ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δυσκολίες μαθητών Α΄ λυκείου στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων α΄ και β΄ βαθμού

Κωνσταντίνος Βουζβούρης

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Ρίτα Παναούρα

ΠΑΤΡΑ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ, 2024

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή

Πάτρα, 2024

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1.Επιβλέπουσακαθηγήτρια: Ρίτα Παναούρα

2.Μέλος επιτροπής: Ευγένιος Αυγερινός

3.Μέλος επιτροπής: Μιχαήλ Ανούσης

Δήλωση μη λογοκλοπής

Δηλώνω υπεύθυνα και γνωρίζοντας τις κυρώσεις του Ν. 2121/1993 περί Πνευματικής Ιδιοκτησίας, ότι η παρούσα προπτυχιακή εργασία είναι εξ ολοκλήρου αποτέλεσμα δικής μου ερευνητικής εργασίας, δεν αποτελεί προϊόν αντιγραφής ούτε προέρχεται από ανάθεση σε τρίτους. Όλες οι πηγές που χρησιμοποιήθηκαν (κάθε είδους, μορφής και προέλευσης) για τη συγγραφή της περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία.

Βουζβούρης, Κωνσταντίνος

Υπογραφή

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με στήριξαν, αλλά και με βοήθησαν κατά τη διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας. Πρώτον από όλους θα ήθελα να ευχαριστώ μέσα από τα βάθη της καρδιάς μου την επιβλέπουσα καθηγήτρια μου, την κυρία Ρίτα Παναούρα. Η κυρία Παναούρα με βοήθησε μέσα από τις παρατηρήσεις της, αλλά και την παροχή κατευθύνσεων να ολοκληρώσω χωρίς πρόβλημα την εργασία μου. Παράλληλα, η καθοδήγηση της συνέβαλε και στην ομαλή διεξαγωγή της ερευνητικής διαδικασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες και προς τα μέλη της επιτροπής τα οποία με τις καίριές τους παρατηρήσεις έχουν συμβάλει στη βελτίωση της ερευνητικής μου εργασίας.

Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, αλλά και στενούς μου φίλους οι οποίοι μου στάθηκαν και με στήριξαν, διατυπώνοντάς μου ενθαρρυντικά και ενισχυτικά λόγια, προκειμένου να συνεχίσω να προσπαθώ παρά τις δυσκολίες που υπήρξαν.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα σχολεία (εκπαιδευτικούς και διευθυντές) για την αποδοχή πραγματοποίησης της έρευνας και στη βοήθεια τους κατά την διάρκεια διεξαγωγής της έρευνας, τους μαθητές/τριες που συμμετείχαν στην έρευνα και τους γονείς των συμμετεχόντων.

Περίληψη

Η συγκεκριμένη έρευνα έχει ως στόχο της να εξετάσει τις δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες της Α΄ λυκείου, όταν επιλύουν εξισώσεις, αλλά και ανισώσεις α΄ και β΄ βαθμού. Η παρουσίαση της έρευνας διακρίνεται σε δύο κύρια μέρη: το θεωρητικό και το ερευνητικό. Το πρώτο μέρος της εργασίας περιλαμβάνει την παρουσίαση του θεωρητικού υπόβαθρου. Πιο συγκεκριμένα, στο εισαγωγικό μέρος της εργασίας παρουσιάζεται η σημασία της μαθηματικής εκπαίδευσης, το περιεχόμενο του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για το μάθημα των μαθηματικών, η αξία που έχει η διδασκαλία των εξισώσεων και των ανισώσεων σε συγκεκριμένη ηλικιακή ομάδα, οι δυσκολίες που οι εκπαιδευόμενοι αντιμετωπίζουν κατά τη διάρκεια διδασκαλίας της επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων. Με τον τρόπο αυτό εντάσσεται το συγκεκριμένο θέμα που έχει διερευνηθεί στο ευρύτερο πλαίσιο των στόχων της μαθηματικής παιδείας σήμερα και των διδακτικών προσεγγίσεων που αναμένονται να υιοθετούνται. Η ενασχόληση με τις εξισώσεις και ανισώσεις εντάσσεται επίσης σε ένα ιστορικό πλαίσιο ανάπτυξής τους για να συνδυαστεί με τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών. Ακόμη παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο για το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές/τριες αντιλαμβάνονται και κατανοούν τις εξισώσεις και τις ανισώσεις. Αναδεικνύεται η σημασία ανάπτυξης της παρούσας έρευνας η οποία επικεντρώνεται στον εντοπισμό των δυσκολιών και των λαθών των μαθητών στην επίλυση ασκήσεων με εξισώσεις και ανισώσεις και η διασύνδεση του βαθμού συσχέτισης της ικανότητας επίλυσής τους με τη διαδικασία λύσης αντίστοιχου προβλήματος.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας παρουσιάζεται η έρευνα που αναπτύχθηκε. Αρχικά παρουσιάζεται η μεθοδολογία της έρευνας. Παρουσιάζεται ο πληθυσμός και το δείγμα της έρευνας, τα εργαλεία συλλογής δεδομένων και η μέθοδος ανάλυσης των δεδομένων. Τέλος παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας και συζητούνται τα ευρήματα σε σχέση με το θεωρητικό μέρος της έρευνας. Τα κύρια ευρήματα δείχνουν πως υπήρχε μεγάλη ποικιλία μεταξύ των επιδόσεων των μαθητών στις διάφορες ασκήσεις και των τύπων λαθών που έκαναν. Το πιο συνηθισμένο λάθος ήταν το αριθμητικό λάθος. Ωστόσο, οι εργασίες που χρησιμοποιούσαν πιο σύνθετα προβλήματα και προκαλούσαν τους μαθητές να δώσουν λύσεις στην άλγεβρα ήταν

ιδιαίτερα δύσκολες. Υπήρχαν επίσης προβλήματα που σχετίζονται σημαντικά με ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές έπρεπε να εξαλείψουν τους παρονομαστές ή να χρησιμοποιήσουν τύπους για τεχνικές παραγοντοποίησης. Αυτά τα ευρήματα υποδηλώνουν ότι οι μαθητές έχουν ένα σημαντικό κενό στην ικανότητά τους να εφαρμόζουν τις έννοιες των μαθηματικών με ευελιξία και ακρίβεια. Κάτι που καθιστά αρκετά σαφές ότι πρέπει να έχουμε μια καλύτερη προσέγγιση στη διδασκαλία, όχι μόνο για την ενίσχυση των θεμελιωδών βασικών μαθηματικών δεξιοτήτων αλλά και για την ανάπτυξη προσαρμοστικής λογικής και επίλυσης προβλημάτων σε διάφορα πλαίσια.

Abstract

The aim of this research is to examine the difficulties faced by 1st high school students when they solve equations, but also first and second degree inequalities. The presentation of the research is divided into two main parts: the theoretical and the research. The first part of the presentation includes the presentation of the theoretical background. More specifically, the introductory part of the work presents the importance of mathematical education, the content of the Curriculum for the mathematics course, the value of teaching equations and inequalities to a specific age group, the difficulties that students face in the teaching duration of solving equations and inequalities. In this way, the specific topic that has been investigated is included in the wider context of the goals of mathematical education today and the teaching approaches that are expected to be adopted. Dealing with equations and inequalities is also placed in a historical context of their development to be combined with students' mistakes and misconceptions. It also presents the theoretical framework for mathematical analogical reasoning and how students perceive and understand equations and inequalities. The importance of the development of the present research is highlighted, which focuses on the identification of students' difficulties and mistakes in solving exercises with equations and inequalities and the interconnection of the degree of correlation of their solving ability with the solution process of the corresponding problem.

The second part of the paper presents the research developed. First, the research methodology is presented. The survey population and sample, data collection tools, and data analysis method are presented. Finally, the results of the research are presented and the findings are discussed in relation to the theoretical part of the research. The main findings show that there was wide variation between students' performance on the different exercises and the types of errors they made. The most common error was the arithmetic error. However, assignments that used more complex problems and challenged students to provide solutions in algebra were particularly difficult. There were also problems significantly related to questions in which students had to eliminate denominators or use formulas for factoring techniques. These findings suggest that students have a significant gap in their ability to apply mathematics concepts flexibly and accurately. Which makes it quite clear that we need to have a better approach to teaching, not only to reinforce fundamental basic

math skills but also to develop adaptive reasoning and problem solving in various contexts.

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Η μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης του εκπαιδευόμενου, στην καλλιέργεια των αναλυτικών και συνθετικών ικανοτήτων σκέψης και των δεξιοτήτων επίλυσης προβλήματος, όπου οι έννοιες εντάσσονται σε πιο ρεαλιστικά και αυθεντικά πλαίσια (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019). Επίσης στοχεύει στη δόμηση και ανάπτυξη της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και στην επικοινωνία αξιοποιώντας ποικίλες μορφές αναπαραστάσεων τους.

Η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί βασικό συστατικό του Αναλυτικού Προγράμματος σε όλα τα εκπαιδευτικά συστήματα. Η έμφαση που δίνεται σε επίπεδο πολιτείας ή κράτους στα Μαθηματικά καταδεικνύεται περαιτέρω από τη συμμετοχή των κρατών σε διεθνείς έρευνες που επικεντρώνονται στις μαθηματικές ικανότητες των παιδιών (όπως η PISA). Η μαθηματική εκπαίδευση συμβάλλει στην ανάπτυξη ικανοτήτων που είναι χρήσιμες στους/στις μαθητές/τριες για την επίλυση προβλημάτων, αλλά και για να μπορούν να σκέφτονται με κριτικό τρόπο και να αντιμετωπίζουν τις αυθεντικές καταστάσεις της καθημερινότητας. Με άλλα λόγια, η ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, τους επιτρέπει να επιλύουν και να ερμηνεύουν πολύπλοκα προβλήματα, να κάνουν συσχετίσεις, καθώς επίσης και να βρίσκουν διαφορές και μοτίβα σχέσεων. Μέσω της διδασκαλίας διαφόρων εννοιών και πρακτικών στα μαθηματικά οι μαθητές/τριες έχουν τη δυνατότητα, αναπτύσσονται γνώσεις, δεξιότητες και ικανότητες να αντιμετωπίζουν διάφορες καταστάσεις στην καθημερινότητά τους και να επιλύουν τυχόν προβλήματα που θα τους προκύψουν, είτε σε προσωπικό είτε σε επαγγελματικό ή εκπαιδευτικό επίπεδο.

Τα μαθηματικά εντοπίζονται σε αρχαίους πολιτισμούς και αποτέλεσαν αντικείμενο και εργαλείο επικοινωνίας των ανθρώπων με τρόπο συμβολικό, αλλά και νοητικά οικονομικό. Σε αυτό το πλαίσιο αποκτά νόημα η χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων και η λήψη των αποφάσεων διδασκαλίας με βάση το νοητικό φόρτο μετάβασης από τη μία αναπαράσταση στην άλλη. Τα τελευταία χρόνια στο πλαίσιο της διαπολιτισμικής εκπαίδευσης τα μαθηματικά και η ιστορική τους διάσταση έχουν μελετηθεί ως εργαλείο συνεργασίας παιδιών από διαφορετικές πολιτισμικές κουλτούρες(Vlachos, 2019).

Η αποδοτικότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών κρίνεται σημαντική, καθώς τα μαθηματικά αποτελούν τη βάση πολλών επιστημών και πεδίων είτε αυτόνομα είτε στο πλαίσιο μίας διεπιστημονικής προσέγγισης διασύνδεσης: α) των θετικών επιστημών, β) των μηχανικών επιστημών, γ) της τεχνολογίας, και δ) των οικονομικών/λογιστικών επιστημών. Η επιτυχία στα συγκεκριμένα πεδία επιφέρει διάφορες ανακαλύψεις που βελτιώσουν την ποιότητα ζωής των ανθρώπων και βοηθούν στην εξέλιξη της κοινωνίας, της οικονομίας και γενικά της ανθρωπότητας στο σύνολο(Grossman&Friedlander, 2007).

Επιπλέον, η ενασχόληση με τα μαθηματικά βοηθά στην ανάπτυξη συλλογιστικών δεξιοτήτων, οι οποίες είναι ζωτικής σημασίας για τη λήψη αποφάσεων. Αυτό δίνει τη δυνατότητα στα άτομα να τροποποιήσουν τη συμπεριφορά τους και να προσαρμοστούν σε διάφορες καταστάσεις και περιβάλλοντα. Η καλλιέργεια της λογικής σκέψης βοηθά στη λήψη τεκμηριωμένων αποφάσεων, στην ανάλυση των προκλήσεων της ζωής και στην ανάληψη ευθύνης για αυτές τις αποφάσεις, συμπεριλαμβανομένης της διαχείρισης των συνεπειών τους. Επιπλέον, η εκπαίδευση στα μαθηματικά προωθεί την ανάπτυξη της υπομονής και της επιμονής μέσα από πολύπλοκα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν με ορθολογιστικό τρόπο. Η απόκτηση επάρκειας σε αυτό το επιστημονικό πεδίο απαιτεί συνεχή προσπάθεια και μελέτη, επιτρέποντας στα παιδιά να κατανοήσουν και να εκτιμήσουν την αξία του. Η κατάκτηση αυτών των ικανοτήτων από τους/τις μαθητές/τριες του Λυκείου θεωρούνται χρήσιμες και για την μετέπειτα εκπαίδευσή τους στο πλαίσιο της ανώτερης εκπαίδευσης, αλλά και για την εργασία τους(Vlachos, 2019) σε επαγγελματικές κατευθύνσεις που απαιτούν συνεχή εξέλιξη και προσαρμογή.

Η διάκριση του περιεχομένου των εννοιών, σε επίπεδο σύγχρονων Αναλυτικών Προγραμμάτων αφορά συνήθως πέντε κύριες ενότητες περιεχομένου (Αριθμοί και Πράξεις, Γεωμετρία, Μέτρηση, Σχέσεις - Άλγεβρα και Στατιστική – Πιθανότητες).Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφερθεί ότι η Άλγεβρα, που περιλαμβάνει τις εξισώσεις αλλά και τις ανισώσεις, είναι μια θεμελιώδης πτυχή της μαθηματικής εκπαίδευσης και γι’ αυτό αποτελεί μία από τις πέντε βασικές ενότητες περιεχομένου των Αναλυτικών Προγραμμάτων τις τελευταίες δεκαετίες. Οι ανισώσεις αλλά και οι εξισώσεις, είναι μέρος της ενότητας περιεχομένου της Άλγεβρας, διασυνδέονται όμως με διάφορες έννοιες που συναντιούνται σε ενότητες όπως τριγωνομετρία, γραμμικός προγραμματισμός και η διερεύνηση των συναρτήσεων.

Στις Η.Π.Α έχουν δοθεί κατευθύνσεις από το NCTM (2000), εδώ και πλέον δυο δεκαετίες (National Council of the Teacher of Mathematics). Αυτές αναφέρουν πως είναι αναγκαίο το σύνολο των μαθητών/τριών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση να διαθέτει την ικανότητα να αναγνωρίζει, αλλά και να επιλύει εξισώσεις και ανισώσεις. Ακόμη, οι μαθητές/τριες θα πρέπει να κατανοούν τον ορισμό των εννοιών της ανίσωσης και της εξίσωσης, ποια είναι η διαδικασία επίλυσής τους, σε τι περιπτώσεις χρησιμοποιούνται, αλλά και ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ αυτών των δύο εννοιών στη διαδικασία λύσης προβλήματος. Ωστόσο, ο κυριότερος στόχος τον οποίο θα πρέπει να επιδιώκουν οι εκπαιδευτικοί είναι η αξιοποίησή τους, πέρα από την επίλυση ασκήσεων και στην επίλυση προβλημάτων. Η επίτευξη των συγκεκριμένων επιδιωκόμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων από τα παιδιά, κυρίως όσον αφορά στη λύση προβλήματος, προϋποθέτει τη διασύνδεση με άλλες μαθηματικές έννοιες σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο και ανάπτυξη ικανοτήτων επιμονής και υπομονής.

Το σύστημα εκπαίδευσης του ελληνικού κράτους αρχίζει από το δημοτικό και φθάνει μέχρι το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ η διδασκαλία των μαθηματικών συνεχίζεται σε διάφορους κλάδους και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων εντάσσεται στον τομέα της Άλγεβρας της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ενώ προηγούνται δραστηριότητες προαλγεβρικής σκέψης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Eriksson, 2022). Στην παρούσα έρευνα δεν εξετάζουμε το θέμα στο επίπεδο της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά περιοριζόμαστε στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και πιο συγκεκριμένα στην Α΄ Λυκείου. Σε αυτό το επίπεδο αφιερώνονται αρκετές διδακτικές ώρες για την κατανόηση των εννοιών των εξισώσεων και των ανισώσεων, συμπεριλαμβάνοντας και τους τρόπους επίλυσής τους, ενώ θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις διδάσκονται με λεπτομέρεια στην Γ΄ Γυμνασίου και αναμένεται να αποτελούν υφιστάμενη γνώση για τα παιδιά. Οι συγκεκριμένες εξισώσεις αποτελούν τη βάση για την κατανόηση και την επίλυση δυσκολότερων εξισώσεων, που ανήκουν σε πιο ψηλές βαθμίδες(Lakatos, 2015;Swetzetal, 1995).

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του Λυκείου στα Μαθηματικά, στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, δίνεται βάση ιδιαίτερα στις έννοιες της εξίσωσης και της ανίσωσης. Οι συγκεκριμένες έννοιες στην ελληνική εκπαίδευση εντάσσονται στο πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, οι μαθητές/τριες διδάσκονται πως να λύνουν γραμμικές και μη γραμμικές εξισώσεις και ανισώσεις. Θα πρέπει πρωτίστως να επικεντρωθούν στην επίλυση ασκήσεων για να λάβουν έγκυρα αποτελέσματα, ενώ παράλληλα θα πρέπει να μάθουν τη διάκριση μεταξύ ισοτήτων και ανισώσεων και να τις εκφράζουν μαθηματικά. Οι εκπαιδευτικοί αναλύουν συναρτήσεις για μεγαλύτερη κατανόηση του θέματος. Η κατανόηση των συναρτήσεων βοηθάει τα παιδιά να κάνουν διάφορους μαθηματικούς υπολογισμούς όταν αλλάζει το σύστημα αναφοράς, με αποτέλεσμα να κατακτήσουν τον ορισμό της ισότητας και να κατανοήσουν με ποιον τρόπο η ισότητα επιδρά στα χαρακτηριστικά των συναρτήσεων.

Το περιεχόμενο των μαθηματικών σε ένα Αναλυτικό Πρόγραμμα δεν περιλαμβάνει απαραίτητα και τον τρόπο διδακτικής προσέγγισής του. Στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση, οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αναμένεται να υπερβούν την απλή παρουσίαση πληροφοριών σχολικών βιβλίων. Αντίθετα, θα πρέπει να αναζητήσουν εναλλακτικές μεθόδους διδασκαλίας που να ευθυγραμμίζονται με τις σύγχρονες προσεγγίσεις. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν τη διερεύνηση και την εξερεύνηση μαθηματικών εννοιών μέσα σε αυθεντικά και ρεαλιστικά πλαίσια(Latterell, 2024).Για παράδειγμα, οι έννοιες της ισότητας και της ανίσωσης μπορούν να διδαχθούν μέσω της ερμηνείας και της ανάλυσης στατιστικών δεδομένων. Αυτή η ανάλυση μπορεί να προκαλέσει συζητήσεις σχετικά με αριθμητικές έννοιες όπως ο μέσος όρος, ο διάμεσος, το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση.

Ωστόσο, όπως διαφαίνεται και από το καινούριο Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης του ελληνικού κράτους, οι εκπαιδευτικοί στα μαθηματικά εστιάζουν σε παραδείγματα και ερωτήματα σχετικά με την εμπέδωση των κύριων χαρακτηριστικών της ταξινόμησης των πραγματικών αριθμών, αλλά και την εφαρμογή αυτών, ώστε να λυθούν οι ανισώσεις, (ΦΕΚ, 2023). Ουσιαστικά, επικεντρώνονται κατά κύριο λόγο στην εύρεση τρόπων λύσης των προβλημάτων, όπου αξιοποιούνται διάφορες μαθηματικές έννοιες (Παπακωστόπουλος & Ζαχάρος, 2017).

Η διδασκαλία της Άλγεβρας στο σχολείο αποτελεί τα πρώτα θεμέλια για την προετοιμασία των μαθητών/τριών, αναφορικά με αυτά που θα διδαχτούν μελλοντικά στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Με άλλα λόγια, αυτή η εισαγωγή στην Άλγεβρα στο Λύκειο χρησιμεύει ως ένα κρίσιμο σκαλοπάτι, θέτοντας τις βάσεις για πιο σύνθετη μαθηματική μοντελοποίηση και γραμμικό προγραμματισμό σε μελλοντικές εκπαιδευτικές επιδιώξεις και επαγγελματικές προσπάθειες (Palupietal., 2022).Ενώ η Άλγεβρα είναι ιδιαίτερα σημαντική στη διδασκαλία των μαθηματικών, παρουσιάζει αξιοσημείωτες προκλήσεις για τους μαθητές, ιδιαίτερα στην κατανόηση και την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων. Αυτές οι προκλήσεις εκδηλώνονται με διάφορες μορφές, από δυσκολίες στην κατανόηση αφηρημένων εννοιών έως την εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων (Jailanietal., 2020). Οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να ερμηνεύσουν και να λύσουν τόσο ανισώσεις όσο και εξισώσεις 1^{ου}και 2^{ου}βαθμού (Tsamir & Almog, 2001). Αυτή η προσπάθεια επηρεάζεται από το διαφορετικό γνωστικό και μαθησιακό στυλ, τις γνωστικές διαδικασίες που διενεργούνται, καθώς και από τις μεθόδους διδασκαλίας και το σχεδιασμό του προγράμματος σπουδών.

Υπάρχουν διάφορες έρευνες που έχουν διεξαχθεί με την πάροδο του χρόνου από πολλούς ερευνητές και αναδεικνύουν τα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες, αλλά και τα σφάλματα που κάνουν κατά τη διάρκεια επίλυσης των εξισώσεων και των ανισώσεων. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί η έρευνα των Tall κ.α. (2014) η οποία δείχνει ότι τα παιδιά κατανοούν και χειρίζονται τις εξισώσεις ως μια απλοϊκή διαδικασία και δεν λαμβάνουν υπόψη ότι ο άγνωστος αποτελεί το βασικό στοιχείο της εξίσωσης. Με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούν να εκτελέσουν την πράξη. Αντίθετα, οι Erbaş και Didis (2015), κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να λύσουν μία εξίσωση, διότι δεν μπορούν αποστηθίσουν τους τύπους της διακρίνουσας, επικεντρώνοντας την προσοχή τους στη διαδικαστική γνώση που είναι απαραίτητη για την κατανόηση της έννοιας.

Οι ερευνητές/τριες ενδιαφέρονται κυρίως να διερευνήσουν τα εξής θέματα: α) ποια είναι τα λάθη που διαπράττουν οι μαθητές/τριες όταν εκτελούν αλγεβρικές παραστάσεις (π.χ. εξισώσεις, ανισώσεις) β)ποιοι είναι οι λόγοι που διαπράττουν αυτά τα λάθη και γ) με ποιο τρόπο θα μειωθούν τα λάθη και θα υλοποιούνται τα επιδιωκόμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Γι’ αυτά ενδιαφέρον δείχνουν και οι εκπαιδευτικοί όλων των βαθμίδων και ειδικότερα οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτό συμβαίνει καθώς οι εκπαιδευτικοί αναζητούν τρόπους ώστε να οργανώσουν τη διδασκαλία τους με τρόπο που να αναπτύσσεται η μαθηματική σκέψη των μαθητών τους και να οικοδομούνται σε υφιστάμενες εμπειρίες οι νέες γνώσεις.

Υπάρχουν διάφοροι μελετητές (Ρίζος, Κολοκοτρώνης και Παπανικολάου, 2020) οι οποίοι υποστηρίζουν ότι πρέπει να ενταχθεί στην μαθηματική εκπαίδευση η ιστορική διάσταση ανάπτυξης και οικοδόμησης των εννοιών π.χ. των εξισώσεων, προκειμένου να εμπεδώσουν με πιο αποτελεσματικό τρόπο τα παιδιά τις έννοιες, να δείξουν ενδιαφέρον για αυτό αλλά και να κατανοήσουν ποιο είναι το αληθινό επιστημονικό περιεχόμενο των μαθηματικών (Liu, 2003).Με τη συγκεκριμένη άποψη είναι σύμφωνος και ο Radford (1995), ο οποίος υποστηρίζει ότι η κατανόηση του ιστορικού υπόβαθρου κάποιας έννοιας στα μαθηματικά, μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη ενός θετικού κλίματος στην τάξη, όπου οι μαθητές/τριες συμμετέχουν ενεργά, οικοδομούν τη γνώση σε συνεργασία με τον/την εκπαιδευτικό και μπορούν να επιλύσουν διάφορα αλγεβρικά προβλήματα (Liu, 2003).

Η παρούσα έρευνα είναι σημαντική καθώς πραγματεύεται σημαντικές μαθηματικές έννοιες, συγκεκριμένα της εξίσωσης και ανίσωσης, σε συνδυασμό και με τη διαδικασία λύσης προβλήματος. Κυρίως ο εντοπισμός των λαθών των μαθητών επιτρέπει την κατάθεση εισηγήσεων για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία των εξισώσεων και ανισώσεων, στο συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σύστημα που αυτό μελετάται και συμβάλει σε θεωρητικό επίπεδο στην επιστημονική συζήτηση για αποδοτικότερες διδακτικές προσεγγίσεις.

1.1 Σκοπός της έρευνας

Ο κύριος σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο εντοπισμός και η ανάλυση των ειδικών δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες της Α' Λυκείου, όσον αφορά στην κατανόηση και στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων α’ και β’ βαθμού.

Την ίδια στιγμή η εργασία περιλαμβάνει και ειδικούς στόχους, οι οποίοι έχουν ως εξής:

- Ανάλυση και κατανόηση των διαδικασιών αντίληψης, αλλά και σκέψης των μαθητών/τριών, όταν επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις.
- Εντοπισμός και αναφορά κοινών λαθών, που κάνουν οι μαθητές/τριες Α΄ λυκείου, κατά τη διάρκεια επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων.
- Εξέταση της ικανότητας επίλυσης προβλήματος με εξισώσεις και ανισώσεις και τις στρατηγικές που ακολουθούν οι μαθητές/τριες.

1.2 Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα, τα οποία έχουν τεθεί είναι τα ακόλουθα:

1. Ποιο είναι το επίπεδο ικανότητας επίλυσης εξισώσεων από τους μαθητές Α΄ λυκείου και ποια είναι λάθη που εντοπίζονται;
2. Ποιο είναι το επίπεδο ικανότητας επίλυσης ανισώσεων από τους μαθητές Α΄ λυκείου και ποια είναι τα λάθη που εντοπίζονται;
3. Ποιος είναι ο βαθμός συσχέτισης της ικανότητας επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων στην Α΄ λυκείου;
4. Ποιος είναι ο βαθμός συσχέτισης της ικανότητας επίλυσης ασκήσεων εξισώσεων / ανισώσεων με την ικανότητα επίλυσης αντίστοιχων προβλημάτων;

1.3 Σημασία θέματος και πρωτοτυπία της έρευνας

Το θέμα που αναλύεται στην συγκεκριμένη εργασία αφορά στις δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν οι μαθητές/τριες της Α΄ λυκείου στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων 1^{ου}και 2^{ου} βαθμού. Η σημαντικότητα του θέματος επικεντρώνεται στο γεγονός ότι οι έρευνες που έχουν διεξαχθεί στον ελληνικό χώρο είναι ελάχιστες και τα πεδία διερεύνησης τους δεν έχουν καλύψει όλες τις οπτικές του ζητήματος. Ειδικότερα η διασύνδεση με την ικανότητα λύσης προβλήματος πιστεύουμε ότι θα κατευθύνει περισσότερο τη συζήτηση που γίνεται για την ουσιαστικότερη συμπερίληψή της στην πραγμάτευση των διαφόρων μαθηματικών εννοιών. Η διασύνδεση αυτή καθιστά την έρευνά μας πρωτότυπη εφόσον επικεντρώνεται κυρίως στα λάθη και τις δυσκολίες που προκύπτουν. Η κατανόηση του τρόπου σκέψης των παιδιών σε έργα που αναμένεται να είναι σε θέση να επιλύουν στη συγκεκριμένη ηλικία συμβάλει στους παράγοντες που λειτουργούν αρνητικά στην επίτευξη των επιδιωκόμενων στόχων.

Κεφάλαιο 2: Θεωρητικό πλαίσιο

2.1Η επιστήμη των Μαθηματικών

Η επιστήμη των μαθηματικών ως κλάδος περιέχει διαφορά πεδία (π.χ. την άλγεβρα, την γεωμετρία, την αριθμητική κλπ.). Η συγκεκριμένη επιστήμη εκλαμβάνεται ως η μελέτη των ποσοτήτων, των γεωμετρικών σχημάτων, και των μοτίβων κάνοντας χρήση αριθμών, συμβόλων και θεωριών. Κύριος στόχος της είναι η μελέτη όλων των παραπάνω και η κατανόησή τους από τους ανθρώπους κάνοντας χρήση της λογικής και της νόησής τους. Βασικό της στοιχείο είναι η αναζήτηση, η εύρεση, η διερεύνηση, η λεπτομερή εξέταση και ο συνδυασμός των αφηρημένων και λογικών ιδεών. Ουσιαστικά, τα μαθηματικά δημιουργήθηκαν από τους ανθρώπους και με την πάροδο του χρόνου αναπτύχθηκαν όλο και περισσότερο, τόσο για να εξυπηρετούν πρακτικές ανάγκες, όσο και για τη διερεύνηση σχέσεων. Οι μαθηματικές έννοιες και θεωρίες που ανακάλυψαν οι μαθηματικοί και οι στοχαστές βοήθησαν στη δημιουργία του πολιτισμού και τη βελτίωση της ποιότητας ζωής του ανθρώπου.

Μέσα από τα μαθηματικά ο άνθρωπος μπορεί να καταλάβει τον κόσμο που τον περιτριγυρίζει, καθώς αναλύει και εξηγεί με επιστημονικό τρόπο πως δημιουργήθηκε, ποια είναι η υπόσταση του και αλλά πολλά θέματα. Αναπτύσσοντας την ικανότητα επίλυσης προβλήματος και την εφαρμογή θεωριών το άτομο αποκτά λογικό και σύνθετο τρόπο σκέψης, που θα τον βοηθήσει καθ’ όλη την διάρκεια της ζωής του στο να λάβει διάφορες αποφάσεις και να αντιμετωπίσει διάφορες δυσκολίες, (Davis&Hersh, 1981).

Τα μαθηματικά αποτελούνται από κάποια βασικά μέρη, τα οποία περιέχουν τα εξής (Gowers, 2015):

- Αξιωματικά συστήματα: τα μαθηματικά δημιουργούνται πάνω σε αξιώματα. Αξιώματα είναι οι εκφράσεις οι οποίες είτε εκλαμβάνονται ως δεδομένες είτε ως αληθείς, δεν απαιτείται δηλαδή κάποια απόδειξη. Τα αξιώματα θεωρούνται οι πηγές για την κατάληξη σε ένα έγκυρο αποτέλεσμα ή κάποια θεωρία.

- Αποδείξεις και θεωρίες: ένα από τα βασικά σημεία των μαθηματικών είναι ο τρόπος με τον οποίο τεκμηριώνεται μια θεωρία. Για να αποδειχθεί μια θεωρία πρέπει ο/η μαθητής/τρία να χρησιμοποιήσει τη νόησή του βάζοντας μπροστά την λογική, διαφορά επιχειρήματα για να τεκμηριώσει τις απόψεις και τις σκέψεις του και συγκεκριμένες πρακτικές.
- Αφαίρεση και γενίκευση: Τα μαθηματικά περιλαμβάνουν την αφαίρεση και τη γενίκευση των ορισμών, περνώντας από συγκεκριμένες περιπτώσεις σε γενικές έννοιες. Χρησιμοποιώντας αυτές τις μεθόδους, οι μαθηματικοί μπορούν να αναπτύξουν και να χρησιμοποιήσουν μια σειρά εργαλείων και πρακτικών που είναι αποτελεσματικά στην επίλυση προβλημάτων.
- Συμμετρία και μοτίβα: οι μαθητές/τριες διδάσκονται έννοιες όπως η συμμετρία και τα μοτίβα. Αυτά εντοπίζονται σε γεωμετρικά σχήματα, αριθμητικά δεδομένα και συναρτήσεις. Κάποιες φορές μέσα από τα μοτίβα υπάρχει η πιθανότητα να ανακαλυφθούν διάφορες συσχετίσεις ανάμεσα σε έννοιες.
- Εφαρμογές και μοντελοποίηση: τα μαθηματικά δεν χρησιμοποιούνται μόνο για να κατανοηθούν και να αναλυθούν οι μαθηματικές έννοιες, αλλά ούτε και για να πραγματοποιηθούν αυτές οι έννοιες πάνω σε κάποιο αληθινό γεγονός. Αντίθετα, τα μαθηματικά εφαρμόζονται και για να προσδιοριστούν, αλλά και να γίνουν αντιληπτά διαφορά φαινόμενα στα πεδία των φυσικών επιστημών, των οικονομικών, της ιατρικής και γενικότερα όσον αφορά τις κοινωνιολογικές επιστήμες.
- Επικοινωνία και συνεργασία: η επιστήμη των μαθηματικών βασίζεται κατά κύριο λόγο στην ομαδική συνεργασία και την επικοινωνία ανάμεσα στους/στις μαθηματικούς, ερευνητές/τριες και μαθητές/τριες. Για να χαρακτηριστεί η συνεργασία και η επικοινωνία τους ως επιτυχής και αποτελεσματική θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μαθηματική ορολογία, σύμβολα, μαθηματικές έννοιες και τεχνικές, προκειμένου να οδηγηθούν σε ένα έγκυρο αποτέλεσμα.

Συμπερασματικά, τα μαθηματικά είναι ένας τομέας, ο οποίος αποτελείται από διάφορες πτυχές, μέσα, πρακτικές, που είναι απαραίτητες ώστε να κατανοηθεί η συγκεκριμένη επιστήμη. Γίνεται κατανοητό ποσό σημαντικό είναι για τους ανθρώπους (αντιμετώπιση καθημερινή προβλημάτων, ανάπτυξη κριτικής σκέψης κλπ.), αλλά και για τους υπόλοιπους κλάδους των επιστημών. Για παράδειγμα, τα μαθηματικά μπορούν να προκαλέσουν την περαιτέρω ανάπτυξη της τεχνολογίας, γεγονός που με τη σειρά του θα οδηγήσει στη διευκόλυνση της ζωής του ανθρώπου(Gowers, 2015).

Από την άλλη, οι μαθηματικές γνώσεις αποτελούν ένα πλήθος από συνθέτες διαδικασίες, οι οποίες έχουν ως εξής: 1) τη διατύπωση υποθέσεων, 2) την εύρεση μαθηματικού αποτελέσματος μέσω της χρήσης της επαγωγής, 3) την εύρεση γενικά αποτελεσμάτων σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, 4) την ειδίκευση πάνω σε ένα θέμα, 5) την αναγνώριση της αναλογίας, 5) την εκτέλεση πράξεων επαλήθευσης σε ένα πρόβλημα. Παρόλο που στα σχολικά εγχειρίδια μερικές φορές η εισαγωγή μίας έννοιας ξεκινά με την παράθεση μαθηματικού ορισμού, με την αυστηρή ορολογία και τη χρήση των απαραίτητων συμβόλων, η κατανόησής του από πλευράς των μαθητών δεν είναι δεδομένη. Μάλιστα μερικές φορές αυτό είναι εις βάρος της διερεύνησης της έννοιας, εμποδίζοντας τη χαρά της ανακάλυψης (Lakatos, 2015).

Οι μαθητές/τριες, αλλά και γενικότερα οι άνθρωποι θεωρούν ότι τα Μαθηματικά είναι μια επιστήμη που στηρίζεται σε κανόνες και νόμους, οι οποίοι πρέπει να ακολουθούνται ρητά και αυστηρά, ώστε να αποδειχθεί μια έννοια ή να βρεθεί κάποιο αποτέλεσμα (Liu, 2003), επηρεασμένοι κυρίως από το φορμαλισμό που χαρακτηρίζει τη διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Ojong&Odum, 2022). Στο παρελθόν, τα σχολικά βιβλία γράφονταν με τρόπο που παρέλειπε τις ανθρώπινες πτυχές των μαθηματικών προβλημάτων, συμπεριλαμβανομένων των προκλήσεων και των εμποδίων που συναντήθηκαν κατά την ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών (Avital, 1995). Σε αυτό το πλαίσιο εντοπίζεται διαφοροποίηση τα τελευταία χρόνια, όπου έχουν περιληφθεί διερευνήσεις, εξερευνήσεις, αποδεικτικές διαδικασίες και διασύνδεση με τη λύση προβλήματος στοχεύοντας στην ανάπτυξη της κριτικής και δημιουργικής σκέψης, της ικανότητας σύνθεσης και ανάλυσης σε μαθηματικό πλαίσιο(Cipriano, 2023).

Οι εκπαιδευτικοί επηρεασμένοι από τη διδασκαλία των μαθηματικών για δεκαετίες και από τον τρόπο που ενδεχόμενα οι ίδιοι διδάχτηκαν τα μαθηματικά δεν ξεφεύγουν εύκολα από το διδακτικό πλαίσιο της επίλυσης ασκήσεων πανομοιότυπων με τα ζητούμενα στις τελικές εξετάσεις. Διδάσκουν στα παιδιά τις έννοιες και τη διαδικασία με την οποία επιλύεται ένα πρόβλημα ή τους σχετικούς αλγόριθμους, δίνοντας έμφαση στη διαδικαστική κατανόηση εις βάρος της εννοιολογικής κατανόησης (Voskoglou, 2018). Δεν γίνεται αναφορά στη διαδικασία με την οποία οι μαθηματικοί οδηγήθηκαν σε αυτόν τον τρόπο επίλυσης, αλλά ούτε και στα λάθη που έκαναν οι ίδιοι μέχρι να καταλήξουν σε ένα συγκεκριμένο τρόπο(Liu, 2003), ενώ υπερτονίζεται η μαθηματικοποίηση της διαδικασία.

Γενικά, οι μαθητές και οι μαθήτριες διαμορφώνουν τις στάσεις τους απέναντι στα μαθηματικά με βάση τα βιώματά τους, τις ασχολίες τους, τον τρόπο διδασκαλίας που εφαρμόζει ο κάθε εκπαιδευτικός και το περιβάλλον την τάξης. Για να αλλάξει η αρνητική στάση που έχουν διαμορφώσει τα παιδιά προς το μάθημα των μαθηματικών θα πρέπει να γίνουν κάποιες ενέργειες από την πλευρά των εκπαιδευτικών, οι οποίες μπορούν να απαριθμηθούν στα ακόλουθα:

- Θα πρέπει να διευκρινιστούν και να λυθούν οι απορίες των μαθητών/τριών. Η αξιολόγηση, η αυτοαξιολόγηση και η ανατροφοδότηση των μαθητών είναι σημαντικό στοιχείο της διδασκαλίας.
- Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να συνδέουν τα μαθηματικά με σενάρια από την καθημερινότητα. Γι’ αυτό θα πρέπει να παρέχονται προβλήματα και δραστηριότητες, τα οποία θα έχουν προσαρμοστεί με κάτι που συμβαίνει στην πραγματικότητα, για να παρακινήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών/τριών να ασχοληθούν με την κατανόηση του προβλήματος και της θεωρίας.
- Θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να δημιουργούν ένα κατάλληλο περιβάλλον, στο οποίο οι μαθητές/τριες θα νιώθουν άνετα να εκφράζουν τις απόψεις τους, τις ιδέες τους , τις σκέψεις τους και τις απορίες τους. Ακόμη, θα πρέπει να γίνει κατανοητό από όλους και όλες ότι είναι δικαίωμα τους να διερευνούν από μόνοι τους τα μαθηματικά θεωρήματα και να διατυπώνουν παρατήσεις και σχόλια πάνω σε αυτά ανεξαρτήτως αν αυτό που έχουν σκεφτεί είναι σωστό ή λάθος (Gowers, 2001).

- Ο/η εκπαιδευτικός θα πρέπει να εφαρμόζει διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις για να ενεργοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών και να ανταποκρίνεται στις ανάγκες και τις ιδιαιτερότητες που έχουν διαφορετικά μαθησιακά στυλ.
- Θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί ανελλιπώς να προσπαθούν να διαχειριστούν το άγχος και το φόβο που νιώθουν οι μαθητές/τριες προς το μάθημα των μαθηματικών, το οποίο έχει καταγραφεί από πολλές έρευνες εδώ και πολλά χρόνια (Kausar, 2023). Πιο συγκεκριμένα, η αρνητικότητα που έχει δημιουργηθεί για τα μαθηματικά από το ευρύτερο κοινό δημιουργεί στα παιδιά στα σχολεία έντονα αισθήματα άγχους και φόβου, χωρίς να έχουν διδαχθεί το μάθημα, ούτε να έχουν προσπαθήσει να το κατανοήσουν (Gowers, 2001). Η διαχείριση αυτής της κατάστασης κρίνεται αναγκαία και μπορεί να επιτευχθεί μέσα από τη δημιουργία ειδικών σχεδίων διδασκαλίας, της αναπροσαρμογής του τρόπου διδασκαλίας και της διαμόρφωσης ενός ευχάριστου και δημιουργικού μαθησιακού περιβάλλοντος .
- Θα πρέπει οι μαθηματικοί να συσχετίζουν τα μαθηματικά με αλλά μαθήματα, σε ένα διεπιστημονικό πλαίσιο το οποίο συνάδει περισσότερο με την πραγματικότητα.
- Οι εκπαιδευτικοί εντός της τάξης θα πρέπει να παροτρύνουν όλα τα παιδιά να συνεργάζονται μεταξύ τους, εφόσον η ομαδική εργασία απαιτεί την ενεργοποίηση της διαδικασίας επικοινωνίας αξιοποιώντας τα μαθηματικά και τεκμηρίωσης της άποψης με επιχειρήματα.

2.2 Ιστορικό Πλαίσιο των Εξισώσεων

Η ιστορία των εξισώσεων στα μαθηματικά είναι βαθιά συνυφασμένη με την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης και κατανόησης(Cipriano, 2023). Με την ευρεία έννοια, μια εξίσωση είναι μια μαθηματική πρόταση που βεβαιώνει την ισότητα δύο παραστάσεων, που αντιπροσωπεύονται από το σύμβολο "=" (ίσον). Οι ρίζες των εξισώσεων μπορούν να αναχθούν στους αρχαίους πολιτισμούς, κυρίως στους Βαβυλώνιους, τους Αιγύπτιους και τους Έλληνες. Στους Βαβυλώνιους, γύρω στο 1800 π.Χ., αποδίδονται μερικές από τις παλαιότερες γνωστές λύσεις σε τετραγωνικές εξισώσεις, αν και σε ένα συγκεκριμένο, προσανατολισμένο στο πρόβλημα πλαίσιο.

Έλυσαν αυτές τις εξισώσεις γεωμετρικά, χρησιμοποιώντας μια διαδικασία παρόμοια με τη συμπλήρωση του τετραγώνου. Στην αρχαία Αίγυπτο, ο μαθηματικός πάπυρος Rhind, που χρονολογείται γύρω στο 1650 π.Χ., καταδεικνύει τη χρήση γραμμικών εξισώσεων μέσω μεθόδων ψευδούς θέσης, μια πρώιμη αλγεβρική τεχνική για την επίλυση εξισώσεων. Αυτή η περίοδος σηματοδότησε τα αρχικά στάδια της άλγεβρας, αν και η κατανόηση και η χρήση των εξισώσεων ήταν ακόμα πολύ υποτυπώδης και συνδεδεμένη με συγκεκριμένα, πρακτικά προβλήματα.

Η πλειονότητα των γνώσεων που σχετίζονται με τα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά προέρχεται από πήλινες πλάκες μεγέθους που μπορούν να κρατηθούν άνετα στο χέρι. Αυτές οι πλάκες ήταν εγγεγραμμένες με σφηνοειδή γραφή, μια μέθοδο στην οποία οι γραφείς χρησιμοποιούσαν καλάμια ως γραφίδες για να χαράξουν σφηνοειδείς χαρακτήρες στον πηλό. Το κυρίαρχο σώμα αυτών των αντικειμένων χρονολογείται περίπου στο 1800-1600 π.Χ. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές ταμπλέτες που ανακαλύφθηκαν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο διαφορετικούς τύπους: σε αυτούς που περιλαμβάνουν μαθηματικούς πίνακες και σε αυτούς που αποτελούνται από διάφορα μαθηματικά προβλήματα.

Η 1η κατηγορία πλακών περιλάμβανε μια σειρά πινάκων, συμπεριλαμβανομένων των υπολογισμών πολλαπλασιασμού, αντιστρόφων και τετραγωνικών ριζών. Αυτοί οι πίνακες λειτουργούσαν ανάλογα με τις σύγχρονες αριθμομηχανές για τους γραφείς, δίνοντάς τους τη δυνατότητα να εκτελούν γρήγορα αριθμητικές πράξεις με αναφορά σε αυτούς τους πόρους. Με ενδιαφέρον, ο Katz (2014) σημειώνει ότι τα προβλήματα που απαιτούσαν τη χρήση των τετραγωνικών ριζών ήταν δομημένα με τρόπο που εξασφάλιζε ότι οι ρίζες, που είχαν ήδη καταγραφεί σε πίνακα, ήταν πάντα ορθολογικοί αριθμοί.

Όσον αφορά στη δεύτερη ταξινόμηση των πλακών, έχει ανακαλυφθεί σημαντικός αριθμός Βαβυλωνιακών τεχνουργημάτων που παρουσιάζουν συλλογές μαθηματικών προβλημάτων. Οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποίησαν μια συστηματική ακολουθία λογικών βημάτων για να επιλύσουν αυτά τα προβλήματα, αναπτύσσοντας ουσιαστικά αλγόριθμους προσαρμοσμένους σε κάθε κατηγορία μαθηματικών προκλήσεων. Συγκεκριμένα, οι διαδικασίες επίλυσής τους κατέληγαν χαρακτηριστικά με τη δήλωση «Αυτή είναι η μέθοδος», υποδηλώνοντας την επιδίωξη μιας καθολικής μεθοδολογίας που να εφαρμόζεται στην επίλυση οποιουδήποτε δεδομένου προβλήματος. Αυτή η προσέγγιση περιγράφεται λεπτομερώς στο έργο του Bunt (1981).

Οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις ήταν προφανώς μια σημαντική περιοχή εστίασης για τους Βαβυλώνιους μαθηματικούς. Είναι σημαντικό, ωστόσο, να διευκρινιστεί ότι ο όρος «δευτεροβάθμιες εξισώσεις» όπως εφαρμόζεται στα Βαβυλωνιακά μαθηματικά δεν αντιστοιχεί στη σύγχρονη αντίληψη των τετραγωνικών εξισώσεων. Η Βαβυλωνιακή προσέγγιση για την επίλυση αυτών των εξισώσεων βασιζόταν κυρίως σε γεωμετρικές αρχές που αφορούσαν τετράγωνα και ορθογώνια, παρά σε αριθμητικές πράξεις τετραγωνισμού και πολλαπλασιασμού. Ο Katz (2014) σημειώνει μια ενδιαφέρουσα ιστορική παρανόηση ότι δύο ορθογώνια που μοιράζονται την ίδια περίμετρο θα μοιράζονται επίσης την ίδια περιοχή. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η πλάνη, οι γραφείς της Βαβυλωνίας συνέταξαν σχολαστικά πίνακες που παρουσιάζουν περιπτώσεις ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο 2b, αλλά ποικίλες περιοχές c, καθεμία από τις οποίες προέρχεται από την αλλαγή των μηκών x και των πλάτης y. Κατά συνέπεια, τα περισσότερα Βαβυλωνιακά προβλήματα που θεωρούνται ως «τετραγωνικά» στη φύση μπορούν να ερμηνευθούν εκ νέου ως συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων, συγκεκριμένα $x + y = b$ και $xy = c$, που είναι συνολικά ισοδύναμα με την τετραγωνική εξίσωση x^2 + c = bx.

2.3 Μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός

Πριν εμβαθύνουμε στις εξισώσεις, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα παιδιά, πριν αντιμετωπίσουν τις εξισώσεις και τις ανισώσεις, θα πρέπει να αναπτύξουν μαθηματική αναλογική λογική και προαλγεβρική σκέψη. Αυτό υποστηρίζεται από έρευνα των Noelting (1980), Singh (2000) και Boyer και Levine (2015). Οι βασικές ικανότητες περιλαμβάνουν τη διάκριση διαφορών μεταξύ των ποσοτήτων, τον υπολογισμό των ισοτήτων και των ανισοτήτων, τον προσδιορισμό των σχέσεων πολλαπλασιασμού, την ανάπτυξη ενός πίνακα τιμών, την απεικόνιση ποσοτικών σχέσεων και την προώθηση της κριτικής σκέψης για καταστάσεις αναλογιών. Αυτές οι δεξιότητες είναι κρίσιμες για μια σταθερή βάση στα μαθηματικά, όπως τονίστηκε από τους Resnick και Singer (1993) και Lamon (2007).

Με άλλα λόγια, ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός εκλαμβάνεται ως μια γνωστική διαδικασία, η οποία αποτελείται από παρόμοια στοιχεία ανάμεσα σε δυο και περισσότερες μαθητικές έννοιες, δραστηριότητες, διαρθρώσεις, προκειμένου να καταστεί επιτυχής η λύση ενός προβλήματος ή μιας δραστηριότητας. Όπως αναφέρθηκε είναι μια γνωστική διαδικασία, όπου έχει ως βασικό της ρόλο την απόκτηση γνώσεων και την ανάπτυξη ικανοτήτων για την επίλυση κάποιου προβλήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ακολουθείται το μοτίβο από τη μεταφορά του γνωστού στο άγνωστο μέρος(Flood, 1994).

Όταν οι μαθητές/τριες κατορθώνουν να διακρίνουν τα παρόμοια στοιχεία ανάμεσα στις έννοιες και τις τεχνικές, τότε διαθέτουν την ικανότητα να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις και δεξιότητές τους σε άλλες καινούριες περιστάσεις και στην περαιτέρω εκμάθηση και εμβάθυνση του ζητήματος. Μερικά από τα κυριότερα μέρη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι τα εξής (English, 1997):

1. Η αναγνώριση των όμοιων στοιχείων: η μαθηματική αναλογική συλλογιστική αρχίζει πάντοτε με τη διάκριση των όμοιων στοιχείων ανάμεσα σε έννοιες και προβλήματα στα μαθηματικά. Η ουσία αυτών των στοιχείων είναι είτε δομική είτε διαδικαστική είτε εννοιολογική.
2. Συλλογή δεδομένων και σχέσεων: αφού αναγνωριστούν τα όμοια στοιχεία, θα πρέπει οι μαθητές/τριες να συλλέξουν δεδομένα σχετικά με τις σχέσεις, ώστε να προσδιορίσουν τα μέρη των εννοιών ή προβλημάτων και πώς αυτά θα τα χρησιμοποιούσαν στα καινούρια δεδομένα.
3. Προσαρμογή και μετάδοση πληροφοριών: οι μαθητές/τριες έχοντας φθάσει στο συγκεκριμένο στάδιο θα έχουν την δυνατότητα να τροποποιήσουν τις μεθόδους, τις θεωρίες και τους τρόπους για την λύση του προβλήματος. Δηλαδή, μπορεί να χρειαστεί είτε να γίνουν κάποιες αλλαγές στον πρωτεύον τρόπο εξέτασης είτε να γίνουν διάφορες τροποποιήσεις για να προσαρμοστούν στην καινούρια κατάσταση.
4. Επαλήθευση του προβλήματος: το πιο σημαντικό βήμα πριν παραδώσουμε στον/στην εκπαιδευτικό τη λύση του προβλήματος είναι η επαλήθευσή της. Ειδικότερα, θα πρέπει να επαληθεύσουμε εάν το αποτέλεσμα που βρέθηκε είναι το ίδιο αν λυθεί η ίδια άσκηση με διαφορετικό απλώς τρόπο. Αν το αποτέλεσμα είναι ίδιο τότε ο τρόπος

επίλυσης είναι σωστός. Αν όμως είναι διαφορετικό το αποτέλεσμα μια από τος δυο μεθόδους που χρησιμοποίησε ο/η μαθητής/τρια είναι λάθος.

Ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός έχει διαφορά οφέλη για τον/την μαθητή/τρια, όπως είναι η αφομοίωση καινούριων πληροφοριών με πιο γρήγορο και άμεσο τρόπο, η επίλυση περίπλοκων ασκήσεων, η καλλιέργεια δημιουργικότητας, συνθέτης σκέψης, η ικανότητα εξέτασης ενός προβλήματος από διάφορες πλευρές και η διατύπωση πρωτοποριακών τρόπων επίλυσης κάποιου προβλήματος (Tall&Watson, 1994).

Ωστόσο, διάφοροι κατασταλτικοί παράγοντες εμποδίζουν την ανάπτυξη μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, συμπεριλαμβανομένης της περιορισμένης έκθεσης των μαθητών σε διαφορετικές μαθηματικές έννοιες. Χωρίς τακτική ενασχόληση με αυτές τις έννοιες, τα παιδιά αγωνίζονται να διακρίνουν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των εννοιών και των θεωριών (Amir-Mofidi, 2012).

Ένας άλλος κατασταλτικός παράγοντας είναι η διεργασία του αναστοχασμού, η οποία περιέχει με τη σειρά δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση τα παιδιά κατά τη διάρκεια του μαθήματος θα πρέπει να αντιληφθούν και να εμπεδώσουν εις βάθος τις σχέσεις αναλογίας της 1ης τάξης (οι σχέσεις ανάμεσα στον αριθμητή και τον παρονομαστή και έπειτα προχωρούν στην σχέσεις της 2ης τάξης, που σχετίζονται με την εύρεση των διαφορών ανάμεσα σε δύο λόγους (π.χ. ποσότητες), αλλά και αν υπάρχει ανάμεσα σε αυτά ισοτιμία (Spinillo&Bryant, 1991).

Ακόμη, η εφαρμογή αναχρονιστικών μεθόδων διδασκαλίας (εφαρμογή δηλαδή παραδοσιακών τρόπων διδασκαλίας, όπως είναι το δάσκαλο κεντρικό μοντέλο) εμποδίζουν την ανάπτυξη του αναλογικού συλλογισμού στα μαθηματικά. Όλοι/ες οι μαθητές/τριες έχουν διαφορετικό ρυθμό μάθησης, διαφορετικό τρόπο μάθησης γι’ αυτό στη διδασκαλία θα πρέπει να εφαρμόζεται το μαθητικοκεντρικό μοντέλο, στην κριτική και δημιουργική σκέψη των μαθητών. Το συγκεκριμένο μοντέλο, απευθύνεται αποκλειστικά στους/στις μαθητές/τριες και προσπαθεί να παρακινήσει το ενδιαφέρον των παιδιών μέσα από την χρήση διαδραστικών ασκήσεων, οι οποίες βασίζονται στα καθημερινότητα τους βιώματα(Nguyen, 2021).

Για την καλλιέργεια μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα πρέπει να υιοθετήσουν διάφορες στρατηγικές.

Θα πρέπει να συνδέουν μαθηματικά προβλήματα και θεωρίες με τις καθημερινές εμπειρίες των παιδιών, μετατρέποντας τη μάθηση από παθητική σε ενεργητική διαδικασία. Οι μαθητές, ιδιαίτερα σε επίπεδο Λυκείου, θα πρέπει να ενθαρρύνονται να συμμετέχουν ενεργά στα μαθήματα και να μοιράζονται τις ιδέες και τις απόψεις τους. Επιπλέον, η ενθάρρυνση των συζητήσεων και της ομαδικής εργασίας θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν σύνθετη σκέψη με βάση τη λογική και την επιχειρηματολογία(Mukukaetal., 2023).

Ο/Η εκπαιδευτικός θα πρέπει να χρησιμοποιεί όταν διδάσκει μαθηματικές έννοιες διαφορά παραδείγματα, για να εμπεδώσουν πιο αποτελεσματικά τα παιδιά την έννοια. Οι μαθητές/τριες έρχονται σε επαφή με διαφορά παραδείγματα, μπορούν να συσχετίσουν τους τρόπους που εφαρμόστηκαν για να λυθεί σε κάθε περίπτωση το παράδειγμα, αλλά και να εντοπίσουν γιατί χρησιμοποίησαν τον συγκεκριμένο τρόπο. Γενικότερα, θα πρέπει οι καθηγητές/τριες μαθηματικών να αναπτύξουν στους/στις μαθητές/τριες του Λυκείου τη νοοτροπία ότι η υπομονή και η προσπάθεια είναι αρετές, οι οποίες βοηθούν τον μάθε άνθρωπο να εξελιχθεί και εν τελεί θα βελτιωθεί και μαθησιακό τους επίπεδο στα μαθηματικά(Tatto, 2002).

Οι δραστηριότητες, τα προβλήματα ή οι ασκήσεις που δίνονται από τον/την εκπαιδευτικό στην ολομέλεια της τάξης παίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Κατά συνέπεια, θα πρέπει να διαμορφώνονται οι δραστηριότητες με βάση τα εξής κριτήρια: α) τη δημιουργικότητα, β) την ανάπτυξη των νοητικών δεξιοτήτων και γ) την ευελιξία τους. Είναι προτιμότερο, να παρατίθενται δραστηριότητες ανοιχτού τύπου, όπου μπορούν να αναλυθούν με λεπτομέρεια και υπάρχει η δυνατότητα παροχής ανατροφοδότησης.

Οι εκπαιδευτικοί είναι πολύ σημαντικό να χρησιμοποιούν διάφορες μεθόδους αξιολόγησης. Όχι μόνο την τυπική μορφή αξιολόγησης, όπου γράφω ένα τεστ και βαθμολογείται ο μαθητής ανάλογα με το ποσοστό των σωστών απαντήσεων του. Αρχικά θα πρέπει στο σχολείο να εφαρμόζονται και οι τρεις μορφές αξιολόγησης (η διαγνωστική, η διαμορφωτική και η τελική). Παράλληλα, δεν θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο τεστ, αλλά και περιγραφικές αναλύσεις σχετικά με την πρόοδο του κάθε παιδιού καθ’ όλη την διάρκεια της σχολικής χρονιάς και οι ατομικοί φάκελοι, οι οποίοι περιέχουν όλες τις δραστηριότητες, ασκήσεις και γενικώς τα επιτεύγματα των παιδιών. Στην προκειμένη περίπτωση μέσα από την αξιολόγηση, ο/η εκπαιδευτικός μπορεί να δει σε ποιο βαθμό έχει κατακτήσει τον αναλογικό συλλογισμό στα μαθηματικά και σε ποιο βαθμό χρειάζεται η δική του διαφοροποιημένη παρέμβαση(Tatto, 2002).

Η ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού είναι απαραίτητη για την επίλυση εξισώσεων, αλλά και ανισώσεων. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις απαιτούν οι μαθητές του Λυκείου να μπορούν να συγκρίνουν και να βρίσκουν συσχετίσεις ανάμεσα σε διάφορες έννοιες, ώστε να μπορούν να επιλύσουν τέτοιου είδους ασκήσεις. Ειδικότερα, οι εξισώσεις και οι ανισώσεις προϋποθέτουν τον εντοπισμό των μερών και την αναγνώριση της διάρθρωσης των μαθηματικών εκφράσεων. Για να μπορούν όμως οι μαθητές/τριες να προβούν σε τέτοιες ενέργειες θα πρέπει να έχουν αναπτύξει τον αναλογικό συλλογισμό, ο οποίος τους βοηθά να εντοπίζουν και να αναλύουν με πιο αποτελεσματικό τρόπο τα μοτίβα.

Οι εξισώσεις και οι ανισώσεις απαιτούν από τα παιδιά όταν τις λύνουν να χρησιμοποιούν ένα πλήθος μαθηματικών γνώσεων και μεθόδων. Πρέπει να διαθέτουν την ικανότητα να επαναφέρουν στη μνήμη τους τις γνώσεις τους και τις τεχνικές και να επιλέγουν με αξιολογικά κριτήρια ποιες από αυτές είναι κατάλληλες για να εφαρμοσθούν στην κάθε περίπτωση. Ενδεικτικό παράδειγμα, η χρήση της μεθόδου της παραγοντοποίησης ή της αντικατάστασης για να λυθεί μια εξίσωση. Ο αναλογικός συλλογισμός βοηθάει τα παιδιά να βρίσκουν από μόνα τους και εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης κάποιας εξίσωσης και ανίσωσης. Το ότι παρέχονται κάποιες συγκεκριμένες τεχνικές δεν σημαίνει ότι το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί και με κάποιο άλλον τρόπο. Ο/Η μαθητής/τρια έχοντας αναπτύξει το συγκεκριμένο συλλογισμό μπορεί να σκέφτεται με πιο σύνθετο τρόπο και να ανακαλύπτει καινοτόμους τρόπους επίλυσης(Tatto, 2002).

Εν κατακλείδι, ο μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός πρέπει να αναπτυχθεί σε όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες, ώστε να μπορούν να κατανοούν και να επιλύουν με μεθοδικό και αποτελεσματικό τρόπο τις εξισώσεις και ανισώσεις, εντοπίζοντας τα μοτίβα, τις ομοιότητες και διαφορές τους.

2.4Ιστορικό πλαίσιο ανισώσεων

Οι ανισώσεις δεν έχουν κάποια μεγάλη, αλλά ούτε περίτεχνη ιστορία, όπως αυτή των εξισώσεων, αλλά η συνεισφορά τους είναι πολύ σημαντική για τα μαθηματικά και την ανθρωπότητα. Το ιστορικό πλαίσιο των ανισώσεων ξεκινάει από τα αρχαία χρόνια (Halmaghi&Liljedahl, 2015). Στο παρελθόν, οι ανισώσεις δεν εκφράστηκαν ούτε αιτιολογούνταν όπως σήμερα. Συχνά μεταφέρονταν προφορικά, με τις διατυπώσεις τους να είναι πιο απλές από τις σύνθετες γραπτές μεθόδους που χρησιμοποιούμε τώρα. Η γραπτή τεκμηρίωση χρησιμοποιήθηκε σπάνια για την αποτύπωση αυτών των εννοιών, εφόσον δεν είχε αναπτυχθεί η λογική της αιτιολόγησης και της παράθεσης μαθηματικών επιχειρημάτων.

Ο όρος ανισώσεις μπορεί να συνδεθεί με τη λογική των συναρτήσεων. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα αποτελούν οι πράξεις μεγιστοποίησης αλλά και ελαχιστοποίησης. Θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός ότι οι μαθηματικοί στην αρχαία Ελλάδα εξέφραζαν τη λύση διαφόρων προβλημάτων μέσα από τη χρήση εξισώσεων. Στη συνέχεια έκαναν χρήση των ανισώσεων, για να υποδηλώσουν συγκεκριμένα σημεία που χρειάζονταν, ώστε να καταλήξουν στο αποτέλεσμα των εξισώσεων (Παπακωστόπουλος &Ζαχάρος, 2017).

Επίσης, γίνεται κατανοητό ότι η επίλυση κάποιας ανίσωσης γινόταν μέσω της λύσης κάποιας εξίσωσης. Ουσιαστικά, η εξίσωση αντικαθιστά την ανίσωση. Γι’ αυτό και δινόταν ιδιαίτερη σημασία στην εύρεση του αποτελέσματος των διαφόρων προβλημάτων. Επομένως, οι μαθητές/τριες στο πλαίσιο του σχολείου έπρεπε να έχουν κατακτήσει τις προαπαιτούμενες γνώσεις για να λύσουν τις εξισώσεις και τις ανισώσεις.

Μεταξύ 600-300 π.Χ., δύο Έλληνες μαθηματικοί, ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης, χρησιμοποίησαν εκτενώς τις ανισώσεις. Η δουλειά τους επικεντρώθηκε κυρίως στη γεωμετρία, η οποία περιελάβανε τη διερεύνηση των ανισώσεων. Επιπλέον, ανέπτυξαν θεωρίες και αποδείξεις για τις σχέσεις εντός των ποσοτήτων και των ανισώσεων.

Το 500 με 1200 μ.Χ. στην Ινδία, οι μαθηματικοί συνέβαλαν και αυτοί με την σειρά τους στη μελέτη της έννοιας των ανισώσεων. Ασχολήθηκαν κατά κύριο λόγο με τις γραμμικές και τετραγωνικές ανισώσεις. Παράλληλα βοήθησαν στην ανάδειξη της έννοιας του μηδενός και του συστήματος, μέσα από την οποία μπορούσε να κατευθυνθούν οι ανισότητες. Από την άλλη πλευρά, το 800 μ.Χ. οι Πέρσες συνέβαλαν στην περαιτέρω καλλιέργεια των ανισώσεων. Χρησιμοποίησαν για πρώτη φορά σύμβολα για τους αγνώστους αριθμούς και τους συντελεστές. Έτσι, η άλγεβρα έγινε πιο κατανοητή. Η μελέτη των Περσών αποτέλεσε το έναυσμα για την περαιτέρω μελέτη των ανισοτήτων, κάνοντας χρήση αλγεβρικών εκφράσεων(Boyer, 1968)).

Το 1500-1800 (μ. Χ.) διάφοροι μαθηματικοί στην Ευρώπη συνέβαλαν στην εξέλιξη της έννοιας των ανισώσεων. Αναλυτικότερα, κατά την περίοδο της Αναγέννησης και του Διαφωτισμού, διάφοροι μαθηματικοί (FrançoisViète, RenéDescartes, IsaacNewton) ανέδειξαν διάφορους μεθόδους για την επίλυση των ανισώσεων. Ως τρόποι επίλυσης των ανισώσεων χρησιμοποιήθηκαν η χρήση συντεταγμένων και η καλλιέργεια της λογικής σκέψης.

Η ιστορία της μαθηματικής επιστήμης, ιδιαίτερα όσον αφορά τις ανισώσεις, γνώρισε σημαντική ανάπτυξη κατά τον 18ο και 19ο αιώνα. Αυτή η περίοδος χαρακτηρίστηκε από μια στροφή προς μια πιο αυστηρή προσέγγιση των μαθηματικών, θέτοντας τα θεμέλια για τη σύγχρονη μαθηματική ανάλυση. Η μελέτη των ανισώσεων άρχισε να αποκτά εξέχουσα θέση, διαφοροποιούμενη από τη μελέτη των εξισώσεων, που παραδοσιακά κυριαρχούσαν στις μαθηματικές αναζητήσεις. Αυτή η εποχή είδε μαθηματικούς όπως ο Lagrange να συνεισφέρουν στη βάση αυτού που αργότερα θα γινόταν κρίσιμες πτυχές της αφηρημένης άλγεβρας και της ανάλυσης, θέτοντας το έδαφος για μελλοντικές εξελίξεις στην κατανόηση των μαθηματικών ανισοτήτων. Η εργασία τους όχι μόνο επέκτεινε τη μαθηματική εργαλειοθήκη αλλά και εμπλούτισε τους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικοί μπορούσαν να περιγράψουν και να λύσουν προβλήματα σε διάφορους τομείς σπουδών, οδηγώντας σε μια βαθύτερη και πιο λεπτή κατανόηση του μαθηματικού τοπίου (Merzbach&Boyer, 2011).

Τέλος, τον $21^{ο}$ αιώνα η έρευνα της έννοιας των ανισώσεων ολοκληρώθηκε και διαπιστώθηκε ότι αποτελεί τη βάση για την εξέλιξη άλλων τομέων (π.χ. της ανάλυσης, της γεωμετρίας, των αριθμών, των πιθανοτήτων). Επιπλέον, χρησιμοποιούνται από διάφορες επιστήμες σε πρακτικό επίπεδο (π.χ. της Φυσικής, της Μηχανικής και των Οικονομικών). Εν τέλει, η έννοια των ανισώσεων έχει μία σημαντική ιστορία, η οποία συνέβαλε και αυτή με τον τρόπο της στην ανάπτυξη των πολιτισμών από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα (Merzbach&Boyer, 1968).

2.5 Η αντίληψη και κατανόηση τωνανισώσεων/εξισώσεων

Σύμφωνα με την Sfard (1991) και άλλους ερευνητές που ακολούθησαν ερευνητικά το θεωρητικό της πλαίσιο, η χρήση της λειτουργικής/διαδικαστικής σύλληψης είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη και την κατανόηση νέων μαθηματικών όρων. Αυτή η προσέγγιση, η οποία περιλαμβάνει την επεξεργασία ιστορικών παραδειγμάτων και τη δημιουργία σχετικών όρων και θεωριών, χρησιμεύει ως ένα θεμελιώδες βήμα. Η έμφαση στα ιστορικά στοιχεία υπογραμμίζει τη σημασία του πλαισίου για την κατανόηση αυτών των εννοιών, υποδηλώνοντας ότι η κατανόηση της ιστορικής τους εξέλιξης μπορεί να ενισχύσει την κατανόηση.

Αναλυτικότερα, η μεταφορά από τον υπολογισμό προς τα αφηρημένα αντικείμενα (την καλλιέργεια ορισμών από τη *διαδικαστική/λειτουργική σύλληψη* προς την *δομική αντίληψη*) υλοποιείται σε τρία επίπεδα, τα οποία είναι τα εξής:

1. *Εσωτερίκευση*: θεωρείται η διαδικασία, η οποία διενεργείται στα γνωστικά αντικείμενα από πριν.
2. *Συμπύκνωση*: αλλαγή της πρότερης διαδικασίας, αναπτύσσοντας μια αυτόνομη οντότητα.
3. *Υποστασιοποίηση*: αναφέρεται στην ανάδειξη της δεξιότητας ως μια καινούρια οντότητα, που θα έχει αποκτήσει τις απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες για την κατανόηση του διδακτικού αντικειμένου.

Το στάδιο της υποστασιοποίησης είναι ιδιαίτερα περίπλοκο, γεγονός που δημιουργεί διάφορα εμπόδια στην κατανόηση του από τους/τις μαθητές/τριες. Τα τρία επίπεδα που προαναφέρθηκαν αποτελούν μια διαδικασία, η οποία θα πρέπει να εφαρμοστεί με τη σειρά. Στην περίπτωση που δεν ακολουθηθεί η συγκεκριμένη πορεία η διαδικασία κρίνεται ως αποτυχημένη, αφού αποκτούνται οι απαραίτητες γνώσεις για την κατανόηση του σταδίου. Έτσι, δεν γίνεται να προχωρήσει κάποιος στο επόμενο στάδιο.

Κατά τους Linchevski καιSfard (1991) οι εξισώσεις και οι ανισώσεις χωρίζονται σε δύο διαδικασίες: α) *τις πρωταρχικές* (θεωρούνται οι αριθμητικές πράξεις, οι οποίες έχουν αντιστοιχηθεί στους τύπους των μελών τους β) *τις δευτερογενείς* (είναι η διαδικασία που ακολουθείται, ώστε ο προτασιακός τύπος της ανίσωσης και της εξίσωσης να μετατραπεί σε κάποιον άλλο προτασιακό τύπο που έχει την ίδια αξία. Τα αφηρημένα αντικείμενα στο σημείο αυτό εκλαμβάνονται ως σύνολα αλήθειας.

Πάνω σε αυτό το θέμα, οι Linchevski και Sfard (1991) εντόπισαν *ψευδοδομικές* απόψεις, αναφορικά με τον ορισμό της ισότητας των προτασιακών τύπων των εξισώσεων, αλλά και των ανισώσεων αντίστοιχα. Έτσι, ενδυναμώνεται η αντίληψη ότι τα παιδιά ηλικίας 13 έως 18 πιστεύουν ότι οι εξισώσεις και οι ανισώσεις είναι απλώς σύμβολα και τίποτα άλλο και οποιοσδήποτε έχει την δυνατότητα να τα χρησιμοποιεί δεν χρειάζεται να εφαρμόζει συγκεκριμένους κανόνες της άλγεβρας.

ΟιLinchevski και Sfard (1991) υποστηρίζουν από την μια πλευρά ότι οι προαναφερθέντες παρατηρήσεις ενδέχεται να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως τρόπος διδασκαλίας των εξισώσεων και των ανισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της τοποθέτησης της λειτουργικής προσέγγισης στη θέση της δομικής, οι μαθητές/τριες μπορούν να οδηγηθούν σε μια δομική κατανόηση, χωρίς να είναι απαραίτητη η κατάκτηση της λειτουργικής προσέγγισης.

Επιπλέον, σύμφωνα με την μελέτη των Bazzini και Tsamir (2002), αναφορικά με το πώς τα παιδιά εξετάζουν κατά την διάρκεια του μαθήματος τις ανισώσεις, γίνεται χρήση πληροφοριών από τη θεωρία του Fischbein (1993), εστιάζοντας ιδιαίτερα στη διαφοροποίηση τριών γνώσεων: α) της διαισθητικής, β) της τυπικής και γ) της αλγοριθμικής.

Με τον όρο διαισθητική γνώση εννοείται μία μορφή αντίληψης, που εκλαμβάνεται ως αυτονόητη και υφίσταται χωρίς απαραίτητα να μπορεί να την αιτιολογήσει το άτομο. Γι' αυτό και δημιουργείται η ιδέα ότι δεν είναι αναγκαία καμία εξήγηση. Αντίθετα, η τυπική στηρίζεται στη λογική του προτασιακού τύπου και συνδέει με συνάφεια και τυπικότητα τα αριθμητικά δεδομένα σε μια συλλογιστική αναπαράσταση, όπου τα δεδομένα παρατίθενται από το γενικά και κατά την διάρκεια της εκτέλεσης καταλήγει στα ειδικά δεδομένα.

Από την άλλη, η αλγοριθμική θεωρείται μια δεξιότητα, όπου όποιος την κατέχει μπορεί να κάνει χρήση διάφορων διαδικασιών. Κατά τα λεγόμενα του Fischbein (1993) υπάρχει κάποια ασυμβατότητα/διαμάχη μεταξύ της παραγωγικής και τυπικής φύσης των μαθηματικών, με την επιθυμία του ανθρώπου να ελέγχει την θεωρία μέσω πρακτικών εμπειριών.

Προκειμένου να αντιμετωπιστεί αυτό το εμπόδιο, αναπτύσσει το άτομο διαισθητικές προσεγγίσεις αναφορικά με τους ορισμούς της εξίσωσης και της ανίσωσης. Έπειτα, με τη σειρά τους αναπληρώνουν έννοιες και ρόλους στο πεδίο του συλλογισμού. Όλη αυτή η διαδικασία που περιγράφηκε, ονομάζεται αλλιώς και ως «αλγοριθμικά μοντέλα». Κατά συνέπεια, τα συγκεκριμένα μοντέλα εμφανίζονται τη στιγμή που οι σκέψεις των παιδιών κατευθύνουν την τυπική λογική σκέψη και την εκτέλεση πράξεων με αλγόριθμους (Παπακωστόπουλος &Ζαχάρος, 2017).

Επιπρόσθετα, οι Bazzini και Tsamir (2002) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το σύνολο των μαθητών/τριών κάνουν χρήση της λύσης μιας εξίσωσης ως υπόδειγμα για να λυθεί μια ανίσωση. Αναλυτικότερα, δημιουργούν ένα αλγοριθμικό πρότυπο εξίσωσης, τον οποίο εφαρμόζουν για να λυθεί μια ανίσωση. Αυτό διατυπώνεται με λογική σκέψη στην παρακάτω φράση «εκτελώ όμοιες πράξεις, με όμοια αριθμητικά δεδομένα και στα δύο μέλη, πράγμα το οποίο είναι αξιόπιστο για όλα τα αριθμητικά δεδομένα». Αυτό εφαρμόζεται και για την επίλυση των εξισώσεων αλλά και των ανισώσεων. Ωστόσο, είναι μια εσφαλμένη σκέψη της θεωρίας της ζυγαριάς, η οποία εμφανίζεται στις εξισώσεις και τις ανισώσεις.

2.6Προβλήματα, δυσκολίες και σφάλματα των μαθητών/τριών στις εξισώσεις/ανισώσεις

Στο Γυμνάσιο μια από τις κυριότερες ενότητες των σχολικών εγχειριδίων των Μαθηματικών είναι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις. Οι συγκεκριμένες εξισώσεις είναι πιο σημαντικές για τους/τις μαθητές/τριες τις Γ΄ Γυμνασίου, γεγονός που οδηγεί τους εκπαιδευτικούς στο να εστιάζουν περισσότερο τη διδασκαλία τους σε αυτές κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς. Τα παιδιά στο Γυμνάσιο αποκτούν τη βάση όσον αφορά τις εξισώσεις, προκειμένου να έχουν την δυνατότητα να μάθουν μεγαλύτερου βαθμού και πιο δύσκολες εξισώσεις (Nielsen, 2015).

Η γεφύρωση του χάσματος από τις θεμελιώδεις γνώσεις στο γυμνάσιο σε πολύπλοκες έννοιες όπως οι εξισώσεις στο λύκειο είναι ζωτικής σημασίας για την επιτυχία των μαθητών στα μαθηματικά (Τζιούφας & Τσαρούχας, 2019). Αυτή η μεταβατική περίοδος είναι απαραίτητη καθώς προετοιμάζει τους μαθητές για πιο προχωρημένες έννοιες, ωστόσο παρουσιάζει μοναδικές προκλήσεις. Καθώς οι εκπαιδευτικοί εστιάζουν στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, ειδικά για τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου, η κατανόηση του άλματος στην πολυπλοκότητα και την εννοιολογική επικέντρωση είναι ζωτικής σημασίας. Χωρίς μια σταθερή αντίληψη των βασικών εξισώσεων, οι μαθητές μπορεί να δυσκολευτούν να ασχοληθούν και να κυριαρχήσουν αυτές τις μαθηματικές έννοιες υψηλότερου επιπέδου, υπογραμμίζοντας τη σημασία ενός ισχυρού βασικού προγράμματος σπουδών.

Οι μαθητές/τριες έρχονται σε καθημερινή βάση στη σχολική τάξη αντιμέτωποι με διάφορες δυσκολίες, που τους εμποδίζουν να εμπεδώσουν αλλά και να κατακτήσουν τις απαραίτητες γνώσεις για να καταλάβουν το μάθημα της άλγεβρας. Για να καταστεί αποτελεσματική η «εισαγωγή» των παιδιών στην άλγεβρα, πρέπει πρώτα τα παιδιά να διαχειριστούν προβλήματα που έχουν σε εννοιολογικό επίπεδο. Τα εμπόδια των μαθητών/τριών ταξινομούνται σε τρία επίπεδα(Παπακωστόπουλος &Ζαχάρος, 2017):

1. Προβλήματα αναφορικά με την σύνθεση των αλγεβρικών πράξεων, που ορίζονται συντακτικά και σημασιολογικά, μέσω της σκέψης (πηγάζουν από την φύση της ενότητας περιεχομένου της Άλγεβρα), της εκμάθησης (πηγάζουν από το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών σχετικά με τα μαθηματικά), των εκπαιδευτικών δομών ή των τεχνικών διδασκαλίας.
2. Προκλήσεις που προκύπτουν από ανάμεικτα συναισθήματα των παιδιών προς την ενότητα περιεχομένου της άλγεβρας.
3. Προβλήματα λόγω αναπτυξιακών θεμάτων των παιδιών της σχολικής τάξης.

Τα παιδιά στο Λύκειο όταν ασχολούνται με την επίλυση ανισώσεων, κάνουν σύμφωνα με ένα σύνολο ερευνών τα εξής σφάλματα, τα οποία θεωρούνται ως τα πιο κοινά λάθη που κάνουν οι περισσότεροι μαθητές/τριες στο σχολείο (Μάρκου, 2020; Usiskin, 1988; Switzer, 2017; Fujii, 2003; Booth, 1984; Tsamir&Bazzini, 2004):

- Μετάβαση από τη χρήση του καθημερινού επικοινωνιακού λεξιλογίου στην χρήση αλγεβρικών συμβόλων και ειδικών όρων /λεξιλογίου για την αναπαράσταση των ανισώσεων.
- Τη νοηματοδότηση των ανισώσεων και των εξισώσεων. Ουσιαστικά, τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν και εξηγήσουν τις αλγεβρικές πράξεις, που εκτελούνται, ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα.
- Τα παιδιά δεν χρησιμοποιούν ως σύνολο αναφοράς τους πραγματικούς αριθμούς. Αντίθετα, χρησιμοποιούν μόνο τους φυσικούς αριθμούς.
- Στην εμπέδωση του όρου «διάστημα».
- Στην εκμάθηση των συμβόλων ανισοτήτων (≤, ≥).
- Στην επεξήγηση του αποτελέσματος των αλγεβρικών πράξεων.
- Οι μαθητές/τριες χρησιμοποιούν λάθος τα σύμβολα και δυσκολεύονται στη διάκριση τους.
- Στην εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας.
- Στην εκτέλεση πράξεων ανάμεσα σε ακέραιους αριθμούς.
- Στη μετάβαση από κάποια ανισότητα σε κάποια άλλη, η οποία έχει την ίδια ισχύ.
- Στη διατύπωση σχέσεων ταξινομήσεις των πραγματικών αριθμών.
- Στη γλωσσική έκφραση των ανισώσεων.
- Στο διαχωρισμό των εξισώσεων από τις ανισώσεις.
- Στην κατανόηση του θεωρητικού υποβάθρου και της εκτέλεσης των ανισώσεων.
- Στη συσχέτιση της γεωμετρικής οπτικής και της αλγεβρικής γλώσσας.
- Μη κατανόηση μαθηματικών εννοιών
- Ελλιπής εξάσκηση των μαθητών/τριών στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων .
- Έλλειψη ικανοτήτων επίλυσης προβλημάτων
- Μειωμένη εστίαση στην λεπτομέρεια.

Θα πρέπει να αναφερθεί στο σημείο αυτό το γεγονός ότι τα περισσότερα από τα παιδιά που βρίσκονται στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο θεωρούν ότι από την εύρεση της λύσης των ανισώσεων προκύπτουν ως αποτέλεσμα ανισώσεις. Αυτό συμβαίνει, καθώς, τα παιδιά αντιμετωπίζουν δυσκολίες αναφορά με το να δεχτούν ότι κάποιος αριθμός έχει τη δυνατότητα να συνιστά το αποτέλεσμα της ανίσωσης. Εκτός από αυτό, δεν δέχονται ως αποτέλεσμα κάποιας ανίσωσης τους πραγματικούς αριθμούς αλλά ούτε και το κενό σύνολο (Παπακωστόπουλος & Ζαχάρος, 2017).

Προηγουμένως αναφέρθηκαν με γενικό τρόπο κάποια από τα πιο κοινά λάθη που κάνουν οι μαθητές/τριες, αλλά θα επικεντρωθούμε και σε κάποια συγκεκριμένα λάθη που κάνει η πλειονότητα και τους λόγους για τους οποίους τα κάνουν. Ειδικότερα, οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται να κατανοήσουν το γεγονός ότι οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις μπορούν να έχουν 2 ρίζες. Επικρατεί η άποψη στα παιδιά ότι όλα τα x που υπάρχουν στην εξίσωση έχουν διαφορετική τιμή το καθένα ξεχωριστά. Σύμφωνα με τη μελέτη των Vaiyavutjamai και Clements (2006), αναδείχθηκε ότι τα παιδιά θεωρούσαν ότι στην εξίσωση που τους δόθηκε από τους ερευνητές όλα τα x είχαν διαφορετική τιμή.

Από την άλλη πλευρά, με βάση τις έρευνες των Tall κ.α. (2014) και Lima (2008) παρουσιάζεται ότι τα παιδιά συνειδητοποιούν τις εξισώσεις ως μια απλοϊκή διαδικασία, στην οποία δεν λαμβάνουν υπόψη ότι ο άγνωστος x ή y αποτελεί το βασικό στοιχείο της εξίσωσης. Οι μαθητές/τριες εστιάζουν την προσοχή τους στο πως θα επιλύσουν την άσκηση.

Εμπόδια αντιμετωπίζουν τα παιδιά και όταν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν την διακρίνουσα για να λύσουν μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Οι Erbaş και Didis(2015), κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να μάθουν τους τύπους της διακρίνουσας. Ωστόσο, υπάρχει και μια μερίδα των μαθητών/τριών όπου γράφει με σωστό τρόπο τον τύπο της διακρίνουσας, αλλά γράφουν λάθος τα αριθμητικά δεδομένα. Αυτό οδηγεί φυσικά σε λάθος αποτελέσματα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι και η έρευνα του Thorpe (1989), ανέδειξε ότι τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν τα σύμβολα (±) αλλά και κάνουν χρήση του τύπου της διακρίνουσας σε οποιοδήποτε δευτεροβάθμια εξίσωση, χωρίς να σκέφτονται αν είναι αναγκαίο.

Ακόμα, διαπράττουν λάθη αναφορικά με τις ταυτότητες αλλά και την ανεύρεση του κοινού παράγοντα, ώστε να λύσουν την εξίσωση που τους έβαλε εκπαιδευτικός. Στην μελέτη τους οι Erbaş και Didis (2015) συμπέραναν ότι δεν μπορούσε ένα μεγάλο μέρος των μαθητών/τριών να χρησιμοποιήσει την αλγεβρική ταυτότητα, προκειμένου να παραγοντοποιήσουν την εξίσωση τους. Η αιτία για την οποία αποδίδουν οι ερευνητές το σφάλμα των παιδιών είναι η μη αποτελεσματική αποστήθιση του τύπου της ταυτότητας και της παραγοντοποίησης αντίστοιχα.

Τα παιδιά εκτελούν με τυποποιημένο τρόπο την εξίσωση χωρίς να τους ενδιαφέρει αν αυτό είναι λάθος. Στην παραγοντοποίηση αρκετές φορές κατορθώνουν να βρουν τον κοινό παράγοντα, αλλά εκτελούν λανθασμένα τις πράξεις που βρίσκονται εντός της παρένθεσης. Ακόμη τονίζεται ότι τα παιδιά χρησιμοποιούν έντονα αυτά που έχουν μάθει στις πρωτοβάθμιες εξισώσεις και προσπαθούν να επιλύσουν με τον ίδιο τρόπο τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις (Erbaş&Didis, 2015).

Ως ένα τελευταίο αλλά εξίσου σημαντικό με τα προηγούμενα είναι η διάπραξη λαθών από τους/τις μαθητές/τρεις όταν κάνουν χρήση της τεχνικής συμπλήρωσης τετραγώνου, για να επιλύσουν μια δευτεροβάθμια εξίσωση. Οι Erbaş και Didis (2015) έδειξαν ότι ένα μικρό ποσοστό από τους/τις μαθητές/τριες χρησιμοποιεί τη συγκεκριμένη μέθοδο. Τα παιδιά που την χρησιμοποιούν για να λύσουν μια εξίσωση αντιμετωπίζουν διαφορετικά δυσκολίες. Πολλές φορές δεν χρησιμοποιούν το αριθμητικό δεδομένο που χρειάζεται για να προσθέσουν και στα δύο μέρη της εξίσωσης.

Τα παιδιά προτιμούν να χρησιμοποιούν για να λύσουν κάποια εξίσωση τον τύπο της διακρίνουσας και όχι την μέθοδο της συμπλήρωσης του τετραγώνου, που είναι πιο δύσκολη και περίπλοκη για αυτά. Θεωρούν ότι είναι μία σύνθετη διαδικασία, την οποία χρειάζεται να έχεις κατανοήσει σε μεγάλο βαθμό για να μπορείς να την εφαρμόσεις έπειτα. Ο λόγος για τον οποίο προτιμούν την διακρίνουσα περισσότερο ενδέχεται να οφείλεται στο γεγονός ότι δεν έχουν καλλιεργήσει στο απαραίτητο επίπεδο τις αλγεβρικές τους δεξιότητες αλλά και ότι νιώθουν σιγουριά και βεβαιότητα όταν θα την χρησιμοποιήσουν (Bossé&Nandakumar, 2005).

Ο Makgakga (2016) μελέτησε μαθητές/τριες της Γ΄ Γυμνασίου και προέκυψε στα εξής αποτελέσματα. Πρώτον, η πλειονότητα των μαθητών/τριών δεν μπορούσαν να εκτελέσουν την διαίρεση των όρων εξίσωσης με τον συντελεστή. Δεύτερον, δεν μπορούσαν να εφαρμόσουν την μέθοδο της παραγοντοποίησης στην εξίσωση, καθώς διέπρατταν σφάλματα στην αλλαγή της μιας πλευράς σε τετράγωνο και αφήνοντας την άλλη πλευρά χωρίς κάποια πρόσθεση.

Αξίζει να σημειωθεί ότι κάποιες άλλες από τις δυσκολίες, που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στο Λύκειο έχουν ως εξής(Παπακωστόπουλος &Ζαχάρος, 2017):

- Η έλλειψη μαθηματικών γνώσεων: αρκετοί μαθητές/τριες δεν μπορούν να επιλύσουν μια εξίσωση ή ανίσωση, καθώς δεν έχουν κατακτήσεις τις βασικές μαθηματικές έννοιες, όπου η εκμάθηση τους ξεκινάει από μικρή ηλικία. Τέτοιες μαθηματικές έννοιες είναι η πρόσθεση, η αφαίρεση κλπ.
- Οι μαθητές συχνά παλεύουν με την άλγεβρα λόγω έλλειψης κατανόησης και εξοικείωσης με τα σύμβολα και τους κανόνες της. Μπορεί να ξέρουν πώς να χρησιμοποιούν αυτά τα σύμβολα στην επίλυση προβλημάτων, αλλά μπορεί να μην κατανοούν πλήρως τη σημασία τους ή πότε να τα εφαρμόζουν. Αυτό το κενό υπογραμμίζει τη σημασία της διδασκαλίας της άλγεβρας όχι απλώς ως ένα σύνολο διαδικασιών, αλλά ως γλώσσα που μοντελοποιεί και λύνει ζητήματα του πραγματικού κόσμου, καθιστώντας έτσι το θέμα πιο σχετικό και κατανοητό στους μαθητές.
- Εμπόδια στον τρόπο επίλυσης γραμμικών εξισώσεων: οι γραμμικές εξισώσεις θεωρούνται η βάση της άλγεβρας. Αρκετές οι μαθητές/τριες δεν μπορούν να επιλύσουν γραμμικές εξισώσεις, οι οποίες αποτελούνται από μία αλλά και περισσότερες μεταβλητές.
- Δυσκολίες στην επίλυση σύνθετων εξισώσεων και ανισώσεων: Όταν τα παιδιά μεταβαίνουν με απότομα τρόπο από την απλή επίλυση εξισώσεων στην επίλυση πιο σύνθετων, τότε δημιουργούνται περισσότερες παρανοήσεις, απορίες και κενά. Το γεγονός αυτό οδηγεί εν τέλει στην αδυναμία επίλυσης των συγκεκριμένων αλγεβρικών πράξεων.
- Ελλιπής κατάκτηση μεθόδων επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων: οι μαθητές/τριες επιλέγουν να λύνουν κάποια εξίσωση ή ανίσωση με έναν συγκεκριμένο τρόπο, ενώ θα μπορούσαν να εφαρμόσουν διάφορους ανάλογα με την μορφή και την διατύπωση του προβλήματος. Ωστόσο, άλλες φορές δεν μπορούν να εντοπίσουν καν τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να επιλυθούν αυτές. Για παράδειγμα, ανάλογα την κατάσταση θα μπορούσαν είτε να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο της αντικατάστασης είτε τη μέθοδο της απαλοιφής των ίδιων αριθμητικών δεδομένων ή και κάποια άλλη.

- Δυσκολία κατανόησης της εκφώνησης των προβλημάτων: μεγάλο μέρος των μαθητών/τριών δεν μπορεί να αντιστοιχήσει τη διατύπωση του προβλήματος σε μαθηματικές εξισώσεις και ανισώσεις.
- Ύπαρξη έντονων αισθημάτων άγχους και ελλιπής αυτοπεποίθησης: οι μαθητές/τριες, οι οποίοι διακατέχονται από έντονα αισθήματα άγχους, ενώ παράλληλα δεν αισθάνονται αυτοπεποίθηση και σιγουριά για τον εαυτό τους και τις δυνάμεις τους, δεν μπορούν να επιλύσουν αλγεβρικές πράξεις, δεν αναπτύσσουν τις μαθηματικές τους δεξιότητες και γενικά έχουν χαμηλές επιδόσεις στο μάθημα των μαθηματικών.

Οι μαθητές/μαθήτριες διαπράττουν λάθη όσον αφορά την εφαρμογή των χαρακτηριστικών των ανισώσεων. Τα λάθη στην περίπτωση αυτή οφείλονται στη μη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των ανισώσεων. Συνεπώς, τα παιδιά δεν εφαρμόζουν τις ιδιότητες, που έχουν με την αφαίρεση, την πρόσθεση ή απαλοιφή των ίδιων αριθμητικών δεδομένων και στα δύο μέρη μίας ανίσωσης, στον πολλαπλασιασμό και στην εκτέλεση διαιρέσεων των δεδομένων και στα δύο μέρη της. Η μη εκτέλεση των ιδιοτήτων των ανισώσεων, έχει ως αποτέλεσμα την εύρεση λανθασμένων αποτελεσμάτων.

Η πλειοψηφία της επιστημονικής έρευνας έχει κατευθυνθεί προς την εξέταση των προκλήσεων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επίλυση εξισώσεων σε αντίθεση με τις ανισώσεις. Είναι σημαντικό ότι η εργασία των Bazzini και Tsamir(2002) φωτίζει τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούν τα παιδιά για την αντιμετώπιση των ανισοτήτων, καθιερώνοντας έτσι ένα θεμελιώδες πλαίσιο για τη διαφοροποίηση μεταξύ τυπικών, διαισθητικών και αλγοριθμικών τομέων γνώσης. Η τυπική γνώση ορίζεται ότι είναι βαθιά ριζωμένη στον λογισμό, συνδέοντας σχολαστικά τις μαθηματικές οντότητες μέσα σε ένα εποικοδομητικά παραγωγικό πλαίσιο. Η διαισθητική γνώση, όπως περιγράφεται από τους Παπακωστόπουλος και Ζαχάρος (2010), γίνεται αντιληπτή ως μια εγγενής κατανόηση, που φαινομενικά δεν απαιτεί αιτιολόγηση λόγω της αυτονόητης φύσης της. Η αλγοριθμική γνώση, αντίθετα, περιλαμβάνει την εφαρμογή διαδικασιών που στηρίζονται σε θεωρητική λογική. Ο λόγος του Fischbein (1993) αρθρώνει την εγγενή διχοτόμηση μεταξύ της γενεσιουργούς ουσίας των τυπικών μαθηματικών και της προτίμησης των ανθρώπων να βασίζονται σε εμπειρικά στοιχεία. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η ασυμφωνία, επινοούνται διαισθητικά μοντέλα εννοιών και τυπικών λειτουργιών, τα οποία λειτουργούν ως υποκατάστατα στη διαδικασία της γνωστικής συλλογιστικής, ένα φαινόμενο που οι Fischbein και Barash (1993) αναφέρονται ως αλγοριθμικά μοντέλα. Αυτά τα μοντέλα υλοποιούνται όταν οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών καθοδηγούν τον επίσημο συλλογισμό και την εφαρμογή αλγοριθμικών μεθοδολογιών.

Η αδυναμία επίλυσης εξισώσεων οφείλεται στο γεγονός ότι τα παιδιά δεν έχουν εξοικειωθεί με τέτοιου είδους εξισώσεις, αλλά ούτε και έχουν εξασκηθεί με αυτές εντατικά στο πλαίσιο του σχολείου αλλά και εκτός αυτού (Andametal., 2015). Η ελλιπής εξάσκηση και εμπειρία πάνω σε αυτές τις εξισώσεις, οδηγεί αναγκαστικά στην αδυναμία επίλυσής τους. Οι εξισώσεις αυτές είναι πιο σύνθετες από τις άλλες, καθώς περιλαμβάνουν κλάσματα, δεκαδικούς και εκθέτες. Για να κριθεί επιτυχής η επίλυσήτους απαιτείται έντονη εξάσκηση, κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και των πρακτικών που θα πρέπει να εφαρμοστούν(Abimbola, 1988).

Θα αποτελούσε σοβαρή παράλειψη να μην αναφερθεί ότι οι μαθητές πολλές φορές δεν εστιάζουν την προσοχή τους σε συγκεκριμένα στοιχεία. Ωστόσο, η έμφαση στη λεπτομέρεια κρίνει εν τέλει το αποτέλεσμα. Επομένως, όταν τα παιδιά εκτελούν απλά λάθη, αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εύρεση μη έγκυρου αποτελέσματος, αν και ο/η μαθητής/τρια εφάρμοσε την προαπαιτούμενη στρατηγική επίλυσης προβλημάτων. Η αιτία του συγκεκριμένου λάθους οφείλεται περισσότερο στην απουσία προσοχής των μαθητών/τριών αλλά και στην έλλειψη ανατροφοδότησής τους για τα λάθη που έκαναν από τους/τις εκπαιδευτικούς.

Τα λάθη που συμβαίνουν λόγω άγχους, έλλειψης αυτοπεποίθησης και αυτοεκτίμησης των παιδιών σχετικά με τις δυνάμεις και τις ικανότητές τους, έχει τις ρίζες του σε σφάλματα των εκπαιδευτικών. Με αυτό εννοείται ότι οι εκπαιδευτικοί δεν αιτιολογούν όσο πρέπει και με σαφή τρόπο τις παρανοήσεις και τα σφάλματα των μαθητών/τριών. Ακόμη, η μαθηματική έννοια διδάσκεται μία φορά και δεν δίνονται όσες ευκαιρίες θα χρειάζονταν τα παιδιά για να την μάθουν αλλά και να την κατακτήσουν. Συμπληρωματικά, θα πρέπει να παρατεθεί ότι δεν κατευθύνουν τον/την μαθητή/τρια, ώστε να ανακαλύψει την κατάλληλη μέθοδο που του αρμόζει για να επιλύσει μια εξίσωση, μία ανίσωση ή κάποιο πρόβλημα, όπου θα περιλαμβάνει την εκτέλεση των προαναφερθέντων εννοιών.

Δεν είναι λίγες οι φορές που ένα παιδί δείχνει αδιαφορία ως προς το μάθημα των μαθηματικών. Γι’ αυτό και δεν καταβάλλει προσπάθειες για να κατανοήσει κάποια μαθηματική έννοια ούτε για να αναπτύξει μαθηματικές ικανότητες και μαθηματικό τρόπο σκέψης. Η κατάσταση αυτή δεν οφείλεται μόνο στην απροθυμία του ίδιου του παιδιού, αλλά και την απροθυμία των εκπαιδευτικών να προσπαθήσουν να του παρέχουν τα κατάλληλα κίνητρα για να προσελκύσουν το ενδιαφέρον του. Κατά συνέπεια, οι μαθητές/τριες δυσκολεύονται σε μεγαλύτερο βαθμό σε σχέση με τους/τις υπόλοιπους/ες συμμαθητές/τριες τους να επιλύσουν κάποια πρόβλημα ή άσκηση, που περιέχει εξισώσεις και ανισώσεις (Abrego, 1966).

Είναι αλήθεια ότι η ποιότητα της διδασκαλίας που παρέχουν οι εκπαιδευτικοί στα παιδιά (μηχανική και στείρα παράθεση γνώσεων, δασκαλοκεντρικός τρόπος διδασκαλίας) σε συνδυασμό με την παροχή μηδαμινής κατεύθυνσης, στήριξης, ανατροφοδότησης και αξιολόγησης των μαθητών/τριών, που αντιμετωπίζουν διάφορα εμπόδια στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, καταλήγει στην δημιουργία κενών όσον αναφορά τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες (Aiken, 1976).

2.7 Διδακτικές προσεγγίσεις για την αντιμετώπιση δυσκολιών μαθητών/τριών

Είναι γεγονός ότι η απουσία της βάσης της αριθμητικής, των χαρακτηριστικών των αριθμών και των αλγεβρικών εννοιών έχουν ως αποτέλεσμα οι μαθητές/τριες να μην μπορούν να κατανοήσουν και να επιλύσουν πιο σύνθετα προβλήματα, που έχουν σχέση με τις πράξεις της εξίσωσης και της ανίσωσης. Για να αντιμετωπιστούν όλες αυτές οι δυσκολίες, οι μαθηματικοί θα πρέπει να αλλάξουν τον τρόπο διδασκαλίας τους και να προσπαθήσουν να ενδυναμώσουν μέσω διάφορων εναλλακτικών και πρωτότυπων μεθόδων τις αριθμητικές ικανότητες των παιδιών.

Παράλληλα, θα πρέπει να δίνουν ιδιαίτερη βάση όταν τα παιδιά μαθαίνουν τα σύμβολα, που χρησιμοποιούνται στις ανισώσεις και τις εξισώσεις. Θα πρέπει δηλαδή οι μαθηματικοί να αναπροσαρμόζουν τη θεωρία για τα σύμβολα, ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες των παιδιών, παρέχοντας πρακτικά παραδείγματα και ασκήσεις και κυρίως εντάσσοντας τη χρήση των συμβόλων σε πιο λειτουργική βάση. Όσον αφορά τη δυσκολία της επίλυσης γραμμικών εξισώσεων, οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα μπορούσαν να εξοικειώσουν τους μαθητές στην επίλυση τέτοιου είδους εξισώσεων, κάνοντας χρήση διαφόρων μορφών γραφικών εξισώσεων. Θα μπορούσαν να διατυπώνουν γραφικές εξισώσεις που περιέχουν την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (Chow, 2011).

Για να αντιμετωπιστεί η δυσκολία της πολυπλοκότητας των εξισώσεων και των ανισώσεων θα πρέπει τα παιδιά να μεταβαίνουν ομαλά από τις απλές εξισώσεις στις πιο σύνθετες. Με άλλα λόγια, ο βαθμός δυσκολίας θα πρέπει να αυξάνεται σταδιακά, χωρίς να δημιουργούνται κενά και παρανοήσεις τα οποία δεν λαμβάνουν υπόψη το νοητικό φόρτο των έργων. Ουσιαστικά, πιο σύνθετα θεωρούνται τα προβλήματα όταν θα πρέπει να εφαρμοσθούν σε αυτά η μέθοδος της παραγοντοποίησης, η συμπλήρωση του τετραγώνου ή η χρήση του τετραγωνικού τύπου.

Ακόμη, οι εκπαιδευτικοί για να βοηθήσουν τους/τις μαθητές/τριες να κατανοήσουν σε μεγαλύτερο βαθμό τις διατυπώσεις των προβλημάτων, θα πρέπει να εξοικειώνουν τα παιδιά με προβλήματα και εστιάζοντας στα βήματα και στις στρατηγικές λύσης προβλήματος. Εντούτοις, το πιο σημαντικό από όλα είναι ότι θα μάθουν να κατανοούν το γενικότερο πλαίσιο των προβλημάτων και να εστιαστεί η προσοχή στη διαδικασία επίλυσής τους (Bednarz, Radford, Janvier, & Lepage, 1992).

Οι οικογένειες των μαθητών/τριών σε συνεργασία με τους/τις εκπαιδευτικούς του σχολείου μπορούν να συμβάλλουν στην διαχείριση και μείωση του άγχους των παιδιών και την ενίσχυση της αυτοπεποίθησης. Ουσιαστικά, θα πρέπει να αναπτύσσουν ένα περιβάλλον στο σχολείο, αλλά και στο σπίτι, στο οποίο τα παιδιά νιώθουν ασφάλεια, μπορούν να εκφράζουν τα αισθήματα τους και τις σκέψεις τους. Αναλυτικότερα, στο σχολείο, οι μαθητές/τριες παροτρύνονται να διατυπώνουν ερωτήματα, να ζητούν αρωγή, να κάνουν λάθη μέσα από τα οποία θα μάθουν τι θα έπρεπε να έχουν κάνει ή πώς να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες τους (Bell, 1993).

Όλα αυτά βοηθούντα παιδιά να μην πτοούνται όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά την διάρκεια επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων. Αντιθέτως, συνεχίζουν τις προσπάθειές τους και με τη βοήθεια των εκπαιδευτικών, αλλά και των γονέων, θα αναπτύξουν τις μαθηματικές τους ικανότητες και θα καλλιεργήσουν στο μέγιστο τις μαθηματικές τους ικανότητες (Beilock & Maloney, 2015).

Εκτός από αυτά, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να αναπτύσσουν την κριτική ικανότητα και τη δημιουργικότητα των μαθητών/τριών. Οι μαθητές/τριες δεν θα πρέπει απλώς να αποστηθίζουν τους μαθηματικούς τύπους, κανόνες και τις μεθόδους επίλυσης των αλγεβρικών πράξεων. Πάρα ταύτα θα πρέπει να σκέφτονται κριτικά, όταν θα επιλύουν κάποια εξίσωση ή ανίσωση. Για να αναπτυχθεί η κριτική τους ικανότητα και η δημιουργικότητα θα πρέπει στην περίπτωση αυτή οι εκπαιδευτικοί να παρέχουν προβλήματα ανοιχτού τύπου, τα οποία θα απαρτίζονται από διάφορα ερωτήματα. Η επίλυση προβλημάτων ανοικτού τύπου απαιτεί από τα παιδιά να ασκήσουν κριτική σκέψη, ώστε να βρουν ένα έγκυρο αποτέλεσμα.

Επιπρόσθετα, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να μαθαίνουν στους/στις μαθητές/τριες συγκεκριμένες ικανότητες επίλυσης προβλημάτων. Στις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνεται ο χωρισμός των μερών ενός προβλήματος σε μικρότερα μέρη, η αναγνώριση και εύρεση των υποδειγμάτων και η εφαρμογή της μεθόδου της επαλήθευσης. Η παρακίνηση των μαθητών/τριών να αποκτήσουν έναν συγκεκριμένο τρόπο σκέψης, κατά τη διάρκεια λύσης προβλημάτων, θα τους βοηθήσει στο να επιλύουν εξισώσεις και ανισώσεις με πιο αποτελεσματικό τρόπο (Bednarz, κ.α., 1992).

Πέρα από αυτά, θα πρέπει οι εκπαιδευτικοί να εφαρμόζουν διάφορους τύπους αξιολόγησης και όχι μόνο έναν συγκεκριμένο, εφόσον η ολόπλευρη κατανόηση της οποιασδήποτε έννοιας συνδέεται με ποικίλες διδακτικές πρακτικές και ποικίλους τρόπους αξιολόγησης. Ειδικότερα, θα πρέπει να εφαρμόζονται οι εξής μέθοδοι αξιολόγησης: α) η διαμορφωτική, β) η διαγνωστική και γ) η τελική αξιολόγηση. Οι τρεις αυτές μορφές αξιολόγησης, συμβάλουν όλους/ες τους/τις εκπαιδευτικούς να ανακαλύψουν το αρχικό, αλλά και το τελικό τους μαθησιακό επίπεδο, μπορούν να εντοπίσουν τα αδύνατα σημεία, τα δυνατά σημεία και γενικότερα τις ελλείψεις τους και τις ιδιαιτερότητες τους. Με αυτόν στον τρόπο, μπορούν να αναδιαμορφώνουν τη διδασκαλία τους και να παρέχουν βοήθεια στα σημεία που χρειάζεται στήριξη ο/η μαθητής/τρια (Bell, 1993).

Στην εκπαίδευση θα πρέπει να προωθείται η συνεργατική μάθηση. Όταν τα παιδιά λειτουργούν ως ομάδες έχουν την δυνατότητα να αντιμετωπίζουν πιο αποτελεσματικά και γρήγορα τις δύσκολες τους, ενώ ταυτόχρονα επιλύουν απορίες μέσω της συζήτησης και την ανταλλαγή ιδεών, σκέψεων κλπ. Οι μαθητές/τριες καλλιεργούν επικοινωνιακές ικανότητες και μαθαίνουν να συνεργάζονται με άτομα που δεν έχουν καμία σχέση ή δεσμό (Andrews, Dickinson, Eade, &Harrington, 1999).

Όταν τα παιδιά κατανοούν ότι δεν υπάρχει καμία συμβατότητα ανάμεσα στα προβλήματα που παρέχονται για τις εξισώσεις και τις ανισώσεις με την πραγματικότητα., τότε μειώνεται το ενδιαφέρον τους για μάθηση. Αναμένεται από τους εκπαιδευτικούς να παρέχουν προβλήματα με σενάρια τα οποία αντλούνται από την καθημερινή ζωή με σκοπό να γίνει η διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης πιο ενδιαφέρουσα και να αποκτά ουσιαστικότερη κατανόηση η οποιαδήποτε υπό διδασκαλία μαθηματική έννοια (Ling&Mahmud, 2023).

Κεφάλαιο 3:Μεθοδολογία της έρευνας

3.1 Πληθυσμός και δείγμα της έρευνας

Ο πληθυσμός της παρούσας έρευνας αποτελείται από τους/τις μαθητές/τριες της Α΄ Λυκείου. Στην έρευνα συμμετέχουν μόνο οι μαθητές/τριες, οι οποίοι φοιτούν σε δημόσια σχολεία της Ελλάδας.

Όσον αναφορά το δείγμα της έρευνας αυτό αποτελείται από100 μαθητές/τριες, που ανήκουν στο συγκεκριμένο πληθυσμό. Το δείγμα είναι βολικό εφόσον στηρίζεται στις προσωπικές σχέσεις του ερευνητή με εκπαιδευτικούς που αποδέχονται τη συμμετοχή των μαθητών τους στην έρευνα. Ως εκ τούτου δεν επιδιώκεται η γενίκευση των αποτελεσμάτων, εφόσον ο χρόνος δεν επέτρεπε την εύρεση και αποδοχή συμμετοχής στην έρευνα από τυχαίο δείγμα.

Στα παραπάνω χαρακτηριστικά τίθενται σε κάποιες περιπτώσεις κάποιοι περιορισμοί και σε κάποιες άλλες όχι. Με άλλα λόγια, όσον αφορά το φύλο δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οι συμμετέχοντες μπορεί να είναι από οποιοδήποτε φύλο (αγόρι ή κορίτσι). Αναφορικά με την ηλικία υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί. Είχαν τη δυνατότητα να συμμετέχουν μόνο μαθητές/τριες ηλικίας 15 και 16 ετών. Δεν είχαν το δικαίωμα να συμμετέχουν μαθητές/τριες μεγαλύτερων ηλικιών, που επαναλαμβάνουν πάλι την ίδια τάξη για μία ή και περισσότερες φορές.

3.2 Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων

Η συλλογή δεδομένων πραγματοποιήθηκε σε διάστημα τριών μηνών, με τη συμμετοχή πολλών σχολείων δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Λόγω του εκτεταμένου αριθμού συμμετεχόντων που αξιολογήθηκαν για συμμετοχή στην έρευνα, η διάρκεια παρατάθηκε για να καλύψει τα σχολικά προγράμματα. Αυτή η προσέγγιση εξασφάλισε ότι τα μαθήματα δεν θα διαταράσσονταν και οι μαθητές δεν έχασαν σημαντικό χρόνο στην τάξη. Οι ερευνητικές δραστηριότητες είχαν προγραμματιστεί να μην παρεμβαίνουν σε εξεταζόμενα μαθήματα όπως η γλώσσα και τα μαθηματικά, αλλά ενσωματώθηκαν κατά τη διάρκεια μαθημάτων ειδικότητας όπως η τέχνη και η μουσική, σε συμφωνία με τους εκπαιδευτικούς.

Τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από τις απαντήσεις των μαθητών περιλάμβαναν τη συγκατάθεσή τους για τη χρήση των δεδομένων τους για ερευνητικούς σκοπούς, δημογραφικές πληροφορίες και τη συμπλήρωση του δοκιμίου τους. Στο ηλεκτρονικό ταχυδρομείο των γονέων των συμμετεχόντων στάλθηκαν τρία αρχεία, καθώς οι μαθητές είναι ανήλικοι. Το πρώτο αρχείο απαιτούσε συμπλήρωση της γονικής άδειας και περιέγραφε το σκοπό, τους όρους συμμετοχής και τη μεθοδολογία της έρευνας. Αφού συμφώνησαν, οι γονείς έδωσαν τη συγκατάθεσή τους για τη συμμετοχή των παιδιών τους στην έρευνα. Το δεύτερο αρχείο συμπληρώθηκε και υπογράφηκε από τους μαθητές, αναφέροντας την ενημερωμένη συγκατάθεσή τους για το σκοπό της έρευνας και τη συμφωνία για τη χρήση των δεδομένων τους. Επισημάνθηκε συγκεκριμένα με έντονους χαρακτήρες (bold) ότι τα δεδομένα θα χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά για ερευνητικούς σκοπούς. Το κείμενο κατέστησε σαφές ότι τα πραγματικά ονόματα των μαθητών δεν θα χρησιμοποιούνταν σε καμία δημοσίευση. Ανέφερε επίσης ότι οι κηδεμόνες θα μπορούσαν να αναφέρουν τον ερευνητή εάν παραβιαστούν αυτές οι προϋποθέσεις. Επιπλέον, το τελευταίο αρχείο, που απαιτούσε συμπλήρωση από τους μαθητές, συγκέντρωσε δημογραφικά στοιχεία, τα οποία ήταν χρήσιμα για την έρευνα. Σε κάθε περίπτωση οι συμμετέχοντες είχαν το δικαίωμα αποχώρησης από την έρευνα όταν το επιθυμούσαν.

3.3 Μέθοδος έρευνας

Στην παρούσα έρευνα ο ερευνητής αξιοποίησε την ποσοτική μέθοδο διερεύνησης, καθώς μέσω αυτής είχε την δυνατότητα να αναδείξει τα πιο κοινά λάθη που κάνουν οι μαθητές/τριες, όταν επιλύουν ανισώσεις και εξισώσεις. Ακόμη, η ποσοτική μέθοδος επιτρέπει στον ερευνητή να αναλύσει και να συγκρίνει τα δεδομένα από ένα μεγάλο αριθμό δείγματος. Επιπλέον, ο ερευνητής μπορεί χρησιμοποιώντας αυτήν τη μέθοδο να διαψεύσει ή να επαληθεύσει τις ερευνητικές του υποθέσεις.

Ο ερευνητής χρησιμοποίησε έρευνα δοκιμών θεωρίας για να εξετάσει εάν η θεωρία που αναφέρθηκε προηγουμένως ευθυγραμμίζεται με τα ευρήματα της ερευνητικής διαδικασίας. Ως στρατηγική, ο ερευνητής χρησιμοποίησε δοκίμια για να ποσοτικοποιήσει και να αναλύσει τα δεδομένα που συλλέχθηκαν.

3.4 Εργαλείο συλλογής δεδομένων

Οι μαθητές/τριες κλήθηκαν να απαντήσουν ένα δοκίμιο το οποίο έχει δομηθεί από τον ερευνητή και το οποίο αποτελείται από 6 ασκήσεις. Στις δύο πρώτες ασκήσεις θα έπρεπε να λύσουν κάποιες εξισώσεις, ενώ στις υπόλοιπες 4 ασκήσεις έπρεπε να λύσουν διάφορες ανισώσεις.

Ο σκοπός της πρώτης άσκησης, που περιλαμβάνει τέσσερις εξισώσεις, είναι διπλός. Κυρίως, αποσκοπεί στην αξιολόγηση της κατανόησης των θεμελιωδών αρχών στις οποίες βασίζονται οι εξισώσεις. Αυτό περιλαμβάνει την κατανόηση της δομής τους, των μεταβλητών και των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για την επίλυσή τους. Επιπλέον, η άσκηση στοχεύει στην καλλιέργεια και αξιολόγηση των συλλογιστικών ικανοτήτων των μαθητών. Αυτό αναφέρεται στην ικανότητά τους να εφαρμόζουν λογικές διαδικασίες σκέψης, κριτική σκέψη και δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων στο πλαίσιο των μαθηματικών εξισώσεων.

Ακόμη, κύριος σκοπός της συγκεκριμένης άσκησης είναι να φανεί η εξοικείωση των παιδιών με την αλγεβρική επίλυση εξισώσεων, χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές, όπως αυτή της δοκιμής-λάθους και βελτίωσης. Ουσιαστικά, αναμένεται από την επίλυση αυτής της άσκησης οι μαθητές/τριες να μπορούν να αναγνωρίζουν τον άγνωστο αριθμό, που τους έχει δοθεί αντίστοιχα σε κάθε εξίσωση, αλλά και να διαχωρίζουν ποιοι είναι οι γνωστοί και ποιοι είναι οι άγνωστοι αριθμοί της. Τέλος, αναμένεται να μπορούν να αφαιρούν τις παρενθέσεις, να μετακινούν τα αριθμητικά δεδομένα από την μία πλευρά στην άλλη, κάνοντας αλλαγή του πρόσημου αλλά και να εξαλείφουν τους παρονομαστές, μέσω του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου. Έχει μέσο τούτου κριθεί ο βαθμός στον οποίο είναι σε θέση να επιτυγχάνουν τα συγκεκριμένα και θα εντοπιστούν τα κύρια λάθη και παρανοήσεις.

Η δεύτερη άσκηση αποτελείται από περισσότερες εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές/τριες θα έπρεπε να επιλύσουν 12 εξισώσεις. Ο βαθμός δυσκολίας αλλά και ο τρόπος επίλυσης της είναι ακριβώς ίδιος με την προηγούμενη άσκηση. Η άσκηση αυτή έρχεται για να διαπιστώσει τον βαθμό κατανόησης της έννοιας των εξισώσεων. Δηλαδή, μέσω αυτής της άσκησης οι μαθητές/τριες είχαν τη δυνατότητα να προσπαθήσουν ξανά να λύσουν εξισώσεις. Ως εκ τούτου μέσα από τις 16 συνολικά εξισώσεις που θα έχουν λύσει θα διαφανεί το επίπεδο κατανόησης της έννοιας, οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν και η σταθερότητα των λαθών τους.

Η τρίτη άσκηση περιλαμβάνει πέντε ανισώσεις. Οι μαθητές/τριες για να έχουν την ικανότητα να επιλύουν ανισώσεις πρέπει πρώτα μπορούν να λύνουν τις εξισώσεις. Από την συγκεκριμένη άσκηση τα παιδιά αναμένεται να μπορούν αρχικά να διατάσσουν τους πραγματικούς αριθμούς, αλλά και να διακρίνουν το σύμβολο της εξίσωσης από το σύμβολο της ανίσωσης. Η τέταρτη άσκηση αποτελείται από 4 ανισώσεις. Ειδικότερα, οι μαθητές/τριες αναμένεται στο σημείο αυτό να έχουν κατανοήσει την έννοια των ανισώσεων και να μπορούν να την διακρίνουν από τις εξισώσεις. Επίσης, αναμένεται να εμπεδώσουν και να εφαρμόσουν στην πράξη τα προ απαιτούμενα βήματα για τη λύση της άσκησης (π.χ. α) Να βρεθεί το Ε.Κ.Π των παρονομαστών (εάν υπάρχει), β) να εξαλειφθούν οι παρονομαστές (εάν υπάρχουν), γ) εκτέλεση των πράξεων, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα, δ) διάκριση γνωστών αριθμών από τους αγνώστους, ε) αναγωγή όμοιων όρων και στ) διαίρεση των μελών με τον συντελεστή του αγνώστου και τοποθέτηση της φοράς της ανισότητας αναλόγως αν είναι θετικός ή αρνητικός.

Η πέμπτη άσκηση αποτελείται από 4 ανισώσεις. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι οι ανισώσεις είναι παρόμοιες με αυτές που εκτέλεσαν οι μαθητές/τριες στην προηγούμενη άσκηση για να διαφανεί με σαφή τρόπο η επίδοσή τους στο συγκεκριμένο και τα λάθη τους.

Η έκτη και τελευταία άσκηση περιλαμβάνει και αυτή 4 ανισώσεις. Σε αυτήν συνοψίζονται όλοι οι παραπάνω στόχοι. Με λίγα λόγια, οι μαθητές προσδοκάτε να εφαρμόζουν τα βήματα για την εύρεση έγκυρου αποτελέσματος σε μία ανίσωση, να εφαρμόζουν την επιμεριστική ιδιότητα, να βάζουν την ανάλογη φορά σε κάθε περίπτωση, να χρησιμοποιούν το Ε.Κ.Π όπου κρίνεται απαραίτητο (εξάλειψη παρονομαστών), να χρησιμοποιούν το σωστό σύμβολο για να αναδείξουν την ανίσωση, να αφαιρούν τις παρενθέσεις και να κάνουν τις απαραίτητες πράξεις.

Τέλος καλούνται να λύσουν δύο προβλήματα για να διαφανεί ο βαθμός εννοιολογικής κατανόησης των εξισώσεων και ανισώσεων σε πιο ρεαλιστικές καταστάσεις. Το δοκίμιο στο σύνολό του παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

3.5ΑξιοπιστίακαιΕγκυρότητα

Η εγκυρότητα του περιεχομένου του δοκιμίου έχει ελεγχθεί μέσω της διαδικασίας αξιολόγησης του από ειδικούς στο ζήτημα. Πιο συγκεκριμένα, το δοκίμιο έχει δοθεί σε δύο συναδέλφους μαθηματικούς, οι οποίοι είναι διακεκριμένοι εκπαιδευτικοί στον κλάδο των μαθηματικών, με μακροχρόνια εμπειρία στη διδασκαλία των εννοιών των εξισώσεων και των ανισώσεων σε μαθητές/τριες λυκείου. Βασικός στόχος των συγκεκριμένων εκπαιδευτικών ήταν ο εντοπισμός των σημείων του δοκιμίου που ενδεχομένως χρήζουν βελτίωσης. Ουσιαστικά, πρέπει στην αξιολόγησή τους να παραθέσουν τα αδύναμα σημεία του δοκιμίου και τι μπορεί να χρησιμοποιηθεί, προκειμένου να βελτιωθούν οι ασκήσεις, αλλά και οι δραστηριότητες, οι οποίες απαρτίζουν το δοκίμιο. Επίσης, ζητείται να εκτιμήσουν τη χρονική διάρκεια, που απαιτείται για να επιλύσουν τις δραστηριότητες και τις ασκήσεις, οι οποίες έχουν τεθεί από τον ερευνητή. Οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών έχουν αξιοποιήσει την εμπειρία τους για να υπολογίσουν τον χρόνο που απαιτείται για την επίλυση εξισώσεων και ανισοτήτων. Ήταν σε θέση να μετρούν το επίπεδο δυσκολίας διαφόρων ασκήσεων και δραστηριοτήτων. Ως εκ τούτου, κατάφεραν να παρέχουν μια μέση εκτίμηση χρόνου λύσης, βοηθώντας σημαντικά την εργασία του ερευνητή.

Ο ερευνητής ήταν σε θέση να προσδιορίσει τον χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση της έρευνας και επίσης να επινοήσει ένα προκαταρκτικό χρονοδιάγραμμα για τις συνεδρίες της τάξης που θα συμμετείχαν. Αυτός ο σχεδιασμός επέτρεψε ρυθμίσεις σχετικά με τον τρόπο αντιστάθμισης του διδακτικού χρόνου που θα χρησιμοποιούσαν, διασφαλίζοντας ότι οι μαθητές δεν θα καθυστερούσαν στην εργασία τους. Επιπλέον, με ένα σαφές χρονοδιάγραμμα, οι εκπαιδευτικοί ήταν έτοιμοι να ενημερώσουν τους μαθητές για την επερχόμενη ερευνητική διαδικασία, να απαντήσουν σε τυχόν ερωτήσεις και να τονίσουν κρίσιμες πτυχές της μελέτης. Από την άλλη πλευρά, για να ελεγχθεί η αξιοπιστία, έχει χρησιμοποιηθεί ο δείκτης Cronbach α, κατά την διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων του δοκιμίου.

Κεφάλαιο 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην ενότητα που ακολουθεί, διερευνώνται τα αποτελέσματα των μαθητών στις ασκήσεις που τέθηκαν. Αρχικά επικεντρωθήκαμε στο βαθμό επιτυχίας σε κάθε έργο και στη συνέχεια στον εντοπισμό των κύριων λαθών. Στη συνέχεια έγινε διασύνδεση της ακαδημαϊκής συμπεριφοράς των μαθητών στην επίλυση των ασκήσεων με την ικανότητα επίλυσης των αντίστοιχων μαθηματικών προβλημάτων.

4.1 Η επίδοση σε κάθε υποερώτημα

Ακολούθως, αναλύεται το κατά πόσο οι απαντήσεις που δόθηκαν σε κάθε υποερώτημα κάθε άσκηση είναι σωστές ή λανθασμένες.

Στον Πίνακα 1, παρατηρείται πως το 50.5% των μαθητών απάντησαν λάθος στο πρώτο ερώτημα της 1ης άσκησης, ενώ το 49.5% έδωσαν την σωστή απάντηση. Το υπόλοιπο 5% δεν απάντησαν στην συγκεκριμένη άσκηση.

Πίνακας 1: Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 1i

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	47	47,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	48	48,0

Δεν έχει δοθεί απάντηση	5	5,0

Μέσα από τον Πίνακα 2, διερευνώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο ερώτημα της άσκησης 1. Το 63% έδωσαν λάθος απάντηση και το 31% έδωσαν τη σωστή απάντηση, ενώ το 6% δεν έδωσε κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο υποερώτημα.

Πίνακας 2. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 1ii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	31	31,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	63	63,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	6	6,0

Στον Πίνακα 3, παρατίθενται οι απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο υποερώτημα της πρώτης άσκησης. Είναι σαφές πως οι περισσότεροι μαθητές, αγγίζοντάς το 55%, έδωσαν λανθασμένη απάντηση και το 36% σωστή. Επιπλέον, το 9% δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Πίνακας 3. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο1iii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	36	36,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	55	55,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	9	9,0

Στον Πίνακα 4, παρατηρείται πως το 64% των μαθητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα έδωσαν λάθος απάντηση στο τέταρτο υποερώτημα της συγκεκριμένης άσκησης. Όσοι έδωσαν σωστή απάντηση καταλαμβάνουν το 32% και το 4% δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Πίνακας 4. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο1iv

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	32	32,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	64	64,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	4	4,0

Στον Πίνακα 5, μελετάται το κατά πόσο οι μαθητές έδωσαν την σωστή απάντηση στο πρώτο υποερώτημα της δεύτερης άσκησης. Το 61% έδωσαν λανθασμένη απάντηση, το 28% σωστή και το 11% δεν απάντησαν.

Πίνακας 5. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο2i

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	28	28,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	61	61,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	11	11,0

Αναφορικά με τις απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο υποερώτημα της δεύτερης άσκησης, αναλύονται στον Πίνακα 6. Το 53% έδωσαν μια λάθος απάντηση και το 34% έδωσαν σωστή απάντηση. Επιπλέον, το 13% δεν απάντησαν στην ερώτηση αυτή.

Πίνακας 6. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2ii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	34	34,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	53	53,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	13	13,0

Ο Πίνακας 7, επικεντρώνονται στα αποτελέσματα του 3ου υποερωτήματος της δεύτερης άσκησης. Το 59% καταλαμβάνουν οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση, το 31% απάντησαν σωστά και το 10% δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Πίνακας 7. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2iii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	31	31,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	59	59,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	10	10,0

Στον Πίνακα 8, είναι εμφανές πως το 56% των μαθητών απάντησαν λάθος στο τέταρτο υποερώτημα της συγκεκριμένης άσκησης. Το 34% απάντησαν σωστά, με το υπόλοιπο 10% να μην δίνει κάποια απάντηση.

Πίνακας 8. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2iv

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	34	34,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	56	56,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	10	10,0

Στον Πίνακα 9, παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στο πέμπτο υποερώτημα της δεύτερης άσκησης. Το 58% αυτών φαίνεται πως απάντησαν λανθασμένα, με το 33% να δίνουν την σωστή απάντηση και το 9% να μην δίνουν κάποια απάντηση.

Πίνακας 9. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2v

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	33	33,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	58	58,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	9	9,0

Στον Πίνακα 10, επικεντρώνονται οι απαντήσεις των μαθητών στο έκτο υποερώτημα της δεύτερης άσκησης που τους δόθηκε. Το 60% αυτών απάντησαν λάθος, ενώ το 33% απάντησαν σωστά. Ωστόσο, το 7% των μαθητών δεν ασχολήθηκαν καθόλου με το συγκεκριμένο υποερώτημα.

Πίνακας 10. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2vi

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	33	33,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	60	60,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	7	7,0

Στον Πίνακα 11 που ακολουθεί, μελετώνται τα αποτελέσματα του έβδομου υποερωτήματος της δεύτερης άσκησης. Το 60% έδωσαν κάποια λανθασμένη απάντηση, με το 29% να απάντησαν σωστά. Επιπλέον, το 11% δεν έδωσαν κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο υποερώτημα.

Πίνακας 11. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2vii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	29	29,0

	Η απάντηση είναι λανθασμένη	60	60,0
	Δεν έχει δοθεί απάντηση	11	11,0

Στον Πίνακα 12, διερευνώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο όγδοο υποερώτημα της συγκεκριμένης άσκησης. Το 57% των μαθητών φαίνεται να έδωσαν λανθασμένη απάντηση, το 29% έδωσαν σωστή απάντηση και το 14% δεν έδωσαν απάντηση.

Πίνακας 12. Συχνότητα επιτυχίας στο έργο 2viii

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
	Η απάντηση είναι σωστή	29	29,0
	Η απάντηση είναι λανθασμένη	57	57,0
	Δεν έχει δοθεί απάντηση	14	14,0

Στον Πίνακα 13, παρατίθεται αναλύονται τα αποτελέσματα που δόθηκαν για το ένατο ερευνητικό ερώτημα της δεύτερης άσκησης. Το 64% έδωσαν μια λάθος απάντηση, το 24% μια σωστή απάντηση, ενώ με το υποερώτημα δεν ασχολήθηκε το 12% των μαθητών.

Πίνακας 13. Συχνότητα επιτυχίας έργου 2ix

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
	Η απάντηση είναι σωστή	24	24,0
	Η απάντηση είναι λανθασμένη	64	64,0
	Δεν έχει δοθεί απάντηση	12	12,0

Στον Πίνακα 14, παρουσιάζονται οι απαντήσεις που δόθηκαν για το δέκατο ερευνητικό ερώτημα της δεύτερης άσκησης. Το 67% των μαθητών απάντησαν λανθασμένα και το 21% έδωσαν σωστή απάντηση. Αναφορικά με όσους δεν έδωσαν απάντηση, καταλαμβάνουν το 12%.

Πίνακας 14. Συχνότητα επιτυχίας έργου 2x

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	21	21,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	67	67,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	12	12,0

Ο Πίνακας 15, διερευνά τις απαντήσεις των μαθητών για το ενδέκατο υποερώτημα της δεύτερης άσκησης. Το 47% έδωσαν λανθασμένη απάντηση, το 29% σωστή απάντηση και το 24% δεν έχουν δώσει κάποια απάντηση.

Πίνακας 15. Συχνότητα επιτυχίας έργου 2xi

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	29	29,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	47	47,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	24	24,0

Στον Πίνακα 16, είναι εμφανές πως το 55% των μαθητών απάντησαν λανθασμένη στο δωδέκατο υποερώτημα της δεύτερης άσκησης. Το 28% φαίνεται να έδωσαν κάποια σωστή απάντηση και το 17% δεν έδωσαν απάντηση στο συγκεκριμένο υποερώτημα.

Πίνακας 16. Συχνότητα επιτυχίας έργου 2xii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)

Η απάντηση είναι σωστή	28	28,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	55	55,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	17	17,0

Στον Πίνακα 17, παρατηρείται πως το 62% των μαθητών απάντησαν λανθασμένα στο πρώτο υποερώτημα της τρίτης άσκησης, ενώ το 20% απάντησαν σωστά. Επιπλέον, το 18% καταλαμβάνουν όσοι δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Πίνακας 17. Συχνότητα επιτυχίας έργου 3i

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	20	20,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	62	62,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	18	18,0

Στον Πίνακα 18, αναλύονται οι απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο υποερώτημα της τρίτης άσκησης. Το 63% των μαθητών απαντούν λανθασμένα, το 22% σωστά και το 15% δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Πίνακας 18. Συχνότητα επιτυχίας έργου 3ii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	22	22,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	63	63,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	15	15,0

Στον Πίνακα 19, αναλύεται η απάντηση των μαθητών στο τρίτο υποερώτημα της τρίτης άσκησης. Το 68% έδωσαν κάποια λάθος απάντηση, ενώ όσοι έδωσαν σωστή απάντηση ή δεν απάντησαν στο συγκεκριμένου υποερώτημα καταλαμβάνουν από 16% έκαστος.

Πίνακας 19. Συχνότητα επιτυχίας έργου 3iii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	16	16,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	68	68,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	16	16,0

Μέσα από τον Πίνακα 20, αναλύεται η απόδοση των μαθητών στο τέταρτο υποερώτημα της τρίτης άσκησης. Το 67% απάντησαν λάθος, το 20% σωστά και το υπόλοιπο 13% δεν έδωσε κάποια απάντηση στο υποερώτημα αυτό.

Πίνακας 20. Συχνότητα επιτυχίας έργου 3iv

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	20	20,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	67	67,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	13	13,0

Συνεχίζοντας, η έρευνα μελετά τις απαντήσεις των μαθητών στο πέμπτο υποερώτημα της τρίτης άσκησης. Το 68% των ερωτώμενων απαντούν λανθασμένα και το 20% έδωσαν σωστή απάντηση. Το 12% φαίνεται να μην έχουν ασχοληθεί με το συγκεκριμένο υποερώτημα. Τα παραπάνω, παρουσιάζονται στον Πίνακα 21.

Πίνακας 21. Συχνότητα επιτυχίας έργου 3v

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	20	20,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	68	68,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	12	12,0

Ο Πίνακας 22, επικεντρώνεται στην απόδοση των μαθητών στο πρώτο υποερώτημα της τέταρτης άσκησης. Το 60% έδωσαν κάποια λάθος απάντηση και το 24% έδωσαν κάποια θετική απάντηση. Το υπόλοιπο 16% φαίνεται να μην απάντησε στο υποερώτημα αυτό.

Πίνακας 22. Συχνότητα επιτυχίας έργου 4i

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	24	24,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	60	60,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	16	16,0

Στον Πίνακα 23, φαίνεται πως το 56% των ερωτώμενων έδωσαν λάθος απάντηση στο δεύτερο υποερώτημα της τέταρτης άσκησης. Το 30% απάντησαν σωστά και το 14% δεν έδωσαν απάντηση.

Πίνακας 23. Συχνότητα επιτυχίας έργου 4ii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	30	30,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	56	56,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	14	14,0

Ο Πίνακας 24 επικεντρώνεται στις απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο υποερώτημα της τέταρτης άσκησης. Το 60% δίνουν λανθασμένη απάντηση και το 35% σωστή, ενώ το 5% δεν έδωσαν κάποια απάντηση. Τα ίδια αποτελέσματα φαίνονται και στο Γράφημα 24.

Πίνακας 24. Συχνότητα επιτυχίας έργου 4iii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	35	35,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	60	60,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	5	5,0

Στον Πίνακα 25, φαίνεται πως το 50% των μαθητών έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις στο τέταρτο υποερώτημα της τέταρτης άσκησης. Αναφορικά με όσους έδωσαν σωστές απαντήσεις καταλαμβάνουν το 36% και το 14% δεν έδωσαν απάντηση.

Πίνακας 25. Συχνότητα επιτυχίας έργου 4iv

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	36	36,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	50	50,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	14	14,0

Ο Πίνακας 26, παραθέτει τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών στο πρώτο υποερώτημα της πέμπτης άσκησης. Το 41% αυτών απαντούν λανθασμένα, ενώ το 30% έδωσαν σωστή απάντηση. Αναφορικά με όσους δεν έδωσαν απάντηση καταλαμβάνουν το 29%.

Πίνακας 26. Συχνότητα επιτυχίας έργου 5i

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	30	30,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	41	41,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	29	29,0

Στον Πίνακα 27, μελετώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο υποερώτημα της πέμπτης άσκησης που τους δόθηκε. Το 49% έδωσαν κάποια λανθασμένη απάντηση και το 29% έδωσαν μια σωστή απάντηση. Τέλος, το 22% δεν έδωσαν κάποια απάντηση.

Πίνακας 27. Συχνότητα επιτυχίας έργου 5ii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	29	29,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	49	49,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	22	22,0

Στον Πίνακα 28, διερευνώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο υποερώτημα της πέμπτης άσκησης. Το 51% έδωσαν μια λάθος απάντηση και το 34% μια σωστή. Επιπλέον, το 15% αγγίζουν όσοι δεν έδωσαν κάποια απάντηση επί του θέματος.

Πίνακας 28. Συχνότητα επιτυχίας έργου 5iii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	34	34,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	51	51,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	15	15,0

Στον Πίνακα 29, μελετώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο τέταρτο ερώτημα της πέμπτης άσκησης. Το 56% καταλαμβάνουν οι μαθητές που έδωσαν λανθασμένη απάντηση και το 29% έδωσαν σωστή απάντηση, με το υπόλοιπο 15% να μην ασχολήθηκαν με το συγκεκριμένο ερώτημα.

Πίνακας 29. Συχνότητα επιτυχίας έργου 5iv

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	29	29,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	56	56,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	15	15,0

Στον Πίνακα 30, παρατηρείται πως το 54% των μαθητών απάντησαν λάθος στο πρώτο υποερώτημα της έκτης άσκησης. Το 30% ανήκει σε όσους μαθητές απάντησαν σωστά και το 16% σε όσους δεν απάντησαν.

Πίνακας 30. Συχνότητα επιτυχίας έργου 6i

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	30	30,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	54	54,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	16	16,0

Στον Πίνακα 31, διερευνώνται οι απαντήσεις του δεύτερου υποερωτήματος της έκτης άσκησης. Το 54% των μαθητών απάντησαν λάθος, με το 30% να δίνουν την σωστή απάντηση. Το 16% που απομένει δεν ασχολήθηκε με το υποερώτημα αυτό.

Πίνακας 31. Συχνότητα επιτυχίας έργου 6ii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	30	30,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	54	54,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	16	16,0

Στον Πίνακα 32, διερευνώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο ερώτημα της έκτης άσκησης. Το 60% απάντησαν λανθασμένα και το 28% σωστά. Επιπλέον, το 12% δεν έδωσαν απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Πίνακας 32. Συχνότητα επιτυχίας έργου 6iii

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	28	28,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	60	60,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	12	12,0

Ο Πίνακας 33, επικεντρώνονται στις απαντήσεις των μαθητών στο τέταρτο υποερώτημα της έκτης άσκησης. Το 64% φαίνεται πως απάντησαν λάθος και το 26% πως απάντησαν σωστά. Επιπλέον, το 10% αγγίζουν όσοι δεν έδωσαν απάντηση στο συγκεκριμένο υποερώτημα.

Πίνακας 33. Συχνότητα επιτυχίας έργου 6iv

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	26	26,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	64	64,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	10	10,0

Στον Πίνακα 34, διερευνώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο πρώτο υποερώτημα της έβδομης άσκησης. Το 44% δεν έδωσαν κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα και το 29% απάντησαν λάθος. Επιπλέον, το 27% έδωσαν την σωστή απάντηση.

Πίνακας 34. Συχνότητα επιτυχίας έργου 7α

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	27	27,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	29	29,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	44	44,0

Στον Πίνακα 35, παρουσιάζεται το εάν οι μαθητές απάντησαν σωστά στο δεύτερο υποερώτημα της άσκησης 7. Το 44% δεν έδωσαν κάποια απάντηση, το 33% απάντησαν σωστά και το 23% απάντησαν λανθασμένα.

Πίνακας 35. Συχνότητα επιτυχίας έργου 7β

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	33	33,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	23	23,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	44	44,0

Ο Πίνακας 36, μελετά τις απαντήσεις των μαθητών στο τρίτο υποερώτημα της έβδομης άσκησης. Το 45% δεν έχουν δώσει κάποια απάντηση, ενώ το 35% έδωσαν την σωστή απάντηση. Το 20% αγγίζουν όσοι απάντησαν λανθασμένα στο συγκεκριμένο υποερώτημα.

Πίνακας 36. Συχνότητα επιτυχίας έργου 7γ

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	35	35,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	20	20,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	45	45,0

Στον Πίνακα 37, παρατηρείται πως το 44% των μαθητών δεν απάντησαν στο πρώτο υποερώτημα της όγδοης άσκησης. Επιπλέον, το 29% απάντησαν λανθασμένα και το 27% απάντησαν σωστά.

Πίνακας 37. Συχνότητα επιτυχίας έργου 8α

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	27	27,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	29	29,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	44	44,0

Μέσα από τον Πίνακα 38, διερευνώνται οι απαντήσεις των μαθητών στο δεύτερο υποερώτημα της όγδοης άσκησης. Το 51% δεν έχουν δώσει κάποια απάντηση και το 28% έδωσαν την σωστή απάντηση. Το υπολειπόμενο 21% ανήκει σε μαθητές που απάντησαν λάθος.

Πίνακας 38. Συχνότητα επιτυχίας έργου 8β

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	28	28,0

Η απάντηση είναι λανθασμένη	21	21,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	51	51,0

Ο Πίνακας 39, αποτυπώνει τα αποτελέσματα του τρίτου υποερωτήματος της όγδοης άσκησης. Το 60% των μαθητών δεν απάντησαν, ενώ όσοι απάντησαν λάθος ή σωστά καταλαμβάνουν αντίστοιχα από 20%.

Πίνακας 39. Συχνότητα επιτυχίας έργου 8γ

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Η απάντηση είναι σωστή	20	20,0
Η απάντηση είναι λανθασμένη	20	20,0
Δεν έχει δοθεί απάντηση	60	60,0

4.2 Συνοπτική εικόνα της επίδοσης σε κάθε έργο

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζεται το σύνολο των σωστών απαντήσεων που έδωσαν σε κάθε έργο συνολικά οι ερωτώμενοι για να φανεί συγκριτικά η ακαδημαϊκή τους επίδοση σε κάθε μορφή έργου.

Στον Πίνακα 40 παρουσιάζεται το σύνολο των σωστών απαντήσεων της 1^{ης} άσκησης. Οι μαθητές που είχαν μια ή δύο σωστές απαντήσεις καταλαμβάνουν από 34%, το 18% δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση και το 12% έδωσαν 3 σωστές απαντήσεις. Το υπόλοιπο 2% των μαθητών απάντησαν σε όλα τα υποερωτήματα της άσκησης σωστά, έχοντας 4 σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 40: Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 1

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	18	18,0
	1,00	34	34,0

	2,00	34	34,0
	3,00	12	12,0
	4,00	2	2,0

Στον Πίνακα 41 φαίνεται πως το 31% των μαθητών έδωσαν 3 σωστές απαντήσεις, το 19% έχουν 4 σωστές απαντήσεις και το 16% 5 σωστές απαντήσεις. Οι μαθητές που έδωσαν 2 σωστές απαντήσεις αγγίζουν το 13%, το 9% έδωσαν 6 σωστές απαντήσεις και το 6% δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση. Τέλος, από 3% καταλαμβάνουν οι μαθητές που έδωσαν 1 ή 7 σωστές απαντήσεις στην δεύτερη άσκηση, η οποία αποτελείται συνολικά από 12 υποερωτήματα.

Πίνακας 41. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 2

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	6	6,0
	1,00	3	3,0
	2,00	13	13,0
	3,00	31	31,0
	4,00	19	19,0
	5,00	16	16,0
	6,00	9	9,0
	7,00	3	3,0

Στον Πίνακα 42 παρουσιάζεται το σύνολο των σωστών απαντήσεων στην 3η άσκηση. Το 42% έχουν δώσει 1 σωστή απάντηση, το 33% καμία και το 19% 2 σωστές απαντήσεις. Επιπλέον, το 6% έδωσαν 3 σωστές απαντήσεις στην συγκεκριμένη άσκηση, από το σύνολο των 5 υποερωτημάτων.

Πίνακας 42. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 3

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών	,00	33	33,0

απαντήσεων	1,00	42	42,0
	2,00	19	19,0
	3,00	6	6,0

Στον Πίνακα 43 μελετάται το σύνολο των σωστών απαντήσεων της 4ης άσκησης που έλυσαν οι μαθητές. Η συγκεκριμένη άσκηση περιλαμβάνει συνολικά 4 υποερωτήματα, επομένως οι 4 βαθμοί είναι το άριστα. Το 45% είχαν 1 σωστή απάντηση, το 25% έχουν 2 σωστές απαντήσεις και το 20% δεν έδωσαν κάποια σωστή απάντηση. Επιπλέον, το 10% ανήκει σε όσους μαθητές είχαν 3 σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 43. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 4

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	20	20,0
	1,00	45	45,0
	2,00	25	25,0
	3,00	10	10,0

Στον Πίνακα 44 παρατηρείται πως το 45% των μαθητών έδωσαν 1 σωστή απάντηση στην 5η άσκηση. Το 28% των μαθητών έδωσαν 2 σωστές απαντήσεις και το 20% δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση. Το υπόλοιπο 7% αγγίζουν όσοι μαθητές έδωσαν 3 σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 44. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 5

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	20	20,0
	1,00	45	45,0
	2,00	28	28,0
	3,00	7	7,0

Στον Πίνακα 45 διερευνάται το σύνολο των σωστών απαντήσεων της 6ης άσκησης. Το 37% των μαθητών έδωσαν 1 σωστή απάντηση, το 31% δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση και το 21% έδωσαν 2 σωστές απαντήσεις. Επιπλέον, όσοι μαθητές έδωσαν 3 σωστές απαντήσεις καταλαμβάνουν το 9% και το 2% απάντησαν σωστά σε όλα τα υποερωτήματα, φτάνοντας τις 4 σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 45. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 6

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	31	31,0
	1,00	37	37,0
	2,00	21	21,0
	3,00	9	9,0
	4,00	2	2,0

Στον Πίνακα 46 μελετάται το σύνολο των σωστών απαντήσεων της έβδομης άσκησης. Το 64% των μαθητών δεν έδωσαν σωστές απαντήσεις, το 26% έδωσαν 3 σωστές απαντήσεις και το 7% έδωσαν 2 σωστές απαντήσεις. Επιπλέον, το 3% έδωσαν 1 σωστή απάντηση.

Πίνακας 46. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 7

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	64	64,0
	1,00	3	3,0
	2,00	7	7,0
	3,00	26	26,0

Στον Πίνακα 47 διερευνάται το σύνολο των σωστών απαντήσεων της όγδοης άσκησης που δόθηκε στους μαθητές. Το 64% δεν έδωσαν καμία σωστή απάντηση, το 16% 3 σωστές απαντήσεις και το 13% 1 σωστή απάντηση. Επιπλέον, το 7% έδωσαν 2 σωστές απαντήσεις.

Πίνακας 47. Συχνότητα επιτυχίας στο σύνολο του Έργου 8

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμός σωστών απαντήσεων	,00	64	64,0
	1,00	13	13,0
	2,00	7	7,0
	3,00	16	16,0

4.3 Κατηγοριοποίηση λαθών κάθε άσκησης

Στη συνέχεια, διερευνώνται τα είδη λαθών που πραγματοποίησαν οι μαθητές σε κάθε μια από τις ασκήσεις. Να αναφερθεί πως οι απαντήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, καθώς οι μαθητές μπορεί να έκαναν παραπάνω από ένα είδος λάθους στα διάφορα υποερωτήματα κάθε άσκησης.

Στον Πίνακα 48, παρατηρείται πως το 54.1% των λαθών στην 1η άσκηση σχετίζονται με αριθμητικά λάθη, το 29.5% με λάθη στην διαδικασία απαλοιφής παρενθέσεων και το 16.4% με λάθη στην διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών.

Πίνακας 48. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 1

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	79	54,1
Λάθος στη διαδικασία απαλοιφής παρενθέσεων	43	29,5
Λάθος στη διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών	24	16,4

Στον Πίνακα 49, μελετώνται τα είδη λαθών που πραγματοποιήθηκαν στην δεύτερη άσκηση. Το 92.6% σχετίζονται με αριθμητικά λάθη και το 7.4% με λάθη στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Πίνακας 49.Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 2

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	327	92,6
Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων	26	7,4

Στον Πίνακα 50, διερευνώνται τα λάθη που πραγματοποιήθηκαν στην τρίτη άσκηση. Το 36.7% αυτών σχετίζονται με λάθη στην διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών και το 34.7% με αριθμητικά λάθη. Επιπλέον, το 28.6% αγγίζουν τα λάθη στη διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών.

Πίνακας 50. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 3

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	34	34,7
Λάθος στη διαδικασία απαλοιφής παρενθέσεων	36	36,7
Λάθος στη διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών	28	28,6

Ο Πίνακας 51, επικεντρώνεται στα λάθη που πραγματοποιήθηκαν στην τέταρτη άσκηση. Το 69.6% των λαθών σχετίζονται με αριθμητικά λάθη και το 17.6% με λάθη στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων. Επιπλέον, το 12.8% των λαθών αφορούν την συμπλήρωση του πίνακα προσήμων.

Πίνακας 51. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 4

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	87	69,6
Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων	22	17,6

Λάθος συμπλήρωσης πίνακα προσήμων	16	12,8

Στον Πίνακα 52, αναλύονται τα λάθη που έγιναν στην πέμπτη άσκηση. Το 79.6% αναφέρονται σε αριθμητικά λάθη, το 12.9% σε λάθη στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων και το 7.5% σε λάθη συμπλήρωσης του πίνακα προσήμων.

Πίνακας 52. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 5

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	74	79,6
Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων	12	12,9
Λάθος συμπλήρωσης πίνακα προσήμων	7	7,5

Στον Πίνακα 53, είναι εμφανές πως το 52.1% των λαθών που πραγματοποιήθηκαν στην έκτη άσκηση αφορούν αριθμητικά λάθη. Το 21.4% αγγίζουν τα λάθη στη διαδικασία απαλοιφής παρενθέσεων, το 14.5% ανήκει στα λάθη διαδικασίας απαλοιφής παρονομαστών, ενώ από 6% αγγίζουν τα λάθη στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων και στην συμπλήρωση του πίνακα προσήμων.

Πίνακας 53. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 6

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	61	52,1
Λάθος στη διαδικασία απαλοιφής παρενθέσεων	25	21,4

Λάθος στη διαδικασία απαλοιφής παρονομαστών	17	14,5
Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων	7	6,0
Λάθος συμπλήρωσης πίνακα προσήμων	7	6,0

Στον Πίνακα 54, περιγράφονται τα λάθη της έβδομης άσκησης. Το 43.6% των λαθών σχετίζονται με αριθμητικά λάθη, το 24.5% με λάθη στον τύπο εύρεσης όγκου και το 17% σε λάθος κατανόηση του ζητήματος. Επιπλέον, το 14.9% αφορούν λάθη στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

Πίνακας 54. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 7

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	41	43,6
Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων	14	14,9
Λάθος στον τύπο εύρεσης όγκου	23	24,5
Λάθος κατανόησης ζητήματος	16	17,0

Αντίστοιχα, ο Πίνακας 55, μελετούν τα είδη των λαθών στην όγδοη άσκηση. Το 52% των λαθών είναι αριθμητικά, το 22.7% αφορούν τον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιας εξισώσεων και το 20% σχετίζονται με την λανθασμένη κατανόηση του ζητήματος της άσκησης. Τα λάθη σχετικά με τον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων και την συμπλήρωση του πίνακα προσήμων καταλαμβάνουν από 2.7% αντίστοιχα.

Πίνακας 55. Κατηγοριοποίηση λαθών έργου 8

	Συχνότητα	Ποσοστό (%)
Αριθμητικό λάθος	39	52,0
Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων	17	22,7

	Λάθος στον τύπο επίλυσης δευτεροβάθμιων ανισώσεων	2	2,7
	Λάθος συμπλήρωσης πίνακα προσήμων	2	2,7
	Λάθος κατανόησης ζητήματος	15	20,0

4.4 Λύση προβλημάτων έργων 7 και 8

Στην τελευταία ενότητα μελετώνται οι τρόποι επίλυσης της 7^{ης} και της 8^{ης} άσκησης, που ήταν στην ουσία λύση προβλήματος.

Στον Πίνακα 56, παρατηρείται πως το 66.7% των απαντήσεων σχετίζονται με την χρήση του τύπου του όγκου, ενώ το 33.3% με την χρήση του τύπου της διακρίνουσας.

Πίνακας 56. Τρόπος επίλυσης έργου 7

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
	Χρήση τύπου όγκου V=x*y*z, όπου x=μήκος, y=πλάτος, z=ύψος	200	66,7
	Χρήση τύπου Διακρίνουσας για την επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού	100	33,3

Στον Πίνακα 57, διερευνάται ο τρόπος επίλυσης της 8^{ης} άσκησης. Για άλλη μια φορά το 66.7% των μαθητών χρησιμοποίησαν τον τύπο της διακρίνουσας για την επίλυση εξίσωσης 2^{ου} βαθμού, ενώ το 33.3% χρησιμοποίησαν τον τύπο της διακρίνουσας για την επίλυση αντίστοιχης ανίσωσης.

Πίνακας 57. Τρόπος επίλυσης έργου 8

		Συχνότητα	Ποσοστό (%)
	Χρήση τύπου Διακρίνουσας για την επίλυση εξίσωσης 2ου βαθμού	200	66,7

	Χρήση τύπου Διακρίνουσας για την επίλυση ανίσωσης 2ου βαθμού	100	33,3

Στο έργο 8, το οποίο περιλαμβάνει την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων που σχετίζονται με την τροχιά μιας εκτοξευόμενης μεταλλικής σφαίρας, τα δεδομένα από τον Πίνακα 57 αποκαλύπτουν ότι το 66,7% των μαθητών εφάρμοσε σωστά τον τύπο διακρίνουσας για εξισώσεις δεύτερου βαθμού, ενώ μόνο το 33,3% το έκανε για ανισότητες. Αυτή η ασυμφωνία υπογραμμίζει μια σημαντική πρόκληση στην κατανόηση και την εφαρμογή της διακρίνουσας σε διαφορετικά πλαίσια. Τα κοινά λάθη που πιθανώς περιλαμβάνουν την εσφαλμένη εφαρμογή τύπων, εννοιολογικά λάθη στον προσδιορισμό της κατεύθυνσης και της φύσης της παραβολής και αριθμητικά λάθη κατά τη διάρκεια αλγεβρικού χειρισμού. Για να ενισχυθεί η επάρκεια των μαθητών, είναι απαραίτητο να τονιστούν οι θεμελιώδεις έννοιες του διακριτικού και ο αντίκτυπός του στις λύσεις, να παρέχουμε λεπτομερή καθοδήγηση επίλυσης προβλημάτων και να προσφέρουμε εκτεταμένη πρακτική, ειδικά στη δημιουργία και την επίλυση ανισοτήτων. Αυτή η στοχευμένη προσέγγιση θα βοηθήσει να διευκρινιστεί πότε και πώς να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά τη διακρίνουσα, μειώνοντας πιθανώς τα σφάλματα και βελτιώνοντας τη συνολική μαθηματική κατανόηση.

4.5Σύγκριση μέσου όρου σωστών απαντήσεων εξισώσεων-ανισώσεων

Ακολούθως, παρουσιάζονται οι μέσοι όροι των σωστών απαντήσεων των 6 πρώτων έργων. Να επισημανθεί πως τα πρώτα 2 έργα αφορούν εξισώσεις, ενώ τα έργα 3-6 αφορούν ανισώσεις.

Στον Πίνακα 58φαίνεται πως οι μαθητές κατά μέσο όρο απάντησαν το 36.50% των υποερωτημάτων του 1^{ου} έργου σωστά και το 29.41% του δεύτερου έργου. Αναφορικά με το τρίτο έργο απάντησαν 19.6% του συνόλου των υποερωτημάτων σωστά κατά μέσο όρο, το 31.25% των υποερωτημάτων του τέταρτου έργου και το 30.5% του 5^{ου} έργου. Τέλος, απάντησαν κατά μέσο όρο το 28.5% των υποερωτημάτων του έκτου έργου. Συμπερασματικά, κατά μέσο όρο οι μαθητές απάντησαν μεγαλύτερο ποσοστό σωστών υποερωτημάτων στις 2 πρώτες ασκήσεις που σχετίζονται με εξισώσεις, συγκριτικά με τις 4 επόμενες ασκήσεις που αφορούν ανισώσεις.

Πίνακας 58. Μέσο ποσοστό σωστών απαντήσεων ανά έργο

Έργο	Μέσος όρος	τυπική απόκλιση	Μέγιστο	ελάχιστο	Ποσοστό (%)
1	1.46	0.989	0	4	36.50
2	3.53	1.630	0	12	29.41
3	0.98	0.876	0	5	19.6
4	1.25	0.892	0	4	31.25
5	1.22	0.848	0	4	30.5
6	1.14	1.025	0	4	28.5

Αναλύοντας τα δεδομένα που παρέχονται στον Πίνακα 58, φαίνεται ότι το 4^{ο} έργο γίνεται αντιληπτό ως μία από τις πιο απαιτητικές εργασίες, πιθανώς λόγω της εστίασής της στην επίλυση δευτεροβάθμιων ανισοτήτων, ένα θέμα που απαιτεί ισχυρή κατανόηση του τύπου της διακρίνουσας αλλά και του πίνακα των προσήμων. Παρά το γεγονός ότι δεν έχει τη χαμηλότερη μέση βαθμολογία ή την υψηλότερη τυπική απόκλιση στο σύνολο δεδομένων, η φύση των μαθηματικών απαιτήσεων της Εργασίας 4, όπως τονίζεται, υποδηλώνει ότι παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες για τους μαθητές. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την Εργασία 5, η οποία περιλαμβάνει επίσης δευτεροβάθμιες ανισότητες, αλλά διευκολύνεται από τη χρήση παραγοντοποίησης, η οποία δείχνει παρόμοια τυπική απόκλιση και ελαφρώς υψηλότερο μέσο όρο αλλά ένα οριακά χαμηλότερο ποσοστό των μέγιστων βαθμολογιών που επιτυγχάνονται. Αυτό υποδηλώνει ότι ενώ και οι δύο εργασίες είναι απαιτητικές, η μεθοδολογική προσέγγιση στην Εργασία 5, που περιλαμβάνει παραγοντοποίηση, μπορεί να παρέχει ένα πιο προσιτό πλαίσιο για τους μαθητές, μειώνοντας έτσι ελαφρώς τη δυσκολία σε σύγκριση με την πιο απαιτητική εννοιολογικά Εργασία 4.

4.6Μέσος όρος σωστών απαντήσεων υποερωτημάτων ανά έργο

Στην συνέχεια, διερευνάται ο μέσος όρος των σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα ανά έργο, για τα έργα που σχετίζονται με ανισώσεις και εξισώσεις (1-6). Να επισημανθεί πως οι απαντήσεις «Δεν έχει δοθεί απάντηση» ομαδοποιήθηκαν με τις λάθος απαντήσεις, επομένως όλες οι μεταβλητές δίνονται σε κλίμακα από το 0-Λάθος απάντηση ή δεν απαντήθηκε έως το 1-Σωστή απάντηση. Επομένως, όσο αυξάνεται ο μέσος όρος της κάθε μεταβλητής, τόσο αυξάνεται η συχνότητα με την οποία οι μαθητές απάντησαν σωστά στο εκάστοτε υποερώτημα.

Στον Πίνακα 59 φαίνεται πως κατά μέσο όρο δόθηκαν στο πρώτο έργο δόθηκαν περισσότερες απαντήσεις στο ερώτημα i (0.47), ενώ ακολουθεί το ερώτημα iii (0.36) και το ερώτημα iv(0.32). Λιγότερες απαντήσεις ωστόσο δόθηκαν στο ερώτημα ii (0.31).

Πίνακας 59. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 1

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα i	0.47	0.501
Ερώτημα ii	0.31	0.464
Ερώτημα iii	0.36	0.482
Ερώτημα iv	0.32	0.468

Ο πίνακας 59 που συνοψίζει τις μέσες σωστές απαντήσεις ανά ερώτημα για το Έργο 1 δείχνει ορισμένες διακυμάνσεις στην απόδοση των μαθητών σε διάφορες μαθηματικές ερωτήσεις, οι οποίες αποτελούνται από αλγεβρικές εξισώσεις και ανισώσεις. Αρχικά το $1^{ο}$ ερώτημα έδωσε τον υψηλότερο μέσο όρο σωστών απαντήσεων μεταξύ των τεσσάρων, με μέσο όρο 0,47 και τυπική απόκλιση 0,501. Παρά τον σχετικά υψηλό μέσο όρο, η μεγάλη τυπική απόκλιση υποδηλώνει ευρεία κατανομή βαθμολογιών, υποδηλώνοντας διαφορετικά επίπεδα κατανόησης ή εκτέλεσης της διαδικασίας λύσης μεταξύ των μαθητών. Τα ερωτήματα ii, iii και iv δείχνουν χαμηλότερες μέσες βαθμολογίες (0,31, 0,36 και 0,32, αντίστοιχα) και συγκρίσιμες τυπικές αποκλίσεις (0,464, 0,482 και 0,468, αντίστοιχα), υποδεικνύοντας ότι αυτές ήταν πιο δύσκολες για τους μαθητές. Αυτές οι ερωτήσεις περιλαμβάνουν πιο σύνθετους χειρισμούς ή μεγαλύτερο αριθμό λειτουργιών, γεγονός που μπορεί να εξηγήσει τη χαμηλότερη απόδοση. Είναι αξιοσημείωτο ότι όλες οι ερωτήσεις εκτός από το ερώτημα I έχουν βαθμολογίες σημαντικά κάτω από 0,5, υπογραμμίζοντας μια γενική δυσκολία σε αυτούς τους τύπους προβλημάτων. Η σχετική δυσκολία στα ερωτήματαii, iii και iv σε σύγκριση με την ερώτηση i θα μπορούσε να αποδοθεί στην πρόσθετη πολυπλοκότητα στην εξισορρόπηση των εξισώσεων, στον εντοπισμό ισοδύναμων εκφράσεων ή στην ορθή απλοποίηση των όρων υπό συνθήκες εξέτασης.

Στον Πίνακα 60, είναι εμφανές πως οι περισσότερες απαντήσεις του έργου 2, δόθηκαν στο ερώτημα ii (0.34) και ακολουθεί το ερώτημα iv (0.34), το ερώτημα v (0.33) και το ερώτημα vi (0.33). Ακολουθούν με μικρή διαφορά τα ερωτήματα iii (0.31), vii (0.29), viii (0.29), xi (0.29) και i (0.28), ενώ ακόμη χαμηλότερα τοποθετούνται τα ερωτήματα xii (0.28), ix (0.24) και x (0.21).

Πίνακας 60. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 2

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα i	0.28	0.451
Ερώτημα ii	0.34	0.476
Ερώτημα iii	0.31	0.465
Ερώτημα iv	0.34	0.476
Ερώτημα v	0.33	0.473
Ερώτημα vi	0.33	0.473
Ερώτημα vii	0.29	0.456
Ερώτημα viii	0.29	0.456
Ερώτημα ix	0.24	0.429
Ερώτημα x	0.21	0.409
Ερώτημα xi	0.29	0.456
Ερώτημα xii	0.28	0.451

Ακολούθως, παρουσιάζεται ο μέσος όρος του κάθε υποερωτήματος του τρίτου έργου, μέσα από τον Πίνακα 61. Παρατηρείται πως λιγότεροι από τους μισούς μαθητές απάντησαν σωστά σε κάθε υποερώτημα. Πιο συγκεκριμένα, περισσότεροι απάντησαν σωστά το ερώτημα ii (0.22) και i (0.20), καθώς και στα υποερωτήματα iv (0.20) και v (0.20). Λιγότερες σωστές απαντήσεις φαίνεται να έλαβε το υποερώτημα iii (0.16).

Πίνακας 61. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 3

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα i	0.20	0.402
Ερώτημα ii	0.22	0.416
Ερώτημα iii	0.16	0.368
Ερώτημα iv	0.20	0.402
Ερώτημα v	0.20	0.402

Ο Πίνακας 62, παρουσιάζει τον μέσο όρο των σωστών απαντήσεων που δόθηκαν ανά υποερώτημα στο τέταρτο έργο. Οι περισσότερες σωστές απαντήσεις δόθηκαν στο υποερώτημα iv (0.36), ενώ λιγότεροι στο ερώτημα iii (0.35). Τέλος, ακόμη λιγότεροι μαθητές απάντησαν σωστά στο υποερώτημαii (0.30) καιi (0.24).

Πίνακας 62. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 4

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα i	0.24	0.429
Ερώτημα ii	0.30	0.461
Ερώτημα iii	0.35	0.479
Ερώτημα iv	0.36	0.482

Ο Πίνακας 63 επικεντρώνεται στον μέσο όρο σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 5. Λιγότεροι από τους μισούς μαθητές απάντησαν σωστά στο ερώτημα iii (0.34) και i (0.30). Επιπλέον, ακόμη λιγότεροι φαίνεται να απάντησαν σωστά το ερώτημα ii(0.29) καιiv (0.29).

Πίνακας 63. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 5

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα i	0.30	0.461
Ερώτημα ii	0.29	0.456
Ερώτημα iii	0.34	0.476
Ερώτημα iv	0.29	0.456

Στον Πίνακας 64, είναι εμφανές πως λιγότεροι από τους μισούς μαθητές απάντησαν σωστά σε όλα τα υποερωτήματα του έκτου έργου. Αναλυτικότερα, περισσότερες σωστές απαντήσεις δόθηκαν στα υποερωτήματα i (0.30) καιii (0.30), ακολουθεί το υποερώτημα iii(0.28) και λιγότερες σωστές απαντήσεις δόθηκαν στο ερώτημα iv (0.26).

Πίνακας 64. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 6

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα i	0.30	0.461
Ερώτημα ii	0.30	0.461
Ερώτημα iii	0.28	0.451
Ερώτημα iv	0.26	0.441

Στον Πίνακα 65 που ακολουθεί, παρατηρείται πως περισσότερες σωστές απαντήσεις στο έργο 7 δόθηκαν στο υποερώτημα γ (0.35) και ακολουθεί το υποερώτημα β (0.33). Επιπλέον, λιγότερες σωστές απαντήσεις στο συγκεκριμένο έργο φαίνεται να δόθηκαν στο υποερώτημα α (0.27).

Πίνακας 65. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 7

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα α	0.27	0.446
Ερώτημα β	0.33	0.473
Ερώτημα γ	0.35	0.479

Ο Πίνακας 66, μελετά τον μέσο όρο των σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα του έργου 8. Λιγότερο από το 1/3 των μαθητών φαίνεται να απάντησαν σωστά σε όλα τα υποερώτημα του έργου αυτού. Πιο αναλυτικά, περισσότερες απαντήσεις δόθηκαν στο υποερώτημα β (0.28), ακολουθεί το υποερώτημα α (0.27) και τελευταίο κατατάσσεται το υποερώτημα γ (0.20).

Πίνακας 66. Μέσος όρος σωστών απαντήσεων ανά υποερώτημα στο έργο 8

	Μέσος όρος	Τυπική απόκλιση
Ερώτημα α	0.27	0.446
Ερώτημα β	0.28	0.451
Ερώτημα γ	0.20	0.402

Από την ανάλυση των πινάκων 59 έως 66, παρατηρείται ότι οι επιδόσεις των ατόμων διαφέρουν σημαντικά ανάλογα με τη μορφή των ασκήσεων. Συγκεκριμένα, φαίνεται ότι τα άτομα βρίσκουν πιο εύκολες τις ασκήσεις που αφορούν στην εύρεση λύσεων σε ανισώσεις και εξισώσεις, με την υψηλότερη μέση επίδοση να είναι στα έργα που εμπίπτουν σε αυτές τις κατηγορίες. Αντίθετα, πιο απαιτητικές φαίνεται να είναι οι ασκήσεις που απαιτούν από τους μαθητές να λύσουν προβλήματα, όπως ενδεικτικά αναφέρεται από τις χαμηλές επιδόσεις στα σχετικά έργα. Ειδικότερα, τα υποερωτήματα που σχετίζονται με την επίλυση περιπλοκότερων προβλημάτων, όπως η ανάλυση και η σύνθεση δεδομένων, φαίνονται να παρουσιάζουν τις χαμηλότερες μέσες επιδόσεις. Αυτό υποδηλώνει ότι, παρά την καλή κατανόηση των βασικών μαθηματικών διαδικασιών, η εφαρμογή τους σε πιο σύνθετες καταστάσεις και η ανάλυση προβλημάτων απαιτούν περαιτέρω ανάπτυξη δεξιοτήτων.

4.7Συσχέτιση της επίδοσης τα έργα των ασκήσεων και τη λύση προβλήματος

Αξιοποιήθηκε ο γραμμικός συντελεστής συσχέτισης Pearson για τη διερεύνηση πιθανών στατιστικά σημαντικών συσχετίσεων μεταξύ των λύσεων προβλημάτων και την επίλυση ασκήσεων ανισώσεων και εξισώσεων. Από τα αποτελέσματα του ελέγχου που παρουσιάζονται στον Πίνακα 67, φαίνεται πως δεν υπάρχει κάποια στατιστικά σημαντική συσχέτιση μεταξύ των υπό μελέτη μεταβλητών ($p>0.05$). Υπενθυμίζεται ότι τα έργα 1, 2 είναι εξισώσεις, τα 3-6 είναι ανισώσεις και τα 7-8 είναι λύση προβλήματος.

Πίνακας 67. Συσχετίσεις Pearson

		Σύνολο σωστών απαντήσεων 7ης άσκησης	Σύνολο σωστών απαντήσεων 8ης άσκησης
Σύνολο σωστών απαντήσεων 1ης άσκησης	PearsonCorrelation	-,075	-,058
	Sig. (2-tailed)	,461	,565
Σύνολο σωστών απαντήσεων 2ης άσκησης	PearsonCorrelation	-,006	,094
	Sig. (2-tailed)	,950	,353
Σύνολο σωστών απαντήσεων 3ης άσκησης	PearsonCorrelation	,051	,096
	Sig. (2-tailed)	,613	,342
Σύνολο σωστών απαντήσεων 4ης άσκησης	PearsonCorrelation	,096	,122
	Sig. (2-tailed)	,343	,228
Σύνολο σωστών απαντήσεων 5ης άσκησης	PearsonCorrelation	-,062	-,110
	Sig. (2-tailed)	,541	,277

Σύνολο σωστών απαντήσεων 6ης άσκησης	PearsonCorrelation	,154	,039
	Sig. (2-tailed)	,127	,701

Τέλος, μετά την πρώτη ανάλυση των επιδόσεων στις ασκήσεις εξισώσεων και ανισώσεων, πραγματοποιήθηκε διαχωρισμός του δείγματος μέσω clusteranalysis σε δύο κατηγορίες βάσει της επίδοσής τους στη λύση προβλημάτων, αποκαλύπτοντας έναν διακριτό διαχωρισμό ανάμεσα στα άτομα με υψηλή και χαμηλή επίδοση. Εντάσσονται στην κατηγορία της υψηλής επίδοσης 23 άτομα, ενώ 17 άτομα κατατάσσονται στην κατηγορία της χαμηλής επίδοσης, με την παρατήρηση ότι στην τελευταία κατηγορία περιλαμβάνονται τα άτομα που κατάφεραν να λύσουν και τα δύο προβλήματα.

Η στατιστική ανάλυση μέσω t-test σύγκρισης των μέσων όρων των δύο αυτών ομάδων σε σχέση με τα έξι έργα εξισώσεων και ανισώσεων αποκάλυψε στατιστικά σημαντικές διαφορές μόνο για το έργο 3. Ειδικότερα, για το έργο 3, η στατιστική τιμή t ήταν 3.37 με $p<0.05$, δείχνοντας σημαντικές διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων. Η ομάδα με την υψηλή επίδοση είχε μέσο όρο 0.82, ενώ η ομάδα με την χαμηλή επίδοση είχε μέσο όρο 0.55, υπογραμμίζοντας τη σημασία της διαφορετικής προσέγγισης και κατανόησης στην επίλυση προβλημάτων εξισώσεων και ανισώσεων μεταξύ των δύο κατηγοριών ατόμων.

Πίνακας 68. Σύγκριση t-testμεταξύ ομάδων χαμηλής και υψηλής επίδοσης

Group	Mean	N	t-value	Sig. (2-tailed)
Υψηλή επίδοση	0.82	23	3.37	0.023
Χαμηλή επίδοση	0.55	17		

Κεφάλαιο 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η ολοκληρωμένη εξέταση της μαθηματικής εκπαίδευσης, με ιδιαίτερη έμφαση στη διδασκαλία και την κατανόηση των εξισώσεων και των ανισοτήτων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, υπογραμμίζει την κρίσιμη σημασία της για την ανάπτυξη αναλυτικής, κριτικής σκέψης και δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. Όπως αναφέρεται αναλυτικά στη βιβλιογραφία, η διδασκαλία των μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένου του ιστορικού τους πλαισίου και των παιδαγωγικών στρατηγικών, παίζει καθοριστικό ρόλο στην προετοιμασία των μαθητών για σχολική, προσωπική και επαγγελματική επιτυχία (Σκουμπουρδή&Βαϊτσίδη, 2019; Vlachos, 2019; Grossman&Friedlander, 2007). Η εισαγωγή μαθηματικών εννοιών και πρακτικών μέσω μίας διερευνητικής προσέγγισης δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να περιηγηθούν σε διάφορες καταστάσεις στην καθημερινή τους ζωή, αναδεικνύοντας τα μαθηματικά ως μια παγκόσμια γλώσσα που υπερβαίνει τις εθνικές και γλωσσικές διαφορές, ενισχύοντας την επικοινωνία και τη συνεργασία σε διαφορετικά υπόβαθρα (Vlachos, 2019).

Η σημασία των μαθηματικών εκτείνεται πέρα από την επίλυση προβλημάτων για να συμπεριλάβει την αναγκαιότητά τους σε διάφορους τομείς όπως η βιομηχανία, οι επιστήμες, η τεχνολογία και τα οικονομικά/λογιστικά, ανοίγοντας έτσι μια πληθώρα ευκαιριών σταδιοδρομίας για τους μαθητές (Grossman&Friedlander, 2007). Επιπλέον, η μελέτη των μαθηματικών συμβάλλει στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης, της υπακοής στις αρχές και της υπομονής, δεξιότητες που κρίνονται χρήσιμες όχι μόνο στην μετεκπαίδευση των μαθητών αλλά και στην επαγγελματική και προσωπική τους ζωή (Vlachos, 2019).

Η παρούσα έρευνα έχει εμβαθύνει στις συγκεκριμένες προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές του Λυκείου στην Ελλάδα σχετικά με την κατανόηση και επίλυση των εξισώσεων και των ανισώσεων α΄ και β΄ βαθμού. Μέσω της ανάλυσης της αντίληψης των μαθητών, των διαδικασιών σκέψης, των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων, των κοινών λαθών και της ανάπτυξης εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων, στοχεύει να παρέχει πληροφορίες για τη βελτίωση της μαθηματικής διδασκαλίας (Lakatos, 2015;Swetzetal., 1995).

Η έρευνα για τον μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό και τα ιστορικά πλαίσια εξισώσεων και ανισώσεων παρέχει μια θεμελιώδη κατανόηση που είναι ζωτικής σημασίας για την ανάπτυξη αποτελεσματικών στρατηγικών διδασκαλίας. Η μετάβαση από τη διαδικαστική στη δομική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών είναι επιτακτική για τους μαθητές να κατανοήσουν και να εφαρμόσουν πλήρως τις μαθηματικές θεωρίες και πράξεις (Sfard, 1991; Linchevski&Sfard, 1991; Bazzini&Tsamir, 2002). Αν και δεν αποτέλεσε μέρος διερεύνησης της παρούσας διατριβής, ενδεχόμενα η αξιοποίηση της ιστορίας των ανισώσεων και εξισώσεων στη εισαγωγή ή γενικότερα στη διδασκαλία των συγκεκριμένων εννοιών να συνέβαλε στη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Οι προκλήσεις και τα λάθη που εντοπίστηκαν στην επίλυση εξισώσεων και ανισοτήτων υπογραμμίζουν την ανάγκη για παιδαγωγικές στρατηγικές που αντιμετωπίζουν άμεσα αυτά τα ζητήματα. Αυτά περιλαμβάνουν την εστίαση στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών πράξεων, την ενσωμάτωση των μαθηματικών με πραγματικές καταστάσεις, τη χρήση διαφορετικών μεθόδων διδασκαλίας και την παροχή κατάλληλης ανατροφοδότησης και υποστήριξης στους μαθητές (Erbaş&Didis, 2015; Bossé&Nandakumar, 2005). Ειδικότερα οι διασύνδεση της διαδικαστικής ευχέρειας επίλυσης ασκήσεων με την ικανότητα λύση προβλήματος που περιλαμβάνουν τις ίδιες έννοιες καταδεικνύει την ανάγκη περαιτέρω διδακτικής έμφασης στην εννοιολογική κατανόηση και αξιοποίηση των συγκεκριμένων εννοιών.

Γενικά τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν δείχνουν ότι η απόδοση των μαθητών διέφερε σε διαφορετικές ασκήσεις, με τα αριθμητικά λάθη να είναι ο πιο κοινός τύπος λάθους. Αυτό ευθυγραμμίζεται με τις συζητήσεις για τις δυσκολίες, τα λάθη των μαθητών και την αναγκαιότητα για αποτελεσματικές διδακτικές στρατηγικές που επισημάνθηκαν από διάφορους ερευνητές.

Η παρατήρηση ότι οι μαθητές απάντησαν σωστά μόνο σε μερικές υποερωτήσεις στις περισσότερες ασκήσεις, και ιδιαίτερα δυσκολεύτηκαν στα έργα λύσης προβλήματος συνάδει με τα ευρήματα των Σκουμπουρδή και Βαϊτσίδη(2019) και Grossman και Friedlander (2007), οι οποίοι τόνισαν τη σημασία του ανάπτυξη δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων και κριτικής σκέψης των μαθητών για την εννοιολογική τους κατανόηση. Η συχνή εμφάνιση αριθμητικών λαθών σε διάφορες ασκήσεις μπορεί να αποδοθεί στις προκλήσεις που εντοπίζονται στην κατάκτηση μαθηματικών εννοιών και πράξεων, υπογραμμίζοντας την ανάγκη για διδακτικές προσεγγίσεις που ενθαρρύνουν μια βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση (Lakatos, 2015, Swetzetal., 1995).

Οι συγκεκριμένες δυσκολίες στην εξάλειψη των παρονομαστών στο τρίτο έργο και στην εφαρμογή του τύπου όγκου και της διάκρισης στο έβδομο και όγδοο έργο, αντίστοιχα, αντικατοπτρίζουν τις παιδαγωγικές προκλήσεις στη διδασκαλία αλγεβρικών εννοιών και εξισώσεων. Αυτά τα ευρήματα υποστηρίζουν τον ισχυρισμό των Erbaş και Didis (2015) σχετικά με τα εμπόδια των μαθητών στη σωστή εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών και πράξεων. Επιπλέον, η εξάρτηση σε συγκεκριμένους τύπους ή μεθόδους, όπως ο διαχωριστής για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων, υπογραμμίζει την ανάγκη για διδακτικές στρατηγικές που προάγουν την ευελιξία στη σκέψη και την εφαρμογή πολλαπλών προσεγγίσεων στην επίλυση προβλημάτων, όπως συζητήθηκε από τους Bossé και Nandakumar (2005).

Τα αποτελέσματα της έρευνας ευθυγραμμίζονται επίσης με την έμφαση στην ανάπτυξη του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, όπως υποστηρίζεται από ερευνητές όπως οι Sfard (1991) και LinchevskiκαιSfard (1991). Η ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τις μαθηματικές γνώσεις και τεχνικές σε ποικίλα πλαίσια θα μπορούσε να αντιμετωπίσει τα ζητήματα των αριθμητικών λαθών και της εσφαλμένης εφαρμογής των τύπων.

5.1 Περιορισμοί της έρευνας

Κατά την διάρκεια συγγραφής της εργασίας αλλά και κατά την εκτέλεση της έρευνας αναδείχθηκαν διάφοροι περιορισμοί. Αρχικά, ένα περιορισμός είναι η γενίκευση της έρευνας. Με αυτό εννοείται ότι τα αποτελέσματα της έρευνας δεν μπορούν να γενικευτούν στον αντίστοιχο μαθητικό πληθυσμό της Ελλάδας εφόσον το δείγμα ήταν βολικό και ως εκ τούτου μη αντιπροσωπευτικό. Ο δεύτερος βασικός περιορισμός της έρευνας αφορά στα εργαλεία συλλογής δεδομένων. Η αξιοποίηση του δοκιμίου αξιολόγησης του βαθμού κατανόησης της εξίσωσης και της ανίσωσης γίνεται μόνο με γραπτό τρόπο και υποθέτουμε τον τρόπο σκέψης των μαθητών. Εάν υπήρχε περισσότερος χρόνος θα μπορούσε να αξιοποιηθεί η κλινική συνέντευξη για εις βάθος κατανόηση του τρόπου σκέψης. Ένας ακόμη σημαντικός περιορισμός αυτής της έρευνας ήταν ο περιορισμένος χρόνος που είχαν οι μαθητές/τριες στη διάθεσή τους για να ασχοληθούν με το υλικό και τις δραστηριότητες της έρευνας. Λόγω του σχολικού φόρτου εργασίας και των προσωπικών δεσμεύσεων, οι μαθητές/τριες μπορεί να μην ήταν σε θέση να αφιερώσουν τον ιδανικό χρόνο για να συμμετάσχουν πλήρως ή να προβληματιστούν σχετικά με τις μαθηματικές ασκήσεις. Αυτός ο περιορισμός θα μπορούσε να έχει επηρεάσει το βάθος των απαντήσεων και τη συνολική δέσμευση, επηρεάζοντας δυνητικά τα αποτελέσματα και τη γενίκευση των ευρημάτων της μελέτης.

5.2 Εισηγήσεις για μελλοντική έρευνα

Η μελλοντική έρευνα θα πρέπει να εξετάσει την ενσωμάτωση της τεχνολογίας στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, ειδικότερα όσον αφορά στη λύση μαθηματικού προβλήματος. Ειδικότερα, η επιλογή αυτή αφορά την εμβάθυνση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και την ενίσχυση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων μεταξύ των μαθητών/τριών. Η αξιοποίηση εκπαιδευτικού λογισμικού και διαδραστικών εργαλείων θα μπορούσε να διευκολύνει ένα πιο δυναμικό περιβάλλον μάθησης. Στο οποίο μάλιστα, οι μαθητές/τριες μπορούν να οπτικοποιήσουν εξισώσεις και ανισώσεις. Καθώς επίσης και να πειραματιστούν με μεταβλητές και να λάβουν άμεση ανατροφοδότηση για τις λύσεις τους. Αυτή η τεχνολογική προσέγγιση θα μπορούσε επίσης να επιτρέψει μια πιο ολοκληρωμένη ανάλυση των στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. Αυτό υπό το πρίσμα, δηλαδή της παρακολούθησης των βημάτων και των διαδικασιών σκέψης τους σε πραγματικό χρόνο. Επιπλέον, η επέκταση της έρευνας ώστε να συμπεριλάβει ένα ευρύτερο, πιο ποικίλο δείγμα θα παρείχε πληροφορίες που είναι πιο γενικεύσιμες και ενδεικτικές του συνολικού μαθητικού πληθυσμού. Αυτό θα μπορούσε να περιλαμβάνει μελέτες σε διάφορες περιοχές της Ελλάδας. Ή ακόμη και από διαφορετικά υπόβαθρα (είτε οικονομικά είτε κοινωνικό-πολιτισμικά. Ειδικότερα, χρησιμοποιώντας τυποποιημένα εργαλεία αξιολόγησης για τη σύγκριση και την αποτελεσματική αντιπαράθεση των μαθησιακών αποτελεσμάτων. Τέτοιες μελέτες όχι μόνο θα ενίσχυαν την αξιοπιστία των δεδομένων αλλά θα συμβάλουν επίσης σε μια εις βάθος κατανόηση των περιφερειακών εκπαιδευτικών αναγκών. Συλλήβδην, υπάρχει μια πληθώρα επιλογών για την πρόταση μελλοντικής έρευνας, η οποία στη προκείμενη μπορεί να προσδώσει σημαντικά στοιχεία για την επιτυχή βελτίωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας της επιλεγείσας διάστασης μελέτης των μαθηματικών. Οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικής, οι εκπαιδευτικοί και γενικότερα όλο το εμπλεκόμενο προσωπικό στην εκπαιδευτική διαδικασία μπορεί να συμβάλει ενεργά στη λήψη των απαραίτητων αποφάσεων για την αποτελεσματικότερη κατανόηση τέτοιων μαθηματικών εννοιών.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Abimbola, I. O. (1988). The problem of terminology in the study of student conceptions in science. *Science Education*, *72*(2), 175-184.

Andam, E. A., Okpoti, C. A., Obeng–Denteh, W., &Atteh, E. (2015). The constructivist approach of solving word problems involving algebraic linear equations: the case study of Mansoman Senior High School, Amansie West District of Ghana. *Advances in Research, 5*(1), 1–12. https://doi.org/10.9734/air/2015/13932

Abrego, M. B. (1966). Children's attitudes toward arithmetic. *Arithmetic Teacher*, *13*, 206-208.

Aiken, L. R. (1976). Update on attitudes and other affective variables in learning mathematics. *Review of Educational Research*, *46*, 293-311.

Andrews, P., Dickinson, P., Eade, F., & Harrington, A. (1999). Whole class interactive teaching. *TTA Report*.

Amir-Mofidi, S. (2012). Instruction of mathematical concepts through analogical reasoning skills. *Indian Journal of Science and Technology, 5*(6), 1–7. https://doi.org/10.17485/ijst/2012/v5i6.12

Avital, S. (1995), 'History of mathematics can help improve instruction and learning', In F. Swetz, J. Fauvel, O. Bekken, B. Johansson & V. Katz (eds.*), Learn from the Masters,* The Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. 3-12.

Bazzini, L., &Tsamir, P. (2002). *Connections between theory and research findings: The case of inequalities.* Retrieved from http://didmat.dima. unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_bazz/BAZZ&03.pdf.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B., & Lepage, A. (1992). Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving. *Proceedings of PME* 16(1), pp. 65-72. Durham, USA: University of New Hampshire.

Beilock, S. L., & Maloney, E. A. (2015). Math anxiety. *Policy Insights From the Behavioral and Brain Sciences, 2*(1), 4–12. https://doi.org/10.1177/2372732215601438

Begle, E. G. (1972). Teacher knowledge and student achievement in algebra. *SMSG Reports*, (No. 9). Stanford, California: School Mathematics Study Group.

Bell, A. (1993). Principles for design teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 5 – 34. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bossé, M. J., & Nandakumar, N. R. (2005). The factorability of quadratics: Motivation for more techniques. *Teaching Mathematics and its Applications*, *24*(4), 143-153.

Booth, L. R. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra. The ideas of algebra*, pp. 20- 32.

Boyer, C. B., &Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons.

Boyer, C. B. (1968). A history of mathematics. John Wiley & Sons.

Bunt, L. N. H., Jones, P. S., &Bedient, J. D. (1988). T*he historical roots of elementary mathematics*. Courier Corporation.

Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (1993). *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc, pp. 107-130.

Chow, T.C.F. (2011). Students' difficulties, conceptions, and attitudes towards learning algebra: An intervention study to improve teaching and learning. *Science and Mathematics Education Centre*. Retrieved from: https://core.ac.uk/download/pdf/195632071.pdf

Cipriano, N. (2023). Exploring mathematics education in the 21st century. *Journal of Educators, Teachers and Trainers, 14* (3), 749-758.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1981). *The Nature of mathematics.* Harcourt Brace Jovanovich.

Deichmann, J., & Lewis, F. (1973). The relationships of achievement and attitude towards mathematics in the elementary school: A longitudinal study. Paper presented at the *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. New Orleans, LA.

Didis, M. G., &Erbas, A. K. (2015). Performance and difficulties of students in formulating and solving quadratic equations with one unknown. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *15*(4), 1137.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*. Routledge.

Eriksson, H. (2022). Teaching algebraic thinking within early algebra – a literature review. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Ernest, P. (1998) The history of mathematics in the classroom. *History of Mathematics*, Vol.27, No. 4, pp. 25-31. The Mathematical Association. Ανακτήθηκεαπό: https://www.jstor.org/stable/3021187.

Fauvel, J. &Maaren, J.V. (2000). History in mathematics education. *The ICMI Study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Fujii, T. (2003). Probing Students Understanding Of Variables Through Cognitive Conflict: Is The Concept Of A Variable So Difficult For Students To Understand. PME CONFERENCE.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *11*(2), pp. 3–6.

Flood, R. (1994). Analogy and mathematical discovery. *Journal of Mathematical Behavior*, (Vol. 13, No. 1).

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: rethinking phylogenesis and ontogenesis. In L. English (Ed.) and M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh& D. Tirosh (Ass. Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp. 631-654. Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, pp. 231-245.

Fischbein, E., & Barash, A. (1993). Algorithmic models and their misuse in solving algebraic problems. In *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 162-172).

Gowers, T. (2001). *The Oxford companion to mathematics*. Oxford University Press.

Gowers, T. (2015). *Mathematics: A very short introduction*. Oxford University Press.

Grossman, A.M.L. & Friedlander, D.V, (2007). Teaching and learning mathematics in Europe: A comparative study.

Halmaghi, E.&Liljedahl, P. (2015). Inequalitiesinthe Historyof Mathematics: From Peculiaritiestoa Hard Discipline. GeoGebra International Journal of Romania. 4. 43-56.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*, pp. 235-261

Katz, V. J. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the learning of mathematics, 17,* 62-63. Ανακτήθηκεαπό: https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=2ae957044f202d63d26f07ebad4dbfee43668e7b

Katz, V. J. (2014). *History of mathematics*. New York: Pearson.

Kausar, Fahd. (2023). Mathematics Teacher's Behaviour and Student's Anxiety: A Study at Secondary Level. 10.52461/ijoss.v5i2.2409.

Lakatos, I. (2015). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge university press.

Latterell, C. (2024). Today'smathematics student: Take two. *TheMathematicsEnthusiast*, *21* (1), 405-414.

Lakatos, I. (2015). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Ling, A. N. B., & Mahmud, M. S. (2023). Challenges of teachers when teaching sentence-based mathematics problem-solving skills. *Frontiers in Psychology*, *13*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1074202

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (629-668). Information Age Publishing, NC.

Lima, R. N. (2008). Procedural embodiment and quadratic equations. *11th International Congress on Mathematical Education (ICME-11)*, Monterrey, México.

Linchevski, L., &Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects-the case of inequalities. *Paper presented at the Proceedings of PME 15*,317-324.

Liu, P. H. (2003). Connecting research to teaching: Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *TheMathematicsTeacher*, *96*(6), 416-421.

Μάρκου, Α. (2020). Η Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού και η Έννοια της Μεταβλητής στην Άλγεβρα.

Makgakga, S. (2016). Errors and misconceptions in solving quadratic equations by completing a square. *Mathematics Education*. Ανακτήθηκεαπό: https://www.amesa.org.za/AMESA2014/Proceedings/papers/Short%20Paper/4.%20Sello%20Makgakga%20-AMESAPAPER2014final.pdf

McBride, C. C., & Rollins, J. H. (1977). The effects of history of mathematics on attitudes toward mathematics of college algebra students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(1), 57-61.

Merzbach, U.C. & Boyer, C.B. (1968). *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, Inc.: the United States of America. Retrieved from: https://atiekubaidillah.files.wordpress.com/2013/03/a-history-of-mathematics-3rded.pdf

Mukuka, A., Balimuttajjo, S., &Mutarutinya, V. (2023). Teacher efforts towards the development of students' mathematical reasoning skills. *Heliyon*, *9*(4), e14789. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e14789

Nielsen, L. E. J. (2015). *Understanding quadratic functions and solving quadratic equations: An analysis of student thinking and reasoning*.

Nguyen, H. P., (2021). *4 Ways to Build Student* – Centered Math Lessons. Διαθέσιμο στο: https://www.edutopia.org/article/4-ways-build-student-centered-math-lessons

Ojong, K. &Odum, E. (2022). An appraisal of the nature and forms of formalism in the philosophy of Mathematics. *NasaraJournalofPhilosophy*. 5-79

Παπακωστόπουλος, Σ., &Ζαχάρος, Κ. (2017). Δυσκολίες μαθητών γυμνασίου& λυκείου στην αντιμετώπιση ανισώσεων α' βαθμού. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (5), 11–39. https://doi.org/10.12681/enedim.15027

Resnick, L. B., &Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 107–130). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ρίζος, Ι., Κολοκοτρώνης, Γ. &Παπανικολάου, Μ. (2020). Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. 37ο συνέδριο μαθηματικής παιδείας. Τόμος Α, 351-361.

Σκουμπουρδή, Χ., &Βαϊτσίδη, Γ. (2019). Η ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ: ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ, ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΕΙΣ, ΚΑΙΝΟΤΟΜΙΕΣ. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (12), 8–22. https://doi.org/10.12681/enedim.21142

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22,* 1-36.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: The importance of "Half". *Child Development*, 62(3), 427-440.Ανακτήθηκεαπό: https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1991.tb01542.x

Swetz, F., Fauvel J., Bekken O., Johansson B. & Katz V. (1995). *Learn from the Masters*. Washington: Mathematical Association of America.

Switzer, M. J. (2017). What Conceptions have US Grade 4-6 Students' Generalized for Formal and Informal Common Representations of Unknown Addends? . *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Tall, D. & Watson, J. (1994). Analogical reasoning in mathematics education. *JournalofMathematicalBehavior*, 13 (1).

Τζιούφας, Ν. &Τσαρούχας, Δ. (2019). Σύγκριση -Συσχέτιση των γνώσεων των μαθητών στις συναφείς έννοιες των γραμμικών εξισώσεων -κινηματικών εξισώσεων.

Tsamir, P., &Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value'inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 793-812.

Tall, D., de Lima, R. N., & Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. *The Journal of Mathematical Behavior*, *34,* 1-13.

Tatto, M.T. (2002). Analogical reasoning in mathematics education: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 56* (2).

Thorpe, J. A. (2018). *Algebra: What should we teach and how should we teach it? In research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 11-24). Routledge.

Tsamir, P. &Bazzini, L. (2002). Student's algorithmic, formal and intuitive knowledge: the case of inequalities. In I. Vakalis, D. H. Hallett, D. Quinney, C. Kourouniotis, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics*. Crete, Greece: ICTM.

Tzanakis, C. &Arcavi, A. (2000). "Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey". In J. Fauvel& J. van Maanen (Eds.), *"History in Mathematics Education: The ICMI Study"* (pp. 201 – 240). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. The ideas of algebra, σσ. K-12, 8, 19.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. K. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, 18(1), 47–77.

Voskoglou, M. (2018). The effects of formalism and intuitionism on the development of mathematics education. *SumerianzJournalofLinguisticsandLiterature*, 1 (5), 1617-1732

Vlachos, A.S., (2019). *Mathematics education in Greece: Historical, cultural, and contemporary perspectives*.

Τζανάκης, Κ. (2009). Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ ιστορίας των μαθηματικών και μαθηματικής εκπαίδευσης: Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας. Στο Επιστημονική 7 Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (επιμ.), *«Η Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών»*. Εκδόσεις Ζήτη: Θεσσαλονίκη.

ΦΕΚ, (2023). Εφημερίδα Της Κυβερνήσεως, διαθέσιμη στο: https://sep4u.gr/42275/neo-programma-spoydon-gia-ta-mathimatika-a-v-kai-g-lykeioy/

Παράρτημα

ΤΕΣΤ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ/ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ 1ου ΚΑΙ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i. $5(-x+2)-4=6-5x$ ii. $\frac{2(x-1)}{3}-\frac{x+1}{2}=\frac{x-5}{6}$ iii. $\frac{x-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$

iv. $\frac{x}{3}-\frac{6x+1}{4}=\frac{x-2}{6}-2$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις : i. $x^2-5x+6=0$ ii. $x^2-6x+9=0$ iii. $(x-2)^2+3x=2$

iv. $x^2-9x=0$ v. $x^2-9=0$ vi. $2x^2-72=0$ vii. $\frac{x^2}{6}-\frac{1}{2}x=0$ viii. $\frac{(x-9)^2}{3}=27$

ix. $2x^2+8x-10=0$ x. $9x^2-6x+1=0$ xi. $-2x^2-5x+3=0$ xii. $-3x^2+12=0$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $2x-1<-x+3-3(x-2)$

ii. $2\frac{x+1}{3}-\frac{2x+1}{2}\le 2x+\frac{6x+1}{6}$

iii. $\frac{x+3}{3}-\frac{x+1}{2}<\frac{x+19}{6}$

iv. $\frac{x+10}{5}-2<\frac{3(x+1)-(x-3)}{10}$

v. $\frac{x+3}{5}-\frac{(x-1)^2}{4}<\frac{5x}{4}-\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $x^2+2x-3>0$ ii. $x^2-3x-10\le 0$ iii. $-x^2+3x+4\le 0$ iv. $4x^2-12x+9>0$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις :

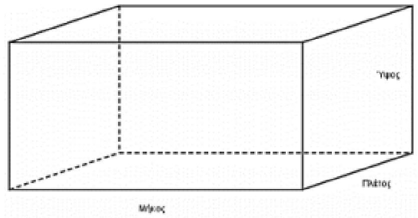
i. $x^2-5x\ge 0$ ii. $-x^2+4x>0$ iii. $x^2-16\le 0$ iv. $49<x^2$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i. $(x+3)^2>4(2x+3)$ ii. $4(x-5)-(x-4)(x+4)\ge 0$ iii. $2x(x-2)-(x-1)^2<-4$

iv. $x^2+1-\frac{(x+2)^2}{5}>0$

7. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.



α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

8. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$

α) Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;
β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m;
γ) Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m.

ΕΥΧΟΜΑΙ ΕΠΙΤΥΧΙΑ