



Σχολή Θετικών Επιστημών Τεχνολογίας
Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

Διπλωματική Εργασία

**Θεώρημα Perron – Frobenius και Μη Αρνητικοί, Μη
Υποβιβάσιμοι Πίνακες στις Μαθηματικές Επιστήμες**

Σταματούλα Μωραΐτη

Επιβλέπων καθηγητής: Παπαδόπουλος Βασίλειος

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του/της φοιτητή/φοιτήτριας («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



**Θεώρημα Perron – Frobenius και Μη Αρνητικοί,
Μη Υποβιβάσιμοι Πίνακες στις Μαθηματικές Επιστήμες**

Σταματούλα Μωραΐτη

Επιτροπή Επίβλεψης Πτυχιακής / Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής

Βασίλειος Παπαδόπουλος

Καθηγητής

Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής

Ανδρέας Αρβανιτογεώργος

Καθηγητής

Μαθηματικό Τμήμα Παν. Πατρών

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

*Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, τον κ. Βασίλειο Παπαδόπουλο για την
πολύτιμη καθοδήγηση του.*

*Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον σύζυγο μου Γιάννη και τα παιδιά μου Ιώνα και
Βαγγέλη για την υπομονή καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας εργασίας.*

Περίληψη

Το κύριο θέμα αυτής της εργασίας είναι το θεώρημα Perron-Frobenius. Το 1907 ο Γερμανός μαθηματικός Oskar Perron (1880-1975) δημοσίευσε το θεώρημα για θετικούς πίνακες. Με λίγο λόγια το θεώρημα του Perron μας λέει ότι η φασματική ακτίνα ενός θετικού πίνακα είναι μια απλή ιδιοτιμή του πίνακα και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι θετικό. Το 1912 ο George Frobenius, γενίκευσε το θεώρημα του Perron που αναφέρεται κυρίως σε μη αρνητικούς, μη υποβιβάσιμους πίνακες και σε θετικούς πίνακες. Το θεώρημα Perron-Frobenius έχει ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών και σε μαθηματικά και σε πρακτικά θέματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας παρουσιάζονται βασικοί ορισμοί της Γραμμικής Άλγεβρας. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας των μη αρνητικών πινάκων και ορίζονται τα φασματικά μέτρα.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές αυτού του θεωρήματος, όπως τα Γραμμικά Δυναμικά συστήματα και οι αλυσίδες Markov.

Στο τελευταίο κεφαλαίο, γίνεται μια εισαγωγή στους πολυωνυμικούς πίνακες και στις εφαρμογές του θεωρήματος Perron-Frobenius πάνω στους πολυωνυμικούς πίνακες.

Λέξεις – Κλειδιά

Μη αρνητικοί πίνακες, θετικοί πίνακες, μη υποβιβάσιμοι πίνακες, Perron-Frobenius, Γραμμικά Δυναμικά συστήματα, Leslie πίνακες, αλυσίδες Markov, πολυωνυμικοί πίνακες

Perron – Frobenius Theorem and Nonnegative Irreducible Matrices

Stamatoula Moraiti

Abstract

The main topic of this thesis is Perron-Frobenius theory. In 1907 the German mathematician Oskar Perron (1880-1975) published his theorem for positive matrices. The Perron's theorem (1907) tells us that the spectral radius of a positive matrix is a simple eigenvalue of the matrix and that its eigenvector can be taken to be positive. In 1912, George Frobenius (1849-1917), generalized Perron's finding to nonnegative irreducible and positive matrices. Applications include the Perron- Frobenius theorem has a wide range of applications in both pure mathematics and practical matters. The first chapter of this thesis presents basic definitions of Linear Algebra. The second chapter presents the important theorems of the theory of nonnegative matrices and spectral measures are defined. The third chapter presents some applications of this theorem such as Linear Dynamic Systems and Markov chains, population models solutions of partial differential equations. The last chapter presents an introduction of the polynomial tables and the applications of the Perron – Frobenius theorem in polynomial tables.

Keywords

Nonnegative matrices, positive matrices, irreducible matrices, Perron-Frobenius, Linear Dynamical systems, Leslie matrices, Markov chain, polynomial tables

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	v
Abstract	vi
Περιεχόμενα	vii
Εικόνων / Σχημάτων	viii
Συνοτομογραφίες & Ακρωνύμια.....	ix
1. Βασικές Έννοιες Πινάκων	1
1.1 Άλγεβρα Πινάκων	Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης. 1
1.1.1 Βασικοί Ορισμοί	1
1.1.2 Διάταξη Πινάκων	6
1.1.3 Πράξεις Πινάκων	7
1.2 Χαρακτηριστικά Μεγέθη Πίνακα.....	8
1.2.1 Ορίζουσα.....	8
1.2.2. Χαρακτηριστικά Ποσά.....	10
1.3 Νόρμες	15
1.3.1 Νόρμες διανυσμάτων.....	16
1.3.2 Νόρμες Πινάκων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.....	17
1.3.3 Νόρμες και Χαρακτηριστικά Ποσά.....	22
2. Θεώρημα Perron – Frobenius.....	25
2.1 Θετικοί Πίνακες	25
2.2 Αρνητικοί Πίνακες.....	33
2.3 Γραφήματα και Πίνακες.....	40
2.4 Μη Αρνητικοί Μη Υποβιβάσιμοι Πίνακες.....	45
2.5 Μη Αρνητικοί Μη Υποβιβάσιμοι Αρχικοί Πίνακες.....	52
3. Εφαρμογές του Θεωρήματος Perron - Frobenius.....	58
3.1 Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα.....	58
3.1.1 Εισαγωγή.....	58
3.1.2 Πληθυσμιακά Μοντέλα Leslie.....	63
3.2 Αλυσίδες Markov.....	70
3.3 Πολυωνυμικοί Πίνακες.....	73
3.3.1 Βασικοί Ορισμοί.....	74
3.3.2 Θεώρημα Perron-Frobenius για Πολυωνυμικούς Πίνακες	77
Συμπέρασμα.....	80

Κατάλογος Εικόνων / Σχημάτων

Σχήμα 2.3.1 Γράφημα Πίνακα.....	40
Σχήμα 2.3.2 Ισχυρά Συνεκτικό Γράφημα	41
Σχήμα 2.3.3 Μη Συνεκτικό Γράφημα	41
Σχήμα 2.3.2 Γράφημα Πίνακα Γειτνίασης	42
Σχήμα 2.3.2 Γράφημα Πίνακα	43
Σχήμα 2.4.1 Γράφημα Μη Υποβιβάσιμου Πίνακα	49
Σχήμα 2.4.2 Γράφημα Μη Υποβιβάσιμου Πίνακα.....	49
Σχήμα 2.5.1 Γράφημα Αρχικού Πίνακα.....	53
Σχήμα 2.5.2 Γράφημα Μη Αρχικού Πίνακα.....	54
Σχήμα 3.1.2.1 Γράφημα Πίνακα Leslie.....	64

Σύμβολα

A^T	Ανάστροφός του πίνακα A
\bar{A}	Συζυγής του πίνακα A
A^*	Αναστροφοσυζυγής του πίνακα A
$\text{rank}(A)$	Τάξη του πίνακα A
$\det(A)$	Ορίζουσα του πίνακα A
$ A $	Ορίζουσα του πίνακα A
$\text{adj}(A)$	Προσαρτημένος πίνακας του πίνακα A
$\chi_A(\lambda)$	Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A
$\sigma(A)$	Φάσμα του πίνακα A
$\rho(A)$	Φασματική ακτίνα του πίνακα A
$N(A)$	Μηδενοχώρος του πίνακα A
$\text{tr}(A)$	Τίχνος του πίνακα A
$\ A\ $	Νόρμα του πίνακα A
$\ A\ _1$	l_1 - νόρμα του πίνακα A
$\ A\ _2 = \ A\ _F$	l_2 -νόρμα ή νόρμα Frobenius
$\ A\ _1$	Νόρμα γραμμής
$\ A\ _\infty$	Νόρμα στήλης
$\ A\ _2$	Φασματική νόρμα
\tilde{A}	Κύριος Υποπίνακας
$G(P, E)$	Γράφημα
$d(P_i)$	Βαθμός κόμβου P_i
$\text{deg}[P(\lambda)]$	Βαθμός πολυωνύμου $P(\lambda)$

Εισαγωγή

Οι μη αρνητικοί πίνακες έχουν πολλές εφαρμογές όπως στα διακριτά οικονομικά μοντέλα, έλεγχο κυκλοφορίας, στον προγραμματισμό εργασιών και άλλα πολλά. Η εργασία έχει διαιρεθεί σε τρία κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο έχει διαιρεθεί σε τρεις ενότητες, στην ενότητα 1.1, στην ενότητα 1.2 και στην ενότητα 1.3, οι οποίες έχουν διαιρεθεί σε υποενότητες. Στην πρώτη ενότητα αναφερόμαστε σε βασικούς ορισμούς και σε βασικές πράξεις πινάκων. Στην δεύτερη ενότητα αναφερόμαστε στα χαρακτηριστικά ποσά όπως ορίζουσα και ιδιοτιμές και στην τρίτη ενότητα αναφερόμαστε σε νόρμες πινάκων και στις ιδιότητες τους σε συνδυασμό με τα χαρακτηριστικά ποσά.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι χωρισμένο σε πέντε ενότητες, χωρίς να έχει καμία υποενότητα. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε στους θετικούς πίνακες, στους μη αρνητικούς πίνακες, στους μη αρνητικούς μη υποβιβάσιμους πίνακες και στους αρχικούς πίνακες. Επικεντρωνόμαστε στην ρίζα Perron και στο ιδιοδιάνυσμα Perron. Μελετάμε και αποδεικνύουμε θεωρήματα που μας βοηθούν στην κατανόηση του θεωρήματος Perron – Frobenius. Θα εξετάσουμε τα φράγματα της φασματικής ακτίνας και τις ιδιότητες της. Το τρίτο κεφάλαιο που είναι και το τελευταίο διαιρείται σε τρεις ενότητες. Η ενότητα 3.1 και η ενότητα 3.3 διαιρείται σε δύο υποενότητες. Σε αυτό το κεφάλαιο θα συνδέσουμε τους μη αρνητικούς πίνακες με τους πίνακες Leslie και θα δούμε παράδειγμα πληθυσμιακού μοντέλου. Θα εξετάσουμε τις αλυσίδες Markov και θα δούμε με παράδειγμα, πως συνδέεται με στατιστικά μοντέλα καθημερινών διαδικασιών. Τέλος θα αναφερθούμε σε βασικούς ορισμούς στους πολυωνυμικούς πίνακες και στην επέκταση του θεωρήματος Perron – Frobenius.

Στο τέλος της παρούσας εργασίας υπάρχουν τα συμπεράσματα και βιβλιογραφία.

1. Βασικές Έννοιες Πινάκων

1.1.1 Βασικοί Ορισμοί

Στην ενότητα 1 του πρώτου κεφαλαίου θα αναφερθούμε και θα θυμηθούμε τα διάφορα είδη πινάκων και τα διάφορα είδη τετραγωνικών πινάκων, δίνοντας βασικούς ορισμούς, παραδείγματα και θεωρήματα. Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για θετικούς και αρνητικούς πίνακες, οι οποίοι θα είναι και το βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

Ορισμός 1.1.1.1

Στα μαθηματικά ένας πίνακας A είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ και συμβολίζεται πολλές φορές } A=(\alpha_{ij}), \text{ με } i=1,2,\dots,m$$

και $j=1,2,\dots,n$.

Οι αριθμοί α_{ij} καλούνται στοιχεία του πίνακα A .

Αν ένας πίνακας έχει m γραμμές και n στήλες, λέμε ότι ανήκει στο σύνολο $M_{m,n}(F)$, όπου το σύνολο F δηλώνει το σύνολο \mathbb{R} ή \mathbb{C} .

Ορισμός 1.1.1.2

Ο πίνακας $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m,n}(F)$ καλείται **μηδενικός (zero matrix)**, όταν $\alpha_{ij}=0$ για κάθε i, j .

Ορισμός 1.1.1.3

Δύο οι περισσότεροι πίνακες λέμε ότι είναι του **ιδίου τύπου** όταν έχουν ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών.

Ορισμός 1.1.1.4

Έστω πίνακας $A \in M_{m,n}(F)$. Ο $n \times m$ πίνακας ο οποίος προκύπτει αν εναλλάξουμε τις γραμμές με τις στήλες, καλείται **ανάστροφος (transpose)** του A και συμβολίζεται με A^T .

Παράδειγμα 1.1.1.1

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.1.1.5

Έστω πίνακας $A \in M_{m,n}(F)$. Ο πίνακας που έχει για στοιχεία του τα συζυγή στοιχεία του πίνακα A , λέγεται **συζυγής του A (conjugate matrix)** και συμβολίζεται με \bar{A} .

Παράδειγμα 1.1.1.2

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 2-3i & -3i & 1 \\ 4+i & -5 & 2-7i \end{pmatrix}, \text{ τότε } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2+3i & 3i & 1 \\ 4-i & -5 & 2+7i \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.1.1.6

Έστω ο πίνακας $A \in M_{m,n}(F)$. Ο πίνακας που έχει για στοιχεία του τα συζυγή στοιχεία του πίνακα A και ταυτόχρονα είναι και ανάστροφος του A , καλείται **αναστροφοσυζυγής (conjugate transpose matrix)** και συμβολίζεται A^* , δηλαδή $A^* = \bar{A}^T$.

Παράδειγμα 1.1.1.3

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} 2-3i & -3i & 1 \\ 4+i & -5 & 2-7i \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^* = \begin{pmatrix} 2-3i & 4+i \\ -3i & -5 \\ 1 & 2-7i \end{pmatrix}$$

Ορισμός 1.1.1.7

Αν για τον πίνακα $A \in M_{m,n}(F)$ ισχύει ότι $m=n$, θα λέμε ότι ο πίνακας A είναι **τετραγωνικός (square matrix)**. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι $A \in M_n(F)$.

Ορισμός 1.1.1.8

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(F)$ με $A=[\alpha_{ij}]$

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \text{ θα λέμε ότι τα στοιχεία } \alpha_{ii} \text{ λέμε ότι αποτελούν την κύρια}$$

διαγώνιο του πίνακα. Το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγώνιού του πίνακα A , καλείται **ίχνος του πίνακα (trace)** και συμβολίζεται $\text{tr}A$. Δηλαδή

$$\text{tr}A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}$$

Ορισμός 1.1.1.9

Ο πίνακας $A \in M_n(F)$ καλείται **διαγώνιος (diagonal matrix)** αν ισχύει $\alpha_{ij}=0$ για κάθε $i \neq j$.

Συμβολισμός: **diag**($\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$).

Ορισμός 1.1.1.10

Μοναδιαίος πίνακας (identity matrix) καλείται ο διαγώνιος πίνακας $n \times n$ όπου τα στοιχεία του πάνω στην κύρια διαγώνιο του είναι 1.

Συμβολισμός:
$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ή απλά } \mathbf{I}.$$

Ορισμός 1.1.1.11

Ο διαγώνιος πίνακας $U \in M_n(F)$ καλείται **άνω τριγωνικός (upper triangular matrix)** όταν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Ο διαγώνιος πίνακας $L \in M_n(F)$ καλείται **κάτω τριγωνικός (lower triangular matrix)** αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Παράδειγμα 1.1.1.4

Ο πίνακας $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ είναι κάτω τριγωνικός.

Ορισμός 1.1.1.12

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται **συμμετρικός (symmetric matrix)** αν και μόνο αν ισχύει $A^T = A$.

Παράδειγμα 1.1.1.5

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός, διότι $A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A$.

Ορισμός 1.1.1.13

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται **αντισυμμετρικός (anti-symmetric matrix)** αν και μόνο αν $A^T = -A$

Παράδειγμα 1.1.1.6

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ είναι αντισυμμετρικός, διότι $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -A$

Ορισμός 1.1.1.14

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ πίνακας καλείται **Ερμιτιανός (Hermitian Matrix)** αν και μόνο αν $A = A^*$.

Παράδειγμα 1.1.1.7

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3-i & -5i \\ 3+i & 1 & 9 \\ 5i & 9 & -4 \end{pmatrix}$ είναι ερμιτιανός, διότι $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3-i & -5i \\ 3+i & 1 & 9 \\ 5i & 9 & -4 \end{pmatrix} = A$

Ορισμός 1.1.1.15

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ καλείται **αντιερμιτιανός (skew Hermitian Matrix)** αν και μόνο αν $A^* = -A$.

Παράδειγμα 1.1.1.8

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2i & 2i \\ 2i & 2i \end{pmatrix}$ είναι αντιερμιτιανός.

Ορισμός 1.1.1.16

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ καλείται **ορθομοναδιαίος**, αν ισχύει $A^* A = A A^* = I_n$.

Ορισμός 1.1.1.17

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται **ορθογώνιος (rectangular)**, αν ισχύει $A^T A = A A^T = I_n$.

Ορισμός 1.1.1.18

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(F)$. Αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = I = BA,$$

τότε ο πίνακας B καλείται **αντιστρέψιμος (invertible)**. Ο πίνακας B είναι μοναδικός. Ο αντίστροφος του πίνακα A συμβολίζεται A^{-1} , όπου ισχύει
$$AA^{-1}=I=A^{-1}A.$$

Θεώρημα 1.1.1.1

Αν οι πίνακες $A, C \in M_n(F)$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε ισχύει

$$\text{i. } (A^{-1})^{-1} = A \quad \text{ii. } (AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1} \quad \text{iii. } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Ορισμός 1.1.1.19

Τάξη πίνακα A ($\text{rank}(A)$), λέγεται ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών (ή γραμμών) του πίνακα A .

Παρατήρηση 1.1.1.1

1. Ένας διαγώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος όταν $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0$, δηλαδή

$$\text{αν } A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \text{ τότε } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. Ο πίνακας $A \in M_n(F)$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\text{rank}(A)=n$.

Ορισμός 1.1.1.20

Ο πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται **πίνακας μετάθεσης (permutation matrix)**, όταν ο αριθμός 1 υπάρχει μόνο μία φορά σε κάθε γραμμή ή στήλη και όλα τα άλλα του στοιχεία είναι μηδέν.

Ορισμός 1.1.1.21

Δύο πίνακες $A, B \in M_n(F)$ καλούνται **όμοιοι (similar)** όταν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας C αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε:

$$A = CBC^{-1} \quad \text{ή} \quad B = C^{-1}AC.$$

Ο πίνακας C καλείται **πίνακας ομοιότητας**.

1.1.2 Διάταξη Πινάκων

Ορισμός 1.1.2.1

Λέμε ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, με $A=(a_{ij})$ είναι **θετικός** και συμβολίζουμε $A > 0$ αν ισχύει $a_{ij} > 0$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$ και $j=1, 2, \dots, n$.

Ορισμός 1.1.2.2

Λέμε ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, με $A=(a_{ij})$ είναι **μη αρνητικός** και συμβολίζουμε $A \geq 0$ αν ισχύει $a_{ij} \geq 0$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$ και $j=1, 2, \dots, n$.

Παράδειγμα 1.1.2.1

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ είναι θετικός, ενώ ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ είναι μη αρνητικός.

Ορισμός 1.1.2.3

Ας θεωρήσουμε τους πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ με $A=(a_{ij})$ και $B=(\beta_{ij})$. Θα λέμε ότι:

- $A > B$ αν ισχύει $a_{ij} > \beta_{ij}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$ και $j=1, 2, \dots, n$, δηλαδή ο πίνακας $A-B$ είναι θετικός.
- $A \geq B$ αν ισχύει $a_{ij} \geq \beta_{ij}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$ και $j=1, 2, \dots, n$, δηλαδή ο πίνακας $A-B$ είναι μη αρνητικός.
- $A < B$ αν ισχύει $a_{ij} < \beta_{ij}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$ και $j=1, 2, \dots, n$, δηλαδή ο πίνακας $B-A$ είναι θετικός.
- $A \leq B$ αν ισχύει $a_{ij} \leq \beta_{ij}$ για κάθε $i=1, 2, \dots, m$ και $j=1, 2, \dots, n$, δηλαδή ο πίνακας $B-A$ είναι μη αρνητικός.

Παράδειγμα 1.1.2.2

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ και $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Είναι

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \geq 0, \text{ άρα } A \geq B$$

$$A - \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \leq 0, \text{ άρα } A \leq \Gamma$$

Ορισμός 1.1.2.4

Δύο πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ με $A=(\alpha_{ij})$ και $B=(\beta_{ij})$, καλούνται **ίσοι** και θα συμβολίζουμε $A = B$, όταν έχουν τον ίδιο τύπο και επιπλέον ισχύει $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$.

1.1.3 Πράξεις Πινάκων

Ορισμός 1.1.3.1

Ως **άθροισμα** δύο πινάκων $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, με $A=(\alpha_{ij})$ και $B=(\beta_{ij})$, ορίζουμε τον πίνακα $A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$.

Ορισμός 1.1.3.2

Αν $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ και $B \in M_{n,k}(\mathbb{F})$ δύο πίνακες, με $A=(\alpha_{ij})$ και $B=(\beta_{ij})$, ορίζουμε ως **γινόμενο του πίνακα A με τον πίνακα B** και συμβολίζουμε $A \cdot B$ ή AB τον $m \times k$ πίνακα, του οποίου κάθε στοιχείο d_{ij} είναι το άθροισμα των γινομένων των n στοιχείων της i -γραμμής του πίνακα A με τα αντίστοιχα n στοιχεία της j -στήλης του πίνακα B . Είναι δηλαδή

$$d_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \dots + \alpha_{in}\beta_{nj}$$

Ορισμός 1.1.3.3

Ως **κ -δύναμη** του πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ ορίζουμε τον πίνακα

$$A^\kappa = \underbrace{A \dots A}_\kappa \text{ και } A^0 = I$$

1.2. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΠΙΝΑΚΑ

Στην ενότητα 2 του πρώτου κεφαλαίου, θα αναφερθούμε στα χαρακτηριστικά μεγέθη ενός πίνακα και συγκεκριμένα στα χαρακτηριστικά ποσά και στην ορίζουσα. Θα δώσουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες της ορίζουσας ενός πίνακα. Στη συνέχεια, θα δούμε ορισμούς όπως φάσμα, φασματική ακτίνα, ιδιοτιμή, ιδιοδιάνυσμα κ.α. τους οποίους θα τους συναντάμε σε όλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής.

1.2.1. Ορίζουσα

Ορισμός 1.2.1.1

Η συνάρτηση που χαρακτηρίζει τα στοιχεία ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ καλείται **ορίζουσα (determine)** και συμβολίζεται με $|A|$ ή $\det A$.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \det : M_n(\mathbb{F}) &\rightarrow \mathbb{F} \\ A &\rightarrow \det A \end{aligned}$$

Ορισμός 1.2.1.2

Ως **ελλάσων (minor)** πίνακας του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, καλούμε τον τετραγωνικό πίνακα μικρότερης τάξης, ο οποίος προκύπτει αν αφαιρέσουμε μία γραμμή ή μία στήλη από τον αρχικό πίνακα A .

Παρατήρηση 1.2.1.1.

- Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, τότε $|A| = ad - bc$.
- Έστω ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ και D_{ij} ο ελλάσων πίνακας του A , τότε ισχύει

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} B_{ij} \text{ με } B_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Παράδειγμα 1.2.1.1

$$\text{An } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ τότε}$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(-1 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 0 + 1 \cdot (2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4) \\
 &= 3 \cdot (-3) - (6 + 4) = -9 - 10 = -19
 \end{aligned}$$

Ορισμός 1.2.1.3

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(F)$. Ως **προσαρτημένο (adjoint)** πίνακα του πίνακα A , ορίζουμε τον πίνακα $B = (b_{ij})$, όπου $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$.
Συμβολισμός **adj(A)**.

Παράδειγμα 1.2.1.2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, τότε

$$\begin{aligned}
 \det A_{11} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, & \det A_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, & \det A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\
 \det A_{12} &= \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, & \det A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, & \det A_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\
 \det A_{13} &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, & \det A_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, & \det A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } \text{adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 1.2.1.2

Ένας πίνακας A αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Ορισμός 1.2.1.4.

Ο πίνακας $A \in M_n(F)$ ο οποίος δεν αντιστρέφεται καλείται **ιδιόμορφος**.

Θεώρημα 1.2.1.1

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ ο οποίος αντιστρέφεται, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- $\det A \neq 0$
- Το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$.
- Το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Λήμμα 1.2.1.1

Έστω οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε:

- Η ορίζουσα του πίνακα A εξαρτάται γραμμικά από την πρώτη γραμμή της.
- Αν εναλλαχθούν 2 γραμμές ενός πίνακα A , τότε η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.
- $|I_n| = 1$
- Αν 2 γραμμές ενός πίνακα A είναι ανάλογες, τότε $\det A = 0$.
- Η στοιχειώδης πράξη της αφαίρεσης πολλαπλασίου μιας γραμμής από μια άλλη αφήνει την ορίζουσα αμετάβλητη, δηλαδή $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - lc & b - ld \\ c & d \end{vmatrix}$.
- Αν ένας πίνακας A θα έχει μηδενική γραμμή τότε $\det A = 0$.
- Αν ο πίνακας A είναι τριγωνικός τότε η ορίζουσα του ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγώνιου.
- $\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)$.
- τότε $\det A^T = \det A$, $\det(\bar{A}) = \overline{\det A}$, $\det(A^*) = \overline{\det A}$.
- $\det(A^v) = (\det A)^v$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$.
- Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει
 - i. $(\text{adj} A) \cdot A = \det A \cdot I_n$
 - ii. Αν $\det A \neq 0$, τότε $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj} A$

1.2.2. Χαρακτηριστικά Ποσά

Ορισμός 1.2.2.1

Έστω $T: V \rightarrow V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός από έναν διανυσματικό χώρο πάνω στο σώμα \mathbb{F} . Αν v ένα μη μηδενικό διάνυσμα του χώρου V , τότε το v είναι ιδιοδιάνυσμα του T , αν ισχύει

$$T(v) = \lambda v \quad (1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{F}$ μία μεταβλητή.

Αν ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης n , τότε η σχέση (1) είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$Ax = \lambda x \text{ με } x \neq 0, \quad (2)$$

όπου $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $x \in \mathbb{C}^n$.

Το διάνυσμα x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** και ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα x .

Πρόταση 1.2.2.1

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και ας υποθέσουμε ότι λ μια ιδιοτιμή του και x το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του, τότε ο πίνακας A^k θα έχει ως ιδιοτιμή τον αριθμό λ^k και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x .

Ορισμός 1.2.2.2

Το πολυώνυμο

$$X_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n το οποίο καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του A . Η εξίσωση $X_A(\lambda) = 0$, η οποία καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση**.

Παρατήρηση 1.2.2.1

Σύμφωνα με τον ορισμό 1.2.2. για να βρούμε τις ιδιοτιμές ενός πίνακα A , αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ η οποία έχει μη μηδενικές λύσεις, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.1 αν και μόνο αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Συνεπώς για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A , αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow X_A(\lambda) = 0.$$

Ορισμός 1.2.2.3

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A , τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A γράφεται

$$X_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{v_k}$$

Ο αριθμός v_i λέγεται **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i .

Παρατήρηση 1.2.2.2

- Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει ως στοιχεία του πραγματικούς αριθμούς, τότε έχει το πολύ n διακεκριμένες ιδιοτιμές.
- Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ διάστασης n έχει ως στοιχεία του μιγαδικούς αριθμούς, τότε έχει ακριβώς n διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Ορισμός 1.2.2.4

Καλούμε **φάσμα (spectrum)** ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και συμβολίζουμε $\sigma(A)$, το σύνολο

των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωση $\chi_A(\lambda)$, δηλαδή

$$\sigma(A) = \{\lambda \in F : Ax = \lambda x\}$$

Πρόταση 1.2.2.2

Αν οι πίνακες A και B είναι όμοιοι (Ορισμός 1.1.1.24), τότε $\sigma(A) = \sigma(B)$. Οι όμοιοι πίνακες έχουν ίδιες ιδιοτιμές, ίδιας αλγεβρικής πολλαπλότητας. Τα ιδιοδιανύσματα των όμοιων πινάκων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι x και $C^{-1}x$, όπου C είναι ο πίνακας ομοιότητας.

Ορισμός 1.2.2.5

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in M_n(F)$. Καλούμε **φασματική ακτίνα (spectral radius)** και συμβολίζουμε με $\rho(A)$, τον αριθμό

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|\}.$$

Ορισμός 1.2.2.6

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές (πραγματικές ή μιγαδικές) ενός πίνακα $A \in M_n(F)$.

Συμβολίζουμε $\alpha(A)$ και καλούμε ως **φασματική τετμημένη (spectral abscissa)** του πίνακα A τον αριθμό

$$\alpha(A) = \max_i |\operatorname{Re}(\lambda_i)|$$

Ορισμός 1.2.2.7

Έστω πίνακας $A \in M_n(F)$. Η ιδιοτιμή λ του πίνακα A καλείται **κυρίαρχη ιδιοτιμή (dominant eigenvalue)** του πίνακα A , αν $|\lambda| = \rho(A)$.

Ορισμός 1.2.2.8

Καλούμε **μηδενοχώρο (null space)** ή **πυρήνα** ενός πίνακα $A \in M_n(F)$ και συμβολίζουμε με $N(A)$ το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $Ax=0$. Δηλαδή

$$N(A) = \{x : Ax = 0\}.$$

Ορισμός 1.2.2.9

Έστω πίνακας $A \in M_n(F)$. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή καλείται **ιδιοχώρος** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και συμβολίζεται $V(\lambda_i)$. Δηλαδή

$$V(\lambda_i) = \{x \in M_{n \times 1}(F) : (A - \lambda_i I)x = 0\} = N(A - \lambda_i I) \text{ με } V(\lambda_i) \neq \emptyset.$$

Ορισμός 1.2.2.10

Ως **διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V** καλούμε το μέγιστο πλήθος των γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων του V .

Συμβολισμός: $\dim(V)$.

Ορισμός 1.2.2.11

Η διάσταση k_i του ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$ ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και συμβολίζεται $\dim(V_{\lambda_i})$.

Πρόταση 1.2.2.3

Δίνεται ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, τότε:

1. Ισχύει ότι $\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ και $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = (-1)^n \alpha_0$, όπου α_0 ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.
2. Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
3. Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $\sigma(A) = \sigma(A^T)$, δηλαδή οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
4. Αν $A \in M_n(\mathbb{C})$, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι συζυγείς μιγαδικοί του πίνακα A^* .
5. Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ και ενός συμμετρικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι πραγματικοί αριθμοί.
6. Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του.
7. Ο πίνακας $I + A$ έχει ιδιοτιμές $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$.
8. Τα ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού συμμετρικού πίνακα ή ενός Ερμιτιανού πίνακα, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.2.2.1

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix}$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A είναι:

$$X_A(\lambda) \Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2i$ έχουμε:

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2ix_1 - 2y = 0 \\ 2x + 2iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ix - y = 0 \\ x - iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -ix \\ x \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι κάθε διάνυσμα πολλαπλάσιο του διανύσματος $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Ο ιδιοχώρος $V(2i)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$ με $\dim(V(2i))=1$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2i$, έχουμε:

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2ix_1 - 2y = 0 \\ 2x - 2iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ix - y = 0 \\ x + iy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ix \\ x \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι κάθε διάνυσμα πολλαπλάσιο του διανύσματος $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Ο ιδιοχώρος $V(-2i)$ έχει διανύσματα της μορφής $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{C}$ με $\dim(V(-2i))=1$

Πρόταση 1.2.2.4

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ **διαγωνοποιείται** αν και μόνο αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Θεώρημα 1.2.2.1 (Τριγωνοποίηση Schur)

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, τότε υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $Q \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$Q^*AQ=D=(d_{ij})$$

να είναι άνω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία $d_{ij}=\lambda_i, i=1,2,\dots,n$.

Ορισμός 1.2.2.12

Αν ένας πίνακας δεν διαγωνοποιείται, τότε κατασκευάζουμε ένα << σχεδόν διαγώνιο πίνακα >> ο οποίος καλείται **κανονική μορφή Jordan**. Θεωρούμε ότι ο πίνακας A έχει s ανεξάρτητα διανύσματα, τότε ο πίνακας J θα είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Κάθε μπλοκ J_k είναι ένας τριγωνικός πίνακας. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , υπάρχει και διαφορετικό μπλοκ και είναι της μορφής

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \dots & & \\ & & \dots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Στο κάθε μπλοκ, η κάθε ιδιοτιμή εμφανίζεται n_i φορές, όσες και η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής. Η ίδια ιδιοτιμή λ_i μπορεί να εμφανισθεί σε περισσότερα μπλοκ, όταν αντιστοιχεί σε περισσότερα ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Θεώρημα 1.2.2.2

Ένας πίνακας A θα είναι όμοιος με μια κανονική μορφή Jordan J , αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M , τέτοιος ώστε

$$J = M^{-1}AM.$$

1.3 Νόρμες

Στην ενότητα 3 του πρώτου κεφαλαίου θα δώσουμε τους ορισμούς: νόρμα διανύσματος και νόρμα πινάκων, θα αναφερθούμε στις κυριότερες νόρμες διανυσμάτων και νόρμες πινάκων και θα δούμε θεωρήματα που συνδέουν τις νόρμες με την ορίζουσα και την φασματική ακτίνα.

1.3.1. Νόρμες Διανυσμάτων

Ορισμός 1.3.1.1

Ας θεωρήσουμε τον διανυσματικό χώρο X πάνω στο σώματος F (\mathbb{R} ή \mathbb{C}). Μια **νόρμα** στο X είναι μία απεικόνιση

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\rightarrow [0, +\infty) \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

που ικανοποιεί τα παρακάτω:

- i. $\|x\| \geq 0$,
- ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, για κάθε $x \in X, \lambda \in F$
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ιδιότητα) $\forall x, y \in X, \lambda \in F$

Το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ είναι **χώρος με νόρμα**.

Οι πιο συνηθισμένες νόρμες είναι

- Η l_p -νόρμα ή ρ -νόρμα, με $\rho \geq 1$ με

$$\|x\|_\rho = \left\| [x_1 x_2 \dots x_n]^T \right\|_\rho = \left(|x_1|^\rho + |x_2|^\rho + \dots + |x_n|^\rho \right)^{1/\rho} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\rho \right)^{1/\rho}, \rho \geq 1.$$

- Η ευκλείδεια νόρμα (ή l_2 -νόρμα) με

$$\|x\|_2 = \left\| [x_1 x_2 \dots x_n]^T \right\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^n (|x_i|^2)^{1/2}.$$

Είναι ίσως η πιο γνωστή νόρμα διανυσμάτων και προκύπτει από το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = y^* x = (\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{y}_1 x_1 + \bar{y}_2 x_2 + \dots + \bar{y}_n x_n$$

- Η αθροιστική νόρμα (ή l_1 -νόρμα) με

$$\|x\|_1 = \left\| [x_1 x_2 \dots x_n]^T \right\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

και είναι γνωστή και ως νόρμα του Μανχάταν, καθώς συνδέεται με την απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο κινούμενο πάνω στο ορθογώνιο πλέγμα δρόμων του Μανχάταν.

- Η μεγιστική νόρμα (ή max- νόρμα ή ∞ -νόρμα) με

$$\|x\|_\infty = \left\| [x_1 x_2 \dots x_n]^T \right\|_\infty = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}$$

και είναι η πιο εύκολη υπολογίσιμη νόρμα.

Παρατήρηση 1.3.1.1

Η ∞ -νόρμα και η ρ -νόρμα συνδέονται με τη σχέση

$$\|x\|_{\infty} = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \|x\|_{\rho}$$

Παράδειγμα 1.3.1.1

Έστω το διάνυσμα $x = [2, 1, 5, -1]^T$, τότε

$$\|x\|_1 = |2| + |1| + |5| + |-1| = 9$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|2|^2 + |1|^2 + |5|^2 + |-1|^2} = \sqrt{4 + 1 + 25 + 1} = \sqrt{31}$$

$$\|x\|_{\infty} = \max\{|2|, |1|, |5|, |-1|\} = 5$$

1.3.2. Νόρμες Πινάκων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Ορισμός 1.3.2.1

Ως **νόρμα πινάκων (matrix norm)** καλούμε την απεικόνιση $\|\cdot\|: F \rightarrow [0, +\infty)$ όταν για

κάθε πίνακα $A, B \in M_n(F)$ ισχύουν τα παρακάτω:

- i. $\|A\| \geq 0$, (Μη Αρνητική)
- ii. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- iii. $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|, \forall \alpha \in F$
- iv. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (υπό-πολλαπλασιαστική ιδιότητα)
- v. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική ιδιότητα)

Παρατήρηση 1.3.2.1

1. Ισχύει ότι $\|I_n\| = \|I_n^2\| \leq \|I_n\|^2 \Rightarrow \|I_n\| \geq 1$
2. $1 \leq \|I_n\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \Rightarrow \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$

Τα πιο γνωστά παραδείγματα είναι οι l_p -νόρμες για $p=1,2, \infty$. Γνωρίζουμε ήδη ότι είναι νόρμες διανυσμάτων, οπότε ικανοποιούν τις τέσσερις πρώτες ιδιότητες. Οπότε χρειάζεται να επαληθευτεί μόνο η τελευταία ιδιότητα.

Έστω οι πίνακες $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ τότε:

- Η l_1 -νόρμα ενός πίνακα $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται ως

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

Είναι νόρμα πινάκων γιατί

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa j} \right| \leq \sum_{\kappa=1}^n \left| \sum_{i,j=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa j} \right| \leq \sum_{i,j,\kappa,m=1}^n |a_{i\kappa} b_{m j}| = \sum_{i,j,\kappa,m=1}^n |a_{i\kappa}| |b_{m j}| = \\ &= \left(\sum_{i,\kappa=1}^n |a_{i\kappa}| \right) \left(\sum_{j,m=1}^n |b_{m j}| \right) = \|A\|_1 \|B\|_1 \end{aligned}$$

- Η νόρμα Frobenius (ή l_2 -νόρμα) ενός πίνακα $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται ως

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)}.$$

Η νόρμα Frobenius είναι γνωστή και ως νόρμα **Hilbert-Schmidt** ή **Schur** νόρμα. Είναι νόρμα γιατί:

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left| \sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa j} \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \sum_{\kappa=1}^n |a_{i\kappa} b_{\kappa j}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \sum_{\kappa,m=1}^n |a_{i\kappa} b_{m j}|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{\kappa,m=1}^n |a_{i\kappa}|^2 |b_{m j}|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{\kappa=1}^n |a_{i\kappa}|^2 \right) \left(\sum_{m=1}^n |b_{m j}|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{j,\kappa=1}^n |a_{i\kappa}|^2 \right) \left(\sum_{j,m=1}^n |b_{m j}|^2 \right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2. \end{aligned}$$

- Η l_∞ -νόρμα ενός πίνακα $A=[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται ως

$$\|A\|_\infty = \max \{ |a_{ij}| : i, j = 1, 2, \dots, n \}.$$

Η l_∞ -νόρμα είναι νόρμα στο διανυσματικό χώρο M_n , αλλά δεν είναι νόρμα πινάκων. Για να το διαπιστώσουμε αυτό θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = 4A$$

$$\text{Είναι } \|A\|_\infty = 2, \quad \|A^2\|_\infty = \|4A\|_\infty = 4\|A\|_\infty = 8$$

Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει $\|A\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty}^2$, άρα δεν ισχύει η πολλαπλασιαστική ιδιότητα για τη νόρμα $\|A\|_{\infty}$.

Ορίζοντας της συνάρτηση $\|A\| = n\|A\|_{\infty}$, παρατηρούμε ότι είναι νόρμα πινάκων διότι ισχύει:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= n \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \left| n \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik} b_{kj}| \right| = n \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{k=1}^n \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty} \end{aligned}$$

Ορισμός 1.3.2.2

Δίνονται οι ορθομοναδιαίοι πίνακες U και V . Μια νόρμα $\|\cdot\|$ καλείται **ορθομοναδιαία αναλλοίωτη (unitarily invariant)** αν και μόνο αν ισχύει $\|UAV\| = \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

Πρόταση 1.3.2.1

Για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα U, V ισχύει

$$\|UAV\|_F = \|A\|_F, \text{ όπου } A \in M_n(\mathbb{F}).$$

Απόδειξη

Είναι

$$\begin{aligned} \|UAV\|_F &= \sqrt{\text{tr}((UAV)^*(UAV))} = \sqrt{\text{tr}(V^* A^* U U A V)} = \\ &= \sqrt{\text{tr}(V^* A^* A V)} = \sqrt{\text{tr}((AV)^*(AV))} = \\ &= \|AV\|_F = \|(AV)^*\|_F = \|V^* A^*\|_F = \|A^*\|_F = \|A\|_F \end{aligned}$$

Πρόταση 1.3.2.2

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει

1. Ισχύει ότι $\sqrt{\rho(A^* A)} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \sqrt{\rho(A^* A)}$ για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.
2. $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \|A^T\|_2$
3. $\|A\|_2^2 = \|A^* A\|_2$
4. $\|A\|_2^2 = \|A\|_1 \|A\|_{\infty}$

Ορισμός 1.3.2.3

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα διανυσμάτων στο \mathbb{C}^n . Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, ορίζουμε ως **επαγόμενη νόρμα (induced norm)** τη νόρμα

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Θεώρημα 1.3.2.1

Για την επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$ ισχύουν τα εξής :

- Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα πινάκων.
- $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$.
- $\|I_n\| = 1$
- $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποια σημαντικά παραδείγματα νορμών πινάκων που επάγονται από τις γνωστές l_p νόρμες και οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν χωρίς να απαιτείται η χρήση του παραπάνω ορισμού. Σε κάθε περίπτωση θεωρούμε ένα τετραγωνικό πίνακα $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$

➤ Νόρμα Πινάκων Μεγίστου Αθροίσματος κατά Στήλη στον $M_n(\mathbb{F})$

Ορίζεται από τη νόρμα

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| \quad (\text{νόρμα στήλης})$$

➤ Νόρμα Πινάκων Μεγίστου Αθροίσματος κατά Γραμμή στον $M_n(\mathbb{F})$

Ορίζεται από τη νόρμα

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \quad (\text{νόρμα Γραμμής})$$

➤ Φασματική Νόρμα (spectral norm) ή Τελεστική Νόρμα (operator norm) στον $M_n(\mathbb{F})$

Ορίζεται από τη νόρμα

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα } A^*A\}$$

Η φασματική νόρμα γράφεται και στη μορφή

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A)\}, \text{ όπου } \sigma(A) \text{ συμβολίζουμε το φάσμα}$$

του πίνακα $A \in M_n(F)$.

Παράδειγμα 1.3.2.1

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ με $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, τότε

- $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \sum_{i=1}^3 |\alpha_{ij}| = \max\{|\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}|, |\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}|, |\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}|\}$
 $= \max\{9, 6, 15\} = 15$

- $\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |\alpha_{ij}| = \max\{|\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}|, |\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}|, |\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}|\}$
 $= \max\{9, 6, 15\} = 6$

- Είναι $A^* = A^T$, οπότε $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ με

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 13 & 21 \\ 13 & 14 & 39 \\ 21 & 39 & 117 \end{pmatrix}. \text{ Το φάσμα του πίνακα } A^T A \text{ είναι}$$

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 136.19, \lambda_2 = 0.03, \lambda_3 = 35.78\}$$

$$\|A\|_2 = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}\} = \{\sqrt{136.19}, \sqrt{0.03}, \sqrt{35.78}\} = 11,67$$

Θεώρημα 1.3.2.2

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα πινάκων στον M_n και C ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε για

κάθε πίνακα $A \in M_n(F)$ η

$$\|A\| = \|C^{-1}AC\|$$

είναι νόρμα πινάκων.

Απόδειξη:

Οι πρώτες τέσσερις ιδιότητες του ορισμού είναι προφανείς. Για την τελευταία ιδιότητα και

με την προϋπόθεση ότι $C^{-1}C=CC^{-1}=I$ έχουμε:

$$\|AB\| = \|C^{-1}ABC\| = \|(C^{-1}AC)(C^{-1}BC)\| \leq \|C^{-1}AC\| \|C^{-1}BC\| = \|A\| \|B\|$$

1.3.3 Νόρμες και Χαρακτηριστικά Ποσά

Θεώρημα 1.3.3.1

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα πινάκων, τότε $\rho(A) \leq \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n(F)$.

Απόδειξη:

Έστω λ μια ιδιοτιμή του πίνακα A και $x \neq 0$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε θα ισχύει $Ax = \lambda x$, άρα θα ισχύει και $AX = \lambda X$, όπου $X \in M_n(F)$ ένας πίνακας της μορφής $X = [x, x, \dots, x]$, δηλαδή όλες οι στήλες του αποτελούνται από το ιδιοδιάνυσμα x . Αυτό συνεπάγεται ότι

$$|\lambda| \|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \|X\| \quad (1)$$

Όμως $\|X\| > 0$, άρα η σχέση (1) μας δίνει

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad (2)$$

για κάθε ιδιοτιμή λ . Σύμφωνα με τον ορισμό της φασματικής ακτίνας, θα ισχύει

$$|\lambda| \leq \rho(A) \quad (3).$$

Από (2) και (3) προκύπτει ότι $\rho(A) \leq \|A\|$.

Λήμμα 1.3.3.1

Έστω πίνακας $A \in M_n(F)$ και ε ένας θετικός γνωστός αριθμός, τότε υπάρχει μια νόρμα $\|\cdot\|$ πινάκων, τέτοια ώστε:

$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.2.2 η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A \in M_n(F)$ είναι

$$A = MJM^{-1} \Leftrightarrow J = M^{-1}AM$$

όπου

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

$M \in M_n(F)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A και επιπλέον ισχύει $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$.

Ορίζουμε τον πίνακα

$$D(n) = \begin{pmatrix} D_{n_1}(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{n_2}(n) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_{n_s}(n) \end{pmatrix},$$

όπου

$$D_k(n) = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & n^k \end{pmatrix}$$

Μετά τις απαραίτητες πράξεις προκύπτει ότι

$$D\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)M^{-1}AMD(\varepsilon) = \begin{pmatrix} C_{n_1}(\lambda_1, \varepsilon) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{n_2}(\lambda_2, \varepsilon) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C_{n_s}(\lambda_s, \varepsilon) \end{pmatrix},$$

όπου

$$C_k(\lambda, \varepsilon) = D_m\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)J_k(\lambda)D_m(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & \varepsilon \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Για κάθε πίνακα $B \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζοντας την επαγόμενη νόρμα $\|\cdot\|$:

$$\|B\| = \left\| D\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)M^{-1}BMD(\varepsilon) \right\|_1.$$

Συνεπώς,

$$\|A\| = \left\| D\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)JD(\varepsilon) \right\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} (|\lambda_i| + \varepsilon) \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Θεώρημα 1.3.3.2

Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και για κάθε επαγόμενη νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ ισχύει

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$$

Απόδειξη

Έστω $k \geq 0$, τότε από το Λήμμα 1.3.3.1 ισχύει

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\| \Rightarrow \rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$$

Συνεπώς

$$\rho(A) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\rho(A) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}, \text{ οπότε αρκεί να αποδείξουμε για κάθε } \varepsilon > 0,$$

υπάρχει $m \geq 0$, τέτοιο ώστε $\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ για κάθε $k \geq m$. Από το Λήμμα 1.3.3.1

ισχύει $\|A\| \leq \rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Επιπλέον από το Θεώρημα 1.3.2.1 υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια

ώστε να ισχύει $\|M\| \leq c\|M\|$ για κάθε πίνακα $M \in M_n(\mathbb{F})$. Οπότε έχουμε

$$\|A^k\| \leq c\|A^k\| \leq c\|A\|^k \leq c\left(\rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \Rightarrow$$

$$\|A^k\|^{1/k} \leq c^{1/k} \left(\rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k_0 \geq 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon \text{ για κάθε } k \geq k_0.$$

Δείξαμε επομένως που θέλαμε

2. Θεώρημα Perron- -Frobenius

Στο κεφάλαιο 2 θα αναφερθούμε στο κύριο θέμα της παρούσας εργασίας, δηλαδή στο θεώρημα Perron – Frobenius. Ο Γερμανός μαθηματικός Oskar Perron δημοσίευσε το 1907 το θεώρημα του για θετικούς πίνακες. Στη συνέχεια, το 1912, ο Γερμανός μαθηματικός Georg Frobenius επέκτεινε το θεώρημα του Perron για μη αρνητικούς και μη αρνητικούς μη υποβιβάσιμους πίνακες. Στην παρούσα εργασία, παρόλο που το κύριο θέμα της είναι οι Μη Αρνητικοί Μη Υποβιβάσιμοι Πίνακες, θα αναφερθούμε εκτενέστερα στους θετικούς πίνακες, στους μη αρνητικούς πίνακες, στους μη αρνητικούς μη υποβιβάσιμους πίνακες, στους μη αρνητικούς αρχικούς πίνακες και στα φράγματα φασματικής ακτίνας θετικών και μη αρνητικών πινάκων.

2.1 Θετικοί Πίνακες

Στην ενότητα 1 του δεύτερου κεφαλαίου, θα δούμε τους θετικούς πίνακες, θεωρήματα που αφορούν τους θετικούς πίνακες και θα αποδείξουμε το θεώρημα Oskar.

Ορισμός 2.1.1.

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A=(a_{ij})$ λέγεται **θετικός (positive)** αν $a_{ij} > 0$ για κάθε i,j . Συμβολισμός $A > 0$.

Παράδειγμα 2.1.1

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ είναι θετικός.

Ορισμός 2.1.2

Για κάθε θετικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός r , ο οποίος ονομάζεται **ρίζα (ή ιδιοτιμή) Perron** και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα καλείται **δεξί διάνυσμα Perron**. Για κάθε θετικό πίνακα A ισχύει $A^T > 0$. Το διάνυσμα Perron του A^T καλείται **αριστερό διάνυσμα Perron του A**.

Λήμμα 2.1.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας θετικός πίνακας και x, y δύο μη μηδενικά θετικά διανύσματα στο \mathbb{C}^n , έτσι ώστε να ισχύει $Ax = \lambda x$ και $Ay = \lambda y$, με $\lambda \neq 0$, τότε υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{C}$, τέτοιος ώστε $x = cy$.

Απόδειξη:

Έστω $c = \min_{1 \leq i \leq n} x_i y_i^{-1}$ και ας ορίσουμε όπου $m = x - cy$, $m \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός m μπορεί να γίνει τουλάχιστον μια φορά μηδέν.

Είναι $Am = Ax - cAy = \lambda x - c\lambda y = \lambda(x - cy) = \lambda m$

Αν $m \neq 0$, τότε θα ισχύει ότι $m = \lambda^{-1} Am > 0$, αφού $A > 0$, άτοπο. Άρα $m = 0$, οπότε θα ισχύει $x = cy$.

Πρόταση 2.1.1

Για κάθε θετικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, υπάρχει θετικό ιδιοδιάνυσμα x με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\rho(A)$, έτσι ώστε να ισχύει $Ax = \rho(A)x$. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι η ρίζα Perron r του Ορισμού 2.1.2.

Απόδειξη:

Έστω $A > 0$ και k όλοι οι αριθμοί για τους οποίους ισχύει $Ax \geq kx$ (1) με $x > 0$. Έστω r η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα A , έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (1), δηλαδή ισχύει

$$Ax \geq rx \quad (2).$$

Θα δείξουμε ότι $Ax = rx$.

Πολλαπλασιάζοντας την (2) με τον πίνακα $A > 0$, προκύπτει ότι $A^2x > rAx$ (3).

Θέτουμε όπου $y = Ax$, τότε η (3) γίνεται $Ay > ry$, το οποίο σημαίνει ότι η τιμή r θα μπορούσε να μεγαλώσει και άλλο. Η αντίφαση αυτή επιβάλλει την ισότητα $Ax = rx$ (4). Το ιδιοδιάνυσμα x είναι θετικό διότι στα αριστερά της ισότητας (4) το Ax είναι σίγουρα θετικό αφού $A > 0$ και $x > 0$.

Θα δείξουμε ότι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα A είναι ο αριθμός r . Έστω ότι υπάρχει διάνυσμα z , τέτοιο ώστε $Az = \lambda z$. Επειδή $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και το διάνυσμα z μπορεί να περιέχει και μη αρνητικούς αριθμούς, παίρνουμε ότι

$$|\lambda| |z| = |Az| \leq A|z| \quad (\text{τριγωνική ανισότητα}).$$

Το $|z|$ είναι μη αρνητικό διάνυσμα, άρα το $|\lambda|$ είναι ένας από τους δυνατούς υποψηφίους που μπορεί να πάρει η τιμή k . Οπότε ο αριθμός $|\lambda|$ δεν μπορεί να ξεπερνά την τιμή r , η οποία είναι η μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα A και επειδή $r > 0$, ισχύει ότι $r = \rho(A)$,

Παράδειγμα 2.1.2

Έστω ο θετικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ με ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1=4, \lambda_2=-1, \lambda_3=1$

τότε $\rho(A)=4$. Παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$, είναι ιδιοτιμή του πίνακα A . Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=4$, δηλαδή στην φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι το θετικό διάνυσμα $x=(1,1,1)^T$.

Πρόταση 2.1.2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας θετικός πίνακας. Αν $x \in \mathbb{R}^n$ με $x > 0$, τότε $Ax > 0$.

Απόδειξη:

Έστω $Ax=[(Ax)_i]$, τότε κάθε στοιχείο του πίνακα Ax είναι θετικό, διότι

$$(Ax)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k > 0 \text{ για κάθε } a_{ik} > 0 \text{ και } x_k > 0.$$

Πρόταση 2.1.3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας θετικός πίνακας. Αν $Ax=\rho(A)x$ με $x > 0$, τότε $A|x| = \rho(A)|x|$ και $|x| > 0$

Απόδειξη:

Είναι $\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq A|x|$ με $\rho(A) > 0$.

Έστω το διάνυσμα $Z = A|x| - \rho(A)|x| \geq 0$.

Αν $Z=0$, τότε $A|x| = \rho(A)|x| \Leftrightarrow |x| = (\rho(A))^{-1} A|x|$.

Αν $Z \neq 0$, τότε θέτουμε $w=A|x| > 0$, οπότε θα ισχύει $Z = w - \rho(A)|x|$. Είναι

$0 < AZ = A(w - \rho(A)|x|) = Aw - \rho(A)w$, οπότε $Aw > \rho(A)w$ όπου προκύπτει ότι $\rho(A) < \rho(A)$, άτοπο. Κατά συνέπεια προκύπτει ότι $Z=0 \Leftrightarrow A|x| = \rho(A)|x|$

Πόρισμα 2.1.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας θετικός πίνακας. Η ρίζα Perron $r=\rho(A)$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα ένα και ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ έχει διάσταση 1.

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ αντιστοιχεί μοναδικό ιδιοδιάνυσμα.

Έστω y και z δύο θετικά γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, με πραγματικά στοιχεία, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\rho(A)$, τότε ισχύει $Ay=\rho(A)y$ και $Az=\rho(A)z$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει αριθμός $c > 0$, τέτοιος ώστε $y - cz \geq 0$. Τα διανύσματα y και z είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε το διάνυσμα $y - cz$ δεν είναι μηδέν. Συνεπώς προκύπτει

$$y - cz = \frac{A[y - cz]}{\rho(A)} > 0, \text{ άτοπο διότι τον αριθμό } c \text{ τον διαλέξαμε}$$

έτσι ώστε $y - cz \geq 0$. Άρα δεν μπορεί να υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα

ιδιοδιανύσματα που να αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\rho(A)$. Συνεπώς η ιδιοτιμή $\rho(A)$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Θεώρημα 2.1.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας θετικός πίνακας, τότε η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με $\rho(A) > 0$ και υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα x , τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Απόδειξη

Από την Πρόταση 2.1.3, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια ιδιοτιμή λ , τέτοια ώστε $|\lambda| = \rho(A) > 0$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $|x| > 0$.

Πόρισμα 2.1.2

Έστω ο θετικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ με $x > 0$, για το οποίο ισχύει $Ax = \rho(A)x$ και $\|x\|_1 = 1$.

Ορισμός 2.1.3

Το διάνυσμα x του Πορίσματος 2.1.2, δηλαδή το μοναδικό θετικό κανονικοποιημένο διάνυσμα x για το οποίο ισχύει $Ax = \rho(A)x$ και $\|x\|_1 = 1$, **καλείται διάνυσμα Perron**.

Θεώρημα 2.1.2

Έστω ο θετικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε η μοναδική ιδιοτιμή του πίνακα A για την οποία ισχύει $|\lambda| = \rho(A)$, είναι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Πρόταση 2.1.4

Έστω ο θετικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, με $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ και $|\lambda| = \rho(A)$, τότε ισχύει $e^{-i\theta} = |x| > 0$, για κάποιο $\theta \in [0, 2\pi]$.

Λήμμα 2.1.2

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, και δύο διανύσματα x, y για τα οποία ισχύει

$Ax = \lambda x$, $A^T y = \lambda y$ και $x^T y = 1$ (1). Ορίζουμε τον πίνακα $C = xy^T$, τότε:

1. $Cx = x$, $y^T C = y^T$, $C^k = C$ και $A^k C = CA^k = \lambda^k C$ για κάθε $k=1, 2, \dots$

2. $C(A - \lambda C) = 0$ και $(A - \lambda C)^k = A^k - \lambda^k C$

3. Κάθε ιδιοτιμή $m \neq 0$ του πίνακα $A - \lambda C$, είναι και ιδιοτιμή του A .

Απόδειξη

- $$Cx = xy^T x \Leftrightarrow (Cx)^T = (xy^T x)^T = x^T yx^T = x^T \Leftrightarrow Cx = x$$

$$y^T C = y^T xy^T \Leftrightarrow (y^T C)^T = (y^T xy^T)^T = yx^T y = y \Leftrightarrow y^T C = y^T$$

$$C^k = C^{k-2} CC = C^{k-2} xy^T C \stackrel{y^T C = y^T}{=} C^{k-2} xy^T = C^{k-2} C = C^{k-1} = \dots = C$$

$$A^k C = (AC)^k = (Axy^T)^k = (\lambda xy^T)^k = (\lambda C)^k = \lambda^k C$$
- $$C(A - \lambda C) = CA - \lambda C^2 = CA - \lambda C = CA - CA = 0$$
- Έστω ότι ο πίνακας $A - \lambda C$ έχει τον αριθμό $m \neq 0$ ιδιοτιμή, και z το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε ισχύει $(A - \lambda C)z = mz$.

Όμως από πάνω έχουμε ότι $0 = C(A - \lambda C)z = Cmz$ και $m \neq 0$, άρα προκύπτει $Cz = 0$. Οπότε $(A - \lambda C)z = Az - \lambda ACz = Az = mz$

Λήμμα 2.1.3

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, και δύο διανύσματα x, y για τα οποία ισχύει

$Ax = \lambda x$, $A^T y = \lambda y$ και $x^T y = 1$ (1) με $\lambda \neq 0$. Αν επιπλέον ισχύει ότι ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και ορίσουμε τον πίνακα $C = xy^T$, τότε ο αριθμός λ δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A - \lambda C$.

Απόδειξη

Έστω ότι ο αριθμός $\lambda \neq 0$ με γεωμετρική πολλαπλότητα 1, είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , τότε για κάθε διάνυσμα $z \neq 0$ με $Az = \lambda z$, σύμφωνα με το Λήμμα 2.1.1, υπάρχει αριθμός $c \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $z = cx$. Έστω ότι ο αριθμός λ είναι και είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A - \lambda C$, τότε :

$\lambda z = (A - \lambda C)z = (A - \lambda C)cx = cAx - \lambda cCx = c\lambda x - c\lambda x = 0$, άτοπο διότι $\lambda \neq 0$ και $z \neq 0$. Συνεπώς ο αριθμός λ δεν είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A - \lambda C$.

Λήμμα 2.1.4

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, τα διανύσματα x, y και ο πίνακας $C = xy^T$. Αν επιπλέον ισχύει

$Ax = \lambda x$, $A^T y = \lambda y$ και $x^T y = 1$ (1) όπου $\lambda = \rho(A) > 0$. Δίνεται επίσης ότι ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με γεωμετρική πολλαπλότητα 1 και ότι ο $\lambda = \rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου έτσι ώστε για τις άλλες ιδιοτιμές να ισχύει $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| = \lambda = \rho(A)$, τότε

- $$\rho(A - \lambda C) \leq |\lambda_{n-1}| < \rho(A)$$
- $$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} A \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda^{-1} A)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[C + (\lambda^{-1} A - C)^k \right] = C$$

Θεώρημα 2.1.3

Έστω ο θετικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, με $Ax = \rho(A)x$, $A^T y = \lambda y$ και $x^T y = 1$ και ο πίνακας $C = xy^T$, τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = C$ με $\text{rank}(C) = 1$.

Απόδειξη

Επειδή ο πίνακας A είναι θετικός, ο αριθμός $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις και τα πορίσματα των Λημμάτων 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, με $\lambda = \rho(A)$. Είναι $x^T y = 1 \Leftrightarrow z^{-1}(x^T)^{-1} x^T y = z^{-1}(x^T)^{-1} \Leftrightarrow z^{-1} y = (x^T z)^{-1} \Leftrightarrow y = (x^T z)^{-1} z$, όπου x το δεξί και z το αριστερό διάνυσμα Perron του πίνακα A . Από το Λήμμα 2.1.4 προκύπτει το ζητούμενο.

Παρατήρηση 2.1.1

Στο θεώρημα 2.1.3, το διάνυσμα y είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A , της ιδιοτιμής $\rho(A)$, αφού $y^T A = \rho(A)y^T = (\rho(A^T) = \rho(A))y^T$.

Πόρισμα 2.1.3

Έστω ο θετικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε για κάθε ιδιοτιμή λ διαφορετική της φασματικής ακτίνας $\rho(A)$, ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $|\lambda| \leq \rho(A)$ για κάθε ιδιοτιμή λ . Υποθέτουμε ότι ισχύει $|\lambda| = \rho(A)$ και $Ax = \lambda x$, με $\lambda \neq \rho(A)$. Από την Πρόταση 2.1.4 υπάρχει γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$ και διάνυσμα z , τέτοιο ώστε $z = e^{-i\theta} x = |x| > 0$, άρα $Az = \lambda z$ και από την Πρόταση 2.1.3 ισχύει $A|x| = \rho(A)|x|$, οπότε $\lambda = \rho(A)$. Άρα $|\lambda| < \rho(A)$ για κάθε $\lambda \neq \rho(A)$.

Παράδειγμα 2.1.3

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = -0$, $\lambda_2 = 8$ με αντίστοιχα

ιδιοδιανύσματα $x_1 = [1, 1]^T$ και $x_2 = [-1, 1]^T$. Είναι $\rho(A) = 8$ και για την άλλη ιδιοτιμή λ_1 ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$, οπότε επαληθεύεται το Πόρισμα 2.1.3.

Θεώρημα 2.1.4

Η φασματική ακτίνα του πίνακα A ιδιοτιμή του πίνακα A είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου αλγεβρικής πολλαπλότητας 1..

Απόδειξη

Έστω $r = \rho(A)$ είναι μια ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα m , τότε από το Θεώρημα 1.2.2.1 (Τριγωνοποίηση Schur) γνωρίζουμε ότι υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_n(F)$, τέτοιος ώστε $U^*AU = B \Leftrightarrow A = UBU^*$, όπου $B \in M_n(F)$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα B είναι $\rho(A), \dots, \rho(A), \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$. Τα μέτρα των ιδιοτιμών $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_n$ είναι μικρότερα της $\rho(A)$, , οπότε έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_{m+1}}{\rho(A)} \right)^k = \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n}{\rho(A)} \right)^k = 0$$

και από το Θεώρημα 2.1.3 προκύπτει

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} U \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda_{m+1}}{\rho(A)} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{\rho(A)} \end{pmatrix} U^* = U \begin{pmatrix} 1 & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} U^*$$

Ο αριθμός 1 εμφανίζεται στην κύρια διαγώνιο k φορές, ενώ το 0 εμφανίζεται $n-k$ φορές. Ο άνω τριγωνικός πίνακας που εμφανίζεται στην τελευταία ισότητα, σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.3 είναι βαθμού 1. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι δεν γίνεται να ισχύει $m > 1$. Άρα $m=1$.

Θεώρημα 2.1.5 (Θεώρημα Perron 1907)

Έστω ένας θετικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\rho(A) > 0$
2. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .
3. Υπάρχει μοναδικό θετικό κανονικοποιημένο διάνυσμα x με $Ax = \rho(A)x$.
4. Η ιδιοτιμή $\rho(A)$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ένα.
5. Η ιδιοτιμή $\rho(A)$ έχει γεωμετρική πολλαπλότητα ένα.
6. Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$ του A , ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$, δηλαδή η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου.
7. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k = C$ με $C = xy^T$, $Ax = \rho(A)x$, $A^T y = \rho(A)y$, $x, y > 0$, $x^T y = 1$, όπου x και y το δεξί και το αριστερό διάνυσμα Perron αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.1.4

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 7,35, \lambda_2 = -0,839, \lambda_3 = 0,486$. Είναι

- $\rho(A) = 7.35 = \lambda_1$

- Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ είναι $x_1 = \begin{pmatrix} 0,744 \\ 0,86 \\ 1 \end{pmatrix} > 0$.

τέτοιο ώστε $Ax_1 = \lambda x_1$.

- Είναι προφανές ότι η $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A .

Επίσης για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$ του A , ισχύει $|\lambda| < \rho(A)$, δηλαδή το $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου.

- Είναι $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Είναι $\rho(A^T) = \rho(A) = 7.35$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$y = (0,404, 0,285, 1)^T > 0 \quad (\text{Αριστερό Διάνυσμα Perron}).$$

Κανονικοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα x_1 , και έχουμε

$$x = \frac{x_1}{\|x_1\|_1} = \frac{1}{2.604} \begin{pmatrix} 0,744 \\ 0,86 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,286 \\ 0,218 \\ 0,384 \end{pmatrix} \quad (\text{Δεξί Διάνυσμα Perron})$$

και ισχύει $x^T y = 1$

$$\text{Είναι } C = xy^T = \begin{pmatrix} 0,286 \\ 0,218 \\ 0,384 \end{pmatrix} (0,404, 0,285, 1) = \begin{pmatrix} 0,115 & 0,081 & 0,286 \\ 0,088 & 0,062 & 0,218 \\ 0,155 & 0,109 & 0,384 \end{pmatrix}$$

$$\text{Είναι } \left(\frac{A}{\rho(A)} \right) = \frac{1}{7,35} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

τότε θα θέσουμε τυχαίες τιμές στο κλάσμα $\left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^k$

Για $k=20$ είναι

$$\left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^{100} = \begin{pmatrix} 0,137 & 0,272 & 0,408 \\ 0,272 & 0,137 & 0,544 \\ 0,272 & 0,137 & 0,68 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0,212 & 0,1498 & 0,523 \\ 0,246 & 0,173 & 0,607 \\ 0,284 & 0,201 & 0,703 \end{pmatrix}$$

Για $\kappa=100$ είναι

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{100} = \begin{pmatrix} 0.137 & 0.272 & 0.408 \\ 0.272 & 0.137 & 0.544 \\ 0.272 & 0.137 & 0.68 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 0.212 & 0.1498 & 0.523 \\ 0.246 & 0.173 & 0.607 \\ 0.284 & 0.201 & 0.703 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ισχύει $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{\kappa} = C$ Είναι

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{\kappa} = \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{\kappa} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^{\kappa},$$

τότε θα θέσουμε τυχαίες τιμές στο κλάσμα $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{\kappa}$

Για $\kappa=20$ είναι

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{20} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^{20} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$$

Για $\kappa=60$ είναι

$$\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{60} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^{60} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \\ 0.333 & 0.333 & 0.333 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε πως ισχύει $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^{\kappa} = C$

2.2 Μη Αρνητικοί Πίνακες

Στην ενότητα 2 του δεύτερου κεφαλαίου, θα επεκτείνουμε το θεώρημα Oskar για μη αρνητικούς πίνακες και θα αποδείξουμε το θεώρημα Perron-Frobenius, αφού πρώτα μελετήσουμε θεωρήματα τα οποία σχετίζονται με αρνητικούς πίνακες και δούμε παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν στην κατανόηση της ύλης.

Ορισμός 2.2.1

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **μη αρνητικός (nonnegative)** αν όλα του τα στοιχεία είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Συμβολισμός $A \geq 0$.

Παράδειγμα 2.2.1

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ είναι μη αρνητικός.

Θεώρημα 2.2.1

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε:

- Αν το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής είναι σταθερό με έναν αριθμό κ , τότε $\rho(A) = \|A\|_\infty = \kappa$.
- Αν το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης είναι σταθερό με έναν αριθμό κ , τότε $\rho(A) = \|A\|_1 = \kappa$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.3.1 για κάθε νόρμα πινάκων ισχύει $\rho(A) \leq \|A\|$.

- Αν το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής είναι σταθερό με έναν αριθμό κ , τότε ισχύει $\|A\|_\infty = \kappa$. Έστω κ μια ιδιοτιμή του πίνακα A και $x = [1, 1, \dots, 1]^T$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε $\rho(A) = \|A\|_\infty = \kappa$.
- Αν το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης είναι σταθερό με έναν αριθμό κ , τότε ισχύει $\|A\|_1 = \kappa$. Έστω κ μια ιδιοτιμή του πίνακα A και $x = [1, 1, \dots, 1]^T$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε $\rho(A) = \|A\|_1 = \kappa$.

Παράδειγμα 2.2.2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ με $A \geq 0$. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων

της κάθε γραμμής είναι σταθερό και ίσο με 4. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=5$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$, με $\rho(A)=5$.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max\{|\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}|, |\alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}| + |\alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}|\} \\ &= \max\{5, 5, 5\} = 5 = \rho(A) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2.3

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ με $A \geq 0$. Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των στοιχείων

της κάθε στήλης είναι σταθερό και ίσο με 8. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13})$, με $\rho(A) = 8$.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 |\alpha_{ij}| \right\} = \max\{|\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}|, |\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}|, |\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}|\} \\ &= \max\{8, 8, 8\} = 8 = \rho(A) \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.2.1

Στην περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι στοχαστικός, είναι προφανές, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα ότι $\rho(A) = 1$

Πρόταση 2.2.1

Για κάθε μη αρνητικό πίνακα $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ με $A \leq B$, ισχύει $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Παράδειγμα 2.2.4

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ με $A \geq B$, διότι $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$, τότε

$\rho(A) \geq \rho(B)$ αφού:

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{41}), \lambda_2 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{41})$, με $\rho(A) = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{41})$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα B είναι $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ με $\rho(B) = 3$.

Είναι προφανές ότι $\rho(A) > \rho(B)$.

Πρόταση 2.2.2

Για κάθε μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ ισχύει ότι $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$, όπου \tilde{A} ένας κύριος υποπίνακας του A . Ειδικότερα ισχύει $\max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_{ii}\} \leq \rho(A)$.

Παράδειγμα 2.2.5

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ και ο κύριος υποπίνακας του $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας \tilde{A} έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2}, \lambda_2 = 1 - 2\sqrt{2}$
με $\rho(\tilde{A}) = 1 + 2\sqrt{2}$.

Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$,
με $\rho(A) = 3 + \sqrt{2}$

Είναι προφανές ότι $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$.

Επίσης ισχύει ότι $\max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_{ii}\} = \max\{1, 2, 1\} = 2 \leq \rho(A)$

Θεώρημα 2.2.2

Για κάθε μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A = [a_{ij}]$ ισχύει ότι

- $\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \right\}$
- $\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \right\}$

Παράδειγμα 2.2.6

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ με $A \geq 0$.

Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2}, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3 - \sqrt{2}$,
με $\rho(A) = 3 + \sqrt{2}$. Ισχύει ότι

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \right\} = \min\{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}, \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}\} = \min\{5, 3, 6\} = 3$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \right\} = \max\{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13}, \alpha_{21} + \alpha_{22} + \alpha_{23}, \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33}\} = \max\{5, 3, 6\} = 6$$

$$\min_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \right\} = \min\{\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}\} = \min\{6, 5, 3\} = 3$$

$$\max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} \right\} = \max\{\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}\} = \max\{6, 5, 3\} = 6$$

Είναι προφανές ότι ισχύει $3 \leq \rho(A) \leq 6$, οπότε επαληθεύεται το παραπάνω θεώρημα.

Πόρισμα 2.2.1

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A=[a_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0, \text{ τότε } \rho(A) > 0.$$

Πόρισμα 2.2.2

Για κάθε μη αρνητικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A=[a_{ij}]$ και για κάθε θετικό διάνυσμα

$x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι, αν υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί α, β τέτοιοι ώστε:

$$\text{Αν } \alpha x \leq Ax \leq \beta x \Rightarrow \alpha \leq \rho(A) \leq \beta$$

$$\text{Αν } \alpha x < Ax \Rightarrow \alpha < \rho(A)$$

$$\text{Αν } Ax < \beta x \Rightarrow \rho(A) < \beta$$

Απόδειξη:

Αν $\alpha x \leq Ax$, τότε $\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$ άρα και $\alpha \leq \rho(A)$ (1) (Από το θεώρημα 2.2.2).

Αν $Ax \leq \beta x$, τότε $\beta \geq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$ άρα και $\rho(A) \leq \beta$ (2) (Από το θεώρημα 2.2.2).

Από (1), (2), προκύπτει ότι $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.

Αν $\alpha x < Ax$, τότε υπάρχει ένα $\kappa > \alpha$, έτσι ώστε $\kappa x \leq Ax$, οπότε όπως δείξαμε παραπάνω θα ισχύει ότι $\rho(A) \geq \kappa > \alpha$, συνεπώς και $\rho(A) > \alpha$.

Αν $Ax < \beta x$, τότε υπάρχει ένα $\lambda < \beta$, έτσι ώστε $Ax \leq \lambda x$, οπότε όπως δείξαμε παραπάνω θα ισχύει ότι $\rho(A) \leq \lambda < \beta$, συνεπώς και $\rho(A) < \beta$.

Παράδειγμα 2.2.7

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ και το διάνυσμα $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Προφανώς ισχύει ότι

$$A \geq 0 \text{ και } x > 0.$$

Έστω $\alpha = 1/2$ και $\beta = 6$, τότε

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha x = \frac{1}{2}x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ και } \beta x = 6x = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{ Είναι}$$

$$\alpha x - Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -13/2 \\ -7/2 \end{pmatrix} \leq 0, \text{ άρα } \alpha x \leq Ax \text{ και}$$

$$Ax - \beta x = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \leq 0, \text{ \u03c1\u03b1 } Ax \leq \beta x, \text{ \u03c9\u03c4\u03b5 \u03c1\u03bf\u03ba\u03c5\u03c0\u03b5\u03b9 \u03c1\u03b1 } \alpha x \leq Ax \leq \beta x.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1=3, \lambda_2=0, \lambda_3=1$ και $\rho(A)=3$, \u03c4\u03c9\u03c4\u03b5 \u03b9\u03c3\u03c7\u03b5\u03b9
 $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.

Θε\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1 2.2.3

\u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u03c9 \u03bc\u03b7 \u03b1\u03c1\u03bd\u03b7\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc\u03c2 \u03c0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c2 $A \in M_n(\mathbb{R})$. \u038c\u03bd $x > 0$ \u03b5\u03bd\u03b1 \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5, \u03c4\u03c9\u03c4\u03b5 \u03b7 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03b9\u03c7\u03b7 \u03b9\u03b4\u03b9\u03c4\u03b9\u03bc\u03b7 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b7 \u03c6\u03b1\u03c3\u03bc\u03b1\u03c4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03b1 $\rho(A)$ \u03ba\u03b1\u03b9 \u03c0\u03c1\u03bf\u03c6\u03b1\u03bd\u03c9\u03c2 \u03b9\u03c3\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c9\u03c4\u03b9 $Ax = \rho(A)x$.

Α\u03c0\u03cc\u03b4\u03b5\u03b9\u03be\u03b9:

\u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u03c9 \u03bc\u03b7 \u03b1\u03c1\u03bd\u03b7\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc\u03c2 \u03c0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c2 $A \in M_n(\mathbb{R})$ \u03ba\u03b1\u03b9 $\lambda, x > 0$ \u03bc\u03b9\u03b1 \u03b9\u03b4\u03b9\u03c4\u03b9\u03bc\u03b7 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03c4\u03c9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03b9\u03c7\u03c9 \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5, \u03c9\u03c4\u03c9\u03c4\u03b5 $Ax = \lambda x$ (1). \u038c\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c0\u03c1\u03bf\u03c6\u03b1\u03bd\u03b5\u03c2 \u03c9\u03c4\u03b9 \u03b9\u03c3\u03c7\u03b5\u03b9 $Ax \geq 0$, \u03c1\u03b1 \u03ba\u03b1\u03b9 $\lambda x \geq 0$ ($A \geq 0$ \u03ba\u03b1\u03b9 $x > 0$). \u038c\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 $\lambda x \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$.
 \u038c\u03c0\u03b9\u03c3\u03b7\u03c2 \u03b7 (1) \u03b3\u03c1\u03ac\u03c6\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03ba\u03b1\u03b9 \u03c9\u03c2 \u03b5\u03be\u03b9\u03c3\u03b7: $\lambda x \leq Ax \leq \lambda x$, \u03c4\u03c9\u03c4\u03b5 \u03c3\u03c5\u03bc\u03c6\u03c9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03b5 \u03c4\u03c9 \u03c0\u03cc\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 2.2.1. \u038c\u03b1 \u03b9\u03c3\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c9\u03c4\u03b9 $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$, \u03c1\u03b1 $\lambda = \rho(A)$.

Π\u03b1\u03c1\u03ac\u03b4\u03b5\u03b9\u03bc\u03b1 2.2.8

\u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u03c9 \u03bc\u03b7 \u03b1\u03c1\u03bd\u03b7\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc\u03c2 \u03c0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ \u03bc\u03b5 \u03b9\u03b4\u03b9\u03c4\u03b9\u03bc\u03b5\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5\u03c2 \u03b1\u03c1\u03b9\u03b8\u03bc\u03bf\u03c5\u03c2 $\lambda_1=3, \lambda_2=1,$

$\lambda_3=0$ \u03ba\u03b9 $\rho(A)=3$.

\u038c\u03b9\u03b1 $\lambda_1=3$, \u03c4\u03c9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03b9\u03c7\u03c9 \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 $x=(1,1,2)^T$.

\u038c\u03b9\u03b1 $\lambda_2=1$, \u03c4\u03c9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03b9\u03c7\u03c9 \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 $x=(1,0,0)^T$.

\u038c\u03b9\u03b1 $\lambda_3=0$, \u03c4\u03c9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03b9\u03c7\u03c9 \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 $x=(2,-1,1)^T$.

\u038c\u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03c4\u03b7\u03c1\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c9\u03c4\u03b9 \u03c4\u03c9 \u03bc\u03cc\u03bd\u03bf \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c4\u03c9 \u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03c0\u03c9\u03c5 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03b9\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c3\u03c4\u03b7\u03bd \u03b9\u03b4\u03b9\u03c4\u03b9\u03bc\u03b7 $\lambda_1=3$, \u03b7 \u03c9\u03c0\u03cc\u03b1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03ba\u03b9 \u03b7 \u03c6\u03b1\u03c3\u03bc\u03b1\u03c4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03b1.

Π\u03cc\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 2.2.3

\u038c\u03c3\u03c4\u03c9 \u03c9 \u03bc\u03b7 \u03b1\u03c1\u03bd\u03b7\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc\u03c2 \u03c0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c2 $A \in M_n(\mathbb{R})$. \u038c\u03bd $x > 0$ \u03b5\u03bd\u03b1 \u03b8\u03b5\u03c4\u03b9\u03ba\u03cc \u03b9\u03b4\u03b9\u03b4\u03b9\u03b1\u03bd\u03c5\u03c3\u03bc\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5, \u03c4\u03c9\u03c4\u03b5

$$\rho(A) = \max_{x>0} \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} = \min_{x>0} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\}$$

Π\u03b1\u03c1\u03ac\u03b4\u03b5\u03b9\u03bc\u03b1 2.2.9

\u038c\u03c0\u03c9\u03c2 \u03b4\u03b5\u03b9\u03be\u03b1\u03bc\u03b5 \u03c3\u03c4\u03c9 \u03c0\u03b1\u03c1\u03ac\u03b4\u03b5\u03b9\u03bc\u03b1 2.2.8, \u03c9 \u03c0\u03b9\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ \u03b5\u03c7\u03b5\u03b9 \u03b9\u03b4\u03b9\u03c4\u03b9\u03bc\u03b5\u03c2 \u03c4\u03bf\u03c5\u03c2

αριθμούς $\lambda_1=3, \lambda_2=1, \lambda_3=0$ και $\rho(A)=3$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x=(1,1,2)^T$.
Θα δείξουμε ότι επαληθεύεται το πόρισμα 2.2.3υ6 για το διάνυσμα $x=(1,1,2)^T$.

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} = \min \left\{ \frac{1}{1}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2) + \frac{1}{1}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) + \frac{1}{2}(0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2) \right\}$$

$$= \min \{3, 3, 3\} = 3 = \rho(A)$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right\} = \max \left\{ \frac{1}{1}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2) + \frac{1}{1}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) + \frac{1}{2}(0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2) \right\}$$

$$= \max \{3, 3, 3\} = 3 = \rho(A)$$

Θεώρημα 2.2.4

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη αρνητικός πίνακας, τότε η φασματική του $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $x > 0$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Απόδειξη:

Έστω ο πίνακας $A = [a_{ij}] \geq 0$ και έστω $\kappa > 0$ ένας μικρός αριθμός. Θεωρούμε τον πίνακα $B(\kappa) = [a_{ij} + \kappa]$, τότε $B(\kappa) > 0$. Έστω $y(\kappa)$ το διάνυσμα Perron του πίνακα $B(\kappa)$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.5 και το πόρισμα 2.1.2 ισχύει ότι $y(\kappa) > 0$ και

$$\|y(\kappa)\|_1 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y(\kappa)_i = 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων $y(\kappa)$ του πίνακα $B(\kappa)$ ανήκουν στο συμπαγές σύνολο $C = \{y : y \in \mathbb{C}^n, \|y\|_1 = 1\}$, συνεπώς υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ για την οποία ισχύει $\lim_{\nu \rightarrow \infty} y(\kappa_\nu) = x$ (1) και $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \kappa_\nu = 0$ (2).

Επειδή ισχύει $\sum_{i=1}^n y(\kappa)_i = 1$, δεν μπορεί να ισχύει $x=0$, άρα $x > 0$.

Ισχύει ότι $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq y_{n+1} \geq \dots$, διότι η ακολουθία y_n είναι φθίνουσα, άρα και η ακολουθία $\{B(\kappa_\nu)\}$, με $\{B(\kappa_\nu)\} > 0$, είναι φθίνουσα ακολουθία., συνεπώς ισχύει

$$B(\kappa_\nu) \geq B(\kappa_{\nu+1}), \quad \forall \nu=1, 2, \dots$$

Από την Πρόταση 2.2.1 θα ισχύει ότι $\rho(B(\kappa_\nu)) \geq \rho(B(\kappa_{\nu+1})) \geq \rho(A) \quad \forall \nu=1, 2, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι και η ακολουθία $\{\rho(B(\kappa_\nu))\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία.

Επειδή $\{\rho(B(\kappa_\nu))\} \geq 0$, προκύπτει ότι η ακολουθία $\{\rho(B(\kappa_\nu))\}$ είναι συγκλίνουσα, οπότε θα ισχύει ότι $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(B(\kappa_\nu)) = \rho$ (4), με $\rho \geq \rho(A)$ (5)

Από (1), (2), (3), (4) έχουμε ότι

$$Ax = \lim_{\nu \rightarrow \infty} B(\kappa_\nu) y(\kappa_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(B(\kappa_\nu)) y(\kappa_\nu) = \left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \rho(B(\kappa_\nu)) \right) \cdot \left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} y(\kappa_\nu) \right) = \rho x,$$

δηλαδή $Ax = \rho x$, $x \neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός ρ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , άρα ισχύει $\rho \leq \rho(A)$. (6)

Από (5), (6) προκύπτει ότι $\rho = \rho(A)$

Λήμμα 2.2.1

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του, τότε οι

ιδιοτιμές του πίνακα $I+A$ είναι $1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \dots, 1+\lambda_n$ και επιπλέον ισχύει $\rho(I+A) \leq \rho(A) + 1$.
Αν ο πίνακας A είναι μη αρνητικός, τότε $\rho(I+A) = \rho(A) + 1$

2.3. Γραφήματα και Πίνακες

Στην ενότητα 3 του δεύτερου κεφαλαίου, θα κάνουμε μια πρώτη αναφορά στα γραφήματα στα συνεκτικά γραφήματα και στους πίνακες γειτνίασης κ.α. Οι ορισμοί αυτοί θα βοηθήσουν στην κατανόηση της συγκεκριμένης εργασίας.

Ορισμός 2.3.1

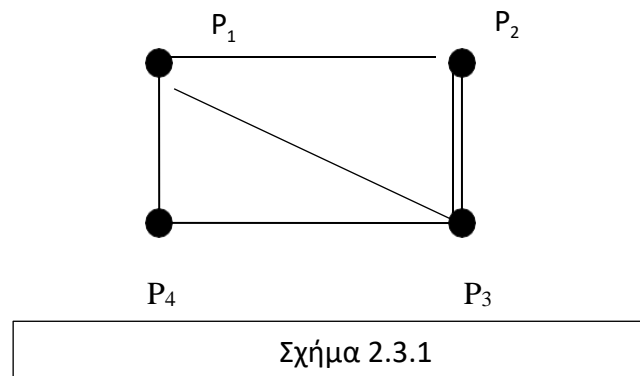
Γράφημα $G=(P, E)$ δίνεται από ένα σύνολο κόμβων P και ένα σύνολο ακμών E , που συνδέουν τους κόμβους μεταξύ τους.

Ορισμός 2.3.2

Βαθμός ενός κόμβου P_i είναι το σύνολο των ακμών που προσπίπτουν στον κόμβο P_i , και συμβολίζεται $d(P_i)$.

Παράδειγμα 2.3.1

Για το γράφημα του παρακάτω σχήματος είναι $d(P_1)=d(P_3)=3$ και $d(P_2)=d(P_4)=2$



Ορισμός 2.3.3

Μονοπάτι λέγεται μια ακολουθία από τόξα, όπου κάθε ακμή εμφανίζεται μόνο μία φορά.

Ορισμός 2.3.4

Κατευθυνόμενο μονοπάτι ενός γραφήματος G είναι μια ακολουθία που αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη κόμβων και από κατευθυνόμενα τόξα $P_{i1}P_{i2}, P_{i2}P_{i3}, P_{i3}P_{i4}, \dots$, τα οποία είναι διαδοχικά. Ένα τέτοιο γράφημα δεν έχει παράλληλες ακμές. Το μήκος ενός μονοπατιού είναι ίσο με το πλήθος των ακμών του.

Θεώρημα 2.3.1 (Θεωρία Γραφημάτων)

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και οι κόμβοι P_1, P_2, \dots, P_n . Κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$, σχεδιάζοντας ένα τόξο από το P_i στο P_j για κάθε $a_{ij} \neq 0$. Στην περίπτωση όπου $a_{ij} = 0$, τότε σχεδιάζουμε ένα κύκλο που ξεκινάει και καταλήγει στο ίδιο σημείο.

Ορισμός 2.3.5

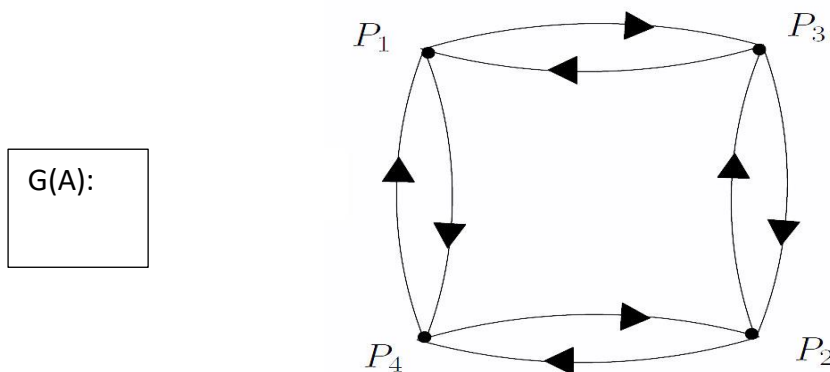
Ένα γράφημα λέμε ότι είναι **συνεκτικό**, αν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j για κάθε i, j με $i \neq j$. Το συνεκτικό γράφημα δεν έχει απομονωμένο κόμβο.

Ορισμός 2.3.6

Ένα γράφημα $G(A)$ λέμε ότι είναι **ισχυρά συνεκτικό**, αν υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j και από τον κόμβο P_j στον κόμβο P_i για κάθε i, j , δηλαδή οι κόμβοι P_i, P_j βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο.

Παράδειγμα 2.3.2

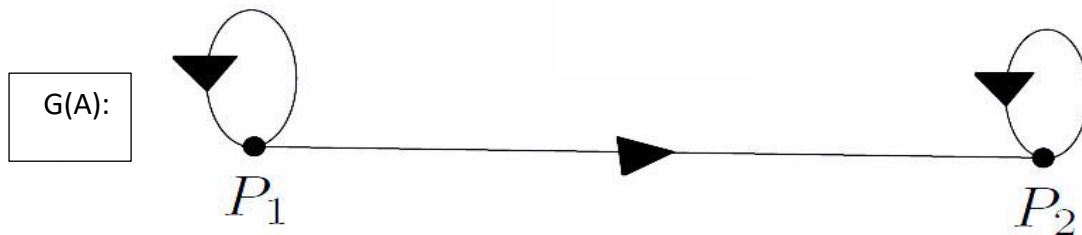
Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, τότε γράφημα του παρακάτω σχήματος είναι:



Σχήμα 2.3.2- Ισχυρά Συνεκτικό Γράφημα

Παράδειγμα 2.3.3

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε $G(A)$:



Σχήμα 2.3.3-Μη συνεκτικό γράφημα

Ορισμός 2.3.7

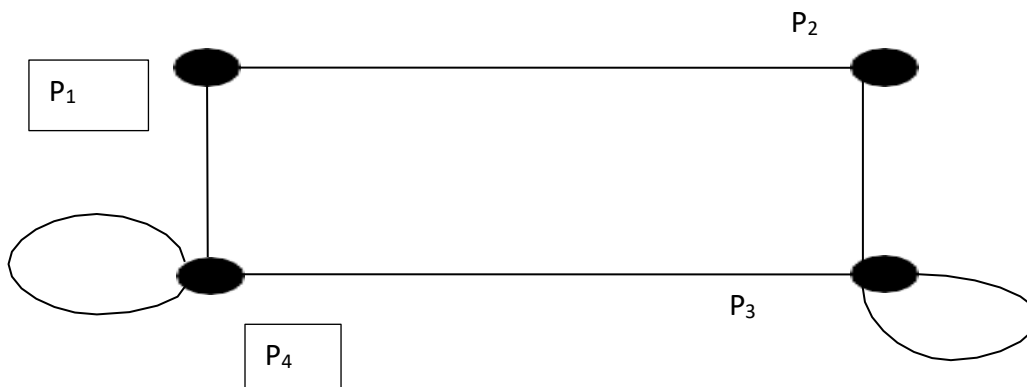
Έστω το γράφημα $G(P, E)$, $V = \{ P_1, P_2, \dots, P_n \}$ το σύνολο των κόμβων του γραφήματος.

Πίνακας γειτνίασης του γραφήματος, ονομάζεται ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A = [a_{ij}]$, όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (P_i, P_j) \in E \\ 0, & (P_i, P_j) \notin E \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.3.4

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας γειτνίασης του παρακάτω γραφήματος



Σχήμα 2.3.4-Γράφημα του πίνακα γεινίασης

Ορισμός 2.3.8.

Έστω A ο πίνακας γεινίασης του γραφήματος $G(P, E)$. Ορίζουμε το γράφημα $G^{(k)} = (P^{(k)}, E^{(k)})$ με σύνολο κορυφών $P = P^{(k)} = \{P_1, \dots, P_n\}$. Τότε υπάρχει ένα τόξο $(P_i, P_j) \in E^{(k)}$ του $G^{(k)}$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα μονοπάτι του γραφήματος G , μήκους k ανάμεσα στους κόμβους P_i και P_j για κάθε $i, j=1, 2, \dots, n$.

Θεώρημα 2.3.2.

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $G(A)$ το γράφημα του πίνακα A , τότε ισχύει $G^{(k)} = G(A^k)$ με $k \in \mathbb{Z}$, όπου $G^{(k)}$ το γράφημα που ορίσαμε στον ορισμό 2.3.7.

Απόδειξη:

Αν $k=1$, τότε είναι προφανές.

Έστω $k=2$ και ας θεωρήσουμε $\alpha_{ij}^{(2)}$ το στοιχείο του πίνακα A^2 , που αντιστοιχεί στη θέση

$$(i, j), \text{ τότε } \alpha_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^n \alpha_{im} \alpha_{mj} \quad (1).$$

Αν $\alpha_{ij}^{(2)} \neq 0$, $(P_i, P_j) \in E(A^2)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός m τέτοιος ώστε τουλάχιστον ένα $\alpha_{im} \alpha_{mj}$ δεν είναι μηδέν. Τότε για κάθε m , έχουμε $\alpha_{im} \neq 0$ και $\alpha_{mj} \neq 0$, οπότε $(P_i, P_m) \in E$ και $(P_m, P_j) \in E$. Συνεπώς υπάρχει μονοπάτι $P_i \rightarrow P_m \rightarrow P_j$ μήκους 2 του γραφήματος $G(A)$, άρα από τον ορισμό του γραφήματος G^2 έχουμε $(P_i, P_j) \in E^2$. Αν όμως $\alpha_{ij} = 0$, τότε όλοι οι όροι του αθροίσματος της σχέσης (1) είναι μηδέν, οπότε δεν υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j .

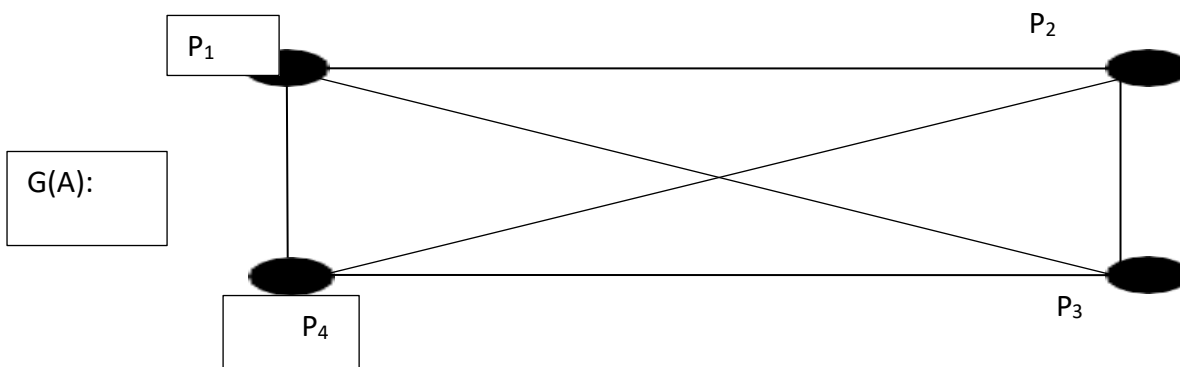
Ομοίως δουλεύουμε αν $k > 2$.

Πρόταση 2.3.1.

Αν A ο πίνακας γειτνίασης ενός γραφήματος G , τότε κάθε στοιχείο του πίνακα $A^k = [\alpha_{ij}^{(k)}]$ με $k \geq 1$, δίνει το πλήθος των διαφορετικών (P_i, P_j) μονοπατιών μήκους k .

Παράδειγμα 2.3.5

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $G(A)$ το γράφημα του



Σχήμα 2.3.5 – Γράφημα Πίνακα

Έστω m_{ij} το μήκος του περιπάτου από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j .
Είναι $a_{11}=0$, οπότε $m_{11}=0$, άρα δεν υπάρχει περίπατος από τον κόμβο P_1 στον κόμβο P_1 .
Είναι $a_{12}=1$, οπότε $m_{12}=1$, οπότε το πλήθος των περιπάτων μήκους 1 από τον κόμβο P_1 στον κόμβο P_2 είναι 1.

Ομοίως δουλεύουμε με όλα τα στοιχεία του πίνακα A .

$$\text{Είναι } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Έστω $\alpha_{ij}^{(2)}$ τα στοιχεία του πίνακα A^2 , τότε

Είναι $\alpha_{11}^{(2)} = 3$, άρα το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από τον κόμβο P_1 στον κόμβο P_1 είναι 3.

Είναι $\alpha_{12}^{(2)} = 2$, άρα το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από τον κόμβο P_1 στον κόμβο P_2 είναι 2 κ.ο.κ.

Θεώρημα 2.3.3

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μήκους m του γραφήματος $G(A)$ από τον κόμβο P_i στον κόμβο P_j αν και μόνο αν $(|A|^m)_{ij} \neq 0$.

Ορισμός 2.3.9.

Οι κόμβοι μιας ακμής ονομάζονται **τερματικά σημεία**. Αν τα τερματικά σημεία μιας ακμής ταυτίζονται, τότε η ακμή λέγεται **βρόγχος (loop)**.

2.4 Μη Αρνητικοί Μη Υποβιβάσιμοι Πίνακες

Στην ενότητα 4 του δεύτερου κεφαλαίου θα αναφερθούμε στους μη αρνητικούς μη υποβιβάσιμους πίνακες και θα τους συνδέσουμε με τα συνεκτικά γραφήματα. Θα δούμε τι ισχύει για την φασματική ακτίνα αυτών των πινάκων και θα αποδείξουμε το θεώρημα Perron -Frobenius για τους πίνακες αυτούς.

Ορισμός 2.4.1

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, ονομάζεται **υποβιβάσιμος (reducible)** αν $n > 2$ και επιπλέον υπάρχει πίνακας μετάθεσης P έτσι ώστε ο πίνακας $P^T A P$ να είναι άνω τριγωνικός,

$$\text{δηλαδή } P^T A P = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

όπου B υποπίνακας με $B \in M_r(\mathbb{R})$, D υποπίνακας με $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ και C υποπίνακας με $D \in M_{n-r}(\mathbb{R})$ όπου $1 \leq r < n$.

Ορισμός 2.4.2

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **μη υποβιβάσιμος (irreducible)**, αν δεν είναι υποβιβάσιμος.

Παρατήρηση 2.4.1

- Κάθε μη υποβιβάσιμος πίνακας έχει μη μηδενικές γραμμές και στήλες.
- Αν κάθε στοιχείο του πίνακα A είναι μη μηδενικό, τότε ο A είναι μη υποβιβάσιμος. Συνεπώς κάθε θετικός πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος.
- Αν ο πίνακας A είναι υποβιβάσιμος, τότε έχει ο πίνακας A έχει τουλάχιστον $(n-1)$ μηδενικά στοιχεία.
- Ένας μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι μη υποβιβάσιμος, όταν όλα τα στοιχεία του που βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο του, είναι μηδέν.

- Η μορφή $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ λέγεται Κανονική Μορφή του Frobenius.

Πρόταση 2.4.1

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $\rho(B) < \rho(A)$, όπου B ένας κύριος τετραγωνικός υποπίνακας του πίνακα A .

Θεώρημα 2.4.1

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $\rho(A) > 0$.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με την παρατήρηση 2.3.1., το κατώτατο άθροισμα των στοιχείων μιας γραμμής είναι θετικό, οπότε με τη βοήθεια του θεωρήματος 2.2.2. προκύπτει ότι $\rho(A) > 0$.

Λήμμα 2.4.1

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, για τον οποίον ισχύει $Ax=0$ με $x > 0$, τότε $A=0$.

Απόδειξη

Επειδή $Ax=0$, προκύπτει ότι κάθε στοιχείο του πίνακα Ax είναι μηδέν. Για κάθε στοιχείο

του πίνακα Ax ισχύει $(Ax)_i = \sum_{\kappa=1}^n \alpha_{i\kappa} x_{\kappa}$ για κάθε $\alpha_{i\kappa} \geq 0$, $x_{\kappa} > 0$. Οπότε

$\alpha_{i\kappa} = 0$ για κάθε $1 \leq i, \kappa \leq n$ ή $A=0$.

Θεώρημα 2.4.2

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε η φασματική του ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Απόδειξη:

Ο πίνακας A είναι μη αρνητικός, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.4. υπάρχει διάνυσμα $x > 0$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$. Οπότε για το διάνυσμα x θα ισχύει ότι

$$(I + A)x = [1 + \rho(A)]x, \text{ άρα } (I + A)^{n-1}x = [1 + \rho(A)]^{n-1}x \quad (1).$$

Αφού ο πίνακας A είναι μη ανάγωγος, προκύπτει από την πρόταση 2.3.2., ότι ο πίνακας $(I+A)^{n-1}$ είναι θετικός. Αφού ο πίνακας $(I+A)^{n-1}$ είναι θετικός, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.2. προκύπτει ότι $(I+A)^{n-1}x > 0$, αφού $x > 0$.

Συνεπώς, λόγω της (1), προκύπτει ότι $[1 + \rho(A)]^{n-1}x > 0$, άρα και $x > 0$.

Θεώρημα 2.4.3

Έστω ο μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος.
2. Το γράφημα $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.
3. Ισχύει $(A+I)^{n-1} > 0$

Απόδειξη

(1) \Rightarrow (2): Έστω ότι το $G(A)$ δεν είναι ένα ισχυρά συνεκτικό γράφημα, τότε υπάρχει ένα ζεύγος κόμβων (p_x, p_z) για το οποίο το μονοπάτι $p_x \rightarrow \dots \rightarrow p_z$ δεν είναι κατευθυνόμενο.

Έστω $P(A)$ το σύνολο των κόμβων του γραφήματος του πίνακα A , $P_x = \{ p \in P(A) :$

υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο p στον κόμβο $p_x \}$ και

$P_z = \{ p \in P(A) : \text{υπάρχει μονοπάτι από τον κόμβο } p_z \text{ στον κόμβο } p \}$. Παρατηρούμε ότι

$p_x \in P_x$ και $p_z \in P_z$, διότι υπάρχει ένα κατευθυνόμενο μονοπάτι μήκους 0 από κάθε κόμβο

του γραφήματος $G(A)$, στον εαυτό του, οπότε $p_x, p_z \neq 0$. Αν ο κόμβος $p_w \in P_z$, τότε δεν

είναι γειτονικός με κανέναν από τους κόμβους του συνόλου P_x , διότι αν ήταν, θα

μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το τόξο για να δημιουργήσουμε ένα μονοπάτι

από το κόμβο p_z στον κόμβο p_x διαμέσου του κόμβου p_w . Αν τώρα αντικαταστήσουμε τις

σειρές και τις στήλες του πίνακα A με τον πίνακα μετάθεσης P , έτσι ώστε οι σειρές /

στήλες που αντιστοιχούν στους κόμβους του συνόλου P_x , έρχονται πριν από τις σειρές /

στήλες που αντιστοιχούν στους κόμβους του συνόλου P_z . Ο πίνακας που προκύπτει έχει

τη μορφή $P^T A P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, αλλά αφού δεν υπάρχουν τόξα από τους κόμβους του

συνόλου P_z στους κόμβους του συνόλου P_x , πρέπει $A_{21} = 0$. Αν θέλουμε, μπορούμε να

ονομάσουμε τα μπλοκ $A_{11} = X$, $A_{12} = Y$ και $A_{22} = Z$ έτσι ώστε να έχουμε τη μορφή του

πίνακα από τον ορισμό 2.4.1. Οπότε συμπεραίνουμε ότι ο A είναι υποβιβάσιμος. Άρα

δείξαμε ότι αν το γράφημα $G(A)$ δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, τότε ο πίνακας A είναι

ανάγωγος. Οπότε προκύπτει ότι αν ο πίνακας A είναι μη ανάγωγος, τότε το γράφημα

$G(A)$, είναι ισχυρά συνεκτικό.

(2) \Rightarrow (1): Έστω ότι ο πίνακας A είναι υποβιβάσιμος, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.4.1,

υπάρχει πίνακας μετάθεσης P έτσι ώστε ο πίνακας $P^T A P$ να είναι άνω τριγωνικός. Έστω

$B = P^T A P$, τότε

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} & & & \\ \vdots & \ddots & & & & * \\ \beta_{r1} & 0 & \beta_{rr} & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{(r+1)(r+1)} & \cdots & \beta_{(r+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n(r+1)} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

Από το γράφημα $G(B)$ ξεκινάμε ένα μονοπάτι στον κόμβο P_n . Ο μοναδικός δρόμος για να

πάμε στον κόμβο P_1 είναι σε κάποιο σημείο του μονοπατιού να χρησιμοποιήσουμε το

τόξο (P_i, P_j) , όπου $P_i \in \{P_{r+1}, \dots, P_n\}$ και $P_j \in \{P_1, \dots, P_r\}$, όμως $\beta_{ij} = 0$ για κάθε i και j , άρα

δεν υπάρχει τέτοιο τόξο, συνεπώς δεν υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα στον κόμβο P_n και P_1 . Άρα το γράφημα $G(B)$ δεν είναι ισχυρά συνεκτικό. Αφού $G(B) = G(A)$, προκύπτει ότι ούτε το γράφημα $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.

(2) \Rightarrow (3): Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $AI=IA=$, τότε από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε

$$(I+A)^{n-1} = I + \binom{n}{n-1}A + \binom{n}{n-2}A^2 + \dots + \binom{n}{1}A^{n-2} + A^{n-1}. \quad (1)$$

Το γράφημα $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό οπότε για το κατευθυνόμενο γράφημα και για κάθε ζεύγη κόμβων, προκύπτει ότι $(P_i, P_j) \in E^{(k)}$ για κάποιο $k=1,2,\dots,n$. Έστω $\alpha_{ij}^{(k)}$ τα στοιχεία του πίνακα A^k , οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.2 προκύπτει ότι για κάθε $i, j=1,2,\dots,n$, ότι $\alpha_{ij}^{(k)} > 0$ για τουλάχιστον ένα $k=1,2,\dots,n-1$. Αυτό ακριβώς χρειάζεται το άθροισμα της σχέσης (1) να είναι αυστηρά θετικό, οπότε $(I+A)^{n-1} > 0$.

(3) \Rightarrow (2): Ας επιλέξουμε αυθαίρετα δύο δείκτες i, j , οπότε σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα και από τη σχέση (1) έχουμε $(A+I)^{n-1} > 0$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $k=1,2,\dots,n-1$, τέτοιο ώστε $\alpha_{ij}^{(k)} > 0$, άρα υπάρχει τόξο $(P_i, P_j) \in E^{(k)}$, άρα από το θεώρημα 2.3.8, υπάρχει μονοπάτι μήκους k του γραφήματος $G(A)$. Αφού ο δείκτες i, j είναι αυθαίρετοι, υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κόμβων του $G(A)$, οπότε το κατευθυνόμενο γράφημα $G(A)$ είναι ισχυρά συνεκτικό.

Θεώρημα 2.4.4

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ για τον οποίον ισχύει $|B| \leq A$, τότε $\rho(B) \leq \rho(A)$. Αν επίσης ισχύει και $\rho(B) = \rho(A)$ και ο αριθμός $\lambda = e^{i\varphi} \rho(B)$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα B , τότε υπάρχουν αριθμοί $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $B = e^{i\varphi} D A D^{-1}$, όπου $D = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n})$.

Απόδειξη:

Επειδή $|B| \leq A$, τότε από την πρόταση 2.2.1. θα ισχύει $\rho(B) \leq \rho(A)$.

Αφού $\rho(A) = \rho(B)$ και λ μια ιδιοτιμή του πίνακα B , υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $Bx = \lambda x$, όπου $|\lambda| = \rho(B) = \rho(A)$. Άρα $\rho(A)|x| = |\lambda x| = |Bx| \leq |B||x| \leq A|x|$. Επίσης, αφού A μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας, προκύπτει, από το θεώρημά 2.4.2.

ότι $A|x| = \rho(A)|x|$, άρα και

$$|Bx| = |B||x| = |\lambda||x| = \rho(B)|x| = \rho(A)|x| = A|x| \quad (1),$$

οπότε από το θεώρημα 2.4.2. έχουμε ότι $|x| > 0$. Όμως $|B| \leq A$ άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $|B| = A$.

Έστω ο πίνακας $D = \text{diag}\left(\left(\frac{x_1}{|x_1|}, \frac{x_2}{|x_2|}, \dots, \frac{x_n}{|x_n|}\right)\right)$ και ας ορίσουμε γωνία φ_k έτσι ώστε να

ισχύει $e^{i\varphi_\kappa} = \frac{x_\kappa}{|x_\kappa|}$, $\kappa=1,2,\dots,n$, τότε $D = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n})$.

Είναι

$$D|x| = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|x_1|} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{|x_2|} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{x_n}{|x_n|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x, \text{ διότι } \left| \frac{x_\kappa}{|x_\kappa|} \right| \text{ για κάθε } \kappa.$$

Από υπόθεση, ο αριθμός $\lambda = e^{i\varphi} \rho(A)$ μια ιδιοτιμή του πίνακα B, τότε ισχύει

$$Bx = \lambda x \Leftrightarrow Bx = \rho(A)e^{i\varphi} x \Leftrightarrow BD|x| = \rho(A)e^{i\varphi} D|x| \Leftrightarrow \rho(A)|x| = e^{-i\varphi} D^{-1}BD|x| \quad (2)$$

$$\text{Όμως } A|x| = \rho(A)|x| \quad (3)$$

Από (2), (3) και επειδή $|x| > 0$ προκύπτει ότι $e^{-i\varphi} D^{-1}BD = A \Leftrightarrow B = e^{i\varphi} DAD^{-1}$.

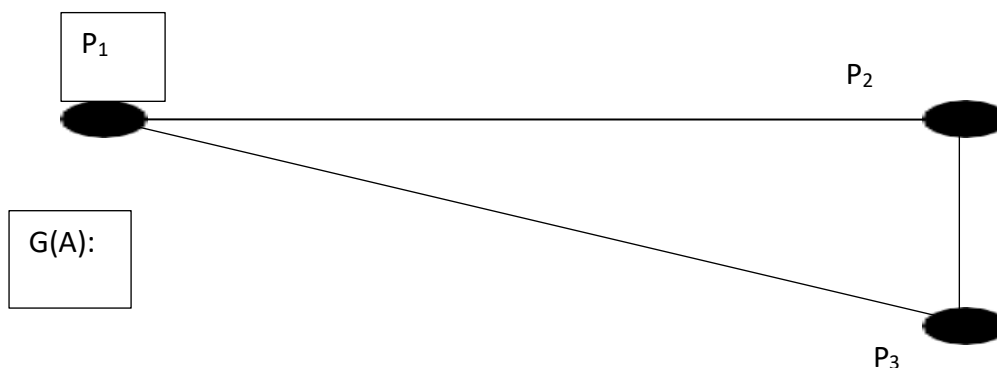
Θεώρημα 2.4.5

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ο πίνακας A έχει $\kappa \geq 1$ διακριτές ιδιοτιμές λ_ρ με απόλυτη τιμή $\rho(A)$, τότε κάθε ιδιοτιμή λ_ρ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ένα και γράφονται στη μορφή $\lambda_\rho = e^{\frac{2\pi i \rho}{\kappa}} \rho(A)$, όπου $\rho=0, 1, \dots, \kappa-1$.

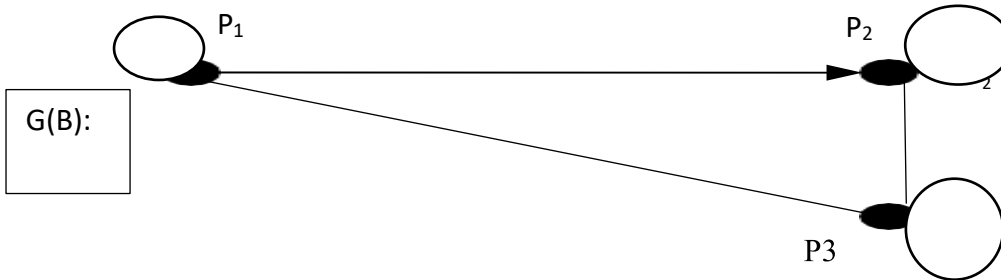
Επιπλέον, αν ο πίνακας A έχει $m > 1$ ιδιοτιμές απόλυτου τιμής r, όπου $r < \rho(A)$, τότε ο αριθμός κ διαιρεί τον αριθμό m. Στην πραγματικότητα το σύνολο των ιδιοτιμών με απόλυτη τιμή r παραμένει αναλλοίωτη από τον πολλαπλασιασμό με τον αριθμό $e^{\frac{2\pi i \rho}{\kappa}}$.

Παράδειγμα 2.4.1

Είναι



Σχήμα 2.4.1 - Γράφημα Μη Υποβιβάσιμου Πίνακα



Σχήμα 2.4.2 - Γράφημα Μη Υποβιβάσιμου Πίνακα

Έστω οι πίνακες $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Οι πίνακες A, B είναι μη

υποβιβάσιμοι διότι έχουν ισχυρά συνεκτικά γραφήματα. Ο πίνακας A έχει 3 ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{3}, \lambda_3 = -\frac{1}{3}$ με $\rho(A) = \frac{1}{3}$, άρα ο πίνακας A έχει δύο ιδιοτιμές απολύτου τιμής

$\rho(A)$ της μορφής $\lambda_\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}\rho} = e^{\pi i \rho}$.

Ορισμός 2.4.3

Για κάθε μη αρνητικό και μη υποβιβάσιμο πίνακα A, η ιδιοτιμή $\rho(A)$ λέγεται **ρίζα Perron** του A και το αντίστοιχο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα x καλείται **διάνυσμα Perron**.

Πόρισμα 2.4.1

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας A, $\rho(A)$ η ρίζα Perron με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα w, τότε υπάρχει θετικό διάνυσμα $x = \frac{w}{\|w\|_1}$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$. Για το

διάνυσμα x ισχύει $\|x\|_1 = 1$. Το διάνυσμα x είναι το διάνυσμα Perron του Ορισμού 2.4.3

Παράδειγμα 2.4.2

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4$ με αντίστοιχα

ιδιοδιάνυσμα $x_1 = [-1, 1]^T$ και $x_2 = [1, 1]^T$. Ο πίνακας A είναι μη υποβιβάσιμος με $\rho(A) = 4$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.1. το $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο θετικό ιδιοδιάνυσμα για το οποίο ισχύει $Ax = \rho(A)x$. Ο αριθμός $\rho(A) = 4$ είναι η ρίζα Perron και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $w = [1, 1]^T$. Το διάνυσμα Perron είναι

$$x = \frac{w}{\|w\|_1} = \frac{1}{|1| + |1|} (1, 1)^T = \frac{1}{2} (1, 1)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ και ισχύει } \|x\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Θεώρημα 2.4.6

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε η φασματική του ακτίνα $\rho(A)$ έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 1.

Απόδειξη:

Έστω ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A πολλαπλότητας $\kappa > 1$, τότε και η ιδιοτιμή $1 + \rho(A)$ θα έχει πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1. Όμως $(I + A)^{n-1} > 0$, άρα η ιδιοτιμή $\rho[(I + A)^{n-1}] = [1 + \rho(A)]^{n-1}$, σύμφωνα με το θεώρημα 2.1.4., έχει πολλαπλότητα ένα. Οπότε ο αρχικός ισχυρισμός είναι άτοπος. Άρα η ιδιοτιμή $\rho(A)$ έχει πολλαπλότητα ένα.

Θεώρημα 2.4.7

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $y^T > 0$, τέτοιο ώστε $y^T A = \rho(A)y^T$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι οι πίνακες A και A^T , έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, οπότε $\rho(A^T) = \rho(A)$. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.4.2 υπάρχει μοναδικό διάνυσμα y , τέτοιο ώστε $A^T y = \rho(A)y$.

Συνεπώς: $A^T y = \rho(A)y \Leftrightarrow (A^T y)^T = (\rho(A)y)^T \Leftrightarrow y^T A = \rho(A)y^T$

Το διάνυσμα y είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron.

Θεώρημα 2.4.8 (Frobenius)

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε:

1. Για την φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ισχύει ότι $\rho(A) > 0$.
2. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .
3. Υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα $x > 0$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$ και $\|x\|_1 = 1$.
4. Αν ο πίνακας A έχει $\kappa > 1$ διακριτές ιδιοτιμές με απόλυτη τιμή $\rho(A)$, τότε κάθε μία από αυτές έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ένα.
5. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $y^T > 0$, τέτοιο ώστε $y^T A = \rho(A)y^T$ και $x^T y = 1$, όπου x και y το δεξί και το αριστερό διάνυσμα Perron αντίστοιχα.

Παράδειγμα 2.4.3

Έστω ο μη αρνητικός, μη υποβιβάσιμος πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Ο πίνακας έχει 3 ιδιοτιμές: $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\lambda_3 = -1$ με

$\rho(A) = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Παρατηρούμε ότι $\rho(A) > 0$ πολλαπλότητας ένα,

- Υπάρχει θετικό διάνυσμα $x = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{11+3\sqrt{13}}, \frac{5+\sqrt{13}}{11+3\sqrt{13}}, \frac{3+\sqrt{13}}{11+3\sqrt{13}} \right)^T$ που

αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ για το οποίο ισχύει $Ax = \rho(A)x$ και $\|x\|_1 = 1$.

- Είναι $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Γνωρίζουμε ότι $\rho(A) = \rho(A^T) = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ και ένα

αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A^T δηλαδή το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του

πίνακα A είναι $y = \frac{47+13\sqrt{13}}{39+11\sqrt{13}} \left(\frac{3+\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}}, \frac{3+\sqrt{13}}{5+\sqrt{13}}, 1 \right)^T$ και $x^T y = 1$.

2.5 Μη Αρνητικοί Μη Υποβιβάσιμοι Αρχικοί Πίνακες

Στην ενότητα 5 του δεύτερου κεφαλαίου θα δούμε μια κατηγορία μη αρνητικών μη υποβιβάσιμων πινάκων, τους αρχικούς πίνακες. Θα δώσουμε τον ορισμό πίνακα με κυκλικό δείκτη k , θα συνδέσουμε τους αρχικούς πίνακες με τα γραφήματα τους και τέλος θα επεκτείνουμε το θεώρημα Perron-Frobenius για τους πίνακες αυτούς.

Ορισμός 2.5.1

Ένας μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **αρχικός (primitive)** αν είναι μη υποβιβάσιμος και έχει μόνο μία ιδιοτιμή μέγιστου μέτρου.

Ορισμός 2.5.2

Ένας μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **μη αρχικός (imprimitive)** αν έχει $\kappa > 1$ ιδιοτιμές μεγίστου μέτρου.

Παράδειγμα 2.5.1

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ δεν είναι αρχικός, διότι $\sigma(A) = \{-1, 1, 0\}$ και έχει δύο ιδιοτιμές μεγίστου μέτρου.

Ο $B = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αρχικός, διότι $\sigma(B) = \{\sqrt{3}, 0, 0\}$, άρα έχει μόνο μια ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου.

Πρόταση 2.5.1

Έστω ο μη υποβιβάσιμος, μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A = (a_{ij})$. Αν $a_{ij} > 0$ για κάθε i, j , τότε $A^{n-1} > 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι $a_{ij} > 0$ και ας θεωρήσουμε τον αριθμό $m = \min\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.

Έστω ο πίνακας $C = A - \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\} \geq 0$. Αφού ο πίνακας είναι μη υποβιβάσιμος, προκύπτει ότι και ο πίνακας C είναι μη υποβιβάσιμος.

Από το θεώρημα 2.4.3 προκύπτει ότι

$$A^{n-1} \geq m^{n-1} \left(I + \frac{1}{m} C \right)^{n-1} > 0$$

Θεώρημα 2.5.1

Έστω ο αρχικός, μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε ισχύει $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\rho(A)} \right)^\kappa = xy^T$,

όπου x το δεξί ιδιοδιάνυσμα Perron και y το αριστερό ιδιοδιάνυσμα Perron. Επίσης ισχύει $y^T x = 1$.

Απόδειξη

Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 2.1.2

Θεώρημα 2.5.2

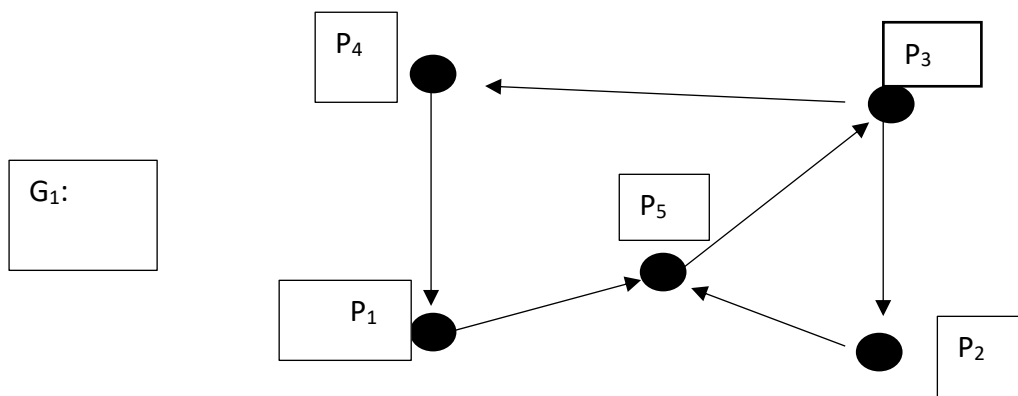
Ένας μη αρνητικός τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι **αρχικός (primitive)** αν και μόνο αν $A^\kappa > 0$ για κάποιον αριθμό $\kappa > 0$.

Ορισμός 2.5.3

Έστω $G=(P, E)$ ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα. Ορίζουμε ως κ το Μ.Κ.Δ. των μηκών των κλειστών μονοπατιών του γραφήματος G . Αν $\kappa=1$, το γράφημα G είναι αρχικό, ενώ αν $\kappa > 1$, το γράφημα είναι μη αρχικό.

Παράδειγμα 2.5.2

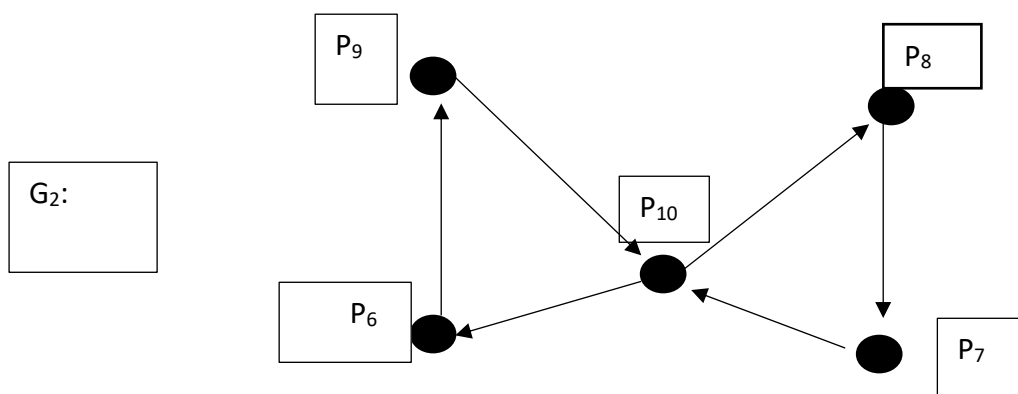
Έστω G_1, G_2 τα κατευθυνόμενα γραφήματα που φαίνονται παρακάτω. Όπως φαίνεται, σε καθένα από αυτά υπάρχει μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους κόμβων, οπότε τα γραφήματα είναι ισχυρά συνεκτικά.



Σχήμα 2.5.1 – Γράφημα Αρχικού Πίνακα

Ας θεωρήσουμε τα κλειστά μονοπάτια $C_1 : P_2 \rightarrow P_5 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2$ και $C_2 : P_1 \rightarrow P_5 \rightarrow P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1$ του γραφήματος G_1 . Τότε $|C_1|=3$ και $|C_2|=4$, οπότε

Μ.Κ.Δ. $(|C_1|, |C_2|) = \text{Μ.Κ.Δ.}(3, 4) = 1$. Συνεπώς το γράφημα G_1 είναι αρχικό.



Σχήμα 2.5.2- Γράφημα Μη Αρχικού Πίνακα

Παρατηρούμε ότι στο γράφημα G_2 , γύρω από τον κόμβο P_{10} , υπάρχουν δύο κύκλοι με 3 ακμές. Οπότε τα μήκη αυτών των κύκλων μπορεί να είναι $\{0, 3, 6, 9, \dots\}$, δηλαδή τα πολλαπλάσια του 3. Οπότε ο Μ.Κ.Δ. όλων αυτών των κλειστών μονοπατιών είναι 3. Άρα το γράφημα G_2 δεν είναι αρχικό.

Θεώρημα 2.5.2

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $G(A)$ το γράφημα του πίνακα A . Ο πίνακας A είναι αρχικός αν και μόνο αν το γράφημα $G(A)$ είναι αρχικό.

Παρατήρηση 2.5.1

Το γράφημα $G(A)$ ενός θετικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ αποτελείται από n βρόγχους. Οι βρόγχοι αυτοί είναι κλειστά μονοπάτια μήκους 1. Οπότε αν θεωρήσουμε μ το μήκος κάθε άλλου κλειστού μονοπατιού του γραφήματος $G(A)$, έχουμε $\text{Μ.Κ.Δ.}(1, \mu) = 1$, άρα από τον ορισμό 2.5.3 προκύπτει ότι ο θετικός πίνακας A είναι αρχικός.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι βρόγχοι έχουν μεγάλο αντίκτυπο, στο αν ένα γράφημα είναι αρχικό. Ένας βρόγχος σε ένα γράφημα $G(A)$ ενός πίνακα $A \geq 0$, αντιστοιχεί σε ένα θετικό διαγώνιο στοιχείο $a_{ii} > 0$, $i=1, 2, \dots, n$. Οπότε προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.3

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν $a_{ii} > 0$ για κάποιο $i=1, 2, \dots, n$, τότε ο πίνακας A είναι αρχικός.

Απόδειξη:

Είναι $a_{ii} > 0$ για κάποιο $i=1, 2, \dots, n$, προκύπτει ότι $(P_i, P_i) \in E(A)$, δηλαδή το γράφημα $G(A)$ έχει έναν βρόγχο που αντιστοιχεί στον κόμβο P_i , άρα το γράφημα $G(A)$ είναι αρχικό, οπότε ο πίνακας A είναι αρχικός.

Ορισμός 2.5.4

Έστω ο μη αρνητικός και μη υποβιβάσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, και κ το πλήθος των ιδιοτιμών του πίνακα A με μέτρο $\rho(A)$. Αν $\kappa=1$, τότε ο πίνακας A λέγεται αρχικός. Αν $\kappa>1$, τότε ο πίνακας A λέγεται **κυκλικός με δείκτη κ** .

Παράδειγμα 2.5.3

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αρχικός, διότι έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = 1 + \sqrt{7}$ και $\lambda_2 = 1 - \sqrt{7}$ με $\rho(A) = \rho(A) = |\lambda_1| = 1 + \sqrt{7}$, συνεπώς έχει κυκλικό δείκτη 1.

Παράδειγμα 2.5.4

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τους αριθμούς $\lambda_1 = \sqrt{6}$ και $\lambda_2 = -\sqrt{6}$ με $\rho(A) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{6}$, συνεπώς έχει κυκλικό δείκτη 2.

Θεώρημα 2.5.4

Έστω ο μη αρνητικός, μη υποβιβάσιμος αρχικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε:

1. Για την φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ισχύει ότι $\rho(A) > 0$.
2. Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα x .
3. Υπάρχει μοναδικό θετικό διάνυσμα x , τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$ και $\|x\|_1 = 1$.
4. Αν ο πίνακας A έχει $k > 1$ διακριτές ιδιοτιμές με απόλυτη τιμή $\rho(A)$, τότε κάθε μία από αυτές έχει αλγεβρική πολλαπλότητα ένα.
5. Υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $y^T > 0$, τέτοιο ώστε $y^T A = \rho(A)y^T$ και $x^T y = 1$.
6. Ισχύει $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k = xy^T > 0$.
7. Ισχύει ότι $|\lambda| < \rho(A)$ για κάθε άλλη ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A) - \{\rho(A)\}$.

Παράδειγμα 2.5.5

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 0$ με $\rho(A) = \lambda_1 = 1 + \sqrt{3} > 0$.

- Το θετικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho(A)$ και για το οποίο ισχύει $\|x\|_1 = 1$ είναι το διάνυσμα $x = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}, \frac{3+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}, \frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \right)^T > 0$.

Το διάνυσμα x είναι το δεξί διάνυσμα Perron.

- Οι ιδιοτιμές λ_2 και λ_3 έχουν πολλαπλότητα ένα και επιπλέον ισχύει ότι $|\lambda_1| < \rho(A)$ και $|\lambda_2| < \rho(A)$

- Είναι $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ με $\rho(A^T) = \rho(A) = \lambda_1 = 1 + \sqrt{3}$. Ένα ιδιοδιάνυσμα του

πίνακα A^T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\rho(A)$, δηλαδή το αριστερό διάνυσμα

Perron είναι $y = \frac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} (\sqrt{3}-1, 1, 1)^T > 0$ με

$$x^T y = \frac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} & \frac{3+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

- Είναι

$$x y^T = \frac{5+3\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} \end{pmatrix} (\sqrt{3}-1, 1, 1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{6+2\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} \\ \frac{2\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} & \frac{3+\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} & \frac{3+\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} \\ \frac{2}{6+2\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{6+2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.211 & 0.290 & 0.290 \\ 0.366 & 0.5 & 0.5 \\ 0.211 & 0.290 & 0.290 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \frac{1}{1+\sqrt{3}} \\ \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \frac{2}{1+\sqrt{3}} \\ \frac{1}{1+\sqrt{3}} & \frac{1}{1+\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}^k$$

Για $k=20$ είναι $\left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^{20} = \begin{pmatrix} 0.211 & 0.288 & 0.288 \\ 0.366 & 0.5 & 0.5 \\ 0.211 & 0.288 & 0.288 \end{pmatrix}$

Για $k=200$ είναι $\left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^{200} = \begin{pmatrix} 0.211 & 0.288 & 0.288 \\ 0.366 & 0.5 & 0.5 \\ 0.211 & 0.288 & 0.288 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho(A)} A \right)^k = C$

3. Εφαρμογές του Θεωρήματος Perron- Frobenius

Σε αυτή την ενότητα τα ασχοληθούμε με τα γραμμικά δυναμικά συστήματα. Θα υπενθυμίσουμε βασικές έννοιες και θα εξετάσουμε το μοντέλο Leslie. Θα αναφερθούμε στα δυναμικά συστήματα και θα στις αλυσίδες Markov

3.1 Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Στην πρώτη ενότητα του τρίτου κεφαλαίου, θα κάνουμε μια εισαγωγή στα γραμμικά δυναμικά συστήματα και το πως λύνονται με τη βοήθεια των πινάκων. Θα δούμε παραδείγματα που θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε και να θυμηθούμε πως λύνονται τα συστήματα αυτά. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ένα μεγαλύτερο παράδειγμα γραμμικού δυναμικού συστήματος, το μοντέλο Leslie

3.1.1 Εισαγωγή

Ορισμός 3.1.1.1

Κάθε εξίσωση της μορφής

$$X_{k+n} + \alpha_1 X_{k+n-1} + \alpha_2 X_{k+n-2} + \dots + \alpha_{n-1} X_{k+1} + \alpha_n X_k = 0$$

λέγεται **γραμμική εξίσωση διαφορών n-τάξης**, όπου $\alpha_i \in \mathbb{R}$ και $\alpha_n \neq 0$.

Ορισμός 3.1.1.2

Γραμμικό Δυναμικό Σύστημα με σταθερούς συντελεστές είναι το σύστημα που περιγράφει τη θέση ενός σημείου συναρτήσει του χρόνου.

Η κατάσταση ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές, σε κάθε χρονική στιγμή, μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα διάνυσμα στο \mathbb{R}^n που ονομάζεται διάνυσμα κατάστασης. Εμείς θεωρούμε ότι έχουμε συστήματα διακριτού χρόνου και συνεχούς χρόνου. Μοντελοποιώντας ένα σύστημα διακριτού χρόνου, το φέρνουμε στη μορφή $x_{m+1} = Ax_m + b$, όπου x_m είναι το διάνυσμα κατάστασης και δηλώνει τη θέση του σημείου τη χρονική στιγμή $m \geq 0$, με $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $b \in \mathbb{R}^n$. Πολλοί αναφέρονται στο παραπάνω μοντέλο, ως επαναληπτικό σύστημα αναδρομικής ακολουθίας στο \mathbb{R}^n . Αν όμως περιοριστούμε σε ακέραιες καταστάσεις στο \mathbb{Z}^n , τότε θα μιλάμε για σύστημα ή εξίσωση διαφορών.

Γραμμικό Σύστημα Διαφορών Πρώτης Τάξης και Πρώτου Βαθμού

Ας θεωρήσουμε το σύστημα $y_{k+1} = Ay_k + b$, (1)

με $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $y_k, b \in \mathbb{R}^n$, $k=0,1,2,\dots$

Για $k=0$ είναι $y_1 = Ay_0 + b$.

Για $k=1$ είναι $y_2 = Ay_1 + b = A^2y_0 + Ab + b$

Για $k=2$ είναι $y_3 = Ay_2 + b = A^3y_0 + A^2b + Ab + b = A^3y_0 + b(A^2 + A + I)$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι $y_k = A^k y_0 + b \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}$, $k \geq 1$

Έστω $b=0$, τότε προκύπτει το ομογενές σύστημα

$$y_{k+1} = Ay_k$$

με αρχική συνθήκη y_0 , οπότε η λύση του είναι

$$y_k = A^k y_0$$

Έστω ότι ο πίνακας A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και

w_1, w_2, \dots, w_n τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αν $P = [w_1, w_2, \dots, w_n]$, τότε

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ συνεπώς}$$

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^k = PD^kP^{-1},$$

Άρα

$$y_k = A^k y_0 = PD^kP^{-1}y_0$$

ή
$$y^k = PD^k c_0 = [w_1, w_2, \dots, w_n] \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k w_i,$$

όπου
$$c_0 = P^{-1}y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 3.1.1.1

Θεωρούμε την ακολουθία Fibonacci και τους αριθμούς Fibonacci

$$0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Έστω F_k ο k -οστός αριθμός Fibonacci,

τότε $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ (1) με $k \geq 1$, όπου $F_0 = 0$ και $F_1 = 1$.

Η (1) είναι μια εξίσωση διαφορών

Θέτουμε $x_k = (F_{k+1}, F_k)^T$, τότε

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k + F_{k+1} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

Οπότε προκύπτει η ισότητα

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

όπου
$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
 η αρχική συνθήκη και
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η λύση του προβλήματος είναι $x_{k+1} = A^k x_0$.

Πρέπει να υπολογίσουμε τον A^k . Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A .

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$$

με ρίζες $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad w_2 = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε η λύση είναι $y_k = \begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \alpha_k \end{pmatrix} = c_1 \lambda_1^k w_1 + c_2 \lambda_2^k w_2$

Άρα $\alpha_k = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k$

Δεδομένου ότι $\alpha_0 = 0$ και $\alpha_1 = 1$, βρίσκουμε ότι

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right]$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha_k \rightarrow \infty$ καθώς $k \rightarrow \infty$ και για την φασματική ακτίνα ισχύει

$$\rho(A) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$$

Θεώρημα 3.1.1.1

Έστω ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε το $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ υπάρχει αν και μόνο αν ισχύει ή

- $\rho(A) < 1$ ή
- $\rho(A) = 1 \in \sigma(A)$ και είναι η μόνη ιδιοτιμή που ικανοποιεί τη σχέση $|\lambda| = 1$ και έχει αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα 1.

Παρατήρηση 3.1.1.1

Αν $\rho(A) > 1$, τότε ισχύει $A^m \rightarrow \infty$ καθώς $m \rightarrow \infty$, όπως στο παράδειγμα 4.1.1.

Αν, στην περίπτωση όπου $\rho(A) = 1$, όπως αναφέρθηκε στον θεώρημα 4.1., υπάρχουν περισσότερες από μία ιδιοτιμές λ_i που ικανοποιούν τη σχέση $|\lambda_i| = 1$, τότε το $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ δεν

υπάρχει. Υπάρχει όμως το $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I + A + A^2 + \dots + A^k}{k}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται Cesaro όριο, και θα το δούμε εκτενέστερα παρακάτω.

Σύστημα διαφορικών εξισώσεων

Έστω η διαφορική εξίσωση n τάξης: $f^{(n)}(t) = \alpha_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1f'(t) + \alpha_0f(t)$,

όπου $f \in C^n$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $\alpha_i \in \mathbb{R}$ σταθεροί αριθμοί. Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό γίνεται θέτοντας $x_k(t) = f^{(k-1)}(t)$, με $k = 1, 2, \dots, n$. Αν θεωρήσουμε $x(t) = (x_1, \dots, x_n)^T$ το

διάνυσμα κατάστασης, παρατηρούμε ότι $x'_k(t) = (f^{(k-1)}(t))' = f^{(k)}(t) = x_{k+1}(t)$

οπότε προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = \alpha_{n-1}f^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1f'(t) + \alpha_0f(t) \end{cases}$$

Οπότε το σύστημα παίρνει τη μορφή $x'(t) = Ax(t)$ και η λύση είναι της μορφής

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t}$$

Παράδειγμα 3.1.1.2

Ας θεωρήσουμε τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης $f''(t) = f'(t) + f(t)$ (1)

με αρχικές συνθήκες $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ έχει την ίδια ιδιότητα με τους αριθμούς Fibonacci, αλλά ως προς τις παραγώγους της. Ας θεωρήσουμε το διάνυσμα $x(t) = (f(t), f'(t))$, τότε όπως είδαμε και στο παράδειγμα 4.1.1, η εξίσωση (1)

μπορεί να γραφεί στη μορφή $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$. Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 4.1.1.

ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ και η γενική λύση είναι

$f(t) = c_0 e^{\lambda_1 t} + c_1 e^{\lambda_2 t}$, οπότε λαμβάνοντας υπόψιν τις αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι

$$f(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\sqrt{5}}$$

Κάνοντας διαδοχικές παραγωγίσεις προκύπτει ότι

$$f^{(m)}(t) = \frac{\lambda_1^m e^{\lambda_1 t} - \lambda_2^m e^{\lambda_2 t}}{\sqrt{5}}$$

Θέτοντας όπου $t=0$, έχουμε

$$f^{(m)}(0) = \frac{\lambda_1^m - \lambda_2^m}{\sqrt{5}} = f_m$$

3.1.2 Πληθυσμιακά Μοντέλα Leslie

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε ένα μεγαλύτερο παράδειγμα ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος διακριτού χρόνου. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν πληθυσμό P με πεπερασμένη διάρκεια ζωής L . Αν διαιρέσουμε τον πληθυσμό P σε n ομάδες k_1, k_2, \dots, k_n τότε η κάθε ομάδα έχει ηλικιακό εύρος $\frac{L}{n}$.

Για να μοντελοποιήσουμε την επιβίωση του πληθυσμού, υποθέτουμε ότι η μεταβλητή $\alpha_i \in [0, 1]$ συμβολίζει το ποσοστό της ηλικιακής ομάδας k_i που επιβιώνει για να φτάσει στην ηλικιακή ομάδα k_{i+1} .

Σημειώστε ότι $\alpha_n=0$ και ότι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα ποσοστά επιβίωσης για νεότερες ηλικιακές ομάδες είναι μεγαλύτερα από τα ποσοστά επιβίωσης για τις μεγαλύτερες ηλικιακές ομάδες.

Έχουμε τη σχέση $x_{i+1} = \alpha_i x_i$ για κάθε $i=1, 2, \dots, n-1$ και $m=0, 1, 2, \dots$

Μοντελοποιούμε την αναπαραγωγή του πληθυσμού P , εισάγοντας μια άλλη παράμετρο $\beta_i \geq 0$, η οποία ισούται με το μέσο όρο των απογόνων που παρήχθησαν ανά άτομο στην ηλικιακή ομάδα k_i , κατά τη διάρκεια μιας μεμονωμένης χρονικής περιόδου. Αυτοί οι απόγονοι, στο επόμενο χρονικό διάστημα, θα ανήκουν στην ηλικιακή ομάδα k_i .

Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ είναι ίδιοι για όλες τις χρονικές περιόδους m .

Ορίζουμε ως διάνυσμα κατάστασης το διάνυσμα $x_m = (x_1, \dots, x_n)^T$, τότε η σχέση (1) γίνεται

$$x_{m+1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,m} \\ x_{2,m} \\ x_{3,m} \\ \vdots \\ x_{n,m} \end{pmatrix} = Lx_m$$

Παρατηρούμε, ότι το παραπάνω είναι ένα δυναμικό γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου. Το σύστημα αυτό ονομάζεται **πληθυσμιακό μοντέλο Leslie** και πήρε το όνομα του από τον Βρετανό οικολόγο Patrick Holt Leslie που ανέπτυξε το μοντέλο για έναν πληθυσμό τρωκτικών το 1945. Ο μη αρνητικός πίνακας L , ονομάζεται **πίνακας Leslie**.

Ορισμός 3.1.2.1.

Ένας **πίνακας Leslie** είναι ένας μη αρνητικός πίνακας $L \in M_n(\mathbb{R})$, ο οποίος έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στην πρώτη γραμμή και στην πρώτη διαγώνιο που βρίσκεται κάτω από την κύρια διαγώνιο. Όλα τα άλλα στοιχεία του, είναι μηδέν, δηλαδή είναι της μορφής

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

όπου τα στοιχεία $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ εκφράζουν το μέσο όρο απογόνων που παρήχθησαν ανά άτομο στην κάθε ηλικιακή ομάδα $k_i, i=1,2,\dots,n$, ενώ τα στοιχεία α_i εκφράζουν το ποσοστό επιβίωσης της ηλικιακής ομάδας k_i για να φτάσει στην ηλικιακή ομάδα k_{i+1} .

Παράδειγμα 3.1.2.1.

Ο πίνακας $L = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.3 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.24 & 0 \end{pmatrix}$ είναι πίνακας Leslie.

Παράδειγμα 3.1.2.2.

Έστω ότι $\alpha_i > 0$ με $i = 1, 2, \dots, n-1$. Οπότε είναι λογικό ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο που επιβιώνει σε κάθε ηλικιακή ομάδα κάθε χρονική περίοδο. Υποθέτουμε ότι $\beta_i = 0, i=1, 2, \dots, n$. Αυτό σημαίνει ότι δεν γίνεται αναπαραγωγή του πληθυσμού. Συνεπώς, αναμένουμε ότι ο πληθυσμός P θα εκλείψει τελείως μετά από L χρόνια. Αυτό επιβεβαιώνεται με τη χρήση του παρακάτω μοντέλου.

$$x_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}}_{=N} x_{n-1} = N^n x_0 = 0$$

Οπότε κάθε ηλικιακή ομάδα δε θα περιέχει κανένα άτομο μετά από $n \frac{L}{n} = L$ χρόνια.

Είναι προφανές ότι ο παραπάνω πίνακας, δεν είναι πίνακας Leslie.

Παρατήρηση 3.1.2.1

Το παραπάνω παράδειγμα λέμε ότι είναι ένα εκφυλισμένο παράδειγμα, διότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει πληθυσμός, χωρίς καθόλου αναπαραγωγή. Ομοίως και η περίπτωση όπου τουλάχιστον για μία μεταβλήτη α_i ισχύει $\alpha_i = 0$ με $i < n$, μπορεί να θεωρηθεί μη ρεαλιστικό παράδειγμα, διότι στην περίπτωση αυτή δεν επιβιώνει κανένας από την ηλικιακή ομάδα k_i στην ηλικιακή ομάδα k_{i+1} την χρονική στιγμή $m+1$. Όμως, τότε

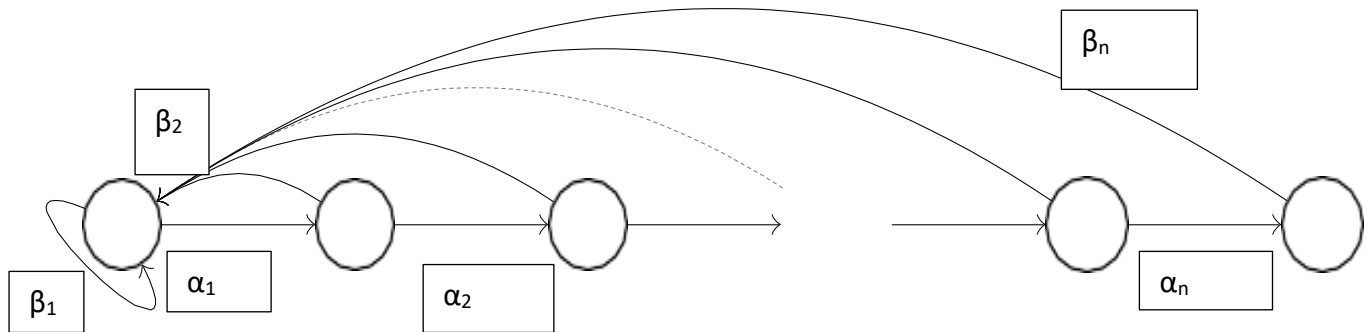
η ηλικιακή ομάδα k_i έχει τη μέγιστη διάρκεια ζωής $\frac{L}{n} i < L$. Στο εξής, θα υποθέτουμε ότι $\alpha_i > 0$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$.

Παρατήρηση 3.1.2.2

Το γράφημα $G(A)$ της παρατήρησης 3.1.2.1 έχει και διαισθητικό νόημα. Το κάθε τόξο δηλώνει τη σχέση μεταξύ δύο ηλικιακών ομάδων. Κάθε κόμβος k_i είναι μία από τις μεταβλητές x_i . Για το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A ισχύει $a_{ij} \neq 0$ αν και μόνο αν ο κόμβος i ενώνεται με τον κόμβο j .

Ο πίνακας Leslie έχει

- στην πρώτη γραμμή τις μεταβλητές που εκφράζουν την γονιμότητα
- στην υποδιαγώνιο το ποσοστό επιβίωσης
- και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι μηδέν.



Σχήμα 3.1.2.1- Γράφημα Πίνακα Leslie

Παρατήρηση 3.1.2.3

Εφόσον $\alpha_{ii} > 0$ για κάθε i , προκύπτει ότι το γράφημα $G(L)$ είναι ισχυρά συνεκτικό, δηλαδή ο πίνακας L είναι μη ανάγωγος, αν και μόνο αν $\beta_n > 0$. Αν όμως αφαιρέσουμε το μονοπάτι από τον κόμβο m , στον κόμβο 1, τότε προκύπτει ότι $\alpha_{1m} = \beta_m = 0$ και ο πίνακας L , δηλαδή ο πίνακας Leslie μετατρέπεται σε ανάγωγο.

Θα εξετάσουμε τώρα πότε ο πίνακας Leslie, δηλαδή ο πίνακας L είναι αρχικός.

Αν υποθέσουμε ότι $\beta_1 > 0$, τότε σύμφωνα με την παρατήρηση 2.5.1. ο πίνακας L θα είναι αρχικός. Αυτό όμως το σενάριο είναι απίθανο να συμβεί, διότι η πρώτη ηλικιακή ομάδα, συνήθως αντιπροσωπεύει άτομα νεαρής ηλικίας.

Είναι ρεαλιστικό να σκεφτεί κάποιος ότι αν κάποια ηλικιακή ομάδα k_i έχει γόνιμη κοορτή, τότε οι ομάδες k_{i+1} (ή k_{i-1}) μπορούν να συμβάλλουν στην αναπαραγωγή. Στην περίπτωση αυτή, τα μονοπάτια $K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_i \rightarrow K_1$ και $K_1 \rightarrow \dots \rightarrow K_{i+1} \rightarrow K_1$ είναι δύο κλειστά μονοπάτια μήκους i και $i+1$ αντίστοιχα. Όμως ισχύει ότι $M.K.\Delta.(i,i+1)=1$, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.5.3., ο πίνακας A είναι αρχικός.

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.4 του Perron-Frobenius έχουμε ότι $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\rho(L)} L \right)^m = uq^T$,

όπου u και q τα διανύσματα Perron του αρχικού πίνακα Leslie.

Αν $\rho(L)=1$, τότε μακροπρόθεσμα, ο αριθμός των ατόμων σε κάθε ηλικιακή ομάδα, θα

είναι ανάλογος με το αριστερό διάνυσμα Perron u .

Αν $\rho(L) > 1$, τότε ο αριθμός των ατόμων σε κάθε ηλικιακή ομάδα θα τείνουν στο άπειρο, σύμφωνα με το θεώρημα 4.1.1., οπότε αυτό συνεπάγεται ότι ο πληθυσμός θα αυξηθεί απεριόριστα.

Τέλος, αν $\rho(L) < 1$, τότε θα ισχύει ότι $A^m \rightarrow 0$, το οποίο σημαίνει ότι κάποια στιγμή ο πληθυσμός θα εξαφανιστεί.

Στη συνέχεια θα εισάγουμε στο μοντέλο μας και την μετανάστευση εντός ή εκτός του πληθυσμού. Υποθέτουμε ότι κατά τη διάρκεια κάθε χρονικής περιόδου, b_i άτομα (κατά μέσο όρο) θα μεταναστεύουν εκτός ηλικιακής ομάδας k_i , αν $b_i < 0$ ή εντός ηλικιακής ομάδας k_i , αν $b_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Έστω $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Παρατηρούμε ότι αν $b = 0$, τότε έχουμε το ομογενές μοντέλο.

Ας δούμε πως εξελίσσεται το μοντέλο.

Είναι $x_1 = Lx_0 + b$

$$x_2 = Lx_1 + b = L^2x_0 + Lb + b$$

·

·

$$x_m = Lx_{m-1} + b = L^m x_0 + (L^{m-1} + \dots + L^2 + L + I)b$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (L - I)(L^{m-1} + \dots + L + I) &= L^m + L^{m-1} + \dots + L^2 + L - L^{m-1} - \dots - L^2 - L - I \\ &= L^m + (L^{m-1} - L^{m-1}) + \dots + (L^2 - L^2) + (L - L) - I \\ &= L^m - I \end{aligned}$$

Οπότε προκύπτει ότι

$$x_m = L^m x_0 + (L - I)^{-1}(L^m - I)b$$

με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας $L - I$ αντιστρέφεται.

Τώρα ο πληθυσμός P δεν χρειάζεται να εκλείψει αν $\rho(L) < 1$, αφού αν το $b \geq 0$ είναι αρκετά μεγάλο, δεν θα ισχύει $L^m \rightarrow 0$ καθώς το $m \rightarrow \infty$.

Θα δούμε τώρα τι θα γίνει με τον όρο $(L - I)^{-1}(L^m - I)b$ στην περίπτωση όπου $m \rightarrow \infty$, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το αρχικό διάνυσμα x_0 . Θα εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου $b = 0$, δηλαδή θα λύσουμε το ομογενές σύστημα $x_{m+1} = Lx_m$.

Θεώρημα 3.1.2.1

Για κάθε πίνακα Leslie L , υπάρχει μία πραγματική ιδιοτιμή λ_1 , η οποία είναι απλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Ορισμός 3.1.2.2

Το σημείο $x^* \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο ισορροπίας ή σταθερό σημείο** του συστήματος $x_{m+1} = Lx_m + b$ αν $x^* = Lx^* + b$.

Παρατήρηση 3.1.2.4

Αν $b = 0$, τότε το σύστημα $x_{m+1} = Lx_m$ είναι ομογενές. Στην περίπτωση αυτή το για το

σημείο ισορροπίας ισχύει $x^* = Lx^*$. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα x^* είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με αντίστοιχη ιδιοτιμή 1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο πίνακας $L - I$ αντιστρέφεται, τότε

$$x^* = (I - L)^{-1}b = -(L - I)^{-1}b$$

Στην περίπτωση όπου ο πίνακας $L - I$ δεν αντιστρέφεται, υπάρχουν είτε άπειρα σημεία ισορροπίας ή κανένα. Επίσης στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι

$$0 \in \sigma(L - I) = \sigma(L) - 1 \Leftrightarrow 1 \in \sigma(L).$$

Μπορούμε τώρα να υποθέσουμε ότι το μοντέλο Leslie, έχει μη αρνητικά σημεία ισορροπίας τα οποία ισούνται με κάποια αρχικά μεγέθη κάθε ηλικιακής ομάδας. Όσο περνάει ο καιρός, ο αριθμός των ατόμων κάθε ηλικιακής ομάδας θα παραμένει σταθερός.

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι με την πάροδο του χρόνου, κάθε αρχική κατάσταση x_0 του πληθυσμού P , γίνεται όλο και πιο ίση με το σημείο ισορροπίας x^* . Το σημείο ισορροπίας, x^* λέγεται τότε **ασυμπτωτικά ευσταθές**. Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο Leslie αναγκάζει όλα τα αρχικά μεγέθη κάθε ηλικιακής ομάδας να ισούνται, μακροπρόθεσμα, με το σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση που υπάρχει τέτοιο σημείο ισορροπίας, είναι μοναδικό.

Ορισμός 3.1.2.3

Ένα σημείο ισορροπίας x^* , λέγεται **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν ισχύει $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x^*$ για όλα τα αρχικά διανύσματα x_0 που θα επιλέξουμε.

Θεώρημα 3.1.2.2

Το σύστημα $x_{m+1} = Lx_m + b$ έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $\rho(L) < 1$.

Απόδειξη

Έστω το σύστημα $x_{m+1} = Lx_m + b$. Η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $x_{m+1} = Ax_m$ είναι $x_m = L^m x_0$. Προσθέτοντας το σημείο ισορροπίας x^* , έχουμε $x_m = L^m x_0 + x^*$.

Αν αντικαταστήσουμε όπου $x^* = -(L - I)^{-1}b$, παίρνουμε $x_m = L^m x_0 - (L^m - I)^{-1}x^*$, αφού οι πίνακες $L^m - I$ και $(L - I)^{-1}$ αντιμετατίθενται. Παρατηρούμε ότι για να είναι το σημείο ισορροπίας x^* , ασυμπτωτικά ευσταθές, πρέπει $L^m \rightarrow 0$ καθώς $m \rightarrow \infty$, το οποίο ισοδυναμεί ότι $\rho(L) < 1$.

Αντιστρόφως, αν $\rho(L) < 1$, τότε $1 \notin \sigma(L)$, οπότε ο πίνακας $L - I$ αναστρέφεται, άρα μαζί με το γεγονός ότι $L^m \rightarrow 0$ καθώς $m \rightarrow \infty$ έχουμε ότι

$$x_m \rightarrow 0x_0 + (L - I)^{-1}(0 - I)b = -(L - I)^{-1}b, \text{ όπου } m \rightarrow \infty \text{ για κάθε } x_0.$$

Επειδή ο $-(L - I)^{-1}b$ είναι σημείο ισορροπίας, είναι και ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα 3.1.2.3

Το σύστημα $x_{m+1} = Lx_m + b$ με $A \geq 0$ και $b > 0$ έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας που είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $\rho(L) < 1$.

Απόδειξη

Έστω ότι $x^* = Lx^* + b \geq 0$. Αν $L \geq 0$, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2.3. προκύπτει ότι $0 \leq \rho(L) \in \sigma(L)$ και υπάρχει ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα $q^T > 0$, τέτοιο ώστε

$$q^T x^* = q^T (Lx^* + b) = q^T Lx^* + q^T b = \rho(L)q^T x^* + q^T b$$

Δηλαδή

$$q^T x^* = \rho(L)q^T x^* + q^T b \Leftrightarrow (1 - \rho(L))q^T x^* = q^T b \quad (1)$$

Άρα, αν $\rho(L) < 1 \Leftrightarrow 1 - \rho(L) > 0$, επειδή $q^T x^* \geq 0$, προκύπτει από (1) ότι και $b > 0$.

Συνεπώς $\rho(L) < 1$.

Αντιστρόφως.

Έστω ότι $\rho(L) < 1$, τότε, από το θεώρημα 4.2.1. έχουμε ότι το διάνυσμα $x^* = (I - L)^{-1}b$, υπάρχει.

Ισχύει ότι

$$(I - L)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} L^m, \text{ οπότε } x^* = \sum_{m=0}^{\infty} L^m b$$

και αφού $L \geq 0$ και $b > 0$, προκύπτει ότι $x^* \geq 0$.

Παράδειγμα 3.1.2.3

Θεωρούμε το παρακάτω πληθυσμιακό μοντέλο Leslie

$$x_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 1 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0 \end{pmatrix} x_m + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Είναι

$$(I - L)x^* = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.4 & -1 & -0.4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.80 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.35 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.135 & 1 \end{pmatrix} x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x^* = (33.81, 6.47, 28.85, 18.33, 7.41, 2)$$

Είναι $\rho(L) = 0.88 < 1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.2, το διάνυσμα x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Ας θεωρήσουμε το αρχικό διάνυσμα $x_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$

$$x_1 = Lx_0 + b = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$$

$$x_2 = Lx_1 + b = (2.8, 2, 1.8, 1.6, 1.35, 1.35)^T$$

.

.

.

$$x_{100} = Lx_{99} + b = (33.68, 6.23, 28.69, 18.21, 7.22, 1.89)^T$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα x_{100} είναι αρκετά κοντά στο σημείο ισορροπίας x^* , διότι $\|x^* - x_{100}\|_2 = 0.6811$

Αν ομοίως υπολογίζαμε το x_{300} θα βλέπαμε ότι $\|x^* - x_{300}\|_2 \rightarrow 0$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x^*$, άρα το σημείο x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα 3.1.2.4

Ας θεωρήσουμε τον πίνακα Leslie $L = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 0.3 & 0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.24 & 0 \end{pmatrix}$, ο οποίος εκφράζει τον

πληθυσμό μιας ομάδας, ο οποίος έχει χωριστεί σε 4 κατηγορίες. Η πρώτη γραμμή εκφράζει το ρυθμό γεννήσεων της κάθε ηλικιακής ομάδας, δηλαδή το στοιχείο a_{11} εκφράζει το ρυθμό γεννήσεων της πρώτης ηλικιακής ομάδας, το στοιχείο a_{12} εκφράζει το ρυθμό γεννήσεων της δεύτερης ηλικιακής ομάδας κ.ο.κ.

Το στοιχείο a_{21} εκφράζει το ποσοστό επιβίωσης της πρώτης ηλικιακής ομάδας για να φτάσει στην δεύτερη ηλικιακή ομάδα κ.ο.κ. Είναι

$$L^4 = \begin{pmatrix} 1.5108000000000001 & 0.69164 & 1.18558 & 0.41040000000000004 \\ 0.513 & 1.4082 & 0.5104 & 0.8320000000000001 \\ 0.364 & 0.10675 & 0.36819999999999997 & 0.05600000000000001 \\ 0.0868 & 0.434 & 0.13019999999999998 & 0.3472 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $L^4 > 0$, άρα ο πίνακας L αρχικός, οπότε και μη υποβιβάσιμος.

Ας θεωρήσουμε το αρχικό διάνυσμα $x_0 = (300, 300, 300, 300)$, το οποίο εκφράζει το πληθυσμό της κάθε ηλικιακής ομάδας τη χρονική στιγμή 0, τότε προκύπτει η σχέση $x^k = L^k x_0$, η οποία εκφράζει τον πληθυσμό μετά από k χρόνια. Είναι

$$x_k = L^k x_0 \rightarrow (\rho(L))^k \frac{\rho q^T}{q^T \rho} x_0, \text{ όπου } \rho \text{ είναι το δεξί ιδιοδιάνυσμα Perron του πίνακα } L \text{ και}$$

$\rho(L)$ η φασματική ακτίνα του πίνακα L .

Συμπεραίνουμε ότι ο πληθυσμός τείνει να γίνει άπειρός αν $\rho(L) > 1$, ενώ τείνει να εκμηδενιστεί αν $\rho(L) < 1$.

3.2 Αλυσίδες Markov

Στην δεύτερη ενότητα του τρίτου κεφαλαίου, θα διερευνήσουμε τις αλυσίδες Markov, που είναι από τα καλύτερα παραδείγματα εφαρμογής της θεωρίας Perron-Frobenius. Θα συμβολίζουμε τους πίνακες των αλυσίδων Markov P , όπως την πιθανότητα. Στην περίπτωση, όπου έχουμε και πίνακες μετάθεσης, θα τους συμβολίζουμε ως Q .

Μια αλυσίδα Markov, που πήρε το όνομα της από τον Ρώσο μαθηματικό Andrey Markov, είναι ένα στοχαστικό μοντέλο που περιγράφει ακολοιθίες κινήσεων, που ονομάζονται **βήματα**, μεταξύ **διαφορετικών πολιτειών**.

Θα υποθέσουμε ότι ο χώρος καταστάσεων $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ είναι πεπερασμένης διάστασης n και ότι τα βήματα συμβαίνουν σε διακριτό χρόνο. Η τυχαία μεταβλητή x_m , δηλώνει την κατάσταση διεργασίας στο χρονικό βήμα $m \in \mathbb{N}$, οπότε όλα τα $x_m \in S$.

Το ιδιαίτερο που ξεχωρίζει τις αλυσίδες Markov, από άλλες στοχαστικές διεργασίες, είναι η **ιδιότητα Markov**, που ονομάζεται και **έλλειψη μνήμης**.

Ορισμός 3.2.1

Η δεσμευμένη πιθανότητα του ενδεχομένου B όταν δίνεται το ενδεχόμενο A , ($P(A) \neq 0$) (Συμβολισμός $P(B/A)$), δηλώνει την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο B , δεδομένου ότι το ενδεχόμενο A έχει ήδη συμβεί.

Ισχύει ότι
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ορισμός 3.2.2

Το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών X_m με $m = 0, 1, 2, \dots$, ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα** αν ισχύει

$$P(X_{m+1} = v_{i_{m+1}} / X_m = v_{i_m}, \dots, X_0 = v_{i_0}) = P(X_{m+1} = v_{i_{m+1}} / X_m = v_{i_m}),$$

όπου $v_{i_{m+1}}, v_{i_m} \in S$. Δηλαδή, η πιθανότητα, η αλυσίδα, να βρεθεί σε κατάσταση $v_{i_{m+1}}$, την χρονική στιγμή $m+1$, καθορίζεται μόνο από την κατάσταση που βρισκόταν η αλυσίδα στο προηγούμενο χρονικό βήμα m και όχι από τις καταστάσεις πριν από το βήμα m . Δηλαδή, η αλυσίδα Markov είναι μια τυχαία διαδικασία που δε διατηρεί μνήμη για τις προηγούμενες μεταβολές.

Ορισμός 3.2.3

Στοχαστικός πίνακας λέγεται κάθε μη αρνητικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ όπου το άθροισμα των γραμμών (ή των στηλών) του ισούται με ένα. Συγκεκριμένα, ο πίνακας A λέγεται **στοχαστικός κατά στήλη** αν το άθροισμα των στοιχείων του της κάθε στήλης είναι 1, ενώ λέγεται **στοχαστικός κατά γραμμή** αν το άθροισμα των στοιχείων του της κάθε γραμμής είναι 1.

Παράδειγμα 3.2.1

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 & 0,2 \\ 0,5 & 0 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$ είναι στοχαστικός κατά στήλη.

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \end{pmatrix}$ είναι στοχαστικός κατά γραμμή.

Παρατήρηση 3.2.1

Αν ο πίνακας A είναι στοχαστικός κατά γραμμή, ισχύει $Ae = e$, όπου $e = (1, 1, \dots, 1)^T$, ενώ αν ο πίνακας A είναι στοχαστικός κατά στήλη ισχύει $e^T A = e^T$.

Ορισμός 3.2.4

Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα να πάει η αλυσίδα από την κατάσταση v_i στην κατάσταση v_j , είναι ίδια κάθε χρονική στιγμή m , δηλαδή δεν εξαρτάται από το χρόνο. Στην περίπτωση αυτή η λεγόμενη πιθανότητα μετάβασης ορίζεται ως

$$p_{ij} = P(X_{m+1} = v_j / X_m = v_i)$$

και η αλυσίδα λέγεται **χρονικά ομοιογενής**.

Είναι $0 \leq p_{ij} \leq 1$ και επιπλέον ισχύει ότι $\sum_j p_{ij} = 1$ για κάθε i .

Ο πίνακας $P = (p_{ij})$ στην περίπτωση αυτή, λέγεται **πίνακας μετάβασης** της αλυσίδας Markov και είναι **στοχαστικός πίνακας**.

Παρατήρηση 3.2.2

Όλες οι αλυσίδες Markov ορίζουν ένα στοχαστικό πίνακα. Κάθε γραμμή του στοχαστικού πίνακα, συνδέονται μία κατάσταση. Το διάνυσμα κατάστασης της αλυσίδας Markov, είναι $\rho_m = (\rho_{1,m}, \dots, \rho_{n,m})^T$, όπου $\rho_{j,m} = P(X_m = v_j)$ για κάθε $j=1, 2, \dots, n$, δηλαδή $\rho_{j,m}$ είναι η πιθανότητα, η αλυσίδα να βρεθεί στην κατάσταση v_j , μετά από m βήματα.

Παράδειγμα 3.2.2

Το διάνυσμα $\rho_0 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, δηλώνει ότι η πιθανότητα, η αλυσίδα να βρεθεί στην κατάσταση v_1 και v_3 είναι 50%.

Θεώρημα 3.2.1

Μία αλυσίδα Markov τάξης m μπορεί να μοντελοποιηθεί ως $\rho_{m+1}^T = \rho_m^T P$, όπου το

διάνυσμα ρ_m^T δηλώνει την πιθανότητα στο m-οστό βήμα και P ο πίνακας μετάβασης.

Συνεπώς η λύση μια αλυσίδας Markov είναι $\rho_m^T = \rho_0^T P^m$, όπου ρ_0 το αρχικό διάνυσμα.

Θεώρημα 3.2.2

Η φασματική ακτίνα όλων των πινάκων μετάβασης P είναι 1.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.3 ο πίνακας μετάβασης P είναι στοχαστικός και επιπλέον ισχύει $P \geq 0$, οπότε από την παρατήρηση 2.2.1 προκύπτει ότι $\rho(A) = 1$.

Παράδειγμα 3.2.3

Θέλουμε να βρούμε τι πιθανότητα υπάρχει ο καιρός να είναι ηλιόλουστος μεθαύριο αν έχουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

Μια ηλιόλουστη μέρα ακολουθείται από μία άλλη ηλιόλουστη μέρα εννέα στις δέκα μέρες. Επίσης υπάρχει πιθανότητα 50%, μια βροχερή μέρα να ακολουθείται από μία άλλη βροχερή μέρα.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες καιρικές συνθήκες και ότι σήμερα είναι μία βροχερή μέρα.

Η κατάσταση μπορεί να διαμορφωθεί σε αλυσίδα Markov ως εξής.

Έστω v_1, v_2 οι καταστάσεις ηλιόλουστη και βροχερή μέρα αντίστοιχα και έστω η τυχαία μεταβλητή X_m , η οποία δηλώνει την καιρική κατάσταση την ημέρα $m \geq 0$. Αν σήμερα είναι η ημέρα $m = 0$, τότε το αρχικό διάνυσμα κατανομής πιθανοτήτων είναι $\rho_0 = (0, 1)^T$ διότι υποθέτουμε ότι $X_0 = v_2$. Έχουμε

$$\rho_{11} = P(X_{m+1} = v_1 / X_m = v_1) = 0.9 \Rightarrow \rho_{12} = 1 - \rho_{11} = 0.1$$

$$\rho_{22} = P(X_{m+1} = v_2 / X_m = v_2) = 0.5 \Rightarrow \rho_{21} = 1 - \rho_{22} = 0.5$$

Ο πίνακας μετάβασης είναι $P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ και από το θεώρημα 4.3.1 έχουμε

$$\rho_2^T = \rho_0^T P^2 = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} = (0.7 \quad 0.3)$$

Αφού $\rho_{12} = P(X_2 = v_1) = 0.7$, όπου 70% είναι η πιθανότητα να έχουμε ηλιόλουστη μέρα μεθαύριο.

Έχουμε το διάνυσμα $\rho_0 = (0, 1)^T$ και τον Markoviano πίνακα $P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, ο οποίος

παρατηρούμε ότι είναι στοχαστικός.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα P είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0.4$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους είναι $x_1 = (0.71, 0.71)^T$ και $x_2 = (-0.20, 0.99)^T$. Ισχύει

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.833351 & 0.166649 \\ 0.833246 & 0.166754 \end{pmatrix}$$

$$P^{100} = \begin{pmatrix} 0.8333333333333335 & 0.1666666666666671 \\ 0.8333333333333335 & 0.1666666666666670 \end{pmatrix}$$

$$P^k = \begin{pmatrix} 0.8333333333333333 + 0.1666666666666666 \cdot (0.4)^k & 0.1666666666666666 - 0.1666666666666666 \cdot (0.4)^k \\ 0.8333333333333333 - 0.8333333333333334 \cdot (0.4)^k & 0.1666666666666666 + 0.8333333333333334 \cdot (0.4)^k \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, την κ-οστή μέρα θα έχουμε

$$\rho_k = \rho_0 \cdot P^k \text{ με } \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \begin{pmatrix} 0.1666666666666666 \\ 0.1666666666666666 \end{pmatrix} = 0.1666666666666666 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση για τις καιρικές συνθήκες μακροπρόθεσμα.

Θεώρημα 3.2.3

Η φασματική ακτίνα όλων των πινάκων μετάβασης P είναι 1.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.3 ο πίνακας μετάβασης P είναι στοχαστικός και επιπλέον ισχύει $P \geq 0$, οπότε από την παρατήρηση 2.2.1 προκύπτει ότι $\rho(A) = 1$.

3.3 Πολυωνυμικοί Πίνακες

Στην ενότητα 3 του τρίτου κεφαλαίου θα εξετάσουμε τους πολυωνυμικούς πίνακες. Θα δώσουμε ορισμούς που σκοπεύουν στην κατανόηση της ύλης, όπως τον ορισμό του πολυωνυμικού πίνακα, βαθμό πολυωνυμικού πίνακα, τι καλούμε πίνακα Frobenius συνοδύων πίνακα κ.α. Τέλος θα γίνει αναφορά στο θεώρημα Perron-Frobenius και στη σχέση του με τους πολυωνυμικούς πίνακες.

3.3.1 Βασικοί Ορισμοί

Ορισμός 3.3.1.1

Ο πίνακας $P(\lambda) \in M_{m,n}(\mathcal{F})$ όπου όλα του τα στοιχεία είναι πολυώνυμα, λέγεται

πολυωνυμικός πίνακας, δηλαδή κάθε στοιχείο του είναι της μορφής $\rho_{ij}(\lambda)$, όπου $\rho_{ij}(\lambda)$ πολυώνυμο.

Ορισμός 3.3.1.2

Ο μεγαλύτερος βαθμός των στοιχείων του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda) \in M_{m,n}(F)$ λέγεται **βαθμός του πολυωνυμικού πίνακα** και συμβολίζεται $\deg[P(\lambda)]$.

Παράδειγμα 3.3.1.1

Ο πίνακας $P(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 + \lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 1 \\ 2 & \lambda^3 + 2 \end{pmatrix}$ είναι πολυωνυμικός με $\deg[P(\lambda)] = 2$.

Ορισμός 3.3.1.3

Ο πολυωνυμικός πίνακας $x_k = L^k x_0 \rightarrow p^k(L) \frac{\rho q^T}{q^T \rho} x_0$ καλείται **ομαλός (regular)** αν ισχύει $\det[P(\lambda)] \neq 0$.

Ορισμός 3.3.1.4

Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$ καλείται **αντιστρέψιμος**, αν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda) \in M_n(F)$, τέτοιος ώστε $P(\lambda)Q(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) = I$

Πρόταση 3.3.1.1

Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσα του είναι ανεξάρτητη του λ και επιπλέον ισχύει $\det[P(\lambda)] \neq 0$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $\det[P(\lambda)] = m \neq 0$, όπου $m \in \mathbb{C}$, αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας $P(\lambda)$ αντιστρέφεται οπότε προκύπτει ο πολυωνυμικός πίνακας $[P(\lambda)]^{-1} = m^{-1} \text{adj}[P(\lambda)]$.

Αντιστρόφως:

Έστω ότι ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε από τον ορισμό 3.3.4 αν υπάρχει πολυωνυμικός πίνακας $Q(\lambda) \in M_n(F)$, τέτοιος ώστε

$P(\lambda)Q(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) = I \Rightarrow \det[P(\lambda)Q(\lambda)] = \det[Q(\lambda)P(\lambda)] = 1 \neq 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι η ορίζουσα $\det[P(\lambda)]$ είναι σταθερή και διάφορη του μηδέν.

Παρατήρηση 3.3.1.1

Κάθε πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$ με $\deg[P(\lambda)] = v$, γράφεται στη μορφή $P(\lambda) = A_v \lambda^v + A_{v-1} \lambda^{v-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$, $A_v \neq 0$.

Παράδειγμα 3.3.1.2

Δίνεται ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & \lambda^2 - 6\lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 & 2\lambda^3 + 2 \end{pmatrix}$ για τον οποίο ισχύει

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & \lambda^2 - 6\lambda + 1 \\ \lambda^2 + 1 & 2\lambda^3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ορισμός 3.3.1.5

Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$ καλείται **μονικός** αν ο συντελεστής (πίνακας) του μεγιστοβάθμιου όρου του είναι ο πίνακας I .

Ορισμός 3.3.1.6

Έστω ο πολυωνυμικός μονικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$, όπου

$P(\lambda) = I_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$. Αν οι συντελεστές (πίνακες) A_i του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ είναι μη αρνητικοί, τότε ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ καλείται **Perron πολυωνυμικός πίνακας** βαθμού n .

Ορισμός 3.3.1.7

Ο αριθμός $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ καλείται **ιδιοτιμή** του πολυωνυμικού μονικού πίνακα $P(\lambda) \in M_n(F)$ αν το σύστημα $P(\lambda_0)y=0$ έχει μη μηδενική λύση $y_0 \in \mathbb{C}^n$. Το y_0 καλείται **δεξί ιδιοδιάνυσμα** του $P(\lambda)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_0 . Το μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα w_0 καλείται **αριστερό ιδιοδιάνυσμα** του $P(\lambda)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_0 αν ισχύει $[P(\lambda_0)]^T w_0 = 0$. Το φάσμα του πίνακα $P(\lambda)$ είναι $\sigma(P) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det P(\lambda) = 0\}$.

Ορισμός 3.3.1.8

Αν υπάρχουν μη ιδιόμορφοι πίνακες $B, Q, E \in M_n(F)$ σταθερής ορίζουσας έτσι ώστε να ισχύει $P(\lambda) = B(\lambda) \cdot Q(\lambda) \cdot D(\lambda)$, θα λέμε ότι οι πίνακες P, Q είναι **όμοιοι** και θα συμβολίζουμε $P \sim Q$.

Ορισμός 3.3.1.9

Έστω ο πολυωνυμικός μονικός πίνακας $P(\lambda) \in M_n(F)$. Ο γραμμικός πολυωνυμικός πίνακας $(G - \lambda I) \in M_{(n+q)}$ καλείται **γραμμικοποίηση** του $P(\lambda)$ αν ισχύει

$$(G - \lambda I) \sim \begin{pmatrix} P(\lambda) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Ορισμός 3.3.1.10

Ο **Frobenius συνοδεύων πίνακας (Frobenius Companion Matrix)** του πολυωνυμικού

μονικού πίνακα $P(\lambda) \in M_n(F)$, όπου $P(\lambda) = I_n \lambda^v + A_{v-1} \lambda^{v-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$, ορίζεται
ως

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nm \times nm}.$$

Θεώρημα 3.3.1.1

Ο πίνακας C_P παρέχει μια γραμμικοποίηση του $P(\lambda)$, δηλαδή ισχύει

$$B(\lambda)(C_P - \lambda I)D(\lambda) = \begin{pmatrix} P(\lambda) & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix} \quad (1), \quad \text{όπου } B(\lambda), D(\lambda) \in M_{nm}(F)$$

πολυωνυμικοί πίνακες,

$$\text{με } B(\lambda) = \begin{pmatrix} B_1(\lambda) & B_2(\lambda) & \dots & B_{m-1}(\lambda) & I \\ -I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -I & 0 \end{pmatrix}. \text{ Επίσης}$$

$$B_{m-1}(\lambda) = I\lambda - A_{m-1}$$

$$B_{m-2}(\lambda) = I\lambda^2 - A_{m-1}\lambda - A_{m-2}$$

\vdots

$$B_2(\lambda) = I\lambda^{m-2} - A_{m-1}\lambda^{m-3} - \dots - A_3\lambda - A_2$$

$$B_1(\lambda) = I\lambda^{m-1} - A_{m-1}\lambda^{m-2} - \dots - A_2\lambda - A_1$$

$$\text{και } D(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I\lambda & I & \dots & 0 & 0 \\ I\lambda^2 & I\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I\lambda^{m-1} & I\lambda^{m-2} & \dots & I\lambda & I \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση 3.3.1.2

Από τη σχέση (1) του θεωρήματος 3.3.1 προκύπτει ότι $\sigma(P) = \sigma(C_P)$, άρα και $\rho(P) = \rho(C_P)$.

3.3.2 Θεώρημα Perron-Frobenius για πολυωνυμικούς Πίνακες

Λήμμα 3.3.2.1

Έστω μ μια ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ και C_P ο συνοδεύων πίνακας του, τότε

1. Το μη μηδενικό διάνυσμα του $y \in \mathbb{C}^n$ είναι το δεξί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $P(\lambda)$

$$\text{με αντίστοιχη ιδιοτιμή } \mu \in \sigma(P) \text{ αν και μόνο αν το διάνυσμα } \begin{pmatrix} y \\ \mu y \\ \vdots \\ \mu^{m-1} y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nm}$$

είναι το δεξί ιδιοδιάνυσμα του συνοδεύων πίνακα C_P με αντίστοιχη ιδιοτιμή μ .

2. Το μη μηδενικό διάνυσμα του $w \in \mathbb{C}^n$ είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $P(\lambda)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\mu \in \sigma(P)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα

$$\begin{pmatrix} B_1(\mu)^T w \\ B_2(\mu)^T w \\ \vdots \\ B_{m-1}(\mu)^T w \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{nm}, \text{ όπου οι πολυωνυμικοί πίνακες } B_1(\lambda), B_2(\lambda), \dots, B_{m-1}(\lambda)$$

είναι αυτοί που ορίστηκαν στο θεώρημα 3.3.1.1, είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του συνοδεύων πίνακα C_P με αντίστοιχη ιδιοτιμή μ .

Θεώρημα 3.3.2.1 (Perron – Frobenius)

Έστω ο Perron πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = I_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$, με

$P(\lambda) \in M_n(F)$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα

- $\rho(P) \in \sigma(P)$, όπου $\rho(P)$ και $\sigma(P)$ η φασματική ακτίνα και το φάσμα του πολυωνυμικού πίνακα $P(\lambda)$ αντίστοιχα.
- Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει ένα μη αρνητικό δεξί ιδιοδιάνυσμα και ένα μη αρνητικό δεξί ιδιοδιάνυσμα με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\rho(P)$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση των στοιχείων του A_j , $j=0, 1, \dots, n-1$.

Επιπλέον, αν ο συνοδεύων πίνακας C_P είναι μη υποβιβάσιμος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα

- Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $P(\lambda)$, αλγεβρικής πολλαπλότητας 1.

- Ο μονικός πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda)$ έχει ένα μη αρνητικό δεξί ιδιοδιάνυσμα και ένα μη αρνητικό αριστερό με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\rho(P)$.
- Η φασματική ακτίνα $\rho(P)$ είναι μία αύξουσα συνάρτηση των στοιχείων του A_j , $j=0, 1, \dots, m-1$.

Θεώρημα 3.3.2.2

Έστω ο Perron πολυωνυμικός πίνακας $P(\lambda) = I_n \lambda^v + A_{v-1} \lambda^{v-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0$, με $P(\lambda) \in M_n(F)$ και ο μη υποβιβάσιμος πίνακας C_P , τότε υπάρχει ακέραιος κ με $1 \leq \kappa \leq nm$ έτσι ώστε οι μέγιστες ιδιοτιμές του $P(\lambda)$ να είναι ρίζες της εξίσωσης $\lambda^\kappa - \rho(P)^\kappa = 0$. Επιπλέον ισχύει ότι $\sigma(P) = e^{i(2t\pi/\kappa)} \sigma(P)$, $t=0, 1, \dots, \kappa-1$

Συμπέρασμα

Στην παρούσα εργασία δείξαμε πολλές ιδιότητες των θετικών και μη αρνητικών πινάκων. Συγκεκριμένα, για τους αρνητικούς πίνακες, μελετήσαμε τους μη υποβιβάσιμους πίνακες, οι οποίοι έχουν ισχυρά συνεκτικά γραφήματα και τους αρχικούς πίνακες.

Επίσης είδαμε ότι οι αρχικοί πίνακες έχουν μόνο μία ιδιοτιμή μεγίστου μέτρου και αυτή η ιδιοτιμή είναι η φασματική ακτίνα. Στη συνέχεια είδαμε τα κύρια θεωρήματα της θεωρίας, δηλαδή το θεώρημα Perron και το θεώρημα Perron- Frobenius. Δείξαμε ότι οι θετικοί και οι αρχικοί πίνακες ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του θεωρήματος Perron, Αν οι πίνακες είναι μη αρνητικοί μη υποβιβάσιμοι ή θετικοί, τότε η φασματική ακτίνα είναι και ιδιοτιμή του πίνακα αλγεβρικής και γεωμετρικής πολλαπλότητας ένα. Στην πορεία μελετήσαμε εφαρμογές του θεωρήματος Perron – Frobenius, όπως οι πίνακες Leslie, οι αλυσίδες Markov και οι πολυωνυμικοί πίνακες.

Εν κατακλείδι, τα δύο θεωρήματα, το θεώρημα Perron και το θεώρημα Perron- Frobenius χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών. Παίζουν σημαντικό ρόλο στο καθορισμό της μακροπρόθεσμης συμπεριφοράς μη αρνητικών συστημάτων. Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι το θεώρημα Perron - Frobenius αφήνει περιθώρια για περαιτέρω μελέτη και εμβάθυνση.

Βιβλιογραφία

1. D. Bernstein (2003), Matrix Mathematics Theory, Facts and Formulas with Applications to Linear Systems Theory I, Princeton University Press, p.141-149
2. M. Berhanu (2005), The polynomial Eigenvalue Problem, Ph.D. Thesis, University of Manchester, p.166-168
3. K. C. Chang, K. Pearson and T. Zhang, (2008), Generalized Perron Frobenius Theorem, p.507-520
4. Karl Eriksson, (2023), Perron-Frobenius' Theory and Applications, Master Thesis, Department of Mathematics, Linköping University, p. 43-50
5. C. R. MacCluer (2000), The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem, Siam Review, p. 487-498
6. C. D. Meyer, (2000) Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, p.661-662
7. C.D. Meyer and D. Hartfiel. (1998) On the structure of stochastic matrices with a subdominant eigenvalue near 1, Linear Algebra and its Applications
8. D. Nelson; Schwartz, Jacob (1963), Linear operators II. Spectral Theory: Self Adjoint Operators in Hilbert Space, Interscience Publishers, Inc.
9. Gilbert Strang. (1995) Linear Algebra and Its Applications. Cengage Learning, p.251-255
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Perron-Frobenius_theorem
11. L.N. Trefethen and D. Bau (1997), Numerical Linear Algebra, SIAM
12. Ν.Δ Αλικάκος και Γ.Η. Καλογερόπουλος, (2003), Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις, σελ. 359-370
13. Ι. Καμπίτσης (2021), Θεώρημα Perron-Frobenius και μη αρνητικοί πίνακες στις Μαθηματικές Επιστήμες, Διπλωματική Εργασία Ε.Α.Π.
14. Ν. Παπαθανασίου (2005), Θεωρία Διαταραχής Ιδιοτιμών Πίνακα και Ψευδοφάσμα, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τομέας Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ. Πολυτεχνείο,
15. Π. Ψαρράκος, (2020), Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, σελ. 16-20

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.