ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: Μεταπτυχιακές Σπουδές στα Μαθηματικά (ΜΣΜ)

<u>ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ</u>

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

Φοιτητής: ΜΙΧΑΗΛ ΓΙΑΝΝΑΡΟΣ

Επιβλέπων Καθηγητής: ΜΠΟΥΚΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ

ΜΙΧΑΗΛ ΓΙΑΝΝΑΡΟΣ

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής:

ΜΠΟΥΚΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Μέλος Σ.Ε.Π – Ε.Α.Π

Συν-Επιβλέπων Καθηγητής:

ΑΝΟΥΣΗΣ ΜΙΧΑΗΛ

Καθηγητής πανεπιστημίου Αιγαίου

Πάτρα, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ/2023

Αφιέρωση

Στους γονείς μου και στην γυναίκα μου…

Περίληψη

Στην παρακάτω εργασία κάνουμε αναφορά στα στις εισαγωγικές έννοιες της Συνδυαστικής και βλέπουμε κάποιες χαρακτηριστικές εφαρμογές. Στο 1ο κεφάλαιο αναφέρουμε τα θεωρήματα καταμέτρησης, στο 2ο κεφάλαιο δίνουμε τους ορισμούς και μερικά παραδείγματα πάνω στους συνδυασμούς και διατάξεις διαφορετικών και όμοιων αντικειμένων. Ακόμα, στο 3ο κεφάλαιο αναφέρουμε το διωνυμικό θεώρημα, στο 4ο κεφάλαιο αναφέρουμε την Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού και την Αρχή του Περιστερώνα. Στο 5ο κεφάλαιο εξετάζουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις και τις εφαρμογές τους. Τέλος, στο 6ο κεφάλαιο κάνουμε μια εκτενή αναφορά στους αριθμούς Catalan και στους αριθμούς Stirling και τις εφαρμογές τους.

Λέξεις Κλειδιά

Διάταξη, Συνδυασμός, Αριθμοί Catalan, Αριθμοί Stirling, Αριθμοί Fibonacci, Αριθμοί Bell, Γράφημα, Γεννήτρια συνάρτηση, Αρχή περιστερώνα

Abstract

In the following paper we refer to the introductory concepts of Combinatorics and see some typical applications. In the 1st chapter we mention the counting theorems, in the 2nd chapter we give the definitions and some examples on the combinations and arrangements of different and similar objects. Also, in the 3nd chapter we mention the binomial theorem, in the 4th chapter we mention the Inclusion-Exclusion Principle and the Pigeon Principle. In the 5th chapter we examine generator functions and their applications. Finally, in chapter 6 we make an extensive reference to Catalan numbers and Stirling numbers and their applications. Keywords Order, Combination, Catalan Numbers, Stirling Numbers, Fibonacci Numbers, Bell Numbers, Graph, Generating Function, Pigeon Principle

Keywords

Order, Combination, Catalan Numbers, Stirling Numbers, Fibonacci Numbers, Bell Numbers, Graph, Generating Function, Pigeon Principle

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η Συνδυαστική από τα πρώτα στάδια της εμφάνισης της είχε ως αντικείμενο τη μελέτη του σχηματισμού, της απαρίθμησης και των ιδιοτήτων των διατάξεων, των συνδυασμών και των διαμερισμών ενός πεπερασμένου συνόλου κάτω από ορισμένες συνθήκες. Η ανάπτυξη της θεωρίας των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής και η συνεχώς αυξανόμενη απαίτηση για πιο γενικούς από τις διατάξεις, συνδυασμούς και διαμερίσεις σχηματισμούς όπως και η εμφάνιση και ανάπτυξη των υπολογιστών έχουν συμβάλει στην αλματώδη ανάπτυξη της Συνδυαστικής στις τελευταίες δεκαετίες. Αξίζει να αναφερθεί ότι ένα μεγάλο πλήθος εφαρμογών της Θεωρίας Πιθανοτήτων σε περιοχές, όπως η Βιολογία, η Πληροφορική, η Γενετική, η Ψυχολογία και η Στατιστική βρίσκει ικανοποιητικές απαντήσεις μόνο μέσω καλά θεμελιωμένων συνδυαστικών τεχνικών, πράγμα που εξηγεί γιατί τα αντικείμενα που πραγματεύεται η Συνδυαστική είναι χρήσιμα για τους ερευνητές αυτών των γνωστικών περιοχών. Το ευρύ πεδίο των εφαρμογών των μεθόδων της Συνδυαστικής, την καθιστά πολύ χρήσιμη στους ερευνητές που ασχολούνται με την Επιχειρησιακή Έρευνα, τις φυσικές και τις κοινωνικές επιστήμες.

Κεφάλαιο 1

Η συνδυαστική ανάλυση (combinatorial analysis) περιλαμβάνει τεχνικές απαρίθμησης. Εφαρμόζεται: στην απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου και στην απαρίθμηση των υποσυνόλων που μπορούμε να δημιουργήσουμε από ένα σύνολο (ή δειγμάτων από έναν πληθυσμό).

1.1 Απαρίθμηση και καταγραφή

Όταν το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου το οποίο θέλουμε να απαριθμήσουμε είναι μικρό, μπορούμε να προχωρήσουμε στη συστηματική καταγραφή των στοιχείων και στη συνέχεια να μετρήσουμε το πλήθος τους. Ο αριθμός των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A συμβολίζεται με $|A|$ ή με $N(A)$ και καλείται **πληθικός αριθμός** ή **ισχύς** αυτού.

Παράδειγμα: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια σειρά δύο αγόρια και δύο κορίτσια, έτσι ώστε τα δύο κορίτσια να μην κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;

Λύση:

Συμβολίζουμε με α_1, α_2 τα δύο αγόρια και με κ_1, κ_2 τα δύο κορίτσια. Εφόσον τα δύο κορίτσια δεν μπορούν να καθίσουν σε διαδοχικές θέσεις, οι μόνες δυνατές επιλογές γι’ αυτά είναι

κ_1		κ_2	

κ_1			κ_2

	κ_1		κ_2

κ_2		κ_1	

κ_2			κ_1

	κ_2		κ_1

Στις δύο θέσεις που μένουν κενές μπορούν να τοποθετηθούν τα δύο αγόρια, είτε με τη σειρά $\alpha_1\alpha_2$ είτε με τη σειρά $\alpha_2\alpha_1$. Τελικά, θα έχουμε τις επόμενες 12 περιπτώσεις:

$\kappa_1\alpha_1\kappa_2\alpha_2$	$\kappa_1\alpha_2\kappa_2\alpha_1$	$\kappa_2\alpha_1\kappa_1\alpha_2$	$\kappa_2\alpha_2\kappa_1\alpha_1$
$\kappa_1\alpha_1\alpha_2\kappa_2$	$\kappa_1\alpha_2\alpha_1\kappa_2$	$\kappa_2\alpha_1\alpha_2\kappa_1$	$\kappa_2\alpha_2\alpha_1\kappa_1$
$\alpha_1\kappa_1\alpha_2\kappa_2$	$\alpha_2\kappa_1\alpha_1\kappa_2$	$\alpha_1\kappa_2\alpha_2\kappa_1$	$\alpha_2\kappa_2\alpha_1\kappa_1$

Θα γνωρίσουμε τις δύο βασικές αρχές της συνδυαστικής με τις οποίες θα μπορούμε να υπολογίζουμε το πλήθος των σχηματισμών που μας ενδιαφέρουν, χωρίς να χρειάζεται να καταφύγουμε στην πλήρη καταγραφή των επί μέρους στοιχείων.

1.2 Η Πολλαπλασιαστική Αρχή

Αν το στοιχείο (αντικείμενο) α_1 μπορεί να επιλεγεί με n_1 διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του α_1, το στοιχείο α_2 μπορεί να επιλεγεί με n_2 διαφορετικούς τρόπους,…, και για κάθε επιλογή των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1,}$ το στοιχείο του α_k μπορεί να επιλεγεί με n_k διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά κατά $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots n_k$ τρόπους.

Μια ειδική περίπτωση εφαρμογής της πολλαπλασιαστικής αρχής έχουμε κατά τον υπολογισμό του πλήθους των στοιχείων (πληθικού αριθμού) του καρτεσιανού γινομένου k συνόλων

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k\}$$

Πιο συγκεκριμένα ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση: (Πολλαπλασιαστική αρχή) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_k$ οποιαδήποτε $k \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα και $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Τότε

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πλήθος των άρτιων τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας μόνο τα ψηφία 1,2,5,6,8,9. Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς έχουν όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

Λύση:

α) Για να σχηματίσουμε έναν άρτιο τετραψήφιο αριθμό θα πρέπει το τελευταίο του ψηφίο να είναι 2 ή 6 ή 8 και για τα πρώτα 3 ψηφία μπορεί να επιλεγεί οποιοδήποτε αριθμός. Επομένως

Για το 1ο ψηφίο έχουμε 6 δυνατές επιλογές, για το 2ο ψηφίο έχουμε 6 δυνατές επιλογές, για το 3ο ψηφίο έχουμε 6 δυνατές επιλογές και για το 4ο ψηφίο έχουμε μόνο 3 δυνατές επιλογές

(2,6,8). Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 3 \cdot 6^3$ δυνατές επιλογές.

β) Πάλι και εδώ για να σχηματίσουμε έναν άρτιο τετραψήφιο αριθμό θα πρέπει το τελευταίο του ψηφίο να είναι 2 ή 6 ή 8, όμως το τελευταίο ψηφίο δεν θα πρέπει να επαναλαμβάνεται στα 3 πρώτα ψηφία. Επομένως, για το 4^{ο} ψηφίο έχουμε 3 δυνατές επιλογές (2,6,8),για το 1^{ο} ψηφίο θα έχουμε μόνο 5 δυνατές επιλογές εφόσον χρησιμοποιήσαμε ήδη ένα ψηφίο στην τελευταία θέση, για το 2^{ο} ψηφίο θα έχουμε 4 δυνατές επιλογές και τέλος για το 3^{ο} ψηφίο θα έχουμε 3 δυνατές επιλογές. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3^2$ δυνατές επιλογές.

1.3 Προσθετική Αρχή Απαρίθμησης

Αν το στοιχείο α_1 μπορεί να επιλεγεί με n_1 διαφορετικούς τρόπους, το α_2 με n_2 διαφορετικούς τρόπους,…, το α_k με $\mathrm{n_k}$ διαφορετικούς τρόπους και η επιλογή του στοιχείου α_i αποκλείει την επιλογή του στοιχείου α_j με $i \neq j$, τότε η επιλογή του α_1 ή του α_2 ή … ή του α_k μπορεί να γίνει με $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ διαφορετικούς τρόπους.

Μία ισοδύναμη διατύπωση της αρχής του αθροίσματος είναι η ακόλουθη:

Αρχή του Αθροίσματος με συνολοθεωρητικούς όρους: Έστω $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ οποιαδήποτε $n \geq 2$ πεπερασμένα σύνολα τα οποία είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή ισχύει $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $i, j = 1, \ldots, n$ με $i \neq j$. Τότε $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ή $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$. (*)

<u>**Απόδειξη**</u>: Με επαγωγή. Για $n = 2$, επειδή $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \emptyset$, οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2$ ανήκει είτε μόνο στο σύνολο A_1 είτε μόνο στο σύνολο A_2. Άρα, $|\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2| = |\mathrm{A}_1| + |\mathrm{A}_2|$. Έστω ότι η σχέση (*) ισχύει για $n-1$, δηλαδή $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}|$=$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{n-1}|$. Θα δείξουμε ότι αυτή ισχύει για n. Θέτουμε $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}$, $B = A_n$ και έχουμε:

$$A \cap B = (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n = (A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n) = \emptyset \; \textit{και}$$

$$A \cup B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Άρα τα σύνολα A και B είναι πεπερασμένα και ξένα μεταξύ τους, συνεπώς (*) ισχύει για κάθε $n \geq 2$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x^2 + y^2 \leq 4$.

Δύση:

Το σύνολο που μας ενδιαφέρει είναι το

$$A = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 \leq 4.$$

και μπορεί να διαμεριστεί σε 5 υποσύνολα A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 τα οποία ορίζονται ως εξής:

$A_i = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 = i\}, i = 0,1,2,3,4$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι

$$A_0 = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$$

$$A_1 = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 = 1\} = \{(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)\}$$

$$A_2 = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 = 2\} = \{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$$

$$A_3 = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 = 3\} = \emptyset$$

$A_4 = \{(x, y): x \in Z, y \in Z \; και \; x^2 + y^2 = 4\} = \{(-2,0), (2,0), (0,-2), (0,2)\}$,

ενώ για κάθε $i \neq j$ ισχύει $A_i \cap A_j = \emptyset$. Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του αθροίσματος θα έχουμε:

$$|A| = |\bigcup_{i=0}^{4} A_i| = \sum_{i=0}^{4} |A_i| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 = 13.$$

Κεφάλαιο 2

2.1 Διατάξεις και Μεταθέσεις

Οι σχηματισμοί που προκύπτουν με την επιλογή ενός συγκεκριμένου αριθμού στοιχείων από το ίδιο σύνολο, λέγονται **διατάξεις**, αν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής τους, ή **συνδυασμοί**, αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής. Τέτοιοι σχηματισμοί αποτελούν ένα από τα βασικότερα αντικείμενα μελέτης της συνδυαστικής.

Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ και k ένας θετικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του n $(k \leq n)$.

Διάταξη n αντικειμένων ανά k, λέγεται κάθε διατεταγμένη k-άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ που αποτελείται από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία του X, δηλαδή $\alpha_1 \in X, \alpha_2 \in X, \dots, \alpha_k \in X$ και $\alpha_i \neq \alpha_j$ για $i \neq j$. Το πλήθος των διατάξεων των n ανά k συμβολίζεται με P_n^k.

Στην περίπτωση $k = n$, αντί του όρου <<διάταξη των n ανά n>>, χρησιμοποιούμε συνήθως τον όρο **μετάθεση** των n στοιχείων. Το πλήθος τους συμβολίζεται με M_n.

Για τον υπολογισμό του πλήθους P_n^k των διατάξεων των n στοιχείων του συνόλου $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ανά k για οποιαδήποτε n και k $(1 \leq k \leq n)$, σκέφτομαι ως εξής: η διάταξη $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ μπορεί να δημιουργηθεί με k βήματα (φάσεις). Στο πρώτο βήμα διαλέγουμε ένα στοιχείο από το σύνολο X και το τοποθετούμε στην 1^η θέση της διάταξης (επιλογή του α_1). Στη συνέχεια, από τα στοιχεία που απέμειναν στο X ($n-1$ το πλήθος) διαλέγουμε ένα δεύτερο και το τοποθετούμε στη δεύτερη θέση (επιλογή του α_2). Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο τη διαδικασία συμπλήρωσης των υπόλοιπων θέσεων μέχρι να φτάσουμε στο k βήμα όπου η επιλογή θα γίνει ανάμεσα στα $n-k+1$ στοιχεία που απέμειναν στο σύνολο X. Έτσι, συμπληρώνεται και η τελευταία θέση της διάταξης (επιλογή του α_k). Από τα προαναφερθέντα είναι φανερό ότι μπορούμε να κάνουμε εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής με $n_1 = n, n_2 = n-1, n_3 = n-2, \dots, n_k = n-k+1$ οπότε το συνολικό πλήθος επιλογών για τη διατεταγμένη k-άδα $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ θα είναι ίσο με

$$n_1 n_2 \dots n_k = \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{\text{k όροι}}$$

Πρόταση 2.1: Ο αριθμός P_n^k των διατάξεων των n στοχείων ανά k δίνεται από τον τύπο: $P_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1), 1 \leq k \leq n.$

Στην ειδική περίπτωση $k = n$, οπότε η διάταξη μετατρέπεται σε μετάθεση των n στοιχείων, βρίσκουμε $P_n^k = n(n-1) \dots (n-n+1) = n(n-1) \dots 1$

Ο αριθμός P_n^k των διατάξεων των n στοιχείων ανά k μπορεί να γραφεί και με χρήση παραγοντικών. Αν πολλαπλασιάσουμε το P_n^k επί $(n-k)!$ θα έχουμε $P_n^k \cdot (n-k)! = [n(n-1) \dots (n-k+1)][(n-k)(n-k-1) \dots 2 \cdot 1] = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

οπότε $P_n^k \cdot (n-k)! = n!$ ή ισοδύναμα $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Πρόταση 2.2: **α**. Ο αριθμός των μεταθέσεων των n στοιχείων δίνεται από τον τύπο

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

β. Ο αριθμός των διατάξεων των n στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 1 \leq k \leq n.$

Παράδειγμα: (1) Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί με διαφορετικά ψηφία σχηματίζονται με τα ψηφία {0,1,2,3,4,5,6} ; **(2)** Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι;

Λύση:

(1) $P_7^4 - P_6^3 = \frac{7!}{(7-4)!} - \frac{6!}{(6-3)!} = 720$

(2) $3(P_6^3 - P_5^2) + P_6^3 = 420$

Όλοι οι άρτιοι αριθμοί που τελειώνουν σε μηδέν

Οι αριθμοί που τελειώνουν σε 2,4,6 εκτός από αυτούς που ξεκινούν από μηδέν

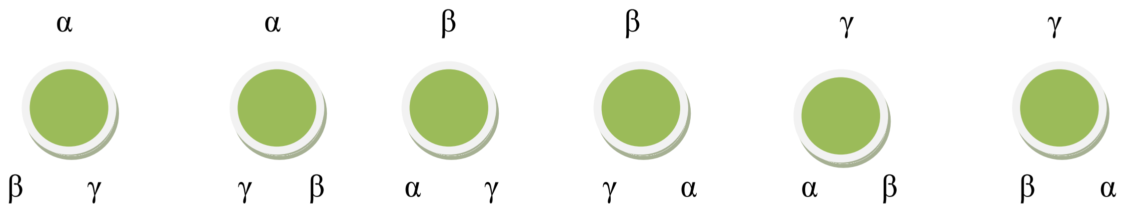
2.2 Κυκλικές μεταθέσεις

Εδώ θα θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία τοποθετούνται περιμετρικά γύρω από ένα κύκλο.

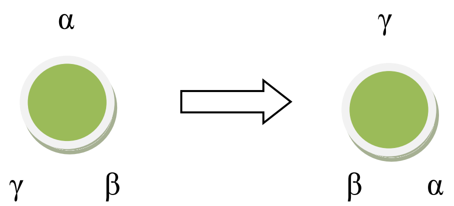
Έστω τρία άτομα α, β, γ τοποθετούνται στη σειρά, οπότε θα προκύψουν οι επόμενες $3! = 6$ μεταθέσεις

$$(\alpha,\beta,\gamma),(\alpha,\gamma,\beta),(\beta,\alpha,\gamma),(\beta,\gamma,\alpha),(\gamma,\alpha,\beta),(\gamma,\beta,\alpha)$$

Όμως αν τα άτομα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι με την ίδια σειρά, θα έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα



Από τα σχήματα αυτά είναι φανερό ότι η έκτη περίπτωση προκύπτει από την πρώτη με στροφή του τραπεζιού κατά $1/3$ του κύκλου



ενώ και η πέμπτη περίπτωση προκύπτει από την δεύτερη με (αντίστροφη) στροφή του τραπεζιού.

Αν από τις συνήθεις διατάξεις ή μεταθέσεις θεωρήσουμε ως ταυτόσημες εκείνες οι οποίες μπορούν να προκύψουν η μία από την άλλη με στροφή, θα λέμε ότι έχουμε **κυκλικές διατάξεις** ή **μεταθέσεις**. Αυτό σημαίνει ότι, ξεκινώντας από μια συνηθισμένη διατεταγμένη k-άδα που προκύπτει από αυτήν, κρατώντας τη σειρά των στοιχείων αμετάβλητη και μετατοπίζοντας το σημείο έναρξης του σχηματισμού.

Η διαδικασία αυτή να γενικευτεί για οποιαδήποτε κυκλική διάταξη των n στοιχείων ανά k με $1 \leq k \leq n$. Έτσι, από την κυκλική διάταξη προκύπτουν οι επόμενες k το πλήθος συνήθεις διατάξεις.

Σημείο έναρξης	**Διάταξη**
α_1	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \dots, \alpha_k$

α_2	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_1$
α_3	$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_2$
….	….
α_k	$\alpha_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$

Αφού από κάθε κυκλική διάταξη προκύπτουν k διατάξεις, αν συμβολίσουμε με x το πλήθος των κυκλικών διατάξεων των n στοιχείων ανά k, το γινόμενο $k \cdot x$ θα δίνει το πλήθος των συνήθων διατάξεων των n στοιχείων ανά k. Άρα, θα πρέπει να ισχύει $k \cdot x = P_n^k$ απ' όπου προκύπτει ότι $x = \frac{P_n^k}{k}$

<u>Πρόταση 2.3</u>: Ο αριθμός των κυκλικών διατάξεων των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με $K_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}$ και είναι ίσος με

$$K_n^k = \frac{P_n^k}{k} = \frac{n!}{k(n-k)!}$$

Ειδικότερα, ο αριθμός των κυκλικών διατάξεων των n στοιχείων ($k = n$) είναι ίσος με $(n-1)!$

<u>Παράδειγμα</u>: Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι n αντρόγυνα,

α) χωρίς κανένα περιορισμό ως προς τη θέση που καταλαμβάνει ο καθένας;

β) έτσι ώστε οι άνδρες και οι γυναίκες να εναλλάσσονται;

<u>Λύση</u>:

α) Εδώ αναφερόμαστε στις κυκλικές μεταθέσεις των $2n$ ατόμων (n άνδρες και n γυναίκες), οπότε το ζητούμενο πλήθος είναι $(2n-1)!$

β) Θεωρούμε ότι η διαδικασία εκτελείται σε δύο βήματα (φάσεις). Στο πρώτο, τοποθετούνται στο τραπέζι οι n άντρες και αυτό μπορεί να συμβεί κατά $(n-1)!$ διαφορετικούς τρόπους. Άρα, τελικά το πλήθος των διαφορετικών τοποθετήσεων υπό την συνθήκη που δόθηκε είναι ίσο με $(n-1)!\,n!$

2.3 Συνδυασμοί

Έστω $X = \{x_1, \mathrm{x}_2, \ldots., \mathrm{x}_\mathrm{n}\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία $x_1, \mathrm{x}_2, \ldots., \mathrm{x}_\mathrm{n}$ και k ένας θετικός ακέραιος μικρότερος ή ίσος του $n\,(k \leq n)$. Συνδυασμός των n στοιχείων ανά k λέγεται κάθε (μη διατεταγμένη) συλλογή αποτελούμενη από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ του X. Το πλήθος των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με $\binom{n}{k}$ ή C_n^k.

Βήμα 1. Επιλογή k στοιχείων από τα n που περιέχει το σύνολο X (δημιουργία ενός **συνδυασμού** των n στοιχείων ανά k).

Βήμα 2. Τοποθέτηση των k στοιχείων που επιλέχτηκαν στο Βήμα 1 με όλες τις δυνατές διαφορετικές σειρές (καταγραφή όλων των δυνατών **μεταθέσεων** των k στοιχείων που διαλέξαμε).

Το Βήμα 1 της γενικής διαδικασίας δημιουργίας των διατάξεων των n στοιχείων ανά k μπορεί να πραγματοποιηθεί με $n_1 = \binom{n}{k}$ διαφορετικούς τρόπους. Επίσης, για κάθε αποτέλεσμα του Βήματος 1, υπάρχουν $n_2 = k!$ διαφορετικοί τρόποι πραγματοποίησης του Βήματος 2. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή η ολοκλήρωση και των δύο βημάτων μπορεί να γίνει με $n_1 \cdot n_2 = \binom{n}{k} \cdot k!$ διαφορετικούς τρόπους. Δεδομένου όμως ότι η ολοκλήρωση των Βημάτων 1 και 2 θα οδηγήσει στην καταγραφή όλων των δυνατών διατάξεων των n στοιχείων ανά k, θα πρέπει να έχουμε $n_1 \cdot n_2 = P_n^k$. Επομένως, $\binom{n}{k} \cdot k! = P_n^k$ απ' όπου προκύπτει ότι $\binom{n}{k} = \frac{P_n^k}{k!}$

<u>**Πρόταση 2.4**</u>: Ο αριθμός $\binom{n}{k}$ των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, 1 \leq k \leq n$$

<u>**Παράδειγμα**</u>: Ποιος είναι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς να χρωματίσει ένα τετράγωνο μιας σκακιέρας 4x4 με κόκκινο και μπλε χρώματα έτσι ώστε κάθε σειρά και κάθε στήλη να έχει ακριβώς δύο κόκκινα τετράγωνα και μπλε τετράγωνα;

<u>**Λύση**</u>

Η 1η σειρά μπορεί να συμπληρωθεί με $C_4^2 = 6$ τρόπους

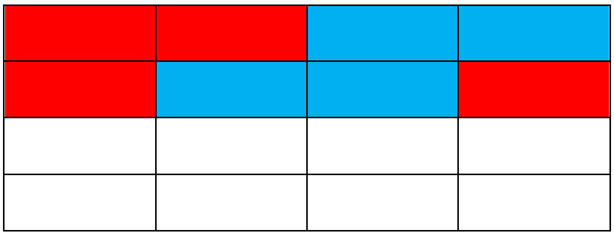
1η περίπτωση

Η 2η σειρά μπορεί να συμπληρωθεί με τον ίδιο τρόπο, εδώ η 2η σειρά συμπληρώνεται με 1 τρόπο. Ακόμα, η 3η και η 4η σειρά συμπληρώνεται με 1 τρόπο αντίστοιχα.

Επομένως, για την 1η περίπτωση έχουμε

$6 * 1 * 1 * 1 \ = \ 6$ διαφορετικοί τρόποι

2η περίπτωση



Στην 2η σειρά μπορεί να συμπληρωθεί με ακριβώς 1 κόκκινο και 1 μπλε εναλλασσόμενα με την 1η σειρά. Εδώ, η 2η σειρά μπορεί να συμπληρωθεί με 2*2 τρόπους. Η 3η σειρά συμπληρώνεται με 2 τρόπους και η 4η σειρά συμπληρώνεται μόνο με 1 τρόπο.

Επομένως, για την 2η περίπτωση έχουμε:

$6 * 2 * 2 * 2 * 1 = \ 48$ διαφορετικούς τρόπους.

3η περίπτωση

Στην 2η γραμμή και τα δύο κόκκινα και μπλε μπαίνουν σε διαφορετική θέση σε σχέση από την 1η γραμμή και συμπληρώνεται με 1 τρόπο. Η 3η σειρά συμπληρώνεται με 6 τρόπους και η 4η σειρά συμπληρώνεται με 1 τρόπο.

Επομένως, για την 3η περίπτωση έχουμε:

$6 * 1 * 6 * 1 \ = \ 36$ διαφορετικούς τρόπους

Για όλες τις περιπτώσεις έχουμε:

$6 + 48 + 36 = 90$ διαφορετικοί τρόποι

Πρόταση 2.5: Για τους αριθμούς $\binom{n}{k}, 1 \leq k \leq n$ των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

α. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ **β.** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Απόδειξη

Για το **(α)** έχουμε άμεσα

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

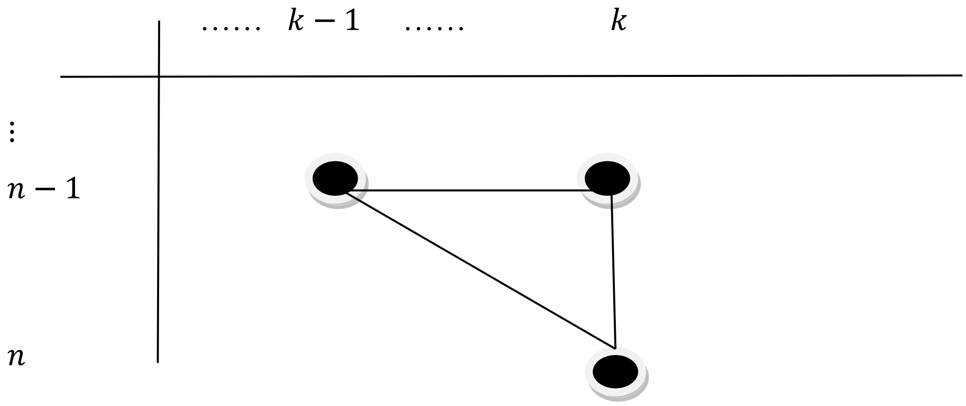
ενώ για την απόδειξη του **(β)** αρκεί να γράψουμε την αναλυτική έκφραση των προσθετέων του δεξιού μέρους, οπότε βρίσκουμε διαδοχικά (για $1 < k < n$)

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,k}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,[k+(n-k)]}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Η ταυτότητα (β) είναι γνωστή ως τρίγωνο του Pascal και οφείλει την ονομασία της στο γεγονός ότι σε έναν πίνακα τιμών για τους αριθμούς $\binom{n}{k}$, οι ποσότητες $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-1}{k}, \binom{n}{k}$ εμφανίζονται ως κορυφές Α,Β,Γ, ενός τριγώνου που σχηματίζεται από μια οριζόντια, μια κατακόρυφη και μια διαγώνια πλευρά



Σύμφωνα με την ταυτότητα (β), η τιμή που αντιστοιχεί στη θέση Γ θα βρίσκεται με πρόσθεση των τιμών που αντιστοιχούν στις θέσεις Α και Β. Ο Pascal πρότεινε το σημείο Γ να τοποθετείται μεταξύ των Α και Β, διατηρώντας το φυσικά στη γραμμή όπου βρίσκεται, και έτσι προέκυψε το σχήμα του παρακάτω πίνακα, το οποίο φέρει επίσης την ονομασία τρίγωνο του Pascal.

Το τρίγωνο του Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
………………………………………………………………………………………………………

Με αυτή τη διευθέτηση των στοιχείων παίρνουμε ένα περισσότερο λειτουργικό σχήμα στο οποίο κάθε γραμμή αρχίζει με 1 και τελειώνει με 1, ενώ κάθε άλλος αριθμός προκύπτει ως άθροισμα των δύο στοιχείων της προηγούμενης γραμμής που βρίσκονται πιο κοντά του.

2.4 Διατάξεις με επανάληψη στοιχείων

Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n (διαφορετικά μεταξύ τους) στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ και k ένας θετικός ακέραιος. Διάταξη των n στοιχείων του X ανά k με επανάληψη ή επαναληπτική διάταξη των n στοιχείων ανά kλέγεται κάθε διατεταγμένη k-αδα $(\alpha_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_k)$ η οποία αποτελείται από k στοιχεία του X, δηλαδή $a_1 \in X, a_2 \in X, \dots, a_k \in X$. Οι επαναληπτικές διατάξεις των n στοιχείων ανά k είναι όλα τα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ με $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = X$. Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή για καρτεσιανό γινόμενο συνόλων, καταλήγουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.6: Ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με A_n^k και είναι ίσος με $A_n^k = n^k$.

Παράδειγμα: Ένας καθηγητής ζητάει από τους k φοιτητές που παρακολουθούν το μάθημά του να γράψουν την ημερομηνία γεννήσεώς τους σε ένα χαρτί με αριθμημένες γραμμές $(1,2, \ldots k)$.

α. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα μπορούν να προκύψουν;

β. Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα θα προέκυπταν, αν ήταν γνωστό ότι κανένας φοιτητής δεν έχει γενέθλια την ίδια ημέρα με κάποιον άλλο; Θεωρήστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες;

Λύση: Έστω $X = \{1,2, \ldots ,365\}$ το σύνολο όλων των ημερών του έτους, όταν αυτές αντιστοιχηθούν σε διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς (ο αριθμός 15 παριστάνει την 15/1, ο αριθμός 35 την 4/2 κ.ο.κ).

α) Το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το

$$\Omega = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots ., \alpha_n) : a_i \in X, i = 1,2, \ldots , k\} = X \times X \times \ldots \times X.$$

Άρα, το Ω αποτελείται από όλες τις διατάξεις των 365 στοιχείων του X ανά k με επανάληψη και επομένως $|\Omega| = 365^k$.

β) Στην περίπτωση αυτή το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι το

$$A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) : a_i \in X, i = 1,2, \ldots , k \text{ και } a_i \neq a_j \text{ για } i \neq j\}$$

και αντιστοιχεί στις απλές διατάξεις των 365 στοιχείων του X ανά k. Επομένως, $|A| = P_{365}^k$.

2.5 Μεταθέσεις ομάδων όμοιων αντικειμένων

Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο με $n \geq 2$ διαφορετικά στοιχεία $x_1, x_2, \ldots , x_n$ και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε:

- το στοιχείο x_1 συνολικά r_1 φορές
- το στοιχείο x_2 συνολικά r_2 φορές

…………………………………………………………………………

- το στοιχείο x_n συνολικά r_n φορές

και να δημιουργήσουμε όλες τις δυνατές διατεταγμένες r-άδες

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_r)$ με $\alpha_1 \in \mathrm{X}, \alpha_2 \in \mathrm{X}, \ldots , \alpha_r \in \mathrm{X}$ όπου $r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$.

Ένας τέτοιος σχηματισμός θα λέγεται **μετάθεση των n ειδών στοιχείων** τύπου $(r_1, r_2, \ldots , r_n)$, ενώ το συνολικό πλήθος τους θα συμβολίζεται με $\binom{r}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$

Πρόταση 2.7: Ο αριθμός των μεταθέσεων των n ειδών στοιχείων εκ των οποίων τα r_1 είναι τύπου 1, τα r_2 είναι τύπου 2,…, τα r_{n} είναι τύπου n, συμβολίζεται $M_n^{r_1 r_2 \dots r_\lambda}$ και δίνεται από την έκφραση

$$M_n^{r_1 r_2 \dots r_\lambda} = \binom{r}{r_1, r_2, \dots, r_n} = \frac{r!}{r_1!\, r_2! \dots r_n!}$$

όπου $r = r_1 + r_2 + \cdots + \mathrm{r_n}$

Παράδειγμα:

Έστω $n = 2$ ένας ακέραιος αριθμός.

α. Ποιος είναι ο αριθμός των μεταθέσεων των n ειδών στοιχείων $x_1, x_2, \dots, x_n$ καθένα από τα οποία χρησιμοποιείται 3 φορές;

β. Να δείξετε ότι ο αριθμός $(3n)!$ διαιρείται πάντοτε από το γινόμενο $2^n \cdot 3^n$.

Λύση:

α. Έχουμε $r_1 = r_2 = \cdots = r_n$ και

$$r = r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \overbrace{3 + 3 + \cdots + 3}^{\text{n φορές}} = 3n$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ίσος με

$$s = \binom{3n}{3,3,\dots,3} = \frac{(3n)!}{\underbrace{3!\,3! \dots 3!}_{n\ \varphi o\rho \acute{\varepsilon} \varsigma}} = \frac{(3n)!}{(3!)^n} = \frac{(3n)!}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^n} = \frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$$

β. Είναι άμεση συνέπεια της σχέσης $s = \frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$ ή ισοδύναμα

$(3n)! = s \cdot (2^n \cdot 3^n)$ όπου το s είναι φυσικός αριθμός.

2.6 Επαναληπτικοί συνδυασμοί

Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο με n διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία $x_1, x_2, \dots, x_n$ και k ένας θετικός ακέραιος. **Επαναληπτικός συνδυασμός** των n στοιχείων του X ανά k λέγεται κάθε επιλογή k στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ από τα n στοιχεία του συνόλου X, όπου όμως είναι επιτρεπτό κάποιο ή κάποια στοιχεία του X να χρησιμοποιηθούν περισσότερες από μια φορές.

Ο αριθμός των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k θα συμβολίζεται με $E_n^k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

<u>Πρόταση 2.8</u>: Ο αριθμός $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο

$$E_n^k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} =$$
$$= \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}, n \geq 1, k \geq 1.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έχουμε 10 καραμέλες τις οποίες θέλουμε να μοιράσουμε σε τρία παιδιά. Χρησιμοποιούμε 3 διαφορετικά κουτιά που χωρούν μέχρι και όλες τις καραμέλες, και τις μοιράζω τυχαία σ' αυτά. (1) Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν; (2) Σε πόσους κάθε παιδί παίρνει μία τουλάχιστον καραμέλα;

<u>Λύση</u>:

(1) Υπάρχουν $E_{10}^3 = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$ τρόποι.

Διότι: $\boxed{x_1}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{x_3}$

Και $x_1 + x_2 + x_3 = 10, x_i \geq 0$

(2) Αρκεί να μοιράσουμε τις 7 καραμέλες, άρα:

$E_7^3 = \binom{7+3-1}{3} = \binom{9}{3} = 84$ τρόποι

<u>Πρόταση 2.9</u>: Για τον αριθμό $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k, όπου n, k είναι οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι, ισχύουν οι επόμενες ισότητες.

α. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ n-1 \end{bmatrix}$ **β**. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$

<u>Απόδειξη</u>:

Για το **(α)** παρατηρούμε ότι θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} k+1 \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{(k+1)+(n-1)-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Για την απόδειξη του **(β)** αρκεί να γράψουμε την αναλυτική έκφραση των προσθετέων του δεξιού μέλους με χρήση παραγοντικών, οπότε βρίσκουμε διαδοχικά

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{\big((n-1)+k-1\big)!}{k!\,\big((n-1)-1\big)!} + \frac{(n+(k-1)-1)!}{(k-1)!\,(n-1)!} =$$

$$\frac{(n+k-2)!}{k!\,(n-2)!} + \frac{(n+k-2)!}{(k-1)!\,(n-1)!} = \frac{(n+k-2)!\,(n-1)}{k!\,(n-1)!} + \frac{(n+k-2)!\,k}{k!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+k-2)!\,[(n-1)+k]}{k!\,(n-1)!} = \frac{(n+k-2)!\,(n+k-1)}{k!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 3

3.1 Το Διωνυμικό θεώρημα

(Τύπος του Νεύτωνα) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και n θετικός ακέραιος. Τότε το ανάπτυγμα της n-οστής δύναμης του διωνύμου $\alpha + \beta$ δίνεται από τον τύπο

$$(\alpha+\beta)^n = \binom{n}{0}\alpha^n + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta + \cdots + \binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1} + \binom{n}{n}\beta^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$$

<u>Απόδειξη</u>:

Αφού, $(\alpha+\beta)^n = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)\cdots(\alpha+\beta)$, για να βρούμε το ανάπτυγμα (δηλαδή να γράψουμε το $(\alpha+\beta)^n$ ως άθροισμα δυνάμεων του α, β), θα πρέπει από κάθε παράγοντα $(\alpha+\beta)$ να διαλέξουμε είτε το α είτε το β και να τα πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους. Αν το α επιλεγεί από k παράγοντες, $k = 0,1,\dots,n$, τότε το β θα διαλεχτεί από τους υπόλοιπους $n - k$ παράγοντες και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό θα προκύψει το μονώνυμο $\alpha^k\beta^{n-k}, k = 0,1,\dots,n$.

Όμως η επιλογή του α μπορεί να γίνει με $\binom{n}{k}$ τρόπους, όσοι και οι τρόποι επιλογής του k παραγόντων (παρενθέσεων) από τις n διαθέσιμες. Επομένως, το μονώνυμο $\alpha^k\beta^{n-k}$ εμφανίζεται συνολικά $\binom{n}{k}$ φορές, δηλαδή ο γενικός όρος του αθροίσματος είναι της μορφής $\binom{n}{k}\alpha^n\beta^{n-k}, k = 0,1,\dots,n$. Έτσι, ολοκληρώνεται η συνδυαστική απόδειξη.

Σημείωση: Ο τύπος του Νεύτωνα μπορεί να επεκταθεί και για μη ακέραιες θετικές τιμές του n.

<u>Ορισμός 3.1</u>: Για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε μη αρνητικό ακέραιο k ορίζεται ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής

$$\binom{x}{k} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!} = \frac{x!}{k!\,(x-k)!}$$

Ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ταυτίζεται με τον διωνυμικό συντελεστή αν ο x είναι φυσικό αριθμός

Θεώρημα 3.1 **(Διωνυμικό θεώρημα)** Έστω α, β, x πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $|\alpha| < |\beta|$. Τότε,

$$(\alpha + \beta)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} \alpha^k \beta^{x-k}$$

Πόρισμα 3.1 Έστω t πραγματικός αριθμός, τέτοιος ώστε $|t| < 1$ και n ένας θετικός ακέραιος. Τότε

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

Απόδειξη:

Από το διωνυμικό θεώρημα για $\alpha = -t, \beta = 1$ και $x = -n$, παίρνουμε

$$\frac{1}{(1-t)^n} = (1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-t)^k 1^{n-k}$$

και αφού ισχύει

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

θα έχουμε

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} (-t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι συντελεστές του t^{k} στο ανάπτυγμα των επόμενων συναρτήσεων σε δυνάμεις του t.

α. $f(t) = \left(\frac{t}{1-t}\right)^n, |t| < 1$ **β**. $g(t) = \frac{(1-t)^{-n}-1}{t}, |t| < 1 \; και \; t \neq 0$

Λύση:

Με βάση το Πόρισμα 3.1 έχουμε διαδοχικά

$$f(t) = \frac{t^n}{(1-t)^n} = t^n \frac{1}{(1-t)^n} = t^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^{n+r}$$

ή ακόμη, θέτοντας $n + r = k$ (οπότε $r = k - n$)

$$f(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{k-n} t^k$$

Άρα, ο συντελεστής του $t^k, k \geq n$ στο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(t)$ είναι ίσος με

$$\binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{(k-1)-(k-n)} = \binom{k-1}{n-1}, k \geq n.$$

Για την $g(t)$, αρκεί να αντικαταστήσουμε τον όρο $(1-t)^{-n}$ με το ανάπτυγμα

$$(1-t)^{-n} = \frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r$$

οπότε θα προκύψει

$$g(t) = \frac{\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r\right) - 1}{t} = \frac{\sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^r}{t} = \sum_{r=1}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} t^{r-1}$$

ή ακόμη, κάνοντας την αντικατάσταση $r - 1 = k$ (οπότε $r = k + 1$), $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k+1} t^k$

Άρα, ο ζητούμενος συντελεστής είναι ίσος με

$$\binom{n+k}{k+1} = \binom{n+k}{(n+k)-(k+1)} = \binom{n+k}{n-1}, k \geq 0.$$

3.2 Συνδυαστικές Ταυτότητες – Τύπος του Cauchy

Εδώ παρουσιάζουμε τρεις μορφές του διωνυμικού αναπτύγματος

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k, t \in R, n = 0,1, \ldots$$

Ανάπτυγμα Mac-Laurin:

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k, |t| < 1, x \in R$$

Αρνητικό διώνυμο:

$$(1-t)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k \, , |t| < 1, n = 0,1, \dots$$

<u>Πρόταση 3.2</u> (Τύπος του Cauchy) Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και n θετικός ακέραιος, ισχύει

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}$$

<u>Απόδειξη</u>:

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα και στα δύο μέλη της προφανούς ισότητας

$(1+t)^{x+y} = (1+t)^x (1+t)^y$, παίρνουμε, για $|t| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+y}{n} t^n = f(t) g(t)$$

όπου

$$f(t) = (1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

$$g(t) = (1+t)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k$$

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 3.3.1 μπορούμε να γράψουμε

$$f(t) g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n$$

όπου

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

Επομένως, θα έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+y}{n} t^n = f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n t^n, |t| < 1$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα ότι

$$\binom{x+y}{n} = \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

<u>Θεώρημα 3.2 (Πολυωνυμικό θεώρημα)</u>

Έστω n, k θετικοί ακέραιοι και $x_1, x_2, \dots, x_n$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε το ανάπτυγμα της n-οστής δύναμης του αθροίσματος $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ δίνεται από τον τύπο

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλες τις k −άδες $(r_1, r_2, \dots, r_k)$ μη αρνητικών ακέραιων οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί ο συντελεστής του x^{10} στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα της παράστασης $(1 + x^2 + x^6)^{20}$.

<u>Λύση</u>:

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4.1 θα έχουμε

$$(1 + x^2 + x^6)^{20} = \sum \frac{20!}{r_1! r_2! r_3!} 1^{r_1} (x^2)^{r_2} (x^6)^{r_3} = \sum \frac{20!}{r_1! r_2! r_3!} x^{2r_2 + 6r_3}$$

όπου η άθροιση γίνεται για όλους τους ακέραιους μη αρνητικούς αριθμούς r_1, r_2, r_3 για τους οποίους ισχύει

$r_1 + r_2 + r_3 = 20$. Για να βρούμε τον συντελεστή του x^{10} αρκεί να προσδιορίσουμε για ποιες τιμές των r_1, r_2, r_3 έχουμε $r_1 + r_2 + r_3 = 20$ και $2r_2 + 6r_3 = 10$ και να αθροίσουμε τους αντίστοιχους συντελεστές, δηλαδή τις ποσότητες $\frac{20!}{r_1!r_2!r_3!}$.

Από τη σχέση $2r_2 + 6r_3 = 10$ προκύπτει άμεσα ότι οι μόνες επιτρεπτές τιμές για το r_3 είναι οι $r_3 = 0$ ή $r_3 = 1$. Για $r_3 = 0$ θα έχουμε $2r_2 + 6 \cdot 0 = 10$ οπότε $r_2 = 5$ και από την ισότητα $r_1 + r_2 + r_3 = 20$ βρίσκουμε $r_1 = 20 - r_2 - r_3 = 15$. Ο συντελεστής που αντιστοιχεί στην τριάδα $(r_1, r_2, r_3) = (15,5,0)$ είναι ίσος με

$$\frac{20!}{15!\,5!\,0!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5!} = 15.504$$

Ομοίως, για $r_3 = 1$ προκύπτει $r_1 = 2, r_2 = 17$ με αντίστοιχο συντελεστή

$$\frac{20!}{1!\,2!\,17!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2!} = 3.420$$

Επομένως, ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα της παράστασης $(1 + x^2 + x^6)^{20}$ είναι ίσος με $15.504 + 3.420 = 18.924$.

Κεφάλαιο 4

4.1 Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού: Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι $n \geq 2$ υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_{n,1} - S_{n,2} + S_{n,3} - \cdots + (-1)^{n-1} S_{n,n} = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_{n,r}$$

όπου οι ποσότητες $S_{n,r}$ $r = 1,2, \dots, r$ δίνονται από τους τύπους

$$S_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$S_{n,2} = \sum_{i<j}^{n} \left|A_i \cap A_j\right|$$

………………………………………………………………

$$S_{n,n} = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

ή γενικά

$$S_{n,r} = \sum \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}\right|, r = 1,2, \dots, n$$

με το άθροισμα να επεκτείνεται σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς $\{i_1, i_2, \dots, i_r$ των n στοιχείων του συνόλου δεικτών $\{1,2, \dots, n\}$ ανά r.

Πόρισμα 4.1 Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι $n \geq 2$ υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε

$$|A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'| = \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i'\right| = S_{n,0} - S_{n,1} + S_{n,2} - \cdots + (-1)^{n} S_{n,n} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} S_{n,r}$$

όπου οι ποσότητες $S_{n,r}, r = 1,2, \dots, n$ δίνονται από τους τύπους που αναφέρθηκαν στην Πρόταση 4.1 και $S_{n,0} = |\Omega|$.

Απόδειξη:

Με βάση τον τύπο De Morgan

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'$$

μπορούμε να γράψουμε διαδοχικά

$$|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'|$$

$$= |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_\nu| = S_{n,0} - \left(\sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} S_{n,r}\right) =$$

$$= S_{n,0} + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r S_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_{n,r}.$$

Πόρισμα 4.2: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι $n \geq 2$ ανταλλάξιμα υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε

α.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \binom{n}{r} n_r$$

β.

$$|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'| = \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i'\right| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} n_r$$

4.2 Γενικευμένη Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Πρόταση 4.2.1: Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι $n \geq 2$ υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε το πλήθος $\mathrm{N_{n,m}}$ των στοιχείων του Ω τα οποία ανήκουν σε m ακριβώς από τα n υποσύνολα δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{N_{n,m} = S_{n,m} - \binom{m+1}{m} S_{n,m} + \binom{m+2}{m} S_{n,m+1} - \cdots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} S_{n,n}}$$

$$= \sum_{\mathrm{r=m}}^{\mathrm{n}} (-1)^{\mathrm{r-m}} \binom{\mathrm{r}}{\mathrm{m}} \mathrm{S_{n,r}, m = 0,1,\ldots,n}$$

όπου $S_{n,0} = |\Omega|$ και $S_{n,r}, r = 1,2, \dots, n$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι κάθε στοιχείο $x \in \Omega$ απαριθμείται τον ίδιο αριθμό φορών (0 ή 1) στο δεξιό και αριστερό μέλος της προς απόδειξη ισότητας. Έστω λοιπόν $x \in \Omega$ και ας υποθέσουμε ότι το x περιέχεται σε s ακριβώς από τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ όπου $0 \leq s \leq n$.

Αν $s < m$, τότε το x δεν υπολογίζεται σε κανένα από τα αθροίσματα $S_{\mathrm{n,r}}, \mathrm{r} = \mathrm{m}, \mathrm{m} + 1, \dots, \mathrm{n}$ οπότε η <<συνεισφορά>> του στο άθροισμα $\sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} S_{n,r}$ είναι μηδενική, όση ακριβώς και η συνεισφορά του στο $N_{n,m.}$

Αν $s = m$, και υποθέσουμε ότι τα m υποσύνολα στα οποία ανήκει το x είναι τα $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$, τότε το x υπολογίζεται μια μόνο φορά στο $S_{\mathrm{n,m}}$ (και πιο συγκεκριμένα στον όρο $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}\right|$), ενώ δεν υπολογίζεται καμία φορά στα αθροίσματα $S_{\mathrm{n,r}}, \mathrm{r} = \mathrm{m}, \mathrm{m} + 1, \dots, \mathrm{n}$. Άρα, η συνολική του <<συνεισφορά>> είναι ίση με 1, όση ακριβώς και η συνεισφορά του στο $N_{n,m.}$ Τέλος, αν $m < s \leq n$, το στοιχείο x θα υπολογίζεται στο άθροισμα $S_{\mathrm{n,r}}, \mathrm{r} = \mathrm{m}, \mathrm{m} + 1, \dots, s$ τόσες φορές όσοι είναι οι $\binom{n}{r}$ όροι της μορφής $\left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}\right|$

όπου $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_r$ είναι μια επιλογή r από τα σύνολα s σύνολα στα οποία περιέχεται το x. Άρα, η συνολική <<συνεισφορά>> του x στο δεξιό μέρος της προς απόδειξη ισότητας είναι ίση με

$$\sum_{r=m}^{s} (-1)^{r-m} \binom{r}{m} \binom{s}{r}$$

Όμως, κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$\binom{r}{m} \binom{s}{r} = \binom{s}{m} \binom{s-m}{r-m}$$

το τελευταίο άθροισμα ανάγεται στο

$$\binom{s}{m} \sum_{r=m}^{s} (-1)^{r-m} \binom{s-m}{r-m} = \binom{s}{m} \sum_{j=0}^{s-m} (-1)^{j} \binom{s-m}{j} = \binom{s}{m} (1-1)^{s-m} = 0$$

Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση, το δεξιό μέλος της προς απόδειξη ισότητας <<υπολογίζει>> το $x \in \Omega$ όσες ακριβώς φορές το υπολογίζει και το αριστερό. Έτσι, συμπληρώνεται η απόδειξη.

Πόρισμα 4.2.1: Αν $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι $n \geq 2$ ανταλλάξιμα υποσύνολα ενός πεπερασμένου βασικού συνόλου Ω, τότε το πλήθος $N_{n,m}$ των στοιχείων του Ω, τα οποία ανήκουν σε m ακριβώς από τα n υποσύνολα, δίνεται από τον τύπο

$$N_{n,m} = \binom{n}{m} \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} \binom{n-m}{r-m} n_r =$$

$$= \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} (-1)^{j} \binom{n-m}{j} n_{m+j}, m = 0,1, \dots, n$$

όπου

$$n_0 = |\Omega|, n_r = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r|, r = 1,2, \dots, n$$

Παράδειγμα: Ένα παιχνίδι περιέχει $2n$ κάρτες οι οποίες αποτελούν n ζευγάρια. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι n κάρτες να τοποθετηθούν απέναντι στις άλλες n, έτσι ώστε να προκύψουν ακριβώς m σωστά ζευγάρια;

Λύση

Έστω ότι αρχικά σταθεροποιούμε τις n κάρτες και ότι στη συνέχεια τοποθετούμε απέναντι τους τις υπόλοιπες n κάρτες με όλους τους δυνατούς τρόπους. Το σύνολο Ω όλων των δυνατών τοποθετήσεων έχει $n!$ στοιχεία. Αν θεωρήσουμε τα υποσύνολα $A_i \subseteq \Omega$ που περιέχουν τις τοποθετήσεις κατά τις οποίες η i κάρτα μπήκε στη σωστή θέση, τότε είναι φανερό ότι τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ανταλλάξιμα με

$$n_r = (n-r)!, r = 0,1, \dots, n.$$

Άρα, ο ζητούμενος αριθμός θα δίνεται από τον τύπο

$$N_{n,m} = \binom{n}{m} \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} \binom{n-m}{r-m} (n-m)! = \frac{n!}{m!} \sum_{r=m}^{n} \frac{(-1)^{r-m}}{(r-m)!}$$

4.3 Ακέραιες Λύσεις Γραμμικών Εξισώσεων

Πρόταση 4.3.1: Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, 0 \leq k \leq n$ με τους περιορισμούς $x_i \in \{0,1\}, i = 1,2, \dots, n$είναι ίσο με τον αριθμό $\binom{n}{k}$ των συνδυασμών των n στοιχείων ανά k.

Απόδειξη:

Μια λύση της εξίσωσης, κάτω από τους περιορισμούς που τέθηκαν, καθορίζεται πλήρως, αν από τα n σύμβολα του συνόλου $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ διαλέξουμε τα k στα οποία θα αντιστοιχηθεί η τιμή 1 (ενώ στα υπόλοιπα $n - k$ θα αντιστοιχηθεί η τιμή 0). Επομένως, το πλήθος που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι όσοι ακριβώς και οι συνδυασμοί των n στοιχείων ανά k, δηλαδή $\binom{n}{k}$.

Πρόταση 4.3.2: Το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, k \geq 0$ είναι ίσο με τον αριθμό

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k.

Απόδειξη

Μια λύση της εξίσωσης αντιστοιχεί στη διάσπαση του μη αρνητικού ακέραιου k σε n μονάδες και αντιστοίχιση κάθε μιας μονάδας σε ένα από τα σύμβολα $x_1, x_2, \dots, x_n$. Η αντιστοίχηση $i \geq 0$ μονάδων στο σύμβολο $x_r, 1 \leq r \leq n$ σημαίνει ότι η μεταβλητή x_r έχει πάρει την τιμή i (δηλαδή $x_r = i$). Με τον τρόπο αυτό κάθε λύση της γραμμικής εξίσωσης αντιστοιχεί σε έναν επαναληπτικό συνδυασμό των n στοιχείων του συνόλου $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ανά k και αντίστροφα. Επομένως, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Παράδειγμα: Έστω $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ μια συνάρτηση n μεταβλητών. Αν για τη συνάρτηση αυτή υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι ως προς οποιονδήποτε συνδυασμό μεταβλητών, πόσες μερικές παράγωγοι τάξης $k \geq 1$ μπορούν να σχηματιστούν;

Λύση: Μια μερική παράγωγος τάξης k θα είναι της μορφής

$$\frac{\partial^n f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_n^{s_n}}$$

όπου $s_1, s_2, \dots, s_n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι που ικανοποιούν τη σχέση $s_1 + s_2 + \cdots + s_n = k$. Άρα, το ζητούμενο πλήθος είναι όσες και οι ακέραιες μη αρνητικές λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ως εφαρμογή, ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $n = 3$ μεταβλητών $f(x_1, x_2, x_3)$. Τότε θα υπάρχουν

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

μερικές παράγωγοι 2ης τάξης, πιο συγκεκριμένα οι

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3}, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3}$$

οι οποίες αντιστοιχούν στις επόμενες λύσεις της εξίσωσης

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_n = 2:$$
$$(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $5x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{11} = 8$.

Λύση:

Αφού $x_2, x_3, \dots, x_{11} \geq 0$ θα έχουμε

$$8 - 5x_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_{11} \geq 0$$

οπότε θα πρέπει $8 \geq x_1$, δηλαδή $x_1 \leq \frac{8}{5}$. Δοθέντος ότι ο x_1 είναι μη αρνητικός ακέραιος, οι μόνες τιμές που μπορεί να πάρει είναι $x_1 = 0$ ή $\mathrm{x}_2 = 1$.

Αν $x_1 = 0$ η εξίσωση που δόθηκε παίρνει τη μορφή

$x_2 + x_3 + \cdots + x_{11} = 8$και το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της θα είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \binom{10+8-1}{8} = \binom{17}{8}$$

Ομοίως, αν $x_1 = 1$, η εξίσωση γίνεται

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_{11} = 8 - 5 = 3$$

και το πλήθος των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της δίνεται από τον τύπο

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3}$$

Συνεπώς, το συνολικό πλήθος ακέραιων μη αρνητικών λύσεων της $5x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{11} = 8$ είναι ίσο με $\binom{17}{8} + \binom{12}{3}$.

Πρόταση 4.3.3: Το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ με τους περιορισμούς $x_i \geq c_i, i = 1,2, \dots, n$ ($c_i, i = 1,2, \dots, n$ δοσμένοι ακέραιοι αριθμοί), είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k-c \end{bmatrix} = \binom{n+k-c-1}{n-1}$$

όπου $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$.

Σημείωση: Αν δεν ισχύει $c \leq k$ τότε το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με το μηδέν.

Πρόταση 4.3.4: Το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ με τους περιορισμούς $x_i \le d_i, i = 1,2, \dots, n$ ($d_i, i = 1,2, \dots, n$ δεδομένοι ακέραιοι αριθμοί), είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ d-k \end{bmatrix} = \binom{n+d-k-1}{d-k} = \binom{n+d-k-1}{n-1}$$

όπου $d = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$.

Απόδειξη:

Αρκεί να χρησιμοποιήσομε τις νέες ακέραιες μεταβλητές

$z_i = d_i - x_i, i = 1,2, \dots, n$ για τις οποίες θα έχουμε

$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = d - k$ με $z_i \ge 0,\ i = 1,2, \dots, n$

Η ολοκλήρωση της απόδειξης γίνεται με τον ίδιο τρόπο που έγινε και η απόδειξη της Πρότασης 4.3.3.

Πόρισμα 4.2: Το πλήθος των θετικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, n \le k$ είναι ίσο με

$$\binom{k-1}{n-1}$$

Παράδειγμα: Ζητείται από $2n$ άτομα να επιλέξουν από έναν ακέραιο αριθμό το καθένα. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών αποτελεσμάτων, έτσι ώστε το άθροισμα όλων των αριθμών που επιλέχθηκαν να είναι $k \ge 5n$, τα άτομα $1,3, \dots, 2n-1$ να έχουν επιλέξει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 3 και τα άτομα $2,4, \dots, 2n$ να έχουν επιλέξει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

Λύση: Αν συμβολίσουμε με $x_i, i = 1,2, \dots, 2n$ την επιλογή του i ατόμου, τότε θα πρέπει να ισχύει $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n} = k$

ενώ οι συνθήκες που τέθηκαν οδηγούν στους περιορισμούς

$$x_1 \ge 2, x_2 \ge 3, x_3 \ge 2, \dots x_{2n-1} \ge 2, x_{2n} \ge 3.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της Πρότασης 4.3.3, μπορούμε να γράψουμε

$$c_{2i-1} = 2, c_{2i} = 3, i = 1,2,\dots,n$$

οπότε $c = c_1 + c_2 + \cdots + c_{2n} = 2n + 3n = 5n$ και το ζητούμενο πλήθος θα είναι ίσο με

$$\binom{2n+k-c-1}{2n-1} = \binom{2n+k-5n-1}{2n-1} = \binom{k-3n-1}{2n-1}.$$

<u>Πρόταση 4.3.5</u>: Έστω n ένας θετικός ακέραιος και k, $c_i, d_i, i = 1,2,\dots,n$ ακέραιοι αριθμοί, τέτοιοι ώστε

$b_i = d_i - c_i \geq 0, i = 1,2,\dots,n$ και

$$c = c_1 + c_2 \dots + c_n \leq k \leq d_1 + d_2 \dots + d_n = d$$

Τότε , το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ με τους περιορισμούς

$c_i \leq x_i \leq d_i, i = 1,2,\dots,n$ είναι ίσο με

$$\binom{n+k-c-1}{n-1} + \sum_{r=1}^{n}(-1)^r \sum \binom{n+k-c-(b_{i_1}+b_{i_2}+\cdots+b_{i_r})-r-1}{n-1}$$

όπου το εσωτερικό άθροισμα επεκτείνεται σε όλους τους συνδυασμούς $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ των n στοιχείων του συνόλου δεικτών $\{1,2,\dots,n\}$ ανά r.

<u>Απόδειξη</u>:

Εκτελώντας τους μετασχηματισμούς $y_i = x_i - c_i, i = 1,2,\dots,n$ το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των ακέραιων λύσεων της γραμμικής εξίσωσης $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k - c$ με τους περιορισμούς $0 \leq y_i \leq b_i, i = 1,2,\dots,n$

Έστω, τώρα Ω το σύνολο των μη αρνητικών ακέραιων λύσεων της εξίσωσης αυτής και $A_i, i = 1,2,\dots,n$ τα υποσύνολα του Ω για τα οποία υπάρχει ο επιπλέον περιορισμός $y_i \leq b_i$, δηλαδή

$$A_1 = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega : y_1 > b_1\} = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega : y_1 \geq b_1 + 1\}$$

$$A_2 = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega : y_2 > b_2\} = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega : y_2 \geq b_2 + 1\}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$A_n = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega : y_n > b_n\} = \{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Omega : y_n \geq b_n + 1\}$$

Τότε το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με τον πληθικό αριθμό του συνόλου $A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n$ και, σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.1, θα δίνεται από τον τύπο

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r S_{n,r}$$

όπου

$$S_{n,0} = |\Omega| = \binom{n + (k-c) - 1}{n-1}$$

(Πρόταση 4.3.2) και

$$S_{n,r} = \sum \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}\right|, r = 1,2, \dots, n$$

με την τελευταία άθροιση να γίνεται για όλους τους συνδυασμούς $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ στοιχείων του συνόλου $\{1,2, \dots, n\}$. Όμως, το σύνολο $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}$ αντιστοιχεί στις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$y_1 + y_2 + \dots + y_n = k - c$ με τους περιορισμούς

$y_{i_1} \geq b_{i_1} + 1, y_{i_2} \geq b_{i_2} + 1, \dots, y_{i_r} \geq b_{i_r} + 1$ και $y_i \geq 0, i \neq i_1, i_2, \dots, i_r$ οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.3, θα έχουμε

$$\left|A_{i_1} \cap \ A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}\right| = \binom{n + (k-c) - \left[\left(b_{i_1} + 1\right) + \left(b_{i_2} + 1\right) + \dots + \left(b_{i_r} + 1\right)\right] - 1}{n-1}$$

$$= \binom{n + k - c - \left(b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_r}\right) - r - 1}{n-1}.$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα, αν αντικαταστήσουμε την έκφραση αυτή στη σχέση (4.3.2) και στη συνέχεια εισαγάγουμε τα $S_{n,0}$ και $S_{n,r}, r = 1,2, \dots, n$ στην (4.3.1)

Πόρισμα: Έστω n ένας θετικός ακέραιος και k, m, n ακέραιοι αριθμοί, τέτοιοι ώστε $\nu n \leq k \leq \nu m$. Τότε το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ με τους περιορισμούς $\nu \leq x_i \leq m, i = 1,2, \dots, n$ είναι ίσο με

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{k} \binom{n + k - \nu n - r(m - \nu + 1) - 1}{n - 1}.$$

Παράδειγμα: Μία βιοτεχνία παράγει n διαφορετικά προϊόντα τα οποία συσκευάζονται σε χαρτοκιβώτια με διαφορετικές ενδείξεις στο καθένα. Η παραγωγή σταματάει, όταν συσκευαστούν k χαρτοκιβώτια συνολικά (το k είναι συγκεκριμένος αριθμός ο οποίος καθορίζεται από το διαθέσιμο αποθηκευτικό χώρο). Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να συμπληρωθεί η παραγωγή των k χαρτοκιβωτίων, αν

α) πρέπει να παραχθούν τουλάχιστον δύο χαρτοκιβώτια για κάθε προϊόν ($k \geq 2n$),

β) το πλήθος των χαρτοκιβωτίων από κάθε προϊόν είναι το πολύ 10 ($k \leq 10n$).

Λύση:

Αν συμβολίσουμε με $x_i, i = 1,2, \dots, n$ τον αριθμό των χαρτοκιβωτίων που περιέχουν το προϊόν i, τα $x_1, x_2, \dots, x_n$ θα είναι μη αρνητικοί ακέραιοι οι οποίοι ικανοποιούν τη γραμμική εξίσωση $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$.

α. Στο ερώτημα αυτό έχουμε τους περιορισμούς

$x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$, οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.3, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$\binom{n + k - 2n - 1}{n - 1} = \binom{k - n - 1}{n - 1}.$$

β. Οι περιορισμοί στα $x_i, i = 1,2, \dots, n$ έχουν τώρα τη μορφή

$$0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10, \dots, 0 \leq x_n \leq 10 ,$$

οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.2, το πλήθος είναι ίσο με

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n+k-n\cdot 0-r(10-0+1)-1}{n-1}=$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n+k-11r-1}{n-1} \qquad \blacksquare$$

4.4 Μοντέλα Καταλήψεων

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε το εξής συνδυαστικό πρόβλημα: ένας συγκεκριμένος αριθμός k σφαιριδίων (ή γενικά k αντικειμένων) πρόκειται να τοποθετηθεί εντός n διαφορετικών κελιών. Εκείνο το οποίο μας ενδιαφέρει είναι η απαρίθμηση των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των σφαιριδίων στα κελιά. Τέτοιες τοποθετήσεις αναφέρονται συνήθως με την ονομασία **κατανομές** των αντικειμένων στα κελιά ή **καταλήψεις** των κελιών από τα σφαιρίδια.

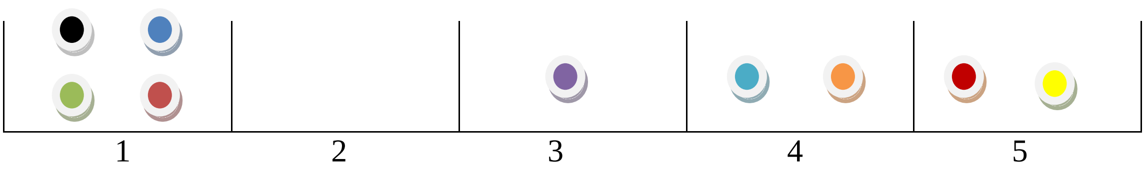
Α. Κατανομές διακεκριμένων σφαιριδίων σε κελιά

Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε k διακεκριμένα σφαιρίδια τα οποία πρόκειται να τοποθετηθούν σε n (διακεκριμένα) κελιά αριθμημένα.

1ο Μοντέλο

- Έστω ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τη χωρητικότητα των κελιών, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν από μηδέν έως όλα τα σφαιρίδια.

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 9$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά

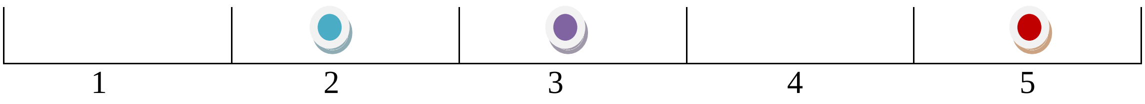


Στην περίπτωση αυτή, για κάθε σφαιρίδιο, υπάρχουν n διαφορετικές επιλογές, όσα ακριβώς και τα διαθέσιμα κελιά. Άρα, $n = n_1 = n_2 = \cdots = n_k$ και το πλήθος των διαφορετικών κατανομών είναι ίσο με $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = n^k$.

2ο Μοντέλο

- Έστω ότι τα κελιά δε χωρούν περισσότερα από ένα σφαιρίδιο, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν μόνο 0 ή 1 σφαιρίδιο $1 \leq k \leq n$.

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 3$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά



Στην περίπτωση αυτή, για το πρώτο σφαιρίδιο υπάρχουν n επιλογές, για το δεύτερο $n - 1$ (δεν είναι δυνατό να επιλεγεί το ίδιο κελί που επιλέχτηκε στο 1ο βήμα, αφού ένα κελί δεν μπορεί να χωρέσει περισσότερα από ένα σφαιρίδια), για το τρίτο n-2,…, και τέλος για το k-οστό σφαιρίδιο θα υπάρχουν $n - k + 1$ επιλογές. Άρα,

$$n_1 = n, n_2 = n - 1, \dots, n_k = n - k + 1$$

και το πλήθος των διαφορετικών κατανομών είναι ίσο με

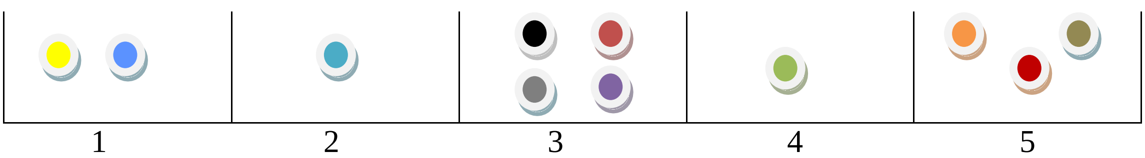
$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = P_k^n$$

3ο Μοντέλο

- Έστω ότι στο κελί j πρέπει να τοποθετηθούν ακριβώς r_j σφαιρίδια για $j = 1,2,\dots,n$. Τα $r_j, j = 1,2,\dots,n$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = k$$

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 11$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά, έτσι ώστε το πρώτο κελί να περιέχει 2 σφαιρίδια, το δεύτερο να περιέχει 1 σφαιρίδιο, το τρίτο να περιέχει 4 σφαιρίδια, το τέταρτο να περιέχει 1 σφαιρίδιο και το πέμπτο να περιέχει 3 σφαιρίδια.



$$n = 5, k = 11, r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 4, r_4 = 4, r_5 = 3$$

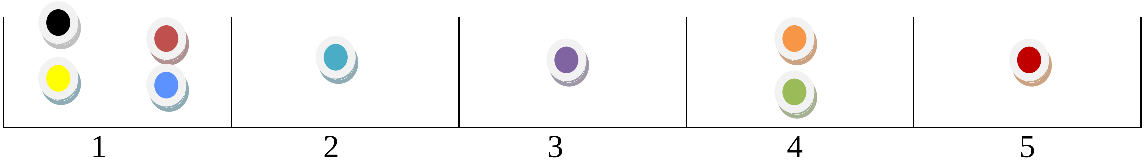
Κάθε τέτοια κατανομή αντιστοιχεί στο χωρισμό του συνόλου $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\kappa\}$ σε n ξένα ανά δύο υποσύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ έτσι το υποσύνολο A_i να περιέχει ακριβώς r_i στοιχεία, $i = 1,2, \dots, n$. Εδώ τα στοιχεία που περιέχει το σύνολο A_i είναι σφαιρίδια τα οποία τοποθετούνται στο κελί i. Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών κατανομών με τους περιορισμούς που τέθηκαν θα είναι ίσο με

$$\binom{k}{r_1, r_2, \dots, r_n} = \frac{k!}{r_1!\, r_2! \dots . r_n!}$$

4ο Μοντέλο

- Έστω ότι τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα, αλλά απαιτούμε κανένα κελί να μη μείνει κενό.

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 9$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά, έτσι ώστε κανένα κελί να μη μείνει κενό.



$$n = 5, \qquad k = 9$$

Αν συμβολίσουμε με Ω το σύνολο όλων των δυνατών κατανομών (χωρίς κανένα περιορισμό) και με $A_i \subseteq \Omega$, $i = 1,2, \dots, n$ το σύνολο των κατανομών στις οποίες το i κελί είναι κενό τότε θα έχουμε $|\Omega| = n^k$, ενώ το σύνολο που θέλουμε να απαριθμήσουμε είναι το

$$A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'.$$

Είναι επίσης εύκολο να διαπιστώσουμε ότι, για οποιοδήποτε συνδυασμό $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ των δεικτών $1,2, \dots, n$ ανά r, ισχύει

$$|A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'| = (n - r)^k,$$

αφού τότε έχουμε k σφαιρίδια τα οποία θα πρέπει να τοποθετηθούν σε $n - r$ κελιά, χωρίς κανέναν περιορισμό. Άρα, τα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ανταλλάξιμα με $n_r = (n - r)^k$, και εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.1.2, βρίσκουμε

$$|A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n'| = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k.$$

Τελικά, λοιπόν, το πλήθος των διαφορετικών κατανομών είναι ίσο με

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^k$$

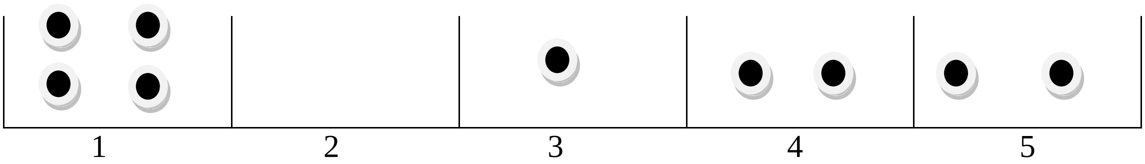
<u>Β. Κατανομές όμοιων σφαιριδίων σε κελιά</u>

Στην παράγραφο αυτή υποθέτουμε ότι τα k σφαιρίδια είναι όμοια μεταξύ τους, δηλαδή δε μας ενδιαφέρει ποια συγκεκριμένα σφαιρίδια τοποθετούνται στο κάθε κελί αλλά μόνο ο αριθμός των σφαιριδίων σε αυτό.

1ο Μοντέλο

Έστω ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς τη χωρητικότητα των κελιών, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν από μηδέν έως όλα τα σφαιρίδια.

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 9$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά



$$n = 5, k = 9$$

Στην περίπτωση αυτή ενδιαφερόμαστε για όλες τις μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

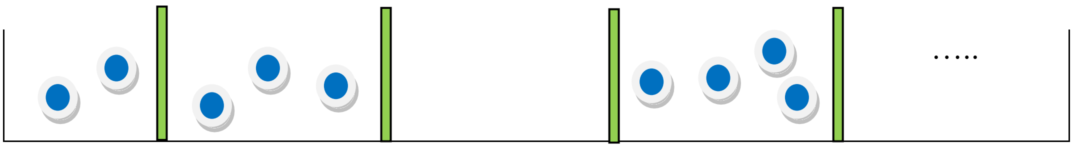
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k, \qquad k \geq 0.$$

Επομένως, ότι το πλήθος των διαφορετικών καταλήψεων είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Μια σημαντική εφαρμογή του παραπάνω μοντέλου κατάληψης βρίσκεται στην στατιστική Bose-Einstein. Θεωρούμε ένα σύστημα με σταθερή ενέργεια, όγκο και αριθμό σωματιδίων. Παίρνουμε ένα σύστημα $N = \sum_i n_i$ που αποτελείται από πανομοιότυπα μποζόνια n_i από τα όποια έχουν ενέργεια e_i και κατανέμονται σε g_i επίπεδα ή καταστάσεις με την ίδια ενέργεια e_i, δηλαδή g_i είναι ο εκφυλισμός που σχετίζεται με την ενέργεια e_i της συνολικής ενέργειας $E = \sum_i n_i e_i$. Ο υπολογισμός του αριθμού των διατάξεων των n_i σωματιδίων που κατανέμονται μεταξύ g_i καταστάσεων είναι ένα πρόβλημα συνδυαστικής. Δεδομένου ότι τα σωματίδια δεν διακρίνονται στο κβαντομηχανική πλαίσιο εδώ, ο αριθμός των τρόπων για την διάταξη n_i σωματιδίων σε κουτιά g_i είναι

$$C_{n_i}^{n_i+g_i-1}$$

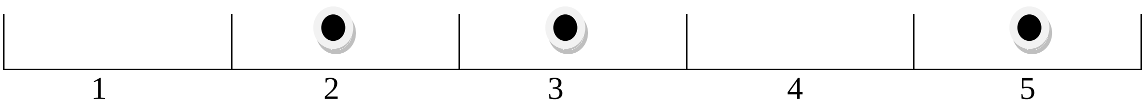


Η εικόνα αντιπροσωπεύει μια πιθανή κατανομή σωματιδίων μποζονίου σε διαφορετικά κουτιά. Τα χωρίσματα κουτιών (πράσινα) μπορούν να μετακινηθούν για να αλλάξουν το μέγεθος των κουτιών και ως αποτέλεσμα του αριθμού των μποζονίων που μπορεί να περιέχει κάθε κουτί.

2ο Μοντέλο

- Έστω ότι τα κελιά δε χωρούν περισσότερα από ένα σφαιρίδιο, δηλαδή σε κάθε κελί μπορούν να τοποθετηθούν μόνο 0 ή 1 σφαιρίδιο$(1 \leq k \leq n)$.

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 3$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά



$$n = 5, \qquad k = 3$$

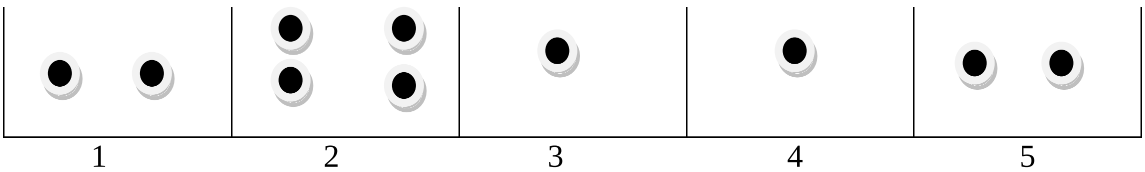
Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρουν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ με τους περιορισμούς $x_i \in \{0,1\}, i = 1,2, \ldots, n$. Το ζητούμενο πλήθος θα είναι ίσο με

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

3ο Μοντέλο

- Έστω ότι τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα, αλλά απαιτούμε κανένα κελί να μη μείνει κενό $(n \leq k)$.

Π.χ. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια κατανομή $k = 10$ σφαιριδίων σε $n = 5$ κελιά, έτσι ώστε κανένα κελί να μη μείνει κενό.



$$n = 5, \qquad k = 11$$

Στο ισοδύναμο πρόβλημα με χρήση ακέραιων λύσεων γραμμικής εξίσωσης, θα έχουμε την εξίσωση $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ και τους περιορισμούς $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \ldots, x_n \geq 1$.

Άρα, το ζητούμενο πλήθος καταλήψεων είναι ίσο με

$$\binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!\,(k-n)!}, n \leq k$$

Σημειώνουμε ότι και το γενικότερο μοντέλο όπου τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα και απαιτούμε κάθε κελί να περιέχει τουλάχιστον n σφαιρίδια μπορεί να μελετηθεί με παρόμοιες τεχνικές. Έτσι, με εφαρμογή της Πρότασης 4.3.3 και εν συνεχεία κατανομή των υπόλοιπων $k - n\nu$ σφαιριδίων στα n κελιά χωρίς περιορισμούς, καταλήγουμε ότι το συνολικό πλήθος κατανομών που προκύπτουν είναι ίσο με

$$\begin{bmatrix} n \\ k - n\nu \end{bmatrix} = \binom{n + (k - n\nu) - 1}{k - n\nu} = \binom{n + k - n\nu - 1}{n - 1}, k \leq n\nu.$$

4ο Μοντέλο

- Έστω ότι κάθε κελί πρέπει να περιέχει τουλάχιστον n σφαιρίδια, ενώ επιπλέον έχει περιορισμένη χωρητικότητα m σφαιριδίων $(n\nu \leq k \leq nm)$.

Εδώ μας ενδιαφέρουν οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$ με τους περιορισμούς

$$\nu \leq x_1 \leq m, \nu \leq x_2 \leq m, \dots \nu \leq x_n \leq m,$$

Κάνοντας χρήση του Πορίσματος 4.3.2, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πλήθος των τρόπων κατάληψης των κελιών από τα k σφαιρίδια είναι ίσο με

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{n + k - n\nu - r(m + \nu + 1) - 1}{n - 1}$$

Στην ειδική περίπτωση $n = 1$ (κανένα κελί κενό), η προηγούμενη έκφραση παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{k - rm - 1}{n - 1}.$$

4.5 Αρχή Περιστερώνα (Pigeonhole principle)

Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ λέγεται $1-1$ όταν $f(x) \neq f(x')$ για κάθε $x, x' \in X$ με $x \neq x'$. Όταν $f: X \to Y$ είναι $1-1$, το συμβολίζουμε $|X| \leq |Y|$.

Πρόταση 4.5: Αν $f: X \to Y$ μία συνάρτηση και $|X| > |Y|$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $y \in Y$ και διαφορετικά στοιχεία $x, x' \in X$ έτσι ώστε $f(x) = f(x') = y$.

Με απλά λόγια, έχουμε n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον $n + 1$ περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με 2 ή περισσότερα περιστέρια.

Γενίκευση: Αν n και k είναι θετικοί ακέραιοι, $t > n(k-1)$ και $f: [t] \to [n]$ είναι κάθε συνάρτηση, τότε υπάρχει ένα k-στοιχείο υποσύνολο $H \subseteq [t]$ και ένα στοιχείο $j \in [n]$ έτσι ώστε $f(i) = j$ για κάθε $i \in H$.

Δηλαδή, n φωλιές περιστεριών και τουλάχιστον $k \cdot n + 1$ περιστέρια τότε υπάρχει τουλάχιστον μία φωλιά με $k + 1$ ή περισσότερα περιστέρια.

Θεώρημα 4.5: Αν τα m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε οποιαδήποτε ακολουθία του $mn + 1$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί είτε έχει μία αύξουσα υπακολουθία $m + 1$ όρους, είτε έχει μία φθίνουσα υπακολουθία $n + 1$ όρων.

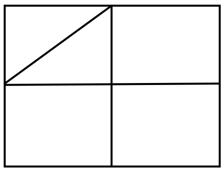
Απόδειξη

Έστω $\sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_{mn+1}\}$ μία ακολουθία των $mn + 1$ διαφορετικών πραγματικών αριθμών. Για κάθε $i = 1,2, \dots, mn + 1$, έστω a_iο μέγιστος αριθμός των όρων σε μία αύξουσα υπακολουθία του σ με x_i τον πρώτο όρο. Επιπλέον, έστω b_i ο μέγιστος αριθμός των όρων σε μία φθίνουσα υπακολουθία του σ με x_i τον τελευταίο όρο. Αν υπάρχει κάποιοi για το όποιο $a_i \geq m + 1$, τότε η σ έχει μία αύξουσα υπακολουθία με $m + 1$ όρους. Αντιστρόφως, αν υπάρχει κάποιο i για το όποιο $b_i \geq n + 1$, τότε η σ έχει μία φθίνουσα υπακολουθία με $n + 1$ όρους. Μας μένει να σκεφτούμε την περίπτωση όπου $a_i \leq m$ και $b_i \leq n$ για κάθε $i = 1,2, \dots, mn + 1$. Αφού υπάρχουν mnδιατεταγμένα ζευγάρια της μορφής (α, b) όπου $1 \leq a \leq m$ και $1 \leq b \leq n$, συμπεραίνουμε από την Αρχή του Περιστερώνα πως πρέπει να υπάρχουν ακέραιοι i_1 $και$ i_2 με $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq mn + 1$ για τους οποίους $\left(a_{i_1,} b_{i_1}\right) = \left(a_{i_2,} b_{i_2}\right)$. Αφού x_{i_1} και x_{i_2}είναι διαφορετικά, είτε έχουμε $x_{i_1} < x_{i_2}$ ή $x_{i_1} > x_{i_2}$. Στην πρώτη περίπτωση, κάθε αύξουσα υπακολουθία με x_{i_2}τον πρώτο όρο μπορεί να επεκταθεί προσθέτοντας τον x_{i_1}στην αρχή. Αυτό δείχνει ότι $a_{i_1} > a_{i_2}$. Στην δεύτερη περίπτωση, κάθε φθίνουσα υπακολουθία με x_{i_1}τον τελευταίο όρο μπορεί να επεκταθεί προσθέτοντας τον x_{i_2} στο τέλος. Αυτό δείχνει ότι $b_{i_2} > b_{i_1}$.

Παράδειγμα: Πέντε σημεία σχεδιάζονται τυχαία μέσα σε τετράγωνο πλευράς 1, δείξτε ότι τουλάχιστον 2 σημεία έχουν απόσταση λιγότερη από $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Λύση:

Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς 1 και το χωρίζουμε σε 4 ίσα μικρότερα τετράγωνα πλευράς $\frac{1}{2}$.



Επομένως, υπάρχουν 4 μικρότερα τετράγωνα (φωλιές) και 5 σημεία (περιστέρια). Από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον 2 σημεία βρίσκονται μέσα στο ίδιο τετράγωνο, η απόσταση μεταξύ των δύο αυτών σημείων είναι μικρότερη από την διαγώνιο του μικρού τετραγώνου.

Το μήκος της διαγώνιου είναι:

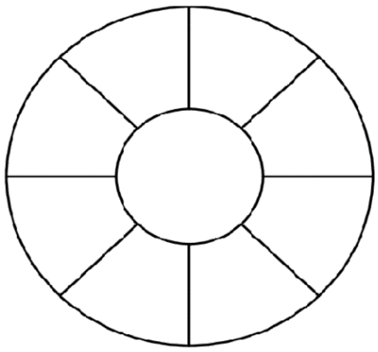
$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία με απόσταση μικρότερη από $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Παράδειγμα</u>: Δέκα σημεία σχεδιάζονται τυχαία μέσα σε έναν κύκλο με διάμετρο 5, υπάρχουν τουλάχιστον δύο σε απόσταση μικρότερη από 2 το ένα από το άλλο.

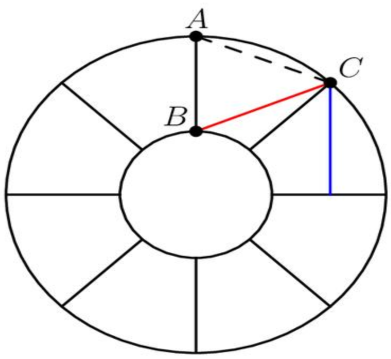
<u>Λύση:</u>

Μπορούμε να χωρίσουμε τον κύκλο σε εννέα μέρη όπως φαίνεται παρακάτω, όπου ο μικρότερος κύκλος έχει διάμετρο 2.

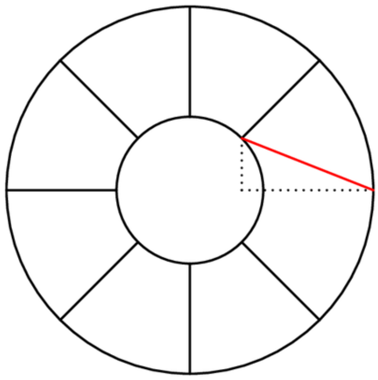


Σύμφωνα με την αρχή του περιστερώνα, τουλάχιστον ένα από αυτά τα κομμάτια περιέχει τουλάχιστον 2 ή περισσότερα σημεία. Οποιαδήποτε 2 σημεία εντός του μικρού κύκλου πρέπει να έχουν απόσταση μικρότερη από 2. Για κάθε από τις 8 εξωτερικές περιοχές, η μέγιστη απόσταση μεταξύ 2 σημείων μέσα στην ίδια περιοχή θα ήταν όταν 2 σημεία βρίσκονται σε αντίθετες γωνίες ή όταν τοποθετούνται στις 2 εξωτερικές γωνίες.

Αρχικά, προσδιορίζουμε ποιο από αυτά τα μήκη είναι μεγαλύτερο. Το τμήμα που εμφανίζεται με μπλε παρακάτω έχει μήκος $\frac{5\sqrt{2}}{4}$. Χρησιμοποιώντας ότι, $\sqrt{2} \approx 1.414$ για να προσεγγίσουμε αυτή την τιμή, παίρνουμε $\frac{7.07}{4} = 1.7675$. Αυτή η τιμή είναι ελαφρώς πάνω από 1.75 που σημαίνει ότι είναι πιο κοντά στο A από το B. Επομένως, το BCείναι μεγαλύτερο από το AC, άρα χρειάζεται μόνο να επαληθεύσουμε ότι το μήκος του BC είναι μικρότερο από 2.



Αυτή η απόσταση είναι ίση με την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με σκέλη μήκους $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\frac{5-\sqrt{2}}{2}$, όπως φαίνεται παρακάτω



Αφού χρησιμοποιήσουμε πυθαγόρειο θεώρημα, βρίσκουμε ότι η κόκκινη γραμμή έχει μήκος

$$\frac{\sqrt{29-10\sqrt{2}}}{2}$$

Προσεγγίζοντας και πάλι αυτή την τιμή, έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{29-14.14}}{2}=\frac{\sqrt{15.86}}{2}<\frac{4}{2}=2.$$

Επομένως, κανένα σημείο στην ίδια περιοχή δεν μπορεί να έχει απόσταση 2 ή μεγαλύτερη. Όπως, αναφέρθηκε προηγουμένως, τουλάχιστον μία από αυτές τις περιοχές πρέπει να περιέχει 2 ή περισσότερα σημεία , άρα πρέπει να υπάρχει ένα ζεύγος σημείων με απόσταση μικρότερη από 2.

Παράδειγμα: Δείξτε ότι το γινόμενο $abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$ πάντα διαιρείται με τον αριθμό 7, όπου a, b & c είναι μη-αρνητικοί ακέραιοι.

Λύση:

Πρώτα θα δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο n, n^3 η διαίρεση του με το 7 αφήνει πάντα υπόλοιπο 0, 1 ή 6. Με αλγόριθμο διαίρεσης, το n μπορεί να γραφτεί σε μία από τις παρακάτω μορφές

$$7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6$$

- Αν $n = 7k$, τότε $n^3 = 343k^3$ και προφανώς διαιρείται ακριβώς με το 7, οπότε το υπόλοιπο είναι 0
- Αν $n = 7k+1$, τότε $n^3 = 343k^3 + 147k^2 + 21k + 1 = 7(49k^3 + 21k^2 + 3k) + 1$

$=> n^3 = 7m + 1, \quad m = 49k^3 + 21k^2 + 3k => n^3$ αφήνει 1 ως υπόλοιπο όταν το n είναι στην μορφή $7k+1$

- Αν $n = 7k+2$, τότε $n^3 = 343k^3 + 294k^2 + 84k + 8 = 7(49k^3 + 42k^2 + 12k + 1) + 1$

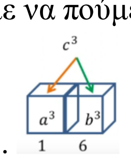
$=> n^3 = 7m + 1, \quad m = 49k^3 + 42k^2 + 12k + 1 => n^3$ αφήνει 1 ως υπόλοιπο όταν το n είναι στην μορφή $7k+2$

- Αν $n = 7k+3$, τότε $n^3 = 343k^3 + 441k^2 + 189k + 27 = 7(49k^3 + 63k^2 + 27k + 1) + 21 + 6$

$=> n^3 = 7m + 6, \quad m = 49k^3 + 42k^2 + 12k + 3 => n^3$ αφήνει 6 ως υπόλοιπο όταν το n είναι στην μορφή $7k+2$

Παρόμοια, μπορούμε να δείξουμε ότι το n στις μορφές $7k + 4{,}7k + 5$ ή $7k$ +6 έχουν υπόλοιπο 1,6 *και* 6 αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι αν τα a, b ή c διαιρείται με το 7, τότε και το $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ διαιρείται με το 7.

Υποθέτουμε πως κανένας θετικός ακέραιος a, b ή c διαιρείται με το 7 αφού το 7 είναι πρώτος αριθμός και το 7 δεν διαιρεί τα a, b ή $c => 7$ δεν διαιρεί τα α^3, b^3 ή c^3. Τώρα αφού το 7 δεν διαιρεί τα α^3, b^3 ή c^3 και το γεγονός ότι ο κύβος κάθε ακεραίου αφήνει 0,1 ή 6 ως υπόλοιπο, μπορούμε να πούμε ότι τα α^3, b^3 *και* c^3 αφήνουν υπόλοιπο είτε 1 είτε 6 όταν διαιρούνται με το 7. 

Επομένως, από την Αρχή του Περιστερώνα, τουλάχιστον δύο από τα α^3, b^3 *και* c^3 έχουν το ίδιο υπόλοιπο, έτσι τουλάχιστον ένα από τα $a^3 - b^3, b^3 - c^3$ ή $c^3 - a^3$ διαιρείται με το 7.

Άρα, το $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$ πάντα διαιρείται με τον αριθμό 7.

Κεφάλαιο 5

Η έννοια της συνάρτησης γεννήτριας εμφανίστηκε πολύ νωρίς, σε εποχές όπου η επιστήμη της συνδυαστικής ήταν σε εμβρυϊκά στάδια και δεν είχε διαμορφωθεί ακόμη ως αυτοτελής κλάδος της επιστήμης. Ήδη από το 1720 ο DeMoivre θέτει τις βάσεις για την έννοια αυτή, ενώ λίγο αργότερα, το 1748, ο Euler τις χρησιμοποιεί στη μελέτη που κάνει για τις διαμερίσεις ακέραιων αριθμών. Εκείνος όμως ο οποίος έθεσε τις θεωρητικές βάσεις για μια γενική θεώρηση και συστηματική εξέταση των γεννητριών συναρτήσεων ήταν ο Laplace. Ουσιαστικά η επικράτηση του ονόματος <<γεννήτριες συναρτήσεις>> οφείλεται στο Laplace και πιο συγκεκριμένα στο πρωτοποριακό για την εποχή έργο του <<Theorie Analytique des Probabilités>> που δημοσιεύτηκε το 1812.

5.1 Η έννοια της Γεννήτριας

Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{2,\dots}$ ή σε συντομογραφία $\{\alpha_k\}, k = 0,1, \dots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

λέγεται γεννήτρια συνάρτηση ή απλά γεννήτρια της ακολουθίας $\{\alpha_k\}, k = 0,1, \dots$

Στην περίπτωση που η ακολουθία $\{\alpha_k\}, k = 0,1, \dots$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha_m \neq 0$ και $\alpha_k = 0$, για κάθε $k > m$ τότε η συνάρτηση $A(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού m, δηλαδή

$$A(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

και ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής t. Όταν όμως δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη, η ύπαρξη της γεννήτριας $A(t)$ προϋποθέτει την απόλυτη σύγκλιση της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν ή ισοδύναμα για $|t| \leq R$ (R η ακτίνα σύγκλισης της σειράς).

Πόρισμα 5.1:

Έστω A(t), B(t) οι γεννήτριες των ακολουθιών $\{\alpha_k\}, k = 0,1,\ldots$ και $\{\beta_k\}, k = 0,1,\ldots$ αντίστοιχα. Τότε οι A(t), B(t) είναι ίσες, αν και μόνο αν ισχύει $\alpha_k = \beta_k$ για κάθε $k = 0,1,2,\ldots$

Παράδειγμα: Έστω η σταθερή ακολουθία $\alpha, \alpha, \alpha, \ldots$ με γενικό όρο $\alpha_k = \alpha$ για $k = 0,1,2,\ldots$. Τότε

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} a t^k = a(1 + t + t^2 + \cdots) = \frac{a}{1-t} |t| < 1$$

Ειδικότερα, για $\alpha = 1$ προκύπτει ότι η γεννήτρια της ακολουθίας $1,1,1,\ldots$ είναι η συνάρτηση $A(t) = \frac{1}{1-t}, |t| < 1$.

Παρατηρούμε ότι χρησιμοποιώντας τον τύπο του Νεύτωνα μπορούμε να γράψουμε $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει άμεσα ότι η γεννήτρια των αριθμών

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

ή ισοδύναμα της (πεπερασμένης) ακολουθίας $\{a_k\}, k = 0,1,\ldots,n$ με γενικό όρο $a_k = \binom{n}{k}$, $k = 1,2,\ldots,n$ είναι η συνάρτηση $A(t) = (1+t)^n$. Γενικότερα, για κάθε πραγματικό αριθμό x έχουμε $(1+t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k, |t| < 1$ το οποίο δείχνει ότι η γεννήτρια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών $a_k = \binom{x}{k}, k = 0,1,\ldots$ είναι η συνάρτηση $A(t) = (1+t)^x$.

Επιπλέον, ισχύει ότι $\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} t^k, |t| < 1$,

οπότε, η συνάρτηση

$A(t) = \frac{1}{(1-t)^n} = (1-t)^{-n}, |t| < 1$ αποτελεί τη γεννήτρια της ακολουθίας $\alpha_k = \binom{n+k-1}{k} = \left[\binom{n}{k}\right]$, $k = 0,1,2, \ldots.$ που εκφράζει τον αριθμό των επαναληπτικών συνδυασμών των n στοιχείων ανά k.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η ακολουθία της γεννήτριας συνάρτησης $B(t) = (2t^2+3)^{30}$

Λύση: Με βάση το διωνυμικό ανάπτυγμα παίρνουμε

$$B(t) = (2t^2+3)^{30} = \sum_{r=0}^{30} \binom{30}{r} (2t^2)^r 3^{30-r} = \sum_{r=0}^{30} \binom{30}{r} 3^{30-r} 2^r t^{2r}$$

οπότε για την αντίστοιχη ακολουθία $\{\beta_k\}, k = 0,1, \ldots$ συμπεραίνουμε ότι

$$\beta_k = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ \binom{30}{r} 3^{30-r} 2^r, & \alpha\nu\ k = 2r\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\ (r = 0,1, \ldots) \end{cases}$$

5.2 Πράξεις μεταξύ Γεννητριών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς μπορούμε από μια ή περισσότερες γεννήτριες να παράγουμε νέες γεννήτριες και θα εξετάσουμε τη σχέση που έχουν οι αντίστοιχες ακολουθίες αριθμών

Έστω

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots$$

οι γεννήτριες των ακολουθιών $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$, $k = 0,1, \ldots.$

αντίστοιχα. Τότε για το άθροισμα και το γινόμενο των $A(t), B(t)$ μπορούμε να γράψουμε

$A(t) + B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k$ και $A(t)B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k t^k$

όπου $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k, k = 0,1,\dots$ και

$$\delta_k = \alpha_0\beta_k + \alpha_1\beta_{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1}\beta_1 + \alpha_k\beta_0 = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r\beta_{k-r} = \sum_{r=0}^{k} \alpha_{k-r}\beta_r, k = 0,1,2,\dots$$

Η ακολουθία $\{\gamma_k\}$ λέγεται άθροισμα των ακολουθιών $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$, ενώ η $\{\delta_k\}$ λέγεται γινόμενο Cauchy ή συνέλιξη των ακολουθιών $\{\alpha_k\}$ και $\{\beta_k\}$

Επίσης, αν c είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε η $cA(t)$ θα είναι η γεννήτρια της ακολουθίας $\{ca_k\}$, $k = 0,1,\dots$ δηλαδή

$$cA(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (ca_k)t^k$$

- Γραμμική Ιδιότητα (για σταθερές λ,μ):

$$d_k = \lambda a_k + \mu b_k <=> \lambda A(t) + \mu B(t)$$

- Ιδιότητα Κλίμακας:

$$b_k = \lambda^k a_k <=> B(t) = A(\lambda t)$$

- Ιδιότητα Ολίσθησης:

Αν $b_k = 0, \mathrm{k} = 0,1,2,\dots,\mathrm{n}-1$ και $b_k = a_{k-n}$, $k = n, n+1,\dots$ τότε $\mathrm{B(t)} = \mathrm{t^n A(t)}$ (και αντίστροφα)

$$b_k = a_{k+n} <=> B(t) = \frac{A(t) - \sum_{r=0}^{n-1} a_k t^k}{t^n}$$

- Μερικών Αθροισμάτων:

$$b_k = \sum_{r=0}^{k} a_{r,}\, r = 0,1,2,\dots \;<=> B(t) = \frac{A(t)}{1-t}$$

- Ολοκλήρωσης/Παραγώγισης

$$b_k = ka_k <=> B(t) = tA'(t)$$

$$b_k = \frac{a_k}{k+1} <=> B(t) = \frac{1}{t}\int_0^t A(x)dx$$

Παράδειγμα: Έστω $A(t)$ η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας αριθμών $\{\alpha_k\}$, $k = 0,1,\ldots$

α) Σε ποια ακολουθία αριθμών αντιστοιχεί η συνάρτηση $A^2(t)$; **β**) Θεωρώντας την ακολουθία αριθμών $\alpha_k = \binom{x}{k}, k = 0,1,\ldots$ (x ένας πραγματικός αριθμός) και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), να δειχθεί ότι

$$\binom{2x}{k} = \sum_{r=0}^{k}\binom{x}{r}\binom{x}{k-r}$$

Λύση:

α) Εφαρμόζοντας τον τύπο της συνέλιξης για $\alpha_k = \beta_k, k = 0,1,2\ldots$ συμπεραίνουμε ότι $A^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k t^k$ όπου

$$\gamma_k = \sum_{r=0}^{k}\alpha_r\beta_{k-r} = \sum_{r=0}^{k}\alpha_r\alpha_{k-r}$$

β) Για $\alpha_k = \binom{x}{k}$, $k = 0,1,2,..$ βρίσκουμε

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}t^k = (1+t)^x$$

οπότε $A^2(t) = (1+t)^{2x}$. Αναπτύσσοντας το δεξιό μέλος με βάση το διωνυμικό τύπο, βρίσκουμε $A^2(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2x}{k}t^k$ ή ισοδύναμα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2x}{k}t^k$$

απ’ όπου προκύπτει άμεσα ότι

$$\binom{2x}{k} = \gamma_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r \alpha_{k-r} = \sum_{r=0}^{k} \binom{x}{r}\binom{x}{k-r}$$

<u>Πρόταση 5.2.1</u>: Έστω A(t) η γεννήτρια της ακολουθίας $\{\alpha_k\}, k = 0,1,\ldots$ Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

α. Η γεννήτρια της ακολουθίας $\{(k+1)\alpha_{k+1}\},\ k = 0,1,..$ είναι η $\mathrm{A}'(t)$

β. Η γεννήτρια της ακολουθίας $\{k\alpha_k\},\ k = 0,1,..$ είναι η $tA'(t)$

γ. Η γεννήτρια της ακολουθίας $\left\{\frac{\alpha_{k-1}}{k}\right\}, k = 1,2,\ldots$ είναι η $B(t) = \int_0^t A(x)dx$.

<u>Απόδειξη</u>:

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{\alpha_k\}, k = 0,1,\ldots$ είναι πεπερασμένη, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός αριθμός m τέτοιος, ώστε να ισχύει $\mathrm{a_m} \neq 0$ και $a_k = 0$ για κάθε $k > m$.

Τότε η αντίστοιχη γεννήτρια

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού m και θα ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής t. Η συνάρτηση A(t) θα είναι επίσης παραγωγίσιμη και ολοκληρώσιμη σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών, και κάνοντας χρήση των γνωστών κανόνων παραγώγισης και ολοκλήρωσης μπορούμε να γράψουμε

$$A'(t) = 0 + a_1 + 2a_2 t + \cdots + m a_m t^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) a_{k+1} t^k$$

$$tA'(t) = a_1 t + 2a_2 t^2 + \cdots + m a_m t^m = \sum_{k=0}^{m} k a_k t^k$$

$$\int_0^t A(x)dx = a_0\int_0^t dx + a_1\int_0^t xdx + a_2\int_0^t x^2dx + \cdots + a_m\int_0^t x^m dx = a_0t + a_1\frac{t^2}{2} + a_2\frac{t^3}{3} + \cdots + a_m\frac{t^m}{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1}\frac{a_{k-1}}{k}t^k.$$

Επομένως, η συνάρτηση (πολυώνυμο) $A'(t)$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ma_m$, η συνάρτηση $tA'(t)$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $0, a_1, 2a_2, \dots, ma_m$ ενώ τέλος η συνάρτηση $B(t) = \int_0^t A(x)dx$ είναι γεννήτρια της ακολουθίας $0, \alpha_0, \frac{\alpha_1}{2}, \dots, \frac{\alpha_m}{m+1}$.

<u>Σημείωση</u>: Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να γενικευτούν και για γεννήτριες μη πεπερασμένων ακολουθιών. Ωστόσο, για να ισχύουν θα πρέπει να εξασφαλίζεται ότι ικανοποιούνται κάθε φορά οι υποθέσεις εκείνες (συνθήκες ομαλότητας) που επιτρέπουν την εναλλαγή της παραγώγισης και της άθροισης ή της ολοκλήρωσης και της άθροισης.

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η γεννήτρια των ακολουθιών $\{k\}, k = 0,1, \dots$ και $\{k^2\}, k = 0,1, \dots$

<u>Λύση</u>: Έστω $\{\alpha_k\}, k = 0,1, \dots$ η σταθερή ακολουθία $\alpha_k = 1, k = 0,1, \dots.$ με αντίστοιχη γεννήτρια $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = \frac{1}{1-t}$. Τώρα η γεννήτρια $B(t)$ της ακολουθίας με γενικό όρο $\beta_k = k = k \cdot 1 = k\alpha_k,\ k = 0,1, \dots$ θα δίνεται από τον τύπο $B(t) = tA'(t) = t(\frac{1}{1-t})' = \frac{t}{(1-t)^2}$.

Ομοίως, η γεννήτρια Γ(t) της ακολουθίας με γενικό όρο $\gamma_k = k^2 = k \cdot k = k\beta_k, k = 0,1, \dots$ θα δίνεται από τον τύπο $\Gamma(t) = tB'(t) = t[\frac{t}{(1-t)^2}]' = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$.

Στις επόμενες εφαρμογές φαίνεται πως μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς τις πράξεις μεταξύ γεννητριών για να δημιουργήσει αναδρομικές σχέσεις για τις αντίστοιχες ακολουθίες αριθμών. Η δυνατότητα αυτή αποτελεί μια από τις πλέον σημαντικές εφαρμογές των γεννητριών.

<u>Εφαρμογή</u>: Έστω n ένας θετικός ακέραιος και $\{H_k(n)\}, k = 0,1, \ldots$ η ακολουθία αριθμών που ορίζεται από τη γεννήτρια

$A_n(t) = \sum_{n=0}^{3n} H_k(n)t^k = (1 + t + t^2 + t^3)^n$. Αφού αρχικά διαπιστωθεί ότι

$$\mathrm{A}'_n(\mathrm{t}) = \mathrm{nA}_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{t}) + 2\mathrm{ntA}_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{t}) + 3\mathrm{nt}^2\mathrm{A}_{\mathrm{n}-1}(\mathrm{t})$$

στη συνέχεια να δειχτεί ότι για τους αριθμούς $\mathrm{H}_k(\mathrm{n})$ ισχύει η αναγωγική σχέση

$$H_k(n) = \frac{n}{k}\{H_{k-1}(n-1) + 2H_{k-2}(n-1) + 3H_{k-3}(n-1)\}, \qquad 3 \leq k \leq 3n-2.$$

<u>Λύση</u>: Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $A_n(t) = (1 + t + t^2 + t^3)^n$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} A'_n(t) &= n(1 + t + t^2 + t^3)^{n-1}(1 + t + t^2 + t^3)' = nA_{n-1}(t)(1 + 2t + 3t^2) \\ &= nA_{n-1}(t) + 2ntA_{n-1}(t) + 3nt^2A_{n-1}(t) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στο δεξιό μέλος την

$A_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{3(n-1)} H_k(n-1)t^k$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
nA_{n-1}(t) &+ 2ntA_{n-1}(t) + 3nt^2A_{n-1}(t) \\
&= n\sum_{k=0}^{3n-3} H_k(n-1)t^k \\
&+ 2n\sum_{k=0}^{3n-3} H_k(n-1)t^{k+1} \\
&+ 3n\sum_{k=0}^{3n-3} H_k(n-1)t^{k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{3n-3} nH_k(n-1)t^k \\
&+ \sum_{r=1}^{3n-2} 2nH_{r-1}(n-1)t^r \\
&+ \sum_{r=2}^{3n-1} 3nH_{r-2}(n-1)t^r \\
&= nH_0(n-1) + \{nH_1(n-1) + 2nH_0(n-1)\}t \\
&+ \sum_{k=2}^{3n-3} \{nH_k(n-1) + 2nH_{k-1}(n-1) + 3nH_{k-2}(n-1)\}t^k \\
&+ \{2nH_{3n-3}(n-1) + 3nH_{3n-4}(n-1)\}t^{3n-2} + 3nH_{3n-3}(n-1)t^{3n-1}.
\end{aligned}$$

Επίσης, θα έχουμε $A'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)H_{k+1}(n)t^k$, οπότε η ισότητα στην οποία είχαμε καταλήξει με την παραγώγιση οδηγεί στις σχέσεις

$$H_1(n) = nH_0(n-1),$$

$2H_2(n) = n\{H_1(n-1) + 2H_0(n-1)\}, (k+1)H_{k+1}(n) = n\{H_k(n-1) + 2H_{k-1}(n-1) + 3H_{k-2}(n-1)\}$ *για* $2 \le k \le 3n-3$

$$(3n-1)H_{3n-1}(n) = n\{2H_{3n-3}(n-1) + 3H_{3n-4}(n-1)\}, H_{3n}(n) = H_{3n-3}(n-1).$$

Η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την τρίτη ισότητα, αν θέσουμε όπου k το $k-1$.

5.3 Γεννήτριες Συνδυασμών

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε πώς η έννοια της γεννήτριας συνάρτησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα συνδυαστικής απαρίθμησης και πιο συγκεκριμένα στην εύρεση τύπων για το πλήθος των συνδυασμών n στοιχείων με ή χωρίς περιορισμούς.

Απαρίθμηση συνδυασμών με χρήση γεννητριών

Βήμα 1

Για κάθε στοιχείο $x_{\mathrm{i}}, i = 1,2, \dots, n$, σχηματίζουμε την <<απαριθμήτρια>>$\mathrm{A}_i(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{r}} \mathrm{t}^{\mathrm{r}}$ όπου η άθροιση επεκτείνεται σε όλες τις ακέραιες μη αρνητικές τιμές του r οι οποίες αντιστοιχούν σε δυνατές εμφανίσεις του στοιχείου $\mathrm{x_i}$ στους συνδυασμούς που θέλουμε να απαριθμήσουμε (αυτό καθορίζεται από τους περιορισμούς που τέθηκαν στη χρησιμοποίηση των στοιχείων).

Βήμα 2

Πολλαπλασιάζουμε τα $\mathrm{A}_1(t), \mathrm{A}_2(\mathrm{t}), \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n}(\mathrm{t})$ και σχηματίζουμε τη γεννήτρια $A(t) = \prod_{j=1}^{n} A_j(t) = A_1(t)A_2(t) \dots A_n(t)$.

Βήμα 3

Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $A(t)$ σε δυνάμεις του t, δηλαδή τη γράφουμε στη μορφή $A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$

Βήμα 4

Το πλήθος των συνδυασμών των n στοιχείων του συνόλου x ανά k δίνεται από τους αριθμούς α_k για $k = 0,1, ..$

Παράδειγμα: Μία εταιρεία ενοικιάσεως αυτοκινήτων πρόκειται να αγοράσει k νέα αυτοκίνητα, με κινητήρες 1600, 1800 ή 2000 κυβικών εκατοστών (cc) με τους ακόλουθους περιορισμούς: θα αγοραστούν το πολύ δύο αυτοκίνητα με κινητήρα 1800 cc, το πολύ ένα με κινητήρα 2000 cc και από 3 έως 5 αυτοκίνητα με κινητήρα 1600 cc. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των k αυτοκινήτων για $k = 3,4, \dots, 8$;

Λύση:

Αν συμβολίσουμε με $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_2$ τα αυτοκίνητα με κυβισμό 1800 cc, 2000 cc και 1600 cc, αντίστοιχα, τότε το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό των συνδυασμών των $n = 3$ στοιχείων του συνόλου $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ με τους περιορισμούς:

- το στοιχείο x_1 διαλέγεται 0,1 ή 2 φορές,
- το στοιχείο x_2 διαλέγεται 0 ή 1 φορά και
- το στοιχείο x_3 διαλέγεται 3,4 ή 5 φορές.

Οι απαριθμήτριες $A_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})$ των x_{i}, $i = 1,2,3$ θα δίνονται από τους τύπους:

$$A_1(t) = \sum_{r=0}^{2} t^r = 1 + t + t^2$$

$$A_2(t) = \sum_{r=0}^{1} t^r = 1 + t$$

$$A_3(t) = \sum_{r=3}^{5} t^r = t^3 + t^4 + t^5 = t^3(1 + t + t^2)$$

οπότε η γεννήτρια των συνδυασμών που θέλουμε να απαριθμήσουμε θα είναι ίση με

$$A(t) = \prod_{i=1}^{3} A_i(t) = \ t^3(1 + t)(1 + t + t^2)^2$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία σε δυνάμεις του t, βρίσκουμε

$$A(t) = t^3(1 + t)(1 + t^2 + t^4 + 2t + 2t^2 + 2t^3) = t^8 + 3t^7 + 5t^6 + 5t^5 + 3t^4 + t^3,$$

οπότε το πλήθος α_k των επιλογών των k αυτοκινήτων θα είναι

$$\alpha_3 = 1, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 5, \alpha_6 = 5, \alpha_7 = 3, \alpha_8 = 1.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί με χρήση γεννητριών το πλήθος των διαφορετικών κατανομών k ομοίων σφαιριδίων σε n διαφορετικά κελιά, έτσι ώστε κάθε κελί να περιέχει το πολύ m σφαιρίδια (περιορισμένη χωρητικότητα $m \geq 1$ για κάθε κελί) και κανένα κελί να μη μείνει κενό.

Λύση:

Αφού κάθε κελί μπορεί να περιέχει $1,2,\dots,m$ σφαιρίδια, οι απαριθμήτριες των κελιών θα είναι ίσες με

$$A_i(t)=\sum_{r=1}^{m} t^r = t+t^2+\cdots+t^m = t(1+t+\cdots+t^{m-1}) = t\frac{1-t^m}{1-t},\ i=1,2,\dots,n$$

οπότε η γεννήτρια των αριθμών που ζητάμε να προσδιορίσουμε θα δίνεται από τον τύπο $A(t)=\prod_{i=1}^{n} A_i(t)=(t\frac{1-t^m}{1-t})^n = \mathrm{t}^{\mathrm{n}}(1-\mathrm{t}^{\mathrm{m}})^{\mathrm{n}}(1-\mathrm{t})^{-\mathrm{n}}$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, μπορούμε να γράψουμε

$$A(t)=\ t^n\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^{mk}\}\{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}t^k\}$$

και εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό των δύο αθροισμάτων

$$A(t)=t^n\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n+(\nu-mr)-1}{n-1})t^\nu$$

(για να γράψουμε το συντελεστή του t^ν πήραμε το συντελεστή του t^{mr} από το πρώτο άθροισμα επί τον συντελεστή του $t^{\nu-mr}$ από το δεύτερο για $r=0,1,\dots,n$). Εισάγοντας το t^{n} μέσα στο εξωτερικό άθροισμα και εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής $\nu+n=k$ καταλήγουμε τελικά στην έκφραση

$$A(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{r}\binom{k-mr-1}{n-1}\right)t^k$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$a_k=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{k-mr-1}{n-1},k\geq n$$

5.4 Γεννήτριες Διατάξεων

Στην περίπτωση όπου μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων, δηλαδή οι απαριθμούμενοι σχηματισμοί είναι διατάξεις (αντί συνδυασμών).

Η έννοια η οποία θα παίζει κυρίαρχο ρόλο στην απαρίθμηση διατάξεων είναι η λεγόμενη εκθετική γεννήτρια συνάρτηση.

Αν $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{2,\ldots}$ ή σε συντομογραφία $\{\alpha_k\}, k = 0,1,\ldots$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η συνάρτηση

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} = a_0 + a_1 \frac{t}{1!} + a_2 \frac{t^2}{2!} + a_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots,$$

λέγεται εκθετική γεννήτρια συνάρτηση ή απλά εκθετική γεννήτρια της ακολουθίας $\{\alpha_k\}, k = 0,1,\ldots$ Σύμφωνα με τον ορισμό της γεννήτριας που δόθηκε στην 5.1, αν γράψουμε την $E(t)$ στη μορφή

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k!}\right) t^k = \left(\frac{a_0}{0!}\right) t^0 + \left(\frac{a_1}{1!}\right) t^1 + \left(\frac{a_2}{2!}\right) t^2 + \cdots,$$

μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η $E(t)$ είναι η (συνήθης) γεννήτρια της ακολουθίας $\{\frac{\alpha_k}{k!}\}, k = 0,1,\ldots$

Απαρίθμηση διατάξεων με χρήση γεννητριών

<u>Βήμα 1</u>

Για κάθε στοιχείο $x_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = 1,2,\ldots, \mathrm{n}$ σχηματίζουμε την <<εκθετική απαριθμήτρια>> $E_i(t) = \sum_r \frac{t^r}{r!}$ όπου η άθροιση επεκτείνεται σε όλες τις ακέραιες μη αρνητικές τιμές του r οι οποίες αντιστοιχούν σε δυνατές εμφανίσεις του στοιχείου x_{i} στις διατάξεις που θέλουμε να απαριθμήσουμε (αυτό καθορίζεται από τους περιορισμούς που τέθηκαν στη χρησιμοποίηση των στοιχείων).

<u>Βήμα 2</u>

Πολλαπλασιάζουμε τα $E_1(\mathrm{t}), \mathrm{E}_2(\mathrm{t}), \ldots \mathrm{E}_{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$ και σχηματίζουμε την εκθετική γεννήτρια

$$E(t) = \prod_{i=1}^{n} E_i(t) = E_1(t)E_2(t)\cdots E_n\,(t)$$

Βήμα 3

Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση $E(t)$ σε δυνάμεις του k στη μορφή

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}$$

Βήμα 4

Το πλήθος των διατάξεων των n στοιχείων του συνόλου X και k δίνεται από τους αριθμούς α_k για $k = 0,1, \dots$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πλήθος των k-ψηφίων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τα ψηφία 0,1,2,3, έτσι ώστε το 0 και το 2 να εμφανίζονται άρτιο αριθμό φόρων, ενώ το 1 και το 3 να εμφανίζονται περιττό αριθμό φόρων.

Λύση: Η εκθετική συνάρτηση των στοιχείων 0 και 2 είναι ίση με

$$E_0(t) = E_2(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{2r}}{(2r)!} = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

ενώ η εκθετική απαριθμήτρια των στοιχείων 1 και 3 δίνεται από τον τύπο

$$E_1(t) = E_3(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Επομένως, η εκθετική γεννήτρια των διατάξεων των 4 στοιχείων του συνόλου $X = \{0,1,2,3\}$ ανάk με τους περιορισμούς που τέθηκαν θα είναι ίση με

$$E(t) = E_0(t)E_1(t)E_2(t)E_3(t) = (e^t + e^{-t})^2 \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} - e^{-2t})^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{4t} + e^{-4t} - 2)$$

και αναπτύσσοντας την τελευταία έκφραση σε δυνάμεις του t, βρίσκουμε

$$E(t) = \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-4)^k t^k}{k!} - 2\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\{1+(-1)^k\}4^{k-1}\frac{t^k}{k!}$$

Άρα, το πλήθος που ζητάμε είναι ίσο με

$$\alpha_k = \{1+(-1)^k\}4^{k-1} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ 2\cdot 4^{k-1}, & \alpha\nu\ k\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma. \end{cases}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογιστεί με χρήση γεννητριών το πλήθος των διαφορετικών κατανομών k διακεκριμένων σφαιριδιών σε $n \geq 4$ διακεκριμένα κελιά, έτσι ώστε το πρώτο κελί να περιέχει άρτιο αριθμό σφαιριδίων και το n-οστό κελί να περιέχει περιττό αριθμό σφαιριδίων.

<u>Λύση</u>:

Η εκθετική απαριθμήτρια του πρώτου κελιού είναι ίση με

$E_1(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{2r}}{(2r)!} = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ του τελευταίου $E_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{2r+1}}{(2r+1)!} = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ ενώ για τα υπόλοιπα κελιά θα έχουμε

$$E_i(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!} = e^t, i = 2,3,\dots,n-1.$$

Επομένως, η εκθετική γεννήτρια του πλήθους των κατανομών που ζητάμε θα δίνεται από τον τύπο

$$E(t) = \prod_{i=1}^{n} E_i(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot(e^t)^{n-2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{nt} - e^{(n-4)t}\right).$$

Αναπτύσσοντας την τελευταία σε δυνάμεις του t, βρίσκουμε

$$E(t) = \frac{1}{4}\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(n-4)t]^k}{k!}\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k-(n-k)^4}{4}\cdot\frac{t^k}{k!}$$

οπότε ο αριθμό που ζητάμε είναι ο $\alpha_k = \frac{n^k-(n-4)^k}{4}, k = 1,2,\dots$

Κεφάλαιο 6

6.1 Οι αριθμοί Stirling β' είδους

Οι αριθμοί Stirling β' είδους $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ υπολογίζουν με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε ακριβώς k μη διακεκριμένες θέσεις ώστε καμία θέση να μην είναι άδεια.

Ισοδύναμα

Οι αριθμοί Stirling β' είδους $S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$ υπολογίζουν με πόσους τρόπους μπορούμε να διαμερίσουμε ένα σύνολο n στοιχείων σε k μη κενά υποσύνολα.

Μια διαμέριση ενός συνόλου A είναι μια οικογένεια $A = \{A_i, i \in I\}$ μη κενών και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του A, δηλαδή:

α) $A = \cup A_i, i \in I$ β) $A_i \cap A_j = \emptyset, αν\ i \neq j$

Το I είναι το σύνολο των δεικτών και τα υποσύνολα A_i είναι τα μέρη της διαμέρισης.

Οι αριθμοί Stirling β' είδους δίνονται από τη σχέση:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n$$

Θεώρημα 6.1: Έστω $S(n,k)$ το σύνολο των διαμερίσεων ενός n-συνόλου A σε k μέρη, όπου $1 \leq k \leq n$. Ισχύουν τα εξής:

1) $S(n,1) = 1$ **2)** $S(n,n) = 1$ **3)** $S(n,0) = 0$

4) $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ **5)** $S(n,n-1) = \binom{n}{2}$

6) $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), 2 \leq k \leq n-1$

Απόδειξη:

1) Τα n στοιχεία ενός συνόλου A μπορούν να διαμερισθούν σε 1 υποσύνολο κατά μοναδικό τρόπο, άρα, $S(n,1) = 1$

2) Τα n στοιχεία ενός συνόλου A μπορούν να διαμερισθούν σε n υποσύνολα κατά μοναδικό τρόπο, άρα, $S(n,n) = 1$

3) Δεν είναι δυνατό τα n στοιχεία να διαμερισθούν σε 0 υποσύνολα, οπότε $S(n,0) = 0$

4) Έστω n-σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ το οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε σε δύο υποσύνολα. Έστω $P(A)$ το δυναμοσύνολο του A, και ο πληθάριθμός του είναι $|P(A)| = 2^n$ και το πλήθος των υποσυνόλων του A που περιέχουν το α_1 είναι 2^{n-1}. Θεωρούμε A_1 υποσύνολο του A που περιέχει το α_1 και το αντιστοιχίζουμε με το συμπλήρωμα του ως προς A. Έτσι, καταφέραμε να διαμερίσουμε το σύνολο A σε δύο μη κενά υποσύνολα.Η μόνη περίπτωση που δε μπορεί να γίνει αυτή η διαμέριση είναι όταν αντιστοιχίσουμε το ίδιο το σύνολο Α με το $\emptyset$, γιατί δεν επιτρέπεται να έχουμε κενό υποσύνολο. Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1$$

5) Προφανώς, θα έχουμε $n - 2$ σύνολα με ένα στοιχείο και ένα σύνολο με δύο στοιχεία. Δηλαδή, ψάχνουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε ένα $2 - \textit{σύνολο}$ από το αρχικό n-σύνολο:

$$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$$

6) Έστω το στοιχείο α_kπου ανήκει στο n-σύνολο A. Για κάθε διαμέριση του A ισχύει αποκλειστικά ένα από τα παρακάτω:

είτε το α_k είναι μέρος της διαμέρισης είτε το α_kανήκει σε κάποιο μέρος της διαμέρισης που περιέχει κι άλλα στοιχεία του A.

Για την πρώτη περίπτωση, αν αφαιρέσουμε το μονοσύνολο $\{\alpha_k\}$, προκύπτει μια διαμέριση του $(n-1)$ −συνόλου $A\backslash\{\alpha_k\}$ σε $k-1$ μέρη που γίνεται με $S(n-1, k-1)$ τρόπους. Αντίστροφα, αν $\alpha_k \notin B$ και σε κάθε διαμέριση του $(n-1)$-συνόλου Β σε k-1 μέρη επαναφέρουμε το μονοσύνολο $\{\alpha_k\}$, θα έχουμε μια διαμέριση του n-συνόλου $B \cup \{\alpha_k\}$ σε k μέρη. Άρα, η αντιστοιχία είναι $1-1$.

Για την δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε μια διαμέριση του n-συνόλου A σε k μέρη $A_1, A_2, \dots, A_k$ και αντιστοιχούμε το ζεύγος (i, A_0) για το οποίο ισχύει $a_n \in A_i$ και A_0 μια διαμέριση του $(n-1)$-συνόλου $A\backslash\{\alpha_n\}$ σε $k-1$ μη κενά μέρη $A_1, A_2, \dots, A_i\backslash\{\alpha_k\}, \dots., A_k$. Για κάθε $i \in (1,2,\dots,k)$ υπάρχουν k δυνατές τιμές και $S(n-1,k)$ δυνατές διαμερίσεις A_0, άρα, υπάρχουν $kS(n-1,k)$ δυνατά ζεύγη (i, A_0). Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε ένα ζεύγος της μορφής (i, A_0), μπορούμε να επαναφέρουμε το $\alpha_n \notin A\backslash\{\alpha_n\}$ στο μέρος $A_i\backslash\{a_n\}$ και προκύπτει μια διαμέριση του n-συνόλου A σε k μέρη. Άρα, η αντιστοιχία είναι 1-1.

Τέλος, δεδομένου ότι κάθε διαμέριση είναι είτε της μορφής 1 είτε της 2, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του αθροίσματος και έχουμε:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

<u>Παραδείγματα</u>: $S(4,1) = \left\{{4 \atop 1}\right\} = 1$, $S(4,4) = \left\{{4 \atop 4}\right\} = 1$, $S(4,0) = \left\{{4 \atop 0}\right\} = 0$, $S(4,2) = \left\{{4 \atop 2}\right\} = 2^{4-1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$

$$S(4,3) = \binom{4}{2} = 6$$

$$S(5,3) = S(4,2) + 3S(4,3) = 7 + 3 * 6 = 25$$

Στον επόμενο πίνακα απεικονίζουμε τους αριθμούς Stirling β' είδους για $1 \leq k \leq n \leq 6$

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

Οι αριθμοί Stirling β' είδους μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα τρίγωνο περίπου όπως αυτό του Pascal:

1η γραμμή					1					
2η γραμμή				1		1				
3η γραμμή			1		3		1			
4η γραμμή		1		7		6		1		
5η γραμμή	1		15		25		10		1	

Κάθε αριθμός στο τρίγωνο προκύπτει αν προσθέσουμε τον πάνω αριστερά με τον πάνω δεξιά πολλαπλασιασμένο επί την τάξη του στη γραμμή που βρίσκεται, π.χ $25 = 7 + 6 * 3$

<u>Θεώρημα 6.2</u>: Αν $m \leq n$, το πλήθος των τρόπων για να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε m ή λιγότερες διακεκριμένες θέσεις δίνεται από τη σχέση:

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k!\, S(n,k) = \binom{m}{1} 1!\, S(n,1) + \binom{m}{2} 2!\, S(n,2) + \cdots + \binom{m}{m} m!\, S(n,m)$$

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε πρώτα το αριστερό μέλος της ισότητας: Έστω $\{1,2,\dots,m\}$ οι διακεκριμένες θέσεις και έστω το n-σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$που θέλουμε να διαμερίσουμε. Κάθε στοιχείο α_k του συνόλου μπορεί να τοποθετηθεί σε οποιαδήποτε από τις m διακεκριμένες θέσεις, οπότε, από τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των διαμερίσεων του n-συνόλου σε m ή λιγότερες διακεκριμένες θέσεις είναι m^n.

Για το δεξί μέλος της ισότητας: Το πλήθος των τρόπων για να διαμερίσουμε τα n στοιχεία του συνόλου σε ακριβώς k διακεκριμένες θέσεις είναι $S(n,k)$ και το πλήθος των τρόπων για να ονομάσουμε αυτές τις θέσεις με στοιχεία από το σύνολο $\{1,2,\dots,m\}$ ισούται με τις k-διατάξεις του $\{1,2,\dots,m\}$, δηλαδή

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-k-1) = \binom{m}{k} k!$$

Άρα, το πλήθος των διαμερίσεων του n-συνόλου σε k διακεκριμένες θέσεις είναι $\binom{m}{k} k!\, S(n,k)$ και αθροίζοντας για όλα τα k, $1 \leq k \leq m$, έχουμε:

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} k!\, S(n,k)$$

<u>Πόρισμα 6.1</u>: Το πλήθος των τρόπων για να διαμερίσουμε ένα σύνολο n διακεκριμένω στοιχείων σε m ή λιγότερες μη διακεκριμένες θέσεις είναι:

$$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m)$$

Απόδειξη: Για κάθε k, $1\le k\le m$, που εκφράζει το πλήθος των κατειλημμένων θέσεων, ο αριθμός που ψάχνουμε είναι το άθροισμα όλων των δυνατών τρόπων να τοποθετήσουμε n διακεκριμένα αντικείμενα σε ακριβώς k μη διακεκριμένες θέσεις, δηλαδή $S(n,k)$. Αν αθροίσουμε για όλες τις τιμές του k, έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)=S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m)\ \blacksquare$$

Ανοδικά και καθοδικά παραγοντικά πολυώνυμα

Έστω $x\in R$ και $n\in N$, ορίζουμε τα ανοδικά και καθοδικά πολυώνυμα είναι πολυωνυμικού βαθμού n που περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$(x)_n=x^{\underline{n}}=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$$

και

$$x^{(n)}=x^{\overline{n}}=x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=\prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$$

Μερικά καθοδικά παραγοντικά είναι:

$(x)_0=1$

$(x)_1=x$

$(x)_2=x^2-x$

$(x)_3=x^3-3x^2+2x$

$(x)_4=x^4-6x^3+11x^2-6x$

Μερικά ανοδικά παραγοντικά είναι:

$x^{(0)}=1$

$x^{(1)}=x$

$x^{(2)}=x^2+x$

$x^{(3)}=x^3+3x^2+2x$

$x^{(4)}=x^4+6x^3+11x^2+6x$

Οι συντελεστές που εμφανίζονται στα αναπτύγματα είναι **αριθμοί Stirling α' είδους** όπως θα δούμε παρακάτω.

Τα καθοδικά και ανοδικά παραγοντικά συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις:

$$(x)_n=(x-n+1)^{(n)}=(-1)^n(-x)^{(n)}$$

και

$$x^{(n)} = (x+n-1)_n = (-1)^n(-x)_n$$

Τα ανοδικά και καθοδικά παραγοντικά σχετίζονται άμεσα με το συνηθισμένο παραγοντικό

$$n! = 1^{(n)} = (n)_n$$

$$(m)_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$m^{(n)} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$$

Συγκεκριμένα το καθοδικό παραγοντικό μπορεί να επεκταθεί για τις πραγματικές τιμές του x χρησιμοποιώντας την Γάμμα συνάρτηση δεδομένου πως το x και $x+n$ είναι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι αρνητικοί ακέραιοι.

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$$

και αντίστοιχα το ανοδικό παραγοντικό:

$$x^{(n)} = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = n!\binom{x+n-1}{n}, x \in R \setminus \{\dots,-2,-1,0\}, n \in N$$

Επιπλέον, οι ακόλουθοι τύποι συσχετίζουν τις ακέραιες δυνάμεις μιας μεταβλητής x μέσω αθροισμάτων χρησιμοποιώντας τους αριθμούς Stirling του β’ είδους.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{(k)}$$

6.2 Οι αριθμοί Stirling α’ είδους

Η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Stirling α’ είδους είναι:

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = (-1)^n n! \binom{n-x-1}{n}$$

Οι αριθμοί Stirling α΄ είδους

$$s(n,m) = \left[{n \atop m} \right]$$

μετρούν το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων σε m μη διατεταγμένους κύκλους και ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$s(n+1,m) = s(n,m-1) - ns(n,m)$$

Γνωρίζουμε ότι το πλήθος των n-διατέξεων ενός m-συνόλου είναι ίσο με:

$$m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Αν στο αριστερό μέλος αντικαταστήσουμε το m με τη μεταβλητή x, προκύπτει το γινόμενο n παραγόντων:

$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$. Από κάθε παράγοντα του γινομένου επιλέγουμε είτε ένα x είτε έναν αρνητικό ακέραιο. Επιλέγοντας ένα x περισσότερο, επιλέγουμε έναν αρνητικό ακέραιο λιγότερο. Αν συμβολίσουμε με $S(n,m)$ το συντελεστή του x^m και πολλαπλασιάσουμε, προκύπτει ένα πολυώνυμο βαθμού n χωρίς σταθερό όρο, στο οποίο τα πρόσημα των συντελεστών εναλλάσσονται: $(\ )x^n - (\ )x^{n-1} + (\ )x^{n-2} - (\ )x^{n-3} + \cdots$

Επομένως, ισχύει η σχέση:

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) \\ = s(n,n)x^n - s(n,n-1)x^{n-1} + s(n,n-2)x^{n-2} + \cdots \pm s(n,0)$$

φτάνοντας, έτσι, στους αριθμούς Stirling α' είδους.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1) $s(n,0) = 0$ **2)** $s(n,n) = 1$ **3)** $s(n,1) = (n-1)!$

4) $s(n,n-1) = \binom{n}{2}$ **5)** $s(n,m) = (n-1)s(n-1,m) + s(n-1,m-1)$

<u>Απόδειξη</u>:

1) Ισχύει προφανώς αφού το γινόμενο $x(x-1)\dots(x-n+1)$ δεν έχει σταθερό όρο.

2) Αφού στο γινόμενο $x(x-1)\dots(x-n+1)$ ο συντελεστής του x^n είναι 1, ισχύει $s(n,n) = 1$.

3) Ο συντελεστής $s(n,1)$ του x προκύπτει αν από το αρχικό γινόμενο επιλέξουμε το x από τον πρώτο παράγοντα και τους σταθερούς όρους από τους υπόλοιπους $n-1$ παράγοντες, δηλαδή:

$$\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1)!$$

άρα, $s(n,1) = (n-1)!$

4) Ο συντελεστής $s(n,n-1)$ του όρου x^{n-1} προκύπτει αν επιλέγουμε κάθε φορά το σταθερό όρο από έναν μόνο παράγοντα, δηλαδή είναι το άθροισμα των $n-1$ γινομένων:

α) από τα n-1 πρώτα γινόμενα παίρνω το x κι από το τελευταίο το σταθερό όρο, δηλαδή $(n-1)x^{n-1}$

β) από όλα τα γινόμενα παίρνω το x εκτός από το προτελευταίο από το οποίο παίρνω το σταθερό όρο, δηλαδή

$(n-2)x^{n-1}$κ.ο.κ. Προσθέτοντας τα έχουμε:

$$[(-1)+(-2)+\cdots+(-n+1)]x^{n-1} = -\frac{(n-1)n}{2}x^{n-1} = -\binom{n}{2}x^{n-1}$$

Άρα, $(n,n-1) = \binom{n}{2}$

5) Ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} &x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2) \\ &\qquad = s(n-1,n-1)x^{n-1} - s(n-1,n-2)x^{n-2} + s(n-1,n-3)x^{n-3} - \cdots \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $(x-n+1)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)(x-n+1) \\ &\qquad = s(n-1,n-1)x^{n} - (n-1)s(n-1,n-1)x^{n-1} - s(n-1,n-2)x^{n-1} \\ &\qquad + (n-1)s(n-1,n-2)x^{n-2} + s(n-1,n-3)x^{n-2} \\ &\qquad - (n-1)s(n-1,n-3)x^{n-3} - \cdots \end{aligned}$$

η οποία σε συνδυασμό με την σχέση

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = s(n,n)x^{n} - s(n,n-1)x^{n-1} + s(n,n-2)x^{n-2} - \cdots$$

και την ισότητα $s(n,n) = s(n-1,n-1) = 1$ δίνει τη ζητούμενη αναδρομική σχέση.

Παράδειγμα: Για n=5 έχουμε:

$$\begin{aligned} x(x-1)(x-2)\ldots(x-4) &= s(5,5)x^5 - s(5,4)x^4 + s(5,3)x^3 - s(5,2)x^2 + s(5,1)x \\ &= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x \end{aligned}$$

Στον επόμενο πίνακα φαίνονται οι αριθμοί Stirling α' είδους για $1 \leq k \leq n \leq 6$:

n/k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
6	-120	274	-225	85	-15	1

Από την αναδρομική σχέση του θεωρήματος προκύπτει τρίγωνο παρόμοιο με αυτό του Pascal:

$1^η$ γραμμή 1

$2^η$ γραμμή 1 1

$3^η$ γραμμή 2 3 1

$4^η$ γραμμή 6 11 6 1

$5^η$ γραμμή 24 50 35 10 1

Κάθε αριθμός στο τρίγωνο προκύπτει αν προσθέσουμε τον πάνω αριστερά με τον πάνω δεξιά πολλαπλασιασμένο επί τον αριθμό της γραμμής, δηλαδή με χρήση της αναδρομικής σχέσης που αποδείξαμε στο θεώρημα

$$s(n,m) = (n-1)s(n-1,m) + s(n-1,m-1)$$

π.χ $11 = 2 + 3 \cdot 3$

Θεώρημα 6.3: Οι αριθμοί Stirling α’ είδους $s(n,m) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ μετρούν το πλήθος των τοποθετήσεων n αντικειμένων σε m μη κενές κυκλικές μεταθέσεις.

Απόδειξη: Έστω $s'(n,m)$ το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης n αντικειμένων σε m κύκλους. Για $n \geq 1$ θα ισχύει $s'(n,n) = 1$ διότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος να τοποθετήσουμε n αντικείμενα σε n μη τεμνόμενους κύκλους, βάζοντας ένα αντικείμενο σε κάθε κύκλο. Επίσης, $s'(n,0) = 0$, διότι δεν είναι δυνατό να τοποθετήσουμε n αντικείμενα σε 0 κύκλους.

Παρατηρούμε ότι οι $s(n,m)$ και $s'(n,m)$ ικανοποιούν τις ίδιες αρχικές συνθήκες και θα αποδείξουμε ότι και για τους δύο ισχύει η ίδια αναδρομική σχέση.

Θεωρούμε τα n αντικείμενα $1,2,3,\ldots,n$ τα οποία θέλουμε να τοποθετήσουμε σε κύκλους. Κάθε αντικείμενο i, $1 \leq i \leq n$, είτε βρίσκεται μόνο του σε ένα κύκλο είτε βρίσκεται στον ίδιο κύκλο με τουλάχιστον άλλο ένα αντικείμενο.

Όταν το αντικείμενο είναι μόνο του στον κύκλο οι τοποθετήσεις είναι της μορφής $s'(n-1,m-1)$.

Όταν το αντικείμενο δεν είναι μόνο του στον κύκλο, οι τοποθετήσεις προκύπτουν αν βάλουμε τα $1,2,3,\ldots,n-1$ σε m κύκλους και το αντικείμενο n στα αριστερά καθενός από τα $1,2,3,\ldots,n-1$. Συνεπώς, κάθε τοποθέτηση των $1,2,3,\ldots,n-1$ αντικειμένων δίνει $n-1$ τοποθετήσεις των $1,2,3,\ldots,n$ αντικειμένων, δηλαδή συνολικά $(n-1)s'(n-1,m)$ τοποθετήσεις.

Από τον κανόνα του αθροίσματος για τις τοποθετήσεις του πρώτου ή του δεύτερου τύπου έχουμε:

$s'(n,m) = s'(n-1,m-1) + (n-1)s'(n-1,m)$ η οποία είναι αναδρομική σχέση που αποδείξαμε στο θεώρημα.

<u>Παράδειγμα</u>: Για $n = 4$ $\{1,2,3,4\}$ έχουμε τις τοποθετήσεις σε $m = 2$ κύκλους:

$$s(4,2) = 11$$

α) ο ένας κύκλος έχει 3 στοιχεία κι ο άλλος 1

οι δυνατές τοποθετήσεις είναι:

- 1,2,3 και 4
- 1,2,4 και 3
- 1,3,4 και 2
- 2,3,4 και 1

και αφού έχουμε 2 κυκλικές μεταθέσεις, από τον κανόνα του γινομένου προκύπτει: 2*4=8

β) κάθε κύκλος έχει 2 στοιχεία

Οι δυνατές τοποθετήσεις είναι:

- 1,2 και 3,4
- 1,4 και 2,3
- 1,3 και 2,4

Παρατηρούμε ότι επειδή οι κύκλοι δεν είναι διατεταγμένοι, οι τοποθετήσεις που έχουν 3 αντικείμενα στον ένα κύκλο και 1 στον άλλο, π.χ. (1,2,3 / 4) και (4 / 1,2,3) συμπίπτουν και το ίδιο ισχύει γι' αυτές που έχουν 2 αντικείμενα σε κάθε κύκλο, π.χ. (1,2 / 3,4) και (3,4 / 1,2).

Παρατήρηση: $\sum_{m=1}^{n} s(n,m) = n!$ κι αυτό αποδεικνύεται εύκολα διότι $s(n,m)$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων n αντικειμένων που περιέχουν ακριβώς m κύκλους, οπότε, το άθροισμα για $1 \le m \le n$ δίνει το πλήθος όλων των δυνατών μεταθέσεων.

Η σύνδεση μεταξύ των αριθμών Stirling α΄ και β' είδους φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$s(n,i) = \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=0}^{k} s(n,k)s(k,j)S(j,i)$$

ή

$$S(n,i) = \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=0}^{k} S(n,k)S(k,j)s(j,i)$$

(Roman, 1984)

$$S(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k \binom{k+n-1}{k+n-m}\binom{2n-m}{n-k-m} s(k+n-m,k)$$

ή

$$s(n,m) = \sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k \binom{k+n-1}{k+n-m}\binom{2n-m}{n-k-m} S(k+n-m,k)$$

(Graham, Knuth, Patashnik, 1994)

Πολλά προβλήματα απαρίθμησης αντικειμένων είναι δυνατό να τα διατυπώσουμε σαν να είχαμε να τοποθετήσουμε μπάλες σε κελιά ή δοχεία. Έχουμε αντιστοιχίσει, λοιπόν, τις μπάλες στα προς απαρίθμηση αντικείμενα και τα κελιά στις στάθμες απαρίθμησης. Το ερώτημα που τίθεται σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n μπάλες σε m κελιά, δεδομένου ότι σε κάθε κελί μπορούν να χωρέσουν και όλες οι μπάλες.

Οι λύσεις εξαρτώνται από τις ακριβείς συνθήκες του προβλήματος, δηλαδή, αν οι μπάλες είναι διαφορετικές ή όμοιες μεταξύ τους, αν τα κελιά είναι διακεκριμένα, αν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης ή αν μπορούν να υπάρχουν κελιά χωρίς καμία μπάλα.

α) Αν και οι μπάλες και τα δοχεία είναι διακεκριμένα, τότε οι μπάλες αντιστοιχούν σε ένα n-σύνολο N και τα κελιά σε ένα m-σύνολο M. Η τοποθέτηση των μπαλών στα δοχεία αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση $f\colon N \to M$ και το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης είναι m^{n}.

β) Αν οι μπάλες είναι μη διακεκριμένες ενώ τα κελιά είναι διακεκριμένα, τότε το πλήθος των τρόπων τοποθέτησης είναι ένας n-συνδυασμός με επανάληψη από το σύνολο M των m κελιών.

γ) Αν οι μπάλες και τα κελιά είναι διακεκριμένα, αναζητούμε τις 1-1 συναρτήσεις $f\colon N \to M$, που αντιστοιχούν στις n-μεταθέσεις ενός m-συνόλου.

δ) Αν δεν υπάρχουν κενά κελιά κατά την τοποθέτηση, αναζητούμε τις επί συναρτήσεις $f\colon N \to M$.

Το πλήθος των συναρτήσεων από ένα n-σύνολο σε ένα m-σύνολο είναι $S(n,m)m!$ δηλαδή είναι ίσο με το πλήθος των των τρόπων τοποθέτησης n διακεκριμένων μπαλών σε m διακεκριμένα κελιά.

6.3 Αριθμοί Bell

Εκφράζουν το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου n αντικειμένων σε υποσύνολα μη κενά και ξένα μεταξύ τους.

Οι αριθμοί Bell για $1 \le k \le n$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \text{ή } B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την διαμέριση του $S = \{1,2,\ldots,n+1\}, A_1,\ldots,A_m$. Υποθέτουμε πως $n+1$ ανήκει στο A_1 και το $|A_1| = k+1$ για κάποιο $k, 0 \leq k \leq n$. Τότε τα $A_2,\ldots,A_m$ σχηματίζουν μια διαμέριση με τα υπόλοιπα $n-k$ στοιχεία του S έτσι ώστε το $S \backslash A_1$. Υπάρχουν B_{n-k} διαμερίσεις αυτού του συνόλου, άρα υπάρχουν B_{n-k} διαμερίσεις του S στο οποίο το ένα μέρος είναι το σύνολο A_1. Ακόμα, υπάρχουν $\binom{n}{k}$ σύνολα μεγέθους $k+1$ που περιέχουν $n+1$, οπότε ο συνολικός αριθμός των διαμερίσεων του S το οποίο είναι $n+1$ περιέχονται σε ένα σύνολο μεγέθους $k+1$ είναι $\binom{n}{k}B_{n-k.}$ Προσθέτοντας όλες τις πιθανές τιμές του k, έχουμε $B_{n+1} = B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$ ■

Οι αριθμοί Bell συνδέονται με τους αριθμούς Stirling β’ είδους μέσω της σχέσης:

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

όπου $S(n,k)$ είναι ο αριθμός Stirling που εκφράζει το πλήθος των διαμερίσεων ενός συνόλου n αντικειμένων σε k μη κενά υποσύνολα.

Κάποιοι από τους πρώτους όρους της ακολουθίας των αριθμών Bell φαίνονται στον πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

6.4 Αριθμοί Motzkin

Εκφράζουν το πλήθος των μη τεμνόμενων χορδών που μπορούμε να σχεδιάσουμε μεταξύ n σημείων της περιφέρειας ενός κύκλου και για $0 \leq i \leq n$ ικανοποιούν την αναδρομική σχέση:

$$M_{n+1} = M_n + \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{n-1-i}$$

Οι αριθμοί Motzkin συνδέονται με τους αριθμούς Catalan μέσω της σχέσης:

$$M_n = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k} C_k$$

και οι πρώτοι όροι της ακολουθίας των αριθμών Motzkin φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_n	1	1	2	4	9	21	51	127	323	835	2188

6.5 Αριθμοί Lucas - Αριθμοί Fibonacci

Η ακολουθία των αριθμών Fibonacci έχει τις ρίζες της στα 1202 όταν ο Ιταλός Μαθηματικός Leonardo Pisano Bigollo (1170 – 1250) (κατά κόσμον Leonardo Fibonacci) στο βιβλίο του LiberAbaci («Περί του Άβακα») έθεσε το πρόβλημα του υπολογισμού των απογόνων που προκύπτουν από ένα ζευγάρι κουνελιών. Υποθέτοντας ότι ένα ζευγάρι κουνελιών δεν αναπαράγει τον πρώτο μήνα της ζωής του και στη συνέχεια γεννά ένα νέο ζευγάρι κουνελιών κάθε μήνα, θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των ζευγαριών μετά από n μήνες.

Οι αριθμοί Fibonacci προκύπτουν από την αναδρομική σχέση:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

με $F_0 = 0$ και $F_1 = F_2 = 1$

Παρόμοια, η ακολουθία Lucas δίνεται από την αναδρομική σχέση:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

με $F_0 = 2$ και $F_1 = 1$ και η σχέση που συνδέει τις δύο ακολουθίες είναι:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1}$$

Οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Fibonacci φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

και αντίστοιχα οι πρώτοι όροι της ακολουθίας Lucas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

6.6 Αριθμοί Catalan

Οι αριθμοί Catalan συμβολίζονται ως C_n

Ο γενικός τύπος της ακολουθίας των αριθμών Catalan είναι:

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$$

και οι πρώτοι όροι φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796

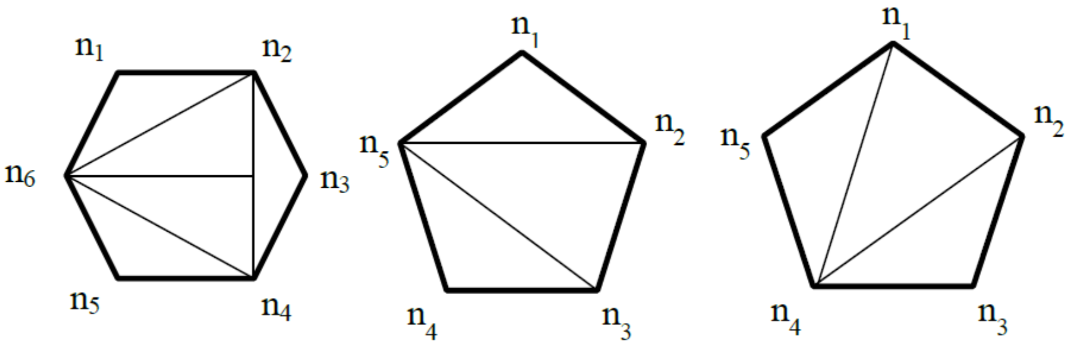
Εφαρμογές των αριθμών Catalan

6.6.1 Τριγωνισμού ενός πολυγώνου

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των αριθμών Catalan εξετάζοντας το πρόβλημα του τριγωνισμού ενός πολυγώνου.

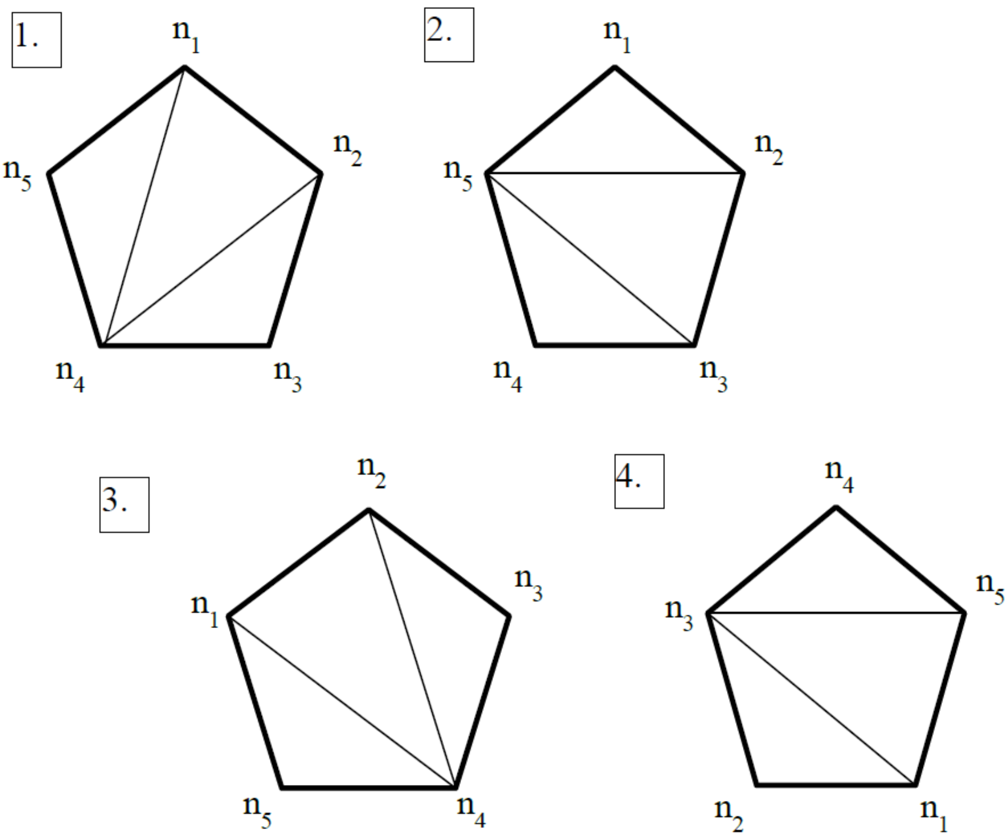
Ένας **τριγωνισμός** ενός κυρτού n-γώνου είναι μια διαμέριση του εσωτερικού του n-γώνου σε τρίγωνα με ευθείες που είναι μη τεμνόμενες διαγώνιοι του n-γώνου.

Σύμφωνα με τον ορισμό, ο τριγωνισμός του εξαγώνου είναι λάθος, αφού χρησιμοποιεί τεμνόμενες διαγωνίους.



Η διαδικασία του τριγωνισμού δεν αυξάνει τον αριθμό των κορυφών του n-γώνου και δύο τριγωνισμοί ενός n-γώνου του οποίου τις κορυφές έχουμε ονομάσει είναι ισοδύναμοι αν περιέχουν ακριβώς τις ίδιες διαγωνίους.

Παράδειγμα:

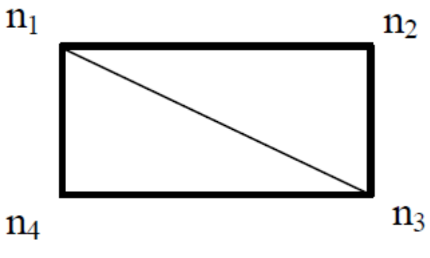


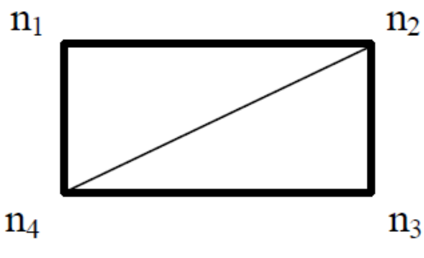
Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, ισοδύναμοι είναι οι τριγωνισμοί των σχημάτων 1 και 3, γιατί περιέχουν τις ίδιες διαγωνίους, ενώ, εκ πρώτης όψεως, φαίνεται ότι είναι οι τριγωνισμοί των σχημάτων 2 και 4.

Θεωρούμε ένα τυχαίο n-γωνο και ενώνουμε μια κορυφή του (έστω τη n_1) με όλες τις υπόλοιπες. Έχουμε κατασκευάσει έτσι έναν τριγωνισμό με $n-2$ τρίγωνα. Παρατηρούμε, για κάθε τριγωνισμό, ότι το άθροισμα των γωνιών των τριγώνων που σχηματίστηκαν είναι ίσο με $(n-2)$, δηλαδή, ίσο με το άθροισμα των γωνιών του n-γώνου, διότι καθεμιά από τις γωνίες του εκάστοτε τριγώνου αποτελεί τμήμα γωνίας του n-γώνου.

Για το τυχαίο n-γωνο που θεωρήσαμε, το μέγιστο πλήθος των εσωτερικών διαγωνίων από μια οποιαδήποτε κορυφή προς όλες τις υπόλοιπες είναι ίσο με $n-3$. Αυτό ισχύει προφανώς, αν παρατηρήσουμε ότι από τις n κορυφές του n-γώνου κάθε τυχαία κορυφή (έστω η 1) συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες εκτός από τις δύο γειτονικές της (εν προκειμένω τις 2 και n). Άρα, τελικά, κάθε τριγωνισμός χρησιμοποιεί $n-3$ διαγωνίους.

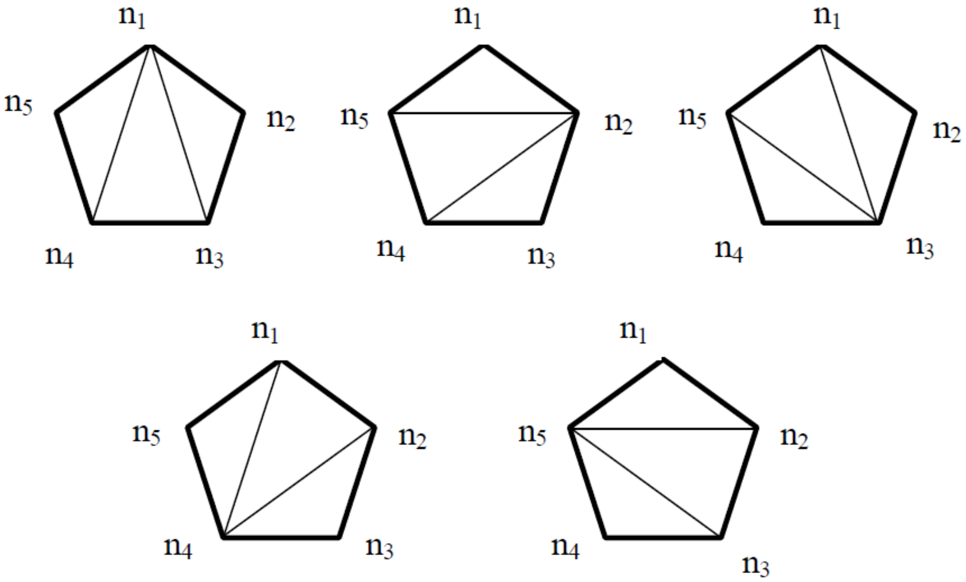
Συμβολίζουμε με T_n το πλήθος των διαφορετικών τριγωνισμών ενός n-γώνου και ορίζουμε $T_1 = 0$ και $T_2 = 1$. Το T_3 είναι το πλήθος των τριγωνισμών ενός τριγώνου, χρησιμοποιεί $n-3$ διαγωνίους και προφανώς ισούται με 1, $T_3 = 1$. Για τον τριγωνισμό ενός τετραγώνου χρησιμοποιούμε $n-3=1$ διαγώνιο και σχηματίζονται $n-2=2$ τρίγωνα. Αυτό γίνεται με δύο τρόπους, άρα , $T_4 = 2$





Οι δύο δυνατοί τριγωνισμοί ενός τετραγώνου.

Για $n = 5$ προκύπτει $T_5 = 5$

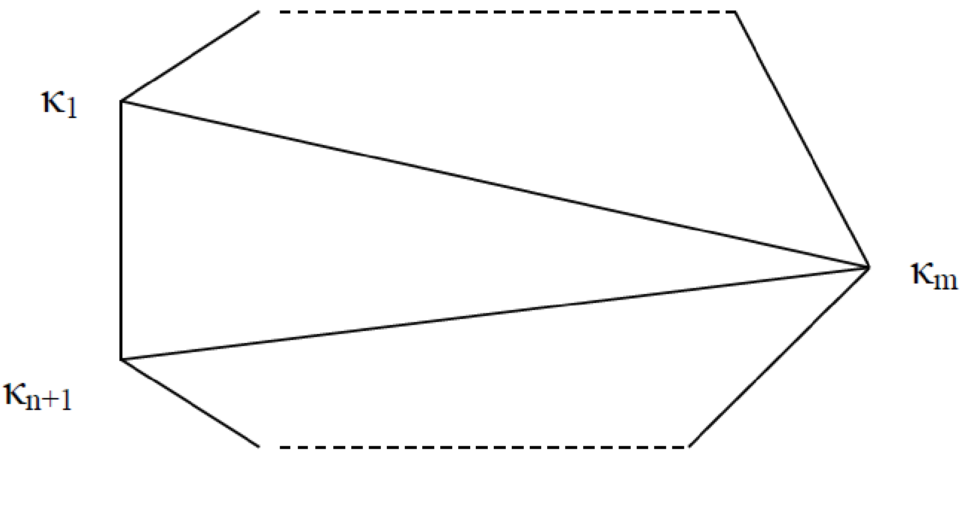


Οι δυνατοί τριγωνισμοί ενός πενταγώνου.

Οι αριθμοί του T_n, που εκφράζουν το πλήθος των τριγωνισμών ενός n-γώνου ικανοποιούν μια μη γραμμική, αναδρομική σχέση

<u>Θεώρημα 6.4</u> : $T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + \cdots + T_nT_2$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ένα $n+1$-γωνο με κορυφές $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$. Η πλευρά $k_{n+1}k_1$ ανήκει μόνο σε ένα τρίγωνο για οποιονδήποτε τριγωνισμό και έστω k_m η τρίτη κορυφή του τριγώνου, όπου $m = 2,3,\dots,n$.

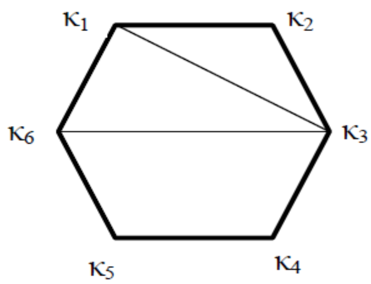


Το τρίγωνο $k_m k_1 k_{n+1}$ διαμερίζει το $n+1$-γωνο σε δύο μικρότερα πολύγωνα, επάνω προκύπτει ένα m-γωνο με κορυφές $k_1, k_2 \dots k_m$ και κάτω ένα $(n+2-m)$ −γωνο με κορυφές $k_m k_{m+1}, \dots, k_{n+1}$. Το πλήθος των τριγωνισμών του m-γώνου είναι T_m και του $(n+2-m)$-γώνου T_{n+2-m} και, από τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των τριγωνισμών του $n+1$-γώνου στους οποίους εμφανίζεται το τρίγωνο $k_{n+1}k_1k_m$ είναι $T_m \cdot T_{n+2-m}$.

Τελικά, από τον κανόνα του αθροίσματος, το συνολικό πλήθος των τριγωνισμών του $n+1$-γώνου είναι:

$$\sum_{m=2}^{n} T_m \cdot T_{n+2-m} = T_2 \cdot T_n + T_3 \cdot T_{n-1} + \cdots + T_n \cdot T_2$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω ένα εξάγωνο $(n = 5, m = 3)$



Το τρίγωνο $\kappa_6\kappa_1\kappa_3$ χωρίζει το 6-γωνο σε ένα τρίγωνο επάνω και ένα τετράγωνο κάτω.

$$T_6 = T_2T_5 + T_3T_4 + T_4T_3 + T_5T_2$$

<u>Θεώρημα 6.5</u>: $(n-3)T_n = \frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω ένα n-γωνο με κορυφές $k_1, k_2, \dots, k_n$. Θεωρούμε τη διαγώνιο k_1k_m η οποία χωρίζει το n-γωνο σε:ένα m-γωνο επάνω, με κορυφές $k_1, k_2, \dots, k_m$και ένα $(n+2-m)$-γωνο κάτω, με κορυφές $k_m, k_{m+1}, \dots, k_n, k_1$.

Όπως αποδείχθηκε στο Θεώρημα 6.4, το πλήθος των τριγωνισμών που περιέχουν τη διαγώνιο k_1k_m είναι ίσο με $T_m \cdot T_{n+2-m}$. Εξετάζοντας αναλυτικά, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

Από την κορυφή k_1 έχω $n-3$ διαγωνίους, τις $k_1k_3, k_1k_4, \ldots, k_1k_{n-1}$ και για καθεμιά απ' αυτές προκύπτουν οι τριγωνισμοί:

Για την $k_1k_3 (m=3)$: T_3T_{n-1}

Για την $k_1k_4 (m=4)$: T_4T_{n-2}

συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο

Για την $k_1k_{n-1} (m=n-1)$: $T_{n-1}T_3$

Συνεπώς, στην κορυφή k_1 αντιστοιχεί το άθροισμα:

$$(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$$

και λόγω της συμμετρίας του n-γωνου, το άθροισμα αυτό είναι το ίδιο για κάθε κορυφή του και συνεπώς η παράσταση$(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$ μετρά, για κάθε δυνατή διαγώνιο, το σύνολο των τριγωνισμών που τη χρησιμοποιούν δύο φορές, μία για κάθε άκρο της διαγωνίου.

Άρα, η παράσταση: $\frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$ μετρά τον αριθμό των τριγωνισμών του n-γωνου για κάθε δυνατή διαγώνιο. Βέβαια, κάθε τριγωνισμός χρησιμοποιεί $n-3$ διαγωνίους, άρα η προηγούμενη παράσταση μετρά τους τριγωνισμούς $n-3$ φορές.

Τελικά, προκύπτει:

$$(n-3)T_n = (T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$$

<u>**Θεώρημα 6.6**</u>:

$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

<u>**Απόδειξη**</u>: Από το Θεώρημα 6.4 και αφού $T_2 = 1$, ισχύει:

$$T_{n+1} - 2T_n = (T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$$

ή

$$\frac{n}{2}T_{n+1} - 2T_n = \frac{n}{2}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \cdots + T_{n-1}T_3)$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5:

$$\frac{n}{2}T_{n+1} - 2T_n = (n-3)T_n$$

$$nT_{n+1} = (4n-6)T_n$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $nT_{n+1} = E_{n+1}$ (όπου $E_2 = 2T_2 = 2$) η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$E_{n+1} = (4n-6)\frac{E_n}{n-1} =>$$

$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{4n-6}{n-1} = \frac{2(n-3)}{n-1} = \frac{2(n-3)(n-1)}{(n-1)(n-1)} = \frac{(2n-2)(n-3)}{(n-1)(n-1)}$ και επειδή

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= \frac{E_{n+1}}{E_n} \cdot \frac{E_n}{E_{n-1}} \cdot \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \cdot \ldots \frac{E_3}{E_2} \\ &= \frac{(2n-2)(n-3)}{(n-1)(n-1)} \cdot \frac{(2n-4)(n-5)}{(n-2)(n-2)} \cdot \frac{(2n-6)(n-7)}{(n-3)(n-3)} \cdot \ldots \cdot \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!} = \binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

Άρα,

$$nT_{n+1} = \binom{2n-2}{n-1} \, ή \, (n-1)T_n = \binom{2n-4}{n-2}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$T_n = C_{n-2} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

Που είναι ο γνωστός μας αριθμός Catalan τάξης $(n-2)$.

Ισχύουν τα εξής:

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \; και \; C_{n-1} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{n\binom{2n}{n}}{(n+1)\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{2(2n-1)}{n+1} <=> C_n = \frac{4n-2}{n+1}C_{n-1}$$

για $n \geq 1$ και $C_1 = 1$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε κανονικό $2n$-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο και αναζητούμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να ενώσουμε τις $2n$ κορυφές με n μη τεμνόμενες διαγωνίους.
Έστω a_n ο ζητούμενος αριθμός. Θεωρούμε τη διαγώνιο $n_k n_1$ η οποία πρέπει να έχει εκατέροθέν τις άρτιες το πλήθος κορυφές του $2n$-γώνου, π.χ. η διαγώνιος $n_1 n_8$, που έχει από τη μια πλευρά 6 κορυφές και από την άλλη $2n - 8$. Υπό την προϋπόθεση αυτή, προκύπτει η αναδρομική σχέση:

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0, a_0 = 1$$

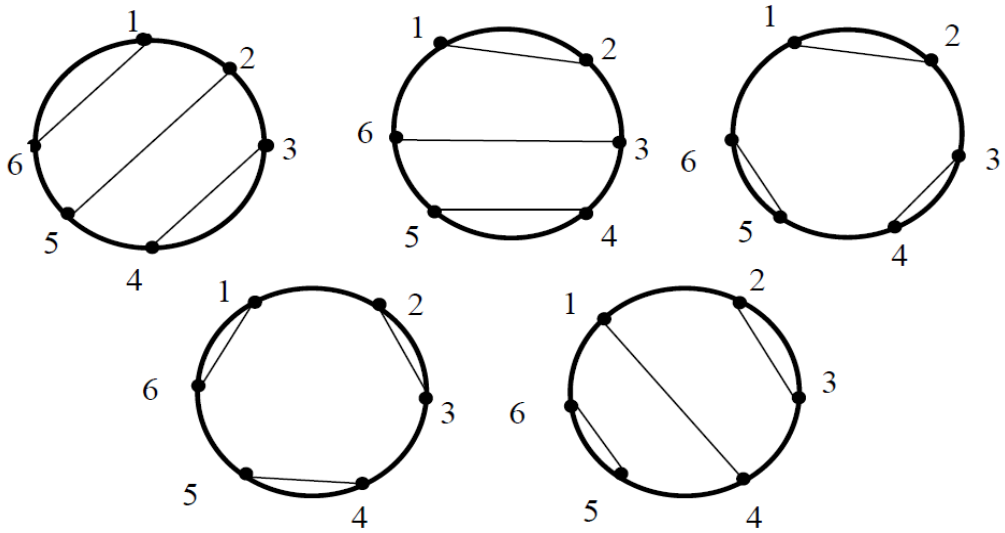
και θέτοντας $b_n = a_{n-1}$ για $n \geq 1$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$b_{n+1} = b_1 b_n + b_2 b_{n-1} + \cdots + b_n b_1, b_1 = 1$$

Τελικά, καταλήξαμε στην αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2,1 και ο b_{n+1} είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης, δηλαδή:

$$a_n = b_{n+1} = C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0.$$

Παράδειγμα: Σε έναν κύκλο το πλήθος των μη τεμνόμενων χορδών μεταξύ $2n$ σημείων ισούται με τον n-τάξης αριθμό Catalan $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$.



Για n=3 έχουμε 2n=6 σημεία και το πλήθος των τρόπων να τα ενώσουμε με μη τεμνόμενες χορδές είναι C_3=5.

Οι αριθμοί Catalan προκύπτουν από το τρίγωνο του Pascal, αν από την κεντρική στήλη και για τις σειρές άρτιου αριθμού αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες τιμές τις μεθεπόμενης στήλης:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 200 252 200 120 45 10 1

Δηλαδή, έχουμε διαδοχικά:

$$1$$

$$2-1=1$$

$$6-4=2$$

$$20-15=5$$

$$70-56=14$$

$$252-200=52\ \kappa.o.\kappa$$

6.6.2 Τοποθέτηση παρενθέσεων

Μια άλλη εφαρμογή των αριθμών Catalan είναι η τοποθέτηση παρενθέσεων σε γινόμενο παραγόντων

Θεώρημα 6.7: Αν a_n το πλήθος παρενθέσεων σ' ένα γινόμενο με n παράγοντες, τότε $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.

Απόδειξη: Έστω ένα γινόμενο με n παράγοντες $x_1, x_2, \dots, x_n$

Για $n=1$ έχουμε (x_1)

Για $n=2$ έχουμε (x_1x_2)

Για $n=3$ έχουμε $\left((x_1x_2)x_3\right)ή\ (x_1(x_2x_3))$

Για $n=4$ έχουμε $\left((x_1x_2)(x_3x_4)\right)ή\left(\left((x_1x_2)x_3\right)x_4\right)ή\ ((x_1(x_2x_3)x_4)$

$$ή\left(x_1\left((x_2x_3)x_4\right)\right)ή\left(x_1\left(x_2(x_3x_4)\right)\right)$$

Το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει δύο παράγοντες εκ των οποίων ο πρώτος είναι γινόμενο r παραγόντων $1 \le r \le n$ $(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_r)$ και ο δεύτερος ένα γινόμενο $n-r$ παραγόντων $(x_{r+1} \cdot x_{r+2} \cdot \dots \cdot x_n)$. Στον πρώτο παράγοντα μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά a_r τρόπους και στο δεύτερο κατά α_{n-r} τρόπους. Σύμφωνα με τον κανόνα του γινομένου, το πλήθος των τρόπων με τους οποίους το εξωτερικό ζεύγος παρενθέσεων πολλαπλασιάζει τα $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_r$ και $x_{r+1} \cdot x_{r+2} \cdot \dots \cdot x_n$ είναι $a_r \cdot a_{n-r}$.

Αθροίζοντας για $r = 1,2,3,\dots,n-1$ προκύπτει

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_1$$

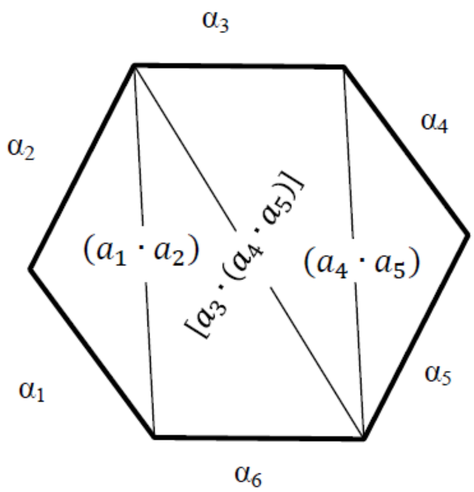
και παρατηρούμε ότι, θέτοντας $a_n = T_{n+1}$, οι αριθμοί a_n επαληθεύουν την αναδρομική σχέση του Θεωρήματος 2.1 και αφού είδαμε ότι

$a_1 = T_2 = 1, a_2 = T_3 = 1, a_3 = T_4 = 2, a_4 = T_5 = 5$ οι δύο ακολουθίες συμπίπτουν.

Τελικά, από το Θεώρημα 2.3 προκύπτει:

$$a_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω το γινόμενο με $n = 5$ όρους $\{[a_1 \cdot a_2) \cdot [a_3(a_4 \cdot a_5)]\}$ στο οποίο θα αντιστοιχίσουμε έναν τριγωνισμό κανονικού εξαγώνου με πλευρές $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ και $a_6 = \{(a_1 \cdot a_2) \cdot [a_3 \cdot (a_4 \cdot a_5)]\}$



Κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σε ένα γινόμενο, ενώ η τελευταία αντιστοιχεί στην a_6 πλευρά του εξαγώνου.

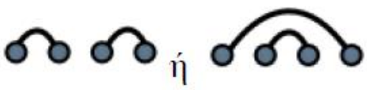
Παρατηρούμε στο σχήμα ότι κάθε διαγώνιος αντιστοιχεί σε ένα γινόμενο, ενώ το τελευταίο γινόμενο αντιστοιχεί σε πλευρά του εξαγώνου.

<u>Παρατήρηση</u>: Το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σε ένα γινόμενο της μορφής $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ αφορά σε συγκεκριμένη διάταξη των όρων του γινομένου. Αν η σειρά των παραγόντων του γινομένου δεν είναι συγκεκριμένη, τότε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων τοποθέτησης παρενθέσεων προκύπτει από τη σχέση:

$$b_n = n!\, a_n = n!\, C_{n-1} = n! \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = (n-1)! \binom{2n-2}{n-1}$$

Αντίστοιχο με το πρόβλημα της τοποθέτησης παρενθέσεων σε ένα γινόμενο είναι το εξής:

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε $2n$ σημεία κατά μήκος μιας οριζόντιας ευθείας. Με πόσους τρόπους μπορούμε να ενώσουμε αυτά τα σημεία ανά δύο, χρησιμοποιώντας μη τεμνόμενα τόξα;



για n=2 έχουμε $C_2 = 2$ τρόπους

Για $n = 3$ έχουμε $C_3 = 5$ τρόπους

Παρατηρούμε ότι η λύση στο πρόβλημα μας είναι ο n-τάξης αριθμός $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$ της ακολουθίας Catalan για $n \geq 0$.

6.6.3 Το πρόβλημα της κάλπης

Άλλη μια εφαρμογή των αριθμών Catalan είναι στην επίλυση του προβλήματος της κάλπης (ballot problem)

Θεώρημα 6.8: Το πλήθος των ακολουθιών με $2n$ όρους $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ που σχηματίζονται από n το πλήθος $+1$ και n το πλήθος -1 και των οποίων τα μερικά αθροίσματα είναι θετικά για κάθε k $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0, k = 1,2, \dots ,2n)$ ισούται με το n-τάξης αριθμό Catalan $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

Απόδειξη: Ονομάζουμε μια ακολουθία με n όρους $+1$ και n όρους -1 παραδεκτή, αν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος, δηλαδή αν $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0, k = 1,2, \dots ,2n$

και απαράδεκτη αν δεν τις ικανοποιεί και έστω A_n το σύνολο των παραδεκτών ακολουθιών και B_n το σύνολο των απαράδεκτων. Το συνολικό πλήθος των ακολουθιών με n όρους $+1$ και n όρους -1 ισούται με $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$και συνεπώς

$$A_n + B_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \to A_n = \binom{2n}{n} - B_n$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το B_n. Θεωρούμε ότι έχουμε μια απαράδεκτη ακολουθία με n το πλήθος όρους $+1$ και n το πλήθος όρους -1. Αφού είναι απαράδεκτη, υπάρχει k τέτοιο ώστε $a_1 + a_2 + \cdots + a_k < 0$.

Αφού ο k είναι ο μικρότερος τέτοιος δείκτης, πριν τον όρο α_k το πλήθος των $+1$ και το πλήθος των -1 θα είναι ίσα, οπότε, θα ισχύει $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = 0, \alpha_k = -1$.

Αλλάζοντας τα πρόσημα των αριθμών $a_1, a_2, \dots, a_k$, δηλαδή αντικαθιστώντας τους με τους$-a_1, -a_2, \dots, -a_k$ και αφήνοντας αμετάβλητους τους$a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{2n}$, προκύπτει μια νέα ακολουθία με $n+1$ το πλήθος όρους $+1$ και $n-1$ το πλήθος όρους -1 και στην οποία ισχύει $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0, k = 1,2, \dots, 2n$.

Αντίστροφα, αν έχουμε μια ακολουθία με $n+1$ όρους $+1$ και $n-1$ όρους -1, μπορούμε να αντιστρέψουμε τα πρόσημα από τον πρώτο όρο της ακολουθίας ως εκείνον τον όρο για τον οποίο τα $+1$ είναι περισσότερα από τα -1, δημιουργώντας έτσι μια απαράδεκτη ακολουθία. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των απαράδεκτων ακολουθιών και των ακολουθιών με $n+1$ όρους $+1$ και $n-1$ όρους -1. Συνεπώς, το πλήθος των ακολουθιών με $2n$ όρους που είναι απαράδεκτες ισούται με το πλήθος των ακολουθιών που έχουν $n+1$ όρους $+1$ και $n-1$ όρους -1 που το πλήθος τους προκύπτει από τη σχέση:

$$B_n = \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$$

και τελικά

$$A_n = \binom{2n}{n} - B_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

Με βάση το προηγούμενο θεώρημα λύνεται το ακόλουθο:

Πρόβλημα της κάλπης

Ας υποθέσουμε ότι γίνονται εκλογές και υπάρχουν δύο υποψήφιοι, οι Α και Β και $2n$ ψηφοφόροι. Οι υποψήφιοι τελικώς ισοψηφούν, ενώ δεν υπάρχουν άκυρα ή λευκά ψηφοδέλτια. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μετρήσουμε τις ψήφους των Α και Β, έτσι ώστε ανά πάσα στιγμή κατά τη διάρκεια της καταμέτρησης να υπερτερεί πάντα ο ίδιος υποψήφιος ή να είναι ισόπαλοι.

Η λύση του προβλήματος βασίζεται στο Θεώρημα 6.6.2, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία $2n$ όρων-ψήφων και οι ψήφοι του ενός υποψηφίου (έστω του Α) αντιστοιχούν στους όρους $+1$, ενώ του άλλου στους όρους -1. Τελικά, η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

<u>Παράδειγμα</u>: $2n$ θεατές θέλουν να παρακολουθήσουν μια παράσταση και το εισιτήριο κοστίζει $10€$. Όταν ανοίγει το ταμείο του θεάτρου, δεν έχει καθόλου χρήματα μέσα και οι θεατές έχουν μόνο χαρτονομίσματα των $10€$ και των $20€$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους θεατές στην ουρά έτσι ώστε καθένας να αγοράζει μόνο το δικό του εισιτήριο κι ο ταμίας να έχει πάντα ρέστα να δώσει. Τι γίνεται στην περίπτωση που πρέπει να τηρηθεί σειρά προτεραιότητας ανάλογα με την ώρα που έφτασε κάθε θεατής στο θέατρο, ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα στη δημιουργία της ουράς;

Για να λύσουμε το πρόβλημα αρκεί να σκεφτούμε ότι οι $2n$ θεατές είναι οι $2n$ όροι της ακολουθίας του Θεωρήματος 6.6.2. Όσοι έχουν χαρτονόμισμα των $20€$ αντιστοιχούν στους όρους $+1$ και οι άλλοι στους -1. Η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

Αν τηρηθεί σειρά προτεραιότητας ανάλογα με την ώρα άφιξης στο θέατρο, τότε οι θεατές είναι διακεκριμένοι και, συνεπώς, το προηγούμενο αποτέλεσμα θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί τον αριθμό των μεταθέσεων των θεατών με χαρτονόμισμα των $10€$ και επί τον αριθμό των μεταθέσεων των θεατών με χαρτονόμισμα των $20€$, ήτοι

$$n!\,n!\,C_n = n!\,n!\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \frac{(2n)!}{n+1}, n \geq 0.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Στο Καρτεσιανό επίπεδο με πόσους τρόπους μπορούμε να πάμε από το $(0,0)$ στο (n,n) κατά τέτοιον τρόπο ώστε να κινούμαστε μόνο Βόρεια ή Ανατολικά και κάτω από τη διαγώνιο $x = y$ (Dyck Paths).

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αν βασιστούμε στο Θεώρημα 6.6.2, διότι κάθε δυνατή διαδρομή είναι μια ακολουθία από n τετράγωνα προς την Ανατολή (αντιστοιχούν στους όρους $+1$) και n τετράγωνα προς το Βορρά (αντιστοιχούν στους όρους -1). Κατ' αναλογία με το πρόβλημα της κάλπης, ο περιορισμός που δίνεται ότι δεν επιτρέπεται να περάσουμε πάνω από τη διαγώνιο είναι το ίδιο με τον περιορισμό να υπερτερεί πάντα ο ίδιος υποψήφιος. Τελικά, η λύση είναι ο αριθμός Catalan n-τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

6.6.4 Μεταθέσεις με περιορισμό

Μια πολύ χρήσιμη εφαρμογή των αριθμών Catalan είναι στον υπολογισμό του πλήθους των μεταθέσεων n αριθμών ή γραμμάτων του αλφαβήτου με τον περιορισμό να μην υπάρχουν υπακολουθίες τριών συνεχόμενων όρων, π.χ. $3{,}4{,}5$ *ή* β, γ, δ.

Παράδειγμα: Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε n αριθμούς σε σειρά έτσι ώστε να μην έχουμε 3 ή περισσότερους αριθμούς που να είναι διαδοχικοί στη φυσική τους σειρά.

$n = 0$	$-$	1 τρόπος
$n = 1$	$\{1\}$	1 τρόπος
$n = 2$	$\{1,2\}$ *ή* $\{2,1\}$	2 τρόποι
$n = 3$	$\{1,3,2\}$ *ή* $\{2,1,3\}$ *ή* $\{2,3,1\}$ *ή* $\{3,1,2\}$ *ή* $\{3,2,1\}$	5 τρόποι

Τελικά, η λύση είναι ο αριθμός Catalan$n$- τάξης $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}, n \geq 0$.

6.6.5 Δένδρα με προσανατολισμό και ρίζα

Ένα **γράφημα** G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων $V \neq \emptyset$ και E, όπου το E είναι ένα υποσύνολο του συνόλου των μη διατεταγμένων ζευγών του V.

Βαθμός μιας κορυφής ονομάζεται ο αριθμός των προσκείμενων σ' αυτήν πλευρών.

Ως **δένδρο** ορίζουμε ένα συνεκτικό και ακυκλικό γράφημα. Δηλαδή, ένα γράφημα για το οποίο ισχύουν τα εξής:

Για δύο οποιεσδήποτε κορυφές x, y του γραφήματος υπάρχει πάντα μια πεπερασμένη ακολουθία από κορυφές και πλευρές του γραφήματος που δεν επαναλαμβάνονται (μονοπάτι) και η οποία ξεκινά από τη x και καταλήγει στην y ή αντίστροφα.

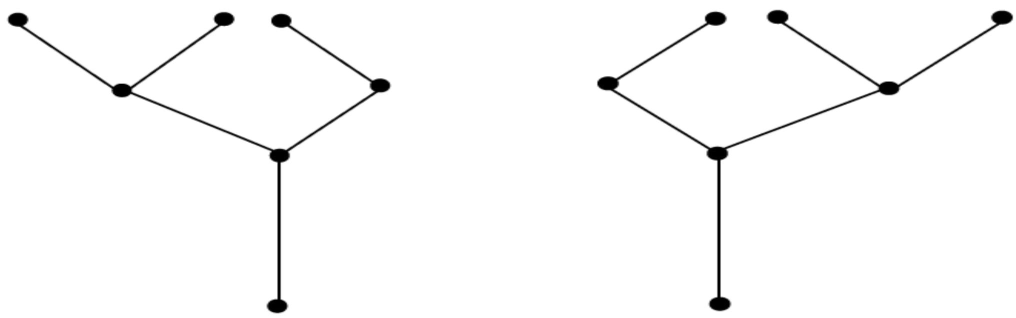
Δεν υπάρχει ακολουθία από κορυφές και πλευρές του γραφήματος (μονοπάτι) στην οποία να συμπίπτουν η αρχική και η τελική κορυφή.

Ρίζα ενός δένδρου ονομάζεται μια κορυφή διακεκριμένη από τις υπόλοιπες, βρίσκεται συνήθως στο τελευταίο επίπεδο του δένδρου και δεν έχει γονείς.

Φύλλα ενός δένδρου ονομάζονται οι κορυφές που βρίσκονται συνήθως στο ανώτερο επίπεδο και δεν έχουν παιδιά.

Τα δένδρα με ρίζα έχουν κάποιο είδος «ιεραρχίας». Ουσιαστικά, το δένδρο αποκτά ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό έτσι ώστε κάθε πλευρά του δένδρου να απομακρύνεται από τη ρίζα. Για κάθε κορυφή x του δένδρου λέμε ότι ο γονέας του είναι η κορυφή y που βρίσκεται ακριβώς πριν τον στη διαδρομή από τη ρίζα προς το x.

Επίσης, ο **προσανατολισμός** διαχωρίζει δένδρα όπως τα παρακάτω, που, ενώ είναι συμμετρικά, δεν είναι όμοια.



Συμμετρικά, αλλά όχι όμοια δένδρα.

<u>Θεώρημα 6.9</u>: Το πλήθος των δένδρων με προσανατολισμό και ρίζα και βαθμούς κορυφών 1 ή 3 και n φύλλα ισούται με τον αριθμό Catalan $(n-1)$ −τάξης $C_{n-1} = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$.

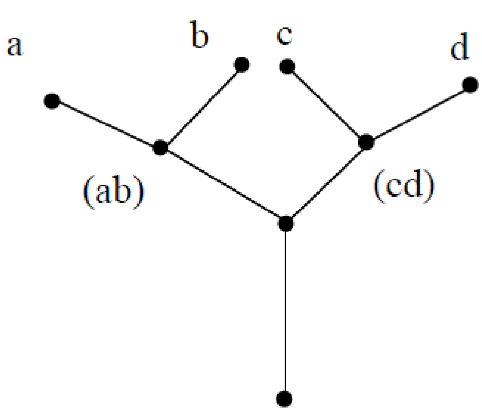
<u>Απόδειξη</u> : Η πρώτη απόδειξη βασίζεται στην κατασκευή μιας $1-1$ αντιστοιχίας μεταξύ της τοποθέτησης παρενθέσεων σε γινόμενο n παραγόντων και των δένδρων με ρίζα, προσανατολισμό, βαθμό κορυφών $1\ ή\ 3$ και n φύλλα. Θεωρούμε ένα τέτοιο δένδρο και αριθμούμε τα φύλλα του

$a_1, a_2, \ldots, a_{n.}$ Αν δύο φύλλα $a_{m,}a_k$ συνδέονται με την ίδια κορυφή βαθμού 3, η κορυφή αυτή ονομάζεται $(a_{m,}a_k)$. Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία, παρατηρούμε ότι, όσο προχωράμε προς τη ρίζα, κάθε κορυφή παίρνει το όνομά της με βάση τους απογόνους της. Συνεπώς, φτάνοντας στη ρίζα έχουμε ένα πλήρες παρενθετικοποιημένο γινόμενο, του οποίου οι όροι είναι όλες οι κορυφές του αρχικού δένδρου και, άρα, κατορθώσαμε να φτιάξουμε τη ζητούμενη $1-1$ αντιστοιχία.

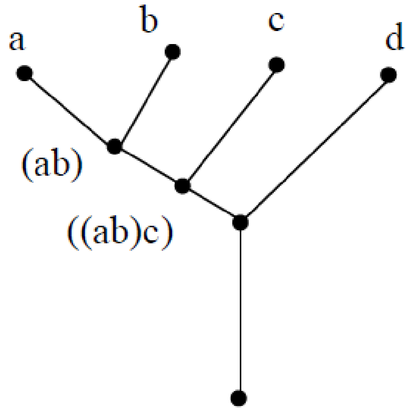
Τελικά, σύμφωνα με το Θεώρημα 6.9, το πλήθος των δένδρων με ρίζα και προσανατολισμό, που έχουν κορυφές βαθμού $1\ ή\ 3$ προκύπτει από τον $(n-1)-$τάξης αριθμό Catalan:

$$a_n = C_{n-1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

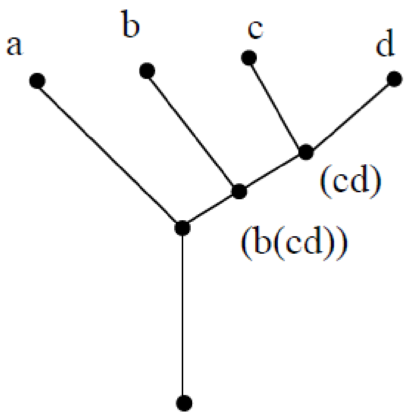
<u>Παράδειγμα</u>:

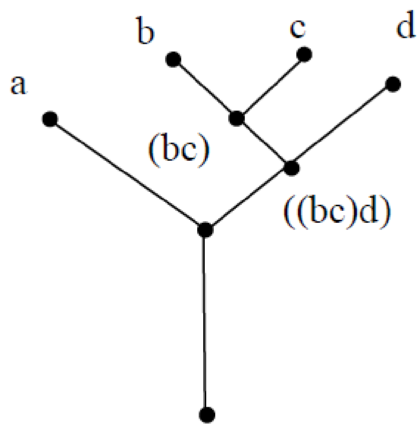


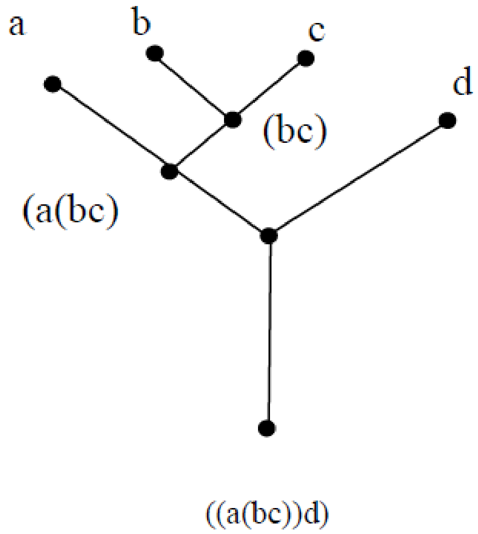
((ab)(cd))



(((ab)c)d)







Τα δένδρα βαθμού 1 ή 3, προσανατολισμό, ρίζα και 4 φύλλα είναι: $C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$.

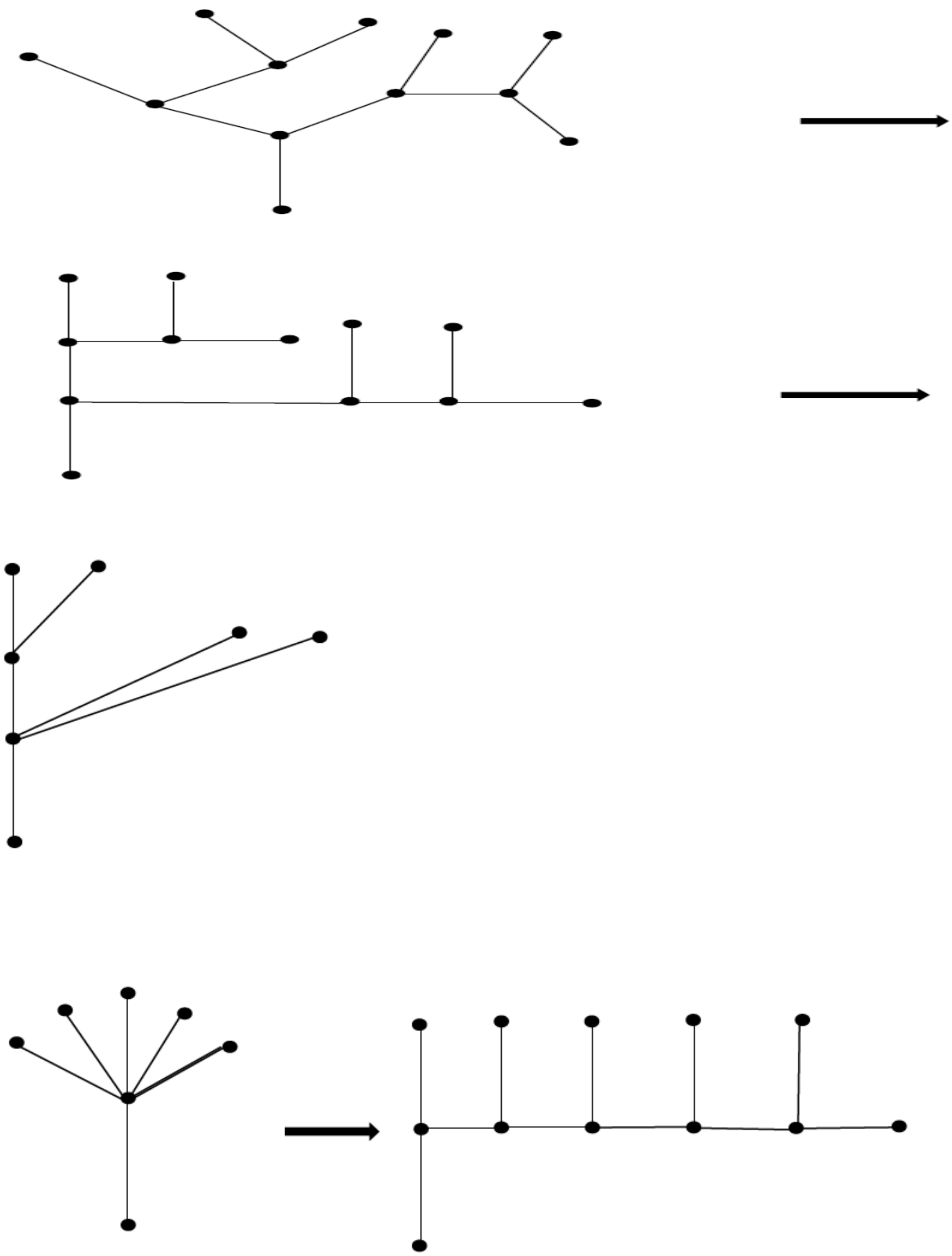
<u>Θεώρημα 6.10</u>: Το πλήθος των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα δίνεται από τον αριθμό Catalan $n-2$ τάξης,

$$C_{n-1} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}$$

.

<u>Απόδειξη</u>: Θα αποδείξουμε το θεώρημα κατασκευάζοντας μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα, $n-1$ φύλλα και βαθμό κορυφών 1 *ή* 3 και των δένδρων με προσανατολισμό, ρίζα και n φύλλα. Θεωρούμε ένα δένδρο με προσανατολισμό, ρίζα, $n-1$ φύλλα και βαθμό κορυφών 1 *ή* 3 και το σχεδιάζουμε κατά τρόπον ώστε σε κάθε κορυφή βαθμού 3, οι πλευρές που διέρχονται απ’ αυτήν να έχουν κατεύθυνση προς το Βορρά ή προς την Ανατολή. Στη συνέχεια, συμπτύσσουμε όλες τις κορυφές με κατεύθυνση προς την Ανατολή, αφήνοντας μόνο όσες έχουν κατεύθυνση προς το Βορρά. Κατά τη διαδικασία της σύμπτυξης, τα άκρα μιας πλευράς ταυτίζονται και η πλευρά εξαφανίζεται. Τελικά, οι κορυφές βαθμού 3 εξαφανίζονται και μένουν μόνο τα $n-1$ φύλλα ως κορυφές του νέου δένδρου. Αντίστροφα κάθε κορυφή βαθμού n σπάει σε n φύλλα και $n-1$ κορυφές βαθμού 3.

<u>Παράδειγμα</u>:



Η κορυφή βαθμού 6 του αρχικού δένδρου έσπασε σε 5 κορυφές βαθμού 3 και 6 φύλλα στο νέο δένδρο.

Το πρόβλημα μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση στην οποία η ρίζα δεν έχει βαθμό 1 και το δένδρο δεν έχει προσανατολισμό. Τότε, αν συμβολίσουμε με r_n το πλήθος των δένδρων με ρίζα και n κορυφές, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας έχει τη μορφή:

$$R(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + \cdots$$

και αν συμβολίσουμε με t_n το πλήθος των δένδρων με n κορυφές, η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας έχει τη μορφή:

$$T(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + \cdots$$

Οι δύο σχέσεις συνδέονται, όπως απέδειξαν οι Polya και Otter σύμφωνα με:

$$T(x) = R(x) - \frac{1}{2}R(x)^2 + \frac{1}{2}R(x^2)$$

Ελληνική βιβλιογραφία

Παπαϊωάννου, Αλ. (2003). *Διακριτά Μαθηματικά*, σελ. 287-317, Αθήνα: Εκδόσεις ΕΜΠ

Παπαϊωάννου, Αλ. (2004). *Θεωρία Γραφημάτων*, σελ. 1-6, Αθήνα: Εκδόσεις ΕΜΠ

Κούτρας Μάρκος, (2010). Εισαγωγή στην Συνδυαστική, Αθήνα: Εκδόσεις ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing. p. 824-825, New York: Dover

Chisholm, H. (1911). *Stirling, James*, Encyclopædia Britannica 11th ed., England: Cambridge University Press

Cohen, D. (1978). *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, p. 107- 132, USA: John Wiley and Sons, Inc.

Conway, J.; Guy, R. (1996). *The book of Numbers*, p. 91-126, New York/Heidelberg: Springer

Donaghey, R.; Shapiro, L. W. (1977). *Motzkin numbers*, p. 291–301, Journal of Combinatorial Theory, Series A 23 (3), SanFrancisco: Elsevier Inc

Dowling, T. (2007). *Applications of Discrete Mathematics*, p. 94-111, USA: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Fort, T. (1948). *Finite Differences and Difference Equations in the RealDomain*, Oxford, England: Clarendon Press

Goulden, I. P.; Jackson, D. M. (1983). *Combinatorial Enumeration*, p.111, New York: Wiley

Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A foundation for Computer Science 2nd ed.*, ex. 9.8, USA: Addison-Wesley

Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed.*, p.257-267, USA: Addison-Wesley

Higham, J. N. (1998). *Handbook of writing for the mathematical sciences*, p. 25, USA: SIAM

Hilton, P.; Pedersen, J. (1991). *Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses*, p. 64-75, The Mathematical Intelligencer, Vol. 13,Germany: Springer

Jiang, X. (2012). *Applications of Catalan Numbers*, Sweet Briar:

Department of Mathematical Sciences, Sweet Briar College

Jordan, C. (1965). *Calculus of Finite Differences*, 3rd ed. New York: Chelsea

Kleinberg, J.; Tardos E. (2006). *Algorithm Design*, p. 107-108, India: Pearson Education, Inc./Addison-Wesley

Knuth, D. E. (1992). *Two Notes on Notation*, p.403-422, American Mathematical Monthly, Vol.99, USA: Mathematical Association of America

Knuth, E. D. (1997). *The Art of Computer Programming*, Volume 1: Fundamental Algorithms (Third ed.), p. 52–74, USA: Addison- Wesley

Louis Comtet(1974). Advanced Combinatorics, The art of finite and Infinite Expansions, D.Reidel publishing company, Dordrecht-Holland/Boston-U.S.A

Luo, J. (2012). *Ming Antu and His Power Series Expansions*, Institute for the History of Science, Inner Mongolia Normal University; Instituteof Science, Technology and Culture, Zhejiang University

Mansion, P. (1896). *Notice sur les travaux mathématiques de Eugène- Charles Catalan*, Brussels: F Hayes

Mihăilescu, P. (2004). *Primary Cyclotomic and a Proof of Catalan'sConjecture*, p. 167-195, J. reineangew. Math. 572, Berlin- New York: Walter de Gruyter

Pemmaraju, S.; Skiena, S. (2003). *Computational Discrete Mathematics:Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*, p.169,Cambridge, England: Cambridge University Press

Riordan, J. (1980). *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New York: Wiley

Roman, S. (1984). *The Umbral Calculus*, p. 59-67, New York: Academic Press

Simonson, S. (2009). *The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag*, North Easton: Department of Mathematics and Computer Science, Stonehill College

Stanley, R. P. (1999b). *Enumerative Combinatorics,Vol.2*, p. 219,

Cambridge, England: Cambridge University Press

Tweedie, C. (1922), *James Stirling : a Sketch of his Life and Works along with his Scientific Correspondence*, Oxford: Clarendon Press

Tweddle, I. (1988). *James Stirling: this about series and such things*, Edinburgh: Scottish Academic Press

Tweddle, I. (1992). *James Stirling's early work on acceleration of convergence*, Archive for History of Exact Science, Vol. 45, p.105-125, Germany: Springer

van Lint, J. H.; Wilson, R. M. (1992). *A Course in Combinatorics*, p. 136, New York: Cambridge University Press