Σχολή Θετικών Επιστημών

Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών επιστημών

Διπλωματική Εργασία

ΑΠΕΙΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γραμματικός Αργύρης

Επιβλέπων καθηγητής: κ. Μπούκας Ανδρέας

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

ΕΛΛΗΝΙΚΟ
ΑΝΟΙΚΤΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΑΠΕΙΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Γραμματικός Αργύρης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής: κ. Μπούκας Ανδρέας

Συνεπιβλέπων Καθηγητής: κ. Παπαδόπουλος Βασίλειος

Πάτρα, Σεπτέμβριος 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Μπούκα Ανδρέα για την βοήθειά του σε όλη τη διάρκεια της εργασίας όπως και τον συνεπιβλέποντα κ. Παπαδόπουλο Βασίλειο για την συμβολή του στη διαδικασία. Ευχαριστώ τους γονείς μου Βασίλη και Γεωργία και τον αδερφό μου Φώτη για την στήριξή τους σε κάθε μου βήμα. Επίσης τους αδελφικούς φίλους μου Παναγιώτη και Ηλία που πορευόμαστε 20 χρόνια μαζί (και χώρια). Τέλος ευχαριστώ την Εύα που δακτυλογραφεί τις «ευχαριστίες» για να είναι σίγουρη ότι θα την αναφέρω…και που είναι δίπλα μου..

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη και η ανάλυση της έννοιας των απείρων γινομένων, έννοια ιδιαίτερα συνδεδεμένη με αυτή των απειροσειρών.

Έτσι λοιπόν στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση από τα βασικά στοιχεία των σειρών που θα φανούν χρήσιμα στη μελέτη των απείρων γινομένων. Παρουσιάζονται ορισμοί, θεωρήματα και πορίσματα κυρίως χωρίς τις αντίστοιχες αποδείξεις καθώς δεν είναι ο βασικός μας στόχος αυτός. Παρουσιάζονται κάποιες αποδείξεις είτε διότι είναι ενδεικτικές της ακολουθούμενης διαδικασίας είτε γιατί κατά την προσωπική μου άποψη παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Στο δεύτερο (και βασικό κεφάλαιο της εργασίας) γίνεται η ανάλυση γύρω από τα άπειρα γινόμενα. Παρουσιάζονται οι βασικοί ορισμοί και τα θεωρήματα που αφορούν τη σύγκλιση των γινομένων. Γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση των αναπτυγμάτων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε μορφή άπειρων γινομένων και του θεωρήματος Abel. Τέλος μελετούμε τα γινόμενα του Weierstrass για να καταλήξουμε στο σημαντικό θεώρημα παραγοντοποίησης του Weierstrass.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζονται ενδεικτικές εφαρμογές και παραδείγματα σχετικά με την παραπάνω ανάλυση και μελέτη για τα άπειρα γινόμενα.

Λέξεις – Κλειδιά

Σειρές , Άπειρα Γινόμενα , Σύγκλιση , Weierstrass

INFINITE PRODUCTS OF COMPLEX NUMBERS

Grammatikos Argiris

Abstract

The purpose of this work is the study and analysis of the concept of infinite products, a concept closely related to that of infinite series. Therefore, in the first chapter, an introduction to the basic elements of series is presented, which will be useful for the study of infinite products. Definitions, theorems, and conclusions are mainly presented without their corresponding proofs, as they are not our primary educational target. Some proofs are included either because they are indicative of the followed procedure or because, in my personal opinion, they present particular interest.

In the second chapter (the main chapter of the work), the analysis revolves around infinite products. The basic definitions and theorems concerning the convergence of products are presented. A concise presentation of the developments of trigonometric functions in the form of infinite products and the Abel theorem is given. Finally, we study the Weierstrass products to arrive at the significant Weierstrass factorization theorem.

Chapter 3 presents illustrative applications and examples related to the above analysis and study of infinite products.

Keywords

Series , Infinite Products , Convergence , Weierstrass

Περιεχόμενα

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

(α) Ιστορία της θεωρίας των Άπειρων Σειρών.

Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Αρχιμήδης παρουσίασε την πρώτη γνωστή σύνοψη μιας απειροσειράς με μία μέθοδο που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα στην αριθμητική ανάλυση. Χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης για να υπολογίσει το εμβαδόν κάτω από ένα παραβολικό τόξο με το άθροισμα μιας απειροσειράς και απέδωσε μια αξιόλογη και αρκετά ακριβή προσέγγισή του.

Τον $17^{ο}$ αιώνα ο James Gregory δούλεψε πάνω σε ένα νέο σύστημα πάνω στις απειροσειρές και δημοσίευσε αρκετές σειρές MacLaurin. Το 1716, μια γενική μέθοδος για την κατασκευή της σειράς Taylor ορίστηκε από τον Brook Taylor.

Ο Gauss ξεκίνησε την έρευνα της ισχύος των απειροσειρών. Ο Euler τον $18^{ο}$ αιώνα είχε ήδη αναπτύξει την θεωρία των υπεργεωμετρικών σειρών πάνω στις οποίες ο Gauss είχε δημοσιεύσει μια αναφορά το 1812. Έπειτα ο Cauchy το 1821 επέμεινε σε αυστηρά κριτήρια σύγκλισης. Έδειξε ότι αν δύο σειρές είναι συγκλίνουσες, δεν είναι απαραίτητο να ισχύει το ίδιο και για το γινόμενό τους. Έτσι από αυτόν ξεκίνησε η ανακάλυψη αποτελεσματικών κριτηρίων σύγκλισης. Οι όροι σύγκλισης και απόκλισης βέβαια έχουν παρουσιαστεί πολύ νωρίτερα από τον Gregory (1668). Οι Euler και Gauss έδωσαν διάφορα κριτήρια και ο Colin MacLaurin επέβλεψε κάποιες από τις ανακαλύψεις του Cauchy ο οποίος προχώρησε την θεωρία των δυναμοσειρών με την επέκταση των σύνθετων συναρτήσεων. Οι μέθοδοι του Cauchy οδήγησαν σε εδικά παρά γενικά συμπεράσματα όπως το ίδιο μπορεί να λεχθεί και για τις προσπάθειες του Raabe (1832) και του DeMorgan (1842).

Τα γενικά κριτήρια ξεκίνησαν με τον Kummer (1835) και μελετήθηκαν ιδιαίτερα από τον Weierstrass (με την ποικίλη συμβολή του στη θεωρία των συναρτήσεων), τον Dini (1867), τον DuBois -Reymond (1873) και άλλους. Η αναφορά του Pringsheim (1889) παρουσίασε την πιο ολοκληρωμένη γενική θεωρία.

Οι σειρές Fourier ερευνήθηκαν ως αποτέλεσμα φυσικής μελέτης την ίδια στιγμή που οι Gauss, Abbel και Cauchy δούλευαν πάνω στην θεωρία των απειροσειρών. Οι σειρές ως επέκταση των ημιτόνων και συνημιτόνων αναπτύχθηκαν από τους αδερφούς Bernoulli(1701-1702) και νωρίτερα από τον Viette. Ο Fourier (1807) έθεσε για τον εαυτό του ένα διαφορετικό πρόβλημα, την επέκταση μιας δοθείσας συνάρτησης σε σχέση με ημιτόνα και συνημιτόνα.

Επιπλέον με τις τριγωνομετρικές σειρές ασχολήθηκε ο Dirichlet (1829), ο χειρισμός του οποίου ήταν θέμα κριτικής και βελτίωσης από τους Riemann, Heine, Lipschitz, Schlafli και Dubois-Reymond.

Τέλος παρατίθενται ενδεικτικά ονόματα κάποιων διακεκριμένων επιστημόνων που συνέβαλαν στην ανάπτυξη της θεωρίας των απειροσειρών ως έναυσμα για περαιτέρω μελέτη μας: Seidel, Stokes, Jacobi, Malmsten, Schlomilch, Hermite, Halphen, Krause, Byerly, Appell.

(β) Ιστορία της θεωρίας των Άπειρων Γινομένων

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η έννοια των άπειρων γινομένων αναπτύχθηκε παράλληλα με την μελέτη των άπειρων σειρών. Ας κάνουμε μια σύντομη ιστορική αναδρομή.

(i) Ο Αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ζήνων θεωρείται ο πρώτος που εισήγαγε την ιδέα των άπειρων γινομένων μέσα στα γνωστά «παράδοξά του». Ένα από αυτά περιλαμβάνει την διαίρεση ενός τμήματος ευθείας σε έναν άπειρο αριθμό υπο-τμημάτων τα οποία γίνονται κάθε φορά όλο και μικρότερα.

(ii) Η τυπική μελέτη των άπειρων γινομένων ξεκίνησε να διαμορφώνεται στον 17ο αιώνα. Ο Άγγλος μαθηματικός John Wallis εισήγαγε την έννοια ενός άπειρου γινομένου το 1656. Χρησιμοποίησε άπειρα γινόμενα για να αναπαραστήσει ορισμένες τριγωνομετρικές συναρτήσεις καθώς επίσης και την τιμή του π.

(iii) Ο Ελβετός μαθηματικός Leonhard Euler (1707-1783) συνεισέφερε σημαντικά στην θεωρία των άπειρων γινομένων. Ένα από τα πιο γνωστά του αποτελέσματα είναι η διατύπωση της σχέσης e^(iπ) + 1 = 0 , η οποία συνδέει πέντε θεμελιώδεις μαθηματικές σταθερές. Κατέληξε σε πολλές μορφές γινομένων μερικές από τις οποίες εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται ευρέως σήμερα. Για παράδειγμα κατέληξε στην άπειρη παράσταση της συνάρτησης ημιτόνου sin(x) = x * (1 - x^2/π^2) * (1 - x^2/(4π^2)) * (1 - x^2/(9π^2)) *...

(iv) Τον 19ο αιώνα μαθηματικοί όπως οι Cauchy και Weierstrass παρείχαν πιο αυστηρούς ορισμούς και κριτήρια σύγκλισης για τα άπειρα γινόμενα.

(v) Ο 20ος αιώνας είδε περαιτέρω πρόοδο στην θεωρία των άπειρων γινομένων, ιδιαίτερα στην περιοχή της ανάλυσης μιγαδικών συναρτήσεων. Οι μαθηματικοί συνεχίζουν να μελετούν και να εφαρμόζουν την θεωρία των άπειρων γινομένων σε διάφορους τομείς των μαθηματικών και της φυσικής.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΕΙΡΕΣ

1.1 Σειρές

Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών και για κάθε n έστω:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} z_j$$

Το άθροισμα $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ καλείται άπειρη σειρά (ή απλά σειρά) και συμβολίζεται :

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j$$

Ο αριθμός S_n καλείται ν-οστό μερικό άθροισμα της σειράς και οι αριθμοί z_j ονομάζονται όροι της σειράς.

Η σειρά καλείται «πραγματική» αν οι όροι είναι πραγματικοί, και «μιγαδική» αν έχει μιγαδικούς όρους.

Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει όταν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{S_n\}$ συγκλίνει.

Αν το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ τότε λέμε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_j = S$$

και ονομάζουμε το S άθροισμα της σειράς. Βασικό ζήτημα στην θεωρία σειρών είναι αν έχουμε σύγκλιση ή όχι μιας σειράς.

Για μια δεδομένη σειρά όμως σπάνια είναι εύκολο να προσδιορίσουμε το S_n σε μορφή τέτοια που να μας διευκολύνει ώστε να βρούμε το όριο άμεσα.

Σημαντική εξαίρεση αποτελεί η γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j$$

για την οποία προκύπτει ότι:

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \text{για} z \neq 1$$

και:

$$S_n = n + 1 \qquad \text{για} z = 1$$

Έτσι ο ορισμός της σύγκλισης σειρών δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.1.1

Αν $\boldsymbol{z}$ είναι μιγαδικός αριθμός με $|\boldsymbol{z}| < \mathbf{1}$ τότε:

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1 - z}$$

Αν $|z| \geq 1$ τότε η σειρά αποκλίνει.

Ένα άλλο σημαντικό παράδειγμα είναι οι τηλεσκοπικές σειρές:

Θεώρημα 1.1.2

Η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty}(z_{j+1} - z_j)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $\{z_n\}$ συγκλίνει και τότε:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(z_{j+1} - z_j) = \lim_{n \to \infty} z_n - z_0$$

Θεώρημα 1.1.3

Αν η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ συγκλίνει τότε:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = 0$$

Απόδειξη: Έστω $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς η οποία με βάση την υπόθεση συγκλίνει. Παρατηρούμε λοιπόν ότι $z_n = S_n - S_{n-1}$. Οπότε:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = 0$$

□

Ιδιαίτερη προσοχή όμως καθώς το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή δεν είναι αληθές ότι αν το όριο της ακολουθίας που παράγει την σειρά είναι μηδέν, τότε και η σειρά συγκλίνει. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης είναι η αρμονική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

η οποία δεν συγκλίνει αν και παράγεται από την ακολουθία $\frac{1}{n}$ η οποία έχει όριο το 0. Αυτό συμβαίνει καθώς πρόκειται για p −σειρά, με $p = 1$. Οι p −σειρές με $p > 1$ συγκλίνουν, όπου p −σειρά:

$$J(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Πόρισμα 1.1.4 :

Αν $\lim_{n\to\infty} z_n$ δεν υπάρχει ή είναι μη πεπερασμένο τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ αποκλίνει.

Σημαντικό εύρημα που βοηθάει στην ανάλυση μιας μιγαδικής σειράς είναι το γεγονός ότι στο ερώτημα αν μια τέτοια σειρά συγκλίνει ή όχι μπορεί να μετατραπεί σε ερώτημα για πραγματικές σειρές.

Θεώρημα 1.1.5 :

Η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} Re(z_j)$ και η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} Im(z_j)$ συγκλίνουν και οι δύο.

Στην πράξη βέβαια το εν λόγω αποτέλεσμα δεν είναι πάντα χρήσιμο καθώς συχνά η αποσύνθεση των όρων σε πραγματικό και φανταστικό μέρος είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

1.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Θα δούμε τώρα κάποια κριτήρια σύγκλισης για τις πραγματικές σειρές με μη αρνητικούς όρους. Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση ή μη της σειράς δεν επηρεάζεται από πεπερασμένο αριθμό όρων. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν για παράδειγμα ένα κριτήριο απαιτεί οι όροι α_j να είναι θετικοί, πρέπει μόνο να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε $\alpha_j > 0$ για κάθε

$j > N$ και αγνοούμε τους πρώτους $N+1$ όρους. Αν η σειρά συγκλίνει τότε οι όροι αυτοί επηρεάζουν απλά την τιμή του αθροίσματος.

Θεώρημα 1.2.1 (Κριτήριο Σύγκρισης)

Θεωρούμε δύο σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ για τις οποίες ισχύει ότι $0 \leq \alpha_n \leq M\, \beta_n (n \in \mathbb{N})$ όπου M θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε:

- **i.** Αν η σειρά των «μεγαλύτερων» όρων $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και αυτή των «μικρότερων» όρων $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.
- **ii.** Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$.

Απόδειξη:

i. Αν υποθέσουμε ότι $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $(n \in \mathbb{N})$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ και $\tilde{S}_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$, $(n \in \mathbb{N})$ αυτή για την $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$|S_n - S_m| = \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \cdots + \alpha_n \leq M\beta_{m+1} + M\beta_{m+2} + \cdots + M\beta_n = M\left(\tilde{S}_n - \tilde{S}_m\right)$$

για κάθε $n \geq m$. Συνεπώς αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ συγκλίνει, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(\tilde{S}_n)$ θα είναι Cauchy ως συγκλίνουσα: $\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{S}_n - \tilde{S}_m\right) = 0$. Συνεπώς:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |S_n - S_m| \leq M \lim_{n\to\infty}\left(\tilde{S}_n - \tilde{S}_m\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} |S_n - S_m| = 0$$

Δηλαδή και η (S_n) είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών άρα και συγκλίνουσα. Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

ii. Θεωρούμε πάλι τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $(n \in \mathbb{N})$της $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ και $\tilde{S}_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n$, $(n \in \mathbb{N})$ της $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$. Έχουμε εξ' υποθέσεως ότι $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε :

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > \varepsilon \qquad \text{για } n \geq n_o$$

Άρα

$$M\,\tilde{S}_n = M\beta_1 + M\beta_2 + \cdots + M\beta \;\; \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > \varepsilon \qquad \text{για } n \geq n_o$$

Επομένως $\lim_{n\to\infty}\left(M\tilde{S}_n\right) = +\infty$ και αφού από υπόθεση M θετικό τότε $\lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty$

Θεώρημα 1.2.2 (Γενικευμένο Κριτήριο Σύγκρισης Σειρών)

Θεωρούμε δύο σειρές πραγματικών αριθμών $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ (ιδιαίτερα για την δεύτερη υποθέτουμε $\beta_1 > 0$) για τις οποίες ισχύει:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = c > 0$, c$\in \mathbb{R}$

τότε οι δύο σειρές έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση. Δηλαδή είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Απόδειξη: Από την υπόθεση :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = c > 0$$

και βάσει του ορισμού της σύγκλισης ακολουθιών επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ θα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - c\right| < \varepsilon = \frac{c}{2} \Rightarrow -\frac{c}{2} < \frac{\alpha_n}{\beta_n} - c < \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} < \frac{\alpha_n}{\beta_n} < \frac{3c}{2} \Rightarrow \begin{cases} \beta_n < \dfrac{2}{c}\alpha_n (I) \\ \\ \alpha_n < \dfrac{3c}{2}\beta_n (II) \end{cases}$$

Έτσι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει η σχέση (I) σε συνδυασμό με το Απλό Κριτήριο Σύγκρισης οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και η $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ θα συγκλίνει. Από την άλλη η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ σε συνδυασμό με την σχέση (II) οδηγεί στο συμπέρασμα της σύγκλισης και της $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

Θεώρημα 1.2.3 (Κριτήριο Ρίζας Cauchy)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ σειρά θετικών πραγματικών αριθμών. Τότε:

- **i.** Αν $\sqrt[n]{\alpha_n} \leq r < 1 \quad \forall n > n_o \ (n, n_o \in \mathbb{N})$, (ή ειδικότερα αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} < 1$) τότε η σειρά συγκλίνει.
- **ii.** Αν $\sqrt[n]{\alpha_n} \geq 1$ για άπειρο πλήθος θετικών n, (ή ειδικότερα για $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} > 1$) τότε η σειρά συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.
- **iii.** Αν $\sqrt[n]{\alpha_n} = 1$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε σχετικά με την σύγκλιση της σειράς με βάση το εν λόγω κριτήριο.

Απόδειξη:

i.Ισχύει από υπόθεση $\sqrt[n]{\alpha_n} \leq r \Longrightarrow \alpha_n \leq r^n, \forall\, n > n_o$. Όμως γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ως γεωμετρική με λόγο $r < 1$. Βάσει του απλού κριτηρίου σύγκρισης το ίδιο θα ισχύει και για την $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$. Επιπλέον η σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ οπότε απεδείχθη το ζητούμενο

ii. Ισχύει $\sqrt[n]{\alpha_n} \geq 1 \;\Longrightarrow \alpha_n \geq 1$ για άπειρο πλήθος δεικτών το οποίο μας εξασφαλίζει την ύπαρξη υπακολουθίας (α_{k_n}) με όλους τους όρους > 1 $(\alpha_{k_n} > 1)$. Συνεπώς η υπακολουθία αυτή και η ακολουθία (α_n) δεν είναι δυνατόν να συγκλίνουν στο μηδέν, όπως θα έπρεπε σε περίπτωση σύγκλισης της αρχικής σειράς. Επομένως απεδείχθη το ζητούμενο.

iii. Παίρνουμε τα κάτωθι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (αρμονική σειρά) : } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \text{ (αποκλίνει)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad : \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1 \text{ (συγκλίνει)}$$

Συνεπώς βρήκαμε δύο σειρές που ικανοποιούν την υπόθεση $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$=1 αλλά έχουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς την σύγκλιση.

Θεώρημα 1.2.4 (Το Κριτήριο Λόγου D' Alembert)

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ σειρά θετικών πραγματικών αριθμών με $\alpha_n \neq 0$ για κάθε $n \geq p$,όπου p σταθερός φυσικός αριθμός (δηλαδή υποθέτουμε ότι το 0 δεν περιέχεται στους όρους της ακολουθίας από κάποιον δείκτη και μετά). Τότε:

i. Αν $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq r < 1 \;\; \forall\, n \geq n_o \; (n_o \geq \; p)$, τότε η σειρά συγκλίνει.
ii. Αν $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > 1 \;\; \forall\, n \geq n_o \; (n_o \geq \; p)$, τότε η σειρά δεν συγκλίνει.
iii. Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1$, δεν προκύπτει συμπέρασμα

Απόδειξη:

i. Ισχύει εξ' υποθέσεως $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq r \Longrightarrow \alpha_{n+1} \leq r\alpha_n$ για $n_o \geq \; p$. Οπότε:

$$\alpha_n \leq r\alpha_{n-1} \leq r^2\alpha_{n-2} \leq \cdots \leq r^{n-n_o}\alpha_{n-n_o} \Longrightarrow \frac{r^{n_o}}{\alpha_{n-n_o}}\alpha_n \leq r^n \text{ για } n \geq n_o$$

Βάσει του κριτηρίου ρίζας προκύπτει το συμπέρασμα ότι η σειρά :

$$\sum_{n=n_o}^{\infty} \frac{r^{n_o}}{\alpha_{n-n_o}} \alpha_n = \frac{r^{n_o}}{\alpha_{n-n_o}} \sum_{n=n_o}^{\infty} \alpha_n$$

συγκλίνει. Όμως εφόσον ο συντελεστής $\frac{r^{n_o}}{\alpha_{n-n_o}}$ είναι σταθερός πραγματικός τότε η σειρά $\sum_{n=n_o}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, άρα συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

ii. Αναλόγως έχουμε $\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \alpha_{n-2} \geq \ldots \geq \alpha_{n-n_o}$, $n \geq n_o$. Συνεπώς η ακολουθία (α_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν αφού ο όρος α_{n-n_o} εξ' υποθέσεως δεν είναι μηδενικός, οπότε η απόδειξη του ζητούμενου ολοκληρώθηκε.

iii. Δουλεύοντας αναλόγως με το κριτήριο ρίζας του Cauchy προκύπτει ότι η υπόθεση ικανοποιείται τόσο από την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (αποκλίνουσα), όσο και από την $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (συγκλίνουσα).

Θεώρημα 1.2.5 (Κριτήριο του ολοκληρώματος)

Έστω $\{\alpha_n\}$ ακολουθία θετικών όρων. Έστω $\alpha_n = f(n)$, όπου f συνεχής, θετική, φθίνουσα συνάρτηση του x για κάθε $x \geq N$ (N θετικός ακέραιος). Στην περίπτωση αυτή η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n$ και το ολοκλήρωμα $\int_N^{\infty} f(x)dx$ θα συγκλίνουν ή θα αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Θεώρημα 1.2.6 (Κριτήριο Kummer-Jensen)

Έστω $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ σειρά θετικών όρων και $\{b_n\}$ ακολουθία θετικών όρων. Έστω:

$$c_n = b_n - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} b_{n+1} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

i. Αν $\lim_{n\to\infty} c_n > 0$, τότε η $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει.

ii. Αν η $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b_j}$ αποκλίνει και υπάρχει N τέτοιο ώστε $c_n \leq 0$ για κάθε $n \geq N$, τότε η $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ αποκλίνει

Θεώρημα 1.2.7 (Κριτήριο του Raabe)

Έστω $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ σειρά θετικών όρων και έστω ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right) = L$$

τότε η σειρά συγκλίνει αν $L > 1$ και αποκλίνει αν $L < 1$

Θεώρημα 1.2.8 (Κριτήριο Gauss)

Έστω $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ σειρά θετικών όρων. Έστω ότι υπάρχει φραγμένη ακολουθία $\{S_n\}$ και σταθερά c τέτοια ώστε:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 1 - \frac{c}{n} + \frac{S_n}{n^2} \text{ για κάθε } n > 0$$

Τότε η σειρά συγκλίνει αν $c > 1$ και αποκλίνει αν $c \leq 1$

1.3 Σειρές με πραγματικούς ή και μιγαδικούς όρους

Τα κριτήρια σύγκλισης που είδαμε ως τώρα απαιτούν οι όροι της σειράς να είναι πραγματικοί και μη αρνητικοί. Σε πρώτη ανάγνωση αυτός είναι ένας σοβαρός περιορισμός. Σαφώς όμως αν υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος αρνητικών όρων ή όλα τα α_n είναι αρνητικά, τότε τα κριτήρια που έχουμε δει μπορούν να εφαρμοστούν. Θα εξετάσουμε λοιπόν τώρα σειρές με όρους πραγματικούς που αλλάζουν πρόσημο άπειρες φορές ή και σειρές με μιγαδικούς όρους.

Θεώρημα 1.3.1

Αν $\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$

Θεώρημα 1.3.2 Γενικευμένο Κριτήριο Λόγου

Αν

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = L$$

τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει απολύτως αν $L < 1$ αλλά αποκλίνει αν $L > 1$ (δεν προκύπτει συμπέρασμα αν $L = 1$).

Θεώρημα 1.3.3 (Γενικευμένο Κριτήριο Ρίζας)

Έστω $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n|^{1/n} = L$ τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει απολύτως αν $L < 1$ αλλά αποκλίνει αν $L > 1$ (δεν προκύπτει συμπέρασμα αν $L = 1$).

Θεώρημα 1.3.4 (Riemann)

Για κάθε υπό συνθήκη συγκλίνουσα πραγματική σειρά και δεδομένο αριθμό S, οι όροι της σειράς μπορούν να αναδιαταχθούν ώστε να προκύψει σειρά που να συγκλίνει στο S. Υπάρχει επιπλέον αναδιάταξη των όρων ώστε η προκύπτουσα σειρά να αποκλίνει.

Θεώρημα 1.3.5 (Dirichlet)

Όλες οι αναδιατάξεις μιας απολύτως συγκλίνουσας σειράς είναι απολύτως συγκλίνουσες και μάλιστα συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό.

Θεώρημα 1.3.6 (Κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς του Leibniz)

Μια σειρά της οποίας οι όροι είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί καλείται εναλλασσόμενη σειρά. Η σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \alpha_n = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \cdots$$

συγκλίνει αν πληρούνται ταυτόχρονα οι εξής προϋποθέσεις:

- **i.** τα α_n είναι όλα θετικά.
- **ii.** $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}\ \forall\, n \geq N$ (για κάποιον N)
- **iii.** $\alpha_n \to 0$

Θεώρημα 1.3.7

Έστω $\{\alpha_n\}$ και $\{b_n\}$ ακολουθίες μιγαδικών αριθμών και έστω ότι ισχύει:

- **i.** $\sum_{j=0}^{\infty}\left|b_{j+1} - b_j\right|$.συγκλίνει.
- **ii.** $\{b_n\}$ συγκλίνει στο 0.
- **iii.** υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $\left|\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\right| \leq C$ για κάθε $n \geq 0$

Τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j b_j$ συγκλίνει.

Θεώρημα 1.3.8 (Κριτήριο Dirichlet)

Έστω $\{\alpha_n\}$ μιγαδική ακολουθία και $\{b_n\}$ πραγματική ακολουθία. Αν ισχύουν τα κάτωθι:

- **i.** $\{b_n\}$ μονότονη και συγκλίνουσα στο 0 και

ii. υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε $\left|\sum_{j=0}^{n} \alpha_j\right| \le C$ για κάθε $n \ge 0$

Τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j b_j$ είναι συγκλίνουσα.

1.4 Ομοιόμορφη Σύγκλιση Ακολουθιών και Σειρών Συναρτήσεων

Η έννοια της σύγκλισης για ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων είναι μια επέκταση των όσων είδαμε ως προς την σύγκλιση ακολουθιών και σειρών σταθερών.
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ ορισμένη σε κάποιο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Για κάθε $z \in \Omega$ έχουμε τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε μια ακολουθία σταθερών $\{f_n(z)\}$ και ας υποθέσουμε ότι $\{f_n(z)\}$ συγκλίνει για όλα τα $z \in \Omega$. Τότε η $\{f_n\}$ ορίζει μια συνάρτηση f στο Ω.
Ένα πρωταρχικό ερώτημα είναι αν η συνάρτηση f κληρονομεί ιδιότητες της $\{f_n\}$ όπως π.χ. η συνέχεια. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι είχαμε την πραγματική ακολουθία:

$$f_n = \frac{1}{1+n\,x} \quad \text{για } 0 \le x \le 1$$

Είναι προφανές πως η f_n είναι συνεχής στο συγκεκριμένο διάστημα. Είναι τώρα για κάθε $0 \le x \le 1$ $f_n(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$, αλλά $f_n(0) = 1$. Συνεπώς η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο 0. Επομένως θέλει ιδιαίτερη προσοχή για την «μεταβίβαση» ιδιοτήτων προς την συνάρτηση f

Ορισμός 1.4.1 Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Η ακολουθία λέμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση f στο Ω αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε $|f_n(z) - f(z)|$<ε για κάθε $n > N$ και για κάθε $z \in \Omega$. Αν $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στην f στο Ω τότε $|f_n(z) - f(z)|$ έχει υποχρεωτικά ελάχιστο άνω φράγμα. Ορίζουμε λοιπόν $M_n = \sup\limits_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)|$ για όλα τα n.

Θεώρημα 1.4.2

Η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο Ω αν και μόνο αν η ακολουθία $\{M_n\}$ συγκλίνει στο 0.

Θεώρημα 1.4.3 (Αρχή του Cauchy)

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο Ω. Η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε για όλα τα $z \in \Omega$ να ισχύει $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$, για κάθε $m > N$ και $n > N$.

Απόδειξη:

Έστω $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ ομοιόμορφα και $\varepsilon > 0$ τότε $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}, \quad \forall\ n,m \in \mathbb{N},\ n,m > n_o$

$$|f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}, |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow\ |f_m - f_n| < \varepsilon$$

αφού από την τριγωνική ανισότητα της απόλυτης τιμής και τον ορισμό του ελαχίστου άνω φράγματος:

$$\forall\ z \in \Omega :\ |f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_m(z) - f(z)| \leq |f_n - f| + |f_m - f|$$
$$\Longrightarrow\ |f_m - f| \leq |f_n - f| + |f_m - f|$$

Αντίστροφα: Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία Cauchy και $z \in \Omega$ τότε $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N}, \quad \forall\ n,m \in \mathbb{N},\ n,m > n_o$:

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m - f_n| < \varepsilon$$

δηλαδή $\big(f_n(z)\big) \subset \mathbb{C}$ είναι ακολουθία Cauchy και αφού $\mathbb{C}$ πλήρες υπάρχει για κάθε $z \in \Omega$ όριο της $\big(f_n(z)\big)$ στο $\mathbb{C}$, το οποίο είναι και μοναδικό. Έτσι ορίζεται: $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(z)$ στην οποία η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Αφού (f_n) ακολουθία Cauchy ισχύει ότι

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_o \in \mathbb{N}, \quad \forall\ n,m \in \mathbb{N},\ n,m > n_o$$

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

και συνεπώς για $m \longrightarrow +\infty$, λόγω συνέχειας της απόλυτης τιμής:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_o \in \mathbb{N}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_o, |f_n - f| \leq \varepsilon$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Ορισμός 1.4.4 Μια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Ω αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ για κάθε $z_1, z_2 \in \Omega$ και$|z_1 - z_2| < \delta$.

Θεώρημα 1.4.5

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα τότε συγκλίνει και κατά σημείο, δηλαδή για κάθε $z \in \Omega :\ f_n(z) \longrightarrow f(z)$.

Απόδειξη:

Για κάθε $z \in \Omega$: $|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n - f| \longrightarrow 0$

Θεώρημα 1.4.6 (Κριτήριο Weierstrass)

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων ορισμένη στο σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Έστω ότι υπάρχει ακολουθία $\{M_n\}$ σταθερών τέτοια ώστε:

$|f_n(z)| \leq M_n$ για όλα τα $z \in \Omega$ και για όλα τα n. Αν $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω σε μια φραγμένη συνάρτηση.

Απόδειξη:

Αφού η ακολουθία $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ συγκλίνει, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι ακολουθία Cauchy και αφού $\forall\, n, l \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} |f_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} M_k \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+l} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+l} M_k$$

και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ είναι ακολουθία Cauchy άρα συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θεώρημα 1.4.7

Αν οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα τότε η $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής.

Πρόταση 1.4.8

Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ και $\alpha \in \mathbb{C}$ σημείο συσσώρευσης του Ω και έστω $f_n, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, με f_n να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \lim_{z \longrightarrow \alpha} f_n(z) = A_n \in \mathbb{C} \tag{1}$$

Τότε η $(A_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει και

$$\lim_{z \longrightarrow \alpha} f(z) = \lim_{n \longrightarrow \infty} A_n$$

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε αφού $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m > n_o$:$z \in \Omega$: $|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$

και άρα από τη σχέση (1) της πρότασης και την συνέχεια της απόλυτης τιμής προκύπτει $|A_m - A_n| \leq \varepsilon$. Συνεπώς η $(A_n) \subset \mathbb{C}$ είναι ακολουθία Cauchy και λόγω της πληρότητας του $\mathbb{C}$ συγκλίνει σε ένα μοναδικό $A \subset \mathbb{C}$. Αφού $A_n \longrightarrow A$ και $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο Ω, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$|A_n - A| < \varepsilon/3 \text{ και } \forall\, z \in \Omega : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3 \tag{2}$$

και για αυτό το $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σύμφωνα με την (1), $\delta > 0$ έτσι ώστε $\forall\, z \in \Omega,$

$$0 < |z - \alpha| < \delta : \ |f_n(z) - A_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

το οποίο μαζί με τις σχέσεις (2) μας δίνει:

$$\forall\, z \in \Omega, \qquad 0 < |z - \alpha| < \delta :$$
$$|f(z) - A| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_n(z) - A_n| + |A_n - A| < \varepsilon$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 1.4.9 (Ολοκλήρωση κατά όρους)

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $I = [a, b]$. Έστω επίσης $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο I. Τότε

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{b} f_j(z)dx = \int_{\alpha}^{b} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)dx$$

Θεώρημα 1.4.10 (Παραγώγιση κατά όρους)

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων που είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα I. Έστω επίσης $\sum_{j=0}^{\infty} f_j{}'(z)$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο I και ότι υπάρχει $c \in I$ τέτοιο ώστε $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(c)$ συγκλίνει. Τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ είναι απολύτως συγκλίνουσα στο I σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)\right)' = \sum_{j=0}^{\infty} f_j'(x)$$

για όλα τα $x \in I$.

Θεώρημα 1.4.11 (Τροποποιημένο κριτήριο Dirichlet)

Έστω $\{\alpha_n\}$ και $\{\beta_n\}$ ακολουθίες συναρτήσεων ορισμένες στο Ω. Έστω ότι $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(z)$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο Ω και ότι υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε για όλα τα $z \in \Omega$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left|b_{j+1}(z) - b_j(z)\right| \leq C$$

$$\text{και} \quad |\beta_o(z)| \leq C$$

τότε η σειρά $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(z)\beta_j(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω.

1.5 Αναλυτικές Συναρτήσεις και Δυναμοσειρές

Ορισμός 1.5.1

Έστω $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ και z_o εσωτερικό σημείο του A. Η f χαρακτηρίζεται αναλυτική στο z_o αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_o; r)$ όπου:

$$D(z_o; r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_o| < r\}$$

Ορισμός 1.5.2

Έστω $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ και z_o εσωτερικό σημείο του A. Η f χαρακτηρίζεται παραγωγίσιμη στο z_o αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

και είναι μιγαδικός αριθμός.

Παρατήρηση: η έννοια της αναλυτικότητας είναι ισχυρότερη από την έννοια της παραγωγισιμότητας καθώς για να είναι μια συνάρτηση αναλυτική σε ένα σημείο πρέπει να είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό αλλά και σε όλα τα γειτονικά σημεία.

Ορισμός 1.5.3

Το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι αναλυτική ονομάζεται σύνολο αναλυτικότητας.

Πρόταση 1.5.4

Έστω $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ και έστω $B \subseteq A$ το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι το εσωτερικό του B. Ειδικότερα το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη:

Έστω U το σύνολο αναλυτικότητας της f. Αν $z \in U$ τότε $\exists\, r > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$ ώστε $D(z; r) \subseteq B$. Άρα το z είναι εσωτερικό σημείου του B, δηλαδή $z \in intB$. Αντιστρόφως αν $z \in intB$, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq B$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$. Άρα η f είναι αναλυτική στο z, δηλαδή $z \in U$. Συνεπώς $U = intB$.

Ορισμός 1.5.5

Έστω $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ και έστω $\Omega \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται αναλυτική στο Ω αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω ή ισοδύναμα αν το Ω περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της U της f.

Θεώρημα 1.5.6

Έστω ανοιχτό σύνολο Ω και έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η f είναι αναλυτική στο Ω. Επιπλέον η (f'_n) συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Θεώρημα 1.5.7

Έστω ανοιχτό σύνολο Ω και έστω ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η s είναι αναλυτική στο Ω και επιπλέον η $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s' σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Απόδειξη:

Πρόκειται για εφαρμογή του θεωρήματος Θεώρημα **1.5.6** στα μερικά αθροίσματα $S_n = f_1 + f_1 + \cdots + f_n$, τα οποία είναι προφανώς αναλυτικές συναρτήσεις στο Ω με $S'_n = f'_1 + f'_1 + \cdots + f'_n$.

Επαγωγικό Συμπέρασμα από το Θεώρημα 1.5.6

Αν η ακολουθία αναλυτικών στο ανοιχτό Ω συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε k, n $(f_n^{(k)})$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Επαγωγικό Συμπέρασμα από το Θεώρημα 1.5.7

Αν η ακολουθία αναλυτικών στο ανοιχτό Ω συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω τότε η s είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε k ,$η$ $σειρά$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ συγκλίνει στην $s^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Ορισμός 1.5.8

Δυναμοσειρά μιας μεταβλητής z ορίζεται κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_o)^n$, όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ σταθερές. Το z_o καλείται κέντρο της δυναμοσειράς. Κύκλος σύγκλισης ή διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία σύγκλισης της δυναμοσειράς. Τέλος ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς καλείται η ακτίνα του παραπάνω κύκλου σύγκλισης.

Πρόταση 1.5.9

Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_o)^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Τότε:

i. Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_o; R)$
ii. Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_o; R, +\infty)$
iii. Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε $\overline{D}(z_o; r)$ με 0<r<R και άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_o; R)$

Απόδειξη:

i. Έστω $z \in D(z_o; R)$ δηλαδή $|z - z_o| < R \leq +\infty$. Αυτομάτως είναι $R > 0$. Θεωρούμε τυχαίο R' τέτοιο ώστε $|z - z_o| < R' < R$.

   Έπεται $\overline{lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} < 1/R'$ για κάθε $n \geq n_o$. Άρα ισχύει

$$|\alpha_n (z - z_o)^n| = |\alpha_n||z - z_o|^n \leq \left(\frac{z - z_o}{R'}\right)^n$$

   για κάθε $n \geq n_o$. Επειδή $\frac{|z-z_o|}{R'} < 1$ έπεται

$$\sum_{n=n_o}^{\infty} |\alpha_n (z - z_o)^n| \leq \sum_{n=n_o}^{\infty} \left(\frac{z - z_o}{R'}\right)^n < +\infty$$

   Άρα η $\sum_{n=n_o}^{\infty} \alpha_n (z-z_o)^n$ συγκλίνει απολύτως οπότε και η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_o)^n$ συγκλίνει απολύτως.

ii. Έστω $z \in D(z_o; R)$ δηλαδή $0 \leq R < |z - z_o|$. Αυτομάτως είναι $R < +\infty$.

   Έπεται $\overline{lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} > 1/|z - z_o|$, οπότε ισχύει $\sqrt[n]{|\alpha_n|} \geq \frac{1}{|z-z_o|}$ για άπειρους n.

   Άρα είναι $|\alpha_n (z - z_o)^n| = |\alpha_n||z - z_o|^n > 1$ για άπειρους n οπότε δεν ισχύει $\alpha_n (z - z_o)^n \longrightarrow 0$ και συνεπώς προκύπτει ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-z_o)^n$ αποκλίνει.

iii. Έστω τυχόν rμε $0 < r < R' < R$

   Έπεται $\overline{lim} \sqrt[n]{|\alpha_n|} > 1/R'$ για κάθε $n \geq n_o$.

   Τότε για κάθε $z \in \overline{D}(z_o; R)$ ισχύει :

$$|\alpha_n(z-z_o)^n| = |\alpha_n||z-z_o|^n \leq \left(\frac{r}{R'}\right)^n$$

για κάθε $n \geq n_o$. Επειδή $\frac{r}{R'} < 1$ προκύπτει

$$\sum_{n=n_o}^{\infty} \left(\frac{r}{R'}\right)^n < +\infty$$

Από το κριτήριο Weierstrass προκύπτει ότι $\sum_{n=n_o}^{\infty} \alpha_n(z-z_o)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_o;R)$ οπότε και η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z-z_o)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_o;R)$.

Τέλος έστω K συμπαγές. $K \subseteq D(z_o;R)$.

Το $D(z_o;R)^C = \overline{D}(z_o;R,+\infty)$ είναι κλειστό και είναι ξένο ως προς το K. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|z-w| \geq \delta$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $w \in D(z_o;R)^C$.

Παίρνουμε $r = R - \delta < R$ και τότε είναι $K \subseteq \overline{D}(z_o;r)$. Αφού η $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z-z_o)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(z_o;r)$ έπεται ότι συγκλίνει ομοιόμορφα και στο K.

2 ΑΠΕΙΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

2.1 Εισαγωγή

Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και έστω το γινόμενο

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = z_1 z_2 \dots z_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία των μερικών γινομένων $\{P_n\}$ ορίζεται ως

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} z_j = z_1 z_2 \dots z_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην περίπτωση που το $n \longrightarrow \infty$ έχουμε το λεγόμενο άπειρο γινόμενο που συμβολίζεται ως $\prod_{j=1}^{\infty} z_j$.

Οι αριθμοί $z_1, z_2, \dots$ ονομάζονται παράγοντες του γινομένου.

Οι ορισμοί για την σύγκλιση και την απόκλιση των απείρων γινομένων είναι ανάλογοι με αυτούς που έχουμε δώσει στην περίπτωση των απείρων αθροισμάτων. Η ακολουθία των μερικών γινομένων αντικαθιστά την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων στους ορισμούς:

- αν η ακολουθία $\{P_n\}$ αποκλίνει τότε λέμε ότι το άπειρο γινόμενο αποκλίνει, ενώ
- αν η ακολουθία $\{P_n\}$ συγκλίνει σε μη μηδενικό αριθμό τότε το άπειρο γινόμενο λέμε ότι συγκλίνει.

Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στην περίπτωση που η ακολουθία $\{P_n\}$ συγκλίνει στο μηδέν (περίπτωση που έχει αποκλειστεί από τους παραπάνω ορισμούς).

Αν έχουμε πεπερασμένο πλήθος μηδενικών παραγόντων τότε αυτοί οι παράγοντες μπορούν να αφαιρεθούν και να μελετήσουμε το εναπομείναν γινόμενο. Αν το «νέο» γινόμενο συγκλίνει με βάση τον προηγούμενο ορισμό τότε το αρχικό γινόμενο (αυτό με τα μηδενικά) λέμε ότι συγκλίνει στο $\emptyset$. Διαφορετικά λέμε ότι αποκλίνει στο $\emptyset$.

Ας δούμε για παράδειγμα το άπειρο γινόμενο:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{1/2^j}}$$

Τα μερικά γινόμενα δίνονται ως:

$$P_n = \frac{1}{2^{1/2}} \cdot \frac{1}{2^{1/4}} \cdots \frac{1}{2^{1/2^n}} = 2^{-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^j} = 2^{-1+\frac{1}{2^n}}$$

όπου προφανώς $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$ και συνεπώς το γινόμενο συγκλίνει.

Ας δούμε τώρα την περίπτωση του γινόμενου $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$:

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdots \frac{1}{2^n} = 2^{-(1+2+\cdots+n)} = 2^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

όπου $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ και συνεπώς το γινόμενο αποκλίνει στο 0.

Έστω τώρα $\{z_n\}$ και $\{w_n\}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε $\prod_{j=1}^{\infty} z_j$ να συγκλίνει στο $A \neq 0$ και $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ να συγκλίνει στο $B \neq 0$. Τότε $\prod_{j=1}^{\infty} z_j \cdot w_j$ συγκλίνει στο $A \cdot B \neq 0$. Ομοίως και με την προϋπόθεση ότι $w_j \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $\prod_{j=1}^{\infty} z_j / w_j$ συγκλίνει στο $A/B \neq 0$.

Σημειώνουμε εδώ ότι ένα γινόμενο που συγκλίνει μπορεί να περιέχει πεπερασμένο αριθμό αρνητικών παραγόντων, όχι όμως άπειρο πλήθος.

Πράγματι, αν $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ συγκλίνει αυτό προφανώς σημαίνει ότι $w_n \longrightarrow 1$ όταν το $n \longrightarrow +\infty$.

Πιο αναλυτικά:

Έστω ότι $\prod_{j=1}^{\infty} w_j$ συγκλίνει σε μη μηδενικό αριθμό. $P_n = w_n P_{n-1}$ για όλα τα $n > 1$ και αφού $P_n \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{P_n}{P_n - 1}$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_n - 1} = \mathbf{1}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας οδηγεί στον τυπικό συμβολισμό για τα άπειρα γινόμενα:

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1 + z_j)$$

Θεώρημα 2.1.1

Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αν το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + z_j)$ συγκλίνει τότε $z_n \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow +\infty$.

Απόδειξη

Έστω $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + z_j)$ συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι $p_n = \prod_{j=1}^{n}(1 + z_j) \to p \neq 0$. Τότε

$$z_n \neq 1 = \frac{p_n}{p_{n-1}} \to \frac{p}{p} = 1$$

Έπεται προφανώς ότι $z_n \to 0$.

2.2 Σύγκλιση Γινομένων και Σειρών

Η σύγκλιση ενός πραγματικού γινομένου $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j)$ είναι συνδεδεμένη με την σύγκλιση της σειράς $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$.

Θεώρημα 2.2.1

Έστω $\{\alpha_n\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών όρων. Τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j$ και το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j)$ είτε συγκλίνουν και τα δύο είτε αποκλίνουν και τα δύο.

Απόδειξη:
Αν $x \geq 0$ τότε $1+x \leq e^x$. Έτσι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n < (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n) \leq e^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

έτσι ώστε $S_n < P_n < e^{S_n}$ όπου S_n και P_n μερικό άθροισμα και μερικό γινόμενο αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι $\{S_n\}$ και $\{P_n\}$ είναι μη φθίνουσες ακολουθίες. Ας υποθέσουμε ότι η σειρά συγκλίνει στο S. Τότε $S_n \longrightarrow S$ καθώς $n \longrightarrow +\infty$ και $S_n \leq S$ για όλα τα n. Συνεπώς $S_n < P_n \leq e^{S_n} \leq e^S$ που σημαίνει ότι $\{P_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Άρα $\{P_n\}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο P. Αφού $0 < P_1 \leq P_n \leq P$ προκύπτει ότι $P \neq 0$ και άρα το γινόμενο συγκλίνει. Αντίστροφα τώρα, ας υποθέσουμε ότι $\{P_n\}$ συγκλίνει σε όριο P. Τότε $P_n \leq P$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία$\{S_n\}$ είναι μη φθίνουσα και άνω φραγμένη από το P. Συνεπώς $\{S_n\}$ συγκλίνει και άρα συγκλίνει και η σειρά.

Παράδειγμα:
Να δειχθεί ότι η αρμονική σειρά είναι αποκλίνουσα.
Λύση: Παρατηρούμε ότι

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+1}{j}\right) = n+1$$

Αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{j}\right)$ αποκλίνει. Άρα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Θεώρημα **2.2.1** προκύπτει ότι η αρμονική σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$ είναι αποκλίνουσα.

Θεώρημα 2.2.2

Έστω $\{\alpha_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών όρων τέτοια ώστε $-1 < \alpha_n \leq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά

$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ και το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j)$ είτε συγκλίνουν ταυτόχρονα, είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε πως ισχύει η ανισότητα $1 - x \leq e^{-x}$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έστω $b_n = -\alpha_n$:

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

$$P_n = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + b_j)$$

Τότε: $0 < 1 - b_j \leq 1$ και συνεπώς $0 < P_n \leq e^{-S_n}$ (A1)

Η $\{P_n\}$ είναι μια μη αύξουσα ακολουθία κάτω φραγμένη από το μηδέν. Η ακολουθία συνεπώς συγκλίνει σε ένα μη αρνητικό όριο. Αν το γινόμενο αποκλίνει, αυτό γίνεται στο $\emptyset$. Ας δείξουμε πρώτα ότι αν η σειρά αποκλίνει, το ίδιο συμβαίνει και για το γινόμενο. Ας υποθέσουμε ότι η $\{S'_n\}$ αποκλίνει. Η ακολουθία είναι μη φθίνουσα και συνεπώς $S_n \longrightarrow \infty$ καθώς $n \longrightarrow \infty$. Άρα και με χρήση της (A1) προκύπτει $P_n \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow \infty$. Συνεπώς το γινόμενο αποκλίνει στο μηδέν αφού κανένας παράγοντάς του δεν είναι μηδέν.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει. Τότε $\{S_n\}$ συγκλίνει και συνεπώς υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε

$$\sum_{j=N+1}^{n} b'_j = S_n - S_N < \frac{1}{2} \qquad \text{(A2)}$$

για όλα τα $n > N$ (προκύπτει από την αρχή Cauchy).

Αφού $b_j < 1$ για όλα τα j, προφανώς $P_N \neq \emptyset$.

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{P_n}{P_N} \geq 1 - \sum_{j=N+1}^{n} b_j \qquad \text{(A3)}$$

για όλα τα $n > N$.

Αρχικά και τα δύο σκέλη είναι ίσα με $1 - b_{N+1}$ για $n = N + 1$. Ας υποθέσουμε ότι η (A3) ισχύει για $n = N + k$ τότε:

$$\frac{P_{N+k+1}}{P_N} = \frac{P_{N+k}}{P_N}(1 - b_{N+k+1}) \geq \left(1 - \sum_{j=N+1}^{N+k} b_j\right)(1 - b_{N+k+1}) =$$

$$1 - \sum_{j=N+1}^{N+k+1} b_j + b_{N+k+1} \sum_{j=N+1}^{N+k} b_j \geq 1 - \sum_{j=N+1}^{N+k+1} b_j$$

Συνεπώς η (Α3) ισχύει επαγωγικά.

Η ακολουθία $\left\{\frac{P_n}{P_N}\right\}$ είναι μη αύξουσα και με βάση τις (Α2) και (Α3) προκύπτει $\frac{P_n}{P_N} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Πόρισμα 2.2.3

Έστω $\{\alpha_n\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ και το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + \alpha_j)$ είτε συγκλίνουν ταυτόχρονα, είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Απόδειξη:

Αν $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ ή $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + \alpha_j)$ σύγκλιναν τότε $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Συνεπώς υπάρχει $N > 0$τέτοιο ώστε $\alpha_n < 1$ για όλα τα $n \geq N$. Άρα για αυτά τα n είναι $-1 < \alpha_n \leq 0$. Από το θεώρημα Θεώρημα **2.2.2** προκύπτει το ζητούμενο.

Ορισμός 2.2.4

Το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + z_j)$ συγκλίνει απολύτως αν το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + |z_j|)$ συγκλίνει. Αντίστοιχα το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + z_j)$ συγκλίνει υπό συνθήκη αν αυτό συγκλίνει αλλά το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1 + |z_j|)$ αποκλίνει.

Θεώρημα 2.2.5

Αν $z_j \neq 0$ για όλα τα j τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty} z_j$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{j=1}^{\infty} \log z_j$ συγκλίνει. Επιπλέον αν η σειρά συγκλίνει στο S τότε το γινόμενο συγκλίνει στο e^S.

Απόδειξη:

Για όλα τα n ας είναι $P_n = \prod_{j=1}^{n} z_j$ και $S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j = log\, P_n + 2\,\pi\, k_n i$, για κάποιον ακέραιο k_n. Τότε:

$$e^{S_n} = e^{log\, P_n} \cdot e^{2\,\pi\, K_n i} = P_n \cdot 1 = P_n$$

Προκύπτει ότι αν η σειρά συγκλίνει στο S τότε το γινόμενο συγκλίνει στο $e^S \neq 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το γινόμενο συγκλίνει στο $P \neq 0$. Για όλα τα $n > 1$ έχουμε

$$log\,\frac{P_n}{P_{n-1}} = log\, z_n = S_n - S_{n-1} = log\,\frac{P_n}{P_{n-1}} + 2\pi(\,k_n - \,k_{n-1})i$$

Συνεπώς $k_n = \,k_{n-1}$ και έτσι υπάρχει σταθερό k τέτοιο ώστε $S_n = log\,P_n + 2\pi k$. Αφού $P \neq 0$, η σειρά συγκλίνει σε $log\,P_n + 2\pi k$.

Θεώρημα 2.2.6

Έστω $z_j \neq -1$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{j=1}^{n} z_j$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\log\left(1+z_j\right)\right|$ συγκλίνει.

Απόδειξη:

Για $|z| < 1$ έχουμε

$$|log(1+z)| = \left|\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{z^{j+1}}{j+1}\right| \leq |z|\sum_{j=1}^{\infty}|z|^j = \frac{|z|}{1-|z|}$$

Η $\sum_{j=1}^{\infty}|z|^j$ συγκλίνει και άρα υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε $|z|^j < 1/2$ για όλα τα $j \geq \,N$. Για όλα αυτά τα j έχουμε

$$\left|log\left(1+z_j\right)\right| \leq \frac{|z_j|}{1-|z_j|} < |z_j|$$

και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.2.7

Έστω $z_j \neq -1$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$. Αν το γινόμενο $\prod_{j=1}^{n}\left(1+|z_j|\right)$ συγκλίνει, συγκλίνει και το $\prod_{j=1}^{n}\left(1+z_j\right)$

Απόδειξη:

Αφού $\prod_{j=1}^{n}\left(1+|z_j|\right)$ συγκλίνει, έχουμε από το θεώρημα Θεώρημα **2.2.1** ότι $\sum_{j=1}^{n}|z_j|$ συγκλίνει και από το θεώρημα 2.2.6 προκύπτει ότι $\sum_{j=1}^{n}\left|log\left(1+z_j\right)\right|$ συγκλίνει. Η σειρά

$\sum_{j=1}^{n} log(1+z_j)$ συνεπώς συγκλίνει και άρα συγκλίνει βάσει του θεωρήματος Θεώρημα **2.2.** και το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1+z_j)$.

Πόρισμα 2.2.8

Έστω $\{z_j\}$ ακολουθία πραγματικών όρων τέτοια ώστε $z_j \neq -1$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ συγκλίνει. Τότε συγκλίνει σε μη μηδενικό αριθμό το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1+z_j)$.

Απόδειξη:
Αφού $\sum_{j=1}^{n}|z_j|$ συγκλίνει, το γινόμενο συγκλίνει απολύτως (από το θεώρημα Θεώρημα **2.2.1**). Το αποτέλεσμα προκύπτει από το θεώρημα Θεώρημα **2.2.**.

Θεώρημα 2.2.9

Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν $\prod_{j=1}^{\infty}(1+z_j)$ συγκλίνει απόλυτα.

Απόδειξη:
Δείχνουμε ότι $\sum_{j=1}^{n}|z_j|$ και $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|z_j|)$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Αρκεί (από το θεώρημα Θεώρημα **2.2.**) να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{j=1}^{n}|z_j|$ και η σειρά $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|z_j|)$) συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Και οι δύο αποκλίνουν στην περίπτωση που $|z_j| \to 0$ καθώς $j \to \infty$. Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι $0 < |z_j| < 1$ για κάθε j. Η σειρά Maclaurin για $log(1+|z_j|)$ συνεπώς δείχνει ότι :

$$\frac{log(1+|z_j|)}{|z_j|} \to 1$$

καθώς $j \to \infty$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης ορίου.

2.3 Υπό Συνθήκη Συγκλίνοντα Γινόμενα

Το παρακάτω κριτήριο είναι πιθανώς το πιο ευρέως γνωστό για την σύγκλιση ενός γινομένου.

Θεώρημα 2.3.1 (Κριτήριο Cauchy)

Ας υποθέσουμε ότι $z_j \neq -1$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\left|z_j\right|^2$ συγκλίνει. Τότε $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ και $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+z_j\right)$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Απόδειξη:

Αφού $z_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $|z_n| \leq \frac{1}{2}$ για όλα τα $n \geq n_0$. Για κάθε n έχουμε

$$log(1+z_n) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \frac{z_n^j}{j} = z_n + \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{z_n^j}{j}$$

και έτσι:

$$|log(1+z_n) - z_n| = \left|\frac{z_n^2}{2}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{2\,z_n^{j-2}}{j}\right| \leq \frac{|z_n|^2}{2}\sum_{j=2}^{\infty}|z_n|^{j-2} = \frac{|z_n|^2}{2(1-|z_n|)} \leq |z_n|^2$$

Καθώς $\sum_{j=1}^{n}\left|z_j\right|^2$ συγκλίνει, το ίδιο ισχύει και για τη σειρά $\sum_{j=1}^{n}\left|log\left(1+z_j\right)-z_j\right|$ από το κριτήριο σύγκρισης. Συνεπώς $\sum_{j=1}^{n}\left(log\left(1+z_j\right)-z_j\right)$ συγκλίνει. Έπεται ότι $\sum_{j=1}^{n} z_j$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{j=1}^{n} log\left(1+z_j\right)$ συγκλίνει. Το ζητούμενο τώρα προκύπτει από το θεώρημα Θεώρημα **2.2.**

Πόρισμα 2.3.2

Αν $z_j \neq -1$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$ και οι σειρές $\sum_{j=1}^{\infty} z_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty}\left|z_j\right|^2$ συγκλίνουν, τότε το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+z_j\right)$.

Θεώρημα 2.3.3

Έστω $\{\alpha_j\}$ μια πραγματική ακολουθία τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ να συγκλίνει. Αν $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\alpha_j\right)$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$.

Απόδειξη:

Αφού $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει, προκύπτει $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = 0$. Έτσι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\alpha_j > -1$ για όλα τα $j \geq j_0$ ούτως ώστε $1+\alpha_j > 0$. Επιπλέον από τον κανόνα του l'Hopital έχουμε:

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\alpha_j - log\left(1+\alpha_j\right)}{{\alpha_j}^2} = \lim_{j\to\infty}\frac{1-\frac{1}{1+\alpha_j}}{2\alpha_j} = \lim_{j\to\infty}\frac{\alpha_j}{2\alpha_j+2{\alpha_j}^2} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2+2\alpha_j} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε N τέτοιο ώστε :

$$\alpha_j - log\left(1+\alpha_j\right) > \frac{{\alpha_j}^2}{4} \text{για όλα τα } j \geq N$$

οπότε για κάθε $n \geq N$ έχουμε:

$$\sum_{j=N}^{\infty} \alpha_j - \frac{1}{4}\sum_{j=N}^{\infty} \alpha_j^2 > \sum_{j=N}^{\infty} log\left(1+\alpha_j\right)$$

Αφού $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει, αν $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$ αποκλίνει τότε θα αποκλίνει και η $\sum_{j=1}^{\infty} log\left(1+\alpha_j\right)$. Τότε από γνωστό θεώρημα θα έπρεπε και $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\alpha_j\right)$ να αποκλίνει. Άρα $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$ συγκλίνει.

Θεώρημα 2.3.4

Έστω $\{\alpha_j\}$ μια πραγματική ακολουθία. Αν $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\alpha_j\right)$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$ συγκλίνουν τότε το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$.

Απόδειξη:

Αφού $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2$ συγκλίνει, προκύπτει $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j = 0$. Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\alpha_j \in (-1,1)$ για όλα τα $j \geq j_0$. Έτσι $1+\alpha_j > 0$ και συνεπώς από γνωστό θεώρημα προκύπτει $\sum_{j=N}^{\infty} log\left(1+\alpha_j\right)$ συγκλίνει. Έχουμε:

$$log\left(1+\alpha_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{{\alpha_j}^k}{k} = \alpha_j + {\alpha_j}^2 S_j$$

όπου

$$S_j = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{{\alpha_j}^{k-2}}{k} \text{για όλα τα } j$$

Συνεπώς.

$$\lim_{j\to\infty} S_j = \lim_{j\to\infty} \frac{\alpha_j + log\left(1+\alpha_j\right)}{{\alpha_j}^2} = \frac{1}{2}$$

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ και σύμφωνα με την αρχή του Cauchy επιλέγουμε N τέτοιο ώστε $0 < S_j < 1$.

$$\left|\sum_{j=m}^{n} log\left(1+\alpha_j\right)\right| < \varepsilon \quad \text{και} \quad \sum_{j=m}^{n} {\alpha_j}^2 < \varepsilon$$

όταν $j > N$ και $n \geq m \geq N$. Έπεται λοιπόν

$$\left|\sum_{j=m}^{n} \alpha_j\right| = \left|\sum_{j=m}^{n} \left(log\left(1+\alpha_j\right) + S_j {\alpha_j}^2\right)\right| \leq \left|\sum_{j=m}^{n} log\left(1+\alpha_j\right)\right| + \sum_{j=m}^{n} {\alpha_j}^2 < 2\varepsilon$$

οπότε προκύπτει από την αρχή του Cauchy ότι η $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ συγκλίνει.

2.4 Ομοιόμορφη σύγκλιση γινομένων συναρτήσεων

Θεώρημα 2.4.1

Έστω $\{f_n\}$ακολουθία συναρτήσεων αναλυτικών σε ένα πεδίο Ω. Έστω $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.

Απόδειξη

Έστω D συμπαγές υποσύνολο του Ω. $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο D. Κάθε όρος της ακολουθίας είναι ένα πεπερασμένο γινόμενο και ως εκ τούτου αναλυτικός. Συνεπώς f αναλυτική στο Ω.

Θεώρημα 2.4.2

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα πεδίο Ω. Έστω $f_n(z) \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και τα $z \in \Omega$. Αν $\sum_{j=1}^{\infty} log\, f_j(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω σε μια φραγμένη συνάρτηση, τότε το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$

Απόδειξη

Η εκθετική συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής σε οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Είναι επίσης $\prod_{j=1}^{n} f_j(z)$=$\prod_{j=1}^{n} e^{log\, f_j(z)} = e^{\sum_{j=1}^{n} log\, f_j(z)} \to e^{\sum_{j=1}^{\infty} log\, f_j(z)} \neq 0$ καθώς $n \to \infty$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και σε φραγμένη συνάρτηση.

Πόρισμα 2.4.3

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία φραγμένων και αναλυτικών συναρτήσεων στο πεδίο Ω. Έστω $f_n(z) \neq 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και τα $z \in \Omega$. Αν $\sum_{j=1}^{\infty} log\, f_j(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω σε μια φραγμένη συνάρτηση, τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο Ω.

Θεώρημα 2.4.4

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία ορισμένων και φραγμένων συναρτήσεων σε ένα σύνολο Ω. Έστω $\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j(z)\right|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω σε μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε το γινόμενο

$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(z)\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω σε μια φραγμένη συνάρτηση f. Επιπλέον $f(z)=0$ για κάποια $z \in \Omega$ αν και μόνο αν $1+f_n(z)=0$ για κάποια n.

Πόρισμα 2.4.5

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία φραγμένων αναλυτικών συναρτήσεων στο πεδίο Ω και ότι $\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j(z)\right|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω σε μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(z)\right)$ ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο Ω.

2.5 Άπειρα Γινόμενα Πραγματικών Συναρτήσεων

Θεώρημα 2.5.1

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα διάστημα I και έστω ότι $f_n(z) > -1$ για όλα τα $x \in I$ και $n \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\left|f_j(z)\right|$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα στο I σε μια φραγμένη συνάρτηση τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(x)\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I σε μια φραγμένη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$.

Θεώρημα 2.5.2

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα διάστημα I και έστω ότι $f_n(z) \neq -1$ για όλα τα $x \in I$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(x)\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο P στο διάστημα I, τότε

1. Αν f_n συνεχής στο I για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε P συνεχής στο I.
2. Αν f_n ολοκληρώσιμη στο I για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, ομοίως και P.

Απόδειξη

Θα χρειαστούμε τα παρακάτω:

Πόρισμα:

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στο Ω. Αν f_n συνεχής στο Ω για όλα τα n, τότε f συνεχής στο Ω.

Λήμμα:

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων ολοκληρώσιμων πάνω στο διάστημα I και έστω ότι $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f πάνω στο I. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο I και ισχύει ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$.

1. Αν f και g είναι συναρτήσεις συνεχείς στο I τότε $f+g$ και fg είναι συνεχείς στο I. Κάθε μέλος της ακολουθίας $\{f_n\}$ είναι συνεπώς συνεχές πάνω στο I. Χρησιμοποιούμε το πόρισμα και αποδεικνύεται το ζητούμενο.
2. Αν f και g είναι συναρτήσεις συνεχείς στο I τότε $f+g$ και fg είναι συνεχείς στο I. Κάθε μέλος της ακολουθίας $\{f_n\}$ είναι συνεπώς ολοκληρώσιμο πάνω στο I. Χρησιμοποιούμε το λήμμα και αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.5.3

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων με συνεχείς παραγώγους σε ένα κλειστό διάστημα I και έστω:

1. $f_n(x) > -1$ για όλα τα $x \in I$ και $n \in \mathbb{N}$.
2. υπάρχει $c \in I$τέτοιο ώστε $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(c)\right)$ να συγκλίνει.
3. η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f'_j(x)}{1+f_j(x)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(x)\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I σε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση P και ισχύει για όλα τα $x \in I$:

$$P'(x) = \left(\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(x)\right)\right)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f'_j(x)}{1+f_j(x)}$$

Θεώρημα 2.5.4 (Κριτήριο Σύγκρισης)

Έστω ότι $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ και $\sum_{j=1}^{\infty} f_j^2(z)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα σε φραγμένες συναρτήσεις σε ένα διάστημα I και επιπλέον έστω ότι $f_j(x) > -1$ για όλα τα $x \in I$ και $j \in N$. Τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+f_j(x)\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

2.6 Ανάπτυξη Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων

i) $sinx$

Είναι γνωστό ότι:

$$x^k - x^{-k} = (x - x^{-1}) \prod_{n=1}^{\infty} \left(x + x^{-1} - 2cos\frac{n\pi}{k} \right)$$

Με αντικατάσταση $x = e^{i\beta}$ έχουμε:

$$e^{ik\beta} - e^{-ik\beta} = \left(e^{i\beta} - e^{-i\beta} \right) \prod_{n=1}^{k-1} \left(e^{i\beta} + e^{-i\beta} - 2cos\frac{n\pi}{k} \right)$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως κάτωθι:

$$2i\, sin(k\beta) = 2i\, sin(\beta) \prod_{n=1}^{k-1} \left(2\, cos(\beta) - 2\, cos\frac{n\pi}{k} \right) \Rightarrow$$

$$sin(k\beta) = 2^{k-1} sin(\beta) \prod_{n=1}^{k-1} \left(cos\beta - cos\frac{n\pi}{k} \right) \Rightarrow$$

$$= 2^{k-1}\, sin\beta \prod_{n=1}^{k-1} \left(1 - 2sin^2\frac{\beta}{2} - 1 + 2sin^2\frac{n\pi}{2k} \right) \Rightarrow$$

$$= 4^{k-1}\, sin\beta \prod_{n=1}^{k-1} \left(sin^2\frac{n\pi}{2k} \right) \left(\frac{1 - sin^2\frac{\beta}{2}}{sin^2\frac{n\pi}{2k}} \right)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι $k = 4^{k-1} \prod_{n=1}^{k-1} \left(sin^2\frac{n\pi}{2k} \right)$οπότε:

$$sin(k\beta) = k\, sin\beta \prod_{n=1}^{k-1} \left(\frac{1 - sin^2\frac{\beta}{2}}{sin^2\frac{n\pi}{2k}} \right)$$

Αντικαθιστούμε όπου $\beta = x/k$ και έχουμε:

$$sinx = k\, sin\frac{x}{k} \prod_{n=1}^{k-1} \left(\frac{1 - sin^2\frac{x}{2k}}{sin^2\frac{n\pi}{2k}} \right)$$

Οπότε

$$\lim_{k\to\infty} k\, sin\frac{x}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{sin\frac{x}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{-\frac{x}{k^2} cos\frac{x}{k}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} x\, cos\frac{x}{k} = x$$

Επίσης

$$\lim_{k\to\infty} \frac{sin^2\frac{x}{2k}}{sin^2\frac{n\pi}{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - cos\frac{x}{k}}{1 - cos\frac{n\pi}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{-\frac{x}{k^2} sin\frac{x}{k}}{-\frac{x}{k^2} sin\frac{n\pi}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2\, sin\frac{x}{k}}{n^2\pi^2 sin\frac{n\pi}{k}} = \frac{x^2}{n^2\pi^2}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα ορίων και θέτοντας $n = j$ προκύπτει:

$$sinx = x \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{j^2\pi^2}\right)$$

ii) $cosx$

$$cosx = \frac{sin2x}{2sinx} = \frac{2x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)}{2x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)} = \frac{\cancel{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n)^2\pi^2}\right)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)}{\cancel{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}}$$

Συνεπώς θέτοντας όπου $n = j$ φτάνουμε στο:

$$cosx = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2j-1)^2\pi^2}\right)$$

iii) $tanx$

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)} = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2-x^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{(2n-1)^2\pi^2}{(2n-1)^2\pi^2-4x^2}\right) \Rightarrow$$

$$tanx = x\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^2(n^2\pi^2-x^2)}{n^2(\pi^2(2n-1)^2-4x^2)}$$

iv) $cotx$

$$cotx = \frac{cosx}{sinx} = \frac{1}{tanx} = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(\pi^2(2n-1)^2-4x^2)}{(2n-1)^2(n^2\pi^2-x^2)}$$

2.7 Θεώρημα ορίων του Abel για άπειρα γινόμενα.

Σε αυτό το σημείο μελετούμε την σχέση ανάμεσα στα γινόμενα της μορφής $P(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j x)$και $Q(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j x^j)$. Ειδικότερα ενδιαφερόμαστε για τις προϋποθέσεις που αφορούν την ακολουθία $\{\alpha_n\}$ που εξασφαλίζουν ότι:

$$\lim_{x\to 1^-} P(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j)$$

$$\text{και} \lim_{x \to 1^-} Q(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j)$$

Η απάντηση δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.7.1 (Θεώρημα Abel)

Αν το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j)$ συγκλίνει και $\alpha_j > -1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ τότε τα γινόμενα $P(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j x)$ και $Q(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\alpha_j x^j)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to 1^-} P(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j)$$

$$\text{και} \lim_{x \to 1^-} Q(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 + \alpha_j)$$

2.8 Γινόμενα Weierstrass

Ορισμός 2.8.1

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k και κάθε $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε:

$$E_k(z) = (1 - z)\, e^{S_k(z)}$$

$$\text{όπου } S_k(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{z^j}{j}$$

Τότε $E_k(z)$ ονομάζεται πρωταρχικός παράγοντας Weierstrass.

Λήμμα 2.8.2

Αν $|z| \leq 1$ τότε:

$$|1 - E_k(z)| \leq |z|^{k+1}$$

Απόδειξη :
Η ισότητα ισχύει αν $k = 0$ ή αν $z \in \{0,1\}$. Μπορούμε συνεπώς να συμπεράνουμε ότι $k \geq 1$, $z \neq 0$ και $z \neq 1$. Οπότε με παραγώγιση έχουμε:

$$\begin{aligned} E'_k(z) &= -\, e^{S_k(z)} + (1 - z)\, S'_k(z)\, e^{S_k(z)} \\ &= e^{S_k(z)} \left(-1 + (1 - z) \sum_{j=0}^{k-1} z^j \right) \end{aligned}$$

$$= e^{S_k(z)}\left(-1 + (1-z)\frac{1-z^k}{1-z}\right)$$

$$= -z^k e^{S_k(z)}$$

Συνεπώς

$$(1 - E_k(z))' = z^k e^{S_k(z)}$$

Άρα $(1 - E_k(z))'$ έχει ρίζα τάξης k στο 0. Αφού $1 - E_k(0) = 0$ συμπεραίνουμε ότι $1 - E_k(z)$ έχει ρίζα τάξης $k+1$ για $z = 0$.

Επιπλέον έχουμε πως το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 για την $(1 - E_k(z))'$ έχει μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές εφόσον το ίδιο προκύπτει και για την εκθετική συνάρτηση όπως και τη συνάρτηση $e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^m}{m}}$. Άρα η συνάρτηση:

$$h(z) = \frac{1 - E_k(z)}{z^{k-1}}$$

έχει μη αρνητικούς συντελεστές Taylor. Συνεπώς:

$$\frac{1 - E_k(z)}{z^{k-1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n||z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$$

Αλλά είναι $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = \frac{1-E_k(1)}{1^{k-1}} = 1$

Οπότε

$$\left|\frac{1 - E_k(z)}{z^{k-1}}\right| \leq 1 \implies |1 - E_k(z)| \leq |z|^{k-1}$$

Λήμμα 2.8.3

Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών ώστε $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$. Τότε για οποιοδήποτε $r \geq 0$ η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^j}{|z_j|^2}$ συγκλίνει.

Απόδειξη:

Από υπόθεση παίρνουμε ότι για κάθε $r \geq 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $|z_n| > 2r$ για κάθε $n > N$. Προκύπτει πως για όλα τα $j > N$ είναι $\frac{r}{|z_j|} < \frac{1}{2}$. Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^j$ συγκλίνει, οπότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r^j}{|z_j|^2}$ από κριτήριο σύγκρισης.

Θεώρημα 2.8.4 (Weierstrass)

Έστω $\{z_n\}$ μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών ώστε $\lim_{n\to\infty}|z_n| = \infty$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $\{k_j\}$ μη αρνητικών ακεραίων ώστε η

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E_k(z)\left(\frac{z}{z_j}\right)$$

ορίζει μια ακέραιη συνάρτηση. Επιπλέον $P(z) = 0$ αν και μόνο αν $z = z_n$ για κάποια n.

Απόδειξη:

Επιλέγουμε $r > 0$ και οποιαδήποτε ακολουθία $\{k_j\}$ μη αρνητικών ακεραίων ώστε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_j|}\right)^{k_j+1}$ να συγκλίνει. Για παράδειγμα το πιο πάνω λήμμα Λήμμα **2.8.3** μας δείχνει ότι μπορούμε να πάρουμε $k_j = j - 1$ για όλα τα j. Επιλέγουμε μετά z τέτοιο ώστε $|z| \leq r$.
Υπάρχει N ώστε $|z_j| > |z|$ για όλα τα $j \geq N$. Για κάθε $j \geq N$ έχουμε:

$$\left|1 - E_{k_j}\left(\frac{z}{z_j}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_j}\right|^{k_j+1} \leq \left|\frac{r}{z_j}\right|^{k_j+1}$$

Η σύγκλιση της σειράς $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_j|}\right)^{k_j+1}$ οδηγεί στην ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς

$$\sum_{j=N}^{\infty}\left|1 - E_{k_j}\left(\frac{z}{z_j}\right)\right|$$

στο $D(0, r)$ σε μια φραγμένη συνάρτηση.
Αφού r τυχαίο, η τελευταία συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Συνεπώς από το πόρισμα Πόρισμα **2.4.5** προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι ακέραια. Το επόμενο σκέλος του θεωρήματος αποδεικνύεται άμεσα από το γεγονός ότι το 1 είναι η μοναδική ρίζα του E_{k_j} για κάθε j.

Παρατήρηση:

Η ακολουθία $\{k_j\}$ επιλέγεται ώστε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_j|}\right)^{k_j+1}$ να συγκλίνει για όλα τα $r > 0$. Αν η ακολουθία $\{|z_j|\}$ συγκλίνει αρκετά γρήγορα, μπορούμε να επιλέξουμε $\{k_j\}$ να είναι μια σταθερή ακολουθία.. Έστω για παράδειγμα $|z_j| = j$ για όλα τα j, τότε μπορούμε να πάρουμε $k_j = 1$ για όλα τα j αφού η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$ συγκλίνει. Τότε

$$P(z) = \prod_{j=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{z_j}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_j}\right)e^{\frac{z}{z_j}} \text{ για όλα τα } j$$

Αν $\{k_j\}$ εκλέγεται ώστε να είναι μια σταθερή ακολουθία, έστω ρ η μικρότερη τέτοια σταθερά. Τότε το γινόμενο $\prod_{j=1}^{\infty} E_\rho\left(\frac{z}{z_j}\right)$ ονομάζεται κανονικό γινόμενο τάξης ρ. Για παράδειγμα η τάξη του γινομένου που πήραμε όταν $|z_j| = j$ για όλα τα j είναι 1.

Παράδειγμα:

i)Έστω $z_j = \sqrt{j}$ για όλα τα j. Συνεπώς

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|z_j|^{\rho+1}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\frac{\rho+1}{2}}}$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν

$$\frac{\rho+1}{2} > 1$$

Ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση είναι ο 2. Συνεπώς μπορούμε να βρούμε ένα κανονικό γινόμενο δεύτερης τάξης. Πράγματι είναι:

$$\prod_{j=1}^{\infty} E_2\left(\frac{z}{\sqrt{j}}\right) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{j}}\right)e^{\frac{z}{\sqrt{j}}+\frac{z^2}{j}} \text{ για όλα τα } j$$

ii) Από την άλλη μπορεί η ακολουθία $\{|z_j|\}$ να αυξάνει πολύ αργά και έτσι η παραπάνω ιδέα να μην μπορεί να εφαρμοστεί. Τέτοια είναι ας πούμε η περίπτωση όπου $|z_j| = \log j$ για όλα τα j, καθώς η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{log^m j}$ αποκλίνει για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο m.

2.9 Θεώρημα παραγοντοποίησης του Weierstrass

Λήμμα 2.9.1

Αν f ακέραια συνάρτηση η οποία δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$, τότε ισχύει ότι $f(z) = e^{g(z)}$, όπου $g(z)$ ακέραιη συνάρτηση.

Απόδειξη

Σταθεροποιώντας ένα $z_o \in \mathbb{C}$, ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} + c_o$$

με γ ένα μονοπάτι που να συνδέει το z_o με το z στο $\mathbb{C}$ και c_o μιγαδικός αριθμός τέτοιος ώστε $e^{c_o} = f(z_o)$. Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος από το μονοπάτι γ καθώς το $\mathbb{C}$ είναι απλό συνεκτικό σύνολο.

Η συνάρτηση g είναι αναλυτική και:

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$f(z)\, e^{-g(z)} = 1$$

Παραγωγίζοντας το αριστερό μέλος της ισότητας λαμβάνουμε:

$$\left(f(z)e^{-g(z)}\right)' = f'(z)\, e^{-g(z)} - f(z)g'(z)\, e^{-g(z)} = e^{-g(z)}\left[f'(z) - f(z)g'(z)\right] = 0$$

Συνεπώς $f(z)e^{-g(z)} = c$. Για $z \to z_o$ είναι $f(z_o)e^{-c_o} = 1$. Επομένως $f(z) = e^{g(z)}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Θεώρημα 2.9.2 (Θεώρημα παραγοντοποίησης του Weierstrass)

Έστω f μια ακέραια συνάρτηση που δεν είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν και $k \geq 0$ η τάξη της ρίζας της f στο μηδέν. Έστω $\{z_n\}$ οι υπόλοιπες ρίζες της f όπου κάθε ρίζα z_n επαναλαμβάνεται όσο και η πολλαπλότητα.

Τότε υπάρχουν μια ακέραιη συνάρτηση g και μη αρνητικοί ακέραιοι m_nτέτοιοι ώστε:

$$f(z) := e^{g(z)}\, z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι m_n ικανοποιούν τη συνθήκη του θεωρήματος Weierstrass. Τότε το γινόμενο $h(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή σύνολα. Η συνάρτηση h έχει επίσης τις ίδιες ρίζες με την f και τις ίδιες πολλαπλότητες.

Τότε το πηλίκο $\frac{f}{h}$ αποτελεί ακέραιη συνάρτηση χωρίς ρίζες. Άρα σύμφωνα με το λήμμα Λήμμα **2.9.1** υπάρχει ακέραιη συνάρτηση g τέτοια ώστε:

$$\frac{f}{h} = e^g \;\; \Rightarrow \;\; f = he^g \;\; \Rightarrow \;\; f(z) := e^{g(z)}\, z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3.1 Εφαρμογή 1: Να υπολογιστεί το γινόμενο $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Έστω $\alpha_n = 1-\frac{1}{\mathrm{n}^2}$ και $P_n = \prod_{m=2}^{n}\alpha_m$

n	2	3	4	5	6	7
α_n	3/4	8/9	15/16	24/25	35/36	48/49
P_n	3/4	2/3	5/8	3/5	7/12	4/7

Ισχυρισμός : Για $N \geq 2$ ισχύει ότι:

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{N+1}{2N}$$

Απόδειξη (με επαγωγή)

Για $N=2$ ισχύει (βλ. παραπάνω πίνακα). Έστω ότι για $k \geq 2$ ισχύει

$$\prod_{n=2}^{k}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

Είναι λοιπόν:

$$\prod_{n=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(1-\frac{1}{(\kappa+1)^2}\right)\prod_{n=2}^{k}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(\kappa+1)^2-1}{(\kappa+1)^2}\cdot\frac{k+1}{2k}=$$

$$=\frac{\kappa^2+2\kappa+\cancel{1-1}}{(\kappa+1)\cancel{(\kappa+1)}}\cdot\frac{\cancel{k+1}}{2k}=\frac{k(k+2)}{2k(k+1)}=\frac{k+2}{2(k+1)}=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Έχουμε λοιπόν

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\frac{N+1}{2N}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}\right)\Rightarrow$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

3.2 Εφαρμογή 2: Να εξεταστεί το γινόμενο

$$\prod_{\kappa=0}^{\infty}\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}^{\boldsymbol{k}}}\right)$$

Για $n = 3$:

$$p = \prod_{\kappa=0}^{3}\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{k}}}\right) = \left(1+\mathrm{x}^{2^0}\right)\cdot\left(1+\mathrm{x}^{2^1}\right)\cdot\left(1+\mathrm{x}^{2^2}\right)\cdot\left(1+\mathrm{x}^{2^3}\right) =$$

$$\begin{aligned}
(1-x)\,p &= (1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8) \\
&= (1-x^2)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8) \\
&= (1-x^4)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8) \\
&= (1-x^8)\cdot(1+x^8) \\
&= (1-x^{16}) \\
p &= \frac{1-x^{16}}{1-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_n &= \left(1+\mathrm{x}^{2^0}\right)\cdot\left(1+\mathrm{x}^{2^1}\right)\cdot\left(1+\mathrm{x}^{2^2}\right)\cdots\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}}}\right) \\
(1-x)p_n &= (1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdots\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}}}\right) \\
&= (1-x^2)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdots\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}}}\right) \\
&= (1-x^4)\cdot(1+x^4)\cdots\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}}}\right) \\
&\vdots \\
&= \left(1-\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}}}\right)\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}}}\right) \\
&= 1-\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}+1}} \\
p_n &= \frac{1-\mathrm{x}^{2^{\mathrm{n}+1}}}{1-x}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{1-x}$ με την προϋπόθεση ότι $|x| < 1$

Συνεπώς:

$$\prod_{\kappa=0}^{\infty}\left(1+\mathrm{x}^{2^{\mathrm{k}}}\right) = \frac{1}{1-x}\text{για } |x| < 1$$

3.3 Εφαρμογή 3: Να υπολογιστεί το γινόμενο $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$

$$n^3+1=n^3+1^3=(n+1)(n^2-n+1)$$

$$n^3-1=n^3-1^3=(n-1)(n^2+n+1)=(n-1)[(n+1)^2-(n+1)+1]$$

$$p_k=\prod_{n=2}^{k}\frac{(n-1)[(n+1)^2-(n+1)+1]}{(n+1)(n^2-n+1)}=\underbrace{\prod_{n=2}^{k}\frac{(n-1)}{(n+1)}}_{A}\cdot\underbrace{\prod_{n=2}^{k}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}}_{B}$$

$$A=\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{2}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{3}}{5}\cdot\frac{\cancel{4}}{6}\cdots\frac{k-2}{k}\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{k(k+1)}$$

$$B=\frac{3^2-3+1}{2^2-2+1}\cdot\frac{4^2-4+1}{3^2-3+1}\cdots\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}=\frac{k^2+2k+1-k-1+1}{4-2+1}=\frac{k^2+k+1}{3}$$

$$p_k=A\cdot B=\frac{2}{k^2+k}\cdot\frac{k^2+k+1}{3}\ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty}p_k=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2+k}=\frac{2}{3}$$

Συνεπώς

$$\prod_{\mathrm{n}=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$$

3.4 Εφαρμογή 4: Να εξεταστεί το γινόμενο $\prod_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64}$

$$n^3+3n=n^2(n^2+3)^2$$

$$\begin{aligned}n^6-64&=(n^3)^2-8^2=(n^3-8)\cdot(n^3+8)\\&=(n-2)(\quad{}^2+2n+4)(n+2)(n^2-2n-4)\\&=(n-2)((n+1)^2+3)(n+2)((n-1)^2+3)\end{aligned}$$

$$p=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=3}^{N}\frac{n^2(n^2+3)^2}{(n-2)(n+2)((n+1)^2+3)((n-1)^2+3)}=$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\prod_{n=3}^{N} n^2 \prod_{n=3}^{N}(n^2+3)^2}{\prod_{n=3}^{N}(n-2)\prod_{n=3}^{N}(n+2)\prod_{n=3}^{N}((n+1)^2+3)\prod_{n=3}^{N}((n-1)^2+3)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\prod_{n=3}^{N} n \prod_{n=3}^{N} n \prod_{n=3}^{N}(n^2+3)\prod_{n=3}^{N}(n^2+3)}{\prod_{n=1}^{N-2} n \prod_{n=5}^{N+2} n \prod_{n=2}^{N-1}(n^2+3)\prod_{n=4}^{N-1}(n^2+3)} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{(N-1)N}{1\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{3\cdot 4}{(N+1)\cdot(N+2)}\right)\cdot\left(\frac{N^2+3}{7}\right)\cdot\left(\frac{12}{(N+1)^2+3}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{3\cdot 4\cdot 12}{2\cdot 7} \quad \Rightarrow \quad \prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3+3n)^2}{n^6-64} = \frac{72}{7}$$

3.5 Εφαρμογή 5: Να υπολογιστεί το γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{5}^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}} + \mathbf{3}^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}}{\mathbf{2}}$$

Εξετάζουμε το γινόμενο $\prod_{\mathrm{i}=1}^{n} \frac{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}}+3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}}}{2}$ και έπειτα υπολογίζουμε το όριο καθώς $n \to \infty$

$$n = 1: \quad \overbrace{5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}}^{\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}}$$

$$n = 2: \quad \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(5^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right) = \overbrace{5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}}}^{\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}}\overbrace{3^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}}}^{\left(\frac{3}{5}\right)^{1/4}}3^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$n = 3: \quad \left(5^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(5^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(5^{\frac{1}{8}} + 3^{\frac{1}{8}}\right) =$$

$$= \underbrace{5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} + 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}_{\left(\frac{3}{5}\right)^{1/8}}3^{\frac{1}{8}} + 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}3^{\frac{1}{4}} + \cdots + 5^{\frac{1}{8}}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$$

Άρα

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}} + 3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}}{2} = 5^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}} \sum_{k=1}^{2^n-1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\right)^{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n-1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\right)^{k}=\frac{\frac{1}{2}-\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}=\frac{1-\frac{3}{5}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}$$

Συνεπώς:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}+3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}\right)=\left(5^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\frac{2}{5}\frac{1}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}\right)=2\cdot\frac{1}{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}\cdot\frac{1}{\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\right)}=\frac{2}{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}-3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}$$

Άρα πρέπει να υπολογιστεί το όριο :

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\left(5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}+3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}\right)}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}-3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}-3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}$$

Θέτω $u=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, οπότε όταν $n\to\infty$: $u\to 0^{+}$και άρα έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\left(5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}+3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{i}}\right)}{2}=2\lim_{u\to0^{+}}\frac{u}{5^{u}-3^{u}}=2\lim_{u\to0^{+}}\frac{1}{5^{u}\,ln\,5-3^{u}\,ln\,3}=\frac{2}{5^{0}\,ln\,5-3^{0}\,ln\,3}$$

$$=\frac{2}{ln\,5-ln\,3}=\frac{2}{ln\,\frac{5}{3}}$$

Συνεπώς:

$$\prod_{\mathrm{i}=1}^{\infty}\frac{5^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}}+3^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{i}}}}{2}=\frac{2}{ln\,\frac{5}{3}}$$

3.6 Εφαρμογή 6: Να υπολογιστεί το γινόμενο $\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\frac{63}{65}\cdot\frac{124}{126}\cdots$

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\frac{63}{65}\cdot\frac{124}{126}\cdots=\frac{8-1}{8+1}\cdot\frac{27-1}{27-1}\cdot\frac{64-1}{64+1}\cdot\frac{125-1}{125+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=?$$

Άρα αναζητούμε το $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$, ήτοι αναζητούμε το:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

Είναι:

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

Άρα αναζητούμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}\right)\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{13}{7}\right)\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{21}{13}\right)\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{31}{21}\right)\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{43}{31}\right)\cdots\left(\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}\right)\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{n-1}{n+1}\right)\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdot\frac{21}{13}\cdot\frac{31}{21}\cdot\frac{43}{31}\cdots\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)\left(\frac{n^2+n+1}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\right]=\frac{2}{3}$$

Άρα

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{26}{28}\cdot\frac{63}{65}\cdot\frac{124}{126}\cdots=\frac{2}{3}$$

3.7 Εφαρμογή 7: Να υπολογιστεί το γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{f_{2n}+1}{f_{2n}-1}$$

Πρόκειται για άπειρο γινόμενο που σχετίζεται με τους αριθμούς Fibonacci. Να θυμηθούμε ότι :

$$f_0=0\ f_1=1\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, n\geq 2$$

Επίσης θα φανούν χρήσιμες οι γνωστές σχέσεις που αφορούν τους αριθμούς Fibonacci:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{\kappa} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{\kappa}\right)$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \varphi^2 = 1+\varphi, \qquad -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{f_{2n}+1}{f_{2n}-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{2n} - \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}\right)+1}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{2n} - \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}\right)-1} = \frac{\sqrt{5}\varphi^{2n}}{\sqrt{5}\varphi^{2n}}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{2n} - \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}\right)+1}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{2n} - \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{2n}\right)-1}$$

$$= \frac{\varphi^{4n} - 1 + \sqrt{5}\varphi^{2n}}{\varphi^{4n} - 1 - \sqrt{5}\varphi^{2n}} = \frac{\varphi^{4n} + \varphi^{2n}\left(\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right) - \frac{\varphi^2}{\varphi^2}}{\varphi^{4n} - \varphi^{2n}\left(\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2}\right) - \frac{\varphi^2}{\varphi^2}}$$

$$= \frac{\left(\varphi^{2n} - \frac{1}{\varphi^2}\right)(\varphi^{2n} - \varphi^2)}{(\varphi^{2n} - \varphi^2)\left(\varphi^{2n} + \frac{1}{\varphi^2}\right)} = \frac{(\varphi^{2n+2}-1)(\varphi^{2n-2}-1)}{(\varphi^{2n-2}-1)(\varphi^{2n+2}+1)}$$

Αναζητούμε λοιπόν το όριο:

$$p = \lim_{k\to\infty}\prod_{n=2}^{k}\frac{(\varphi^{2n+2}-1)(\varphi^{2n-2}-1)}{(\varphi^{2n-2}-1)(\varphi^{2n+2}+1)} = \lim_{k\to\infty} p_k$$

Ισχυρισμός:

$$p_k = \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^4+1)}\cdot\frac{(\varphi^{2k}-1)(\varphi^{2k+2}-1)}{(\varphi^{2k}-1)(\varphi^{2k+2}+1)}$$

Απόδειξη επαγωγικά: Για $k=2$

$$p_2 = \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^4+1)}\cdot\frac{(\varphi^4-1)(\varphi^6-1)}{(\varphi^4-1)(\varphi^6+1)} = \frac{(\varphi^2-1)(\varphi^6-1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^6+1)}$$

το οποίο ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για p_k. Είναι:

$$p_{k+1} = p_k\left(\frac{(\varphi^{2k+4}-1)(\varphi^{2k}-1)}{(\varphi^{2k}-1)(\varphi^{2k}+1)}\right) = \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^4+1)}\cdot\frac{(\varphi^{2k+2}-1)(\varphi^{2k+4}-1)}{(\varphi^{2k+2}-1)(\varphi^{2k+4}+1)}$$

οπότε ισχύει.

$$p = \lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^4+1)} \cdot \cancelto{1}{\frac{(\varphi^{2k}-1)(\varphi^{2k+2}-1)}{(\varphi^{2k}-1)(\varphi^{2k+2}+1)}} = \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^4-1)}$$

$$= \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^4-1)} = \frac{(\varphi^2+1)(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)(\varphi^2-1)(\varphi^2+1)} = \frac{(\varphi^4+1)}{(\varphi^2-1)^2}$$

$$= \frac{\varphi^3+\varphi^2+1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1+\varphi+1+\varphi^2}{\varphi^2} = \frac{3\varphi^2}{\varphi^2} \Rightarrow$$

$$p = 3$$

3.8 Εφαρμογή 8: Να υπολογιστεί το γινόμενο $p = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{4}\right) cos\left(\frac{\theta}{8}\right) cos\left(\frac{\theta}{16}\right)\cdots$

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

Αναζητούμε το όριο

$$L = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[cos\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{4}\right) cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cdots cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right] \text{για} n \in \mathbb{N}^+$$

Όμως ισχύει:

$$2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) cos\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{4}\right) cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cdots cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = sin\theta$$ [1]για $n \in \mathbb{N}^+$

Άρα

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{sin\theta}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \text{ για } n \in \mathbb{N}^+$$

[1] Βλέπε εφαρμογή 3.10

$$L = \frac{sin\theta}{\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \text{για} n \in \mathbb{N}^+$$

Έστω

$A = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. Θέτω $t = \frac{\theta}{2^n}$. Για $n \to \infty \iff t \to 0$. Άρα:

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{\theta}{t} \sin t = \lim_{t\to 0} \frac{\theta}{1} \cos t = \theta$$

Συνεπώς προκύπτει $L = \theta \Rightarrow \prod\limits_{k=1}^{\infty} cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \theta$

3.9 Εφαρμογή 9: Να υπολογιστεί το γινόμενο $p = \frac{e}{\sqrt{e}} \frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}} \frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}} \cdots$

$$p = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2n+1}}}{e^{\frac{1}{2n+2}}} = \prod_{n=0}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)} \quad \Longrightarrow$$

$$lnp = \sum_{n=0}^{\infty} ln\left(e^{\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Όμως $ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

και $ln2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Συνεπώς $lnp = ln2$. Άρα προκύπτει ότι το ζητούμενο γινόμενο ισούται με $p = 2$.

3.10 Εφαρμογή 10: Να δειχτεί ότι $2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$

$$f = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

$$f = \underbrace{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}_{\text{n φορές}}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{n όροι με συνημίτονα}}$$

$$f = \underbrace{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}_{\text{n-1 φορές}}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{n-1 όροι με συνημίτονα}}$$

$$f = \underbrace{2\cdot 2\cdots 2\cdot 2}_{\text{n-2 φορές}}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\text{n-2 όροι με συνημίτονα}}$$

$$\vdots$$

$$f = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)\cdots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-2}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\theta$$

3.11 Εφαρμογή 11: Να εξεταστεί η παραγοντοποίηση Weierstrass της συνάρτησης $\sin(\pi z)$

Η συνάρτηση $\sin(\pi z)$ είναι ακέραιη και έχει απλές ρίζες σε όλους τους ακεραίους. Έχουμε επίσης την συνάρτηση $z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$ η οποία είναι και αυτή ακέραιη με απλές ρίζες σε όλους του ακεραίους. Άρα το πηλίκο αποτελεί και αυτό ακέραιη συνάρτηση που δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{C}$.

Σύμφωνα λοιπόν με το λήμμα 2.9.1 θα είναι

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \qquad 3.11.1$$

όπου $g(z)$ ακέραιη συνάρτηση.

Έστω $g(z)$ σταθερή. Τότε λοιπόν η σχέση 3.11.1 γίνεται:

$$sin(\pi z) = c\, z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

όμως $\lim\limits_{z\to 0} \frac{sin(\pi z)}{z} = \pi = \lim\limits_{z\to 0} c \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = c$ και συνεπώς:

$$sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι η $g(z)$ είναι όντως σταθερή. Παίρνουμε τη λογαριθμική παράγωγο της $sin(\pi z)$:

$$\pi\, cot(\pi\, z) = g'(z) + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \qquad 3.11.2$$

$$\Rightarrow \quad \pi\, cot(\pi\, z) = g'(z) + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

Επαναλαμβάνοντας παίρνουμε:

$$-\frac{\pi^2}{sin^2(\pi\, z)} = g''(z) + \frac{1}{2^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad g''(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{sin^2(\pi\, z)} \qquad 3.11.3$$

απ' όπου προκύπτει $g(z+1) = g(z) z \in \mathbb{C}$. Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η $g''(z)$ είναι φραγμένη. Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει $M < \infty$ τέτοιο ώστε

$$|g''(z)| \le M \text{ για } z = x + yi \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ με}$$

$$0 \le x \le 1 \quad \text{και} |y| \ge 1$$

Όμως για τέτοια z έχουμε:

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2 + y^2} \le \; 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} \qquad 3.11.4$$

Όμως $sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$

Και συνεπώς λόγω της σχέσης $|z| = z\bar{z}$ παίρνουμε:

$$|sin^2(\pi\, z)| = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \cdot \frac{e^{i\pi \bar{z}} - e^{-i\pi \bar{z}}}{-2i}$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{i\pi(z-\bar{z})} + e^{i\pi(z+\bar{z})} - e^{-i\pi(z+\bar{z})} - e^{-i\pi(z-\bar{z})}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{i\pi\, 2yi} + e^{i\pi\, 2yi} - e^{i\pi\, 2x} - e^{-i\pi\, 2x}\right)$$
$$= \frac{e^{2\pi y} + e^{-2\pi y}}{4} - \frac{\cos(2\pi x)}{4}$$

Συνεπώς $|sin^2(\pi\, z)| \geq \frac{e^{2\pi|y|}}{4} - \frac{1}{2} > 0$ για κάθε$|x| \geq 1$

Οπότε $\frac{\pi^2}{sin^2(\pi\, z)} \geq \frac{4\,\pi^2}{e^{2\pi|y|} - 2}$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (3.11.3), (3.11.4),(3.11.5) μας δίνει (για τα z τα οποία επιλέξαμε)

$$|g"(z)| \leq 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} + \frac{4\,\pi^2}{e^{2\pi|y|} - 2}$$

$$\text{Θέτουμε τώρα } \sup_{|y|\geq 1}\left[2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} + \frac{4\,\pi^2}{e^{2\pi|y|} - 2}\right] = M < \infty$$

Στη συνέχεια θεωρώ $B = \{z = x + yi : \ 0 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq y \leq 1\}$. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη πάνω σε συμπαγές σύνολο έχει μέγιστο. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει:

$$M' > 0 : \ |g"(z)| \leq M' \quad , z \in B$$

Άρα για $M" = max\{M, M'\}$προκύπτει ότι:

$$|g"(z)| \leq M", \text{για κάθε} z \in (A \cup B)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι είναι φραγμένη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της επαγωγής.

Για $z \in \mathbb{C} : n \leq Rez \leq n + 1, \ n \in \mathbb{Z}^+$

- Για $n = 1$ είναι $1 \leq Rez \leq 2$ το οποίο ισχύει διότι $0 \leq Re(z-1) \leq 1$ και συνεπώς $|g"(z-1)| \leq M"$. Αλλά $g"(z) = g"(z-1)$ οπότε $|g"(z)| \leq M"$.
- Έστω ότι ισχύει για $n = k$, δηλαδή είναι :

  $$k \leq Rez \leq k + 1$$

  Θα δειχθεί ότι ισχύει για $n = k + 1$. Δηλαδή $k + 1 \leq Rez \leq k + 2 \Rightarrow$ $k \leq Re(z+1) \leq k + 1$. Αλλά αφού $g"(z) = g"(z-1)$ παίρνουμε $k \leq Re(z+1) \leq k + 1$, που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

Συνεπώς η $g"$ είναι φραγμένη στο δεξιό ημιεπίπεδο. Θα κάνουμε την ίδια διαδικασία για το αριστερό ημιεπίπεδο. Θα δειχτεί λοιπόν ότι για $z \in \mathbb{C} : n \leq Rez \leq n+1,\ n \in \mathbb{Z}^-$ ακολουθώντας πάλι την μέθοδο της επαγωγής όπως και για το αριστερό ημιεπίπέδο.

- Για $n = -1$ είναι $-1 \leq Rez \leq 0$ το οποίο ισχύει διότι τότε $0 \leq Re(z-1) \leq 1$ και συνεπώς $|g"(z-1)| \leq M"$. Όμως είναι $g"(z) = g"(z-1)$ και άρα $|g"(z)| \leq M"$.
- Έστω ότι ισχύει για $n = -k$, δηλαδή είναι :

$$-k \leq Rez \leq -k+1$$

Θα δειχθεί ότι ισχύει για $n = -(k+1)$. Δηλαδή $-k-1 \leq Rez \leq -k \Rightarrow$
$-k \leq Re(z+1) \leq -k+1$
Αλλά αφού $g"(z) = g"(z+1)$ παίρνουμε $-k \leq Re(z+1) \leq -k+1$, που ισχύει από την επαγωγική υπόθεση.

Συνεπώς η $g"$ είναι φραγμένη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Άρα $g"$ είναι σταθερά ως ακέραιη και φραγμένη. Όμως επειδή

$$\lim_{y\to\infty}\left[2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+y^2}+\frac{4\,\pi^2}{e^{2\pi|y|}-2}\right]=0$$

προκύπτει $g" = 0$, από όπου παίρνουμε $g' = c_1$ =σταθερά.

Άρα η σχέση (3.11.2) γράφεται ως εξής:

$$\pi\,cot(\pi\,z) = c_1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

Θέτουμε τώρα $z \to -z$ και προκύπτει

$c_1 = -c_1$ δηλαδή $c_1 = 0 \ \Rightarrow \ g' = 0$

από όπου προκύπτει ότι και $g = c_2$ =σταθερά.

Άρα καταλήγουμε πως πράγματι ισχύει:

$$sin(\pi z) = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Σε αυτό το σημείο ελπίζω ότι ο αναγνώστης εκτιμά τον σημαντικό ρόλο που παίζουν τα άπειρα γινόμενα στην ανάλυση και άλλους τομείς των μαθηματικών. Κάποια από τα αποτελέσματα είναι γνωστά εδώ και πολλά χρόνια στον κόσμο των μαθηματικών, ίσως ακόμα και πριν το 1900, καθώς πρόκειται για αντικείμενο των μαθηματικών με το οποίο ασχολήθηκαν σπουδαίοι μαθηματικοί, συμπεριλαμβανομένων των Euler, Gauss, Cauchy, Dirichlet, Riemann, Jacobi, Weierstrass και Hardy. Μπορεί κανείς να σκεφτεί: τι άλλο υπάρχει να πούμε για τα άπειρα γινόμενα;

Αφήνω λοιπόν αντί επιλόγου μια σύντομη εισαγωγή στην έννοια των Διπλών Σειρών και των Διπλών Άπειρων Γινομένων.

(i) Διπλές Σειρές

Έστω $\{z_{m,n}\}$ μια διπλή ακολουθία και zμιγαδικός αριθμός. Λέμε ότι $\{z_{m,n}\}$ συγκλίνει στο zαν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $|z_{m,n} - z| < \varepsilon$ για κάθε $m \geq N$ και $n \geq N$. Συμβολίζουμε

$$\lim_{(m,n)\to\infty} z_{m,n} = z$$

Μπορούμε να διατάξουμε τους όρους μιας διπλής ακολουθίας ως:

$z_{0,0} z_{0,1} z_{0,2}$ …..

$z_{1,0} z_{1,1} z_{1,2}$ …..

. . . …..

. . . …..

. . . …..

Για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους m και nσυμβολίζουμε ως $S_{m,n}$ το παρακάτω άθροισμα

$$S_{m,n} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} z_{j,k}$$

το οποίο καλείται μερικό άθροισμα της διπλής ακολουθίας.

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι βασικές μορφές της διπλής σειράς.

$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_{j,k}\right)$: πρόσθεση κατά γραμμή

$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} z_{j,k}\right)$: πρόσθεση κατά στήλη

(ii) Διπλά Άπειρα Γινόμενα

Έστω $\{z_{j,k}\}$ μια διπλή ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Γράφουμε

$$P_{m,n} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n} z_{j,k} \ ,$$

Το οποίο καλείται μερικό γινόμενο της διπλής ακολουθίας ενώ το γινόμενο της μορφής

$$\prod_{j,k=1}^{\infty} z_{j,k}$$

καλείται διπλό άπειρο γινόμενο.

Οι δύο αυτές εν συντομία περιγραφόμενες έννοιες των διπλών σειρών και διπλών άπειρων γινομένων είναι τα πιο απλά παραδείγματα τομέων πάνω στους οποίους μπορεί να επεκταθεί η ανάλυση που έγινε στην παρούσα εργασία.

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεση

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Charles H. C. Little, Kee L. Teo, Bruce van Brunt, (2022). An Introduction to Infinite Products, Springer.

Ash T.B., Novinger W.V., (2004). Complex Variables, Dover

Bromwich T.J.I'A., (1926). An Introduction to the Theory of Infinite Series, Macmillan

Brown, J.W., Churchill R.V., (2004). Complex Variables and Applications, McGraw-Hill, 7th ed.

Elias M.Stein, Rami Shakarchi, (2003). Princeton Lectures in Analysis, Complex Analysis, Princeton Univercity Press, Princeton and Oxford.

Melnikov Y.A., (2011). Green's Functions and Infinite Products, Birkhäuser.

Osler T.J., (2006). Interesting finite and infinite products from simple algebraic identities, Math. Gazette.

Ramasinghe W., (2007). Inspiring examples in rearrangements of infinite products, Int. J. Math.Ed. in Science and Technology.

Segal S.L., (2007). Nine Introductions in Complex Analysis, rev. ed., North-Holland.

Walter Rudin, (1987). Real and Complex Analysis, McGraw-Hill International Edition.