Διπλωματική Εργασία με τίτλο:

"Ιστορική αναδρομή του ολοκληρώματος και η αξιοποίησή της για διδακτική προσέγγιση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση"

ΚΟΥΤΡΑ ΔΗΜΗΤΡΑ

ΠΑΤΡΑ Σεπτέμβριος 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Εγκρίθηκε την …24/09/2022…………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη

από τους :

ΜΠΡΑΖΙΤΙΚΟΣ ΣΙΛΟΥΑΝΟΣ

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής

ΜΠΡΑΖΙΤΙΚΟΣ ΣΙΛΟΥΑΝΟΣ

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μια από τις βασικότερες έννοιες των μαθηματικών είναι η έννοια του ολοκληρώματος, η οποία παρουσιάζει μεγάλη δυσκολία στην κατανόηση από τους μαθητές στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην εργασία αυτή, γίνεται στο πρώτο μέρος μια ιστορική αναδρομή της έννοιας του ολοκληρώματός από την αρχαιότητα έως τα νεότερα χρόνια ξεκινώντας με τη μέθοδο εξάντλησης Ευδόξου Αρχιμήδη. Στην πορεία θα παρατεθεί αναφορά στους Galileo, Cavalieri, Fermat, Wallis, Newton και Leibniz. Η ιστορική ανασκόπηση συνεχίζεται με αναφορά στον 19ο αιώνα και στην αυστηροποίηση της έννοιας του ολοκληρώματός κατά Riemann και το ολοκλήρωμα του Lebesgue. Στο δεύτερο μέρος θα τονιστεί ο λόγος που θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την ιστορία των μαθηματικών και εδώ του ολοκληρώματος, καθώς επίσης και κάποιες διδακτικές προτάσεις. Γίνεται μια προσπάθεια να συσχετιστεί η ιστορία του ολοκληρώματός με την διδασκαλία του στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση παραθέτοντας λόγους χρήσης της στην εκπαιδευτική διαδικασία. Συχνά οι μαθητές διαχειρίζονται την έννοια του ολοκληρώματός χωρίς ωστόσο να αναρωτιούνται από πού προήλθαν. Έτσι θα μιλήσουμε και για τρόπους χρήσης της ιστορίας αυτής ώστε να γίνει η κατανόηση της έννοιας του ολοκληρώματός ευκολότερη. Κλείνοντας την εργασία αυτή θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε και κάποιες δραστηριότητες, όπου θα χρησιμοποιείται η ιστορία του ολοκληρώματος για την κατανόηση αυτού από τους μαθητές.

One of the most basic concepts of mathematics is the concept of integral, which presents great difficulty in understanding by students in secondary education. In this paper, in the first part, a historical review of the concept of the integral from antiquity to modern times is made, starting with the exhaustion method of Eudoxus Archimedes. Reference will be made along the way to Galileo, Cavalieri, Fermat, Wallis, Newton and Leibniz. The historical review continues with reference to the 19th century and the tightening of the concept of the Riemann integral and the Lebesgue integral. In the second part, the reason why we should use the history of mathematics and here the integral will be emphasized, as well as some didactic suggestions. An attempt is made to relate the history of the integral with its teaching in secondary education by citing reasons for its use in the educational process. Often students manage the concept of the integral without asking themselves where it came from. So we will also talk about ways of using this story to make the understanding of the concept of integral easier. By closing this work we will try to present some activities, where the history of the integral will be used for the students' understanding of it.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

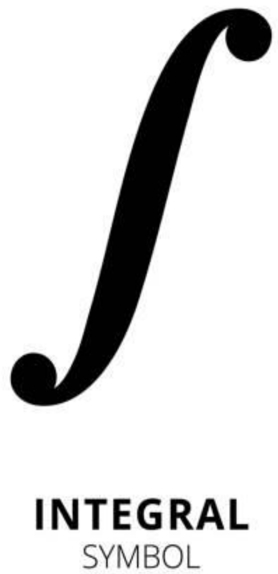
Α ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

Β ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 4


INTEGRAL
SYMBOL

Α ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή

Το ολοκλήρωμα έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα ιστορία. Στην παρούσα εργασία αναφέρεται η ιστορική του διαδρομή από τα χρόνια του Αρχιμήδη μέχρι και την νεότερη περίοδο. Θα δώσουμε ιδιαίτερη σημασία στην δουλειά του 19ο αιώνα. Στο αρχικό μέρος θα γίνει περιγραφή έως τον 17ο αιώνα και κυρίως γίνεται λόγος για το έργο του **Ευδόξου** και του **Αρχιμήδη.** Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην ιστορική εξέλιξη του ολοκληρώματός κατά τον 17ο αιώνα και κυρίως θα παρατεθεί αναφορά έργου για τους Galileo, Cavalieri, Fermat,Wallis, Newton, Leibniz. Το τελευταίο μέρος της ιστορικής αναδρομής θα αφιερωθεί στον Cauchy και τη συμβολή του Dirichlet και κυρίως στον **Riemann** και το ολοκλήρωμα του **Lebesgue**.

Κεφάλαιο 1

Σύντομη ιστορία των αρχικών συνεισφορών

Εύδοξος-Αρχιμήδης

Σ’ αυτήν την παράγραφο, θα ασχοληθούμε με την ιστορική εξέλιξη του ολοκληρωτικού λογισμού από την μέθοδο της εξάντλησης του Εύδοξου και του Αρχιμήδη μέχρι περίπου το 1675, χρονική στιγμή που χαρακτηρίζεται από την συμπλήρωση του προγράμματος του Αρχιμήδη, με το έργο μιας μακράς σειρά σημαντικών μαθηματικών του 17ου αιώνα, βασισμένο στις μεθόδους και ιδέες του μεγάλου Συρακούσιου μαθηματικού .

Στην Αίγυπτο μπορούσαν να κάνουν τον υπολογισμό του εμβαδού επίπεδων σχημάτων διαμερίζοντας το κάθε σχήμα σε μικρά τρίγωνα και ανακατανέμοντας τα, έτσι ώστε να παίρνουν ορθογώνια. Επίσης υπολόγισαν το εμβαδόν του μοναδιαίου κύκλου(με προσέγγιση), δηλαδή το π, τριχοτομώντας κάθε πλευρά του περιγεγραμμένου τετραγώνου και αφαιρώντας τα τέσσερα γωνιακά τρίγωνα που σχηματίζονται. Μ ’αυτό τον τρόπο επέτυχαν την ικανοποιητική προσέγγιση 3,16 για τον αριθμό π. (Νεγρεπόντης 1999)

Οι Βαβυλώνιοι εμπειρικά μόνο ήξεραν να υπολογίζουν το εμβαδόν τριγώνου και τους όγκους από κυλινδρικά πρίσματα, ωστόσο επικρατεί η άποψη πως ήταν πιο προχωρημένοι στα μαθηματικά σε σχέση με τους Αιγύπτιους. Κανένας όμως από τους δύο δεν κατάφερε να φτάσει σε ακριβή υπολογισμό των εμβαδών. Οι αρχαίοι Έλληνες ήταν αυτοί που κατάφεραν να τελειοποιήσουν τη μέθοδο της εξάντλησης, που στην ουσία είναι και ο πρόδρομος του ολοκληρωτικού λογισμού. Τα κύρια πρόσωπα που θεωρούνται βασικοί λίθοι στην ανάπτυξη της μεθόδου αυτής είναι ο Ιπποκράτης ο Χίος (450 π.Χ.), και ο Δημόκριτος (460 π.Χ.). (Γιαννακούλιας,2005)

Ο Ιπποκράτης απέδειξε πως αν διαιρέσουμε τα εμβαδά δύο κύκλων, αυτό ισούται με το πηλίκο των τετραγώνων των διαμέτρων τους. Στην ουσία για να το αποδείξει χρησιμοποίησε κάποια μέθοδο εξάντλησης. Για τον Δημόκριτο ,είναι γνωστό πως ο Αρχιμήδης σε κάποια εργασία του, αναφέρεται ότι κάποια αποτελέσματα του Ευδόξου, για τη μέθοδο της εξάντλησης, ήταν ήδη γνωστά στον Δημόκριτο.

Ο Εύδοξος υπολόγισε τα εμβαδά καμπυλόγραμμων, γεμίζοντας τα με ακολουθίες πολυγώνων. Μπορούσε να φτάσει σε ένα μέγεθος διαιρώντας συνεχώς ένα μεγαλύτερο μέγεθος.

Αρχή του Ευδόξου

Αν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρέσουμε μέγεθος μεγαλύτερο του μισού του και από το υπόλοιπο αφαιρέσουμε μέγεθος μεγαλύτερο από το μισό του και επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία συνεχώς, τελικά θα μείνει κάποιο μέγεθος που θα είναι μικρότερο εκ των δύο δοθέντων μεγεθών.

Με σύγχρονο συμβολισμό

Αν έχω μια ποσότητα Λ και ζητείται να αποδειχθεί ότι Λ=Ρ

Επιλέγουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία, λ_ν εγγεγραμμένων εμβαδών ενός σχήματος Μ και γ_ν, μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία των περιγεγραμμένων στο Μ σχημάτων. Τότε:

$$\lambda_\nu < \Lambda < \gamma_\nu \quad \text{και} \quad \lambda_\nu < P < \gamma_\nu$$

Αρχικά έδειχναν : $\gamma_1 - \lambda_1 < \frac{1}{2}(\gamma_0 - \lambda_0)$

$$\gamma_2 - \lambda_2 < \frac{1}{2}(\gamma_1 - \lambda_1) \quad \text{και ούτω καθεξής}$$

Επιλέγοντας φυσικό ν:

$$(\nu + 1)\varepsilon > (\gamma_0 - \lambda_0)$$

Και άρα συνεπάγεται

$$\gamma_\nu - \lambda_\nu < \frac{(\nu+1)}{2^\nu}\varepsilon < \varepsilon$$

Γινόταν στη συνέχεια υπόθεση πως Λ<Ρ και με επιλογή κατάλληλου ε κατέληγαν σε άτοπο. Π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{2}\ (P - \Lambda)$

Ομοίως κατέληγαν και όταν έπαιρναν $P < \Lambda$ (άτοπο)

Οπότε τελικά συμπεραίνανε Λ=Ρ.

Ο Εύδοξος απέδειξε πως ο όγκος ενός κώνου είναι ίσος με το ένα τρίτο του όγκου του κυλίνδρου με ίδια βάση και ίδιο ύψος. (Νεγρεπόντης 1999)

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο της εξάντλησης για να υπολογίσει το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου. Υπολόγισε για την παραβολή $y = x^2$ το εμβαδόν κάτω από αυτήν, τον χ άξονα και την ευθεία χ=1. Τον υπολογισμό αυτό σε μία απόδειξη του, τον έκανε εγγράφοντας ορθογώνια (όπως στην ολοκλήρωση Riemann).

Την μέθοδο του Ευδόξου τη χρησιμοποίησε και ο Ευκλείδης στο βιβλίο 'Στοιχεία'. Σε μία πρόταση του χαρακτηριστικά, αναφέρει πως το εμβαδόν κύκλου είναι ανάλογο του τετραγώνου της διαμέτρου. Δηλαδή L=2πr. Η απόδειξη της πρότασης έγινε με τη χρήση της μεθόδου εξάντλησης και γενικά την εφάρμοσε και σε άλλα γεωμετρικά σχήματα (σφαίρα, κύλινδρο, κώνο, πυραμίδα)

Ο Αρχιμήδης επίσης εφάρμοσε τη μέθοδο σε σφαίρα, κώνο αλλά και σε επίπεδες καμπύλες. Έχοντας μία παραβολή αρχίζει και φτιάχνει αρκετά τρίγωνα από αυτή. Υπολογίζει πως το εμβαδόν κάτω από την παραβολή ισούται με τα 4/3 του εμβαδού από ένα τρίγωνο που είναι εγγεγραμμένο στο τόξο. Γέμιζε την περιοχή με όλο και περισσότερα τρίγωνα ώστε να καλύπτεται η περιοχή. Κατέληγε έτσι σε μία γεωμετρική σειρά χωρίς να χρησιμοποιεί σύγκλιση και όρια.

Όπως συμβαίνει με τη μέθοδο της εξάντλησης, ο Αρχιμήδης σταματά μετά από κάποιο πεπερασμένο αριθμό και αρκείται στο ότι μπορεί να κάνει τη διαφορά μεταξύ της προσέγγισης και της σωστής τιμής όσο το δυνατόν μικρότερη, ενώ παραμένει πεπερασμένη. (Χριστιανίδης 2003)

Αρχιμήδης

Έυδοξος

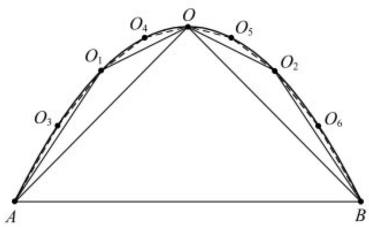
Ακολουθεί το ιστορικό σημείωμα το οποίο υπάρχει στο βιβλίο των μαθηματικών της Γ Λυκείου

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Αρχική συνάρτηση - Αόριστο ολοκλήρωμα

Η αυτονόητη σημασία των προβλημάτων που συνδέονται με τον υπολογισμό εμβαδών και οι ιδιαίτερες δυσκολίες που παρουσιάζουν, οδήγησαν τους μαθηματικούς από την αρχαιότητα στην επινόηση γενικών μεθόδων μέτρησης εμβαδών, ιδιαίτερα επιφανειών που περικλείονται από καμπύλες. Καθοριστική στο ζήτημα αυτό υπήρξε η συμβολή των αρχαίων Ελλήνων και ιδιαίτερα του Αρχιμήδη. Οι ιδέες του Αρχιμήδη πάνω στο πρόβλημα του εμβαδού υπήρξαν η αφετηρία της δημιουργίας του σύγχρονου ολοκληρωτικού λογισμού. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο τρόπος υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας που περικλείεται από ένα τμήμα παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα (παραβολικό χωρίο).

Έστω ένα παραβολικό χωρίο με βάση ΑΒ και κορυφή Ο (το σημείο της παραβολής που έχει τη μέγιστη απόσταση από τη βάση). Ο Αρχιμήδης, φέρνοντας τις χορδές ΟΑ και ΟΒ, δημιουργεί δυο νέα παραβολικά χωρία με βάσεις ΟΑ, ΟΒ και κορυφές O_1 , O_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες της παραβολής, αποδεικνύει ότι για τα εμβαδά των τριών τριγώνων ΟΑΒ, O_1AO και O_2BO ισχύει η σχέση



$$(OAB) = 4[(O_1AO) + (O_2BO)] . \qquad (1)$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία στα νέα παραβολικά χωρία, βρίσκει ότι

$$(O_1AO) = 4[(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] \qquad (2)$$

και

$$(O_2BO) = 4[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] \qquad (3)$$

Με τον τρόπο αυτό, το εμβαδόν Ε του παραβολικού χωρίου μπορεί να προσεγγιστεί ("εξαντληθεί") από ένα άθροισμα εμβαδών εγγεγραμμένων τριγώνων ως εξής :

$$E = (OAB) + [(O_3AO_1) + (O_4O_1O)] + [(OAO_1) + (O_4O_1O)] +$$
$$+[(O_5O_2O) + (O_6BO_2)] + \cdots$$
$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}(O_1AO) + \frac{1}{4}(O_2BO) + \cdots$$
$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \frac{1}{4}[(O_1AO) + (O_2BO)] + \cdots$$

$$= (OAB) + \frac{1}{4}(OAB) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (OAB) + \cdots$$

Όπως είναι φανερό, πρόκειται για το άθροισμα των (απείρων) όρων μιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α = (OAB) και λόγο λ = 1/4. Το άθροισμα αυτό δίνεται σήμερα από το γνωστό τύπο

$$\frac{\alpha}{1-\lambda} = \frac{(OAB)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(OAB) .$$

Το εμβαδόν λοιπόν του παραβολικού χωρίου είναι ίσο με τα 4/3 του εμβαδού του τριγώνου που ορίζουν τα άκρα της βάσης και η κορυφή της παραβολής(*)

Όπως στα προβλήματα ακροτάτων και εφαπτομένων έτσι και στο πρόβλημα του εμβαδού, οι ιδέες των αρχαίων Ελλήνων γνώρισαν παραπέρα εξέλιξη μετά την ανάπτυξη της Άλγεβρας και την εφαρμογή της σε γεωμετρικά προβλήματα. Στη διάρκεια του 17ου αιώνα διαπιστώθηκε ότι ο υπολογισμός των εμβαδών μπορεί να γίνει με μια διαδικασία αντίστροφη προς αυτήν της παραγώγισης.

Η μέθοδος της εξάντλησης είχε δύο μεγάλα μειονεκτήματα. Για κάθε διαφορετικό πρόβλημα, έπρεπε να επινοηθεί διαφορετικός τρόπος σχεδίασης τριγώνων ή κάποιου άλλου πολυγώνου. Το δεύτερο είναι πως η μέθοδος εξάντλησης δεν ήταν αυστηρή για τα σύγχρονα πρότυπα και δεν περιελάβανε την έννοια του ορίου. Χωρίς την έννοια του απείρου, θα ήταν αδύνατο να αυστηροποιήσουν την μέθοδο της εξάντλησης. Ο Αρχιμήδης έφτασε πολύ κοντά στην ανακάλυψη του ολοκληρώματός. Η ελληνική μέθοδος εξάντλησης είναι παρόμοια με την σύγχρονη μέθοδο προσέγγισης περιοχών καμπυλών με απλά σχήματα που θα πρέπει να διδάσκεται στους μαθητές, τουλάχιστον με απλή μορφή. Μετά τους Έλληνες, πέρασαν σχεδόν 2000 χρόνια μέχρι να υιοθετηθεί η έννοια των ολοκληρωμάτων και άλλα 200 χρόνια μέχρι αυτό να αυστηροποιηθεί.

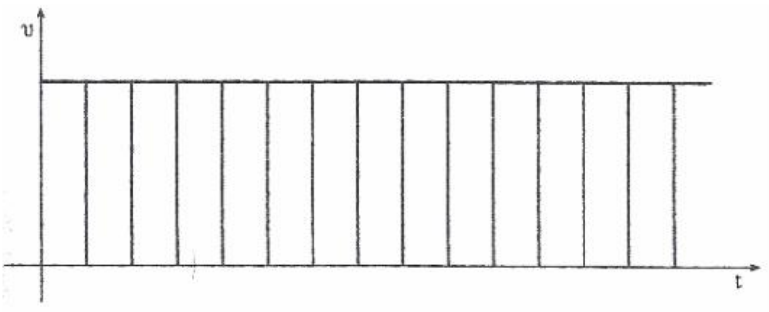
Κεφάλαιο 2

Galileo-Galilei

(Γαλιλαίος , 1564-1642)

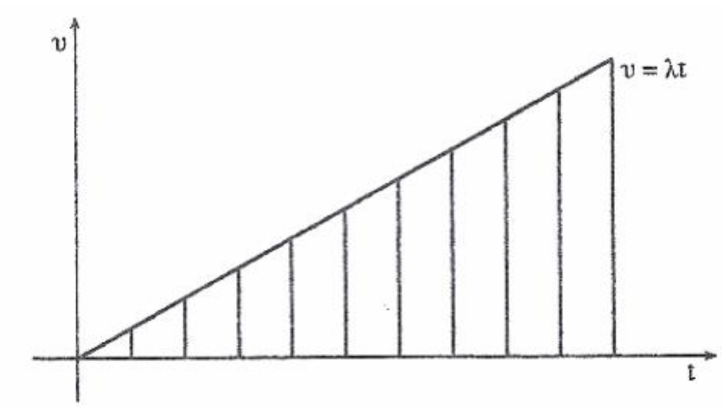
Ο Γαλιλαίος είναι αυτός που διατύπωσε νόμο της πτώσης σωμάτων. Διατύπωσε δηλαδή αυτό που εμείς γνωρίζουμε σήμερα ως $s = \frac{1}{2}\, gt^2$, όχι όμως αλγεβρικά, παρά μόνο ως : *η διανυόμενη απόσταση ενός σώματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου της.* Χρησιμοποιούσε την έννοια της συνάρτησης μέσω συναρτησιακών σχέσεων με χρήση της μεθόδου των αναλογιών.

Εξήγησε την ομοιόμορφη κίνηση, αναφερόμενος στην περίπτωση που η ταχύτητα είναι σταθερή και ισούται με την επιτάχυνση και $s = gt = ut,$ s απόσταση που διανύεται σε χρονικό διάστημα [0,t], τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου με ύψος g και βάση t παριστάνει την απόσταση s.



Σχήμα 1

Θεωρεί ότι κάθε μία από τις καθέτους είναι η ταχύτητα και ότι το άθροισμα αυτών είναι το ορθογώνιο. Υπέθεσε πως η ταχύτητα είναι ανάλογη του χρόνου δηλαδή ότι u=λt. Και έτσι το άθροισμα των καθέτων είναι η συνολική απόσταση που έγινε.



Σχήμα 2

Η εκάστοτε γραμμή, θεωρεί πως είναι η ταχύτητα σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή καθώς και η διανυόμενη απειροστή απόσταση ,πολλαπλασιαζόμενη με ένα αρκετά μικρό διάστημα. Και έτσι καταλήγει στο:

$$s=\frac{1}{2}\,t\lambda t=\frac{1}{2}\lambda t^2$$

Έτσι εκ των πραγμάτων συνέδεσε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$\int_0^t \lambda\chi dx$ με την ποσότητα $\frac{1}{2}gt^2$

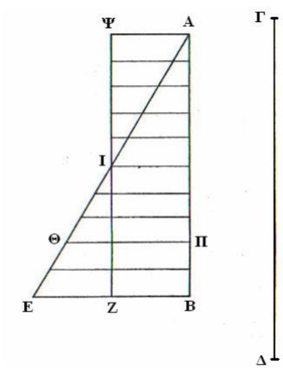
Με την ταχύτητα να είναι υ=λt, η οποία είναι η παράγωγος της s. Αυτή μοιάζει και να είναι και η πρώτη σύνδεση παραγώγου και ολοκληρώματος. (Γιαννακούλιας 2007)

Η γεωμετρική απόδειξη που έγινε από τον Γαλιλαίο για το θεώρημα Μέσης ταχύτητας

ΑΒ είναι ο χρόνος ενός κινητού από θέση ηρεμίας που διανύει ένα διάστημα ΓΔ και κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Υποθέτουμε ότι από το Α έως το Β έχει ταχύτητα ΒΕ. Οι παράλληλες της ΒΕ είναι οι ταχύτητες που έχει το κινητό την κάθε αντίστοιχη χρονική στιγμή. Άρα οι παράλληλες του τριγώνου ΑΒΕ μπορούν να θεωρηθούν οι κινήσεις μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Οι παράλληλες στο ΑΒΖΨ θεωρούνται οι κινήσεις στην ομαλά κίνηση. Αθροίζοντας τις παράλληλες εντός του τριγώνου ΑΒΕ παίρνει το άθροισμα όσων είναι εντός του ΑΒΖΨ με ΒΖ=1/2ΒΕ(επειδή έχουμε ισεμβαδικά σχήματα).Άρα καταλήγει στο συμπέρασμα :

Η μέση ταχύτητα ενός σώματος που κάνει ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση είναι ίση με την ταχύτητα του τη στιγμή $\frac{1}{2}$t.

Δηλαδή η απόσταση στο ΓΔ χρόνο , είναι ίση με την απόσταση που διανύει σε ίσο χρόνο (διατηρώντας σταθερή ταχύτητα) και τιμή ταχύτητας ίση κατά το ήμισυ της τελικής. (Εξαρχάκος 1993)



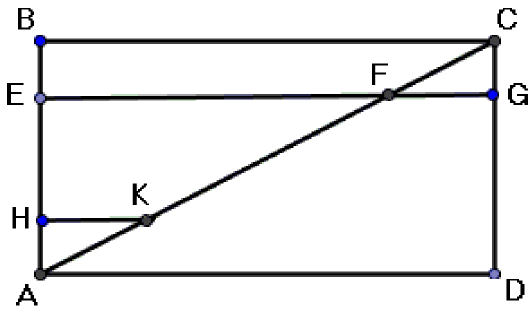
Σχήμα 3

\

Cavalieri (1598-1647)

Μέθοδος των αδιαιρέτων

Σύμφωνα με τον Cavalieri οι επιφάνειες αποτελούνται από παράλληλες ευθείες (άπειρες) οι οποίες ισαπέχουν και τις ονομάζει αδιαίρετες ευθείες. Ομοίως τα στερεά από άπειρα παράλληλα επίπεδα που ισαπέχουν. Η σχέση που έχουν αυτά τα αδιαίρετα είναι πως υπάρχει σύνδεση τους με λόγο και από αυτό τον λόγο βγαίνουν οι σχέσεις των εμβαδών.(Γιαννακούλιας 2007)



Σχήμα 4

Έτσι με τη θεωρία των αδιαιρέτων βρίσκει:

Για την $y = x^n$

το εμβαδόν της περιοχής κάτω από αυτήν σε διάστημα [0,α],

δηλαδή το $\int_0^a x^n dx$

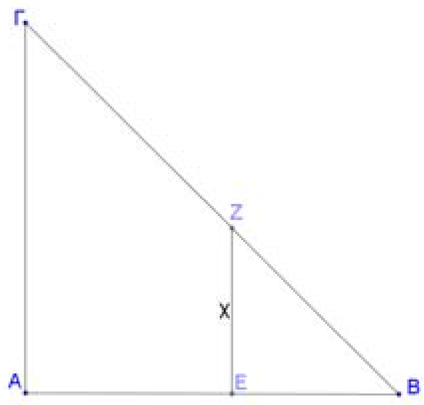
Απέδειξε (Edwards,1979)

(όχι ολοκληρωμένα) ότι

$$\int_0^a x^n dx = \alpha^{n+1}/(n+1)$$

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα)

ΕΖ=χ, ΑΒ=α, ΑΓ=α



Σχήμα 5

ΕΖ παράλληλη με την ΑΓ

Αν το ΕΖ κάνει πορεία από το Β προς το ΑΓ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ αποτελείται από το άθροισμα των ΕΖ

άρα $(AB\Gamma)=\sum_{B}^{A} X$

Ισχύει όμως $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\,\alpha\cdot\alpha=\frac{a^2}{2}$.

Άρα $\sum_B^A \chi=\frac{a^2}{2}$

ή τελικά

$$\int_0^{\alpha} x\,dx=\frac{a^2}{2}$$

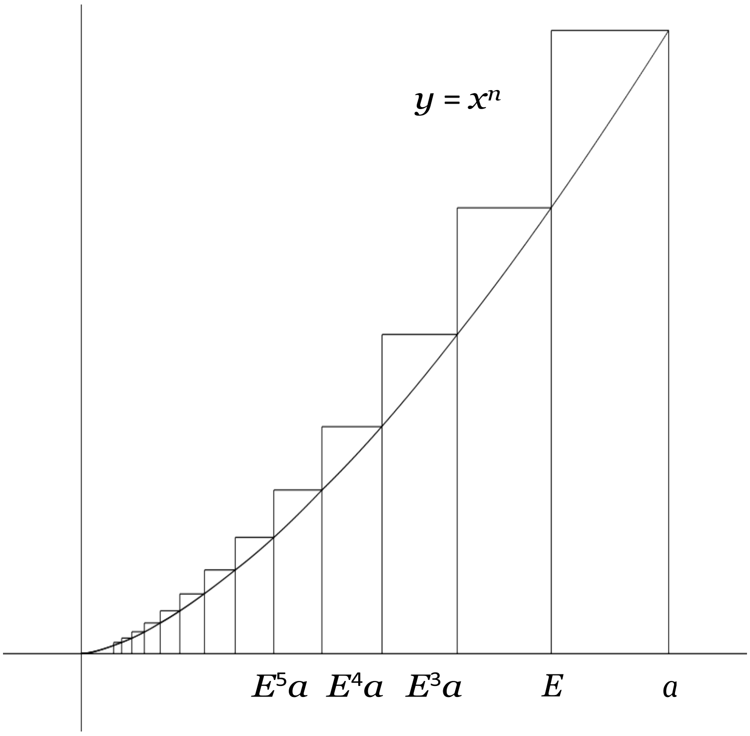
Pierre de Fermat (1601-1665).

Ο Fermat χώρισε το διάστημα [ο, α] σε υποδιαστήματα , τα οποία όμως δεν ήταν όλα ίσα. Διάλεξε έναν οποιοδήποτε αριθμό Ε μικρότερο του 1 και χώρισε το [ο,α] έτσι ώστε το τελευταίο υποδιάστημα να είναι [Εα,α], το προτελευταίο $[E^2a, Ea]$, το αμέσως προηγούμενο $[E^3a, E^2a]$ και τα λοιπά. Υπάρχουν άπειρα υποδιαστήματα. Το k^{th} υπό διάστημα από δεξιά είναι $[E^{k+1}a, E^k a]$, με μήκος $[E^k a - E^{k+1}a]$Σε κάθε υπόδιάστημα $[E^{k+1}a, E^k a]$, βάζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μικρότερο ύψος που περικλείει την περιοχή κάτω από την $y = x^n$ πάνω από το υπόδιάστημα. Αυτό το ύψος εμφανίζεται στα δεξιά στο $E^k a$ έτσι ώστε το ύψος να είναι $(E^k a)^n$. Τότε το ορθογώνιο έχει εμβαδόν

$$(E^k a)^n = (E^k a - E^{k+1}a).$$

Έτσι ο Fermat υπολόγισε ότι το εμβαδόν από όλη την περιοχή είναι.

$$\sum E^{(n+1)k} \quad a^{n+1}\,(1-E)$$



Σχήμα 6

Αυτό είναι μια γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο $a^{n+1}(1-E)$και λόγο E^{n+1}και έτσι το άθροισμα είναι ίσο με

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} = a^{n+1}\frac{1-E}{1-E^{n+1}}$$

Όταν το Ε τείνει στο 1 τότε το ορθογώνιο πλησιάζει την περιοχή κάτω από την καμπύλη. Άρα πρέπει να δούμε που τείνει το

$$\frac{1-E}{1-E^{n+1}}$$

καθώς το Ε τείνει στο 1.

Καθώς το Ε τείνει στο 1 το

$$\frac{1-E}{1-E^{n+1}}$$

Μπορει να γραφεί και ως

$$\frac{1}{1+E+E^2+\cdots+E^n} \to \frac{1}{n+1}$$

Ο Fermat Έδειξε επίσης ότι όταν το n είναι θετικός ρητός $\frac{p}{q}$ τότε το όριο είναι πάλι:

$$\frac{1}{n+1}$$

Άρα το εμβαδόν κάτω της καμπύλης υπολογίζεται

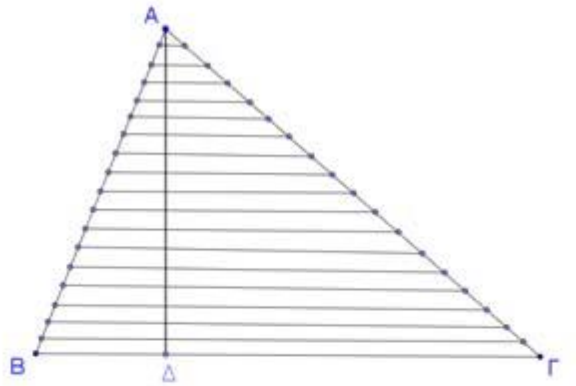
$$\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$$

(Carl B.Boyer Fermat s integration of z^n 1945)

Wallis(1616–1703)

Ένα άλλο μεγάλο όνομα που χρησιμοποίησε τη μέθοδο αδιαιρέτων του Cavalieri ήταν ο Wallis. Όμως η διαφορά ήταν πως ο Wallis προσπάθησε να προσδώσει μία αυστηρότητα στη μέθοδο εισάγοντας την αριθμητική του απείρου. Παρόλο που η προσπάθεια του χαρακτηρίστηκε προφανής, χωρίς να οδηγεί σε αυστηρές μαθηματικές αποδείξεις, η θεωρία των αδιαιρέτων και η χρήση της αριθμητικής του απείρου ήταν ένα πρώιμο στάδιο της αυστηροποίησης της θεωρίας της ολοκλήρωσης.

Αρχικά θεωρεί πως τα παραλληλόγραμμα με πολύ μικρό ύψος (απείρως μικρό), δεν διαφέρουν από μία γραμμή. Τις απείρως πολλές γραμμές τις αναφέρει με το ∞. Ακολουθεί το παράδειγμα υπολογισμού εμβαδού ενός τριγώνου από τον Wallis.



Σχήμα 7

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ. Όπως βλέπουμε και στο σχήμα ,διαμερίζει το τρίγωνο σε άπειρο πλήθος παραλληλογράμμων. Το κάθε παραλληλόγραμμο έχει ύψος h=$\frac{1}{\infty}$υ(απείρως μικρό ύψος). Το κάθε ένα από αυτά το αντιμετωπίζει ως μία γραμμή. Το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου είναι όρος αριθμητικής προόδου, με πρώτο όρο το 0 και τελευταίο όρο το εμβαδόν αυτού στη βάση. (Η φορά είναι από το Α προς τη ΒΓ)

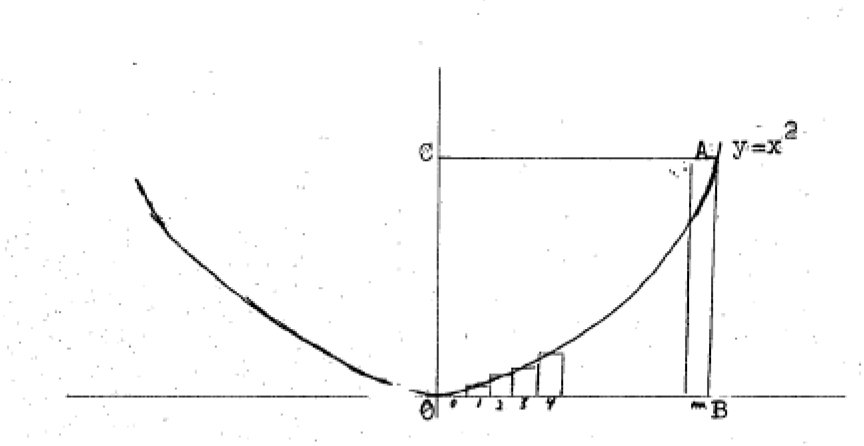
$$a_1 \;= 0, a_\nu = \alpha h$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων είναι:

$$S_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\nu = \frac{1}{2}\alpha h\nu$$

Οπότε βάζοντας όπου $h = \frac{1}{\infty}\upsilon$

έχουμε $E = \frac{1}{2}\alpha\frac{1}{\infty}\upsilon\infty = \frac{1}{2}\alpha\upsilon$



Σχήμα 8

Ο Wallis επίσης ενδιαφερόταν να συγκρίνει το εμβαδόν κάτω της $y = x^n$ με το εμβαδόν του OBAC (παραπάνω σχήμα). Ξεκίνησε να υποδιαιρεί το διάστημα OB σε m+1 ίσα υποδιαστήματα και τα γέμιζε με κατάλληλα ορθογώνια με επιλεγμένο ύψος τέτοιο ώστε η συνολική περιοχή να είναι $0^2+1^2+2^2+\ldots m^2$. Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι (m+1)m. Ετσι η αναλογία των περιοχών είναι :

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots m^2}{m^2(m+1)}$$

Θέτοντας για:

m=1 $\quad \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

m=2 $\quad \frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

m=3 $\quad \frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$

Παρατήρησε πως καθώς αυξάνεται το m, το κλάσμα τείνει στο 1/3.Αν το m τείνει στο άπειρο τότε το κλάσμα προσεγγίζεται στην τιμή 1/3.

Το αποτέλεσμα που βρήκε ,είναι με σύγχρονο συμβολισμό το

$$\int_0^{\alpha} \chi^2 = \frac{\alpha^3}{3}$$

Με παρόμοια διαδικασία, για μεγαλύτερες δυνάμεις, κατέληγε ότι $\int_0^{\alpha} \chi^m = \frac{a^{m+1}}{m+1}$

Ο Wallis και ο Fermat ήταν πάρα πολύ κοντά στον σημερινό ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. (Edwards C.H 1979 The Historical Development of the Calculus, Springerverlag New York)

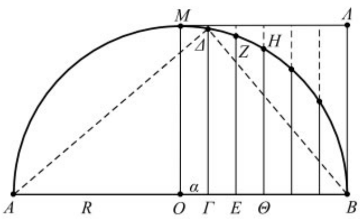
Ιστορικό σημείωμα

Το οποίο κάνει αναφορά στον Wallis στο βιβλίο μαθηματικών της Γ λυκείου

Ορισμένο ολοκλήρωμα - Η έννοια του εμβαδού

Χαρακτηριστικό παράδειγμα της νέας μεθόδου αντιμετώπισης προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών κατά τον 17ο αιώνα αποτελεί ο τρόπος με τον οποίο ο J. Wallis ανακάλυψε το 1655 μια νέα αναλυτική έκφραση για το εμβαδόν του κύκλου και τον αριθμό π.

Ο Wallis θεώρησε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R, χώρισε την ακτίνα του ΟΒ σε ίσα τμήματα μήκους α και από κάθε σημείο διαίρεσης ύψωσε μια κάθετη (βλ. σχήμα). Όπως είναι γνωστό από την Ευκλείδεια γεωμετρία, κάθε μια από αυτές τις κάθετες είναι μέση ανάλογη των δύο τμημάτων στα οποία χωρίζει τη διάμετρο ΑΒ. Π.χ., για την κάθετη ΓΔ, που είναι ύψος προς την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, ισχύει



$$Γ Δ^2 = AΓ \cdot ΓB = (R+\alpha)(R-\alpha) = R^2 - \alpha^2$$

δηλ. $ΓΔ = \sqrt{R^2-\alpha^2}$. Όμοια προκύπτει $EZ = \sqrt{R^2-4\alpha^2}$, $HΘ = \sqrt{R^2-9\alpha^2}$, κ.ο.κ. Αφού υπολόγισε με τον τρόπο αυτό όλες τις (πεπερασμένου πλήθους) κάθετες που "εξαντλούν" το τεταρτημόριο ΟΜΒ, ο Wallis πραγματοποίησε μια "μετάβαση στο άπειρο" με τον εξής συλλογισμό:

"Ο λόγος του αθροίσματος όλων αυτών των καθέτων προς το άθροισμα των μεγίστων τιμών τους (δηλ. των ακτίνων) είναι ίδιος με το λόγο του τεταρτημορίου (το οποίο "εξαντλούν" αυτές οι κάθετες) προς το τετράγωνο με πλευρά την ακτίνα (δηλ. το τετράγωνο ΟΜΛΒ, το οποίο "εξαντλούν" οι ακτίνες-προεκτάσεις των καθέτων)".

Διατυπωμένο σε συμβολική γλώσσα, το συμπέρασμα αυτό του Wallis γίνεται

$$\frac{\sqrt{R^2-0^2}+\sqrt{R^2-\alpha^2}+\sqrt{R^2-4\alpha^2}+\cdots}{R+R+R+\cdots} = \frac{\text{τεταρτημόριο}(OMB)}{\text{τετράγωνο}(OMΛB)} = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2}{R^2} = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

Αυτό το μίγμα Γεωμετρίας, Άλγεβρας και "πρωτόγονου" απειροστικού λογισμού, ισοδυναμεί ουσιαστικά με τη σύγχρονη σχέση

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε R = 1 (δηλ. το μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$) και διαιρέσουμε την ακτίνα (δηλ. το διάστημα [0,1] σε ν ίσα τμήματα μήκους 1/ν το καθένα , τότε το πρώτο μέλος της προηγούμενης ισότητας (1) γίνεται

$$\frac{1}{\nu}\left[\sqrt{1-\left(\frac{0}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2}\right].$$

Αυτό όμως όπως θα δούμε παρακάτω είναι το κατώτερο άθροισμα της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (που προκύπτει από την εξίσωση του κύκλου), ως προς την προηγούμενη διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$, και το όριό του όταν $\nu \to +\infty$, είναι το

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Isaac Newton

Ο Newton έδειξε ότι η περιοχή κάτω από μια καμπύλη, μπορούσε να υπολογιστεί, αλλά όχι με παρόμοιες διαδικασίες που έκαναν οι προγενέστεροι του (με γέμισμα της περιοχής με τρίγωνα ή ορθογώνια). Ο Newton υπολόγισε το εμβαδόν με μια διαδικασία, η οποία βασίζεται στην αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης.

Πήρε μια καμπύλη με το εμβαδόν κάτω από αυτή να είναι

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right)ax^{\frac{m+n}{n}})$$

Αν το ο αντιπροσωπεύει μια απειροελάχιστη αύξηση της τετμημένης, τότε η επαυξημένη περιοχή θα είναι

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right)a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

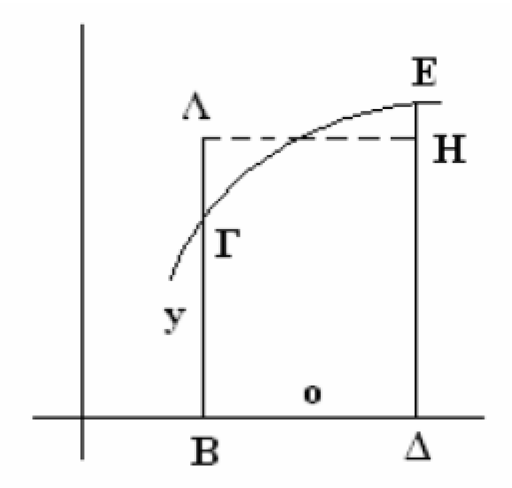
και με τη χρήση του διώνυμου θεωρήματος ,ως προς ο, καταλήγει ότι η καμπύλη είναι

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Έτσι αν το εμβαδόν είναι $z = (\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$ τότε:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

αντιστρόφως αν η καμπύλη είναι η $y = ax^{\frac{m}{n}}$, τότε το εμβαδόν είναι $z = (\frac{n}{m+n})ax^{\frac{m+n}{n}}$. Άρα για να βρει το εμβαδόν μπορούσε να δουλέψει αντίστροφα από την διαφόριση.(An introduction to the history of Mathematics.New York Rinehart,1963)



Σχήμα 9

Αν για παράδειγμα πάρουμε το εμβαδόν του παραπάνω σχήματος(ΒΔΗΛ) να ισούται με x^3 ,η βάση να είναι ο και το ύψος $ΒΛ = υ$. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη είναι το ΒΔΕΓ, με την τιμή του να είναι επίσης χ^3. Αν μειώσουμε άπειρα τη ΒΔ ,τότε το ο γίνεται 0 και το αντίστοιχο ύψος υ=z. Έτσι θα πάρουμε μία αύξηση του εμβαδού κατά zo και άρα

$$Zo = (E + zo) - E = (x + o)^3 - x^3 = 3x^2o + 3xo^2 + o^3$$

Αν διαιρέσουμε με ο τότε

$$\frac{Zo}{o} = 3x^2 + 3xo + o^2$$

ή $$y = 3x^2$$

(Edwards 1979)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Ο Leibniz δουλεύοντας την ίδια χρονική περίοδο με τον Newton, ενδιαφερόταν στην ανάπτυξη κανόνων με αθροίσματα. Εισήγαγε τον συμβολισμό $\int \chi$ και αργότερα τον $\int x dx$ για να παρουσιάσει το άθροισμα από όλες τις τιμές των μεγεθών του χ ή του ολοκληρώματος του χ, μια ονομασία που προτάθηκε από τους αδερφούς Bernoulli.

Ο Leibniz κατέληξε στο γεγονός πως τα αθροίσματα και η διαφόριση είναι αντίστροφες διαδικασίες. Για παράδειγμα παρατήρησε πως η παράγωγος του x^n είναι nx^{n-1}. Επίσης ότι το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα του x^n είναι $\frac{\chi^{n+1}}{n+1}$. Όρισε:

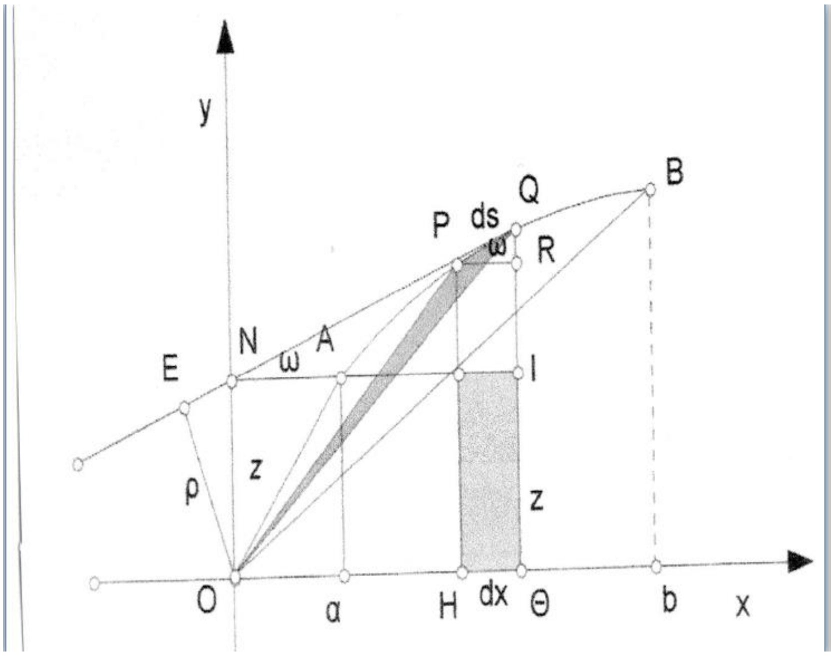
«εφαπτομένη μιας καμπύλης είναι η ευθεία η οποία συνδέει δύο διαδοχικά σημεία της καμπύλης τα οποία απέχουν μεταξύ τους απείρως μικρή απόσταση».

Για τον τετραγωνισμό επίπεδων σχημάτων ανέπτυξε το θεώρημα μετασχηματισμού.

Θεώρημα μετασχηματισμού

Το εμβαδόν μεταξύ της φ(χ)=y ,του άξονα χ και των ευθειών χ=α και χ=β είναι

$$\int_a^b \mathrm{y}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\left([\mathrm{xy}]_a{}^b+\int_a^b \mathrm{zdx}\right) z = y - x\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$$



Σχήμα 10

Αρχικά, έστω το ΟΕ να είναι κάθετο στην εφαπτομένη του τόξου ds(απείρως μικρό τόξο)

OEN≈PQR ,από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε $\frac{dx}{ds}=\frac{p}{z}$

Με $z = y - x^{*}\frac{dy}{dx}$

Και $(OPQ)\alpha = \frac{1}{2}pds = \frac{1}{2}dxz$

Αν πάρουμε την περιοχή ΟΑΒ ,έτσι ώστε να διαμερίζεται σε πολύ μικρά τριγωνάκια τότε

$$(ABO)\alpha = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{b} zdx$$

$$\int_a^b y dx = \frac{1}{2} f(b)b - \frac{1}{2} f(a)a + a(OBA) = \frac{1}{2} [yx]_a^b + a(BAO)$$

Άρα $\int_\alpha^b dx = \frac{1}{2} (\int_a^b z dx + [yx]_a^b)$

Που είναι και η σχέση του θεωρήματος μετασχηματισμού

Με το έργο του Newton και του Leibniz,η ιδέα του ολοκληρώματος είχε αλλάξει. Δεν συνδεόταν πλέον με την ιδέα του αθροίσματος. Από την εποχή τους έως και τις αρχές του δέκατου ενάτου αιώνα, η ολοκλήρωση ήταν η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Ο Newton είχε ορίσει το ολοκλήρωμα ως το αντίστροφο της ροής ή της παραγώγου, ενώ ο Leibniz χρησιμοποίησε στην πράξη την ιδέα της αντιπαραγώγου. Σε περαιτέρω ανάπτυξη του θέματος, ο Bernoulli και ο Euler τόνισαν επίσης το ολοκλήρωμα ως το αντίστροφο του διαφορικού. Ο Euler, στην πραγματικότητα, όρισε τον ολοκληρωτικό λογισμό ως τη μέθοδο εύρεσης από μια δεδομένη σχέση παραγώγων, των ίδιων των ποσοτήτων. Χρησιμοποίησε το άθροισμα μόνο ως μέσο προσέγγισης της τιμής του ολοκληρώματος.

Leibniz και Newton

Ο συμβολισμός του Newton για την παράγωγο και το ολοκλήρωμα, συνέβαλε στην ουσία του απειροστικού λογισμού τόσο που ο συμβολισμός και οι έννοιες ήταν αδύνατο να διαχωριστούν. Δεν ενδιαφερόταν ιδιαίτερα για τα ζητήματα του συμβολισμού: η χρησιμότητα και η συνέπεια του συμβολισμού δεν ήταν ιδιαίτερα σημαντικά θέματα γι’ αυτόν. Σκοπός του Leibniz ήταν πάντα να διαμορφώσει γενικές μεθόδους και αλγορίθμους που θα ενοποιούσαν την αντιμετώπιση διαφορετικών προβλημάτων. Οι γενικές μέθοδοι εμφανίζονται ασφαλώς σε ολόκληρο το έργο του Newton, είναι όμως προφανές ότι τον ενθουσίαζε περισσότερο το να λύνει συγκεκριμένα προβλήματα. Η διαφορά βρίσκεται στην έμφαση.

ο Leibniz τονίζει τις γενικές τεχνικές που εφαρμόζονται στα προβλήματα.

Ο Newton τονίζει τη σημασία της εφαρμογής γενικεύσιμων αποτελεσμάτων. Οι διακριτές άπειρες διαφορές στις γεωμετρικές μεταβλητές έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στο έργο του Leibniz, ενώ η βασική ιδέα του Newton ήταν η ροή και ο ρυθμός μεταβολής με το χρόνο, που βασιζόταν σε a priori ιδέες για τη συνεχή κίνηση. Το αποτέλεσμα αυτής της διαφοράς είναι ότι στο συμβολισμό του Leibniz, η έννοια του ορίου, που μπορεί να διακριθεί ξεκάθαρα στην αφήγηση του Νεύτωνα, είναι επιτακτική.

Το ολοκλήρωμα του Newton, είναι επί της ουσίας ένα αόριστο ολοκλήρωμα, ένα «ρευστό» που πρέπει να προσδιοριστεί μέσω της ροής του. Λύνει προβλήματα εμβαδών και όγκων δίνοντας τα μια ερμηνεία αντίστροφων προβλημάτων ρυθμού μεταβολής. Το ολοκλήρωμα του Leibniz, σε αντιδιαστολή, είναι ένα άπειρο άθροισμα διαφορικών. Φυσικά, τόσο ο ένας όσο και ο άλλος, υπολογίζουν τα ολοκληρώματά τους μέσω της αντιπαραγώγισης. Βασική συμβολή και των δύο είναι το ότι εκμεταλλεύτηκαν για τους υπολογισμούς την αντίστροφη σχέση ανάμεσα στα προβλήματα του τετραγωνισμού και τα προβλήματα εφαπτόμενων.

Ο Leibniz δεν ασχολήθηκε ιδιαίτερα με τις άπειρες σειρές παρόλο που, όπως είδαμε, έπαιξαν ρόλο ως κίνητρο για τις αρχικές του αναζητήσεις. Ο Newton ανέπτυσσε συστηματικά τις συναρτήσεις σαν δυναμοσειρές, και θεωρούσε ότι αυτό το «εργαλείο» είναι αναπόσπαστο μέρος της αναλυτικής του «μεθόδου». Για παράδειγμα, για τον Newton είχε σημασία μεγάλη να μπορεί να υπολογίσει ένα ολοκλήρωμα ή να λύσει μια διαφορική εξίσωση εκφράζοντας τη λύση σαν μια άπειρη σειρά, ενώ ο Leibniz προτιμούσε πάντα να εκφράζει τη λύση σε «κλειστή μορφή».(Katz 2013)

Κεφάλαιο 3

Augustin-Louis Cauchy

Ο Cauchy πρότεινε έναν πιο γενικό ορισμό μιας συνάρτησης και αποκατέστησε την ολοκλήρωση σε μια κύρια ιδέα και όχι σε μια δευτερεύουσα λειτουργία.

Αρχικά εξέτασε την έννοια της συνάρτησης. Ξεκίνησε ορίζοντας μια ανεξάρτητη μεταβλητή.

Όταν τα μεταβλητά μεγέθη συσχετίζονται με τέτοιο τρόπο που να δίνεται ένα από αυτά, μπορούμε να συμπεράνουμε την τιμή όλων των άλλων, η πρώτη ποσότητα ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή.

ο ορισμός της συνάρτησης άμεσα

..και οι άλλες ποσότητες, που μπορούν να εκφραστούν μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής, ονομάζονται συναρτήσεις αυτής της μεταβλητής

Ομοίως, ορίστηκαν συναρτήσεις περισσότερων της μιας μεταβλητής. Ωστόσο, ο Cauchy δεν σκέφτηκε με όρους της σύγχρονης έννοιας της συνάρτησης, επειδή σε μεταγενέστερη εργασία του πρότεινε, ότι σκέφτηκε ότι οι μεταβλητές σχετίζονται, όχι με κάποιον αυθαίρετο κανόνα, αλλά με μια εξίσωση.

Ο Cauchy θεώρησε στη συνέχεια έναν ειδικό τύπο συνάρτησης, τον οποίο ονόμασε συνεχή και τον οποίο όρισε ως εξής:

Όταν η συνάρτηση f(x) έχει μοναδικές και πεπερασμένες τιμές για όλα τα x μεταξύ δύο δεδομένων ορίων, και η διαφορά $f(x+i)-f(x)$ είναι μια απείρως μικρή ποσότητα, τότε θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η συνάρτηση f(x) είναι μια συνεχής συνάρτηση του x μεταξύ των δεδομένων ορίων.

Οι βάσεις τώρα έχουν τεθεί για τον ορισμό του ολοκληρώματος. Περιορίστηκε αυθαίρετα ορίζοντας το ολοκλήρωμα μόνο για συνεχείς συναρτήσεις, πιθανώς επειδή οι συνεχείς συναρτήσεις ή εκείνες με πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών ήταν οι μόνες συναρτήσεις που, εκείνη την εποχή, θεωρούνταν σημαντικές. Ένα περίγραμμα της διαδικασίας του έχει ως εξής:

Έστω f(x) μια συνεχής συνάρτηση ανάμεσα στα όρια $\chi=\chi_0$ και $\chi = X$. Έστω $x_{0,}\, x_1, x_2, \dots x_\nu = X$ μια διαμέριση του $[\chi_0,X]$ και το άθροισμα $S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)\dots.+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$. Τότε το άθροισμα S προσεγγίζει ένα ορισμένο όριο καθώς η διαφορά x_i-x_{i-1} γίνεται απείρως μικρή. Αυτό το όριο εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση f(x) οι τιμές χ_0 και X ονομάζονται ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) και ο συμβολισμός του είναι $\int_{\chi_0}^{X} f(x)dx$.

Είναι ενδιαφέρον να προσέξουμε ότι του Cauchy η απόδειξη της ύπαρξης του ολοκληρώματος είναι ανολοκλήρωτη καθώς αγνόησε την ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης.

Ο Cauchy στη συνέχεια απέδειξε τις τυπικές αλγεβρικές ιδιότητες του ολοκληρώματος. Επίσης προφανώς έδωσε την πρώτη αυστηρή απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση και η $F(x) = \int_{\chi_0}^{X} f(x)dx$ τότε F'(x)=f(x). Επέκτεινε την ολοκλήρωση σε μια συγκεκριμένη κατηγορία μη φραγμένων συναρτήσεων. Ακολουθεί μια περίληψη της διαδικασίας:

Αν η συνάρτηση f(x) γίνει άπειρη μεταξύ $x=x_0$ και x=X στα σημεία (πεπερασμένος αριθμός) $\chi_1, \chi_2 \dots \chi_m$ τότε το ολοκλήρωμα ορίζεται ως

$$\int_{\chi_0}^{X} f(x)dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{\chi_0}^{\chi_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx+\int_{x_1+\varepsilon\gamma_1}^{\chi_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx\ldots+\int_{\chi_m+\varepsilon\gamma_m}^{X} f(x)dx$$

Με την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει, όπου $\mu_1, \gamma_1, \mu_2 \dots \mu_m, \gamma_m$ και είναι αυθαίρετες θετικές σταθερές. Αν το όριο της ολοκλήρωσης είναι άπειρο τότε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ορίζεται ως:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{1/\varepsilon u}^{\chi_1-\varepsilon u_1} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon\gamma_1}^{\chi_2-\mu u_2\varepsilon} f(x)dx\ldots+$$

$$\int_{\chi_m+\varepsilon\gamma_m}^{1/\varepsilon\gamma} f(x)dx$$

Υπό την προϋπόθεση πως το όριο υπάρχει και u,γ είναι αυθαίρετες θετικές σταθερές.

Έτσι το σύμβολο ∫ είναι για πρώτη φορά ,όριο αθροίσματος και όχι άθροισμα. (Oeuvres Completes, 2nd series, vol.4. Paris Gauthier-Villars,1899)

Bernhard Riemann

Σύμφωνα με τον C.B.Boyer: Ό Riemann είχε παρουσιάσει μια συνάρτηση f(x), η οποία είναι ασυνεχής σε απείρως πολλά σημεία ενός διαστήματος, και παρόλα' αυτά, υπάρχει το ολοκλήρωμα της και ορίζει μία συνεχή συνάρτηση F(x) , η οποία δεν έχει παράγωγο στα εν λόγω σημεία. Η συνάρτηση του Riemann κατά μία έννοια είναι λιγότερο παθολογική από αυτές των Bolzano και Weierstrass, αλλά ξεκαθάρισε το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα χρειαζόταν έναν πιο προσεκτικό ορισμό από αυτόν του Cauchy, ο οποίος είχε κυρίως οδηγηθεί από τη γεωμετρική αίσθηση του εμβαδού που περικλείεται από μια καμπύλη. Ο σημερινός ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος σε ένα διάστημα, συναρτήσει των άνω και κάτω αθροισμάτων ορίζει το γνωστό ολοκλήρωμα Riemann, προς τιμή του ανθρώπου που καθόρισε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες, ώστε μια φραγμένη συνάρτηση να είναι ολοκληρώσιμη. Για παράδειγμα, η συνάρτηση Dirichlet δεν έχει ολοκλήρωμα Riemann σε κανένα διάστημα. Τον επόμενο αιώνα, πολλοί πρότειναν γενικότερους *ορισμούς του ολοκληρώματος, με ασθενέστερες συνθήκες της συνάρτησης, αλλά ο ορισμός του ολοκληρώματος που χρησιμοποιούμε περισσότερο στα μαθήματα του απειροστικού λογισμού, σήμερα, είναι αυτός του Riemann.*

Ο Riemann διαμερίζει ένα διάστημα [α,b] και έστω $x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n-1}$ μια αύξουσα ακολουθία.

$$\delta_{1=}\chi_1 - \alpha, \delta_2 = \chi_2 - \chi_{1,\ldots}\delta_n = b - x_{n-1}$$

Έστω το άθροισμα

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots . \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

Με ε_i κατάλληλα θετικά κλάσματα. Η τιμή του αθροίσματος εξαρτάται από την επιλογή των δ_i και των ε_i.

Αν αυτό το άθροισμα έχει την ιδιότητα να προσεγγίζει έναν πεπερασμένο αριθμό Α καθώς το δ_ι πλησιάζει το 0, ανεξάρτητα από την επιλογή των δ_ικαι ε_ι, η τιμή Α είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(x)dx$. Αν όμως αυτό το άθροισμα δεν έχει την προηγούμενη ιδιότητα τότε το $\int_\alpha^b f(x)dx$ δεν έχει νόημα.

Η εργασία του Riemann εισήγαγε την ιδιότητα της ολοκλήρωσης μιας συνάρτησης και διεύρυνε την κατηγορία των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων για να συμπεριλάβει πολλές ασυνεχείς.

Ο Riemann παίρνει $\chi_i' = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ σε ένα διάστημα $[x_{i-1,}x_i]$ και θεωρεί το:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \quad \sum_{\iota=1}^n f(X'_I)(X_I - X_{i-1})$$

Όπου δ να είναι από τα μήκη δ_iτης διαμέρισης, το μεγαλύτερο.

Δηλαδή γενίκευσε του Cauchy τον ορισμό:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0} \sum_{\iota=1}^n f(X_{i-1})(X_i - X_{i-1})$$

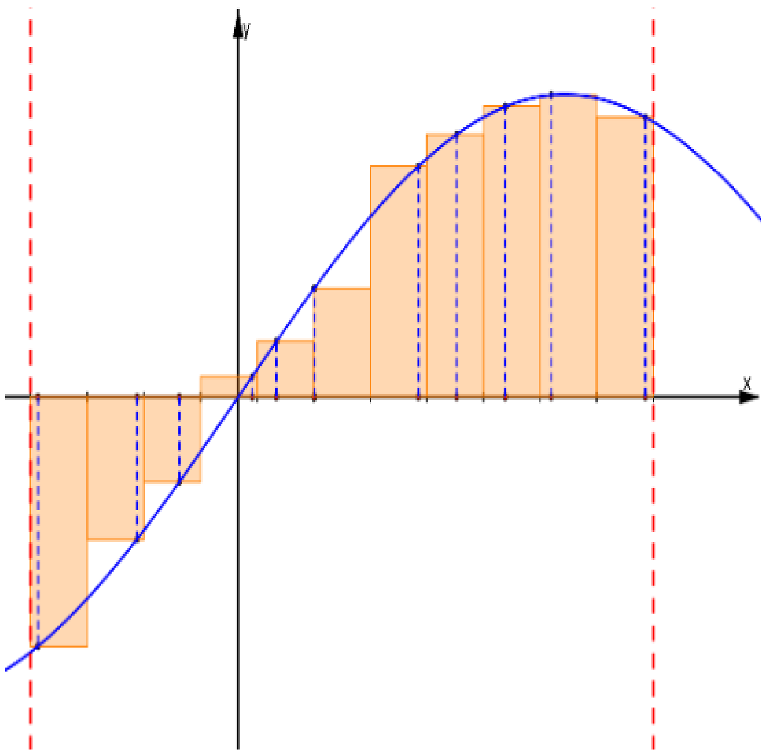
Ο Riemann αντικατέστησε το x_{i-1} που είχε χρησιμοποιήσει ο Cauchy με το το τυχαίο x_i' από το $[x_{i-1,} x_i]$, και θεωρεί (αν υπάρχει το ολοκλήρωμα) πως αυτά τα αθροίσματα πλησιάζουν μια τιμή, όταν το δ τείνει στο 0, ανεξαρτήτως της επιλογής των x_i.

$$\Delta\chi f(\xi_1) + \Delta\chi f(\xi_2) + \cdots \Delta\chi f(\xi_\nu) = \sum_{\iota=1}^{\nu} f(\xi_\iota)\Delta\chi = S_\nu$$

Και στη συνέχεια το όριο

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi\kappa)\Delta\chi\right) = \int_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

το οποίο είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα. (Boyer,C.B, 1959)



Σχήμα 11

Σχήμα 15 .Η έννοια της διαμέρισης και της επιλογής τυχαίου σημείου.

Αν η f συνεχής στο [α,β] και πάρουμε τη διαμέριση $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..[x_{\nu-1,}\chi_\nu]$ και στο κάθε υποδιάστημα επιλέξουμε ένα ξ_κ για κ=1,2,..ν. Τότε στα ορθογώνια που σχηματίζονται το αντίστοιχο ύψος του κάθε ορθογωνίου θα είναι $f(\xi_\kappa)$. Παίρνοντας το άθροισμα

$$\Delta\chi f(\xi_1) + \Delta\chi f(\xi_2) + \cdots \Delta\chi f(\xi_\nu) = \sum_{\iota=1}^{\nu} f(\xi_\iota)\Delta\chi = S_\nu$$

Και στη συνέχεια το όριο

$$\lim_{\nu\to\infty}(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi\kappa)\Delta\chi) = \int_\alpha^b f(x)dx$$

το οποίο είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα

Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann μας λέει πως ένα ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(x)dx$ υπάρχει, μόνο αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο [α,b]

Επίσης μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν:

- Αν η f (x) είναι συνεχής στο [a, b], τότε είναι ολοκληρώσιμή στο [a, b]
- Αν η f (x) είναι μονότονη στο [a, b], τότε είναι ολοκληρώσιμη στο [a, b]
- Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο [a, b], τότε είναι ολοκληρώσιμη
στο [a, b]

Το Ολοκλήρωμα Lebesgue

Το 1902 ο Henri Lebesgue εισήγαγε νέες ιδέες για το μέτρο και την ολοκλήρωση. Ενδιαφερόταν για τα προβλήματα εύρεσης μιας συνάρτησης γνωρίζοντας την παράγωγο της. Εισήγαγε μια νέα προσέγγιση στα μέτρα και μια πιο γενική κατηγορία μετρήσιμων συνόλων. Αυτές οι ιδέες οδήγησαν απευθείας στον ορισμό του ολοκληρώματος για μια ευρύτερη κατηγορία συναρτήσεων. Το ολοκλήρωμα του διέθετε ορισμένες σημαντικές νέες ιδιότητες και χρησιμοποιήθηκε για τη λύση του αρχικού προβλήματος, της εύρεσης μιας συνάρτησης γνωρίζοντας την παράγωγό της.

Ο Lebesgue ξεκίνησε την εργασία του σχετικά με τα μέτρα ,θεωρώντας τους όρους που ο Borel είχε προφανώς προτείνει για ένα μέτρο και τις συνθήκες που πρέπει να πληρεί, ενώ το μέτρο περιοριζόταν σε φραγμένα σύνολα.

Αντιστοιχίζεται σε κάθε φραγμένο σύνολο ένας αριθμός, θετικός ή μηδέν, ο οποίος ονομάζεται μέτρο και ο οποίος θα ικανοποιεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

Α)υπάρχουν κάποια σύνολα για τα οποία το μέτρο δεν είναι μηδέν

Β)δύο ίσα σύνολα έχουν το ίδιο μέτρο

Γ)το μέτρο του αθροίσματος ενός πεπερασμένου ή μετρήσιμου αριθμού ασύνδετων συνόλων είναι το άθροισμα των συνόλων

Για να επιτύχει αυτόν τον στόχο ο Lebesgue χρησιμοποίησε μια πολύ απλούστερη και, όπως αποδείχθηκε, πιο γενική προσέγγιση από ό,τι είχε ο Borel. Τροποποίησε τη διαδικασία του Jordan προσεγγίζοντας σύνολα με μετρήσιμα σύνολα και όχι απλώς πεπερασμένα. Αυτή η ιδέα είναι η βασική συμβολή του Lebesgue στη θεωρία μέτρου.

Θεώρησε τα φραγμένα σύνολα Ε πρώτα στην πραγματική ευθεία και κάλυψε το Ε με ένα μετρήσιμο αριθμό διαστημάτων. Αυτά τα διαστήματα σχημάτισαν ένα σύνολο E_1. Όρισε το μέτρο ενός διαστήματος ως το μήκος του και όρισε το $m(E_1)$ ως το άθροισμα των μηκών του. Στη συνέχεια όρισε το εξωτερικό μέτρο του E, $m_e(E)$, ως το inf των αριθμών $m(E_1)$ που λαμβάνει τα πιθανά μετρήσιμα καλύμματα ανά διαστήματα. Για να πάρει το εσωτερικό μέτρο του E θεώρησε I να αντιπροσωπεύει ένα διάστημα που περιέχει το E ,και όρισε το εσωτερικό μέτρο $m_i(E)$ με

$$m_i(E) = M(I) - m_e(I - E)$$

Τα πιο σημαντικά σύνολα που εξετάστηκαν ήταν εκείνα για τα οποία τα δύο μέτρα ήταν ίσα.

«ονομάζουμε μετρήσιμα σύνολα εάν το εξωτερικό μέτρο και το εσωτερικό μέτρο είναι ίσα»

O Lebesgue έδειξε ότι αυτή η κατηγορία μετρήσιμων συνόλων ήταν κλειστή ως προς τις μετρήσιμες ενώσεις και διασταυρώσεις και περιλάμβανε τις κατηγορίες μετρήσιμων συνόλων Jordan και Borel. Έδειξε επίσης ότι το μέτρο που περιοριζόταν σε αυτά τα σύνολα είχε τις επιθυμητές ιδιότητες ενός μέτρου.

O Lebesgue δήλωσε στη συνέχεια ότι αυτές οι σκέψεις θα μπορούσαν εύκολα να επεκταθούν σε οριοθετημένα σύνολα E οποιασδήποτε διάστασης. Αρκέστηκε, ωστόσο, εξετάζοντας μόνο τη διάσταση δύο και πρότεινε μια διαδικασία για τη διάσταση ένα. Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι χρησιμοποίησε τρίγωνα για να καλύψει το επίπεδο.

Έχοντας λύσει το πρόβλημα των μέτρων, ο Lebesgue οδηγήθηκε φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό του ολοκληρώματος για φραγμένες συναρτήσεις:

Έστω f μία φραγμένη συνάρτηση στο [α,β]

m το μέτρο

$$E_1=\{(x,y)/\alpha \leq x \leq \beta, \quad 0\leq y \leq f(x)\}$$

$$E_2=\{(x,y)/\alpha\leq \chi \leq \beta \qquad f(x)\leq y \leq 0\}$$

Αν τα E_1 και E_2 είναι μετρήσιμα σύνολα τότε το ολοκλήρωμα της f ορίζεται ως η ποσότητα

$$m(E_1) - m(E_2)$$

Το επόμενο βήμα ήταν να προσπαθήσει να προσδιορίσει το ολοκλήρωμα για μη φραγμένες συναρτήσεις. Μια διαδικασία, την οποία ο Lebesgue αναγνώρισε αλλά δεν ακολούθησε, ήταν να επεκτείνει το μέτρο σε μη φραγμένα σύνολα. Αντίθετα, χρησιμοποίησε μια νέα διαδικασία που περιλάμβανε την διαμέριση του άξονα y. Η έμπνευση του για αυτή τη διαδικασία προήλθε θεωρώντας μια συνεχή γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο [α,β] και έστω:

$$\alpha=\chi_0<\chi_1<\chi_2\ldots<\chi_n=\beta \text{ στο } [\alpha,\beta]$$

$$a=a_0<a_1<a_2\ldots a_n=b \quad \text{στο } [a,b]$$

Παρατήρησε πως το κλασικό ολοκλήρωμα της συνάρτησης που συνήθως οριζόταν ως το κοινό όριο των δύο αθροισμάτων

$$\sum_{\iota=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\alpha_{\iota-1} \quad \sum_{\iota=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\alpha_{\iota}$$

Καθώς το χ_i-x_{i-1} προσεγγίζει το 0,θα μπορούσε επίσης να οριστεί ως το κοινό όριο καθώς το a_i-a_{i-1} προσεγγίζει το 0. Γενικεύοντας αυτή την ιδέα συνέδεσε τα ακόλουθα αθροίσματα με μια αυθαίρετη φραγμένη συνάρτηση f και οποιαδήποτε υποδιαίρεση $a=a_0<\alpha_1<\alpha_2\ldots.<\alpha_n=b$ ενός διαστήματος [a,b] που περιέχει:

$$\sigma=\sum_0^n a_i \mathrm{m}(e_i)+\sum_0^{n-1} a_i \mathrm{m}(e_i')$$

$$\Sigma=\sum_0^n a_i \mathrm{m}(e_i)+\sum_0^{n-1} a_{i+1} \mathrm{m}(e_i')$$

$$e_i = \{x: f(x) = a_i\} \qquad e_i' = \{x: a_i < f(x) < a_{i+1}\}$$

όπου m το μέτρο

Αυτά τα αθροίσματα θα οριστούν μόνο εάν οριστούν τα m(ei) και m(ei'). Συνεπώς, ο Lebesgue θεώρησε τα αθροίσματα μόνο για τις συναρτήσεις για τις οποίες, δοθέντων οποιωνδήποτε a και b, το σύνολο {χ:a<f(x)<b}είναι μετρήσιμο. Συνεπώς, για αυτές τις συναρτήσεις τα αθροίσματα σ και Σ ορίζονται και,

όπως έδειξε ο Lebesgue, έχουν το ίδιο όριο με το a_i-a_{i-1} να πλησιάζει το μηδέν. Αυτό το όριο είναι ίσο με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

Έτσι έχουμε έναν άλλο ορισμό της αθροίσιμης συνάρτησης και του ολοκληρώματος που μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη φραγμένες συναρτήσεις:

Μια φραγμένη ή όχι συνάρτηση f ονομάζεται αθροιστική συνάρτηση εάν για οποιοδήποτε a και b το σύνολο {χ:a<f(x)<b} είναι μετρήσιμο. Για να ορίσει το ολοκλήρωμα θεώρησε μια διαμέριση στον άξονα y

$$m_{-2} < m_{-1} < m_0 < m_1 < m_2 \dots$$

μεταξύ του - ∞ και +∞ και έτσι ώστε το m_i-m_{i-1} να είναι φραγμένο, και έστω:

$$\sigma = \sum m_i\, m(e_i) + \sum m_i\, m(e_i')$$

$$\Sigma = \sum m_i\, m(e_i) + \sum m_{i+1}\, m(e_i')$$

Στη συνέχεια έδειξε ότι εάν ένα από αυτά τα αθροίσματα είναι πεπερασμένο, τότε και τα δύο θα συγκλίνουν στο ίδιο πεπερασμένο όριο καθώς το $m_i - m_{i-1}$ πλησιάζει το μηδέν. Αυτό το όριο, εάν υπάρχει, ορίζεται ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Επίσης παρατήρησε ότι το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει απαραίτητα για μη φραγμένες αθροίσιμες συναρτήσεις, εξ ου και ο λόγος για τη χρήση του όρου μετρήσιμο. Είναι μια γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann. Για παράδειγμα, η συνάρτηση f(x)=$\frac{(-1)^r}{r}$ για r-1≤ $x < r$ r=1,2… είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αλλά δεν είναι κατά Lebesgue. Ωστόσο, σε αντίθεση με οποιοδήποτε άλλο ολοκλήρωμα που εξετάστηκε προηγουμένως, διαθέτει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα που είναι ύψιστου ενδιαφέροντος στην ανάλυση:

Αν μία ακολουθία από αθροίσιμες συναρτήσεις f_1 ,f_2,f_3…. ,που έχουν ολοκλήρωμα, έχει όριο την f,και αν $|f-f_n|<M, \forall n$, όπου

M

σταθερά, τότε η f έχει ολοκλήρωμα το οποίο είναι το όριο των

ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων f_n (Lecons Sur

L’Integration)

Β ΜΕΡΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η Ιστορία των μαθηματικών στην διδασκαλία του μαθήματος

γιατί να αξιοποιηθεί η ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία του μαθήματος

Μέσω της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να γίνει εφικτή η εκμάθηση των μαθηματικών, με τη δημιουργία κινήτρων, αλλάζοντας στάση προς αυτά και έτσι γίνεται ευκολότερη η κατανόηση τους.

Επιχειρήματα υπέρ τη χρήσης της ιστορίας στην διδασκαλία των μαθηματικών:

- Δυνατότητα διαθεματικών εργασιών
- Περισσότερα κίνητρα μάθησης
- Αλλαγή στην αντίληψη των μαθητών για τα μαθηματικά
- Ευκολότερη διδασκαλία
- Με την κατανόηση της ιστορικής εξέλιξης γίνεται καλύτερη η παρουσίαση της δομής της διδακτέας ύλης
- Μειώνεται ο τρόμος των μαθητών για τα μαθηματικά
- Ανάπτυξη περισσότερων δεξιοτήτων
- Μεγαλύτερη χρήση της βιβλιοθήκης και εκπόνηση περισσότερων εργασιών
- Ανάδειξη της αξίας των σύγχρονων τεχνικών σε σχέση με τις παλαιότερες
- Με την μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών, οι μαθητές κατανοούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στα μαθηματικά αφού παρατηρούν τα εμπόδια που προκύπτουν κατά της εξέλιξη τους
- Ενθάρρυνση των μαθητών μέσω της αντίληψης πως οι δυσκολίες που συναντούν αντιμετωπίστηκαν στο παρελθόν και από άλλους
- Ανάδειξη ενός πιο ανθρώπινου χαρακτήρα των μαθηματικών

  (Tzanakis & Arcavi)

Εμπόδια σε μια τέτοια διδακτική προσέγγιση

- Στην ιστορία των μαθηματικών εμπεριέχονται και περίπλοκα θέματα, άρα η ενσωμάτωση τους ίσως και να προκαλεί περισσότερη σύγχυση.
- Το να γίνεται ανάγνωση πρωτότυπων κειμένων καθιστά τη διαδικασία δυσκολότερη
- Υπάρχει πρόβλημα με τον διδακτικό χρόνο, είναι ανεπαρκής
- Δεν υπάρχει κατάλληλο διδακτικό υλικό
- Ελλιπής επιμόρφωση των εκπαιδευτικών
- Δεν διδάσκονται οι εκπαιδευτικοί αντίστοιχα μαθήματα στο πανεπιστήμιο
- Οι μαθητές το αντιμετωπίζουν ως μάθημα ιστορίας
- Δεν γίνεται σωστή εκτίμηση από τους μαθητές διότι δεν υπάρχει επαρκή παιδεία
  (Tzanakis & Arcavi)

Τρόποι ενσωμάτωσης της ιστορίας στη σχολική τάξη

Παρατίθενται παρακάτω κάποιοι τρόποι που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν, έτσι ώστε να ενσωματωθεί η ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία.

1. Ιστορικά κείμενα
2. Ιστορικά αποσπάσματα
3. πηγές
4. Πρωτογενείς Φύλλα εργασίας γύρω από ένα ιστορικό θέμα

5. Ιστορικό πακέτο
6. Μηχανικά μέσα
7. Εργασία με λάθη και διαφορετικές απόψεις
8. Παιχνίδια και δραστηριότητες
9. Θεατρικά παιχνίδια

(Tzanakis & Arcavi 2000)

Δυσκολίες των μαθητών στα μαθηματικά

Πολλές φορές οι μαθητές επαναλαμβάνουνε λάθη τα οποία είναι επίμονα και αναπαράγονται. Η έννοια του γνωστικού εμποδίου εισήχθη πρώτη φορά από τον Bachelard το 1938. Ο Brousseau υποστηρίζει ότι τα λάθη είναι σχετιζόμενα με εμπόδια που κατατάσσονται σε τρείς τύπους:

1. εμπόδια επιστημολογικού τύπου, εμφανιζόμενα από την ανάπτυξη της επιστήμης και την φύση των μαθηματικών εννοιών.
2. Γενετικά – ψυχολογικά εμπόδια, οντογενετικά που εμφανίζονται από την ατομική ανάπτυξη του μαθητή.
3. Διδακτικά εμπόδια. Εμφανίζονται εξαιτίας της φύσης της διδασκαλίας.

Ειδικότερα τα επιστημολογικά εμπόδια τα ορίζει ως γνώσεις που λειτουργούν ικανοποιητικά σε ορισμένα πλαίσια οπότε και εδραιώνονται, αλλά αποτυγχάνουνε σε αλλαγή πλαισίου οπότε οδηγούνται σε αντιφάσεις.

Τα βασικότερα αίτια που προκαλούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει η πλειονότητα των μαθητών στην κατανόηση των θεμελιωδών εννοιών της ανάλυσης:

- Η ελλιπής κατανόηση των μαθητών σχετικά με την δομή που αφορά τους πραγματικούς αριθμούς καθώς και την έννοια της συνάρτησης,
- Η δυσκολία κατανόησης της έννοιας του ορίου.

Δυσκολίες των μαθητών στα ολοκληρώματα

Υπάρχουνε διάφορες ερμηνείες των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τις έννοιες της ανάλυσης και τα λάθη στα οποία υποπίπτουν. Πολλά από αυτά καταλογίζονται στη διδασκαλία που έχει προηγηθεί και στη γνωστική ανάπτυξη μαθητών. Άλλα οφείλονται ενδεχομένως στη λεπτή θεωρητική φύση των εννοιών της ανάλυσης, οι οποίες είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιας ιστορικής εξέλιξης και επεξεργασίας.

Έρευνες έχουν δείξει ότι η δυσκολία των μαθητών να κατανοήσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα έχει ως βάση την δυσκολία με τα όρια γενικά. Σε έρευνα των Rasslan&Tall(2002) που έγινε ανάμεσα σε 41 μαθητές λυκείου ,ζητώντας τους να ορίσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα 26 δεν απάντησαν, τέσσερις απάντησαν ως εμβαδό, τρεις ως F(b)-F(a) με F να είναι η αντιπαράγωγος και a,b τα άκρα της ολοκλήρωσης, πέντε κατέθεσαν λανθασμένη απάντηση και τρεις απάντησαν με παράδειγμα. Κανένας όμως ως το όριο του αθροίσματος Riemann.

Ο Ολοκληρωτικός λογισμός όπως παρουσιάζεται στο ξεκίνημα με το αόριστο ολοκλήρωμα, συνεχίζει με μεθόδους ολοκλήρωσης για αόριστα ολοκληρώματα και καταλήγει σε διαφορικές εξισώσεις. Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματός έρχεται αμέσως μετά. Μολονότι οδηγίες του υπουργείου θέτουν εκτός διδακτέας ύλης το αόριστο ολοκλήρωμα (και τις διαφορικές εξισώσεις), πολλοί διδάσκοντες εξακολουθούν να διδάσκουνε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα και μετά το ορισμένο. Συνεχίζουν να το υιοθετούν αφού διαπιστώνουν την αποτελεσματικότητα της διαδικαστικής εκμάθησης υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Με τις σημερινές οδηγίες του υπουργείου το θεώρημα που συνδέει την παράγωγο με το ολοκλήρωμα διδάσκεται επιφανειακά και ασκήσεις που αναφέρονται σε αυτό θέτονται εκτός εξετάσεων.

Οι περισσότεροι μαθητές δε γνωρίζουν τη γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος, ενώ οι υπόλοιποι θεωρούν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα από α έως β μιας συνάρτησης f είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις $x = α$ και $x = β$, ακόμη και στις περιπτώσεις που η f δε διατηρεί πρόσημο ή το α είναι μεγαλύτερο του β. Αυτό φανερώνει πως στους παραπάνω μαθητές ή δεν έχει γίνει με διαίσθηση η κατανόηση του ορισμένου ολοκληρώματος ή έχουν κατασκευάσει στο μυαλό τους ένα σχήμα για τη συγκεκριμένη έννοια που περιορίζεται μόνο σε μη αρνητικές συναρτήσεις και για $α < β$, παρόλο που πολλοί από αυτούς ενδέχεται να έχουν αποκτήσει μια εργαλειακή κατανόηση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.

Επίσης

- Λόγω ομοιοτήτων μεταξύ ορισμένου και αορίστου ολοκληρώματός, έννοιες από αόριστα ολοκληρώματά μεταφέρονται λανθασμένα στο ορισμένο ολοκλήρωμα

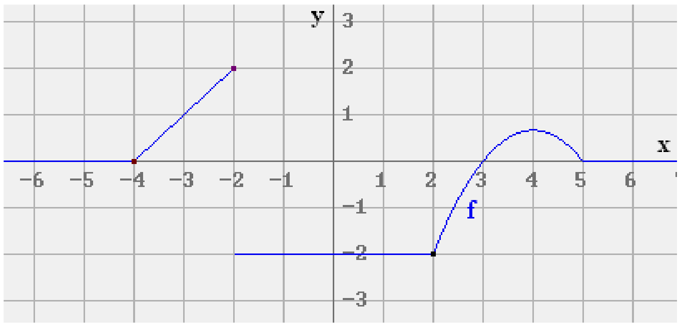
- Οι ορισμοί των μαθητών για το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι κυρίως ως προς το εμβαδόν ή το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού
- Ενώ οι μαθητές μπορούν να αποδείξουν μια προσέγγιση ενός ορισμένου ολοκληρώματός, χρησιμοποιώντας μικρότερη διαμέριση του διαστήματος, η σύνδεση ανάμεσα στο όριο και στο ορισμένο ολοκλήρωμα δεν γίνεται αντιληπτή. Συγκεκριμένα το όριο μιας αθροιστικής διαδικασίας δεν αποτελεί μέρος της εννοιολογικής τους εικόνας για το οριστικό ολοκλήρωμα.
- Οι μαθητές διστάζουν να χρησιμοποιήσουν γεωμετρικές τεχνικές για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

- Η γνώση του τι είναι άθροισμα Riemann είναι ασθενής.
- Παρόλο που γνωρίζουν ότι οι ασυνέχειες δεν επηρεάζουν την τιμή του ολοκληρώματός ή την επηρεάζουν ελάχιστα, δεν αναγνωρίζουν το ρόλο του ορίου σε αυτή την διαδικασία.
- Η έλλειψη επίσημης γλώσσας και σημειογραφίας μπορεί να είναι γνωστικό εμπόδιο για τους μαθητές.

Σ ’αυτές τις δυσκολίες αναφέρονται και οι: (βλ. Artigue, Harel & Kaput και Mamona-Downs). Συγκεκριμένα:

• Η Artigue έδωσε σε 89 πρωτοετείς φοιτητές της στο Πανεπιστήμιο των Παρισίων το γράφημα μιας συνάρτησης f (σχήμα) και ζήτησε από αυτούς να περιγράψουν το γράφημα της συνάρτησης:

$$F(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$$



Σχήμα 12

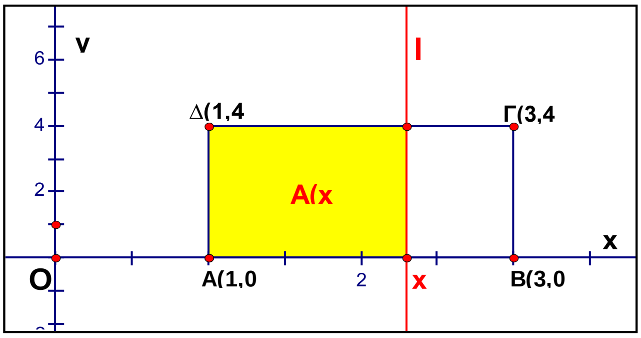
Όπως αναφέρει η Artigue, με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν μόνο 35 από τους 89 φοιτητές και οι καμπύλες που χάραξαν διέφεραν μεταξύ τους. Το μόνο κοινό γνώρισμα που είχαν οι συγκεκριμένες καμπύλες ήταν ότι όλες ευθυγραμμίζονταν στο διάστημα $(-2,2)$. Όμως, από τις καμπύλες αυτές μόνο 14 είχαν τη σωστή κλίση στο διάστημα $(-2,2)$ και από αυτές μόνο 3 ήταν εξ ολοκλήρου σωστές.

Οι Harel & Kaput αναφέρουν ότι οι μαθητές του Λυκείου, καθώς και αρκετοί φοιτητές του Πανεπιστημίου, δυσκολεύονται πολύ να αντιληφθούν ότι, όταν το x μεταβάλλεται, τότε το $\int_a^x f(t)dt$ παριστάνει μια συνάρτηση, και τούτο γίνεται φανερό, όταν ζητείται από τους μαθητές να το χρησιμοποιήσουν ως συνάρτηση. Η συγκεκριμένη δυσκολία οφείλεται, κατά τους Harel & Kaput, στο ότι το σύμβολο $\int_a^x f(t)dt$, όταν το x μεταβάλλεται, κρύβει μέσα του μια διαδικασία, που είναι η διαδικασία με την οποία ορίζεται η :

$$x \to F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad x\in\Delta$$

Δηλαδή, το σύμβολο $\int_a^{\chi} f(t)dt$ είναι, όπως λένε οι συγκεκριμένοι ερευνητές, ένα σιωπηρό σύμβολο (tacit symbol) και αυτά τα σύμβολα, είναι δυσνόητα όχι μόνο από τους μαθητές του Λυκείου, αλλά ακόμη και από αρκετούς φοιτητές των Πανεπιστημίων. Για να μπορέσουμε, λοιπόν, να καταστήσουμε το συγκεκριμένο σύμβολο πιο κατανοητό, δηλαδή για να βοηθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν ότι το $\int_a^x f(t)dt$ παριστάνει μια συνάρτηση του x, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ $x \in \Delta$

Η Mamona-Downs έθεσε σε 71 πρωτοετείς φοιτητές του τμήματος Διεθνών Οικονομικών και Πολιτικών Ερευνών του Πανεπιστημίου Μακεδονίας το παρακάτω θέμα: «Για κάθε $x \in R$ η ευθεία I_x είναι κάθετη στον άξονα των x στο σημείο με τετμημένη x. Έστω A(x) το εμβαδόν του μέρους του παραλληλογράμμου που βρίσκεται αριστερά της ευθείας I_x . Να βρεθεί ο τύπος της A(x). Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συγκεκριμένης συνάρτησης;»



Σχήμα 13

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προέκυψε ότι από τους 71 φοιτητές μόνο 22 προσπάθησαν να απαντήσουν στο συγκεκριμένο θέμα. Από αυτούς μόνο 7 βρήκαν σωστά τον τύπο της συνάρτησης A(x), ενώ κανένας δεν έδωσε μια ολοκληρωμένα σωστή απάντηση. Από τη συγκεκριμένη έρευνα και από άλλες παρόμοιες η Mamona–Downs κατέληξε στο συμπέρασμα πως οι περισσότεροι φοιτητές δε μπορούν να συλλάβουν συναρτήσεις που παριστάνουν το εμβαδόν των επιφανειών που βρίσκονται κάτω από καμπύλες και πάνω από τον άξονα των x. Επομένως, είναι δύσκολο να ερμηνεύσουν γεωμετρικά τη συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$ και να κατανοήσουν έτσι την απόδειξη του τύπου: $(\int_a^x f(t)dt)'$=f(x). Από όλα όσα αναφέραμε παραπάνω προκύπτει ότι δεν επιτυγχάνεται στο Λύκειο η εννοιολογική κατανόηση της F(x) =$\int_a^x f(t)dt$ x∈Δ .

Αρκετοί μαθητές, αν και υπολογίζουν σωστά το $\int_a^\beta f'(x)dx$ δεν γνωρίζουν ότι η συνάρτηση f είναι μια παράγουσα της f ′ και για να υπολογίσουν το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα, αντί να γράψουν

$$\int_a^\beta f'(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$$

παραγωγίζουν πρώτα την f, για να βρουν τον τύπο της g = f ′ , βρίσκουν έπειτα μια παράγουσα G της g = f ′ και στη συνέχεια υπολογίζουν το ζητούμενο ολοκλήρωμα, εφαρμόζοντας τον τύπο:

$$\int_a^\beta g(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$$

του Θεμελιώδους Θεωρήματος. Αυτό φανερώνει ότι από τους συγκεκριμένους μαθητές δεν έχει γίνει η εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της παράγουσας μιας συνάρτησης, αλλά απλώς έχουν απομνημονεύσει τους τύπους που δίνουν τις παράγουσες των βασικών συναρτήσεων (πολυωνυμικών, εκθετικών, λογαριθμικών, τριγωνομετρικών κτλ.) και για να υπολογίσουν το ορισμένο ολοκλήρωμα των συναρτήσεων αυτών, εφαρμόζουν μηχανιστικά τον τύπο:

$$\int_a^\beta f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

(όπου F μια παράγουσα της f).

Οι μαθητές δυσκολεύονται πολύ να επιλύσουν προβλήματα που σχετίζονται με το ρυθμό μεταβολής διαφόρων μεγεθών και ιδιαιτέρως όταν αυτά περιγράφονται με τα γραφήματά τους. Λίγοι μαθητές (ποσοστό μικρότερο από 30%) καταφέρνουν από το γράφημα του ρυθμού μεταβολής V′ ενός μεγέθους V να υπολογίσουν τη συνολική μεταβολή (αύξηση ή μείωση) του συγκεκριμένου μεγέθους σε ένα διάστημα [α,β] . Όταν όμως, αντί του γραφήματος του V′, δοθεί ο τύπος του V′, τότε το ποσοστό των μαθητών που μπορούν να υπολογίσουν τη συνολική μεταβολή του V στο διάστημα [α,β] δεν ξεπερνά το 60% αυτών. Οι παραπάνω δυσκολίες καταλογίζονται κυρίως στους παρακάτω δύο λόγους:

α) Οι περισσότεροι μαθητές δε γνωρίζουν ότι η συνολική μεταβολή ενός μεγέθους V σε ένα διάστημα [α,β] δίνεται από τον τύπο

$$\Delta V = V(\beta) - V(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} V'(t)dt$$

παρόλο που αρκετοί από αυτούς γνωρίζουν τον τύπο $\int_{a}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$ (όπου F μια παράγουσα της f) του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού και μπορούν να τον εφαρμόσουν για τον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων πολλών συναρτήσεων. Οι συγκεκριμένοι μαθητές ή έχουν απλώς απομνημονεύσει τον παραπάνω τύπο και τον εφαρμόζουν μηχανιστικά ή δεν έχουν εξασκηθεί στην επίλυση προβλημάτων που αναφέρονται σε άλλα πλαίσια.

Οι υπόλοιποι μαθητές δε μπορούν από το γράφημα του V′ να υπολογίσουν το $\int_{\alpha}^{\beta} V'(t)dt$.

Οι συγκεκριμένοι μαθητές γενικότερα δε μπορούν να υπολογίσουν το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ μιας συνάρτησης f της οποίας δίνεται το γράφημα και αυτό οφείλεται στους λόγους που αναφέραμε πιο πάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙ0 5

Πρόγραμμα σπουδών για τα ολοκληρώματα στη Γ λυκείου

• ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος εισάγεται με το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού ενός παραβολικού χωρίου και με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση – υπολογισμό του εμβαδού. Η ενότητα του ολοκληρώματος (όπως και της παραγώγου) είναι μία από αυτές όπου, εκτός από την κατανόηση των εννοιών, οι μαθητές/μαθήτριες πρέπει να δουν και να 2 αντιμετωπίσουν εφαρμογές σε προβλήματα. Μέσα από προβλήματα που αφορούν στην εύρεση εμβαδού, θα φανεί η αποτελεσματικότητα των εργαλείων του Απειροστικού Λογισμού σε περιπτώσεις οι οποίες δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με άλλα εργαλεία. Η διδασκαλία της

Οι οδηγίες που δίνει το ΙΕΠ για τη διδασκαλία του ολοκληρώματος

Να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγώγισης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης. Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων να δοθεί ο πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

Το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση – υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν. Να δοθεί στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Έστω f και g δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα [α, β]

- Αν f (x) ≥ g (x) για κάθε , x ∈[α, β] τότε θα ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

- Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο [α, β] τότε θα ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Έχει γίνει πολύ συζήτηση για την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Της έχουν αναγνωρίσει πολλά πλεονεκτήματα όπως ο εξανθρωπισμός της μαθηματικής παιδείας, η ανάδειξη του κοινωνικού χαρακτήρα των μαθηματικών, η ελκυστικότητα της κ.α.

Είναι σίγουρα θετικό που στο τέλος των κεφαλαίων ή ενδιάμεσα στο τέλος μιας παραγράφου υπάρχουν ιστορικά σημειώματα.

Κατά την άποψη μου όμως η μετοχή της Ιστορίας θα μπορούσε να είναι πιο ουσιαστική παρά διακοσμητική. Αυτό θα γινόταν αν στην αρχή κάθε κεφαλαίου ή και παραγράφου αν ήταν δυνατόν να υπήρχε ιστορική επισκόπηση της νέας έννοιας.

Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές πρέπει να δουν για ποιους λόγους και ποιες ανάγκες ξεκίνησε η εισαγωγή της νέας έννοιας. Ποια προβλήματα ήρθε να λύσει και σε ποια εποχή. Επίσης από ποια εξελικτικά στάδια πέρασε μέχρι την σημερινή της μορφή. Τέλος ποιοι μαθηματικοί συνέβαλαν στην θεμελίωσή της . Προωθείται έτσι η κοινωνική διάσταση των μαθηματικών, η σχέση τους με τα πραγματικά προβλήματα καθώς και η επίπονη εξελικτική τους πορεία.

Συνήθως διδάσκουμε τις έννοιες φορμαλιστικά ξεκομμένα από το κοινωνικό γίγνεσθαι που τις γέννησε. Επίσης πάντα με την τελική τους μορφή που έχει όμως στην πλάτη της μια πορεία αλλαγών πολλών αιώνων. Παρατηρείται αυτό που η διδακτική φαινομενολογία ονομάζει αντιδιδακτική αντιστροφή. Προηγείται δηλαδή το αποτέλεσμα της αιτίας και της πορείας.

Για παράδειγμα ξεκινούμε την διδασκαλία του ολοκληρώματος με τον αυστηρό ορισμό του αόριστου από τον Riemann. Προϊόν δηλαδή του 19ου αιώνα όπου κυριαρχούσε ο φορμαλισμός και η αναζήτηση των τυποκρατικών θεμελίων των μαθηματικών. Το ολοκλήρωμα όμως δεν ξεκίνησε έτσι. Πρέπει να δούμε την προσπάθεια του Αρχιμήδη από την αρχαιότητα κιόλας να υπολογίσει τα εμβαδά παραβολικών χωρίων. Κατόπιν τον 17ο-18ο αιώνα που στην προσπάθεια να υπολογιστούν εμβαδά αναπτύχθηκαν οι πρώτοι κανόνες ορισμένου ολοκληρώματος. Τέλος να φτάσουμε στον 19ο αιώνα, όπου ορίζεται πλέον αυστηρά. Ο Riemann όμως γνώριζε την ιστορική πορεία του ολοκληρώματος όταν το όριζε αυστηρά, οι μαθητές πως όχι;

ΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Παρακάτω προτείνονται κάποιες διδακτικές προτάσεις για την εισαγωγή της έννοιας του ολοκληρώματος στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση χρησιμοποιώντας αρχικά την αρχή του Ευδόξου και του Αρχιμήδη.

Αρχικά προτείνεται να δοθούν στους μαθητές ***ιστορικά σημειώματα*** με τους Ευδοξο και Αρχιμήδη όπως παρακάτω:

Η μέθοδος της εξάντλησης

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, Βιβλίο X, πρόταση 1

Μεταφράστε το κείμενο στα Νέα Ελληνικά και προσπαθήστε να το ερμηνεύσετε
....
....
....
....

Για ποιο λόγο νομίζετε ότι η μέθοδος που περιγράφεται εδώ ονομάζεται μέθοδος της εξάντλησης; ....
....
....
....

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΞΑΝΤΛΗΣΗΣ (πρόδρομος του ολοκληρωτικού λογισμού)

Με αθροίσματα επιτυγχάνονται άνω και κάτω φράγματα της ζητουμένης γεωμετρικής ποσότητας (εμβαδού), με τη γεωμετρική κατασκευή μιας γνησίως αύξουσας ακολουθίας β_ν εμβαδών εγγεγραμμένων σχημάτων και μιας γνησίως φθίνουσας ακολουθίας α_ν αντίστοιχων περιγεγραμμένων γεωμετρικών μεγεθών, μεταξύ των οποίων κείται η ζητουμένη γεωμετρική ποσότητα **Ε**. Δηλ.:

Έστω **Ε** το ζητούμενο εμβαδόν,

$\boldsymbol{\beta_\nu} \uparrow$ **ακολουθία εμβαδών** και

$\boldsymbol{\alpha_\nu} \downarrow$ **ακολουθία εμβαδών,**

ώστε $\boldsymbol{\beta_\nu \leq E \leq \alpha_\nu}$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$.

Κατ΄αρχήν, αποδεικνύονταν ότι

$$\textbf{για κάθε } \varepsilon>0 \textbf{ υπάρχει } N_0 \in \mathbf{N}, \textbf{ ώστε } \alpha_{N_0} - \beta_{N_0} < \varepsilon .$$

(π.χ. αποδεικνύονταν ότι $\alpha_1 - \beta_1 < \frac{1}{2}(\alpha_0 - \beta_0)$, $\alpha_2 - \beta_2 < \frac{1}{2}(\alpha_1 - \beta_1)$, κ.ο.κ, και από την αρχή Αρχιμήδους-Ευδόξου επιλεγόταν N_0 ώστε $(N_0+1)\varepsilon > \alpha_0 - \beta_0$. Εύκολα φαίνεται ότι: $\alpha_{N_0} - \beta_{N_0} < \varepsilon$).

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, προϋποτίθεται η γνώση της τιμής Β, που θα έπρεπε να έχει η ζητουμένη γεωμετρική ποσότητα **Ε**.

Εικάζουμε ότι Ε = Β, όπου $\beta_\nu \leq B \leq \alpha_\nu$, $\forall \nu \in \mathbf{N}$.

(Η τιμή Β προέκυπτε διαισθητικά. Οι αρχαίοι δεν χρησιμοποιούσαν την έννοια του ορίου. Επεδίωκαν αυστηρή αποδεικτική μέθοδο.)

Με την τιμή Β γνωστή, και χρήση της ιδιότητας Ευδόξου-Αρχιμήδους, απεδείκνυαν ότι η εικασία ήταν σωστή, με διπλή απαγωγή στο άτοπο (απέκλειαν τις περιπτώσεις Ε>Β και Ε<Β).

Έστω Ε<Β. Έχουμε $\beta_\nu < E < B < \alpha_\nu$, τότε

$$0 < B - E < \alpha_\nu - \beta_\nu, \quad \forall \nu \in \mathbf{N}.$$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{B-E}{2}$.

Τότε από την ιδιότητα Ευδόξου-Αρχιμήδους, υπάρχει κάποιο $N_0 \in \mathbf{N}$, ώστε:

$$\alpha_{N_0} - \beta_{N_0} < \varepsilon = \frac{B-E}{2}. \quad \text{Δηλ.}, \ 0 < B - E < \alpha_{N_0} - \beta_{N_0} < \frac{B-E}{2}. \quad \text{Άτοπο.}$$

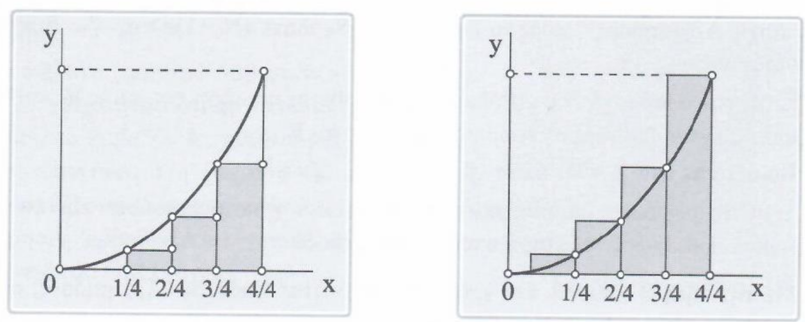
Ομοίως δεν μπορούσε να συμβαίνει Ε > Β. **Άρα Ε = Β.**

Στην πορεία μπορεί να γίνει λόγος στους μαθητές για την μέθοδο της εξάντλησης και για το έργο του Αρχιμήδη και του Ευδόξου και έπειτα να δοθούν φύλλα εργασίας με καθοδηγούμενες δραστηριότητες.

φύλλο εργασίας(καθοδηγούμενη δραστηριότητα)

Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον χ΄χ και τις ευθείες χ= 0 και χ = 1 είναι ίσο με 1/3.

βήμα 1ο Διαιρούμε το διάστημα [0,1], σε τέσσερα ίσα τμήματα με μήκος ¼ το κάθε ένα . Έχουμε $\beta_4<E<\alpha_4$,όπου β_4 το κάτω άθροισμα δηλ. το εμβαδόν των ορθογώνιων που βρίσκονται κάτω από τη συνάρτηση και α_4 το άνω άθροισμα, δηλαδή το εμβαδόν των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από τη συνάρτηση, όπως φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 14

Α. Υπολογίστε τα α_4και β_4

Β. Διαιρούμε το [0,1], σε ν τμήματα ίσου πλάτους

Συμβολίζουμε με α_ν και β_ν το άνω και κάτω άθροισμα. Να παρατηρήσετε ότι:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^3}\,(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)$$

και

$$\beta_\nu = \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + .. + (\nu - 1)^2)$$

με α_ν φθίνουσα και β_ν αύξουσα

$$\beta_\nu < E < \alpha_\nu$$

Γ. Η ταυτότητα

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \ldots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu}{6}$$

Θεωρείται γνωστή από την εποχή του Αρχιμήδη.

Δ. Έχουμε $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^3}(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu}{6}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{6\nu^2} > \frac{1}{3}$ $\forall \nu \in N$

$\beta_\nu = \frac{1}{\nu^3}(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu}{6} - \nu^2) = \ldots = \frac{1}{3} - \frac{3\nu - 1}{6\nu^2} < \frac{1}{3}$ $\forall \nu \in N$

άρα $\beta_\nu < E < \alpha_\nu \quad \forall \nu \in N$

προφανώς παρατηρούμε ότι $E = \frac{1}{3}$

Βήμα 2^0

Είναι προφανές ότι:

$$\alpha_\nu - \beta_\nu = \frac{1}{\nu^3}\ (1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) -$$

$\frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + .. + (\nu-1)^2) = \frac{1}{\nu^3}(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu}{6}) - \frac{1}{\nu^3}(\frac{\nu^3}{3} + \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu}{6} - \nu^2) = \cdots \frac{1}{\nu}$

Άρα από ιδιότητα Αρχιμήδους-Ευδόξου, για κάθε

$\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $N_0 \in N$ τ.ω

$$\alpha_{N_0} - \beta_{N_0} = \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

Με τη διπλή απαγωγή σε άτοπο θα δείξουμε, με την αρχή του Ευδόξου-Αρχιμήδη, ότι ο μοναδικός αριθμός που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση , είναι ο 1/3

$$\beta_\nu < \frac{1}{3} < \alpha_\nu \qquad \forall \nu \in N$$

Θα καταλήξουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει Ε>1/3 και Ε<1/3.

Αν Ε<1/3 τότε

$$\beta_\nu < E < \frac{1}{3} < \alpha_\nu \quad \text{και} \quad 0 < \frac{1}{3} - E < \alpha_\nu - \beta_\nu \qquad \forall \nu \in N$$

Επιλέγουμε $\qquad \varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) - E}{2}$

Τότε από την ιδιότητα Ευδόξου-Αρχιμήδη, υπάρχει $N_0 \in N$, ώστε:

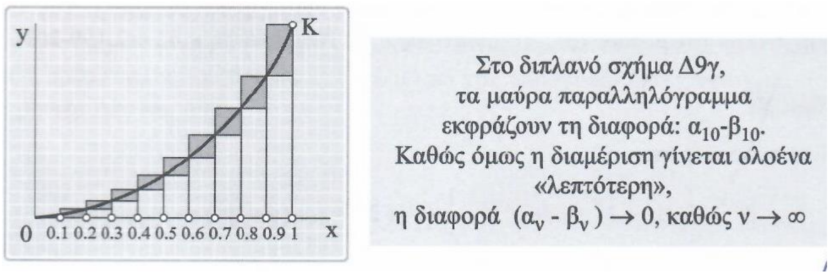
$$\alpha_{N_0} - \beta_{N_0} < \varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) - E}{2}$$

Δηλαδή $$0 < \frac{1}{3} - E < \alpha_{N_0}\text{-}\beta_{N_0} < \varepsilon = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) - E}{2}$$

Άτοπο

Ομοίως δεν ισχύει $E > \frac{1}{3}$. Άρα $E = \frac{1}{3}$.

(Με χρήση της θεωρίας των ορίων, δεν χρειάζεται η προ απαιτούμενη γνώση ότι Ε=1/3. Θεωρούμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι το κοινό όριο των $\boldsymbol{\alpha_\nu}$ και $\boldsymbol{\beta_\nu}$. Δηλαδή η ακολουθία ($\boldsymbol{\alpha_\nu}$-$\boldsymbol{\beta_\nu}$ $\forall \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{N}$ είναι μηδενική.)



σχήμα 15

(Θεόδωρος Πάσχος)

Δραστηριότητα 2

Διδακτικοί – Παιδαγωγικοί στόχοι :

Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν :

Την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μέσω του παραβολικού χωρίου.

Τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και να είναι σε θέση να τις εφαρμόζουν

διδασκαλία του ορισμένου ολοκληρώματος(κατά Riemann)

Οι μαθητές θα κατακτήσουν τη νέα γνώση οδηγούμενοι στο συμπέρασμα πως το όριο του αθροίσματος των εμβαδών υπάρχει.

ΠΡΟΤΑΣΗ(με GeoGebra)

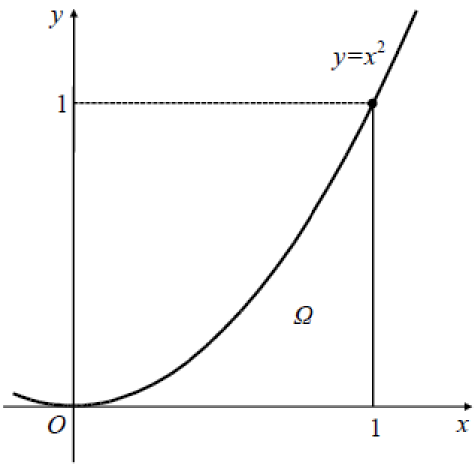
Οι μαθητές αρχικά θα ασχοληθούν με τη δραστηριότητα 1. Κάνοντας κλικ στο κάτω άθροισμα και εν συνεχεία στον αριθμό των διαμερίσεων n, θα παρακολουθήσουν πως αλλάζει η τιμή του κάτω αθροίσματος καθώς το n μεταβάλλεται. Σχηματίζουν μια άποψη για τη σχέση που έχουν τα ε_v και I. Στη συνέχεια των δραστηριοτήτων οι μαθητές μπορούν να σχηματίσουν τη σχέση $\varepsilon_v \leq I \leq E_v$. Έχοντας στο νου αυτά που παρατήρησαν, επιστρέφουν στο φύλλο εργασίας. Αποδεικνύουν τα συμπεράσματα τους. Εν συνεχεία, τους δίνεται ο ορισμός του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος. Επεκτείνεται ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος και δίνονται παραδείγματα για καλύτερη εμπέδωση της ύλης. Το φύλλο ολοκληρώνεται με τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος τις οποίες ακολουθούν παραδείγματα και τέλος ερωτήσεις κατανόησης Σωστού – Λάθους. Η ολοκλήρωση του φύλλου προβλέπεται να γίνει μετά από 3-4 διδακτικές ώρες. Μετά την ολοκλήρωση του, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα.

Φύλλο Εργασίας

Δραστηριότητα1 : Ανοίγουμε το περιβάλλον του **GeoGebra** με διπλό κλικ στην συντόμευση του αρχείου.

Ανοίξτε το αρχείο GeoGebra

Έχουμε τη παραβολή $f(x) = x^2$ και το χωρίο που περικλείεται από την $f(x)$ και από τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.



Σχήμα 1

Προσέγγιση του εμβαδού θα γίνει ως εξής : Χωρίζουμε το διάστημα [0,1] σε ν ίσα διαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία :

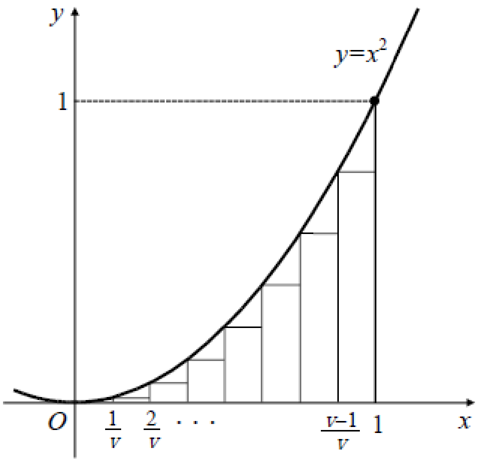
$$0 , \frac{1}{\nu} , \frac{2}{\nu} , \frac{3}{\nu} ,\ldots\ldots 1$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις το καθένα $\frac{1}{\nu}$ και ύψος την ελάχιστη τιμή που έχει η f σε καθένα από αυτά (σχήμα 2).

Προσεγγίζοντας την τιμή του εμβαδού , είναι ε_ν , δηλαδή το :

$$\varepsilon_\nu = f(0)\,\frac{1}{\nu} + f(\frac{1}{\nu})\frac{1}{\nu} + f(\frac{2}{\nu})\frac{1}{\nu} + \ldots +$$

$$f(\frac{\nu-1}{\nu})\frac{1}{\nu}$$



$$\boldsymbol{\varepsilon_\nu} = \frac{1}{\nu}$$

Σχήμα 2

(……………………….)

…………………………………………..

…………………………………………….

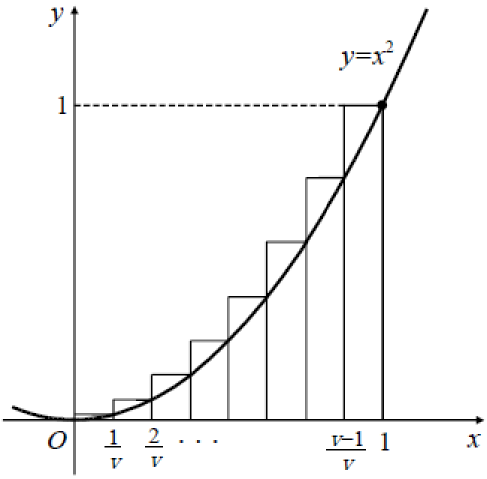
$$\boldsymbol{\varepsilon_\nu} = \frac{2\nu^2 - 3\nu + 1}{6\nu^2} \quad \textbf{(1)}$$

Κάνουμε πάλι την ίδια διαδικασία, αλλά τώρα αντί για την ελάχιστη τιμή της f παίρνουμε την μέγιστη για ύψος του κάθε ορθογωνίου (σχήμα 3).

Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα E_ν

E_ν =

$$f(\frac{1}{\nu})\ \frac{1}{\nu} + f(\frac{1}{\nu})\frac{1}{\nu} + f(\frac{2}{\nu})\frac{1}{\nu} + \ldots\ldots\ldots + f(\frac{\nu}{\nu})\frac{1}{\nu}$$



Σχήμα 3

……………………………………………

……………………………………………

……………………………………………

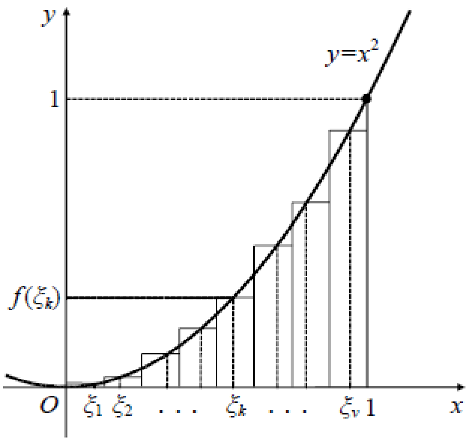
……………………………………………

$$E_\nu = \frac{2\nu^2 + 3\nu + 1}{6\nu^2} \quad \textbf{(2)}$$

Το εμβαδόν Ι, είναι ανάμεσα των ε_ν και E_ν , δηλαδή όπως παρατηρήσατε στο αρχείο ισχύει : ……………………… , οπότε καθώς το ν τείνει στο άπειρο, έχουμε $\lim\limits_{\nu->\infty} \varepsilon_\nu \leq I \leq \lim\limits_{\nu->\infty} E_\nu$.

Επειδή $\lim\limits_{\nu->\infty} \varepsilon_\nu$ = ………. και $\lim\limits_{\nu->\infty} E_\nu$ = ………. , άρα I = ……………

- Αν τώρα πάρουμε τα ορθογώνια που έχουν βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα $[\chi_{\kappa-1},\chi_\kappa]$, k = 1,2,…..ν και για ύψος την τιμή της f(x) σε κάποιο σημείο ξ_κ,



Σχήμα 4

k = 1,2….ν κάθε διαστήματος, (σχήμα 4) , τότε το άθροισμα :

$$S_\nu = \frac{1}{\nu} f(\xi_1) + ...\frac{1}{\nu} f(\xi_\nu)$$

Είναι άλλη μια τιμή του εμβαδού

όμως $f(\chi_{\kappa-1}) \leq f(\xi_\kappa) \leq f(\chi_\kappa)$

για k = 1,2,…..ν οπότε ισχύει :

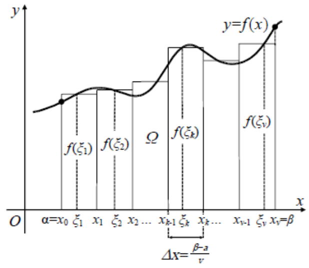
$\lim\limits_{\nu->\infty} \varepsilon_\nu \leq S_\nu \leq \lim\limits_{\nu->\infty} E_\nu$, επειδή $\lim\limits_{\nu->\infty} \varepsilon_\nu$ = ……. και $\lim\limits_{\nu->\infty} E_\nu$ = ….. , άρα S_ν = ……

Η αντίστοιχη διαδικασία όπως την έχει το σχολικό βιβλίο

<u>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ – ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΜΒΑΔΟΥ(από βιβλίο Ανδρεαδάκη)</u>

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και Ω το χωρίο που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω (Σχήμα 5) εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Δηλαδή:



Σχήμα 5

Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

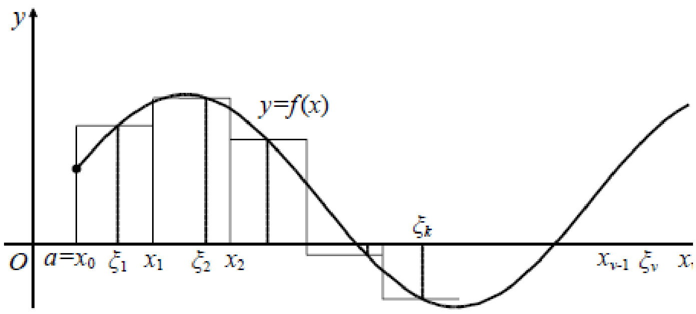
- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x=[f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_\nu)]\Delta x\,.$$

- Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται **εμβαδόν** του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega)\geq 0$.

Η Έννοια του Ορισμένου Ολοκληρώματος



Σχήμα 6

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa\in[x_{\kappa-1},x_\kappa]$, για κάθε $\kappa\in\{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\kappa)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x$$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}f(\xi_\kappa)\Delta x^{(1)}\,.$$

Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το *α* στο *β*, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της *f* από το *α* στο *β*”.

Δηλαδή $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$

Οι αριθμοί *α* και *β* ονομάζονται **άκρα** της ολοκλήρωσης .

Επέκταση Ορισμού Ορισμένου Ολοκληρώματος :

Αν α > β ή α = β , τότε ορίζουμε :

1. $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = -\int\limits_\beta^\alpha f(x)dx$

2. $\int\limits_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$

3. Αν f(x) ≥ 0 $\Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, επομένως αν f(x) ≥ g(x) για κάθε x$\in$[α,β],

τότε f(x) - g(x) ≥ 0 $\Rightarrow$ …………………………………………………………

Άρα : f(x) ≥ g(x) για κάθε x$\in$[α,β] $\Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ ………… $\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx$

εναλλακτικές προτάσεις

διδασκαλίας

Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να φτάσουν στο στάδιο της σύλληψης ως διαδικασίας της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να κατανοήσουν, έτσι, εννοιολογικά τη συγκεκριμένη έννοια, προτείνουμε τα ακόλουθα: 1. Η εισαγωγή στην έννοια του εμβαδού του χωρίου (βλ. Ανδρεαδάκης §3.4) να γίνει με απλούστερη συνάρτηση. Συγκεκριμένα, προτείνουμε να δοθεί στους μαθητές το γράφημα της συνάρτησης f(x)= x , x ∈[0,10] και να τους ζητηθεί:

α) Να υπολογίσουν το άνω άθροισμα Riemann Εν , το κάτω άθροισμα Riemann $ε_ν$ και τη διαφορά Εν- $ε_ν$ των παραπάνω αθροισμάτων Riemann, για ν =10 (σχήμα), στη συνέχεια για ν = 20 (σχήμα) και έπειτα για οποιοδήποτε ν να αποδείξουν ότι για όλες τις τιμές του ν ισχύει:

$$E_\nu - \varepsilon_\nu = 10\Delta\chi = \frac{10}{\nu}$$

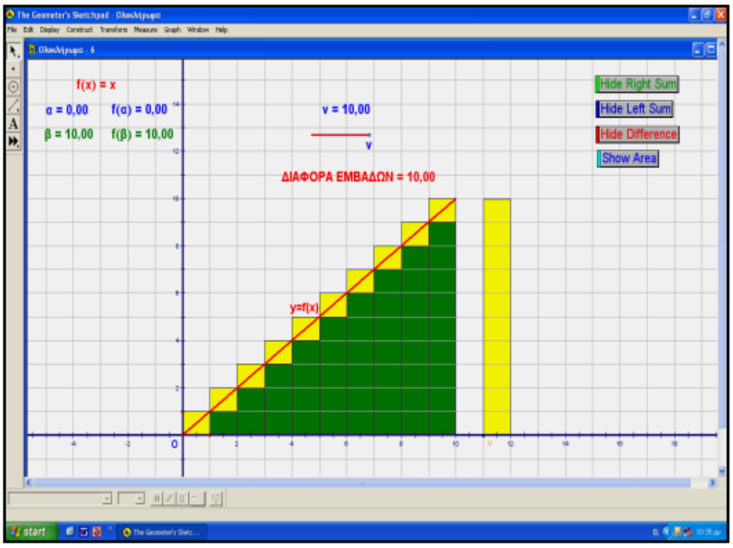
β) Να αποδείξουν στη συνέχεια ότι, όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα, τότε

$$\lim_{\nu\to\infty} E\nu - \varepsilon_\nu=0$$

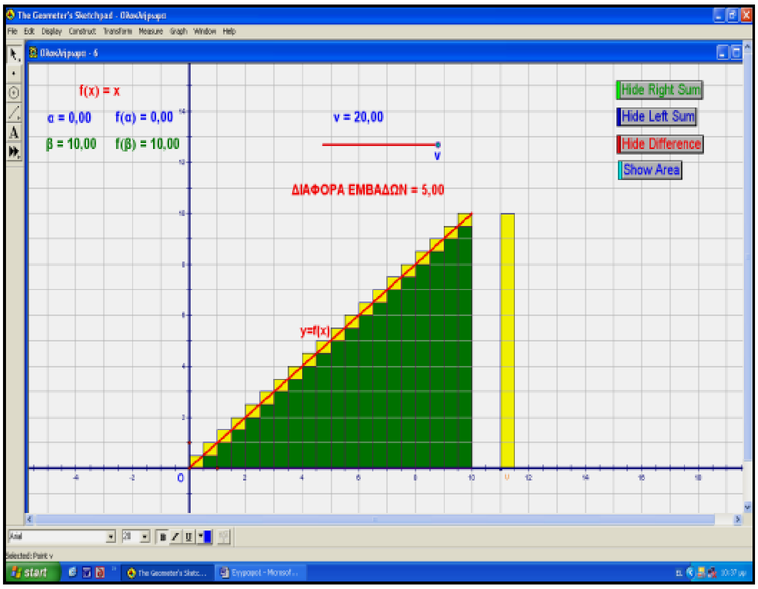
(σχήματα:) και να υπολογίσουν έπειτα τα όρια $\lim_{\omega\to\infty} E\nu$ και $\lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu$. Έτσι θα διαπιστώσουν ότι:

$$\lim_{\nu\to\infty} E\nu = \lim_{\nu\to\infty} \varepsilon_\nu = 50,$$

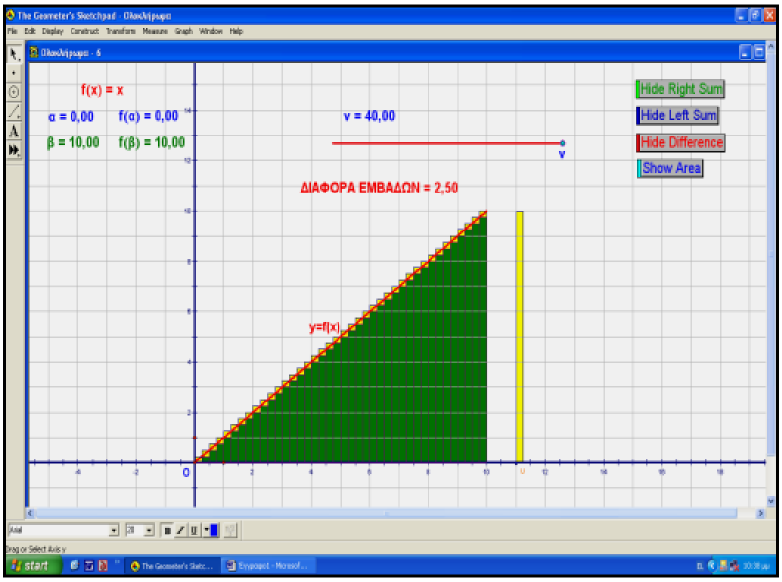
δηλαδή ότι καθώς το ν τείνει στο άπειρο το εμβαδόν του τριγώνου μεταξύ της f, την x=10 και του χ άξονα, είναι το κοινό όριο των Εν και $ε_ν$.



Σχήμα 16



σχήμα 17



σχημα 18

Μεταβάλλοντας το πλήθος ν των διαστημάτων της διαμέρισης του [0,10], να διαπιστώσουμε εποπτικά ότι, όταν το ν αυξάνεται απεριόριστα, τότε η διαφορά $E_\nu - \varepsilon_\nu$, δηλαδή το εμβαδόν της κατακόρυφης κίτρινης μπάρας τείνει να μηδενιστεί και συνεπώς το χωρίο που ορίζουν τα ορθογώνια του άνω αθροίσματος Riemann τείνει να συμπέσει με το χωρίο που ορίζουν τα ορθογώνια του κάτω αθροίσματος Riemann της συνάρτησης f. Επομένως, τα παραπάνω χωρία τείνουν να συμπέσουν με το χωρίο που είναι μεταξύ της f τον άξονα των x και την ευθεία x =10 και, ως εκ τούτου, το εμβαδόν τους τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδόν του συγκεκριμένου χωρίου.

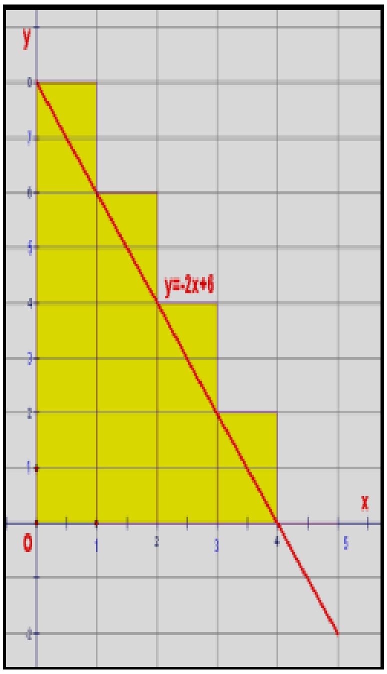
Η παρουσίαση του ορισμού του εμβαδού του χωρίου που είναι κάτω από το γράφημα μιας μη αρνητικής συνάρτησης f τον άξονα των x και τις ευθείες x = α και x = β να γίνει με τον τρόπο που περιγράφεται στο σχολικό εγχειρίδιο, αλλά να υποστηριχτεί, αν είναι δυνατόν, παράλληλα με δραστηριότητες δυναμικών λογισμικών. Ως εφαρμογή του συγκεκριμένου ορισμού να ζητηθεί από τους μαθητές να υπολογίσουν με προσέγγιση, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$ (οπως το παραπάνω φύλλο εργασίας), τον άξονα των x και την ευθεία x =10 , αρχικά για ν = 5 και έπειτα για ν =10. Ο υπολογισμός με ακρίβεια και με τη βοήθεια του παραπάνω ορισμού του εμβαδού του συγκεκριμένου χωρίου είναι δύσκολος για τους μαθητές, διότι απαιτεί από αυτούς να γνωρίζουν τον τύπο:

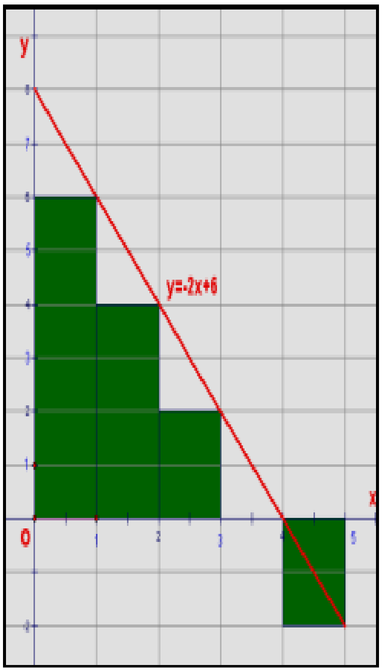
$$1^2+2^2+3^2+\ldots\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

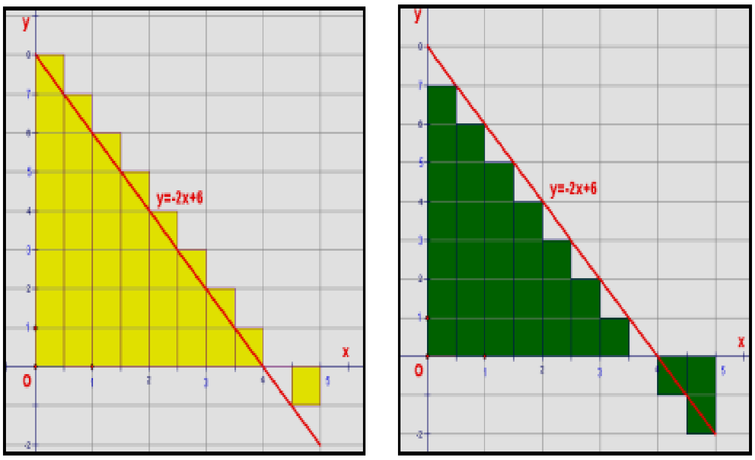
που δεν είναι γνωστός από προηγούμενες τάξεις.

Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να κατανοήσουν τη διαδικασία υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος με τη βοήθεια των ενδιάμεσων αθροισμάτων Riemann, προτείνουμε να δοθούν δραστηριότητες, ανάλογες με την παρακάτω :

α) Να υπολογίσετε το κάτω άθροισμα Riemann ε_ν και το άνω άθροισμα Riemann E_ν της συνάρτησης f(x)=-2x+6 στο διάστημα [0,5], πρώτα για ν = 5 (σχήματα) και έπειτα για ν =10 (σχήματα:) και να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση χωριστά το μέσο όρο των συγκεκριμενών αθροισμάτων.







Σχήμα 19

Μπορείτε από τα αποτελέσματα του α) ερωτήματος να εικάσετε πόσο είναι η τιμή του $\int_0^5 -2\chi + 6 \ dx$ και αν ναι, β)μπορείτε να συγκρίνετε την τιμή αυτή με τη διαφορά των εμβαδών των τριγώνων που ορίζονται από την f(x) =2x+ 6, τον άξονα των x και τις ευθείες x=0 και x=5.

γ) Να επαναλάβετε τα βήματα α) και β) και για τη συνάρτηση f(x) =2x-4 στο διάστημα [-1,4] , αφού χαράξετε αυτή τη φορά μόνοι σας το γράφημα της f και τα ορθογώνια των άνω και κάτω αθροισμάτων Riemann κάθε περίπτωσης.(Γ, Πολύζος)

Οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος να δοθούν χωρίς απόδειξη, αλλά να ερμηνευτούν όλες γεωμετρικά. Για να μπορούν οι μαθητές να υπολογίζουν τα ορισμένα ολοκληρώματα, έστω και κατά προσέγγιση, με τη βοήθεια των εμβαδών, χρειάζεται επιπλέον και η παρακάτω ιδιότητα του ορισμένου ολοκληρώματος, η οποία είναι άμεση συνέπεια του 3ου θεωρήματος της § 3.4 του σχολικού εγχειριδίου (βλ. Ανδρεαδάκης):

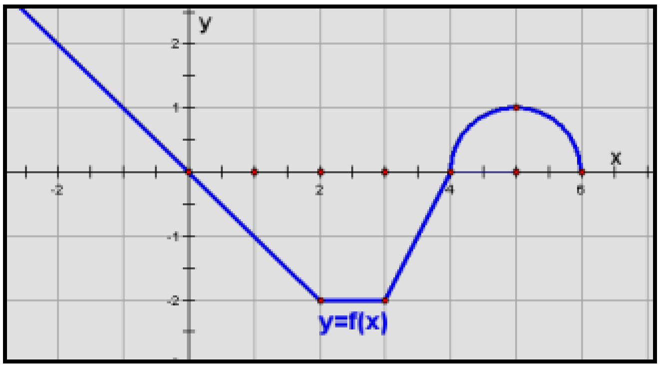
ΠΡΟΤΑΣΗ

«Αν μια συνάρτηση f , που είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α,β], είναι θετική ή μηδέν σε κάποια υποδιαστήματα του [α,β] και αρνητική στα υπόλοιπα, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το εμβαδόν των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα των x και κάτω από το γράφημα της f, μείον το εμβαδόν των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα των x και πάνω από το γράφημα της f ».

Ως εφαρμογές της παραπάνω πρότασης προτείνουμε να δοθούν στους μαθητές ασκήσεις υπολογισμού του ορισμένου ολοκληρώματος συναρτήσεων των οποίων το γράφημα αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και ημικύκλια. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να δώσουμε την παρακάτω άσκηση:

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε τα ορισμένα ολοκληρώματα $\int_{-1}^{6} f(x)dx$ $\int_{-1}^{3} f(x)dx$, $\int_{5}^{2} f(x)dx$ της συνάρτησης f, της οποίας το γράφημα δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχημα 20

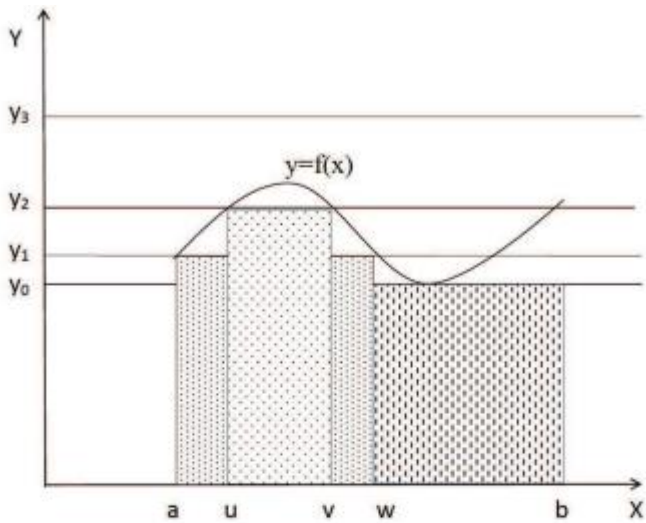
Με τέτοιες ασκήσεις θα βοηθήσουμε τους μαθητές να κάνουν κτήμα τους την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος και να τροποποιήσουν ή να εμπλουτίσουν, αν χρειαστεί, την εικόνα της συγκεκριμένης έννοιας, ώστε να αφορά, όχι μόνο τις μη αρνητικές συνεχείς συναρτήσεις, των οποίων το ορισμένο ολοκλήρωμά σε ένα διάστημα [α,β] παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το γράφημά τους, τον άξονα των x και τις ευθείες x = α και x = β, αλλά και τις συνεχείς συναρτήσεις που δε διατηρούν πρόσημο στο [α,β]. Επιπλέον, να περιλαμβάνει και τα ορισμένα ολοκληρώματα της μορφής $\int_{a}^{\beta} f(x)dx$ όπου f συνεχής συνάρτηση και α> β.

LEBESGUE

Ένα ερώτημα που μας απασχολεί, είναι αν θα μπορούσε η μέθοδος εύρεσης του εμβαδού με τη μέθοδο Lebesgue να διδάσκεται στους μαθητές πριν από αυτή του Riemann. Με τη μέθοδο του Lebesgue, διευρύνεται η κλάση των ολοκληρωμάτων σε συναρτήσεις με αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών.

Είναι όμως αυτό εφικτό να γίνει στην διδασκαλία του ολοκληρώματος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση?

Ο Γάλλος μαθηματικός το 1904 χρησιμοποίησε ισχυρή και εννοιολογική βάση της «θεωρίας μέτρου» που βοηθά στη σαφή αντίληψη των μεγεθών των συνόλων. Διαμερίζει το σύνολο τιμών.



Σχήμα 21

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δόθηκε από τον Lebesgue ίσως δεν είναι κατάλληλος αρκετά για τους σκοπούς της εισαγωγής του ολοκληρώματος στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση έτσι όπως είναι διαμορφωμένο το αντίστοιχο πρόγραμμα σπουδών. Η ενσωμάτωση του Lebesgue απαιτεί την κουραστική μελέτη της «θεωρίας μέτρου» και της «άλγεβρας σίγμα» πριν οριστεί το ολοκλήρωμα. Σε μία ενδεχόμενη αναδιάρθρωση του αναλυτικού προγράμματος σπουδών και αλλάζοντας από το γυμνάσιο ακόμη την ύλη των μαθηματικών, θα μπορούσε να εισαχθούν σε μεγαλύτερες τάξεις κάποιες βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου, έτσι ώστε να γίνει εφικτή η διδασκαλία της έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lebesgue.

Συμπεράσματα

Η αξιοποίηση αυτών των ιστορικών προβλημάτων δεν γίνεται με την μορφή ενός ευχάριστου διαλείμματος από τα κανονικά μαθηματικά αλλά εντάσσονται αρμονικά μέσα στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών επιτυγχάνοντας συγκεκριμένους και εφικτούς διδακτικούς στόχους. Επιπλέον πετυχαίνουν να παρουσιάζουν τις πρακτικές ανάγκες που οδήγησαν στην εισαγωγή αυτών των εννοιών παρουσιάζοντας τα μαθηματικά ως ένα κοινωνικοπολιτιστικό αγαθό. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις διεργασίες που απαιτήθηκαν για τις μαθηματικές θεωρίες κι έτσι πετυχαίνουμε καλύτερη εννοιολογική κατανόηση των συνθηκών, αναγκών και επιστημολογικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών εννοιών.

Η ένταξη της ιστορίας του ολοκληρώματος στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι χρήσιμη, και αυτό διότι αναδεικνύει την εσωτερική δομή του ολοκληρώματος, αποκαλύπτει κοινωνικό-πολιτισμικούς παράγοντες που έπαιξαν ρόλο στη διαμόρφωση του, καθώς επίσης δημιουργεί κίνητρα και θετική στάση και αντίληψη στους μαθητές. Μία μελέτη της ιστορίας του ολοκληρώματος, βοηθά και τους ίδιους τους καθηγητές, να μπορούν να ερμηνεύουν αλλά και να προβλέπουν λάθη των μαθητών και σίγουρα να είναι σε θέση να επιλέγουν την κατάλληλη μέθοδο διδασκαλίας(μαθηματικό υλικό). Οι μαθητές μέσω της ενασχόλησης τους με την εξέλιξη του ολοκληρώματος κατανοούν και αξιολογούν τον τρόπο ανάπτυξης τους και αυτός είναι ένας τρόπος καλύτερης αλλά και ουσιαστικότερης εκμάθησης του ολοκληρώματος. Αυτό άλλωστε αποδεικνύεται και από το γεγονός ότι όλο και περισσότερες έρευνες κάνουν λόγο για την ωφελιμότητα της ένταξης της ιστορίας του ολοκληρώματος και γενικότερα των μαθηματικών στην καθημερινή διδακτική πράξη.

Βιβλιογραφία

- Carl B.Boyer Fermat s integration of z^n 1945

- Edwards C.H 1979 The Historical Development of the Calculus, Springerverlag New York

- An introduction to the history of Mathematics. New York Rinehart,1963

- .(Oeuvres Completes, 2nd series, vol.4. Paris Gauthier-Villars,1899)

- Katz J.V,2013 Ιστορία των μαθηματικών. Απόδοση στα ελληνικά: Χατζηκυριακού Κ, επιστημονική επιμέλεια: Χριστιανίδης Γ,Πανεπ.Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο

- Boyer,C.B, (1959) The History of the Calculus and its Conseptual Development, New York, Dover Publications.

- Lecons Sur L'Integration .Paris Gauthier-Villars,1928

- The Analytic Theory of Heat. Translated by A. Freeman. New York:
Dover,1955

- Mamona Downs 1996 on the notio of function in L.puigA Gutierrez
Proceeding of the 20th annual conference of the P.M.E International Vol.3 university of Valencia, Spain

- Tzanakis C.Arcavia de sa,CC,Isoda M,Lit,Niss,2000, Integrating history of mathematics in the classroom, an analytic survey in J.fauvel & J.van Maanen (Eds) History in mathematics education. The ICMI study New ICMS Study Series (vol6) Dordrecht Kluwer

- Γιαννακούλιας Ε. 2007 Απειροστικός Λογισμός .Η ιστορική εξέλιξη από τον 5^0 αιώνα π.Χ. έως και τον 19^o αιώνα, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

- Απειροστικός Λογισμός Νεγρεπόντης,Γιωτόπουλος Γιαννακούλιας εκδόσεις Συμμετρία 1999

- Streetland 1996 Tzanakis,Arcavi 2000
- Μαθηματικά Γ Γενικού Λυκείου, ομάδας προσανατολισμού Ανδρεαδάκη Σ.Κατσαργύρης,Μετης,Μπρουχούτος,Πολύζος.
- Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, τμήμα δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ,οδηγίες για τη διδακτέα ύλη
- Τζανάκης Κ.2009.Η αξιοποίηση των σχέσεων μεταξύ της ιστορίας των μαθηματικών εκπαίδευσης. Συζήτηση σχετικά με τα υπέρ και τα κατά, βάσει της διεθνούς εμπειρίας.
- Βαμβακούση Ξ,Θωμαίδης Γ,Πάσχος Θ. Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών. Επιστημονική ένωση για τη διδακτική των μαθηματικών. Θεσσαλονίκη Εκδόσεις Ζήτη
- Διδακτορική διατριβή Γεωργίου Πολύζου. Η Ανάλυση στο λύκειο και μία διδακτική της προσέγγιση Ε.Κ.Π.Α

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα: Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.