



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Προχωρημένες Σπουδές στη Φυσική

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κλασικές Λύσεις Μελανών Οπών

Ντούβλης Ιωάννης

Επιβλέπων Καθηγητής: Κεχαγιάς Αλέξανδρος

Σεπτέμβριος 2026

Η παρούσα εργασία αποτελεί πνευματική ιδιοκτησία του φοιτητή («συγγραφέας/δημιουργός») που την εκπόνησε. Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στο ΕΑΠ, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας. Η ανοικτή πρόσβαση στο πλήρες κείμενο για μελέτη και ανάγνωση δεν σημαίνει καθ' οιονδήποτε τρόπο παραχώρηση δικαιωμάτων διανοητικής ιδιοκτησίας του συγγραφέα/δημιουργού ούτε επιτρέπει την αναπαραγωγή, αναδημοσίευση, αντιγραφή, αποθήκευση, πώληση, εμπορική χρήση, μετάδοση, διανομή, έκδοση, εκτέλεση, «μεταφόρτωση» (downloading), «ανάρτηση» (uploading), μετάφραση, τροποποίηση με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά της εργασίας, χωρίς τη ρητή προηγούμενη έγγραφη συναίνεση του συγγραφέα/δημιουργού. Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.



Κλασικές Λύσεις Μελανών Οπών

Ντούβλης Ιωάννης

Επιτροπή Επίβλεψης Διπλωματικής Εργασίας

Επιβλέπων Καθηγητής: Κεχαγιάς Αλέξανδρος Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο	Συν-Επιβλέπων Καθηγητής: Περιβολαρόπουλος Λέανδρος Σχολή Θετικών Επιστημών Τμήμα Φυσικής Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
--	--

Σεπτέμβριος 2026

*Στον Σωτήρη, τη Ναταλία,
τον Ιάσονα και τον Αλέξανδρο.*

Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία πραγματεύεται τις κλασικές λύσεις στάσιμων μελανών οπών στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Σκοπός της είναι η συστηματική παρουσίαση της γεωμετρικής και αιτιακής δομής, καθώς και της δυναμικής συμπεριφοράς των βασικών οικογενειών μελανών οπών, αναδεικνύοντας παράλληλα τη σύνδεσή τους με τα σύγχρονα παρατηρησιακά δεδομένα της αστρονομίας βαρυτικών κυμάτων.

Στο πρώτο μέρος, έπειτα από μια σύντομη ιστορική αναδρομή και την εισαγωγή του απαραίτητου μαθηματικού υποβάθρου (μετρικός τανυστής, τανυστές καμπυλότητας, εξισώσεις πεδίου Einstein, γεωδαισιακές καμπύλες, διανύσματα Killing), εξετάζονται διεξοδικά οι σφαιρικά συμμετρικές λύσεις. Συγκεκριμένα, αναλύονται η μετρική Schwarzschild, η ηλεκτρικά φορτισμένη λύση Reissner–Nordström, καθώς και οι γενικεύσεις τους (Schwarzschild–de Sitter και Schwarzschild–Anti-de Sitter) παρουσία κοσμολογικής σταθεράς. Η μελέτη επικεντρώνεται στα χαρακτηριστικά των οριζόντων γεγονότων, στις ιδιομορφίες καμπυλότητας μέσω του αναλλοίωτου βαθμωτού Kretschmann, και στην κατασκευή των διαγραμμάτων Penrose–Carter για τους μέγιστα επεκτεταμένους χωροχρόνους.

Στη συνέχεια, η μελέτη μεταβαίνει στην αξονικά συμμετρική λύση Kerr και στη γενικότερη μετρική Kerr–Newman. Αναλύονται τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους, όπως η εργόσφαιρα, το φαινόμενο της συμπαράσυρσης των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς (frame-dragging), η δακτυλιοειδής ιδιομορφία και ο μηχανισμός εξαγωγής ενέργειας Penrose, στοιχεία που συνθέτουν την πλήρη εικόνα των μελανών οπών στο πλαίσιο του θεωρήματος της «Μη-Τριχοφυίας» (No-Hair theorem).

Στο τελευταίο μέρος αναπτύσσεται η θεωρία των γραμμικών βαρυτικών διαταραχών σε υπόβαθρο Schwarzschild. Μέσω της μεθόδου χωρισμού μεταβλητών και της εισαγωγής της συντεταγμένης χελώνας (tortoise coordinate / Regge–Wheeler), η εξίσωση Klein–Gordon για ένα δοκιμαστικό βαθμωτό πεδίο, καθώς και οι εξισώσεις των αξονικών (Regge–Wheeler) και πολικών (Zerilli) βαρυτικών διαταραχών, ανάγονται σε μονοδιάστατες κυματικές εξισώσεις τύπου Schrödinger. Εξετάζεται η ισοφασματικότητα των δύο τύπων διαταραχών μέσω του μετασχηματισμού Darboux και υπολογίζονται οι θεμελιώδεις ημικανονικοί τρόποι ταλάντωσης (quasinormal modes, $\ell = 2$) κάνοντας χρήση

της ημικλασικής προσέγγισης WKB πρώτης τάξης. Τέλος, τα αναλυτικά αποτελέσματα αντιπαραβάλλονται με την ακριβή αριθμητική μέθοδο συνεχών κλασμάτων του Leaver, προσδιορίζοντας τα όρια ισχύος της προσεγγιστικής μεθόδου για τους ανώτερους υπερτόνους.

Λέξεις-Κλειδιά: Γενική Σχετικότητα, μελανές οπές, μετρική Schwarzschild, μετρική Reissner–Nordström, μετρική Kerr, μετρική Kerr–Newman, θεώρημα No-Hair, θεώρημα Birkhoff, ορίζοντας γεγονότων, εργόσφαιρα, συμπαράσυρση αδρανειακών συστημάτων αναφοράς, διαδικασία Penrose, κοσμολογική σταθερά, χωρόχρονος de Sitter, διαγράμματα Penrose–Carter, ιδιομορφίες καμπυλότητας, βαθμωτό Kretschmann, θεωρία διαταραχών, εξίσωση Regge–Wheeler, εξίσωση Zerilli, ισοφασματικότητα, ημικανονικοί τρόποι ταλάντωσης, προσέγγιση WKB, βαρυτικά κύματα, φασματοσκοπία μελανών οπών.

Abstract

This master’s thesis investigates the classical solutions of stationary black holes within the framework of General Relativity. Its primary objective is to systematically present the geometric and causal structures, alongside the dynamical behavior, of the fundamental black hole families, while highlighting their connection to contemporary observational data in gravitational-wave astronomy.

In the first part, following a brief historical overview and the introduction of the necessary mathematical background (metric tensor, curvature tensors, Einstein field equations, geodesics, Killing vectors), spherically symmetric solutions are thoroughly examined. Specifically, the Schwarzschild metric, the electrically charged Reissner–Nordström solution, and their generalizations in the presence of a cosmological constant (Schwarzschild–de Sitter and Schwarzschild–Anti-de Sitter) are analyzed. The study focuses on the properties of event horizons, curvature singularities via the Kretschmann invariant, and the construction of Penrose–Carter diagrams for maximally extended spacetimes.

Subsequently, the thesis transitions to the axially symmetric Kerr solution and the more general Kerr–Newman metric. Their distinctive features are analyzed, including the ergosphere, the frame-dragging effect, the ring singularity, and the Penrose energy extraction process. These elements synthesize the complete picture of black holes within the context of the No-Hair theorem.

In the final part, the theory of linear gravitational perturbations on a Schwarzschild background is developed. Through the method of separation of variables and the introduction of the tortoise (Regge–Wheeler) coordinate, the Klein–Gordon equation for a test scalar field, as well as the equations governing axial (Regge–Wheeler) and polar (Zerilli) gravitational perturbations, are reduced to one-dimensional Schrödinger-like wave equations. The isospectrality of the two types of perturbations is examined via the Darboux transformation, and the fundamental quasinormal modes ($\ell = 2$) are computed using the first-order semiclassical WKB approximation. Finally, the analytical results are compared against Leaver’s exact numerical continued fraction method, thereby determining the limits of validity of the approximation for higher overtones.

Keywords: General Relativity, black holes, Schwarzschild metric, Reissner–Nordström metric, Kerr metric, Kerr–Newman metric, No-Hair theorem, Birkhoff’s theorem, event horizon, ergosphere, frame-dragging, Penrose process, cosmological constant, de Sitter spacetime, Penrose–Carter diagrams, curvature singularities, Kretschmann scalar, perturbation theory, Regge–Wheeler equation, Zerilli equation, isospectrality, quasinormal modes, WKB approximation, gravitational waves, black hole spectroscopy.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο που μου έδωσε την ευκαιρία να συνεχίσω το όμορφο ταξίδι στη Φυσική, κάτι που είχα αφήσει στη μέση πριν πολλά χρόνια.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους καθηγητές μου, κυρίους Αλέξανδρο Κεχαγιά, Λέανδρο Περιβολαρόπουλο, Γιώργο Σοφιανάτο, Κωνσταντίνο Παπαδόπουλο και Κωνσταντίνο Σφέτσο, για τη βοήθεια και καθοδήγηση καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, νιώθω τεράστια ευγνωμοσύνη προς τη σύζυγό μου Μαρία, και τα παιδιά μου Σωτήρη, Ναταλία, Ιάσωνα και Αλέξανδρο, για τη στήριξη, την αγάπη και την υπομονή που έδειξαν, περιμένοντας να συναντηθούν οι κοσμικές μας γραμμές...

Συμβάσεις και Συμβολισμοί

Σε όλη την παρούσα διπλωματική εργασία, υιοθετούνται οι ακόλουθες μαθηματικές συμβάσεις και συμβολισμοί, εκτός εάν αναφέρεται ρητά κάτι διαφορετικό:

- **Σύστημα Μονάδων:** Υιοθετούμε το σύστημα γεωμετρικών μονάδων, όπου η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και η ταχύτητα του φωτός στο κενό τίθενται ίσες με τη μονάδα:

$$G = c = 1$$

Κατά συνέπεια, η μάζα, ο χρόνος και το μήκος έχουν τις ίδιες διαστάσεις και εκφράζονται σε μονάδες μήκους.

- **Υπογραφή Μετρικής:** Χρησιμοποιούμε την υπογραφή μετρικής «κυρίως συν» $(-, +, +, +)$, ακολουθώντας τις καθιερωμένες συμβάσεις των σύγχρονων συγγραμμάτων Γενικής Σχετικότητας. Επομένως, τα χωροειδή διαστήματα ικανοποιούν τη σχέση $ds^2 > 0$, ενώ η ορίζουσα της μετρικής g είναι πάντοτε αρνητική και το αναλλοίωτο στοιχείο όγκου γράφεται ως $d^4x\sqrt{-g}$.

- **Δείκτες:**

- Οι ελληνικοί δείκτες $(\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots)$ υποδηλώνουν τις συνιστώσες του τετραδιάστατου χωροχρόνου και λαμβάνουν τιμές από 0 έως 3.
- Οι λατινικοί δείκτες $(i, j, k, \dots)$ υποδηλώνουν τις τρισδιάστατες χωρικές συνιστώσες και λαμβάνουν τιμές από 1 έως 3.
- Υπονοείται η σύμβαση άθροισης του Einstein για επαναλαμβανόμενους άνω και κάτω δείκτες.

- **Παράγωγοι:**

- Οι μερικές παράγωγοι ως προς μια συντεταγμένη x^μ συμβολίζονται με ∂_μ ή με ένα κόμμα στον δείκτη:

$$A_{\mu,\nu} \equiv \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

- Οι συναλλοίωτες παράγωγοι που σχετίζονται με τη συνοχή Levi–Civita συμβολίζονται με ∇_μ ή με ένα ερωτηματικό στον δείκτη:

$$A_{\mu;\nu} \equiv \nabla_\nu A_\mu$$

- Ο τελεστής d'Alembert σε καμπύλο χωρόχρονο ορίζεται ως $\square \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$.

• **Τανυστές Καμπυλότητας:**

- Ο τανυστής καμπυλότητας Riemann ορίζεται μέσω του μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων που δρουν σε ένα διανυσματικό πεδίο V^ρ :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}V^\sigma$$

- Ο τανυστής Ricci ορίζεται ως η συστολή του πρώτου και του τρίτου δείκτη του τανυστή Riemann:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu}$$

- Το βαθμωτό Ricci (βαθμωτό καμπυλότητας) είναι το ίχνος του τανυστή Ricci:
 $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

• **Συντεταγμένες και Ορίζοντες:**

- Οι τυπικές σφαιρικές συντεταγμένες ή οι συντεταγμένες Boyer–Lindquist συμβολίζονται με (t, r, θ, ϕ) .
- Η ακτίνα του εξωτερικού ορίζοντα συμβολίζεται με r_+ (ή r_H), του εσωτερικού ορίζοντα με r_- , και του κοσμολογικού ορίζοντα με r_c .
- Η συντεταγμένη «χελώνας» των Regge–Wheeler συμβολίζεται με r_* .

- **Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο** Ο τανυστής Faraday (τανυστής ηλεκτρομαγνητικού πεδίου) ορίζεται συναρτήσει του ηλεκτρομαγνητικού τετραδυναμικού A_μ μέσω της σχέσης:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu^1$$

¹Η αντικατάσταση των συναλλοίωτων παραγώγων από μερικές ισχύει λόγω της απουσίας στρέψης της συνοχής Levi–Civita: τα συμμετρικά σύμβολα Christoffel ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$) αλληλοαναιρούνται από την αντισυμμετρία του τανυστή.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Ευχαριστίες	v
Συμβάσεις και Συμβολισμοί	vii
Κατάλογος Σχημάτων	xii
Κατάλογος Πινάκων	xiii
1 Εισαγωγή	1
1.1 Ιστορικό Υπόβαθρο	1
1.2 Ταξινόμηση Μελανών Οπών και Θεώρημα No-Hair	3
1.2.1 Οι Τρεις Θεμελιώδεις Παράμετροι	3
1.2.2 Η Ταξινόμηση των Κλασικών Λύσεων	4
1.2.3 Το Θεώρημα No-Hair	4
1.3 Κίνητρο και Σκοπός	6
1.4 Δομή της Εργασίας	7
2 Μαθηματικό Υπόβαθρο	9
2.1 Η Γεωμετρία του Χωροχρόνου	9
2.1.1 Ο Μετρικός Τανυστής	9
2.1.2 Ο Τανυστής Riemann	10
2.2 Η Δράση Einstein-Hilbert και οι Πεδιακές Εξισώσεις	11
2.2.1 Μεταβολή της Δράσης και ο Τανυστής Einstein	12
2.2.2 Ο Τανυστής Ενέργειας-Ορμής	13
2.2.3 Οι Πεδιακές Εξισώσεις Einstein	13
2.2.4 Πεδιακές Εξισώσεις στο Κενό και η Κοσμολογική Σταθερά	14
2.3 Γεωδαισιακές Εξισώσεις και Κίνηση στον Καμπυλωμένο Χωρόχρονο	15
2.3.1 Η Εξίσωση της Γεωδαισιακής	15
2.3.2 Κανονικοποίηση της Τετραταχύτητας	16
2.3.3 Συμμετρίες, Διανύσματα Killing και Διατηρούμενες Ποσότητες	16

2.3.4	Το Ενεργό Δυναμικό και η Ταξινόμηση Τροχιών	18
2.4	Ιδιομορφίες, Ορίζοντες και Αιτιακή Δομή	19
2.4.1	Χωροχρονικές Ιδιομορφίες	19
2.4.2	Ο Ορίζοντας Γεγονότων	20
2.4.3	Αιτιακή Δομή	20
3	Σφαιρικά Συμμετρικές Μελανές Οπές (Στατικές Λύσεις)	23
3.1	Ο Χωρόχρονος Schwarzschild (M)	23
3.1.1	Παραγωγή της Μετρικής	23
3.1.2	Ιδιομορφίες	25
3.1.3	Γεωδαισιακές και το Ενεργό Δυναμικό	26
3.1.4	Συντεταγμένες Kruskal–Szekeres	28
3.2	Ο Χωρόχρονος Reissner–Nordström (M, Q)	31
3.2.1	Εξισώσεις Einstein–Maxwell και η Μετρική	31
3.2.2	Δομή των Οριζόντων	32
3.2.3	Αιτιακή Δομή και ο Ορίζοντας Cauchy	34
3.3	Ο Χωρόχρονος Schwarzschild–(Anti)–de Sitter (M, Λ)	35
3.3.1	Πεδιακές Εξισώσεις με Κοσμολογική Σταθερά	35
3.3.2	Η Λύση de Sitter ($\Lambda > 0$)	37
3.3.3	Η Λύση Anti-de Sitter ($\Lambda < 0$)	38
4	Αξονικά Συμμετρικές Μελανές Οπές (Στάσιμες Λύσεις)	39
4.1	Ο Χωρόχρονος Kerr (M, J)	39
4.1.1	Συμμετρίες και Διανύσματα Killing	39
4.1.2	Η Μετρική στις Συντεταγμένες Boyer–Lindquist	40
4.1.3	Δομή Οριζόντων, Εργόσφαιρα και Ιδιομορφία	42
4.1.4	Συμπάραιση Αδρανειακών Συστημάτων και Εξαγωγή Ενέργειας	48
4.1.5	Το Διάγραμμα Penrose–Carter της Μελανής Οπής Kerr	53
4.2	Ο Χωρόχρονος Kerr–Newman (M, J, Q)	54
4.2.1	Γεωμετρική Δομή της Kerr–Newman	55
4.2.2	Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο	57
4.2.3	Μαγνητική Διπολική Ροπή και Γυρομαγνητικός Λόγος	58
5	Θεωρία Διαταραχών Μελανών Οπών	59
5.1	Γραμμικοποιημένη Βαρύτητα	59
5.2	Βαθμωτές Διαταραχές	61
5.3	Βαρυτικές Διαταραχές της μετρικής Schwarzschild	67
5.3.1	Η Εξίσωση Regge–Wheeler	68
5.3.2	Η Εξίσωση Zerilli	69
5.3.3	Ισοφασματικότητα	69

5.4	Ημικανονικοί τρόποι (Quasinormal Modes–QNMs)	70
5.4.1	Οριακές συνθήκες	72
5.4.2	Υπολογισμός με την Προσέγγιση WKB	73
5.4.3	Εφαρμογή της WKB στο Δυναμικό Regge–Wheeler	76
6	Συμπεράσματα και Προοπτικές	81
6.1	Σύνοψη των Κλασικών Λύσεων	81
6.2	Περιορισμοί της Κλασικής Θεωρίας	84
6.3	Μελλοντικές Προοπτικές	85
	Βιβλιογραφία	87

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Σύμμορφο διάγραμμα Penrose–Carter του χωροχρόνου Minkowski. . . .	21
3.1	Το ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(r)$ για μαζικά σωματίδια ($\varepsilon = 1$) γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild.	27
3.2	Το διάγραμμα Kruskal-Szekeres.	30
3.3	Σύμμορφο διάγραμμα Penrose-Carter για τη μέγιστα επεκτεταμένη λύση Schwarzschild.	30
3.4	Τμήμα του διαγράμματος Penrose-Carter για τη μελανή οπή Reissner-Nordström ($M > Q$).	34
4.1	Σχηματική απεικόνιση της γεωμετρίας μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής Kerr	46
4.2	Τμήμα του διαγράμματος Penrose–Carter της υποακράιας μελανής οπής Kerr.	53
5.1	Ενεργό δυναμικό βαθμωτών διαταραχών	66
5.2	Σύγκριση ενεργών δυναμικών Regge–Wheeler και Zerilli	70
5.3	Ενεργό φράγμα και οριακές συνθήκες QNM	73

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Ταξινόμηση των κλασικών στάσιμων λύσεων μελανών οπών	4
3.1	Ταξινόμηση του χωροχρόνου Reissner–Nordström	33
5.1	Ημικανονικές συχνότητες βαθμωτού πεδίου σε γεωμετρία Schwarzschild.	76
5.2	Ημικανονικές συχνότητες βαρυτικής διαταραχής Regge–Wheeler ($s = 2$, $\ell = 2$, $n = 0$).	79
6.1	Σύνοψη των κλασικών λύσεων μελανών οπών που μελετήθηκαν	82

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ιστορικό Υπόβαθρο

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας αντικαθιστά τη Νευτώνεια αντίληψη της βαρύτητας ως δύναμης, θεωρώντας ότι η παρουσία ύλης και ενέργειας καμπυλώνει τον χωρόχρονο και η καμπυλότητα αυτή καθορίζει την κίνηση της ύλης. Αυτή η συσχέτιση περιγράφεται από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein [1], μια συλλογή δέκα συζευγμένων, μη-γραμμικών, μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η μη-γραμμικότητά τους οφείλεται στο γεγονός ότι το ίδιο το πεδίο φέρει ενέργεια, αποτελώντας έτσι πηγή της δικής του καμπυλότητας. [2]

Λόγω αυτής της μη-γραμμικότητας, η εύρεση ακριβών αναλυτικών λύσεων των εξισώσεων Einstein είναι δύσκολη. Ο Karl Schwarzschild, λίγο καιρό μετά τη δημοσίευση των τελικών εξισώσεων Einstein, παρουσίασε την πρώτη ακριβή λύση τους σε κλειστή μορφή. Βρήκε τη μετρική του χωροχρόνου έξω από ένα στατικό, σφαιρικά συμμετρικό σώμα [3]. Η λύση αυτή περιγράφει την καμπυλότητα του χωροχρόνου γύρω από αντικείμενα όπως αστέρες και πλανήτες.

Το Θεώρημα Birkhoff

Κατά την εξαγωγή της λύσης Schwarzschild, υποθέτουμε εξ αρχής ότι ο χωρόχρονος είναι στατικός, δηλαδή αναλλοίωτος στον χρόνο. Σύμφωνα με το θεώρημα Birkhoff αυτή η υπόθεση είναι περιττή, διότι κάθε κενός, σφαιρικά συμμετρικός χωρόχρονος είναι αναγκαστικά στατικός. Επομένως, η μετρική Schwarzschild είναι η μοναδική λύση για τον

εξωτερικό χώρο οποιασδήποτε σφαιρικής κατανομής ύλης, ανεξάρτητα από το αν η ίδια η ύλη είναι στατική ή κινείται. Μια άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι μια απόλυτα σφαιρική βαρυτική κατάρρευση δεν μπορεί να εκπέμψει βαρυτικά κύματα [4].

Το θεώρημα αυτό αποδίδεται παραδοσιακά στον George Birkhoff, ο οποίος το δημοσίευσε το 1923. Ωστόσο το ίδιο αποτέλεσμα είχε ήδη αποδειχθεί και δημοσιευτεί δύο χρόνια νωρίτερα, το 1921, από τον Νορβηγό φυσικό Jørg Tofte Jebsen. Ο Jebsen το απέδειξε ξεκινώντας απευθείας από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein, σε μια εργασία που δημοσιεύτηκε στα πρακτικά της Σουηδικής Ακαδημίας Επιστημών. Η συμβολή του παρέμεινε για δεκαετίες σχεδόν άγνωστη, αλλά αναγνωρίστηκε σε ορισμένα σύγχρονα συγγράμματα, τα οποία αναφέρονται στο θεώρημα ως Jebsen–Birkhoff. [5].

Ο Περιστρεφόμενος Χωρόχρονος

Η λύση Schwarzschild, αν και θεμελιώδης, περιγράφει συστήματα χωρίς στροφορμή. Στο σύμπαν, όμως, τα περισσότερα αστροφυσικά σώματα περιστρέφονται. Για σχεδόν μισό αιώνα η εύρεση ακριβούς λύσης των εξισώσεων Einstein για έναν περιστρεφόμενο χωρόχρονο αποδείχθηκε δύσκολη. Η εισαγωγή αξονικής συμμετρίας οδηγεί σε ένα σύστημα μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, για τις οποίες δεν υπάρχει γενική μέθοδος επίλυσης. Το πρόβλημα επιλύθηκε το 1963 από τον Roy Patrick Kerr [6, 7].

Η παρουσίαση της λύσης Kerr έγινε μία περίοδο που η προσοχή της επιστημονικής κοινότητας ήταν στραμμένη στην ανακάλυψη των κβάρκ, με αποτέλεσμα η σημασία της νέας λύσης να περάσει σχεδόν απαρατήρητη [6, 8]. Υπήρχε μια γενικότερη δυσπιστία απέναντι σε τέτοιου είδους ακραία θεωρητικά αποτελέσματα, αφού η έννοια της μελανής οπής δεν είχε ακόμα εδραιωθεί ως πραγματικό αστροφυσικό αντικείμενο. Η σημασία της ανακάλυψης αναγνωρίστηκε αργότερα, όταν αποδείχθηκε ότι η λύση Kerr είναι η μοναδική δυνατή περιγραφή για κάθε περιστρεφόμενη μελανή οπή στο σύμπαν [6, 9].

1.2 Ταξινόμηση Μελανών Οπών και Θεώρημα No-Hair

Σε αντίθεση με τους αστέρες, οι οποίοι εξαρτώνται από πλήθος παραμέτρων, οι στάσιμες μελανές οπές περιγράφονται από μόλις τρεις αριθμούς: τη μάζα M , τη γωνιακή στροφορμή J και το ηλεκτρικό φορτίο Q [2].

1.2.1 Οι Τρεις Θεμελιώδεις Παράμετροι

Οι τρεις αυτές ιδιότητες είναι τα μόνα μεγέθη που μπορεί να μετρήσει ένας παρατηρητής στο άπειρο. Επειδή σχετίζονται με νόμους διατήρησης (μάζας-ενέργειας, στροφορμής, ηλεκτρικού φορτίου), δεν μπορούν να κρυφτούν πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων. Όλα τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της ύλης που κατέρρευσε χάνονται, ένα μέρος ακτινοβολείται στο άπειρο και το υπόλοιπο εγκλωβίζεται στο εσωτερικό.

Η **μάζα** M ¹ αντιπροσωπεύει τη συνολική μάζα της μελανής οπής, όπως αυτή γίνεται αντιληπτή από έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση. Μπορεί να υπολογιστεί από την κεπλεριανή τροχιά ενός σώματος μακριά από τη μελανή οπή και καθορίζει τη χαρακτηριστική κλίμακα μήκους του συστήματος, δηλαδή την ακτίνα Schwarzschild:

$$r_s = 2M, \quad (1.1)$$

η οποία στο Διεθνές Σύστημα ισούται με $r_s = 2GM/c^2$. Για παράδειγμα, μια μελανή οπή με μάζα $M = 10 M_\odot$ έχει ακτίνα Schwarzschild περίπου 30 km, ενώ μια υπερμαζική μελανή οπή με $M = 10^9 M_\odot$ έχει $r_s \approx 3 \times 10^{12}$ m, μέγεθος συγκρίσιμο με την τροχιά του Πλούτωνα.

Η **γωνιακή στροφορμή** J εκφράζει την περιστροφή της μελανής οπής γύρω από τον άξονά της. Στη γεωμετρία Kerr είναι πιο πρακτικό να χρησιμοποιούμε την παράμετρο περιστροφής

$$a \equiv \frac{J}{M}, \quad (1.2)$$

¹Πιο αυστηρά ονομάζεται μάζα ADM (από τους Arnowitt, Deser και Misner). Ορίζεται στο χωρικό άπειρο ενός ασυμπτωτικά επίπεδου χωροχρόνου και αντιπροσωπεύει τη συνολική μάζα-ενέργεια του συστήματος, συμπεριλαμβανομένης και της ενέργειας του βαρυτικού πεδίου [10].

η οποία έχει διαστάσεις μήκους.

Τέλος, το **ηλεκτρικό φορτίο** Q είναι απαραίτητο για την πλήρη μαθηματική περιγραφή των μελανών οπών. Παρ' όλα αυτά, οι πραγματικές μελανές οπές αναμένεται να είναι ηλεκτρικά ουδέτερες, καθώς οποιοδήποτε φορτίο εξουδετερώνεται από το περιβάλλον πλάσμα.

1.2.2 Η Ταξινόμηση των Κλασικών Λύσεων

Με βάση τις παραπάνω παραμέτρους προκύπτουν τέσσερις οικογένειες λύσεων μελανών οπών (Πίν. 1.1).

Πίνακας 1.1: Ταξινόμηση των κλασικών στάσιμων λύσεων μελανών οπών βάσει των παραμέτρων της γωνιακής στροφορμής J και του ηλεκτρικού φορτίου Q . Σε κάθε περίπτωση, υποτίθεται $M > 0$ και ο χωρόχρονος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος.

Μετρική	J	Q	Φυσικός Χαρακτηρισμός
Schwarzschild (1916)	0	0	Στατική, σφαιρικά συμμετρική
Reissner–Nordström (1916/1918)	0	$\neq 0$	Στατική, ηλεκτρικά φορτισμένη
Kerr (1963)	$\neq 0$	0	Στάσιμη, περιστρεφόμενη
Kerr–Newman (1965)	$\neq 0$	$\neq 0$	Στάσιμη, περιστρεφόμενη και φορτισμένη

Η μετρική Kerr–Newman είναι η γενικότερη και κάθε απλούστερη λύση ανακτάται ως ειδική περίπτωση της. Η μετρική Schwarzschild προκύπτει για $J = Q = 0$, η Reissner–Nordström για $J = 0$ και η Kerr για $Q = 0$.

Θα εξετάσουμε επίσης τις γενικεύσεις της μετρικής Schwarzschild, παρουσία κοσμολογικής σταθεράς Λ . Αυτές είναι οι λύσεις Schwarzschild–de Sitter ($\Lambda > 0$) και Schwarzschild–Anti-de Sitter ($\Lambda < 0$).

1.2.3 Το Θεώρημα No-Hair

Η ταξινόμηση που παρουσιάσαμε υποστηρίζεται από θεωρήματα μοναδικότητας που συλλογικά αναφέρονται ως θεώρημα No-Hair [2, 11]. Η ονομασία αποδίδεται στον John Archibald Wheeler, ο οποίος εισήγαγε τη φράση «*a black hole has no hair*» για να εκφράσει με παραστατικό τρόπο το γεγονός ότι ένας εξωτερικός παρατηρητής δεν μπορεί να α-

ντλήσει καμία πληροφορία για τη φύση και την ιστορία της μελανής οπής πέρα από τα τρία ολοκληρωτικά μεγέθη M , J και Q .

Ιστορική Ανάπτυξη των Θεωρημάτων Μοναδικότητας

Η θεμελίωση του θεωρήματος No-Hair είναι αποτέλεσμα της εργασίας πολλών φυσικών κατά τη δεκαετία του 1960 και του 1970.

Ο Werner Israel (1967) απέδειξε ότι κάθε στατική λύση κενού για μελανή οπή, που ικανοποιεί κατάλληλες συνθήκες (απουσία γυμνής ιδιομορφίας, ασυμπτωτική επιπεδότητα), είναι αναγκαστικά σφαιρικά συμμετρική [12]. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οποιοδήποτε κι αν είναι το σχήμα του αρχικού σώματος που καταρρέει, η τελική στατική κατάσταση είναι πάντοτε η γεωμετρία Schwarzschild.

Ένα χρόνο αργότερα (1968), ο ίδιος ο Israel επέκτεινε το θεώρημα για την περίπτωση του χωροχρόνου ηλεκτροκενού, αποδεικνύοντας ότι κάθε στατική, φορτισμένη μελανή οπή ταυτίζεται αναγκαστικά με τη λύση Reissner–Nordström [13].

Ακολούθησε η επέκταση στην περίπτωση αξονικά συμμετρικών, στάσιμων μελανών οπών από τον Brandon Carter (1971), ο οποίος απέδειξε ότι τα μόνα ελεύθερα μεγέθη της λύσης είναι η μάζα M και η γωνιακή στροφορμή J [9].

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε από τον David Robinson (1975), ο οποίος απέδειξε ότι η γεωμετρία Kerr είναι η μοναδική στάσιμη λύση κενού για μελανή οπή [14].

Στη συνέχεια, τα θεωρήματα μοναδικότητας επεκτάθηκαν ώστε να συμπεριλάβουν και το ηλεκτρομαγνητικό φορτίο Q , καταλήγοντας στη λύση Kerr–Newman ως τη μοναδική στάσιμη λύση της θεωρίας Einstein–Maxwell [15, 16].

Φυσική Ερμηνεία

Ένα άστρο διαθέτει πολύπλοκη δομή όπως ανομοιογένειες και μαγνητικά πεδία, η οποία δεν διατηρείται κατά τη βαρυτική κατάρρευση. Όλες οι πολυπολικές ροπές πέρα από αυτές που αντιστοιχούν στα M , J και Q ακτινοβολούνται στο άπειρο κατά τη φάση απόσβεσης (ringdown), σε χρόνο της τάξης του GM/c^3 . Έτσι ο εξωτερικός χωρόχρονος καταλήγει στη μετρική Kerr (ή Kerr–Newman). Αυτός ο χρόνος απόσβεσης, καθώς και το φάσμα των βαρυτικών κυμάτων που εκπέμπονται, καθορίζονται από τους ημικανονικούς τρόπους ταλάντωσης της μελανής οπής [2].

Συνεπώς, δύο μελανές οπές που σχηματίστηκαν από εντελώς διαφορετικές διαδικασίες αλλά καταλήγουν στις ίδιες τιμές (M, J, Q) είναι ταυτόσημες για κάθε εξωτερικό παρατηρητή. Η αρχική πληροφορία για το πώς δημιουργήθηκαν φαίνεται να χάνεται. Αν στη συνέχεια προστεθεί και η ακτινοβολία Hawking, καταλήγουμε στο παράδοξο της πληροφορίας, που παραμένει ανοιχτό ζήτημα για τη Γενική Σχετικότητα και την Κβαντική Θεωρία Πεδίου.

Όρια Ισχύος

Το θεώρημα No-Hair στηρίζεται σε ορισμένες βασικές υποθέσεις: ο χωρόχρονος πρέπει να έχει φτάσει σε ισορροπία, να είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, και η θεωρία να είναι η κλασική Einstein–Maxwell [16, 17].

Σε εναλλακτικές θεωρίες βαρύτητας, όπως οι βαθμωτές-τανυστικές (scalar-tensor) ή η Θεωρία Χορδών, αναδύονται λύσεις μελανών οπών που χαρακτηρίζονται κι από άλλες ανεξάρτητες παραμέτρους [18]. Παρ' όλα αυτά, οι μέχρι τώρα ανιχνεύσεις βαρυτικών κυμάτων παραμένουν εντός των ορίων της Γενικής Σχετικότητας. Η αναζήτηση όμως αποκλίσεων από την κλασική γεωμετρία Kerr μέσω της «φασματοσκοπίας» των μελανών οπών είναι σήμερα ένα από τα κυριότερα ερευνητικά πεδία της αστροφυσικής [19].

1.3 Κίνητρο και Σκοπός

Κίνητρο

Στις 14 Σεπτεμβρίου 2015, το LIGO κατέγραψε για πρώτη φορά ένα σήμα βαρυτικών κυμάτων (GW150914), που προερχόταν από τη συγχώνευση δύο μελανών οπών με μάζες περίπου $36M_{\odot}$ και $29M_{\odot}$ [20].

Έκτοτε, το δίκτυο LIGO/Virgo/KAGRA έχει καταγράψει δεκάδες συγχωνεύσεις συμπαγών αντικειμένων [21]. Κάθε ανιχνευόμενο σήμα καταλήγει στη φάση απόσβεσης, κατά την οποία η μελανή οπή που μόλις σχηματίστηκε αποβάλλει τις ασυμμετρίες της μέσω βαρυτικής ακτινοβολίας με τη μορφή εκθετικά φθίνουσών διακυμάνσεων του χωρόχρονου και συγκλίνει στη στάσιμη λύση Kerr. Αυτή η φάση κυριαρχείται από τους ημικανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Για να ανακτήσουμε φυσικές πληροφορίες από ένα σήμα ringdown,

ή για τον έλεγχο της Γενικής Σχετικότητας μέσω της φασματοσκοπίας μελανών οπών, χρειαζόμαστε τις κλασικές λύσεις και τον τρόπο που αντιδρούν σε εξωτερικές διαταραχές [19].

Σκοπός της Εργασίας

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε τη γεωμετρία των λύσεων Schwarzschild, Schwarzschild–de Sitter, Schwarzschild–anti-de Sitter, Reissner–Nordström, Kerr και Kerr–Newman.

Εστιάζοντας στη λύση Schwarzschild, μελετάμε τη διάδοση ενός δοκιμαστικού βαθμωτού πεδίου ως απλοποιημένο μοντέλο κυματικής δυναμικής σε καμπύλο χωρόχρονο. Στο τελικό μέρος υπολογίζονται οι πρώτοι ημικανονικοί τρόποι ταλάντωσης, με στόχο να συνδέσουμε τη θεωρία με τα δεδομένα της αστρονομίας βαρυτικών κυμάτων.

Περιοριζόμαστε αυστηρά στη κλασική Γενική Σχετικότητα σε τέσσερις διαστάσεις. Κβαντικά φαινόμενα, όπως για παράδειγμα η ακτινοβολία Hawking, δεν εξετάζονται, καθώς η κλασική θεωρία επαρκεί για την ερμηνεία των σημερινών δεδομένων.

Οι κύριες βιβλιογραφικές πηγές που καθοδηγούν την ανάλυσή μας είναι τα καθιερωμένα εγχειρίδια των Hartle [22], Carroll [23], Schutz [4] και Hobson et al. [24] για τα θεμέλια της Γενικής Σχετικότητας, καθώς και το έργο του Maggiore [19, 25] για τη σύνδεση της θεωρίας με την αστρονομία βαρυτικών κυμάτων. Παράλληλα, η ανασκόπησή μας στις βαρυτικές διαταραχές βασίζεται στις εργασίες των Regge–Wheeler [26] και Zerilli [27].

1.4 Δομή της Εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο της Γενικής Σχετικότητας. Κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση στα βασικά εργαλεία της διαφορικής γεωμετρίας (μετρικός τανυστής, τανυστής Riemann) και εξάγουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein. Επίσης, εξετάζουμε τις γεωδαισιακές εξισώσεις, τα διανύσματα Killing και το ενεργό δυναμικό, ενώ κλείνουμε με μια περιγραφή των χωροχρονικών ιδιομορφιών και της αιτιακής δομής.

Στη συνέχεια μελετάμε τις σφαιρικά συμμετρικές και στατικές μελανές οπές (Κεφ. 3). Ξεκινάμε από τη λύση Schwarzschild, περνάμε στη λύση Reissner–Nordström για να δούμε πώς επηρεάζει το ηλεκτρικό φορτίο τη γεωμετρία, και τελειώνουμε με τις λύσεις

Schwarzschild–(Anti)-de Sitter. Συνεχίζουμε (Κεφ. 4) με τις αξονικά συμμετρικές και στάσιμες μελανές οπές. Παρουσιάζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της μετρικής Kerr, καθώς και τη γενικότερη λύση Kerr–Newman, ολοκληρώνοντας έτσι την εικόνα που μας δίνει το θεώρημα No-Hair.

Στο Κεφάλαιο 5 εισάγουμε τη γραμμικοποιημένη βαρύτητα και χρησιμοποιούμε την προσέγγιση ενός δοκιμαστικού βαθμωτού πεδίου για να μελετήσουμε τη σκέδαση κυμάτων σε βαρυτικό υπόβαθρο. Αναδεικνύουμε πώς η προσέγγιση αυτή οδηγεί σε εξισώσεις ανάλογες με τις εξισώσεις Regge–Wheeler και Zerilli των βαρυτικών διαταραχών. Κλείνουμε με τον ορισμό των QNMs και τον υπολογισμό τους μέσω της ημικλασικής προσέγγισης WKB.

Στο τελευταίο κεφάλαιο (Κεφ. 6) συνοψίζουμε τα βασικά συμπεράσματα της εργασίας. Γίνεται μια σύντομη συζήτηση για τους περιορισμούς της κλασικής θεωρίας και αναφέρονται ορισμένες μελλοντικές προοπτικές, συνδέοντας τη θεωρητική μελέτη με τη σύγχρονη έρευνα γύρω από τις μελανές οπές.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικό Υπόβαθρο

2.1 Η Γεωμετρία του Χωροχρόνου

Στη Γενική Σχετικότητα η βαρύτητα παύει να αντιμετωπίζεται ως δύναμη και ταυτίζεται με την καμπυλότητα του χωροχρόνου, η οποία καθορίζεται από την κατανομή ύλης και ενέργειας. Στόχος μας είναι να εντοπίσουμε τις εξισώσεις που συνδέουν τη γεωμετρία με αυτή την κατανομή. [23, 28].

2.1.1 Ο Μετρικός Τανυστής

Η γεωμετρία του χωροχρόνου περιγράφεται από τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$. Λόγω της συμμετρίας του ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) έχει 10 ανεξάρτητες συνιστώσες σε τέσσερις διαστάσεις. Με τη βοήθειά του υπολογίζεται το αναλλοίωτο στοιχείο μήκους $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, το οποίο επιτρέπει τη μέτρηση αποστάσεων, χρονικών διαστημάτων και γωνιών. Οι συνιστώσες της μετρικής καθορίζουν την αιτιακή δομή μέσω των κώνων φωτός και, στο νευτώνειο όριο, παίζουν τον ρόλο του βαρυτικού δυναμικού. [4, 23]. Για να παραγωγίσουμε τανυστικά μεγέθη σε καμπύλο χωρόχρονο, χρειαζόμαστε τη συναλλοίωτη παράγωγο ∇_μ . Η δράση της καθορίζεται από τη συνοχή Levi-Civita, οι συνιστώσες της οποίας είναι τα σύμβολα Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Τα σύμβολα αυτά υπολογίζονται από τις πρώτες παραγώγους της μετρικής μέσω της σχέσης:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}), \quad (2.1)$$

και περιγράφουν γεωμετρικά τον τρόπο με τον οποίο τα διανύσματα μεταφέρονται παράλληλα από σημείο σε σημείο [10, 23].

Για ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα V^ρ η σχέση αυτή γράφεται:

$$\nabla_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho V^\lambda, \quad (2.2)$$

ενώ για ένα συναλλοίωτο διάνυσμα V_ρ , η αντίστοιχη σχέση είναι:

$$\nabla_\mu V_\rho = \partial_\mu V_\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda V_\lambda. \quad (2.3)$$

2.1.2 Ο Τανυστής Riemann

Η καμπυλότητα του χωροχρόνου εκφράζεται μέσω του τανυστή Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Προκύπτει από τα σύμβολα Christoffel και τις πρώτες παραγώγους τους σύμφωνα με την εξίσωση:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (2.4)$$

και περιγράφει την εγγενή καμπυλότητα του χωροχρόνου. Αντιστοιχεί στην καμπυλότητα Gauss (K) των 2-διάστατων επιφανειών. Στον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski μηδενίζεται παντού ($R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$), ενώ σε καμπύλο χωρόχρονο μετρά τη μεταβολή ενός διανύσματος μετά από παράλληλη μεταφορά κατά μήκος ενός κλειστού απειροστού βρόχου. [4].

Ο τανυστής Riemann εμφανίζεται στον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων. Εφόσον η θεωρία Einstein βασίζεται στη συνοχή Levi-Civita, η οποία δεν έχει στρέψη, ο μεταθέτης δρώντας σε ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα V^ρ δίνει την ταυτότητα

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu}V^\sigma. \quad (2.5)$$

Η μη μεταθετικότητα των ∇_μ, ∇_ν αντανακλά απευθείας την καμπυλότητα του χωροχρόνου. [23].

Υποβιβάζοντας τον πρώτο δείκτη με τη βοήθεια της μετρικής ($R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda}R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$), ο πλήρως συναλλοίωτος τανυστής Riemann εμφανίζει σημαντικές συμμετρίες. Είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δύο πρώτων ή των δύο τελευταίων δεικτών ($R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$) και συμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δύο ζευγών

δεικτών ($R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$). Επιπλέον, ικανοποιεί την πρώτη (αλγεβρική) ταυτότητα Bianchi

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (2.6)$$

Λόγω αυτών των συμμετριών, σε έναν τετραδιάστατο χωρόχρονο, οι ανεξάρτητες συνιστώσες του μειώνονται από 256 σε 20 [4]. Εξίσου σημαντική είναι η δεύτερη (διαφορική) ταυτότητα Bianchi:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R_{\rho\sigma\nu\lambda} + \nabla_\nu R_{\rho\sigma\lambda\mu} = 0, \quad (2.7)$$

καθώς από αυτήν προκύπτει η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής στη Γενική Σχετικότητα [23].

Παίρνοντας το ίχνος του τανυστή Riemann ως προς τον πρώτο και τρίτο δείκτη, ορίζουμε τον τανυστή Ricci:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu} \quad (2.8)$$

Ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$) και περιγράφει τη μεταβολή του όγκου μιας μικρής περιοχής χωροχρόνου κατά την ελεύθερη εξέλιξή της.

Μια δεύτερη συστολή, αυτή τη φορά με την αντίστροφη μετρική, μας δίνει το βαθμωτό Ricci (ή βαθμωτή καμπυλότητα):

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Το R είναι το απλούστερο μη τετριμμένο αναλλοίωτο βαθμωτό που κατασκευάζεται από τη μετρική και τις παραγώγους της.

2.2 Η Δράση Einstein-Hilbert και οι Πεδιακές Εξισώσεις

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα L_g πρέπει να είναι αναλλοίωτο βαθμωτό, να εξαρτάται από τη μετρική και τις παραγώγους της και να έχει σωστές διαστάσεις. Αν απαιτήσουμε επιπλέον να περιέχει παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης, τις συνθήκες αυτές ικανοποιεί το βαθμωτό Ricci [23]. Με βάση αυτά, ο Hilbert πρότεινε τη δράση:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g} \, d^4x, \quad (2.10)$$

όπου $g = \det(g_{\mu\nu})$ και $\sqrt{-g} d^4x$ είναι το αναλλοίωτο στοιχείο όγκου. Ο κανονικοποιητικός παράγοντας επιλέγεται ώστε να αναπαράγεται η νευτώνεια βαρύτητα στο όριο ασθενών πεδίων [23]. Σε γεωμετρικές μονάδες ο παράγοντας γίνεται $1/(16\pi)$.

Σε ένα φυσικό σύστημα με ύλη, η ολική δράση είναι το άθροισμα της βαρυτικής και της υλικής συνεισφοράς:

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{M}} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_{\text{m}} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.11)$$

όπου $\mathcal{L}_{\text{m}}$ είναι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα των πεδίων ύλης.

2.2.1 Μεταβολή της Δράσης και ο Τανυστής Einstein

Για να βρούμε τις πεδιακές εξισώσεις, εφαρμόζουμε την αρχή της ελάχιστης δράσης, θεωρώντας μια απειροστή μεταβολή της αντίστροφης μετρικής $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$. Η μεταβολή της βαρυτικής δράσης παράγει τρεις όρους [23]:

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} \left[R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R \frac{\delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.12)$$

- Η μεταβολή της ορίζουσας δίνει $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$.
- Για τη μεταβολή του τανυστή Ricci χρησιμοποιούμε την ταυτότητα Palatini, που δείχνει ότι ο όρος $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ είναι ολική απόκλιση. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes και απαιτώντας οι μεταβολές να μηδενίζονται στο σύνορο $\partial\mathcal{M}$, ο όρος αυτός εξαλείφεται. [23].

Μένει λοιπόν μόνο ο πρώτος και ο τρίτος όρος:

$$\delta S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (2.13)$$

Η ποσότητα στην αγκύλη είναι ο τανυστής Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.14)$$

ένας συμμετρικός τανυστής που ικανοποιεί ταυτοτικά τη συνεσταλμένη ταυτότητα Bianchi-

ι, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Αυτή η ιδιότητα είναι κρίσιμη για τη διατήρηση ενέργειας-ορμής. [22, 23].

2.2.2 Ο Τανυστής Ενέργειας-Ορμής

Για να εισάγουμε την ύλη, εξετάζουμε τη μεταβολή της υλικής δράσης S_M . Ορίζουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\mu\nu}$ μέσω της μεταβολής της δράσης ως προς τον αντίστροφο μετρικό τανυστή:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.15)$$

έτσι ώστε $\delta S_M = -\frac{1}{2} \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x$.

Ο τανυστής $T^{\mu\nu}$ περιγράφει πώς κατανέμεται και ρέει η ύλη και η ενέργεια. Σε ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα, η T^{00} δίνει την πυκνότητα ενέργειας, οι T^{0i} και T^{i0} τη ροή ενέργειας και την πυκνότητα ορμής αντίστοιχα, ενώ οι T^{ij} αποτελούν τον τανυστή τάσεων. Λόγω της συμμετρίας $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, η ροή ενέργειας και η πυκνότητα ορμής ταυτίζονται. Για παράδειγμα, ένα τέλειο ρευστό (χωρίς ιξώδες ή μεταφορά θερμότητας) περιγράφεται από:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα ενέργειας, p η πίεση και u^μ η τετραταχύτητα του ρευστού [23].

2.2.3 Οι Πεδιακές Εξισώσεις Einstein

Απαιτώντας η ολική δράση να παραμένει στάσιμη ($\delta S_{EH} + \delta S_M = 0$) για αυθαίρετες μεταβολές $\delta g^{\mu\nu}$, προκύπτει ότι οι συντελεστές του $\delta g^{\mu\nu}$ πρέπει να μηδενίζονται. Αυτό δίνει τις πεδιακές εξισώσεις του Einstein [23]:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}}, \quad (2.17)$$

ή ισοδύναμα:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Πρόκειται για ένα σύστημα δέκα συζευγμένων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, που συνδέουν τη γεωμετρία (αριστερό μέλος) με την ύλη και την ενέργεια

(δεξί μέλος)¹.

Διατήρηση ενέργειας-ορμής. Όπως αναφέραμε, λόγω της συνεσταλμένης ταυτότητας Bianchi, για το αριστερό μέλος ισχύει $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Επομένως, από την εξίσωση (2.17) προκύπτει ότι:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.19)$$

δηλαδή η τοπική διατήρηση της ενέργειας και της ορμής προκύπτει από τη θεωρία και δεν χρειάζεται να επιβληθεί ξεχωριστά. [22, 24].

2.2.4 Πεδιακές Εξισώσεις στο Κενό και η Κοσμολογική Σταθερά

Όταν ο χωρόχρονος δεν περιέχει ύλη και ενέργεια, δηλαδή όταν $T_{\mu\nu} = 0$, οι πεδιακές εξισώσεις του Einstein παίρνουν την απλούστερη δυνατή μορφή. Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης (2.18) προκύπτει ότι $R = 0$ και καταλήγουμε στις εξισώσεις κενού:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι ο χωρόχρονος είναι επίπεδος ($R^\rho_{\sigma\mu\nu} = 0$). Η βαρύτητα μπορεί να υπάρχει και στο κενό (για παράδειγμα, έξω από μια μελανή οπή), και αυτή η καμπυλότητα εκφράζεται μέσω του τανυστή Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, η μελέτη του οποίου μας επιτρέπει να εντοπίσουμε τις φυσικές ιδιομορφίες των μελανών οπών [23, 24].

Η κοσμολογική σταθερά. Η δράση μπορεί να τροποποιηθεί με την προσθήκη ενός όρου που εξαρτάται μόνο από τη μετρική, οδηγώντας στην εισαγωγή της κοσμολογικής σταθεράς Λ [23]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

Ο όρος $\Lambda g_{\mu\nu}$ δεν επηρεάζει τη διατήρηση της ενέργειας (αφού $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$) και μπορεί να ερμηνευθεί ως η ενέργεια του ίδιου του κενού (σκοτεινή ενέργεια) με σταθερή πυκνότητα

¹Όπως το έθεσε ο John Wheeler, «Ο χωρόχρονος λέει στην ύλη πώς να κινείται και η ύλη λέει στον χωρόχρονο πώς να καμπυλώνεται» [2].

$\rho_{\text{vac}} = \Lambda/8\pi$ [23, 24]. Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε πώς η παρουσία της Λ τροποποιεί τη λύση Schwarzschild [29].

Το Θεώρημα Birkhoff. Από τις πεδιακές εξισώσεις στο κενό ($R_{\mu\nu} = 0$) προκύπτει άμεσα το θεώρημα Jebsen–Birkhoff, στο οποίο αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αν επιβάλουμε σφαιρική συμμετρία, οι εξισώσεις κενού απαιτούν η λύση να είναι χρονικά ανεξάρτητη, δηλαδή στατική, και ταυτίζεται αναγκαστικά με τη γεωμετρία Schwarzschild [10, 17, 23].

2.3 Γεωδαισιακές Εξισώσεις και Κίνηση στον Καμπυλωμένο Χωρόχρονο

Στη Γενική Σχετικότητα, ένα ελεύθερα κινούμενο σωματίδιο διαγράφει μια γεωδαισιακή, την τοπικά «ευθύτερη» τροχιά στον καμπυλωμένο χωρόχρονο [22–24, 28].

2.3.1 Η Εξίσωση της Γεωδαισιακής

Η τροχιά ενός ελεύθερου σωματιδίου με μάζα προκύπτει από την αρχή της ελάχιστης δράσης. Μεταξύ δύο γεγονότων, το σωματίδιο ακολουθεί την κοσμική γραμμή που μεγιστοποιεί τον ιδιόχρονο τ . Επιβάλλοντας $\delta S = 0$ για τη δράση

$$S = -m \int d\tau = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (2.22)$$

προκύπτει η γεωδαισιακή εξίσωση [10, 23, 24]. Παραμετροποιώντας την τροχιά $x^\mu(\lambda)$ με μια αφινική παράμετρο λ ,² η εξίσωση γράφεται ως:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (2.23)$$

²Ως αφινική ορίζεται η παράμετρος λ που συνδέεται με τον ιδιόχρονο τ (για σωματίδια με μάζα) μέσω ενός μετασχηματισμού της μορφής $\lambda = a\tau + b$ (a, b σταθερές). Η χρήση της εξασφαλίζει ότι η εξίσωση της γεωδαισιακής διατηρεί την ομογενή της μορφή (με το δεξί μέλος ίσο με μηδέν).

όπου $\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ είναι τα σύμβολα Christoffel. Ορίζοντας την τετραταχύτητα του σωματιδίου ως $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\lambda$, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη συναλλοίωτη μορφή:

$$u^{\nu}\nabla_{\nu}u^{\mu} = 0, \quad (2.24)$$

δηλαδή η τετραεπιτάχυνση ενός σωματιδίου σε ελεύθερη πτώση μηδενίζεται.

2.3.2 Κανονικοποίηση της Τετραταχύτητας

Κατά μήκος κάθε γεωδαισιακής το μέτρο της τετραταχύτητας παραμένει σταθερό [22, 28]. Λαμβάνοντας υπόψη την υπογραφή της μετρικής $(-, +, +, +)$, η συνθήκη κανονικοποίησης γράφεται:

$$g_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu} = -\varepsilon, \quad (2.25)$$

όπου η σταθερά ε καθορίζει το είδος του σωματιδίου:

- $\varepsilon = 1$: Αφορά σωματίδια με μάζα. Η τροχιά ονομάζεται χρονοειδής και η παράμετρος λ ταυτίζεται με τον ιδιόχρονο τ του σωματιδίου.
- $\varepsilon = 0$: Αφορά φωτόνια (ή σωματίδια χωρίς μάζα). Η τροχιά ονομάζεται φωτοειδής και το λ παραμένει απλώς μια γενική αφινική παράμετρος.

Για σωματίδια χωρίς μάζα ο ιδιοχρόνος μηδενίζεται ($d\tau = 0$). Σε αυτή την περίπτωση, η δράση (2.22) δεν είναι εφαρμόσιμη, αλλά η γεωδαισιακή εξίσωση (2.23) εξακολουθεί να ισχύει, αρκεί να επιλεγεί μια κατάλληλη αφινική παράμετρος (λ) που να παραμετροποιεί με ομαλό τρόπο την τροχιά του φωτονίου [23].

2.3.3 Συμμετρίες, Διανύσματα Killing και Διατηρούμενες Ποσότητες

Η αναλυτική επίλυση του συστήματος (2.23) στη γενική του μορφή είναι συνήθως αδύνατη. Στις περιπτώσεις όμως που ο χωρόχρονος διαθέτει συνεχείς συμμετρίες, σε κάθε μία αντιστοιχεί ένας νόμος διατήρησης μέσω του θεωρήματος Noether. Αυτή παράγεται από ένα διανυσματικό πεδίο ξ^{μ} , το οποίο ονομάζεται διάνυσμα Killing και ικανοποιεί την

εξίσωση Killing [17, 23]:

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (2.26)$$

Η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με τη διατήρηση της μετρικής κατά μήκος των ολοκληρωτικών καμπυλών του ξ^μ . Βάσει του θεωρήματος Noether, σε κάθε διάνυσμα Killing αντιστοιχεί μια ποσότητα

$$Q = \xi_\mu u^\mu, \quad (2.27)$$

η οποία διατηρείται σταθερή κατά μήκος κάθε γεωδαισιακής [17, 23].

Στις λύσεις που εξετάζουμε μας απασχολούν δύο συμμετρίες:

- **Χρονική Συμμετρία:** Η μετρική δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου (είναι ανεξάρτητη της συντεταγμένης t). Αυτή η συμμετρία περιγράφεται από το χρονοειδές διάνυσμα Killing $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα είναι η **ενέργεια** ανά μονάδα μάζας του σωματιδίου:

$$E = -\xi_{(t)\mu} u^\mu = -u_t. \quad (2.28)$$

Ένας χωρόχρονος ονομάζεται στάσιμος όταν διαθέτει ένα τέτοιο χρονοειδές διάνυσμα Killing. Αν, επιπλέον, η μετρική μένει αναλλοίωτη υπό την αντιστροφή του χρόνου ($t \rightarrow -t$), κάτι που σημαίνει ότι απουσιάζουν μεικτοί όροι (όπως $dt d\phi$), τότε ο χωρόχρονος χαρακτηρίζεται ως στατικός. Για παράδειγμα, η λύση Schwarzschild (Κεφ. 3) είναι στατική, ενώ η περιστρεφόμενη λύση Kerr (Κεφ. 4) είναι στάσιμη αλλά όχι στατική [17, 23].

- **Αξονική Συμμετρία:** Ο χωρόχρονος είναι ανεξάρτητος από την αζιμουθιακή γωνία ϕ , γεγονός που περιγράφεται από το χωροειδές διάνυσμα Killing $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, 1)$. Η ποσότητα που διατηρείται είναι η **στροφορμή** ανά μονάδα μάζας ως προς τον άξονα συμμετρίας:

$$L = \xi_{(\phi)\mu} u^\mu = u_\phi. \quad (2.29)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου υπάρχει πλήρης σφαιρική συμμετρία (όπως στη λύση Schwarzschild), η διατήρηση του συνολικού διανύσματος της στροφορμής έχει ως απο-

τέλεσμα η τροχιά του σωματιδίου να περιορίζεται σε ένα σταθερό επίπεδο (π.χ. $\theta = \pi/2$) [22, 30].

2.3.4 Το Ενεργό Δυναμικό και η Ταξινόμηση Τροχιών

Οι διατηρούμενες ποσότητες E και L απλοποιούν σημαντικά τη μελέτη της κίνησης. Συνδυάζοντάς τες με τη συνθήκη κανονικοποίησης της τετραταχύτητας (2.25), μπορούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα της τροχιάς σε μια μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση για την ακτινική συντεταγμένη r , η οποία έχει τη μαθηματική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της ενέργειας στην κλασική μηχανική [22, 30]:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \mathcal{E}, \quad (2.30)$$

όπου $V_{\text{eff}}(r)$ είναι το ενεργό δυναμικό και $\mathcal{E}$ μια σταθερά που σχετίζεται άμεσα με την ενέργεια E . Η ακριβής μορφή τόσο του V_{eff} όσο και της σταθεράς $\mathcal{E}$ εξαρτάται από τη γεωμετρία της εκάστοτε μελανής οπής, τη στροφορμή L και το είδος του σωματιδίου (ε).

Εξετάζοντας τα ακρότατα του $V_{\text{eff}}(r)$, μπορούμε να ταξινομήσουμε τις τροχιές και να εντοπίσουμε δύο οριακές περιπτώσεις:

- **Εσώτατη Ευσταθής Κυκλική Τροχιά (ISCO – Innermost Stable Circular Orbit):** Είναι η μικρότερη δυνατή ακτίνα στην οποία ένα σωματίδιο με μάζα ($\varepsilon = 1$) μπορεί να διατηρήσει ευσταθή κυκλική τροχιά. Αντιστοιχεί στο σημείο καμψής του ενεργού δυναμικού όπου και η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται. Στην αστροφυσική, η ISCO ορίζει το εσωτερικό χείλος των δίσκων επαύξησης (accretion disks) γύρω από τις μελανές οπές. Υλικό το οποίο ξεπερνά αυτό το όριο, χάνει την ευστάθειά του και οδηγείται σε ταχεία πτώση (plunge) προς τον ορίζοντα γεγονότων [23, 24].
- **Σφαίρα Φωτονίων:** Είναι μια ασταθής κυκλική τροχιά για σωματίδια χωρίς μάζα, όπως τα φωτόνια ($\varepsilon = 0$), η οποία αντιστοιχεί στο τοπικό μέγιστο του ενεργού δυναμικού. Σε αυτή την ακτίνα, η βαρύτητα είναι τόσο ισχυρή που αναγκάζει το φως να κινηθεί κυκλικά γύρω από τη μελανή οπή. Το μέγεθος και το σχήμα της «σχιάς» που κατέγραψε το EHT συνδέονται άμεσα με αυτή την ακτίνα [23, 24, 31].

2.4 Ιδιομορφίες, Ορίζοντες και Αιτιακή Δομή

Η βαρυτική κατάρρευση μιας κατανομής ύλης οδηγεί σε γεωμετρίες με ακραία χαρακτηριστικά: ιδιομορφίες, ορίζοντες γεγονότων και μη τετριμμένη αιτιακή δομή. Στην ενότητα αυτή ορίζουμε τις βασικές αυτές έννοιες, στις οποίες θα στηριχθεί η ανάλυση των επόμενων κεφαλαίων.

2.4.1 Χωροχρονικές Ιδιομορφίες

Στη Γενική Σχετικότητα, ο όρος ιδιομορφία αναφέρεται σε περιοχές όπου κάποια γεωμετρικά μεγέθη αποκλίνουν ή δεν ορίζονται. Στις μελανές οπές διακρίνουμε δύο τύπους ιδιομορφιών [17, 23, 32]:

Οι ιδιομορφίες συντεταγμένων είναι τεχνητές αποκλίσεις που οφείλονται στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων και όχι στη γεωμετρία. Αλλάζοντας συντεταγμένες, η ιδιομορφία απαλείφεται. Ένα παράδειγμα είναι η επιφάνεια $r = 2M$ στη μετρική Schwarzschild, όπου ορισμένες συνιστώσες αποκλίνουν ή μηδενίζονται. Η ιδιομορφία αυτή αίρεται με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων (π.χ. Eddington-Finkelstein ή Kruskal-Szekeres) [23, 33].

Οι γνήσιες ιδιομορφίες καμπυλότητας, αντίθετα, δεν αίρονται με κανένα μετασχηματισμό συντεταγμένων, η ίδια η γεωμετρία αποκλίνει, και μαζί της οι βαρυτικές παλιρροϊκές δυνάμεις. Για την ταυτοποίησή τους χρησιμοποιούνται βαθμωτά αναλλοίωτα, μεγέθη δηλαδή ανεξάρτητα από το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων. Το πιο συνηθισμένο είναι το βαθμωτό Kretschmann:

$$\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.31)$$

Όταν αποκλίνει ($\mathcal{K} \rightarrow \infty$) η ιδιομορφία είναι γνήσια. Στη λύση Schwarzschild ($r = 0$), η ιδιομορφία δεν είναι ένα σημείο στον χώρο, αλλά μια χωροειδής επιφάνεια, όπου η πυκνότητα της ύλης και η καμπυλότητα τείνουν στο άπειρο. Στις περιστρεφόμενες μελανές οπές (Kerr), η αντίστοιχη ιδιομορφία έχει δακτυλιοειδή μορφή [24, 30, 32]. Εκεί η κλασική θεωρία παύει πλέον να ισχύει, και μόνο μια πλήρης κβαντική θεωρία βαρύτητας θα μπορούσε να δώσει απαντήσεις.

2.4.2 Ο Ορίζοντας Γεγονότων

Από την οπτική γωνία ενός απομακρυσμένου παρατηρητή, η μελανή οπή χαρακτηρίζεται από έναν ορίζοντα γεγονότων. Ο ορίζοντας είναι ένα νοητό χωροχρονικό σύνορο πέρα από το οποίο κανένα σήμα, ούτε καν το φως, δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο. Λόγω της Αρχής της Ισοδυναμίας, ένας παρατηρητής που διασχίζει τον ορίζοντα δεν αντιλαμβάνεται τοπικά καμία αλλαγή, ωστόσο η επιστροφή στον εξωτερικό χώρο είναι αδύνατη [11, 17, 22].

Σύμφωνα με την εικασία της κοσμικής λογοκρισίας του Penrose, κάθε φυσική ιδιομορφία που προκύπτει από βαρυτική κατάρρευση καλύπτεται πάντα από έναν ορίζοντα γεγονότων. Αν και η εικασία παραμένει αναπόδεικτη στη γενική της μορφή, η ισχύς της θεωρείται αναγκαία προϋπόθεση για τη συνέπεια της θεωρίας, καθώς γυμνές ιδιομορφίες θα παραβίαζαν την προβλεψιμότητα της εξέλιξης του χωροχρόνου [17, 32].

2.4.3 Αιτιακή Δομή

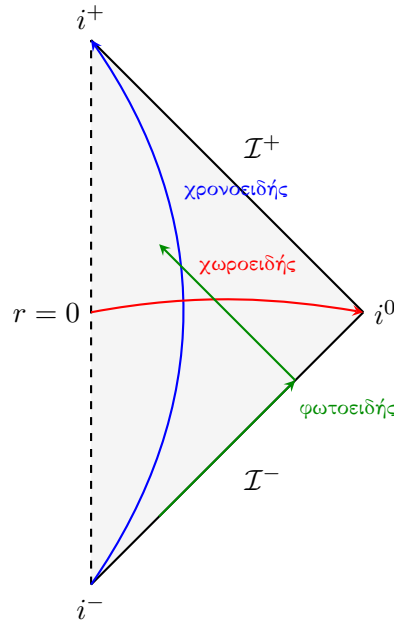
Η αιτιότητα στη Σχετικότητα αποτυπώνεται μέσω των κώνων φωτός, οι οποίοι καθορίζουν σε κάθε σημείο του χωροχρόνου τις επιτρεπτές (χρονοειδείς/φωτοειδείς) και τις μη προσβάσιμες (χωροειδείς) κατευθύνσεις. Στον επίπεδο χωρόχρονο Minkowski, οι κώνοι φωτός είναι παντού όρθιοι. Κοντά σε μια μελανή οπή, αντιθέτως, οι κώνοι κλίνουν προοδευτικά προς την πηγή του πεδίου. Πάνω στον ορίζοντα γεγονότων, η εξωτερική πλευρά του κώνου εφάπτεται του ορίζοντα, ενώ στο εσωτερικό του, όλες οι επιτρεπτές μελλοντικές τροχιές κατευθύνονται αναγκαστικά προς την ιδιομορφία [23].

Μπορούμε να αποτυπώσουμε τη συνολική αιτιακή δομή ενός χωροχρόνου σε ένα σύμμορφο διάγραμμα Penrose–Carter. Οι απεικονίσεις αυτές χαρτογραφούν ολόκληρο τον (άπειρο) χωρόχρονο σε ένα πεπερασμένο διάγραμμα, διατηρώντας αναλλοίωτη τη δομή των κώνων φωτός (με τις φωτοειδείς γεωδαισιακές να διατάσσονται πάντα στις 45°) [32].

Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζεται το διάγραμμα Penrose–Carter του χωροχρόνου Minkowski, η απλούστερη περίπτωση και το σημείο αναφοράς για όλες τις ασυμπτωτικά επίπεδες γεωμετρίες. Ολόκληρος ο άπειρος χωρόχρονος συμπίεζεται σε ένα πεπερασμένο τρίγωνο, του οποίου τα σύνορα αντιστοιχούν σε διαφορετικά είδη ασυμπτωτικού απείρου:

- i^+ (μελλοντικό χρονοειδές άπειρο): το σημείο στο οποίο καταλήγουν όλες οι χρονοειδείς γεωδαισιακές καθώς $\tau \rightarrow +\infty$.

- i^- (παρελθοντικό χρονοειδές άπειρο): η αφετηρία κάθε χρονοειδούς γεωδαισιακής, στο όριο $\tau \rightarrow -\infty$.
- i^0 (χωροειδές άπειρο): το σημείο στο οποίο καταλήγουν οι χωροειδείς γεωδαισιακές, δηλαδή $r \rightarrow \infty$ με σταθερό t .
- $\mathcal{I}^+$ (μελλοντικό φωτοειδές άπειρο): η επιφάνεια στην οποία καταλήγουν οι εξερχόμενες φωτοειδείς γεωδαισιακές. Εκεί καταγράφει τα σήματα ένας απομακρυσμένος παρατηρητής στο απώτερο μέλλον.
- $\mathcal{I}^-$ (παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο): η αντίστοιχη επιφάνεια από την οποία εκπέμπονται οι εισερχόμενες φωτοειδείς γεωδαισιακές.



Σχήμα 2.1: Σύμμορφο διάγραμμα Penrose–Carter του χωροχρόνου Minkowski. Οι φωτοειδείς γεωδαισιακές διατάσσονται πάντα στις 45° και συνδέουν το $\mathcal{I}^-$ με το $\mathcal{I}^+$. Οι χρονοειδείς γεωδαισιακές ξεκινούν από το i^- και καταλήγουν στο i^+ , ενώ οι χωροειδείς καταλήγουν στο χωροειδές άπειρο i^0 . Η διακεκομμένη γραμμή στα αριστερά αναπαριστά τον άξονα $r = 0$.

Στον χωρόχρονο Minkowski κάθε φωτοειδής γεωδαισιακή ξεκινά από το $\mathcal{I}^-$ και καταλήγει στο $\mathcal{I}^+$. Στις γεωμετρίες μελανών οπών που θα εξετάσουμε αυτό αλλάζει, ο ορίζοντας γεγονότων ορίζεται ως το σύνορο της περιοχής από την οποία καμία φωτοειδής γεωδαισιακή δεν μπορεί να φτάσει στο $\mathcal{I}^+$ [17].

Κεφάλαιο 3

Σφαιρικά Συμμετρικές Μελανές Οπές (Στατικές Λύσεις)

Η απλούστερη κατηγορία μελανών οπών περιγράφεται από σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων Einstein. Ξεκινώντας από τη λύση Schwarzschild, θα εξετάσουμε πώς η προσθήκη ηλεκτρικού φορτίου ή κοσμολογικής σταθεράς αλλάζει την αιτιακή δομή του χωροχρόνου.

3.1 Ο Χωρόχρονος Schwarzschild (M)

Η λύση Schwarzschild περιγράφει το βαρυτικό πεδίο στο κενό, έξω από μια σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας.

3.1.1 Παραγωγή της Μετρικής

Για να κατασκευάσουμε τη μετρική, απαιτούμε ο χωρόχρονος να είναι στατικός και σφαιρικά συμμετρικός. Σφαιρική συμμετρία σημαίνει ότι οι επιφάνειες σταθερού χρόνου t και ακτίνας r είναι δισδιάστατες σφαίρες S^2 , των οποίων το στοιχείο μήκους είναι $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Η απαίτηση στατικότητας του χωροχρόνου σημαίνει ότι η μετρική δεν εξαρτάται από τον χρόνο t και είναι αναλλοίωτη υπό τον μετασχηματισμό της χρονικής αναστροφής $t \rightarrow -t$ (άρα δεν υπάρχουν μικτοί όροι $dt dr$ κ.λπ.). Η πιο γενική μορφή της

μετρικής που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες είναι:

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.1)$$

όπου $\nu(r)$ και $\lambda(r)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις της ακτινικής συντεταγμένης [22–24].

Αναζητούμε λύσεις στο κενό ($T_{\mu\nu} = 0$), άρα, όπως δείξαμε στην Εξ. (2.20), ο τανυστής Ricci πρέπει να μηδενίζεται. Υπολογίζουμε τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel για τη μετρική (3.1) μέσω της εξίσωσης (2.1):

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \partial_r \nu & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\nu-\lambda)} \partial_r \nu & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \lambda & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\lambda} & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\lambda} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

και στη συνέχεια τις συνιστώσες του τανυστή Ricci, καταλήγοντας στις εξής μη τετριμμένες εξισώσεις [23, 24]:

$$R_{tt} = e^{2(\nu-\lambda)} \left(\partial_r^2 \nu + (\partial_r \nu)^2 - \partial_r \nu \partial_r \lambda + \frac{2}{r} \partial_r \nu \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \nu - (\partial_r \nu)^2 + \partial_r \nu \partial_r \lambda + \frac{2}{r} \partial_r \lambda = 0, \quad (3.4)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - e^{-2\lambda} (1 + r(\partial_r \nu - \partial_r \lambda)) = 0, \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι $e^{2(\lambda-\nu)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \nu + \partial_r \lambda) = 0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι $\nu(r) + \lambda(r) = c$, όπου c σταθερά. Απαιτώντας να είναι ο χωρόχρονος ασυμπτωτικά επίπεδος (για $r \rightarrow \infty$ η μετρική να τείνει στη μετρική Minkowski), έχουμε $\nu, \lambda \rightarrow 0$, άρα $c = 0$ και συνεπώς $\lambda(r) = -\nu(r)$.

Αντικαθιστώντας το $\lambda = -\nu$ στην Εξ. (3.5), προκύπτει μια απλή διαφορική εξίσωση για το ν :

$$1 - e^{2\nu} (1 + 2r \partial_r \nu) = 0 \implies \frac{d}{dr} (re^{2\nu}) = 1. \quad (3.6)$$

Η ολοκλήρωσή της δίνει $re^{2\nu} = r - r_s \implies e^{2\nu(r)} = 1 - \frac{r_s}{r}$, όπου r_s μια σταθερά ολοκλήρωσης. Στο ασθενές πεδίο (για μεγάλα r), η συνιστώσα g_{tt} συνδέεται με το

νευτώνειο δυναμικό Φ μέσω της σχέσης $g_{tt} \approx -(1 + 2\Phi) = -(1 - 2M/r)$. Επομένως, ταυτίζουμε το $r_s = 2M$, το οποίο ονομάζεται ακτίνα Schwarzschild.

Η μετρική Schwarzschild παίρνει τελικά τη μορφή [23, 24]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.7)$$

Η υπόθεση της στατικότητας που κάναμε δεν είναι στην πραγματικότητα αναγκαία. Αν ξεκινούσαμε με συναρτήσεις $\nu(t, r)$ και $\lambda(t, r)$, η χρονική εξάρτηση εξαλείφεται μέσω μετασχηματισμών συντεταγμένων [23]. Αυτό είναι και το θεώρημα Birkhoff, η στατική μετρική Schwarzschild είναι η μοναδική σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό [5, 23].

3.1.2 Ιδιομορφίες

Στη μετρική (3.7) εντοπίζουμε δύο προβληματικά σημεία όπου οι συντελεστές αποκλίνουν, στο $r = 2M$ (όπου $g_{rr} \rightarrow \infty$) και στο $r = 0$ (όπου $g_{tt} \rightarrow \infty$). Για να διακρίνουμε αν αποτελούν φυσικές ιδιομορφίες (όπως είδαμε στην Ενότητα 2.4.1) ή ιδιομορφίες συντεταγμένων, εξετάζουμε το βαθμωτό Kretschmann $\mathcal{K} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Για τη γεωμετρία Schwarzschild, ο υπολογισμός δίνει [10, 23]:

$$\mathcal{K} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (3.8)$$

Στο $r = 2M$, το βαθμωτό $\mathcal{K}$ είναι πεπερασμένο ($\mathcal{K}(2M) = \frac{3}{4M^4}$). Άρα, η επιφάνεια $r = 2M$ δεν είναι γνήσια χωροχρονική ιδιομορφία, αλλά μια ιδιομορφία συντεταγμένων που αντιπροσωπεύει τον ορίζοντα γεγονότων. Αντίθετα, καθώς $r \rightarrow 0$, η παλιρροϊκή βαρυτική δύναμη (η οποία εκφράζεται μέσω του τανυστή Riemann) τείνει στο άπειρο, διαλύοντας κάθε μακροσκοπικό σώμα. Το $r = 0$ αποτελεί την κεντρική φυσική ιδιομορφία.

Στην περιοχή $r > 2M$ (εξωτερικός χώρος), η συντεταγμένη t είναι χρονοειδής ($g_{tt} < 0$) και η r είναι χωροειδής ($g_{rr} > 0$). Καθώς όμως διασχίζουμε τον ορίζοντα γεγονότων ($r = 2M$), ο χαρακτήρας της μετρικής αλλάζει: για $r < 2M$, ο όρος $(1 - 2M/r)$ γίνεται αρνητικός. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η συντεταγμένη r να γίνει χρονοειδής (δηλαδή όλες οι χρονοειδείς γεωδαισιακές αναγκαστικά κινούνται προς το $r = 0$), ενώ η συντεταγμένη

t γίνεται χωροειδής.

Επειδή η r γίνεται χρονοειδής για $r < 2M$, η ιδιομορφία στο $r = 0$ παύει να είναι σημείο του χώρου και αποτελεί μελλοντικό γεγονός για κάθε παρατηρητή που έχει διασχίσει τον ορίζοντα. Αντίστοιχα, η t παίζει πλέον τον ρόλο χωρικής συντεταγμένης, και η μετατόπιση κατά μήκος της δεν αντιστοιχεί σε χρονική εξέλιξη. Αυτό επιβεβαιώνεται στο διάγραμμα Kruskal (3.2), όπου οι κώνοι φωτός μέσα στον ορίζοντα είναι στραμμένοι προς το $r = 0$.

3.1.3 Γεωδαισιακές και το Ενεργό Δυναμικό

Για να κατανοήσουμε τη δυναμική γύρω από τη μελανή οπή Schwarzschild, μελετάμε την κίνηση δοκιμαστικών σωματιδίων με/χωρίς μάζα. Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, η κίνηση περιορίζεται πάντα σε ένα επίπεδο, και χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε το ισημερινό επίπεδο $\theta = \pi/2$ (άρα $d\theta = 0$).

Σύμφωνα με την Ενότητα 2.3.3, η ανεξαρτησία της μετρικής από τα t και ϕ δείχνει την ύπαρξη δύο διατηρούμενων ποσοτήτων (ενέργεια E και στροφορμή L ανά μονάδα μάζας) [22, 23]:

$$E = -u_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda}, \quad (3.9)$$

$$L = u_\phi = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη κανονικοποίησης της τετραταχύτητας $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\varepsilon$ (όπου $\varepsilon = 1$ για σωματίδια με μάζα και $\varepsilon = 0$ για φωτόνια), λαμβάνουμε:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\varepsilon. \quad (3.11)$$

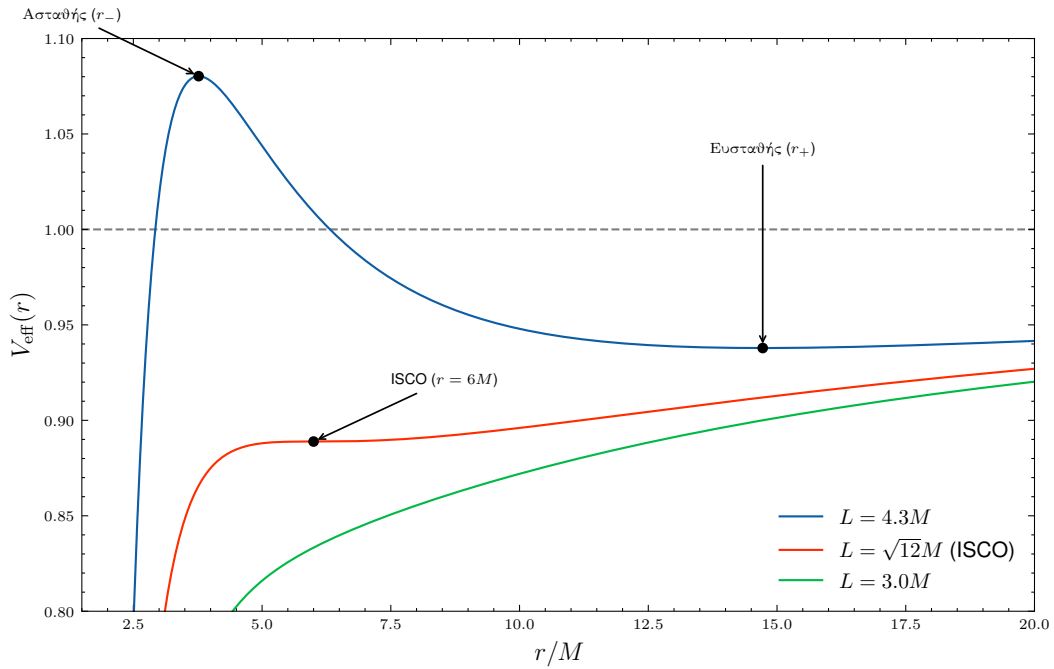
Αντικαθιστώντας τις (3.9) και (3.10) στην παραπάνω σχέση και πολλαπλασιάζοντας με $(1 - 2M/r)$, εξάγουμε τη μονοδιάστατη ακτινική εξίσωση ενέργειας:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2, \quad (3.12)$$

όπου το ενεργό δυναμικό δίνεται από την εξίσωση [23, 24]:

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\varepsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) = \varepsilon - \varepsilon \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}. \quad (3.13)$$

Ο τελευταίος όρος, $-2ML^2/r^3$, είναι η σχετικιστική διόρθωση στο νευτώνειο δυναμικό. Καθώς είναι ανάλογος του $1/r^3$, για πολύ μικρές ακτίνες υπερσχύει του φυγόκεντρου όρου L^2/r^2 και έλκει το σωματίδιο προς την ιδιομορφία.



Σχήμα 3.1: Το ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(r)$ για μαζικά σωματίδια ($\varepsilon = 1$) γύρω από μια μελανή οπή Schwarzschild. Διακρίνονται το τοπικό ελάχιστο (ευσταθής κυκλική τροχιά) και το τοπικό μέγιστο (ασταθής κυκλική τροχιά). Καθώς το L μειώνεται, τα ακρότατα συγχλίνουν μέχρι να ταυτιστούν στην ISCO ($r = 6M$).

Η μελέτη των ακροτάτων του δυναμικού ($V'_{\text{eff}}(r) = 0$) αποκαλύπτει τις δυνατές κυκλικές τροχιές:

- **Σωματίδια με Μάζα ($\varepsilon = 1$):** Η παραγωγή του δυναμικού οδηγεί σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, οι ρίζες της οποίας δίνουν τις ακτίνες των κυκλικών τροχιών:

$$r_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12M^2L^2}}{2M}. \quad (3.14)$$

Η ρίζα r_+ (τοπικό ελάχιστο) αντιστοιχεί σε ευσταθή κυκλική τροχιά, ενώ η r_-

(τοπικό μέγιστο) σε ασταθή. Για να υπάρχουν πραγματικές ρίζες, πρέπει $L^2 \geq 12M^2$. Η οριακή περίπτωση $L^2 = 12M^2$ μας δίνει το σημείο καμπής, το οποίο αντιστοιχεί στην **Εσώτατη Ευσταθή Κυκλική Τροχιά (ISCO)**:

$$r_{\text{ISCO}} = 6M. \quad (3.15)$$

- **Φωτόνια ($\varepsilon = 0$)**: Η συνθήκη μεγίστου $V'_{\text{eff}}(r) = 0$ δίνει μια μοναδική λύση, ανεξάρτητη από τη στροφορμή L . Αυτή είναι η **σφαίρα φωτονίων**:

$$r_{\text{ph}} = 3M, \quad (3.16)$$

η οποία είναι ασταθής κυκλική τροχιά φωτονίων και σχετίζεται άμεσα με τη γωνιακή ακτίνα της σκιάς της μελανής οπής, που παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από το Event Horizon Telescope το 2019 [31].

3.1.4 Συντεταγμένες Kruskal–Szekeres

Όπως αναφέραμε, η ιδιομορφία στο $r = 2M$ οφείλεται στις συντεταγμένες Schwarzschild. Ο χρόνος t που μετράει ένας απομακρυσμένος παρατηρητής τείνει στο άπειρο καθώς ένα σωματίδιο πλησιάζει τον ορίζοντα. Για να μελετήσουμε τη γεωμετρία ομαλά πάνω και μέσα στον ορίζοντα, εισάγουμε τις συντεταγμένες Kruskal–Szekeres [23, 33].

Χρησιμοποιούμε τη συντεταγμένη «χελώνας» $r_* = r + 2M \ln |r/2M - 1|$ και μεταβαίνουμε στις φωτοειδείς συντεταγμένες $u = t - r_*$ και $v = t + r_*$. Αυτές αποτελούν τις συντεταγμένες Eddington–Finkelstein, οι οποίες αίρουν την ανωμαλία στο $r = 2M$ για εξερχόμενες ή εισερχόμενες ακτίνες φωτός αντίστοιχα. Για να πετύχουμε τη μέγιστη αναλυτική επέκταση του χωροχρόνου, που καλύπτει ταυτόχρονα όλες τις περιοχές,

προχωράμε στο μετασχηματισμό Kruskal (T, X), ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$T = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{για } r > 2M), \quad (3.17)$$

$$X = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{για } r > 2M), \quad (3.18)$$

$$T = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{για } r < 2M), \quad (3.19)$$

$$X = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (\text{για } r < 2M). \quad (3.20)$$

Η μετρική παίρνει την ομαλή (εκτός του $r = 0$) μορφή:

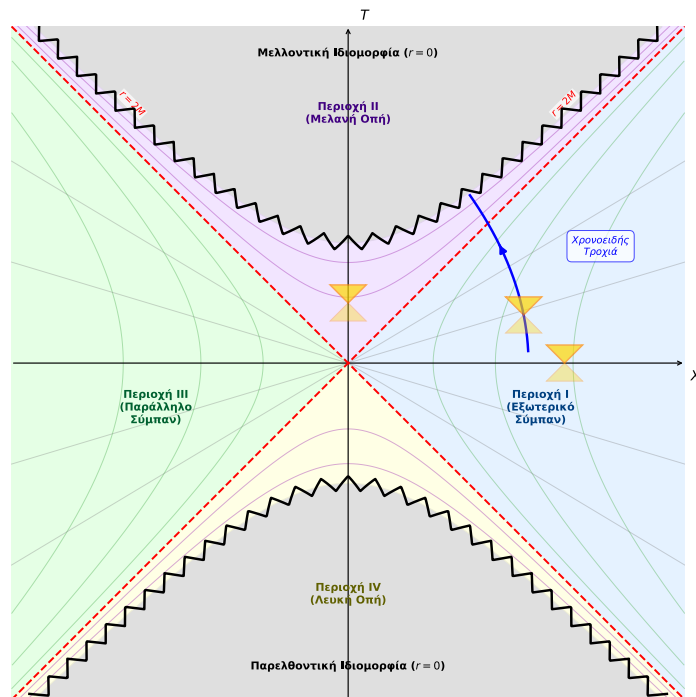
$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.21)$$

όπου το r δίνεται έμμεσα από τη σχέση $X^2 - T^2 = (r/2M - 1)e^{r/2M}$.

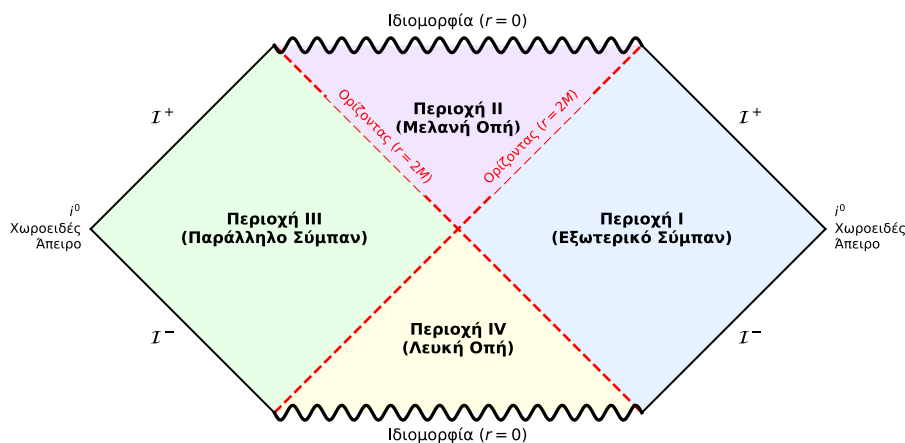
Διασχίζοντας τον ορίζοντα, οι $\sinh$ και $\cosh$ εναλλάσσονται μεταξύ των T και X , εξαλείφοντας την παθολογική συμπεριφορά που εμφανίζεται στις συντεταγμένες Schwarzschild. Οι T και X δεν αλλάζουν χαρακτήρα στον ορίζοντα, η T παραμένει παντού χρονοειδής και η X χωροειδής, και ο ορίζοντας γεγονότων εμφανίζεται απλώς ως μια γραμμή στο διάγραμμα.

Στην παραπάνω μορφή (3.21), οι κώνοι φωτός είναι παντού στις 45 μοίρες (αφού $ds^2 = 0 \implies dT = \pm dX$). Το διάγραμμα Kruskal (Σχήμα 3.2) και το αντίστοιχο σύμμορφο διάγραμμα Penrose (Σχήμα 3.3) αποκαλύπτουν ότι η μετρική περιγράφει στην πραγματικότητα δύο ασυμπτωτικά επίπεδα σύμπαντα που ενώνονται με μια γέφυρα Einstein-Rosen (σκουληρότρυπα), η οποία όμως καταρρέει τόσο γρήγορα που κανένα σήμα δεν μπορεί να τη διασχίσει [23, 24].

Η πραγματική ιδιομορφία στο $r = 0$ ($T^2 - X^2 = 1$) συνιστά πλέον μια υπερβολή (στο διάγραμμα Kruskal) ή μια οριζόντια γραμμή (στο διάγραμμα Penrose) που καταλαμβάνει το «μέλλον» όποιου σωματιδίου βρεθεί στην (περιοχή II). Ό,τι διασχίσει τον ορίζοντα θα κινηθεί αναγκαστικά προς την ιδιομορφία του κέντρου.



Σχήμα 3.2: Το διάγραμμα Kruskal-Szekeres. Οι κώνοι φωτός (κίτρινο) έχουν πάντα άνοιγμα 45 μοιρών. Η ιδιομορφία στο $r = 0$ αναπαρίσταται από τις υπερβολές $T^2 - X^2 = 1$. Μια χρονοειδής κοσμική ακτίνα (μπλε) που διασχίζει τον ορίζοντα γεγονότων (κόκκινες διακεκομμένες γραμμές) καταλήγει αναπόφευκτα στην ιδιομορφία.



Σχήμα 3.3: Το Σύμμορφο διάγραμμα Penrose-Carter για τη μέγιστα επεκτεταμένη λύση Schwarzschild. Το διάγραμμα χωρίζεται σε τέσσερις περιοχές: I (το εξωτερικό μας σύμπαν), II (το εσωτερικό της μελανής οπής), III (ένα παράλληλο ασυμπτωτικά επίπεδο σύμπαν) και IV (μια λευκή οπή). Ο ορίζοντας γεγονότων ($r = 2M$) αντιστοιχεί στις γραμμές των 45 μοιρών που διασχίζουν το κέντρο.

3.2 Ο Χωρόχρονος Reissner–Nordström (M, Q)

Όταν η μελανή οπή φέρει ηλεκτρικό φορτίο Q , στο δεξιά μέλος των εξισώσεων Einstein εμφανίζεται μη μηδενικός τανυστής ενέργειας–ορμής, λόγω της συνεισφοράς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Η αντίστοιχη λύση ανακαλύφθηκε ανεξάρτητα από τους Reissner (1916) και Nordström (1918) [34, 35].

3.2.1 Εξισώσεις Einstein–Maxwell και η Μετρική

Η δράση του συστήματος είναι το άθροισμα της δράσης Einstein–Hilbert (2.10) και της δράσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Ο τανυστής ενέργειας–ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κατασκευάζεται από τον τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ (όπου A_μ το τετραδυναμικό) και είναι [23]¹:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}. \quad (3.22)$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, το μόνο μη μηδενικό στοιχείο του πεδίου είναι το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο $F_{tr} = -F_{rt} = -Q/r^2$. Αναζητώντας σφαιρική και στατική λύση, η μετρική έχει τη μορφή (3.1) [23]. Επιλύοντας τις εξισώσεις $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$ (2.17) και $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ προκύπτει η μετρική Reissner–Nordström [23, 24]:

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2.} \quad (3.23)$$

Η μετρική εξαρτάται από δύο παραμέτρους, τη μάζα M και το ηλεκτρικό φορτίο Q . Για $Q = 0$ η (3.23) ανάγεται στη λύση Schwarzschild. Από τον όρο

$$\Delta = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (3.24)$$

παρατηρούμε ότι για $r \rightarrow \infty$ η μετρική γίνεται ασυμπτωτικά επίπεδη.

¹Χρησιμοποιούμε γεωμετρικές μονάδες Heaviside–Lorentz (ακολουθώντας τον Carroll), όπου $T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$ χωρίς ρητό παράγοντα $1/4\pi$. Το γεωμετρικό φορτίο Q συνδέεται με το φυσικό φορτίο q μέσω της σχέσης $Q = \sqrt{G}q/c^2$. Έτσι, με $F_{tr} = -Q/r^2$, οι εξισώσεις Einstein–Maxwell αναπαράγουν τον μετρικό συντελεστή Q^2/r^2 .

3.2.2 Δομή των Οριζόντων

Η αιτιακή δομή καθορίζεται από τις ρίζες της εξίσωσης $\Delta = 0$. Ανάλογα με το λόγο $|Q|/M$, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις [23, 24]:

1. **Η Υποακραία περίπτωση ($M > |Q|$):** Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (3.25)$$

Το r_+ αποτελεί τον εξωτερικό ορίζοντα γεγονότων, σε αναλογία με τη γεωμετρία Schwarzschild. Το r_- είναι ο εσωτερικός ορίζοντας (ορίζοντας Cauchy). Η ύπαρξη δύο οριζόντων αλλάζει τον φυσικό χαρακτήρα των συντεταγμένων: στην ενδιάμεση περιοχή $r_- < r < r_+$, η χωρική συντεταγμένη r γίνεται χρονοειδής (και η t γίνεται χωροειδής). Εξαιτίας του χρονοειδούς χαρακτήρα της r , οποιοσδήποτε παρατηρητής αναγκάζεται να κινηθεί προς την κατεύθυνση μείωσης του r , πέφτοντας προς τα μέσα.

Η διαφορά με τη γεωμετρία Schwarzschild είναι ότι η μη-αναστρέψιμη αυτή πτώση συνεχίζεται μόνο μέχρι την επιφάνεια $r = r_-$. Όταν ο παρατηρητής εισέλθει στην περιοχή $r < r_-$, οι συντεταγμένες t και r ανακατούν τον αρχικό χρονοειδή και χωροειδή χαρακτήρα τους, αντίστοιχα. Εφόσον η συντεταγμένη r γίνεται ξανά χωροειδής, η κίνηση δεν περιορίζεται πλέον υποχρεωτικά προς τα μέσα, ο παρατηρητής μπορεί να κινηθεί στην κατεύθυνση είτε αύξησης είτε μείωσης του r , ή να παραμείνει ακίνητος. Συνεπώς στο εσωτερικό η ιδιομορφία στο $r = 0$ συνιστά μια χρονοειδή γραμμή (και όχι χωροειδή). Αυτό σημαίνει ότι η ιδιομορφία μπορεί να αποφευχθεί.

Διασχίζοντας τον εσωτερικό ορίζοντα προς τα έξω, η r ανακάτνει χρονοειδή χαρακτήρα, αλλά με αντίστροφο προσανατολισμό. Η κίνηση τώρα επιβάλλεται προς αύξουσες τιμές της r , και ο παρατηρητής εξέρχεται μέσω του r_+ , που στην περίπτωση αυτή λειτουργεί ως λευκή οπή. Από τη μέγιστη αναλυτική επέκταση της λύσης προκύπτει ότι ο παρατηρητής δεν επιστρέφει στο αρχικό σύμπαν, αλλά εμφανίζεται σε ένα νέο ασυμπτωτικά επίπεδο αντίγραφο. Πρέπει να τονιστεί ότι όλα αυτά αποτελούν χαρακτηριστικά της μαθηματικής επέκτασης και δεν αναμένεται να αντιστοιχούν σε φυσικά πραγματοποιήσιμη γεωμετρία [23, 24].

2. Η Ακραία περίπτωση, $M = |Q|$:

Όταν μάζα και φορτίο εξισώνονται ($M = |Q|$), οι δύο ορίζοντες συμπίπτουν στο $r = M$. Αυτή είναι μια οριακή κατάσταση όπου η μελανή οπή έχει το μέγιστο δυνατό φορτίο που μπορεί να συγχρατήσει. Η βαρυτική της έλξη εξισορροπείται απόλυτα από την ηλεκτροστατική της άπωση. Λόγω αυτής της ισορροπίας, αν τοποθετούσαμε δύο τέτοιες μελανές οπές τη μία δίπλα στην άλλη, θα έμεναν ακίνητες χωρίς να συγχωνευτούν ποτέ. [23].

Γεωμετρικά, η ιδιομορφία στο $r = 0$ παραμένει χρονοειδής, χωρίς καμία περιοχή αναπόφευκτης πτώσης. Ο χώρος και ο χρόνος δεν εναλλάσσουν ρόλους πουθενά (η συντεταγμένη r δεν γίνεται ποτέ χρονοειδής). Κατά συνέπεια, η ιδιομορφία παραμένει ένα απλό σημείο στον χώρο (χρονοειδής γραμμή) και ο παρατηρητής μπορεί να την αποφύγει. [24]

Στην πράξη όμως αυτή η κατάσταση θεωρείται εξαιρετικά ασταθής. Η παραμικρή πρόσθεση μάζας αρκεί για να επαναφέρει τη μελανή οπή στην υποακραία δομή με δύο ξεχωριστούς ορίζοντες.

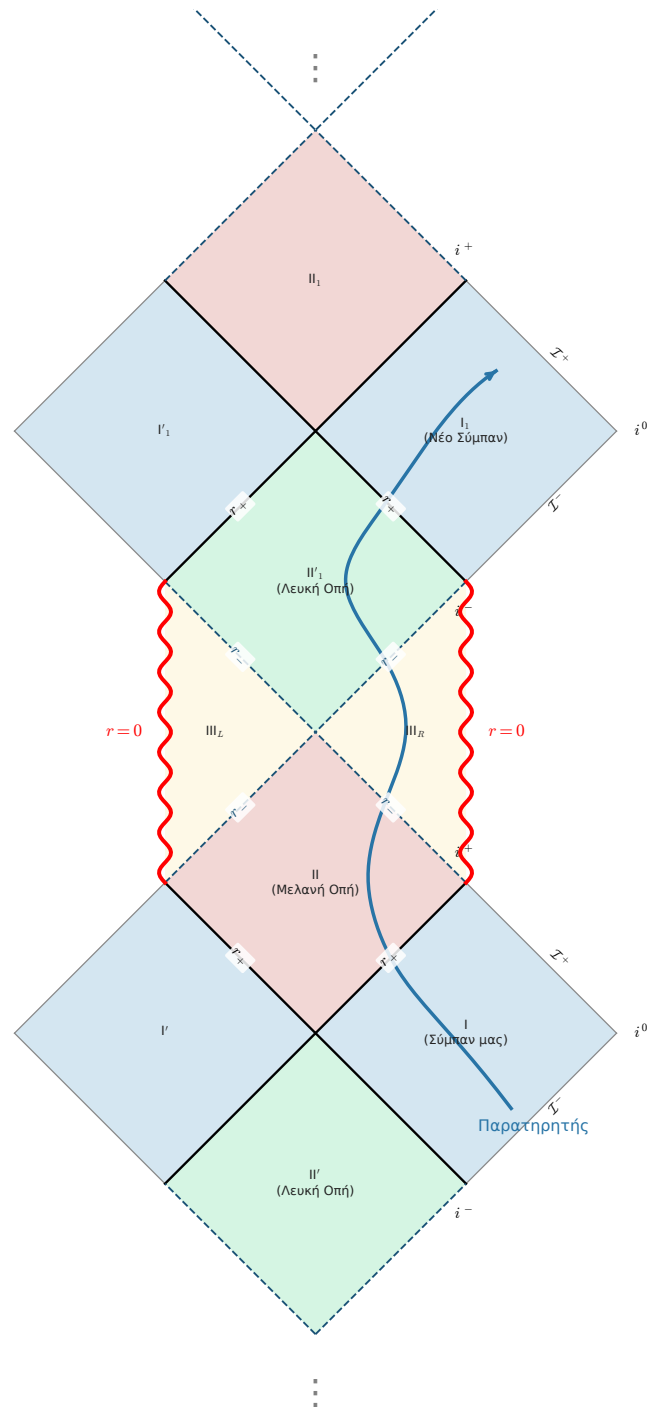
3. Η Γυμνή Ιδιομορφία ($M < |Q|$): Η συνάρτηση g_{rr} δεν μηδενίζεται πουθενά και παραμένει παντού θετική. Δεν υπάρχει κανένας ορίζοντας που να κρύβει την ιδιομορφία $r = 0$. Αυτό ονομάζεται γυμνή ιδιομορφία και επιτρέπει σε παρατηρητές στο άπειρο να βλέπουν περιοχές άπειρης καμπυλότητας. Η πιθανότητα δημιουργίας μιας τέτοιας ιδιομορφίας στο σύμπαν απορρίπτεται από την Εικασία της Κοσμικής Λογοκρισίας του Penrose [24, 36].

Ο Πίνακας 3.1 συνοψίζει τις τρεις περιπτώσεις.

Πίνακας 3.1: Ταξινόμηση του χωροχρόνου Reissner–Nordström ανάλογα με τον λόγο $|Q|/M$.

Περίπτωση	Συνθήκη	Ορίζοντες	Ιδιομορφία
Υποακραία	$ Q < M$	2 (r_+, r_-)	χρονοειδής, κρυμμένη
Ακραία	$ Q = M$	1 (εκφυλισμένος, $r = M$)	χρονοειδής, οριακά κρυμμένη
Υπερακραία	$ Q > M$	κανένας	γυμνή

3.2.3 Αιτιακή Δομή και ο Ορίζοντας Cauchy



Σχήμα 3.4: Τμήμα του διαγράμματος Penrose-Carter για τη μελανή οπή Reissner-Nordström ($M > Q$). Εμφανίζεται η διάβαση από το δικό μας σύμπαν στον εσωτερικό χώρο $r_- < r < r_+$ και η δυνατότητα εξόδου σε ένα νέο ασυμπτωτικά επίπεδο σύμπαν, αποφεύγοντας την ιδιομορφία $r = 0$ (κόκκινη γραμμή).

Αν μελετήσουμε το διάγραμμα Penrose της υποακράιας μελανής οπής Reissner-Nordström (Σχ. 3.4), παρατηρούμε μια άπειρη αλληλουχία συστημάτων. Αν ένας παρατηρητής πέσει μέσα στη μελανή οπή, περνά τον εξωτερικό ορίζοντα r_+ (όπου το μέλλον οδηγεί υποχρεωτικά προς μικρότερα r). Φτάνοντας όμως στον εσωτερικό ορίζοντα r_- , εισέρχεται σε μια νέα περιοχή όπου η ιδιομορφία $r = 0$ παραμένει δίπλα του (στον χώρο) και μπορεί να την αποφύγει. Συνεχίζοντας, αναδύεται μέσα από μια λευκή οπή σε ένα νέο, ξεχωριστό σύμπαν [2].

Η αναλυτική αυτή επέκταση είναι, ωστόσο, ασταθής. Σήματα που προέρχονται από το εξωτερικό σύμπαν υφίστανται άπειρη μετατόπιση προς το κυανό καθώς προσεγγίζουν τον εσωτερικό ορίζοντα r_- . Αυτό οδηγεί στο φαινόμενο του πληθωρισμού μάζας. Ακόμη και απειροελάχιστες διαταραχές ενισχύονται εκθετικά, με συνέπεια ο ορίζοντας Cauchy να μετατρέπεται σε γνήσια ιδιομορφία καμπυλότητας. [10, 23].

3.3 Ο Χωρόχρονος Schwarzschild–(Anti)-de Sitter (M, Λ)

Η υπόθεση $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$, για $r \rightarrow \infty$ περιγράφει ένα σύμπαν χωρίς κοσμολογική σταθερά. Οι παρατηρήσεις όμως έδειξαν ότι το σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα, υποδηλώνοντας $\Lambda > 0$. Η μετρική Schwarzschild χρειάζεται επομένως να τροποποιηθεί ώστε να αντικατοπτρίζει αυτή την κοσμολογική πραγματικότητα. [23].

3.3.1 Πεδιακές Εξισώσεις με Κοσμολογική Σταθερά

Η λύση περιγράφηκε για πρώτη φορά από τον Friedrich Kottler (1918) [29]. Θεωρούμε την εξίσωση κενού του Einstein με την προσθήκη του όρου της κοσμολογικής σταθεράς (εξ. 2.21):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.26)$$

Παίρνοντας το ίχνος αυτής της εξίσωσης (πολλαπλασιάζοντας με $g^{\mu\nu}$), βρίσκουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα²: $R - 2R + 4\Lambda = 0 \implies R = 4\Lambda$. Αντικαθιστώντας πίσω στην

²Αυτό ισχύει σε 4 χωροχρονικές διαστάσεις, όπου το ίχνος της μετρικής είναι $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$. Σε d διαστάσεις η σχέση γενικεύεται ως $R = \frac{2d}{d-2}\Lambda$.

αρχική, οι εξισώσεις απλοποιούνται στη μορφή:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την παράγραφο 3.1 και θεωρώντας ότι η μετρική έχει τη μορφή (3.1), καταλήγουμε στη λύση:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.28)$$

Η γεωμετρία της μελανής οπής περιγράφεται από τη συνάρτηση της μετρικής, με μη μηδενικές συνιστώσες $g_{tt} = -f(r)$ και $g_{rr} = f(r)^{-1}$, όπου:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \quad (3.29)$$

Για να υπολογίσουμε την ακτινική επιτάχυνση, θεωρούμε ένα δοκιμαστικό σωματίδιο που αφήνεται ελεύθερο από την ηρεμία. Η κίνησή του περιγράφεται από την εξίσωση (2.23):

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^r u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.30)$$

Εφόσον το σωματίδιο ξεκινά από την ηρεμία, οι χωρικές του ταχύτητες είναι μηδέν και η μόνη μη μηδενική συνιστώσα της τετραταχύτητας $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ είναι η χρονική. Από τη συνθήκη κανονικοποίησης ($u_\mu u^\mu = -1$), προκύπτει:

$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} = \frac{1}{\sqrt{f(r)}} \quad (3.31)$$

Επομένως, η εξίσωση της γεωδαισιακής για την ακτινική επιτάχυνση $a = d^2 r/d\tau^2$ γράφεται:

$$a = -\Gamma_{tt}^r (u^t)^2 \quad (3.32)$$

Υπολογίζοντας το σύμβολο Christoffel Γ_{tt}^r από την εξίσωση (2.1), έχουμε:

$$\Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = -\frac{1}{2} f(r) \frac{\partial(-f(r))}{\partial r} = \frac{1}{2} f(r) f'(r) \quad (3.33)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της επιτάχυνσης, προκύπτει:

$$a = - \left(\frac{1}{2} f(r) f'(r) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{f(r)}} \right)^2 = -\frac{1}{2} f'(r) \quad (3.34)$$

και αντικαθιστώντας την παράγωγο $f'(r)$ τελικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2\Lambda}{3} r \right) \\ \Rightarrow a &= -\frac{M}{r^2} + \frac{\Lambda}{3} r. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Το μέγεθος $a = -\frac{1}{2} f'(r) = -M/r^2 + \frac{\Lambda}{3} r$ είναι η ακτινική επιτάχυνση συντεταγμένων $d^2r/d\tau^2$ ενός στιγμιαία στατικού σωματιδίου. Η τοπικά μετρούμενη ιδιοεπιτάχυνση ενός στατικού παρατηρητή (με τετραταχύτητα $u^\mu = (f^{-1/2}, 0, 0, 0)$) ορίζεται ως το μέτρο της τετραεπιτάχυνσης $\alpha = \sqrt{g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu} = \sqrt{g_{rr}} A^r$. Δεδομένου ότι $A^r = \Gamma_{tt}^r (u^t)^2 = \frac{1}{2} f'(r) = |a|$ και $g_{rr} = f^{-1}$, προκύπτει ότι $\alpha = f^{-1/2} |a|$, διαφέρει δηλαδή κατά παράγοντα $f^{-1/2}$. Στο όριο $\Lambda \rightarrow 0$ ανακτούμε την αναμενόμενη νευτώνεια μορφή $a \rightarrow -M/r^2$.

Για $\Lambda > 0$ ο όρος $\frac{\Lambda}{3} r$ αντιστοιχεί σε απωστική συνεισφορά που κυριαρχεί σε μεγάλες ακτίνες, ενώ για $\Lambda < 0$ ενισχύει την ελκτική επίδραση της μάζας. Αυτό οδηγεί σε δύο γεωμετρίες, με διαφορετική ασυμπτωτική συμπεριφορά [37].

3.3.2 Η Λύση de Sitter ($\Lambda > 0$)

Στην περίπτωση που $\Lambda > 0$, ο χωρόχρονος λέγεται Schwarzschild–de Sitter (SdS). Η δομή του ορίζοντα καθορίζεται από τις ρίζες της συνάρτησης:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 = 0 \implies \Lambda r^3 - 3r + 6M = 0. \quad (3.36)$$

Η εξίσωση αυτή, εφόσον $9\Lambda M^2 < 1$, παρουσιάζει δύο θετικές ρίζες:

- r_H : Ο ορίζοντας της μελανής οπής, ο οποίος αντιστοιχεί κατά προσέγγιση στον συνήθη ορίζοντα $r \approx 2M$.
- r_c : Ο κοσμολογικός ορίζοντας, σε πολύ μεγάλη ακτίνα ($r \approx \sqrt{3/\Lambda}$). Πέρα από αυτή την ακτίνα, η κοσμολογική διαστολή κυριαρχεί, και κανένα σήμα δεν μπορεί να

φτάσει στον κεντρικό παρατηρητή.

Ένας παρατηρητής μπορεί να υπάρξει σταθερά μόνο στην ενδιάμεση περιοχή $r_H < r < r_c$, την αποκαλούμενη «στατική ζώνη». Καθώς αυξάνεται η μάζα M , ο βαρυτικός ορίζοντας μεγαλώνει ενώ ο κοσμολογικός μικραίνει. Στο θεωρητικό όριο Nariai ($9\Lambda M^2 = 1$), οι δύο ορίζοντες συμπίπτουν ($r_H = r_c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} = 3M$), ο στατικός χώρος εξαφανίζεται και δεν υπάρχει σταθερή παρατηρήσιμη περιοχή. Αν $9\Lambda M^2 > 1$, δεν υπάρχει κανένας ορίζοντας (γυμνή ιδιομορφία) [37].

3.3.3 Η Λύση Anti-de Sitter ($\Lambda < 0$)

Εάν η κοσμολογική σταθερά είναι αρνητική, ορίζουμε $\Lambda = -|\Lambda|$. Ο χωρόχρονος ονομάζεται Schwarzschild–Anti-de Sitter (SAdS) και η συνάρτηση της μετρικής γίνεται:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{|\Lambda|}{3}r^2. \quad (3.37)$$

Δεδομένου ότι ο όρος $\frac{|\Lambda|}{3}r^2$ είναι θετικός, η συνάρτηση $f(r)$ έχει μόνο μία θετική πραγματική ρίζα, r_H . Επομένως, σε αντίθεση με τη λύση SdS, εδώ υπάρχει μόνο ένας (εξωτερικός) ορίζοντας γεγονότων και κανένας κοσμολογικός ορίζοντας.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της γεωμετρίας SAdS είναι ότι το ασυμπτωτικό άπειρο αποτελεί χρονοειδή υπερεπιφάνεια. Αυτό σημαίνει ότι οι γεωδαισιακές δεν διαφεύγουν ποτέ στο άπειρο, αναστρέφουν κατεύθυνση και επιστρέφουν. Η αδυναμία διαφυγής οφείλεται στο ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(r)$ της ακτινικής κίνησης. Για μεγάλες ακτίνες, το δυναμικό κυριαρχείται από τον όρο της κοσμολογικής σταθεράς:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{\text{eff}}(r) \approx \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{|\Lambda|}{3}r^2 \right) = +\infty \quad (3.38)$$

Το δυναμικό δημιουργεί άπειρο φράγμα. Ένα σωματίδιο με πεπερασμένη ενέργεια E θα φτάσει σε ένα σημείο αναστροφής (όπου $V_{\text{eff}} = E^2$ και η ακτινική ταχύτητα μηδενίζεται) και θα αναγκαστεί να επιστρέψει προς τη μελανή οπή. Η ιδιότητα αυτή έχει αποκτήσει ιδιαίτερη σημασία στο πλαίσιο της αντιστοιχίας AdS/CFT στη θεωρία χορδών [23].

Κεφάλαιο 4

Αξονικά Συμμετρικές Μελανές Οπές (Στάσιμες Λύσεις)

Κατά τη βαρυτική κατάρρευση ενός περιστρεφόμενου αστροφυσικού σώματος σχηματίζεται μία στάσιμη μελανή οπή. Η γεωμετρία της, εκτός από τη μάζα M και το φορτίο Q , καθορίζεται επιπλέον από τη στροφορμή J , γεγονός που επιβάλλει την εξέταση των αξονικά συμμετρικών λύσεων των εξισώσεων Einstein.

4.1 Ο Χωρόχρονος Kerr (M, J)

Κάθε στάσιμη, αξονικά συμμετρική και ασυμπτωτικά επίπεδη λύση κενού που περιγράφει μια μελανή οπή ταυτίζεται με τη γεωμετρία Kerr [7, 9]. Η λύση αυτή δεν αποτελεί ακριβές μοντέλο για το εξωτερικό ενός περιστρεφόμενου αστέρα, είναι όμως η μοναδική που αντιστοιχεί στην τελική κατάσταση της βαρυτικής κατάρρευσης [38].

4.1.1 Συμμετρίες και Διανύσματα Killing

Η στασιμότητα και η αξονική συμμετρία του χωροχρόνου εκφράζονται μέσω δύο ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων Killing. Στο σύστημα συντεταγμένων Boyer–Lindquist, όπου η μετρική δεν εξαρτάται από τη χρονική συντεταγμένη t και την αζιμουθιακή γωνία

ϕ , τα δύο πεδία παίρνουν τη μορφή:

$$\xi^{(t)\mu} = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (4.1)$$

$$\xi^{(\phi)\mu} = (\partial_\phi)^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (4.2)$$

Οι συναλλοίωτες συνιστώσες τους, που προκύπτουν από τη συστολή $\xi_\mu = g_{\mu\nu}\xi^\nu$, είναι:

$$\xi_\mu^{(t)} = (g_{tt}, 0, 0, g_{t\phi}), \quad (4.3)$$

$$\xi_\mu^{(\phi)} = (g_{t\phi}, 0, 0, g_{\phi\phi}). \quad (4.4)$$

Η παρουσία της συνιστώσας $g_{t\phi}$ στις παραπάνω εκφράσεις αποδεικνύει ότι τα δύο διανύσματα δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους ($\xi_\mu^{(t)}\xi^{(\phi)\mu} = g_{t\phi}$), όπως συμβαίνει στη Schwarzschild. Αυτό σημαίνει πως ο χωρόχρονος είναι στάσιμος αλλά όχι στατικός. Επιπλέον, το διάνυσμα $\xi^{(t)}$, για το οποίο $\xi_\mu^{(t)}\xi^{(t)\mu} = g_{tt}$, στην Kerr δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο τον εξωτερικό χώρο. Υπάρχει μια περιοχή έξω από τον ορίζοντα γεγονότων, η εργόσφαιρα, όπου το $\xi^{(t)}$ γίνεται χωροειδές. Κατά μήκος των γεωδαισιακών, τα δύο αυτά διανύσματα δίνουν, μέσω της Εξ. (2.27), τις διατηρούμενες ποσότητες (ανά μονάδα μάζας) της ενέργειας $E = -\xi_\mu^{(t)}u^\mu$ και της συνιστώσας της στροφορμής $L = \xi_\mu^{(\phi)}u^\mu$ κατά μήκος του άξονα περιστροφής.

4.1.2 Η Μετρική στις Συντεταγμένες Boyer–Lindquist

Το πιο διαδεδομένο σύστημα συντεταγμένων για τη λύση Kerr είναι αυτό που εισήγαξαν οι Boyer και Lindquist, καθώς διαγωνοποιεί τη μετρική στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Σε αυτές τις συντεταγμένες το στοιχείο μήκους γράφεται [23]:

$$\boxed{ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2.} \quad (4.5)$$

Η παρουσία του όρου $g_{t\phi}$ έχει ως συνέπεια το φαινόμενο της συμπαράσυρσης των αδρανειακών συστημάτων (frame-dragging). Ένα σώμα που αφήνεται ελεύθερο με μηδενική στροφορμή ($L = 0$) αποκτά γωνιακή ταχύτητα $d\phi/dt = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ ομόρροπη με την περι-

στροφή της μελανής οπής. Ο όρος αυτός δεν απαλείφεται με κανέναν μετασχηματισμό συντεταγμένων και οφείλεται στην απουσία της συμμετρίας αντιστροφής χρόνου $t \rightarrow -t$. Η λύση είναι αναλλοίωτη μόνο υπό τον συνδυασμό των μετασχηματισμών $t \rightarrow -t$, $\phi \rightarrow -\phi$.

Οι δύο βοηθητικές συναρτήσεις που εμφανίζονται στη μετρική ορίζονται ως:

$$\rho^2(r, \theta) \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.6)$$

$$\Delta(r) \equiv r^2 - 2Mr + a^2. \quad (4.7)$$

Ο μηδενισμός του ρ^2 απαιτεί ταυτόχρονα $r = 0$ και $\theta = \pi/2$, και εκεί εντοπίζουμε τη φυσική ιδιομορφία της λύσης, έναν δακτύλιο ακτίνας a στο ισημερινό επίπεδο.

Ο μηδενισμός της Δ δίνει τις δύο ρίζες $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$, οι οποίες ορίζουν τον εξωτερικό ορίζοντα γεγονότων r_+ και τον εσωτερικό ορίζοντα Cauchy r_- , κατ' αναλογία με τη γεωμετρία Reissner–Nordström (Εξ. (3.25)). Παρότι οι δύο ορίζοντες έχουν εδώ διαφορετική φυσική προέλευση, ο ρόλος του Q^2 αναλαμβάνεται από το a^2 . Η συνθήκη πραγματικών ριζών, $M^2 \geq a^2$, χωρίζει τις υποακραίες ($|a| < M$) λύσεις από την ακραία ($|a| = M$) και από την υπερακραία περίπτωση ($|a| > M$). Η συνιστώσα $g_{rr} = \rho^2/\Delta$ αποκλίνει στα $r = r_{\pm}$, αλλά, όπως και στην περίπτωση της Schwarzschild, αυτές οι αποκλίσεις είναι ιδιομορφίες συντεταγμένων, οι οποίες αίρονται με κατάλληλο μετασχηματισμό (π.χ. συντεταγμένες Kerr–Schild) [24].

Θέτοντας $a = 0$ στην Εξ. (4.5), οι μικτοί όροι εξαφανίζονται, το ρ^2 ανάγεται σε r^2 , το Δ δίνει $r^2 - 2Mr$, και η μετρική ανάγεται στην Schwarzschild (Εξ. (3.7)).

Στο όριο $M \rightarrow 0$ με $a \neq 0$ οι συντεταγμένες Boyer–Lindquist ανάγονται σε ελλειψοειδείς συντεταγμένες του χωροχρόνου Minkowski, όπου η επιφάνεια $r = \text{σταθ.}$ είναι ένα πεπλατυσμένο ελλειψοειδές εκ περιστροφής με μεγάλο ημιάξονα $\sqrt{r^2 + a^2}$ και μικρό ημιάξονα r . Το ρ παίζει τον ρόλο της ακτίνας σε αυτή την γεωμετρία [23, 24].

4.1.3 Δομή Οριζόντων, Εργόσφαιρα και Ιδιομορφία

Ορίζοντες Γεγονότων

Οι ορίζοντες γεγονότων ενός στάσιμου χωροχρόνου είναι φωτοειδείς υπερεπιφάνειες $f(x^\mu) = \text{σταθ. των οποίων το κάθετο διάνυσμα } n_\mu = \partial_\mu f$ ικανοποιεί την [23, 24]

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0. \quad (4.8)$$

Λόγω των συμμετριών του χωροχρόνου, η εξίσωση της υπερεπιφάνειας είναι $f(r, \theta) = c$ ¹. Επομένως, το κάθετο διάνυσμα είναι:

$$n_\mu = \partial_\mu f = \left(0, \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \theta}, 0 \right). \quad (4.9)$$

Από την (4.8) και εφόσον $g^{r\theta} = 0$, προκύπτει:

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0 \implies g^{rr} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = 0. \quad (4.10)$$

Οι αντίστοιχες συνιστώσες του αντίστροφου τανυστή είναι $g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}$ και $g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}$. Αντικαθιστώντας:

$$\frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\rho^2 > 0$ ²:

$$\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = 0.$$

Εφόσον $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \geq 0$, για να υπάρχουν πραγματικές λύσεις απαιτείται:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad \text{και} \quad \Delta = 0.$$

Αφού $\partial_\theta f = 0$, η υπερεπιφάνεια εξαρτάται αποκλειστικά από το r , $f(x^\mu) = f(r)$. Το

¹Ο χωρόχρονος Kerr είναι στάσιμος και αξονικά συμμετρικός, συνεπώς οι ορίζοντες γεγονότων δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες t και ϕ .

²Ισχύει $\rho^2 > 0$ σε κάθε σημείο εκτός του δακτυλίου $r = 0, \theta = \pi/2$.

κάθετο διάνυσμα είναι:

$$n_\mu = \partial_\mu f(r) = f'(r)\delta_\mu^r. \quad (4.11)$$

Αντικαθιστώντας στην³ (4.8):

$$g^{\mu\nu} (f'(r)\delta_\mu^r) (f'(r)\delta_\nu^r) = 0 \implies g^{rr}[f'(r)]^2 = 0 \implies g^{rr} = 0, \quad (4.12)$$

και ισοδύναμα:

$$\Delta(r) \equiv r^2 - 2Mr + a^2 = 0. \quad (4.13)$$

Από όπου παίρνουμε τις δύο ρίζες:

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4.14)$$

Η ακτίνα r_+ αντιστοιχεί στον εξωτερικό ορίζοντα γεγονότων, ενώ η r_- στον εσωτερικό ορίζοντα Cauchy, πέρα από τον οποίο καταρρέει η δυνατότητα πρόβλεψης της χρονικής εξέλιξης του συστήματος από τις αρχικές συνθήκες.

Η φυσική σημασία διαφέρει ανάλογα με το πρόσημο του $M^2 - a^2$:

- Όταν $|a| < M$ (υποακραία λύση) οι δύο ρίζες είναι πραγματικές και διακριτές, $0 < r_- < M < r_+ < 2M$, και η γεωμετρία περιγράφει περιστρεφόμενη μελανή οπή με δύο χωριστούς ορίζοντες.
- Στο όριο $|a| = M$ (ακραία λύση) οι δύο ορίζοντες ταυτίζονται σε $r_+ = r_- = M$ και ο ενδιάμεσος χώρος (r_-, r_+) εξαφανίζεται.
- Τέλος, για $|a| > M$ (υπερακραία περίπτωση) οι ρίζες είναι μιγαδικές και δεν υπάρχει ορίζοντας, η δακτυλιοειδής ιδιομορφία στο $\rho^2 = 0$ παραμένει εκτεθειμένη ως γυμνή ιδιομορφία, κάτι που απορρίπτεται από την Εικασία της Κοσμικής Λογοκρισίας.

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να περιγράφει η λύση Kerr μελανή οπή είναι, συνεπώς:

$$|a| \leq M. \quad (4.15)$$

³Για να ορίζεται ομαλά η υπερεπιφάνεια το διάνυσμα της κλίσης δεν μπορεί να μηδενίζεται, συνεπώς $f'(r) \neq 0$

Η ανισότητα αυτή θέτει ένα άνω φράγμα στη στροφορμή μιας μελανής οπής, $|J| \leq M^2$. Παρόλο που η στροφορμή της μελανής οπής αυξάνεται καθώς προσπίπτει ύλη σε αυτήν, μεταφέροντάς της τη δική της στροφορμή, η διαδικασία έχει ένα θεωρητικό ανώτερο όριο που έχει υπολογιστεί σε $J \approx 0,998M^2$. Αυτό συμβαίνει διότι η ακτινοβολία που εκπέμπεται από την προσπίπτουσα ύλη μεταφέρει στροφορμή στο εξωτερικό σύμπαν [22, 24].

Το Στατικό Όριο και η Εργόσφαιρα

Ένας παρατηρητής λέγεται στατικός αν η τετραταχύτητά του είναι παράλληλη προς το χρονικό διάνυσμα Killing $\xi^{(t)}$, δηλαδή αν διατηρεί σταθερές τιμές (r, θ, ϕ) στο χρόνο ($\frac{\partial x^i}{\partial t} = 0$). Για να είναι η τροχιά του χρονοειδής, απαιτείται:

$$\xi_\mu^{(t)} \xi^{(t)\mu} = g_{tt} = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) < 0.$$

Η επιφάνεια όπου το $\xi^{(t)}$ παύει να είναι χρονοειδής ορίζεται από τον μηδενισμό του g_{tt} :

$$g_{tt} = 0 \iff 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} = 0 \iff \rho^2 = 2Mr.$$

Από την (4.6) λαμβάνουμε:

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0,$$

με λύσεις:

$$r_{S\pm}(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.16)$$

Η εξωτερική ρίζα r_{S+} ορίζει την επιφάνεια του στατικού ορίου (ή εργοεπιφάνεια), ενώ η εσωτερική r_{S-} βρίσκεται εντός του εσωτερικού ορίζοντα.

Η Εξ. (4.16) διαφέρει από την Εξ. (4.14) μόνο στην αντικατάσταση $a^2 \rightarrow a^2 \cos^2 \theta$. Συγκρίνοντάς τις προκύπτει η σχέση διάταξης των επιφανειών. Εφόσον $\cos^2 \theta \in [0, 1]$,

$$a^2 \cos^2 \theta \leq a^2 \implies M^2 - a^2 \cos^2 \theta \geq M^2 - a^2 \implies \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \geq \sqrt{M^2 - a^2},$$

όπου όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί λόγω της (4.15). Προσθέτοντας M και στα δύο

μέλη:

$$r_{S+}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta} \geq M + \sqrt{M^2 - a^2} = r_+. \quad (4.17)$$

Επομένως η εργοεπιφάνεια περιβάλλει πάντοτε τον εξωτερικό ορίζοντα, ενώ όταν $\cos^2 \theta = 1$, δηλαδή στους πόλους $\theta = 0, \pi$, συμπίπτουν:

$$r_{S+}(0) = r_{S+}(\pi) = M + \sqrt{M^2 - a^2} = r_+.$$

Η μέγιστη απόσταση μεταξύ των δύο επιφανειών επιτυγχάνεται όταν $\cos^2 \theta = 0$, δηλαδή στο ισημερινό επίπεδο $\theta = \pi/2$, όπου:

$$r_{S+}(\pi/2) = M + \sqrt{M^2} = 2M,$$

τιμή ανεξάρτητη της παραμέτρου a . Ο χώρος που περικλείεται μεταξύ των δύο υπερεπιφανειών:

$$\mathcal{E} \equiv \{(t, r, \theta, \phi) : r_+ < r < r_{S+}(\theta)\}, \quad (4.18)$$

ονομάζεται εργόσφαιρα (Σχ. 4.1).

Εντός της εργόσφαιρας, το διάνυσμα Killing $\xi^{(t)}$ είναι χωροειδές, $g_{tt} > 0$. Καμία χρονοειδής τροχιά δεν μπορεί να είναι παράλληλη προς αυτό, και συνεπώς κανένας παρατηρητής δεν μπορεί να παραμείνει ακίνητος ως προς έναν παρατηρητή στο άπειρο.

Η συνθήκη χρονοειδούς τροχιάς για παρατηρητή με τετραταχύτητα $u^\mu = u^t(1, 0, 0, \Omega)$, όπου $\Omega = d\phi/dt$, γράφεται:

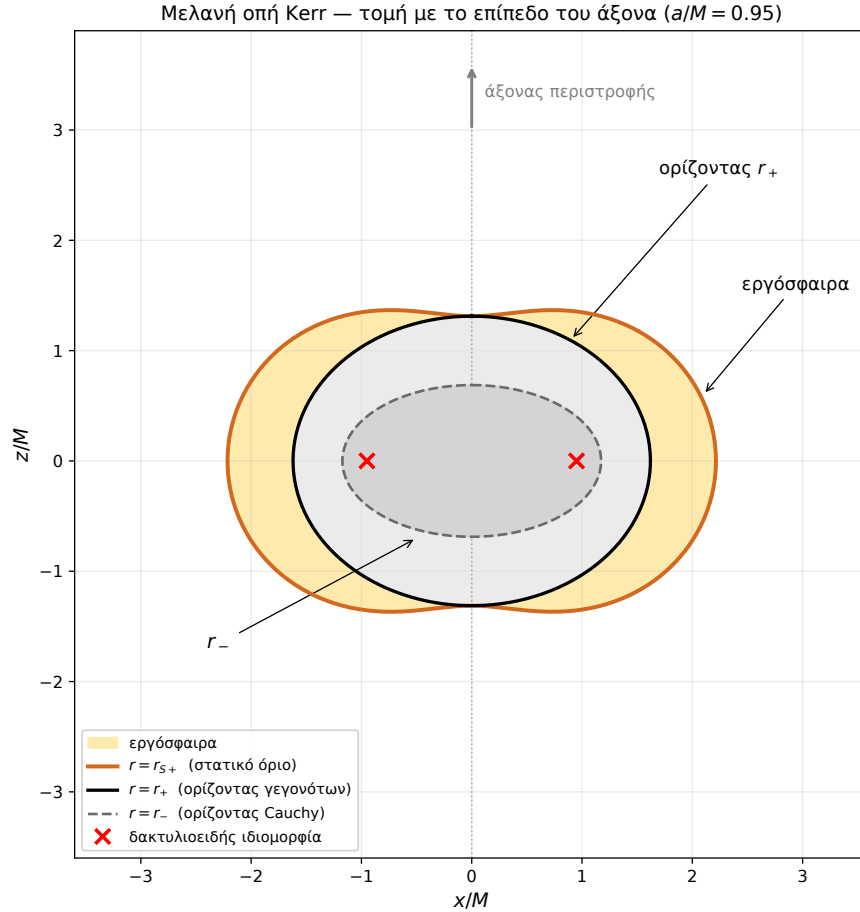
$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (u^t)^2 (g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}) < 0.$$

Η δευτεροβάθμια έκφραση ως προς Ω έχει πραγματικές ρίζες $\Omega_\pm$:⁴

$$\Omega_\pm = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}},$$

και η συνθήκη $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu < 0$ ικανοποιείται για $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$.

⁴Η διακρίνουσα $g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}$ είναι πάντοτε μη αρνητική. Η ορίζουσα της μετρικής Kerr ικανοποιεί $\det(g) = -\rho^4 \sin^2 \theta < 0$, και εφόσον $g_{rr}, g_{\theta\theta} > 0$ εκτός των οριζόντων, ο 2×2 υποπίνακας (t, ϕ) πρέπει να έχει αρνητική ορίζουσα, δηλαδή $g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 < 0$, άρα $g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} > 0$.



Σχήμα 4.1: Σχηματική απεικόνιση της γεωμετρίας μιας περιστρεφόμενης μελανής οπής Kerr στο επίπεδο xz , για παράμετρο περιστροφής $a/M = 0.95$. Στο διάγραμμα απεικονίζονται ο εξωτερικός ορίζοντας γεγονότων r_+ και ο εσωτερικός ορίζοντας Cauchy r_- . Η εξωτερική πορτοκαλί καμπύλη αναπαριστά την επιφάνεια του στατικού ορίου r_{S+} . Η περιοχή μεταξύ του στατικού ορίου και του εξωτερικού ορίζοντα ορίζει την εργόσφαιρα. Για την οπτικοποίηση έχουν χρησιμοποιηθεί ψευδο-Καρτεσιανές συντεταγμένες ($x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi$, $y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$), λαμβάνοντας μια τομή στο επίπεδο $y = 0$ ($\phi = 0, \pi$). Αυτό επιτρέπει την απεικόνιση των επιφανειών σταθερής r της μετρικής Boyer-Lindquist. Στο ισημερινό επίπεδο σημειώνεται επίσης η τομή της δακτυλιοειδούς ιδιομορφίας, η οποία σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων εντοπίζεται σε απόσταση $x = \pm a$.

Εντός της εργόσφαιρας, όπου $g_{tt} > 0$, το γινόμενο των ριζών $\Omega_- \Omega_+ = g_{tt}/g_{\phi\phi}$ είναι θετικό. Επιπλέον, $\Omega_- + \Omega_+ = -2g_{t\phi}/g_{\phi\phi} > 0$ για $a > 0$.⁵ Συνεπώς αμφότερες οι ρίζες είναι θετικές, $0 < \Omega_- < \Omega_+$, και κάθε φυσικός παρατηρητής είναι υποχρεωμένος να περιστρέφεται προς την ίδια φορά με τη μελανή οπή ($\Omega > 0$). Αποκλείεται λοιπόν η τιμή $\Omega = 0$, που αντιστοιχεί σε στατικό παρατηρητή. Αυτό το φαινόμενο είναι η συμπαράσυρση των αδρανειακών συστημάτων [24].

Η Δακτυλιοειδής Ιδιομορφία

Η απόκλιση που σχετίζεται με το μηδενισμό του ρ^2 αποτελεί γνήσια ιδιομορφία καμπυλότητας, όπως επιβεβαιώνεται από τον υπολογισμό του βαθμωτού Kretschmann (Εξ. (2.31)):

$$\mathcal{K} = \frac{48M^2(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta]}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (4.19)$$

το οποίο αποκλίνει ως ρ^{-12} καθώς $\rho^2 \rightarrow 0$ και παραμένει πεπερασμένο στους ορίζοντες [39].

Η ιδιομορφία εντοπίζεται στις θέσεις όπου $\rho^2 = 0$ (Εξ. (4.6)), δηλαδή

$$r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0.$$

Και οι δύο όροι είναι μη αρνητικοί για πραγματικά r, θ , επομένως παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} r^2 = 0 \\ a^2 \cos^2 \theta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} r = 0 \\ \cos \theta = 0 \quad (a \neq 0) \end{cases} \implies \begin{cases} r = 0 \\ \theta = \pi/2. \end{cases}$$

από όπου εντοπίζουμε την ιδιομορφία στο γεωμετρικό τόπο:

$$\mathcal{S} = \{(r, \theta) = (0, \pi/2)\}. \quad (4.20)$$

Στις συντεταγμένες Boyer–Lindquist η συνθήκη $r = 0$ δίνει την εντύπωση σημειακής ιδιομορφίας, αλλά για τη σωστή ερμηνεία πρέπει να μεταβούμε σε ψευδο-Καρτεσιανές

⁵ Από τη μετρική (4.5), $g_{t\phi} = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2}$, το οποίο είναι αρνητικό για $a > 0$, $r > 0$ και $\theta \neq 0, \pi$. Άρα $-2g_{t\phi}/g_{\phi\phi} > 0$, εφόσον $g_{\phi\phi} > 0$ εκτός του άξονα.

συντεταγμένες [18]:

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Θέτοντας $r = 0$ και $\theta = \pi/2$, προκύπτει:

$$x = a \cos \phi, \quad y = a \sin \phi, \quad z = 0,$$

και τελικά:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$$

Πρόκειται για την παραμετρική εξίσωση κύκλου ακτίνας $|a|$ στο ισημερινό επίπεδο $z = 0$, με τη γωνία $\phi \in [0, 2\pi)$ ως παράμετρο. Είναι ένας δακτύλιος που στο όριο $a \rightarrow 0$ η ακτίνα του μηδενίζεται και η ιδιομορφία εκφυλίζεται σε αυτή της σφαιρικά συμμετρικής περίπτωσης.

4.1.4 Συμπαράσυρση Αδρανειακών Συστημάτων και Εξαγωγή Ενέργειας

Συμπαράσυρση Αδρανειακών Συστημάτων

Όπως είδαμε, εντός της εργόσφαιρας κάθε παρατηρητής είναι υποχρεωμένος να έχει γωνιακή ταχύτητα στο διάστημα $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$. Μια σημαντική κατηγορία παρατηρητών είναι αυτοί που έχουν μηδενική στροφορμή (Zero Angular Momentum Observer, ZAMO) και αποτελούν τους τοπικά μη περιστρεφόμενους παρατηρητές [18, 40].

Για ένα σώμα με τετραταχύτητα u^μ , η διατηρούμενη στροφορμή ανά μονάδα μάζας ορίζεται από την (2.29):

$$L = \xi_\mu^{(\phi)} u^\mu = u_\phi,$$

Για έναν ZAMO, $L = 0$, δηλαδή:

$$u_\phi = g_{\phi\mu} u^\mu = g_{t\phi} u^t + g_{\phi\phi} u^\phi = 0.$$

Επιλύοντας ως προς τη γωνιακή ταχύτητά του, $\Omega \equiv d\phi/dt = u^\phi/u^t$, έχουμε:

$$\Omega_{\text{ZAMO}} \equiv \omega(r, \theta) = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}. \quad (4.21)$$

Η $\omega(r, \theta)$ αποτελεί τη γωνιακή ταχύτητα την οποία αποκτά ένας παρατηρητής που έχει αφαιρεθεί με μηδενική στροφορμή στο άπειρο και έχει πέσει ακτινικά προς τη μελανή οπή. Με αντικατάσταση των συνιστωσών της μετρικής (4.5):

$$g_{t\phi} = -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2}, \quad g_{\phi\phi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta,$$

η Εξ. (4.21) γράφεται:

$$\omega = -\frac{-\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2}}{\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta} = \frac{2Mar \sin^2 \theta}{[(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta] \sin^2 \theta}.$$

Απλοποιώντας τον παράγοντα $\sin^2 \theta$ (με $\theta \neq 0, \pi$):

$$\omega(r, \theta) = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)\rho^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta}. \quad (4.22)$$

Ο παρονομαστής, χρησιμοποιώντας τις (4.6), (4.7) γράφεται:

$$\begin{aligned} (r^2 + a^2)\rho^2 + 2Ma^2r \sin^2 \theta &= (r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2r \sin^2 \theta \\ &= (r^2 + a^2)[r^2 + a^2(1 - \sin^2 \theta)] + 2Ma^2r \sin^2 \theta \\ &= (r^2 + a^2)^2 - (r^2 + a^2)a^2 \sin^2 \theta + 2Ma^2r \sin^2 \theta \\ &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta [(r^2 + a^2) - 2Mr] \\ &= (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Η γωνιακή ταχύτητα παίρνει τελικά τη μορφή:

$$\omega(r, \theta) = \frac{2Mar}{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta(r) \sin^2 \theta}. \quad (4.23)$$

Βλέπουμε από την (4.23) πως η γεωμετρία συμπαρασύρει έναν παρατηρητή χωρίς στροφορμή, προσδίδοντάς του γωνιακή ταχύτητα ομόρροπη της στροφορμής της μελανής οπής.

Για πεπερασμένες αποστάσεις, η ω μηδενίζεται μόνο όταν $a = 0$ (μη περιστρεφόμενη μελανή οπή) ή $r = 0$. Αντίστοιχα, μηδενίζεται και στο άπειρο $r \rightarrow \infty$, κάτι που συμφωνεί με την ασυμπτωτική επιπεδότητα του χωροχρόνου Kerr.

Παρατηρούμε επίσης πως στον εξωτερικό ορίζοντα $r = r_+$, όπου $\Delta(r_+) = 0$, η ω γίνεται ανεξάρτητη της γωνίας θ :

$$\omega_H \equiv \omega(r_+, \theta) = \frac{2Mar_+}{(r_+^2 + a^2)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $r_+^2 + a^2 = 2Mr_+$, που προκύπτει από την $\Delta(r_+) = 0$, παίρνουμε:

$$\omega_H = \frac{2Mar_+}{(2Mr_+)^2} = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (4.24)$$

Η σταθερή αυτή τιμή ονομάζεται γωνιακή ταχύτητα του ορίζοντα και είναι η μέγιστη επιτρεπτή τιμή της γωνιακής ταχύτητας ενός παρατηρητή με σταθερά r, θ εντός της εργόσφαιρας [24].

Η Διαδικασία Penrose

Επειδή το $\xi^{(t)}$ γίνεται χωροειδές μέσα στην εργόσφαιρα, η ποσότητα $E = -\xi^{(t)} \cdot p$ (που στο άπειρο ταυτίζεται με την ενέργεια) μπορεί τοπικά να πάρει αρνητικές τιμές. Σε αυτή τη δυνατότητα στηρίζεται η διαδικασία εξαγωγής ενέργειας που πρότεινε ο Penrose [36].

Θεωρούμε σωματίο με τετραορμή p_0^μ και ενέργεια:

$$E_0 = -\xi_\mu^{(t)} p_0^\mu > 0,$$

που εισέρχεται στην εργόσφαιρα από το ασυμπτωτικό άπειρο. Σε σημείο $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$, το σωματίο διασπάται σε δύο σωματίδια με τετραορμές p_1^μ, p_2^μ . Από την τοπική διατήρηση της τετραορμής:

$$p_0^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu, \quad (4.25)$$

και συστέλλοντας με το διάνυσμα Killing,

$$-\xi_\mu^{(t)} p_0^\mu = -\xi_\mu^{(t)} p_1^\mu - \xi_\mu^{(t)} p_2^\mu,$$

προκύπτει:

$$E_0 = E_1 + E_2. \quad (4.26)$$

Η σχέση (4.26) ισχύει τοπικά στο σημείο διάσπασης. Όμως, καθώς η ενέργεια διατηρείται κατά μήκος κάθε γεωδαισιακής, οι ενέργειες E_1, E_2 παραμένουν σταθερές κατά τη μετέπειτα κίνησή τους.

Εάν η διάσπαση πραγματοποιηθεί έτσι ώστε το πρώτο σωματίο να αποκτήσει αρνητική ενέργεια:

$$E_1 < 0,$$

από την Εξ. (4.26) λαμβάνουμε:

$$E_2 = E_0 - E_1 > E_0, \quad (4.27)$$

δηλαδή το δεύτερο σωματίο έχει ενέργεια μεγαλύτερη από εκείνη του αρχικού. Καθώς το πρώτο σωματίο, λόγω $E_1 < 0$, θα πέσει στη μελανή οπή⁶, διασχίζοντας τον ορίζοντα r_+ , και το δεύτερο μπορεί να διαφύγει ξανά στο ασυμπτωτικό άπειρο, το συνολικό αποτέλεσμα είναι η αύξηση της ενέργειας κατά:

$$\Delta E_\infty = E_2 - E_0 = -E_1 > 0.$$

Η εξαγόμενη ενέργεια προέρχεται από τη μελανή οπή, καθώς η μάζα της μεταβάλλεται κατά

$$\delta M = E_1 < 0.$$

Παράλληλα, κατά τη διάσπαση η στροφορμή διατηρείται, $L_1 + L_2 = L_0$. Από τη σχέση μεταξύ E και L για γεωδαισιακή με $E < 0$ στην εργόσφαιρα προκύπτει $L_1 < 0$, δηλαδή το απορροφούμενο σωματίο έχει στροφορμή αντίρροπη από αυτήν της μελανής οπής [24]. Επομένως η μάζα και η στροφορμή της μελανής οπής ελαττώνονται ταυτόχρονα:

$$\delta M = E_1 < 0, \quad \delta J = L_1 < 0.$$

⁶Στο ασυμπτωτικό άπειρο το $\xi^{(t)}$ είναι χρονοειδές, οπότε $E = -\xi^{(t)} \cdot p > 0$ για κάθε φυσικό σωματίο. Συνεπώς $E_1 < 0 \Rightarrow$ αδυναμία διαφυγής $\Rightarrow$ πτώση εντός του r_+ .

Ένα ανώτερο φράγμα στην εξαγόμενη ενέργεια προκύπτει από τον δεύτερο νόμο της μηχανικής των μελανών οπών, σύμφωνα με τον οποίο το εμβαδόν της επιφάνειας του ορίζοντα δεν μπορεί να μειωθεί, δηλαδή $\delta A \geq 0$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi Mr_+ = 8\pi \left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2} \right),$$

η απαίτηση $\delta A \geq 0$ κατά την απορρόφηση ενός σωματίου με $\delta M = E_1$ και $\delta J = L_1$, οδηγεί στη σχέση:

$$E_1 \geq \omega_H L_1, \quad (4.28)$$

όπου ω_H είναι η γωνιακή ταχύτητα του ορίζοντα (Εξ. (4.24)). Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει ότι για να εισέλθει ένα σωματίο στον ορίζοντα με αρνητική ενέργεια, πρέπει να έχει αρνητική στροφορμή, η οποία θα μειώσει τη συνολική στροφορμή της μελανής οπής [24].

Για να βρούμε την μέγιστη ενέργεια που μπορεί να εξαχθεί, εισάγουμε την έννοια της μη αναγώγιμης μάζας (irreducible mass) M_{irr} , η οποία συνδέεται με το εμβαδόν μέσω της σχέσης $A = 16\pi M_{\text{irr}}^2$. Από τον τύπο του εμβαδού προκύπτει ότι:

$$M_{\text{irr}} = \sqrt{\frac{M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}}{2}}.$$

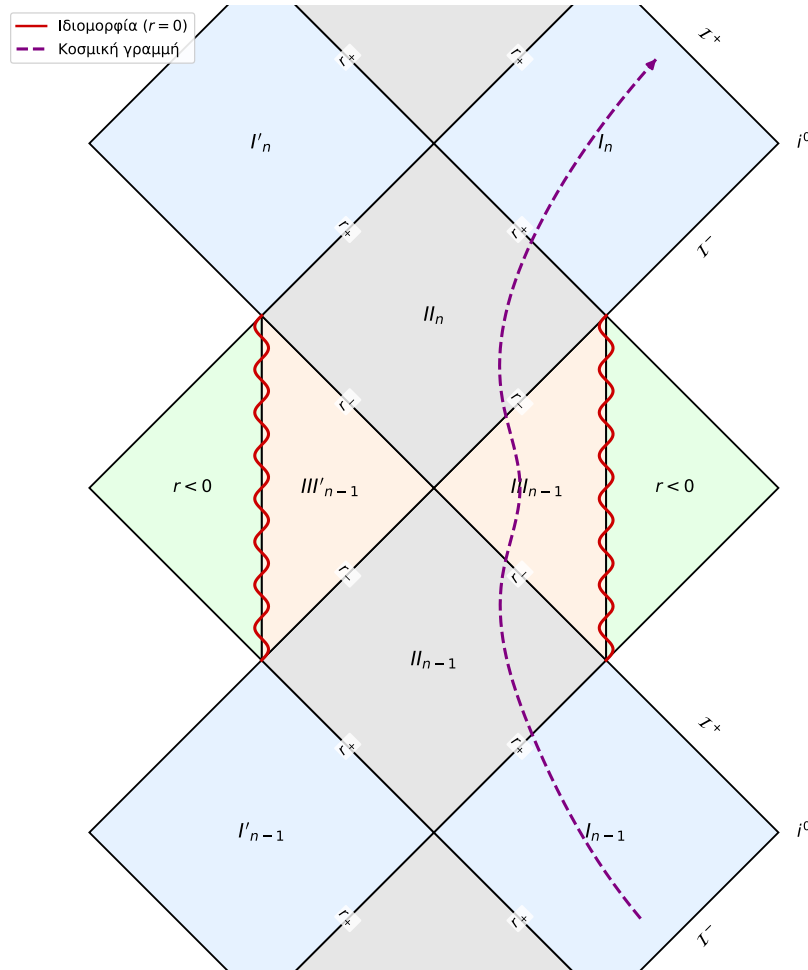
Εφόσον το εμβαδόν δεν μειώνεται ($\delta A \geq 0$), δεν μπορεί να μειωθεί ούτε η M_{irr} . Η μέγιστη ενέργεια που μπορούμε να εξάγουμε από μία μελανή οπή επιτυγχάνεται σε μία ακραία μελανή οπή Kerr, από την οποία αφαιρούμε όλη τη στροφορμή. Σε αυτή την περίπτωση ($a = M$ ή $J = M^2$), η αρχική μη αναγώγιμη μάζα είναι $M_{\text{irr}} = M/\sqrt{2}$. Επομένως, η τελική μάζα της μελανής οπής δεν μπορεί να πέσει κάτω από αυτό το όριο. Η μέγιστη εξαγόμενη ενέργεια είναι η διαφορά της αρχικής από την τελική μάζα:

$$E_{\text{max}} = M - M_{\text{irr}} = M \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 0.293M.$$

Δηλαδή, στο καλύτερο σενάριο μπορούμε να εξάγουμε το πολύ έως το 29% της αρχικής ενέργειας ηρεμίας μιας ακραίας μελανής οπής Kerr, μετατρέποντάς τη σε μια μη περιστρεφόμενη μελανή οπή Schwarzschild [23].

4.1.5 Το Διάγραμμα Penrose–Carter της Μελανής Οπής Kerr

Η περιγραφή της Kerr σε Boyer–Lindquist καλύπτει μόνο το εξωτερικό $r > r_+$ ή την περιοχή ανάμεσα στους δύο ορίζοντες $r_- < r < r_+$. Όπως και στη Schwarzschild, οι συντεταγμένες αυτές δεν είναι ομαλές στους ορίζοντες, και χρειάζεται να εισάγουμε συντεταγμένες τύπου Kruskal για κάθε ορίζοντα ξεχωριστά. Η μέγιστη αναλυτική επέκταση της Kerr, που πρωτοκατασκευάστηκε από τον Carter [41, 42], αποκαλύπτει πολύ διαφορετική αιτιακή δομή από εκείνη της Schwarzschild.



Σχήμα 4.2: Τμήμα του διαγράμματος Penrose–Carter της υποακράιας μελανής οπής Kerr κατά μήκος του άξονα συμμετρίας. Οι περιοχές I είναι ασυμπτωτικά επίπεδες (εξωτερικά σύμπαντα), οι II βρίσκονται ανάμεσα στους ορίζοντες r_+ και r_- , και οι III μέσα στον ορίζοντα Cauchy. Η ιδιομορφία (κάθετες κυματιστές γραμμές) είναι χρονοειδής, σε αντίθεση με τη χωροειδή ιδιομορφία της Schwarzschild. Διέλευση μέσα από τον δακτύλιο οδηγεί σε σύμπαντα $r < 0$. Η αλυσίδα συνεχίζει εκατέρωθεν επ' άπειρον.

Όπως βλέπουμε στο διάγραμμα Penrose–Carter (Σχήμα 4.2) η μέγιστη επέκταση παρουσιάζει επαναλαμβανόμενη δομή. Ξεκινώντας από μία ασυμπτωτικά επίπεδη εξωτερική περιοχή I_{n-1} ($r > r_+$), η διέλευση του ορίζοντα γεγονότων οδηγεί στην περιοχή II_{n-1} ($r_- < r < r_+$), όπου η r γίνεται χρονοειδής και η κίνηση προς μικρότερα r υποχρεωτική. Πέρα από τον ορίζοντα Cauchy, η r γίνεται ξανά χωροειδής και ο παρατηρητής στην περιοχή III_{n-1} μπορεί να αποφύγει τη χρονοειδή ιδιομορφία. Διέλευση μέσα από τον δακτύλιο οδηγεί σε μια νέα ασυμπτωτικά επίπεδη περιοχή με αρνητικό r , στην οποία εμφανίζονται κλειστές χρονοειδείς καμπύλες (closed timelike curves - CTCs). Τέλος, μια λευκή οπή συνδέει την επόμενη εξωτερική περιοχή I_n με την προηγούμενη I_{n-1} , και η αλυσίδα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον.

Η μέγιστη επέκταση είναι μαθηματική κατασκευή, όχι αστροφυσική πραγματικότητα. Σε μια φυσική βαρυτική κατάρρευση, δημιουργείται μόνο το εξωτερικό $r > r_+$ και ένα τμήμα του εσωτερικού. Ο ορίζοντας Cauchy r_- είναι ασταθής ως προς διαταραχές. Η ενέργεια των μικρών διακυμάνσεων ενισχύεται απείρως καθώς αυτές προσεγγίζουν τον r_- , όπως ανέδειξαν οι Poisson και Israel [43]. Έτσι, ο ορίζοντας Cauchy μετατρέπεται σε ισχυρή ιδιομορφία και οι περιοχές από την III και μετά δεν είναι προσβάσιμες. Αυτό το φυσικό όριο διασφαλίζει την αιτιοκρατία, καθώς η ύπαρξη διαπερατού ορίζοντα Cauchy θα σήμαινε ότι τα αρχικά δεδομένα δεν καθορίζουν μονοσήμαντα την εξέλιξη του χωροχρόνου. Επιπλέον, προστατεύει την αρχή της αιτιότητας, αποτρέποντας την είσοδο σε περιοχές όπου υπάρχουν κλειστές χρονοειδείς καμπύλες. Σύμφωνα με την Ισχυρή Εικασία της Κοσμικής Λογοκρισίας του Penrose, η φυσική χωροχρονική γεωμετρία δεν μπορεί να επεκταθεί πέρα από τον ορίζοντα Cauchy [10, 23].

4.2 Ο Χωρόχρονος Kerr–Newman (M, J, Q)

Η μετρική Kerr–Newman, που ανακαλύφθηκε από τον Newman και τους συνεργάτες του το 1965 [44] λίγο μετά την ανακάλυψη της λύσης Kerr, είναι η μοναδική γνωστή λύση στις συζευγμένες εξισώσεις Einstein–Maxwell που είναι ταυτόχρονα στάσιμη, αξονικά συμμετρική και ασυμπτωτικά επίπεδη. Περιγράφει μια απομονωμένη περιστρεφόμενη ηλεκτρικά φορτισμένη μελανή οπή. Είναι η πιο γενική από τις λύσεις που έχουμε δει: αναχτούμε τη Kerr για $Q = 0$, την Reissner–Nordström για $a = 0$, και τη Schwarzschild όταν

μηδενιστούν και τα δύο.

4.2.1 Γεωμετρική Δομή της Kerr–Newman

Σε συντεταγμένες Boyer–Lindquist (t, r, θ, ϕ) , η μετρική της λύσης Kerr–Newman έχει παρόμοια μορφή με αυτή της Kerr (Εξ. (4.5)) [17, 23]:

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{(2Mr - Q^2)2a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 \\ & + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2(2Mr - Q^2) \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (4.29)$$

όπου το ρ^2 παραμένει αμετάβλητο:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

ενώ η βοηθητική συνάρτηση $\Delta(r)$ παίρνει τη μορφή:

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2.$$

Ο όρος Q^2 προκύπτει από τη συνεισφορά του τανυστή ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπως και στη λύση Reissner–Nordström.

Οι ορίζοντες γεγονότων εντοπίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης $\Delta(r) = 0$:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (4.30)$$

Η δομή τους $r_- < r_+$ διατηρείται, με την διαφορά ότι τόσο η στροφορμή όσο και το φορτίο συνεισφέρουν στη μείωση της ακτίνας του εξωτερικού ορίζοντα και στην αύξηση της ακτίνας του εσωτερικού. Για την ύπαρξη πραγματικών λύσεων πρέπει:

$$M^2 \geq a^2 + Q^2.$$

Η ισότητα $M^2 = a^2 + Q^2$ αντιστοιχεί στην ακραία μελανή οπή, όπου οι δύο ορίζοντες ταυτίζονται σε $r_+ = r_- = M$ και η συνάρτηση Δ έχει διπλή ρίζα. Η ανισότητα $M^2 < a^2 + Q^2$

οδηγεί σε εξαφάνιση των οριζόντων και την εμφάνιση γυμνής ιδιομορφίας. Παρατηρούμε ότι η παρουσία του φορτίου επηρεάζει τις παραπάνω συνθήκες με παρόμοιο τρόπο όπως η στροφομορφία.

Οι επιφάνειες στατικού ορίου, όπου το χρονικό διάνυσμα Killing $\xi^{(t)\mu} = (\partial_t)^\mu$ γίνεται φωτοειδές, ορίζονται από τον μηδενισμό της συνιστώσας g_{tt} :

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} \right) = 0 \iff r^2 - 2Mr + Q^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0,$$

δίνοντας:

$$r_{S\pm}(\theta) = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.31)$$

Η περιοχή $r_+ < r < r_{S+}$ αποτελεί την εργόσφαιρα, εντός της οποίας κανένας παρατηρητής δεν δύναται να παραμείνει στάσιμος ως προς το άπειρο, λόγω της συμπαράσυρσης του χωροχρόνου. Η παρουσία του όρου Q^2 συστέλλει την έκταση της εργόσφαιρας συγκριτικά με την περίπτωση μελανής οπής Kerr με ίδιο a .

Το βαθμωτό Kretschmann υπολογίζεται ως [39]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \frac{8}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6} & \left[6M^2(r^6 - 15a^2r^4 \cos^2 \theta + 15a^4r^2 \cos^4 \theta - a^6 \cos^6 \theta) \right. \\ & - 12MQ^2r(r^4 - 10a^2r^2 \cos^2 \theta + 5a^4 \cos^4 \theta) \\ & \left. + Q^4(7r^4 - 34a^2r^2 \cos^2 \theta + 7a^4 \cos^4 \theta) \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Βλέπουμε ότι η γνήσια ιδιομορφία καμπυλότητας διατηρείται στην ίδια θέση με τη λύση Kerr:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0 \iff r = 0, \quad \theta = \pi/2,$$

διατηρώντας τη δακτυλιοειδή ιδιομορφία ακτίνας a στο ισημερινό επίπεδο. Η προσθήκη του φορτίου Q δεν μεταβάλλει τη θέση ούτε την τοπολογική δομή της, διότι ο όρος Q^2 εμφανίζεται μόνο στην Δ και όχι στον παράγοντα ρ^2 που την καθορίζει.

Συνεπώς, η αιτιακή και τοπολογική δομή της Kerr–Newman είναι ταυτόσημη με αυτή της Kerr: χρονοειδής δακτυλιοειδής ιδιομορφία, δυνατότητα διέλευσης προς περιοχή $r < 0$, ίδιο διάγραμμα Penrose–Carter. Διαφέρουν μόνο οι θέσεις των οριζόντων και του στατικού ορίου.

4.2.2 Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που συνοδεύει τη γεωμετρία Kerr–Newman περιγράφεται από το τετραδυναμικό [18, 40]:

$$A_\mu dx^\mu = -\frac{Qr}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi). \quad (4.33)$$

Οι δύο μη μηδενικές συνιστώσες είναι:

$$A_t = -\frac{Qr}{\rho^2}, \quad A_\phi = \frac{Qra \sin^2 \theta}{\rho^2}. \quad (4.34)$$

Η πρώτη A_t αντιστοιχεί σε ηλεκτροστατικό δυναμικό που ασυμπτωτικά, $r \rightarrow \infty$, προσεγγίζει το δυναμικό Coulomb:

$$A_t \longrightarrow -\frac{Q}{r} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.35)$$

ενώ η δεύτερη A_ϕ αντιστοιχεί στο διανυσματικό δυναμικό που οφείλεται στην περιστροφή της κατανομής φορτίου. Ασυμπτωτικά:

$$A_\phi \longrightarrow \frac{Qa \sin^2 \theta}{r} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (4.36)$$

δηλαδή έχει ακριβώς τη μορφή που αναμένεται για το πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου. Ο αντίστοιχος ταυστής Faraday $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, εκτός του αναμενόμενου ηλεκτροστατικού πεδίου F_{tr} , εμφανίζει επιπλέον τη μη μηδενική ηλεκτρική συνιστώσα $F_{t\theta}$, λόγω της γωνιακής εξάρτησης του A_t , καθώς και τις μαγνητικές συνιστώσες $F_{r\phi}$ και $F_{\theta\phi}$ που οφείλονται στην περιστροφή.

4.2.3 Μαγνητική Διπολική Ροπή και Γυρομαγνητικός Λόγος

Στον επίπεδο χωροχρόνο, ένα μαγνητικό δίπολο μ προσανατολισμένο κατά τον άξονα z παράγει διανυσματικό δυναμικό ⁷:

$$A_\phi = \frac{|\mu| \sin^2 \theta}{r} + \mathcal{O}(r^{-3}). \quad (4.37)$$

Συγκρίνοντας τις (4.36) και (4.37), προκύπτει ότι η μελανή οπή διαθέτει μαγνητική διπολική ροπή [2]

$$\boxed{\mu = Qa.} \quad (4.38)$$

Ο γυρομαγνητικός λόγος (παράγοντας g) ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu = g \cdot \frac{Q}{2M} \cdot J.$$

Με $J = Ma$ για τη λύση Kerr–Newman, έχουμε:

$$Qa = g \cdot \frac{Q}{2M} \cdot Ma = g \cdot \frac{Qa}{2} \implies \boxed{g = 2.} \quad (4.39)$$

Για ένα κλασικό περιστρεφόμενο σφαιρικό σώμα με ομοιόμορφη κατανομή μάζας και φορτίου, η αναμενόμενη τιμή είναι $g = 1$. Η τιμή $g = 2$, αντιθέτως, είναι η τιμή που προβλέπει η εξίσωση Dirac για ένα στοιχειώδες χβαντικό φερμιόνιο σπιν- $\frac{1}{2}$ με φορτίο $-e$,

$$\mu_e = g_e \cdot \frac{-e}{2m_e} \cdot \frac{\hbar}{2}, \quad g_e = 2. \quad (4.40)$$

Προκαλεί ιδιαίτερη εντύπωση το γεγονός πως μια καθαρά κλασική λύση των εξισώσεων Einstein–Maxwell οδηγεί στην ίδια τιμή g που προβλέπει η εξίσωση Dirac για στοιχειώδη φερμιόνια. Αυτή η σύμπτωση παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον Carter [42].

⁷Στη βιβλιογραφία του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού (π.χ. Jackson), το δυναμικό δίνεται ως $A_{\hat{\phi}} = \frac{\mu \sin \theta}{r^2}$. Η διαφορά προκύπτει επειδή εκεί χρησιμοποιείται η ορθοκανονική βάση $\hat{\phi}$, ενώ εδώ η βάση συντεταγμένων $d\phi$. Ασυμπτωτικά ($r \rightarrow \infty$), το μήκος του διανύσματος βάσης είναι $\sqrt{g_{\phi\phi}} \approx r \sin \theta$, οπότε η αντίστοιχη συνιστώσα συντεταγμένων είναι $A_\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}} A_{\hat{\phi}} = \frac{\mu \sin^2 \theta}{r}$.

Κεφάλαιο 5

Θεωρία Διαταραχών Μελανών Οπών

Στα προηγούμενα κεφάλαια επικεντρωθήκαμε στις ακριβείς λύσεις των εξισώσεων Einstein. Εντούτοις, σε αστροφυσικό επίπεδο, οι μελανές οπές συμμετέχουν σε δυναμικές διαδικασίες, όπως η βαρυτική κατάρρευση, η προσαύξηση μάζας και οι συγχωνεύσεις διπλών συστημάτων. Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε την απόκριση μιας γεωμετρίας υποβάθρου όταν υπόκειται σε μικρές εξωτερικές διαταραχές.

5.1 Γραμμικοποιημένη Βαρύτητα

Για τη μελέτη των διαταραχών γύρω από μια μελανή οπή, θεωρούμε ότι ο μετρικός τανυστής του χωροχρόνου αναλύεται στη μετρική ενός στατικού υποβάθρου $\bar{g}_{\mu\nu}$ και σε ένα πεδίο διαταραχής $h_{\mu\nu}$. Οι συνιστώσες της διαταραχής είναι επαρκώς μικρές, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, επιτρέποντας τη διατήρηση μόνο των γραμμικών όρων στο ανάπτυγμα Taylor. Η συνολική μετρική γράφεται ως [23, 45]:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

Οι δείκτες του τανυστή $h_{\mu\nu}$ ανυψώνονται και υποβιβάζονται με τη χρήση της μετρικής υποβάθρου $\bar{g}_{\mu\nu}$.

Η αντίστροφη μετρική προκύπτει από την απαιτούμενη συνθήκη ορθογωνιότητας $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} =$

δ^ν_μ . Αναπτύσσοντας την $g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ και αγνοώντας όρους τάξης $\mathcal{O}(h^2)$, λαμβάνουμε:

$$(\bar{g}_{\mu\rho} + h_{\mu\rho})(\bar{g}^{\rho\nu} + \delta g^{\rho\nu}) = \delta^\nu_\mu \implies \delta^\nu_\mu + \bar{g}_{\mu\rho}\delta g^{\rho\nu} + h_{\mu\rho}\bar{g}^{\rho\nu} = \delta^\nu_\mu \quad (5.2)$$

Λύνοντας ως προς τη διαταραχή της αντίστροφης μετρικής, βρίσκουμε $\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$. Επομένως [45]:

$$g^{\mu\nu} \simeq \bar{g}^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \quad (5.3)$$

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των γραμμικών διορθώσεων στα σύμβολα Christoffel, $\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \bar{\Gamma}^\rho_{\mu\nu}$. Η διαφορά δύο συνοχών αποτελεί γνήσιο τανυστή. Εκφράζοντας τις μερικές παραγώγους του $h_{\mu\nu}$ μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου $\bar{\nabla}$ (η οποία ορίζεται αποκλειστικά ως προς τη μετρική υποβάθρου $\bar{g}_{\mu\nu}$), η μεταβολή προκύπτει [25]:

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\rho\lambda}(\bar{\nabla}_\mu h_{\nu\lambda} + \bar{\nabla}_\nu h_{\mu\lambda} - \bar{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu}) \quad (5.4)$$

Η γραμμικοποίηση του τανυστή Ricci, $R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}$, προκύπτει από τον ορισμό του (Εξ. (2.8)). Κρατώντας μόνο τους γραμμικούς όρους ως προς $\delta\Gamma$:

$$\delta R_{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} \quad (5.5)$$

Αντικαθιστώντας τη διαταραχή των συμβόλων Christoffel στην παραπάνω εξίσωση, έχουμε την ακριβή μορφή [25]:

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\mu h^\rho_\nu + \bar{\nabla}_\rho \bar{\nabla}_\nu h^\rho_\mu - \bar{\square} h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_\nu \bar{\nabla}_\mu h) \quad (5.6)$$

όπου $h = \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ το ίχνος της διαταραχής και $\bar{\square} = \bar{\nabla}^\rho \bar{\nabla}_\rho$ ο τελεστής d'Alembert του υποβάθρου. Για να απλοποιήσουμε την (5.6) χρειαζόμαστε τον μεταθέτη¹

$$[\bar{\nabla}_\rho, \bar{\nabla}_\mu] h^\rho_\nu = \bar{R}^\rho_{\sigma\rho\mu} h^\sigma_\nu - \bar{R}^\sigma_{\nu\rho\mu} h^\rho_\sigma, \quad (5.7)$$

από όπου προκύπτει ότι η εξίσωση για το $\delta R_{\mu\nu}$ δεν εξαρτάται μόνο από τις διαταραχές

¹Η εναλλαγή αυτή είναι απαραίτητη ώστε να εμφανιστεί η απόκλιση της διαταραχής ($\bar{\nabla}_\alpha h^\alpha_\nu$), επιτρέποντάς μας στη συνέχεια να εφαρμόσουμε μια συνθήκη βαθμίδας και να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις πεδίου.

$h_{\mu\nu}$, αλλά και από την καμπυλότητα του υποβάθρου μέσω του τανυστή Riemann.

Για τη γεωμετρία Schwarzschild, το υπόβαθρο αποτελεί λύση κενού, άρα $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$. Κατά συνέπεια, οι εξισώσεις πεδίου του Einstein για τη διαταραχή στο κενό ($\delta G_{\mu\nu} = 0$) ανάγονται στον μηδενισμό της γραμμικής διόρθωσης του τανυστή Ricci:

$$\delta R_{\mu\nu} = 0 \quad (5.8)$$

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι οι λύσεις για το $h_{\mu\nu}$ δεν είναι μοναδικές, λόγω της ελευθερίας επιλογής συντεταγμένων. Υπό έναν απειροστό μετασχηματισμό της μορφής $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, η διαταραχή της μετρικής μετασχηματίζεται ως εξής [25]:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \bar{\nabla}_{\mu}\xi_{\nu} - \bar{\nabla}_{\nu}\xi_{\mu} \quad (5.9)$$

Εκμεταλλευόμενοι αυτή την ελευθερία, μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα το διάνυσμα ξ^{μ} ώστε να μηδενίσουμε συγκεκριμένες συνιστώσες της $h_{\mu\nu}$ (επιλογή βαθμίδας), απλοποιώντας έτσι το πρόβλημα.

5.2 Βαθμωτές Διαταραχές

Θα μελετήσουμε τη διάδοση ενός βαθμωτού πεδίου χωρίς μάζα σε σταθερό υπόβαθρο Schwarzschild. Γενικά η δράση σε χώρο με μετρική $g_{\mu\nu}$ δίνεται από τη σχέση:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\Phi \partial_{\nu}\Phi, \quad (5.10)$$

όπου $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Θεωρούμε μια απειροστή μεταβολή του πεδίου $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$. Η μεταβολή της δράσης

είναι:

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [(\partial_\mu \delta\Phi)(\partial_\nu \Phi) + (\partial_\mu \Phi)(\partial_\nu \delta\Phi)] \\
&= - \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \Phi)(\partial_\nu \delta\Phi) \\
&= - \int [d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \delta\Phi) - \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) \delta\Phi] \\
&= - \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \delta\Phi) + \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) \delta\Phi.
\end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος αποτελεί ολική απόκλιση και μέσω του Θεωρήματος Gauss ανάγεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο του χωροχρόνου και μηδενίζεται λόγω συνοριακών συνθηκών ($\delta\Phi = 0$). Επομένως

$$\delta S = \int d^4x \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) \delta\Phi. \quad (5.11)$$

Για να είναι η δράση στάσιμη για οποιαδήποτε αυθαίρετη μεταβολή $\delta\Phi$, πρέπει

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) = 0,$$

ή

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) = 0. \quad (5.12)$$

Αυτή είναι η εξίσωση Klein–Gordon που ισοδύναμα γράφεται

$$\square\Phi = 0. \quad (5.13)$$

Στο υπόβαθρο Schwarzschild, το γραμμικό στοιχείο έχει τη μορφή (Εξ. (3.7)):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.14)$$

όπου

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (5.15)$$

Τα μη μηδενικά στοιχεία της αντίστροφης μετρικής είναι:

$$g^{tt} = -\frac{1}{f(r)}, \quad g^{rr} = f(r), \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.16)$$

από όπου προκύπτει $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Klein–Gordon (5.12) παίρνουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\partial_t(\sqrt{-g} g^{tt} \partial_t \Phi) + \partial_r(\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r \Phi) + \partial_\theta(\sqrt{-g} g^{\theta\theta} \partial_\theta \Phi) + \partial_\phi(\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \partial_\phi \Phi)] = 0. \quad (5.17)$$

Υπολογίζουμε τους όρους ξεχωριστά.

$$\begin{aligned} \partial_t(\sqrt{-g} g^{tt} \partial_t \Phi) &= \partial_t \left(r^2 \sin \theta \left(-\frac{1}{f(r)} \right) \partial_t \Phi \right) = -\frac{r^2 \sin \theta}{f(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ \partial_r(\sqrt{-g} g^{rr} \partial_r \Phi) &= \partial_r(r^2 \sin \theta f(r) \partial_r \Phi) = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \partial_\theta(\sqrt{-g} g^{\theta\theta} \partial_\theta \Phi) &= \partial_\theta \left(r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2} \partial_\theta \Phi \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right), \\ \partial_\phi(\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \partial_\phi \Phi) &= \partial_\phi \left(r^2 \sin \theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi \Phi \right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \end{aligned}$$

και η (5.17) γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[-\frac{r^2 \sin \theta}{f(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right] = 0 \\ \Rightarrow &-\frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Η μορφή της παραπάνω εξίσωσης οφείλεται στη στατικότητα και τη σφαιρική συμμετρία του χωροχρόνου. Το γεγονός αυτό επιτρέπει τον πλήρη διαχωρισμό των μεταβλητών και οδηγεί σε λύσεις της μορφής

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} R(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (5.19)$$

όπου $Y_{\ell m}$ οι σφαιρικές αρμονικές.

Επομένως παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{-i\omega t} R Y_{\ell m}, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = e^{-i\omega t} Y_{\ell m} \frac{dR}{dr}, \quad (5.21)$$

ενώ οι σφαιρικές αρμονικές ικανοποιούν την εξίσωση ιδιοτιμών

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell m}. \quad (5.22)$$

Με αντικατάσταση στην (5.18) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(r)} \omega^2 e^{-i\omega t} R Y_{\ell m} + \frac{1}{r^2} e^{-i\omega t} Y_{\ell m} \frac{d}{dr} \left(r^2 f(r) \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} e^{-i\omega t} R [-\ell(\ell + 1)] Y_{\ell m} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\omega^2}{f(r)} R + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f(r) \frac{dR}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \ell(\ell + 1) R &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 f(r) \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2 r^2}{f(r)} - \ell(\ell + 1) \right] R &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Θέτουμε $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, συνεπώς

$$\frac{dR}{dr} = \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \quad \text{και} \quad r^2 f \frac{dR}{dr} = r f u' - f u,$$

ενώ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^2 f \frac{dR}{dr} \right) &= \frac{d}{dr} (r f u') - \frac{d}{dr} (f u) \\ &= f u' + r f' u' + r f u'' - f' u - f u' \\ &= r f u'' + r f' u' - f' u. \end{aligned}$$

Οπότε η (5.23) γράφεται

$$r f u'' + r f' u' - f' u + \left[\frac{\omega^2 r^2}{f} - \ell(\ell + 1) \right] \frac{u}{r} = 0$$

$$\Rightarrow fu'' + f'u' - \frac{f'}{r}u + \left[\frac{\omega^2}{f} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u = 0,$$

και τελικά

$$\frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{du}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2}{f(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{f'(r)}{r} \right] u = 0. \quad (5.24)$$

Η εξ. (5.24) παρουσιάζει ιδιομορφία στον ορίζοντα $r_s = 2M$, την οποία για να απαλείψουμε εισάγουμε τη συντεταγμένη «χελώνας»

$$r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (5.25)$$

Αυτή ορίζεται μέσω της σχέσης

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)} \Rightarrow \frac{d}{dr_*} = f(r) \frac{d}{dr}. \quad (5.26)$$

Συνεπώς

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dr_*} \frac{dr_*}{dr} = \frac{1}{f(r)} \frac{du}{dr_*},$$

και

$$\frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{du}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \frac{du}{dr_*} = \frac{1}{f(r)} \frac{d^2 u}{dr_*^2},$$

και η (5.24) παίρνει την τελική μορφή

$$\frac{d^2 u}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - f(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} \right) \right] u = 0,$$

ή

$$\frac{d^2 u}{dr_*^2} + \left[\omega^2 - f(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right) \right] u = 0. \quad (5.27)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι αντίστοιχη της μονοδιάστατης εξίσωσης Schrödinger. Η συντεταγμένη r_* απεικονίζει το ημιάπειρο $r \in (2M, \infty)$ σε ολόκληρη την ευθεία $r_* \in (-\infty, \infty)$.

Στην βιβλιογραφία είναι γνωστή ως κύρια εξίσωση (master equation). Μπορούμε να τη γράψουμε

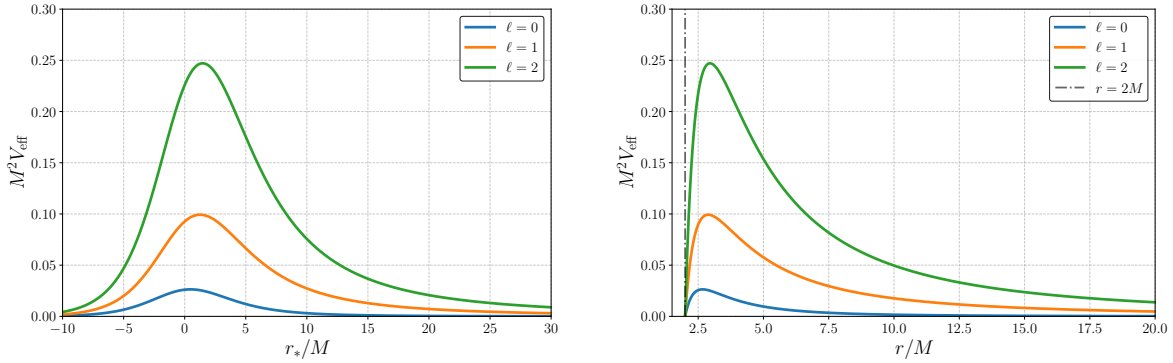
$$\frac{d^2 u}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{\text{eff}}(r)] u = 0, \quad (5.28)$$

όπου

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right), \quad (5.29)$$

το ενεργό δυναμικό². Παρότι το V_{eff} γράφεται ως συνάρτηση του r , θεωρείται ως συνάρτηση του r_* μέσω της Εξ. (5.25).

Η συμπεριφορά του δυναμικού της Εξ. (5.29) φαίνεται στο Σχήμα 5.1. Στον ορίζοντα γεγονότων $r \rightarrow 2M \Rightarrow r_* \rightarrow -\infty$ καθώς και στο χωρικό άπειρο $r \rightarrow \infty \Rightarrow r_* \rightarrow \infty$, το δυναμικό μηδενίζεται $V_{\text{eff}} \rightarrow 0$. Η (5.28) τότε ανάγεται στην εξίσωση επίπεδου κύματος $\frac{d^2 u}{dr_*^2} + \omega^2 u = 0$ με λύσεις $u \sim e^{\pm i\omega r_*}$ που περιγράφουν εισερχόμενα και εξερχόμενα κύματα ως προς τον ορίζοντα. Το κύμα διαδίδεται ελεύθερα τόσο στο άπειρο, όσο και στον ορίζοντα γεγονότων, όπου βέβαια δεν μπορεί να αναδύεται ακτινοβολία, άρα $u \sim e^{-i\omega r_*}$. Σκέδαση υφίσταται στην ενδιάμεση περιοχή, όπου το φράγμα δυναμικού είναι διάφορο του μηδενός.



(α) Συνάρτησι της συντεταγμένης «χελώνας» r_*/M .

(β) Συνάρτησι της ακτινικής συντεταγμένης r/M .

Σχήμα 5.1: Το αδιάστατο ενεργό δυναμικό $M^2 V_{\text{eff}}$ της Εξ. (5.29) για τους τρεις χαμηλότερους πολυπολικούς αριθμούς $\ell = 0, 1, 2$. (α) Η χρήση της r_* είναι μαθηματικά βέλτιστη για την εξίσωση διάδοσης, μετατρέποντας το πρόβλημα σε εξίσωση τύπου Schrödinger στο $(-\infty, +\infty)$. (β) Η χρήση της r καθιστά σαφή τη γεωμετρική θέση του δυναμικού. Σε κάθε περίπτωση, το μέγιστο εντοπίζεται κοντά στη φωτονική σφαίρα ($r \approx 3M$) και αυξάνεται με το ℓ λόγω του φυγόκεντρου όρου. Για τη μονοπολική συνεισφορά ($\ell = 0$), το φράγμα οφείλεται αποκλειστικά στην σχετικιστική συμβολή $2M/r^3$.

Αφού επιλύσουμε την (5.28) για δεδομένα ω, ℓ μπορούμε να ανακτήσουμε τη μερική

²Ονομάζεται δυναμικό καταχρηστικά λόγω αναλογίας με την εξίσωση Schrödinger. Στην (5.28) το V_{eff} αντιπροσωπεύει ένα τετράγωνο συχνότητας σκέδασης, γι' αυτό και έχει διαστάσεις $[M^{-2}]$.

λύση του βαθμωτού πεδίου από την Εξ. (5.19)

$$\Phi_{\omega\ell m}(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} \frac{u_{\omega\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (5.30)$$

Η γενική λύση για το βαθμωτό πεδίο προκύπτει ως η γραμμική υπέρθεση:

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega C_{\omega\ell m} e^{-i\omega t} \frac{u_{\omega\ell}(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (5.31)$$

όπου οι συντελεστές $C_{\omega\ell m}$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

5.3 Βαρυτικές Διαταραχές της μετρικής Schwarzschild

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του υποβάθρου Schwarzschild, μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο διαταραχής $h_{\mu\nu}$ της Εξ. (5.1) σε τανυστικές σφαιρικές αρμονικές. Έτσι διαχωρίζουμε την εξάρτηση των γωνιακών μεταβλητών από τις ακτινικές και χρονικές. Ανάλογα με τη συμπεριφορά τους κάτω από τον μετασχηματισμό της χωρικής αναστροφής $(\theta, \phi) \rightarrow (\pi - \theta, \pi + \phi)$, οι διαταραχές διαχωρίζονται σε περιττής (odd parity) [26] και άρτιας ομοτιμίας (even parity)³ [27]. Ειδικότερα, οι άρτιες (ή πολικές) διαταραχές μετασχηματίζονται με πρόσημο $(-1)^\ell$, ενώ οι περιττές (ή αξονικές) με $(-1)^{\ell+1}$. Καθώς το υπόβαθρο είναι σφαιρικά συμμετρικό, η ομοτιμία διατηρείται και οι δύο αυτές οικογένειες δεν αναμειγνύονται στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις, επιτρέποντας την ανεξάρτητη μελέτη τους. Η επιλογή της βαθμίδας Regge-Wheeler οδηγεί στην αποσύζευξη του συστήματος των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Μετά την ανάλυση Fourier ως προς τη χρονική συντεταγμένη, $h_{\mu\nu} \propto e^{-i\omega t}$, το πρόβλημα ανάγεται σε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης όπως και στην περίπτωση του βαθμωτού πεδίου (Εξ. (5.28)) [19, 45]

$$\frac{d^2}{dr_*^2} \Psi(r_*) + [\omega^2 - V_\ell(r)] \Psi(r_*) = 0. \quad (5.32)$$

³Στη βιβλιογραφία, οι όροι «άρτια» και «περιττή» προσδιορίζουν τη συμπεριφορά της διαταραχής υπό μετασχηματισμό ομοτιμίας σε αντιστοιχία με τις βαθμωτές σφαιρικές αρμονικές $Y_{\ell m}$, και όχι το απόλυτο μαθηματικό πρόσημο, το οποίο εναλλάσσεται με το ℓ . Για τον λόγο αυτό, προτιμάται η χρήση των όρων «πολική» και «αξονική».

5.3.1 Η Εξίσωση Regge–Wheeler

Οι αξονικές διαταραχές, οι οποίες χαρακτηρίζονται από ομοτιμία $(-1)^{\ell+1}$, περιγράφουν διαταραχές με περιστροφικό χαρακτήρα. Στη βαθμίδα Regge–Wheeler, για κάθε ζεύγος (ℓ, m) παραμένουν τέσσερις μη μηδενικές συνιστώσες της μετρικής διαταραχής $h_{\mu\nu}$ (οι $h_{t\phi}, h_{t\theta}, h_{r\phi}, h_{r\theta}$). Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του υποβάθρου, η μελέτη μπορεί να περιοριστεί στην αξονοσυμμετρική περίπτωση ($m = 0$), όπου μη μηδενικές παραμένουν μόνο οι $h_{t\phi}$ και $h_{r\phi}$ ⁴.

Όπως έδειξαν οι T. Regge και J. A. Wheeler, η πληροφορία κάθε αξονικού πολυπόλου μπορεί να εκφραστεί μέσω μίας μεταβλητής, της συνάρτησης $Q_{\ell m}(t, r)$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την κυματική εξίσωση (5.32):

$$\frac{d^2}{dr_*^2} Q_{\ell m} + [\omega^2 - V_\ell^{\text{RW}}(r)] Q_{\ell m} = 0, \quad (5.33)$$

όπου r_* η συντεταγμένη χελώνας (Εξ. (5.25)) και το ενεργό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V_\ell^{\text{RW}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right]. \quad (5.34)$$

Το δυναμικό αυτό παρουσιάζει ομοιότητες με το αντίστοιχο βαθμωτό (Εξ. (5.29)). Η διαφορά τους εντοπίζεται στον σχετικιστικό όρο, ο οποίος στην αξονική περίπτωση ισούται με $-6M/r^3$ αντί για $+2M/r^3$. Η διαφοροποίηση αυτή οφείλεται στο σπιν του πεδίου, καθώς αφορά βαρυτική διαταραχή (spin-2) και όχι βαθμωτό πεδίο (spin-0). Ο όρος $-6M/r^3$ ελαττώνει το μέγιστο ύψος του φράγματος δυναμικού συγκριτικά με τη βαθμωτή περίπτωση.

Για τις χαμηλότερες πολυπολικές ροπές $\ell = 0$ (μονόπολο) και $\ell = 1$ (δίπολο) δεν υφίστανται διαδιδόμενα κύματα. Η περίπτωση $\ell = 0$ αντιστοιχεί σε στατική μεταβολή της μάζας της μελανής οπής Schwarzschild, ενώ η $\ell = 1$ περιγράφει μια γραμμικοποιημένη διαταραχή της στροφορμής, δηλαδή μια μετάβαση προς τη γεωμετρία Kerr. Επομένως, η μελέτη των διαδιδόμενων αξονικών διαταραχών περιορίζεται σε τιμές $\ell \geq 2$. [19, 26, 45]

⁴Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του υποβάθρου, η ακτινική εξέλιξη των διαταραχών είναι πλήρως εκφυλισμένη ως προς τον αζιμουθιακό αριθμό m . Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε $m = 0$ (αξονοσυμμετρική διαταραχή) για να απλοποιήσουμε τις εξισώσεις, καθώς τα εξαγόμενα αποτελέσματα ισχύουν για κάθε m .

5.3.2 Η Εξίσωση Zerilli

Οι πολικές διαταραχές, με ομοτιμία $(-1)^\ell$, περιλαμβάνουν παραμορφώσεις της μετρικής που επηρεάζουν τις χρονικές, ακτινικές και γωνιακές συνιστώσες. Στη βαθμίδα Regge–Wheeler παραμένουν επτά συνιστώσες του $h_{\mu\nu}$. Η αναγωγή τους σε μία ενιαία εξίσωση τύπου Schrödinger επιτεύχθηκε από τον F. J. Zerilli, ο οποίος εισήγαγε κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των μετρικών συνιστωσών και απέδειξε ότι ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d^2}{dr_*^2} Z_{\ell m} + [\omega^2 - V_\ell^Z(r)] Z_{\ell m} = 0. \quad (5.35)$$

Το αντίστοιχο ενεργό δυναμικό εκφράζεται, με τη βοήθεια της παραμέτρου $\lambda \equiv \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{2}$, υπό τη μορφή

$$V_\ell^Z(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2\lambda^2(\lambda+1)r^3 + 6\lambda^2Mr^2 + 18\lambda M^2r + 18M^3}{r^3(\lambda r + 3M)^2}. \quad (5.36)$$

Η παρουσία του παράγοντα $(\lambda r + 3M)^2$ στον παρονομαστή συνεπάγεται ότι το $V_\ell^Z(r)$ δεν μπορεί να παρασταθεί ως γινόμενο μιας συνάρτησης $f(r)$ με πολώνυμο ως προς $1/r$. Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται για $r > 0$ όταν $\ell \geq 2$, καθώς ισχύει $\lambda > 0$. [19, 27, 45]

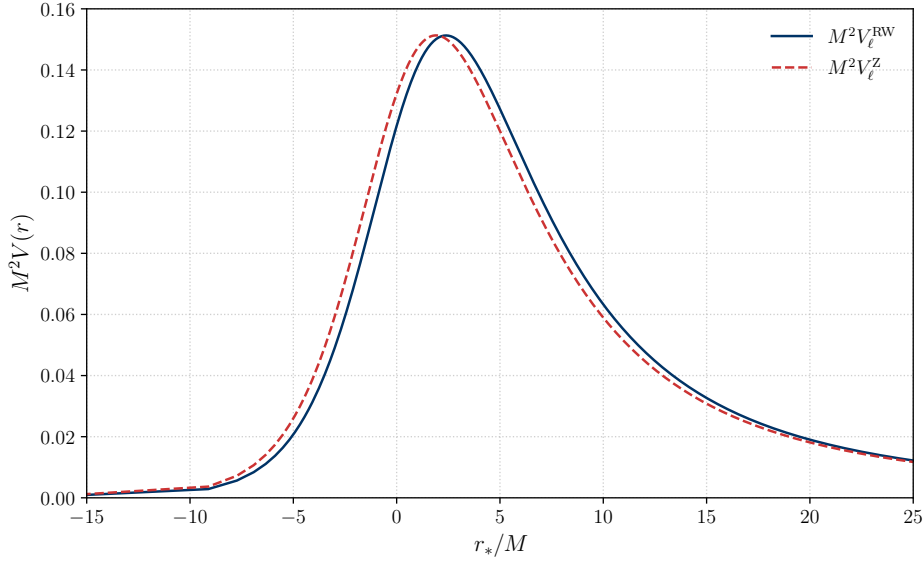
5.3.3 Ισοφασματικότητα

Οι Εξ. (5.34) και (5.36) περιγράφουν διαφορετικά δυναμικά. Το δυναμικό Regge–Wheeler έχει τη μορφή απλού φράγματος, ενώ το δυναμικό Zerilli περιλαμβάνει πρόσθετο αλγεβρικό όρο στον παρονομαστή, παρουσιάζοντας διαφορετική θέση και τιμή μεγίστου. Λόγω αυτής της διαφοράς, η αξονική και η πολική πόλωση του βαρυτικού πεδίου αναμένεται αρχικά να οδηγούν σε διαφορετικά φάσματα χαρακτηριστικών συχνοτήτων.

Ο S. Chandrasekhar [46] απέδειξε ότι τα δύο δυναμικά V_ℓ^{RW} και V_ℓ^Z συνδέονται μέσω μετασχηματισμού Darboux. Ο μετασχηματισμός αυτός επιτρέπει την έκφραση των λύσεων της μίας εξίσωσης μέσω ενός διαφορικού τελεστή πρώτης τάξης που δρα στις λύσεις της άλλης. Συγκεκριμένα, ορίζεται ένα υπερδυναμικό $W(r)$ και μια σταθερά β , τέτοια ώστε

$$V_\ell^{\text{RW}, Z} = W^2 \pm \frac{dW}{dr_*} + \beta, \quad (5.37)$$

όπου η σταθερά β εξαρτάται αποκλειστικά από τα ℓ και M . Βάσει της Εξ. (5.37), οι δύο εξισώσεις έχουν τους ίδιους συντελεστές ανάκλασης και διέλευσης για κάθε πραγματική συχνότητα ω , καθώς και ταυτόσημο φάσμα ημικανονικών τρόπων. Επομένως, οι χαρακτηριστικές συχνότητες ταλάντωσης μιας μελανής οπής Schwarzschild ταυτίζονται για αξονικές και πολικές διαταραχές. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ισοφασματικότητα (isospectrality) [47].



Σχήμα 5.2: Τα ενεργά δυναμικά $V_\ell^{RW}(r)$ (συμπαγής γραμμή) και $V_\ell^Z(r)$ (διακεκομμένη γραμμή) για $\ell = 2$, συναρτήσει της συντεταγμένης χελώνας r_* . Τα δυναμικά διαφέρουν ως προς την αναλυτική μορφή και τα χαρακτηριστικά του μεγίστου τους. Λόγω της ισοφασματικότητας, οι αξονικές και οι πολικές πολώσεις των βαρυτικών κυμάτων από μελανή οπή Schwarzschild χαρακτηρίζονται από τις ίδιες συχνότητες ringdown.

Ο υπολογισμός αυτών των συχνοτήτων στο στάδιο της απόσβεσης (ringdown) έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς η ακριβής πρόβλεψή τους αποτελεί βασικό κριτήριο ελέγχου της Γενικής Σχετικότητας. Τα δύο δυναμικά συγκρίνονται στο Σχήμα 5.2.

5.4 Ημικανονικοί τρόποι (Quasinormal Modes–QNMs)

Έχοντας αναγάγει τις εξισώσεις των βαρυτικών διαταραχών του υποβάθρου Schwarzschild σε δύο ανεξάρτητες κυματικές εξισώσεις της μορφής (5.32), το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός του φάσματός τους. Όταν μια μελανή οπή διεγείρεται (λόγω συγχώνευσης ενός διπλού συστήματος ή βαρυτικής κατάρρευσης), η απόκρισή της χαρακτηρίζεται από

συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης. Η ταλάντωση αυτή διαρκεί μέχρι η ενέργεια της διαταραχής να ακτινοβοληθεί στο χωρικό άπειρο ή να απορροφηθεί από τον ορίζοντα γεγονότων.

Αυτές οι χαρακτηριστικές συχνότητες ονομάζονται ημικανονικοί τρόποι (quasinormal modes – QNMs). Εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παραμέτρους της μελανής οπής (τη μάζα και τη στροφορμή) και είναι ανεξάρτητες από τα χαρακτηριστικά της αρχικής διέγερσης.

Μιγαδικότητα των ιδιοσυχνοτήτων

Σε κλειστά προβλήματα ιδιοτιμών, οι ιδιοσυχνότητες είναι πραγματικές λόγω διατήρησης της ενέργειας. Αντιθέτως, στο υπόβαθρο της μελανής οπής, το ενεργό δυναμικό $V(r_*)$ μηδενίζεται στα δύο ασυμπτωτικά άκρα, τον ορίζοντα γεγονότων ($r_* \rightarrow -\infty$) και το χωρικό άπειρο ($r_* \rightarrow +\infty$). Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα είναι ανοικτό, καθώς τα κύματα της διαταραχής μπορούν να διαφύγουν ελεύθερα προς αυτές τις δύο κατευθύνσεις.

Η απώλεια ενέργειας συνεπάγεται την απόσβεση των ταλαντώσεων. Αν θεωρήσουμε ότι η χρονική εξάρτηση της κυματικής συνάρτησης έχει τη μορφή $\Psi(t, r_*) = e^{-i\omega t} \psi(r_*)$, η απαίτηση για εκθετική απόσβεση ως προς τον χρόνο επιβάλλει στη συχνότητα ω να είναι μιγαδική, με αρνητικό φανταστικό μέρος:

$$\omega = \omega_R - i\omega_I, \quad \omega_R, \omega_I > 0. \quad (5.38)$$

Το ω_R ταυτίζεται με τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης, ενώ το ω_I καθορίζει τον ρυθμό απόσβεσης και αντιστοιχεί στον αντίστροφο χρόνο ζωής $\tau = 1/\omega_I$. Η μιγαδική φύση της ω εκφράζει τη φθίνουσα χρονική εξέλιξη της διαταραχής λόγω απώλειας ενέργειας από το σύστημα.

Όπως είδαμε, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του υποβάθρου Schwarzschild, η γωνιακή εξάρτηση των διαταραχών, εκφρασμένη μέσω βαθμωτών ή τανυστικών σφαιρικών αρμονικών, διαχωρίζεται πλήρως. Η συνεισφορά του γωνιακού τμήματος ενσωματώνεται στο ενεργό δυναμικό $V(r_*)$ αποκλειστικά μέσω του πολυπολικού δείκτη ℓ . Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση της μονοδιάστατης ακτινικής εξίσωσης (5.32) για την κυματοσυνάρτηση $\Psi(t, r_*)$ [48, 49].

5.4.1 Οριακές συνθήκες

Ο καθορισμός του προβλήματος ιδιοτιμών προϋποθέτει την επιβολή φυσικά αποδεκτών οριακών συνθηκών. Στα ασυμπτωτικά όρια, το ενεργό δυναμικό μηδενίζεται (εκθετικά κοντά στον ορίζοντα και ως $1/r_*^2$ στο άπειρο), οπότε η Εξ. (5.32) ανάγεται στην

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + \omega^2\psi = 0, \quad |r_*| \rightarrow \infty, \quad (5.39)$$

με ασυμπτωτικές λύσεις της μορφής $e^{\pm i\omega r_*}$.

Λόγω της αιτιακής δομής της μελανής οπής, επιβάλλουμε αμιγώς εισερχόμενα κύματα στον ορίζοντα γεγονότων ($r_* \rightarrow -\infty$) και αμιγώς εξερχόμενα κύματα στο χωρικό άπειρο ($r_* \rightarrow +\infty$):

$$\Psi(t, r_*) \sim e^{-i\omega(t+r_*)}, \quad r_* \rightarrow -\infty, \quad (5.40)$$

$$\Psi(t, r_*) \sim e^{-i\omega(t-r_*)}, \quad r_* \rightarrow +\infty. \quad (5.41)$$

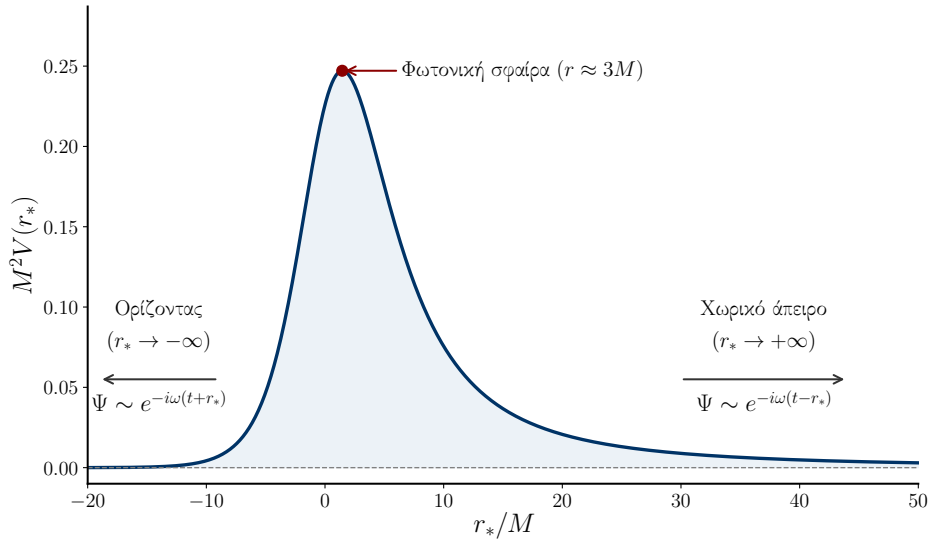
Σε αντίθεση με τα συνήθη ερμιτιανά προβλήματα Sturm–Liouville, το παρόν πρόβλημα είναι μη αυτοσυζυγές. Οι ιδιοσυχνότητες είναι μιγαδικές, $\omega = \omega_R - i\omega_I$, με $\omega_I > 0$ για αποσβεννύμενες διαταραχές. Αντικαθιστώντας στην ασυμπτωτική λύση του χωρικού απείρου, λαμβάνουμε:

$$\Psi(t, r_*) \sim e^{-i\omega_R(t-r_*)} e^{-\omega_I t} e^{\omega_I r_*}. \quad (5.42)$$

Ενώ ο όρος $e^{-\omega_I t}$ περιγράφει τη χρονική απόσβεση, ο παράγοντας $e^{\omega_I r_*}$ οδηγεί σε εκθετική απόκλιση της κυματοσυνάρτησης για $r_* \rightarrow +\infty$. Ανάλογη απόκλιση εμφανίζεται και στο όριο $r_* \rightarrow -\infty$. Επομένως, οι ιδιοσυναρτήσεις δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες ($\psi \notin L^2$).

Ο προσδιορισμός των QNMs ανάγεται στην εύρεση των μιγαδικών συχνοτήτων ω που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις οριακές συνθήκες στα δύο ασυμπτωτικά όρια (Σχήμα 5.3). Υποθέτοντας την ικανοποίηση της συνθήκης στον ορίζοντα, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της χωρικής κυματοσυνάρτησης στο άπειρο ($r_* \rightarrow +\infty$) δίνεται από τη γραμμική υπέρθεση:

$$\psi(r_*) \sim A_{\text{in}}(\omega) e^{-i\omega r_*} + A_{\text{out}}(\omega) e^{+i\omega r_*}. \quad (5.43)$$



Σχήμα 5.3: Το ενεργό δυναμικό $V(r_*)$ των διαταραχών Schwarzschild. Το δυναμικό μεγιστοποιείται στη φωτονική σφαίρα ($r \approx 3M$) και μηδενίζεται στα ασυμπτωτικά όρια. Στον ορίζοντα ($r_* \rightarrow -\infty$) επιβάλλονται αμιγώς εισερχόμενες λύσεις, $\Psi \sim e^{-i\omega(t+r_*)}$, και στο χωρικό άπειρο ($r_* \rightarrow +\infty$) αμιγώς εξερχόμενες, $\Psi \sim e^{-i\omega(t-r_*)}$. Ο μη κανονικοποιήσιμος χαρακτήρας των οριακών συνθηκών καθιστά το πρόβλημα μη ερμιτιανό, οδηγώντας σε μιγαδικές ιδιοτιμές ω .

Η επιβολή της συνθήκης αμιγώς εξερχόμενων κυμάτων στο χωρικό άπειρο απαιτεί τον μηδενισμό του πλάτους του εισερχόμενου κύματος:

$$A_{\text{in}}(\omega) = 0. \quad (5.44)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τη συνθήκη κβάντωσης του συστήματος. Δεδομένου ότι η $A_{\text{in}}(\omega)$ είναι αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας, οι ρίζες της ορίζουν ένα διακριτό φάσμα μιγαδικών ιδιοτιμών $\{\omega_n\}$ για κάθε πολυπολικό δείκτη ℓ . Το φάσμα δεικτοδοτείται από τον δείκτη υπερτόνου (overtone number) $n = 0, 1, 2, \dots$, με την κατάσταση $n = 0$ (θεμελιώδης τρόπος) να παρουσιάζει τον μικρότερο ρυθμό απόσβεσης [45, 48].

5.4.2 Υπολογισμός με την Προσέγγιση WKB

Μια πολύ χρήσιμη ημιαναλυτική μέθοδος για να βρούμε τις μιγαδικές ιδιοσυχνότητες των μελανών οπών είναι η προσέγγιση WKB πρώτης τάξης, η οποία βασίζεται στη δουλειά των Schutz και Will [50]

Για την περίπτωση του βαθμωτού πεδίου, η κύρια εξίσωση είναι η (Εξ. (5.28)):

$$\frac{d^2 u}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_{\text{eff}}(r)] u = 0. \quad (5.45)$$

Ορίζοντας $Q(r_*) \equiv \omega^2 - V_{\text{eff}}(r_*)$ και εφαρμόζοντας την προσέγγιση WKB πρώτης τάξης, ο n -οστός ημικανονικός τρόπος ταλάντωσης καθορίζεται από τη σχέση [50]:

$$\frac{iQ_0}{\sqrt{2Q_0''}} = n + \frac{1}{2} \implies \frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = -i \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.46)$$

όπου ο δείκτης 0 υποδηλώνει τη τιμή των μεγεθών στο σημείο μεγίστου δυναμικού. Εάν V_0 είναι η μέγιστη τιμή του δυναμικού (Εξ. (5.29)) και $V_0'' < 0$ η δεύτερη παράγωγός του ως προς r_* , τότε ισχύει $Q_0 = \omega^2 - V_0$ και $Q_0'' = -V_0''$, οπότε η (5.46) γράφεται:

$$\omega^2 = V_0 - i\sqrt{-2V_0''} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.47)$$

Αντιμετωπίζουμε ένα δοκιμαστικό βαθμωτό πεδίο χωρίς μάζα ως απλοποιημένο μοντέλο (toy model) που αποτυπώνει την κυματική δυναμική σε καμπύλο υπόβαθρο, αποφεύγοντας την ταυστική άλγεβρα των συστημάτων Regge–Wheeler/Zerilli. Οι ημικανονικές συχνότητες του για $\ell = 2$ (Πίνακας 5.1) δεν ταυτίζονται με εκείνες του φυσικού βαρυτικού τετραπόλου: η κυρίαρχη ακτινοβολία ringdown καθορίζεται από το δυναμικό σπιν-2 (RW/Zerilli), του οποίου ο θεμελιώδης τρόπος $\ell = 2$ είναι $\omega M \simeq 0,3737 - i0,08896$, διακριτός από τη βαθμωτή τιμή $\omega M \simeq 0,4836 - i0,0968$. Για $\ell = 2$, το ενεργό δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$V_{\ell=2}(r) = \frac{6}{r^2} - \frac{10M}{r^3} - \frac{4M^2}{r^4}. \quad (5.48)$$

Μεγιστοποίηση έχουμε στη συντεταγμένη όπου

$$\begin{aligned} \frac{dV_{\ell=2}}{dr} &= -\frac{12}{r^3} + \frac{30M}{r^4} + \frac{16M^2}{r^5} = 0, \\ \implies -12r^2 + 30Mr + 16M^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Η θετική ρίζα της εξίσωσης, η οποία βρίσκεται κοντά στη σφαίρα φωτονίων, είναι:

$$r_0 = \frac{-30M - \sqrt{900M^2 + 768M^2}}{2 \cdot (-12)} = \frac{(30 + \sqrt{1668})M}{24} \approx 2,952 M \approx 3M, \quad (5.50)$$

συνεπώς η μέγιστη τιμή του δυναμικού υπολογίζεται ως:

$$V_0 \equiv V_{\ell=2}(r_0) \approx \frac{0,2471}{M^2}.$$

Για τον υπολογισμό των παραγώγων του V ως προς r_* , χρησιμοποιούμε την (Εξ. (5.26)) $\frac{d}{dr_*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d}{dr}$:

$$V'' \equiv \frac{d^2V}{dr_*^2} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dV}{dr} \right]. \quad (5.51)$$

Εφόσον στο $r = r_0$ ισχύει $dV/dr = 0$, η εξίσωση (5.51) απλοποιείται:

$$V_0'' = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^2 \frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r=r_0}, \quad (5.52)$$

όπου

$$\frac{d^2V_{\ell=2}}{dr^2} = \frac{36}{r^4} - \frac{120M}{r^5} - \frac{80M^2}{r^6}.$$

Αντικαθιστώντας την αριθμητική τιμή $r_0 \approx 2,952 M$, παίρνουμε:

$$\frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r=r_0} \approx -\frac{0,1823}{M^4},$$

και συνεπώς, μέσω της εξίσωσης (5.52):

$$V_0'' \approx -\frac{0,01895}{M^4}.$$

Η αντικατάσταση των ανωτέρω τιμών στην εξίσωση (5.47) δίνει τις ημικανονικές συχνότητες για $\ell = 2$, οι οποίες συνοψίζονται στον Πίνακα 5.1.

Τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τα όρια ισχύος της προσέγγισης WKB πρώτης τάξης. Για $n = 0$, το σχετικό σφάλμα ανέρχεται σε $\varepsilon_R \approx 4,69\%$ έναντι της αριθμητικής μεθόδου του Leaver [52], ενώ αυξάνεται με τον δείκτη υπερτόνου n , φθάνοντας το 76,99% για

Πίνακας 5.1: Ημικανονικές συχνότητες ωM βαθμωτού πεδίου ($s = 0, \ell = 2$) σε γεωμετρία Schwarzschild για $n = 0, 1, 2, 3$. Σύγκριση προσέγγισης WKB 1ης τάξης (παρούσα εργασία), WKB 6ης τάξης [51] και αριθμητικής μεθόδου Leaver [52]. Τα σχετικά σφάλματα ορίζονται ως $\varepsilon_{R,I} = |\omega_{R,I}^{\text{WKB},1} - \omega_{R,I}^{\text{L}}| / |\omega_{R,I}^{\text{L}}| \times 100\%$, όπου $\omega_{R,I}^{\text{L}}$ οι αντίστοιχες τιμές Leaver. Ισχύει $\omega M = \omega_R M - i \omega_I M$ με $\omega_R, \omega_I > 0$.

n	WKB 1ης τάξης		WKB 6ης τάξης [†]		Leaver		ε_R (%)	ε_I (%)
	$\omega_R M$	$\omega_I M$	$\omega_R M$	$\omega_I M$	$\omega_R M$	$\omega_I M$		
0	0,506 32	$-i$ 0,096 12	0,483 60	$-i$ 0,096 80	0,483 64	$-i$ 0,096 76	4,69	0,66
1	0,561 10	$-i$ 0,260 22	0,463 80	$-i$ 0,295 60	0,463 85	$-i$ 0,295 60	20,97	11,97
2	0,629 66	$-i$ 0,386 47	0,430 40	$-i$ 0,508 70	0,430 54	$-i$ 0,508 56	46,25	24,01
3	0,697 11	$-i$ 0,488 71	—	—	0,393 86	$-i$ 0,738 10	76,99	33,79

[†]Τιμές από [51], διαθέσιμες έως 4 δεκαδικά ψηφία· το 5ο ψηφίο τίθεται μηδέν. Για $n = 3$ δεν αναφέρεται τιμή.

$n = 3$. Όπως έχουν δείξει οι Iyer και Will [53, 54], με την αύξηση του n τα σημεία στροφής (turning points) απομακρύνονται από την κορυφή του δυναμικού, καθιστώντας την τοπική πολυωνυμική προσέγγιση ανεπαρκή. Συγκεκριμένα, η WKB πρώτης τάξης βασίζεται αποκλειστικά στην τιμή V_0 και τη δεύτερη παράγωγο V_0'' στην κορυφή, αγνοώντας παραγώγους ανώτερης τάξης που υπεισέρχονται στους διορθωτικούς όρους $\Lambda_2, \dots, \Lambda_6$ [51, 53, 54]. Κατά συνέπεια, η μέθοδος θεωρείται αξιόπιστη μόνο για $n < \ell$. Για $n \geq \ell$, η σειρά WKB παύει να συγκλίνει ικανοποιητικά και η χρήση της μεθόδου συνεχών κλασμάτων του Leaver καθίσταται αναγκαία.

Η ποιοτική ανεπάρκεια της πρώτης τάξης αποτυπώνεται χαρακτηριστικά στη συμπεριφορά της πραγματικής συχνότητας $\omega_R M$. Ενώ στη σχέση (5.47) η ποσότητα $\text{Re}(\omega^2 M^2) = V_0$ παραμένει σταθερή για κάθε n , ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού με αυξανόμενο φανταστικό μέρος οδηγεί σε τεχνητή αύξηση του $\omega_R M$. Αντιθέτως, στα ακριβή αποτελέσματα του Leaver, το $\omega_R M$ μειώνεται μονότονα με το n . Η συγκεκριμένη απόκλιση καθιστά επιβεβλημένη τη χρήση προσεγγίσεων WKB ανώτερης τάξης, όπως η 3η [53, 54] ή 6η τάξη [51].

5.4.3 Εφαρμογή της WKB στο Δυναμικό Regge–Wheeler

Στην § 5.4.2 εφαρμόσαμε τη μέθοδο στο δυναμικό σπιν-0, χρησιμοποιώντας το ως ένα απλοποιημένο μοντέλο. Ωστόσο, για το πραγματικό φυσικό πρόβλημα, το οποίο αφορά το σήμα ringdown των βαρυτικών κυμάτων που καταγράφουν οι ανιχνευτές LI-

GO/Virgo [20], πρέπει να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία στο δυναμικό Regge–Wheeler (Εξ. (5.34)), το οποίο περιγράφει τις αξονικές διαταραχές σπιν-2.

Από την Εξ. (5.34) με $\ell = 2$, $\ell(\ell + 1) = 6$ παίρνουμε:

$$V_{\ell=2}^{\text{RW}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{6}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right) = \frac{6}{r^2} - \frac{18M}{r^3} + \frac{12M^2}{r^4} = \frac{6(r - M)(r - 2M)}{r^4}. \quad (5.53)$$

Συγκρίνοντας αυτή τη μορφή με την αντίστοιχη βαθμωτή Εξ. (5.48), παρατηρούμε ότι η κύρια διαφορά εντοπίζεται στον σχετικιστικό όρο $\sim 1/r^3$, έχουμε $-18M/r^3$ αντί για $-10M/r^3$. Αυτός ο αρνητικός συντελεστής χαμηλώνει το ύψος του φράγματος δυναμικού συγκριτικά με τη βαθμωτή περίπτωση. Η μείωση αυτή δεν οφείλεται στο φυγόκεντρο δυναμικό, το οποίο παραμένει ίδιο ($6/r^2$), αλλά αποτυπώνει καθαρά τη διαφορετική σύζευξη του σπιν-2 πεδίου με την καμπυλότητα του χωροχρόνου.

Θέτουμε $dV_{\ell=2}^{\text{RW}}/dr = 0$:

$$-\frac{12}{r^3} + \frac{54M}{r^4} - \frac{48M^2}{r^5} = 0 \implies 2r^2 - 9Mr + 8M^2 = 0, \quad (5.54)$$

με θετική ρίζα εκτός του ορίζοντα γεγονότων:

$$r_0^{\text{RW}} = \frac{(9 + \sqrt{17})M}{4} \approx 3,28078M. \quad (5.55)$$

Η τιμή αυτή υπερβαίνει τη βαθμωτή $r_0^{s=0} \approx 2,952M$ (Εξ. (5.50)) και δεν ταυτίζεται με τη φωτονική σφαίρα $r = 3M$, η οποία αναχτάται μόνο στο όριο $\ell \rightarrow \infty$.

Αντικαθιστώντας r_0^{RW} στην Εξ. (5.53) και χρησιμοποιώντας $2(r_0^{\text{RW}})^2 = 9Mr_0^{\text{RW}} - 8M^2$ (από την Εξ. (5.54)):

$$V_0^{\text{RW}} M^2 = \frac{6(r_0^{\text{RW}} - M)(r_0^{\text{RW}} - 2M)}{(r_0^{\text{RW}})^4 / M^2} = \frac{192(11 + 3\sqrt{17})}{15112 + 3528\sqrt{17}} \approx 0,15129, \quad (5.56)$$

σημαντικά χαμηλότερη από $V_0^{s=0} M^2 \approx 0,2471$.

Υπολογίζουμε τους όρους της Εξ. (5.52):

$$1 - 2M/r_0^{\text{RW}} = 1 - \frac{2}{3,28078} = 0,39039, \quad (1 - 2M/r_0^{\text{RW}})^2 = 0,15240. \quad (5.57)$$

Η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού (5.53) ως προς r είναι:

$$\frac{d^2 V_{\ell=2}^{\text{RW}}}{dr^2} = \frac{36}{r^4} - \frac{216M}{r^5} + \frac{240M^2}{r^6}. \quad (5.58)$$

Αντικαθιστώντας $r_0^{\text{RW}} = 3,28078 M$:

$$\left. \frac{d^2 V_{\ell=2}^{\text{RW}}}{dr^2} \right|_{r_0} = \frac{36}{115,85280} \frac{1}{M^4} - \frac{216}{380,08712} \frac{1}{M^4} + \frac{240}{1246,98087} \frac{1}{M^4} = -0,06509 \frac{1}{M^4}. \quad (5.59)$$

Η δεύτερη παράγωγος ως προς r_* στο μέγιστο (Εξ. (5.52)) είναι τελικά:

$$(V_0^{\text{RW}})'' = 0,15240 \times (-0,06509) \frac{1}{M^4} = -\frac{0,009919}{M^4}. \quad (5.60)$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (5.47) για $n = 0$:

$$\omega^2 M^2 = V_0^{\text{RW}} M^2 - \frac{i}{2} \sqrt{-2(V_0^{\text{RW}})'' M^4} = 0,15129 - \frac{i}{2} \sqrt{0,019839} = 0,15129 - i 0,07043. \quad (5.61)$$

Θέτουμε $\omega M = a - ib$ με $a, b > 0$. Από $(a - ib)^2 = 0,15129 - i 0,07043$ προκύπτει το σύστημα:

$$a^2 - b^2 = 0,15129, \quad 2ab = 0,07043. \quad (5.62)$$

Αντικαθιστώντας $b = 0,03522/a$ στην πρώτη σχέση:

$$\begin{aligned} a^4 - 0,15129 a^2 - 0,001240 &= 0 \\ \implies a^2 &= \frac{0,15129 + \sqrt{(0,15129)^2 + 4 \times 0,001240}}{2} \\ &= \frac{0,15129 + 0,16688}{2} \\ &= 0,15909, \end{aligned} \quad (5.63)$$

οπότε:

$$\boxed{\omega M \approx 0,39885 - i 0,08829, \quad n = 0, \ell = 2.} \quad (5.64)$$

Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με τον Πίνακα 1 των Schutz και Will [50], οι οποίοι αναφέρουν $\text{Re}(\omega M) = 0,3988$ και $\text{Im}(\omega M) = 0,0883$ για βαρυτικές διαταραχές ($\beta = -3$) με $\ell = 2$, $n = 0$.

Πίνακας 5.2: Ημικανονικές συχνότητες ωM βαρυτικής διαταραχής ($s = 2$, $\ell = 2$, $n = 0$) σε γεωμετρία Schwarzschild. Σύγκριση WKB πρώτης τάξης (δυναμικό $V_{\ell=2}^{\text{RW}}$, παρούσα ανάλυση, Εξ. (5.64)) με την ακριβή τιμή Leaver [52]. Τα σχετικά σφάλματα ορίζονται ως $\varepsilon_{R,I} = |\omega_{R,I}^{\text{WKB}} - \omega_{R,I}^{\text{L}}|/|\omega_{R,I}^{\text{L}}| \times 100\%$.

Μέθοδος	$\omega_R M$	$\omega_I M$	ε_R (%)	ε_I (%)
WKB 1ης τάξης (παρ. 5.4.3)	0,398 85 $-i$ 0,088 29	6,74	0,75	
Leaver (ακριβής) [52]	0,373 67 $-i$ 0,088 96	—	—	

Από τα δεδομένα του Πίνακα 5.2 προκύπτει ότι η προσέγγιση WKB 1ης τάξης για τον θεμελιώδη τρόπο ($n = 0$) της βαρυτικής διαταραχής παρουσιάζει σημαντική διαφοροποίηση ως προς την ακρίβεια υπολογισμού του πραγματικού και του φανταστικού μέρους. Ειδικότερα, το σχετικό σφάλμα της ταλαντωτικής συχνότητας ανέρχεται σε $\varepsilon_R \approx 6,74\%$, ενώ ο ρυθμός απόσβεσης προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια ($\varepsilon_I \approx 0,75\%$). Η απόκλιση αυτή είναι αναμενόμενη στο πλαίσιο της 1ης τάξης, καθώς η απλή παραβολική προσέγγιση του δυναμικού γύρω από το μέγιστό του δεν επαρκεί για την πλήρη περιγραφή της σκέδασης. Για τη συστηματική βελτίωση της ακρίβειας, ιδίως του $\omega_R M$, κρίνεται απαραίτητη η χρήση αναπτυγμάτων WKB ανώτερης τάξης [53].

Συγκρίνοντας τα παραπάνω με την αντίστοιχη βαθμωτή διαταραχή (Πίνακας 5.1, $n = 0$), παρατηρείται ότι η μέθοδος WKB 1ης τάξης αποδίδει ελαφρώς μεγαλύτερη ακρίβεια στο βαθμωτό πεδίο, τόσο στο πραγματικό ($\varepsilon_R \approx 4,69\%$) όσο και στο φανταστικό μέρος ($\varepsilon_I \approx 0,66\%$). Κοινό χαρακτηριστικό και των δύο περιπτώσεων αποτελεί η υψηλή ακρίβεια ($\varepsilon_I < 1\%$) στον υπολογισμό του ρυθμού απόσβεσης αποκλειστικά για τον θεμελιώδη τρόπο ($n = 0$). Ωστόσο, όπως καθίσταται σαφές από το φάσμα του βαθμωτού πεδίου, η αξιοπιστία της προσέγγισης υποβαθμίζεται ταχύτατα για τους ανώτερους τρόπους ($n \geq 1$), υποδεικνύοντας τους αυστηρούς περιορισμούς της 1ης τάξης στην ευρύτερη μελέτη των ημικανονικών συχνοτήτων.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Προοπτικές

6.1 Σύνοψη των Κλασικών Λύσεων

Στόχος αυτής της εργασίας ήταν η συστηματική παρουσίαση των κλασικών λύσεων στάσιμων μελανών οπών στη Γενική Σχετικότητα. Παρακάτω συνοψίζονται τα βασικά αποτελέσματα και ορισμένες παρατηρήσεις που προέκυψαν από τη μελέτη.

Έξι γεωμετρίες πέρασαν από τα χέρια μας. Οι τέσσερις θεμελιώδεις λύσεις του θεωρήματος No-Hair, Schwarzschild, Reissner–Nordström, Kerr και Kerr–Newman, και δύο επιπλέον περιπτώσεις, Schwarzschild–de Sitter και Schwarzschild–Anti-de Sitter, οι οποίες προκύπτουν όταν εισάγουμε κοσμολογική σταθερά Λ . Ο Πίνακας 6.1 συγκεντρώνει τα βασικά χαρακτηριστικά τους.

Πίνακας 6.1: Συνοπτική παρουσίαση των κλασικών λύσεων που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία. Στις τέσσερις πρώτες γραμμές αντιστοιχούν οι λύσεις του θεωρήματος No-Hair σε ασυμπτωτικά επίπεδο χωρόχρονο. Οι δύο τελευταίες αποτελούν γενικεύσεις της Schwarzschild με μη μηδενική κοσμολογική σταθερά.

Λύση	M	J	Q	Λ	Ορίζοντες / Δομή
Schwarzschild	✓	–	–	0	1 (χωροειδής ιδιομορφία)
Reissner–Nordström	✓	–	✓	0	2 (r_+, r_-), χρονοειδής ιδιομορφία
Kerr	✓	✓	–	0	2 (r_+, r_-), δακτυλιοειδής ιδιομορφία
Kerr–Newman	✓	✓	✓	0	2 (r_+, r_-), δακτυλιοειδής ιδιομορφία
Schwarzschild–de Sitter	✓	–	–	> 0	2 (r_H, r_c), κοσμολογικός ορίζοντας
Schwarzschild–AdS	✓	–	–	< 0	1, χρονοειδές άπειρο

Από τις τέσσερις θεμελιώδεις λύσεις, η Kerr–Newman είναι η γενικότερη και οι υπόλοιπες προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις της θέτοντας $Q = 0$ ή/και $J = 0$. Οι τρεις παράμετροι M , J και Q αρκούν για να περιγράψουν πλήρως τη γεωμετρία τους, αποτέλεσμα γνωστό ως θεώρημα No-Hair, το οποίο θεμελιώθηκε από τη σειρά εργασιών των Israel, Carter και Robinson κατά την περίοδο 1967–1975 [9, 12–15].

Οι λύσεις με κοσμολογική σταθερά παρουσιάζουν διαφορετική ασυμπτωτική συμπεριφορά. Η Schwarzschild–de Sitter, για $\Lambda > 0$, εμφανίζει εκτός από τον βαρυτικό ορίζοντα και έναν κοσμολογικό ορίζοντα στο $r_c \approx \sqrt{3/\Lambda}$. Κάθε φυσικός παρατηρητής περιορίζεται στη στατική ζώνη $r_H < r < r_c$. Αντίθετα, η Schwarzschild–Anti-de Sitter, για $\Lambda < 0$, δεν είναι ασυμπτωτικά επίπεδη και το άπειρο γίνεται χρονοειδής υπερεπιφάνεια, με αποτέλεσμα οι γεωδαισιακές να επιστρέφουν αντί να διαφεύγουν.

Τον ρόλο των συμμετριών στη μελέτη αυτών των γεωμετριών αναλύσαμε στα κεφάλαια 3 και 4. Σε κάθε χωρόχρονο που εξετάστηκε, η ύπαρξη ενός χρονοειδούς διανύσματος Killing $\xi^{(t)\mu}$ εξασφαλίζει τη διατήρηση της ενέργειας $E = -\xi_\mu^{(t)} u^\mu$, ενώ ένα αξονικό διάνυσμα Killing $\xi^{(\phi)\mu}$ αντιστοιχεί στη διατήρηση της στροφορμής $L = \xi_\mu^{(\phi)} u^\mu$. Αυτές οι δύο ποσότητες, σε συνδυασμό με τη συνθήκη κανονικοποίησης της τετραταχύτητας, αρκούν για να αναγάγουν το πρόβλημα των γεωδαισιακών σε μονοδιάστατη ακτινική εξίσωση.

Μια λεπτομέρεια που αξίζει ιδιαίτερης προσοχής είναι ο μικτός όρος $g_{t\phi}$. Στη Schw-

arzschild απουσιάζει, και αυτό οφείλεται στη χρονική αναστρεψιμότητα της λύσης. Στη Kerr όμως ο όρος αυτός εμφανίζεται και αλλάζει τα πάντα. Η γεωμετρία γίνεται στάσιμη αλλά όχι στατική, και προκύπτει η συμπαράσυρση των αδρανειακών συστημάτων (frame-dragging). Όταν διδάσκεται η Γενική Σχετικότητα, η σημασία ενός μόνο μη μηδενικού στοιχείου της μετρικής σπάνια τονίζεται όσο θα έπρεπε.

Στο Κεφάλαιο 4 επικεντρωθήκαμε στη γεωμετρία Kerr, η οποία περιέχει χαρακτηριστικά εντελώς ξένα προς τη σφαιρικά συμμετρική περίπτωση. Η εργόσφαιρα ορίζεται ως η περιοχή $r_+ < r < r_{S+}(\theta)$, όπου το $\xi^{(t)}$ γίνεται χωροειδές. Κανένας παρατηρητής μέσα σε αυτή δεν μπορεί να μείνει ακίνητος ως προς το χωρικό άπειρο. Όλοι παρασύρονται μαζί με την περιστροφή της μελανής οπής. Οι παρατηρητές μηδενικής στροφορμής (ZAMO) έχουν γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2Mar/[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta]$, η οποία στον ορίζοντα γίνεται απλά $\omega_H = a/(r_+^2 + a^2)$.

Από τη φυσική αυτής της περιοχής γεννιέται η διαδικασία Penrose. Η ύπαρξη τροχιών αρνητικής ενέργειας στο εσωτερικό της εργόσφαιρας επιτρέπει την εξαγωγή ενέργειας από τη μελανή οπή με κόστος τη μείωση της στροφορμής της. Το θεωρητικό άνω όριο της εξαγόμενης ενέργειας ανέρχεται περίπου στο 29% της αρχικής μάζας ηρεμίας, για ακραία μελανή οπή Kerr [36].

Η ιδιομορφία της Kerr είναι επίσης ασυνήθιστη. Ο υπολογισμός του βαθμωτού Kretschmann αποκαλύπτει απόκλιση τάξης ρ^{-12} όταν $\rho^2 \rightarrow 0$, και η απόκλιση εντοπίζεται όχι σε σημείο αλλά σε δακτύλιο ακτίνας a στο ισημερινό επίπεδο. Είναι ίσως το πιο παράξενο γεωμετρικό αποτέλεσμα ολόκληρης της εργασίας.

Το Κεφάλαιο 5 ήταν αφιερωμένο στη θεωρία διαταραχών. Ένα δοκιμαστικό βαθμωτό πεδίο χωρίς μάζα στο υπόβαθρο Schwarzschild, μετά τον διαχωρισμό μεταβλητών και την εισαγωγή της συντεταγμένης χελώνας r_* , ανάγεται σε εξίσωση τύπου Schrödinger με ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(r)$ που μηδενίζεται στα δύο ασυμπτωτικά όρια. Για τη βαρυτική περίπτωση, ο διαχωρισμός των διαταραχών της μετρικής σε αξονικές και πολικές, εκμεταλλευόμενος τη σφαιρική συμμετρία, οδηγεί στις εξισώσεις Regge–Wheeler [26] και Zerilli [27], με διαφορετικά ενεργά δυναμικά αλλά κοινή μορφή (5.32).

Από τα πιο όμορφα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας μελανών οπών είναι ότι, παρά τη διαφορετική αναλυτική μορφή τους, τα δύο αυτά δυναμικά συνδέονται μέσω μετασχηματισμού Darboux [46]. Συνέπεια της σύνδεσης είναι η ισοφασματικότητα: αξονικές

και πολικές διαταραχές μοιράζονται ταυτόσημο φάσμα ημικανονικών τρόπων ταλάντωσης. Δύο φαινομενικά ξένα προβλήματα δίνουν τις ίδιες ιδιοσυχνότητες. Το συμπέρασμα αυτό, αν και αλγεβρικό στην προέλευσή του, έχει βαθιά φυσική σημασία και αποτελεί την αφετηρία για κάθε σύγχρονη συζήτηση φασματοσκοπίας μελανών οπών [48, 49].

6.2 Περιορισμοί της Κλασικής Θεωρίας

Καμία από τις λύσεις που παρουσιάστηκαν δεν είναι παντού καλά ορισμένη. Το $r = 0$ στη Schwarzschild και το $\rho^2 = 0$ στη Kerr αντιστοιχούν σε γνήσιες ιδιομορφίες καμπυλότητας: το βαθμωτό Kretschmann αποκλίνει ως $48M^2/r^6$ και ρ^{-12} αντίστοιχα. Σε αυτές τις περιοχές η κλασική θεωρία απλώς παύει να ισχύει.

Ο χαρακτήρας των δύο ιδιομορφιών διαφέρει σημαντικά. Στη Schwarzschild είναι χωροειδής. Όποιος βρεθεί μέσα στον ορίζοντα δεν έχει επιλογή· η σύγκρουση με την ιδιομορφία είναι μέρος του μέλλοντός του, όχι μια θέση στον χώρο που μπορεί να αποφύγει. Στη Reissner–Nordström και τη Kerr, αντίθετα, η ιδιομορφία είναι χρονοειδής, και τυπικά μπορεί να αποφευχθεί. Η διαφορά αυτή γεννά μια σειρά μαθηματικών παραδοξοτήτων που η κλασική θεωρία δεν είναι σε θέση να ξεκαθαρίσει.

Στενά συνδεδεμένη με τα παραπάνω είναι και η αστάθεια του εσωτερικού ορίζοντα Cauchy r_- , που εμφανίζεται και στις δύο φορτισμένες ή περιστρεφόμενες λύσεις. Σήματα από το εξωτερικό σύμπαν φτάνουν στον r_- με άπειρη μετατόπιση προς το κυανό· κάθε μικρή διαταραχή ενισχύεται εκθετικά, και προκύπτει το φαινόμενο του πληθωρισμού μάζας [43]. Στην πράξη, ο r_- μετατρέπεται σε ισχυρή ιδιομορφία καμπυλότητας. Παρότι αυτό φαίνεται προβληματικό, στην πραγματικότητα προστατεύει την αιτιοκρατία: αν ο ορίζοντας Cauchy ήταν διαπερατός, ένας παρατηρητής θα μπορούσε να φτάσει σε περιοχές με κλειστές χρονοειδείς καμπύλες, παραβιάζοντας την προβλεψιμότητα της θεωρίας [10, 23]. Η αστάθεια του r_- είναι η μαθηματική έκφραση της Ισχυρής Εικασίας της Κοσμικής Λογοκρισίας.

Μια συνέπεια όλων αυτών είναι ότι μεγάλο μέρος της μέγιστης αναλυτικής επέκτασης που εμφανίζεται στα διαγράμματα Penrose–Carter, (λευκές οπές, άπειρες αλυσίδες συμπάντων) δεν αντιστοιχεί σε τίποτα φυσικό. Σε μια αληθινή βαρυτική κατάρρευση σχηματίζεται μόνο η εξωτερική περιοχή $r > r_+$ και ένα πεπερασμένο τμήμα του εσωτερικού. Όλα τα υπόλοιπα αν και μαθηματικά εξαιρετικά ενδιαφέροντα, στερούνται αστροφυσικού

περιεχομένου.

Ένας βασικός μεθοδολογικός περιορισμός της παρούσας ανάλυσης αφορά την ακρίβεια της μεθόδου WKB πρώτης τάξης. Όπως προκύπτει από τα δεδομένα των Πινάκων 5.1 και 5.2, η εν λόγω προσέγγιση παρέχει αξιόπιστα αποτελέσματα αποκλειστικά για τον θεμελιώδη τρόπο ταλάντωσης ($n = 0$). Ειδικότερα, για το βαθμωτό πεδίο ($s = 0, \ell = 2$), το σχετικό σφάλμα του πραγματικού μέρους της συχνότητας έναντι της ακριβούς μεθόδου Leaver [52] ανέρχεται σε $\varepsilon_R \approx 4,69\%$ για $n = 0$. Ωστόσο, αυξάνεται ραγδαία με τον αριθμό υπερτόνου, αγγίζοντας το 46,25% για $n = 2$ και το 76,99% για $n = 3$ (Πίνακας 5.1). Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρείται και στις βαρυτικές διαταραχές ($s = 2, \ell = 2$), όπου για $n = 0$ το σφάλμα υπολογίζεται σε $\varepsilon_R \approx 6,74\%$ (Πίνακας 5.2).

Η απόκλιση αυτή ερμηνεύεται από τη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου. Στην πρώτη τάξη, ο υπολογισμός βασίζεται αποκλειστικά στην τιμή του ενεργού δυναμικού στην κορυφή V_0 και στη δεύτερη παράγωγό του V_0'' [53, 54], παραλείποντας τους διορθωτικούς όρους ανώτερης τάξης ($\Lambda_2, \dots, \Lambda_6$). Καθώς ο αριθμός υπερτόνου n αυξάνεται, τα σημεία στροφής απομακρύνονται από το μέγιστο του δυναμικού, καθιστώντας την τοπική παραβολική προσέγγιση ανεπαρκή. Συνέπεια αυτής της αδυναμίας είναι η πρόβλεψη μιας μη φυσικής αύξησης του πραγματικού μέρους $\omega_R M$ συναρτήσει του n , σε πλήρη αντίθεση με τη φθίνουσα τάση που υποδεικνύουν οι ακριβείς αριθμητικές λύσεις. Συμπερασματικά, η μέθοδος WKB πρώτης τάξης κρίνεται επαρκής κυρίως για την περιοχή $n < \ell$. Για τη μελέτη ανώτερων υπερτόνων, καθίσταται επιβεβλημένη η χρήση προσεγγίσεων υψηλότερης τάξης, όπως η WKB 6ης τάξης [51], ή αμιγώς αριθμητικών τεχνικών.

6.3 Μελλοντικές Προοπτικές

Από τις πολλές κατευθύνσεις στις οποίες θα μπορούσε να επεκταθεί η εργασία αυτή, ξεχωρίζουν δύο που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Η πρώτη είναι ο υπολογισμός των ημικανονικών τρόπων στο υπόβαθρο Kerr. Σε αντίθεση με τη Schwarzschild, στη Kerr ο διαχωρισμός των διαταραχών δεν γίνεται μέσω σφαιρικών αρμονικών αλλά μέσω της εξίσωσης Teukolsky και των σφαιροειδών αρμονικών. Η εφαρμογή της μεθόδου Leaver σε αυτό το πλαίσιο δίνει τα φάσματα QNM συναρτήσει της μάζας M και της παραμέτρου περιστροφής a , και αυτά είναι ακριβώς τα

φάσματα που χρησιμοποιεί η συνεργασία LIGO/Virgo/KAGRA για να ερμηνεύσει τη φάση ringdown σε κάθε γεγονός συγχώνευσης [19, 21]. Με την έλευση του διαστημικού συμβολομέτρου LISA τα ίδια φάσματα θα ελέγχονται και σε υπερμαζικές μελανές οπές, σε εύρος μάζας $M \sim 10^6\text{--}10^9 M_\odot$, όπου τα σήματα έχουν διάρκεια ωρών αντί για χιλιοστών του δευτερολέπτου.

Η δεύτερη κατεύθυνση είναι η ισοφασματικότητα ως πειραματικός έλεγχος της Γενικής Σχετικότητας. Στο υπόβαθρο Schwarzschild αξονικοί και πολικοί τρόποι έχουν τις ίδιες συχνότητες λόγω του μετασχηματισμού Darboux. Σε γενικότερους χωροχρόνους ή σε θεωρίες τροποποιημένης βαρύτητας, όπως οι βαθμωτές-τανυστικές, αυτή η σύμπτωση παύει να ισχύει [18, 47]. Αν μελλοντικές παρατηρήσεις καταγράψουν μια μικρή απόκλιση μεταξύ των δύο πολώσεων, ή ακόμα ανιχνεύσουν τρόπους που δεν αντιστοιχούν σε καμία γεωμετρία Kerr με κάποιες M, J , τότε θα έχουμε στα χέρια μας την πρώτη ένδειξη ότι κάτι δεν περιγράφεται σωστά από την κλασική θεωρία.

Όλη η παρούσα ανάλυση έμεινε στο κλασικό όριο. Δεν εξετάστηκε καθόλου η ακτινοβολία Hawking, ούτε το παράδοξο της πληροφορίας. Η ακτινοβολία Hawking προβλέπει θερμική εκπομπή με θερμοκρασία $T_H = \hbar c^3 / (8\pi G M k_B)$ από τον ορίζοντα γεγονότων και οδηγεί σε σταδιακή εξάτμιση της μελανής οπής. Στο μέτρο που η εκπομπή είναι αμιγώς θερμική, η πληροφορία της ύλης που έπεσε χάνεται, σε αντίθεση με την αρχή της μοναδιαίας εξέλιξης της κβαντομηχανικής [2]. Το παράδοξο αυτό, παρά τη μεγάλη βιβλιογραφία που έχει συσσωρευτεί από τη δεκαετία του 1970, παραμένει ανοιχτό. Η επίλυσή του απαιτεί μια ενοποιημένη θεωρία που να συνδέει τη Γενική Σχετικότητα με την Κβαντική Θεωρία Πεδίου, κάτι που ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της εργασίας αλλά αποτελεί τον φυσικό συνεχιστή της.

Βιβλιογραφία

- [1] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916. [doi:10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702).
- [2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017. Original edition published in 1973 by W. H. Freeman and Company; First Princeton University Press edition 2017.
- [3] Lluís Bel. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, 2007. Translation and commentary on Schwarzschild’s 1916 paper. [arXiv:0709.2257](https://arxiv.org/abs/0709.2257).
- [4] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 3rd edition, 2022. [doi:10.1017/9781108610865](https://doi.org/10.1017/9781108610865).
- [5] Nils Voje Johansen and Finn Ravndal. On the discovery of Birkhoff’s theorem, 2005. arXiv preprint, [arXiv:physics/0508163](https://arxiv.org/abs/physics/0508163).
- [6] Roy P. Kerr. Discovering the Kerr and Kerr-Schild metrics, 2008. [arXiv:0706.1109](https://arxiv.org/abs/0706.1109).
- [7] Roy P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Physical Review Letters*, 11:237–238, 09 1963. [doi:10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237).
- [8] Kip S. Thorne. *Black Holes and Time Warps: Einstein’s Outrageous Legacy*. The Commonwealth Fund Book Program. W. W. Norton & Company, New York, 1994. Foreword by Stephen Hawking.

- [9] Brandon Carter. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Physical Review Letters*, 26(6):331–333, 1971. doi:[10.1103/PhysRevLett.26.331](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.331).
- [10] Ray d’Inverno and James Vickers. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 2nd edition, 2022. doi:[10.1093/oso/9780198862024.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198862024.001.0001).
- [11] Remo Ruffini and John A. Wheeler. Introducing the black hole. *Physics Today*, 24(1):30–36, Jan 1971. doi:[10.1063/1.3022513](https://doi.org/10.1063/1.3022513).
- [12] Werner Israel. Event Horizons in Static Vacuum Space-Times. *Physical Review*, 164(5):1776–1779, 1967. doi:[10.1103/PhysRev.164.1776](https://doi.org/10.1103/PhysRev.164.1776).
- [13] Werner Israel. Event Horizons in Static Electrovac Space-Times. *Communications in Mathematical Physics*, 8(3):245–260, 1968. doi:[10.1007/BF01645859](https://doi.org/10.1007/BF01645859).
- [14] D. C. Robinson. Uniqueness of the Kerr Black Hole. *Phys. Rev. Lett.*, 34:905–906, Apr 1975. doi:[10.1103/PhysRevLett.34.905](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.34.905).
- [15] Pawel O. Mazur. Proof of uniqueness of the Kerr-Newman black hole solution. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 15(10):3173–3180, 1982. doi:[10.1088/0305-4470/15/10/021](https://doi.org/10.1088/0305-4470/15/10/021).
- [16] P. K. Townsend. *Black Holes*, 1997. arXiv:[gr-qc/9707012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9707012).
- [17] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [18] Valeri P. Frolov and Igor D. Novikov. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [19] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- [20] B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, 2016. doi:[10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).

- [21] R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, A. Adams, C. Adams, R. X. Adhikari, V. B. Adya, C. Affeldt, et al. GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the First Half of the Third Observing Run. *Physical Review X*, 11(2):021053, 2021. doi:[10.1103/PhysRevX.11.021053](https://doi.org/10.1103/PhysRevX.11.021053).
- [22] James B. Hartle. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education Limited, Harlow, England, 2014.
- [23] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson Education Limited, Harlow, England, 2014.
- [24] Michael P. Hobson, George P. Efstathiou, and Anthony N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. First published in print format 2006.
- [25] Michele Maggiore. *Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, Oxford, 2008.
- [26] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild Singularity. *Physical Review*, 108(4):1063–1069, 1957. doi:[10.1103/PhysRev.108.1063](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1063).
- [27] Frank J. Zerilli. Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations. *Physical Review Letters*, 24(13):737–738, 1970. doi:[10.1103/PhysRevLett.24.737](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.24.737).
- [28] Leandros Perivolaropoulos and Ioannis Antoniou. *Introduction to General Relativity and Cosmology*. Kallipos, Open Academic Editions, Athens, 2023. [In Greek]. doi:[10.57713/kallipos-201](https://doi.org/10.57713/kallipos-201).
- [29] Friedrich Kottler. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 361(14):401–462, 1918. Original derivation of the Schwarzschild-de Sitter metric. doi:[10.1002/andp.19183611402](https://doi.org/10.1002/andp.19183611402).
- [30] Subrahmanyan Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, New York,

1992. First published in 1983; First issued as an Oxford University Press paperback, 1992.
- [31] Event Horizon Telescope Collaboration, Kazunori Akiyama, Antxon Alberdi, Walter Alef, Juan Carlos Algaba, Richard Anantua, Keiichi Asada, Rebecca Azulay, Anne-Kathrin Baczko, David Ball, et al. First M87 Event-Horizon Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L1, 2019. [doi:10.3847/2041-8213/ab0ec7](https://doi.org/10.3847/2041-8213/ab0ec7).
- [32] Stephen W. Hawking and George F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973. First paperback edition 1974.
- [33] Martin D. Kruskal. Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Physical Review*, 119(5):1743–1745, 1960. [doi:10.1103/PhysRev.119.1743](https://doi.org/10.1103/PhysRev.119.1743).
- [34] Hans Reissner. Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, 1916. [doi:10.1002/andp.19163550905](https://doi.org/10.1002/andp.19163550905).
- [35] Gunnar Nordström. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam*, 20:1238–1245, 1918.
- [36] R. Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252–276, 1969. [doi:10.1023/A:1016578408204](https://doi.org/10.1023/A:1016578408204).
- [37] Jerry B. Griffiths and Jiří Podolský. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. First published in print format 2009.
- [38] Matt Visser. The Kerr spacetime: A brief introduction, 2008. [arXiv:0706.0622](https://arxiv.org/abs/0706.0622).
- [39] Richard Conn Henry. Kretschmann Scalar for a Kerr-Newman Black Hole. *The Astrophysical Journal*, 535(1):350–353, May 2000. [doi:10.1086/308819](https://doi.org/10.1086/308819).

- [40] Eric Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, hardback edition, 2004.
- [41] Brandon Carter. Complete Analytic Extension of the Symmetry Axis of Kerr's Solution of Einstein's Equations. *Phys. Rev.*, 141:1242–1247, Jan 1966. doi:[10.1103/PhysRev.141.1242](https://doi.org/10.1103/PhysRev.141.1242).
- [42] Brandon Carter. Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Phys. Rev.*, 174:1559–1571, Oct 1968. doi:[10.1103/PhysRev.174.1559](https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559).
- [43] Eric Poisson and Werner Israel. Internal structure of black holes. *Phys. Rev. D*, 41:1796–1809, Mar 1990. doi:[10.1103/PhysRevD.41.1796](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.41.1796).
- [44] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a Rotating, Charged Mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):918–919, 06 1965. doi:[10.1063/1.1704351](https://doi.org/10.1063/1.1704351).
- [45] Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, and Paolo Pani. *General Relativity and its Applications: Black Holes, Compact Stars and Gravitational Waves*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1 edition, 2021.
- [46] Subrahmanyan Chandrasekhar. On the equations governing the perturbations of the Schwarzschild black hole. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 343(1634):289–298, 05 1975. doi:[10.1098/rspa.1975.0066](https://doi.org/10.1098/rspa.1975.0066).
- [47] Lam Hui, Austin Joyce, Riccardo Penco, Luca Santoni, and Adam R. Solomon. Static response and Love numbers of Schwarzschild black holes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(04):052, April 2021. doi:[10.1088/1475-7516/2021/04/052](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2021/04/052).
- [48] Kostas D. Kokkotas and Bernd G. Schmidt. Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes. *Living Reviews in Relativity*, 2(1), September 1999. doi:[10.12942/lrr-1999-2](https://doi.org/10.12942/lrr-1999-2).

-
- [49] Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Andrei O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Classical and Quantum Gravity*, 26(16):163001, 2009. doi:[10.1088/0264-9381/26/16/163001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/16/163001).
- [50] Bernard F. Schutz and Clifford M. Will. Black hole normal modes: A semianalytic approach. *The Astrophysical Journal Letters*, 291:L33–L36, 1985. doi:[10.1086/184453](https://doi.org/10.1086/184453).
- [51] R. A. Konoplya. Quasinormal behavior of the D -dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach. *Physical Review D*, 68(2):024018, jul 2003. doi:[10.1103/PhysRevD.68.024018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.68.024018).
- [52] E. W. Leaver. An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 402(1823):285–298, 12 1985. doi:[10.1098/rspa.1985.0119](https://doi.org/10.1098/rspa.1985.0119).
- [53] Sai Iyer and Clifford M. Will. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. *Phys. Rev. D*, 35(12):3621–3631, June 1987. doi:[10.1103/PhysRevD.35.3621](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.35.3621).
- [54] Sai Iyer. Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, 35(12):3632–3636, June 1987. doi:[10.1103/PhysRevD.35.3632](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.35.3632).

Υπεύθυνη Δήλωση Συγγραφέα:

Δηλώνω ρητά ότι, σύμφωνα με το άρθρο 8 του Ν.1599/1986, η παρούσα εργασία αποτελεί αποκλειστικά προϊόν προσωπικής μου εργασίας, δεν προσβάλλει κάθε μορφής δικαιώματα διανοητικής ιδιοκτησίας, προσωπικότητας και προσωπικών δεδομένων τρίτων, δεν περιέχει έργα/εισφορές τρίτων για τα οποία απαιτείται άδεια των δημιουργών/δικαιούχων και δεν είναι προϊόν μερικής ή ολικής αντιγραφής, οι πηγές δε που χρησιμοποιήθηκαν περιορίζονται στις βιβλιογραφικές αναφορές και μόνον και πληρούν τους κανόνες της επιστημονικής παράθεσης.