x+3=0$

$x=-1/2$

$x=-3$

Οι μαθητές, έκαναν κυρίως λάθη όσον αφορά την εφαρμογή τις θεωρίας αλλά και τις πράξεις, όπως για παράδειγμα το να ξεχάσουν πρόσημα ή να κάνουν λάθη στα πρόσημα, καθώς και λάθη στον υπολογισμό των ριζών, ενώ η μαθήτρια Β, δεν έλυσε καθόλου τις δύο ασκήσεις. Οι μαθητές, αιτιολόγησαν σε ειδικό πεδίο κάτω από τις απαντήσεις τους την απάντηση τους για την κάθε άσκηση. Οι απαντήσεις τους, παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 1: Αιτιολόγηση λαθών pre test

Ασκήσεις	Μαθητής Β	Μαθητής Α	Μαθητής Γ
1	Σύμφωνα με τη θεωρία που μάθαμε	Ακολούθησα τη θεωρία	Ακολούθησα τα βήματα που έχω διδαχτεί
2	Σύμφωνα με τη θεωρία που μάθαμε	Ακολούθησα τη θεωρία	Ακολούθησα τα βήματα που έχω διδαχτεί
3	Δεν ήμουν πολύ σίγουρη	Μπερδεύτηκα λίγο	Ακολούθησα τα βήματα που έχω διδαχτεί
4	-	Δεν ήμουν σίγουρη πως να διαχειριστώ τη ρίζα του αριθμού	Ακολούθησα τα βήματα που έχω διδαχτεί
5	-	Μπερδεύτηκα λίγο με τη ρίζα	Ακολούθησα τα βήματα που έχω διδαχτεί

Κεφάλαιο 5ο : Αποτελέσματα παρέμβασης

5.1.Παρουσίαση αποτελεσμάτων ασκήσεων παρέμβασης

Δραστηριότητες της παρέμβασης

Δραστηριότητα 1: Εισαγωγή στη Μέθοδο του Al-Khwarizmi (15 λεπτά)

Παιδαγωγική Μέθοδος: Διάλεξη, Συζήτηση

Σε αυτή τη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός εισήγαγε τη Μέθοδο του Al-Khwarizmi παρέχοντας ένα σύντομο ιστορικό της συνεισφοράς του στην άλγεβρα. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός εξήγησε τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση εξισώσεων, χρησιμοποιώντας το φύλλο εργασίας ως παράδειγμα. Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να κάνουν ερωτήσεις και να συμμετέχουν σε μια συζήτηση σχετικά με τη μέθοδο. Πιο συγκεκριμένα, ένας από τους μαθητές, ενδιαφέρθηκε να μάθει από πότε οι άνθρωποι χρησιμοποιούν εξισώσεις και αν στην αρχαιότητα, διδάσκονταν στους μαθητές μαζί με τη γεωμετρία. Ακόμη, μία μαθήτρια σχολίασε ότι θεωρεί πολύ ενδιαφέρον να μαθαίνει για την ιστορία των μαθηματικών, καθώς φέρνει το μάθημα πιο κοντά στα ενδιαφέροντα της.

Δραστηριότητα 2: Επίλυση εξισώσεων με τη μέθοδο Al-Khwarizmi (30 λεπτά)

Παιδαγωγική Μέθοδος: Επίλυση Προβλημάτων, Ομαδική Εργασία

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές εργάστηκαν σε ομάδες των τριών (1 ομάδα) για να λύσουν εξισώσεις χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο του Al-Khwarizmi. Ο εκπαιδευτικός παρείχε ένα σύνολο εξισώσεων διαφορετικών επιπέδων δυσκολίας και οι μαθητές χρησιμοποίησαν το παράδειγμα στο φύλλο εργασίας για να τις λύσουν. Ο εκπαιδευτικός παρείχε διαρκή καθοδήγηση στην ομάδα. Ο μαθητές που είχε μεγαλύτερη εξοικείωση με τα μαθηματικά, καθοδήγησε την ομάδα, σε ορισμένα σημεία στα οποία έδειξε να δυσκολεύεται. Και ο ίδιος, ρώτησε αρκετές φορές, ώστε να πάρει επιβεβαίωση ότι η ομάδα προχωρά σωστά. Τα παιδιά, ολοκλήρωσαν τις ασκήσεις με αρκετή ευκολία και τα λάθη των μαθητών ήταν πολύ λιγότερα. Αυτή τη φορά, τα λάθη είχαν να κάνουν αποκλειστικά με πράξεις, όπως για παράδειγμα λάθη σε σχέση με τα πρόσημα, παραλείψεις ή λάθη απροσεξίας και η εφαρμογή της θεωρίας έγινε κατευθείαν με σωστό τρόπο, δηλαδή, οι μαθητές βασίστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα και έλυσαν με τα ίδια βήματα την άσκηση με τους νέους αριθμούς. Κάθε μαθητής από την ομάδας, συμπλήρωσε σε πεδίο στο φύλλο εργασίας γιατί ακολούθησε τα βήματα αυτά για να εφαρμόσει τη μέθοδο του Al-Khwarizmi:

Πίνακας 2: Αιτιολόγηση λαθών Δραστηριότητα 2

Μαθητές	Απάντηση σε Πεδίο
Μαθητής 1	Προσπάθησα να εφαρμόσω τα βήματα από τα παραδείγματα
Μαθητής 2	Ακολούθησα το υπόδειγμα
Μαθητής 3	Προσπάθησα να μπω στη λογική του και να εργαστώ με τα διαθέσιμα δεδομένα της εποχής του

Δραστηριότητα 3: Σύγκριση της μεθόδου του Al-Khwarizmi με τις σύγχρονες μεθόδους (20 λεπτά)

Παιδαγωγική Μέθοδος: Σύγκριση, Συζήτηση

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές συνέκριναν τη Μέθοδο του Al-Khwarizmi με σύγχρονες μεθόδους επίλυσης εξισώσεων. Ο εκπαιδευτικός έδωσε παραδείγματα εξισώσεων που μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας και τις δύο μεθόδους και οι μαθητές και συζήτησαν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε μεθόδου. Ο εκπαιδευτικός διευκόλυνε τη συζήτηση και ενθάρρυνε την κριτική σκέψη. Μία μαθήτρια, ρώτησε αν έχει νόημα να συζητάμε σήμερα για τη μέθοδο αυτή και έτσι ενθάρρυνε περισσότερο τη συζήτηση. Παρακάτω, παρατίθεται η απάντηση που έδωσε ο κάθε μαθητής:

Πίνακας 3: Απαντήσεις Δραστηριότητα 3

Απάντηση Μαθητή 1	Απάντηση Μαθητή 2	Απάντηση Μαθητή 3
Θεωρώ ότι η σημερινή μέθοδος είναι ευκολότερη αλλά αρέσει που την έμαθα γιατί με διευκόλυνε να καταλάβω πράγματα	Εμένα μου φαίνεται πιο δύσκολη μέθοδος αλλά είναι πιο ενδιαφέρουσα και ότι ήταν σημαντική η συμβολή του	Έχουμε μια πιο σύγχρονη και γρήγορη μέθοδο που μπορεί να εφαρμοστεί σε όλες τις περιπτώσεις χωρίς περιττά βήματα θεωρώ. Αλλά και πάλι για τα δεδομένα της εποχής του

		η μέθοδος του ήταν πάρα πολύ καλή.

Δραστηριότητα 4: Εισαγωγή στη μέθοδο του Διόφαντου (15 λεπτά)

Παιδαγωγική Μέθοδος: Διάλεξη, Συζήτηση

Σε αυτή τη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός εισήγαγε τη Μέθοδο του Διόφαντου παρέχοντας ένα σύντομο ιστορικό της συνεισφοράς του στην άλγεβρα. Στη συνέχεια, περιέγραψε με τη χρήση εικόνων και βίντεο, τη μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για τη διαίρεση της ενότητας σε δύο μέρη, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα το φύλλο εργασίας. Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να κάνουν ερωτήσεις και να συμμετέχουν σε μια συζήτηση σχετικά με τη μέθοδο. Ο μαθητής έδειξε εντυπωσιασμένος που θα διδασκόταν για το Διόφαντο γιατί όπως ανέφερε τον εντυπωσιάζει η ιστορία των μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα και ήθελε να μάθει περισσότερα πράγματα για τη ζωή του. Γενικά, όλοι οι μαθητές, έδειξαν αρκετό ενθουσιασμό. Έκαναν ερωτήσεις σχετικά με τη ζωή και τη συμβολή του, καθώς και με την καταγωγή και άλλα βιογραφικά στοιχεία του. Μία μαθήτρια, ανέφερε πως είχε ήδη διδαχτεί στο σχολείο για το Διόφαντο αλλά δε θυμόταν καλά και τόνισε πως: «θα το θυμάμαι τώρα». Ακόμη, τα παιδιά ζήτησαν να γίνει αναζήτηση στο διαδίκτυο για να δουν απεικονίσεις του Διόφαντου.

Δραστηριότητα 5: Επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο του Διόφαντου (30 λεπτά)

Παιδαγωγική Μέθοδος: Επίλυση Προβλημάτων, Ομαδική Εργασία

Σε αυτή τη δραστηριότητα, οι μαθητές εργάστηκαν ομαδικά για να λύσουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Διόφαντου, χρησιμοποιώντας το φύλλο εργασίας, με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού που τους συμβούλευε. Οι ερωτήσεις ήταν αρκετά συχνές και όλοι οι μαθητές εκτός από τον μαθητή Β, έδειξαν να δυσκολεύονται αρκετά. Τα λάθη που έκαναν οι μαθητές, συνδέονταν με το γεγονός ότι είχαν ορισμένα κενά και για το λόγο αυτό δεν μπορούσαν να κατανοήσουν και να σκεφτούν ορισμένα απαραίτητα βήματα για την επίλυση των ασκήσεων. Για παράδειγμα, μία από τις μαθήτριες, χρησιμοποίησε κλάσματα με λανθασμένους αριθμούς για να λύσει την άσκηση, στα οποία προσέθεσε τυχαίους αριθμούς. Επιπλέον, από τα λάθη αλλά και τα ερωτήματα των μαθητών, φάνηκε ότι δυσκολεύτηκαν να οπτικοποιήσουν την πρόταση και να συλλάβουν το ζητούμενο της άσκησης που τους δόθηκε ως μία εξίσωση: «Με βάση τη μέθοδο του Διοφάντου, να διαιρεθεί η μονάδα σε δύο μέρη, ώστε αν προστεθούν σ’ αυτά δοσμένοι αριθμοί, τότε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων να δίνει τετράγωνο». Για παράδειγμα, μία από τις μαθήτριες ρώτησε: «Δηλαδή να δίνει 2;». Στη συνέχεια, ο μαθητής Β΄ της εξήγησε τι εννοεί με το τετράγωνο και η ίδια αμέσως θυμήθηκε, ωστόσο, το αποτέλεσμα της πράξης της ήταν λάθος γιατί έκανε λάθος τις πράξεις.

Οι δραστηριότητες συμπληρώθηκαν με οπτικοακουστικό υλικό, όπως βίντεο ή προσομοιώσεις, για να παρέχουν στους μαθητές μια πιο ελκυστική και διαδραστική εμπειρία μάθησης. Ο συνολικός χρόνος και για τις πέντε δραστηριότητες ήταν 1 ώρα και 50 λεπτά.

Αποτελέσματα παρέμβασης

Αρχικά, παρουσιάζονται σύντομα, οι σωστές λύσεις που αναμενόταν να παρουσιάσουν οι μαθητές.

Μέθοδος Al-Khwārizmī: Λύστε την εξίσωση $x^2 + 10x = 39$.

Λύση: Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 10x = 39$, κατασκευάζουμε αρχικά ένα τετράγωνο με πλευρά x για τον όρο x^2 και δύο ορθογώνια με πλευρές 5 και x, αντίστοιχα, για τον όρο 10x. Στη συνέχεια σκιάζουμε μια περιοχή του τετραγώνου (που ισούται με 39) και προσδιορίζουμε ότι ολόκληρο το τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με $25 + 39 = 64 = 8^2$. Επομένως, $5 + x = 8$ και $x = 3$.

Λύστε την εξίσωση $x^2 + 21 = 10x$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Al-Khwārizmī.

Λύση: Για να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + 21 = 10x$, πρώτα αναδιατάσσουμε τους όρους για να πάρουμε $x^2 - 10x + 21 = 0$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο με πλευρά $x - 5$ για τον όρο $x^2 - 10x$ και δύο ορθογώνια με πλευρές 3 και $x - 5$, αντίστοιχα, για τον όρο 21. Στη συνέχεια σκιάζουμε το εμβαδόν των δύο ορθογωνίων, που είναι ίσο με 21, και προσδιορίζουμε ότι ολόκληρο το τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με $16 = 4^2$. Επομένως,

$3 + (x - 5) = 4$ και $x = 6$.

Μέθοδος Διόφαντου: Χωρίστε τη μονάδα σε δύο μέρη, έτσι ώστε αν προστεθούν αριθμοί σε αυτούς, τότε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων να δίνει ένα τετράγωνο.

Λύση: Για να χωρίσουμε τη μονάδα σε δύο μέρη, έτσι ώστε αν προστεθούν αριθμοί σε αυτούς, τότε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων δίνει ένα τετράγωνο, αφήνουμε τα δύο μέρη να είναι x και 1 - x, αντίστοιχα. Στη συνέχεια προσθέτουμε τους δοσμένους αριθμούς a και b στο x και 1 - x, αντίστοιχα, για να πάρουμε x + a και 1 - x + b. Στη συνέχεια βρίσκουμε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων ως $(x + a)(1 - x + b) = ab + (b - a)x + x^2 - x$. Θέλουμε αυτή η έκφραση να είναι τετράγωνο, οπότε μπορούμε να την αφήσουμε ίση με $(x - m)^2$, όπου m είναι μια σταθερά. Διευρύνοντας το τετράγωνο και συγκρίνοντας τους συντελεστές, παίρνουμε $m = (b - a)/2$ και $2m^2 + a + b = 1$.

Τα αποτελέσματα των pre test και φύλλου εργασίας για τους τρεις μαθητές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 4: Αποτελέσματα pre test και φύλλου εργασίας

	Βαθμολογία μαθητή προ-τεστ	Βαθμολογία στο φύλλο εργασίας
Α	12	18
Β	9	16
Γ	15	20

Σημείωση: Οι βαθμολογίες είναι σε σύνολο 20 βαθμών.

Κοινά λάθη τα οποία διαπιστώθηκαν περιλαμβάνουν:

1) Λάθη και απροσεξίας κατά την απλοποίηση. (Μαθ. Α)

2) Εσφαλμένος συνδυασμός παρόμοιων όρων. (Μαθ. Β/Γ)

3) Λάθη προσήμου κατά την απλοποίηση ή το συνδυασμό όρων. (Μαθ.Α/Β)

4) Εσφαλμένη ανάγνωση ή παρερμηνεία της ερώτησης, που οδηγεί σε λανθασμένες απαντήσεις. (Μαθ, Α/Β/Γ)

5) Παρανόηση των εννοιών των τετραγωνικών ριζών ή των κλασματικών εκθετών. (Μαθ. Α/Β)

Με βάση τα αποτελέσματα, μπορεί να συναχθεί το συμπέρασμα ότι οι μαθητές παρουσίασαν βελτίωση στην κατανόησή τους για το θέμα μετά την παρέμβαση.

Η βαθμολογία του μαθητή Α αυξήθηκε από 12 σε 18, 50% βελτίωση.

Η βαθμολογία του μαθητή Β αυξήθηκε από 9 σε 16, 78% βελτίωση.

Η βαθμολογία του μαθητή Γ αυξήθηκε από 15 σε 21, 40% βελτίωση.

Συνολικά, η μέση βελτίωση για τους τρεις μαθητές είναι 56%, γεγονός που υποδηλώνει σημαντική βελτίωση στην κατανόηση των εξισώσεων της δευτέρου βαθμού. Επομένως, μπορεί να συναχθεί το συμπέρασμα ότι η παρέμβαση ήταν αποτελεσματική στη βελτίωση της επίδοσης των μαθητών στην επίλυση εξισώσεων της δεύτερης τάξης.

5.2.Post test

Για να διαπιστωθεί αν από την παρέμβαση προέκυψε θετικό αποτέλεσμα, είναι σημαντικό να εξεταστεί η απόδοση των μαθητών, σε παρόμοιες ασκήσεις, ήταν καλύτερη ή χειρότερη σε σχέση με πριν. Για το λόγο αυτό, στους μαθητές μοιράστηκε Post Test (βλ. Παράρτημα) με 5 ασκήσεις, ούτως ώστε να αξιολογηθεί η απόδοση τους. Κάτω από κάθε άσκηση, οι μαθητές συμπλήρωσαν γιατί την έλυσαν με τον τρόπο αυτό. Τα Post Test, συμπληρώθηκαν από τον κάθε μαθητή μόνο του, χωρίς κάποια καθοδήγηση:

Πίνακας 5: Σύγκριση αποτελεσμάτων με post test

προ-τεστ φύλλο εργασίας	Τεστ μετά την παρέμβαση
Α 12 18	17
Β 9 16	15
Γ 15 20	20

Όπως προκύπτει από τη μελέτη των αποτελεσμάτων, η βελτίωση ήταν σημαντική ακόμη και στο post test, στο οποίο τα παιδιά δεν είχαν καμία βοήθεια ή καθοδήγηση. Λαμβάνοντας υπ’ όψη το γεγονός αυτό, τα αποτελέσματα είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικά.

Εξετάζοντας τα λάθη των μαθητών στο post test, ιδιαίτερη δυσκολία, φαίνεται να είχαν όσον αφορά τις ασκήσεις που περιλάμβαναν τη μέθοδο του Διόφαντου, καθώς για τη σωστή επίλυση, είναι απαραίτητη ή αξιοποίηση προηγούμενων γνώσεων. Παρά το γεγονός ότι κατά την παρέμβαση είχε δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στο πρόβλημα του Διόφαντου, μία από τις μαθήτριες έκανε και πάλι το ίδιο λάθος, προσπαθώντας να λύση αυτή τη φορά το πρόβλημα χρησιμοποιώντας δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη, υπήρχαν και πάλι ορισμένα λάθη απροσεξίας, όσον αφορά τα πρόσημα. Στον ακόλουθο πίνακα, παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών, σχετικά με τους λόγους για τους οποίους συμπλήρωσαν με τον τρόπο αυτό τις ασκήσεις:

Πίνακας 6: Αιτιολόγηση απαντήσεων post test

	Μαθ. Α	Μαθ. Β	Μαθ. Γ
Άσκηση 1	Βασίστηκα σε όσα είπαμε στο μάθημα	Θυμήθηκα τα παραδείγματα	Βασίστηκα στη λογική του που είχα καταλάβει από το μάθημα
Άσκηση 2	Με βάση την αιτιολόγηση που είπαμε στο μάθημα	Θυμόμουν που το εξηγήσατε στο μάθημα	Χρησιμοποίησα τη λογική μου και σκέφτηκα τι τον ανάγκασε να αναπτύξει τη μέθοδο

Άσκηση 3	Με βάση τη μνήμη μου	Το θυμόμουν	Είχαμε διδαχτεί τη θεωρεί και είναι λογικό
Άσκηση 4	Εδώ μπερδεύτηκα λίγο	Νομίζω ότι έκανα λάθος δεν μπόρεσα να το ολοκληρώσω καθώς είχα ξεχάσει κάποια βήματα	Εφάρμοσα όσα γνωρίζω και το είχαμε διδαχτεί και κάνει στο μάθημα
Άσκηση 5	Το έλυσα με σύγχρονη μέθοδο	Την έλυσα κανονικά όπως γνώριζα	Έλυσα την εξίσωση κανονικά όπως θα την έλυνα και πριν το μάθημα με τη χρήση ιστορίας

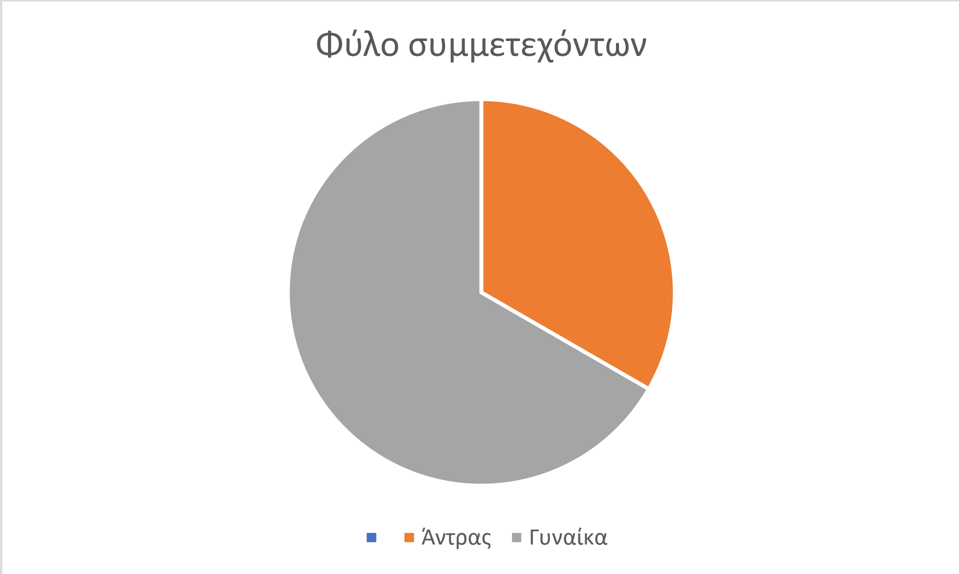
Και στην παρούσα έρευνα, όπως και στην έρευνα του Makgakga (2014), η οποία πραγματοποιήθηκε στα σχολεία της Ν. Αφρικής, οι μαθητές έκαναν αρκετά λάθη στις πράξεις και στην παραγοντοποίηση, όσον αφορά την επίλυση εξισώσεων. Αντίστοιχα, ήταν και τα αποτελέσματα της έρευνας της Μαργαριτίδου (2019), η οποία έδειξε προβλήματα όσον αφορά την παραγοντοποίηση, αλλά και την αφαίρεση παρενθέσεων. Η έρευνα των Godden, Mbekwa, & Julie (2013) ανέδειξε ότι πολλοί μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολίες στο να θυμούνται και να χρησιμοποιούν τους σωστούς τύπους της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και ορισμένοι δυσκολεύονται να εφαρμόσουν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα . Στην παρούσα έρευνα, αναδείχθηκε επίσης ότι ορισμένοι μαθητές παρουσιάζουν δυσκολίες, όσον αφορά τη χρήση των σωστών τύπων εξισώσεων.

5.3.Έρευνα με ερωτηματολόγια για τις εντυπώσεις των μαθητών

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας, στους μαθητές μοιράστηκε ερωτηματολόγιο, το οποίο συμπλήρωσαν διαδικτυακά, χρησιμοποιώντας της κινητές συσκευές τους. Στόχος του ερωτηματολογίου, ήταν να καταγράψει τις απόψεις των μαθητών που συμμετείχαν στην παρέμβαση, για τη διδασκαλία την οποία παρακολούθησαν, ώστε να αξιοποιηθούν οι απόψεις τους για πιθανές βελτιώσεις. Παρακάτω, παρουσιάζονται ορισμένα διαγράμματα, τα οποία εξήχθησαν κατόπιν της στατιστικής ανάλυσης των αποτελεσμάτων, που κατεγράφησαν στο google forms:

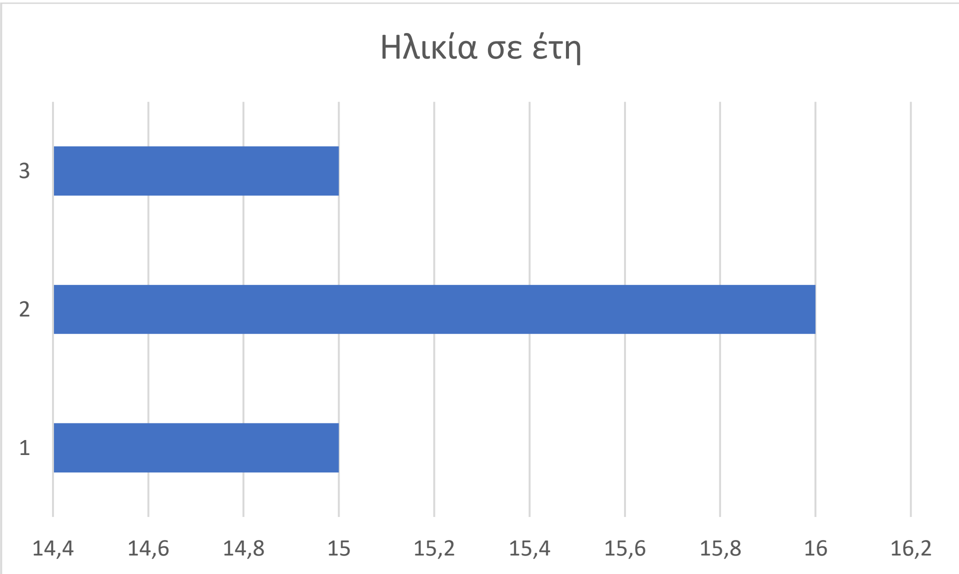
Όπως απεικονίζεται και στο πρώτο διάγραμμα, στην παρέμβαση συμμετείχαν δύο κορίτσια και ένα αγόρι:

Διάγραμμα 1: Φύλο συμμετεχόντων μαθητών



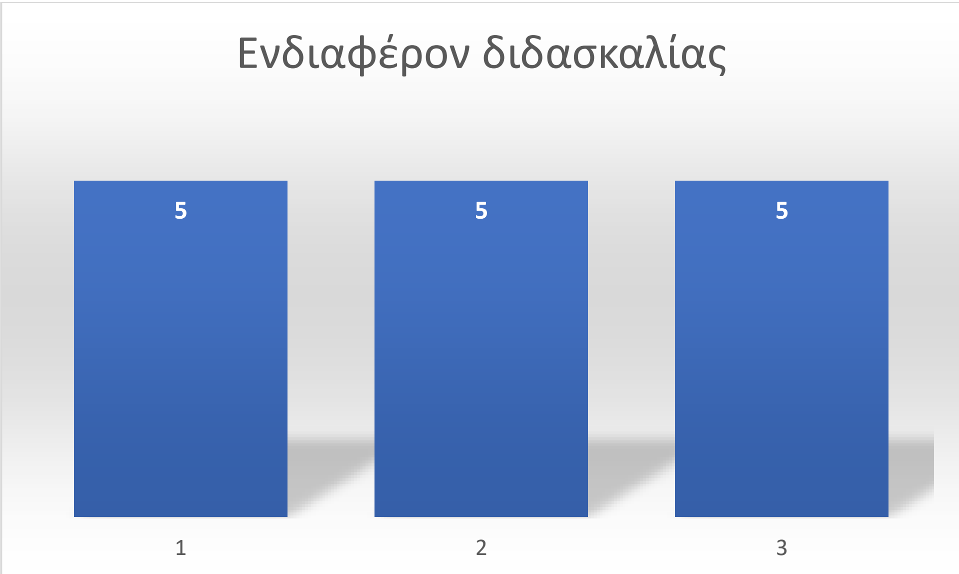
Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η ηλικία των μαθητών, οι οποίοι ήταν 15 έως 16 ετών, καθώς φοιτούν στην πρώτη τάξη του λυκείου, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω:

Διάγραμμα 2: Ηλικία συμμετεχόντων μαθητών



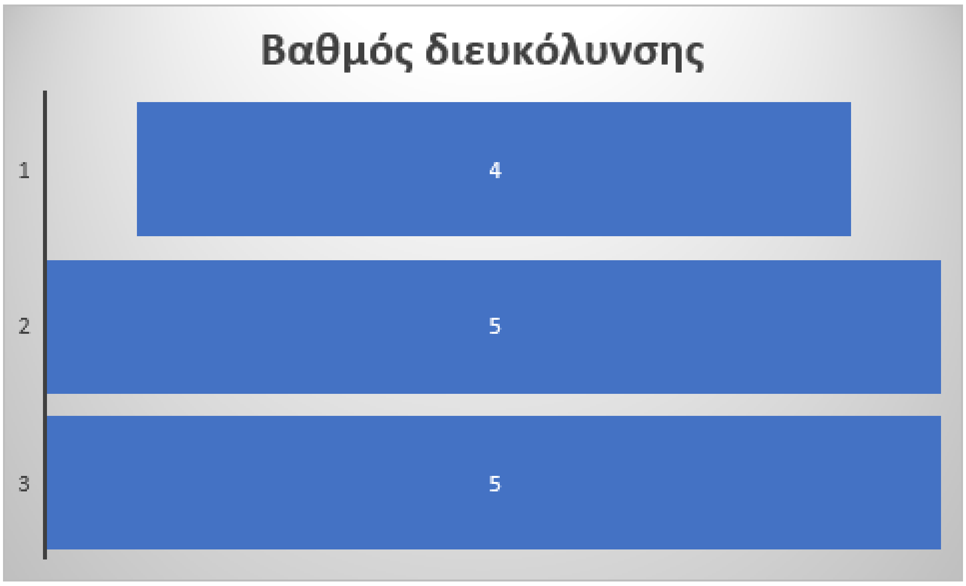
Ακολούθως, οι μαθητές κλήθηκαν να βαθμολογήσουν, απαντώντας από καθόλου έως πάρα πολύ σε μία κλίμακα πέντε βαθμών, κατά πόσο ήταν ενδιαφέρουσα η διδασκαλία την οποία παρακολούθησαν. Όπως προκύπτει και από τη διαγραμματική απεικόνιση, και οι τρεις μαθητές, βρήκαν πάρα πολύ ενδιαφέρουσα την διδακτική παρέμβαση. Όταν οι μαθητές ερωτήθηκαν γιατί βρήκαν ενδιαφέρον το μάθημα, ο μαθητής ανέφερε: «Γιατί ενώ κάναμε μαθηματικά, μάθαμε και άλλα πράγματα και γενικά δεν ήξερα και πολλά για την ιστορία των μαθηματικών και μου άρεσε». Ακόμη, μία από τις μαθήτριες είπε: «Ήταν πολύ διαδραστικό το μάθημα και δεν ήταν βαρετό γιατί είχε πολλές διακοπές και όχι μόνο ασκήσεις».

Διάγραμμα 3: Ενδιαφέρον παρέμβασης



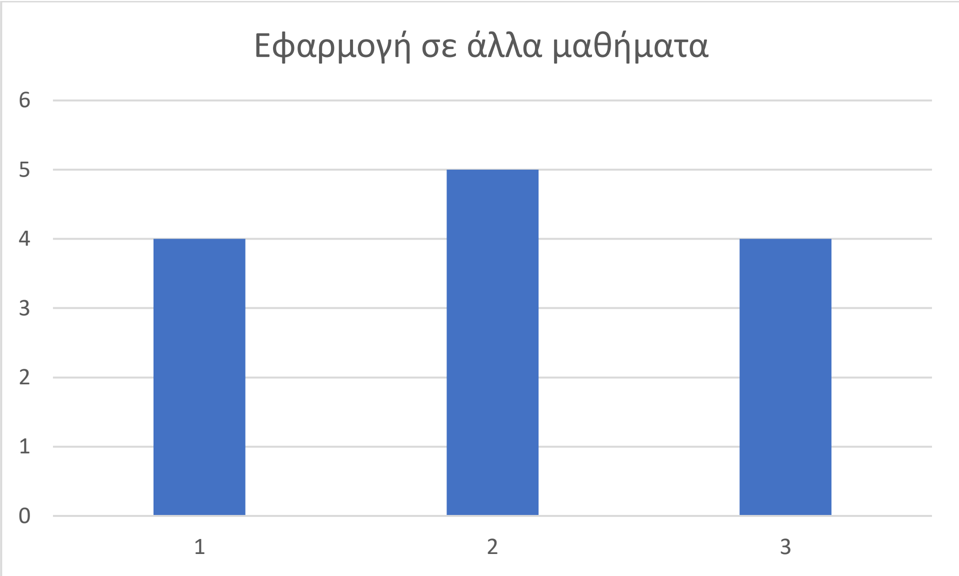
Ακόμη, οι μαθητές οι οποίοι παρακολούθησαν τη διδασκαλία, ερωτήθηκαν σχετικά με το πόσο διευκολύνθηκαν με τον τρόπο διδασκαλίας, ο οποίος περιελάμβανε την διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από την ιστορία τους. Όπως προκύπτει, οι μαθητές απάντησαν ότι τους διευκόλυνε από πολύ, έως πάρα πολύ, με τους 2 στους 3 μαθητές να υποστηρίζουν το πάρα πολύ. Μάλιστα, ένα από τα παιδιά είπε: «Εννοείται πως ήταν πιο εύκολο γιατί είχαμε λεπτομερή παραδείγματα και είχαμε και βοήθεια με αυτό τον τρόπο. Επίσης, επειδή είχα συνδέσει την επίλυση με την ιστορία και το πρόσωπο για εμένα ήταν πιο εύκολο να θυμάμαι, θυμόμουν τη λογική πίσω από τις πράξεις. Μακάρι να το κάναμε με όλα τα μαθήματα αυτό, εγώ θα το προτιμούσα προσωπικά.

Διάγραμμα 4: Βαθμός διευκόλυνσης



Έπειτα, ερωτήθηκαν σχετικά με το αν θα επιθυμούσαν να διδαχτούν και άλλα μαθήματα με την ίδια μέθοδο. Η απάντηση τους ήταν θετική, με δύο από τους τρείς μαθητές να υποστηρίζουν ότι θα το ήθελαν πολύ, ενώ ένας μαθητής υποστήριξε ότι θα το ήθελε πάρα πολύ. Μία από τις μαθήτριες ανέφερε: «Ειδικά μαθήματα όπως η φυσική και η χημεία για παράδειγμα που έχει τόσες ανακαλύψεις είναι κρίμα που δε διδάσκονται έτσι, θεωρώ ότι κακώς τα αποσυνδέουμε γιατί έτσι χάνουμε και τη συνέχεια».

Διάγραμμα 5: Εφαρμογή σε άλλα μαθήματα



Έπειτα, ζητήθηκε από τους μαθητές, να επιλέξουν ποιες βελτιώσεις θα πρότειναν για την παρέμβαση, προτείνοντας ευρύτερη χρήση της τεχνολογίας, περισσότερη χρήση οπτικοακουστικού υλικού και περισσότερο χρόνο διδασκαλίας, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα. Όσον αφορά το χρόνο, ένα από τα παιδιά υποστήριξε: «αν είχα πιο πολύ χρόνο θα μπορούσα ίσως να τα πάω καλύτερα γιατί είναι η πρώτη φορά που μαθαίνω με τον τρόπο αυτό».

Διάγραμμα 6: Προτάσεις βελτίωσης

Τέλος, ζητήθηκε από τους μαθητές να αναφέρουν τα θετικά και τα αρνητικά στοιχεία της παρέμβασης, Ως θετικά, ανέφεραν το ενδιαφέρον, τη συνεργασία, την ευκολία και τη χρήση εικόνων. Ως αρνητικά στοιχεία, ανέφεραν την έλλειψη χρόνου και τη δυσκολία.

Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα, ανέδειξε πως η διδασκαλία δευτεροβάθμιων εξισώσεων σε μαθητές με τη χρήση της ιστορίας των μαθητών, είχε ευνοϊκά αποτελέσματα ως προς την επίδοση και την ικανοποίηση τους. Στην παρέμβαση συμμετείχαν δύο κορίτσια και ένα αγόρι, οι οποίοι ήταν 15 έως 16 ετών, καθώς φοιτούν στην πρώτη τάξη του λυκείου. Οι μαθητές, αφού παρακολούθησαν την παρέμβαση, κλήθηκαν να βαθμολογήσουν, απαντώντας από καθόλου έως πάρα πολύ σε μία κλίμακα πέντε βαθμών, κατά πόσο ήταν ενδιαφέρουσα η διδασκαλία την οποία παρακολούθησαν. Οι τρεις μαθητές οι οποίοι συμμετείχαν στην παρέμβαση βρήκαν πάρα πολύ ενδιαφέρουσα την διδακτική παρέμβαση. Μάλιστα, όταν οι μαθητές ερωτήθηκαν γιατί βρήκαν ενδιαφέρον το μάθημα, ο μαθητής ανέφερε: «Γιατί ενώ κάναμε μαθηματικά, μάθαμε και άλλα πράγματα και γενικά δεν ήξερα και πολλά για την ιστορία των μαθηματικών και μου άρεσε».

Ακόμη, οι μαθητές οι οποίοι παρακολούθησαν τη διδασκαλία, ερωτήθηκαν σχετικά με το πόσο διευκολύνθηκαν με τον τρόπο διδασκαλίας, ο οποίος περιλάμβανε την διδασκαλία των μαθηματικών μέσα από την ιστορία τους. Οι μαθητές δήλωσαν ότι τους διευκόλυνε από πολύ, έως πάρα πολύ, με τους 2 στους 3 μαθητές να υποστηρίζουν το πάρα πολύ. Μάλιστα, ένα από τα παιδιά που συμμετείχαν στην παρέμβαση, είπε: «Εννοείται πως ήταν πιο εύκολο γιατί είχαμε λεπτομερή παραδείγματα και είχαμε και βοήθεια με αυτό τον τρόπο. Επίσης, επειδή είχα συνδέσει την επίλυση με την ιστορία και το πρόσωπο για εμένα ήταν πιο εύκολο να θυμάμαι, θυμόμουν τη λογική πίσω από τις πράξεις. Μακάρι να το κάναμε με όλα τα μαθήματα αυτό, εγώ θα το προτιμούσα προσωπικά.»

Στη συνέχεια, ερωτήθηκαν σχετικά με το αν θα ήθελαν να διδαχτούν και άλλα μαθήματα με τον ίδιο τρόπο. Η απάντηση τους ήταν θετική, με δύο από τους τρείς μαθητές να υποστηρίζουν ότι θα το ήθελαν πολύ, ενώ ένας μαθητής υποστήριξε ότι θα το ήθελε πάρα πολύ. Έπειτα, ζητήθηκε από τους μαθητές, να επιλέξουν ποιες βελτιώσεις θα πρότειναν για την παρέμβαση, προτείνοντας ευρύτερη χρήση της τεχνολογίας, περισσότερη χρήση οπτικοακουστικού υλικού και περισσότερο χρόνο διδασκαλίας. Αναφορικά με το χρόνο διδασκαλίας, ένα από τα παιδιά υποστήριξε: «αν είχα πιο πολύ χρόνο θα μπορούσα ίσως να τα πάω καλύτερα γιατί είναι η πρώτη φορά που μαθαίνω με τον τρόπο αυτό». Τέλος, ζητήθηκε από τους μαθητές να αναφέρουν τα θετικά και τα αρνητικά στοιχεία της παρέμβασης, Ως θετικά, ανέφεραν το ενδιαφέρον, τη συνεργασία, την ευκολία και τη χρήση εικόνων. Ως αρνητικά στοιχεία, ανέφεραν την έλλειψη χρόνου και τη δυσκολία.

Περιορισμοί και Ερευνητικές προτάσεις

Η παρούσα έρευνα, προσέφερε σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με την αποτελεσματικότητα της χρήσης της μεθόδου της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και συγκεκριμένα στη διδασκαλία των δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Ωστόσο, βασικός περιορισμός της έρευνας ήταν το μικρό δείγμα στο οποίο βασίστηκε. Θα ήταν εξαιρετικά ενδιαφέρον, να πραγματοποιηθεί μία αντίστοιχη έρευνα σε μεγαλύτερο δείγμα, αλλά και να πραγματοποιηθεί μία έρευνα που θα εξετάσει τα αποτελέσματα μίας σειράς διδακτικών παρεμβάσεων με τη χρήση της ιστορίας των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση Βιβλιογραφία

Αγαπητού, Ν. (2021). Η διδασκαλία της δευτεροβάθμιας εξίσωσης με χρήση στοιχείων από την ιστορία των μαθηματικών. Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο.

Θωμαΐδης Χ. Γ. (2011), Εξισώσεις και ανισώσεις δευτέρου βαθμού στα Αριθμητικά του Διόφαντου, Εκδόσεις ΖΗΤΗ.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους». Επιστήμες Αγωγής «Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση», 16-37.

Λαγουδάκος, Γ. (2014). Στιγμές ιστορίας της επίλυσης εξισώσεων. Ανακτήθηκε από: https://blogs.sch.gr/zenonlig/files/2015/10/epilysi.exisoseon_LAGOUDAKOS.pdf

Μαργαριτίδου, Χ. (2019). Αξιοποιώντας την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία τους: η περίπτωση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Μεταπτυχιακή Διατριβή. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Φελούρης, Α., Στατεράς, Χ., Μέτης, Σ., & Χριστοδούλου, Ι. (επιμ.) (2001). Ευκλείδη 'Στοιχεία' Σύγχρονη απόδοση με εισαγωγή επεξηγήσεις και σχολιασμό. Αθήνα: Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης (Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ.)

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. Journal of Mathematical Behavior, 14, 145-162.

Didis, M. G., & Erbas, A. K. (2015). Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown. Educational Sciences: Theory & Practice, 15(4), 1137-1150.

Ernest P. (1998) The History of Mathematics in the Classroom, Vol. 27, No. 4, History of Mathematics (Sep., 1998), pp. 25-31 (7 pages), Published By: The Mathematical Association, https://www.jstor.org/stable/3021187.

Ernest, P., Skovsmose, O., Van Bendegem, J. P., Bicudo, M., Miarka, R., Kvasz, L., & Moeller, R. (2016). The philosophy of mathematics education. Springer Nature.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. For the Learning of Mathematics, 11(2), 3–6.

Fauvel, J., & Van Maaren, J. (Eds.). (2000). History in mathematics education. The ICMI Study. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Godden, H., Mbekwa, M., & Julie, C. (2013). An analysis of Errors and Misconceptions in the 2010 Grade 12 Mathematics Examination: A Focus on Quadratic Equations and Inequalities. the 19th Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (σσ. 70- 79). Cape Town: AMESA.

Karaduman G. (2010) A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing history of math in math education. Ανακτήθηκε από www.sciencedirect.com.

Katz, V. J. (1997). Algebra and its Teaching: An Historical Survey. Journal of mathematical behavior, 16(1), 25-38.

Katz, V. J. (1997). Some Ideas on the Use of History in the Teaching of Mathematics. For the Learning of Mathematics, 17(1), 62-63

Makgakga, S. (2014). Errors and Misconceptions in Solving Quadratic Equations By Completing A Square. Mathematics Education. Ανακτήθηκε από: http://www.amesa.org.za/AMESA2014/Proceedings/papers/Short%20Paper/4.%20Sello%20 Makgakga%20-AMESAPAPER2014final.pdf

Makonye, J. P., & Matuku, O. (2016). Exploring Learner Errors in Solving Quadratic Equations. International Journal of Science Education, 12(1), 7-15.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and theTeaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. For the learning of mathematics, 17(1), 26- 33.

Smith, D. (1958). History of Mathematics. New York: Dover Publications, Inc.

Swetz, Frank J. (1986). "The History of Mathematics as a Source of Classroom Problems." School Science and Mathematics 86: 33-38.

Swetz, F. J. (1994). From Five Fingers to Infinity: a journey through the history of mathematics. Illinois: Open Court

Vaiyavutjamai, P., Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (2005). Students' Attempts to Solve Two Elementary Quadratic Equations: A Study in Three Nations. Ανακτήθηκε από:

http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.526.1182&rep=rep1&type=pd

f

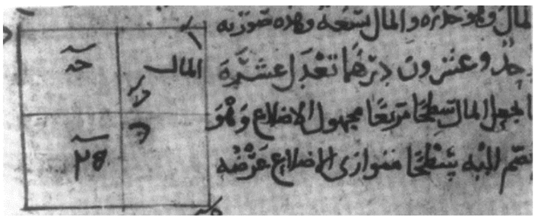
Παράρτημα

Στοιχεία Μαθητή:

Φύλλο εργασίας

1.Ο Al-Kwharizmi, καθώς δεν γνώριζε την ύπαρξη αρνητικών αριθμών, στα προβλήματά του χρησιμοποιούσε μεθόδους, που τον βοηθούσαν να απαλείφει τους αρνητικούς όρους των εξισώσεων εστιάζοντας στους θετικούς όρους. Στο σύγγραμμα του εντοπίζεται το παρακάτω πρόβλημα: «Να λύσετε την εξίσωση x2 +10x=39». Για την λύση, αρχικά κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο με πλευρά x για τον όρο x2 και δύο ορθογώνια με πλευρές 5 και x αντίστοιχα για τον όρο 10x. Συνεπώς, μία περιοχή του τετραγώνου (σκιάστε με το μολύβι σας) ισούται με 39 και ολόκληρο το τετράγωνο έχει εμβαδόν ίσο με 25+39=64=8*8 και επομένως 5+x=8 x=3.

Θυμηθείτε το χειρόγραφο που είδαμε και σχεδιάστε ένα σύγχρονο σχήμα!



2.Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν σας τη μέθοδο του Al Kwharizimi λύστε την ακόλουθη εξίσωση, σχεδιάζοντας ένα σχήμα και περιγράφοντας τα βήματα που ακολουθήσατε:

x2+21=10x

Ανατρέξτε στην απεικόνιση που είδαμε στη θεωρία!

3.Με βάση τη μέθοδο του Διοφάντου, να διαιρεθεί η μονάδα σε δύο μέρη, ώστε αν προστεθούν σ' αυτά δοσμένοι αριθμοί, τότε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων να δίνει τετράγωνο:

Καλή επιτυχία!!!

Post Test

1.Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Al Kwharzimi, προσπαθήστε να λύσετε την εξίσωση $x2 +10x=39$

2.Γιατί ο Al Kwarzimi ανέπτυξε τη συγκεκριμένη μέθοδο;

3.Ποιες περιπτώσεις δευτεροβάθμιων εξισώσεων με θετικούς συντελεστές διακρίνει ο Διόφαντος;

4.Σύμφωνα με τη μέθοδο του, διαιρέστε τη μονάδα σε δύο μέρη, ώστε αν προστεθούν σ' αυτά δοσμένοι αριθμοί, τότε το γινόμενο των δύο αθροισμάτων να δίνει τετράγωνο.

5. Λύστε την ακόλουθη εξίσωση: 3x 2 - 10x + 7 = 0

Καλή επιτυχία!

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

1.Ποιο είναι το φύλο σας;

Άντρας

Γυναίκα

2.Συμπληρώστε την ηλικία σας;

3.Πόσο ενδιαφέρουσα ήταν η διδασκαλία την οποία παρακολουθήσατε;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

4.Πόσο σας διευκόλυνε ο τρόπος διδασκαλίας;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

5.Θα θέλατε να διδαχτείτε και άλλα μαθήματα με την αξιοποίηση της ιστορίας;

Καθόλου 1 2 3 4 5 Πάρα Πολύ

6.Ποιες βελτιώσεις θα προτείνατε;

- Περισσότερο χρόνο διδασκαλίας
- Ευρύτερη χρήση της τεχνολογίας
- Περισσότερη καθοδήγηση
- Περισσότερη χρήση οπτικοακουστικού υλικού

7.Ποια ήταν τα θετικά στοιχεία της παρέμβασης;

8.Ποια ήταν τα αρνητικά στοιχεία της παρέμβασης;