ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΧΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΣΠΟΥΔΕΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Συναισθηματικοί παράγοντες που επηρεάζουν την ικανότητα των μαθητών για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων κατά την μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο.»

Πανωραία Νικολακοπούλου
ΑΜ 142646

Επιβλέπων Καθηγητής
Ευγένιος Αυγερινός

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2023

Φοιτητής	Νικολακοπούλου Πανωραία ΑΜ142646
Επιβλέπων	Αυγερινός Ευγένιος
Β΄ Αξιολογητής	Δουκάκης Σπυρίδων

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος που απονέμει το Ελληνικό Ανοιχτό Πανεπιστήμιο (ΕΑΠ) στο Πρόγραμμα Σπουδών Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ).

Αφιερώνεται στις κόρες μου,

Φένια, Μαριαλένα και Χριστίνα Μακρυγιάννη

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους συνέβαλλαν στην εκπόνησή της.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέπων καθηγητή μου, κύριο Ευγένιο Αυγερινό, για όλα όσα μου πρόσφερε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα της διδακτικής των μαθηματικών καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές και τη καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Όλους τους καθηγητές και τις καθηγήτριες των οποίων τα μαθήματα παρακολούθησα, οι οποίοι συνετέλεσαν στην περαιτέρω κατάρτισή μου και στην διεύρυνση του τρόπου σκέψης μου.

Επίσης, θα ήθελα εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον σύζυγό μου Γιάννη, για τη στήριξη, τη συμπαράσταση και την κατανόησή του, καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος να ευχαριστήσω τις κόρες μου Φένια, Μαριαλένα και Χριστίνα για την δύναμη που μου έδιναν…

Περίληψη

Σε έναν κόσμο όπου οι αλλαγές επιταχύνονται, τα μαθηματικά γίνονται ολοένα και πιο σημαντικό εργαλείο παρουσίασης και επικοινωνίας. Θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η γνώση και η ικανότητα χρήσης των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και στην εργασία καθίσταται ζωτικής σημασίας απαίτηση στον εικοστό πρώτο αιώνα. Ο κόσμος των οικονομικών, οι ασφαλιστικές ανησυχίες, οι κοινωνικές αποφάσεις που βασίζονται στη στατιστική και τις πιθανότητες, καθώς και η στερεοτυπική χρήση των αριθμών, είναι όλα παραδείγματα του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στην καθημερινή ζωή.

Για πολλούς ανθρώπους, τα μαθηματικά αποτελούν αναγκαιότητα για καριέρες και επαγγέλματα που βασίζονται σε μεγάλο βαθμό σε μαθηματικές έννοιες (όπως οι επιστήμες, οι σύγχρονες τεχνολογίες, η μηχανική, τα οικονομικά και η ιατρική). Δεδομένου ότι τα μαθηματικά είναι μια παγκόσμια γλώσσα, δεν βασίζονται εξ ολοκλήρου σε γλώσσες όπως τα αγγλικά, τα ελληνικά ή τα ρωσικά. Σε κάποιο βαθμό, όλοι θα χρειαστούν αυτή τη γλώσσα και τον τρόπο σκέψης για να κατανοήσουν τον κόσμο.

Σύμφωνα με τον Booker (1993), η διδασκαλία των μαθηματικών περιλαμβάνει κάτι περισσότερο από το να διδάσκουν οι εκπαιδευτικοί την κατάλληλη παιδαγωγική και το κατάλληλο περιεχόμενο- περιλαμβάνει επίσης να διδάσκονται οι μαθητές πώς να εκτελούν μαθηματικές πράξεις. Ως εκ τούτου, η διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να περιλαμβάνει έρευνα σχετικά με τις διαδικασίες και τις τεχνικές τόσο για τη διδασκαλία όσο και για τη μάθηση του αντικειμένου, καθώς και τη δημιουργία διδακτικού υλικού που διευκολύνει αυτές τις διαδικασίες.

Abstract

In a world where change is rapid, arithmetic is becoming an increasingly important tool for presentation and communication. It might be claimed that knowing and being able to use mathematics in daily life and at work is becoming a crucial necessity in the twenty-first century. The realm of banking, insurance concerns, social judgments based on statistics and probability, as well as the stereotyped usage of numbers, are all examples of how mathematics is used in daily life.

For many people, mathematics is a must for jobs and professions that heavily rely on mathematical concepts (such as the sciences, current technologies, engineering, finance, and medicine).

Since mathematics is a universal language, it is not entirely based on languages like English, Greek, or Russian. To some degree or another, everyone will require this language and style of thinking in order to comprehend the world. According to Booker (1993), teaching mathematics involves more than just teaching teachers the proper pedagogy and subject; it also involves teaching students how to conduct mathematical operations. Consequently, the research of teaching techniques and procedures as well as their acquisition and the creation of instructional materials that enable practice and application are all possible components of mathematics education.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες iv
Περίληψη v
Abstract vi
Περιεχόμενα vii
1. Εισαγωγή 1
2. Θεωρητικό Υπόβαθρο 4
   2.1 Θεωρία Γνωστικής Κατασκευής Συναισθημάτων 4
   2.2 Στάσεις μαθητών προς τα μαθηματικά 6
   2.3 Αυτοπεποίθηση & Μαθηματικά 9
   2.4 Ο ρόλος του δασκάλου ως προς το κίνητρο για μάθηση 10
3. Ανάλυση Μαθηματικών 13
   3.1 Το μαθηματικό υλικό 13
   3.2 Τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών 15
   3.3 Διδακτικοί Στόχοι μαθηματικών 18
4. Διδακτικές Τεχνικές Μαθηματικών 26
   4.1 Ιστορική Αναδρομή 26
   4.2 Η Διδασκαλία των Μαθηματικών 28
   4.3 Σύγχρονες Μέθοδοι 31
   4.4 Το Διδακτικό Συμβόλαιο 38
   4.5 Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων 41
5. Παράγοντες πρόκλησης θετικής ή αρνητικής στάσης προς τα Μαθηματικά 45
   5.1 Μαθηματικά και Συναισθήματα 52
   5.2 Έμφυλες διαφορές στις επιδόσεις στα Μαθηματικά 55
6. Μαθησιακές Δυσκολίες & Μαθηματικά 61
7. Μετάβαση από τα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στα Μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης 67
8. Διαμορφωτική Αξιολόγηση & Μαθηματικά 75
9. Ελληνική PISA: Σε ποια συμπεράσματα κατέληξε η επιτροπή των εμπειρογνωμόνων 82
10. Ανάλυση δεδομένων CHIC 84
11. Συμπεράσματα 89

12. Βιβλιογραφία 92

1. Εισαγωγή

Στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης, οι περισσότερες έρευνες σχετικά με τα συναισθήματα των μαθητών επικεντρώνονται στο ρόλο τους στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων (De Corte, & Verschaffel, 2007). Μεταξύ άλλων αποτελεσμάτων, οι μελέτες αυτές επιβεβαίωσαν ότι οι άνθρωποι τείνουν να βιώνουν παρόμοια συναισθήματα κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Για παράδειγμα, ο Op' T Eynde και οι συνεργάτες του (2007) διαπίστωσαν ότι οι μαθητές βιώνουν διαφορετικά συναισθήματα κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Μπορεί να είναι ενοχλημένοι, απογοητευμένοι, θυμωμένοι, ανήσυχοι, αγχωμένοι, ανακουφισμένοι, χαρούμενοι ή νευρικοί. Κατ' αρχάς, για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να ανησυχεί κατά τη διαδικασία εύρεσης μιας στρατηγικής για την επίλυση ενός προβλήματος (αυτό αποδεικνύεται από τη χρήση περιγραφών από τους μαθητές όπως "κατεβάζω τα φρύδια" και "δεν αισθάνομαι καλά"). Ο μαθητής απογοητεύεται αν η λύση του προβλήματος δεν φαίνεται να εμφανίζεται μετά από 10 δευτερόλεπτα ("δεν θέλω να χρησιμοποιήσω την αριθμομηχανή", "δεν με βοηθάει", "αλλά εξακολουθώ να θέλω να φτάσω στο στόχο"). Αργότερα, εμφανίζεται ο πανικός και τελικά ο θυμός ("έλα τώρα, τι είναι όλο αυτό"). Η έρευνα για τα συναισθήματα στη μαθηματική εκπαίδευση υπογραμμίζει την ανάγκη να ξεπεράσουμε την άποψη της διάκρισης μεταξύ θετικών και αρνητικών συναισθημάτων. Προτείνεται επίσης να προχωρήσουμε πέρα από την ανάλυση των συναισθημάτων στην επίλυση προβλημάτων και να διερευνήσουμε τα συναισθήματα δραστηριότητα ρουτίνας (Hannula, Pantziara, Wæge, & Schlöglmann, 2010).

Έτσι, αναλάβαμε το καθήκον να εντοπίσουμε συναισθηματικές εμπειρίες σε δραστηριότητες ρουτίνας στο μάθημα των μαθηματικών. Για να προχωρήσουμε πέρα από την εξέταση των θετικών και αρνητικών συναισθημάτων χρησιμοποιούμε τη θεωρία της γνωστικής δομής των συναισθημάτων (Ortony et al., 1988). Αυτός είναι ο κύριος λόγος για να επικεντρωθούμε στο ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα: Ποιες είναι οι συναισθηματικές εμπειρίες των μαθητών στην τάξη των μαθηματικών του λυκείου; Γνωρίζουμε ότι η ανάλυση των αφηγήσεων συναισθηματικών εμπειριών διαφέρει αρκετά από την άμεση ανάλυση των συναισθημάτων, αλλά, όπως ο Ortony και οι συνεργάτες του (1988, σ. 8), είμαστε πρόθυμοι "να αντιμετωπίσουμε τις αναφορές των ανθρώπων για τα συναισθήματά τους ως έγκυρες, επίσης επειδή τα συναισθήματα δεν είναι από μόνα τους γλωσσικά πράγματα, αλλά η πιο εύκολα διαθέσιμη μη φαινομενική πρόσβαση που έχουμε σε αυτά είναι μέσω της γλώσσας".

Οι εμπειρίες των μαθητών μέσα από την ακαδημαϊκή τους ζωή επηρεάζουν τις αντιλήψεις, τις πεποιθήσεις και τις απόψεις τους απέναντι στα μαθηματικά (Kane & Mertz, 2012) και το αν τους αρέσουν ή όχι τα μαθηματικά ή ακόμα και το πόσο τους αρέσουν. Άλλες μεταβλητές, όπως το φύλο, θα μπορούσαν ενδεχομένως να επηρεάσουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά και τη χρησιμότητά τους στη ζωή. Σύμφωνα με τους Frost και συν. (1990) οι πεποιθήσεις και οι τρόποι σκέψης της γυναίκας σχετικά με τα μαθηματικά ήταν επιβλαβείς για τις γυναίκες. Επιπλέον, τα αγόρια τείνουν να αλληλεπιδρούν συχνότερα με τους εκπαιδευτές από ό,τι τα κορίτσια (Stevens, 2015), κάτι που μπορεί να δημιουργήσει μια προκατάληψη λόγω φύλου και να επηρεάσει τα κίνητρα των μαθητριών. Στο Πρόγραμμα για τη Διεθνή Αξιολόγηση των Μαθητών (Program for International Student Assessment - PISA) 2015 που εφαρμόζεται σε νεαρούς εφήβους σε τριάντα μία χώρες, τα αγόρια είχαν καλύτερες επιδόσεις στα μαθηματικά από ό,τι οι γυναίκες σε είκοσι οκτώ από τις χώρες (Gallagher & Kaufman, 2005)

Προφανώς, το φύλο παίζει ρόλο στην επίδοση των μαθητών στα μαθηματικά. Έχει αποδειχθεί ότι υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της αυτοπεποίθησης και της επίδοσης στα μαθηματικά (Kloosterman, 1988- Kunhertanti & Santosa 2018- Van der Bergh, 2013). Σύμφωνα με τους Stankov και συν. (2011), ερευνητές του Εθνικού Ινστιτούτου Εκπαίδευσης της Σιγκαπούρης που μελέτησαν την αυτοπεποίθηση και τη μεταγνώση σε μαθητές μαθηματικών, διαπίστωσαν ότι οι μαθητές που πιστεύουν ότι είναι καλοί στα μαθηματικά τείνουν να έχουν καλές επιδόσεις στις εξετάσεις. Επιπλέον, οι Stankov και συν., υπονόησαν ότι η αυτοπεποίθηση των μαθητών μπορεί να προβλέψει καλύτερα τις επιδόσεις από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο και ότι είναι "[ένας] πολύ καλύτερος παράγοντας πρόβλεψης των επιδόσεων των μαθητών [στα μαθηματικά] από οποιοδήποτε άλλο μη γνωστικό μέτρο" (σ. 6). Αυτό είναι ένα καλό παράδειγμα του σημαντικού ρόλου που παίζει η αυτοπεποίθηση στα μαθηματικά, ωστόσο δεν αποτελεί ένδειξη ότι η ευχαρίστηση και η στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά θα αυξανόταν. Με άλλα λόγια, παρόλο που οι μαθητές θα μπορούσαν να έχουν καλές επιδόσεις στα μαθηματικά, αυτό δεν καθορίζει αν τα μαθηματικά αρέσουν ή όχι στους μαθητές. Όταν μιλάμε για τα κίνητρα, θεωρούνται ισχυρός παράγοντας που επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά.

Ένας μαθητής με κίνητρο εργάζεται σκληρότερα για να βελτιώσει τις ικανότητές του. Ο Crump (1995) είπε ότι το κίνητρο ορίζεται ως ο τρόπος με τον οποίο διεγείρεται το μυαλό του μαθητή για μάθηση. Συνεχίζει αναφέροντας ότι τα κύρια συστατικά της παρακίνησης είναι ο ενθουσιασμός, ο ενθουσιασμός και το ενδιαφέρον. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εξετάζουν και να ενσωματώνουν τα κίνητρα ως στρατηγική για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων κατά τη μαθησιακή διαδικασία και ως τρόπο διάλυσης των παρανοήσεων των μαθητών.

Η Brophy (2013) διαπίστωσε ότι οι εκπαιδευτικοί παραδέχτηκαν ότι έχουν σημαντικό ρόλο στην έμπνευση των μαθητών για μάθηση και ότι μπορούν να επηρεάσουν το ενδιαφέρον των μαθητών προς τα μαθηματικά. Όλοι οι παράγοντες που αναφέρθηκαν παραπάνω, χωρίς αμφιβολία επηρεάζουν τη στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά προς θετική ή αρνητική κατεύθυνση, αλλά δεν είναι οι μόνοι παράγοντες.

Στην παρούσα μελέτη, ανακαλύπτονται οι κύριοι λόγοι για τους οποίους οι μαθητές γυμνασίου απεικονίζουν αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά και για τους οποίους τα αξιολογούν ως ένα μάθημα που δεν θα προτιμούσαν σε σύγκριση με άλλα μαθήματα όπως η πληροφορική ή η λογοτεχνία.

2. Θεωρητικό Υπόβαθρο

2.1 Θεωρία Γνωστικής Κατασκευής Συναισθημάτων

Επιλέξαμε τη θεωρία της γνωστικής δομής των συναισθημάτων (με τα αρχικά των επωνύμων των συγγραφέων OCC theory από εδώ και στο εξής) για να προσδιορίσουμε τις συναισθηματικές εμπειρίες των μαθητών. Για τον Ortony και τους συνεργάτες του (1988) τα συναισθήματα προκύπτουν ως αποτέλεσμα της ερμηνείας των καταστάσεων από εκείνους που τις βίωσαν: "[Τα συναισθήματα μπορούν να θεωρηθούν ως] αντιδράσεις με αξία σε γεγονότα, παράγοντες ή αντικείμενα, με την ιδιαίτερη φύση τους να καθορίζεται από τον τρόπο με τον οποίο ερμηνεύονται οι καταστάσεις που τις προκαλούν" (Ortony et al., 1988, σ. 13). Έτσι, ένα συγκεκριμένο συναίσθημα που βιώνει ένα άτομο σε μια συγκεκριμένη περίσταση καθορίζεται από την ερμηνεία του για τις αλλαγές στον κόσμο: "Όταν κάποιος εστιάζει σε γεγονότα, το κάνει επειδή ενδιαφέρεται για τις συνέπειές τους, όταν εστιάζει σε πράκτορες, το κάνει λόγω των πράξεών τους, και όταν εστιάζει σε αντικείμενα, ενδιαφέρεται για ορισμένες πτυχές ή υποτιθέμενες ιδιότητες αυτών ως αντικειμένων" (Ortony et al., 1988, σ. 18).

Οι διάφοροι τύποι καταστάσεων που προκαλούν συναισθήματα χαρακτηρίζονται σε τάξεις σύμφωνα με μια λέξη ή φράση που αντιστοιχεί σε ένα σχετικά ουδέτερο παράδειγμα που ταιριάζει στον τύπο του συναισθήματος (Ortony et al., 1988). Για παράδειγμα, για να αναφερθούν στον τύπο συναισθήματος "χαρούμενος για την επιβεβαίωση της προοπτικής ενός επιθυμητού γεγονότος" επιλέγουν τη συναισθηματική λέξη ικανοποίηση επειδή αντιπροσωπεύει ένα συναίσθημα σχετικά ουδέτερης αξίας μεταξύ όλων εκείνων που εκφράζουν ότι είστε χαρούμενοι για την επιβεβαίωση κάτι αναμενόμενου. Οι χαρακτηρισμοί των συναισθημάτων στη θεωρία OCC είναι ανεξάρτητοι από τις λέξεις που αναφέρονται στα συναισθήματα, καθώς πρόκειται για μια θεωρία σχετικά με τα πράγματα που αφορούν τις δηλωτικές λέξεις των συναισθημάτων και όχι για μια θεωρία των ίδιων των λέξεων. Από τη διάκριση μεταξύ αντιδράσεων σε γεγονότα, παράγοντες και αντικείμενα έχουμε ότι υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες συναισθημάτων: "Ικανοποίηση έναντι δυσαρέσκειας (αντίδραση σε γεγονότα), έγκριση έναντι αποδοκιμασίας (αντιδράσεις σε παράγοντες) και συμπάθεια έναντι αντιπάθειας (αντιδράσεις σε αντικείμενα)" (Ortony et al., 1988, σ. 33). Οι αντιδράσεις στα γεγονότα χωρίζονται σε τρεις ομάδες: η μία, η ομάδα Fortunes-of-others, επικεντρώνεται στις συνέπειες που έχουν για τον ίδιο τα γεγονότα που επηρεάζουν άλλους ανθρώπους. Οι άλλες δύο, οι ομάδες Prospect-based και Well-being, εστιάζουν μόνο στις συνέπειες για τον εαυτό τους. Οι αντιδράσεις στους παράγοντες διαφοροποιούνται σε τέσσερα συναισθήματα που συνθέτουν την ομάδα Attribution (απόδοση).

Οι αντιδράσεις σε αντικείμενα οδηγούν σε μια αδιαφοροποίητη ομάδα που ονομάζεται ομάδα έλξης. Υπάρχει επίσης μια σύνθετη ομάδα συναισθημάτων, οι ενώσεις Well-being/Attribution, που περιλαμβάνουν αντιδράσεις τόσο στο γεγονός όσο και στον παράγοντα ταυτόχρονα. Φαίνεται να υπάρχει μια γενική εξέλιξη που λειτουργεί τις διάφορες ομάδες συναισθημάτων με τη σειρά: πρώτα αντιδράσεις σε γεγονότα, έπειτα σε παράγοντες και τέλος σε αντικείμενα. Από τις προηγούμενες σκέψεις, η θεωρία OCC προσδιορίζει 3 κατηγορίες, 5 ομάδες και 22 τύπους συναισθημάτων. Ενδεικτικά στον Πίνακα 1 παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα συναισθήματα στην ομάδα Prospect-based. Για να ερμηνεύσουμε τις συναισθηματικές εμπειρίες στις τάξεις των μαθηματικών προσθέσαμε στη θεωρία OCC δύο τύπους συναισθημάτων στην ομάδα συναισθημάτων Well-being (Martínez-Sierra & García González, 2014). Τα ονομάζουμε πλήξη και ενδιαφέρον. Αυτές οι συναισθηματικές εμπειρίες προκαλούνται από την εκτίμηση που έκαναν οι μαθητές για τη δική τους γνωστική κατάσταση: 1) καταστάσεις εγρήγορσης και συγκέντρωσης που παράγουν κατανόηση και μάθηση στην περίπτωση του ενδιαφέροντος και 2) καταστάσεις απόσπασης της προσοχής και αποσυγκέντρωσης που εμποδίζουν την κατανόηση και τη μάθηση στην περίπτωση της πλήξης. Έτσι, θεωρούμε την πλήξη συναισθήματα όπως "δυσαρεστημένος για μια ανεπιθύμητη γνωστική κατάσταση απόσπασης της προσοχής" και το ενδιαφέρον όπως "ευχαριστημένος για μια επιθυμητή γνωστική κατάσταση προσοχής".

Οι στάσεις απέναντι στα μαθηματικά έχουν απασχολήσει τη βιβλιογραφία από πολλούς διακεκριμένους ερευνητές, οι οποίοι τις έχουν ορίσει με διαφορετικούς τρόπους και σε διαφορετικά πλαίσια (Head, 1989- Daskalogianni & Simpson, 2000- Di Martino & Zan, 2001- Larsen, 2013). Ο Kibrislioglu (2016) ανέφερε ότι η στάση απέναντι στα μαθηματικά σχετίζεται με την αντίληψη της χρησιμότητας ή της αχρηστίας τους, σχετικά με την συμπάθεια ή την αντιπάθεια ή ως την εμπλοκή ή την αποφυγή οποιασδήποτε μαθηματικής δραστηριότητας, συμπεριλαμβανομένων των εργασιών, των εργασιών, των έργων ή οποιασδήποτε άλλης. Ομοίως, οι Mazana και συν. (2019) όρισαν τη στάση απέναντι στα μαθηματικά ως μια συναισθηματική διάθεση, η οποία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.

Ανέφεραν επίσης ότι οι σχετικοί παράγοντες που επηρεάζουν τη συμπάθεια των μαθητών για τα μαθηματικά περιλαμβάνουν τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές απολαμβάνουν το μάθημα και τη διαχείριση της τάξης και τη διδασκαλία από τον εκπαιδευτικό. Η στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά θα μπορούσε να επηρεαστεί από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες, συμπεριλαμβανομένου του φύλου. Για παράδειγμα, έρευνες έχουν δείξει ότι η στάση απέναντι στα μαθηματικά είναι πιο αρνητική στα κορίτσια από ό,τι στα αγόρια (Prendergast & Hongning, 2016- Frost et al., 1994), ή ότι η στάση φαίνεται να μετατοπίζεται από θετική σε αρνητική όσο οι μαθητές προχωρούν κατά τη διάρκεια των μαθητικών τους χρόνων (McLeod, 1994).

Άλλοι ερευνητές, όπως οι Haladyna και συν., (1983), διαπίστωσαν ότι η ποιότητα της διδασκαλίας ενός εκπαιδευτικού και η ενίσχυση και παρακίνηση των μαθητών σχετίζεται με τη στάση του. Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνουμε. Ορισμένοι από αυτούς τους παράγοντες δεν σχετίζονται με την ατομική ικανότητα συγκράτησης πληροφοριών ή απομνημόνευσης μιας έννοιας, αλλά μάλλον με τις πολλές μεταβλητές που περιβάλλουν τη διαδικασία της μάθησης και της διδασκαλίας (Walberg, 1982). Στις επόμενες παραγράφους θα αναφερθώ σε ορισμένους από τους παράγοντες και τις προσεγγίσεις που καθοδήγησαν την παρούσα μελέτη, ιδίως σε εκείνους που σχετίζονται με το ρόλο των εκπαιδευτικών και την επίδραση των μαθητών (δηλαδή τα συναισθήματα, τις πεποιθήσεις, τη στάση, την αυτοπεποίθηση).

2.2 Στάσεις μαθητών προς τα μαθηματικά

Το συναίσθημα προς τα μαθηματικά αποτελείται από διάφορους παράγοντες που έχουν προσδιοριστεί σε προηγούμενες μελέτες (Ayob & Yasin, 2017- Zan et al., 2006). Οι παράγοντες αυτοί έχουν σημαντικό ρόλο στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών. Ο McLeod (1992) δήλωσε ότι η επίδραση προς τα μαθηματικά έχει τρεις κύριες συνιστώσες που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους: πεποίθηση, συναισθήματα και στάση. Οι Manzana και συν. (2019), ανέφεραν ότι η επιρροή προς τα μαθηματικά περιλαμβάνει επίσης την αυτοπεποίθηση. Ορισμένοι ερευνητές, όπως οι Hannula και συν. (2016), συζήτησαν ότι η κατηγοριοποίηση της επίδρασης προς τα μαθηματικά από τον Mcleod πρέπει να επανεξεταστεί, υποστηρίζοντας ότι η ίδια η στάση ως ψυχολογικό μέτρο περιλαμβάνει τα συναισθήματα και την πεποίθηση. Σε κάθε περίπτωση, και για τους σκοπούς αυτής της μελέτης, εξετάζουμε ιδιαίτερα τις επιδράσεις μεταβλητών όπως η πεποίθηση, τα συναισθήματα και η αυτοπεποίθηση και τη διασταύρωσή τους με το ρόλο του εκπαιδευτικού στην τάξη.

Η πίστη στα μαθηματικά μπορεί να πάρει πολλές διαφορετικές μορφές. Για τους μαθητές, η πεποίθηση συνδέεται με τις δεξιότητες που σχετίζονται με την εκτέλεση των μαθηματικών. Για παράδειγμα, ο Lampert(1990) δήλωσε ότι οι μαθηματικές πεποιθήσεις των μαθητών σχετίζονται άμεσα με το πόσο γρήγορες και ακριβείς απαντήσεις μπορούν να δώσουν σε μια μαθηματική εργασία, επιλύοντάς την όπως διδάσκονται από τους δασκάλους τους και ακολουθώντας τους "κανόνες". Στη συνέχεια, σύμφωνα με τον Lampert, οι μαθητές θεωρούν ότι το να κάνεις και να γνωρίζεις μαθηματικά σημαίνει να ακολουθείς τους απομνημονευμένους κανόνες που επιβάλλουν οι δάσκαλοι. Οι Kloosterman και συν. (1996), ορίζουν τις πεποιθήσεις ως τις "προσωπικές υποθέσεις από τις οποίες τα άτομα λαμβάνουν αποφάσεις σχετικά με τις ενέργειες που θα αναλάβουν" (σελ. 39), όπου οι προσωπικές υποθέσεις εξαρτώνται από τα εγγενή χαρακτηριστικά του ατόμου -στην προκειμένη περίπτωση των μαθητών- και από τις κοινωνικές και προσωπικές εμπειρίες. Οι τελευταίες, πυροδοτούν τις ενέργειες που κάνουν και αναλαμβάνουν οι μαθητές απέναντι στα μαθηματικά. Σίγουρα, για πολλούς μαθητές, τα παραπάνω ισχύουν, αλλά για τη μελέτη που παρουσιάζεται εδώ, η πεποίθηση παίρνει μια διαφορετική μορφή, κατά την οποία η πεποίθηση των μαθητών προς τα μαθηματικά σχετίζεται με τη δική τους αντίληψη για τις ικανότητές τους (Bonne, 2016- McLeod, 1992), τις προηγούμενες μαθησιακές εμπειρίες σε σχέση με άλλα μαθήματα, την έλλειψη γνώσεων (Suthar et al., 2010) και το ρόλο των εκπαιδευτικών ως κινητήριων καταλυτών για την επιτυχία τους (Brophy, 2013).

Τα συναισθήματα των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά επηρεάζονται από γνωστικούς, συναισθηματικούς, παρακινητικούς και εκφραστικούς παράγοντες (Gafoor & Kurukkan, 2015). Αυτά τα συναισθήματα μπορεί να είναι θετικά ή αρνητικά και συνεπάγονται ψυχολογικές αντιδράσεις που επηρεάζουν τις γνωστικές διαδικασίες. Σύμφωνα με τους Di Martino και Zan (2011), τα συναισθήματα θα μπορούσαν να επηρεάσουν την προσοχή και τη μνήμη ενός μαθητή. Επιπλέον, τα συναισθήματα θα μπορούσαν ενδεχομένως να επηρεάσουν τις ικανότητες ενός μαθητή να λειτουργεί σε ένα κοινωνικό πλαίσιο και μπορούν να επηρεάσουν τον τρόπο με τον οποίο κάποιος προσαρμόζεται στις συνθήκες της ζωής και τη διαδικασία λήψης αποφάσεων (De Bellis & Goldin, 2006). Στα μαθηματικά, τα συναισθήματα έχουν αποδειχθεί ότι επηρεάζουν και επηρεάζουν τη μάθηση και την επίδοση των μαθητών (Schukajlow et al., 2017) και παρόλο που το άγχος έχει μελετηθεί με μεγάλη έμφαση σε σχέση με αυτό, οι ερευνητές έχουν πλέον εστιάσει την προσοχή τους στο ρόλο των συναισθημάτων στη διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης (Chang & Beilock, 2016). Για παράδειγμα, οι Pekrun και συν. (2017) διεξήγαγαν διαχρονική μελέτη με μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με τη σχέση μεταξύ συναισθημάτων και επίδοσης. Διαπίστωσαν ότι υπάρχει σχέση μεταξύ του είδους των συναισθημάτων (δηλαδή, θετικών ή αρνητικών) και του επιπέδου επίδοσης και απόδοσης των μαθητών λέγοντας ότι όσο υψηλότερα είναι τα θετικά συναισθήματα που έχει ένας μαθητής, τόσο καλύτερα είναι τα αποτελέσματα στα μαθηματικά. Αντίθετα, όσο περισσότερα αρνητικά συναισθήματα έχει ένας μαθητής, τόσο χαμηλότερη είναι η βαθμολογία και η επίδοση. Η επίδοση του μαθητή σίγουρα επηρεάζεται από τα συναισθήματα και το αντίστροφο. Οι Schukajlow και συν. (2017) δήλωσαν ότι "η επίδοση των μαθητών [επηρεάζει] θετικά την ανάπτυξη θετικών συναισθημάτων και αρνητικά τα αρνητικά συναισθήματα... [αυτά υποδηλώνουν ότι] τα συναισθήματα και [η επίδοση] στα μαθηματικά μπορούν να συνδεθούν με ενάρετους (που συνεπάγονται θετικά συναισθήματα) και φαύλους (που συνεπάγονται αρνητικά συναισθήματα) κύκλους με την πάροδο του χρόνου" (σ. 5). Τα συναισθήματα μπορούν επίσης να επηρεάσουν τον τρόπο με τον οποίο κάποιος αντιλαμβάνεται κάτι, στην προκειμένη περίπτωση τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής συνδέει τις χαμηλές βαθμολογίες και την αμηχανία με τα μαθηματικά, είναι πιθανό οι μαθητές να έχουν μόνο αρνητικά συναισθήματα απέναντί τους, τα οποία, κατά συνέπεια, θα εμποδίσουν το ενδιαφέρον και τις προσπάθειες, τα κίνητρα και την αυτοπεποίθηση του μαθητή.

Στο πλαίσιο του προβληματισμού σχετικά με την αξιολόγηση της διδασκαλίας των μαθηματικών έγινε μια έρευνα (Φιλίππου, 1991, 1992) για να εξεταστούν οι στάσεις των μαθητών της τελευταίας τάξης του δημοτικού και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης απέναντι στα μαθηματικά. Η έρευνα αυτή εξέτασε συγκεκριμένα το πώς οι μαθητές αισθάνονταν για τη δυσκολία του μαθήματος, τη σημασία του σήμερα, τη μέθοδο των μαθηματικών γενικότερα και αν τους άρεσε ή αν τα απεχθάνονταν (Φιλίππου Γ. - Χρίστου Κ., 2001). Η μελέτη αυτή έδειξε ότι οι στάσεις των τελευταίων μαθητών του δημοτικού σχολείου για τα μαθηματικά είναι ικανοποιητικές. Τα παιδιά δεν έδειξαν αδιαφορία για το θέμα- αντίθετα, έδειξαν ότι τους αρέσει να ασχολούνται με αυτό και ότι αναγνωρίζουν τη σημασία του στη σύγχρονη κοινωνία. Ωστόσο, παρατηρήθηκε μια επιζήμια μεταβολή αυτών των συναισθημάτων όταν τα παιδιά πέρασαν από τη βασική στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τα μαθήματα δεν είναι τόσο ευχάριστα για τα παιδιά και δεν κάνουν τα παιδιά να αισθάνονται καλά όταν συμμετέχουν σε αυτά. Τα συμπεράσματα που προέκυψαν είχαν άμεση σχέση με το αντικείμενο που παρουσιάστηκε καθώς και με τις θεμελιώδεις εμπειρίες των μαθητών που αποκτήθηκαν από την τακτική συμμετοχή τους στη διδακτική διαδικασία. Αναμφίβολα, ένας σημαντικός παράγοντας ήταν η αυστηρά δομημένη δομή των μαθημάτων του σχολικού συστήματος, η οποία εξάλειφε κάθε ευκαιρία για ευρεία ενδοσκόπηση.

2.3 Αυτοπεποίθηση & Μαθηματικά

Η αυτοπεποίθηση έχει οριστεί από τον Bandura (1990) ως η αυτοπεποίθηση κάποιου για τις ικανότητές του να εκτελέσει με επιτυχία ένα έργο και ως αποτέλεσμα της διασταύρωσης μεταξύ της αυτοπεποίθησης και των εμπειριών αυτοπεποίθησης -εμπειρίες που μπορεί να προέρχονται από διαφορετικές πηγές, όπως προσωπικές, κοινωνικές ή επιδόσεις. Σύμφωνα με τον Bandura, η αντίληψη που έχει κάποιος για τις επιδόσεις-επιτεύγματα είναι ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζουν την αυτοπεποίθηση, επειδή σχετίζονται με εμπειρίες όπου επιτεύχθηκε η κυριαρχία. Στα μαθηματικά, η αυτοπεποίθηση αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές (δηλαδή ο μαθητής) αντιλαμβάνονται τον εαυτό τους σε σχέση με τις ικανότητές τους στα μαθηματικά (Adelson & McCoach, 2011- Hannula et al., 2004). Σύμφωνα με τους Hannula και συν., η αυτοπεποίθηση είναι ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την απόκτηση της μάθησης από τους μαθητές και που επηρεάζουν την απόδοση και την επίδοση των μαθητών.

Οι ιδέες αυτές υποστηρίζονται από μελέτες που διεξήχθησαν από τους Van der Bergh (2013) και Mutodi και Ngirande (2014), οι οποίοι διαπίστωσαν ότι οι μαθητές με υψηλό επίπεδο αυτοπεποίθησης πιστεύουν ακράδαντα ότι έχουν τις δυνατότητες και τις ικανότητες να επιτύχουν στα μαθηματικά. Η αυτοπεποίθηση των μαθητών ότι μπορούν να κάνουν μαθηματικά είναι σημαντική, καθώς τους παρέχει την πεποίθηση να ξεπεράσουν τους φόβους τους ότι δεν μπορούν να αποδώσουν όπως επιθυμούν. Αντίθετα, οι μαθητές με χαμηλή αυτοπεποίθηση πιστεύουν ότι, ανεξάρτητα από το τι κάνουν, δεν θα τα καταφέρουν ποτέ καλά στα μαθηματικά, γεγονός που εμποδίζει την επιθυμία και τις δυνατότητές τους να αναπτύξουν τις απαραίτητες συνήθειες, δεξιότητες και ικανότητες για να επιτύχουν το επίπεδο απόδοσης που επιθυμούν ή που απαιτείται. Η αυτοπεποίθηση των μαθητών μπορεί να επηρεαστεί από πολλούς παράγοντες. Ένας παράγοντας είναι ο δάσκαλος της τάξης. Οι στρατηγικές του δασκάλου για την παροχή υψηλής ποιότητας διδασκαλίας ώστε να εμπλέκει, να παρακινεί και να ενθαρρύνει τους μαθητές έχει αντίκτυπο στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν την αυτοπεποίθησή τους. Ο δάσκαλος πρέπει να θέτει ρεαλιστικές προσδοκίες καθοδηγώντας τους μαθητές με τρόπο που να αναπτύσσονται οι γνώσεις σταδιακά. Αυτά θα επιτρέψουν στους μαθητές να βιώσουν την αίσθηση της επίτευξης, της μάθησης και της κατανόησης, οδηγώντας σε μια θετική αυτοπεποίθηση.

2.4 Ο ρόλος του δασκάλου ως προς το κίνητρο για μάθηση

Τα κίνητρα είναι ένας ισχυρός παράγοντας που επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά (Middleton & Spanias, 1999). Ένας μαθητής με κίνητρο εργάζεται σκληρότερα για τη βελτίωση των ικανοτήτων του και θα μπορούσε να λειτουργήσει ως ιός που μεταδίδει αυτό το συναίσθημα σε άλλους μαθητές. Ο Crump (1995) είπε ότι το κίνητρο ορίζεται ως ο τρόπος με τον οποίο διεγείρεται το μυαλό του μαθητή για μάθηση. Συνεχίζει αναφέροντας ότι τα κύρια συστατικά της παρακίνησης είναι ο ενθουσιασμός, ο ενθουσιασμός και το ενδιαφέρον. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να χρησιμοποιούν τα κίνητρα ως στρατηγική για την ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων κατά τη μαθησιακή διαδικασία και ως τρόπο διάλυσης των παρανοήσεων των μαθητών. Ο Brophy (2013) ανέφερε ότι οι εκπαιδευτικοί παραδέχτηκαν ότι έχουν σημαντικό ρόλο στην έμπνευση των μαθητών για μάθηση. Οι εκπαιδευτικοί διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο και αποτελούν θεμελιώδη παράγοντα όταν πρόκειται για την παρακίνηση, την εμπλοκή και την ενθάρρυνση των μαθητών να μάθουν, να έχουν ενεργό συμμετοχή στην τάξη και να αποδίδουν με επιτυχία. Είναι ζωτικής σημασίας τόσο οι εκπαιδευτικοί όσο και οι μαθητές να έχουν κίνητρα στη δυναμική διαδικασία της διδασκαλίας και της μάθησης (Anderman et al., 2011).

Σύμφωνα με τον Impact Teacher (2017), ένας εκπαιδευτικός με υψηλό επίπεδο παρακίνησης μπορεί να επιτύχει μια σταθερή και ενεργοποιημένη θετική εκπαιδευτική πρακτική που θα αξιοποιήσει τις συμπεριφορές των μαθητών για μάθηση και τελικά να καλλιεργήσει το επιστημονικό τους ταξίδι βοηθώντας τους μαθητές να αυξήσουν τα προσωπικά τους εσωτερικά κίνητρα (Reiss, 2012). O Chuter (2019) δήλωσε ότι ένας μαθητής με κίνητρα θα εργαστεί σκληρότερα για να βρει λύσεις σε σύνθετες εργασίες και ότι τα εσωτερικά κίνητρά του θα καλλιεργήσουν σε αυτούς "ισχυρές και ευέλικτες δεξιότητες κριτικής σκέψης" (σελ. 1)που διαφορετικά δεν θα αναπτύσσονταν. Οι κινητοποιημένοι φοιτητές δεν διαφέρουν από τους μη κινητοποιημένους, ούτε είναι πιο έξυπνοι ή με μεγαλύτερη ικανότητα να εργαστούν στα μαθήματά τους, ωστόσο έχουν την ανάγκη να έχουν και να βρίσκουν απαντήσεις στις ερωτήσεις, τις αμφιβολίες και τα ερωτήματά τους. Στη συνέχεια, προκύπτει ότι οι εκπαιδευτικοί δεν είναι σημαντικό να απαντούν μόνο σε αυτές τις ερωτήσεις ή να βοηθούν τους κινητοποιημένους μαθητές να βρουν τις απαντήσεις που χρειάζονται, αλλά να δημιουργούν ένα περιβάλλον και μια κουλτούρα στην τάξη, όπου οι μη κινητοποιημένοι μαθητές θα αισθάνονται την ανάγκη να απαντηθούν και οι ερωτήσεις τους, παρέχοντας ευκαιρίες μάθησης μέσα από θέματα και καταστάσεις που σχετίζονται με το πλαίσιο και την πραγματικότητά τους (Aguilar, 2021- Lesh & Doerr, 2003). Με αυτόν τον τρόπο τόσο οι παρακινούμενοι όσο και οι μη παρακινούμενοι μαθητές θα αποδίδουν τα αναμενόμενα στα μαθήματά τους. Στις αίθουσες διδασκαλίας, οι μαθητές πρέπει να αισθάνονται ότι αυτό που μαθαίνουν έχει σημασία και ότι σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο. Δεν είναι ασυνήθιστο να ακούει κανείς μαθητές να παραπονιούνται για τη χρησιμότητα διαφόρων μαθημάτων, όπως οι φυσικές επιστήμες, η χημεία ή τα μαθηματικά. Όμως, η μάθηση στις τάξεις και ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η απόκτηση γνώσεων από τους μαθητές εξαρτάται -μεταξύ άλλων μεταβλητών- σε μεγάλο βαθμό από το τι κάνουν οι καθηγητές, το είδος των αλληλεπιδράσεων που λαμβάνουν χώρα μεταξύ καθηγητή και μαθητών και από τον τρόπο με τον οποίο οι καθηγητές μιλούν, συμβουλεύουν, προετοιμάζουν και εμπλέκονται στους μαθητές τους (Ball & Forzani, 2011).

Όσον αφορά το τελευταίο, ο Chuter (2019) προτείνει ότι για να διατηρηθεί το κίνητρο των μαθητών στην τάξη, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ενσωματώσει στη διδασκαλία του τις ακόλουθες πρακτικές: νοοτροπία ανάπτυξης, αυτοαποτελεσματικότητα, ομαλοποίηση του αγώνα, δημιουργία ήσυχων χώρων και αυτό-αποδοχή. Η νοοτροπία ανάπτυξης αναφέρεται στο πώς οι εκπαιδευτικοί βοηθούν τους μαθητές τους να συνειδητοποιήσουν ότι η επιτυχία και η επίδοση σχετίζονται κυρίως με τη σκληρή δουλειά και τη δέσμευση και όχι πραγματικά με την αντίληψή τους για το πόσο ικανοί (ή όχι) είναι να αποδώσουν καλά. Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν ότι η επίτευξη είναι το αποτέλεσμα της εργασίας για την επίτευξη ενός στόχου, τον οποίο ο δάσκαλος πρέπει να βοηθήσει στη δημιουργία και την επίτευξη του. Η κανονικοποίηση του αγώνα αναφέρεται σε αυτό που το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM) αποκαλεί ως παραγωγικό αγώνα (2014). Ο παραγωγικός αγώνας δεν σημαίνει ότι οι μαθητές πρέπει να υποφέρουν για να μάθουν, στην πραγματικότητα είναι το αντίθετο, αναφέρεται στην ευκαιρία που έχουν οι μαθητές να εξερευνήσουν διαφορετικές πιθανές διαδρομές λύσεων, εναλλακτικές λύσεις ή κύκλους λύσεων, προκειμένου να επιτύχουν τη λύση σε ένα έργο ή μια κατάσταση. Παρόμοια με ό,τι συμβαίνει στην πραγματική ζωή όταν πρέπει να επιλυθεί ένα πρόβλημα και ακολουθούνται διαφορετικές απαντήσεις και διαδρομές μέχρι να βρεθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα (Hiebert & Grouws, 2007; Lesh & Doeer, 2003).

Ο Cluter (2019) συνιστά τη χρήση ήσυχων χώρων για την ενίσχυση της κριτικής σκέψης και του προβληματισμού κατά την εργασία σε εργασίες που απαιτούν συγκέντρωση, ιδίως όταν πρόκειται για ατομική εργασία. Επιπλέον, συνιστά να διαχωρίζονται οι εργασίες που απαιτούν τη συνεργασία των μαθητών σε ομάδες από εκείνες στις οποίες οι μαθητές εργάζονται ατομικά. Μια άλλη σύσταση είναι ότι οι εκπαιδευτικοί βοηθούν τους μαθητές τους να συνειδητοποιήσουν και να αναγνωρίσουν ότι η αποτυχία είναι πάντα μια πιθανότητα. Ειδικότερα, για τους μαθητές που έχουν υπερβολικά κίνητρα, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να τους βοηθήσουν να καταλάβουν ότι το να μην βρίσκουν τη σωστή απάντηση ή ίσως να μην είναι οι πρώτοι που ολοκληρώνουν μια εργασία, δεν σημαίνει ότι δεν μπορούν να ολοκληρώσουν με επιτυχία την εργασία. Ο έλεγχος και η κατανόηση των παραπάνω θα βοηθήσει τους μαθητές να διαχειριστούν τα συναισθήματά τους με πιο επιτυχημένο τρόπο και θα αποφύγουν την απογοήτευση όταν δεν έχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα (Kapur, 2014).

3. Ανάλυση Μαθηματικών

3.1 Το μαθηματικό υλικό

Η εκμάθηση μαθηματικού γνωστικού υλικού, όπως οι αριθμοί, οι αριθμητικές πράξεις, οι μαθηματικοί τύποι, τα γραφήματα και τα σχήματα, περιλαμβάνει τις ίδιες περιοχές του εγκεφάλου που εμπλέκονται στην ανάγνωση και την ορθογραφία (Γκούμας, 2009). Ειδικότερα, οι δυσκολίες στον γραπτό λόγο και τη γλώσσα των μαθηματικών μπορεί να σχετίζονται με τις ακόλουθες ομοιότητες και στις δύο γνωστικές περιοχές: - και οι δύο γλώσσες είναι μορφές επικοινωνίας, όπου τα σύμβολα με τα οποία αναπαρίστανται είναι συμβατικά αποδεκτά και πολιτισμικά καθορισμένα- - και οι δύο γλώσσες έχουν τέτοια δομή που απαιτούν δεξιότητες αλληλουχίας και αλληλουχίας για την αποτελεσματική χρήση τους και στις δύο γλώσσες για να συντελεσθεί η μάθηση και η απομνημόνευση, απαιτείται κατάκτηση του προφορικού λόγου σε ικανοποιητικό επίπεδο, - και για τις δύο γλώσσες η άμεση μνήμη είναι σημαντική (Fuchs & Fuchs, 2002).

Στην εργασία τους από το 2000, οι Bryant, Bryant και Hammill εξετάζουν και ερμηνεύουν τη φράση "είχε δυσκολία με τη μαθηματική γλώσσα". Η μαθηματική γλώσσα είναι τεχνικά περίπλοκη και απαιτεί από τους μαθητές να κατανοήσουν τόσο τη σημασία των μαθηματικών συμβόλων όσο και των λέξεων, επειδή στα μαθηματικά υπάρχουν ελάχιστες ή καθόλου ενδείξεις πλαισίου, σε αντίθεση με την ανάγνωση. Προκειμένου να εφαρμοστούν αποτελεσματικές εκπαιδευτικές παρεμβάσεις, συνιστάται να προσδιορίζονται και να διδάσκονται μαθηματικοί όροι όπως άθροισμα, διαφορά, πρόσθεση, αναγωγή κ.λπ. ειδικά για κάθε γνωστικό αντικείμενο σύμφωνα με σημαντικές διδακτικές αρχές όπως η ρητή διδασκαλία, τα παραδείγματα και η καθοδηγούμενη πρακτική (Rivera, 1997).

Επειδή τα μαθηματικά σύμβολα επικοινωνούν έννοιες από την αριθμητική γλώσσα, οι γλωσσικές ικανότητες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στα μαθηματικά επιτεύγματα. Για τους υπολογισμούς και τα λεκτικά θέματα αριθμητικής, η χρήση της γλώσσας είναι ζωτικής σημασίας. Η συστηματοποίηση της μνήμης και η εφαρμογή διαφόρων διαδικασιών, κανόνων και αριθμητικών δεδομένων απαιτεί γλωσσικές ικανότητες στους μαθηματικούς υπολογισμούς. Οι απαιτήσεις για τις αναγνωστικές ικανότητες αυξάνονται με την αυξανόμενη δυσκολία των λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων σε κάθε βαθμίδα εκπαίδευσης (Gumas, 2009). Πολλοί μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες βρίσκουν τις άσχετες λεκτικές και αριθμητικές πληροφορίες των προκλήσεων μπερδεμένες (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004). Επιπλέον, πολλά παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες δυσκολεύονται να διαβάσουν, γεγονός που καθιστά δύσκολη την κατανόηση και την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων (Stanovich & Siegel, 1994). Η επικράτηση και η συνύπαρξη ελλείψεων στην ανάγνωση και στα μαθηματικά έχουν ως αποτέλεσμα συνεχείς προκλήσεις στην επίλυση προβλημάτων (Hanich & Jordan, 1997).

Κάθε ένα από τα ποσοτικά χαρακτηριστικά του κειμένου - το μήκος των λέξεων, ο αριθμός των προτάσεων, οι λέξεις ανά φράση και ο αριθμός των ρημάτων - αυξάνει τη δυσκολία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, όπως έχει αποδειχθεί σε προηγούμενες μελέτες (Fuchs, Fuchs & Prentice, 2004- Geary & Hoard, 2001). Σε σύγκριση με άλλη βιβλιογραφία, τα μαθηματικά κείμενα είναι πολύ διαφορετικά. Η χρήση μαθηματικής συμβολικής γλώσσας παράλληλα με τη φυσική αγγλική γλώσσα στο κείμενο είναι η πιο σημαντική διαφορά. Αυτές οι διαφοροποιήσεις προσδίδουν στην ανάγνωση μαθηματικών κειμένων συγκεκριμένες ιδιότητες. Προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι το μακροσκελές κείμενο (πολλές λέξεις σε δηλώσεις προβλημάτων), το περιεχόμενο της περιγραφόμενης ιστορίας (οικείο ή μη), η μορφή διατύπωσης της δήλωσης, οι σύνθετες προτάσεις, καθώς και τα πολύπλοκα προβλήματα και η παρουσία περιττών πληροφοριών έχουν αρνητικό αντίκτυπο στην επίδοση στα μαθηματικά (Geary & Hoard, 2001- Κολέζα, 2000- McLeod & Crump, 1978). Τέλος, μπορούμε να πούμε ότι τα μαθηματικά έχουν τη δική τους "γλώσσα", τη δική τους μέθοδο επικοινωνίας και τον δικό τους λόγο. Η ανάπτυξη αυτού του λόγου, ο οποίος είναι ζωτικής σημασίας για τη δημιουργία μαθηματικού νοήματος, δεν συμβαίνει φυσικά και αβίαστα μεταξύ των μαθητών. Αποκτάται με τη συμμετοχή σε μια κοινότητα όπου γνώστες και έμπειρα άτομα (εκπαιδευτικοί ή ακόμη και μαθηματικοί με υψηλά επίπεδα επίδοσης) μεταφράζουν, μοντελοποιούν, αναδιατυπώνουν, υποστηρίζουν και ενθαρρύνουν τη συμβολή των μαθητών στη μαθηματική δραστηριότητα της τάξης. Σε ένα τέτοιο μοντέλο, ο δάσκαλος λειτουργεί ως οδηγός λόγου στην τάξη των μαθηματικών, καθώς οι μαθητές μετακινούνται από τη μία γλώσσα στην άλλη (ή, ακόμα καλύτερα, από τον ένα λόγο στον άλλο) ως ο κυρίαρχος πόλος της μάθησης και της διδασκαλίας (Σακονίδης, 2007).

3.2 Τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών

Οποιαδήποτε προσπάθεια δημιουργίας ενός προγράμματος σπουδών για τα μαθηματικά αντιμετωπίζει αμέσως μια σειρά από προβλήματα, πολλά από τα οποία αφορούν απλώς την επιλογή της ύλης: ποιες μαθηματικές γνώσεις είναι ζωτικής σημασίας να αποκτήσουν όλοι οι μελλοντικοί πολίτες; Ποια πρότυπα θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επιλογή τους; Ποια θέματα που καλύπτονται από το υπάρχον πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να παραλειφθούν; Παρά τις προκλήσεις που θέτουν, οι απαντήσεις σε αυτά και σε άλλα προβλήματα παρόμοιας φύσης επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τον χαρακτήρα της μαθηματικής εκπαίδευσης που επιχειρείται να παραχθεί στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο της εποχής. Πρέπει να αναζητηθούν τα κεντρικά χαρακτηριστικά και η δυναμική της νοητικής διαδικασίας που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές ως απάντηση στο μαθηματικό περιεχόμενο, προκειμένου να αποτυπωθούν τα θεμελιώδη συστατικά αυτής της ταυτότητας. Ένα συγκεκριμένο αντικείμενο προς εκμάθηση είναι τα μαθηματικά.

Κατέχουν κεντρική θέση στα προγράμματα σπουδών για την υποχρεωτική εκπαίδευση. Αναγνωρίζονται ως ένας από τους σημαντικότερους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού λόγω του εξαιρετικά ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν, με σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη της ατομικής και συλλογικής σκέψης παγκοσμίως. Εξαιτίας αυτού, η ολοκλήρωση μιας επιτυχημένης σχολικής μαθητείας σε αυτές είναι καθοριστικής σημασίας για τη γνωστική ανάπτυξη κάθε πολίτη και, κατά συνέπεια, για την ακαδημαϊκή και επαγγελματική του ανέλιξη. Ωστόσο, πολλοί μαθητές, συχνά αυτοί που ανήκουν σε ευάλωτες ομάδες, εμποδίζονται να επιτύχουν στα μαθηματικά και να αναπτύξουν θετική στάση απέναντί τους λόγω της αφηρημένης φύσης τους, της αυστηρότητας και της πολυπλοκότητας των σχετικών ιδεών, της οργάνωσής τους, καθώς και της προβληματικής προσέγγισής τους στην τάξη. Ποιες συγκεκριμένες ιδιότητες, όμως, καθιστούν τα μαθηματικά ένα τόσο μοναδικό θέμα προς μελέτη και, κατά συνέπεια, προς διδασκαλία;

Πρώτα απ' όλα, η αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα χαρακτηρίζεται από την ενεργό και έντονη εμπλοκή στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, τη μοναδική μέθοδο μάθησης και επίλυσης ζητημάτων και τον εκτεταμένο λεκτικό και συμβολικό κώδικα έκφρασης των νοημάτων. Μόνο το πλαίσιο για την ενεργοποίησή τους παρέχεται από το μαθηματικό περιεχόμενο, το οποίο αποκτά νόημα μόνο στο βαθμό που συμβάλλει στην ενίσχυσή τους προς την κατεύθυνση της εκ νέου ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης από τον μαθητή. Προκειμένου να γίνουν σαφείς οι σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, δηλαδή η θέση τους σε ένα δίκτυο ιδεών, η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει την ικανότητα διαχείρισης των θεμελιωδών δομικών στοιχείων των μαθηματικών, όπως είναι οι έννοιες, οι ιδιότητές τους και οι τρόποι τεκμηρίωσης των μαθηματικών συλλογισμών. Αυτό το είδος δικτύου αναπτύσσεται γύρω από μια "βασική έννοια". Για παράδειγμα, η "βασική ιδέα" στην πρόσθεση αιωνίων κλασμάτων είναι η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, η οποία βασίζεται σε μια άλλη "βασική ιδέα" ότι οι αριθμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με διάφορους τρόπους διατηρώντας την αξία τους, όπως ως κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί, ποσοστά κ.λπ.

Το ίδιο αυτό γεγονός -ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη των δομών, η κατανόηση των οποίων χαρακτηρίζει αυτό που ονομάζουμε μαθηματικό στυλ σκέψης και συλλογισμού- συμβάλλει στη συνοχή και τη συνέπεια που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική επιστήμη και συμβάλλουν στη δύναμη και το εύρος των εφαρμογών της. Η μελέτη των συνδέσεων μεταξύ εννοιών και διαδικασιών, καθώς και η ανάπτυξη μαθηματικών δεξιοτήτων, στάσεων και πεποιθήσεων, θα πρέπει να υπερισχύει της έμφασης στην απομνημόνευση και εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών, σύμφωνα με τις σύγχρονες εκτιμήσεις στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό θα επιτρέψει στους μαθητές να επιλύουν προβλήματα στα μαθηματικά και με τα μαθηματικά με μεγαλύτερη επιτυχία. Μια τέτοια στρατηγική αντανακλά τις προσπάθειες ερμηνείας και κατανόησης του κόσμου που οδήγησαν στην ανάπτυξη των μαθηματικών ως επιστήμης.

Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης ενδιαφέρονταν και εξακολουθούν να ενδιαφέρονται για την εξεύρεση γενικών στόχων για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η πρόταση του Winter (1975) (στο Wittmann, 2005) για την υιοθέτηση τέτοιων στόχων, οι οποίοι τηρούν τις ακόλουθες τρεις αρχές, αποτέλεσε σημαντικό βήμα στον τομέα αυτό.

- Μετατόπιση από τα "μαθηματικά ως έτοιμο προϊόν" στη "μαθηματικοποίηση", η οποία αποτελείται από τις διαδικασίες της "έρευνας", της "συλλογιστικής" και της "επικοινωνίας".

- Αναγνώριση της μάθησης μέσω ανακάλυψης ως θεμελιώδους διδακτικού δόγματος.

- Τονισμός του τρόπου με τον οποίο τα "καθαρά" και τα "εφαρμοσμένα" στοιχεία των μαθηματικών αλληλοσυμπληρώνονται.

Η έμφαση στον μαθηματικό γραμματισμό, έναν από τους σημερινούς κύριους στόχους του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών, παρέχεται από τις προαναφερθείσες έννοιες. Πρόκειται για την ικανότητα: α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να ενεργεί κανείς στο κοινωνικό του περιβάλλον χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά ως εργαλείο και β) να αναλύει και να ερμηνεύει τον τρόπο με τον οποίο τα μαθηματικά εφαρμόζονται στη λήψη κοινωνικών αποφάσεων. Συνεπώς, ένα "μαθηματικά εγγράμματο" άτομο θα πρέπει:

- Να έχει κατανόηση του γεγονότος ότι "οι μαθηματικές έννοιες, δομές και ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για την οργάνωση των φαινομένων στον φυσικό, κοινωνικό και πνευματικό κόσμο" (Freudenthal, 1983),

- Να μπορεί να λειτουργήσει κριτικά σε μια δημοκρατική κοινωνία, επειδή έχει την "ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να παράγει και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια σειρά από ενδο- και εξω-μαθηματικά περιβάλλοντα και περιστάσεις στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν ρόλο" (Niss, 1996, 2003).

Μια δεύτερη κεντρική στόχευση που προκύπτει από τη σύγχρονη θέαση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ανάγκη διδασκαλίας αξιοποιήσιμων μαθηματικών, δηλαδή, μαθηματικών που βοηθούν το μαθητευόμενο να κατανοήσει και να οργανώσει αποτελεσματικά τόσο την πραγματικότητά του όσο και τα ίδια τα μαθηματικά. Σε αυτήν την κατεύθυνση, αποκτά ιδιαίτερη σημασία η σύνδεση της άτυπης με την τυπική γνώση των μαθηματικών, με τρόπο που να ενθαρρύνει την οικοδόμηση μιας διαλεκτικής σχέσης μεταξύ τους.

Συμπερασματικά, τα τρέχοντα ερευνητικά στοιχεία αναγνωρίζουν την ανάγκη να στοχεύσουμε ένα Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση στη μελέτη μαθηματικών που "παραμένουν μαθηματικά" και είναι χρήσιμο για όλους τους μαθητές. Πρωταρχικός στόχος της κατάλληλης εκπαίδευσης σε αυτή την προσέγγιση θα πρέπει να είναι η έμφαση στις θεμελιώδεις ιδιότητες της μαθηματικής γνώσης: γενίκευση, βεβαιότητα, ακρίβεια και συντομία.

3.3 Διδακτικοί Στόχοι μαθηματικών

Στόχος της υποχρεωτικής μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η δημιουργία σκεπτόμενων πολιτών, ορισμένοι από τους οποίους μπορεί να συνεχίσουν να αποκτούν περαιτέρω πτυχία μαθηματικών. Για την επίτευξη αυτού του στόχου στις σημερινές πολύπλοκες κοινωνικές, οικονομικές και πολιτιστικές συνθήκες είναι απαραίτητη η ανάπτυξη ορισμένων γενικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων που συνδέονται, θεωρητικά, οριζόντια με όλα τα μαθήματα που καλύπτονται από τα προγράμματα σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και οι οποίες περιγράφονται συνοπτικά παρακάτω:

- Η ικανότητα αποτελεσματικής χρήσης κοινωνικοπολιτισμικών (γλωσσικών, συμβολικών και κειμενικών) και ψηφιακών μέσων. Τα πολλά "εργαλεία" είναι απαραίτητα για τη συμμετοχή σε μια ενεργή συνομιλία με το περιβάλλον και έχουν ποικίλες σημασίες.

- Η ικανότητα επικοινωνίας και συνεργασίας σε διαφορετικές ομάδες. Προκειμένου να διευθετούνται οι συγκρούσεις, να διαχειρίζονται οι διαφορές και οι ασυνέπειες, να ξεπερνιούνται τα πολιτισμικά εμπόδια και να επιτυγχάνεται ισορροπία μεταξύ της αφοσίωσης στην ομάδα και της ατομικής ελευθερίας, είναι ζωτικής σημασίας για το άτομο να είναι σε θέση να κατανοεί τις σκέψεις και τις στάσεις των άλλων.

- Η ικανότητα να ενεργεί κατάλληλα και ανεξάρτητα. Τα άτομα πρέπει να είναι σε θέση να εργάζονται ανεξάρτητα καθώς και μέσα σε μια ομάδα, να υπερασπίζονται τις ιδέες τους, να αναγνωρίζουν τους δικούς τους περιορισμούς και απαιτήσεις, να αναζητούν πληροφορίες και να αξιολογούν τις πηγές τους, να αξιολογούν τη μάθησή τους και να κατανοούν και να βγάζουν νόημα από τις εμπειρίες τους (μεταγνώση).

Οι ατομικές ικανότητες και δεξιότητες μπορούν να αναπτυχθούν από τις προαναφερθείσες γενικές ικανότητες, οι οποίες είναι ζωτικής σημασίας για τους σύγχρονους πολίτες. Ένας σκεπτόμενος, αφοσιωμένος πολίτης πρέπει να είναι ικανός να κάνει επιλογές και να βρίσκει λύσεις. Για παράδειγμα, η πλειονότητα των προβλημάτων στην πραγματική ζωή χαρακτηρίζεται από ασάφεια, έλλειψη δεδομένων ή περίσσεια δεδομένων, σε αντίθεση με τα "σχολικά" προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, όπου παρέχονται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για την επίλυσή τους και η πορεία προς τη λύση είναι συνήθως μονόδρομος. Ένα τέτοιο πρόβλημα πρέπει πρώτα να γίνει αντιληπτό για να επιλυθεί. Η διαδικασία κατανόησης ενός προβλήματος δεν είναι απλή, διότι απαιτεί μια ποικιλία κρίσιμων ικανοτήτων, όπως η διαχείριση της πολυπλοκότητας (αναγνώριση και ανάλυση κανονικοτήτων, εντοπισμός αναλογιών μεταξύ οικείων και άγνωστων καταστάσεων), η διάκριση (εντοπισμός σχετικών και άσχετων στοιχείων σε σχέση με μια κατάσταση ή έναν στόχο) και η επιλογή (επιλογή μεταξύ διαφορετικών ενδεχομένων σε σχέση με τον επιδιωκόμενο στόχο).

Αφού κατανοηθεί το πραγματικό πρόβλημα, πρέπει να μετατραπεί σε μαθηματικό πρόβλημα για να επιλυθεί με τη χρήση των κατάλληλων εργαλείων (σύμβολα, αλγόριθμοι και τεχνολογικά εργαλεία). Αυτή η διαδικασία, που μερικές φορές αναφέρεται ως μαθηματικοποίηση ή μοντελοποίηση, είναι μια θεμελιώδης ικανότητα που πρέπει να κατέχουν όλοι. Μόλις δημιουργηθεί μια λύση, πρέπει να καταγράφεται και συχνά να δημοσιοποιείται. Ως αποτέλεσμα, προκειμένου να εξηγούνται οι ιδέες και οι αιτιολογήσεις πίσω από τη σκέψη για τη λύση, απαιτείται μια γλώσσα. Οι επικοινωνιακές δεξιότητες είναι απαραίτητες τόσο για το άτομο που προτείνει μια λύση όσο και για εκείνο που την αποδέχεται. Το κύριο χαρακτηριστικό της είναι ότι συχνά απαιτεί τη μετατροπή μιας μορφής αναπαράστασης σε μια άλλη (π.χ. από πίνακα σε διάγραμμα). Επομένως, το να μπορεί κανείς να εκφράζεται μέσα από ποικίλες αναπαραστάσεις και (επιπλέον), το να μπορεί να αναλύει και να κατανοεί δεδομένα, είναι δύο κρίσιμες ικανότητες που κάθε πολίτης θα πρέπει να μπορεί να επιτελεί.

Η επίλυση προβλημάτων διευκολύνεται από τη συνεργασία. Αλλά για να πετύχει, τα εμπλεκόμενα μέρη πρέπει να δημιουργήσουν οικειοθελώς ένα θεμέλιο αμοιβαίου σεβασμού και εμπιστοσύνης. Σύμφωνα με πρόσφατες έρευνες, οι κοινότητες πρακτικής που δημιουργούνται στη βάση αξιόπιστων σχέσεων παρουσιάζουν δημιουργικότητα και καινοτομία (Wenger et al., 2002). Εξαιτίας αυτού, η ικανότητα ομαδικής συνεργασίας καθώς και η ικανότητα επικοινωνίας και επιχειρηματολογίας αποτελούν κρίσιμες δεξιότητες ζωής για όλους. Οι προαναφερθείσες ικανότητες θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως "βασικές" επειδή περιλαμβάνουν τις βασικές γνώσεις, δεξιότητες, ταλέντα και στάσεις ενός ατόμου και έχουν ευρύ φάσμα. Αυτή η δυναμική συνύπαρξη γνωστικών και συναισθηματικών χαρακτηριστικών αναπτύσσεται κατά τη διάρκεια της ζωής ενός ατόμου και του δίνει τη δυνατότητα να ανταποκρίνεται στις περιστάσεις με ετοιμότητα και αποτελεσματικότητα. Ως εκ τούτου, ο κύριος στόχος της εννιάχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι η παροχή ευκαιριών στους μαθητές να αναπτύξουν αυτές τις βασικές δεξιότητες, ώστε να μπορούν να σκέφτονται κριτικά και δημιουργικά τόσο εντός όσο και εκτός της σφαίρας των μαθηματικών, σε καθημερινές καταστάσεις των οποίων η διαχείριση απαιτεί τη χρήση μαθηματικών εργαλείων. Συμπερασματικά, αν και η επιλογή του σωστού περιεχομένου για τα μαθηματικά προγράμματα σπουδών είναι σημαντική, η βοήθεια προς τους μαθητές να αναπτύξουν τις θεμελιώδεις ικανότητες και γνώσεις που είναι απαραίτητες για την πλήρη κατανόηση των "θεμελιωδών ιδεών" που διαπλέκονται σε όλο το πρόγραμμα σπουδών φαίνεται να αποτελεί πρόβλημα αιχμής, διότι δημιουργεί το απαραίτητο πλαίσιο για την υποστήριξη της αποτελεσματικής διαπραγμάτευσης και κατασκευής του μαθηματικού νοήματος. Είναι ευρέως αποδεκτό ότι η ανάπτυξη μιας θετικής διάθεσης απέναντι στη διαδικασία της μάθησης των μαθηματικών αποτελεί κρίσιμη προϋπόθεση για την ανάπτυξη των θεμελιωδών ικανοτήτων που αναφέρονται παραπάνω. Η βιβλιογραφία αναφέρει μια σειρά από χαρακτηριστικά και συμπτώματα αυτών των στάσεων, όπως ο σκεπτικισμός, η εφευρετικότητα, το άνοιγμα σε νέες ιδέες και χαρακτηριστικά όπως η περιέργεια και η δεκτικότητα. Αυτές οι ιδιότητες χρησιμεύουν ως γενική προϋπόθεση για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, η οποία μπορεί να περιγραφεί με τα ακόλουθα τρία στοιχεία:

- Δημιουργική σκέψη: Ανοιχτό πνεύμα (σκέψη πέρα από το προφανές, περιορισμός των προκαταλήψεων, ανάπτυξη ιδεών και κατανόηση της άποψης), περιέργεια και δημιουργική σκέψη (προϋπόθεση για την ενεργό συμμετοχή στη διαδικασία ανακάλυψης).

-Αναστοχαστική σκέψη: Μεταγνώση είναι η διαδικασία του αναστοχασμού (ρύθμιση και αυτοέλεγχος της νοητικής και σωματικής δράσης)

- Η κριτική σκέψη συνεπάγεται την προσπάθεια κατανόησης της κατάστασης (διερεύνηση και αξιολόγηση των διαθέσιμων στοιχείων, αναζήτηση σχέσεων μεταξύ των στοιχείων για την ενίσχυση μιας πιθανής θεωρίας, έλεγχος της θεωρίας για αντιπαραδείγματα και αντιφάσεις, αναζήτηση εναλλακτικών ερμηνειών), ανάπτυξη σχεδίου δράσης ή μεθόδου (διατύπωση συγκεκριμένων στόχων και ανάπτυξη μιας υποθετικής πορείας για την επίτευξή τους) και άσκηση προσοχής (διερεύνηση πέραν των δεδομένων, αναζήτηση αποδείξεων/επιχειρημάτων).

Η εργασία στην τάξη των μαθηματικών θα πρέπει να δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν ποικίλες μεθοδολογικές πτυχές που διέπουν τη διαδικασία ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης, εκτός από τα γνωστικά και συναισθηματικά χαρακτηριστικά. Η εκμάθηση της εξερεύνησης, της διερεύνησης, της δημιουργίας και του ελέγχου υποθέσεων είναι ένα βασικό αρχικό βήμα αυτής της προσέγγισης. Η μαθηματική ανακάλυψη στηριζόταν πάντα σε μεγάλο βαθμό στον πειραματισμό και το ίδιο ισχύει και σήμερα. Ωστόσο, πολύ συχνά αποκρύπτεται από τη λογική της παράδοσης, η οποία ενθαρρύνει τους μαθηματικούς να παρουσιάζουν μόνο κομψά, καλά αναπτυγμένα και διεξοδικά τεκμηριωμένα ευρήματα. Αυτή η εντύπωση υπάρχει και στο σχολικό περιβάλλον, όπου οι μαθητές συνήθως διαθέτουν περιορισμένο χρόνο για έρευνα και όπου τα τελικά αποτελέσματα της ερευνητικής διαδικασίας δεν είναι δομημένα με τρόπο που να επιτρέπει στους μαθητές να κατασκευάζουν ολοκληρωμένα μοντέλα μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών. Απλές έννοιες όπως η συστηματική συλλογή δεδομένων, η οργάνωση των δεδομένων, ο έλεγχος με μικρά δείγματα, οι εναλλακτικές διατυπώσεις προβλημάτων κ.λπ. δεν εμπεδώνονται στην "κουλτούρα" των μαθητών για την επίλυση προβλημάτων.

Αντίθετα, τους προτρέπουν να έχουν στο μυαλό τους τακτικές που έχουν χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά σε ανάλογες περιστάσεις, ώστε να μπορούν να τις επαναλάβουν χωρίς δισταγμό. Η διαδικασία οικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης και της μαθηματικής σκέψης επικεντρώνεται στην επίλυση προβλημάτων. Όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν μόνοι τους τις μαθηματικές έννοιες μέσω της επίλυσης προβλημάτων, οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα, διότι η συμμετοχή τους σε αυτή τη διαδικασία τους βοηθά να "κατασκευάσουν" σταδιακά τις μαθηματικές τους γνώσεις, να εμβαθύνουν την εννοιολογική τους κατανόηση και να συνειδητοποιήσουν τη λειτουργική τους πτυχή καθώς και την πολιτισμική και ιστορική τους διάσταση. Επομένως, ένα κρίσιμο στοιχείο της μάθησης των μαθηματικών είναι η σωστή επιλογή των δραστηριοτήτων.

Η σχετική έρευνα υποστηρίζει ότι η επίλυση προβλήματος πρέπει να διδάσκεται τόσο για την επίλυση προβλήματος όσο και μέσω της επίλυσης προβλήματος, με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσης προβλήματος, προκειμένου να αναγνωριστεί αυτός ο ουσιαστικός ρόλος της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος στη μαθηματική εκπαίδευση. Ο αναστοχασμός, μια διαδικασία που περιλαμβάνει τον προβληματισμό του ατόμου σχετικά με την προηγούμενη δραστηριότητά του και δεν ενεργοποιείται αυθόρμητα, είναι ένα κρίσιμο βήμα στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και, γενικότερα, στην επεξεργασία μαθηματικών ερωτημάτων. Χαρακτηριστικά προσδιορίζει τους "άριστους λύτες ζητημάτων", επειδή μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν για να αξιολογήσουν την ακρίβεια και την εφαρμοσιμότητα των προτεινόμενων λύσεων και, αν χρειαστεί, να αλλάξουν γνώμη. Ακόμη και οι πολύ μικροί μαθητές μπορούν να διδαχθούν πώς να χρησιμοποιούν τη διαδικασία του αναστοχασμού μέσω της χρήσης σχετικών ερωτήσεων, αλλά αυτό απαιτεί χρόνο και τη δημιουργία ερωτήσεων που πυροδοτούν τη μεταγνωστική ανάπτυξη των μαθητών.

Τέλος, η λειτουργία, η σημασία και η διαχείριση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας που χρησιμοποιείται για την περιγραφή των μαθηματικών ιδεών σχετίζονται με ένα άλλο βασικό συστατικό των μαθηματικών. Πολλοί άνθρωποι υποστηρίζουν ότι τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα με τα δικά της σύμβολα και μοναδικούς κώδικες επικοινωνίας. Οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να διαχειρίζονται αποτελεσματικά αυτή τη γλώσσα, όχι μόνο στο επίπεδο των συμβόλων, αλλά επίσης, και ίσως το πιο σημαντικό, στο επίπεδο της διατύπωσης λογικών σχέσεων και επιχειρημάτων. Πρέπει να είναι σε θέση να εκφράζουν επιχειρήματα με σαφήνεια και συντομία, ώστε να μπορούν να τα κατανοήσουν οι άλλοι, καθώς και να εκφράζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους τόσο σε φυσική γλώσσα όσο και με τη χρήση μαθηματικών συμβόλων και άλλων μέσων αναπαράστασης. Ειδικότερα, πρέπει να είναι σε θέση να δίνουν ακριβείς περιγραφές των βημάτων μιας διαδικασίας σκέψης (π.χ. διαγράμματα, δυναμικές ψηφιακές δομές κ.λπ.). Ένας από τους κύριους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι να βοηθήσει τους μαθητές να επικοινωνούν στα μαθηματικά και για τα μαθηματικά.

Συμπερασματικά, το σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, το οποίο περιλαμβάνει τόσο τη γνωστική όσο και την κοινωνική κατανόηση των μαθηματικών, στοχεύει κυρίως στο να έχουν οι μαθητές:

- να αναπτύξουν την ικανότητα να διατυπώνουν και να αντιμετωπίζουν μαθηματικά ζητήματα- και

- να καλλιεργήσουν μια αισιόδοξη στάση απέναντι στα μαθηματικά, σεβόμενοι την κοινωνική και καλλιτεχνική τους προοπτική και τη συμβολή τους στην πρόοδο του ανθρώπινου πολιτισμού.

Οι τέσσερις θεμελιώδεις διεργασίες που παρατίθενται κατωτέρω αποσκοπούν στην εξασφάλιση της επίτευξης των προαναφερθέντων στόχων: α) μαθηματικός συλλογισμός και επιχειρηματολογία, β) σχηματισμός συνδέσεων και δεσμών, γ) επικοινωνία μέσω της χρήσης εργαλείων, με κύριο εργαλείο τη φυσική γλώσσα, αλλά και σύμβολα, διάφορες μορφές αναπαράστασης, τεχνουργήματα και τεχνολογικά εργαλεία, και δ) μεταγνωστική επίγνωση.

Η τέχνη των επιχειρημάτων και των συλλογισμών: Η διερεύνηση παρατηρήσεων, η δημιουργία και ο έλεγχος υποθέσεων και η οικοδόμηση πειστικών επιχειρημάτων αποτελούν συστατικά στοιχεία της μαθηματικής συλλογιστικής διαδικασίας (μια μορφή της οποίας είναι η τυπική μαθηματική απόδειξη). Η επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιεί προφανώς τη μαθηματική σκέψη, αλλά οι εφαρμογές της είναι πολύ ευρύτερες. Χρησιμεύει ως θεμέλιο για την επικοινωνία στην τάξη των μαθηματικών και βοηθά σημαντικά στην κατανόηση. Είναι ευθύνη του καθηγητή μαθηματικών να βοηθήσει τους μαθητές του να μεταβούν από την άτυπη, διαισθητική σκέψη σε πιο επίσημους τύπους συλλογισμού. Για να το επιτύχει αυτό, πρέπει να έχει την ικανότητα να επιλέγει σχετικές ερωτήσεις που θα ωθήσουν τους μαθητές να εξετάσουν έννοιες που προηγουμένως θεωρούσαν δεδομένες, όπως για παράδειγμα αν "ο πολλαπλασιασμός κάνει το αποτέλεσμα μεγαλύτερο, ενώ η διαίρεση κάνει το αποτέλεσμα μικρότερο". Δημιουργία συνδέσεων: Η ικανότητα πραγματοποίησης συνδέσεων αποτελεί κρίσιμο συστατικό της μαθηματικής συλλογιστικής και, ευρύτερα, της μαθηματικής σκέψης.

Όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που βασίζεται σε λογικές σχέσεις και δομές, έχουν ισχυρότερη γνώση του πώς οι μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες σχετίζονται μεταξύ τους. Το πρόγραμμα σπουδών πρέπει να δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να δημιουργούν συνδέσεις τόσο εντός των μαθηματικών όσο και μεταξύ των μαθηματικών, άλλων επιστημονικών κλάδων και του πραγματικού κόσμου. Τεχνική επικοινωνίας: Οι μαθητές επικοινωνούν με ποικίλους τρόπους - προφορικά, εικονικά και γραπτά - για ποικίλα ακροατήρια και σκοπούς (συμμαθητές, καθηγητές, γονείς). Μέσω της επικοινωνίας, τα παιδιά είναι σε θέση να εκφραστούν καθώς και να σκεφτούν τις δικές τους απόψεις και τις απόψεις των συνομιλητών τους. Η διαδικασία της συν-δημιουργίας νοήματος προωθεί τη συνεργασία, τη σε βάθος κατανόηση ιδεών και διαδικασιών, την αποσαφήνιση ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που διατυπώνονται.

Με τη συμπερίληψη σχετικών ασκήσεων που δίνουν έμφαση στη σωστή χρήση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας και τη σταδιακή απομάκρυνση από υποκειμενικές, άτυπες φράσεις για την περιγραφή μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών, το πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να δίνει στους μαθητές την ευκαιρία να επικοινωνούν.

Διαδικασία επιλογής και χρήσης εργαλείων: Στην ιστορία των μαθηματικών, ήταν κοινή πρακτική η χρήση απτών και ψηφιακών αντικειμένων, μετατρέποντάς τα σταδιακά σε νοητικά εργαλεία. Παραδείγματα αυτού περιλαμβάνουν τον άβακα, τη δίοδο και άλλες συσκευές που αναπαριστούν αφηρημένες ιδέες όπως η αξία θέσης και ο κύκλος. Είναι προφανές ότι η απλή παρουσία εργαλείων (όπως τα ψηφιακά) δεν εγγυάται τη δημιουργία γνώσης, καθώς πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να τα χρησιμοποιήσουν (ακόμη και σε απλές καταστάσεις, όπως η χρήση του διαβήτη ή της μοιρογνωμόνιας αριθμομηχανής) και συχνά, είναι πολύ δύσκολο να τα εντάξουν λειτουργικά στη μαθησιακή διαδικασία. Η ικανότητα επιλογής των κατάλληλων απτικών και ψηφιακών εργαλείων και διαδικασιών που θα τους επιτρέψουν να συμμετάσχουν σε αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα πρέπει να αναπτυχθεί από τους μαθητές, προκειμένου να τους βοηθήσει να ξεπεράσουν αυτές τις προκλήσεις (όπως η αποτελεσματική διατύπωση και διερεύνηση εικασιών και προβλημάτων, η κατάλληλη αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας και η μοντελοποίηση μιας κατάστασης).

Τέλος, είναι ζωτικής σημασίας να κατανοήσουν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης (όπως εικονικά, γεωμετρικά, συμβολικά κ.λπ.), να αναπτύξουν σταδιακά την ικανότητα εναλλαγής μεταξύ των συστημάτων αναπαράστασης και να επιλέγουν το καλύτερο σύστημα αναπαράστασης για μια δεδομένη κατάσταση. Διαδικασία μεταγνωστικής επίγνωσης: Ο συνειδητός έλεγχος της μάθησης, η επιλογή και ο σχεδιασμός μεθόδων, η παρακολούθηση της ανάπτυξης της γνώσης, η διόρθωση των λαθών, η αξιολόγηση της αποτελεσματικότητας των τεχνικών και η προσαρμογή των στρατηγικών ανάλογα με τις ανάγκες αποτελούν παραδείγματα μεταγνωστικών διαδικασιών. Όταν ένα άτομο μπορεί να ελέγχει, να ρυθμίζει και να αναλύει τις διαδικασίες της σκέψης του και έχει επίγνωση της γνωστικής του διαδικασίας, λέγεται ότι έχει μεταγνωστική ικανότητα (Bransford, Ferrara & Campione, 1983).

Οι μεταγνωστικές διεργασίες επιτρέπουν την ευέλικτη σκέψη και την ικανότητα προσαρμογής σε νέες, άγνωστες συνθήκες (1987, Share & Dover). Σύμφωνα με τον Schoenfeld (1987), υπάρχουν τρεις τρόποι για να συζητήσουμε τη μεταγνώση σε σχέση με τη μάθηση των μαθηματικών: πεποιθήσεις και διαισθήσεις (δηλαδή, ποιες ιδέες για τα μαθηματικά υιοθετείτε και πώς αυτό επηρεάζει τον τρόπο που μαθαίνετε;), γνώση των δικών σας διαδικασιών σκέψης (δηλαδή, πόσο καλά μπορείτε να περιγράψετε τις δικές σας διαδικασίες σκέψης;), και αυτορρύθμιση ή παρακολούθηση και έλεγχος (δηλαδή, πόσο καλά μπορείτε να παρακολουθείτε τη σκέψη σας, για παράδειγμα, όταν λύνετε ένα πρόβλημα;). Συμπερασματικά, η μάθηση των μαθηματικών είναι μια συνεχής, σπειροειδής διαδικασία γενίκευσης και αφαίρεσης. Το παρόν Πρόγραμμα Σπουδών επιχειρεί να υλοποιήσει αυτή τη διαδικασία εστιάζοντας στην ανάπτυξη τόσο γενικών όσο και ειδικών δεξιοτήτων και διαδικασιών κατά μήκος μαθησιακών τροχιών που αλλάζουν τόσο εντός όσο και μεταξύ των τάξεων. Γνωστικές συγκρούσεις που προκαλούν την αναθεώρηση, την τροποποίηση ή την ανατροπή της γνώσης χαρακτηρίζουν συχνά αυτή την προοδευτικά αφηρημένη διαδικασία ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης. Σε μια μεταγενέστερη φάση, οι υποθέσεις που έγιναν σε μια προηγούμενη φάση αμφισβητούνται και γίνονται το επίκεντρο της συζήτησης και του προβληματισμού.

4. Διδακτικές Τεχνικές Μαθηματικών

4.1 Ιστορική Αναδρομή

Τόσο οι φιλόσοφοι όσο και οι εκπαιδευτικοί έχουν ενδιαφερθεί για τη διδασκαλία των μαθηματικών σε όλη τη διάρκεια της ιστορίας. Δεν είναι τυχαίο ότι ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται τα μαθηματικά εξακολουθεί να αποτελεί σημαντικό θέμα έρευνας και εξέτασης. Το εμπόριο αγαθών και η διανομή του πλούτου, η ρύθμιση του χρόνου και η διαχείριση των κοινωνικών απαιτήσεων σε ένα ευρύτερο πλαίσιο εξαρτώνται από τα μαθηματικά από την αρχή της κοινωνικής οργάνωσης του ανθρώπου (Keitel, 2006). Οι Έλληνες φιλόσοφοι θεωρούσαν τα μαθηματικά ως ένα φιλοσοφικό πρόβλημα και ένα θεωρητικό πλαίσιο που αποτελούσε δοκιμασία για την ανθρωπότητα. Δεν είναι τυχαίο ότι τα μαθηματικά είχαν τον μεγαλύτερο εκπαιδευτικό αντίκτυπο για τον Πλάτωνα. Γι' αυτό και στην πόρτα της ακαδημίας του υπήρχε μια πινακίδα που έγραφε «ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσίτω», υποδεικνύοντας ότι δεν πρέπει να εισέλθει κανείς που δεν καταλαβαίνει τα μαθηματικά.

Ωστόσο, αντί να χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, τα μαθηματικά διδάσκονταν ως ένα θέμα ξεχωριστό από τη συνηθισμένη ζωή. Ο Πλάτων έλεγε ότι τα παιδιά πρέπει να εκτίθενται στα μαθηματικά από μικρή ηλικία και ότι ο απώτερος σκοπός της εκπαίδευσης είναι να φτάσουν οι μαθητές στο επίπεδο της καθαρής μαθηματικής σκέψης. Η ικανότητα ανάλυσης της ίδιας της φύσης των αριθμών αναφέρεται ως καθαρός μαθηματικός συλλογισμός. Στην ουσία, η ικανότητα ενός ατόμου να κατακτήσει τα μαθηματικά και η κατανόηση των μαθηματικών συνδέονται με τις γνωστικές του ικανότητες, οι οποίες διαχωρίζουν τους μαθητές. Με άλλα λόγια, υπάρχουν μαθητές που είναι ευφυείς και μπορούν να κατανοήσουν τις βασικές αρχές των μαθηματικών και υπάρχουν μαθητές που δεν είναι αρκετά ευφυείς για να το κάνουν και δεν είναι σε θέση να μάθουν το αντικείμενο. Αυτή η μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών ήταν δημοφιλής στην αρχαία Ελλάδα και συνεχίζει να ασκεί επιρροή στα δυτικά έθνη σήμερα. Έχει παρατηρηθεί ότι υπάρχουν μαθητές που έχουν μαθηματική σκέψη και υπάρχουν μαθητές που δεν έχουν. Αυτή η στρατηγική επηρεάζει και τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών, η οποία προσπαθεί να αναπτύξει "μαθηματικά μυαλά" και να αποκλείσει τους μαθητές που δεν έχουν μαθηματική σκέψη (Stinson & Bulock, 2012).

Από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα, η διδασκαλία των μαθηματικών ήταν μια κοινή μέθοδος διδασκαλίας. Η Ελλάδα και τα ασιατικά έθνη, όπως η Κίνα, διδάσκουν μαθηματικά από την αρχαιότητα. Για παράδειγμα, το κινεζικό εκπαιδευτικό σύστημα, στόχος του οποίου ήταν να εκπαιδεύσει νέους ευγενείς και παιδιά, χρονολογείται από το 2000 π.Χ. Στο πρώιμο κινεζικό εκπαιδευτικό σύστημα, τα μαθηματικά διδάσκονταν αρχικά ως αριθμολογία πριν εξελιχθούν στο σύγχρονο πεδίο των μαθηματικών (Siu, 2004). Η μελέτη των μαθηματικών είχε σημαντικό ρόλο στην εκπαίδευση των αρχαίων Ελλήνων, αρχικά ως θεωρητικά μαθηματικά και στη συνέχεια ως πρακτικά μαθηματικά. Η διδασκαλία των μαθηματικών συνεπαγόταν την καθοδήγηση των μαθητών προς έναν συγκεκριμένο τρόπο σκέψης που συνδεόταν με τις αρετές που αναμενόταν να διαθέτουν οι νέοι (Asper, 2009).

Ως επιστήμη και ως αντικείμενο διδασκαλίας, τα μαθηματικά εξελίχθηκαν από την αρχαιότητα έως σήμερα. Οι ψυχολογικές και παιδαγωγικές ιδέες που δημιουργήθηκαν εκείνη την εποχή είχαν σημαντικό αντίκτυπο στη διδασκαλία των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του 19ου αιώνα. Με άλλα λόγια, θεωρήθηκε ότι η διδασκαλία των μαθηματικών ήταν μια παιδαγωγική διαδικασία που απαιτούνταν για την εκπλήρωση των απαιτήσεων των μαθητών. Για παράδειγμα, τα μαθηματικά και η γεωμετρία διδάσκονταν στο δημοτικό σχολείο μέσω παιχνιδιού και άλλων δραστηριοτήτων προσβάσιμων από τους μαθητές. Αυτόν τον αιώνα, δύο θέματα αποτέλεσαν την κύρια έμφαση της μαθηματικής διδασκαλίας. Το πρώτο θέμα αφορούσε τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές μπορούν να μάθουν, ενώ το δεύτερο θέμα συζητούσε τους τρόπους με τους οποίους οι ενέργειες των μαθητών μπορούσαν να υποστηρίξουν τη μάθηση. Στην ουσία, οι μαθησιακές ικανότητες των μαθητών είχαν προτεραιότητα στη μαθηματική εκπαίδευση του 19ου αιώνα (Furinghetti, Matos & Menghini, 2013).

Οι επιστήμονες και οι εκπαιδευτικοί άρχισαν να εστιάζουν στη σύνδεση μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα. Πιο συγκεκριμένα, πίστευαν ότι η διδασκαλία και η μάθηση ήταν δύο αλληλένδετες διαδικασίες, καθώς η μία επηρεάζει το πώς εξελίσσεται η άλλη. Η προσέγγιση αυτή οδήγησε στην ανάπτυξη πολλών εκπαιδευτικών στρατηγικών που έδιναν έμφαση είτε στους ποσοτικούς είτε στους ποιοτικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ενώ τα ποιοτικά οφέλη της μαθηματικής εκπαίδευσης συνδέονται με το είδος της σκέψης που προωθεί, τα ποσοτικά αποτελέσματα σχετίζονται με τις επιδόσεις των μαθητών. Ωστόσο, αυτός ο αιώνας έδωσε αξία σε εκπαιδευτικές στρατηγικές όπως η ανατροφοδότηση και οι ανταμοιβές που μπορούν να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα της αριθμητικής εκπαίδευσης. Η εκπαίδευση μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά απέκτησε μεγάλη σημασία στο γύρισμα του αιώνα. Τα θεμέλια της σύγχρονης διδασκαλίας των μαθηματικών τέθηκαν καθ' όλη τη διάρκεια του 20ού αιώνα, ο οποίος αποτέλεσε σημείο καμπής στην ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης (Kilpatrick, 2014).

Η μελέτη των σύγχρονων εννοιών ακολουθεί την ιστορική εξέταση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Ο ρόλος των μαθηματικών στη σύγχρονη κοινωνία τονίζεται έντονα στην κοινωνικοπολιτική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης που αναδύθηκε τον 21ο αιώνα. Πιο συγκεκριμένα, η τεχνολογία και η ευκολία πρόσβασης στην πληροφορία που χαρακτηρίζει τους ανθρώπους έχουν αντίκτυπο στους σύγχρονους πολιτισμούς, ιδιαίτερα αυτούς της Δύσης. Η ανάδυση μιας νέας ταυτότητας, διαφορετικής από αυτήν που είχαν συνηθίσει μέχρι σήμερα οι εκπαιδευτές, ως αποτέλεσμα της τεχνολογίας και της εύκολης πρόσβασης στην πληροφορία είναι εμφανής στο σχολικό περιβάλλον και στην τάξη. Η ανάγκη υιοθέτησης κατάλληλων διδακτικών στρατηγικών που να ανταποκρίνονται στις ανάγκες του σημερινού μαθητικού πληθυσμού αναδεικνύεται από αυτή τη νέα κοινωνική ταυτότητα. Εξαιτίας αυτού, η σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση δίνει μεγάλη έμφαση στις κοινωνικές προεκτάσεις των μαθηματικών και στον τρόπο με τον οποίο παίζουν ρόλο στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων (Gutierrez, 2013).

4.2 Η Διδασκαλία των Μαθηματικών

Όπως και σε άλλα μαθήματα, η διδασκαλία των μαθηματικών καθοδηγείται γενικά από θεωρίες μάθησης που δημιουργήθηκαν από ειδικούς των κοινωνικών και ανθρωπιστικών επιστημών. Οι θεωρίες του Piaget και του Vygotsky είναι οι δύο που είχαν τη μεγαλύτερη επίδραση στη σχολική εκπαίδευση των παιδιών (van Dijk, van Oers & Terwel, 2003). Οι επαγγελματίες της εκπαίδευσης δίνουν ιδιαίτερη προσοχή στη θεωρία του Vygotsky, την οποία κατηγοριοποιούν ως ανήκουσα στη σχολή του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού. Σύμφωνα με τους υποστηρικτές του κοινωνικού κονστρουκτιβισμού, υπάρχει συνεχής επαφή μεταξύ του ατόμου και της κοινωνίας, η οποία διαμορφώνει και τα δύο. Οι άνθρωποι διαμορφώνονται από τις αλληλεπιδράσεις τους με τους άλλους και τις παράλογες ενέργειες στις οποίες προβαίνουν. Οι αλληλεπιδράσεις του ατόμου με το κοινωνικό περιβάλλον στο οποίο ζει συμβάλλουν στη διαμόρφωση του τρόπου σκέψης του και στη συνέχεια της νόησής του. Αυτό ισχύει και για τη γνώση, η οποία αποκτάται μέσω των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων. Αυτή η μεθοδολογία οδήγησε τον Vygotsky να υποστηρίξει ότι τα παιδιά μαθαίνουν ευκολότερα όταν δρουν κοινωνικά (Ernest, 2010).

Η εκμάθηση των μαθηματικών είναι μια κοινωνική προσπάθεια που μπορεί να λάβει πολλές διαφορετικές μορφές. Μία από αυτές τις μορφές συνδυάζει μαθηματικές έννοιες με σωματική δραστηριότητα. Ο Vygotsky πίστευε ότι η κίνηση και το παιχνίδι είναι οι καλύτεροι τρόποι μάθησης. Προκειμένου τα παιδιά να μάθουν για τον κόσμο και να αλληλεπιδρούν με αυτόν, πρέπει να χρησιμοποιούν μια ποικιλία εργαλείων κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Αυτή η προσέγγιση έχει επηρεάσει τη σύγχρονη πρωτοβάθμια εκπαίδευση, η οποία περιλαμβάνει τη διδασκαλία πολλών μαθημάτων και την προσθήκη όλο και περισσότερων κοινωνικών ερεθισμάτων στην τάξη (Shabani, Khabit & Ebadi, 2010). Οι ειδικοί της εκπαίδευσης έχουν επίσης ενδιαφερθεί για την ιδέα του Piaget. Δεδομένου ότι δίνει μεγάλη έμφαση στις κοινωνικές πτυχές που επηρεάζουν τη μάθηση των παιδιών, η θεωρία αυτή μοιράζεται στοιχεία με εκείνη του Vygotsky. Στην προσέγγιση του Piaget, όμως, δίνεται μεγάλη βαρύτητα στη σχέση που διαμορφώνεται μεταξύ των μαθητών και του εκπαιδευτικού. Εξηγείται ότι για να είναι επιτυχής η διδασκαλία, ο δάσκαλος και ο μαθητής πρέπει να δημιουργήσουν μια συνεργατική σχέση (Vianna & Stesenko, 2006).

Σύμφωνα με τη θεωρία του Piaget, η ανάπτυξη σχέσεων αποτελεί κρίσιμο συστατικό της αποτελεσματικής μάθησης. Τα παιδιά διαμορφώνουν σχέσεις με τη γνώση καθώς μαθαίνουν. Οι γνώσεις που διδάσκονται στα μαθηματικά μαθήματα αναφέρονται ως λογικομαθηματικές. Αυτό το είδος γνώσης αναφέρεται στην επίδραση του δεσμού που δημιουργείται μεταξύ ενός υπό μελέτη αντικειμένου και του μαθητή. Για παράδειγμα, μια συλλογή αντικειμένων δεν μπορεί να περιέχει έναν αριθμό ως αντικείμενο. Τα παιδιά, ωστόσο, προσλαμβάνουν τους αριθμούς μέσα από τις σχέσεις τους με αυτούς. Οι μαθητές αναπτύσσουν έννοιες για τους αριθμούς ως αποτέλεσμα της ανάπτυξης της σχέσης. Με άλλα λόγια, η μάθηση και η διδασκαλία των μαθηματικών δεν δίνουν έμφαση στην απομνημόνευση ξηρών γεγονότων. Αντίθετα, βοηθούν τους μαθητές να οικοδομήσουν σχέσεις με τα πράγματα και τους άλλους ανθρώπους δίνοντάς τους σημασία. Με άλλα λόγια, σύμφωνα με την ιδέα του Piaget, η διδασκαλία των μαθηματικών πρέπει να μεταδίδει γνώσεις που επιτρέπουν στους μαθητές να σχετίζονται με το περιβάλλον τους (de Vries, 2000).

Ο στοχασμός είναι μια διαφορετική δημοφιλής θεωρία μάθησης που χρησιμοποιείται στη διδασκαλία των μαθηματικών. Μια γνωστική θεωρία που ονομάζεται στοχασμός δίνει μεγάλη έμφαση στην ενεργητική δραστηριότητα του ενημερωμένου ατόμου. Οι θεωρίες του Piaget και του Vygotsky είχαν αντίκτυπο στην ανάπτυξη αυτής της ιδέας τη δεκαετία του 1990. Αυτό που τονίζεται είναι το γεγονός ότι το ενημερωμένο άτομο σχετίζεται φυσικά με τον κόσμο και αλλάζει γνωστικά και ως ολόκληρος οργανισμός από τις αλληλεπιδράσεις που έχει με αυτόν. Με βάση τα μοτίβα της σωματικής κίνησης, το άτομο κατανοεί, κατανοεί, δημιουργεί νόημα, δημιουργεί εικασίες και εξηγεί. Η στοχαστική μάθηση δίνει μεγάλη έμφαση στο σώμα και στα γνωστικά μοτίβα που αυτό δημιουργεί. Οι σκέψεις και οι γνωστικές αναπαραστάσεις του ατόμου έχουν σωματική βάση. Ουσιαστικά, ο στοχασμός στοχεύει να επιστήσει την προσοχή στο φυσικό και κοινωνικό πλαίσιο της μάθησης. Το άτομο μαθαίνει αξιοποιώντας τα βιολογικά και κοινωνικά εργαλεία που έχει στη διάθεσή του στο περιβάλλον στο οποίο βρίσκεται. Μέσω των συναισθημάτων που παρέχει το σώμα, το άτομο τόσο διαμορφώνει όσο και διαμορφώνεται από τον κόσμο (Reid, 2014).

Ο στοχασμός φαίνεται να έχει αντίκτυπο στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα, η μεθοδολογία αυτής της θεωρίας υποθέτει ότι τα προβλήματα είναι εγγενή μέρη του κόσμου που το μόνο που περιμένουν είναι να διορθωθούν. Η επίλυση προβλημάτων δεν είναι μια αντικειμενική διαδικασία επειδή το άτομο είναι δυαδικά συνδεδεμένο με τον κόσμο, οδηγώντας σε μια ισχυρή αλληλεξάρτηση. Αντίθετα, ο στόχος του ατόμου είναι να αντιμετωπίσει το ζήτημα με τον τρόπο που ταιριάζει καλύτερα στο πώς το βλέπει και μπορεί να το αντιμετωπίσει. Αφήνοντας τους μαθητές να επιλέγουν και να βρίσκουν τις δικές τους λύσεις σε προβλήματα, η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η αποτελεσματική εφαρμογή αυτής της προσέγγισης στη διδασκαλία των μαθηματικών προϋποθέτει την παρουσίαση στους μαθητές πραγματικών προβλημάτων και την προσφορά πολλών λύσεων (Proulx & Simmt, 2013).

Επιπλέον, σύμφωνα με πολλούς ειδικούς, οι κοινωνικές και κριτικές θεωρίες μάθησης πρέπει να αποτελούν το θεμέλιο της διδασκαλίας των μαθηματικών. Αυτή η μέθοδος είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αυτού που σήμερα είναι γνωστό ως κριτική μαθηματική εκπαίδευση. Σύμφωνα με αυτή τη θεωρητική προοπτική, η κοινωνική δικαιοσύνη σε οποιαδήποτε μορφή είναι αυτό που επιδιώκεται να επιτευχθεί μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης. Υποστηρίζεται ότι η μελέτη των μαθηματικών πρέπει να προσεγγίζεται παρόμοια με την εκμάθηση μιας γλώσσας. Η προτεραιότητα των εκπαιδευτικών συστημάτων σε όλο τον κόσμο είναι η μελέτη προφορικών και γραπτών γλωσσών. Σε όλους τους ανθρώπους πρέπει να δοθεί η ευκαιρία να μάθουν μαθηματικά, προκειμένου να αποτραπεί κάθε μορφή διάκρισης. Στην ουσία, η μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να δίνει σε όλους την ίδια ευκαιρία να μάθουν και να δίνει έμφαση στις δυνατότητες και την ανάπτυξη κάθε ατόμου. Με αυτή την προσέγγιση, η μαθηματική εκπαίδευση φιλοδοξεί να συμπεριλάβει όλους τους μαθητές, ανεξάρτητα από τα χαρακτηριστικά που διαθέτουν, και αποφεύγει τον αποκλεισμό οποιουδήποτε συγκεκριμένου ατόμου. Οι ίσες ευκαιρίες μαθηματικής εκπαίδευσης για όλους είναι επίσης ένα απαραίτητο πρώτο βήμα για τη διασφάλιση της κοινωνικής δικαιοσύνης (Skovsmose, 2016).

4.3 Σύγχρονες Μέθοδοι

Όσο πιο γρήγορα εντοπιστούν και αντιμετωπιστούν τυχόν δυσκολίες, τόσο πιο επιτυχημένη θα είναι η βοήθεια προς τους μαθητές που αντιμετωπίζουν προβλήματα μάθησης των μαθηματικών. Η σχέση του μαθητή με τους αριθμούς θα πρέπει να επαναξιολογείται πριν από οποιαδήποτε εκπαιδευτική παρέμβαση, με έμφαση στην ουσιαστική κατανόηση των αριθμητικών ιδεών και στη σύνδεση των σχολικών μαθηματικών με την καθημερινή ζωή του μαθητή (Καραγιαννάκης, 2012).

Επιπλέον, η παρέμβαση θα πρέπει να επιδιώκει αφενός να ανταποκρίνεται στα κριτήρια του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών και αφετέρου να συμπληρώνει τυχόν κενά και λανθασμένες αντιλήψεις από προηγούμενες γνώσεις μέσω της χρήσης μιας σειράς εναλλακτικών τρόπων προσαρμοσμένων στο γνωστικό προφίλ του κάθε μαθητή. Μια πολυαισθητηριακή προσέγγιση της διδασκαλίας θα πρέπει να ενσωματώνει την αφή, την οπτική και την ακουστική ένδειξη. Επιτρέποντας στον μαθητή να επικοινωνήσει τις ιδέες και τις δυσκολίες του, αλληλεπιδρώντας βιωματικά με το κατάλληλο εποπτικό υλικό, καλλιεργείται το έδαφος τόσο για την εμβάθυνση των ήδη υπαρχουσών μαθηματικών γνώσεων όσο και για την εκμάθηση νέων πληροφοριών (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014). Τα ευρήματα της έρευνας των Grouws και Cebulla (2000) παρέχουν στοιχεία υπέρ των εξής: - την εστίαση στη μαθηματική σημασία των ιδεών, ιδίως στον τρόπο με τον οποίο η ιδέα, η έννοια ή η δεξιότητα συνδέεται με άλλες μαθηματικές ιδέες με διάφορους τρόπους με λογικά συνεπή και γνωστικό τρόπο. Ως αποτέλεσμα, δίνουν έμφαση στην αντίστροφη ή "αναίρεση" της αφαίρεσης, η οποία είναι η αντίθετη σχέση της με την πρόσθεση. - δημιουργώντας ένα πλαίσιο μάθησης στην τάξη, όπου οι μαθητές μπορούν να συναρμολογήσουν το νόημα.

Και τα δύο περιβάλλοντα -αυτά που είναι στενά συνδεδεμένα με τις συνθήκες της πραγματικής ζωής και αυτά που είναι αυστηρά μαθηματικά- μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν κρίσιμα μαθηματικά. Η αφαιρετικότητα ενός μαθησιακού περιβάλλοντος και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αλληλεπιδρούν με αυτό πρέπει να δημιουργούνται, να παρακολουθούνται και να επιλέγονται με προσοχή. Θα πρέπει επίσης να λαμβάνονται υπόψη το υπόβαθρο και τα ενδιαφέροντα των μαθητών- θα πρέπει να υπάρχουν προφανείς συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών και άλλων ακαδημαϊκών θεμάτων. Για παράδειγμα, η παρακολούθηση των αντιλήψεων των μαθητών και της κατανόησης της διδασκαλίας, δεδομένου ότι οι αντιλήψεις τους για την ίδια έννοια διαφέρουν, θα μπορούσε να γίνει με τη συλλογή δεδομένων σε μια έρευνα για μια κοινωνική μελέτη. Για να αντιμετωπιστούν οι προκλήσεις της μάθησης των μαθηματικών, πρέπει να δημιουργηθούν προγράμματα σπουδών που να λαμβάνουν υπόψη τα χαρακτηριστικά και τους στόχους των μαθητών και να χρησιμοποιούν αποτελεσματικές μεθόδους διδασκαλίας που υποστηρίζονται από την τρέχουσα έρευνα.

Οι καλύτερες μέθοδοι για τη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν αρχίσει να καθορίζονται από ερευνητές και εκπαιδευτικούς. Οι Mastropieri, Scruggs και Shiah (1991) πραγματοποίησαν μια ενδελεχή βιβλιογραφική ανασκόπηση και βρήκαν 30 μελέτες που περιέγραφαν τις μεθόδους διδασκαλίας των μαθηματικών που βοήθησαν περισσότερο τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες. Χαρακτηριστικά ανέφεραν: (α) τη διαδικασία εφαρμογής, επίδειξης, μοντελοποίησης και ανατροφοδότησης των μαθηματικών εννοιών- (β) την παροχή υποστήριξης για την ανάπτυξη ευχέρειας- (γ) τη χρήση ιεραρχικής ακολουθίας διδασκαλίας που εκτείνεται από τις συγκεκριμένες στις αφηρημένες έννοιες- (δ) τον καθορισμό μαθησιακών στόχων- (ε) το συνδυασμό επίδειξης με το μόνιμο μαθηματικό μοντέλο- (στ) τη χρήση του σκέψου δυνατά στη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων- και (η) στρατηγικές διδασκαλίας.

Ο Αγαλιώτης (2004) υποστηρίζει ότι οι προαναφερθείσες αρχές θα έπρεπε να καθοδηγούν κάθε πρόγραμμα που έχει σχεδιαστεί για να βοηθήσει τους μαθητές που έχουν μαθησιακές δυσκολίες με τα μαθηματικά. Οι αρχές αυτές θα πρέπει επίσης να συνοδεύονται από στρατηγικές για την υποστήριξη των θεμελιωδών ιδεών και ικανοτήτων αριθμητικής, της χρήσης των βασικών αριθμητικών δεδομένων (Β.Α.Δ.), της εκτέλεσης πράξεων και της επίλυσης προβλημάτων. Συνιστάται η χρήση ποικίλων υλικών για την εξάσκηση σε βασικές αριθμητικές έννοιες και ικανότητες, όπως η ταξινόμηση, η ταξινόμηση σε σειρές, η διατήρηση, η μέτρηση και η θεσμική αξία, η ενεργοποίηση όλων των αντιληπτικών οδών του μαθητή μέσω των αισθήσεων, η διαδοχική αναπαράσταση των εννοιών με πρακτικό-εικονικό-συμβολικό τρόπο και η σταδιακή αύξηση του αριθμού των αντικειμένων για ταξινόμηση σε σειρές (Grou, 2008). (Ojose & Sexton, 2009). Στην έρευνά τους με μαθητές πρώτης και δεύτερης τάξης δημοτικού που παρουσίαζαν μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, οι Geary, Hamson και Hoard (1999, 2000) αποκάλυψαν συστηματικά λάθη που αφορούσαν την τοποθέτηση αντικειμένων σε ένα σύνολο που παρέχεται για μέτρηση ή υπολογισμό. Οι μαθητές επέμεναν στην οργάνωση και την καταγραφή των αντικειμένων με συγκεκριμένη σειρά. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, τα λάθη των μαθητών στην απαρίθμηση φαίνεται να οφείλονται σε ελλείψεις ή προβλήματα με τη μνήμη εργασίας. Σύμφωνα με τους Jordan και συν. (2006), η μέτρηση (όπως οι αρχές της πολλαπλότητας και της σταθερής σειράς), η επίγνωση του αριθμού (όπως η διαφοροποίηση του ποσού, η σύγκριση αριθμών και η μέτρηση ακολουθιών) και η εκτίμηση ήταν τα θεμελιώδη συστατικά της κατανόησης των αριθμητικών εννοιών (π.χ. το μέγεθος ενός συνόλου).

Συνολικά, τα ευρήματα της μελέτης τους έδειξαν ότι οι γνωστικές ανεπάρκειες των μαθητών στην προσχολική ηλικία εκδηλώνονται σε προβλήματα κατανόησης των αριθμών και των αριθμητικών σχέσεων (όπως το μέγεθος και η ακολουθία), υποδεικνύοντας την ανάγκη κατάλληλων διδακτικών παρεμβάσεων για την πρόληψη περαιτέρω εκπαιδευτικών καθυστερήσεων για τους μαθητές στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου. Συνιστάται η οργάνωση των βασικών αριθμητικών γεγονότων που διδάσκονται, ώστε να διευκολύνεται ο αυτοματισμός και η γρήγορη ανάκληση από τη μνήμη και να συσχετίζονται τα αποτελέσματα με αντικείμενα, γεγονότα και περιστάσεις του πραγματικού κόσμου που έχουν συναντήσει οι μαθητές (Kosko, & Wilkins, 2010). Πολλοί μελετητές (Cope, L., 2015) συμβούλευσαν τη χρήση χειριστικών μέσων για την αναπαράσταση των αριθμών προκειμένου να κατανοήσουν τη δομή και την ανάλυση των δεκάδων, γεγονός που απλοποιεί την εκτέλεση της αλγοριθμικής διαδικασίας της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ("κρατώντας" και "δανειζόμενοι"). Το σημαντικότερο στοιχείο που συμβάλλει στην αποτελεσματική εκμάθηση του αλγορίθμου των πράξεων είναι η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο οι συμβολικές ενέργειες και οι υλικές πράξεις σχετίζονται με συγκεκριμένο και ημι-ειδικό/οπτικό υλικό (γραμμές, μορφές κ.λπ.) (Gersten, et al, 2009). Τέλος, για την επίλυση λεκτικών αριθμητικών προβλημάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν στρατηγικές διδασκαλίας, όπως (α) η εξοικείωση των μαθητών με το λεξιλόγιο και τα αριθμητικά σύμβολα των προβλημάτων, (β) η εξάσκηση στον εντοπισμό και την ταξινόμηση των πληροφοριών του προβλήματος (επισήμανση της ερώτησης, αγνόηση των περιττών πληροφοριών), (γ) η παράφραση (έκφραση του προβλήματος με άλλα λόγια) και (δ) η οπτικοποίηση των δεδομένων με τη χρήση συγκεκριμένων υλικών, διαγραμμάτων, σχεδίων και εικόνων. Το πρόβλημα δραματοποιείται και διδάσκονται λύσεις προκειμένου να οργανωθεί η διαδικασία και να αυξηθεί η παραγωγικότητα (Kelly, 2006).

Σύμφωνα με μελέτη (Boggan et al., 2010), η άσκηση γνωστικών στρατηγικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες να έχουν καλύτερες επιδόσεις σε λεκτικά προβλήματα αριθμών. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές αυτοί μπορεί να επωφεληθούν από την εξάσκηση που δίνει έμφαση στις τεχνικές αναπαράστασης προβλημάτων. Τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες θα πρέπει να έχουν πρόσβαση σε πόρους που θα τα βοηθήσουν να αναπτύξουν τις βασικές δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, δηλαδή να είναι σε θέση να εννοιολογούν, να αναδιατυπώνουν και να κάνουν υποθέσεις σχετικά με τη λύση ενός προβλήματος (Kelly, 2006). Η χρήση εξωτερικών (οπτικών) αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, όπως εικόνες και διαγράμματα, έχει πολλά οφέλη (Hall, 1998). Η μάθηση είναι ευκολότερη όταν η σκέψη προσανατολίζεται και οργανώνεται με εικόνες και σχήματα, τα οποία είναι εκφραστικά μέσα. Ειδικότερα, κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, μια οπτική αναπαράσταση αποτυπώνει τα ενδιάμεσα βήματα της σκέψης του λύτη, γεγονός που διευκολύνει τις διαδικασίες ελέγχου και επαλήθευσης, καθώς και προσθέτει στη μεγαλύτερη κατανόηση του προβλήματος μέσω της συνοπτικής παρουσίασης των πληροφοριών (Brunning et al., 1999).

Είναι ευρέως αναγνωρισμένο ότι οι προσεγγίσεις αναπαράστασης διευκολύνουν την κατανόηση ή την αποτελεσματική μετάφραση των πληροφοριών σε προφορικά αριθμητικά προβλήματα (Jitendra & Hoff, 1996). Οι Van Erp και Heshusius δίνουν μια ενδιαφέρουσα προοπτική στο πρόβλημα της αναπαράστασης της γνώσης και των φάσεων μεταξύ ενεργειών σε αντικείμενα και σκέψεων με θεμελιώδη σύμβολα (1986). Οι ερευνητές αυτοί υποστηρίζουν ότι μόνο μέσω του φυσικού χειρισμού και της οργάνωσης απτών πραγμάτων μπορεί κανείς να μάθει να εκτελεί πράξεις και την αρχική προσέγγιση μαθηματικών εννοιών. Μετά το στάδιο των υλικών πράξεων, το οποίο περιλαμβάνει την πρόσβαση του παιδιού σε συγκεκριμένα, τρισδιάστατα αντικείμενα αλλά όχι τη χρήση τους, ακολουθεί το στάδιο των αντιληπτικών πράξεων. Ο νεαρός προσπαθεί να πραγματοποιήσει ενέργειες νοητικά χρησιμοποιώντας την όραση και τη φαντασία- αν δυσκολεύεται, του παρέχεται υλικό. Ο νεαρός φαντάζεται το υλικό (το οποίο έχει αποσυρθεί) και εκτελεί τη δραστηριότητα στο επόμενο στάδιο. Ακολουθεί το στάδιο των λεκτικών πράξεων, όπου η εσωτερική αναδόμηση της πραγματικότητας εκφράζεται με λέξεις και βοηθά σημαντικά στην κατανόηση. Το τελικό επίπεδο του συμβολισμού περιλαμβάνει τη χρήση συμβόλων και τύπων για την αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών.

Πριν από τη χρησιμοποίηση των συμβόλων για την απόκτηση αποτελεσμάτων, οι Van Erp και Heshusius (1986) συμβουλεύουν τη μετατροπή τους σε όσο το δυνατόν περισσότερες μορφές και μεθόδους αναπαράστασης (υλικά, φωτογραφίες, σχέδια κ.λπ.). Ένα μάθημα δημιουργήθηκε από τον Lewis (1989) για να βοηθήσει στη νοητική αναπαράσταση των δυσκολιών σύγκρισης. Βασίζει τα διαγράμματα που προτείνει στο μοντέλο της αριθμητικής γραμμής. Ο μαθητής ενημερώνει τη γραμμή αριθμών κάθε φορά που αναφέρεται ένα δεδομένο στην εκφώνηση. Η ερευνήτρια υποστηρίζει ότι τέτοια προοδευτικά μεταβαλλόμενα διαγράμματα καθιστούν απλή την επαλήθευση της ακρίβειας της εσωτερικής αναπαράστασης. Οι Venger και Gorbov (1993) χρησιμοποίησαν επίσης γραμμές αριθμών για τον προσδιορισμό του μεγέθους ενός αριθμού και για την επίλυση απλών προβλημάτων πρόσθεσης. Στόχος τους ήταν να εισαγάγουν τους αριθμούς και την πρόσθεση και την αφαίρεση ως κινήσεις προς τα δεξιά και αριστερά της αριθμογραμμής μέσω της κατασκευής της αριθμογραμμής. Ο όρος "υλική τακτική" επινοήθηκε από τους Carpenter και Moser (1984) για να αναφερθεί σε διάφορες μεθόδους που περιλαμβάνουν την αρίθμηση. Τα παιδιά αναπαριστούν με φυσικό τρόπο τους πλήρεις αριθμούς του ζητήματος με τα δάχτυλά τους ή άλλα απτά αντικείμενα (π.χ. αντικείμενα) και στη συνέχεια τους μετρούν για να προσδιορίσουν μια ποσότητα.

Ανεξάρτητα από τα τεχνάσματα ή τα φυσικά προσβάσιμα εργαλεία που μπορεί να χρησιμοποιεί κανείς στις γνωστικές δραστηριότητες, ο Norman (1989) κατανόησε ότι οι γνωστικές διαδικασίες και οι γνωστικές δραστηριότητες των ανθρώπων είναι πάντα διαμεσολαβημένες με εργαλεία και προσανατολισμένες στο αντικείμενο. Υπάρχουν πολυάριθμες περιπτώσεις στις οποίες μπορεί κανείς να εισάγει αποκλειστικά μαθηματικές έννοιες χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα πράγματα ως διαμεσολαβητικά βοηθήματα στο πλαίσιο των μαθηματικών. Με τη βοήθεια αυτών των αντικειμένων, είναι δυνατόν να κατανοήσει κανείς αφηρημένες έννοιες που είναι κρίσιμες από πρακτική άποψη και πτυχές των αντικειμένων στις οποίες πρέπει να δώσει προσοχή όποιος τα χρησιμοποιεί σε μια πρακτική κατάσταση. Για παράδειγμα, το εμβαδόν ενός ορθογωνίου εξηγείται και διδάσκεται απλά στα ιαπωνικά σχολεία με τη χρήση του "μοντέλου κομμένου χαρτιού" (χρησιμοποιώντας αυτή την τεχνική, μπορεί κανείς να δημιουργήσει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο κόβοντας τη μία πλευρά του ορθογωνίου και προσαρμόζοντας την άλλη πλευρά). Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι το ίδιο με το εμβαδόν της επιφάνειάς του. Σε αυτή την περίπτωση, ένα κομμάτι χαρτί που χρησιμοποιήθηκε για τον εντοπισμό της θέσης μπορεί να θεωρηθεί μια μορφή πληρεξουσίου. Με τη σωστή διαμεσολάβηση, οι μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν την πραγματική ουσία των μαθηματικών θεμάτων.

Οκτώ έρευνες διεξήχθησαν από τους Gersten και συν. (2009) σύμφωνα με τις προτάσεις για τη διαμόρφωση επιτυχημένων προγραμμάτων παρέμβασης. Η ικανότητα συσχέτισης αφηρημένων συμβόλων με οπτικές αναπαραστάσεις είναι ένα από τα συχνότερα ζητήματα με τα οποία δυσκολεύονται τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, σύμφωνα με την έκτη σύσταση των ερευνητών. Συνιστάται η συνεχής έμφαση στις αναπαραστάσεις και η συστηματική παροχή τους στην κανονική διδασκαλία στην τάξη, ώστε να βοηθηθούν τα άτομα με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά να κάνουν τη μετάβαση από τη μελέτη του συγκεκριμένου στο αφηρημένο. Η μέθοδος διδασκαλίας CRA, η οποία σημαίνει Concrete/Concrete-Representational/Figurative-Abstract/Abstract, είναι αναμφισβήτητα το πιο δημοφιλές παράδειγμα μαθηματικής εκπαίδευσης που χρησιμοποιεί οπτικές αναπαραστάσεις. Στην πραγματικότητα, η τεχνική CRA σχετίζεται με μια απλή ιδέα που βασίζεται στα τρία βήματα του Bruner (ενεργητικό - εικονικό - συμβολικό). Για μαθητές με ειδικές ανάγκες, έχει αποδειχθεί ότι αποτελεί μια πολύ επιτυχημένη προσέγγιση διδασκαλίας των μαθηματικών (Berkas, & Pattison, 2007- Butler et al., 2003).

Η CRA είναι μια διδακτική στρατηγική τριών τμημάτων, κατά την οποία ο εκπαιδευτικός μοντελοποιεί τη μαθηματική έννοια που πρόκειται να μάθει χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά (όπως χρωματιστές μάρκες, ράβδους δεκαδικής βάσης, γεωμετρικά σχήματα, τετράγωνα μοτίβα ή κύβους), στη συνέχεια απεικονίζει την έννοια και την αναπαριστά (για παράδειγμα, σχεδιάζοντας εικόνες) και τέλος της δίνει μια αφηρημένη ή συμβολική μορφή (όπως αριθμούς, σημειώσεις ή μαθηματικά σύμβολα). Εν κατακλείδι, η εξήγηση των ενεργειών κάθε σταδίου περιλαμβάνει:

- Συγκεκριμένο στάδιο/ concrete stage: Οι μαθητές χρησιμοποιούν μόνο χειριστικά μέσα σε όλο το συγκεκριμένο στάδιο της μάθησης για να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες (Keller, 1993- Sowel, 1989- Schultz, 1986). Σε αυτή τη φάση, κάθε μαθηματική έννοια μοντελοποιείται πρώτα με τη χρήση φυσικών αντικειμένων, καθώς η διδακτική διαδικασία κινείται μέσα από μια σειρά. Σύμφωνα με μελέτες, τα παιδιά που χρησιμοποιούν συγκεκριμένα υλικά για τη μάθηση "δημιουργούν πιο ακριβείς και πλήρεις νοητικές αναπαραστάσεις, παρουσιάζουν συχνά περισσότερα κίνητρα και συμπεριφορά εστιασμένη στο στόχο και ακόμη πιο εύκολα εφαρμόζουν τις μαθηματικές έννοιες στις καθημερινές τους εμπειρίες" (Anstrom, 2006). Σε αυτό το επίπεδο, χρησιμοποιούνται χειραπτικά υλικά κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Πριν προχωρήσουν στο επόμενο βήμα, οι εκπαιδευτικοί που εφαρμόζουν αυτή τη διδακτική στρατηγική βεβαιώνονται ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει όσα έχουν διδαχθεί. Η χρήση χειριστικών υλικών για την επίδειξη κατανόησης στο αναπαραστατικό και στο αφηρημένο επίπεδο επιτρέπεται μερικές φορές (Moreno, & Duran, 2004).

- Αναπαραστατικό στάδιο/ representational stage: Το αναπαραστατικό στάδιο, μερικές φορές γνωστό ως "εικονογραφικό στάδιο", είναι η περίοδος κατά την οποία τα παιδιά χρησιμοποιούν εικόνες με τρόπο παρόμοιο με τον τρόπο που θα χρησιμοποιούσαν τα χειριστικά μέσα, τα οποία μπορεί να είναι παρόντα ή όχι. Επιπλέον, είναι το στάδιο όπου οι μαθητές μπορούν να δουν τα χειριστικά να χρησιμοποιούνται και όχι να συμμετέχουν σε αυτό (Keller, 1993- Sowel, 1989- Schultz, 1986). Το ημι-ειδικό επίπεδο του σταδίου αναπαράστασης είναι όταν δημιουργείται η μαθηματική έννοια και αυτό μπορεί να συνεπάγεται τη δημιουργία εικόνων που αναπαριστούν συγκεκριμένα αντικείμενα (π.χ. κύκλοι, κουκκίδες, ετικέτες, εικόνες σε γραμματόσημα που αποτυπώνονται για την καταμέτρηση). Ο μαθητής θα δημιουργήσει τώρα εικόνες που απεικονίζουν τα προηγουμένως χρησιμοποιούμενα χειριστικά μέσα. Κατά την αντιμετώπιση θεμάτων, οι εικόνες αυτές βοηθούν τους μαθητές να οπτικοποιήσουν τις μαθηματικές πράξεις. Θα πρέπει να δοθούν στον μαθητή πολλές ευκαιρίες για εξάσκηση μέχρι να μπορεί να επιλύει τα ζητήματα μόνος του. Ο δάσκαλος θα πρέπει να εξηγήσει τη σύνδεση μεταξύ των φωτογραφιών και των συγκεκριμένων πραγμάτων (Anstrom, 2006).

• Αφηρημένο στάδιο/ abstract: το στάδιο στο οποίο υπάρχουν απλώς σύμβολα και όχι χειριστικά ή οπτικά βοηθήματα. Οι μαθητές χειρίζονται σύμβολα ενώ εφαρμόζουν τις μαθηματικές αρχές που έχουν μελετήσει μέχρι τώρα (Keller, 1993- Sowel, 1989- Schultz, 1986). Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιούνται μόνο αριθμοί, συμβολισμοί και μαθηματικά σύμβολα για τη διατύπωση της μαθηματικής έννοιας.

Όλοι οι μαθητές κερδίζουν από αυτή τη διδακτική στρατηγική, αλλά έχει αποδειχθεί ότι είναι ιδιαίτερα επιτυχής με παιδιά που δυσκολεύονται με τα μαθηματικά. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι μεταβαίνει σταδιακά από τα πραγματικά πράγματα στις εικόνες και τελικά στα σύμβολα (Anstrom, 2006).

4.4 Το Διδακτικό Συμβόλαιο

Μια βασική ιδέα σε αυτό το έργο και την έρευνα είναι το συμβόλαιο διδασκαλίας. Ο ορισμός του διδακτικού συμβολαίου, όπως ορίστηκε από τον Brousseau το 1984, δίνεται από τον Γαγάτση (2006). Έτσι, ως διδακτικό συμβόλαιο περιγράφεται μια σιωπηρή και άγραφη συμφωνία μεταξύ ενός μαθητή και ενός εκπαιδευτικού σχετικά με ένα θέμα. Ο διδάσκων καταβάλλει προσπάθεια να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν ένα θέμα, να το μάθουν ή να αφομοιώσουν τις νέες πληροφορίες με τον τρόπο που ο διδάσκων το γνωρίζει προσωπικά, χρησιμοποιώντας τη δική του προσέγγιση και σκέψη. Με άλλα λόγια, το διδακτικό συμβόλαιο περιγράφει τις υποχρεώσεις τόσο του εκπαιδευτικού όσο και των μαθητών. Οι αλλαγές στους κανόνες του παιχνιδιού και στην προσέγγιση της διδακτικής κατάστασης, οι οποίες επιτρέπουν την τροποποίηση των συμβολαίων, είναι αυτές που προκαλούν την ανάπτυξη νέων συνθηκών (Fuadiah et al., 2017). Οι απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές σε ένα μαθηματικό πρόβλημα αποτέλεσαν την έμπνευση για την ανάπτυξη αυτής της ιδέας.

Το ακόλουθο θέμα παρουσιάστηκε συγκεκριμένα στους μαθητές ενός γαλλικού σχολείου το 1980: "Σε μια βάρκα υπήρχαν 26 πρόβατα και 10 κατσίκες. Ποια είναι η ηλικία του καπετάνιου;" Οι 76 από τους 97 μαθητές που απάντησαν στην πρόκληση συνδύασαν αριθμούς και γεγονότα για να δώσουν μια εκτίμηση της ηλικίας του καπετάνιου. Αυτή η συγκεκριμένη απάντηση που δόθηκε από τους μαθητές αποτελεί παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε και αξιοποιήθηκε η σύμβαση διδασκαλίας και δεν είναι αποτέλεσμα έλλειψης γνώσεων ή κατανόησης εκ μέρους τους. Το 1984, ο Brousseau υποστήριξε ότι η μάθηση συμβαίνει όταν οι εκπαιδευτικοί παραβιάζουν το διδακτικό συμβόλαιο και όχι όταν το τηρούν (Γαγάτσης, 2006). Επομένως, πρόκειται για τις προσδοκίες και τις αμοιβαίες υποχρεώσεις των εκπαιδευτικών και των μαθητών να σέβονται και να τηρούν το διδακτικό συμβόλαιο. Σύμφωνα με τους Pierce, Stacey και Wander (2010), οι μαθητές μερικές φορές αιφνιδιάζονται από αυτή την πεποίθηση ότι ο δάσκαλος διδάσκει και μεταδίδει όλες τις πληροφορίες που πρέπει να γνωρίζουν, γεγονός που τους αφήνει ανίκανους να ανταπεξέλθουν και να αντιμετωπίσουν καταστάσεις που δεν ξέρουν πώς να χειριστούν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές έχουν μεγάλη εμπιστοσύνη στους δασκάλους τους και πιστεύουν ότι ποτέ δεν θα παραβιάσουν τους όρους της εργασίας τους. Σύμφωνα με τους Brousseau, Sarrazy και Novotna (Lerman, 2014), υπάρχουν δύο τύποι συμβάσεων διδασκαλίας: οι συμβάσεις μεταφοράς, στις οποίες ο εκπαιδευτικός σχεδιάζει τη διδασκαλία και τις σχετικές δραστηριότητες και οι μαθητές είναι υποχρεωμένοι να συμμετέχουν, και οι καθιερωμένες συμβάσεις, οι επίσημες-σχολικές συμβάσεις, στις οποίες οι μαθητές καθορίζουν τα αποτελέσματα της διδασκαλίας και ο εκπαιδευτικός τα επιλέγει, τα αξιολογεί και τα εφαρμόζει.

Η ανάπτυξη ενός διδακτικού συμβολαίου με τους εκπαιδευτικούς που επιτρέπει προσωρινά την ανάθεση ή τη μεταφορά υποχρεώσεων σχετικά με τους στόχους που έχουν θέσει οι ίδιοι σε σχέση με τους μαθητές είναι η διαδικασία ανάθεσης. Με την ανάθεση, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μάθουν να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα με υπευθυνότητα χωρίς να αγνοούν ή να απομακρύνονται από τους στόχους του μαθήματος. Μπορούν επίσης να διατηρήσουν αυτούς τους στόχους δημιουργώντας τα ιδανικά μαθησιακά περιβάλλοντα που θα προωθήσουν την υιοθέτηση και την απόκτηση γνώσεων. Αντίθετα, οι εκπαιδευτικοί βοηθούν τους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις μεταξύ της γνώσης που αποκτούν από το περιβάλλον τους -της γνώσης που δημιουργείται σε μια αδίδακτη κατάσταση- και της γνώσης που συμβαδίζει με τους γνωστικούς στόχους που έχει θέσει ο εκπαιδευτικός. Σε αυτή την προσέγγιση, η γνώση μετατρέπεται σε αυτό που διέκρινε ο Brousseau, δηλαδή σε αυτό που οι άνθρωποι ήδη γνωρίζουν και είναι ικανοί να γνωρίζουν ως αποτέλεσμα της δικής τους γνωστικής αφύπνισης και ανάπτυξης, καθώς και σε αυτό που κατανοούν και συσχετίζουν με την κοινωνικά προσανατολισμένη γνωστική δομή. Το διδακτικό συμβόλαιο, το οποίο είναι, όπως προαναφέρθηκε, μια συλλογή προσδοκιών και στάσεων των μαθητών και του εκπαιδευτικού απέναντι στη γνώση, καθορίζει τους κανόνες που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Τα καθήκοντα που καλούνται να επιτελέσουν οι εκπαιδευτικοί και οι μαθητές, καθώς και οι αντίστοιχοι ρόλοι και ευθύνες τους, καθορίζουν το διδακτικό συμβόλαιο. Το διδακτικό συμβόλαιο μπορεί να υπάρχει σε όλους τους τύπους πληροφοριών, σπάζοντας είναι προϋπόθεση για την κατάκτησή τους, και υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου η αδιαμφισβήτητη τήρηση των άνευ όρων κανόνων του συμβολαίου μπορεί να οδηγήσει σε αποτυχημένη διδακτική σχέση (Manno, 2006).

Προτείνεται στους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιούν μια στρατηγική διδασκαλίας που ενσωματώνει μη παραδοσιακά προβλήματα ή ανοιχτά προβλήματα που απαιτούν εξερεύνηση από τους μαθητές, ή, με άλλα λόγια, να δημιουργούν ένα μη παραδοσιακό συμβόλαιο με τα παιδιά. Οι εκπαιδευτικοί περιμένουν από τους μαθητές τους να ανταποκρίνονται στη διδασκαλία με λογικό τρόπο και να τηρούν πάντα τους όρους του διδακτικού συμβολαίου και προσβάλλονται όταν συμβαίνει το αντίθετο και η σχέση διακόπτεται. Οι μαθητές έχουν επίσης υποχρεώσεις βάσει του συμβολαίου διδασκαλίας. Σε αυτό το σημείο, είναι δυνατόν να διακρίνουμε λεπτές αποκλίσεις και εννοιολογικές διαφορές μεταξύ των καθηγητών και των τμημάτων τους που έχουν παγιωθεί με την πάροδο του χρόνου. Οι Hersant και Perrin- Glorian (2005) συζητούν τα θεμελιώδη στοιχεία μιας τυπικής διδακτικής πρακτικής, συμπεριλαμβανομένου του διδακτικού συμβολαίου και της διάκρισης του Brousseau σε διαφορετικά διδακτικά συμβόλαια, από το πιο αδύναμο, όπου η διδακτική πρακτική είναι υπόλογη για το τι έχουν μάθει οι μαθητές, έως το πολύ ισχυρό, όπου ο δάσκαλος και δημιουργός της γνώσης είναι υπόλογος για τα μαθησιακά αποτελέσματα και για το τι έχουν μάθει οι μαθητές. Στη μετέπειτα ανάλυσή τους για τα χαρακτηριστικά της διδασκαλίας καθορίζουν ότι κάθε διδακτικό συμβόλαιο έχει τέσσερις διαστάσεις.

Οι δύο πρώτες αφορούν τις γνώσεις που πρέπει να μάθουν και να διδαχθούν, την περιοχή και τον κλάδο των μαθηματικών και το διδακτικό καθεστώς των πληροφοριών. Η τρίτη συνιστώσα αφορά τη φύση και τα χαρακτηριστικά της τρέχουσας και μεταβαλλόμενης διδακτικής κατάστασης, ενώ η τέταρτη είναι η ανάληψη ευθύνης για τις γνώσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών. Αυτές οι πτυχές, όπως επισημαίνεται στη μελέτη των Hersant και Perrin-Glorian (2005), δεν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και η ποσότητα και οι ιδιότητες της γνώσης συνδέονται στενά με το πόσο μεγάλη ευθύνη ανατίθεται στο διακύβευμα της γνώσης. Επιπλέον, διακρίνουν μεταξύ του μακρο-συμβολαίου, του μεσοσυμβολαίου και του μικρο-συμβολαίου. Στην ουσία, το πρώτο σχετίζεται με τον γενικότερο στόχο μιας διδακτικής δραστηριότητας, το δεύτερο με την ολοκλήρωσή της και το τρίτο εντοπίζεται σε μια δραστηριότητα μαθήματος για μια συγκεκριμένη διδακτική ενότητα.

4.5 Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων

Σύμφωνα με τον Duncker (Mayer & Hegarty, 1996), υπάρχει ένα δίλημμα όταν κάποιος έχει έναν στόχο αλλά δεν γνωρίζει (εκ των προτέρων) πώς να τον επιτύχει. Επιπλέον, ένα μαθηματικό ζήτημα προκύπτει εάν ο στόχος αυτός πρέπει να επιτευχθεί μέσω μαθηματικών (αριθμητικών ή αλγοριθμικών) τεχνικών (Mayer & Hegarty, 1996). Ο ορισμός του μαθηματικού προβλήματος είναι "προφορικές, γραπτές, οπτικές ή συνδυασμένες αναπαραστάσεις συνθηκών, σχέσεων ή δραστηριοτήτων που έχουν ποσοτικές ιδιότητες και οδηγούν σε ένα ή περισσότερα ερωτήματα" (Αγαλιώτης, 2013). Ωστόσο, τα γραπτά μαθηματικά προβλήματα -αυτά στα οποία οι κρίσιμες πληροφορίες που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος παρέχονται μέσω γραπτών λέξεων με τη μορφή αφήγησης- φαίνεται να προσελκύουν τη μεγαλύτερη προσοχή, τόσο σε επίπεδο έρευνας όσο και σε επίπεδο εκπαιδευτικής πολιτικής (Αγαλιώτης, 2013).

Σύμφωνα με τον αγγλικό όρο "word problems", αυτά αναφέρονται συχνά ως λεκτικά μαθηματικά προβλήματα. Μπορούν επίσης να βρεθούν στη βιβλιογραφία ως μαθηματικές ιστορίες (story problems) (Presmeg et al., 2016). Τα γραπτά προβλήματα είναι ένας συγκεκριμένος τύπος κειμενικής αφήγησης που έχει απλή εκφραστική δομή, πράγμα που σημαίνει ότι είναι αραιά από την άποψη του λεξιλογικού πλούτου και στερούνται στοιχείων αισθητικής χροιάς του λόγου. Ωστόσο, έχουν πυκνότητα νοημάτων, επειδή αποσκοπούν στην παροχή των πληροφοριών που απαιτούνται για την όσο το δυνατόν ταχύτερη επίλυση του προβλήματος, γεγονός που οδηγεί στη συσσώρευση πολλαπλών (και συχνά αρχικά συγκεχυμένων) (Αγαλιώτης, 2013). Καθώς "ενσωματώνει όλα τα δομικά στοιχεία των μαθηματικών", όπως η συλλογιστική, οι συσχετίσεις, οι αναπαραστάσεις και η επικοινωνία, η επίλυση προβλήματος στο πλαίσιο της διδασκαλίας αναφέρεται ως η "ουσία των μαθηματικών" (Αγαλιώτης, 2013). Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να αυξήσει την αυτοαποτελεσματικότητα και την αυτοπεποίθηση των μαθητών δημιουργώντας ένα ευχάριστο και καλά σχεδιασμένο μαθησιακό περιβάλλον (Van De Walle, 2005).

Η διάκριση μεταξύ ανοικτών και κλειστών προβλημάτων είναι αναμφισβήτητα η πιο χαρακτηριστική ταξινόμηση προβλημάτων. Τα ανοιχτά προβλήματα, από την άλλη πλευρά, επιδέχονται πολλαπλές, εξίσου σωστές απαντήσεις που βασίζονται στην (κριτική) αξιολόγηση συγκεκριμένων δεδομένων, ενώ τα κλειστά προβλήματα απαιτούν την εφαρμογή μιας μαθημένης διαδικασίας επίλυσης (συνήθως μιας συγκεκριμένης θεματικής ενότητας του σχολικού βιβλίου) προκειμένου να επιτευχθεί η εμπέδωση της γνώσης (Κολέζα, 2009). Ουσιαστικά πρόκειται για τη διάκριση μεταξύ κοινών και ασυνήθιστων δυσκολιών. Τα συνηθισμένα προβλήματα δεν είναι τεχνικά προβλήματα επειδή ο λύτης γνωρίζει ήδη τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσει και τον τρόπο εφαρμογής τους προκειμένου να βρει τη σωστή απάντηση- αντίθετα, αναφέρονται πιο συχνά ως ασκήσεις (Mayer & Hegarty, 1996).

Από την άλλη πλευρά, τα πρωτότυπα μαθηματικά προβλήματα έχουν μια πραγματική προβληματική κατάσταση με μια λύση που απαιτεί έρευνα και γνωστικές διαδικασίες ανώτερης τάξης και δεν είναι άμεσα εμφανής στον επιλύτη. Σύμφωνα με τον LeDoux (1998, όπ. αναφ. στο Schloeglmann, 2004), υπάρχει υπερδιέγερση των εγκεφαλικών διεργασιών της προσοχής, της αντίληψης, της μνήμης και του συναισθήματος ως αποτέλεσμα της νέας πρόκλησης που παρουσιάζεται. Αυτού του είδους τα προβλήματα κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών και ενθαρρύνουν την ενεργό συμμετοχή τους στη δόμηση της μάθησης με τη χρήση της προηγούμενης γνώσης, της κριτικής σκέψης και της λογικής σκέψης μέσω διαδικασιών διερεύνησης "εννοιών και αρχών που είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων" (Κολέζα, 2009), ενώ ταυτόχρονα προάγεται η ανάπτυξη κοινωνικών και επικοινωνιακών δεξιοτήτων μεταξύ των μελών της συνεργαζόμενης ομάδας, επειδή η επίλυση προβλημάτων γίνεται αντιληπτή ως ομαδική δραστηριότητα (Κολέζα, 2009). Ωστόσο, τα θέματα αυτά συνδέονται συχνά με το φόβο αποτυχίας των μαθητών λόγω των αυξανόμενων προσδοκιών και του ποσοστού των λαθών κατά την απάντησή τους, ιδίως για όσους επιδεικνύουν δυσκολία σε αυτά και είχαν στο παρελθόν δυσμενή συναισθήματα. (Schloeglmann, 2004).

Για κάθε μία από τις τρεις κατηγορίες "καθαρά μαθηματικά", "τεχνητή πραγματικότητα" και "καθημερινή ζωή", η κατηγοριοποίηση του Skovsmose (Alro & Skovsmose, 2004) κινείται επίσης κατά μήκος της διχοτόμησης "ασκήσεις" και "έρευνα", δίνοντας ένα σύνολο έξι ειδών θεμάτων. Για παράδειγμα, τα ρεαλιστικά μαθηματικά ανήκουν στη διερευνητική προσέγγιση του τομέα της τεχνητής πραγματικότητας και τα έργα στον τομέα της πραγματικής ζωής. Τα διάφορα είδη ασκήσεων και διερευνήσεων αναφέρονται σε αυτό το μοντέλο ως "περιβάλλοντα μάθησης", τονίζοντας τη σημασία τους στη διδακτική διαδικασία, επειδή το καθένα προσφέρει μια μοναδική προσέγγιση της μάθησης και της γνώσης, επηρεάζοντας τον τρόπο οργάνωσης της διδασκαλίας (για παράδειγμα, οι ασκήσεις κυριαρχούν στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας) και, κατά συνέπεια, τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η επικοινωνία μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών (και των μαθητών μεταξύ τους) (Alro & Skovsmore, 2004).

Κατά συνέπεια, ένας άλλος τρόπος ταξινόμησης των δυσκολιών έχει να κάνει με το πώς επηρεάζουν τη διδασκαλία. Έτσι, υπάρχουν τρεις τύποι διδασκαλίας για την επίλυση προβλημάτων: διδασκαλία για την επίλυση προβλημάτων, η οποία δίνει έμφαση στις στρατηγικές μάθησης τύπου Polya, διδασκαλία μέσω της επίλυσης προβλημάτων, η οποία αποτελεί τη βάση ρεαλιστικών μαθηματικών και διδακτικών καταστάσεων και στην οποία η αλληλεπίδραση με την προβληματική κατάσταση λειτουργεί ως καταλύτης για την εισαγωγή νέων γνώσεων (Κολέζα, 2009). Τα μαθηματικά ζητήματα που εκφράζονται προφορικά (ή γραπτά) μπορούν επίσης να χωριστούν σε ομάδες με βάση το πλαίσιο και τις συνδέσεις μεταξύ των πληροφοριών που παρέχουν. Για παράδειγμα, τα έξι είδη προσθετικών ζητημάτων που πρότεινε ο Gerard Nerghand ή οι Riley, Greeno και Heller (1983) ή η κατηγοριοποίηση των Riley, Greeno και Heller (1983) σε προβλήματα αλλαγής, σύνδεσης, σύγκρισης και προσομοίωσης (Αγαλιώτης 2013), πάνω στα οποία βασίζεται η θεωρία σχημάτων (Κολέζα, 2009).

Με βάση το μοντέλο του Polya, έχουν αναπτυχθεί διάφορα μαθηματικά μοντέλα επίλυσης προβλημάτων με μικρές προσαρμογές και τροποποιήσεις. Συνολικά, είναι σαφές ότι όλα τα μοντέλα ξεκινούν με ποιοτική, ή νοητική και λογική, οργάνωση και επεξεργασία δεδομένων, ακολουθούμενη από ποσοτική επεξεργασία, ή εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών. Η επαλήθευση είναι το τελικό στάδιο όλων των βημάτων, αλλά δεν το ακολουθούν όλοι οι επιλύτες- μάλλον, οι ειδικευμένοι επιλύτες το κάνουν κατά περίπτωση. Ωστόσο, τα στάδια δεν εξελίσσονται κατ' ανάγκη γραμμικά- αντίθετα, μπορεί περιστασιακά να υπάρχουν άλματα και επιστροφές για επανέλεγχο, ιδίως σε καταστάσεις που παρέχουν εξαιρετικά δύσκολες προκλήσεις για τη λύση (Αγαλιώτης, 2013). Ως αποτέλεσμα, ο λύτης έχει μια ποικιλία επιλογών κατά τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης, η οποία συνδέεται με τη χρήση μεταγνωστικών διαδικασιών (Yimer & Ellerton, 2006). Στο μοντέλο των Yimer και Ellerton (2006), ο αναστοχασμός περιέχεται ως στάδιο που διατρέχει δυναμικά ολόκληρο το μοντέλο. Περιλαμβάνει όχι μόνο την αξιολόγηση του επιλύτη σχετικά με το επίπεδο μαθηματικής δυσκολίας του προβλήματος, την αυτοπεποίθησή του στο χειρισμό τέτοιων διαδικασιών και το βαθμό ικανοποίησής του από την ακολουθούμενη πορεία επίλυσης, δηλαδή αν είναι συνετή.

Λίγο νωρίτερα, τα στάδια της ταξινόμησης του Alan Schoenfeld (1985) ενσωμάτωναν τις πεποιθήσεις του ατόμου για το μαθηματικό περιβάλλον στο οποίο ζούσε, ενώ η κατηγοριοποίηση των Greiger & Galbraith (1998) περιελάμβανε και τις πεποιθήσεις των λύσεων (Yimer & Ellerton, 2006). Οι Mayer & Hegarty (1996) περιγράφουν δύο στρατηγικές για την επίλυση λεκτικών μαθηματικών προβλημάτων που μπορεί να οδηγήσουν σε (διαφορετικούς τύπους) μαθηματικών γνώσεων. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι αυτές αντικατοπτρίζονται σε δύο διαφορετικούς τύπους στρατηγικών: τη "στρατηγική του μοντέλου του προβλήματος", κατά την οποία επιχειρείται μια ποιοτική επεξεργασία των δεδομένων προκειμένου να κατανοηθεί η σχέση μεταξύ των πληροφοριών του προβλήματος, να εντοπιστεί ο τύπος του προβλήματος στον οποίο ανήκει και να δημιουργηθεί το πλαίσιο επίλυσης, και τη "στρατηγική της άμεσης μετάφρασης", κατά την οποία επιχειρείται μια ποσοτική προσέγγιση με τον άμεσο υπολογισμό των αριθμητικών στοιχείων του προβλήματος. Καθώς η πρώτη μέθοδος έχει συνολικά λιγότερες μνημονικές (και άλλες) απαιτήσεις και δεν εξαρτάται από την κατηγοριοποίηση των προβλημάτων σε είδη (μετά από σκόπιμη και αυστηρή ανάλυση των δεδομένων), χρησιμοποιείται συχνότερα από λιγότερο ειδικευμένους λύτες προβλημάτων (Mayer & Hegarty, 1996).

5. Παράγοντες πρόκλησης θετικής ή αρνητικής στάσης προς τα Μαθηματικά

Στα ευρήματα της πρώτης Διεθνούς Έρευνας για την Επίδοση στα Μαθηματικά, ο Husen (1967) γράφει: "Ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές αισθάνονται για την αριθμητική είναι σχεδόν εξίσου σημαντικός με το πόσο καλά κατανοούν το θέμα γνωστικά. Αν ένας μαθητής αναπτύξει απέχθεια για το αντικείμενο κατά την εκμάθηση των μαθηματικών, η περαιτέρω μάθηση είναι απίθανη και ένα μέρος του εκπαιδευτικού στόχου χάνεται " (Φιλίππου Γ. - Χρίστου Κ., 2001). Η διερεύνηση των στάσεων έχει προσελκύσει την προσοχή πολλών ερευνητών. Εξετάστηκαν ερωτήματα σχετικά με την εξέλιξη των στάσεων, τη σύνδεσή τους με τη μαθησιακή διαδικασία και τη δυνατότητα αλλαγής τους, εκτός από εκείνα που αφορούν τη δομή και την προέλευσή τους.

Αφού έκαναν μελέτη τόσο στον διεθνή όσο και στον ελληνικό χώρο, οι Schoenfeld (1982) και Φιλίππου (1991) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι απόψεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά επηρεάζονται από την επιτυχία και την αυτοεικόνα τους. Επιπλέον, έδειξαν ότι οι απόψεις αυτές μεταβάλλονται καθώς τα παιδιά περνούν από το δημοτικό στο γυμνάσιο, αφού ήταν σημαντικά λιγότεροι οι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που είχαν ευνοϊκές στάσεις απ' ό,τι στο δημοτικό. Δηλαδή, λιγότεροι μαθητές "απολαμβάνουν" τα μαθηματικά όσο μεγαλώνουν και αυτό προφανώς δεν είναι τυχαίο ή άσχετο με τον τρόπο διδασκαλίας τους. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι μικρότεροι μαθητές στο νηπιαγωγείο και στην πρώτη τάξη του δημοτικού σχολείου έχουν βελτιωμένη αυτοπεποίθηση, πίστη στα ταλέντα τους και πιστεύουν ότι έχουν την ικανότητα να επιτύχουν σε όλους τους κλάδους. Δεδομένου ότι οι περισσότεροι γονείς πιστεύουν ότι τα παιδιά τους είναι χαρισματικά, η άποψη αυτή μπορεί να είναι αποτέλεσμα των καλών επιδράσεων που δέχεται το παιδί από το οικογενειακό του περιβάλλον, το οποίο βοηθά το νεαρό να αναπτύξει μια ευνοϊκή εικόνα για τον εαυτό του. Σύμφωνα με τους Renga & Dalla (1993), οι δάσκαλοι στις πρώτες τάξεις του δημοτικού σχολείου δίνουν στα παιδιά θετική ενίσχυση, η οποία συμβάλλει στην ενίσχυση αυτής της εικόνας. Εξαιτίας αυτού, το μαθηματικό άγχος είναι πιο συχνό στις μεγαλύτερες τάξεις του δημοτικού και του γυμνασίου παρά στις μικρές τάξεις (Φιλίππου Γ. - Χρίστου Κ., 2001).

Οι Dossey, Mullis και Jones (1993) παρατήρησαν επίσης ότι το ποσοστό των κοριτσιών που είχαν "άριστες αλληλεπιδράσεις" με τα μαθηματικά ήταν σταθερά χαμηλότερο από αυτό των αγοριών. Αυτό υποδηλώνει ότι πρόσθετα στοιχεία, κυρίως κοινωνικά, παίζουν ρόλο στη διαμόρφωση απόψεων, καλών και αρνητικών, οι οποίες με τη σειρά τους επηρεάζουν το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά, επειδή θεωρούνται "ανδρική υπόθεση". Ο βαθμός στον οποίο οι μαθητές πιστεύουν ότι το μάθημα είναι σχετικό και πολύτιμο επηρεάζει επίσης τη στάση τους απέναντί του..

Έρευνες των Hart & Walker (1993) έχουν δείξει ότι:

¬ Οι προσωπικές ιδέες των μαθητών για τη χρησιμότητα των μαθηματικών ευθύνονται κυρίως για το μεγάλο εύρος των επιδόσεών τους στα μαθηματικά και την εμφάνιση μαθηματικής φοβίας.

Όταν οι μαθητές εργάζονται πάνω σε θέματα που είναι εφαρμόσιμα στην καθημερινή τους ζωή και θα τους φανούν χρήσιμα εκτός της τάξης, το ενδιαφέρον και τα κίνητρά τους για τα μαθηματικά αυξάνονται. Και όταν χρησιμοποιούμε τη λέξη "κίνητρο", αναφερόμαστε στις αιτίες που ωθούν κάποιον να κάνει κάτι. Η ανάπτυξη είτε ευνοϊκών είτε δυσμενών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά συσχετίζεται άμεσα με τα κίνητρα. Ο μαθητής σταματά να προσπαθεί όταν χάνει τα κίνητρα, αν έχει απλώς εξωτερικά κίνητρα, δηλαδή αναζητά ένα συγκεκριμένο πλεονέκτημα που θα έρθει με την επίτευξη ή για να αποφύγει μια πιθανή τιμωρία αν αποτύχει. Ως αποτέλεσμα, χάνει την ευκαιρία να βιώσει την ευτυχία και την ολοκλήρωση που συνεπάγεται η δημιουργία κάτι καινούργιου και η επιτυχία. Αντίθετα, ένας μαθητής που εργάζεται σκληρά για να πετύχει έναν στόχο υιοθετεί προοδευτικά μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά επειδή αισθάνεται εγγενώς ικανοποιημένος ή επειδή πιστεύει στην αξία αυτού που κάνει, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε ανταμοιβή. Γι' αυτό είναι εξαιρετικά πιθανό οι αδύναμοι μαθητές να αναπτύξουν προοδευτικά δυσμενείς απόψεις και απέχθεια για τα μαθηματικά, επειδή τα θεωρούν ασυγχώρητο χρέος. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην ολοκληρώνεται η προσπάθεια, με αποτέλεσμα να τερματίζεται και η σχέση τους με το θέμα.

Οι Thomson & Thomson (1989) δίνουν ιδιαίτερη προσοχή στο πώς είναι διαμορφωμένη η αίθουσα διδασκαλίας και πώς αισθάνεται ο μαθητής κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας ενός μαθήματος. Οι τρεις σφαίρες της εξουσίας - νομοθετική, εκτελεστική και δικαστική - βρίσκονται στο επίκεντρο της προσοχής του διδάσκοντος. Ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιεί αυτές τις ικανότητες διαμορφώνει την ατμόσφαιρα της τάξης στο σύνολό της και επηρεάζει σημαντικά τον τρόπο με τον οποίο αλληλεπιδρούν μεταξύ τους οι μαθητές και το αντικείμενο (Φιλίππου Γ. - Χρίστου Κ., 2001). Έχει αναφερθεί ότι θετικά συναισθήματα αναπτύσσονται όταν υπάρχει φιλόξενο περιβάλλον στην τάξη, θετική ενίσχυση από τον εκπαιδευτικό και πνεύμα συνεργασίας μεταξύ των μαθητών. Ένα φιλόξενο περιβάλλον διδασκαλίας ενισχύει την αποφασιστικότητα, την υπομονή και την αυτοπεποίθηση των μαθητών.

Μέσω της επίλυσης προβλημάτων, η συνεργατική μάθηση βοηθά τους πιο αδύναμους μαθητές να ανακαλύψουν εκ νέου τις ικανότητές τους και να αναπτύξουν μια πιο θετική εικόνα για τον εαυτό τους. Παρέχει επίσης ευκαιρίες για επικοινωνία μεταξύ των μαθητών. Για όλους τους προαναφερθέντες λόγους, πολλοί ακαδημαϊκοί έχουν τονίσει τη σημαντική σημασία και τα πλεονεκτικά αποτελέσματα που μπορεί να έχει η συνεργατική μάθηση στο επάγγελμα του εκπαιδευτικού. Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζονται τα λάθη που διαπράττουν οι μαθητές είναι πολύ κρίσιμος για τον καθορισμό της ατμόσφαιρας του σχολείου. Υπάρχει η πεποίθηση ότι το αν ένας μαθητής κάνει ένα λάθος ή όχι δεν θα πρέπει να αποτελεί παράγοντα που καθορίζει αν θεωρείται περισσότερο ή λιγότερο λαμπρός. Αυτό συμβαίνει επειδή ένας μαθητής που κάνει λάθος είναι εξίσου ικανός και έξυπνος με έναν μαθητή που δεν κάνει λάθος. Με απλά λόγια, ο πρώτος βρίσκεται ακόμη στη φάση της μάθησης και της προσπάθειας κατανόησης των νέων πληροφοριών, ενώ ο δεύτερος έχει ολοκληρώσει αυτή τη φάση μετά από συνεχή προσπάθεια και έχει επιτύχει το στόχο του με συστηματική εργασία. Σύμφωνα με έρευνα που έγινε από τον Parsons και τους συνεργάτες του το 1982, υπάρχει ισχυρή συσχέτιση μεταξύ της αξιολόγησης της εργασίας των μαθητών από τον καθηγητή και της αυτοεικόνας τους, δηλαδή της αντίληψης που έχουν για τον εαυτό τους. Επομένως, θα ήταν ωφέλιμο για τους εκπαιδευτικούς να εστιάζουν κυρίως στις θετικές πτυχές της εργασίας των μαθητών τους κατά την παροχή ανατροφοδότησης και να τους βοηθούν να κατανοήσουν ότι το να κάνουν λάθη είναι φυσιολογικό και αναμενόμενο κατά τη διάρκεια της μαθησιακής διαδικασίας. Ακόμη και οι μεγαλύτεροι μαθηματικοί κάνουν περιστασιακά λάθη, άλλωστε.

Επομένως, πρέπει να συμπεριλάβουμε την αυτοεξαπάτηση ως μια περαιτέρω, εξίσου σημαντική πτυχή σε όλες τις προαναφερθείσες. Η αυτοεικόνα ενός μαθητή επηρεάζει άμεσα τη στάση και την απόδοσή του στα μαθηματικά, σύμφωνα με μελέτες μακροχρόνιας μελέτης. Ο Lester (1992) υποστηρίζει ότι η συμπεριφορά ενός μαθητή όταν του δίνεται μια μαθηματική άσκηση καθορίζεται κυρίως από τις πεποιθήσεις που έχει για τον εαυτό του και τα μαθηματικά. Οι εντυπώσεις και οι εκτιμήσεις των ανθρώπων που ο μαθητής έχει σε μεγάλη εκτίμηση συμπυκνώνονται στην αυτοεικόνα που αναπτύσσει ο μαθητής. Τα άτομα αυτά περιλαμβάνουν συχνά τους εκπαιδευτές του, τους γονείς και τους συμμαθητές του. Ως αποτέλεσμα, με την πάροδο του χρόνου, όταν αυτοί οι άλλοι τον χαρακτηρίζουν ως "αδύναμο", καταλήγει να αποδέχεται την περιγραφή και διαμορφώνει τη συμπεριφορά του γύρω από μια σειρά απαντήσεων που την υποστηρίζουν. Με αυτόν τον τρόπο, όχι μόνο δεν καταφέρνει να ξεπεράσει τα προβλήματά του και τις όποιες αδυναμίες του, αλλά στην πραγματικότητα επιδεινώνονται και καταλήγει να βλέπει τα μαθηματικά ως μια ανυπέρβλητη πρόκληση. Φυσικά, αυτό το αποτέλεσμα δεν θα μπορούσε παρά να οδηγήσει τον μαθητή στην εδραίωση δυσμενών απόψεων για τα μαθηματικά, στην ενθάρρυνση της μαθηματικοφοβίας και στην προοδευτική ανάπτυξη αντιπάθειας ή και απόρριψης του αντικειμένου. Λόγω της σπουδαιότητας της αυτοεικόνας του μαθητή για τον καθορισμό των στάσεων και των επιδόσεών του, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσουν πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές τον εαυτό τους, ώστε να τους υποστηρίξουν στο να ξεπεράσουν τις όποιες προκλήσεις αντιμετωπίζουν (Φιλίππου Γ. - Χρίστου Κ., 2001).

Σύμφωνα με πολλούς ακαδημαϊκούς, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να ρωτούν συνεχώς τους μαθητές για τις απόψεις τους μέχρι εκείνη τη στιγμή, προκειμένου να βελτιώσουν τη στάση τους απέναντι στα μαθηματικά. Αλλάζοντας τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούσαν προηγουμένως, το μαθησιακό περιβάλλον ή ακόμη και το σχέδιο μαθήματος, θα μπορούσαν να επιλέξουν στοιχεία που φαίνεται να επηρεάζουν τους μαθητές προς μια πιο θετική στάση απέναντι στο διδασκόμενο αντικείμενο. Οι εκπαιδευτικοί πρέπει επίσης να καλλιεργούν ένα φιλικό προς το διάλογο περιβάλλον στην τάξη. Οι εκπαιδευτικοί, ωστόσο, σχεδόν ποτέ δεν ασχολούνται με τα συναισθηματικά ζητήματα που προκύπτουν κατά τη διάρκεια της εκμάθησης μαθηματικών από τους μαθητές. Ωστόσο, αν θέλουν να καταστήσουν τα μαθηματικά προτεραιότητα για τα παιδιά, πρέπει να δώσουν μεγάλη προσοχή στις στάσεις και τις απόψεις των μαθητών, και αυτό πρέπει να αποτελεί βασικό στοιχείο του προγράμματος σπουδών. Σύμφωνα με τον Warnock (1995), "τα συναισθήματα ματαιότητας και πλήξης είναι από τους πιο θανάσιμους αντιπάλους της εκπαίδευσης". Σύμφωνα με τον Jensen (1993), ο κύριος στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι να βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν την πεποίθηση ότι μπορούν να επιτύχουν στο μάθημα. Μακροχρόνια μελέτη έχει οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η μάθηση των μαθηματικών μπορεί να επηρεάζεται από δομές πεποιθήσεων, συναισθήματα και αντιλήψεις. "Η αυτοπεποίθηση για τη μελέτη των μαθηματικών, η μαθηματική φοβία κ.λπ. είναι μερικοί από τους παράγοντες επιτυχίας ή αποτυχίας, ακόμη και μαθησιακής αναπηρίας", υποστήριξε.

Οι περισσότεροι δάσκαλοι συμφωνούν ότι τα παιδιά μαθαίνουν καλύτερα μαθηματικά όταν ασχολούνται με αυτό που μαθαίνουν και ότι θα έχουν καλύτερες επιδόσεις στην αριθμητική αν τους αρέσει. Η ανάπτυξη, η διατήρηση και η ενίσχυση της θετικής στάσης θα πρέπει επομένως να τύχουν ιδιαίτερης προσοχής (Schoefield, 1982). Ο Suydam (1984) εντόπισε έναν αριθμό παραγόντων που επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι αναπτύσσουν στάσεις απέναντι στα μαθηματικά:

¬ Οι ομότιμες σχέσεις.

¬ Το μοντέλο διδασκαλίας.

¬ Προηγούμενες μαθηματικές εμπειρίες.

¬ Η αυτοεκτίμηση του μαθητή.

¬ Ο ενθουσιασμός του καθηγητή.

Οι μαθητές μπορεί να ωφεληθούν ή να υποστούν βλάβη από τις στάσεις. Οι αρνητικές στάσεις οδηγούν σε αυτοκαταστροφικές δραστηριότητες, ενώ οι θετικές στάσεις οδηγούν σε ολοκλήρωση και απόλαυση (Wlodkowski, 1986). Πιο συγκεκριμένα: "Όταν οι μαθητές είναι ενθουσιώδεις και αισιόδοξοι στην τάξη, η μάθηση είναι πιο ευχάριστη για όλους (θεωρία κινήτρων). Οι μαθητές είναι ικανοποιημένοι και σίγουροι για τον εαυτό τους και οι εκπαιδευτικοί είναι συγκεντρωμένοι. Η αντίληψη των μαθητών στο σύνολό τους είναι αυτή της συμμετοχής και της επιμονής. Όταν οι μαθητές αντιστέκονται σε αυτό που μαθαίνουν, η απαισιοδοξία και ο κυνισμός διαπερνούν την τάξη (θεωρία της απάθειας). Οι εκπαιδευτικοί βρίσκονται σε άμυνα και πίεση και οι μαθητές είναι απογοητευμένοι, αποθαρρυμένοι, σκυθρωποί και θυμωμένοι. Υπάρχει ένταση στον αέρα. Οι μαθητές έχουν γενικά στο μυαλό τους την εικόνα της απόρριψης και της αυτοκαταστροφής. Είναι επίσης μπερδεμένοι και έχουν την τάση να εγκαταλείπουν κάθε προσπάθεια". Σύμφωνα με το N.C.T.M., ο διάλογος και η επικοινωνία είναι βασικά συστατικά όλων των μαθηματικών διαδικασιών και μπορούν να βοηθήσουν τους ανθρώπους να υιοθετήσουν μια θετική προοπτική. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι υπάρχουν πρόσθετα κίνητρα που βοηθούν στην αύξηση της μάθησης, ακόμη και αν η Piajet δίνει έμφαση στη βασική πτυχή που επηρεάζει τη μάθηση των παιδιών: "Τα παιδιά μαθαίνουν επειδή το μυαλό τους έχει δημιουργηθεί για να μαθαίνει". Τα παιδιά προσλαμβάνουν γνώσεις επειδή έχουν εφαρμογές στην καθημερινή τους ζωή.

Ένα σύγχρονο πρόγραμμα σπουδών θα πρέπει να ενθαρρύνει τη διερεύνηση ενός ευρέος φάσματος ιδεών, διατηρώντας παράλληλα το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά (Jensen, 1993), αγκαλιάζοντας τις πραγματικές συνθήκες και τις δικές τους εμπειρίες και εισάγοντας νέες ιδέες με τρόπο καινοτόμο και αποδεκτό από τους μαθητές. Σύμφωνα με τους ειδικούς, υπάρχουν δύο τρόποι διδασκαλίας των μαθηματικών: ο ένας χρησιμοποιεί τη μέθοδο της παπαγαλίας και ο άλλος τη συζήτηση και την αιτιολόγηση. Άλλοι ερευνητές έχουν κάνει ανάλογες διακρίσεις. Για παράδειγμα, ο Skemp (1987) διακρίνει δύο μεθοδολογίες που, κατά τη γνώμη του, διδάσκουν δύο διαφορετικούς τύπους μαθηματικών: η μία βασίζεται στην απλή εφαρμογή αρχών και κατευθυντήριων γραμμών χωρίς αιτιολόγηση και η άλλη βασίζεται στην κατανόηση του τι κάνουμε και γιατί (Garofalo & Mtetwa, 1990). Κατά συνέπεια, δεν είναι πλέον κατάλληλο να περιορίζεται η διδασκαλία των μαθηματικών στη συμπλήρωση φύλλων εργασίας με μαθηματικά προβλήματα (Moore, 1995). Σύμφωνα με τους D'Augustine και Smith (1992), "οι καλοί εκπαιδευτικοί προσπαθούν να δημιουργήσουν στους μαθητές τους θετικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά, χρησιμοποιώντας συμμετοχικές μορφές διδασκαλίας που εξασφαλίζουν την επικοινωνία τόσο μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών όσο και μεταξύ των μαθητών".

Σύμφωνα με τους Orton και Wain (1994: 17), "Πολλοί εκπαιδευτικοί μαθηματικών πιστεύουν ότι η μελέτη των μαθηματικών μπορεί να είναι ευχάριστη και απολαυστική. Κατά συνέπεια, ένας λόγος για τη διδασκαλία των μαθηματικών μπορεί να είναι ότι ο μαθητής εκτιμά το αντικείμενο, βρίσκοντας ευχαρίστηση στο εύρος και την πολυπλοκότητά του, στα έργα του και σε ό,τι μπορεί να αποκαλύψει για τον κόσμο". Ωστόσο, επειδή στα μαθηματικά κυριαρχούν οι κανόνες και οι αλγόριθμοι, η πλειονότητα των ιδεών και των διαδικασιών τους είναι ακατανόητες για πολλούς ανθρώπους. Οι μαθηματικές έννοιες θεωρούνται συχνά ότι έχουν ως καθοριστικά χαρακτηριστικά την ασάφεια και το μυστήριο. "Το θέμα στο οποίο ποτέ δεν ξέρουμε για τι μιλάμε, ούτε είμαστε πεπεισμένοι ότι αυτό που λέμε είναι ακριβές", σύμφωνα με τον Russell (1921), είναι αυτό που ονόμασε θεωρητικά μαθηματικά.

Σύμφωνα με τον Skemp (1989), τα προβλήματα επικοινωνίας προκύπτουν επειδή τα μαθηματικά είναι πιο περιγραφικά από οποιοδήποτε άλλο θέμα που διδάσκεται στα παιδιά της ίδιας ηλικίας. Σε αντίθεση με άλλα μαθήματα, τα μαθηματικά προσφέρουν έναν περιορισμένο αριθμό θεμάτων που μπορούν να μελετηθούν σε διάφορους βαθμούς πολυπλοκότητας και κατανόησης. "Αν αυτή η ιεράρχηση των πληροφοριών επιτραπεί να κυριαρχήσει στην ακολουθία της διδασκαλίας, είναι πιθανό να οδηγήσει όχι μόνο σε σημαντικές μαθησιακές δυσκολίες, αλλά και σε πλήξη και απάθεια", υποστηρίζουν οι MacNab και Cummine το 1986. Είναι προφανές ότι τα προβλήματα με την εκπαίδευση στα μαθηματικά δεν μπορούν να επιλυθούν μέσα από τα ίδια τα μαθηματικά και αυτή η αρνητική στάση απέναντι στα μαθηματικά μπορεί να εμποδίσει τη μάθηση. Προκειμένου τα παιδιά να επιτύχουν στα μαθηματικά, απαιτείται μια ευρύτερη οπτική γωνία. Ως εκ τούτου, οι ερευνητές στον τομέα της εκπαίδευσης έχουν επικεντρωθεί στην αξιολόγηση της στάσης των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά. Δεδομένου ότι οι στάσεις τους επηρεάζουν τις επιδόσεις και το ενδιαφέρον τους για τα μαθηματικά, θα πρέπει να τους απασχολούν.

Επιπλέον, οι στάσεις μπορούν να επηρεάσουν την ανάπτυξη χαρακτηριστικών του χαρακτήρα που διατηρούνται ως ενήλικες και θεωρούνται είτε αποδεκτά είτε ανεπιθύμητα, σύμφωνα με τον Costello (1991). Υποστηρίζει ότι η ενθάρρυνση των θετικών στάσεων μπορεί να θεωρηθεί θεμιτός εκπαιδευτικός στόχος και ότι τα συναισθηματικά μαθησιακά αποτελέσματα, όπως η απόλαυση, ο ενθουσιασμός, το πάθος και η εκτίμηση, μπορούν να ληφθούν υπόψη παράλληλα με τις πιο γνωστικές πτυχές της μάθησης των μαθηματικών που μετρώνται με όρους επίδοσης. Ανάλογα με το τι μετράται, μία από τις πολυάριθμες μεθόδους μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση των στάσεων των μαθητών. Οι κλίμακες μέτρησης των μαθηματικών στάσεων (FS-MAS), οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά για τη μέτρηση συναισθηματικών μεταβλητών στα μαθηματικά, παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τους Fennema και Sherman το 1976. Σύμφωνα με τους Fennema-Sherman, υπάρχουν εννέα διαφορετικές κλίμακες μέτρησης της στάσης των μαθηματικών και περιλαμβάνουν τις ακόλουθες στάσεις απέναντι στα μαθηματικά: (α) εμπιστοσύνη στα μαθηματικά (β) τα εξωγενή κίνητρα των μαθηματικών, η επιθυμία να προωθήσουν τη θέση και τη φήμη τους στα μαθηματικά (γ) η έννοια των "μαθηματικών ουδέτερου φύλου" ως ανδροκρατούμενος τομέας. (δ) η πρακτική εφαρμογή των μαθηματικών και (ε) η εσωτερική παρόρμηση για την εκμάθηση του αντικειμένου, η οποία αναφέρεται ως "προσωπική απόλαυση" και "πάθος για την εκμάθηση των μαθηματικών". Υπάρχουν 12 ερωτήσεις τύπου likert σε κάθε κλίμακα και υπάρχουν πέντε διαφορετικοί τρόποι απάντησης σε κάθε μία, από το διαφωνώ απόλυτα έως το συμφωνώ απόλυτα. Υπάρχουν συνολικά δώδεκα στοιχεία, με έξι θετικά και δώδεκα αρνητικά. Τα στοιχεία από τις διάφορες αξιολογήσεις συνδυάζονται τυχαία μαζί κατά την επεξεργασία των κλιμάκων για τη δημιουργία μιας ενιαίας υπόδειξης. Κάθε κλίμακα έχει ένα πιθανό εύρος από 12 έως 60 μονάδες, με υψηλότερες βαθμολογίες να υποδηλώνουν πιο θετικές στάσεις. Για παράδειγμα, οι υψηλές βαθμολογίες στην κλίμακα για την εμπιστοσύνη και τη χρησιμότητα υποδηλώνουν ισχυρότερη εμπιστοσύνη και μεγαλύτερη κατανόηση της αξίας των μαθηματικών. Ωστόσο, η στρατηγική αυτή χρησιμοποιεί τη ρητορική τεχνική.

Η μεθοδολογία που χρησιμοποιείται στις κλίμακες για την αξιολόγηση των στάσεων απέναντι στα μαθηματικά βασίζεται στη συσχέτιση και στις μεταβλητές ανάλυσης που επιλέγουν ποια κλίμακα θα χρησιμοποιηθεί. Αυτό σημαίνει ότι οι έρευνες που χρησιμοποιούν τέτοιες κλίμακες είναι πιθανό να παρέχουν αποτελέσματα που αποκλείουν κρίσιμες πληροφορίες, επειδή χρησιμοποιούνται τακτικοί αριθμοί με την έννοια των διαστημάτων. Για να συνοψίσουμε τα ερευνητικά αποτελέσματα, είναι χρήσιμο να ορίσουμε μερικούς από τους τομείς που χρησιμοποιήθηκαν για την εξήγηση των υποκλιμάκων. Θα καλυφθούν μερικά θέματα, συμπεριλαμβανομένων των γενικών αντιλήψεων και στάσεων απέναντι στα μαθηματικά, της δυνατότητας εφαρμογής τους, του επιπέδου εμπιστοσύνης των μαθητών, των στάσεων απέναντι σε διάφορα μαθηματικά θέματα και των στάσεων των εκπαιδευτικών απέναντι στους μαθητές τους.

5.1 Μαθηματικά και Συναισθήματα

Η σημασία των μαθηματικών ως πειθαρχία.

Έχει αποδειχθεί ότι ένας παράγοντας που συσχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τη συμμετοχή και τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά είναι το πόσο ωφέλιμα πιστεύουν ότι είναι τα μαθηματικά, τόσο τώρα όσο και στο μέλλον. Σύμφωνα με τους Mayer και Koehler (1990), η χρησιμότητα μπορεί να επηρεάσει τη συμμετοχή στο εγγύς μέλλον ενθαρρύνοντας την επιμονή καθώς η ύλη γίνεται δυσκολότερη. Σύμφωνα με τον Callahan (1971), το 66% των μαθητών στις Ηνωμένες Πολιτείες δήλωσε ότι τα μαθηματικά είναι εξίσου (ή περισσότερο) απαραίτητα από οποιοδήποτε άλλο μάθημα και ότι γενικά πιστεύεται ότι είναι ωφέλιμα. Σύμφωνα με μελέτη του Hammouri (2004), η αυτοαντίληψη της αξίας των μαθηματικών συνδέεται σε μεγάλο βαθμό με την επίδοση στα μαθηματικά ($p = 0{,}24$, p 0,05).

Για τους ακόλουθους λόγους, οι μαθητές πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι ένα κρίσιμο μάθημα:

- Στην καθημερινή ζωή, τα μαθηματικά είναι χρήσιμα.
- Ορισμένα άλλα θέματα απαιτούν μαθηματικά.
- Τα μαθηματικά μπορούν να βοηθήσουν στην επίλυση παγκόσμιων ζητημάτων.
- Τα μαθηματικά βοηθούν τους ανθρώπους στην επαγγελματική τους ζωή.
- Τα μαθηματικά είναι ζωτικής σημασίας για πολλά πανεπιστημιακά μαθήματα.
- Τα μαθηματικά αναπτύσσουν δεξιότητες λογικής σκέψης.

Η εμπιστοσύνη στην εκμάθηση των μαθηματικών.

Ο βαθμός στον οποίο ένας μαθητής πιστεύει στις ικανότητές του παίζει σημαντικό ρόλο τόσο στις διαδικασίες διδασκαλίας όσο και στις διαδικασίες μάθησης. Είναι γνωστό ότι οι μαθητές που δυσκολεύονται με την αριθμητική δεν καταβάλλουν την απαραίτητη προσπάθεια για την επίτευξη των στόχων της εκπαιδευτικής διαδικασίας όταν υπάρχει έλλειψη εμπιστοσύνης. Ο Reyes (1984) ανέδειξε την αυτοπεποίθηση ως έναν από τους σημαντικότερους συναισθηματικούς παράγοντες. "Η εμπιστοσύνη στην ικανότητα κάποιου να κατακτήσει τα μαθηματικά φαίνεται να αποτελεί βασικό στοιχείο για την επιλογή τους", είπε.

Σύμφωνα με τους Mayer και Koehler (1990), η αυτοπεποίθηση αποτελεί συστατικό στοιχείο της αυτοεκτίμησης και έχει να κάνει με το επίπεδο βεβαιότητας του μαθητή για την ικανότητά του να μάθει μαθηματικά και να επιτύχει τους στόχους που έχει θέσει. Υποστηρίζουν ότι η προθυμία ενός μαθητή να αλληλεπιδράσει με το νέο υλικό και να επιμείνει όταν αυτό καθίσταται δύσκολο εξαρτάται από το επίπεδο αυτοπεποίθησής του. Σύμφωνα με ορισμένους, η αυτοπεποίθηση είναι ένας τρόπος σκέψης για τον εαυτό μας και εξαρτάται περισσότερο από την εμπειρία (Oraif, 2007). Σύμφωνα με τους Reid και Yang (2002b), η αυτοπεποίθηση ήταν χαμηλή όταν δόθηκε στους μαθητές μια νέα εργασία, αλλά μετά την ολοκλήρωσή της, παρατηρήθηκε ότι η αυτοπεποίθηση αυξήθηκε αισθητά προς τις νέες εργασίες, ακόμη και όταν αυτές αποτελούσαν πρόκληση για τους μαθητές. Ο Yang (2000) ανακάλυψε επίσης ότι, αν και οι μαθητές αντιμετώπιζαν τους βραχυπρόθεσμους στόχους με περισσότερο ζήλο και αυτοπεποίθηση, η αύξηση της αυτοπεποίθησης δεν μεταφράζεται πάντα σε υψηλότερη επίδοση. Πολυάριθμες έρευνες έχουν εξετάσει τις επιδράσεις της αυτοπεποίθησης στη μαθηματική δέσμευση και επιτυχία και έχουν δείξει ισχυρές συσχετίσεις μεταξύ αυτών των δύο μεταβλητών. Οι Fennema και Sherman έκαναν σημαντική έρευνα σχετικά με τις επιπτώσεις της αυτοπεποίθησης στην επίδοση στα μαθηματικά τη δεκαετία του 1970 και παρουσίασαν μια έκθεση στην οποία διαπίστωσαν ότι η αυτοπεποίθηση συνδεόταν ισχυρότερα με την επιτυχία στα μαθηματικά από ό,τι άλλοι συναισθηματικοί παράγοντες (p = 0,40) (Sherman & Fennema, 1977). Σε μια έρευνα διαχρονικών δεδομένων για μαθητές ηλικίας 8 έως 11 ετών, ο Sherman (1982) διαπίστωσε ότι η εμπιστοσύνη των παιδιών στην ικανότητά τους να κατακτήσουν τα μαθηματικά ήταν ένας σημαντικός καθοριστικός παράγοντας. Σε μια πρόσφατη μελέτη, ο Hammouri (2004) εξέτασε τη βαθμολογία οκτώ παραγόντων παρακίνησης και συμπεριφοράς που συνδέονταν με την επιτυχία των μαθητών στα μαθηματικά στην Ιορδανία. Ένα από τα σημαντικότερα ευρήματα της μελέτης αυτής είναι ότι η αυτοπεποίθηση συνδεόταν πιο σημαντικά με την επίδοση στην αριθμητική από οποιοδήποτε άλλο συναισθηματικό χαρακτηριστικό (p = 0,38, p 0,05). Το γεγονός ότι περάσατε το τεστ είναι απαραίτητο για την αυτοπεποίθηση. Επιτυχία στις εξετάσεις που ενισχύει την αυτοπεποίθηση χωρίς να θυσιάζει την αυστηρότητα.

Οι μαθητές μαθαίνουν γνώσεις, έννοιες και ικανότητες ως αποτέλεσμα της συνάντησής τους με τα μαθηματικά στην τάξη. Επιπλέον, διαμορφώνουν τις απόψεις τους απέναντι στα μαθηματικά από την αλληλεπίδρασή τους με αυτά. Οι στάσεις των μαθητών απέναντι στα διάφορα μαθηματικά ποικίλλουν από θέμα σε θέμα και επηρεάζονται από το επίπεδο άνεσης και το επίπεδο εμπιστοσύνης του μαθητή στο θέμα. Στο APU αξιολογούνται οι στάσεις των μαθητών απέναντι σε συγκεκριμένα θέματα (1980). Η μελέτη αυτή καταδεικνύει πώς οι μαθητές τείνουν να βρίσκουν τα μαθηματικά χρήσιμα. Στη μελέτη τους με 15 αντικείμενα, οι Cresswell και Gubb (1987) ενδιαφέρθηκαν τόσο για τις γενικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά όσο και για τις συγκεκριμένες αντιδράσεις των μαθητών στα διάφορα θέματα και τις δραστηριότητες που καλύπτονται. Οι μαθητές ρωτήθηκαν πώς θα βαθμολογούσαν κάθε δραστηριότητα σε πενταβάθμια κλίμακα για τη σημασία, την ευκολία χρήσης και την ευχαρίστηση. Οι εργασίες σχεδιάστηκαν για να εξετάσουν τις στάσεις σε τρεις διαφορετικές διαστάσεις. Η έρευνά τους υποστηρίζει την άποψη ότι τα μαθηματικά είναι ένα κρίσιμο μάθημα τόσο για τα αγόρια όσο και για τα κορίτσια. Ανακαλύπτουν ότι η ευκολία και η προτίμηση συσχετίζονται στενά. Διερωτήθηκαν αν η συσχέτιση μεταξύ ευκολίας και προτίμησης αντικατοπτρίζει αν οι μαθητές απολαμβάνουν τη θεωρία επειδή αισθάνονται καλύτερα γι' αυτήν ή αν οι δραστηριότητες τους κάνουν να αισθάνονται καλύτερα. Όσον αφορά τις απόψεις απέναντι σε πιο εξειδικευμένους τομείς των μαθηματικών, είναι σαφές ότι ορισμένοι κλάδοι συνήθως προτιμώνται ενώ άλλοι περιφρονούνται. Ορισμένα θέματα θεωρούνται "εύκολα", ενώ άλλα "δύσκολα". Σε γενικές γραμμές, η εμπιστοσύνη ενός μαθητή στην ικανότητά του απέναντι στα μαθηματικά επηρεάζει την προθυμία του να προσεγγίσει νέο υλικό και να επιμείνει σε αυτό όταν γίνεται δύσκολο. Ο μαθητής επιμένει παρά τη φαινομενική δυσκολία της εργασίας όταν είναι βέβαιος ότι θα βρεθεί λύση ή όταν είναι βέβαιος ότι το θέμα θα γίνει κατανοητό. Ένας καλός δάσκαλος είναι αυτός που υποστηρίζει τους μαθητές του και τους βοηθά να αναπτύξουν εμπιστοσύνη στην ικανότητά τους να επιτύχουν τα επιθυμητά αποτελέσματα.

5.2 Έμφυλες διαφορές στις επιδόσεις στα Μαθηματικά

Ο αριθμός των ανδρών που συνέβαλαν στη διδασκαλία και την πρόοδο των μαθηματικών σε όλη την ιστορία και είναι γνωστοί γι' αυτό σε παγκόσμια κλίμακα είναι μεγαλύτερος από τους αντίστοιχους άνδρες. Λίγοι είναι εξοικειωμένοι με τα ονόματα της Αίθρας του Θηβαίου, της Υπατίας ή της Σοφίας Kovalevskaya, παρόλο που ο Πυθαγόρας, ο Θαλής και ο Ερατοσθένης του Chebyshev είναι πολύ γνωστοί (Σπανδάγος 1991).

Η σχέση μεταξύ του φύλου και των μαθηματικών έχει βρεθεί στο επίκεντρο διαφόρων ερευνών σε διεθνές επίπεδο τα τελευταία είκοσι χρόνια. Αυτό έχει προκληθεί κυρίως από τον αποκλεισμό των γυναικών από διάφορα επαγγέλματα λόγω των χαμηλών επιδόσεών τους και της δυσμενούς στάσης τους απέναντι στα μαθηματικά. Στη διεθνή βιβλιογραφία, υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους οι διαφορές που σχετίζονται με το φύλο στις στάσεις των μαθητών για τα μαθηματικά ευνοούν τα αγόρια:

1. Ως διαφοροποιήσεις στις επιδόσεις. Τα αγόρια παρουσιάζουν υψηλότερους μέσους όρους στα μαθηματικά, κυρίως σε εξετάσεις σε σχέση με τα κορίτσια.

2. Ως διαφορές στην απόφαση να σπουδάσουν μαθηματικά στο λύκειο ή στο κολλέγιο, αν είναι δυνατόν, καθώς και στην απόφαση να ακολουθήσουν μεταπτυχιακές σπουδές σχετικές με τα μαθηματικά. Ερευνητικές δημοσιεύσεις που αναφέρονται στο ελληνικό πλαίσιο έχουν καταλήξει σε παρόμοια αποτελέσματα.

Με άλλα λόγια, οι έρευνες δείχνουν ότι τα αγόρια είναι καλύτερα στην αριθμητική και τα κορίτσια είναι καλύτερα στα ελληνικά. Επίσης, δείχνει ότι τα αγόρια προτιμούν τις θετικές σπουδές ενώ τα κορίτσια τις θεωρητικές σπουδές. Άλλες εθνικές και διεθνείς έρευνες έχουν καταλήξει σε παρόμοια συμπεράσματα για τις επιδόσεις των κοριτσιών. Υπάρχουν αποδείξεις ότι αυτές οι διαφορές δεν αρχίζουν να εμφανίζονται παρά μόνο αργότερα στο σχολείο. Όσον αφορά τις γνώσεις και τις δεξιότητες που συνδέονται με την εκτέλεση μαθηματικών πράξεων, είτε δεν υπήρχαν αξιοσημείωτες διαφορές μεταξύ αγοριών και κοριτσιών στις ηλικίες 9 και 13 ετών στις Ηνωμένες Πολιτείες (μελέτη N.A.E.P. 1978), είτε αν υπήρχαν, ήταν υπέρ των κοριτσιών. Ωστόσο, στην ηλικία των 17 ετών, τα αγόρια υπερτερούσαν των κοριτσιών και στις δύο κατηγορίες απαντήσεων (Σπανδάγος 1991).

Η υπεροχή των αγοριών ήταν αισθητή στις ερωτήσεις που αφορούσαν την κατανόηση και τις εφαρμογές των μαθηματικών από την ηλικία των 9 ετών, αν και με μικρή διαφορά, αλλά η διαφορά αυτή αυξήθηκε στην ηλικία των 17 ετών. Τα αγόρια είναι πιο πιθανό από τα κορίτσια να επιλέξουν τα μαθηματικά ως μάθημα επιλογής στο λύκειο. Σύμφωνα με αναφορές, η αναλογία των δύο φύλων στο Βέλγιο (κατά τα έτη 1973-1966) ήταν 8 προς 1, 3 προς 1 στη Σκωτία και 9 προς 2 στην Ουαλία και την Αγγλία. Στη Μ. Βρετανία το A.P.U. (Assessment of Performance Unit, έρευνες 1978, 1979) κατέγραψε σχολαστικά τους τομείς στους οποίους τα αγόρια και τα κορίτσια διέφεραν ως προς τις μαθηματικές ικανότητες ή γνώσεις που αντιστοιχούν στην ηλικία. Το 61,5% των μαθητών ηλικίας 15-16 ετών (10% της τάξης τους) με τις καλύτερες βαθμολογίες στα μαθηματικά ήταν αγόρια και το υπόλοιπο 38,5% ήταν κορίτσια, σύμφωνα με την έρευνα των δημογραφικών τους στοιχείων.

Για να εξηγηθούν αυτές οι διαφορές στις αριθμητικές ικανότητες και επιδόσεις αγοριών και κοριτσιών, έχουν δημιουργηθεί διάφορες θεωρίες. Ορισμένες από αυτές υποστηρίζουν ότι οι διαφορές αυτές έχουν βιολογική βάση (ικανότητα χωρικής αντίληψης, πλευρική διαίρεση του εγκεφάλου, χρωμόσωμα X), ενώ άλλες υποστηρίζουν ότι είναι αποτέλεσμα της διαφορετικής ανατροφής και κοινωνικοποίησης αγοριών και κοριτσιών. Τα τρία είδη επιρροών στους μαθητές κατηγοριοποιούνται από θεωρίες που στοχεύουν να εξηγήσουν τις διαφορές στις στάσεις των δύο φύλων απέναντι στα μαθηματικά μέσω της διαδικασίας κοινωνικοποίησης (Fennema & Leader 1990):

1. Ο τρόπος με τον οποίο μεγαλώνουν τα παιδιά. Τα αγόρια και τα κορίτσια αναπτύσσουν διαφορετικές προσωπικότητες με διαφορετικές ικανότητες και πεποιθήσεις και τα κορίτσια και τα αγόρια μεγαλώνουν με διαφορετικούς τρόπους με διαφορετικά παιχνίδια και πρότυπα. Οι επακόλουθες διαφοροποιήσεις στις μαθηματικές τους ικανότητες μπορεί να επηρεάστηκαν από τα παιχνίδια κατασκευών με τα οποία παίζουν τα αγόρια, τα οποία ενθαρρύνουν την "επίλυση προβλημάτων", σε αντίθεση με τις συμβατικές κούκλες των γυναικών, οι οποίες ενθαρρύνουν το παιχνίδι που είναι πιο "παθητικό" από το πρώτο. Επιπλέον, η προώθηση της ανεξαρτησίας των αγοριών τους προσφέρει πλεονέκτημα σε μετέπειτα μαθηματικά ζητήματα, σε αντίθεση με την προτροπή προς τα κορίτσια να είναι πιο υποταγμένα, συγκρατημένα, υπομονετικά κ.λπ. Σε γενικές γραμμές, οι φιλίες των παιδιών, τα περιοδικά που διαβάζουν και οι δραστηριότητες με τις οποίες ασχολούνται στον ελεύθερο χρόνο τους προωθούν τα στερεότυπα των φύλων και τα απομακρύνουν από τις αξίες και τα πρότυπα της κοινωνίας.

2. Η αντιμετώπιση των παιδιών στο σχολείο. Ανεξάρτητα από το αν φοιτούσαν αγόρια ή κορίτσια στα σχολεία, το ελληνικό κράτος είχε ενιαία προγράμματα. Μόνο τα μαθηματικά προγράμματα διέφεραν μεταξύ των κλασικών και των πρακτικών γυμνασίων. Κάθε μαθητής ήταν ελεύθερος να επιλέξει την ακαδημαϊκή πορεία που επιθυμούσε. Ωστόσο, υπήρχαν ορισμένα Ιδιωτικά Δημοτικά Σχολεία ή Δημόσια Δημοτικά Σχολεία που, κατά την κρίση του διευθυντή τους, άλλαζαν τα ωρολόγια και τα προγράμματα σπουδών τους για να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις των μαθητριών τους. Παρόμοιες συνθήκες υπήρχαν και σε άλλες χώρες, όπως η Αγγλία, όπου αναγνωρίστηκε επίσημα το 1937 ότι τα αγόρια και τα κορίτσια έχουν συγκρίσιμες νοητικές ικανότητες αλλά διαφορετικά ενδιαφέροντα. Αναφέρονται διαφοροποιημένα προγράμματα για τα παρθεναγωγεία κατά τα έτη μέχρι το 1912 και μετά, σε σύγκριση με τα άλλα αγγλικά σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ενώ άλλες μελέτες δείχνουν ότι τα εξωστρεφή αγόρια και τα εσωστρεφή κορίτσια είχαν καλύτερες επιδόσεις όταν οι συμμαθητές τους ήταν του ίδιου φύλου, η ύπαρξη κοινής εκπαίδευσης για αγόρια και κορίτσια και μάλιστα η συνύπαρξή τους στην ίδια σχολική αίθουσα εξομάλυνε κάπως τις διαφορές ή και βελτίωσε τη θέση των κοριτσιών. Ανακολουθίες ανακαλύφθηκαν επίσης στις αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν και στα πρότυπα που εμφανίζονταν στα εγχειρίδια μαθηματικών. Οι αναφορές σε δραστηριότητες ή ασχολίες που συνήθως συνδέονται με τους άνδρες γίνονταν συχνότερα. Ως αποτέλεσμα, η επιμονή και η προσπάθεια που επιδεικνύουν τα αγόρια στην επίλυση ενός προβλήματος είναι αυξημένη, ενώ τα κορίτσια εφησυχάζουν, συνήθως αρκούνται στο να περιμένουν μια απάντηση. Διαφορές έχουν επίσης παρατηρηθεί στη συμπεριφορά των καθηγητών ή των δασκάλων απέναντι στα κορίτσια σε σύγκριση με τα αγόρια, συμπεριφορές που είναι λεκτικές ή μη λεκτικές (π.χ. ευκολότερες ερωτήσεις για τα κορίτσια, μικρότερος χρόνος αναμονής για μια απάντηση, συχνότερη επικοινωνία μεταξύ καθηγητών και αγοριών), διαφορές που εκδηλώνονται είτε συνειδητά είτε ασυνείδητα. Η συνιστώσα του "άγχους" είναι επίσης καθοριστικής σημασίας, όπως και οι "περιοχές" των μαθηματικών που τα κορίτσια βρίσκουν ιδιαίτερα δύσκολες, κυρίως επειδή εξηγούνται και απεικονίζονται με τρόπο που δεν σχετίζεται με τους τομείς ενδιαφέροντός τους.

3. Κοινωνικές κατασκευές, πρότυπα και προκαταλήψεις. Κάθε κοινότητα αναπτύσσει το δικό της σύνολο νόμων και ιδανικών, τα οποία συχνά είναι διαφορετικά για κάθε φύλο. Περισσότερα αγόρια από ό,τι κορίτσια απαντούν θετικά στη δήλωση "τα μαθηματικά θα είναι απαραίτητα στο μελλοντικό μου επάγγελμα" λόγω των διαφόρων επαγγελμάτων που κατατάσσονται σε "ανδρικά" ή "γυναικεία" και της σύνδεσης των "ανδρικών" επαγγελμάτων με τα μαθηματικά (επειδή η πλειονότητά τους συνδέεται με την τεχνολογία).

Σύμφωνα με τον D. Maines, κάθε κοινωνία δημιουργεί επίσημα ή ανεπίσημα όρια μεταξύ ανδρών και γυναικών μαθηματικών, τα οποία ελέγχονται περισσότερο από τις κοινωνικές διαδικασίες παρά από τις κοινωνικές δομές. Στην προσπάθεια κατανόησης των μηχανισμών που εμπλέκονται και οδηγούν τα κορίτσια να αποτυγχάνουν στα μαθηματικά ή να τα αποφεύγουν όποτε αυτό είναι εφικτό, έχουν διεξαχθεί έρευνες και έχουν αναπτυχθεί πολλές θεωρίες. Ανακαλύφθηκε ότι επειδή τα αγόρια και τα κορίτσια δίνουν διαφορετικές αιτίες στις αποτυχίες τους, αντιδρούν σε αυτές με διαφορετικούς τρόπους. Τα αγόρια αποδίδουν συχνά τις μαθηματικές τους επιδόσεις σε εσωτερικούς, σταθερούς παράγοντες (όπως η προσπάθεια και η ευφυΐα) και τις μαθηματικές τους αποτυχίες σε εξωτερικούς, μεταβλητούς παράγοντες (π.χ. δάσκαλος, δύσκολη ενότητα). Το αντίθετο ισχύει για τα κορίτσια. Αποδίδουν την ευθύνη για τους θριάμβους τους σε εξωτερικούς παράγοντες και για τις αποτυχίες τους σε εσωτερικούς παράγοντες. Τα κορίτσια που βιώνουν επανειλημμένες αποτυχίες αρχίζουν να πιστεύουν ότι "δεν μπορούν να κάνουν αριθμητική" και αναπτύσσουν αυτό που η Dweck ονόμασε "μαθημένη αδυναμία", ή την πεποίθηση ότι οι προκλήσεις τους είναι ανυπέρβλητες και εγκαταλείπουν τον αγώνα. Η Fennema έκανε επίσης μια προσπάθεια να εξηγήσει γιατί τα αγόρια και τα κορίτσια έχουν διαφορετικές επιδόσεις αναπτύσσοντας ένα μοντέλο μάθησης που είχε έναν μηχανισμό που ονόμασε "Αυτόνομη Μαθησιακή Συμπεριφορά" (A.L.B.). Πρότεινε ότι η A.L.B., θεμέλιο της οποίας είναι η ενασχόληση με ένα θέμα χωρίς εξωτερικά κίνητρα και με κίνητρο μόνο την ευχαρίστηση που αποκομίζεται από την ίδια την ενασχόληση, αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο για ανώτερες γνωστικές επιδόσεις. Ανακάλυψε ότι όταν τα μαθηματικά ήταν το θέμα ενασχόλησης, τα κορίτσια είχαν χειρότερες επιδόσεις από τα αγόρια στον τομέα της A.L.B.. Εξέτασε ακόμη και περιπτώσεις όπου κυρίες που απολάμβαναν τα μαθηματικά αναγκάστηκαν να τα εγκαταλείψουν για διάφορους λόγους.

Η Eccles περιγράφει έναν τέτοιο μηχανισμό, κατά τον οποίο οι μαθήτριες που είχαν καλές επιδόσεις στα μαθηματικά αναγκάστηκαν να εγκαταλείψουν τις προσπάθειές τους, επειδή θεώρησαν ότι ο χρόνος τους θα ήταν καλύτερο να δαπανηθεί σε δραστηριότητες που ήταν πιο σημαντικές για το σύστημα αξιολόγησής τους ή που ήταν πιο αποδεκτές από τους γονείς τους ή την κοινωνία στο σύνολό της. Διαπιστώθηκε ότι πολλά κορίτσια είχαν έναν "φόβο της επιτυχίας", ο οποίος εκδηλωνόταν όταν διακρίνονταν στα μαθηματικά και σε άλλα μαθήματα που συχνά συνδέονται με τους άνδρες. Αυτός ο φόβος προκάλεσε μείωση της προσπάθειας και επιστροφή στο πρότυπο των επιδόσεων. Έτσι, η επιρροή των διαφορετικών κοινωνικών προσδοκιών καθώς και τα άλλα στοιχεία που αναφέρθηκαν παραπάνω συμβάλλουν στην κακή απόδοση των κοριτσιών ή στην απόφασή τους να αποφεύγουν τα μαθηματικά όταν αυτό είναι εφικτό. Έτσι δημιουργείται ένα εχθρικό περιβάλλον για τα κορίτσια και τα μαθηματικά, ενώ παράλληλα τονίζεται η "ανωτερότητα" των αγοριών στο θέμα αυτό. Άλλες πτυχές που έχουν υποστηριχθεί περιλαμβάνουν τους λόγους για τους οποίους οι μαθητές πιστώνουν τους θριάμβους και τις αποτυχίες τους, την τάση τους να εργάζονται αυτόνομα κατά τη μάθηση (Fennema & Petersen 1985) και την αύξηση του άγχους των γυναικών (Medin 1986).

Τα αγόρια και τα κορίτσια παρουσιάζουν διαφορετικές στάσεις και επίπεδα επίδοσης στα μαθηματικά, γεγονός που επηρεάζεται από τους προαναφερθέντες παράγοντες. Αυτές οι διαφορές γίνονται αντιληπτές από τους μαθητές, με αποτέλεσμα να αναπτύσσεται μια κακή ατμόσφαιρα στην αλληλεπίδραση μεταξύ κοριτσιών και μαθηματικών που μόνο χειροτερεύει, ενώ ταυτόχρονα τονίζεται η "ανωτερότητα" των αγοριών στο μάθημα. Σύμφωνα με τον Gardner, το φύλο έχει μεγάλο αντίκτυπο στο πώς οι άνθρωποι αισθάνονται για την επιστήμη. Προσθέτει ότι "το φύλο είναι πιθανώς η μόνη ουσιαστική μεταβλητή που είναι σημαντική για τη στάση των μαθητών απέναντι στις επιστήμες". Στα τμήματα συμπάθειας ή αντιπάθειας των απαντήσεων οι απαντήσεις των κοριτσιών και των αγοριών διέφεραν πιο αισθητά. Τα κορίτσια βρέθηκαν συχνά να αποδίδουν την επιτυχία τους στη σκληρή δουλειά ή την τύχη και όχι στις ικανότητές τους, γεγονός που αποτελεί τυπική παρατήρηση (Medin 1986).

6. Μαθησιακές Δυσκολίες & Μαθηματικά

Η φύση των μαθηματικών είναι μοναδική σε σύγκριση με άλλες επιστήμες λόγω της αυστηρής λογικής, της σωρευτικής δομής, του ιδιαίτερα τυποποιημένου λεξιλογίου και της αφηρημάδας τους (Hannula et al., 2019). Οι συγκεκριμένες πληροφορίες και ικανότητες που πρέπει να διαθέτουν οι μαθητές προκειμένου να διδάξουν το θέμα έχουν κατηγοριοποιηθεί ως αποτέλεσμα της συστηματικής μελέτης της μαθηματικής γνώσης. Έτσι, οι ακόλουθες πέντε συνιστώσες συνθέτουν τη μαθηματική γνώση:

(1) η ικανότητα μνήμης και ανάκτησης απλών αριθμητικών γεγονότων,

(2) η μελέτη και η κατανόηση των μαθηματικών ιδεών,

(3) η εφαρμογή τεχνικών μέτρησης,

(4) η χρήση αλγορίθμων και κειμενικών υπολογισμών και

(5) την επίλυση προβλημάτων (Andersson, 2008).

Τα δεδομένα που πρέπει να διατηρηθούν ή να ανακληθούν μπορεί να είναι αριθμητικά δεδομένα (π.χ. 5 + 3 = 8 ή 2 x 2 = 4), ορολογία (π.χ. άθροισμα, γινόμενο), σύμβολα (π.χ. +, -, x,:) ή τύποι (π.χ. περίμετρος τετραγώνου = 4 x μήκος πλευράς). Η διατήρηση και η ανάκληση περιλαμβάνουν τη μνήμη του μαθητή (μακροπρόθεσμη, βραχυπρόθεσμη). Προκειμένου να κατανοήσει τις μαθηματικές έννοιες, ο μαθητής πρέπει να δημιουργήσει συνδέσεις μεταξύ του υλικού που του παρέχεται (Αγαλιώτης, 2000), καθώς και να μετονομάσει λέξεις και φράσεις που χρησιμοποιούνται συνήθως.

Η χρήση αλγορίθμων υποδηλώνει ότι οι τέσσερις διαδικασίες εκτελούνται μέσω προκαθορισμένων φάσεων. Σε αντίθεση με τη "συνειρμική κατανόηση" και τη "μηχανιστική κατανόηση", που χρησιμοποιούν την απομνημόνευση χωρίς κατανόηση του μηχανισμού, αυτή η στρατηγική (κατανόηση της διαδικασίας εκτέλεσης μιας λειτουργίας). Τέλος, η επίλυση προβλημάτων εστιάζει κυρίως στα βήματα που κάνει ο μαθητής για να βρει τη λύση:

(1) Να έχει επίγνωση του ζητήματος,

(2) Κατάρτιση ενός σχεδίου δράσης,

(3) Εκτέλεση του σχεδίου δράσης, και

(4) Την επαλήθευση της λύσης (Polya, 1945).

Σε συνδυασμό με ένα άλλο είδος ασθένειας, οι μαθησιακές δυσκολίες διαγιγνώσκονται πλέον σε ολοένα και μεγαλύτερο αριθμό μαθητών. Οι μαθητές αυτοί αποτελούν το 4% έως 14% του συνόλου των μαθητών (Butterworth & Laurillard, 2010). Παρόλο που το ποσοστό αυτό είναι παρόμοιο με εκείνο των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες στην ανάγνωση, έχει σημειωθεί σημαντική αύξηση στις έρευνες για τα μαθηματικά (Panteliadou & Botsa, 2007). Οι υποκατηγορίες των μαθησιακών δυσκολιών στα μαθηματικά παρουσιάζουν την ίδια ετερογένεια με τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες (Andersson, 2008).

Δημιουργούνται τρεις μικρότερες ομάδες μαθητών:

(1) άτομα που αντιμετωπίζουν μοναδικές και εξειδικευμένες δυσκολίες με τα μαθηματικά (Μαθησιακές Δυσκολίες μόνο στα Μαθηματικά),

(2) χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η γνωστική ικανότητα των μαθητών, εκείνοι που δυσκολεύονται τόσο με τις αριθμητικές όσο και με τις μη αριθμητικές δεξιότητες (όπως η προσοχή, η μνήμη εργασίας και η οπτικοχωρική αντίληψη), και

(3) τα άτομα που δυσκολεύονται με την ανάγνωση και τα μαθηματικά (μαθησιακές δυσκολίες στην ανάγνωση με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά) (Kaufmann & von Aster, 2012).

Η πρώτη και η τρίτη κατηγορία διερευνώνται συχνότερα στην έρευνα. Οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά και στην Ανάγνωση έχουν πιο σοβαρά και περιεκτικά λειτουργικά προβλήματα από ό,τι τα παιδιά με Μαθησιακές Δυσκολίες μόνο στα Μαθηματικά. Αυτό ισχύει και για τις δύο αυτές ομάδες μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά (Fuchs & Fuchs, 2002). Οι μαθητές με Μαθησιακές Δυσκολίες μόνο στα Μαθηματικά υπερτερούν των μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά και στην ανάγνωση, σύμφωνα με μελέτες που επικεντρώνονται στις γλωσσικές ικανότητες, όπως η γρήγορη κατονομασία, η φωνολογική επίγνωση και η ταχύτητα άρθρωσης (Jordan et al., 2002).

(1) Ωστόσο, δεν υπήρχαν διαφοροποιήσεις στις βαθμολογίες της μνήμης εργασίας των μαθητών μεταξύ των δύο ομάδων (Andersson, 2010). Ανεξάρτητα από το σε ποια υποομάδα εμπίπτουν τα άτομα με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά, τα ζητήματα και

οι προκλήσεις τους μπορούν να παρατηρηθούν σε ένα ευρύ φάσμα της γνωστικής και αντιληπτικής τους ανάπτυξης. Βλέπουμε ότι έχουν ελλείψεις:

(1) Όσον αφορά την ακουστική και οπτική αντίληψη,

(2) Στην επιδεξιότητα των χεριών,

(3) Στην ανάκληση,

(4) Στην αντίληψη του μαθηματικού κώδικα στη φωνή και τη γλώσσα,

(5) Στη γνώση των αριθμών και

ως προς την ορθολογική αφαίρεση (Τζιβινίκου, 2015). Σύμφωνα με τους Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Papadatos (2014), οι οποίοι κατηγοριοποίησαν τα προβλήματα με τις μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά σε τέσσερις μεγάλες ομάδες, συζητήθηκαν επίσης οι ελλείψεις στην οπτικοχωρική αντίληψη, τη μνήμη και τη λογική σκέψη. :

(1) στην επίγνωση του αριθμού,

(2) στη μνήμη (εργασίας και ανάκτησης),

(3) στο συλλογισμό, και

(4) στην οπτικο-χωρική αντίληψη

Κατηγορίες	Δυσκολίες Μάθησης
Επίγνωση του αριθμού	(1) βασική αίσθηση του αριθμού, και ακριβή εκτίμηση ενός μικρού αριθμού αντικειμένων π.χ. 4 - 5, (2) εκτίμηση διαφορετικών ποσοτήτων, (3) τοποθέτηση αριθμών σε αριθμογραμμές, (4) διαχείριση των αριθμητικών συμβόλων, (5) μετάφραση ενός αριθμού από μία αναπαράσταση σε μία άλλη (αναλογική – Αραβική - προφορική), (6) κατανόηση των βασικών αρχών απαρίθμησης, (7) κατανόηση της αξίας θέσης ψηφίου (συμπεριλαμβανομένων των δεκαδικών αριθμών), (8) κατανόηση της έννοιας των συμβόλων των βασικών αριθμητικών πράξεων (+, −, ×, :).
Μνήμη (εργασίας και ανάκτησης)	(1) ανάκτηση αριθμητικών δεδομένων, (2) αποκωδικοποίηση ορολογίας (αριθμητής, παρανομαστής, κ.α.), (3) κωδικοποίηση προφορικών κανόνων ή προφορικών ασκήσεων, (4) πραγματοποίηση νοερών υπολογισμών ακριβώς, (5) ανάκληση και πραγματοποίηση διαδικασιών, όπως επίσης κανόνων και τύπων, και (6) επίλυση (αριθμητικών) προβλημάτων
Συλλογισμό	(1) κατανόηση μαθηματικών εννοιών, ιδεών και σχέσεων, (2) κατανόηση πολλών βημάτων σε πολύπλοκες διαδικασίες/ αλγόριθμους, (3) κατανόηση βασικών λογικών αρχών (συνθήκη — "αν... τότε... "— αντιμεταθετικότητα, κ.α.), (4) επίλυση προβλήματος (λήψη αποφάσεων).
Οπτικο-χωρική αντίληψη	(1) μετάφραση και χρήση χωρικής οργάνωσης αναπαραστάσεων μαθηματικών αντικειμένων (για παράδειγμα, δεκαδικούς αριθμούς, εκθέτες ή γεωμετρικά σχήματα (Αγαλιώτης, Κόιου, Χρυσικού, 2011), (2) τοποθέτηση αριθμών στην αριθμογραμμή, (3) αναγνώριση αραβικών αριθμών και άλλων μαθηματικών συμβόλων (σύγχυση με παρόμοια σύμβολα),

Πίνακας 6.1: Κατηγορίες δυσκολιών μαθητών με Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά. Πηγή: Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Papadatos, 2014.

Άλλοι ερευνητές έχουν διαπιστώσει ότι τα προβλήματα με την προσοχή (ελλειμματική προσοχή) και τη μεταγνώση (Σαλβαράς, 2013), καθώς και η συχνότητα συναισθηματικών ασθενειών επιτείνουν τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν τα παιδιά με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά (Αγαλιώτης, 2000). Έτσι, οι μαθητές αυτοί μπορεί να δυσκολεύονται με μεταγνωστικές εργασίες όπως η επιλογή μιας στρατηγικής και η αξιολόγηση της αποτελεσματικότητάς της για την επίλυση ενός προβλήματος, η διασφάλιση της τήρησης του αρχικού σχεδίου επίλυσης, η μοντελοποίηση, η αλλαγή σχέσεων, η εξαγωγή γενικεύσεων και η ολοκλήρωση πράξεων (Αγαλιώτης, 2000).

Επιπλέον, οι μαθητές με ελλείψεις προσοχής δυσκολεύονται να συγκεντρωθούν κατά τη διάρκεια του μαθήματος ή σε συγκεκριμένες δραστηριότητες, ενώ ενίοτε οι ελλείψεις προσοχής συνδυάζονται με υπερκινητικότητα (Τζιβινίκου, 2015). Για τους σκοπούς της μελέτης μας, χρησιμοποιούμε τη φράση "Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά" για να αναφερθούμε σε όλες τις προαναφερθείσες καταστάσεις. Ανάλογα με την πολυπλοκότητα της διαδικασίας, πολλοί μαθητές θα αναπτύξουν τελικά τις βασικές διαδικασίες, αν και θα υστερούν σε σχέση με τους συνομηλίκους τους με τυπική ανάπτυξη έως και αρκετά χρόνια (Andersson, 2010).

Οι Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά είναι μια λέξη που χρησιμοποιείται συχνά εναλλακτικά με τη δυσαριθμησία, αλλά στην πραγματικότητα αναφέρεται σε ένα ευρύτερο φάσμα μαθησιακών δυσκολιών (Αγαλιώτης, 2004). Ο όρος "δυσαριθμησία", και πιο συγκεκριμένα "αναπτυξιακή δυσαριθμησία", αναφέρεται σε μια εγκεφαλική κατάσταση που επηρεάζει το πόσο καλά οι άνθρωποι κατανοούν και αποκτούν μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες, αλλά δεν σχετίζεται με ήπια, μέτρια ή σοβαρή νοητική αναπηρία. Η κατάκτηση μαθηματικών εννοιών, οι ικανότητες μέτρησης, η επεξεργασία ποσοτήτων, η μετάβαση/μετάφραση μεταξύ αριθμητικών λέξεων, ψηφίων και ποσοτήτων ή άλλες δεξιότητες, όπως η μνήμη εργασίας (π.χ. η μνήμη μαθηματικών δεδομένων) και η οπτικοχωρική μνήμη (π.χ. η οργάνωση προβλημάτων στο χώρο) αποτελούν δυσκολίες για τους μαθητές με αναπτυξιακή δυσαριθμησία (Τζιβινίκου, 2015). Όπως και η δυσλεξία, η δυσαριθμησία είναι μια κατάσταση ή μια συλλογή σχετικών συμπτωμάτων. Κατά συνέπεια, η παρουσία ενός μόνο από τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στις πολλαπλές περιγραφές σε ένα παιδί δεν αποτελεί επαρκή ένδειξη για να χαρακτηριστεί ότι πάσχει από δυσαριθμησία (Αγαλιώτης, 2004).

Σήμερα, οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες διδάσκονται σε παραδοσιακές τάξεις και με σποραδική παρουσία σε τάξεις ένταξης. Σύμφωνα με την ΕΛΣΤΑΤ, ο αριθμός των Τμημάτων Ένταξης έχει επεκταθεί δραματικά πρόσφατα (2018). Σύμφωνα με τα πιο πρόσφατα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, ο αριθμός των τμημάτων ένταξης που λειτουργούν στα δημοτικά σχολεία της χώρας σκαρφάλωσε από 1313 το σχολικό έτος 2007-2008 σε 2331 το σχολικό έτος 2017-2018. Πρόκειται για αύξηση που υπερβαίνει το 75%. Τα βιβλία που χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί στην τυπική τάξη και στα τμήματα ένταξης είναι τα ίδια βιβλία που χρησιμοποιούν και οι υπόλοιποι μαθητές της τυπικής τάξης. Ωστόσο, οι εκπαιδευτές στις τάξεις ένταξης έχουν την υποχρέωση να τροποποιούν την ύλη ώστε να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των μαθητών. Παρόλο που έχουν τη νομική εξουσία να το κάνουν, οι εκπαιδευτές στις τυπικές τάξεις δεν αισθάνονται πάντα αυτή τη δέσμευση, καθώς πιστεύουν ότι μόνο το εξειδικευμένο προσωπικό των τμημάτων ένταξης είναι υπεύθυνο γι' αυτό (Αγαλιώτης, 2012).

Σύμφωνα με διάφορες έρευνες, τα σχολικά εγχειρίδια ευθύνονται για το σημαντικό χάσμα επίδοσης μεταξύ των παιδιών με μαθησιακές δυσκολίες και των συνομηλίκων τους στη συνήθη τάξη. Η διδασκαλία σε μια κανονική τάξη είναι η ίδια για όλους τους μαθητές και οι μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες δεν έχουν πρόσβαση σε διαφορετικά βιβλία από τους άλλους μαθητές. Οι τρεις πρώτες τάξεις των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών του δημοτικού σχολείου χαρακτηρίζονται από επαρκή επανάληψη των βασικών γνώσεων, εκτεταμένα παραδείγματα διδασκαλίας και συστάσεις για επαρκή καθοδηγούμενη και ατομική εξάσκηση (Αγαλιώτης, 2012). Αυτές οι ιδιότητες, ωστόσο, είναι λιγότερο χρήσιμες σε μαθήματα που αποσκοπούν στην εισαγωγή ολοκαίνουργιων ιδεών και ικανοτήτων, καθώς και σε μαθήματα που επικεντρώνονται στη μνήμη ή στην εμπέδωση αριθμητικών πράξεων. Επιπλέον, όλα τα μαθήματα έχουν ασαφείς στόχους, ανεπαρκείς διδακτικές εξηγήσεις, εισάγουν πολλές έννοιες και ικανότητες ταυτόχρονα σε κάθε μάθημα και δεν επαναλαμβάνουν επαρκώς τις νέες πληροφορίες.

7. Μετάβαση από τα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στα Μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Στην έκτη τάξη, το κεφάλαιο των κλασμάτων καλύπτεται σε οκτώ ώρες διδασκαλίας- στην πρώτη τάξη, καλύπτεται σε εννέα ώρες. Παρά τον επαναλαμβανόμενο χαρακτήρα και των δύο κεφαλαίων, όπως καθοδηγείται στα κείμενα, η εμπειρία έχει δείξει ότι ο προβλεπόμενος χρόνος δεν επαρκεί για την εμπεριστατωμένη κατανόηση των εννοιών που καλύπτονται, την εκμάθηση των διαδικασιών και την απομνημόνευση των προσεγγίσεων. Θα πρέπει να τονιστεί ότι το δεύτερο κεφάλαιο του εγχειριδίου της πρώτης τάξης, για τα κλάσματα, διδάσκεται στην αρχή του ακαδημαϊκού έτους, περίπου τον Οκτώβριο. Όταν συγκρίνουμε την ανάπτυξη κάθε παραγράφου στα δύο σχολικά εγχειρίδια, ανακαλύπτουμε ότι, ως επί το πλείστον, η δομή των παραγράφων είναι η ίδια. Ξεκινούν με εισαγωγικές ασκήσεις και προχωρούν στη θεωρία, τις εφαρμογές στην πράξη, τις ασκήσεις, τα προβλήματα και τις εργασίες για το σπίτι.

Η μόνη εξαίρεση είναι ότι στην πρώτη τάξη, όλα περιέχονται σε έναν ενιαίο τόμο, ενώ στην έκτη τάξη, εκτός από το κυρίως κείμενο, περιλαμβάνεται και ένα τετράδιο εργασίας με ασκήσεις και προβλήματα. Ως εκ τούτου, ο μαθητής της πρώτης τάξης είναι ήδη εξοικειωμένος με τη μορφή του βιβλίου από το δημοτικό σχολείο. Όταν συγκρίνουμε το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου, διαπιστώνουμε ότι και τα δύο εγχειρίδια χρησιμοποιούν την ίδια ύλη για τα κεφάλαια σχετικά με τα κλάσματα. Λόγω της κυκλικής κατανομής των πληροφοριών, οι μαθητές της πρώτης τάξης έχουν ήδη λάβει την ίδια διδασκαλία στο δημοτικό σχολείο και θα την λάβουν ξανά στο γυμνάσιο. Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται το θέμα στις δύο τάξεις είναι εκεί που έγκειται η διαφορά.

Η έννοια του κλάσματος διδάσκεται στο δημοτικό σχολείο χρησιμοποιώντας περισσότερες διαστάσεις της έννοιας, πραγματικό πλαίσιο (δηλαδή δραστηριότητες που συνδέονται με την καθημερινή ζωή), γλωσσικές αναπαραστάσεις, περισσότερες εννοιολογικές εργασίες και οι μαθητές συμμετέχουν σε ποικίλες μαθηματικές δραστηριότητες. Σε σύγκριση με το δημοτικό σχολείο, οι δραστηριότητες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν μεγαλύτερο μαθηματικό πλαίσιο, χρησιμοποιούν συμβολικές αναπαραστάσεις και δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στη χρήση διαδικασιών από τους μαθητές και στην ολοκλήρωση πράξεων.

Για να το θέσουμε αλλιώς, βλέπουμε ότι ο μαθητής ασχολείται περισσότερο με τις εργασίες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης που απαιτούν πράξεις και εφαρμογές μεθόδων, ενώ αντιμετωπίζει λιγότερα προβλήματα, σε αντίθεση με την εμπειρία του στο δημοτικό σχολείο όπου είχε συνηθίσει να κάνει μαθηματικά περισσότερο "πραγματικά" και λιγότερο "υπολογιστικά". Επομένως, θεωρούμε ότι η εναλλακτική στρατηγική που αναφέρθηκε παραπάνω καθιστά την κατάσταση ακόμη πιο δύσκολη δεδομένης της πολυπλοκότητας του θέματος των μαθηματικών, παράγοντας που επηρεάζει αρνητικά το μεταβατικό ζήτημα.

Ένα από τα δυσκολότερα θέματα που διδάσκονται και μαθαίνονται στα μαθηματικά του δημοτικού σχολείου ήταν πάντα τα κλάσματα. Τα κλάσματα είναι ένα θέμα που τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν, παρά το γεγονός ότι δαπανάται μεγάλος διδακτικός χρόνος για τη διδασκαλία τους στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σύμφωνα με τα στοιχεία αξιολόγησης. Οι ερευνητές υποστηρίζουν ότι υπάρχουν πολλές αιτίες για τις οποίες οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τα κλάσματα. Η φύση των κλασμάτων και ο τρόπος διδασκαλίας τους ευθύνονται για τις προκλήσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Παρόλο που τις τελευταίες τρεις δεκαετίες έχουν συνδεθεί πολυάριθμοι παράγοντες με τις δυσκολίες των μαθητών στην κατανόηση των κλασμάτων, οι ακαδημαϊκοί συμφωνούν ότι η πολυδιάστατη φύση των κλασμάτων είναι ένα από τα βασικά στοιχεία που συμβάλλει στη δυσκολία της διδασκαλίας και της εκμάθησης των κλασμάτων. Ο Kieren (1976) διατύπωσε τη δεκαετία του 1970 την άποψη ότι η έννοια του κλάσματος αποτελείται από τέσσερις αλληλένδετες υποκατασκευές: αναλογία, τελεστής, πηλίκο και μέτρο. Επέλεξε να μην κατηγοριοποιήσει την υποκατασκευή μέρος-όλο ως πέμπτη, επειδή, στην πρώτη του ιδέα, είναι διασκορπισμένη στις άλλες τέσσερις. Αργότερα, οι απόψεις του Kieren επεκτάθηκαν από τους Behr κ.ά. (1983), οι οποίοι πρότειναν ότι η σχέση "μέρος-όλο" είναι μια ξεχωριστή υποκατασκευή από μόνη της (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Παρόλο που οι πολλές υποκατασκευές δεν είναι τεχνικά ανεξάρτητες, λειτουργούν όλες μαζί για να σχηματίσουν την ιδέα του κλάσματος. Κάθε υποκατασκευή παρέχει μια μοναδική προοπτική για τα κλάσματα. Δεν μπορεί να υποστηριχθεί ότι αν αναπτυχθεί μια υπο-κατασκευή, οι άλλες θα το κάνουν παράλληλα και αυτόματα, επειδή η καθεμία συνδέεται με διακριτές γνωστικές δομές και τρόπους σκέψης. Η προαναφερθείσα διαπίστωση δείχνει ότι σε ένα πρόγραμμα μαθηματικών θα πρέπει να δημιουργούνται περισσότερες από μία ή δύο υπο-δομές και έχει άμεσες διδακτικές συνέπειες.

Οι μαθητές μπορεί να μην αναπτύξουν μια σταθερή βάση για τη μάθηση των κλασμάτων, εάν η εκπαίδευση βασίζεται σε μια μόνο υπο-κατασκευή του κλάσματος και διδάσκονται μόνο μερικές από τις αναπαραστάσεις του (Σταματόπουλος, 2011).

Η οικοδόμηση των μαθηματικών εννοιών επιτυγχάνεται με τη μαθηματική δραστηριότητα, η οποία υποδηλώνει τη θεμελιώδη μάθηση των μαθηματικών και έχει υψηλή προτεραιότητα στην τρέχουσα έρευνα για τη μαθηματική εκπαίδευση. Επομένως, η δημιουργία κατάλληλων δραστηριοτήτων και η εφαρμογή τους από τους εκπαιδευτικούς στην τάξη είναι ζωτικής σημασίας για την επίτευξη των προαναφερθέντων στόχων.

Σύμφωνα με τους Ainley, Pratt και Hansen (2006), ο σχεδιασμός μιας κατάλληλης μαθηματικής άσκησης πρέπει να επικεντρώνεται σε δύο άξονες. Αυτοί είναι ο σκοπός και το όφελος της δραστηριότητας. Επομένως, μια "καλή" δραστηριότητα είναι αυτή που έχει νόημα για τους μαθητές που συμμετέχουν σε αυτήν (σκοπός της δραστηριότητας) και τους προσφέρει την ευκαιρία να κάνουν κάτι περισσότερο από το να ακολουθούν απλώς διαδικασίες (χρησιμότητα της δραστηριότητας) (Ainley et al., 2006).

Είναι δυνατόν να οριστεί μια περίσταση, ένα ζήτημα ή η μέθοδος επίλυσης ενός προβλήματος ως δραστηριότητα (Κολέζα, 1997). Όποια γλώσσα και αν επιλέξουμε, είναι γενικά αποδεκτό ότι ο σκοπός μιας δραστηριότητας είναι να επιτρέψει στους μαθητές τόσο να δημιουργήσουν νέες γνώσεις από μόνοι τους όσο και να τους δώσει την ευκαιρία να εφαρμόσουν τις γνώσεις που ήδη έχουν με ποικίλους τρόπους. Η εργασία πάνω σε ένα μαθηματικό έργο, σύμφωνα με τα λόγια του Κολέζα (1997), συνεπάγεται πρωτίστως:

-Προσδιορίζω το πρόβλημα

-Εικάζω το αποτέλεσμα

-Πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων

-Συνθέτω ένα συλλογισμό

-Διατυπώνω μια λύση

-Ελέγχω τα αποτελέσματα

-Αξιολογώ την ορθότητά τους σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα

Παράγοντες που συμβάλλουν στη διατήρηση υψηλών γνωστικών απαιτήσεων:

-Η χρήση από τον εκπαιδευτικό των ικριωμάτων κατά την ανάπτυξη της συλλογιστικής των μαθητών

-Δραστηριότητες που βασίζονται στις προηγούμενες γνώσεις των μαθητών και οι οποίες ενισχύουν τη σκαλωσιά των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών

-Αρκετός χρόνος που διατίθεται για τη δραστηριότητα.

-Παροχή προσοχής στη μαθηματική πρόκληση της δραστηριότητας

-Η πίεση του εκπαιδευτικού να παρέχει αιτιολογήσεις και εξηγήσεις μέσω σχολίων, ερωτήσεων και κριτικής

Οι παράγοντες που συνδέονται με την πτώση της ποσότητας των γνωστικών απαιτήσεων περιλαμβάνουν:

-Αφαίρεση της μαθηματικής πρόκλησης της δραστηριότητας

-Η καταλληλότητα της δραστηριότητας για τους στοχευόμενους μαθητές

-Ο εκπαιδευτής δίνει μεγαλύτερη έμφαση στην τήρηση των οδηγιών παρά στην κατανόηση της ιδέας.

-Ο χρόνος που διατίθεται υπερβολικά ή ανεπαρκώς

-Θέματα με τη διαχείριση της τάξης

Οι στόχοι που θέτει το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών, στους οποίους θα εστιάσουμε ξεχωριστά για τα κείμενα της Στ' τάξης και της Α' τάξης, είναι οι εξής:

ΣΤ΄ Δημοτικού

1. Ειδικοί σκοποί

Με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο επιδιώκεται:

-Την απόκτηση θεμελιωδών μαθηματικών γνώσεων και εμπειριών.

-Ανάπτυξη της χρήσης των μαθηματικών ως γλώσσα επικοινωνίας.

-Η κατανόηση απλών μαθηματικών διαδικασιών.

-Την επίγνωση του τρόπου συλλογισμού και του τρόπου απόδειξης κάποιου πράγματος.

-Βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

-Η εφαρμογή και η χρήση των μαθηματικών σε πραγματικές καταστάσεις.

-Προκειμένου να δοθεί έμφαση στη δυναμική φύση της μαθηματικής επιστήμης (ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εργαλείων, συμβόλων και εννοιών)

-Ανάπτυξη μιας ευνοϊκής άποψης για τα μαθηματικά.

2. Στόχοι - Θεματικές ενότητες

Οι επιμέρους στόχοι ανά θεματική ενότητα του κεφαλαίου των κλασμάτων της ΣΤ΄Δημοτικού είναι οι εξής:

Στόχοι	**Θεματικές ενότητες (Διατιθέμενος χρόνος)**
• Να διακρίνουν και να δημιουργούν ισοδύναμα κλάσματα. • Να δημιουργούν και να διακρίνουν ομώνυμα και ετερώνυμα κλάσματα. • Να συγκρίνουν και να διατάσσουν κλάσματα. • Να μετατρέπουν κλάσματα σε μεικτούς αριθμούς. • Να απλοποιούν κλάσματα. • Να μετατρέπουν κλάσματα σε δεκαδικούς και αντίστροφα. • Να χειρίζονται απλές παραστάσεις που συνδυάζουν κλάσματα και δεκαδικούς.	Αριθμοί και πράξεις Κλάσματα (8 ώρες)

Α΄ Γυμνασίου

1. Ειδικοί σκοποί

Με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο επιδιώκεται:

-Απόκτηση θεμελιωδών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων.

-Η ανάπτυξη της μαθηματικής γλώσσας ως εργαλείο επικοινωνίας και απεικόνισης πραγματικών γεγονότων και περιστάσεων.

-Η προοδευτική κατανόηση των θεμελιωδών στοιχείων που συνθέτουν το πλαίσιο των μαθηματικών.

-Η απόκτηση εξοικείωσης με τη λογική και τις διαδικασίες απόδειξης.

-Η προοδευτική βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων και διαχείρισης καταστάσεων.

-Την απεικόνιση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά έχουν χρησιμοποιηθεί και αξιοποιηθεί σε πραγματικές συνθήκες κατά τη διάρκεια της ιστορίας, τόσο στις θετικές όσο και στις ανθρωπιστικές και κοινωνικές επιστήμες.

-Την ανάδειξη της δυναμικής πτυχής της μαθηματικής επιστήμης, που καταδεικνύεται από την εκρηκτική ανάπτυξη και τη σημασία της ως απαραίτητο εργαλείο για όλες τις ανθρώπινες προσπάθειες.

-Την ανάπτυξη μιας καλής στάσης απέναντι στα μαθηματικά, χωρίς την οποία είναι πολύ αδύνατη η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων.

2.Στόχοι - Θεματικές ενότητες

Οι επιμέρους στόχοι ανά θεματική ενότητα του κεφαλαίου των κλασμάτων της Α΄ Γυμνασίου είναι οι εξής:

Στόχοι	**Θεματικές ενότητες (Διατιθέμενος χρόνος)**
• Να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες χωρισμού σε μέρη ενός «όλου». • Να κατανοήσουν την έννοια του κλάσματος μέσα από διαδικασίες αναζήτησης σχέσης μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων. • Να υπολογίζουν με την μέθοδο αναγωγής στη μονάδα την τιμή ενός μέρους από το όλο. • Να υπολογίζουν την τιμή του όλου από τη τιμή ενός μέρος του.	Η έννοια του κλάσματος (2 ώρες)
• Να κατανοήσουν την έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων. • Να απλοποιούν κλάσματα. • Να μετατρέπουν κλάσματα σε ομώνυμα. • Να χρησιμοποιούν τη «χιαστί» ιδιότητα για τον έλεγχο της ισοδυναμίας των κλασμάτων : «Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\alpha\delta=\beta\gamma$ »	Ισοδύναμα κλάσματα (1 ώρα)
• Να συγκρίνουν κλάσματα. • Να αντιστοιχούν τα κλάσματα με σημεία της ευθείας των αριθμών.	Σύγκριση κλασμάτων (1 ώρα)
• Να προσθέσουν και να αφαιρούν κλάσματα και να λύνουν σχετικά προβλήματα.	Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων (2 ώρες)
• Να πολλαπλασιάζουν κλάσματα.	Πολλαπλασιασμός και
• Να βρίσκουν τον αντίστροφο ενός αριθμού. • Να διαιρούν κλάσματα. • Να μετατρέπουν ένα σύνθετο κλάσμα σε απλό. • Να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων, να μπορούν να τις διατυπώνουν με τη βοήθεια συμβόλων και να τις χρησιμοποιούν στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης.	Διαίρεση κλασμάτων (4 ώρες)

8. Διαμορφωτική Αξιολόγηση & Μαθηματικά

Όπως έχει ήδη επισημανθεί, η αξιολόγηση, και ιδιαίτερα η διαμορφωτική αξιολόγηση, είναι ζωτικής σημασίας για την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας μάθησης και διδασκαλίας. Στην πραγματικότητα, η σύγχρονη εποχή είναι γνωστή ως η εποχή της αξιολόγησης. Η αθροιστική αξιολόγηση, η οποία είναι συνήθως ο παραδοσιακός τρόπος προσδιορισμού της ικανότητας ενός μαθητή να προχωρήσει στην επόμενη τάξη ή να ολοκληρώσει ένα συγκεκριμένο μάθημα, εξακολουθεί να διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην εκπαίδευση. Ωστόσο, πολλές έρευνες τα τελευταία χρόνια έχουν τονίσει τα πλεονεκτήματα της ενσωμάτωσης της διαμορφωτικής αξιολόγησης στη διδασκαλία στην τάξη. Τα πλεονεκτήματα αυτά απορρέουν από το γεγονός ότι οι μέθοδοι αυτές, οι οποίες στηρίζονται στη διχοτόμηση δασκάλου-μαθητή που περιγράφηκε παραπάνω, θέτουν τον μαθητή στο επίκεντρο της όλης διδακτικής διαδικασίας. Κατά συνέπεια, η προσέγγιση της διαμορφωτικής αξιολόγησης χρησιμοποιείται μόνο από τον εκπαιδευτικό, διότι είναι αυτός που γνωρίζει καλύτερα τους μαθητές του και επιδιώκει να εντοπίσει τα κενά και τις αδυναμίες τους, προκειμένου να τους βοηθήσει να προοδεύσουν και να γίνουν πραγματικοί κάτοχοι γνώσεων (Αυγερινός & Καραγεωριάδης, 2020).

Η συχνότητα με την οποία αξιολογούνται οι μαθητές, η συντομία των δοκιμασιών και η ελάχιστη ή ανύπαρκτη επιρροή της βαθμολογίας των δοκιμασιών στην τελική βαθμολογία του μαθητή αποτελούν βασικά στοιχεία της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Κατά συνέπεια, η διαμορφωτική αξιολόγηση γίνεται συχνότερα από την αθροιστική αξιολόγηση, η οποία γίνεται είτε μία φορά στο τέλος μιας διδακτικής περιόδου είτε σε σύντομες επαναλήψεις δύο ή τρεις φορές κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής περιόδου με τη μορφή διαγωνισμών ή γραπτών αξιολογήσεων προόδου. Σε αντίθεση με τις εξετάσεις που χρησιμοποιούνται για την αθροιστική αξιολόγηση, οι οποίες έχουν μεγαλύτερη διάρκεια και συχνά καλύπτουν ολόκληρη την ύλη, η διαμορφωτική αξιολόγηση διεξάγεται πολλές φορές κατά τη διάρκεια της εβδομάδας και οι εξετάσεις της διακρίνονται για τη σύντομη διάρκειά τους, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Ο τρόπος με τον οποίο αξιοποιούνται τα αποτελέσματα της αξιολόγησης του μαθητή, ωστόσο, αποτελεί τη βασική διάκριση μεταξύ αθροιστικής και διαμορφωτικής αξιολόγησης. Κατά συνέπεια, σε μια αθροιστική αξιολόγηση, τα αποτελέσματα των εξετάσεων χρησιμοποιούνται για την αξιολόγηση του μαθητή και για να διαπιστωθεί αν ολοκλήρωσε ή όχι επιτυχώς το μάθημα. Οι εξετάσεις που χρησιμοποιούνται στην αθροιστική αξιολόγηση κατηγοριοποιούνται, επομένως, ως εξετάσεις υψηλού κινδύνου. Επιπλέον, ο τελικός βαθμός του μαθητή καθορίζεται ως επί το πλείστον από τα αποτελέσματα της συνοπτικής αξιολόγησης στο τέλος μιας διδακτικής περιόδου και πολύ σπάνια καθορίζεται κατά τη διάρκεια της διδακτικής περιόδου. Αντίθετα, ο διδάσκων χρησιμοποιεί τα ευρήματα της διαμορφωτικής αξιολόγησης για να εντοπίσει τα μοναδικά μαθησιακά κενά κάθε μαθητή και να σχεδιάσει τις επακόλουθες διδακτικές τακτικές για να καλύψει αυτά τα κενά μέσα σε μια διδακτική περίοδο. Ως αποτέλεσμα, υπάρχουν περισσότερες εξετάσεις που χρησιμοποιούνται για διαμορφωτική αξιολόγηση επειδή είναι σύντομες, καλύπτουν μόνο ένα μικρό μέρος της διδακτέας ύλης κάθε φορά και δεν χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του τελικού βαθμού του μαθητή. Δίνονται επίσης πιο συχνά μέσα σε μια διδακτική περίοδο. Λόγω των προαναφερθέντων, τα τεστ που χρησιμοποιούνται για διαμορφωτική αξιολόγηση θεωρούνται εξετάσεις χαμηλού διακυβεύματος, επειδή τα αποτελέσματα των μαθητών δεν επηρεάζουν άμεσα την τελική κρίση και βαθμολογία τους (Αυγερινός & Καραγεωριάδης, 2020).

Σύντομα όμως γίνεται σαφές ότι η διαμορφωτική αξιολόγηση, δεδομένης της φύσης των τεστ που αξιοποιούνται, προσφέρει ανώτερη εικόνα της γνωστικής ικανότητας κάθε μαθητή και επιτρέπει την ακριβέστερη στόχευση των μαθησιακών κενών και ελλείψεων. Πληροφορίες που μπορούν να αξιοποιηθούν για την αξιολόγηση μιας σχολικής μονάδας και της συνολικής ποιότητας του εκπαιδευτικού περιεχομένου. Εξάλλου, η εκπαίδευση των μαθητών είναι ο κύριος στόχος ενός εκπαιδευτικού συστήματος. Το εκπαιδευτικό πλαίσιο ενός έθνους πρέπει να αναπτύσσεται με γνώμονα τις απαιτήσεις των μαθητών του. Ωστόσο, ένα από τα κύρια μειονεκτήματα που καθιστά δύσκολη την αξιοποίηση της διαμορφωτικής αξιολόγησης σε πραγματικές συνθήκες διδασκαλίας στην τάξη είναι ο όγκος και η συχνή επανάληψη των εξετάσεων. Αυτό συμβαίνει ώστε ο εκπαιδευτικός να μπορεί να προσαρμόσει τη διδακτική του παρέμβαση για κάθε μοναδικό μαθητή, γεγονός που απαιτεί περισσότερο χρόνο όσον αφορά τον προγραμματισμό, τη διόρθωση, την αξιολόγηση και την αξιοποίηση των πληροφοριών από τη διαμορφωτική αξιολόγηση. Πρόκειται για μια χρονοβόρα διαδικασία που πρέπει να προστεθεί στο ήδη γεμάτο πρόγραμμα διδασκαλίας του εκπαιδευτικού. Εκτός από την παροχή διδασκαλίας στην τάξη, ο εκπαιδευτικός πρέπει να διαθέσει σημαντικό προσωπικό χρόνο για να σχεδιάσει την επόμενη ημέρα και να βαθμολογήσει τις εργασίες και τα γραπτά των μαθητών του. Ωστόσο, εξακολουθούν να υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί που καθιστούν δύσκολη τη χρήση τεχνικών διαμορφωτικής αξιολόγησης στην τάξη. Η κύρια μορφή αξιολόγησης στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα είναι η αθροιστική, επομένως οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με τις αρχές και τις διαδικασίες της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Εξαιτίας αυτού, η αξία της βαθμολόγησης υπερτονίζεται, παρόλο που δεν είναι ο κύριος στόχος της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Κατά συνέπεια, η βαθμολογία που λαμβάνει ένας μαθητής σε ένα τεστ διαμορφωτικής αξιολόγησης έχει συνήθως ελάχιστη σημασία. Επιπλέον, οι μαθητές συχνά παραμελούν να δώσουν σε ένα τεστ διαμορφωτικής αξιολόγησης τη δέουσα σημασία επειδή θεωρούν ότι είναι ασήμαντο, γεγονός που οδηγεί σε ρηχή ανάγνωση που δυστυχώς ενθαρρύνει την επιφανειακή μάθηση (Αυγερινός & Καραγεωργιάδης, 2020).

Προκειμένου να προσπαθήσουν να υιοθετήσουν τις όποιες πρακτικές διαμορφωτικής αξιολόγησης επιλέγει ο εκπαιδευτικός να χρησιμοποιήσει στην τάξη, οι μαθητές θα πρέπει πρώτα να ενημερωθούν με τη θεωρία που βρίσκεται πίσω από τη διαμορφωτική αξιολόγηση. Ωστόσο, η υιοθέτηση ενός συστήματος αξιολόγησης με τη βοήθεια υπολογιστή θα σας επιτρέψει να ξεπεράσετε τους προαναφερθέντες περιορισμούς στην εφαρμογή διαδικασιών διαμορφωτικής αξιολόγησης σε πραγματικές συνθήκες διδασκαλίας στην τάξη. Δεδομένου ότι έχουν αυτοματοποιήσει ένα σημαντικό μέρος της εργασίας για την οποία ήταν προηγουμένως υπεύθυνος ο εκπαιδευτικός, η ανάπτυξη αυτών των τεχνολογιών έχει καταστήσει στην πραγματικότητα δυνατή την εφαρμογή διαδικασιών διαμορφωτικής αξιολόγησης. Ο εκπαιδευτικός χρειαζόταν μόνο να αναπτύξει τα τεστ διαμορφωτικής αξιολόγησης για τους μαθητές, να τα ψηφιοποιήσει και να τα εισάγει στο σύστημα με τη βοήθεια αυτών των προγραμμάτων. Στην ουσία, το σύστημα φρόντιζε να διορθώνει αυτόματα τα τεστ, να παράγει στατιστικά στοιχεία και να συλλέγει άλλα δεδομένα από τη χρήση του συστήματος. Σε αυτή την προσέγγιση, ο εκπαιδευτικός χρειάζεται μόνο να σχεδιάζει και να εισάγει τις εξετάσεις αξιολόγησης στο σύστημα, αντί να ξοδεύει χρόνο για τη διόρθωση και τη βαθμολόγηση των τεστ των μαθητών. Επαναλαμβάνεται ότι οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής χρησιμοποιούνται συνήθως σε εξετάσεις αξιολόγησης που χορηγούνται από συστήματα αξιολόγησης με χρήση υπολογιστή, επειδή είναι απλό να ενσωματωθούν και να χρησιμοποιηθούν σε συστήματα διαμορφωτικής αξιολόγησης (Αυγερινός & Καραγεωριάδης, 2020).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, τα αποτελέσματα του PISA έχουν άμεσο αντίκτυπο στα εκπαιδευτικά συστήματα διαφόρων εθνών. Ωστόσο, η PISA και άλλα ευρεία συστήματα αξιολόγησης, όπως τα TIMSS, NAEP και PIRLS, δεν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως συστήματα διαμορφωτικής αξιολόγησης. Συχνά εφαρμόζονται ετησίως ή, στην περίπτωση των PISA και TIMSS, η περιοδικότητά τους είναι μία φορά κάθε τρία και τέσσερα χρόνια αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, δεν μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως τέτοια. Ωστόσο, υπάρχουν πολλά και σημαντικά πλεονεκτήματα από την εφαρμογή αυτών των συστημάτων αξιολόγησης. Ως εκ τούτου, τα πλεονεκτήματα ενός συστήματος διαμορφωτικής αξιολόγησης για τα μαθηματικά που θα παρέχει ακριβείς πληροφορίες σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών θα ήταν σημαντικά μεγαλύτερα. Σε σύγκριση με τα δεδομένα που παρέχουν συστήματα όπως το PISA και το TIMSS, τα οποία παρέχουν δεδομένα κάθε τρία και τέσσερα χρόνια αντίστοιχα, τα δεδομένα από ένα τέτοιο σύστημα μπορούν να χαρακτηριστούν ακόμη και ως δεδομένα πραγματικού χρόνου λόγω της συχνής εξέτασης των μαθητών, δύο έως τρεις φορές την εβδομάδα.

Με αυτόν τον τρόπο, αντί να περιμένουμε μέχρι την ολοκλήρωση ενός σχολικού έτους, θα ήταν δυνατό να αξιολογήσουμε το εκπαιδευτικό σύστημα ενός έθνους όπως αυτό εφαρμόζεται τώρα. Αυτό θα επέτρεπε την καλύτερη συνολική παρακολούθηση της ανάπτυξης του εν λόγω εκπαιδευτικού συστήματος, καθώς και τη δυνατότητα λήψης διορθωτικών μέτρων κατά τη διάρκεια του έτους. Η εφαρμογή και η χρήση μιας μεθόδου διαμορφωτικής αξιολόγησης στα μαθηματικά σε επίπεδο σχολικής μονάδας μπορεί να δώσει καλύτερη εικόνα για τις επιδόσεις των μαθητών καθώς και για το συνολικό εκπαιδευτικό έργο που επιτελείται στη μονάδα και, κατά συνέπεια, για τη συνολική εκπαιδευτική της ποιότητα. Ως αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που παρέχει ένα τέτοιο σύστημα, είναι δυνατόν να διαπιστωθεί αν ο εκπαιδευτικός έχει αντιμετωπίσει τυχόν γνωστικά κενά ή παρανοήσεις που μπορεί να είχαν οι μαθητές του, πόσος χρόνος του χρειάστηκε για να το κάνει, αν οι μαθητές του ήταν κάτοχοι των μαθηματικών εννοιών που καλύπτονται από το πρόγραμμα σπουδών όταν προχώρησαν στην επόμενη τάξη κ.λπ. Επιπλέον, με βάση την ανάλυση των δεδομένων του προγράμματος PISA εξάγονται συμπεράσματα για την ισότητα των μαθητών, την ισότητα των φύλων, τις φυλετικές διακρίσεις κ.λπ. για τους εκπαιδευτικούς (Αυγερινός & Καραγεωριάδης, 2020).

Όλα αυτά είναι εφικτά με την καλή ανάλυση των δεδομένων από τις αξιολογήσεις των μαθητών στα μαθηματικά. Οι μοναδικές απαιτήσεις κάθε μαθητή θα μπορούσαν να αποτελέσουν το επίκεντρο ενός συστήματος διαμορφωτικής αξιολόγησης των μαθηματικών. Αυτή η προσέγγιση επιδιώκει να ανακαλύψει όχι μόνο τους γνωστικούς περιορισμούς του μαθητή αλλά και να διερευνήσει την πηγή αυτών των προκλήσεων. Προορίζεται ειδικά για να προσαρμόζεται στις μοναδικές απαιτήσεις κάθε μεμονωμένου μαθητή. Πολλές μαθηματικές έννοιες και τομείς απαιτούν από τον μαθητή να έχει προηγουμένως κατανοήσει και κατακτήσει προηγούμενες έννοιες και μαθηματικές γνώσεις λόγω του τρόπου με τον οποίο είναι δομημένες οι μαθηματικές πληροφορίες. Έτσι, η αδυναμία ενός μαθητή να κατανοήσει μια μαθηματική έννοια ή να ολοκληρώσει επιτυχώς μια άσκηση συχνά δεν οφείλεται σε έλλειψη μελέτης αλλά μάλλον σε μαθησιακά κενά από προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες για να κατανοήσει τον τρόπο εκτέλεσης της άσκησης. Το σύστημα διαμορφωτικής αξιολόγησης των μαθηματικών έχει τη δυνατότητα να απαντά στις κυρίως λανθασμένες απαντήσεις του μαθητή και να εξετάζει τους λόγους της αποτυχίας του μαθητή χρησιμοποιώντας τις απαραίτητες ενδείξεις και τα "έξυπνα" μεταδεδομένα. Για την αποθήκευση όλου του εκπαιδευτικού υλικού που αποτελείται από ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, το σύστημα διαθέτει τράπεζα ερωτήσεων. Οι ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής επιλέχθηκαν επειδή έχουν την ξεχωριστή ευκολία να ενσωματώνονται και να χρησιμοποιούνται από ένα σύστημα διαμορφωτικής αξιολόγησης, προσφέρουν αντικειμενική βαθμολόγηση, μπορούν να αξιολογήσουν περισσότερο πρόγραμμα σπουδών από ό,τι οι ερωτήσεις ανοικτού τύπου, είναι κατάλληλες για διαμορφωτική αξιολόγηση και προσφέρουν διασφαλίσεις από το να μην απαντήσει ο μαθητής τυχαία λανθασμένα (Αυγερινός & Καραγεωριάδης, 2020).

Τέσσερα "έξυπνα μεταδεδομένα" αποθηκεύονται επιπλέον με κάθε ερώτηση εκτός από τις τυπικές πληροφορίες. Αυτά περιλαμβάνουν τη βαρύτητα που δίνεται σε κάθε ερώτηση, το επίπεδο δυσκολίας της, τον πιθανό βαθμό συγγένειάς της με άλλες ερωτήσεις που φυλάσσονται στην τράπεζα ερωτήσεων και το αν αποθηκεύονται τυχόν "πανομοιότυπες" ερωτήσεις -δηλαδή ερωτήσεις που είναι ίδιες με την ερώτηση αλλά έχουν διαφορετική διατύπωση ή διαφορετικό αριθμό- (Αυγερινός & Καραγεωργιάδης, 2013). Επιπλέον, οι ερωτήσεις στην τράπεζα ερωτήσεων είναι δομημένες έτσι ώστε κάθε κεφάλαιο των μαθηματικών να έχει έναν μοναδικό δείκτη συνάφειας με τα άλλα κεφάλαια των μαθηματικών. "Γνωρίζοντας" ποια άλλα κεφάλαια έχει συνάφεια το κεφάλαιο στο οποίο αξιολογείται ο μαθητής, το σύστημα είναι σε θέση να Δηλαδή, ο μαθητής θα πρέπει να γνωρίζει αυτές τις πληροφορίες πριν διαβάσει το συγκεκριμένο κεφάλαιο στο οποίο εξετάζεται και επιχειρήσει να ολοκληρώσει τις όποιες εργασίες. Κατά συνέπεια, εάν ένας μαθητής απαντήσει λάθος, το σύστημα, χρησιμοποιώντας τα "έξυπνα" μεταδεδομένα και την ακριβή διάταξη των ερωτήσεων στην τράπεζα ερωτήσεων, ζητά πρώτα από τον μαθητή να απαντήσει σε μια ερώτηση από το κεφάλαιο των μαθηματικών που βαθμολογείται. Το σύστημα επιλέγει ερωτήσεις από προηγούμενο κεφάλαιο μαθηματικών με μεγαλύτερη συνάφεια με αυτό στο οποίο αξιολογείται ο μαθητής, εάν ο αριθμός των λανθασμένων απαντήσεων είναι τέτοιος που ενεργοποιείται η κατάλληλη ένδειξη, υποδεικνύοντας ότι η αδυναμία του μαθητή στο συγκεκριμένο κεφάλαιο μαθηματικών πρέπει να εξεταστεί σε βάθος. Η προαναφερθείσα διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου ο μαθητής αρχίσει να δίνει ακριβείς απαντήσεις. Με τον τρόπο αυτό το σύστημα μπορεί να ανακαλύψει τα μαθησιακά κενά και τις παρανοήσεις των μαθητών (Αυγερινός & Καραγεωργιάδης, 2020).

Κάθε μαθητής αξιολογείται χρησιμοποιώντας ένα ξεχωριστό σύνολο ερωτήσεων, αλλά λόγω των "έξυπνων" μεταδεδομένων, κάθε εξέταση που δίνεται σε μια τάξη μαθητών είναι εξίσου πολύτιμη. Η ηλεκτρονική διαμορφωτική αξιολόγηση των μαθητών καθιστά δυνατή την αποθήκευση και την περαιτέρω επεξεργασία των απαντήσεών τους για περισσότερο από μία διδακτική ώρα. Προκειμένου να επεξεργάζονται τα δεδομένα από την αξιολόγηση των μαθητών για την έμμεση αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου που επιτελείται σε μια σχολική μονάδα και, ως εκ τούτου, της ποιότητας της εκπαίδευσης που παρέχεται από μια συγκεκριμένη σχολική μονάδα, μπορεί να τροποποιηθεί η μέθοδος διαμορφωτικής αξιολόγησης για τα μαθηματικά. Προκειμένου να παρακολουθείται η μαθησιακή πρόοδος των μαθητών σε κάθε τάξη που ελέγχεται, η μέθοδος διαμορφωτικής αξιολόγησης για τα μαθηματικά θα πρέπει να χρησιμοποιείται σε όσο το δυνατόν περισσότερες τάξεις. Επιπλέον, η τεχνολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μεγαλύτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εάν η τράπεζα ερωτήσεων έχει αποθηκεύσει τις απαραίτητες ερωτήσεις (Αυγερινός & Καραγεωργιάδης, 2020).

Ως αποτέλεσμα, είναι εφικτή η συλλογή πληροφοριών από τις διαμορφωτικές αξιολογήσεις των μαθητών στα μαθηματικά και, μέσω της σωστής ανάλυσης αυτών των δεδομένων, η εξαγωγή διεισδυτικών συμπερασμάτων σχετικά με την εκπαιδευτική δραστηριότητα του εκπαιδευτή. Με τον τρόπο αυτό, είναι δυνατόν να αξιολογηθεί η ανταπόκριση του εκπαιδευτικού στις αδυναμίες του μαθητή, όπως αυτές εντοπίστηκαν από το σύστημα, το πόσο γρήγορα ο εκπαιδευτικός μπόρεσε να βοηθήσει τον μαθητή να ξεπεράσει αυτές τις αδυναμίες, ο τρόπος με τον οποίο διδάχθηκε η ύλη, το επίπεδο κατανόησης και επιτυχίας στο μάθημα, το κατά πόσον αύξησε ή όχι τη συνολική επίδοση των μαθητών σε σχέση με το προηγούμενο μάθημα στο οποίο συμμετείχαν και το κατά πόσον ήταν έτοιμοι για το επόμενο μάθημα. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η προσέγγιση της διαμορφωτικής αξιολόγησης για τα μαθηματικά, η οποία περιλαμβάνει την αξιολόγηση των μαθητών στα μαθηματικά δύο έως τρεις φορές την εβδομάδα, είναι το μόνο που χρειάζεται για να είναι διαθέσιμες όλες οι πληροφορίες που αναφέρονται παραπάνω. Ο εκπαιδευτικός δεν χρειάζεται να δαπανήσει περισσότερο χρόνο ή προσπάθεια για το έργο στο σύνολό του. Ο εκπαιδευτικός χρειάζεται μόνο να γνωρίζει τη μοναδική μαθησιακή πρόοδο κάθε μαθητή από το μάθημα. Το σύστημα είναι ένα νόμιμο ποσοτικό εργαλείο για την αξιολόγηση του εκπαιδευτικού έργου που παρέχεται σε μια τάξη ή σε ολόκληρη τη σχολική μονάδα και είναι υπεύθυνος για οποιαδήποτε διδακτική τεχνική επιλέξει να χρησιμοποιήσει για να ικανοποιήσει τις ανάγκες του μαθητή (Αυγερινός & Καραγεωργιάδης, 2020).

9. Ελληνική PISA: Σε ποια συμπεράσματα κατέληξε η επιτροπή των εμπειρογνωμόνων

Ύστερα από τη μελέτη των αποτελεσμάτων των εθνικών εξετάσεων διαγνωστικού χαρακτήρα που διενεργήθηκαν στις 18 Μαΐου 2022, σε 554 σχολεία όλων των τύπων όλης της χώρας, με τη συμμετοχή 11.411 μαθητών, η επιτροπή με επικεφαλής τον κ. Ηλία Γ. Ματσαγγούρα, πρόεδρο της ΑΔΙΠΠΔΕ κατέληξε σε συμπεράσματα τα για τη βελτίωση του εκπαιδευτικού έργου. Μεταξύ των προτάσεων περιλαμβάνονται η μείωση της ύλης, αλλαγές στη διάρθρωσή της σε κάθε τάξη, ορθή κατανομή των θεμάτων και έμφαση στα ουσιώδη, επαφή και σχολιασμός στην τάξη και για ζητήματα της επικαιρότητας, καλλιέργεια στους μαθητές δεξιοτήτων με σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας.

Οι μαθητές του Δημοτικού πήγαν καλύτερα από τους μαθητές του Γυμνασίου στα Μαθηματικά. Αυτό μπορεί να αποδοθεί εν μέρει στην πιο πιθανή χαλαρή αντιμετώπιση των εξετάσεων από τους μαθητές του Γυμνασίου σε σχέση με εκείνους του Δημοτικού, όμως μάλλον τα αίτια μπορούν να αναζητηθούν και στην ξαφνική αύξηση του επιπέδου δυσκολίας των μαθηματικών στο Γυμνάσιο σε σχέση με το Δημοτικό. Συγκεκριμένα, στα Μαθηματικά οι μισοί 15χρονοι μαθητές του Γυμνασίου δεν κατάφεραν να απαντήσουν σωστά στις εθνικές εξετάσεις.

Στο Δημοτικό

Για τα Μαθηματικά του Δημοτικού Σχολείου η επιτροπή αναφέρει ότι, παρά τις ελλείψεις σε επιμέρους πεδία, οι μαθητές που συμμετείχαν στις εξετάσεις έχουν κατακτήσει σε σημαντικό βαθμό τους στόχους που θέτουν τα προγράμματα σπουδών. «Περίπου τέσσερις στους δέκα μαθητές δυσκολεύονται κατά την εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασματικών αριθμών, την ταξινόμηση κλασμάτων και τη μετατροπή κλασματικού αριθμού σε δεκαδικό», λέει ενδεικτικά το πόρισμα. Γενικά ζητείται να υποστηριχθούν οι μαθητές για να αναπτύξουν μαθηματική σκέψη και να αποκτήσουν την ικανότητα επίλυσης απλών και σύνθετων προβλημάτων.

Στο Γυμνάσιο

Στα Μαθηματικά η επιτροπή παρατηρεί ότι ένα μέρος των παιδιών (περίπου ένα στα τέσσερα) βρίσκεται κάτω από το οριακά επαρκές επίπεδο γνώσεων και δεξιοτήτων. Τα παιδιά αυτά φαίνεται να έχουν σημαντικές δυσκολίες και ίσως κινδυνεύουν να μην καταφέρουν να επανασυνδεθούν με τα σχολικά μαθηματικά αν δεν καταβληθούν μεγάλες προσπάθειες από το εκπαιδευτικό σύστημα. Γι' αυτό η επιτροπή προτείνει να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στη διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών και να γίνουν κάποιες μετατοπίσεις στη διδακτική πρακτική (π.χ. ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας των μαθητών στην τάξη, διερευνητικές δραστηριότητες των μαθητών).

Πηγή: εφημερίδα Καθημερινή

10. Ανάλυση δεδομένων CHIC

Για την ανάλυση των δεδομένων μας μέσω του προγράμματος CHIC Analysis χρειάστηκε να κωδικοποιήσουμε τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που μοιράστηκε.

Τις μεταβλητές του ερωτηματολογίου μας τις ορίζουμε ως συνδυασμό γραμμάτων κι ενός αριθμού.

Οι ερωτήσεις που αξιοποιήθηκαν για τα διαγράμματα ομοιότητας φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

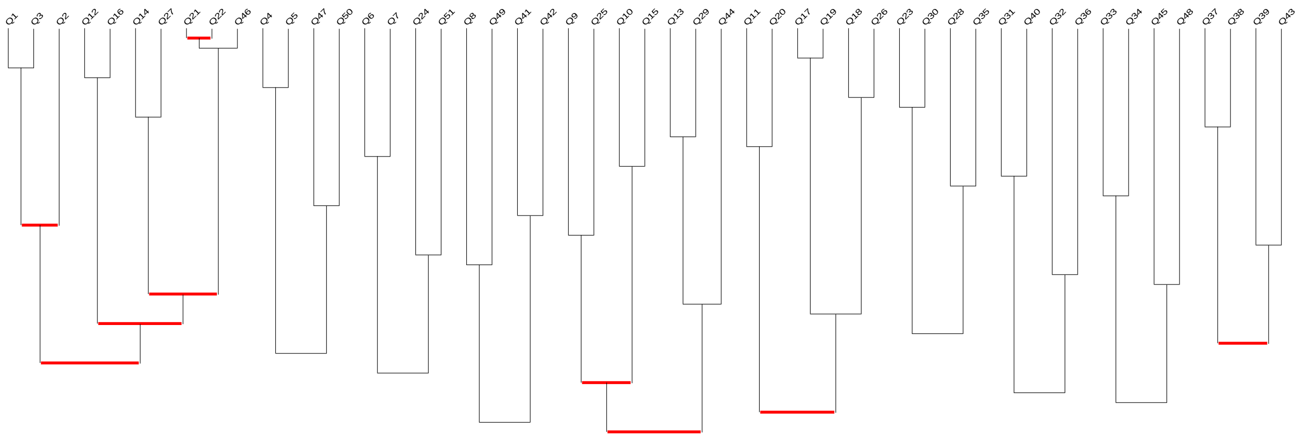
Συχνότητα απαντήσεων

nb col : 51, nb lig : 70

	Occurrence	Average	Standard deviations
Q1	42.38	0.61	0.28
Q2	44.05	0.63	0.28
Q3	30.09	0.43	0.31
Q4	35.43	0.51	0.31
Q5	28.75	0.41	0.28
Q6	46.43	0.66	0.29
Q7	55.44	0.79	0.22
Q8	59.18	0.85	0.22
Q9	51.08	0.73	0.24
Q10	43.73	0.62	0.27
Q11	28.74	0.41	0.24
Q12	32.41	0.46	0.28
Q13	38.08	0.54	0.31
Q14	37.77	0.54	0.34
Q15	42.05	0.60	0.27
Q16	32.11	0.46	0.32
Q17	20.52	0.29	0.29
Q18	24.12	0.34	0.27
Q19	26.45	0.38	0.28
Q20	34.45	0.49	0.35
Q21	34.09	0.49	0.33
Q22	27.84	0.40	0.38
Q23	36.79	0.53	0.34
Q24	46.44	0.66	0.31
Q25	40.02	0.57	0.27
Q26	31.42	0.45	0.28
Q27	43.42	0.62	0.31
Q28	39.41	0.56	0.31
Q29	40.70	0.58	0.27

Q30	48.14	0.69	0.33
Q31	46.71	0.67	0.27
Q32	54.76	0.78	0.22
Q33	53.76	0.77	0.23
Q34	52.45	0.75	0.27
Q35	41.07	0.59	0.30
Q36	31.08	0.44	0.27
Q37	46.09	0.66	0.29
Q38	46.39	0.66	0.27
Q39	42.70	0.61	0.27
Q40	44.36	0.63	0.26
Q41	18.48	0.26	0.23
Q42	34.82	0.50	0.37
Q43	43.41	0.62	0.30
Q44	60.21	0.86	0.24
Q45	59.18	0.85	0.23
Q46	27.18	0.39	0.36
Q47	43.06	0.62	0.28
Q48	53.75	0.77	0.23
Q49	56.83	0.81	0.25
Q50	28.48	0.41	0.33
Q51	42.75	0.61	0.30

Δενδροδιάγραμμα ομοιότητας (similarity tree)



Το παραπάνω σχήμα παρουσιάζει το δενδροδιάγραμμα ομοιότητας σε διάφορα επίπεδα, που ερμηνεύεται παρακάτω (Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα-Classification at level). Στο Διάγραμμα Ομοιότητας φαίνονται οι σχέσεις ομοιότητας ανάμεσα σε διάφορα έργα. Έργα κατά την επίλυση των οποίων τα υποκείμενα συμπεριφέρονται με όμοιο τρόπο ομαδοποιούνται μαζί.

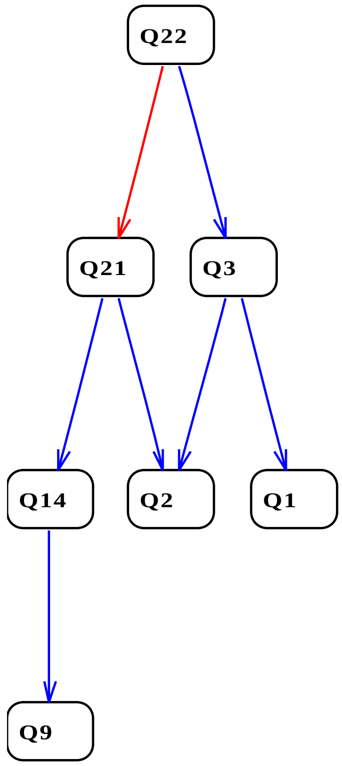
Οι σημαντικότερες ομαδοποιήσεις παρατηρούνται στα επίπεδα 1, 20, 27, 30, 32, 34, 36, 39, 41 με την 34 να είναι και η πιο σημαντική, όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

Κατηγοριοποίηση μεταβλητών σε επίπεδα

		similarity
Classification at level : 1	(Q21 Q22)	0.971443
Classification at level : 2	((Q21 Q22) Q46)	0.855432
Classification at level : 3	(Q17 Q19)	0.840974
Classification at level : 4	(Q1 Q3)	0.835353
Classification at level : 5	(Q12 Q16)	0.806789
Classification at level : 6	(Q4 Q5)	0.79107
Classification at level : 7	(Q18 Q26)	0.747702
Classification at level : 8	(Q23 Q30)	0.745225
Classification at level : 9	(Q14 Q27)	0.743329
Classification at level : 10	(Q37 Q38)	0.728266
Classification at level : 11	(Q13 Q29)	0.720651
Classification at level : 12	(Q11 Q20)	0.679359
Classification at level : 13	(Q6 Q7)	0.678825
Classification at level : 14	(Q10 Q15)	0.673649
Classification at level :15	(Q31 Q40)	0.666705
Classification at level : 16	(Q28 Q35)	0.663364
Classification at level : 17	(Q33 Q34)	0.661511
Classification at level : 18	(Q47 Q50)	0.658013
Classification at level : 19	(Q41 Q42)	0.654578
Classification at level : 20	((Q1 Q3) Q2)	0.6299
Classification at level : 21	(Q9 Q25)	0.627768
Classification at level :22	(Q39 Q43)	0.616476
Classification at level : 23	(Q24 Q51)	0.615012
Classification at level : 24	(Q8 Q49)	0.598077
Classification at level : 25	(Q32 Q36)	0.59428
Classification at level : 26	(Q45 Q48)	0.559808

Classification at level : 27	((Q14 Q27) ((Q21 Q22) Q46))	0.521926
Classification at level : 28	((Q13 Q29) Q44)	0.391764
Classification at level : 29	((Q17 Q19) (Q18 Q26))	0.377446
Classification at level : 30	((Q12 Q16) ((Q14 Q27) ((Q21 Q22) Q46)))	0.312496
Classification at level : 31	((Q23 Q30) (Q28 Q35))	0.296946
Classification at level : 32	((Q37 Q38) (Q39 Q43))	0.25853
Classification at level : 33	((Q4 Q5) (Q47 Q50))	0.221664
Classification at level : 34	(((Q1 Q3) Q2) ((Q12 Q16) ((Q14 Q27) ((Q21 Q22) Q46))))	0.16845
Classification at level : 35	((Q6 Q7) (Q24 Q51))	0.16019
Classification at level : 36	((Q9 Q25) (Q10 Q15))	0.160006
Classification at level : 37	((Q31 Q40) (Q32 Q36))	0.148529
Classification at level : 38	((Q33 Q34) (Q45 Q48))	0.148329
Classification at level : 39	((Q11 Q20) ((Q17 Q19) (Q18 Q26)))	0.0907178
Classification at level : 40	((Q8 Q49) (Q41 Q42))	0.084451
Classification at level : 41	(((Q9 Q25) (Q10 Q15)) ((Q13 Q29) Q44))	0.012879

Συνεπαγωγικό διάγραμμα ομάδας ελέγχου (Implicative Graph))



Το παραπάνω σχήμα παρουσιάζει το Συνεπαγωγικό Διάγραμμα.

Στο Συνεπαγωγικό Διάγραμμα φαίνονται οι διάφορες σχέσεις συνεπαγωγής που υπάρχουν ανάμεσα σε μεταβλητές. Οι συνεπαγωγές με το κόκκινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 99%, με το μπλε βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 95% και με το πράσινο βέλος ισχύουν σε επίπεδο σημαντικότητας 90%. Στην περίπτωση που παρουσιάζεται η συνεπαγωγή Έργο1→Έργο 2 αυτό σημαίνει ότι η επιτυχία στο Έργο 1 συνεπάγεται επιτυχία στο Έργο 2 και η αποτυχία στο Έργο 2 συνεπάγεται αποτυχία στο Έργο 1.

11. Συμπεράσματα

Οι σημαντικότερες ομαδοποιήσεις παρατηρούνται στα επίπεδα 1, 27, 30, 32, 34, 36, 39, 41 με την 34 να είναι και η πιο σημαντική.

- Ερώτηση 1: Σου αρέσει το μάθημα των μαθηματικών;

  Οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν θετικά.

- Ερώτηση 27: Κατά την επίλυση ενός προβλήματος προσπαθείς να οργανώσεις ένα σχέδιο επίλυσης στο μυαλό σου πριν ξεκινήσεις να το λύνεις στο χαρτί;

  Οι περισσότεροι μαθητές προσπαθούν να οργανώσουν τον τρόπο σκέψης τους.

- Ερώτηση 30: Όταν τελειώσεις ένα πρόβλημα, ελέγχεις την απάντησή σου να δεις αν είναι λογική;

  Οι περισσότεροι μαθητές προσπαθούν να αξιολογήσουν την ορθότητα της απάντησής τους.

- Ερώτηση 32: Θέλεις ο δάσκαλος σου να είναι ευχαριστημένη/ος μαζί σου;

  Μεγάλο μέρος των μαθητών επιθυμεί την αναγνώριση της προσπάθειά τους από τον δάσκαλό τους.

- Ερώτηση 36: Καταλαβαίνεις πάντα όσα δείχνει ο δάσκαλος σου στον πίνακα;

  Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν αυτά που δείχνει ο δάσκαλος τους στον πίνακα. Δηλ. σε πολλές περιπτώσεις δεν υπάρχει φιλικό προς τον διάλογο περιβάλλον

- Ερώτηση 39: Οι συμμαθητές σου πιστεύουν ότι μπορείς να τα καταφέρεις στα Μαθηματικά;

  Οι μαθητές ενδιαφέρονται για την αυτοεικόνα τους.

- Ερώτηση 34: Θέλεις να φαίνεσαι έξυπνος στο/ στη δάσκαλο/α σου;

  Η αυτοπεποίθηση των μαθητών μεγαλώνει όταν πιστεύουν ότι ο δάσκαλος τους θεωρεί έξυπνους.

- Τα ευρήματα από το συνεπαγωγικό διάγραμμα επιβεβαιώνουν ότι ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα επηρεάζει τα συναισθήματα του μαθητή.
- Επίσης τα μαθηματικά φαίνονται να είναι διασκεδαστικά όταν ο μαθητής μαθαίνει καινούρια πράγματα.
- Ακόμα όταν ένας μαθητής αισθάνεται ότι του αρέσει να λύνει ασκήσεις μόνος του τότε μπορεί και παρακολουθεί με ενδιαφέρον το μάθημα των μαθηματικών.

Ένα από τα βασικά μαθήματα που διδάσκονται από το νηπιαγωγείο μέχρι την τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι τα μαθηματικά. Η μαθηματική εκπαίδευση έχει αρχαίες ρίζες και εξελίσσεται συνεχώς ως επιστήμη και ως διδακτικό αντικείμενο. Οι διάφορες θεωρίες που προσεγγίζουν τα μαθηματικά έχουν οδηγήσει σε πολυάριθμες τροποποιήσεις του τρόπου διδασκαλίας τους στις μέρες μας. Τα Νέα Μαθηματικά είναι η πιο γνωστή θεωρία του 20ού αιώνα που έχει επηρεάσει τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών στα σύγχρονα εκπαιδευτικά ιδρύματα. Με τη μέθοδο αυτή, τα μαθηματικά μετακινούνται από μια μηχανιστική προοπτική σε μια πιο πρακτική ή ρεαλιστική. Τα ρεαλιστικά μαθηματικά είναι η ιδέα που προήλθε από το κίνημα των Νέων Μαθηματικών και συνεχίζει να έχει υποστηρικτές μέχρι σήμερα. Η σχέση μεταξύ της μαθηματικής κατανόησης και της πραγματικότητας τονίζεται από τα ρεαλιστικά μαθηματικά. Στόχος είναι να κατανοηθεί η σημασία των μαθηματικών εννοιών στην καθημερινή ζωή. Από την κατανόηση αυτή μπορεί να προκύψει η ανάπτυξη των απαιτούμενων μαθηματικών δεξιοτήτων και η πρακτική εφαρμογή τους (Karaca & Ozkaya, 2017).

Οι ιδέες των ρεαλιστικών μαθηματικών έχουν αντίκτυπο στα σύγχρονα εκπαιδευτικά συστήματα και υπάρχει σύνδεση μεταξύ αυτών και των παγκόσμιων προσεγγίσεων για την αξιολόγηση των μαθητών. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης αυτής της στρατηγικής με μαθητές και εκπαιδευτικούς υπογραμμίστηκαν από τη βιβλιογραφική αξιολόγηση που έγινε στο πλαίσιο της παρούσας μελέτης. Αυτή η θεωρία έχει να κάνει με το πώς τα μαθηματικά διδάσκονται στους εκπαιδευτικούς με διαφορετικό τρόπο πλέον. Οι μαθητές που συμμετέχουν σε δραστηριότητες RME, από την άλλη πλευρά, επιδεικνύουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση στην εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή.

12. Βιβλιογραφία

Agaliotis, I. (2012). Evaluating Greek primary school textbooks used to teach students with learning disabilities. *Aula abierta*, 40(3), 47-54.

Aiken, L. R., Jr. (1976). Update on attitude and other affective variables in learning mathematics. *Review of Educational Research*, 46, 293-311.

Ainley J., Pratt, D. & Hansen, A. (2006) Connecting Engagement and Focus in Pedagogic Task Design, *British Educational Research Journal*, 32(1), 23-38.

Ajzen, I. (1985). From intention to action: A theory of planned behavior. *Action control: from cognition to behaviour*. New York, Springer-Verlag.

Anderman, L. H., Andrzejewski, C. E., & Allen, J. (2011). How do teachers support students' motivation and learning in their classrooms. *Teachers College Record*, 113(5), 969-1003.

Andersson, A., & Seah, W. T. (2013). Facilitating mathematics learning in different contexts: The values perspective. *In 7th International Conference on Mathematics Education and Society*, APR 02-07, 2013, Cape Town, SOUTH AFRICA (pp. 193-202).

Andersson, U. (2010). Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of educational psychology*, 102(1), 115.

Asper, M. (2009). The two cultures of mathematics in ancient Greece. In E. Robson & J. Stedall (Eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics* (pp. 107-132). Oxford University Press on Demand.

Ayob, A., & Yasin, R. M. (2017). Factors affecting attitudes towards mathematics. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences*, 7(11), 1100-1109. https://doi.org/10.6007/IJARBSS/v7-i11/3548

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brown, A. L., Bransford, J.D., Ferrara, R.A. & Campione, J.C. (1983). Learning, remembering, and understanding. *In P.H. Mussen (Ed.) Handbook of child psychology* (Vol. 3: Cognitive development pp 77-166). New York: Wiley

Butterworth, B., & Laurillard, D. (2010). Low numeracy and dyscalculia: identification and intervention. *ZDM*, 42(6), 527-539.

Callahan, W. J. (1971). "Adolescent Attitudes towards mathematics." *Maths Teacher* 64: 751-755.

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007), Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions, *Educational Studies in mathematics* 64, 293-316.

Chuter, C. (2019). *The role of motivation in learning.* The Education Hub. https://theeducationhub.org.nz/motivation/

Cooper, H., Robinson, J. C., & Patall, E. A. (2006). Does homework improve academic achievement? A synthesis of research, 1987- 2003. *Review of Educational Research*, 76(1), 1-62. https://doi.org/10.3102/00346543076001001

Cresswell, M., & Gubb, J. (1987). *The Second International Mathematics Study in England and Wales*. Oxford, NFER-NELSON.

Creswell, J. W., & Plano Clark, V. L. (2011). *Designing and conducting mixed methods research*. Sage.

Daskalogianni, K., & Simpson, A. (2000). Towards a definition of attitude: The relationship between affective and cognitive in preuniversity students. In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 217-224). Hirishima, Japan.

DeVries, R. (2000). Vygotsky, Piaget, and education: A reciprocal assimilation of theories and educational practices. *New ideas in Psychology*, 18(2-3), 187-213.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 43(4), 471–482.

Di Martino, P., Coppola, C., Mollo, M., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: the math-redemption phenomenon. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 225–232). Kiel, Germany.

Ernest, P. (2010). Reflections on theories of learning. In *B. Sriraman & L. English (Eds.), Theories of mathematics education* (pp. 39-47). Berlin: Springer.

Fennema, E., & Leder, G. (1990). *Mathematics and Gende*r. London, Teachers Collede.

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel, Boston.

Frijda, N. H. (2007). *The laws of emotion.* New York: Lawrence Erlbaum Associates Publisher.

Fuadiah, N. F., Suryadi, D., & Turmudi (2017). Analysis of Didactical Contracts on Teaching Mathematics: A Design Experiment on a Lesson of Negative Integers Operations. *Infinity,* 6 (2), 157-168. doi:10.22460/infinity.v6i2.p157-16

Fuchs, L. S., & Fuchs, D. (2002). Mathematical problem-solving profiles of students with mathematics disabilities with and without comorbid reading disabilities. *Journal of learning disabilities*, 35(6), 564-574.s.

Furinghetti, F., Matos, J. M., & Menghini, M. (2012). From mathematics and education, to mathematics education. In *M. K. Clements, A. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Third international handbook of mathematics education* (pp. 273-302). New York: Springer.

Gafoor, K. A., & Kurukkan, A. (2015). Why high school students feel mathematics difficult? An exploration of affective beliefs [Paper presentation]. *The UGC Sponsored National Seminar on Pedagogy of Teacher Education, Trends and Challenges*, Kozhikode, Kerala, India.

Gallagher, A. M., & Kaufman, J. C. (2005). *Gender Differences in Mathematics: What We Know and What We Need to Know*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511614446.016

Goldin, G. A. (2000). *Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving. Mathematical Thinking and Learning*, 2(3), 209–219.

Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 37-68.

Hammouri, H. A. (2004). "Attitudinal and motivational variables related to mathematics achievement in Jordan: finding from the third international mathematics and science study (TIMSS)." *Educational Research* 46(3): 241-257.

Hannula, M. S., Di Martino, P., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Heyd-Metzuyanim, E., Lutovac, S., Kaasila, R., Middleton, J. A., Jansen, A., & Goldin, G. A. (2016). Attitudes, beliefs, motivation, and identity in mathematics education. *In Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education, ICME-13 Topical Surveys*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319- 32811-9_1

Hannula, M. S., Maijala, H., & Pehkonen, E. (2004). Development of understanding and self-confidence in mathematics; Grades 5- 8. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Hannula, M. S., Pantziara, M., Wæge, K., & Schlöglmann, W. (2010). Introduction multimethod approaches to the multidimensional affect in mathematics education. *In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello* (Eds.), Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research (pp. 28–33). Lyon, France.

Hersant, M., & Perrin-Glorian, M. (2005). Characterization of an Ordinary Teaching Practice with the Help of the Theory of Didactic Situations. *Educational Studies In Mathematics*, 59(1-3), 113-151. doi: 10.1007/s10649-005-2183-z

Jordan, N. C., Kaplan, D., & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology*, 94, 586- 597.

Karaca, S. Y., & Özkaya, A. (2017). The Effects of Realistic Mathematics Education on Students' Math Self Reports in Fifth Grades Mathematics Course. *International Journal of Curriculum and Instruction*, 9(1), 81-103.

Karagiannakis, G., & Baccaglini-Frank, A. (2014). The DeDiMa Battery: A Tool for Identifying Students' Mathematical Learning Profiles. *Health Psychology Report*, 2(4), DOI: 10.5114/hpr.2014.46329.

Kilpatrick, J. (2014). History of research in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 267-272). Dordrecht: Springer.

Kim, C., & Hodges, C. B. (2011). Effects of an emotion control treatment on academic emotions, motivation and achievement in an online mathematics course. *Instructional Science*, 40(1), 173–192. doi:10.1007/s11251-011-9165-6

Krueger, R. (1994). *Focus groups: A practical guide for applied research. Thousand Oaks*, CA: Sage Publications.

Manno, G. (2006). *Embodiment and a-didactical situation in the teaching –learning of the perpendicular straight lines concept.* Unpublished PhD thesis, Comenius University in Bratislava, Slovakia.

Martínez-Sierra, G., & García González, M. D. S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 234– 250. doi:10.1080/14794802.2014.895676

Mayer, M. R., & Koehler, M.S. (1990). Internal Influences on Gender Differences in Mathematics. *Mathematics and Gender*. E. L. Fennema, G. London, Collede.

Mayer, R. E., & Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. *The nature of mathematical thinking*, 12, 24-59.

Medin J.A.: Test anciety, locus of control and mathematics achievement placement as correlates to achievement in mathematics by students in Junior High School. *D.A.I.* Vol. 46, No 7, Jan. 1856, σ. 1856-A.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. *In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), 3rd Mediterranean* *conference on mathematical education*.Athens, Jan. 2003, pp. 115-124. Athens: Hellenic Math. Society.

Op' T Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2007). Students' emotions: A key component of self-regulated learning? In P. A. Schutz & R. Pekrun (Eds.), *Emotion in education* (pp. 185–204). Burlington, MA: Academic Press.

Oraif, F. A. (2007). *An Exploration of confidence related to formal learning in Saudi Arabia*. Science Education Centre, Glasgow University.

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions. Cambridge*, UK: Cambridge University Press.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton. New Jersey: Princeton University.

Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2016). *Semiotics in mathematics education*. Springer.

Proulx & Simmt, 2013).

Reid, D. A. (2014). The coherence of enactivism and mathematics education research: A case study, *Avant, V*(2), 137-172.

Schloeglmann, W. (2004). Routines in Non-Routine Problem Solving Processes. *International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.20.4.0338

Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM*, 49(3), 307-322. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0864-6

Shabani, K., Khatib, M., & Ebadi, S. (2010). Vygotsky's Zone of Proximal Development: *Instructional Implications and Teachers' Professional Development. English language teaching*, 3(4), 237-248.

Sherman, J., & Fennema, E. (1977). "The study of mathematics by girls and boys: related variables." *American Educational Research Journal* 14: 159-168.

Shuman, V. & Scherer, K. R. (2014). Concepts and structures of emotions. In R. Pekrun & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International handbook of emotions in education* (pp. 13-35). Taylor & Francis.

Skovsmose, O. (2016). Critical Mathematics Education: Concerns, Notions, and Future In P. Ernest (Ed.), *Philosophy Mathematics Educ* (pp. 9-13). Routledge.

Stinson, D. W., & Bullock, E. C. (2012). Critical postmodern theory in mathematics education research: A praxis of uncertainty. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1- 2), 41-55.

Tzivinikou, S. (2015). Collaboration between general and special education teachers: Developing co-teaching skills in heterogeneous classes. *Problems of Education in the 21st Century*, 64, 108-119.

Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B., & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction*, 13(1), 53- 72.

Vianna, E., & Stetsenko, A. (2006). Embracing history through transforming it: Contrasting Piagetian versus Vygotskian (activity) theories of learning and development to expand constructivism within a dialectical view of history. *Theory & psychology*, 16(1), 81-108.

Wittmann, E. (2005). Plenary Lecture presented at the International Colloquium “Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood” organized by the *Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathematiques in collaboration with the Institut de mathématique de l’Université de Mons-Hainaut*, Mons/Belgium.

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. *Identities, cultures, and learning spaces*, 575-582.

Αγαλιώτης, Ι. (2000). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά: αιτιολογία- αξιολόγηση – αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αγαλιώτης, Ι. (2004). *Μαθησιακές δυσκολίες στα Μαθηματικά: αιτιολογία – αξιολόγηση - αντιμετώπιση*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.

Αγαλιώτης, Ι. (2013). *Διδασκαλία μαθηματικών στην ειδική αγωγή και εκπαίδευση: Φύση και εκπαιδευτική διαχείριση των μαθηματικών δυσκολιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Αγαλιώτης, Ι., Κόιου, Ε., & Χρυσικού, Β. (2011). Διδάσκοντας γεωμετρία σε μαθητές με ήπιες εκπαιδευτικές ανάγκες: γνωστική ανάλυση και διδακτική διαχείριση συστημικών λαθών. ΙΔ΄ Διεθνές Συνέδριο Π.Ε.Ε., *«Εκπαίδευση ατόμων με ειδικές ανάγκες: Μια πρόκληση για το σχολείο και την κοινωνία»*, Θεσσαλονίκη.

Αυγερινός, Ε. & Καραγεωργιάδης, Α. (2013). Η χρήση μεταδεδομένων σε συστήματα Αξιολόγησης στα Μαθηματικά με την χρήση Η/Υ και «Έξυπνων Συστημάτων», *Πρακτικά 30ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας με Διεθνή Συμμετοχή, της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, σελ. 186-197, Καρδίτσα, Νοέμβριος 2013.

Αυγερινός, Ε. & Καραγεωργιάδης, Α. (2020). Χρήση των δεδομένων από την διαμορφωτική αξιολόγηση των μαθητών στα μαθηματικά για την έμμεση αξιολόγηση της σχολικής μονάδας και του εκπαιδευτικού έργου: Αξιολόγηση των Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες, *ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ*, 5, 1-12.

Γαγάτσης, Α., Ηλία, Ι., Καταλάνου, Σ., Μοδέστου, Μ., Ιωάννου, Ι. (2006). Αναγνωσιμότητα των κειμένων και ο ρόλος των εικόνων. *9ο Συνέδριο Παιδαγικής Εταιρείας Κύπρου.*

Κολέζα, Ε. (2000), *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, Αθήνα: Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2006), *Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Α΄ Μέρος: Ένα θεωρητικό πλαίσιο αξιολόγησης,* Ευκλείδης γ΄, 65.

Κολέζα, Ε. (2007), *Σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών: Β΄ Μέρος: Γνωστική και Κοινωνιολογική ανάλυση*, Ευκλείδης γ΄, 66.

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών.* Αθήνα: Τόπος

Παντελιάδου, Σ., & Μπότσας, Γ. (2007). *Μαθησιακές Δυσκολίες: Βασικές Έννοιες & Χαρακτηριστικά*. Βόλος: Εκδόσεις Γράφημα.

Σαλβαράς, Ι. (2013). *Διδασκαλία παιδιών με ειδικές ανάγκες στο συνηθισμένο σχολείο.* Εκδόσεις Γρηγόρη: Αθήνα.

Σπανδάγος Β. (1991): *Γυναίκες μαθηματικοί της αρχαίας Ελλάδας.*

Σταματόπουλος, Κ. (2011), *Η μαθηματική και διδακτική διάσταση της γνώσης των μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας σχετικά με την έννοια του κλάσματος,* Διπλωματική εργασία, ΕΚΠΑ, Αθήνα.

Φιλλίπου Γ.-Χρίστου Κ.: *Κείμενα παιδείας, Συναισθηματικοί παράγοντες και μάθηση των μαθηματικών*, εκδ. Ατραπός, 2001.